

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

MODELO DEL COMPORTAMIENTO DE UNA BURBUJA EN UN
FLUIDO VISCOELÁSTICO CON SURFACTANTE

TESIS
QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

INGENIERO MECÁNICO

PRESENTAN

DAVID MOISÉS ALFANDARI MARTÍNEZ

CÉSAR YEPEZ TERREROS

Asesor:

Dr. Jorge Naude de la Llave

México, D.F.

2012

AGRADECIMIENTOS

A nuestros padres Margarita, María, Miguel y José, quienes con su amor y dedicación nos han permitido alcanzar esta meta.

A los doctores Jorge Naude y Federico Méndez, directores de este trabajo, por su paciencia, dedicación y enseñanza durante nuestra formación profesional.

A los doctores Francisco Solorio, Marco Reyes y al maestro Arturo Velasco por sus consejos, atenciones y apoyo durante la realización de esta investigación.

Al proyecto PAPIIT clave IN115712 por el apoyo brindado.

A Jacobo, a nuestros familiares y amigos, por su invaluable cariño y confianza.

A todos ellos nuestro más sincero agradecimiento.

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE FIGURAS Y TABLAS	III
NOMENCLATURA	IX
LETRAS ROMANAS	IX
LETRAS GRIEGAS	XI
RESUMEN	XII
ABSTRACT	XIII
CAPÍTULO 1	1
INTRODUCCIÓN	1
OBJETIVOS	3
ANTECEDENTES	4
CAPÍTULO 2	7
MODELO MATEMÁTICO	7
2.1 ECUACIÓN DEL SURFACTANTE	7
2.2 MODELO MODIFICADO DE RAYLEIGH-PLESSET CON TÉRMINO DEBIDO AL SURFACTANTE	12
2.3 DERIVACIÓN DE SP	14
2.4 ADIMENSIONALIZACIÓN	18
2.5 RESUMEN	23
CAPÍTULO 3	24
RESULTADOS	24
3.1 VALIDACIÓN DEL MODELO	24
3.2 VARIACIÓN DE PARÁMETROS	27
3.3 EFECTO DEL SURFACTANTE	31
CAPÍTULO 4	43
CONCLUSIONES Y COMENTARIOS	43
ANEXO 1	45
PRINCIPIOS FÍSICOS	45
A1.1 FLUIDO	45
A1.2 REOLOGÍA	49
A1.3 CAVITACIÓN	53

A1.4 SURFACTANTE	57
A1.5 TEORÍA DEL CAOS	58
ANEXO 2	61
PRINCIPIOS MATEMÁTICOS	61
A2.1 DINÁMICA DE BURBUJA ESFÉRICA	61
A2.2 VISCOELASTICIDAD LINEAL	66
A2.3 ECUACIONES CONSTITUTIVAS SIMPLES DEL TIPO OLDROYD/MAXWELL	75
APÉNDICE A	79
APÉNDICE B	80
B.1 ALGORITMO NUMÉRICO	80
BIBLIOGRAFÍA	82

ÍNDICE DE FIGURAS Y TABLAS

3.1	Radio adimensional de la burbuja como función del tiempo adimensional t^* con $De = 5.0$ y $\varepsilon = 0.0478$.	25
3.2	<i>Radio vs. Tiempo</i> para un modelo UCM con $De = 1$ (valores bajos) y $De = 2$, para un número largo de ciclos acústicos.	25
3.3	Sección de Poincaré para las oscilaciones radiales del caso cuasi isotérmico con $De = 5.0$ y $\varepsilon = 0.0478$.	26
3.4	Estado inicial de la sección de Poincaré para las oscilaciones radiales del caso cuasi isotérmico con $De = 5.0$.	26
3.5	Casos adiabático y cuasi isotérmico para varios De .	27
3.6	Casos adiabático y cuasi isotérmico para $De = 4$ y $De = 5$.	27
3.7	Sección de Poincaré para las oscilaciones radiales con $De = 4$.	28
3.8	Radio adimensional de la burbuja a como función del tiempo adimensional t^* para $De = 4$.	28
3.9	Sección de Poincaré para las oscilaciones radiales con $De = 5$.	28
3.10	Radio adimensional de la burbuja a como función del tiempo adimensional t^* para $De = 5$.	28
3.11	Sección de Poincaré para las oscilaciones radiales con $De = 6$.	29
3.12	Radio adimensional de la burbuja a como función del tiempo adimensional t^* para $De = 6$.	29
3.13	Radio adimensional de la burbuja a como función del tiempo adimensional t^* para $De = 0.5$.	29
3.14	Radio adimensional de la burbuja a como función del tiempo adimensional t^* para $De = 2$.	29

3.15	Radio adimensional de la burbuja a como función del tiempo adimensional t^* para $De = 4$	30
3.16	Radio adimensional de la burbuja a como función del tiempo adimensional t^* para $De = 5$	30
3.17	Radio adimensional de la burbuja a como función del tiempo adimensional t^* para distintos valores de β_A	30
3.18	Radio adimensional de la burbuja a como función del tiempo adimensional t^* para $\beta_A = 11.257$	30
3.19	Radio adimensional de la burbuja a como función del tiempo adimensional t^* para distintos valores de β_A	31
3.20	Radio adimensional de la burbuja a como función del tiempo adimensional t^* para $\beta_A = 11.257$	31
3.21	Sección de Poincaré para las oscilaciones radiales con $De = 0.5$ y $\beta_A = 0.563$	32
3.22	Radio adimensional de la burbuja a como función del tiempo adimensional t^* para $De = 0.5$ y $\beta_A = 0.563$	32
3.23	Sección de Poincaré para las oscilaciones radiales con $De = 0.5$ y $\beta_A = 11.257$	32
3.24	Radio adimensional de la burbuja a como función del tiempo adimensional t^* para $De = 0.5$ y $\beta_A = 11.257$	32
3.25	Sección de Poincaré para las oscilaciones radiales con $De = 7$ y $\beta_A = 0.563$	33
3.26	Radio adimensional de la burbuja a como función del tiempo adimensional t^* para $De = 7$ y $\beta_A = 0.563$	33
3.27	Sección de Poincaré para las oscilaciones radiales con $De = 7$ y $\beta_A = 11.257$	33
3.28	Radio adimensional de la burbuja a como función del tiempo adimensional t^* para $De = 7$ y $\beta_A = 11.257$	33
3.29	Sección de Poincaré para las oscilaciones radiales con $De = 1$ y $\beta_A = 0.563$	34

3.30	Radio adimensional de la burbuja a como función del tiempo adimensional t^* para $De = 1$ y $\beta_A = 0.563$..	34
3.31	Sección de Poincaré para las oscilaciones radiales con $De = 1$ y $\beta_A = 11.257$..	34
3.32	Radio adimensional de la burbuja a como función del tiempo adimensional t^* para $De = 1$ y $\beta_A = 11.257$..	34
3.33	Sección de Poincaré para las oscilaciones radiales con $De = 3$ y $\beta_A = 2.8145$..	35
3.34	Radio adimensional de la burbuja a como función del tiempo adimensional t^* para $De = 3$ y $\beta_A = 2.8145$..	35
3.35	Sección de Poincaré para las oscilaciones radiales con $De = 7$ y $\beta_A = 0.563$..	35
3.36	Radio adimensional de la burbuja a como función del tiempo adimensional t^* para $De = 7$ y $\beta_A = 0.563$..	35
3.37	Sección de Poincaré para las oscilaciones radiales con $De = 7$ y $\beta_A = 11.257$..	36
3.38	Radio adimensional de la burbuja a como función del tiempo adimensional t^* para $De = 7$ y $\beta_A = 11.257$..	36
3.39	Sección de Poincaré para las oscilaciones radiales con $De = 1$ y $\beta_A = 0.563$..	36
3.40	Radio adimensional de la burbuja a como función del tiempo adimensional t^* para $De = 1$ y $\beta_A = 0.563$..	36
3.41	Sección de Poincaré para las oscilaciones radiales con $De = 1$ y $\beta_A = 11.257$..	37
3.42	Radio adimensional de la burbuja a como función del tiempo adimensional t^* para $De = 1$ y $\beta_A = 11.257$..	37
3.43	Sección de Poincaré para las oscilaciones radiales con $De = 3$ y $\beta_A = 2.8145$..	37
3.44	Radio adimensional de la burbuja a como función del tiempo adimensional t^* para $De = 3$ y $\beta_A = 2.8145$..	37

3.45	Sección de Poincaré para las oscilaciones radiales con $De = 7$ y $\beta_A = 0.563$.	38
3.46	Radio adimensional de la burbuja a como función del tiempo adimensional t^* para $De = 7$ y $\beta_A = 0.563$.	38
3.47	Sección de Poincaré para las oscilaciones radiales con $De = 0.5$ y $\beta_A = 0.563$.	38
3.48	Radio adimensional de la burbuja a como función del tiempo adimensional t^* para $De = 0.5$ y $\beta_A = 0.563$.	38
3.49	Sección de Poincaré para las oscilaciones radiales con $De = 0.5$ y $\beta_A = 11.257$.	39
3.50	Radio adimensional de la burbuja a como función del tiempo adimensional t^* para $De = 0.5$ y $\beta_A = 11.257$.	39
3.51	Sección de Poincaré para las oscilaciones radiales con $De = 7$ y $\beta_A = 0.563$.	39
3.52	Radio adimensional de la burbuja a como función del tiempo adimensional t^* para $De = 7$ y $\beta_A = 0.563$.	39
3.53	Sección de Poincaré para las oscilaciones radiales con $De = 7$ y $\beta_A = 11.257$.	40
3.54	Radio adimensional de la burbuja a como función del tiempo adimensional t^* para $De = 7$ y $\beta_A = 11.257$.	40
3.55	Sección de Poincaré para las oscilaciones radiales con $De = 5$ y $We = 0.405$.	41
3.56	Sección de Poincaré para las oscilaciones radiales con $De = 5$ y $We = 5.07$.	41
3.57	Radio adimensional de la burbuja a como función del tiempo adimensional t^* para $De = 5$ y $We = 0.405$.	41
3.58	Radio adimensional de la burbuja a como función del tiempo adimensional t^* para $De = 5$ y $We = 5.07$.	41
3.59	Sección de Poincaré para las oscilaciones radiales con $De = 5$ y $We = 0.405$.	42

3.60	Sección de Poincaré para las oscilaciones radiales con $De = 5$ y $We = 3.38$.	42
3.61	Radio adimensional de la burbuja a como función del tiempo adimensional t^* para $De = 5$ y $We = 0.405$.	42
3.62	Radio adimensional de la burbuja a como función del tiempo adimensional t^* para $De = 5$ y $We = 3.38$.	42
A1.1.1	Ejemplo ilustrativo de la viscosidad al corte.	45
A1.1.2	Comportamiento reológico de los materiales.	46
A1.1.3	Comportamiento reológico de fluidos no newtonianos.	47
A1.1.4	Fluidos reopéctico y tixotrópico.	48
A1.2.1	Efectos elásticos y el Número de Deborah.	52
A1.3.1	Diagrama p - T de fases para una sustancia.	53
A1.5.1	El atractor de Lorentz tiene una proyección similar a las alas de una mariposa; para ser contenida necesita exactamente 2.06 dimensiones; por lo que es un fractal.	60
A2.1.1	Esquema de una burbuja esférica en un líquido infinito.	62
A2.1.2	Porción de la superficie de una burbuja esférica.	63
A2.2.1	Crecimiento de la deformación γ siguiendo la aplicación del esfuerzo σ en el tiempo $t=0$ para los modelos de Kelvin y Hooke.	69
A2.2.2	Representación diagramática del comportamiento reológico ideal: (a) El resorte Hookeano; (b) El amortiguador newtoniano.	70
A2.2.3	Los modelos viscoelásticos lineales más simples: (a) El modelo Kelvin; (b) El modelo Maxwell.	70
A2.2.4	Decaimiento del esfuerzo en $t=0$ para el modelo de Maxwell, donde $\sigma_0 = \eta\dot{\gamma}$.	71
A2.2.5	Equivalentes resorte-amortiguador del modelo Jeffreys. Los valores de las constantes de los elementos están dados en términos de tres parámetros del material del modelo.	73
A2.2.6	El modelo Burgers: (a) y (b) son representaciones equivalentes de este modelo lineal de cuatro parámetros.	73

A2.2.7	Modelos canónicos resorte-amortiguador: (a) Distribución de los procesos de relajación de Maxwell; (b) Distribución de los procesos de retardo de Kelvin.	74
A2.3.1	Casos especiales de la forma canónica general de ecuación constitutiva.	76
A2.3.2	Casos especiales de la forma canónica general de ecuación constitutiva.	77
A2.3.3	Formas reométricas derivadas de algunos modelos de las tablas anteriores.	77

NOMENCLATURA

LETRAS ROMANAS

a	Radio adimensional
De	Número de Deborah $\omega\lambda$
f	Frecuencia acústica
H	Curvatura media
K	Curvatura total
n	Vector unitario normal a la superficie libre
p_A	Amplitud de la presión acústica
p_0	Presión de equilibrio inicial
p_∞	Campo de presión acústica lejos de la burbuja
p_g	Presión del gas de la burbuja
p_v	Presión de vapor
R	Radio de la burbuja
R_0	Radio inicial de la burbuja
Re	Número de Reynolds $\frac{\rho\omega R_0^2}{\eta_P}$
$S_p(t)$	Integral sobre la diferencia de esfuerzos normales

t	Tiempo físico
t^*	Tiempo adimensional
w	Velocidad interfacial
We	Número de Weber $\frac{2\sigma}{\rho\omega^2 R_0^3}$

LETRAS GRIEGAS

β	Número adimensional $\frac{p_{g0}}{\rho\omega^2 R_0^2}$
β_A	Número adimensional $\frac{p_A}{\rho\omega^2 R_0^2}$
β_0	Número adimensional $\frac{p_0}{\rho\omega^2 R_0^2}$
γ^s	Densidad superficial
γ	Índice politrópico
δ	Número adimensional $\frac{4\kappa^s}{\rho\omega R_0^3}$
ε^s	Coefficiente de viscosidad superficial cortante
ε	Coefficiente de amortiguamiento térmico
η	Viscosidad efectiva para fluidos no newtonianos
η_P	Viscosidad del polímero
η_S	Viscosidad del solvente
κ^s	Coefficiente de viscosidad dilatacional superficial
λ	Tiempo de relajación de esfuerzo
π^G	Presión del gas
ρ_P	Densidad del líquido viscoelástico
σ	Coefficiente de tensión superficial
τ	Esfuerzo
ω	Frecuencia angular forzada del campo acústico externo

RESUMEN

Modelo del comportamiento de una burbuja en un fluido viscoelástico con surfactante.

El fenómeno que se estudia es la cavitación en fluidos viscoelásticos considerando la presencia de un surfactante, con la finalidad de entender cómo este elemento influye en el crecimiento o colapso de una burbuja esférica.

El objetivo es analizar numéricamente la dinámica del comportamiento no lineal de una burbuja en un líquido viscoelástico. La elección de la ecuación constitutiva para modelar el comportamiento de la interfaz es esencial debido a la complejidad y variedad de las deformaciones involucradas. En el caso particular de este trabajo de tesis, las oscilaciones radiales son regidas por la ecuación de Rayleigh-Plesset modificada con el modelo de Maxwell simple debido al comportamiento viscoelástico del líquido, mientras que para la condición de frontera dinámica interfacial, ocasionada por la presencia del surfactante se utiliza la formulación general presentada por Scriven (1960).

La función principal del modelo, debido a este análisis, es predecir cómo la interfaz protege las sustancias encapsuladas y controla los intercambios con el medio externo mediante la variación de los parámetros reológicos.

El modelo de Maxwell simple resulta adecuado como una primera aproximación del comportamiento de la burbuja, siendo más práctico que otros modelos más complejos.

El comportamiento reológico del fluido es determinado directamente por parámetros adimensionales como el número de Deborah, De . Es necesario incluir la viscosidad dilatacional superficial (κ^S) y la tensión superficial (σ) para añadir el efecto del surfactante. Su presencia proporciona una respuesta periódica aun para κ^S pequeños; mientras que con σ ocurre una caída abrupta en el radio de la burbuja.

ABSTRACT

Behaviour model of a bubble in a viscoelastic fluid with surfactant.

The phenomenon studied is cavitation in viscoelastic fluids with the presence of a surfactant, with the objective to understand how this element incursions in the growth or collapse of a spherical bubble.

The objective is to numerically analyze the dynamics of the nonlinear behaviour of a bubble in a viscoelastic fluid. The choice of the constitutive equation to model the behaviour of the interface is essential for the reason of the complexity and variety in the involved deformations. In the particular case of this thesis work, the radial oscillations are ruled by the Rayleigh-Plesset equation modified with the simple Maxwell model because of the viscoelastic behaviour of the liquid, while the interfacial dynamic boundary condition, originated by the presence of the surfactant is formulated with Scriven's general formula (1960).

The main function of characterization, due to this analysis, is to predict how the interface can protect the encapsulated substances and control the interchanges with the external environment through the variation of the rheological parameters.

The simplest Maxwell model is suitable as a first approximation of the behavior of the bubble, being more practical than more complex models.

The rheological behavior of the fluid is directly determined by dimensionless parameters such as Deborah number, De . It is necessary to include surface dilatational viscosity (κ^S) and surface tension (σ) to add the effect of surfactant. Their presence provides a periodic response even for small κ^S whereas with σ occurs with an abrupt drop in the bubble radius.

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

La *cavitación* es el proceso mediante el cual se forman burbujas al interior de un líquido, las cuales experimentan variaciones en su tamaño incrementándose varias veces para después súbitamente colapsar. Este proceso se origina por el sometimiento a presiones suficientemente bajas asociadas a vibraciones o a una alta velocidad de flujo. La aparición de estas cavidades de tamaños y tiempos característicos del orden de micras ($[\mu\text{m}]$ y $[\mu\text{s}]$ respectivamente), convierte la cavitación en un tópico relevante de la mecánica de los medios continuos.

Su estudio ha adquirido importancia en la actualidad gracias a su practicidad en diversas áreas de investigación de la ciencia y la ingeniería, así como por su presencia en bombas y otros dispositivos mecánicos que involucran flujos de alta velocidad. Recientemente se ha enfocado la investigación en caracterizar dicho comportamiento en fluidos no newtonianos.

En particular, la dinámica no lineal de burbujas de vapor en fluidos viscoelásticos ha recibido creciente atención, ya que se encuentra involucrada en estudios de vulcanología, procesos de materiales, aplicaciones industriales como: limpieza, lubricación e impresión; y hasta en medicina mediante diagnóstico con ultrasonido (Brujan, 2011: v).

La justificación de este trabajo de tesis surge del interés de extender los análisis actuales añadiendo el efecto de un surfactante y determinar qué consecuencias tiene en el comportamiento del fluido viscoelástico. Para tal propósito, se modificó la ecuación de Rayleigh-Plesset con el modelo de Maxwell simple y se redujo a un sistema diferencial ordinario resuelto por métodos numéricos comunes. En este caso se emplearon los programas MATHEMATICA[®] (Wolfram Research Inc.) y MAPLE[®] (Maplesoft).

Con el fin de tener un modelo de compresión de gas más realista, se considera la influencia de los efectos de amortiguamiento térmico, lo cual deriva en los casos cuasi-isotérmico y adiabático que se presentan.

Además, en sistemas dinámicos continuos de tres o más dimensiones, como la mayor parte de los modelos teóricos sobre cavitación, es probable que se presente un atractor extraño, ligado al movimiento caótico, por lo que resulta importante considerar dicho comportamiento en el modelo desarrollado.

En esta tesis se hace un análisis particular de la influencia del surfactante siguiendo la metodología descrita por Naude y Méndez (2008) y Jiménez-Fernández y Crespo (2005), resolviendo numéricamente las ecuaciones con la modificación pertinente debido a la presencia de dicha sustancia.

A continuación se presentan los principios físicos y las ecuaciones que conforman el modelo matemático que rige este caso de estudio, con su posterior solución y análisis de los resultados.

OBJETIVOS

En este trabajo de tesis se han establecido los siguientes objetivos:

- Modelar el comportamiento de una burbuja en presencia de un fluido viscoelástico utilizando el modelo de Maxwell simple.
- Determinar los parámetros involucrados con el cambio del modelo, a fin de evaluarlos.
- Analizar el efecto que genera la adición de un agente superficial surfactante sobre el modelo propuesto.
- Observar la respuesta del modelo para determinados valores de viscosidad dilatacional superficial (κ^S), número de Deborah (De) y amplitud de la presión acústica de entrada (p_A).

ANTECEDENTES

Los pioneros que definieron el papel que desempeña la viscoelasticidad en el estudio de la dinámica de burbujas, al inicio de la segunda mitad del siglo XX, fueron Ellis y Hoyt (1968) con sus investigaciones sobre el efecto de aditivos para polímeros en el proceso de cavitación.

Por otra parte, Fogler y Goddard (1970) realizaron investigaciones sobre vacíos en líquidos aunadas a las de Tanasawa y Yang (1970), quienes demostraron que la elasticidad del fluido origina el comportamiento oscilatorio; así, es de esperarse que específicamente en los fluidos no newtonianos el colapso sea provocado por una serie sucesiva de rebotes amortiguados por la viscosidad. En la misma década, Zana y Leal (1975), encontraron diferencias considerables entre fluidos newtonianos y viscoelásticos con respecto a la velocidad de colapso y la presión interna de las burbujas, investigando la influencia de la difusión en el proceso.

Dos décadas más tarde, Levitskiy y Shulman (1995) abordaron en su libro varias revisiones de los trabajos que han sido realizados en este tema. Por su parte, Kim (1994) predijo teóricamente la similitud entre los procesos de colapso para fluidos no newtonianos con alta elasticidad y para los no viscosos. Paralelamente, Brujan (1999) trabajó considerando los efectos de la compresibilidad del líquido viscoelástico en la dinámica de una microcápsula esférica, aplicando el método de una única perturbación. Su conclusión se basó en el hecho de que solamente para un conjunto definido de valores del número de Reynolds, las propiedades reológicas del líquido tienen un efecto en la dinámica de la burbuja.

De manera análoga, los trabajos empíricos y experimentales como los de Chahine y Fruman (1979), han concluido que la dinámica de las burbujas individuales no se ve afectado por las propiedades reológicas del fluido que las contiene, exceptuando en las cercanías de las fronteras rígidas. Hara y Schowalter (1984) coincidieron con esto, variando la geometría esférica de las microcápsulas.

Con el fin de tener una perspectiva más completa al respecto, fue necesario considerar también los casos donde las oscilaciones forzadas controlan la cavitación inercial; por lo que no siempre el fenómeno puede ser descrito como el repentino crecimiento y colapso de burbujas gaseosas. Esto es muy importante, ya que por ejemplo, en algunas aplicaciones ultrasónicas médicas se requiere la estimación de los valores críticos de la presión para evitar daños en los tejidos vivos, conceptualmente estudiados como medios viscoelásticos.

Bajo esta premisa y con una aproximación lineal, en los trabajos de Levitskiy y Lystrov (1976), se ofrece una perspectiva más clara de la influencia física de los parámetros de fluidos reológicos en las frecuencias natural y forzada de una burbuja de gas oscilando en el límite de bajas amplitudes. Sus estudios se concentraron en el colapso inducido por la diferencia entre la presión interna del gas y externa de la fase continua.

Además, Shima (1986), junto con otros científicos, realizó un estudio teórico acerca de las oscilaciones no lineales de una burbuja de gas en un fluido viscoelástico con un modelo Oldroyd de tres constantes. Este trabajo permite observar los efectos de los tiempos de relajación y retraso en curvas de respuesta de frecuencia, incluyendo la relación entre la presión máxima en la pared de la burbuja y su radio inicial. Asociado a esto, proporcionó algunas gráficas considerando como ecuación constitutiva un modelo lineal de Jeffreys. Sus resultados hicieron claro que la elasticidad del fluido puede provocar la generación de segundas armónicas.

El trabajo de Allen y Roy (2000) permitió comprender mejor las oscilaciones no lineales de burbujas en fluidos viscoelásticos, ya que utilizaron el modelo lineal de Jeffreys y el de Maxwell Convectivo Superior. Sus resultados confirmaron el desarrollo de subarmónicas y concluyeron que la amplitud del radio máximo de la burbuja crece mucho más en estos fluidos que en los newtonianos.

Jiménez-Fernández y Crespo (2005) encontraron un comportamiento similar en las primeras etapas de colapso, entre burbujas con pequeño contenido de gas y cavidades vacías. De igual manera, determinaron que el proceso de colapso en una solución polimérica es muy cercano al correspondiente en un fluido newtoniano, si ambas viscosidades son similares, ya que los efectos elásticos y viscosos ocasionados por la contribución polimérica se cancelan conforme la elasticidad del fluido de la solución se incrementa.

También desarrollaron un análisis teórico para las oscilaciones acústicas no lineales de una burbuja inmersa en fluido viscoelástico mediante un modelo reológico de Oldroyd generalizado incluyendo los modelos de Oldroyd-B y Maxwell Convectivo Superior como casos particulares; con lo cual confirmaron que el radio de la burbuja se incrementa proporcionalmente con el número de Deborah característico, De . Demostraron que para valores superiores de De crítico (del orden de 7), la burbuja oscilante muestra un comportamiento caótico, aun para valores moderados de la amplitud de la presión externa.

Naude y Méndez (2008) aplicando el modelo Convectivo Superior de Maxwell como ecuación constitutiva del fluido, encontraron un comportamiento caótico a partir de $De \sim 4.4$ independientemente del amortiguamiento térmico, haciendo hincapié en la relevancia de este parámetro reológico en el proceso.

Por otra parte, el uso de agentes de contraste para diagnósticos ultrasónicos médicos, ha sido un área importante en el estudio de las oscilaciones no lineales de burbujas en líquidos viscoelásticos. En particular, Khismatulin y Nadim (2002)

desarrollaron el primer modelo teórico para predecir las oscilaciones no lineales de una microesfera encapsulada.

Su importancia práctica en aplicaciones médicas está basada en que éstas tienen un tamaño promedio menor que el de una célula de glóbulos rojos (10 [µm]) y así, son capaces de penetrar incluso los capilares pequeños, lo cual permite transportar un medicamento específico a un lugar indicado dentro del cuerpo para después, bajo la exposición de ondas ultrasónicas de alta amplitud reventarlas esparciendo su contenido en los tejidos.

Ya que las micropartículas pueden incorporarse sobre la superficie de un capilar, Brujan reportó un estudio experimental que investiga la dinámica de los vacíos de cavitación inducidos por ultrasonido situados en líquidos no newtonianos y cerca de fronteras rígidas.

Con respecto a los análisis enfocados a la interfaz, Sarkar (2005) desarrolló un modelo viscoelástico para encapsulados de microburbujas de contraste con revestimiento delgado a partir de investigaciones acústicas *in vitro* del agente de contraste Sonazoid[®], compuesto por microesferas con membrana surfactante flexible (GE Healthcare, Oslo, Noruega) aplicándole los modelos viscoso (newtoniano) y viscoelástico.

CAPÍTULO 2

MODELO MATEMÁTICO

2.1 ECUACIÓN DEL SURFACTANTE

2.1.1 ECUACIONES GOBERNANTES

Las ecuaciones gobernantes adimensionales para un fluido newtoniano incompresible que se encuentra en flujo estacionario e isotérmico son la ecuación de continuidad:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0 \quad (2.1.1)$$

Y la ecuación de Navier-Stokes:

$$\rho \frac{D\boldsymbol{V}}{Dt} = \rho \left[\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t} + (\boldsymbol{V} \cdot \nabla) \boldsymbol{V} \right] = -\nabla p + \mu \nabla^2 \boldsymbol{V} \quad (2.1.2)$$

Es importante mencionar en este apartado que las fuerzas de cuerpo no están incluidas en la ecuación anterior debido a que la atracción gravitatoria puede despreciarse al considerar una longitud característica pequeña.

2.1.2 CONDICIONES DE FRONTERA

Para completar la representación matemática del surfactante se requiere incluir dos condiciones de frontera apropiadas en la superficie libre. La primera es de origen cinemático y establece que no existe transporte de masa a través de la interfaz, lo cual se manifiesta así:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (2.1.3)$$

Y la segunda es la condición de frontera dinámica, esencial para relacionar las propiedades de la interfaz a la tracción en cualquier lado de la superficie libre.

