**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

**FACULTAD DE INGENIERÍA**

# Modelo Físico del Teorema Fundamental del Cálculo

**TESIS**

Que para obtener el título de

**Ingeniero Civil**

**P R E S E N T A**

Alejandro Oviedo Moreno

**DIRECTOR DE TESIS**

M.D. José Antonio Fragoso Uroza

**Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2019**

VNIVERSIDAD NACIONAL AVPNOMA DE MEXICO

**DIVISIÓN DE INGENIERÍAS CIVIL Y GEOMÁTICA**
**COMITÉ DE TITULACIÓN**
**FING/DICyG/SEAC/UTIT/030/18**

Señor
ALEJANDRO OVIEDO MORENO
Presente

En atención a su solicitud me es grato hacer de su conocimiento el tema que propuso el profesor M.D. JOSÉ ANTONIO FRAGOSO UROZA, que aprobó este Comité, para que lo desarrolle usted como tesis de su examen profesional de INGENIERO CIVIL.

**"MODELO FÍSICO DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO"**

INTRODUCCIÓN
I. CÁLCULO
II. HISTORIA DEL CÁLCULO INFINITESIMAL
III. APLICACIONES DEL CÁLCULO INFINITESIMAL EN INGENIERÍA CIVIL
IV. MODELO FÍSICO DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO
V. CONCLUSIONES
BIBLIOGRAFÍA

Ruego a usted cumplir con la disposición de la Dirección General de la Administración Escolar en el sentido de que se imprima en lugar visible de cada ejemplar de la tesis el Título de ésta.

Asimismo le recuerdo que la Ley de Profesiones estipula que deberá prestar servicio social durante un tiempo mínimo de seis meses como requisito para sustentar Examen Profesional.

Atentamente
"POR MI RAZA HABLARÁ EL ESPÍRITU"
Cd. Universitaria a 25 de noviembre del 2019.
EL PRESIDENTE

M.I. MARCO TULIO MENDOZA ROSAS

MTMR/gar.

*D I O S*

*de Victor Hugo*

*Agitador eterno de las moles,*
*que van con formidable movimiento,*
*rodando en la extensión del firmamento.*

*Creador de mundos, constructor de soles,*
*mi raquítico y torpe entendimiento,*
*apenas a llegar a ti se atreve,*
*aunque hasta ti con avidez le lleve,*
*la misma actividad del pensamiento.*

*El infinito existe, con espanto*
*yo lo miro extenderse en rededor mío*
*y luego dilatarse tanto .... tanto,*
*que da miedo pensar que esté vacío.*

*El espacio que aparta las estrellas,*
*¿Será un desierto inútil, mudo, frío,*
*sin más objeto que mediar entre ellas?*

*Y esas esferas cuyo rumbo cierto*
*calcula y determina al hombre mismo,*
*¿Son desiertos rodando en el desierto*
*o soledades cayendo en el abismo?*

*La esfera que yo habito es un grano de arena*
*comparada con muchas de las que hacen su jornada*
*por el camino azul del infinito.*

*Y estando este mundículo cuitado*
*por seres mil desde sus blancos polos*
*hasta su línea equinoccial poblado…*
*¿Los demás, por ventura estarán solos?*

*No puede ser, por la faz de la Tierra*
*se derraman seres cual yo, que piensan,*
*sienten y quieren, gozan y sufren, aborrecen y aman,*
*mas nacen, luchan por la vida y mueren.*

*¿De dónde al mundo terrenal venimos?*
*¿Por qué razón sufrimos y gozamos*
*y cuando aquí nuestra misión cumplimos,*
*a qué lugar del infinito vamos?*

*¿Por qué aquí la razón y la conciencia,*
*en cada cual progresan y varían,*
*a medida que la flor de la humana inteligencia,*
*se nutre con los jugos de la ciencia,*
*en los feraces campos de la vida?*

*Progresan y varían como lo hace la materia*
*que al cuerpo constituye,*
*con la que tienen un estrecho enlace*
*y la materia ni en el niño nace,*
*¡ni en el cadáver yerto se destruye!*

*Luego este mundo tiene la materia*
*y el espíritu viene del espacio*
*para habitar su exigua preferencia,*
*ya sea una choza o un palacio,*
*ya sea en la abundancia o en la miseria.*

*Luego el alma a la hora de la muerte,*
*vuelve al espacio más adelantada,*
*en la Tierra dejando abandonada*
*una envoltura material ya inerte,*
*que solamente la pidió prestada.*

*¿Por qué en los otros no ha de ser lo mismo?*
*Cada astro debe contener sus hombres*
*que tendrán otras formas y otros nombres*
*y la vida con otro mecanismo.*

*Vivirán más de prisa o más en calma,*
*unos serán más grandes que los otros,*
*pero, en esencia, son como nosotros,*
*seres compuestos de materia y alma.*

*Hay, pues, dos universos: el sensible y el moral,*
*misteriosos y profundos; el uno material,*
*el de los mundos, el otro, el de las almas, invisible.*

*¿Cuál fue primero? ¿El alma o la materia?*
*¿Nacieron a la vez? ¿Cómo? ¿De dónde?*
*¡Formidable cuestión, que a la miseria*
*de nuestra pobre concepción se esconde!*

*Pero ambas tienen alguien quien la rige*
*y con mano inflexible las gobierna*
*y una ley que sus ímpetus dirige,*
*sabia, inmutable, ineludible, eterna.*

*¿Cuál es esa ley, a dónde está la mano?*
*La ley es la tracción desde la estrella*
*al más pequeño grano, fatalmente sujetas van a ella;*
*La mano es la de Dios, ser soberano,*
*cuyo nombre en sus obras está escrito y con el alma*
*está en el cuerpo humano,*
*está en la eternidad y el infinito.*

*Zeus en Grecia, Júpiter en Roma,*
*Ahura Mazda en la Persia, Tian en China,*
*Elím, Brahma, Jehová,*
*mil nombres tiene en el lenguaje la entidad divina.*

*Pero en todos proclaman su existencia,*
*la misma idea con distinto nombre,*
*innata en el espíritu del hombre,*
*innata en su razón y en su conciencia.*

*Orgullosa y altiva la mirada*
*delante del humano poderío,*
*ante el tuyo se inclina anonadada*
*y mi alma permanece arrodillada*
*a todas horas ante ti, Dios mío.*

*No alcanzo a comprenderte,*
*pero veo en torno mío por doquier tus huellas,*
*en el cielo marcadas con estrellas*
*y en la tierra con vidas.*

*Y, yo creo, aunque diga quienquiera que me equivoco,*
*que es preciso ser necio o estar loco,*
*o ser imbécil para ser ateo.*

*Pero… abusado han de tal manera,*
*las religiones de la idea divina,*
*que el vulgo adora dioses de madera,*
*de piedra, de metal y hasta de harina.*

*Y llama ateo, considera impío,*
*al que no se arrodilla reverente,*
*ante el ídolo humano que, imprudente,*
*en tus altares se instaló ¡Dios mío!*

*A despecho del vulgo ruin y estulto,*
*nosotros, Dios eterno, te adoramos,*
*y... aún cuando estés a nuestro alcance oculto,*
*en honra tuya templos levantamos*
*y, en ellos, en tu nombre trabajamos*
*y te rendimos fervoroso culto.*

*Más adoramos tu divina esencia,*
*tu necesario Ser inabordable,*
*para la misma escrutadora ciencia*
*que, con ánimo siempre infatigable,*
*examina el anverso y el reverso,*
*de tu Creación que absortos admiramos;*
*¡Por eso, solamente te llamamos…*
*Gran Arquitecto, Autor del Universo!*

# Agradecimiento

*Las palabras nunca alcanzan cuando lo que hay que decir desborda el alma. - Julio Cortázar*

Gracias a,

Dios porque: «Felices son los íntegros, los que siguen las enseñanzas del Señor».

(Salmos 119:1 Versión NTV).

Gracias a,

ti. Te agradezco porque tú que estás leyendo permites a la tinta sobre el papel pasar de ser letras, a ser palabras, oraciones, ideas, pensamiento. Das vida a lo escrito en el año 2019 d.C. y así este soliloquio no queda solo ni loco. 0 || 22

Gracias a,

Universidad Nacional Autónoma de México. La docencia, investigación y extensión de la cultura, que son su dedicación, desarrollaron en mí la admiración por el Universo, el orgullo por mi país México y la ventura de ser autónomo. Por ello, agradezco que por mi raza hablará el espíritu.

Gracias a,

M.D. y Fís. José Antonio Fragoso Uroza, que este trabajo exista es gracias a la consideración de la relación de los factores del dominio afectivo y cognitivo para el proceso enseñanza-aprendizaje de la Física. Quiero agradecerle ser un gran maestro.

Dr. Arnulfo Ortiz Gómez porque su confianza en esta tesis hizo realidad a la idea.

Ing. Marcos Trejo Hernández e Ing. Norma Legorreta Linares, por ser mis tutores en el paso académico. Como dijo William Butler Yeats: «La educación no es llenar un cubo, sino encender un fuego». Gracias por entenderme y guiarme.

Gracias a,

Mi padre por darme la vida e inspirarme cada día.

Mi madre por irradiar felicidad en tu bondad.

Mi hermana Ana por quererme y porque yo te quiero.

A toda mi familia por ser mi ‘ohana

Sofía, hermana mía, por enseñarme a caminar descalzo, liberar el fuego que hay en mí, conectarme con lo que yo soy que dejé ir.

Gracias a,

Luis Eduardo Juárez Quirarte y Joaquín Meléndez Gómez con quienes surgió el Modelo Físico del Teorema Fundamental del Cálculo para el X Concurso de Diseño y Construcción de Modelos y Prototipos Experimentales CU 60 años en el año 2014 d.C.

Gracias a,

Fundación TELMEX *telcel* por el grato reconocimiento y compartir su visión de asumir el desarrollo integral. Sea el sendero que decido recorrer a fin de encontrar plenitud.

Sociedad de Exalumnos de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de México, A. C. por ser ejemplo en el apoyo a mi *Alma Mater Studiorum*.

Programa de Becas para Estudiantes de la Universidad Nacional Autónoma de México SEP - UNAM - FUNAM por fomentar en mí la concienciación de la realidad global.

Gracias a,

Instituto de Seguridad Social para las Fuerzas Armadas Mexicanas por permitirme efectuar mi servicio basado en los valores de patriotismo, cumplimiento del deber, valor y disciplina. Agradezco al Coronel Ingeniero Constructor Pedro Ambriz González y al Ingeniero Javier Lara Moreno su consideración para con la presente tesis. Un honor.

Gracias a,

WSP Global Inc. por hacer las preguntas cruciales en su manifiesto: ¿Podemos ayudar a que las sociedades prosperen en un mundo que no controlamos? ¿Podemos anticipar lo impredecible, percibir lo inexplicable y planear algo extraordinario? ¿Podemos diseñ...?

Gracias a,

Dr. Carlos Agustín Escalante Sandoval

M. José Gonzalo Guerrero Zepeda

Lic. Ana Luisa Alberro Lizón
M.I. Gustavo Carlos Argil Carriles †
Fís. Sergio Roberto Arzamendi Pérez
Ing. Ángel Leonardo Bañuelos Saucedo
Ing. Ernesto Bernal Velazco
M.I. Amalia Adriana Cafaggi Félix
Ing. Jaime Héctor Díaz Osornio
Ing. Roberto Espriú Sen
M. U. Guillermo Luis Lauro Esquivel Castañeda
M.I. Leonardo Emmanuel Flores Corona
M.I. Víctor Franco
Ing. Jesús Gallegos Silva
Ing. León Manuel Garay Acevedo
M.I. Octavio García Domínguez
Ing. Josué Garduño Chávez
Ing. Benito Gómez Daza
Ing. Héctor Javier Guzmán Olguín
M.I. Hugo Sergio Haaz Mora
Dr. Armando Rafael Hermosillo Arteaga
Ing. Luciralia Hernández Hernández
Ing. Margarita Luna Camacho
M.I. José Francisco Macedo Calvillo
M.I. Marco Antonio Macías Castillo
M.I. Sergio Macuil Robles
Dr. Humberto Juan Francisco Marengo Mogollón

Ing. Ernesto René Mendoza Sánchez
M.I. Carlos Manuel Menéndez Martínez
Ing. Eduardo Morales Flores
M.I. Alberto Moreno Bonett
M.I. Nikte Norma Ocampo Guerrero
M.E.M. Juan Ocáriz Castelazo
Ing. Ricardo Rubén Padilla Velázquez
Ing. Víctor Manuel Palma Valderrama
M.E.M. Margarita Ramírez Galindo
Ing. Isaías Ramírez Gutiérrez
M.E. Rosalba Rodríguez Chávez
Ing. Alejandro Rojas Tapia
Ing. Raúl Rosas Escalante
Ing. José Carlos Rosete Álvarez
Dra. María del Rosío Ruíz Urbano
Ing. Aurelio Salazar Rodríguez
Ing. José Salvador Salinas Telésforo
M.I. Rodrigo Takashi Sepúlveda Hirose
Dr. Rogelio Soto Ayala
Dr. Roberto Stark Feldman
M.I. José Francisco Téllez Granados
Ing. Jorge Isidro Terrazas y de Allende
M.I. Manuel de Jesús Vacio González
M. Juan Varela Juárez
Q.F.B. Fabiola Vega García

el aspirar a llamarme Ingeniero es gracias a ustedes por instruirme.

Gracias a,

Omar Fernando Abarca Martínez
Nayib Ahued Akele
Héctor Alan Almanza Mancilla
Alejandra Álvarez García
Víctor Gabriel Amezcua Ortiz
Emmanuel Andrade Sánchez
Julio Arriaga Sánchez
José Manuel Barragán Hernández
Erick Daniel Barrera Ángeles
Piero José Arturo Botton Escaffi
Luis Antonio Carranza Machorro
Rodrigo Chichilla Cornejo
Edgar Iván Cisniega Carrera
Jorge Isaac Colonia Montero
César Alejandro Cruz Veladiz
Ricardo Ángel Cuenca Acosta
Brenda Priscila Díaz Lim
Juan Carlos Flores Lara
Whitney Leslye Franco Márquez
Eva Ximena González Ramírez
Luis Eduardo Hernández López
José Alberto Hernández Rodríguez
**César Mauricio Jiménez de la Garza**
Juan Manuel Juárez Flores
Said López Lambarri
Jorge Alejandro Lozano Bárcena
Catalina Andrea Luna Andonegui
Yair Alí Martínez Castro
Arturo Medina Molina
Vicente Mendoza Ávila
José Antonio Mora Bonilla
Rodrigo Muñoz Sánchez
Kevin Nieto Pedraza
Sofía Ochoa Campos
Sergio Rafael Ortiz Blancarte
Argelia Angélica Osornio Girón
Irving Emmanuel Palacios Barrera
Diego Andrés Pérez Cruz
Diana Margarita Portillo Arreguín
Emanuel Ramos Cárdenas
Roxana Andrea Reséndiz Romero
Daniel Retana Castañeda
Ari Yael Reyes Soto
Donají Ríos Limeta
Beatriz Andrea Robles Olvera
Edgar Rodríguez Álvarez
Sergio Alberto Rodríguez Rivera
Daniela Berenice Sanabria Soto
Gonzalo Sánchez Guerrero
**Raúl Rodrigo Sandoval Flores**
Mario Rodolfo Tello Cortés
Alberto Valdovinos Lepine
Estefanía Vargas Escobedo
Karla Ofelia Vázquez Quijano

por hacer de la carrera un paseo.

Gracias a,

| | |
|---|---|
| Dr. Moisés Dávila Serrano | Dra. Elisa Fitz Díaz |
| Dr. Adrián Espinosa Bautista | Dr. Pedro Emiliano Hernández Gaona |
| Daniela Espino Castillo | Beatriz Alejandra Pardo Gómez |
| Ing. Heriberto Esquivel Castellanos | M.I. Hugo Germán Serrano Miranda |

la experiencia de cursar el Programa de Alto Rendimiento Académico vino a henchir mi interés y curiosidad porque el tiempo no bastó para lo vasto que existe.

Danke an,

Frau Dr. María Concepción Medina González. Das Lernen hat sehr viel Spaß gemacht. Ich bedanke mich auch bei allen meinen Klassenkameraden.

Gracias a,

Paula de Gortari Pedroza Aída Espinosa Vázquez Alejandra Vega-Rivera

| | |
|---|---|
| Ana Cristina Betán Santillán | Isaías Pablo Tolentino |
| Luis Eduardo Chávez Arredondo | Lucero Parada Ramírez |
| Aída Del Carmen Lunar De La Rosa | Karla Marissa Pérez Contreras |
| Mario Galván Tapia | Karen Gill Reyes Avedaño |
| Carlos Sebastián González Cuevas | Jorge Reyes Varela |
| María Lucero Guillén Puón | Rubén Iván Rivera Lucatero |
| Manuel Harfuch Díaz Barriga | Karen Sánchez Sánchez |
| César Sebastián Macías Bejarano | Karla Patricia Servín Olivera |
| Daniela Morales Sampedro | Oscar Antonio Torres Alfonzo |
| María Fernanda Nava Casas | Aldo Torres Castillo |
| Rogelio Martín Navarro Charles | Axel Valverde Andalón |
| Lucero Nuncio Mora | Lourdes Guadalupe Zamora García |
| Evelyn Ortiz Velasco | LA Squad |

Gracias a,

| | |
|---|---|
| Carlos Ernesto Carrillo Garza | Gerardo Hernández Macías |
| Isabel Cristina Desentis Pichardo | Eugenio Tonatiuh Mendoza Gómez |
| Arturo Gutiérrez Serrano | Pedro Sánchez Moreno |
| Diego Bass Granados | Marco Antonio Guerrero Corona |
| Arturo Carmona Salazar | Farid Sadot Jácome Velasco |
| Carlo Patricio Castro Lozano | David Nájera Luna |
| Alexis Chávez Mendieta | Juan Pablo Olivera Catrip |
| Bruno Denzel Gamboa | Derek Sánchez González |
| Diego Emiliano Domínguez González | Vladimir Sánchez González |
| Leonardo González Nieto | Mauricio Daniel Vaqueiro Toriello |
| Diego Guerrero Corona | Rodrigo Axel Zaldívar Villagómez |

porque lo mejor del deporte son las amistades que deja.

Gracias a,

| | |
|---|---|
| Jesús Eduardo Cruz Marroquín | Alex Ibarra Guerrero |
| Salvador de los Ríos Camacho | Juan José Pozuelos Ledesma |
| José Carlos Agustín Gutiérrez Espinoza | ______________________ Tu nombre aquí |

porque doy cuenta de pasar buenos momentos haciendo cualquier cosa o simplemente nada, sólo por el placer de disfrutar su compañía.

«Éstas eran dos líneas paralelas. Las líneas paralelas, ya se sabe, se alargan hasta el infinito sin juntarse nunca. Pero sucede que estas dos líneas paralelas estaban enamoradas una de la otra. No necesitaron, entonces, llegar al infinito para unirse. Cierto día, cuando ningún matemático las estaba viendo, las líneas se juntaron, y fueron entonces una sola y enamorada línea. Con esto que he contado no quiero atentar contra los principios que rigen a la ciencia matemática. Lejos de mí tan temeraria idea. Lo que quiero decir es que el amor está por encima de todas las ciencias. Tiene el amor su propia ciencia, que aunque no sea exacta tiene más fuerza que todas las otras ciencias puestas juntas». ¡Hasta mañana!...

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ingeniería

**Modelo Físico del Teorema Fundamental del Cálculo**

**TESIS**

Que para obtener el título de

**Ingeniero Civil**

**P R E S E N T A**

Alejandro Oviedo Moreno

**DIRECTOR DE TESIS**

José Antonio Fragoso Uroza
Maestro en Docencia y Físico

**Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2019**


## RESUMEN

El Modelo Físico del Teorema Fundamental del Cálculo relaciona el Cálculo Diferencial y el Cálculo Integral, definiéndolos como la transformación de los elementos al manipular el número de dimensiones por las que están formados.

La derivada de $x^3$ se puede interpretar físicamente como la reducción de dimensión de un cubo para obtener tres cuadrados, $3x^2$. Funciones representadas en el plano se especulan teniendo implicación con la materia. La integral conllevará al prolapso ortogonal de un punto y la derivada al colapso ortogonal de uno de ellos, siendo Cálculo Diferencial y Cálculo Integral los algoritmos que determinan los cambios de dimensión.


Universidad Nacional Autónoma de México

Faculty of Engineering

**Physical Model of the Fundamental Theorem of Calculus**

**THESIS**

In order to obtain the degree of

**Civil Engineer**

**S U B M I T S**

Alejandro Oviedo Moreno

**THESIS DIRECTOR**

José Antonio Fragoso Uroza
Master in Teaching and Physicist

**Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2019**


## ABSTRACT

The Physical Model of the Fundamental Theorem of Calculus relates the Differential Calculus and the Integral Calculus, defining them as the transformation of the elements when manipulating the number of dimensions by which they are formed.

The derivative of $x^3$ can be interpreted physically as the reduction of a cube's dimension in order to obtain three squares, $3x^2$. Functions represented on the plane are speculated having implication with matter. The integral will lead to the orthogonal prolapse of a point and the derivative to the orthogonal collapse of one of them, being Differential Calculus and Integral Calculus the algorithms that determine the changes of dimension.

# Contenido

# LISTA DE FIGURAS

## I

## III

## IV

# LISTA DE TABLAS

## I

## III

# Introducción

*Pensar es moverse en el infinito. - Henri Lacordaire*

## Justificación

El conocimiento es la facultad de comprender por medio de la razón la naturaleza, cualidades y relaciones de las cosas. Diversas definiciones se discuten, embrollo de la epistemología. Las matemáticas son conocimiento, desde su origen etimológico, al estudiar las propiedades y relaciones entre entidades abstractas como números, figuras geométricas y símbolos. El ingeniero, mediante su conocimiento, tiene como profesión analizar y entender los problemas que se le planteen para dar simiente a soluciones apropiadas. Para la resolución de problemas que admitan un modelo que sea divisible en pequeñas partes que en conjunto vuelvan a dar el total resulta ser aplicable el Cálculo Diferencial y el Cálculo Integral. El Cálculo Diferencial y el Cálculo Integral son ramas de las matemáticas. Sus operaciones se afirman como inversas, hasta cierto grado, mediante el Teorema Fundamental del Cálculo. La importancia que tiene el Cálculo como herramienta de la Ingeniería Civil hace que su estudio sea principal.

Eugene Wigner, quien aplicó los principios de simetría a la mecánica cuántica, expresó en su artículo de 1960 d.C., *The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences,* La Irrazonable Efectividad de las Matemáticas en las Ciencias Naturales:

> «La enorme utilidad de las matemáticas en las ciencias naturales es algo que roza lo misterioso, y no hay explicación para ello. No es en absoluto natural que existan "leyes de la naturaleza", y mucho menos que el hombre sea capaz de descubrirlas. El milagro de lo apropiado que resulta el lenguaje de las matemáticas para la formulación de las leyes de la física es un regalo maravilloso que no comprendemos ni nos merecemos».

| Μάθημα | Conocimiento | Máthēma |
|---|---|---|

Todas las cosas que llegamos a conocer, las conocemos en cuanto tienen cierta unidad e identidad y cierto carácter universal, expresó Aristóteles en su libro Metafísica, página 32. La presente tesis busca mostrar el milagro de lo apropiado que resulta el Cálculo como formulación del cambio de dimensión. Se propone un modelo tangible en donde a partir de la integración y derivación se calcula el resultado de la transformación al aumentar o disminuir el número de dimensiones de cierto objeto de estudio. La finalidad es adquirir mayor comprensión en la conformación de elementos y también considerar el entendimiento alterno con cierto carácter universal del Cálculo con afán de explorar dimensiones superiores.

## Alcance

El Modelo Físico del Teorema Fundamental del Cálculo propone una interpretación tangible de la afirmación que derivación e integración de una función son operaciones inversas.
Este documento tiene tres objetivos:

- Señalar la interpretación tangible del Cálculo Diferencial y del Cálculo Integral.
- Definir operaciones topológicas que representen a la diferencial y a la integral.
- Mostrar aplicación del concepto al ámbito de Ingeniería Civil.

## Ámbito de estudio

Cálculo Diferencial     Cálculo Integral     Geometría     Ingeniería Civil     Topología

## Planteamiento

La integral de un objeto de manera tangible se propone como el prolapso ortogonal de un punto cualquiera que le pertenece manteniendo unión elástica.
La derivada de un objeto de manera tangible se propone como el colapso ortogonal del punto más alejado que le pertenece manteniendo unión elástica.

El desarrollo del Modelo Físico del Teorema Fundamental del Cálculo se origina sobre la idea de encontrar una manera de explicar Cálculo de forma intuitiva, evitando la noción de límite y área bajo la curva. Es presentar los conceptos de derivación e integración mediante objetos geométricos representados en cualquier espacio $n$ dimensional. Se espera seguir a la tercer clase de los que abordan la filosofía natural según Roger Cotes en su carta del 12 de mayo de 1713 d.C., respecto a *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*:

> «Los que han abordado la filosofía natural pueden reducirse a tres clases aproximadamente. De entre ellos algunos han atribuido a las diversas especies de cosas cualidades ocultas y específicas, de acuerdo con lo cual se supone que los fenómenos de cuerpos particulares proceden de alguna manera desconocida. El conjunto de la doctrina escolástica, derivada de Aristóteles y los peripatéticos, se apoya en este principio. Estos autores afirman que los diversos efectos de los cuerpos surgen de las naturalezas particulares de esos cuerpos. Pero no nos dicen de dónde provienen esas naturalezas y, por consiguiente, no nos dicen nada. Como toda su preocupación se centra en dar nombres a las cosas, en vez de buscar en las cosas mismas, podemos decir que han inventado un modo filosófico de hablar, pero no que nos hayan dado a conocer una verdadera filosofía.
>
> Otros han intentado aplicar sus esfuerzos mejor rechazando ese fárrago inútil de palabras. Suponen que toda materia es homogénea, y que la variedad de formas percibida en los cuerpos surge de algunas afecciones muy sencillas y simples de sus partículas componentes. Y procediendo de las cosas sencillas a las más compuestas toman con certeza un buen camino, siempre que no atribuyan a esas afecciones ningún modo distinto del atribuido por la propia Naturaleza. Pero cuando se toman la libertad de imaginar arbitrariamente figuras y magnitudes desconocidas, situaciones inciertas y movimientos de las partes, suponiendo además fluidos ocultos capaces de penetrar libremente por los poros de los cuerpos, dotados de una sutileza omnipotente y agitados por movimientos ocultos, caen en sueños y quimeras despreciando la verdadera constitución de las cosas, que desde luego no podrá deducirse de conjeturas falaces cuando apenas si logramos alcanzarla con comprobadísimas observaciones.

> Los que parten de hipótesis como primeros principios de sus especulaciones -aunque procedan luego con la mayor precisión a partir de esos principios- pueden desde luego componer una fábula ingeniosa pero no dejará de ser una fábula.
> Queda entonces la tercera clase, que se aprovecha de la filosofía experimental. Estos pensadores deducen las causas de todas las cosas de los principios más simples posibles; pero no asumen como principio nada que no esté probado por los fenómenos. No inventan hipótesis, ni las admiten en filosofía, sino como cuestiones cuya verdad puede ser disputada. Proceden así siguiendo un método doble, analítico y sintético. A partir de algunos fenómenos seleccionados deducen por análisis las fuerzas de la naturaleza y las leyes más simples de las fuerzas; y desde allí, por síntesis, muestran la constitución del resto».

En este trabajo, bajo la metodología de análisis comparativo entre resultados matemáticos y construcciones geométricas, se busca dar representación de la composición de elementos al variar las dimensiones que los conforman. La presente tesis, a partir de observaciones de la aplicación del Cálculo Diferencial y del Cálculo Integral a objetos tangibles, propone sintetizar la constitución del esquema de cambio de dimensión cuya verdad puede ser disputada.

## Sinopsis

Se integra la tesis por cinco capítulos:

Capítulo I Cálculo

Expone la definición de esta rama de las matemáticas y los conceptos que la conforman.

Capítulo II Historia del Cálculo Infinitesimal

Reseña la evolución del Cálculo Diferencial y del Cálculo Integral.

Capítulo III Aplicaciones del Cálculo Infinitesimal en Ingeniería Civil

Expresa usos que tienen Cálculo Diferencial e Integral como herramientas en Ingeniería Civil.

Capítulo IV Modelo Físico Del Teorema Fundamental del Cálculo

Señala la interpretación tangible del Cálculo Diferencial y del Cálculo Integral.

Capítulo V Conclusiones

Propone el Cálculo Infinitesimal como algoritmo que determina el cambio de dimensión.

# Capítulo I Cálculo Infinitesimal

*La ciencia es la progresiva aproximación del hombre al mundo real. - Max Planck*

Cálculo se denomina a las operaciones que tienen por objetivo el alcance de cierto dato. En latín, guijarro se dice *calculus* y de ahí proviene la palabra Cálculo, ya que con guijarros se representaban cantidades de interés, las cuales podían ser operadas para prever resultados. Infinitesimal se denomina a una cantidad infinitamente pequeña. Siendo el infinito definido como aquello que no tiene ni puede tener fin ni término, la cantidad infinitamente pequeña resulta ser prácticamente nula aunque mayor a cero. La solución ha sido el límite, aproximarse a cero, dejando de utilizar al infinitesimal para evaluar. El uso de límite para el desarrollo matemático implica que el nombre Cálculo Infinitesimal sea utilizado como referencia, tanto a Cálculo Diferencial como a Cálculo Integral, que irónicamente no usan ahora infinitesimales.

I.1 $$lim_{x \to a} f(x) = 0$$

El Cálculo Infinitesimal proviene de utilizar cantidades infinitamente pequeñas para prever resultados y con ello realizar el estudio del cambio continuo. Bertrand Russell criticó a los infinitesimales declarando en su publicación *The Principles of Mathematics*, Los Principios de las Matemáticas:

> «Cálculo Infinitesimal es el nombre tradicional que recibe el conjunto del Cálculo Diferencial e Integral, y como tal lo conservo; pero como veremos en breve, no existe alusión ni implicación a lo infinitesimal en parte alguna de esta rama de las Matemáticas». (p. 474).

El problema en el manejo de los infinitesimales llevó al uso del concepto de límite, que define y se difunde actualmente. El Análisis No Estándar retoma el uso de infinitesimales al añadir los números Hiperreales, $^*\mathbb{R}$. La definición breve en propuesta de Cálculo Infinitesimal es:

Estudio del cambio.

**Diccionario del español de México regulado por la Academia Mexicana de la Lengua**

| | |
|---|---|
| Algoritmo | Conjunto de operaciones y de reglas que sirve para resolver un problema matemático, mediante la repetición de pasos definidos, como los que se siguen para resolver una división. |
| Área | Superficie comprendida dentro de un perímetro, y medida de esta superficie. |
| Cálculo | Operación o serie de operaciones matemáticas para averiguar el valor, la cantidad o la medida de algo. |
| Cálculo (Diferencial) | [Extracto de Cálculo] Rama de las matemáticas que estudia los métodos para analizar la relación existente entre dos o más magnitudes variables: qué tan rápido varía una con respecto a la otra. |
| Cálculo (Infinitesimal) | Rama de las matemáticas que estudia los métodos para analizar la relación existente entre dos o más magnitudes variables: qué tan rápido varía una con respecto a la otra (cálculo diferencial) o qué tanta variación se produce en una cuando la otra varía en un rango determinado (cálculo integral); por ejemplo, el método para conocer la velocidad de un cuerpo en un instante determinado a partir de la relación entre distancia y tiempo. |
| Cálculo (Integral) | [Extracto de Cálculo] Rama de las matemáticas que estudia los métodos para analizar la relación existente entre dos o más magnitudes variables: qué tanta variación se produce en una cuando la otra varía en un rango determinado. |

| | |
|---|---|
| Civil | Que pertenece a las personas comunes y vive según sus normas y leyes, por oposición a los militares o eclesiásticos, que tienen las suyas propias. |
| Derivada | Operación matemática con que se calcula la rapidez de cambio de la variable dependiente respecto de la variable independiente, y resultado de esta operación. Así, por ejemplo, la aceleración es la derivada de la velocidad, variable dependiente, respecto del tiempo, variable independiente. |
| Diferencial | Operación que consiste en multiplicar la derivada de una función por el incremento de su variable independiente. |
| Dimensión | Cada una de las extensiones que se consideran para determinar el tamaño de algo; corresponde a la longitud en las cosas lineales, a la longitud y a la anchura en las superficies y a la longitud, la anchura y la altura en los cuerpos. |
| Elástico | Que puede extenderse, alargarse o doblarse sin daño o modificación, y recuperar su forma o sus dimensiones iniciales. |
| Geometría | Parte de la matemática que estudia la medida y las propiedades de la extensión, y las relaciones que hay entre puntos, líneas, superficies y volúmenes. |
| Infinitesimal | Que pertenece a cantidades infinitamente pequeñas o cuyo límite es cero. |

| | |
|---|---|
| Infinito | Que es ilimitado, que no se puede medir o que se extiende indefinidamente; que es muy grande, inmenso, sin límites que se puedan percibir. |
| Ingeniería | Profesión y disciplina que trata de la aplicación de conocimientos científicos (físicos, químicos, matemáticos, geológicos, etc.) para resolver problemas prácticos de construcción, fabricación, diseño o manejo en las distintas áreas de la industria y en algunos campos de la ciencia. |
| Integral | Operación matemática con que se calcula la acción total o la suma de valores tomados por la variable dependiente durante determinada variación de la variable independiente, y resultado de esta operación. Así, por ejemplo, la velocidad es la integral de la aceleración respecto del tiempo. |
| Línea | Serie ininterrumpida de puntos contiguos, como la que forma la intersección de dos planos. |
| Punto | Lugar o posición geométrica sin longitud, anchura ni profundidad. |
| Superficie | Extensión formada por la longitud y la anchura. |
| Topología | Estudio de las propiedades de las superficies que, mediante continuas transformaciones, permanecen invariables. |
| Volumen | Medida del espacio de tres dimensiones ocupado por un cuerpo; en el sistema métrico decimal se mide en metros cúbicos. |

Lo integro es la cualidad de estar completo. Matemáticamente la integral es el resultado de la generalización de la suma de infinitos sumandos, infinitamente pequeños. La integral tiene de precursor el Método Exhaustivo llevado al límite. El Teorema Fundamental del Cálculo permitió utilizar un método sucinto al considerar la operación integral como antiderivada. El proceso de trazar un número infinito de rectángulos dentro de un área irregular delimitada por el eje $X$ junto con la función de estudio, $f(x)$, calcular el área de cada uno de ellos y sumarlos para integrar se representa:

I.2
$$\int f(x)\, \mathrm{d}x$$

La integral puede verse como acumulación de áreas de altura $f(x)$ y base d$x$ infinitesimal en su concepción original. Este proceso fue definido por primera vez de manera rigurosa por Georg Friedrich Bernhard Riemann en su integral de una función en un intervalo cerrado. La función $f(x)$ se estudia en el intervalo cerrado, $[a, b]$. El segmento $b - a$ se divide en $n$ partes. Cada una de las partes será base de un rectángulo que tendrá altura correspondiente al valor que toma $f(x)$ en dicha parte. Iniciando en $a$, inicio del intervalo cerrado, se realiza la sumatoria de las áreas de cada rectángulo hasta completar las $n$ partes que hay en $[a, b]$. Dado que el valor de $f(x)$ varía en respuesta al valor de $x$, se mejora la aproximación de la altura de cada rectángulo cuando hay más partes dividiendo el segmento de estudio y para obtener la solución exacta se requiere la aproximación absoluta, por ende, el número de partes ha de ser el mayor, que es el infinito, y como no se puede alcanzar el infinito entonces se acerca uno hasta el límite. El segmento $[a, b]$ dividido en infinitas partes, tiene infinitos rectángulos de anchura infinitamente pequeña con altura en el límite exacto de cada valor de $f(x)$. Siendo la línea definida como *una longitud sin anchura,* la integral concatena infinitas líneas para formar el área acotada por la función $f(x)$, $a$, $b$ y el eje $X$. Se define la integral de Riemann:

I.3 Integral de Riemann
$$\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x = lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \left\{ \frac{(b-a)}{n} \cdot f\left( a + k\, \frac{(b-a)}{n} \right) \right\}$$

El problema de encontrar el área correspondiente a una función puede ser resuelto mediante el método sucinto de encontrar una función primitiva cuya derivada sea la función que se integra. El proceso de integración del límite de la sumatoria de infinitas particiones tiene mismo resultado al de hallar la antiderivada de la función de estudio, como impone el Teorema Fundamental del Cálculo:

I.4 Teorema Fundamental del Cálculo

Sea $f(x)$ una función continua de valores reales definida en un intervalo cerrado $[a, b]$.

Sea $F(x)$ la función definida, para todas las $x$ en $[a, b]$, por:

$$F(x) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Entonces $F(x)$ es uniformemente continua en $[a, b]$, diferenciable en el intervalo abierto $(a, b)$:

$$F'(x) = f(x)$$

y el valor del área definida por los contornos $a, b, f(x)$ y el eje $X$ está dado por:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

Ya que la derivada de toda constante es cero, la constante de integración $C$ se añade a toda integral indefinida para describir de manera compacta todas las primitiva*s* posibles de $f(x)$. Aunque la constante de integración $C$ se suprime en la evaluación de integrales definidas, su utilidad recae en fijar la primitiva particular de $f(x)$ de saberse las condiciones iniciales.

I.5
$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$$

La denominación de la operación integral como antiderivada esta suscitada por el hecho de que $F(x)$ comprueba al derivarse ser la función $f(x)$. Siendo $f(x)$ la derivada de $F(x)$ entonces $F(x)$ se llegó a convenir nombrarse en Cálculo Infinitesimal como la antiderivada de $f(x)$.

I.6
$$\frac{\mathrm{d}\,[F(x) + C]}{\mathrm{d}x} = f(x) + 0 = f(x)$$

La diferencia es la cualidad de no ser igual. Matemáticamente la diferencia es el resultado de restar. Es la cantidad que excede a que sean iguales Minuendo y Substraendo. Relativo a la diferencia es lo diferencial. El Cálculo Diferencial consiste en el estudio del cambio de las funciones cuando sus variables cambian. Si cambian las funciones y cambian las variables significa que dejan de ser iguales, cambio que puede ser calculado mediante una resta para obtener la diferencia. Sean $f(x)$ la función de estudio y $f(x + h)$ la función evaluada $h$ posterior, siendo $h$ arbitrario. El cambio de la función provocado por el incremento arbitrario $h$ se calcula con la resta $f(x + h) - f(x)$ y se obtiene la diferencia. Para saber la implicación que ha tenido $h$ en el cambio, la razón de cambio, la diferencia $f(x + h) - f(x)$ se divide entre el incremento arbitrario $h$ aplicado. Así, se obtiene el cociente diferencial de Newton:

I.7 Cociente diferencial de Newton

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

Se estableció que $h$ es un incremento arbitrario. Para evaluar con el cociente diferencial de Newton la razón de cambio instantánea, $h$ ha de ser un incremento lo más pequeño posible, situación que hace del Cálculo Diferencial parte del Cálculo Infinitesimal al considerar $h$ infinitesimal, infinitamente pequeño. Por rigor matemático, quedó la definición matemática de la derivada como el límite cuando $h$ tiende a cero del cociente diferencial de Newton:

I.8 Definición matemática de la derivada

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

Es así que se define $f'(x)$ como la derivada de $f(x)$ asentando el Cálculo Diferencial al obtener la diferencia instantánea de la función al incrementarse en razón de $h$ que converge a cero. El brete está en que de tomar $h$ el valor de cero en la fórmula I.7 se da la indeterminación $0/0$ razón por la que es preciso incorporar el concepto de límite a la derivada en la fórmula I.8.

La derivada alude a la pendiente, *m*, de la recta, ya que la pendiente es la razón entre la diferencia de posición en el eje *Y* y la diferencia de posición en el eje *X*, con fórmula:

I.9 $$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

La derivada parte de la pendiente de la recta secante, pues va de dos puntos como en la fórmula I.9, y se va aproximando al límite donde *h* converge a cero, definiéndose como la pendiente de la recta tangente, en la fórmula I.8.

La pendiente, *m,* se puede escribir en términos de incrementos, siendo:

I.10 $$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

La derivada, *f '(x),* se puede escribir en términos de diferenciales, con lo que se tiene:

I.11 $$f'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

Los términos diferenciales d*x* y d*y* han tenido diferentes interpretaciones, según el rigor matemático. Está la diferencial de Leibniz, la diferencial de Cauchy y la diferencial de Fréchet. La diferencial de Leibniz se estableció como una cantidad incipiente aún no formada. Una diferencia infinitesimal, es decir, un incremento infinitamente pequeño es el razonamiento que se planteó al establecer la noción de diferencial, diferencia infinitesimal, que resultó tener aplicaciones en la ciencia y en la ingeniería para resolver problemas en los cuales la aritmética, la geometría y el álgebra no son suficientes.

Al referir la diferencial al infinito, aquello que no tiene ni puede tener fin o término, la diferencial presenta problemas para considerarse término.

La diferencial de Cauchy se estableció como una variable cuyo valor numérico decrece indefinidamente de manera que converge hacia el límite cero. La variable cuyo valor numérico decrece indefinidamente de manera que converge hacia el límite cero corresponde a la variable independiente, d$x$. La variable dependiente, d$y$, está construida a partir de la derivada, siendo d$x$ un incremento arbitrario de la variable $x$ y d$y$ el producto de la derivada por el incremento de la variable independiente. La diferencial se define entonces con la expresión:

I.12 $$\mathrm{d}y = f'(x)\,\mathrm{d}x$$

Siendo así, la diferencial se vacía de todo significado físico, ocupando meramente un significado de notación dentro del algoritmo de la derivada. Aunque se conserve el nombre de Cálculo Infinitesimal, el infinitesimal como término terminó en el exilio.

La diferencial de Fréchet recupera el significado físico de la diferencial de Leibniz sin perder el rigor de la diferencial de Cauchy. Está definida dentro del marco del Análisis Matemático, progresión del Cálculo Infinitesimal, desarrollado al estudiar el concepto de continuidad. La diferencial de Fréchet se estableció como una aplicación lineal, un homomorfismo entre espacios vectoriales.

Por su parte, Newton no llamó al incremento como diferencial sino que nombró *momento* a la cantidad divisible evanescente y la denotó con $\dot{x}o$. Consideraba las magnitudes matemáticas no compuestas de partes infinitamente pequeñas, sino formadas por el movimiento continuo. El concepto actual de función, relación entre dos conjuntos, era entendido por Newton como *fluente*, es decir, cantidad que fluye. El *fluente*, definido como el resultado del movimiento, como resultado del cambio de la posición de un cuerpo a lo largo del tiempo, lo representaba con $x$. La *fluxión* definida como la velocidad con la cual cada *fluente* aumenta o disminuye su movimiento generador lo representaba con $\dot{x}$. La segunda *fluxión* la representaba con $\ddot{x}$. El original *fluente* denotado con $x$, a su vez, lo consideró *fluxión* de una cantidad que le precede denotada con $\overset{|}{x}$, y cada cantidad que le antecede como una cantidad *fluente* que tiene a la siguiente como su *fluxión* en la serie $\overset{||}{x}$ $\overset{|}{x}$ $x$ $\dot{x}$ $\ddot{x}$ pudiendo extenderse en ambos sentidos agregando $|$ o $\cdot$ adicionales sobre $x$. La notación y la idea fueron descartadas.

Maurice René Fréchet, autor de la diferencial de Fréchet, consideró en su conferencia de Berna en 1925 d.C. sobre el tipo de exposición más conveniente en la enseñanza de las Matemáticas y propuso la *desaxiomatización* que consiste en ejercitar con las ciencias que han alcanzado un alto grado de axiomatización, un trabajo inverso al que el entendimiento realiza cuando constituye objetos matemáticos a partir de objetos empíricos. Justificó sus ideas sobre la *desaxiomatización* con algunos ejemplos como la definición de la longitud de una circunferencia, la definición geométrica de la tangente a una curva, y la definición de la diferencial de una función de variable real, que dio lugar a la diferencial de Fréchet.

La definición de diferencial sortea la *Grundlagenkrise der Mathematik,* Crisis Fundamental de las Matemáticas. La situación grave y decisiva que pone en peligro el desarrollo de las Matemáticas está en su argumentación metamatemática. Logicismo, Formalismo o Intuicionismo. Estos ismos, tendencias de orientación que se oponen, tienen su propia concepción de las Matemáticas.

El Logicismo sostiene que las Matemáticas equivalen a la lógica y su condición fundamental es considerar el razonamiento matemático como medio para encontrar la verdad, partiendo de premisas hacia las conclusiones. El argumento puede ser deductivamente válido aunque para ser sólido las premisas han de ser verdaderas. En el Logicismo estriba la diferencial de Leibniz.

El Formalismo construye las Matemáticas como un sistema formal puro y su condición fundamental es la ausencia de contradicción. Prescinde de todo tipo de contenido provocando que los enunciados matemáticos dejen de ser proposiciones sobre algo. Lo que importa son las relaciones que se establecen entre ellos. En el Formalismo se incluye la diferencial de Cauchy.

El Intuicionismo interpreta las Matemáticas como una construcción mental que consiste en realizar el seguimiento causa efecto y su condición fundamental es que la existencia de un objeto es equivalente a la posibilidad de su construcción. En el Intuicionismo se rechaza la diferencial y conlleva a la reconstrucción del Cálculo Infinitesimal, no lograda por este ismo.

La diferencial de Fréchet queda en un ámbito de ismo híbrido al darle formalización aunque advirtiendo respecto a los peligros del formalismo excesivo ante las paradojas que concierne la fundamentación definitiva de las Matemáticas para el desarrollo de sus conceptos.

## DERIVADA

Razón de cambio instantánea del valor de la función matemática, según cambie el valor de su variable independiente

La función constante tiene valor uniforme para cualquier valor de $x$, la variable independiente. Se representa con $f(x) = c$ indicando que se mantendrá firme en $c$, haciendo que al evaluar la función en un $h$ arbitrario posterior a $x$ seguirá siendo $c$, por lo tanto $f(x + h) = c$, constando que la derivada de toda función constante es cero, 0.

I.13 Derivada de la función constante

Sea $f(x) = c$ ∴ $f(x + h) = c$

$$\frac{d\,c}{dx} = lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = lim_{h \to 0}\, 0 = 0$$

$$\frac{d\,c}{dx} = 0$$

La función identidad devuelve su propio argumento. La variable dependiente resulta idéntica a la variable independiente. Se representa con $f(x) = x$ indicando que el valor de $x$ será el que tomará $f(x)$, por lo tanto al evaluar la función en un $h$ arbitrario posterior en $(x + h)$, la función será $f(x + h) = x + h$ identificando que la derivada de la función identidad es uno, 1.

I.14 Derivada de la función identidad

Sea $f(x) = x$ ∴ $f(x + h) = x + h$

$$\frac{d\,x}{dx} = lim_{h \to 0} \frac{x + h - x}{h} = lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = lim_{h \to 0}\, 1 = 1$$

$$\frac{d\,x}{dx} = 1$$

La función lineal es polinómica de primer grado. Es una expresión algebraica, suma de productos entre constantes y variables, donde el mayor de los exponentes es uno, 1, por ello el 1º grado. Se representa con $f(x) = mx + b$ indicando que el valor de $f(x)$ será el que tenga $x$ afectado por una pendiente, $m$, véase I.9, y una ordenada al origen $b$. Al evaluar la función lineal en un $h$ arbitrario posterior se obtiene $f(x + h) = m(x + h) + b = mx + mh + b$ lo que da línea a que la derivada de toda función lineal sea la pendiente, $m$.

I.15 Derivada de la función lineal

Sea $f(x) = mx + b$ $\quad\therefore\quad$ $f(x + h) = m(x + h) + b = mx + mh + b$

$$\frac{\mathrm{d}\,(mx + b)}{\mathrm{d}x} = lim_{h\to 0}\frac{mx + mh + b - (mx + b)}{h} = lim_{h\to 0}\frac{mh}{h} = lim_{h\to 0}\, m = m$$

$$\frac{\mathrm{d}\,(mx + b)}{\mathrm{d}x} = m$$

Tanto la pendiente, $m$, como la ordenada al origen, $b$, son constantes por lo que se pueden denotar $m = c_1$ y por su parte $b = c_2$ haciendo uso de los subíndices $_1$ y $_2$ para indicar que las constantes pueden ser valores distintos. Derivar conlleva a utilizar el operador diferencial que es un operador lineal al cumplir con homogeneidad y superposición. La función lineal puede reescribirse $f(x) = c_1x + c_2$ y hacer homogeneidad con la pendiente ahora $c_1$ y superposición de derivar la función constante, I.13, con derivar la función identidad, I.14.

I.16 Derivada de la función lineal, breve

Sea $f(x) = mx + b$ $\qquad m = c_1$ $\qquad b = c_2$

$$\frac{\mathrm{d}\,(c_1x + c_2)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\,c_1x}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}\,c_2}{\mathrm{d}x} = c_1\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}x} + 0 = c_1\cdot 1 = c_1 = m$$

$$\frac{\mathrm{d}\,(mx + b)}{\mathrm{d}x} = m$$

La función cuadrática es polinómica de segundo grado. Se representa con $f(x) = ax^2 + bx + c$. En esta función $b$ ya no representa la ordenada al origen, sino $c$. Razón de ello es que tomando $x$ valor igual a cero la constante del polinomio que no está asociada con $x$ es $c$, que será entonces el valor de $f(x)$, la ordenada, cuando $x$ sea igual a cero, el origen. Teniendo los coeficientes $a$, $b$ y $c$ constantes cuadra el resultado de la derivada con $f'(x) = 2ax + b$.

I.17 Derivada de la función cuadrática

Sea $f(x) = ax^2 + bx + c$ $\therefore$

$$f(x + h) = a(x + h)^2 + b(x + h) + c = a(x^2 + 2xh + h^2) + bx + bh + c = ax^2 + 2axh + ah^2 + bx + bh + c$$

$$\frac{\mathrm{d}\,(ax^2 + bx + c)}{\mathrm{d}x} = lim_{h\to 0}\frac{ax^2 + 2axh + ah^2 + bx + bh + c - (ax^2 + bx + c)}{h} = lim_{h\to 0}\frac{2axh + ah^2 + bh}{h} =$$

$$lim_{h\to 0}\, 2ax + ah + b = 2ax + b$$

$$\frac{\mathrm{d}\,(ax^2 + bx + c)}{\mathrm{d}x} = 2ax + b$$

La función cuadrática es equivalente a $f(x) = c_1x^2 + c_2x + c_3$. Al ser el operador diferencial d/d$x$ un operador lineal sobre el conjunto de funciones reales de variable real, su dominio y codominio están contenidos en el conjunto de los números reales, y puede ser utilizada la propiedad de linealidad.

I.18 Derivada de la función cuadrática, breve

Sea $f(x) = c_1x^2 + c_2x + c_3$ $a = c_1$ $b = c_2$ $c = c_3$

$$\frac{\mathrm{d}\,(c_1x^2 + c_2x + c_3)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\,(c_1x^2)}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}\,(c_2x)}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}\,c_3}{\mathrm{d}x} = c_1\frac{\mathrm{d}\,x^2}{\mathrm{d}x} + c_2\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}\,c_3}{\mathrm{d}x} = c_1 \cdot lim_{h\to 0}\left(\frac{(x + h)^2 - x^2}{h}\right) + c_2 \cdot 1 + 0 =$$

$$c_1 \cdot lim_{h\to 0}\left(\frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h}\right) + c_2 = c_1 \cdot lim_{h\to 0}\left(\frac{2xh + h^2}{h}\right) + c_2 = c_1 \cdot lim_{h\to 0}\,(2x + h) + c_2 = 2c_1x + c_2 = 2ax + b$$

$$\frac{\mathrm{d}\,(ax^2 + bx + c)}{\mathrm{d}x} = 2ax + b$$

La función cúbica es polinómica de tercer grado. Se representa con $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Cabe decir que el resultado de la derivada es $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

I.19 Derivada de la función cúbica

Sea $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $\therefore$

$f(x + h) = a(x + h)^3 + b(x + h)^2 + c(x + h) + d = a(x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3) + b(x^2 + 2xh + h^2) + cx + ch + d$

$= ax^3 + 3ax^2h + 3axh^2 + ah^3 + bx^2 + 2bxh + bh^2 + cx + ch + d$

$$\frac{\mathrm{d}\,(ax^3 + bx^2 + cx + d)}{\mathrm{d}x} = \lim_{h\to 0} \frac{ax^3 + 3ax^2h + 3axh^2 + ah^3 + bx^2 + 2bxh + bh^2 + cx + ch + d - (ax^3 + bx^2 + cx + d)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{3ax^2h + 3axh^2 + ah^3 + 2bxh + bh^2 + ch}{h} = \lim_{h\to 0} 3ax^2 + 3axh + ah^2 + 2bx + bh + c = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$\frac{\mathrm{d}\,(ax^3 + bx^2 + cx + d)}{\mathrm{d}x} = 3ax^2 + 2bx + c$$

Aprovechando el resultado de la función cuadrática, la función cúbica admite la estructura del nomio $ax^3$ sumado a una función cuadrática. Para tener la misma referencia se asignan los coeficientes $a = c_0$, $b = c_1$, $c = c_2$, $\mathrm{d} = c_3$, dando a la función cúbica la representación polinómica $f(x) = c_0x^3 + c_1x^2 + c_2x + c_3$ con lo que la derivada de la función cúbica se reduce a la derivada del nomio $ax^3$ sumado a la derivada de la función cuadrática.

