

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

**CARACTERIZACIÓN DE UN BANCO DE PRUEBAS
PARA ESTUDIAR LA FRICCIÓN LLANTA-PAVIMENTO**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
INGENIERO MECATRÓNICO

PRESENTA

OCTAVIO ORIOI CASTILLO GUTIÉRREZ.

DIRECTOR

DR. LUIS A. ALVAREZ-ICAZA LONGORIA

CODIRECTORA

JEANNETE GUADALUPE AGUILAR MARTÍNEZ

México, D.F. 2012

Agradecimientos

Gracias a la Universidad Nacional Autónoma de México por haberme acogido en sus brazos durante mi adolescencia y mi juventud. En sus muros me he formado como persona y he encontrado el inicio de un camino profesional.

El agradecimiento más grande es para a mi familia: a mi padre Emilio, a mi madre Quetush, a mi hermano Milo, a mi hermana Hallyne y a mi hermanita Lili. En sus consejos, sus críticas, sus regaños, y en sus bromas que nunca me han dejado solo, encuentro el motivo para seguir adelante.

A mi familia que tanto quiero...

Índice general

1. Introducción	8
1.1. Objetivo de la tesis	9
1.2. Estructura del trabajo	9
2. Modelos de fricción	10
2.1. Modelo clásico de fricción	10
2.2. Modelos estáticos de fricción llanta-pavimento	14
2.3. Modelos dinámicos	15
2.3.1. Modelo de Dahl	16
2.3.2. Modelo de cerdas	16
2.3.3. Modelo integrador con reset	17
2.3.4. Modelo de LuGre	18
3. Descripción de la instalación	19
3.1. Características mecánicas del sistema	20
3.1.1. Rodillo	20
3.1.2. Llanta	20
3.1.3. Motor	20
3.2. Adquisición de datos	21
4. Modelos matemáticos de la instalación	23
4.1. Modelo de un cuarto de vehículo	23
4.2. Modelo del banco de pruebas	25
4.3. Modelo de LuGre	26
5. Parámetros de la instalación	27
5.1. Radios de la llanta y el rodillo	27
5.2. Obtención de velocidades y aceleraciones	28
5.3. Parámetros de la llanta	29
5.3.1. I_1 y T_{C_1}	30
5.3.2. B_1	32
5.4. Parámetros del rodillo	32
5.4.1. B_2 y T_{C_2}	33

5.4.2. I_2	33
5.5. Discusión de resultados	34
6. Parámetros del modelo de fricción	36
6.1. Efecto Stribeck	36
6.1.1. F_c y σ_2	38
6.1.2. F_s	38
6.1.3. v_s	40
6.2. σ_0 y σ_1 del modelo de Lugre	40
6.3. Discusión de resultados	44
7. Conclusiones	46
Bibliografía	46

Índice de figuras

2.1. <i>Bloque sobre el suelo</i>	10
2.2. <i>Modelo de Coulomb</i>	11
2.3. <i>Fricción viscosa y modelo de Coulomb</i>	12
2.4. <i>Fricción viscosa</i>	12
2.5. <i>Curva Stribeck</i>	13
2.6. <i>Modelo de fricción combinado</i>	13
2.7. <i>Variables involucradas en la fricción estática llanta-pavimento</i>	14
2.8. <i>Mapa estático de fricción</i>	15
2.9. <i>Modelo de Dahl</i>	16
2.10. <i>Contacto entre superficies a través de cerdas elásticas</i>	17
3.1. <i>Banco de pruebas</i>	19
3.2. <i>Componentes de rodillo del banco de pruebas</i>	20
3.3. <i>Acoplamiento de la llanta y el motor</i>	21
3.4. <i>Arquitectura general de dispositivos</i>	21
3.5. <i>Circuito impreso realizado</i>	22
3.6. <i>Arquitectura con la tarjeta MF624</i>	22
4.1. <i>Modelo de un cuarto de vehículo</i>	24
5.1. <i>Medidas del rodillo de la instalación</i>	27
5.2. <i>Diagrama de Bode del filtro</i>	30
5.3. <i>Comportamiento ideal de ω_1, $\dot{\omega}_1$ y $\ddot{\omega}_1$</i>	31
5.4. <i>Comportamiento real de ω_1, $\dot{\omega}_1$ y $\ddot{\omega}_1$</i>	31
5.5. <i>Comportamiento real de ω_2, $\dot{\omega}_2$ y $\ddot{\omega}_2$</i>	33
6.1. <i>Datos efecto Stribeck</i>	38
6.2. <i>Ajuste de F_c y σ_2s</i>	39
6.3. <i>Datos experimentales $g(s)$</i>	39
6.4. <i>Ajuste de $g(s)$</i>	40
6.5. <i>Diagrama de bloques en matlab</i>	42
6.6. <i>Diagrama de bloques del algoritmo del estimador del gradiente</i>	42
6.7. <i>Implementación del estimador del gradiente para el banco de pruebas</i>	42
6.8. <i>Estimación en tiempo real del método del gradiente</i>	43

6.9. <i>Identificación de los parámetros σ_0 y σ_1</i>	43
6.10. <i>Identificación del parámetro σ_2</i>	44
6.11. <i>Velocidad relativa s medida para dos pruebas de control de velocidad: una senoidal, y otra constante</i>	45

Índice de tablas

5.1. Relación de pulsos de la llanta y el rodillo	28
5.2. Resultados de las pruebas aplicados a la llanta	32
5.3. Resultados de las pruebas aplicados a la llanta (parte 2)	32
5.4. Resultados de las pruebas aplicados al rodillo	34
5.5. Resultados de las pruebas aplicados al rodillo (parte 2)	34
6.1. Resultados <i>efecto Stribeck</i>	37

Capítulo 1

Introducción

La fricción es la fuerza de oposición que surge entre dos superficies en contacto al intentar desplazarse una sobre la otra. Las primeras observaciones de la fricción se atribuyen a Leonardo Da’Vinci y las primeras descripciones matemáticas se atribuyen principalmente a Guillaume Amontons (1699) y Charles A. Coulomb (1785) [Armstrong-Hélouvy, 1991].

El estudio de la fricción en la ingeniería ha llevado a mejorar los productos que utilizamos directa o indirectamente, como por ejemplo, sujetadores mecánicos, automóviles, o incluso patines. Todos estos productos son fabricados con máquinas-herramientas y se espera que tengan un buen desempeño durante su vida de uso. Una mejor comprensión de la fricción también ha elevado la vida de estas máquinas-herramientas. Por ejemplo la tribología ha estudiado y mejorado la vida de los acoplamientos mecánicos mediante el uso de lubricantes que disminuyen la fricción y el desgaste entre las piezas. Existen también otras aplicaciones que además de reducir el desgaste, requieren movimientos de alta precisión como los servomecanismos. Aquí nuevamente la fricción juega un papel importante, pues los fenómenos como la histéresis, el “*stick-slip*”¹ y las variaciones en la fuerza de ruptura², resultan importantes y requieren de un modelo dinámico de fricción que prediga su comportamiento y colabore a mejores desempeños en los movimientos de nuestras máquinas.

Por otro lado, en la industria automotriz se requiere de modelos adecuados de fricción que describan adecuadamente la fuerza entre la llanta y el pavimento para brindar mayor seguridad a los pasajeros [Olmos González, 2001]. En esta área resaltan los sistemas de frenado con antibloqueo (ABS) y el diseño de control de acelerado y frenado. Los sistemas ABS regulan la presión aplicada a los frenos para alcanzar el punto máximo de fricción y evitar el derrape, mientras que en el diseño de acelerado (frenado) se trata de seguir perfiles de velocidad con precisión. En esta línea de investigación, el Instituto de Ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de México ha realizado varios estudios. En este instituto

¹*Stick-slip*: Es el cambio no continuo de reposo (*stick*) a deslizamiento (*slip*).

²También conocido como *break-away force*. Se refiere a la fuerza requerida para comenzar el deslizamiento en el fenómeno de la fricción.

se ha diseñado y construido un banco de pruebas para estudiar la fricción llanta-pavimento durante el acelerado y frenado de un vehículo. El banco de pruebas está basado en el modelo de un cuarto de vehículo y su diseño consta de un rodillo, una llanta y un servomotor. El rodillo se comporta como el pavimento y además simula el peso del vehículo sobre la llanta; la llanta está acoplada al eje del servomotor sin transmisión.

1.1. Objetivo de la tesis

En el presente trabajo se obtienen los parámetros físicos del banco de pruebas llanta-pavimento, y las constantes requeridas por el modelo de fricción de LuGre. Estos parámetros son necesarios para implementar y validar los controladores realizados en los trabajos del Instituto de Ingeniería.

Los parámetros son calculados experimentalmente con ayuda de sensores que miden las velocidades del rodillo y la llanta. La adquisición y procesamiento de datos se realizan mediante la tarjeta de adquisición de datos *Humusoft MF624* y el *toolbox XPC Target* de la compañía *The MathWorks*.

1.2. Estructura del trabajo

Este trabajo consta de 7 capítulos. En el capítulo 1 se presenta el objetivo y la estructura de este trabajo de tesis. En el capítulo 2 se presentan los modelos de fricción más populares en ingeniería. En el capítulo 3 se describe el banco de pruebas llanta-pavimento, así como la conexión de dispositivos electrónicos destinados a la adquisición de datos. En el capítulo 4 se presentan los modelos matemáticos asociados al banco de pruebas. En el capítulo 5 se describe la obtención de los parámetros mecánicos de la instalación. El capítulo 6 se destina a obtener los parámetros del modelo de LuGre que describan el comportamiento de la fricción en el banco de pruebas. Finalmente las conclusiones se presentan en el capítulo 7.

Capítulo 2

Modelos de fricción

Para el desarrollo de este trabajo, es necesario conocer y tener una idea de la evolución de los modelos de fricción. Este capítulo tiene como objetivo presentar una breve descripción del modelo clásico de fricción y los modelos que le siguieron. La mayoría de los modelos aquí presentados son aplicados a cualquier situación que involucre fricción. Sin embargo, en el caso de la fricción llanta-pavimento, se verá que la velocidad de deslizamiento corresponde a la velocidad relativa entre la llanta y la velocidad del vehículo.

2.1. Modelo clásico de fricción

Con el objetivo de analizar y deducir el modelo clásico de fricción, imagínese un bloque sobre el suelo como el de la Fig. 2.1. Si se aplica una fuerza F al bloque en dirección

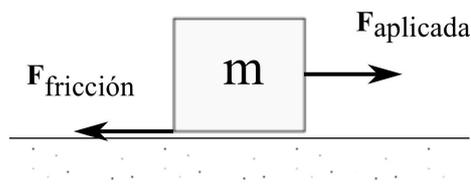


Figura 2.1: *Bloque sobre el suelo*

tangencial, el bloque se deslizará con velocidad v (llámese velocidad de deslizamiento). A partir de este experimento se puede deducir que [Rabinowicz, 1995]:

1. *La fuerza de fricción es proporcional a la carga normal al suelo.*
2. *La fuerza de fricción es independiente del área de contacto.*
3. *La fuerza de fricción es independiente de la velocidad de deslizamiento.*

Matemáticamente los postulados 1-3 pueden escribirse como

$$F = \text{sgn}(v)\mu F_n \tag{2.1}$$

donde F_n es la carga normal, μ es el coeficiente de fricción, y $\text{sgn}(v)$ especifica el signo de la velocidad de deslizamiento v . La ecuación (2.1) es mejor conocida como modelo de Coulomb. La Fig. 2.2 muestra su comportamiento.

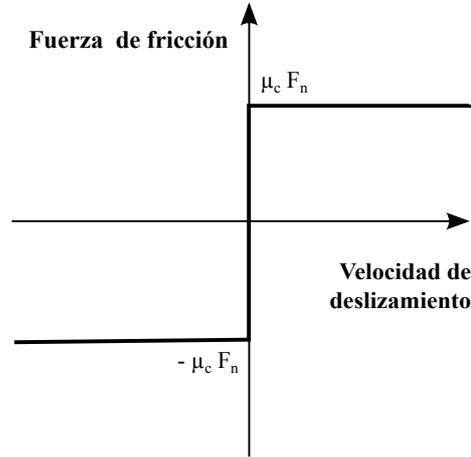


Figura 2.2: *Modelo de Coulomb*

El modelo de Coulomb ha sido el modelo de fricción más popular. Éste explicó de manera sencilla las más inmediatas experiencias con la fricción. Haciendo un pequeño análisis sobre los postulados 1-3, se concluirá que los postulados 1 y 2 se cumplen en la mayoría de las situaciones físicas salvo algunas excepciones [Rabinowicz, 1995]. En cambio, no ocurre lo mismo con el postulado 3. Por ejemplo si se repite el experimento del bloque, pero esta vez se incrementa la fuerza aplicada gradualmente desde cero, se encontrará que el bloque no comenzará a moverse instantáneamente, sino que comenzará a deslizarse después de un valor de fuerza F_s ¹. Debido a esto, Arthur Morin introdujo el concepto de fricción estática en 1833 [Armstrong-Hélouvy, 1991]. Incluso años después, en 1899, se descubrieron pequeños deslizamientos del orden de 10^{-5} cm antes de aparecer la velocidad de deslizamiento v entre las superficies [Rabinowicz, 1995].