2.1.2.1 CONDICION DE FRONTERA DINÁMICA INTERFACIAL

Scriven (1960) estableció una formulación general de la condición de frontera dinámica interfacial bajo la consideración de que los coeficientes de la viscosidad superficial son constantes y está expresada de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \gamma^s \frac{D\mathbf{w}}{Dt} - \mathbf{F} = & \nabla_s^* \sigma + (\kappa^s + \varepsilon^s) \nabla_s^* (\nabla_s^* \cdot \mathbf{w}) + \\ & \varepsilon^s \left[2K (\mathbf{w} - \mathbf{n}\mathbf{n} \cdot \mathbf{w}) + \mathbf{n} \times \nabla_s^* (\mathbf{n} \cdot \nabla_s^* \times \mathbf{w}) + 2(\mathbf{n} \times \nabla_s^* \mathbf{n} \times \mathbf{n}) \cdot \nabla_s^* (\mathbf{n} \cdot \mathbf{w}) \right] + \\ & \mathbf{n} \left[2H\sigma + 2H(\kappa^s + \varepsilon^s) \nabla_s^* \cdot \mathbf{w} - 2\varepsilon^s (\mathbf{n} \times \nabla_s^* \mathbf{n} \times \mathbf{n}) : \nabla_s^* \mathbf{w} \right] \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

De la expresión anterior, γ^s representa la densidad superficial y F involucra las fuerzas externas actuando sobre la interfaz mientras que \mathbf{w} es la velocidad interfacial. ∇_s^* es el operador gradiente, κ^s es el coeficiente de viscosidad dilatacional, ε^s es el coeficiente de viscosidad cortante (superficiales estos tres últimos), K y H son las curvaturas total y media respectivamente, σ es la tensión superficial y finalmente, \mathbf{n} es el vector unitario normal a la superficie libre.

Para el caso particular de este trabajo de tesis y como ha quedado asentado anteriormente, se modeló la burbuja como una esfera de radio R , por lo que en lo posterior se expresa la ecuación (2.1.4) en coordenadas esféricas, tal como denota la siguiente expresión:

$$r - R = 0 \quad (2.1.5)$$

Por otra parte, el vector normal unitario \mathbf{n} se define como:

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla F}{|\nabla F|} \quad (2.1.6)$$

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla(r-R)}{|\nabla(r-R)|} = \frac{\widehat{e}_r + 0\widehat{e}_\theta + 0\widehat{e}_\varphi}{1} = \widehat{e}_r + 0\widehat{e}_\theta + 0\widehat{e}_\varphi \quad (2.1.7)$$

Desarrollando por separado los términos de la ecuación de Scriven:

Operador gradiente superficial (∇_s^*):

$$\nabla_s^* = I_s \cdot \nabla \quad (2.1.8)$$

Donde:

$$I_s = I - \mathbf{nn} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.1.9)$$

De esta forma:

$$\nabla_s^* = \left(0, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \quad (2.1.10)$$

$$\nabla_s^* \cdot \mathbf{w} = 0 + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sin \theta w_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial w_\phi}{\partial \phi} = \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial w_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial \sin \theta w_\theta}{\partial \theta} \right) \quad (2.1.11)$$

$$\nabla_s^* (\nabla_s^* \cdot \mathbf{w}) = \left\{ 0, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial \sin \theta w_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial w_\phi}{\partial \phi} \right) \right], \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[\frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial w_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial \sin \theta w_\theta}{\partial \theta} \right) \right] \right\} \quad (2.1.12)$$

$$\mathbf{w} - \mathbf{nn} \cdot \mathbf{w} = (w_r, w_\theta, w_\phi) - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} (w_r, w_\theta, w_\phi) = (w_r, w_\theta, w_\phi) - (w_r, 0, 0) = (0, w_\theta, w_\phi) \quad (2.1.13)$$

$$\nabla_s^* \mathbf{n} = \left(0, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.1.14)$$

$$(\mathbf{n} \times \nabla_s^* \mathbf{n} \times \mathbf{n}) \cdot \nabla_s^* (\mathbf{n} \cdot \mathbf{w}) = 0 \quad (2.1.15)$$

$$\begin{aligned} \nabla_s^* \times \mathbf{w} &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} e_r & re_\theta & r \sin \theta e_\phi \\ 0 & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ w_r & rw_\theta & w_\phi r \sin \theta \end{vmatrix} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[e_r \left(\frac{\partial w_\theta r \sin \theta}{\partial \theta} - \frac{\partial r w_\theta}{\partial \phi} \right) - re_\theta \left(-\frac{\partial w_r}{\partial \phi} \right) + r \sin \theta e_\phi \left(-\frac{\partial w_r}{\partial \theta} \right) \right] \\ &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[e_r \left(\frac{\partial w_\theta r \sin \theta}{\partial \theta} - \frac{\partial r w_\theta}{\partial \phi} \right) + re_\theta \frac{\partial w_r}{\partial \phi} - r \sin \theta e_\phi \frac{\partial w_r}{\partial \theta} \right] \end{aligned} \quad (2.1.16)$$

Sustituyendo los términos anteriores en la ecuación de Scriven (2.1.4) y tomando en cuenta tres simplificaciones que se pueden efectuar bajo las circunstancias de este caso:

- La densidad superficial es lo suficientemente pequeña para omitir los términos inerciales.
- La tensión superficial es constante.
- La fase gaseosa es no viscosa y no inercial (Giavedoni, 1992: 2224).

Por lo que la ecuación de Scriven se reduce a (Aris, 1962: 243-244):

$$\begin{aligned} -\mathbf{F} &= (\kappa^s + \varepsilon^s) \left\{ 0, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial \sin \theta w_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial w_\phi}{\partial \phi} \right) \right], \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[\frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial w_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial \sin \theta w_\theta}{\partial \theta} \right) \right] \right\} \\ &+ \varepsilon^s \left(0, 2Kw_\theta + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[\frac{1}{R \sin \theta} \left(\frac{\partial w_\theta}{\partial \phi} - \frac{\partial \sin \theta w_\phi}{\partial \theta} \right) \right], 2Kw_\phi - \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{1}{R \sin \theta} \left(\frac{\partial w_\theta}{\partial \phi} - \frac{\partial \sin \theta w_\phi}{\partial \theta} \right) \right] \right) \\ &+ \mathbf{n} \left[2H\sigma + 2H(\kappa^s + \varepsilon^s) \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial w_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial \sin \theta w_\theta}{\partial \theta} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.1.17)$$

Se sabe que en un sistema de coordenadas esférico, $H = -\frac{1}{R}$ y $K = \frac{1}{R^2}$, mientras que las ecuaciones que resultan de la expresión anterior para una superficie de radio R constante son:

$$-F_r = -\frac{2\sigma}{R} - \frac{2\kappa^s}{R} \left\{ \frac{1}{R \sin \theta} \left(\frac{\partial \sin \theta w_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial w_\phi}{\partial \phi} \right) \right\} \quad (2.1.18)$$

$$-F_\theta = \frac{1}{R} \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} + (\kappa^s + \varepsilon^s) \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \frac{1}{R \sin \theta} \left(\frac{\partial \sin \theta w_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial w_\phi}{\partial \phi} \right) \right\} + \varepsilon^s \left[\frac{2w_\theta}{R^2} + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left\{ \frac{1}{R \sin \theta} \left[\frac{\partial w_\theta}{\partial \phi} - \frac{\partial \sin \theta w_\phi}{\partial \theta} \right] \right\} \right] \quad (2.1.19)$$

$$-F_\phi = \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial \sigma}{\partial \phi} + \frac{\kappa^s + \varepsilon^s}{R \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left\{ \frac{1}{R \sin \theta} \left(\frac{\partial \sin \theta w_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial w_\phi}{\partial \phi} \right) \right\} + \varepsilon^s \left[\frac{2w_\phi}{R^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \frac{1}{R \sin \theta} \left(\frac{\partial w_\theta}{\partial \phi} - \frac{\partial \sin \theta w_\phi}{\partial \theta} \right) \right\} \right] \quad (2.1.20)$$

La simetría esférica de la burbuja simplifica en gran medida la dinámica, ya que también permite descartar la viscosidad cortante superficial. Por otro lado, el término viscoso (dilatacional) se explica al apreciar que la burbuja se dilata con una velocidad:

$$A^{-1} \frac{dA}{dt} = \frac{2\dot{R}}{R} \quad (2.1.21)$$

$$\nabla_s^* \cdot \mathbf{w} = \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial w_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial \sin \theta w_\theta}{\partial \theta} \right) \quad (2.1.22)$$

$$A^{-1} \frac{dA}{dt} = \nabla_s^* \cdot \mathbf{w} \quad (2.1.23)$$

$$A^{-1} \frac{dA}{dt} = \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial w_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial \sin \theta w_\theta}{\partial \theta} \right) \quad (2.1.24)$$

Donde $A = 4\pi R^2$. Finalmente:

$$\frac{2\dot{R}}{R} = \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial w_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial \sin \theta w_\theta}{\partial \theta} \right) \quad (2.1.25)$$

Por consiguiente y asumiendo que la velocidad es únicamente radial, la ecuación de Scriven se reduce a:

$$F_\theta = F_\phi = 0 \quad (2.1.26)$$

$$\boxed{F_r = \frac{2\sigma}{R} + \frac{4\kappa^s \dot{R}}{R^2}} \quad (2.1.27)$$

El balance de fuerzas en la interfaz complementa el conjunto de condiciones de frontera de este problema. La versión de la condición de frontera dinámica que es empleada con más frecuencia se recupera al despreciar la viscosidad superficial (Giavedoni, 1992: 2224).

2.2 MODELO MODIFICADO DE RAYLEIGH-PLESSET CON TÉRMINO DEBIDO AL SURFACTANTE

Ecuación de Navier-Stokes en coordenadas esféricas para la coordenada r :

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} v_r + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\theta^2 + v_\varphi^2}{r} \right) = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sin \theta \sigma_{rr}) + \frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin \theta \sigma_{\theta r}) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (r \sigma_{\varphi r}) \right] - \frac{\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{\varphi\varphi}}{r} \quad (2.2.1)$$

Asumiendo que la velocidad es únicamente radial:

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} v_r + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sin \theta \sigma_{rr}) \right] - \frac{\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{\varphi\varphi}}{r} \quad (2.2.2)$$

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} v_r + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) = \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} \quad (2.2.3)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} \quad (2.2.4)$$

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} v_r + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) = \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{2(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})}{r} \quad (2.2.5)$$

Integrando la ecuación anterior desde $r = R$ hasta $r = \infty$ y considerando $v_r = \frac{R^2 \ddot{R}}{r^2}$:

$$\rho \left(R \ddot{R} + \frac{3}{2} \dot{R}^2 \right) = (\sigma_{rr})_{r=\infty} - (\sigma_{rr})_{r=R} + 2 \int_R^\infty \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} dr \quad (2.2.6)$$

Sustituyendo σ_{rr} de la relación $\sigma - \mathcal{E}$ establecida en la ecuación (A2.1.18), se tiene:

$$\rho \left(R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 \right) = -p_\infty + \left(2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r} \right)_{r=\infty} + p_R - \left(2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r} \right)_{r=R} + 2 \int_R^\infty \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} dr \quad (2.2.7)$$

$$\rho \left(R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 \right) = p_R - p_\infty - \left(2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r} \right)_{r=R} + 2 \int_R^\infty \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} dr \quad (2.2.8)$$

$$\rho \left(R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 \right) = p_R - p_\infty + \frac{4\mu\dot{R}}{R} + 2 \int_R^\infty \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} dr \quad (2.2.9)$$

La fuerza neta sobre la interfaz en la dirección radial por unidad de área es:

$$(\sigma_{rr})_{r=R} + p_B - F_r = 0 \quad (2.2.10)$$

Reemplazando F_r de la ecuación anterior por lo obtenido en la ecuación de Scriven expresado en (2.1.27) resulta:

$$(\sigma_{rr})_{r=R} + p_B - \frac{2\sigma}{R} - \frac{4\kappa^S \dot{R}}{R^2} = 0 \quad (2.2.11)$$

Sustituyendo σ_{rr} de la ecuación (A2.1.18):

$$-p_{r=R} + 2\mu \left(-\frac{2\dot{R}}{R} \right) - \frac{2\sigma}{R} - \frac{4\kappa^S \dot{R}}{R^2} + p_B = 0 \quad (2.2.12)$$

Asimismo, la fuerza por unidad de área es:

$$p_B - p_R - \frac{4\mu}{R} \frac{dR}{dt} - \frac{4\kappa^S \dot{R}}{R^2} - \frac{2\sigma}{R} = 0 \quad (2.2.13)$$

Despejando p_R :

$$p_R = p_B - \frac{4\mu}{R} \frac{dR}{dt} - \frac{4\kappa^S \dot{R}}{R^2} - \frac{2\sigma}{R} \quad (2.2.14)$$

Sustituyendo (2.2.14) en la ecuación (2.2.9):

$$\rho \left(R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 \right) = p_B - \frac{4\mu\dot{R}}{R} - \frac{4\kappa^S \dot{R}}{R^2} - \frac{2\sigma}{R} - p_\infty + \frac{4\mu\dot{R}}{R} + 2 \int_R^\infty \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} dr \quad (2.2.15)$$

Simplificando se obtiene:

$$\rho \left(R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 \right) = p_g - p_\infty - \frac{4\kappa^s \dot{R}}{R^2} - \frac{2\sigma}{R} + 2 \int_R^\infty \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} dr \quad (3.5.18)$$

2.3 DERIVACIÓN DE S_P

De acuerdo a Levitskiy y Shulman, las oscilaciones no lineales de una burbuja están determinadas por la siguiente ecuación integro-diferencial:

$$\rho_P \left[R \frac{d^2 R}{dt^2} + \frac{3}{2} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 \right] = p_g - p_\infty - \frac{2\sigma}{R} + 2 \int_R^\infty \frac{\tau_{rr} - \tau_{\theta\theta}}{r} \partial r \quad (2.3.1)$$

La integral sobre la diferencia de esfuerzos anterior, se define de la siguiente manera:

$$S = S_S + S_P = 2 \int_R^\infty \frac{\tau_{rr} - \tau_{\theta\theta}}{r} \partial r \quad (2.3.2)$$

Donde:

$$S_S = -\frac{4\eta_S(1-\beta)}{R} \frac{dR}{dt} \quad \text{y} \quad S_P = -\frac{2\beta\eta}{a\lambda R^{4a}(t)} \int_0^t \exp\left(\frac{k-t}{\lambda}\right) \frac{(v^{2a}-v^{2a})}{(v-v)} R^{2(1-a)}(k) \frac{dR(k)}{dt} dk \quad (2.3.3)$$

$$v = R^3(k), \quad v = R^3(t) \quad (2.3.4)$$

En las expresiones de (2.3.3), β representa la contribución del elemento de Maxwell en la viscosidad efectiva denotada por η y k es una variable muda. Adicionalmente para la solución, $\eta = \eta_S + \eta_P$, donde η_S y η_P son las viscosidades del solvente y del polímero respectivamente. Para el modelo de Maxwell utilizado en este trabajo, las relaciones de (2.3.3), se simplifican considerablemente, ya que para este caso se considera $a = \beta = 1$; por lo que después de manipulaciones matemáticas, dichas ecuaciones adquieren la forma siguiente (Naude, Méndez, 2008: 37):

$$S_S = 0 \quad (2.3.5)$$

$$S_P = -\frac{2\eta}{\lambda R^4(t)} \int_0^t \exp\left(\frac{k-t}{\lambda}\right) \frac{(v^2-v^2)}{(v-v)} \frac{dR(k)}{dt} dk \quad (2.3.6)$$

Desarrollando la diferencia de cuadrados:

$$S_P = -\frac{2\eta}{\lambda R^4(t)} \int_0^t \exp\left(\frac{k-t}{\lambda}\right) \frac{(v+\nu)(v-\nu)}{(v-\nu)} \frac{dR(k)}{dt} dk \quad (2.3.7)$$

Simplificando la ecuación (2.3.7):

$$S_P = -\frac{2\eta}{\lambda R^4(t)} \int_0^t \exp\left(\frac{k-t}{\lambda}\right) (v+\nu) \frac{dR(k)}{dt} dk \quad (2.3.8)$$

Sustituyendo las expresiones (2.3.4) en la ecuación (2.3.8):

$$S_P = -\frac{2\eta}{\lambda R^4(t)} \int_0^t \exp\left(\frac{k-t}{\lambda}\right) [R^3(k) + R^3(t)] \frac{dR(k)}{dt} dk \quad (2.3.9)$$

Este desarrollo corresponde al caso general del modelo de Oldroyd y permite percatarse que la contribución de S_S es nula. Por otro lado, de la simetría esférica de la burbuja y dado el modelo presente en este trabajo se tiene:

$$\tau_{rr} + \tau_{\theta\theta} + \tau_{\phi\phi} = 0 \quad (2.3.10)$$

$$\tau_{\theta\theta} + \tau_{\phi\phi} = -\tau_{rr} \quad (2.3.11)$$

$$\tau_{\theta\theta} = \tau_{\phi\phi} \quad (2.3.12)$$

Aplicando las consideraciones anteriores al modelo de Maxwell simple ($\boldsymbol{\tau} + \lambda \frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial t} = 2\eta \mathbf{E}$):

$$\frac{\partial \tau_{rr}}{\partial t} + \frac{1}{\lambda} \tau_{rr} = -\frac{4\eta}{\lambda} \frac{\dot{R}R^2}{r^3} \quad (2.3.13)$$

$$\frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial t} + \frac{1}{\lambda} \tau_{\theta\theta} = \frac{2\eta}{\lambda} \frac{\dot{R}R^2}{r^3} \quad (2.3.14)$$

$$\frac{\partial \tau_{\phi\phi}}{\partial t} + \frac{1}{\lambda} \tau_{\phi\phi} = \frac{2\eta}{\lambda} \frac{\dot{R}R^2}{r^3} \quad (2.3.15)$$

Donde:

$$e_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} = -2 \frac{\dot{R}R^2}{r^3} ; e_{\theta\theta} = e_{\phi\phi} = \frac{u_r}{r} = \frac{\dot{R}R^2}{r^3} \quad (2.3.16)$$

Sumando las ecuaciones (2.3.14) y (2.3.15) para las componentes de esfuerzo:

$$\frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial t} + \frac{\partial \tau_{\phi\phi}}{\partial t} + \frac{1}{\lambda} (\tau_{\theta\theta} + \tau_{\phi\phi}) = \frac{4\eta \dot{R} R^2}{\lambda r^3} \quad (2.3.17)$$

$$\frac{\partial(\tau_{\theta\theta} + \tau_{\phi\phi})}{\partial t} + \frac{1}{\lambda} (\tau_{\theta\theta} + \tau_{\phi\phi}) = \frac{4\eta \dot{R} R^2}{\lambda r^3} \quad (2.3.18)$$

Sustituyendo (2.3.11) en (2.3.18):

$$-\frac{\partial \tau_{rr}}{\partial t} - \frac{1}{\lambda} \tau_{rr} = \frac{4\eta \dot{R} R^2}{\lambda r^3} \quad (2.3.19)$$

Resolviendo la ecuación diferencial anterior, que es similar a la expresión (2.3.13), se obtiene el siguiente resultado:

$$\tau_{rr} = -4 \frac{\eta}{\lambda R^3(t)} \int_0^t \exp\left(\frac{k-t}{\lambda}\right) R^2(k) \frac{dR(k)}{dt} dk \quad (2.3.20)$$

Sustituyendo (2.3.11), (2.3.12) y (2.3.20) en (2.3.2):

$$S_P = 2 \int_R^\infty \frac{\tau_{rr} - \tau_{\theta\theta}}{r} \partial r = 3 \int_R^\infty \frac{\tau_{rr}}{r} \partial r \quad (2.3.21)$$

$$S_P = 3 \int_R^\infty \frac{-4 \frac{\eta}{\lambda} \int_0^t \frac{\exp\left(\frac{k-t}{\lambda}\right) R^2(k) \frac{dR(k)}{dt}}{r^3} \partial k}{r} \partial r \quad (2.3.22)$$

$$S_P = -4 \frac{\eta}{\lambda R^3(t)} \int_0^t \exp\left(\frac{k-t}{\lambda}\right) R^2(k) \frac{dR(k)}{dt} dk \quad (2.3.23)$$

$$\frac{dS_P}{dt} = -4 \frac{\eta}{\lambda R^3(t)} \frac{d}{dt} \left[\int_0^t \exp\left(\frac{k-t}{\lambda}\right) R^2(k) \frac{dR(k)}{dt} dk \right] + \int_0^t \exp\left(\frac{k-t}{\lambda}\right) R^2(k) \frac{dR(k)}{dt} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{-4\eta}{\lambda R^3(t)} \right) \right] \quad (2.3.24)$$

En la ecuación superior es necesario aplicar la regla de Leibnitz (ver APÉNDICE A) para evaluar las derivadas temporales del primer término que aparece del lado derecho. Este criterio establece que sea $m(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} F(x, x') dx'$, se tiene (Naude, Méndez, 2008: 38):

$$\frac{dm}{dx} = F(x, h(x)) \frac{dh}{dx} - F(x, g(x)) \frac{dg}{dx} + \int_{g(x)}^{h(x)} \frac{dF(x, x')}{dx} dx' \quad (2.3.25)$$

De esta forma, estos términos se escriben así:

$$F(x, x') = F(t, k) = \exp\left(\frac{k-t}{\lambda}\right) R^2(k) \frac{dR(k)}{dt} \quad (2.3.26)$$

$$g(x) = 0, \quad h(x) = t \quad (2.3.27)$$

$$F(x, h(x)) = F(t, k = t) = R^2(t) \frac{dR(t)}{dt} \quad (2.3.28)$$

$$F(x, g(x)) = F(t, k = 0) = \exp\left(\frac{-t}{\lambda}\right) R^2(0) dk = 0 \quad (2.3.29)$$

$$\frac{dF(x, x')}{dx} = \frac{dF(t, k)}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\exp\left(\frac{k-t}{\lambda}\right) R^2(k) \frac{dR(k)}{dt} \right) = -\frac{1}{\lambda} \exp\left(\frac{k-t}{\lambda}\right) R^2(k) \frac{dR(k)}{dt} \quad (2.3.30)$$

Por lo cual, se sustituye la derivada del primer término del lado derecho de la ecuación (2.3.24) por:

$$\frac{d}{dt} \left[\int_0^t \exp\left(\frac{k-t}{\lambda}\right) R^2(k) \frac{dR(k)}{dt} dk \right] = R^2(t) \frac{dR(t)}{dt} - \frac{1}{\lambda} \int_0^t \exp\left(\frac{k-t}{\lambda}\right) R^2(k) \frac{dR(k)}{dt} dk \quad (2.3.31)$$

Sustituyendo en $\frac{dS_P}{dt}$:

$$\frac{dS_P}{dt} = -4 \frac{\eta}{\lambda R^3(t)} \left[R^2(t) \frac{dR(t)}{dt} - \frac{1}{\lambda} \int_0^t \exp\left(-\frac{t}{\lambda}\right) R^2(k) \exp\left(\frac{k}{\lambda}\right) \frac{dR(k)}{dt} dk \right] + 4 \frac{\eta}{\lambda R^3(t)} \int_0^t \exp\left(\frac{k-t}{\lambda}\right) R^2(t) \frac{dR(k)}{dt} \left[\frac{3}{R(t)} \frac{dR(t)}{dt} \right] \quad (2.3.32)$$

$$\frac{dS_P}{dt} = -4 \frac{\eta}{\lambda R(t)} \frac{dR(t)}{dt} - \frac{S_P}{\lambda} - \frac{3}{R(t)} \frac{dR(t)}{dt} S_P \quad (2.3.33)$$

$$\boxed{\frac{dS_P}{dt} = -4 \frac{\eta}{\lambda R(t)} \frac{dR(t)}{dt} - \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{3}{R(t)} \frac{dR(t)}{dt} \right) S_P} \quad (2.3.34)$$

2.4 ADIMENSIONALIZACIÓN

La ecuación de Rayleigh-Plesset está formulada así:

$$\rho \left(R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 \right) = p_B - p_\infty + p_V - \frac{2\sigma}{R} - 4\eta_S(1 - \beta)\frac{\dot{R}}{R} + S_p \quad (2.4.1)$$

ρ representa la densidad del líquido viscoelástico, R el radio de la burbuja, p_B , p_∞ y p_V son la presión del gas de la burbuja, el campo de presión acústica ubicado lejos de la cápsula establecido por $p_\infty = p_0 + p_A \sin \omega t$ y la presión de vapor respectivamente, siendo esta última despreciable al tener un valor pequeño comparado con las otras presiones. De esta última ecuación, p_0 y p_A son la presión de equilibrio inicial y la amplitud de la presión acústica, respectivamente. Mientras que ω representa la frecuencia angular forzada del campo acústico externo y está conectada con la frecuencia acústica f a través de la relación $\omega = 2\pi f$, donde las unidades de ω y f son $\left[\frac{rad}{s}\right]$ y $[Hz]$, correspondientemente; finalmente σ es el coeficiente de tensión superficial.

