



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

---

**FACULTAD DE INGENIERÍA**

**Diseño y optimización de una  
transmisión para un vehículo  
Off-Road**

**TESIS**

Que para obtener el título de  
**Ingeniero Mecatrónico**

**P R E S E N T A**

Francisco Giovanni Alcantara Garcia

**DIRECTOR DE TESIS**

Dr. Álvaro Ayala Ruiz



**Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2019**

## DEDICATORIA

- A mis padres, aquellas personas que me enseñaron el valor del trabajo duro y que en más de una ocasión se quitaron el pan de la boca para alimentar mis sueños, jamás podré pagarles todo el esfuerzo que hicieron para que llegara este día. Gracias por todo, los amo.
- A mi hermano que sigue mis pasos y espero algún día verlo en mi lugar.
- A mis amigos, aquellos que a pesar de las diferencias estuvieron siempre a mi lado y nunca me negaron la ayuda. Gracias, porque me vieron derrotado y no dudaron en darme una mano.
- A mi director de tesis, el Doctor Álvaro Ayala, por ser un excelente líder, docente y amigo. Gracias por hacerme ver más allá de lo común, por sus constantes cuestionamientos y por permitirme demostrar mis capacidades. Con su ayuda logré cerrar exitosamente esta etapa de mi vida.
- A la vieja escudería Baja SAE UNAM, quienes me enseñaron que con muy poco, se pueden hacer grandes cosas y que el ingenio y los conocimientos, siempre estarán sobre los recursos económicos. Sin duda fueron quienes me abrieron muchas puertas allá afuera. Gracias por darme la oportunidad.
- Al maestro Antonio Zepeda quién fue un gran guía y amigo durante la carrera, sin usted no habría cumplido mi sueño de competir internacionalmente.
- A Sarahi Trejo, una persona que admiro mucho por su inteligencia y calidad humana. Gracias por estar a mi lado en los momentos más difíciles de mi vida, por hacerme ver lo mucho que valgo y por apoyar mis decisiones. Las risas no faltaron. ♥

*... decidí abordar el tren en esa estación, en esa fecha y a esa hora.*

*Tome un asiento, un punto único en el espacio. Estaba un poco dudoso.*

*No cabe duda, fue el tren correcto.*

*Francisco Alcantara*

# ÍNDICE

INTRODUCCIÓN.....	1
JUSTIFICACIÓN DEL TRABAJO .....	3
OBJETIVO GENERAL.....	4
OBJETIVOS PARTICULARES .....	4
TÉRMINOS Y SÍMBOLOS .....	5
<b>Capítulo 1. Competencia Baja SAE® .....</b>	<b>7</b>
1.1.    Visión general de la competencia .....	7
1.1.1.    Objetivos de Baja SAE .....	7
1.1.2.    Caso de estudio .....	7
1.1.3.    Requerimientos generales.....	8
1.2.    Características del motor y del sistema de transmisión.....	8
1.2.1.    Características de las guardas del sistema de transmisión y protección para dedos.....	9
1.2.2.    Requerimiento de materiales para construcción de guardas. ....	9
1.3.    Descripción de la competencia .....	9
1.3.1.    Pruebas estáticas.....	10
1.3.2.    Pruebas dinámicas.....	10
<b>Capítulo 2. Transmisiones y sus características .....</b>	<b>12</b>
2.1    Transmisiones mecánicas. ....	13
2.2    Tren motriz de un vehículo.....	14
2.2.1    Configuraciones de motor-tracción del vehículo. ....	15
2.2.2    Configuraciones del tren motriz .....	16
2.3    Configuración de tren motriz utilizada en Baja SAE.....	17
2.3.1    Configuración Motor-Poleas-Reductor-Flechas-Ruedas (M-P-R-F-L) .....	18
2.3.2    Uso de Transmisión Variable Continua (CVT) .....	20
<b>Capítulo 3. Rediseño del reductor de velocidad .....</b>	<b>23</b>
3.1    Análisis de las características del tren motriz de prototipos pasados.....	23
3.2    Revisión estadística e histórica de resultados. ....	25
3.3    Selección y descripción del modelo de reductor de velocidad a rediseñar.....	29
3.4    Rediseño de la relación de transmisión.....	33
3.4.1    Análisis de resistencia en las ruedas.....	33
3.4.2    Análisis de resistencia del aire .....	35

3.4.3	Análisis de resistencia de gradiente .....	35
3.4.4	Análisis de resistencia de aceleración (Inercia) .....	36
3.4.5	Análisis de la resistencia total .....	36
3.4.6	Análisis la máxima relación de transmisión (marcha inferior) .....	38
3.4.7	Análisis de la mínima relación de transmisión (marcha superior) .....	38
3.5	Selección de la relación de transmisión fija del reductor de velocidad .....	39
3.5.1	Resultados para la marcha inferior .....	40
3.5.2	Resultados de marcha superior .....	42
<b>Capítulo 4. Optimización mediante algoritmos genéticos .....</b>		<b>43</b>
4.1	Estructura del algoritmo genético.....	43
4.2	Construcción y aplicación del algoritmo genético. ....	45
4.2.1	Planteamiento del problema: función objetivo y restricciones. ....	45
4.2.2	Representación genética del algoritmo .....	49
4.2.3	Generación de la población inicial .....	49
4.2.4	Evaluación de la adaptación de los individuos .....	50
4.2.5	Selección y reproducción de los individuos mejor adaptados .....	51
4.2.6	Cruza y mutación de los individuos.....	53
4.3	Programación del algoritmo genético en Python y análisis de resultados .....	55
<b>Capítulo 5. Parametrización de engranes en CATIA®.....</b>		<b>64</b>
5.1	Teoría del engrane recto .....	64
5.1.1	Ley fundamental del engranaje.....	65
5.1.2	Perfil y geometría del engrane.....	66
5.2	Parametrización de engranes en CATIA .....	71
5.2.1	Construcción del modelo paramétrico .....	73
5.3	Diseño de detalle del reductor de velocidad .....	78
<b>Capítulo 6. Optimización topológica.....</b>		<b>81</b>
6.1	Definición del proceso de optimización topológica .....	83
6.2	Optimización topológica en el cuerpo de engranes rectos .....	84
6.2.1	Set <i>up</i> de los modelos de engranes y definición de las zonas de diseño .....	85
6.2.2	Configuración de la optimización topológica (Engranes).....	87
6.2.3	Interpretación en CATIA® de la geometría optimizada (Engranes).....	93
6.2.4	Validación FEA de la geometría interpretada (Engranes) .....	96
6.3	Optimización topológica en el cuerpo de las carcasas .....	99
6.3.1	Set <i>up</i> del modelo y definición de las zonas de diseño.....	99

6.3.2 Configuración de la optimización topológica (Carcasas).....	101
6.3.3 Interpretación en CATIA® de la geometría optimizada (Carcasas).....	105
6.3.4 Validación FEA de la geometría interpretada (Carcasas) .....	109
RESULTADOS .....	111
CONCLUSIONES .....	116
APÉNDICES .....	118
APÉNDICE A: Tabla de coeficientes de arrastre aerodinámico $C_w$ .....	118
APÉNDICE B: Valores de referencia para el coeficiente de inercia rotacional $\lambda$ .....	119
APÉNDICE C: Programa en Wolfram Mathematica CSRTO_2019.nb .....	120
APÉNDICE D: Programa en Python GA-Optimization.py .....	129
APÉNDICE E: Matriz de decisión para la elección del tren de engranes. ....	135
REFERENCIAS .....	136

## INTRODUCCIÓN

La idea general de haber llevado a cabo este trabajo de investigación y diseño se basa en las experiencia adquirida durante el paso por diversos proyectos extra-curriculares de alcance internacional, tal es el caso de la competencia Baja SAE perteneciente a la Sociedad de Ingenieros Automotrices, SAE (*Society of Automotive Engineers* por sus siglas en inglés), la cual también desarrolla otros eventos de diseño como *Formula SAE*, *Clean Snowmobile Challenge*, *SAE Aero Design*, *SAE Supermileage* y *AutoDrive Challenge*.

En la competencia Baja SAE estudiantes de ingeniería y carreras afines ponen a prueba sus habilidades personales y conocimientos adquiridos en las aulas para desarrollar un proyecto de diseño y construcción automotriz dirigido hacia vehículos del tipo *Off-Road*; se trata de un prototipo de vehículo monoplace sencillo en su mantenimiento, ergonómico, económico y cuya producción es posible para cubrir un mercado de uso recreativo. La constante tarea de aprender y mejorar los sistemas de un vehículo tratándose de una competencia de diseño, se resume en que los estudiantes deben trabajar como equipo para diseñar, re-diseñar, construir, probar, defender su diseño y competir con un vehículo dentro de los límites de las reglas establecidas por SAE (SAE International, 2018).

Gracias al trabajo de diferentes generaciones que han pasado por este equipo de diseñadores desde los años 80's (equipo PUMACEJ), se ha creado una base de datos, que si bien dicta reglas generales y redacta sus experiencias con diseños anteriores, no implica que los sistemas no puedan ser mejorados, sobre todo ante los avances tecnológicos y el aumento del poder de cómputo, así como nuevas teorías (muchas veces filosóficas) que complementan el trabajo de ingeniería.

Por otro lado, existen normas y literatura sobre diseño mecánico, mecanismos, dinámica de maquinaria, etc., que basan su trabajo en satisfacer requerimientos mínimos o máximos de uno o varios parámetros, ignorando en muchas ocasiones cuestiones del uso óptimo de recursos, lo que los hace un tanto conservadores en ese aspecto (Miler , Žeželj, Loncar, & Vuckovic, 2018). Es por ello que la teoría ya establecida, debe ser complementada con el uso de software especializado que permita ir más allá del diseño clásico. Ejemplos de ello son, los programas computacionales de análisis estructural y optimización basada en objetivos y restricciones, los cuales simulan el funcionamiento en condiciones reales.

Tener un sistema de alto desempeño implica conocer y dominar el funcionamiento de éste, saber las ventajas y desventajas de un conjunto de configuraciones, y aprovechar al máximo el potencial de cada una de las partes que lo conforman. Por lo tanto, se plantea la posibilidad de mejorar el desempeño de un sistema de transmisión, manteniendo su configuración original y haciendo uso de un conjunto de teorías afines, tal como la de optimización.

En la literatura es posible encontrar trabajos relacionados con el diseño de engranes y *housings* para vehículos de baja potencia donde el peso es crucial para tener un mejor rendimiento, la mayoría de ellos buscan, además de cumplir con requerimientos básicos de diseño, optimizar el sistema basándose en la disminución de peso y volumen, así como en minimizar las dimensiones de este.

Para lograr este trabajo, se desarrollarán 6 capítulos que abarcan desde teoría general, hasta las más modernas técnicas para la solución de problemas de ingeniería:

*Capítulo 1. Competencia Baja SAE:* Se presenta la información necesaria para entender la competencia, su historia, objetivos, los aspectos generales administrativos y de diseño, así como la revisión del reglamento *Baja SAE Rules* en el apartado relacionado al sistema de tren motriz del vehículo.

*Capítulo 2. Transmisiones y sus características:* Se brinda una clasificación sobre los sistemas de transmisión mecánicas automotrices, configuraciones normalizadas del tren motriz, así como un breve análisis de los resultados históricos del equipo Puma Off Road en las competencias oficiales de México y U.S.A.

*Capítulo 3. Rediseño del reductor de velocidad:* Se lleva a cabo una revisión estadística e histórica del desempeño de prototipos pasados para seleccionar el modelo a rediseñar, se analizan sus características, y posteriormente se modifican los parámetros de entrada en los cálculos de relación de transmisión para encontrar un valor ideal. Adicionalmente, se propone un proceso de rediseño que implica la participación del resto de los capítulos.

*Capítulo 4. Optimización mediante algoritmos genéticos:* Se aplica un método adaptativo para resolver problemas de búsqueda conocido como optimización por algoritmos genéticos, planteando el objetivo de minimizar las dimensiones y volumen del reductor de velocidad, mediante la adecuación de un algoritmo canónico.

*Capítulo 5. Parametrización de engranes en CATIA®:* Se trabaja en un modelo paramétrico que permite reducir el tiempo de diseño y dibujo de los engranes del reductor de velocidad.

*Capítulo 6. Optimización topológica:* Se utiliza el módulo Optistruct® del software Hypermesh® para aplicar un proceso de optimización topológica en el cuerpo de los engranes y en las carcasas del reductor de velocidad, con la finalidad de obtener elementos más ligeros pero con la misma capacidad de operación.

Adicionalmente se agrega una sección de resultados, la cual recopila la información más importante de cada capítulo, muestra un resumen de los resultados de cada fase del proceso de diseño y hace referencia a los objetivos planteados.

## JUSTIFICACIÓN DEL TRABAJO

- A partir de la literatura revisada, se ha encontrado que la optimización de cajas de transmisión aborda a sus componentes por separado, dando soluciones parciales y olvidando la sinergia del sistema en conjunto (Schneider, 2017); (Marcelin, 2001); (Miler , Žeželj, Loncar, & Vuckovic, 2018); (Miler, Loncar, Žeželj, & Domitran, 2017).
- Durante la fase de diseño de las cajas de transmisión, los parámetros y propiedades de los engranes son definidos por estándares de cálculo, tales como la ISO y AGMA. Sin embargo, el diseño resultante además de satisfacer los requerimientos de resistencia necesarios, debe garantizar propiedades adicionales para ser competitivo, tal como, la eficiencia, durabilidad, operación silenciosa, dimensiones y peso (Miler , Žeželj, Loncar, & Vuckovic, 2018).
- Por otra parte, la reducción de peso del *housing* de las transmisiones es pocas veces abordado, salvo en casos en que se cuenta con sistemas de baja potencia (o de muy alto desempeño) y la reducción de peso, a través del reemplazo de materiales, es un tema de interés (Schneider, 2017).

## OBJETIVO GENERAL

Diseñar y optimizar un reductor de velocidad, que sea capaz de aprovechar al máximo sus características a través de la mejora del desempeño de los componentes, tomando como base un prototipo de vehículo orientado hacia la competencia Baja SAE.

## OBJETIVOS PARTICULARES

- Conservar la configuración del sistema de tren motriz utilizado a la fecha, demostrando el motivo de su selección con el fin de acotar los alcances de la investigación y desarrollo.
- Trabajar en el diseño y optimización del reductor de velocidad como un sistema sinérgico.
- Aplicar conocimientos de diseño, manufactura y buenas prácticas de ingeniería para aumentar la confiabilidad del sistema, corrigiendo problemas de prototipos pasados.
- Parametrizar el diseño de componentes del reductor de velocidad buscando que el sistema no esté acotado a una sola aplicación.
- Comprobar que el diseño propuesto mejora la relación masa - capacidad de transmisión de potencia.
- Ampliar la documentación del proyecto Baja SAE UNAM en el área de tren motriz.

## TÉRMINOS Y SÍMBOLOS

$F_R$	Resistencia en las ruedas
$F_L$	Resistencia del aire
$F_{St}$	Resistencia del gradiente
$F_a$	Resistencia de aceleración
$T_R$	Par de fricción
$F_U$	Fuerza circunferencial
$r_{dyn}$	Radio dinámico de la rueda
$R$	Fuerza de reacción
$e$	Excentricidad
$F_{R,Roll}$	Fuerza de resistencia a la rodadura
$G_R$	Carga sobre la rueda
$f_R$	Coefficiente/factor de resistencia a la rodadura
$\alpha_{St}, \alpha$	Ángulo de gradiente
$m_F$	Masa del vehículo
$\rho_L$	Densidad del aire
$C_w$	Coefficiente de arrastre
$A$	Área de sección transversal frontal
$v$	Tasa de flujo de aire
$g$	Aceleración gravitacional de la tierra
$m_{red,i}$	Masa reducida
$J_{red,i}$	Momento de inercia reducido
$\alpha_{cc}$	Aceleración
$\lambda$	Coefficiente de inercia rotacional
$F_T$	Fuerza de tracción
$M_m$	Par al freno que entrega el motor
$i_{tot}$	Relación total del mecanismo de transmisión
$\eta_{tot}$	Eficiencia total del mecanismo de transmisión
$n_m$	Revoluciones por minuto del motor
$n_r$	Revoluciones por minuto de las ruedas motrices
$i_{A,max}$	Relación de transmisión marcha inferior
$i_{A,min}$	Relación de transmisión marcha superior
$i_A(v_{max})$	Relación de transmisión velocidad tope
$F_{Z,A}$	Tracción disponible
$F_{Z,max}$	Máxima tracción transmisible
$\mu_H$	Coefficiente de fricción estático
$n_{M,max}$	Máximas revoluciones por minuto del motor
$v_{max}$	Velocidad máxima del vehículo
$RT$	Relación de transmisión para la marcha inferior
$RT_{2017}$	Promedio de relaciones de transmisión del reductor 2017
$RT_{inf}$	Relación de transmisión admisible para reductor CSRTO-2019
$RT_{supG}$	Relación de transmisión global para la marcha superior
$RT_{sup}$	Relación de transmisión fija del reductor de velocidad para marcha superior
$min$	Función minimizar
$x_{ki}$	Parámetro continuo

$\mathcal{R}$	Subconjunto de números reales
$P$	Población de individuos
$t$	Número de iteración
$dc$	Distancia entre centros entre eje de entrada y salida del reductor
$r_p$	Radio de paso
$N$	Número de dientes de un engranes
$f_{objetivo}$	Función objetivo
$rt$	Relación de transmisión
$f_w$	Ancho de cara de los engranes de la primera relación
$p_{i,t}$	Probabilidad de selección de un individuo
$f_j$	Adaptación de un individuo
$N_e$	Número esperado de copias de un individuos
$f$	Adaptación promedio de una población
$p_m$	Probabilidad de mutación de un individuos
$r$	Número aleatorio
$m_v$	Razón de velocidad angular
$\omega_{sal}$	Velocidad angular eje de salida
$\omega_{ent}$	Velocidad angular eje de entrada
$m_A$	Ventaja mecánica
$m_G$	Razón de engrane
$D$	Diámetro de paso
$\phi$	Ángulo de presión
$D_b$	Diámetro del círculo base
$P_c$	Paso circular
$P_b$	Paso base
$m$	Módulo métrico del engrane
$D_{ad}$	Diámetro de Addendum
$D_R$	Diámetro de Dedendum
$Z$	Longitud de acción
$m_p$	Razón de contacto
$r_p$	Radio de paso
$a$	Addendum
$r_f$	Radio del filete
$C$	Punto C
$K_B$	Factor de espesor del aro (AGMA)
$t_R$	Espesor del aro
$m_B$	Relación de respaldo
$h_t$	Profundidad completa del diente
$W_T$	Carga tangencial en engranes
$W_R$	Carga radial en engranes
$h$	Restricción de optimización topológica
$ucyc$	Número de patrones de la restricción <i>Pattern Grouping</i>
$\sigma_y$	Límite elástico
$\sigma_e$	Resistencia a la tensión
$E$	Módulo de elasticidad
$\rho$	Densidad de material

## Capítulo 1. Competencia Baja SAE®

Baja SAE es una competencia multidisciplinaria donde los estudiantes de ingeniería tienen la tarea de diseñar y construir un vehículo deportivo todo terreno monoplace que funcionará como prototipo de producción confiable, sostenible, ergonómico y económico orientado a un mercado de uso recreativo; el reto consiste en que los estudiantes deben ser capaces de diseñar, construir, probar, defender su diseño y competir con su vehículo dentro de los límites establecidos por las reglas de SAE (SAE International, 2018).

El proyecto Baja SAE se remonta al año 1976 bajo el nombre SAE Mini-Baja; fue desarrollado en la Universidad de Carolina del Sur y dirigido por el Dr. John F. Stephens bajo la premisa de que a la industria del diseño mecánico actual no le es suficiente centrarse únicamente en el análisis de aplicación de esfuerzos y más bien busca analizar el tema desde un punto de vista de facilidad de manufactura y limitaciones de tiempo y costos (SAE International students, 2008). Desde entonces la competencia ha crecido y se ha convertido en una de las más importantes competencias de diseño vehicular patrocinadas por SAE.

### 1.1. Visión general de la competencia

#### 1.1.1. Objetivos de Baja SAE

Baja SAE es una competencia de diseño ingenieril para estudiantes de licenciatura y posgrado de ingeniería. El objetivo de la competencia es simular proyectos de diseño de ingeniería en el mundo real con los respectivos desafíos que ello conlleva. Cada equipo compite para que su diseño sea aceptado para su manufactura por un grupo de inversionistas ficticios (simulación de ventas). El equipo también deberá generar apoyo financiero para su proyecto y gestionar sus prioridades educativas.

#### 1.1.2. Caso de estudio

El objetivo de cada equipo es diseñar y construir un vehículo deportivo monoplace todo terreno cuyo conductor esté contenido dentro de la estructura del vehículo. El vehículo deberá ser un prototipo sencillo en su mantenimiento, ergonómico, económico y cuya producción sea posible, orientado a un mercado de uso recreativo, con una producción estimada de 4000 unidades por año. El vehículo debe aspirar a tener un desempeño líder en el mercado en términos de velocidad, maniobrabilidad, conducción y robustez en terrenos difíciles y condiciones todo terreno. El desempeño será medido por el éxito que se obtenga en los eventos estáticos y dinámicos de la competencia, cuyas condiciones son descritas en el reglamento *Baja SAE Rules*.

### 1.1.3. Requerimientos generales

El prototipo deberá ser un vehículo monoplaza que cuente con 4 o más ruedas que no se encuentren en línea recta. Todos los equipos están limitados a utilizar el motor Briggs & Stratton especificado en las reglas de SAE, además el vehículo deberá ser capaz de transportar a una persona de 190 cm de altura y un peso de 113 kg. La Ergonomía es de suma importancia y debido a que se trata de un prototipo de producto comercial, el diseño debe estar pensado en ser adaptable a todos los tamaños, desde el Percentil 95 masculino (del país donde se lleva a cabo la competencia) hasta percentil 5 femenino. Todos los conductores deberán cumplir con las distancias mínimas al encontrarse dentro de la estructura del vehículo y adaptarse a una posición de conducción cómoda mientras se utiliza el equipo de piloto requerido. Todos los pilotos deberán poder alcanzar cómodamente todos los controles del vehículo. Siempre se debe tener en cuenta que el vehículo debe ser diseñado y construido utilizando buenas prácticas de ingeniería.

### 1.2. Características del motor y del sistema de transmisión.

Por más de 40 años la empresa Briggs & Stratton® ha patrocinado los motores para los equipos de la competencia *Baja SAE®*, lo anterior con el fin de hacer homogéneo el desempeño de los vehículos durante el desarrollo de la competencia. Todos los vehículos utilizan forzosamente el mismo motor: Un motor en Stock Briggs & Stratton 10 HP OHV Vanguard Model 19, de cuatro tiempos y enfriado por aire.



FIGURA 1.1 Briggs & Stratton® 10 HP OHV Vanguard Model 19

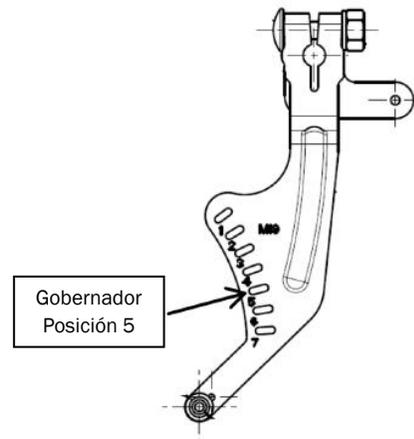


FIGURA 1.2 Esquema del gobernador del motor en la posición adecuada (5)

Cada motor cuenta con un gobernador de revoluciones que deberá limitar a 3800 RPM (o menos) la velocidad del motor durante el desarrollo de la competencia.

### **1.2.1. Características de las guardas del sistema de transmisión y protección para dedos.**

Todas las partes rotatorias que compongan al sistema de transmisión como CVTs, engranajes, catarinas, bandas y cadenas deberán ser protegidas para evitar daños al conductor, jueces de pista o espectadores. La función de las guardas es proteger en caso de que exista alguna falla en un sistema que se encuentre rotando y éste se libere violentamente. La protección para dedos deberá evitar que dedos, ropa suelta u otros elementos puedan entrar en contacto con los elementos rotatorios y queden atorados en su interior. Existen excepciones para esta regla como caso de las juntas universales, juntas homocinéticas, mazas, ruedas y secciones de ejes que queden descubiertas.

### **1.2.2. Requerimiento de materiales para construcción de guardas.**

Las guardas del sistema de transmisión que protegen en caso de que algún elemento sea liberado violentamente deberán extenderse alrededor de la periferia de los componentes rotatorios (cadenas, engranes, catarinas, bandas, y CVTs) y deberá contar con un ancho superior al de la parte giratoria que se está protegiendo.

Todas las guardas del sistema de transmisión deberán estar construidas por uno o ambos de los siguientes materiales:

- Acero de al menos 1.5 mm (0.06 in) de espesor, que cumpla o exceda la resistencia del acero AISI 1010.
- Aluminio de al menos 3.0 mm (0.12 in) de espesor, que cumpla o exceda la resistencia del aluminio 6061-T6

Los orificios de ventilación en la porción del material que rodea a los componentes giratorios son aceptables siempre y cuando en caso de una falla del tren motriz ninguna parte pueda escapar y que no exista ninguna ruta directamente tangente a ningún componente giratorio.

## **1.3. Descripción de la competencia**

La competencia puede dividirse en 3 grandes fases: Pruebas estáticas, pruebas dinámicas y carrera de resistencia (*Endurance*), durante las cuales se ponen a prueba las habilidades del equipo representante de cada escudería. Es un desafío para cada uno de los integrantes ya que ser un equipo funcional implica tener una organización en las tareas desarrolladas a lo largo de todo el evento. Cada integrante debe tener una tarea específica y única, y sin embargo, también debe ser capaz de poder realizar la tarea de su compañero.

### 1.3.1. Pruebas estáticas

*Inspección técnica:* Es importante aprobar la inspección ya que es requisito indispensable para poder encender el vehículo; la inspección técnica determinará si el vehículo satisface los requerimientos y restricciones del reglamento *Baja SAE® Rules*. Durante esta etapa se llevará a cabo la inspección del motor para ajustar el gobernador a 3800 RPM y asegurar que cumple con las reglas. La prueba dinámica de frenado también desarrollará durante las pruebas estáticas, donde previo a la prueba se verificará el funcionamiento de los Kill Switch para proceder con la prueba de frenado que consiste en bloquear las 4 ruedas dentro de un área previamente determinada por los jueces de la competencia.

*Evaluación de diseño:* El objetivo de la evaluación de diseño es analizar el trabajo de ingeniería desarrollado en el vehículo. Además, recordando la historia de Baja SAE, en qué medida se logró cumplir con las exigencias del mercado de diseño mecánico actual. Se evaluará la habilidad de los estudiantes para generar especificaciones de diseño, los análisis, pruebas realizadas y sus resultados, desarrollo de CAD, CAM, CAE, capacidad de fabricación, soporte, la integración sinérgica de los sistemas y la forma en que el vehículo funciona en conjunto. La evaluación se llevará a cabo considerando los siguientes subsistemas: Suspensión, Dirección, Frenos, Tren Motriz, Chasis y ergonomía.

*Evaluación de Costos:* La evaluación de costos permite a los equipos demostrar las decisiones en torno al diseño costo-beneficio aplicado en su vehículo, este evento tiene como objetivo generar un modelo comparable para cada equipo con el cuál se medirán respecto a otros equipos.

*Presentación de Ventas:* La presentación de ventas busca que el equipo convenza a los “ejecutivos” de una compañía de fabricación hipotética para que compren el diseño del Vehículo *Baja SAE®* del equipo y se realice una producción de 4000 unidades por año.

### 1.3.2. Pruebas dinámicas.

Las pruebas dinámicas son realizadas para poder observar y analizar el desempeño de los vehículos *Baja SAE®* en diferentes condiciones. Algunas de las pruebas que se desarrollan son: Aceleración, suspensión y tracción, arrastre, ascenso en colina, paso sobre rocas, tina de lodo, maniobrabilidad, entre otras pruebas especiales.

#### 1.3.2.1 Prueba de aceleración (*Acceleration*)

El evento de aceleración está diseñado con la finalidad de medir la capacidad de cada vehículo para acelerar rápidamente desde un estado de reposo. La forma de medir la aceleración es mediante el tiempo que se tarda en completar una trayectoria recta y plana

de aproximadamente 30.48 [m] (100 [pies]) o 45.72 [m] (150 [pies]) de longitud, desde un estado de reposo. La superficie del terreno puede variar entre pavimento o tierra suelta.

#### **1.3.2.2 Prueba de ascenso en colina (*Hill climb*)**

Este evento pone a prueba la capacidad relativa del vehículo para subir una pendiente desde un estado de reposo. Los organizadores determinarán la altura, inclinación y la superficie de la colina. Generalmente la pendiente se ubica entre los 15° a 45° y la altura entre los 10 y 30 metros. Para lograr esta prueba se requiere contar con un par de fuerzas suministrado por la caja de cambios que supere la fuerza de fricción y el peso del vehículo.

#### **1.3.2.3 Prueba de tina lodo (*Mud*)**

*Mud Bog* se considera una prueba especial diseñada para probar el vehículo en condiciones *Off-Road* y es propia del sitio donde se llevará a cabo. Este evento requiere completar un circuito (recto o con curvas) sobre una superficie con lodo (de hasta 30 [cm] de profundidad) en el menor tiempo posible.

#### **1.3.2.4 Prueba de arrastre (*Pull*)**

En esta prueba consiste en medir la capacidad del vehículo para tirar de un objeto predeterminado a lo largo de una superficie plana, en lo que puede ser un camino recto o con curvas. El organizador determina el objeto a tirar cuyo peso suele estar entre los 1500 [kg] y 2500 [kg] a lo largo de una distancia de entre 30 [m] a 50 [m].

#### **1.3.2.5 Carrera de Resistencia (*Endurance*)**

La carrera de resistencia evalúa la capacidad de cada vehículo para operar de manera continua en movimiento sobre terrenos difíciles y con condiciones climáticas potencialmente adversas (lluvia, nieve, etc.). El evento se puede desarrollar por tiempo o distancia. El valor predeterminado es de 4 horas, siendo ganador el vehículo con la mayor cantidad de vueltas completadas durante dicho tiempo.

## Capítulo 2. Transmisiones y sus características

Todas las formas de vehículos motorizados, incluyendo barcos e incluso aeronaves requieren de sistemas de transmisión que conviertan velocidad angular y par de torsión para una tarea determinada.

Una transmisión vehicular es aquella cuya función es ajustar el par de torsión disponible en el motor para adaptarse al vehículo, a la superficie (terreno), al conductor y al entorno. La correcta selección de un sistema de transmisión tiene un efecto importante sobre la confiabilidad, consumo de combustible, facilidad de operación, seguridad en el camino y desempeño del piloto, y para ello los parámetros a considerar son competitividad técnica y económica dependiendo del enfoque que se tenga (Naunheimer, Bertsche, Ryborz, & Novak, 1994, 2011).

La forma más general de analizar los sistemas de transmisión vehicular es, por su forma de transmitir potencia y por su cambio en las relaciones de transmisión. En la tabla 2.1 se muestra una clasificación de las transmisiones vehiculares, así como sus características.

**Tabla 2.1** Clasificación sistemática de transmisiones vehiculares. (Naunheimer, Bertsche, Ryborz, & Novak, 1994, 2011)

Tipos de transmisión												
Transmisiones con z velocidades								Transmisión Continua Variable (CVT)				
Transmisión manual (MT)		Transmisiones manuales automatizadas (AMT)		Transmisiones automáticas con diferentes relaciones de transmisión			Accionamiento híbrido con máquinas eléctricas		Mecánica		Hidráulica	
Transmisión constant-mesh	Transmisión Synchronmesh	Transmisión semiautomática del tipo constant-mesh o synchronmesh.	Transmisión totalmente automatizada del tipo constant-mesh o synchronmesh	Transmisiones de clutch dual (DCT)	Transmisiones automáticas del tipo countershaft	Transmisión automática convencional	Híbridas en serie	Híbridas paralelas	Híbridas del tipo Power-split	Transmisiones por polea	Transmisiones toroidales	Transmisiones hidrostáticas
Con interrupción de potencia				Sin interrupción de potencia ( <i>powershift</i> )								
Embrague con clutch operado por pedal		Embrague automático										
Cambio de marchas manual		Cambio de marchas automático					Conversión automática de par y velocidad					

## 2.1 Transmisiones mecánicas.

Las transmisiones mecánicas son aquellos mecanismos utilizados para transmitir la energía producida en un motor o unidad de potencia hacia los órganos de trabajo de una máquina, con su respectiva transformación de velocidades, fuerza y/o par de torsión (Dobrovolski, 1970)

Las principales razones de introducir una transmisión entre el motor y los órganos de trabajo de una máquina se enlistan a continuación:

- Las velocidades requeridas (por diseño) para los órganos de trabajo de la máquina y la de los motores estandarizados muchas veces difieren en gran porcentaje.
- Generalmente es requerido un control y regulación de velocidad del órgano de trabajo, pero hacerlo directamente con el motor resulta poco económico y complicado.
- Dependiendo de las exigencias de trabajo, en ciertos periodos se requieren pares de torsión que superan el par de torsión en el árbol del motor.
- Es común que un motor ponga en movimiento a varios mecanismos que trabajan a diferentes velocidades.
- Debido a razones de seguridad, comodidad de servicio o disposición de espacio, es poco recomendable la unión directa de los árboles de un motor y el mecanismo operador.

Las transmisiones mecánicas por su forma de transmitir potencia desde el elemento accionador al accionado se pueden clasificar en:

- **Transmisiones por rozamiento:** Con contacto directo (por fricción) o mediante un enlace flexible (por banda).
- **Transmisión por engrane:** Con contacto directo (dientes de engranes y sin fin) o mediante enlacen flexible (por cadena).

Las transmisiones por rozamiento y por engrane debido a la disposición recíproca de sus árboles, también puede dividirse en:

- **Árboles de ejes paralelos**
- **Árboles que se intersecan**
- **Árboles cuyos ejes se cruzan (En ángulo recto)**

Además, debido al cambio en la relación transmisión también se puede clasificar en:

- **Sin cambio (relación constante)**
- **Cambio por etapas**
- **Cambio sin etapas (variador de velocidad continuo).**

El procedimiento de transmitir el movimiento por rozamiento o por engrane determina la forma de las superficies útiles y al mismo tiempo las propiedades características de las transmisiones. (Dobrovolski, 1970).

En transmisiones por rozamiento, las secciones de las superficies útiles son circunferencias, cuya fabricación no presenta dificultad. Sin embargo, en las transmisiones por engranaje, las piezas se dotan de dientes, los cuales llevan a cabo la transmisión del par de fuerza de la rueda accionadora a la accionada. Durante el funcionamiento de la transmisión unos dientes entran en engrane y otros salen. Incluso una pequeña inexactitud en la forma de los dientes o las deformaciones de los elementos provoca aceleraciones que llevan a la aparición de ruido y al rápido desgaste de los dientes, cuyo problema es imposible evitar, pero si disminuir al elevar la exactitud de fabricación y empleando formas de dientes especiales.

## 2.2 Tren motriz de un vehículo

Tratándose de vehículos de combustión interna (CI), la conversión del par y velocidad desde el motor hasta las ruedas es llevado a cabo por los elementos del tren motriz. (Fig. 2.1)

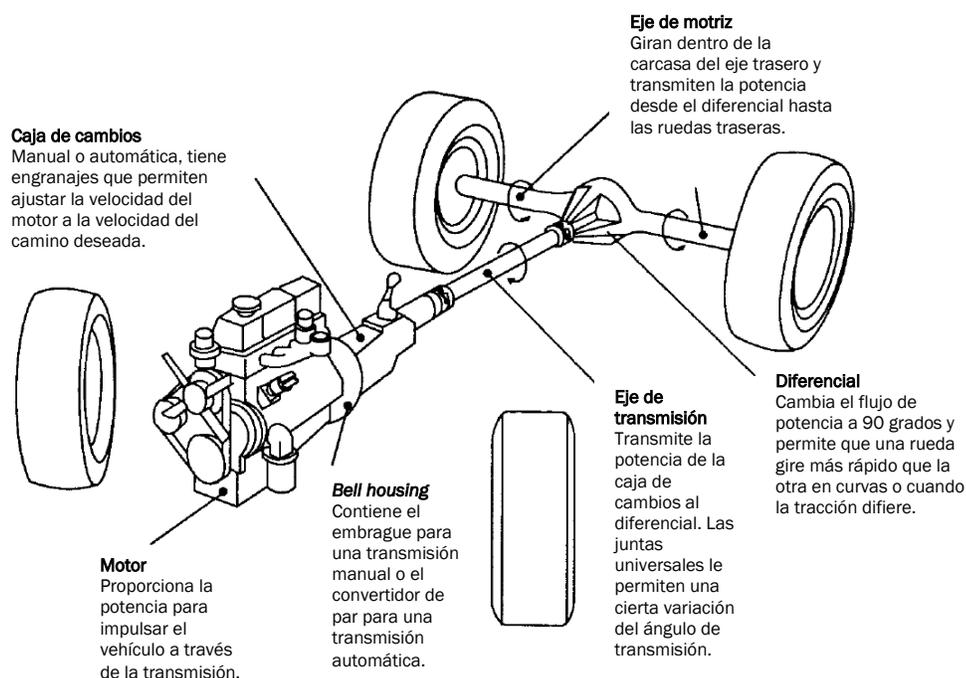


FIGURA 2.1 Elementos de un tren motriz (Gillespie, 1992)

De manera general un sistema de tren motriz está compuesto de los siguientes elementos:

- **Motor:** Genera la potencia (par x velocidad angular) que será entregada al resto de los elementos del tren motriz.
- **Embrague:** Encargado de la conexión entre el motor y la caja manual de cambios. El acople y desacople se lleva a cabo al pisar el pedal y permite el cambio de velocidades con el motor en marcha.
- **Caja de cambios:** Permite una variación de par y velocidad angular generada en el motor según los requerimientos de fuerza del vehículo.
- **Eje de transmisión (tracción trasera):** Transfiere la potencia de la caja de cambios hacia el diferencial. Generalmente cuenta con acoples del tipo junta universal que permite subir/bajar respecto al eje trasero.
- **Diferencial:** Cambia el sentido de transmisión de potencia a 90° y permite que una rueda gire más rápido que la otra al virar en las curvas o cuando la tracción difiere.
- **Ejes de salida/Eje motriz:** Contenidos al interior del housing transmiten la potencia del diferencial a cada rueda motriz.
- **Transeje:** Cuando el vehículo cuenta con tracción delantera o el motor se encuentra posicionado en la parte trasera, el motor impulsa a una transmisión manual combinada con un diferencial y las flechas laterales que mueven las ruedas. Dichas flechas son llamadas “transejes”.

### 2.2.1 Configuraciones de motor-tracción del vehículo.

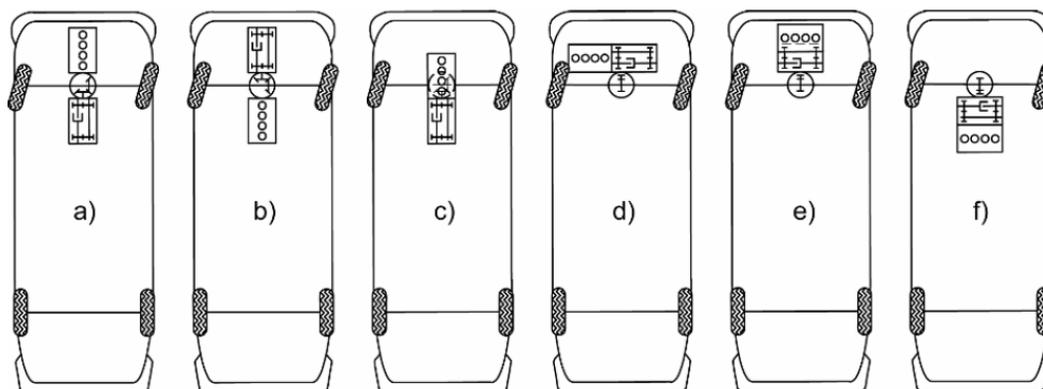
Existen diferentes maneras de acomodar el motor y la tracción de un vehículo (ejes motrices), en la tabla 2.2 se pueden observar las formas normalizadas para los vehículos automotores. La correcta selección de la configuración tendrá un efecto importante en la facilidad y control en la conducción, así como en aspectos de economía, seguridad y espacio disponible.

**Tabla 2.2** Configuraciones de tracción normalizadas en vehículos automotores

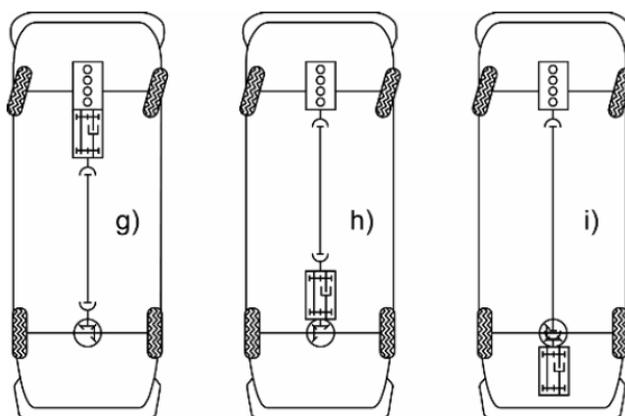
Configuración		Tracción		
		Delantera	Trasera	Delantera y trasera
Motor	Delantera	Tracción delantera	Tracción estándar (trasera)	Tracción integral
	Trasera	No factible	Tracción de motor trasero	Tracción integral

## 2.2.2 Configuraciones del tren motriz

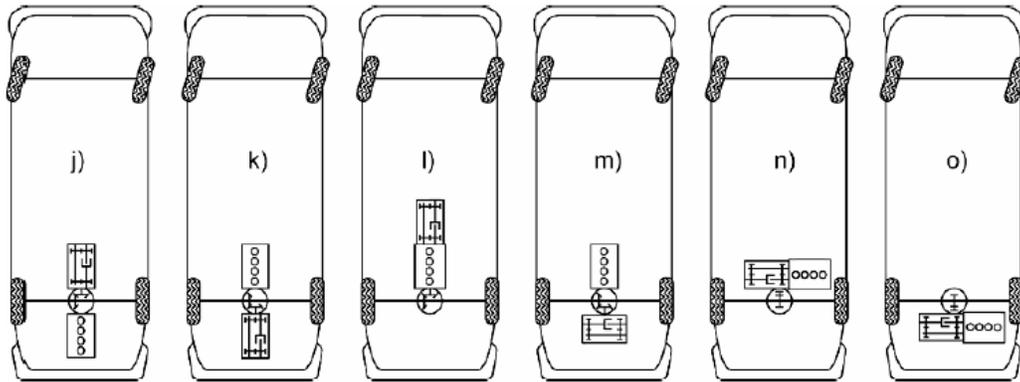
En las figuras 2.2, 2.3 y 2.4 se muestran las diferentes configuraciones de tren motriz en relación al tipo de tracción del vehículo.



**FIGURA 2.2** Tracción delantera. a) Motor longitudinal enfrente del eje, caja de cambios longitudinal; b) motor longitudinal detrás del eje, caja de cambios longitudinal; c) motor longitudinal sobre el eje, caja de cambios longitudinal; d) motor transversal junto a la caja de cambios; e) motor transversal sobre la caja de cambios; f) motor transversal detrás de la caja de cambios (Naunheimer, Bertsche, Ryborz, & Novak, 1994, 2011)



**FIGURA 2.3** Tracción estándar. g) tracción estándar, motor longitudinal montado al frente sobre o detrás del eje delantero, caja de cambios montado longitudinalmente al motor, eje de salida con diferencial en el eje trasero; h) motor longitudinal montado al frente o detrás del eje delantero, caja de cambios montada longitudinalmente delante del eje trasero; i) motor longitudinal montado al frente o detrás del eje delantero, caja de cambios montada longitudinalmente detrás del eje trasero con diferencial y eje motriz integral (Naunheimer, Bertsche, Ryborz, & Novak, 1994, 2011)



**FIGURA 2.4** Tracción con motor trasero. *j)* Motor longitudinal detrás del eje trasero; *k)* motor longitudinal frente al eje trasero; *l)* caja de cambios y motor frente al eje trasero; *m)* motor longitudinal frente al eje trasero, caja de cambios transversal detrás del eje trasero (Configuración en T); *n)* motor transversal junto a la caja de cambios frente al eje trasero; *o)* motor transversal junto a la caja de cambios detrás del eje trasero (Naunheimer, Bertsche, Ryborz, & Novak, 1994, 2011)

### 2.3 Configuración de tren motriz utilizada en Baja SAE

A lo largo de más de 40 años desde la creación de este evento, las especificaciones del motor, la disponibilidad de componentes, los procesos de manufactura y el diseño en general han cambiado radicalmente.

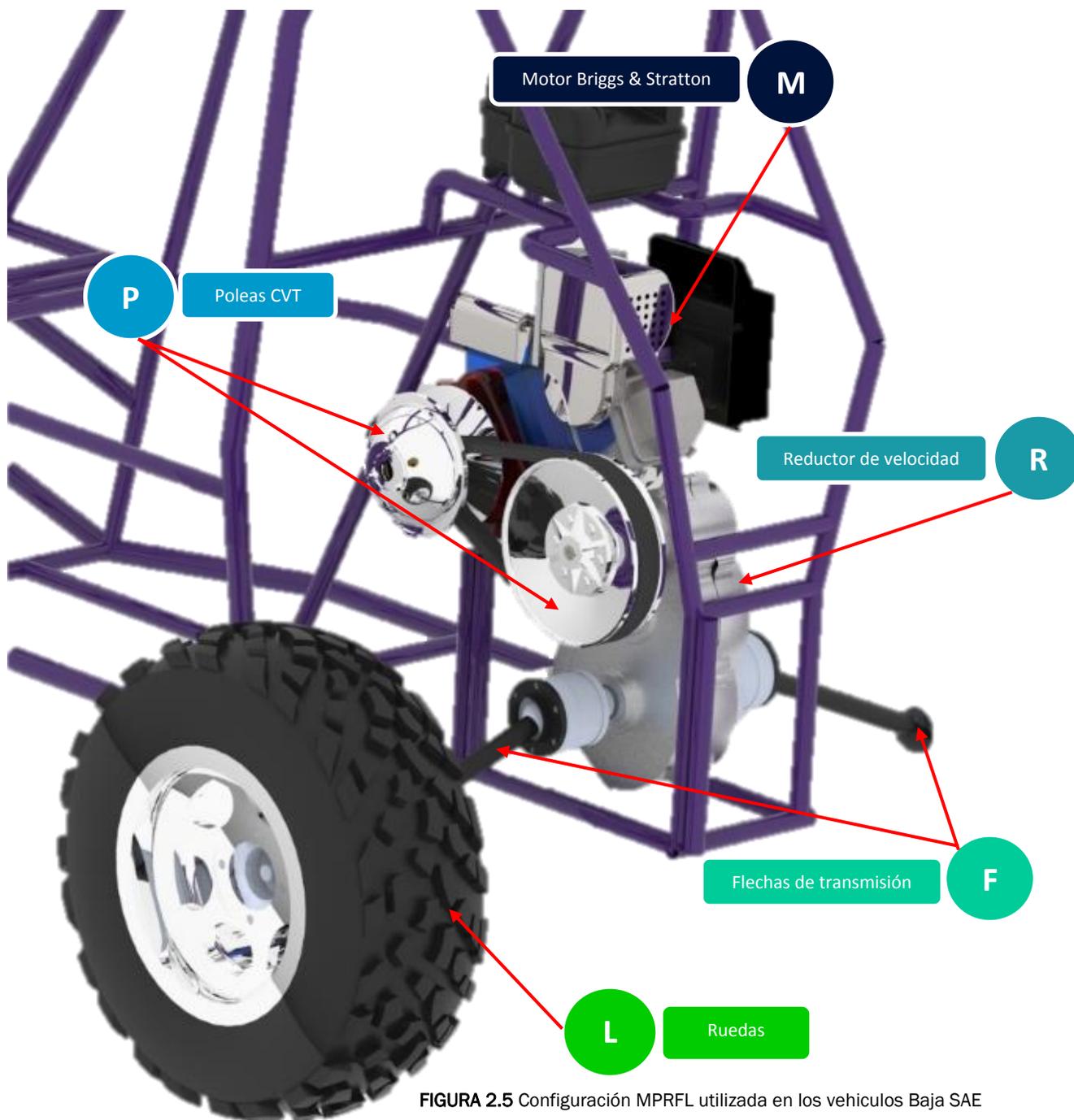
Tomando como referencia un tiempo de 7 años atrás (tiempo en que el proyecto fue retomado en la UNAM), se ha podido observar el uso generalizado de tracción trasera con motor atrás, incluyendo algunos elementos mecánicos fuera del diseño tradicional tales como poleas CVT y reductores de velocidad en lugar de cajas de cambios.

Los factores que han propiciado la configuración actual de los vehículos son:

- El reglamento *Baja SAE Rules* menciona en el artículo D los eventos dinámicos de la competencia a los que el vehículo será sometido, cada prueba puede incluir el subir grandes pendientes, pasar sobre un terreno accidentado con diferentes obstáculos (rocas, lodo, llantas, troncos, etc.), jalar una carga y/o dar vueltas bruscas, por lo tanto, se busca que el ensamble del tren motriz sea compacto, ligero, permita buena visibilidad y tenga la seguridad del piloto como prioridad.
- Una configuración de tracción trasera con motor atrás permite producir mayor fuerza motriz, (tanto por dinámica del vehículo como por reducción de pérdidas mecánicas).