En la ingeniería, el modelo de Coulomb y el fenómeno de fricción estática han sido ampliamente usados desde su aparición, y en conjunto con las investigaciones de Reynolds sobre el flujo de fluido viscoso realizadas en 1866 [Armstrong-Hélouvy, 1991], se han utilizado para describir la fricción en cualquier situación incluyendo medios lubricados. La Fig. 2.3 muestra un modelo que ha combinado el modelo de Coulomb y la ecuación de fricción viscosa $F_v = \mu_v v$. Esta ecuación expresa que la fuerza de fricción es proporcional -con factor μ_v - a la velocidad para todo el intervalo de velocidades (Fig. 2.4).

Más tarde, un trabajo más completo sobre el comportamiento de la fricción a bajas velocidades apareció a principios del siglo XX. En 1902, Stribeck realizó un análisis extenso sobre la fricción y la dependencia de la velocidad. Él realizó experimentos sobre cojinetes mecánicos en los que encontró una relación más específica de la fricción en un intervalo más

¹También conocida como fuerza de ruptura (“*break-away force*”).

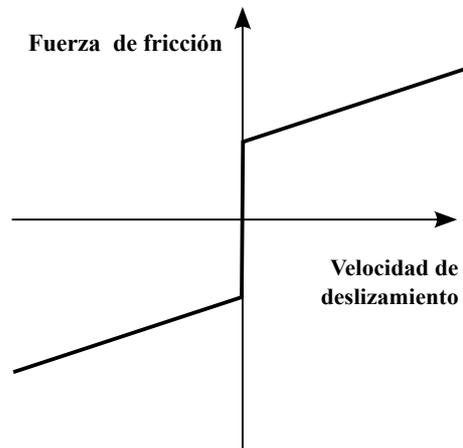


Figura 2.3: *Fricción viscosa y modelo de Coulomb*

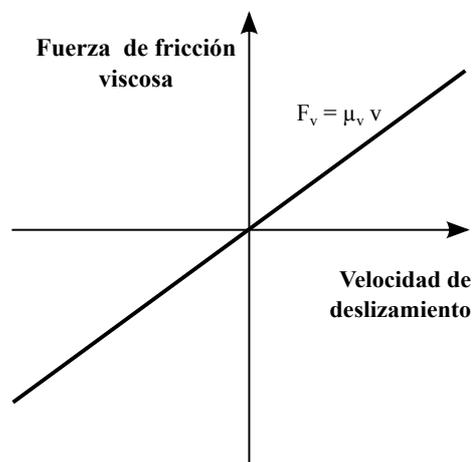


Figura 2.4: *Fricción viscosa*

detallado de velocidades. Actualmente, los resultados de Stribeck son conocidos como *curva Stribeck* (Fig. 2.5) y generalmente es dividida en 4 regiones [Armstrong-Hélouvry, 1991]

- I. Fricción Estática (ó *Sticktion*)
- II. Lubricación Marginal
- III. Mixta
- IV. Lubricación completa ó Hidrodinámica

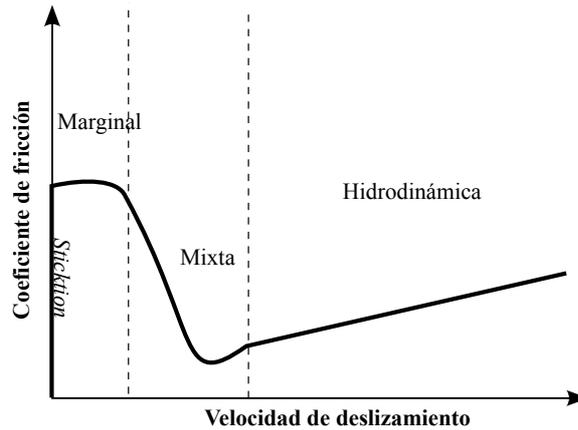


Figura 2.5: *Curva Stribeck*

En la Fig. 2.5, las regiones I, II y III son mejor conocidas como el *efecto Stribeck*. Así, a través del tiempo se ha intentado captar la fricción estática, el modelo de Coulomb, la fricción viscosa y el *efecto Stribeck* en un sólo modelo [Olsson et al., 1997] como se muestra en la Fig. 2.6, sin embargo, como se verá posteriormente, han tenido que surgir los modelos de fricción dinámica para cubrir esta tarea.

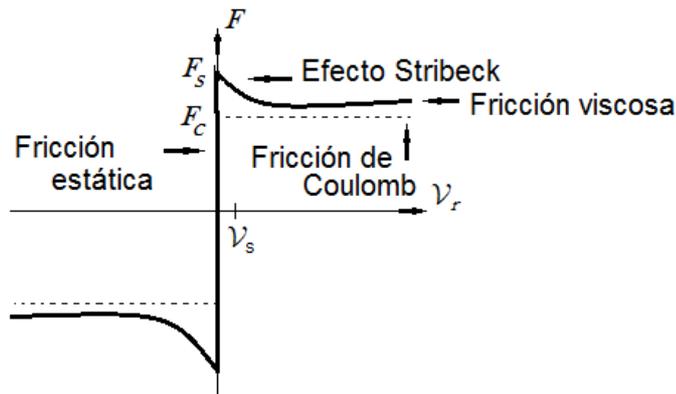


Figura 2.6: *Modelo de fricción combinado*

2.2. Modelos estáticos de fricción llanta-pavimento

En el área dedicada al estudio de la fricción llanta-pavimento, los modelos de fricción se han basado en mapas estáticos obtenidos experimentalmente. Estos mapas relacionan el deslizamiento normalizado λ con el coeficiente de fricción μ . Considere la Fig. 2.7 para ubicar las variables involucradas en esta consideración². El deslizamiento normalizado λ

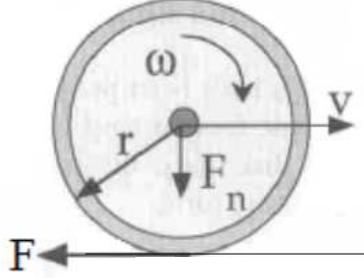


Figura 2.7: Variables involucradas en la fricción estática llanta-pavimento

se define como

$$\lambda = \begin{cases} \frac{r\omega}{v} - 1 & , \text{ sí } v > r\omega \text{ y } v \neq 0 \text{ (frenado)} \\ 1 - \frac{v}{r\omega} & , \text{ sí } r\omega > v \text{ y } \omega \neq 0 \text{ (acelerado)} \end{cases} \quad (2.2)$$

donde r y ω son el radio y la velocidad angular de la llanta respectivamente, y v es la velocidad lineal del vehículo. Como se nota, la definición de la Ec. (2.2) supone que la magnitud de la velocidad tangencial $r\omega$ no siempre es igual a la velocidad lineal del vehículo v (el rodamiento no es perfecto). La Fig. 2.8 muestra un ejemplo de estos mapas estáticos.

Para predecir el valor del coeficiente de fricción en tiempo real, existen algunas expresiones que reproducen el comportamiento de la Fig. 2.8. Entre los modelos más populares se encuentra la “fórmula mágica” [H. Pacejka et al., 1987], el modelo de Burckhardt, y el de Kiencke y Daiss [Kiencke & Daiss, 1994]. Estos modelos relacionan el deslizamiento λ , la velocidad lineal del vehículo v , y sintonizan ciertos parámetros c_i adecuadamente para ajustar la curva de la Fig. 2.8.

La fórmula mágica se expresa como:

$$F(\lambda) = c_1 \sin(c_2 \arctan(c_3 \lambda - c_4 (c_3 \lambda - \arctan(c_3 \lambda))))). \quad (2.3)$$

El modelo de Burckhardt tiene la forma

$$F(\lambda, v) = (c_1(1 - e^{-c_2 \lambda}) - c_3 \lambda)e^{c_4 v}. \quad (2.4)$$

²En el modelado de la interacción llanta-pavimento en este trabajo se han considerado parámetros concentrados. Existen otros modelos que consideran parámetros distribuidos, y algunos otros que se desprenden de la cinemática del fenómeno.

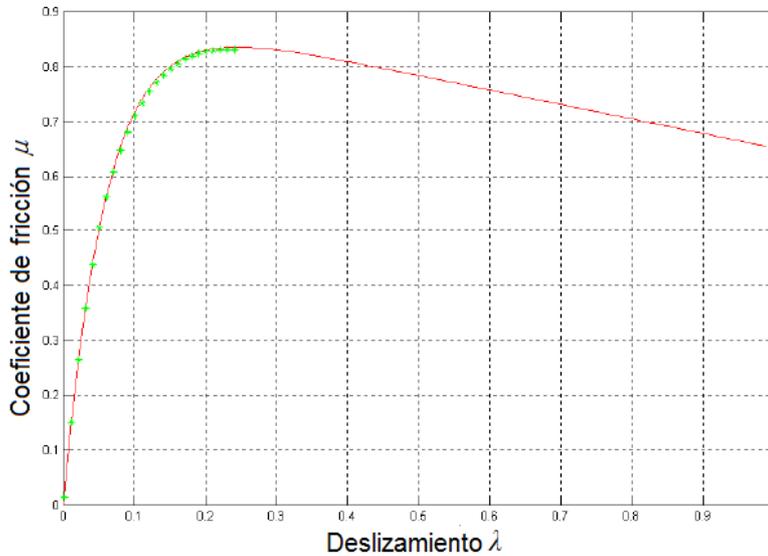


Figura 2.8: *Mapa estático de fricción*

Y el modelo de Kiencke y Daiss es

$$F(\lambda) = k_s \frac{\lambda}{c_1 \lambda^2 + c_2 \lambda + 1}. \quad (2.5)$$

Entre los inconvenientes de los mapas estáticos de fricción y los modelos mencionados en el párrafo anterior, se encuentra que no ofrecen una descripción realista del comportamiento de la fricción, ya que los experimentos para obtener la curva de la Fig. 2.8 se realizan a velocidades constantes y en estado estacionario, algo que muy difícilmente sucede en la realidad, donde el frenado y acelerado de un vehículo transforman la fricción en un fenómeno dinámico.

2.3. Modelos dinámicos

Los modelos vistos previamente consideran la fricción en estado estacionario, es decir, describen el comportamiento de la fricción a velocidades constantes. Quizá estos modelos se usaron arduamente hasta la aparición de la tribología en 1930. Sin embargo, con la aparición de la *curva Stribeck* y la necesidad de mecanismos cada vez más precisos, se requirieron modelos que describan la fricción no sólo como función exclusiva de la velocidad, sino que además de captar los fenómenos no lineales de “*stick-slip*”, las variaciones en la fuerza de ruptura y los fenómenos de histéresis, dependan también de las propiedades mecánicas de los materiales. Estos nuevos modelos de fricción son conocidos como modelos de fricción dinámicos.

En este punto, es necesario aclarar que en la fricción llanta-pavimento, la velocidad de deslizamiento v del modelo clásico, corresponde a la diferencia entre la velocidad lineal del vehículo y la velocidad angular de la llanta. Esta se redefinirá más tarde como la velocidad relativa s . No obstante, en los modelos que se presentarán enseguida, se seguirá tratando con la velocidad de deslizamiento v , dejando el cambio de variable hasta el capítulo 4.