I.20 Derivada de la función cúbica, breve

Sea $f(x) = c_0x^3 + c_1x^2 + c_2x + c_3$ $\quad a = c_0 \quad b = c_1 \quad c = c_2 \quad d = c_3$

$$\frac{\mathrm{d}\,(c_0x^3 + c_1x^2 + c_2x + c_3)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\,(c_0x^3)}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}\,(c_1x^2 + c_2x + c_3)}{\mathrm{d}x} = c_0 \frac{\mathrm{d}\,x^3}{\mathrm{d}x} + 2c_1x + c_2 = c_0 \cdot \lim_{h\to 0}\left(\frac{(x + h)^3 - x^3}{h}\right) + 2c_1x + c_2 =$$

$$c_0 \cdot \lim_{h\to 0}\left(\frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h}\right) + 2c_1x + c_2 = c_0 \cdot \lim_{h\to 0}\left(\frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h}\right) + 2c_1x + c_2 =$$

$$c_0 \cdot \lim_{h\to 0} (3x^2 + 3xh + h^2) + 2c_1x + c_2 = c_0 3x^2 + 2c_1x + c_2 = 3c_0x^2 + 2c_1x + c_2 = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$\frac{\mathrm{d}\,(ax^3 + bx^2 + cx + d)}{\mathrm{d}x} = 3ax^2 + 2bx + c$$

La función potencial es de la forma $f(x) = x^n$. La potencia resulta de multiplicarse por sí mismo. El número que se multiplica, aquí $x$, es llamado base y el número de veces que se multiplica es nombrado exponente, aquí $n$. El exponente $n$ puede ser cualquier número, aunque el cero, 0, hará de la función potencial una función constante con argumento igual a uno, 1. Siendo la función $f(x) = x^n$ la evaluación en un $h$ posterior será igual a evaluar $f(x + h) = (x + h)^n$. La potencia $(x + h)^n$ es igual a tener $(x + h) \cdot (x + h) \cdot (x + h) \cdot (x + h) \cdot (\ldots) \cdot (x + h)$ $n$ veces. Se hace la expansión de potencias para observar su comportamiento:

I.21 $$(x + y)^0 = (x + y)^{1-1} = (x + y)^1 \cdot (x + y)^{-1} = (x + y)/(x + y) = 1$$

I.22 $$(x + y)^1 = (x + y) = x + y$$

I.23 $$(x + y)^2 = (x + y) \cdot (x + y) = xx + xy + yx + yy = x^2 + xy + xy + y^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

I.24 $$(x + y)^3 = (x + y) \cdot (x + y)^2 = (x + y) \cdot (x^2 + 2xy + y^2) = xx^2 + x2xy + xy^2 + yx^2 + y2xy + yy^2 =$$
$$x^3 + 2xxy + xy^2 + x^2y + 2xyy + y^3 = x^3 + 2x^2y + x^2y + xy^2 + 2xy^2 + y^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

I.25 $$(x + y)^4 = (x + y) \cdot (x + y)^3 = (x + y) \cdot (x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3) =$$
$$xx^3 + x3x^2y + x3xy^2 + xy^3 + yx^3 + y3x^2y + y3xy^2 + yy^3 =$$
$$x^4 + 3xx^2y + 3xxy^2 + xy^3 + x^3y + 3x^2yy + 3xyy^2 + y^4 =$$
$$x^4 + 3x^3y + x^3y + 3x^2y^2 + 3x^2y^2 + xy^3 + 3xy^3 + y^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

I.26 $$(x + y)^5 = (x + y) \cdot (x + y)^4 = (x + y) \cdot (x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4) =$$
$$xx^4 + x4x^3y + x6x^2y^2 + x4xy^3 + xy^4 + yx^4 + y4x^3y + y6x^2y^2 + y4xy^3 + yy^4 =$$
$$x^5 + 4xx^3y + 6xx^2y^2 + 4xxy^3 + xy^4 + x^4y + 4x^3yy + 6x^2yy^2 + 4xyy^3 + y^5 =$$
$$x^5 + 4x^4y + x^4y + 6x^3y^2 + 4x^3y^2 + 4x^2y^3 + 6x^2y^3 + xy^4 + 4xy^4 + y^5 =$$
$$x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$$

I.27 Triángulo de Pascal

| | | |
|---|---|---|
| $(x + y)^0$ | $1$ | 1 |
| $(x + y)^1$ | $x + y$ | 1 1 |
| $(x + y)^2$ | $x^2 + 2xy + y^2$ | 1 2 1 |
| $(x + y)^3$ | $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$ | 1 3 3 1 |
| $(x + y)^4$ | $x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$ | 1 4 6 4 1 |
| $(x + y)^5$ | $x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$ | 1 5 10 10 5 1 |

Desarrollando las potencias del binomio $(x + y)^n$ podemos identificar que los coeficientes del polinomio son iguales a los números del Triángulo de Pascal, triángulo que se forma de dos diagonales de unos con números internos formados de la suma de los inmediatos superiores. La razón de esta coincidencia está en el hecho de que una potencia es una abreviación de multiplicaciones y una multiplicación es una abreviación de sumas, por lo que una potencia puede expandirse a una cadena de sumas. A los números del Triángulo de Pascal se les ha llamado coeficientes binomiales, al ser los coeficientes de la potencia de un binomio. Exponiendo la expansión de un binomio por un exponente tenemos también la analogía de las maneras en que se pueden combinar, no importando el orden, las variables $x$ y $y$ según el número de términos permitidos en la combinación que equivale al grado del polinomio, es decir, la cantidad de variables concentradas en un nomio. Un polinomio de primer grado admite únicamente una variable en cada nomio. Un polinomio de segundo grado, únicamente dos variables en cada nomio. Un polinomio de tercer grado, tres variables. De cuarto grado cuatro variables. Quinto grado, cinco, y así sucesivamente. Las combinaciones de $x$ y $y$ son:

I.28

1

*x y*

*xx xy yx yy*

*xxx xxy xyx xyy yxx yxy yyx yyy*

*xxxx xxxy xxyx xxyy xyxx xyxy xyyx xyyy yxxx yxxy yxyx yxyy yyxx yyxy yyyx yyyy*

*xxxxx xxxxy xxxyx xxxyy xxyxx xxyxy xxyyx xxyyy xyxxx xyxxy xyxyx xyxyy xyyxx xyyxy xyyyx xyyyy yxxxx yxxxy yxxyx yxxyy yxyxx yxyxy yxyyx yxyyy yyxxx yyxxy yyxyx yyxyy yyyxx yyyxy yyyyx yyyyy*

Se utilizó la propiedad distributiva de la multiplicación y al ir aumentando la potencia, el polinomio anterior se repite, una primera vez multiplicando a $x$ y una segunda vez multiplicando a $y$. Obtener $(x + y)^n$ es posible al hacer el cálculo $(x + y) \cdot (x + y)^{n-1}$. El número de términos de cada polinomio es igual al doble de términos del polinomio anterior. Así, la cantidad de términos en cada fila del Triángulo de Pascal es potencia de dos. La multiplicación también tiene propiedad conmutativa, esto es que $xy$ es igual a $yx$ por lo que los términos mostrados pueden agruparse. También pueden reducirse expresiones como $xxx$ a $x^3$ utilizando la potenciación para abreviar la multiplicación. Con estas primeras seis filas del triángulo podemos pensar en hacer el conteo y agrupación de los términos que tengan la misma cantidad de $x$ y la misma cantidad de $y$, aunque para mayores potencias a fin de ahorrar tiempo y errores se requiere encontrar un método simplificador. Las Matemáticas desarrollaron la Combinatoria que incluye Técnicas de Conteo. Por la propiedad de conmutatividad de la multiplicación, el orden de las variables no afecta. En este caso, los términos que tengan en misma cantidad las variables se agrupan. Como el orden no afecta, la Técnica de Conteo a utilizar será la de combinación pues en permutación el orden importa. Cuando se utiliza la operación combinación, ${}_nC_k$ , se cuenta cuántas combinaciones posibles de un conjunto con $n$ elementos cumplen tener $k$ elementos deseados. Para hacer uso de la operación de combinación $n$ será la potencia del binomio y $k$ la cantidad de $y$ en cada nomio. La operación combinación se expresa $\binom{n}{k}$ y su resultado será el conteo de las combinaciones que cumplan con $n$ y con $k$ especificados. Siendo el conteo de términos equipotentes la definición de coeficiente, los números combinatorios son convenientemente utilizados para obtener los coeficientes binomiales. La expansión de la potencia del binomio $(x + y)^n$ tiene patrón $x^n + ax^{n-1}y + bx^{n-2}y^2 + cx^{n-3}y^3 + dx^{n-4}y^4 + \cdots + dx^4y^{n-4} + cx^3y^{n-3} + bx^2y^{n-2} + axy^{n-1} + y^n$. Cada nomio admite únicamente $n$ variables lo que implica que al aumentar el exponente de $y$ tiene que disminuir el exponente de $x$ conservando así el número de variables constante en $n$. Establecido el uso de la operación combinación y el patrón $x^{n-k}y^k$ se formula la expresión que generaliza la expansión de la potencia de un binomio con el llamado binomio de Newton:

I.29 Binomio de Newton

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

En la operación combinación, los resultados $\binom{n}{0} = 1$ , $\binom{n}{1} = n$ , $\binom{n}{n-1} = n$ , $\binom{n}{n} = 1$, permanecen invariables. Siendo $n$ cualquier número, el resultado del conteo que realiza la operación combinación será de utilidad para obtener la derivada de una función potencial.

La linealidad de la diferenciación, al incluir homogeneidad y superposición, hace que una vez demostrada la derivada de la función potencial el proceso de derivación se replique y aplique uno a uno a cada uno de los nomios de un polinomio para así obtener su función derivada.

Derivar la función potencial consiste en aplicar la operación diferencial y encontrar el límite de la ecuación I.8 para $f(x) = x^n$. Por tanto, $f'(x) = nx^{n-1}$

I.30 Derivada de la función potencial

Sea $f(x) = x^n$ $\therefore$ $f(x + h) = (x + h)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^k$

$$\frac{d\,x^n}{dx} = lim_{h\to 0} \frac{[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^k] - x^n}{h} = lim_{h\to 0} \frac{\binom{n}{0} x^{n-0}h^0 + \binom{n}{1} x^{n-1}h^1 + \cdots + \binom{n}{n-1} x^1 h^{n-1} + \binom{n}{n} x^0 h^n - x^n}{h} =$$

$$lim_{h\to 0} \frac{1 \cdot x^n \cdot 1 + n \cdot x^{n-1}h + \cdots + n \cdot xh^{n-1} + 1 \cdot 1 \cdot h^n - x^n}{h} = lim_{h\to 0} \frac{x^n + nx^{n-1}h + \cdots + nxh^{n-1} + h^n - x^n}{h} =$$

$$lim_{h\to 0}\, nx^{n-1} + \cdots + nxh^{n-2} + h^{n-1} = nx^{n-1}$$

$$\frac{d\,x^n}{dx} = nx^{n-1}$$

La función raíz es de la forma $f(x) = \sqrt[m]{x^n}$ que por leyes de exponentes equivale a $f(x) = x^{n/m}$ lo que es la función potencial con exponente racional y para encontrar su derivada aplica I.30 haciendo un cambio de variable con $\tilde{n} = n/m$.

I.31 Derivada de la función raíz

Sea $f(x) = x^{n/m}$ $\qquad \tilde{n} = n/m$

$$\frac{d\,x^{\tilde{n}}}{dx} = \tilde{n}x^{\tilde{n}-1} = (n/m)x^{(n/m)-1} = \frac{nx^{(n/m)-1}}{m}$$

Derivar tiene propiedades en relación a las cuatro operaciones elementales de la Aritmética. Adición, Substracción, Multiplicación, División, siendo aplicadas en su argumento generan:

Derivada de una Suma. Derivada de una Resta.

Derivada de un Producto. Derivada de un Cociente. Cada una de ellas tiene su regla.

Regla de la Suma — La derivada de una suma de funciones es igual a la suma de las derivadas de las funciones.

I.32 Regla de la Suma

Sea $f(x) = u(x) + v(x)$ $\therefore$ $f(x + h) = u(x + h) + v(x + h)$

$$\frac{d\,[u(x) + v(x)]}{dx} = lim_{h \to 0} \frac{u(x + h) + v(x + h) - [u(x) + v(x)]}{h} =$$

$$lim_{h \to 0} \frac{u(x + h) + v(x + h) - u(x) - v(x)}{h} = lim_{h \to 0} \left[\frac{u(x + h) - u(x)}{h} + \frac{v(x + h) - v(x)}{h}\right] =$$

$$lim_{h \to 0} \frac{u(x + h) - u(x)}{h} + lim_{h \to 0} \frac{v(x + h) - v(x)}{h} = \frac{d\,u(x)}{dx} + \frac{d\,v(x)}{dx}$$

$$\frac{d\,[u(x) + v(x)]}{dx} = \frac{d\,u(x)}{dx} + \frac{d\,v(x)}{dx}$$

Regla de la Resta — La derivada de una resta de funciones es igual a la resta de las derivadas de las funciones.

I.33 Regla de la Resta

Sea $f(x) = u(x) - v(x)$ $\therefore$ $f(x + h) = u(x + h) - v(x + h)$

$$\frac{d\,[u(x) - v(x)]}{dx} = lim_{h \to 0} \frac{u(x + h) - v(x + h) - [u(x) - v(x)]}{h} = lim_{h \to 0} \frac{u(x + h) - v(x + h) - u(x) + v(x)}{h} =$$

$$lim_{h \to 0} \left[\frac{u(x + h) - u(x)}{h} + \frac{v(x) - v(x + h)}{h}\right] = lim_{h \to 0} \frac{u(x + h) - u(x)}{h} + lim_{h \to 0} \frac{v(x) - v(x + h)}{h} =$$

$$\frac{d\,u(x)}{dx} - lim_{h \to 0} \frac{v(x + h) - v(x)}{h} = \frac{d\,u(x)}{dx} - \frac{d\,v(x)}{dx}$$

$$\frac{d\,[u(x) - v(x)]}{dx} = \frac{d\,u(x)}{dx} - \frac{d\,v(x)}{dx}$$

Regla del Producto La derivada de un producto de funciones es igual a la primera función virgen por la derivada de la segunda función más la segunda función virgen por la derivada de la primera función.

I.34 Regla del Producto

Sea $f(x) = u(x) \cdot v(x)$ $\therefore$ $f(x + h) = u(x + h) \cdot v(x + h)$

$$\frac{d\,[u(x) \cdot v(x)]}{dx} = lim_{h \to 0} \frac{u(x + h) \cdot v(x + h) - [u(x) \cdot v(x)]}{h} =$$

$$lim_{h \to 0} \frac{u(x + h) \cdot v(x + h) - u(x) \cdot v(x) + 0}{h} =$$

$$lim_{h \to 0} \frac{u(x + h) \cdot v(x + h) - u(x) \cdot v(x) + u(x + h) \cdot v(x) - u(x + h) \cdot v(x)}{h} =$$

$$lim_{h \to 0} \frac{u(x + h) \cdot v(x + h) - u(x + h) \cdot v(x) + u(x + h) \cdot v(x) - u(x) \cdot v(x)}{h} =$$

$$lim_{h \to 0} \left\{u(x + h) \cdot \frac{[v(x + h) - v(x)]}{h} + v(x) \cdot \frac{[u(x + h) - u(x)]}{h}\right\} =$$

$$lim_{h \to 0}\, u(x + h) \cdot lim_{h \to 0} \frac{v(x + h) - v(x)}{h} + lim_{h \to 0}\, v(x) \cdot lim_{h \to 0} \frac{u(x + h) - u(x)}{h} =$$

$$u(x) \cdot \frac{d\,v(x)}{dx} + v(x) \cdot \frac{d\,u(x)}{dx}$$

$$\frac{d\,[u(x) \cdot v(x)]}{dx} = u(x) \cdot \frac{d\,v(x)}{dx} + v(x) \cdot \frac{d\,u(x)}{dx}$$

Regla del Cociente La derivada de un cociente de funciones es igual a la función divisor virgen por la derivada de la función dividendo menos la función dividendo virgen por la derivada de la función divisor y la diferencia anterior sobre el cuadrado de la función divisor virgen.

I.35 Regla del Cociente

Sea $f(x) = u(x) / v(x)$ $\therefore$ $f(x+h) = u(x+h) / v(x+h)$

$$\frac{d\,[u(x)/v(x)]}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{[u(x+h)/v(x+h)] - [u(x)/v(x)]}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{u(x+h)\cdot v(x) - u(x)\cdot v(x+h)}{h\cdot v(x+h)\cdot v(x)} = \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h)\cdot v(x) - u(x)\cdot v(x+h) + 0}{h\cdot v(x+h)\cdot v(x)} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{u(x+h)\cdot v(x) - u(x)\cdot v(x+h) + u(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v(x)}{h\cdot v(x+h)\cdot v(x)} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{u(x+h)\cdot v(x) - u(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v(x+h) + u(x)\cdot v(x)}{h\cdot v(x+h)\cdot v(x)} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{v(x)\cdot [u(x+h) - u(x)] - u(x)\cdot [v(x+h) - v(x)]}{h\cdot v(x+h)\cdot v(x)} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{v(x)\cdot \dfrac{[u(x+h) - u(x)]}{h} - u(x)\cdot \dfrac{[v(x+h) - v(x)]}{h}}{v(x+h)\cdot v(x)} =$$

$$\frac{\lim_{h\to 0} v(x)\cdot \lim_{h\to 0} \dfrac{[u(x+h) - u(x)]}{h} - \lim_{h\to 0} u(x)\cdot \lim_{h\to 0} \dfrac{[v(x+h) - v(x)]}{h}}{\lim_{h\to 0}\ v(x+h)\cdot v(x)} =$$

$$\frac{v(x)\cdot \dfrac{d\,u(x)}{dx} - u(x)\cdot \dfrac{d\,v(x)}{dx}}{v(x)\cdot v(x)} = \frac{v(x)\cdot \dfrac{d\,u(x)}{dx} - u(x)\cdot \dfrac{d\,v(x)}{dx}}{[v(x)]^2}$$

$$\frac{d\,[u(x)/v(x)]}{dx} = \frac{v(x)\cdot \dfrac{d\,u(x)}{dx} - u(x)\cdot \dfrac{d\,v(x)}{dx}}{[v(x)]^2}$$

La función racional es el cociente entre dos polinomios. Para derivarla se aplica la Regla del Cociente a la función $f(x) = u(x) / v(x)$. Razón por la cual $f'(x) = \dfrac{v(x) \cdot u'(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$

I.36 Derivada de la función racional

Sea $f(x) = u(x) / v(x)$

$$\frac{d\,[u(x) / v(x)]}{d\,x} = \frac{v(x) \cdot \frac{d\,u(x)}{dx} - u(x) \cdot \frac{d\,v(x)}{dx}}{[v(x)]^2} \quad \because \quad \text{Regla del Cociente}$$

Hasta aquí las funciones algebraicas que son las que satisfacen una ecuación polinómica $\sum_{k=0}^{n} c_k x^k$

| | | |
|---|---|---|
| Función constante | $n = 0$ | $f(x) = c$ |
| Función identidad | $n = 1$ | $f(x) = x$ |
| Función lineal | $n = 1$ | $f(x) = mx + b$ |
| Función cuadrática | $n = 2$ | $f(x) = ax^2 + bx + c$ |
| Función cúbica | $n = 3$ | $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ |
| Función potencial | $n = n$ | $f(x) = x^n$ |
| Función raíz | $n = m/n$ | $f(x) = x^{m/n}$ |
| Función racional | $n = n$ & $m = m$ | $f(x) = u(x) / v(x)$ |

Álgebra proviene del árabe الجبر pronunciado *al-yabar*. El significado literal de الجبر es reunión de partes rotas. El uso de الجبر apareció en el título,

الكتاب المختصر في حساب الجبر والمقابلة

Compendio de cálculo por reunión de partes rotas y balance. Escrito por Abu Abdallah Muhammad ibn Musa al-Jwarizmi en el siglo IX d.C., el texto fue pionero en el desarrollo de las Matemáticas con un lenguaje algebraico, en contraste al lenguaje geométrico. El álgebra fue capaz de representar mediante una letra cualquier valor, a diferencia de la aritmética que utiliza números que son de valor fijo, dando la posibilidad de generalizar las relaciones matemáticas. El álgebra es operación aritmética agregando el objeto matemático no numérico, *arithme,* incógnita, cosa, چىز, *x*.

Más allá de las funciones algebraicas están las funciones trascendentales. La denominación de trascendental se acuñó en 1682 d.C. por Leibniz al demostrar que la función *f(x) = sen(x)* no es algebraica, esto es, trasciende el álgebra al no poder reducirse a ser expresada como una serie finita de operaciones.

**«En términos sufíes, hay dos conceptos muy interesantes de la trascendencia. Se trata de contemplar el Universo y comprender que lo que se ve por ahí refleja lo que eres. El otro es mirar dentro de ti mismo y reconocer que el Universo está presente allí».  Mohsin Hamid**

Hiparco de Nicea contempló el Universo y elaboró el primer catálogo de estrellas. Ochocientas cincuenta estrellas, 850. Empecemos a contar. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, ... Sistema decimal. Diez dígitos. Diez dedos en las manos. El sistema duodecimal para aumentar las cuentas aprovechó las falanges contándolas con el pulgar. Doce. El día es la primera medición del tiempo del ser humano. Un día es el lapso en el que la Tierra hace una rotación completa teniendo como punto de marcaje al Sol. Isaac Newton en su libro *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*, Principios Matemáticos de la Filosofía Natural, aclara: «El tiempo absoluto se distingue del relativo en Astronomía por la ecuación del tiempo vulgar. Pues desiguales son los días naturales, que son tenidos por iguales por el vulgo al medir el tiempo. Los astrónomos corrigen esta desigualdad al medir con tiempos más exactos los movimientos celestes. Es posible que no haya ningún movimiento igual con el que medir exactamente el tiempo». (p. 89). Las rotaciones de la Tierra no son precisas por ello en medición del tiempo un día se refiere al promedio de los días solares. Hiparco de Nicea para medir con mayor precisión dividió el día en 24 partes cada una de igual magnitud, siguiendo la influencia egipcia y babilónica. La división del día en 24 horas se da al contar de manera duodecimal con las dos manos que da veinticuatro. Después de 365,242189 días solares medios, aproximadamente ya que la traslación también varía, la Tierra le da una vuelta al Sol.

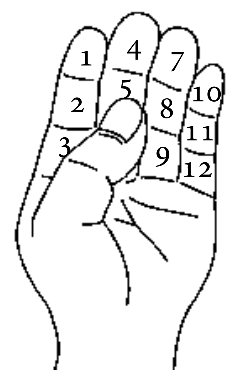


Figura I 1 Conteo duodecimal

Teniendo en mente el lapso de traslación, un año, Hiparco consideró conveniente dividir la Tierra, para construir ejes de referencia, considerándola esférica, en 360 meridianos, 360 lugares donde el Sol pasará a mediodía. Dividió a su vez la Tierra con trazas paralelas al Ecuador, 90 paralelos al Norte del Ecuador y 90 paralelos al Sur del Ecuador. Ecuador, del latín *aequator*, significa igualador, porque los días y las noches en la línea que divide al planeta en hemisferio Norte y hemisferio Sur duran lo mismo durante todo el año. Así, con meridianos y paralelos, con marcaje a lo largo del recorrido del Sol y con marcaje a lo ancho, longitud y latitud, estableció el sistema de referencia de la superficie de la Tierra que permite expresar el dónde de lo que sea que esté sobre la Tierra. Con la división en 360 meridianos de la Tierra, los 360 grados del círculo.

Círculo

| | |
|---|---|
| Círculo | Lugar geométrico cuyos puntos distan de un centro en menor o igual medida que una constante llamada radio. |
| Circunferencia | Perímetro de un círculo. |
| Arco | Segmento entre dos puntos sobre la circunferencia. |
| Cuerda | Línea recta entre dos puntos de la circunferencia. |
| Diámetro | Cuerda de mayor tamaño pasa por el centro. |
| Flecha | Mediatriz de una cuerda hasta llegar a su arco, no pasando por el centro. |

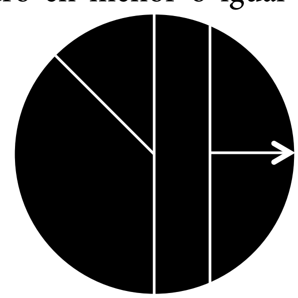


Figura I 2 Círculo y sus partes

Hiparco, para medir los astros, se inspiró en el trabajo de su antecesor Eratóstenes de Cirene, hoy Libia, que midió la Tierra. Eratóstenes, 'Padre de la Geografía', a quien Arquímedes envió el primer documento que manifiesta el uso de indivisibles, calculó el tamaño de la Tierra comparando el dato en papiro de que en Siena, hoy Asuán, durante el solsticio de junio, los objetos verticales no proyectan sombra, con el dato que midió en Alejandría, durante el solsticio de junio, de que los objetos verticales proyectan sombra formando ángulo de 1/50 de círculo. La diferencia angular de las sombras equivale a la diferencia angular entre las dos ubicaciones, al ser ángulos alternos internos, considerando paralelos los rayos solares. La distancia entre Siena y Alejandría estaba medida en 5 000 estadios, según el dato que tenía Eratóstenes, dando a la circunferencia de la Tierra un cálculo de 250 000 estadios. No está expreso qué estadio

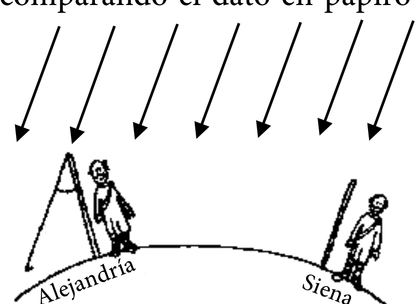



Figura I 3 Proyección en solsticio de junio consideró. Si fue el estadio olímpico, de 185,119 metros, entonces 1.15% es la diferencia del cálculo en 250 000 estadios de Eratóstenes contra los 40 075 kilómetros medidos actualmente de la circunferencia sobre el Ecuador. La distancia entre Siena y Alejandría se midió a pie y dio lugar al cálculo de la circunferencia de la Tierra. La distancia entre la Tierra y la Luna se calculó mediante ángulos y dio lugar a la Trigonometría. Hiparco de Nicea, ‘Padre de la Trigonometría’, no podía medir distancias entre los astros. Lo que sí podía era medir ángulos. Midió el tamaño angular de la Luna, que coincide con el tamaño angular del Sol advirtiéndose la coincidencia durante los eclipses solares en los cuales el círculo lunar cubre el círculo solar.

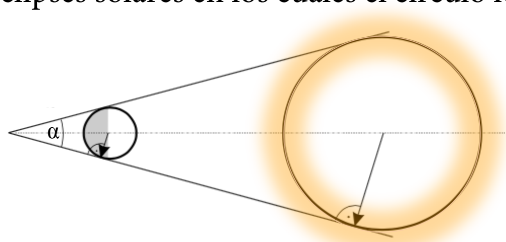



Figura I 4 Eclipse Solar

Sucede entonces que pueden formarse dos triángulos rectángulos, siendo la hipotenusa compartida por ambos equivalente a la distancia de la Tierra al Sol en la longitud mayor y un segmento correspondiendo a la distancia de la Tierra a la Luna. La mitad del tamaño angular, compartido por la Luna y el Sol, corresponde al ángulo opuesto a los radios de la Luna y del Sol. Siendo proporcionales en tamaño angular se generan las siguientes proporciones al corresponderse siendo triángulos semejantes:

$$\text{I.37} \qquad \frac{\text{Radio}_{\text{Sol}}}{\text{Distancia}_{\text{Tierra-Sol}}} = \frac{\text{Radio}_{\text{Luna}}}{\text{Distancia}_{\text{Tierra-Luna}}} = sen(\alpha/2)$$

Para obtener el valor de seno, proporción cateto opuesto con hipotenusa, dividió una circunferencia con cuerdas, tabulando la longitud de cada una de las cuerdas con su ángulo. Una vez construida la tabla fue posible relacionar cada ángulo medido con su lado opuesto correspondiente. Seno de $\alpha/2$ resulta ser la mitad de la cuerda de $\alpha$ dividida entre el radio de circunferencia. Un eclipse lunar le dio la razón del radio de la Luna respecto al radio de la Tierra, 250 000/2π estadios siendo dato que dio Eratóstenes, y despejando obtuvo la distancia de la Tierra a la Luna.

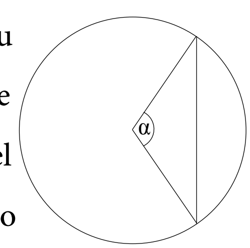



Figura I 5 Ángulo y Cuerda

La razón del radio de la Luna respecto al radio de la Tierra corresponde a la razón del tiempo en que se oscurece la Luna, que corresponde a su tamaño, con el tiempo desde que empezó a oscurecerse hasta que empieza a volverse a iluminar, que corresponde al recorrido de la Luna a través del cono de sombra que proyecta la Tierra, aproximadamente el tamaño de la Tierra. La proporción de tiempos durante el eclipse lunar multiplicada por el radio calculado de la Tierra, resulta en el radio de la Luna.

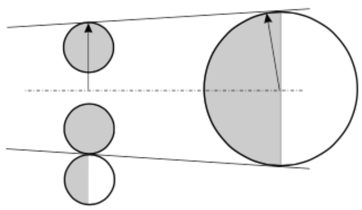


Figura I 6 Eclipse Lunar

Para la distancia de la Tierra al Sol se hizo la siguiente medición asegurando un triángulo rectángulo para poder utilizar sus propiedades. Un triángulo rectángulo que tiene a la Tierra, la Luna, el Sol como sus vértices que sucede cuando se observa media Luna en el firmamento.

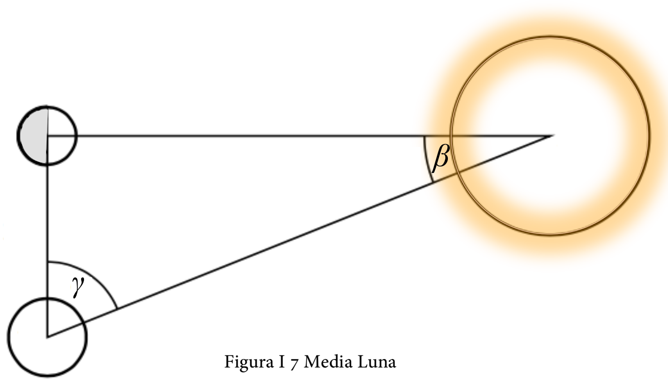



Figura I 7 Media Luna

Midiendo el ángulo observado entre la Luna y el Sol, $\gamma$, sabiendo que se forma ángulo recto en el vértice lunar durante la noche intermedia a Luna Nueva y Luna Llena, se deduce el ángulo formado en el vértice solar, $\beta = 90^{\circ} - \gamma$. El seno de $\beta$ es equivalente al cociente de la distancia de la Tierra a la Luna sobre la distancia de la Tierra al Sol. Con el valor de la longitud de la cuerda correspondiente al ángulo $\beta$ multiplicando por la distancia de la Tierra a la Luna se obtiene la distancia de la Tierra al Sol. Retomando el valor *sen(α/2)*, que es la longitud de la mitad de cuerda correspondiente a $\alpha$ y multiplicándolo por el valor obtenido distancia de la Tierra al Sol se alcanza el dato del radio del Sol. El procedimiento lo ideó Aristarco de Samos, siendo Hiparco de Nicea quien concluyó los cálculos con mediciones angulares realizadas con el teodolito que inventó, invento que se usa en Ingeniería Civil para levantamientos topográficos. Actualmente se tienen los siguientes datos: $\text{Radio}_{\text{Sol}}$, $R_\odot \approx 695\,700$ km $\text{Radio}_{\text{Luna}} \approx 1\,737$ km

$\text{Distancia}_{\text{Tierra-Sol}} \approx$ UA := 149 597 870,7 km $\text{Distancia}_{\text{Tierra-Luna}} \approx 384\,400$ km

Los trabajos de Hiparco de Nicea se perdieron pero llegaron hasta nosotros sus estudios ya que fueron recopilados por Claudio Ptolomeo en su obra *Μαθηματικὴ Σύνταξις*, Sintaxis Matemática, del siglo II d.C.. Su repercusión hizo que se le nombrara *Ἡ Μεγάλη Σύνταξις*, La Gran Sintaxis. Los árabes la tradujeron como المجسطي, pronunciado *Al-Majisti* y quedó en español como Almagesto. Claudio Ptolomeo explica el propósito de su obra en su Prefacio:

*«Éste es el amor de la contemplación de lo eterno e inmutable con el que constantemente nos esforzamos para incrementar, estudiando aquellas partes de éstas ciencias que siempre han sido dueñas de aquellos quienes se aproximaron a en un genuino espíritu de consulta, y por nuestros propios intentos de contribuir tanto como pudiéramos hacerlo adelantándonos por el tiempo adicional entre aquellas personas y nosotros mismos. Trataremos de anotar toda cosa que pensamos haber descubierto en el tiempo presente, lo haremos tan consistentemente como sea posible y de una manera que pueda ser seguida por todos aquellos quienes ya hayan realizado algún progreso en el campo».*

Incrementó el catálogo de estrellas a 1028, dentro de 48 constelaciones. Para aumentar la precisión de sus mediciones decidió hacer subdivisión de cada uno de los 360º. Una opción era dividir cada grado en 10 partes, conteo decimal o en 12 partes, conteo duodecimal. Ptolomeo requería aún más partes por lo que con una mano contaba hasta doce y con la otra iba contando las docenas. La cuenta con las falanges en una mano y la acumulación de docenas con los dedos de la otra mano llega hasta 5 docenas, llega hasta 60. En sesenta partes fue que dividió cada grado y cada una fue llamada en latín *pars minuta prima*, primera parte pequeña, y primera porque cada una de estas partes pequeñas fue subdivida en otras 60, *pars minuta secunda*, segunda parte pequeña. Se adoptó esta división de los grados también como división de las horas. La hora se dividió en 60 *pars **minuta** prima,* y quedó el **minuto** que se dividió en 60 *pars minuta **secunda*** y quedó el **segundo**. Con las subdivisiones de la circunferencia Ptolomeo realizó a la manera de Hiparco una tabla de ángulos con sus cuerdas correspondientes. Para ello fue necesario definir el ángulo y calcular la longitud de la cuerda que subtiende, cálculo que desarrolló mediante el Teorema de Pitágoras y mediante la relación entre los cuatro lados y las dos diagonales que se forman cuando se dibuja un cuadrilátero inscrito: «En todo cuadrilátero inscribible en una circunferencia, la suma de los productos de los pares de lados opuestos es igual al producto de sus diagonales». Teorema de Ptolomeo.

Teorema de Pitágoras: $a^2 + b^2 = c^2$ Teorema de Ptolomeo: $\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{BC} \cdot \overline{AD} = \overline{AC} \cdot \overline{BD}$

El teorema de Pitágoras aplica cuando el triángulo es rectángulo. La justificación para hacer la tabla de ángulos con medias cuerdas se debe a que el triángulo formado por media cuerda, radio y la línea que completa, tiene siempre 90º en uno de sus ángulos.

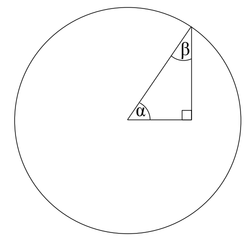


Figura I 8 Ángulo y Media Cuerda

El lado opuesto al ángulo de 90º, llamado hipotenusa, del griego ὑποτείνουσα, que significa extenderse debajo, lo denotamos con *c* en el Teorema de Pitágoras. Así que encontrar el seno de α es encontrar la longitud de *a* que es el lado opuesto al ángulo α, en círculo unitario.

El lado que completa el triángulo rectángulo es *b*, lado opuesto al ángulo β, siendo β el ángulo complementario de α. Un triángulo rectángulo cuyos catetos son iguales, sus ángulos α y β son iguales e iguales a 45º.

I.38 Seno de 45º

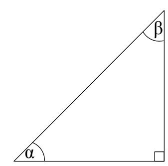


Figura I 9 Escuadra

Sea $\alpha = 45^\circ$ $c = 1$ $a = b$

$\beta = 90^\circ - 45^\circ$ $\beta = 45^\circ$

$a^2 + b^2 = c^2 \rightarrow a^2 + a^2 = 1^2 \rightarrow 2a^2 = 1 \rightarrow a^2 = 1/2 \rightarrow a = \sqrt{[1/2]} = \sqrt{[2]}/2$

$$sen(45^\circ) = \sqrt{[2]}/2 = 0{,}7071...$$

Un triángulo equilátero cuyos tres lados son iguales tiene sus ángulos iguales e iguales a 60º. Dividiéndolo a la mitad, para formar un triángulo rectángulo, quedan ahora $\alpha = 60^\circ$ y $\beta = 30^\circ$.

I.39 Seno de 60º

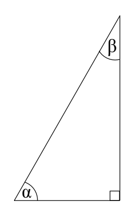


Figura I 10 Cartabón I

Sea $\alpha = 60^\circ$ $c = 1$ $b = c/2 = 1/2$

$\beta = 90^\circ - 60^\circ$ $\beta = 30^\circ$

$a^2 + b^2 = c^2 \rightarrow a^2 + (1/2)^2 = 1^2 \rightarrow a^2 + 1/4 = 4/4 \rightarrow a^2 = 3/4 \rightarrow a = \sqrt{[3/4]} = \sqrt{[3]}/2$

$$sen(60^\circ) = \sqrt{[3]}/2 = 0{,}8660...$$

I.40 Seno de 30º

Sea $\alpha = 30º$ $\quad c = 1$

$\beta = 90º - 30º \quad \beta = 60º$

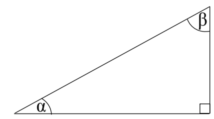


Figura I 11 Cartabón II

$a = c/2 = 1/2$

$$sen(30º) = 1/2 = 0{,}5$$

Los senos de 30º, 45º y 60º se pueden recordar con la forma $\sqrt{[n]}/2$, siendo $n = \{1, 2, 3\}$ respectivamente. Para encontrar más senos se requiere que ángulo y lado opuesto correspondiente sean conocidos. Inscribiendo un pentágono en la circunferencia unitaria a cada lado le corresponde una quinta parte del tamaño angular, 360º/5, lo que es igual a 72º. Para formar triángulo rectángulo se divide el triángulo formado por un lado del pentágono con el centro de la circunferencia de vértice por su bisectriz. El ángulo, ahora 72º/2, es 36º.

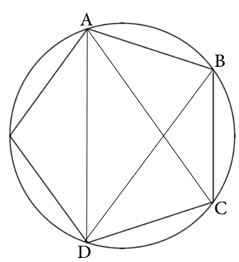


Figura I 12 Proporción Divina

Encontrar cuánto mide la mitad del lado del pentágono es equivalente a encontrar el *sen(36º)*. Utilizando el Teorema de Ptolomeo con 3 lados del pentágono que corresponden a $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y una cuerda $\overline{AD}$ que completa el cuadrilátero inscrito, ocurre que se manifiesta en el pentágono el número $\varphi = 1{,}6180339887498948482045868 34....$

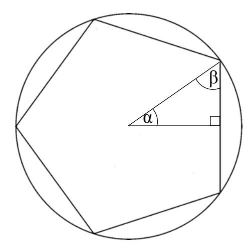
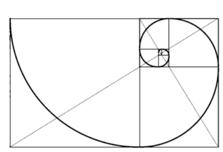


Figura I 13 Seno de 36º

Proporción Divina

I.41 Sea $p := \overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD}$ $\quad d := \overline{AC} = \overline{AD} = \overline{BD}$ $\quad \varphi := d/p$

$\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{BC} \cdot \overline{AD} = \overline{AC} \cdot \overline{BD} \rightarrow p \cdot p + p \cdot d = d \cdot d \rightarrow p^2 + pd = d^2 \rightarrow p^2/p^2 + pd/p^2 = d^2/p^2 \rightarrow$
$1 + d/p = d^2/p^2 \quad \rightarrow \quad 1 + \varphi = \varphi^2$



$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$

Actualmente la ecuación cuadrática a la que se ha llegado se resuelve con la fórmula cuadrática, que fue creada por Bhaskara Acarya, también llamado Bhaskara II porque antes de él se registra otro Bhaskara que aportó a las Matemáticas, Bhaskara I, quien escribió el cero, 0.

I.42 *Se desconoce que Bhaskara Acarya vendiese chicharrón*

$$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0 \quad \therefore \quad \varphi = \frac{-(-1) + \sqrt{[1^2 - 4\cdot1\cdot-1]}}{2\cdot 1} \rightarrow \varphi = \frac{1 + \sqrt{[1+4]}}{2} \rightarrow \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} =$$

$$1{,}6180339887498948482045868343656381177203091798057628621354486 22\ldots$$

El número φ predomina en la belleza y se nombra φ en honor a Φειδίας, Fidias, escultor griego de la estatua de Zeus, una de las siete maravillas del mundo antiguo. La belleza de φ la proporciona su razón extrema y media, esto debido a que la suma de los dos segmentos es al segmento mayor, lo mismo que el segmento mayor es al menor. **Armonía del cosmos**

Se encontró φ. Falta definir cuánto mide *p*/2, el seno de 36º, la mitad del lado de un pentágono. La longitud del lado del pentágono inscrito en el círculo unitario se encuentra al construirlo con regla y compás, aplicando el Teorema de Pitágoras. Se dibuja el círculo unitario de radio igual a uno. Se traza un triángulo rectángulo con vértices 0, 1, 2 siendo sus catetos $\overline{01}$ igual a 1 y $\overline{02}$ igual a 1/2. La hipotenusa $\overline{12}$ resulta igual a √[5]/2. Se ha de notar que la suma de la hipotenusa sumada al cateto menor forma la razón extrema y media, (1+√5)/2, φ. Trazando desde el punto 2 la distancia $\overline{12}$ pasando por 0 se obtiene el punto 3, igual a {√[5] - 1}/2, lo mismo que φ - 1 y, sorprendentemente, también igual a 1/φ. Formando ahora el triángulo rectángulo con vértices 0, 1, 3 siendo sus catetos $\overline{01}$ igual a 1 y $\overline{03}$ igual a {√[5] - 1}/2 se obtiene la longitud del lado del pentágono, igual a la longitud de la hipotenusa $\overline{13}$ que resulta ser √[(5 - √5)/2]. El lado del pentágono dividido por la mitad forma:

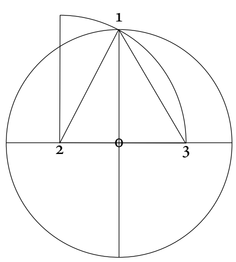


Figura I 14 Lado del Pentágono

I.43 Seno de 36º

$$sen(36^o) = \sqrt{[(5 - \sqrt{5})/2]}/2 = 0{,}5877\ldots$$

Más longitudes correspondientes se pueden deducir utilizando identidades que fueron inducidas geométricamente. Las identidades trigonométricas resumen diferentes posibilidades para representar operaciones entre ángulos. El coseno puede obtenerse con el seno del ángulo complementario, $\beta = 90^o - \alpha$, o con la identidad trigonométrica circular fundamental.

I.44 Identidad trigonométrica circular fundamental

Sea $sen(x) = a/h$ $\quad cos(x) = b/h$ $\quad radio = h = c = 1$ Ver Figura I 8

$$sen^2(x) + cos^2(x) = 1 \quad \because \quad a^2 + b^2 = c^2$$

Tabla I uno || *α, sen(α), cos(α)*

| $\alpha_{grados}$ | 0º | 30º | 36º | 45º | 60º | 90º |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *sen(α)* | 0 | 1/2 | √[(5-√5)/2]/2 | √[2]/2 | √[3]/2 | 1 |
| *cos(α)* | 1 | √[3]/2 | √[(3+√5)/2]/2 | √[2]/2 | 1/2 | 0 |

I.45 Identidad trigonométrica seno de la suma de ángulos

$$sen(\alpha + \beta) = sen(\alpha)\cdot cos(\beta) + sen(\beta)\cdot cos(\alpha)$$

I.46 Identidad trigonométrica coseno de la suma de ángulos

$$cos(\alpha + \beta) = cos(\alpha)\cdot cos(\beta) - sen(\alpha)\cdot sen(\beta)$$

I.47 Identidad trigonométrica tangente de la suma de ángulos

$$tan(\alpha + \beta) = \frac{tan(\alpha) + tan(\beta)}{1 - tan(\alpha)\cdot tan(\beta)}$$

I.48 Identidad trigonométrica seno de la resta de ángulos

$$sen(\alpha - \beta) = sen(\alpha)\cdot cos(\beta) - sen(\beta)\cdot cos(\alpha)$$

I.49 Identidad trigonométrica coseno de la resta de ángulos

$$cos(\alpha - \beta) = cos(\alpha)\cdot cos(\beta) + sen(\alpha)\cdot sen(\beta)$$

I.50 Identidad trigonométrica tangente de la resta de ángulos

$$tan(\alpha + \beta) = \frac{tan(\alpha) - tan(\beta)}{1 + tan(\alpha)\cdot tan(\beta)}$$

I.51 Identidad *sen(2α)*

Siendo $\alpha = \beta$ entonces:

$sen(\alpha + \beta) = sen(\alpha + \alpha) = sen(2\alpha) =$
$sen(\alpha)\cdot cos(\alpha) + sen(\alpha)\cdot cos(\alpha) \rightarrow$

$$sen(2\alpha) = 2\cdot sen(\alpha)\cdot cos(\alpha)$$

I.52 Identidad *cos(2α)*

Siendo $\alpha = \beta$ entonces:

$cos(\alpha + \beta) = cos(\alpha + \alpha) = cos(2\alpha) =$
$cos(\alpha)\cdot cos(\alpha) - sen(\alpha)\cdot sen(\alpha) \rightarrow$

$$cos(2\alpha) = cos^2(\alpha) - sen^2(\alpha)$$

I.53 Identidad *cos(α/2)*

Siendo $\alpha = \alpha/2 + \alpha/2$ entonces:

$cos(\alpha) = cos(\alpha/2 + \alpha/2) =$
$cos(2\cdot\alpha/2) = cos^2(\alpha/2) - sen^2(\alpha/2) =$
$cos^2(\alpha/2) - [1 - cos^2(\alpha/2)] =$
$cos^2(\alpha/2) - 1 + cos^2(\alpha/2) =$
$2\cdot cos^2(\alpha/2) - 1 = cos(\alpha) \rightarrow$

$$cos(\alpha/2) = \left(\frac{cos(\alpha) + 1}{2}\right)^{1/2}$$

I.54 Identidad *sen(α/2)*

Si $cos(\alpha) = cos^2(\alpha/2) - sen^2(\alpha/2)$

y $cos^2(\alpha/2) = \frac{cos(\alpha) + 1}{2}$ entonces:

$\frac{2\cdot cos(\alpha)}{2} = \frac{cos(\alpha) + 1}{2} - sen^2(\alpha/2) \rightarrow$

$$sen(\alpha/2) = \left(\frac{1 - cos(\alpha)}{2}\right)^{1/2}$$

Para obtener *sen(6º)* se usa I.40 junto I.43 en I.48. Posteriormente I.44 da el valor de *cos(6º)*.

I.55 Seno de 6º

$sen(36^o) = \sqrt{[(5 - \sqrt{5})/2]}/2$ $\quad$ $sen(6^o) = sen(36^o - 30^o)$ $\quad$ $sen(30^o) = 1/2$

$cos(36^o) = \sqrt{[(3+\sqrt{5})/2]}/2$ $\quad$ $cos(30^o) = \sqrt{[3]}/2$

$$sen(6^o) = sen(36^o - 30^o) = sen(36^o)\cdot cos(30^o) - sen(30^o)\cdot cos(36^o) =$$
$$\{\sqrt{[(5 - \sqrt{5})/2]}/2\}\cdot\{\sqrt{[3]}/2\} - (1/2)\cdot\{\sqrt{[(3+\sqrt{5})/2]}/2\} = \sqrt{[3\cdot(5 - \sqrt{5})/2]}/4 - \sqrt{[(3+\sqrt{5})/2]}/4 = 0{,}1045...$$

Con I.54 se deduce $sen(3^o)$. Iterando da $sen(1^o\ 30')$. Reiterando $sen(0^o\ 45')$.

I.56 $sen(3^o) = 0{,}0523...$ I.57 $sen(1^o\ 30') = 0{,}0261...$ I.58 $sen(0^o\ 45') = 0{,}0523...$

El $sen(0^o\ 45')$ corresponde a la mitad del lado de un diacositetracontágono, un polígono de 240 lados. Mediante este polígono Claudio Ptolomeo aproximó la razón de una circunferencia con su diámetro en 377/120 que es igual a $3{,}141\overline{6}$. Recordando, la circunferencia es el perímetro, περίμετρον en griego, de un círculo. Se nombra π a la constante que multiplicada por el diámetro da el perímetro del círculo. π es irracional trascendente. Emma Haruka Iwao develó 31 400 000 000 000 cifras de π: 3,1415926535897932384626433832795028841971693993751058209749445923078164062862089986280348253421170679... el 14 de marzo de 2019 d.C.. En el siglo II, antes de Cristo, Hiparco de Nicea, 'Padre de la Trigonometría' calculó con un par de cuerdas la distancia a la Luna y la distancia al Sol. Ahora se hace con un par de senos. En griego se originó el documento *Μαθηματικὴ Σύνταξις*, Sintaxis Matemática. En sánscrito se escribió circa 400 d.C. सूर्यसिद्धान्त, *Suryasiddhanta*, Sol perfecto objetivo, documento de autor desconocido que también utiliza la idea de relacionar ángulos con cuerdas para fines astronómicos. Siguió en el siglo VI d.C. आर्यभटीय, *Aryabhaṭiya*, documento escrito por Aryabhata, que refiriendo al anterior *Suryasiddhanta* utilizaba *ardha jya*, que significa media cuerda, para denominar a la longitud que corresponde al ángulo. Se hizo común nombrarse sólo *jya* pasando a *jiva* su sinónimo. En árabe se escribió جيب que puede leerse como *jiba*, transliteración de cuerda en sánscrito, o puede leerse como *jayb* que significa bolsillo y por metonimia enuncia a senos, mamas, tetas, pechos, que fue la traducción que se tomó cuando se pasó al latín con *sinus*. Sucesivas traducciones transformaron el nombre de media cuerda a seno. El concepto se sigue conservando después de haber dado 2138 vueltas la Tierra al Sol desde la muerte de Hiparco, derivándose de su idea las funciones trigonométricas.

Al realizar la derivada de funciones trigonométricas circulares, el desarrollo genera dos límites trigonométricos que por su relevancia son considerados especiales y por ello se les nombraron Límites Trigonométricos Especiales y son: $\lim_{x\to 0} \frac{sen(x)}{x}$ & $\lim_{x\to 0} \frac{cos(x) - 1}{x}$

El límite del cociente $sen(x)/x$ cuando $x$ tiende a cero da la indeterminación II.2 que se resuelve tabulando números negativos y números positivos, estrechando para aproximar al valor $x = 0$ y el valor de 0/0 que mantiene la curva suave es 1. Tabla I dos || $sen(x)/x$

| $x_{radianes}$ | -1 | -0,5 | -0,25 | -0,125 | 0 | 0,125 | 0,25 | 0,5 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{sen(x)}{x}$ | 0,84147 | 0,95885 | 0,98961 | 0,99739 | $\frac{0}{0}$ | 0,99739 | 0,98961 | 0,95885 | 0,84147 |

I.59
$$\lim_{x\to 0} \frac{sen(x)}{x} = 1$$

El límite del cociente $[cos(x) - 1]/x$ cuando $x$ tiende a cero da la indeterminación II.1 que se resuelve tabulando números negativos y números positivos, estrechando para aproximar al valor $x = 0$ y el valor de 0/0 que mantiene la curva suave es 0. Es posible, por conjugación, eliminar al cero del denominador, transformando la forma indeterminada 0/0 en la expresión 1·(0/2) que resulta congruentemente ser 0. Tabla I tres || $[cos(x) - 1]/x$

| $x_{radianes}$ | -1 | -0,5 | -0,25 | -0,125 | 0 | 0,125 | 0,25 | 0,5 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{cos(x) - 1}{x}$ | 0,45969 | 0,24483 | 0,12435 | 0,06241 | $\frac{0}{0}$ | -0,06241 | -0,12435 | -0,24483 | -0,45969 |

I.60
$$\lim_{x\to 0} \frac{cos(x) - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \left[\frac{cos(x) - 1}{x} \cdot 1\right] = \lim_{x\to 0} \left[\frac{cos(x) - 1}{x} \cdot \frac{cos(x) + 1}{cos(x) + 1}\right] =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{[cos(x)]^2 - 1^2}{x\cdot[cos(x) + 1]} = \lim_{x\to 0} \frac{cos^2(x) - 1}{x\cdot[cos(x) + 1]} = \lim_{x\to 0} \frac{sen^2(x)}{x\cdot[cos(x) + 1]} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{sen(x) \cdot sen(x)}{x\cdot[cos(x) + 1]} = \lim_{x\to 0} \frac{sen(x)}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{sen(x)}{cos(x) + 1} = 1 \cdot \lim_{x\to 0} \frac{0}{1 + 1} = 1 \cdot \frac{0}{2} = 1 \cdot 0 = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{cos(x) - 1}{x} = 0$$

La función seno, función trascendental, trigonométrica, circular, se expresa con $f(x) = sen(x)$. Evaluando la función sinusoidal en un $h$ arbitrario posterior se obtiene $f(x + h) = sen(x + h)$. Por identidad trigonométrica se tiene que $sen(\alpha + \beta) = sen(\alpha) \cdot cos(\beta) + sen(\beta) \cdot cos(\alpha)$ lo que que significa que la derivada de la función seno será la función coseno. Si $f(x) = sen(x)$ entonces $f'(x) = cos(x)$.

I.61 Derivada de la función seno

Sea $f(x) = sen(x)$ $\therefore$ $f(x + h) = sen(x + h) = sen(x) \cdot cos(h) + sen(h) \cdot cos(x)$

$$\frac{d\,[sen(x)]}{dx} = lim_{h \to 0} \frac{sen(x) \cdot cos(h) + sen(h) \cdot cos(x) - sen(x)}{h} = lim_{h \to 0} \frac{sen(x)\,[cos(h) - 1] + sen(h) \cdot cos(x)}{h} =$$

$$lim_{h \to 0}\, sen(x) \cdot lim_{h \to 0} \frac{cos(h) - 1}{h} + lim_{h \to 0} \frac{sen(h)}{h} \cdot lim_{h \to 0}\, cos(x) = sen(x) \cdot 0 + 1 \cdot cos(x) = 0 + cos(x) = cos(x)$$

$$\frac{d\,[sen(x)]}{dx} = cos(x)$$

La función coseno, función trascendental, trigonométrica, circular, se expresa con $f(x) = cos(x)$. Evaluando la función *cosinusoidal* en un $h$ arbitrario posterior se obtiene $f(x + h) = cos(x + h)$. La identidad trigonométrica $cos(\alpha + \beta) = cos(\alpha) \cdot cos(\beta) - sen(\alpha) \cdot sen(\beta)$ conduce a la derivada de la función coseno que es la función negativa seno. Si $f(x) = cos(x)$ entonces $f'(x) = -sen(x)$.

I.62 Derivada de la función coseno

Sea $f(x) = cos(x)$ $\therefore$ $f(x + h) = cos(x + h) = cos(x) \cdot cos(h) - sen(x) \cdot sen(h)$

$$\frac{d\,[cos(x)]}{dx} = lim_{h \to 0} \frac{cos(x) \cdot cos(h) - sen(x) \cdot sen(h) - cos(x)}{h} = lim_{h \to 0} \frac{cos(x) \cdot cos(h) - cos(x) - sen(x) \cdot sen(h)}{h} =$$

$$lim_{h \to 0} \frac{cos(x) \cdot [cos(h) - 1] - sen(x) \cdot sen(h)}{h} = lim_{h \to 0}\, cos(x) \cdot lim_{h \to 0} \frac{cos(h) - 1}{h} - lim_{h \to 0}\, sen(x) \cdot lim_{h \to 0} \frac{sen(h)}{h} =$$

$$cos(x) \cdot 0 - sen(x) \cdot 1 = 0 - sen(x) = -sen(x)$$

$$\frac{d\,[cos(x)]}{dx} = -sen(x)$$

Seno junto con Coseno, el sufijo *Co-* indica «junto con», forman el conjunto de las funciones trigonométricas circulares. El cociente entre ellos forma Tangente. Sus recíprocos crean Cosecante, Secante y Cotangente. Para no confundir cuál recíproco es el de Seno y cuál recíproco es el de Coseno, recordar que los sufijos *Co-*, *Co-* no corresponden, juntos da miedo.