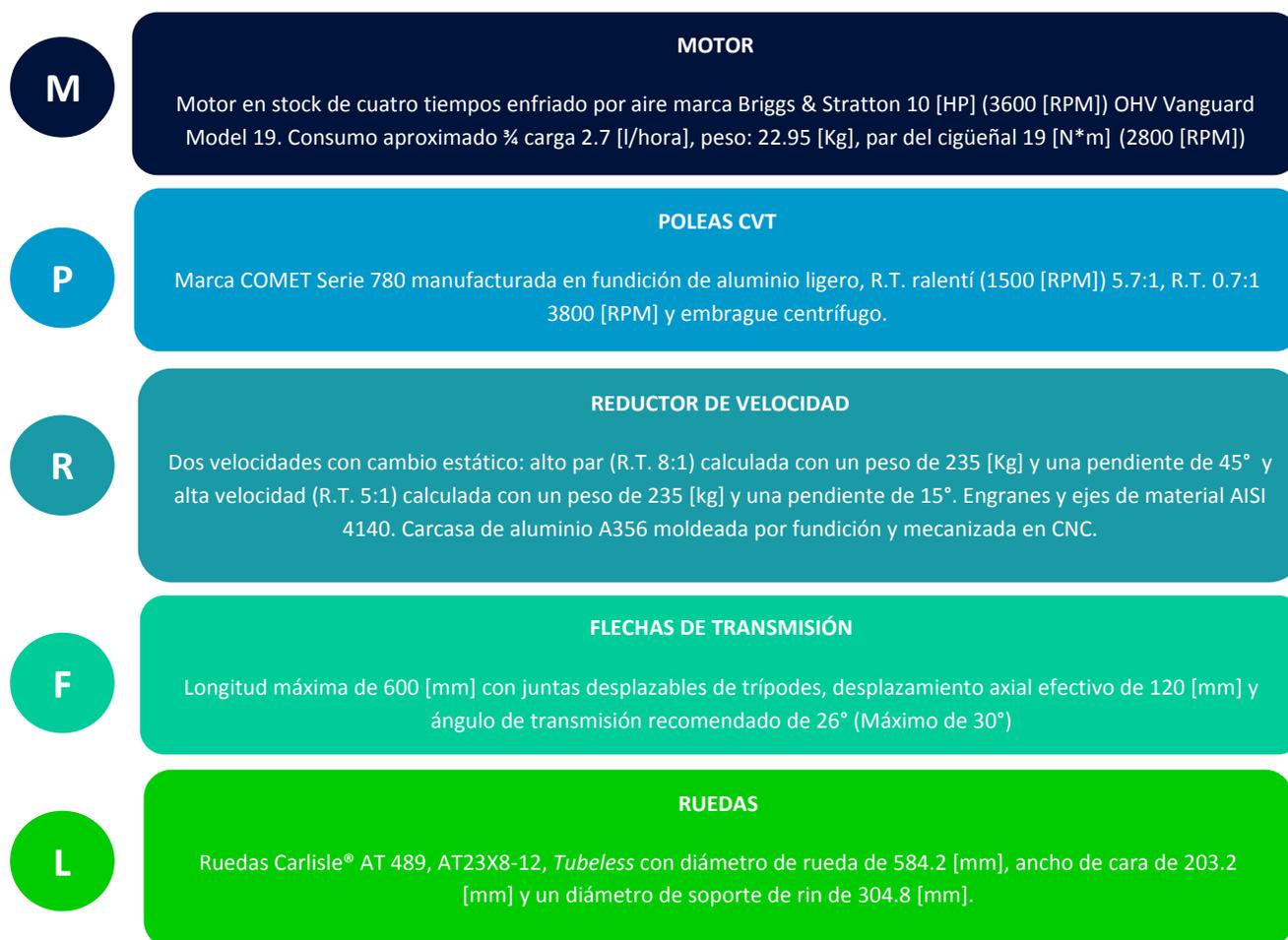
- Se permite localizar el centro de gravedad de manera que provea de estabilidad suficiente al vehículo para realizar todas las pruebas sin afectar su desempeño.

### 2.3.1 Configuración Motor-Poleas-Reductor-Flechas-Ruedas (M-P-R-F-L)



La configuración mostrada en la figura 2.5 es sobre la cual se trabajará, sin modificar el orden, la cantidad o el tipo de elementos motrices. Las modificaciones se centrarán en el reductor de velocidad y el resto de los elementos se mantendrán bajo reserva de proporcionar comentarios y sugerencias de futuros cambios.

A continuación, se describen las características generales de los elementos motrices que conforman el sistema del vehículo prototipo 2017 y que servirán como base para el rediseño del reductor de velocidad (Fig. 2.6).



**FIGURA 2.6** Descripción de los elementos de la configuración MPRFL.

### 2.3.2 Uso de Transmisión Variable Continua (CVT)

La potencia generada al interior de un motor de combustión interna no puede ser totalmente aprovechada con el número finito de cambios de velocidades en una transmisión por engranes convencional, esto debido a que al realizar los cambios de velocidades, disminuye la fuerza de tracción disponible y el sistema se aleja de la curva de potencia máxima del motor. Dicha curva es llamada hipérbola de máxima potencia y son los límites superiores de la fuerza tractiva disponible en cada cambio, y ésta únicamente se acerca cuando el motor alcanza una velocidad a la cual desarrolla su máxima potencia (Fig. 2.7).

Para tener el mejor desempeño en la aceleración el punto adecuado para realizar un cambio de velocidad se encuentra donde se intersectan las líneas de fuerza tractiva y la hipérbola de potencia, las áreas grises bajo la curva muestran deficiencias de la transmisión o zonas de pérdidas de potencia.

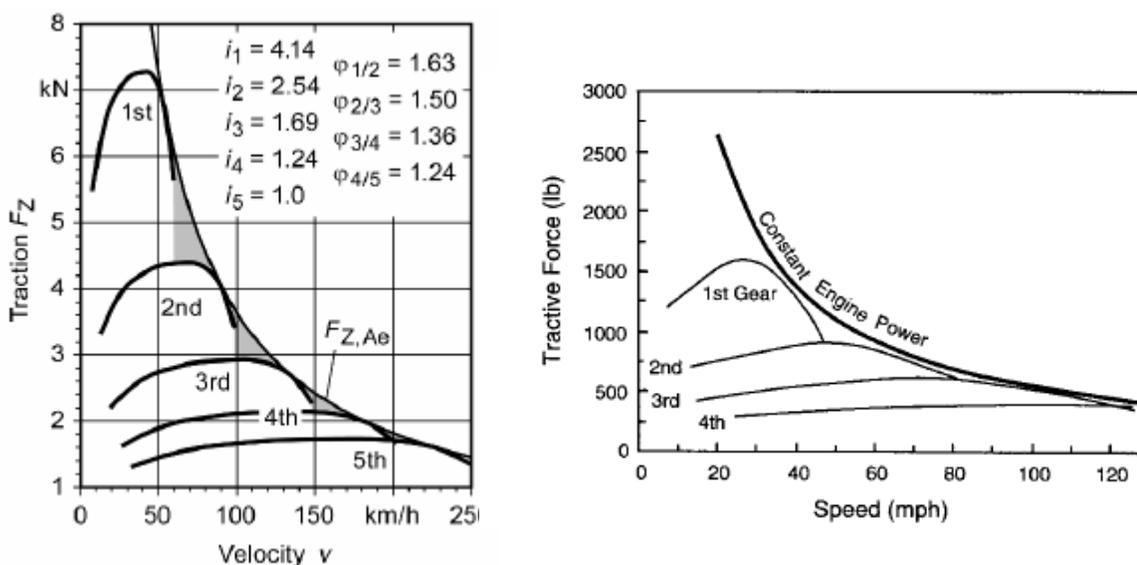


FIGURA 2.7 Ejemplos de gráficas de característica tractiva e hipérbola de potencia máxima.

Las transmisiones variables continuas son convertidores de par y velocidad las cuales pueden variar su relación de transmisión sin interrumpir el flujo de potencia. Este tipo de transmisiones hace posible explotar al máximo el desempeño del vehículo, manteniendo el motor en un régimen de potencia máxima.

Implementar una transmisión CVT es factible casi para cualquier motor con sus características propias de par y velocidad, siempre y cuando las relaciones de transmisión se encuentren localizadas dentro de la hipérbola de potencia y en el mapa de operación definido por la relación

de transmisión global. En este tipo de transmisiones la velocidad del motor está directamente relacionada con la relación de transmisión.

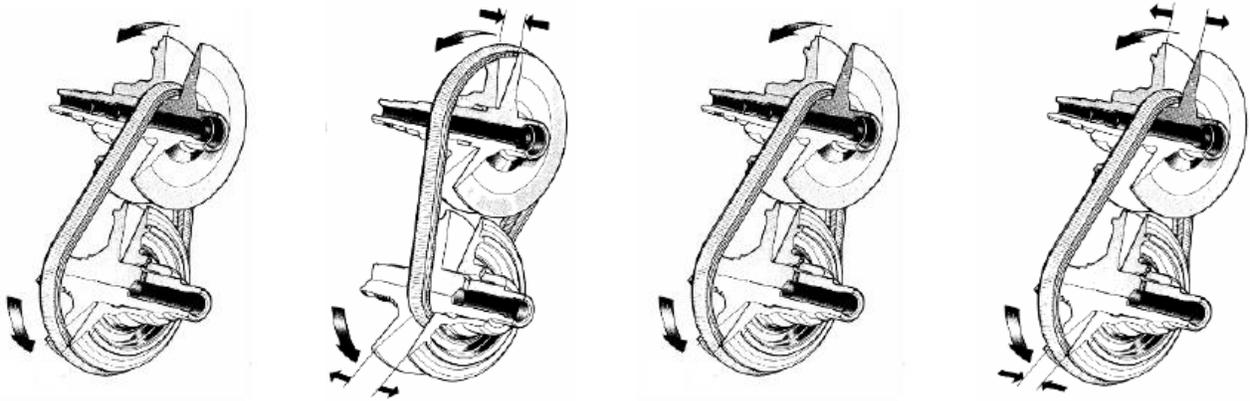
A diferencia de las transmisiones por engranajes, las transmisiones CVT ofrecen la posibilidad de seleccionar los puntos de operación del motor dentro de la hipérbola de potencia según la demanda y siguiendo una estrategia predefinida, es decir el motor podrá trabajar dentro del punto ideal de operación dando como prioridad a la economía o el rendimiento según sea necesario. La eficiencia de la transmisión CVT es un factor decisivo, la cual es similar a los sistemas de transmisión por banda-polea. La eficiencia resulta significativamente peor.

La transmisión CVT consiste en un sistema de poleas (par de discos cónicos) conectadas por una banda trapezoidal que trasmite potencia por fricción y genera la variación axial del variador en respuesta a la fuerza centrífuga de las poleas, dependiendo del régimen y condiciones de carga del motor. Debido a esta variación axial las poleas forman diámetros variables; variando infinitamente la relación de transmisión (Fig. 2.8).

El ajuste de la banda juega un papel importante debido a que de generar demasiada presión sobre los discos cónicos se reduce la eficiencia de la banda, lo que conlleva a un mayor consumo de energía y sobre-esfuerzo en la transmisión. Por otro lado si la banda queda muy poco ajustada (con poca presión sobre los discos) puede generar deslizamientos. Una de las principales ventajas se da en términos de generación de ruidos asociados, es decir el funcionamiento es sumamente silencioso.

En resumen, la transmisión por CVT presenta las siguientes ventajas (Godínez Rojano, 2000) por las cuales fue seleccionada para el diseño del actual tren motriz:

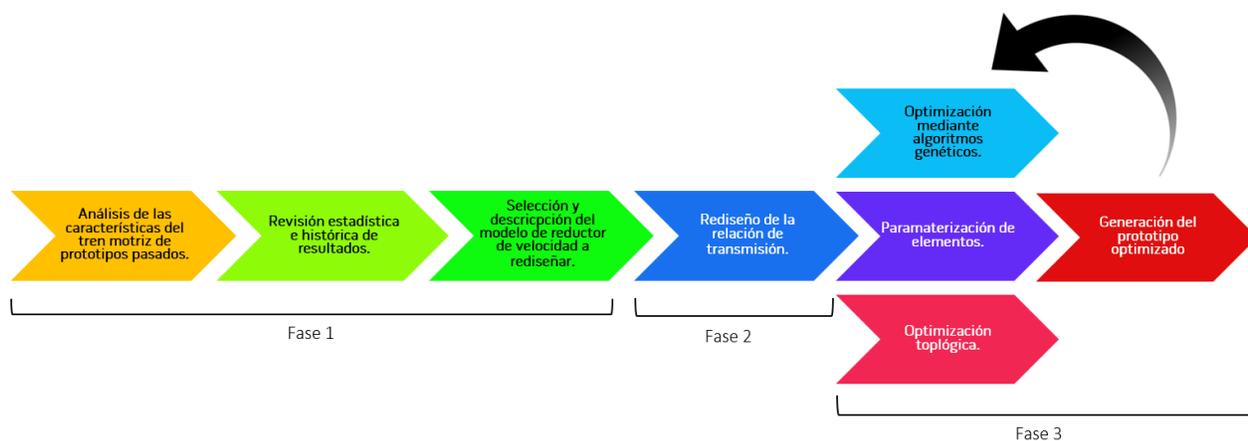
- Operación silenciosa y suave, sin impactos.
- Sistema ligero y de hacer un buen ajuste, suficientemente eficiente.
- Adaptación automática a los requerimientos de par y velocidad.
- Al estar en ralentí la banda tiene poca tensión y se comporta como embrague.
- Disponibilidad de varios modelos en el mercado.



**FIGURA 2.8** a) Transmisión CVT en ralenti y en su posición inicial: polea inductora con platos extendidos y diámetro más pequeño, polea inducida con platos juntos y diámetro más grande (relación de alto par); b) Transmisión CVT a altas R.P.M.: polea inductora con platos juntos y diámetro más grande, polea inducida con platos extendidos y diámetro más pequeño (relación de alta velocidad); c) Transmisión CVT a altas R.P.M. con incremento de carga, polea inductora con platos extendidos y diámetro más pequeño, polea inducida con platos juntos y diámetro más grande (Se mantiene régimen de potencia máxima); d) Transmisión CVT a bajas R.P.M. y con un aumento sustancial de carga, polea inductora con platos extendidos y diámetro más pequeño, polea inducida con platos juntos y diámetro más grande.

## Capítulo 3. Rediseño del reductor de velocidad

Para alcanzar el objetivo del presente trabajo, se propone la siguiente metodología (Fig. 3.1). La primera fase establece las consideraciones de diseño, así como los datos recopilados durante casi una década de competencia y la justificación para elegir el reductor de velocidad que se rediseñará. La segunda fase desarrolla un concepto preliminar a través de la teoría básica de un tren motriz. La tercera fase propone y optimiza el empaquetamiento del reductor de velocidad basado en Algoritmos Genéticos (AG) y aplica la teoría de Optimización Estructural Evolucionaria (ESO) mediante un proceso de optimización topológica. Dado que el diseño se encuentra en un ciclo de mejora, se requiere realizar cambios a la geometría de manera rápida, por lo que es necesario contar con una herramienta computacional que genere dicha geometría basada en modelos parametrizados.



**FIGURA 3.1** Proceso de diseño para el rediseño del reductor de velocidad.

### 3.1 Análisis de las características del tren motriz de prototipos pasados

En esta sección se inicia la fase 1 del proceso de rediseño analizando los prototipos construidos desde el año 2012 hasta la fecha, así como las características principales relacionadas al tren motriz de cada vehículo tales como el tipo de transmisión, masa vehicular y las características del reductor de velocidad (Fig. 3.2).

El desarrollo de las competencias y la actualización en los reglamentos de Baja SAE han dado pie a la evolución de los prototipos que se desarrollan, permitiendo con ello diseñar y construir vehículos cada vez más ligeros, eficientes y seguros; es por ello que se analizan los cambios en los modelos para poder realizar una toma de decisiones sobre el diseño de un nuevo reductor de velocidad.



#### Modelo 2012 competencia Baja SAE México

**Tipo de transmisión:** Configuración MPRF      **Masa vehicular:** 280 Kg  
**Características del reductor de velocidad:** Dana Spicer® FNR H-12 con velocidad de avance (R.T. 10.1:1), retroceso (R.T. 11:1) y diferencial con bloqueo manual (taza de crecimiento 3:1), peso del reductor de 25 kg, material acero.

#### Modelo 2013 competencia Baja SAE Washington

**Tipo de transmisión:** Configuración MPRF      **Masa vehicular:** 270 Kg  
**Características del reductor de velocidad:** Dana Spicer® FNR H-12 con velocidad de avance (R.T. 10.1:1), retroceso (R.T. 11:1) y diferencial con bloqueo manual (taza de crecimiento 3:1), peso del reductor de 25 kg, material acero.



#### Modelo 2013 competencia Baja SAE México

**Tipo de transmisión:** Configuración MPRF      **Masa vehicular:** 270 Kg  
**Características del reductor de velocidad:** Dana Spicer® FNR H-12 con velocidad de avance (R.T. 10.1:1), retroceso (R.T. 11:1) y diferencial con bloqueo manual (taza de crecimiento 3:1), peso del reductor de 25 kg, material acero.

#### Modelo 2014 competencia Baja SAE Kansas

**Tipo de transmisión:** Configuración MPRF      **Masa vehicular:** 270 Kg  
**Características del reductor de velocidad:** Dana Spicer® FNR H-12 con velocidad de avance (R.T. 10.1:1), retroceso (R.T. 11:1) y diferencial con bloqueo manual (taza de crecimiento 3:1), peso del reductor de 25 kg, material acero.



#### Modelo 2014 competencia Baja SAE México

**Tipo de transmisión:** Configuración MPRF      **Masa vehicular:** 260 Kg  
**Características del reductor de velocidad:** Dana Spicer® FNR H-12 con velocidad de avance (R.T. 10.1:1), retroceso (R.T. 11:1) y diferencial con bloqueo manual (taza de crecimiento 3:1), peso del reductor de 25 kg, material acero.

#### Modelo 2015 competencia Baja SAE México

**Tipo de transmisión:** Configuración MPRF      **Masa vehicular:** 250 Kg  
**Características del reductor de velocidad:** Dana Spicer® FNR H-12 con velocidad de avance (R.T. 10.1:1), retroceso (R.T. 11:1) y diferencial con bloqueo manual (taza de crecimiento 3:1), peso del reductor de 25 kg, material acero.





#### Modelo 2016 competencia Baja SAE México

**Tipo de transmisión:** Configuración MPRF      **Masa vehicular:** 250 Kg  
**Características del reductor de velocidad:** Manufacturado por el equipo con una sola velocidad de avance y reducción en dos etapas (R.T. 8.6:1), sin diferencial, engranes y ejes de acero AISI 4140 y carcasa de aluminio A356 moldeada por fundición.

#### Modelo 2017 competencia Baja SAE Illinois

**Tipo de transmisión:** Configuración MPRF      **Masa vehicular:** 250 Kg  
**Características del reductor de velocidad:** Manufacturado por el equipo con dos velocidades de avance, una de alto par (R.T. 8:1) y otra de alta velocidad (R.T. 5:1), con cambio estático y sin diferencial. Engranes y ejes de acero AISI 4140, sincronizador y engranes helicoidales reciclados del reductor Dana Spicer® FNR H-12 y carcasa de aluminio A356 moldeada por fundición. Implementación de algoritmos genéticos para optimizar dimensiones.



#### Modelo 2018 competencia Baja México

**Tipo de transmisión:** Configuración MPRF      **Masa vehicular:** 250 Kg  
**Características del reductor de velocidad:** Manufacturado por el equipo, con dos velocidades de avance, una de alto par (R.T. 8:1) y otra de alta velocidad (R.T. 5:1), con cambio estático y sin diferencial. Engranes y ejes de acero AISI 4140, sincronizador reciclado del reductor Dana Spicer® FNR H-12 y carcasa de aluminio A356 moldeada por fundición. Engranes con tratamiento térmico de cementación.

#### Modelo 2018 competencia Baja SAE México

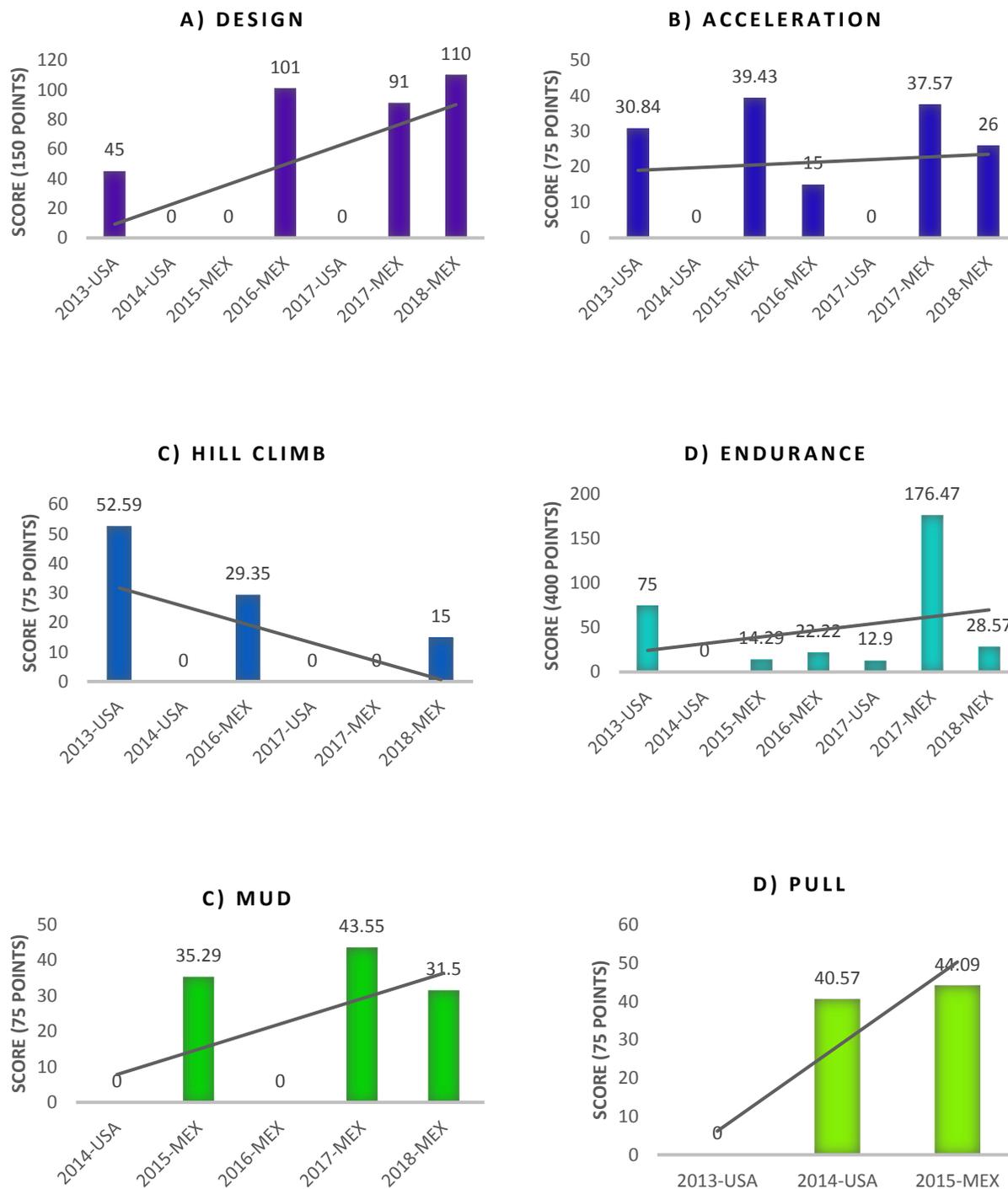
**Tipo de transmisión:** Configuración MPRF      **Masa vehicular:** 250 Kg  
**Características del reductor de velocidad:** Manufacturado por el equipo con una sola velocidad de avance y reducción en dos etapas (R.T. 8.072:1), sin diferencial, engranes y ejes de acero AISI 4140 y carcasa de aluminio A356 moldeada por fundición.



FIGURA 3.2 Configuración y características del tren motriz

### 3.2 Revisión estadística e histórica de resultados.

La información que se muestra a continuación forma parte del archivo histórico de resultados de las competencias internacionales Baja SAE en las que se ha participado. En la figura 3.3 se muestran los gráficos de resultados basados en el puntaje obtenido en cada prueba en la que se evalúa el desempeño del tren motriz. Si bien es cierto que existe un reglamento general para las competencias, es posible que sufra cambios debido a los criterios del comité de organización del evento, es por esto que en algunas competencias se omiten pruebas o se pueden incluir nuevas.



**FIGURA 3.3** Histórico de resultados de competencias Baja SAE oficiales. En la prueba de Hill-Climb se omitieron las pruebas del año 2015-MEX, para Mud las de los años 2013-USA y 2017-USA, y para Pull todas a partir del año 2015-MEX, debido a la organización local del evento.

En general se puede observar que en las pruebas a partir del año 2015 (Fig. 3.3) existe un incremento en las puntuaciones de las competencias, lo cual se atribuye al cambio de estrategia con respecto al diseño y manufactura del tren motriz, ya que antes de este año, el reductor de velocidad solo era seleccionado a partir de un modelo comercial, es decir, se calculaba la relación de transmisión y posteriormente se buscaba un reductor que se ajustara a los resultados sin considerar el error generado. A partir del año 2015 se realiza un primer diseño de tren de engranes, el cual fue manufacturado con la idea de cumplir al 100% con la memoria de cálculo y los requerimientos de la competencia.

A partir de la revisión histórica se generó la tabla 3.1, en la cual se analiza la correlación lineal existente entre un cambio de diseño en el reductor de velocidad y la puntuación de cada prueba de todas las competencias desarrolladas entre el año 2012 y 2018. Se eligió este método debido a la baja cantidad de datos recogidos, y a un supuesto comportamiento lineal que representa el fenómeno físico de conversión de par a velocidad y viceversa, y su impacto directo en los resultados de cada prueba (Fig. 3.3).

De este análisis se puede observar que existe una correlación lineal positiva para las pruebas de *Design*, *Mud* y *Pull*, lo que implica que conforme cambian y se ajustan los diseños de reductor de velocidad, los resultados de las pruebas también mejoran. Para *Acceleration* y *Endurance* no existe una correlación y en el caso de *Hill-climb*, se sacrifica parte del desempeño. En cuanto al promedio de puntuaciones, se observa que los modelos manufacturados por el equipo a partir del año 2015 están por encima de este valor para la mayoría de las pruebas.

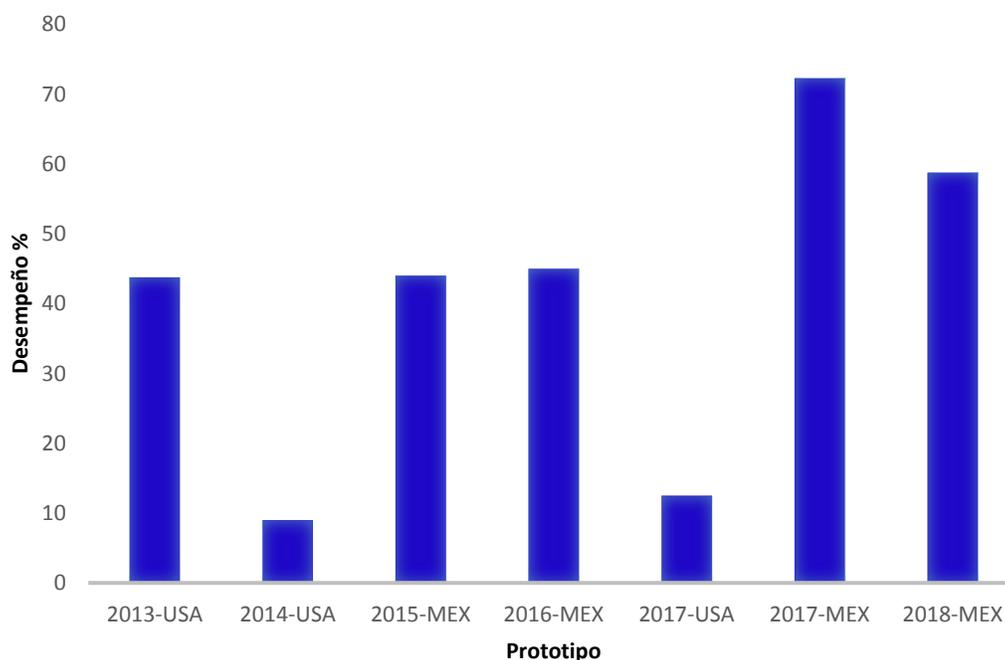
**Tabla 3.1** Correlación y promedio de datos de las competencias oficiales Baja SAE.

Prueba	Correlación	Promedio de puntuaciones
<i>Design</i>	0.50291766	49.5714286
<i>Acceleration</i>	0.00081296	21.2628571
<i>Hill Climb</i>	-0.53792726	16.1566667
<i>Endurance</i>	0.15180369	47.0642857
<i>Mud</i>	0.54665929	22.068
<i>Pull</i>	0.89970307	28.22

Para evaluar la mejora cuantitativa de los modelos, se ponderaron las pruebas dependiendo de su importancia relativa como sigue: *Design* .25, *Endurance* .25, *Acceleration* .15, *Hill climb* .15, *Mud* .10 y *Pull* .10; después se calificó con los siguientes porcentajes de satisfacción 0%, 10%, 25%, 50%, 75%, 90% y 100%, donde 0% es un objetivo no satisfecho y 100% un objetivo totalmente satisfecho. Con los datos arrojados se generó la figura 3.4, de la cual se advierte que el modelo 2017-MEX presentó los mejores resultados generales, como consecuencia de la implementación de un proceso de optimización utilizando algoritmos genéticos en el reductor de velocidad.

## DESEMPEÑO GENERAL DE LOS PROTOTIPOS

PRUEBAS RELACIONADAS AL TREN MOTRIZ



**FIGURA 3.4** Desempeño general de los prototipos de vehículos Baja SAE UNAM a lo largo de las competencias 2013-2018

Con base en la revisión histórica de las competencias se recopilaron las siguientes consideraciones, recomendaciones y restricciones de diseño para la construcción de un nuevo reductor de velocidad (Fig. 3.5). El seguimiento de estas guías implica diseñar con base en la experiencia y evidencia estadística, además de acotar el trabajo a un modelo que ha demostrado buenos resultados.

### GENERAL

- El nuevo reductor de velocidad debe seguir el concepto *think simple*, es decir, el modelo más sencillo posible.
- El diseño debe ser simple, entendible y repetible.

### SOBRE EL TREN DE ENGRANES

- El tren de engranes debe ser un tren compuesto, con dos etapas de reducción.
- Se tendrá una sola velocidad de avance y por consiguiente únicamente 4 engranes.
- Las dimensiones estarán dadas por restricciones de empaquetamiento, análisis de esfuerzos y optimizadas utilizando los algoritmos desarrollados por el equipo.

### SOBRE LOS ENGRANES

- Deberán ser más ligeros comparados con engranes estándar. Una vez que un algoritmo haya seleccionado el mejor juego de engranes, estos deberán pasar por un proceso de optimización topológica para eliminar material en las caras de los engranes, siempre respetando las normas de la AGMA.
- El material debe ser seleccionado bajo condiciones de esfuerzo, reglamentación y disponibilidad.

#### SOBRE LOS EJES

- Los ejes se diseñarán bajo un análisis de esfuerzos buscando la disminución del diámetro de los mismos con base en el historial de fallas.

#### SOBRE LA CARCASA

- La carcasa deberá ser analizada desde el punto de vista de las fuerzas que actúan sobre ella para posteriormente ser optimizada y eliminar el material excedente respetando las especificaciones del reglamento Baja SAE en la sección de guardas.

#### SOBRE EL DISEÑO PARA MANUFACTURA

- El diseño deberá ser pensado para su manufactura mediante control numérico (CNC), con la finalidad de asegurar las tolerancias geométricas y con ello evitar vibraciones y concentración de esfuerzos indeseados. En el caso de los engranes aplica cualquier método convencional de manufactura para los dientes y en el caso de la carcasa, ejes y caras de engranes únicamente en CNC.

**FIGURA 3.5** Consideraciones para el diseño de el nuevo reductor de velocidad.

### 3.3 Selección y descripción del modelo de reductor de velocidad a rediseñar.

Con base en la información analizada en la revisión estadística e histórica de resultados se toma la decisión de seleccionar como modelo a rediseñar el reductor de la temporada 2017 ya que ha sido el que mejor desempeño general ha demostrado hasta ahora, en la figura 3.6 y 3.7 se pueden apreciar las características y componentes de este modelo.

En un inicio este reductor fue diseñado para la competencia Baja SAE Illinois (2017-USA) tomando en cuenta consideraciones sobre el terreno de desarrollo de las pruebas, además del diseño de las pistas americanas con mayor énfasis en velocidad y fallas por fatiga, a diferencia de las competencias de México que suelen centrarse en par motriz y fallas por impacto. A pesar del buen desempeño de la transmisión, ésta presentó fallas en los dientes del engrane del eje de salida debido a un problema de ajustes y tolerancias. Posteriormente se reacondicionó este reductor para la competencia Baja SAE México (2017-MEX) dando un tratamiento térmico a los engranes y ajustando tolerancias, lo cual dio como resultado una mejora significativa en el desempeño del vehículo. La tabla 3.2 muestra los parámetros de diseño del tren de engranes, información que resulta útil como guía para el rediseño.

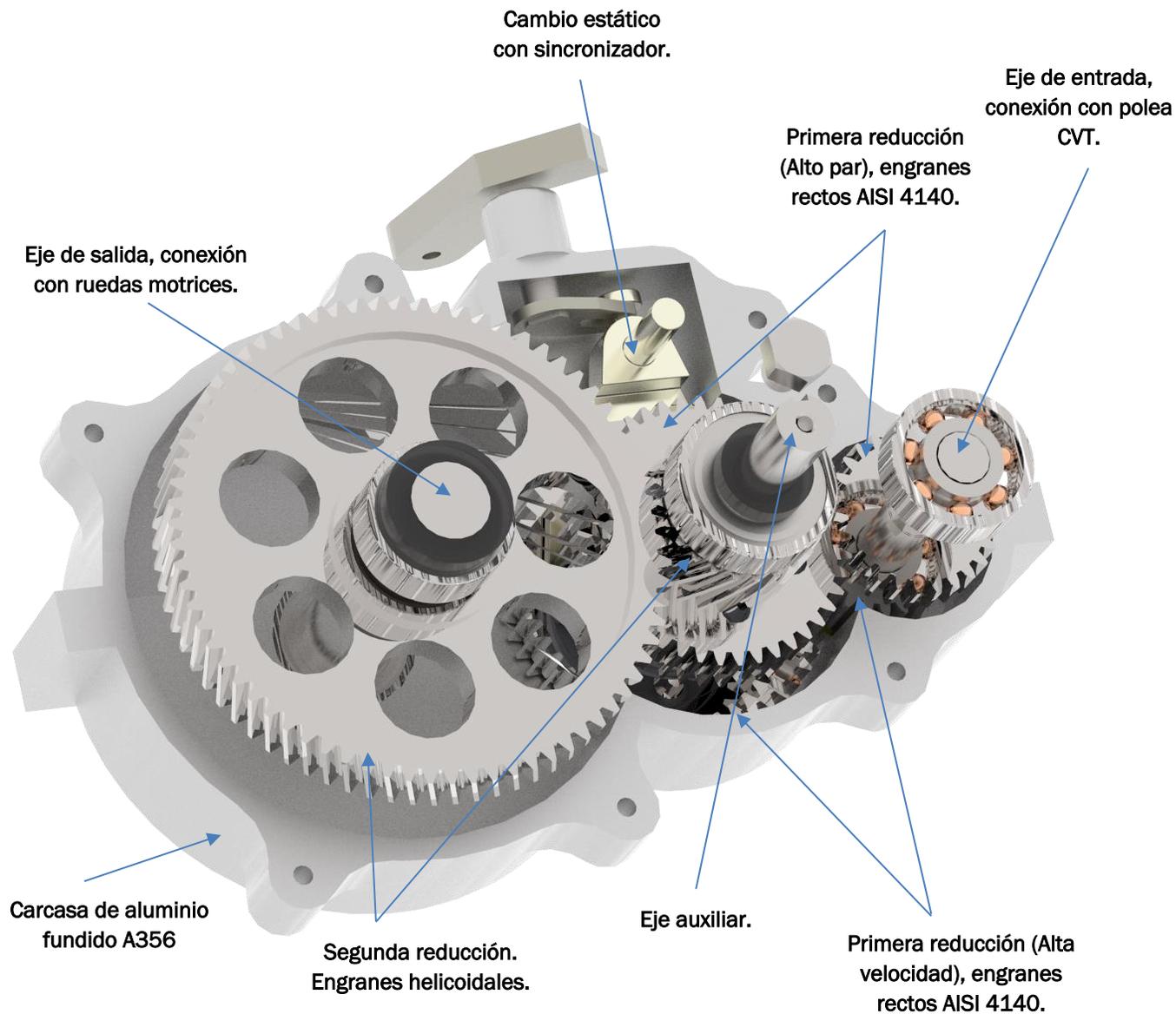


FIGURA 3.6 Reductor de velocidad 2017, utilizado durante la competencia Baja SAE Illinois 2017

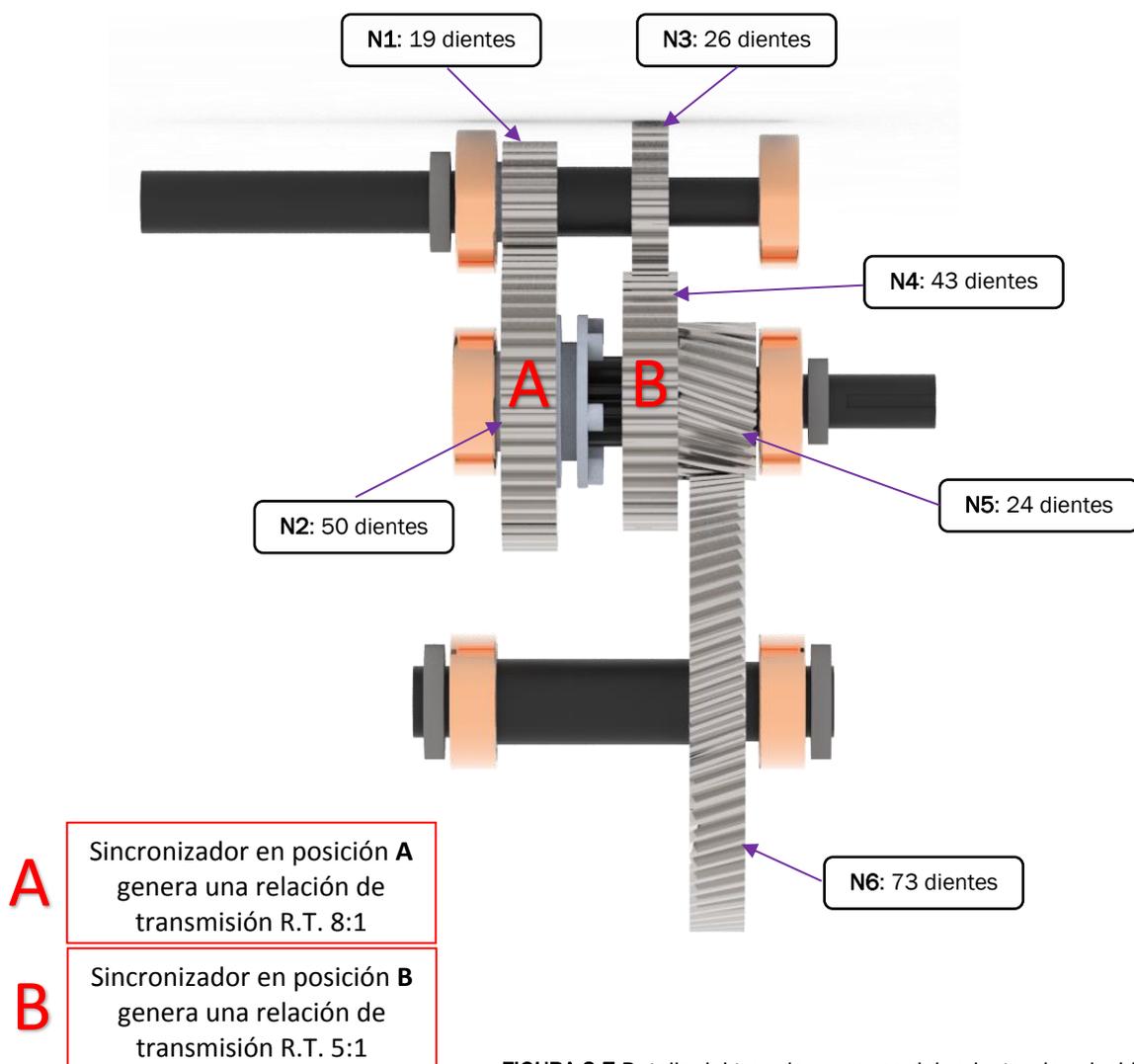


FIGURA 3.7 Detalle del tren de engranes del reductor de velocidad 2017

TABLA 3.2 Parámetros de diseño del reductor de velocidad 2017

Engrane	Dientes	Angulo de presión (°)	Módulo	Diámetro de paso (mm)	Ancho de cara (mm)	Diámetro interno (eje) (mm)
N1	19	20	2	38	19.1	23
N2	50	20	2	100	19.1	21.9
N3	26	20	2	52	12.7	18
N4	43	20	2	86	19.1	24.8
N5	24	20	2	48	27	21.5
N6	73	20	2	146	19.1	28

Este reductor de velocidad consta de engranes y ejes de acero AISI 4140, la carcasa fue manufacturada utilizando el proceso de fundición en arena verde de aluminio A356 (para ahorro de material), para posteriormente ser maquinada en las áreas de interés, tales como los alojamientos de rodamientos y del selector de velocidad. La masa total del sistema fue de 10.125 [Kg], el diseño y selección de los elementos del reductor se realizaron mediante un algoritmo de cálculo programado en *Wolfram Mathematica*.

A partir de los problemas que se presentaron en el reductor 2017 durante la competencia (Tabla 3.3), se generó la tabla 3.4 sobre los requerimientos y especificaciones para el rediseño del reductor de velocidad.

**TABLA 3.3** Problemáticas del reductor de velocidad 2017 analizadas a partir de su operación.

Problema	Descripción
Volumen	El ancho del reductor de velocidad dificultó el empaquetamiento en la parte trasera del chasis y causó problemas al ensamblar y desensamblar.
Espacio para el piloto	El empaquetamiento del sistema de transmisión quitó espacio a la cabina del conductor lo cual hace que la conducción sea incómoda y complicada.
Dificultad para realizar cambio de velocidad	Se dificultaron los cambios de velocidad estáticos debido a la necesidad de detener el vehículo para realizar el cambio y a la trayectoria del mecanismo de cambio.
Cantidad de elementos	El sincronizador requirió mayor cantidad de elementos.
Dientes de engranes	Se presentó desgaste acompañado de deformación plástica en los dientes del engrane de salida

Dada la cantidad y complejidad de los problemas que presentaron en el modelo 2017, se realizará un rediseño considerando principalmente la disminución del peso y volumen de reductor de velocidad, además de tomar en cuenta la información generada en las tablas 3.3 y 3.4.

**TABLA 3.4** Requerimientos y especificaciones para el rediseño del reductor de velocidad

Requerimientos	Especificaciones
Menor volumen	El ancho del reductor de velocidad debe disminuir el 20% comparado con el modelo 2017, considerando al sistema como una caja rectangular.
Mayor espacio para el piloto	El empaquetamiento del reductor de velocidad debe permitir que el espacio de la cabina del piloto aumente 100 mm en el eje longitudinal.
Cantidad de elementos	El sistema debe contar con un tren de engranes compuesto: 4 engranes y 3 ejes sin selector de cambios.

### 3.4 Rediseño de la relación de transmisión

En esta sección se desarrolla la fase 2 del proceso de rediseño en la cual se analizan las condiciones de conducción y las fuerzas que actúan sobre el vehículo en movimiento con la finalidad de seleccionar la relación de transmisión que se adecúa a las necesidades y demandas del terreno.

Las transmisiones de los vehículos son las encargadas de adaptar la potencia generada en el motor dependiendo de las exigencias de las condiciones externas mediante la conversión de par y velocidad angular. El requerimiento de fuerza en las ruedas motrices será determinado dadas las resistencias al conducir (Figura 3.8). Las resistencias al movimiento de un vehículo, de manera general se pueden clasificar como:

- Resistencia en las ruedas  $F_R$
- Resistencia del aire  $F_L$
- Resistencia del gradiente  $F_{St}$
- Resistencia de aceleración (inercia)  $F_a$

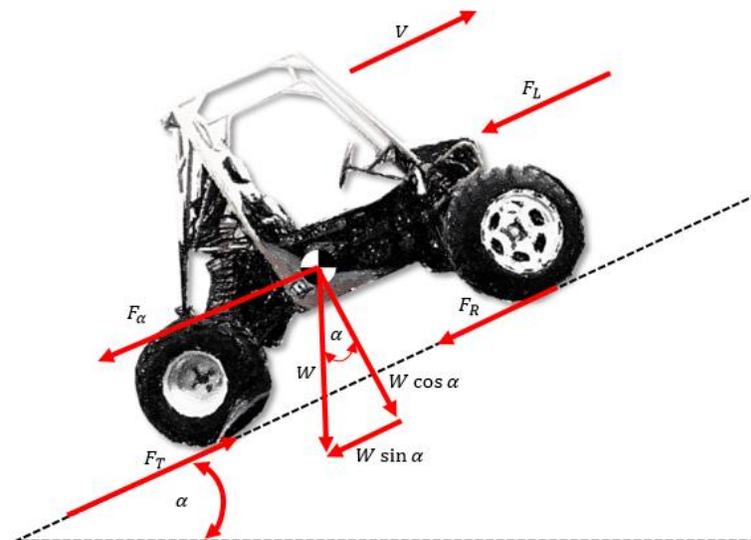


FIGURA 3.8 Diagrama de fuerzas que actúan en el vehículo en una pendiente.

#### 3.4.1 Análisis de resistencia en las ruedas

La resistencia en las ruedas motrices está conformada por las fuerzas resistivas que actúan sobre éstas, entre las cuales se encuentran la resistencia a la rodadura, resistencia de la superficie del camino y la resistencia al deslizamiento (Naunheimer, Bertsche, Ryborz, & Novak, 1994, 2011).

Si se considera la distribución de la presión sobre el área de contacto de la rueda, se genera la fuerza de reacción  $R$ , que es la misma que la de la carga de la rueda  $G_R$ , sin embargo debido a la distribución de presión asimétrica, el punto de aplicación de la reacción de la fuerza  $R$  se ubicará delante del eje de la rueda en una cantidad  $e$

$$T_R = F_U r_{dyn} + Re \quad (3.1)$$

Tomando en cuenta que no existe tracción ni fuerza de frenado ( $T_R = 0$ )

$$-F_U = \frac{e}{r_{dyn}} R \quad (3.1.1)$$

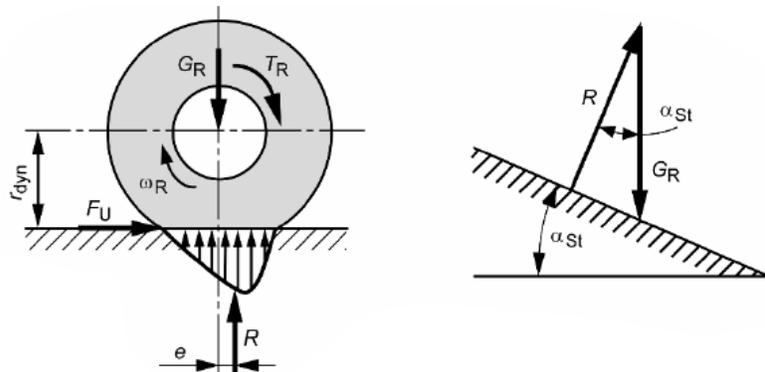


FIGURA 3.9 Fuerzas que actúan sobre el neumático con y sin pendiente.

Si la fuerza radial  $-F_U$  es igual a la fuerza de resistencia a la rodadura  $F_{R,Roll}$  y considerando un camino sin inclinación  $R = G_R$

$$F_{R,Roll} = \frac{e}{r_{dyn}} G_R \quad (3.1.2)$$

El factor de proporcionalidad adimensional  $f_R$  es conocido como el factor de resistencia a la rodadura.

$$f_R = \frac{e}{r_{dyn}} \quad (3.1.3)$$

Al desplazarse en caminos con inclinación  $\alpha_{st}$

$$R = G_R \cos \alpha_{st} \quad (3.1.4)$$

Por lo tanto, para todo vehículo con una masa  $m_F$

$$F_R = f_R m_F g \cos \alpha_{st} \quad (3.1.5)$$

### 3.4.2 Análisis de resistencia del aire

La resistencia al aire se genera a partir de la presión generada al arrastre del fluido, es decir la fuerza normal y tangencial que actúan sobre la superficie proyectada del vehículo y que depende de diversos factores como la velocidad de desplazamiento y condiciones atmosféricas (Naunheimer, Bertsche, Ryborz, & Novak, 1994, 2011). Este arrastre se calcula como:

$$F_L = \frac{1}{2} \rho_L C_w A v^2 \quad (3.2)$$

La tasa de flujo de aire  $v$  se deriva de la suma de la velocidad del vehículo  $v_F$  con la velocidad del viento  $v_w$  en la dirección del eje longitudinal del vehículo. Aunque por simplificación siempre se considera un estado en calma del viento por lo que  $v = v_F$ . La resistencia del aire resulta del producto de la presión dinámica  $\frac{1}{2} \rho_L v^2$  y la máxima área de sección transversal frontal  $A$  multiplicada por el coeficiente de arrastre  $c_w$ , donde el coeficiente de arrastre representa el caso donde se presenta flujo laminar y la dirección del flujo es paralelo al eje longitudinal del vehículo (Apéndice A).

### 3.4.3 Análisis de resistencia de gradiente

La resistencia de gradiente o resistencia a la inclinación del camino es calculada a partir del peso del vehículo actuando en el centro de gravedad durante la conducción en un camino inclinado (Naunheimer, Bertsche, Ryborz, & Novak, 1994, 2011), por lo tanto, deduciendo de la figura 3.1, donde  $\alpha_{st} = \alpha$

$$F_{St} = m_F g \sin \alpha_{st} \quad (3.3)$$

### 3.4.4 Análisis de resistencia de aceleración (Inercia)

La resistencia de aceleración, a diferencia de cuando se conduce en estado estable  $v = const$ , es generada a partir de las fuerzas inerciales que se presentan durante la aceleración y el frenado (Naunheimer, Bertsche, Ryborz, & Novak, 1994, 2011).

La masa total del vehículo  $m_F$  y la masa inercial de las partes rotatorias del motor y sistema de transmisión son puntos importantes que afectan la resistencia de aceleración.

$$F_a = m_{red,i} \alpha_{cc} \quad (3.4)$$

Donde:

$$m_{red,i} = m_F + \frac{\sum J_{red,i}}{r_{dyn}^2} \quad (3.4.1)$$

Se considera que la componente rotacional está en función de la relación de transmisión, y el momento de inercia de todos los elementos rotatorios se reducen a un solo elemento, el eje motriz ( $J_{red,i}$ ).

De tal manera que la resistencia a la aceleración es comúnmente representada como:

$$F_a = \lambda m_F \alpha_{cc} \quad (3.4.2)$$

Considerando que  $\lambda$  es el coeficiente de inercia rotacional que expresa la proporción de la masa que es rotacional. La tabla de valores para el coeficiente  $\lambda$  puede ser analizado en el apéndice B de este trabajo.

### 3.4.5 Análisis de la resistencia total

Considerando un vehículo de tracción trasera, la fuerza de tracción  $F_T$  sería la componente de la reacción del camino, paralela a ésta, que actúa tangencialmente a las ruedas motrices y se define como:

$$F_T = M_m \frac{i_{tot}}{r_{dyn}} \eta_{tot} \quad (3.5)$$

Donde  $M_m$  = Par al freno que entrega el motor

$i_{tot} = \frac{n_m}{n_r}$  = Relación total del mecanismo de transmisión ( $n_m$ =RPM del motor;  $n_r$ =RPM de las ruedas motrices).

