UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

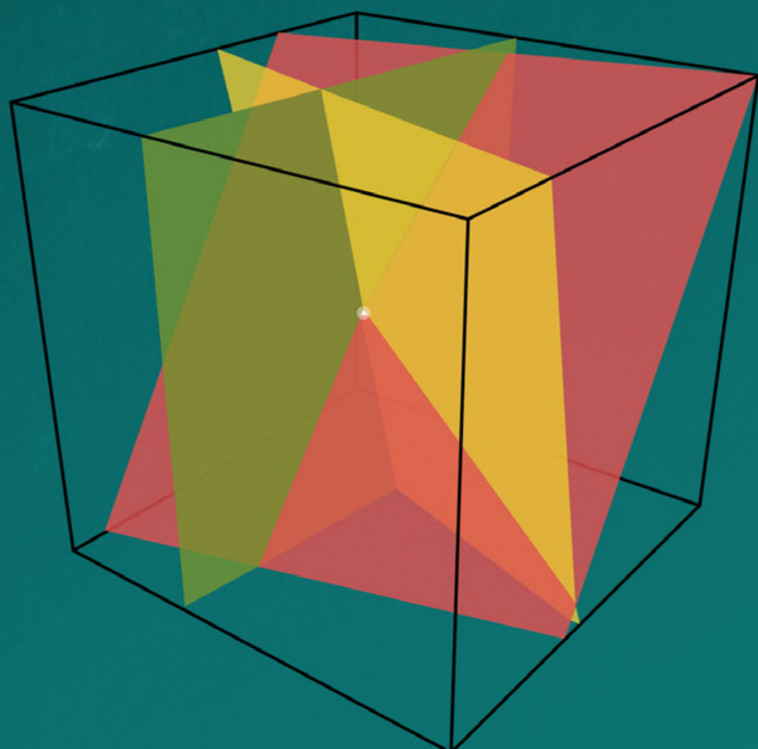
FACULTAD DE INGENIERÍA

DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS

FUNDAMENTOS DE ÁLGEBRA LINEAL Y EJERCICIOS

SEGUNDA EDICIÓN

FRANCISCO BARRERA GARCÍA



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA

FUNDAMENTOS DE ÁLGEBRA LINEAL Y EJERCICIOS

Francisco Barrera García

División de Ciencias Básicas
Coordinación de Matemáticas

BARRERA GARCÍA, Francisco
Fundamentos de álgebra lineal y ejercicios. 2ª.ed., México,
Universidad Nacional Autónoma de México,
Facultad de Ingeniería, 2019, 469 p.

Fundamentos de álgebra lineal y ejercicios

Primera edición digital: 22 de noviembre de 2014
Segunda edición digital: 21 de agosto de 2019

FACULTAD DE INGENIERÍA
http://www.ingenieria.unam.mx/

ISBN 978-607-30-2144-9

Hecho en México.

Archivo en formato PDF con un peso de 50 Mb.

Unidad de Apoyo Editorial
Corrección de estilo y cuidado de la edición: Elvia Angélica Torres Rojas
Diseño editorial: Nismet Díaz Ferro

PRÓLOGO A LA SEGUNDA EDICIÓN

Debido a la buena aceptación que ha tenido el libro *Fundamentos de Álgebra Lineal y Ejercicios* por parte de alumnos y profesores, y tomando en cuenta la actualización de los planes y programas de estudio que realizó nuestra facultad en 2016, se tomó la decisión de elaborar esta segunda edición con el fin de atender los siguientes aspectos:

1) Cubrir al 100% los contenidos teóricos del programa de la asignatura Álgebra Lineal de nuestros planes y programas de estudio.

2) Ampliar y mejorar las partes teóricas, así como incrementar, de manera significativa, el número de ejercicios resueltos y propuestos, con la idea de presentar una amplia gama de posibilidades de cómo pueden ser planteados y preguntados los conceptos teóricos en cada uno de los temas tratados.

3) Se pretende también con esta segunda edición, mejorar la claridad y sencillez con que son explicados los conceptos teóricos, buscando facilitar aún más la comprensión de ellos, pero manteniendo la formalidad y el rigor matemático que caracterizó a la primera edición.

4) Asimismo, se busca atender las observaciones y sugerencias que me hicieron llegar, alumnos y profesores, con el propósito de enriquecer la obra. Aprovecho este espacio para agradecer infinitamente a todos ellos sus valiosos comentarios.

Esta segunda edición consta de cinco capítulos, uno más que la edición anterior: 1) Grupos y campos, 2) Espacios vectoriales, 3) Transformaciones lineales, 4) Espacios con producto interno y 5) Operadores lineales en espacios con producto interno. En cada uno de estos capítulos se mantiene el esquema que fue utilizado en la versión anterior, es decir, se presentan los conceptos teóricos en la forma más sencilla posible, se incluyen algunos ejercicios resueltos, los cuales son explicados paso a paso y en forma detallada, con la finalidad de que los alumnos los entiendan fácilmente y asimilen cada uno de los conceptos teóricos presentados. Al final de cada capítulo, se incluye una serie de ejercicios propuestos con su respuesta, con la idea de que los estudiantes los resuelvan, reafirmen los conceptos estudiados y adquieran un aprendizaje más sólido del Álgebra Lineal.

La gran mayoría de los ejercicios propuestos y resueltos que se tienen en la primera edición se han mantenido en esta segunda, solamente se hicieron algunos cambios y ajustes menores; sin embargo, lo que cambió de manera significativa, fue el número de ejercicios que fueron incluidos en esta edición. En cuanto al número de ejercicios resueltos, en la primera edición se tenían 47 y en esta segunda se presentan 103; por lo que toca al número de ejercicios propuestos, en la versión anterior se tenían 49 y en esta edición se tienen 228. Se pasó de 96 ejercicios entre resueltos y propuestos en la primera edición a 331 en esta nueva versión.

A pesar de que esta obra mantiene su filosofía de ser un material escrito que resulte de gran apoyo a los estudiantes que cursan la asignatura Álgebra Lineal, también se pensó en los profesores que la imparten, presentándoles un trabajo que les puede resultar muy útil en la preparación de sus clases, o bien en la conformación de las tareas que les dejen a sus alumnos.

Quiero hacer patente de nueva cuenta mi agradecimiento al *Ing. Gonzalo López de Haro*, Secretario General de la facultad y a la *Mtra. en Letras María Cuairán Ruidíaz*, Jefa de la Unidad de Apoyo Editorial de nuestra facultad por todo el gran apoyo y facilidades que me brindaron durante todo el proceso de revisión y preparación de la versión final de esta obra. De igual forma quiero reiterar mi agradecimiento a la *Lic. Elvia Angélica Torres Rojas* por todo el trabajo realizado en la corrección de estilo y editorial de este libro, así como por su gran compromiso, su profesionalismo, su invaluable colaboración y por su siempre buena disposición al trabajo durante todo este tiempo que compartimos esta tarea. A los tres, mi más sentido agradecimiento.

Agradezco infinitamente a la *Srita. María Guadalupe Martínez Dávalos* por todo el trabajo realizado en la captura de esta obra. Su gran dedicación y compromiso hicieron posible que este trabajo llegara a feliz término. *Lupita*, de nueva cuenta ¡Mil gracias!

Consciente de que todo trabajo es perfectible, mucho agradeceré todas las observaciones y comentarios que tengan a bien hacerme, los usuarios de la obra, con el fin de mejorar futuras ediciones y que éstas sean de mayor utilidad. Todos sus comentarios serán siempre bien recibidos.

FRANCISCO BARRERA GARCÍA

Ciudad Universitaria, Ciudad de México, agosto de 2019

INTRODUCCIÓN

La presente obra fue elaborada con la intención de ofrecer a los estudiantes un material escrito que les pueda facilitar el estudio y la comprensión de los conceptos fundamentales del Álgebra Lineal.

La obra consta de cuatro capítulos: 1. Espacios vectoriales, 2. Transformaciones lineales, 3. Espacios con producto interno y 4. Operadores lineales en espacios con producto interno. En cada uno de estos capítulos se presentan los conceptos teóricos de la manera más sencilla posible, buscando facilitar su comprensión, pero sin perder formalidad y rigor matemático; se incluyen también ejercicios resueltos donde se explica, en forma detallada cada uno de los pasos realizados en la resolución del problema, con la finalidad de que al estudiante le resulte sencillo comprenderlos y asimile con ello más fácilmente los conceptos teóricos presentados. Al final de cada capítulo se incluye una serie de ejercicios propuestos con respuesta, con la idea de que el estudiante los resuelva, reafirme los conceptos estudiados y adquiera un aprendizaje más sólido del Álgebra Lineal.

Es importante señalar que buena parte de los ejercicios resueltos y propuestos incluidos en la obra, han sido tomados o rediseñados de exámenes colegiados departamentales que fueron aplicados en nuestra Facultad desde 1980. Es necesario entonces reconocer el trabajo de muchos profesores que participaron en el diseño de tales ejercicios y que en la actualidad algunos de ellos ya no laboran en la Facultad o bien ya no se encuentran entre nosotros.

A pesar de que esta obra fue elaborada pensando en proporcionar un material escrito que fuese de gran ayuda para los estudiantes que cursan la asignatura Álgebra Lineal, se considera que este trabajo puede resultar de mucha utilidad también para los profesores que la imparten como un material de apoyo para sus clases.

A los profesores *Alicia Pineda Ramírez* y *Juan Velázquez Torres* quiero expresarles mi agradecimiento por la revisión de este trabajo, ya que con sus atinados comentarios y observaciones permitieron mejorar esta obra. Agradezco también profundamente a la señorita *María Guadalupe Martínez Dávalos* la paciencia, el esmero y todo el trabajo realizado en la captura de este libro, quien con su gran interés y entusiasmo hizo posible la culminación del mismo.
¡Mil gracias Lupita!

Quiero hacer patente mi agradecimiento a la *Mtra. María Cuairán Ruidíaz*, Jefa de la Unidad de Apoyo Editorial de nuestra Facultad, por el apoyo y las facilidades que me brindó durante todo el proceso de revisión y preparación de la versión final de esta obra. De igual forma quiero agradecer a la *Lic. Elvia Angélica Torres Rojas* por todo el trabajo realizado en la corrección editorial y cuidado de la edición de este libro, así como por su profesionalismo y buena disposición durante todo el tiempo que trabajamos juntos. A las dos, mi más sentido agradecimiento.

Finalmente, agradezco también al Comité Editorial de nuestra Facultad, que preside el *Ing. Gonzalo López de Haro*, por realizar el dictamen técnico de esta obra y dar el visto bueno para su publicación.

Consciente que todo trabajo es perfectible, mucho agradeceré todas las observaciones y comentarios que tengan a bien hacerme los usuarios de la obra con el fin de mejorar futuras ediciones y que ésta sea de mayor utilidad.

FRANCISCO BARRERA GARCÍA

Ciudad Universitaria, México D.F., noviembre de 2014

ÍNDICE

CAPÍTULO 4

ÍNDICE 1 2 3 4 5

Capítulo 1

GRUPOS Y CAMPOS

Operación binaria

Una operación binaria definida en un conjunto no vacío A, es una regla o criterio que asigna a cada par ordenado de elementos de A, un único elemento llamado resultado, que puede o no pertenecer al mismo conjunto A.

Estructura de grupo

Sea A un conjunto no vacío y sea $*$ una operación binaria definida en A. Se dice que el sistema $(A, *)$ tiene estructura de grupo si se cumplen los siguientes axiomas:

1) Cerradura:

$$\forall \ a, b \in A$$

$$(a * b) \in A$$

2) Asociatividad:

$$\forall \ a, b, c \in A$$

$$a * (b * c) = (a * b) * c$$

3) Existencia del elemento idéntico:

$$\forall \ a \in A; \ \exists e \in A \ \big| \ a * e = e * a = a$$

4) Existencia de elementos inversos:

$$\forall \ a \in A; \ \exists i \in A \ \big| \ a * i = i * a = e$$

Si alguno de los axiomas no se cumple, entonces el sistema $(A, *)$ no tendrá estructura de grupo.

Propiedades de los grupos

Sea $(A, *)$ un grupo

1) Cancelación:

$\forall \quad a, b, c \in A$

si $a * b = a * c \Rightarrow b = c$

si $b * a = c * a \Rightarrow b = c$

2) Si e es idéntico izquierdo para $*$, entonces e es el idéntico del grupo.

3) El elemento idéntico de un grupo es único.

4) Si a^{-1} es el inverso izquierdo de $a \in A$, entonces a^{-1} es el inverso de a.

5) El elemento inverso de cada elemento de A es único.

6) Si a^{-1} es el inverso de $a \in A$, entonces $\left(a^{-1}\right)^{-1} = a$.

7) Si $a, b \in A$, entonces $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$

8) Si $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$, entonces:

$$\left(a_1 * a_2 * \ldots * a_n\right)^{-1} = a_n^{-1} * \ldots * a_2^{-1} * a_1^{-1}$$

9) Si $a, b \in A$, entonces cada una de las ecuaciones:

$a * x = b$

$y * a = b$

tiene solución única, donde $x, y \in A$.

Ejercicio 1.1 Sean el conjunto $F = \left\{ a + \sqrt{2} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$ y la operación binaria $*$ definida por:

$$\left(a+\sqrt{2} \right) * \left(b+\sqrt{2} \right) = \left(a+b \right) + \sqrt{2} \quad ; \quad \forall \ a+\sqrt{2} \ , \ \ b+\sqrt{2} \ \in F$$

Determine si el sistema $\left(F , * \right)$ tiene estructura de grupo.

SOLUCIÓN:

Determinemos si la operación binaria $*$ cumple con los cuatro axiomas de grupo.

1) Cerradura

$$\forall \ \ a+\sqrt{2} \ , \ \ b+\sqrt{2} \ \in \mathrm{F}$$

$\left(a+\sqrt{2} \right) * \left(b+\sqrt{2} \right) = \left(a+b \right) + \sqrt{2} \ \in F$ dado que $\left(a+b \right) \in \mathbb{R}$.

$\therefore$ cumple

2) Asociatividad

$$\forall \ \ a+\sqrt{2} \ , \ \ b+\sqrt{2} \ , \ \ c+\sqrt{2} \ \in F$$

$$\left[\left(a+\sqrt{2} \right) * \left(b+\sqrt{2} \right) \right] * \left(c+\sqrt{2} \right) = \left(a+\sqrt{2} \right) * \left[\left(b+\sqrt{2} \right) * \left(c+\sqrt{2} \right) \right]$$

aplicando $*$ dentro de los corchetes, tenemos:

$$\left(a+b+\sqrt{2} \right) * \left(c+\sqrt{2} \right) = \left(a+\sqrt{2} \right) * \left(b+c+\sqrt{2} \right)$$

$$\left(a+b+c \right) + \sqrt{2} = \left(a+b+c \right) + \sqrt{2}$$

$\therefore$ cumple

3) Existencia del elemento idéntico

$$\forall \ a+\sqrt{2} \in F \ ; \ \exists \ e+\sqrt{2} \in F \ \Big| \ \left(a+\sqrt{2} \right) * \left(e+\sqrt{2} \right) = \left(e+\sqrt{2} \right) * \left(a+\sqrt{2} \right) = a+\sqrt{2}$$

Dado que no se sabe si la operación $*$ es conmutativa, entonces se tienen que obtener los elementos idénticos derecho e izquierdo y si ambos existen y son iguales, entonces se podrá concluir que el elemento idéntico existe.

ÍNDICE 1 2 3 4 5

Idéntico derecho:

$$\left(a+\sqrt{2}\right)*\left(e+\sqrt{2}\right)=a+\sqrt{2}$$
$$\left(a+e\right)+\sqrt{2}=a+\sqrt{2}$$

La igualdad se cumple si $e=0$, por lo que el idéntico derecho es:

$$e+\sqrt{2}=0+\sqrt{2}\in F \quad \therefore \quad \text{existe}$$

Idéntico izquierdo:

$$\left(e+\sqrt{2}\right)*\left(a+\sqrt{2}\right)=a+\sqrt{2}$$
$$\left(e+a\right)+\sqrt{2}=a+\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad e=0$$

de donde, el idéntico izquierdo es:

$$e+\sqrt{2}=0+\sqrt{2}\in F \quad \therefore \quad \text{existe}$$

Dado que ambos elementos idénticos existen y son iguales, entonces podemos concluir que el elemento idéntico existe en el conjunto F y es igual a $0+\sqrt{2}$.

4) Existencia de elementos inversos

De igual forma al caso del elemento idéntico, para el caso de los elementos inversos, se tienen también inversos izquierdos y derechos, si ambos existen y son iguales, entonces podemos concluir que los elementos inversos existen en el conjunto F.

Inversos izquierdos:

$$\left(i+\sqrt{2}\right)*\left(a+\sqrt{2}\right)=e+\sqrt{2}$$
$$\left(i+a\right)+\sqrt{2}=0+\sqrt{2}$$

Para que la igualdad se cumpla $i=-a$, con lo cual el inverso izquierdo es de la forma:

$$i+\sqrt{2}=-a+\sqrt{2}\in F \quad \therefore \quad \text{existe}$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

Inversos derechos:

$$\left(a+\sqrt{2} \right) * \left(i+\sqrt{2} \right) = e+\sqrt{2}$$

$$\left(a+i \right) + \sqrt{2} = 0+\sqrt{2}$$

De donde $i=-a$ para que la igualdad se cumpla, por lo que el inverso derecho es de la forma:

$$i+\sqrt{2} = -a+\sqrt{2} \in F \quad \therefore \quad \text{existe}$$

Como ambos elementos inversos existen y son iguales, entonces podemos concluir que los elementos inversos existen en el conjunto F y son de la forma $-a+\sqrt{2}$.

Dado que se cumplieron los cuatro axiomas, entonces podemos afirmar que el sistema $\left(\mathrm{F}, * \right)$ tiene estructura de grupo.

Ejercicio 1.2 Sea el sistema $\left(\mathbb{Q}, \Delta \right)$ donde $\mathbb{Q}$ es el conjunto de los números racionales y la operación binaria Δ está definida por:

$$a \,\Delta\, b = a+b+ab \;; \qquad \forall\; a, b \in \mathbb{Q}$$

Determine si el sistema $\left(\mathbb{Q}, \Delta \right)$ tiene estructura de grupo:

SOLUCIÓN:

1) Cerradura

$\forall\; a, b \in \mathbb{Q}$

$$\left(a \,\Delta\, b \right) \in \mathbb{Q}$$

$$\left(a+b+ab \right) \in \mathbb{Q}$$

Dado que la adición y la multiplicación de racionales son cerradas.

$\therefore$ cumple

ÍNDICE
1
2
3
4
5
6

2) Asociatividad

$\forall\ a, b, c \in \mathbb{Q}$

$$a \,\Delta\, (b \,\Delta\, c) = (a \,\Delta\, b) \,\Delta\, c$$

$$a \,\Delta\, (b + c + bc) = (a + b + ab) \,\Delta\, c$$

aplicando Δ en ambos lados de la igualdad, tenemos:

$$a + (b+c+bc) + a(b+c+bc) = (a+b+ab) + c + (a+b+ab)c$$

$$a+b+c+bc+ab+ac+abc = a+b+ab+c+ac+bc+abc$$

ordenando términos:

$$a+b+c+ab+ac+bc+abc = a+b+c+ab+ac+bc+abc$$

Como la igualdad se cumple, entonces el axioma de la asociatividad se cumple.

3) Elemento idéntico

$\forall\ a \in \mathbb{Q}\ ;\ \exists\ e \in \mathbb{Q}\ \big|\ a \,\Delta\, e = e \,\Delta\, a = a$

Idéntico derecho:

$$a \,\Delta\, e = a$$

$$a + e + ae = a$$

$$e + ae = 0$$

$$e(1 + a) = 0$$

$$\therefore\quad e = 0 \in \mathbb{Q} \quad \therefore \quad \text{existe}$$

Idéntico izquierdo:

$$e \,\Delta\, a = a$$

$$e + a + ea = a$$

$$e + ea = 0$$

$$e(1 + a) = 0$$

$$\therefore\quad e = 0 \in \mathbb{Q} \quad \therefore \quad \text{existe}$$

Como ambos idénticos existen y son iguales, entonces el elemento idéntico existe en $\mathbb{Q}$.

4) Elementos inversos

$\forall\ a \in \mathbb{Q}\ \ ;\ \exists\ i \in \mathbb{Q}\ \big|\ a\ \Delta\ i = i\ \Delta\ a = e$

Inversos derechos:

$$a\ \Delta\ i = e$$

$$a + i + ai = 0$$

$$i + ai = -a$$

$$i\left(1 + a\right) = -a$$

$$i = \frac{-a}{1 + a}$$

Como se puede apreciar, para $a = -1$ no existe su correspondiente inverso, lo que implica que no existen inversos para todos los elementos de $\mathbb{Q}$, por lo tanto, el axioma de la existencia de los elementos inversos para todos los elementos del conjunto no se cumple, con lo cual se concluye que el sistema $\left(\mathbb{Q}\ ,\ \Delta\right)$ no tiene estructura de grupo.

Ejercicio 1.3 Sean el conjunto $E = \left\{ e^{x}\ \big|\ x \in \mathbb{Z} \right\}$ y la operación binaria $*$ definida por:

$$e^{x_1} * e^{x_2} = e^{x_1 + x_2}\quad ;\ \forall\ e^{x_1},\ \ e^{x_2} \in E$$

Determine si el sistema $\left(E\ ,\ *\right)$ tiene estructura de grupo.

SOLUCIÓN:

1) Cerradura

$\forall\ \ e^{x_1},\ \ e^{x_2} \in E$

$$\left(e^{x_1} * e^{x_2}\right) \in E$$

$e^{x_1 + x_2} \in E$ Dado que la suma de enteros es un número entero.

$\therefore$ cumple

2) Asociatividad

$$\forall \ e^{x_1},\ e^{x_2},\ e^{x_3} \in E$$

$$e^{x_1} * \left(e^{x_2} * e^{x_3} \right) = \left(e^{x_1} * e^{x_2} \right) * e^{x_3}$$

$$e^{x_1} * e^{x_2+x_3} = e^{x_1+x_2} * e^{x_3}$$

$$e^{x_1+x_2+x_3} = e^{x_1+x_2+x_3}$$

$\therefore$ cumple

3) Elemento idéntico

$$\forall \ e^{x} \in E \ ;\ \exists \ e^{u} \in E \ \Big| \ e^{x} * e^{u} = e^{u} * e^{x} = e^{x}$$

Idéntico derecho:

$$\forall \ e^{x} \in E \ ;\ \exists \ e^{u} \in E \ \Big| \ e^{x} * e^{u} = e^{x}$$

$$e^{x} * e^{u} = e^{x}$$

$$e^{x+u} = e^{x}$$

Para que la igualdad se cumpla, se tiene que:

$$u = 0 \ \Rightarrow \ e^{u} = e^{0} \in E \qquad \therefore \ \text{existe}$$

Idéntico izquierdo:

$$\forall \ e^{x} \in E \ ;\ \exists \ e^{u} \in E \ \Big| \ e^{u} * e^{x} = e^{x}$$

$$e^{u} * e^{x} = e^{x}$$

$$e^{u+x} = e^{x} \qquad \Rightarrow \qquad u = 0$$

$$\therefore \quad e^{u} = e^{0} \in E \qquad \therefore \ \text{existe}$$

Dado que ambos idénticos existen y son iguales, entonces el elemento idéntico existe.

4) Elementos inversos

$$\forall \ e^{x} \in E \ ;\ \exists \ e^{w} \in E \ \Big| \ e^{x} * e^{w} = e^{w} * e^{x} = e^{u}$$

Inversos derechos:

$$e^{x} * e^{w} = e^{u}$$

$$e^{x+w} = e^{0}$$

de donde

$$w = -x$$

entonces

$$e^{w} = e^{-x} \in E \qquad \therefore \quad \text{existen}$$

Inversos izquierdos:

$$e^{w} * e^{x} = e^{u}$$

$$e^{w+x} = e^{0} \quad \Rightarrow \quad w = -x$$

entonces

$$e^{w} = e^{-x} \in E \qquad \therefore \quad \text{existen}$$

Como ambos elementos inversos existen y son iguales, entonces podemos concluir que los elementos inversos existen en el conjunto E y, por lo tanto, el sistema $(E, *)$ tiene estructura de grupo.

Ejercicio 1.4 Sea el conjunto $H = \{a, b, c\}$ y sea la operación binaria $\odot$ definida por:

$\odot$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

Si se sabe que la operación $\odot$ es asociativa, determine si el sistema $(H, \odot)$ tiene estructura de grupo.

SOLUCIÓN:

1) Cerradura

Para comprobar que este axioma se cumple, sería necesario plantear todas las operaciones posibles con los elementos del conjunto H tomados de dos en dos y verificar que todos los resultados obtenidos pertenezcan al mismo conjunto H.

ÍNDICE 1 2 3 4 5

Lo anterior se puede comprobar fácilmente, si al observar la tabla que define a la operación, todos los resultados obtenidos pertenecen al mismo conjunto. Dado que esta condición sí se cumple para $\odot$, entonces podemos concluir que la operación es cerrada.

2) Asociatividad

Dado que en el enunciado del ejercicio se dice que la operación $\odot$ es asociativa, entonces ya no es necesario hacer la demostración.

3) Elemento idéntico

Para obtener el elemento idéntico del conjunto H, es necesario identificar cuál de los elementos del conjunto tiene la característica de que al ser operado con otro elemento del conjunto H, da por resultado ese otro elemento.

Al observar la tabla que define a la operación $\odot$, nos damos cuenta que el elemento idéntico resulta ser "a", pues:

$$a \odot a = a$$

$$a \odot b = b \odot a = b$$

$$a \odot c = c \odot a = c$$

4) Elementos inversos

Para obtener el inverso de cada uno de los elementos del conjunto H, se debe buscar aquel elemento que, operado con el elemento elegido, dé por resultado el elemento idéntico. De esta forma se tiene que:

$$a \odot a = a \;\Rightarrow\; \text{que } a \text{ es el inverso de } a$$

$$b \odot c = a \;\Rightarrow\; \text{que } c \text{ es el inverso de } b$$

$$c \odot b = a \;\Rightarrow\; \text{que } b \text{ es el inverso de } c$$

Con lo cual todos los elementos de H tienen su correspondiente inverso.

Dado que se cumplen los cuatro axiomas, entonces el sistema $(H, \odot)$ tiene estructura de grupo.

Grupo abeliano

Un sistema $(A, *)$ tiene estructura de grupo abeliano si se cumplen los siguientes axiomas:

1) Cerradura.
2) Asociatividad.
3) Elemento idéntico.
4) Elementos inversos.
5) Conmutatividad.

Ejercicio 1.5 Sean el conjunto $B = \{ 5^a \mid a \in \mathbb{R} \}$ y la operación binaria Δ definida por:

$$5^a \; \Delta \; 5^b = 5^{a+b+1} \quad ; \quad \forall \; 5^a, \; 5^b \in B$$

Determine si el sistema (B, Δ) tiene estructura de grupo abeliano:

SOLUCIÓN:

1) Cerradura

$\forall \; 5^a, \; 5^b \in B$

$$\left(5^a \Delta 5^b \right) \in B$$

$$5^{a+b+1} \in B$$

$$\therefore \text{ cumple}$$

Dado que la adición de números reales es cerrada.

2) Asociatividad

$\forall \quad 5^a, \; 5^b, \; 5^c \in B$

$$5^a \Delta \left(5^b \Delta 5^c \right) = \left(5^a \Delta 5^b \right) \Delta 5^c$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

$$5^{a}\,\Delta\,5^{b+c+1} = 5^{a+b+1}\,\Delta\,5^{c}$$

$$5^{a+b+c+2} = 5^{a+b+c+2}$$

$\therefore$ cumple

3) Conmutatividad

De acuerdo con la definición de grupo abeliano, el tercer axioma que debe ser demostrado es la existencia del elemento idéntico; sin embargo, en la solución de este ejercicio se demostrará primero el axioma de la conmutatividad, pues de cumplirse este axioma, entonces no será necesario obtener los elementos idénticos e inversos izquierdos y derechos y comprobar que estos son iguales para garantizar su existencia. Será suficiente con obtener uno de ellos, si estos existen y pertenecen al conjunto, entonces se puede garantizar su existencia, siempre y cuando, el axioma de la conmutatividad se cumpla.

En lo que resta de este capítulo, cuando sea necesario demostrar la existencia del elemento idéntico y de los elementos inversos, se procederá de esta forma.

Demostremos entonces el axioma de la conmutatividad:

$\forall \quad 5^{a},\ \ 5^{b} \in B$

$$5^{a}\,\Delta\,5^{b} = 5^{b}\,\Delta\,5^{a}$$

$$5^{a+b+1} = 5^{b+a+1}$$

Dada la conmutatividad de la adición en los números reales, se cumple el axioma.

4) Elemento idéntico

$\forall \quad 5^{a} \in B \ ;\ \exists\, 5^{e} \in B \;\middle|\; 5^{a}\,\Delta\,5^{e} = 5^{e}\,\Delta\,5^{a} = 5^{a}$

$$5^{a}\,\Delta\,5^{e} = 5^{a}$$

$$5^{a+e+1} = 5^{a}$$

de donde:

$$a + e + 1 = a \quad \Rightarrow \quad e = -1 \qquad \therefore \qquad 5^{e} = 5^{-1} \in B$$

$\therefore$ existe

5) Elementos inversos

$$\forall\ 5^{a} \in B\ ;\ \exists\ 5^{i} \in B \ \Big|\ 5^{a}\,\Delta\,5^{i} = 5^{i}\,\Delta\,5^{a} = 5^{e}$$

$$5^{a}\,\Delta\,5^{i} = 5^{e}$$

$$5^{a+i+1} = 5^{-1}$$

de donde:

$$a + i + 1 = -1 \quad \Rightarrow \quad i = -a - 2 \qquad \therefore \quad 5^{i} = 5^{-a-2} \in B$$

$\therefore$ existen

Dado que se cumplen los cinco axiomas, entonces podemos concluir que el sistema $(\,\mathrm{B},\ \Delta\,)$ es un grupo abeliano.

Ejercicio 1.6 Determine si el sistema $(\,M\,,\ \bullet\,)$ es un grupo abeliano, si:

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \;\middle|\; a \in \mathbb{R} \ \text{ con } \ a \neq 0 \right\}$$

y la operación binaria $\bullet$ es la multiplicación usual de matrices.

SOLUCIÓN:

1) Cerradura

$$\forall \quad A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix},\quad B = \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \in M$$

$$(\ A \bullet B\ ) \in M$$

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \in M$$

$$\begin{bmatrix} ab & 0 \\ 0 & ab \end{bmatrix} \in M$$

$\therefore$ cumple

Dada la cerradura de la multiplicación en $\mathbb{R}$.

2) Asociatividad

$$\forall \quad A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \; , \; B = \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \; , \; C = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \in M$$

$$A \bullet (B \bullet C) = (A \bullet B) \bullet C$$

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}\right) = \left(\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} bc & 0 \\ 0 & bc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ab & 0 \\ 0 & ab \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} abc & 0 \\ 0 & abc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} abc & 0 \\ 0 & abc \end{bmatrix}$$

$\therefore$ cumple

3) Conmutatividad

$$\forall \ A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \ , \ B = \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \in M$$

$$A \bullet B = B \bullet A$$

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ab & 0 \\ 0 & ab \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ba & 0 \\ 0 & ba \end{bmatrix}$$

Dada la conmutatividad de la multiplicación en $\mathbb{R}$, se cumple.

4) Elemento idéntico

$$\forall \ A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \in M \ ; \ \exists \ \mathrm{I} = \begin{bmatrix} e & 0 \\ 0 & e \end{bmatrix} \in M \ \Big| \ A \bullet \mathrm{I} = \mathrm{I} \bullet A = A$$

$$A \bullet I = A$$

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & 0 \\ 0 & e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ae & 0 \\ 0 & ae \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$$

de donde:

$$ae = a \ \Rightarrow \ e = 1 \ \therefore \ \mathrm{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in M$$

$\therefore$ existe

5) Elementos inversos

$$\forall\, A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \in M \;\; ; \;\; \exists\, A^{-1} = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} \in M \;\Big|\; A \bullet A^{-1} = A^{-1} \bullet A = \mathrm{I}$$

$$A \bullet A^{-1} = \mathrm{I}$$

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ai & 0 \\ 0 & ai \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

de donde:

$$ai = 1 \;\Rightarrow\; i = \frac{1}{a} \quad \therefore \; A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{bmatrix} \in M$$

Los inversos existen para todo elemento del conjunto M dado que $a \neq 0$.

Por lo tanto, el sistema $(M, \bullet)$ es un grupo abeliano.

Ejercicio 1.7 Sean el conjunto $P = \{ax + b \mid a,\ b \in \mathbb{R}\}$ y la operación binaria $\#$ definida por:

$$P_1 \# P_2 = (a_1\, a_2)\, x + (b_1\, b_2) \quad ; \quad \forall\; P_1 = a_1 x + b_1 \quad \text{y} \quad P_2 = a_2 x + b_2 \in P$$

Determine si el sistema $(P, \#)$ es un grupo abeliano.

ÍNDICE
1
2
3
4
5

SOLUCIÓN:

1) Cerradura

$\forall\ P_1 = a_1 x + b_1 \quad , \quad P_2 = a_2 x + b_2 \ \in\ P$

$$\left(P_1 \# P_2 \right) \in P$$

$$\left[\left(a_1 x + b_1 \right) \# \left(a_2 x + b_2 \right) \right] \in P$$

$$\left[\left(a_1 a_2 \right) x + \left(b_1 b_2 \right) \right] \in P$$

$\therefore$ cumple

Dado que la multiplicación de números reales es cerrada.

2) Asociatividad

$\forall\ P_1 = a_1 x + b_1 , \quad P_2 = a_2 x + b_2 , \quad P_3 = a_3 x + b_3 \in P$

$$P_1 \# \left(P_2 \# P_3 \right) = \left(P_1 \# P_2 \right) \# P_3$$

$$\left(a_1 x + b_1 \right) \# \left[\left(a_2 x + b_2 \right) \# \left(a_3 x + b_3 \right) \right] = \left[\left(a_1 x + b_1 \right) \# \left(a_2 x + b_2 \right) \right] \# \left(a_3 x + b_3 \right)$$

$$\left(a_1 x + b_1 \right) \# \left(a_2 a_3 x + b_2 b_3 \right) = \left(a_1 a_2 x + b_1 b_2 \right) \# \left(a_3 x + b_3 \right)$$

$$a_1 a_2 a_3 x + b_1 b_2 b_3 = a_1 a_2 a_3 x + b_1 b_2 b_3$$

$\therefore$ cumple

3) Conmutatividad

$\forall\ P_1 = a_1 x + b_1 \quad , \quad P_2 = a_2 x + b_2 \in P$

$$P_1 \# P_2 = P_2 \# P_1$$

$$\left(a_1 x + b_1 \right) \# \left(a_2 x + b_2 \right) = \left(a_2 x + b_2 \right) \# \left(a_1 x + b_1 \right)$$

$$a_1 a_2 x + b_1 b_2 = a_2 a_1 x + b_2 b_1$$

Se cumple dada la conmutatividad de la multiplicación en $\mathbb{R}$.

4) Elemento idéntico

$$\forall\ P_1 = a_1 x + b_1 \in P \quad ; \quad \exists \quad P_E = e_1 x + e_2 \in P \ \Big|\ P_1 \# P_E = P_E \# P_1 = P_1$$

$$P_1 \# P_E = P_1$$

$$\left(a_1 x + b_1 \right) \# \left(e_1 x + e_2 \right) = a_1 x + b_1$$

$$a_1 e_1 x + b_1 e_2 = a_1 x + b_1$$

La igualdad se cumple si $e_1 = 1$ y $e_2 = 1$, con lo cual el elemento idéntico es:

$$P_E = x + 1 \in P \qquad \therefore \text{ existe}$$

5) Elementos inversos

$$\forall \quad P_1 = a_1 x + b_1 \in P \ ; \quad \exists \quad P_i = i_1 x + i_2 \in P \ \Big|\ P_1 \# P_i = P_i \# P_1 = P_E$$

$$P_1 \# P_i = P_E$$

$$\left(a_1 x + b_1 \right) \# \left(i_1 x + i_2 \right) = e_1 x + e_2$$

$$a_1 i_1 x + b_1 i_2 = x + 1$$

de donde:

$$a_1 i_1 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad i_1 = \frac{1}{a_1}$$

$$b_1 i_2 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad i_2 = \frac{1}{b_1}$$

con lo cual, los elementos inversos son de la forma:

$$P_i = \frac{1}{a_1} x + \frac{1}{b_1}$$

Es evidente que si $a_1 = 0$ y/o $b_1 = 0$, entonces sus correspondientes inversos no existen, por lo tanto, el axioma de la existencia de los elementos inversos para todos los elementos del conjunto P no se cumple, con lo cual se concluye que el sistema $(P, \#)$ no tiene estructura de grupo abeliano.

ÍNDICE
1
2
3
4
5

Ejercicio 1.8 Sean el conjunto $F = \{ 1, \ 2 \}$ y la operación binaria $\otimes$ definida por:

$\otimes$	1	2
1	1	2
2	2	1

Determine si el sistema $(F, \otimes)$ tiene estructura de grupo abeliano.

SOLUCIÓN:

Dado que se trata de un conjunto con un número finito de elementos, en este caso, el conjunto F tiene cardinalidad 2, entonces la demostración de los cinco axiomas de grupo abeliano se deberá hacer en forma exhaustiva, es decir, se deberán demostrar todos los casos posibles.

1) Cerradura

$$1 \otimes 1 = 1$$
$$1 \otimes 2 = 2$$
$$2 \otimes 1 = 2$$
$$2 \otimes 2 = 1$$

Como todos los resultados obtenidos son elementos del conjunto F, entonces la operación $\otimes$ es cerrada.

Este axioma se puede comprobar fácilmente al observar que en la tabla que define a la operación, todos los resultados posibles son elementos de F.

2) Asociatividad

El número de posibilidades que se tienen de tomar tres elementos de un conjunto de dos elementos considerando la repetición, viene dado por la expresión $2^3 = 8$, es decir, se tienen 8 posibilidades, las cuales se deberán cumplir.

$$1 \otimes (1 \otimes 1) = (1 \otimes 1) \otimes 1$$
$$1 \otimes 1 = 1 \otimes 1$$
$$1 = 1$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

$$1 \otimes (1 \otimes 2) = (1 \otimes 1) \otimes 2$$
$$1 \otimes 2 = 1 \otimes 2$$
$$2 = 2$$

$$1 \otimes (2 \otimes 1) = (1 \otimes 2) \otimes 1$$
$$1 \otimes 2 = 2 \otimes 1$$
$$2 = 2$$

$$2 \otimes (1 \otimes 1) = (2 \otimes 1) \otimes 1$$
$$2 \otimes 1 = 2 \otimes 1$$
$$2 = 2$$

$$1 \otimes (2 \otimes 2) = (1 \otimes 2) \otimes 2$$
$$1 \otimes 1 = 2 \otimes 2$$
$$1 = 1$$

$$2 \otimes (1 \otimes 2) = (2 \otimes 1) \otimes 2$$
$$2 \otimes 2 = 2 \otimes 2$$
$$1 = 1$$

$$2 \otimes (2 \otimes 1) = (2 \otimes 2) \otimes 1$$
$$2 \otimes 2 = 1 \otimes 1$$
$$1 = 1$$

$$2 \otimes (2 \otimes 2) = (2 \otimes 2) \otimes 2$$
$$2 \otimes 1 = 1 \otimes 2$$
$$2 = 2$$

Dado que se cumplen las ocho posibilidades, entonces la asociatividad se cumple.

3) Conmutatividad

Se tienen las siguientes posibilidades considerando la repetición.

$$\begin{array}{lll} 1 \otimes 1 = 1 \otimes 1 & \Rightarrow & 1 = 1 \\ 1 \otimes 2 = 2 \otimes 1 & \Rightarrow & 2 = 2 \\ 2 \otimes 1 = 1 \otimes 2 & \Rightarrow & 2 = 2 \\ 2 \otimes 2 = 2 \otimes 2 & \Rightarrow & 1 = 1 \end{array} \quad \therefore \text{ se cumple}$$

Este axioma se puede comprobar fácilmente, si la tabla que define a la operación resulta ser simétrica con respecto a la diagonal principal.

4) Elemento idéntico

Al observar la tabla que define a $\otimes$, nos damos cuenta de que el elemento idéntico del conjunto es el "1", pues:

$$1 \otimes 1 = 1$$

$$1 \otimes 2 = 2 \otimes 1 = 2$$

Por lo tanto, el elemento idéntico existe.

5) Elementos inversos

$1 \otimes 1 = 1$, lo que implica que 1 es el inverso de 1

$2 \otimes 2 = 1$, lo que implica que 2 es el inverso de 2

Por lo tanto, los elementos inversos existen.

Dado que se cumplen los cinco axiomas, entonces el sistema $(F, \otimes)$ es un grupo abeliano.

Ejercicio 1.9 Sea el grupo $(A, *)$, donde $A = \left\{ (a, b) \,\middle|\, a, b \in \mathbb{Z} \right\}$, $\mathbb{Z}$ es el conjunto de los números enteros y la operación binaria $*$ está definida por:

$$(a, b) * (c, d) = (a + c + 1,\ \ b + d - 1) \ ; \qquad \forall\ (a, b),\ (c, d) \in A$$

a) Determine si $(A, *)$, es un grupo abeliano.

b) Obtenga el idéntico de $(A, *)$.

c) Calcule el inverso del elemento $(7, -3)$.

d) Obtenga el elemento $(x, y) \in A$ que satisface a la ecuación $(-5, -2) * (x, y) * (3, 4) = (0, -1)$.

SOLUCIÓN:

a) Para determinar si el sistema $(A, *)$ es un grupo abeliano, solo falta demostrar el axioma de la conmutatividad.

Conmutatividad

$\forall\ (a, b),\ (c, d) \in A$

$$(a, b) * (c, d) = (c, d) * (a, b)$$

$$(a + c + 1,\ b + d - 1) = (c + a + 1,\ d + b - 1)$$

La igualdad se cumple dada la conmutatividad de la adición en los números enteros, por lo tanto, $(A, *)$ es un grupo abeliano.

b) $\forall\ (a, b) \in A\ ;\ \exists\ (e_1, e_2) \in A \ \middle|\ (a, b) * (e_1, e_2) = (a, b)$

$$(a, b) * (e_1, e_2) = (a, b)$$

$$(a + e_1 + 1,\ b + e_2 - 1) = (a, b)$$

La igualdad se cumple si $e_1 = -1$ y $e_2 = 1$, por lo tanto, el idéntico del grupo es:

$$(e_1, e_2) = (-1, 1) \in A$$

c) $$(7, -3) * (i_1, i_2) = (e_1, e_2)$$

$$(7 + i_1 + 1, \ -3 + i_2 - 1) = (-1, \ 1)$$

de donde:

$$\left.\begin{array}{rcl} 7 + i_1 + 1 = -1 & \Rightarrow & i_1 = -9 \\ -3 + i_2 - 1 = 1 & \Rightarrow & i_2 = 5 \end{array}\right. \Rightarrow (i_1, i_2) = (-9, 5) \in A$$

Por lo tanto, el inverso de $(7, -3)$ es $(-9, 5)$

d) Se tiene que:

$$(-5, -2) * (x, y) * (3, 4) = (0, -1)$$

operando en ambos lados de la ecuación con el inverso de $(-5, -2)$, tenemos:

$$(-5, -2)^{-1} * (-5, -2) * (x, y) * (3, 4) = (-5, -2)^{-1} * (0, -1)$$

como $(-5, -2)^{-1} * (-5, -2) = (-1, 1)$, entonces:

$$(-1, 1) * (x, y) * (3, 4) = (-5, -2)^{-1} * (0, -1)$$

al ser $(-1, 1)$ el idéntico del grupo, entonces:

$$(x, y) * (3, 4) = (-5, -2)^{-1} * (0, -1)$$

operando en ambos lados de la ecuación con el inverso de $(3, 4)$, tenemos:

$$(x, y) * (3, 4) * (3, 4)^{-1} = (-5, -2)^{-1} * (0, -1) * (3, 4)^{-1}$$

dado que todo elemento operado con su inverso da el idéntico, entonces tenemos:

$$(x, y) = (-5, -2)^{-1} * (0, -1) * (3, 4)^{-1}$$

ÍNDICE 1 2 3 4 5

obteniendo los inversos requeridos, tenemos:

$$(-5,\ -2)*(i_3,\ i_4) = (e_1,\ e_2)$$

$$(-5+i_3+1,\ \ -2+i_4-1) = (-1,\ 1)$$

de donde:

$$\begin{aligned} -5+i_3+1 &= -1 \quad \Rightarrow \quad i_3 = 3 \\ -2+i_4-1 &= \ \ 1 \quad \Rightarrow \quad i_4 = 4 \end{aligned} \qquad \therefore\ (i_3,\ i_4) = (-5,\ -2)^{-1} = (3,\ 4)$$

dado que $(-5,\ -2)^{-1} = (3,\ 4)$, entonces ya no es necesario calcular $(3,\ 4)^{-1}$, pues la ecuación quedaría como:

$$(x,\ y) = (3,\ 4)*(0,\ -1)*(3,\ 4)^{-1}$$

y como $*$ es conmutativa, entonces:

$$(x,\ y) = (3,\ 4)*(3,\ 4)^{-1}*(0,\ -1)$$

con lo cual el elemento que satisface la ecuación planteada es:

$$(x,\ y) = (0,\ -1)$$

Ejercicio 1.10 El sistema algebraico $(G,\ *)$ es un grupo abeliano. El conjunto G está dado por:

$$G = \{3,\ 7,\ 30,\ 3^{-1},\ 7^{-1},\ 30^{-1},\ e\}$$

donde 3^{-1} indica el inverso de 3 y e el idéntico de G con la operación binaria $*$.

Dada la ecuación:

$$7*x*3*x*30 = 3*7*x$$

obtenga el valor de x que satisface a la ecuación, si se sabe que $x \in G$.

SOLUCIÓN:

Dado que $(G, *)$ es un grupo abeliano, entonces cumple con los cinco axiomas que se tienen para esta estructura.

Aplicando la conmutatividad con los elementos 3 y 7 en el lado derecho de la ecuación, tenemos:

$$7 * x * 3 * x * 30 = 7 * 3 * x$$

operando con 7^{-1} en ambos lados de la ecuación, se tiene:

$$7^{-1} * 7 * x * 3 * x * 30 = 7^{-1} * 7 * 3 * x$$

como $7^{-1} * 7 = e$, entonces:

$$e * x * 3 * x * 30 = e * 3 * x$$

como $e * x = x$ y $e * 3 = 3$, entonces:

$$x * 3 * x * 30 = 3 * x$$

aplicando la conmutatividad en el miembro izquierdo de la ecuación con los elementos x y 3, tenemos

$$3 * x * x * 30 = 3 * x$$

aplicando la asociatividad, tenemos:

$$(3 * x) * x * 30 = (3 * x)$$

operando en ambos lados con $(3 * x)^{-1}$, se tiene:

$$(3 * x)^{-1} * (3 * x) * x * 30 = (3 * x)^{-1} * (3 * x)$$

con lo cual se llega a:

$$e * x * 30 = e$$

como $e * x = x$, entonces:

$$x * 30 = e$$

operando en ambos lados con 30^{-1}, tenemos:

$$x * 30 * 30^{-1} = e * 30^{-1}$$

$$x * e = 30^{-1}$$

finalmente:

$$x = 30^{-1}$$

Otra forma de resolver este problema es la siguiente:

Dado que $(G, *)$ es un grupo abeliano, entonces cumple con la asociatividad, por lo que la ecuación puede ser escrita como:

$$(7 * x * 3) * (x * 30) = (3 * 7 * x)$$

Dado que se cumple la conmutatividad, entonces el primer miembro de la ecuación se puede expresar como:

$$(3 * 7 * x) * (x * 30) = (3 * 7 * x)$$

operando en ambos lados de la ecuación con el término $(3 * 7 * x)^{-1}$, tenemos:

$$(3 * 7 * x)^{-1} * (3 * 7 * x) * (x * 30) = (3 * 7 * x)^{-1} * (3 * 7 * x)$$

de donde se obtiene:

$$e * (x * 30) = e$$

$$x * 30 = e$$

por lo tanto:

$$x = 30^{-1}$$

ÍNDICE 1 2 3 4 5

Estructura de campo

Sea A un conjunto de por lo menos dos elementos y sean $*$ y $\square$ dos operaciones binarias definidas en A. El sistema $(A, *, \square)$ tiene estructura de campo si se cumple que:

1) Cerradura:

$\forall \ a, b \in A$

$(a * b) \in A$

2) Asociatividad:

$\forall \ a, b, c \in A$

$a * (b * c) = (a * b) * c$

3) Conmutatividad:

$\forall \ a, b \in A$

$a * b = b * a$

4) Existencia del elemento idéntico:

$\forall \ a \in A \ ; \ \exists \ e \in A \ | \ a * e = e * a = a$

5) Existencia de elementos inversos:

$\forall \ a \in A \ ; \ \exists \ i \in A \ | \ a * i = i * a = e$

6) Cerradura:

$\forall \ a, b \in A$

$(a \square b) \in A$

7) Asociatividad:

$\forall \ a, b, c \in A$

$a \square (b \square c) = (a \square b) \square c$

8) Conmutatividad:

$\forall\ a\ ,\ b \in A$

$$a \square b = b \square a$$

9) Existencia del elemento idéntico:

$\forall\ a \in A\ ;\ \exists\ E \in A \mid a \square E = E \square a = a$

10) Existencia de elementos inversos:

$\forall\ a \in A$ con $a \neq e\ ;\ \exists\ \mathrm{I} \in A \mid a \square \mathrm{I} = \mathrm{I} \square a = E$

11) Distributividad:

$\forall\ a\ ,\ b\ ,\ c \in A$

$$a \square (b * c) = (a \square b) * (a \square c)$$

Una definición equivalente a la anterior para la estructura de campo sería:

Estructura de campo

Sea A un conjunto de por lo menos dos elementos y sean $*$ y $\square$ dos operaciones binarias definidas en A. El sistema $(A, *, \square)$ tiene estructura de campo si se cumple que:

I) $(A, *)$ es un grupo abeliano, donde el elemento idéntico lo representamos con e y recibe el nombre de "cero" del campo.

II) $(A, \square)$ cumple con los cinco axiomas de grupo abeliano, donde deben existir inversos para todos los elementos del conjunto excepto para el "cero" de campo.

Al elemento idéntico de la segunda operación se le conoce como la "unidad" del campo.

III) La operación $\square$ es distributiva sobre $*$.

Ejercicio 1.11 Determine si el sistema $(B, \oplus, \odot)$ tiene estructura de campo, si:

$$B = \left\{ a + b\sqrt{3} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Q} \right\}$$

y las operaciones binarias $\oplus$ y $\odot$ están definidas por:

$$\left.\begin{array}{l} \left(a+b\sqrt{3}\right) \oplus \left(c+d\sqrt{3}\right) = (a+c) + (b+d)\sqrt{3} \\ \left(a+b\sqrt{3}\right) \odot \left(c+d\sqrt{3}\right) = (ac) + (bd)\sqrt{3} \end{array}\right. \quad ; \quad \forall\ a+b\sqrt{3},\ c+d\sqrt{3} \in B$$

SOLUCIÓN:

Determinemos si $(B, \oplus)$ tiene estructura de grupo abeliano.

1) Cerradura

$\forall \quad a+b\sqrt{3}, \quad c+d\sqrt{3} \in B$

$$\left[\left(a+b\sqrt{3}\right) \oplus \left(c+d\sqrt{3}\right)\right] \in B$$

$$\left[(a+b) + (b+d)\sqrt{3}\right] \in B$$ cumple dada la cerradura de la adición en $\mathbb{Q}$.

2) Asociatividad

$\forall\ a+b\sqrt{3}, \quad c+d\sqrt{3}, \quad e+f\sqrt{3} \in B$

$$\left(a+b\sqrt{3}\right) \oplus \left[\left(c+d\sqrt{3}\right) \oplus \left(e+f\sqrt{3}\right)\right] = \left[\left(a+b\sqrt{3}\right) \oplus \left(c+d\sqrt{3}\right)\right] \oplus \left(e+f\sqrt{3}\right)$$

$$\left(a+b\sqrt{3}\right) \oplus \left[(c+e) + (d+f)\sqrt{3}\right] = \left[(a+c) + (b+d)\sqrt{3}\right] \oplus \left(e+f\sqrt{3}\right)$$

$$(a+c+e) + (b+d+f)\sqrt{3} = (a+c+e) + (b+d+f)\sqrt{3}$$

$\therefore$ cumple

ÍNDICE
1
2
3
4
5

3) Conmutatividad

$$\forall \ a+b\sqrt{3} \ , \ c+d\sqrt{3} \in B$$

$$\left(a+b\sqrt{3}\right) \oplus \left(c+d\sqrt{3}\right) = \left(c+d\sqrt{3}\right) \oplus \left(a+b\sqrt{3}\right)$$

$$\left(a+c\right) + \left(b+d\right)\sqrt{3} = \left(c+a\right) + \left(d+b\right)\sqrt{3}$$

Cumple dada la conmutatividad de la adición en $\mathbb{Q}$.

4) Elemento idéntico

$$\forall \ a+b\sqrt{3} \in B \ ; \ \exists \ e_1+e_2\sqrt{3} \in B \ \middle| \ \left(a+b\sqrt{3}\right) \oplus \left(e_1+e_2\sqrt{3}\right) = a+b\sqrt{3}$$

$$\left(a+b\sqrt{3}\right) \oplus \left(e_1+e_2\sqrt{3}\right) = a+b\sqrt{3}$$

$$\left(a+e_1\right) + \left(b+e_2\right)\sqrt{3} = a+b\sqrt{3}$$

la igualdad se cumple si:

$$e_1 = 0$$

$$e_2 = 0$$

con lo cual el elemento idéntico es:

$$e_1 + e_2\sqrt{3} = 0 + 0\sqrt{3} \in B$$

$\therefore$ existe

5) Elementos inversos

$$\forall \ a+b\sqrt{3} \in B \ ; \ \exists \ i_1+i_2\sqrt{3} \in B \ \middle| \ \left(a+b\sqrt{3}\right) \oplus \left(i_1+i_2\sqrt{3}\right) = e_1+e_2\sqrt{3}$$

$$\left(a+b\sqrt{3}\right) \oplus \left(i_1+i_2\sqrt{3}\right) = e_1+e_2\sqrt{3}$$

$$\left(a+i_1\right) + \left(b+i_2\right)\sqrt{3} = 0+0\sqrt{3}$$

la igualdad se cumple si:

$$i_1 = -a$$

$$i_2 = -b$$

con lo cual:

$$i_1 + i_2\sqrt{3} = -a - b\sqrt{3} \in B$$

$\therefore$ existen

Al cumplirse los cinco axiomas, entonces el sistema $(B, \oplus)$ tiene estructura de grupo abeliano.

Determinemos ahora si el sistema $(B, \odot)$ cumple con los axiomas de grupo abeliano.

6) Cerradura

$\forall \quad a + b\sqrt{3} \,,\; c + d\sqrt{3} \in B$

$$\left[\left(a + b\sqrt{3} \right) \odot \left(c + d\sqrt{3} \right) \right] \in B$$

$$\left[(ac) + (bd)\sqrt{3} \right] \in B$$ cumple dada la cerradura de la multiplicación en $\mathbb{Q}$.

7) Asociatividad

$\forall \quad a + b\sqrt{3} \,,\; c + d\sqrt{3} \,,\; e + f\sqrt{3} \in B$

$$\left(a + b\sqrt{3} \right) \odot \left[\left(c + d\sqrt{3} \right) \odot \left(e + f\sqrt{3} \right) \right] = \left[\left(a + b\sqrt{3} \right) \odot \left(c + d\sqrt{3} \right) \right] \odot \left(e + f\sqrt{3} \right)$$

$$\left(a + b\sqrt{3} \right) \odot \left[(ce) + (df)\sqrt{3} \right] = \left[(ac) + (bd)\sqrt{3} \right] \odot \left(e + f\sqrt{3} \right)$$

$$(ace) + (bdf)\sqrt{3} = (ace) + (bdf)\sqrt{3}$$

$\therefore$ cumple

ÍNDICE 1 2 3 4 5

8) Conmutatividad

$$\forall \ a+b\sqrt{3} \ , \ c+d\sqrt{3} \in B$$

$$\left(a+b\sqrt{3}\right) \odot \left(c+d\sqrt{3}\right) = \left(c+d\sqrt{3}\right) \odot \left(a+b\sqrt{3}\right)$$

$$(ac) + (bd)\sqrt{3} = (ca) + (db)\sqrt{3}$$

Cumple dada la conmutatividad de la multiplicación en $\mathbb{Q}$.

9) Elemento idéntico

$$\forall a+b\sqrt{3} \in B \ ; \ \exists E_1+E_2\sqrt{3} \in B \left| \left(a+b\sqrt{3}\right) \odot \left(E_1+E_2\sqrt{3}\right) = a+b\sqrt{3} \right.$$

$$\left(a+b\sqrt{3}\right) \odot \left(E_1+E_2\sqrt{3}\right) = a+b\sqrt{3}$$

$$aE_1+bE_2\sqrt{3} = a+b\sqrt{3}$$

la igualdad se cumple si:

$$E_1 = 1$$

$$E_2 = 1$$

con lo cual el elemento idéntico es:

$$E_1+E_2\sqrt{3} = 1+1\sqrt{3} \in B$$

$\therefore$ existe

10) Elementos inversos

$$\forall \ a+b\sqrt{3} \in B \ ; \ \exists \ I_1+I_2\sqrt{3} \in B \left| \left(a+b\sqrt{3}\right) \odot \left(I_1+I_2\sqrt{3}\right) = E_1+E_2\sqrt{3} \right.$$

$$\left(a+b\sqrt{3}\right) \odot \left(I_1+I_2\sqrt{3}\right) = E_1+E_2\sqrt{3}$$

$$aI_1 + bI_2\sqrt{3} = 1+1\sqrt{3}$$

la igualdad se cumple si:

$$a I_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad I_1 = \frac{1}{a}$$

$$b I_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad I_2 = \frac{1}{b}$$

con lo cual los elementos inversos son de la forma:

$$I_1 + I_2 \sqrt{3} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}\sqrt{3} \in B$$

Obsérvese que existen inversos para todos los elementos del conjunto B, excepto para el elemento idéntico de la primera operación; sin embargo, elementos como $0+\sqrt{3}$, $0+2\sqrt{3}$, $0+3\sqrt{3}$, etc., tampoco tienen inversos, o bien, elementos como $1+0\sqrt{3}$, $2+0\sqrt{3}$, $3+0\sqrt{3}$, etc., que también pertenecen al conjunto B y de igual forma, no tienen su correspondiente elemento inverso, es decir, existen una infinidad de elementos del conjunto B que no tienen inverso, por lo tanto, podemos concluir que el sistema $(B, \oplus, \odot)$ no es un campo.

Ejercicio 1.12 Sea el sistema $(W, +, \square)$, donde:

$$W = \left\{ (x, y, z) \;\middle|\; x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

y las operaciones binarias $+$, $\square$ están definidas por:

$+$ es la adición usual de vectores.

$$(x_1, y_1, z_1) \square (x_2, y_2, z_2) = (3x_1 x_2, y_1 y_2, 3z_1 z_2);\ \forall (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in W$$

Determine si el sistema $(W, +, \square)$ tiene estructura de campo.

SOLUCIÓN:

Determinemos si el sistema $(W, +)$ tiene estructura de grupo abeliano.

1) Cerradura

$\forall (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in W$

$$\left[(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)\right] \in \mathrm{W}$$

$$(x_1 + x_2,\ y_1 + y_2,\ z_1 + z_2) \in \mathrm{W}$$

$\therefore$ cumple

Dada la cerradura en la adición de números reales.

2) Asociatividad

$\forall (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) \in W$

$$(x_1, y_1, z_1) + \left[(x_2, y_2, z_2) + (x_3, y_3, z_3)\right] = \left[(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)\right] + (x_3, y_3, z_3)$$

$$(x_1, y_1, z_1) + (x_2 + x_3,\ y_2 + y_3,\ z_2 + z_3) = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2,\ z_1 + z_2) + (x_3, y_3, z_3)$$

$$(x_1 + x_2 + x_3,\ y_1 + y_2 + y_3,\ z_1 + z_2 + z_3) = (x_1 + x_2 + x_3,\ y_1 + y_2 + y_3,\ z_1 + z_2 + z_3)$$

$\therefore$ cumple

3) Conmutatividad

$\forall (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in W$

$$(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_2, y_2, z_2) + (x_1, y_1, z_1)$$

$$(x_1 + x_2,\ y_1 + y_2,\ z_1 + z_2) = (x_2 + x_1,\ y_2 + y_1,\ z_2 + z_1)$$

Se cumple el axioma dada la conmutatividad de la adición en los números reales.

4) Elemento idéntico

$\forall (x, y, z) \in W;\ \exists (e_1, e_2, e_3) \in W \mid (x, y, z) + (e_1, e_2, e_3) = (x, y, z)$

$$(x, y, z) + (e_1, e_2, e_3) = (x, y, z)$$

$$(x + e_1,\ y + e_2,\ z + e_3) = (x, y, z)$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

esta igualdad se cumple, si y solo si:

$$\left(e_1,\ e_2,\ e_3\right)=\left(0,\ 0,\ 0\right)\in W \qquad \therefore \ \text{existe}$$

5) Elementos inversos

$$\forall\ \left(x, y, z\right)\in W;\ \ \exists\ \left(i_1, i_2, i_3\right)\in W \ \middle|\ \left(x, y, z\right)+\left(i_1, i_2, i_3\right)=\left(e_1, e_2, e_3\right)$$

$$\left(x, y, z\right)+\left(i_1, i_2, i_3\right)=\left(e_1, e_2, e_3\right)$$

$$\left(x+i_1,\ y+i_2,\ z+i_3\right)=\left(0,\ 0,\ 0\right)$$

la igualdad se cumple, si:

$$i_1=-x \quad , \quad i_2=-y \quad , \quad i_3=-z$$

con lo cual:

$$\left(i_1,\ i_2,\ i_3\right)=\left(-x,\ -y,\ -z\right)\in W$$

$\therefore$ existen

Dado que se cumplieron los cinco axiomas, entonces el sistema $\left(W, +\right)$ es un grupo abeliano.

Como segundo paso, ahora debemos demostrar que el sistema $\left(W,\ \square\right)$ cumple con los cinco axiomas de grupo abeliano.