I.63 Funciones Trigonométricas Circulares

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Seno | $sen(x)$ | | | |
| Coseno | $sen(x+\pi/2)$ | $cos(x)$ | | |
| Tangente | $\frac{sen(x)}{sen(x+\pi/2)}$ | $\frac{sen(x)}{cos(x)}$ | $tan(x)$ | |
| Cotangente | $\frac{sen(x+\pi/2)}{sen(x)}$ | $\frac{cos(x)}{sen(x)}$ | $\frac{1}{tan(x)}$ | $cot(x)$ |
| Secante | $\frac{1}{sen(x+\pi/2)}$ | $\frac{1}{cos(x)}$ | $sec(x)$ | |
| Cosecante | $\frac{1}{sen(x)}$ | $csc(x)$ | | |

La función tangente $f(x) = tan(x)$ es un cociente de funciones por lo que aplica I.36, considerando la función seno $sen(x) = u(x)$ y la función coseno $cos(x) = v(x)$. Utilizando I.61 y también I.62 se tiene que $u'(x) = cos(x)$ y $v'(x) = -sen(x)$ tocando a la derivada de la función tangente ser la función secante elevada al cuadrado. Si $f(x) = tan(x)$ entonces $f'(x) = sec^2(x)$.

I.64 Derivada de la función tangente

Sea $f(x) = tan(x)$ $\qquad sen(x) = u(x) \qquad cos(x) = v(x)$

$$\frac{d\,[tan(x)]}{dx} = \frac{d\,[sen(x)/cos(x)]}{dx} = \frac{cos(x)\cdot cos(x) - sen(x)\cdot[-sen(x)]}{[cos(x)]^2} = \frac{cos^2(x) + sen^2(x)}{cos^2(x)} = \frac{1}{cos^2(x)} = sec^2(x)$$

$$\frac{d\,[tan(x)]}{dx} = sec^2(x)$$

La función cotangente $f(x) = cot(x)$ es el recíproco de la función tangente. La regla del cociente demostró que una función del tipo $f(x) = u(x)/v(x)$ deriva en $f'(x) = \frac{v(x) \cdot u'(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v(x)^2}$ ahora considerando $cos(x) = u(x)$ y $sen(x) = v(x)$ y corresponde tocar a su derivada ser el negativo de la función cosecante elevada al cuadrado. Si $f(x) = cot(x)$ entonces $f'(x) = -csc^2(x)$.

I.65 Derivada de la función cotangente

Sea $f(x) = cot(x)$ $\qquad$ $cos(x) = u(x)$ $\qquad$ $sen(x) = v(x)$

$$\frac{d\,[cot(x)]}{dx} = \frac{d\,[cos(x)/sen(x)]}{dx} = \frac{sen(x) \cdot [-sen(x)] - cos(x) \cdot cos(x)}{[sen(x)]^2} = \frac{-sen^2(x) - cos^2(x)}{sen^2(x)} = \frac{-1}{sen^2(x)} = -csc^2(x)$$

$$\frac{d\,[cot(x)]}{dx} = -csc^2(x)$$

La función secante $f(x) = sec(x)$ es el recíproco de la función coseno. La operación matemática con que se calcula la rapidez de cambio de la variable dependiente respecto de la variable independiente, hace uso de la regla del cociente ya que el recíproco de una función es igual a uno, 1, sobre la función de la que es recíproco. El cociente con $1 = u(x)$ y $cos(x) = v(x)$ se calcula y su derivada es el producto de la función secante y la función tangente. Si $f(x) = cot(x)$ entonces $f'(x) = sec(x)tan(x)$.

I.66 Derivada de la función secante

Sea $f(x) = sec(x)$ $\qquad$ $1 = u(x)$ $\qquad$ $cos(x) = v(x)$

$$\frac{d\,[sec(x)]}{dx} = \frac{d\,[1/cos(x)]}{dx} = \frac{cos(x) \cdot 0 - 1 \cdot [-sen(x)]}{[cos(x)]^2} = \frac{0 + sen(x)}{cos^2(x)} = \frac{sen(x)}{cos^2(x)} = \frac{1 \cdot sen(x)}{cos(x) \cdot cos(x)} =$$

$$\frac{1}{cos(x)} \cdot \frac{sen(x)}{cos(x)} = sec(x)tan(x)$$

$$\frac{d\,[sec(x)]}{dx} = sec(x)tan(x)$$

La función cosecante $f(x) = csc(x)$ es el recíproco de la función seno. Para el cálculo se consigna la asignación $1 = u(x)$ y $sen(x) = v(x)$. Consecuentemente, su derivada es el negativo del producto de las funciones cosecante y cotangente. Si $f(x) = csc(x)$ entonces $f'(x) = -csc(x)cot(x)$.

I.67 Derivada de la función cosecante

Sea $f(x) = csc(x)$ $\qquad 1 = u(x) \qquad sen(x) = v(x)$

$$\frac{d\,[csc(x)]}{dx} = \frac{d\,[1/sen(x)]}{dx} = \frac{sen(x)\cdot 0 - 1\cdot cos(x)}{[sen(x)]^2} = \frac{0 - cos(x)}{sen^2(x)} = \frac{-cos(x)}{sen^2(x)} = \frac{-1\cdot cos(x)}{sen(x)\cdot sen(x)} =$$

$$\frac{-1}{sen(x)} \cdot \frac{cos(x)}{sen(x)} = -csc(x)cot(x)$$

$$\frac{d\,[csc(x)]}{dx} = -csc(x)cot(x)$$

Hasta aquí las funciones trigonométricas circulares que son razones continuas según el ángulo.

| | | |
|---|---|---|
| Función seno | $f(x) = sen(x)$ | A |
| Función coseno | $f(x) = cos(x)$ | B |
| Función tangente | $f(x) = tan(x)$ | Γ |
| Función cotangente | $f(x) = cot(x)$ | E |
| Función secante | $f(x) = sec(x)$ | Z |
| Función cosecante | $f(x) = csc(x)$ | H |

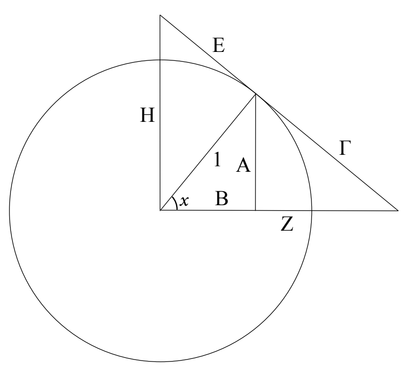


Figura I 15 Razones Trigonométricas

Trigonometría proviene de las palabras griegas τρῖγονον y μέτρον, triángulo y medida. Las funciones trigonométricas circulares hacen el estudio de las razones entre catetos e hipotenusa de los triángulos rectángulos inscritos en un círculo de radio unitario centrado en el origen. El argumento de las funciones trigonométricas es el ángulo. El ángulo tiene al radián como unidad oficial en el Sistema Internacional de Unidades. Un radián es el ángulo central de una circunferencia que abarca un arco de igual longitud que el radio de la misma. La unidad radián fue en 1873 d.C. por primera vez publicada. James Thomson, su autor, consideró que el radio, distancia característica de toda circunferencia, resultaba apropiado para definir al ángulo, creando al radián que ha sido considerado la unidad con definición formal apropiada para librar la ciencia de convenciones arbitrarias y cerrar en 2π radianes la circunvolución angular de la circunferencia. El cambio de grado a radián fue gradual. Antes se estableció el gradián, con la implementación del Sistema Métrico en 1793 d.C. y Jean-Charles de Borda siendo de sus principales promotores. El gradián se definió mediante divisiones de cien; centígrado o grado centesimal son sus otros nombres. Dividir el ángulo recto en 100 gradianes, cada uno de ellos subdivido en 100 minutos y cada minuto dividido en 100 segundos. Una vuelta completa a la circunferencia cierra en 400 gradianes, expresados $400^g$. Fue la fijación de 1793 d.C. con la puesta en marcha del Sistema Decimal, que junto al gradián basado en 100, también se incorporó el Calendario Republicano con días de 10 horas, 100 minutos por hora y 100 segundos por minuto. Circunferencias de $400^g$ y días de 10 horas no perduraron. Lo que sí se conserva es el metro y el kilogramo. Medir es comparar y lo mayor con lo que se puede comparar en la Tierra es la Tierra misma. Así pensaron los astrónomos, físicos y matemáticos Pierre-Simon Laplace y Giuseppe Lodovico Lagrangia que definieron al metro, μέτρον, palabra griega que significa medida, como la medida equivalente a la diezmillonésima parte de la cuarta parte de la circunferencia de la Tierra. La distancia entre el Ecuador y el Polo Norte, pasando por París, dividida entre 10 000 000 partes. Creando la unidad que va a utilizarse para medir la realidad, convenir en una división se justifica en términos de misticismo. Utilizando el patrón decimal, con siete ceros. El siete simboliza el fin de un ciclo y la renovación con el siguiente, el fin de las unidades dispersas y el inicio del Sistema Métrico Decimal. Integrado a los 7 ceros, con el 1 se completan 8 dígitos llegando al simbolismo de estabilidad del número 8.

La renovación llevando a la estabilidad.

Si la Tierra fuese esférica, entonces el Ecuador, y cualquier circunferencia sobre su superficie, centrada en la esfera terrestre, sería de 40 000 000 metros, pero como no es así, sino geoide, la Tierra con forma de Tierra, y ajustando a lo medido por Jean-Baptiste Joseph Delambre y Pierre Méchain, sucede que una vez establecido el metro y su prototipo fabricado con aleación platino-iridio, la medida de la circunferencia terrestre meridional tiene 40 007 860 metros, mientras que sobre el Ecuador se recorren 40 075 017 metros, según las últimas mediciones.

El metro, patrón de medida de longitud, se dividió en diez partes, llamadas decímetros. Un decímetro cúbico se llamó litro, como medida de volumen. Se llenó un litro con agua destilada a cero grados, temperatura a la que se derrite el hielo, Centígrados que pasaron a llamarse Celsius porque los gradianes también querían llamarse centígrados y se creó el *grave* como medida de peso. Los descubrimientos de Isaac Newton sobre la gravedad en su libro *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica,* Principios Matemáticos de la Filosofía Natural, publicación base para el Cálculo Infinitesimal, repercuten con la noción de que el peso es una fuerza, medida entonces con newtons, *N*, y lo considerado como peso sea ahora instituido como masa, *m*, cantidad de materia. Teniendo en mente que para el 2019 d.C. han sido doce personas las que han estado en la Luna, astro más próximo en dónde el peso de un objeto con masa constante varía respecto a su peso en la Tierra, sucede que estos dos términos sean usados indistintamente en lo cotidiano aunque grave fallo si se confunden en ciencia e ingeniería. El *grave* se dividió en mil partes llamando *gravet* a cada una de ellas. En 1795 d.C. se reemplazó el nombre de *gravet* con *gramme.* En griego γράμμα, significa letra y pasó al latín como *gramma,* agregándosele el significado de piedrecilla, utilizada entonces para pesar. Así como guijarro, *calculus*, derivó en Cálculo, así piedrecilla, *gramma*, pasó a ser *gramme,* y derivó en gramo. El *grave* quedó definido y nombrado como kilogramo, mil gramos. Cambió también la temperatura del agua empleada, de 0º Celsius, temperatura de descongelamiento, a 3,98º Celsius, temperatura de máxima densidad del agua. Se reconoció el kilogramo y fue fabricado su prototipo, el IPK, al igual que para el metro, con aleación platino-iridio. El 20 mayo de 1875 d.C. se firmó la Convención del Metro y se creó el Buró Internacional de Pesos y Medidas. México hizo oficialmente al metro y al kilogramo sus unidades de medida el 30 de diciembre de 1890 d.C.. Después de una gruesa de años de la Convención del Metro, el kilogramo se redefinió con la *Wirkungsquantum,* Constante de Planck, *h*, que tiene valor de $6{,}62607015 \times 10^{-34}$ [(kg·m²)/s]. Así, a partir del 20 de mayo de 2019 d.C. un kilogramo es:

I.68 $$1\ \text{kg} = 1\,509\,190\,179\,642\,151\,841\,691\,564\,343\,006\,540{,}611405993\ldots \frac{h\ \text{s}}{\text{m}^2}$$

El kilogramo se establece como 1,509190179642151841691564343006540611405993... x $10^{33}$ veces *Wirkungsquantum* por segundo sobre metro cuadrado, esperando que la Constante de Planck se mantenga constante, ya que el IPK perdió 50 microgramos.

Medir es comparar y para que la medida no cambie, el patrón de medida ha de ser constante. Consta que la definición de radián, ángulo central de una circunferencia que abarca un arco de igual longitud que el radio de la misma, se mantendrá constante. Hoy se considera arbitrario el grado sexagesimal, ángulo central de una circunferencia que abarca un arco cuya longitud es la tricentésima sexagésima parte de una circunferencia. Sin embargo, Hiparco, 'a su hija la Trigonometría', la simientó empleando trescientos sesenta grados puesto que 360 tiene 24 divisores, igual que el conteo duodecimal con las dos manos, y de observar las estrellas noche a noche, la bóveda celeste gira cada día un grado aproximadamente por lo que cada 90º, cada ángulo recto, corresponde a una estación del año. Primavera Verano Otoño Invierno.

♈ ♉ ♊ ♋ ♌ ♍ ♎ ♏ ♐ ♑ ♒ ♓

Marzo Abril Mayo Junio Julio Agosto Septiembre Octubre Noviembre Diciembre Enero Febrero Marzo

La división en 360º que se considera trivial y fue cambiada a radianes, en realidad tiene razón de ser ante propósitos astronómicos, al buscar respuestas acerca del espectáculo del Universo. La misma palabra trivial no resulta trivial en esencia. Era la primer parte del estudio de *las artes liberales.* Trivial proviene del latín *trivium*, que significa tres vías, y reunía a las tres disciplinas que desarrollan la elocuencia:

Gramática Dialéctica Retórica

Una vez aprendido lo trivial se enseñaba la segunda parte, *quadrivium*, cuatro vías, reuniendo el conocimiento, las matemáticas:

Aritmética Geometría Astronomía Música

Las siete artes liberales. Tenían ese nombre porque la finalidad de educar en ellas era la de formar al hombre libre. Por medio del desarrollo de las artes se obtiene la libertad, ya que como dijo Hesíodo, el primer filósofo griego:

«La educación ayuda a la persona a aprender a ser lo que es capaz de ser».

La educación como medio para ser una persona integral.

Demostrada de forma geométrica por Bonaventura Cavalieri, es considerada el primer teorema del Cálculo Infinitesimal. La fórmula de cuadratura de Cavalieri calcula la cuadratura, el área, delimitada por la curva $f(x) = x^n$, curva de la función potencial. Siendo el área delimitada por una función la concepción original de la operación integral, la fórmula de cuadratura de Cavalieri es la fórmula de integración de funciones potenciales.

### I.69 Fórmula de cuadratura de Cavalieri

$$omn.\ l.\ x^n = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

La fórmula publicada en *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota*, Geometría por indivisibles de lo continuo avanzada por un nuevo método, está sustentada en la noción fundamental de la teoría de Cavalieri |*Omnes lineae*| Todas las líneas:

«*Si per oppositas tangentes cuiuscunque datae planae figurae ducantur duo plana invicem parallela, recta, sive inclinata ad planum datae figurae, hinc inde indefinitè producta; quorum alterum moveatur versus reliquum eidem semper aequidistans donec illi congruerit: singulae rectae lineae, quae in toto motu fiunt communes sectiones plani rnoti, & datae figurae, simul collectae vocentur: Omnes lineae talis figurae, sumptae regula una earundem; & hoc cum plana sunt recta ad datam figuram: Cum verò ad illam sunt inclinata vocentur. Omnes lineae eiusdem obliqui transitus, datae figurae, regula pariter earundem una*». (p. 99).

«Si por tangentes opuestas a cualesquiera figuras planas dadas se dibujan dos planos paralelos entre sí, rectos o inclinados a los planos de las figuras dadas, ambos lados extendidos indefinidamente; uno moviéndose hacia el otro restante siempre la misma equidistancia hasta ellos *congruir*: cada una de las líneas rectas, que en todo el movimiento se hacen comunes a las secciones planas móviles, y a las figuras dadas, colectadas juntas se llaman: Todas las líneas de las figuras determinadas, seleccionadas reglas unas de las mismas; y esto cuando los planos son rectos a la figura dada: Cuando en verdad a ella son inclinados se llaman. Todas las líneas de la misma transición oblicua, figuras dadas, reglas ambas de las mismas unas». (p. 99).

Bonaventura Cavalieri realizó el desarrollo de su fórmula para $n = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 9\}$ y su conjetura fue que el resultado podría extenderse a todos los números naturales, con $n \in \mathbb{N}$. Blaise Pascal lo comprobó junto a la exposición de su triángulo que representa los coeficientes binomiales, Triángulo de Pascal. Pierre de Fermat amplió para todos los números racionales, con $n \in \mathbb{Q}$. Se tiene demostrado que admite $n \in \mathbb{C}$. Así, la fórmula de cuadratura de Cavalieri generaliza la integración de la funciones potenciales, incluyendo potencias complejas, potencias con parte real y parte imaginaria.

La función potencial a integrar acepta como números de $n$ para ser exponente a:

$\mathbb{N}$ Naturales 1, 2, 3, ...

$\mathbb{N}_0$ Naturales & cero 0, 1, 2, 3, ...

$\mathbb{Z}$ Enteros [*Zahlen*] ..., -3, -2, 0, 1, 2, 3, ...

$\mathbb{Q}$ Racionales [*Quotient*]..., -3/1, -8/3, -5/2, -7/3, -9/4, -8/4, -6/3, -4/2, -2/1, -9/5, -7/4, -5/3, -8/5, -9/6, -6/4, -3/2, -8/6, -7/5, -4/3, -9/7, -5/4, -6/5, -7/6, -8/7, -9/8, -8/9, -7/8, -6/7, -5/6, -55/67, ..., -4/5, -7/9, -6/8, -3/4, -5/7, -6/9, -4/6, -2/3, -5/8, -3/5, -4/7, -5/9, -4/8, -3/6, -2/4, -1/2, -4/9, -3/7, -2/5, -3/8, -3/9, -2/6, -1/3, -2/7, -2/8, -1/4, -2/9, -1/5, -1/6, -1/7, -1/8, -1/9, -1/99, -1/999, ..., 0/1000, ..., 1/999, 1/99, 1/9, 1/8, 1/7, 1/6, 1/5, 2/9, 1/4, 2/8, 21/80, ..., 307/1120, ..., 2/7, 1/3, 2/6, 3/9, 3/8, 2/5, 3/7, 4/9, 1/2, 2/4, 3/6, 4/8, 5/9, 4/7, 3/5, 5/8, 2/3, 4/6, 6/9, 5/7, 3/4, 6/8, 7/9, 4/5, 5/6, 6/7, 7/8, 8/9, 1, 2/2, 3/3, 4/4, 5/5, 6/6, 777/777, 8/8, 9/9, 9/8, 8/7, 7/6, 6/5, 5/4, 9/7, 4/3, 7/5, 8/6, 3/2, 6/4, 9/6, 8/5, 5/3, 7/4, 9/5, 2/1, 4/2, 6/3, 8/4, 9/4, 7/3, 26/11, 5/2, 8/3, 88/32, 888/321, 8128/2890, 3/1, ...

$\overline{\overline{\mathbb{Q}}}$ Irracionales $\ldots, -\sqrt[3]{23}, -\sqrt{8}, -e, -\sqrt[3]{19}, -\sqrt{7}, -\sqrt[3]{17}, -\sqrt{6}, -\sqrt[3]{13}, -\sqrt{5}, -\sqrt[3]{11}, -\sqrt[3]{10}, -\sqrt[3]{9}, -\sqrt[3]{7}, -\sqrt[3]{6}, -\sqrt{\pi}, -\sqrt{3}, -\sqrt[3]{5}, -\sqrt{e}, \varphi, -\sqrt[3]{4}, -\sqrt[3]{\pi}, -\sqrt[3]{3}, -\sqrt{2}, -\sqrt[3]{e}, -\sqrt{\varphi}, -\sqrt[3]{2}, -\sqrt[3]{\varphi}, -1/\varphi, -1/e, -1/\pi, -1/\varphi^2, -1/e^2, -1/\pi^2, 1/\pi^2, 1/e^2, 1/\varphi^2, 1/\pi, 1/e, 1/\varphi, \sqrt[3]{\varphi}, \sqrt[3]{2}, \sqrt{\varphi}, \sqrt[3]{e}, \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{\pi}, \sqrt[3]{4}, \varphi, \sqrt{e}, \sqrt[3]{5}, \sqrt{3}, \sqrt{\pi}, \sqrt[3]{6}, \sqrt[3]{7}, \sqrt[3]{9}, \sqrt[3]{10}, \sqrt[3]{11}, \sqrt{5}, \sqrt[3]{13}, \sqrt{6}, \sqrt[3]{17}, \sqrt{7}, \sqrt[3]{19}, e, \sqrt{8}, \sqrt[3]{23}, \ldots$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\mathbb{R}$ | Reales | $\mathbb{R} = \mathbb{N} \cup \mathbb{N}_0 \cup \mathbb{Z} \cup \mathbb{Q} \cup \overline{\overline{\mathbb{Q}}}$ | - (-1) |
| $\mathbb{R}i$ | Imaginarios | $\mathbb{R}i = \mathbb{R} \cdot \sqrt{-1}$ | - (-1) |
| $\mathbb{C}$ | Complejos | $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}i$ | - (-1) |

La fórmula de cuadratura de Cavalieri al ser válida con $n \in \mathbb{C}$ permite calcular la integral de la función potencial con $n$ incluyendo a todos los números que resultan ser todos complejos, so la premisa que todos los números pertenecen al conjunto $\mathbb{C}$. La fórmula admite a todos menos uno. A todos excepto a -1 como valor de $n$. La expresión en notación de Leibniz resulta:

I.70 Integral de la función potencial

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad n \neq -1 \qquad \text{Si } n < 0 \text{ entonces } x \neq 0$$

Se restringe esta integral con las condiciones: $n \neq -1$

Si $n < 0$ entonces $x \neq 0$

Las condiciones impiden al denominador ser cero, ya que dividir entre cero es indefinición. Todo número dividido entre cero tiende a infinito, $\infty$, y siendo el infinito lo que no tiene fin resulta imposible dar solución exacta. En los números reales, lo infinito y lo infinitesimal no son operables mediante un análisis estándar, aunque con el Análisis No Estándar son considerados ambos como recíprocos dentro de los números hiperreales. El sufijo Híper- significa sobre, denotando exceso. Siendo así, los números reales, $\mathbb{R}$, excediéndose al incluir infinito e infinitesimal, $\mathbb{R}_{\infty,\ 1/\infty}$, Reales & infinito, infinitesimal, forman el conjunto de los números hiperreales, $^*\mathbb{R}$. Continuando con los excesos, están los hipercomplejos, entre ellos Cuaterniones, $\mathbb{H}$, Octoniones, $\mathbb{O}$, Sedeniones, $\mathbb{S}$. También están los hiperreales complejos $^*\mathbb{R}(i)$ que están dentro de los números Superreales que están dentro de los números Surreales.

**Lo maravilloso es siempre bello, todo lo maravilloso es bello, de hecho, sólo lo maravilloso es bello.**

**André Breton**

La integral, $\int f(x)\,\mathrm{d}x$, siendo operador lineal tiene homogeneidad y superposición. Una vez demostrada la integral de la función potencial el proceso de integración se replica y aplica uno a uno a cada uno de los nomios de un polinomio para así obtener la función integral de toda función algebraica.

Homogeneidad — La integral del producto de una constante por una función es igual a la constante por la integral de la función.

I.71 $$\int k\,f(x)\,\mathrm{d}x = k\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

Superposición — La integral de una suma de funciones es igual a la suma de las integrales de las funciones.

I.72 $$\int [f(x) + g(x)]\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x$$

Para el caso excepcional donde la función potencial tiene de exponente $n$ = -1 la solución se encontró en *bajar* a -1 de ser exponente. Exponente proviene del latín *ex,* fuera y *ponere*, poner. El primero en exponer al exponente como expresión matemática colocada en la parte superior y a la derecha de otro número o expresión, para expresar la potencia fue Michael Stifel en su obra *Arithmetica integra,* Aritmética completa, de 1544 d.C., donde presenta una progresión aritmética sobrepuesta a una progresión geométrica.

Progresión aritmética — Conjunto ordenado de números en el cuál cada número se obtiene sumándole una constante, llamada diferencia, *d*, al número anterior.

Progresión geométrica — Conjunto ordenado de números en el cuál cada número se obtiene multiplicándole una constante, llamada razón, *r*, al número anterior.

Tabla I cuatro || Progresiones aritmética y geométrica

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1/8 | 1/4 | 1/2 | 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 |

Es posible expresar a los números de la progresión geométrica escribiendo su razón, base de su construcción, y especificando al poner fuera el número correspondiente de la progresión aritmética. La razón de la progresión geométrica de la tabla mostrada es $r = 2$ y la expresión de potencias mediante exponentes resulta ser:

Tabla I cinco || $2^x$

| $2^{-3}$ | $2^{-2}$ | $2^{-1}$ | $2^0$ | $2^1$ | $2^2$ | $2^3$ | $2^4$ | $2^5$ | $2^6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1/8 | 1/4 | 1/2 | 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 |

La potencia, *b,* se expresa mediante la base, *a,* siendo la base definida por la razón de la progresión geométrica, $a := r$. Se denota el grado al que se eleva la base mediante exponente, *n.*

I.73 $$b = a^n$$

Michael Stifel notó relación operacional entre progresión aritmética y progresión geométrica.

| Progresión aritmética | Progresión geométrica |
|---|---|
| Adición | Multiplicación |
| Substracción | División |
| Multiplicación | Potenciación |
| División | Radicación |

Las relaciones entre progresiones se legislan estableciendo con ello las leyes de los exponentes.

Ley del producto de potencias El producto de potencias con la misma base es igual a la base elevada a la suma de los exponentes.

I.74 $$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Ley del cociente de potencias El cociente de potencias con la misma base es igual a la base elevada a la diferencia de los exponentes.

I.75 $$a^m / a^n = a^{m-n}$$

| | |
|---|---|
| Ley de la potencia de potencias | La potencia de una potencia es igual a la base elevada al producto de los exponentes. |

I.76 $$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

| | |
|---|---|
| Ley de la raíz de potencias | La raíz de una potencia es igual a la base elevada al cociente de los exponentes. |

I.77 $$\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$$

La reducción de complejidad al operar con los exponentes inspiró a John Napier a la creación de los logaritmos, del griego λόγος, razón, y ἀριθμός, número, siendo los logaritmos los exponentes de una base que resultan en una potencia determinada. Publicó su descubrimiento en 1614 d.C. en *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio,* Descripción del Maravilloso Canon de los Logaritmos. Lo maravilloso de los logaritmos es que al trabajar con los exponentes las leyes de exponentes son entonces las leyes de los logaritmos. Así, multiplicar, dividir, potenciar o radicar números de varias cifras, que resultan ser cálculos tediosos de manera manual, presentan solución al sumar, restar, multiplicar o dividir sus exponentes, respectivamente. Para hacer uso de esta cualidad matemática se tiene que encontrar el exponente que le corresponde a cada uno de los números, siendo necesario que tengan la misma base, condición para que sus exponentes puedan operarse. Es así que se instituye la búsqueda de base de los logaritmos. El número natural más pequeño que puede expresar distintos números mediante potencias es 2, ya que $1^n$ resulta ser siempre 1. Utilizando el número 2 como base, John Napier desarrolló los logaritmos base 2, $log_2$, logaritmos binarios, *lg*, en latín *logarithmus dualis*, *ld*. Así la progresión geométrica 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256 calcula $ld(2) = 1$, $ld(4) = 2$, $ld(8) = 3$, $ld(16) = 4$, $ld(32) = 5$, $ld(64) = 6$, $ld(128) = 7$, $ld(256) = 8$ que son los exponentes a los que se eleva la base del logaritmo, en el caso de *ld* la base, su razón es 2 por tanto representa a $2^1$, $2^2$, $2^3$, $2^4$, $2^5$, $2^6$, $2^7$, $2^8$ que resultan ser 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256. Utilizar a 2 como base para sus logaritmos no le era práctico para aplicarlos a la trigonometría. Por ello, John Napier al querer representar los senos de los ángulos mediante logaritmos, a fin de poder operar bajo sus leyes, consideró la progresión geométrica decreciente desde uno, el seno de noventa grados, hasta cero, el seno de cero grados. Para obtener mayor precisión la progresión geométrica ha de variar sutilmente. La progresión geométrica que no varía es la que tiene a uno, 1, como razón. Siendo así, mientras más cercana a 1 sea la razón de una progresión geométrica más tenue es su variación. Calculó los llamados logaritmos neperianos utilizando de base $1 - 1/10^{-7}$, que equivale a 0,9999999.

I.78 $$N = 10^{7} \cdot \left(1 - \frac{1}{10^{7}}\right)^{n}$$

*N,* antilogaritmo, expresando el seno de un ángulo, elemento de la progresión geométrica.
$(1 - 1/10^{-7})$, base del logaritmo, $a := r$, razón de la progresión geométrica.
*n*, logaritmo de Napier, *NapLog*, logaritmo neperiano, elemento de la progresión aritmética.
Teniendo de factor $10^7$ para no trabajar con decimales, queda la relación $NapLog(N/10^7) = n$ con rango donde si $N = 10^7$, que representa al seno de 90º multiplicando a $10^7$, entonces $n = 0$ siguiendo con $N$ = 9 999 999 que representa aproximadamente al seno de 89º 59' por $10^7$, [$sen$(89º 59') = $sen(89{,}98\overline{3})$ = 0,999999957692] entonces $n = 1$.
Continúa con $N$ = 9 999 998 que representa aproximadamente al seno de 89º 58' por $10^7$, [$sen$(89º 58') = $sen(89{,}9\overline{6})$ = 0,999999830768] entonces $n = 2$.
Así continuó John Napier, formando su tabla de logaritmos para el valor de los senos con precisión de un minuto y por reglas trigonométricas también construyó logaritmos de cosenos y tangentes aportando útil herramienta para los cálculos que se realizaban en Astronomía. En 1615 d.C. Henry Briggs visitó a John Napier interesado en sus logaritmos y le propuso cambiar de base. Siendo el sistema de numeración decimal, el sentido común le indicaba a Henry Briggs utilizar 10 como base de los logaritmos, desarrollando logaritmos base 10, $log_{10}$, logaritmos comunes, *log,* en latín *logarithmus decimalis*, también utilizando *lg* para denotarse. La progresión geométrica 10, 100, 1000, 10000, 100000, 1000000 puede expresarse con $log(x)$, $log(10) = 1$, $log(100) = 2$, $log(1\,000) = 3$, $log(10\,000) = 4$, $log(100\,000) = 5$, $log(1\,000\,000) = 6$ dando como resultado los exponentes a los que se eleva la base del logaritmo, que en el caso de

*log* la base, su razón, es 10, por tanto representa a $10^1$, $10^2$, $10^3$, $10^4$, $10^5$, $10^6$ que resultan ser diez, cien, mil, diez mil, cien mil, un millón. Dos años más tarde, en 1617 d.C., Henry Briggs publica la primer tabla de logaritmos base 10, *Logarithmorum chilias prima,* Primeros mil logaritmos. En la tabla incluyó catorce decimales a los que se eleva 10 para obtener los números enteros desde 1 hasta 1000. El uso de las leyes de logaritmos permitió simplificar los cálculos y para el ejercicio de la Ingeniería se utilizó, hasta la aparición de la calculadora, la regla de cálculo formada con logaritmos decimales. Sucede con el desarrollo de los logaritmos base 10, que entre uno y otro logaritmos enteros se va dilatando el espaciamiento. Jost Bürgi propone y desarrolla una progresión geométrica más compacta y para ello la razón ha de ser próxima a 1. Utiliza $1 + 1/10^4$ como razón, teniendo de factor $10^8$ para recorrer el separador decimal en su obra *Aritmetische und Geometrische Progreß Tabulen*, Tablas de Progresiones Aritméticas y Geométricas, publicada en 1620 d.C. con fórmula para obtener un elemento de la progresión geométrica, «*número negro*», a partir de un elemento de la progresión aritmética, «*número rojo*».

I.79 $$\textit{número negro} = 10^8 \cdot \left(1 + \frac{1}{10^4}\right)^{\textit{número rojo}}$$

La conexión entre los logaritmos y la hipérbola, $y = 1/x$, la encontró el jesuita Gregorius van St-Vincent. En 1647 d.C. con *Opus geometricum quadraturae circuli et sectionum coni*, Obra geométrica de cuadratura del círculo y secciones cónicas, demostró que considerando a $x$ progresión aritmética, es entonces que al ser $y = 1/x$ se tiene que $y$ es progresión geométrica, con razón $1/x$. Las áreas delimitadas por $x_1$, $y = 1/x$, el eje $X$, cerrando con $x_2$, son proporcionales a los logaritmos de $y$, en proporción al exponente al que se eleva su razón, $1/x$.

I.80 Proporción área logaritmo

Sea $y = 1/x$ $\qquad$ $A :=$ Área delimitada por $x_1$, $y = 1/x$, $X$, $x_2$

$$A \propto \log_r(y) \qquad \therefore \qquad A = k \log_r(y)$$

Utilizando la notación de Leibniz y la noción el área delimitada por $f(x)$, $X$, $x_1$, $x_2$ es igual a la integral de la función , se reescribe la proporción área logaritmo como la integral de la función recíproca. Hace falta definir la base, $r$, y la constante de proporción, $k$. La progresión geométrica de $y$ tiene como razón su argumento que es $1/x$.

I.81 $$log_{1/x}(y) = n \quad \Leftrightarrow \quad y = (1/x)^n$$

Sin embargo, la progresión de la razón $1/x$ converge a 0. Por lo tanto, no corresponde a las áreas formadas. Para que la progresión sea creciente la razón ha de ser mayor a 1 y por ello se le suma formando:

I.82 $$log_{(1 + 1/x)}(y) = n \quad \Leftrightarrow \quad y = (1 + 1/x)^n$$

Ahora sucede que la razón, $(1 + 1/x)$ converge a $\infty$ y no puede utilizarse de base de logaritmo. Recordando que el logaritmo se define como el exponente al que se eleva la base para obtener el número dado, que el exponente corresponde a una progresión aritmética y que la proporción área logaritmo considera a $x$ como la progresión aritmética, se tiene:

I.83 $$log_{(1 + 1/x)}(y) = x \quad \Leftrightarrow \quad y = (1 + 1/x)^x$$

Tabulando la potencia $y$ anterior, tabulando $(1 + 1/x)^x$, razón de la progresión geométrica se observa un comportamiento peculiar.

Tabla I seis || $(1 + 1/x)^x$

| $x$ | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ | 2,59374 | 2,65329 | 2,67431 | 2,68506 | 2,69158 | 2,69597 | 2,69911 | 2,70148 | 2,70333 |

Valores truncados, no redondeados, a la quinta cifra decimal

Resulta que la progresión converge a un número distinto de 0 y distinto de $\infty$. Conforme $x$ va aumentando el valor al que converge $(1 + 1/x)^x$ es 2,71828182845904523536028747135266624... llevando la progresión geométrica al límite infinito se convierte en constante matemática. Jakob Bernoulli encontró la constante al estudiar el interés compuesto, la infinita reinversión a periodos infinitesimales. Llamó al número *b*. Sin embargo, Leonhard Euler en su obra *Introductio in analysin infinitorum*, Introducción al análisis del infinito, introduce al mismo número y lo llamó *e,* siendo *e* la denominación que se ha establecido en el argot matemático:

I.84 $$e := lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = 2{,}71828182845904523536028747135266249775 7...$$

La constante matemática *e* se elige como base de logaritmo para expresar a la hipérbola y se considera el logaritmo natural de la hipérbola ya que tiene de base a la hipérbola misma, quedando *k*, la constante de proporción, igual a 1, constituyendo de $k\ log_r(y)$ con $k = 1$ y $r = e$ logaritmos base *e*, $log_e$,, logaritmos naturales, *ln.* La recurrencia de *e* en la naturaleza se debe a que *e* es la constante que equilibra la progresión geométrica infinita de un incremento infinitesimal, expresando de esta manera lo continuo, principio creador y organizador de todo lo que existe.

I.85 $$log_{limx\to\infty\ (1\ +\ 1/x)\wedge x}(y) = log_e(y) = ln(y) = n \quad \Longleftrightarrow \quad y = [lim_{x\to\infty}\ (1 + 1/x)^x]^n = e^n$$

Teniendo como base al número *e* que forma el logaritmo natural de la hipérbola se calcula la integral de la función recíproca como el logaritmo del valor absoluto de *x*. Valor absoluto ya que en 1712 d.C. Leibniz y Bernoulli discuten sobre la existencia de logaritmos de números negativos. Leibniz arguye que no existen y Bernoulli resuelve agregando el operador valor absoluto para los números reales, haciendo que el logaritmo trabaje sólo con números positivos sea cuál sea el valor de *x*. Lo complejo del logaritmo de un número negativo se resuelve sin utilizar el operador valor absoluto en el campo de los números complejos ya que *i* en potencia resulta en -1. Integrar a la hipérbola, la función recíproca, $f(x) = 1/x$, $f(x) = x^{-1}$, es:

I.86 Integral de la función recíproca

$$\int x^{-1}\,dx = ln|\,x\,| + C \qquad\qquad x \neq 0$$

Se expone ahora lo que sucede cuando se integra una función que tiene $x$ como exponente. La integral de la función exponencial, $f(x) = a^{kx}$ se expresa:

I.87 Integral de la función exponencial

$$\int a^{kx}\,\mathrm{d}x = \frac{a^{kx}}{k \cdot ln(a)} + C \qquad \begin{matrix} a \neq 1 \\ k \neq 0 \end{matrix}$$

La fórmula permite integrar funciones en las que $x$ hace de exponente pudiendo ser $a$ y $k$ toda constante, exceptuando las restricciones señaladas. Por ejemplo, con $a$ igual a 26 y $k$ igual a 11 se calcula la integral de $26^{11x}$ que resulta ser:

I.88 Integral de la función exponencial, $26^{11x}$

$$\int 26^{11x}\,\mathrm{d}x = \frac{26^{11x}}{11 \cdot ln(26)} + C = \frac{26^{11x}}{35{,}839...} + C$$

Tres constantes determinan el resultado de la integral de la función exponencial. Una de ellas se puede obviar al utilizar $a$ igual a $e$. El logaritmo natural de $e$ es 1, por lo que se ha propagado en el análisis matemático el uso de $e$ como base de las funciones exponenciales. Si además $k$ es igual a 1 se tiene que la integral de $e^x$ es igual a la misma $e^x$ más la Constante de integración.

I.89 Integral de la función exponencial, $e^x$

$$\int e^x\,\mathrm{d}x = \frac{e^{1x}}{1 \cdot ln(e)} + C = \frac{e^x}{1 \cdot 1} + C = \frac{e^x}{1} + C = e^x + C$$

$$\int e^x\,\mathrm{d}x = e^x + C$$

Es en *Introductio in analysin infinitorum,* Introducción al análisis del infinito que Leonhard Euler con su fórmula relaciona el número $e$ con las funciones trigonométricas hiperbólicas.

I.90 Fórmula de Euler

$$e^{ix} = cos(x) + i \cdot sen(x)$$

El desarrollo de la Fórmula de Euler fue complejo al incluir en su desarrollo al número imaginario, *i*. Desarrollando $e^{ix}$, *cos(x), sen(x)* en series infinitas que al ser convergentes proporcionan la conexión entre el análisis matemático y la trigonometría con las funciones:

I.91 $$senh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

I.92 $$cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

I.93 Identidad trigonométrica hiperbólica fundamental

$$cosh^2(x) - senh^2(x) = 1$$

Las propiedades de las funciones trigonométricas hiperbólicas permiten hacer el uso de razones de suma importancia, afirmación que no está excedida, al definir las funciones correspondientes de *cosh(x)* y *senh(x)* formando *tanh(x), sech(x)* y *csch(x).*

Para la Ingeniería Civil la importancia del coseno hiperbólico cuelga de que dado un elemento lineal sometido únicamente a cargas verticales se produce una catenaria, disposición en la que los esfuerzos acaecidos son exclusivamente de compresión, construcción ideal para la mampostería y el concreto. «La catenaria da elegancia y espiritualidad al arco, elegancia y espiritualidad a la construcción entera». Antonio Gaudí. La catenaria se formula con *cosh(x).*

I.94 Catenaria

Sea $a = T_H/\lambda$ $T_H$ Componente Horizontal de la Tensión $\lambda$ Peso por unidad de longitud

$$y = a \cdot cosh(x/a)$$

Euler expresó: «La lógica es la base de la certeza de todo el conocimiento que adquirimos».

I.95 Identidad de Euler

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

La más bella. Ella.

| Derivada $\frac{d\,f(x)}{dx}$ | Función $f(x)$ | Integral $\int f(x)\,dx$ |
|---|---|---|
| $0$ | $c$ | $cx + C$ |
| $1$ | $x$ | $\frac{x^2}{2} + C$ |
| $nx^{n-1}$ | $x^n$ | $\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ |
| $-1 \cdot x^{-2}$ | $x^{-1}$ | $ln(x) + C$ |
| $k \cdot ln(a) \cdot a^{kx}$ | $a^{kx}$ | $\frac{a^{kx}}{k \cdot ln(a)} + C$ |
| $x^{-1}$ | $ln(x)$ | $x \cdot [ln(x) - 1] + C$ |

En notación hemos de llegar a convenciones. Ingenieros y Matemáticos han disputado la notación log. Ingenieros asumen que log tiene 10 como base. Matemáticos asumen *e* como la base de log. Doy consecuencia a *log* con base 10 por la trivial razón que recuerda a un 10 seguido de g, *10g,* denotando entonces con *ln* al logaritmo con base *e* por su belleza natural. En las abreviaturas de las funciones trigonométricas se estipula *tg* como la correspondiente a tangente. Prefiero utilizar *tan* ya que así se sigue el patrón de utilizar las tres primeras letras de las funciones con excepción de cosecante, *csc,* porque coseno tiene ya apropiado *cos.*

Para la función inversa de las funciones trigonométricas, utilizando seno de referencia, están las notaciones $sen^{-1}(x)$, *arcsen(x)* y la utilizada en el documento *angsen(x).* La primera se descartó su uso puesto que $sen^2(x)$ representa $sen(x) \cdot sen(x)$, lo que en sentido estricto $sen^{-1}(x)$ representa entonces $1/sen(x)$. La notación *arcsen(x)* se sustenta en que con radianes la longitud de arco y el ángulo se corresponden, lo que no ocurre con grados. El hecho de que en origen lo opuesto en función a la longitud de media cuerda es el ángulo da por ello *angsen(x).*

| Derivada $\frac{d\,f(x)}{dx}$ | Función $f(x)$ | Integral $\int f(x)\,dx$ |
|---|---|---|
| $\cos(x)$ | $\operatorname{sen}(x)$ | $-\cos(x) + C$ |
| $-\operatorname{sen}(x)$ | $\cos(x)$ | $\operatorname{sen}(x) + C$ |
| $\sec^2(x)$ | $\tan(x)$ | $-\ln[\cos(x)] + C$ |
| $-\csc^2(x)$ | $\cot(x)$ | $\ln[\operatorname{sen}(x)] + C$ |
| $\sec(x)\cdot\tan(x)$ | $\sec(x)$ | $\ln[\sec(x) + \tan(x)] + C$ |
| $-\csc(x)\cdot\cot(x)$ | $\csc(x)$ | $-\ln[\csc(x) + \cot(x)] + C$ |

Funciones Trigonométricas Circulares

| | | |
|---|---|---|
| $\frac{1}{\sqrt{[1 - x^2]}}$ | $\operatorname{angsen}(x)$ | $x\cdot\operatorname{angsen}(x) + \sqrt{[1 - x^2]} + C$ |
| $\frac{-1}{\sqrt{[1 - x^2]}}$ | $\operatorname{angcos}(x)$ | $x\cdot\operatorname{angcos}(x) - \sqrt{[1 - x^2]} + C$ |
| $\frac{1}{x^2 + 1}$ | $\operatorname{angtan}(x)$ | $x\cdot\operatorname{angtan}(x) - \frac{1}{2}\ln(x^2 + 1) + C$ |
| $\frac{-1}{x^2 + 1}$ | $\operatorname{angcot}(x)$ | $x\cdot\operatorname{angcot}(x) + \frac{1}{2}\ln(x^2 + 1) + C$ |
| $\frac{1}{\sqrt{[x^4 - x^2]}}$ | $\operatorname{angsec}(x)$ | $x\cdot\operatorname{angsec}(x) - \operatorname{sgn}(x)\cdot\ln\{x + \sqrt{[x^2 - 1]}\} + C$ |
| $\frac{-1}{\sqrt{[x^4 - x^2]}}$ | $\operatorname{angcsc}(x)$ | $x\cdot\operatorname{angcsc}(x) + \operatorname{sgn}(x)\cdot\ln\{x + \sqrt{[x^2 - 1]}\} + C$ |

| Derivada $\frac{d\,f(x)}{dx}$ | Función $f(x)$ | Integral $\int f(x)\,dx$ |
|---|---|---|
| $\cosh(x)$ | $\operatorname{senh}(x)$ | $\cosh(x) + C$ |
| $\operatorname{senh}(x)$ | $\cosh(x)$ | $\operatorname{senh}(x) + C$ |
| $\operatorname{sech}^2(x)$ | $\tanh(x)$ | $\ln[\cosh(x)] + C$ |
| $-\operatorname{csch}^2(x)$ | $\coth(x)$ | $\ln[\operatorname{senh}(x)] + C$ |
| $-\tanh(x)\cdot\operatorname{sech}(x)$ | $\operatorname{sech}(x)$ | $2\operatorname{angtan}[\tanh(x/2)]+ C$ |
| $-\coth(x)\cdot\operatorname{csch}(x)$ | $\operatorname{csch}(x)$ | $\ln[\tanh(x/2)] + C$ |

## Funciones Trigonométricas Hiperbólicas

| | | |
|---|---|---|
| $\frac{1}{\sqrt{[1 + x^2]}}$ | $\operatorname{angsenh}(x)$ | $x\cdot\operatorname{angsenh}(x) - \sqrt{[1 + x^2]} + C$ |
| $\frac{1}{\sqrt{[x + 1]}\cdot\sqrt{[x - 1]}}$ | $\operatorname{angcosh}(x)$ | $x\cdot\operatorname{angcosh}(x) - \sqrt{[x + 1]}\cdot\sqrt{[x - 1]} + C$ |
| $\frac{1}{1 - x^2}$ | $\operatorname{angtanh}(x)$ | $x\cdot\operatorname{angtanh}(x) + \frac{1}{2}\ln(1 - x^2) + C$ |
| $\frac{1}{1 - x^2}$ | $\operatorname{angcoth}(x)$ | $x\cdot\operatorname{angcoth}(x) + \frac{1}{2}\ln(1 - x^2) + C$ |
| $\frac{-1}{x^2\cdot\sqrt{[x^{-1} + 1]}\cdot\sqrt{[x^{-1} - 1]}}$ | $\operatorname{angsech}(x)$ | En la próxima página |
| $\frac{-1}{x^2\cdot\sqrt{[x^{-2} + 1]}}$ | $\operatorname{angcsch}(x)$ | $x\cdot\operatorname{angcsch}(x) + \operatorname{sgn}(x)\cdot\operatorname{angsenh}(x) + C$ |

$$\int angsech(x)\,\mathrm{d}x = x\cdot angsech(x) - \frac{2\cdot\sqrt{[(1 - x)/(x + 1)]}\cdot\sqrt{[1 - x^2]}\cdot angsen\{\sqrt{[x + 1]}/\sqrt{2}\}}{x - 1} + C$$

La integral de la función ángulo cuya secante hiperbólica es *x* con respecto a *x* es igual a *x* multiplicado por la función ángulo cuya secante hiperbólica es *x* menos el cociente dos por la raíz del cociente uno menos *x* sobre *x* más uno por la raíz de uno menos *x* al cuadrado por el ángulo cuyo seno circular es el cociente de la raíz de *x* más uno sobre raíz de dos, y ello sobre *x* menos uno sumándole la Constante de Integración.

Es evidente la eficiencia del lenguaje matemático.

La función *sgn(x)* resulta en el signo de *x*. Sus resultados se resumen en

$$sgn(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x < 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ 1 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

La función compuesta se forma de la función de una función, de una función, sucesivamente. Su derivada resulta en el producto de derivadas desde la función externa hasta el argumento. El encadenamiento en el producto de las respectivas derivadas da nombre entonces a la regla de derivación de la función compuesta, llamada Regla de la cadena.

I.96 Regla de la cadena
Sea $l(k(j(i(h(g(f(x)))))))$ entonces

$$\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}k}\cdot\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}j}\cdot\frac{\mathrm{d}j}{\mathrm{d}i}\cdot\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}h}\cdot\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}g}\cdot\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}f}\cdot\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$$

*«Aunque la cadena es larga, cada eslabón suena a cosa cierta».*
(Doyle, 1892 d.C., p. 100).

# Capítulo II Historia del Cálculo Infinitesimal

*Estoy convencido de que no será de poca utilidad para las matemáticas; porque entiendo que algunos, ya sea de mis contemporáneos o de mis sucesores, podrán, mediante el método, una vez establecido, descubrir otros teoremas que aún no se me han ocurrido. - Arquímedes*

Martes 29 de octubre de 1675 d.C.: Gottfried Wilhelm Leibniz utiliza por primera vez el símbolo ∫ para la operación integral. ∫, llamada s larga, es una letra que apareció hacia el siglo IV d.C. y se descartó de las imprentas en el siglo XIX d.C.. Es la letra inicial de la palabra *ſumma*, suma en latín, y le resultó símbolo apropiado para la operación integral que consideraba como la suma infinita de sumandos infinitesimales, Cálculo Sumatorio, sustituyendo entonces con ∫ a la abreviatura *omn. l.* que designaba la noción *Omnes lineae.*
Nueve años más tarde, en octubre de 1684 d.C., Leibniz publica:

*Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus*

Nuevo método para máximos y mínimos, y para tangentes, que no está impedido por cantidades fraccionales o irracionales, y un tipo singular de cálculo para lo mencionado anteriormente.
Este tipo singular de cálculo, el Cálculo Infinitesimal, al no estar impedido por cantidades irracionales se exime de la crisis matemática que se originó en el siglo V antes de Cristo por Hípaso de Metaponto, filósofo griego expulsado de la Escuela Pitagórica por descubrir los números irracionales mediante el Teorema de Pitágoras al encontrar que $\sqrt{2}$ es la longitud de la hipotenusa del triángulo con catetos unitarios. La raíz cuadrada de dos, $\sqrt{2}$, es igual a 1,4142135623730950488016887242096980785696718753769480731766797379907324784621...

que continúa infinitamente de manera irracional, es decir, sin establecer razón entre dos números enteros.

Hacia el siglo IV a.C. Eudoxo de Cnido, actual Turquía, desarrolló el Método Exhaustivo, con el cuál demostró que una pirámide y un prisma con la misma base y de igual altura tienen una razón 1:3 con respecto a sus volúmenes; así mismo, un cono y un cilindro de base y altura idénticas tienen también razón volumétrica 1:3. El Método Exhaustivo consiste en inscribir dentro del objeto de estudio formas de dimensiones conocidas para converger al resultado y se encuentra expreso en el Libro X de *Στοιχεῖα,* Elementos, obra publicada circa 300 a.C. por Euclides que recopila el conocimiento matemático de su tiempo. Años después, en el siglo III a.C. Arquímedes mediante el Método Exhaustivo, junto con su Método de los Teoremas Mecánicos, culminó la cuadratura de la parábola con la demostración de que su área es igual a 4/3 el área del triángulo inscrito. Arquímedes mandó inscribir en su tumba una esfera inscrita en un cilindro, satisfecho de haber descubierto el volumen de una esfera igual a $(4/3)\pi r^3$. *Περὶ μηχανικῶν θεωρημάτων πρὸς Ἐρατοσθένη ἔφοδος*, Sobre teoremas mecánicos a Eratóstenes misiva, es el primer documento que manifiesta el uso de indivisibles, dando el antecedente del Cálculo Integral. Como antecedente del Cálculo Diferencial, *Περί επαφών,* Sobre tangencias, obra perdida de Apolonio de Perga, en donde se presentó el Problema de Apolonio que consiste en encontrar las circunferencias tangentes a tres circunferencias dadas. Dos obras suyas no se han perdido:

| | |
|---|---|
| *Κωνικά* | Cónicas |
| *Περί λόγου αποτομής* | Sobre secciones en una razón dada |

Entre sus trabajos se encuentran la determinación de los extremos y los límites de una sucesión. Apolonio, llamado por sobrenombre 'El Gran Geómetra', nació en Perga circa 262 a.C. y murió en Alejandría circa 190 a.C.. Siglos pasaron y nace, en Alejandría, Hipatia, autora de la frase «Comprender las cosas que nos rodean es la mejor preparación para comprender las cosas que hay más allá». Publica *Περί των Κωνικών του Απολλωνίου*, Sobre las Cónicas de Apolonio. La tragedia sucedió el 8 de marzo de 415 d.C., cuando Hipatia es asesinada.

**Embébete bien de esto: un día tu alma caerá de tu cuerpo,**

**y serás empujado tras el velo que flota entre el universo y lo incognoscible.**

**Entretanto, ¡sé dichoso!**

**No sabes de dónde vienes. No sabes a dónde vas.**

**<u>Rubaiyat 32 de Omar Jayyam</u>**

En 1077 d.C. Ghiyath al-Din Abu l-Fath Omar ibn Ibrahim Jayyam Nishapurí, poeta, matemático y astrónomo persa, publicó اقلید کتاب مفاهیم در مشکوک های جنبه مورد در نظرات, Comentarios sobre aspectos dudosos en los postulados del libro de Euclides.

Reflexiona sobre dos puntos:

Punto Uno — Libro I | Postulado V: Si una recta secante corta a dos rectas formando a un lado ángulos interiores, la suma de los cuales sea menor que dos ángulos rectos; las dos rectas, suficientemente alargadas se cortarán en el mismo lado.

La duda en este postulado encaminará a las geometrías no euclidianas.