2.3.1. Modelo de Dahl

El primer intento en describir el fenómeno de la fricción en la región “*sticktion*” (Fig. 2.5), fue el modelo de Dahl, quien consideró que la fuerza de fricción aumentaba gradualmente hasta alcanzar un punto de ruptura tal como en la curva esfuerzo-deformación en la mecánica de sólidos. El modelo de Dahl se presenta en la Ec. (2.6)

$$\frac{dF}{dt} = \sigma \left(1 - \frac{F}{F_c} \operatorname{sgn}(v)\right)^\alpha v \quad (2.6)$$

donde σ es la rigidez, F_c es la cota máxima de la fuerza de fricción, α es un parámetro que ajusta la forma de la curva y v es la velocidad de deslizamiento. La Fig. 2.9 muestra la fuerza de fricción según el modelo de Dahl. Como se observa, este modelo no capta el *efecto Stribeck* ni la región *hidrodinámica* de la Fig. 2.5, solamente capta la región de fricción estática o “*sticktion*”.

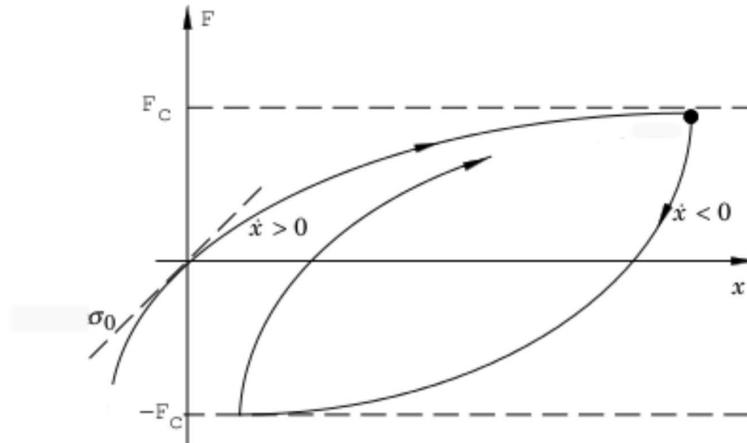


Figura 2.9: Modelo de Dahl

2.3.2. Modelo de cerdas

El modelo de cerdas fue introducido por Haessig y Friedland en [Haessig & Friedland, 1991]. Este modelo describe el contacto entre las superficies como si fueran cerdas elásticas. Esto es, cuando las superficies intentan desplazarse una sobre otra, las cerdas se deforman como

resortes oponiéndose al deslizamiento como en la Fig. 2.10. De esta forma se intenta describir la región “*Sticktion*”. Por tanto, considerando N cerdas, y llamando z al estado de

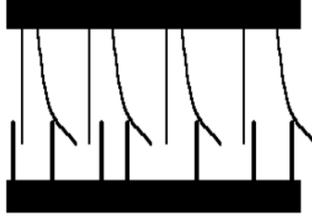


Figura 2.10: *Contacto entre superficies a través de cerdas elásticas*

deformación de las cerdas, la fuerza de fricción se puede modelar mediante la ecuación

$$F = \sum_{i=0}^N \sigma_0 z_i \quad (2.7)$$

donde σ_0 es la rigidez de las cerdas y z_i es la deformación de la i -ésima cerda.

Algunos inconvenientes que tiene del modelo de cerdas en simulaciones [Olsson et al., 1997] son:

1. La complejidad se incrementa cuando el número de cerdas N se incrementa.
2. El estado z puede caer en oscilaciones durante el “*sticking*”³.

2.3.3. Modelo integrador con reset

El modelo integrador con reset tiene estrecha relación con el modelo de cerdas, sin embargo, este modelo mantiene constante la deformación z después de cierto valor de ruptura z_0 , de forma que se evita la divergencia y las oscilaciones del estado z . Además, este modelo incluye un término de amortiguamiento $\sigma_1 \frac{dz}{dt}$ que actúa sólo durante la región “*Sticktion*”. La Ec. (2.8) define este modelo.

$$F = (1 + a(z))\sigma_0(v)z + \sigma_1 \frac{dz}{dt} \quad (2.8)$$

donde

$$\frac{dz}{dt} = \begin{cases} 0 & , \text{ sí } v \neq 0 \text{ y } |z| \geq z_0 \\ v & , \text{ de otra forma} \end{cases}$$

y

$$a(z) = \begin{cases} a & , \text{ sí } |z| \leq z_0 \\ 0 & , \text{ de otra forma} \end{cases}$$

³Se refiere a la adhesión de los materiales durante el “*stick-slip*”.

2.3.4. Modelo de LuGre

El modelo de LuGre fue presentado en [Canudas de Wit et al., 1995]. Al igual que el modelo de cerdas, este modelo asume que las superficies son muy irregulares a nivel microscópico y por tanto, el contacto entre ellas se realiza a través de las asperezas. Estas asperezas se modelan como cerdas elásticas. Así, cuando una superficie intenta desplazarse sobre otra, las cerdas se comportan como resortes originando la fuerza de fricción (Fig. 2.10). A diferencia del modelo de cerdas, el modelo de LuGre considera una deformación promedio de las cerdas z dada por

$$\frac{dz}{dt} = v - \sigma_0 \frac{|v|}{g(v)} z \quad (2.9)$$

donde σ_0 es un parámetro que representa la rigidez de las cerdas, v es la velocidad de deslizamiento y $g(v)$ es una función que depende de la velocidad. Nótese que para una velocidad constante, el valor en estado estable de la deformación z es $\frac{sgn(v)g(v)}{\sigma_0}$.

El modelo de LuGre propone que la fuerza generada por las cerdas se puede escribir como

$$F = \sigma_0 z + \sigma_1 \frac{dz}{dt} \quad (2.10)$$

donde σ_0 es la rigidez de las cerdas y σ_1 es el término de amortiguamiento a la dinámica del estado z .

De las Ecs. (2.9) y (2.10), la fuerza de fricción en estado estable será

$$F = sgn(v)g(v) \quad (2.11)$$

La función $g(v)$ se usa para capturar el *efecto Stribeck* y comúnmente tiene la forma

$$g(v) = F_c + (F_s - F_c)e^{-|v/v_s|^\alpha} \quad (2.12)$$

donde F_c es la fuerza de Coulomb, F_s es la fuerza de ruptura, v es la velocidad de deslizamiento, y v_s es un parámetro que mide la rapidez de caída del término exponencial conocido como *velocidad Stribeck*. El valor de α usado para este trabajo será 0.5.

Una forma más general de este modelo considera los efectos viscosos entre las superficies en contacto, esto es

$$F = \sigma_0 z + \sigma_1 \dot{z} + \sigma_2 v \quad (2.13)$$

donde el parámetro σ_2 es el parámetro asociado a la viscosidad, y v es la velocidad de deslizamiento. En consecuencia, la fuerza de fricción en estado estable será

$$F_{ss} = g(v) + \sigma_2 v. \quad (2.14)$$

Las Ecs. (2.9), (2.12) y (2.13) forman el modelo de fricción de LuGre.

Capítulo 3

Descripción de la instalación

El banco de pruebas construido en el Instituto de Ingeniería está basado en el modelo de un cuarto de vehículo. El diseño, la construcción, y uso del banco de pruebas se puede consultar en [Aguilar Martínez, 2008]. En este capítulo se presentan sólo las características más representativas del sistema, y la mejora al sistema de adquisición de datos que se realizó durante esta tesis.

El banco de pruebas consta principalmente de un rodillo, una llanta y un servomotor acoplado sin transmisión a la llanta. La Fig. 3.1 muestra el diseño y la configuración de la instalación. De esta figura se observa que la función del rodillo es proporcionar peso

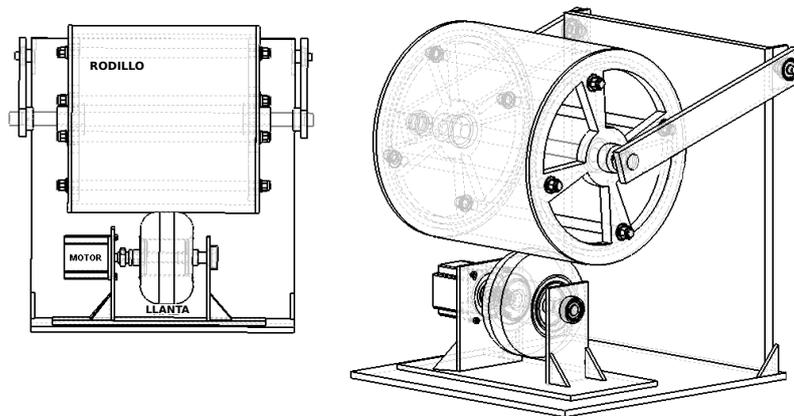


Figura 3.1: *Banco de pruebas*

sobre la llanta simulando la fuerza ejercida por la masa del vehículo. El motor, por otro lado, suministra el torque necesario a la llanta para hacer girar el sistema. De este modo, al girar la llanta se genera la fricción necesaria en la interfaz rodillo-llanta para hacer girar el rodillo. Como es de obviar, la velocidad sobre la superficie del rodillo equivaldría a la velocidad del vehículo. Con estas características, el banco de pruebas tiene como objetivo

analizar la fricción generada entre la llanta y el rodillo.

3.1. Características mecánicas del sistema

3.1.1. Rodillo

El rodillo está construido de polietileno de alta densidad (PEAD) con tapas de aluminio como se ve en las Figs. 3.1 y 3.2. El polietileno está directamente en contacto con la llanta

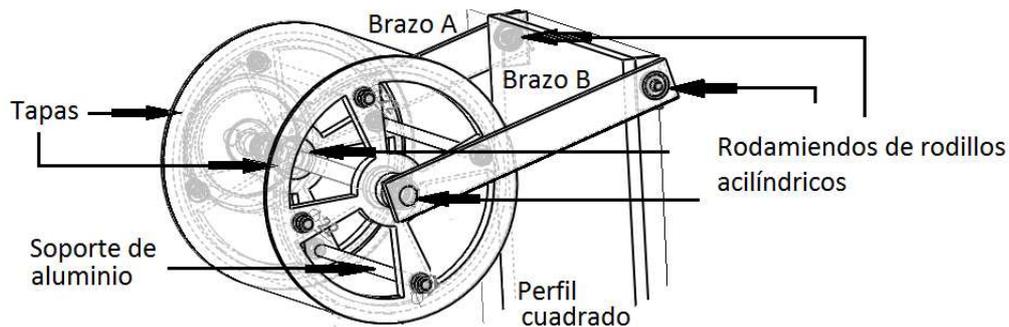


Figura 3.2: Componentes de rodillo del banco de pruebas

por lo que las características del PEAD son mencionadas a continuación

- Estructura lineal sin ramificaciones.
- Alta resistencia térmica y química.
- Material sólido.
- Su densidad es aproximadamente $0.952 \left[\frac{g}{cm^3} \right]$.

Los elementos restantes mostrados en la Fig. 3.2 son en su mayoría construidos de acero 4041, aunque no son muy relevantes para este trabajo.

3.1.2. Llanta

La llanta de la instalación tiene un perfil 4.5/10.0 - 5 DR10. Esta llanta es utilizada en vehículos *go-kart* y tiene la principal característica de tener una superficie lisa, que garantiza un mayor nivel de adherencia que las llantas convencionales con dibujo.

3.1.3. Motor

El motor de la instalación es un motor trifásico marca Yaskawa modelo SGMP con las siguientes características:

- Amperaje: 15 [A].
- Torque: 4.77 [Nm].
- Potencia de salida: 1.5 [KW].

Este motor incluye un controlador que permite manejar linealmente el par aplicado a la llanta mediante una entrada analógica de ± 10 volts. Esta entrada analógica es la interfaz para suministrar el par control desde la tarjeta de adquisición de datos al motor.

En la Fig. 3.3 se muestra el acoplamiento del motor a la llanta en el banco de pruebas.

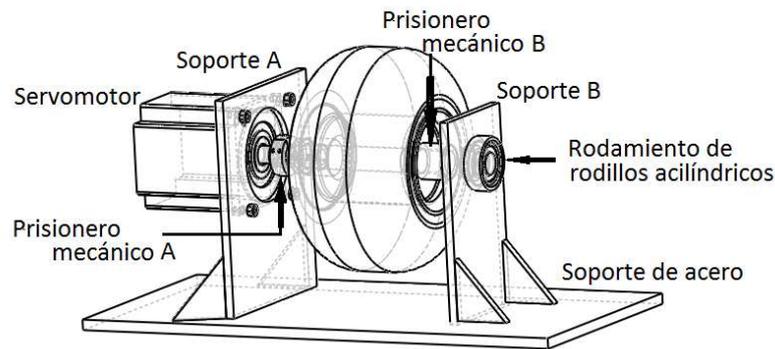


Figura 3.3: Acoplamiento de la llanta y el motor

3.2. Adquisición de datos

Para la adquisición de datos, el banco sólo cuenta con 2 sensores instalados: un encoder instalado en el eje de giro de la llanta para medir su posición, y un encoder más colocado en el eje de giro del rodillo. Estos encoders son leídos por una tarjeta de adquisición de datos que está conectada a la computadora. En la computadora la información es leída y procesada por el *toolbox XPC Target* de la compañía *The MathWorks*. Los encoders tienen una resolución máxima de 2048 pulsos por revolución, y al ser leídos por las librerías del *XPC Target*, la resolución aumenta 4 veces vía software. La arquitectura general de la adquisición de datos es como se muestra en la Fig. 3.4.