Por lo tanto, realizando un análisis de equilibrio de fuerzas que actúan en el automóvil durante el movimiento.

$$F_T = F_R + F_{St} + F_L + F_a \quad (3.5.1)$$

Sustituyendo los términos de cada bloque de la ecuación 5.1.

$$M_m \frac{i_{tot}}{r_{dyn}} \eta_{tot} = (f_R m_F g \cos \alpha_{St}) + (m_F g \sin \alpha_{St}) \quad (3.5.2)$$

$$+ \left( \frac{1}{2} \rho_L C_w A v^2 \right) + (\lambda m_F \alpha_{cc})$$

$$M_m \frac{i_{tot}}{r_{dyn}} \eta_{tot} = m_F g (f_R \cos \alpha_{St} + \sin \alpha_{St}) + \left( \frac{1}{2} \rho_L C_w A v^2 \right) + (\lambda m_F \alpha_{cc}) \quad (3.5.3)$$

Y considerando estado estable  $a_{cc} = 0$ , además con las siguientes aproximaciones  $\cos \alpha_{St} \approx 1$  y  $\sin \alpha_{St} \approx \tan \alpha_{St}$ , la ecuación se simplifica como:

$$M_m \frac{i_{tot}}{r_{dyn}} \eta_{tot} = m_F g (f_R + \tan \alpha_{St}) + \frac{1}{2} \rho_L C_w A v^2 \quad (3.5.4)$$

Ahora bien, desde el inicio de este capítulo se habló de las características del nuevo reductor de velocidad donde se menciona que se ha de utilizar una sola relación de transmisión, por lo tanto, hemos de mediar entre una relación de transmisión de marcha superior e inferior mediante el análisis de los modelos pasados, modificando los parámetros de entrada y observando el comportamiento entre los dos casos.

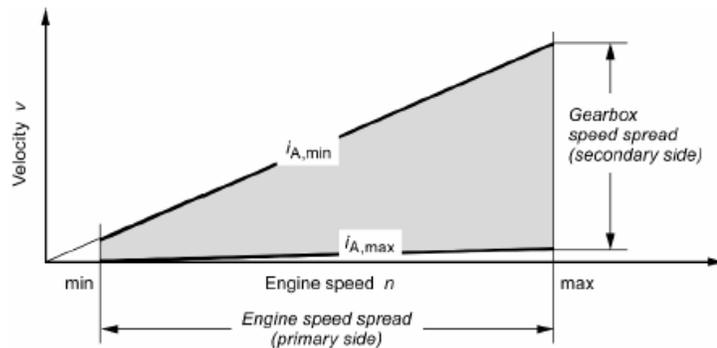


FIGURA 3.10 Diagrama velocidad/velocidad del motor, relación de transmisión general.

El tren motriz del vehículo debe ofrecer relaciones de transmisión que le permitan ajustar entre las velocidades del motor y las ruedas motrices, por lo cual se han de hacer las siguientes observaciones:

- La máxima relación de transmisión (marcha inferior)  $i_{A,max}$  permitirá desplazarse bajo condiciones de manejo complicadas (grandes pendientes o situaciones de alta carga).
- La relación de transmisión  $i_A(v_{max})$  permite alcanzar un tope de velocidad.
- La mínima relación de transmisión (marcha superior)  $i_{A,min}$  permite operar en un rango de consumo eficiente de combustible dado el mapa de desempeño del motor.

### 3.4.6 Análisis la máxima relación de transmisión (marcha inferior)

Esta marcha es la que permitirá que el vehículo desarrolle el mayor par en las ruedas motrices y éste dependerá del límite de fricción definido como: la fuerza máxima que puede ser transmitida entre las ruedas y es una limitante física que debe ser tomada en cuenta para definir la tracción  $F_T$  en las ruedas motrices. Por lo tanto:

$$F_{Z,A} \leq F_{Z,max} = \mu_H R \quad (3.6)$$

Considerando que la marcha del vehículo será lenta y existe un estado estable en la velocidad del viento, se considera la fuerza de arrastre despreciable, y además la velocidad del vehículo es constante  $a = 0$ , se puede deducir que siempre que se cumpla la igualdad anterior:

$$i_{A,max} = \frac{r_{dyn} m_F g (f_R \cos \alpha_{St} + \sin \alpha_{St})}{M_m \eta_{tot}} \quad (3.6.1)$$

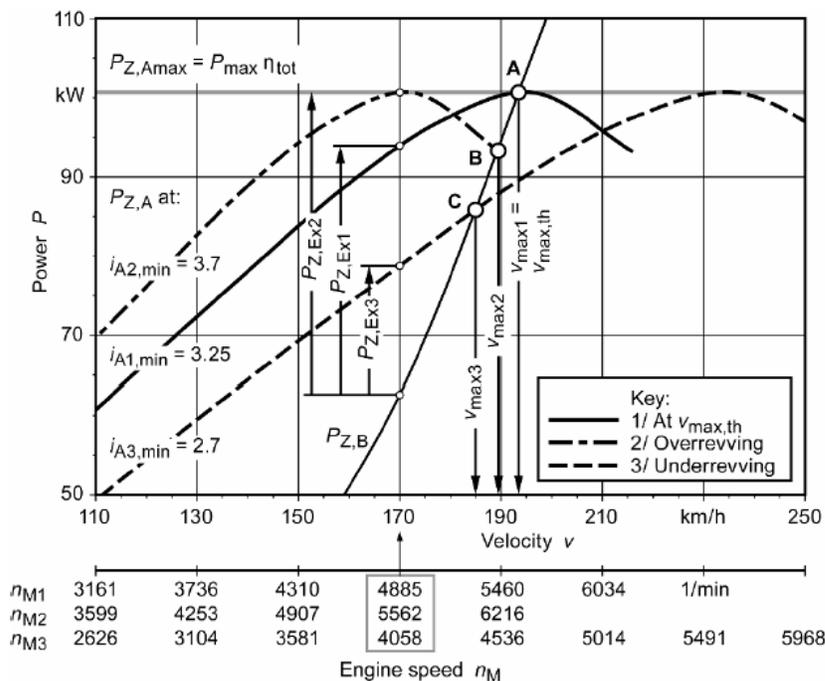
### 3.4.7 Análisis de la mínima relación de transmisión (marcha superior)

Considerando que no existe deslizamiento entre las ruedas motrices y el camino, y que la máxima velocidad es alcanzada a la máxima velocidad del motor, entonces la marcha superior está dada por:

$$i_{A,min} = \frac{3.6 \frac{\pi}{30} n_{M,max} r_{dyn}}{v_{max}} \quad (3.7)$$

Donde  $n_{M,max}$  está en  $1/min$ ,  $r_{dyn}$  en  $m$ , y  $v_{max}$  en  $km/h$ .

Por otro lado, se ha de considerar un diseño sobre-revolucionado (sugerencia para un vehículo deportivo) donde la potencia disponible y la potencia requerida intersecan en la sección decreciente de la curva de entrada de potencia, en el punto B de la figura 3.11, a fin de poder tener una reserva de aceleración en caso de cambios bruscos del terreno; muy común en pistas *Off-road* (Naunheimer, Bertsche, Ryborz, & Novak, 1994, 2011).



**FIGURA 3.11** Selección de la relación de transmisión en marcha superior para autos de pasajeros. Muestra de exceso de potencia y la velocidad del motor

### 3.5 Selección de la relación de transmisión fija del reductor de velocidad

La selección de la relación de transmisión del reductor de velocidad se llevará a cabo por medio del análisis de marcha inferior, superior y los resultados históricos de la competencia, por lo que hay que tomar en cuenta las siguientes consideraciones:

- Dada la importancia de la competencia de Baja SAE Illinois (significado histórico y la cercanía con Michigan), los parámetros a utilizar se conservarán del modelo de reductor de velocidad 2017, diseñados para esta ciudad.
- Las ecuaciones serán resueltas utilizando el programa de Mathematica *CSRTO-2019.nb* que podrá ser encontrado en el Apéndice C de este trabajo.
- Se ha de considerar el arrastre aerodinámico y la resistencia de inercia para la solución del modelo ya que representan una reserva de par en caso de tener que vencer grandes pendientes u obstáculos no considerados.

- Para mayor información sobre el análisis de aceleración y la obtención de los valores de entrada se puede consultar el documento “*Diseño de un sistema de transmisión para un vehículo de competencia mini baja*” (Godinez Rojano, 2000)

### 3.5.1 Resultados para la marcha inferior

En la figura 3.12 se muestra la memoria de cálculo utilizada para seleccionar la relación de marcha inferior (máximo requerimiento de par); los parámetros fueron definidos a partir de las consideraciones de la sección 3.5.

```

g = 9.81; (*Gravedad [m/s^2] *)
m = 235; (*Masa total del vehiculo en [Kg] *)
W = m * g; (*Peso del vehiculo [Kg*m/s^2] *)
Pot = 10 * 745.7; (*Potencia entregada por el motor [W] *)
alpha = 25 * Degree; (*Ángulo de la pendiente en [°] *)
R = 287; (*Constante de los gases *)
To = 288.16; (*Temperatura promedio a nivel del mar *)
B = 0.0065;
Pa = 100914.392; (*Presión Atmosférica en Illinois [Pa] *)
Z = 211; (*Altura sobre el nivel del mar en Illinois [m] *)
T = 22 + 273.15; (*Temperatura promedio en Illinois [k] *)
Cw = (0.84 + 0.15) / 2; (* Coeficiente de resistencia fontal del aire promedio entre vehículo ligero y pesado *)
A = 0.81; (* Area frontal aproximada del vehiculo en [m] *)
f = (0.05 + 0.138) / 2; (*Factor de rodadura, promedio entre tierra suelta en mal estado *)
eficiencia = 0.86; (*Eficiencia de transmisión del motor y poleas *)
M = 19; (*Par entregado por el motor [N*m] *)
r = (23 / 2) * 0.0254; (*Radio de la llanta en [m] *)
ralenti = 5.7; (*Relación de transmisión en ralenti de las poleas *)
maxrel = 0.7; (*Relación de transmisión máxima apertura de poleas *)
P = Pa * (1 - (B * Z) / To) ^ 5.26 (*Presión atmosférica *)
rho = P / (R * T); (*Densidad del aire *)
v[t_] := 19;
v[0] = 0;
a[t_] = 3;

```

FIGURA 3.12 Parámetros para el cálculo de la relación de transmisión de marcha inferior.

Tomando en cuenta la ecuación 5.3 debido a que ésta no desprecia la resistencia del aire y resistencia de inercia, la relación de transmisión para la marcha inferior se determina como:

$$i_{A,max} = \frac{r_{dyn}(m_F g (f_R \cos \alpha_{St} + \sin \alpha_{St}) + \left(\frac{1}{2} \rho_L C_w A v^2\right) + (\lambda m_F \alpha_{cc}))}{M_m \eta_{tot}} \quad (8)$$

Si se considera que la masa del vehículo es de 235 [Kg], la pendiente máxima a vencer de 25° (promedio para una pista con énfasis en velocidad) y que existe una relación de transmisión acoplada en las poleas CVT de 5.7:1 bajo condiciones de carga, entonces, la solución propuesta por el programa CSRTO-2019 es la mostrada en la figura 3.13.

```
solucion = Solve[ec1];
RT = Relaciontransmision / ralenti /. solucion (*Relación de transmisión fija del reductor marcha inferior*)
{6.14622}
```

FIGURA 3.13 Solución propuesta por el programa CSRTO-2019.nb

Por lo tanto, la relación de transmisión para la marcha inferior en el reductor de velocidad es:

$$RT = 6.14622:1$$

Además, si consideramos un promedio entre las dos relaciones de transmisión del reductor 2017 (Fig. 3.7):

$$RT_{2017} = \frac{8 + 5}{2} = 6.5:1$$

Entonces, dado que la configuración original del tren motriz (Fig. 2.5) contempla el acoplamiento de un sistema de transmisión CVT (CVT COMET serie 780) y se sugiere en las recomendaciones de la tabla 3.5 contar con una sola velocidad de transmisión; la nueva relación de transmisión para la marcha inferior en el reductor de velocidad será aquella cuyo tren de engranes cumpla la siguiente restricción:

$$6.1:1 \leq RT_{inf} \leq 6.5:1$$

Permitiendo con ello tener el par suficiente al arranque y alcanzar una velocidad tope conforme las condiciones de la CVT y la pista lo permitan.

### 3.5.2 Resultados de marcha superior

La marcha superior permitirá el desplazamiento bajo condiciones de alta velocidad y eficiencia en el consumo de combustible. En la figura 3.14 se observa que, siempre y cuando exista una relación de transmisión menor o igual global de 6.44:1, se podrá cumplir con la condición de velocidad máxima deseada de  $65 \left(\frac{Km}{h}\right)$ .

$$RtsupG = \left( \frac{3.6 * \left(\frac{\pi}{30}\right) * 3800 * r}{65} \right) \text{ (*Relación de transmisión global marcha superior*)}$$

$$Rtsup = \left( \frac{3.6 * \left(\frac{\pi}{30}\right) * 3800 * r}{65} \right) / \text{maxrel (*Relación de transmisión fija del reductor marcha superior*)}$$

6.43773  
9.19676

FIGURA 3.14 Solución propuesta por el programa CSRTO-2019.nb para la marcha superior

Si se considera que la relación de transmisión de las poleas CVT bajo condiciones de alta velocidad y poca carga es de 0.7:1, la relación de marcha superior en el reductor de velocidad resulta de 9.19: 1, de tal manera que el valor de relación de transmisión fijo de 6.1: 1 calculado en la sección 3.5.1, es adecuado para alcanzar la velocidad máxima deseada tomando en cuenta pérdidas en el sistema.

## Capítulo 4. Optimización mediante algoritmos genéticos

Los algoritmos genéticos son métodos adaptativos y una técnica para resolver problemas de búsqueda y optimización basados en la mecánica de la selección y genética natural (Goldberg, 1989). La idea básica de la evolución biológica muestra que las poblaciones y las especies cambian conforme pasa el tiempo. Durante la década de 1850 Charles Darwin mencionó en el libro llamado “El origen de las especies”, que las especies evolucionan, tienen descendencia con modificaciones y que todos los seres vivos pueden rastrear su ascendencia a un antepasado común. Darwin también sugirió que la selección natural es un mecanismo para la evolución en la que los rasgos heredables que le ayudan a un organismo a sobrevivir y reproducirse se vuelven más comunes en una población a lo largo del tiempo. (Khan, 2019)

Los algoritmos genéticos aplican la teoría de la supervivencia del más apto mediante estructuras de datos que tienen un cambio aleatorio de información; en cada generación un nuevo conjunto de entes artificiales es creado utilizando bits y piezas del individuo más apto de la generación anterior. Mientras se realiza la búsqueda aleatoria, los algoritmos genéticos explotan eficientemente la información histórica para hacer suposiciones sobre las nuevas regiones a explorar. (Goldberg, 1989). Estos algoritmos permiten tratar problemas de optimización donde el objetivo es encontrar un conjunto de parámetros que pueden maximizar o minimizar una función de la aptitud. Es importante mencionar que solo se requiere saber el valor de la función objetivo en la población de puntos y no en las derivadas evitando con ello quedar encerrado en mínimos locales. (Estévez Valencia, 1997)

Las diferencias entre los algoritmos evolutivos y métodos tradicionales de búsqueda (gradientes, aleatorios, exhaustivos, etc.) se enlistan a continuación:

- Se trabaja con la codificación del conjunto de parámetros.
- Se realiza búsqueda en paralelo con una población de puntos.
- No se requieren derivadas debido al uso directo de la función de adaptación.
- Existen reglas de transición probabilísticas entre cada iteración.

### 4.1 Estructura del algoritmo genético.

El método de algoritmos genéticos original aplica a problemas de optimización que cuenten con parámetros continuos de la forma:

$$\min f(x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{kn})$$

$$x_{ki} \in [l_i, u_i] \in \mathcal{R}, \quad l_i < u_i, \quad \forall i = 1, \dots, n,$$

Donde se considera que cada componente  $x_{kn}$  tiene un dominio definido por una cota inferior  $l_i$  y una cota superior  $u_i$ , siendo el subconjunto de  $\mathcal{R}^n$ , el espacio de búsqueda.

Un punto de búsqueda es definido como  $\vec{x}_k = (x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{kn})$ , y se representa mediante una tira binaria, donde cada uno de los  $n$  componentes del vector  $\vec{x}_k$  es codificado en binario utilizando  $b$  bits, para finalmente concatenar las representaciones binarias de cada parámetro en una sola tira, obteniendo con ello individuos de longitud  $l = nb$  bits. La precisión de la búsqueda depende del número de bits utilizados para la codificación de los parámetros (Estévez Valencia, 1997).

El algoritmo opera con una población de individuos  $P(t) = \{x_1^t, \dots, x_n^t\}$  para la iteración  $t$ , donde cada individuo  $x_i$  representa un punto de búsqueda en el espacio de las soluciones potenciales a un problema dado. El desempeño de un individuo  $x_i$  se evalúa según una función de adaptación  $f(x_i)$ . Esta función permite ordenar del mejor al peor los individuos de la población en un conjunto de grados de adaptación. (Estévez Valencia, 1997)

Una vez calculada la adaptación de cada individuo en la población, ésta evoluciona con dirección a mejores regiones del espacio de búsqueda mediante procesos probabilísticos de:

- a) Selección de los individuos con mejor adaptación
- b) Modificación por recombinación (cruza) y/o mutación de los individuos seleccionados

La nueva generación de individuos (población modificada) es evaluada siguiendo la secuencia anterior, logrando con ello soluciones al problema cada vez mejores en función de la adaptación de la nueva generación.

Para encontrar los óptimos globales, los algoritmos de optimización se basan en dos técnicas: la exploración de áreas desconocidas del espacio de búsqueda y el uso del historial y aprendizaje que se obtiene del proceso anterior. La estructura canónica del algoritmo evolutivo se muestra en la figura 4.1.

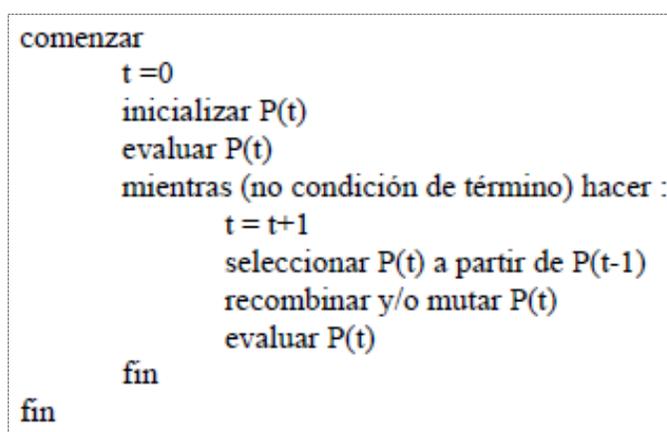


FIGURA 4.1 Estructura del algoritmo evolutivo básico

## 4.2 Construcción y aplicación del algoritmo genético.

Con base en la teoría analizada sobre algoritmos genéticos y atendiendo las problemáticas de la tabla 3.3, se propuso la aplicación de este método con el objetivo de hallar el conjunto de engranes que hacen que las dimensiones, volumen y peso del reductor de velocidad sean minimizados, lo anterior basado en la manipulación del número de dientes de los engranes.

La información generada en el primer modelo optimizado en el año 2017 sirvió de base para validar las soluciones propuestas por el nuevo reductor de velocidad.

### 4.2.1 Planteamiento del problema: función objetivo y restricciones.

Para realizar el método de optimización es necesario definir una función objetivo, es decir, el modelo matemático que representa al parámetro a optimizar y que será objeto de la búsqueda de los valores de las variables que hacen que dicha función tienda al mínimo. Otra parte importante para el correcto funcionamiento del método son las restricciones, es decir, los parámetros que restringirán físicamente el espacio de búsqueda de las soluciones. Una correcta selección de las restricciones es importante para ahorrar tiempo de cómputo y asegurar la convergencia del método en el rango de valores esperado. En la figura 4.2 se observa un esquema de la configuración del reductor de velocidad que servirá para definir la función objetivo y las restricciones del problema.

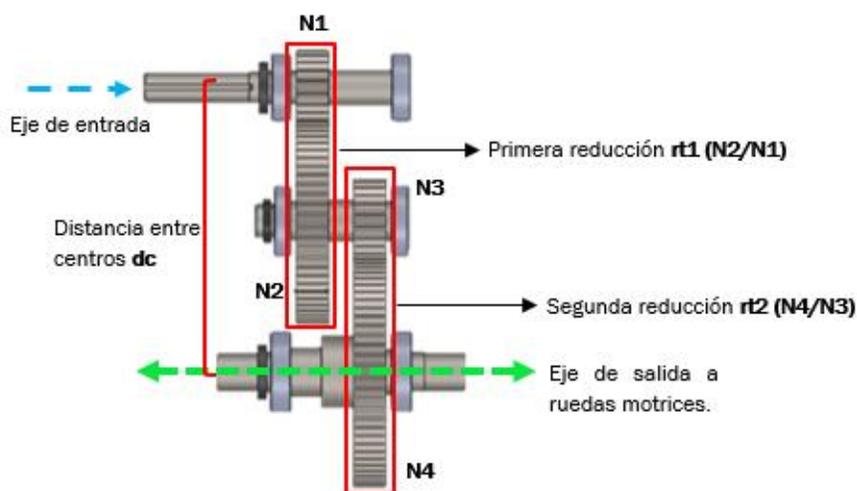


FIGURA 4.2 Configuración propuesta del reductor de velocidad CSRTO-2019

Se considera la distancia entre centros  $dc$  de los ejes de entrada y salida, como la función objetivo a optimizar; ésta se puede definir mediante la suma de los radios de paso  $r_p$  de cada uno de los engranes  $n$  que forman parte del tren compuesto:

$$dc = \sum_{i=1}^n rp_i \quad (4.1)$$

De tal manera que, para el tren de engranes en estudio:

$$dc = rp_1 + rp_2 + rp_3 + rp_4 \quad (4.2)$$

Sin embargo, se prefiere definir a la distancia entre centros en función del número de dientes de los engranes ya que este parámetro se considera “de entrada” en el diseño de engranes rectos. Por lo tanto, considerando el módulo de los engranes como:

$$m = \frac{D}{N} = \frac{2rp}{N} \quad (4.3)$$

Dónde:  $D$  = Diámetro de paso y  $N$  = número de dientes del engrane.

De la ecuación 4.2, al despejar  $r_p$  y para un módulo  $m = 2$  el radio de paso se considera:

$$r_p = \frac{m * N}{2} \quad (4.4)$$

$$r_p = N \quad (4.4.1)$$

De tal manera que la función objetivo queda definida como:

$$\boxed{f_{objetivo} = N1 + N2 + N3 + N4} \quad (4.5)$$

Por otra parte, la relación de transmisión para un tren de engranes compuesto se expresa como:

$$rt = \frac{\text{Producto del número de dientes de engranes impulsores}}{\text{Producto del número de dientes de engranes impulsados}} \quad (4.6)$$

Considerando que el reductor de velocidad tiene dos etapas de reducción (Fig. 4.5):

$$rt_1 = \frac{N_2}{N_1} \quad (4.6.1)$$

$$rt_2 = \frac{N_4}{N_3} \quad (4.6.2)$$

Por lo tanto, la relación de transmisión total queda definida como:

$$rt = \frac{N_2}{N_1} * \frac{N_4}{N_3} = rt_1 * rt_2 \quad (4.6.3)$$

Por simplicidad el volumen de los engranes es calculado como un cilindro circular recto con radio  $r = r_p$  (Ec. 4.4). Se considera que el ancho de cara de los engranes de la segunda relación (Ec. 4.6.2) es 1.5 veces más grande que el ancho  $f_w$  de los engranes de la primera relación (Ec. 4.6.1), por lo tanto:

$$\text{Volumen para engranes de la primera relación} = (\pi r^2)(f_w)$$

$$\text{Volumen para engranes de la segunda relación} = (\pi r^2)(1.5f_w)$$

Donde  $f_w$  y  $r$  tienen unidades de longitud en ( $mm$ )

Finalmente, considerando la ecuación 4.4.1, el volumen de todos los engranes del reductor de velocidad queda definido como:

$$Vol_t = (\pi N1^2)(f_w) + (\pi N2^2)(f_w) + (\pi N3^2)(1.5f_w) + (\pi N4^2)(1.5f_w) \quad (4.7)$$

Las restricciones del problema fueron definidas con base a limitaciones físicas del modelo para evitar la interferencia con algunos elementos del tren motriz, tales como las flechas motrices y guardas de seguridad (tabla 4.1), y por otra parte para eliminar la interferencia entre un piñón con diente, a profundidad total a  $20^\circ$ , y los engranes de varios tamaños, a profundidad total (tabla 4.2). A continuación, se presenta un resumen de estas restricciones para la aplicación del método.

TABLA 4.1 Restricciones para aplicar algoritmo genético

Restricción	Descripción
$6.5 \geq \frac{N2 * N4}{N1 * N3} \geq 6.1$	Valor de la relación de transmisión del reductor de velocidad. Cualquier valor en este rango es aceptable.
$N1 \geq 15$ $N2 \geq 15$	Para valores más pequeños de 15 dientes, según un análisis previo en el modelo 2017, se encuentra que no existen soluciones al problema para las restricciones dadas.
$16 \geq N3 \geq 101$ $16 \geq N4 \geq 101$	Número de dientes de los engranes de la segunda reducción del tren compuesto, basada en la tabla 4.2 para evitar interferencia entre los dientes. No se esperan engranes más grandes a 100 dientes ya que esto aumentaría demasiado el tamaño del reductor.
$f_{objetivo} \geq 178$	Se toma en cuenta para evitar interferencia entre la polea colocada en el eje de entrada y la junta del eje de salida. Se da un valor mayor en 5mm al modelo 2017, ya que en este prototipo existían problemas de empaquetamiento.
$N2 + 12 \leq N3 + N4$	Se considera para evitar interferencia entre el engrane del eje auxiliar con el eje secundario. Se define un diámetro máximo del eje de 24mm.

TABLA 4.2 Número mínimo de dientes del piñón para eliminar la interferencia piñón-corona con diente a profundidad total a 20°, (Norton, 2011).

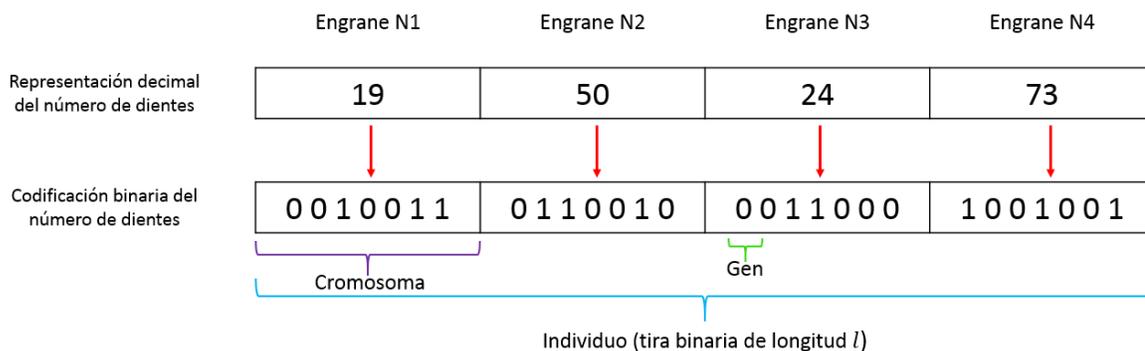
Número mínimo de dientes en el piñón	Número máximo de dientes en el engrane/corona
17	1309
16	101
15	45
14	26
13	16

### 4.2.2 Representación genética del algoritmo

El algoritmo genético simple necesita de una codificación o representación que se adapte correctamente al problema en cuestión, en este caso, se busca representar al número de dientes de cada engrane del reductor de velocidad en términos de un individuo. Cada individuo está conformado por un conjunto de parámetros denominados **genes**, que agrupados forman una tira de datos que recibe el nombre de  **cromosoma** (Moujahid, Inza, & Larrañaga, 2004). Los individuos también pueden ser denominados “posibles soluciones al problema”, y dependiendo de qué tan bien se adapten al problema serán o no una solución óptima. En general los algoritmos genéticos fundamentan su teoría en representar a los individuos en lenguaje binario (0 y 1), aunque existen algunas investigaciones donde se trabaja con la codificación real (Herrera, Lozano, & Verdegay, 1998).

Se debe entender por **genotipo** a la colección de genes de un individuo (cromosomas binarios), es decir, el conjunto completo de instrucciones con las que dicho organismo debe construirse y funcionar. Por otra parte, el **fenotipo** es el conjunto de características visibles que un individuo presenta como resultado de la interacción entre su genotipo y el medio (National Human Genome Research Institute, 2019), por ejemplo, el número de dientes de los engranes.

En la figura 4.3 se observa la estructura propuesta para representar al tren de engranes del reductor de velocidad como un individuo con las características antes mencionadas y codificado en lenguaje binario.



**FIGURA 4.3** Definición y codificación binaria del individuo representado por 4 engranes (N1, N2, N3 y N4), cada engrane es un cromosoma formado por 7 genes binarios (7 bits).

### 4.2.3 Generación de la población inicial

El algoritmo genético toma en cuenta una **población inicial** de  $M$  tiras binarias de longitud  $l$  generadas de manera aleatoria. La población debe ser lo suficientemente grande y diversa para que durante la evaluación de la adaptación de cada individuo, se muestren *fitness* (adaptación) distintos, ya que si todos están igualmente adaptados, el programa no podrá seleccionar

adecuadamente los mejores individuos a ser reproducidos. A través del proceso evolutivo, el algoritmo genético crea una nueva población de tamaño  $M$  a partir de la población actual y evalúa el desempeño de los nuevos individuos.

En la figura 4.4 se observa la población inicial propuesta con un total de 16 cromosomas que formarán la información de 4 individuos diferentes, es decir 4 propuestas diferentes de tren de engranes por iteración.

	Engrane N1	Engrane N2	Engrane N3	Engrane N4
Individuo 1	0 0 1 1 1 0 0	1 0 0 0 0 1 1	0 0 1 0 1 1 1	0 1 1 1 1 0 0
Individuo 2	0 0 0 1 1 1 1	0 0 1 1 0 0 1	0 0 1 0 0 1 1	1 0 1 1 1 1 1
Individuo 3	0 0 1 0 0 1 1	0 1 1 1 1 1 1	0 0 1 0 0 1 0	1 0 0 1 0 1 1
Individuo 4	0 0 1 0 1 1 0	0 0 1 0 1 1 1	0 0 1 0 0 0 0	1 1 0 0 1 0 1

FIGURA 4.4 Población inicial generada aleatoriamente

#### 4.2.4 Evaluación de la adaptación de los individuos

La **función de adaptación** (*fitness*) evalúa cada uno de los individuos y les asigna un valor numérico según su desempeño; cuanto mejor adaptado esté el individuo, mayor será su *fitness*. La **función de selección** se encargará de generar a partir de una población actual, una población secundaria del mismo tamaño, reproduciendo un mayor número de copias de los individuos mejor adaptados y eliminando o asignando un menor número de copias a los individuos menos adaptados, de tal manera que se promueve una mayor descendencia de los individuos con mayor *fitness*. Este algoritmo sigue una regla de supervivencia probabilística postulada por Holland (Goldberg, 1989): la estrategia óptima de selección consiste en aumentar exponencialmente el número de copias del mejor individuo observado respecto al peor.

En la figura 4.5 se muestran las consideraciones para evaluar la adaptación de cada individuo en función de la ecuación 4.5. Los individuos mejor adaptados están definidos por el juego de engranes con una distancia entre centros más cercana al valor objetivo de 178. Adicionalmente se evalúa el volumen de los engranes de la población de cada generación mediante la ecuación 4.7 y se guarda el menor valor para compararlo con la generación siguiente. Como consecuencia se espera que la población evolucione a mejores regiones del espacio de búsqueda optimizando la distancia entre centros y considerando al individuo con menor volumen por generación.

<i>Distancia entre centros 178 – 200,</i>	<i>fitness = 5</i>
<i>Distancia entre centros 201 – 250,</i>	<i>fitness = 4</i>
<i>Distancia entre centros 251 – 300,</i>	<i>fitness = 3</i>
<i>Distancia entre centros 301 – 344,</i>	<i>fitness = 2</i>
<i>Distancia entre centros 150 – 177,</i>	<i>fitness = 1</i>
<i>Otra distancia entre centros,</i>	<i>fitness = 0</i>
<i>Mejor volumen,</i>	<i>fitness = 5</i>

\*La distancia entre centros tiene unidades de longitud en *mm*.

FIGURA 4.5 Evaluación de la adaptación de cada individuo por generación.

#### 4.2.5 Selección y reproducción de los individuos mejor adaptados

Existen diferentes formas de seleccionar a los individuos con la mejor adaptación para crear una nueva población, se enlistan las más utilizadas (Estévez Valencia, 1997) (Moujahid, Inza, & Larrañaga, 2004).

- **Selección proporcional:** Cuanto mejor sea el *fitness* (adaptación) del individuo, mayor será la probabilidad de que éste pase a la siguiente generación. La probabilidad de selección  $p_{i,t}$  del *i*-ésimo individuo de la población  $P(t)$  depende de la adaptación relativa de éste con respecto a la población:

$$p_{i,t} = \frac{f_i}{\sum_{j=1}^n f_j}$$

Donde  $f_j$  representa la adaptación del *j*-ésimo individuo. El número esperado de copias  $N_e$  del *i*-ésimo individuo en la próxima generación es:

$$N_e[i] = M p_{i,t} = \frac{f_i}{\bar{f}_t}$$

Donde  $\bar{f}_t$  es la adaptación promedio de la población  $P(t)$ , y  $M$  es el tamaño de ésta.

- **Selección por torneo:** Este método no está basado en valores esperados, de tal manera que no requiere de un algoritmo de muestreo. De la población existente se elige una cantidad definida de individuos al azar y se compara su *fitness*. El individuo con el *fitness* más alto pasa a la siguiente generación. La selección de soluciones que no son potencialmente buenas propician tener una buena variabilidad genética entre individuos, y al mezclar el material genético se exploran soluciones distintas.

- **Selección por rango:** Los individuos son ordenados en función de su *fitness*, y la probabilidad de reproducción varía según su posición en la tabla. El algoritmo se define de la siguiente manera:

- Ordenar la población del mejor individuo ( $x = 1$ ) al peor ( $x = M$ ).
- Asignar un número de copias esperadas según

$$\alpha(x) = \eta^+ - (\eta^+ - \eta^-) \frac{(x - 1)}{(M - 1)}$$

Donde

$$\alpha(x)_x = M, \quad 1 \leq \eta^+ \leq 2, \quad \eta^- = 2 - \eta^+$$

$\eta^+$ : Máximo valor esperado (1.1-1.2 recomendado)

$\eta^-$ : Mínimo valor esperado.

- Usar muestreo estocástico universal (SUS) para llenar la población (Estévez Valencia, 1997)

Para la selección de los individuos a reproducir y que pasarán a la siguiente generación, se elige el método de torneo debido a que éste permite la implementación de reglas sencillas en la programación y se adecúa correctamente al tamaño de población elegido. En la figura 4.6 se observa que los individuos, según su *fitness*, quedan ordenados de mayor a menor como 4, 1, 2, 3. Por lo tanto, el individuo 4 sobrevivirá y será elegido para reproducirse y el individuo 3 será totalmente descartado como solución.

Particularmente para este caso de estudio se considera que los 2 individuos mejor adaptados serán elegidos para la reproducción (*pressure*), ambos pasarán a la siguiente generación y su material genético será mezclado con un individuo poco adaptado para así formar los dos individuos restantes de la nueva población.

	Engrane N1	Engrane N2	Engrane N3	Engrane N4	Distancia entre centros	<i>Fitness</i>
Individuo 1	0010101   21	0110010   50	0100100   36	1011110   94	201	4
Individuo 2	1001000   72	1011010   90	0011000   24	1011110   94	280	3
Individuo 3	1010000   80	1011111   95	0011010   26	1100100   100	301	2
Individuo 4	0011100   28	1000011   67	0010111   23	0111100   60	178	5

**FIGURA 4.6** Selección de los individuos según su *fitness*, los individuos 4 y 1 muestran una mejor adaptación comparados con el resto.

#### 4.2.6 Cruza y mutación de los individuos

Los **operadores genéticos** son funciones empleadas en estos algoritmos para mantener la diversidad genética de una población, además tienen la función de indicar la forma en que cambiará ordenada o aleatoriamente la información de las tiras binarias.

El operador de **recombinación** (crossover) o **cruza** es el operador de búsqueda con mayor peso para los algoritmos genéticos. Este operador se encarga de intercambiar el material genético de un par de padres, generando descendientes que normalmente difieren en sus características comparado con sus padres. La idea es que los padres con alta adaptación sean recombinados para generar nuevos individuos que tomen ventaja de las características favorables. Este operador trabaja con una probabilidad  $p_c$  para permitir que no necesariamente ocurra una recombinación y mantener los padres como individuos mejor adaptados (Estévez Valencia, 1997).

Para el caso de estudio, primero se eligen dos padres (individuos) de una longitud de cadena definidos, después se selecciona un punto de cruce aleatorio dentro de uno de ellos, es decir, un bit que se encuentre dentro de la cadena. Por último, se intercambian los bits a la derecha de la posición del punto de cruce con los bits del otro individuo. En la figura 4.7 se puede observar que uno de los padres es el individuo 4 que cuenta con un alto *fitness* y el otro es el individuo 2 cuyo *fitness* es bajo. El punto de cruce se define sobre el bit 16, a partir de ésta posición el material genético del individuo 2 es mezclado con el del individuo 4 para generar así un nuevo individuo que formará parte de la nueva población a ser evaluada.

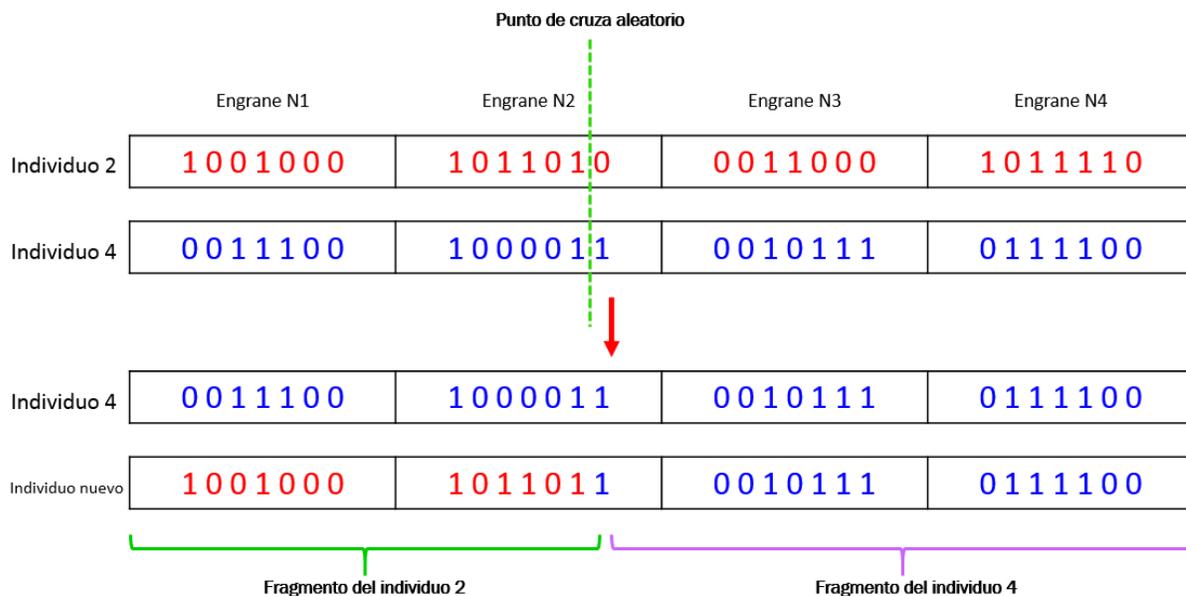


FIGURA 4.7 Recombinación o cruce de los individuos mejor adaptados para formar la nueva generación.

En general, la recombinación no ayuda a encontrar nuevas soluciones al problema, por lo que es necesario mutar el material genético de los nuevos individuos. La **mutación** ayuda a encontrar soluciones en regiones inexploradas del espacio de búsqueda mediante la inversión ocasional de un bit (Moujahid, Inza, & Larrañaga, 2004). Se garantiza para tasas pequeñas de mutación que un individuo no difiera demasiado en su información genética comparado con sus padres. La mutación evita la pérdida de diversidad producto de bits que han convergido a un valor dada su adaptación y que no pueden ser recuperados por el operador recombinación. Este operador invierte un bit de la tira binaria tomando en cuenta una posición aleatoria y una probabilidad de mutación  $p_m$ . Su aplicación se basa en generar un número aleatorio  $r$ , tal que:

$$0 \leq r \leq 1$$

Donde si  $r < p_m$  se lleva a cabo la mutación en la posición definida, caso contrario si  $r > p_m$  no se muta el individuo.

En la figura 4.8 se observa al individuo 1 sufrir de una mutación del gen (bit) 18, esta operación permitió generar un individuo nuevo con características diferentes al original, provocando con ello la diversificación genética de la población y consecuentemente evitar despremiar soluciones potencialmente favorables para el problema en análisis. La probabilidad de mutación propuesta fue del 50% y la cantidad de individuos a mutar por generación es igual a 1.



**FIGURA 4.8** Mutación de la información genética del individuo 1

### 4.3 Programación del algoritmo genético en Python y análisis de resultados

Para llevar a cabo la implementación del algoritmo genético se utilizó el lenguaje de programación de Python, debido a que es un lenguaje de propósito general con una sintaxis sencilla, se considera *Open Source* (de código abierto), y cuenta con un gran desarrollo en el ámbito científico para aplicaciones de Machine learning e Inteligencia Artificial (IA). Python, además, cuenta con una programación dinámica y una enorme cantidad de bibliotecas, así como ayuda de la comunidad para generar código nuevo y solucionar problemas. Para el desarrollo de este trabajo se utilizó el intérprete de Python 3.7.3 y Visual Studio Code como editor de código.

La tabla 4.3 muestra la definición de los parámetros utilizados en la implementación del algoritmo genético y que fueron ingresados en el programa para optimizar distancia entre centros y volumen del reductor de velocidad.

**TABLA 4.3** Configuración y definición de parámetros para implementación del algoritmo genético en Python

Función objetivo	$f_{objetivo} = N1 + N2 + N3 + N4$ (Ecuación 4.5)
Restricciones	Las contenidas en la tabla 4.1 y 4.2
Población	4 individuos generados al azar de 4 cromosomas cada uno, con 7 genes por cromosoma representados en $M$ tiras binarias de longitud $l$ .
Fitness	<p><i>Fitness</i> (adaptación) en función de la distancia entre centros</p> <p><i>distancia entre centros</i> 178 – 200, <i>fitness</i> = 5</p> <p><i>distancia entre centros</i> 201 – 250, <i>fitness</i> = 4</p> <p><i>distancia entre centros</i> 251 – 300, <i>fitness</i> = 3</p> <p><i>distancia entre centros</i> 301 – 344, <i>fitness</i> = 2</p> <p><i>distancia entre centros</i> 150 – 177, <i>fitness</i> = 1</p> <p><i>otra distancia entre centros</i>, <i>fitness</i> = 0</p> <p><i>Mejor volumen histórico</i> <i>fitness</i> = 5</p> <p>La distancia entre centros tiene unidades de longitud (<i>mm</i>).</p>
Selección	Método de Torneo con 4 individuos
Cruza	2 individuos seleccionados para la reproducción ( <i>pressure</i> = 2). Punto de cruce aleatorio a un solo punto. La cruce se realiza uno a uno, entre los individuos con mejor adaptación (mayor <i>fitness</i> ) y los individuos menos adaptados (menor <i>fitness</i> ). Los dos individuos con mejor adaptación pasan directamente a la siguiente generación
Mutación	<i>probabilidad de mutación</i> = 0.5 Punto de mutación aleatorio. Un solo individuo mutado por iteración.
Consideraciones del Volumen	En cada generación se evalúa el volumen de todos los individuos y en caso de existir un menor volumen global, se considera a éste como el individuo mejor adaptado de la generación según la ecuación 4.7

La programación del algoritmo genético en Python implicó la interpretación, adaptación y aplicación de cada elemento del pseudocódigo del algoritmo canónico (Fig. 4.1). Se representó al tren de engranes como se explica en la sección 4.2.2 como una tira binaria de datos o un *string* contenida en una lista, posteriormente se generó la población inicial con datos aleatorios utilizando funciones *random*, una vez obtenidas las listas de individuos (población) se ingresaron los parámetros de las funciones objetivo y restricciones para con ello evaluar la adaptación de cada individuo de la población siguiendo los valores establecidos en la sección 4.2.4,

Posteriormente mediante los criterios de selección y condicionales definidos en la sección 4.2.5 se clasificó a los individuos según su adaptación, y finalmente se aplicaron los operadores genéticos mediante la combinación de cadenas en el caso de la recombinación y el *toggle* de los valores binarios para la mutación, logrando con ello formar una nueva población que reiniciará el ciclo de búsqueda de la mejor solución. Se determinó que a partir de 100,000 iteraciones los resultados convergían a una solución óptima para este problema en específico; más adelante se lleva a cabo el análisis de resultados donde se muestra el comportamiento del algoritmo.

El programa que realiza optimización de distancia entre centros y volumen bajo las condiciones anteriores recibe el nombre de *GA\_Optimization.py*, y puede ser encontrado en el apéndice D de este documento. En la figura 4.9 se muestra la interfaz de *GA\_Optimization.py*, donde se observa a los individuos cuya solución es potencialmente aceptable para la iteración correspondiente.

```

Bienvenido a esta aplicación de la Inteligencia Artificial (AI) utilizando Algoritmos Genéticos(GA).

Este programa permitirá optimizar la distancia entre centros de ejes de engranes así como el volumen del sistema.
Se mostrarán los siguientes datos de los individuos más aptos:
-> Número de dientes de los engranes
-> Distancia entre centros
-> Volumen aproximado del sistema

La población fija es de 4 individuos aleatorios
El cálculo del fitness es automático y está función de la distancia entre centros y el volumen
La selección de los individuos más aptos usa el método tipo Torneo
El pressure fijo es de 2 (cantidad de elementos seleccionados para reproducción)
Los valores del punto de cruce, la probabilidad de mutación y la cantidad de iteraciones son modificables

Engrane      Valor decimal de los dientes      Cadena binaria
N1           |:::|          23           |:::|          10111
N2           |:::|          60           |:::|          111100
N3           |:::|          28           |:::|          11100
N4           |:::|          69           |:::|          1000101

Distancia entre centros: 180
Volumen del sistema: 39082.01
Iteración 33608

Engrane      Valor decimal de los dientes      Cadena binaria
N1           |:::|          23           |:::|          10111
N2           |:::|          65           |:::|          1000001
N3           |:::|          28           |:::|          11100
N4           |:::|          63           |:::|          111111

Distancia entre centros: 179
Volumen del sistema: 37314.19
Iteración 45439

Engrane      Valor decimal de los dientes      Cadena binaria
N1           |:::|          35           |:::|          100011
N2           |:::|          64           |:::|          1000000
N3           |:::|          18           |:::|          10010
N4           |:::|          61           |:::|          111101

Distancia entre centros: 178
Volumen del sistema: 35759.89

```

FIGURA 4.9 Interfaz que muestra soluciones potencialmente aceptables a través de su representación decimal y binaria. Conforme el programa itera se puede observar la convergencia de los valores a un mínimo

A continuación se muestra la programación del algoritmo *GA\_Optimization.py* para los siguientes módulos: generación de la población, evaluación del *fitness*, selección de los individuos mejor adaptados, y cruce y mutación de los individuos.

En la figura 4.10 se observa cómo se lleva a cabo la construcción de la población inicial mediante el uso de funciones *random* y listas. El primer paso fue crear 4 listas de 7 elementos binarios (bits) cada una, donde a cada lista se le asigna el nombre de un individuo. Adicionalmente se generan listas auxiliares para contener cadenas binarias y valores decimales que serán utilizados para visualizar los números de dientes de los engranes en la interfaz de usuario presentada en la figura 4.9. También se agrega en esta sección la codificación binaria-decimal mediante la transformación de listas a cadenas binarias y finalmente a valores decimales.

```
Poblacion=[Individuo1,Individuo2,Individuo3,Individuo4] #Población de 4 habitantes
lista_bin=[lista_bin1,lista_bin2,lista_bin3,lista_bin4] #lista de números binarios int
lista_dec=[lista_dec1,lista_dec2,lista_dec3,lista_dec4] #lista de números decimales int

#Ciclo que genera una población aleatoria de 4 individuos con 4 cromosomas cada uno y 7 genes diferentes por cromosoma.
j=0
while j<=3:
    i=0
    while i<=3:
        Poblacion[j].insert(i,listaAleatorios(7))
        i=i+1
    j=j+1

#Forza al Cromosoma 1 y 2 del Individuo 1 y 2 a tener máximo 6 bits de información
m=0
while m<=1:

    Individuo1[m][0]=0
    Individuo2[m][0]=0
    Individuo3[m][0]=0
    Individuo4[m][0]=0
    m=m+1

#Ciclo de codificación binaria (convierte a cadena binaria cada cromosoma y posteriormente a decimal)
k=0
while k<=3:
    i=0
    while i<=3:
        str1 = ''.join(str(e) for e in Poblacion[k][i]) #convierte a cadena cada lista de cromosomas
        lista_bin[k].insert(i,int(str1)) #Inserta la cadena en una lista nueva
        dec1=(int(str1, 2)) #Convierte a decimal cada cadena binaria
        lista_dec[k].insert(i,dec1) #Inserta el valor decimal en una nueva lista
        i=i+1
    k=k+1

l1=lista_dec1
l2=lista_dec2
l3=lista_dec3
l4=lista_dec4
if l1[0]<=45 and l1[0]>=15 and l1[1]<=45 and l1[1]>=15 and l1[2]>=16 and l1[3]>=16 and l2[0]<=45 and l2[0]>=15 and l2[1]<=45 and l2[1]>=15 and l2[2]>=16 and l2[3]>=16:
    break
```

FIGURA 4.10 Generación aleatoria de la población y su codificación binario-decimal.