6) Cerradura

$$\forall\ \left(x_1, y_1, z_1\right),\ \left(x_2, y_2, z_2\right)\in W$$

$$\left[\left(x_1, y_1, z_1\right)\square\left(x_2, y_2, z_2\right)\right]\in W$$

$$\left(3x_1x_2,\ y_1y_2,\ 3z_1z_2\right)\in W$$

$\therefore$ cumple

dada la cerradura en la multiplicación de números reales.

7) Asociatividad

$$\forall \ (x_1, y_1, z_1) \ , \ (x_2, y_2, z_2) \ , \ (x_3, y_3, z_3) \in W$$

$$(x_1, y_1, z_1) \square \left[(x_2, y_2, z_2) \square (x_3, y_3, z_3)\right] = \left[(x_1, y_1, z_1) \square (x_2, y_2, z_2)\right] \square (x_3, y_3, z_3)$$

$$(x_1, y_1, z_1) \square (3x_2 x_3, \ y_2 y_3, \ 3z_2 z_3) = (3x_1 x_2, \ y_1 y_2, \ 3z_1 z_2) \square (x_3, y_3, z_3)$$

$$(9x_1 x_2 x_3, \ y_1 y_2 y_3, \ 9z_1 z_2 z_3) = (9x_1 x_2 x_3, \ y_1 y_2 y_3, \ 9z_1 z_2 z_3)$$

$\therefore$ cumple

8) Conmutatividad

$$\forall \ (x_1, y_1, z_1) \ , \ (x_2, y_2, z_2) \in W$$

$$(x_1, y_1, z_1) \square (x_2, y_2, z_2) = (x_2, y_2, z_2) \square (x_1, y_1, z_1)$$

$$(3x_1 x_2, y_1 y_2, 3z_1 z_2) = (3x_2 x_1, y_2 y_1, 3z_2 z_1)$$

Como se tiene producto de reales, entonces cumple.

9) Elemento idéntico

$$\forall \ (x_1, y_1, z_1) \in W \ ; \ \exists \ (E_1, E_2, E_3) \in W \ \middle| \ (x_1, y_1, z_1) \square (E_1, E_2, E_3) = (x_1, y_1, z_1)$$

$$(x_1, y_1, z_1) \square (E_1, E_2, E_3) = (x_1, y_1, z_1)$$

$$(3x_1 E_1, \ y_1 E_2, \ 3z_1 E_3) = (x_1, y_1, z_1) \quad \Rightarrow \quad E_1 = \frac{1}{3}, \quad E_2 = 1, \quad E_3 = \frac{1}{3}$$

de donde:

$$(E_1, \ E_2, \ E_3) = \left(\frac{1}{3}, \ 1, \ \frac{1}{3}\right) \in W \qquad \therefore \text{ existe}$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

10) Elementos inversos

$$\forall\ (x_1, y_1, z_1) \in W\ ;\ \exists\ (I_1, I_2, I_3) \in W \ \Big|\ (x_1, y_1, z_1) \,\square\, (I_1, I_2, I_3) = (E_1, E_2, E_3)$$

$$(x_1, y_1, z_1) \,\square\, (I_1, I_2, I_3) = (E_1, E_2, E_3)$$

$$(3x_1 I_1,\ y_1 I_2,\ 3z_1 I_3) = \left(\frac{1}{3},\ 1,\ \frac{1}{3}\right)$$

de donde:

$$\begin{cases} 3x_1 I_1 = \dfrac{1}{3} \\ y_1 I_2 = 1 \\ 3z_1 I_3 = \dfrac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_1 = \dfrac{1}{9x_1} \\ I_2 = \dfrac{1}{y_1} \\ I_3 = \dfrac{1}{9z_1} \end{cases}$$

con lo cual:

$$(I_1,\ I_2,\ I_3) = \left(\frac{1}{9x_1},\ \frac{1}{y_1},\ \frac{1}{9z_1}\right) \in W$$

Es evidente que el elemento idéntico de la primera operación $(0,\ 0,\ 0)$ no tiene inverso, pero también elementos como $(1, 0, 0)$, $(2, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$, etc., tampoco tienen inverso, es decir, cualquier elemento del conjunto W que tenga uno o más ceros en sus componentes, no tendrá inverso, por lo tanto, este axioma no se cumple y, en consecuencia, el sistema $(W, +, \square)$ no tiene estructura de campo.

Ejercicio 1.13 Sean el conjunto:

$$A = \left\{ \frac{a}{b} + 7 \ \Big|\ a, b \in \mathbb{Z} \quad \text{con} \quad b \neq 0 \right\}$$

y las operaciones binarias $\oplus$, $\odot$ definidas por:

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{a}{b}+7\right)\oplus\left(\frac{c}{d}+7\right) &= \frac{a}{b}+\frac{c}{d}+7\\ \left(\frac{a}{b}+7\right)\odot\left(\frac{c}{d}+7\right) &= \frac{ac}{bd}+7\end{aligned}\right. \quad ; \quad \forall \ \frac{a}{b}+7,\ \frac{c}{d}+7 \in A$$

Determine si el sistema $(A, \oplus, \odot)$ tiene estructura de campo.

SOLUCIÓN:

Determinemos si el sistema $(A, \oplus)$ tiene estructura de grupo abeliano.

1) Cerradura

$$\forall \ \frac{a}{b}+7\ ,\ \frac{c}{d}+7 \in A$$

$$\left[\left(\frac{a}{b}+7\right)\oplus\left(\frac{c}{d}+7\right)\right] \in A$$

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+7\right) \in A$$

dado que la suma de los números racionales $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$ da como resultado otro número racional.

2) Asociatividad

$$\forall \ \frac{a}{b}+7\ ,\ \frac{c}{d}+7\ ,\ \frac{e}{f}+7 \in A$$

$$\left(\frac{a}{b}+7\right)\oplus\left[\left(\frac{c}{d}+7\right)\oplus\left(\frac{e}{f}+7\right)\right] = \left[\left(\frac{a}{b}+7\right)\oplus\left(\frac{c}{d}+7\right)\right]\oplus\left(\frac{e}{f}+7\right)$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

$$\left(\frac{a}{b}+7\right)\oplus\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}+7\right)=\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+7\right)\oplus\left(\frac{e}{f}+7\right)$$

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{e}{f}+7=\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{e}{f}+7$$

$\therefore$ cumple

3) Conmutatividad

$$\forall\ \frac{a}{b}+7\ ,\ \frac{c}{d}+7\ \in A$$

$$\left(\frac{a}{b}+7\right)\oplus\left(\frac{c}{d}+7\right)=\left(\frac{c}{d}+7\right)\oplus\left(\frac{a}{b}+7\right)$$

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+7=\frac{c}{d}+\frac{a}{b}+7$$

Se cumple dada la conmutatividad de la adición en los números racionales.

4) Elemento idéntico

$$\forall\ \frac{a}{b}+7\ \in A\ ;\ \exists\ \frac{e_1}{e_2}+7\in A\ \middle|\ \left(\frac{a}{b}+7\right)\oplus\left(\frac{e_1}{e_2}+7\right)=\frac{a}{b}+7$$

$$\left(\frac{a}{b}+7\right)\oplus\left(\frac{e_1}{e_2}+7\right)=\frac{a}{b}+7$$

$$\frac{a}{b}+\frac{e_1}{e_2}+7=\frac{a}{b}+7$$

de donde:

$$\frac{e_1}{e_2}=0\quad\Rightarrow\quad\frac{e_1}{e_2}+7=0+7\in A$$

$\therefore$ existe

ÍNDICE
1
2
3
4
5

5) Elementos inversos

$$\forall\ \frac{a}{b}+7 \in A\ ;\ \exists\ \frac{i_1}{i_2}+7 \in A \ \Big|\ \left(\frac{a}{b}+7\right) \oplus \left(\frac{i_1}{i_2}+7\right) = \frac{e_1}{e_2}+7$$

$$\left(\frac{a}{b}+7\right) \oplus \left(\frac{i_1}{i_2}+7\right) = \frac{e_1}{e_2}+7$$

$$\frac{a}{b}+\frac{i_1}{i_2}+7 = 0+7$$

de donde:

$$\frac{i_1}{i_2} = -\frac{a}{b} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{i_1}{i_2}+7 = -\frac{a}{b}+7 \in A$$

$\therefore$ existen

Dado que se cumplieron los cinco axiomas, entonces el sistema $(A,\ \oplus)$ es un grupo abeliano.

Determinemos ahora si el sistema $(A,\ \odot)$ cumple con los cinco axiomas de grupo abeliano.

6) Cerradura

$$\forall\ \frac{a}{b}+7\ ,\ \frac{c}{d}+7 \in A$$

$$\left[\left(\frac{a}{b}+7\right) \odot \left(\frac{c}{d}+7\right)\right] \in A$$

$$\left(\frac{ac}{bd}+7\right) \in A$$ dada la cerradura de la multiplicación en los números racionales.

7) Asociatividad

$$\forall\ \frac{a}{b}+7\ ,\ \frac{c}{d}+7\ ,\ \frac{e}{f}+7 \in A$$

$$\left(\frac{a}{b}+7\right)\odot\left[\left(\frac{c}{d}+7\right)\odot\left(\frac{e}{f}+7\right)\right]=\left[\left(\frac{a}{b}+7\right)\odot\left(\frac{c}{d}+7\right)\right]\odot\left(\frac{e}{f}+7\right)$$

$$\left(\frac{a}{b}+7\right)\odot\left(\frac{ce}{df}+7\right)=\left(\frac{ac}{bd}+7\right)\odot\left(\frac{e}{f}+7\right)$$

$$\frac{ace}{bdf}+7=\frac{ace}{bdf}+7$$

$\therefore$ cumple

8) Conmutatividad

$$\forall\ \frac{a}{b}+7\ ,\ \frac{c}{d}+7 \in A$$

$$\left(\frac{a}{b}+7\right)\odot\left(\frac{c}{d}+7\right)=\left(\frac{c}{d}+7\right)\odot\left(\frac{a}{b}+7\right)$$

$$\frac{ac}{bd}+7=\frac{ca}{db}+7$$

Se cumple dada la conmutatividad de la multiplicación en los números racionales.

9) Elemento idéntico

$$\forall\ \frac{a}{b}+7 \in A\ ;\ \exists\ \frac{E_1}{E_2}+7 \in A\ \middle|\ \left(\frac{a}{b}+7\right)\odot\left(\frac{E_1}{E_2}+7\right)=\frac{a}{b}+7$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

$$\left(\frac{a}{b}+7\right)\odot\left(\frac{E_1}{E_2}+7\right) = \frac{a}{b}+7$$

$$\frac{a\,E_1}{b\,E_2}+7 = \frac{a}{b}+7$$

de donde:

$$\frac{E_1}{E_2}=1 \quad\Rightarrow\quad \frac{E_1}{E_2}+7=1+7\in A$$

$$\therefore \text{ existe}$$

10) Elementos inversos

$$\forall\ \frac{a}{b}+7\in A\ ;\ \exists\ \frac{I_1}{I_2}+7\in A\ \left|\ \left(\frac{a}{b}+7\right)\odot\left(\frac{I_1}{I_2}+7\right)=\frac{E_1}{E_2}+7\right.$$

$$\left(\frac{a}{b}+7\right)\odot\left(\frac{I_1}{I_2}+7\right) = \frac{E_1}{E_2}+7$$

$$\frac{a\,I_1}{b\,I_2}+7 = 1+7$$

de donde:

$$\frac{I_1}{I_2}=\frac{b}{a} \quad\Rightarrow\quad \frac{I_1}{I_2}+7=\frac{b}{a}+7\in A$$

$$\therefore \text{ existen}$$

Obsérvese que existen inversos para todos los elementos del conjunto A excepto para el cero del campo.

De acuerdo con la definición de campo, solo resta demostrar que la operación $\odot$ es distributiva sobre $\oplus$.

11) $\forall\ \frac{a}{b}+7\ ,\ \frac{c}{d}+7\ ,\ \frac{e}{f}+7 \in A$

$$\left(\frac{a}{b}+7\right)\odot\left[\left(\frac{c}{d}+7\right)\oplus\left(\frac{e}{f}+7\right)\right]=\left[\left(\frac{a}{b}+7\right)\odot\left(\frac{c}{d}+7\right)\right]\oplus\left[\left(\frac{a}{b}+7\right)\odot\left(\frac{e}{f}+7\right)\right]$$

$$\left(\frac{a}{b}+7\right)\odot\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}+7\right)=\left(\frac{a\,c}{b\,d}+7\right)\oplus\left(\frac{a\,e}{b\,f}+7\right)$$

$$\frac{a}{b}\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)+7=\left(\frac{a\,c}{b\,d}+\frac{a\,e}{b\,f}\right)+7$$

$$\frac{a\,c}{b\,d}+\frac{a\,e}{b\,f}+7=\frac{a\,c}{b\,d}+\frac{a\,e}{b\,f}+7$$

$\therefore$ cumple

Podemos concluir entonces que el sistema $(A,\oplus,\odot)$ tiene estructura de campo.

ÍNDICE
1
2
3
4
5

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Sean el conjunto $A = \left\{ a \,\middle|\, a = \dfrac{n}{5} \;;\quad \forall\, n \in \mathbb{Z} \right\}$ y la operación binaria $\#$ definida por:

$$a \# b = a + b + \frac{1}{5} \quad ; \quad \forall\, a, b \in A$$

Determine si el sistema $(A, \#)$ tiene estructura de grupo.

2. Sea M el conjunto de las matrices cuadradas de orden 3, cuyo determinante es igual a uno, esto es:

$$M = \{ A \mid \det(A) = 1 \;,\quad A \text{ es de orden } 3 \times 3 \}$$

Determine si el sistema $(M, \bullet)$ tiene estructura de grupo, siendo la operación binaria $\bullet$ la multiplicación ordinaria entre matrices.

3. Sean el conjunto $B = \{ e^{x} \mid x \in \mathbb{Z} \}$ y la operación binaria Δ definida por:

$$e^{x_1} \Delta e^{x_2} = e^{2 x_1 x_2} \quad ; \quad \forall\, e^{x_1}, e^{x_2} \in B$$

Determine si el sistema (B, Δ) tiene estructura de grupo.

4. Sea el conjunto:

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} a & -a & 2b \\ a + 2b & b & -a \end{bmatrix} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

Determine si el sistema $(M, +)$ tiene estructura de grupo abeliano, donde la operación binaria $+$ es la adición usual de matrices.

5. Sea $(G, *)$ un grupo. Demuestre que:

$$(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1} \quad ; \quad \forall\ a, b \in G$$

6. Dado el conjunto $A = \{ u, a, b \}$ donde estos tres elementos son distintos y u es el elemento idéntico con la operación $*$. Si se sabe que el sistema $(A, *)$ tiene estructura de grupo abeliano, complete la tabla, escribiendo en los cuadros en blanco el resultado correspondiente:

$*$	u	a	b
u			
a		b	
b			a

7. Sean el conjunto $L = \{ y \mid y = \ln x \text{ con } x \in \mathbb{R}^+ \}$ y la operación binaria $\square$ definida por:

$$\ln x_1 \ \square\ \ln x_2 = \ln \frac{x_1 x_2}{2} \quad ; \forall\ \ln x_1, \ln x_2 \in L$$

Determine si el sistema $(L, \square)$ tiene estructura de grupo abeliano.

8. Sean el conjunto $B = \{ b \mid b = 2m \text{ con } m \in \mathbb{Z} \}$ y la operación binaria $\odot$ definida por:

$$x \odot y = \frac{1}{2} x y \quad ; \quad \forall\ x, y \in B$$

Determine si el sistema $(B, \odot)$ tiene estructura de grupo abeliano.

9. Dado el conjunto $F = \left\{ \frac{a}{b} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{Z} \text{ con } a \neq 0 \text{ y } b \neq 0 \right\}$ y la operación binaria $*$ definida por:

$$\frac{a_1}{b_1} * \frac{a_2}{b_2} = \frac{2 a_1 a_2}{b_1 b_2} \quad ; \quad \forall\ \frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2} \in F$$

determine si el sistema $(F, *)$ tiene estructura de grupo abeliano.

ÍNDICE 1 2 3 4 5

10. Sean el conjunto $A = \{ 0,\ 1,\ 2,\ 3 \}$ y la operación binaria $*$ definida por:

$*$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	2
2	2	3	1	0
3	3	2	0	1

Si se sabe que la operación $*$ cumple con el axioma de la asociatividad, determine si el sistema $(A,\ *)$ tiene estructura de grupo abeliano.

11. Sean el conjunto $B = \{ 1,\ -1,\ i,\ -i \}$ y la operación binaria Δ definida por:

Δ	1	-1	i	- i
1	1	-1	i	- i
-1	-1	1	- i	i
i	i	- i	-1	1
- i	- i	i	1	-1

donde $i = \sqrt{-1}$.

Determine si el sistema $(\mathrm{B},\ \Delta)$ tiene estructura de grupo abeliano.

12. Dados los grupos $(\mathbb{Z},\ \#)$ y $(\mathbb{Z},\ @)$, donde $\mathbb{Z}$ es el conjunto de los números enteros y las operaciones binarias $\#$ y $@$ están definidas por:

$$a \# b = a + b - 3$$

$$a @ b = a + b + 5 \qquad \forall\ a,\ b \in \mathbb{Z}$$

a) Obtenga el elemento idéntico de $(\mathbb{Z},\ \#)$ y $(\mathbb{Z},\ @)$.

b) Determine cuál es el inverso de 9 para la operación $\#$.

c) Determine cuál es el inverso de -8 para la operación $@$.

d) Obtenga el valor de $x \in \mathbb{Z}$, tal que x sea solución de la ecuación:

$$-2 \# 3 \# x \# 4 = 5 \# 1$$

13. Sean el conjunto $M = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{bmatrix} \middle| \; a \in \mathbb{R} \text{ con } a \neq 0 \right\}$ y la operación binaria $\otimes$ definida como:

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & -b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ab & 0 \\ 0 & -ab \end{bmatrix} \; ; \forall \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & -b \end{bmatrix} \in M$$

Determine si el sistema $(M, \otimes)$ tiene estructura de grupo abeliano.

14. Sean el conjunto $A = \{ a, b, c \}$ y la operación binaria $*$ definida por:

*	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

Si se sabe que $(A, *)$ forma un grupo abeliano, determine el valor de $x \in A$ que satisface a la ecuación:

$$(a * x) * b^{-1} = (a^{-1} * c) * b$$

donde a^{-1} indica el inverso de a con la operación $*$.

15. Sea el sistema algebraico (S, Δ), donde S es el conjunto de matrices:

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} \middle| \; a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

y la operación Δ está definida por:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} \Delta \begin{bmatrix} c & d \\ d & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac & bd \\ bd & ac \end{bmatrix} \; ; \forall \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c & d \\ d & c \end{bmatrix} \in S$$

a) Obtenga, si existe, la matriz $A \in S$ tal que:

$$A \,\Delta \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Delta\, A$$

b) Obtenga el elemento idéntico de la operación Δ en caso de que exista.

c) ¿Existen los elementos inversos para Δ ? Si así es, determínelos.

16. Sea el sistema $(H, *, \theta)$ donde $H = \{ 6m \mid m \in \mathbb{Z} \}$ y las operaciones binarias $*$ y θ están definidas por:

$$\begin{aligned} a * b &= b + a \\ a \,\theta\, b &= \frac{ab}{3} \end{aligned} \quad ; \quad \forall\ a, b \in H$$

Si se sabe que $(H, *)$ forma un grupo abeliano, determine si $(H, *, \theta)$ tiene estructura de campo.

17. Sean el conjunto $F = \left\{ a \cos x \;\middle|\; a \in \mathbb{R} \text{ con } x \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right] \right\}$ y las operaciones binarias $\oplus$ y $\odot$ están definidas por:

$$\begin{aligned} a_1 \cos x \oplus a_2 \cos x &= (a_1 + a_2) \cos x \\ a_1 \cos x \odot a_2 \cos x &= (a_1\, a_2) \cos x \end{aligned} \quad ; \quad \forall\ a_1 \cos x,\ a_2 \cos x \in F$$

Determine si el sistema $(F, \oplus, \odot)$ tiene estructura de campo.

18. Sean el conjunto $A = \{ (1, a) \mid a \in \mathbb{Q} \}$, donde $\mathbb{Q}$ es el conjunto de los números racionales y las operaciones binarias Δ y $\square$ están definidas por:

$$\begin{aligned} (1, a)\, \Delta\, (1, b) &= (1, a+b) \\ (1, a)\, \square\, (1, b) &= (1, 0) \end{aligned} \quad ; \quad \forall\ (1, a), (1, b) \in A$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

Determine si el sistema $(\mathrm{A}, \Delta, \square)$ tiene estructura de campo.

19. Sea el sistema $(B, +, *)$, donde $B = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ y las operaciones binarias $+$ y $*$ están definidas por:

$$\begin{aligned} (a, b) + (c, d) &= (a + c,\ b + d) \\ (a, b) * (c, d) &= (ac, bd) \end{aligned} \quad ; \quad \forall\ (a, b), (c, d) \in B$$

Determine si $(B, +, *)$ tiene estructura de campo.

20. Dado el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ y las operaciones binarias $*$ y $\square$ definidas por:

$$\begin{aligned} a * b &= a + b \\ a \square b &= \frac{ab}{\sqrt{2}} \end{aligned} \quad ; \quad \forall\ a, b \in \mathbb{R}$$

Determine si el sistema $(\mathbb{R}, *, \square)$ tiene estructura de campo.

RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS PROPUESTOS

1. $(A, \#)$ sí es un grupo.

2. $(M, \bullet)$ sí es un grupo.

3. (B, Δ) no es un grupo.

4. $(M, +)$ sí es un grupo abeliano.

6.

$*$	u	a	b
u	u	a	b
a	a	b	u
b	b	u	a

7. $(L, \square)$ sí es un grupo abeliano.

8. $(B, \odot)$ no es un grupo abeliano.

9. $(F, *)$ sí es un grupo abeliano.

10. $(A, *)$ sí es un grupo abeliano.

11. (B, Δ) sí es un grupo abeliano.

12. **a)** El idéntico para $\#$ es 3.

El idéntico para $@$ es -5.

b) El inverso de 9 es -3.

c) El inverso de -8 es -2.

d) $x = 7$.

13. $(M, \otimes)$ sí es un grupo abeliano.

14. $x = b$.

15. a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

b) $E = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

c) No existen.

16. $(H, *, \theta)$ no es un campo.

17. $(F, \oplus, \odot)$ sí es un campo.

18. $(A, \Delta, \square)$ no es un campo.

19. $(B, +, *)$ no es un campo.

20. $(\mathbb{R}, *, \square)$ sí es un campo.

Capítulo 2

ESPACIOS VECTORIALES

Espacio vectorial

Sea V un conjunto no vacío, en el cual se definen dos operaciones llamadas adición y multiplicación por un escalar y, sea K un campo. Se dice que V es un espacio vectorial sobre K si las dos operaciones cumplen con los diez axiomas siguientes:

$\forall \; \bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in V$ y $\forall \; \alpha, \beta \in K$

1) $(\bar{u} + \bar{v}) \in V$

2) $(\bar{u} + \bar{v}) + \bar{w} = \bar{u} + (\bar{v} + \bar{w})$

3) $\exists \; \bar{0} \in V \mid \forall \; \bar{u} \in V ; \quad \bar{u} + \bar{0} = \bar{0} + \bar{u} = \bar{u}$

4) $\forall \; \bar{u} \in V ; \quad \exists \, (-\bar{u}) \in V \mid \bar{u} + (-\bar{u}) = (-\bar{u}) + \bar{u} = \bar{0}$

5) $\bar{u} + \bar{v} = \bar{v} + \bar{u}$

6) $(\alpha \bar{u}) \in V$

7) $\alpha (\bar{u} + \bar{v}) = \alpha \bar{u} + \alpha \bar{v}$

8) $(\alpha + \beta) \bar{u} = \alpha \bar{u} + \beta \bar{u}$

9) $\alpha (\beta \bar{u}) = (\alpha \beta) \bar{u}$

10) Si 1 es la unidad de K, entonces $1 \bar{u} = \bar{u} \; ; \quad \forall \; \bar{u} \in V$

A los elementos del conjunto V se les llama vectores y a los elementos del campo K se les llama escalares.

Ejercicio 2.1 Determine si el conjunto $A = \left\{ x \,\middle|\, x \in \mathbb{R}^+ \right\}$ y las operaciones de adición y multiplicación por un escalar definidas por:

$$x + y = xy \quad ; \quad \forall \quad x, y \in \mathbb{R}^+$$

$$\alpha x = x^\alpha \quad ; \quad \forall \quad x \in \mathbb{R}^+ \quad \text{y} \quad \forall \ \alpha \in \mathbb{R}$$

es un espacio vectorial.

SOLUCIÓN:

Veamos si se cumplen los diez axiomas de espacio vectorial.

$\forall \ x, y, z \in A$ y $\forall \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, tenemos:

1) $x + y = xy \in A$, dado que la multiplicación de dos reales positivos da un real positivo, entonces se cumple.

2) $(x + y) + z = x + (y + z)$

$$xy + z = x + yz$$

$$xyz = xyz \quad \therefore \quad \text{cumple}$$

Con el fin de simplificar la demostración del cumplimiento de los axiomas 3 y 4, se demostrará primero el cumplimiento del axioma 5. De no ser así, en los axiomas 3 y 4 se tendrían que determinar los idénticos e inversos izquierdos y derechos, y compararlos para saber si son iguales en cada caso, y con ello concluir sobre su existencia o no existencia. Si se procede como se está sugiriendo, entonces no será necesario realizar el procedimiento descrito renglones arriba, pues se demuestra primero el axioma de la conmutatividad.

De lo anterior se tiene que:

5) $x + y = y + x$

$xy = yx$ Se cumple dada la conmutatividad de la multiplicación $\mathbb{R}$.

3) $\forall\, x \in A\ ;\ \exists\, e \in A \mid e + x = x + e = x$

de donde:

$$x + e = x$$

$$xe = x$$

$$e = 1 \in A \qquad \therefore \text{ cumple}$$

4) $\forall\, x \in A\ ;\ \exists\, i \in A \mid i + x = x + i = e$

de donde:

$$x + i = e$$

$$xi = 1$$

$$i = \frac{1}{x} \in A \qquad \therefore \text{ cumple}$$

6) $\alpha x = x^{\alpha} \in A$ dado que:

- ❖ Si $\alpha > 0,$ entonces x^{α} es positivo.
- ❖ Si $\alpha = 0,$ entonces $x^{\alpha} = 1$
- ❖ Si $\alpha < 0,$ entonces $x^{-\alpha} = \dfrac{1}{x^{\alpha}}$ que es positivo.

$\therefore$ cumple

7) $\alpha\,(x + y) = \alpha x + \alpha y$:

$$\alpha\,(xy) = x^{\alpha} + y^{\alpha}$$

$$(xy)^{\alpha} = x^{\alpha}\, y^{\alpha}$$

$$(xy)^{\alpha} = (xy)^{\alpha} \qquad \therefore \text{ cumple}$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

8) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$

$$x^{\alpha+\beta} = x^{\alpha} + x^{\beta}$$

$$x^{\alpha+\beta} = x^{\alpha}\, x^{\beta}$$

$$x^{\alpha+\beta} = x^{\alpha+\beta} \qquad \therefore \quad \text{cumple}$$

9) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$

$$\alpha\left(x^{\beta}\right) = x^{\alpha\beta}$$

$$\left(x^{\beta}\right)^{\alpha} = x^{\alpha\beta}$$

$$x^{\alpha\beta} = x^{\alpha\beta} \qquad \therefore \quad \text{cumple}$$

10) $\exists\ \alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha x = x \ ;\ \forall \in A$

$$\alpha x = x$$

$$x^{\alpha} = x$$

$\alpha = 1$ que es la unidad en $\mathbb{R}$ $\quad\therefore$ cumple

Dado que se cumplen los diez axiomas, podemos concluir que el conjunto A es un espacio vectorial.

Ejercicio 2.2 Determine si $\mathbb{R}^2$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ para la adición y la multiplicación por un escalar definidas por:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2) \ ;\ \forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$$

$$\alpha(x, y) = (\alpha y, \alpha x) \ ;\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ;\ \alpha \in \mathbb{R}$$

En caso de no serlo, indique cuáles axiomas de la definición no se cumplen.

ÍNDICE
1
2
3
4
5

SOLUCIÓN:

$\forall\ (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \in \mathbb{R}^2$ y $\forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, tenemos:

1) $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in \mathbb{R}^2 \quad \therefore$ cumple

2) $\left[(x_1, y_1) + (x_2, y_2)\right] + (x_3, y_3) = (x_1, y_1) + \left[(x_2, y_2) + (x_3, y_3)\right]$

$$(x_1 + x_2, y_1 + y_2) + (x_3, y_3) = (x_1, y_1) + (x_2 + x_3, y_2 + y_3)$$

$$(x_1 + x_2 + x_3, y_1 + y_2 + y_3) = (x_1 + x_2 + x_3, y_1 + y_2 + y_3)$$

$\therefore$ cumple

Siguiendo la recomendación hecha en el ejercicio anterior, demostraremos primero que se satisface el axioma 5.

5) $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_2, y_2) + (x_1, y_1)$

$$(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_2 + x_1, y_2 + y_1)$$

Dada la conmutatividad de la adición en $\mathbb{R}$, entonces se cumple.

3) $\forall\ (x, y) \in \mathbb{R}^2 ;\ \exists\ (e_1, e_2) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) + (e_1, e_2) = (e_2, e_1) + (x, y) = (x, y)$

De donde se tiene que:

$$(x, y) + (e_1, e_2) = (x, y)$$

esta igualdad se cumple, si y solo si:

$$(e_1, e_2) = (0, 0) \in \mathbb{R}^2 \quad \therefore \text{ cumple}$$

4) $\forall\,(x,\ y) \in \mathbb{R}^2;\ \exists\,(i_1,\ i_2) \in \mathbb{R}^2 \mid (x,\ y) + (i_1,\ i_2) = (i_1,\ i_2) + (x,\ y) = (e_1,\ e_2)$

Considerando:

$$(x,\ y) + (i_1,\ i_2) = (e_1,\ e_2)$$

$$(x + i_1,\ \ y + i_2) = (0,\ 0)$$

con lo que se llega a:

$$\begin{matrix} i_1 = -x \\ i_2 = -y \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad (i_1,\ i_2) = (-x,\ -y) \in \mathbb{R}^2 \quad \therefore \ \text{cumple}$$

6) $\alpha(x_1,\ y_1) = (\alpha y_1,\ \alpha x_1) \in \mathbb{R}^2 \quad \therefore$ cumple

7) $\alpha\left[(x_1,\ y_1) + (x_2,\ y_2)\right] = \alpha(x_1,\ y_1) + \alpha(x_2,\ y_2)$

$$\alpha(x_1 + x_2,\ y_1 + y_2) = (\alpha y_1,\ \alpha x_1) + (\alpha y_2,\ \alpha x_2)$$

$$\left[\alpha(y_1 + y_2),\ \alpha(x_1 + x_2)\right] = \left[\alpha(y_1 + y_2),\ \alpha(x_1 + x_2)\right]$$

$\therefore$ cumple

8) $(\alpha + \beta)(x_1,\ y_1) = \alpha(x_1,\ y_1) + \beta(x_1,\ y_1)$

$$\left[(\alpha + \beta)\,y_1,\ (\alpha + \beta)\,x_1\right] = (\alpha y_1,\ \alpha x_1) + (\beta y_1,\ \beta x_1)$$

$$\left[(\alpha + \beta)\,y_1,\ (\alpha + \beta)\,x_1\right] = \left[(\alpha + \beta)\,y_1,\ (\alpha + \beta)\,x_1\right]$$

$\therefore$ cumple

9) $\alpha\left[\beta\left(x_1,\ y_1\right)\right] = \left(\alpha\beta\right)\left(x_1,\ y_1\right)$

$$\alpha\left[\beta y_1,\ \beta x_1\right] = \left(\alpha\beta y_1,\ \alpha\beta x_1\right)$$

$$\left(\alpha\beta x_1,\ \alpha\beta y_1\right) \neq \left(\alpha\beta y_1,\ \alpha\beta x_1\right)$$

$\therefore$ no cumple

10) $\forall\left(x_1,\ y_1\right) \in \mathbb{R}^2\ ;\ \exists\ \alpha \in \mathbb{R}\ |\ \alpha\left(x_1,\ y_1\right) = \left(x_1,\ y_1\right)$

de donde:

$$\left(\alpha y_1,\ \alpha x_1\right) = \left(x_1,\ y_1\right)$$

por igualdad:

$$\alpha y_1 = x_1 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{x_1}{y_1} \qquad \ldots(1)$$

$$\alpha x_1 = y_1 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{y_1}{x_1} \qquad \ldots(2)$$

Se aprecia en (1) y (2) que α toma valores diferentes, lo cual no es posible, pues α es la unidad del campo y este valor es único.

$\therefore$ no cumple

En consecuencia, podemos concluir que $\mathbb{R}^2$ no es un espacio vectorial con las operaciones definidas.

Ejercicio 2.3 Determine si el conjunto

$$P = \left\{\ ax^2 + bx + c \,\middle|\, c = b - a \quad ;\quad a,\ b,\ c \in \mathbb{R}\ \right\}$$

es un espacio vectorial sobre el campo de los números reales, considerando las operaciones de adición y multiplicación por un escalar usuales en los polinomios.

ÍNDICE
1
2
3
4
5

SOLUCIÓN:

El conjunto P puede ser expresado de la siguiente forma:

$$P = \left\{ ax^2 + bx + (b-a) \;\middle|\; a,\, b \in \mathbb{R} \right\}$$

Veamos si se cumplen los diez axiomas de espacio vectorial.

$$\forall \quad P_1(x) = a_1x^2 + b_1x + (b_1 - a_1), \qquad P_2(x) = a_2x^2 + b_2x + (b_2 - a_2),$$

$$P_3(x) = a_3x^2 + b_3x + (b_3 - a_3) \in P \qquad \text{y} \qquad \forall \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

1) $\left[P_1(x) + P_2(x) \right] \in P$

$$\left[\left(a_1x^2 + b_1x + (b_1 - a_1)\right) + \left(a_2x^2 + b_2x + (b_2 - a_2)\right) \right] \in P$$

$$\left[(a_1 + a_2)x^2 + (b_1 + b_2)x + \left((b_1 + b_2) - (a_1 + a_2)\right) \right] \in P$$

Dado que el polinomio suma es de la forma de los elementos del conjunto, entonces cumple.

2) $\left[\left(a_1x^2 + b_1x + (b_1 - a_1)\right) + \left(a_2x^2 + b_2x + (b_2 - a_2)\right) \right] + \left(a_3x^2 + b_3x + (b_3 - a_3)\right) =$

$$\left(a_1x^2 + b_1x + (b_1 - a_1)\right) + \left[\left(a_2x^2 + b_2x + (b_2 - a_2)\right) + \left(a_3x^2 + b_3x + (b_3 - a_3)\right) \right]$$

$$\left[(a_1 + a_2)x^2 + (b_1 + b_2)x + \left((b_1 + b_2) - (a_1 + a_2)\right) \right] + \left(a_3x^2 + b_3x + (b_3 - a_3)\right) =$$

$$\left(a_1x^2 + b_1x + (b_1 - a_1)\right) + \left[(a_2 + a_3)x^2 + (b_2 + b_3)x + \left((b_2 + b_3) - (a_2 + a_3)\right) \right]$$

$$(a_1 + a_2 + a_3)x^2 + (b_1 + b_2 + b_3)x + \left((b_1 + b_2 + b_3) - (a_1 + a_2 + a_3)\right) =$$

$$(a_1 + a_2 + a_3)x^2 + (b_1 + b_2 + b_3)x + \left((b_1 + b_2 + b_3) - (a_1 + a_2 + a_3)\right)$$

Como la igualdad se cumple, entonces el axioma se satisface.

3) $\left(a_1x^2+b_1x+\left(b_1-a_1\right)\right)+\left(a_2x^2+b_2x+\left(b_2-a_2\right)\right)=$

$$\left(a_2x^2+b_2x+\left(b_2-a_2\right)\right)+\left(a_1x^2+b_1x+\left(b_1-a_1\right)\right)$$

$$\left(a_1+a_2\right)x^2+\left(b_1+b_2\right)x+\left(\left(b_1+b_2\right)-\left(a_1+a_2\right)\right)=$$

$$\left(a_2+a_1\right)x^2+\left(b_2+b_1\right)x+\left(\left(b_2+b_1\right)-\left(a_2+a_1\right)\right)$$

Dada la conmutatividad en la suma de reales, entonces cumple.

4) $\forall\ a_1x^2+b_1x+\left(b_1-a_1\right)\in P\ ;\ \exists\ d_1x^2+e_1x+\left(e_1-d_1\right)\in P \,\middle|\, \left(a_1x^2+b_1x+\left(b_1-a_1\right)\right)+$

$$\left(d_1x^2+e_1x+\left(e_1-d_1\right)\right)=a_1x^2+b_1x+\left(b_1-a_1\right)$$

de donde se tiene que:

$$\left(a_1+d_1\right)x^2+\left(b_1+e_1\right)x+\left(\left(b_1+e_1\right)-\left(a_1+d_1\right)\right)=a_1x^2+b_1x+\left(b_1-a_1\right)$$

la igualdad se cumple si:

$$d_1=0$$
$$e_1=0$$

por lo tanto, el elemento idéntico es:

$$d_1x^2+e_1x+\left(e_1-d_1\right)=0x^2+0x+0\in P \qquad \therefore \text{ existe}$$

5) $\forall\ a_1x^2+b_1x+\left(b_1-a_1\right)\in P\ ;\ \exists\ i_1x^2+j_1x+\left(j_1-i_1\right)\in P \,|$

$$\left(a_1x^2+b_1x+\left(b_1-a_1\right)\right)+\left(i_1x^2+j_1x+\left(j_1-i_1\right)\right)=d_1x^2+e_1x+\left(e_1-d_1\right)$$

de donde se tiene que:

$$\left(a_1+i_1\right)x^2+\left(b_1+j_1\right)x+\left(\left(b_1+j_1\right)-\left(a_1+i_1\right)\right)=0x^2+0x+0$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

la igualdad se cumple si:

$$i_1 = -a_1$$

$$j_1 = -b_1$$

con lo cual, los elementos inversos son de la forma:

$$i_1 x^2 + j_1 x + \left(j_1 - i_1 \right) = -a_1 x^2 - b_1 x + \left(-b_1 - \left(-a_1 \right) \right) \in P \quad \therefore \text{ existen}$$

6) $\alpha \left[a_1 x^2 + b_1 x + \left(b_1 - a_1 \right) \right] \in P$

$$\left[\alpha a_1 x^2 + \alpha b_1 x + \left(\alpha b_1 - \alpha a_1 \right) \right] \in P \qquad \therefore \text{ cumple}$$

7) $\alpha \left[\left(a_1 x^2 + b_1 x + \left(b_1 - a_1 \right) \right) + \left(a_2 x^2 + b_2 x + \left(b_2 - a_2 \right) \right) \right] =$

$$\alpha \left(a_1 x^2 + b_1 x + \left(b_1 - a_1 \right) \right) + \alpha \left(a_2 x^2 + b_2 x + \left(b_2 - a_2 \right) \right)$$

$$\alpha \left[\left(a_1 + a_2 \right) x^2 + \left(b_1 + b_2 \right) x + \left(\left(b_1 + b_2 \right) - \left(a_1 + a_2 \right) \right) \right] =$$

$$\left(\alpha a_1 x^2 + \alpha b_1 x + \alpha \left(b_1 - a_1 \right) \right) + \left(\alpha a_2 x^2 + \alpha\, b_2 x + \alpha \left(b_2 - a_2 \right) \right)$$

$$\alpha \left(a_1 + a_2 \right) x^2 + \alpha \left(b_1 + b_2 \right) x + \alpha \left(b_1 + b_2 \right) - \alpha \left(a_1 + a_2 \right) =$$

$$\alpha \left(a_1 + a_2 \right) x^2 + \alpha \left(b_1 + b_2 \right) x + \alpha \left(b_1 + b_2 \right) - \alpha \left(a_1 + a_2 \right)$$

$$\therefore \quad \text{cumple}$$

8) $(\alpha + \beta) \left(a_1 x^2 + b_1 x + \left(b_1 - a_1 \right) \right) =$

$$\alpha \left(a_1 x^2 + b_1 x + \left(b_1 - a_1 \right) \right) + \beta \left(a_1 x^2 + b_1 x + \left(b_1 - a_1 \right) \right)$$

$$(\alpha + \beta) a_1 x^2 + (\alpha + \beta)\, b_1 x + (\alpha + \beta) \left(b_1 - a_1 \right) =$$

$$\left(\alpha a_1 x^2 + \alpha b_1 x + \alpha \left(b_1 - a_1 \right) \right) + \left(\beta a_1 x^2 + \beta b_1 x + \beta \left(b_1 - a_1 \right) \right)$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

$$(\alpha+\beta)a_1x^2+(\alpha+\beta)b_1x+(\alpha+\beta)(b_1-a_1)=$$

$$(\alpha+\beta)\ a_1x^2+(\alpha+\beta)\ b_1x+(\alpha+\beta)(b_1-a_1)$$

$\therefore$ cumple

9) $\alpha\left[\beta\left(a_1x^2+b_1x+\left(b_1-a_1\right)\right)\right] = (\alpha\beta)\left(a_1x^2+b_1x+\left(b_1-a_1\right)\right)$

$$\alpha\left[\beta a_1x^2+\beta b_1x+\beta\left(b_1-a_1\right)\right] = \alpha\beta a_1x^2+\alpha\beta b_1x+\alpha\beta\left(b_1-a_1\right)$$

$$\alpha\beta a_1x^2+\alpha\beta b_1x+\alpha\beta\left(b_1-a_1\right) = \alpha\beta a_1x^2+\alpha\beta b_1x+\alpha\beta\left(b_1-a_1\right)$$

$\therefore$ cumple

10) $\forall\ a_1x^2+b_1x+\left(b_1-a_1\right)\in P\ ;\ \exists\ \alpha\in\mathbb{R}\ \middle|\ \alpha\left(a_1x^2+b_1x+\left(b_1-a_1\right)\right)=$

$$a_1x^2+b_1x+\left(b_1-a_1\right)$$

de donde:

$$\alpha a_1x^2+\alpha b_1x+\alpha\left(b_1-a_1\right)=a_1x^2+b_1x+\left(b_1-a_1\right)$$

esta igualdad se cumple si:

$\alpha=1\ \in\mathbb{R}$ $\therefore$ existe

Dado que se cumplen los diez axiomas, podemos concluir que el conjunto P es un espacio vectorial.

Subespacio vectorial

Sea W un subconjunto de un espacio vectorial V. Si W es a su vez un espacio vectorial con respecto a las operaciones de adición y multiplicación definidas en V, se dice entonces que W es un subespacio de V.

Teorema

Sea V un espacio vectorial sobre un campo K. Si W es un subconjunto no vacío de V, entonces W será un subespacio de V, si y solo si, se cumplen las condiciones siguientes:

1) $\forall\ \bar{u}, \bar{v} \in W \ ,\ (\bar{u} + \bar{v}) \in W$

2) $\forall\ \bar{u} \in W$ y $\forall\ \alpha \in K \ ,\ (\alpha\, \bar{u}) \in W$

Ejercicio 2.4 Determine si el conjunto

$$A = \left\{ a x^2 + bx + c \;\middle|\; 2a + b - c = 0 ;\ \ a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

es un subespacio del espacio vectorial

$$P_2 = \left\{ a x^2 + bx + c \;\middle|\; a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

definido sobre el campo $\mathbb{R}$.

SOLUCIÓN:

Despejando c de la ecuación que se tiene en el conjunto A, tenemos:

$$c = 2a + b$$

Si se sustituye como término independiente en A, entonces dicho conjunto se puede expresar como:

$$A = \left\{ a x^2 + b x + (2a + b) \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

Dado que el conjunto A es un subconjunto del espacio P_2, entonces solo restaría comprobar que A es cerrado para la adición y la multiplicación por un escalar, para demostrar que es un subespacio.

ÍNDICE
1
2
3
4
5

De esta forma se tiene que:

1) $\forall \ a_1x^2 + b_1x + (2a_1 + b_1) \ , \ a_2x^2 + b_2x + (2a_2 + b_2) \in A$

$$\left[a_1x^2 + b_1x + (2a_1 + b_1)\right] + \left[a_2x^2 + b_2x + (2a_2 + b_2)\right] =$$

$$(a_1 + a_2)x^2 + (b_1 + b_2)x + \left[2(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\right] \in A$$

$\therefore$ cumple

2) $\forall \ ax^2 + bx + (2a + b) \in A$ y $\forall \ \alpha \in \mathbb{R}$

$$\alpha\left[ax^2 + bx + (2a + b)\right] = \alpha ax^2 + \alpha bx + (2\alpha a + \alpha b) \in A$$

$\therefore$ cumple

Dado que se cumplen las dos cerraduras, entonces podemos concluir que A es un subespacio de P_2.

Ejercicio 2.5 Sea $M_{n\times n}$ el espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden n con elementos en $\mathbb{R}$. Si W es un subconjunto de $M_{n\times n}$ definido por:

$$W = \{B \mid BE = EB\}$$

donde E es una matriz dada de orden n x n, demuestre que W es un subespacio de $M_{n\times n}$.

SOLUCIÓN:

1) Cerradura para la adición:

$\forall \ A, B \in W$

Al ser A y B elementos de W, entonces se cumple que:

$$AE = EA \qquad \text{y} \qquad BE = EB \qquad \ldots(\mathrm{I})$$

debemos demostrar que:

$$(A + B) \in W$$

se tiene que $(A + B)$ será un elemento de W si se cumple que:

$$(A + B)E = E(A + B)$$

$$(A + B)E = EA + EB$$

considerando (I), tenemos:

$$(A + B)E = AE + BE$$

$$(A + B)E = (A + B)E$$

por lo tanto, $(A + B)$ sí es un elemento de W.

2) Cerradura para la multiplicación por un escalar:

$\forall \; A \in W \quad$ y $\quad \forall \; \alpha \in \mathbb{R}$

$$(\alpha A) \in W$$

es decir, se debe cumplir que:

$$(\alpha A)E = E(\alpha A)$$

$$(\alpha A)E = \alpha(EA)$$

al ser A elemento de W, entonces:

$$(\alpha A)E = \alpha(AE)$$

$$(\alpha A)E = (\alpha A)E$$

por lo tanto, (αA) sí es un elemento de W.

Al cumplirse las dos cerraduras, entonces podemos afirmar que W es un subespacio vectorial de $M_{n\times n}$.

Ejercicio 2.6 Determine si el conjunto de funciones:

$$H = \left\{ f(x) \mid x f'(x) + f(x) = 0 \right\}$$

es un subespacio del espacio vectorial F de funciones reales derivables $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$, sobre el campo real.

SOLUCIÓN:

1) Cerradura para la adición:

$$\forall\ f_1(x),\quad f_2(x) \in H$$

$$\left[f_1(x) + f_2(x) \right] \in H$$

Para que la suma de f_1 y f_2 pertenezca a H, entonces se debe cumplir que:

$$x\left[f_1(x) + f_2(x) \right]' + \left[f_1(x) + f_2(x) \right] = 0$$

por propiedades de la derivada se tiene que:

$$\left[x f_1'(x) + x f_2'(x) \right] + \left[f_1(x) + f_2(x) \right] = 0$$

reagrupando:

$$\left[x f_1'(x) + f_1(x) \right] + \left[x f_2'(x) + f_2(x) \right] = 0 \qquad \ldots(\mathrm{I})$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

como $f_1(x)$ y $f_2(x)$ son elementos de H, entonces se cumple que:

$$x f_1'(x) + f_1(x) = 0$$

$$x f_2'(x) + f_2(x) = 0$$

sustituyendo en (I), tenemos:

$$0 + 0 = 0$$

$$0 = 0$$

por lo tanto, $\left[f_1(x) + f_2(x) \right]$ sí pertenece a H.

2) Cerradura para la multiplicación por un escalar:

$\forall \ f(x) \in H$ y $\forall \ \alpha \in \mathbb{R}$

$$\left[\alpha f(x) \right] \in H$$

Se debe cumplir que:

$$\begin{aligned} x\left[\alpha f(x) \right]' + \left[\alpha f(x) \right] &= 0 \\ x\left[\alpha f'(x) \right] + \left[\alpha f(x) \right] &= 0 \\ \alpha\left[x f'(x) + f(x) \right] &= 0 \\ \alpha(0) &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

por lo tanto, $\alpha f(x)$ sí pertenece a H.

Al cumplirse las dos cerraduras, entonces H sí es un subespacio de F.

ÍNDICE
1
2
3
4
5

Combinación lineal

Sea V un espacio vectorial sobre un campo K y sea $\bar{v} \in V$. El vector $\bar{v}$ es una combinación lineal de los vectores $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n$ si puede ser expresado de la forma:

$$\bar{v} = \alpha_1 \bar{v}_1 + \alpha_2 \bar{v}_2 + \ldots + \alpha_n \bar{v}_n$$

donde los escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in K$

Ejercicio 2.7 Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & x \\ y & 11 \end{bmatrix}$

a) Determine los valores de las constantes $x, y \in \mathbb{R}$, de tal manera que la matriz A sea una combinación lineal de las matrices:

$$B = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{bmatrix} 9 & 7 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$$

b) Con los valores de α y β obtenidos, exprese a la matriz A como una combinación lineal de las matrices B y C.

SOLUCIÓN:

a) Para obtener los valores de x, y solicitados, se procederá de la siguiente forma:

$$A = \alpha B + \beta C$$

sustituyendo las matrices:

$$\begin{bmatrix} 3 & x \\ y & 11 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 9 & 7 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$$

al multiplicar y sumar se llega a:

$$\begin{bmatrix} 3 & x \\ y & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5\alpha + 9\beta & -3\alpha + 7\beta \\ 2\alpha - 5\beta & -\alpha + 4\beta \end{bmatrix}$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

por igualdad de matrices se llega al sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 5\alpha + 9\beta = 3 \\ -3\alpha + 7\beta = x \\ 2\alpha - 5\beta = y \\ -\alpha + 4\beta = 11 \end{cases}$$

al resolverlo por el método de Gauss, tenemos:

$$(2)(-3)(5)\begin{cases} -\alpha + 4\beta = 11 \\ 5\alpha + 9\beta = 3 \\ -3\alpha + 7\beta = x \\ 2\alpha - 5\beta = y \end{cases} \sim \begin{cases} -\alpha + 4\beta = 11 & \ldots (1) \\ 29\beta = 58 & \ldots (2) \\ -5\beta = x-33 & \ldots (3) \\ 3\beta = y+22 & \ldots (4) \end{cases}$$

de la ecuación (2), tenemos que:

$$\beta = 2$$

de (1)

$$\alpha = -3$$

con los valores de α, β y las ecuaciones (3) y (4), tenemos:

$$-5(2) = x - 33 \quad \Rightarrow \quad x = 33 - 10 \quad \therefore \quad x = 23$$

$$3(2) = y + 22 \quad \Rightarrow \quad y = 6 - 22 \quad \therefore \quad y = -16$$

con lo cual la matriz A es igual a:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 23 \\ -16 & 11 \end{bmatrix}$$

b) La combinación lineal solicitada es:

$$A = -3B + 2C$$

Ejercicio 2.8 Sean el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ y $S = \{(1, -1), (3, 0), (2, 1)\}$ un subconjunto de $\mathbb{R}^2$.

Exprese de dos maneras diferentes al vector $\overline{v} = (5, 1)$ como una combinación lineal de los vectores de S.

SOLUCIÓN:

Expresando al vector $\overline{v}$ como una combinación lineal de los elementos de S, tenemos:

$$(5, 1) = \alpha(1, -1) + \beta(3, 0) + \gamma(2, 1)$$

al multiplicar y sumar, se llega a:

$$(5, 1) = (\alpha + 3\beta + 2\gamma, -\alpha + \gamma)$$

por igualdad de vectores, se llega al sistema:

$$\begin{cases} \alpha + 3\beta + 2\gamma = 5 & \ldots (1) \\ -\alpha + \gamma = 1 & \ldots (2) \end{cases}$$

Dado que se trata de un sistema de ecuaciones compatible indeterminado, es decir, con múltiples soluciones, entonces esto implica que existe una infinidad de posibilidades de expresar al vector $\overline{v}$ como una combinación lineal de los elementos del conjunto S.

Obtengamos las dos formas distintas que se nos pide en el enunciado del ejercicio.

De la ecuación (2), tenemos que:

$$\gamma = 1 + \alpha \qquad \ldots (3)$$

si $\alpha = 1 \quad \Rightarrow \quad \gamma = 2$

al sustituir en la ecuación (1), se tiene que:

$$1 + 3\beta + 2(2) = 5$$

$$3\beta + 5 = 5$$

$$\therefore \qquad \beta = 0$$

Por lo tanto, una forma de expresar al vector $\bar{v}$ como combinación lineal de los elementos de S es:

$$\bar{v} = 1(1, -1) + 2(2, 1)$$

Asignando un valor distinto a α en la ecuación (3), tenemos:

$$\text{si} \quad \alpha = -1 \quad \Rightarrow \quad \gamma = 0$$

sustituyendo en (1), tenemos:

$$-1 + 3\beta + 2(0) = 5$$

$$3\beta = 6$$

$$\therefore \quad \beta = 2$$

con lo cual la otra combinación lineal es:

$$\bar{v} = -(1, -1) + 2(3, 0)$$

Es muy importante resaltar lo siguiente:

a) Cuando un vector es expresado como una combinación lineal de los elementos de una base dada, entonces dicha combinación lineal es única.

b) Si un vector se quiere expresar como una combinación lineal de los elementos de un conjunto generador, entonces existen una infinidad de posibilidades. Este es el caso que se presentó en este ejercicio.

Los conceptos de base y conjunto generador citados se definirán a continuación.

Dependencia lineal

Sea $A = \left\{ \overline{v}_1, \overline{v}_2, \ldots, \overline{v}_n \right\}$ un conjunto de vectores. Se dice que A es linealmente independiente si la ecuación

$$\alpha_1 \overline{v}_1 + \alpha_2 \overline{v}_2 + \ldots + \alpha_n \overline{v}_n = \overline{0}$$

solo se satisface cuando $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$. En caso contrario, es decir, si existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ no todos nulos, para los cuales se satisface dicha ecuación, entonces se dice que el conjunto A es linealmente dependiente.

Conjunto generador

Sea V un espacio vectorial sobre K, y sea $G = \left\{ \overline{v}_1, \overline{v}_2, \ldots, \overline{v}_n \right\}$ un conjunto de vectores de V. Se dice que G es generador de V, si todo vector de V puede expresarse como una combinación lineal de los vectores de G.

Base

Se define como base de un espacio vectorial V, a cualquier subconjunto B de vectores de V, tal que:

1) Cualquier vector de V puede expresarse como una combinación lineal de los vectores de B.

2) B es linealmente independiente.

Dimensión

La dimensión de un espacio vectorial V, se define como la cantidad de elementos de cualquiera de sus bases y se denota como:

$$\text{Dim } V$$

Si $V = \{ \bar{0} \}$, entonces $\text{Dim } V = 0$

Teorema

Todo conjunto de vectores que contiene al vector cero es linealmente dependiente.

Teorema

Si W es un conjunto linealmente independiente, entonces cualquier subconjunto de W es linealmente independiente.

Teorema

Sea V un espacio vectorial sobre un campo K. Si $B = \left\{ \bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n \right\}$ es una base de V, entonces cualquier conjunto de vectores de V con más de n elementos es linealmente dependiente.

Teorema

Si un espacio vectorial V tiene una base con n vectores, entonces cualquier base de V deberá contener exactamente n vectores.

Teorema

Si V es un espacio vectorial de dimensión n, entonces cualquier conjunto linealmente independiente que contenga n vectores del espacio V es una base de dicho espacio.

Vector de coordenadas

Sea $B = \{ \bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n \}$ una base del espacio vectorial V y sea $\bar{v}$ un vector cualquiera de V tal que:

$$\bar{v} = \alpha_1 \bar{v}_1 + \alpha_2 \bar{v}_2 + \dots + \alpha_n \bar{v}_n$$

A los escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ se les llama coordenadas de $\bar{v}$ en la base B y al vector:

$$(\bar{v})_B = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^T$$

se le llama vector de coordenadas de $\bar{v}$ en la base B.

Ejercicio 2.9 Sean

$$S_1 = \{ (a, b, c) \mid a = 2c;\ a, b, c \in \mathbb{R} \}$$

$$S_2 = \{ (a, b, c) \mid b = c;\ a, b, c \in \mathbb{R} \}$$

subespacios de $\mathbb{R}^3$.

a) Determine si el conjunto $S_1 \cap S_2$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

b) En caso de resultar afirmativo el inciso anterior, obtenga una base y la dimensión de $S_1 \cap S_2$.

SOLUCIÓN:

a) De acuerdo con las condiciones dadas en S_1 y S_2, dichos conjuntos se pueden expresar de la siguiente forma:

$$S_1 = \left\{ (2c,\ b,\ c) \mid b,\ c \in \mathbb{R} \right\}$$

$$S_2 = \left\{ (a,\ c,\ c) \mid a,\ c \in \mathbb{R} \right\}$$

Obsérvese que la característica de las ternas del conjunto S_1, es que la primera componente es el doble de la tercera, en tanto que en S_2, la característica es que la segunda componente y la tercera son iguales.

Tomando en cuenta lo anterior, el conjunto que considera ambas características, es precisamente la intersección de ambos conjuntos, esto es:

$$S_1 \cap S_2 = \left\{ (2c,\ c,\ c) \mid c \in \mathbb{R} \right\}$$

Otra forma de obtener el conjunto $S_1 \cap S_2$ es empleando los conceptos estudiados en la asignatura Geometría Analítica. En estos términos el planteamiento sería el siguiente:

El conjunto S_1 es el conjunto de puntos que pertenecen al plano $a = 2c$ y el conjunto S_2 son los puntos que pertenecen al plano $b = c$; ambos planos contienen al punto $(0,\ 0,\ 0)$, lo que implica que dichos planos se intersecan y, por lo tanto, definen una recta cuyos puntos son precisamente el conjunto buscado $S_1 \cap S_2$. Lo que se hará es obtener la recta de intersección entre estos planos.

Sean

$$\pi_1 : \ a - 2c = 0 \ \Rightarrow \ \bar{N}_1 = (1,\ 0,\ -2)$$

$$\pi_2 : \ b - c = 0 \ \Rightarrow \ \bar{N}_2 = (0,\ 1,\ -1)$$

Un vector $\bar{u}$ paralelo a la recta viene dado por:

$$\bar{u} = \bar{N}_1 \times \bar{N}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2i + j + k$$

entonces:

$$\bar{u} = (2,\ 1,\ 1)$$

$$P_0 = (0,\ 0,\ 0)$$

de donde la ecuación de la recta en forma paramétrica es:

$$L: \begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$

de esta forma, se tiene que:

$$\pi_1 \cap \pi_2 = S_1 \cap S_2 = \{ (2t,\ t,\ t) \mid t \in \mathbb{R} \}$$

que es igual al conjunto intersección que se obtuvo en primera instancia.

Determinemos ahora si $S_1 \cap S_2$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

Comprobando si se cumplen las dos cerraduras, tenemos:

Cerradura para adición

$$\forall\ (2c_1, c_1, c_1),\ (2c_2, c_2, c_2) \in S_1 \cap S_2$$

$$(2c_1, c_1, c_1) + (2c_2, c_2, c_2) = [2(c_1 + c_2),\ c_1 + c_2,\ c_1 + c_2] \in S_1 \cap S_2$$

$\therefore$ cumple

ÍNDICE
1
2
3
4
5

Cerradura para multiplicación por un escalar

$$\forall \ (2c, c, c) \in S_1 \cap S_2 \quad \text{y} \quad \forall \ \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\alpha (2c, c, c) = (2\alpha c, \alpha c, \alpha c) \in S_1 \cap S_2$$

$\therefore$ cumple

con lo cual podemos concluir que $S_1 \cap S_2$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

b) Es evidente que el conjunto $S_1 \cap S_2$ es de dimensión uno, puesto que depende de una sola variable, con lo cual se tiene que una base será:

$$B = \{ (2, 1, 1) \}$$

$$\therefore \qquad \text{Dim } S_1 \cap S_2 = 1$$

Ejercicio 2.10 Sea el conjunto $A = \{ (-1, k, 2), (-1, 1, -1), (1, 0, 2) \}$.

a) Determine el valor de k para que el conjunto A sea linealmente dependiente.

b) Con el valor obtenido en el inciso anterior, obtenga el espacio vectorial que genera el conjunto A.

c) Determine una base y la dimensión del espacio vectorial obtenido en el inciso anterior.

SOLUCIÓN:

a) Para obtener el valor de k solicitado, se mostrarán tres caminos distintos, con la idea de que el estudiante pueda utilizar cualquiera de ellos en problemas de dependencia o independencia lineal de conjuntos.

MÉTODO 1:

Aplicando la ecuación de dependencia lineal.

$$\alpha_1(-1,\ k,\ 2)+\alpha_2(-1,\ 1,\ -1)+\alpha_3(1,\ 0,\ 2)=\bar{0} \qquad \ldots (1)$$

$$\left(-\alpha_1,\ k\alpha_1,\ 2\alpha_1\right)+\left(-\alpha_2,\ \alpha_2,-\alpha_2\right)+\left(\alpha_3, 0, 2\alpha_3\right)=(0,0,0)$$

$$\left(-\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3,\quad k\alpha_1+\alpha_2,\ 2\alpha_1-\alpha_2+2\alpha_3\right)=(0,0,0)$$

Por igualdad de vectores se llega al sistema:

$$\begin{cases} -\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3=0 \\ k\alpha_1+\alpha_2=0 \\ 2\alpha_1-\alpha_2+2\alpha_3=0 \end{cases}$$

Conmutando la primera columna con la tercera, tenemos:

$$\begin{matrix}(-2)\\ \\ +\end{matrix}\begin{cases} \alpha_3-\alpha_2-\alpha_1=0 \\ \alpha_2+k\alpha_1=0 \\ 2\alpha_3-\alpha_2+2\alpha_1=0 \end{cases} \sim \begin{matrix} \\ +\\ (-1)\end{matrix}\begin{cases} \alpha_3-\alpha_2-\alpha_1=0 \\ \alpha_2+k\alpha_1=0 \\ \alpha_2+4\alpha_1=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_3-\alpha_2-\alpha_1=0 \\ \alpha_2+4\alpha_1=0 \\ (k-4)\alpha_1=0 \end{cases}$$

Se trata de obtener el valor de k, de tal forma que el sistema de ecuaciones sea compatible indeterminado y, con esto, existan valores $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3$ distintos de cero para los cuales se satisfaga la ecuación (1) y entonces poder concluir que el conjunto A es linealmente dependiente.