Figura 3.4: Arquitectura general de dispositivos

Se debe mencionar que durante este trabajo de tesis se realizó la instalación de una nueva tarjeta de adquisición de datos. La tarjeta instalada fue la multifuncional MF624 de *Humusoft*. Para el correcto funcionamiento de la tarjeta se construyó un pequeño circuito impreso para la adquisición de señales (Fig. 3.5) y además se configuró una red de comu-

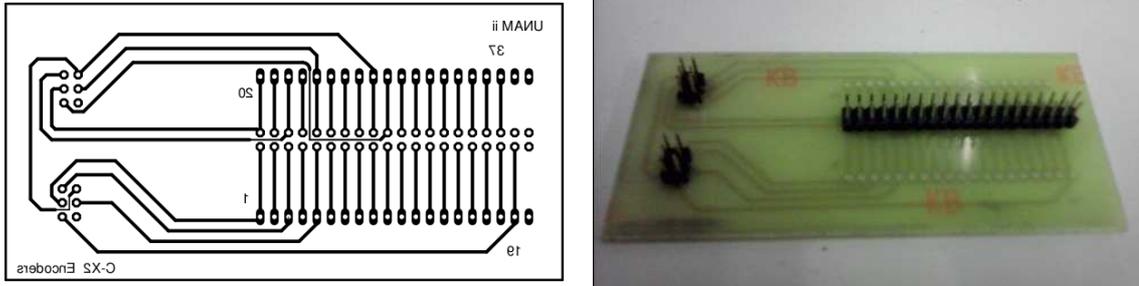


Figura 3.5: *Circuito impreso realizado*

nicación para tener acceso vía TCP/IP a la tarjeta de adquisición. Anteriormente el acceso a la tarjeta se realizaba vía puerto serie RS-232, sin embargo, este tipo de comunicación resultaba lenta e ineficaz para grandes cantidades de datos. Con la comunicación TCP/IP el acceso y descarga de datos en la tarjeta resultaron rápidos y seguros. La Fig. 3.6 muestra la arquitectura de la adquisición de datos con la tarjeta *MF624*.

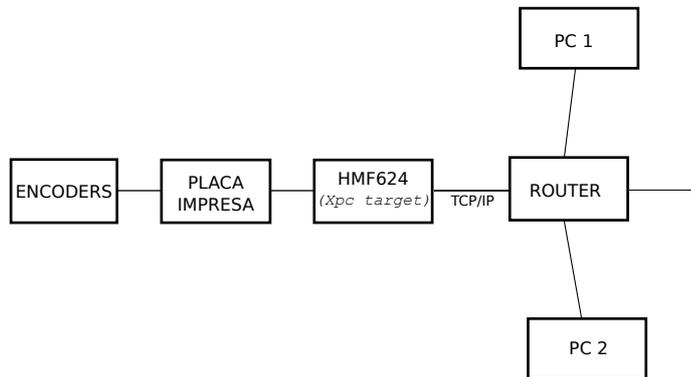


Figura 3.6: *Arquitectura con la tarjeta MF624*

Capítulo 4

Modelos matemáticos de la instalación

Como se mencionó anteriormente, en este trabajo se calcularán los parámetros de la instalación diseñada y construida en el Instituto de Ingeniería de la UNAM. Para esto es necesario obtener los modelos matemáticos que describan el comportamiento de la instalación. Este capítulo está destinado a obtener estos modelos.

4.1. Modelo de un cuarto de vehículo

El banco de pruebas para estudiar la fricción llanta pavimento está basado en el modelo de un cuarto de vehículo. Este modelo describe la dinámica longitudinal de un automóvil en movimiento y supone que las fuerzas actuantes en una llanta son las mismas para cada rueda. Así, el estudio sobre una llanta debe ser suficiente para analizar el fenómeno de fricción. En realidad este modelo es bastante simple para estudiar el comportamiento completo, sin embargo resulta adecuado para el análisis de la fricción ya que se simplifica el diseño de leyes de control [Olmos González, 2001].

Con el fin de deducir la dinámica del vehículo considere la Fig. 4.1. Para el vehículo completo, se sigue que la dinámica será

$$m\dot{v} = 4F - F_{ax} \quad (4.1)$$

donde m es la masa del vehículo, v es su velocidad, F es la fuerza de fricción en cada llanta, y F_{ax} es la fuerza aerodinámica de arrastre del aire.

Ahora, considerando el modelo de Coulomb (Ec. (2.1)) y suponiendo que el vehículo de la Fig. 4.1 avanza sólo en la dirección mostrada, la fricción se escribe como

$$F = \mu mg \quad (4.2)$$

donde g es la gravedad.

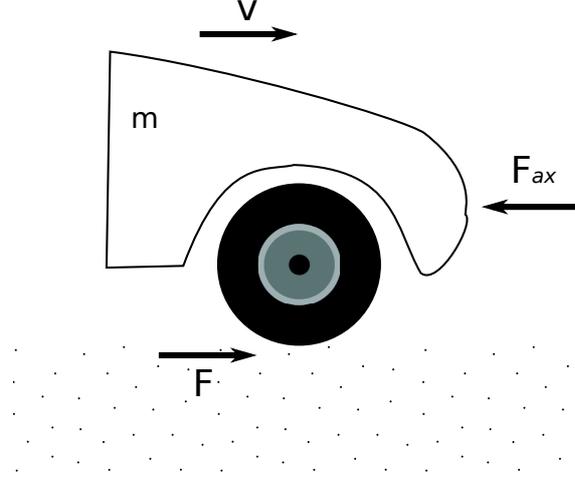


Figura 4.1: Modelo de un cuarto de vehículo

Además, la fuerza aerodinámica F_{ax} puede expresarse como

$$F_{ax} = c_{ax}v^2 \quad (4.3)$$

donde c_{ax} es un coeficiente aerodinámico que depende de la geometría del vehículo y de las condiciones ambientales.

Sustituyendo las Ecs. (4.2) y (4.3) en (4.1) se obtiene

$$m\dot{v} = 4\mu mg - c_{ax}v^2. \quad (4.4)$$

Por otro lado, la dinámica de rotación de la llanta tiene la forma siguiente

$$I\dot{\omega} = \tau - RF \quad (4.5)$$

donde I es la inercia de la llanta, ω es su velocidad angular, R es su radio, y τ es el par neto transmitido del motor a la llanta.

Luego, para relacionar el movimiento lineal del vehículo con el movimiento de rotación de las llantas, se define la velocidad relativa s

$$s = v - R\omega. \quad (4.6)$$

Nótese que esta velocidad s representa la velocidad de deslizamiento entre la llanta y el pavimento, que es requerida por los modelos de fricción del capítulo 2.

Ahora se procede a encontrar un sistema de ecuaciones que describa el fenómeno completo. Derivando la Ec. (4.6) y sustituyendo las Ecs. (4.4) y (4.5) resulta

$$\dot{s} = 4\mu g - \frac{c_{ax}}{m}v^2 - \frac{R}{I}\tau + \frac{\mu mgR^2}{I} \quad (4.7)$$

$$\dot{s} = (4g + \frac{mgR^2}{I})\mu - \frac{c_{ax}}{m}v^2 - \frac{R}{I}\tau \quad (4.8)$$

que en conjunto con la Ec. (4.4) forman el par de ecuaciones

$$\dot{v} = C_1\mu + C_2v^2 \quad (4.9)$$

$$\dot{s} = C_3\mu - C_4v^2 - C_5\tau \quad (4.10)$$

con $C_1 = 4g$, $C_2 = \frac{c_{ax}}{m}$, $C_3 = 4g + \frac{mgR^2}{I}$, $C_4 = \frac{c_{ax}}{m}$, y $C_5 = \frac{R}{I}$. Las Ecs. (4.9) y (4.10) describen la dinámica longitudinal del vehículo.

4.2. Modelo del banco de pruebas

El banco de pruebas consta de un rodillo, una llanta y un motor en la configuración de la Fig. 3.1. Como resulta frecuente en este tipo de instalaciones, el motor pone en movimiento a la llanta a través de un par T_m , y la fricción generada entre la llanta y el rodillo hace girar el rodillo. Matemáticamente la dinámica rotacional de la llanta es:

$$I_1\dot{\omega}_1 = T_m - T_{C_1} - R_1F - B_1\omega_1 \quad (4.11)$$

donde I_1 es la inercia en la llanta, R_1 es el radio de la misma, ω_1 es su velocidad angular, $B_1\omega_1$ es el par perdido por fricción viscosa en los rodamientos de la llanta, T_{C_1} es el par perdido por fricción seca en los rodamientos, y F es la fuerza de fricción generada entre la llanta y el rodillo.

Análogamente para la dinámica del rodillo se tiene

$$I_2\dot{\omega}_2 = R_2F - T_{C_2} - B_2\omega_2 \quad (4.12)$$

donde I_2 es la inercia del rodillo, R_2 es el radio del rodillo, $B_2\omega_2$ es el par perdido por fricción viscosa en los rodamientos del rodillo, T_{C_2} es el par perdido por fricción seca en los rodamientos, y F es la misma fuerza de fricción de la Ec. (4.11). Nótese que F en la Ec. (4.11) genera un par de pérdidas, mientras que en la Ec. (4.12) genera el par que pone en movimiento al rodillo.

Las Ecs. (4.11) y (4.12) representan las dinámicas rotacionales del rodillo y de la llanta. Éstas interactúan a través de la fuerza de fricción F que será modelada por el modelo de fricción de LuGre presentado en la sección siguiente.

La velocidad relativa se define ahora como

$$s = R_2\omega_2 - R_1\omega_1 \quad (4.13)$$

donde R_1 y R_2 son los radios de la llanta y el rodillo de la instalación, y ω_1 y ω_2 son las velocidades angulares de la llanta y el rodillo respectivamente. Con el fin de obtener un modelo del sistema más adecuado en el espacio de estados, se deriva la Ec. (4.13) y se sustituyen las Ecs. (4.11) y (4.12) para obtener

$$\dot{s} = \left(\frac{R_1^2}{I_1} + \frac{R_2^2}{I_2}\right)F + \frac{R_1 B_1}{I_1}\omega_1 - \frac{R_2 B_2}{I_2}\omega_2 - \frac{R_1}{I_1}T_m + \frac{R_1}{I_1}T_{C_1} - \frac{R_2}{I_2}T_{C_2} \quad (4.14)$$

y puesto que $\omega_1 = \frac{R_2 \omega_2 - s}{R_1}$

$$\dot{s} = \left(\frac{R_1^2}{I_1} + \frac{R_2^2}{I_2}\right)F + \left(\frac{B_1 R_2}{I_1} - \frac{R_2 B_2}{I_2}\right)\omega_2 - \frac{B_1}{I_1}s - \frac{R_1}{I_1}T_m + \frac{R_1}{I_1}T_{C_1} - \frac{R_2}{I_2}T_{C_2} \quad (4.15)$$

Por tanto el modelo del banco de pruebas será

$$\dot{\omega}_2 = A_1 F - A_2 \omega_2 - A_3 \quad (4.16)$$

$$\dot{s} = A_4 F + A_5 \omega_2 - A_6 s - A_7 T_m + A_8 \quad (4.17)$$

con $A_1 = \frac{R_2}{I_2}$, $A_2 = \frac{B_2}{I_2}$, $A_3 = \frac{T_{C_2}}{I_2}$, $A_4 = \frac{R_1^2}{I_1} + \frac{R_2^2}{I_2}$, $A_5 = \frac{B_1 R_2}{I_1} - \frac{R_2 B_2}{I_2}$, $A_6 = \frac{B_1}{I_1}$, $A_7 = \frac{R_1}{I_1}$ y $A_8 = \frac{R_1}{I_1}T_{C_1} - \frac{R_2}{I_2}T_{C_2}$

4.3. Modelo de LuGre

El modelo de fricción utilizado en anteriores trabajos del Instituto de Ingeniería es el modelo de LuGre [Olmos González, 2001, Aguilar Martínez, 2008]. Este modelo está descrito por la ecuación

$$F = \sigma_0 z + \sigma_1 \dot{z} + \sigma_2 s \quad (4.18)$$

donde z es el “estado interno” con dinámica

$$\dot{z} = s - \sigma_0 \frac{|s|}{g(s)} z$$

y $g(s)$ descrita por

$$g(s) = F_c + (F_s - F_c)e^{-|\frac{s}{v_s}|^{\frac{1}{2}}}. \quad (4.19)$$

En este modelo de fricción, la velocidad de deslizamiento está representada por la velocidad relativa s definida en la Ec. (4.13).