La figura 4.11 muestra la forma en que se evalúa la adaptación de los individuos por generación siguiendo los parámetros establecidos en la tabla 4.3. En cada generación se crea una población diferente y es calificada en una escala de 0 a 5 según su adaptación relativa. La estructura condicional permite comparar valores de distancia entre centros y volumen del tren de engranes tanto en la generación actual como en el histórico de poblaciones.

```
f=0
while f<=3:

    distancia=sum(lista(lista_dec[f])) #Cálculo de la distancia entre centros
    relacion=(lista_dec[f][1]*lista_dec[f][3])/(lista_dec[f][0]*lista_dec[f][2]) #Calculo de la relación de transmisión
    volumenfitness= 3.14*((lista_dec[f][0])**2)+3.14*((lista_dec[f][1])**2)+(3.14*((lista_dec[f][2])**2)*1.5)+(3.14*((lista_dec[f][3])**2)*1.5)

    #Condiciones para que el fitness sea 5
    if distancia>=178 and distancia<=200: # and relacion>=6.1 and relacion<=7.1:
        lista_fitness[f]=5

    x=False
    if w>=1 and x==True:
        if volumenfitness <= vol_p[mp_pv] and volumenfitness <= vol_a[mp_av]:
            lista_fitness[f]=5

    #Condiciones para que el fitness sea 4
    elif distancia>=201 and distancia<=250: # and relacion>=7.1 and relacion<=7.5: #or (relacion>=5.0 and relacion<=6):
        lista_fitness[f]=4
    #Condiciones para que el fitness sea 3
    elif distancia>=251 and distancia<=300: # and relacion>=7.6 and relacion<=8:
        lista_fitness[f]=3
    #Condiciones para que el fitness sea 2
    elif distancia>=301 and distancia<=344: # and relacion>=8.1 and relacion<=8.5:
        lista_fitness[f]=2
    #Condiciones para que el fitness sea 1
    elif distancia>=150 and distancia<=177: # and relacion>=8.6 and relacion<=9:
        lista_fitness[f]=1
    #Condición para que el fitness sea 0
    else:
        lista_fitness[f]=0
    f=f+1
```

**FIGURA 4.11** Evaluación de la adaptación de los individuos mediante la distancia entre centros y el volumen del tren de engranes.

La selección se realizó tomando en cuenta el ordenamiento de cada individuo de la población en función de su aptitud. Cada valor de *fitness* fue registrado en una lista en la misma posición en que se encontraba el individuo dentro de la población, generando así apuntadores que permitieron la localización y extracción de los individuos según su adaptación.

Por otro lado, la cruce se desarrolló a partir de los criterios de selección y considerando un punto de cruce aleatorio que puede tomar valores entre 1 y 3. Los nuevos individuos se construyeron a partir de los valores del lado izquierdo del punto de cruce de los individuos con bajo *fitness* y los valores del lado derecho del individuo con alto *fitness*. El resultado son dos individuos nuevos que pasan a la siguiente generación junto con los dos individuos mejor adaptados, la figura 4.12 detalla la descripción anterior.

```

#Vectorización de individuos con mayor fitness
lista_pressure=[] #Lista de individuos seleccionados para la reproducción
s=0
while s<=1:

    min_position = lista_fitness.index(min(lista_fitness)) #Obtiene la posición de los individuos menos adaptados
    lista_pressure.insert(s,Poblacion[min_position]) #Inserta individuos menos adaptados en lista_pressure
    Poblacion.pop(min_position) #Remueve a los individuos menos adaptados de la población general
    lista_fitness.pop(min_position) #Remueve los fitness de los individuos menos adaptados
    s=s+1

while True:

    #CICLO PARA REALIZAR CRUZA
    t=0
    while t<=1:
        punto_cruza = random.randint(1,3)
        lista_pressure[t][punto_cruza:len(Poblacion[t])]=Poblacion[t][punto_cruza:len(Poblacion[t])]
        t=t+1

```

**FIGURA 4.12** Selección de los individuos por el método de rango y cruce de un solo punto aleatorio.

La programación de la mutación (Fig. 4.13) se realizó utilizando la función *random* para generar tres números aleatorios enteros: uno con valores 0 y 1 para indicar el valor binario a reemplazar en el gen, otro entre 0 y 3 para seleccionar uno de los 4 individuos de la población, y finalmente otro entre 0 y 6 para determinar la posición del gen en el cromosoma a ser reemplazado.

```

#CICLO PARA MUTAR A LOS INDIVIDUOS CRUZADOS
valor_binario = random.randint(0,1)
punto_gen = random.randint(0,3)
punto_mutacion = random.randint(0,6)

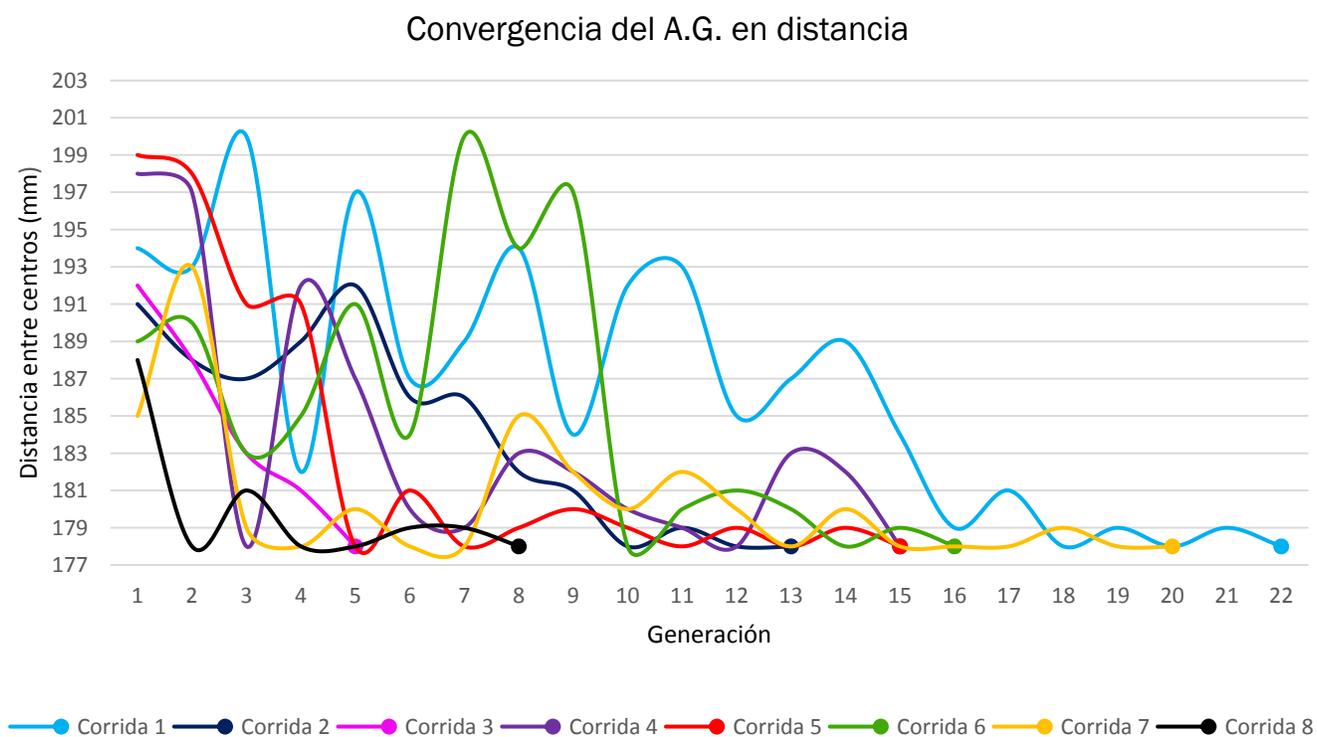
y=0
while y<=1:
    lista_pressure[y][punto_gen][punto_mutacion]=valor_binario
    y=y+1

```

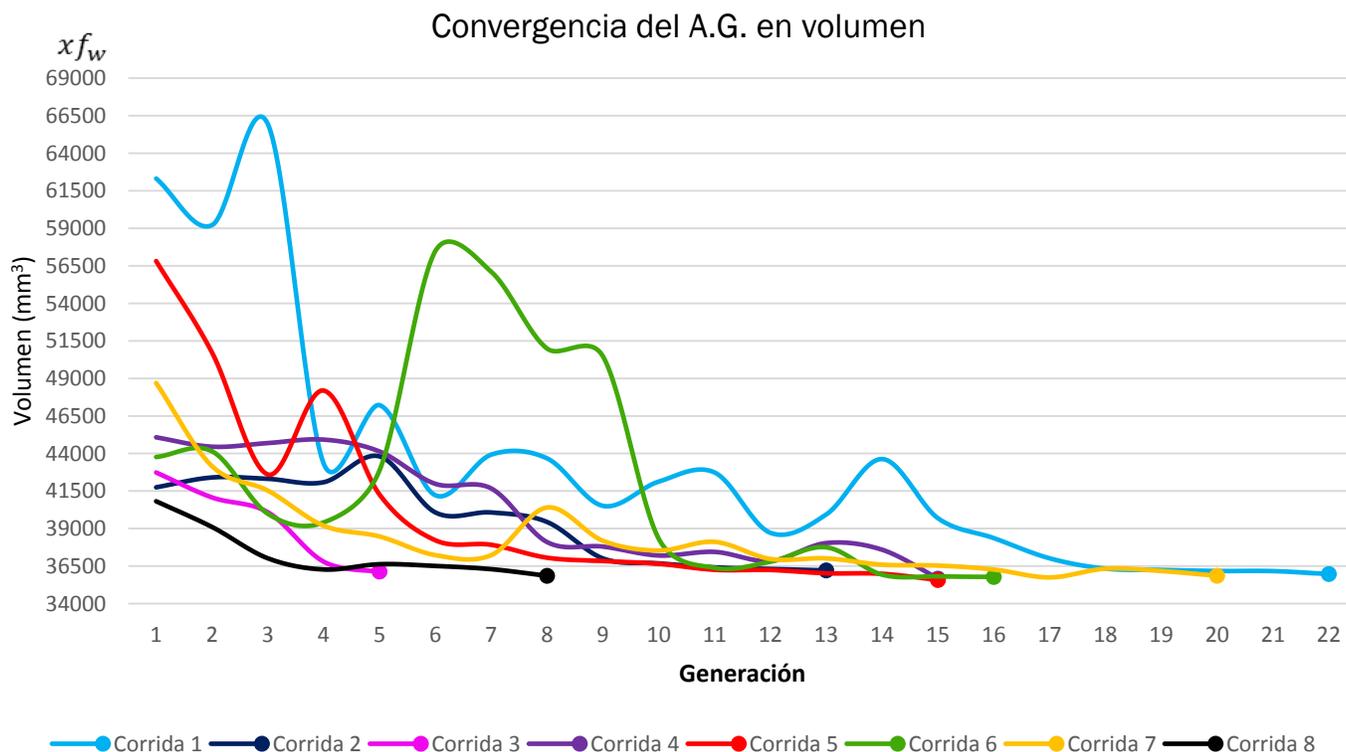
**FIGURA 4.13** Punto de mutación aleatorio con probabilidad de mutación .5

El resultado de ejecutar el programa de Python GA\_Optimization.py muestra que la cantidad de generaciones para lograr la convergencia del método varían en función de la aptitud de la primera generación de individuos, esto debido a que la población inicial es creada aleatoriamente. Por otra parte, la programación de la población inicial promueve la generación de individuos potencialmente adaptados dentro del espacio de búsqueda delimitado por las restricciones; la finalidad es acelerar el proceso de convergencia del método y por consiguiente el ahorro de tiempo de cómputo. De la misma forma, debido a la función de adaptación previamente definida, se logró que los valores de volumen y distancia entre centros convergieran en valores mínimos similares (Tabla 4.4).

Las fluctuaciones del proceso para la convergencia de la distancia y el volumen observadas en la figura 4.14 y 4.15 respectivamente, son debidas a la libertad del programa para explorar y explotar aleatoriamente nuevas regiones del espacio de búsqueda; esta condición está dada por la mutación de los individuos y evita con ello quedar limitado en una región de mínimos locales. Por otro lado, también se considera que el volumen del sistema no depende directamente de tener un arreglo con la menor distancia entre centros por lo que se requiere una combinación de individuos indefinida para lograr la convergencia.



**FIGURA 4.14** Convergencia de la distancia entre centros analizando 8 corridas del programa GA\_Optimization.py

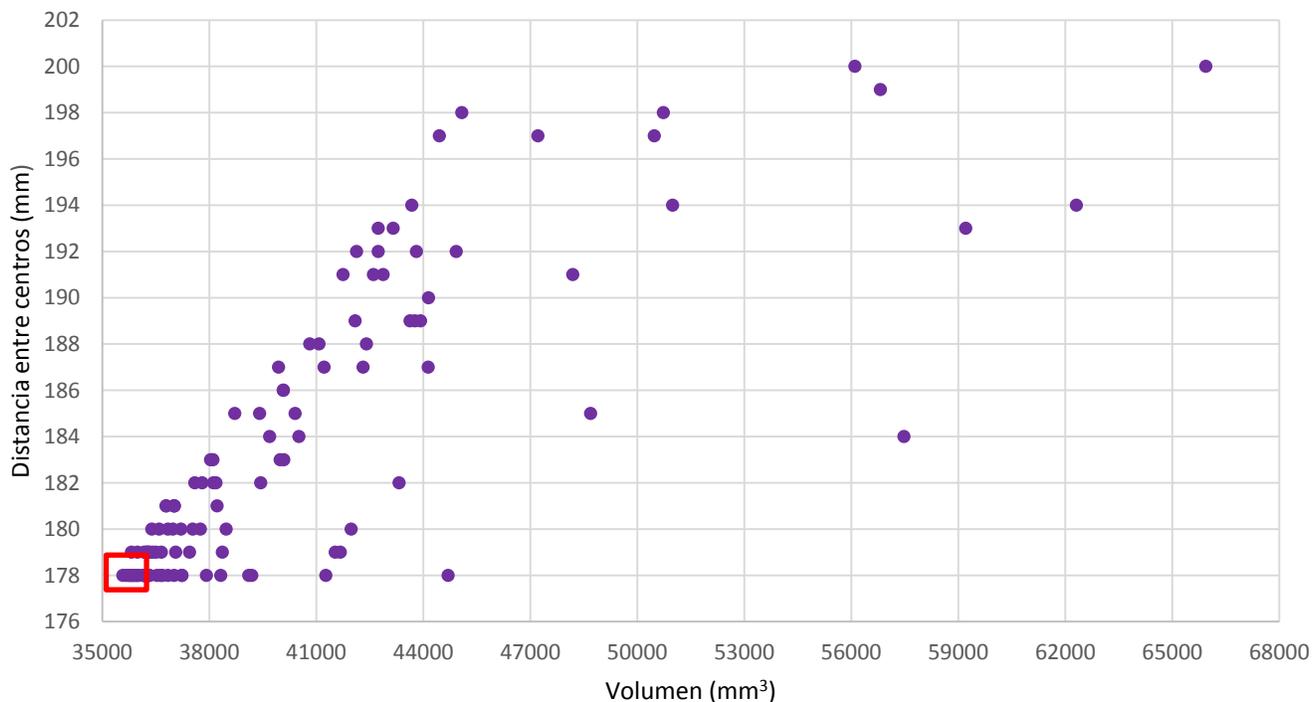


**FIGURA 4.15** Convergencia del volumen analizando 8 corridas del programa GA\_Optimization.py

A partir de la localización de los trenes de engranes determinados por los individuos con una alta adaptación, es decir, aquellos con un *fitness* igual a 5 (Fig. 4.5), es posible generar un mapa del espacio de soluciones (Fig. 4.16), tomando en cuenta que “*para cada tren de engranes formado por  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $N_3$  y  $N_4$  propuesto por el programa, corresponde un volumen y una distancia entre centros diferente*”.

Entonces, para este caso es posible encontrar más de una solución viable, por lo que se propone el uso de un criterio de convergencia que restrinja el espacio de soluciones, donde además de cumplir la condición de menor volumen y menor distancia dado un *fitness* igual a 5, las soluciones estén determinadas en un rango de distancia entre centros comprendido entre 178 y 179 (*mm*), y en un volumen desde  $35500f_w$  ( $mm^3$ ) hasta  $36100f_w$  ( $mm^3$ ). La descripción gráfica del criterio se muestra en la figura 4.16 en el recuadro rojo.

## Espacio de soluciones



**FIGURA 4.16** Espacio de soluciones para el problema de optimización de distancia entre centros y volumen. El cuadro rojo representa el espacio con las mejores soluciones dado el criterio de convergencia. El óptimo se considera el punto más cercano al origen.

En la tabla 4.4 se enlistan las mejores soluciones al problema de optimización tomando en cuenta el criterio de convergencia previamente definido. Además, se detallan los números de dientes de los engranes, la relación de transmisión y una distancia para la interferencia que se refiere a la distancia mínima entre el engrane del eje auxiliar y el eje secundario.

El objetivo de enlistar posibles soluciones fue seleccionar una solución final a través del análisis de aspectos de diseño mecánico y restricciones no tomados en cuenta durante la programación del algoritmo.

Como consecuencia de lo anterior, se ponderaron los siguientes 13 aspectos de diseño para poder seleccionar el mejor juego de engranes: Desgaste localizado por frecuencias armónicas .1, piñones de tamaño adecuado 0.15, distribución de la relación entre las dos etapas .05, ranking de adaptación .05, empaquetamiento .01, mantenimiento .1, desmontaje .02, fiabilidad .2, vida útil .02, costo .05, precisión .1, disponibilidad de maquinaria .1 y facilidad de ensamble .05; después se calificó con los siguientes porcentajes de satisfacción 0%, 10%, 25%, 50%, 75%, 90% y 100%, donde 0% es un objetivo no satisfecho y 100% un objetivo totalmente satisfecho.

Finalmente con un porcentaje de satisfacción del 81.5% se elige que la mejor solución es el individuo con la posición 10 de la tabla 4.4 (N1=28, N2=67, N3=23, N4=60), debido principalmente a que los engranes muestran un tamaño adecuado, son manufacturables, no presentan desgastes localizados y cumplen además en gran medida con los demás aspectos ponderados. La matriz de decisión puede ser encontrada en el apéndice E.

**TABLA 4.4** Top 10 de las mejores soluciones al problema de optimización de distancia entre centros y volumen. La fila amarilla muestra al individuo seleccionado como mejor solución.

Soluciones al problema					Parámetros optimizados		Parámetros complementarios	
Ranking	N1	N2	N3	N4	Distancia entre centros (mm)	Volumen (mm <sup>3</sup> )	Relación de transmisión	Distancia para interferencia (mm)
10	28	67	23	60	178	36023.07216	6.242236025	4
9	39	63	16	61	179	35988.51464	6.158653846	2
8	30	67	21	60	178	35972.80668	6.380952381	2
7	33	65	19	61	178	35930.39518	6.323763955	3
6	25	70	26	57	178	35853.42616	6.138461538	1
5	39	64	16	60	179	35817.29784	6.153846154	0
4	35	64	18	61	178	35778.02794	6.196825397	3
3	38	63	16	61	178	35746.61201	6.320723684	2
2	37	63	17	61	178	35666.5014	6.109697933	3
1	38	64	16	60	178	35575.39521	6.315789474	0

## Capítulo 5. Parametrización de engranes en CATIA®

En este capítulo se estudia la generación de engranes rectos con perfil de involuta, la descripción de los elementos de su geometría, así como las relaciones que involucran al diseño. Adicionalmente, se aplican la teoría mencionada a la parametrización de modelos de engrane en el Software CATIA®, dada la flexibilidad que tiene esta herramienta computacional para definir parámetros de la geometría asociándolos a un *constraint* (restricción).

En este trabajo se utilizó el método de la involuta para dar forma a los dientes de los engranes, debido a que es fácilmente parametrizable, depende de ecuaciones y relaciones simples para generar la geometría, su aplicación es casi universal y prácticamente no tiene restricciones de tamaño salvo algunas excepciones que serán tratadas más adelante.

El objetivo de la parametrización es reducir el tiempo invertido en el diseño y dibujo de los engranes rectos utilizados en el reductor de velocidad, mediante un modelo 3D dinámico capaz de ser modificado en cualquier etapa del proceso de diseño y que cuente con la libertad de agregar o remover restricciones atendiendo a las demandas del diseñador.

### 5.1 Teoría del engrane recto

La función principal de los engranes es transmitir par y velocidad angular para diversas aplicaciones. Existe una gran variedad de engranes, sin embargo, los engranes rectos son considerados, desde el punto de vista de diseño y manufactura, como los más simples posibles ya que estos están diseñados para operar con ejes paralelos y con dientes paralelos a las líneas de centro de los ejes. Hoy en día el diseño de los engranes se encuentra estandarizado por la forma y tamaño del diente mediante las normas establecidas por la Asociación Estadounidense de Fabricantes de Engranajes (AGMA).

Todo el conocimiento sobre la transmisión por engranajes surge de la idea de transmitir movimiento giratorio de un eje a otro mediante un par de cilindros en contacto, de tal manera que, si existe fricción suficiente en el punto de contacto entre las superficies, el mecanismo funcionará sin problema alguno. Teóricamente no existirá deslizamiento entre los cilindros sino hasta que la fuerza de fricción sea superada por las demandas de par.

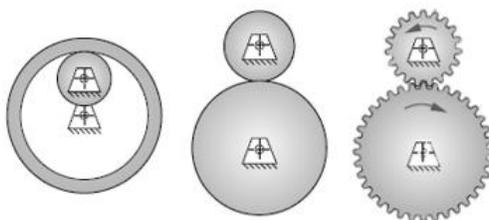


FIGURA 5.1 Transmisión por cilindros giratorios en contacto, al añadir dientes son considerados engranes.

Entre las desventajas que tiene este tipo de sistema rodamiento-cilindro se encuentra su poca capacidad de transmisión de par y posibilidad de deslizamiento, y dado que algunos instrumentos requieren trabajar con fases perfectamente sincronizadas, resulta poco práctico su implementación. Lo anterior es la razón por la cual a estos cilindros giratorios se les añadió dientes, lo que los convierte en engranes y al estar en contacto entre ellos reciben el nombre de engranajes. Cuando los engranes se ajustan en un engranaje, por convención al más pequeño de los engranes se le conoce como piñón y al más grande como corona.

### 5.1.1 Ley fundamental del engranaje.

La ley fundamental de los engranajes establece que *“la razón de la velocidad angular entre los engranes de un engranaje debe ser constante a lo largo de su acoplamiento”*. De tal manera que si se considera que la velocidad angular  $m_v$  es igual a la razón entre el radio de paso del engrane de entrada y el engrane de salida (Norton, 2011).

$$m_v = \frac{\omega_{sal}}{\omega_{ent}} = \pm \frac{r_{ent}}{r_{sal}} \quad (5.1)$$

Los radios de paso de la ecuación 5.1 hacen referencia a los cilindros en contacto mencionados anteriormente, a los cuales son agregados dientes para convertirlos en engranes. Las superficies de los cilindros en contacto son llamados círculos de paso, y a los diámetros, diámetros de paso.

La ventaja mecánica  $m_A$  es el recíproco de la razón de velocidad  $m_v$ , de tal manera que:

$$m_A = \frac{1}{m_v} = \frac{\omega_{ent}}{\omega_{sal}} = \pm \frac{r_{sal}}{r_{ent}} \quad (5.2)$$

Se le considera razón de engrane a la magnitud de una razón de velocidad o par, tal que:

$$m_G = |m_v| = |m_A|, \text{ para } m_G \geq 1 \quad (5.3)$$

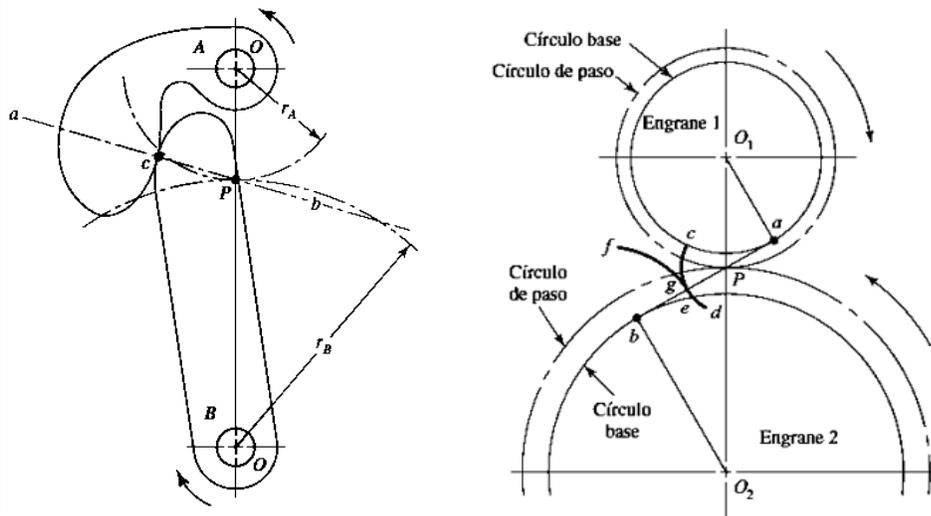
Para cumplir con la ley fundamental de los engranajes es necesario que exista un contacto continuo entre el contorno de los dientes acoplados, esto se logra mediante la generación de dientes que sigan la trayectoria de una curva como la cicloide, y en la mayoría de los casos, la involuta.

### 5.1.2 Perfil y geometría del engrane

El acoplamiento de dientes de engranes que actúan entre sí para producir movimiento rotatorio es similar al de las levas. Cuando dos perfiles de dientes o levas se diseñan para producir una relación constante de velocidades angulares durante el acoplamiento, se dice que tienen una acción conjugada. Una de las soluciones al problema de acoplamiento, es la selección del perfil de involuta utilizada de manera universal en los engranes (G. Budynas & Keith Nisbett, 2011).

Al haber contacto de una superficie curva con otra (Fig. 5.2), el punto de contacto es aquel donde las dos superficies son tangentes entre sí (punto  $c$ ), de tal manera que en cualquier instante las fuerzas tienen dirección a una normal común a las dos curvas. Esta línea normal que representa la dirección de acción de las fuerzas es conocida como línea de acción (línea  $ab$ ) e interseca a la línea de centros que se genera al unir los dos centros de rotación de las levas o engranes (línea  $O-O$ ), en el punto  $P$ . La relación de velocidad angular entre los brazos de las levas es inversamente proporcional a sus radios respecto al punto  $P$ . Los círculos trazados desde los centros de rotación hasta el punto  $P$  se conocen como círculos de paso, su radio, el radio de paso, y al punto  $P$  se le llama punto de paso.

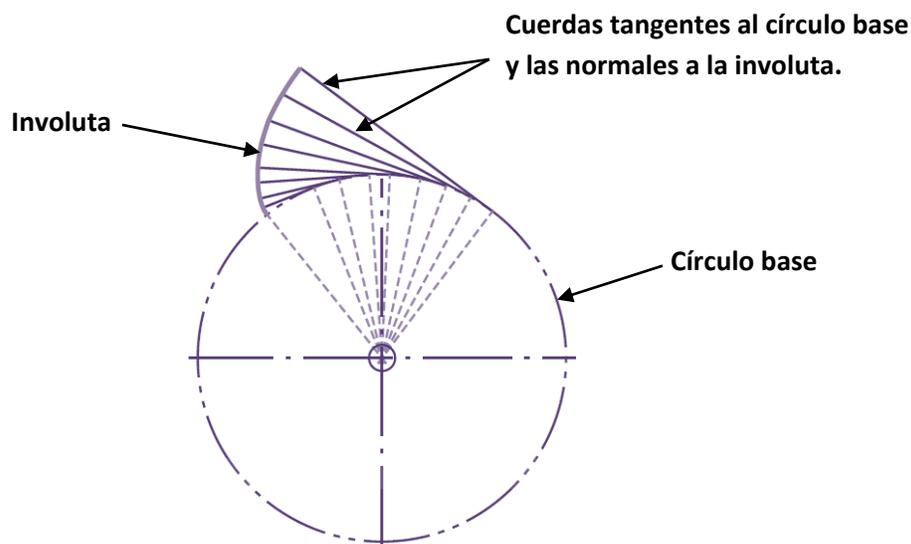
Se puede considerar a un par de engranes como un par de levas actuando a través de un arco pequeño y que antes de terminar el recorrido del contorno de involuta, son reemplazadas por otro par idéntico de levas, siendo configurado de esta manera para transmitir una relación constante de velocidad angular. El empleo de curvas involutas permite la variación de la distancia entre centros de los engranes sin afectar la relación constante de la velocidad angular.



**FIGURA 5.2** Similitud entre un par de levas y un par de engranes. El perfil de involuta de los engranes permite transmitir una velocidad angular constante (G. Budynas & Keith Nisbett, 2011)

La involuta de un círculo es una curva que se genera desenrollando una cuerda tensa a partir de un círculo (Fig. 5.3). Se toman en cuenta las siguientes consideraciones:

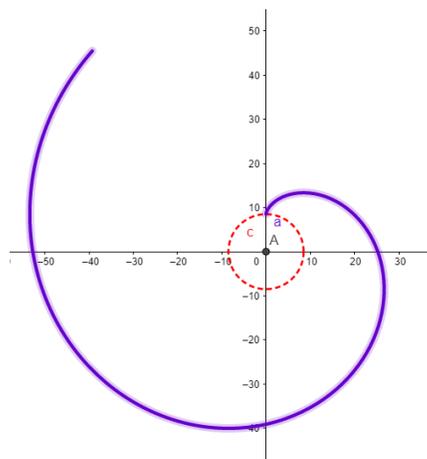
- Las cuerdas son siempre tangentes al círculo base.
- El centro de curvatura de la involuta siempre se encuentra en el punto de tangencia de la cuerda con el círculo base.
- Las líneas tangentes a la involuta son siempre normales a las cuerdas, donde dichas cuerdas son el radio de curvatura instantáneo de la involuta.



**FIGURA 5.3** Generación de la involuta a partir de un círculo base.

El perfil de involuta puede ser generado como se muestra en la figura 5.4, a partir de sus ecuaciones paramétricas, donde  $D_b$  es el diámetro del círculo base. En color morado se representa la curva involuta y en rojo punteado el círculo base.

$$\begin{cases} y(t) = \frac{D_b}{2} [\sin(t) - t \cos(t)] \\ z(t) = \frac{D_b}{2} [\cos(t) + t \sin(t)] \end{cases} \quad (5.4)$$



**FIGURA 5.4** Gráfica de la involuta generada en Geogebra a partir de sus ecuaciones paramétricas. El círculo rojo punteado representa al círculo base.



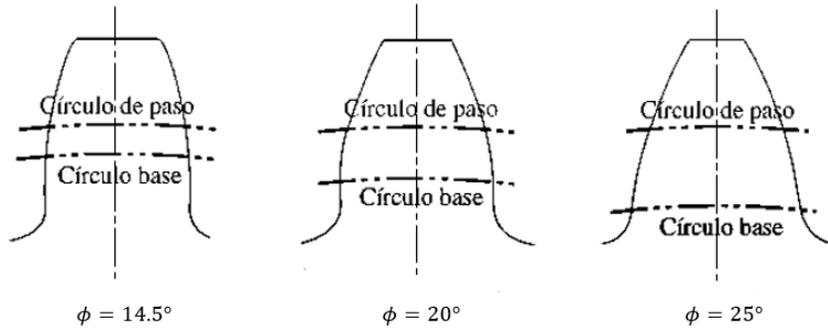


FIGURA 5.6 Valores de ángulo de presión estandarizados para dientes con profundidad total.

**Diámetro del círculo base ( $D_b$ ):** Diámetro del círculo a partir del cual se desenrollan las cuerdas normales a la involuta. La ecuación 5.5 representa el cálculo del diámetro del círculo base.

$$D_b = D \cos(\phi) \quad (5.5)$$

**Paso circular ( $P_c$ ):** Parámetro que define el tamaño del diente mediante la longitud de arco en el círculo de paso medido desde un punto dado en un diente hasta el punto análogo en el diente contiguo. La ecuación 5.6 representa al paso circular donde  $N$  es el número de dientes del engrane.

$$P_c = \frac{\pi D}{N} \quad (5.6)$$

**Paso base ( $P_b$ ):** Medida del paso del diente a lo largo de la circunferencia del círculo base.

$$P_b = P_c \cos(\phi) \quad (5.7)$$

**Módulo ( $m$ ):** Los engranes métricos se basan en el sistema internacional (SI) para definir este parámetro como el recíproco del paso diametral con el diámetro de paso  $D$  medido en milímetros. Como regla general se considera que, para que dos o más engranes puedan trabajar juntos (engranar) se requiere que tengan el mismo valor de módulo.

$$m = \frac{D}{N} \quad (5.8)$$

**Diámetro de Addendum ( $D_{ad}$ ):** Conocido de igual manera como *diámetro exterior*; corresponde al diámetro del círculo que encierra el exterior de los dientes del engrane. Toma en cuenta las especificaciones de la AGMA para dientes de engrane de profundidad total, donde el addendum  $a$  se define como la distancia radial desde el círculo de paso hasta el exterior de un diente, para el SI  $a = 1.0 m$  (Mott, 2006). De tal manera que el diámetro de addendum se representa como:

$$D_{ad} = D + 2m \quad (5.9)$$

**Diámetro de Dedendum ( $D_R$ ):** También conocido como *diámetro de raíz*; es el diámetro que corresponde al círculo que contiene el fondo del espacio del diente. Al igual que con el diámetro de Addendum, se define mediante las especificaciones de la AGMA al dedendum  $b$  como la distancia radial desde el círculo de paso hasta el fondo del espacio del diente, en SI  $b = 1.25 m$  (Mott, 2006). El diámetro de dedendum se expresa como:

$$D_R = D - 2.5m \quad (5.10)$$

**Longitud de acción ( $Z$ ):** En un engranaje es la intersección de los círculos de Addendum respectivos con la línea de acción, y representa los puntos de inicio y final de contacto en un engranado. La ecuación 5.11 expresa la longitud de acción, donde  $r_p$  y  $r_c$  son los radios de paso,  $a_p$  y  $a_c$  son los addendum del piñón y corona respectivamente y  $C$  es la distancia entre centros de engranes.

$$Z = \sqrt{(r_p + a_p)^2 - (r_p \cos \phi)^2} + \sqrt{(r_c + a_c)^2 - (r_c \cos \phi)^2} - C \sin \phi \quad (5.11)$$

**Razón de contacto ( $m_p$ ):** Define el número promedio de dientes en contacto en cualquier momento.

$$m_p = \frac{Z}{P_b} = \frac{Z}{m \pi \cos(\phi)} \quad (5.12)$$

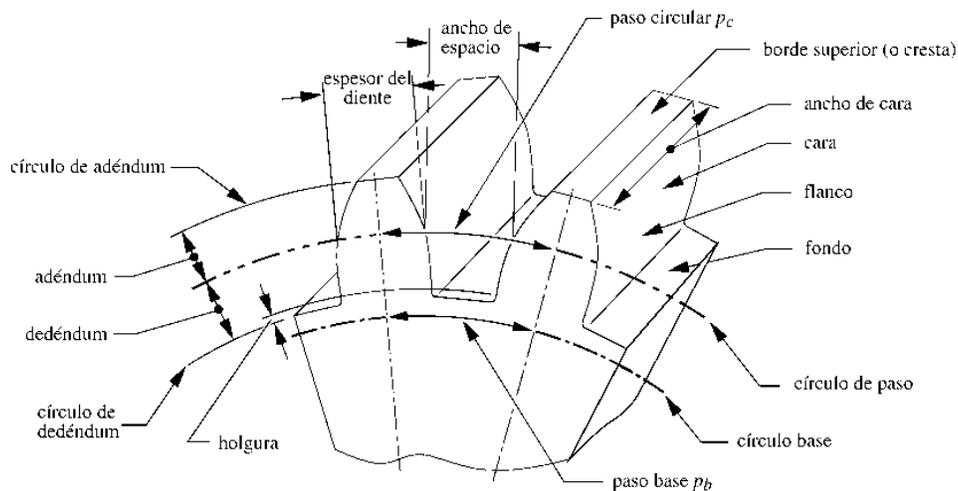


FIGURA 5.7 Nomenclatura de los dientes de los engranes (Norton, 2011)

## 5.2 Parametrización de engranes en CATIA

Con base en los resultados de la optimización por algoritmos genéticos aplicada en la sección 4.3, se pretende obtener los modelos sólidos de los engranes seleccionados mediante un modelador 3D, lo que implica la inversión de una gran cantidad de tiempo para lograrlo, y más aún si existe la posibilidad de hacer modificaciones en el futuro, por lo cual, se propuso la automatización del proceso de generación de engranes rectos, a través de la parametrización de la respectiva geometría que los caracteriza.

Dicho modelo paramétrico permite al usuario generar cualquier engrane recto, siempre y cuando se cumpla con ciertas restricciones geométrico-dimensionales, además de ello, es posible interactuar con el programa y modificar su estructura para generar otro tipo de engranes como los helicoidales.

El modelo paramétrico fue desarrollado en CATIA utilizando el módulo *knowlegde*, además, se tomó como referencia algunos trabajos que basan su teoría en la generación de diseños paramétricos de engranes rectos, principalmente el diseño mostrado por Vázquez, C. (2015).

La diferencia con paqueterías existentes en el mercado es la versatilidad que tiene el programa para generar cualquier tipo de perfil de diente de engranes, ya que no está restringido a librerías de engranes propias de los programas y tiene un código en desarrollo que permitirá su adaptación a problemas específicos, de tal manera que puede ser utilizado como herramienta de investigación y desarrollo.

Tomando como base las ecuaciones que describen la geometría de los engranes, se procedió a la generación del modelo paramétrico mediante el uso de un total de 11 parámetros, 5 se consideran “de entrada” y el resto se calculan a partir de los anteriores (parámetros dependientes). A continuación se enlistan los parámetros utilizados:

**TABLA 5.1** Tabla de parámetros utilizados en el modelo paramétrico de CATIA.

Parámetro de entrada	Parámetro dependiente
Módulo ( $m$ )	Diámetro de paso ( $D$ )
Ángulo de presión ( $\phi$ )	Diámetro de Addendum ( $D_{ad}$ )
Número de dientes ( $N$ )	Diámetro del círculo base ( $D_b$ )
Ancho de cara ( $f_w$ )	Diámetro de Dedendum ( $D_R$ )
Diámetro del eje ( $D_{eje}$ )	Radio del filete ( $r_f$ )
	Punto $C$

El programa permite insertar los parámetros de entrada bajo las siguientes consideraciones:

- El módulo puede ser un valor real positivo, sin embargo, es recomendable utilizar únicamente los valores estandarizados por la AGMA.
- Es posible ingresar cualquier valor de ángulo de presión, pero se recomienda fijar el valor de  $20^\circ$  por cuestiones de diseño y manufactura.
- El número de dientes del engrane es conocido por el usuario y deberá tomar un valor entero positivo, también se sugiere respetar las restricciones de la AGMA para evitar interferencia entre los dientes de los engranajes (Tabla 4.2)
- El ancho de cara es definido por el usuario; parámetro proveniente del análisis de esfuerzo en los dientes del engranes.
- El diámetro del eje es un parámetro conocido y generado por el usuario a partir de un análisis de esfuerzo cortante y momento flexionante.
- El diámetro de paso, diámetro de addendum, diámetro del círculo base y diámetro de dedendum son generados a partir de los 5 parámetros anteriores al despejarlos de las ecuaciones representativas.
- El radio del filete toma un valor de  $r_f = 0.38m$  (Wright, 2019)
- El punto  $C$  es el parámetro donde serán evaluadas las ecuaciones paramétricas para que la involuta pueda coincidir con el círculo de paso en un punto definido (Vázquez Hernández, 2015). Éste se define como:

$$C = \tan(\phi) \quad (5.12)$$

### 5.2.1 Construcción del modelo paramétrico

Para la generación del modelo geométrico se contempla el uso de parámetros, fórmulas y leyes en CATIA, por lo que se recomienda mostrar estos valores en el árbol de operaciones previo a comenzar el modelado. A continuación, se describen los pasos utilizados para la construcción del modelo geométrico.

- A. Se definieron los parámetros de entrada y los dependientes insertándolos como *user parameters* en la herramienta *Formulas*, cada parámetro fue definido con el tipo de dato correspondiente.

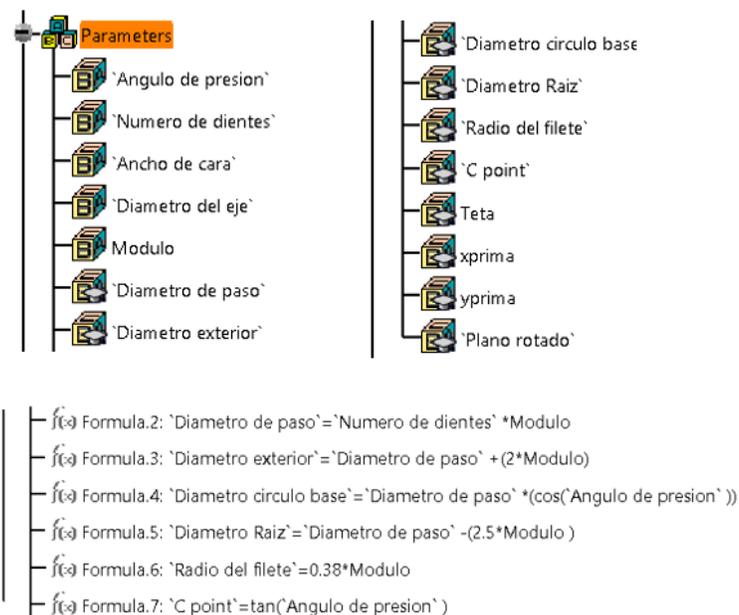


FIGURA 5.8 Definición de los parámetros que representan la geometría.

- B. Utilizando el módulo de CATIA *Generative Shape Design*, se definió un plano de trabajo y un origen sobre los cuales se dibujaron los círculos que caracterizan a la geometría del engrane: círculo de addendum (Ec. 5.9), círculo de paso (Ec.5.8), círculo de dedendum (Ec. 5.10) y círculo base (Ec. 5.5). Cada círculo fue asociado a una fórmula, ya que sus valores dependen de los parámetros de entrada.

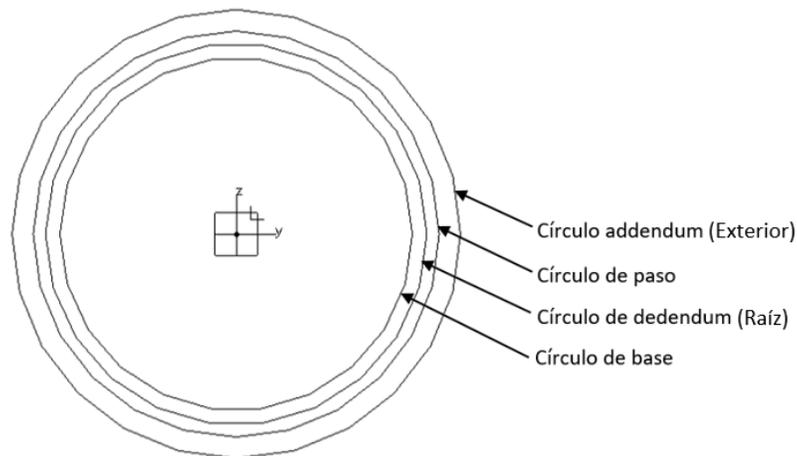


FIGURA 5.9 Generación de los círculos de la geometría del engrane.

- C. Se generaron los puntos de la involuta evaluando las ecuaciones paramétricas (Ec. 5.4) mediante el uso de la herramienta *law editor*. Cada ley contiene una de las ecuaciones y arroja un solo resultado para la evaluación de un parámetro de entrada. Al final los puntos generados fueron unidos con una *Spline*.

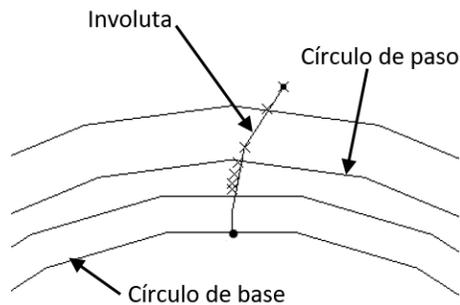


FIGURA 5.10 Generación de los puntos de la involuta evaluando las ecuaciones paramétricas y su unión mediante una *Spline*.

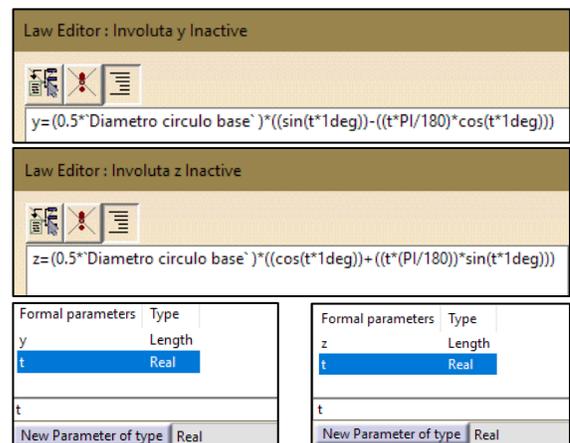
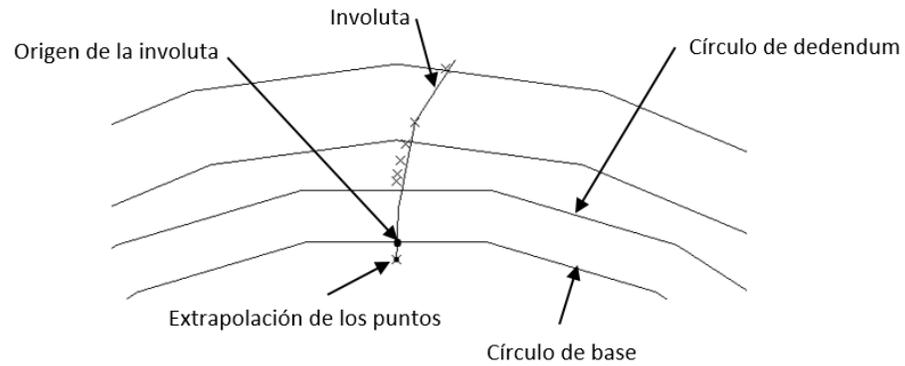


FIGURA 5.11 Definición de leyes que permiten generar los puntos de la involuta.

- D. Dadas las características de algunos engranes, en ocasiones el círculo de dedendum puede ser más pequeño que el círculo de base por lo que fue necesario una extrapolación de los puntos a un valor de  $2m$  como se muestra en la figura 5.12 (Vázquez Hernández, 2015).

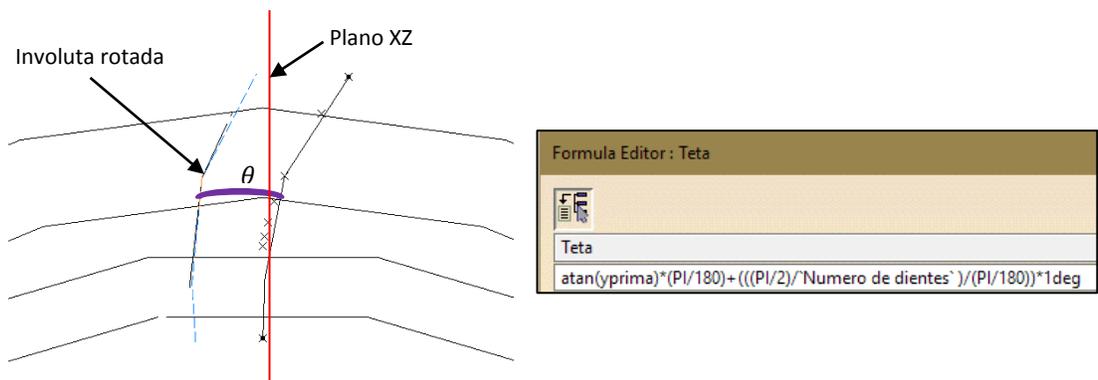


**FIGURA 5.12** Definición de leyes que permiten generar los puntos de la involuta.

E. Se realizó una rotación de la involuta sobre el eje  $X$ , en un ángulo  $\theta$ , dada la expresión:

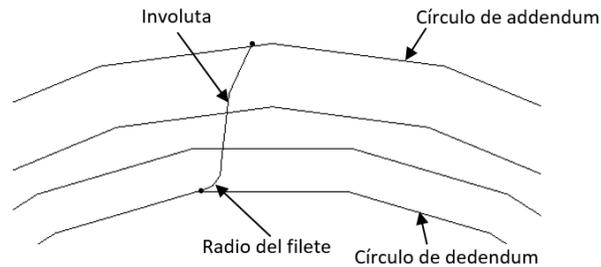
$$\theta = \tan^{-1} \left( \frac{y(C)}{z(C)} \right) + \frac{(\pi/2)}{N} \quad (5.13)$$

Las expresiones  $y(C)$  y  $z(C)$  representan la ecuación de la involuta evaluada en el Punto  $C$  (Ecuación 5.12) y  $N$  es el número de dientes. La rotación de la involuta se lleva a cabo para lograr la simetría del diente con el plano  $XZ$ .



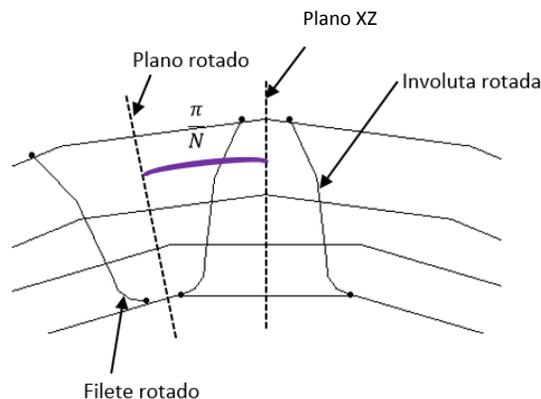
**FIGURA 5.13** Rotación de la involuta sobre el eje  $X$  y su definición como fórmula.

- F. Se dibujó el filete de radio  $r_f = 0.38m$  entre la base de la involuta y el círculo de dedendum, adicionalmente se cortó la involuta en su intersección con el círculo de addendum.



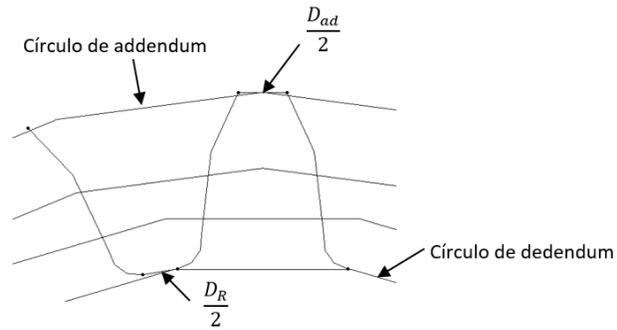
**FIGURA 5.14** Radio del filete entre la involuta y el círculo de dedendum y operación *trim* involuta-círculo de addendum.

- G. Se llevó a cabo la simetría de la involuta y del filete; respecto al plano  $XZ$  del sistema de referencia para la involuta y sobre el plano rotado de ángulo  $\frac{\pi}{N}$  *radianes* (respecto al plano  $XZ$ ) para el filete.