Punto Dos — Libro V | Definición V: Se dice que una primera magnitud guarda la misma razón con una segunda magnitud, que una tercera magnitud con una cuarta magnitud, cuando cualquier equimúltiplo de la primera y la tercera exceden a la par, sean iguales a la par o sean inferiores a la par, que cualquier equimúltiplo de la segunda y la cuarta, respectivamente y cogidos en el orden correspondiente.

La duda en esta definición, con complicaciones por la traducción del texto griego original inherentes a la interpretación, da auge a la idea de que las fracciones podrían constituir un campo numérico con propiedades más amplias que el campo de los números naturales.

Omar Jayyam fue quien llamó a la incógnita de las ecuaciones چیز, pronunciado *shay* y escrito en castellano antiguo como *xay*, quedando ahora únicamente la inicial, *x*. El significado de چیز es cosa, en persa. Por ello se utiliza *x* para representar a la incógnita.

**Nada me aflige ya ¡Levántate para ofrecerme vino!**

**Tu boca esta noche, es la más bella rosa del mundo…**

**¡Escancia vino! ¡Que sea carmín como tus mejillas**

**y haga leves movimientos como ligeros son tus bucles!**

**<u>Rubaiyat 52 de Omar Jayyam</u>**

Johannes Kepler compró vino y quedó contrariado de la manera con la que se midió el volumen de las barricas. El mercader insertaba diagonalmente una regla desde el agujero de llenado, ubicado al centro de la barrica, hasta llegar a la tapa y la longitud determinaba el volumen. En 1615 d.C. concluye *Nova Stereometria doliorum vinariorum*, Nueva geometría sólida de barricas de vino, donde queda conforme en que la medición fue apropiada para las barricas austriacas que compró, ya que su forma, en su razón altura a diámetro, es acorde al máximo volumen posible calculado por Kepler; a diferencia de la forma de las barricas que conocía, más alargadas y estrechas, para las cuales este método de medición sería un fraude. Junto al estudio de la medición de las barricas, la obtención del volumen de noventa y seis diferentes sólidos, entre ellos, manzanas, limones, husos y para la consideración de otros matemáticos, la formulación del problema adicional de determinar los volúmenes de sólidos de secciones cónicas cortadas por líneas paralelas a su eje, hicieron de *Nova Stereometria doliorum vinariorum* precursor del Cálculo Infinitesimal. Veinte años más tarde, en 1635 d.C. Bonaventura Cavalieri publicó *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota*, Geometría por indivisibles de lo continuo avanzada por un nuevo método. El nuevo Método de Cavalieri consiste en tajar el objeto. En cada tajada se calcula su área y se multiplica por su grosor obteniendo su volumen. Finalmente, se suman los volúmenes de todas las tajadas obteniendo así el volumen del objeto.

Pierre de Fermat restituyó la obra perdida de Apolonio de Perga, *Plane Loci,* Lugares planos, y es en 1637, después de Cristo, que Fermat envía por correspondencia *Ad locos planos et solidos isagoge,* Introducción a los lugares planos y sólidos; y también es en 1637 d.C. que René Descartes publica *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison, et chercher la vérité dans les sciences*, Discurso del método para conducir bien la propia razón, y buscar la verdad en las ciencias. Así, 1637 d.C. es el año en que la Geometría Analítica surge junto con el plano cartesiano.

Es de Galileo Galilei la frase «Todas las verdades son fáciles de entender una vez que son descubiertas; la cuestión es descubrirlas». El astrónomo, filósofo, matemático y físico, considerado 'Padre de la Ciencia', hizo fácil entender la ley del movimiento uniformemente acelerado en *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno à due nuove scienze*, Discurso y demostración matemática en torno a dos nuevas ciencias, su último libro, publicado en 1638 d.C. en el cual declara en su Teorema II, ahora siendo Ley de la Caída Libre: «Los espacios descritos por un cuerpo que cae del reposo con un movimiento uniformemente acelerado son el uno para el otro como los cuadrados de los intervalos de tiempo empleados para atravesar estas distancias». (p. 209).

**Eppur si muove**

Galileo Galilei perdió la vista y en su arresto domiciliario en Arcetri, dictaba sus pensamientos a sus discípulos, entre ellos Evangelista Torricelli y Vincenzo Viviani. En 1644 d. C. Evangelista Torricelli hizo su aportación al Cálculo Infinitesimal en *Opera Geometrica,* Obras de Geometría, donde representa el movimiento uniformemente acelerado con un esquema de velocidad en función del tiempo y lo compara con un esquema de distancia en función del tiempo. De la comparación deduce que las ordenadas de la curva tiempo distancia son proporcionales a las áreas limitadas por la curva tiempo velocidad, a su vez que las ordenadas de la curva tiempo-velocidad son las pendientes de las tangentes a la curva tiempo espacio. En 1650 d.C. el discípulo de Cavalieri, Pietro Mengoli publica *Novae Quadraturae Arithmeticae seu De Additione Fractionum*, Nueva Cuadratura Aritmética o De Adición de Fracciones. La obra dio sustento aritmético al método geométrico de su maestro e influyó directamente en Leibniz, quien leyó su trabajo, e indirectamente en Newton quien estudió a John Wallis. Por su parte, John Wallis amplió y sistematizó los métodos de Bonaventura Cavalieri y de René Descartes. Introdujo el símbolo $\infty$ para expresar el infinito y $1/\infty$ para representar un infinitesimal en su ejemplar *Arithmetica Infinitorum,* Aritmética de los Infinitos, en el que desarrolló la notación estándar para potencias, ello en 1656 d.C..

Tres años después, Vincenzo Viviani con su obra *De maximis et minimis geometrica divinatio in quintum Conicorum Apollonii Pergaei,* De máximos y mínimos geométricos inspirado en el quinto de Cónicas de Apolonio de Perga, restituyó en 1659 d.C., debido a que se perdió su versión griega original, el libro V de *Κωνικά,* Cónicas, que consta de 77 proposiciones que introducen nociones como: Centro de curvatura || Centro del círculo osculador.

Evoluta || Lugar geométrico de centros de curvatura. Normal || Recta perpendicular a otra.

En la obra introduce el teorema de Viviani que enuncia que la suma de las distancias desde un punto a cada uno de los lados de un triángulo equilátero es igual a la altura del triángulo.

Vincenzo Viviani fue supervisor doctoral de Isaac Barrow, teólogo y matemático quien inauguró el cargo de profesor Lucasiano en 1663 d.C., llamado así por Henry Lucas quien fundó la Cátedra Lucasiana de Matemáticas en la Universidad de Cambridge.

Isaac Barrow en 1669 d.C. con *Lectiones Geometricae*, Lecciones Geométricas, trata primordialmente sobre cuatro problemas:

1. Calcular la velocidad y aceleración instantáneas dada la fórmula para la distancia recorrida en función del tiempo. Inversamente, dada la fórmula para la aceleración en función del tiempo, calcular la velocidad y la distancia recorrida.
2. Precisar la tangente a una curva dada en un punto específico.
3. Encontrar los valores máximos y mínimos de una función.
4. Encontrar el área acotada por curvas y el volumen acotado por superficies.

Su trabajo destaca debido a que relaciona la cuadratura de una curva con el trazo de una tangente a otra curva con ciertas características. Enlaza integración y derivación como operaciones inversas. Método Exhaustivo. Sobre tangencias. Vinculados.
Une Cálculo Integral y Cálculo Diferencial. Reflexiona y revoluciona las Matemáticas al declarar una proposición demostrable lógicamente partiendo de axiomas, postulados y otras proposiciones ya demostradas que impacta en los principios básicos del Cálculo y suscita el

Teorema Fundamental del Cálculo

La verdad demostrada por Isaac Barrow establece que la integración y la diferenciación son operaciones inversas provocando que se definan las integrales como antiderivadas suceso imprescindible para instituir el Cálculo Infinitesimal, formado por sus dos áreas que consecuentemente son el Cálculo Integral y el Cálculo Diferencial. La Regla de Barrow establece que la integral definida de una función continua $f(x)$ en un intervalo cerrado $[a, b]$ es igual a la diferencia entre los valores que toma una función primitiva $F(x)$ de $f(x)$, en los extremos de dicho intervalo. El mismo año de publicación de *Lectiones Geometricae,* en 1669 d.C., Isaac Barrow renuncia al cargo de profesor Lucasiano y asigna a Isaac Newton el cargo.

Todo cuerpo permanecerá en reposo o con un movimiento rectilíneo uniforme a no ser que una fuerza actúe sobre él. Primera Ley de Newton también llamada Ley de la Inercia. *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*, Principios Matemáticos de la Filosofía Natural, se publicó el 5 de julio de 1687 d.C., habiéndose demorado su divulgación por el temor de Isaac Newton a que otros intentaran apropiarse de sus descubrimientos, y hubiese permanecido sin publicarse a no ser que Edmund Halley presionase sobre él hasta que publicase. Escrita en lenguaje geométrico incluye además su Método de las fluxiones y series infinitas como anexo. La obra de Newton contiene los fundamentos de la mecánica newtoniana, formulada en un espacio euclidiano tridimensional con tiempo absoluto, verdadero y matemático que fluye igual sin relación a ninguna cosa.

Gottfried Wilhelm Leibniz había ya publicado en 1684 d.C. *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus* lo que marcó el inicio del Cálculo Infinitesimal y el inicio de la Controversia del Cálculo, discusión entre Isaac Newton y Gottfried Wilhelm Leibniz para determinar quién inventó precisamente el Cálculo Infinitesimal. Isaac Newton publica *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*, tres años después de que en 1684 d.C. publicase *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus* Gottfried Wilhelm Leibniz. En el mismo año de la publicación de Newton, en 1687 d.C., Jakob Bernoulli obtiene en la Universidad de Basilea la cátedra de Matemáticas. Jakob Bernoulli y su hermano, Johann Bernoulli, estudian el trabajo de Leibniz y le escriben planteándole cuestiones, lo que inicia su colaboración para el tratamiento del Nuevo método para máximos y mínimos. Leibniz propuso resolver la determinación de la curva que describe un objeto móvil que desciende con velocidad constante, llamada isócrona. En 1690 d.C. Jakob Bernoulli publica la determinación de la isócrona en un artículo de la revista *Acta Eruditorum* mediante una ecuación diferencial y en su tratamiento aparece por primera vez el término integral considerado por Leibniz más adecuado que el término sumatorio lo que cambió la denominación de Cálculo Sumatorio a Cálculo Integral.

Johann Bernoulli, hermano menor de Jakob Bernoulli, se dedicó a enseñar Cálculo Infinitesimal y fue tutor de Guillaume de l'Hôpital, quien hizo pública la obra *Analyse des Infiniment Petits pour l'Intelligence des Lignes Courbes,* Análisis de los infinitamente pequeños para el estudio de las líneas curvas, en 1696 d.C., siendo de las primeras obras en las que el Cálculo Diferencial es estudiado. En el documento se presenta la Regla de l'Hôpital, regla que usa derivadas para la evaluación de límites de funciones que estén en forma indeterminada. Ahora se le empieza a llamar Regla de l'Hôpital Bernoulli, al comprobar que Johann Bernoulli fue quien la desarrolló y demostró.

Brooks Taylor aplica el Cálculo Diferencial para aproximar funciones mediante una serie de potencias ahora llamadas Series de Taylor con *Methodus Incrementorum Directa et Inversa*, Métodos de Incrementos Directos e Inversos, en 1715 d.C. La Controversia del Cálculo siguió. Se le nombra a esta rama de las mátematicas Cálculo por el título de Leibniz y se utiliza su notación, aunque el conflicto persistió puesto que Newton afirmaba que había comenzado a utilizar *fluxiones* en 1666 d.C., año en que igualmente cayó la manzana, que quizás mordió. Empero, fue hasta 1736 d.C., de manera póstuma, que se publicó la obra de Isaac Newton *Methodus fluxionum et serierum infinitorum*, Método de las fluxiones y series infinitas, con sus planteamientos de las bases del nuevo tipo de matemáticas de razones primeras y últimas cantidades. Isaac Newton fue reticente a publicar, consciente de la debilidad teórica de los infinitesimales, debilidad que fue analizada por George Berkeley en su discurso *The Analyst; or, A discourse addressed to an infidel mathematician: wherein it is examined whether the object, principles, and inferences of the modern analysis are more distinctly conceived, or more evidently deduced, than religious mysteries and points of faith*, El Analista; o, Un discurso dirigido a un matemático infiel: en el que se examina si el objeto, los principios y las inferencias del análisis moderno se conciben más claramente, o se deducen más evidentemente, que los misterios religiosos y los puntos de fe.

La publicación de George Berkeley, de 1734 d.C., pleitea: «¿Y cuáles son estas fluxiones? ¿Las velocidades de los incrementos evanescentes? ¿Y cuáles son estos mismos incrementos evanescentes? No son ni cantidades finitas ni cantidades infinitamente pequeñas, ni tampoco nada. ¿No podemos llamarlos fantasmas de cantidades difuntas?» (p. 59).

Leonhard Euler replica «Para aquellos que preguntan cuál es la cantidad más infinitamente pequeña en las matemáticas, la respuesta es cero. Por lo tanto no hay tantos misterios ocultos en este concepto, ya que por lo general se cree que sí». Alumno de Johann Bernoulli, Leonhard Euler publica:

| | | |
|---|---|---|
| 1748 d.C. | *Introductio in analysin infinitorum* | Introducción al análisis del infinito |
| 1755 d.C. | *Institutiones Calculi Differentialis* | Fundamentos de Cálculo Diferencial |
| 1768 d.C. | *Institutionum Calculi Integralis* | Fundamentos de Cálculo Integral |

La Academia de Ciencias Suiza se ha dedicado a la recopilación y edición de su obra para su publicación en las lenguas originales en que escribió: Alemán, Francés, Latín, Ruso. Se le considera el ser humano con mayor número de trabajos en cualquier campo del saber. El Índice de Eneström etiqueta de E1 hasta E866 sus trabajos para identificarlos.

Los trabajos E101 y E102 que corresponden a *Introductio in analysin infinitorum, volume 1* e *Introductio in analysin infinitorum, volume 2*, respectivamente, como explicó por correspondencia Leonhard Euler a Christian Goldbach (Christian Goldbach vivía en Königsberg, actual Kaliningrado, lugar que origina El problema de los puentes de Königsberg y que fue resuelto por Leonhard Euler dando lugar a la Topología), tienen la finalidad de desarrollar una serie de temas precedentes a los infinitos, necesarios para la comprensión del Cálculo Infinitesimal haciendo a la función el concepto central del análisis matemático e introduciendo la notación *f(x)*. La base teórica para el diseño de columnas la presentó Euler en su trabajo indexado E508 *Determinatio onerum, quae columnae gestare valent*, Determinación de cargas, que las columnas pueden soportar, publicado en 1776 d.C.. Al considerar Leonhard Euler el cero como la cantidad más infinitamente pequeña en las matemáticas, la derivada *dy/dx*, equivale a 0/0 que es una forma indeterminada ya que se pueden dar los casos:

II.1 $0/0 = 0$

II.2 $0/0 = 1$

II.3 $0/0 = \infty$

El problema de los infinitesimales aún quedaba indeterminado por lo que en 1784 d.C. Giuseppe Lodovico Lagrangia convocó a un concurso, establecido por la Academia de Berlín, para simplificar el razonamiento. El ganador fue Simon Antoine Jean L'Huillier con su trabajo *Exposition elementaire des principes des calculs superieurs,* Exposición básica de los principios de los cálculos superiores, presentado en 1786 d.C. en donde formaliza la notación de *lim* para el concepto de límite matemático incluyendo el doble límite, por la izquierda y por la derecha. En el esfuerzo de dar una presentación más fundamentada matemáticamente *Beiträge zu einer begründeteren Darstellung der Mathematik. Erste Lieferung,* Contribuciones a una presentación más fundamentada de las matemáticas. Primera entrega, de 1810 d.C., escrito por Bernard Placidus Johann Nepomuk Bolzano contribuye a la gnoseología alegando que la definición de infinitesimal, fundamento del Cálculo Infinitesimal, como cantidad infinitamente más pequeña que cualquier cantidad concebible es contradictoria. Para eliminar la contradicción, los procesos infinitos se hicieron implícitos, lo que derivó en la formulación del concepto de función llevando a un tratamiento algebráico más que geométrico del Cálculo Infinitesimal lo que terminó haciendo desaparecer a las cantidades evanescentes. Las ideas lógicas de Bolzano hacen contraste con Immanuel Kant aunque las diferencias entre los conceptos de Bolzano de intuición como idea simple y el de Kant de intuición como materia de la experiencia no son suficientes para afirmar la capacidad de la razón pura para avanzar en el conocimiento sin hacer uso de la representación espacial. Para librar las contradicciones y embelecos, Bolzano publica *Wissenschaftslehre*, Profesor de ciencias, en 1837 d.C. presentando los contenidos que, en su opinión, debe abarcar la lógica:

| | |
|---|---|
| Teoría fundamental | Existen verdades en sí y el humano tiene capacidad de conocerlas. |
| Teoría elemental | Representaciones en sí, proposiciones en sí, verdades en sí. |
| Teoría del conocimiento | Condiciones del conocimiento de la verdad. |
| Heurística | Reglas que han de observarse cuando de hallar la verdad se trata. |
| Teoría de la ciencia | Reglas que han de seguirse en la división del ámbito de la verdad. |

El énfasis de Bernard Bolzano en la verdad en sí es para establecer que los números, las ideas, y las verdades existen de modo independiente a las personas que los piensen.

Pensando en el concepto de límite, Augustin Louis Cauchy define:

Integral «El límite de una serie de sumas».

Derivada «El límite de un cociente de incrementos».

Sus publicaciones *Cours d'analyse de l'École Polytechnique,* Curso de análisis de la Escuela Politécnica, de 1821 d.C.; *Résumé des leçons sur le calcul infinitesimal,* Resumen de lecciones sobre cálculo infinitesimal, de 1823 d.C.; *Leçons sur le calcul différentiel,* Lecciones sobre el cálculo diferencial, de 1829 d.C.; junto con los trabajos de Karl Theodor Wilhelm Weierstraß fueron el establecimiento del rigor matemático para el Cálculo Infinitesimal. La noción de variable que usaba Cauchy no era la que hoy usamos. Actualmente utilizamos el resultado de Weierstraß, autor de la frase «Un matemático no es digno de ese nombre si no es un poco poeta», quien es considerado 'El Padre del Análisis Matemático Moderno' dando continuidad a la brega de construir sobre bases irrefutables el Cálculo Inifinitesimal y en sus conferencias tituladas Introducción al Análisis de los años 1859 d.C. y 1860 d.C., compiladas en el libro *Einleitung in die Theorie der analytischen Funktionen*, Introducción a la teoría de las funciones analíticas, publicado póstumamente en 1973 d.C., dio las definiciones de continuidad, límite y derivada de una función, que continúan vigentes incluyendo el Teorema de Bolzano-Weierstraß que establece las condiciones de ser cerrado y acotado para considerarse compacto un subconjunto. Augustin Louis Cauchy definió a la integral y a la derivada expresadas en límites para eludir a los infinitesimales. Siguió determinar con las ecuaciones de Cauchy Riemman las condiciones necesarias, aunque no suficientes, para la derivabilidad de las funciones de variable compleja, ya que ahora el Cálculo Infinitesimal incluye a los números complejos. Johann Carl Friedrich Gauss fue quien nombró a los números complejos, definiéndolos rigurosamente en *Theoria residorum biquadratorum,* Teoría de residuos bicuadráticos, en 1828 d.C., año en que también publicó *Disquisition generales circa superficies curvas*, Investigaciones generales acerca de superficies curvas. Veintiséis años más tarde, Georg Friedrich Bernhard Riemann en 1854 d.C. con la geometría de Riemann da la unificación de todas las geometrías conocidas hoy en día con *Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen,* Sobre las Hipótesis en que se Funda la Geometría. También en 1854 d.C. establece la integral de Riemann, siendo la primera definición rigurosa de la integral de una función en un intervalo, definición que se encuentra en *Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe,* Sobre la Representación de una Función por una serie trigonométrica. Es en 1904 d.C. que Henri Léon Lebesgue presenta la integral de Lebesgue en *Leçons sur l'intégration et la recherché des fonctions primitives*, Lecciones sobre integración y la búsqueda de funciones primitivas. La integral de Lebesgue generaliza a la integral de Riemann extendiendo el concepto de área bajo la curva para incluir a las funciones discontinuas. Sin embargo, existen conjuntos que no son L-medibles lo que lleva a investigar y constituir modelos de teoría de conjuntos en los cuales todos los conjuntos sean L-medibles, esto cambiando la concepción del continuo. Si el espacio puede ser subdividido indefinidamente, por el hecho de ser continuo, se produce la Paradoja de la Línea de Costa que es que la longitud de la línea costera con resolución infinita acumulará pliegues infinitamente más pequeños creciendo indefinidamente, asunto que estudió y desarrolló Benoît Mandelbrot en su libro *Fractal Geometry of Nature,* Geometría Fractal de la Naturaleza, de 1982 d.C., creando la Geometría Fractal. La Paradoja de la Línea de Costa del siglo XX d.C. remite a la Paradoja de Zenón, el primer intento de pensamiento infinitesimal, del siglo V a.C. con Áquiles haciendo su carrera a la orilla del mar después de dos mil quininientos años armado ahora con el concepto de límite para aproximarse a la tortuga. El continuo ha sido un continuo problema, y conlleva a la Hipótesis del continuo en la que cualquier conjunto infinito no puede estar entre el conjunto de los números naturales 1, 2, 3, ... y el conjunto de los números reales 1, $\sqrt{2}$, φ, $\sqrt{3}$, 2, $\sqrt{5}$, *e*, 3, *π*, .... Axioma de elección postulando que para cada familia de conjuntos no vacíos, existe otro conjunto que contiene un elemento de cada uno de aquellos y si los números naturales son de cardinalidad $\aleph_0$ se puede *elegir* que los números reales, lo continuo, sean de cardinalidad, esto es, con cantidad de elementos igual a $\aleph_1$. La postulación mediante conjuntos se desploma al espetar: *Un conjunto formará parte de sí mismo sólo si no forma parte de sí mismo*, Paradoja de Russell. No es de extrañar. La paradoja está desde el punto de partida, ya que si el ente fundamental de la parte de las matemáticas que estudia la extensión, la forma de medirla, las relaciones entre puntos, líneas, ángulos, planos, figuras, y la manera cómo se miden, el punto, · , es *lo que no tiene partes* llegamos a que el Universo está formado de nada.

A vivir feliz y barbón.

| | | |
|---|---|---|
| s. V a.C. | Zenón de Elea | Paradojas |
| s. V a.C. | Hípaso de Metaponto | Números Irracionales |
| s. IV a.C. | Eudoxo de Cnido | Método Exhaustivo |
| c. 300 a.C. | Euclides | *Elementos* |
| s. III a.C. | Arquímedes | *Sobre teoremas mecánicos a Eratóstenes misiva* |
| s. III a.C. | Apolonio de Perga | *Cónicas* |
| s. II d.C. | Claudio Ptolomeo | *Sintaxis Matemática* |
| s. IV d.C. | Hipatia | *Sobre las Cónicas de Apolonio* |
| c. 400 d.C. | | *Sol perfecto objetivo* |
| s. VI d.C. | Aryabhata | *Aryabhatiya* |
| s. IX d.C. | Abu Abdallah Muhammad ibn Musa al-Jwarizmi | *Compendio de cálculo por reunión de partes rotas y balance* |
| 1077 d.C. | Ghiyath al-Din Abu l-Fath Omar ibn Ibrahim Jayyam Nishapurí | *Comentarios sobre aspectos dudosos en los postulados del libro de Euclides* |

| | | |
|---|---|---|
| 1544 d.C. | Michael Stifel | *Aritmética completa* |
| 1614 d.C. | John Napier | *Descripción del Maravilloso Canon de los Logaritmos* |
| 1615 d.C. | Johannes Kepler | *Nueva geometría sólida de barricas de vino* |
| 1617 d.C. | Henry Briggs | *Primeros mil logaritmos* |
| 1620 d.C. | Jost Bürgi | *Tablas de Progresiones Aritméticas y Geométricas* |
| 1635 d.C. | Bonaventura Cavalieri | *Geometría por indivisibles de lo continuo avanzada por un nuevo método* |
| 1637 d.C. | Pierre de Fermat | *Introducción a los lugares planos y sólidos* |
| 1637 d.C. | René Descartes | *Discurso del método para conducir bien la propia razón, y buscar la verdad en las ciencias* |
| 1638 d.C. | Galileo Galilei | *Discurso y demostración matemática en torno a dos nuevas ciencias* |
| 1644 d.C. | Evangelista Torricelli | *Obras de Geometría* |
| 1647 d.C. | Gregorius van St-Vincent | *Obra geométrica de cuadratura del círculo y secciones cónicas* |

| | | |
|---|---|---|
| 1650 d.C. | Pietro Mengoli | *Nueva Cuadratura Aritmética o De Adición de Fracciones* |
| 1656 d.C. | John Wallis | *Aritmética de los Infinitos* |
| 1659 d.C. | Vincenzo Viviani | *De máximos y mínimos geométricos inspirado en el quinto de Cónicas de Apolonio de Perga* |
| 1669 d.C. | Isaac Barrow | *Lecciones Geométricas* |
| 1684 d.C. | Gottfried Wilhelm Leibniz | *Nuevo método para máximos y mínimos, y para tangentes, que no está impedido por cantidades fraccionales o irracionales, y un tipo singular de cálculo para lo mencionado anteriormente.* |
| 1687 d.C. | Isaac Newton | *Principios matemáticos de la filosofía natural* |
| 1690 d.C. | Jakob Bernoulli | Artículo en *Acta Eruditorum* |
| 1696 d.C. | Guillaume de l'Hôpital | *Análisis de los infinitamente pequeños para el estudio de las líneas curvas* |
| 1714 d.C. | Gottfried Wilhelm Leibniz | *La Monadología* |
| 1715 d.C. | Brooks Taylor | *Métodos de Incrementos Directos e Inversos* |

| | | |
|---|---|---|
| 1734 d.C. | George Berkeley | *El Analista; o, Un discurso dirigido a un matemático infiel: en el que se examina si el objeto, los principios y las inferencias del análisis moderno se conciben más claramente, o se deducen más evidentemente, que los misterios religiosos y los puntos de fe.* |
| 1736 d.C. | Isaac Newton † | *Método de las fluxiones y series infinitas* |
| 1748 d.C. | Leonhard Euler | *Introducción al análisis del infinito* |
| 1755 d.C. | Leonhard Euler | *Fundamentos de Cálculo Diferencial* |
| 1768 d.C. | Leonhard Euler | *Fundamentos de Cálculo Integral* |
| 1776 d.C. | Leonhard Euler | *Determinación de cargas, que las columnas pueden soportar* |
| 1786 d.C. | Simon Antoine Jean L'Huillier | *Exposición básica de los principios de los cálculos superiores* |
| 1810 d.C. | Bernard Placidus Johann Nepomuk Bolzano | *Contribuciones a una presentación más fundamentada de las matemáticas. Primera entrega* |
| 1821 d.C. | Augustin Louis Cauchy | *Curso de análisis de la Escuela Politécnica* |
| 1823 d.C. | Augustin Louis Cauchy | *Resumen de lecciones sobre cálculo infinitesimal* |

| | | |
|---|---|---|
| 1828 d.C. | Johann Carl Friedrich Gauss | *Teoría de residuos bicuadráticos* |
| 1828 d.C. | Johann Carl Friedrich Gauss | *Investigaciones generales acerca de superficies curvas* |
| 1829 d.C. | Augustin Louis Cauchy | *Lecciones sobre el cálculo diferencial* |
| 1837 d.C. | Bernard Placidus Johann Nepomuk Bolzano | *Profesor de ciencias* |
| 1854 d.C. | Georg Friedrich Bernhard Riemann | *Sobre las Hipótesis en que se Funda la Geometría* |
| 1854 d.C. | Georg Friedrich Bernhard Riemann | *Sobre la Representación de una Función por una serie trigonométrica* |
| 1903 d.C. | Bertrand Arthur William Russell | *Los Principios de las Matemáticas* |
| 1904 d.C. | Henri Léon Lebesgue | *Lecciones sobre integración y la búsqueda de funciones primitivas* |
| 1960 d.C. | Eugene Paul Wigner | *La Irrazonable Efectividad de las Matemáticas en las Ciencias Naturales* |

| | | |
|---|---|---|
| 1966 d.C. | Abraham Robinsohn | *Análisis No Estándar* |
| 1973 d.C. | Karl Theodor Wilhelm Weierstraß † | *Introducción a la teoría de las funciones analíticas* |
| 1982 d.C. | Benoît Mandelbrot | *Geometría Fractal de la Naturaleza* |

# Capítulo III Aplicaciones del Cálculo Infinitesimal en Ingeniería Civil

*No basta tener un buen ingenio; lo principal es aplicarlo bien. - René Descartes*

Ingeniería Civil, profesión que trata de la aplicación de conocimientos científicos, ya sean físicos, químicos, matemáticos, geológicos, para resolver problemas de planeación, diseño, construcción, operación y mantenimiento de infraestructura, sumando su aportación a campos de la ciencia. Siete áreas conforman la Ingeniería Civil:

Planeación Estructuras Hidráulica Geotecnia Transporte Construcción Ambiental

Planeación: Disciplina que identifica acciones a través de una secuencia sistemática de toma de decisiones para generar los efectos que se esperan de ellas. Su finalidad es proyectar un futuro deseado y los medios efectivos para lograrlo.

Estructuras: Disciplina que diseña la conformación de los elementos de soporte de las obras civiles. Su finalidad es equilibrar las fuerzas a las que va a estar sometida la edificación para resistir las solicitaciones sin colapso o excesivas deformaciones.

Hidráulica: Disciplina que proyecta y ejecuta obras civiles relacionadas con recursos hídricos para su aprovechamiento y resguardo. Su finalidad es la captación, preservación, uso, control y manejo del agua.

Geotecnia: Disciplina que caracteriza las propiedades físicas, químicas, mecánicas y estructurales de los suelos y las rocas. Su finalidad es garantizar la estabilización y correcta distribución de los esfuerzos que genera la estructura en su interacción con el terreno.

Transporte: Disciplina que plantea soluciones a la movilización de bienes y personas. Su finalidad es planificar, diseñar, construir, operar y mantener sistemas de traslado.

Construcción: Disciplina que dirige, administra y lidera la materialización de las obras civiles. Su finalidad es coordinar las acciones para erigir los proyectos de infraestructura .

Ambiental: Disciplina que crea soluciones para preservar y mejorar el entorno. Su finalidad es el desarrollo sostenible.

En *El rompecabezas de la ingeniería* libro publicado por Daniel Reséndiz Núñez se describe:

> «Así pues, la ingeniería es una profesión que, en cualquiera de sus actividades, busca satisfacer ciertas necesidades humanas de orden material mediante el diagnóstico y el diseño aplicado a los problemas que deben abordarse para alcanzar ese propósito. En general, las necesidades humanas se derivan de la insuficiencia de algunos satisfactores: habitación, agua para cualquiera de sus usos, transporte (terrestre, aéreo, interplanetario, etc.), medios de telecomunicación, energéticos, etc. Para satisfacerlas, el ingeniero hace primero un diagnóstico que aclare y delimite el problema, sus alcances, sus circunstancias, las diversas variables que intervienen, y sus relaciones causa-efecto. Con base en el diagnóstico hace luego un diseño que busca definir la mejor solución con todos los detalles necesarios para que pueda llevarse a la realidad (proceso de fabricación o construcción que igualmente es actividad de ingenieros, como también lo es después la operación de los proyectos que la ingeniería planifica, diseña y construye o fabrica)». (p. 33).

La Ingeniería Civil para satisfacer las necesidades humanas se hace del conocimiento científico utilizando el Cálculo Infinitesimal, el conjunto de Cálculo Diferencial y Cálculo Integral, para manipular simbólicamente las expresiones que conciernen a cambios. Heráclito de Éfeso, recordado por su sentencia: «No puedes pisar dos veces el mismo río, porque no será el mismo río y tú no serás el mismo hombre», declaraba que lo único constante es el cambio y para hacer constancia de cualquier cambio el Cálculo Infinitesimal resulta imprescindible al ejercer la profesión, ya que su aplicación concierne a las siete disciplinas que erigen la Ingeniería Civil.

PLANEACIÓN

Para identificar las acciones a tomar existe metodología de la planeación. μετά *metá* más allá
οδως *odós* camino
λογος *logos* estudio

Metodología: Estudio del camino al más allá.

Se fija una meta y se estudian las alternativas para llegar a ella. ¿Qué? & ¿Cómo?

El qué es la demanda. El cómo es el precio. Demanda, bien o servicio que se está dispuesto a adquirir. Precio, pago por la obtención del bien o servicio deseado. El medio de pago más extendido y aceptado en la sociedad es el dinero.

*In principio creavit Deus cælum et terram. Terra autem erat inanis et vacua, et tenebræ erant super faciem abyssi: et spiritus Dei ferebatur super aquas. Dixitque Deus :* ***Fiat*** *lux. Et facta est lux.* (Génesis1:1-3 Versión VULGATE).

En el principio, Dios creó los cielos y la tierra. La tierra no tenía forma y estaba vacía, y la oscuridad cubría las aguas profundas; y el Espíritu de Dios se movía en el aire sobre la superficie de las aguas. Entonces Dios dijo: «**Que haya** luz»; y hubo luz. (Génesis1:1-3 Versión NTV).

El tipo de dinero que se utiliza actualmente es Dinero Fíat, el dinero que haya. No tiene valor *per se*. Tiene valor por presumir que lo tiene y es la base de la Economía, la ciencia de administrar la escasez, regulada por la Ley de la Oferta y la Demanda.

III.1 Ecuación de Precio de Oferta

$$P = \alpha + \beta Q$$

III.2 Ecuación de Precio de Demanda

$$P = a - bQ$$

Siendo $\alpha, \beta, a, b > 0$

La demanda de un bien o servicio es la cantidad, *Quantity*, que se desea de la misma. La Ecuación de Precio de Demanda pretende ser un modelo de la relación de la demanda en función del precio, *P*, agrupando todas las condiciones independientes a la cantidad de gente que desea comprar que afectan al precio en la constante *a* y formulando con la constante *b* la influencia que existe en la relación. Una vez modelada, se puede analizar el ingreso total, *Total Revenue,* que se obtiene con el precio al que está dispuesta comprar la demanda multiplicado por la demanda misma.

III.3 Ingreso Total

$$T_R = PQ = (a - bQ)Q = aQ - bQ^2$$

$$T_R = aQ - bQ^2$$

El Cálculo Diferencial se aplica y da entrada al análisis marginal para tomar decisiones que es lo que compete a la Planeación. Se obtiene la razón de cambio instantánea del ingreso total, según cambie la demanda. Derivando el ingreso total con respecto a la demanda se obtiene el ingreso marginal, *Marginal Revenue.*

III.4 Ingreso Marginal

$$M_R = \frac{\mathrm{d}\, T_R}{\mathrm{d}Q} = \frac{\mathrm{d}\,(aQ - bQ^2)}{\mathrm{d}Q} = a - 2bQ$$

$$M_R = a - 2bQ$$

La utilidad de estar calculando llega. Se puede saber, en teoría, cómo generar el máximo ingreso, y es al hacer $M_R$ igual a 0, porque la pendiente es entonces nula y corresponde a una sima. Se despeja *Q*. Se aplica a III.2 y se obtiene el precio que genera el Ingreso Máximo en función de los parámetros establecidos *a* y *b* en III.5. Posteriormente en III.6 el Ingreso Máximo mismo. Radical la importancia al determinar los parámetros *a* y *b* por economistas.

III.5 Precio de Máximo Ingreso

$$M_R = 0 \quad \therefore \quad 0 = a - 2bQ \rightarrow Q_{RMax} = \frac{a}{2b} \quad \ldots \quad P = a - b \cdot \frac{a}{2b} = a - \frac{ab}{2b} = a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}$$

$$P_{RMax} = \frac{a}{2}$$

III.6 Ingreso Máximo

$$T_{RMax} = P_{RMax}Q_{RMax} = \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2b} = \frac{a^2}{4b}$$

$$T_{RMax} = \frac{a^2}{4b}$$

Los factores *α, β,* junto con *a, b,* que son estimaciones del comportamiento del mercado, determinan los resultados de los cálculos, de ahí que no importando que las operaciones hayan sido correctas, si *α, β, a, b* no corresponden a lo real entonces resuena la frase:

«Un economista es un experto que sabrá mañana por qué las cosas que predijo ayer no sucedieron hoy».

Hacer cálculos basados en estimaciones lleva a falsas certezas lo que ha traído la crisis financiera de 2008-2009, con la consiguiente depresión económica actual provocada por la mayor fuente del sector financiero: Los Derivados. Ian Stewart en su libro *17 Equations that Changed the World*, 17 Ecuaciones que Cambiaron el Mundo, explica:

> «Los operadores de derivados usan dinero virtual, números en un ordenador. Lo toman prestado de inversores que probablemente lo han tomado prestado en alguna otra parte. Con frecuencia no lo han tomado prestado del todo, ni siquiera virtualmente: han presionado el botón del ratón para estar de acuerdo con que tomarán prestado el dinero si alguna vez es necesario. Pero no tienen intención de permitir que sea necesario, venderán el derivado antes de que suceda. El prestamista, el hipotético prestamista, como el préstamo nunca se llevará a cabo, por la misma razón, probablemente tampoco tiene realmente el dinero. Esto son las finanzas en un reino de fantasía, aunque se ha convertido en una práctica estándar del sistema bancario del mundo». (p. 339).

Desafortunadamente, sucede. $21 000 000 000 000 USD, aproximadamente, es la deuda pública que tiene Estados Unidos de América, con pronóstico de aumento, que habiendo superado desde el 12 de septiembre de 2017 d.C. los veinte billones, presenta el máximo nivel de endeudamiento desde la Segunda Guerra Mundial. China aprendió el juego, por lo que ha decidido incrementar su deuda en 2019 d.C. Cifras del Banco de México sitúan la Posición de Deuda Externa Bruta Total Ajustada en $456 251 000 000 USD al cierre de julio de 2019 d.C., igualmente deuda sin precedente. John Maynard Keynes advirtió al respecto:

«Si yo te debo una libra, tengo un problema; pero si te debo un millón, el problema es tuyo».

Proyectar un futuro deseado y los medios efectivos para lograrlo.

> «La publicidad nos hace desear coches y ropas, tenemos empleos que odiamos para comprar mierda que no necesitamos. Somos los hijos malditos de la historia, desarraigados y sin objetivos. No hemos sufrido una gran guerra, ni una depresión. Nuestra guerra es la guerra espiritual, nuestra gran depresión es nuestra vida».

{Chaffin, C., Grayson Bell, R., Linson, A. (productores) Fincher, D. (director). (1999). *Fight Club* [Cinta cinematográfica]. Estados Unidos de América: 20th Century Fox}.

Siendo la Ingeniería la profesión que busca satisfacer mediante el diagnóstico, delimitación del problema, alcances, circunstancias, diversas variables que intervienen, y la relación causa-efecto, conviene analizar en pos de las mejores decisiones el origen de las necesidades; análisis que realizó Karl Heinrich Marx en *Grundrisse,* Elementos fundamentales para la crítica de la economía política: «Si resulta claro que la producción ofrece exteriormente el objeto del consumo, también lo es que el consumo ofrece idealmente el objeto de la producción, como imagen interior, como necesidad, como instinto o como fin». (p. 12).

Todas las acciones que tomamos generan un futuro que deriva de ellas. Su origen es el deseo, consecuencia final de la emoción. Resulta emocionante que la elasticidad de la demanda se puede obtener con la derivada de la demanda ahora con respecto al precio multiplicada por la razón precio : demanda. El precio afecta o no afecta, con lo que se puede saber cuánto aumentar el precio y así aumentar los ingresos. Parece ser que ese es el plan en todo.

ESTRUCTURAS

Columna fuerte Viga débil Es el criterio para el diseño de una estructura, el conjunto de masas que se conectan para transmitir las fuerzas al terreno, con niveles de desplazamientos controlables ante diversos tipos de solicitaciones.

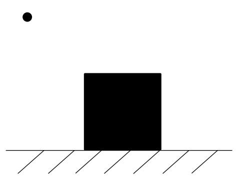


Figura III 1 Elemento sin Grados de Libertad

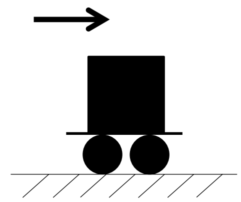


Figura III 2 Elemento con un Grado de Libertad

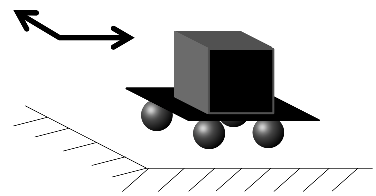


Figura III 3 Representación de elemento con dos GL

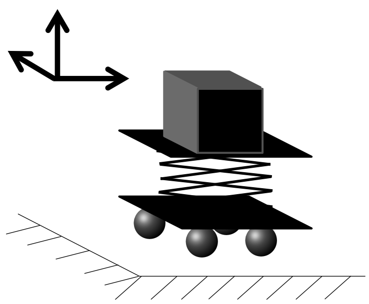


Figura III 4 Representación de elemento con tres GL

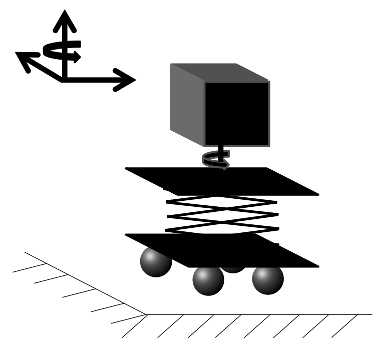


Figura III 5 Representación de elemento con cuatro GL

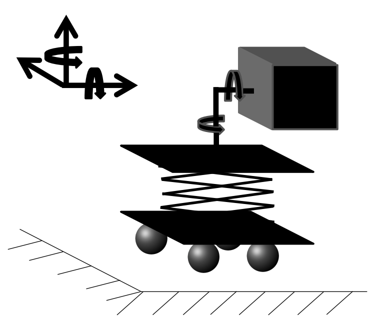


Figura III 6 Representación de elemento con cinco GL

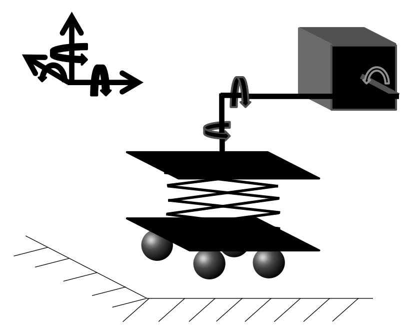


Figura III 7 Representación de elemento con seis GL

La conformación de los elementos de soporte determina el comportamiento que tendrá la estructura ante las fuerzas a las que va a estar sometida. En Ingeniería, el número de Grados de Libertad se refiere al número mínimo de parámetros que determinan las reacciones de los elementos. En el espacio, nuestro ámbito, existen tres traslaciones, que corresponden a las tres posibles direcciones en lo tridimensional. Además, existen tres rotaciones, cada una respecto a cada eje, siendo en conjunto seis grados de libertad la totalidad de posibles reacciones. La función de uno como diseñador estructural es restringir la configuración de los elementos estructurales a que sean asintóticamente estables, esto es, que las perturbaciones produzcan trayectorias dentro de un denominado entorno de estabilidad y que terminada la perturbación se regrese a la configuración inicial. Se han propuesto diversos métodos que intentan establecer un juicio que determine la estabilidad de un sistema, entre ellos se incluyen:

Equilibrio Energético Dinámico Experimental

Desarrollando el Método del Equilibrio, la base teórica para el diseño de columnas presentada por Leonhard Paul Euler en *Determinatio onerum, quae columnae gestare valent*, Determinación de cargas, que las columnas pueden soportar, se sustenta en el análisis del pandeo producido por compresión.

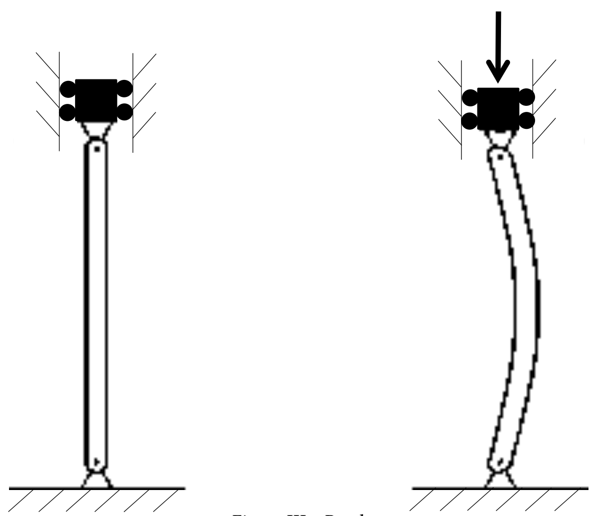


Figura III 8 Pandeo

Pandeo proviene del latín *pandus* que significa curvado. En el pandeo como los desplazamientos no se presentan en dirección de la fuerza aplicada se denomina el fenómeno como inestabilidad elástica. La fuerza axial aplicada produce una flexión, reacción para la cual no son propuestas las columnas en primera instancia por lo que el cálculo busca encontrar cuánto es la mayor carga antes de que ocurra dicha inestabilidad. La fuerza axial aplicada genera un momento provocado por el desplazamiento que ha tenido la columna, la flecha.

Ver Figura I 2

El momento, caracterizado por ser una fuerza, multiplicada por un brazo de palanca, tiene por tanto unidades de trabajo, equivale a una aceleración angular, la segunda derivada del desplazamiento de la flecha, en dirección ortogonal, con respecto a la longitud del elemento. La fuerza aplicada a la columna, como se interpreta para el análisis como puntual para reducir el planteamiento, se denota con *P*. La flecha no es constante, en los extremos no hay deflexión, por ser puntos de apoyo, y la deformación varía conforme al recorrido en dirección de la columna, deformación formulada con *V(z)*. El módulo de Young, llamado también módulo de Elasticidad y denotado como *E* por Leonhard Paul Euler, es una constante que caracteriza la razón tensión : deformación en origen, que para columnas aplica ser la razón compresión : deformación. *I* es el momento de inercia, valor de la resistencia que opone el material a modificar su estado de movimiento debido a la distribución de su masa. Por equilibrio, fuerzas externas equivalen a fuerzas internas. El momento externo a la columna es *PV(z)*. La reacción de igual magnitud, dirección opuesta, por ello el signo negativo, es la aceleración de giro de la columna con los factores *EI* que se oponen al cambio. Las columnas, inspiradas en troncos de árboles, funcionan de soporte, significando soporte la palabra latina *columen* que dio el nombre. Pensando que el soporte es para ganar altitud, eje *Z* convenido en el presente documento, la segunda derivada de la flecha es con respecto a *z*, la aceleración de giro conforme aumenta en altura la columna. Cambiando los ejes de referencia la derivada puede cambiar a ser respecto a *x* o a *y* según le corresponda. Aquí *z* será altura.

III.7 $$PV(z) = -\frac{\mathrm{d}^2\, V(z)}{\mathrm{d}z^2} EI$$

Lo que interesa es aumentar los ingresos por lo que es importante conocer la máxima carga que puede soportar una columna sin que presente inestabilidad y se obtiene despejando *P* de la ecuación anterior, ecuación diferencial de segundo orden. El asunto es que está formulado que la flecha está en función de *z*. Para que la ecuación diferencial de segundo orden se cumpla la segunda derivada de *V(z)* ha de resultar en $(P/EI)\cdot V(z)$ con signo contrario. La solución rigurosa sigue un proceso distinto. Aquí se muestra cómo la solución satisface la ecuación.

Tomando I.61 seguido de I.62 tenemos que la segunda derivada de seno resulta en el apropiado menos seno para la ecuación diferencial de segundo orden que analizamos. El argumento de la función igualmente se deriva; resulta factor de la derivada de la función. Al ser dos derivadas consecutivas se obtiene como coeficiente de la función que es menos seno a la derivada del argumento al cuadrado. Para que exista el equilibrio, la igualación a cero, entonces dicho cuadrado de la derivada del argumento ha de ser igual a *P/EI* en cuyo caso el argumento es entonces raíz de *P/EI* y ello multiplicado por *z*.

## III.8 Función *V(z)*

$$PV(z) = -\frac{d^2\, V(z)}{dz^2} EI \quad \rightarrow \quad PV(z) + \frac{d^2\, V(z)}{dz^2} EI = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{P}{EI} \cdot V(z) + \frac{d^2\, V(z)}{dz^2} = 0$$

Definir *V(z)* tal que $\frac{d^2\, V(z)}{dz} = -\frac{P}{EI} \cdot V(z)$

Sea $V(z) = sen(\sqrt{[P/EI]}z)$ ... $\frac{d\, V(z)}{dz} = cos((\sqrt{[P/EI]}z) \cdot \sqrt{[P/EI]}$ entonces

$$\frac{d^2\, V(z)}{dz} = \frac{d\, cos((\sqrt{[P/EI]}z) \cdot \sqrt{[P/EI]}}{dz} = \sqrt{[P/EI]} \cdot \frac{d\, cos(\sqrt{[P/EI]}z)}{dz} = \sqrt{[P/EI]} \cdot -sen(\sqrt{[P/EI]}z) \cdot \sqrt{[P/EI]} =$$

$$\{\sqrt{[P/EI]}\}^2 \cdot -sen(\sqrt{[P/EI]}z) = \frac{P}{EI} \cdot -sen(\sqrt{[P/EI]}z) = -\frac{P}{EI} \cdot sen(\sqrt{[P/EI]}z) \quad \therefore$$

$$\frac{P}{EI} \cdot V(z) + \frac{d^2\, V(z)}{dz^2} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{P}{EI} \cdot sen(\sqrt{[P/EI]}z) + \{-\frac{P}{EI} \cdot sen(\sqrt{[P/EI]}z)\} = 0 \quad \rightarrow$$

$$\frac{P}{EI} \cdot sen(\sqrt{[P/EI]}z) - \frac{P}{EI} \cdot sen(\sqrt{[P/EI]}z) = 0 \quad \rightarrow \quad 0 \equiv 0$$

La función $V(z) = sen(\sqrt{[P/EI]}z)$ satisface

Obtenida la función *V(z)* que satisface la ecuación diferencial de segundo orden que representa la situación de equilibrio, se despeja la variable de interés *P* que será la carga crítica de pandeo. La cuestión es que la deflexión *V(z)* está en función de la carga que es incógnita con lo que tenemos una ecuación y dos incógnitas. Para que el sistema pueda resolverse es necesario que se tenga el mismo número de incógnitas que de ecuaciones, para ello se analiza la función $V(z)$ en un punto cuya deflexión sea conocida. Dos puntos dan solución, los puntos extremos, $V(0)$ y $V(L)$ donde por configuración el desplazamiento es nulo. Se procede con la resolución.

III.9 Sea $V(z) = sen(\sqrt{[P/EI]}z)$ evaluada en $z = 0$

$$V(0) = sen(\sqrt{[P/EI]}0) = sen(0) = 0$$

$$V(0) = 0$$

Al multiplicar por 0 el argumento, se cancela la oportunidad de operar con la variable fuerza puntual $P$. Evaluando en el otro punto extremo se tiene:

III.10 Sea $V(z) = sen(\sqrt{[P/EI]}z)$ evaluada en $z = L$

$$V(L) = sen(\sqrt{[P/EI]}L)$$

Sabiendo que la deflexión en el apoyo es nula, $sen(\sqrt{[P/EI]}L)$ ha de ser por tanto igual a 0. El cálculo hace uso de la armonía del seno. La función $sen(x)$ es 0 en 0 y cada 180º, cada $\pi$ radianes. Así la ecuación $V(L) = 0$ es cierta cuando $\sqrt{[P/EI]}L$ es igual a $n\pi$ con $n \in \mathbb{N}$ por lo que:

III.11 $$\sqrt{\left(\frac{P}{EI}\right)}L = n\pi \rightarrow \frac{PL^2}{EI} = n^2\pi^2 \rightarrow PL^2 = n^2\pi^2 EI \rightarrow P = \frac{n^2\pi^2 EI}{L^2}$$

Se tiene a la fuerza puntual $P$ en función de $n^2$, puesto que el modulo de Elasticidad, el momento de Inercia y la Longitud de la columna se toman como constantes. Siendo $n = 0$ entonces $P = 0$, caso que no es de utilidad. Siguiendo con $n = 1$ se obtiene:

III.12 Sea $P = \frac{n^2\pi^2 EI}{L^2}$ evaluada en $n = 1$

$$P = \frac{1^2\pi^2 EI}{L^2} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

La carga $P$ que se calculó equilibra la acción externa del momento producido por la misma carga y la deflexión con los esfuerzos internos que se oponen a la deformación de la columna. Más allá de esta carga se produce la inestabilidad elástica y un consecuente colapso. Por ello, al valor $P$ obtenido se le llama Carga Crítica de Pandeo, carga que no ha de ser excedida para garantizar la estabilidad de la estructura.

III.13 Carga Crítica de Pandeo

$$P_{Crítica} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

Teóricamente es convincente. En la práctica se presenta el fenómeno de curvado de columnas con cargas distintas a la $P_{Crítica}$ calculada. Razón de ello es, como describieron Óscar Manuel González Cuevas y Francisco Robles Fernández-Villegas en su libro *Aspectos fundamentales del concreto reforzado*: «En estructuras de concreto reforzado, las columnas se encuentran restringidas parcialmente por los sistemas de piso, sin que existan articulaciones o empotramientos perfectos». (p. 422). Las articulaciones son 1 GL y los empotramientos 0 GL, siendo perfectos. Al existir incertidumbre sobre los Grados de Libertad que existen en los apoyos de las columnas, se procede a la aproximación de resultados puesto que el cálculo puro no es posible de precisar. Agregando otra pieza en *El rompecabezas de la Ingeniería*, Daniel Reséndiz Núñez responde sobre la responsabilidad del ingeniero al proceder en este tipo de situaciones de planteamiento: «La responsabilidad principal del ingeniero es, primero, aplicar su juicio experto a interpretar, de manera subjetiva pero racional, la incierta información con que cuenta, hasta convertirla en un insumo útil para la parte científica de sus tareas; después, seguir apoyándose en su juicio para procesar esa información rigurosamente, pese a la incertidumbre que seguirá teniendo, hasta llegar con base en ella a un diagnóstico y un diseño». (p. 57).

$\Psi$ alma del planteamiento usado por la Ingeniería para resolver la situación. Se formula:

III.14

$$\Psi = \frac{\sum K_{Columna}}{\sum K_{Viga}}$$

iride.gz *Ut tensio sic vis* $K$ *ceiiinosssttuv* Rigidez.