Es importante mencionar que los parámetros σ_0 , σ_1 , σ_2 , F_c , F_s y v_s se considerarán constantes en el desarrollo de este trabajo. También debe notarse que los parámetros σ_0 y σ_1 están relacionadas directamente a la dinámica del estado interno z . Asimismo los parámetros restantes σ_2 , F_c , F_s y v_s son constantes utilizadas para describir el *efecto Striebeck*.

Capítulo 5

Parámetros de la instalación

La configuración del banco de pruebas permite medir el ángulo de giro para calcular la velocidad y la aceleración angular de la llanta y el rodillo por medio de los encoders instalados. Estas velocidades y aceleraciones se obtuvieron derivando el ángulo de giro. De esta forma, los parámetros de la instalación R_1 , R_2 , I_1 , I_2 , B_1 y B_2 , se deben obtener mediante dichas cantidades medibles, o calculables.

En este capítulo se calcularon los parámetros del banco de pruebas ya mencionados. Los radios de la llanta y el rodillo fueron los primeros en ser calculados debido a la necesidad de éstos en los experimentos posteriores. Se continuó con la inercia I_1 y el coeficiente de viscosidad B_1 asociados a la llanta. Por último se calcularon I_2 y B_2 asociados al rodillo.

5.1. Radios de la llanta y el rodillo

El radio del rodillo es el parámetro más constante de toda la instalación. Para obtener su valor se midió directamente sobre el modelo físico. Las dimensiones del rodillo se muestran en la Fig. 5.1, donde el radio del rodillo R_2 vale $0.2535 [m]$.

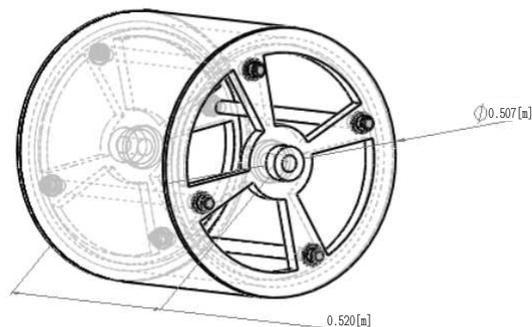


Figura 5.1: Medidas del rodillo de la instalación

El cálculo del radio de la llanta no es tan directo como el del rodillo ya que el radio varía de acuerdo al peso del rodillo y el inflado de la llanta. No obstante, este puede ser medido indirectamente relacionando el arco de giro del rodillo y la llanta. Esto es, llámese θ_1 al ángulo de giro de la llanta y θ_2 al ángulo de giro del rodillo. Entonces, asumiendo que no existe deslizamiento, se tendrá que para un giro de θ_1 debe tenerse un giro de θ_2 tal que

$$R_1\theta_1 = R_2\theta_2 \quad (5.1)$$

y ya que el ángulo de giro se relaciona con la cantidad de pulsos por revolución (*ppr*) del encoder mediante

$$\theta = \frac{2\pi}{ppr} P \quad (5.2)$$

donde $ppr = 8192$ para nuestros encoders, y P es el número de pulsos que registra el encoder, se llega a la relación

$$R_1 = R_2 \frac{P_2}{P_1} \quad (5.3)$$

donde P_1 y P_2 son los pulsos registrados por la llanta y el rodillo respectivamente. La Ec. (5.3) se usó para encontrar el radio de la llanta dada la relación $\frac{P_2}{P_1}$. La Tabla 5.1 muestra los resultados de las pruebas realizadas para distintos ángulos de giro del rodillo.

PRUEBA	PULSOS RODILLO P_2	PULSOS LLANTA P_1	$\frac{P_2}{P_1}$
1	3245	6388	0.5080
2	2136	4209	0.5075
3	1895	3716	0.5100
4	4469	8793	0.5082
5	7610	15004	0.5072
6	2773	5480	0.5060
7	4857	9547	0.5087
PROMEDIO			0.5079

Tabla 5.1: Relación de pulsos de la llanta y el rodillo

Con el radio R_2 y la relación promedio $\frac{P_2}{P_1}$ de la Tabla 5.1, se obtuvo un valor para R_1 de

$$R_1 = 0.1288 [m], \quad (5.4)$$

que es cercano a la mitad de R_2 , y está en conformidad con el diseño del banco en [Aguilar Martínez, 2008].

5.2. Obtención de velocidades y aceleraciones

Como se mencionó, para medir el giro del sistema se cuenta con encoders. Así que las velocidades y aceleraciones del sistema se obtuvieron derivando el ángulo de giro medido

por los enconders. Sin embargo, el proceso derivativo implica la amplificación de los errores de truncamiento y redondeo en el proceso numérico ocasionando ruido en la señal. Debido a esto, se diseñó un filtro pasabajas Butterworth para atenuar las variaciones de alta frecuencia, y tener una respuesta máximamente plana en la banda de paso.

Las especificaciones fijadas para el filtro fueron las siguientes:

1. La frecuencia de corte del filtro se estableció en $\frac{1}{3}[Hz]$, de forma que idealmente sólo pasen señales con período T mayor a $3[s]$.
2. Se estableció que a una frecuencia de $1[Hz]$ la ganancia debe haber disminuido al menos 1000 veces.

Para determinar la forma del filtro es necesario conocer la función de aproximación de un filtro Butterworth. La respuesta en frecuencia $|H(j\omega)|$ y la atenuación $X[dB]$ de este tipo de filtro vienen dadas por [Terrell, 1988]

$$|H|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2n}} \quad (5.5)$$

$$X = 10 \log_{10} \left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2n}\right) \quad (5.6)$$

donde ω es la variable frecuencia, ω_c es la frecuencia de corte, y n es el orden del filtro.

Con las especificaciones enunciadas arriba y de la Ec. (5.6), se obtiene un orden del filtro de al menos $n = 7$. Con ayuda de *matlab* y *Simulink* se obtuvo la siguiente función de transferencia

$$H(s) = \frac{176.8}{s^7 + 9.412s^6 + 44.29s^5 + 134.1s^4 + 280.8s^3 + 406.9s^2 + 379.3s + 176.8} \quad (5.7)$$

La Fig. 5.2 muestra la respuesta de este filtro en diagramas de Bode.

5.3. Parámetros de la llanta

Para determinar los parámetros I_1 y B_1 se desmontó el banco de pruebas y se realizaron pruebas únicamente sobre la llanta. Ya que el motor se encuentra acoplado a la llanta, y resulta fácil medir el par aplicado al sistema, se analizó la respuesta al escalón del siguiente modelo:

$$I_1 \dot{\omega}_1 = T_m - B_1 \omega_1 - T_{C_1} \quad (5.8)$$

donde T_m es el par aplicado por el motor y T_{C_1} es el par perdido por fricción seca en los rodamientos (considerado constante). La solución de la Ec. (5.8) para una entrada T_m constante es

$$\omega_1(t) = \frac{T_m - T_{C_1}}{B_1} \left(1 - e^{-\frac{B_1}{I_1}t}\right) \quad (5.9)$$

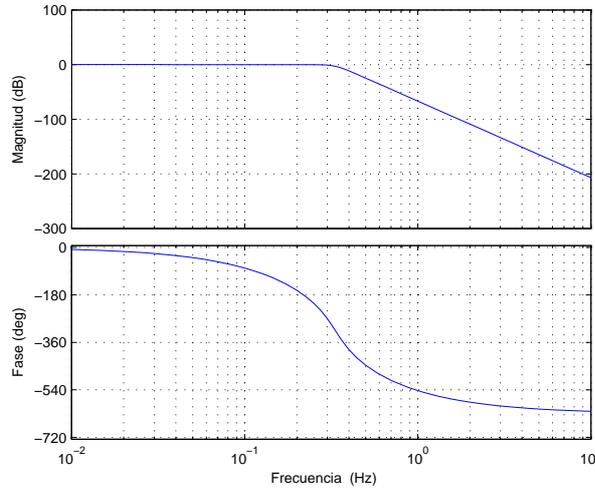


Figura 5.2: Diagrama de Bode del filtro

que tiene por derivadas

$$\dot{\omega}_1(t) = \frac{T_m - T_{C_1}}{I_1} e^{-\frac{B_1}{I_1} t} \quad (5.10)$$

$$\ddot{\omega}_1(t) = -\frac{B_1}{I_1} \dot{\omega}_1(t). \quad (5.11)$$

La búsqueda de I_1 y B_1 se hizo relacionando la respuesta real del sistema con las Ecs. (5.9), (5.10) y (5.11). Idealmente, la forma de estas ecuaciones es la de la Fig. 5.3, sin embargo, midiendo la velocidad angular ω_1 para un par T_m constante, ω_1 , $\dot{\omega}_1$ y $\ddot{\omega}_1$ resultan tener la forma de las gráficas de la Fig. 5.4. Al comparar las gráficas de la Figs. 5.3 y 5.4 se nota que mientras que idealmente $\dot{\omega}_1$ y $\ddot{\omega}_1$ alcanzan su máximo y mínimo en $t = 0$, en la gráficas de los experimentos estos máximos y mínimos se encuentran retrasados. No obstante, a partir de las Ecs. (5.9), (5.10) y (5.11) que describen el comportamiento ideal, se pudieron deducir relaciones que permitieron encontrar los parámetros en cuestión.

5.3.1. I_1 y T_{C_1}

De la Ec. (5.10) se nota que al valor máximo de $\dot{\omega}_1$ se tiene

$$I_1 \dot{\omega}_{1_{max}} + T_{C_1} = T_m \quad (5.12)$$

por lo que para dos torques aplicados T_m distintos se pueden determinar I_1 y T_{C_1} resolviendo el sistema de ecuaciones establecido. Así, los experimentos realizados consistieron en aplicar distintos torques T_m constantes al sistema para observar el comportamiento de la velocidad

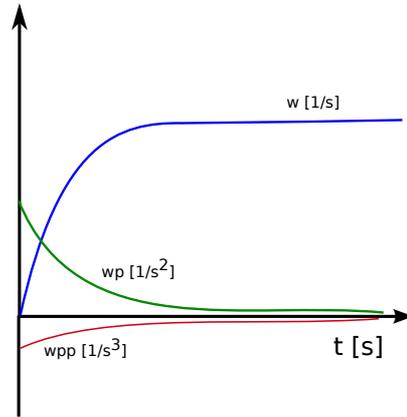


Figura 5.3: *Comportamiento ideal de ω_1 , $\dot{\omega}_1$ y $\ddot{\omega}_1$*

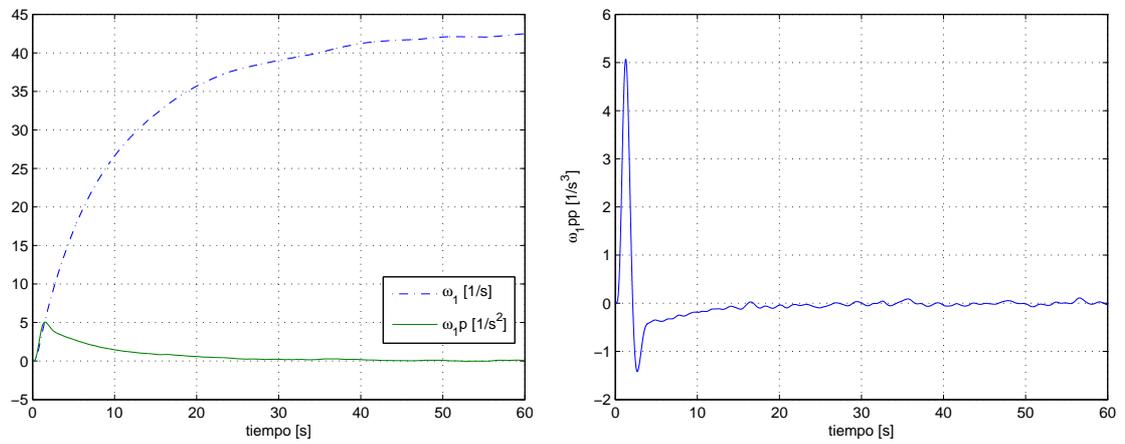


Figura 5.4: *Comportamiento real de ω_1 , $\dot{\omega}_1$ y $\ddot{\omega}_1$*

ω_1 . Los resultados obtenidos al aplicar 4 pares distintos y combinarlos de las 6 maneras posibles se muestran en la Tabla 5.2.