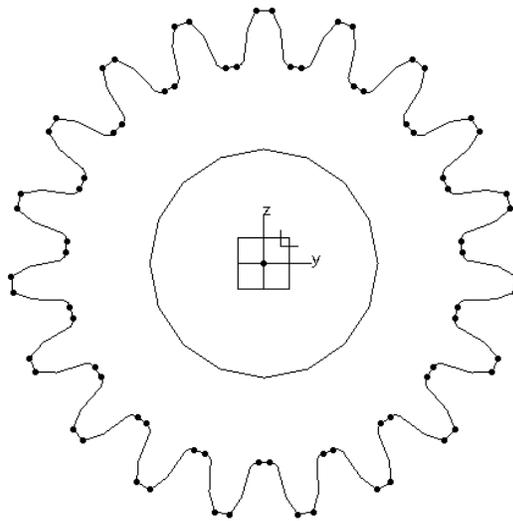
**FIGURA 5.15** Generación de la simetría de la involuta y el filete a través de planos de referencia.

- H. Se unieron los puntos superiores de las involutas y los puntos inferiores de los filetes mediante un par de arcos con valores de radio  $\frac{D_{ad}}{2}$  y  $\frac{D_R}{2}$  respectivamente (Fig.5.16). Con esto se finaliza la generación paramétrica de un diente del engrane.



**FIGURA 5.16** Unión de involutas y filetes mediante arcos definidos. Geometría final del diente del engrane

- I. Se generó un patrón circular con respecto al origen que repite  $N$  número de veces el diente del engrane. Adicionalmente se creó el círculo para el montaje del eje del engrane. A partir de este punto se esconden los círculos constitutivos, simetrías y ejes auxiliares para mostrar únicamente la siguiente geometría sin líneas duplicadas.



**FIGURA 5.17** Sketch final del modelo paramétrico del engrane

### 5.3 Diseño de detalle del reductor de velocidad

Una vez generado el modelo parametrizado de los engranes y con la finalidad de verificar que no existiese algún problema de ensamble de los elementos del reductor de velocidad, se llevó a cabo el desarrollo del modelo CAD, tomando en cuenta lo discutido en la sección 4.3, donde se determinó una solución que optimizaba las dimensiones y volumen del tren de engranes.

En la figura 5.18 se puede observar el modelo sólido del reductor de velocidad propuesto, así como los elementos que lo componen, cabe mencionar que los materiales de los engranes y ejes se mantienen del modelo 2017, sin embargo, el material de la carcasa será reemplazado por aluminio 7075-T6 dada la mejora en las propiedades mecánicas que representa frente al modelo de fundición. La figura 5.19 muestra a detalle los elementos que conforman el ensamble del tren de engranes, incluyendo los sistemas de rodamiento y retención.

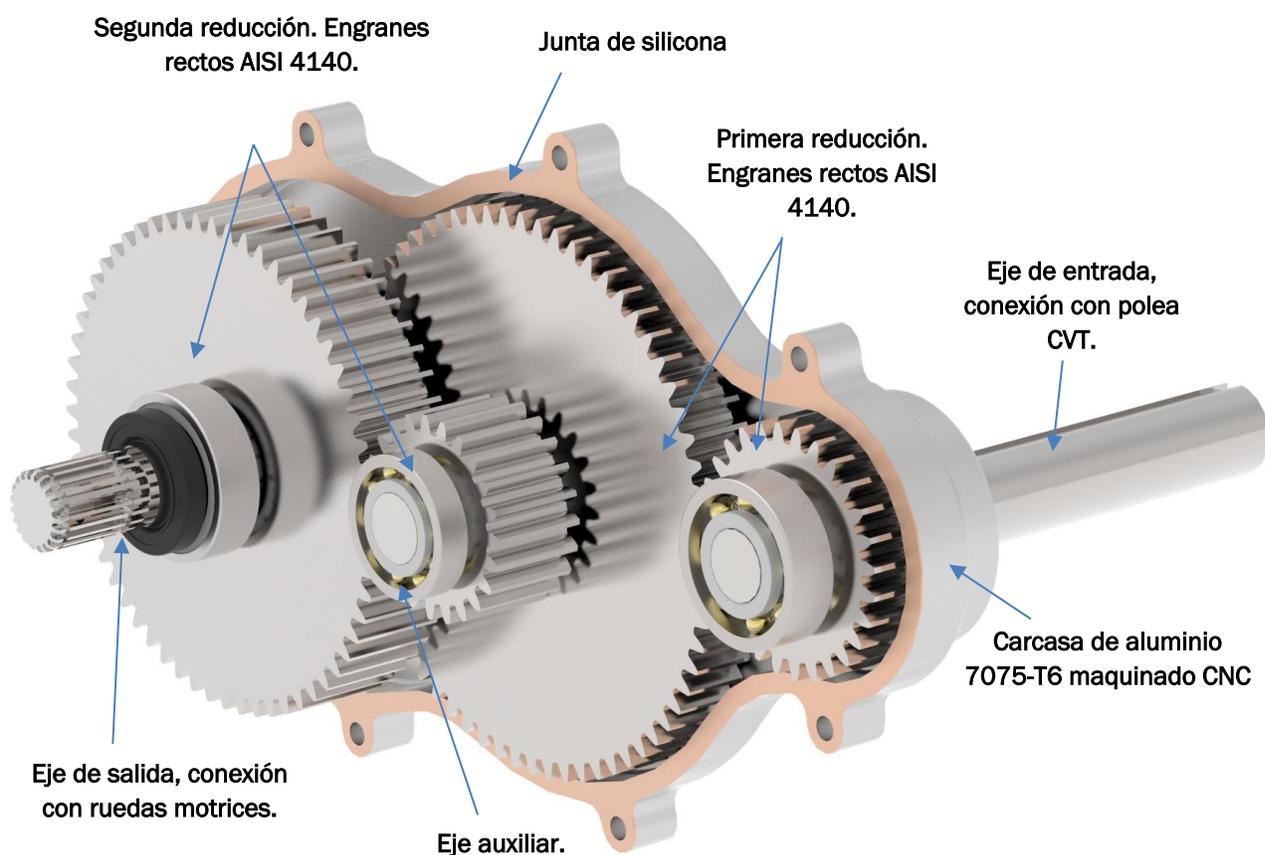
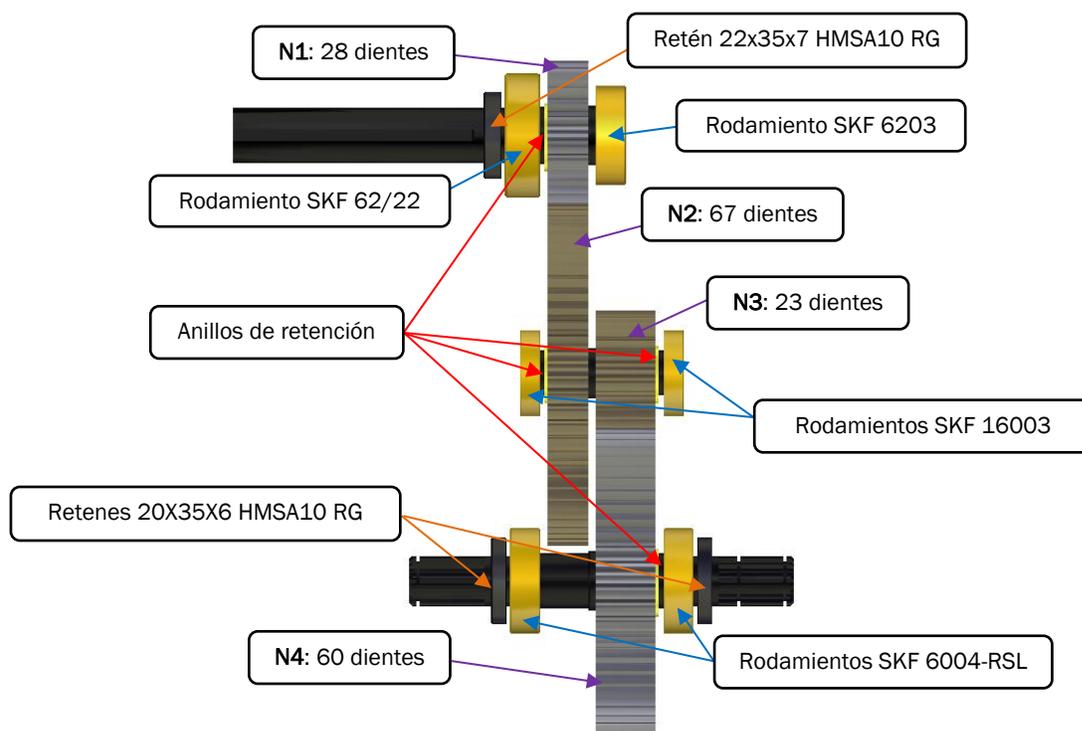


FIGURA 5.18 Modelo CAD del reductor de velocidad CSRTO-2019



**FIGURA 5.19** Detalle del tren de engranes del reductor de velocidad CSRTO-2019

En la tabla 5.2 se observan los parámetros de diseño para la construcción del reductor de velocidad. La selección de los engranes, ángulos de presión, módulo y número de dientes fueron analizados en el capítulo 4 de este trabajo.

El ancho de cara de los engranes se estimó con base en la ecuación de esfuerzo de flexión de la AGMA haciendo las respectivas consideraciones de los factores, sin omitir el factor de espesor del aro (American Gear Manufacturers Association AGMA 2001-B88, 1988). Los diámetros de los ejes fueron obtenidos mediante el análisis de esfuerzo cortante y momento flexionante para las cargas tangenciales y radiales presentes en el mecanismo, y finalmente las dimensiones de las cuñas consideran el esfuerzo cortante al que serán sometidas.

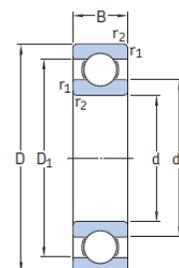
**TABLA 5.2** Parámetros de diseño del reductor de velocidad CSRTO-2019

Engrane	Ángulo de presión (°)	Módulo	Número de dientes (mm)	Ancho de cara (mm)	Diámetro del eje (mm)	Dimensión de la cuña L1xL2xL3 (mm)	Diámetro - espesor anillo de retención (mm)
N1	20	2	28	16	23	6.35 x 6.35 x 15.5	21 - 1.2
N2	20	2	67	16	18	6.35 x 6.35 x 15.5	17 - 1.3
N3	20	2	23	24	18	6.35 x 6.35 x 23.5	17 - 1.3
N4	20	2	60	24	22	6.35 x 6.35 x 23.5	21 - 1.2

Los rodamientos (tabla 5.3) toman en cuenta las cargas radiales y un máximo de 450 horas de servicio, parámetro que también se utiliza en la selección de los retenes (tabla 5.4). Los cálculos de diseño de elementos de máquinas presentados en las tablas 5.2 a 5.3 pueden ser encontrados en el apéndice C de este trabajo.

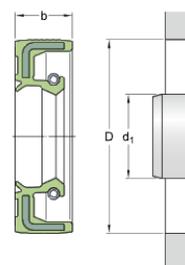
**TABLA 5.3** Selección de rodamientos para el reductor de velocidad CSRTO-2019.

Designación del rodamiento SKF	Posición del rodamiento	d	D	B
62/22	Eje primario lado izquierdo (polea)	22	50	14
6203	Eje primario lado derecho	12	17	40
16003	Eje auxiliar lado derecho e izquierdo	17	35	8
6004-RSL	Eje secundario lado derecho e izquierdo	20	42	12



**TABLA 5.4** Selección de retenes para el reductor de velocidad CSRTO-2019.

Designación del retén SKF	Posición del retén	d1	D	B
22x35x7 HMSA10 RG	Eje primario lado izquierdo (polea)	22	35	7
20X35X6 HMSA10 RG	Eje secundario lado derecho e izquierdo	20	35	6

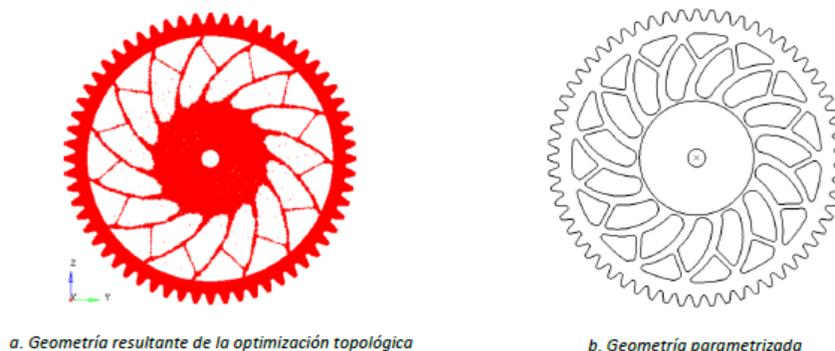


El modelo paramétrico tiene un papel muy importante en el desarrollo del modelo sólido del reductor de velocidad, dado que suponiendo un caso donde se requiriera alguna modificación o determinar una solución diferente (por ejemplo un nuevo individuo de la optimización por algoritmos genéticos), generar un nuevo tren de engranes no representaría una pérdida sustancial de tiempo, con lo cual se estaría cumpliendo el ciclo de mejora para la fase 3 del proceso de diseño propuesto en el capítulo 3 de este trabajo.

## Capítulo 6. Optimización topológica

En este capítulo se aplica el método de optimización topológica en dos elementos del reductor de velocidad que presentan áreas de oportunidad: engranes y carcasas. El objetivo es generar trayectorias óptimas de material en el cuerpo de los engranes y en las zonas permitidas de la carcasa (SAE International, 2018), obteniendo elementos más ligeros pero con la misma capacidad de operación y resistencia estructural.

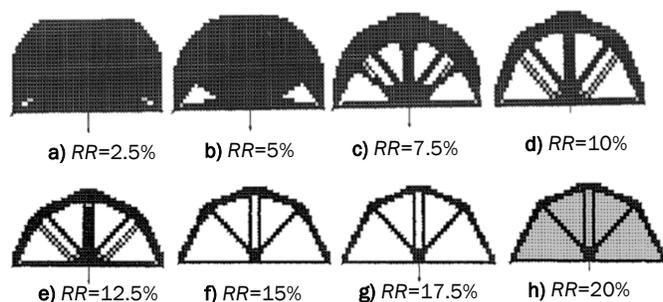
Existen en la literatura trabajos que respaldan esta idea de diseño, tal es el caso de Vázquez, C. (2015), quien estudió la optimización del cuerpo de los engranes, teniendo como objetivo generar un método de diseño paramétrico para el cuerpo de engranes rectos con perfil de involuta y ángulo de presión definido, empleando optimización topológica (Fig. 6.1). En su trabajo logra una reducción significativa de la masa del engrane sin afectar sus condiciones de operación.



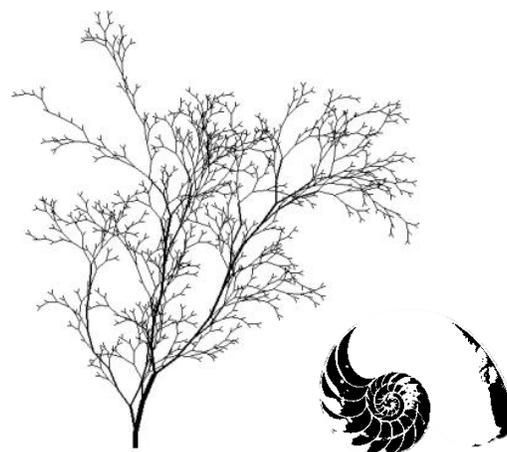
**FIGURA 6.1** Optimización topológica del cuerpo de un engranes rectos y su geometría parametrizada (Vázquez Hernández, 2015).

Xie, Y., & Steven, G. (1992), aborda la optimización de formas y diseños de estructuras mediante un procedimiento evolutivo simple (Fig. 6.2). Durante el proceso de evolución el material de baja tensión se elimina progresivamente de la estructura. El trabajo se basa en la observación de estructuras naturales como conchas, huesos y árboles (Fig. 6.3), donde resulta obvia que la topología y forma de tales estructuras alcanzan su óptimo durante un largo periodo evolutivo y se adaptan a cualquier entorno en el que se encuentren.

Se introducen entonces, 3 conceptos para la optimización por éste método: El *criterio de rechazo* (RC), el cual indica el parámetro que permitirá decidir las áreas y cantidad de material a remover o conservar (el esfuerzo de von Mises por ejemplo); la *relación de rechazo* (RR) que indica el porcentaje del parámetro del criterio de rechazo; y la *taza de evolución* (ER) que tal como en los proceso naturales, indica alguna mutación, cruza o selección, y es simplemente un cambio en la relación de rechazo. Este proceso es iterativo y finaliza cuando se ha llegado a un “estado de equilibrio”, es decir, una convergencia del método en una estructura óptima, donde todos los niveles de esfuerzo se encuentran dentro del máximo permitido.

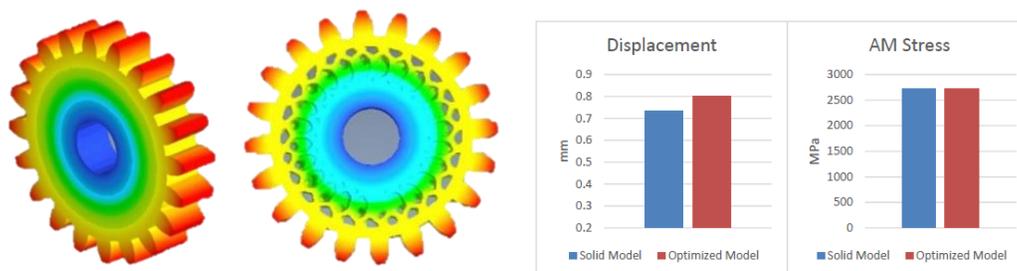


**FIGURA 6.2** Procedimiento evolutivo simple para la optimización estructural basado en los criterio de rechazo (RR), relación de rechazo (RR) y tasa de evolución (ER) (Xie & Steven, 1992).



**FIGURA 6.3** Evolución de estructuras naturales (Prusinkiewicz & Lindenmayer, 2004).

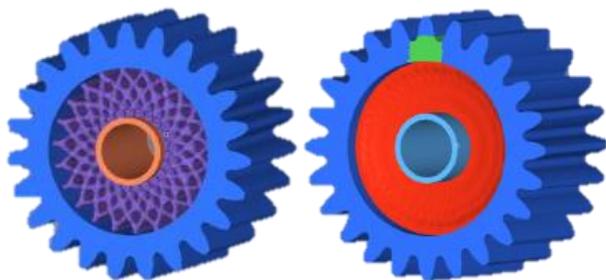
Por otra parte Kulangara, J., Rao, C., & Subhash, P. (2017), analizan la generación y optimización de una estructura conocida como “panal del abeja” sobre el cuerpo de engranes rectos (Fig. 6.4), considerando la reducción de peso como objetivo principal, y manteniendo los desplazamientos y esfuerzos dentro de rangos permitidos. En un inicio se generó la estructura de panal de abeja, para posteriormente dar paso a un análisis por elementos finitos; los esfuerzos y desplazamientos del engrane recto optimizado se compararon con el engrane original, arrojando como resultado un aumento del 8.13% en el valor del desplazamiento y ninguna variación en el valor de esfuerzo. Mediante este método se logra una disminución de 19% del volumen total del engrane.



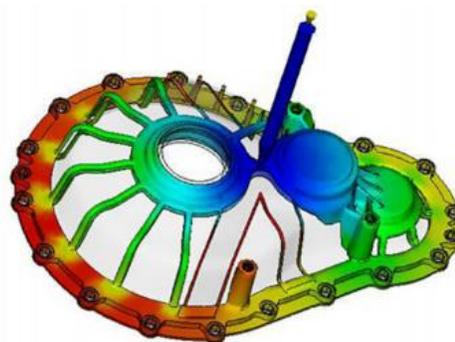
**FIGURA 6.4** Aplicación de estructuras de panal de abejas en el cuerpo de engranes rectos (Kulangara, Rao., & Subhash Chandra Bose , 2017)

Vikram, A. (2013), desarrolla un método para el adelgazamiento del cuerpo de un engrane recto mediante optimización topológica utilizando el módulo Optistruct® de HyperMesh® y haciendo uso de una elevada repetición de un patrón geométrico, además de considerar restricciones de manufactura (Fig. 6.5). En su trabajo se observan diferentes resultados al manipular la cantidad de ciclos del patrón.

Por último, Schneider, T. (2017), pensando en la eficiencia de los vehículos eléctricos y bajo la premisa de que a menor peso se puede obtener mayor distancia recorrida por estos vehículos, busca reemplazar los materiales de algunos componentes del tren motriz como las carcasas utilizadas en las cajas de cambios (Fig. 6.6). Buscando que el nuevo modelo esté compuesto por un termoplástico reforzado con fibra de carbono, dadas las propiedades mecánicas y posibilidades de producción establecidas.



**FIGURA 6.5** Optimización por adelgazamiento del cuerpo del engrane recto (Vikram Ashok, 2013)



**FIGURA 6.6** Reemplazo de materiales en la caja de reducción de vehículos eléctricos (Schneider, 2017)

### 6.1 Definición del proceso de optimización topológica

En esta sección se introduce el concepto de la optimización topológica, desde la definición de las partes que lo conforman, hasta la guía para la preparación del modelo y la configuración del proceso de optimización utilizando herramientas de software especializadas en el tema.

La primera consideración a tomar en cuenta es: un **óptimo** se define como “el mejor resultado obtenido u obtenible en condiciones específicas” (Altair University, 2015), y para ello se elaboran ecuaciones matemáticas que cuantifican el rendimiento del diseño. El parámetro cuantitativo que se utiliza para evaluar un diseño se denomina **objetivo**, desafortunadamente algunas veces los objetivos son contradictorios y es necesario llevar a cabo una optimización de objetivos múltiples. La dependencia del objetivo sobre las variables de diseño se expresa mediante una **función objetivo**.

En algunas ocasiones los recursos para diseñar suelen tener límites o restricciones, lo que da lugar a la condición denominada **optimización bajo restricciones**. Una solución que satisface las restricciones se denomina **solución factible**, mientras que una que no la cumple se denomina **solución inviable**. Dado que se trabaja en un rediseño y lo que se busca es mejorar a éste, se necesita enumerar los objetivos y las restricciones, buscar la mejor solución y entender que se tiene una gran flexibilidad para cambiar los parámetros que envuelven al diseño.

Cuando se está diseñando un elemento mecánico, éste suele ensamblarse con otros componentes, lo cual significa que se debe tener especial cuidado con las zonas en las que el componente debe unirse y los áreas de ensamblaje no pueden variar, a esta región se le conoce como **zona de no diseño**. Por otro lado, existen regiones que están libres, no tienen uniones con otros elementos y solo cumplen una función de medio de enlace, en ingeniería, a esta zona libre se le conoce como **zona de diseño** o el **dominio de la optimización**

Una vez definidos los parámetros del problema se puede llevar a cabo el análisis de optimización topológica, que toma en cuenta la distribución de materiales y cómo se conectan los miembros

dentro de una estructura. El *solver* (solucionador) calcula una ***densidad equivalente*** (considerada una variable de diseño) para cada elemento, donde 1 equivale a 100% de material, mientras que 0 equivale a no material en el elemento. Los problemas de ingeniería consisten en aplicar un criterio de selección durante el proceso de optimización, ya que es necesario tomar decisiones sobre qué densidades de material serán omitidas así como una posible reevaluación de los resultados.

Dado lo anterior, se propone la siguiente metodología para realizar la optimización topológica de los engranes y carcasas del reductor de velocidad, nótese que se trata de un proceso iterativo cuyo producto final depende de las consideraciones del diseñador.

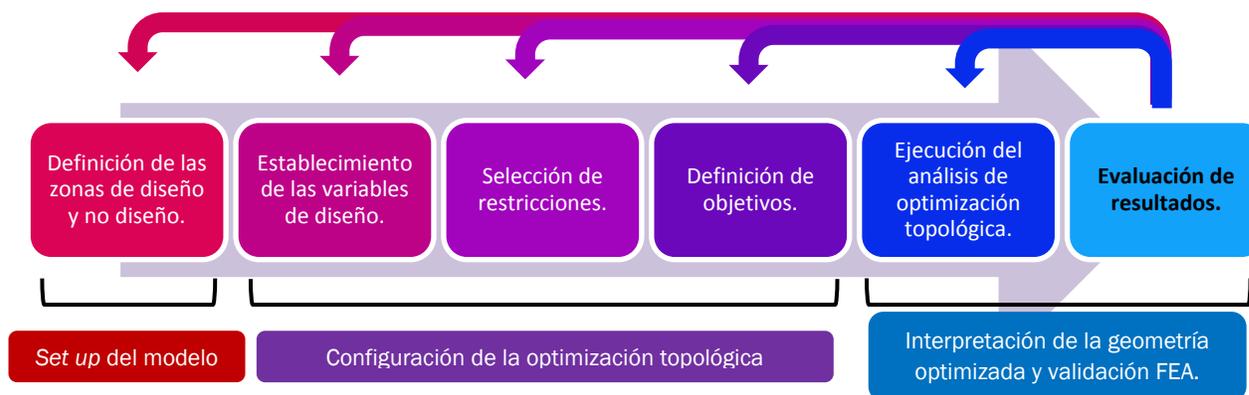


FIGURA 6.7 Metodología propuesta para llevar a cabo el proceso de optimización topológica.

## 6.2 Optimización topológica en el cuerpo de engranes rectos

Partiendo de los engranes pertenecientes al modelo de reductor de velocidad CSRTO-2019 que fueron seleccionados y generados en los capítulos anteriores, se propone la optimización topológica del cuerpo de estos elementos mediante el uso de las herramientas contenidas en el software HyperMesh® a través de su módulo Optistruct®, tomando en cuenta la metodología para optimizar propuesta en la figura 6.7.

Lo que se espera de este proceso, es la obtención de trayectorias óptimas de material en el cuerpo de los engranes, propiciando con ello la eliminación de material cuyo valor de esfuerzos de von Mises sea despreciable comparado con el valor máximo, pero manteniendo en todo momento la función estructural del elemento. Lo anterior se traduce en una disminución del peso total del reductor de velocidad, lo cual atiende a los objetivos de diseño planteados en este trabajo.

### 6.2.1 Set up de los modelos de engranes y definición de las zonas de diseño

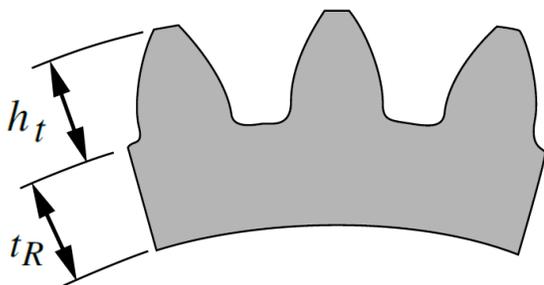
El modelo de reductor de velocidad CSRTO-2019 contempla el uso de un total 4 engranes, en un inicio es necesario analizar cuáles de ellos son candidatos a ser optimizados. El criterio para su selección se basó en el factor de espesor del aro  $K_B$  presentado por la AGMA (American Gear Manufacturers Association AGMA 2001-B88, 1988) que toma en cuenta situaciones donde un engrane con diámetro grande, hecho con un aro y brazos radiales, en lugar de un disco sólido, tiene una profundidad pequeña del aro, en comparación con la profundidad del diente (Norton, 2011). En tales diseños, la falla por fractura radial suele ubicarse en el aro, en lugar de en la raíz del diente. El espesor del aro  $t_R$  se puede calcular a partir de la siguiente expresión:

$$m_B = \frac{t_R}{h_t} \quad (6.1)$$

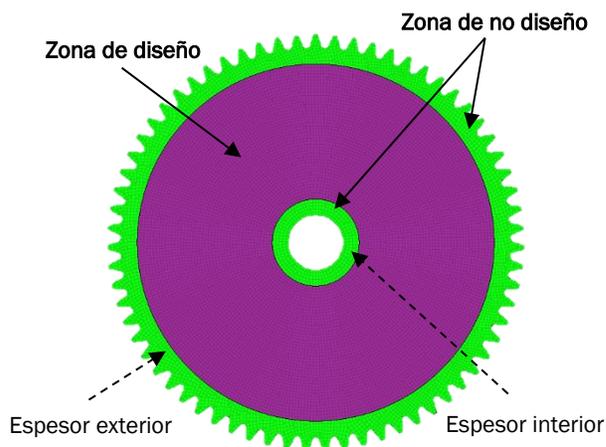
Donde  $m_B$  se define como la **relación de respaldo** y  $h_t$  es la profundidad completa del diente, como se muestra en la figura 6.8. Se considera que para  $m_B \geq 1.2$ , el aro tiene el espesor y resistencia suficiente para resistir las cargas de trabajo (Norton, 2011).

Para fines de diseño, el espesor del aro es clasificado en 2 tipos: espesor exterior e interior, el primero se encuentra en la región adyacente a los dientes de los engranes y el segundo en la zona circundante al eje (Fig. 6.9).

A partir de las consideraciones anteriores, se definen las zonas de diseño y no diseño de los engranes. La zona de diseño es aquella que está comprendida entre los dos espesores de aro (exterior e interior) y la zona de no diseño son las dos regiones restantes; esta descripción puede observada en la figura 6.9.



**FIGURA 6.8** Parámetros de la AGMA para el espesor del aro (Norton, 2011);  $h_t$  profundidad completa del diente;  $t_R$  espesor del aro.



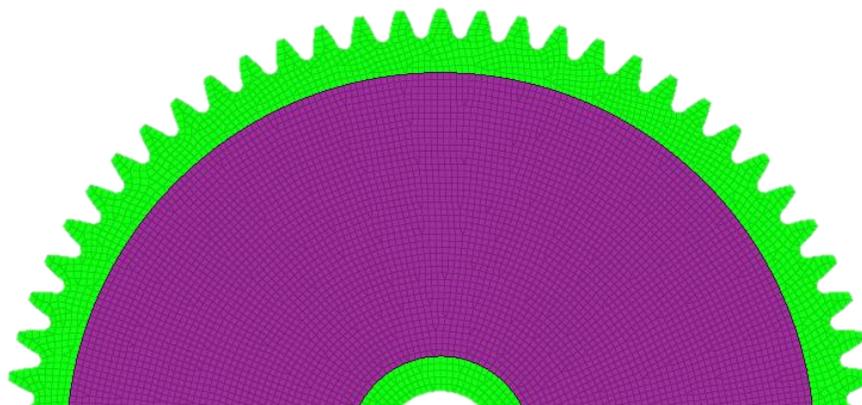
**FIGURA 6.9** Definición de las zonas de diseño y no diseño basado en el factor de espesor del aro  $K_B$ .

Una vez realizado el análisis de espesor del aro en los engranes del reductor de velocidad, se generó la tabla 6.1, en la cual se puede observar que el espesor de la zona de diseño para los engranes de 28 y 23 dientes es muy pequeña comparado con los engranes de mayor tamaño, por lo que, para el proceso de optimización únicamente serán considerados los engranes de 67 y 60 dientes.

**TABLA 6.1** Definición de los espesores del aro y zonas de diseño.

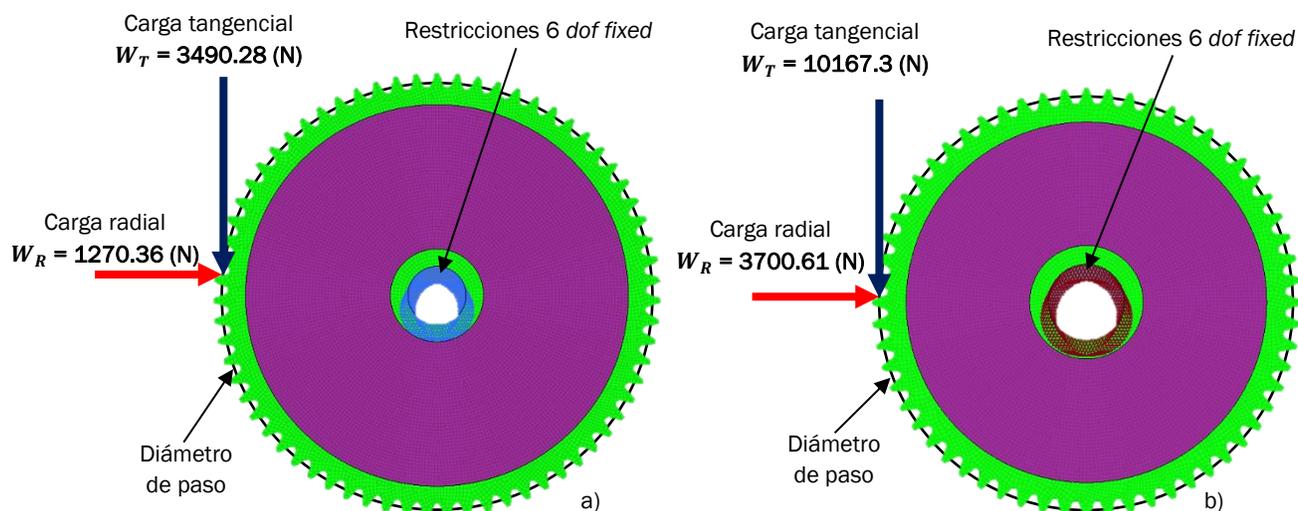
Engrane (número de dientes)	Diámetro de paso (mm)	Diámetro del eje (mm)	Addendum (mm)	Dedendum (mm)	Profundidad total del diente (mm)	Relación de respaldo	Espesor de orilla (mm)	Diámetro de diseño exterior (mm)	Diámetro de diseño interior (mm)	Espesor zona de diseño (mm)
67	134	18	4	5	9	1.2	10.8	118.2	28.8	89.4
60	120	22	4	5	9	1.2	10.8	104.2	32.8	71.4
28	56	23	4	5	9	1.2	10.8	40.2	33.8	6.4
23	46	18	4	5	9	1.2	10.8	30.2	28.8	1.4

Partiendo de los engranes seleccionados para el proceso de optimización, se realizó el mallado de la geometría que fue importada de los modelos generados en CATIA en la sección 5.3. Se utilizó una malla mixta de elementos rectangulares y triangulares para el modelo completo, incluyendo zonas de diseño y no diseño, con elementos de 1 (mm) de arista; la malla se generó sobre la superficie de una de las caras del engrane, y posteriormente mediante la opción *offset* (arrastre) se generó la malla 3D hasta el espesor indicado, utilizando elementos de 1 [mm] de profundidad.



**FIGURA 6.10** Mallado de la geometría de los engranes con elementos rectangulares y triangulares de 1 (mm) de arista, un *offset* de 16 y 24 (mm) para los engranes de 67 y 60 dientes respectivamente, y elementos de 1 (mm) de profundidad.

A continuación, se aplicaron las cargas radiales y tangenciales definidas en el programa *CSRTO-2019.nb* para el diseño del reductor de velocidad, dichas cargas fueron colocadas en posición con el diámetro de paso como se muestra en la figura 6.11. Por otra parte, cada engrane fue totalmente restringido en el centro (6 grados de libertad fijados) a fin de simular un caso extremo de carga.



**FIGURA 6.11.** Aplicación de cargas y definición de restricciones; a) engranes de 67 dientes; b) engrane de 60 dientes

### 6.2.2 Configuración de la optimización topológica (Engranes)

Atendiendo a la metodología de la figura 6.7, en esta sección se definen las variables de diseño, las restricciones y los objetivos del problema con el fin de ejecutar el proceso de optimización.

Para la configuración es necesario aclarar que la optimización topológica utilizada por Optistruct® es una técnica matemática que altera y optimiza la forma y distribución de material de una estructura dentro de un dominio de diseño (zona de diseño). Este dominio requiere de una discretización mediante una malla de elemento finito para que el programa pueda calcular las propiedades del material de cada elemento. Finalmente, el algoritmo se encargará de optimizar el objetivo definido por el usuario bajo las restricciones dadas (Altair University, 2015).

Considerando lo anterior y tomando en cuenta el método descrito por Vázquez, C. (2015), se define la función objetivo como:

$$\min: F(x) = Compliance$$

Tal que:

$$x \in X = \{x \in R^n | h_i(x) \leq 0, i = 1, 2, \dots, m\} \quad 6.3$$

Donde:

$h_1 = 0.5$  *fracción de masa*

$h_2 =$  *restricción de manufactura draw*

$h_3 =$  *restricción Pattern Grouping, cyclical simmetry*

- $x$  se define como el vector de variables de diseño, considerado como las densidades de los elementos de la optimización topológica. Con lo anterior se busca que la **densidad equivalente** de los elementos tome un valor entre 0 y 1, definiendo de esta manera al elemento como vacío o sólido respectivamente. Los valores intermedios son considerados material ficticio.

Sin embargo, en la práctica la solución óptima del problema de optimización involucra trabajar con densidades intermedias de material, de tal manera que se requiere un criterio para “penalizar” dichas densidades, éste es conocido como *representación de la ley de potencia de las propiedades de elasticidad*, la cual supone que la rigidez del material depende linealmente de la densidad.

Se sabe entonces que, el valor de densidad cambiará continuamente de 0 a 1 (valor normalizado) durante el proceso, de tal modo que cada elemento retenga una parte de la densidad de material basado en la energía de deformación, a mayor cantidad de energía de deformación dentro de un elemento, mayor será el valor de densidad (más cercano a 1).

- **Compliance** se define como una medida inversa de la rigidez global, es decir, la energía de deformación, cuándo el *Compliance* es minimizado, la rigidez se maximiza.
- Dado que la mayor parte del objetivo de la optimización topológica es utilizar menor cantidad material y dar mayor rigidez para una determinada condición de carga, se utiliza la **restricción de masa**, mediante la cual se espera que la topología final de los engranes cuente con un valor máximo del 50% de la masa total del modelo. Este porcentaje es recomendado con el fin de generar una topología sencilla, además de una disminución significativa de material, comparado con porcentajes superiores o inferiores (Vázquez Hernández, 2015).
- Por otra parte, se aplica la **restricción draw**, la cual es una restricción de manufactura pensada en procesos de fundición en los cuales se requiere el deslizamiento de los moldes

en una dirección determinada. Utilizando la opción *single* (simple), se supone el uso de un solo molde que se desplaza en una dirección de apertura fija, mientras que la superficie inferior es considerada como la contraparte del molde.

- Por último, mediante la **restricción de manufactura Pattern Grouping**, y utilizando la opción *Cyclical Symmetry*, se logra repetir un patrón la cantidad de veces definida por el usuario alrededor de un eje, para este caso de estudio, el eje de los engranes. Ésta restricción vincula las variables topográficas del modelo garantizando simetría en la solución, logrando con ello reforzar el modelo en una dirección determinada (Altair University, 2015).

El número de patrones  $ucyc$  propuesto por Vázquez, C. (2015), se define mediante la expresión  $ucyc = \frac{N}{m}$ , donde  $N$  es el número de dientes y  $m$  el módulo del engrane, manteniendo el valor  $ucyc$  entre 10 y 20 para diferentes casos de  $m$ . Sin embargo, para las condiciones de carga de los engranes presentados en este trabajo, no es posible aplicar el modelo, debido a que se observó que la optimización arrojaba geometrías del tipo “brazos rectos” y no del tipo “rehilote”, siendo éstas últimas las esperadas.

De tal modo que, a partir de la variación del parámetro  $ucyc$  hacia valores inferiores y superiores mediante 10 experimentos con valores 5, 7, 8, 9, 10, 11, 15, 30, 33 y 45 se determinó que la geometría deseada para ambos engranes se encontraba utilizando valores  $ucyc$  de entre 5 y 9.

El material seleccionado para el análisis fue acero AISI 4140T con las propiedades que se muestran en la tabla 6.2.

**TABLA 6.2** Propiedades del acero AISI 4140T seleccionado para el diseño de los engranes.

Límite elástico $\sigma_y$ (MPa)	Resistencia a la tensión $\sigma_e$ (MPa)	Módulo de elasticidad $E$ (GPa)	Densidad $\rho$ $\left(\frac{Kg}{m^3}\right)$	Relación de Poisson $\nu$
1050	1160	210	7850	0.3

Los parámetros finales ingresados en Optistruct® para la optimización topológica del cuerpo de los engranes de 60 y 67 dientes se muestran en la tabla 6.3, en ella se incluyen las características de la variable de diseño, las respuestas, restricciones y los objetivos ingresados en esta interfaz de usuario. En la siguiente sección se analizan los resultados utilizando la información de los parámetros definidos en esta tabla.

**TABLA 6.3** Parámetros para la optimización topológica de la zona de diseño de los engranes de 60 y 67 dientes.

Variable de diseño	<i>responses</i>	Restricción <i>draw</i>	Restricción <i>Pattern Grouping</i>	<i>dconstraints</i>	<i>objective</i>
<b>desvar</b> dv1	<b>response</b> Compliance				
	<b>response type</b> Weighted comp	<b>draw type</b> single	<b>pattern type</b> cyclic	<b>constraint</b> const	
<b>props</b> Design	<b>load steps</b> Tangencial Radial	<b>obstacle</b> Non Design	<b>ucyc</b> 8	<b>lower bound</b> -1.000e+20	<b>objective</b> min
<b>type</b> PSOLID	<b>response</b> Mass_Frac	<b>draw direction</b> X axis	<b>reference axis</b> shaft axis	<b>upper bound</b> 0.5	<b>response</b> Compliance
	<b>response type</b> massfrac			<b>response</b> Mass_Frac	

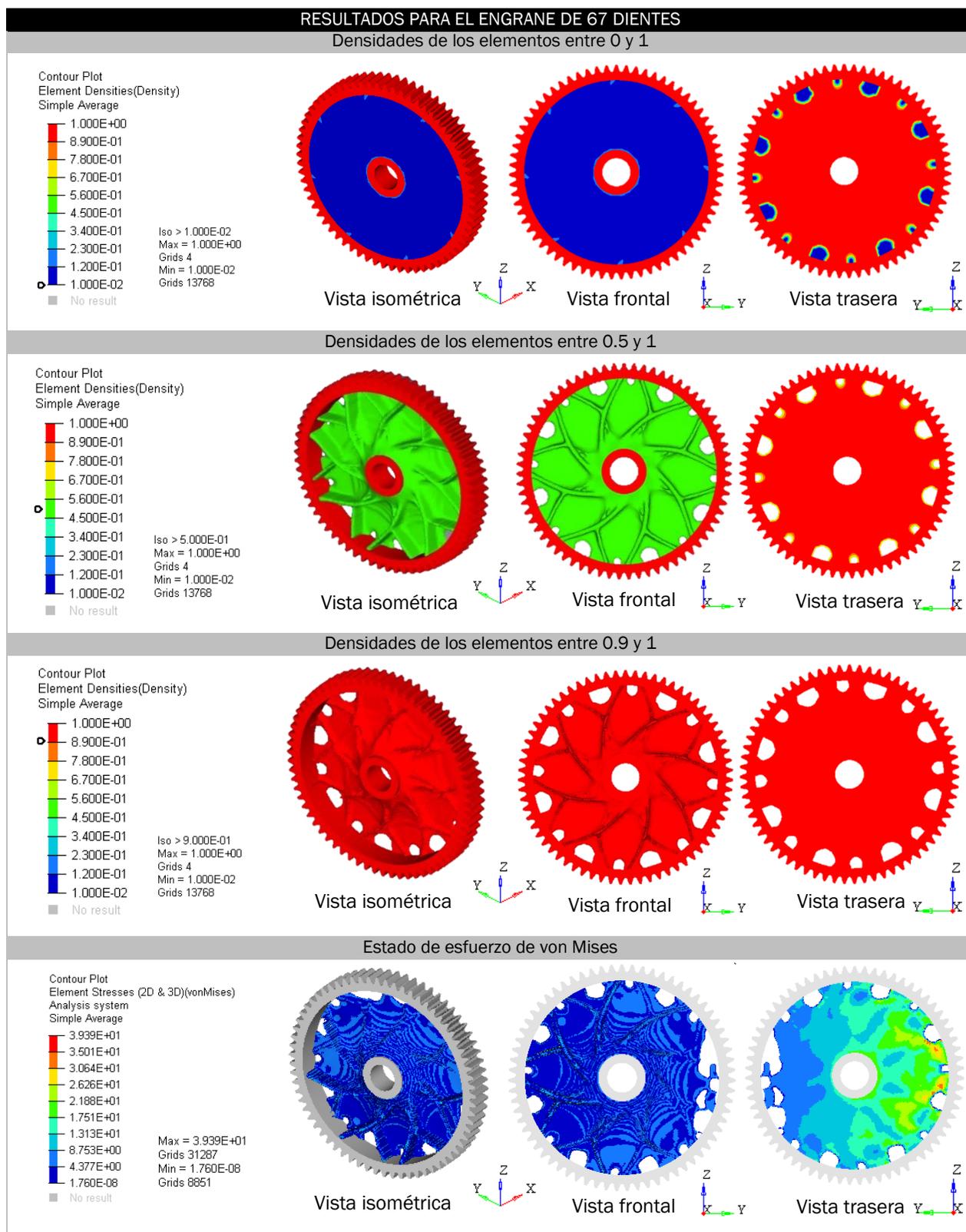
### Resultados de la optimización en el cuerpo de los engranes

El proceso de optimización topológica arrojó como resultado información sobre el flujo de esfuerzo a través de la zona de diseño, la variación de la energía de deformación y su relación con la densidad relativa de los elementos en el cuerpo del engrane.

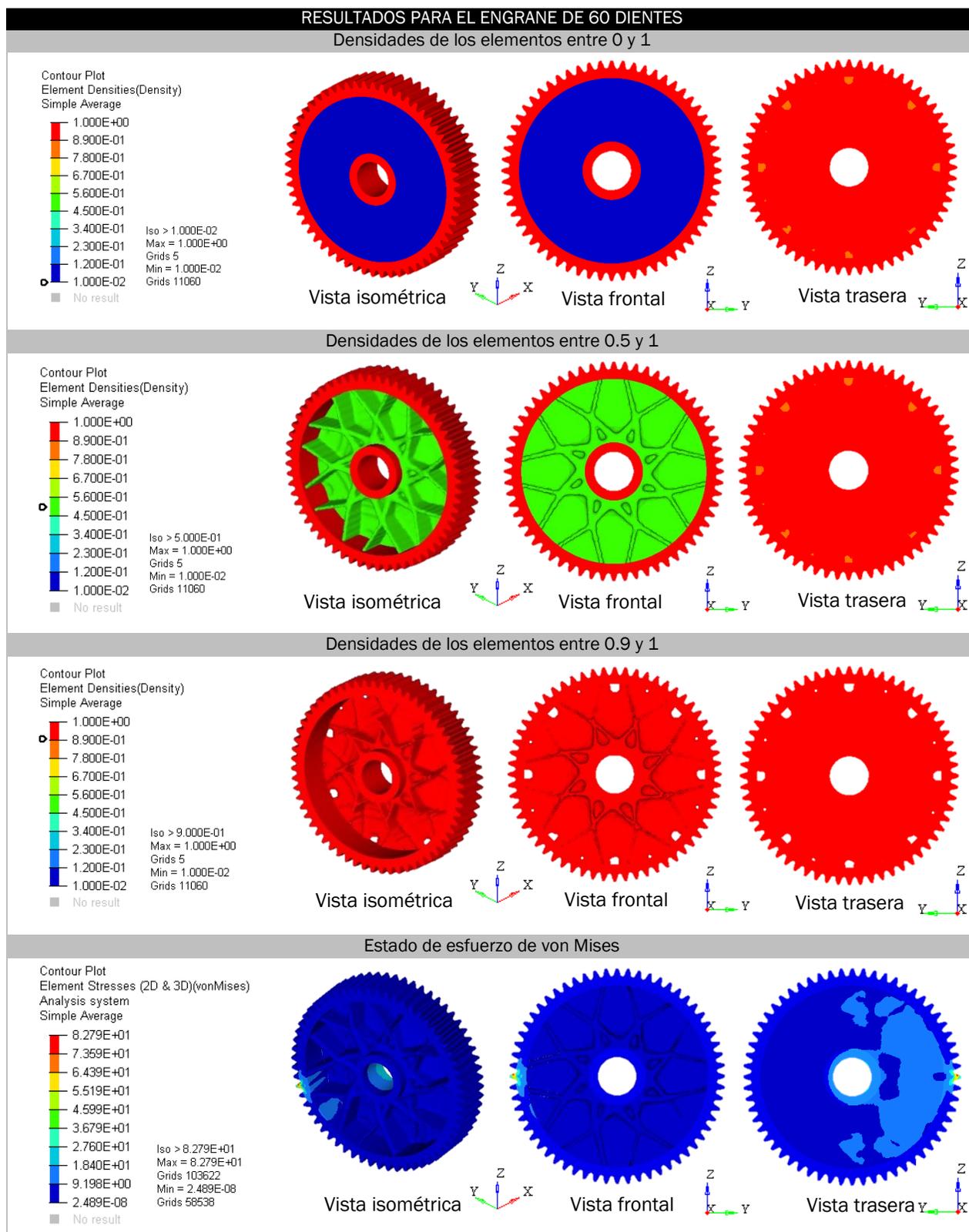
En la figura 6.12 y 6.13 se pueden observar los resultados de la optimización para cada engrane, incluyendo tres casos de densidad diferente: elementos de densidades entre 0 y 1, entre 0.5 y 1, y entre 0.9 y 1; además del estado de esfuerzos de von Mises. Se debe tomar en cuenta que dada la escala de colores presentada, el color rojo y los colores cercanos a éste, representan a los elementos “llenos” que necesitan mantenerse para minimizar la deformación de la estructura antes las cargas y restricciones definidas.

Se puede afirmar entonces, que los parámetros establecidos en la tabla 6.3 cumplieron correctamente su función al permitir que se generara una topología sencilla, siendo el rango de densidades 0.5 – 1 (para ambos casos de estudio) donde se mostraban geometrías más claras para su interpretación, diseño y posterior manufactura, entre las que se pueden destacar brazos radiales que siguen una trayectoria curva (tipo rehilete) y se auto refuerzan, y que además, dado el estado de esfuerzo de von Mises satisfacen los requerimientos de resistencia

Dado lo anterior, se advierte que los esfuerzos de von Mises siguen siendo ínfimos comparados con el esfuerzo de fluencia del material (Tabla 6.2), con un factor de seguridad superior a 10 para ambos casos. A pesar de poder llevar al material a un límite superior de esfuerzos, se prefiere un modelo conservador a efectos de poder validar la geometría y conocer su comportamiento ante efectos dinámicos, considerados parcialmente en este trabajo.