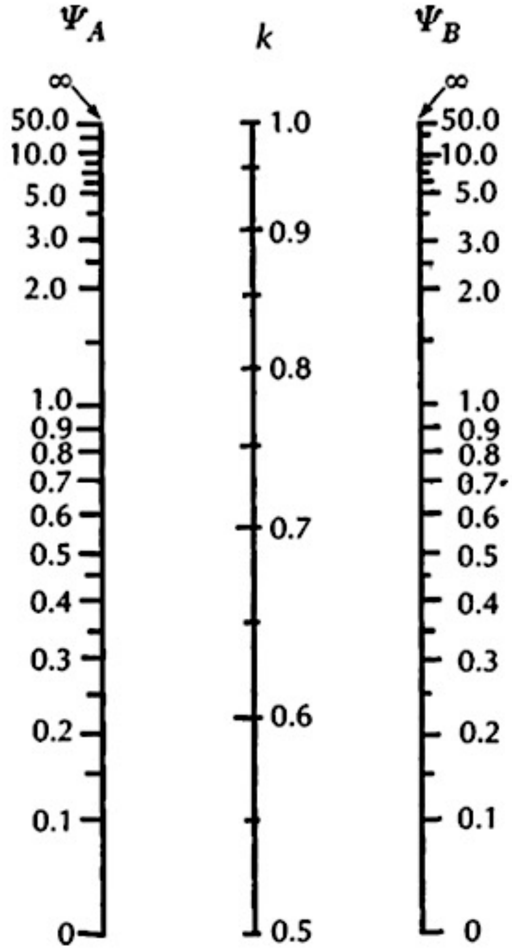


Figura III 9 Factor *k* para marcos sin desplazamiento lateral

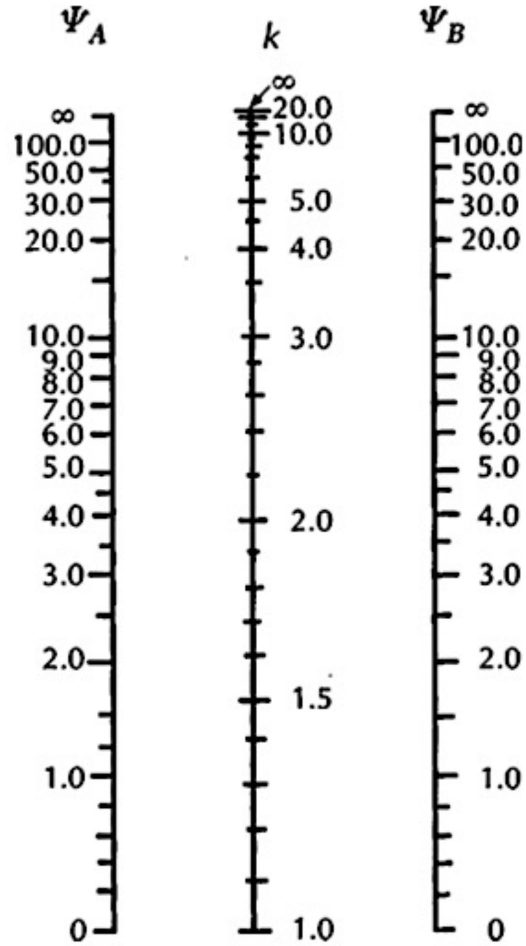


Figura III 10 Factor *k* para marcos con desplazamiento lateral

La Figura III 9 y la Figura III 10 que se muestran son denominadas como nomogramas. Los nomogramas se desarrollaron para obtener un factor *k* en función de la razón formada por rigidez columna : rigidez viga que modifica la longitud de la columna que concierne a la $P_{Crítica}$ calculada. El uso de *k* tiene la finalidad de obtener un valor frontera aproximado a lo real. Ψ es el alma del criterio diseminado Columna fuerte Viga débil. Es aquí que inicia el uso en Ingeniería de una serie de *factores,* que no son otra cosa más que coeficientes para proteger los modelos teóricos con incertidumbre, denominados factores de seguridad. La fuerza puntual que se asume resiste una columna antes de presentar inestabilidad elástica deja de satisfacer la E D O de segundo orden, justificándose al abogar por la *seguridad* proponiendo:

III.15
$$P_{CríticaEfectiva} = \frac{\pi^2 EI}{(kL)^2}$$

III.16 Gasto hidráulico

$$Q = \frac{\mathrm{d}\,V}{\mathrm{d}t}$$

Gasto hidráulico Caudal Flujo instantáneo de volumen

Nombres dados a la cantidad de líquido o volumen, $V$, que atraviesa una superficie en una unidad de tiempo, $t$. La superficie tiene la característica de ser ortogonal a las líneas de flujo a fin que los vectores velocidad de flujo, $v$, y normal al diferencial de área, $n{\cdot}\mathrm{d}A$, sean paralelos en todos los puntos que forman el área, $A$, de la superficie. El vector velocidad determina que el flujo sea no permanente o permanente según su variación o no variación en el tiempo.

III.17 Flujo no permanente

$$\frac{\partial\,v}{\partial t} \neq 0$$

III.18 Flujo permanente

$$\frac{\partial\,v}{\partial t} = 0$$

Se utiliza la derivada parcial de la velocidad de flujo, $v$, respecto al tiempo, $t$, para determinar la permanencia de un flujo. A su vez, se utiliza la derivada parcial de la velocidad de flujo, $v$, con respecto a una dirección espacial, $x$, para clasificar si es flujo variado o flujo uniforme.

III.19 Flujo variado

$$\frac{\partial\,v}{\partial x} \neq 0$$

III.20 Flujo uniforme

$$\frac{\partial\,v}{\partial x} = 0$$

Es comprensible que el criterio que determina si el flujo es compresible o incompresible sea la derivada de la densidad, $\rho$, la cantidad de materia en cierto volumen, respecto al tiempo, $t$.

III.21 Flujo compresible

$$\frac{\mathrm{d}\,\rho}{\mathrm{d}t} \neq 0$$

III.22 Flujo incompresible

$$\frac{\mathrm{d}\,\rho}{\mathrm{d}t} = 0$$

Considerando al tiempo se estableció el flujo no permanente y el flujo permanente. Cuando ocurre que se tiene al primero entre dos del segundo, el flujo no permanente sumergido entre flujos permanentes, se le llamó flujo transitorio. En la práctica sólo en el flujo transitorio denominado Golpe de Ariete, originalmente pulso de Жуковский, es que es necesario considerar al agua como flujo compresible, ya que es causante primordial en instalaciones hidráulicas de los daños graves. La magnitud de estos daños se sugiere en el nombre. El ariete es un arma usada para romper puertas o muros fortificados. El ingeniero ha de considerar el Golpe de Ariete en el diseño hidráulico. Puede llegar a romper incluso tuberías fortificadas.

שְׁמַע יִשְׂרָאֵל Escuchar y el Golpe de Ariete están relacionados. El sonido es propagación de onda en un medio elástico. Fue igualmente en *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* que Isaac Newton expuso en fórmula la velocidad del sonido en función de la presión ejercida y la densidad del medio. Velocidad, en latín *celeritas*, *c*.

III.23 Fórmula de Newton, $c$

$$c = \sqrt{[p/\rho]}$$

Pierre-Simon Laplace añadió el factor $\kappa$, razón de calor específico o coeficiente de dilatación adiabática, debido a que tiene influencia en la propagación del sonido. El producto $\kappa p$ se denomina módulo de compresibilidad, $K$, siendo la fórmula que calcula la velocidad de onda:

III.24 Fórmula de Newton Laplace, $c$

$$c = \sqrt{[\kappa p/\rho]} = \sqrt{[K/\rho]}$$

La velocidad del sonido en el medio, agua en el caso de la hidráulica, se incluye en la ecuación de Жуковский, traducido como Joukowsky, que calcula el aumento de presión en una tubería tras un cierre abrupto. En el caso contrario, la disminución de presión tras una apertura súbita.

III.25 Ecuación de Жуковский [Joukowsky]

$$\Delta p = -\rho c \Delta v$$

Николай Егорович Жуковский, traducido también como Nikolái Yegórovich Zhukovski, presentó la ecuación anterior que obtiene la presión transitoria, *p*, en pascals, kg/(m·s²). Lorenzo Allievi llegó a la misma conclusión en la conocida ecuación de Allievi difiriendo en obtener la presión transitoria, Δ*H*, en metros columna de agua, m, que corresponde a dividir la ecuación de Жуковский entre el peso específico, γ, que es igual a ρ*g*.

III.26 Ecuación de Allievi

$$\Delta H = -\frac{c\Delta v}{g}$$

Sucede que la velocidad de propagación de onda del Golpe de Ariete en instalaciones hidráulicas coincidiría con la velocidad del sonido en el agua si la tubería fuese de un material infinitamente rígido. Sin embargo, los materiales que se utilizan para distribuir el agua son deformables lo que disipa energía. La situación fue considerada en la fórmula de Жуковский que disminuye *c* en función del módulo de elasticidad del material de la tubería, *E*, su diámetro, Ø y su espesor, *e*.

III.27 Fórmula de Жуковский, *c*

$$c = \frac{\sqrt{[K/\rho]}}{\sqrt{[1 + (K\text{Ø})/(Ee)]}}$$

Considerando que del agua se ha medido, aproximadamente:

| | | |
|---|---|---|
| $K$ | 2 030 000 000 | kg/(m·s²) |
| $\rho$ | 1 000 | kg/m³ |

III.28

$$c = \frac{\sqrt{\{[2\ 030\ 000\ 000\ \mathrm{kg/(m\cdot s^2)}]/[1\ 000\ \mathrm{kg/m^3}]\}}}{\sqrt{\{1 + [2\ 030\ 000\ 000\ \mathrm{kg/(m\cdot s^2)}\text{Ø}]/[Ee]\}}} =$$

$$\frac{\sqrt{[2\ 030\ 000\ \mathrm{m^2/s^2}]}}{\sqrt{\{1 + [2\ 030\ 000\ 000\ \mathrm{kg/(m\cdot s^2)}\text{Ø}]/[Ee]\}}} = \frac{1424{,}78...\ \mathrm{m/s}}{\sqrt{\{1 + [2\ 030\ 000\ 000\ \mathrm{kg/(m\cdot s^2)}\text{Ø}]/[Ee]\}}}$$

$$c = \frac{1424{,}78...\ \mathrm{m/s}}{\sqrt{\{1 + [2\ 030\ 000\ 000\ \mathrm{kg/(m\cdot s^2)}\text{Ø}]/[Ee]\}}}$$

Lorenzo Allievi aplicó el Cálculo Diferencial en las llamadas Ecuaciones Diferenciales de Allievi para obtener la sobrepresión que es generada por el cierre o por la apertura del paso del agua utilizando la nombrada fórmula de Allievi que calcula la celeridad de propagación de onda del Golpe de Ariete considerando que la variación de presión hace variar al diámetro, Ø, y al espesor, *e*, de la tubería en cuestión.

III.29 Fórmula de Allievi, *c*

$$c = \frac{9900}{\sqrt{[48{,}3 + (k\text{Ø})/e]}}$$

Siendo *k* un factor que depende del material de la tubería

Tabla III uno || $k_{(\mathrm{I})}$

| Material | *k* |
|---|---|
| Acero | 0,5 |
| Fundición | 1,0 |
| Concreto armado | 1,5 |

Las Ecuaciones Diferenciales de Allievi consideran del Golpe de Ariete, flujo transitorio, sus cualidades de ser: Flujo no permanente $\partial v/\partial t \neq 0$ Flujo variado $\partial v/\partial x \neq 0$

Variación de velocidad con respecto al tiempo. Variación de velocidad con respecto al espacio.

III.30 Ecuaciones Diferenciales de Allievi

$$\frac{\partial v}{\partial t} = g{\cdot}sen(\alpha) + g \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{g}{c^2} \cdot \frac{\partial v}{\partial t}$$

Lorenzo Allievi satisfizo las ecuaciones y obtuvo

III.31 Carga de Presión

III.32 Velocidad

$$H = H_0 + F(t - x/c) + f(t + x/c)$$

$$v = v_0 + \frac{g}{c} \cdot [F(t - x/c) - f(t + x/c)]$$

La carga de presión, *H*, consecuencia del Golpe de Ariete, se considera formada por la carga de presión original, la sobrepresión que es *golpe* directo en dirección del flujo, *F*, y la depresión que corresponde al *contragolpe* en dirección a contraflujo, *f*. ☹ La depresión frena al flujo.

Si se elimina la sobrepresión y la depresión se mantiene, se regresa a III.26

III.33 $H = H_o + 0 + f(t + x/c)$ $v = v_o + \frac{g}{c} \cdot [0 - f(t + x/c)]$

$$H = H_o + f(t + x/c) \qquad v = v_o - \frac{g}{c} \cdot f(t + x/c)$$

$$H - H_o = f(t + x/c) \qquad v - v_o = -\frac{g}{c} \cdot f(t + x/c)$$

$$\Delta H = f(t + x/c) \qquad -\frac{c\Delta v}{g} = f(t + x/c)$$

$$\Delta H = -\frac{c\Delta v}{g}$$

La interdependencia de los parámetros del Golpe de Ariete complica su cálculo. Se publicó en:

**NORMAS TÉCNICAS COMPLEMENTARIAS
PARA EL DISEÑO Y EJECUCIÓN DE
OBRAS E INSTALACIONES HIDRÁULICAS**

2.3.3 Diseño hidráulico (...)
F) Velocidades permisibles

Para evitar que se sedimenten partículas que arrastre el agua, el flujo tendrá una velocidad mínima de 0,5 m/s.

La velocidad máxima permisible para evitar la erosión de la tubería será la que se indica a continuación (se considera que el agua es limpia o poco turbia):

Tabla III dos || $v_{max}$

TABLA 2-3.- Velocidades máximas permisibles

| Material de la tubería | Velocidad máxima (m/s) |
|---|---|
| Concreto simple hasta 0.45 m de diámetro | 3,0 |
| Concreto reforzado de 0.60 m de diámetro o mayores | 3,5 |
| Asbesto-cemento | 5,0 |
| Acero galvanizado | 5,0 |
| Acero sin revestimiento | 5,0 |
| Acero con revestimientos | 5,0 |
| Polietileno de alta densidad | 5,0 |
| Plástico PVC | 5,0 |

Bajo la velocidad máxima permisible se evita la erosión de la tubería y se reduce el influjo del flujo transitorio en el diseño. Esto no exime al ingeniero de cavilar que el Golpe de Ariete, como se dijo, es causante primordial en instalaciones hidráulicas de los daños graves.

GEOTECNIA

| | | |
|---|---|---|
| Terremoto | | |
| 19 de septiembre de 1985 d.C. | 8,1 $M_W$ | 07:17:47 h Hora local (UTC -6) |
| Cifra de fallecidos, rectificada en 2015 d.C. | 12 843 | Registro Civil de la Ciudad de México |

| | | |
|---|---|---|
| Terremoto | | |
| 19 de septiembre de 2017 d.C. | 7,1 $M_W$ | 13:14:40 h Hora local (UTC -5)<br>Horario de verano aplicado en el país a partir de 1996 d.C. |
| Cifra de fallecidos | 369 | Secretaría de Gobernación |

Los terremotos son una serie de sacudidas repentinas y violentas de la superficie de la Tierra. Son fenómenos que se producen por la liberación de energía de la corteza terrestre debida a movimiento de placas tectónicas, erupción de volcanes, bombas terremoto, desprendimiento. Un sismo se convierte en desastre si genera enormes pérdidas de vidas y daños materiales.

«Los terremotos son inspectores de la honestidad arquitectónica».
Juan Villoro Ruiz

Terremoto || Sismo. También es Sonido. Entre 20 Hz y 20 000 Hz son las frecuencias a las que comúnmente el oído humano responde. Sismógrafos de banda ancha detectan frecuencias que van entre 0.00118 Hz y 500 Hz. Sonidos graves que se estudian para evitar daños graves. Se busca que la estructura pueda soportar la acción del movimiento telúrico. Para ello, es necesario definir qué será lo que habrá de resistir el edificio, tarea de la Geotecnia.
Los acelerogramas definen la acción sísmica. «Estudiar el pasado puede definir el futuro» frase de Confucio. Para que no exista confusión, los acelerogramas son la historia en el tiempo de las aceleraciones registradas. Se asocia un acelerograma a un oscilador de 1 Grado de Libertad con cierto periodo, $T_i$. La representación de osciladores de distintos periodos con la aceleración que experimentan al someterse al acelerograma característico del lugar genera un espectro de respuesta. La experiencia reconoce que los daños que se presentan en edificios se deben principalmente al fenómeno de resonancia. Suelo y estructura oscilando de manera sincronizada. Aquí la importancia de determinar el periodo fundamental del suelo, $T_s$ y asegurar que difiera del periodo natural de vibración de la estructura $T_e$.

El periodo fundamental del suelo, $T_s$, está sujeto a su velocidad de propagación de onda, en específico las ondas secundarias, $v_S$, que se obtiene mediante III.24, y el espesor del estrato, $H$.

III.34 Periodo fundamental del suelo, $T_s$

$$T_s = \frac{4H}{v_S}$$

La fórmula anterior se deduce de la velocidad angular, $\omega$, que es la variación de los radianes, $\theta$, con respecto al tiempo, $t$. Siendo el periodo, $T$, el tiempo que toma completar un ciclo, que en el movimiento circular uniforme, análogo a las ondas, es $2\pi$ radianes, se genera la expresión:

III.35
$$\omega = \frac{\mathrm{d}\,\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{2\pi}{T}$$

Teniendo para el suelo la función:

III.36
$$\omega_n = \frac{v_S}{H} \cdot \left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) \qquad n \in \mathbb{N}$$

Se asigna $n$ igual a 0 para obtener la vibración fundamental del suelo y al substituir III.36 en III.35 se obtiene III.34, el periodo fundamental del suelo donde se cimentará la obra civil. $v_S$ depende de la densidad del material del estrato. El Manual de Diseño de Obras Civiles Diseño por Sismo de la Comisión Federal de Electricidad, edición 2008 da la recomendación que será preferible una medición directa de las propiedades dinámicas del terreno de cimentación, esto mediante perforación y muestreo. Una estimación de $v_S$ es a partir de SPT, *Standard Penetration Test,* Prueba de Penetración Estándar. Se obtiene información aproximada en base al número de golpes necesarios para penetrar a 18 pulgadas de profundidad, omitiendo los golpes de las 6 primeras pulgadas, $N_{SPT}$. En la página 11 del Manual mencionado es que se encuentra la tabla que relaciona SPT con $v_S$.

Tabla 1.1. Velocidad de ondas de corte a partir del número de golpes de la prueba de penetración estándar (SPT).

| Tipo de suelo | Número de golpes (SPT) | $v_S$ (m/s) | $\gamma_S$ (Mg/m$^3$) |
|---|---|---|---|
| Roca | - | > 720 | 2,0 |
| Suelo firme y denso | > 50 | 360 | 1,8 |
| Suelo medio | [15, 50] | 180 | 1,5 |
| Suelo blando | < 50 | 90 | 1,3 |

Una vez definido el periodo fundamental del suelo, $T_s$, se elabora el espectro de diseño que estipula el peligro sísmico ordenando las aceleraciones para el diseño sísmico en función del periodo natural de vibración de la estructura, $T_e$. Las consideraciones del periodo fundamental del suelo, $T_s$, y del periodo natural de vibración de la estructura, $T_e$, se implantan en los reglamentos como determinantes ya que en el terremoto de la Ciudad de México de 1985 d.C. los edificios que colapsaron fueron en los que hubo doble resonancia; primero entre la onda sísmica y el suelo, segundo entre el suelo y las estructuras afectadas. En 1985 d.C. se tenía en vigor el Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal publicado en 1976 d.C. Admitía el uso del método estático para el diseño de estructuras de hasta 60 metros de altura. Después del desastre del 19 de septiembre de 1985 d.C. el Reglamento se sometió a enmiendas puesto que fueron 30 000 los edificios que colapsaron.

Cuando ocurrió el terremoto del 19 de septiembre de 2017 d.C. se tenía en vigor el Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal publicado en 2004 d.C. que acotó a permitir el método estático para diseñar estructuras de hasta 30 metros de altura, siendo regulares, si no sólo hasta 20 metros. La cota de estos límites tiene 10 metros extra, hasta 40 metros los edificios regulares y 30 metros los edificios irregulares, de ubicarse en la Zona I. Sin embargo, 38 edificios colapsaron en esta catástrofe.

El 2 de abril de 2019 d.C. se publica Compendio de reformas, adiciones y derogaciones del Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal 2004 - 2019.

Edición: SMIE. Responsable de la compilación: M.I. Leonardo Emmanuel Flores Corona.

Estudiar los terremotos que han pasado define el futuro de los acelerogramas que se utilizan para el modelado de la interacción de los distintos tipos de suelo con las estructuras, por ello:

«Adicionalmente, todas las estructuras pertenecientes al Grupo A Caso 3 y al Subgrupo B1 Caso 6 deberán instrumentarse mediante la instalación de acelerógrafos cuyos registros deberán ser enviados al Instituto después de un sismo con magnitud mayor a 6 grados en la escala de Richter». (p. 49). Este es el párrafo adicionado el 15 de diciembre de 2017 d.C. al Artículo 165 del Capítulo VI del Diseño por Sismo lo que permite obtener mayor información para mejorar los modelos sísmicos, aunque la escala de Richter sólo llega a 6,9 grados. Aplicada la profesión de manera adecuada resulta posible construir edificios como Torre Reforma de 246 metros de altura, laureada por *Internationaler Hochhaus Preis*, Premio Internacional de Rascacielos, como mejor rascacielos del mundo, considerando la combinación de sostenibilidad ejemplar, forma externa y calidad espacial interna, incluyendo los aspectos sociales, al crear el diseño. Es de reconocer que tras su construcción que inició en mayo de 2008 d.C. y concluyó en mayo de 2016 d.C. se vio sometida al terremoto de 2017 d.C. y resistió sin daños en virtud de los 60 metros de profundidad de su cimentación cuya estratigrafía se definió a partir de sondeos. Resultaron los estratos característicos del lugar de desplante conforme la profundidad de acuerdo al documento Diseño de la cimentación de Torre Reforma, México D.F., de Suárez Almazán en dirección de Alarcón Reyero ser:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0,0 $m$ a 2,5 $m$ | Relleno | Material para relleno y limo arenoso | |
| 2,5 $m$ a 4,5 $m$ | Costra superficial | Suelos limoarenosos | |
| 4,5 $m$ a 23,5 $m$ | Serie arcillosa superior | Secuencia de arcillas de la zona de lago | |
| 23,5 $m$ a 29,0 $m$ | Capa dura | Depósito heterogéneo | $\{N_{SPT} = [25, >50]\}$ |
| 29,0 $m$ a 33,0 $m$ | Serie arcillosa inferior | Arcilla preconsolidada | $\{N_{SPT} = [10, 30]\}$ |
| | | Ceniza y vidrio volcánico | $\{N_{SPT} = >50\}$ |
| 33,0 $m$ a 40,0 $m$ | Serie limos arenosos | Limos arenosos | $\{N_{SPT} = [30, >50]\}$ |
| 40,0 $m$ a 56,0 $m$ | Serie areno limosa | Arena pumítica y limos | $\{N_{SPT} = [30, >50]\}$ |
| 56,0 $m$ a 66,0 $m$ | Intercalaciones | Limos, arcillas, arenas | $\{N_{SPT} = [15, >50]\}$ |
| 66,0 $m$ a 73,5 $m$ | Depósito arena y limo | Arena fina media, limosa | $\{N_{SPT} = [35, >50]\}$ |
| 73,5 $m$ a 77,8 $m$ | Estrato | Arcilla dura | $\{N_{SPT} = >50\}$ |
| 77,8 $m$ a 80,0 $m$ | Profundidad explorada | Arena fina media | $\{N_{SPT} = >50\}$ |

La Tierra vibra. Tener consciencia de ello hace resonancia con Ingeniería, incluso a 432 Hz ॐ

TRANSPORTE

*«Nuestro Ford mismo hizo mucho por trasladar*
*el énfasis de la verdad y la belleza*
*a la comodidad y la felicidad.*
*La producción en masa, en serie o en cadena,*
*exigía este cambio fundamental de ideas.*
*La felicidad universal mantiene en marcha constante*
*las ruedas, los engranajes;*
*la verdad y la belleza, no».*
(Huxley, 24 d.F., p. 168).

El desplazamiento de una persona asociado a un origen y un destino preestablecidos, consecuencia de un propósito es un viaje. Si no se tiene destino ni propósito es deambular.

Tres elementos básicos determinan la Ingeniería de Transporte:

| | | |
|---|---|---|
| Vehículo | Infraestructura | Red de Transporte |
| Automóvil de turismo | Carretera | Red Nacional de Caminos |

Cifras preliminares del INEGI dan cuenta del parque vehicular en México de 31 964 916 automóviles de turismo a Julio de 2019 d.C.. Un auto cada cuatro mexicanos. El automóvil de turismo es el nombre dado al modo de transporte que tiene por lo menos cuatro ruedas y hasta 9 plazas, según la Secretaría de Comunicaciones y Transportes. Con más de 31 millones es el modo de transporte más utilizado en el país. En consecuencia, el medio de transporte terrestre representa el 75% de los viajes que se realizan, fomentando en infraestructura a las carreteras. Carretera: Adaptación de una faja de materiales sobre la superficie terrestre so las condiciones de ancho, alineamiento y pendiente para permitir el desplazamiento adecuado de los vehículos para los cuales ha sido diseñada.

Son 171 347* kilómetros de carreteras pavimentadas las que componen la Red Nacional de Caminos, principal Red de Transporte en México, igual a darle 4,275656... vueltas al mundo.

*RNC Versión 2018 d.C.

Ancho, alineamiento y pendiente, características geométricas de la carretera. Se determinan a partir del Volumen Horario de Proyecto, *VHP*, parámetro que define el número de vehículos que pasan por el tramo, durante una hora estipulada para el diseño. El volumen horario que se utiliza para diseñar es el 30º mayor volumen horario del año. Se oculta en el factor *k*, relación de 30VH, 30º Volumen Horario, con *TDPA*, Tránsito Diario Promedio Anual. La justificación de esta decisión es estadística. La distribución normal, tabla Z, requiere muestras de mínimo 30 datos. Utilizar 30VH implica que la carretera diseñada, teóricamente será colmada en 30 horas de las 8760 que tiene un año civil. El factor *D*, se utiliza para considerar la distribución por sentidos de circulación. De esta manera se establece la demanda de tránsito para ofertar la infraestructura que satisfaga. Se formula *VHP*:

III.37 Volumen Horario de Proyecto

$$VHP = TDPA \cdot k \cdot D$$

*VHP* Volumen Horario de Proyecto

*TDPA* Tránsito Diario Promedio Anual

*k* Factor $k = 30VH/TDPA$

*D* Factor de distribución por sentidos

Los valores de *k* se engloban estadísticamente en:

Tabla III cuatro || $k_{(II)}$

| Zona | *k* |
|---|---|
| Urbana | 0,08 |
| Suburbana | 0,12 |
| Rural | 0,18 |

La operación de la ecuación III.37 conduce a obtener el Volumen Horario de Proyecto. La situación relevante para uno como ingeniero, al analizar el flujo vehicular para predecir su comportamiento, está en la manera de interpretar los datos y establecer un modelo.

Un modelo sirve para representar un fenómeno en función de un propósito a analizar. Los diferentes modelos que describen el tráfico vehicular dan aproximaciones matemáticas con cierto grado de apego a lo real. Toman algunas de sus características, desprecian otras, en función del enfoque.

Someramente existen tres enfoques de análisis: Microscópico Cinético (Mesoscópico) Macroscópico

Microscópico

Se sigue cada vehículo en su trayectoria, estudiando su dinámica con el conjunto del tránsito.

Cinético (Mesoscópico)

Se utiliza función de distribución siguiendo una ecuación de evolución respecto al tiempo aplicando el Cálculo Diferencial al trabajar con la variación de la velocidad entre $v$ y $v + \mathrm{d}v$.

Macroscópico

Se estudia el flujo vehicular considerando el problema de manera análoga al estudio del comportamiento de un fluido en régimen de flujo compresible. Ver III.21

Utilizando el enfoque Macroscópico, la integral de la densidad en función del tiempo y del espacio con respecto a la longitud del tramo carretero, arroja el número de autos que viajan, deambulan, transitan, $N$.

III.38 $$N = \int \rho\ (x, t)\ \mathrm{d}x$$

Con un año civil de tiempo utilizado para calcular el número de autos involucrados, se obtiene *TDPA*, Tránsito Diario Promedio Anual, al dividir el total, $N$, entre los 365 días calendario.

III.39 $$TDPA = \frac{N}{365}$$

Resulta ambiciosa la idea de encontrar una función de densidad que represente el comportamiento del flujo vehicular, sin embargo ante lo elaborado del planteamiento, en la práctica y siendo la Ingeniería Civil pragmática, los datos se obtienen de manera elemental: Contando.

**Manual para obtener los volúmenes de tránsito en carreteras**
**2016**
**Secretaría de Comunicaciones y Transportes**

«El conocimiento oportuno y permanente del uso de la infraestructura vial es básico para el análisis y la toma de decisiones sobre la misma. La Secretaría de Comunicaciones y Transportes (SCT) incluye entre sus actividades la operación de un sistema de conteo vehicular de las carreteras del país, que permite conocer anualmente los volúmenes vehiculares, clasificación y velocidades del tránsito que circula por la red de carreteras nacional.
Los datos del flujo de tránsito es un insumo básico en la planeación, proyecto, mantenimiento, gestión, evaluación económica, evaluación ambiental y administración de la infraestructura vial, para lo cual la SCT ha realizado conteos vehiculares desde la década de los 70's utilizando metodologías y procedimientos registrados por la Dirección General de Servicios Técnicos (DGST), con los cuales se ha programado, recopilado y analizado la información obtenida a través de los conteos; registrando los resultados en el libro de Datos viales». (p. 7).

Podemos seguir contando y seguir construyendo cada vez más carreteras.

También podemos entender la posición de Lewis-Mogridge formulada hace 29 años:
El tráfico se expande para satisfacer el espacio disponible en la carretera.

*«El único viaje verdadero, el único baño de juventud, no sería ir hacia nuevos paisajes, sino tener otros ojos, ver el universo con los ojos de otro, de otros cien, ver los cien universos que cada uno de ellos ve, que cada uno de ellos es».*

(Proust, 1923 E.C., p. 139).

CONSTRUCCIÓN

Mateo 17:20 La construcción de carreteras inicia con el Movimiento de tierras, intervenciones que se realizan con el terreno, modificándolo so las condiciones de la obra. El Cálculo Integral se aplica como herramienta en la llamada Curva Masa, diagrama que permite determinar la distancia económica de los volúmenes excavados y calcular el costo para llevar a cabo dicha distribución. Para generar una Curva Masa se parte del Perfil Natural del Terreno. Se obtiene un plano coordenado en el cuál las abscisas corresponden al cadenamiento, con marcaje en cada estación, EST, y las ordenadas corresponden a la elevación topográfica, $z$. Posteriormente se traza la Línea Subrasante de la carretera, la cual funge de eje $x$ para realizar la integración. El resultado de la integración del Perfil del Terreno produce las ordenadas de un nuevo plano coordenado con el cadenamiento como abscisas y el volumen acumulado como ordenadas. Este nuevo plano es la Curva Masa. Tabla III cinco || $z$

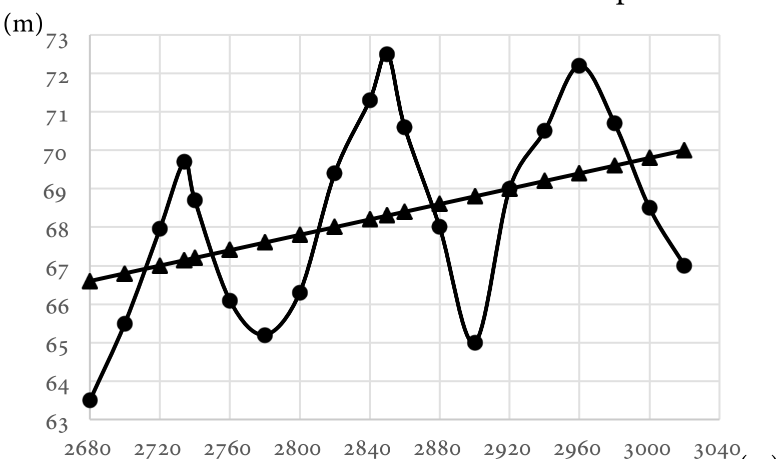


Figura III 11 Perfil Natural del Terreno • & Perfil Carretero ▲

| EST | Elevaciones $z$ | |
|---|---|---|
| | Terreno • | Subrasante ▲ |
| 2680 | 63.50 | 66.60 |
| 2700 | 65.50 | 66.80 |
| 2720 | 67.95 | 67.00 |
| 2734 | 69.70 | 67.14 |
| 2740 | 68.70 | 67.20 |
| 2760 | 66.10 | 67.40 |
| 2780 | 65.20 | 67.60 |
| 2800 | 66.30 | 67.80 |
| 2820 | 69.40 | 68.00 |
| 2840 | 71.30 | 68.20 |
| 2850 | 72.50 | 68.30 |
| 2860 | 70.60 | 68.40 |
| 2880 | 68.00 | 68.60 |
| 2900 | 65.00 | 68.80 |
| 2920 | 69.00 | 69.00 |
| 2940 | 70.50 | 69.20 |
| 2960 | 72.20 | 69.40 |
| 2980 | 70.70 | 69.60 |
| 3000 | 68.50 | 69.80 |
| 3020 | 67.00 | 70.00 |

«-Mira las aves. Los nidos que construyen en los árboles, ¿son naturales o artificiales?
-Son naturales, claro.
-Entonces todo lo que el hombre hace también es natural. Nosotros, que tenemos un concepto antropocéntrico de la naturaleza, dividimos todo entre cosas naturales y cosas artificiales, y decimos que las artificiales son las que hacen los hombres y las naturales las propias de la naturaleza, las plantas y los animales. Pero eso es una convención humana».
(Rodrigues, 2006 d.C., pp. 89 & 90).

Benoît Mandelbrot resaltó que las montañas no son conos. Su conformación es irregular y ello no ha sido impedimento para la construcción de obras civiles ya que se eximen los detalles aplicando el criterio del ingeniero: Cuadrado. Los volúmenes que tienen harta variación se reducen a calcular un prismoide que tendría fórmula $[L \cdot (A_1 + 4A_m + A_2)]/6$. Incluso la fórmula anterior se simplifica aún más, puesto que se considera que las generatrices del prismoide son paralelas a un plano directriz, por lo que, para el cálculo, los volúmenes se asumen como:

III.40 $$V_{1|2} = \frac{L \cdot (A_1 + A_2)}{2}$$

Se agrega el Factor Volumétrico para ajustar el tonteo del tanteo en la diferencia de compactación entre el material que corresponde a un Corte y a un Terraplén. Tabla III seis || $V$

TABLA PARA EL CÁLCULO DE LAS ORDENADAS DE LA CURVA MASA

| EST | Elevaciones | | Espesores | | Áreas | | A1 + A2 | | Semi- | Volumen | | Factor | Volúmenes | | Suma algebráica | | Ordenadas |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Terreno | Subrasante | Corte | Terraplén | Corte | Terraplén | Corte | Terraplén | distancia | Corte | Terraplén | volumétrico | Corte | Terraplén | Corte | Terraplén | curva masa |
| 2+680 | 63.50 | 66.60 | | 3.10 | | 45.415 | | | | | | 0.9 | | | | | 10000 |
| 700 | 65.50 | 66.80 | | 1.30 | | 15.535 | | 60.95 | 10 | | 609.50 | 0.9 | | 677.22 | | 677.22 | 9322.78 |
| 720 | 67.95 | 67.00 | 0.95 | | 10.403 | | 10.40 | 15.54 | 10 | 104.03 | 155.35 | 0.9 | 104.03 | 172.61 | | 68.59 | 9254.19 |
| 734 | 69.70 | 67.14 | 2.56 | | 32.154 | | 42.56 | | 7 | 297.89 | | 0.9 | 297.89 | | 297.89 | | 9552.08 |
| 740 | 68.70 | 67.20 | 1.50 | | 17.250 | | 49.40 | | 3 | 148.21 | | 0.9 | 148.21 | | 148.21 | | 9700.30 |
| 760 | 66.10 | 67.40 | | 1.30 | | 15.535 | 17.25 | 15.54 | 10 | 172.50 | 155.35 | 0.9 | 172.50 | 172.61 | | 0.11 | 9700.18 |
| 780 | 65.20 | 67.60 | | 2.40 | | 32.64 | | 48.18 | 10 | | 481.75 | 0.9 | | 535.28 | | 535.28 | 9164.91 |
| 800 | 66.30 | 67.80 | | 1.50 | | 18.375 | | 51.01 | 10 | | 510.15 | 0.9 | | 566.83 | | 566.83 | 8598.07 |
| 820 | 69.40 | 68.00 | 1.40 | | 15.960 | | 15.96 | 18.38 | 10 | 159.60 | 183.75 | 0.9 | 159.60 | 204.17 | | 44.57 | 8553.51 |
| 840 | 71.30 | 68.20 | 3.10 | | 40.61 | | 56.57 | | 10 | 565.70 | | 0.9 | 565.70 | | 565.70 | | 9119.21 |
| 850 | 72.50 | 68.30 | 4.20 | | 59.640 | | 100.25 | | 5 | 501.25 | | 0.9 | 501.25 | | 501.25 | | 9620.46 |
| 860 | 70.60 | 68.40 | 2.20 | | 26.84 | | 86.48 | | 5 | 432.40 | | 0.9 | 432.40 | | 432.40 | | 10052.86 |
| 880 | 68.00 | 68.60 | | 0.60 | | 6.54 | 26.84 | 6.54 | 10 | 268.40 | 65.40 | 0.9 | 268.40 | 72.67 | 195.73 | | 10248.59 |
| 900 | 65.00 | 68.80 | | 3.80 | | 59.660 | | 66.20 | 10 | | 662.00 | 0.9 | | 735.56 | | 735.56 | 9513.03 |
| 920 | 69.00 | 69.00 | | | | | | 59.66 | 10 | | 596.60 | 0.9 | | 662.89 | | 662.89 | 8850.15 |
| 940 | 70.50 | 69.20 | 1.30 | | 14.69 | | 14.69 | | 10 | 146.90 | | 0.9 | 146.90 | | 146.90 | | 8997.05 |
| 960 | 72.20 | 69.40 | 2.80 | | 35.840 | | 50.53 | | 10 | 505.30 | | 0.9 | 505.30 | | 505.30 | | 9502.35 |
| 980 | 70.70 | 69.60 | 1.10 | | 12.21 | | 48.05 | | 10 | 480.50 | | 0.9 | 480.50 | | 480.50 | | 9982.85 |
| 3+000 | 68.50 | 69.80 | | 1.30 | | 15.535 | 12.21 | 15.54 | 10 | 122.10 | 155.35 | 0.9 | 122.10 | 172.61 | | 50.51 | 9932.33 |
| O20 | 67.00 | 70.00 | | 3.00 | | 43.500 | | 59.04 | 10 | | 590.35 | 0.9 | | 655.94 | | 655.94 | 9276.39 |

Las ordenadas de la Curva Masa, el volumen acumulado, arrancan de un número arbitrario mayor a cero, en este caso 10000, con el propósito de tener una gráfica con valores positivos. Sus propiedades son:

- La curva crece en el sentido del cadenamiento por corte y decrece por terraplén.
- Las cimas y las simas corresponden a máximos y a mínimos de volúmenes acumulados.
- Toda línea horizontal que corta a la curva indica la distancia para compensar un terraplén con un corte, esto es, que el terraplén se rellena con el material de corte.
- La diferencia de ordenada entre dos puntos refiere a la diferencia de volumen entre estaciones del cadenamiento.

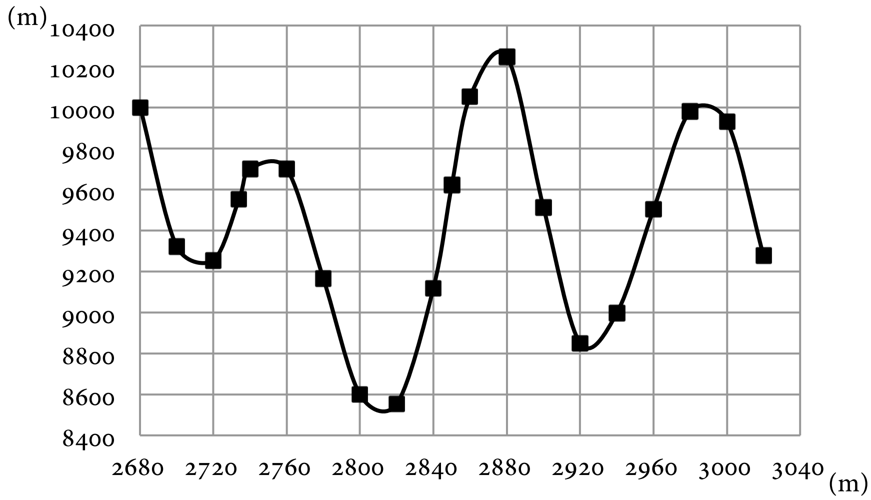


Figura III 12 Curva Masa ■

Con los datos que recopila la gráfica anterior se toma la decisión de la maquinaria a utilizar. Se definen Líneas Compensadoras que resulten convenientes, según los rangos de operación de los equipos, al considerar en metros su distancia económica de acarreo:

- Tractor sobre orugas (0, 100]
- Motoescrepa (100, 1500]
- Camión (1500, ∞)

Así, una Línea Compensadora delimita junto con la Curva Masa un volumen de excavación por una distancia media de acarreo. A las decisiones ante las opciones bajo el esquema Curva Masa cabe mencionar que el cálculo es con aproximaciones contra la incertidumbre de traslados desde la zona excavada en cortes entre estaciones hacia terraplenes hasta lograr la conformación topográfica para desplantar la carretera por donde se conducirá el tránsito vehicular según lo establecido en el proyecto sin pretender exactitud so las irregularidades que se eximieron sobre el criterio tras aceptar que promediar resulta aceptable. A su vez, se indica:

- Si la Curva Masa queda sobre la Línea Compensadora el acarreo será hacia adelante.
- Si la Curva Masa queda bajo la Línea Compensadora, el acarreo será hacia atrás.

Siendo la Curva Masa resultante de la integración del Perfil del Terreno considerando a la Línea Subrasante, sus puntos mínimos y máximos indican ceros en su correspondiente derivada lo que significa que en dichos puntos el terreno pasa de requerir terraplén a requerir corte y viceversa, respectivamente. Construida la Subrasante se tiene la primer capa del pavimento, sistema de capas superpuestas que se adecuan para los vehículos que viajan.

Figura III 13 $\chi$

Φύσις Naturaleza *Naturæ*

Principio creador y organizador de todo lo que existe

Cumbre sobre la Acción Climática ONU 2019 Greta Thunberg 23 de septiembre de 2019 d.C. «La gente está sufriendo, la gente está muriendo. Ecosistemas enteros están colapsando. Estamos en el inicio de una extinción masiva y lo único de lo que ustedes pueden hablar es de dinero y de cuentos de hadas sobre crecimiento económico eterno. ¡Cómo se atreven!».

Modelo de celda: Se utiliza para obtener una estimación de la concentración, $\chi$, de contaminante en el aire, asumiendo una emisión difusa. Tipifica los casos de ciudades en las que la fuente de contaminación son los automóviles por su combustión de hidrocarburos.

III.41 $$\chi = \chi_0 + \frac{qL}{Hv}$$

| | |
|---|---|
| $\chi$ | Concentración homogénea |
| $\chi_0$ | Concentración de fondo |
| $q$ | Emisión por unidad de área |
| $L$ | Longitud de la ciudad |
| $H$ | Altura de mezclado |
| $v$ | Velocidad del viento, sentido $L$ |

Contāmināre Contaminar Μόλυνση

Profanar, ensuciar, volver inmundo, amancillar

Modelo de dispersión: Sirve para tener una estimación de la concentración, $\chi$, de contaminante en el aire, asumiendo una emisión puntual. Tipifica los casos en que la fuente de contaminación es una chimenea industrial, dando salida a la atmósfera a gases producidos.

III.42 $$\chi_{xyz} = \frac{Q}{2\pi\sigma_y\sigma_z v}\cdot e^{-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}}\cdot\left[e^{-\frac{(z-H_e)^2}{2\sigma_z^2}} + e^{-\frac{(z+H_e)^2}{2\sigma_z^2}}\right]$$

| | |
|---|---|
| $\chi_{xyz}$ | Concentración en punto $(x, y, z)$ |
| $\sigma_y$, $\sigma_z$ | Coeficientes de dispersión |
| $Q$ | Emisión por unidad de tiempo |
| $x, y, z$ | Coordenadas |
| $H_e$ | Altura efectiva |
| $v$ | Velocidad del viento, sentido $x$ |

Modelo de celda múltiple: Es la combinación del modelo de celda con el modelo de dispersión. Se emplea para mantener emisiones continuas y emisiones puntuales a la vez en regiones definidas y calcular su concentración estimada y establecer su evolución a través del tiempo.

Los modelos de concentración de contaminación son modelos matemáticos que proporcionan una estimación de la cantidad de sustancia presente en función de los parámetros señalados.

Son modelos heurísticos y empíricos.

Heurísticos, ya que identifican que la acumulación de sustancia, $\chi$, responde a la Ley de conservación de la materia, con la ecuación:

III.43 Acumulación = Entrada - Salida ± Transformación

Empíricos, debido a que $\chi_o$ y $q$ se determinan mediante muestreo promediado y $H_e$, $\sigma_y$, $\sigma_z$ se obtienen con expresiones basadas en la experiencia que se resumen en fórmulas y tablas con nombre de sus autores.

III.44 Fórmula empírica de J. Z. Holland

$$H_e = H + \frac{v_s Ø\cdot}{v}\left[1{,}5 + 2{,}68\cdot 10^{-3} p Ø\cdot \left(\frac{T_s - T_a}{T_s}\right)\right]$$

| | | |
|---|---|---|
| $H_e$ | Altura efectiva | (m) |
| $H$ | Altura de la chimenea | (m) |
| $v_s$ | Velocidad de salida del gas | (m/s) |
| Ø | Diámetro de la chimenea | (m) |
| $v$ | Velocidad del viento, sentido $x$ | (m/s) |
| $p$ | Presión atmosférica | (hPa) |
| $T_s$ | Temperatura de salida del gas | (K, ºC, ºF, siendo congruentes) |

Tabla III siete || $\sigma_y$, $\sigma_z$

| Coeficientes de dispersión de Griffiths | | |
|---|---|---|
| Estabilidad | $\sigma_y$ | $\sigma_z$ |
| A, B | $0{,}32x\cdot(1+0{,}0004x)^{-1/2}$ | $0{,}24x\cdot(1+0{,}0001x)^{-1/2}$ |
| C | $0{,}22x\cdot(1+0{,}0004x)^{-1/2}$ | $0{,}2x$ |
| D | $0{,}16x\cdot(1+0{,}0004x)^{-1/2}$ | $0{,}14x\cdot(1+0{,}0003x)^{-1/2}$ |
| E, F | $0{,}11x\cdot(1+0{,}0004x)^{-1/2}$ | $0{,}08x\cdot(1+0{,}0015x)^{-1/2}$ |

La estabilidad se establece mediante las tablas empíricas de Pasquill que involucran la velocidad del viento, la radiación solar y el tipo de nubosidad, como *Cumulus humilis*.

Tabla III ocho || Estabilidad

En la condición de estabilidad de Pasquill la velocidad del viento involucrada es la medida a 10 metros de altura, $v_{10}$. La radiación solar se estima con el ángulo de altitud solar, relacionado con la hora del día. En nubosidad se utilizan octavos de cielo para determinar su influencia.

| Condición de estabilidad de Pasquill | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $v_{10}$ | Día | | | Noche | |
| | Radiación solar | | | Nubosidad | |
| | Fuerte | Moderada | Débil | ≥ 4/8 | < 4/8 |
| [0, 2) | A | A, B | B | E | F |
| [2, 3) | A, B | B | C | E | F |
| [3, 5) | B | B, C | C | D | E |
| [5, 6] | C | C, D | D | D | D |
| > 6 | C | D | D | D | D |

La importancia en determinar la concentración de contaminantes en el aire radica en los daños que producen. Monóxido de Nitrógeno, Monóxido de Dinitrógeno, Trióxido de Dinitrógeno, Catión Aluminio, Monóxido de Carbono, Dióxido de Carbono, Dióxido de Nitrógeno. NO, $N_2O$, $N_2O_3$, [$Al^{3+}$, CO, $CO_2$, $NO_2$] *bis*, contaminantes generados por fábricas y por el tránsito vehicular que es promovido socialmente ya que el no tener automóvil es plebada. Se calcula la cantidad de contaminante en la atmósfera mediante los modelos de concentración que son resultado de la aplicación del Cálculo Infinitesimal, puesto que expresan variaciones.

III.45 Modelo de celda

$$\chi = \chi_0 + \frac{qL}{Hv} \quad \because \quad \text{Acumulación} = \text{Entrada} - \text{Salida} \pm \text{Transformación}$$

$$\frac{\text{d Acumulación}}{\text{d}t} = \frac{\text{d Entrada}}{\text{d}t} - \frac{\text{d Salida}}{\text{d}t} \pm \frac{\text{d Transformación}}{\text{d}t}$$

El Modelo de celda considera que el contaminante es una sustancia conservativa por lo que iguala a cero la transformación. Considerar como nula la acumulación del contaminante simplifica la expresión.
En situaciones en las que se presenta contingencia ambiental deja de ser un modelo representativo por dicha consideración.

$$0 = (\chi_0 WHv + qWL) - \chi WHv \pm 0$$

$$\chi WHv = (\chi_0 WHv + qWL)$$

$$\chi = \frac{(\chi_0 WHv + qWL)}{WHv}$$

$$\chi = \chi_0 + \frac{qL}{Hv}$$

***Quod erat demonstrandum***

El Modelo de dispersión es llamado también Modelo gaussiano de dispersión. Interpretándola como una situación azarosa, la dispersión del contaminante se considera que sigue una distribución normal; la estela del contaminante formando una campana de Gauss, expresada en la función gaussiana:

III.46 Función gaussiana

$$f(x) = ae^{-\frac{(x-b)^2}{2c^2}}$$

| | | |
|---|---|---|
| $a$ | Ordenada extrema | [Moda, $\hat{x}$] |
| $b$ | Centro de campana | [Mediana, $\tilde{x}$] |
| $c$ | Ancho de campana | [Desviación estándar, σ] |
| $e$ | Número $e$ | |
| $x$ | Posición | |

Teniendo una emisión de gases constante, $Q$, se desprecia la dispersión en el eje $X$, eje idéntico a la dirección del viento, asumiendo que en tal dirección el efecto de la velocidad del viento, $v$, predomina.

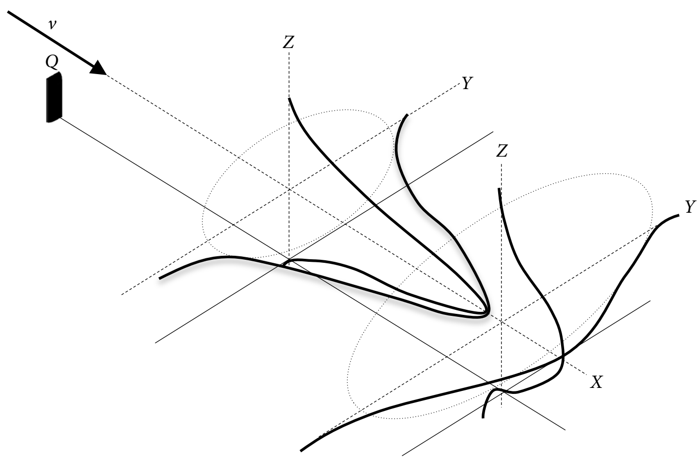



Figura III-14 Modelo de dispersión

Los condicionantes $a$, $b$, $c$ se establecen para representar las circunstancias del gas que sale por la chimenea de una industria, dando lugar al análisis de la contaminación atmosférica dispersa.

En $Y$: $a = \frac{1}{\sigma_y\sqrt{[2\pi]}}$ $b = 0$ Centro de campana en el eje $X$ $c = \sigma_y$

En $Z$: $a = \frac{1}{\sigma_z\sqrt{[2\pi]}}$ $b = H_e$ Centro de campana en altura efectiva $c = \sigma_z$

Se define $a$ tal que la integral de la función gaussiana sea igual a 1, haciéndola entonces una función de densidad de una variable aleatoria con distribución normal, que es el modelado decidido para la dispersión, con lo que se tiene:

III.47 Integral de la función gaussiana

$$\int_{-\infty}^{\infty} ae^{\frac{-(x-b)^2}{2c^2}}\,dx = a\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-(x-b)^2}{2c^2}}\,dx \qquad \text{Si } y = x - b \quad \text{entonces } dy = dx$$

$$a\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-y^2}{2c^2}}\,dy \qquad \text{Si } z = \frac{y}{\sqrt{2}c} \quad \text{entonces } dz = \frac{dy\cdot\sqrt{2}c - 0\cdot y}{\{\sqrt{2}c\}^2} = \frac{dy}{\sqrt{2}c}$$

$$a\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-y^2}{2c^2}}\cdot 1\cdot dy = a\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-y^2}{2c^2}}\cdot\frac{\sqrt{2}c}{\sqrt{2}c}\cdot dy = a\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2}\sqrt{2}c\,dz = a\sqrt{2}c\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2}dz$$

$$\text{Siendo} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2}dz = \sqrt{\pi} \ \because \ \text{Integral de Gauss} \ \therefore \int_{-\infty}^{\infty} ae^{\frac{-(x-b)^2}{2c^2}}\,dx = a\sqrt{2}c\cdot\sqrt{\pi} = ac\sqrt{2\pi}$$

$$\text{Si } a = \frac{1}{c\sqrt{2\pi}} \quad \text{entonces} \quad \int_{-\infty}^{\infty} ae^{\frac{-(x-b)^2}{2c^2}}\,dx = ac\sqrt{2\pi} = \frac{c\sqrt{2\pi}}{c\sqrt{2\pi}} = 1$$

La función gaussiana, siendo función de distribución, establece la disposición de los componentes. Corresponde ahora establecer el total de contaminante a distribuir. Siendo $Q$ el gasto del contaminante, se indica con ello la cantidad de emisión por unidad de tiempo. Para definir el tiempo transcurrido se parte de que en $t = 0$ se tiene $Q = 0$. Empieza a correr el tiempo y comienza la emisión. Analizando en la posición $x$, para que el contaminante haya llegado a tal ubicación por acción del viento que tiene velocidad $v$, el tiempo transcurrido ha de ser tal que satisfaga $x = vt$ con lo que se tiene que la masa emitida para el instante de estudio $\chi_{xyz}$ se calcula con $Q/v$ so la premisa que el sistema ha llegado al estado estacionario, esto es, que la concentración en cierto punto equivale a la concentración que le llega desde la chimenea sin que haya acumulación.