SISTEMA	TORQUES RELACIONADOS T_m [Nm]	I_1 [Nms ²]	T_{C_1} [Nm]
1	0.0477-0.0596	0.0048	0.0352
2	0.0477-0.0715	0.0053	0.0341
3	0.0477-0.0954	0.0049	0.0350
4	0.0596-0.0715	0.0058	0.0306
5	0.0596-0.0954	0.0050	0.0346
6	0.0715-0.0954	0.0046	0.0386
PROMEDIOS		0.0051	0.0347

Tabla 5.2: Resultados de las pruebas aplicados a la llanta

5.3.2. B_1

De la Ec. (5.11) se tiene que en el instante en que el valor de $\ddot{\omega}_1$ es mínimo y el valor de $\dot{\omega}_1$ es máximo, se debe cumplir que

$$B_1 = -I_1 \frac{\ddot{\omega}_{1min}}{\dot{\omega}_{1max}}. \quad (5.13)$$

Usando la respuesta ω_1 del sistema de las pruebas anteriores (Fig. 5.4), se encontraron los valores mínimos y máximos de $\ddot{\omega}_1$ y $\dot{\omega}_1$ respectivamente, y sustituyendo los valores en la Ec. (5.13) se hallaron los resultados de la Tabla 5.3.

PRUEBA	PAR APLICADO T_m [Nm]	$B_1 \times 10^{-3}$ [Nms]
1	0.0477	1.5773
2	0.0596	1.4127
3	0.0715	1.4748
4	0.0954	1.2778
PROMEDIO		1.4357

Tabla 5.3: Resultados de las pruebas aplicados a la llanta (parte 2)

5.4. Parámetros del rodillo

En los experimentos realizados para determinar los parámetros del rodillo, el banco de pruebas volvió a ser colocado en la posición de la Fig. 3.1. El modelo matemático considerado para los experimentos de esta parte fue

$$I_2 \dot{\omega}_2 = R_2 F - B_2 \omega_2 - T_{C_2} \quad (5.14)$$

donde T_{C_2} es el par perdido por fricción viscosa en los rodamientos del rodillo y F es la fuerza de fricción transmitida al rodillo para ponerlo en movimiento. Así, los experimentos realizados para obtener I_2 , B_2 y T_{C_2} consistieron en llevar la velocidad del rodillo a una velocidad constante y después observar su desaceleración haciendo nulo el término de fricción en la Ec. (5.14). Esto último se hizo levantando el rodillo de la llanta después de 20 segundos. En la Fig. 5.5 se muestra la respuesta del sistema a un experimento realizado. Para calcular los parámetros del rodillo se partió de la Ec. (5.14) y se siguió como se explica

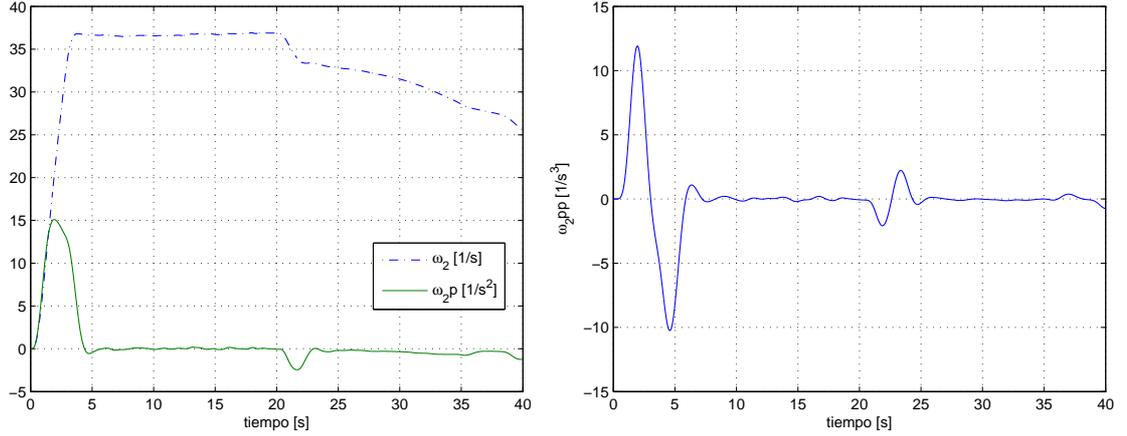


Figura 5.5: Comportamiento real de ω_2 , $\dot{\omega}_2$ y $\ddot{\omega}_2$

a continuación.

5.4.1. B_2 y T_{C_2}

De la Ec. (5.14) se tiene que para una velocidad constante $\omega_2 = \omega_{20}$

$$R_2 F = B_2 \omega_{20} + T_{C_2} . \quad (5.15)$$

Por tanto si se mide la velocidad ω_2 y la fuerza de fricción F se mide a través de la dinámica de la llanta para distintas velocidades ω_2 , se obtendrán distintos sistemas de ecuaciones que se podrán resolver para B_2 y T_{C_2} . En la Tabla 5.4 se muestran los resultados obtenidos después de resolver los sistemas de ecuaciones para B_2 y T_{C_2} .

5.4.2. I_2

Por otra parte, la obtención de la inercia I_2 requirió de la solución para ω_2 de la Ec. (5.14) cuando el sistema se está desacelerando bajo la condición inicial $\omega_2(0) = \omega_{20}$. Dicha solución es:

$$\omega_2(t) = \frac{T_{C_2} + B_2 \omega_{20}}{B_2} e^{-\frac{B_2}{I_2} t} - \frac{T_{C_2}}{B_2} \quad (5.16)$$

ω_2 RELACIONADOS [$\frac{1}{s}$]	$B_2[Nms]$	$T_{C_2}[Nm]$
10.16 - 20.72	0.0268	1.0392
10.16 - 25.98	0.0265	1.0416
10.16 - 36.66	0.0166	1.1428
20.72 - 25.98	0.0260	1.0544
20.72 - 36.66	0.0098	1.3903
25.98 - 36.66	0.0018	1.6832
PROMEDIOS	0.0179	1.2253

Tabla 5.4: Resultados de las pruebas aplicados al rodillo

que tiene derivada

$$\dot{\omega}_2 = -\frac{R_2 F_{20}}{I_2} e^{-\frac{B_2}{I_2} t} \quad (5.17)$$

donde se llamó F_{20} a la fuerza de fricción F medida a la velocidad ω_{20} (Ec. (5.15)). De esta última ecuación se observa que al valor mínimo de ω_2 la inercia I_2 es:

$$I_2 = -\frac{R_2 F_{20}}{\dot{\omega}_{2min}} \quad (5.18)$$

Por tanto, I_2 resultó de hallar el mínimo de $\dot{\omega}_2$ después de los 20 segundos y aplicar la Ec. (5.18). Los resultados se muestran en la Tabla 5.5

PRUEBA	$\omega_2[\frac{1}{s}]$	$I_2[Nms^2]$
1	10.16	0.6134
2	20.72	0.6960
3	25.98	0.9608
4	36.66	0.7158
PROMEDIO		0.7465

Tabla 5.5: Resultados de las pruebas aplicados al rodillo (parte 2)

5.5. Discusión de resultados

Para el cálculo de los parámetros de la llanta y el rodillo se realizaron pruebas independientes. Las pruebas realizadas a la llanta mostraron un buen comportamiento mientras que las aplicadas al rodillo presentaron muchas variaciones. Como se mencionó anteriormente, para calcular los parámetros del rodillo éste se tuvo que levantar. Este levantamiento se realizó manualmente ocasionando cambios en las fricciones secas de los acoplamientos mecánicos debido a la alteración del centro de giro del rodillo. Se menciona que no se usó un

montaje mecánico estable debido a que los brazos del banco que sostienen el rodillo no están diseñados para algún tipo de soporte. Los resultados a las pruebas del rodillo pudieran mejorarse con un adecuado balanceo y un levantamiento que no altere sus propiedades de giro.

Capítulo 6

Parámetros del modelo de fricción

En este capítulo se encontrarán los parámetros que requiere el modelo de fricción de LuGre presentado en el capítulo 2. Como se ha mencionado en este trabajo, el modelo de LuGre es un modelo viscoelastoplástico con 6 parámetros $(\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, v_s, F_c, F_s)$. Los parámetros σ_0 y σ_1 están asociados al estado z que representa el estado interno de las cerdas y son estos términos en particular los que dotan al modelo de fricción de carácter *dinámico*. Por otro lado, los parámetros F_c , F_s y v_s están asociados al fenómeno estático de la fricción. Este fenómeno estático de fricción es el *efecto Stribeck* presentado en la Fig. 2.5 del capítulo 2. El parámetro σ_2 es el término de fricción viscosa. Los parámetros σ_2 , F_c , F_s y v_s serán calculados realizando el mismo tipo de pruebas, y σ_0 y σ_1 serán calculados por separado.

6.1. Efecto Stribeck

El *efecto Stribeck* relaciona la magnitud de la fuerza de fricción con la velocidad relativa s en estado estacionario. Por tanto, el cálculo de los parámetros relacionados con este fenómeno se realizó haciendo medidas de la fuerza de fricción en estado estacionario con su velocidad relativa s correspondiente. Es decir, si la fuerza de fricción está descrita por

$$F = \sigma_0 z + \sigma_1 \dot{z} + \sigma_2 s \quad (6.1)$$

$$\dot{z} = s - \sigma_0 \frac{|s|}{g(s)} z \quad (6.2)$$

y la fuerza en estado estacionario es

$$F = g(s) + \sigma_2 s$$

o bien

$$F = F_c + (F_s - F_c) e^{-\left|\frac{s}{v_s}\right|^{\frac{1}{2}}} + \sigma_2 s \quad (6.3)$$

entonces cada valor de s tiene un valor de F correspondiente. Por tanto, realizando lecturas de F y s en estado estacionario, los datos recopilados deben ajustarse a la Ec. (6.3). Para encontrar los parámetros del *efecto Stribeck*, se realizaron 26 pruebas en estado estacionario midiendo la fuerza de fricción F a través de los parámetros de la llanta previamente encontrados y la ecuación

$$F = \frac{1}{R_1}(T_m - I_1\dot{\omega}_1 - B_1\omega - T_{C_1}). \quad (6.4)$$

Los datos se muestran en la Tabla 6.1 y en la Fig. 6.1

PRUEBA	$s[Nm]$	$F[N]$
1	$6.2826e^{-4}$	4.8570
2	0.0011	4.7790
3	0.0012	4.8200
4	0.0033	4.9689
5	0.0044	4.8946
6	0.0045	4.7717
7	0.0047	4.9318
8	0.0050	5.5624
9	0.0053	5.1528
10	0.0057	5.0791
11	0.0058	5.0421
12	0.0059	5.1846
13	0.0061	5.1162
14	0.0083	4.7627
15	0.0088	4.7771
16	0.0091	4.7823
17	0.0149	5.9315
18	0.0269	6.2993
19	0.0393	6.3832
20	0.0534	6.7161
21	0.0549	6.4719
22	0.0559	6.6548
23	0.0614	6.8917
24	0.0623	6.5626
25	0.0688	7.0799
26	0.0696	7.3385

Tabla 6.1: Resultados *efecto Stribeck*

Para encontrar los valores de σ_2 , F_c , F_s y v_s se continuó como sigue.