El término S_p representa la integral sobre la diferencia de esfuerzos normales no newtonianos y es un componente fundamental porque modula el comportamiento viscoelástico.

$$S_p(t) = 2 \int_R^\infty \left(\frac{\tau_{rr}^P - \tau_{\theta\theta}^P}{r} \right) dr \quad (2.4.2)$$

Como se afirmó anteriormente, la viscosidad del solvente y la presión del gas son despreciables (Naude, Méndez, 2008: 31):

$$p_V = 0 \quad (2.4.3)$$

$$\eta_S = 0 \quad (2.4.4)$$

De esta manera, tenemos que:

$$\rho \left(R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 \right) = p_g - p_\infty - \frac{2\sigma}{R} + S_p \quad (2.4.5)$$

Considerando la inclusión de una sustancia surfactante sobre la interfaz, se llega a la ecuación modificada de Rayleigh-Plesset siguiente:

$$\rho \left(R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 \right) = p_g - p_\infty - \frac{2\sigma}{R} - \frac{4\kappa^S \dot{R}}{R^2} + S_p \quad (2.4.6)$$

Donde κ^s representa el coeficiente de viscosidad dilatacional superficial. El sistema de ecuaciones inicial se expresa en forma adimensional reduciendo el número de parámetros físicos involucrados, lo cual se adquiere introduciendo las siguientes variables:

$$a = \frac{R}{R_0} \quad , \quad t^* = \omega t \quad \text{y} \quad S_p = \frac{S_p}{\rho \omega^2 R_0^2} \quad (2.4.7)$$

$$\frac{dR}{dt} = \frac{dt^*}{dt} \frac{dR}{dt^*} = \frac{dt^*}{dt} \frac{dR}{da} \frac{da}{dt^*} = \omega R_0 \frac{da}{dt^*} \quad (2.4.8)$$

$$\frac{d^2R}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dR}{dt} \right) = \frac{d}{dt^*} \frac{dt^*}{dt} \frac{dR}{dt} = \frac{d}{dt^*} \frac{dt^*}{dt} \left(\omega R_0 \frac{da}{dt^*} \right) = \frac{d}{dt^*} \omega \left(\omega R_0 \frac{da}{dt^*} \right) = R_0 \omega^2 \frac{d^2a}{dt^{*2}} \quad (2.4.9)$$

Predecir el radio de la burbuja es muy complejo ya que estamos tratando con un fenómeno oscilatorio no lineal. Las siguientes relaciones definen los parámetros adimensionales que aparecerán en el sistema de ecuaciones (Naude, Méndez, 2008: 32):

$$\beta = \frac{p_{g0}}{\rho \omega^2 R_0^2} \quad \beta_0 = \frac{p_0}{\rho \omega^2 R_0^2} \quad \beta_A = \frac{p_A}{\rho \omega^2 R_0^2} \quad (2.4.10)$$

$$\delta = \frac{4\kappa^s}{\rho \omega R_0^3}$$

$$We = \frac{2\sigma}{\rho \omega^2 R_0^3}, \quad De = \omega \lambda \quad \text{y} \quad Re = \frac{\rho \omega R_0^2}{\eta_p} \quad (2.4.11)$$

Sustituyendo los parámetros adimensionales anteriores en el sistema de ecuaciones planteado inicialmente, se tiene:

1. Para la ecuación de Rayleigh-Plesset:

$$\rho \left(R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 \right) = p_g - p_\infty - \frac{2\sigma}{R} - \frac{4\kappa^s \dot{R}}{R^2} + S_p \quad (2.4.12)$$

Sustituyendo $p_g = p_{g0} \left(\frac{R_0}{R} \right)^{3\gamma}$ y $p_\infty = p_0 + p_A \sin \omega t$:

$$\rho \left(R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 \right) = p_{g0} \left(\frac{R_0}{R} \right)^{3\gamma} - p_0 - p_A \sin \omega t - \frac{2\sigma}{R} - \frac{4\kappa^s \dot{R}}{R^2} + S_p \quad (2.4.13)$$

Dividiendo entre ρ :

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 = \frac{p_{g0}}{\rho} \left(\frac{R_0}{R}\right)^{3\gamma} - \frac{p_0}{\rho} - \frac{p_A}{\rho} \sin \omega t - \frac{2\sigma}{R\rho} - \frac{4\kappa^s \dot{R}}{R^2 \rho} + \frac{S_p}{\rho} \quad (2.4.14)$$

Sustituyendo los parámetros adimensionales anteriores:

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 = \beta \omega^2 R_0^2 \left(\frac{R_0}{R}\right)^{3\gamma} - \beta_0 \omega^2 R_0^2 - \beta_A \omega^2 R_0^2 - \frac{2\sigma}{R\rho} - \frac{4\kappa^s \dot{R}}{R^2 \rho} + \frac{S_p}{\rho} \quad (2.4.15)$$

Dividiendo entre $\omega^2 R_0^2$:

$$\frac{R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2}{\omega^2 R_0^2} = \beta \left(\frac{R_0}{R}\right)^{3\gamma} - (\beta_0 + \beta_A \sin \omega t) - \frac{2\sigma}{R\rho \omega^2 R_0^2} - \frac{4\kappa^s \dot{R}}{R^2 \rho \omega^2 R_0^2} + \frac{S_p}{\rho \omega^2 R_0^2} \quad (2.4.16)$$

$$\frac{R \frac{d^2 R}{dt^2} + \frac{3}{2} \left(\frac{dR}{dt}\right)^2}{\omega^2 R_0^2} = \beta \left(\frac{R_0}{R}\right)^{3\gamma} - (\beta_0 + \beta_A \sin t^*) - \frac{2\sigma}{(aR_0)\rho \omega^2 R_0^2} - \frac{4\kappa^s \dot{R}}{(aR_0)^2 \rho \omega^2 R_0^2} + \frac{S_p}{\rho \omega^2 R_0^2} \quad (2.4.17)$$

$$\frac{aR_0 R_0 \omega^2 \frac{d^2 a}{dt^{*2}} + \frac{3}{2} \omega^2 R_0^2 \left(\frac{da}{dt^*}\right)^2}{\omega^2 R_0^2} = \beta \left(\frac{R_0}{R}\right)^{3\gamma} - (\beta_0 + \beta_A \sin t^*) - \frac{1}{a} \frac{2\sigma}{\rho \omega^2 R_0^3} - \frac{4\kappa^s \omega R_0 \left(\frac{da}{dt^*}\right)}{a^2 \rho \omega^2 R_0^4} + \frac{S_p}{\rho \omega^2 R_0^2} \quad (2.4.18)$$

$$\frac{aR_0^2 \omega^2 \frac{d^2 a}{dt^{*2}} + \frac{3}{2} \omega^2 R_0^2 \left(\frac{da}{dt^*}\right)^2}{\omega^2 R_0^2} = \beta \left(\frac{R_0}{R}\right)^{3\gamma} - (\beta_0 + \beta_A \sin t^*) - \frac{We}{a} - \frac{\delta}{a^2} \frac{da}{dt^*} + s_p \quad (2.4.19)$$

$$\frac{aR_0^2\omega^2}{\omega^2R_0^2}\frac{d^2a}{dt^{*2}} + \frac{3R_0^2\omega^2}{2\omega^2R_0^2}\left(\frac{da}{dt^*}\right)^2 + \frac{\delta}{a^2}\frac{da}{dt^*} = \beta\left(\frac{1}{a^{3\gamma}}\right) - (\beta_0 + \beta_A \sin t^*) - \frac{We}{a} + s_p \quad (2.4.20)$$

Además, es factible incluir una función $F(t^*)$ que considere los efectos del amortiguamiento térmico, escrita como:

$$F(t^*) = \left\{ \begin{array}{c} \left(\frac{(1-(\varepsilon/a^2)(da/dt^*))}{a^3} \right) \\ \frac{1}{a^{3\gamma}} \end{array} \right\} \quad (2.4.21)$$

$$\boxed{a\frac{d^2a}{dt^{*2}} + \frac{3}{2}\left(\frac{da}{dt^*}\right)^2 + \frac{\delta}{a^2}\frac{da}{dt^*} = \beta F(t^*) - (\beta_0 + \beta_A \sin t^*) - \frac{We}{a} + s_p} \quad (2.4.22)$$

2. Para S_P :

$$\frac{dS_P}{dt} = -4\frac{\eta}{\lambda R(t)}\frac{dR(t)}{dt} - \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{3}{R(t)}\frac{dR(t)}{dt}\right)S_P \quad (2.4.23)$$

$$\omega\frac{dS_P}{dt^*} = -4\frac{\frac{\rho\omega R_0^2}{Re}}{\frac{De}{\omega}aR_0}\omega R_0\frac{da}{dt^*} - \left(\frac{1}{\frac{De}{\omega}} + \frac{3}{aR_0}\omega R_0\frac{da}{dt^*}\right)S_P \quad (2.4.24)$$

$$\omega\frac{dS_P}{dt^*} = -4\frac{\rho\omega^2R_0^2}{aDeReR_0}\omega R_0\frac{da}{dt^*} - \left(\frac{\omega}{De} + \frac{3}{aR_0}\omega R_0\frac{da}{dt^*}\right)S_P \quad (2.4.25)$$

$$\frac{dS_P}{dt^*} = -4\frac{\rho\omega^2R_0^2}{aDeRe}\frac{da}{dt^*} - \left(\frac{1}{De} + \frac{3}{a}\frac{da}{dt^*}\right)S_P \quad (2.4.26)$$

$$\frac{dS_P}{dt^*} = -4\frac{1}{aDeRe}\frac{da}{dt^*} - \left(\frac{1}{De} + \frac{3}{a}\frac{da}{dt^*}\right)S_P \quad (2.4.27)$$

$$\boxed{\frac{ds_P}{dt^*} = -4\frac{1}{aDeRe}\frac{da}{dt^*} - \left(\frac{1}{De} + \frac{3}{a}\frac{da}{dt^*}\right)s_P} \quad (2.4.28)$$

Las ecuaciones anteriores se resuelven con las condiciones iniciales siguientes:

$$a(0) = 1 ; \left. \frac{da}{dt} \right|_{t=0} = 0 ; Sp(0) = 0 \quad (2.4.29)$$

Con el fin de lograr resolver simultáneamente (2.4.22) y (2.4.28) es necesario formular a partir de esas dos expresiones un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden mediante las siguientes sustituciones:

$$r_1 = a \quad (2.4.30)$$

$$\boxed{r_2 = \frac{dr_1}{dt^*}} \quad (2.4.31)$$

Así, de las ecuaciones (2.4.22) y (2.4.28) resulta:

$$\boxed{\frac{dr_2}{dt^*} = -\frac{3r_2^2}{2r_1} - \frac{\delta}{r_1^3}r_2 + \frac{\beta}{r_1^4}\left(1 - \frac{\varepsilon}{r_1^2}r_2\right) - \frac{(\beta_0 + \beta_A \sin t^*)}{r_1} - \frac{We}{r_1^2} + \frac{s_p}{r_1}} \quad (2.4.32)$$

$$\boxed{\frac{dS_p}{dt^*} = -4\frac{r_2}{aDeRe} - \left(\frac{1}{De} + 3\frac{r_2}{r_1}\right)S_p} \quad (2.4.33)$$

Con las nuevas condiciones iniciales:

$$r_1(0) = 1 ; r_2(0) = Sp(0) = 0 \quad (2.4.34)$$

Que corresponden al radio inicial de la burbuja, velocidad de la interfaz nula y ausencia de esfuerzos para este tiempo ($t = 0$), considerando que la microesfera se encuentra inicialmente en reposo.

2.5 RESUMEN

En este capítulo se plantearon las ecuaciones gobernantes del modelo matemático utilizado. Se establece la ecuación de continuidad (2.1.1) y la de Navier-Stokes (2.1.2) para un fluido newtoniano incompresible en flujo estacionario e isotérmico, además de la formulación general de Scriven (2.1.4) como condición de frontera dinámica interfacial, que aplicada al problema y a través del desarrollo presente se reduce a:

$$F_r = \frac{2\sigma}{R} + \frac{4\kappa^s \dot{R}}{R^2}$$

Se deduce la ecuación de Rayleigh-Plesset a partir de la ecuación de Navier-Stokes en coordenadas esféricas para r (2.2.1) considerando que la velocidad es únicamente radial (2.2.6). El término que representa la fuerza neta sobre la interfaz σ_{rr} se substituyó por lo obtenido en la ecuación de Scriven (2.2.11) y después de manipulaciones matemáticas se obtiene la expresión:

$$\rho \left(R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 \right) = p_g - p_\infty - \frac{4\kappa^s \dot{R}}{R^2} - \frac{2\sigma}{R} + 2 \int_R^\infty \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} dr$$

La integral sobre la diferencia de esfuerzos denominada como S (2.3.2) y las relaciones que la definen (2.3.3) se simplifican con el modelo de Maxwell utilizado en este documento (2.3.5) y (2.3.6). Considerando la simetría esférica de la burbuja y desarrollando algebraicamente se deriva la ecuación:

$$\frac{dS_P}{dt} = -4 \frac{\eta}{\lambda R(t)} \frac{dR(t)}{dt} - \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{3}{R(t)} \frac{dR(t)}{dt} \right) S_P$$

Las relaciones (2.4.10) y (2.4.11) definen los parámetros adimensionales en este sistema, y mediante las sustituciones (2.4.30) y (2.4.31) se obtiene un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden capaz de resolverse simultáneamente:

$$r_2 = \frac{dr_1}{dt^*}$$

$$\frac{dr_2}{dt^*} = -\frac{3}{2} \frac{r_2^2}{r_1} - \frac{\delta}{r_1^3} r_2 + \frac{\beta}{r_1^4} \left(1 - \frac{\varepsilon}{r_1^2} r_2 \right) - \frac{(\beta_0 + \beta_A \sin t^*)}{r_1} - \frac{We}{r_1^2} + \frac{s_p}{r_1}$$

$$\frac{dS_P}{dt^*} = -4 \frac{r_2}{aDeRe} - \left(\frac{1}{De} + 3 \frac{r_2}{r_1} \right) S_P$$

Con las condiciones iniciales expresadas en (2.4.34).

CAPÍTULO 3

RESULTADOS

La solución del sistema de ecuaciones diferenciales descrito previamente y la obtención de las gráficas siguientes se describe en el APÉNDICE B.

3.1 VALIDACIÓN DEL MODELO

Con el fin de comprobar la validez del modelo utilizado, se presenta a continuación una comparación entre los resultados obtenidos y aquéllos reportados por Naude y Méndez (2008) y por Jiménez-Fernández y Crespo (2005), con los valores de los parámetros establecidos en sus respectivas publicaciones:

$$\begin{aligned} \eta_p &= 30 [cP], & \rho &= 10^3 \left[\frac{kg}{m^3} \right], & f &= 3 [MHz], \\ R_0 &= 1[\mu m] (Re = 0.63), & p_A &= 0.4 [MPa], \\ \sigma &= 0.072 \left[\frac{N}{m} \right] \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

Mediante la sustitución de las expresiones (3.1.1) en (2.4.10) y (2.4.11) se obtienen los siguientes números adimensionales:

$$\begin{aligned} \beta &= 0.6895, & \beta_0 &= 0.2842, & \beta_A &= 1.1257, \\ \varepsilon &= 0.0478 & y & & We &= 0.405 \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

Las imágenes de la izquierda corresponden a las elaboradas para este trabajo y las de lado derecho a las referencias indicadas.

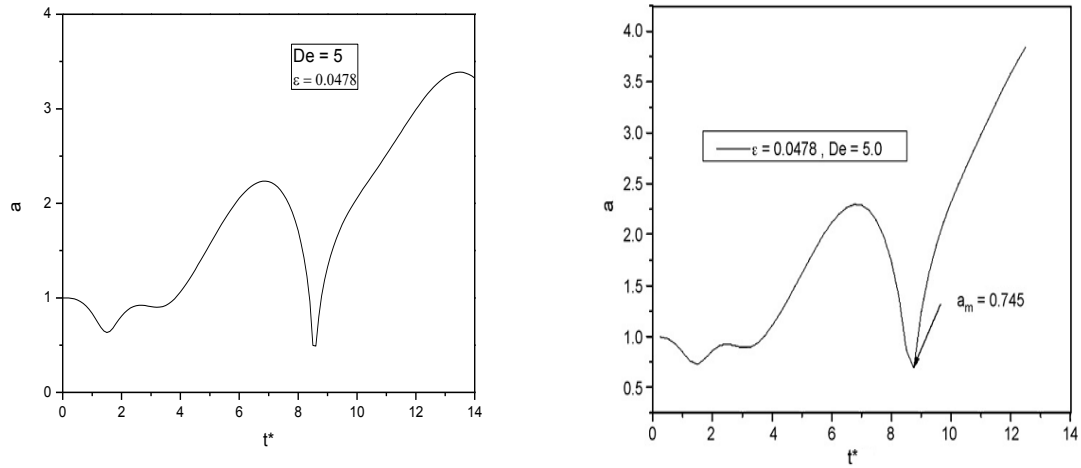


Figura 3.1 Radio adimensional de la burbuja como función del tiempo adimensional t^* con $De = 5.0$ y $\varepsilon = 0.0478$.¹

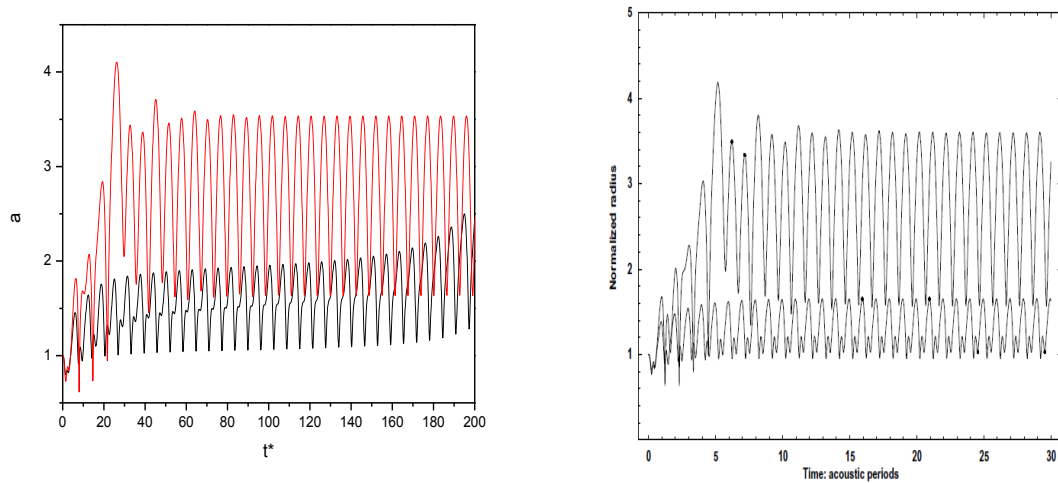


Figura 3.2 Radio vs. Tiempo para un modelo UCM con $De = 1$ (valores bajos) y $De = 2$, para un número largo de ciclos acústicos.²

¹ NAUDE, J.; MÉNDEZ, F. (2008). Periodic and chaotic acoustic oscillations of a bubble gas immersed in an Upper Convective Maxwell fluid. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 34.

² JIMENEZ-FERNANDEZ, J; CRESPO, A. (2005). Bubble oscillation and inertial cavitation in viscoelastic fluids. *Ultrasonics*, 646-647.

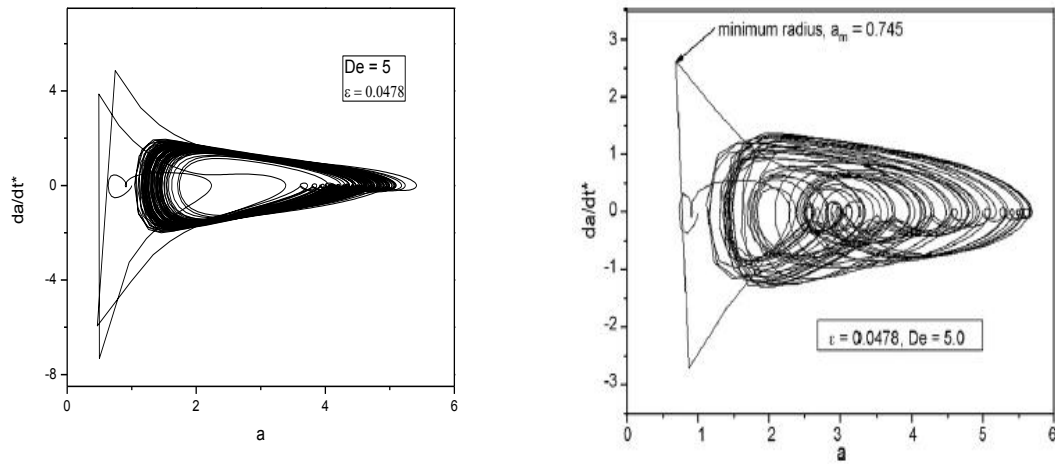


Figura 3.3 Sección de Poincaré para las oscilaciones radiales del caso cuasi isotérmico con $De = 5.0$ y $\varepsilon = 0.0478$.³

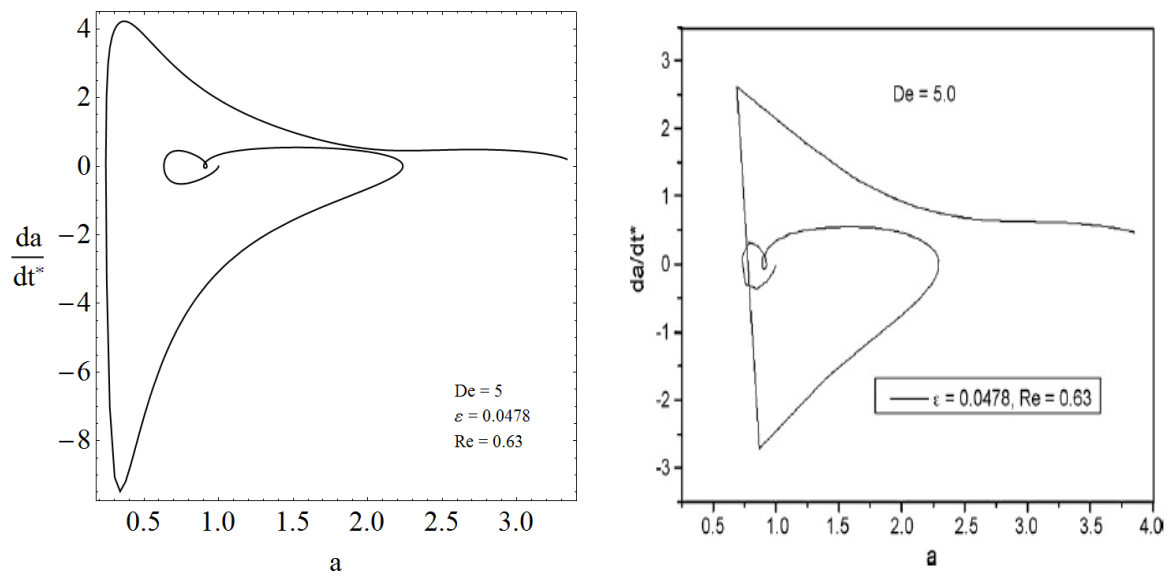


Figura 3.4 Estado inicial de la sección de Poincaré para las oscilaciones radiales del caso cuasi isotérmico con $De = 5.0$.⁴

³ NAUDE, J.; MÉNDEZ, F. (2008). Periodic and chaotic acoustic oscillations of a bubble gas immersed in an Upper Convective Maxwell fluid. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 34.

⁴ NAUDE, J.; MÉNDEZ, F. (2008). Periodic and chaotic acoustic oscillations of a bubble gas immersed in an Upper Convective Maxwell fluid. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 35.

3.2 VARIACIÓN DE PARÁMETROS

3.2.1 CASOS ADIABÁTICO Y CUASI ISOTÉRMICO

En estas gráficas se muestran los casos adiabático y cuasi isotérmico determinados por los valores del factor de amortiguamiento térmico $\varepsilon = 0$ y $\varepsilon = 0.0478$ respectivamente y descritos por la ecuación (2.4.12).

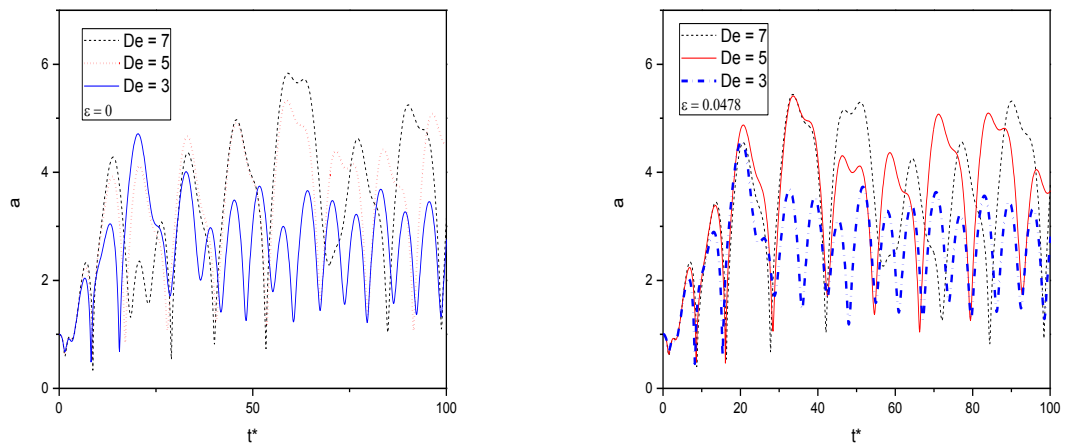


Figura 3.5 Casos adiabático y cuasi isotérmico para varios De .

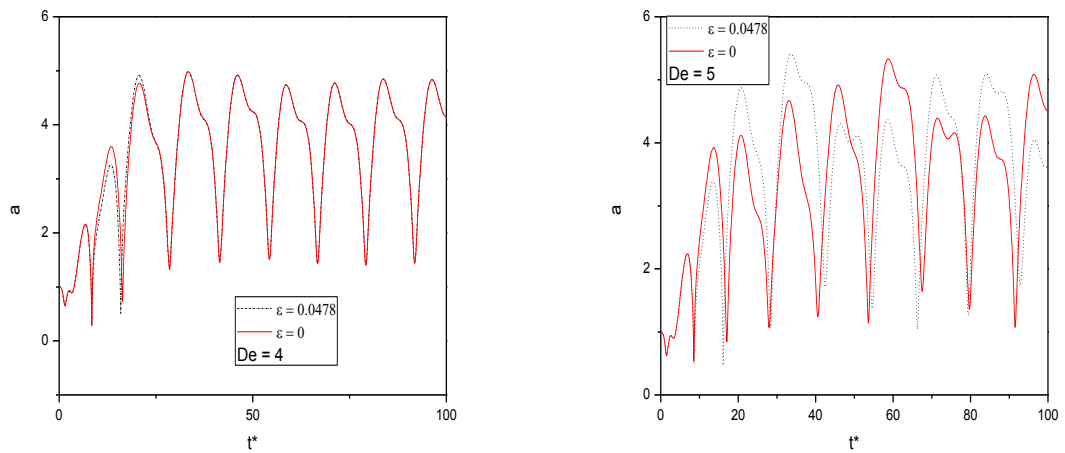


Figura 3.6 Casos adiabático y cuasi isotérmico para $De = 4$ y $De = 5$.

3.2.2 VARIACIÓN DE De

A continuación se presenta la respuesta del modelo manteniendo constante la magnitud de la presión acústica de entrada adimensional $\beta_A = 1.1257$ para distintos números de Deborah De ; de manera análoga al trabajo de Naude, Méndez (2008).

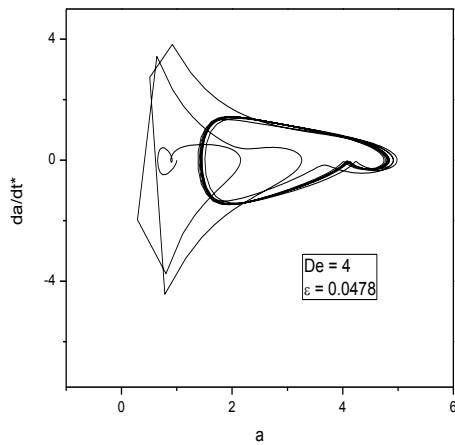


Figura 3.7 Sección de Poincaré para las oscilaciones radiales con $De = 4$.

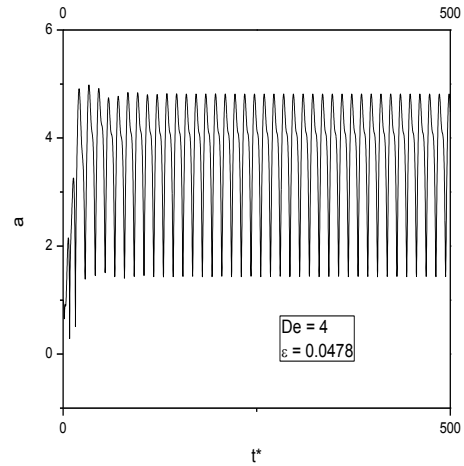


Figura 3.8 Radio adimensional de la burbuja a como función del tiempo adimensional t^* para $De = 4$.

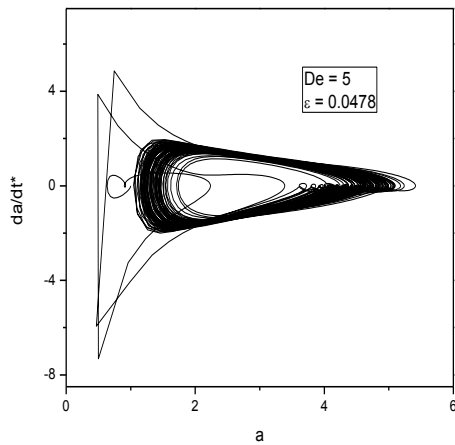


Figura 3.9 Sección de Poincaré para las oscilaciones radiales con $De = 5$.

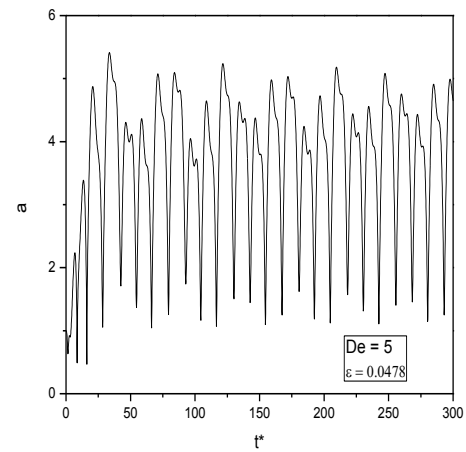


Figura 3.10 Radio adimensional de la burbuja a como función del tiempo adimensional t^* para $De = 5$.

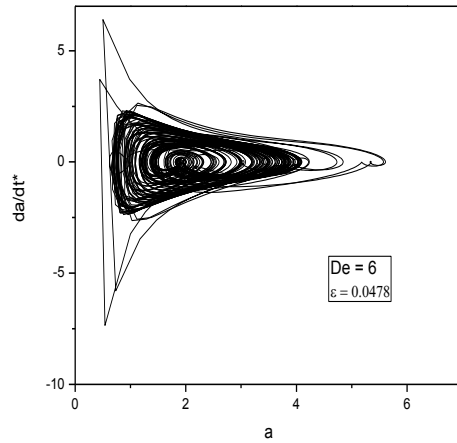


Figura 3.11 Sección de Poincaré para las oscilaciones radiales con $De = 6$.

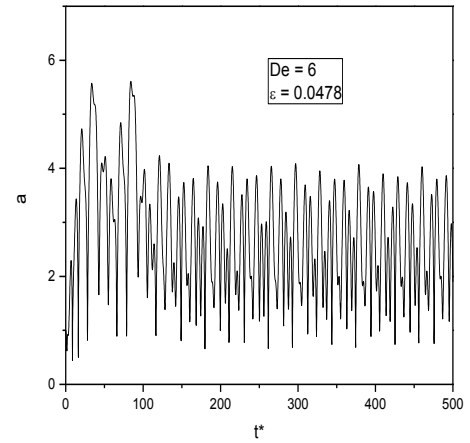


Figura 3.12 Radio adimensional de la burbuja a como función del tiempo adimensional t^* para $De = 6$.