III.48 Modelo de dispersión

$$\chi_{xyz} = \frac{Q}{v} \cdot \frac{1}{\sigma_y \sqrt{[2\pi]}} e^{\frac{-(y-0)^2}{2\sigma_y^2}} \cdot \frac{1}{\sigma_z \sqrt{[2\pi]}} e^{\frac{-(z-H_e)^2}{2\sigma_z^2}}$$

$$\chi_{xyz} = \frac{Q}{2\pi\sigma_y\sigma_z v} \cdot e^{-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}} \cdot e^{-\frac{(z-H_e)^2}{2\sigma_z^2}}$$

Se encontró que el Modelo de dispersión emite resultados válidos cuando el contaminante es absorbido por el suelo. Sin embargo, cuando no se cumple la absorción de la sustancia nociva, como con el Dióxido de Carbono, $CO_2$, el rebote del contaminante aumenta su concentración en la atmósfera. Para incluir este efecto se hizo convención en Ingeniería considerar sumar la aportación de una chimenea ficticia que emita gases a profundidad $H_e$, así el rebote se considera que corresponderá a la distribución a partir de este segundo punto de emisión. Esta modificación sólo está involucrando la distribución en *Z* y desprecia el efecto en *Y*. Además, para distancias cercanas al punto de emisión se duplican las concentraciones calculadas cuando aún no se presenta en realidad el efecto de rebote empero es el modelo aceptado para calcular la concentración de contaminantes que desde el planteamiento se abordó como azaroso y se aproxima su determinación esperando un comportamiento normal.

III.42 Modelo de dispersión modificado

$$\chi_{xyz} = \frac{Q}{2\pi\sigma_y\sigma_z v} \cdot e^{-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}} \cdot [e^{-\frac{(z-H_e)^2}{2\sigma_z^2}} + e^{-\frac{(z+H_e)^2}{2\sigma_z^2}}]$$

«El azar no es más que la medida de la ignorancia del hombre».
Henri Poincaré

El problema de contaminación atmosférica existe. Las enfermedades respiratorias son la tercer causa de muerte en el mundo. Los tres principales responsables de poner fin a la vida humana:

Primero: Corazón enfermo.

Segundo: Cerebro enfermo. Tercero: Enfermedades respiratorias

Cardiopatía isquémica | Afección cerebrovascular | Infección de las vías respiratorias inferiores
Enfermedad pulmonar obstructiva crónica
(OMS, 2018 d.C., p. 1).

Las estadísticas sobre las causas de muerte dan panorama para orientar la actividad humana.
Las estadísticas sobre nuestra actividad humana dan panorama de la situación actual.

La industria del petróleo es la principal causa de contaminación del aire y ocupa el quinto puesto entre los sectores económicos con mayor flujo. Si en la lid entre economía y ecología se riñe el futuro, concierne a la Ingeniería Ambiental crear soluciones para preservarlo y mejorarlo. Greta Thunberg enfatizó al respecto en TEDx Stockholm 2018 d.C.:
«Ahora estamos al final de mi charla y aquí es donde las personas usualmente empiezan a hablar de esperanza, paneles solares, energía eólica, economía circular, y así, pero no voy a hacer eso. Hemos tenido 30 años de palabras de aliento y venta de ideas positivas. Y lo siento pero no funciona porque si lo hiciera las emisiones habrían disminuido ya. No lo han hecho. Y sí, necesitamos esperanza, por supuesto que sí. Pero la única cosa que necesitamos más que esperanza es acción».

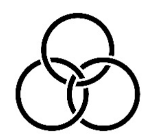
Droga
Prostitución
Banca
Armamento
Petróleo
Pornografía
Farmacéutica
Alcohol
Deporte
Entretenimiento
Tráfico de personas
Falsificación

Hace 32 años, en 1987 d.C., se publicó el Informe Brundtland que exponía el alto costo ambiental que impone el desarrollo económico actual. Por primera vez se utilizó el término desarrollo sostenible y se buscó replantear el paradigma de nuestra sociedad. No se ha hecho, no lo hemos hecho, aún y cuando tenemos la estimación de concentración de contaminantes mediante los modelos presentados, que son lo que es un modelo:

Representación de la realidad.

# Capítulo IV Modelo Físico del Teorema Fundamental del Cálculo

*El principio de todas las cosas es la mónada o unidad; de esta mónada nace la dualidad indefinida que sirve de sustrato material a la mónada, que es su causa. De la mónada y la dualidad indefinida surgen los números; de los números, puntos; de los puntos, líneas; de las líneas, figuras planas; de las figuras planas, cuerpos sólidos; de los cuerpos sólidos, cuerpos sensibles, cuyos componentes son cuatro: fuego, agua, tierra y aire; estos cuatro elementos se intercambian y se transforman totalmente el uno en el otro, combinándose para producir un universo animado, inteligente, esférico, con la tierra como su centro, y la tierra misma también es esférica y está habitada en su interior. También hay antípodas, y nuestro 'abajo' es su 'arriba'.*
*- Diógenes Laercio*



| | | |
|---|---|---|
| Lo real. | Lo imaginario. | Lo simbólico. |
| Lo real es. | Lo imaginario es lo que pienso que es. | Lo simbólico es lo que escribo que es. |
| Lo real es. | Lo imaginario es lo que piensas que es. | Lo simbólico es lo que lees que es. |
| Lo real es. | Lo imaginario es lo que pensarás que es. | Lo simbólico es lo que expresarás. |

Cuando lo que lees coincide con lo que escribo, entonces lo que piensas lo estoy pensando. Tu realidad es mi realidad. La coincidencia de realidades nos aproxima progresivamente a lo real, que es el propósito de la ciencia. La realidad que percibimos está formada de materia. ¿De qué está formada la materia? Átomos, "Indivisibles", que resultan ser divisibles en electrones, protones y neutrones. El 99.999% de la masa, la cantidad de materia de un átomo, se concentra en su núcleo. El radio de un átomo equivale a la diez mil millonésima parte de un metro, distancia llamada Ångström, Å. Dentro de la esfera con volumen de $(4/3)\pi\text{Å}^3$, se encuentra el núcleo con un tamaño diez mil veces más pequeño, por lo que la sentencia de Demócrito «Nada existe, excepto átomos y espacio vacío; lo demás es opinión», resulta ser, en mi opinión, un exceso, ya que el mismo núcleo atómico se puede dividir mediante seis quarks en tomos de diferentes 'sabores'. *Up, Down, Strange*; Arriba, Abajo, Extraño, son los tres primeros que le daban algo de justificación al nombre quark, tomado de Finnegans Wake. Llegó la ciencia a descubrir *Top, Bottom, and between them the Charm*; Cima, Sima, y entre ellos el Encanto. Seis 'sabores', que se mantienen unidos mediante tres 'colores', es el simbólico de la clasificación de los quarks, partículas elementales, a menos que la Teoría de Cuerdas se legisle. La cuestión es encontrar ἀρχή, *arché*, en griego origen, el origen de la formación de la materia. Gottfried Wilhelm Leibniz consideró como *arché* a las mónadas en su obra Monadología. Para Leibniz, las mónadas son los indivisibles formales. Dado que la materia es divisible en partes a su vez divisibles, tenemos que las cuerdas buscan dividir a los quarks, la mónada de Leibniz es espiritual.

Nada existe, lo demás es opinión.

> *«La Monade don' t nous parlerons ici, n'est autre chose, qu'un substance simple, qui entre dans les composes; simple, c'est a dire, sans parties. Et il faut qu'il y ait des substances simple puisqu'il y a des composes; car le composé n'est autre chose qu'un amas, ou aggregatum des simples. Or la, ou il n'y a point de parties il n'y a ni entenduë, ni figure, ni divisibilité possible. Et ces monads sont les véritables Atomes de la Nature et en un mot les Elemens de choses».* (p. 1).

> «La Mónada de que aquí hablaremos, no es otra cosa que una substancia simple, que entra en los compuestos; simple, es decir, sin partes. Y es preciso que haya sustancias simples, puesto que las hay compuestas; porque todo compuesto no es más que un conjunto o agregado de simples. Así, como allí donde no hay partes, no hay extensión, forma ni divisibilidad posible, estas mónadas son los verdaderos átomos de la naturaleza, y en una palabra, los elementos de las cosas». (p. 1).

Allí donde no hay partes, *lo que no tiene partes*.

La dimensión cero, $x^o$, 1. Nuestro punto de partida. ·

## Definición física y matemática de las dimensiones

Dimensión tiene etimología del latín *dīmensiō*, abstracto de *dēmētiri,* que significa medir. Una dimensión es el nombre que se le da a cualquier cantidad medible.

En física se consideran tres dimensiones espaciales y el tiempo como una cuarta dimensión unidireccional. La teoría de cuerdas conjetura que el espacio tiene diez, once o veintiséis dimensiones. En matemáticas la dimensión de un espacio vectorial está definida como el cardinal, lo que es el número de elementos que conforma una base vectorial para dicho espacio. Se ha de notar que el cardinal es el máximo número de vectores linealmente independientes de dicho espacio y a su vez el mínimo número de vectores que forman un conjunto generador para todo el espacio.

Según la Topología, ciencia que se encarga del estudio de aquellas propiedades de los cuerpos geométricos que permanecen inalteradas por transformaciones continuas, la dimensión de un objeto es la medida del tamaño de sus propiedades de recubrimiento. En un espacio topológico, como introdujo Henri Poincaré, las rectas y las curvas tienen dimensión uno, los planos y superficies dimensión dos, los sólidos como los cubos tienen dimensión tres, siendo que la dimensión de un objeto es $n$ al necesitar $n$ variables independientes para describir un entorno de cada punto. Benoît Mandelbrot introdujo el concepto de dimensión fractal en el cual considera la dimensión de un cubo $n$-dimensional de longitud $\varepsilon^{d}$ capaz de cubrir el objeto de estudio. De existir dicho cubo $n$-dimensional la dimensión fractal será $d$. En Ingeniería Civil existe el proceso de Dimensionamiento en el cuál se seleccionan las medidas y características de los elementos estructurales con el fin de cubrir las solicitaciones a las que estará sometida la construcción. Las dimensiones espaciales, largo, ancho y alto, su conformación y resistencia determinan la capacidad de respuesta de un elemento. Las dimensiones se engloban como cada una de las magnitudes que fijan la posición de un punto en el espacio.

Dimensión como medida del espacio.

La geometría trata con las medidas y relaciones de líneas, ángulos, superficies y sólidos. Cerca del año 300 antes de Cristo, Euclides publicó en Alejandría un tratamiento de la geometría en *Στοιχεῖα*, Elementos. Comprende trece libros. En el Libro I se enuncian veintitrés definiciones, cinco postulados, cinco nociones comunes y cuarenta y ocho proposiciones acerca de la geometría del plano. En el Libro XI se enuncian veintiocho definiciones y treinta y nueve proposiciones acerca de la geometría del espacio. Cumpliendo las definiciones, postulados y nociones comunes de Euclides tenemos el concepto de dimensión de un espacio euclidiano.

Siendo *E* el espacio euclidiano, el exponente es su dimensión.

$E^0$ Cero dimensional Punto ·

$E^1$ Uno dimensional Línea —

$E^2$ Dos dimensional Plano ■

$E^3$ Tres dimensional Volumen

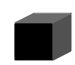


Figura IV 1 Representación del volumen

$E^4$ Cuatro dimensional Hipervolumen

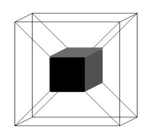


Figura IV 2 Representación del hipervolumen

El punto, la línea y el plano son los entes fundamentales de la geometría, conceptos apriorísticos. Su construcción determina la estructura del espacio de estudio y el número de dimensiones que constituyen dicho espacio.

Los objetos de estudio, punto, línea, plano, volumen, hipervolumen en su presentación más simple, llamados principales confinados en 1860 d.C. por William Kingdon Clifford, ahora llamados Símplex, son definidos como el mínimo conjunto convexo a partir de los vértices dados.

Cero Símplex Punto · Un vértice

Uno Símplex Línea — Dos vértices

Dos Símplex Triángulo ▲ Tres vértices

Tres Símplex Tetraedro Cuatro vértices

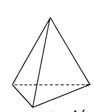


Figura IV 3 Representación del tetraedro

Cuatro Símplex Pentácoron Cinco vértices

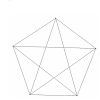


Figura IV 4 Representación del pentácoron

Dimensión Cero: La Dimensión Cero es el espacio que tiene como objeto al punto. El punto no tiene longitud, no tiene área, no tiene volumen y ningún otro atributo dimensional. Carece de atributo dimensional al ser la dimensión nula. «*Un punto es lo que no tiene partes*». No tiene unidad de medida en el Sistema Internacional de Unidades.

Primera Dimensión: La Primera Dimensión es el espacio que tiene como objeto a la línea. La línea tiene longitud. Se forma mediante la unión de dos puntos o también la prolongación de un punto en cierta dirección. «*Una línea es una longitud sin anchura*». El metro es su unidad de medida en el Sistema Internacional de Unidades.

Segunda Dimensión: La Segunda Dimensión es el espacio que tiene como objeto al plano. El plano tiene área. Se forma mediante la unión de tres puntos no alineados o también mediante la unión de una línea y un punto exterior. «*Una superficie es aquello que sólo tiene longitud y anchura*». El metro cuadrado es su unidad de medida en el Sistema Internacional de Unidades.

Tercera Dimensión: La Tercera Dimensión es el espacio que tiene como objeto al volumen. El volumen tiene, intrínsecamente, volumen, o bien, espacio que ocupa un cuerpo. Se forma mediante la unión de un plano y un punto exterior. «*Un sólido es aquello que tiene longitud, anchura y profundidad*». El metro cúbico es su unidad de medida en el Sistema Internacional de Unidades.

Cuarta Dimensión: La Cuarta Dimensión es el espacio que tiene como objeto al hipervolumen. Longitud, anchura y profundidad junto con una dirección que forme ángulo recto con las tres direcciones observables crea el hipervolumen. Esta dirección adicional que acuñó como *Spissitude* Henry More sería el eje de *Ana* y *Kata* las direcciones que nombró Charles Howard Hinton. No tiene unidad de medida en el Sistema Internacional de Unidades.

El Modelo Físico del Teorema Fundamental del Cálculo propone interpretar de manera tangible a la derivada como la pérdida de dimensión del objeto de estudio. Puede entenderse como el colapso elástico de uno de sus puntos en dirección ortogonal a la base que se haya considerado derivar. Esto es el equivalente a observar una proyección. Los procesos al límite pasan a representarse mediante figuras geométricas. Recordando que vectores ortogonales son linealmente independientes cada dimensión responde a una dirección independiente de desplazamiento. Isaac Newton consideraba a las derivadas como fluxiones y las funciones como un fluido, teniendo de notación $x$, su derivada $\dot{x}$ y su segunda derivada $\ddot{x}$. Tomemos a $x^3$ como un cubo y al derivarlo fluye en direcciones ortogonales. Existen para el cubo únicamente tres direcciones independientes por lo que el fluir ortogonal hará que resulten tres cuadrados, $3x^2$. Como un paso inicial a este fluir dividimos el cubo en tantas partes como la dimensión a la que pertenece. Un cubo pertenece a la tercera dimensión por lo que se divide en tres partes iguales que corresponden a tres pirámides de base cuadrada $x^2$ y altura $x$. Ahora uno solo de los puntos, la cúspide de cada una de las pirámides se repliega ortogonalmente reduciendo a dos dimensiones lo que antes tenía volumen. De un cubo, $x^3$, se derivan tres cuadrados, $3x^2$, derivados de reducir de dimensión al elemento. Para comprobar y demostrar este proceso se hace una segunda derivada. Cada uno de los cuadrados se divide en tantas partes como el grado que poseen, lo que hace que se divida cada uno en dos partes iguales, esto al ser el cuadrado parte del plano de dos dimensiones. Manteniendo como magnitud $x$ tanto en el eje $X$ como en el eje $Y$ se forman, por cada cuadrado, dos triángulos rectángulos, teniendo seis de ellos en total, siendo su hipotenusa la diagonal de cada $x^2$ inicial. Ya divididos, uno de los puntos extremos colapsa. Siendo $3x^2$, derivarlos a una dimensión menor conlleva a $6x$ entendiendo que de tres cuadrados existen seis proyecciones independientes distintas que dan lugar a seis líneas. Ahora, seis líneas, $6x$, su derivada es 6 que equivale a seis puntos. Finalmente la derivada de los seis puntos, será que cada punto colapsa en sí mismo lo que provoca que desaparezca. Esto sitúa el hecho de que la derivada de toda constante es cero.

Matemáticamente la progresiva derivada de $x^3$ representa la progresiva reducción de dimensión de un cubo a tres cuadrados; de tres cuadrados a seis líneas; de seis líneas a seis puntos; de seis puntos a nada.

IV.1 $\quad \dfrac{d\,x^3}{dx} = 3x^2 \qquad \dfrac{d\,3x^2}{dx} = 6x \qquad \dfrac{d\,6x}{dx} = 6 \qquad \dfrac{d\,6}{dx} = 0$

Función $\hfill x^3$

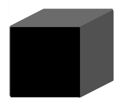


Figura IV 5 Representación de un cubo

Primera derivada $\hfill 3x^2$

Segunda derivada $\hfill 6x$

Tercera derivada $\hfill 6$

. . . . . .

Cuarta derivada $\hfill 0$

Cuando se origina el Cálculo Diferencial, se daba con la variación infinitesimal. Siendo $y = x^2$, la derivada $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ se obtiene:

IV.2 Sea $y = x^2$

$$y + \mathrm{d}y = (x + \mathrm{d}x)^2 = x^2 + 2x \cdot \mathrm{d}x + \mathrm{d}x^2$$

$$\mathrm{d}y = y + \mathrm{d}y - y = (x + \mathrm{d}x)^2 - y = x^2 + 2x \cdot \mathrm{d}x + \mathrm{d}x^2 - y = x^2 + 2x \cdot \mathrm{d}x + \mathrm{d}x^2 - x^2$$

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}x} = \frac{2x \cdot \mathrm{d}x + \mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}x} = 2x + \mathrm{d}x$$

Aquí se encuentra la critica de George Berkeley. El término $\mathrm{d}x$ se desprecia.

IV.3 $$\frac{\mathrm{d}\,x^2}{\mathrm{d}x} = 2x$$

Interpretando físicamente a la derivada, lo que se propone es reducir de dimensión al objeto de estudio. Tenemos $x^2$, un cuadrado de lado $x$. Derivarlo conlleva a pasar el plano, de dos dimensiones, como lo indica ${}^{2}$, a su equivalente, su proyección en una dimensión menor, una dimensión ${}^{1}$. Así un cuadrado pasa a ser dos líneas ortogonales entre sí, $2x$ junto con $\mathrm{d}x$, la variación infinitesimal que se utilizó, en una dimensión menor a la del objeto derivado.
La derivada física de un cuadrado, la derivada física de $x^2$ resulta ser:

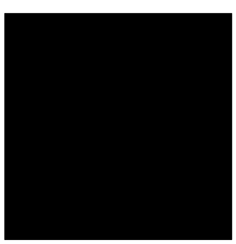


Figura IV 6 Plano, $x \cdot x$



Figura IV 7 Derivada del plano, $2x + \mathrm{d}x$

Para el proceso de colapso se divide el elemento en tantas partes iguales como el grado que posee, se suprime la unión entre los elementos, se abate la ortogonalidad y retornan las reflexiones a su origen. El abatimiento de ortogonalidad y retorno de la reflexión se reduce con el retorno puntual del extremo al conservar unión elástica en la continuidad de los puntos.

Este proceso se puede simplificar al colapsar directamente los paralelos del elemento en cuestión, siempre y cuando el elemento se halle completo aunque en el caso de las fracciones se les puede aplicar también la propiedad de homogeneidad, sólo que para que se vea el proceso inverso de la integral explícitamente han de hacerse los pasos de división y consecuente colapso.

## Supresión de unión, abatimiento de ortogonalidad y retorno de reflexión

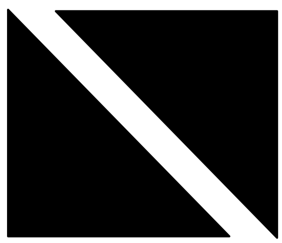


Figura IV 8 División de $x{\cdot}x$ en 2 partes

Figura IV 9 Supresión de unión entre ortogonales, caso $x{\cdot}x$

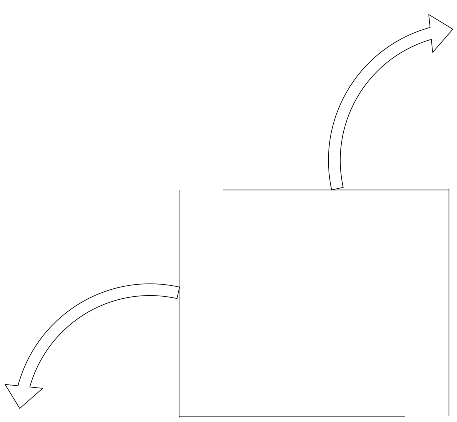


Figura IV 10 Abatimiento de ortogonalidad, caso $x{\cdot}x$



Figura IV 11 Retorno de reflexión, caso $x{\cdot}x$



Figura IV 12 Demostración de la derivada del plano, $2x + \mathrm{d}x$

Retorno puntual del extremo conservando unión elástica en la continuidad de los puntos

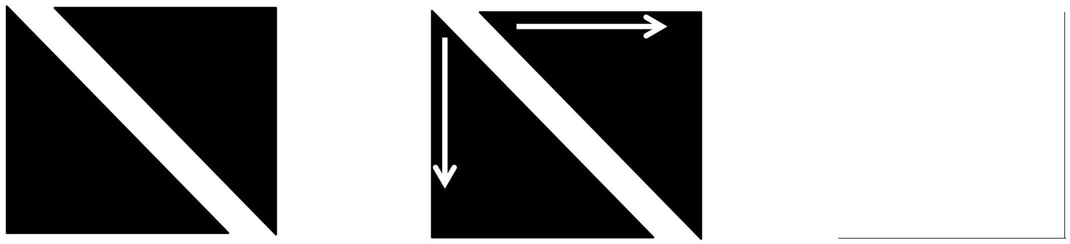


Figura IV 13 Retorno puntual, $x \cdot x$ a $2x + \mathrm{d}x$

Reducción por colapso de paralelos

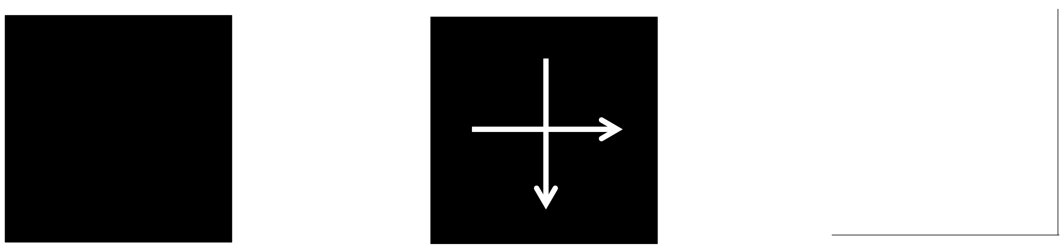


Figura IV 14 Colapso de paralelos, $x \cdot x$ a $2x + \mathrm{d}x$

El derivar $x^n$, genera tantos elementos como el grado $n$, reducidos en una dirección ortogonal. La ecuación I.30 Derivada de la función potencial se retoma:

IV.4
$$\frac{\mathrm{d}\,x^n}{\mathrm{d}x} = nx^{n-1}$$

La Teoría de Cuerdas aboga por un Universo de 26 dimensiones. La Teoría de la Relatividad plantea 4 dimensiones siendo el tiempo una de ellas. Vivimos en un espacio tridimensional, $x^3$. Vivimos en la tercera dimensión, en el espacio, por lo que las demostraciones pueden ser llevadas de manera íntegra hasta la 3° dimensión y se puede aventurar una representación de lo que podría ser la 4° dimensión en analogía a lo que se hace al dibujar un cubo que es representar la tercera dimensión en dos dimensiones. Queda plasmada la idea del cubo sin ser su verdadera consistencia ya que falta lo alto para que se formen tres direcciones por lo que únicamente se crea la perspectiva de profundidad al dibujar a lo largo y a lo ancho del papel.

Derivar con la variación infinitesimal el volumen, siendo $y = x^3$, la derivada $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ se obtiene:

IV.5 Sea $y = x^3$

$$y + \mathrm{d}y = (x + \mathrm{d}x)^3 = x^3 + 3x^2 \cdot \mathrm{d}x + 3x \cdot \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}x^3$$

$$\mathrm{d}y = y + \mathrm{d}y - y = (x + \mathrm{d}x)^3 - y = x^3 + 3x^2 \cdot \mathrm{d}x + 3x \cdot \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}x^3 - y = x^3 + 3x^2 \cdot \mathrm{d}x + 3x \cdot \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}x^3 - x^3$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{3x^2 \cdot \mathrm{d}x + 3x \cdot \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}x^3}{\mathrm{d}x} = 3x^2 + 3x \cdot \mathrm{d}x + \mathrm{d}x^2$$

Los términos $3x \cdot \mathrm{d}x + \mathrm{d}x^2$ se *desprecian* y resulta:

IV.6
$$\frac{\mathrm{d}x^3}{\mathrm{d}x} = 3x^2$$

Haciendo la derivación física que propone el presente Modelo Físico del Teorema Fundamental del Cálculo se tiene que $x^3$, un cubo de dimensiones $x$ deriva en tres cuadrados que en sus intersecciones forman tres líneas $3x \cdot \mathrm{d}x$, tres rectángulos de longitud $x$ y anchura $\mathrm{d}x$, junto con $\mathrm{d}x^2$, la variación infinitesimal que se utilizó, en una dimensión menor a la del objeto derivado.

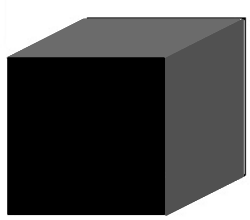


Figura IV 15 Representación del cubo, $x \cdot x \cdot x$

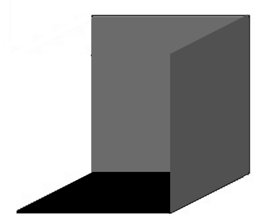


Figura IV 16 Derivada del cubo, $3x \cdot x + 3x \cdot \mathrm{d}x + \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}x$

Pueden utilizarse los tres procesos antes descritos:

- Supresión de unión, abatimiento de ortogonalidad y retorno de reflexión.
- Retorno puntual del extremo conservando unión elástica en la continuidad de los puntos.
- Reducción por colapso de paralelos.

## Supresión de unión, abatimiento de ortogonalidad y retorno de reflexión

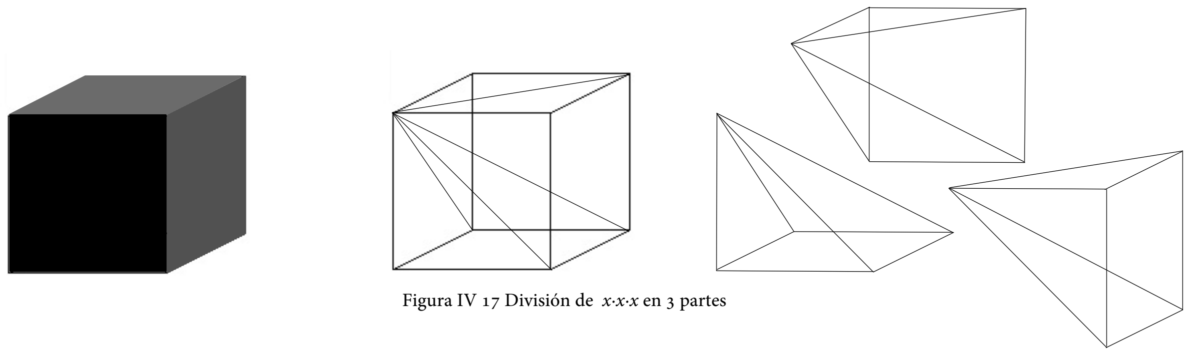


Figura IV 17 División de *x·x·x* en 3 partes

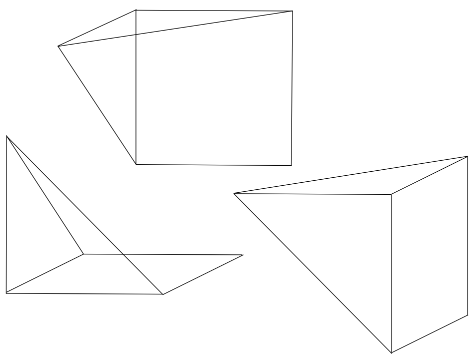


Figura IV 18 Supresión de unión entre ortogonales, caso *x·x·x*

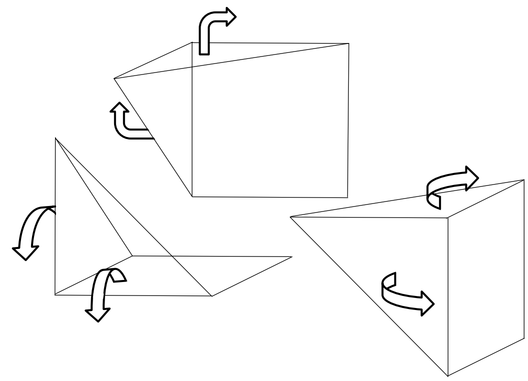


Figura IV 19 Abatimiento de ortogonalidad, caso *x·x·x*

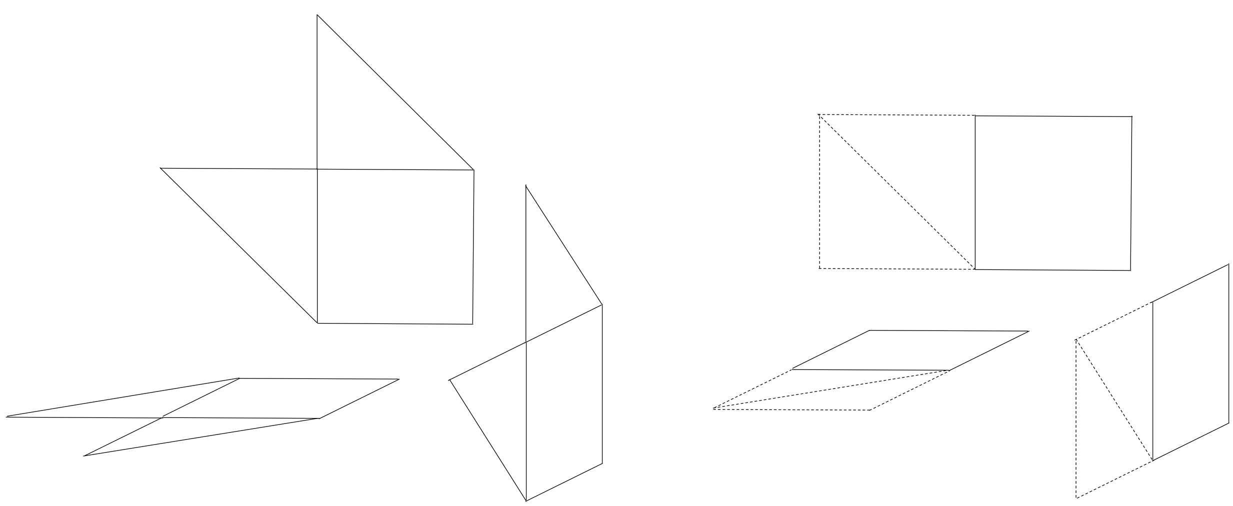


Figura IV 20 Retorno de reflexión, caso *x·x·x*

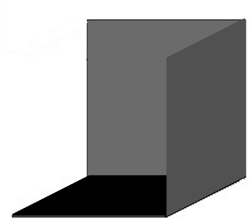


Figura IV 21 Demostración de la derivada del cubo, $3x{\cdot}x + 3x{\cdot}\mathrm{d}x + \mathrm{d}x{\cdot}\mathrm{d}x$

Retorno puntual del extremo conservando unión elástica en la continuidad de los puntos

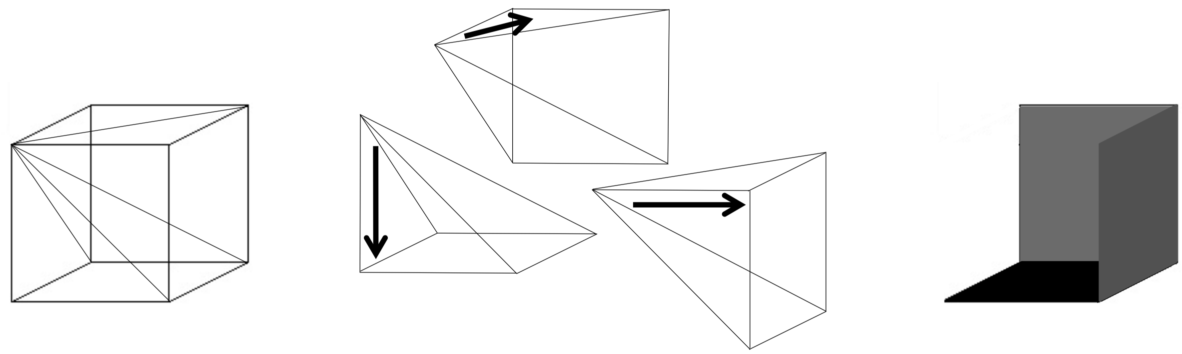


Figura IV 22 Retorno puntual, $x \cdot x \cdot x$ a $3x \cdot x + 3x \cdot \mathrm{d}x + \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}x$

Reducción por colapso de paralelos

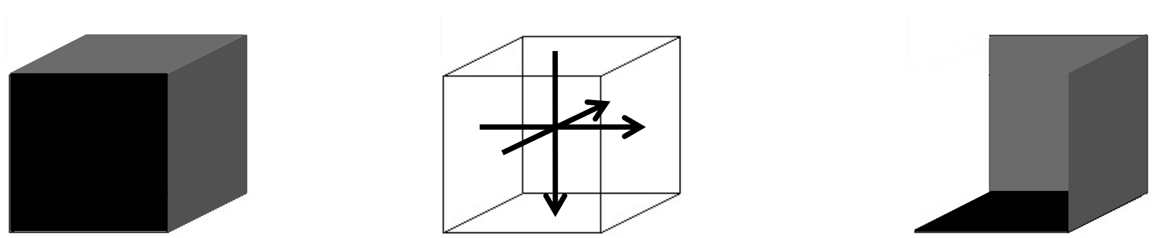


Figura IV 23 Colapso de paralelos, $x \cdot x \cdot x$ a $3x \cdot x + 3x \cdot \mathrm{d}x + \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}x$

De $x^3$, un cubo, se tiene que la primer derivada es $3x^2$, tres cuadrados. Aplicándose una segunda derivada cada uno de los cuadrados seguirá el proceso de la ecuación IV.3 y se obtendrán seis líneas de longitud $x$, correspondiéndole dos líneas a cada uno de los cuadrados. La tercer derivada de un cubo, la derivada de $6x$ se calcula y resulta matemáticamente ser 6. La interpretación física que se propone de la derivada de $6x$, es seguir cualquiera de los tres procesos descritos ya:

- Supresión de unión, abatimiento de ortogonalidad y retorno de reflexión.
- Retorno puntual del extremo conservando unión elástica en la continuidad de los puntos.
- Reducción por colapso de paralelos.

Al tener la línea un solo vector direccional y carente de ortogonalidad puesto que no existe un segundo vector de comparación con el cual generar ángulo los tres procesos son idénticos.

### Supresión de unión, abatimiento de ortogonalidad y retorno de reflexión



Figura IV 24 División de *x* en 1 parte



Figura IV 25 Supresión de unión entre ortogonales, caso *x*



Figura IV 26 Abatimiento de ortogonalidad, caso *x*



Figura IV 27 Retorno de la reflexión, caso *x*



Figura IV 28 Demostración de la derivada de la línea, 1

### Retorno puntual del extremo conservando unión elástica en la continuidad de los puntos

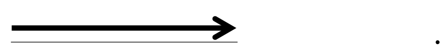


Figura IV 29 Retorno puntual, *x* a 1

### Reducción por colapso de paralelos

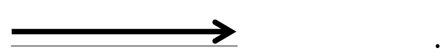
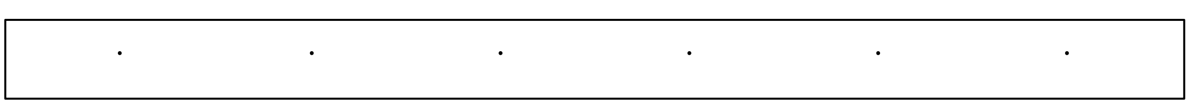


Figura IV 30 Colapso de paralelos, *x* a 1

Teniendo seis líneas entonces se obtienen seis puntos con lo que obtenemos lo calculado. La tercer derivada de $x^3$ resulta ser igual a 6:



La derivada de toda constante es cero. Ver ecuación I.13.

$\cdot$

Para iniciar el proceso físico de derivar un punto, $x^0$, habrá que dividirlo en tantas partes como su exponente expone y se provoca la indefinición. ¿Cómo dividir el punto en 0 partes? Incluso los siguientes pasos que son perder la unión, abatir la ortogonalidad, regresar la reflexión, carecen de sentido. El retorno puntual y el colapso de paralelos tampoco aplican. Regresamos a 0 puesto que aunque matemáticamente mediante el concepto de límite queda demostrado, físicamente se propone asumir que el punto colapsa sobre sí mismo, implota, lo que provoca que deje de existir. La cuarta derivada de un cubo, la derivada de 6, de seis puntos finaliza en cero, 0, nada.

Se ha completado la derivada de las tres dimensiones de las que estamos conscientes.

| | | |
|---|---|---|
| Largo | Ancho | Alto |
| Longitud | Latitud | Altitud |
| Adelante \| Atrás | Izquierda \| Derecha | Arriba \| Abajo |

La derivada de $x^4$, la cuarta dimensión siendo espacial, resulta en $4x^3$, esto es que el hipercubo se separa en tantas partes como su grado, cuatro partes, cada una de ellas pierde la unión quedando ahora cubos de tres dimensiones que se abaten, *desdoblándose* en ocho cubos que al retornar a su reflexión resultan ser los 4 cubos que generó su derivada mediante el cálculo y corresponden a lo que se propone ocurriría físicamente. Dimensiones superiores se asume que tendrán el mismo comportamiento. La quinta dimensión se plegaría a cinco hipercubos. La sexta dimensión resultaría en seis objetos de 5º dimensión. En dimensiones superiores puede imaginarse su derivada como plegado a dimensión subyacente aspirando coincidir con lo real.

## IV.7 Operación diferencial

Sea $x^n$

$$\frac{\mathrm{d}\,x^n}{\mathrm{d}x} = nx^{n-1}$$

## IV.8 Operación topológica diferencial

Sea el $n$-cubo $[0, 1]^n \in \mathbb{R}^n$

$$D[0, 1]^n = n[0, 1]^{n-1}$$

La derivada se propone como la reducción de dimensión de un objeto $n$-dimensional al seguir cualquiera de los tres procesos:

- Supresión de unión seguido de abatimiento de ortogonalidad y retorno de la reflexión.
- Retorno puntual del extremo conservando unión elástica en la continuidad de los puntos.
- Reducción por colapso de paralelos.

Con $n \in \mathbb{N}_0$ se generan $n$-cubos que siguen la regla de derivación de reducirse a la dimensión subyacente. Más allá de $\mathbb{N}_0$ se tiene a la dimensión fractal ya que la cualidad de un objeto fractal es que su dimensión no es entera. De ahí proviene el nombre fractal, del latín *fractus*, que significa fracturado, teniendo de exponente una fracción con lo que $n \in \mathbb{Q}$. La dimensión fractal excede a la dimensión topológica a la que pertenece el objeto fractal. Entre la dimensión topológica 1, que es la línea y la dimensión topológica 2, que es el plano se tiene la dimensión fractal, formalmente dimensión de Hausdorff igual a 1,5 que corresponde a una variante de la curva de Koch con ángulo de 90º, ortogonal.

La variante de la curva de Koch con ángulo de 90º fue creada por Hermann Minkowski, quien forma el espacio tiempo de Minkowski, marco para la Teoría de la Relatividad. El nombre que le dio a la curva fue Salchicha de Minkowski.

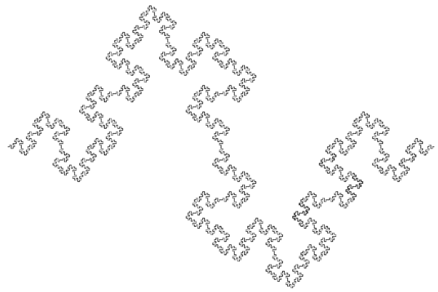


Figura IV 31 Salchicha de Minkowski

Si la línea es $x$ y el plano es $x^2$, la Salchicha de Minkowski corresponde a $x^{1.5}$ o $x^{3/2}$ y su derivada resulta:

## IV.9 Derivada de la Salchicha de Minkowski

$$\frac{\mathrm{d}\,x^{3/2}}{\mathrm{d}x} = \frac{3\sqrt{x}}{2}$$

Físicamente la representación de la derivada conlleva a pensar en tres mitades de un objeto fractal de dimensión Hausdorff igual a 0,5. El conjunto de Cantor es de dimensión 0,63092975357... o precisamente $ln(2)/ln(3)$. Dimensión entre 0, el punto y 1, la línea. Con dimensión fractal, $dim_{fra}(\mathfrak{C}) = 0{,}63092975357...$ el conjunto de Cantor es una sucesión de puntos, con dimensión topológica puntual, esto es $dim_{top}(\mathfrak{C}) = 0$ que no es lo suficientemente compacta para formar una línea ya que se le ha ido substrayendo el tercio medio infinitamente. Si en lugar de substraer el tercio medio se extrae la mitad media de un segmento de recta [0, 1], entonces quedan dos segmentos $N(l) = 2$ de longitud cada una igual a 1/4 de la inicial, puesto que la mitad que se conserva se divide entre las dos partes por lo que cada una es de $l = 1/4$. Geométricamente la construcción recursiva de substraer la mitad media infinitamente genera un conjunto con dimensión topológica igual a 0 con dimensión fractal, dimensión de Hausdorff igual a 0,5, teniendo que $ln(2)/ln(4) = 0,5$.

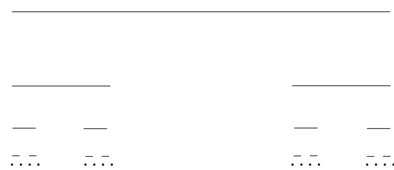


Figura IV 32 Construcción de $\sqrt{x}$



Figura IV 33 $\sqrt{x}$

La derivada de una línea, de $x$, genera un punto, 1. Ahora, la derivada de $x^{3/2}$, la derivada de la Salchicha de Minkowski, genera $(3/2)\sqrt{x}$, tres mitades de la secuencia de puntos de un segmento cuya mitad media se ha substraído infinitamente. Para analizar el comportamiento de la variante de la curva de Koch con ángulo de 90º se realiza el acercamiento, el cuál teóricamente sería inútil ya que el patrón se repite no importando la escala. Omitiendo la propagación recursiva del patrón fractal se llega a su concepción original.

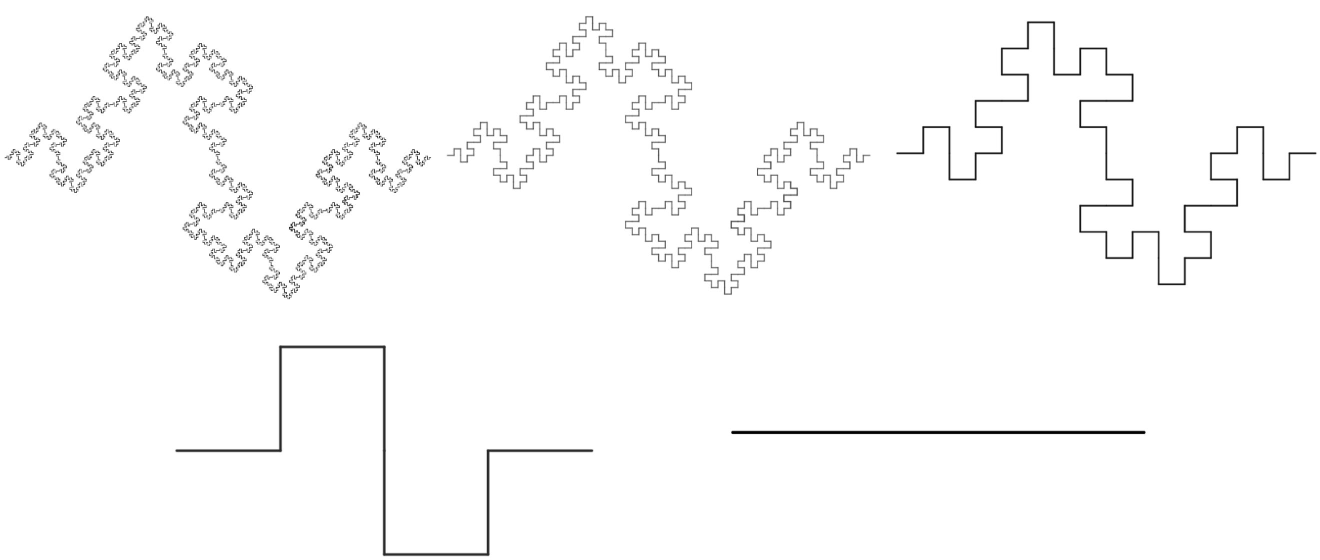


Figura IV 34 Construcción de $\sqrt{[x \cdot x \cdot x]}$

La construcción esencial de $x^{3/2}$ se puede contemplar como la mitad media del segmento de línea rota generando la longitud media inicial ahora en dirección ortogonal, agregada a en total seis segmentos de cuarto de longitud. Siendo el conjunto $\sqrt{x}$ igual a los puntos que se generan al substraer infinitamente la mitad media del segmento de línea, la reducción de dimensión de $x^{3/2}$ al derivar genera tres mitades del conjunto $\sqrt{x}$ ya que se completan tres líneas de longitud media, 3/2, que progresivamente seguirán el patrón fractal. De ahí, que la derivada no sean puntos específicos, sino la sucesión de puntos cuya mitad media se ha substraído, ello multiplicado por el escalar 3/2.        Posible camino del trabajo con exponentes fraccionarios.

Para los casos de prismas rectangulares, *xyz,* en la situación tridimensional las derivadas serán parciales, esto es, con respecto a una de las variables.

## IV.10 Derivadas parciales

Sea *xyz*

$$\frac{\partial\, xyz}{\partial x} = yz \qquad \frac{\partial\, xyz}{\partial y} = xz \qquad \frac{\partial\, xyz}{\partial z} = xy$$

Físicamente lo que se propone es apreciar que la derivada corresponde a la proyección del objeto en la dirección de la variable con respecto a la cual se hace la operación diferencial. Colapsan los planos paralelos en dirección de $x$ cuando es $\partial x$, los planos paralelos en dirección de $y$ colapsan cuando es $\partial y$. Cuando se aplica $\partial z$ el colapso ocurre en dirección de $z$. De un prisma tridimensional se obtiene la proyección bidimensional al momento de derivar.

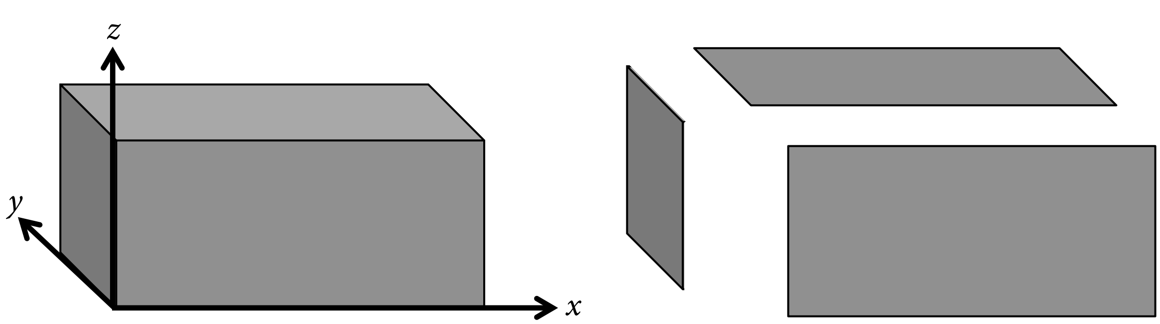



Figura IV 35 Derivadas parciales

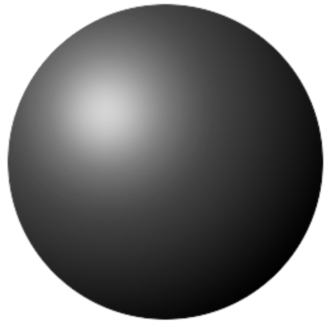


Figura IV 36 Representación de la esfera

El volumen de la esfera, como lo demostró Arquímedes, es $(4/3)\pi r^3$. Su derivada se propone en el Modelo Físico del Teorema Fundamental del Cálculo como el colapso en dirección de la variable con respecto a la cuál se deriva.

## IV.11 Derivada de la esfera

$$\frac{d\,(4/3)\pi r^3}{dr} = 4\pi r^2$$

Es coherente el hecho que la derivada del volumen de la esfera, $(4/3)\pi r^3$, genera la superficie de ella, $4\pi r^2$, ya que el colapso ha sido radial al derivar con respecto al radio, $r$. De la misma forma un círculo de área $\pi r^2$ deriva en la circunferencia $2\pi r$. Para la elipse que tiene área $\pi ab$, ocurre que su construcción carece de uniformidad en todas las direcciones de ahí que la determinación de su perímetro sea mediante series infinitas actualmente.

En cuanto a las funciones trascendentes, donde no se emplea la sumatoria de términos $x^n$, se propone hacer transformación a Series de Taylor, y proseguir con la derivada de *n*-cubos. La derivación de las funciones trascendentes expresadas en Series de Taylor al aplicársele el proceso físico que hemos descrito en este documento se postula que obtiene la variante tangible de cada una de ellas. Más aún, podemos realizar físicamente la derivada de *sen(x)* y de *cos(x)* siendo funciones trascendentes cuyo dominio pertenece a todos los reales, su rango va de -1 a 1 y son continuas, es decir, libres de asíntotas. La derivada consistirá en abatir la ortogonalidad que se ha de interpretar como la disminución en el sentido que corre la gráfica y al ser ortogonal resulta ser 90°. Entendiendo que 90° es el equivalente a $\pi/2$ radianes se deriva a reducirse π/2, o lo que es igual, recorrer π/2 a la izquierda . Este proceso se incapacita en las funciones trascendentes diferentes a *sen(x)* y a *cos(x)* dado que presentan asíntotas o su rango tiende al infinito, lo que hace que su variante física sea únicamente mediante el trabajo a partir de Series de Taylor. Se expresa la derivada de *sen(x)* y de *cos(x)* físicamente:

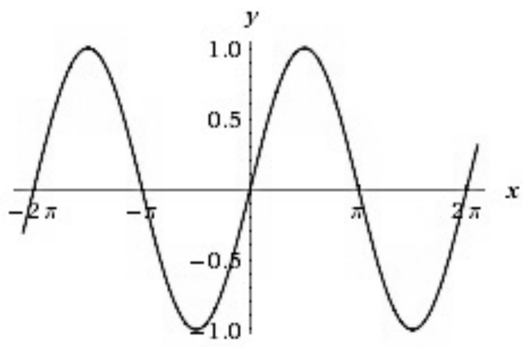


Figura IV 37 *sen(x)*

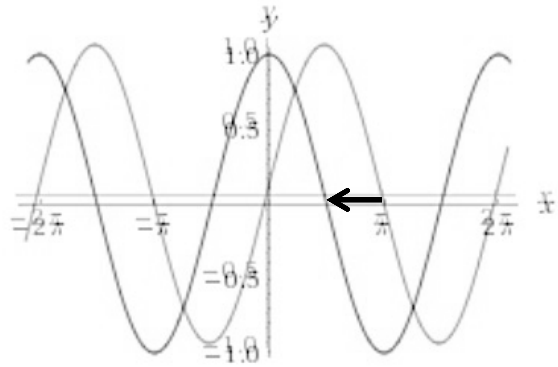


Figura IV 38 Derivada de *sen(x)*

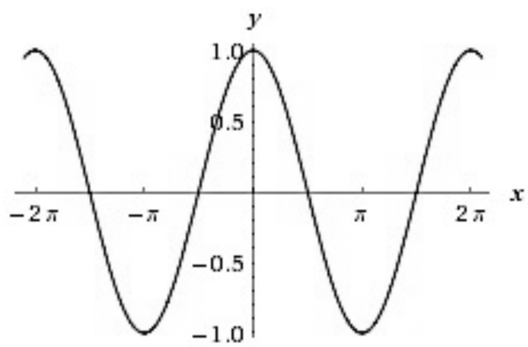


Figura IV 39 *cos(x)*

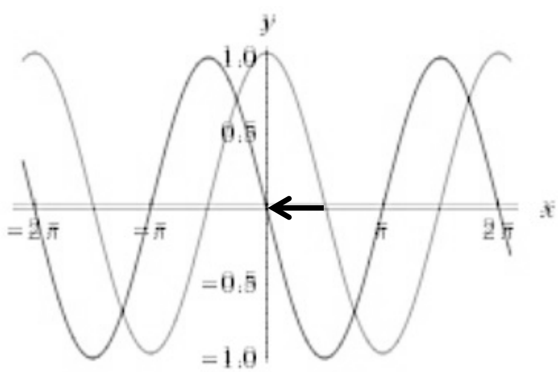


Figura IV 40 Derivada de *cos(x)*

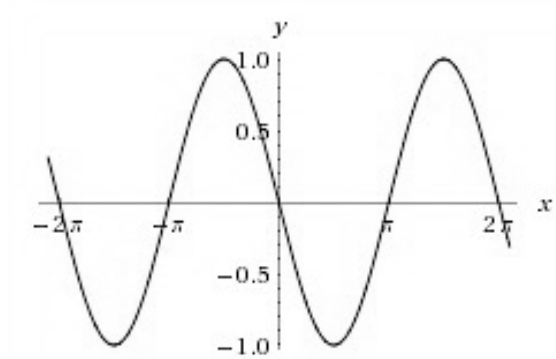


Figura IV 41 *-sen(x)*

La interpretación física que se propone en la presente tesis es que la integral determina el aumento de dimensión de un elemento al extender ortogonalmente uno de sus puntos, conservando su unión con los puntos del objeto de estudio al que pertenece. La dimensión será el número de elementos de las bases canónicas que lo conforman. Así un punto tiene un vector nulo, una línea su vector es de un elemento, una superficie su base canónica es de dos elementos, en el espacio es de tres elementos, el hiperespacio es de cuatro elementos, y así sucesivamente.

Entendiendo que se tiene:

$x^0$, que representa a un objeto de dimensión cero.

$x^1$, que representa a un objeto de dimensión uno.

$x^2$, que representa a un objeto de dimensión dos.

$x^3$, que representa a un objeto de dimensión tres.

$x^4$, que representa a un objeto de dimensión cuatro.

Se puede apreciar que el exponente de la variable indica la dimensión a la que pertenece porque representa el número de direcciones que puede recorrer.