**FIGURA 6.12** Resultados de la optimización topológica para el engrane de 67 dientes.



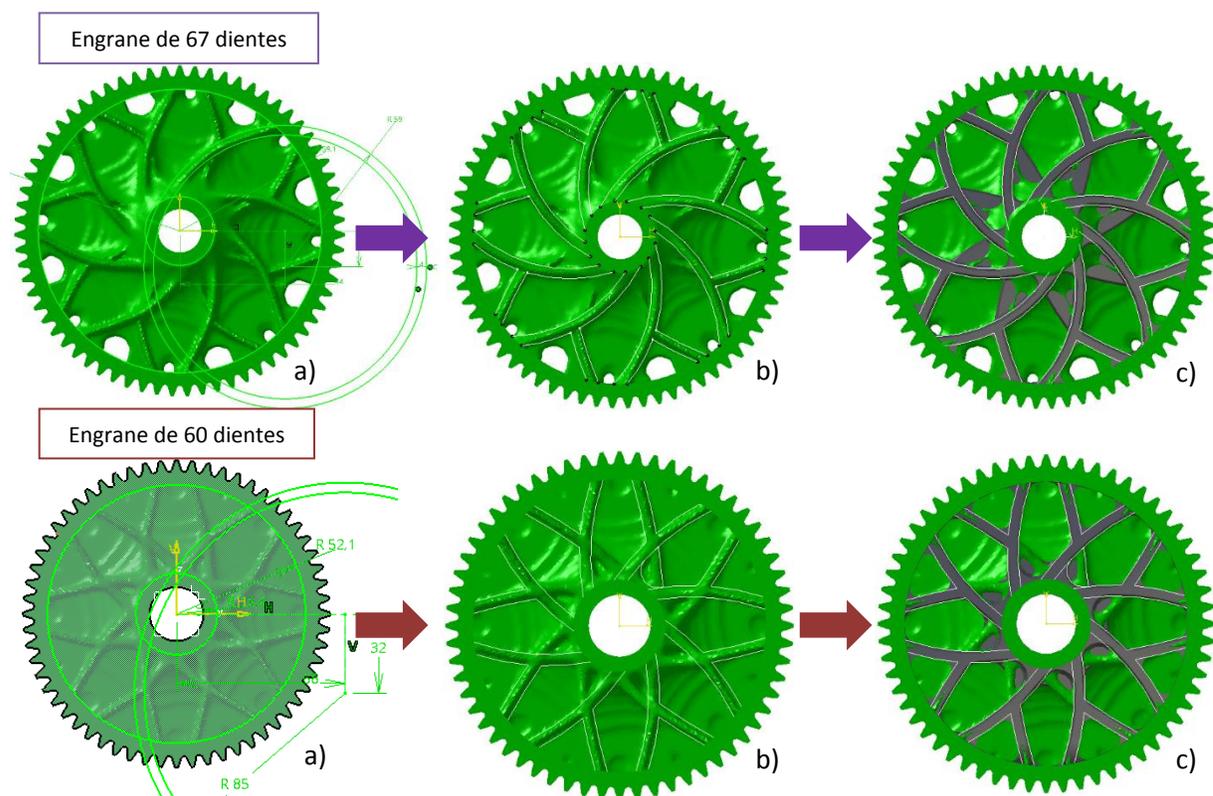
**FIGURA 6.13** Resultados de la optimización topológica para el engrane de 60 dientes.

### 6.2.3 Interpretación en CATIA® de la geometría optimizada (Engranés)

A continuación se muestra la interpretación de la geometría resultante de la optimización topológica, donde para efectos de diseño, la densidad de los elementos de los engranes fue fijada entre 0.5 y 1, logrando con ello una mejor definición visual de las trayectorias óptimas de material, en la figura 6.15 se observa el proceso para el modelado 3D de los brazos radiales del cuerpo de los engranes mediante el trazado de perfiles sencillos como líneas y circunferencias.

Se buscó que el dibujo de los perfiles circulares cubrieran en su totalidad el ancho y largo de un brazo radial, lo cual se logró mediante la definición de un centro de circunferencia y un *offset* de este perfil (Fig. 6.14-a), una vez identificadas las dimensiones de los perfiles, se procedió a la generación de un patrón circular alrededor del eje del engrane logrando con ello el perfil total del cuerpo del engrane (Fig. 6.14-b).

El *sketch* realizado fue proyectado sobre la cara del engrane original superpuesto en un mismo ensamble, de tal manera que bastó una sola operación *pocket* para generar el modelo 3D del engrane optimizado (Fig. 6.14-c).

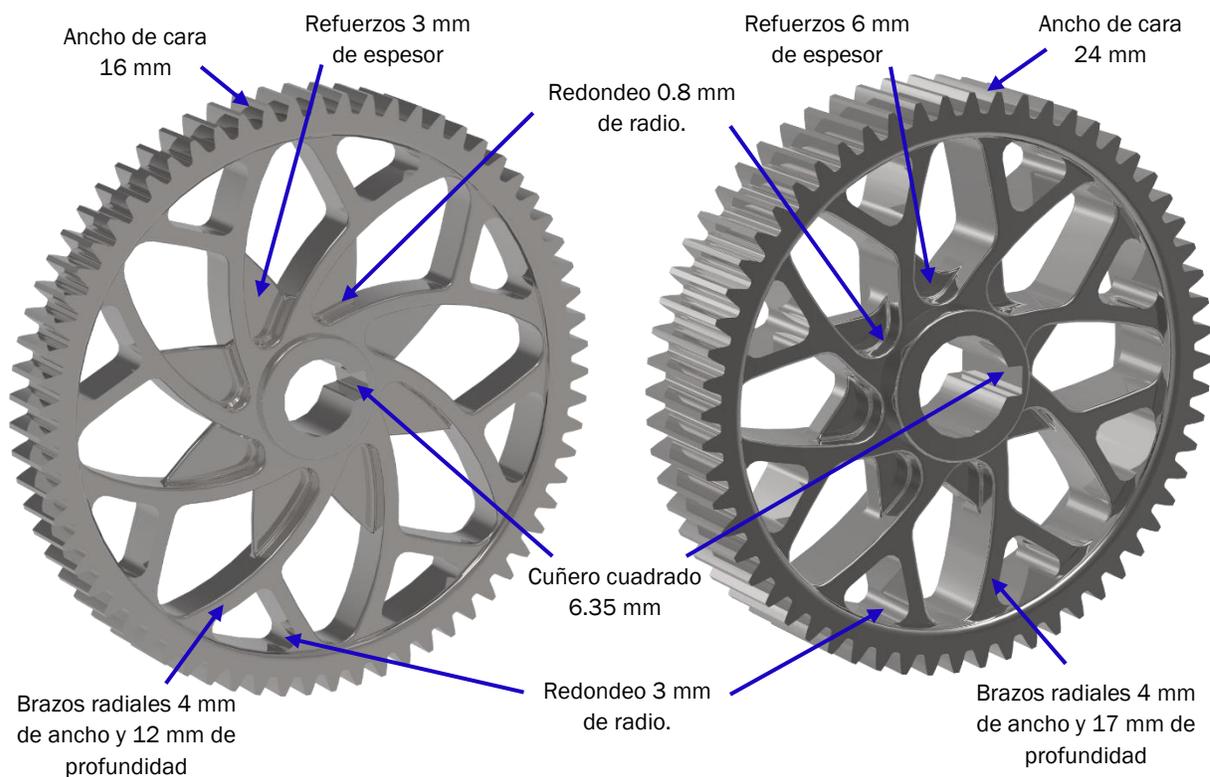


**FIGURA 6.14** Interpretación de la geometría resultante de la optimización topológica usando elementos con densidades entre .5 y 1. a) Identificación y dibujo de brazos radiales principales; b) Generación de patrón circular con 8 repeticiones del dibujo del brazo radial; c) Extrusión del *sketch* representativo de los brazos radiales para generar modelo 3D.

Como último paso se añadieron refuerzos de material en las zonas donde existía una baja densidad de elementos pero considerando que estos se encontraban en un rango de entre el 10% y 50% del espesor original, logrando con ello, definir totalmente todas las trayectorias, y eliminar la zona delgada del fondo de la geometría (contraparte del molde). Adicionalmente a lo anterior y por cuestiones de balanceo, los brazos y refuerzos del cuerpo de los engranes fueron centrados simétricamente en un plano medio del engrane, paralelo a una de las caras laterales (Fig. 6.15).

Con la finalidad de evitar concentraciones de esfuerzos, bordes afilados, y hacer factible la manufactura, también se agregaron redondeos a la geometría del cuerpo de los engranes, tanto en las uniones con los aros exteriores e interiores, así como en las intersecciones y divisiones de los brazos radiales.

El modelo 3D final de los engranes de 60 y 67 dientes se muestra en la figura 6.15, en la cual se incluyen algunas observaciones para cuestiones de manufactura que se verán más adelante.



**FIGURA 6.15** Modelos 3D de los engranes de 60 y 67 dientes resultantes de la interpretación de la optimización topológica.

## Manufactura de los engranes.

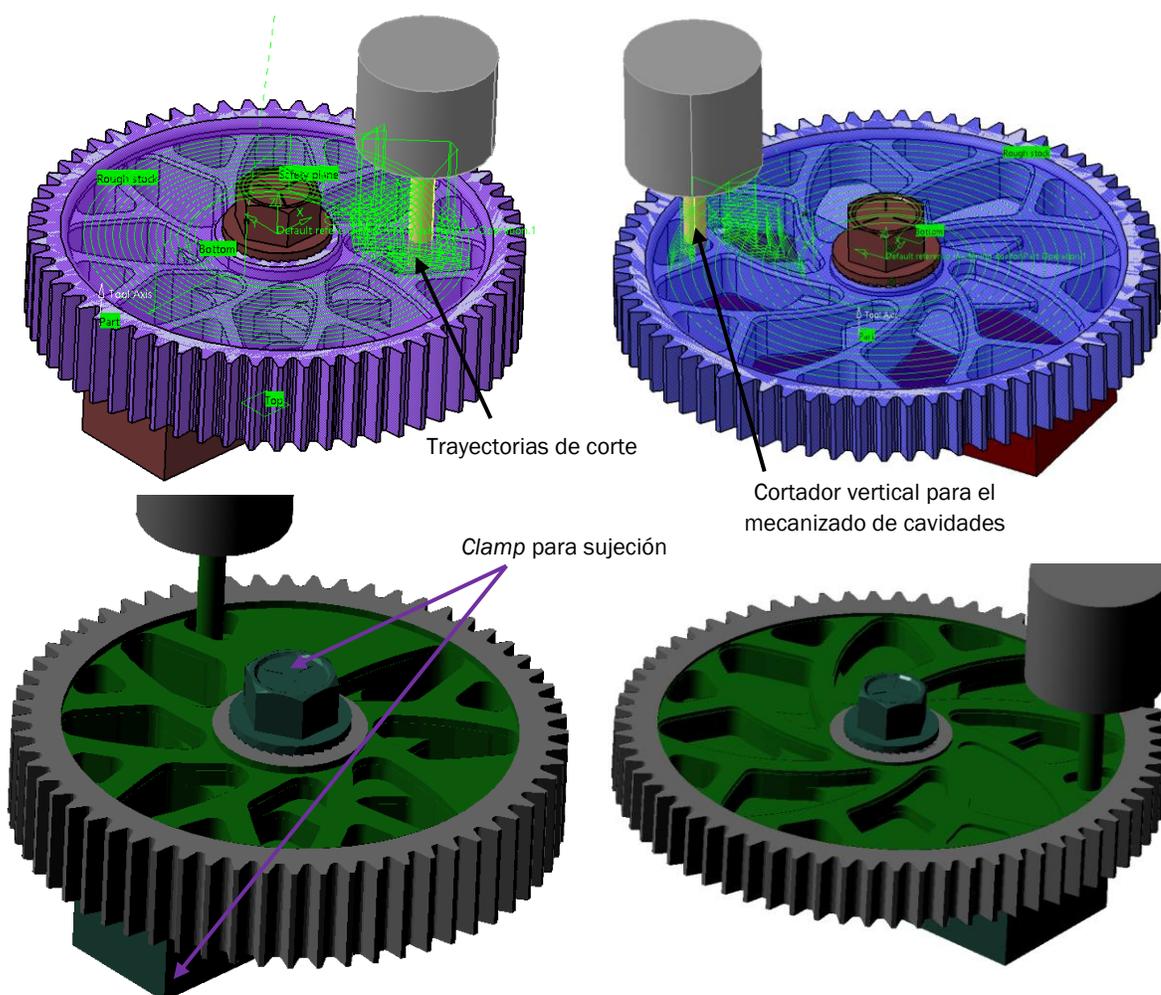
En la sección 6.2.2 se mencionó que la restricción *draw - single* permitiría la manufactura del modelo mediante un proceso de fundición, sin embargo, en los objetivos de diseño definidos al inicio de este trabajo (Fig. 3.5), se planteó la necesidad de la manufactura mediante el uso de herramientas de control numérico (CNC) para mejorar las tolerancias del ensamble. Entonces, cabe hacer una comparación y afirmar que existe una similitud entre los procesos de fundición y manufactura por arranque de viruta, y que las restricciones definidas en el proceso de optimización serán válidas para ambos procesos debido a que la dirección de desmoldeo también es necesaria en el caso del mecanizado que realiza una máquina de fresado vertical CNC.

En un inicio, para la manufactura del cuerpo de los engranes se considera que éstos ya cuentan con dientes, eje y cuñero, cuyo formado no representa problema dada la amplia gama de métodos para realizarlo. De tal manera que, el siguiente paso consiste en diseñar un método de sujeción (clamp) para fijar la pieza a la bancada de la máquina, tomando en cuenta que éste debe aprovechar la geometría del engrane para cumplir su objetivo (Fig. 6.16).

Otra parte importante es la programación de las trayectorias de mecanizado, las cuales se generan mediante el uso de algún software especializado que contenga el post-procesador que se comunicará con la máquina de control numérico, en este caso, se realizó la programación en el módulo *Advance Machining* de CATIA® usando el control fanuc.

Al mismo tiempo es necesario definir las herramientas de corte para los engranes tomando en cuenta materiales (Tabla 6.2), estrategias de mecanizado, tiempos de entrega, etc. Para los engranes del caso de estudio, se define que las herramientas necesarias para la manufactura del cuerpo de los engranes se pueden resumir en dos tipos: un cortador recto de 6 mm de diámetro con una longitud mínima de 12 mm, y para el detalle de algunas zonas muy pequeñas se recomienda el uso de un cortador de forma de 1/16 [in]

Haciendo un análisis del tiempo estimado de manufactura, para parámetros de corte que se mantienen por debajo del máximo permitido (para herramientas de carburo de tungsteno), utilizando trayectorias *helical* y con un traslape del 30% del diámetro de las herramientas, se determina que el tiempo promedio de mecanizado por engrane es de 4 horas, tomando el tiempo a partir de que el código comienza a ejecutarse. El resto de las consideraciones de manufactura salen del alcance de este trabajo.



**FIGURA 6.16** Simulación de manufactura de los engranes de 60 y 67dientes mediante el proceso de arranque de viruta en máquina CNC de tres ejes.

#### 6.2.4 Validación FEA de la geometría interpretada (Engranes)

Con la finalidad de validar la geometría del cuerpo de los engranes generados en la sección 6.2.3, y que se muestran en la figura 6.15, se realizó un análisis de esfuerzos por elementos finitos (FEA) para ambos engranes, lo anterior bajo las condiciones de carga y restricciones mostradas en la figura 6.11 al igual que en los engranes originales.

El análisis FEA del engrane de 60 dientes (Fig. 6.18) muestra que el esfuerzo máximo se presenta en la zona del diente localizada cerca del diámetro de paso, con un valor de 429 [MPa]. Considerando el material seleccionado (Tabla 6.2), este engrane tiene un factor de seguridad de 2.44 para el esfuerzo de fluencia. En cuanto al cuerpo del engrane, el esfuerzo máximo se

presentó en la costilla de refuerzo del brazo radial principal con un valor promedio de 203 [MPa], por lo que éste cuenta con un factor de seguridad de 5.17, representando un 47.32% del esfuerzo máximo general, de tal manera que este engrane mantendrá satisfactoriamente su condición estructural bajo las condiciones de carga definidas.

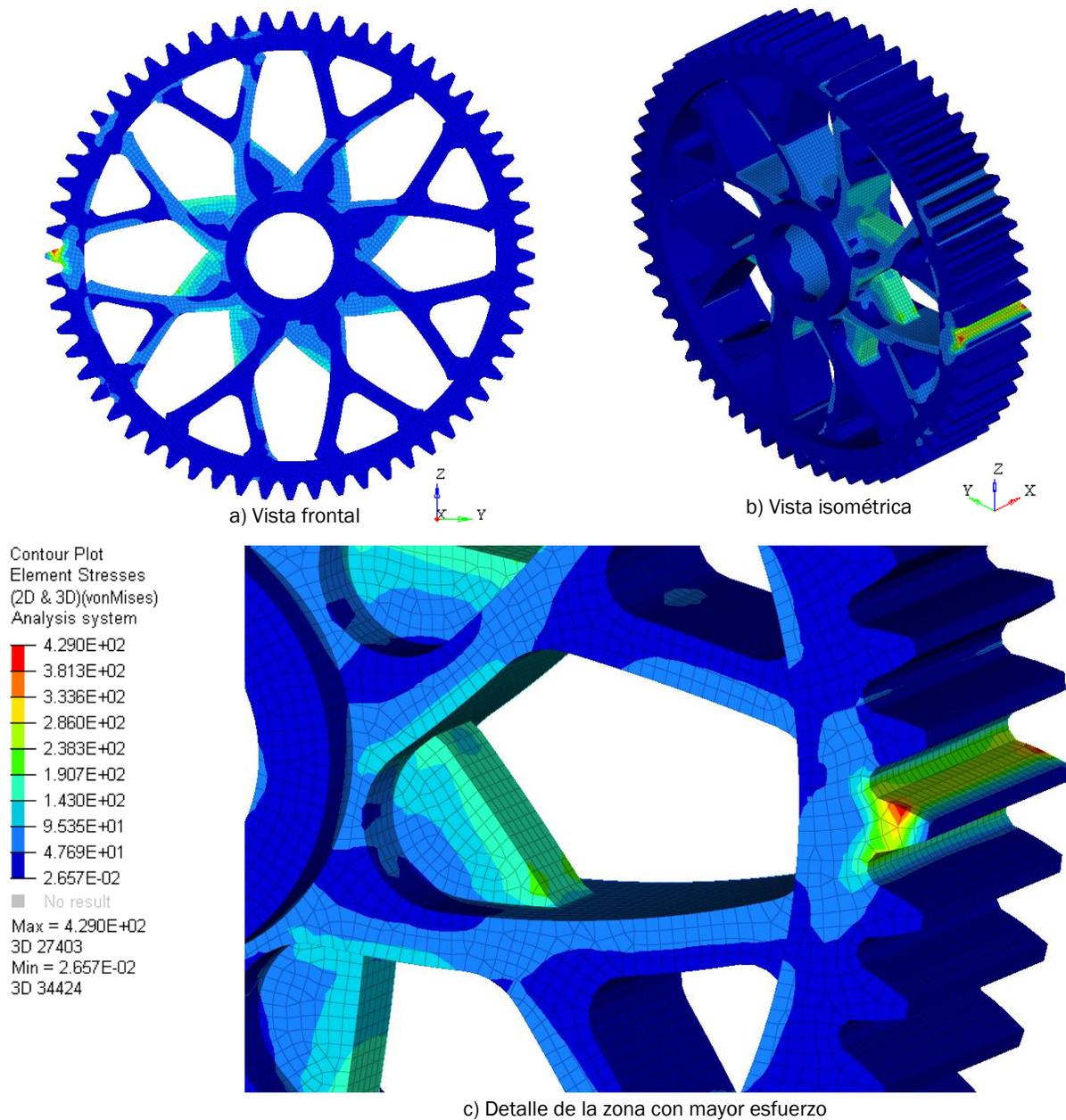


FIGURA 6.18 Estado de esfuerzos del engrane de 60 dientes

Por otra parte, en el engrane de 67 dientes (Fig.6.19) se observa que el valor de esfuerzo máximo es de 245 [Mpa] en la zonas de los dientes, y al igual que en el caso anterior, el mayor esfuerzo en el cuerpo del engrane se presenta en las costillas de refuerzo con un valor de 158 [Mpa]. Lo anterior da como resultado un factor de seguridad general de 4.29 y de 6.65 para el cuerpo del engrane, es decir, un 64.49% del esfuerzo máximo general. Lo anterior se traduce en un engrane que cumplirá con las condiciones de carga, y que mantendrá su integridad estructural.

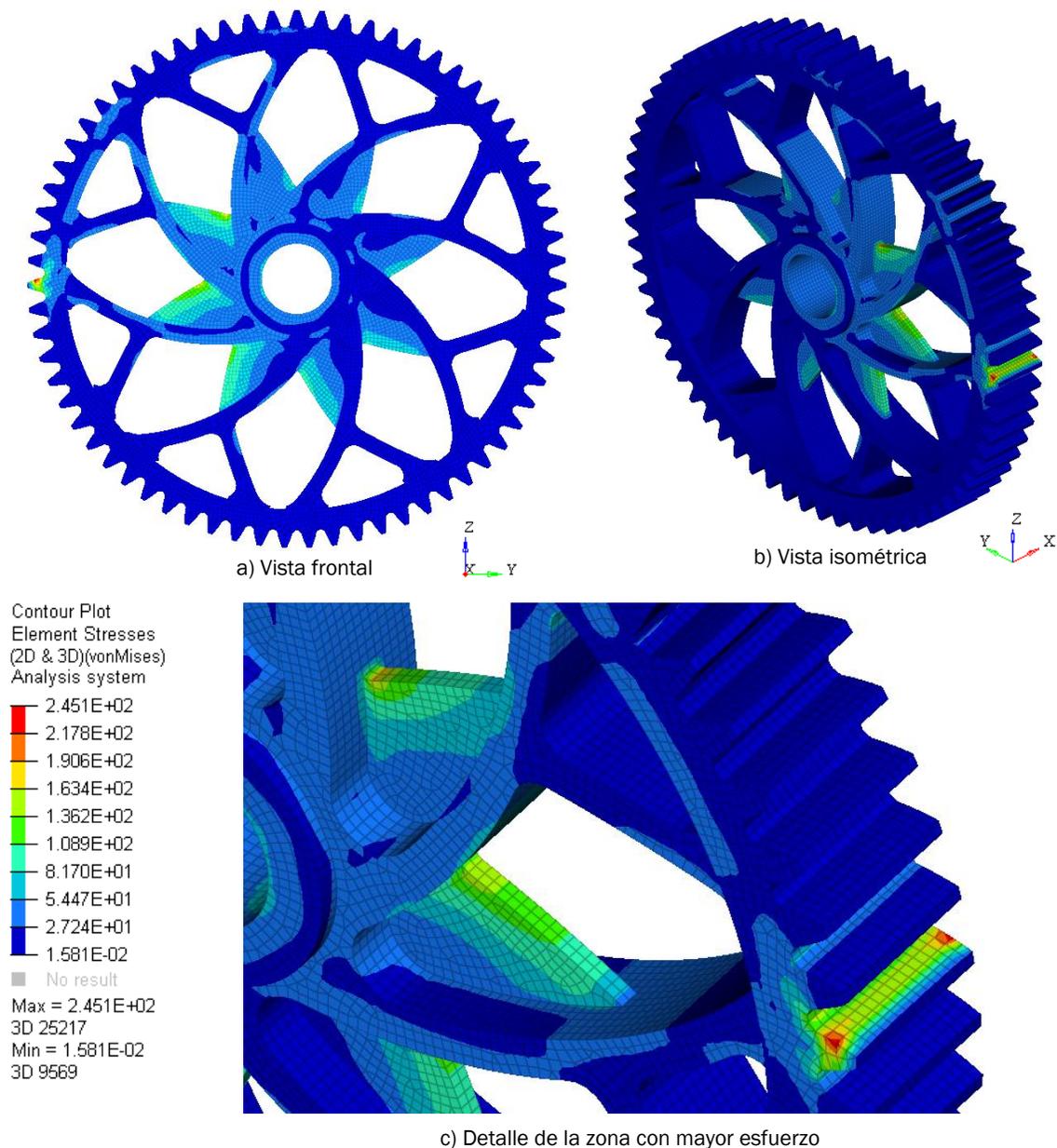


FIGURA 6.19 Estado de esfuerzos del engrane de 67 dientes

### 6.3 Optimización topológica en el cuerpo de las carcasas

En esta sección se presenta la optimización de las carcasas pertenecientes al reductor de velocidad CSRTO-2019 las cuales se muestran en la sección 5.3 de este trabajo. Al igual que en el caso de los engranes, se utilizó el software Hypermesh® a través del módulo Optistruct®, y se tomó en cuenta la metodología para optimizar de la figura 6.7. Para la optimización resultó de vital importancia el análisis del reglamento vigente de SAE International (2018), debido a que las carcasas son consideradas como guardas de seguridad, y por lo tanto, se debe tener especial cuidado en su diseño para evitar lesiones en las personas involucradas cuando el reductor de velocidad sea operado.

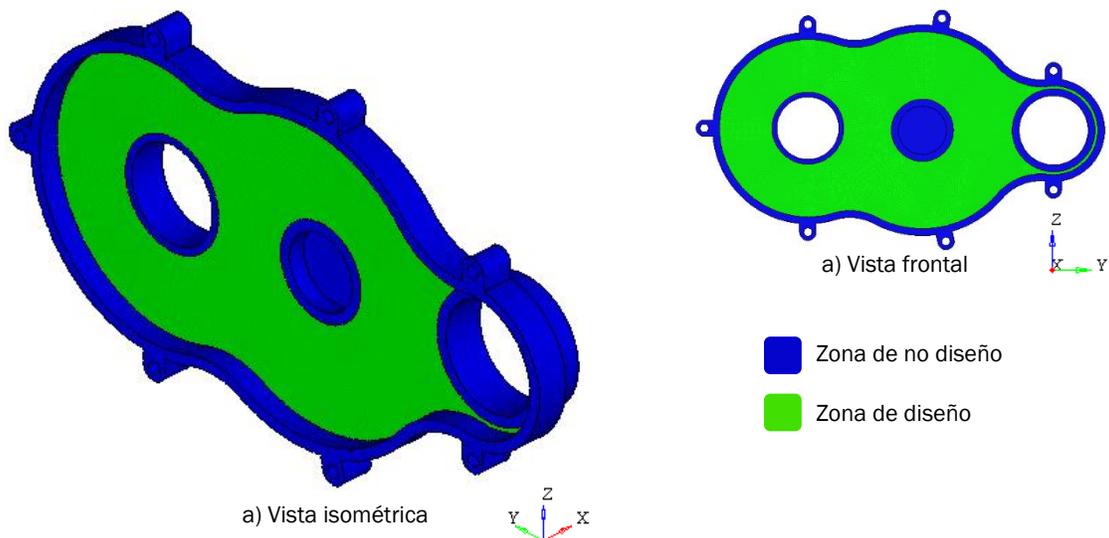
#### 6.3.1 Set up del modelo y definición de las zonas de diseño

Para la definición de las zonas de diseño y no diseño se tomó como referencia la parte B, artículo 9 del reglamento Baja SAE Rules 2019 (SAE International, 2018), la cual estipula que todas las partes rotatorias que compongan al sistema de transmisión deberán ser protegidas para evitar daños al conductor, jueces de pista o espectadores.

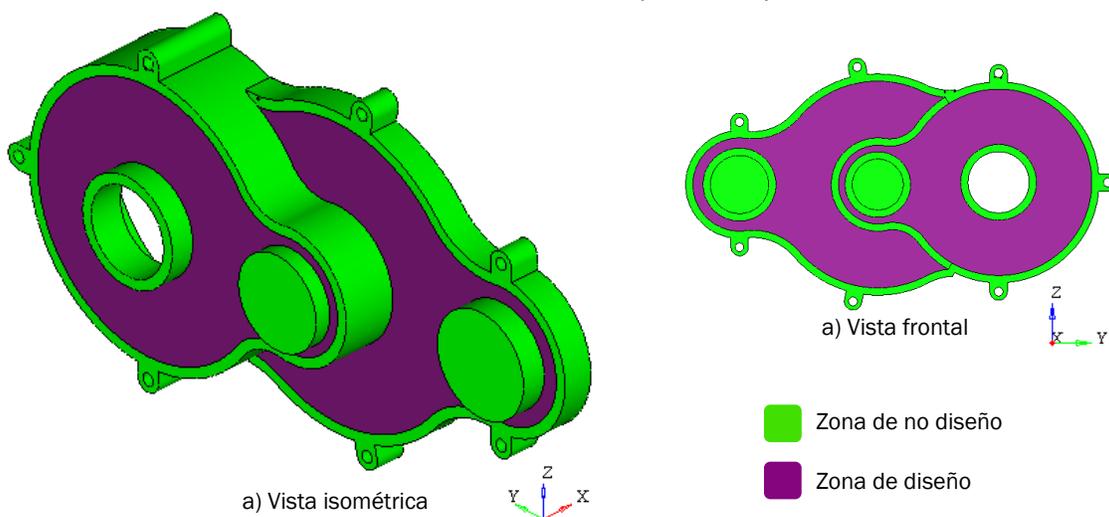
Las guardas deberán extenderse alrededor de la periferia de los componentes rotatorios (cadenas, engranes, catarinas, bandas, y CVTs) y deberán contar con un ancho superior al de la parte giratoria que se está protegiendo; adicionalmente en el caso de los orificios de ventilación se debe cuidar que en caso de alguna falla en el sistema, no exista ninguna ruta directamente tangente a algún componente giratorio. Los detalles de lo anteriormente descrito pueden encontrarse en la sección 1.2.1 y 1.2.2 de este trabajo.

Dadas las consideraciones de diseño mencionadas, se define como zona de diseño a aquella sección de las carcasas que está fuera del alcance de cualquier ruta directamente tangencial de todos los elementos giratorios que componen al tren motriz y extendiéndose hasta el plano o superficie donde termine el material, y excluyendo las zonas de alojamientos de rodamientos. La zona de no diseño son las áreas restantes.

### CARCASA LADO POLEA (IZQUIERDA)



### CARCASA SELLADA (DERECHA)



**FIGURA 6.20** Definición de las zonas de diseño y no de diseño de las carcasas.

Una vez definidas las zonas de diseño de las carcasas, se llevó a cabo el mallado general de los modelos con elementos mixtos rectangulares y triangulares de 1mm de arista. El procedimiento consistió en separar a las carcasas en un sub-ensamble compuesto por partes con geometría sencilla, de tal modo que cada una de estas partes pudiera ser tratada mediante una malla 2D, para posteriormente generar el *offset* de los elementos hasta la profundidad indicada de cada parte, utilizando elementos de 1 [mm] de profundidad (Fig. 6.20).

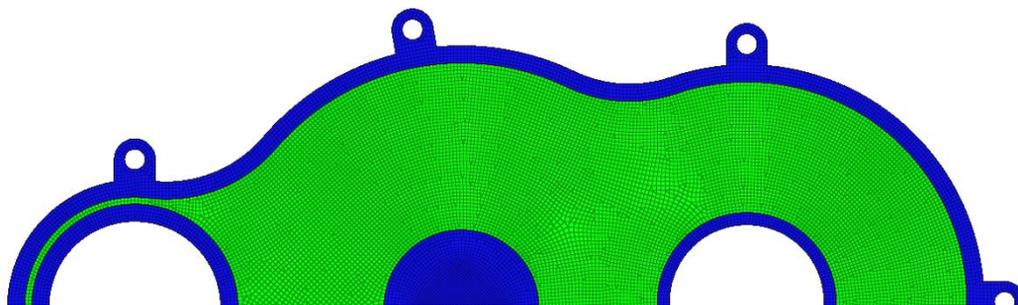


FIGURA 6.20 Mallado de las carcasas con elementos mixtos rectangulares y triangulares de 1 [mm] de arista.

Una vez definida la malla con los elementos correctos, se llevó a cabo la aplicación de las cargas y restricciones en las carcasas. Se consideraron 3 casos de carga presentes durante la operación del reductor de velocidad: Cargas radiales provenientes del contacto entre engranes, cargas externas debidas al terreno (saltos, paso sobre rocas, desniveles, etc.) y cargas laterales debido a la aceleración del vehículo al tomar una curva y/o por impactos leves (Fig. 6.21), estas cargas fueron concentradas en las camisas internas y externas de los alojamientos de los rodamientos debido a la interacción del tren de engranes con las carcasas en esta zona. Finalmente las restricciones fueron colocadas en los soportes de la periferia cuya unión supone 6 grados de libertad fijados.

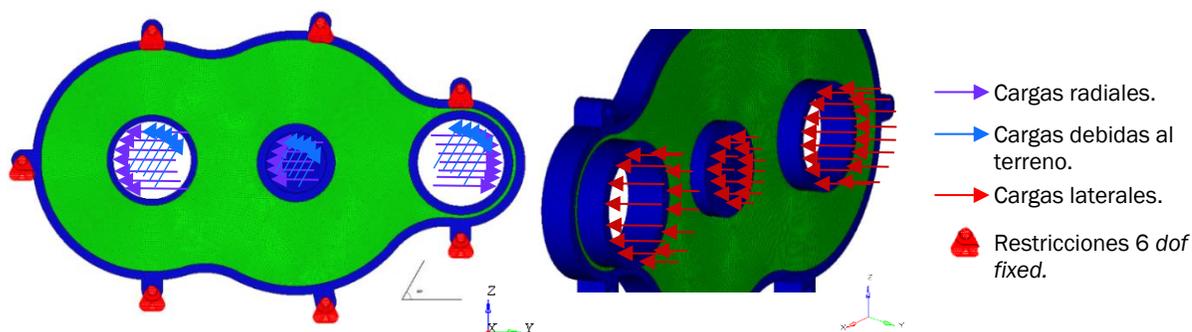


FIGURA 6.21 Aplicación de cargas y definición de restricciones para la carcasa izquierda y derecha.

### 6.3.2 Configuración de la optimización topológica (Carcasas)

Al igual que en el caso de los engranes (Sección 6.2.2) se considera la función objetivo como:

$$\min: F(x) = Compliance$$

Tal que:

$$x \in X = \{x \in R^n | h_i(x) \leq 0, i = 1, 2, \dots, m\}$$

Donde:

$h_1 = 0.65$  fracción de masa (Carcasa izquierda)

$h_1 = 0.75$  fracción de masa (Carcasa derecha)

$h_2 =$  restricción de manufactura draw – single

Donde  $x$  continúa siendo el vector de variables de diseño y el *Compliance* se utiliza como medida inversa de la rigidez global.

Los valores  $h_1$  definidos para cada carcasa surgen de la cantidad de masa disponible en las zonas de diseño, de tal manera que con valores inferiores, la optimización daría como resultado una estructura con una baja densidad de elementos.

La restricción de manufactura  $h_2$  aplica para ambas carcasas, y la finalidad es mantener las condiciones adecuadas para el mecanizado CNC discutidas en la sección 6.2.3

El material seleccionado para el análisis es aluminio 7075-T6 con las propiedades que se muestran en la tabla 6.4.

**TABLA 6.4** Propiedades del aluminio 7075-T6 seleccionado para el diseño de los engranes.

Límite elástico $\sigma_y$ (MPa)	Resistencia a la tensión $\sigma_e$ (MPa)	Módulo de elasticidad $E$ (GPa)	Densidad $\rho$ $\left(\frac{Kg}{m^3}\right)$	Relación de Poisson $\nu$
503	572	71.7	2810	0.33

Finalmente, los parámetros ingresados en Optistruct® para la optimización topológica de las carcasas se muestran en la tabla 6.5, en ella se incluyen las características de la variable de diseño, las respuestas, restricciones y los objetivos. En la siguiente sección se lleva a cabo la discusión de resultados y la interpretación de la geometría resultante.

**TABLA 6.5** Parámetros para la optimización topológica de la zona de diseño de los engranes de 60 y 67 dientes.

Variable de diseño	<i>responses</i>	Restricción <i>draw</i>	Restricción <i>Pattern Grouping</i>	<i>dconstraints</i>	<i>objective</i>
<b>desvar</b> dv1	<b>response</b> Compliance			<b>constraint</b> const	
<b>props</b> Design	<b>response type</b> Weighted comp	<b>draw type</b> single	<b>pattern type</b> 2-Plane symmetry	<b>lower bound</b> -1.000e+20	<b>objective</b> min
<b>type</b> PSOLID	<b>load steps</b> Tangencial Radial	<b>obstacle</b> Non Design	<b>reference axis</b> shaft axis	<b>upper bound</b> 0.5	<b>response</b> Compliance
	<b>response</b> Mass_Frac	<b>draw direction</b> X axis		<b>response</b> Mass_Frac	
	<b>response type</b> massfrac				

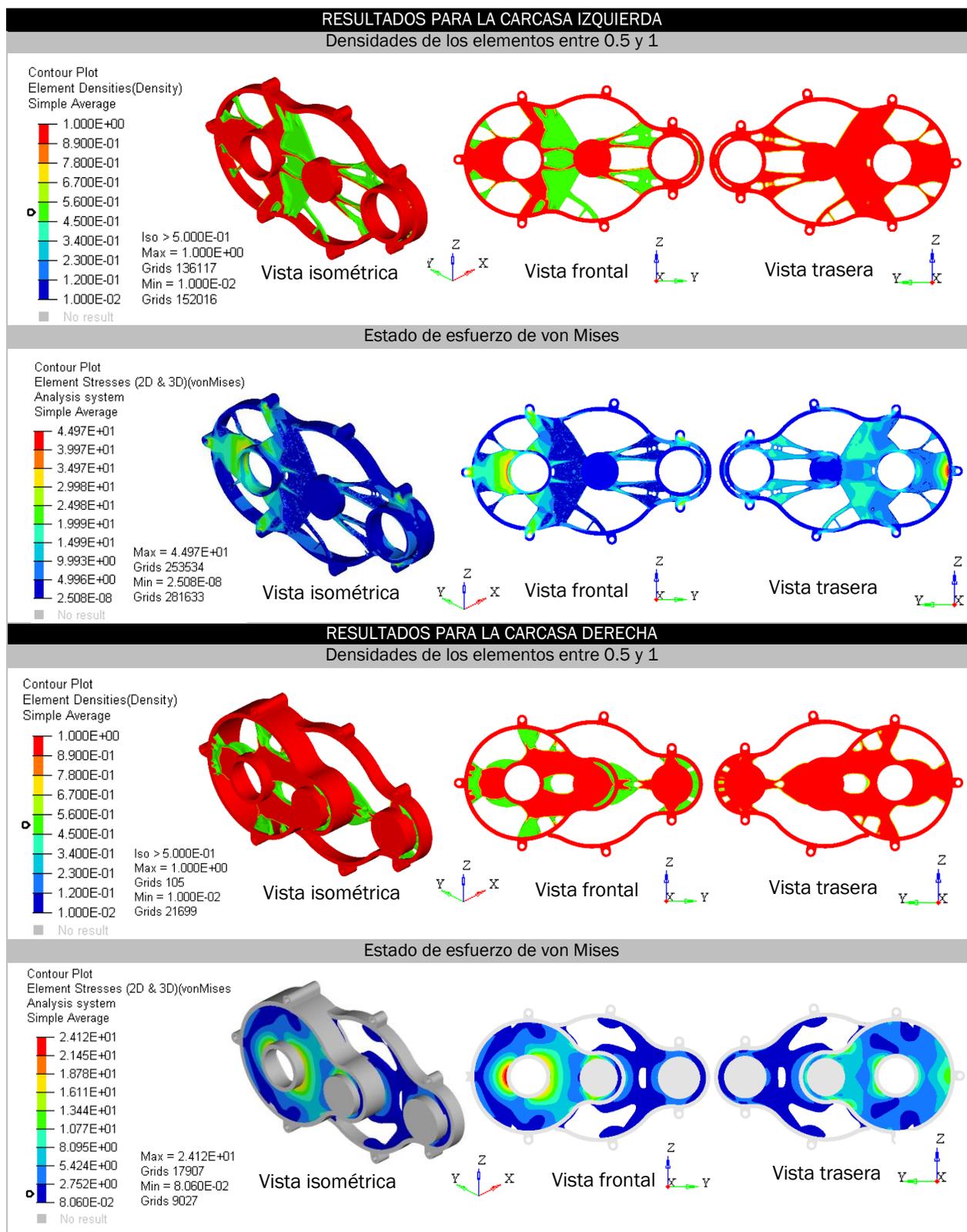
### Resultados de la optimización en las zonas definidas de las carcasas

Los resultados de la optimización topológica para cada carcasa se ven reflejados en la figura 6.22 que se muestra a continuación. Siguiendo una metodología similar al del caso de los engranes, el análisis se centró en estudiar las densidades de elementos entre 0.5 y 1, además del estado de esfuerzos de von Mises.

El flujo esfuerzos muestra un patrón con mayor concentración en dirección paralela a las cargas radiales, con factores de seguridad de 11.18 y 20.85 para la carcasa izquierda y derecha respectivamente, manteniendo en todo momento material de enlace entre cada alojamiento de rodamiento. Por otra parte, dadas las cargas supuestas debido al terreno (60°) y las cargas laterales, se generan densidades de elementos en esa dirección reforzando a la estructura.

La densidad de elementos seleccionada permite la visualización de una geometría fácil de interpretar, donde los elementos en color rojo, y los cercanos a éste (dada la escala mostrada), serán mantenidos para su posterior análisis, además, tomando en cuenta el estado de esfuerzos, se determina que esta geometría será lo suficientemente resistente para soportar las cargas aplicadas.

Cabe mencionar que los factores de seguridad que se muestran son muy elevados, y aunque la optimización de las carcasas se podría llevar a un límite con menor material, se necesitan datos adicionales sobre cargas dinámicas, modelado de impactos en cualquier zona, sobrecarga, etc., para poder asegurar la integridad estructural durante la operación del reductor de velocidad CSRTO-2019.

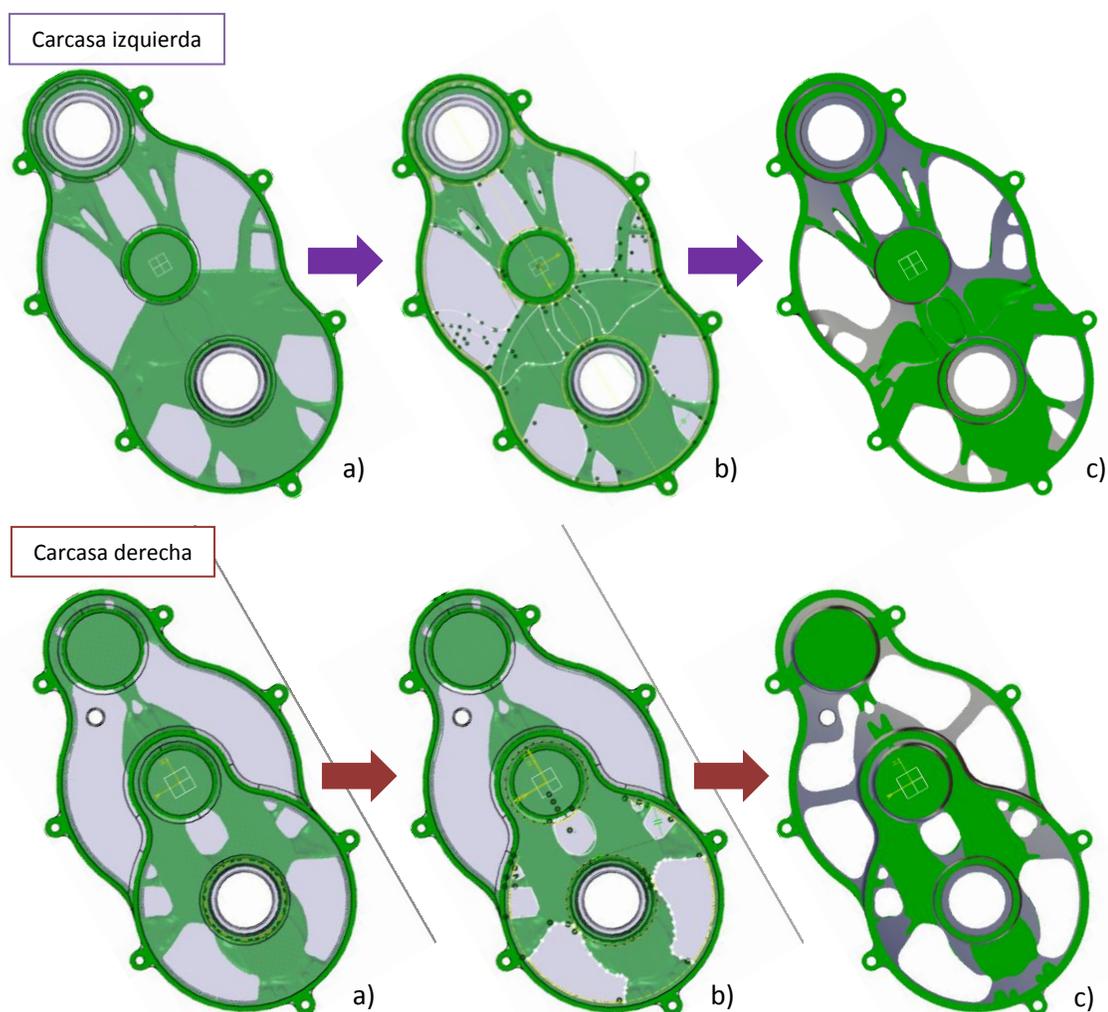


**FIGURA 6.22** Resultados de la optimización topológica con visualización de elementos de densidades 0.5 - 1 y estado de esfuerzos de von Mises, para las carcasas izquierda y derecha.

### 6.3.3 Interpretación en CATIA® de la geometría optimizada (Carcasas)

En la figura 6.23 se aprecia el proceso para el modelado 3D de las zonas definidas de las carcasas, donde al igual que en el caso de los engranes, se fijó el valor de densidad de elementos en el rango 0.5 a 1, a fin tener una mejor visualización de las trayectorias de material resultantes.

La estrategia para la interpretación consistió en la identificación de geometrías principales del modelo exportado, éstas pueden ser observadas en las áreas verdes de la figura 6.23-a

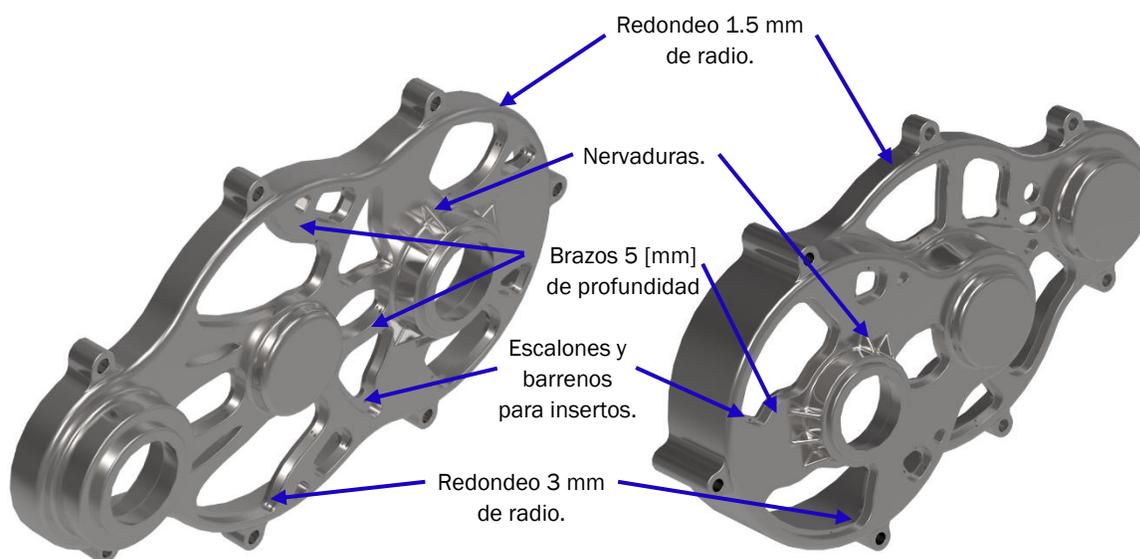


**FIGURA 6.23** Interpretación de la geometría resultante de la optimización topológica utilizando elementos con densidades entre .5 y 1. a) Identificación de geometrías principales mediante la superposición de partes originales y optimizadas; b) trazado de geometrías principales mediante splines y perfiles sencillos; c) Extrusión del sketch de la geometría representativa.

A continuación se realizó una aproximación a estas geometrías mediante el dibujo de perfiles del tipo *spline*, cubriendo en su totalidad las áreas marcadas (Fig. 6.23-b), pero eliminando aquellas zonas con 50% o menos del espesor original de las paredes de la carcasa.

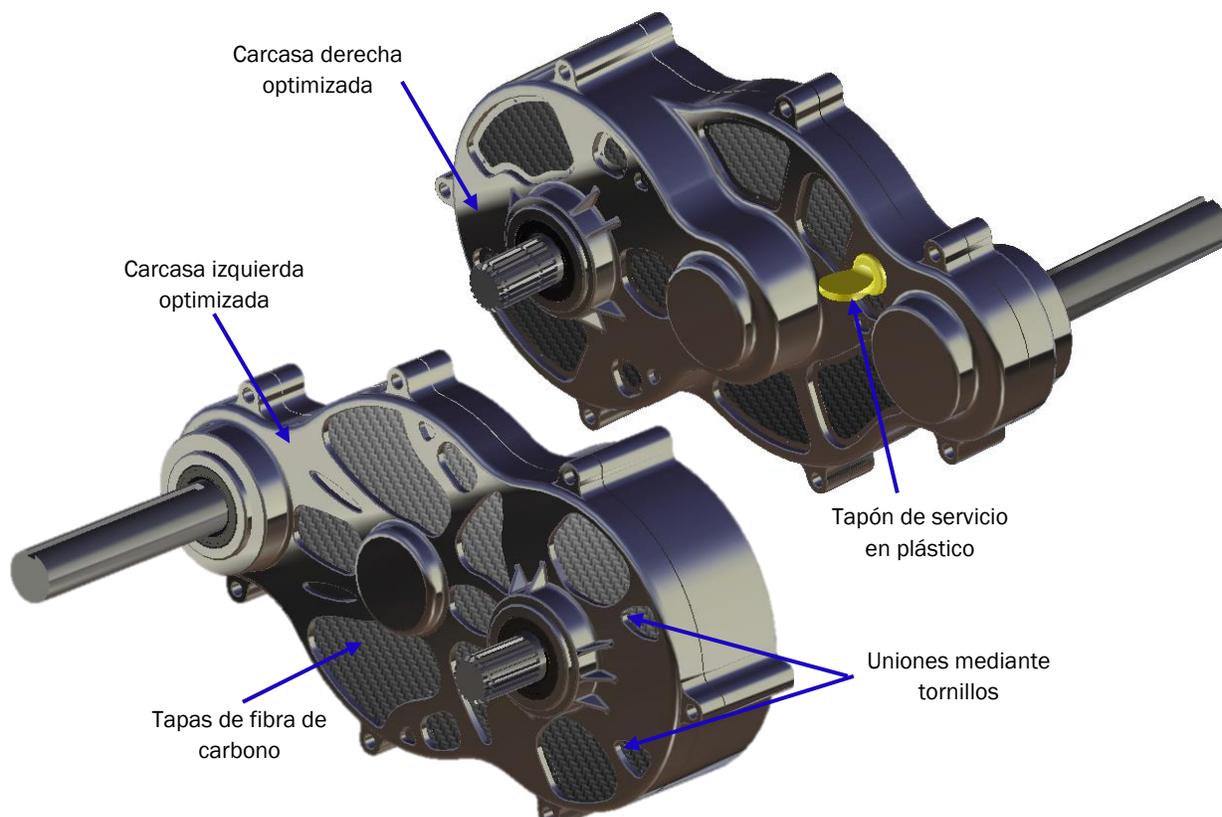
Posteriormente se proyectó el dibujo realizado sobre las caras de las carcasas en un modelo superpuesto dentro de un ensamble, dando como resultado un primer modelo optimizado (Fig. 6.23-c).