A continuación se muestra el comportamiento de las oscilaciones para distintos De .

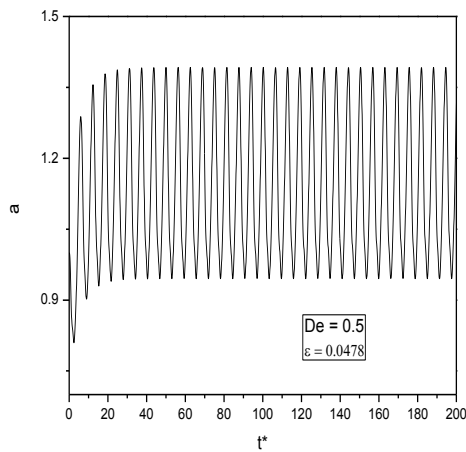


Figura 3.13 Radio adimensional de la burbuja a como función del tiempo adimensional t^* para $De = 0.5$.

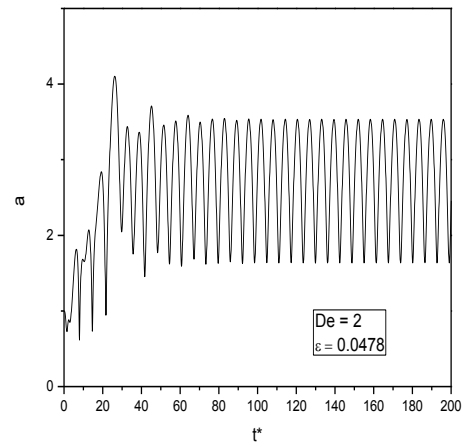


Figura 3.14 Radio adimensional de la burbuja a como función del tiempo adimensional t^* para $De = 2$.

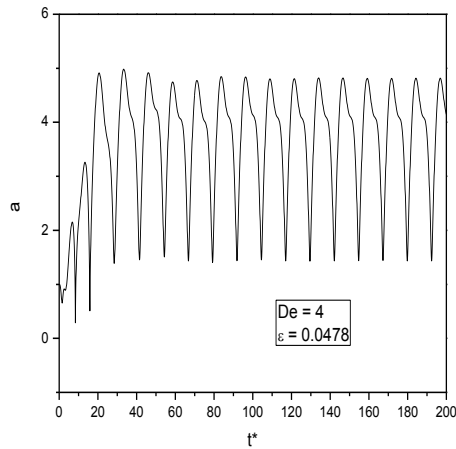


Figura 3.15 Radio adimensional de la burbuja a como función del tiempo adimensional t^* para $De = 4$.

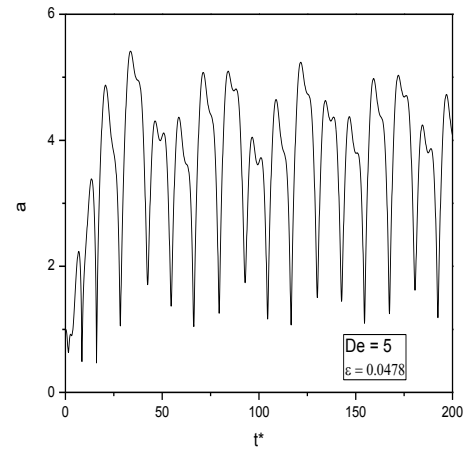


Figura 3.16 Radio adimensional de la burbuja a como función del tiempo adimensional t^* para $De = 5$.

3.2.3 VARIACION DE β_A

En las gráficas posteriores se observa el efecto β_A al mantener constante De .

De = 3

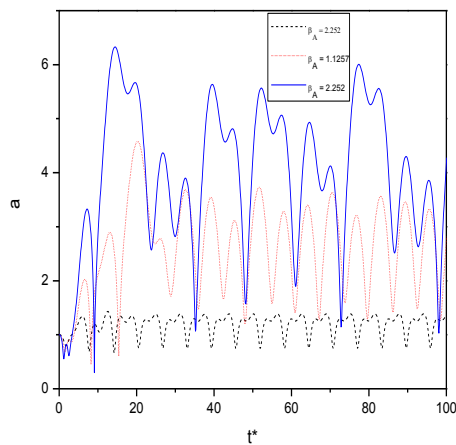


Figura 3.17 Radio adimensional de la burbuja a como función del tiempo adimensional t^* para distintos valores de β_A .

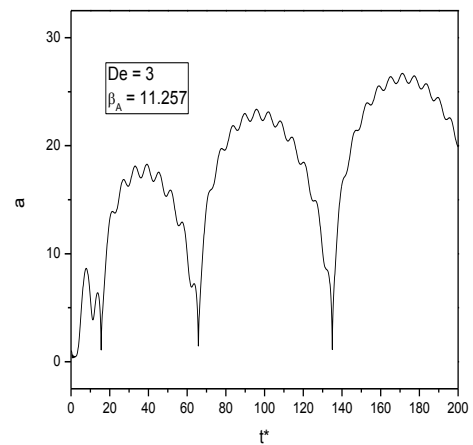


Figura 3.18 Radio adimensional de la burbuja a como función del tiempo adimensional t^* para $\beta_A = 11.257$.

De = 5

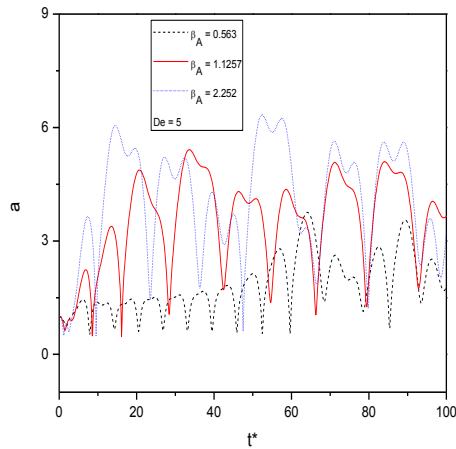


Figura 3.19 Radio adimensional de la burbuja a como función del tiempo adimensional t^* para distintos valores de β_A .

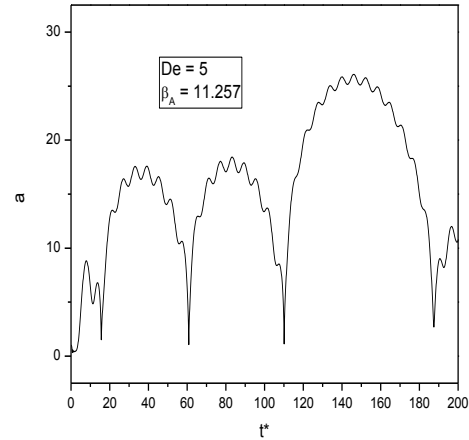


Figura 3.20 Radio adimensional de la burbuja a como función del tiempo adimensional t^* para $\beta_A = 11.257$.

3.3 EFECTO DEL SURFACTANTE

Church (1995) con su modelo teórico detallado para agentes de contraste, demostró la importancia de los parámetros al variarlos en un rango muy amplio, sin intentar relacionarlos experimentalmente con ningún agente de contraste específico (Sarkar, 2005: 539). Esta metodología es la aplicada en este apartado.

Como una primera aproximación, los efectos elásticos del agente tensoactivo fueron despreciados, y únicamente se tomó en cuenta el efecto de la viscosidad superficial dilatacional (κ^S).

Las siguientes gráficas corresponden al caso cuasi isotérmico, por lo que se mantiene en lo posterior un valor constante de $\varepsilon = 0.0478$.

3.3.1 COMPARACIÓN DE PRESIÓN ACÚSTICA DE ENTRADA

En las gráficas siguientes se comparan las respuestas con diversos δ y valores dimensionales distintos de presión acústica de entrada β_A y números de De simultáneamente.

$\delta = 0.212$

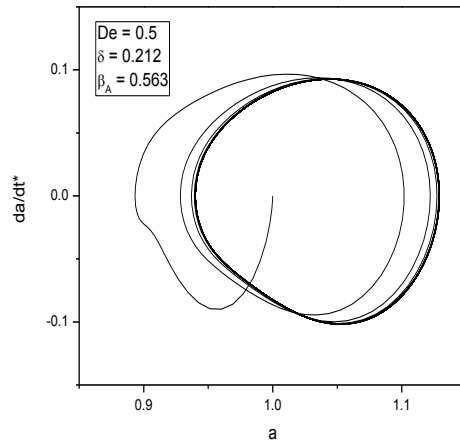


Figura 3.21 Sección de Poincaré para las oscilaciones radiales con $De = 0.5$ y $\beta_A = 0.563$.

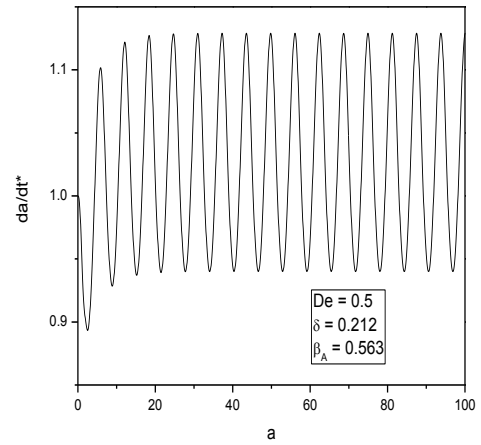


Figura 3.22 Radio adimensional de la burbuja a como función del tiempo adimensional t^* para $De = 0.5$ y $\beta_A = 0.563$.

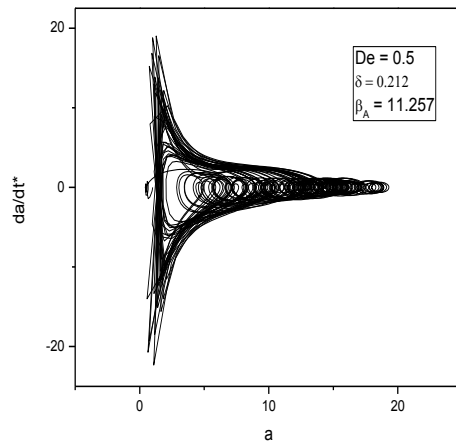


Figura 3.23 Sección de Poincaré para las oscilaciones radiales con $De = 0.5$ y $\beta_A = 11.257$.

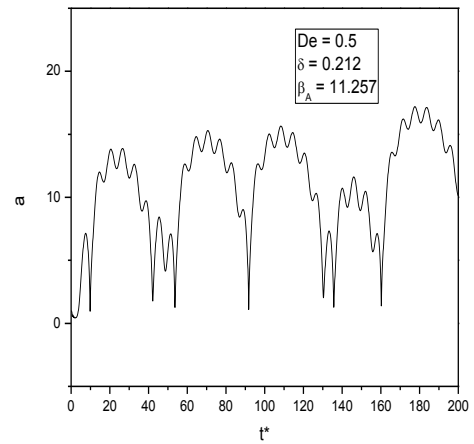


Figura 3.24 Radio adimensional de la burbuja a como función del tiempo adimensional t^* para $De = 0.5$ y $\beta_A = 11.257$.

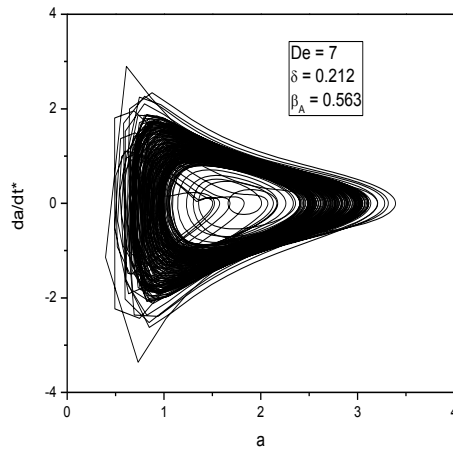


Figura 3.25 Sección de Poincaré para las oscilaciones radiales con $De = 7$ y $\beta_A = 0.563$.

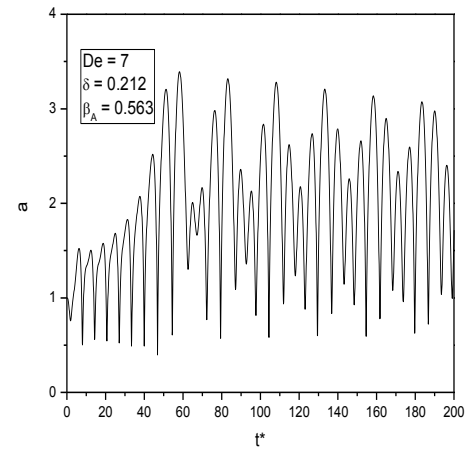


Figura 3.26 Radio adimensional de la burbuja a como función del tiempo adimensional t^* para $De = 7$ y $\beta_A = 0.563$.

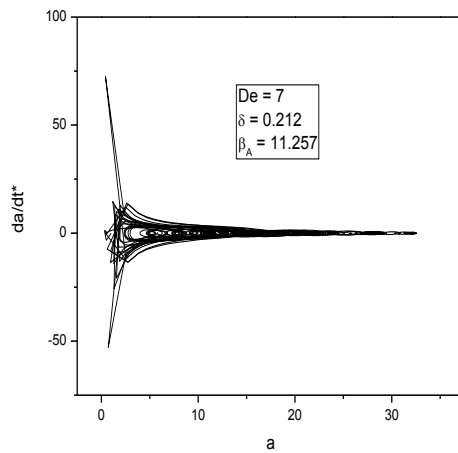


Figura 3.27 Sección de Poincaré para las oscilaciones radiales con $De = 7$ y $\beta_A = 11.257$.

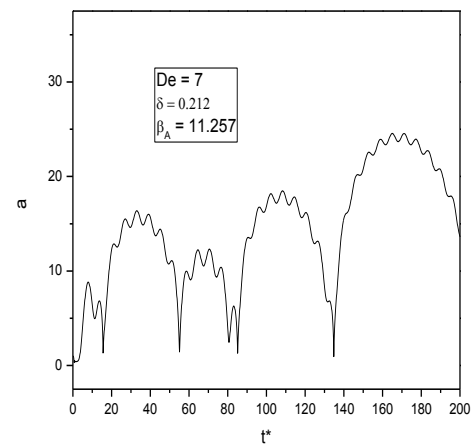


Figura 3.28 Radio adimensional de la burbuja a como función del tiempo adimensional t^* para $De = 7$ y $\beta_A = 11.257$.

$\delta = 2.12$ (Correspondiente a Sonazoid)

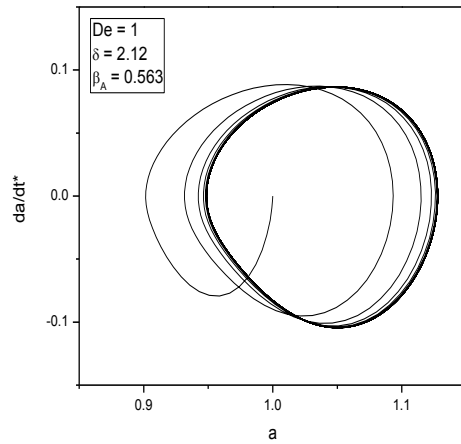


Figura 3.29 Sección de Poincaré para las oscilaciones radiales con $De = 1$ y $\beta_A = 0.563$.

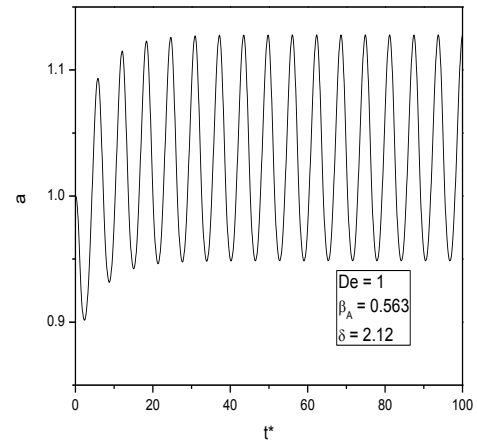


Figura 3.30 Radio adimensional de la burbuja a como función del tiempo adimensional t^* para $De = 1$ y $\beta_A = 0.563$.

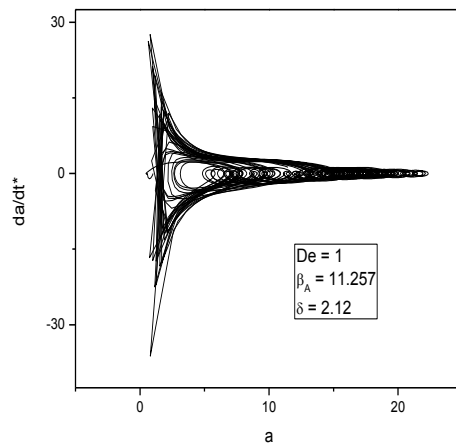


Figura 3.31 Sección de Poincaré para las oscilaciones radiales con $De = 1$ y $\beta_A = 11.257$.

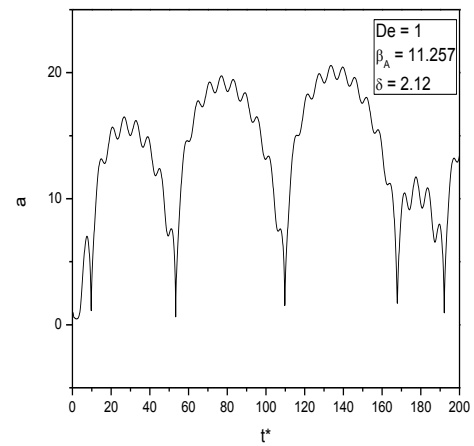


Figura 3.32 Radio adimensional de la burbuja a como función del tiempo adimensional t^* para $De = 1$ y $\beta_A = 11.257$.

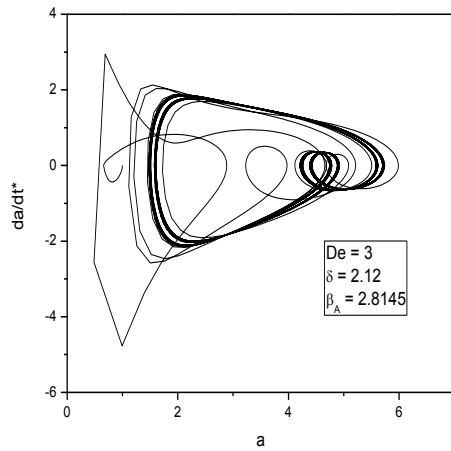


Figura 3.33 Sección de Poincaré para las oscilaciones radiales con $De = 3$ y $\beta_A = 2.8145$.

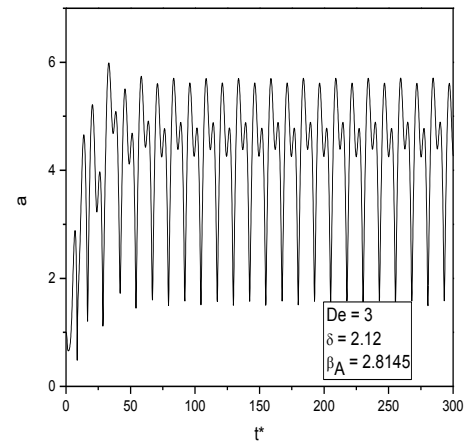


Figura 3.34 Radio adimensional de la burbuja a como función del tiempo adimensional t^* para $De = 3$ y $\beta_A = 2.8145$.

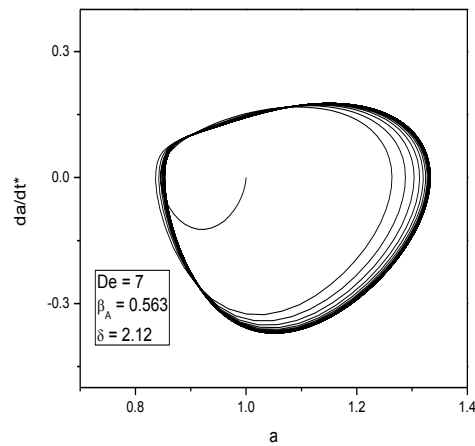


Figura 3.35 Sección de Poincaré para las oscilaciones radiales con $De = 7$ y $\beta_A = 0.563$.

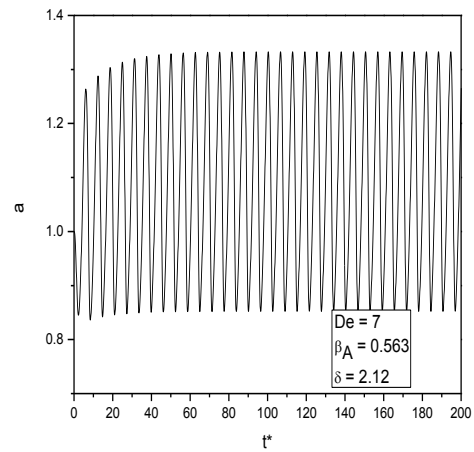


Figura 3.36 Radio adimensional de la burbuja a como función del tiempo adimensional t^* para $De = 7$ y $\beta_A = 0.563$.

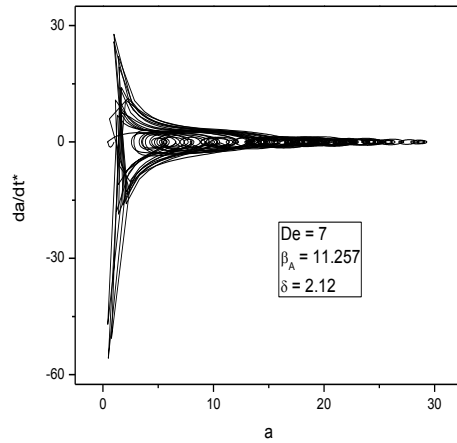


Figura 3.37 Sección de Poincaré para las oscilaciones radiales con $De = 7$ y $\beta_A = 11.257$.

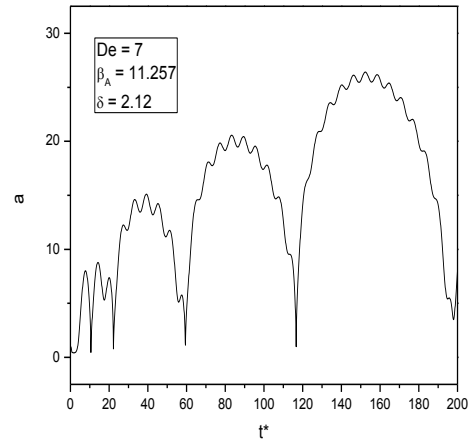


Figura 3.38 Radio adimensional de la burbuja a como función del tiempo adimensional t^* para $De = 7$ y $\beta_A = 11.257$.

$\delta = 17$ (Correspondiente a Optison)

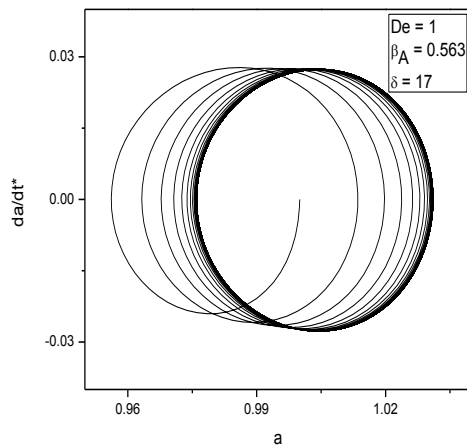


Figura 3.39 Sección de Poincaré para las oscilaciones radiales con $De = 1$ y $\beta_A = 0.563$.

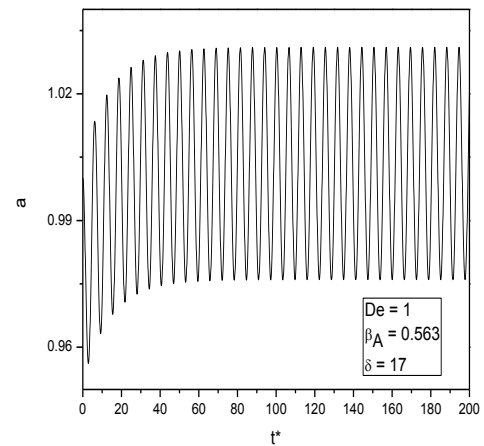


Figura 3.40 Radio adimensional de la burbuja a como función del tiempo adimensional t^* para $De = 1$ y $\beta_A = 0.563$.

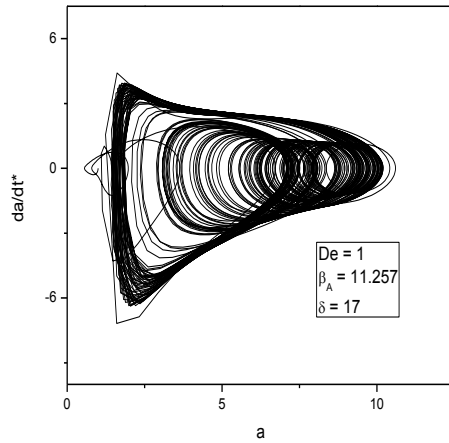


Figura 3.41 Sección de Poincaré para las oscilaciones radiales con $De = 1$ y $\beta_A = 11.257$.

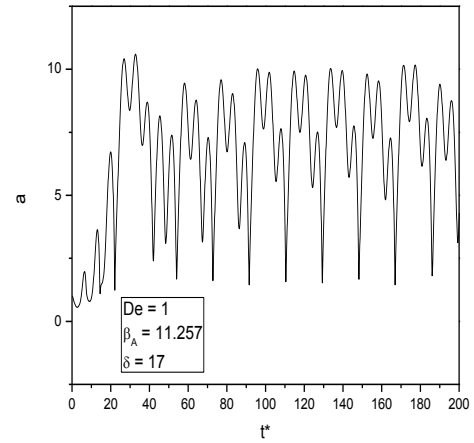


Figura 3.42 Radio adimensional de la burbuja a como función del tiempo adimensional t^* para $De = 1$ y $\beta_A = 11.257$.

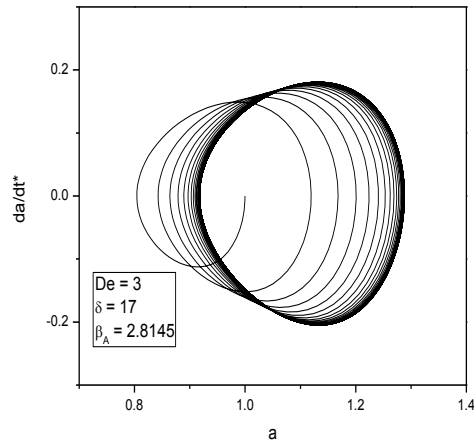


Figura 3.43 Sección de Poincaré para las oscilaciones radiales con $De = 3$ y $\beta_A = 2.8145$.

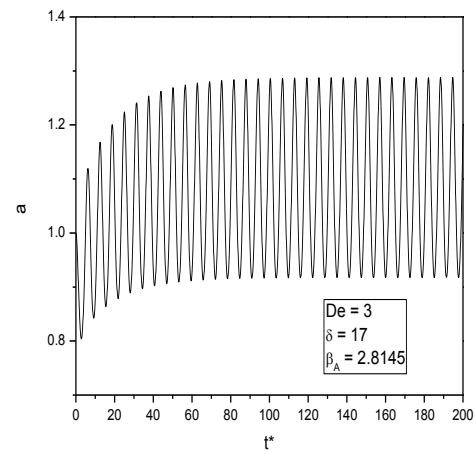


Figura 3.44 Radio adimensional de la burbuja a como función del tiempo adimensional t^* para $De = 3$ y $\beta_A = 2.8145$.

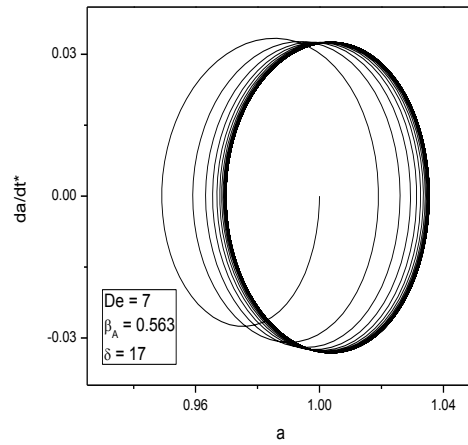


Figura 3.45 Sección de Poincaré para las oscilaciones radiales con $De = 7$ y $\beta_A = 0.563$.