Si se quiere integrar debemos tener «algo» que integrar.

¿Qué es lo más ínfimo que existe, la absoluta proporción minúscula que se diferencia de la nada? Un punto .

Una vez que se tiene al punto, a 1, se integra.

Comenzar a integrar 1 de manera física se plantea como extender ortogonalmente uno de sus puntos. Siendo el punto en sí mismo, extender ortogonalmente es en cualquier dirección pasando a ser $x$. Procediendo a integrar $x$, ahora se extiende uno de sus puntos en dirección ortogonal conservando su unión con los puntos de la línea dimensión $x$ formando ahora $x^2/2$.

La integral, en funciones, determina el área bajo la curva formada por el trazo de la función $f(x)$ y el eje $X$ delimitada por el límite inferior, $a$, y el límite superior, $b$, que se definan. La integral física que se expone con el Modelo Físico del Teorema Fundamental del Cálculo indica que el área que forma una línea de dimensión $x$ al extenderse uno de sus puntos a la misma distancia $x$ pero en una nueva dirección ortogonal, lo que da una dimensión adicional, tiene un área equivalente a su integral $x^2/2$. Integrando nuevamente $x^2/2$ se extiende un punto en dirección ortogonal con lo que se tiene ahora una pirámide triangular con volumen $x^3/6$. Siguiendo el proceso se puede asumir que de extender un punto a la cuarta dimensión se obtiene $x^4/24$, o bien, la veinticuatroava parte de un hipercubo.

1

Primer integral $x$

Segunda integral $x^2/2$

Tercera integral $x^3/6$

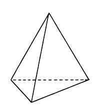


Figura IV 42 Representación de una pirámide triangular

Cuarta integral $x^4/24$

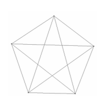


Figura IV 43 Representación de un pentácoron

El Teorema Fundamental del Cálculo establece que el valor del área definida por los contornos *a, b, f(x)* y el eje *X* está dado por:

IV.12
$$\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

El Modelo Físico del Teorema Fundamental del Cálculo propone que la integral definida de una función corresponde al aumento de dimensión de un objeto con medidas del límite superior al cual se le substrae su construcción en un objeto de dimensión superior con medidas del límite inferior. Como ejemplo la integral definida de $x$ con límites de integración $a = 2$ y $b = 6$ se calcula:

IV.13 $$\int_2^6 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_2^6 = \frac{(6)^2}{2} - \frac{(2)^2}{2} = \frac{36}{2} - \frac{4}{2} = 18 - 2 = 16$$

La integral física se construye con una línea de medida 6, aquí 6 centímetros, que se integra al extenderse uno de sus puntos en dirección ortogonal aumentando de dimensión. Al triángulo formado con área igual a 18 centímetros cuadrados se le resta un triángulo con 2 centímetros cuadrados de superficie que fue formado al aumentar de dimensión una línea de medida 2, aquí 2 centímetros. Así, al acotar con el límite inferior 2 y el límite superior 6 la integral de $x$ se genera un objeto de dos dimensiones con área igual a 16 centímetros cuadrados al haber utilizado al centímetro como unidad de partida.

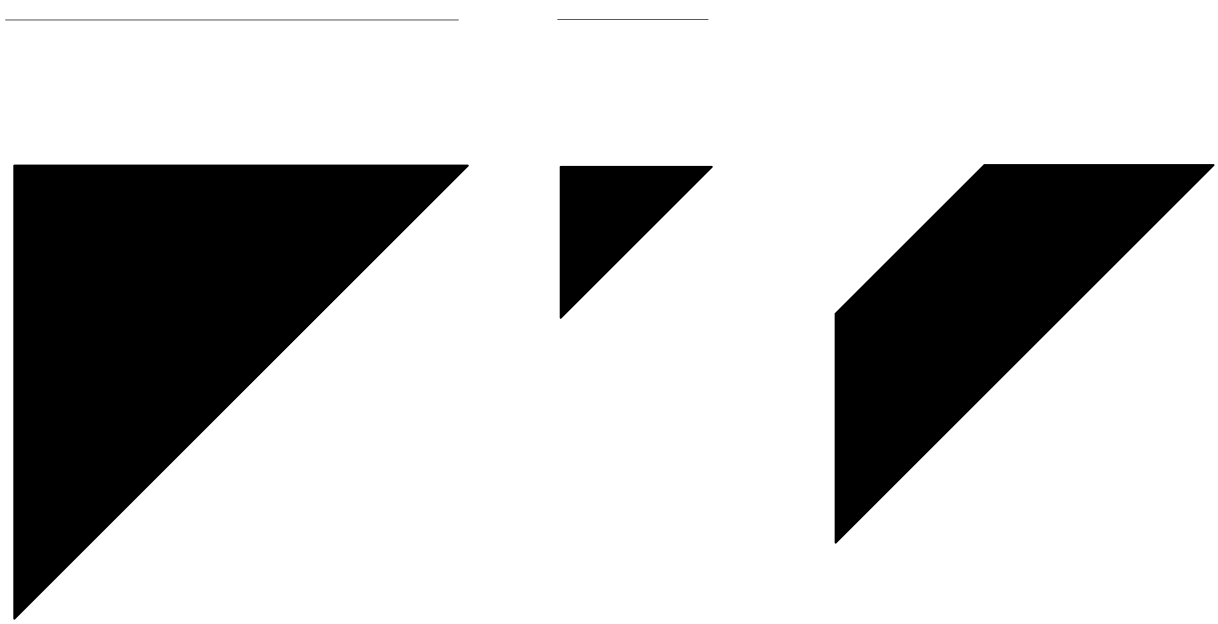


Figura IV 44 Integral definida de $x$

Para la integral definida de $x^2$ sucede ahora que se tendrá como resultado una pirámide de base cuadrada con medida de lado del límite superior, truncada por una pirámide de base cuadrada con medida de lado del límite inferior. Como ejemplo la integral definida de $x^2$ con límites de integración $a = 3$ y $b = 6$ se calcula:

$$\int_3^6 x^2 \, dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_3^6 = \frac{(6)^3}{3} - \frac{(3)^3}{3} = \frac{216}{3} - \frac{27}{3} = 72 - 9 = 63 \qquad \text{IV.14}$$

La integral física se construye con un cuadrado de lado 6, aquí 6 centímetros, que se integra al extenderse uno de sus puntos en dirección ortogonal aumentando de dimensión. La pirámide formada con volumen igual a 72 centímetros cúbicos se le resta una pirámide con 9 centímetros cúbicos de volumen que fue formada al aumentar de dimensión un cuadrado de lado 3, aquí 3 centímetros. Así, al acotar con el límite inferior 3 y el límite superior 6 la integral de $x^2$ se genera un objeto de tres dimensiones con volumen igual a 63 centímetros cúbicos al haber utilizado al centímetro como unidad de partida. El objeto es una pirámide de base cuadrada con lado igual al límite superior truncada formando un cuadrado como superficie en su cima de lado igual al límite inferior. El valor numérico que se calculó corresponde al valor del volumen del objeto obtenido. Mostrando las figuras del proceso con escala 1:2 se tiene:

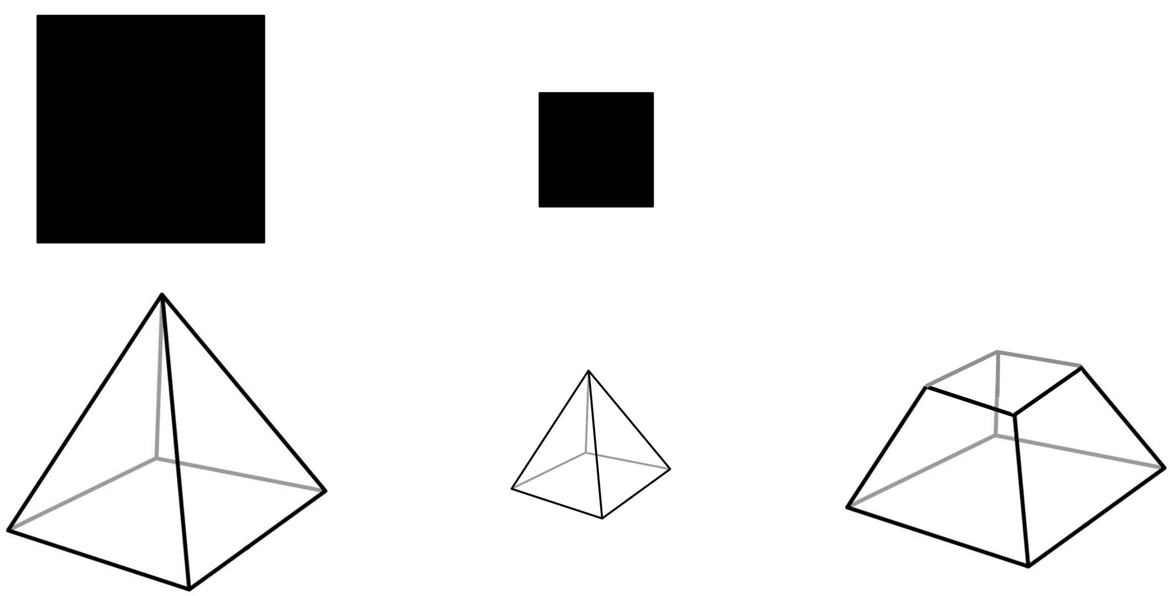


Figura IV 45 Representación de la integral definida de $x{\cdot}x$

En el caso de la circunferencia cuya longitud es igual a $2\pi r$, en el Modelo Físico del Teorema Fundamental del Cálculo se presenta evidente que su integral respecto a $r$ produce un círculo de área igual $\pi r^2$, un objeto de dimensión superior que se ha extendido en razón del radio. Prosigue en la integral del círculo, la extensión de uno de los puntos en dirección ortogonal, lo que construye un cono de base $\pi r^2$ y altura $r$, teniendo de volumen $\pi r^3/3$, valor coherente del espacio que ocupa el objeto tridimensional con el valor numérico de la integral.

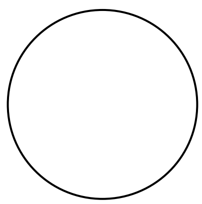


Figura IV 46 $2\pi r$

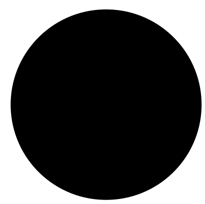


Figura IV 47 $\pi r \cdot r$

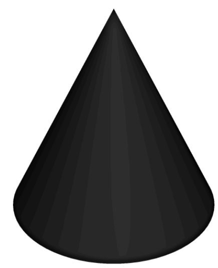


Figura IV 48 $\pi r \cdot r \cdot r/3$

La integral como se propone explicar esta tesis será la combinación lineal acotada de la base que se integra con la extensión generada ortogonalmente. De seguir con el proceso, la integral del cono, $\pi r^3/3$, un objeto tridimensional, se produciría teóricamente un doceavo de pi por radio a la cuarta, $\pi r^4/12$. La cuestión es que la dirección de extensión adicional para construir objetos de cuatro dimensiones es independiente a las tres que se conocen. En analogía a lo que sucede en las dimensiones inferiores, la dirección de la dimensión superior es *adentro* y *afuera*. Sin cambiar de posición en las dimensiones establecidas aumentar en la dimensión adicional es un movimiento de *entrar* y *salir*. Así, el punto entra a la línea. La línea entra al plano. El plano entra al volumen. El volumen entraría al hipervolumen. No se ha encontrado dicha dirección, con lo que se ha asumido que el tiempo es una dimensión, la cual rompe las reglas con las otras dimensiones al establecerse como unidireccional, porque es la única percepción que hemos tenido del tiempo. La existencia del tiempo como dimensión es cuestionable ya que la existencia misma del tiempo está en duda.

«Existe una cosa muy misteriosa, pero muy cotidiana. Todo el mundo participa de ella, todo el mundo la conoce, pero muy pocos se paran a pensar en ella. Casi todos se limitan a tomarla como viene, sin hacer preguntas. Esta cosa es el tiempo».

(Ende, 1973 d.C., p. 40).

| | | |
|---|---|---|
| **Hans Zimmer** | **Time** | **4:35** |

| Absoluto | Relativo |
|---|---|

El tiempo es la progresión de la existencia. En la paradoja de los gemelos, uno de ellos envejece más que el otro. Eso es que uno envejece más, no que el tiempo haya pasado más rápido ya que cuando se vuelven a juntar los hermanos monocigóticos, están en tiempo simultáneo, es decir, se encuentran en el mismo tiempo por el simple hecho de poderse encontrar. Está la velocidad de la rotación de la Tierra que diariamente gira en promedio a 1600 km/h, midiendo en el Ecuador. La velocidad de traslación de la Tierra alrededor del Sol, que aproximadamente son 107227 km/h. La velocidad en que se mueve el sistema Solar formando parte de la Vía Láctea a 828000 km/h que es la estimación. Todas estas velocidades afectan al hermano que se queda en la Tierra *quieto* que se compara con el hermano gemelo que se hizo cosmonauta, astronauta o taikonauta, que viaja con velocidad cerca de 1079252848800 km/h. La paradoja está en quién hace el cálculo. Quien calcula envejece más porque uno no se mueve, es el otro, desde el punto de vista relativo. Albert Einstein da como resultado de la paradoja que el hermano gemelo que se queda en la Tierra *quieto* es quien envejece más. Para ello asume un viaje espacial de rebote con aceleración y desaceleración. Haciendo un viaje circular con sólo aceleración incluyendo colisión en el regreso, la paradoja persiste, haciendo que se descarte la dilatación del tiempo que se asume comprobada por pruebas de 1971 d.C. con relojes atómicos de cesio que tuvieron su mayor desfase medido en 273 nanosegundos con una precisión de ± 7 nanosegundos. Más que dilatación del tiempo se ha considerar razonar la posibilidad de que los que se desfasan sean los *contadores del tiempo*o.

El tiempo permanece, absoluto, inalterable, ambos relojes siguen existiendo al mismo tiempo, el tiempo ha corrido de la misma manera en ambos, y siguen existiendo simultáneamente. Los *contadores del tiempo*, relojes, que se basan en las oscilaciones de la radiación emitida en la transición entre los dos niveles hiperfinos del estado fundamental del isótopo 133 del átomo de cesio a una temperatura de 0 Kelvin, ya tienen una indeterminación ya que a 0 K, por definición, no habrían oscilaciones. Es con su movimiento con el que pretendemos medir al tiempo, asumiendo que el movimiento será constante. Se cuentan oscilaciones y después de 9192631770 se marca un segundo. Se ha de determinar lo factible, lo que sucede. El tiempo se dilata o las oscilaciones se han hecho más lentas y por ello han marcado, cerrando en 2510 oscilaciones la diferencia entre el reloj *estático* y el reloj que se subió al avión en uno de los experimentos para validar a la Teoría de la Relatividad que plantea que la luz originada por una estrella a la que por su traslación la Tierra se le acerca llega al mismo tiempo que la luz originada por otra estrella de la que se aleja. De ser la teoría cierta, lo simbólico representando a lo imaginario interpretando a lo real, el espacio, o el tiempo, o ambos se han de deformar para que esto ocurra, teniendo la velocidad de la luz como constante. Ya que el envejecimiento depende de más factores que sólo el paso del tiempo, puede que uno de los hermanos haya llevado una mejor dieta, patrón de sueño y ejercicio, la constancia de *diferencia* de tiempos la presenta la relatividad por el *tictac* de un reloj de luz, esto es un rayo de luz entre dos espejos. El reloj de luz que se queda en la Tierra tiene un periodo determinado por la velocidad de la luz *c*. El reloj de luz que viaja en la nave igual tiene su periodo determinado por la velocidad de la luz *c* que al establecerse como constante, y recorrer una mayor distancia por tener que recorrer dos veces la distancia entre los espejos del reloj, su periodo, sumado a la distancia que ha recorrido la nave, su desplazamiento, es entonces que tiene entonces que hacerse el espacio o el tiempo relativo porque no tiene sentido que la velocidad de luz se mantenga constante ya que está siendo afectada por la misma velocidad de la nave, así el vector velocidad compuesto por la velocidad de la luz sumado al vector velocidad de la nave es mayor que el vector velocidad de la luz aislado que es el de la Tierra. Como se estableció que la velocidad no puede alcanzar velocidades mayores que *c* entonces la aportación de la velocidad de la nave se desprecia e inician las deformaciones del Espacio Tiempo creado por Hermann Minkowski.

Cuatro dimensiones, el tiempo siendo la cuarta dimensión. Todo ello por considerar que la luz no puede alcanzar mayores velocidades a *c*, siendo que es apreciable que la velocidad de la luz es susceptible a cambios, prueba de ello es la refracción y aunque 1079252848800 km/h es una velocidad asombrosamente alta, ¿qué le impide alcanzar velocidades superiores como taquión? Si como se plantea la luz de una estrella a la que se acerca la Tierra llega al mismo tiempo que la luz de una estrella de la cual se aleja, porque se estableció que *c* es lo absoluto, haciendo del tiempo y del espacio lo relativo, entonces la luz de todas las estrellas existentes tendría que estar llegando a la Tierra y el cielo nocturno sería luminoso, paradoja de Olbers. No es así. Considerando que el tiempo no se deforma y el espacio se mantiene absoluto, la luz de cada una de las estrellas tiene que recorrer su camino hasta la Tierra y aquellas que vemos en una noche estrellada son tan cercanas que la distancia que separa ha sido recorrida por su luz a nuestro tiempo o tan antiguas que su luz ha tenido el tiempo de llegar. Así lo propuso Edgar Allan Poe en *Eureka: A Prose Poem,* Eureka: Un Poema en Prosa. Un poema. La prueba que utilizaba Isaac Newton para demostrar la existencia del espacio absoluto es el cubo de agua de Newton. El agua gira no en relación a los bordes del cubo sino respecto a un espacio absoluto en su argumento. Los relojes de cesio fueron introducidos por Gernot Maria Rudolph Winkler, así el UTC, *Coordinated Universal Time*, Tiempo Universal Coordinado se determina por el TAI, *International Atomic Time*, Tiempo Atómico Internacional, promedio de las oscilaciones de unos 400 relojes de cesio, aquí es la nota importante, si fuese infalible la medición mediante las oscilaciones de la radiación emitida en la transición entre los dos niveles hiperfinos del estado fundamental del isótopo 133 del átomo de cesio, no habría necesidad de hacer un promedio de su medición, como sucedió con las rotaciones de la Tierra con la creación del día solar medio ya que la Tierra no rota uniformemente y es determinada la rotación por UT1, *Universal Time 1,* Tiempo Universal 1. Como TAI y UT1 se desfasan, las oscilaciones con la rotación, se ha decidido tener minutos de 61 segundos, un segundo intercalar, que se agrega ya sea el 30 de junio o el 31 de diciembre para ajustar la variación, por lo que han habido años desde 1972 d.C. en que al celebrar el conteo 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, ¡Feliz Año Nuevo!, faltó contar el segundo añadido por el UTC.

El segundo fue establecido como (día solar medio)/86400. La cuestión es que las mareas por atracción lunar han ido haciendo más lenta la rotación terrestre aunque hay veces que existe un aceleramiento, que explicó Gernot Maria Rudolph Winkler, como consecuencia de que la corteza terrestre gira ligeramente más despacio que el núcleo del planeta, almacenando energía que se libera por un volante de inercia ocasional que produce la aceleración del giro de la Tierra, de poca duración, para restablecer el equilibrio. En 1955 d.C. y 1981 d.C. ha ocurrido el fenómeno, comparable al experimento del cubo de agua de Newton en escala planetaria. Es la dificultad de una definición asequible del tiempo, más allá de *lo que se lee en un reloj*, porque, como escribió Newton en *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*: «Es posible que no haya ningún movimiento igual con el que medir exactamente el tiempo». (p. 89).

Lo que se propone es imaginar a la cuarta dimensión siendo dirección ortogonal espacial a las tres que forman el espacio tridimensional conocido y el tiempo, independientemente, como la sucesión de eventos.

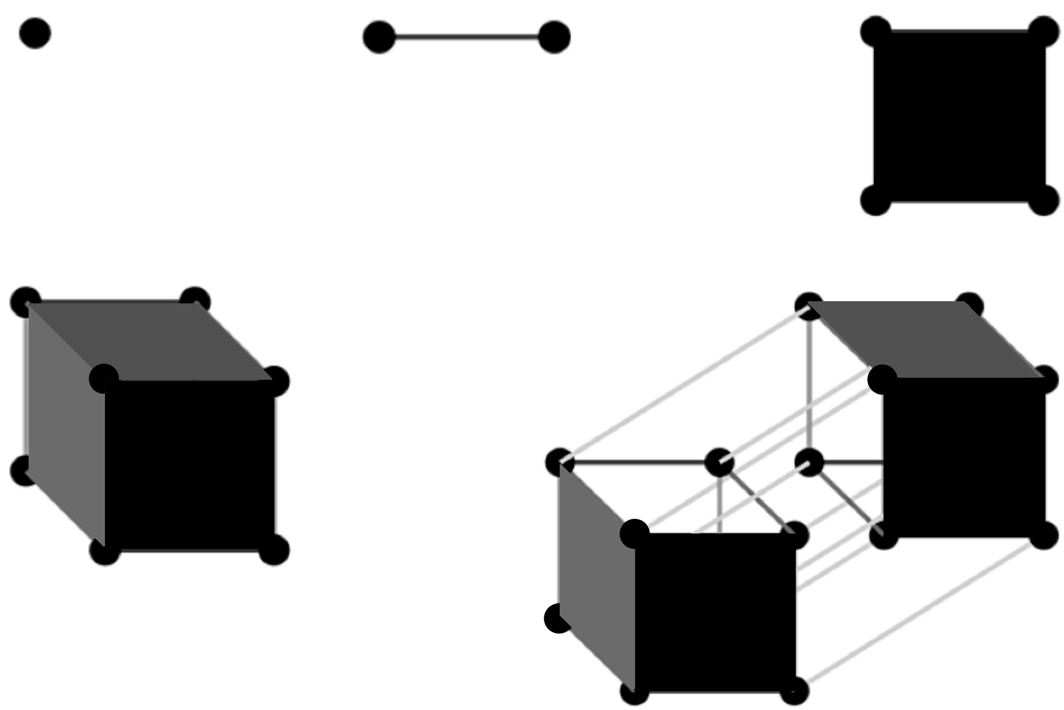


Figura IV 49 Construcción de la cuarta dimensión

La propuesta de la representación física del proceso de integración con el Modelo Físico del Teorema Fundamental del Cálculo permite un intento de asimilación de lo que sería la 4º dimensión espacial. Para llegar a la 4º dimensión, $x^4$, con Largo, Ancho, Alto, y algo más, se ha de partir de integrar su dimensión subordinada, lo  tridimensional. En Cálculo Integral se obtiene $x^4$ al integrar $4x^3$. Con la representación física de la integral se consolida que integrar $4x^3$ es equivalente a tener cuatro cubos y aumentarlos de dimensión. El Teorema Fundamental del Cálculo establece que derivación e integración son operaciones inversas. La extensión en dirección ortogonal de uno de los puntos para realizar la integración es el proceso inverso de:

- Retorno puntual del extremo conservando unión elástica en la continuidad de los puntos.

Integrando $x^3$ se obtiene $x^4/4$, que se asume será el valor del hipervolumen formado al extenderse un punto que le pertenece al cubo en dirección ortogonal una distancia $x$. Con 4 de ellos se completaría el hipercubo, $x^4$, al unir el resultado de las integrales de cuatro cubos, $4x^3$. El hecho de aumentar de dimensión plantea la pregunta formulada desde los Pitagóricos al advertir que no importa cuantas veces uno se multiplique por sí mismo el resultado siempre es uno, entonces: ¿Cómo uno se convierte en varios? La respuesta fue: Reflejándose. La unidad se replica a sí misma contemplándose a sí misma. Aumentar de dimensión, conlleva a 'reflejar', también puede entenderse como replicar. Seguirá unir el punto origen con su reflejo, con su réplica. La ortogonalidad viene siendo la salida de la dimensión, de manera contraria el paralelismo termina siendo la misma dimensión en otro plano. En ese caso, para obtener un grado superior el reflejo, que viene siendo paralelo, ha de rotar 90º, convertirse en ortogonal para salir de la dimensión y unir los puntos que les pertenecen al origen y a la réplica formando así al objeto de dimensión superior al original, siendo este proceso el inverso a:

- Supresión de unión, abatimiento de ortogonalidad y retorno de reflexión.

El proceso de integración se presenta como reflexión, erguimiento de ortogonalidad y unión.

La integral de 1, del punto, se propone que genera su reflexión, posicionamiento ortogonal y posterior unión. Para la primera integral, el punto, no hay limitante en cuanto al posicionamiento de su reflejo. Al ser adimensional cualquier dirección que tome le confiere entrar a la primera dimensión, $x$, al unir el punto origen con su reflejo. La integral de 1, de $x^0$, de un punto, de una cosa adimensional, viene siendo $x^1$, un objeto de 1º dimensión, línea.

Figura IV 50 Punto

Figura IV 51 Punto y reflejo

Figura IV 52 Erguimiento de ortogonalidad del punto

Figura IV 53 Unión punto y reflejo en posición ortogonal

La integral de $x$, de la línea, se propone que genera su reflexión, posicionamiento ortogonal y posterior unión. Para la segunda integral, la línea, el posicionamiento de su reflejo requiere ser ortogonal para salir de la 1º dimensión y así formar la mitad de la segunda dimensión, $x^2/2$, al unir la línea origen con su reflejo. La integral de la línea, de $x$, un objeto monodimensional, viene siendo $x^2/2$, la mitad de un objeto de 2º dimensión, medio plano.

Figura IV 54 Línea

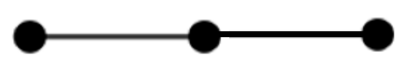


Figura IV 55 Línea y reflejo

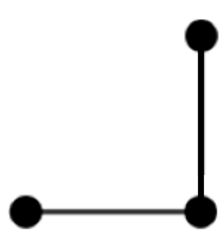


Figura IV 56 Erguimiento de ortogonalidad de la línea

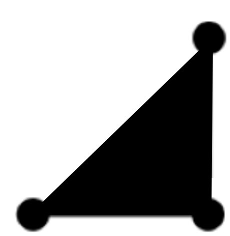


Figura IV 57 Unión línea y reflejo en posición ortogonal

La integral de $x^2$, del plano, se propone que genera su reflexión, posicionamiento ortogonal y posterior unión. Para la tercera integral, el plano, el posicionamiento de su reflejo requiere ser ortogonal para salir de la 2º dimensión y así formar el tercio de la tercera dimensión, $x^3/3$, al unir el plano origen con su reflejo. La integral del plano, de $x^2$, un objeto bidimensional, viene siendo $x^3/3$, el tercio de un objeto de 3º dimensión, tercio cubo. En la tercera dimensión, el volumen, se requiere completar tres dimensiones que la forman: Largo, Ancho, Alto. Al reflejar se tienen sólo dos cuadrados. ¿Cómo cubrir tres dimensiones con dos cuadrados? Ahora será necesario, cosa que no había sido requerida en integraciones anteriores, dividir el plano reflejado en partes iguales, lo que hace que se obtengan las tres superficies, que colocadas de manera ortogonal se unen y forman la integración de $x^2$, se forma $x^3/3$.

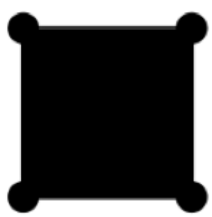


Figura IV 58 Plano

Figura IV 59 Plano y reflejo

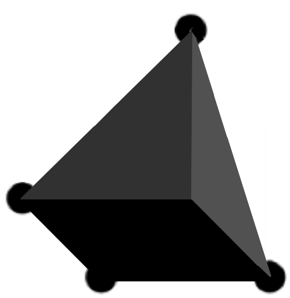


Figura IV 60 Representación del erguimiento de ortogonalidad del plano

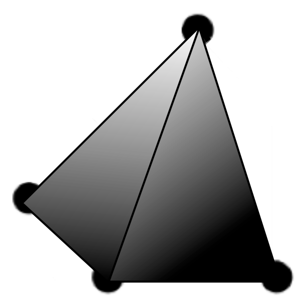


Figura IV 61 Representación de unión plano y reflejo ortogonalmente

Se prosigue con la resultante propuesta de la presente definición de integral. Si se acepta la representación física del proceso de integración, se puede hacer el intento de realizar la aproximación a la 4º dimensión. Para llegar a cuatro dimensiones debemos partir de integrar su dimensión subordinada, lo tridimensional. Para facilitar su asimilación se ha de llegar directamente al objetivo tetradimensional y no a fracciones. Es sabido que para obtener $x^4$

se integra $4x^3$. Ahora con está representación física de la integral se consolida el integrar $4x^3$ es equivalente a tener cuatro cubos, reflejarlos, colocarlos de manera perpendicular y unirlos. Los primeros 3 cubos sí permiten su colocación en este espacio donde existimos, la tercera dimensión. Tres cubos se reflejan y se obtienen entonces seis cubos. Se colocan de manera perpendicular por lo que en conjunto tenemos: adelante, atrás, derecha, izquierda, arriba, abajo. Lo que está fuera de dimensión es al intentar agregar el 4º cubo faltante, ¿Dónde se coloca para que él y su reflejo sean simultáneamente perpendiculares a las seis posiciones que ya ocupan todas las posibles direcciones del espacio tridimensional? Sólo se puede representar al utilizar lo que comenzó el proceso de integración: Utilizar la reflexión. Con esto se llega a la visualización de lo que ocurre dentro del teseracto. El proceso concuerda con los estudios que se han realizado del hipercubo, al coincidir el hecho de que el hipercubo se puede 'desdoblar' en ocho cubos pertenecientes a la tercera dimensión, los cuáles son los ocho cubos que se obtienen al integrar $4x^3$, ya que al integrar cuatro cubos cada uno de ellos se 'refleja' lo que nos lleva a obtener los ocho cubos que dispuestos de manera perpendicular forman el hipercubo, la cuarta dimensión.

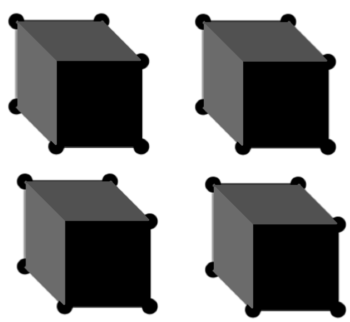


Figura IV 62 Representación de $4x{\cdot}x{\cdot}x$

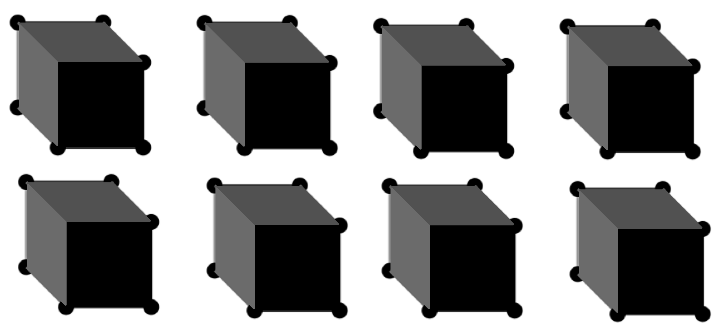


Figura IV 63 Representación de $4x{\cdot}x{\cdot}x$ y reflejo

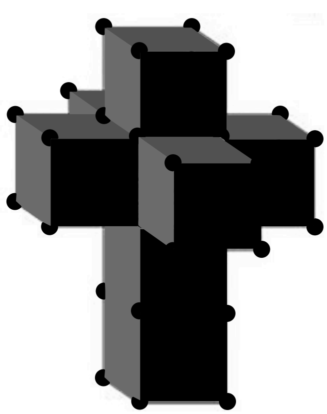


Figura IV 64 Representación de hipercubo 'desdoblado'

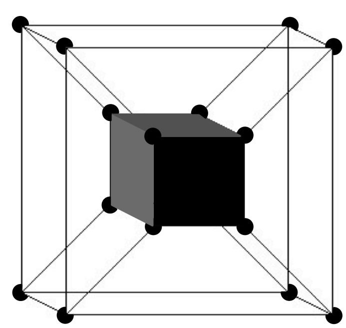


Figura IV 65 Representación de hipercubo

Se completan los tres procesos de integración, inversos a los de derivación con:

Aumento por prolapso de paralelos.

Se puede realizar el proceso de prolapso de paralelos siempre y cuando se tenga en cantidad la dimensión que se obtiene en aumento, de objetos de dimensión menor. Dispuestos de manera ortogonal se extienden de manera paralela formando el objeto de dimensión superior.

La dimensión superior de $x^0$ es $x$. El objeto $x$ tiene implícitamente 1 de exponente, por lo que se requiere 1 objeto de dimensión 0 para obtener $x$ íntegro.

Figura IV 66 Prolapso de paralelos, 1 a $x$

La dimensión superior de $x$ es $x^2$. El objeto $x^2$ tiene 2 de exponente, por lo que se requieren 2 objetos de dimensión 1 para obtener $x^2$ íntegro.

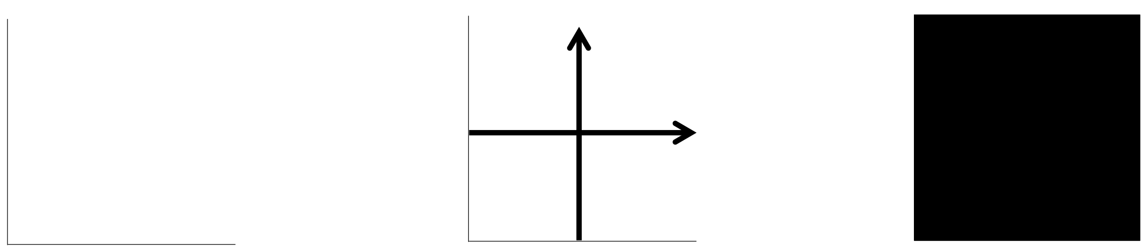


Figura IV 67 Prolapso de paralelos, $2x$ a $x{\cdot}x$

La dimensión superior de $x^2$ es $x^3$. El objeto $x^3$ tiene 3 de exponente, por lo que se requieren 3 objetos de dimensión 2 para obtener $x^3$ íntegro.

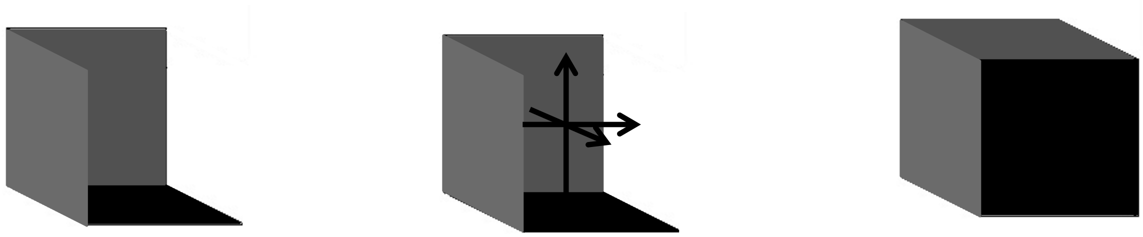


Figura IV 68 Prolapso de paralelos, $3x{\cdot}x$ a $x{\cdot}x{\cdot}x$

La dimensión superior de $x^3$ es $x^4$. El objeto $x^4$ tiene 4 de exponente, por lo que se requieren 4 objetos de dimensión 3 para obtener $x^4$ íntegro.

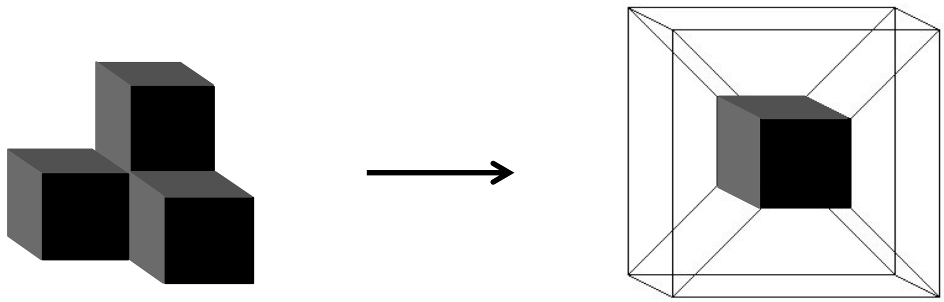


Figura IV 69 Prolapso de paralelos, $4x{\cdot}x{\cdot}x$ a $x{\cdot}x{\cdot}x{\cdot}x$

El 3 de enero de 2018 d.C. se publicó el artículo *Photonic topological boundary pumping as a probe of 4D quantum Hall physics*, Elicitación de frontera topológica del fotón como prueba de la física cuántica Hall 4D, en Nature con autoría de Kevin Chen, Jonathan Guglielmon, Sheng Huang, Yaacov Kraus, Mikael Rechtsman, Mohan Wang & Oded Zilberberg. Como lo anotan, sus resultados proveen una plataforma para el estudio de la física de dimensiones topológicas superiores. El estudio indica que teóricamente el efecto Hall cuántico se puede generalizar a cuatro dimensiones espaciales. Experimentalmente no se ha conseguido su demostración ya que los sistemas están confinados a las tres dimensiones espaciales que estamos habituados. Sin embargo, se utilizaron matrices 2D, de dos dimensiones, sintonizables con guías de fotones. Se observaron cruces de borde a borde y de esquina a esquina que explican es por la elicitación a través de la cuarta dimensión. El cruce será posible so la premisa que el traslado se realizó recorriendo lo tetradimensional.

«Físicamente, no tenemos un sistema espacial 4D, pero podemos acceder a la física cuántica 4D usando este sistema de dimensiones inferiores porque el sistema de mayor dimensión está codificado en la complejidad de la estructura» Mikael Rechtsman

En analogías, si un objeto tridimensional proyecta una sombra bidimensional, estos científicos lo que consiguieron fue observar una sombra tridimensional, en teoría proyectada por un objeto tetradimensional no observado directamente, sino a través de este reflejo.

## IV.15 Operación integral

Sea $x^n$

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

## IV.16 Operación topológica integral

Sea el $n$-cubo $[0, 1]^n \in \mathbb{R}^n$

$$\int [0,1]^n = [0,1]^{n+1} - \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n = 0 \\ (x_1, x_{\ldots}, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^{n+1} x_i > n & \text{si} \quad n > 0 \end{cases}$$

La integral se propone como el aumento de dimensión de un objeto $n$-dimensional al seguir cualquiera de los tres procesos:

- Reflexión, erguimiento de ortogonalidad y unión.
- Extensión en dirección ortogonal de un punto conservando unión elástica en continuidad.
- Aumento por prolapso de paralelos.

En la operación topológica se advierte que al aumento de dimensión se le restringe al restarle la combinación de elementos que sumen mayor a la dimensión original. Toda existencia sumará mayor a 0 por lo que sin la restricción se obtiene el resultado de la operación integración de 1 a $x$, que coincide en ser correcto al estar dividido $x$ entre la identidad. En cambio, integrando $x$ se obtiene $x^2/2$, que es la dimensión superior acotada en que la combinación no sume más de uno, la dimensión original. Para que quede mejor expresada la restricción se muestran en el plano cartesiano teniendo como eje al origen la traza que forma el punto que se extiende ortogonalmente para mostrar las distintas combinaciones que forman y cómo el resultado $x^2/2$ cumple que no sobrepasa en suma de valor absoluto el valor de uno.

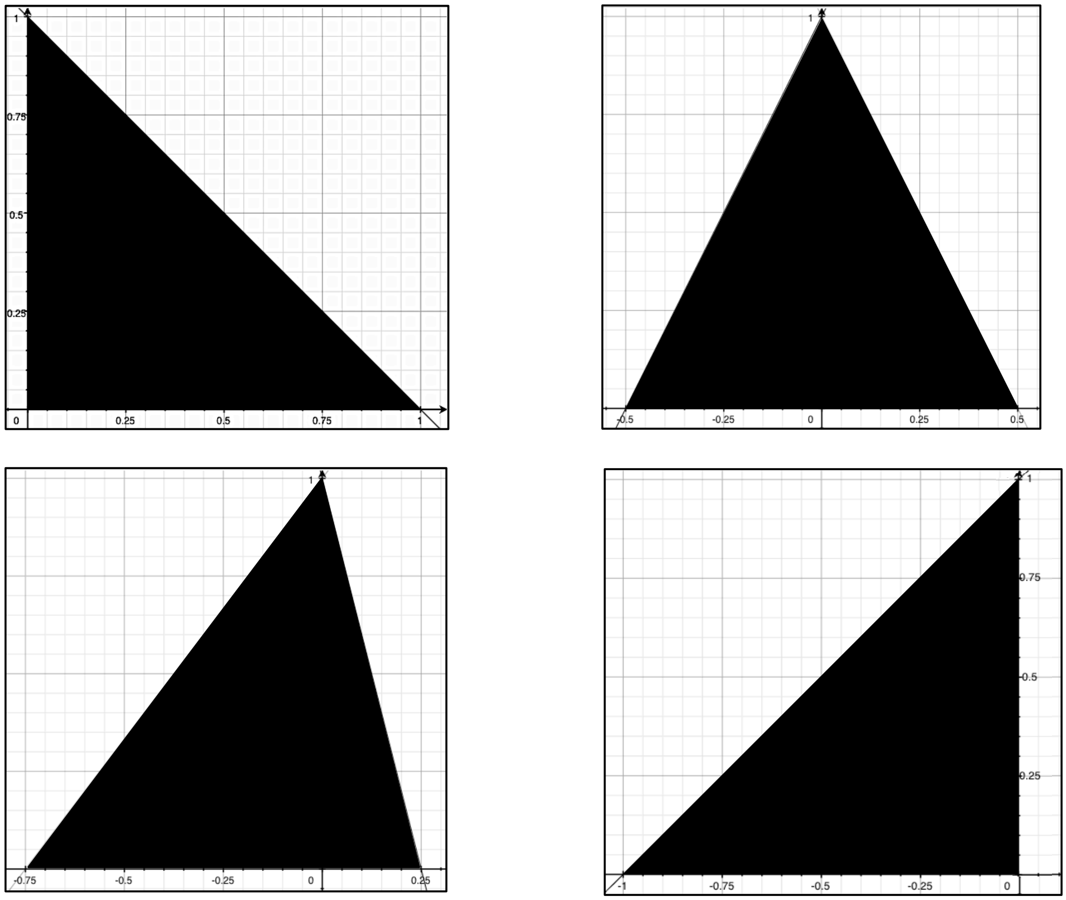



Figura IV 70 Variantes de $x{\cdot}x/2$ en el plano cartesiano

Consecuentemente, integrando $x^2$ se obtiene $x^3/3$, la dimensión superior acotada en que la combinación no sume más de dos, la dimensión original.

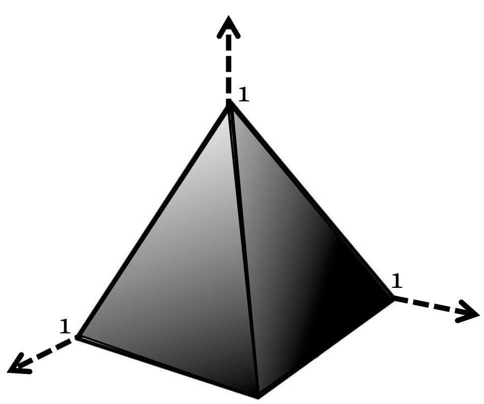



Figura IV 71 $x{\cdot}x{\cdot}x/3$ en el espacio cartesiano

Para una función trascendente, pueden utilizarse también las Series de Taylor para el Cálculo Integral formando $n$-cubos para manipular el polinomio que la caracteriza y aumentar de dimensión cada uno de los términos. Es notable que las funciones seno y coseno pueden ser aumentadas ortogonalmente de manera directa. Se les aumenta 90º, π/2 radianes, recorriendo íntegramente la gráfica a la derecha con lo que se expresa la integral física de *sen(x)* y de *cos(x)* a continuación, comenzando con coseno:

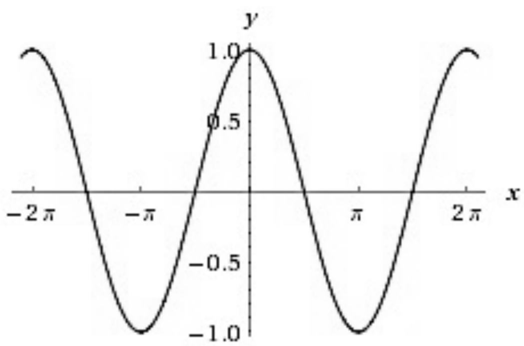


Figura IV 72 *cos(x)*

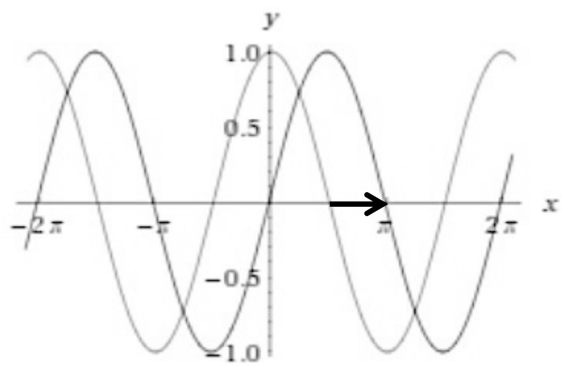


Figura IV 73 Integral de *cos(x)*

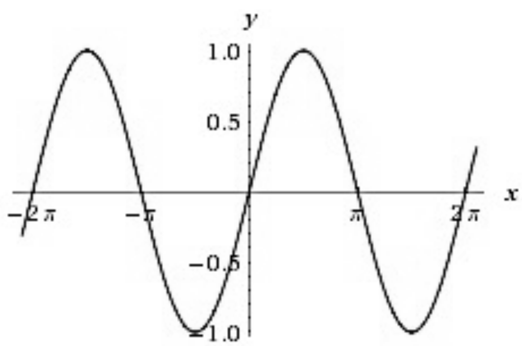


Figura IV 74 *sen(x)*

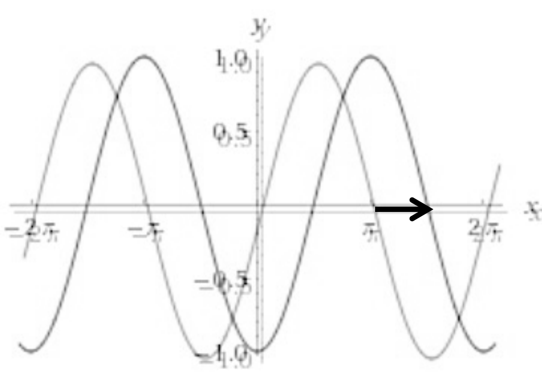


Figura IV 75 Integral de *sen(x)*

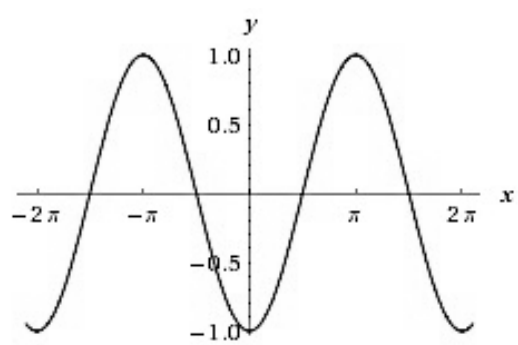
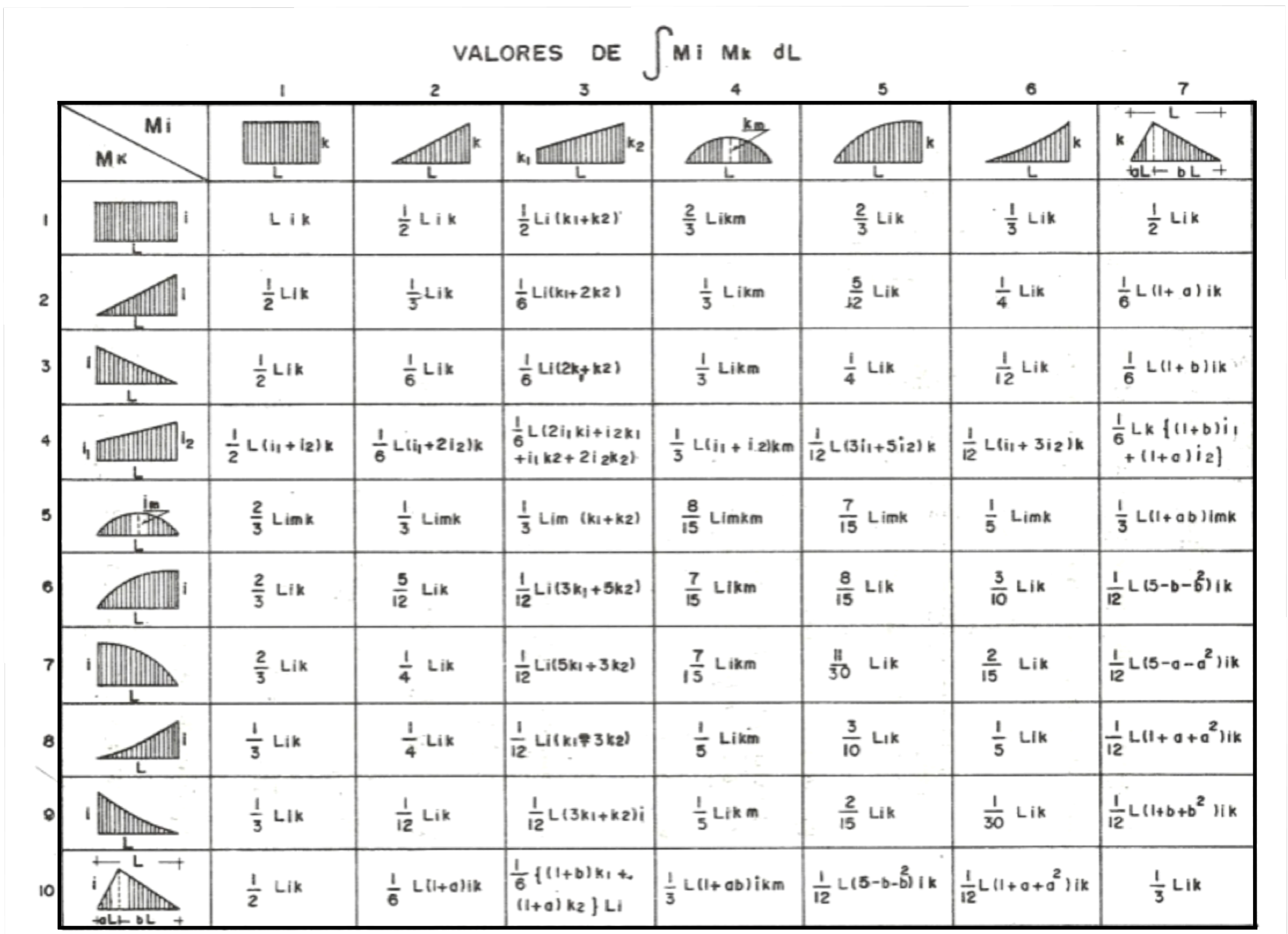


Figura IV 76 *-cos(x)*

Año 1855 d.C.

Michael Faraday da una conferencia pública en la que muestra sus primeros experimentos sobre la electricidad y el magnetismo. En la audiencia se encuentra William Ewart Gladstone, quien es Ministro de Hacienda y futuro Primer Ministro de Inglaterra. Gladstone se levanta y le pregunta al científico: “Todo esto es muy bonito, ¿pero alguna vez le encontraremos una aplicación práctica?” Faraday respondió: «Sir, un día podrá usted gravarla con impuestos».



VALORES DE $\int M_i \, M_k \, dL$

| $M_k$ \ $M_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $L\,i\,k$ | $\frac{1}{2} L\,i\,k$ | $\frac{1}{2} Li(k_1+k_2)$ | $\frac{2}{3} Likm$ | $\frac{2}{3} Lik$ | $\frac{1}{3} Lik$ | $\frac{1}{2} Lik$ |
| 2 | $\frac{1}{2} Lik$ | $\frac{1}{3} Lik$ | $\frac{1}{6} Li(k_1+2k_2)$ | $\frac{1}{3} Likm$ | $\frac{5}{12} Lik$ | $\frac{1}{4} Lik$ | $\frac{1}{6} L(1+a)ik$ |
| 3 | $\frac{1}{2} Lik$ | $\frac{1}{6} Lik$ | $\frac{1}{6} Li(2k_1+k_2)$ | $\frac{1}{3} Likm$ | $\frac{1}{4} Lik$ | $\frac{1}{12} Lik$ | $\frac{1}{6} L(1+b)ik$ |
| 4 | $\frac{1}{2} L(i_1+i_2)k$ | $\frac{1}{6} L(i_1+2i_2)k$ | $\frac{1}{6} L(2i_1k_1+i_2k_1+i_1k_2+2i_2k_2)$ | $\frac{1}{3} L(i_1+i_2)km$ | $\frac{1}{12} L(3i_1+5i_2)k$ | $\frac{1}{12} L(i_1+3i_2)k$ | $\frac{1}{6} Lk\{(1+b)i_1+(1+a)i_2\}$ |
| 5 | $\frac{2}{3} Limk$ | $\frac{1}{3} Limk$ | $\frac{1}{3} Lim(k_1+k_2)$ | $\frac{8}{15} Limkm$ | $\frac{7}{15} Limk$ | $\frac{1}{5} Limk$ | $\frac{1}{3} L(1+ab)imk$ |
| 6 | $\frac{2}{3} Lik$ | $\frac{5}{12} Lik$ | $\frac{1}{12} Li(3k_1+5k_2)$ | $\frac{7}{15} Likm$ | $\frac{8}{15} Lik$ | $\frac{3}{10} Lik$ | $\frac{1}{12} L(5-b-b^2)ik$ |
| 7 | $\frac{2}{3} Lik$ | $\frac{1}{4} Lik$ | $\frac{1}{12} Li(5k_1+3k_2)$ | $\frac{7}{15} Likm$ | $\frac{11}{30} Lik$ | $\frac{2}{15} Lik$ | $\frac{1}{12} L(5-a-a^2)ik$ |
| 8 | $\frac{1}{3} Lik$ | $\frac{1}{4} Lik$ | $\frac{1}{12} Li(k_1+3k_2)$ | $\frac{1}{5} Likm$ | $\frac{3}{10} Lik$ | $\frac{1}{5} Lik$ | $\frac{1}{12} L(1+a+a^2)ik$ |
| 9 | $\frac{1}{3} Lik$ | $\frac{1}{12} Lik$ | $\frac{1}{12} L(3k_1+k_2)i$ | $\frac{1}{5} Likm$ | $\frac{2}{15} Lik$ | $\frac{1}{30} Lik$ | $\frac{1}{12} L(1+b+b^2)ik$ |
| 10 | $\frac{1}{2} Lik$ | $\frac{1}{6} L(1+a)ik$ | $\frac{1}{6}\{(1+b)k_1+(1+a)k_2\}Li$ | $\frac{1}{3} L(1+ab)ikm$ | $\frac{1}{12} L(5-b-b^2)ik$ | $\frac{1}{12} L(1+a+a^2)ik$ | $\frac{1}{3} Lik$ |

Figura IV 77 Valores de integración

En *Concebir y analizar estructuras*, Jaime Cervera Bravo expresa la simiente del pensamiento:

«De este modo la percepción y el lenguaje tienen una extrema ligazón en todos los campos de la cultura, ciencia incluida. Sólo se percibe con precisión lo que puede describirse con análoga precisión, es decir, aquello sobre lo que puede aplicarse un lenguaje específico.