Finalmente se añadieron algunos redondeos, nervaduras, escalones y barrenos necesarios para colocar insertos en las caras laterales. El modelo final de las carcasas se muestra en la figura 6.24, donde también se hacen algunas observaciones relevantes para la cuestión de manufactura.



**FIGURA 6.24** Modelos 3D de las carcasas resultantes de la interpretación de la optimización topológica.

Existen diferentes soluciones para resolver el problema de sellado al haber removido material en las caras de la carcasa. Se sabe que estas guardas, deben estar construidas de materiales que igualen o superen las propiedades mecánicas mencionadas en la sección 1.2.2, de tal manera que, tomando como ejemplo el trabajo de Schneider, T. (2017), se utilizarán tapas de fibra de carbono unidas mecánicamente a las carcasas mediante tornillos y silicón para evitar con ello fugas de aceite. La implementación de esta propuesta de diseño puede ser observada en el modelo final de reductor de velocidad de la figura 6.25.



**FIGURA 6.25** Modelo optimizado del reductor de velocidad CSRTO-2019

### Manufactura de las carcasas

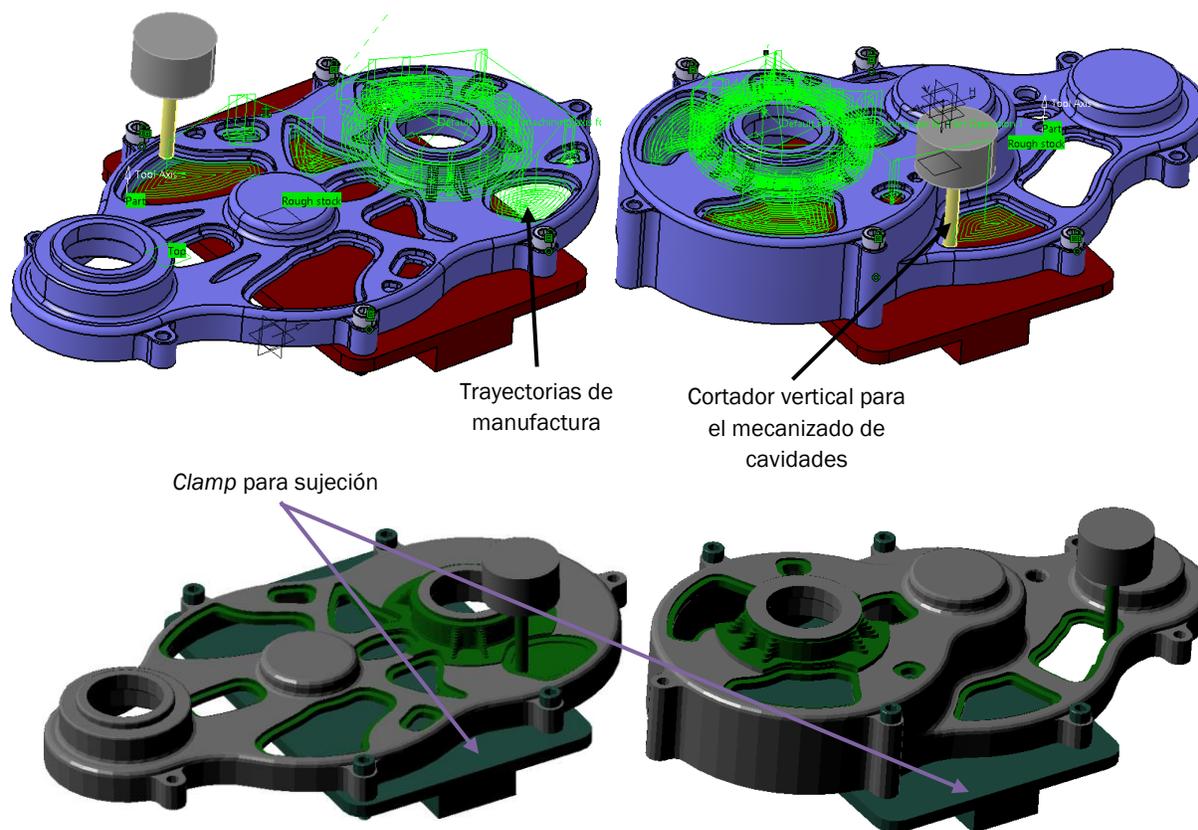
La manufactura de las carcasas implica habilidad en el manejo de programación y preparación de las piezas. El diseño de las carcasas está pensado para un proceso de mecanizado por arranque de viruta en una fresadora vertical CNC de tres ejes, partiendo de un bloque (stock) de material. A continuación se describe el proceso de manufactura.

Partiendo del bloque de material perfectamente dimensionado, se debe definir el método de sujeción (clamp) a la bancada de la máquina. En la figura 6.26 se observa una propuesta de pieza de sujeción para su aplicación en una prensa de tornillo.

Paralelamente, la programación de las trayectorias de mecanizado debe atender a las necesidades de cada operación de manufactura, en general este diseño puede resumir su proceso en 4 etapas: desbaste, realización de cavidades, barrenado y acabados. Para lograr lo anterior se buscó utilizar la menor cantidad de herramientas, de tal modo que estas carcasas pueden ser mecanizadas utilizando únicamente 3 herramientas: un cortador recto de 6 [mm]

de diámetro, con una longitud mínima de 30 [mm], un cortador de forma de 1/16 [in] y una broca de 2 [mm] de diámetro.

Con lo anterior se logra un tiempo estimado de manufactura de 8 horas por carcasa, considerando parámetros de corte que se mantienen por debajo del máximo permitido para las herramientas, utilizando trayectorias *helical* y con un traslape del 30% del diámetro de las herramientas, tomando el tiempo a partir de que el código comienza a ejecutarse. El resto de las consideraciones de manufactura salen del alcance de este trabajo.



**FIGURA 6.26** Simulación de manufactura de las carcasas mediante el proceso de arranque de viruta en máquina CNC de tres ejes.

### 6.3.4 Validación FEA de la geometría interpretada (Carcasas)

En esta última sección se lleva a cabo la validación mediante un análisis por elemento finito (FEA) de las carcasas generadas en la sección 6.3.3, y que fueron resultado de la interpretación de la geometría generada durante la optimización topológica (Fig. 6.24). Las cargas y restricciones utilizadas se tomaron del modelo original mostrado en la figura 6.21. Los resultados de este análisis pueden ser observados en las figuras 6.27 y 6.28, para las carcasas izquierda y derecha respectivamente.

La carcasa izquierda presentó el esfuerzo máximo en la zona circundante al alojamiento del rodamiento del eje salida, lo cual hace sentido considerando que es donde existe el par de

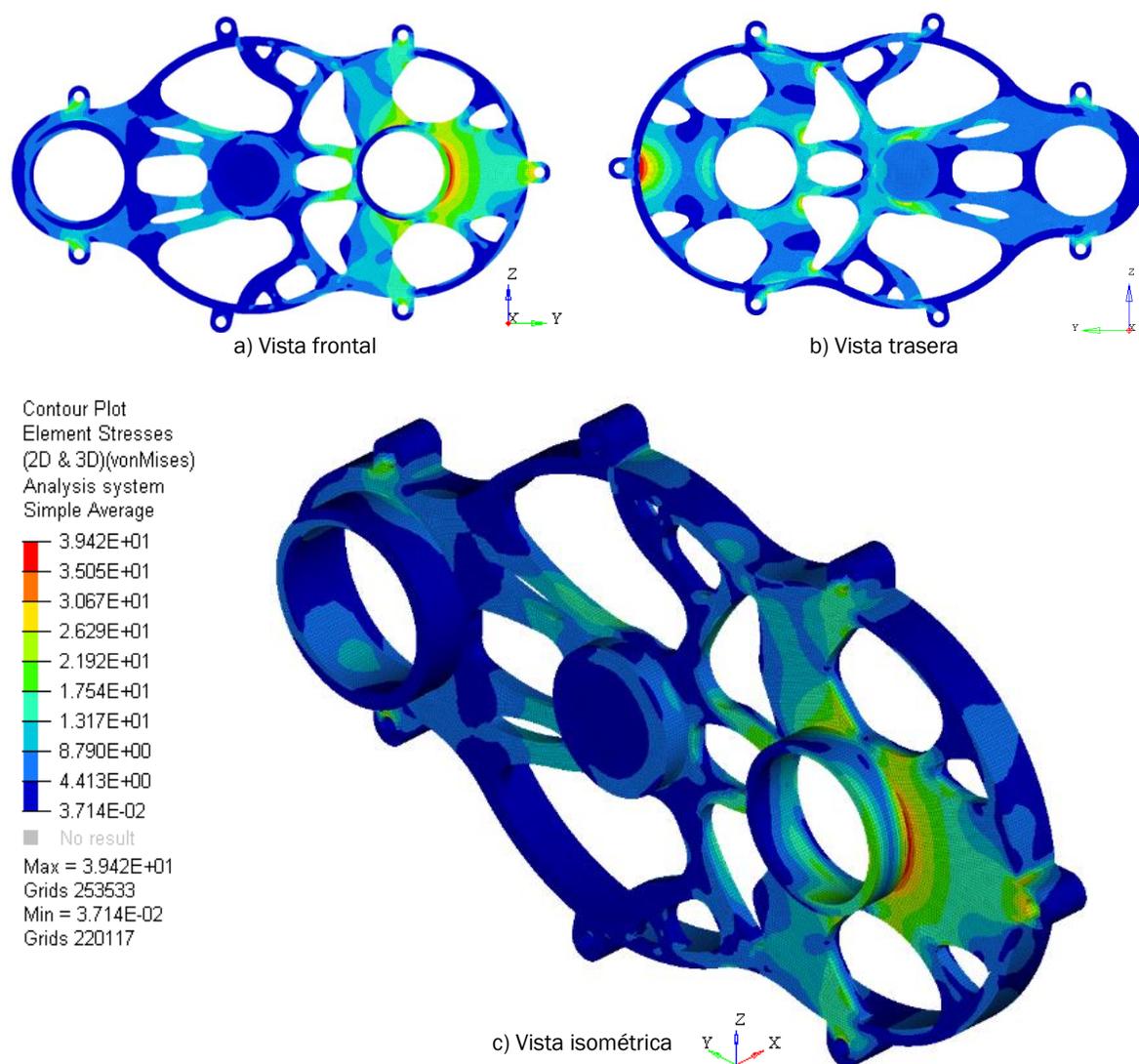


FIGURA 6.27 Estado de esfuerzos para la carcasa izquierda.

transmisión superior, el esfuerzo máximo tuvo una magnitud de 39.42 [MPa], de tal manera que, para el material seleccionado (Tabla 6.4), se cuenta con un factor de seguridad de 12.76.

Para el caso de la carcasa derecha, se presentaron condiciones similares, con un esfuerzo máximo 41.76 [MPa] y un factor de seguridad de 12.06.

Los resultados anteriores muestran un elevado factor de seguridad, asegurando con ello la integridad estructural de las carcasas en todo momento, sin embargo, se entiende que hace falta un re-análisis considerando los factores externos adicionales mencionados en la sección 6.3.2, posibilitando a futuro lograr modelos refinados.

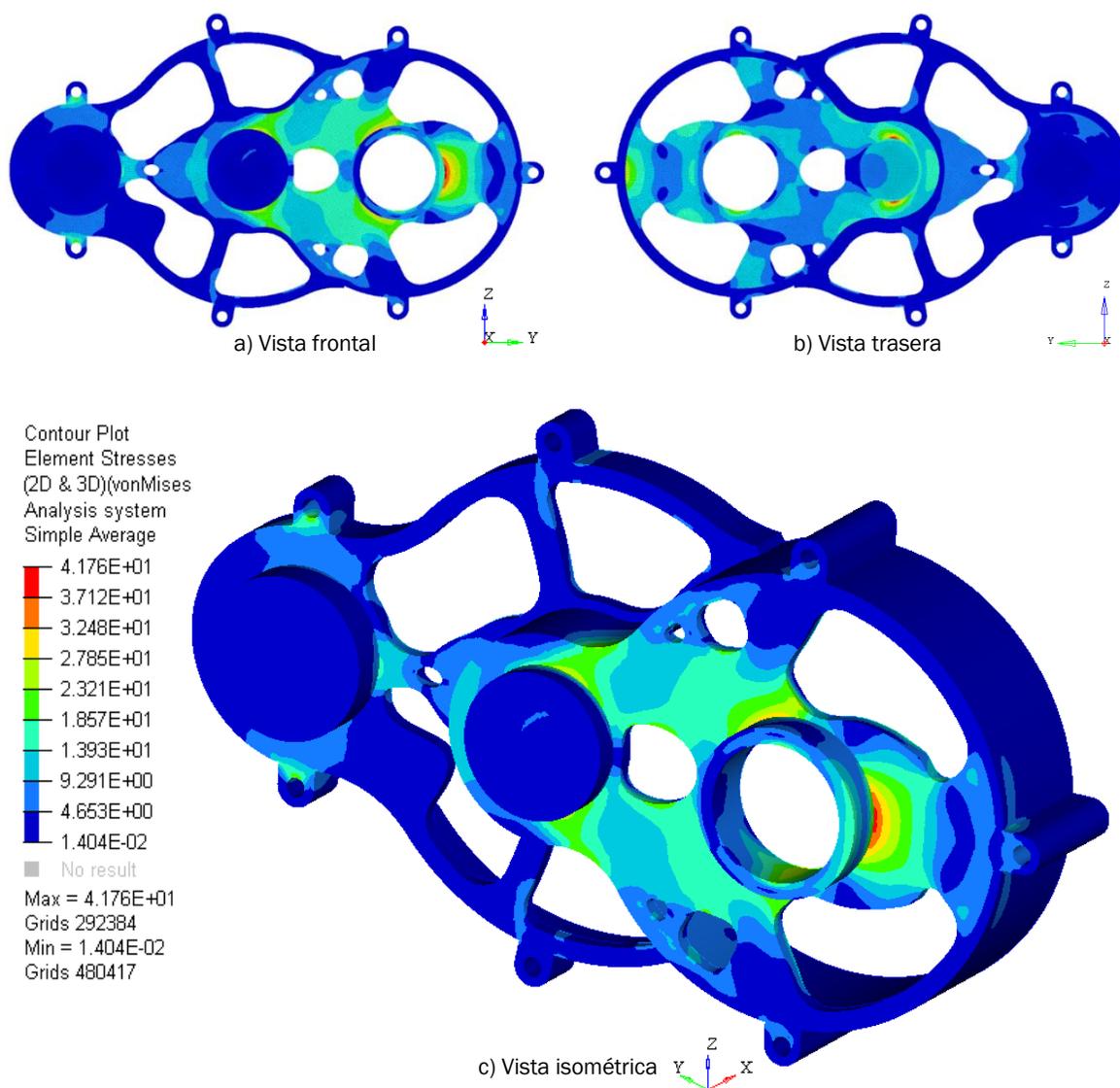


FIGURA 6.28 Estado de esfuerzos para la carcasa derecha.

## RESULTADOS

En esta sección se plasmarán los resultados del trabajo desarrollado a lo largo de todos los capítulos, retomando el trabajo desde las estadísticas, hasta la optimización del reductor de velocidad.

- En primera instancia se realizó un análisis de la configuración de transmisión más utilizada en la competencia Baja SAE (Sección 2.3), lo cual marcó el punto de partida para el rediseño de la transmisión. Dicha configuración se muestra a continuación:

*Motor → Poleas → Reductor de velocidad → Flechas → Ruedas Motrices*

- Se decidió que el reductor de velocidad presentaba una mejor área de oportunidad por lo que el rediseño se basó únicamente en este elemento.
- Una vez centrado el rediseño en el reductor de velocidad, se propuso un proceso de diseño (Fig. 3.1) de tres fases resumidas como sigue:

*Selección del modelo a rediseñar → Rediseño de la relación de transmisión → Optimización*

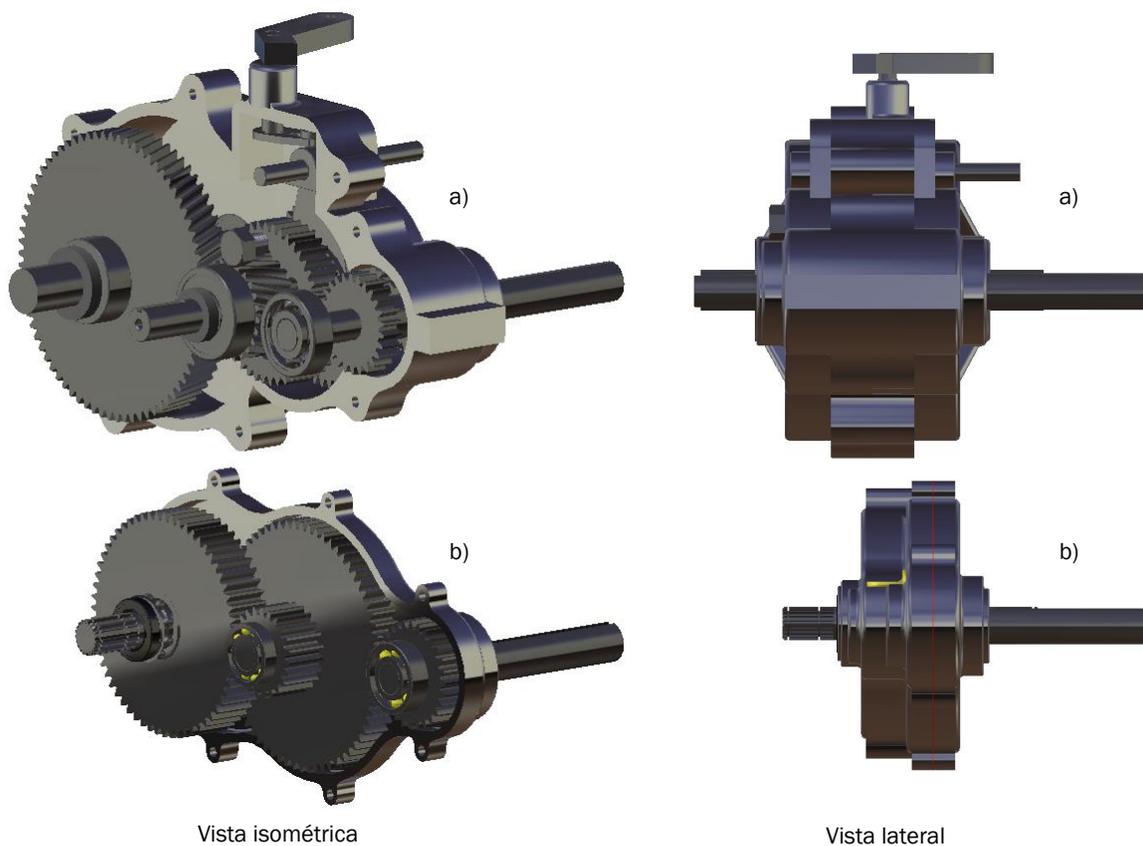
- Se determinó como modelo a rediseñar al prototipo del año 2017 (Sección 3.3), pero modificando la cantidad de cambios de velocidad a una sola, con una relación de transmisión  $RT$  que se adecuara a cualquier condición de terreno, la cual, basado en las estadísticas, el desempeño del prototipo y un ajuste de los parámetros de entrada en los cálculos de la relación, se definió como:

$$6.1: 1 \leq RT \leq 6.5: 1$$

- Se aplicó un método de optimización utilizando la programación y adecuación de un algoritmo genético con el objetivo de hallar el conjunto de engranes ( $N1$ ,  $N2$ ,  $N3$  y  $N4$ ), cuyo número de dientes hicieran que las dimensiones, volumen y peso del reductor de velocidad fueran minimizadas, bajo las restricciones mostradas en la tabla 4.1. Los engranes seleccionados fueron:

$$N1 = 28 \text{ [dientes]} \quad N2 = 67 \text{ [dientes]} \quad N3 = 23 \text{ [dientes]} \quad N4 = 60 \text{ [dientes]}$$

Dado lo anterior, comparando los modelos 2017 y CSRTO-2019, se logró una disminución del volumen de empaquetamiento (volumen que cubre todo el exterior de las carcasas) de 57.38%.



**FIGURA 7.1** Resultados de la optimización por algoritmos genéticos; a) Reductor 2017; b) ReductorCSRTO-2019

- Finalmente se aplicó un proceso de optimización topológica en los engranes de 60 y 67 dientes, y en las carcasas del reductor de velocidad, seleccionados bajo los criterios establecidos en las secciones 6.2 y 6.3 respectivamente. El objetivo planteado fue remover material con bajo nivel de esfuerzo (minimizar Compliance) y consecuentemente generar un modelo más ligero pero con la misma capacidad de operación. A continuación se muestran los resultados de este proceso.

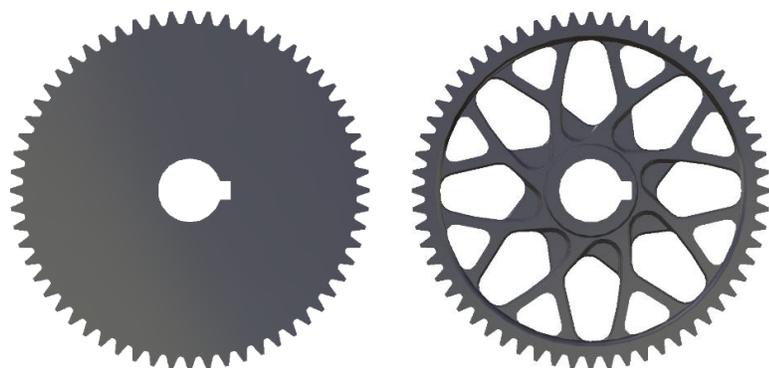


FIGURA 7.2 Comparación del engrane de 60 dientes original y el optimizado topológicamente.

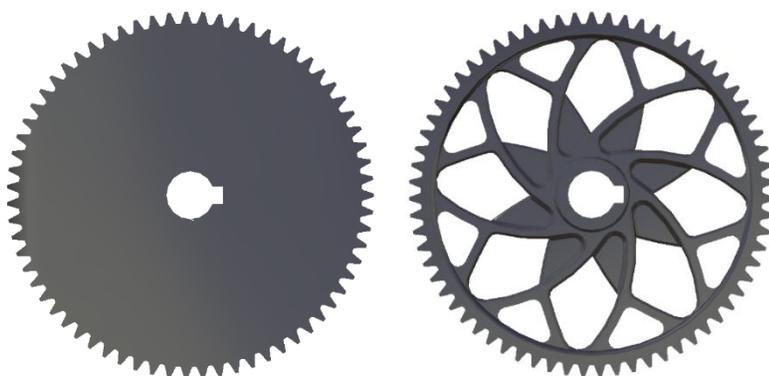
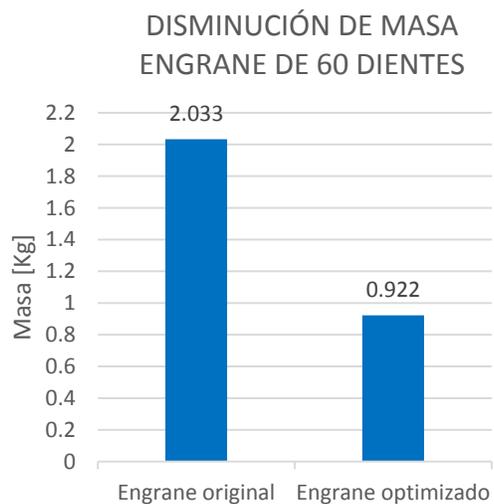


FIGURA 7.3 Comparación del engrane de 67 dientes original y el optimizado topológicamente.

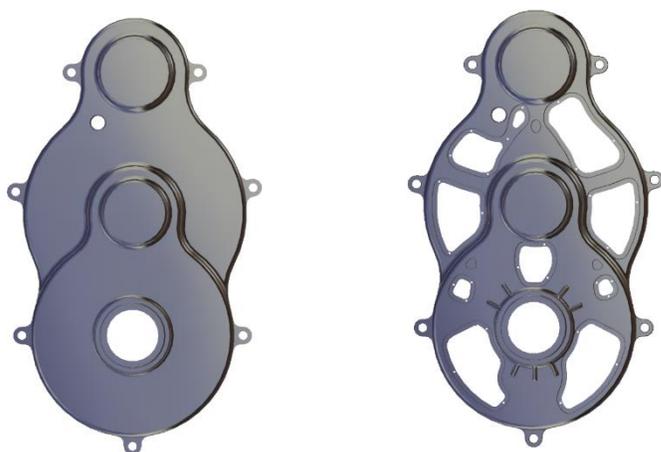
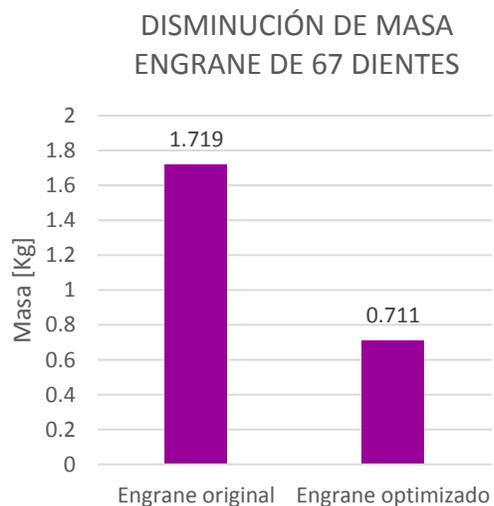
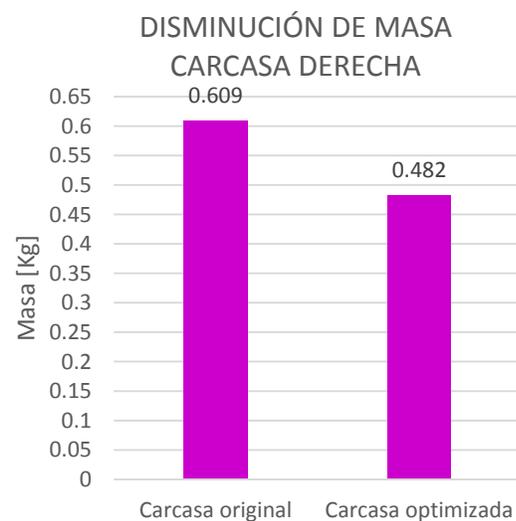
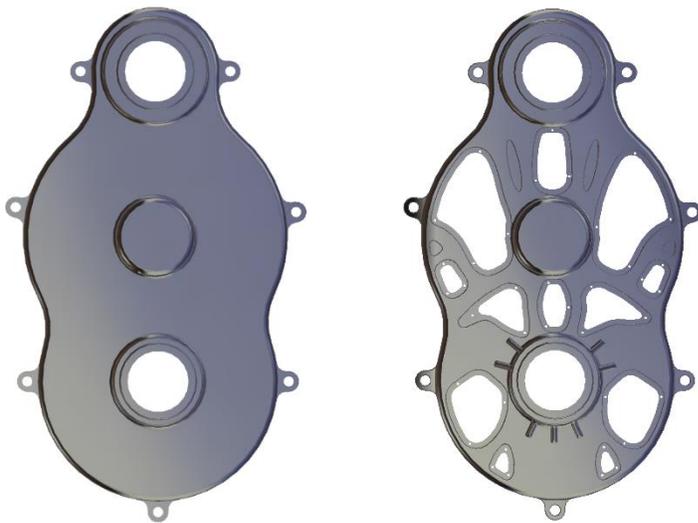
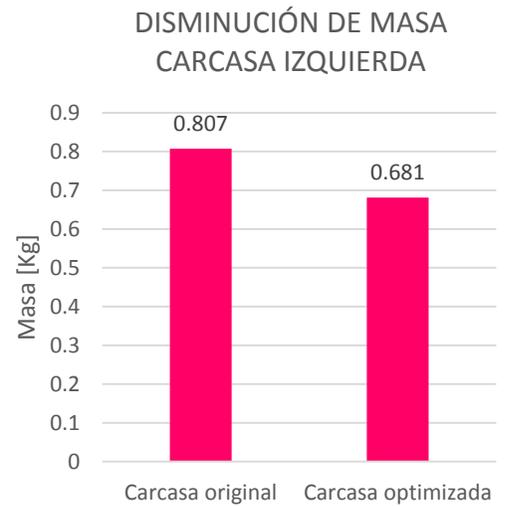


FIGURA 7.4 Comparación de la carcasa derecha original y la optimizada topológicamente.

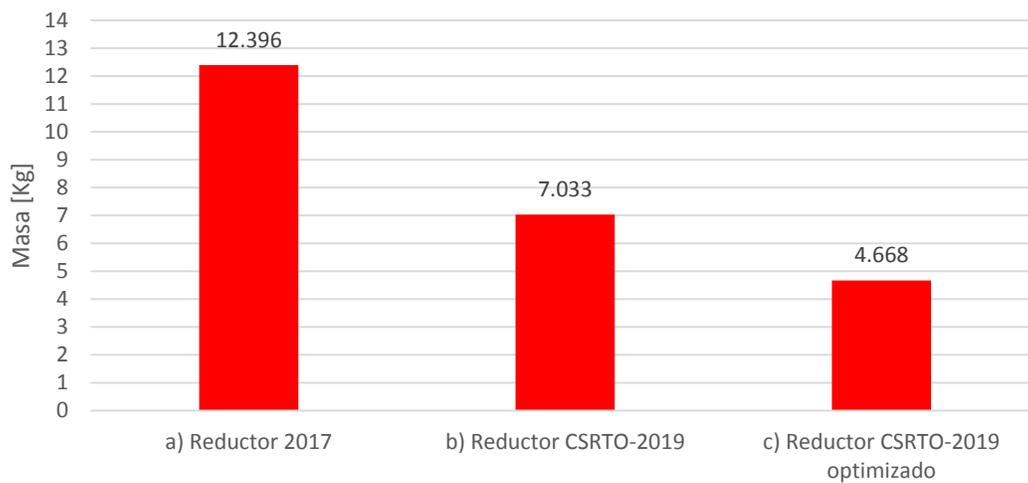




**FIGURA 7.5** Comparación de la carcasa izquierda original y la optimizada topológicamente.



### COMPARACIÓN DE MASA DE REDUCTORES DE VELOCIDAD



**FIGURA 7.6** Comparación de masa de los reductores de velocidad, a) Reductor 2017; b) CSRTO-2019; c) CSRTO-2019 optimizado topológicamente.

Los engranes de 60 y 67 dientes presentaron una disminución de masa del 54.65% y 58.64% respectivamente, lo cual cumple el objetivo planteado en la configuración de la optimización. Por otra parte las carcasas, alcanzaron una disminución del 20.85% y 15.61% para las carcasas derecha e izquierda respectivamente, quedando ligeramente por debajo del objetivo.

En cuanto a los reductores de velocidad, se realiza un análisis de masa total de los modelos inmediato anterior (Reductor 2017) y el propuesto en este trabajo (CSRTO-2019), antes y después de la optimización topológica. Comparando el reductor 2017 contra el reductor CSRTO-2019 sin optimizar se muestra una disminución en la masa de 43.26%; y contra el modelo optimizado, resulta una reducción de masa del 62.34%.

El modelo 3D optimizado del reductor de velocidad CSRTO-2019, se muestra en la figura 7.7, en la cual también se observan detalles del ensamble del tren de engranes y otros elementos auxiliares.



FIGURA 7.7 Modelo de reductor de velocidad CSRTO-2019 optimizado.

## CONCLUSIONES

Al término de este trabajo, puedo concluir que los objetivos planteados, tanto el general, como los particulares, han sido cumplidos satisfactoriamente. Se logró el diseño y optimización del reductor de velocidad mediante la aplicación de teorías propias de la inteligencia artificial y de herramientas de análisis y optimización estructural, lo cual no hubiera sido posible sin el innegable avance de la tecnología en el siglo XXI, donde el poder de cómputo ha aumentado a niveles donde problemas matemáticos complejos pueden ser resueltos en fracción de segundos.

Al tomar como antecedente el trabajo realizado por el equipo Baja SAE UNAM durante más de dos décadas se logró acotar el trabajo de investigación, logrando con ello resultados precisos y validados con antecedentes de diseño, razón por la cual es importante destacar la importancia de la documentación.

El diseño presentado se trabajó como un sistema sinérgico, tratando de considerar la mayor cantidad de eventos externos que pudieran influir en los resultados, además, se hicieron las respectivas consideraciones de buenas prácticas de ingeniería para aumentar la confiabilidad del producto terminado, sin olvidar que lo que se buscaba era aumentar el desempeño del sistema.

Un buen complemento para las teorías y aplicaciones desarrolladas, fue la parametrización de ciertos componentes del reductor de velocidad. Particularmente en este documento se trabajó con la parametrización de engranes, lo cual representó un gran ahorro de tiempo invertido en dibujo y diseño, posibilitando centrar la atención en la mejora de los componentes, y aunque lo ideal sería construir una herramienta que con solo ingresar datos generara modelos de reductor de velocidad completos, ese tema sale del alcance de este trabajo.

Una de las partes más importantes de este trabajo fue el intento por mejorar la relación entre la masa del reductor de velocidad y la capacidad de transmisión de potencia, de tal modo que, al observar los resultados se advierte que este objetivo fue cumplido casi en su totalidad, lo anterior debido a que en el caso de los engranes se superó porcentaje de masa reducido de 50% con una tolerancia aceptable en el nivel de esfuerzos, sin embargo, en el caso de las carcasas el porcentaje de disminución superó apenas el 20%. Cabe mencionar que aunque es necesario plantear un re-análisis en estos componentes, queda el precedente y la metodología para refinar el procedimiento y poder obtener mejores resultados.

Al final se logró que el reductor de velocidad propuesto en este trabajo lograra una disminución del 57.38% en el volumen de empaquetamiento, y de 62.34% de masa, lo que implica que, en efecto, se puede tener un sistema más ligero, pero con la misma capacidad de operación, además de ello, la validación vía software permite defender el diseño, recordando en todo momento la necesidad del método experimental en condiciones reales.

Para lograr lo anterior, la Facultad de Ingeniería me preparó con un plan de estudios, que si bien se encuentra en un proceso de mejora continua, atendió las necesidades que como estudiante me planteaba conforme transcurría la carrera. Es cierto también que muchas herramientas las tuve que obtener de medios externos y mediante proyectos extracurriculares; tuve la necesidad de ser autodidacta para aprender el manejo de una gran cantidad de softwares especializados y nuevas teorías que se encuentran en fase de prueba; pero todo ello formó parte de mi experiencia profesional que me permitió dar buenos resultados en mi desempeño como ingeniero.

Este trabajo presentó parte de desarrollos innovadores y parte de otros ya existentes, sin embargo, el verdadero valor agregado se encuentra en la unión de diferentes disciplinas, para lograr un objetivo común. Esto es justo lo que el mundo de la ingeniería está buscando en la actualidad.

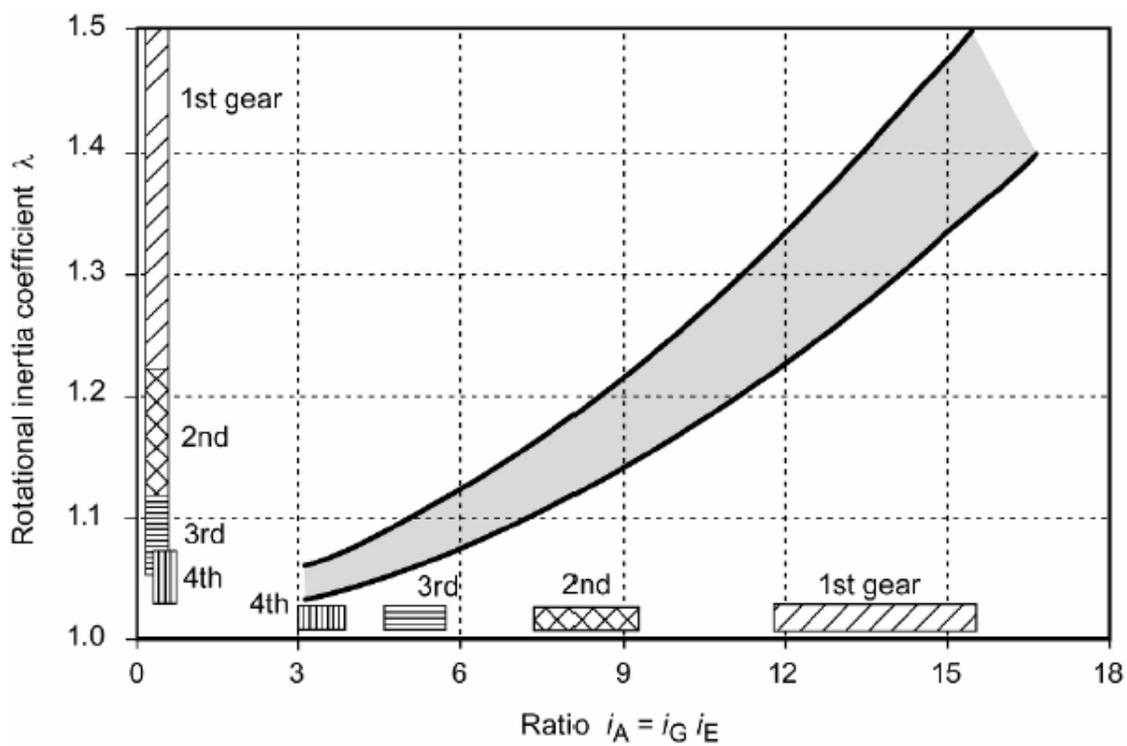
## APÉNDICES

APÉNDICE A: Tabla de coeficientes de arrastre aerodinámico  $C_w$

Vehicle	$c_w$	$A$ (m <sup>2</sup> )	$c_w A$ (m <sup>2</sup> )
<i>Motorcycle with rider<sup>a)</sup></i>	<i>0.5–0.7</i>	<i>0.7–0.9</i>	<i>0.4–0.6</i>
BMW K 1200 S <sup>a)</sup>	0.58	0.71	0.41
BMW R 1200 GS <sup>a)</sup>	0.62	0.85	0.52
<i>Convertible</i>	<i>0.29–0.53</i>	<i>1.58–2.90</i>	<i>0.58–1.54</i>
Opel Tigra TwinTop			
Roof open	0.40	1.94	0.78
Roof closed	0.35	1.94	0.67
Mercedes-Benz SLK 200 K			
Roof open	0.37	1.93	0.71
Roof closed	0.32	1.93	0.62
Mercedes-Benz SL 500			
Roof open	0.34	2.00	0.68
Roof closed	0.29	2.00	0.58
Audi A4 Cabrio			
Roof open	0.34	2.11	0.72
Roof closed	0.31	2.11	0.65
<i>Limousine/SUV</i>	<i>0.25–0.39</i>	<i>1.97–2.90</i>	<i>0.50–1.54</i>
Ford Fiesta 1.4l	0.34	2.06	0.70
VW Golf V 1.4l	0.32	2.22	0.72
Mercedes-Benz B 180 CDI	0.30	2.42	0.73
BMW 320i	0.28	2.11	0.59
Audi A6 Avant	0.31	2.26	0.70
Mercedes-Benz S 320 CDI	0.26	2.40	0.62
Mercedes-Benz ML 280 CDI	0.34	2.81	0.96
Porsche Cayenne Turbo	0.39	2.78	1.09
BMW 645i	0.29	2.15	0.62
Porsche 911 Carrera	0.28	2.00	0.56
<i>Van</i>	<i>0.35–0.40</i>	<i>3.1–4.2</i>	<i>1.1–1.7</i>
Opel Vivaro Life	0.37	3.38	1.24
Ford Transit MWB, M106	0.35	4.14	1.45
<i>Bus</i>	<i>0.4–0.8</i>	<i>6.0–10.0</i>	<i>2.4–8.0</i>
Setra 415 HD	0.44	8.26	3.63
<i>Light trucks</i>	<i>0.40–0.60</i>	<i>4.5–6.0</i>	<i>1.8–3.6</i>
<i>Truck (Solo)</i>	<i>0.45–0.80</i>	<i>6.0–10.0</i>	<i>2.7–8.0</i>
<i>Truck with trailer</i>	<i>0.55–0.85</i>	<i>7.0–10.0</i>	<i>3.9–8.5</i>
<i>Articulated vehicle</i>	<i>0.45–0.75</i>	<i>7.0–10.0</i>	<i>3.2–7.5</i>

Valores de referencia para el coeficiente de arrastre  $C_w$  (Nauheimer, Bertsche, Ryborz, & Novak, 1994, 2011)

APÉNDICE B: Valores de referencia para el coeficiente de inercia rotacional  $\lambda$



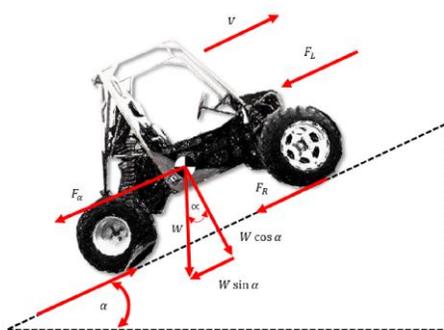
Valores de referencia del coeficiente de inercia rotacional  $\lambda$  para vehículos de pasajeros  
(Naunheimer, Bertsche, Ryborz, & Novak, 1994, 2011)

## APÉNDICE C: Programa en Wolfram Mathematica CSRTO\_2019.nb

### Diseño de transmisión Compound Speed Reducer Totally Optimized 2019 (CSRTO-2019)

#### Cálculos para la relación de transmisión

#### Diagrama de cuerpo libre



#### Datos

$g = 9.81$ ; (\*Gravedad [m/s<sup>2</sup>]\*)  
 $m = 235$ ; (\*Masa total del vehículo en [Kg]\*)  
 $W = m * g$ ; (\*Peso del vehículo [(Kg\*m)/s<sup>2</sup>]\*)  
 $Pot = 10 * 745.7$ ; (\*Potencia entregada por el motor [W]\*)  
 $\alpha = 25 * \text{Degree}$ ; (\*Ángulo de la pendiente en [°]\*)  
 $R = 287$ ; (\*Constante de los gases\*)  
 $To = 288.16$ ; (\*Temperatura promedio a nivel del mar\*)  
 $B = 0.0065$ ;  
 $Pa = 100914.392$ ; (\*Presión Atmosférica en Illinois [Pa]\*)  
 $Z = 211$ ; (\*Altura sobre el nivel del mar en Illinois [m]\*)  
 $T = 22 + 273.15$ ; (\*Temperatura promedio en Illinois [k]\*)  
 $Cw = (0.84 + 0.15) / 2$ ; (\* Coeficiente de resistencia frontal del aire promedio entre vehículo ligero y pesado\*)  
 $A = 0.81$ ; (\* Area frontal aproximada del vehículo en [m]\*)  
 $f = (0.05 + 0.138) / 2$ ; (\*Factor de rodadura, promedio entre tierra suelta en mal estado\*)  
 $eficiencia = 0.86$ ; (\*Eficiencia de transmisión del motor y poleas\*)

$M = 19$ ; (\*Par entregado por el motor [N\*m]\*)  
 $r = (23/2) * 0.0254$ ; (\*Radio de la llanta en [m]\*)  
 $ralenti = 5.7$ ; (\*Relación de transmisión en ralenti de las poleas\*)  
 $maxrel = 0.7$ ; (\*Relación de transmisión máxima apertura de poleas\*)  
 $P = Pa * (1 - (B * Z) / To)^{5.26}$  (\*Presión atmosférica\*)  
 $\rho = P / (R * T)$ ; (\*Densidad del aire\*)  
 $v[t_] = 19$ ;  
 $v[0] = 0$ ;  
 $a[t_] = 3$ ;

#### Fuerzas que actúan en el vehículo

(\*Fuerza de Inercia\*)  
 $Fi = m * a[t_]$   
 (\*Resistencia a la rodadura\*)  
 $Fr = W * \text{Cos}[\alpha] * f$   
 (\*Resistencia debida a la inclinación del terreno\*)  
 $Fp = W * \text{Sin}[\alpha]$   
 (\*Resistencia del aire\*)  
 $Fai = (Cw * A * \rho * (v[t_] - v[0])^2) / 2$   
 (\*Fuerza Motriz\*)  
 $Fm = (M * \text{Relaciontransmission} * \text{eficiencia}) / r$

#### Ecuaciones de equilibrio

$ec1 = Fm == Fi + Fr + Fp + Fai$   
 $55.9397 \text{ Relaciontransmission} == 1959.76$

#### Relación de transmisión marcha inferior

$\text{solucion} = \text{Solve}[ec1]$ ;  
 $RT = \text{Relaciontransmission} / \text{ralenti}$   
 $/. \text{solucion}$  (\*Relación de transmisión fija del reductor marcha inferior\*)  
**{6.14622}**

#### Relación de transmisión marcha superior

$RtsupG = ((3.6 * (\pi / 30) * 3800 * r) / 65)$  (\*Relación de transmisión global marcha superior\*)  
 $Rtsup = ((3.6 * (\pi / 30) * 3800 * r) / 65) / \text{maxrel}$   
 (\*Relación de transmisión fija del reductor marcha superior\*)

#### Cálculos de los Engranajes.

#### Primera reducción (Piñón-Engrane 28-67)

$\text{Clear}[Pd, \phi, Dpp, DpG, rpp, rpG, Pc, m, \alpha, \beta, H, Dep, DeG, Drp, DrG, hf, hk, t, F, Pb, dc, Lc, Rc]$ ;  
 $Na = 28$ ; (\*Número de dientes del piñón\*)

$N_b = 67$ ; (\*Número de dientes del engrane\*)  
 $R1 = N_b/N_a$ ; (\*Relación de transmisión piñón-engrane\*)  
 $\text{modulo} = 2$ ;  
 $F = 0.75$ ; (\*Ancho de cara\*)  
 $\phi = 20^\circ$ ; (\*Ángulo de presión\*)

$D_{pp} = \text{modulo} * N_a$ ; (\*Diámetro de Paso del Piñón\*)  
 $D_{pG} = \text{modulo} * N_b$ ; (\*Diámetro de Paso del Engrane\*)  
 $r_{pp} = D_{pp}/2$ ; (\*Radio de paso del Piñón\*)  
 $r_{pG} = D_{pG}/2$ ; (\*Radio de paso del Engrane\*)  
 $P_c = \pi * \text{modulo}$ ; (\*Paso Circular\*)  
 $(*P_c = (\pi * D_{pp})/N_a$ ; (\*Paso Circular\*))  
 $\alpha = 1 * \text{modulo}$ ; (\*Addendum (chechar en talba 8-4 Mott, considerando  $P_d < 20$ )\*)  
 $\beta = 1.25 * \text{modulo}$ ; (\*Dedendum\*)  
 $H = \beta - \alpha$ ; (\*Holgura\*)  
 $Dep = D_{pp} + (2 * \alpha)$ ; (\*Diámetro Exterior del Piñón\*)  
 $DeG = D_{pG} + (2 * \alpha)$ ; (\*Diámetro Exterior del Engrane\*)  
 $rep = Dep/2$ ; (\*Radio exterior del Piñón\*)  
 $reG = DeG/2$ ; (\*Radio exterior del Engrane\*)  
 $Drp = D_{pp} - (2 * \beta)$ ; (\*Diámetro de Raíz del Piñón\*)  
 $DrG = D_{pG} - (2 * \beta)$ ; (\*Diámetro de Raíz del Engrane\*)  
 $hf = \alpha + \beta$ ; (\*Altura total\*)  
 $hk = 2 * \alpha$ ; (\*Profundidad de trabajo\*)  
 $t = \pi / (2 * P_d)$ ; (\*Espesor del diente\*)  
 $P_b = P_c * \cos[\phi]$ ; (\*Paso base\*)  
 $dc = r_{pp} + r_{pG}$ ; (\*Distancia entre centros\*)  
 $L_c = \sqrt{(r_{pp} + \alpha)^2 - (r_{pp} * \cos[\phi])^2} +$   
 $\sqrt{(r_{pG} + \alpha)^2 - (r_{pG} * \cos[\phi])^2} - dc * \sin[\phi]$ ;  
 (\*Longitud de contacto\*)  
 $R_c = L_c / P_b$ ;  
 $N[L_c]$   
 $N[R_c]$   
 (\*Razón de contacto\*)

### Segunda reducción (Piñón-Engrane 23-60)

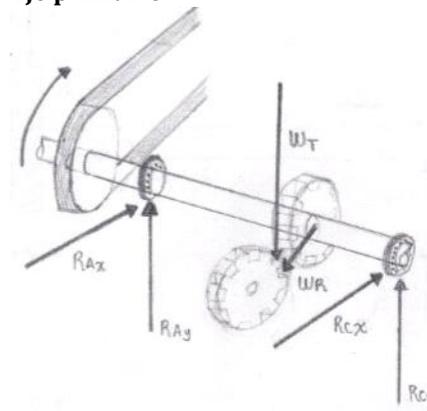
$Clear[P_d, \phi, D_{pp}, D_{pG}, r_{pp}, r_{pG}, P_c, m, \alpha, \beta, H, Dep, DeG, Drp, DrG, hf, hk, t, F, P_b, dc, L_c, R_c, rep, reG]$ ;  
 $N_c = 23$ ; (\*Número de dientes del piñón\*)  
 $N_d = 60$ ; (\*Número de dientes del engrane\*)  
 $R2 = N_d/N_c$ ; (\*Relación de transmisión piñón-engrane\*)  
 $\text{modulo} = 2$ ;  
 $F = 0.75$ ; (\*Ancho de cara\*)  
 $\phi = 20^\circ$ ; (\*Ángulo de presión\*)

$D_{pp} = \text{modulo} * N_c$ ; (\*Diámetro de Paso del Piñón\*)  
 $D_{pG} = \text{modulo} * N_d$ ; (\*Diámetro de Paso del