Es evidente en el sistema escalonado que con $k = 4$, el sistema se reduce a dos ecuaciones con tres incógnitas y se convierte en un sistema compatible indeterminado, que admite múltiples soluciones y, por lo tanto, el conjunto A sería un conjunto linealmente dependiente. Si por el contrario k toma valores diferentes de cuatro, entonces A sería un conjunto linealmente independiente.

MÉTODO 2:

Este método consiste en formar una matriz con los vectores del conjunto A y mediante el escalonamiento de dicha matriz, buscar el valor de k para el cual uno de los renglones de la matriz se hace ceros. Cuando se realiza el escalonamiento de una matriz y uno o más renglones se hacen ceros, esto implica que dichos renglones son linealmente dependientes. De esta forma se tiene:

$$\begin{bmatrix} -1 & k & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \sim (1) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & k & 2 \end{bmatrix} \sim (-4) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & k & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & (k-4) & 0 \end{bmatrix}$$

Con $k = 4$ el tercer renglón se hace ceros y se puede concluir que, con este valor, el conjunto A es linealmente dependiente.

MÉTODO 3:

Este tercer y último método consiste en formar un determinante con los vectores del conjunto A y determinar para qué valor de k el determinante es igual a cero. Cuando un determinante es igual a cero, implica que los renglones o las columnas que lo conforman son linealmente dependientes.

De acuerdo con esto, tenemos:

$$\begin{vmatrix} -1 & k & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2 - k - 2 + 2k = 0$$

de donde se obtiene que:

$$\begin{aligned} k - 4 &= 0 \\ \therefore \qquad k &= 4 \end{aligned}$$

con este valor de k, el conjunto A es linealmente dependiente.

b) Dado que con $k = 4$ el conjunto A es linealmente dependiente, entonces podemos suprimir cualquiera de los vectores de A y con los restantes, que resultan ser linealmente independientes, generar el espacio vectorial solicitado.

Si suprimimos el primer vector, entonces el espacio generado sería:

$$a(-1,\ 1,\ -1) + b(1,\ 0,\ 2) = (-a+b,\ a,\ -a+2b)$$

$$\therefore \qquad E(A) = \left\{ (-a+b,\ a,\ -a+2b) \,\middle|\, a,\ b \in \mathbb{R} \right\}$$

Es importante aclarar que al suprimir el segundo o tercer vector, el espacio vectorial que se genera es igual al espacio generado con los vectores considerados.

c) Una base del espacio vectorial sería:

$$B = \{ (-1,\ 1,\ -1),\ (1,\ 0,\ 2) \}$$

dado que se trata de un conjunto generador con vectores linealmente independientes, entonces:

$$\text{Dim} \quad E(A) = 2$$

Ejercicio 2.11 Sean el espacio vectorial

$$P = \left\{ at^2 + bt + \mathrm{c} \,\middle|\, a,\ b,\ c \in \mathbb{R} \right\}$$

y el conjunto $$A = \{ t^2 + 4\mathrm{t} - 3,\quad t^2 - 2t + 5,\quad 2t^2 - 3t,\quad t + 3 \}$$

a) Determine si el conjunto A es generador del espacio vectorial P.

b) En caso afirmativo, obtenga una base de dicho espacio.

c) Determine las coordenadas del vector $P_1 = t^2 + 2t + 1$, referidas a la base obtenida en el inciso anterior.

SOLUCIÓN:

a) Como se sabe, el conjunto P de los polinomios de grado menor o igual a dos es de dimensión tres, por lo que el conjunto A, al tener cuatro elementos, se puede afirmar que es un conjunto linealmente dependiente. De acuerdo con esto, se tomará un subconjunto de A con tres elementos y, si este es linealmente independiente, sería entonces una base de P y, por lo tanto, generador de dicho espacio vectorial.

Consideremos entonces el subconjunto:

$$B = \left\{ t^2 + 4t - 3, \quad 2t^2 - 3t, \quad t + 3 \right\}$$

Para determinar si B es linealmente independiente, se formará un determinante de 3×3 con los coeficientes de cada polinomio y, si dicho determinante es diferente de cero, entonces B es un conjunto linealmente independiente.

De esta forma, se tiene:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -9 - 6 - 24 = -39$$

Al ser el determinante diferente de cero, podemos concluir que B es linealmente independiente y, por lo tanto, una base de P y generador del mismo.

De acuerdo con lo anterior se ha dado respuesta tanto al inciso a) como al inciso b), con lo cual, solo resta dar respuesta al inciso c).

c) Las coordenadas del vector $P_1 = t^2 + 2t + 1$ vienen dadas por:

$$t^2 + 2t + 1 = \alpha_1 \left(t^2 + 4t - 3 \right) + \alpha_2 \left(2t^2 - 3t \right) + \alpha_3 \left(t + 3 \right)$$

de donde se llega a:

$$t^2 + 2t + 1 = \left(\alpha_1 + 2\alpha_2 \right) t^2 + \left(4\alpha_1 - 3\alpha_2 + \alpha_3 \right) t + \left(-3\alpha_1 + 3\alpha_3 \right)$$

por igualdad de polinomios, se obtiene:

$$(3)(-4)\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = 1 \\ 4\alpha_1 - 3\alpha_2 + \alpha_3 = 2 \\ -3\alpha_1 + 3\alpha_3 = 1 \end{cases} \sim (-3)\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = 1 \\ -11\alpha_2 + \alpha_3 = -2 \\ 6\alpha_2 + 3\alpha_3 = 4 \end{cases} \sim$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = 1 & \ldots(1) \\ -11\alpha_2 + \alpha_3 = -2 & \ldots(2) \\ 39\alpha_2 = 10 & \ldots(3) \end{cases}$$

de (3): $$\alpha_2 = \frac{10}{39} \qquad \ldots(4)$$

sustituyendo (4) en (2) :

$$-11\left(\frac{10}{39}\right) + \alpha_3 = -2$$

$$\alpha_3 = -2 + \frac{110}{39}$$

$$\alpha_3 = \frac{32}{39} \qquad \ldots(5)$$

sustituyendo (4) en (1) :

$$\alpha_1 + 2\left(\frac{10}{39}\right) = 1$$

$$\alpha_1 = 1 - \frac{20}{39}$$

$$\alpha_1 = \frac{19}{39}$$

por lo que el vector de coordenadas es:

$$(P_1)_B = \left(\frac{19}{39}, \frac{10}{39}, \frac{32}{39}\right)$$

Ejercicio 2.12 Para el espacio vectorial

$$A = \left\{ \left(x,\ y,\ z \right) \middle|\ x + y - z = 0\,;\ \ x,\ y,\ z\ \in \mathbb{R} \right\}$$

Determine cuáles de los siguientes conjuntos son una base del espacio A:

a) $B_1 = \left\{ \left(1,\ 0,\ 0\right),\ \left(0,\ 1,\ 0\right),\ \left(0,\ 0,\ 1\right) \right\}$

b) $B_2 = \left\{ \left(1,\ 0,\ 1\right),\ \left(1,\ 1,\ 2\right) \right\}$

c) $B_3 = \left\{ \left(1,\ 0,\ 1\right),\ \left(1,\ 1,\ 2\right),\ \left(0,\ 1,\ 1\right) \right\}$

SOLUCIÓN:

Como puede apreciarse, el espacio vectorial A está conformado por el conjunto de puntos que pertenecen al plano cuya ecuación es $x + y - z = 0$. Al tratarse de un plano en el espacio, es claro que el espacio A es un subespacio de $\mathbb{R}^3$. Este espacio A puede ser expresado de la siguiente forma:

$$A = \left\{ \left(x,\ y,\ x + y \right) \middle|\ x,\ y \in \mathbb{R} \right\}$$

La cual se obtuvo al incluir la condición $z = x + y$ en la definición del conjunto.

Con esta forma de expresión del conjunto A, podemos apreciar que la característica que distingue a los elementos de este es que la tercera componente de los vectores viene dada por la suma de las dos primeras. Con esto, fácilmente podemos determinar si un vector pertenece o no al espacio A.

Hechos estos comentarios, procedamos ahora a la resolución del ejercicio.

a) Determinemos si el conjunto $B_1 = \left\{ \left(1,\ 0,\ 0\right),\ \left(0,\ 1,\ 0\right),\ \left(0,\ 0,\ 1\right) \right\}$ es una base del espacio A.

Este conjunto B_1 que está conformado por los vectores unitarios i , j , k resulta ser la llamada base canónica de $\mathbb{R}^3$.

Todo vector de $\mathbb{R}^3$ puede ser generado a partir de los elementos de esta base y como $A \subset \mathbb{R}^3$, entonces podemos afirmar que todo vector del conjunto A

puede ser generado con los elementos de la base B_1 y por tratarse de una base, entonces sus elementos son linealmente independientes. Así pues, el conjunto B_1 tiene las dos características requeridas para ser una base del espacio A, conjunto generador y linealmente independiente; sin embargo, se está pasando por alto un detalle que es muy importante, el conjunto B_1 solo podrá ser base del espacio A, si sus elementos pertenecen a este.

Al revisar si los elementos de B_1 pertenecen al espacio A, nos damos cuenta que ninguno de ellos cumple con la condición de que la tercera componente es la suma de las dos primeras, por lo tanto, ningún elemento de B_1 pertenece al espacio A y, por consiguiente, el conjunto B_1 no es una base de A.

b) Determinemos si el conjunto $B_2 = \{(1, 0, 1), (1, 1, 2)\}$ es una base del espacio vectorial A.

Con base en lo planteado en el inciso a), determinemos en primera instancia si los elementos de B_2 pertenecen al espacio A.

Como puede apreciarse fácilmente, los dos vectores de B_2 cumplen con la condición de que la tercera componente es igual a la suma de las dos primeras, por lo tanto, podemos afirmar que los dos elementos de B_2 sí pertenecen al espacio A.

Por otro lado, al ser el espacio A el conjunto de puntos que pertenecen a un plano, entonces la dimensión de A es igual a dos. Dado que el conjunto B_2 contiene únicamente dos vectores y estos pertenecen al espacio A, además de ser linealmente independientes dado que no son proporcionales, entonces podemos concluir que el conjunto B_2 sí es una base del espacio vectorial A.

c) Analizando el conjunto $B_3 = \{(1, 0, 1), (1, 1, 2), (0, 1, 1)\}$, se puede apreciar que sus tres elementos pertenecen al espacio A, es decir, cumplen con la característica señalada de la tercera componente. En el inciso anterior, se concluyó que el espacio A es de dimensión 2 y al tener B_3 tres elementos, entonces de acuerdo con uno de los teoremas enunciados anteriormente, B_3 es linealmente dependiente y, por lo tanto, no es una base del espacio A.

Ejercicio 2.13 Determine una base y la dimensión del espacio vectorial:

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} z_1 & -z_1 \\ 0 & z_2 \end{bmatrix} \middle| \; z_1, \; z_2 \in \mathbb{C} \right\}$$

a) Si M está definido sobre el campo complejo.

b) Si M está definido sobre el campo real.

SOLUCIÓN:

a) Expresemos al conjunto M de la siguiente forma:

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} a + bi & -a - bi \\ 0 & c + di \end{bmatrix} \middle| \; a, \; b, \; c, \; d \in \mathbb{R} \right\}$$

Lo que haremos a continuación es generar un conjunto de vectores de M y a partir de él llegaremos a una de sus bases. Asignando valores de unos y ceros a las literales a, b, c y d llegamos a:

$$B_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i & -i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} \right\}$$

Dado que el campo de definición es complejo, entonces:

$$\begin{bmatrix} i & -i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = i \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} = i \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Con lo cual es evidente que el conjunto B_1 es linealmente dependiente. Si eliminamos los elementos dependientes, llegaríamos al conjunto:

$$B_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Como se trata de matrices no proporcionales, entonces son linealmente independientes.

Por otro lado, el conjunto B_2 es generador del espacio M, dado que:

$$Z_1\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + Z_2\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_1 & -Z_1 \\ 0 & Z_2 \end{bmatrix}$$

Al ser B_2 un conjunto generador y linealmente independiente, entonces B_2 es una base del espacio M, por lo tanto, cuando el campo de definición es complejo, la dimensión de M es dos.

b) Analicemos ahora el caso de que M esté definido sobre el campo real.

El procedimiento será el mismo, es decir, partiremos del conjunto B_1 generado en el inciso anterior.

Si planteamos que:

$$\begin{bmatrix} i & -i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \alpha_1\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \ldots (1)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} = \alpha_2\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \ldots (2)$$

y considerando que el campo de definición es real, entonces no existen valores para α_1 y α_2 dentro del campo, con los cuales se satisfagan las igualdades (1) y (2), lo que implica que dichos vectores no son proporcionales y, por lo tanto, son linealmente independientes. Con esto, podemos concluir que el conjunto:

$$B_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i & -i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} \right\}$$

es linealmente independiente y, además, es generador de M, pues:

$$a\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} i & -i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+bi & -a-bi \\ 0 & c+di \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, el conjunto B_1 es una base del espacio M, lo que implica que la dimensión de M es cuatro cuando el campo de definición es real.

Ejercicio 2.14 Sea $B = \{ \bar{v}_1, \ \bar{v}_2, \ \bar{v}_3 \}$ un conjunto de vectores linealmente independiente. Determine si el conjunto $D = \{ \bar{v}_1 - \bar{v}_2 , \ \bar{v}_2 - \bar{v}_3 , \ \bar{v}_1 + \bar{v}_3 \}$ es linealmente dependiente o independiente.

SOLUCIÓN:

Analicemos el conjunto D mediante la ecuación de dependencia lineal:

$$\alpha (\bar{v}_1 - \bar{v}_2) + \beta (\bar{v}_2 - \bar{v}_3) + \gamma (\bar{v}_1 + \bar{v}_3) = \bar{0} \qquad \ldots (1)$$

al desarrollar los productos y factorizar $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ y $\bar{v}_3$, se llega a:

$$(\alpha + \gamma) \bar{v}_1 + (-\alpha + \beta) \bar{v}_2 + (-\beta + \gamma) \bar{v}_3 = (0, 0, 0)$$

por igualdad de vectores se llega al sistema:

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ -\alpha + \beta = 0 \\ -\beta + \gamma = 0 \end{cases} \qquad \ldots (2)$$

Calculemos el determinante de la matriz de coeficientes para determinar si se trata de un sistema compatible determinado o indeterminado.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2$$

Dado que el determinante resultó diferente de cero, entonces el sistema es compatible determinado, es decir, la única solución del sistema es la trivial, esto es:

$$\alpha = \beta = \gamma = 0$$

Por lo tanto, la única solución para la ecuación (1) es que todos los escalares sean cero, lo cual implica que el conjunto D es linealmente independiente.

Es conveniente señalar que el sistema de ecuaciones (2) es un sistema homogéneo. Estos sistemas siempre son compatibles y una de sus soluciones es la trivial, lo importante en este caso es poder determinar si el sistema es compatible determinado o indeterminado y con ello poder concluir sobre la dependencia o independencia lineal del conjunto D. El llegar a la solución del sistema de ecuaciones no resulta relevante para el propósito del ejercicio.

Isomorfismo entre espacios vectoriales

Sean U y V dos espacios vectoriales de dimensión finita, definidos sobre un campo K. Se dice que la función $f : U \rightarrow V$ es un isomorfismo de U a V, si f es biyectiva y además cumple con las condiciones siguientes:

1) $f\left(\bar{u}_1 + \bar{u}_2\right) = f_1\left(\bar{u}_1\right) + f\left(\bar{u}_2\right) \quad ; \quad \forall\ \bar{u}_1 \text{ y } \bar{u}_2 \in U$

2) $f\left(\alpha \bar{u}\right) = \alpha f\left(\bar{u}\right) \quad ; \ \forall\ \bar{u} \in U \quad \text{y} \quad \forall\ \alpha \in K$

Los espacios vectoriales isomorfos solo difieren en la naturaleza de sus elementos, sus propiedades algebraicas son idénticas.

Teoremas

1) Si V es un espacio vectorial real de dimensión n, entonces V es isomorfo a $\mathbb{R}^n$.

2) Todo espacio vectorial es isomorfo a sí mismo.

3) Si un espacio vectorial V es isomorfo a otro espacio W, entonces W es isomorfo a V.

4) Si un espacio vectorial U es isomorfo a un espacio V y V es a su vez isomorfo a un espacio W, entonces U es isomorfo a W.

5) Dos espacios vectoriales de igual dimensión son isomorfos.

Ejercicio 2.15 Para cada espacio vectorial dado, establecer un isomorfismo con un espacio del tipo $\mathbb{R}^n$.

a) $Q = \left\{ ax^2 + bx + (2a + 6b) \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$

b) $N = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ a+b & c \end{bmatrix} \middle| \; c = 2a \; ; \quad a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$

SOLUCIÓN:

a) La base natural del espacio vectorial Q es:

$$B = \left\{ x^2 + 2 , \quad x + 6 \right\}$$

Con lo cual Q es un espacio vectorial de dimensión dos, entonces Q es isomorfo a $\mathbb{R}^2$ o a cualquier otro subespacio del tipo $\mathbb{R}^n$ de dimensión dos. De acuerdo con lo anterior, podemos establecer las funciones f y g entre el espacio Q y los espacios:

$$\mathbb{R}^2 = \{ (a, b) \mid a, b \in \mathbb{R} \}$$

$$H = \{ (a, b, 2a + 6b) \mid a, b \in \mathbb{R} \}$$

Ambos espacios de dimensión dos.

Con lo cual se tiene:

$$f\left(ax^2 + bx + (2a + 6b)\right) = (a, b), \text{ esto es, } f: Q \to \mathbb{R}^2$$

$$g\left(ax^2 + bx + (2a + 6b)\right) = (a, b, 2a + 6b), \text{ esto es, } g: Q \to H$$

Las dos funciones cumplen con ser biyectivas, por lo que se procederá a verificar el cumplimiento de las dos condiciones para ver si establecen o no un isomorfismo.

Para f, se tiene:

1) $\forall \; a_1 x^2 + b_1 x + (2a_1 + 6b_1), \; a_2 x^2 + b_2 x + (2a_2 + 6b_2) \in Q$

$$f(\bar{u}_1 + \bar{u}_2) = f(\bar{u}_1) + f(\bar{u}_2)$$

$$f\left[\left(a_1 x^2 + b_1 x + (2a_1 + 6b_1)\right) + \left(a_2 x^2 + b_2 x + (2a_2 + 6b_2)\right)\right] =$$

$$f\left[a_1 x^2 + b_1 x + (2a_1 + 6b_1)\right] + f\left[a_2 x^2 + b_2 x + (2a_2 + 6b_2)\right]$$

Sumando del lado izquierdo de la igualdad y aplicando f del lado derecho, tenemos:

$$f\left[(a_1 + a_2)x^2 + (b_1 + b_2)x + 2(a_1 + a_2) + 6(b_1 + b_2)\right] = (a_1, b_1) + (a_2, b_2)$$

Aplicando f del lado izquierdo y sumando del lado derecho, tenemos:

$$(a_1 + a_2, \; b_1 + b_2) = (a_1 + a_2, \; b_1 + b_2)$$

2) $\forall \; ax^2 + bx + (2a + 6b) \in Q \quad$ y $\quad \forall \; \alpha \in \mathbb{R}$

$$f(\alpha \bar{u}) = \alpha f(\bar{u})$$

$$f\left[\alpha\left(ax^2 + bx + (2a + 6b)\right)\right] = \alpha \, f\left[ax^2 + bx + (2a + 6b)\right]$$

de donde:

$$f\left[\,\alpha a x^2 + \alpha b x + (\,2\alpha a + 6\alpha b\,)\,\right] = \alpha\,(a,\, b)$$

$$(\alpha a,\; \alpha b) = (\alpha a,\; \alpha b)$$

$\therefore$ cumple

Dado que f es biyectiva, entonces f establece un isomorfismo entre los espacios Q y $\mathbb{R}^2$.

Para g se tiene:

1) $\forall \;\; a_1 x^2 + b_1 x + (2a_1 + 6b_1),\; a_2 x^2 + b_2 x + (\,2a_2 + 6b_2\,) \in Q$

$$g(\bar{u}_1 + \bar{u}_2) = g(\bar{u}_1) + g(\bar{u}_2)$$

$$g\left[\,a_1 x^2 + b_1 x + (\,2a_1 + 6b_1) \quad + \; a_2 x^2 + b_2 x + (\,2a_2 + 6b_2\,)\right] =$$

$$g\left[\,a_1 x^2 + b_1 x + (\,2a_1 + 6b_1)\,\right] + \; g\left[\,a_2 x^2 + b_2 x + (\,2a_2 + 6b_2\,)\,\right]$$

sumando y aplicando g:

$$g\left[\,(a_1 + a_2)\,x^2 + (b_1 + b_2)\,x \; + \; 2(a_1 + a_2) + 6(b_1 + b_2)\,\right] =$$

$$(a_1,\; b_1,\; 2a_1 + 6b_1) \; + \; (a_2,\; b_2,\; 2a_2 + 6b_2)$$

aplicando g y sumando, tenemos:

ÍNDICE
1
2
3
4
5

$$\left(a_1+a_2,\ b_1+b_2,\ 2\left(a_1+a_2\right)+6\left(b_1+b_2\right)\right)=\left(a_1+a_2,\ b_1+b_2,\ 2\left(a_1+a_2\right)+6\left(b_1+b_2\right)\right)$$

$\therefore$ cumple

2) $\forall\ ax^2+bx+\left(2a+6b\right)\in Q$ y $\forall\ \alpha\in\mathbb{R}$

$$g\left(\alpha\bar{u}\right)=\alpha g\left(\bar{u}\right)$$

$$g\left[\alpha\left(ax^2+bx+\left(2a+6b\right)\right)\right]=\alpha g\left[\left(ax^2+bx+\left(2a+6b\right)\right)\right]$$

de donde:

$$g\left[\alpha ax^2+\alpha bx+\left(2\alpha a+6\alpha b\right)\right]=\alpha\left(a,\ b,\ 2a+6b\right)$$

$$\left(\alpha a,\ \alpha b,\ 2\alpha a+6\alpha b\right)=\left(\alpha a,\ \alpha b,\ 2\alpha a+6\alpha b\right)$$

$\therefore$ cumple

Dado que g es biyectiva, entonces g establece un isomorfismo entre los espacios Q y H.

b) El espacio vectorial N se puede expresar como:

$$N=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ a+b & 2a \end{bmatrix}\ \middle|\ a,\ b\in\mathbb{R}\right\}$$

La base natural de N es:

$$B=\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right\}$$

Con lo cual N es un espacio vectorial de dimensión dos, entonces N es isomorfo a $\mathbb{R}^2$ o a cualquier otro subespacio del tipo $\mathbb{R}^n$ de dimensión dos.
De acuerdo con lo anterior, podemos establecer la función biyectiva $h:\ N\rightarrow\mathbb{R}^2$ con la siguiente regla de correspondencia:

$$h\left(\begin{bmatrix} a & b \\ a+b & 2a \end{bmatrix}\right) = (a,\ b)$$

Veamos si h cumple con las dos condiciones.

1) $\forall \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_1+b_1 & 2a_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ a_2+b_2 & 2a_2 \end{bmatrix} \in N$

$$h(\bar{u}_1 + \bar{u}_2) = h(\bar{u}_1) + h(\bar{u}_2)$$

de donde:

$$h\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_1+b_1 & 2a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ a_2+b_2 & 2a_2 \end{bmatrix}\right) = h\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_1+b_1 & 2a_1 \end{bmatrix}\right) + h\left(\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ a_2+b_2 & 2a_2 \end{bmatrix}\right)$$

sumando y aplicando h, tenemos:

$$h\left(\begin{bmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ (a_1+a_2)+(b_1+b_2) & 2(a_1+a_2) \end{bmatrix}\right) = (a_1,\ b_1) + (a_2,\ b_2)$$

aplicando h y sumando, se tiene:

$$(a_1+a_2,\ \ b_1+b_2) = (a_1+a_2,\ \ b_1+b_2)$$

$\therefore$ cumple

2) $\forall \begin{bmatrix} a & b \\ a+b & 2a \end{bmatrix} \in N$ y $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$

$$h(\alpha\bar{u}) = \alpha h(\bar{u})$$

de donde:

$$h\left(\alpha\begin{bmatrix} a & b \\ a+b & 2a \end{bmatrix}\right) = \alpha\, h\left(\begin{bmatrix} a & b \\ a+b & 2a \end{bmatrix}\right)$$

$$h\left(\begin{bmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha a+\alpha b & 2\alpha a \end{bmatrix}\right) = \alpha\,(a, b)$$

$$(\alpha a, \alpha b) = (\alpha a, \alpha b)$$

$$\therefore \quad \text{cumple}$$

Entonces h establece un isomorfismo entre los espacios N y $\mathbb{R}^2$.

Matriz de transición

Sean $A = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n\}$ y $B = \{\bar{w}_1, \bar{w}_2, \ldots, \bar{w}_n\}$ dos bases de un espacio vectorial V. La matriz de transición M_B^A tiene por columnas los vectores de coordenadas de los elementos de la base A con respecto a la base B, esto es:

$$M_B^A = \left[\,(\bar{v}_1)_B \;(\bar{v}_2)_B \;\cdots\; (\bar{v}_n)_B\,\right]$$

Esta matriz M_B^A conocida también como matriz de cambio de base, es tal que, si conocemos $(\bar{v})_A$ donde $\bar{v} \in V$ y deseamos obtener el vector de coordenadas de $\bar{v}$ en la base B, esto es $(\bar{v})_B$, entonces es suficiente con efectuar el producto:

$$M_B^A\,(\bar{v})_A = (\bar{v})_B$$

Además, se tiene que la matriz de transición es una matriz no singular, esto es, siempre tiene inversa y se cumple que:

$$\left(M_B^A\right)^{-1} = M_A^B$$

Ejercicio 2.16 Sean

ÍNDICE
1
2
3
4
5

$$A = \{ (0,\ 1,\ 1),\ (-1,\ -1,\ 2),\ (0,\ 0,\ 2) \}$$

$$B = \{ (0,\ -1,\ 1),\ (1,\ 0,\ 1),\ (-1,\ 1,\ 0) \}$$

dos bases del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$.

a) Obtenga la matriz de transición M_B^A.

b) Si se tiene que $(\bar{v})_B = (1,\ -2,\ 1)$, obtenga $(\bar{v})_A$.

c) Obtenga los vectores $\bar{v}_1$ y $\bar{v}_2$ si se sabe que:

$$(\bar{v}_1 - \bar{v}_2)_A = \left(2,\ 0,\ -\frac{3}{2}\right)$$

$$(2\bar{v}_1 + \bar{v}_2)_B = (0,\ 4,\ 1)$$

SOLUCIÓN:

a) Para obtener la matriz de transición M_B^A, lo que se tiene que hacer es obtener los vectores de coordenadas de los elementos de la base A con respecto a la base B. La disposición en columna de estos vectores de coordenadas nos permitirán llegar a la matriz de transición solicitada.

Para el primer vector, tenemos:

$$(0,\ 1,\ 1) = \alpha_1(0,\ -1,\ 1) + \beta_1(1,\ 0,\ 1) + \gamma_1(-1,\ 1,\ 0)$$

al multiplicar y sumar, se tiene:

$$(0,\ 1,\ 1) = \left(\beta_1 - \gamma_1,\ \ -\alpha_1 + \gamma_1,\ \ \alpha_1 + \beta_1\right)$$

por igualdad de vector, se llega al sistema:

$$\begin{cases} \beta_1 - \gamma_1 = 0 \\ -\alpha_1 + \gamma_1 = 1 \\ \alpha_1 + \beta_1 = 1 \end{cases}$$

al resolver el sistema, se obtiene que:

$$\alpha_1 = 0 \ , \qquad \beta_1 = 1 \ , \qquad \gamma_1 = 1$$

por lo que:

$$(0,\ 1,\ 1)_B = (0,\ 1,\ 1)$$

Tomando ahora el segundo vector de la base A, tenemos:

$$(-1,\ -1,\ 2) = \alpha_2(0,\ -1,\ 1) + \beta_2(1,\ 0,\ 1) + \gamma_2(-1,\ 1,\ 0)$$

de donde se llega al sistema:

$$\begin{cases} \beta_2 - \gamma_2 = -1 \\ -\alpha_2 + \gamma_2 = -1 \\ \alpha_2 + \beta_2 = 2 \end{cases}$$

al resolverlo, se obtiene que:

$$\alpha_2 = 2 \ , \qquad \beta_2 = 0 \ , \qquad \gamma_2 = 1$$

por lo tanto:

$$(-1,\ -1,\ 2)_B = (2,\ 0,\ 1)$$

Para el tercer vector de la base A, tenemos:

$$(0,\ 0,\ 2) = \alpha_3(0,\ -1,\ 1) + \beta_3(1,\ 0,\ 1) + \gamma_3(-1,\ 1,\ 0)$$

de donde se llega al sistema:

$$\begin{cases} \beta_3 - \gamma_3 = 0 \\ -\alpha_3 + \gamma_3 = 0 \\ \alpha_3 + \beta_3 = 2 \end{cases}$$

cuya solución es:

$$\alpha_3 = 1 \ , \qquad \beta_3 = 1 \ , \qquad \gamma_3 = 1$$

con lo cual:

$$(0,\ 0,\ 2)_B = (1,\ 1,\ 1)$$

Al colocar los vectores de coordenadas en columnas, se llega a la matriz solicitada.

$$M_B^A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Nos piden obtener $(\bar{v})_A$ sabiendo que $(\bar{v})_B = (1,\ -2,\ 1)$.

Este inciso lo resolveremos por tres caminos distintos:

MÉTODO 1.

A partir del $(\bar{v})_B = (1,\ -2,\ 1)$ y la base B obtendremos el vector $\bar{v}$, posteriormente con $\bar{v}$ y la base A obtendremos $(\bar{v})_A$. Se tiene que:

$$\bar{v} = 1(0,\ -1,\ 1) - 2(1,\ 0,\ 1) + 1(-1,\ 1,\ 0)$$

de donde:

$$\bar{v} = (-3,\ 0,\ -1)$$

Obteniendo ahora $(\bar{v})_A$, tenemos:

$$(-3,\ 0,\ -1) = \alpha(0,\ 1,\ 1) + \beta(-1,\ -1,\ 2) + \gamma(0,\ 0,\ 2)$$

llegando al sistema:

$$\begin{cases} \quad\ -\ \beta \qquad\quad = -3 \\ \alpha -\ \beta \qquad\quad = \ \ 0 \\ \alpha + 2\beta + 2\gamma = -1 \end{cases}$$

cuya solución es:

$$\alpha = 3\ , \qquad \beta = 3\ , \qquad \gamma = -5$$

Por lo tanto, el vector de coordenadas solicitado es:

$$(\bar{v})_A = (3,\ 3,\ -5)$$

MÉTODO 2.

Para llegar al $(\bar{v})_A$, haremos uso de la expresión:

$$M_B^A\ (\bar{v})_A = (\bar{v})_B \qquad \ldots (1)$$

Dado que M_B^A es una matriz no singular, entonces $\left(M_B^A\right)^{-1}$ existe, por lo que premultiplicaremos la ecuación (1) con dicha matriz inversa.

$$\left(M_B^A\right)^{-1} M_B^A (\bar{v})_A = \left(M_B^A\right)^{-1} (\bar{v})_B$$

de donde:

$$(\bar{v})_A = \left(M_B^A\right)^{-1} (\bar{v})_B \qquad \ldots (2)$$

Al obtener la inversa de la matriz M_B^A, se llega a:

$$\left(M_B^A\right)^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix} = M_A^B$$

Al sustituir los elementos conocidos en la ecuación (2), se tiene:

$$(\bar{v})_A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix}$$

por lo tanto:

$$(\bar{v})_A = (3,\ 3,\ -5)$$

MÉTODO 3:

El procedimiento a seguir en este tercer método será sustituir directamente los datos conocidos en la ecuación (1) y expresar al vector $(\bar{v})_A$ como un vector incógnita de componentes $(x,\ y,\ z)$. De esta forma tenemos que:

$$M_B^A\ (\bar{v})_A = (\bar{v})_B$$

sustituyendo, tenemos:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

de donde:

$$\begin{bmatrix} 2y + z \\ x + z \\ x + y + z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

por igualdad de matrices se llega al sistema:

$$\begin{cases} 2y + z = 1 \\ x + z = -2 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

cuya solución es:

$$x = 3\ , \qquad y = 3\ , \qquad z = -5$$

con lo cual, llegamos a:

$$(\bar{v})_A = (3,\ 3,\ -5)$$

Como era de esperarse, con los tres métodos mostrados llegamos a la misma respuesta.

c) Se nos pide obtener los vectores $\bar{v}_1$ y $\bar{v}_2$ sabiendo que:

$$\left(\overline{v}_1 - \overline{v}_2 \right)_A = \left(2, \ 0, \ -\frac{3}{2} \right)$$

$$\left(2\overline{v}_1 + \overline{v}_2 \right)_B = \left(0, \ 4, \ 1 \right)$$

Con estos vectores de coordenadas, obtendremos los vectores $\overline{v}_1 - \overline{v}_2$ y $2\overline{v}_1 + \overline{v}_2$:

$$\overline{v}_1 - \overline{v}_2 = 2\left(0, \ 1, \ 1 \right) - \frac{3}{2}\left(0, \ 0, \ 2 \right)$$

de donde:

$$\overline{v}_1 - \overline{v}_2 = \left(0, \ 2, \ -1 \right) \qquad \ldots(3)$$

por otro lado:

$$2\overline{v}_1 + \overline{v}_2 = 4\left(1, \ 0, \ 1 \right) + 1\left(-1, \ 1, \ 0 \right)$$

con lo cual:

$$2\overline{v}_1 + \overline{v}_2 = \left(3, \ 1, \ 4 \right) \qquad \ldots(4)$$

con las expresiones (3) y (4), se llega al sistema:

$$\begin{cases} \overline{v}_1 - \overline{v}_2 = \left(0, \ 2, \ -1 \right) \\ 2\overline{v}_1 + \overline{v}_2 = \left(3, \ 1, \ 4 \right) \end{cases}$$

al sumar ambas ecuaciones, se llega a:

$$3\overline{v}_1 = \left(3, \ 3, \ 3 \right)$$

$$\therefore \quad \overline{v}_1 = \left(1, \ 1, \ 1 \right)$$

de la segunda ecuación del sistema, tenemos:

$$\overline{v}_2 = \left(3, \ 1, \ 4 \right) - 2\overline{v}_1$$

sustituyendo $\overline{v}_1$:

$$\overline{v}_2 = \left(3, \ 1, \ 4 \right) - 2\left(1, \ 1, \ 1 \right)$$

$$\therefore \quad \overline{v}_2 = \left(1, \ -1, \ 2 \right)$$

Ejercicio 2.17 Sean $A = \{ \bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3 \}$ y $B = \{ \bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3 \}$ dos bases de un espacio vectorial de dimensión tres, las cuales están relacionadas de la siguiente manera:

$$\bar{v}_1 = \bar{u}_1 + \bar{u}_3$$

$$\bar{v}_2 = 2\bar{u}_2$$

$$\bar{v}_3 = \bar{u}_2 + \bar{u}_3$$

a) Obtenga la matriz de transición de la base A a la base B.

b) Obtenga las coordenadas en la base B del vector $\bar{w}$, si se tiene que $(\bar{w})_A = (3, 5, 2)$.

SOLUCIÓN:

a) La relación que se proporciona entre los elementos de las bases A y B, nos define la matriz de transición de la base B a la base A, esto es:

$$M_A^B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se sabe que:

$$\left(M_A^B \right)^{-1} = M_B^A$$

Entonces será suficiente con obtener la inversa de la matriz M_A^B para llegar a la matriz solicitada. Al obtener la inversa de M_A^B se llega a:

$$M_B^A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Se tiene que:

$$M_B^A (\bar{w})_A = (\bar{w})_B$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

entonces

$$(\bar{w})_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad (\bar{w})_B = (3, \quad 3, \quad -1)$$

Ejercicio 2.18 Sean $A = \{\bar{a}_1, \ \bar{a}_2, \ \bar{a}_3\} = \{x^2 + x - 3, \ 3x^2 + x - 5, \ x^2 - 2x + 2\}$

y $B = \{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3\}$ dos bases del espacio vectorial

$$P = \{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

Si se sabe que:

$$(\bar{a}_1)_B = (1, 0, 1), \quad (\bar{a}_2)_B = (2, 1, 2), \quad (\bar{a}_3)_B = (-1, 1, 0)$$

obtenga los vectores de la base B.

SOLUCIÓN:

Este ejercicio se resolverá siguiendo dos métodos distintos.

MÉTODO 1.

De los datos del enunciado se tiene que:

$$M_B^A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

si se obtiene la inversa de esta matriz, se llega a:

$$\left(M_B^A \right)^{-1} = M_A^B = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

considerando las columnas de M_A^B, se tiene que:

$$\left(\bar{b}_1 \right)_A = (-2,\ 1,\ -1),\quad \left(\bar{b}_2 \right)_A = (-2,\ 1,\ 0),\quad \left(\bar{b}_3 \right)_A = (3,\ -1,\ 1)$$

son los vectores de coordenadas de los elementos de la base B con respecto a la base A, con lo cual se tiene que:

$$\bar{b}_1 = -2\left(x^2+x-3 \right) + 1\left(3x^2+x-5 \right) - 1\left(x^2-2x+2 \right)$$

al realizar las operaciones y simplificar, se llega a:

$$\bar{b}_1 = x - 1$$

en forma análoga, se tiene que:

$$\bar{b}_2 = -2\left(x^2+x-3 \right) + 1\left(3x^2+x-5 \right)$$

$$\bar{b}_2 = x^2 - x + 1$$

finalmente:

$$\bar{b}_3 = 3\left(x^2+x-3 \right) - 1\left(3x^2+x-5 \right) + 1\left(x^2-2x+2 \right)$$

$$\bar{b}_3 = x^2 - 2$$

por lo tanto, la base B es

$$B = \left\{ x-1,\ \ x^2-x+1,\ \ x^2-2 \right\}$$

MÉTODO 2.

En el enunciado del problema nos proporcionan los vectores de coordenadas de los elementos de la base A con respecto a la base B. Con las componentes de estos vectores podemos obtener los vectores $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$ expresándolos como una combinación lineal de los elementos de la base B, esto es:

$$\begin{cases} \bar{b}_1 + \bar{b}_3 = \bar{a}_1 \\ 2\bar{b}_1 + \bar{b}_2 + 2\bar{b}_3 = \bar{a}_2 \\ -\bar{b}_1 + \bar{b}_2 = \bar{a}_3 \end{cases}$$

sustituyendo los vectores $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$, se llega al sistema:

$$\begin{cases} \bar{b}_1 + \bar{b}_3 = x^2 + x - 3 \\ 2\bar{b}_1 + \bar{b}_2 + 2\bar{b}_3 = 3x^2 + x - 5 \\ -\bar{b}_1 + \bar{b}_2 = x^2 - 2x + 2 \end{cases}$$

escalonando el sistema, tenemos:

$$(1)\,(-2)\begin{cases} \bar{b}_1 + \bar{b}_3 = x^2 + x - 3 \\ 2\bar{b}_1 + \bar{b}_2 + 2\bar{b}_3 = 3x^2 + x - 5 \\ -\bar{b}_1 + \bar{b}_2 = x^2 - 2x + 2 \end{cases} \sim \begin{cases} \bar{b}_1 + \bar{b}_3 = x^2 + x - 3 & \ldots (1) \\ \bar{b}_2 = x^2 - x + 1 & \ldots (2) \\ \bar{b}_2 + \bar{b}_3 = 2x^2 - x - 1 & \ldots (3) \end{cases}$$

de (2), se tiene:

$$\bar{b}_2 = x^2 - x + 1$$

sustituyendo (2) en (3), tenemos:

$$\left(x^2 - x + 1 \right) + \bar{b}_3 = 2x^2 - x - 1$$

de donde:

$$\bar{b}_3 = x^2 - 2 \qquad \ldots (4)$$

sustituyendo (4) en (1), se tiene:

$$\bar{b}_1 + \left(x^2 - 2 \right) = x^2 + x - 3$$

entonces

$$\bar{b}_1 = x - 1$$

con lo cual se llega a que la base B es:

$$B = \left\{ x-1,\ x^2 - x + 1,\ x^2 - 2 \right\}$$

Espacio renglón y espacio columna de una matriz

Sea A una matriz de orden $m \times n$.

1) Si consideramos a los renglones A como vectores del espacio $\mathbb{R}^n$, entonces al espacio generado con los renglones de A se le llama espacio renglón y se le representa con:

$$L\left(A_R \right)$$

2) Si consideramos a las columnas de A como vectores del espacio $\mathbb{R}^m$, entonces al espacio generado con las columnas de A se le llama espacio columna y se le representa con:

$$L\left(A_C \right)$$

Teorema

Para cualquier matriz A, se tiene que:

$$\text{Dim } L\left(A_R\right) = \text{Dim } L\left(A_C\right)$$

Teorema

Dos matrices equivalentes tienen el mismo espacio renglón.

Es importante recordar lo siguiente:

Se dice que una matriz A es equivalente a una matriz B, si B se puede obtener a partir de la matriz A mediante un número finito de transformaciones elementales.

Conviene aclarar que las transformaciones elementales aplicadas a la matriz A para llegar a la matriz B, deben ser todas ellas por renglón.

El teorema enunciado no aplica si se realizan en la matriz A transformaciones elementales por columna.

Rango de una matriz

Sea A una matriz de orden $m \times n$. El rango de la matriz A se define como el número de renglones distintos de cero después de haber concluido el escalonamiento de la matriz.

Teorema

Para cualquier matriz A, se tiene que:

$$\text{Rango } \left(A\right) = \text{Dim } L\left(A_R\right) = \text{Dim } L\left(A_C\right)$$

Ejercicio 2.19 Para la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Obtenga:

a) El espacio renglón $L\left(A_R\right)$, una base y su dimensión.

b) El espacio columna $L\left(A_C\right)$, una base y su dimensión.

SOLUCIÓN:

a) Para obtener el espacio renglón, se obtendrá primero una base del mismo mediante el escalonamiento de la matriz A.

$$\begin{array}{c} (1)\,(-2) \\ + \\ + \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{array}{c} \\ (1) \\ + \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -5 & 4 & -4 \\ 0 & 5 & -4 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -5 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Los renglones no nulos de la matriz equivalente, una vez concluido el escalonamiento, constituyen una base del espacio renglón y, por consiguiente, el número de renglones no nulos, nos definen la dimensión de dicho espacio vectorial. A este número también se le conoce como rango de la matriz A.

De acuerdo con lo anterior, se tiene que una base del espacio renglón será:

$$B_R = \left\{ \left(1,\ 2,\ -1,\ 3\right),\ \left(0,\ -5,\ 4,\ -4\right) \right\}$$

$$\therefore \quad \text{Dim } L\left(A_R\right) = 2$$

Generando el espacio renglón, tenemos:

$$a(1,\ 2,\ -1,\ 3) + b(0,\ -5,\ 4,\ -4) = (a,\ 2a-5b,\ -a+4b,\ 3a-4b)$$

$$\therefore \quad L(A_R) = \left\{ (a,\ 2a-5b,\ -a+4b,\ 3a-4b) \;\middle|\; a,\ b \in \mathbb{R} \right\}$$

b) Como sabemos que la dimensión del espacio columna es igual a la dimensión del espacio renglón, entonces será suficiente con tomar dos vectores columna de la matriz original, cuidando que estos no sean proporcionales, para obtener una base del espacio columna.

De esta forma, una base será:

$$B_C = \{ (1,\ 2,\ -1),\ (2,\ -1,\ 3) \}$$

$$\therefore \quad \mathrm{Dim}(A_C) = 2$$

y el espacio columna será:

$$a(1,\ 2,\ -1) + b(2,\ -1,\ 3) = (a+2b,\ 2a-b,\ -a+3b)$$

$$\therefore \quad L(A_C) = \left\{ (a+2b,\ 2a-b,\ -a+3b) \;\middle|\; a,\ b \in \mathbb{R} \right\}$$

Ejercicio 2.20 Sea la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Determine:

a) Si el conjunto $B = \{ (1,\ -1,\ 3),\ (-1,\ -1,\ 7) \}$ es una base del espacio generado por los renglones de la matriz A.

b) Si el vector $\overline{v} = (\,-4,\ 5,\ -9,\ 6\,)^T$ pertenece al espacio generado por las columnas de la matriz A.

SOLUCIÓN:

a) Para poder determinar si el conjunto B es una base del espacio renglón de la matriz A, lo primero que se podría hacer es generar dicho espacio y determinar su dimensión. Si esta es igual a dos, entonces tendríamos que verificar si los elementos de B pertenecen a dicho espacio; de ser así, podríamos afirmar que el conjunto B sí es una base, pues los vectores de B al no ser proporcionales son linealmente independientes. Si la dimensión del espacio renglón es diferente de dos, entonces B no puede ser una de sus bases.

Escalonemos la matriz A para obtener una base del espacio renglón.

$$\begin{array}{c} (-3)\,(-1) \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{array}{c} \\ (-2)\,(1) \\ \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & -10 \end{bmatrix} \sim \begin{array}{c} \\ (1) \\ \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

de donde una base del espacio renglón es:

$$B_R = \{\,(1,\ 0,\ -2),\ \ (0,\ 1,\ -5)\,\}$$

$$\therefore\quad \operatorname{Dim} L\left(A_R\right) = 2$$

con los elementos de la base se llega a que:

$$L\left(A_R\right) = \left\{(\,a,\ b,\ -2a-5b\,)\ \middle|\ a,\ b \in \mathbb{R}\right\}$$

Dado que la dimensión del $L\left(A_R\right)$ es igual a dos, entonces solo faltaría comprobar que los elementos del conjunto B pertenecen a este espacio.

El conjunto $B = \{(1, -1, 3), (-1, -1, 7)\}$.

Para el vector $(1, -1, 3)$, se tiene que:

$$a = 1$$
$$b = -1$$

entonces se debe cumplir que:

$$-2a - 5b = 3$$

sustituyendo:

$$\begin{aligned} -2(1) - 5(-1) &= 3 \\ -2 + 5 &= 3 \\ 3 &= 3 \qquad \therefore \; (1, -1, 3) \in \mathrm{L}(\mathrm{A_R}) \end{aligned}$$

Para el vector $(-1, -1, 7)$, se tiene que:

$$a = -1$$
$$b = -1$$

al sustituir:

$$\begin{aligned} -2(-1) - 5(-1) &= 7 \\ 2 + 5 &= 7 \\ 7 &= 7 \qquad \therefore \; (-1, -1, 7) \in L(A_R) \end{aligned}$$

Podemos concluir entonces que el conjunto B sí es una base del espacio renglón.

b) Dado que el espacio renglón es de dimensión dos, entonces el espacio columna también es de dimensión dos. De acuerdo con esto, dos vectores cualesquiera del $L\left(A_C\right)$, que no sean proporcionales, formarán una base de este espacio.

Considerando las dos primeras columnas de A, tenemos que:

$$B_C = \left\{ (1,\ 1,\ 0,\ 3)^{\mathrm{T}},\ \ (-1,\ 0,\ -1,\ -1)^{\mathrm{T}} \right\}$$

es una base de $L\left(A_C \right)$.

Para determinar si el vector $\overline{v} = \left(-4,\ 5,\ -9,\ 6\right)^{\mathrm{T}}$ pertenece al $L\left(A_C \right)$, será suficiente con averiguar si $\overline{v}$ puede ser expresado como una combinación lineal de los elementos de B_C.

$$\left(-4,\ 5,\ -9,\ 6\right) = \alpha\left(1,\ 1,\ 0,\ 3\right) + \beta\left(-1,\ 0,\ -1,\ -1\right)$$

Al desarrollar las operaciones y por igualdad de vectores, se llega al sistema:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} \alpha & - & \beta & = & -4 \\ & & \alpha & = & 5 \\ & - & \beta & = & -9 \\ 3\alpha & - & \beta & = & 6 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \alpha = 5 \\ \beta = 9 \end{array}$$

Como los valores obtenidos de α y β satisfacen todas las ecuaciones del sistema, entonces podemos concluir que el vector $\overline{v}$ sí pertenece al espacio columna de la matriz A.

Ejercicio 2.21 Sea la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 2 & 7 \\ -8 & 5 & -1 & k \end{bmatrix}$$

Determine el valor de k para que el espacio columna asociado a la matriz A sea de dimensión 2.

SOLUCIÓN:

Este ejercicio lo resolveremos por dos caminos distintos.

MÉTODO 1:

Para realizar el escalonamiento de la matriz A por renglones en lugar de hacerlo por columnas, trabajaremos con A^T.

$$\begin{array}{c} (-4)\,(-1)\,(-2) \\ \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 3 & -8 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \\ 4 & 7 & k \end{bmatrix} \sim \begin{array}{c} \\ \\ (-5)\,(-3) \\ \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 3 & -8 \\ 0 & -3 & 21 \\ 0 & -1 & 7 \\ 0 & -5 & k+32 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & k-3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -8 \\ 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k-3 \end{bmatrix}$$

Si $k = 3$ entonces los dos últimos renglones de la matriz se hacen cero, por lo que una base del espacio columna sería:

$$B_C = \left\{ (1,\ 3,\ -8)^T,\ (0,\ -1,\ 7)^T \right\}$$

Por lo tanto, si $k = 3$ la dimensión del espacio columna es igual a dos.

MÉTODO 2:

Como sabemos, para una matriz dada, la dimensión del espacio columna es igual a la dimensión del espacio renglón; por consiguiente, buscaremos el valor de k para el cual la dimensión del espacio renglón es igual a dos.

$$\begin{array}{c}(8)\,(-3)\\ \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix}1&2&1&4\\3&3&2&7\\-8&5&-1&k\end{bmatrix}\sim\begin{array}{c}\\(7)\\ \\ \end{array}\begin{bmatrix}1&2&1&4\\0&-3&-1&-5\\0&21&7&k+32\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&1&4\\0&-3&-1&-5\\0&0&0&k-3\end{bmatrix}$$

Como se puede apreciar, si $k=3$ entonces la dimensión del espacio renglón y, por consiguiente, la dimensión del espacio columna es igual a dos.

Criterio del Wronskiano

Sea $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ un conjunto de n funciones reales de variable real, cada una de las cuales admite por lo menos $n-1$ derivadas en el intervalo (a, b). El determinante

$$W(x) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_1^{n-1} & f_2^{n-1} & \cdots & f_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

se denomina Wronskiano del conjunto de funciones dado.

Si existe al menos un valor $x_0 \in (a, b)$, para el cual $W(x_0) \neq 0$, entonces el conjunto de funciones es linealmente independiente en dicho intervalo.

Cabe hacer notar que si $W(x) = 0, \;\; \forall \; x \in (a, b)$, entonces no se puede concluir nada en cuanto a la dependencia o independencia lineal del conjunto de funciones. En este caso se deberá recurrir a la ecuación de dependencia lineal para su análisis.

Ejercicio 2.22 Determine si el conjunto de funciones $\left\{ e^{x},\ e^{2x},\ e^{x+2} \right\}$ es linealmente dependiente o independiente en el intervalo $\left(-\infty,\ \infty\right)$.

SOLUCIÓN:

Obteniendo el Wronskiano, tenemos:

$$W\left(x\right) = \begin{vmatrix} e^{x} & e^{2x} & e^{x+2} \\ e^{x} & 2e^{2x} & e^{x+2} \\ e^{x} & 4e^{2x} & e^{x+2} \end{vmatrix}$$

$$W\left(x\right) = e^{x}\left(2e^{2x}\right)\left(e^{x+2}\right) + e^{x}\left(4e^{2x}\right)\left(e^{x+2}\right) + e^{x}\left(e^{2x}\right)\left(e^{x+2}\right)$$

$$- e^{x}\left(2e^{2x}\right)\left(e^{x+2}\right) - e^{x}\left(e^{2x}\right)\left(e^{x+2}\right) - e^{x}\left(4e^{2x}\right)\left(e^{x+2}\right)$$

$$W\left(x\right) = 2e^{4x+2} + 4e^{4x+2} + e^{4x+2} - 2e^{4x+2} - e^{4x+2} - 4e^{4x+2}$$

de donde:

$$W\left(x\right) = 0$$

Dado que $W\left(x\right) = 0$, entonces el criterio del Wronskiano no permite decidir en cuanto a la dependencia o independencia lineal del conjunto de funciones. Por lo tanto, se procederá de la siguiente manera:

Como se puede apreciar:

$$e^{x+2} = e^{2}e^{x}$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

es decir, e^{x+2} se puede obtener al multiplicar la función e^{x} por la constante e^{2}, esto implica que las funciones e^{x} y e^{x+2} son linealmente dependientes entre sí, con lo cual podemos concluir que el conjunto de funciones dado es linealmente dependiente.

Ejercicio 2.23 Si $H = \left\{ e^{x} + 2e^{-x},\ 2 + \operatorname{sen} 2x,\ e^{-x} + 2 \right\}$ es un subconjunto del espacio vectorial de las funciones reales de variable real, determine si el conjunto H es linealmente independiente en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

SOLUCIÓN:

Calculando el Wronskiano, tenemos:

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{x} + 2e^{-x} & 2 + \operatorname{sen} 2x & e^{-x} + 2 \\ e^{x} - 2e^{-x} & 2\cos 2x & -e^{-x} \\ e^{x} + 2e^{-x} & -4\operatorname{sen} 2x & e^{-x} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} W(x) = {} & \left(e^{x} + 2e^{-x}\right)(2\cos 2x)\left(e^{-x}\right) + \left(e^{x} - 2e^{-x}\right)(-4\operatorname{sen} 2x)\left(e^{-x} + 2\right) \\ & + (2 + \operatorname{sen} 2x)\left(-e^{-x}\right)\left(e^{x} + 2e^{-x}\right) - \left(e^{x} + 2e^{-x}\right)(2\cos 2x)\left(e^{-x} + 2\right) \\ & - (-4\operatorname{sen} 2x)\left(-e^{-x}\right)\left(e^{x} + 2e^{-x}\right) - \left(e^{x} - 2e^{-x}\right)(2 + \operatorname{sen} 2x)\left(e^{-x}\right) \end{aligned}$$

Si hacemos $x = 0$, tenemos:

$$W(0) = (3)(2)(1) + (-1)(0)(3) + (2)(-1)(3) - (3)(2)(3) - (0)(-1)(3) - (-1)(2)(1)$$

$$W(0) = -16$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

Esto implica que al menos existe un valor de x en el intervalo de definición de las funciones, esto es, $x_0 = 0$, para el cual $W(x_0) \neq 0$, lo que nos permite concluir que el conjunto H es linealmente independiente.

Ejercicio 2.24 Determine si el conjunto de funciones

$$G = \left\{ 2\,\mathrm{sen}^2 x,\ \ -\cos^2 x,\ \ 3 \right\}$$

es linealmente dependiente o independiente en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

SOLUCIÓN:

Obteniendo el Wronskiano, tenemos:

$$W(x) = \begin{vmatrix} 2\,\mathrm{sen}^2 x & -\cos^2 x & 3 \\ 4\,\mathrm{sen}\,x\ \cos x & 2\cos x\ \mathrm{sen}\,x & 0 \\ -4\,\mathrm{sen}^2 x + 4\cos^2 x & 2\cos^2 x - 2\,\mathrm{sen}^2 x & 0 \end{vmatrix}$$

Aplicando el método de cofactores en la tercera columna, tenemos:

$$W(x) = 3\left[(4\,\mathrm{sen}\,x\ \cos x)\left(2\cos^2 x - 2\,\mathrm{sen}^2 x\right) - (2\cos x\ \mathrm{sen}\,x)\left(-4\,\mathrm{sen}^2 x + 4\cos^2 x\right) \right]$$

desarrollando los productos y simplificando, se tiene:

$$W(x) = 3\left(8\,\mathrm{sen}\,x\ \cos^3 x - 8\,\mathrm{sen}^3 x\ \cos x + 8\,\mathrm{sen}^3 x\ \cos x - 8\,\mathrm{sen}\,x\ \cos^3 x\right)$$

$$W(x) = 0$$

Dado que el Wronskiano resultó igual a cero, entonces el criterio no decide, por lo que se tendrá que recurrir a la ecuación de dependencia lineal para determinar si el conjunto G es linealmente independiente o dependiente.

Se sabe que:

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

de donde

$$-\cos^2 x = -1 + \operatorname{sen}^2 x$$

con lo cual, la ecuación de dependencia lineal se puede expresar como:

$$\alpha_1 \left(2 \operatorname{sen}^2 x \right) + \alpha_2 \left(-1 + \operatorname{sen}^2 x \right) + \alpha_3 \left(3 \right) = \bar{0} \qquad \ldots (1)$$

multiplicando y factorizando términos semejantes, tenemos:

$$\left(2\alpha_1 + \alpha_2 \right) \operatorname{sen}^2 x + \left(-\alpha_2 + 3\alpha_3 \right) = 0 \operatorname{sen}^2 x + 0$$

por igualdad, se tiene:

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ -\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Se trata de un sistema de ecuaciones compatible indeterminado, que admite múltiples soluciones, esto es, se pueden obtener valores para los escalares $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ diferentes de cero, con los cuales se satisface la ecuación (1), por lo que, se puede concluir que el conjunto G es linealmente dependiente.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1) Demuestre que el conjunto

$$A = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & c & 0 \end{bmatrix} \;\middle|\; a + 2b = 0 ; \quad a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

es un espacio vectorial sobre el campo de los números reales, considerando las operaciones de adición y multiplicación por un escalar usuales con matrices.

2) Determine si el conjunto $P = \{ ax + b \mid a, \ b \in \mathbb{R} \}$ es un espacio vectorial sobre el campo de los números reales, si la adición de vectores es la adición ordinaria de polinomios y la multiplicación por un escalar se define como:

$$k(ax + b) = kb \quad ; \quad \forall \ k \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad \forall \ (ax + b) \in P$$

3) Sea $V = \{ (a, b) \mid a, \ b \in \mathbb{R} \}$, el conjunto en el cual se definen las operaciones de adición y multiplicación por un escalar de la siguiente manera:

$$(a, b) + (c, d) = (a + d, \ b + c) \quad ; \quad \forall \ (a, b), (c, d) \in V$$

$$\alpha(a, b) = (a, b) \quad ; \quad \forall \ \alpha \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad \forall \ (a, b) \in V$$

Determine si V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. En caso de no serlo, indique los axiomas de la definición de espacio vectorial que no se cumplen.

4) Determine si el conjunto $\mathbb{R}^2$ con las operaciones:

$$(x, y) + (z, w) = (x + z, \ y + w) \quad ; \quad \forall \ (x, y), \ (z, w) \in \mathbb{R}^2$$

$$k(x, y) = (0, \ kx) \quad ; \quad \forall \ k \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad \forall \ (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Si no lo es, indique los axiomas de la definición que no se cumplen.

5) Determine si el conjunto de matrices cuadradas de orden dos con elementos reales $H=\left\{ A \mid A = -A^{\mathrm{T}} \right\}$ es un espacio vectorial sobre el campo de los números reales, con las operaciones de adición y multiplicación por un escalar usuales en matrices.

6) Determine si el conjunto:

$$\mathbb{C}^2 = \left\{ \left(z_1, z_2 \right) \mid z_1, z_2 \in \mathbb{C} \right\}$$

es un espacio vectorial sobre el campo de los números reales, si las operaciones de adición y multiplicación por un escalar están definidas por:

$$\left(z_1, z_2 \right) + \left(z_3, z_4 \right) = \left(z_1 + z_3,\ z_2 + z_4 \right) \quad ; \quad \forall \left(z_1, z_2 \right), \left(z_3, z_4 \right) \in \mathbb{C}^2$$

$$\alpha \left(z_1, z_2 \right) = \left(\alpha z_1, \alpha z_2 \right) \quad ; \quad \forall\ \alpha \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad \forall \left(z_1, z_2 \right) \in \mathbb{C}^2$$

7) Determine si el conjunto de todas las ternas ordenadas de números reales $\left(x,\ y,\ z \right)$ con las operaciones:

$$\left(x_1,\ y_1,\ z_1 \right) + \left(x_2,\ y_2,\ z_2 \right) = \left(x_1 + x_2,\ y_1 + y_2,\ z_1 + z_2 \right)$$

$$\alpha \left(x,\ y,\ z \right) = \left(x,\ \alpha y,\ z \right)$$

es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Si no lo es, indique los axiomas de la definición que no se cumplen.

8) Sea A un subconjunto del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$, tal que:

$$A = \left\{ \left(x,\ y,\ z \right) \mid 2x - y - z = 0 \quad ; \quad x,\ y,\ z \in \mathbb{R} \right\}$$

a) Determine si A es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

b) En caso afirmativo, obtenga una base y la dimensión del subespacio A.

9) Sea M el espacio vectorial de las matrices simétricas de orden dos con elementos en $\mathbb{R}$ y sea N el conjunto definido por:

$$N = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix} \middle| \; a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

Determine si N es un subespacio de M; si lo es, obtenga para M y N, una base y su dimensión.

10) Dado el conjunto:

$$W = \left\{ \bar{x} \mid \bar{x} = a(1,\ 0,\ 2) + b(1,\ -1,\ 3);\quad a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

a) Determine si W es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

b) En caso de resultar afirmativo el inciso anterior, obtenga una base y la dimensión de W.

11) Determine cuáles de los siguientes conjuntos son subespacio del espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden dos sobre los reales.

a) $$A = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & a \\ 2b & b \end{bmatrix} \middle| \; a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

b) $$B = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix} \middle| \; a - 1 = 0 \;;\; a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

c) $$C = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| \; c = d \;;\; a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

12) Determine si los siguientes subconjuntos S son subespacio del espacio vectorial V respectivo.

a) $V = \left\{ ax^2 + bx + c \;\middle|\; a,\, b,\, c \in \mathbb{R} \right\}$

$S = \left\{ ax^2 + bx + c \;\middle|\; c = 0;\; a,\, b \in \mathbb{R} \right\}$

b) $V = \left\{ f(x) \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\}$

$S = \left\{ f(x) \leq 0 \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\}$

13) Sean A y B dos subespacios de $\mathbb{R}^3$. Demuestre que $A \cap B$ es también un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

$$A = \left\{ (x,\, y,\, z) \;\middle|\; 2x - y = 0 \;;\quad x,\, y,\, z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$B = \left\{ (x,\, y,\, z) \;\middle|\; 3x - z = 0 \;;\quad x,\, y,\, z \in \mathbb{R} \right\}$$

14) Sea P_2 el espacio vectorial real de los polinomios de grado menor o igual a dos con coeficientes reales. Determine si el conjunto:

$$W = \left\{ P(x) \in P_2 \;\middle|\; P(1) - P(-3) = 0 \right\}$$

es un subespacio de P_2.