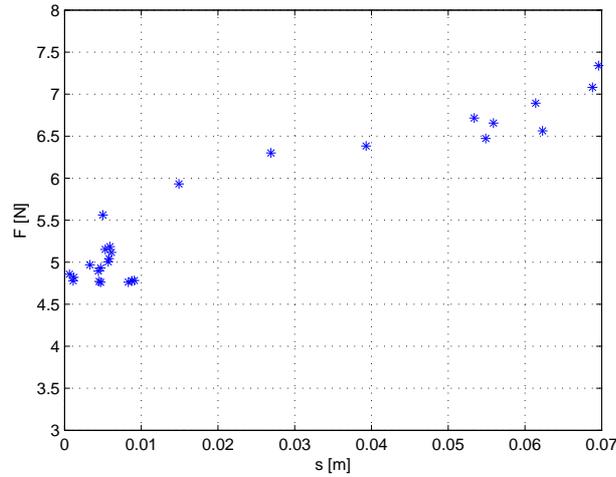


Figura 6.1: *Datos efecto Stribeck*

6.1.1. F_c y σ_2

De la Ec. (6.3) se observa que para valores grandes de s , la fuerza de fricción tiene la forma lineal

$$F = F_c + \sigma_2 s \quad (6.5)$$

Así, se ajustaron linealmente los 7 puntos más a la derecha de la Fig. 6.1 y se obtuvo

$$F = 38.5661s + 4.4678 \quad (6.6)$$

de donde

$$F_c = 4.4678 \quad (6.7)$$

$$\sigma_2 = 38.5661 \quad (6.8)$$

Los resultados de este ajuste se muestran en la Fig. 6.2

6.1.2. F_s

Con el conocimiento de σ_2 se sigue que

$$F - \sigma_2 s = F_c + (F_s - F_c)e^{-|\frac{s}{v_s}|^{\frac{1}{2}}} \quad (6.9)$$

$$g(s) = F_c + (F_s - F_c)e^{-|\frac{s}{v_s}|^{\frac{1}{2}}} \quad (6.10)$$

donde $g(s) = F - \sigma_2 s$. La forma de la gráfica de la Ec. (6.10) se obtuvo numéricamente con el dato de la Ec. (6.8). Esta gráfica se muestra en la Fig. 6.3

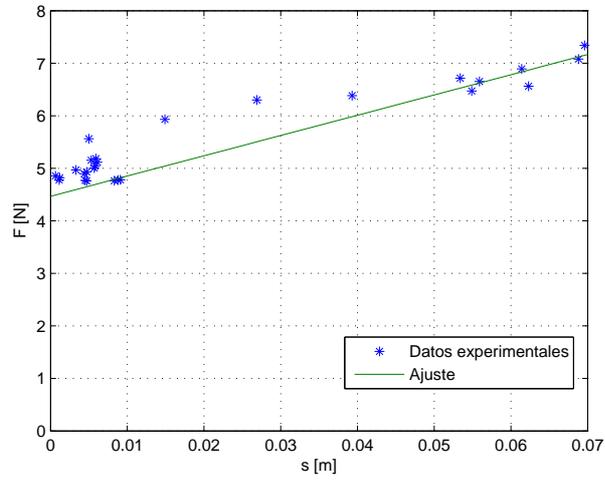


Figura 6.2: Ajuste de F_c y $\sigma_2 s$

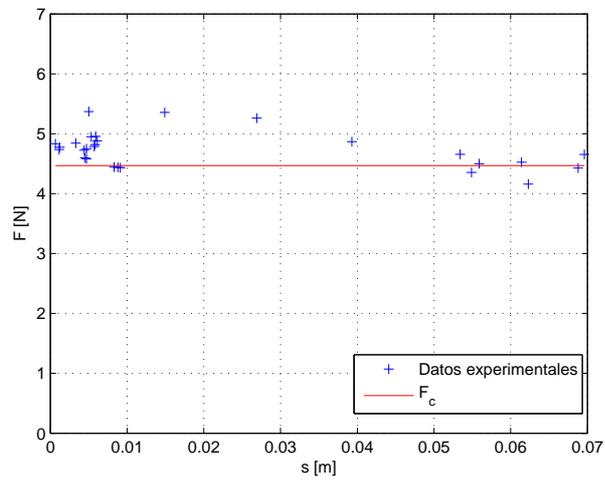


Figura 6.3: Datos experimentales $g(s)$

De los datos de la Fig. 6.3 y la Ec. (6.10) se puede decir que un valor aproximado de F_s es el valor medido de fricción a la velocidad relativa s más pequeña. Este valor es

$$F_s = 4.8570[N] \quad (6.11)$$

6.1.3. v_s

La búsqueda del valor de v_s se realizó ajustando los datos de la Fig. 6.3 a la Ec. (6.10) usando el comando de matlab *lsqcurvefit*. El resultado para v_s resultó ser

$$v_s = 0.0758 \quad (6.12)$$

El ajuste de la Ec. (6.10) y los datos experimentales de la Fig. 6.3 se muestran en la Fig. 6.4.

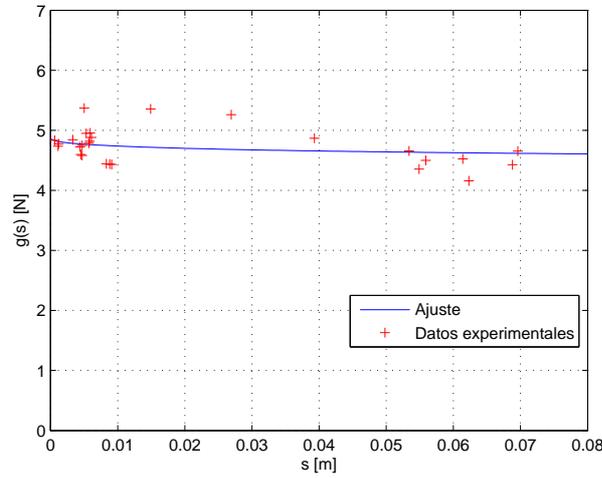


Figura 6.4: Ajuste de $g(s)$

6.2. σ_0 y σ_1 del modelo de LuGre

La obtención de los parámetros σ_0 y σ_1 del modelo de LuGre se realizó utilizando identificación de parámetros por el método del estimador del gradiente. Para realizar esta identificación fue necesario reescribir el modelo de LuGre de una forma más adecuada. La forma a la que se llevó la identificación paramétrica fue

$$Y = Wa \quad (6.13)$$

donde Y es la salida, W es el vector de señales y a es el vector de parámetros desconocidos. En la Ec. (6.13) Y y W son señales conocidas. Así, sea F la fuerza de fricción del modelo

de LuGre dada por

$$F = \sigma_0 z + \sigma_1 \dot{z} + \sigma_2 s. \quad (6.14)$$

Sustituyendo la Ec. (4.3) en la ecuación anterior se obtiene

$$F = \sigma_0 z - \sigma_0 \sigma_1 \frac{|s|}{g(s)} z + (\sigma_1 + \sigma_2) s \quad (6.15)$$

que se puede escribir como

$$F = W_z \sigma_x \quad (6.16)$$

donde

$$W_z = \begin{bmatrix} z & -\frac{|s|}{g(s)} z & s \end{bmatrix} \quad (6.17)$$

$$\sigma_x = \begin{bmatrix} \sigma_0 \\ \sigma_0 \sigma_1 \\ \sigma_1 + \sigma_2 \end{bmatrix} \quad (6.18)$$

La Ec. (6.16) fue la ecuación utilizada para la identificación y requirió del conocimiento de la fuerza de fricción F y el vector W_z para la aplicación del método de identificación. La fuerza de fricción F se obtuvo como en los experimentos del *efecto Stribeck* (Ec. (6.4)). Por otro lado, para obtener el vector W_z se implementó un observador del estado z debido a que este estado no puede medirse directamente. El observador implementado ha sido usado en varios trabajos de simulación en el Instituto de Ingeniería [Olmos González, 2001, Alvarez-Icaza et al., 2005]. Dicho observador se presenta en la siguiente ecuación

$$\dot{\hat{z}} = s - \sigma_0 \frac{|s|}{g(s)} \hat{z} \quad (6.19)$$

Según el criterio del estimador del gradiente [Slotine & Li, 1991] y considerando la forma de la Ec. (6.16), la ley de identificación viene dada por

$$\dot{\hat{\sigma}}_x = -P_0 W_z (\hat{F} - F) \quad (6.20)$$

donde \hat{F} es la fuerza de fricción estimada con los parámetros estimados $\hat{\sigma}_x$, y P_0 es un vector de ganancia constante.

Ya que el procesamiento de datos y el diseño de control del banco se realiza con el *Xpc Target*, la identificación de parámetros de las Ecs. (6.16) y (6.20) se modeló en diagramas de bloques *Simulink*. Las Figs. 6.5 y 6.6 muestran el diagrama de bloques para la identificación de parámetros mediante el estimador del gradiente junto al observador de la Ec. (6.19). Nótese que para usar el diagrama de bloques de la Fig. 6.5 sólo se requiere de la fuerza de fricción F y la velocidad relativa s medidas en tiempo real. A la salida se obtiene el vector $\hat{\sigma}_x$ de la Ec. (6.16).

Para obtener los valores de σ_0 y σ_1 , el identificador se implementó al sistema y se ejecutó en tiempo real para una velocidad constante (Fig. 6.7). Los resultados se muestran en las Figs. 6.8, 6.9, y 6.10. Los valores para σ_0 , σ_1 , y σ_2 durante este experimento fueron en promedio 23.1873, 107.8835, y 26.4544.