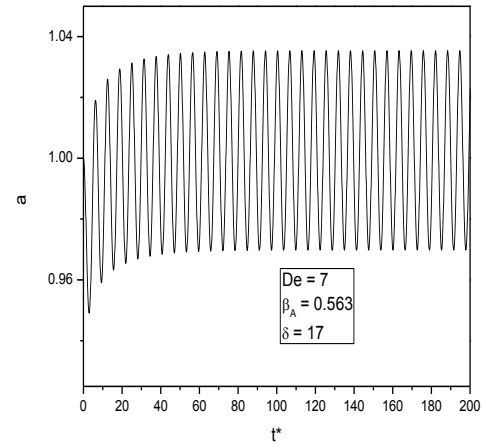


Figura 3.46 Radio adimensional de la burbuja a como función del tiempo adimensional t^* para $De = 7$ y $\beta_A = 0.563$.

$\delta = 21.2$

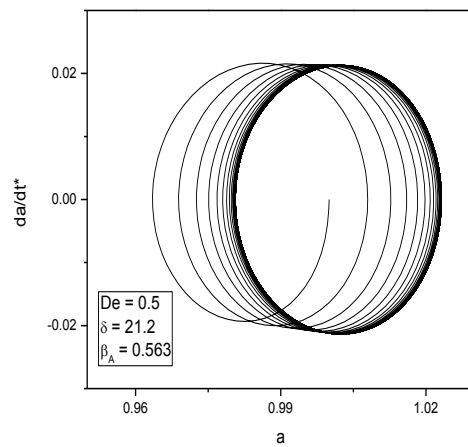


Figura 3.47 Sección de Poincaré para las oscilaciones radiales con $De = 0.5$ y $\beta_A = 0.563$.

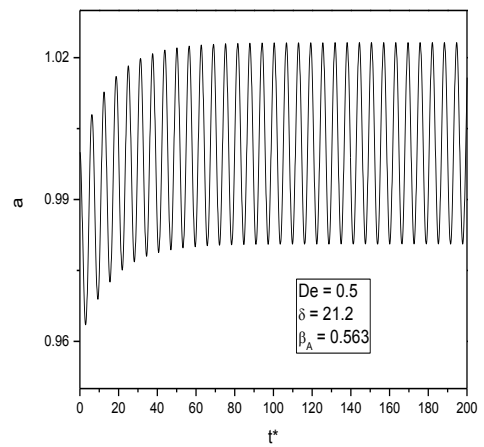


Figura 3.48 Radio adimensional de la burbuja a como función del tiempo adimensional t^* para $De = 0.5$ y $\beta_A = 0.563$.

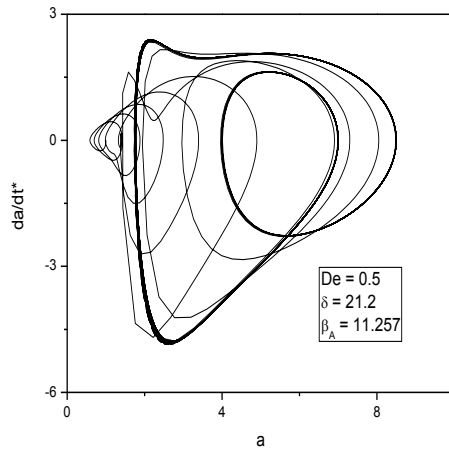


Figura 3.49 Sección de Poincaré para las oscilaciones radiales con $De = 0.5$ y $\beta_A = 11.257$.

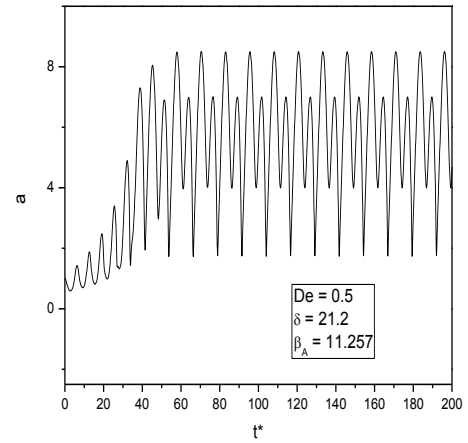


Figura 3.50 Radio adimensional de la burbuja a como función del tiempo adimensional t^* para $De = 0.5$ y $\beta_A = 11.257$.

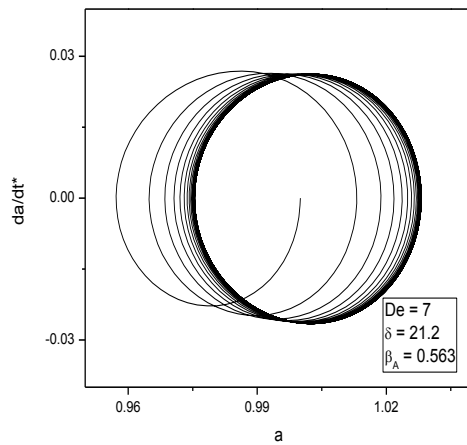


Figura 3.51 Sección de Poincaré para las oscilaciones radiales con $De = 7$ y $\beta_A = 0.563$.

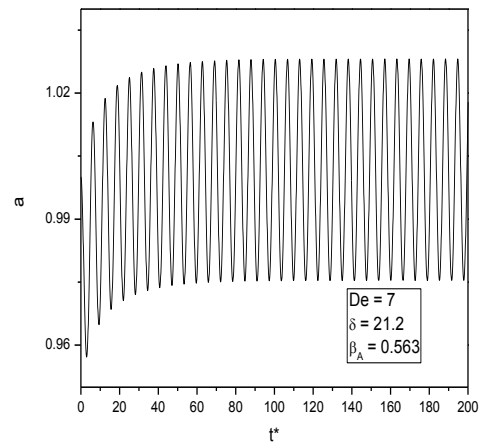


Figura 3.52 Radio adimensional de la burbuja a como función del tiempo adimensional t^* para $De = 7$ y $\beta_A = 0.563$.

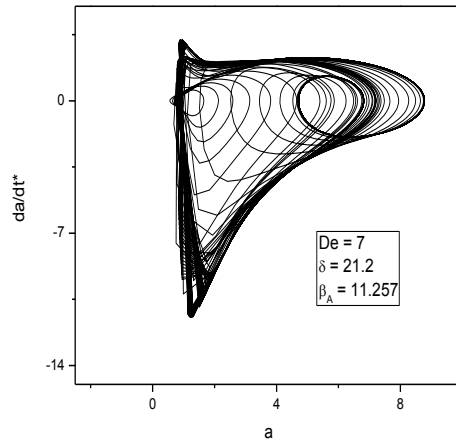


Figura 3.53 Sección de Poincaré para las oscilaciones radiales con $De = 7$ y $\beta_A = 11.257$.

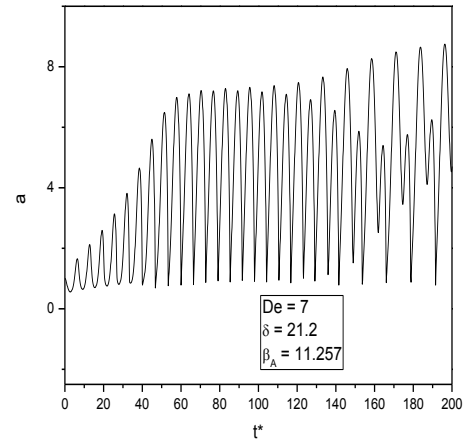


Figura 3.54 Radio adimensional de la burbuja a como función del tiempo adimensional t^* para $De = 7$ y $\beta_A = 11.257$.

3.3.2 COMPARACIÓN DE TENSIÓN SUPERFICIAL

En las gráficas siguientes, se utilizan los valores estimados por Sarkar (2005) para dos agentes superficiales activos comerciales:

Tabla 4.1 Propiedades de surfactantes

Surfactante	$\kappa^S * 10^{-6} \left[\frac{Ns}{m} \right]$	$\sigma \left[\frac{N}{m} \right]$	δ	We
Optison [®]	0.08	0.9	16.98	5.066
Sonazoid [®]	0.01	0.6	2.12	3.38

3.3.2.1 OPTISON

En las cuatro gráficas siguientes se comparan las respuestas con este surfactante y dos valores adimensionales distintos de tensión superficial $We = 0.405$ y $We = 5.07$.

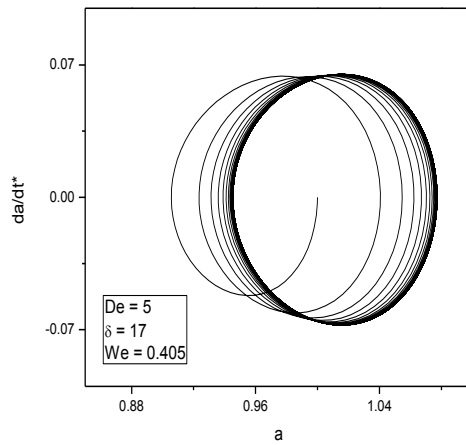


Figura 3.55 Sección de Poincaré para las oscilaciones radiales con $De = 5$ y $We = 0.405$.

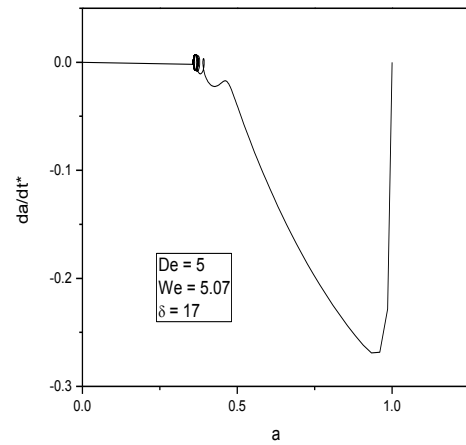


Figura 3.56 Sección de Poincaré para las oscilaciones radiales con $De = 5$ y $We = 5.07$.

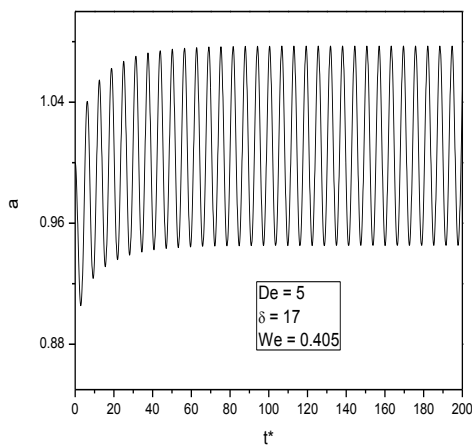


Figura 4.57 Radio adimensional de la burbuja a como función del tiempo adimensional t^* para $De = 5$ y $We = 0.405$.

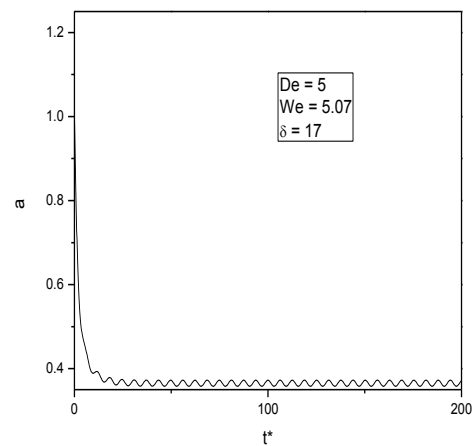


Figura 4.58 Radio adimensional de la burbuja a como función del tiempo adimensional t^* para $De = 5$ y $We = 5.07$.

3.3.2.2 SONAZOID

Se hace una comparación análoga al caso anterior con dos valores adimensionales distintos de tensión superficial $We = 0.405$ y $We = 3.38$.

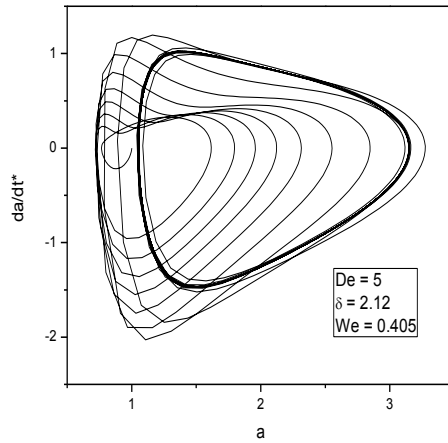


Figura 3.59 Sección de Poincaré para las oscilaciones radiales con $De = 5$ y $We = 0.405$.

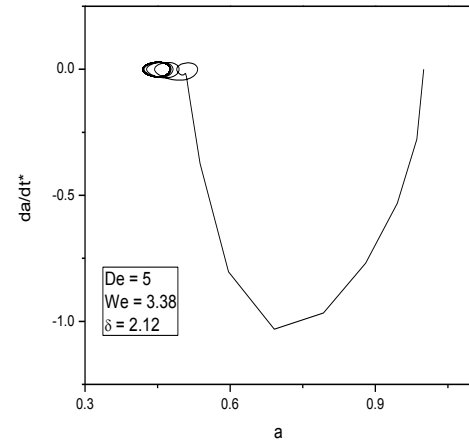


Figura 3.60 Sección de Poincaré para las oscilaciones radiales con $De = 5$ y $We = 3.38$.

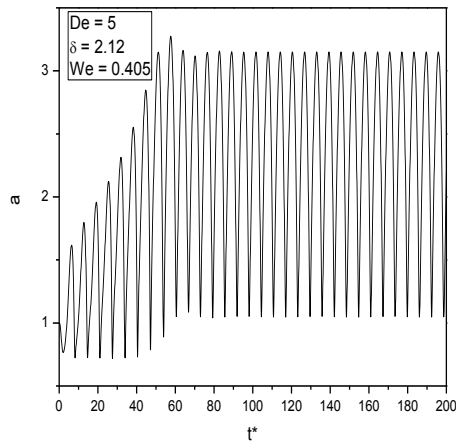


Figura 3.61 Radio adimensional de la burbuja a como función del tiempo adimensional t^* para $De = 5$ y $We = 0.405$.

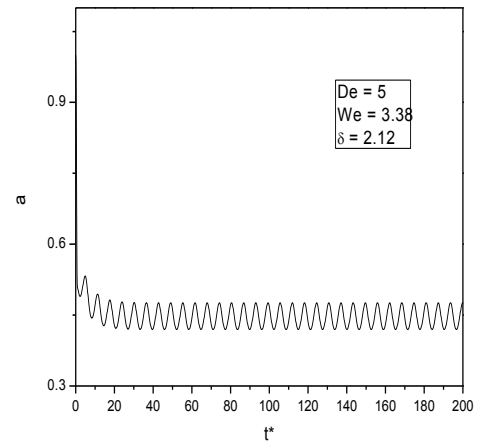


Figura 3.62 Radio adimensional de la burbuja a como función del tiempo adimensional t^* para $De = 5$ y $We = 3.38$.

CAPÍTULO 4

CONCLUSIONES Y COMENTARIOS

La ecuación generalizada de Rayleigh-Plesset para fluidos viscoelásticos es integro-diferencial y al modificarla con el modelo simplificado de Maxwell, da lugar a un sistema de dos ecuaciones diferenciales ordinarias siendo una de ellas de segundo orden; sin embargo, siguiendo la metodología descrita por Levitskiy y Shulman se obtiene un sistema de tres ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden.

La solución de este sistema es factible mediante métodos numéricos, por lo que se emplearon los software comerciales MATHEMATICA[®] y MAPLE[®]. De acuerdo a la precisión en cada caso se eligió la gráfica correspondiente que se expone en la sección de resultados.

Al comparar los resultados con los reportados por Naude y Méndez (2008) y Jiménez - Fernández y Crespo (2005) se verifica la validez del modelo utilizado en este trabajo resultando útil y práctico con respecto a otros más elaborados, al ser su desarrollo menos complejo y siendo capaz de proporcionar resultados en un menor tiempo de cómputo.

Con respecto a los parámetros, el factor de amortiguamiento térmico ε tiene un efecto importante para señales no periódicas, siendo indiscutible durante el transitorio, tal como reportan otros autores.

Considerando el caso cuasi-isotermico de las Figuras 4.7 a 4.12, se observa que para $De < 4$ existe un comportamiento periódico mientras que para $De > 5$ se exhibe una respuesta caótica.

En las Figuras 4.13 a 4.16 se muestra cómo la amplitud de las oscilaciones para el radio adimensional a aumenta conforme el número de De , al igual que con p_A . Estos dos factores determinan la presencia del caos en la respuesta.

Como una primera aproximación, los efectos elásticos del agente tensoactivo son omitidos y únicamente se tomó en cuenta el efecto de la viscosidad superficial dilatacional (κ^S), registrando que la amplitud de las oscilaciones disminuye al aumentar el valor de δ correspondiente.

En general, la presencia del surfactante genera una respuesta periódica, aun para valores pequeños de κ^S .

Cuando se opera con el valor reportado de tensión interfacial del surfactante (σ) ocurre una caída abrupta en el radio de la burbuja a , debido a que se trata de materiales viscoelásticos con un comportamiento más cercano al de un sólido ideal. A diferencia de considerar el valor de tensión superficial del fluido externo, en donde el radio crece y oscila en un intervalo más amplio.

A lo largo del desarrollo del modelo se advierte que parámetros como la tensión superficial σ y la viscosidad dilatacional κ^S son significativos para caracterizar el efecto del surfactante.

Es importante considerar la probabilidad de alcanzar los valores críticos de explosión y colapso de la burbuja durante el transitorio, por lo que los resultados posteriores a esta etapa, obtenidos con el modelo matemático propuesto pueden no tener relación con la física del fenómeno.

Los resultados se obtuvieron utilizando valores para los parámetros reportados en la literatura, que no necesariamente corresponden a una sustancia particular, por lo que para validar el modelo experimentalmente es necesario utilizar un fluido viscoelástico que se adapte a las consideraciones planteadas.

Entre las líneas de continuación de este trabajo de tesis están el considerar las variaciones de concentración de surfactante tomando en cuenta las implicaciones que tiene al aumentar la complejidad del modelo matemático.

Por otra parte, los fenómenos dinámicos de una burbuja individual no son del todo consistentes con la realidad, ya que como se mencionó anteriormente, los núcleos de cavitación dan lugar a la formación de una nube de burbujas que interactúan entre sí. Además, al moverse las micro-cápsulas en un flujo cerca de una pared o en presencia de otras entidades no tienen forma esférica.

Las investigaciones en este tema se encuentran dirigidas hacia el desarrollo de técnicas que controlen la cavitación. En el campo de la medicina permitiría suministrar dosis de medicamentos directamente en el tejido dañado mediante partículas activas por medio de ultrasonidos; reduciendo los efectos secundarios asociados con la dosificación en todo el cuerpo por la absorción en órganos vitales distintos al objetivo. A su vez, en ingeniería llevaría a prevenir los procesos de desgaste por corrosión en dispositivos mecánicos de flujo, y facilitaría procesos de extracción, bombeo, aplicaciones de sonoluminiscencia, entre otros.

ANEXO 1

PRINCIPIOS FÍSICOS

A1.1 FLUIDO

Ingenierilmente un fluido se define como un material que se deforma continuamente bajo la aplicación de un esfuerzo cortante.

Existe una distinción entre fluido ideal y real. Un *fluido ideal* es aquel en el cual no hay fricción. Así, las fuerzas actuando en cualquier sección interna de fluido son únicamente fuerzas de presión, aun durante movimiento. En contraste, en un *fluido real*, participan fuerzas cortantes o tangenciales y extensionales cuando sucede el movimiento, lo cual provoca un aumento en la fricción, ya que éstas se oponen al desplazamiento relativo de una partícula con otra. La *viscosidad* es la propiedad que origina dichas fuerzas de fricción y resulta de la cohesión y el intercambio de momentum entre las moléculas del material y en la mayoría de ellos, es independiente de la fuerza externa aplicada. Existe, sin embargo, una larga clase de fluidos con un comportamiento fundamental diferente.

La conducta de los fluidos es caracterizada por la viscosidad, ya que esta propiedad relaciona los esfuerzos locales con la velocidad de deformación del elemento en movimiento. Dos tipos son utilizados, la viscosidad dinámica y la viscosidad cinemática.

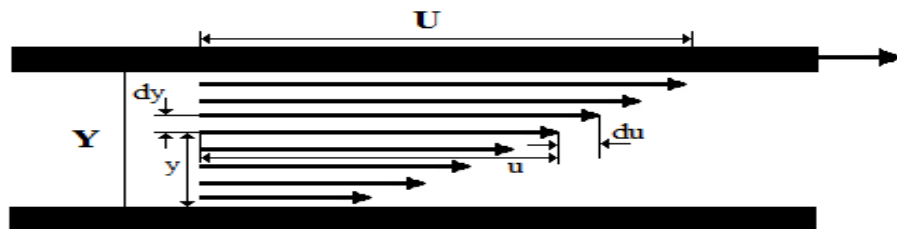


Figura A1.1.1 Ejemplo ilustrativo de la viscosidad al corte.⁵

⁵ BRUJAN, Emil-Alexandru. (2011). *Cavitation in Non-Newtonian Fluids. With Biomedical and Bioengineering Applications*. Springer, 2.

La *viscosidad cinemática*, (ν), por su parte, no involucra a la fuerza como dimensión ya que se define como la viscosidad η entre la densidad ρ ; por lo que solamente refiere a la longitud y el tiempo:

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} \quad (A1.1.4)$$

Sus unidades son [m²/s] de acuerdo al sistema internacional SI; sin embargo, es más común el stoke [St= cm²/s] del sistema métrico y todavía más conveniente el centistoke [cSt] (0.01 [St]) ya que 1 [cSt] refiere a la viscosidad del agua a 20 (°C). Tomando en cuenta a la viscosidad, se hace la siguiente clasificación: Fluidos newtonianos y no newtonianos.

A1.1.1 FLUIDO NEWTONIANO

Cuando en un fluido la viscosidad no cambia con la velocidad de deformación se dice que éste es un *fluido newtoniano*.

La ecuación de η formulada a partir de la relación entre esfuerzo y velocidad de deformación explica el comportamiento del fluido en flujo simple cortante; por lo que se concluye que tratándose de un material isotrópico, el esfuerzo está determinado por el tensor de deformación relativa.

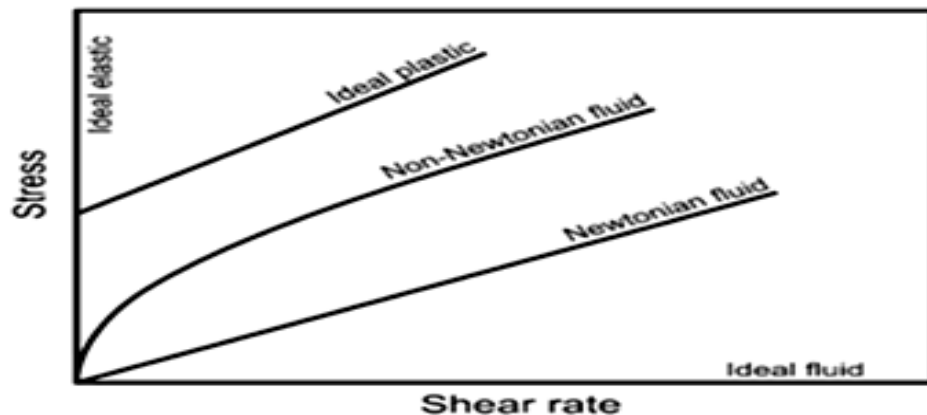


Figura A1.1.2 Comportamiento reológico de los materiales.⁶

⁶ BRUJAN, Emil-Alexandru. (2011). *Cavitation in Non-Newtonian Fluids. With Biomedical and Bioengineering Applications*. Springer, 3.

A1.1.2 FLUIDOS NO NEWTONIANOS

Existen fluidos para los cuales la viscosidad varía con la velocidad de corte y son llamados *no newtonianos*. Una característica especial en ellos es la retención de su historia de flujo, siendo llamada dicha “memoria” *elasticidad*. Un ejemplo de este tipo de fluidos son los polímeros líquidos formados parcial o totalmente de macromoléculas y los materiales bifásicos como las suspensiones constituidas por una concentración alta de partículas sólidas en una solución líquida.

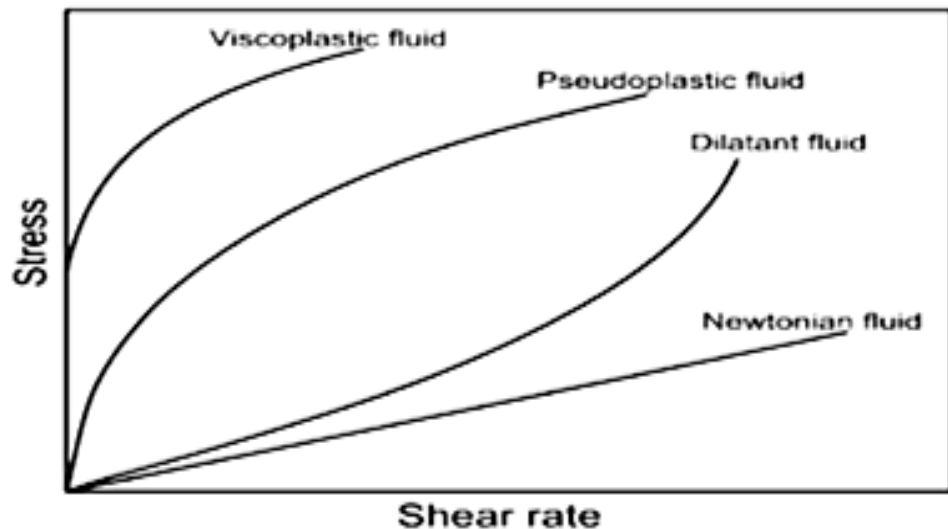


Figura A1.1.3 Comportamiento reológico de fluidos no newtonianos.⁷

Existen diversos tipos de fluidos no newtonianos:

- *Fluidos pseudoplásticos*. También llamados *fluidos de adelgazamiento cortante*, denominados así porque la viscosidad decrece conforme se incrementa la velocidad tangencial, los encontramos en fundiciones poliméricas o de vidrio.
- *Fluidos dilatantes o con engrosamiento cortante*. Contrarios a los anteriores y menos comunes, en estos la viscosidad aumenta con la velocidad tangencial. Han sido útiles para aproximar el comportamiento de sustancias reales como agua con polvo o arena. Comparten con los pseudoplásticos la característica de que la velocidad tangencial en cualquier punto solamente

⁷ BRUJAN, Emil-Alexandru. (2011). *Cavitation in Non-Newtonian Fluids. With Biomedical and Bioengineering Applications*. Springer, 5.

depende del esfuerzo cortante instantáneo, siendo completamente ajenas la viscosidad y la duración. Además, gran parte de este grupo exhibe a bajas y altas velocidades tangenciales una viscosidad constante denominada viscosidad cortante cero η_0 e infinita η_∞ , respectivamente.

- *Fluidos con esfuerzo de cedencia o viscoplásticos.* Designados así porque no fluyen a menos que el esfuerzo exceda el valor de cedencia referido.

A1.1.3 FLUIDOS VISCOELÁSTICOS

Un caso particular de fluidos no newtonianos ocurre cuando poseen una característica adicional: elasticidad separada de viscosidad. Presentan una recuperación elástica parcial posterior a un esfuerzo deformante ya que tienen cierta cantidad de energía de deformación almacenada en su interior. En *fluidos reopécticos* como algunas suspensiones de arcilla, a una velocidad constante, el esfuerzo cortante aumenta con el tiempo; en contraste con los *fluidos tixotrópicos*, donde la relación es inversa. Para ambos casos, la velocidad depende de la dirección, magnitud y lapso de tiempo entre cada aplicación del cortante.

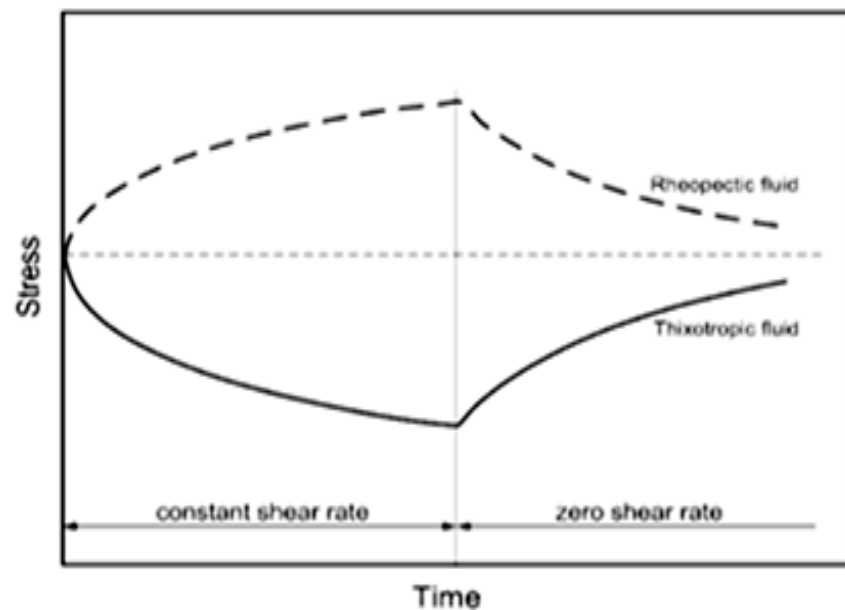


Figura A1.1.4 Fluidos reopéctico y tixotrópico.⁸

⁴ BRUJAN, Emil-Alexandru. (2011). *Cavitation in Non-Newtonian Fluids. With Biomedical and Bioengineering Applications*. Springer, 6.