15) Determine los valores de c y $d \in \mathbb{R}$, de manera que el conjunto:

$$E = \left\{ (x,\, y,\, z,\, w) \;\middle|\; x + y + z = 0,\quad x - y + cz = 0,\quad x - y - z = d \right\}$$

forme un subespacio de $\mathbb{R}^4$ de dimensión dos. Dé una base del subespacio E que justifique la respuesta.

16) Dado el conjunto $A = \{(a, -1, 1), (0, a, -2), (-1, 0, 1)\}$

a) Determine el o los valores de $a \in \mathbb{R}$, tal que el espacio generado por A sea de dimensión 2.

b) Con el valor obtenido en el inciso a), obtenga el espacio generado.

17) Sea $N = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ z & 0 \end{bmatrix} \middle| \; z = x - y; \; x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$ un espacio vectorial.

a) Determine cuál de los siguientes conjuntos es una base de N:

$$B_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$B_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

b) Obtenga el vector de coordenadas de $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ respecto a la base elegida en el inciso anterior.

18) Sea el conjunto $B = \{1, 2x, 3x^2\}$.

a) Determine si el conjunto B es una base del espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual a dos (P_2).

b) Obtenga un conjunto formado únicamente por polinomios de grado dos que sea base del espacio P_2.

19) Dados los conjuntos de vectores de $\mathbb{R}^3$:

$$A = \{(1, 5, 3), (2, 2, 6), (6, 0, 18)\}$$

$$B = \{(1, 0, -3), (4, 1, -12), (5, 5, -15)\}$$

a) Determine si los conjuntos A y B generan espacios vectoriales de la misma dimensión.

b) ¿Los conjuntos A y B generan el mismo espacio vectorial? Fundamente su respuesta.

20) Determine si el conjunto:

$$B = \{P(x), P'(x), P''(x), P'''(x)\}$$

es linealmente dependiente o independiente, donde:

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad \text{con} \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

$$P'(x) = \frac{d}{dx}P(x), \quad P''(x) = \frac{d^2}{dx^2}P(x), \quad P'''(x) = \frac{d^3}{dx^3}P(x)$$

21) Dados los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$:

$$A = \{(1, 3, -7), (2, -1, 0), (3, -1, -1), (4, -3, 2)\}$$

$$B = \{(1, -1, 1), (1, 1, -3), (1, 2, -5)\}$$

a) Demuestre que los conjuntos A y B generan el mismo subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

b) Obtenga una base y la dimensión del espacio generado por los conjuntos A y B.

22) Determine si los vectores:

$$\bar{u} = (-1,\ i,\ -i), \qquad \bar{v} = (-i,\ 1,\ i) \quad \text{y} \quad \bar{w} = (i,\ -i,\ 0)$$

de $\mathbb{C}^3$, son linealmente dependientes o independientes, si el campo en el que está definido el espacio vectorial $\mathbb{C}^3$ es:

a) $\mathbb{R}$

b) $\mathbb{C}$

23) Si $\{ \bar{v}_1,\ \bar{v}_2,\ \bar{v}_3 \}$ es un conjunto de vectores linealmente independiente, determine si cada uno de los siguientes conjuntos:

a) $\{ \bar{v}_1 + \bar{v}_2,\ \ \bar{v}_2 + \bar{v}_3,\ \ \bar{v}_1 + \bar{v}_3 \}$

b) $\{ \bar{v}_1 - \bar{v}_2,\ \ \bar{v}_2 - \bar{v}_3,\ \ \bar{v}_3 - \bar{v}_1 \}$

es linealmente dependiente o independiente.

24) Sea P_2 el espacio vectorial real de los polinomios de grado menor o igual a dos con coeficientes reales y sean $A = \{ x^2 - 2x + 2,\ \ 2x^2 + x + 1,\ \ -x + 1 \}$ y $B = \{ x^2 + 2x - 1,\ \ x^2 - 1 \}$ dos subconjuntos de P_2.

a) Determine los espacios vectoriales $L(A)$ y $L(B)$, y una base para cada uno de ellos.

b) Obtenga $L(A) \cap L(B)$.

c) Compruebe que $L(A) \cap L(B)$ es un subespacio de P_2.

25) Sean los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$:

$$H = \{ (a,\ b,\ c,\ d) \mid a + b + c = 0 \quad \text{con} \quad a, b, c, d \in \mathbb{R} \}$$

$$W = \{ (a,\ b,\ c,\ d) \mid b + c = 0,\ d = 2a \quad \text{con} \quad a, b, c, d \in \mathbb{R} \}$$

Obtenga:

a) Una base y la dimensión de H.

b) Una base y la dimensión de W.

c) El subespacio $H \cap W$.

d) Una base y la dimensión de $H \cap W$.

26) En el espacio vectorial $P_1 = \left\{ b + ax \;\middle|\; a,\ b \in \mathbb{R} \right\}$, la matriz

$$M_B^A = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{7}{2} \\ \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

es la matriz de transición de la base $A = \left\{ 6 + 3x,\ \ 10 + 2x \right\}$ a la base B.

a) Determine cuál es la base B.

b) Calcule el vector de coordenadas en la base B del vector $P(x) = -4 + x$.

27) Sean $B = \left\{ 2\operatorname{sen} x + \cos x,\ 3\cos x \right\}$ y $B' = \left\{ \operatorname{sen} x,\ \cos x \right\}$ dos bases del espacio vectorial

$$F = \left\{ f \;\middle|\; f(x) = a\operatorname{sen} x + b\cos x\ ;\quad a,\ b \in \mathbb{R} \right\}$$

a) Obtenga la matriz de transición de la base B a la base B'.

b) Si $h(x) = 2\operatorname{sen} x - \cos x$, obtenga $\left[h(x) \right]_B$.

28) Sea el espacio vectorial $\mathbb{C}^3 = \left\{ \left(z_1,\ z_2,\ z_3 \right) \middle|\ z_1,\ z_2,\ z_3 \in \mathbb{C} \right\}$ sobre el campo de los reales y sea W un subespacio de $\mathbb{C}^3$. Si $A = \left\{ (1,\ 1,\ 1+i),\ (3,\ 2,\ 3+2i) \right\}$ y $B = \left\{ (1,\ 0,\ 1),\ (0,\ 1,\ i) \right\}$ son bases de W, determine:

ÍNDICE
1
2
3
4
5

a) La matriz de transición de la base B a la base A.

b) El vector de coordenadas de $\bar{v} \in W$ en la base B, utilizando una matriz de transición, si se sabe que el vector de coordenadas de $\bar{v}$ en la base A es:

$$(\bar{v})_A = (1,\ 3)$$

29) Sea $P = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ la matriz de transición de la base A a la base B de un espacio vectorial V. Si el vector de coordenadas del vector $\bar{a}$ con respecto a la base B es:

$$(\bar{a})_B = (-1,\ 0,\ 1) \quad \text{y} \quad A = \{(1,\ -i),\ (0,\ -i),\ (1,\ 1)\},$$

obtenga las componentes del vector $\bar{a}$.

30) Sean $A = \{\cos^2 x,\ \operatorname{sen}^2 x\}$ y $B = \{\cos(2x),\ 1\}$ dos bases del espacio vectorial real H y sea $[g(x)]_A = \left(-\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$ el vector de coordenadas de $g(x)$ respecto a la base A.

Determine:

a) La matriz de transición de la base A a la base B.

b) El vector de coordenadas de $g(x)$ respecto a la base B.

31) Los conjuntos $A = \{\bar{v}_1,\ \bar{v}_2\}$ y $B = \{\bar{w}_1,\ \bar{w}_2\}$ son bases del espacio vectorial complejo V, cuyos vectores satisfacen las ecuaciones:

$$i\,\bar{w}_1 - \bar{w}_2 + \bar{v}_1 = \bar{0}$$

$$(-2+i)\,\bar{w}_2 - \bar{v}_2 = -\,i\,\bar{w}_1 - \bar{v}_1$$

a) Determine la matriz de transición M_B^A.

b) Obtenga $(\bar{u})_B$ si se sabe que $(\bar{u})_A = (-2,\ i)$.

32) Sean A y $B = \{x^2 + x,\ x+1,\ x^2+1\}$ dos bases del espacio vectorial V y sea:

$$M_B^A = \begin{bmatrix} \alpha & 2 & \beta \\ -3 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & \alpha \end{bmatrix}$$

la matriz de transición de la base A a la base B. El vector de coordenadas $\overline{w} = 3x^2 - x + 2 \in V$ respecto a la base A es $(\overline{w})_A = (2\alpha,\ \gamma,\ 3)$. Determine los valores de $\alpha,\ \beta,\ \gamma \in \mathbb{R}$.

33) Sean $A = \{\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3\}$ y $B = \{\overline{b}_1, \overline{b}_2, \overline{b}_3\}$ dos bases de un espacio vectorial V. El vector de coordenadas de $\overline{a}_2$ respecto a la base B es $(\overline{a}_2)_B = (-1,\ 2,\ 0)$, además se sabe que:

$$\overline{a}_1 + \overline{a}_3 = \overline{b}_2$$
$$-\overline{a}_1 - \overline{a}_2 + \overline{a}_3 = \overline{b}_3$$

a) Obtenga la matriz de transición de la base A a la base B.

b) El vector de coordenadas de $\overline{w}$ en la base B es $(\overline{w})_B = (-1,\ 2,\ 1)$. Exprese al vector $\overline{w}$ como una combinación lineal de los vectores de la base A.

34) Sean $A = \{\overline{u}_1,\ \overline{u}_2\}$, $B = \{(2,\ 1), (-1,\ 3)\}$ y $C = \{\overline{w}_1,\ \overline{w}_2\}$ tres bases de $\mathbb{R}^2$, donde:

$$\begin{cases} \overline{u}_1 = -2\overline{w}_1 - \overline{w}_2 \\ \overline{u}_2 = \overline{w}_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} (2,\ 1) = -3\overline{w}_1 - 2\overline{w}_2 \\ (-1,\ 3) = 5\overline{w}_1 + \overline{w}_2 \end{cases}$$

Obtenga:

a) La matriz de transición de la base B a la base A.

b) El vector de coordenadas del vector $\bar{v}$ en la base A, si se sabe que $(\bar{v})_B = (2, \ -1)$.

35) Dada la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 9 \\ 2 & 1 & 7 \\ -1 & 3 & -5 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Determine:

a) El espacio vectorial generado por los renglones de la matriz A.

b) El espacio vectorial generado por las columnas de la matriz A.

c) Una base y la dimensión del espacio renglón y del espacio columna de la matriz A.

d) Si los espacios renglón y columna son isomorfos.

36) Obtenga una base del espacio renglón de cada una de las siguientes matrices y determine si ambos espacios representan el mismo espacio vectorial.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & -8 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 7 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

37) Sea la matriz

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 & 4 & 5 & -2 \\ 3 & -8 & 7 & 2 & 10 & -1 \\ -1 & 5 & 0 & 4 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

a) Obtenga el espacio vectorial generado por las columnas de la matriz M y determine su dimensión.

b) Determine el rango de la matriz M.

38) Si V es el espacio renglón de la matriz A y W es el espacio columna de la matriz B, donde:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

a) Demuestre que $V \cap W$ es un espacio vectorial.

b) Obtenga una base y la dimensión de $V \cap W$.

39) Para la matriz

$$B = \begin{bmatrix} a & -1 & -1 \\ -1 & a & 1 \\ -a & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

determine, en cada uno de los siguientes casos, el valor de a tal que:

a) El espacio renglón sea de dimensión 1.

b) El espacio columna sea de dimensión 2.

40) Para la matriz

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 4 & a \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & b & 12 \end{bmatrix}$$

a) Determine los valores de $a, b \in \mathbb{R}$, tales que el rango de la matriz C sea uno.

b) Con los valores obtenidos en el inciso anterior, determine el espacio renglón de la matriz C y dé una de sus bases.

ÍNDICE
1
2
3
4
5

41) Si $B = \{ (1,\ 0,\ 1),\ (0,\ 1,\ -1) \}$ es una base del espacio columna de la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & x & 9 \\ 1 & y & -3 & 6 \\ z & 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Determine:

a) Los valores de $x,\ y,\ z \in \mathbb{R}$.

b) Con los valores obtenidos en el inciso anterior, obtenga una base del espacio renglón de A.

42) Dado el conjunto de funciones $\{ 2,\ \cos 2x,\ \cos^2 x \}$

a) Calcule el Wronskiano del conjunto.

b) Determine si el conjunto es linealmente dependiente o independiente.

43) Determine si los conjuntos de funciones:

a) $A = \{ -x^2 + 2x + 1,\quad 3x^2 - 2,\quad x^2 + 4x \}$

b) $B = \{ \operatorname{sen} x,\ \ \cos x,\ \ 1 \}$

son linealmente dependientes o independientes en el intervalo $(-\infty,\ \infty)$.

44) Sea A el siguiente conjunto de funciones reales de variable real definidas en el intervalo $(-\infty,\ \infty)$:

$$A = \{ 2,\ \ 2\operatorname{sen}^2 x\ ,\ \ 1 - \cos 2x \}$$

a) Obtenga el Wronskiano de las funciones del conjunto A.

b) Determine si A es un conjunto linealmente dependiente o independiente.

45) Obtenga el Wronskiano del conjunto de funciones:

$$\left\{\ x+1,\ \ \operatorname{sen} x,\ \left|\ x\ \right|\right\}$$

definidas en el intervalo $(-\pi,\ 0)$. Concluya, a partir únicamente del Wronskiano, sobre la dependencia o independencia lineal del conjunto dado.

46) Sean las funciones:

$$\begin{array}{lll} f(x) = m & \text{con} & m \neq 0,\ \ m \in \mathbb{R} \\ g(x) = \operatorname{sen} px & \text{con} & p \neq 0,\ \ p \in \mathbb{R} \\ h(x) = \cos px & \text{con} & p \neq 0,\ \ p \in \mathbb{R} \end{array}$$

definidas en el intervalo $(-\pi,\ \pi)$.

a) Obtenga el Wronskiano para estas funciones.

b) Determine si las funciones $f,\ g,\ h$ son linealmente dependientes o independientes en el intervalo $(-\pi,\ \pi)$.

47) Sea $H = \left\{ \operatorname{sen} x,\ \cos\left(x - \dfrac{\pi}{8}\right),\ \operatorname{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{8}\right) \right\}$ un conjunto de funciones reales de variable real. Determine si H es linealmente dependiente o independiente en el intervalo $(-\infty,\ \infty)$.

48) Sea el conjunto de funciones $G = \left\{ 2e^{x},\ e^{-x},\ e^{kx} \right\}$. Determine, haciendo uso del Wronskiano, para qué valores de k dentro del intervalo $-10 \leq k \leq 10$, no se puede asegurar la independencia lineal del conjunto G.

49) Dadas las funciones $f(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}$ y $h(x) = x^{\beta}$, determine la relación que debe cumplir $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$, para que las funciones f y g sean linealmente independientes en el intervalo $(0,\ \infty)$.

RESPUESTAS A EJERCICIOS PROPUESTOS

1) El conjunto A sí es un espacio vectorial sobre el campo de los números reales.

2) El conjunto P no es un espacio vectorial.

3) El conjunto V no es un espacio vectorial.

Los axiomas que no se cumplen:

2. $(\bar{u}+\bar{v})+\bar{w} = \bar{u} + (\bar{v}+\bar{w})$
3. $\bar{u} + \bar{v} = \bar{v} + \bar{u}$
4. Elemento idéntico
5. Elementos inversos
8. $(\alpha + \beta)\bar{u} = \alpha\bar{u} + \beta\bar{u}$

4) El conjunto $\mathbb{R}^2$ no es un espacio vectorial con las operaciones definidas.

Los axiomas que no se cumplen son:

$$* \ \alpha(\beta\bar{u}) = (\alpha\beta)\bar{u}$$

$$* \quad 1\bar{u} = \bar{u} \ ; \qquad \forall\ \bar{u} \in \mathbb{R}^2$$

5) El conjunto H sí es un espacio vectorial.

6) El conjunto $\mathbb{C}^2$ sobre el campo real sí es un espacio vectorial.

7) El conjunto $\mathbb{R}^3$ no es un espacio vectorial con las operaciones definidas.

El axioma que no se cumple es:

$$(\alpha + \beta)\bar{u} = \alpha\bar{u} + \beta\bar{u}$$

8) **a)** El conjunto A sí es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

b) Una base sería $B = \{(1, 0, 2), (0, 1, -1)\}$

$\text{Dim } A = 2$

9) El conjunto N sí es un subespacio vectorial de M.

$$B_M = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \quad ; \quad \text{Dim } M = 3$$

$$B_N = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\} \quad ; \quad \text{Dim } N = 2$$

10) **a)** El conjunto W sí es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

b) Una base sería $B_w = \{(1,\ 0,\ 2),\ (1,\ -1,\ 3)\}$

$\text{Dim } W = 2$

11) Si consideramos a $M_{2\times 2}$ como el conjunto de las matrices cuadradas de orden dos sobre los reales, entonces:

a) El conjunto A sí es un subespacio vectorial de $M_{2\times 2}$.

b) El conjunto B no es un subespacio vectorial de $M_{2\times 2}$.

c) El conjunto C sí es un subespacio vectorial de $M_{2\times 2}$.

12) **a)** Para este caso, S sí es un subespacio vectorial de V.

b) En este caso, S no es un subespacio vectorial de V.

13) El conjunto $A \cap B = \{ (x,\ 2x,\ 3x) \mid x \in \mathbb{R} \}$, el cual sí es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

14) El conjunto W sí es un subespacio vectorial de P_2.

15) Si $c = -1$ y $d = 0$, el conjunto E es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$ de dimensión 2.

Con estos valores para c y d, el conjunto E se puede expresar como:

$$E = \{ (x, y, z, w) \mid x = 0, \quad y + z = 0 ; \qquad x, y, z, w \in \mathbb{R} \}$$

o también $E = \{ (0, y, -y, w) \mid y, w \in \mathbb{R} \}$

Una base del subespacio E sería:

$$B = \{ (0, 1, -1, 0), (0, 0, 0, 1) \} \qquad \therefore \qquad \text{Dim } E = 2$$

16) a) Con $a = 1$ y $a = -2$, el espacio generado por el conjunto A es de dimensión dos.

b) Con $a = 1$ y tomando al segundo y tercer vector del conjunto A como una base, se tiene que:

$$L(A) = \{ (-y, x, -2x + y) \mid x, y \in \mathbb{R} \}$$

Con $a = -2$ y tomando al segundo y tercer vector del conjunto A como base, se tiene que:

$$L(A) = \{ (-y, -2x, -2x + y) \mid x, y \in \mathbb{R} \}$$

NOTA: En el inciso **b)** las respuestas no son únicas.

17) a) $B_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ base de N.

b) $\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right)_{B_2} = (-1, 4)$

18) a) El conjunto B sí es una base de P_2.

b) $B_1 = \{ x^2,\ x^2 + x,\ x^2 + x + 1 \}$ es una base de P_2 formada únicamente con polinomios de segundo grado.

NOTA: La respuesta del inciso **b)** no es única.

19) **a)** Los conjuntos A y B generan espacios de la misma dimensión y esta es igual a dos.

b) Los espacios generados por los conjuntos A y B son de la forma:

$$L(A) \{ (a,\ b,\ 3a) \mid a,\ b \in \mathbb{R} \}$$

$$L(B) \{ (a,\ b,\ -3a) \mid a,\ b \in \mathbb{R} \}$$

Por lo tanto, los conjuntos A y B no generan el mismo espacio vectorial.

20) El conjunto B es linealmente independiente.

21) **a)** Los conjuntos A y B sí generan el mismo subespacio de $\mathbb{R}^3$ y este es de la forma:

$$L(A) = L(B) = \{ (a,\ b,\ -a - 2b) \mid a,\ b \in \mathbb{R} \}$$

b) $B = \{ (1,\ 0,\ -1),\ (0,\ 1,\ -2) \}$
$\text{Dim}\ \ L(A) = 2$

NOTA: En el inciso **b)** la base dada no es única.

22) **a)** $\bar{u}$, $\bar{v}$ y $\bar{w}$ son linealmente independientes.

b) $\bar{u}$, $\bar{v}$ y $\bar{w}$ son linealmente dependientes.

23) **a)** El conjunto dado es linealmente independiente.

b) El conjunto dado es linealmente dependiente.

24) **a)** $L(A)=P_2$, esto es, $L(A)=P_2=\left\{\left(ax^2+bx+c\right) \mid a,\ b,\ c\in\mathbb{R}\right\}$

una base de $L(A)$ es $B_1=\left\{x^2,\ x,\ 1\right\}$

$L(B)=\left\{ax^2+bx-a \mid a,\ b\in\mathbb{R}\right\}$

una base de $L(B)$ es $B_2=\left\{x^2-1,\ x\right\}$

b) $L(A)\cap L(B)=P_2\cap L(B)=L(B)$

c) $L(A)\cap L(B)$ sí es un subespacio vectorial de P_2.

NOTA: Las bases dadas en el inciso **a)** no son únicas.

25) **a)** Una base es $B_H=\left\{(1,\ 0,\ -1,\ 0),\ (0,\ 1,\ -1,\ 0),\ (0,\ 0,\ 0,\ 1)\right\}$

$\text{Dim}\quad H=3$

b) Una base es $B_W=\left\{(1,\ 0,\ 0,\ 2),\ (0,\ 1,\ -1,\ 0)\right\}$

$\text{Dim}\quad W=2$

c) $H\cap W=\left\{(0,\ k,\ -k,\ 0) \mid k\in\mathbb{R}\right\}$

d) Una base es $B_{H\cap W}=\left\{(0,\ 1,\ -1,\ 0)\right\}$

$\text{Dim}\quad H\cap W=1$

26) **a)** La base B es igual a: $B=\left\{2,\ 3+2x\right\}$

b) $\left[P(x)\right]_B=\left(-\dfrac{11}{4},\ \dfrac{1}{2}\right)$

27) **a)** La matriz de transición de la base B a la B' es $M_{B'}^{B}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 3\end{bmatrix}$

b) El vector de coordenadas solicitado es $\left[h(x)\right]_B=\left(1,\ -\dfrac{2}{3}\right)$

ÍNDICE

1

2

3

4

5

28) **a)** La matriz M_A^B es $M_A^B = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

b) El vector de coordenadas solicitado es $(\bar{v})_B = (10,\ 7)$

29) El vector $\bar{a}$ solicitado es $\bar{a} = (0,\ 1)$

30) **a)** $M_B^A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

b) $[\,g(x)\,]_B = \left(-\frac{3\pi}{4},\ \frac{\pi}{4} \right)$

31) **a)** La matriz M_B^A es $M_B^A = \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 1 & -1+i \end{bmatrix}$

b) El vector de coordenadas pedido es $(\bar{u})_B = (\,2i,\ -3-i\,)$

32) Los valores de α, β y γ pedidos son:

$\alpha = 1$, $\beta = 0$ y $\gamma = -1$

33) **a)** $M_B^A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 2 & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

b) $\bar{w} = -\bar{a}_1 + \bar{a}_3$

34) **a)** $M_A^B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

b) $(\bar{v})_A = (5, -1)$

35) **a)** $L(A_R) = \left\{ (a, 4a + 7b, 2a - 3b) \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$

b) $L(A_C) = \left\{ (a, b, a - 2b, a - b)^{\mathrm{T}} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$

c) Una base del espacio renglón es:
$B_R = \{ (1, 4, 2), (0, 7, -3) \} \quad \therefore \quad \text{Dim } L(A_R) = 2$

Una base del espacio columna es:
$B_C = \left\{ (1, 0, 1, 1)^{\mathrm{T}}, (0, 1, -2, -1)^{\mathrm{T}} \right\} \quad \therefore \quad \text{Dim } L(A_C) = 2$

d) Como ambos espacios son de igual dimensión, entonces son isomorfos.

36) Una base del $L(A_R)$ es $B_1 = \{ (1, 2, 0), (0, 1, 1) \}$
Una base del $L(B_R)$ es $B_2 = \{ (1, 2, 0), (0, 1, -1) \}$

Como el primer vector de ambas bases es el mismo y el segundo vector de las bases no son proporcionales, entonces podemos concluir que los espacios renglón de ambas matrices son distintos.

37) **a)** $L(M_C) = \left\{ (a, b, 5a - 2b, -4a + 3b)^{\mathrm{T}} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$; $\text{Dim } L(M_C) = 2$

b) El rango de la matriz M es igual a dos.

$$R(M) = 2$$

38) **a)** El espacio $V \cap W$ es $V \cap W = \left\{ (-k, 2k, 3k) \mid k \in \mathbb{R} \right\}$, el cual cumple con las dos cerraduras, por lo que $V \cap W$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

b) $B_{V \cap W} = \{ (-1, \ 2, \ 3) \} \quad \therefore \quad \text{Dim} \quad V \cap W = 1$

39) a) Con $a = 1$ el espacio renglón de la matriz B es de dimensión uno.

b) $\forall \ a \in \mathbb{R}$ con $a \neq 1$ el espacio columna de la matriz B es de dimensión dos.

40) a) Con $a = 8$ y $b = 6$ el rango de la matriz C es igual a uno.

b) $L\left(C_R\right) = \left\{ (a, \ 2a, \ 4a) \ \middle| \ a \in \mathbb{R} \right\}$

$$B_R = \{ (1, \ 2, \ 4) \}$$

41) a) Los valores de $x, \ y, \ z$ son:

$$x = -5 \ , \quad y = -1 \ , \quad z = 2$$

b) Una base del espacio renglón de la matriz A es:

$$B_R = \{ (1, \ -1, \ -3, \ 6) \, , \ (0, \ 2, \ 4, \ -9) \}$$

42) a) $W (x) = 0$

b) El conjunto dado es linealmente dependiente.

43) a) El conjunto A es linealmente dependiente.

b) El conjunto B es linealmente independiente.

44) a) $W (x) = 0$

b) El conjunto A es linealmente dependiente.

45) $W(x) = -\operatorname{sen} x$

Como $W\left(x_0 \right) \neq 0$ para valores de $x \in (-\pi, \ 0)$, entonces el conjunto dado es linealmente independiente.

46) **a)** $W(x) = -mp$

b) Como $W(x) \neq 0 \quad \forall\, x \in (-\pi, \pi)$, entonces las funciones f, g, h son linealmente independientes.

47) El conjunto H es linealmente dependiente.

48) Se tiene que $W(x) = -4e^{kx}\left(k^2 - 1\right)$ con lo que si $k = \pm 1$, entonces $W(x) = 0$, con lo cual no se puede asegurar la independencia lineal del conjunto G.

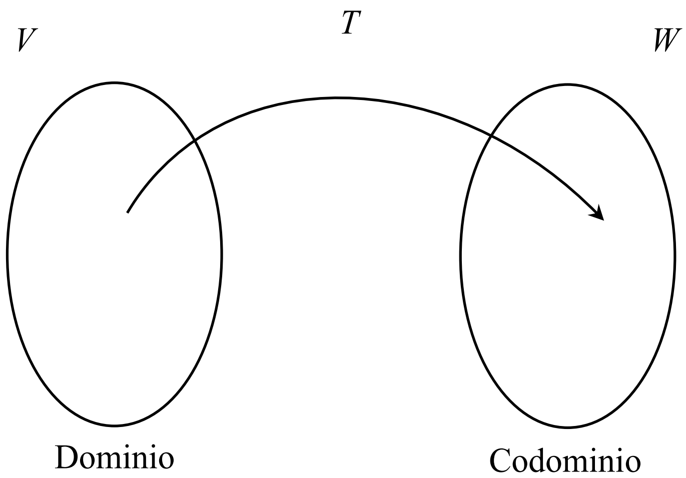
49) Si $\alpha + \beta \neq 0$, entonces $W(x) \neq 0$, con lo cual las funciones f y g resultan linealmente independientes.

Capítulo 3

TRANSFORMACIONES LINEALES

Transformación

Sean V y W espacios vectoriales definidos sobre el mismo campo K. La función $T : V \to W$ recibe el nombre de transformación y, los espacios V y W se llaman dominio y codominio de la transformación, respectivamente. Esquemáticamente se tiene:



Transformación lineal

Sean V y W espacios vectoriales definidos sobre un campo K. La función $T : V \to W$ se llama transformación lineal si se cumplen las siguientes dos propiedades:

$\forall\ \bar{u},\ \bar{v} \in V$ y $\forall\ \alpha \in K$

1) $T(\bar{u} + \bar{v}) = T(\bar{u}) + T(\bar{v})$

2) $T(\alpha\,\bar{u}) = \alpha\,T(\bar{u})$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

Recorrido y núcleo de una transformación lineal

Sean V y W espacios vectoriales y $T : V \rightarrow W$ una transformación lineal.

1) Se llama recorrido de T al conjunto de todas las imágenes de los vectores del dominio, el cual se denota como $T(V)$ y es tal que:

$$T(V) = \{ T(\bar{v}) \mid \bar{v} \in V \}$$

2) Se llama núcleo de T al conjunto de vectores del dominio, cuya imagen es el vector cero de W, el cual se denota como $N(T)$ y es tal que:

$$N(T) = \left\{ \bar{v} \in V \;\middle|\; T(\bar{v}) = \bar{0}_W \right\}$$

Teoremas

Si $T : V \rightarrow W$ es una transformación lineal, entonces:

1) $T(\bar{0}_V) = \bar{0}_W$

2) $T(V)$ es un subespacio de W.

3) $N(T)$ es un subespacio de V.

4) Si $B = \{ \bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n \}$ es una base V, entonces el conjunto $G = \{ T(\bar{v}_1), T(\bar{v}_2), \ldots, T(\bar{v}_n) \}$ es generador del recorrido de T.

5) Si V es un espacio de dimensión finita, entonces se cumple que:

$$\text{Dim } V = \text{Dim } T(V) + \text{Dim } N(T)$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

Ejercicio 3.1 Determine si la transformación $T : P \to D$, donde

$$P = \left\{ a x + b \;\middle|\; a ,\ b \in \mathbb{R} \right\} \qquad \text{y} \qquad D = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \;\middle|\; a ,\ b \in \mathbb{R} \right\}$$

definida por:

$$T(f) = \begin{bmatrix} f(0) & 0 \\ 0 & f(1) \end{bmatrix} \; ; \qquad \forall\ f \in P$$

es lineal.

SOLUCIÓN:

Para que una transformación sea lineal se deben cumplir las dos propiedades que se señalan en la definición de este concepto. Dichas propiedades se conocen con los nombres de superposición y homogeneidad, respectivamente, de acuerdo con el orden en que aparecen en la citada definición.

Verifiquemos si se cumplen estas propiedades:

1) Superposición

$\forall\ f_1(x) = a_1 x + b_1 ,\quad f_2(x) = a_2 x + b_2 \in P$, se tiene que:

$$T(f_1 + f_2) = T(f_1) + T(f_2)$$

sustituyendo f_1 y f_2, tenemos:

$$T\left[\left(a_1 x + b_1 \right) + \left(a_2 x + b_2 \right) \right] = T\left(a_1 x + b_1 \right) + T\left(a_2 x + b_2 \right)$$

efectuando la suma del lado izquierdo de la igualdad y aplicando T del lado derecho, tenemos:

$$T\left[\left(a_1 + a_2 \right) x + \left(b_1 + b_2 \right) \right] = \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & a_1 + b_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_2 & 0 \\ 0 & a_2 + b_2 \end{bmatrix}$$

aplicando T del lado izquierdo y sumando del lado derecho, se tiene:

$$\begin{bmatrix} b_1 + b_2 & 0 \\ 0 & (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 + b_2 & 0 \\ 0 & (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) \end{bmatrix}$$

$\therefore$ cumple

2) Homogeneidad

$\forall \ f(x) = ax + b$ y $\forall \ \alpha \in \mathbb{R}$

$$T(\alpha f) = \alpha T(f)$$

de donde:

$$T[\alpha(ax + b)] = \alpha T(ax + b)$$

$$T[\alpha ax + \alpha b] = \alpha \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & a + b \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha b & 0 \\ 0 & \alpha a + \alpha b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha b & 0 \\ 0 & \alpha a + \alpha b \end{bmatrix}$$

$\therefore$ cumple

entonces podemos concluir que la transformación T es lineal.

Ejercicio 3.2 Sea M el espacio vectorial real de matrices cuadradas de orden dos con elementos reales y sea $H : M \to M$ una transformación definida por:

$$H(A) = A + A^T \quad ; \quad \forall \ A \in M$$

Determine si H es una transformación lineal.

ÍNDICE
1
2
3
4
5

SOLUCIÓN:

1) Superposición

$\forall \quad A\,,\; B \in M$

$$H(A+B) = H(A) + H(B)$$

$$(A+B) + (A+B)^T = \left(A + A^T\right) + \left(B + B^T\right)$$

$$(A+B) + \left(A^T + B^T\right) = (A+B) + \left(A^T + B^T\right)$$

$\therefore$ cumple

2) Homogeneidad

$\forall \quad A \in M \quad$ y $\quad \forall \quad \alpha \in \mathbb{R}$

$$T(\alpha A) = \alpha T(A)$$

$$\alpha A + (\alpha A)^T = \alpha\left(A + A^T\right)$$

$$\alpha A + \alpha A^T = \alpha A + \alpha A^T$$

$\therefore$ cumple

Entonces concluimos que H es una transformación lineal.

Ejercicio 3.3 Dada la transformación $T: \mathbb{R}^3 \to P_1$, donde $P_1 = \left\{ax+b \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R}\right\}$, cuya regla de correspondencia es:

$$T(a, b, c) = (a+b)x + (a-c) \;;\; \forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$$

a) Determine si T es lineal.

b) Obtenga el recorrido y el núcleo de T.

c) Dé una base y la dimensión del recorrido y del núcleo.

ÍNDICE
1
2
3
4
5

SOLUCIÓN:

a) Las dos propiedades de superposición y homogeneidad que son necesarias demostrar para determinar si una transformación es o no lineal, se pueden juntar en una sola expresión y, si esta se cumple, se puede concluir sobre la linealidad de esta, como a continuación se muestra.

$$\forall\ \bar{v}_1 = (a_1, b_1, c_1),\ \bar{v}_2 = (a_2, b_2, c_2) \in \mathbb{R}^3 \quad \text{y} \quad \forall\ \alpha \in \mathbb{R}$$

$$T(\alpha \bar{v}_1 + \bar{v}_2) = \alpha T(\bar{v}_1) + T(\bar{v}_2)$$

$$T\left[\alpha(a_1, b_1, c_1) + (a_2, b_2, c_2)\right] = \alpha T(a_1, b_1, c_1) + T(a_2, b_2, c_2)$$

de donde se tiene:

$$T\left[(\alpha a_1 + a_2, \alpha b_1 + b_2, \alpha c_1 + c_2)\right] = \alpha\left[(a_1 + b_1)x + (a_1 - c_1)\right] + \left[(a_2 + b_2)x + (a_2 - c_2)\right]$$

aplicando la regla de correspondencia de T del lado izquierdo y efectuando operaciones y factorizando del lado derecho, se tiene:

$$\left[(\alpha a_1 + a_2) + (\alpha b_1 + b_2)\right]x + \left[(\alpha a_1 + a_2) - (\alpha c_1 + c_2)\right] =$$

$$(\alpha a_1 + \alpha b_1)x + (\alpha a_1 - \alpha c_1) + (a_2 + b_2)\ x + (a_2 - c_2)$$

$$\left[(\alpha a_1 + a_2) + (\alpha b_1 + b_2)\right]x + \left[(\alpha a_1 + a_2) - (\alpha c_1 + c_2)\right] =$$

$$\left[(\alpha a_1 + a_2) + (\alpha b_1 + b_2)\right]x + \left[(\alpha a_1 + a_2) - (\alpha c_1 + c_2)\right]$$

como se cumple la igualdad, entonces podemos concluir que la transformación T es lineal.

b) Para obtener el recorrido, se hará uso del teorema 4 enunciado anteriormente. Tomemos entonces la base canónica del dominio, esto es:

$$B = \{(1, 0, 0),\ (0, 1, 0),\ (0, 0, 1)\}$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

de donde:

$$T(1,\ 0,\ 0) = x+1$$

$$T(0,\ 1,\ 0) = x$$

$$T(0,\ 0,\ 1) = -1$$

con lo cual el conjunto $G = \{ x+1,\ x,\ -1 \}$ es generador del recorrido.

Es evidente que G es un conjunto linealmente dependiente ya que $x+1$ se puede obtener como una combinación lineal de los otros dos elementos del conjunto. De acuerdo con esto, se puede llegar a que el conjunto $C = \{ x,\ 1 \}$ es una base del recorrido y, por lo tanto, se tiene que:

$$a(x) + b(1) = ax + b$$

con lo cual se llega a que el recorrido es:

$$T\left(\mathbb{R}^3\right) = \left\{ ax+b \,\middle|\, a,\ b \in \mathbb{R} \right\}$$

Por otro lado, el núcleo se obtiene a partir de la igualdad:

$$T(a,\ b,\ c) = 0x + 0$$

de donde:

$$(a+b)x + (a-c) = 0x + 0$$

por igualdad de polinomios, se llega al sistema:

$$\begin{cases} a+b = 0 \\ a-c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -a \\ c = a \end{cases}$$

por lo tanto, el núcleo de la transformación es:

$$N(T) = \left\{ (a,\ -a,\ a) \,\middle|\, a \in \mathbb{R} \right\}$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

c) Una base del recorrido es:

$$C = \{ x,\ 1 \} \quad \therefore \ \text{Dim } T\left(\mathbb{R}^3\right) = 2$$

Una base del núcleo es:

$$D = \{ (1,\ -1,\ 1) \} \quad \therefore \ \text{Dim } N(T) = 1$$

Obsérvese que el teorema 5 se cumple, ya que:

$$\text{Dim } T\left(\mathbb{R}^3\right) + \text{Dim } N(T) = 3$$

que es igual a la dimensión del dominio.

Nota: Cuando se traten los temas de transformaciones inyectivas, suprayectivas y biyectivas e inversa de una transformación, se retomarán los conceptos de recorrido y núcleo.

Ejercicio 3.4 Sean el espacio vectorial real

$$P_3 = \left\{ ax^3 + bx^2 + cx + d \mid a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{R} \right\}$$

y la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to P_3$ definida por:

$$T(a, b, c) = (a - 2b)x^3 + (b + c)x^2 + (a + 2c)\,x + (a - b + c) \quad ; \quad \forall\,(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$$

a) Determine el núcleo de T y su dimensión.

b) Obtenga el recorrido de T y una de sus bases.

SOLUCIÓN:

a) Para obtener el núcleo, se plantea el sistema:

$$\begin{cases} a - 2b = 0 \\ b + c = 0 \\ a + 2c = 0 \\ a - b + c = 0 \end{cases}$$

Aplicando el método de eliminación de Gauss, tenemos:

$$\begin{matrix}(-1)\\ \\ \\ \\ \end{matrix}\left\{\begin{array}{rcl} a-2b & = & 0 \\ b+c & = & 0 \\ a \quad +2c & = & 0 \\ a-b+c & = & 0 \end{array}\right. \quad (-1)\,(-2)\left\{\begin{array}{rcl} a-2b & = & 0 \\ b+c & = & 0 \\ 2b+2c & = & 0 \\ b+c & = & 0 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{rcll} a-2b & = & 0 & \ldots(1) \\ b+c & = & 0 & \ldots(2) \\ 0 & = & 0 & \\ 0 & = & 0 & \end{array}\right.$$

de las ecuaciones (1) y (2), se tiene:

$$a = 2b$$

$$c = -b$$

si $b = k$, entonces:

$$a = 2k$$

$$c = -k$$

por lo tanto, el núcleo es:

$$N(T) = \left\{ (2k,\ k,\ -k) \,\middle|\, k \in \mathbb{R} \right\}$$

Una base del núcleo es:

$$B_N = \{ 2,\ 1,\ -1 \}$$

$$\therefore \quad \text{Dim } N(T) = 1$$

b) Para obtener el recorrido de T, se obtendrán las imágenes de los elementos de la base canónica del dominio y a partir de estas imágenes y haciendo uso de un isomorfismo, se obtendrá una base del recorrido aplicando los conceptos estudiados en el tema de espacio renglón y columna de una matriz.

Consideremos los siguientes isomorfismos:

$$f\left(ax^3 + bx^2 + cx + d\right) = (a,\ b,\ c,\ d)$$

$$f^{-1}(a,\ b,\ c,\ d) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

entonces, la regla de correspondencia de T se puede expresar como:

$$T(a,\ b,\ c) = (a-2b,\ b+c,\ a+2c,\ a-b+c)$$

obteniendo las imágenes de los elementos de la base canónica, tenemos:

$$T(1,\ 0,\ 0) = (1,\ 0,\ 1,\ 1)$$

$$T(0,\ 1,\ 0) = (-2,\ 1,\ 0,\ -1)$$

$$T(0,\ 0,\ 1) = (0,\ 1,\ 2,\ 1)$$

formando una matriz que tenga por renglones las imágenes obtenidas, se tiene:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

escalonando esta matriz, obtenemos:

$$\begin{array}{c} (2) \\ + \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{array}{c} \\ (-1) \\ + \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

por lo que una base del recorrido es:

$$B_R = \{ (1,\ 0,\ 1,\ 1),\ (0,\ 1,\ 2,\ 1) \}$$

Aplicando el isomorfismo inverso f^{-1} a los vectores de la base, tenemos:

$$f^{-1}(1,\ 0,\ 1,\ 1) = x^3 + x + 1$$

$$f^{-1}(0,\ 1,\ 2,\ 1) = x^2 + 2x + 1$$

Por lo tanto, la base del recorrido en términos de polinomios es:

$$B_R = \left\{ x^3 + x + 1, \quad x^2 + 2x + 1 \right\}$$

Al generar el recorrido a partir de esta base, se tiene:

$$a\left(x^3 + x + 1\right) + b\left(x^2 + 2x + 1\right) = ax^3 + bx^2 + (a + 2b)x + (a + b)$$

Por lo tanto, el recorrido es:

$$T\left(\mathbb{R}^3\right) = \left\{ ax^3 + bx^2 + (a + 2b)x + (a + b) \,\middle|\, a, b, \in \mathbb{R} \right\}$$

Ejercicio 3.5 Sea $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una transformación definida por:

$$T(\bar{a}) = \text{Comp. Vect.}_{\bar{b}}\ \bar{a} \quad ; \ \forall\ \bar{a} \in \mathbb{R}^3 \ \text{ y } \quad \bar{b} = (1, 0, -1)$$

a) Determine si la transformación T es lineal.

b) Obtenga el núcleo de T, una de sus bases y su dimensión.

c) Determine la dimensión del recorrido.

SOLUCIÓN:

a) La regla de correspondencia de la transformación, corresponde al concepto de componente vectorial de un vector sobre otro, cuya fórmula es:

$$\text{Comp. Vect.}_{\bar{b}}\ \bar{a} = \frac{\bar{a} \bullet \bar{b}}{\left|\bar{b}\right|} \frac{\bar{b}}{\left|\bar{b}\right|} = \frac{\bar{a} \bullet \bar{b}}{\left|\bar{b}\right|^2}\ \bar{b}$$

Con lo cual, la regla de correspondencia de T es:

$$T(\bar{a}) = \frac{\bar{a} \bullet \bar{b}}{\left|\bar{b}\right|^2}\ \bar{b}$$

Veamos ahora si esta transformación es lineal:

ÍNDICE
1
2
3
4
5

1) Superposición

$\forall \ \bar{a}_1 , \ \bar{a}_2 \in \mathbb{R}^3$

$$T\left(\bar{a}_1 + \bar{a}_2\right) = T\left(\bar{a}_1\right) + T\left(\bar{a}_2\right)$$

$$\frac{\left(\bar{a}_1 + \bar{a}_2\right) \bullet \bar{b}}{\left|\bar{b}\right|^2} \bar{b} = \frac{\bar{a}_1 \bullet \bar{b}}{\left|\bar{b}\right|^2} \bar{b} + \frac{\bar{a}_2 \bullet \bar{b}}{\left|\bar{b}\right|^2} \bar{b}$$

$$\frac{\left(\bar{a}_1 \bullet \bar{b}\right) + \left(\bar{a}_2 \bullet \bar{b}\right)}{\left|\bar{b}\right|^2} \bar{b} = \left(\frac{\bar{a}_1 \bullet \bar{b}}{\left|\bar{b}\right|^2} + \frac{\bar{a}_2 \bullet \bar{b}}{\left|\bar{b}\right|^2}\right) \bar{b}$$

de donde:

$$\left(\frac{\bar{a}_1 \bullet \bar{b}}{\left|\bar{b}\right|^2} + \frac{\bar{a}_2 + \bar{b}}{\left|\bar{b}\right|^2}\right) \bar{b} = \left(\frac{\bar{a}_1 \bullet \bar{b}}{\left|\bar{b}\right|^2} + \frac{\bar{a}_2 \bullet \bar{b}}{\left|\bar{b}\right|^2}\right) \bar{b}$$

$\therefore$ cumple

2) Homogeneidad

$\forall \ \bar{a} \in \mathbb{R}^3$ y $\forall \ \alpha \in \mathbb{R}$

$$T\left(\alpha \bar{a}\right) = \alpha T\left(\bar{a}\right)$$

$$\frac{\left(\alpha \bar{a}\right) \bullet \bar{b}}{\left|\bar{b}\right|^2} \bar{b} = \alpha \left(\frac{\bar{a} \bullet \bar{b}}{\left|\bar{b}\right|^2} \bar{b}\right)$$

$$\frac{\left(\alpha \bar{a}\right) \bullet \bar{b}}{\left|\bar{b}\right|^2} \bar{b} = \frac{\left(\alpha \bar{a}\right) \bullet \bar{b}}{\left|\bar{b}\right|^2} \bar{b}$$

$\therefore$ cumple

Con lo cual podemos concluir que la transformación T es lineal.

b) Expresemos ahora la regla de correspondencia de la transformación T de la siguiente forma:

si $\bar{a} = (x, y, z)$ y $\bar{b} = (1, 0, -1)$, entonces:

$$T(\bar{a}) = \frac{\bar{a} \bullet \bar{b}}{\left|\bar{b}\right|^2} \bar{b}$$

sustituyendo

$$T(x, x, z) = \frac{(x, x, z) \bullet (1, 0, -1)}{\left|(1, 0, -1)\right|^2} (1, 0, -1)$$

como $\left|(1, 0, -1)\right| = \sqrt{2}$, entonces:

$$T(x, y, z) = \frac{x - z}{2} (1, 0, -1)$$

$$T(x, y, z) = \left(\frac{x - z}{2}, 0, \frac{-x + z}{2} \right)$$

para obtener el núcleo T, hacemos que:

$$\left(\frac{x - z}{2}, 0, \frac{-x + z}{2} \right) = (0, 0, 0)$$

por igualdad de vectores, se llega a:

$$\begin{cases} \dfrac{x - z}{2} = 0 \\ \\ \dfrac{-x + z}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - z = 0 \\ \\ -x + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - z = 0 \\ \\ 0 = 0 \end{cases}$$

de donde:

$$x = z \quad \text{si} \quad z = k_1 \Rightarrow x = k_1$$

Como "y" no interviene en el sistema, entonces puede tomar cualquier valor, esto es $y = k_2$, con lo cual el núcleo de T es:

$$N(T) = \left\{ (k_1, k_2, k_1) \middle| \, k_1, k_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

una base del núcleo es:

$$B_N = \{(1, 0, 1), (0, 1, 0)\}$$

$$\text{Dim } N(T) = 2$$

c) Como la dimensión del dominio es igual a la dimensión del núcleo más la dimensión del recorrido, esto es:

$$\text{Dim } \mathbb{R}^3 = \text{Dim } N(T) + \text{Dim } T(\mathbb{R}^3)$$

$$3 = 2 + \text{Dim } T(\mathbb{R}^3)$$

por lo tanto, la dimensión del recorrido es:

$$\text{Dim } T(\mathbb{R}^3) = 1$$

Matriz asociada a una transformación lineal

Sean V y W dos espacios vectoriales de dimensión n y m, respectivamente, y sean $A = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n\}$ y $B = \{\bar{w}_1, \bar{w}_2, \dots, \bar{w}_m\}$ bases de dichos espacios.

Si $T: V \to W$ es una transformación lineal, existe una matriz única $M_B^A(T)$, de orden $m \times n$, tal que:

$$M_B^A(T)(\bar{v})_A = [T(\bar{v})]_B \quad ; \quad \forall\ \bar{v} \in V$$

Las n columnas de la matriz $M_B^A(T)$, llamada matriz asociada a T, son los vectores de coordenadas en la base B, de las imágenes de los vectores de la base A, esto es:

$$M_B^A(T) = \Big[\, [T(\bar{v}_1)]_B \quad [T(\bar{v}_2)]_B \ \cdots \ [T(\bar{v}_n)]_B \,\Big]$$

Teorema

Sea V un espacio vectorial de dimensión n. La matriz asociada a la transformación identidad $\mathrm{I}: V \rightarrow V$, referida a cualquier base de V es la matriz identidad I_n.

Teorema

Sean $T: V \rightarrow W$ una transformación lineal y A y B dos bases de V y W, respectivamente. El rango de la matriz asociada $M_B^A(T)$ es igual a la dimensión del recorrido de T, esto es:

$$R\left[\, M_B^A(T) \,\right] = \operatorname{Dim} T(V)$$

Ejercicio 3.6 Sean los espacios vectoriales

$$P_2 = \left\{ a x^2 + b x + c \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \middle| \; a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

Ambos definidos sobre el campo real, y sea la transformación lineal $T: P_2 \rightarrow M$ definida por:

$$T\left(a x^2 + b x + c \right) = \begin{bmatrix} a + c & 3b \\ 3b & a - c \end{bmatrix} \; ; \quad \forall \; a, b, c \in \mathbb{R}$$

Obtenga la matriz asociada a la transformación T.

SOLUCIÓN:

Para obtener la matriz asociada a la transformación, se requiere una base del dominio y una del codominio. Consideremos las bases:

$$A = \left\{ x^2,\ x,\ 1 \right\} \quad \text{y} \quad B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Las imágenes de los elementos de la base A son:

$$T\left(x^2\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T(x) = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Obteniendo los vectores de coordenadas de estas imágenes referidas a la base B, tenemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Al realizar las operaciones correspondientes y por igualdad de matrices, fácilmente puede llegarse a:

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)_B = (1,\ 0,\ 1)$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

En forma análoga con las otras dos imágenes, se llega a:

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \beta_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \beta_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \beta_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \right)_B = (0,\ 3,\ 0)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \gamma_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \gamma_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \gamma_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right)_B = (1,\ 0,\ -1)$$

Con lo cual, la matriz asociada a la transformación viene dada por la disposición en columna de dichos vectores de coordenadas, esto es:

$$M_B^A(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 3.7 Sea la transformación lineal $H : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definida por:

$$H(x,\ y,\ z) = (2x + z,\ -y + z,\ -4x - y - z) \quad ; \quad \forall\, (x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3$$

Obtenga la matriz asociada a la transformación H referida a la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

SOLUCIÓN:

Como se sabe, la base canónica de $\mathbb{R}^3$ es:

$$B = \{ (1,\ 0,\ 0),\ (0,\ 1,\ 0),\ (0,\ 0,\ 1) \}$$

Las imágenes de sus elementos son:

$$T(1,\ 0,\ 0) = (2,\ 0,\ -4)$$
$$T(0,\ 1,\ 0) = (0,\ -1,\ -1)$$
$$T(0,\ 0,\ 1) = (1,\ 1,\ -1)$$

Los vectores de coordenadas de las imágenes vienen dados por:

$$(2,\ 0,\ -4) = \alpha_1(1,\ 0,\ 0) + \alpha_2(0,\ 1,\ 0) + \alpha_3(0,\ 0,\ 1)$$

Realizando las operaciones correspondientes y mediante la igualdad de vectores, se llega a:

$$\left[(2,\ 0,\ -4)\right]_B = (2,\ 0,\ -4)$$

En forma similar, fácilmente se puede llegar a:

$$\left[(0,\ -1,\ -1)\right]_B = (0,\ -1,\ -1)$$
$$\left[(1,\ 1,\ -1)\right]_B = (1,\ 1,\ -1)$$

Con lo cual, la matriz asociada a la transformación H es:

$$M_B^B(H) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -4 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Obsérvese que las columnas de la matriz asociada a la transformación H, son precisamente las imágenes de los vectores de los elementos de la base canónica.

En general, cuando se obtenga la matriz asociada a una transformación lineal del tipo $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, será suficiente con obtener las imágenes de los elementos de la base canónica del dominio, y dichas imágenes disponerlas como columnas para llegar a definir la matriz asociada a la transformación.

Ejercicio 3.8 Sea la transformación lineal $T: P \to M$, donde:

$$P = \left\{ ax^2 + bx + c \;\middle|\; a,\, b,\, c \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{y} \quad M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \;\middle|\; a,\, b,\, c \in \mathbb{R} \right\}$$

Obtenga la matriz $M_B^A(T)$ asociada a la transformación:

$$T\left(ax^2 + bx + c \right) = \begin{bmatrix} a+b & c-a \\ c-a & b \end{bmatrix} \quad ; \quad \forall \quad ax^2 + bx + c \in P$$

referida a las bases:

$$A = \left\{ x,\; x^2 + x,\; x^2 - 1 \right\} \quad \text{y} \quad B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

SOLUCIÓN:

Como se ha procedido en los ejercicios anteriores, obtengamos primero las imágenes de los elementos de la base del dominio:

$$T(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T\left(x^2 + x\right) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T\left(x^2 - 1\right) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Obtengamos ahora los vectores de coordenadas en la base B de cada una de las imágenes obtenidas:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \beta_1 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \gamma_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 + \gamma_1 & \alpha_1 + \beta_1 \\ \alpha_1 + \beta_1 & \alpha_1 \end{bmatrix}$$

por igualdad de matrices se llega al sistema:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \gamma_1 = 1 \\ \alpha_1 + \beta_1 = 0 \\ \alpha_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \alpha_1 = 1 \\ \beta_1 = -1 \\ \gamma_1 = 0 \end{array}$$

por lo tanto, el vector de coordenadas buscado es:

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)_B = (1, -1, 0)$$

Considerando la segunda imagen, se tiene:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \beta_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \gamma_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

de donde se llega al sistema:

$$\begin{cases} \alpha_2 + \gamma_2 = 2 \\ \alpha_2 + \beta_2 = -1 \\ \alpha_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \alpha_2 = 1 \\ \beta_2 = -2 \\ \gamma_2 = 1 \end{array}$$

$$\therefore \quad \left(\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right)_B = (1, -2, 1)$$

Tomando la tercera imagen, se tiene:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \alpha_3 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \beta_3 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \gamma_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

de donde se llega al sistema:

$$\left\{ \begin{aligned} \alpha_3 + \gamma_3 &= 1 \\ \alpha_3 + \beta_3 &= -2 \\ \alpha_3 &= 0 \end{aligned} \right. \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \alpha_3 &= 0 \\ \beta_3 &= -2 \\ \gamma_3 &= 1 \end{aligned}$$

$$\therefore \quad \left(\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \right)_B = (0, -2, 1)$$

Con lo cual, la matriz asociada $M_B^A(T)$ solicitada es:

$$M_B^A(T) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 3.9 Sea $T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ una transformación lineal cuya matriz asociada referida a cierta base $B = \{ \bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4 \}$ es igual a:

$$M_B^B(T) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Obtenga la matriz asociada a esta transformación T referida a la base:

a) $B_1 = \{ \overline{v}_1, \ \overline{v}_3, \ \overline{v}_2, \ \overline{v}_4 \}$, esto es, $M_{B_1}^{B_1}(T)$.

b) $B_2 = \{ \overline{v}_1, \ \overline{v}_1+\overline{v}_2, \ \overline{v}_1+\overline{v}_2+\overline{v}_3, \ \overline{v}_1+\overline{v}_2+\overline{v}_3+\overline{v}_4 \}$, esto es, $M_{B_2}^{B_2}(T)$.

SOLUCIÓN:

a) Como se sabe, la matriz $M_B^B(T)$ tiene como columnas los vectores de coordenadas en la base B, de las imágenes de los elementos de la misma base B, esto es:

$$\left(T(\overline{v}_1)\right)_B = (1, \ 3, \ 2, \ 1)$$

$$\left(T(\overline{v}_2)\right)_B = (2, \ 0, \ 5, \ 2)$$

$$\left(T(\overline{v}_3)\right)_B = (0, \ -1, \ 3, \ 1)$$

$$\left(T(\overline{v}_4)\right)_B = (1, \ 2, \ 1, \ 3)$$

Con estos datos se tiene que:

$$T(\overline{v}_1) = \overline{v}_1 + 3\overline{v}_2 + 2\overline{v}_3 + \overline{v}_4 \qquad \ldots (1)$$

$$T(\overline{v}_2) = 2\overline{v}_1 + 5\overline{v}_3 + 2\overline{v}_4 \qquad \ldots (2)$$

$$T(\overline{v}_3) = -\overline{v}_2 + 3\overline{v}_3 + \overline{v}_4 \qquad \ldots (3)$$

$$T(\overline{v}_4) = \overline{v}_1 + 2\overline{v}_2 + \overline{v}_3 + 3\overline{v}_4 \qquad \ldots (4)$$

En este inciso nos piden obtener la matriz asociada $M_{B_1}^{B_1}(T)$, considerando que la base $B_1 = \{ \overline{v}_1, \ \overline{v}_3, \ \overline{v}_2, \ \overline{v}_4 \}$. Como ya tenemos las imágenes de los elementos de B_1, lo que nos queda por hacer es obtener los vectores de coordenadas, en la base B_1, de dichas imágenes.

ÍNDICE
1
2
3
4
5

De (1), se tiene que:

$$\bar{v}_1 + 3\bar{v}_2 + 2\bar{v}_3 + \bar{v}_4 = \alpha_1\bar{v}_1 + \alpha_2\bar{v}_3 + \alpha_3\bar{v}_2 + \alpha_4\bar{v}_4$$

por igualdad, se llega a:

$$\left(T\left(\bar{v}_1\right)\right)_{B_1} = \left(1,\ 2,\ 3,\ 1\right)$$

de (3), se tiene que:

$$-\bar{v}_2 + 3\bar{v}_3 + \bar{v}_4 = \beta_1\bar{v}_1 + \beta_2\bar{v}_3 + \beta_3\bar{v}_2 + \beta_4\bar{v}_4$$

de donde se tiene:

$$\left(T\left(\bar{v}_3\right)\right)_{B_1} = \left(0,\ 3,\ -1,\ 1\right)$$

de (2), se tiene que:

$$2\bar{v}_1 + 5\bar{v}_3 + 2\bar{v}_4 = \gamma_1\bar{v}_1 + \gamma_2\bar{v}_3 + \gamma_3\bar{v}_2 + \gamma_4\bar{v}_4$$

de donde se obtiene:

$$\left(T\left(\bar{v}_2\right)\right)_{B_1} = \left(2,\ 5,\ 0,\ 2\right)$$

de (4), se tiene que:

$$\bar{v}_1 + 2\bar{v}_2 + \bar{v}_3 + 3\bar{v}_4 = \delta_1\bar{v}_1 + \delta_2\bar{v}_3 + \delta_3\bar{v}_2 + \delta_4\bar{v}_4$$

finalmente, se llega a:

$$\left(T\left(\bar{v}_4\right)\right)_{B_1} = \left(1,\ 1,\ 2,\ 3\right)$$

Al disponer en columnas los vectores de coordenadas obtenidos, se llega a la matriz solicitada.

$$\therefore \quad M_{B_1}^{B_1}(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

b) Para obtener $M_{B_2}^{B_2}(T)$ se procederá de la misma forma que en el inciso anterior, esto es, se obtendrán las imágenes de los elementos de la base B_2 y posteriormente, se obtendrán los vectores de coordenadas, en la base B_2, de dichas imágenes.

Se tiene que la base B_2 es:

$$B_2 = \left\{ \bar{v}_1, \quad \bar{v}_1 + \bar{v}_2, \quad \bar{v}_1 + \bar{v}_2 + \bar{v}_3, \quad \bar{v}_1 + \bar{v}_2 + \bar{v}_3 + \bar{v}_4 \right\}$$

Obteniendo las imágenes de los elementos de esta base, se tiene:

$$T\left(\bar{v}_1\right) = \bar{v}_1 + 3\bar{v}_2 + 2\bar{v}_3 + \bar{v}_4 \qquad \ldots(5)$$

Que corresponde a la expresión (1) del inciso anterior.