Engrane\*)  
 $r_{pp} = D_{pp}/2$ ; (\*Radio de paso del Piñón\*)  
 $r_{pG} = D_{pG}/2$ ; (\*Radio de paso del Engrane\*)  
 $P_c = \pi * \text{modulo}$ ; (\*Paso Circular\*)  
 $(*P_c = (\pi * D_{pp})/N_a$ ; (\*Paso Circular\*))  
 $\alpha = 1 * \text{modulo}$ ; (\*Addendum (chechar en talba 8-4 Mott, considerando  $P_d < 20$ )\*)  
 $\beta = 1.25 * \text{modulo}$ ; (\*Dedendum\*)  
 $H = \beta - \alpha$ ; (\*Holgura\*)  
 $Dep = D_{pp} + (2 * \alpha)$ ; (\*Diámetro Exterior del Piñón\*)  
 $DeG = D_{pG} + (2 * \alpha)$ ; (\*Diámetro Exterior del Engrane\*)  
 $rep = Dep/2$ ; (\*Radio exterior del Piñón\*)  
 $reG = DeG/2$ ; (\*Radio exterior del Engrane\*)  
 $Drp = D_{pp} - (2 * \beta)$ ; (\*Diámetro de Raíz del Piñón\*)  
 $DrG = D_{pG} - (2 * \beta)$ ; (\*Diámetro de Raíz del Engrane\*)  
 $hf = \alpha + \beta$ ; (\*Altura total\*)  
 $hk = 2 * \alpha$ ; (\*Profundidad de trabajo\*)  
 $t = \pi / (2 * P_d)$ ; (\*Espesor del diente\*)  
 $P_b = P_c * \cos[\phi]$ ; (\*Paso base\*)  
 $dc = r_{pp} + r_{pG}$ ; (\*Distancia entre centros\*)  
 $L_c = \sqrt{(r_{pp} + \alpha)^2 - (r_{pp} * \cos[\phi])^2} +$   
 $\sqrt{(r_{pG} + \alpha)^2 - (r_{pG} * \cos[\phi])^2} - dc * \sin[\phi]$ ;  
 (\*Longitud de contacto\*)  
 $R_c = L_c / P_b$ ;  
 $N[L_c]$   
 $N[R_c]$

*Diámetro de los ejes*

### Eje primario



### Datos

$Clear[N_s, Pot]$ ;  
 $\text{eficiencia} = 0.86$ ;  
 $Pot = 4.2011 * \text{eficiencia}$ ; (\*Potencia del motor a 1500 R.P.M.\*)  
 $\theta = 20^\circ$ ; (\*ángulo de presión engrane\*)

$Da = (\text{modulo} \cdot Na \cdot .001)$ ; (\*Diámetro de paso engrane\*)

$Ns = 2$ ; (\*Factor de Seguridad\*)

$N1 = 263.15$ ; (\*RPM's\*)

$T = 63000 \cdot (\text{Pot}/N1) \cdot (.0254 \cdot 4.448222)$  (\*Par torsional en el eje en Nm\*)

$Wta = T / (Da/2)$  (\*Carga tangencial\*)

$Wra = Wta \cdot \tan[\theta]$

(\*Distancias en metros\*)

$X1 = 0.011$ ;

$X2 = 0.023$ ;

$X3 = 0.015$ ;

$X4 = 0.013$ ;

### Alto par en Y

(\*Antihorario positivo\*)

$\text{SumaMay} = -Wta \cdot X1 + Rcy \cdot (X1 + X2 + X3) = 0$ ;

$\text{SumaMcy} = -Ray \cdot (X1 + X2 + X3) + Wta \cdot (X2 + X3) = 0$

$\text{ReaccionCy} = \text{Solve}[\text{SumaMay}]$

$\text{ReaccionAy} = \text{Solve}[\text{SumaMcy}]$

$My = Ray \cdot X1 / .\text{ReaccionAy} / X1 -> 0$

**{{Rcy->783.533}}**

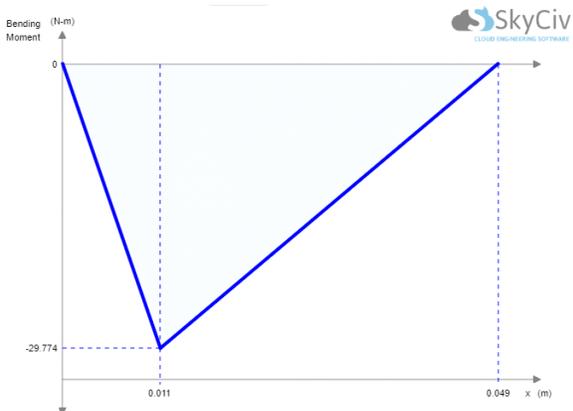
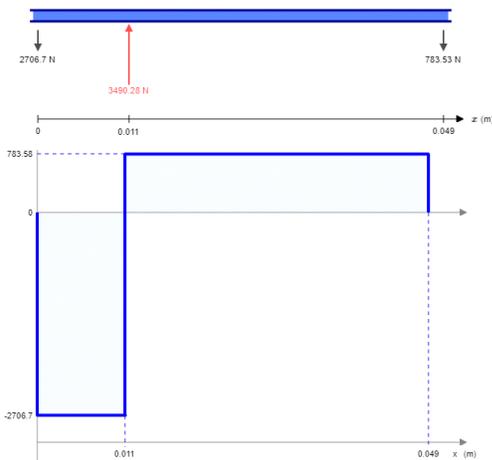
**{{Ray->2706.75}}**

**{29.7743}**

### Diagrama de Cortante y flector

Free Body Diagram (FBD)

Show Equivalent Loads



### Alto par en X

$\text{SumaMax} = -Wra \cdot X1 + Rcx \cdot (X1 + X2 + X3) = 0$ ;

$\text{SumaMcx} = -Rax \cdot (X1 + X2 + X3) + Wra \cdot (X2 + X3) = 0$ ;

$\text{ReaccionCx} = \text{Solve}[\text{SumaMax}]$

$\text{ReaccionAx} = \text{Solve}[\text{SumaMcx}]$

$Mx = Rax \cdot X1 / .\text{ReaccionAx}$

$Mp = \sqrt{Mx^2 + My^2}$

**{{Rcx->285.183}}**

**{{Rax->985.177}}**

**{10.8369}**

**{31.6851}**

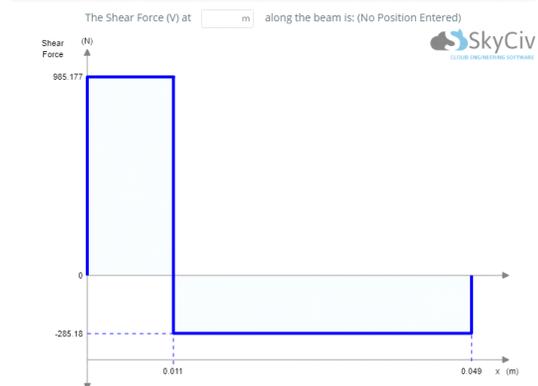
### Diagrama de Cortante y flector

Free Body Diagram (FBD)

Show Equivalent Loads



Shear Force Diagram (SFD)



Bending Moment Diagram (BMD)

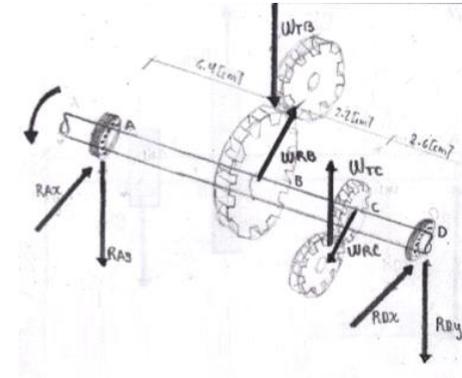


$k1 = 2$ ; (\*Cuñero de perfil\*)  
 $k3 = 3$ ; (\*Anillos de Retención\*)  
 $kT = 3$ ;  
 (\*Material AISI 4140 OQT 1000\*)  
 $sy = 1050 \cdot 10^6$ ; (\*Esfuerzo a la fluencia\*)  
 $D1 = \left( \frac{16 \cdot Ns}{\pi \cdot sy} \sqrt{4 \cdot Mp^2 + 3 \cdot T^2} \right)^{\frac{1}{3}}$ ; (\*Diámetro para Cs\*)  
 $Cs = (D1/7.62)^{-0.11}$ ; (\*Factor por tamaño\*)  
 $Cst = 1$ ; (\*Factor por tipo de carga: Flexión\*)  
 $Cr = 0.81$ ; (\*Factor por confiabilidad: 0.99\*)  
 $Cm = 1$ ; (\*Factor por material: Acero forjado\*)  
 $sn = 400 \cdot 10^6$ ; (\*Resistencia a la fatiga: Maquinado o estirado en frío figura 5-8 Moot\*)  
 $snp = sn \cdot Cs \cdot Cst \cdot Cr \cdot Cm$ ; (\*Resistencia a la fatiga real\*)  
 (\*Diámetro\*)

$$D_{prim} = \left( \frac{32 \cdot Ns}{\pi \cdot snp} \sqrt{\left( \frac{k1 \cdot Mp}{snp} \right)^2 + \left( \frac{3}{4} \right) \cdot \left( \frac{T}{sy} \right)^2} \right)^{\frac{1}{3}}$$

**{0.0136746}**

## Eje auxiliar



## Datos

Clear[Mx, My, Mp, D1];  
 eficiencia = 0.86;  
 Pot = 4.2011 \* eficiencia;  
 $\theta = 20 \cdot \text{Degree}$ ; (\*ángulo de presión engrane\*)  
 $Db = (\text{modulo} \cdot Nb \cdot 0.001)$ ; (\*Diámetro de paso engrane\*)  
 $Dc = (\text{modulo} \cdot Nc \cdot 0.001)$ ;  
 $Ns = 1.5$ ; (\*Factor de Seguridad\*)  
 $N2 = N1/R1$ ; (\*RPM's\*)  
 $T2 = T \cdot R1$  (\*Par torsional en el eje auxiliar en Nm\*)  
 $Wtb = T2 / (Db/2)$  (\*Carga tangencial\*)  
 $Wrb = Wtb \cdot \tan[\theta]$   
 $Wtc = T2 / (Dc/2)$  (\*Carga tangencial\*)  
 $Wrc = Wtc \cdot \tan[\theta]$

(\*Dc = ( Nc \* 0.0254 ) / Pd;  
 Dd = ( Nd \* 0.0254 ) / Pd;  
 $Wtc = T / (Dc/2)$ ;  
 $Wtd = T2 / (Dd/2)$ );\*

(\*Distancias en metros\*)  
 $X1 = 0.011$ ;  
 $X2 = 0.023$ ;  
 $X3 = 0.015$ ;  
 $X4 = 0.013$ ;

## Alto par en Y

SumaMby =  $-Wtb \cdot X1 + Wtc \cdot (X1 + X2) - Rdy \cdot (X1 + X2 + X3) = 0$ ;  
 SumaMdy =  $Rby \cdot (X1 + X2 + X3) + Wtb \cdot (X2 + X3) - Wtc \cdot (X3) = 0$ ;  
 ReaccionDy = Solve[SumaMby]  
 ReaccionBy = Solve[SumaMdy]  
 $My = -(Rby \cdot X1) - ((Wtb + Rby) \cdot (X2)) / .ReaccionBy$

Wtb  
**{{Rdy->6271.36}}**  
**{{Rby->405.703}}**

**Diagrama de Cortante y flector**

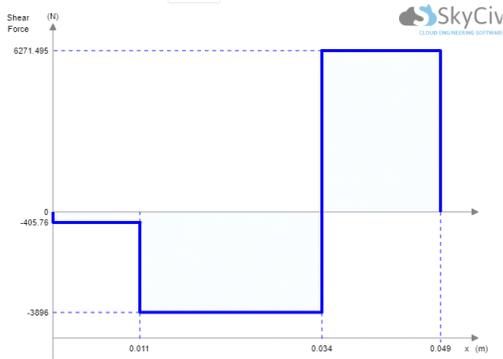
Free Body Diagram (FBD)

Show Equivalent Loads



Shear Force Diagram (SFD)

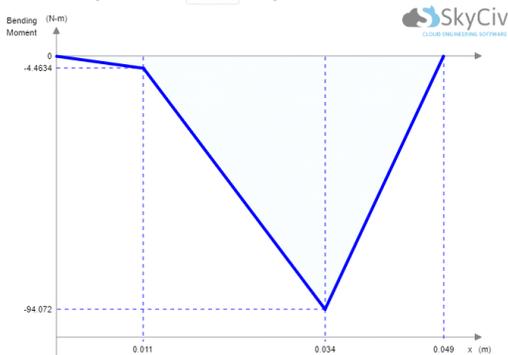
The Shear Force (V) at  m along the beam is: (No Position Entered)



Bending Moment Diagram (BMD)

Reverse BMD Sign Convention

The Bending Moment (M) at  m along the beam is: (No Position Entered)



**Alto par en X**

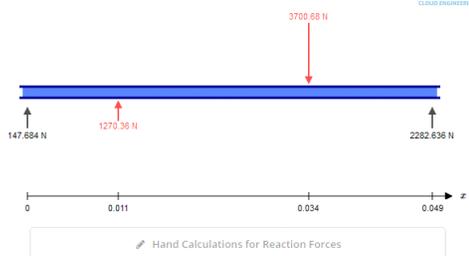
$$\begin{aligned} \text{SumaMbx} &= \text{Wrb} * \text{X1} - \\ & \text{Wrc} * (\text{X1} + \text{X2}) + \text{Rdx} * (\text{X1} + \text{X2} + \text{X3}) = 0; \\ \text{SumaMdx} &= -\text{Rbx} * (\text{X1} + \text{X2} + \text{X3}) - \\ & \text{Wrb} * (\text{X2} + \text{X3}) + \text{Wrc} * (\text{X3}) = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ReaccionDx} &= \text{Solve}[\text{SumaMbx}] \\ \text{ReaccionBx} &= \text{Solve}[\text{SumaMdx}] \\ \text{Mx} &= ((\text{Rbx}) * \text{X1}) + ((\text{X2}) * (\text{Wrb} + \text{Rbx})) / \text{ReaccionBx} \\ & / \text{X1} - > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Mp} &= \sqrt{\text{Mx}^2 + \text{My}^2} \\ \{\{\text{Rdx}->2282.59}\}\} \\ \{\{\text{Rbx}->147.664}\}\} \end{aligned}$$

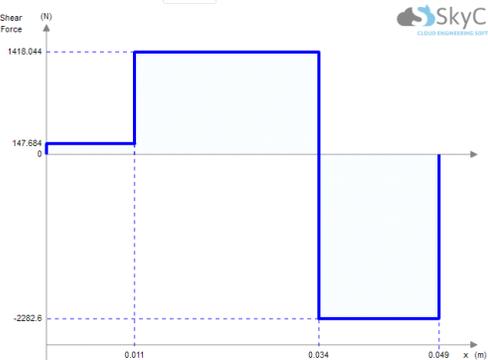
**Diagrama de Cortante y flector**

Show Equivalent Loads



Shear Force Diagram (SFD)

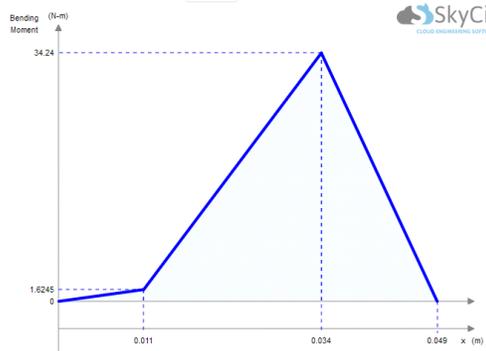
The Shear Force (V) at  m along the beam is: (No Position Entered)



Bending Moment Diagram (BMD)

Reverse BMD Sign Convention

The Bending Moment (M) at  m along the beam is: (No Position Entered)

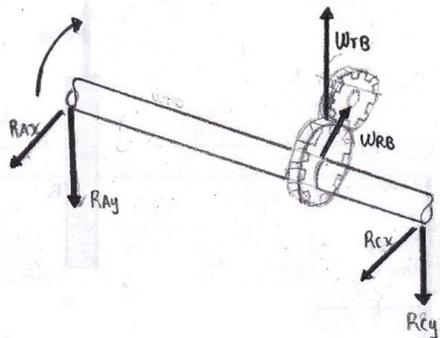


$k1 = 2$ ; (\*Cuñero de perfil\*)  
 $k3 = 3$ ;(\*Anillos de Retención\*)  
 $kT = 3$ ;  
 (\*Material AISI 4140 OQT 1000\*)  
 $sy = 1160 \cdot 10^6$ ;(\*Esfuerzo último\*)  
 $D1 = \left( \frac{16 \cdot Ns}{\pi \cdot sy} \sqrt{4 \cdot Mp^2 + 3 \cdot T2^2} \right)^{\frac{1}{3}}$ ;(\*Diámetro para Cs\*)  
 $Cs = (D1/7.62)^{-0.11}$ ; (\*Factor por tamaño\*)  
 $Cst = 1$ ; (\*Factor por tipo de carga: Flexión\*)  
 $Cr = 0.81$ ; (\*Factor por confiabilidad: 0.99\*)  
 $Cm = 1$ ; (\*Factor por material: Acero forjado\*)  
 $sn = 400 \cdot 10^6$ ;(\* Resistencia a la fatiga: Maquinado o  
 estirado en frío figura 5-8 Moot\*)  
 $snp = sn \cdot Cs \cdot Cst \cdot Cr \cdot Cm$ ; (\*Resistencia a la fatiga  
 real\*)  
 (\*Diámetro\*)

$$Daux = \left( \frac{32 \cdot Ns}{\pi} \sqrt{\left( \frac{k1 \cdot Mp}{snp} \right)^2 + \left( \frac{3}{4} \cdot \left( \frac{T2}{sy} \right)^2} \right)} \right)^{\frac{1}{3}}$$

{0.0175823}

**Eje secundario**



**Datos**

Clear[Ns,Pot, Mx, My, Mp,D1];  
 eficiencia = 0.86;  
 Pot = 4.2011\*eficiencia;  
 $\theta = 20$ \*Degree; (\*ángulo de presión engrane\*)  
 $Dd = (\text{modulo} \cdot Nd \cdot .001)$ ; (\*Diámetro de paso  
 engrane\*)  
 $Ns = 1.5$ ; (\*Factor de Seguridad\*)  
 $N3 = N2/R2$ ; (\*RPM's\*)  
 $T3 = T2 \cdot R2$ (\*Par torsional en el eje en Nm\*)  
 $Wtd = T3/(Dd/2)$  (\*Carga tangencial\*)  
 $Wrd = Wtd \cdot \tan[\theta]$   
 $WFT = 3722.43$  (\*Fuerza de frenado en N\*)  
 $Ddd = 7$ ;(\*Diámetro de disco de freno en in\*)

(\*Distancias en metros\*)

$X1 = 0.011$ ;  
 $X2 = 0.023$ ;  
 $X3 = 0.015$ ;  
 $X4 = 0.013$ ;

**Alto par en Y**

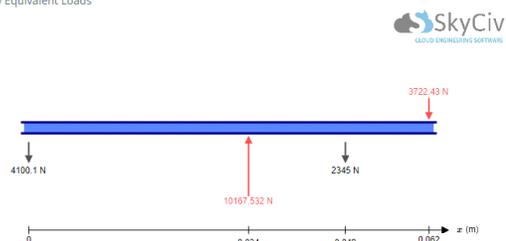
$\text{SumaMey} = Wtd \cdot (X1 + X2) - Rfy \cdot (X1 + X2 + X3) -$   
 $WFT \cdot (X1 + X2 + X3 + X4) = 0$ ;  
 $\text{SumaMfy} = Rey \cdot (X1 + X2 + X3) - Wtd \cdot (X3) -$   
 $(WFT \cdot (X4)) = 0$ ;  
 $\text{ReaccionFy} = \text{Solve}[\text{SumaMey}]$   
 $\text{ReaccionEy} = \text{Solve}[\text{SumaMfy}]$   
 $My = Rey \cdot (X1 + X2) / .\text{ReaccionEy}$

**{{Rfy->2344.88}}**  
**{{Rey->4100.04}}**  
**{139.401}**

**Diagrama de Cortante y flector**

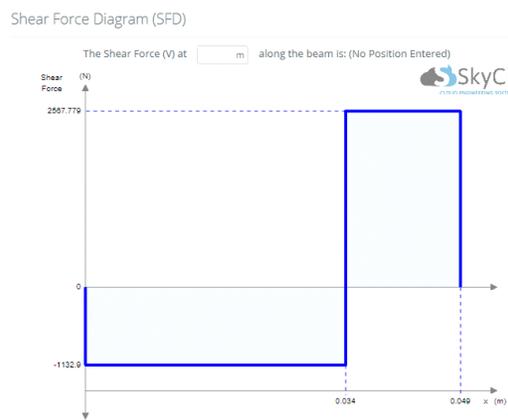
Free Body Diagram (FBD)

Show Equivalent Loads



Shear Force Diagram (SFD)





**Alto par en X**

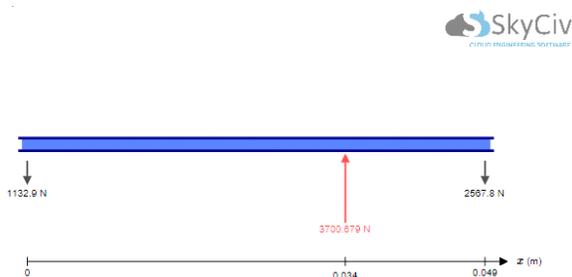
$SumaMex = Wrd*(X1+X2) - Rfx*(X1+X2+X3) == 0;$   
 $SumaMfx = Rex*(X1+X2+X3) - Wrd*(X3) == 0;$   
 $ReaccionFx = Solve[SumaMex]$   
 $ReaccionEx = Solve[SumaMfx]$   
 $Mx = Rex*(X1+X2) /. ReaccionEx$

$Mp = \sqrt{Mx^2 + My^2};$

**{{Rfx->2567.77}}**  
**{{Rex->1132.84}}**



**Diagrama de Cortante y flector**



$k1 = 2; (*Cuñero de perfil*)$   
 $k3 = 3; (*Anillos de Retención*)$   
 $kT = 3;$   
 $(*Material AISI 4140 OQT 1000*)$   
 $sy = 1160*10^6; (*Esfuerzo último*)$   
 $D1 = \left( \frac{16 * Ns}{\pi * sy} \sqrt{4 * Mp^2 + 3 * T3^2} \right)^{\frac{1}{3}}; (*Diámetro para Cs*)$   
 $Cs = (D1/7.62)^{-0.11}; (*Factor por tamaño*)$   
 $Cst = 1; (*Factor por tipo de carga: Flexión*)$   
 $Cr = 0.81; (*Factor por confiabilidad: 0.99*)$   
 $Cm = 1; (*Factor por material: Acero forjado*)$   
 $sn = 400*10^6; (*Resistencia a la fatiga: Maquinado o estirado en frío figura 5-8 Moot*)$   
 $snp = sn * Cs * Cst * Cr * Cm; (*Resistencia a la fatiga real*)$

(\*Diámetro\*)

$Dsec = \left( \left( \frac{32 * Ns}{\pi} \sqrt{\left( \frac{k1 * Mp}{snp} \right)^2 + \left( \frac{3}{4} * \left( \frac{T3}{sy} \right)^2} \right)} \right)^{\frac{1}{3}}$   
**{0.0214855}**

---

**Cálculos de Bandas**

D1 = ; (\*Diámetro de paso de la polea inductora\*)  
 D2 = ; (\*Diámetro de paso de la polea inducida\*)  
 dC = ; (\*Distancia entre centros\*)

---

**Ancho de Cara**
**Datos**

(\* Los siguientes datos se toman en cuenta como una primera aproximación del ancho de cara\*)  
 (\*Se considera como referencia la regla práctica para la determinación del ancho de cara:  
 $8m < F < 16m$ \*)

SF = 1; (\*factor de seguridad por tipo de máquina\*)  
 Sat = 1050000000; (\*Esfuerzo admisible de tensión en Pa Templado y revenido a 1200°F tabla E-10, página 991 Norton\*)  
 Y28 = 0.353; (\*Tabla 9-12 Mott pag. 439 (19 dientes)\*)  
 Y67 = 0.428; (\*50 dientes\*)  
 Y23 = 0.36; (\*26 dientes\*)  
 Y60 = 0.422; (\*43 dientes\*)

**Ancho Engrane A (28 dientes)**

Fa = (Wta \* SF) / ((.001 \* modulo) \* Sat \* Y28)  
 0.00470833

**Ancho Engrane B (67 dientes)**

Fb = (Wtb \* SF) / ((.001 \* modulo) \* Sat \* Y67)  
 0.00388327

**Ancho Engrane C (23 dientes)**

Fc = (Wtc \* SF) / ((.001 \* modulo) \* Sat \* Y23)  
 0.0134489

**Ancho Engrane D (60 dientes)**

Fd = (Wtd \* SF) / ((.001 \* modulo) \* Sat \* Y60)  
 0.011473

---

**Esfuerzos de Flexión en Engranés**
**Datos**

(\*Factor geométrico J de resistencia a la flexión\*)

(\*Referencia: Paginas 572-574 Norton\*)  
 Ja = 0.3789; (\*Factor de geometría, Engrane recto 20°, N = 28 acoplado con N = 67\*)  
 Jb = 0.416; (\*Factor de geometría, Engrane recto 20°, N = 67 acoplado con N = 28\*)  
 Jc = 0.356; (\*Factor de geometría, Engrane recto 20°, N = 23 acoplado con N = 60\*)

Jd = 0.4025; (\*Factor de geometría, Engrane recto 20°, N = 60 acoplado con N = 23\*)

(\*Factor dinámico Kv\*)

AA = 83.7736;  
 BB = 0.3969;  
 VlinealA = (N1 \* (π/30) \* Na \* (.001))  
 VlinealB = (N2 \* (π/30) \* Nb \* (.001))  
 VlinealC = (N2 \* (π/30) \* Nc \* (.001))  
 VlinealD = (N3 \* (π/30) \* Nd \* (.001))

Kva = (AA / (AA + √(200 \* VlinealA)))<sup>BB</sup>

Kvb = (AA / (AA + √(200 \* VlinealB)))<sup>BB</sup>

Kvc = (AA / (AA + √(200 \* VlinealC)))<sup>BB</sup>

Kvd = (AA / (AA + √(200 \* VlinealD)))<sup>BB</sup>

(\*Factor Km de distribución de carga\*)

Km = 1.6;

(\*Factor Ka por tipo de motor y cargas de choque, Norton 577\*)

(\*Máquina impulsora: Impacto medio (motor de un solo cilindro)\*)

(\*Máquina impulsada: Impacto uniforme\*)

Ka = 1.3;

(\*Factor Ks de tamaño\*)

Ks = 1;

(\*Factor Kb de espesor del aro\*)

Kb = 1.2;

(\*Factor KI de un engrane loco\*)

KI = 1;

F28 = 0.016; (\*Elegido a partir del cálculo del ancho de cara F\*)

F67 = 0.016;

F23 = 0.024;

F60 = 0.024;

**Cálculo de Esfuerzo engrane 'a' (28 dientes)**

σta = (Wta / ((modulo \* .001) \* F28 \* Ja))  
 \* ((Ka \* Km) / Kva) \* Ks \* Kb \* KI \* [N/m<sup>2</sup>]\*

7.5904\*10<sup>8</sup>**Cálculo de Esfuerzo engrane 'b' (67 dientes)**

$$\sigma_{tb} = (W_{tb} / ((\text{modulo} * .001) * F_{67} * J_b)) * ((K_a * K_m) / K_{vb}) * K_s * K_b * K_I (*[N/m^2] *)$$

6.91347\*10<sup>8</sup>**Cálculo de Esfuerzo engrane 'c' (23 dientes)**

$$\sigma_{tc} = (W_{tc} / ((\text{modulo} * .001) * F_{23} * J_c)) * ((K_a * K_m) / K_{vc}) * K_s * K_b * K_I (*[N/m^2] *)$$

1.53505\*10<sup>9</sup>**Cálculo de Esfuerzo engrane 'd' (60 dientes)**

$$\sigma_{td} = (W_{td} / ((\text{modulo} * .001) * F_{60} * J_d)) * ((K_a * K_m) / K_{vd}) * K_s * K_b * K_I (*[N/m^2] *)$$

1.35771\*10<sup>9</sup>**Cuñeros****Eje primario**

Ancho W: 1/4 in  
Hasta (incl.) 9/8 in  
Cuadrada H: 1/4 in

Eje secundario (se espera que sea un poco mayor de 11/4)

Ancho W: 5/16 in  
Hasta (incl.) 11/8 in  
Cuadrada H: 5/16 in

Eje auxiliar (se espera que sea un poco mayor de 11/4)

Ancho W: 5/16 in  
Hasta (incl.) 11/8 in  
Cuadrada H: 5/16 in

**Rodamientos****Datos**

Hs = 450; (\*horas de servicio del rodamiento\*)  
V = 1; (\*porque la pista interna es la que gira\*)  
K = 3; (\*por ser rodamiento de bola\*)  
(\*Con la capacidad de carga equivalente y diametro de eje, buscar en catálogo  
<http://www.skf.com/mx/products/bearings-units-housings/ball-bearings/deep-groove-ball-bearings/single-row-deep-groove-ball-bearings/single-row/index.html>\*)

**Eje Primario****Rodamiento A**

0.81 Rodamiento

(\*Carga equivalente en lb\*)

$$P_a = V * (\sqrt{R_{ax}^2 + R_{ay}^2}) / .ReaccionAx / .ReaccionAy;$$

Lda = Hs \* N1 \* 60

(\*Capacidad de carga dinámica en N\*)

$$C_{cda} = 4.4482216282546 P_a * \left(\frac{L_{da}}{10^6}\right)^{\frac{1}{k}}$$

**Rodamiento C**

C Rodamiento

$$P_c = V * (\sqrt{R_{cx}^2 + R_{cy}^2}) / .ReaccionCx / .ReaccionCy;$$

Ldc = Hs \* N1 \* 60;

$$C_{cdc} = 4.4482216282546 P_c * \left(\frac{L_{dc}}{10^6}\right)^{\frac{1}{k}}$$

**Eje Auxiliar****Rodamiento B**

0.0065 Rodamiento

$$P_b = V * (\sqrt{R_{bx}^2 + R_{by}^2}) / .ReaccionBx / .ReaccionBy;$$

Ldb = Hs \* N2 \* 60;

$$C_{cdb} = 4.4482216282546 P_b * \left(\frac{L_{db}}{10^6}\right)^{\frac{1}{k}}$$

Daux (\*Diametro deleje auxiliar en m\*)

**Rodamiento D**

D Rodamiento

$$P_d = V * (\sqrt{R_{dx}^2 + R_{dy}^2}) / .ReaccionDx / .ReaccionDy;$$

Ldd = Hs \* N2 \* 60;

$$C_{cdd} = 4.4482216282546 P_d * \left(\frac{L_{dd}}{10^6}\right)^{\frac{1}{k}}$$

Daux (\*Diametro deleje auxiliar en m\*)

**Eje Secundario****Rodamiento E**

E Rodamiento

$$P_e = V * (\sqrt{R_{ex}^2 + R_{ey}^2}) / .ReaccionEx / .ReaccionEy;$$

Lde = Hs \* N3 \* 60;

$$C_{cde} = 4.4482216282546 P_e * \left(\frac{L_{de}}{10^6}\right)^{\frac{1}{k}}$$

Dsec

**Rodamiento F**

0.75 Rodamiento

$$P_f = V * (\sqrt{R_{fx}^2 + R_{fy}^2}) / .ReaccionFx / .ReaccionFy;$$

Ldf = Hs \* N3 \* 60;

$$C_{cdf} = 4.4482216282546 P_f * \left(\frac{L_{df}}{10^6}\right)^{\frac{1}{k}}$$

## APÉNDICE D: Programa en Python GA-Optimization.py

```

import random #Funciones para generar números aleatorios
from colorama import Fore, Style, init
init(convert=True)

#-- Valores propuestos por Maple ----- Restricciones ----- Función objetivo-----

# Engrane N1 = 19 | 17 | 20          15<=N1<=45          Distancia entre centros= N1+N2+N3+N
3
# Engrane N2 = 41 | 106 | 73        15<=N2<=45
# Engrane N3 = 30 | 27 | 31         16<=N3<=101
# Engrane N4 = 88 | 28 | 54         16<=N4<=101
#          6.1 <= [(N2*N4)/(N1*N3)] <= 6.5
#          Distancia entre centros= N1+N2+N3+N3 >= 178
#
#----- Declaraciones-----

lista_N=["N1","N2","N3","N4"] # Lista que servirá para imprimir valores de engranes en pantalla.
Pressure=2                    # Individuos seleccionados para reproducción.
mutationP = 0.5                # Probabilidad de que un individuo mute (low fitness).

#----- Funciones-----

#Función para generar listas de aleatorios
def listaAleatorios(n):
    lista = [0] * n
    for i in range(n):
        lista[i] = random.randint(0,1)
    return lista

#Función para sumar elementos de una lista
def sumalista(listaNumeros):
    laSuma = 0
    for i in listaNumeros:
        laSuma = laSuma + i
    return laSuma

#-----PROGRAMACIÓN DEL ALGORITMO GENÉTICO-----

print("\n\n Bienvenido a esta aplicación de la Inteligencia Artificial (AI) utilizando Algoritmos Genéticos(GA).\n\n"
)
print(" Este programa permitirá optimizar la distancia entre centros de ejes de engranes así como el volumen del
sistema.")
print(" Se mostrarán los siguientes datos de los individuos más aptos:\n")
print(" -> Número de dientes de los engranes")
print(" -> Distancia entre centros")
print(" -> Volumen aproximado del sistema\n")
print("La población fija es de 4 individuos aleatorios")
print("El cálculo del fitness es automático y está función de la distancia entre centros y el volumen")
print("La selección de los individuos más aptos usa el método tipo Torneo")
print("El pressure fijo es de 2 (cantidad de elementos seleccionados para reproducción)")

```

```
print("Los valores del punto de cruce, la probabilidad de mutación y la cantidad de iteraciones son modificables")
```

```
while True: #Este ciclo emula al ciclo do-while y permite generar una población dentro de las restricciones.
```

```
    Individuo1=[] #Individuo con 4 cromosomas (N1,N2,N3,N4): cada uno representa un número de dientes de un engrane.
```

```
    Individuo2=[] # "" "" ""
```

```
    Individuo3=[] # "" "" ""
```

```
    Individuo4=[] # "" "" ""
```

```
    lista_bin1=[] #Arreglo que servirá para alojar los números binarios en formato cadena.
```

```
    lista_bin2=[] # "" "" ""
```

```
    lista_bin3=[] # "" "" ""
```

```
    lista_bin4=[] # "" "" ""
```

```
    lista_dec1=[] #Arreglo que servirá para alojar la codificación de la cadena binaria a decimal.
```

```
    lista_dec2=[] # "" "" ""
```

```
    lista_dec3=[] # "" "" ""
```

```
    lista_dec4=[] # "" "" ""
```

```
    Poblacion=[Individuo1,Individuo2,Individuo3,Individuo4] #Población de 4 habitantes
```

```
    lista_bin=[lista_bin1,lista_bin2,lista_bin3,lista_bin4] #lista de números binarios int
```

```
    lista_dec=[lista_dec1,lista_dec2,lista_dec3,lista_dec4] #lista de números decimales int
```

```
    #Ciclo que genera una población aleatoria de 4 individuos con 4 cromosomas cada uno y 7 genes diferentes por cromosoma.
```

```
    j=0
```

```
    while j<=3:
```

```
        i=0
```

```
        while i<=3:
```

```
            Poblacion[j].insert(i,listaAleatorios(7))
```

```
            i=i+1
```

```
        j=j+1
```

```
    #Forza al Cromosoma 1 y 2 del Individuo 1 y 2 a tener máximo 6 bits de información
```

```
    m=0
```

```
    while m<=1:
```

```
        Individuo1[m][0]=0
```

```
        Individuo2[m][0]=0
```

```
        Individuo3[m][0]=0
```

```
        Individuo4[m][0]=0
```

```
        m=m+1
```

```
    #Ciclo de codificación binaria (convierte a cadena binaria cada cromosoma y posteriormente a decimal)
```

```
    k=0
```

```
    while k<=3:
```

```
        i=0
```

```
        while i<=3:
```

```
            str1 = ".join(str(e) for e in Poblacion[k][i]) #convierte a cadena cada lista de cromosomas
```

```
            lista_bin[k].insert(i,int(str1)) #Inserta la cadena en una lista nueva
```

```
            dec1=(int(str1, 2)) #Convierte a decimal cada cadena binaria
```

```
            lista_dec[k].insert(i,dec1) #Inserta el valor decimal en una nueva lista
```

```
            i=i+1
```

```
        k=k+1
```

```

l1=lista_dec1
l2=lista_dec2
l3=lista_dec3
l4=lista_dec4
if l1[0]<=45 and l1[0]>=15 and l1[1]<=45 and l1[1]>=15 and l1[2]>=16 and l1[3]>=16 and l2[0]<=45 and l
2[0]>=15 and l2[1]<=45 and l2[1]>=15 and l2[2]>=16 and l2[3]>=16 and l3[0]<=45 and l3[0]>=15 and l3[1]<
=45 and l3[1]>=15 and l3[2]>=16 and l3[3]>=16 and l4[0]<=45 and l4[0]>=15 and l4[1]<=45 and l4[1]>=15
and l4[2]>=16 and l4[3]>=16:
    break

#Ciclo para evolucionar y evaluar la adaptación de los individuos

w=0
while True:
#Ciclo para evaluar y calcular fitness
    A=[]
    B=[]
    C=[]
    D=[]
    lista_fitness=[A,B,C,D] #Lista para guardar la aptitud de cada individuo

    f=0
    while f<=3:

        distancia=sum(lista(lista_dec[f]) #Cálculo de la distancia entre centros
        relacion=(lista_dec[f][1]*lista_dec[f][3])/(lista_dec[f][0]*lista_dec[f][2]) #Calculo de la relación de transmissi
ón
        volumenfitness= 3.14*((lista_dec[f][0])**2)+3.14*((lista_dec[f][1])**2)+(3.14*((lista_dec[f][2])**2)*1.5)
+(3.14*((lista_dec[f][3])**2)*1.5)

        #Condiciones para que el fitness sea 5
        if distancia>=178 and distancia<=200: # and relacion>=6.1 and relacion<=7.1:
            lista_fitness[f]=5

        x=False
        if w>=1 and x==True:
            if volumenfitness <= vol_p[mp_pv] and volumenfitness <= vol_a[mp_av]:
                lista_fitness[f]=5

        #Condiciones para que el fitness sea 4
        elif distancia>=201 and distancia<=250: # and relacion>=7.1 and relacion<=7.5: #or (relacion>=5.0 and r
elacion<=6):
            lista_fitness[f]=4
        #Condiciones para que el fitness sea 3
        elif distancia>=251 and distancia<=300: # and relacion>=7.6 and relacion<=8:
            lista_fitness[f]=3
        #Condiciones para que el fitness sea 2
        elif distancia>=301 and distancia<=344: # and relacion>=8.1 and relacion<=8.5:
            lista_fitness[f]=2
        #Condiciones para que el fitness sea 1
        elif distancia>=150 and distancia<=177: # and relacion>=8.6 and relacion<=9:
            lista_fitness[f]=1
        #Condición para que el fitness sea 0
        else:

```

```

    lista_fitness[f]=0
    f=f+1

#Vectorización de individuos con mayor fitness
lista_pressure=[] #Lista de individuos seleccionados para la reproducción
s=0
while s<=1:

    min_position = lista_fitness.index(min(lista_fitness)) #Obtiene la posición de los individuos menos adaptado
s
    lista_pressure.insert(s,Poblacion[min_position]) #Inserta individuos menos adaptados en lista_pressure
    Poblacion.pop(min_position) #Remueve a los individuos menos adaptados de la población general
    lista_fitness.pop(min_position) #Remueve los fitness de los individuos menos adaptados
    s=s+1

while True:

    #CICLO PARA REALIZAR CRUZA
    t=0
    while t<=1:
        punto_cruza = random.randint(1,3)
        lista_pressure[t][punto_cruza:len(Poblacion[t])]=Poblacion[t][punto_cruza:len(Poblacion[t])]
        t=t+1

    #CICLO PARA MUTAR A LOS INDIVIDUOS CRUZADOS
    valor_binario = random.randint(0,1)
    punto_gen = random.randint(0,3)
    punto_mutacion = random.randint(0,6)

    y=0
    while y<=1:
        lista_pressure[y][punto_gen][punto_mutacion]=valor_binario
        y=y+1

    hijo1=[]
    hijo2=[]
    hijo3=[]
    hijo4=[]
    Nueva_poblacion=[hijo1,hijo2,hijo3,hijo4]

    #Ciclo para definir a la nueva población con individuos cruzados y mutados

    h=0
    while h<=1:
        Nueva_poblacion[h]=Poblacion[h]
        h=h+1

    c=0
    while c<=1:
        Nueva_poblacion[c+2]=lista_pressure[c]
        c=c+1

    Poblacion=Nueva_poblacion #Población final

```

```

lista_bin1=[] #Arreglo que servirá para alojar los números binarios en formato cadena
lista_bin2=[] # "" "" ""
lista_bin3=[] # "" "" ""
lista_bin4=[] # "" "" ""
lista_dec1=[] #Arreglo que servirá para alojar la codificación de la cadena binaria a decimal
lista_dec2=[] # "" "" ""
lista_dec3=[] # "" "" ""
lista_dec4=[] # "" "" ""
lista_bin=[lista_bin1,lista_bin2,lista_bin3,lista_bin4] #lista de números binarios int
lista_dec=[lista_dec1,lista_dec2,lista_dec3,lista_dec4] #lista de números decimales int

#Ciclo de codificación binaria (convierte cada cromosoma a cadena binaria y posteriormente a decimal)
k=0
while k<=3:
    i=0
    while i<=3:
        str1 = ".join(str(e) for e in Nueva_poblacion[k][i]) #convierte a cadena cada lista de cromosomas
        lista_bin[k].insert(i,int(str1)) #Inserta la cadena en una lista nueva
        dec1=(int(str1, 2)) #Convierte a decimal cada cadena binaria
        lista_dec[k].insert(i,dec1) #Inserta el valor decimal en una nueva lista
        i=i+1
    k=k+1

l1=lista_dec1
l2=lista_dec2
l3=lista_dec3
l4=lista_dec4
if l1[0]>=15 and l1[1]>=15 and l1[2]>=16 and l1[3]>=16 and l2[0]>=15 and l2[1]>=15 and l2[2]>=16 and
l2[3]>=16 and l3[0]>=15 and l3[1]>=15 and l3[2]>=16 and l3[3]>=16 and l4[0]>=15 and l4[1]>=15 and l4[
2]>=16 and l4[3]>=16 :
    break

#Ciclo para comparar cada generación e imprimir al individuo mejor adaptado en la actualidad.

lista_comp_distancia=[]
lista_comp_volumen=[]
v=0
while v<=3: #Lista para comparar distancias
    lista_comp_distancia.insert(v,sumalista(lista_dec[v]))
    v=v+1

q=0
while q<=3: #Lista para comparar volúmenes
    lista_comp_volumen.insert(q,3.14*((lista_dec[q][0])**2)+3.14*((lista_dec[q][1])**2)+(3.14*((lista_dec[q][
2])**2)*1.5)+(3.14*((lista_dec[q][3])**2)*1.5))
    q=q+1

mp_ad= lista_comp_distancia.index(min(lista_comp_distancia)) #min_position lista actual distancia
mp_av= lista_comp_volumen.index(min(lista_comp_volumen)) #min_position lista actual volumen
Access=False #Llave para hacer que la lista pasada sea guardada

#Ciclo con condiciones para imprimir individuos mejor adaptados

g=0
while g<=3 and w>=1:

```

```

suma = sumalista(lista_dec[g])
relt=(lista_dec[g][1]*lista_dec[g][3])/(lista_dec[g][0]*lista_dec[g][2]) #Relación de transmisión
dis_a = lista_comp_distancia      #distancia actual
dis_p = lista_comp_distancia_pas  #distancia pasada
vol_a = lista_comp_volumen        #volumen actual
vol_p = lista_comp_volumen_pas    #volumen pasado
T1= ((lista_dec[g][1])/2)+6
T2= (lista_dec[g][2]+lista_dec[g][3])/2

if suma<=200 and suma>=178 and relt>=6.1 and relt<=6.5 and vol_a[g] <= vol_p[mp_pv] and vol_a[g] <=
vol_a[mp_av] and T1<=T2:
    Access= True
    x=True
    print(Fore.BLUE+"\nEngrane", " Valor decimal de los dientes", " Cadena binaria\n\n")
    u=0
    while u<=3:
        print((Fore.WHITE+" "+lista_N[u])," | ", "(lista_dec[g][u])," | ", "(lista_bin[g][u]))
        u=u+1
    print(Fore.RED + "\nDistancia entre centros: ", sumalista(lista_dec[g]))
    print("\nVolumen del sistema: ", 3.14*((lista_dec[g][0])**2)+3.14*((lista_dec[g][1])**2)+3.14*((lista_d
ec[g][2])**2)*1.5+3.14*((lista_dec[g][3])**2)*1.5 )
    print("Iteración", w)

else:
    Access= False
    x=False

g=g+1

#Ciclo con condición para empezar a guardar listas pasadas
if Access==True or w==0:

    lista_comp_distancia_pas=lista_comp_distancia
    lista_comp_volumen_pas=lista_comp_volumen
    mp_pd = lista_comp_distancia_pas.index(min(lista_comp_distancia_pas))
    mp_pv = lista_comp_volumen_pas.index(min(lista_comp_volumen_pas))

w=w+1

#Cantidad de iteraciones
if(w >= 10000000):
    break

```

**APÉNDICE E: Matriz de decisión para la elección del tren de engranes.**

/	Funcionamiento				Aplicación			Seguridad		Comercial	Manufactura			
	Desgaste localizado por frecuencias armónicas	Piñones de tamaño adecuado	Distribución de la relación entre las dos etapas	Ranking de adaptación	Empaquetamiento	Mantenimiento	Desmontaje	Fiabilidad	Vida útil	Costo	Precisión	Disponibilidad de maquinaria	Facilidad de ensamble	
w	0.1	0.15	0.05	0.05	0.01	0.1	0.02	0.2	0.02	0.05	0.1	0.1	0.05	1
Individuo 10	100	100	100	25	25	75	75	100	75	50	75	50	90	81.5
Individuo 9	0	25	25	25	75	25	50	25	25	75	90	50	50	36.25
Individuo 8	100	75	100	25	75	75	75	75	75	50	75	50	90	73.25
Individuo 7	0	50	50	50	50	50	75	50	50	75	90	50	75	52
Individuo 6	100	100	75	50	90	75	50	100	100	25	75	50	50	78.9
Individuo 5	0	25	50	75	100	25	50	25	25	75	90	50	50	40.25
Individuo 4	100	25	25	75	50	25	75	50	50	75	90	50	50	54.5
Individuo 3	100	25	25	90	75	25	50	25	25	75	90	50	50	49.5
Individuo 2	0	50	50	90	50	25	75	25	25	75	90	50	50	44.75
Individuo 1	0	25	25	100	100	25	50	25	25	75	90	50	50	40.25

## REFERENCIAS

- Altair University. (2015). *Practical Aspects of Structural Optimization* .
- American Gear Manufacturers Association AGMA 2001-B88. (1988). Fundamental Rating Factors and Calculation Methods for Involute Spur and Helical Gear Theeth - AGMA 2001 -B88. AGMA NATIONAL STANDARD.
- Dobrovolski, V. (1970). *Elementos de Máquinas*. Moscú: MIR.
- Estévez Valencia, P. (1997). Optimización mediante algoritmos genéticos.
- G. Budynas, R., & Keith Nisbett, J. (2011). *Diseño en ingeniería mecánica de Shigley*. NY: McGraw-Hill.
- Gillespie, T. (1992). *Fundamentals of Vehicule Dynamics*. USA: SAE International.
- Godinez Rojano, F. A. (2000). *Diseño de un sistema de transmisión para un vehiculo de competencia mini baja*. México D.F.
- Goldberg, D. E. (1989). *Genetic Algorithms In Search, Optimization and Machine Learning*. Boston, MA, USA: Addison-Wesley Longman Publishing Company, Inc.
- Herrera, F., Lozano, M., & Verdegay, J. L. (1998). Tackling Real-Coded Genetic Algorithms:. *Artificial Intelligence Review*, 265-319.
- Khan, . S. (2019). *Khan Academy*. Retrieved from <https://es.khanacademy.org/science/biology/her/evolution-and-natural-selection/a/darwin-evolution-natural-selection>
- Kulangara, J. A., Rao., C. S., & Subhash Chandra Bose , P. (2017). Generation and Optimization of Lattice Structure on a Spur Gear. *materialstoday*, 6.
- Marcelin, J. (2001). Genetic Optimisation of Gears. *The International Journal of Advance Manufacturing Technology*, 6.
- Miler , D., Žeželj, D., Loncar, A., & Vuckovic, K. (2018). Multi-objective spur gear pair optimization focused on volume and efficiency. *Elsevier*, 11.
- Miler, D., Loncar, A., Žeželj, D., & Domitran, Z. (2017). Influence of profile shift on the spur gear pair optimization. *Elsevier*, 9.
- Mott, R. L. (2006). *Diseño de elementos de máquinas*. México: Pearson Educación.
- Moujahid, A., Inza, I., & Larrañaga, P. (2004, Noviembre 9). *Departamento de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial*. Retrieved from Universidad del País Vasco: <http://www.sc.ehu.es/ccwbyes/docencia/mmcc/docs/temageneticos.pdf>

- National Human Genome Research Institute. (2019, Junio 26). Retrieved from <https://www.genome.gov/es/genetics-glossary/Genotipo>
- Naunheimer, H., Bertsche, B., Ryborz, J., & Novak, W. (1994, 2011). *Automotive Transmissions*. Heidelberg: Springer.
- Norton, R. (2011). *Diseño de máquinas*. México: Prentice Hall.
- Prusinkiewicz, P., & Lindenmayer, A. (2004). *The Algorithmic Beauty of Plants*. NY: Springer - Verlag.
- SAE International. (2018). *Collegiate Design Series Baja SAE Rules*. USA: SAE International.
- SAE International students. (2008, Agosto 22). *History of Baja - I'm a student*. Retrieved from <https://www.google.com/search?q=baja+sae+history&oq=Baja+SAE+hi&aqs=chrome..69i57j0l3.4839j0j7&sourceid=chrome&ie=UTF-8>
- Schneider, T. (2017). Lightweight construction: First composite gearbox housing with layer-optimized organo sheeting weighs 30% less than comparable aluminum component. *Elsevier*, 6.
- Vázquez Hernández, C. F. (2015). *Diseño paramétrico del cuerpo de engranes rectos*. México D.F.
- Vikram Ashok, S. (2013). An Integrated Product - Process Development (IPPD) Based Approach For Rotorcraft Drive System Sizing, Synthesis and Design Optimization.
- Wright, D. (2019, Julio 19). *DANotes: Spur gears: tooth generation*,. Retrieved from [http://www-mdp.eng.cam.ac.uk/web/library/enginfo/textbooks\\_dvd\\_only/DAN/gears/generation/generation.html](http://www-mdp.eng.cam.ac.uk/web/library/enginfo/textbooks_dvd_only/DAN/gears/generation/generation.html)
- Xie, Y. M., & Steven, G. P. (1992). A simple evolutionary procedure for structural optimization. *Pergamon*, 12.