Otras características que muestran son por ejemplo: cuando un fluido viscoelástico es deformado repentinamente y se mantiene la deformación, los esfuerzos correspondientes decrecen con el tiempo, conociéndose este fenómeno como *relajación del esfuerzo*. Por el contrario, si el fluido es súbitamente forzado provocando que el esfuerzo se mantenga constante después, el material continuará deformándose. Sin embargo, cuando se aplican cargas cíclicas y la relación esfuerzo-deformación es diferente para los procesos de carga y descarga se presenta la llamada *histéresis*.

Cuando el comportamiento del material se ubica entre los extremos idealizados de la respuesta elástica y el comportamiento viscoso se emplea el término “viscoelasticidad” para describirlo. Invariablemente, los sólidos que presentan esta característica son llamados “sólido viscoelástico”. Por el contrario, la terminología es más ambigua en lo referente a los líquidos y se utilizan expresiones como “líquido viscoelástico”, “líquido elástico-viscoso” o “líquido elástico” y más recientemente “fluido con memoria”.

Es importante aclarar que todos los líquidos viscoelásticos son no newtonianos, pero lo contrario es falso (Barnes, Hutton, Walters, 1989).

A1.2 REOLOGÍA

En 1678, Robert Hooke desarrolló un escrito al que llamó: “*La Verdadera Teoría de Elasticidad*”, en el cual propuso que “la potencia de cualquier resorte está en la misma proporción con la tensión aplicada sobre él”. Esto forma la premisa básica detrás de la teoría de la elasticidad clásica (deformación infinitesimal). Isaac Newton por su parte, en sus “*Principia*” publicados en 1687, enuncia la siguiente hipótesis asociada con el fluido cortante simple estacionario: “La resistencia que surge de la falta de deslizamiento de las partes de líquido, siendo iguales otras cosas, es proporcional a la velocidad con que las partes de líquido son separadas unas de otras”.

Tal como fue descrito en el tema anterior, llamamos “viscosidad” a la fricción interna que provoca dicha falta de deslizamiento y actualmente es un concepto empleado para medir la resistencia a fluir que presentan los materiales.

El motivo por el cual en la actualidad se denomina a un líquido viscoso como newtoniano es por la teoría tridimensional consistente desarrollada por Navier y Stokes en el siglo diecinueve, cuyas ecuaciones gobernantes llevan sus nombres.

Las propiedades de viscosidad para fluidos y elasticidad para sólidos estudiadas por Newton y Hooke respectivamente y explicadas en sus leyes, como se analizó en el apartado anterior, fueron satisfactorias durante dos siglos para estudiar los materiales. Sin embargo, la de Newton careció de un carácter universal al contrario de su más famosa ley de gravitación y movimiento debido a que en el siglo XIX, los científicos empezaron a cuestionar su validez para explicar el comportamiento de todos los fluidos.

Por otro lado, en 1835, Wilhelm Weber encontró en sus experimentos que la tela de seda no es perfectamente elástica. Escribió: *“Una carga longitudinal produce una extensión inmediata. Ésta fue seguida por una elongación posterior con el tiempo. Al remover la carga una contracción inmediata ocurrió, seguida por un decremento posterior gradual en longitud hasta que la longitud original fue alcanzada”*, evidenciando así que para este sólido la Ley de Elasticidad de Hooke no basta para puntualizar su comportamiento.

Fue así como se introdujo el término “viscoelasticidad”, con el fin de describir a los materiales cuyo comportamiento fluctuara entre el sólido y líquido idealizados. James Clerk Maxwell, en 1867, publicó el documento *“Sobre la teoría dinámica de los gases”* en la *“Enciclopedia Británica”*, en él, propuso un modelo matemático aplicable a un fluido que presentara propiedades elásticas.

A pesar de las investigaciones hasta ese momento, la reología recibió atención ocasional en las primeras décadas del siglo XX y su reconocimiento emergió a partir de la Segunda Guerra Mundial comenzando con los lanzallamas, al percatarse que los materiales utilizados en ellos son viscoelásticos. En nuestros días, el auge que ha tenido la industria del polímero, la fibra sintética, los detergentes líquidos, algunas pinturas, adhesivos y aceites multigrado diversificó el interés en la materia, a tal nivel que ahora la bioreología ocupa un papel importante en la investigación médica para las industrias farmacéutica, alimenticia y biotecnológica. Todo ello explica la relevancia sustancial de la reología en el presente.

Dada la amplitud del espectro de materiales y sus diversos comportamientos, los extremos establecidos clásicamente de sólidos elásticos hookianos y líquidos viscosos newtonianos quedan excluidos del objeto de estudio de la reología, a pesar de que por definición deberían estar circunscritos.

El Profesor Bingham del Colegio Lafayette, Easton, PA, acuñó el término *Reología* bajo la recomendación de un colega. Significa *el estudio de la deformación y el flujo de materia*. Esta definición fue aceptada cuando la Sociedad Americana de Reología fue fundada en 1929. En esa primera asamblea se presentaron documentos acerca de las propiedades y el comportamiento de una amplia gama de materiales distintos como el asfalto, lubricantes, pinturas, plásticos y fibras naturales, lo cual proporciona una idea de la magnitud de la materia y también de las numerosas disciplinas científicas involucradas.

En la vida diaria, reconocemos sólidos o líquidos por su respuesta a bajos esfuerzos, usualmente determinados por fuerzas gravitacionales. Sin embargo, si aplicamos esfuerzos en un intervalo amplio de valores; sobre un todavía más extenso espectro de tiempo, o frecuencia, utilizando aparatos reológicos, somos capaces de observar propiedades tipo líquido en sólidos y viceversa. Por consiguiente, las dificultades surgen cuando se hace un intento de etiquetar un material dado como un sólido o un líquido. Es válido señalar las inconveniencias cuando se utilizan términos calificativos. Es mucho más fructífero

clasificar comportamiento reológico. Así será posible incluir un material dado en más de una de estas clasificaciones dependiendo de las condiciones experimentales.

Una gran ventaja de esta metodología es que permite a la reología ser la descripción matemática de una serie de comportamientos en lugar de una serie de materiales. Las matemáticas entonces, dirigen su propia definición de parámetros reológicos y con ello sus propias mediciones.

En la actualidad, la magnitud es todavía más amplia. Se han hecho avances significativos en bioreología, reología del polímero y reología de suspensión. También ha sido de apreciación significativa la importancia de la reología en los procesos de la industria química y biotecnológica.

A1.2.1 IMPORTANCIA DE LA NO LINEALIDAD

Las leyes de Hooke y Newton explican solamente los comportamientos elástico y viscoso respectivamente; por lo que al emplear proporcionalidad directa entre esfuerzo y deformación o velocidad de deformación se asumen como lineales siendo muy restrictivas, ya que invariablemente el intervalo de esfuerzo para el cual los materiales tienen dicho comportamiento es muy bajo y limitado; es decir, las propiedades del material (módulo de rigidez y viscosidad) pueden cambiar instantáneamente o por un largo periodo con el esfuerzo aplicado, sin tener forzosamente un valor alto.

Dentro del campo de estudio de la no linealidad se encuentra un ejemplo muy común: *el adelgazamiento al corte*, que se presenta cuando el incremento de la velocidad cortante va acompañada de una reducción en la viscosidad para un flujo estable, este efecto es perceptible en la pasta de dientes y la pintura no soluble, para la cual no ocurre esta disminución instantáneamente. Dicho material puede describirse como tixotrópico, como se puntualizó anteriormente.

A1.2.2 EL NÚMERO DE DEBORAH

Los materiales en la realidad, tienen un comportamiento peculiar ya que dependiendo de la escala de tiempo del proceso de deformación, una misma sustancia presenta características típicas de un sólido o un líquido. De tal manera que en procesos de flujo lento ocurriendo en escala de tiempo larga, el material encuentra su propio nivel, o cuando es extendido paulatinamente, muestra fractura dúctil, exhibiendo en ambos casos propiedades típicas de los líquidos. No obstante, cuando se extiende rápidamente; es decir, en una escala de tiempo corta, muestra características sólidas como fractura frágil deformaciones severas si es impactado repentinamente.

La escala de tiempo en reología es reportada en términos del *número de Deborah*, el cual fue definido por el Profesor Marcus Reiner. En el quinto capítulo del libro de Jueces en el Viejo Testamento, se reporta que Deborah declaró: “*Las montañas fluyeron ante el Señor...*”. Con base en esta referencia, el Profesor Reiner, uno de los fundadores de la ciencia moderna de reología, llamó a su grupo adimensional el número de Deborah D_e . La idea es que *todo fluye si esperas el tiempo suficiente*. Y definió a su número como un valor que es utilizado para estimar los efectos elásticos durante el flujo, estableciendo la relación entre el tiempo de relajación λ y el tiempo de proceso T :

$$D_e = \frac{\lambda}{T} \quad (A1.2.1)$$

En las situaciones idealizadas del sólido elástico hookiano y el líquido viscoso newtoniano, el tiempo λ es infinito y cero respectivamente. En contraste, existen entornos en los cuales los líquidos también muestran propiedades elásticas. En los polímeros, ocurren fenómenos como el hinchamiento post-extrusión y la rotura de fundido debido a que el material no tiene tiempo de relajar durante el proceso, siendo indicado con $D_e > 1$.

Como puede inferirse, un material con un proceso de deformación muy rápido o un tiempo característico muy largo puede parecer tipo sólido. Este efecto se observa en aceites lubricantes ya que a pesar de sus tiempos característicos bajos, los procesos de deformación que sufren son muy rápidos cuando pasan a través de engranes (Barnes, Hutton, Walters, 1989).

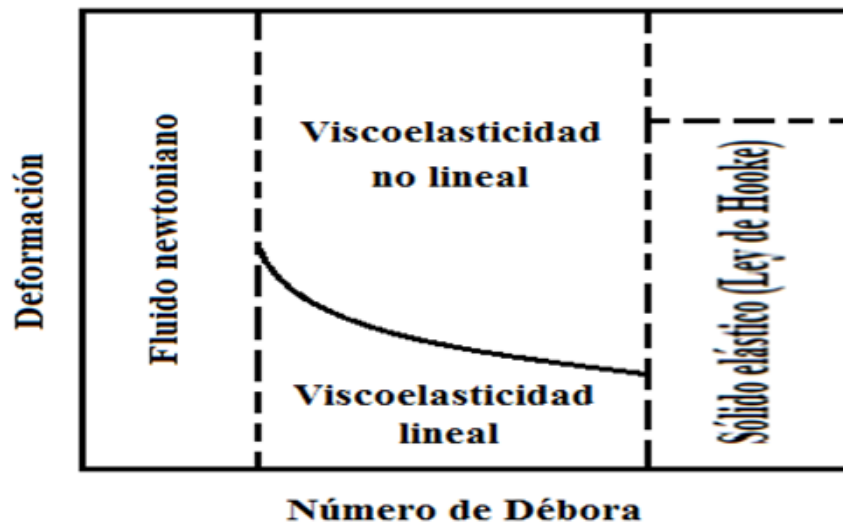


Figura A1.2.1 Efectos elásticos y el Número de Deborah.⁹

⁹

GORDILLO, A. (2007). *Introducción al comportamiento reológico de los polímeros*. Capítulo 1. UPC.

A1.3 CAVITACIÓN

La *cavitación* es un término que procede del latín *cavus* (caverna) y es el concepto aplicado al fenómeno físico de crecimiento y colapso de burbujas de vapor en el seno de un líquido cuya estructura es en apariencia homogénea, debido al sometimiento a presiones suficientemente bajas, asociadas a vibraciones o altas velocidades de flujo. Dichas cavidades son del tamaño de unas pocas micras [μm] y sus tiempos característicos son del orden de microsegundos [μs] o superiores. Cuando estas características pasan a colocarse a escalas moleculares, su análisis se vuelve más complejo involucrando la dinámica molecular para su descripción. Es un tópico relevante de estudio de la mecánica de los medios continuos debido a que produce efectos como la corrosión metálica, luminiscencia e incremento considerable de la velocidad con que se llevan a cabo ciertas reacciones químicas.

Los primeros estudios teóricos se deben a los trabajos de Lord Rayleigh, quien fue el primero en tratar el colapso de burbujas esféricas en un líquido no viscoso. Es posible analizar similitudes y diferencias entre los procesos físicos de cavitación y evaporación para una sustancia, como se puede observar en el diagrama presión-temperatura, (p-T), de la figura siguiente. Se aprecia el cambio de una fase a la otra al alcanzar la temperatura de ebullición manteniendo la presión constante y viceversa para el proceso de cavitación; tal como indica la línea de separación líquido/vapor.

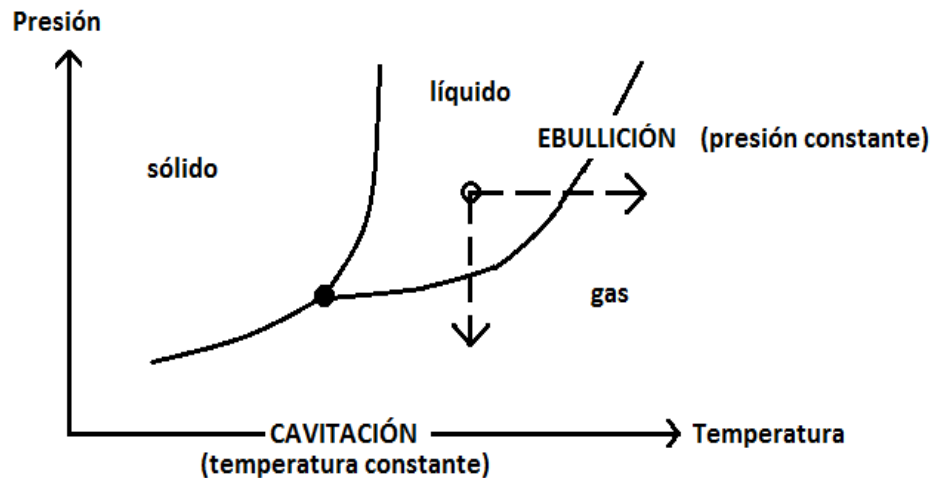


Figura A1.3.1 Diagrama p-T de fases para una sustancia.¹⁰

¹⁰ DOPAZO GARCÍA, César. (2008). ¿Cavitar o no Cavitar? La Inevitable Ubicuidad de las Burbujas. *Real Academia de Ingeniería*, 10.

Si, hidrodinámicamente se genera la reducción local de presión necesaria para la formación de burbujas, entonces el líquido debe tener una velocidad relativa muy alta alrededor de algún obstáculo sólido, como pueden ser las hélices en submarinos, planos sustentadores, cascos de barcos, entre otros; o por una disminución de sección abrupta en un conducto con los caudales elevados, tal es el caso de las toberas convergente-divergente, mejor conocidas como Venturi.

Este decremento de esfuerzos, también tiene su origen en ondas de presión que sean aplicadas en el seno del líquido por medio de un sólido en vibración; generalmente se utilizan ultrasonidos (US) con intervalos de frecuencias entre 20 [kHz] y 10 [MHz].

Parámetros como el objeto vibrante y la geometría del recipiente contenedor son relevantes para provocar los máximos y mínimos de presión que determinan el patrón ondulatorio en el líquido.

Los mínimos de presión aceleran el proceso de formación de burbujas y ocurre para amplitudes de la presión oscilante suficientemente altas. Es evidente que el líquido se somete a tensión, o dicho de otra manera, a presión negativa para inducir la generación de burbujas en ambos casos de cavitación: Hidrodinámica (CH) o Ultrasónica (CU) (Dopazo, 2008: 10-13).

Brennen señala al menos dos formas en que se manifiesta la tensión de un líquido:

1. *Un líquido a temperatura constante que se encuentre sujeto a una presión decreciente, p , la cual cae por debajo de la presión de vapor saturado, p_v . El valor de $(p_v - p)$ es llamado la tensión, Δp , y la magnitud a la cual ocurre la ruptura es la fuerza de tensión del líquido, Δp_C . El proceso de ruptura de un líquido por un decremento en la presión a temperatura constante es llamado cavitación.*
2. *Un líquido a presión constante que se encuentre sujeto a una temperatura, T , en exceso de la temperatura de saturación normal, T_S . El valor de $\Delta T = T - T_S$ es el sobrecalentamiento, y el punto en el cual es formado vapor, ΔT_C , es llamado sobrecalentamiento crítico. El proceso de ruptura de un líquido por incremento de la temperatura a presión constante es llamado evaporación. (Brennen, 1995).*

Básicamente la mecánica que fundamenta la cavitación y la evaporación son similares, lo que las diferencia son los caminos termodinámicos que sigue cada fenómeno y

que culminan en la formación de vapor. Es importante esto por la dificultad que significa inducir cambios uniformes en la temperatura de un líquido a diferencia de la presión. Es posible percatarse al percibir la relación entre los valores críticos de tensión y sobrecalentamiento cuando en ambos, las magnitudes son pequeñas. Así, por la relación de Clausius-Clapeyron:

$$\left(\frac{dp}{dT}\right)_{\text{condiciones saturación}} = \frac{L}{T[\rho_V^{-1} - \rho_L^{-1}]} \quad (A1.3.1)$$

Donde ρ_L , ρ_V son las densidades de líquido y vapor saturado respectivamente y L es el calor latente de evaporación. Tenemos $\rho_L \gg \rho_V$, exceptuando en la cercanía del punto crítico y ya que $dp/dT \approx \rho_V L/T$. Entonces:

$$\Delta T_C \approx \Delta p_C \cdot \frac{T}{L\rho_V} \quad (A1.3.2)$$

Esta ecuación resulta útil para valores pequeños de tensión y sobrecalentamiento, ya que cuando se tienen valores grandes de Δp_C y ΔT_C , es necesaria una ecuación de estado para la sustancia que sea apropiada para establecer de forma adecuada una relación numérica.

Existe controversia en lo que se refiere a la capacidad de los líquidos para soportar tensión. Estudios de la estructura molecular cuantifican esa facultad en torno a 100 [MPa]; a pesar de esto, experimentalmente ha quedado evidenciado que a presiones cercanas a cero o incluso, ligeramente positivas, se puede comenzar la generación de burbujas. Esta discrepancia es atribuible a las imperfecciones en forma de burbujas de vapor y/o gas, presentes en los líquidos reales y que se encuentran atrapadas en hendiduras de paredes y partículas sólidas (Harvey, 1944) o rodeadas por cáscaras orgánicas permeables (Fox-Herzfeld, 1954); siendo éstos los núcleos de cavitación. También se puede inducir la rotura estructural de los líquidos con la consecuente generación de cavidades (Young, 1999) a partir de láseres de alta intensidad que aportan energía en forma local (Birkin, 2006) o con partículas elementales.

Blake (1949) determinó los valores críticos de la presión y el radio para los cuales las entidades nucleares se transforman en burbujas libres al interior del líquido, conociendo el radio inicial, la tensión superficial del sistema gas-líquido y la presión del gas en el interior. Una ligera variación a partir de los valores críticos inevitablemente provocará un crecimiento inestable del radio nuclear, iniciando una dinámica de intercambio de masa y energía con el líquido.

Cuando el cambio es lo suficientemente lento y a temperatura constante, se favorece el flujo de calor burbuja-líquido y; si la variación es rápida, es válido suponer que el flujo de calor es despreciable denominándose la evolución adiabática. Entre los dos límites, se

consideran transformaciones politrópicas que tienen la ventaja que representa un parámetro ajustable.

Los estudios de Epstein-Plesset (1950) fueron pioneros en demostrar la relevancia que tiene para la evolución de la burbuja los intercambios térmicos. Es posible que las masas de vapor y gases que se encuentran dentro de la burbuja en el instante inicial varíen a través de la interfaz por difusión, procesos de evaporación-condensación y por reacciones químicas.

Los estudios de Plesset-Hsieh (1960) y Hsieh-Plesset (1961) sobre difusión corregida o sesgada (*rectified diffusion*) son significativos en lo referente a la influencia del intercambio de masa en el crecimiento de la burbuja. Un gas disuelto que entra a la cápsula cuando tiene un tamaño grande (menor concentración en la micro esfera), es mayor al que se transporta de ésta al líquido, cuando el radio es pequeño (concentración del gas en la burbuja mayor); lo cual provoca un aumento neto del fluido a lo largo de uno o varios ciclos de vida del encapsulado (Brennen, 1995).

Los fenómenos dinámicos de una burbuja individual son distintos a los de los sistemas reales porque los núcleos de cavitación forman una nube (Brennen, 2003, 2006, 2007), en la que las cápsulas generadas interactúan. Además, las burbujas que se mueven en un flujo o evolucionan cerca de una frontera, como una pared o membrana no tienen forma esférica.

Sin lugar a dudas, el efecto más significativo de las diferencias entre fluidos newtonianos y no newtonianos surge del incremento dramático en la viscosidad de soluciones poliméricas en un flujo extensional, tal como ocurre durante los periodos de crecimiento o colapso cerca de una burbuja esférica, particularmente en los polímeros, cuya estructura consiste en rizos orientados azarosamente debido a la falta de un campo de flujo impuesto, lo que provoca que se separen y tengan la posibilidad de incrementar su longitud extensional en tres órdenes de magnitud, resultando en mayor capacidad para soportar esfuerzos más grandes. Como se explicó en la introducción, muchos fluidos biológicos como la sangre, el líquido sinovial y la saliva tienen propiedades no Newtonianas mostrando un comportamiento viscoelástico significativo.

Por ello, en aplicaciones médicas, es importante tomar en cuenta que las burbujas de cavitación interactúan con el tejido cuando los pulsos láser se utilizan para extirpar; sin embargo dicha acción es capaz de causar daños colaterales a estructuras sensibles en la vecindad del foco del láser, contribuyendo a la amputación y corte. Estas situaciones son consideradas en técnicas como la angioplastia y la revascularización. La cavitación es también uno de los efectos biológicos más explotados en ultrasonido por sus ventajas terapéuticas (Brujan, 2011).

A1.4 SURFACTANTE

Un surfactante es un agente superficial activo que se adhiere a la superficie libre del fluido con el fin de modificar su tensión superficial. Son elementos muy importantes por su enorme utilidad en industrias muy diversas como las de aceites, alimentos, cosméticos, etcétera. Una aplicación fundamental para estos componentes se encuentra en las minas ya que de sus efectos sutiles depende la extracción diaria de minerales. Aunado a esto, en los sistemas líquido-líquido, permiten la formación de pequeñas partículas con el fin de utilizar el fluido como emulsión. Otro papel relevante lo ocupan en la purificación de agua y en general, en cualquier microsistema que presente interfaces ya que el efecto capilar domina sobre el inercial de los fluidos (Huang, Lai, Tseng, 2008).

Como primera aproximación, es factible analizar los procesos que involucran la presencia de surfactantes considerando un fluido newtoniano incompresible en flujo bidimensional estacionario, el cual matemáticamente se explica con la ecuación de Navier-Stokes (ecuación de momentum lineal) y también la ecuación de conservación de masa. La descripción matemática se completa con las condiciones de frontera apropiadas aplicadas a la superficie libre relacionando las propiedades físicas y geométricas de la interfaz con la diferencia entre las tracciones de fluido en cada lado de ésta. En el próximo capítulo se profundizará en el planteamiento para su análisis.

Para modelar sistemas en equilibrio e innumerables fluidos con fronteras libres se vuelve relevante la tensión superficial al ser la propiedad interfacial más notable. Sin embargo, algunas veces no es suficiente para explicar el comportamiento dinámico de una interfaz; como sucede con la estabilidad de películas bajo la presencia de agentes superficiales activos (Whitaker, 1964, 1966; Sparling y Sedlak, 1989; Ruschak, 1987), siendo pertinente añadir otras propiedades al análisis.

En incontables procesos industriales de cobertura se emplean agentes superficiales activos; por ejemplo, en las emulsiones aplicadas a la manufactura de películas fotográficas. Ahí, el líquido a depositar está compuesto por partículas de aleaciones de plata en gel dispersas en aditivos: estabilizadores, endurecedores y surfactantes, actuando estos últimos como agentes dispersores al reducir la tensión superficial. Una desventaja de este componente es que probablemente altere otras propiedades interfaciales afectando la forma y ubicación de las fronteras libres.

Aunado a las propiedades viscosas, también es fundamental considerar que la interfaz posee propiedades elásticas relacionadas a la presencia de una concentración heterogénea de surfactantes a lo largo de ella ocasionada por su estado dinámico y no necesariamente vinculadas a su estructura (Malhotra y Wasan, 1987); por ejemplo, la naturaleza composicional del comportamiento elástico.

Este efecto se aprecia en procesos de recubrimiento. Cuando el líquido de cobertura es separado del dispositivo, se acelera con el fin de alcanzar la superficie de la frontera móvil; esto es, la superficie libre está sujeta a deformaciones de elongación disminuyendo

la concentración local de surfactantes, ocasionando que ciertas cantidades del soluto activo sean transferidas de la interfaz para restaurar el equilibrio interfacial; no obstante, en la mayoría de los casos este balance no se alcanza y el sistema estacionario opera en condiciones no equilibradas. Para analizar rigurosamente esta situación es necesario combinar la mecánica del fluido con los procesos de transporte de masa en el dominio desconocido cuyos límites son función de la localización y la forma de la interfaz gas-líquido; adicionalmente, los balances de esfuerzos normales y tangenciales sobre la interfaz presentarán coeficientes variables localmente ya que propiedades como tensión superficial, viscosidad y elasticidad dependerán de la concentración particular de surfactantes.

El estado dinámico de la interfaz produce cambios en su concentración, los cuales disparan varios mecanismos de transporte de masa que tienden a restablecer el equilibrio. Bajo ciertas condiciones es posible aproximar una solución para el problema descrito (Giavedoni, 1992).

A1.5 TEORÍA DEL CAOS

Esta teoría comenzó formalmente a inicios de los años sesenta, y surgió de la motivación por modelar las alteraciones climáticas y estudiar el incremento de CO₂ en la atmósfera. El meteorólogo Edward Lorenz del MIT, en 1963, utilizó el sistema de ecuaciones de Navier-Stokes para modelar el estado de la atmósfera, obteniendo lo siguiente:

$$\dot{x} = \delta(y - x) \quad (A1.5.1)$$

$$\dot{y} = rx - y - xz \quad (A1.5.2)$$

$$\dot{z} = xy - bz \quad (A1.5.3)$$

Donde x es la razón de rotación del sistema, y y z son el gradiente y la desviación de temperatura respectivamente, δ es el número de Prandtl, r es la diferencia de temperatura entre la base y la parte superior del sistema y finalmente b es la razón entre la longitud y altura del sistema. Al resolver este sistema de ecuaciones, Lorenz observó que la solución dependía fuertemente de las condiciones iniciales, y en su caso particular mostraba una respuesta similar a la forma de las alas de una mariposa para el espacio fase.

Se denomina Teoría del Caos al campo de estudio de las matemáticas y la física que analiza ciertos tipos de sistemas dinámicos sensibles a variaciones en las condiciones iniciales, las cuales aun siendo pequeñas pueden complicar la predicción a largo plazo. Esta teoría ha sido aplicada para explicar el comportamiento de fluidos en régimen turbulento, el movimiento de las placas tectónicas y los sistemas solares.

Los sistemas dinámicos pueden clasificarse de la siguiente manera:

- *Estables.* Sistemas que a lo largo del tiempo tienden a un punto o a una órbita a partir de su dimensión (atractor o sumidero).
- *Inestables.* Sistemas que no tienden a un punto u órbita; es decir, se escapan de los atractores. Como característica principal, tienen una gran dependencia de las condiciones iniciales.
- *Caóticos.* Sistemas en donde están presentes los dos comportamientos anteriores simultáneamente. El sistema tiende a acercarse a un atractor pero fuerzas externas lo obligan a alejarse de éste, quedando así, confinado en una zona de su espacio de estados. En este caso, las diferencias mínimas en las condiciones iniciales provocan una evolución muy diferente.