El lenguaje cumple no sólo el papel de establecer el entramado que hace posible la percepción; es responsable de la capacidad de descripción, considerando tanto la intro–descripción asociada a la comprensión de lo percibido, como la extra–descripción, base de la comunicación con otros.

La comprensión del comportamiento estructural y la capacidad de comunicar dicho comportamiento está íntimamente ligada al lenguaje que permite expresar hechos sobre resistencia o deformación de las estructuras, y por lo tanto, el análisis de estructuras juega un papel central en dicha comprensión». (p. 11).

Las estructuras, según su uso, se pueden clasificar en cinco tipos:

| **Piso** | **Cubierta** | **Unión** | **Colocación** | **Contención** |
|---|---|---|---|---|
| [Edificio] | [Domo] | [Puente] | [Torre] | [Presa] |

Las estructuras de piso son la moda en obra civil. Tomar espacio del cielo. Su estructuración resulta en losas que transfieren su carga a vigas. Las vigas reparten la carga hacia columnas. Las columnas transmiten el peso a zapatas. Las zapatas diseminan el esfuerzo al suelo. El suelo absorbe la solicitación acumulada desde la losa. Bajada de cargas es el nombre que se le da al cálculo de este hecho. Corresponde a sucesivos cambios de dimensión, referente a lo planteado en este documento. El peso de la losa se produce por un volumen con cierta densidad influenciado por la aceleración de la gravedad. Dicho volumen se reduce de dimensión y toma la expresión de masa por unidad de área $kg/m^2$. Es nombrada como área tributaria la superficie que toma de carga una viga. El análisis dimensional pasa de $kg/m^2$ a $kg/m$, carga lineal, $\omega$. Regla del sobre se le llama a la división de la superficie de la losa para la transferencia de la carga a las vigas involucradas.

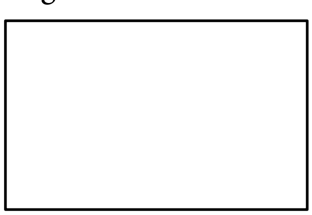


Figura IV 78 Losa a cuatro columnas

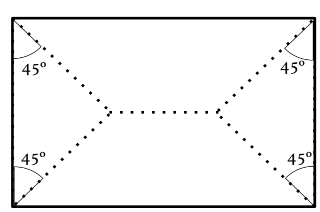



Figura IV 79 Regla del sobre

La regla del sobre regula el trazo de divisores de las áreas tributarias. Partiendo de una de las vigas de menor longitud se trazan líneas a 45º hasta su cruce que se une mediante línea recta con su homólogo simétrico. De esta manera se garantiza que los puntos involucrados en cada área se encuentran a la distancia mínima a una de las cuatro vigas que recibirán la carga. Ahora la interpretación mediante el Modelo Físico del Teorema Fundamental del Cálculo sigue el esquema de cambio de dimensión. La columna representada como un punto en uno de las vértices de la losa se extiende en línea recta sobre una de las vigas de menor longitud hasta topar con el recorrido que realizó la otra columna. Se extienden en dirección ortogonal los punto extremos, manteniendo unión con el resto de los puntos que trazaron y se forma el triángulo rectángulo isósceles como área tributaria de la viga de menor longitud. Para las vigas de mayor longitud se sigue el mismo proceso aunque acotado por la restricción de superficie. En sentido inverso, todos los puntos de la superficie siguen el recorrido anterior en su transferencia hacia vigas y luego hacia columnas.

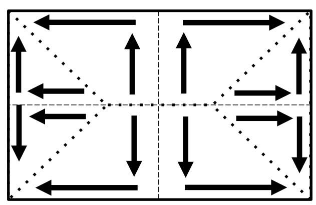


Figura IV 80 Transferencia de carga a cuatro columnas

El ávido escéptico, incluyéndome, notará que la transferencia es hacia cuatro puntos mientras que en el Modelo Físico del Teorema Fundamental del Cálculo se estableció que $x^2$ tiene como origen dos puntos, 2, con doble integración. Sí se mantiene lo propuesto, puesto que con sólo dichos dos puntos, con dos columnas opuestas respecto a ambos ejes, se tiene posicionado al plano. También en su caso a la losa. Sin embargo, el conjunto losa y dos columnas es una Estructura Inestable. La tercer columna confiere estabilidad haciendo de ella una Estructura Isostática al cumplir con lo expuesto por Euclides en la Proposición 2. del Libro XI donde asevera que todo triángulo está en un plano. La cuarta columna resulta redundante, le concede hiperestaticidad. El conjunto de losa con sus columnas hace símil a una mesa de concreto. Si se analizan las mesas, aquellas de tres patas no bambolean. En una mesa común, de cuatro patas, habrá cuatro puntos de apoyo sobre el piso. Tres de las patas se apoyan en el suelo al mismo tiempo estableciendo un mismo plano. Si la cuarta pata, por mínimo que sea el desnivel, no tiene apoyo sobre el mismo plano que forman las otras tres, comienza el bamboleo, que es el cambio de plano de apoyo. En lo cotidiano, el desnivel se soluciona con una servilleta doblada o con una corcholata. Para estructuras de concreto, el nivelado del plano de apoyo no resulta así de trivial. Para evitar asentamientos diferenciales conviene desde el plano tener configuraciones de estructura que aseguren el comportamiento. La propuesta en esta tesis es estructurar las losas a tresbolillo y utilizar la eficiencia de las armaduras con su configuración triangular ahora en estructuras de piso.

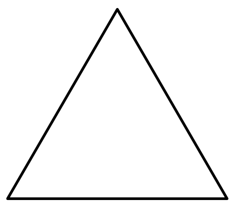


Figura IV 81 Losa a tres columnas

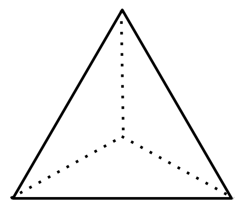


Figura IV 82 Regla del totopo

Así como con las mesas, la estructuración a cuatro columnas es una cuestión cultural, mientras que a tres columnas el apoyo es más estable, demostrado matemáticamente. La transferencia de carga desde la losa hacia las vigas involucradas y posteriormente hacia las columnas, seguirá el proceso de reducción de dimensión establecido en el Modelo en tesis, acotado a las interferencias en superficie. Las áreas tributarias se delimitan con lo que denomino regla del totopo. La unión de los vértices con el centroide, que siendo triangulo equilátero corresponde con el centro de las circunferencias, la inscrita y la circunscrita, marca la superficie que corresponde a cada una de las tres vigas.

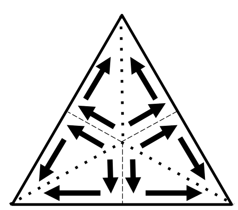


Figura IV 83 Transferencia de carga a tres columnas

En cuanto las vigas son cargadas, el peso agregado les producirá deformación. Existen tres métodos para abordar su análisis: Área de Momentos Doble Integración Viga conjugada Los tres métodos tienen su sustento asumiendo la *elástica* de la viga, formulada como la curva que forma la fibra neutra una vez que se carga la viga y considerando que inicialmente tenía curvatura cero, que es recta. El método Área de Momentos arranca con los teoremas de Mohr. Christian Otto Mohr, quien acuñó la idea de estructura hiperestática, presentó relación entre el giro, $\theta$, expresado en radianes, de un punto, $a$, de la *elástic*a respecto de otro, $b$, y el área de momentos de flexión, $M$, entre ellos, dividido por el módulo de elasticidad, $E$, y la inercia, $I$, de la viga, en su primer teorema. En su segundo teorema relaciona la flecha con el momento del momento de flexión, $Mx$, respecto al segundo punto, $b$.

IV.17 Primer teorema de Mohr

$$\theta_{ab} = \frac{1}{EI} \int_a^b M \, \mathrm{d}x$$

IV.18 Segundo teorema de Mohr

$$y = \frac{1}{EI} \int_a^b Mx \, \mathrm{d}x$$

Doble Integración utiliza la Ecuación General de Flecha, expresión que remite a IV.17 y IV.18:

IV.19

$$y = \frac{1}{EI} \iint M \, \mathrm{d}x$$

Viga conjugada es el nombre que se le dio al artificio matemático de obtener el diagrama del momento de flexión de una viga y hacerlo carga de otra viga ficticia que se emplea. Calculando el momento de la viga que tiene de carga el momento de la viga primigenia, se calcula la flecha. Para no volver a calcular el diagrama de momentos en la Viga conjugada han sido utilizados los Valores de integración que resumen combinaciones de diagramas de momentos frecuentes.

**Ver Figura IV 77**

El Modelo Físico del Teorema Fundamental del Cálculo puede utilizarse como método para la resolución de las integrales que calculan el dato de la flecha de vigas. Sin embargo, para ello requiere desarrollarse al mismo nivel de las otras tres ya establecidas, para que no bambolee.

## Video explicativo

Luis Eduardo Juárez Quirarte    Joaquín Meléndez Gómez    Alejandro Oviedo Moreno

Duración 7:41    Animación en volumen

MFTFC.m4v

# Capítulo V Conclusiones

*Los científicos estudian el mundo tal como es; los ingenieros crean el mundo que nunca ha sido.*

*- Theodore Von Karman*

A Usted da parte el civil Alejandro Oviedo Moreno que los tres objetivos de la presente tesis que suscribe se cumplieron, siendo estos:

- Señalar la interpretación tangible del Cálculo Diferencial y del Cálculo Integral.

  Cálculo Diferencial

  Supresión de unión, abatimiento de ortogonalidad y retorno de reflexión.

  Retorno puntual del extremo conservando unión elástica en la continuidad de los puntos.

  Reducción por colapso de paralelos.

  Cálculo Integral

  Reflexión, erguimiento de ortogonalidad y unión.

  Extensión en dirección ortogonal de un punto conservando unión elástica en continuidad.

  Aumento por prolapso de paralelos.

- Definir operaciones topológicas que representen a la diferencial y a la integral.

  Operación topológica diferencial

  $D[0, 1]^n = n[0, 1]^{n-1}$

  Operación topológica integral

  $$\int [0, 1]^n = [0, 1]^{n+1} - \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ (x_1, x_{\dots}, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^{n+1} x_i > n & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

- Mostrar aplicación del concepto al ámbito de Ingeniería Civil.

  La transferencia de carga corresponde al cambio de dimensión presentado con el Modelo Físico del Teorema Fundamental del Cálculo. La carga volumétrica toma valor de carga superficial. La carga superficial pasa a ser carga lineal que se transmite a carga puntual.

## PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN

¿Crees que relacionar el Cálculo Infinitesimal con las dimensiones podría ser una buena tesis de licenciatura? Ella sonrió y me dio un beso.

¿Se puede interpretar el Cálculo Diferencial y el Cálculo Integral, relacionados directamente de manera física, como la transformación de los elementos al manipular el número de dimensiones por las que están formados?

## PRINCIPAL APORTACIÓN

*When I put together a maze, I amaze.*

La propuesta de un modelo tangible en donde a partir de la integración y derivación se calcule el resultado de la transformación al aumentar o disminuir el número de dimensiones de cierto objeto de estudio aporta otra mirada al trabajo donde se involucran infinitesimales e infinito, trabajo que como la Trompeta de Gabriel si se aborda externamente jamás se cubrirá su superficie, mientras que desde dentro, aunque sea una superficie inmensa, es posible de pintar.
La finalidad de adquirir mayor comprensión en la respuesta de los elementos, como con la transferencia de carga en estructuras, permite entender la influencia de nosotros ingenieros en el desarrollo de la infraestructura como base de la estructura de sociedad, economía y gobierno para que florezca la superestructura de justicia, bellas artes y religión.
La consideración del Cálculo Infinitesimal de forma alterna da paso a soñar que es posible dar el salto a la cuarta dimensión integrando sus cuatro espacios.
Así, la principal aportación del Modelo Físico del Teorema Fundamental del Cálculo es recordar que de la mónada y la dualidad indefinida surgen los números; de los números, puntos; de los puntos, líneas; de las líneas, figuras planas; de las figuras planas, cuerpos sólidos; de los cuerpos sólidos, cuerpos sensibles, cuyos componentes son cuatro: fuego, agua, tierra y aire; estos cuatro elementos se intercambian y se transforman totalmente el uno en el otro, combinándose para producir un universo animado, inteligente, esférico, con la tierra como su centro, y la tierra misma también es esférica y está habitada en su interior. También hay antípodas, y nuestro 'abajo' es su 'arriba' como expresó Diógenes Laercio hace 23 siglos.

## FUTURAS LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN

*La ingeniería continuará siempre transformando y mejorando a la sociedad. - Carlos Slim*

La elicitación de frontera topológica del fotón puso de manifiesto que la cuarta dimensión espacial es posible que exista. El Modelo Físico del Teorema Fundamental del Cálculo puede desarrollarse para dar expectativa en la exploración de dimensiones superiores. De este punto se extiende la futura línea de investigación de la superficie que se logra cubrir mediante la teoría para la interpretación de los cambios en sólidos, en materia y dar el salto al hiperespacio.

Sin salir de la dimensión de Ingeniería Civil, de validarse el Modelo se puede hacer uso de un cuarto método para la resolución de las integrales que calculan el dato de la flecha de vigas. Este método consiste en hacer de las ecuaciones de momento su representación en objetos a los cuales se les aumenta de dimensión dos veces para obtener la distancia recorrida por la deformación de la viga. Es necesario que este método sea igual de práctico o más sencillo que los tres ya presentados para que se justifique su implementación, cosa que explayar.

Una afirmación de Georg Cantor cuando expuso sus ideas de las diferentes clases de infinito era que las matemáticas son muy libres y que las únicas condiciones que deben exigirse para la incorporación de un nuevo concepto matemático son que no sea contradictorio y que se defina en función de los conceptos previamente aceptados. Será interesante la tarea de dar rigor al Modelo para su incorporación como sistema formal axiomático, aunque como expuso Kurt Gödel, no será perfecto. Aún así, buscar que sea consistente, decidible y completo.

## ADIÓS

*Empieza por el principio, y sigue hasta llegar al final; allí te paras. - Charles Dodgson*

«Ciertamente, yo respeto a aquellos que tienden a demostrar todas las cosas siguiendo principios básicos y a establecer el estudio con base en los mismos; sin embargo, yo no aconsejaría que un obstáculo sea tan escrupulosamente puesto al arte de inventar, o que rechazáramos las cosas encontradas bajo tal pretexto, y privarnos a nosotros mismos de sus frutos». Gottfried Wilhelm Leibniz

«Si piensas en la naturaleza misma de la vida, quiero decir, desde el principio, el desarrollo de la primera célula dividida en dos células, el único propósito de la vida ha sido transmitir lo aprendido». {Besson-Silla, V. (productora) Besson, L. (director). (2014). *Lucy* [Cinta cinematográfica]. Francia: EuropaCorp}.

## COLOFÓN

Al honorable jurado solicita el civil Alejandro Oviedo Moreno licencia de ser nombrado ingeniero tras haber cubierto en su totalidad los créditos y requisitos de egreso del plan de estudios correspondiente y cumplir con la opción I de titulación citada en el Artículo 1 del Reglamento de opciones de titulación para las licenciaturas de la Facultad de Ingeniería.

*Hay cosas que sencillamente están ahí, sin molestar a nadie, esperando a que las descubran.*

El niño con el pijama de rayas

# Bibliografía

*Uno no es lo que es por lo que escribe, sino por lo que ha leído. - Jorge Luis Borges*


(2016). *Trigonometría.* Cataluña: UOC. Recuperado de http://cimanet.uoc.edu/cursMateso/IniciacionMatematicas/pdf/C%2016Trigonometria.pdf

(2016). *Manual para obtener los volúmenes de tránsito en carreteras.* México: SCT. Recuperado de http://www.sct.gob.mx/fileadmin/DireccionesGrales/DGST/Manuales/manual_volumen_de_transito/Manual_volumenes__2016_v2.pdf

(2017). *¿Los efectos cuánticos superan la velocidad de la luz?.* Barcelona: La Vanguardia. Recuperado de https://www.lavanguardia.com/ciencia/20170626/423670846049/preguntas-big-vang-efectos-cuanticos-superan-velocidad-luz.html

(2018). *Las 10 principales causas de defunción*. Mundo: OMS. Recuperado de https://www.who.int/es/news-room/fact-sheets/detail/the-top-10-causes-of-death

(2018). *Dimension.* Oxford: OUP. Recuperado de https://www.oxfordlearnersdictionaries.com/definition/english/dimension

(2019). *Datos económicos y financieros de México.* México: Banxico. Recuperado de https://www.banxico.org.mx/SieInternet/consultarDirectorioInternetAction.do?sector=12&accion=consultarCuadroAnalitico&idCuadro=CA126&locale=es

(2019). *International System of Units.* Estados Unidos de América: NIST. Recuperado de https://physics.nist.gov/cuu/Units/meter.html

(2019). *Parque vehicular*. México: INEGI. Recuperado de https://www.inegi.org.mx/temas/vehiculos/

(2019). *Roadways.* Estados Unidos de América: CIA Recuperado de https://www.cia.gov/llibrary/publications/the-world-factbook/fields/385.html#XX

Abreu, J., Cabrera, E., Iglesias, P., Izquierdo, J. (1995). *El golpe de ariete en tuberías de impulsión. Comentarios a las expresiones de Mendiluce.* Cataluña: UPC. Recuperado de https://upcommons.upc.edu/bitstream/handle/2099/3301/22article3.pdf

Andersen, K. (1984). *Cavalieri's Method of Indivisibles.* Portugal: ULisboa. Recuperado de https://www.math.tecnico.ulisboa.pt/~jroquet/Andersen.pdf

Apolonio. (s. III a.C.). *Κωνικά.* Alejandría: Biblioteca de Alejandría. Recuperado de https://archive.org/details/treatiseonconicsooapolrich/page/n9

Arboleda, L. (2002). *El problema didáctico y filosófico de la desaxiomatización de las matemáticas.* Colombia: UEB.

Arcos, J. (2004). *Rigor o entendimiento, un viejo dilema en la enseñanza de las Matemáticas: el caso del cálculo infinitesimal.* México: UAEM. Recuperado de https://www.redalyc.org/pdf/311/31101004.pdf

Aristóteles. (s. IV a.C.). *Metafísica*. Atenas: Liceo. Recuperado de https://www.philosophia.cl/biblioteca/aristoteles/metafisica.pdf

Arquímedes. (s. III a.C.). *Sobre teoremas mecánicos a Eratóstenes misiva.* Alejandría: Biblioteca de Alejandría. Recuperado de http://www.math.harvard.edu/archive/archimedes09/pdf/Schiefsky_Method.pdf

Artigue, M. (1988). *La notion de différentielle en mathématiques et en physique dans l'enseignement supérieur*. Francia: Numdam. Recuperado de http://www.numdam.org/article/PSMIR_1987-1988___5_A4_0.pdf

Aryabhata. (s. VI d.C.). *Aryabhatiya*. India: Editor desconocido. Recuperado de https://archive.org/details/The_Aryabhatiya_of_Aryabhata_Clark_1930

Bañuelos, A. y Manzanarez, N. (s. XXI d.C.). *Fundamentos de la Teoría de la Probabilidad.* México: UNAM.

Bárcenas, D. (2006). *La integral de Lebesgue un poco más de cien años después.* Venezuela: AMV. Recuperado de https://www.emis.de/journals/BAMV/conten/vol13/Diomedes.pdf

Baron, M. (1969). *The Origins of the Infinitesimal Calculus*. Estados Unidos de América: Dover Publications.

Barrios, F. (2016). *El Teorema Fundamental del Cálculo en las Lectiones Geometricae (1674) de Isaac Barrow*. México: UNAM. Recuperado de https://paginas.matem.unam.mx/insitus/phocadownloadpap/geometria/teorema%20fundamental%20del%20clculo.pdf

Barrow, I. (1669). *Lectiones Geometricae*. Londres: Gulielmi Godbid. Recuperado de https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k1095218.image

Becerra, J. (2018). *Regla de Barrow*. México: UNAM. Recuperado de http://prepa8.unam.mx/academia/Colegios/Matematicas/paginacolmate/applets/matematicas_VI_12/Applets_Geogebra/regladebarrow.html

Berkeley, G. (1734). *The Analyst; or, A discourse addressed to an infidel mathematician: wherein it is examined whether the object, principles, and inferences of the modern analysis are more distinctly conceived, or more evidently deduced, than religious mysteries and points of faith.* Londres: Strand.

Besson-Silla, V. (productora) Besson, L. (director). (2014). *Lucy* [Cinta cinematográfica]. Francia: EuropaCorp.

Bingham, T. (1971). *Newton y el desarrollo del Cálculo.* Estados Unidos de América: Pi Mu Epsilon Journal. Recuperado de http://www.bdigital.unal.edu.co/34525/1/34688-135053-1-PB.pdf

Bolzano, B. (1810). *Beiträge zu einer begründeteren Darstellung der Mathematik.* Bohemia: Caspar Widtmann.

Boyne, J. (2006). *El niño con el pijama de rayas*. Irlanda: David Fickling Books.

Canela, L. (2016). *Aritmetización del análisis y construcción formal: Husserl como alumno de Weierstrass y Kronecker*. México: UNAM. Recuperado de http://revistadefilosofia.com/72-06.pdf

Castrillo, P. (2004). *La teoría lógica de Franz Bolzano: una reacción contra el subjetivismo kantiano*. Madrid: UNED. Recuperado de http://e-spacio.uned.es/fez/eserv/bibliuned:Endoxa-2004E7459540-877D-0334-A5B433C5500D328D/teorica_logica.pdf

Cervera, J. (2011). *Concebir y analizar estructuras*. Madrid: UPM. Recuperado de https://core.ac.uk/download/pdf/11993073.pdf

Chae, S. (1995). *Lebesgue Integration*. Nueva York: Springer Science+Business Media.

Colina, J. y Ramírez, H. (1999). *La Ingeniería Estructural*. México: Ciencia Ergo-sum. Recuperado de http://www.redalyc.org/pdf/104/10401812.pdf

Chaffin, C., Grayson Bell, R., Linson, A. (productores) Fincher, D. (director). (1999). *Fight Club*. Estados Unidos de América: 20th Century Fox.

Corry, L. (2007). *La teoría de las proporciones de Eudoxio interpretada por Dedekind*. Tel Aviv: TAU. Recuperado de https://m.tau.ac.il/~corry/publications/articles/pdf/Dedekind-Eudoxus.pdf

Corry, L. (2015). *A Brief History of Numbers*. Oxford: OUP.

De la Florida, M. (2017). *¿Quién inventó el metro?* México: Algarabía. Recuperado de https://algarabia.com/a-ciencia/quien-invento-el-metro/

De Lorenzo, J. (1998). *La Matemática: de sus fundamentos y crisis*. Madrid: Tecnos. Recuperado de https://www.academia.edu/35301571/La_matemática_de_sus_fundamentos_y_crisis

Doyle, A. (1982). *Las aventuras de Sherlock Holmes*. Reino Unido: George Newnes.

Díaz, A. (2008). *Golpe de ariete*. Nicaragua: UNI. Recuperado de https://avdiaz.files.wordpress.com/2008/10/golpe-de-ariete.pdf

Ende, M. (1973). *Momo*. Alemania: Thienemann.

Euclides. (ca. 300 a.C.). *Elementos.* Alejandría: Biblioteca de Alejandría. Recuperado de http://www.euclides.org/

Euler, L. (1748). *Introductio in analysin infinitorum*. Suiza: apud Marcum-Michaelem Bousquet & Socios. Recuperado de https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k33510?rk=42918;4

Euler, L. (1755). *Institutiones Calculi Differentialis*. Rusia: Impensis Academiae Scientiarum Imperalis Petropolitanae. Recuperado de https://archive.org/details/bub_gb_sYE_AAAAcAAJ/page/n4

Euler, L. (1768). *Institutionum Calculi Integralis*. Rusia: Petropoli, Impensis Academiae Imperalis Scientiarum. Recuperado de https://www.wilbourhall.org/pdfs/euler/Leonhardi_Euleri_Institutionum_calcuVO3.pdf

Euler, L. (1776). *Determinatio onerum, quae columnae gestare valent*. Rusia: Petropoli, Impensis Academiae Imperalis Scientiarum. Recuperado de http://eulerarchive.maa.org//docs/originals/E508.pdf

Fernández, I. y Pacheco, J. (2005). ¿Por qué son naturales los logaritmos neperianos? España: ULPGC. Recuperado de http://www.dma.ulpgc.es/profesores/personal/ifdez/LogNep.pdf

Flores, L. (2019). *Compendio del Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal*. México: SMIE. Recuperado de http://www.smie.org.mx/layout/reglamentos-construccion/ciudad-de-mexico-reglamento-construccion-compendio-reformas-2004-2019-smie.pdf

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task.* Holanda: Springer

Galeano, C. (2009). *Técnicas de solución numérica de la ecuación de Difusión-Advección-Reacción para el estudio de dispersión de contaminantes*. Colombia: UNAL. Recuperado de https://core.ac.uk/download/pdf/11052915.pdf

Galilei, G. (1638). *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze.* Países Bajos: Dino Peri. Recuperado de https://web.archive.org/web/20110604150851/http://www.liberliber.it/biblioteca/g/galilei/discorsi_e_dimostrazioni_matematiche_intorno_a_due_nuove_etc/pdf/discor_p.pdf

García, M. (1989). *El tiempo en la física: de Newton a Einstein.* Barcelona: UAB. Recuperado de https://ddd.uab.cat/pub/enrahonar/0211402Xn15/0211402Xn15p39.pdf

García, P. (2013). *La integral definida y la integral indefinida*. México: UNAM. Recuperado de http://www.ingenieria.unam.mx/~colomepg/CALCULO_INTEGRAL_INT_DEF_E_INT_INDEF.pdf

González, P. (2003). *El descubrimiento de los inconmensurables.* Cataluña: XTEC. Recuperado de http://www.xtec.cat/sgfp/llicencies/200304/memories/incommensurables.pdf

González, P. (2003). *Estudio crítico de tres obras cumbres de la literatura matemática.* Cataluña: XTEC. Recuperado de http://www.xtec.cat/sgfp/llicencies/200304/memories/elementseuclides1.pdf
Hemenway, P. (2008). *The secret code.* China: Evergreen

Gonzáles, O., Robles F. (2005). *Aspectos fundamentales del concreto reforzado*. México: Limusa. Recuperado de https://marodyc.files.wordpress.com/2014/06/aspectos-fundamentales-concreto-reforzado-gonzc3a1lez-cuevas.pdf

Hurtado, E. (2016). *Teorema Fundamental del Cálculo.* México: UNAM. Recuperado de http://sistemas.fciencias.unam.mx/~erhc/calculo2_20162/Int_Indefinida_2016_b.pdf

Huai-Dong, C. y Xi-Ping, Z. (2006). *A Complete Proof of the Poincaré and Geometrization Conjectures - Application of the Hamilton-Perelman Theory of the Ricci Flow*. China: Asian Journal of Mathematics.

Huxley, A. (1932). *Un mundo feliz.* Londres: Chatto & Windus. Recuperado de https://infonavit.janium.net/janium/Documentos/037392.pdf

Impellizere, S. (2003). *La invención de los logaritmos.* España: UNC. Recuperado de https://revistas.unc.edu.ar/index.php/REM/article/viewFile/10853/11447 EXPLICADO

Jayyam, O. (Sin fecha). *Rubaiyat.* Khorasan: Kara-Khanid Khanate. Recuperado de http://www.biblioteca.org.ar/libros/121.pdf

Juárez, L. (2015). *Modelos y Problemas de Difusión*. México: UAMI. Recuperado de http://sgpwe.izt.uam.mx/files/users/uami/hect/Taller_de_Modelado_I/notasTM1.pdf

Kollbruner, C. (1969). *Torsion in structures, an engineering approach*. Nueva York: Springer Science+Business Media.

Korvin-Krukovskaya, S. (1875). *Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen.* Berlín: Journal für die reine und angewandte Mathematik. Recuperado de https://www.digizeitschriften.de/dms/img/?PID=GDZPPN002156059

Larotonda, G. (2010). *Cálculo y Análisis*. Buenos Aires: UBA. Recuperado de http://cms.dm.uba.ar/depto/public/Curso%20de%20grado/fascgrado3.pdf

Leibniz, G. (1684). *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus.* Alemania: Acta Eruditorum.

Leibniz, G. (1714). *La Monadologie.* Francia: Manuscrito. Recuperado de https://www.plato-philosophy.org/wp-content/uploads/2016/07/The-Monadology-1714-by-Gottfried-Wilhelm-LEIBNIZ-1646-1716.pdf

Llopis, J. (2018). *Identidades Trigonométricas: Demostraciones.* España: Matesfacil. Recuperado de https://www.matesfacil.com/ESO/trigonometria/identidades/identidades-trigonometricas-demostraciones-ejemplos.html

Lugo, O. y Suárez, D. (2014). *Principios matemáticos de los hiperreales.* Colombia: UT. Recuperado de http://repository.ut.edu.co/bitstream/001/1179/1/RIUT-BFA-spa-2014%20Principios%20Matematicos%20De%20Los%20Hiperreales.pdf

Luis, A. (2014). *Berkeley: El origen de la crítica a los infinitesimales*. México: UNAM. Recuperado de https://philarchive.org/archive/LPEBEO

Mandelbrot, B. (1982). *The Fractal Geometry of Nature.* Estados Unidos de América: W. H. Freeman and Company.

McCormac, J. (2005). *Diseño de Concreto Reforzado*. México: Alfa omega.

Malvern, L. (1997). *Introduction to the mechanics of a continuous medium*. Estados Unidos de América: Prentice-Hall, Inc. Recuperado de http://www.ipgp.fr/~kaminski/web_doudoud/Malvern_book.pdf

Martín, M. (2013). *El nacimiento del Cálculo.* España: UGR. Recuperado de https://www.ugr.es/~mmartins/material/Historia_parte_2.pdf

Meléndez, J. (2013). *Cómo midió Aristarco la Luna y el Sol.* Madrid: UC3M. Recuperado de http://multiblog.educacion.navarra.es/lcordonm/files/2013/12/Aristarco.pdf

Marx, K. (1939). *Grundrisse.* Moscú: Max-Engels Institute. Recuperado de http://www.mhh.domainepublic.net/ALGUNOSTEXTOS/MARXANDSONS/MARX/Grundrisse1.pdf

Mascott, Y. (2015). *Acuerdo por el que se establecen modalidades en la prestación del servicio de autotransporte federal de pasajeros y turismo.* México: SCT. Recuperado de http://www.sct.gob.mx/fileadmin/DireccionesGrales/DGAF/Juridico/acuerdos/ACUERDO_POR_EL_QUE_SE_ESTABLECEN_MODALIDADES_EN_EL_AF.pdf

Meléndez, M. (2012). *La importancia filosófica del teorema de Bolzano*. Madrid: UNED. Recuperado de http://marcmmw.freeshell.org/esp/logica/la_importancia_filosofica_del_teorema_de_bolzano.html

Mena, U., Pérez, L. (2008). *Manual de diseño de obras civiles diseño por sismo*. México: CFE

Mir, F. (2011). *La polémica intuicionismo-formalismo en los años 20. Principio de Tercio Excluso.* España: Filosofía. Recuperado de http://www.filosofia.net/materiales/pdf23/CDM35.pdf

Mroginski, J. (2005). *Pandeo.* Argentina: UNNE. Recuperado de http://ing.unne.edu.ar/mecap/Apuntes/Estabilidad_2/Cap10-Pandeo.pdf

Muñoz, V. (2015). *Operaciones con funciones y sus derivadas.* México: UNAM. Recuperado de http://www.objetos.unam.mx/matematicas/leccionesMatematicas/03/3_026/index.html

Naval Meteorology and Oceanography Command. (2019). *Leap Seconds.* Estados Unidos de América: USNO. Recuperado de https://www.usno.navy.mil/USNO/time/master-clock/leap-seconds

Napier, J. (1614). *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio.* Escocia: Barth. Vicentium. Recuperado de http://www.17centurymaths.com/contents/napiercontents.html

Newton, I. (1687). *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica.* Londres: Societatis Regiæ. Recuperado de http://sedici.unlp.edu.ar/handle/10915/73545

Newton, I. (1736). *Methodus fluxionum et serierum infinitorum.* Londres: Henry Woodfall. Recuperado de https://archive.org/details/methodoffluxionsoonewt

Núñez, M. (2015). *Modelos de concentración de contaminantes atmosféricos*. España: UPO. Recuperado de https://www.upo.es/depa/webdex/quimfis/CA_old/php/apuntesCA0607_Tema2.pdf

O'Connor, J. y Robertson, E. (2004). *Pietro Mengoli.* Escocia: St And. Recuperado de http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Mengoli.html

Padilla, R. (s. XXI d.C.). *Manual de datos útiles para quien hace uso del Sistema Internacional de Unidades.* México: UNAM. Recuperado de https://www.smig.org.mx/archivos/pdf/MANUAL%20DE%20SISTEMA%20METRICO.pdf

Páez, J. (2011) *Cálculo integral de varias variables.* México: UNAM. Recuperado de http://intermat.fciencias.unam.mx/notas_calc_iv.pdf

Pérez, J. (2008). *Cálculo Diferencial e Integral de funciones de una variable.* España: UGR. Recuperado de https://www.ugr.es/~fjperez/textos/calculo_diferencial_integral_func_una_var.pdf

Petroski, H. (1985). *To Engineer is Human: The Role of Failure in Successful Design*. Nueva York: St. Martinn's Press. Recuperado de https://ef.engr.utk.edu/ef153-2005-08/pdf/To_Engineer_Is_Human.pdf

Ponce, J. (2013). *Isaac Barrow y su versión geométrica del Teorema Fundamental del Cálculo.* México: Números. Recuperado de http://www.sinewton.org/numeros/numeros/83/Articulos_04.pdf

Ponce, J. (2016). *Galileo Galilei y su ley de caída libre.* Australia: UQ. Recuperado de https://bestiariotopologico.blogspot.com/2016/08/galileo-galilei-y-su-ley-de-caida-libre.html

Ponce, J. (2014). *Acerca del origen y evolución del Teorema Fundamental del Cálculo*. México: Cinvestav. Recuperado de https://es.scribd.com/document/108621431/Acerca-del-origen-y-evolucion-del-Teorema Fundamental-del-Calculo

Prieto, A. (2010). *Seminario de ideas y visualizaciones matemáticas.* Madrid: UCM. Recuperado de http://www.mat.ucm.es/cosasmdg/cdsmdg/ideas/documentos/angelines.pdf

Proust, M. (1923). *La prisionera. En busca del tiempo perdido.* Francia: Édition Grasset. Recuperado de https://biblioteca.org.ar/libros/133579.pdf

Ptolomeo, C. (s. II d.C.). *Μαθηματικὴ Σύνταξις.* Alejandría: Biblioteca de Alejandría. Recuperado de https://archive.org/details/pt1claudiiptolemaei01ptoluoft/page/8

Qurra, T. (s. IX d.C.). Sobre la composición de razones. Bagdad: Casa de la Sabiduría.

Rashid, R. (2009). *Al-Khwarizmi: the beginnings of algebra*. Londres: Saqi

Reséndiz, D. (2008). *El rompecabezas de la ingeniería.* México: FCE. Recuperado de http://tecnodesign.com.co/wp-content/uploads/2016/04/rompecabezas-ingenieria.pdf

Robinsohn, A. (1966). *Non-standard Analysis.* Estados Unidos de América: Princeton University Press.

Rodrigues, J. (2006). *La fórmula de Dios.* Portugal: William Morrow.

Roegel, D. (2011). *A reconstruction of Briggs' Logarithmorum chilias prima (1617).* Francia: LOCOMAT. Recuperado de http://locomat.loria.fr/briggs1617/briggs1617doc.pdf

Rojas, R. (2018). *El lenguaje de las matemáticas: Historias de sus símbolos.* México: Conacyt.

Russell, B. (1900). *A Critical Exposition of the Philosophy of Leibniz.* Nueva York: Cosimo.

Russell, B. (1903). *The Principles of Mathematics.* Cambridge: CUP.

Soto, E. (2011). *Diccionario Ilustrado de Conceptos Matemáticos.* México: Aprende Matemáticas. Recuperado de http://wordpress.colegio-arcangel.com/matematicas/files/2012/10/DICM.pdf

Stewart, I. (2008). *Taming the Infinite.* Londres: Quercus.

Stewart, I. (2012). *17 Equations that Changed the World.* Londres: Profile Books LTD.

Suárez, L. (2012). *Diseño de la cimentación de Torre Reforma, México D.F..* México: ETSIM. Recuperado de http://oa.upm.es/14969/1/PFC_Luis_Suarez_Almazan.pdf

Taylor, B. (1715). *Methodus Incrementorum Directa & Inversa.* Londres: Impensis Gulielmi Innys. Recuperado de http://www.17centurymaths.com/contents/taylorscontents.html

Tonias, C. y Tonias, E. (2016). *Geometric Procedures for Civil Engineers.* Nueva York: Springer Science+Business Media.

Usunáriz, P. y Usunáriz, U. (2013). *Diccionario biográfico de matemáticos.* Madrid: UPM. Recuperado de http://oa.upm.es/14868/3/DICCIONARIO_BIOGRAFICO_DE_MATEMATICOS.pdf

Vázquez, N. (1966). *Geometría intuitiva.* Buenos Aires: Cuarta dimensión.

Wigner, E. (1960). *The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences.* Nueva York: John Wiley & Sons, Inc.. Recuperado de http://www.dartmouth.edu/~matc/MathDrama/reading/Wigner.html

Xenócrates. (s. IV a.C.). *Sobre ideas.* Atenas: Academia. Recuperado de https://archive.org/details/xenokratesdarst01heingoog/

Young, T. (1807). *Course of Lectures on Natural Philosophy and The Mechanical Arts.* Londres: J. Johnson. Recuperado de https://archive.org/details/lecturescourseof02younrich/page/n6

Zabaleta, J. (2009). *Concepto y Realidad del cociente diferencial en la Wissenschaft der Logik de Hegel.* Madrid: UAM. Recuperado de https://www.academia.edu/36406822/Concepto_y_realidad_del_cociente_diferencial_en_la_Wissenschaft_der_logik_de_Hegel

Zilberberg, O., Huang, S., Guglielmon, J., Wang, M., Chen, K., Kraus, Y., Rechtsman, M. (2018). *Photonic topological boundary pumping as a probe of 4D quantum Hall physics.* Reino Unido: Nature. Recuperado de https://www.nature.com/articles/nature25011

# Anexo

*No hay camino de reyes en geometría. - Euclides*

LIBRO I

Definiciones

Definición 1. Un punto es lo que no tiene partes.

Definición 2. Una línea es una longitud sin anchura.

Definición 3. Los extremos de una línea son puntos.

Definición 4. Una línea recta es aquella que yace por igual respecto de los puntos que están en ella.

Definición 5. Una superficie es aquello que sólo tiene longitud y anchura.

Definición 6. Los extremos de una superficie son líneas.

Definición 7. Una superficie plana es aquella superficie que yace por igual respecto de las líneas que están en ella.

Definición 8. Un ángulo plano es la inclinación mutua de dos líneas que se encuentran una a otra en un plano y no están en línea recta.

Definición 9. Cuando las líneas que comprenden el ángulo son rectas, el ángulo se llama rectilíneo.

Definición 10. Cuando una línea recta que está sobre otra hace que los ángulos adyacentes sean iguales, cada uno de los ángulos es recto, y la recta que está sobre la otra se llama perpendicular a la otra recta.

Definición 11. Un ángulo obtuso es un ángulo mayor que un ángulo recto.

Definición 12. Un ángulo agudo es un ángulo menor que un ángulo recto.

Definición 13. Un límite es lo que es extremo de algo.

Definición 14. Una figura es aquello que está contenido por cualquier límite o límites.

Definición 15. Un círculo es una figura plana comprendida por una sola línea (llamada circunferencia) de tal modo que todas las rectas dibujadas que caen sobre ella desde un punto de los que están dentro de la figura son iguales entre sí.

Definición 16. Y el punto se llama centro del círculo.

Definición 17. Un diámetro de un círculo es una recta cualquiera que pasa por el centro y que acaba en ambas direcciones en la circunferencia del círculo; esta línea recta también divide el círculo en dos partes iguales.

Definición 18. Un semicírculo es la figura comprendida entre el diámetro y la circunferencia cortada por él. El centro del semicírculo es el mismo que el del círculo.

Definición 19. Figuras rectilíneas son aquellas que están comprendidas por líneas rectas, triláteras las comprendidas por tres, cuadriláteras las comprendidas por cuatro y multiláteras las comprendidas por más de cuatro líneas rectas.

Definición 20. De los triángulos, el equilátero es el que tiene los tres lados iguales; isósceles el que tiene dos lados iguales y uno desigual; y escaleno el que tiene los tres lados desiguales.

Definición 21. De los triángulos, triángulo rectángulo es el que tiene un ángulo recto, obtusángulo el que tiene un ángulo obtuso y acutángulo el que tiene los tres ángulos agudos.

Definición 22. De los cuadriláteros, cuadrado es el que tiene los lados iguales y los ángulos rectos; rectángulo el que es rectangular pero no equilátero; rombo el que es equilátero, pero no tiene los ángulos rectos; y romboide el que tiene los lados y los ángulos opuestos iguales, pero ni es equilátero ni tiene los ángulos rectos. Los otros cuadriláteros se llaman trapecios.

Definición 23. Rectas paralelas son aquellas que, estando en un mismo plano y siendo prolongadas indefinidamente en ambos sentidos, no se encuentran una a otra en ninguno de ellos.

## Postulados

Postulado 1. Por dos puntos diferentes pasa una sola línea recta.

Postulado 2. Un segmento rectilíneo puede ser siempre alargado.

Postulado 3. Hay una sola circunferencia con un centro y un radio dados.

Postulado 4. Todos los ángulos rectos son iguales.

Postulado 5. Si una recta secante corta a dos rectas formando a un lado ángulos interiores, la suma de los cuales sea menor que dos ángulos rectos; las dos rectas, suficientemente alargadas se cortarán en el mismo lado.

## Nociones Comunes

Noción común 1. Cosas iguales a una tercera son iguales entre sí.

Noción común 2. Si a cosas iguales se añaden cosas iguales, los totales son iguales también.

Noción común 3. Si a cosas iguales se quitan cosas iguales, los restos son iguales también.

Noción común 4. Las cosas que coinciden entre sí son iguales entre sí.

Noción común 5. El todo es mayor que la parte.

## LIBRO XI

### Definiciones

Definición 1. Un sólido es aquello que tiene longitud, anchura y profundidad.

Definición 2. Y el extremo de un sólido es una superficie.

Definición 3. Una recta es ortogonal a un plano cuando forma ángulos rectos con todas las rectas que la tocan y que están en el plano.

Definición 4. Un plano es ortogonal a un plano cuando las rectas dibujadas en uno de los planos formando ángulos rectos con la intersección común a los dos planos forman ángulos rectos con el plano que queda.

Definición 5. Cuando desde el extremo de una recta elevado sobre un plano se dibuja una perpendicular al plano y se traza otra recta desde el punto que va hasta el extremo que está en el plano de la primera recta, el ángulo comprendido por la recta dibujada y la que está sobre el plano es la inclinación de la recta con respecto al plano.

Definición 6. La inclinación de un plano respecto a un plano es el ángulo comprendido por las rectas dibujadas a un mismo punto formando ángulos rectos con la sección común en cada uno de los planos.

Definición 7. Se dice que un plano se inclina sobre un plano de manera semejante a como otro plano se inclina sobre otro, cuando los ángulos de inclinación son iguales entre sí.

Definición 8. Planos paralelos son los que no concurren.

Definición 9. Figuras sólidas semejantes son las comprendidas por planos semejantes iguales en número.

Definición 10. Figuras sólidas iguales y semejantes son las comprendidas por planos semejantes iguales en número y tamaño.

Definición 11. Un ángulo sólido es la inclinación de más de dos líneas que se tocan entre sí y no están en la misma superficie respecto a todas las líneas. O dicho de otra manera: Un ángulo sólido es el que está comprendido por más de dos ángulos planos construidos en el mismo punto, sin estar en el mismo plano.

Definición 12. Una pirámide es una figura sólida comprendida por planos, construida desde un plano a un punto.

Definición 13. Un prisma es una figura sólida comprendida por planos dos de los cuales, los opuestos, son iguales, semejantes y paralelos, mientras que los demás planos son paralelogramos.

Definición 14. Cuando, estando fijo el diámetro de un semicírculo, se hace girar el semicírculo y se vuelve de nuevo a la misma posición inicial, la figura comprendida es una esfera.

Definición 15. Y el eje de la esfera es la recta que permanece fija en torno a la que gira el semicírculo.

Definición 16. Y el centro de la esfera es el mismo que el del semicírculo.

Definición 17. Y diámetro de la esfera es cualquier recta dibujada a través del centro y limitada en las dos direcciones por la superficie de la esfera.

Definición 18. Cuando, estando fijo uno de los lados que comprenden el ángulo recto de un triángulo rectángulo, se hace girar el triángulo y se vuelve de nuevo a la posición inicial, la figura comprendida es un cono. Y si la recta que permanece fija es igual a la que queda del ángulo recto, el cono será rectángulo, y si es menor obtusángulo y si es mayor acutángulo.

Definición 19. Y el eje del cono es la recta que permanece fija en torno a la que gira el triángulo.

Definición 20. Y la base es el círculo que describe la recta que gira.

Definición 21. Cuando, estando fijo uno de los lados que comprenden el ángulo recto de un paralelogramo rectángulo, se hace girar el paralelogramo y vuelve de nuevo a la posición inicial, la figura comprendida es un cilindro.

Definición 22. Y el eje del cilindro es la recta que permanece fija en torno a la que gira el paralelogramo.

Definición 23. Y las bases son los círculos descritos por los dos lados opuestos que giren.

Definición 24. Conos y cilindros semejantes son aquellos en los que ejes y diámetros de las bases son proporcionales.

Definición 25. Un cubo es la figura sólida que está comprendida por seis cuadrados iguales.

Definición 26. Un octaedro es una figura sólida comprendida por ocho triángulos iguales y equiláteros.

Definición 27. Un icosaedro es la figura sólida comprendida por veinte triángulos iguales y equiláteros.

Definición 28. Un dodecaedro es la figura sólida comprendida por doce pentágonos iguales equiláteros y equiángulos.

Proposición 1. No es posible que una parte de una línea recta esté contenida en el plano de referencia y otra parte de la rºecta en un plano más elevado.

Proposición 2. Si dos rectas se cortan una a otra están en el mismo plano, y todo triángulo está en un plano.

Proposición 3. Si dos planos se cortan uno a otro su intersección común es una línea recta.

Proposición 4. Si se levanta una recta formando ángulos rectos con dos rectas que se cortan una a otra en su intersección común, formará también ángulos rectos con el plano que pasa a través de ellas.

Proposición 5. Si se levanta una recta formando ángulos rectos con tres rectas que se tocan en su intersección común, las tres rectas están contenidas en el mismo plano.

Proposición 6. Si dos rectas forman ángulos rectos con el mismo plano, las rectas son paralelas.

Proposición 7. Si dos rectas son paralelas y se toman unos puntos al azar en cada una de ellas, la recta que une los puntos está contenida en el mismo plano que las paralelas.

Proposición 8. Si dos rectas son paralelas y una de ellas forma ángulos rectos con un plano cualquiera, la recta que queda formará también ángulos rectos con el mismo plano.

Proposición 9. Las paralelas a una misma recta y que no están contenidas en el mismo plano que la recta son también paralelas entre sí.

Proposición 10. Si dos rectas que se tocan son paralelas a otras dos rectas que se tocan, sin estar en el mismo plano, comprenderán ángulos iguales.

Proposición 11. Trazar una línea recta perpendicular a un plano dado desde un punto dado elevado.

Proposición 12. Levantar una línea recta formando ángulos rectos con un plano dado desde un punto dado y contenido en el plano.

Proposición 13. No se pueden levantar por el mismo lado dos rectas formando ángulos rectos con el mismo plano desde el mismo punto.

Proposición 14. Los planos con los que una misma recta forma ángulos rectos serán paralelos.

Proposición 15. Si dos rectas que se tocan son paralelas a dos rectas que se tocan sin estar en el mismo plano, los planos que pasan a través de ellas son paralelos.

Proposición 16. Si dos planos paralelos son cortados por un plano, las intersecciones comunes son paralelas.

Proposición 17. Si dos rectas son cortadas por planos paralelos, serán cortadas en las mismas razones.

Proposición 18. Si una recta forma ángulos rectos con un plano cualquiera, todos los planos que pasen a través de ella formarán también ángulos rectos con el mismo plano.

Proposición 19. Si dos planos que es cortan forman ángulos rectos con un plano, la intersección común formará también ángulos rectos con el mismo plano.

Proposición 20. Si un ángulo sólido es comprendido por tres ángulos planos, dos cualesquiera, tomados juntos de cualquier manera, son mayores que el restante.

Proposición 21. Todo ángulo sólido es comprendido por ángulos planos menores que cuatro rectos.

Proposición 22. Si hay tres ángulos planos, dos de los cuales tomados juntos de cualquier manera son mayores que el restante, y los comprenden rectas iguales, es posible construir un triángulo a partir de las rectas que unen los extremos de las rectas iguales.

Proposición 23. Construir un ángulo sólido a partir de tres ángulos planos, dos de los cuales tomados juntos de cualquier manera son mayores que el restante; entonces, es necesario que los tres ángulos sean menores que cuatro rectos.

Proposición 24. Si un sólido es comprendido por planos paralelos, sus planos opuestos son iguales y paralelogramos.

Proposición 25. Si un sólido paralelepípedo es cortado por un plano que sea paralelo a los planos opuestos, entonces, de la misma manera que la base es a la base, así el sólido es al sólido.

Proposición 26. Construir un ángulo sólido igual a un ángulo sólido dado sobre una recta dada y en uno de sus puntos.

Proposición 27. Trazar sobre una recta dada un sólido paralelepípedo semejante y situado de manera semejante a un sólido paralelepípedo dado.

Proposición 28. Si un sólido paralelepípedo es cortado por un plano según las diagonales de los planos opuestos, el sólido será dividido en dos partes iguales por el plano.

Proposición 29. Los sólidos paralelepípedos que están sobre la misma base y tienen la misma altura, y en los que los extremos superiores de las aristas laterales están en las mismas rectas son iguales entre sí.

Proposición 30. Los sólidos paralelepípedos que están sobre la misma base y tienen la misma altura y en los que los extremos superiores de las aristas laterales no están en las mismas rectas son iguales entre sí.

Proposición 31. Los sólidos paralelepípedos que están sobre la misma base y tienen la misma altura son iguales entre sí.

Proposición 32. Los sólidos paralelepípedos que tienen la misma altura son entre sí como sus bases.

Proposición 33. Los sólidos paralelepípedos semejantes guardan entre sí una razón triplicada de la de sus lados correspondientes.

Proposición 34. Las bases de los sólidos paralelepípedos iguales están inversamente relacionadas con las alturas; y aquellos sólidos paralelepípedos las bases de los cuales están inversamente relacionadas con sus alturas son iguales.

Proposición 35. Si hay dos ángulos planos iguales y se levantan desde sus vértices rectas elevadas que comprendan ángulos iguales respectivamente con las rectas iniciales, y se toman unos puntos al azar en las rectas elevadas y, desde estos puntos se dibujan perpendiculares a los planos en los que están los ángulos iniciales y se trazan rectas de los puntos producidos en los planos hasta los vértices de los ángulos iniciales, estos ángulos comprenderán con las rectas elevadas ángulos iguales.

Proposición 36. Si tres rectas son proporcionales, el sólido paralelepípedo construido a partir de ellas es igual al sólido paralelepípedo construido a partir de la media proporcional, equilátero y equiangular con el sólido nombrado.

Proposición 37. Si cuatro rectas son proporcionales, los sólidos paralelepípedos semejantes y construidos de manera semejante a partir de ellas serán también proporcionales; y si los sólidos paralelepípedos semejantes y construidos de manera semejante a partir de ellas son proporcionales, también las propias rectas serán proporcionales.

Proposición 38. Si los lados de los planos opuestos de un cubo se dividen en dos partes iguales y se trazan planos a través de las secciones, la intersección común de los planos y el diámetro del cubo se dividen mutuamente en dos partes iguales.

Proposición 39. Si dos prismas tienen la misma altura y uno tiene como base un paralelogramo y el otro un triángulo y el paralelogramo es el doble del triángulo, los prismas serán iguales.

*I ask myself*

*I ask myself:*
*I ask the stars*
*the sun*
*the moon*
*and our mother earth*

*What is it that gives us life?*
*What is it that makes us walk?*
*What is it that gives us strength*
*and energy?*

*No one answers me.*
*I walk alone,*
*people look at me:*
*they notice me*
*they recognize me*
*they observe me.*

*A moment later, my own heart*
*responds to me:*
*you know why you have come to earth,*
*respond to yourself.*
*You hold the answer!*

*Nehuatl nimoyoltlatlanilia*

*Nehuatl nimoyoltlatlanilia:*
*nitlatlanilia metztli,*
*tonatiuh*
*ehecatl*
*ihuan totlalnantzin.*

*¿Tlen ica titlachixtoque?*
*¿Tlen ica tinemi?*
*¿Tlen ica timoyolchicahua?*

*Amo aquen nechnanquilia*
*a nosel ninemi*
*nochime san nechtlachilia:*
*nech mati*
*nech ixmati*
*nech machilia.*

*Sateipan noyolo nechnanquilia:*
*tehuatl ticmati*
*tlen ica tihualatoc ipan tlaltipactli,*
*tehuatl ximonahquili.*
*¡Tehuatl xitlananquili!*

*Yo me pregunto*

*Yo me pregunto:*
*pregunto a las estrellas*
*al sol*
*al viento*
*y a nuestra madre tierra.*

*¿Qué es lo que nos hace tener vida?*
*¿Qué es lo que nos hace caminar?*
*¿Qué es lo que nos da fuerza*
*y energía?*

*Nadie me responde.*
*Camino en la soledad,*
*la gente me mira:*
*me percibe*
*me reconoce*
*me observa.*

*Instantes después, mi propio corazón*
*me responde:*
*tú sabes a qué has venido a la tierra,*
*respóndete tú mismo.*
*¡Tú tienes la respuesta!*

*Natalio Hernández Hernández*

*El placer más noble es el júbilo de comprender. - Leonardo da Vinci*