Para el segundo elemento de B_2 y teniendo en cuenta que T es una transformación lineal, tenemos:

$$T\left(\bar{v}_1 + \bar{v}_2\right) = T\left(\bar{v}_1\right) + T\left(\bar{v}_2\right)$$

sustituyendo (1) y (2):

$$T\left(\bar{v}_1 + \bar{v}_2\right) = \left(\bar{v}_1 + 3\bar{v}_2 + 2\bar{v}_3 + \bar{v}_4\right) + \left(2\bar{v}_1 + 5\bar{v}_3 + 2\bar{v}_4\right)$$

$$T\left(\bar{v}_1 + \bar{v}_2\right) = 3\bar{v}_1 + 3\bar{v}_2 + 7\bar{v}_3 + 3\bar{v}_4 \qquad \ldots(6)$$

Para el tercer elemento de B_2, se tiene:

$$T\left(\bar{v}_1 + \bar{v}_2 + \bar{v}_3\right) = T\left(\bar{v}_1\right) + T\left(\bar{v}_2\right) + T\left(\bar{v}_3\right)$$

sustituyendo (1), (2) y (3):

$$T\left(\bar{v}_1 + \bar{v}_2 + \bar{v}_3\right) = \left(\bar{v}_1 + 3\bar{v}_2 + 2\bar{v}_3 + \bar{v}_4\right) + \left(2\bar{v}_1 + 5\bar{v}_3 + 2\bar{v}_4\right) + \left(-\bar{v}_2 + 3\bar{v}_3 + \bar{v}_4\right)$$

de donde:

$$T\left(\bar{v}_1 + \bar{v}_2 + \bar{v}_3\right) = 3\bar{v}_1 + 2\bar{v}_2 + 10\bar{v}_3 + 4\bar{v}_4 \qquad \ldots(7)$$

Para el cuarto elemento de B_2, tenemos:

$$T\left(\bar{v}_1 + \bar{v}_2 + \bar{v}_3 + \bar{v}_4\right) = T\left(\bar{v}_1\right) + T\left(\bar{v}_2\right) + T\left(\bar{v}_3\right) + T\left(\bar{v}_4\right)$$

sustituyendo (1), (2), (3) y (4):

$$T\left(\bar{v}_1 + \bar{v}_2 + \bar{v}_3 + \bar{v}_4\right) = \left(\bar{v}_1 + 3\bar{v}_2 + 2\bar{v}_3 + \bar{v}_4\right) + \left(2\bar{v}_1 + 5\bar{v}_3 + 2\bar{v}_4\right) + \left(-\bar{v}_2 + 3\bar{v}_3 + \bar{v}_4\right) + \left(\bar{v}_1 + 2\bar{v}_2 + \bar{v}_3 + 3\bar{v}_4\right)$$

de donde:

$$T\left(\bar{v}_1 + \bar{v}_2 + \bar{v}_3 + \bar{v}_4\right) = 4\bar{v}_1 + 4\bar{v}_2 + 11\bar{v}_3 + 7\bar{v}_4 \qquad \ldots(8)$$

Obtengamos ahora los vectores de coordenadas, en la base B_2, de las imágenes obtenidas:

Para (5), tenemos que:

$$\bar{v}_1 + 3\bar{v}_2 + 2\bar{v}_3 + \bar{v}_4 = \alpha_1\left(\bar{v}_1\right) + \alpha_2\left(\bar{v}_1 + \bar{v}_2\right) + \alpha_3\left(\bar{v}_1 + \bar{v}_2 + \bar{v}_3\right) + \alpha_4\left(\bar{v}_1 + \bar{v}_2 + \bar{v}_3 + \bar{v}_4\right)$$

desarrollando el lado derecho y factorizando, tenemos:

$$\bar{v}_1 + 3\bar{v}_2 + 2\bar{v}_3 + \bar{v}_4 = \left(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4\right)\bar{v}_1 + \left(\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4\right)\bar{v}_2 + \left(\alpha_3 + \alpha_4\right)\bar{v}_3 + \left(\alpha_4\right)\bar{v}_4$$

de donde se llega al sistema:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 1 \\ \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 3 \\ \alpha_3 + \alpha_4 = 2 \\ \alpha_4 = 1 \end{cases}$$

al resolver el sistema, se llega a:

$$\alpha_4 = 1, \qquad \alpha_3 = 1, \qquad \alpha_2 = 1 \qquad \text{y} \qquad \alpha_1 = -2$$

por lo tanto, el vector de coordenadas es:

$$\left(T\left(\bar{v}_1 \right) \right)_{B_2} = \left(-2,\ 1,\ 1,\ 1 \right)$$

Para (6), tenemos que:

$$3\bar{v}_1 + 3\bar{v}_2 + 7\bar{v}_3 + 3\bar{v}_4 = \beta_1\left(\bar{v}_1 \right) + \beta_2\left(\bar{v}_1 + \bar{v}_2 \right) + \beta_3\left(\bar{v}_1 + \bar{v}_2 + \bar{v}_3 \right) + \beta_4\left(\bar{v}_1 + \bar{v}_2 + \bar{v}_3 + \bar{v}_4 \right)$$

de donde:

$$3\bar{v}_1 + 3\bar{v}_2 + 7\bar{v}_3 + 3\bar{v}_4 = \left(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 \right)\bar{v}_1 + \left(\beta_2 + \beta_3 + \beta_4 \right)\bar{v}_2 + \left(\beta_3 + \beta_4 \right)\bar{v}_3 + \left(\beta_4 \right)\bar{v}_4$$

para este caso, el sistema es:

$$\begin{cases} \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 = 3 \\ \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 = 3 \\ \beta_3 + \beta_4 = 7 \\ \beta_4 = 3 \end{cases}$$

al resolverlo, se llega a:

$$\beta_4 = 3, \qquad \beta_3 = 4, \qquad \beta_2 = -4 \qquad \text{y} \qquad \beta_1 = 0$$

con lo cual el vector de coordenadas es:

$$\left(T\left(\bar{v}_1 + \bar{v}_2 \right) \right)_{B_2} = \left(0,\ -4,\ 4,\ 3 \right)$$

Para (7), tenemos que:

$$3\overline{v}_1 + 2\overline{v}_2 + 10\,\overline{v}_3 + 4\overline{v}_4 = \gamma_1\left(\overline{v}_1\right) + \gamma_2\left(\overline{v}_1 + \overline{v}_2\right) + \gamma_3\left(\overline{v}_1 + \overline{v}_2 + \overline{v}_3\right) +$$

$$\gamma_4\left(\overline{v}_1 + \overline{v}_2 + \overline{v}_3 + \overline{v}_4\right)$$

ahora, el sistema sería:

$$\begin{cases} \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 = 3 \\ \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 = 2 \\ \gamma_3 + \gamma_4 = 10 \\ \gamma_4 = 4 \end{cases}$$

al resolverlo, llegamos a:

$$\gamma_4 = 4\,, \qquad \gamma_3 = 6\,, \qquad \gamma_2 = -8 \qquad \text{y} \qquad \gamma_1 = 1$$

por lo tanto, el vector de coordenadas es:

$$\left(T\left(\overline{v}_1 + \overline{v}_2 + \overline{v}_3\right)\right)_{B_2} = \left(1,\ -8,\ 6,\ 4\right)$$

Finalmente, para (8) tenemos que:

$$4\overline{v}_1 + 4\overline{v}_2 + 11\overline{v}_3 + 7\overline{v}_4 = \delta_1\left(\overline{v}_1\right) + \delta_2\left(\overline{v}_1 + \overline{v}_2\right) + \delta_3\left(\overline{v}_1 + \overline{v}_2 + \overline{v}_3\right) +$$

$$\delta_4\left(\overline{v}_1 + \overline{v}_2 + \overline{v}_3 + \overline{v}_4\right)$$

el sistema sería:

$$\begin{cases} \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 = 4 \\ \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 = 4 \\ \delta_3 + \delta_4 = 11 \\ \delta_4 = 7 \end{cases}$$

cuya solución sería:

$$\delta_4 = 7\,, \qquad \delta_3 = 4\,, \qquad \delta_2 = -7 \quad \text{y} \quad \delta_1 = 0$$

entonces, el vector de coordenadas es:

$$\left(T\left(\overline{v}_1 + \overline{v}_2 + \overline{v}_3 + \overline{v}_4 \right) \right)_{B_2} = \left(0,\ -7,\ 4,\ 7 \right)$$

Disponiendo en columnas los vectores de coordenadas obtenidos, se llega a que la matriz $M_{B_2}^{B_2}(T)$ es:

$$\therefore \qquad M_{B_2}^{B_2}(T) = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & -8 & -7 \\ 1 & 4 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 3.10 Sea la transformación lineal $T\colon P_2 \to P_2$, donde:

$$P_2 = \left\{ ax^2 + bx + c \;\middle|\; a,\ b,\ c \in \mathbb{R} \right\}$$

Si se sabe que:

$$T\left(x^2+1\right) = 1$$

$$T\left(x^2+x\right) = x^2 - x + 1$$

$$T\left(2x-1\right) = 2x^2 - x$$

obtenga la regla de correspondencia de T.

SOLUCIÓN:

Para resolver este ejercicio se seguirán dos caminos distintos.

ÍNDICE
1
2
3
4
5

MÉTODO 1:

Lo primero que resulta conveniente determinar es si el conjunto formado por los tres vectores, de los cuales conocemos sus imágenes, resulta ser una base del dominio.

Dado que el espacio P_2 es de dimensión tres, entonces el conjunto $\{ x^2+1, \ x^2+x, \ 2x-1 \}$ será una de sus bases, si se demuestra que es linealmente independiente. Para ello, será suficiente formar un determinante con los coeficientes de los polinomios y, si este es diferente de cero, entonces el conjunto es una base de P_2. Se tiene, por tanto, que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Entonces, el conjunto dado es una base de P_2.

De lo anterior sabemos que, cualquier vector de P_2 puede ser expresado como una combinación lineal de los elementos de dicho conjunto. Tomemos entonces un vector genérico de P_2.

Sea $ax^2+bx+c \in P_2$. Se tiene que:

$$ax^2+bx+c = \alpha_1 \left(x^2+1 \right) + \alpha_2 \left(x^2+x \right) + \alpha_3 \left(2x-1 \right) \qquad \text{… (a)}$$

realizando operaciones y factorizando en el segundo miembro, tenemos:

$$ax^2+bx+c = \left(\alpha_1 + \alpha_2 \right) x^2 + \left(\alpha_2 + 2\alpha_3 \right) x + \left(\alpha_1 - \alpha_3 \right)$$

por igualdad de polinomios se llega al sistema:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 & = a \\ \alpha_2 + 2\alpha_3 & = b \\ \alpha_1 - \alpha_3 & = c \end{cases}$$

Aplicando el método de eliminación de Gauss para obtener la solución del sistema, tenemos:

$$(-1)\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 & = a \\ \alpha_2 + 2\alpha_3 & = b \\ \alpha_1 - \alpha_3 & = c \end{cases} \sim (1)\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 & = a \\ \alpha_2 + 2\alpha_3 & = b \\ -\alpha_2 - \alpha_3 & = c - a \end{cases} \sim$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = a & \ldots(1) \\ \alpha_2 + 2\alpha_3 = b & \ldots(2) \\ \alpha_3 = -a + b + c & \ldots(3) \end{cases}$$

sustituyendo (3) en (2):

$$\alpha_2 + 2\left(-a + b + c\right) = b$$

de donde:

$$\alpha_2 = 2a - b - 2c \qquad \ldots(4)$$

sustituyendo (4) en (1):

$$\alpha_1 + \left(2a - b - 2c\right) = a \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = -a + b + 2c \qquad \ldots(5)$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

Aplicando T en ambos lados de la expresión (a), tenemos:

$$T\left(ax^2+bx+c\right)=T\left[\alpha_1\left(x^2+1\right)+\alpha_2\left(x^2+x\right)+\alpha_3\left(2x-1\right)\right]$$

Dado que T es una transformación lineal, entonces la expresión anterior se puede escribir como:

$$T\left(ax^2+bx+c\right)=\alpha_1 T\left(x^2+1\right)+\alpha_2 T\left(x^2+x\right)+\alpha_3 T\left(2x-1\right)$$

del enunciado sabemos que:

$$T\left(x^2+1\right)=1$$

$$T\left(x^2+x\right)=x^2-x+1$$

$$T\left(2x-1\right)=2x^2-x$$

sustituyendo, tenemos:

$$T\left(ax^2+bx+c\right)=\alpha_1(1)+\alpha_2\left(x^2-x+1\right)+\alpha_3\left(2x^2-x\right)$$

sustituyendo ahora (3), (4) y (5), tenemos:

$$T\left(ax^2+bx+c\right)=(-a+b+2c)(1)+(2a-b-2c)\left(x^2-x+1\right)+(-a+b+c)\left(2x^2-x\right)$$

desarrollando los productos:

$$T\left(ax^2+bx+c\right)=(-a+b+2c)+\left(2ax^2-2ax+2a-bx^2+bx-b-2cx^2+2cx-2c\right)$$
$$+\left(-2ax^2+ax+2bx^2-bx+2cx^2-cx\right)$$

ÍNDICE 1 2 3 4 5

al agrupar y factorizar, se tiene:

$$T\left(ax^2+bx+c\right)=\left(2a-b-2c-2a+2b+2c\right)x^2+\left(-2a+b+2c+a-b-c\right)x$$

$$+\left(-a+b+2c+2a-b-2c\right)$$

finalmente, se llega a:

$$T\left(ax^2+bx+c\right)=bx^2+\left(c-a\right)x+a$$

Que es la regla de correspondencia de T solicitada.

MÉTODO 2:

Del enunciado, se tiene que:

$$T\left(x^2+1\right)=1$$

$$T\left(x^2+x\right)=x^2-x+1$$

$$T\left(2x-1\right)=2x^2-x$$

Dado que T es una transformación lineal, entonces lo anterior se puede expresar como:

$$T\left(x^2\right)+T\left(1\right)=1 \qquad \ldots(6)$$

$$T\left(x^2\right)+T\left(x\right)=x^2-x+1 \qquad \ldots(7)$$

$$2T\left(x\right)-T\left(1\right)=2x^2-x \qquad \ldots(8)$$

de (6) y (7), se tiene que:

$$T\left(1\right)=1-T\left(x^2\right) \qquad \ldots(9)$$

$$T\left(x\right)=\left(x^2-x+1\right)-T\left(x^2\right) \qquad \ldots(10)$$

sustituyendo (9) y (10) en (8), tenemos:

$$2\left[x^2 - x + 1 - T\left(x^2\right)\right] - \left[1 - T\left(x^2\right)\right] = 2x^2 - x$$

$$2x^2 - 2x + 2 - 2T\left(x^2\right) - 1 + T\left(x^2\right) = 2x^2 - x$$

de donde:

$$-T\left(x^2\right) + 2x^2 - 2x + 1 = 2x^2 - x$$

$$\therefore \quad T\left(x^2\right) = -x + 1 \qquad \ldots (11)$$

sustituyendo (11) en (9), se tiene:

$$T(1) = 1 - (-x + 1)$$

$$\therefore \quad T(1) = x \qquad \ldots (12)$$

sustituyendo (11) en (10):

$$T(x) = \left(x^2 - x + 1\right) - (-x + 1)$$

$$\therefore \quad T(x) = x^2 \qquad \ldots (13)$$

Por otro lado, si aplicamos T al polinomio $ax^2 + bx + c$ y teniendo presente que T es lineal, entonces se tiene que:

$$T\left(ax^2 + bx + c\right) = a\,T\left(x^2\right) + b\,T(x) + c\,T(1)$$

sustituyendo (11), (12) y (13), tenemos:

$$T\left(ax^2 + bx + c\right) = a(-x + 1) + b\left(x^2\right) + c(x)$$

$$\therefore \quad T\left(ax^2 + bx + c\right) = bx^2 + (c - a)x + a$$

Que resulta ser la misma regla de correspondencia que se obtuvo por el método 1.

Ejercicio 3.11 Para la transformación lineal $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ se tiene que:

$$M_B^A(T) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

donde:

$A = \{(1, -1), (-1, 2)\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$

$B = \{(1, 0, 1), (-1, 1, 0), (0, 1, 2)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$

Determine la regla de correspondencia de la transformación T.

SOLUCIÓN:

Para resolver este ejercicio, se hará uso de la expresión:

$$M_B^A(T)(\bar{v})_A = [T(\bar{v})]_B \qquad \ldots (1)$$

que viene dada en la definición del concepto de matriz asociada a una transformación lineal. En esta expresión, el vector $\bar{v}$ representa un vector cualquiera (x, y) del dominio de T, esto es: $\bar{v} = (x, y)$.

Como el conjunto A es una base de $\mathbb{R}^2$, entonces el vector (x, y) puede ser expresado como una combinación lineal de los elementos de A, esto es:

$$(x, y) = \alpha_1(1, -1) + \alpha_2(-1, 2)$$

de donde surge el sistema:

$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 = x \\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 = y \end{cases}$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

al resolver este sistema, se llega a:

$$\alpha_1 = 2x + y$$

$$\alpha_2 = x + y$$

Con lo cual, el vector de coordenadas de $\bar{v}$ referido a la base A es:

$$(\bar{v})_A = (2x + y,\ x + y)$$

sustituyendo $M_B^A(T)$ y $(\bar{v})_A$ en la expresión (1), tenemos:

$$[T(\bar{v})]_B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2x + y \\ x + y \end{bmatrix}$$

de donde:

$$[T(\bar{v})]_B = \begin{bmatrix} 4x + 2y - x - y \\ 2x + y \\ -2x - y + x + y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x + y \\ 2x + y \\ -x \end{bmatrix}$$

entonces, el vector de coordenadas de la imagen de $\bar{v}$ referido a la base B, es:

$$[T(\bar{v})]_B = (3x + y,\ 2x + y,\ -x)$$

Con este vector de coordenadas y la base B, se tiene que:

$$T(x, y) = (3x + y)(1, 0, 1) + (2x + y)(-1, 1, 0) + (-x)(0, 1, 2)$$

$$T(x, y) = (3x + y,\ 0,\ 3x + y) + (-2x - y,\ 2x + y,\ 0) + (0,\ -x,\ -2x)$$

finalmente:

$$T(x, y) = (x,\ x + y,\ x + y)$$

Álgebra de transformaciones lineales

Adición y multiplicación por un escalar

Sean V y W dos espacios vectoriales definidos sobre un campo K, y sean $T\colon V \to W$ y $H\colon V \to W$ dos transformaciones lineales.

1) La suma $T + H$ de T y H es una transformación lineal de V en W definida por:

$$(T+H)(\bar{v}) = T(\bar{v}) + H(\bar{v}) \quad ; \qquad \forall\ \bar{v} \in V$$

2) El producto de un escalar $\alpha \in K$ por la transformación T es una transformación lineal de V en W que se denota con αT y se define como:

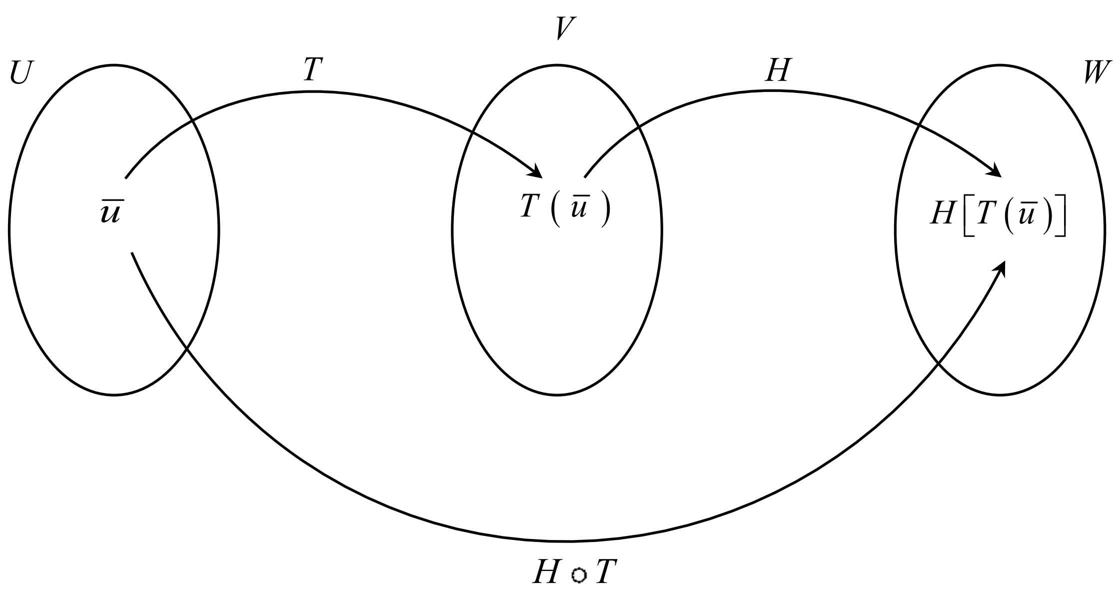
$$(\alpha T)(\bar{v}) = \alpha T(\bar{v}) \quad ; \quad \forall\ \bar{v} \in V$$

Composición

3) Sean $T\colon U \to V$ y $H\colon V \to W$ dos transformaciones lineales. La operación $H \circ T$ es una transformación lineal de U en W definida por:

$$(H \circ T)(\bar{u}) = H\left[\, T(\bar{u}) \,\right] \quad ; \quad \forall\ \bar{u}\ \ U$$

La operación composición puede representarse gráficamente de la siguiente forma:



Propiedades de las operaciones con transformaciones lineales

Propiedades de la adición y la multiplicación por un escalar

Sean V y W dos espacios vectoriales sobre un campo K y sean las transformaciones lineales:

$$T: V \rightarrow W$$
$$R: V \rightarrow W$$
$$S: V \rightarrow W$$

Se tiene que:

1) $T + R = R + T$

2) $(T + R) + S = T + (R + S)$

3) $\alpha(\beta T) = (\alpha\beta)T \quad ; \quad \forall\ \alpha, \beta \in K$

4) $(\alpha + \beta)T = \alpha T + \beta T \quad ; \quad \forall\ \alpha, \beta \in K$

5) $\alpha(T + R) = \alpha T + \alpha R \quad ; \quad \forall\ \alpha \in K$

Propiedades de la composición de transformaciones lineales

Sean U, V, W y X espacios vectoriales sobre un campo K y sean las transformaciones lineales:

$$T: U \rightarrow V$$
$$R: U \rightarrow V$$
$$H: W \rightarrow X$$
$$S: V \rightarrow W$$
$$F: V \rightarrow W$$

Se tiene que:

1) $\mathrm{H} \circ (S \circ T) = (H \circ S) \circ \mathrm{T}$

2) $\alpha(S \circ T) = (\alpha \mathrm{S}) \circ \mathrm{T} = \mathrm{S} \circ (\alpha T) \quad ; \quad \forall\ \alpha \in K$

3) $S \circ (T + R) = (S \circ T) + (S \circ R)$

4) $(S + F) \circ T = (S \circ T) + (F \circ T)$

Teoremas

Sean V y W dos espacios vectoriales definidos sobre un campo K, y sean A y B bases de V y W, respectivamente. Si T y H son dos transformaciones lineales cualesquiera de V en W, entonces:

1) $M_B^A(T+H) = M_B^A(T) + M_B^A(H)$

2) $M_B^A(\alpha T) = \alpha M_B^A(T) \quad ; \qquad \forall\ \alpha \in K$

Sean U, V y W tres espacios vectoriales definidos sobre un campo K, y sean A, B y C bases de U, V y W, respectivamente.

Si $T: U \to V$ y $H: V \to W$ son dos transformaciones lineales, entonces:

3) $M_C^A(H \circ T) = M_C^B(H)\, M_B^A(T)$

Ejercicio 3.12 Dadas las transformaciones lineales:

$$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad \text{donde} \qquad T(x, y) = (-x, 2x-3y)$$

$$S: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad \text{donde} \qquad S(x, y) = (x-y, 3y)$$

Obtenga el vector $\bar{v}$, tal que:

$$(S \circ T)(\bar{v}) = (-1, 1)$$

SOLUCIÓN:

Considerando a $\bar{v} = (x, y)$, entonces se tiene que:

$$(S \circ T)(x, y) = S\left[T(x, y)\right] = (-1, 1)$$

de donde:

$$S(-x, 2x-3y) = (-1, 1)$$

aplicando la regla de la transformación S, tenemos:

$$\left[-x-(2x-3y),\ 3(2x-3y)\right]=(-1,\ 1)$$

simplificando, se tiene:

$$(-3x+3y,\ 6x-9y)=(-1,\ 1)$$

por igualdad de vectores se llega al sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases}-3x+3y=-1\\ 6x-9y=1\end{cases}$$

cuya solución es:

$$x=\frac{2}{3}\qquad\qquad y=\frac{1}{3}$$

con lo cual el vector $\overline{v}$ es:

$$\overline{v}=\left(\frac{2}{3},\ \frac{1}{3}\right)$$

Ejercicio 3.13 Sea el espacio vectorial $M=\left\{\begin{bmatrix}x & 0\\ 0 & y\end{bmatrix}\ \middle|\ x,\ y\in\mathbb{R}\right\}$ y las transformaciones lineales:

$H:\mathbb{R}^2\rightarrow M$ dada por $H(x,\ y)=\begin{bmatrix}x+y & 0\\ 0 & y\end{bmatrix}$; $\forall\ (x,y)\in\mathbb{R}^2$

$S:\ \mathbb{R}^2\rightarrow\mathbb{R}^2$ dada por $S(x,\ y)=(-x,\ 0)$; $\forall\ (x,y)\in\mathbb{R}^2$

Determine la regla de correspondencia de la transformación $T:M\rightarrow\mathbb{R}^2$, tal que:

$$\left[2S+(T\circ H)\right](x,\ y)=(0,\ y)$$

SOLUCIÓN:

Partiendo de la expresión dada, tenemos:

$$\left[\,2S + (T \circ H)\,\right](x,\ y) = (0,\ y)$$

de donde se tiene:

$$2S(x,\ y) + (T \circ H)(x,\ y) = (0,\ y)$$

Despejando:

$$(T \circ H)(x,\ y) = (0,\ y) - 2S(x,\ y)$$

aplicando S, tenemos:

$$(T \circ H)(x,\ y) = (0,\ y)\ -2(-x, 0)$$

$$(T \circ H)(x,\ y) = (2x,\ y) \qquad \ldots (1)$$

Por otro lado, en términos de matrices asociadas sabemos que:

$$M(T)\ M(H) = M(T \circ H)$$

Siempre que las matrices asociadas estén referidas a bases canónicas o bases naturales.

Esta ecuación resulta ser una ecuación matricial, de la cual podemos despejar $M(T)$, esto es:

$$M(T)\ M(H)\ M^{-1}(H) = M(T \circ H)\ M^{-1}(H)$$

de donde se tiene:

$$M(T) = M(T \circ H)\ M^{-1}(H) \qquad \ldots (2)$$

Para obtener $M(T)$, necesitamos obtener las matrices asociadas de $(T \circ H)$ y de H.

Si aplicamos isomorfismo, podemos expresar a la transformación H como:

$$H(x, y) = (x + y, y); \text{ aplicando } f\left(\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}\right) = (a, b)$$

Considerando la base canónica, tenemos:

$$\begin{aligned} H(1, 0) &= (1, 0) \\ H(0, 1) &= (1, 1) \end{aligned} \Rightarrow M(H) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \ldots (3)$$

Por otro lado, considerando la expresión (1), tenemos:

$$\begin{aligned} (T \circ H)(1, 0) &= (2, 0) \\ (T \circ H)(0, 1) &= (0, 1) \end{aligned} \Rightarrow M(T \circ H) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \ldots (4)$$

de (3), se obtiene que:

$$M^{-1}(H) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \ldots (5)$$

sustituyendo (4) y (5) en (2), tenemos:

$$M(T) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

de donde:

$$M(T) = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como la transformación $T : M \rightarrow \mathbb{R}^2$, entonces mediante el isomorfismo podemos lograr que $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, con lo cual se puede expresar:

$$T(x, y) = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x - 2y \\ y \end{bmatrix}$$

esto es:

$$T(x,\ y) = (2x - 2y,\ \ y)$$

Finalmente, aplicando el isomorfismo inverso, tenemos:

$$T\left(\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}\right) = (2x - 2y,\ \ y)$$

Ejercicio 3.14 Si $M(T)$, $M(S)$ y $M(H)$ son las matrices asociadas a las transformaciones lineales T, S y H respectivamente, donde:

$$T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2\ , \qquad S: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \quad \text{y} \quad H: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

y sus matrices asociadas son:

$$M(T) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},\quad M(S) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},\quad M(H) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

obtenga la regla de correspondencia de la transformación:

$$(3T \circ H\ +\ S \circ H)(x,\ y)$$

SOLUCIÓN:

Antes de iniciar con la solución del ejercicio, es conveniente hacer la siguiente aclaración:

Cuando en una matriz asociada a una transformación no se especifican las bases a las cuales está referida y los espacios vectoriales sobre los cuales actúa la transformación son del tipo $\mathbb{R}^n$, como las matrices asociadas dadas en este ejercicio, entonces se deberá entender que dichas matrices asociadas están referidas a las bases canónicas del dominio y del codominio de la transformación.

Las operaciones $\left(3T\circ H + S\circ H\right)$ pueden ser expresadas en términos matriciales de la siguiente forma:

$$3M(T)M(H) + M(S)M(H)$$

con lo cual se tiene que:

$$M(3T\circ H + S\circ H) = 3M(T)M(H) + M(S)M(H)$$

si factorizamos $M(H)$, tenemos:

$$M(3T\circ H + S\circ H) = \left[3M(T) + M(S)\right]M(H)$$

sustituyendo las matrices asociadas se tiene que:

$$M(3T\circ H + S\circ H) = \left(3\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$M(3T\circ H + S\circ H) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad M(3T\circ H + S\circ H) = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$$

Con lo cual, si se obtiene la imagen de un vector cualquiera (x, y) por medio de la matriz asociada, se tiene que:

$$M(3T\circ H + S\circ H)(x, y) = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5x + 5y \\ 3x + 9y \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, la regla de correspondencia buscada es:

$$(3T\circ H + S\circ H)(x, y) = (5x + 5y,\ 3x + 9y)$$

Transformaciones lineales inyectivas, suprayectivas y biyectivas

1) Transformación inyectiva: Una transformación lineal es inyectiva, si y solo si, el núcleo de dicha transformación es de dimensión cero.

2) Transformación suprayectiva: Una transformación lineal es suprayectiva, si y solo si, la dimensión del recorrido es igual a la dimensión del codominio, o bien, si la dimensión del núcleo es igual a cero, entonces la transformación será suprayectiva, si la dimensión del dominio es igual a la dimensión del codominio.

3) Transformación biyectiva: Una transformación lineal es biyectiva, si y solo si, es inyectiva y suprayectiva, es decir, si la dimensión del núcleo es igual a cero y la dimensión del recorrido es igual a la dimensión del codominio.

Inversa de una transformación lineal

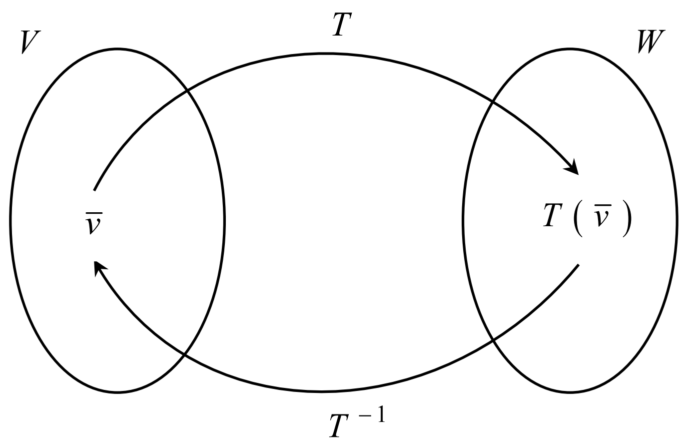
Sea $T: V \to W$ una transformación lineal. La inversa de T es una transformación lineal $T^{-1}: W \to V$, para la cual se cumple que:

1) $T^{-1} \circ T = I_V$

2) $T \circ T^{-1} = I_W$

Donde I_V e I_W son transformaciones identidad en V y W, respectivamente.

Gráficamente:



ÍNDICE
1
2
3
4
5

Teorema

Sean V y W dos espacios vectoriales de dimensión finita, $T: V \to W$ una transformación lineal y A, B bases de V y W, respectivamente:

1) T^{-1} existe, si y solo si, $M_B^A(T)$ es no singular.

2) Si T^{-1} existe, entonces $\left[M_B^A(T) \right]^{-1} = M_A^B\left(T^{-1}\right)$.

Propiedades de la transformación inversa

Sean U, V y W espacios vectoriales sobre un campo K y sean $T: U \to V$ y $R: V \to W$ dos transformaciones lineales biyectivas. Se tiene que:

1) T^{-1} es única

2) $\left(T^{-1}\right)^{-1} = T$

3) $(R \circ T)^{-1} = T^{-1} \circ R^{-1}$

4) $(\alpha T)^{-1} = \dfrac{1}{\alpha} T^{-1}$; $\forall\ \alpha \in K$ con $\alpha \neq 0$

Ejercicio 3.15 Sea la transformación lineal $T: M \to P_1$ definida por:

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}\right) = (a-b)\,x + (a+b) \quad ; \quad \forall \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} \in M$$

donde:

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} \middle|\ a, b \in \mathbb{R} \right\} \qquad \text{y} \qquad P_1 = \left\{ ax + b \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

a) Determine si T es biyectiva.

b) De ser posible, obtenga la transformación inversa T^{-1}.

SOLUCIÓN:

a) Obteniendo el núcleo de T.

Al igualar a cero el recorrido, se genera el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} a - b = 0 \\ a + b = 0 \end{cases}$$

cuya única solución es:

$$a = 0$$

$$b = 0$$

de donde el núcleo de T es:

$$N(T) = \{\bar{0}\} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Dim} N(T) = 0$$

con lo cual podemos concluir que T es inyectiva.

Por otro lado, se puede apreciar que el dominio y el codominio de T son espacios de dimensión dos, y como el núcleo es de dimensión cero, entonces T es suprayectiva. Al ser T inyectiva y suprayectiva, entonces T es biyectiva.

b) Como T resultó ser biyectiva, entonces T^{-1} existe.

Para obtener T^{-1}, primeramente transformaremos los espacios vectoriales M y P_1 a espacios del tipo $\mathbb{R}^n$, mediante dos isomorfismos.

Como M y P_1 son espacios vectoriales de dimensión dos, entonces son isomorfos a $\mathbb{R}^2$. De acuerdo con esto, podemos plantear los isomorfismos:

$$f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}\right) = (a, b)$$

$$g(ax + b) = (a, b)$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

con lo cual la regla de correspondencia de T quedaría como:

$$T(a, b) = (a - b, a + b)$$

Obteniendo la matriz asociada a T con la base canónica, tenemos:

$$\begin{array}{l} T(1, 0) = (1, 1) \\ \\ T(0, 1) = (-1, 1) \end{array} \Rightarrow M(T) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

de donde se tiene que:

$$\left[M(T) \right]^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = M\left(T^{-1}\right)$$

a partir de esto, tenemos que:

$$T^{-1}(a, b) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{a+b}{2} \\ \dfrac{-a+b}{2} \end{bmatrix}$$

esto es:

$$T^{-1}(a, b) = \left(\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2} \right)$$

aplicando los isomorfismos inversos y tomando en cuenta que $T^{-1}: P_1 \to M$, tenemos:

$$T^{-1}(ax + b) = \begin{bmatrix} \dfrac{a+b}{2} & \dfrac{b-a}{2} \\ \dfrac{b-a}{2} & \dfrac{a+b}{2} \end{bmatrix}$$

Ejercicio 3.16 Sea $T : P_1 \to P_1$, donde $P_1 = \left\{ ax + b \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$, una transformación lineal tal que:

$$M_B^A(T) = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

es su matriz asociada referida a las bases:

$$A = \{ 2x, 3 \} \quad \text{y} \quad B = \{ x, x+3 \}$$

del dominio y codominio respectivamente.

a) Determine si la transformación T es biyectiva.

b) Obtenga, si existe, T^{-1}.

SOLUCIÓN:

a) Dado que $\text{Det}\left(M_B^A(T) \right) = 2$, entonces podemos garantizar que:

$$\left[M_B^A(T) \right]^{-1} \quad \text{existe}$$

Como $M_A^B\left(T^{-1}\right) = \left[M_B^A(T) \right]^{-1}$, entonces T^{-1} existe, por lo que podemos asegurar que T es biyectiva.

b) Como $M_B^A(T) = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad M_A^B\left(T^{-1}\right) = \dfrac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

Para obtener la regla de correspondencia de T^{-1}, se procede de la siguiente forma:

Obtengamos primero el vector de coordenadas de un vector cualquiera $ax+b$ de P_1, referido a la base B.

$$ax + b = \alpha(x) + \beta(x+3)$$

$$ax + b = (\alpha + \beta)x + 3\beta$$

por igualdad de polinomios:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = a \\ 3\beta = b \quad \Rightarrow \quad \beta = \dfrac{b}{3} \end{cases}$$

sustituyendo en la primera ecuación, se tiene:

$$\alpha + \frac{b}{3} = a \quad \Rightarrow \quad \alpha = a - \frac{b}{3}$$

$$\therefore \quad (ax+b)_B = \left(a - \frac{b}{3}, \; \frac{b}{3} \right)$$

al multiplicar este vector de coordenadas por la matriz $M_A^B\left(T^{-1}\right)$, lo que se obtiene es $\left[T^{-1}(ax+b)\right]_A$, entonces:

$$\left[T^{-1}(ax+b)\right]_A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a - \dfrac{b}{3} \\ \dfrac{b}{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} a - \dfrac{b}{3} + \dfrac{4b}{3} \\ \dfrac{2b}{3} \end{bmatrix}$$

por tanto:

$$\left[T^{-1}(ax+b)\right]_A = \begin{bmatrix} \dfrac{a+b}{2} \\ \dfrac{b}{3} \end{bmatrix}$$

de donde:

$$\left[\, T^{-1}\left(ax+b \right) \right]_A = \left(\frac{a+b}{2} \, , \, \frac{b}{3} \right)$$

con este vector de coordenadas y la base A, se tiene:

$$T^{-1}\left(ax+b \right) = \frac{a+b}{2}\left(2x \right) + \frac{b}{3}\left(3 \right)$$

$$\therefore \qquad T^{-1}\left(ax+b \right) = \left(a+b \right) x + b$$

Ejercicio 3.17 Sean las transformaciones lineales $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow P$ y $H : M \rightarrow P$, cuyas reglas de correspondencia están definidas por:

$$T\left(a\,,b \right) = ax^2 + \left(a+b \right) x - a \quad ; \quad \forall \; \left(a\,,b \right) \in \mathbb{R}^2$$

$$H \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix} = cx^2 + ax + b \quad ; \quad \forall \; \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix} \in M$$

donde:

$$P = \left\{ ax^2 + bx + c \;\middle|\; a,\, b,\, c \in \mathbb{R} \right\}$$

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix} \;\middle|\; a,\, b,\, c \in \mathbb{R} \right\}$$

y sean las bases:

$$A = \left\{ x^2, \;\; x, \;\; 1 \right\} \qquad \text{base de } P$$

$$B = \left\{ \left(1, \; -1 \right), \; \left(0, \; 1 \right) \right\} \text{ base de } \mathbb{R}^2$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

$$C = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \quad \text{base de } M$$

Obtenga la regla de correspondencia de $H^{-1} \circ T$.

SOLUCIÓN:

El procedimiento que seguiremos para resolver este ejercicio será: obtener la matriz asociada a la transformación H referida a las bases C y A. A partir de la inversa de esta matriz, obtendremos la regla de correspondencia de H^{-1}; finalmente, se obtendrá la composición de H^{-1} con T.

Obteniendo $M_A^C(H)$, tenemos:

$$H\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = x$$

$$H\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) = 1$$

$$H\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = x^2$$

Los vectores de coordenadas de estas imágenes referidas a la base $A = \{ x^2, x, 1 \}$ son:

$$(x)_A = (0, 1, 0)$$

$$(1)_A = (0, 0, 1)$$

$$(x^2)_A = (1, 0, 0)$$

Por lo tanto, la matriz asociada a H es:

$$M_A^C(H) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Se sabe que:

$$\left[M_A^C(H) \right]^{-1} = M_C^A\left(H^{-1}\right)$$

Al obtener la inversa de esta matriz, se llega a:

$$M_C^A\left(H^{-1}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \ldots(1)$$

Para obtener la regla de correspondencia de H^{-1}, se hará uso de la fórmula:

$$M_B^A(T)\,(\bar{v})_A = \left[T(\bar{v}) \right]_B$$

que, adaptada a nuestro problema, queda como:

$$M_C^A\left(H^{-1}\right)\left(ax^2 + bx + c\right)_A = \left[H^{-1}\left(ax^2 + bx + c\right) \right]_C \qquad \ldots(2)$$

Dado que, si $H : M \to P$, entonces $H^{-1} : P \to M$.

Por otro lado, se tiene que:

$$\left(ax^2 + bx + c\right)_A = (a,\ b,\ c) \qquad \ldots(3)$$

sustituyendo (1) y (3) en (2), tenemos:

$$\left[H^{-1}\left(ax^2 + bx + c \right) \right]_C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ c \\ a \end{bmatrix}$$

de donde:

$$\left[H^{-1}\left(ax^2 + bx + c \right) \right]_C = (b,\ c,\ a)$$

con este vector de coordenadas y la base C, se tiene que:

$$H^{-1}\left(ax^2 + bx + c \right) = b\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + a\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad H^{-1}\left(ax^2 + bx + c \right) = \begin{bmatrix} b & 0 \\ c & a \end{bmatrix}$$

Procedamos ahora a obtener la composición entre H^{-1} y T. Como $T: \mathbb{R}^2 \to P$, entonces:

$$\left(H^{-1} \circ T \right)(a,\ b) = H^{-1}\left[T(a,\ b) \right]$$

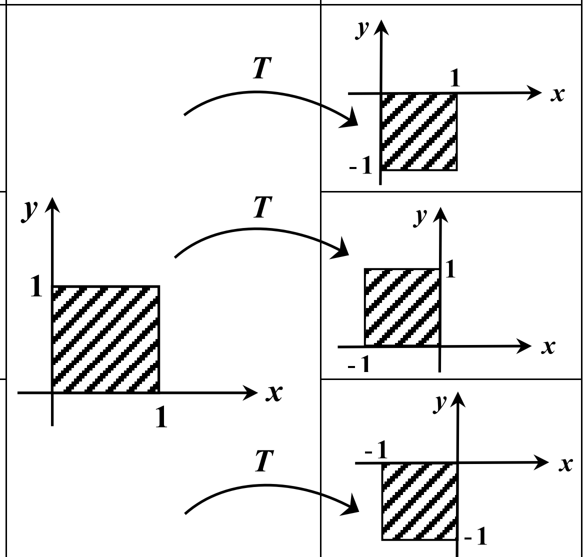
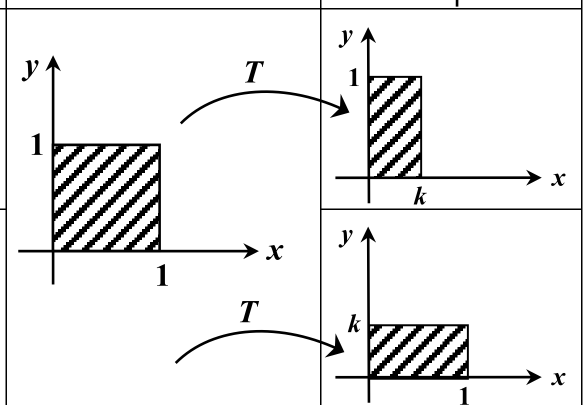
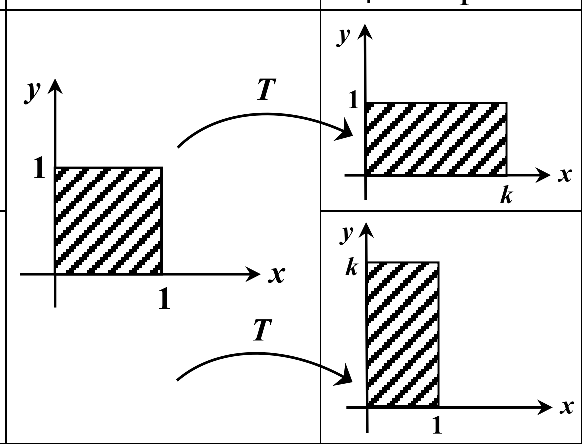
$$\left(H^{-1} \circ T \right)(a,\ b) = H^{-1}\left[ax^2 + (a + b)\, x - a \right]$$

finalmente, al aplicar H^{-1}, se llega a:

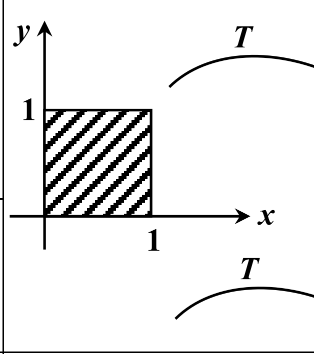
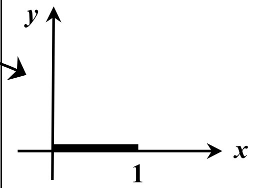
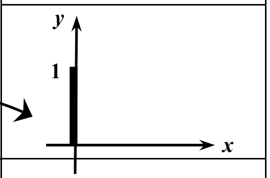
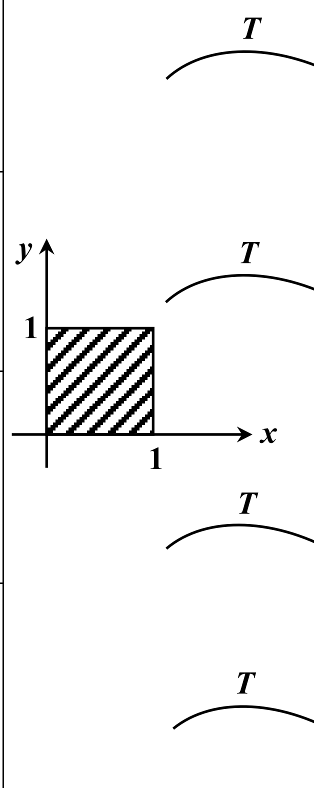
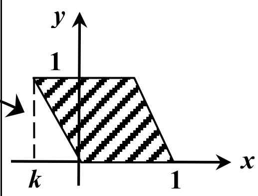
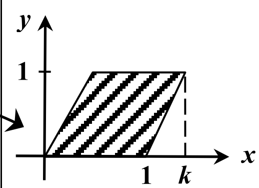
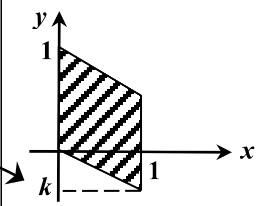
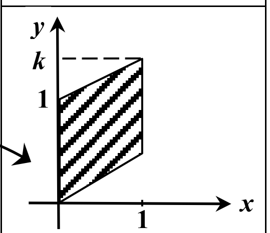
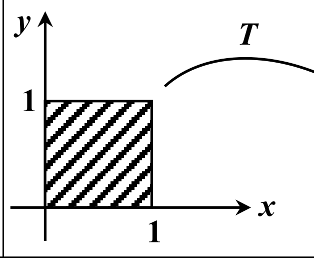
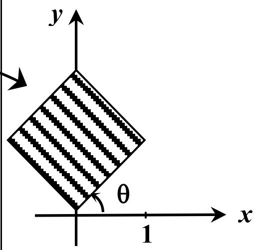
$$\left(H^{-1} \circ T \right)(a,\ b) = \begin{bmatrix} a+b & 0 \\ -a & a \end{bmatrix}$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

Efectos geométricos de las transformaciones lineales de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$

Transformación	Matriz de transformación	Efecto geométrico: Dominio / Codominio
Reflexión	Sobre el eje x $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$	
	Sobre el eje y $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	
	Con respecto al origen $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$	
Contracción	Horizontal $\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $0 < k < 1$	
	Vertical $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$ $0 < k < 1$	
Expansión	Horizontal $\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $k > 1$	
	Vertical $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$ $k > 1$	

Efectos geométricos de las transformaciones lineales de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ (Cont.)

Transformación	**Matriz de transformación**	**Efecto geométrico**	
		Dominio	**Codominio**
Proyección	Sobre el eje x $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$		
	Sobre el eje y $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$		
Deformación o Deslizamiento	A lo largo del eje x con $k<0$ $\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$		
	A lo largo del eje x con $k>0$ $\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$		
	A lo largo del eje y con $k<0$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$		
	A lo largo del eje y con $k>0$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$		
Rotación	$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$		

Ejercicio 3.18 Determine el efecto geométrico que produce:

a) El realizar un giro de $90°$ y, posteriormente, efectuar una expansión horizontal considerando $k = 3$.

b) El realizar primero la expansión horizontal con $k = 3$ y, posteriormente, realizar el giro de $90°$.

Realice, para cada caso, la representación geométrica considerando la región que se define con los puntos $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ y $(0, 1)$.

SOLUCIÓN:

a) De acuerdo con la tabla anterior, la matriz de giro es:

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Como $\theta = 90°$, entonces:

$$\text{Matriz de giro} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = G$$

La matriz de expansión horizontal es:

$$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

como $k = 3$, entonces:

$$\text{Matriz de expansión} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = E$$

Como se nos pide realizar primero el giro y después la expansión, esto equivale a realizar la composición de ambas transformaciones, esto es:

$$(E \circ G)\,\bar{u} = E\left[G(\bar{u})\right]$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

Obsérvese que, en el lado derecho de la igualdad, se aplica primero el giro al vector $\bar{u}$ y posteriormente se aplica la transformación de expansión E.

Sabemos que:

$$M\left(E \circ G\right) = M\left(E\right) M\left(G\right)$$

de donde:

$$M\left(E \circ G\right) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = T$$

Aplicando esta transformación a los puntos dados, tenemos:

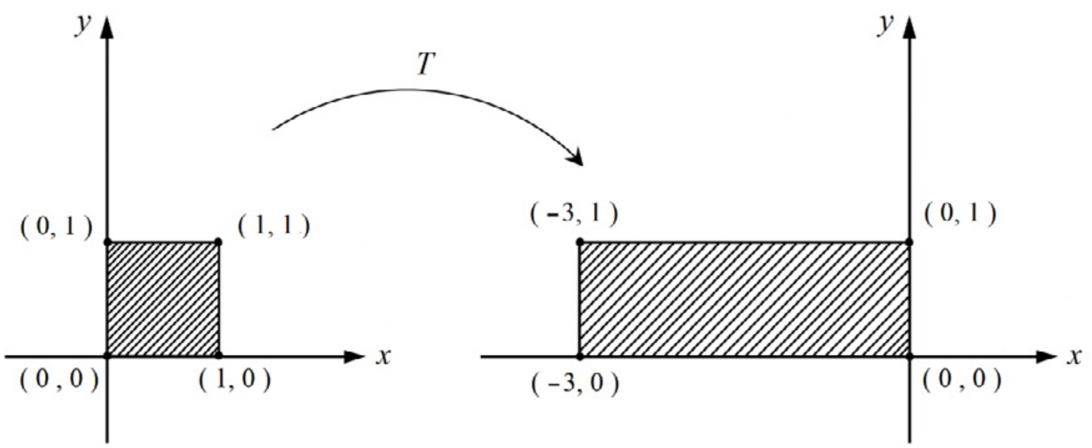
$$T\left(0,\ 0\right) = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \therefore\ T\left(0,\ 0\right) = \left(0,\ 0\right)$$

$$T\left(1,\ 0\right) = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \therefore\ T\left(1,\ 0\right) = \left(0,\ 1\right)$$

$$T\left(1,\ 1\right) = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \therefore\ T\left(1,\ 1\right) = \left(-3,\ 1\right)$$

$$T\left(0,\ 1\right) = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \therefore\ T\left(0,\ 1\right) = \left(-3,\ 0\right)$$

Gráficamente:



b) Si se aplica primero la expansión horizontal y, posteriormente, el giro de $90°$, entonces se tiene:

$$M\left(G \circ E\right) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = H$$

Aplicando esta transformación a los puntos, tenemos:

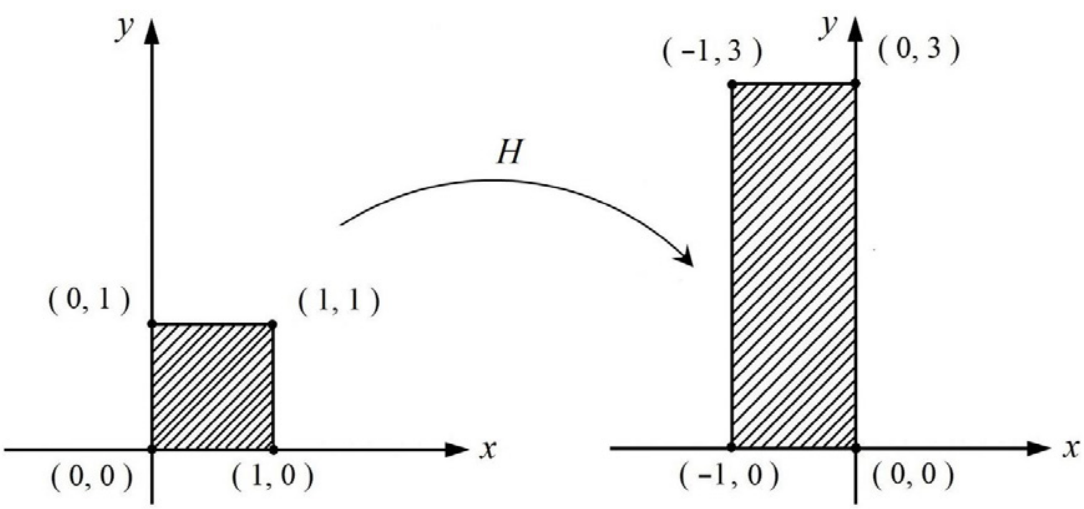
$$H\left(0,\ 0\right) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \therefore\ H\left(0,\ 0\right) = \left(0,\ 0\right)$$

$$H\left(1,\ 0\right) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \therefore\ H\left(1,\ 0\right) = \left(0,\ 3\right)$$

$$H\left(1,\ 1\right) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \therefore\ H\left(1,\ 1\right) = \left(-1,\ 3\right)$$

$$H\left(0,\ 1\right) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \therefore\ H\left(0,\ 1\right) = \left(-1,\ 0\right)$$

Gráficamente:



Como podemos darnos cuenta, el orden en que se aplican las transformaciones sí modifica el resultado que se obtiene, lo cual era de esperarse, pues la composición de transformaciones lineales, en general, no es conmutativa.

Ejercicio 3.19 Para la región definida por los puntos $(0,\ 0)$, $(4,\ 0)$ y $(2,\ 2)$, determine el efecto geométrico que produce:

a) Una contracción vertical considerando $K = \frac{1}{2}$, sumada a un deslizamiento a lo largo del eje x con $K = 1$.

b) La composición de una contracción vertical con $K = \frac{1}{2}$, seguida de un deslizamiento a lo largo del eje x con $K = 1$.

c) La composición de un deslizamiento a lo largo del eje x con $K = 1$, seguido de una contracción vertical con $K = \frac{1}{2}$.

SOLUCIÓN:

a) Las matrices que producen los efectos solicitados son:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Al sumar los dos efectos se tiene:

$$C + D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} = T$$

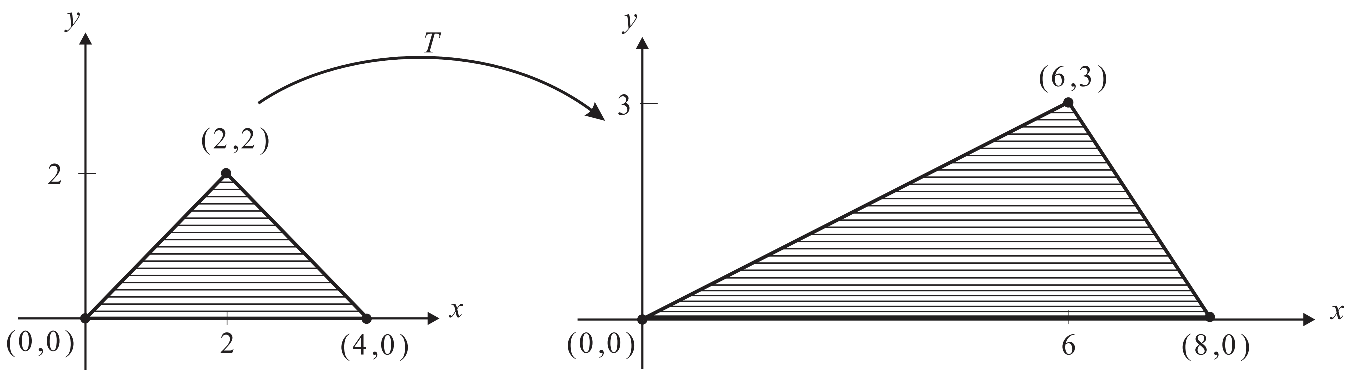
La matriz obtenida produce la suma de ambos efectos. Al aplicar la transformación T a los puntos dados, tenemos:

$$T(0,\ 0) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \therefore \ T(0,\ 0) = (0,\ 0)$$

$$T(4,\ 0) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \therefore \ T(4,\ 0) = (8,\ 0)$$

$$T(2,\ 2) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \therefore \ T(2,\ 2) = (6,\ 3)$$

Gráficamente:



b) En este inciso se nos pide realizar primero la contracción vertical, seguida del deslizamiento, con lo cual se tiene:

$$(D \circ C)\bar{u} = D\left[C(\bar{u})\right]$$

en forma matricial:

$$M(D \circ C) = M(D)\, M(C)$$

sustituyendo las matrices, tenemos:

$$M\left(D \circ C\right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = H$$

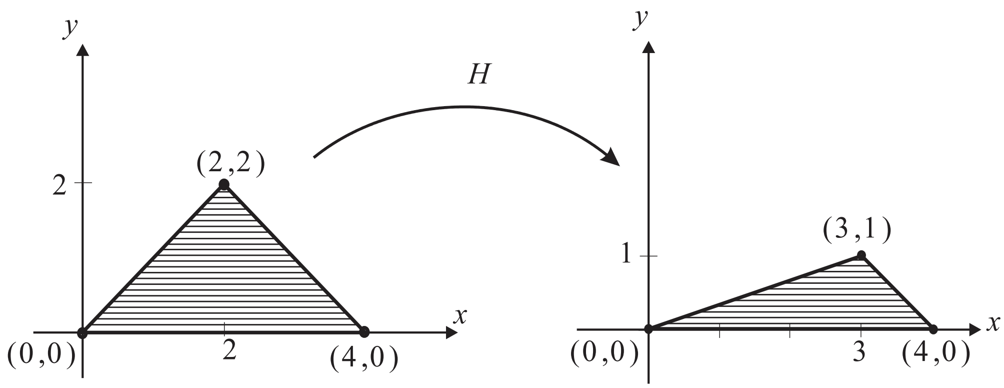
La matriz obtenida produce la composición de ambos efectos, aplicando primero la contracción y después el desplazamiento. Aplicando esta transformación H a los puntos dados, tenemos:

$$H\left(0,\ 0\right) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \therefore \quad H\left(0,\ 0\right) = \left(0,\ 0\right)$$

$$H\left(4,\ 0\right) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \therefore \quad H\left(4,\ 0\right) = \left(4,\ 0\right)$$

$$H\left(2,\ 2\right) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \therefore \quad H\left(2,\ 2\right) = \left(3,\ 1\right)$$

Gráficamente:



c) En este inciso se nos pide primero realizar el deslizamiento y después la contracción, se tiene entonces que:

$$\left(C \circ D\right)\bar{u} = C\left[D\left(\bar{u}\right)\right]$$

en forma matricial:

$$M\left(C \circ D\right) = M\left(C\right) M\left(D\right)$$

sustituyendo:

$$M\left(C \circ D\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = S$$

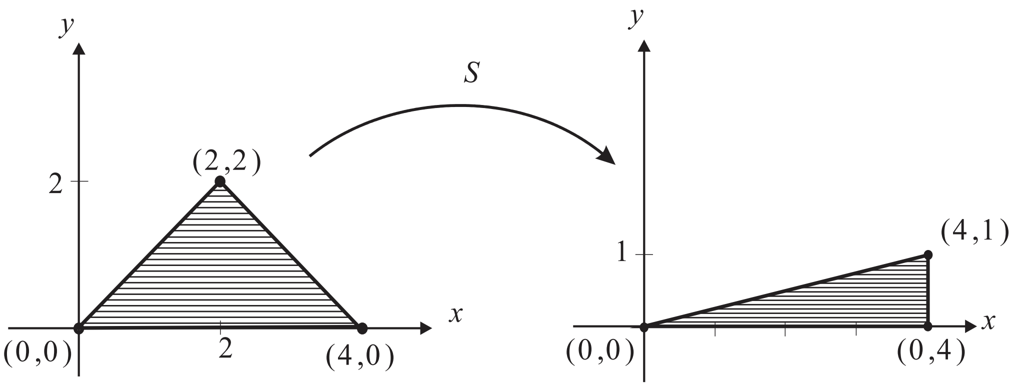
Aplicando esta transformación S a los puntos dados, tenemos:

$$S(0,\ 0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \therefore \qquad S(0,\ 0) = (0,\ 0)$$

$$S(4,\ 0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \therefore \qquad S(4,\ 0) = (4,\ 0)$$

$$S(2,\ 2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \therefore \qquad S(2,\ 2) = (4,\ 1)$$

Gráficamente:



Con las gráficas obtenidas en cada uno de los tres incisos, resulta evidente que el efecto geométrico producido es diferente.

ÍNDICE
1
2
3
4
5

Valores y vectores característicos (valores y vectores propios)

A las transformaciones lineales que se aplican de un espacio vectorial V al mismo espacio V, se les conoce como operadores lineales.

$$T: \ V \to V$$

Para este tipo de transformaciones pueden existir vectores diferentes de cero que tienen la siguiente característica:

$$T(\bar{v}) = \lambda \bar{v}$$

donde $\bar{v} \in V$ y λ es un escalar perteneciente al campo de definición del espacio V.

El concepto anterior se puede definir formalmente de la siguiente manera:

Definición

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita definido sobre un campo K y sea $T: \ V \to V$ un operador lineal para el cual:

$$T(\bar{v}) = \lambda \bar{v} \quad \text{con} \quad \bar{v} \neq \bar{0}$$

donde λ es un escalar perteneciente a K. Al escalar λ se le llama valor característico de T y al vector $\bar{v}$, diferente de cero, se le conoce como vector característico de T correspondiente al valor λ.

El vector característico tiene que ser diferente de cero, pero el valor característico λ sí puede tomar el valor de cero.

Algunos autores llaman al valor característico valor propio y al vector característico le llaman vector propio.

Teorema

Sean V un espacio vectorial sobre un campo K, y sea $T: V \to V$ un operador lineal.

El escalar $\lambda \in K$ es un valor característico de T, si y solo si, λ es una raíz del polinomio característico asociado a T.

Propiedades de los valores y vectores característicos

1. Los vectores característicos asociados a valores característicos distintos son linealmente independientes.

2. Si $\bar{v}$ es un vector característico asociado a un valor característico λ, entonces $\alpha\,\bar{v}$ es también un vector característico asociado a λ, $\forall\ \alpha \in K$ y $\alpha \neq 0$.

3. Si $\bar{u}$ y $\bar{v}$ son dos vectores característicos asociados a λ y $\bar{u} \neq -\bar{v}$, entonces $\bar{u} + \bar{v}$ es un vector característico asociado λ.

Espacio característico

Al conjunto formado por todos los vectores característicos asociados a un valor característico λ, al cual se le agrega el vector cero, se le llama espacio característico y se representa con $E(\lambda)$.

Teorema

Sea A una matriz asociada a un operador lineal T.

Si A es una matriz singular, esto es, $\operatorname{Det}(A) = 0$, entonces $\lambda = 0$ es un valor característico de T.

ÍNDICE
1
2
3
4
5

Teorema

Sea A una matriz asociada a un operador lineal T.

Si A es una matriz no singular, esto es, $\operatorname{Det}(A) \neq 0$, entonces si λ es un valor característico de T, $\frac{1}{\lambda}$ es un valor característico de T^{-1}.