A1.5.1 ATRACTORES

Un diagrama de fases del movimiento, donde cada eje representa una dimensión del estado y el tiempo está implícito, permite la visualización del comportamiento caótico. Se dice que hay un atractor cuando el sistema se ve proclive a seguir cierta trayectoria a pesar de lo errante del movimiento.

De acuerdo a la evolución de sus trayectorias, los atractores pueden clasificarse en periódicos, cuasi-periódicos y extraños, siendo este último el más ligado con el movimiento caótico. Ejemplo de esto es el atractor de Lorenz, que desenvuelve en una forma similar a las alas de una mariposa y describe el comportamiento tridimensional de su modelo del sistema climático.

Los atractores extraños, son también curvas del espacio fase y describen los sistemas en movimiento caótico en trayectorias elípticas. Dadas las características de estos sistemas, se vuelven impredecibles, por lo que no se puede asegurar la veracidad de su configuración en dos momentos consecuentes. A pesar de esto, no es totalmente aleatorio.

Dichos atractores, se presentan en sistemas continuos dinámicos, como el expuesto anteriormente, o en sistemas discretos, tal es el caso del mapa Hénon o el Conjunto de Julia, el cual tiene una estructura de repulsión formada en el límite entre las cuencas de dos puntos fijos de atracción, resultando extraño en algunos casos. Ambos atractores, al desenvolverse tienen una estructura de fractal.

En casi todos los sistemas dinámicos, existen elementos que acceden un tipo de movimiento repetitivo y algunas veces, establecido geométricamente. La función principal de los atractores es que las variables inicien en un punto de partida y guarden una

trayectoria predeterminada; sin embargo no es posible establecer de forma precisa que las oscilaciones al recorrer las órbitas tengan las variables que establezcan los atractores.

El **Teorema de Poincaré-Bendixson** señala que un atractor extraño solamente se presenta como un sistema dinámico continuo si es de dimensión tres o superior. Esta restricción no es aplicable a sistemas discretos, ya que pueden presentar atractores extraños en espacios uni o bidimensionales (Thompson, Stewart, 2002).

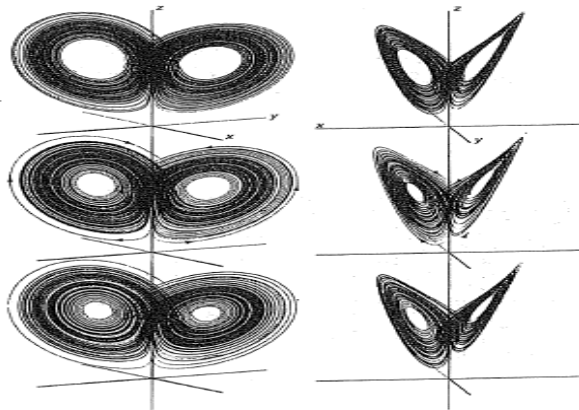


Figura A1.5.1 El atractor de Lorenz tiene una proyección similar a las alas de una mariposa; para ser contenida necesita exactamente 2.06 dimensiones; por lo que es un fractal.¹¹

¹¹ THOMPSON, J.M.T.; STEWART, H. B. (2002). *Nonlinear Dynamics and Chaos*. Second Edition. John Wiley & Sons, Ltd, 214.

ANEXO 2

PRINCIPIOS MATEMÁTICOS

A2.1 DINÁMICA DE BURBUJA ESFÉRICA

A2.1.1 ECUACIÓN DE RAYLEIGH-PLESSET

Este análisis pretende analizar cómo se comporta una burbuja cuyo radio es función del tiempo $R(t)$ y se encuentra sumergida en un líquido infinito en reposo a temperatura constante. Entre las consideraciones tomadas en cuenta están: la temperatura T_∞ se asume constante, ya que previamente fueron descartados sus gradientes y no ocurre calentamiento uniforme ya sea por fuentes internas de calor o radiación. Asimismo, el crecimiento o colapso de la burbuja es controlado mediante una entrada de presión conocida p_∞ .

Adicionalmente, la densidad del líquido ρ_L y la viscosidad dinámica μ_L se asumen constantes debido a que la compresibilidad del fluido es fundamental en el contexto del colapso de la burbuja. Conforme proceda el análisis, se podrán identificar otras circunstancias de la micro esfera, como su contenido homogéneo y uniformidad en la presión interior p_B y la temperatura $T_B(t)$.

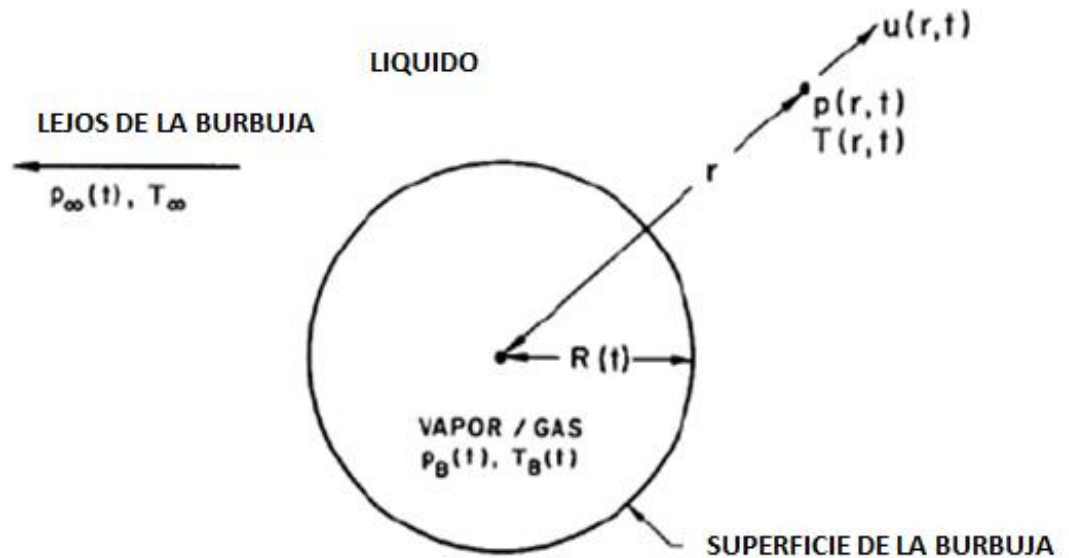


Figura A2.1.1 Esquema de una burbuja esférica en un líquido infinito.¹²

La posición radial dentro del líquido será denotada por la distancia r desde el centro de la burbuja; siendo consistentes al designar la velocidad radial hacia afuera $u(r, t)$, la temperatura $T(r, t)$ y la presión $p(r, t)$. El análisis comienza con la ecuación de continuidad en coordenadas esféricas:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u(r, t)) = 0 \quad (\text{A2.1.1})$$

$$\frac{\partial}{\partial r} (r^2 u(r, t)) = 0 \quad (\text{A2.1.2})$$

Integrando:

$$r^2 u(r, t) = F(t) \quad (\text{A2.1.3})$$

$$u(r, t) = \frac{F(t)}{r^2} \quad (\text{A2.1.4})$$

La condición de frontera cinemática en la superficie relaciona $F(t)$ con $R(t)$ y es indispensable para cumplir el principio de conservación de masa. Tratándose del caso ideal

⁸ BRENNEN Christopher E. (1995). *Cavitation and Bubble Dynamics*. California Institute of Technology. Oxford University Press, 48.

donde el transporte de masa a través de la interfaz es nulo, es evidente que $u(R, t) = dR/dt$, por lo que se afirma:

$$F(t) = R^2 \frac{dR}{dt} \quad (\text{A2.1.5})$$

Siendo muy buena aproximación a pesar de que ocurra en la interfaz algún cambio de fase (evaporación o condensación). Esto se puede demostrar considerando una burbuja de vapor en donde la razón volumétrica de producción de vapor y la razón de incremento del tamaño de la burbuja $\frac{4\pi R^2 dR}{dt}$, son iguales, lo que permite afirmar que la masa de evaporación debe ser $\frac{\rho_V(T_B) 4\pi R^2 dR}{dt}$, siendo $\rho_V(T_B)$ el término correspondiente a la densidad de vapor saturado a la temperatura de la burbuja y del mismo valor que el flujo de masa de líquido relativo a la entrada de la interfaz con una velocidad igual a $\frac{\rho_V(T_B) (\frac{dR}{dt})}{\rho_L}$. De tal modo que:

$$u(R, t) = \frac{dR}{dt} - \frac{\rho_V(T_B)}{\rho_L} \frac{dR}{dt} = \left[1 - \frac{\rho_V(T_B)}{\rho_L} \right] \frac{dR}{dt} \quad (\text{A2.1.6})$$

Y a su vez:

$$F(t) = \left[1 - \frac{\rho_V(T_B)}{\rho_L} \right] R^2 \frac{dR}{dt} \quad (\text{A2.1.7})$$

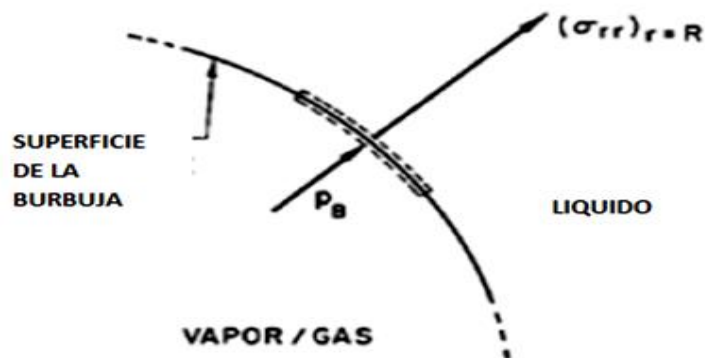


Figura A2.1.2 Segmento de la superficie de una burbuja esférica.¹³

¹³ BRENNEN Christopher E. (1995). *Cavitation and Bubble Dynamics*. California Institute of Technology. Oxford University Press, 49.

La ecuación de continuidad se considera adecuada porque en la práctica $\rho_V(T_B) \ll \rho_L$. Suponiendo un líquido newtoniano, la ecuación de movimiento de Navier-Stokes para flujo incompresible es:

$$\frac{\partial V_r}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) V_r - \frac{V_\theta^2 + V_\phi^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\nabla^2 V_r - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial(V_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial V_\phi}{\partial \phi} - \frac{2V_r}{r^2} \right) \quad (\text{A2.1.8})$$

Donde:

$$\nabla^2 V_r = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V_r}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V_r}{\partial \phi^2} \quad (\text{A2.1.9})$$

Asimismo, $V_r = u(r, t)$

$$-\frac{1}{\rho_L} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} - \nu \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{2u}{r^2} \right] \quad (\text{A2.1.10})$$

Y sustituyendo u por $u = \frac{F(t)}{r^2}$

$$\partial u = \frac{r^2 dF(t) - F(t) 2r dr}{r^4} = \frac{dF(t)}{r^2} - \frac{2F(t) dr}{r^3} \quad (\text{A2.1.11})$$

$$-\frac{1}{\rho_L} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{1}{r^2} \frac{dF(t)}{dt} - \frac{2F(t)^2}{r^5} \quad (\text{A2.1.12})$$

Para la ecuación de Rayleigh-Plesset la única contribución viscosa procede de la condición de frontera dinámica en la superficie de la burbuja, ya que el término viscoso ha desaparecido. Integrando la ecuación anterior:

$$-\frac{1}{\rho_L} \int_p^{p_\infty} dp = \int_r^\infty \left(\frac{1}{r^2} \frac{dF(t)}{dt} - \frac{2F(t)^2}{r^5} \right) dr \quad (\text{A2.1.13})$$

$$-\frac{1}{\rho_L} (p_\infty - p) = -\frac{1}{r} \frac{dF(t)}{dt} \Big|_r^\infty + \frac{2}{4} \frac{F(t)^2}{r^4} \Big|_r^\infty \quad (\text{A2.1.14})$$

$$\frac{p - p_\infty}{\rho_L} = \frac{1}{r} \frac{dF(t)}{dt} - \frac{1}{2} \frac{F(t)^2}{r^4} \quad (\text{A2.1.15})$$

Después de aplicar la condición $p \rightarrow p_\infty$ en $r \rightarrow \infty$. Para continuar con el análisis se necesita construir una condición de frontera dinámica en la superficie de la burbuja considerando una pequeña lámina delgada infinitesimal como la exhibida en la Figura A2.1.2 de un segmento de interfaz. La fuerza neta sobre este volumen de control en la salida con dirección radial por unidad de área es:

$$(\sigma_{rr})_{r=R} + p_B - \frac{2S}{R} = 0 \quad (A2.1.16)$$

Donde S representa la tensión superficial. Conociendo ∂u por la ecuación (A2.1.11), entonces:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r^2} \frac{dF(t)}{dr} - \frac{2F(t)dr}{r^3 dr} = -\frac{2F(t)}{r^3} \quad (A2.1.17)$$

Por otra parte, de la relación $\sigma - \mathcal{E}$:

$$\sigma_{rr} = -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial r} + \lambda_v \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (A2.1.18)$$

$\lambda_v \nabla \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$ dado que λ_v (coeficiente volumétrico de viscosidad) es igual a cero. Así, sustituyendo (A2.1.17) y (A2.1.18) en (A2.1.16) se obtiene:

$$-p + 2\mu \left(-\frac{2F(t)}{R^3} \right) - \frac{2S}{R} + p_B = 0 \quad (A2.1.19)$$

Por lo tanto, la fuerza por unidad de área es:

$$p_B - p_{r=R} - \frac{4\mu}{R} \frac{dR}{dt} - \frac{2S}{R} = 0 \quad (A2.1.20)$$

El análisis se sustenta en la idea de que existe ausencia de transporte de masa a través de la frontera, que podría ser por evaporación o condensación. Con base en esto, la fuerza debe ser cero, y así, sustituyendo los valores de $(p)_{r=R}$ y de $F(t)$ se obtiene la ecuación de Raleigh-Plesset que puntualiza la dinámica de una burbuja:

$$p_{r=R} = p_B - \frac{4\mu}{R} \frac{dR}{dt} - \frac{2S}{R} \quad (A2.1.21)$$

Sustituyendo (A2.1.21) en (A2.1.15) para $r = R$ se tiene:

$$\frac{p_B - \frac{4\mu dR}{R dt} - \frac{2S}{R} - p_\infty}{\rho_L} = \frac{1}{R} \frac{d}{dt} \left(R^2 \frac{dR}{dt} \right) - \frac{1}{2} \frac{R^4}{R^4} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 \quad (A2.1.22)$$

$$\frac{p_B - p_\infty}{\rho_L} = \frac{1}{R} \left[R^2 \frac{d^2 R}{dt^2} + 2R \left(\frac{dR}{dt} \right) \left(\frac{dR}{dt} \right) \right] - \frac{1}{2} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 + \frac{4v}{R} \frac{dR}{dt} + \frac{2S}{R\rho_L} \quad (\text{A2.1.23})$$

$$\frac{p_B - p_\infty}{\rho_L} = R\ddot{R} + 2 \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 + 4 \frac{v}{R} \dot{R} + \frac{2S}{R\rho_L} \quad (\text{A2.1.24})$$

$$\boxed{\frac{p_B - p_\infty}{\rho_L} = R\ddot{R} + \frac{3}{2} \dot{R}^2 + 4 \frac{v}{R} \dot{R} + \frac{2S}{R\rho_L}} \quad (\text{A2.1.25})$$

Siendo conocidos los valores de $p_\infty(t)$ y $p_B(t)$, la ecuación (A2.1.25) se resuelve para encontrar $R(t)$. Rayleigh (1917) la derivó utilizándola en ausencia de términos viscosos y de tensión superficial. Por otra parte, Plesset (1949) la enfocó al problema de burbujas de cavitación viajeras (Brennen, 1995).

A2.2 VISCOELASTICIDAD LINEAL

Como se especificó con anterioridad, el término *viscoelástico* refiere a la existencia en un material, de propiedades viscosas y elásticas simultáneamente. Aunque en la realidad, ambas características coexisten, la respuesta particular de una muestra dada dependerá de la escala de tiempo con que se lleve a cabo el ensayo en relación al tiempo natural del material. Si el experimento es relativamente lento, la sustancia parecerá ser viscosa y viceversa. A escalas de tiempo intermedias se observa un comportamiento viscoelástico.

El fenómeno de la viscoelasticidad no es una suposición generalizada; aunque por experiencia, es preferible asumir que todos los materiales son viscoelásticos en lugar de figurar que algunos no lo son. Tomando en cuenta este postulado es aceptable decir que determinado material muestra un comportamiento newtoniano o hookiano en determinada situación, dejando espacio para detallar otras respuestas en el material bajo otras circunstancias. No obstante, muchos investigadores especializados en reología refieren a ciertas clases de líquidos como newtonianos y sólidos como hookianos, en lugar de etiquetar su comportamiento, ya que dichas sustancias pueden desviarse de esas respuestas idealizadas.

Algunas de las razones que justifican la búsqueda de la respuesta viscoelástica de los materiales son:

- La posibilidad de esclarecer la estructura molecular.

- Conocer sus parámetros y funciones en experimentos de relevancia, facilita los controles de calidad de los procesos industriales.
- Entenderla facilita adentrarse en el tópico mucho más complejo de la viscoelasticidad no lineal.
- En tribología, donde es necesario conocer una función de viscosidad tangencial estacionaria $\eta(\dot{\gamma})$ para velocidades altas (10^6 [s^{-1}] o mayores).

Esta última motivación es necesaria en lubricantes newtonianos de baja viscosidad trabajando a altas velocidades, ya que el calentamiento dificultaba calcular dicha función, originando la búsqueda por una analogía entre las viscosidades tangencial y dinámica determinada bajo condiciones viscoelásticas lineales, argumentando que la última era más fácil de medir.

A2.2.1 EL SIGNIFICADO Y CONSECUENCIAS DE LA LINEALIDAD

El principio de superposición fundamenta matemáticamente la teoría de la viscoelasticidad lineal, implicando que la respuesta, como podría ser la deformación, es proporcional en cualquier tiempo al valor de la señal inicial, por ejemplo el esfuerzo. De esta manera, si se duplica el esfuerzo también lo hará la deformación por consecuencia. Aunado a esto, los coeficientes de diferenciales de tiempo son constantes, los cuales corresponden a parámetros materiales como son el coeficiente de viscosidad o el módulo de rigidez, estando impedidos a cambiar con modificaciones en variables como la deformación o la velocidad de deformación. Además, las derivadas del tiempo son parciales ordinarias, restricción originada porque la teoría lineal solamente es aplicable a pequeños cambios en las variables.

Es posible escribir la ecuación diferencial general para la viscoelasticidad lineal como:

$$\left(1 + \alpha_1 \frac{\partial}{\partial t} + \alpha_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \dots + \alpha_n \frac{\partial^n}{\partial t^n}\right) \sigma = \left(\beta_0 + \beta_1 \frac{\partial}{\partial t} + \beta_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \dots + \beta_m \frac{\partial^m}{\partial t^m}\right) \gamma \quad (A2.2.1)$$

Donde $n=m$ o $n=m-1$ (Oldroyd, 1964).

A2.2.2 LOS MODELOS DE KELVIN Y MAXWELL

A continuación se consideran algunos casos especiales importantes de la ecuación (A2.2.1).

1. Si solamente $\beta_0 \neq 0$ tenemos la ecuación de elasticidad Hookiana (sólido ideal):

$$\sigma = \beta_0 \gamma \quad (A2.2.2)$$

2. Si únicamente $\beta_1 \neq 0$, tenemos:

$$\sigma = \beta_1 \frac{\partial \gamma}{\partial t} \quad (A2.2.3)$$

En otra notación:

$$\sigma = \beta_1 \dot{\gamma} \quad (A2.2.4)$$

La expresión (A2.2.4) representa el flujo viscoso newtoniano, siendo la constante β_1 el coeficiente de viscosidad.

3. Si $\beta_0 (= G)$ y $\beta_1 (= \eta)$ son ambos distintos de cero, mientras que las otras constantes sí lo son, tenemos uno de los modelos más sencillos de viscoelasticidad, conocido como el *modelo Kelvin o Voigt*:

$$\sigma = G\gamma + \eta\dot{\gamma} \quad (A2.2.5)$$

Si un esfuerzo $\bar{\sigma}$ es repentinamente aplicado en $t = 0$ y sostenido constante de ahí en adelante, es fácil demostrar que para el modelo Kelvin:

$$\gamma = (\bar{\sigma}/G)[1 - \exp(-t/\tau_K)] \quad (A2.2.6)$$

De la expresión anterior, τ_K ha sido asentado para el radio η/G , teniendo la dimensión de tiempo y su función es controlar la velocidad de crecimiento de la deformación γ siguiendo la imposición del esfuerzo $\bar{\sigma}$.

La Figura A2.2.1 expone cómo es el desarrollo del grupo adimensional $\gamma G/\bar{\sigma}$. El valor de equilibrio de γ es $\bar{\sigma}/G$, mientras que en el modelo de Hooke se tiene $\frac{\gamma G}{\bar{\sigma}} = 1$. Lo que diferencia ambos modelos es que en el de Hooke el valor final de deformación se alcanza de forma instantánea, por el contrario, en el modelo de Kelvin es retrasado,

denotándose el tiempo de demora por la constante τ_K . El calificativo de *instantáneo* es idealizado, ya que en la realidad la deformación no crece en un tiempo cero aun tratándose de un sólido elástico perfecto porque la onda de esfuerzo viaja a la velocidad del sonido, provocando un retraso.

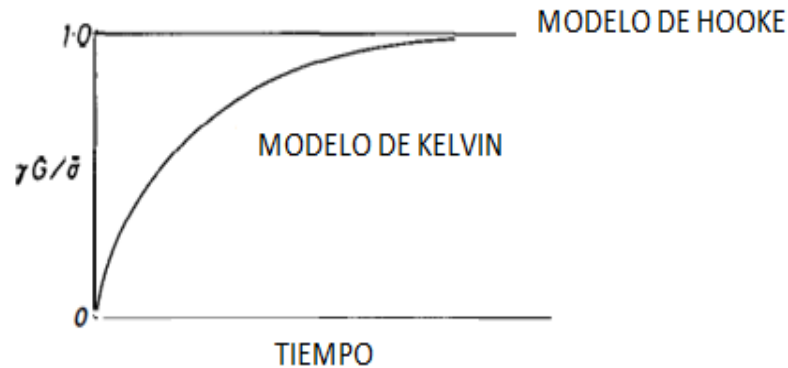


Figura A2.2.1 Crecimiento de la deformación γ siguiendo la aplicación del esfuerzo σ en el tiempo $t=0$ para los modelos de Kelvin y Hooke.¹⁴

Una forma muy popular para exponer la respuesta viscoelástica lineal es con modelos mecánicos unidimensionales, consistentes en resortes y amortiguadores ubicados en serie o paralelo; debido a la analogía existente con el comportamiento de un material real; aunque es fundamental puntualizar que los elementos por su naturaleza intrínseca no guardan ninguna relación directa con la sustancia. La correspondencia entre ambos se logra si la ecuación diferencial que relaciona la fuerza y extensión es la misma que la referida al esfuerzo y deformación para el material; siendo así, equivalentes.

En los modelos mecánicos, la deformación Hookiana se representa por un elemento en el cual la fuerza sea proporcional a la extensión: un resorte, mientras que para el flujo newtoniano de forma análoga se simboliza con uno en donde la fuerza sea proporcional a la velocidad de extensión: el amortiguador, como se puede observar en la Figura A2.2.2; siendo la conexión de estos elementos básicos en serie o paralelo (Figura A2.2.3) la descripción de materiales con comportamiento más complejo.

Cuando se combina en paralelo un resorte y un amortiguador resulta el modelo de Kelvin. Para interpretar estos diagramas es requisito que los conectores horizontales permanezcan siempre paralelos, lo que permite percatarse de que la extensión de un resorte

¹⁴ BARNES H.A.; HUTTON J.F.; WALTERS, K. (1989). *An Introduction To Rheology*. Elsevier Science Publishers, 39.

es siempre igual a la deformación en el amortiguador. Esto habilita plantear una ecuación de balance para las fuerzas actuando sobre el conector. Por tanto, para el modelo de Kelvin el esfuerzo total σ es igual a la suma de las sollicitaciones en cada elemento. Así:

$$\sigma = \sigma_E + \sigma_V \quad (A2.2.7)$$

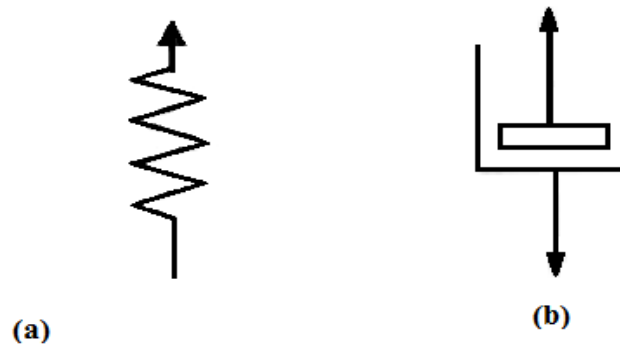


Figura A2.2.2 Representación diagramática del comportamiento reológico ideal: (a) El resorte Hookeano; (b) El amortiguador newtoniano.¹⁵

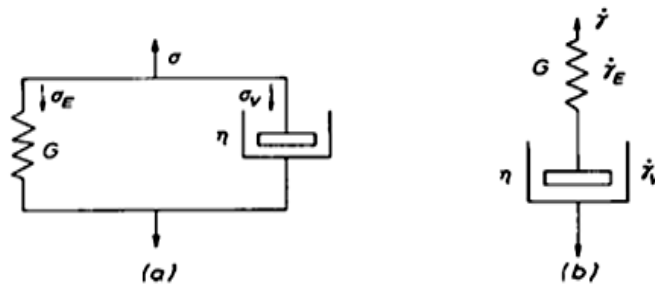


Figura A2.2.3 Los modelos viscoelásticos lineales más simples: (a) El modelo Kelvin; (b) El modelo Maxwell.¹⁶

Sustituyendo $\beta_0 = G$ y $\beta_1 = \eta$ tenemos:

¹⁵ BARNES H.A.; HUTTON J.F.; WALTERS, K. (1989). *An Introduction To Rheology*. Elsevier Science Publishers, 40.

¹⁶ BARNES H.A.; HUTTON J.F.; WALTERS, K. (1989). *An Introduction To Rheology*. Elsevier Science Publishers, 41.

$$\sigma = G\gamma + \eta\dot{\gamma} \quad (\text{A2.2.8})$$

Después de la imposición súbita del esfuerzo cortante $\bar{\sigma}$, el resorte alcanzará la deformación establecida en la relación $\frac{\bar{\sigma}}{G}$, pero el amortiguador retardará el incremento en su deformación y mientras la viscosidad sea mayor, la respuesta será más lenta como se aprecia en el diagrama del modelo de Kelvin. El *modelo de Maxwell* es también muy simple. Su correspondiente ecuación diferencial se obtiene haciendo $\alpha_1 \neq 0$ y $\beta_1 \neq 0$. Resultando:

$$\sigma + \tau_M \dot{\sigma} = \eta\dot{\gamma} \quad (\text{A2.2.9})$$

Donde $\alpha_1 = \tau_M$ y $\beta_1 = \eta$.

Cuando se aplica repentinamente una determinada velocidad de deformación particular $\bar{\gamma}$ en $t = 0$ y se sostiene en ese valor para los tiempos subsecuentes, se demuestra que para $t > 0$,

$$\sigma = \eta\bar{\gamma}[1 - \exp(-t/\tau_M)] \quad (\text{A2.2.10})$$

Lo cual implica que para un punto inicial de esfuerzo cortante, su crecimiento es retrasado y la constante de tiempo se denota por τ_M , conocida como *tiempo de relajación*. En otro orden de ideas, si una velocidad de deformación constante $\bar{\gamma}$ para $t < 0$ es removida súbitamente en $t = 0$, es evidente que para $t \geq 0$:

$$\sigma = \eta\bar{\gamma} \exp(-t/\tau_M) \quad (\text{A2.2.11})$$

Debido a que el esfuerzo se relaja de manera exponencial desde su punto de equilibrio hasta cero, como señala la Figura 3.2.4.

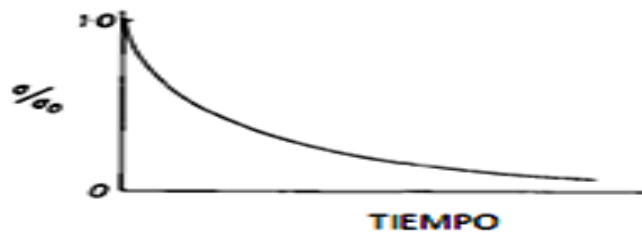


Figura A2.2.4 Decaimiento del esfuerzo en $t=0$ para el modelo de Maxwell, donde $\sigma_0 = \eta\bar{\gamma}$.¹⁷

¹⁷ BARNES H.A.; HUTTON J.F.; WALTERS, K. (1989). *An Introduction To Rheology*. Elsevier Science Publishers, 42.