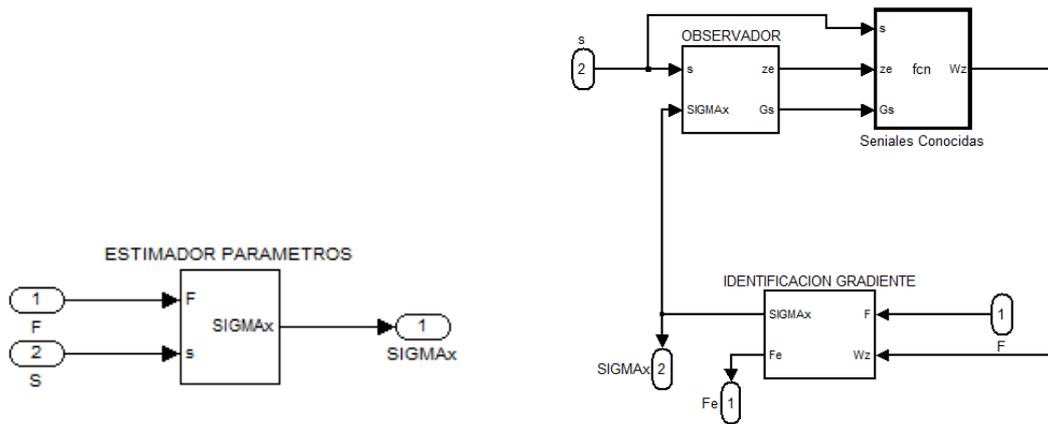


Figura 6.5: Diagrama de bloques en matlab

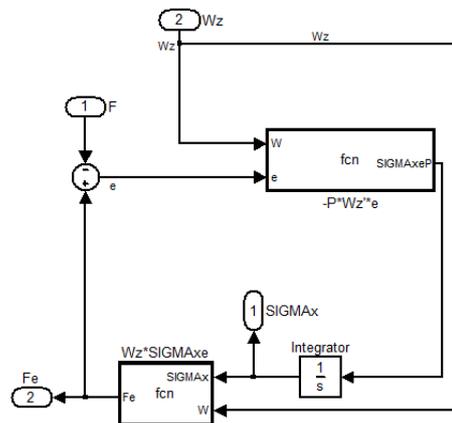


Figura 6.6: Diagrama de bloques del algoritmo del estimador del gradiente

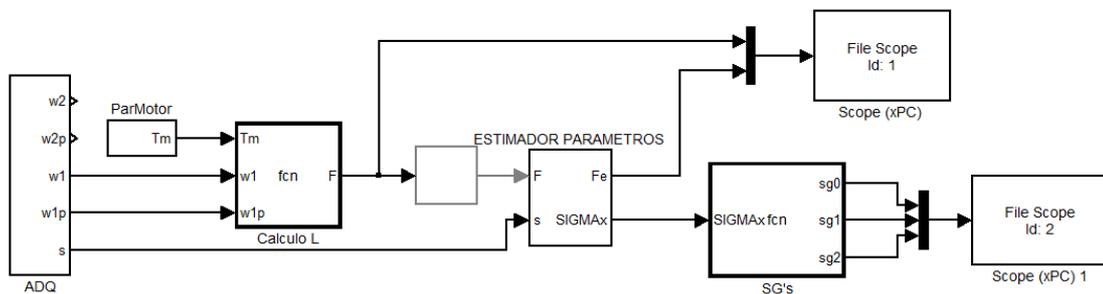


Figura 6.7: Implementación del estimador del gradiente para el banco de pruebas

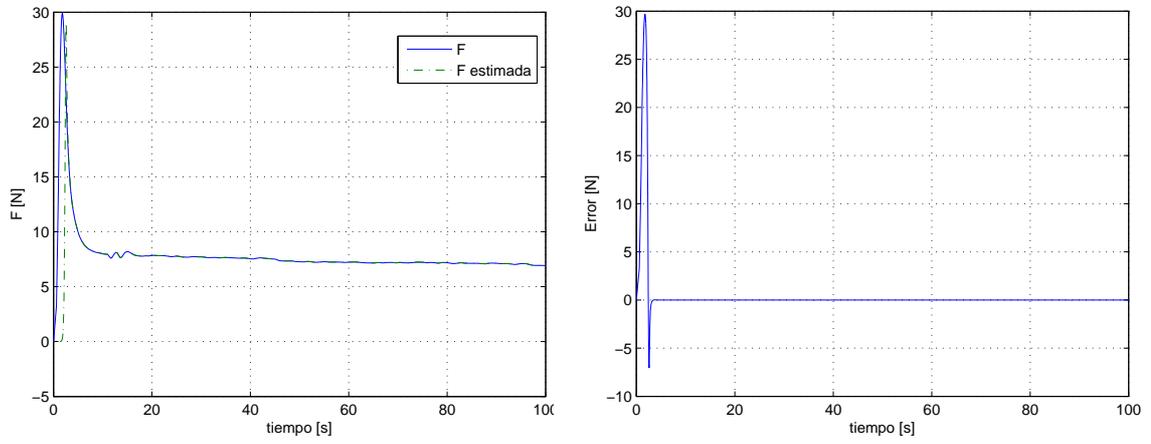


Figura 6.8: *Estimación en tiempo real del método del gradiente*

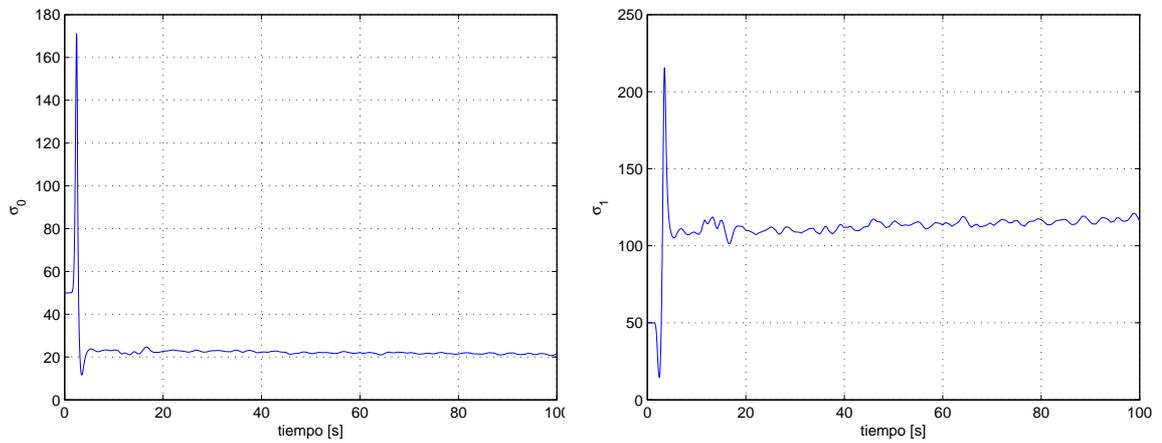


Figura 6.9: *Identificación de los parámetros σ_0 y σ_1*

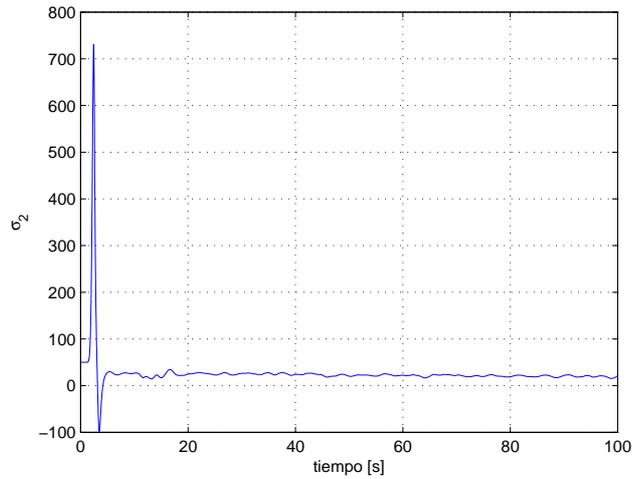


Figura 6.10: Identificación del parámetro σ_2

6.3. Discusión de resultados

En la realización de experimentos para determinar los parámetros del *efecto Stribeck*, el banco de pruebas mostró vibraciones para ciertas velocidades ocasionando picos en las medidas de fricción F y de velocidad relativa s . Con fines de análisis, en estos casos se tomó un valor promedio o en su defecto el valor más representativo durante el experimento. Asimismo, durante los experimentos realizados a bajas velocidades, el banco presentó distintos comportamientos claramente dependientes del diseño mecánico en los acoplamientos de los ejes y la lubricación de los rodamientos; al aplicar pares pequeños al sistema, éste se detenía a valores distintos de par.

Por otro lado, en la identificación de parámetros se utilizó el método del gradiente en línea debido al menor tiempo de ejecución frente al método de mínimos cuadrados. Ambos métodos se realizaron en *simulink* mostrando buenos resultados durante la simulación. Sin embargo, durante las pruebas en línea existieron dificultades para implementar el identificador con un seguimiento de velocidad senoidal, ya que existieron dificultades para obtener un buen comportamiento de s . En la Fig. 6.11 se muestra el comportamiento de s para dos pruebas de control de velocidad, una de tipo senoidal, y otra constante. Como se observa la medición es bastante irregular y lleva a un mal comportamiento del identificador. Debido a esto, en la sección 6.2 se optó por implementar el identificador para una velocidad constante (Figs. 6.8-6.10) esperando una mejor respuesta del identificador. En tal prueba, la estimación de la fuerza de fricción converge muy bien, en cambio la convergencia de los parámetros a los valores reales no está asegurada debido a la falta de excitación persistente [Slotine & Li, 1991], y a la irregularidad de la velocidad relativa s .

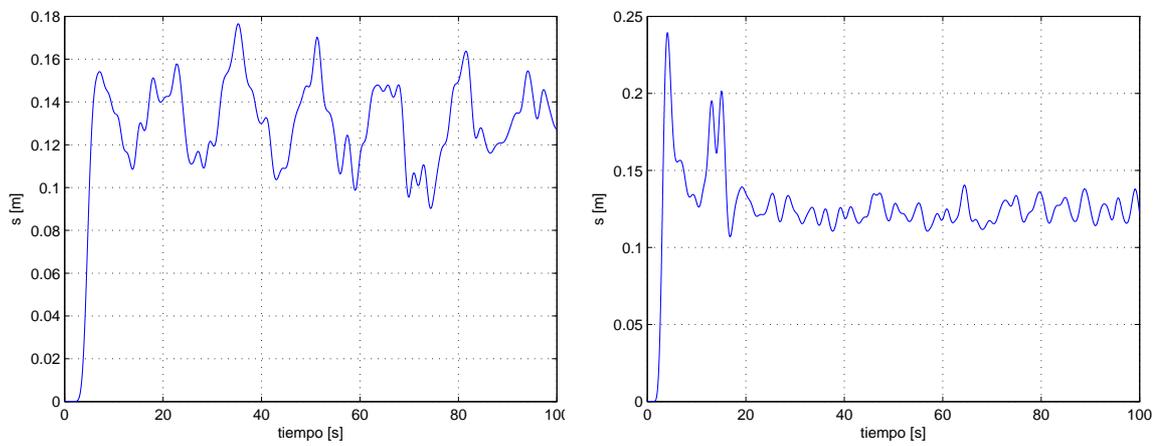


Figura 6.11: Velocidad relativa s medida para dos pruebas de control de velocidad: una senoidal, y otra constante

Capítulo 7

Conclusiones

Durante este trabajo se realizó una revisión del estado del arte de algunos ensayos para estudiar y caracterizar la fricción llanta-pavimento. Se presentaron sus modelos matemáticos. Se mencionó que los modelos de fricción estáticos han logrado describir parcialmente la fricción, sin embargo, no explican los fenómenos transitorios durante el acelerado y el frenado. Los modelos dinámicos de fricción presentados intentan describir estas fallas. Entre estos modelos dinámicos se encuentra el modelo de LuGre. Este modelo ha sido usado en algunos trabajos realizados en el Instituto de Ingeniería de la UNAM.

En particular, este trabajo se basó en el diseño de un banco de pruebas para estudiar la fricción llanta-pavimento. En éste se han calculado los parámetros necesarios para emplear el modelo dinámico de fricción de LuGre. Los parámetros estáticos F_c , F_s , v_s y σ_2 se calcularon ajustando una gráfica al comportamiento en estado estacionario. Los parámetros σ_0 y σ_1 se calcularon usando identificación en línea por el método del gradiente. Asimismo, se calcularon los parámetros físicos de la instalación mecánica, a saber, inercias y coeficientes de viscosidad en el rodillo, la llanta y motor de la instalación.

Debe decirse que los parámetros obtenidos no son resultado de una estimación exacta. Esto se debe a la incertidumbre inherente a todo proceso experimental realizado sobre una instalación física, en este caso el banco de pruebas.

Ya que en los experimentos realizados en el banco de pruebas se presentaron vibraciones y variaciones en el comportamiento, como trabajo a futuro se podría mejorar la calidad mecánica de éste. También se podría diseñar un sistema automático que levante y sostenga el rodillo uniformemente para efectuar experimentos que permitan obtener sus parámetros con más exactitud.

Se espera que los métodos utilizados y parámetros obtenidos en este trabajo sean usados para probar leyes de control para seguimiento de trayectorias de tracción y frenado.

Bibliografía

- [Aguilar Martínez, 2008] Aguilar Martínez, J. G. (2008). Diseño de una instalación experimental para estudiar la interacción llanta-pavimento. Tesis de maestría, Programa de Maestría y Doctorado en Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México.
- [Alvarez-Icaza et al., 2005] Alvarez-Icaza, L., Yi, J., Horowitz, R., & Olmos, L. (2005). Dynamic friction model-based, tire-road friction estimation and emergency braking control. *Transaction of the ASME*, Vol. 127, 22–32.
- [Armstrong-Hélouvry, 1991] Armstrong-Hélouvry, B. (1991). *Control of machines with friction*. Boston, Ma.: Kluwer Academic Publisher.
- [Canudas de Wit et al., 1995] Canudas de Wit, C., Olsson, H., Åström, K. J., & Lischinsky, P. (1995). A new model for control of system with friction. *IEEE Transaction on automatic control*, Vol. 40, 419–425.
- [H. Pacejka et al., 1987] H. Pacejka, L. Niborg, & E. Bakker (1987). Tyre modeling for use in vehicle dynamic studies. *SAE Technical Paper 870421*.
- [Haessig & Friedland, 1991] Haessig, D. A. & Friedland, B. (1991). On the modelling and simulation of friction. *American Control Conference*, (pp. 1256–1261).
- [Kiencke & Dais, 1994] Kiencke, U. & Dais, A. (1994). Estimation of tyre friction for enhanced ABS-systems. *Proceedings of the AVEG Congress. Tokyo*.
- [Olmos González, 2001] Olmos González, L. (2001). Control de frenado de emergencia con base en modelos de fricción llanta-pavimento. Tesis de maestría, Programa de Maestría y Doctorado en Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México.
- [Olsson et al., 1997] Olsson, H., Amströng, J. K., Canudas de Wit, C., Gäfvert, M., & Lischinsky, P. (1997). Friction models and friction compensation. *Eur. J. Control*, Vol. 4, 176–195.
- [Rabinowicz, 1995] Rabinowicz, E. (1995). *Friction and wear of materials*. New York: Jhon Wiley and Sons.
- [Slotine & Li, 1991] Slotine, J.-J. & Li, W. (1991). *Applied nonlinear control*. Englewood Cliffs, New Jersey 07632: Prentice Hall.

[Terrell, 1988] Terrell, T. J. (1988). *Introduction to digital filters*. London: Macmillan Education.