Es evidente que si el $\operatorname{Det}(A) \neq 0$, entonces $\lambda \neq 0$.

Ejercicio 3.20 Sea P el espacio de polinomios de grado menor o igual a dos sobre el campo real y sea $T: P \rightarrow P$ el operador lineal definido por:

$$T[f(x)] = f(x) + f''(x) + x f'(x) \quad ; \quad \forall f(x) \in P$$

a) Obtenga los valores y vectores característicos de T.

b) Determine los espacios característicos asociados a cada valor característico.

SOLUCIÓN:

a) Expresemos primero la regla de correspondencia de T, de la siguiente manera:

Sea $f(x) = ax^2 + bx + c$ un polinomio cualquiera del espacio P. Se tiene que:

$$\begin{aligned} &\text{Si} && f(x) = ax^2 + bx + c \\ &\Rightarrow && f'(x) = 2ax + b \\ & && f''(x) = 2a \end{aligned}$$

sustituyendo en la definición de la regla de correspondencia dada, tenemos:

$$T(ax^2 + bx + c) = (ax^2 + bx + c) + (2a) + x(2ax + b)$$

simplificando:

$$T\left(ax^2+bx+c\right) = ax^2+bx+c+2a+2ax^2+bx$$

$$T\left(ax^2+bx+c\right) = 3ax^2+2bx+\left(2a+c\right)$$

Con la finalidad de simplificar el procedimiento, aplicaremos el concepto de isomorfismo.

Como el espacio vectorial P es de dimensión tres, entonces es isomorfo con $\mathbb{R}^3$, con lo cual se aplicarán los siguientes isomorfismos:

$$h\left(ax^2+bx+c\right) = \left(a,\ b,\ c\right)$$

$$h^{-1}\left(a,\ b,\ c\right) = ax^2+bx+c$$

de acuerdo con esto, la regla de correspondencia del operador T queda:

$$T\left(a,\ b,\ c\right) = \left(3a,\ 2b,\ 2a+c\right)$$

Obteniendo la matriz asociada a T referida a las bases canónicas, tenemos:

$$T\left(1,\ 0,\ 0\right) = \left(3,\ 0,\ 2\right)$$

$$T\left(0,\ 1,\ 0\right) = \left(0,\ 2,\ 0\right)$$

$$T\left(0,\ 0,\ 1\right) = \left(0,\ 0,\ 1\right)$$

por tanto, la matriz asociada a T es:

$$M\left(T\right) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = A$$

Obteniendo el polinomio característico, se tiene:

$$\operatorname{Det}(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda)$$

con lo cual el polinomio característico en forma factorizada es:

$$P(\lambda) = (3-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda)$$

los valores característicos son:

$$\lambda_1 = 3$$

$$\lambda_2 = 2$$

$$\lambda_3 = 1$$

Obteniendo los vectores característicos haciendo uso de la expresión $(A-\lambda I)\,\bar{u} = \bar{0}$, tenemos:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \ldots(1)$$

Para $\lambda_1 = 3$, sustituyendo en (1) y por igualdad de matrices, se tiene:

$$\begin{cases} 0 = 0 & \\ -y = 0 & \Rightarrow \quad y = 0 \\ 2x - 2z = 0 & \Rightarrow \quad x = z \end{cases}$$

si hacemos $z = k_1$, entonces:

$$x = k_1$$

con lo cual se tiene:

$$(\bar{v}_1)_B = (k_1,\ 0,\ k_1)$$

siendo B la base con la cual se obtuvo la matriz asociada a la transformación, pero del espacio P. Aplicando h^{-1} a los elementos de la base canónica, tenemos:

$$h^{-1}(1,\ 0,\ 0) = x^2$$

$$h^{-1}(0,\ 1,\ 0) = x$$

$$h^{-1}(0,\ 0,\ 1) = 1$$

$\therefore$ La base B es: $B = \{x^2,\ x,\ 1\}$

Con la base B y el vector de coordenadas de $\bar{v}_1$, se tiene:

$$\bar{v}_1 = k_1 x^2 + k_1 \quad \text{con} \quad k_1 \neq 0$$

vectores característicos asociados a λ_1

Para $\lambda_2 = 2$, se tiene:

$$\begin{cases} x \qquad = 0 & \Rightarrow \quad x = 0 \\ \qquad 0 = 0 & \\ 2x - z = 0 & \Rightarrow \quad z = 0 \end{cases}$$

Como y no figura en el sistema de ecuaciones, entonces y puede tomar cualquier valor, esto es:

$$\text{si} \quad y = k_2$$

entonces:

$$(\bar{v}_2)_B = (0,\ k_2,\ 0)$$

con lo cual los vectores característicos asociados a λ_2 son:

$$\bar{v}_2 = k_2 x \quad \text{con} \quad k_2 \neq 0$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

Para $\lambda_3 = 1$, se tiene:

$$\begin{cases} 2x \qquad = 0 \\ \qquad y = 0 \\ 2x \qquad = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array} \Rightarrow z = k_3$$

entonces:

$$\left(\bar{v}_3\right)_B = \left(0,\ 0,\ k_3\right)$$

de donde los vectores característicos asociados a λ_3 son:

$$\bar{v}_3 = k_3 \quad \text{con} \quad k_3 \neq 0$$

b) De acuerdo con los resultados obtenidos en el inciso anterior, se tiene que los espacios característicos son:

$$E\left(\lambda_1\right) = \left\{ k_1 x^2 + k_1 \,\middle|\, k_1 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$E\left(\lambda_2\right) = \left\{ k_2 x \,\middle|\, k_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$E\left(\lambda_3\right) = \left\{ k_3 \,\middle|\, k_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

Ejercicio 3.21 Para el operador lineal $T: M \rightarrow M$, donde:

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \,\middle|\, a,\ b,\ c \in \mathbb{R} \right\}$$

y cuya regla de correspondencia es:

$$T\left(\begin{bmatrix} x & y \\ y & z \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 3x + y - 5z & x + 3y - 5z \\ x + 3y - 5z & 2z \end{bmatrix} \quad ; \ \forall \begin{bmatrix} x & y \\ y & z \end{bmatrix} \in M$$

obtenga los valores, vectores y espacios característicos de T.

SOLUCIÓN:

Como el espacio vectorial M es de dimensión tres, entonces se emplearán los siguientes isomorfismos:

$$f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\right) = (a,\ b,\ c)$$

$$f^{-1}(a,\ b,\ c) = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

con lo cual la regla de correspondencia de T queda:

$$T(x,\ y,\ z) = (3x + y - 5z,\quad x + 3y - 5z,\quad 2z) \quad ; \quad \forall\,(x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3$$

Obteniendo la matriz asociada a T referida a las bases canónicas, tenemos:

$$T(1,\ 0,\ 0) = (3,\ 1,\ 0)$$

$$T(0,\ 1,\ 0) = (1,\ 3,\ 0)$$

$$T(0,\ 0,\ 1) = (-5,\ -5,\ 2)$$

entonces la matriz asociada a T es:

$$M(T) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 1 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = A$$

con lo cual el polinomio característico se obtiene a partir de:

$$\operatorname{Det}(A - \lambda \mathrm{I}) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & -5 \\ 1 & 3-\lambda & -5 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(3-\lambda)(2-\lambda) - (2-\lambda)$$

$$\text{Det}\left(A-\lambda \text{I}\right) = \left(2-\lambda\right)\left[\left(3-\lambda\right)^2-1\right] = \left(2-\lambda\right)\left(\lambda^2-6\lambda+8\right)$$

factorizando, se tiene:

$$\text{Det}\left(A-\lambda \text{I}\right) = \left(2-\lambda\right)\left(\lambda-2\right)\left(\lambda-4\right)$$

entonces los valores característicos son:

$$\lambda_1 = 2$$

$$\lambda_2 = 2$$

$$\lambda_3 = 4$$

Como $\left(A - \lambda \text{I}\right)\bar{u} = \bar{0}$ es:

$$\begin{bmatrix} 3-\lambda & 1 & -5 \\ 1 & 3-\lambda & -5 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \ldots(1)$$

los vectores característicos se obtienen a partir del siguiente procedimiento:

Para $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, sustituyendo en (1), tenemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

con lo cual se llega al sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y - 5z = 0 \\ x + y - 5z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

al escalonarlo, se obtiene:

$$\begin{cases} x + y - 5z = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Se trata de un sistema de ecuaciones compatible indeterminado con dos grados de libertad, entonces:

$$\begin{array}{lrcl} \text{Si} & y & = & k_1 \\ \text{y} & z & = & k_2 \\ \Rightarrow & x & = & -k_1 + 5k_2 \end{array}$$

de donde se obtiene que:

$$(\bar{v}_1)_B = (-k_1 + 5k_2, \ k_1, \ k_2)$$

como la base B es:

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Esta base se obtiene al aplicar f^{-1} a los elementos de la base canónica, que es la base con la cual se obtuvo $M(T)$.

Conocido el vector de coordenadas de $\bar{v}_1$ y la base B, entonces los vectores característicos asociados a λ_1 y λ_2 son:

$$\bar{v}_1 = \begin{bmatrix} -k_1 + 5k_2 & k_1 \\ k_1 & k_2 \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad k_1 \text{ y/o } k_2 \neq 0$$

Para $\lambda_3 = 4$, sustituyendo en (1), tenemos:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

de donde se llega a:

$$\begin{cases} -x + y - 5z = 0 \\ x - y - 5z = 0 \\ -2z = 0 \end{cases}$$

al escalonarlo, se obtiene:

$$\begin{cases} x - y - 5z = 0 \\ -10z = 0 \\ -2z = 0 \end{cases}$$

Como $z = 0$, entonces de la primera ecuación se obtiene: $x = y$

si $\qquad y = k_3 \quad \Rightarrow \quad x = k_3$

con lo cual:

$$\left(\bar{v}_2\right)_B = \left(k_3,\ k_3,\ 0\right)$$

entonces, de la misma forma como se procedió en el caso anterior, se llega a:

$$\bar{v}_2 = \begin{bmatrix} k_3 & k_3 \\ k_3 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad k_3 \neq 0$$

vectores característicos asociados a $\lambda_3 = 4$.

Finalmente, se tiene que los espacios característicos son:

$$E(\lambda_1 \text{ y } \lambda_2) = \left\{ \begin{bmatrix} -k_1 + 5k_2 & k_1 \\ k_1 & k_2 \end{bmatrix} \middle| \, k_1 \text{ y } k_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$E(\lambda_3) = \left\{ \begin{bmatrix} k_3 & k_3 \\ k_3 & 0 \end{bmatrix} \middle| \, k_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

Obsérvese que el espacio característico asociado a λ_1 y λ_2 es de dimensión dos.

Ejercicio 3.22 En el espacio vectorial $\mathbb{C}^2$ sobre el campo $\mathbb{C}$ se tiene el operador lineal $T: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, definido por:

$$T(x, y) = (ax + by, \; ay - bx) \; ; \; \forall (x, y) \in \mathbb{C}^2 \quad \text{con} \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Obtenga:

a) Los valores característicos de T.

b) Los vectores característicos de T.

c) Los espacios característicos de T y la dimensión de cada uno de ellos.

SOLUCIÓN:

a) El espacio vectorial $\mathbb{C}^2$ con campo de definición complejo es un espacio de dimensión dos, por lo que una base de $\mathbb{C}^2$ resulta ser la base canónica

ÍNDICE 1 2 3 4 5

$B = \{(1, 0), (0, 1)\}$. Obteniendo con esta base la matriz asociada a T, tenemos:

$$\begin{aligned} T(1, 0) &= (a, -b) \\ T(0, 1) &= (b, a) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad M(T) = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} = A$$

Obteniendo el polinomio característico, se tiene:

$$\text{Det}(A - \lambda \text{I}) = \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ -b & a-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)^2 + b^2$$

$$P(\lambda) = a^2 - 2a\lambda + \lambda^2 + b^2$$

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 2a\lambda + (a^2 + b^2)$$

Aplicando la fórmula para ecuaciones de segundo grado, tenemos:

$$\lambda = \frac{2a \pm \sqrt{(-2a)^2 - 4(1)(a^2+b^2)}}{2(1)} = \frac{2a \pm \sqrt{4a^2 - 4a^2 - 4b^2}}{2}$$

$$\lambda = \frac{2a \pm \sqrt{-4b^2}}{2} = \frac{2a \pm 2bi}{2} \qquad \therefore \quad \begin{cases} \lambda_1 = a + bi \\ \lambda_2 = a - bi \end{cases}$$

b) Obteniendo los vectores característicos, tenemos:

Para $\lambda_1 = a + bi$ y haciendo uso de la expresión:

$$(A - \lambda \text{I})\,\bar{u} = \bar{0}$$

tenemos:

$$\begin{bmatrix} a-(a+bi) & b \\ -b & a-(a+bi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

simplificando:

$$\begin{bmatrix} -bi & b \\ -b & -bi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

de donde surge el sistema:

$$\begin{cases} -bix + by = 0 \\ -bx - biy = 0 \end{cases}$$

resolviendo el sistema por Gauss:

$$\begin{matrix} (i) \\ + \end{matrix} \begin{cases} -bix + by = 0 \\ -bx - biy = 0 \end{cases} \sim \left(\tfrac{1}{b}\right) \begin{cases} -bix + by = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -ix + y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

con lo cual $y = ix$ con $b \neq 0$

Si hacemos que $x = k_1$, entonces $y = ik_1$.

Dado que $M(T)$ está referida a la base canónica, entonces los vectores característicos asociados a λ_1, son:

$$\overline{v}_1 = (k_1, ik_1) \quad \text{con} \quad k_1 \neq 0$$

Para $\lambda_2 = a - bi$:

$$\begin{bmatrix} a-(a-bi) & b \\ -b & a-(a-bi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

simplificando:

$$\begin{bmatrix} bi & b \\ -b & bi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} bix + by = 0 \\ -bx + biy = 0 \end{cases}$$

resolviendo el sistema por Gauss:

$$\begin{matrix}(-i)\\ \downarrow +\end{matrix}\begin{cases} bix + by = 0 \\ -bx + biy = 0 \end{cases} \sim \left(\tfrac{1}{b}\right)\begin{cases} bix + by = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ix + y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

de donde: $y = -ix$ con $b \neq 0$

Si hacemos que $x = k_2$, entonces $y = -ik_2$, por tanto:

$$\bar{v}_2 = \left(k_2, \ -ik_2 \right) \quad \text{con} \quad k_2 \neq 0$$

c) Con lo cual los espacios característicos son:

$$E\left(\lambda_1\right) = \left\{ \left(k_1, \ ik_1\right) \mid k_1 \in \mathbb{C} \right\}$$

$$E\left(\lambda_2\right) = \left\{ \left(k_2, \ -ik_2\right) \mid k_2 \in \mathbb{C} \right\}$$

Dado que los espacios característicos son subespacios del dominio, entonces, al igual que el dominio, su campo de definición es complejo y como ambos dependen de una sola variable, la dimensión de ellos es uno, esto es:

$$\text{Dim } E\left(\lambda_1\right) = 1$$

$$\text{Dim } E\left(\lambda_2\right) = 1$$

Ejercicio 3.23 Sea el operador lineal $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definido por:

$$T\left(x, \ y, \ z\right) = \left(2x + ay, \ \ by + z, \ \ 2z\right)$$

Determine el o los valores de $a, \ b \in \mathbb{R}$, de tal manera que:

$$P\left(\lambda\right) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 12\lambda + 8$$

sea el polinomio característico de T.

SOLUCIÓN:

Obteniendo $M(T)$, tenemos:

$$\begin{aligned} T(1,0,0) &= (2,0,0) \\ T(0,1,0) &= (a,b,0) \\ T(0,0,1) &= (0,1,2) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad M(T) = \begin{bmatrix} 2 & a & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = A$$

Obteniendo $P(\lambda)$ a partir de la matriz A, se tiene:

$$\text{Det}\ (A - \lambda \mathrm{I}) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & a & 0 \\ 0 & b-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 (b-\lambda)$$

de donde:

$$P(\lambda) = (2-\lambda)^2 (b-\lambda)$$

$$P(\lambda) = \left(4 - 4\lambda + \lambda^2\right)(b-\lambda)$$

$$P(\lambda) = 4b - 4\lambda - 4b\lambda + 4\lambda^2 + b\lambda^2 - \lambda^3$$

$$P(\lambda) = -\lambda^3 + (b+4)\lambda^2 + (-4b-4)\lambda + 4b$$

como el polinomio característico debe ser:

$$P(\lambda) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 12\lambda + 8$$

entonces:

$$-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 12\lambda + 8 = -\lambda^3 + (b+4)\lambda^2 + (-4b-4)\lambda + 4b$$

por igualdad de polinomios, se tiene:

$$\begin{cases} b+4 &= 6 \\ -4b-4 &= -12 \\ 4b &= 8 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad b=2$$

Dado que a no interviene en el sistema, entonces a puede tomar cualquier valor, por lo tanto, la respuesta al ejercicio es:

$$a \in \mathbb{R}$$

$$b = 2$$

Matrices similares

Se tiene que dos matrices A y B de orden $n \times n$ son similares, si existe una matriz no singular C, tal que:

$$B = C^{-1}AC$$

Teorema

Dos matrices representan al mismo operador lineal, si y solo si, son similares.

Propiedades de las matrices similares

1. Si A y B son matrices similares, entonces $\operatorname{Det}(A) = \operatorname{Det}(B)$.

2. Dos matrices similares tienen el mismo polinomio característico y, por lo tanto, los mismos valores característicos.

Diagonalización

Si V es un espacio vectorial de dimensión n y $T: V \to V$ es un operador lineal, entonces existe una matriz diagonal asociada a T, cuando se puede definir una base de V formada por vectores característicos de T. La matriz asociada a T referida a esta base, es una matriz diagonal D cuyos elementos d_{ii} son los valores característicos de T.

Teorema

Sea A de $n \times n$ una matriz asociada a un operador lineal T.

La matriz A será similar a una matriz diagonal D, si y solo si, existe un conjunto linealmente independiente formado por n vectores característicos de T. Para este caso, existe una matriz no singular P, para la cual se cumple que $D = P^{-1}AP$, donde P tiene como columnas a los n vectores característicos de T correspondientes a los valores característicos d_{ii} que definen a la matriz diagonal D.

Teorema

Sea A una matriz asociada a un operador lineal T.

1) Si los valores característicos de A son todos diferentes, entonces A es diagonalizable.

2) La matriz A es diagonalizable, si y solo si, la suma de las dimensiones de los espacios característicos es igual a la dimensión del dominio de T.

Ejercicio 3.24 Para el operador lineal $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definido por:

$$T(x, y, z) = (x, 5x + 2y - 2z, x + 3z) \quad ; \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

a) Obtenga los valores y vectores característicos de T.

b) Determine los espacios característicos de T.

c) Defina una matriz diagonalizadora P.

d) Compruebe que $D = P^{-1} A P$.

SOLUCIÓN:

a) Obtengamos primero la matriz asociada al operador T referida a la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} T(1,\,0,\,0) &= (1,\,5,\,1) \\ T(0,\,1,\,0) &= (0,\,2,\,0) \\ T(0,\,0,\,1) &= (0,\,-2,\,3) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad M(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} = A$$

de donde el polinomio característico se obtiene con:

$$\operatorname{Det}(A - \lambda \mathrm{I}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 5 & 2-\lambda & -2 \\ 1 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)$$

por lo tanto, los valores característicos son:

$$\lambda_1 = 1$$

$$\lambda_2 = 2$$

$$\lambda_3 = 3$$

Obteniendo los vectores característicos, tenemos:

Para $\lambda_1 = 1$, se tiene:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 5x + y - 2z = 0 \\ \\ x + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -2z$$

si $\quad z = k_1$

$\Rightarrow \quad x = -2k_1 \qquad \therefore \quad \bar{v}_1 = \left(-2k_1,\ 12k_1,\ k_1\right)$ con $k_1 \neq 0$

$\quad y = 12k_1 \qquad$ vectores característicos asociados a λ_1

Para $\lambda_2 = 2$, se tiene:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x = 0 \\ 5x - 2z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

de donde se obtiene que:

$x = 0$

$y = k_2 \qquad \therefore \qquad \bar{v}_2 = \left(0,\ k_2,\ 0\right)$ con $k_2 \neq 0$

$z = 0 \qquad$ vectores característicos asociados a λ_2

Para $\lambda_3 = 3$, se tiene:

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x = 0 \\ 5x - y - 2z = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow y = -2z$$

de donde se obtiene que:

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= -2k_3 \\ z &= k_3 \end{aligned} \qquad \therefore \qquad \bar{v}_3 = (0,\ -2k_3,\ k_3) \text{ con } k_3 \neq 0$$

vectores característicos asociados a λ_3

b) Los espacios característicos son:

$$E(\lambda_1) = \{ (-2k_1,\ 12k_1,\ k_1) \mid k_1 \in \mathbb{R} \}$$

$$E(\lambda_2) = \{ (0,\ k_2,\ 0) \mid k_2 \in \mathbb{R} \}$$

$$E(\lambda_3) = \{ (0,\ -2k_3,\ k_3) \mid k_3 \in \mathbb{R} \}$$

c) En forma general, la matriz P es:

$$P = \begin{bmatrix} -2k_1 & 0 & 0 \\ 12k_1 & k_2 & -2k_3 \\ k_1 & 0 & k_3 \end{bmatrix}$$

si se hace que:

$$k_1 = 1$$
$$k_2 = 2$$
$$k_3 = -1$$

entonces, una matriz diagonalizadora sería:

$$P = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 12 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

cuya inversa es:

$$P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

d) Sustituyendo, tenemos que:

$$D = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 12 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

desarrollando los productos, se tiene:

$$D = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 12 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$D = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

de donde:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 3.25 Para el operador lineal $T: \ P_2 \to P_2$ donde:

$$P_2 = \left\{ ax^2 + bx + c \,\middle|\, a,\, b,\, c \in \mathbb{R} \right\}$$

definido por:

$$T\left(ax^2 + bx + c\right) = (a - 2c)\,x^2 + (-2a + 4c)\ ; \qquad \forall\, ax^2 + bx + c \in P_2$$

a) Determine si la matriz que representa al operador T es diagonalizable.

b) En caso afirmativo, obtener una matriz diagonal D asociada a T.

c) Determine una base a la cual está referida la matriz diagonal D del inciso anterior.

SOLUCIÓN:

Con el fin de simplificar el procedimiento se emplearán los siguientes isomorfismos:

$$f\left(ax^2 + bx + c\right) = (a,\ b,\ c)$$

$$f^{-1}(a,\ b,\ c) = ax^2 + bx + c$$

De esta forma, la regla de correspondencia del operador T es:

$$T(a,\ b,\ c) = (a - 2c,\ 0,\ -2a + 4c) \quad ; \quad \forall\,(a,\ b,\ c) \in \mathbb{R}^3$$

a) Obteniendo los valores y vectores característicos, tenemos:

$$T(1,\ 0,\ 0) = (1,\ 0,\ -2)$$

$$T(0,\ 1,\ 0) = (0,\ 0,\ 0) \quad \Rightarrow \quad M(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} = A$$

$$T(0,\ 0,\ 1) = (-2,\ 0,\ 4)$$

El polinomio característico viene dado por:

$$\mathrm{Det}\left(A-\lambda \mathrm{I}\right) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -2 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ -2 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \left(1-\lambda\right)\left(-\lambda\right)\left(4-\lambda\right)+4\lambda$$

$$P\left(\lambda\right) = -\lambda\left(4-\lambda-4\lambda+\lambda^{2}\right)+4\lambda$$

$$P\left(\lambda\right) = -\lambda^{3}+5\lambda^{2}-4\lambda+4\lambda$$

$$P\left(\lambda\right) = -\lambda^{3}+5\lambda^{2} = \lambda^{2}\left(-\lambda+5\right)$$

Por lo que los valores característicos son:

$$\lambda_1 = 0$$

$$\lambda_2 = 0$$

$$\lambda_3 = 5$$

Obteniendo los vectores característicos, tenemos:

Para $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, se tiene:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - 2z = 0 \\ 0 = 0 \\ -2x + 4z = 0 \end{cases}$$

al escalonar el sistema, se reduce a:

$$\left\{ x-2z=0 \right. \Rightarrow \quad x=2z$$

Se trata de un sistema compatible indeterminado con dos grados de libertad, con lo cual se tiene que su solución general es:

si $\quad z = k_1 \;\Rightarrow\; x = 2k_1$

con $\quad y = k_2$

con lo cual los vectores característicos asociados a λ_1 y λ_2 son:

$$\bar{v}_1 = \left(2k_1,\; k_2,\; k_1 \right) \quad \text{con} \quad k_1 \neq 0 \quad \text{y/o} \quad k_2 \neq 0$$

Para $k_3 = 5$, se tiene:

$$\begin{bmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & -5 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -4x \qquad -2z = 0 \\ \qquad -5y \qquad = 0 \\ -2x \qquad -z = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad y = 0$$

al escalonar el sistema, se llega a:

$$\begin{cases} 2x + z = 0 \\ \qquad y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad z = -2x$$

obteniendo la solución general, tenemos:

Si $\quad x = k_3 \;\Rightarrow\; z = -2k_3 \quad$ con $\quad y = 0$

por lo que los vectores característicos asociados a λ_3 son:

$$\bar{v}_3 = \left(k_3,\; 0,\; -2k_3 \right) \quad \text{con} \quad k_3 \neq 0$$

Obsérvese que el espacio característico asociado a λ_1 y λ_2 es de dimensión dos, por lo que una base de dicho espacio sería:

$$B = \left\{ (2,\, 0,\, 1),\; (0,\, 1,\, 0) \right\}$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

Los elementos de esta base son vectores característicos asociados a λ_1 y λ_2.

Para el caso de $\bar{v}_3$, un vector característico es:

$$(1,\ 0,\ -2)$$

Como la matriz diagonalizadora P está formada con los vectores característicos dispuestos en forma de columna, entonces tenemos que:

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Si P es no singular, esto es, si existe P^{-1}, entonces la matriz A es diagonalizable.

Dado que:

$$\text{Det}\,(P) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -5$$

entonces:

$$\text{Det}\,(P) \neq 0 \quad \therefore \qquad P^{-1} \quad \text{existe}$$

con lo cual podemos asegurar que A es diagonalizable.

Tenemos que los valores y vectores característicos del operador original T, aplicando f^{-1}, son:

Para $\lambda_1 = \lambda_2 = 0 \quad \Rightarrow \bar{v}_1 = 2k_1x^2 + k_2x + k_1$ con $k_1 \neq 0$ y/o $k_2 \neq 0$

Para $\lambda_1 = 5 \qquad \Rightarrow \bar{v}_3 = k_3x^2 - 2k_3$ con $k_3 \neq 0$

b) Con esta matriz P y empleando la expresión $D = P^{-1} A P$, se llega a que la matriz D es:

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

c) Una base a la cual está referida la matriz D es la formada por los vectores característicos obtenidos, esto es:

$$f^{-1}(2, 0, 1) = 2x^2 + 1$$

$$f^{-1}(0, 1, 0) = x$$

$$f^{-1}(1, 0, -2) = x^2 - 2$$

$\therefore$ La base solicitada es $B = \{ 2x^2 + 1, \ x, \ x^2 - 2 \}$

Ejercicio 3.26 Al diagonalizar la matriz asociada al operador lineal $T: P_2 \rightarrow P_2$, donde P_2 es el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual a dos, se llega a que una matriz diagonal asociada a T es:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

y una matriz diagonalizadora es:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Obtenga la imagen del polinomio $P(x) = x^2 + x + 1$ bajo T.

ÍNDICE
1
2
3
4
5

SOLUCIÓN:

Resolveremos el ejercicio por dos caminos distintos.

MÉTODO 1

A partir de la matriz diagonalizadora, se obtiene que una base de P_2, formada por vectores característicos del operador T, es:

$$B = \{ 1, \quad x+2, \quad x^2+2x+1 \}$$

Para obtener la imagen solicitada del polinomio $P(x)$, se hará uso de la expresión:

$$M_B^B(T)\,(P)_B = [\,T(P)\,]_B \qquad \ldots (1)$$

donde la matriz $M_B^B(T)$ es la matriz diagonal del operador T.

Obteniendo el vector de coordenadas de P, tenemos:

$$x^2+x+1 = \alpha_1(1) + \alpha_2(x+2) + \alpha_3(x^2+2x+1)$$

de donde se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 1 \\ \alpha_2 + 2\alpha_3 = 1 \\ \alpha_3 = 1 \end{cases}$$

cuya solución es:

$$\alpha_1 = 2, \qquad \alpha_2 = -1 \qquad \text{y} \qquad \alpha_3 = 1$$

por lo que:

$$(P)_B = (2, \ -1, \ 1)$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

sustituyendo $M_B^B(T)$ y $(P)_B$ en la expresión (1):

$$[T(P)]_B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad [T(P)]_B = (4,\ 0,\ -1)$$

con este vector de coordenadas y los elementos de la base B, tenemos:

$$T\left(x^2 + x + 1\right) = 4(1) - 1\left(x^2 + 2x + 1\right)$$

con lo cual la imagen solicitada es:

$$T\left(x^2 + x + 1\right) = -x^2 - 2x + 3$$

MÉTODO 2

De la matriz diagonal, se tiene que los valores característicos del operador T son:

$$\lambda_1 = 2, \qquad \lambda_2 = 0 \qquad \text{y} \qquad \lambda_3 = -1$$

Obteniendo las imágenes de los elementos de la base B, tenemos:

$$T(1) = 2(1) \quad \Rightarrow \quad T(1) = 2 \qquad \ldots(2)$$

$$T(x+2) = 0(x+2) \quad \Rightarrow \quad T(x+2) = 0$$

dado que T es lineal, se tiene que:

$$T(x+2) = T(x) + 2T(1) = 0$$

sustituyendo (2) y despejando $T(x)$, tenemos:

$$T(x) = -4 \qquad \ldots(3)$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

además:

$$T\left(x^2+2x+1\right) = -1\left(x^2+2x+1\right) = -x^2-2x-1$$

Por otro lado, se tiene que:

$$T\left(x^2+2x+1\right) = T\left(x^2\right)+2T\left(x\right)+T\left(1\right) = -x^2-2x-1$$

sustituyendo (2) y (3) y despejando $T\left(x^2\right)$, tenemos:

$$T\left(x^2\right)+2\left(-4\right)+2 = -x^2-2x-1$$

de donde:

$$T\left(x^2\right) = -x^2-2x+5 \qquad \ldots(4)$$

La imagen del polinomio P solicitada, se obtiene de la siguiente forma:

$$T\left(x^2+x+1\right) = T\left(x^2\right)+T\left(x\right)+T\left(1\right)$$

sustituyendo (2), (3) y (4), tenemos:

$$T\left(x^2+x+1\right) = \left(-x^2-2x+5\right)+\left(-4\right)+\left(2\right)$$

$$\therefore \quad T\left(x^2+x+1\right) = -x^2-2x+3$$

Un tercer método de solución del ejercicio sería obtener la regla de correspondencia del operador T, sabiendo que:

$$T\left(1\right) = 1$$

$$T\left(x+2\right) = 0$$

$$T\left(x^2+2x+1\right) = -x^2-2x-1$$

Teniendo las imágenes de los vectores de la base B y siguiendo el procedimiento que se muestra en el ejercicio 3.10, fácilmente se obtiene la regla de correspondencia de T y con ella, se obtendría la imagen del polinomio P.

ÍNDICE
1
2
3
4
5

Ejercicio 3.27 Para el operador lineal $T: \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$, donde el espacio $\mathbb{C}^3$ está definido sobre el campo $\mathbb{C}$ y cuya regla de correspondencia es:

$$T(x, y, z) = (3x, 2y - 5z, y - 2z) \; ; \; \forall (x, y, z) \in \mathbb{C}^3$$

a) Determine si el operador T es diagonalizable.

b) En caso de resultar afirmativo el inciso anterior, obtenga la matriz diagonal D asociada a T y una base a la cual esté referida.

SOLUCIÓN:

a) Dado que el espacio vectorial $\mathbb{C}^3$ está definido en el campo complejo, entonces su dimensión es igual a tres, por lo que una base de $\mathbb{C}^3$ es:

$$B = \{ (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) \}$$

Obteniendo la matriz asociada:

$$\begin{aligned} T(1,0,0) &= (3,0,0) \\ T(0,1,0) &= (0,2,1) \\ T(0,0,1) &= (0,-5,-2) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad M(T) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} = A$$

Los valores característicos se obtienen a partir de:

$$\operatorname{Det}(A - \lambda \mathrm{I}) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & -5 \\ 0 & 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(2-\lambda)(-2-\lambda) + 5(3-\lambda)$$

$$\mathrm{P}(\lambda) = (3-\lambda)\left[(2-\lambda)(-2-\lambda) + 5 \right]$$

$$\mathrm{P}(\lambda) = (3-\lambda)\left(-4 - 2\lambda + 2\lambda + \lambda^2 + 5 \right)$$

$$\mathrm{P}(\lambda) = (3-\lambda)\left(\lambda^2 + 1 \right)$$

Por lo tanto, los valores característicos son:

$$\lambda_1 = 3, \qquad \lambda_2 = i \qquad \text{y} \qquad \lambda_3 = -i$$

Dado que los tres valores característicos son diferentes, entonces podemos afirmar que el operador T sí es diagonalizable.

b) La matriz diagonal D que se nos pide obtener en este inciso se puede dar directamente:

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{bmatrix}$$

Para obtener la base a la cual está referida esta matriz, será necesario obtener los vectores característicos y a partir de ellos formar la base solicitada.

Para $\lambda_1 = 3$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ -y - 5z = 0 \\ y - 5z = 0 \end{cases}$$

Al escalonar el sistema, se reduce a:

$$\begin{cases} y - 5z = 0 \\ -10z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} y = 0 \\ z = 0 \end{array}$$

Dado que x no interviene en el sistema, entonces puede tomar cualquier valor:

$$x = k_1$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

Por lo tanto, los vectores característicos asociados a $\lambda_1 = 3$ son:

$$\overline{v}_1 = \left(k_1,\ 0,\ 0 \right) \quad \text{con} \quad k_1 \neq 0$$

y el correspondiente espacio característico es:

$$E\left(\lambda_1\right) = \left\{ \left(k_1,\ 0,\ 0\right) \middle|\ k_1 \in \mathbb{C} \right\}$$

Para $\lambda_2 = i$:

$$\begin{bmatrix} 3-i & 0 & 0 \\ 0 & 2-i & -5 \\ 0 & 1 & -2-i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \left(3-i\right)x = 0 & \Rightarrow \quad x = 0 \\ \left(2-i\right)y - 5z = 0 \\ y + \left(-2-i\right)z = 0 \end{cases}$$

Ordenando el sistema como más conviene para resolverlo con el método de Gauss, tenemos:

$$\begin{array}{l} (-2) \\ \ \ + \\ \end{array} \begin{cases} y + \left(-2-i\right)z = 0 \\ \left(2-i\right)y - 5z = 0 \\ x = 0 \end{cases} \sim \begin{array}{l} (i) \\ \ \ + \\ \end{array} \begin{cases} y + \left(-2-i\right)z = 0 \\ -iy + \left(-1+2i\right)z = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y + \left(-2-i\right)z = 0 & \Rightarrow \quad y = (2+i)z \\ 0 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

de donde:

$$\text{si} \quad z = k_2 \quad \Rightarrow \quad y = \left(2+i\right)k_2$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

Con lo cual los vectores característicos asociados a $\lambda_2 = i$ son:

$$\bar{v}_2 = \left(0, \; (2+i)\,k_2, \; k_2\right) \quad \text{con} \quad k_2 \neq 0$$

y el correspondiente espacio característico es:

$$E(\lambda_2) = \left\{ \left(0, \, (2+i)\,k_2, \, k_2\right) \,\middle|\, k_2 \in \mathbb{C} \right\}$$

Para $\lambda_3 = -i$:

$$\begin{bmatrix} 3+i & 0 & 0 \\ 0 & 2+i & -5 \\ 0 & 1 & -2+i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} (3+i)\,x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \\ (2+i)\,y - 5z = 0 \\ y + (-2+i)\,z = 0 \end{cases}$$

al escalonar el sistema con el método de Gauss, se llega a:

$$\begin{cases} y + (-2+i)\,z = 0 \quad \Rightarrow \quad y = (2-i)\,z \\ 0 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

si $\quad z = k_3 \quad \Rightarrow \quad y = (2-i)\,k_3$

Con lo cual los vectores característicos asociados a $\lambda_3 = -i$ son:

$$\bar{v}_3 = \left(0, \; (2-i)\,k_3, \; k_3\right) \quad \text{con} \quad k_3 \neq 0$$

y su correspondiente espacio característico es:

$$E(\lambda_3) = \left\{ \left(0, \, (2-i)\,k_3, \, k_3\right) \,\middle|\, k_3 \in \mathbb{C} \right\}$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

Si tomamos un vector característico de cada uno de los espacios característicos, obtendremos una base a la cual está referida la matriz diagonal D.

Si hacemos que:

$$k_1 = 1, \qquad k_2 = 1 \qquad \text{y} \qquad k_3 = 1$$

Entonces la base solicitada sería:

$$B = \{ (1,\ 0,\ 0),\ (0,\ 2+i,\ 1),\ (0,\ 2-i,\ 1) \}$$

Es evidente que si se dan otros valores a k_1, k_2 y k_3, se obtendría una base distinta y, por lo tanto, se podrían obtener una infinidad de bases formadas con vectores característicos a los cuales estaría referida la matriz diagonal D. La que se dio como respuesta en este ejercicio es solo una de ellas.

Por otro lado, es importante resaltar el hecho de que los tres espacios característicos obtenidos son de dimensión uno y, por lo tanto, se cumple que la suma de las dimensiones de los espacios característicos es igual a la dimensión del dominio del operador.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Sea F el espacio vectorial de funciones reales de variable real y sea la transformación $T: F \rightarrow F$ definida por:

$$T\left(f(x)\right) = f'(x) - f''(x) \quad ; \quad \forall f(x) \in F$$

Determine si la transformación T es lineal.

2. Determine si la transformación $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por:

$$T(x, y) = (2x, \; y+1) \quad ; \; \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

es lineal.

3. Determine si la transformación $T: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^2$ definida por:

$$T(z) = (\bar{z}, \; iz) \quad ; \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

es lineal, cuando:

a) $\mathbb{C}$ y $\mathbb{C}^2$ están definidos sobre el campo $\mathbb{C}$.

b) $\mathbb{C}$ y $\mathbb{C}^2$ están definidos sobre el campo $\mathbb{R}$.

4. Sea P_3 el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual a tres, definido sobre $\mathbb{R}$. Determine si la transformación $T: P_3 \rightarrow P_3$ definida por:

$$T\left(P(x)\right) = P(x) + \frac{dP(x)}{dx} \quad ; \quad \forall \; P(x) \in P_3$$

es lineal.

ÍNDICE
1
2
3
4
5

5. Sea M el espacio vectorial de matrices cuadradas de orden dos sobre $\mathbb{R}$ y sea $T: M \rightarrow M$ un operador definido por:

$$T(x) = Ax - xA \quad ; \quad \forall \ x \in M$$

donde:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Determine si T es lineal.

b) Obtenga el núcleo y la dimensión del recorrido de T.

6. Sean P_4 y P_3 los espacios vectoriales reales de los polinomios de grado menor o igual a cuatro y menor o igual a tres, respectivamente, y sea $T: P_4 \rightarrow P_3$ la transformación definida por:

$$T\left(P(x)\right) = \sum_{i=1}^{3} \frac{d^i}{dx^i} P(x) \quad ; \quad \forall \ P(x) \in P_4$$

a) Determine si T es lineal.

b) Obtenga el núcleo de T.

7. Sea M el espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden n con elementos reales. Determine si cada una de las siguientes transformaciones es lineal:

a) $T: M \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $T(A) = \text{Det}(A) \quad ; \quad \forall \ A \in M$

b) $S: M \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $S(A) = Tr(A) \quad ; \quad \forall \ A \in M$

8. Sea la transformación $T: M \rightarrow \mathbb{R}^3$, donde M es el espacio de matrices cuadradas de orden dos con elementos reales, tal que:

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \left(a+b+c, \ a-d, \ b+c+d\right) \quad ; \quad \forall \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M$$

a) Determine si T es lineal.

b) Obtenga el núcleo de T y su dimensión.

c) Determine el recorrido de T y su dimensión.

9. Para la transformación lineal $S: \mathbb{R}^3 \rightarrow M$ definida por:

$$S(x, y, z) = \begin{bmatrix} x-2y & y+z \\ y+z & x-y+z \end{bmatrix} \quad ; \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

donde M es el espacio vectorial real de las matrices simétricas de orden dos con elementos reales, obtenga:

a) El núcleo de la transformación, su dimensión y una de sus bases.

b) El recorrido de la transformación, su dimensión y una de sus bases.

10. Para la transformación lineal $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$T(x, y, z) = x - y \quad ; \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

Obtenga:

a) El núcleo de T, su dimensión y una de sus bases.

b) El recorrido de la transformación, su dimensión y una de sus bases.

11. Sea la transformación lineal $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por:

$$T(x, y, z) = (y-2z, \; y+z, \; x+2y-3z) \quad ; \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

a) Determine si T es lineal.

b) Obtenga el recorrido y el núcleo de T y la dimensión de ambos.

c) Verifique que se cumple que la dimensión del dominio es igual a la dimensión del recorrido más la dimensión del núcleo.

d) Obtenga $\left(T \circ 3T^{-1} \right)(x, y, z)$.

12. Sea el espacio vectorial:

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \middle| \; b \in \mathbb{R} \right\}$$

sobre el campo $\mathbb{R}$ y la transformación $T : B \to \mathbb{R}$ definida por:

$$T = \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} = (0,\ 0,\ 0) \quad ; \quad \forall \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \in B$$

Determine:

a) Si T es una transformación lineal.

b) El núcleo y el recorrido de T.

c) La dimensión del núcleo y del recorrido de T.

13. Sea una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por:

$$T(x,\ y,\ z) = (ax + by,\ ax + bz,\ ay + bz) \quad ; \quad \forall\ a,\ b \in \mathbb{R}$$

Determine la relación que debe existir entre a y b para que la dimensión del recorrido sea dos.

14. Sean las transformaciones lineales $T : P_2 \to \mathbb{R}$ y $S : P_2 \to \mathbb{R}$, definidas por:

$$T(P) = \int_0^1 P(x)\,dx \quad ; \quad \forall\ P \in P_2$$

$$S\left(ax^2 + bx + c\right) = \frac{2a}{3} + \frac{b}{2} + c \quad ; \quad \forall \left(ax^2 + bx + c\right) \in P_2$$

donde P_2 es el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual a dos.

a) Obtenga el recorrido y núcleo de la transformación S.

b) Determine una base y la dimensión del núcleo de S.

c) Obtenga la regla de correspondencia de la transformación $H = T + S$.

15. Sean V y W los espacios vectoriales:

$$V = \left\{ ax + b \;\middle|\; a,\, b \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{y} \quad W = \left\{ ax^2 + bx + c \;\middle|\; a,\, b,\, c \in \mathbb{R} \right\}$$

Si la transformación lineal $T: V \to W$ se define por:

$$T\big(P(x) \big) = x \; P(x) \quad ; \quad \forall \quad P(x) \in V$$

obtenga la matriz asociada a T referida a las bases:

$A = \{ x,\, 1 \}$ del dominio

$B = \{ x^2 + 2x + 1,\;\; 9x + 2,\;\; 4x^2 + 3x + 3 \}$ del codominio.

16. Sea W un subespacio del espacio vectorial de las funciones reales de variable real y sea $B = \{ e^{2x},\;\; xe^{2x},\;\; x^2 e^{2x} \}$ una base de W. Obtenga la matriz asociada al operador $D: W \to W$ definido por:

$$D(f) = f' \quad ; \quad \forall \;\; f \in W$$

17. Sean los espacios vectoriales:

$$P_1 = \left\{ ax + b \;\middle|\; a,\, b \in \mathbb{R} \right\}$$

$$P_2 = \left\{ ax^2 + bx + c \;\middle|\; a,\, b,\, c \in \mathbb{R} \right\}$$

y la transformación lineal $T: P_1 \to P_2$ definida por:

$$T(ax + b) = \frac{b}{2} x^2 + ax$$

Obtenga la matriz asociada a T referida a las bases:

$$A = \{ x + 1,\;\; -x + 1 \}$$

$$B = \{ x^2 + x + 1,\;\; x^2 - x + 1,\;\; -x^2 + x + 1 \}$$

18. Sean el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ y el operador lineal $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T(1, 2) = (-1, 4)$ y $T \circ T = \mathrm{I}$, donde I es el operador identidad de $\mathbb{R}^2$. Determine la matriz asociada a T respecto a la base canónica.

19. Sea $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación lineal definida por:

$$T(i) = 2i + 3k$$

$$T(j + k) = 2j$$

$$T(i + j) = i - j$$

donde $\{i, j, k\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

a) Obtenga la matriz asociada a la transformación $M(T)$.

b) Determine la regla de correspondencia de T.

20. Sea $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación lineal. Si se sabe que:

$$T(k) = 2i + 3j + 5k$$

$$T(j + k) = i$$

$$T(i + j + k) = j - k$$

donde $i = (1, 0, 0)$, $j = (0, 1, 0)$ y $k = (0, 0, 1)$

Obtenga:

a) $T(i + 2j + 3k)$.

b) La regla de correspondencia de T.

c) La matriz asociada a T referida a la base $B = \{k, j + k, i + j + k\}$.

21. Sean los espacios vectoriales:

$$P = \left\{ ax + b \mid a,\ b \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{y} \quad N = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \middle|\ a,\ b \in \mathbb{R} \right\}$$

ambos sobre el campo de los reales y sean:

$$A = \{ 2x,\ 1 \} \quad \text{y} \quad B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

dos de sus bases.

Para la transformación lineal $T: P \to N$, se tiene que:

$$M_B^A(T) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Obtenga $T(2x-1)$.

b) Determine la regla de correspondencia de T.

22. Sea $T: \mathbb{C} \to D$ una transformación lineal, donde $\mathbb{C}$ es el espacio vectorial de los números complejos sobre los reales y D es el espacio vectorial de las matrices diagonales de 2×2 sobre los reales. Si.

$$M_B^A(T) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & m \end{bmatrix}$$

donde:

$$\mathrm{A} = \{ 1+2i,\ i \} \quad \text{y} \quad \mathrm{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\}$$

y se sabe que:

$$T(i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

a) Obtenga el valor de m.

b) Determine la regla de correspondencia de T.

23. Obtenga una regla de correspondencia de la transformación lineal $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, tal que el conjunto $\{(1,-1,2), (3,1,-1)\}$ sea una base para el recorrido de T.

24. Sea $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal tal que $T(1, 2) = (4, 6)$ y cuyo núcleo es el conjunto:

$$N(T) = \{ (x, -2x) \mid x \in \mathbb{R} \}$$

a) Determine la regla de correspondencia de T.

b) Obtenga una base del recorrido de T.

25. Sea $S: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal cuya matriz asociada es:

$$M_A^A(S) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

donde:

$$A = \{ (-1, 0), (0, 2) \}$$

y sea $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal definida por:

$$T(x, y) = (3x + y, x - 2y)$$

Obtenga la matriz asociada a la transformación $T \circ S$ referida a las bases:

$$B = \{ (1, 2), (-1, 1) \}$$

$$C = \{ (1, 0), (2, 2) \}$$

26. Para las transformaciones lineales:

$S: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $S(a, b, c) = (a+b, b+c)$

$T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(a, b, c) = (c, b, a)$

$Q: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $Q(a, b, c) = (b+c, a+b)$

a) Determine si existen las transformaciones:

$$T \circ S \ , \qquad Q \circ T \ , \qquad S \circ Q \qquad \text{y} \qquad Q \circ T \circ T$$

b) Para las transformaciones del inciso anterior que existan, obtenga su matriz asociada y su regla de correspondencia.

27. Sean las transformaciones lineales:

$$W: \mathbb{R}^2 \to M \qquad \text{tal que} \qquad W(x, y) = \begin{bmatrix} 2x - y & 0 \\ 0 & x + y \end{bmatrix}$$

$$T: \mathbb{R}^2 \to M \qquad \text{tal que} \qquad T(x, y) = \begin{bmatrix} 3x + 2y & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix}$$

$$\left[(T \circ H) - W \right] : \mathbb{R}^2 \to M \ \text{ tal que } \ \left[(T \circ H) - W \right](x, y) = \begin{bmatrix} 2x + 2y & 0 \\ 0 & x - y \end{bmatrix}$$

donde:

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \middle| \ a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

Obtenga la regla de correspondencia de la transformación lineal $H: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

28. Sean las transformaciones lineales:

$$W: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \qquad \text{donde} \qquad W(x, y) = (x + y, \ x - y, \ y)$$

$$S: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \qquad \text{donde} \qquad S(x, y, z) = (2x + y, \ 3z)$$

$$T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \qquad \text{donde} \qquad T(x, y, z) = (z, \ x)$$

Si la transformación lineal $H: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ está definida por:

$$H(x, y) = (2T \circ W + S \circ W)(x, y)$$

obtenga el núcleo y el recorrido de H.

29. Sean las bases:

$$A = \{(1, 0), (0, 1)\} \quad \text{y} \quad B = \{(-1, 1), (1, 1)\} \text{ de } \mathbb{R}^2$$

y sean las transformaciones lineales:

$$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad \text{y} \qquad S: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

para las cuales se tiene que:

$$M_B^A(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} S(1, 0) &= (1, 1) \\ S(0, 1) &= (-1, 1) \end{aligned}$$

Obtenga la regla de correspondencia de la transformación $W: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que:

$$(W \circ T)(\bar{v}) = (2W \circ S)(\bar{v}) + (S \circ T)(\bar{v}) \quad ; \ \forall \ \bar{v} \in \mathbb{R}^2$$

30. Sean las transformaciones lineales

$$S: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad \text{y} \qquad H: \mathbb{R}^2 \to M$$

definidas por:

$$S(x, y) = (2x - y, \ x + y) \quad ; \ \forall \ (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

$$T(x, y) = (y, x) \quad ; \ \forall \ (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

$$H(x, y) = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} \quad ; \ \forall \ (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

donde:

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} \,\middle|\, x,\ y \in \mathbb{R} \right\}$$

Determine la regla de correspondencia de la transformación Q, tal que:

$$3S + T = Q \circ H$$

31. Dadas las transformaciones lineales:

$T:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (-y, x + 6y)$

$S:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $S(x, y) = (2x + 7y, 9x + y)$

$H:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $H(x, y) = (x + 2y, 2x + y)$

determine las componentes del vector $\bar{u} \in \mathbb{R}^2$ tal que:

$$\left[T^{-1} \circ (S - 3H) \right] \bar{u} = (8,\ -3)$$

32. Sea P el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual a dos y sea M el espacio vectorial de las matrices simétricas de orden dos con elementos reales. Para las transformaciones lineales $T: P \to M$ y $S: M \to \mathbb{R}^3$ definidas por:

$$T(ax^2 + bx + c) = \begin{bmatrix} c + 2b & 2a + c \\ 2a + c & a - b \end{bmatrix}$$

$$S\left(\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \right) = (a + b,\ c - a,\ -b - c)$$

a) Obtenga $S \circ T$.

b) En caso de ser posible, obtenga $(S \circ T)^{-1}$.

33. Para la transformación lineal $T: P \rightarrow P$ donde $P = \{ax + b \mid a, b \in \mathbb{R}\}$, definida por:

$$T(f) = f'(1) + f \quad ; \quad \forall f \in P$$

determine:

a) Si T es biyectiva.

b) Si existe la transformación T^{-1}.

c) T^{-1}, en caso de ser posible.

34. Sea la transformación lineal $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ cuya regla de correspondencia es:

$$T(x, y) = (x - y, ax + y) \quad ; \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Determine el valor de a de tal forma que:

$$T^{-1}(0, 2) = (1, 1)$$

35. Sean los espacios vectoriales:

$$P_2 = \{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\} \quad \text{y} \quad M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \middle| \; a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

ambos definidos sobre el campo real, y sea la transformación lineal $\mathrm{T}: \mathrm{P}_2 \rightarrow \mathrm{M}$ definida por:

$$T(ax^2 + bx + c) = \begin{bmatrix} a + c & 3b \\ 3b & a - c \end{bmatrix} \quad ; \quad \forall \; ax^2 + bx + c \in P_2$$

Obtenga la regla de correspondencia de T^{-1}.

36. Sea M el espacio vectorial real de las matrices cuadradas de orden dos con elementos reales y las transformaciones lineales $S:\mathbb{R}^2\rightarrow M$ y $T:\mathbb{R}^2\rightarrow M$ definidas por:

$$S(a,b)=\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a-b \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad T(a,b)=\begin{bmatrix} 2a & 0 \\ b & 3a-2b \end{bmatrix} \quad ; \ \forall (a,b)\in\mathbb{R}^2$$

a) Obtenga la matriz asociada a la transformación $2S-T$ referida a las bases:

$$A=\{(1,\ 0),\ (-1,\ -1)\}$$

$$B=\left\{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$$

b) Determine si la transformación $2S-T$ tiene inversa.

c) Obtenga $(2S-T)^{-1}$, en caso de ser posible.

37. Sea $T:\ \mathbb{R}^2\rightarrow\mathbb{R}^2$ la transformación lineal no singular definida por:

$$T(x,\ y)=(x+2y,\ -3x+y) \quad ; \quad \forall\ (x,\ y)\in\mathbb{R}^2$$

Determine si $T^{-1}=\dfrac{1}{7}(2\mathrm{I}-T)$, donde $\mathrm{I}:\mathbb{R}^2\rightarrow\mathbb{R}^2$ es la transformación identidad.

38. En los espacios vectoriales

$$M=\left\{\begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}\ \middle|\ a,\ b\in\mathbb{R}\right\},\quad P_1=\{ax+b\ |\ a,b\in\mathbb{R}\}\ \text{ y }\ \mathbb{R}^2$$

las transformaciones lineales

$$S:\ M\rightarrow P_1\ ,\qquad T:\ P_1\rightarrow\mathbb{R}^2\qquad \text{y}\qquad H:\ \mathbb{R}^2\rightarrow M$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

se definen como:

$$S\left(\begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}\right) = (a+b)x + (a-b) \;;\; \forall \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix} \in M$$

$$T(ax+b) = (b-a,\; a+b) \quad ; \quad \forall\; ax+b \in P_1$$

$$H(a,\; b) = \begin{bmatrix} 0 & b-a \\ a & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \forall\; (a,\; b) \in \mathbb{R}^2$$

Determine la regla de correspondencia de la transformación X tal que:

$$3(S+X) = (H \circ T)^{-1}$$

39. Sean las transformaciones lineales $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $S: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ y $U: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definidas por:

$$T(x,\, y,\, z) = (x - y + 2z,\, 3x + y + 4z,\, 5x - y + 8z)$$

$$S(x,\, y,\, z) = (-x + 2y + z,\, 2x - 4y - 2z,\, -3x + 6y + 3z) \;;\; \forall (x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3$$

$$U(x,\, y,\, z) = (x + y,\, x - y,\, 2x + 3y)$$

Obtenga, de ser posible, la regla de correspondencia de N^{-1}, si $N = (T + 2U) \circ S$.

40. Sea la transformación lineal $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por:

$$T(x,\, y,\, z) = (x + 3y,\, 2x + 6y + kz,\, -x - 4y + 2z) \;;\; \forall (x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3$$

a) Determine para qué valores de k existe la transformación inversa T^{-1}.

b) Con $k = 1$, obtenga la regla de correspondencia T^{-1}.

ÍNDICE
1
2
3
4
5

ÍNDICE
1
2
3
4
5

41. Dada la transformación lineal $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por:

$$T(x, y) = (x - y, \; 3x + 3y) \quad ; \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Obtenga la transformación lineal S, de manera que:

$$\left[\left(2T^{-1} \circ S \right) - 2I \right](x, y) = (10x + 4y, \; 4x + 14y)$$

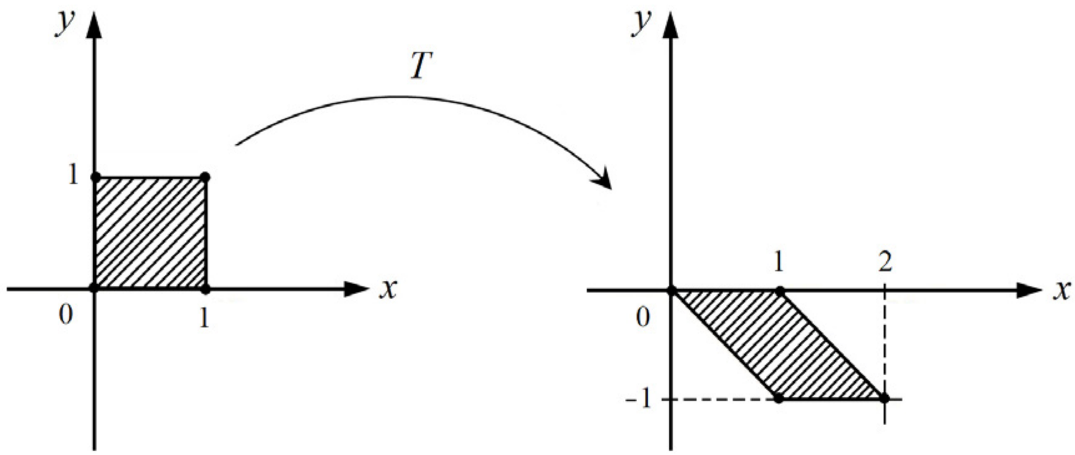
donde I es la transformación identidad.

42. Sea la región definida por los puntos $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ y $(0, 1)$. Determine el efecto geométrico que produce:

a) El realizar primero una reflexión con respecto al origen y después una contracción vertical con $k = \dfrac{1}{2}$.

b) Realizar primero una reflexión sobre el eje y y después una deformación a lo largo del eje x con $k = 1$.

43. Sea $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ una transformación lineal cuyo efecto geométrico sobre el cuadro unitario es el que se muestra en la figura:



Obtenga la matriz asociada a T referida a las bases

$$A = \{(1, 1), (0, 1)\} \quad \text{y} \quad B = \{(0, 2), (-1, 1)\} \text{ de } \mathbb{R}^2.$$

44. Para la región que definen los puntos $(0,\ 1)$, $(-1,\ -1)$ y $(1,\ -1)$, determine el efecto geométrico que produce:

a) Primero una expansión horizontal con $k = 2$, seguida de un giro de $90°$.

b) Primero el giro de $90°$, seguido de una expansión horizontal con $k = 2$.

45. Para la región que definen los puntos $(0,\ 0)$, $(1,\ 1)$, $(2,\ 1)$ y $(3,\ 0)$, determine el efecto geométrico que produce:

a) Primero, una expansión vertical con $k = 2$, seguida de una reflexión sobre el eje x y, posteriormente, un giro de $90°$.

b) Primero, la reflexión sobre el eje x, seguida de un giro de $90°$ y, posteriormente, la expansión vertical con $k = 2$.

c) Primero, el giro de $90°$, seguido de la expansión vertical con $k = 2$ y, posteriormente, la reflexión sobre el x.

46. Sean $A = \{\bar{u}_1,\ \bar{u}_2\}$ y $B = \{\bar{v}_1,\ \bar{v}_2\}$ dos bases de $\mathbb{R}^2$, donde:

$$\bar{u}_1 = (2,\ 1) \qquad \bar{v}_1 = (1,\ -2)$$

$$\bar{u}_2 = (1,\ -1) \qquad \bar{v}_2 = (0,\ 1)$$

y sea $T\colon\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal, tal que:

$$T(\bar{u}_1) = 2\bar{v}_1 + \bar{v}_2 \qquad \text{y} \qquad T(\bar{u}_2) = \bar{v}_1 - \bar{v}_2$$

Determine:

a) Los valores y vectores característicos de T.

b) Los espacios característicos asociados a cada valor característico.

47. Sean el espacio vectorial $\mathbb{C}^2$ y el operador lineal $T : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ cuya matriz asociada respecto a la base $A = \{ (1, i), (1, -i) \}$ es:

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Determine:

a) Los espacios característicos de T.

b) La regla de correspondencia de T.

48. Para el operador lineal $T : M \rightarrow M$, donde:

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| \; a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

y cuya regla de correspondencia es:

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2a + 2b & -a + 5b \\ 2a - c & 4a - 8c + 3d \end{bmatrix} \quad ; \quad \forall \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M$$

Obtenga los valores, vectores y espacios característicos de T.

49. Sea el operador lineal $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ cuya matriz asociada respecto a la base canónica es:

$$M(T) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 0 & -3 & k \\ 0 & k & -1 \end{bmatrix}$$

Si se sabe que uno de los valores característicos de T^{-1} es $\lambda = -\frac{1}{3}$, determine:

a) El valor de k.

b) Los espacios característicos de T^{-1}.

50. Un operador lineal $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tiene los siguientes valores característicos:

$$\lambda_1 = 2 \quad \text{con multiplicidad dos.}$$

$$\lambda_2 = -1$$

para los cuales se tienen los siguientes espacios característicos asociados:

$$E(\lambda_1) = \left\{ (a, b, b) \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

$$E(\lambda_2) = \left\{ (a, 0, -a) \,\middle|\, a \in \mathbb{R} \right\}$$

Determine la regla de correspondencia de T.

51. Los valores característicos de un operador lineal $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ son 1 y -3. Si un vector característico asociado al valor 1 es $(3, 9)$ y un vector característico asociado a -3 es $(-1, 1)$, obtenga la regla de correspondencia del operador T.

52. Sea la matriz:

$$M(T) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

la representación matricial del operador $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, referida a la base canónica.

a) Obtenga los espacios característicos asociados a los valores característicos del operador T.

b) Determine si T es diagonalizable.

c) En caso de resultar afirmativo el inciso anterior, obtenga la matriz diagonal asociada a T y una base a la cual esté referida.

ÍNDICE
1
2
3
4
5

53. Sea $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un operador lineal definido por:

$$T(x, y, z) = (4x + z,\ \ 2x + 3y + 2z,\ \ x + 4z) \quad ; \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

a) Obtenga los espacios característicos asociados a los valores característicos del operador T.

b) Determine si T es diagonalizable.

c) En caso de resultar afirmativo el inciso anterior, obtenga una matriz diagonalizadora P.

d) Compruebe que se cumple la expresión $D = P^{-1}AP$ con la matriz P obtenida en el inciso anterior.

e) Dé una base de $\mathbb{R}^3$ para la cual la matriz asociada a T es diagonal.