El diagrama del modelo de Maxwell consiste en un resorte y un amortiguador conectados en serie; siendo así, las deformaciones o las velocidades de deformación son aditivas por lo que el valor total $\dot{\gamma}$ consiste en la suma de ambas:

$$\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_E + \dot{\gamma}_V \quad (A2.2.12)$$

Lo cual conduce a:

$$\dot{\gamma} = \frac{\sigma}{G} + \frac{\sigma}{\eta} \quad (A2.2.13)$$

Reacomodando:

$$\sigma + \tau_M \dot{\sigma} = \eta \dot{\gamma} \quad (A2.2.14)$$

Aumentando la complejidad, ahora se tienen tres parámetros de material: α_1 , β_1 y β_2 distintos a cero, correspondiente al *modelo de Jeffreys*. Su ecuación es:

$$\sigma + \tau_M \dot{\sigma} = \eta (\dot{\gamma} + \tau_J \ddot{\gamma}) \quad (A2.2.15)$$

Y tiene dos constantes de tiempo τ_M y τ_J . Con la elección adecuada de estos tres parámetros se pueden seguir dos alternativas de modelos resorte-amortiguador correspondientes al mismo comportamiento mecánico descrito por la ecuación (A2.2.15), siendo uno de ellos una simple extensión del modelo de Kelvin y el otro del de Maxwell como aparece en la Figura A2.2.5.

Una ecuación de este tipo fue derivada matemáticamente por Frohlich y Sack (1946) para explicar cómo es la respuesta una suspensión diluida de esferas sólidas elásticas inmersas en un líquido viscoso.

De forma análoga, Oldroyd (1953) realizó lo propio para una emulsión diluida de un líquido viscoso incompresible en otro. Oldroyd (1953) tomando en cuenta el efecto del deslizamiento interfacial para la suspensión diluida, demostró que dos parámetros más distintos de cero (α y β_2) están involucrados.

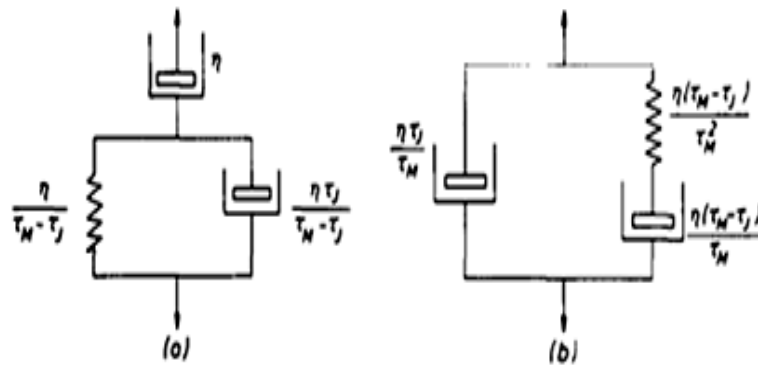


Figura A2.2.5 Equivalentes resorte-amortiguador del modelo Jeffreys.¹⁸

Aumentando el nivel de complejidad, el *modelo Burgers* involucra cuatro elementos simples y toma las formas de equivalencia mecánica de la Figura A2.2.6. La ecuación constitutiva asociada a este modelo tiene la forma:

$$\sigma + (\lambda_3 + \lambda_4)\dot{\sigma} + \lambda_3\lambda_4\ddot{\sigma} = (\eta_3 + \eta_4)\dot{\gamma} + (\lambda_4\eta_3 + \lambda_3\eta_4)\ddot{\gamma} \quad (\text{A2.2.16})$$

En esta ecuación las λ_s son constantes de tiempo, siendo el símbolo λ tan común como τ en la literatura de reología. De hecho, será la literal empleada para el modelo establecido en este trabajo.

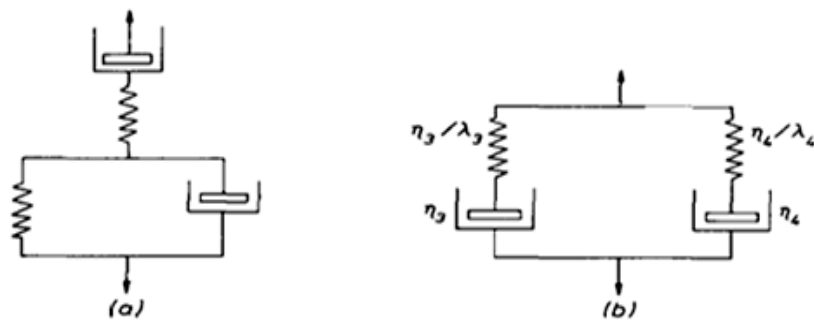


Figura A2.2.6 El modelo Burgers: (a) y (b) son representaciones equivalentes de este modelo lineal de cuatro parámetros.¹⁹

¹⁸ ¹⁹ BARNES H.A.; HUTTON J.F.; WALTERS, K. (1989). *An Introduction To Rheology*. Elsevier Science Publishers, 43.

A2.2.3 EL ESPECTRO DE RELAJACIÓN

Roscoe (1950) demostró que todos los modelos, sin importar el nivel de complejidad, se pueden reducir a dos formas canónicas: los modelos generalizados de Kelvin y Maxwell. Este último, puede tener un número determinado o infinito de elementos Maxwell, cada uno con diferentes tiempos de relajación.

Si se seleccionan adecuadamente los parámetros del modelo, es viable demostrar que las formas canónicas son mecánicamente equivalentes. Alfrey (1945) elaboró metodologías para computar los parámetros de una forma separados de la otra, reportando en el mismo documento, que una ecuación diferencial lineal puede obtenerse por las formas canónicas o viceversa.

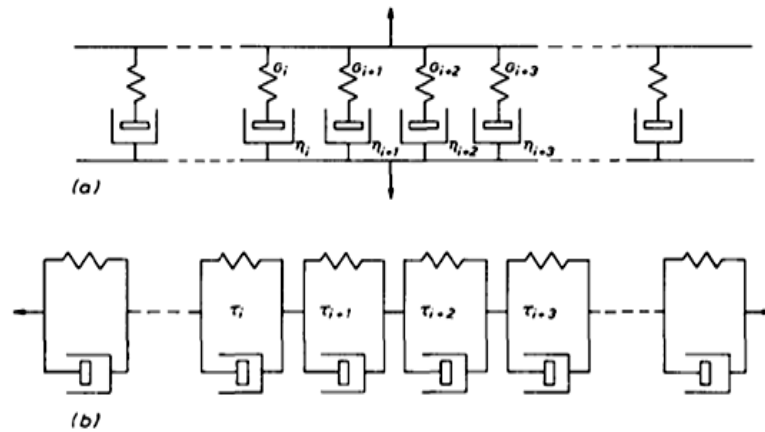


Figura A2.2.7 Modelos canónicos resorte-amortiguador: (a) Distribución de los procesos de relajación de Maxwell; (b) Distribución de los procesos de retardo de Kelvin.¹⁹

Finalmente, la elección entre los distintos métodos de representar el comportamiento viscoelástico y las dos formas canónicas del modelo mecánico es libre, dado que son equivalentes, con el objetivo de realizar una generalización de materiales requiriendo una infinidad continua de parámetros para especificarlos.

Es recomendable comenzar con un modelo de Maxwell simple caracterizado por la siguiente ecuación, para generalizar desde una infinidad hacia una distribución continua de tiempos de relajación:

$$\sigma(t) = \frac{\eta}{\tau} \int_{-\infty}^t \exp[-(t-t')/\tau] \dot{\gamma}(t') dt' \quad (\text{A2.2.17})$$

¹⁹ BARNES H.A.; HUTTON J.F.; WALTERS, K. (1989). *An Introduction To Rheology*. Elsevier Science Publishers, 44.

Considerando un número de elementos discretos de Maxwell n , conectados en paralelo, generalizamos una ecuación, de acuerdo al principio de superposición, como se explicó al inicio de este tema, que resulta:

$$\sigma(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\eta_i}{\tau_i} \int_{-\infty}^t \exp[-(t-t')/\tau] \dot{\gamma}(t') dt' \quad (\text{A2.2.18})$$

Donde η_i y τ_i ahora corresponden al i -ésimo elemento de Maxwell (Barnes, Hutton, Walters, 1989).

A2.3 ECUACIONES CONSTITUTIVAS SIMPLES DEL TIPO OLDROYD/MAXWELL

Las ecuaciones asociadas a resolver situaciones reales de este tipo de flujos resultan problemáticas por su elevada complejidad y limitada aplicabilidad. Es por esto que se han llevado a cabo gran cantidad de intentos para desarrollar ecuaciones constitutivas más simples y con mayor capacidad predictiva, teniendo su origen en la búsqueda por conocer la microestructura del fluido o por la necesidad de simular el comportamiento real en entornos de flujo simple reométrico.

Fue así como surgieron los modelos de Oldroyd, a partir de un deseo por generalizar ecuaciones lineales relativamente simples en su solución que abarcaran todas las condiciones de movimiento y esfuerzo, tal es el caso del modelo de Jeffreys, resultando en aproximaciones usuales para suspensiones muy diluidas y emulsiones sujetas a esfuerzos pequeños (Frohlich y Sack 1946, Oldroyd 1953, Oldroyd 1958).

La esencia del problema radica en mantener cierto compromiso en capturar la complejidad de la física hasta donde se conoce y generar modelos con capacidad predictiva; a pesar de los detalles prohibitivos que significa estudiar completamente la microestructura. Otro factor importante para optar por el modelo constitutivo reside en la aplicación particular; por estas razones, deben satisfacer ineludiblemente las siguientes condiciones:

- (i) Los principios de formulación.
- (ii) Manifestar la física de la microestructura.
- (iii) Simular el comportamiento del fluido en distintos tipos de flujo: simple, cortante simple estacionario, cortante oscilatorio y flujo extensional.
- (iv) Considerar la aplicación que se estudia.

Conocidas las restricciones y el amplio espectro de posibilidades, a continuación se enlistan en forma tabular varios modelos constitutivos diferenciales, ampliamente

aceptados en la literatura por su probada capacidad predictiva; siendo casos especiales de las formas canónicas generalizadas:

$$T_{ik} = T_{ik}^{(1)} + T_{ik}^{(2)} \quad (\text{A2.3.1})$$

Donde los términos de lado derecho están dados por:

$$\exp\left(\epsilon \frac{\lambda_1}{\eta_1} T_{mm}^{(1)}\right) T_{ik}^{(1)} + \alpha \frac{\lambda_1}{\eta_1} T_{ij}^{(1)} T_{jk}^{(1)} + \lambda_1 \square T_{ik}^{(1)} = 2\eta_1 d_{ik} \quad (\text{A2.3.2})$$

Asimismo, λ_1 , η_1 , η_2 , ϵ , y a son todas constantes del material; a menos que se refiera lo contrario para algún caso particular y la derivada \square está dada por la siguiente expresión donde a es un parámetro escalar:

$$\square S_{ik} = \left(1 - \frac{a}{2}\right) \nabla S_{ik} + \frac{a}{2} \Delta S_{ik} \quad (\text{A2.3.3})$$

Tabla A2.3.1 Casos especiales de la forma canónica general de ecuación constitutiva²⁰

Model	ϵ	α	a	$\lambda_1 (\geq 0)$	$\eta_1 (\geq 0)$	$\eta_2 (\geq 0)$
Giesekus (1982)	0	a	0	λ_1	η_1	0
Phan-Thien-Tanner (1977)	ϵ	0	a	λ_1	η_1	0
Phan-Thien-Tanner B (Phan-Thien 1984)	0	0	a	λ_1	$\eta_1(I_2)$	0
Johnson-Segalman (1977)	0	0	a	λ_1	η_1	0
White-Metzner (1963)	0	0	0	$\lambda_1(I_2)$	$\eta_1(I_2)$	0
Oldroyd B	0	0	0	λ_1	η_1	η_2
Corotational Oldroyd (Oldroyd 1958)	0	0	1	λ_1	η_1	η_2
Upper convected Maxwell	0	0	0	λ_1	η_1	0
Second-order model	Not applicable in this form					
Leonov (1987)	0	$\frac{1}{2}$	0	λ_1	η_1	0

²⁰ BARNES H.A.; HUTTON J.F.; WALTERS, K. (1989). *An Introduction To Rheology*. Elsevier Science Publishers 154.

Utilizado la forma canónica alternativa:

$$\exp\left(\in \frac{\lambda_1}{\eta_1} T_{mm}\right) T_{ik} + \alpha \frac{\lambda_1}{\eta_1} T_{ij} T_{jk} + \lambda_1 \overset{\square}{T}_{ik} = 2\eta_1 \left(d_{ik} + \lambda_2 \overset{\square}{d}_{ik}\right) \quad (A2.3.4)$$

En la expresión anterior se ha omitido la contribución de η_2 y fue sustituida, en esencia, por un tiempo de retardo A_T .

Tabla A2.3.2 Casos especiales de la forma canónica general de ecuación constitutiva²¹

Model	ϵ	α	a	$\lambda_1 (\geq 0)$	λ_2	$\eta_1 (> 0)$
Giesekus (1982)	0	α	0	λ_1	0	η_1
Phan-Thien-Tanner (1977)	ϵ	0	a	λ_1	0	η_1
Phan-Thien-Tanner B (Phan-Thien 1984)	0	0	a	λ_1	λ_2	$\eta_1(I_2)$
Johnson-Segalman (1977)	0	0	a	λ_1	0	η_1
White-Metzner (1963)	0	0	0	$\lambda_1(I_2)$	0	$\eta_1(I_2)$
Oldroyd B	0	0	0	λ_1	> 0	η_1
Corotational Oldroyd (Oldroyd 1958)	0	0	1	λ_1	> 0	η_1
Upper convected Maxwell	0	0	0	λ_1	0	η_1
Second-order model	0	0	0	0	< 0	η_1
Leonov (1987)	0	$\frac{1}{2}$	0	λ_1	0	η_1

Tabla A2.3.3 Formas reométricas derivadas de algunos modelos de las tablas anteriores²²

Model	$\eta(\dot{\gamma})$	$N_1(\dot{\gamma})$	$N_2(\dot{\gamma})$	$\eta_E(\epsilon)$
Oldroyd B	$\eta_1 + \eta_2$	$2\eta_1\lambda_1\dot{\gamma}^2$	0	$\frac{2\eta_1}{1-2\lambda_1\epsilon} + \frac{\eta_1}{1+\lambda_1\epsilon} + 3\eta_2$
Corotational Oldroyd	$\frac{\eta_1}{I + \lambda_1^2\dot{\gamma}^2} + I2$	$\frac{2\lambda_1\eta_1\dot{\gamma}^2}{I + 2\lambda_1^2\dot{\gamma}^2}$	$-\frac{N_1(\dot{\gamma})}{\dot{\gamma}}$	$3(\eta_1 + \eta_2)$
Johnson-Segalman (1977)	$\frac{\eta_1}{1 + 2a\left(1 - \frac{a}{2}\right)}$	$\frac{2\eta_1\lambda_1\dot{\gamma}^2}{1 + 2a\left(1 - \frac{a}{2}\right)}$	$-\frac{a}{2}N_1(\dot{\gamma})$	$\frac{2\eta_1}{1-2(1-a)\lambda_1\epsilon} + \frac{\eta_1}{1+(1-a)\lambda_1\epsilon}$
White-Metzner (1963)	$\eta_1(\dot{\gamma})$	$2\eta(\dot{\gamma})\lambda_1(\dot{\gamma})\dot{\gamma}^2$	0	$\frac{2\eta_1(\sqrt{3}\epsilon)}{1-2\lambda_1(\sqrt{3}\epsilon)\epsilon} + \frac{\eta_1(\sqrt{3}\epsilon)}{1+\lambda_1(\sqrt{3}\epsilon)\epsilon}$
Phan-Thien-Tanner B (Phan-Thien 1984)	$\frac{\eta_1(\dot{\gamma})}{1 + 2a\left(1 - \frac{a}{2}\right)\lambda_1^2\dot{\gamma}^2}$	$\frac{2\eta_1(\dot{\gamma})\lambda_1\dot{\gamma}^2}{1 + 2a\left(1 - \frac{a}{2}\right)\lambda_1^2\dot{\gamma}^2}$	$-\frac{a}{2}N_1(\dot{\gamma})$	$\frac{2\eta_1(\sqrt{3}\epsilon)}{1-2(1-a)\lambda_1\epsilon} + \frac{\eta_1(\sqrt{3}\epsilon)}{1+(1-a)\lambda_1\epsilon}$
Giesekus (1982)	Consult the reference for detailed expressions			

²¹ ²² BARNES H.A.; HUTTON J.F.; WALTERS, K. (1989). *An Introduction To Rheology*. Elsevier Science Publishers, 154-155.

La contribución de *fuerza newtoniana* es denotada por el término A en la forma alterna y es introducida para manifestar la aportación del solvente tanto en líquidos como en soluciones poliméricas y a su vez, para asegurar en flujo simple que el esfuerzo cortante es una función creciente y monótona de flujo cortante. En algunos modelos de Maxwell (con $\eta_2 = 0$ o $A = 0$) se padece el problema de un máximo de esfuerzos a menos que $a = 0$ o 2 .

Dado que para los modelos de Maxwell y Oldroyd $a = 0$, la expresión (A2.3.3) se reduce a:

$$\square S_{ik} = \nabla S_{ik} \quad (A2.3.5)$$

Por lo anterior, es evidente la presencia de desarrollos que siendo similares involucran ecuaciones integrales en lugar de los modelos diferenciales implícitos anteriores (Barnes, Hutton, Walters, 1989).

APÉNDICE A

Tal como establecen en su trabajo Naude, Méndez (2008) es necesario aplicar la regla de Leibnitz con el fin de evaluar las derivadas temporales del primer término subsecuente a la igualdad en la ecuación (3.6.25). Dicho criterio establece lo siguiente:

Sea

$$m(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} F(x, x') dx' \quad (A.1)$$

Entonces de aplicar la regla resulta:

$$\frac{dm}{dx} = F(x, h(x)) \frac{dh}{dx} - F(x, g(x)) \frac{dg}{dx} + \int_{g(x)}^{h(x)} \frac{dF(x, x')}{dx} dx' \quad (A.2)$$

APÉNDICE B

B.1 ALGORITMO NUMÉRICO

Con el programa MATHEMATICA® (Wolfram Research Inc.) se resolvió el sistema de ecuaciones (2.4.31)-(2.4.33) con las condiciones iniciales(2.4.34).

El comando utilizado (*NDSolve*) obtiene una solución numérica para las ecuaciones diferenciales de tipo ordinaria planteadas.

Se hizo uso de opciones dentro del comando *NDSolve* como *MaxSteps*, *MaxStepSize* para extender el rango de la variable independiente (t^* , tiempo adimensional) y obtener resultados más precisos. La primera de estas indica el número máximo de pasos a seguir en la generación de un resultado, mientras que la segunda especifica el tamaño máximo de cada uno de ellos. Se consideraron los valores óptimos de las opciones anteriores para obtener una respuesta satisfactoria junto con un tiempo de máquina adecuado.

$$\begin{aligned} \text{Eq1} = D[r2[t], t] = & \\ = -\left(\frac{3}{2}\right) * \left(\frac{r2[t]^2}{r1[t]}\right) - \frac{\delta}{r1[t]^3} * r2[t] + \frac{\beta}{r1[t]^4} * \left(1 \right. & \\ \left. - \frac{\epsilon * r2[t]}{r1[t]^2}\right) - \frac{(\beta0 + \beta A * \text{Sin}[t])}{r1[t]} - \frac{\text{We}}{r1[t]^2} + \frac{\text{Sp}[t]}{r1[t]} & \end{aligned}$$

$$\text{Eq2} = D[\text{Sp}[t], t] == -4 * \frac{r2[t]}{r1[t] * \text{De} * \text{Res}} - \left(\frac{1}{\text{De}} + 3 * \frac{r2[t]}{r1[t]}\right) * \text{Sp}[t]$$

$$\text{Eq3} = r2[t] == D[r1[t], t]$$

$$\begin{aligned} \text{sol} = \text{NDSolve}[\{\text{Eq1}, \text{Eq2}, \text{Eq3}, r1[0] == 1, r2[0] == 0, \text{Sp}[0] = & \\ = 0\}, \{r1[t], r2[t], \text{Sp}[t]\}, \{t, 680\}, \text{MaxSteps} & \\ \rightarrow 10^6, \text{MaxStepSize} \rightarrow 0.01] & \end{aligned}$$

Posteriormente se procedió a graficar las soluciones con los comandos *ParametricPlot* dado que los parámetros son función de la misma variable independiente y de esta manera se visualiza el espacio fase.

```
ParametricPlot[Evaluate[{{r1[t], r2[t]}/. sol}], {t, 0, 680}, PlotRange
```

```
→ All, FrameLabel
```

```
→ {Style[a, 18, Plain], Style[ $\frac{da}{dt}$ , 18]}, FrameStyle
```

```
→ {Directive[18], Directive[18]}, Axes → False, RotateLabel
```

```
→ False, Frame → True, AspectRatio → 1, PlotStyle
```

```
→ Directive[Black, Opacity[1]]]
```

El comando *Plot* permite graficar el radio adimensional a vs. t^* :

```
Plot[Evaluate[r1[t]/. sol], {t, 0, 300}, PlotRange → All, FrameLabel
```

```
→ {Style[t*, 18, Plain], Style[a, 18, Plain]}, FrameStyle
```

```
→ {Directive[18], Directive[18]}, RotateLabel → False, Axes
```

```
→ False, Frame → True, PlotStyle
```

```
→ Directive[Black, Opacity[1]]]
```

Para verificar la precisión de la solución se realizó un procedimiento similar con el programa MAPLE[®] 12 (Maplesoft):

```
> dsys := {Eq1, Eq2, Eq3} :
> ics := r1(0) = 1, r2(0) = 0, sp(0) = 0;
> dsol := dsolve({Eq1, Eq2, Eq3, ics}, numeric, method = rkf45,
    maxfun = 500000, output = array([seq(i, i = 0..1000, 0.1)])) :
> A := rtable(dsol(1)[2, 1]) :
> with(ExcelTools) :
> Export(A, "Tabladevalores.xls")
```

Obteniendo la solución numérica para graficar con la paquetería ORIGINPRO[®] 8 (OriginLab Corporation).

BIBLIOGRAFÍA

ALLEN, John; KRUSE, Dustin E.; FERRARA, Katherine. (2001). Shell Waves and Acoustic Scattering from Ultrasound Contrast Agents. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*. Vol. 48, No. 2.

ALLEN, John S.; MAY, Donovan J.; FERRARA, Katherine W. (2002). Dynamics of Therapeutic Ultrasound Contrast Agents. *Ultrasound in Med. & Biol.* Vol. 28, No. 6. USA.

ALLEN, John S.; ROY, Ronald A. (2000). Dynamics of gas bubbles in viscoelastic fluids. I. Linear viscoelasticity. *Acoustical Society of America*.

ALLEN, John S.; ROY, Ronald A. (2000). Dynamics of gas bubbles in viscoelastic fluids. II. Nonlinear viscoelasticity. *Acoustical Society of America*.

AMELKIN, V. V. (1990). *Differential Equations in Applications*. Science for Everyone. Mir Publishers Moscow. Union of Soviet Socialist Republics.

ARIS, Rutherford. (1962). *Vectors, Tensors and the Basic Equations of Fluid Mechanics*. DOVER PUBLICATIONS, INC. NEW YORK.

BARNES H.A.; HUTTON J.F.; WALTERS, K. (1989). *An Introduction To Rheology*. Elsevier Science Publishers.

BRENNEN, Christopher E. (1995). *Cavitation and Bubble Dynamics*. California Institute of Technology. Oxford University Press.

BRUJAN, Emil-Alexandru. (1999). A first-order model for bubble dynamics in a compressible viscoelastic liquid. *J. Non-Newt. Fluid Mech.*

BRUJAN, Emil-Alexandru. (2011). *Cavitation in Non-Newtonian Fluids. With Biomedical and Bioengineering Applications*. Springer.

CHAHINE, G.L., Fruman, D.H. (1979). Dilute polymer solution effects on bubble growth and collapse. *Phys. Fluids* 22.

DOPAZO GARCÍA, César. (2008). ¿Cavitar o no Cavitar? La Inevitable Ubicuidad de las Burbujas. *Real Academia de Ingeniería*.

ELLIS, A.T.; HOYT, W.J., in: J.M. ROBERTSON (Ed.). (1968). Some Effects of Macromolecules on Cavitation Inception. *ASME Cavitation Forum*.

FOGLER, H. S.; GODDARD, J. D. (1970). Collapse of Spherical Cavities in Viscoelastic Fluids. *The Physics of Fluids*, Volume 13, Number 5.

GIAVEDONI, Maria; SAITA Fernando. (1992). Interfacial Viscosity in Viscous Free Surface Flows. A Sample Case. *American Chemical Society*.

HARA, S.K., Schowalter, W.R. (1984). Dynamics of nonspherical bubbles surrounded by viscoelastic fluid. *J. Non-Newt. Fluid Mech.* **14**.

HOFF, Lars. (1996). Acoustic properties of ultrasonic contrast agents. *Ultrasonics* 34.

HUANG, Huaxiong; LAI, Ming-Chih; TSENG, Hsiao-Chieh. (2008). *A parametric derivation of the surfactant transport equation along a deforming fluid interface*.

HUGHES, William F; GAYLORD, Eber W. (1964). *Basic Equations of Engineering Science*. Schaum Publishing Company. USA.

JIMENEZ-FERNANDEZ, J; CRESPO, A. (2005). Bubble oscillation and inertial cavitation in viscoelastic fluids. *Ultrasonics*.

JIMENEZ-FERNANDEZ, J; CRESPO, A. (2006). The collapse of gas bubbles and cavities in a viscoelastic fluid. *International Journal of Multiphase Flow*.

KAFIABAD, H. Amini; SADEGHY, K. (2010). Chaotic behavior of a single spherical gas bubble surrounded by a Giesekus liquid: A numerical study. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*.

KHISMATULIN, D.B., NADIM, A. (2002). Radial oscillations of encapsulated microbubbles in viscoelástico liquids. *Phys. Fluids* 14.

KIM, C. (1994) Collapse of spherical bubbles in Maxwell fluids. *J. Non-Newt. Fluid Mech*.

KVIKLIEN, Adriana; JURKONIS, Rytis; RESSNER, Marcus; HOFF, Lars; JANSSON, Tomas; *et al.* (2004). Modelling of nonlinear effects and the response of ultrasound contrast micro bubbles: simulation and experiment. *Ultrasonics* 42.

LEVITSKIY, S.P.; LYSTROV, A.T. (1976). Effect of viscoelastic properties of a liquid on the dynamics of small oscillations of a gas bubble. *J. Appl. Mech. Technol. Phys.* 17.

LEVITSKIY, S.P.; SHULMAN, Z.P. (1995). Bubbles in Polymeric Liquids: Dynamics and Heat- Mass Transfer. *Technomic Publishing Company, Inc., Pennsylvania, USA*.

NAUDE, J.; MÉNDEZ, F. (2008). Periodic and chaotic acoustic oscillations of a bubble gas immersed in an Upper Convective Maxwell fluid. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*.

SARKAR, Kausik; SHI, William T. (2005) .Characterization of ultrasound contrast microbubbles using in vitro experiments and viscous and viscoelastic interface models for encapsulation. *Acoustical Society of America*.

SHIMA, A.; TSUJINO, T.; NANJO, H. (1986). Nonlinear oscillations of gas bubbles in viscoelastic fluids. *Ultrasonics 24*.

TANASAWA, I., YANG, W.J. (1970). Dynamic behaviours of a gas bubble in viscoelastic liquid. *J. Appl. Phys. 41*.

THOMPSON, J.M.T.; STEWART, H. B. (2002). *Nonlinear Dynamics and Chaos*. Second Edition. John Wiley & Sons, Ltd.

UBAL, Sebastián; GIAVEDONI, María D.; SAITA, Fernando A. (2004). Efecto de la Viscosidad Interfacial en la Generación de Ondas de Faraday Bidimensionales. *Mecánica Computacional Vol. XXIII*.

ZANA, E., LEAL, L.G. (1975). Dissolution of a stationary gas bubble in a quiescent, viscoelastic liquid. *Ind. Eng. Chem. Fundam. 14*.