54. Sea el operador lineal $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por:

$$T(x, y) = (x + y,\ \ \alpha y) \quad ; \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

a) Obtenga el valor de α, $\alpha \in \mathbb{R}$, para que $\lambda = 0$ sea un valor característico de T.

b) Determine los valores de α, además del obtenido en el inciso anterior, para que el operador T sea diagonalizable.

55. Para la transformación lineal $T: P \to P$, donde:

$$P = \left\{ ax^2 + bx + c \;\middle|\; a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

y cuya regla de correspondencia es:

$$T\left(ax^2 + bx + c\right) = (a + 2b)\,x^2 + (b + 2c)\,x + 2c$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

a) Obtenga los valores y vectores característicos de T.

b) Determine si T es diagonalizable. Justifique la respuesta.

c) En caso de ser posible, obtenga la matriz diagonal asociada a T y una matriz diagonalizadora P.

56. Sean el espacio vectorial $\mathbb{C}^2 = \{ (z_1, z_2) \mid z_1, z_2 \in \mathbb{C} \}$ definido en el campo de los complejos y la transformación lineal $T: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, definida por:

$$T(z_1, z_2) = (z_2, -z_1) \quad ; \quad \forall \; z_1, z_2 \in \mathbb{C}$$

a) Obtenga los valores y vectores característicos de T.

b) Determine los espacios característicos.

c) Obtenga una matriz diagonalizadora P.

d) Verifique que se cumple que $D = P^{-1}AP$.

57. Sea la transformación lineal $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definida por:

$$T(x, y, z) = (z, y, x) \quad ; \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

Obtenga:

a) Los espacios característicos asociados a los valores característicos de T.

b) Una matriz diagonal D que represente al operador T y dé una base a la cual está referida dicha matriz.

58. Para el operador lineal $T: P_2 \to P_2$, donde:

$$P_2 = \{ ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R} \}$$

y cuya regla de correspondencia es:

$$T\left(ax^2+bx+c\right)=(a+c)\,x^2+(b+2c)\,x+(2a-b)\quad;\quad \forall\; ax^2+bx+c\in P_2$$

a) Obtenga los valores característicos del operador T.

b) Determine si T es diagonalizable y, en caso afirmativo, obtenga una matriz P que diagonalice al operador.

59. Sea A una matriz simétrica de 2×2 con valores característicos 1 y 9. Si $\bar{v}_1=(1,\,-1)$ es un vector característico asociado al valor característico 1 y $\bar{v}_2=(-2,\,-2)$ es un vector característico asociado al valor característico 9, determine los elementos de la matriz A.

60. Sea el operador lineal $S:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ cuya matriz asociada respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^3$ es M y respecto a la base

$$B=\{(1,\;2,\;1),\;(1,\;0,\;1),\;(0,\;1,\;-1)\}$$

es:

$$D=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}$$

Determine:

a) $S\big((1,2,1)+2(1,0,1)\big)$

b) Los espacios característicos de S.

c) Los valores a, b, $c\in\mathbb{R}$ de la matriz $P=\begin{bmatrix}1&b&0\\a&0&2\\1&2&c\end{bmatrix}$ tal que $D=P^{-1}MP$.

ÍNDICE 1 2 3 4 5

61. Sea el operador lineal $T: \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ cuya matriz asociada a la base

$$B = \{ (1, \ 0, \ -1), \ (0, \ 1, \ 0), \ (1, \ 0, \ 1) \}$$

es:

$$D = \begin{bmatrix} 1+i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-i \end{bmatrix}$$

Determine:

a) Los espacios característicos de T.

b) Los valores característicos de T^{-1}.

c) La regla de correspondencia de T.

ÍNDICE
1
2
3
4
5

RESPUESTAS A EJERCICIOS PROPUESTOS

1. La transformación T es lineal.

2. La transformación T no es lineal.

3. **a)** La transformación T no es lineal cuando $\mathbb{C}$ y $\mathbb{C}^2$ están definidos sobre el campo $\mathbb{C}$.

b) La transformación T sí es lineal cuando $\mathbb{C}$ y $\mathbb{C}^2$ están definidos sobre el campo $\mathbb{R}$.

4. La transformación T es lineal.

5. **a)** La transformación T es lineal.

b) $N(T) = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & a \end{bmatrix} \middle| \; a, c \in \mathbb{R} \right\}$, Dim $R(T) = 2$

6. **a)** La transformación T es lineal.

b) $N(T) = \left\{ e \mid e \in \mathbb{R} \right\}$

7. **a)** La transformación T no es lineal.

b) La transformación S sí es lineal.

8. **a)** La transformación T es lineal.

b) $N(T) = \left\{ \begin{bmatrix} d & -c-d \\ c & d \end{bmatrix} \middle| \; c, d \in \mathbb{R} \right\}$

Dim $N(T) = 2$

c) $R(T) = \{(a,\ a-b,\ b) \mid a,\ b \in \mathbb{R}\}$

$\text{Dim } R(T) = 2$

9. **a)** $N(S) = \{(-2k,\ -k,\ k) \mid k \in \mathbb{R}\}$

$\text{Dim } N(S) = 1$

$B_N = \{(-2,\ -1,\ 1)\}$ una de las bases del núcleo.

b) El recorrido de S es:

$$R(S) = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ y & x+y \end{bmatrix} \middle| \ x,\ y \in \mathbb{R} \right\}$$

$\text{Dim } R(S) = 2$

$$B_R = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$ una de las bases del recorrido.

10. **a)** $N(T) = \{(k_1,\ k_1,\ k_2) \mid k_1,\ k_2 \in \mathbb{R}\}$

$\text{Dim } N(T) = 2$

Una de sus bases sería:

$B_N = \{(1,\ 1,\ 0),\ (0,\ 0,\ 1)\}$

b) $R(T) = \mathbb{R}$

$\text{Dim } R(T) = 1$

$B_R = \{1\}$

11. **a)** La transformación T es lineal.

b) $N(T) = \{(0,\ 0,\ 0)\}$ $\quad \therefore \quad \text{Dim } N(T) = 0$

Como la $\text{Dim } R(T) = 3$, esto implica que el recorrido de T es $\mathbb{R}^3$.

c) Sí cumple.

d) $\left(T \circ 3T^{-1}\right)(x, y, z) = (3x, 3y, 3z)$

12. **a)** La transformación T es lineal.

b) $N(T) = \left\{ \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \middle| \; b \in \mathbb{R} \right\}$

$R(T) = \{\bar{0}\}$

c) $\text{Dim } N(T) = 1$

$\text{Dim } R(T) = 0$

13. La relación es $a + b = 0$ con $b \neq 0$

14. **a)** El recorrido de la transformación S es $\mathbb{R}$.

$N(S) = \left\{ ax^2 + bx - \left(\frac{2a}{3} + \frac{b}{2} \right) \middle| \; a, b \in \mathbb{R} \right\}$

b) Una base del núcleo es $B_N = \left\{ x^2 - \frac{2}{3}, \quad x - \frac{1}{2} \right\}$

$\text{Dim } N(S) = 2$

c) $H\left(ax^2 + bx + c\right) = a + b + 2c$

15. $M_B^A(T) = \begin{bmatrix} 21 & 8 \\ -3 & -1 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}$

16. $M_B^B(D) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

17. $M_B^A(T) = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$

18. $M(T) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

19. **a)** $M(T) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \end{bmatrix}$

b) $T(x, y, z) = (2x - y + z, -y + 3z, 3x - 3y + 3z)$

20. **a)** $T(i + 2j + 3k) = 3i + 4j + 4k$

b) $T(x, y, z) = (-x - y + 2z, \; x - 3y + 3z, \; -x - 5y + 5z)$

c) $M_B^B(T) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

21. **a)** $T(2x - 1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$

b) $T(ax+b) = \begin{bmatrix} a+b & 0 \\ 0 & -a+b \end{bmatrix}$

22. **a)** $m = 1$

b) $T(a+bi) = \begin{bmatrix} 2a+b & 0 \\ 0 & 2a-b \end{bmatrix}$

23. Una regla de correspondencia sería:

$$T(x, y, z) = (x+3y, -x+y, 2x-y)$$

Otra regla de correspondencia sería:

$$T(x, y, z) = (x+3z, -x+z, 2x-z)$$

24. **a)** $T(x, y) = \left(2x+y, \dfrac{6x+3y}{2}\right)$

b) Una base del recorrido de T es:

$$B_R = \{(2, 3)\}$$

25. $M_C^B(T \circ S) = \begin{bmatrix} -24 & 3 \\ \dfrac{23}{2} & -1 \end{bmatrix}$

26. **a)** $T \circ S$ no se puede realizar.

$Q \circ T$ sí se puede realizar.

$S \circ Q$ no se puede realizar.

$Q \circ T \circ T$ sí se puede realizar.

ÍNDICE
1
2
3
4
5

b) $(Q \circ T)(a, b, c) = (a+b,\ b+c)$

$$M(Q \circ T) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(Q \circ T \circ T)(a, b, c) = (b+c,\ a+b)$$

$$M(Q \circ T \circ T) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

27. $H(x, y) = \left(2x,\ \dfrac{-2x+y}{2}\right)$

28. $H(x, y) = (3x+3y,\ \ 2x+5y)$

Núcleo de H: $N(H) = \{\bar{0}\}$

Recorrido de H es $\mathbb{R}^2$

29. $W(x, y) = (x-5y,\ \ -x+11y)$

30. $Q\left(\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}\right) = (6x-2y,\ 4x+3y)$

31. $\bar{u} = (-4,\ -1)$

32. **a)** $(S \circ T)(ax^2+bx+c) = (2a+2b+2c,\ \ a-3b-c,\ \ -3a+b-c)$

b) $(S \circ T)^{-1}$ no existe.

33. **a)** T es biyectiva.

b) T^{-1} sí existe.

c) $T^{-1}(ax+b) = ax+(-a+b)$

34. $a = 1$

35. $T^{-1}\left(\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\right) = \left(\dfrac{a+c}{2}\right)x^2 + \dfrac{b}{3}x + \left(\dfrac{a-c}{2}\right)$

36. **a)** $M_B^A(2S - T) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \\ 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$

b) $(2S - T)$ no tiene inversa.

c) $(2S - T)^{-1}$ no existe.

37. $T^{-1}(x, y) = \dfrac{1}{7}(2I - T)(x, y) = \left(\dfrac{x-2y}{7}, \dfrac{3x+y}{7}\right)$

38. $X\left(\begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}\right) = \left(\dfrac{-5a-6b}{6}\right)x + \left(\dfrac{-5a+8b}{6}\right)$

39. $N(x, y, z) = (-7x+14y+7z, -19x+38y+19z, -23x+46y+23z)$

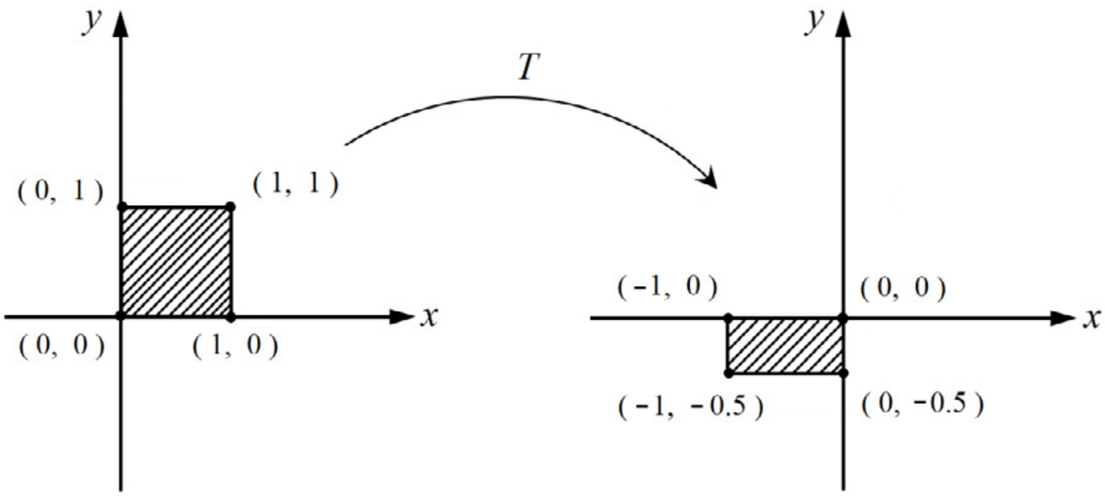
Como el determinante de la matriz asociada a la transformación N es igual a cero, entonces N^{-1} no existe.

40. **a)** T^{-1} existe $\forall\ k \in \mathbb{R}$ con $k \neq 0$

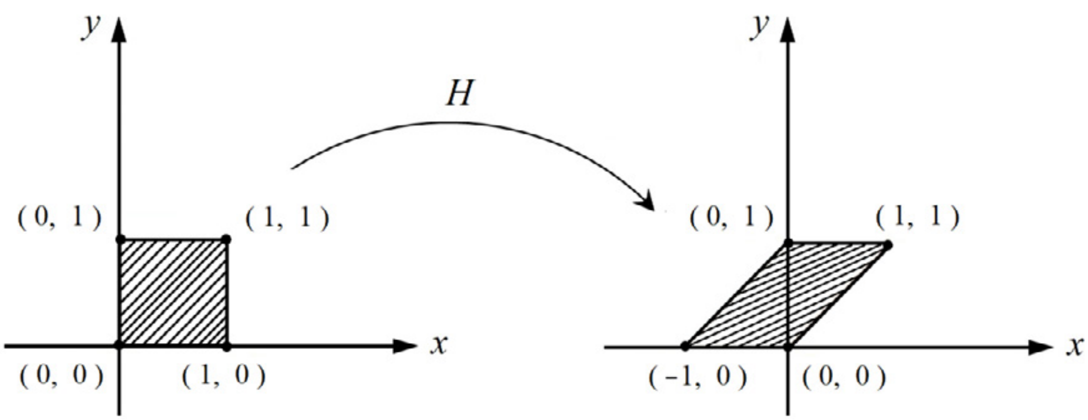
b) $T^{-1}(x, y, z) = (16x - 6y + 3z, -5x + 2y - z, -2x + y)$

41. $S(x, y) = (4x - 6y, 24x + 30y)$

42. **a)** $C \circ R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = T$



b) $D \circ R = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = H$



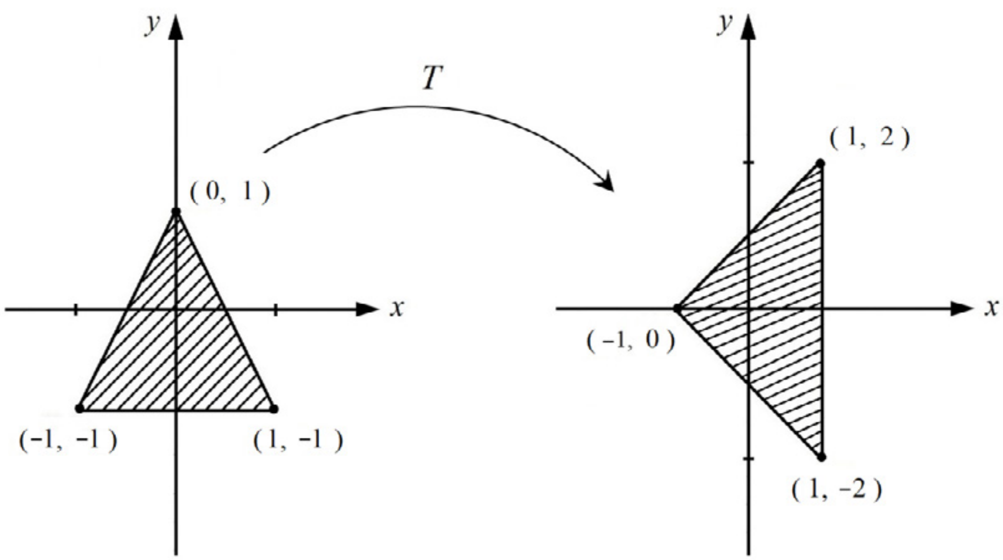
43. $R_x \circ D_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = T$

de donde:

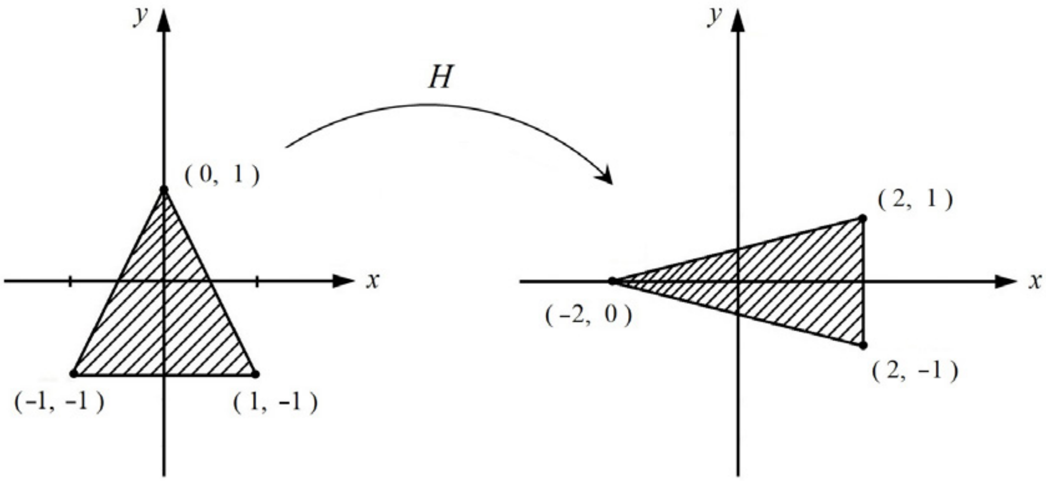
$$T(x, y) = (x + y, -y)$$

$$\therefore \qquad M_B^A(T) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

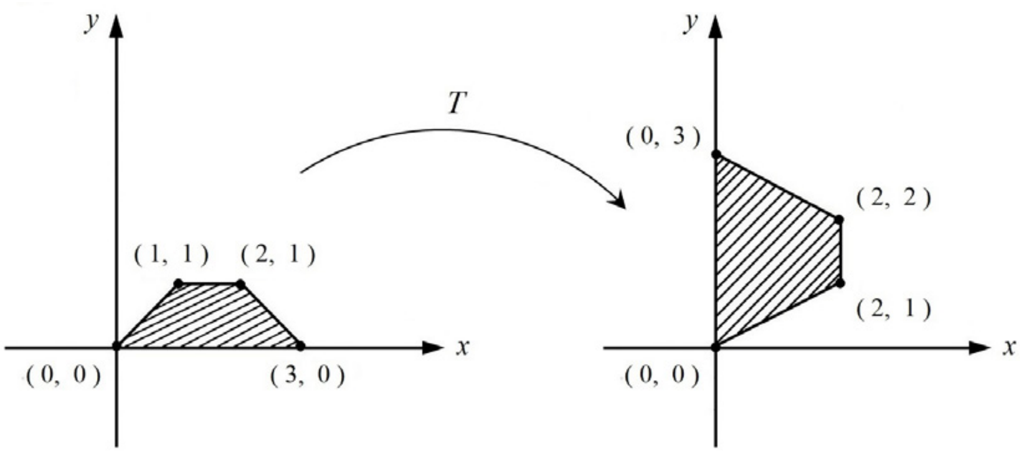
44. a) $G \circ E = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = T$



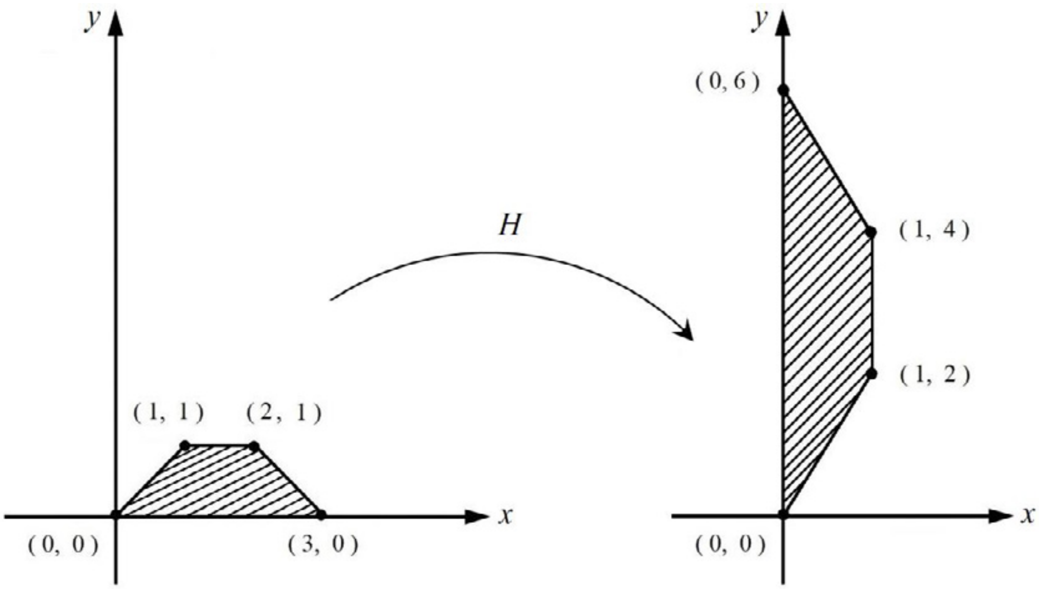
b) $E \circ G = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = H$



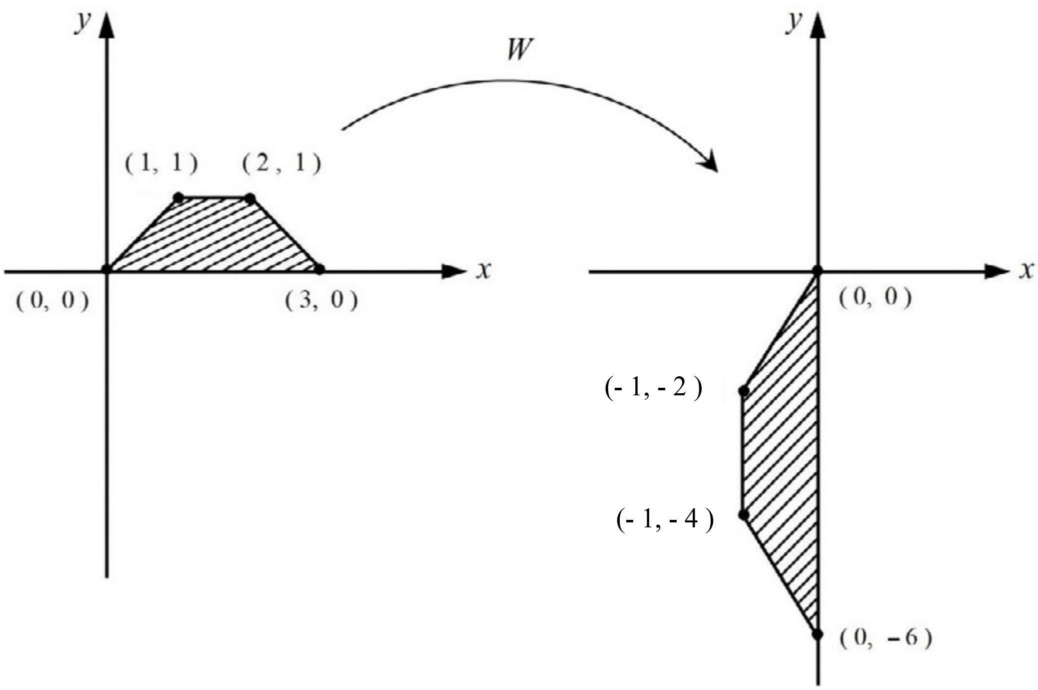
45. a) $G \circ R \circ E = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = T$



b) $E \circ G \circ R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = H$



c) $R \circ E \circ G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = W$



46. **a)** $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$

$\bar{v}_{1,2} = \left(0, k \right)$ con $k \neq 0$

b) $E\left(\lambda_{1,2}\right)=\left\{(0,\ k)\mid k\in\mathbb{R}\right\}$

47. **a)** $E\left(\lambda_1=1\right)=\left\{\left(k_1,\ k_1 i\right)\mid k_1\in\mathbb{C}\right\}$

$E\left(\lambda_2=-1\right)=\left\{\left(k_2,\ -k_2 i\right)\mid k_2\in\mathbb{C}\right\}$

b) $T(x,\ y)=(-iy,\ ix)\quad;\quad\forall\,(x,\ y)\in\mathbb{C}^2$

48. Los valores característicos son:

$$\lambda_1=-1\ ,\qquad \lambda_{2,3}=3\qquad \text{y}\qquad \lambda_4=4$$

Los vectores característicos respectivos son:

$$\bar{v}_1=\begin{bmatrix}0 & 0\\ k_1 & 2k_1\end{bmatrix}\qquad \text{con}\qquad k_1\neq 0$$

$$\bar{v}_{2,3}=\begin{bmatrix}2k_2 & k_2\\ k_2 & k_3\end{bmatrix}\qquad \text{con}\qquad k_2\ \text{y/o}\ k_3\neq 0$$

$$\bar{v}_4=\begin{bmatrix}5k_4 & 5k_4\\ 2k_4 & 4k_4\end{bmatrix}\qquad \text{con}\qquad k_4\neq 0$$

Los espacios característicos son:

$$E\left(\lambda_1\right)=\left\{\begin{bmatrix}0 & 0\\ k_1 & 2k_1\end{bmatrix}\middle|\ k_1\in\mathbb{R}\right\}$$

$$E\left(\lambda_{2,3}\right)=\left\{\begin{bmatrix}2k_2 & k_2\\ k_2 & k_3\end{bmatrix}\middle|\ k_2,\ k_3\in\mathbb{R}\right\}$$

$$E\left(\lambda_4\right)=\left\{\begin{bmatrix}5k_4 & 5k_4\\ 2k_4 & 4k_4\end{bmatrix}\middle|\ k_4\in\mathbb{R}\right\}$$

49. a) $k = 0$

b) Los valores característicos de T^{-1} son:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}, \qquad \lambda_2 = -1 \qquad \text{y} \qquad \lambda_3 = -\frac{1}{3}$$

$$E(\lambda_1) = \{(k_1, 0, 0) \mid k_1 \in \mathbb{R}\}$$

$$E(\lambda_2) = \{(4k_2, 0, 3k_2) \mid k_2 \in \mathbb{R}\}$$

$$E(\lambda_3) = \{(0, k_3, 0) \mid k_3 \in \mathbb{R}\}$$

50. $T(x, y, z) = (2x - 3y + 3z, \ 2y, \ 3y - z)$

51. $T(x, y) = (-2x + y, 3x)$

52. a) $E(\lambda_{1,2}) = \{(k_1, -2k_1 + 2k_2, k_2) \mid k_1, k_2 \in \mathbb{R}\}$
$E(\lambda_3) = \{(0, k_3, 0) \mid k_3 \in \mathbb{R}\}$

b) T sí es diagonalizable.

c) $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$B = \{(1, -2, 0), (0, 2, 1), (0, 1, 0)\}$$

53. a) $E(\lambda_{1,2}) = \{(k_1, k_2, -k_1) \mid k_1, k_2 \in \mathbb{R}\}$
$E(\lambda_3) = \{(k_3, 2k_3, k_3) \mid k_3 \in \mathbb{R}\}$

b) T sí es diagonalizable.

c) Una matriz diagonalizadora es: $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

d) Sí se cumple que $D = P^{-1}AP$.

e) Una base formada por vectores característicos sería:

$$B = \{(1,\ 0,\ -1),\ (0,\ 1,\ 0),\ (1,\ 2,\ 1)\}$$

54. a) $P(\lambda) = (1-\lambda)(\alpha-\lambda)$ Para que $\lambda = 0$ sea un valor característico, entonces $\alpha = 0$.

b) Como $\operatorname{Dim} E(\lambda = 1) = 1$, entonces para que T sea diagonalizable $\alpha \neq 1$ con $\alpha \in \mathbb{R}$. Si $\alpha \neq 1$, entonces los valores característicos de T serían diferentes y, por lo tanto, T sería diagonalizable.

55. a) Los valores característicos de T son:

$$\lambda_{1,2} = 1 \qquad \text{y} \qquad \lambda_3 = 2$$

Los vectores característicos correspondientes son:

$$\bar{v}_{1,2} = k_1 x^2 \qquad \text{con} \qquad k_1 \neq 0$$

$$\bar{v}_3 = 4k_2 x^2 + 2k_2 x + k_2 \qquad \text{con} \qquad k_2 \neq 0$$

b) Como la suma de las dimensiones de los espacios característicos es diferente de la dimensión del dominio, entonces T no es diagonalizable.

c) No es posible.

56. a) Los valores característicos de T son:

$$\lambda_1 = i \qquad \text{y} \qquad \lambda_2 = -i$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

Los vectores característicos correspondientes son:

$$\bar{v}_1 = (k_1, \ k_1 i) \qquad \text{con} \qquad k_1 \neq 0$$

$$\bar{v}_2 = (k_2, \ -k_2 i) \qquad \text{con} \qquad k_2 \neq 0$$

b) $E(\lambda_1) = \{(k_1, \ k_1 i) \mid k_1 \in \mathbb{C}\}$

$E(\lambda_2) = \{(k_2, \ -k_2 i) \mid k_2 \in \mathbb{C}\}$

c) Si $k_1 = k_2 = 1$, entonces:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix}$$

d) $D = P^{-1}AP$ sí se cumple, donde:

$$D = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$$

57. **a)** $E(\lambda_{1,2}) = \{(k_1, \ k_2, \ k_1) \mid k_1, \ k_2 \in \mathbb{R}\}$

$E(\lambda_3) = \{(k_3, \ 0, \ -k_3) \mid k_3 \in \mathbb{R}\}$

b) $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

Una base sería:

$$B = \{(1, \ 0, \ 1), \ (0, \ 1, \ 0), \ (1, \ 0, \ -1)\}$$

58. **a)** Los valores característicos de T son:

$$\lambda_{1,2} = 1 \qquad \text{y} \qquad \lambda_3 = 0$$

b) El operador T no es diagonalizable.

ÍNDICE
1
2
3
4
5

59. $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

60. a) $S\big((1,\ 2,\ 1) + 2(1,\ 0,\ 1)\big) = (5,\ 2,\ 5)$

b) $E(\lambda_1) = \{(k_1,\ 2k_1,\ k_1) \mid k_1 \in \mathbb{R}\}$

$E(\lambda_{2,3}) = \{(k_2,\ k_3,\ k_2 - k_3) \mid k_2,\ k_3 \in \mathbb{R}\}$

c) $a = 2$

$b = 2$

$c = -2$

61. a) $E(\lambda_1 = 1 + i) = \{(k_1,\ 0,\ -k_1) \mid k_1 \in \mathbb{C}\}$

$E(\lambda_2 = 1) = \{(0,\ k_2,\ 0) \mid k_2 \in \mathbb{C}\}$

$E(\lambda_3 = 1 - i) = \{(k_3,\ 0,\ k_3) \mid k_3 \in \mathbb{C}\}$

b) Los valores característicos de T^{-1} son:

$\lambda_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} i$

$\lambda_2 = 1$

$\lambda_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} i$

c) $T(x,\ y,\ z) = (x - iz,\ y,\ -ix + z)\ ;\ \forall (x,\ y,\ z) \in \mathbb{C}^3$

Capítulo 4

ESPACIOS CON PRODUCTO INTERNO

ÍNDICE
1
2
3
4
5

Producto interno

Sea V un espacio vectorial sobre un campo de definición complejo. Un producto interno es una función de $V \times V$ en $\mathbb{C}$ que asocia a cada pareja de vectores $\bar{u}$ y $\bar{v}$ de V un escalar $\left(\bar{u} \mid \bar{v} \right) \in \mathbb{C}$, llamado el producto interno de $\bar{u}$ y $\bar{v}$, que satisface los siguientes axiomas:

1. $\left(\bar{u} \mid \bar{v} \right) = \overline{\left(\bar{v} \mid \bar{u} \right)}$

2. $\left(\bar{u} \mid \bar{v} + \bar{w} \right) = \left(\bar{u} \mid \bar{v} \right) + \left(\bar{u} \mid \bar{w} \right)$

3. $\left(\alpha \bar{u} \mid \bar{v} \right) = \alpha \left(\bar{u} \mid \bar{v} \right)$

4. $\left(\bar{u} \mid \bar{u} \right) > 0$ si $\bar{u} \neq \bar{0}$

Propiedades del producto interno

Sean $\bar{u}$, $\bar{v}$ y $\bar{w}$ vectores de un espacio V sobre $\mathbb{C}$ con producto interno y sea $\alpha \in \mathbb{C}$.

1. $\left(\bar{u} \mid \alpha \bar{v} \right) = \bar{\alpha} \left(\bar{u} \mid \bar{v} \right)$

2. $\left(\bar{u} \mid \bar{u} \right) \in \mathbb{R}$

3. $\left(\bar{0} \mid \bar{u} \right) = \left(\bar{u} \mid \bar{0} \right) = 0$

4. $\left(\bar{u} \mid \bar{u} \right) = 0$ si y solo si $\bar{u} = \bar{0}$

5. $\left(\bar{u} \mid \bar{v} - \bar{w} \right) = \left(\bar{u} \mid \bar{v} \right) - \left(\bar{u} \mid \bar{w} \right)$

Ejercicio 4.1 Sea F el espacio vectorial de las funciones continuas en el intervalo $[0,\ 1]$. Determine si la función:

$$(f \mid g) = \int_0^1 e^t f(t)\ g(t)\, dt \quad ; \quad \forall\ f,\ g \in F$$

es un producto interno.

SOLUCIÓN:

Para determinar si la función dada es un producto interno, se deberá demostrar el cumplimiento de los cuatro axiomas de la definición.

1) $(f \mid g) = (g \mid f)$

Esto es:

$$\int_0^1 e^t f(t)\ g(t)\, dt = \int_0^1 e^t g(t)\ f(t)\, dt$$

como el producto de funciones es conmutativo, entonces se cumple la propiedad.

2) $(f \mid g+h) = (f \mid g) + (f \mid h)$

De donde:

$$\int_0^1 e^t f(t)\left[g(t)+h(t)\right] dt = \int_0^1 e^t f(t)\ g(t)\, dt + \int_0^1 e^t f(t)\ h(t)\, dt$$

$$\int_0^1 \left[e^t f(t)\ g(t)\, dt + e^t f(t)\ h(t)\, dt\right] = \int_0^1 e^t f(t)\ g(t)\, dt + \int_0^1 e^t f(t)\ h(t)\, dt$$

como la integral de una suma es igual a la suma de las integrales, se tiene:

$$\int_0^1 e^t f(t)\ g(t)\, dt + \int_0^1 e^t f(t)\, h(t)\, dt = \int_0^1 e^t f(t)\ g(t)\, dt + \int_0^1 e^t f(t)\ h(t)\, dt$$

$\therefore$ cumple

ÍNDICE
1
2
3
4
5

3) $\left(\alpha f \mid g \right) = \alpha \left(f \mid g \right)$

entonces

$$\int_0^1 e^t \left[\alpha f(t) \right] g(t)\, dt = \alpha \int_0^1 e^t f(t)\, g(t)\, dt$$

por propiedades de las integrales, se tiene:

$$\alpha \int_0^1 e^t f(t)\, g(t)\, dt = \alpha \int_0^1 e^t f(t)\, g(t)\, dt$$

$\therefore$ cumple

4) $\left(f \mid f \right) > 0$ si $f \neq 0$ axioma conocido como positividad.

De donde, se tiene que:

$$\int_0^1 e^t f(t)\, f(t)\, dt > 0$$

$$\int_0^1 e^t \left[f(t) \right]^2 dt > 0$$

Como e^t es una función positiva $\forall\ t \in \mathbb{R}$ y la función $\left[f(t) \right]^2$ también es positiva $\forall\ t \in \mathbb{R}$ por estar elevada al cuadrado, entonces la gráfica de la función $e^t \left[f(t) \right]^2$ se encuentra por arriba del eje de las abscisas y, en consecuencia, el área bajo la curva en el intervalo $\left[0 , 1 \right]$ siempre será positiva. Por lo tanto, se cumple el axioma de la positividad, con lo cual, podemos afirmar que la función:

$$\int_0^1 e^t f(t)\, g(t)\, dt$$

es un producto interno.

ÍNDICE
1
2
3
4
5

Ejercicio 4.2 En el espacio vectorial

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ a+b & 2a \end{bmatrix} \middle| \; a,\, b \in \mathbb{R} \right\}$$

sobre $\mathbb{R}$ se define la función:

$$\left(\bar{u} \mid \bar{v} \right) = ac - 2ad - 2bc + 4bd \quad ; \; \forall \; \bar{u} = \begin{bmatrix} a & b \\ a+b & 2a \end{bmatrix}, \quad \bar{v} = \begin{bmatrix} c & d \\ c+d & 2c \end{bmatrix} \in W$$

Considerando que se cumplen:

$$\left(\bar{u} \mid \bar{v} + \bar{w} \right) = \left(\bar{u} \mid \bar{v} \right) + \left(\bar{u} \mid \bar{w} \right) \quad ; \quad \forall \; \bar{u}, \, \bar{v}, \, \bar{w} \in W$$

$$\left(\alpha \, \bar{u} \mid \bar{v} \right) = \alpha \left(\bar{u} \mid \bar{v} \right) \quad ; \quad \forall \, \alpha \in \mathbb{R} \;\; \text{y} \;\; \forall \; \bar{u}, \, \bar{v} \in W$$

determine si $\left(\bar{u} \mid \bar{v} \right)$ es un producto interno en W.

SOLUCIÓN:

Dado que se da por hecho que se cumplen dos de los cuatro axiomas, entonces solo resta comprobar el cumplimiento de los restantes (simetría y positividad).

Simetría:

$$\left(\bar{u} \mid \bar{v} \right) = \overline{\left(\bar{v} \mid \bar{u} \right)}$$

Dado que el campo de definición son los reales, entonces el conjugado no tiene ningún efecto, por lo que la propiedad a demostrar es:

$$\left(\bar{u} \mid \bar{v} \right) = \left(\bar{v} \mid \bar{u} \right) \quad ; \; \forall \; \bar{u} = \begin{bmatrix} a & b \\ a+b & 2a \end{bmatrix}, \; \bar{v} = \begin{bmatrix} c & d \\ c+d & 2c \end{bmatrix} \in W$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

esto es:

$$\left(\begin{bmatrix} a & b \\ a+b & 2a \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} c & d \\ c+d & 2c \end{bmatrix} \right) = \left(\begin{bmatrix} c & d \\ c+d & 2c \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} a & b \\ a+b & 2a \end{bmatrix} \right)$$

$$ac - 2ad - 2bc + 4bd = ca - 2cb - 2da + 4db$$

dada la conmutatividad del producto de reales, tenemos:

$$ac - 2ad - 2bc + 4bd = ac - 2ad - 2bc + 4bd$$

$\therefore$ cumple

Positividad:

$$\left(\bar{u} \,\middle|\, \bar{u} \right) > 0 \text{ si } \bar{u} \neq \bar{0}$$

esto es:

$$\left(\begin{bmatrix} a & b \\ a+b & 2a \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} a & b \\ a+b & 2a \end{bmatrix} \right) > 0$$

de donde se tiene:

$$a^2 - 2ab - 2ab + 4b^2 > 0$$

$$a^2 - 4ab + 4b^2 > 0$$

$$(a - 2b)^2 > 0$$

cuando $a = 2b$ entonces $a - 2b = 0$, por lo que podemos concluir que este axioma no se cumple, por lo tanto:

$$\left(\bar{u} \,\middle|\, \bar{v} \right) = ac - 2ad - 2bc + 4bd$$

no es un producto interno.

ÍNDICE
1
2
3
4
5

Ejercicio 4.3 En el espacio vectorial:

$$\mathbb{C}^3 = \left\{ \left(z_1, z_2, z_3 \right) \mid z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C} \right\}$$

sobre $\mathbb{C}$ se define la función:

$$\left(\bar{v} \mid \bar{w} \right) = \sum_{i=1}^{3} v_i \, \bar{w}_i \quad ; \quad \forall \; \bar{v} = \left(v_1, v_2, v_3 \right), \quad \bar{w} = \left(w_1, w_2, w_3 \right) \in \mathbb{C}^3$$

donde $\bar{w}_i$ es el conjugado de w_i .

Determine si $\left(\bar{v} \mid \bar{w} \right)$ es un producto interno en $\mathbb{C}^3$.

SOLUCIÓN:

Antes de proceder a la resolución del ejercicio, expresemos la función dada en forma desarrollada, esto es:

$$\left(\bar{v} \mid \bar{w} \right) = v_1 \, \bar{w}_1 + v_2 \, \bar{w}_2 + v_3 \, \bar{w}_3$$

Veamos ahora si se cumplen los cuatro axiomas de la definición.

1) $\left(\bar{v} \mid \bar{w} \right) = \overline{\left(\bar{w} \mid \bar{v} \right)}$

Sustituyendo, tenemos:

$$\Big(\left(v_1, v_2, v_3 \right) \Big| \left(w_1, w_2, w_3 \right) \Big) = \overline{\Big(\left(w_1, w_2, w_3 \right) \Big| \left(v_1, v_2, v_3 \right) \Big)}$$

$$v_1 \, \bar{w}_1 + v_2 \, \bar{w}_2 + v_3 \, \bar{w}_3 = \overline{\left(w_1 \, \bar{v}_1 + w_2 \, \bar{v}_2 + w_3 \, \bar{v}_3 \right)}$$

$$v_1 \, \bar{w}_1 + v_2 \, \bar{w}_2 + v_3 \, \bar{w}_3 = \overline{\left(w_1 \, \bar{v}_1 \right)} + \overline{\left(w_2 \, \bar{v}_2 \right)} + \overline{\left(w_3 \, \bar{v}_3 \right)}$$

$$v_1 \, \bar{w}_1 + v_2 \, \bar{w}_2 + v_3 \, \bar{w}_3 = \bar{w}_1 \, v_1 + \bar{w}_2 \, v_2 + \bar{w}_3 \, v_3$$

finalmente:

$$v_1 \, \bar{w}_1 + v_2 \, \bar{w}_2 + v_3 \, \bar{w}_3 = v_1 \, \bar{w}_1 + v_2 \, \bar{w}_2 + v_3 \, \bar{w}_3$$

$\therefore$ cumple

2) $\left(\bar{u} \mid \bar{v}+\bar{w}\right) = \left(\bar{u} \mid \bar{v}\right) + \left(\bar{u} \mid \bar{w}\right)$

$$\left[\left(u_1,\ u_2,\ u_3\right) \Big| \left(\left(v_1,\ v_2,\ v_3\right) + \left(w_1,\ w_2,\ w_3\right)\right)\right] = \left(\left(u_1,\ u_2,\ u_3\right) \Big| \left(v_1,\ v_2,\ v_3\right)\right) +$$

$$\left(\left(u_1,\ u_2,\ u_3\right) \Big| \left(w_1,\ w_2,\ w_3\right)\right)$$

$$\left[\left(u_1,\ u_2,\ u_3\right) \Big| \left(v_1+w_1,\ v_2+w_2,\ v_3+w_3\right)\right] = \left(u_1\bar{v}_1 + u_2\bar{v}_2 + u_3\bar{v}_3\right) +$$

$$\left(u_1\bar{w}_1 + u_2\bar{w}_2 + u_3\bar{w}_3\right)$$

$$u_1\overline{\left(v_1+w_1\right)} + u_2\overline{\left(v_2+w_2\right)} + u_3\overline{\left(v_3+w_3\right)} = u_1\left(\bar{v}_1+\bar{w}_1\right) + u_2\left(\bar{v}_2+\bar{w}_2\right) + u_3\left(\bar{v}_3+\bar{w}_3\right)$$

finalmente:

$$u_1\left(\bar{v}_1+\bar{w}_1\right) + u_2\left(\bar{v}_2+\bar{w}_2\right) + u_3\left(\bar{v}_3+\bar{w}_3\right) = u_1\left(\bar{v}_1+\bar{w}_1\right) + u_2\left(\bar{v}_2+\bar{w}_2\right) + u_3\left(\bar{v}_3+\bar{w}_3\right)$$

$\therefore$ cumple

3) $\left(\alpha\bar{v} \mid \bar{w}\right) = \alpha\left(\bar{u} \mid \bar{w}\right)$

$$\left(\alpha\left(v_1, v_2, v_3\right) \Big| \left(w_1, w_2, w_3\right)\right) = \alpha\left(\left(v_1, v_2, v_3\right) \Big| \left(w_1, w_2, w_3\right)\right)$$

$$\left(\left(\alpha v_1, \alpha v_2, \alpha v_3\right) \Big| \left(w_1, w_2, w_3\right)\right) = \alpha\left(v_1\bar{w}_1 + v_2\bar{w}_2 + v_3\bar{w}_3\right)$$

$$\alpha v_1\bar{w}_1 + \alpha v_2\bar{w}_2 + \alpha v_3\bar{w}_3 = \alpha v_1\bar{w}_1 + \alpha v_2\bar{w}_2 + \alpha v_3\bar{w}_3$$

$\therefore$ cumple

4) $\left(\bar{v} \mid \bar{v}\right) >$ si $\bar{v} \neq \bar{0}$

$$\left(\left(v_1,\ v_2,\ v_3\right) \Big| \left(v_1,\ v_2,\ v_3\right)\right) > 0$$

$$v_1\bar{v}_1 + v_2\bar{v}_2 + v_3\bar{v}_3 > 0 \qquad \ldots(1)$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

Para poder afirmar que este axioma se cumple se procederá de la siguiente forma:

Si

$$v_1 = a_1 + b_1 i \quad \text{con} \quad a_1,\ b_1 \in \mathbb{R}$$

$$v_2 = a_2 + b_2 i \quad \text{con} \quad a_2,\ b_2 \in \mathbb{R}$$

$$v_3 = a_3 + b_3 i \quad \text{con} \quad a_3,\ b_3 \in \mathbb{R}$$

entonces:

$$\overline{v}_1 = a_1 - b_1 i$$

$$\overline{v}_2 = a_2 - b_2 i$$

$$\overline{v}_3 = a_3 - b_3 i$$

de donde:

$$v_1 \overline{v}_1 = \left(a_1 + b_1 i\right)\left(a_1 - b_1 i\right) = a_1^2 - \left(b_1 i\right)^2 = a_1^2 + b_1^2 \qquad \ldots(2)$$

$$v_2 \overline{v}_2 = \left(a_2 + b_2 i\right)\left(a_2 - b_2 i\right) = a_2^2 - \left(b_2 i\right)^2 = a_2^2 + b_2^2 \qquad \ldots(3)$$

$$v_3 \overline{v}_3 = \left(a_3 + b_3 i\right)\left(a_3 - b_3 i\right) = a_3^2 - \left(b_3 i\right)^2 = a_3^2 + b_3^2 \qquad \ldots(4)$$

sustituyendo (2), (3) y (4) en (1), tenemos:

$$\left(a_1^2 + b_1^2\right) + \left(a_2^2 + b_2^2\right) + \left(a_3^2 + b_3^2\right) > 0$$

Como se tiene la suma de cuadrados y estos siempre son positivos, entonces el axioma cuatro se cumple.

Por lo tanto, podemos afirmar que:

$$\left(\overline{v} \mid \overline{w}\right) = \sum_{i=1}^{3} v_i \overline{w}_i$$

sí es un producto interno en el espacio vectorial $\mathbb{C}^3$.

En general, al producto interno definido por:

$$\left(\bar{v} \mid \bar{w} \right) = \sum_{i=1}^{n} v_i \bar{w}_i \qquad ; \quad \forall \; \bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{C}^n$$

se le conoce como producto escalar ordinario en $\mathbb{C}^n$, o también como producto interno usual en $\mathbb{C}^n$.

De igual forma, si se está trabajando con espacios vectoriales del tipo $\mathbb{R}^n$, al producto escalar de vectores o producto punto, se le llama producto escalar ordinario en $\mathbb{R}^n$, o bien, simplemente, el producto interno usual en $\mathbb{R}^n$.

Norma de un vector

Sea V un espacio vectorial sobre un campo de definición complejo, en el cual se define un producto interno. La norma del vector $\bar{v} \in V$, denotada por $\| \bar{v} \|$, se define como:

$$\| \bar{v} \| = \left(\bar{v} \mid \bar{v} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Propiedades de la norma

Sea V un espacio vectorial con producto interno.

$\forall \; \bar{u}, \bar{v} \in V$ y $\forall \; \alpha \in \mathbb{C}$, se tiene que:

1. $\| \bar{v} \| \geq 0$ y $\| \bar{v} \| = 0$ si y solo si $\bar{v} = \bar{0}$

2. $\| \alpha \bar{v} \| = |\alpha| \; \| \bar{v} \|$

3. $\| \bar{u} + \bar{v} \| \leq \| \bar{u} \| + \| \bar{v} \|$

Vectores unitarios

Si $\left\| \bar{v} \right\| = 1$, entonces al vector $\bar{v}$ se le llama vector unitario. Si $\bar{v}$ es un vector diferente de cero, entonces el vector unitario se obtiene como:

$$\left(\frac{1}{\left\| \bar{v} \right\|} \right) \bar{v}$$

Desigualdad de Cauchy - Schwarz

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$, en el cual se define un producto interno. $\forall \ \bar{u}, \bar{v} \in V$

$$\left| \left(\bar{u} \mid \bar{v} \right) \right|^2 \leq \left(\bar{u} \mid \bar{u} \right) \left(\bar{v} \mid \bar{v} \right)$$

donde $\left| \left(\bar{u} \mid \bar{v} \right) \right|$ es el módulo de $\left(\bar{u} \mid \bar{v} \right)$.

La igualdad se cumple si y solo si $\bar{u}$ y $\bar{v}$ son vectores linealmente dependientes.

Distancia entre vectores

Sean $\bar{u}$ y $\bar{v}$ dos vectores de un espacio V con producto interno. Se define como distancia de $\bar{u}$ a $\bar{v}$, y se denota con $d\left(\bar{u}, \bar{v} \right)$ al número definido por:

$$d\left(\bar{u}, \bar{v} \right) = \left\| \bar{v} - \bar{u} \right\|$$

Propiedades de la distancia entre vectores

Sea V un espacio con producto interno. La distancia entre vectores tiene las siguientes propiedades:

1. $d(\bar{u}, \bar{v}) \geq 0$

2. $d(\bar{u}, \bar{v}) = 0$ si y solo si $\bar{u} = \bar{v}$

3. $d(\bar{u}, \bar{v}) = d(\bar{v}, \bar{u})$

4. $d(\bar{u}, \bar{w}) \leq d(\bar{u}, \bar{v}) + d(\bar{v}, \bar{w})$

Ángulo entre vectores

Sean $\bar{u}$ y $\bar{v}$ dos vectores no nulos de un espacio vectorial V sobre $\mathbb{R}$ con producto interno. El ángulo entre los vectores $\bar{u}$ y $\bar{v}$ está dado por la expresión:

$$\cos\theta = \frac{(\bar{u} \mid \bar{v})}{\|\bar{u}\| \, \|\bar{v}\|} \qquad \text{donde} \qquad 0 \leq \theta \leq \pi$$

Si el campo de definición de V es $\mathbb{C}$, entonces el ángulo entre $\bar{u}$ y $\bar{v}$ está dado por:

$$\cos\theta = \frac{R(\bar{u} \mid \bar{v})}{\|\bar{u}\| \, \|\bar{v}\|}$$

donde $R(\bar{u} \mid \bar{v})$ representa la parte real de $(\bar{u} \mid \bar{v})$.

Vectores ortogonales

Sea V un espacio vectorial con producto interno. Dos vectores $\bar{u}, \bar{v} \in V$ son ortogonales si:

$$\left(\bar{u} \mid \bar{v} \right) = 0$$

Ejercicio 4.4 Sea el espacio vectorial

$$P_2 = \left\{ a x^2 + b x + c \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

donde se define el producto interno:

$$\left(f \mid g \right) = f(1)\, g(1) + f(0)\, g(0) \quad ; \quad \forall\ f, g \in P_2$$

a) Calcule la distancia y el ángulo entre los polinomios $p(x) = x^2 - 1$ y $q(x) = -2x + 1$.

b) Si $f(x) = 2x + 1$, determine un polinomio distinto del polinomio nulo, que sea ortogonal a $f(x)$.

SOLUCIÓN:

a) Sabemos que la distancia viene dada por:

$$d(p, q) = \| q - p \|$$

se tiene que:

$$q(x) - p(x) = -x^2 - 2x + 2$$

Si

$$h(x) = q(x) - p(x) = -x^2 - 2x + 2$$

entonces

$$\|h(x)\| = \left(h(x) \mid h(x)\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[h(1)\,h(1) + h(0)\,h(0)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[(-1)(-1) + (2)(2)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= (1+4)^{\frac{1}{2}}$$

$$\|h(x)\| = \sqrt{5}$$

por lo que la distancia entre los polinomios $p(x)$ y $q(x)$ es:

$$d(p, q) = \sqrt{5}\ u$$

Calculando el ángulo entre los polinomios $p(x)$ y $q(x)$, tenemos:

$$\|p(x)\| = \left(p(x) \mid p(x)\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[p(1)\,p(1) + p(0)\,p(0)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[(0)(0) + (-1)(-1)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{1} = 1$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

$$\therefore \quad \| p(x) \| = 1$$

$$\| q(x) \| = \left(q(x) \mid q(x) \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[q(1)\, q(1) + q(0)\, q(0) \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[(-1)(-1) + (1)(1) \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{2}$$

$$\therefore \quad \| q(x) \| = \sqrt{2}$$

además, se tiene que:

$$\left(p(x) \mid q(x) \right) = p(1)\, q(1) + p(0)\, q(0)$$

$$= (0)(-1) + (-1)(1)$$

$$\left(p(x) \mid q(x) \right) = -1$$

Como el ángulo entre los polinomios viene dado por:

$$\cos\theta = \frac{\left(p(x) \mid q(x) \right)}{\| p(x) \| \, \| q(x) \|}$$

entonces

$$\cos\theta = \frac{-1}{(1)\left(\sqrt{2}\right)}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$\therefore \quad \theta = 135°$$

ÍNDICE

1

2

3

4

5

b) Se pide determinar un polinomio $g(x) \neq 0$ que sea ortogonal a $f(x)$.

Si hacemos:

$$g(x) = ax^2 + bx + c \qquad \ldots(1)$$

entonces, se debe cumplir que:

$$\left(f(x) \,\middle|\, g(x) \right) = 0$$

esto es:

$$f(1)\,g(1) + f(0)\,g(0) = 0$$

$$(3)(a+b+c) + (1)(c) = 0$$

$$3a + 3b + 3c + c = 0$$

$$3a + 3b + 4c = 0$$

de donde:

$$4c = -3a - 3b$$

$$\Rightarrow \quad c = -\frac{3}{4}a - \frac{3}{4}b$$

sustituyendo c en (1), tenemos $g(x) = ax^2 + bx + \left(-\frac{3}{4}a - \frac{3}{4}b \right)$

si hacemos que: $a = 0$ y $b = 4$, entonces $g(x) = 4x - 3$. Este polinomio $g(x)$ resulta ser ortogonal a $f(x)$.

Evidentemente la solución no es única.

Ejercicio 4.5 Sea F el espacio de funciones reales de variable real, donde se define el producto interno:

$$\left(f \mid g \right) = \int_0^1 f(t)\, g(t)\, dt \quad ; \qquad \forall\ f,\ g \in F$$

Para las funciones $f(t) = t+1$ y $g(t) = t^2$:

a) Obtenga un vector unitario a partir de la función f.

b) Determine si f y g son ortogonales.

c) Verifique la desigualdad de Cauchy – Schwarz.

SOLUCIÓN:

a) Calculando la norma de la función f, tenemos:

$$\left(f \mid f \right) = \int_0^1 f(t)\, f(t)\, dt = \int_0^1 (t+1)(t+1)\, dt = \int_0^1 (t+1)^2\, dt$$

$$= \left[\frac{(t+1)^3}{3} \right]_0^1 = \frac{(2)^3}{3} - \frac{1}{3} = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

entonces:

$$\| f \| = \sqrt{\frac{7}{3}}$$

por lo que el vector unitario pedido será:

$$\frac{f(t)}{\| f(t) \|} = \frac{t+1}{\sqrt{\frac{7}{3}}} = \sqrt{\frac{3}{7}}\, t + \sqrt{\frac{3}{7}}$$

b) Si f y g son ortogonales, entonces se debe cumplir que:

$$\left(f \mid g \right) = 0$$

entonces

$$(f \mid g) = \int_0^1 (t+1)(t^2)\,dt = \int_0^1 (t^3+t^2)\,dt = \left[\frac{t^4}{4}+\frac{t^3}{3}\right]_0^1$$

$$= \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\right) - 0 = \frac{7}{12}$$

como $(f \mid g) \neq 0$, entonces f y g no son ortogonales.

c) La desigualdad de Cauchy – Schwarz establece que:

$$|(f \mid g)|^2 \leq (f \mid f)(g \mid g)$$

como en los incisos anteriores ya se obtuvo $(f \mid g)$ y $(f \mid f)$, entonces solo falta calcular $(g \mid g)$.

$$(g \mid g) = \int_0^1 (t^2)(t^2)\,dt = \int_0^1 t^4\,dt = \left[\frac{t^5}{5}\right]_0^1 = \frac{1}{5}$$

sustituyendo en la desigualdad, tenemos:

$$\left|\frac{7}{12}\right|^2 \leq \left(\frac{7}{3}\right)\left(\frac{1}{5}\right)$$

$$\frac{49}{144} < \frac{7}{15} \qquad \therefore \text{ se verifica la desigualdad de Cauchy – Schwarz .}$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

Ejercicio 4.6 Sea M el espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden dos con elementos en $\mathbb{R}$, donde se define el producto interno:

$$\left(A \,|\, B \right) = Tr\left(AB^{T} \right) \;; \quad \forall\ A, B \in M$$

Determine el o los valores de x para que las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & x \end{bmatrix}$$

a) Sean ortogonales.

b) Formen un ángulo de $\dfrac{\pi}{3}$.

SOLUCIÓN:

a) Las matrices A y B serán ortogonales, si:

$$\left(A \,|\, B \right) = 0 \qquad \dots (1)$$

Calculando el producto interno, tenemos:

$$\left(A \,|\, B \right) = Tr\left(A\,B^{T} \right) = Tr\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & x \end{bmatrix} \right) = Tr\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 2x \end{bmatrix}$$

$$\left(A \,|\, B \right) = 2x \qquad \dots (2)$$

de (1) y (2), se tiene que:

$$2x = 0 \qquad \therefore \qquad x = 0$$

b) Sabemos que:

$$\cos\theta = \frac{\left(A \,|\, B \right)}{\| A \| \, \| B \|} \quad \text{y} \quad \theta = \frac{\pi}{3}$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

como $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, entonces:

$$\frac{(A\,|\,B)}{\|A\|\,\|B\|} = \frac{1}{2} \qquad \dots (3)$$

calculando las normas de las matrices A y B, tenemos:

$$\|A\| = \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \right)^{\frac{1}{2}} = \left[Tr\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right) \right]^{\frac{1}{2}} = \left[Tr\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \right) \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore \|A\| = \sqrt{8} \qquad \dots (4)$$

$$\|B\| = \left(\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & x \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & x \end{bmatrix} \right)^{\frac{1}{2}} = \left[Tr\left(\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & x \end{bmatrix} \right) \right]^{\frac{1}{2}} = \left[Tr\left(\begin{bmatrix} 4 & 2x \\ 2x & x^2 \end{bmatrix} \right) \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore \|B\| = \sqrt{4 + x^2} \qquad \dots (5)$$

sustituyendo (2), (4) y (5) en (3), tenemos:

$$\frac{2x}{\sqrt{8}\,\sqrt{4 + x^2}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{2x}{2\sqrt{2}\,\sqrt{4 + x^2}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{x}{\sqrt{8 + 2x^2}} = \frac{1}{2}$$

$$2x = \sqrt{8 + 2x^2}$$

$$4x^2 = 8 + 2x^2$$

$$2x^2 = 8$$

$$x^2 = 4$$

$$\therefore \quad x = \pm 2$$

Ejercicio 4.7 Sea el espacio vectorial $\mathbb{C}^2$ sobre $\mathbb{C}$. Para los vectores $\bar{u} = (2+4i,\ 1+i)$ y $\bar{v} = (a-2i,\ -1+bi) \in \mathbb{C}^2$, determine el valor de a y el de b para que $\bar{u}$ y $\bar{v}$ sean ortogonales respecto al producto interno definido por:

$$(\bar{z} \mid \bar{w}) = z_1 \overline{w_1} + z_2 \overline{w_2} \quad ; \quad \forall\ \bar{z} = (z_1, z_2),\ \ \bar{w} = (w_1, w_2) \in \mathbb{C}^2$$

SOLUCIÓN:

Se debe cumplir que:

$$(\bar{u} \mid \bar{v}) = 0 + 0i$$

sustituyendo:

$$\big(\,(2+4i,\ 1+i) \,\big|\, (a-2i,\ -1+bi)\,\big) = 0 + 0i$$

aplicando la regla de correspondencia del producto interno, tenemos:

$$(2+4i)\,\overline{(a-2i)} + (1+i)\,\overline{(-1+bi)} = 0+0i$$

$$(2+4i)(a+2i) + (1+i)(-1-bi) = 0+0i$$

$$2a + 4i + 4ai + 8i^2 - 1 - bi - i - bi^2 = 0+0i$$

agrupando:

$$(2a - 8 - 1 + b) + (4 + 4a - b - 1)\,i = 0+0i$$

$$(2a + b - 9) + (4a - b + 3)\,i = 0+0i$$

por igualdad de números complejos se llega al sistema:

$$\begin{cases} 2a + b - 9 = 0 \\ 4a - b + 3 = 0 \end{cases}$$

por sumas y restas, se tiene:

$$6a - 6 = 0 \qquad \therefore \quad a = 1 \ \text{ y } \ b = 7$$

con lo cual el vector $\bar{v} = (1-2i,\ -1+7i)$.

Conjuntos ortogonales y ortonormales

Sea V un espacio vectorial con producto interno y sea $A = \{ \bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n \}$ un subconjunto de V. Se dice que A es un conjunto ortogonal cuando:

$$\left(\bar{v}_i \,\middle|\, \bar{v}_j \right) = 0 \quad ; \quad \forall\, i \neq j$$

Si cada vector del conjunto A tiene norma igual a uno, entonces al conjunto A se le llama conjunto ortonormal.

Es importante destacar que todo conjunto de vectores ortogonales no nulos, es linealmente independiente.

Coordenadas de un vector con respecto a una base ortogonal y respecto a una base ortonormal

Sea V un espacio vectorial con producto interno y sea $B = \{ \bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n \}$ una base ortogonal de V.

Si $\bar{a} \in V$ y se tiene que:

$$\bar{a} = \alpha_1 \bar{v}_1 + \alpha_2 \bar{v}_2 + \ldots + \alpha_n \bar{v}_n$$

entonces los escalares α_i vienen dados por la expresión:

$$\alpha_i = \frac{\left(\bar{a} \,\middle|\, \bar{v}_i \right)}{\left(\bar{v}_i \,\middle|\, \bar{v}_i \right)}$$

Si los vectores de la base B fueran vectores unitarios, es decir, si B fuese una base ortonormal, entonces las coordenadas del vector $\bar{a}$ respecto a la base B vendrían dadas por:

$$\alpha_i = \left(\bar{a} \,\middle|\, \bar{v}_i \right)$$

ya que $\left(\bar{v}_i \,\middle|\, \bar{v}_i \right) = 1$

Proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt

Sea V un espacio con producto interno y sea $B = \{ \bar{b}_1, \bar{b}_2, \ldots, \bar{b}_n \}$ una base cualquiera de V.

Si $B_{\text{ort}} = \{ \bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n \}$ es una base ortogonal del espacio V, entonces sus elementos vienen dados por:

$$\bar{v}_1 = \bar{b}_1$$

$$\bar{v}_2 = \bar{b}_2 - \frac{(\bar{b}_2 \mid \bar{v}_1)}{(\bar{v}_1 \mid \bar{v}_1)} \bar{v}_1$$

$$\vdots$$

$$\bar{v}_i = \bar{b}_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{(\bar{b}_i \mid \bar{v}_k)}{(\bar{v}_k \mid \bar{v}_k)} \bar{v}_k$$

para $i = 1, 2, \ldots, n$

Ejercicio 4.8 En el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ se tiene el producto interno:

$$(\bar{x} \mid \bar{y}) = x_1 y_1 + 3 x_2 y_2 \quad ; \quad \forall (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$$

y la base $A = \left\{ \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right), \left(1, \frac{1}{3} \right) \right\}$ de $\mathbb{R}^2$.

a) Determine si la base A es ortonormal.

b) En caso de resultar negativo el inciso anterior, obtenga una base ortonormal a partir de A.

c) Obtenga las coordenadas del vector $\bar{u} = (3, -1)$ en la base ortonormal propuesta.

SOLUCIÓN:

a) Determinemos primero si la base A es ortogonal:

$$\left(\left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)\middle|\left(1,\ \frac{1}{3}\right)\right)=\frac{1}{2}-3\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$$

$\therefore$ A es una base ortogonal

Calculando la norma de los vectores de A para determinar si es una base ortonormal, tenemos:

$$\left\|\left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)\right\|=\left(\left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)\middle|\left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}}=(1)^{\frac{1}{2}}=1$$

el primer vector de A es unitario.

$$\left\|\left(1,\ \frac{1}{3}\right)\right\|=\left(\left(1,\ \frac{1}{3}\right)\middle|\left(1,\ \frac{1}{3}\right)\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left(1+3\left(\frac{1}{9}\right)\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\left\|\left(1,\ \frac{1}{3}\right)\right\|=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

como el segundo vector de A no es unitario, entonces A no es una base ortonormal.

ÍNDICE
1
2
3
4
5

b) Una base ortonormal sería:

$$B = \left\{ \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right), \frac{\sqrt{3}}{2} \left(1, \frac{1}{3} \right) \right\}$$

esto es:

$$B = \left\{ \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right), \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6} \right) \right\}$$

c) Las coordenadas del vector $\bar{u} = (3, -1)$ serán:

$$\alpha = \left((3, -1) \middle| \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right) \right) = \frac{3}{2} + 3\left(\frac{1}{2} \right) = 3$$

$$\beta = \left((3, -1) \middle| \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6} \right) \right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} - 3\left(\frac{\sqrt{3}}{6} \right) = \sqrt{3}$$

con lo cual, el vector de coordenadas de $\bar{u}$ referido a la base B, es:

$$(\bar{u})_B = \left(3, \sqrt{3} \right)$$

Ejercicio 4.9 En el espacio vectorial

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

se define el producto interno:

$$(A \mid B) = Tr(AB) \quad ; \quad \forall \; A, B \in M$$

Obtenga, mediante el método de Gram–Schmidt, una base ortonormal de M a partir del conjunto:

$$G = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

SOLUCIÓN:

Como puede apreciarse fácilmente, el espacio vectorial M es de dimensión dos, por lo que, cualquiera de sus bases deberá contener únicamente dos vectores. Como el conjunto G contiene tres elementos, entonces podemos asegurar que G es un conjunto linealmente dependiente y, por lo tanto, no es una base de M.

En el enunciado del ejercicio nos piden obtener una base ortonormal de M a partir del conjunto G, entonces apliquemos el método de Gram–Schmidt directamente al conjunto G y veamos lo que sucede.

Si consideramos que:

$$G = \{ \bar{b}_1, \ \bar{b}_2, \ \bar{b}_3 \}$$

entonces, aplicando el método de Gram–Schmidt, tenemos:

$$\bar{v}_1 = \bar{b}_1$$

esto es:

$$\bar{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

además:

$$\bar{v}_2 = \bar{b}_2 - \frac{\left(\bar{b}_2 \,|\, \bar{v}_1 \right)}{\left(\bar{v}_1 \,|\, \bar{v}_1 \right)} \bar{v}_1 \qquad \dots(1)$$

desarrollando, tenemos:

$$\left(\bar{b}_2 \,|\, \bar{v}_1 \right) = \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right) = Tr\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right)$$

$$\Rightarrow \quad \left(\bar{b}_2 \,|\, \bar{v}_1 \right) = -1$$

$$\left(\bar{v}_1 \,|\, \bar{v}_1 \right) = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right) = Tr\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$\Rightarrow \quad \left(\bar{v}_1 \,|\, \bar{v}_1 \right) = 2$$

sustituyendo en (1), tenemos:

$$\bar{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{-1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad \bar{v}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

De acuerdo con el método de Gram–Schmidt, tenemos que:

$$\bar{v}_3 = \bar{b}_3 - \frac{\left(\bar{b}_3 \mid \bar{v}_1\right)}{\left(\bar{v}_1 \mid \bar{v}_1\right)}\bar{v}_1 - \frac{\left(\bar{b}_3 \mid \bar{v}_2\right)}{\left(\bar{v}_2 \mid \bar{v}_2\right)}\bar{v}_2 \qquad \ldots(2)$$

desarrollando, tenemos:

$$\left(\bar{b}_3 \mid \bar{v}_1\right) = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right) = Tr\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \left(\bar{b}_3 \mid \bar{v}_1\right) = 0$$

$$\left(\bar{b}_3 \mid \bar{v}_2\right) = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\right) = Tr\left(\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \left(\bar{b}_3 \mid \bar{v}_2\right) = 1$$

$$\left(\bar{v}_2 \mid \bar{v}_2\right) = \left(\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\right) = Tr\left(\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \left(\bar{v}_2 \mid \bar{v}_2\right) = \frac{1}{2}$$

sustituyendo en (2), tenemos:

$$\bar{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{0}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - \frac{1}{\frac{1}{2}}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\bar{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad \bar{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como era de esperarse, la base ortogonal B estará formada únicamente por los vectores $\bar{v}_1$ y $\bar{v}_2$, esto es:

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \right\} \text{ base ortogonal}$$

Calculando la norma de cada vector, tenemos:

$$\| \bar{v}_1 \| = \left(\bar{v}_1 \mid \bar{v}_1 \right)^{\frac{1}{2}}$$

como $\left(\bar{v}_1 \mid \bar{v}_1 \right) = 2$, entonces:

$$\| \bar{v}_1 \| = \sqrt{2}$$

Por otro lado:

$$\| \bar{v}_2 \| = \left(\bar{v}_2 \mid \bar{v}_2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

como $\left(\bar{v}_2 \mid \bar{v}_2 \right) = \frac{1}{2}$, entonces:

$$\| \bar{v}_2 \| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

con lo cual, la base ortonormal B' será:

$$B' = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \sqrt{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \right\}$$

o también:

$$B' = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Ejercicio 4.10 Sea el espacio vectorial

$$P_2 = \left\{ ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

en el cual se define el producto interno:

$$(f \mid g) = \int_{-1}^{1} f(t)\, g(t)\, dt \quad ; \quad \forall\, f, g \in P_2$$

A partir de la base $B = \left\{ 1, x, x^2 \right\}$, empleando el método de Gram–Schmidt, obtenga una base ortonormal del espacio P_2 .

SOLUCIÓN:

Sabemos que: $\bar{v}_1 = \bar{b}_1$

esto es: $\bar{v}_1 = 1$

$$\bar{v}_2 = \bar{b}_2 - \frac{(\bar{b}_2 \mid \bar{v}_1)}{(\bar{v}_1 \mid \bar{v}_1)} \bar{v}_1 \qquad \ldots (1)$$

desarrollando por partes:

$$(\bar{b}_2 \mid \bar{v}_1) = \int_{-1}^{1} 1(x)\, dx = \int_{-1}^{1} x\, dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-1}^{1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

al sustituir este resultado en (1), tenemos que:

$$\bar{v}_2 = x$$

Se tiene que:

$$\bar{v}_3 = \bar{b}_3 - \frac{\left(\bar{b}_3 \middle| \bar{v}_1\right)}{\left(\bar{v}_1 \middle| \bar{v}_1\right)}\bar{v}_1 - \frac{\left(\bar{b}_3 \middle| \bar{v}_2\right)}{\left(\bar{v}_2 \middle| \bar{v}_2\right)}\bar{v}_2 \qquad \ldots(2)$$

desarrollando, tenemos:

$$\left(\bar{b}_3 \middle| \bar{v}_1\right) = \int_{-1}^{1}\left(x^2\right)(1)\,dx = \int_{-1}^{1} x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$$

$$\left(\bar{b}_3 \middle| \bar{v}_2\right) = \int_{-1}^{1}\left(x^2\right)(x)\,dx = \int_{-1}^{1} x^3\,dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{1} = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) = 0$$

$$\left(\bar{v}_1 \middle| \bar{v}_1\right) = \int_{-1}^{1}(1)(1)\,dx = \int_{-1}^{1} dx = [\,x\,]_{-1}^{1} = (1 + 1) = 2$$

sustituyendo en (2), se tiene que:

$$\bar{v}_3 = x^2 - \frac{\frac{2}{3}}{2}(1)$$

$$\bar{v}_3 = x^2 - \frac{1}{3}$$

por lo que la base ortogonal es:

$$B_{\text{ort}} = \left\{1,\ x,\ x^2 - \frac{1}{3}\right\}$$

Obteniendo la norma de cada uno de los vectores de la base ortogonal, tenemos:

$$\left\| \bar{v}_1 \right\| = \left(\bar{v}_1 \mid \bar{v}_1 \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

$$\left\| \bar{v}_2 \right\| = \left(\bar{v}_2 \mid \bar{v}_2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{-1}^{1} x\,(x)\,dx \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{-1}^{1} x^2\,dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\left[\frac{x^3}{3} \right]_{-1}^{1} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\left\| \bar{v}_3 \right\| = \left(\bar{v}_3 \mid \bar{v}_3 \right)^{\frac{1}{2}}$$

se tiene que:

$$\left(\bar{v}_3 \mid \bar{v}_3 \right) = \int_{-1}^{1} \left(x^2 - \frac{1}{3} \right)\left(x^2 - \frac{1}{3} \right) dx = \int_{-1}^{1} \left(x^4 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{9} \right) dx$$

$$= \left[\frac{x^5}{5} - \frac{2}{9}x^3 + \frac{1}{9}x \right]_{-1}^{1} = \left[\left(\frac{1}{5} - \frac{2}{9} + \frac{1}{9} \right) - \left(-\frac{1}{5} + \frac{2}{9} - \frac{1}{9} \right) \right]$$

$$= \frac{4}{45} - \left(-\frac{4}{45} \right) = \frac{8}{45}$$

entonces: $\left\| \bar{v}_3 \right\| = \sqrt{\frac{8}{45}} = \frac{\sqrt{8}}{3\sqrt{5}}$

al dividir cada vector entre su norma, se tiene que la base ortonormal pedida es:

$$B_{\text{ortonormal}} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{x}{\sqrt{\frac{2}{3}}}, \frac{x^2 - \frac{1}{3}}{\frac{\sqrt{8}}{3\sqrt{5}}} \right\}$$

simplificando, se tiene:

$$B_{\text{ortonormal}} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\,x, \sqrt{\frac{5}{8}}\left(3x^2 - 1 \right) \right\}$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

Ejercicio 4.11 Sean V un espacio vectorial con producto interno real, $B = \{ \bar{v}_1, \bar{v}_2 \}$ una base ortogonal de V y el vector $\bar{a} \in V$ cuyo vector de coordenadas respecto a la base B es $(\bar{a})_B = (-2, 1)$. Si se sabe que la norma del vector $\bar{v}_1$ es igual a 2 y que el ángulo ϕ entre $\bar{v}_1$ y $\bar{a}$ es tal que $\cos\phi = -\dfrac{4}{5}$, determine las normas de los vectores $\bar{v}_2$ y $\bar{a}$.

SOLUCIÓN:

Obtengamos primero la norma del vector $\bar{a}$. De los datos del ejercicio, tenemos que:

$$\bar{a} = -2\bar{v}_1 + \bar{v}_2$$

$$\cos\phi = \frac{(\bar{v}_1 \mid \bar{a})}{\|\bar{v}_1\| \, \|\bar{a}\|} = -\frac{4}{5} \qquad \dots(1)$$

Se tiene que:

$$(\bar{v}_1 \mid \bar{a}) = (\bar{v}_1 \mid -2\bar{v}_1 + \bar{v}_2) = -2(\bar{v}_1 \mid \bar{v}_1) + (\bar{v}_1 \mid \bar{v}_2)$$

como:

$$(\bar{v}_1 \mid \bar{v}_1) = \|\bar{v}_1\|^2 \quad \text{y} \quad \|\bar{v}_1\| = 2 \qquad \dots(2)$$

entonces:

$$(\bar{v}_1 \mid \bar{v}_1) = 4$$

y como $(\bar{v}_1 \mid \bar{v}_2) = 0$ por ser elementos de la base ortogonal B, tenemos que:

$$(\bar{v}_1 \mid \bar{a}) = -2(4) = -8 \qquad \dots(3)$$

sustituyendo (2) y (3) en (1), tenemos:

$$\frac{-8}{2\|\bar{a}\|} = -\frac{4}{5}$$

$$-\frac{4}{\|\bar{a}\|} = -\frac{4}{5}$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

al multiplicar por $-\frac{1}{4}$, se tiene:

$$\frac{1}{\| \bar{a} \|} = \frac{1}{5} \qquad \therefore \ \| \bar{a} \| = 5$$

Para obtener la norma del vector $\bar{v}_2$, se tiene que: $\bar{a} = -2\bar{v}_1 + \bar{v}_2$

de donde: $\bar{v}_2 = \bar{a} + 2\bar{v}_1$

entonces: $\| \bar{v}_2 \| = \left(\bar{v}_2 \mid \bar{v}_2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\bar{a} + 2\bar{v}_1 \mid \bar{a} + 2\bar{v}_1 \right)^{\frac{1}{2}}$

desarrollando:

$$\| \bar{v}_2 \| = \left(\left(\bar{a} \mid \bar{a} \right) + 2\left(\bar{a} \mid \bar{v}_1 \right) + 2\left(\bar{v}_1 \mid \bar{a} \right) + 4\left(\bar{v}_1 \mid \bar{v}_1 \right) \right)^{\frac{1}{2}} \qquad \ldots (4)$$

como $\left(\bar{a} \mid \bar{a} \right) = \| \bar{a} \|^2$ y $\| \bar{a} \| = 5$, entonces:

$$\left(\bar{a} \mid \bar{a} \right) = 25 \qquad \ldots (5)$$

Por otro lado, como se tiene un producto interno, entonces se cumple el axioma de la simetría, esto es:

$$\left(\bar{a} \mid \bar{v}_1 \right) = \left(\bar{v}_1 \mid \bar{a} \right)$$

por lo tanto:

$$2\left(\bar{a} \mid \bar{v}_1 \right) + 2\left(\bar{v}_1 \mid \bar{a} \right) = 4\left(\bar{v}_1 \mid \bar{a} \right)$$

sustituyendo (3), tenemos:

$$2\left(\bar{a} \mid \bar{v}_1 \right) + 2\left(\bar{v}_1 \mid \bar{a} \right) = 4\left(-8 \right) = -32 \qquad \ldots (6)$$

se sabe además que:

$$\left(\bar{v}_1 \mid \bar{v}_1 \right) = 4 \qquad \ldots (7)$$

sustituyendo (5), (6) y (7) en (4), se tiene:

$$\| \bar{v}_2 \| = \left(25 - 32 + 16 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(9 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore \quad \| \bar{v}_2 \| = 3$$

Complemento ortogonal

Sea V un espacio con producto interno y sea W un subespacio de V.

Se dice que un vector $\bar{v} \in V$ es ortogonal a W, si se cumple que:

$$\left(\bar{v} \mid \bar{u} \right) = 0 \quad ; \quad \forall\ \bar{u} \in W$$

Al conjunto de todos los vectores de V ortogonales a W se le llama Complemento ortogonal de W y se denota con $W^{\perp}$, esto es:

$$W^{\perp} = \left\{ \bar{v} \in V \,\middle|\, \left(\bar{v} \mid \bar{u} \right) = 0 \quad ; \quad \forall\ \bar{u} \in W \right\}$$

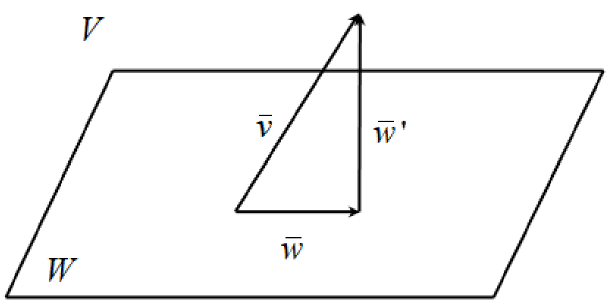
Proyección de un vector sobre un subespacio

Sea V un espacio vectorial con producto interno y sea W un subespacio de V.

Cualquier vector $\bar{v} \in V$ puede expresarse en forma única como la suma de dos vectores, uno de W y el otro de $W^{\perp}$, esto es:

$$\bar{v} = \bar{w} + \bar{w}' \qquad \text{donde} \qquad \bar{w} \in W \quad \text{y} \quad \bar{w}' \in W^{\perp}$$

Gráficamente:



La proyección de $\bar{v} \in V$ sobre el subespacio W viene dada por la expresión:

$$\bar{w} = \sum_{i=1}^{n} \left(\bar{v} \mid \bar{e}_i \right) \bar{e}_i$$

donde el conjunto $\left\{ \bar{e}_1 , \bar{e}_2 , \ldots , \bar{e}_n \right\}$ es una base ortonormal de W.

Teorema de proyección

Sea V un espacio con producto interno y sea W un subespacio de V. La proyección de un vector $\bar{v} \in V$ sobre W es más próxima a $\bar{v}$ que cualquier otro vector de W. Esto es, si $\bar{w}$ es la proyección de $\bar{v}$ sobre W, entonces:

$$\left\| \bar{v} - \bar{w} \right\| \leq \left\| \bar{v} - \bar{t} \right\| \quad ; \quad \forall\ \bar{t} \in W$$

El signo de igualdad se cumple, si y solo si, $\bar{t} = \bar{w}$.

Ejercicio 4.12 Determine el conjunto de vectores de $\mathbb{R}^3$ que son ortogonales al vector $\bar{v} = (1,\ 0,\ -1)$ con el producto interno usual en $\mathbb{R}^3$ y simultáneamente con el producto interno definido por:

$$(\bar{x} \mid \bar{y}) = 2x_1 y_1 + 3x_2 y_2 + x_3 y_3 \quad ; \quad \forall\ \bar{x} = (x_1,\ x_2,\ x_3),\ \bar{y} = (y_1,\ y_2,\ y_3) \in \mathbb{R}^3$$

SOLUCIÓN:

Sea $\bar{u} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Se debe cumplir que el producto interno de $\bar{u}$ con $\bar{v}$ debe ser igual a cero con ambos productos internos, esto es:

Con el producto escalar ordinario

$$\big((a, b, c) \big| (1,\ 0,\ -1) \big) = a - c = 0 \qquad \ldots (1)$$

Con el segundo producto interno definido:

$$\big((a, b, c) \big| (1,\ 0,\ -1) \big) = 2a - c = 0 \qquad \ldots (2)$$

con las ecuaciones (1) y (2), se forma el sistema:

$$\begin{cases} a - c = 0 \\ 2a - c = 0 \end{cases}$$

que al resolverlo se obtiene: $a = 0$ y $c = 0$

Por lo tanto, el conjunto solicitado es: $D = \left\{ (0, b, 0) \,\middle|\, b \in \mathbb{R} \right\}$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

Ejercicio 4.13 Sea el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ con producto interno definido por:

$$\left(\bar{x} \mid \bar{y}\right) = x_1 y_1 + 2x_2 y_2 + x_3 y_3 \quad ; \quad \forall\ \bar{x} = \left(x_1,\ x_2,\ x_3\right),\ \bar{y} = \left(y_1,\ y_2,\ y_3\right) \in \mathbb{R}^3$$

y sea $W = \left\{ (x, y, z) \mid x + 2y - z = 0 \quad \text{con } x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$ un subespacio de $\mathbb{R}^3$. Determine el complemento ortogonal de W.

SOLUCIÓN:

Si se despeja z de la ecuación del plano, entonces el subespacio W puede ser expresado de la siguiente forma:

$$W = \left\{ \left(x,\ \ y,\ \ x + 2y \right) \mid x,\ \ y \in \mathbb{R} \right\}$$

Una base de W es:

$$B = \left\{ \left(1,\ 0,\ 1\right),\ \left(0,\ 1,\ 2\right) \right\}$$

Si consideramos un vector cualquiera $\bar{u} = \left(a,\ b,\ c \right)$ que pertenezca al complemento ortogonal de W, entonces se debe cumplir que:

$$\left(\left(a, b, c \right) \mid \left(1, 0, 1 \right)\right) = 0 \quad \text{y} \quad \left(\left(a, b, c \right) \mid \left(0, 1, 2 \right)\right) = 0$$

desarrollando ambos productos internos, se tiene que:

$$a + c = 0 \qquad \ldots (1)$$

$$\text{y} \qquad 2b + 2c = 0 \qquad \ldots (2)$$

de (1) y (2), se llega a:

$$a = -c \qquad \text{y} \qquad b = -c$$

Por lo tanto, al sustituir en el vector $\bar{u} \in W^{\perp}$, se obtiene que:

$$W^{\perp} = \left\{ (-c\ ,\ -c\ ,\ c) \mid c \in \mathbb{R} \right\}$$

Para comprobar que se llegó al resultado correcto, se tomará un vector cualquiera de W y otro de $W^{\perp}$ para comprobar que dichos vectores son ortogonales.

Sean $\bar{v} = (1, 1, 3) \in W$ y $\bar{u} = (-3, -3, 3) \in W^{\perp}$. Con el producto interno definido, se tiene que:

$$\left(\bar{v} \mid \bar{u} \right) = \left((1, 1, 3) \mid (-3, -3, 3) \right) = -3 - 6 + 9 = 0$$

por lo tanto, $\bar{v}$ y $\bar{u}$ resultan ser ortogonales.

Ejercicio 4.14 Sea M el espacio vectorial de matrices cuadradas de orden dos con elementos complejos y definido en el campo complejo, y sea

$$H = \left\{ \begin{bmatrix} (1+2i)\, z & 0 \\ 0 & (1-i)\, w \end{bmatrix} \middle| \; z, w \in \mathbb{C} \right\}$$

un subespacio de M.

Obtenga el complemento ortogonal $H^{\perp}$ de H, considerando el siguiente producto interno definido en M:

$$\left(A \mid B \right) = Tr\left(AB^* \right) \quad ; \quad \forall \;\; A, \; B \in M$$

donde B^* es la matriz conjugada transpuesta de la matriz B.

SOLUCIÓN:

Dado que el subespacio vectorial H está definido en el campo complejo, entonces la dimensión de H es dos, por lo tanto, una base de H sería:

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1+2i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1-i \end{bmatrix} \right\}$$

Sea la matriz $E = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M$, para la cual se cumple que:

$$\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 1+2i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = 0 \qquad \ldots (1)$$

$$\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1-i \end{bmatrix} \right) = 0 \qquad \ldots (2)$$

de (1), se tiene:

$$\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 1+2i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = Tr\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 1-2i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$Tr\left(\begin{bmatrix} (1-2i)a & 0 \\ (1-2i)c & 0 \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$(1-2i)a = 0$$

$$\therefore \quad a = 0$$

de (2), se tiene:

$$\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1-i \end{bmatrix} \right) = Tr\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1+i \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$Tr\left(\begin{bmatrix} 0 & (1+i)b \\ 0 & (1+i)d \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$(1+i)d = 0$$

$$\therefore \quad d = 0$$

Al sustituir estos valores en la matriz E, se llega a que el complemento ortogonal de H es:

$$H^{\perp} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{bmatrix} \middle| \; b, c \in \mathbb{C} \right\}$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

Ejercicio 4.15 Mediante el teorema de proyección, expresar al vector $\bar{v} = (-1,\ 2,\ 6, 0\ )$ en la forma $\bar{v} = \bar{w}_1 + \bar{w}_2$, donde $\bar{w}_1$ pertenece al subespacio W generado por los vectores $\bar{u}_1 = (-1,\ 0,\ 1,\ 0)$ y $\bar{u}_2 = (0,\ 1,\ 0,\ 1)$ y $\bar{w}_2$ es ortogonal a W. Considere como producto interno el producto escalar ordinario en $\mathbb{R}^4$.

SOLUCIÓN:

Una base del subespacio W es el conjunto:

$$B = \{ (\ -1\ ,\ 0\ ,\ 1\ ,\ 0\ )\ ,\ (\ 0\ ,\ 1\ ,\ 0\ ,\ 1\ ) \} = \{ \bar{b}_1\ ,\ \bar{b}_2 \}$$

Si efectuamos:

$$\left(\bar{b}_1 \,\middle|\, \bar{b}_2 \right) = \left((\ -1,\ 0,\ 1,\ 0\ ) \,\middle|\, (\ 0,\ 1,\ 0,\ 1\ ) \right) = 0$$

con lo cual podemos afirmar que B es una base ortogonal de W.

Calculando las normas de los vectores de B, tenemos:

$$\| \bar{b}_1 \| = \left(\bar{b}_1 \,\middle|\, \bar{b}_1 \right)^{\frac{1}{2}} = \left((\ -1,\ 0,\ 1,\ 0\ ) \,\middle|\, (\ -1,\ 0,\ 1,\ 0\ ) \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

$$\| \bar{b}_2 \| = \left(\bar{b}_2 \,\middle|\, \bar{b}_2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left((\ 0,\ 1,\ 0,\ 1\ ) \,\middle|\, (\ 0,\ 1,\ 0,\ 1\ ) \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

Dividiendo cada vector entre su respectiva norma, tenemos que una base ortonormal de W es:

$$B_{\text{ortonormal}} = \left\{ \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\ ,\ 0\ ,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\ ,\ 0 \right),\ \left(0\ ,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\ ,\ 0\ ,\ \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\}$$

Se tiene que la proyección de $\bar{v}$ sobre W, es decir, el vector $\bar{w}_1$, se obtiene a partir de la expresión:

$$\bar{w}_1 = \sum_{i=1}^{2} \left(\bar{v} \,\middle|\, \bar{e}_i \right) \bar{e}_i$$

desarrollando:

$$\bar{w}_1 = \left(\bar{v} \mid \bar{e}_1 \right) \bar{e}_1 + \left(\bar{v} \mid \bar{e}_2 \right) \bar{e}_2 \qquad \ldots(1)$$

donde los vectores $\bar{e}_1$ y $\bar{e}_2$ son los vectores de la base ortonormal de W, esto es:

$$\bar{e}_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right)$$

$$\bar{e}_2 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

sustituyendo $\bar{v}$, $\bar{e}_1$ y $\bar{e}_2$ en (1), tenemos:

$$\bar{w}_1 = \left((-1, 2, 6, 0) \,\middle|\, \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right) \right) \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right) +$$

$$\left((-1, 2, 6, 0) \,\middle|\, \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right) \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

desarrollando los productos internos, tenemos:

$$\bar{w}_1 = \frac{7}{\sqrt{2}} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right) + \frac{2}{\sqrt{2}} \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$\bar{w}_1 = \left(-\frac{7}{2}, 1, \frac{7}{2}, 1 \right)$$

como: $\bar{v} = \bar{w}_1 + \bar{w}_2$

entonces: $\bar{w}_2 = \bar{v} - \bar{w}_1$

ÍNDICE 1 2 3 4 5

sustituyendo, tenemos:

$$\bar{w}_2 = (-1,\ 2,\ 6,\ 0) - \left(-\frac{7}{2},\ 1,\ \frac{7}{2},\ 1\right)$$

$$\bar{w}_2 = \left(\frac{5}{2},\ 1,\ \frac{5}{2},\ -1\right)$$

por lo tanto, se tiene que:

$$\bar{v} = \bar{w}_1 + \bar{w}_2 = \left(-\frac{7}{2},\ 1,\ \frac{7}{2},\ 1\right) + \left(\frac{5}{2},\ 1,\ \frac{5}{2},\ -1\right) = (-1,\ 2,\ 6,\ 0)$$

Ejercicio 4.16 Sea el espacio vectorial:

$$P = \left\{ ax^3 + bx^2 + cx + d \;\middle|\; a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{R} \right\}$$

y el subespacio de P:

$$W = \left\{ a \;\middle|\; a \in \mathbb{R} \right\}$$

con el producto interno en P definido por:

$$(p \mid q) = \int_{-1}^{1} p(x)\, q(x)\, dx \quad ; \ \forall\, p,\, q \in P$$

a) Determine el complemento ortogonal $W^{\perp}$ de W.

b) Exprese al polinomio $P(x) = -x^3 + 3x^2 - 2x + 3$ como la suma de un vector de W y otro de $W^{\perp}$.

SOLUCIÓN:

a) Una base de W es:

$$B = \{ 1 \}$$

Sea $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \in P$ un polinomio cualquiera perteneciente al complemento ortogonal de W, entonces se debe cumplir que:

$$\big(P(x) \big| 1 \big) = 0$$

de donde:

$$\big(P(x) \big| 1 \big) = \int_{-1}^{1} \left(ax^3 + bx^2 + cx + d \right)(1)\, dx = \left[\frac{a}{4}x^4 + \frac{b}{3}x^3 + \frac{c}{2}x^2 + dx \right]_{-1}^{1}$$

$$= \left(\frac{a}{4} + \frac{b}{3} + \frac{c}{2} + d \right) - \left(\frac{a}{4} - \frac{b}{3} + \frac{c}{2} - d \right) = 0$$

simplificando:

$$\frac{2b}{3} + 2d = 0$$

$$2b + 6d = 0$$

$$b + 3d = 0$$

$$b = -3d$$

Por lo tanto, al sustituir en el vector $P(x) \in W^{\perp}$, se obtiene que:

$$W^{\perp} = \left\{ ax^3 - 3dx^2 + cx + d \;\middle|\; a, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

b) Necesitamos obtener la proyección de $P(x) = -x^3 + 3x^2 - 2x + 3$ sobre el subespacio W. Para ello, se requiere que la base $B = \{1\}$ sea ortonormal.

Calculando la norma de 1, tenemos:

$$\| 1 \| = (1 \mid 1)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{-1}^{1} (1)(1)\, dx \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{-1}^{1} dx \right)^{\frac{1}{2}} = \left[(x)_{-1}^{1} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\| 1 \| = \left[1 - (-1) \right]^{\frac{1}{2}} = (2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

$$\therefore \quad B_{\text{ortonormal}} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}$$

Si suponemos que $P(x)$ puede ser expresado como:

$$P(x) = P_1 + P_2 \qquad \text{donde} \qquad \begin{array}{l} P_1 \in W \\ P_2 \in W^{\perp} \end{array}$$

siendo P_1 la proyección de $P(x)$ sobre W.

El polinomio P_1 viene dado por la expresión:

$$P_1 = \sum_{i=1}^{1} \left(P(x) \mid \bar{e}_i \right) \bar{e}_i$$

esto es:

$$P_1 = \left(P(x) \mid \bar{e}_1 \right) \bar{e}_1$$

siendo $\bar{e}_1$ el elemento único de la base ortonormal B.

ÍNDICE
1
2
3
4
5

Sustituyendo tenemos:

$$P_1 = \left(\left(-x^3 + 3x^2 - 2x + 3 \right) \middle| \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$P_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^{1} \left(-x^3 + 3x^2 - 2x + 3 \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) dx$$

$$P_1 = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \left(-x^3 + 3x^2 - 2x + 3 \right) dx$$

$$P_1 = \frac{1}{2} \left[-\frac{x^4}{4} + x^3 - x^2 + 3x \right]_{-1}^{1}$$

$$P_1 = \frac{1}{2} \left[\left(-\frac{1}{4} + 1 - 1 + 3 \right) - \left(-\frac{1}{4} - 1 - 1 - 3 \right) \right]$$

$$P_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{11}{4} + \frac{21}{4} \right) = \frac{32}{8} = 4$$

$$\therefore \; P_1 = 4$$

como $P(x) = P_1 + P_2$, entonces $P_2 = P(x) - P_1$, con lo cual:

$$P_2 = \left(-x^3 + 3x^2 - 2x + 3 \right) - 4$$

$$\therefore \; P_2 = -x^3 + 3x^2 - 2x - 1$$

entonces:

$$P(x) = P_1 + P_2 = 4 + \left(-x^3 + 3x^2 - 2x - 1 \right) = -x^3 + 3x^2 - 2x + 3$$

Ejercicio 4.17 Sea el espacio vectorial real

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| \; a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

con producto interno definido por:

$$\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} \right) = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 + d_1 d_2 \;;$$

$$\forall \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} \in M$$

y sea $W = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ y & z \end{bmatrix} \middle| \; x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$ un subespacio de M.

Obtenga la proyección ortogonal de $E = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ sobre W.

SOLUCIÓN:

Para obtener la proyección solicitada se mostrarán dos métodos de solución.

MÉTODO 1:

Este método de solución consistirá en obtener una base ortonormal del espacio W y, a partir de ella, con la fórmula correspondiente, obtener la proyección solicitada.

ÍNDICE
1
2
3
4
5

Una base del espacio W es:

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Con el producto interno definido, esta base resulta ser ortogonal.

Calculemos las normas de los vectores de la base.

$$\left\| \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\| = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right)^{\frac{1}{2}} = (1)^{\frac{1}{2}} = 1$$

$$\left\| \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\| = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right)^{\frac{1}{2}} = (2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

$$\left\| \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\| = \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)^{\frac{1}{2}} = (1)^{\frac{1}{2}} = 1$$

Por lo tanto, la base ortonormal de W es:

$$B_{\text{ortonormal}} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Se tiene que la proyección de la matriz $E = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ sobre el espacio W,

que representaremos con la letra P, viene dada por la expresión:

$$P = \sum_{i=1}^{3} \left(E \mid \bar{e}_i \right) \bar{e}_i$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

desarrollada sería:

$$P = \left(E \mid \bar{e}_1 \right) \bar{e}_1 + \left(E \mid \bar{e}_2 \right) \bar{e}_2 + \left(E \mid \bar{e}_3 \right) \bar{e}_3$$

donde los vectores $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ y $\bar{e}_3$ son elementos de la base ortonormal de W.

Sustituyendo, tenemos:

$$P = \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} +$$

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P = 1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} + \left(-1 \right) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, la proyección de la matriz E sobre W es:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$$

ÍNDICE 1 2 3 4 5

MÉTODO 2:

Este método de solución consistirá en obtener el complemento ortogonal de W y proyectar la matriz E sobre $W^{\perp}$, posteriormente, expresar a la matriz E como $E = P + Q$, donde $P \in W$ y $Q \in W^{\perp}$. La matriz P se obtiene de esta ecuación por despeje.

Obteniendo $W^{\perp}$, tenemos:

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Sea la matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in W^{\perp}$, se debe cumplir que:

$$\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = 0 \quad \text{de donde} \quad a = 0$$

$$\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) = 0 \quad \text{de donde} \quad b + c = 0 \;\Rightarrow\; c = -b$$

$$\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = 0 \quad \text{de donde} \quad d = 0$$

con lo cual se tiene que:

$$W^{\perp} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix} \middle| \, b \in \mathbb{R} \right\}$$

Una base de $W^{\perp}$ es:

$$B' = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

calculando la norma, tenemos:

$$\left\| \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\| = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right)^{\frac{1}{2}} = (2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

con lo cual la base ortonormal de $W^{\perp}$ sería:

$$B'_{\text{ortonormal}} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Proyectando la matriz $E = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\}$ sobre $W^{\perp}$, tenemos:

$$Q = \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} \quad \therefore \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

como $E = P + Q$, entonces $P = E - Q$.

de donde:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \qquad P = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 4.18 Obtenga el polinomio $h(x) \in W$ que tiene la menor distancia al polinomio $g(x) = x^2 - 2x - 1$, si $g(x) \in P_2$.

Se sabe que W es un subespacio de P_2 y que dichos espacios son:

$$P_2 = \left\{ a x^2 + b x + c \;\middle|\; a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

$$W = \left\{ a x^2 - 3 a x \;\middle|\; a \in \mathbb{R} \right\}$$

considere para su desarrollo, el producto interno en P_2 definido por:

$$(P \mid q) = \sum_{i=0}^{2} p(i)\, q(i) \quad ; \; \forall \; p(x), \; q(x) \in P_2$$

SOLUCIÓN:

El polinomio $h(x)$ que se pide es la proyección del polinomio $g(x)$ sobre el subespacio W.

Para calcular $h(x)$ necesitamos obtener una base ortonormal de W. Como W es un espacio de dimensión uno, entonces una base sería:

$$B = \left\{ x^2 - 3x \right\}$$

Calculando la norma del elemento de la base, tenemos:

$$\left\| \, x^2 - 3x \, \right\| = \left(x^2 - 3x \,\middle|\, x^2 - 3x \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[\, p(0)\, p(0) + p(1)\, p(1) + p(2)\, p(2) \, \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[\, (0)^2 + (-2)^2 + (-2)^2 \, \right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{8}$$

de donde la base ortonormal de W es: $B_{\text{ortonormal}} = \left\{ \dfrac{1}{\sqrt{8}} \left(x^2 - 3x \right) \right\}$

La proyección del polinomio $g(x)$ sobre el espacio W viene dada por la expresión:

$$h(x) = \left(g(x) \,\middle|\, \bar{e}_1 \right) \bar{e}_1$$

donde $\bar{e}_1$ es el elemento de la base ortonormal de W.

Sustituyendo, tenemos:

$$h(x) = \left(\left(x^2 - 2x - 1 \right) \,\middle|\, \frac{1}{\sqrt{8}} \left(x^2 - 3x \right) \right) \left(\frac{1}{\sqrt{8}} \left(x^2 - 3x \right) \right)$$

por propiedades del producto interno, se tiene que:

$$h(x) = \frac{1}{8} \left(\left(x^2 - 2x - 1 \right) \,\middle|\, \left(x^2 - 3x \right) \right) \left(x^2 - 3x \right)$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

aplicando el producto interno:

$$h(x) = \frac{1}{8}\left[\,(-1)(0)+(-2)(-2)+(-1)(-2)\,\right]\left(x^2-3x\right)$$

$$h(x) = \frac{1}{8}\,(6)\left(x^2-3x\right)$$

$$h(x) = \frac{3}{4}\left(x^2-3x\right)$$

$$h(x) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{9}{4}x$$

Ejercicio 4.19 Sea $B=\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}}\right),\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)\right\}$ una base ortonormal de un subespacio W de $\mathbb{R}^3$ con el producto interno usual. La distancia entre el vector $\overline{v}=(1,\ 0,\ k)$ y el vector $\overline{w}\in W$ más cercano a $\overline{v}$ es $\sqrt{3}$.

Determine:

a) Un valor de k.

b) El vector $\overline{w}$ más próximo a $\overline{v}$, utilizando el valor obtenido en el inciso **a)**.

SOLUCIÓN:

Este ejercicio se resolverá siguiendo dos caminos distintos.

MÉTODO 1:

Este método consiste en obtener la proyección del vector $\overline{v}$ sobre el subespacio W, como el vector $\overline{v}$ depende de k, es evidente que su proyección quedará en términos de k; posteriormente, se calculará la distancia entre los vectores $\overline{v}$ y $\overline{w}$, la cual deberá ser igual a $\sqrt{3}$. De esta igualdad se obtendrá el valor de k solicitado y, finalmente, el vector $\overline{w} \in W$ más próximo $\overline{v}$.

a) Se tiene que la proyección del vector $\overline{v}$ sobre el subespacio W viene dada por la expresión:

$$\overline{w} = \left(\overline{v} \mid \overline{e}_1 \right) \overline{e}_1 + \left(\overline{v} \mid \overline{e}_2 \right) \overline{e}_2$$

donde los vectores $\overline{e}_1$ y $\overline{e}_2$ son elementos de la base B.

Sustituyendo, tenemos:

$$\overline{w} = \left((1,\ 0,\ k) \,\middle|\, \frac{1}{\sqrt{6}} (1,\ 1,\ 2) \right) \frac{1}{\sqrt{6}} (1,\ 1,\ 2) +$$

$$\left((1,\ 0,\ k) \,\middle|\, \frac{1}{\sqrt{2}} (1,\ -1,\ 0) \right) \frac{1}{\sqrt{2}} (1,\ -1,\ 0)$$

$$\overline{w} = \frac{1}{6} (1 + 2k)(1,\ 1,\ 2) + \frac{1}{2} (1)(1,\ -1,\ 0)$$

$$\overline{w} = \left(\frac{1+2k}{6},\ \frac{1+2k}{6},\ \frac{2+4k}{6} \right) + \left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ 0 \right)$$

$$\overline{w} = \left(\frac{4+2k}{6},\ \frac{-2+2k}{6},\ \frac{2+4k}{6} \right)$$

$$\therefore\ \overline{w} = \left(\frac{2+k}{3},\ \frac{-1+k}{3},\ \frac{1+2k}{3} \right) \qquad \ldots (1)$$

Calculando la distancia entre $\overline{v}$ y $\overline{w}$, tenemos:

$$d(\overline{v},\overline{w}) = \|\overline{w}-\overline{v}\| = \left\| \left(\frac{2+k}{3}, \frac{-1+k}{3}, \frac{1+2k}{3} \right) - (1,0,k) \right\|$$

$$d(\overline{v},\overline{w}) = \left\| \left(\frac{-1+k}{3}, \frac{-1+k}{3}, \frac{1-k}{3} \right) \right\|$$

$$d(\overline{v},\overline{w}) = \left(\left(\frac{-1+k}{3}, \frac{-1+k}{3}, \frac{1-k}{3} \right) \middle| \left(\frac{-1+k}{3}, \frac{-1+k}{3}, \frac{1-k}{3} \right) \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$d(\overline{v},\overline{w}) = \left(\left(\frac{-1+k}{3} \right)^2 + \left(\frac{-1+k}{3} \right)^2 + \left(\frac{1-k}{3} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$d(\overline{v},\overline{w}) = \left(2\left(\frac{-1+k}{3} \right)^2 + \left[\frac{(-1)(-1+k)}{3} \right]^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$d(\overline{v},\overline{w}) = \left(2\left(\frac{-1+k}{3} \right)^2 + \left(\frac{-1+k}{3} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$d(\overline{v},\overline{w}) = \left(3\left(\frac{-1+k}{3} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$d(\overline{v},\overline{w}) = \pm\sqrt{3}\left(\frac{-1+k}{3} \right)$$

Como la distancia entre $\overline{v}$ y $\overline{w}$ debe ser igual a $\sqrt{3}$, tenemos:

$$\pm\sqrt{3}\left(\frac{-1+k}{3} \right) = \sqrt{3}$$

Si consideramos el valor positivo de $\sqrt{3}$, tenemos:

$$\sqrt{3}\left(\frac{-1+k}{3}\right) = \sqrt{3}$$

$$\frac{-1+k}{3} = 1$$

$$-1+k = 3$$

$$\therefore \quad k_1 = 4$$

Tomando el signo negativo, se tiene:

$$-\sqrt{3}\left(\frac{-1+k}{3}\right) = \sqrt{3}$$

$$\frac{-1+k}{3} = -1$$

$$-1+k = -3$$

$$\therefore \quad k_2 = -2$$

En el inciso **a)** solo se nos pide obtener un valor de k; sin embargo, se obtuvieron los dos posibles.

Si $\quad k = 4 \quad \Rightarrow \quad \bar{v} = (1,\ 0,\ 4)$

Si $\quad k = -2 \quad \Rightarrow \quad \bar{v} = (1,\ 0,\ -2)$

b) Para obtener el vector $\bar{w}$ más próximo a $\bar{v}$, se tomará el valor de $k = 4$ y al sustituirlo en la expresión (1), se obtiene que:

$$\bar{w} = (2,\ 1,\ 3)$$

MÉTODO 2:

Este método consiste en obtener el complemento ortogonal del subespacio W y se buscará un vector del $W^{\perp}$ cuya norma sea igual a $\sqrt{3}$. A partir de esto, se obtendrán los valores de k y con ellos el vector $\overline{w}$ más próximo a $\overline{v}$.

a) A partir de la base ortonormal dada en el enunciado del ejercicio, se llega a que una base del subespacio W es:

$$B_1 = \{ (1, 1, 2), (1, -1, 0) \}$$

simplificando esta base, se tiene:

$$\begin{array}{c} \\ (-1) \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{array}{c} \left(\frac{1}{2}\right) \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

por lo tanto, otra base de W sería:

$$B_2 = \{ (1, -1, 0), (0, 1, 1) \}$$

Al generar el espacio W con B_2, se llega a:

$$W = \{ (a, b-a, b) \mid a, b \in \mathbb{R} \}$$

Considerando un vector cualquiera $\overline{u} = (x, y, z)$ que pertenezca al complemento ortogonal de W, entonces se debe cumplir que:

$$\big((x, y, z) \mid (1, -1, 0) \big) = 0 \quad \Rightarrow \quad x - y = 0 \quad \Rightarrow \quad x = y$$

$$\big((x, y, z) \mid (0, 1, 1) \big) = 0 \quad \Rightarrow \quad y + z = 0 \quad \Rightarrow \quad z = -y$$

por lo tanto, $W^{\perp}$ es:

$$W^{\perp} = \{ (y, y, -y) \mid y \in \mathbb{R} \}$$

Como buscamos un vector del $W^{\perp}$ cuya norma sea igual a $\sqrt{3}$, se tiene que:

$$\left\| (y, y, -y) \right\| = \sqrt{3}$$

$$\left((y, y, -y) \middle| (y, y, -y) \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

$$\sqrt{y^2 + y^2 + y^2} = \sqrt{3}$$

$$\sqrt{3y^2} = \sqrt{3}$$

$$\pm \sqrt{3}\, y = \sqrt{3}$$

$$\therefore\ y = \pm 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} y_1 = 1 \\ y_2 = -1 \end{array}$$

Como se sabe, el vector $\bar{v}$ puede ser expresado como la suma de dos vectores, uno de W y el otro del $W^{\perp}$, esto es:

$$\bar{v} = \bar{w}_1 + \bar{w}_2 \qquad \text{donde} \qquad \begin{array}{l} \bar{w}_1 \in W \\ \bar{w}_2 \in W^{\perp} \end{array} \qquad \ldots(2)$$

Para el caso de $\bar{w}_2$, tenemos:

$$\text{si} \quad y = 1 \quad \Rightarrow \quad \bar{w}_2 = (1, 1, -1) \qquad \ldots(3)$$

$$\text{si} \quad y = -1 \quad \Rightarrow \quad \bar{w}_2 = (-1, -1, 1) \qquad \ldots(4)$$

y como $\bar{w}_1 \in W$, entonces es de la forma:

$$\bar{w}_1 = (a, b - a, b) \qquad \ldots(5)$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

sustituyendo (3), (5) y $\bar{v}$ en (2), tenemos:

$$(1,\ 0,\ k) = (a,\ b-a,\ b) + (1,\ 1,\ -1)$$

$$(1,\ 0,\ k) = (a+1,\ b-a+1,\ b-1)$$

de donde surge el sistema:

$$\begin{cases} a+1 = 1 & \Rightarrow \quad a = 0 \\ b-a+1 = 0 & \Rightarrow \quad b = -1 \\ b-1 = k & \Rightarrow \quad k = -2 \end{cases}$$

Por otro lado, si sustituimos (4), (5) y $\bar{v}$ en (2), se tiene:

$$(1,\ 0,\ k) = (a,\ b-a,\ b) + (-1,\ -1,\ 1)$$

$$(1,\ 0,\ k) = (a-1,\ b-a-1,\ b+1)$$

con lo cual:

$$\begin{cases} a-1 = 1 & \Rightarrow \quad a = 2 \\ b-a-1 = 0 & \Rightarrow \quad b = 3 \\ b+1 = k & \Rightarrow \quad k = 4 \end{cases}$$

entonces los valores de k solicitados en el inciso **a)** son:

$$k = 4 \qquad \text{y} \qquad k = -2$$

b) Si tomamos el valor de $k = 4$, entonces $a = 2$ y $b = 3$, con lo cual el vector $\bar{w} \in W$ más próximo a $\bar{v}$, se obtiene al sustituir los valores de a y b en (5):

$$\bar{w}_1 = (2,\ 1,\ 3)$$

ÍNDICE

1

2

3

4

5

Mínimos cuadrados

La solución de mínimos cuadrados $\bar{v}$ de un sistema incompatible:

$$A\,\bar{x} = \bar{y}$$

donde A es una matriz de orden $m \times n$, satisface la ecuación normal:

$$A^T A\,\bar{x} = A^T\,\bar{y}$$

y recíprocamente, cualquier solución de la ecuación normal es solución de mínimos cuadrados. Además, si el rango de la matriz A es igual a n, la solución es única y viene dada por la expresión:

$$\bar{v} = \left(A^T A \right)^{-1} A^T\,\bar{y}$$

Ejercicio 4.20 Determine la ecuación de la curva de mínimos cuadrados de segundo grado que mejor ajuste a los puntos $(-1,\ 0)$, $(0,\ 1)$, $(1,\ 1)$ y $(1,\ 2)$.

SOLUCIÓN:

Se nos pide ajustar a un polinomio de segundo grado de la forma:

$$y = P(x) = ax^2 + bx + c \qquad \ldots(1)$$

al sustituir en esta expresión las coordenadas de los puntos dados, se llega al sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} a - b + c = 0 \\ \qquad\quad c = 1 \\ a + b + c = 1 \\ a + b + c = 2 \end{cases}$$

Es evidente que este sistema de ecuaciones es incompatible, es decir, no admite solución, pues en la tercera ecuación se tiene que la suma de a, b y c debe ser igual a uno y, en la cuarta ecuación, la misma suma debe ser igual a dos.

Este sistema de ecuaciones puede ser expresado matricialmente de la siguiente forma:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \underset{\bar{x}}{\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}} = \underset{\bar{y}}{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}}$$

de donde se llega a la ecuación matricial:

$$A\bar{x} = \bar{y}$$

donde:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \quad ; \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Se sabe que toda solución de mínimos cuadrados satisface la ecuación normal:

$$A^T A\bar{x} = A^T\bar{y} \qquad \ldots(2)$$

obteniendo $A^T A$ y $A^T\bar{y}$, tenemos:

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \qquad \ldots(3)$$

$$A^T\bar{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad \ldots(4)$$

sustituyendo (3) y (4) en (2), se tiene:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

lo que genera el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 3a + b + 3c = 3 \\ a + 3b + c = 3 \\ 3a + b + 4c = 4 \end{cases}$$

al resolver este sistema, se obtiene que:

$$a = -\frac{1}{4} \quad , \quad b = \frac{3}{4} \quad \text{y} \quad c = 1$$

Al sustituir estos valores en la expresión (1), se tiene que el polinomio buscado es:

$$P(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}x + 1$$

Ejercicio 4.21 Para los puntos $(-2, 1)$, $(-1, 0)$, $(0, 2)$, $(1, 3)$ y $(2, 6)$, determine:

a) La ecuación de la recta de mínimos cuadrados que mejor se ajuste a los puntos dados.

b) La ecuación de la curva de mínimos cuadrados de segundo grado que mejor se ajuste a dichos puntos.

c) ¿Cuál de las dos opciones presenta el menor error? Considere al producto escalar ordinario en $\mathbb{R}^2$ como producto interno.

SOLUCIÓN:

a) Consideremos que la ecuación de la recta buscada es de la forma:

$$y = mx + b$$

Al sustituir las coordenadas de los puntos dados en la ecuación de la recta, se genera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$S_1 : \begin{cases} -2m & + & b & = & 1 \\ -m & + & b & = & 0 \\ 0m & + & b & = & 2 \\ m & + & b & = & 3 \\ 2m & + & b & = & 6 \end{cases}$$

si se expresa matricialmente este sistema, se tiene:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} m \\ b \end{bmatrix}}_{\overline{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}}_{\overline{y}}$$

dando lugar a la ecuación matricial $A\,\overline{x} = \overline{y}$, donde:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \; ; \quad \overline{x} = \begin{bmatrix} m \\ b \end{bmatrix} \; ; \quad \overline{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Se sabe que toda solución de mínimos cuadrados satisface a la ecuación normal:

$$A^T A \overline{x} = A^T \overline{y} \qquad \ldots(1)$$

se tiene que:

$$A^T A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \qquad \ldots(2)$$

por otro lado, se tiene que:

$$A^T \overline{y} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 12 \end{bmatrix} \qquad \ldots(3)$$

sustituyendo (2) y (3) en (1), tenemos:

$$\begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 12 \end{bmatrix}$$

de donde se tiene que:

$$10m = 13 \quad \Rightarrow \quad m = \frac{13}{10}$$

$$5b = 12 \quad \Rightarrow \quad b = \frac{12}{5}$$

Por lo tanto, la recta buscada tiene por ecuación:

$$y = \frac{13}{10}x + \frac{12}{5}$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

b) Se nos pide ajustar a un polinomio de segundo grado de la forma:

$$y = P(x) = ax^2 + bx + c \qquad \ldots (4)$$

cuyos coeficientes a, b y c desconocemos y vamos a determinar.

Al sustituir en la expresión (4) las coordenadas de los puntos dados, se llega al sistema de ecuaciones:

$$S_2 : \begin{cases} 4a - 2b + c = 1 \\ a - b + c = 0 \\ c = 2 \\ a + b + c = 3 \\ 4a + 2b + c = 6 \end{cases}$$

Este sistema puede ser expresado matricialmente de la siguiente forma:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}}_{\bar{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}}_{\bar{y}}$$

de donde:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \quad ; \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

obteniendo:

$$A^T A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad \ldots (5)$$

además:

$$A^T \overline{y} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31 \\ 13 \\ 12 \end{bmatrix} \quad \ldots (6)$$

sustituyendo (5) y (6) en (1), tenemos:

$$\begin{bmatrix} 34 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31 \\ 13 \\ 12 \end{bmatrix}$$

lo cual genera un sistema de ecuaciones que al resolverlo, se obtiene:

$$a = \frac{1}{2}$$

$$b = \frac{13}{10}$$

$$c = \frac{7}{5}$$

sustituyendo estos valores en (4), se tiene que el polinomio buscado es:

$$P(x) = \frac{1}{2} x^2 + \frac{13}{10} x + \frac{7}{5}$$

c) Cálculo del vector de errores para cada curva de ajuste, tenemos:

Para el caso de la recta, se tiene:

Tomando las abscisas de los puntos dados y sustituyéndolas en la ecuación de la recta tenemos que:

Para $P_1(-2,\ 1)$, se tiene que el punto en la recta es $Q_1\left(-2,\ -\frac{1}{5}\right)$

Para $P_2(-1,\ 0)$, se tiene que el punto en la recta es $Q_2\left(-1,\ \frac{11}{5}\right)$

Para $P_3(0,\ 2)$, se tiene que el punto en la recta es $Q_3\left(0,\ \frac{12}{5}\right)$

Para $P_4(1,\ 3)$, se tiene que el punto en la recta es $Q_4\left(1,\ \frac{37}{10}\right)$

Para $P_5(2,\ 6)$, se tiene que el punto en la recta es $Q_5(2,\ 5)$

de donde se tiene que las componentes del vector de errores vienen dadas mediante la diferencia de las ordenadas de los puntos P_i y Q_i, esto es:

$$e_1 = y - y_1 = 1 - \left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{6}{5}$$

$$e_2 = y - y_2 = 0 - \frac{11}{5} = -\frac{11}{5}$$

$$e_3 = y - y_3 = 2 - \frac{12}{5} = -\frac{2}{5}$$

$$e_4 = y - y_4 = 3 - \frac{37}{10} = -\frac{7}{10}$$

$$e_5 = y - y_5 = 6 - 5 = 1$$

por lo que el vector error es:

$$\bar{e}_1 = \left(\frac{6}{5},\ -\frac{11}{5},\ -\frac{2}{5},\ -\frac{7}{10},\ 1\right)$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

Calculando su norma:

$$\left\| \bar{e}_1 \right\| = \left(\bar{e}_1 \mid \bar{e}_1 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\bar{e}_1 \bullet \bar{e}_1 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{36}{25} + \frac{121}{25} + \frac{4}{25} + \frac{49}{100} + 1 \right)^{\frac{1}{2}}$$

entonces, se tiene que el error es:

$$\left\| \bar{e}_1 \right\| = 2.816$$

Para el caso del polinomio de segundo grado, tenemos:

Para $P_1(-2, 1)$, se tiene que el punto en $P(x)$ es $R_1(-2, 0.8)$

Para $P_2(-1, 0)$, se tiene que el punto en $P(x)$ es $R_2(-1, 0.6)$

Para $P_3(0, 2)$, se tiene que el punto en $P(x)$ es $R_3(0, 1.4)$

Para $P_4(1, 3)$, se tiene que el punto en $P(x)$ es $R_4(1, 3.2)$

Para $P_5(2, 6)$, se tiene que el punto en $P(x)$ es $R_5(2, 6)$

Obteniendo la diferencia de las ordenadas, tenemos:

$$\begin{aligned} e_1 &= 1 - 0.8 = 0.2 \\ e_2 &= 0 - 0.6 = -0.6 \\ e_3 &= 2 - 1.4 = 0.6 \\ e_4 &= 3 - 3.2 = -0.2 \\ e_5 &= 6 - 6 = 0 \end{aligned}$$

por lo que el vector de errores para el caso de $P(x)$ es:

$$\bar{e}_2 = (0.2, -0.6, 0.6, -0.2, 0)$$

calculando su norma:

$$\left\| \bar{e}_2 \right\| = \left(\bar{e}_2 \mid \bar{e}_2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\bar{e}_2 \bullet \bar{e}_2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(0.04 + 0.36 + 0.36 + 0.04 + 0 \right)^{\frac{1}{2}}$$

entonces, se tiene que el error es:

$$\| \bar{e}_2 \| = 0.894$$

Por lo tanto, el menor error se obtiene con el polinomio de segundo grado, lo cual quiere decir que dicha curva es la que mejor se ajusta a los puntos dados.

Ejercicio 4.22 Obtenga, empleando el método de mínimos cuadrados, una solución aproximada del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y + z = 1 \\ x + y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

SOLUCIÓN:

Es evidente que se tiene un sistema de ecuaciones incompatible, pues en las dos primeras ecuaciones del sistema se tiene que la suma de tres números debe ser igual a cero y, al mismo tiempo, su suma debe ser igual a uno, lo cual resulta imposible.

Del sistema de ecuaciones, se tienen las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad ; \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La solución por mínimos cuadrados viene dada por:

$$A^T A\bar{x} = A^T \bar{y} \qquad \ldots(1)$$

obteniendo $A^T A$ y $A^T \bar{y}$, tenemos:

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix} \qquad \ldots(2)$$

$$A^T \bar{y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \ldots(3)$$

sustituyendo (2) y (3) en (1), tenemos:

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

con lo cual se llega al sistema:

$$\begin{cases} 3x + 3y + 2z = 1 \\ 3x + 4y + 3z = 1 \\ 2x + 3y + 3z = 1 \end{cases}$$

cuya solución es:

$$x = \frac{1}{2} \quad , \quad y = -\frac{1}{2} \quad , \quad z = \frac{1}{2}$$

Estos valores resultan ser la mejor aproximación a la solución del sistema de ecuaciones planteado.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. En el espacio vectorial

$$P_2 = \left\{ ax^2 + bx + c \;\middle|\; a,\ b,\ c \in \mathbb{R} \right\}$$

sobre $\mathbb{R}$, se define la operación:

$$(p \mid q) = p(0)\ q(0) + p(1)\ q(1) + p(2)\ q(2) \quad ; \quad \forall\ p,\ q \in P_2$$

Determine si $(p \mid q)$ es un producto interno en P_2.

2. En el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$, se define la función:

$$(\bar{u} \mid \bar{v}) = x_1 x_2 + x_1 y_2 + y_1 x_2 + 3 y_1 y_2 \quad ; \ \forall\ \bar{u} = (x_1, y_1),\ \bar{v} = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$$

Determine si $(\bar{u} \mid \bar{v})$ es un producto interno.

3. Para el espacio vectorial F de funciones reales de variable real, continuas e integrables en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, determine si:

$$(f \mid g) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\ g(x)\cos x\ dx \quad ; \quad \forall\ f, g \in F$$

es un producto interno.

En caso de serlo, calcule la norma del vector $f(x) = 3 \operatorname{sen} x$; en caso de no serlo, indique los axiomas que no se cumplen.

ÍNDICE
1
2
3
4
5

4. Sea la función $f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, cuya regla de correspondencia es:

$$f\left(\bar{u} \mid \bar{v}\right) = u_1 v_1 - u_2 v_2 \quad ; \quad \forall \quad \bar{u} = \left(u_1, u_2\right),\ \bar{v} = \left(v_1, v_2\right) \in \mathbb{R}^2$$

Determine si f es un producto interno en $\mathbb{R}^2$. En caso afirmativo, obtener, respecto a este producto interno, la distancia entre los vectores $\bar{w}_1 = (2, 1)$ y $\bar{w}_2 = (3, -1)$; en caso negativo, indicar los axiomas que f no cumple.

5. En el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$, se define la operación:

$$\left(\bar{v} \mid \bar{w}\right) = \bar{v}\ A\ \bar{w}^T \quad ; \quad \forall \quad \bar{v} = \left(v_1, v_2\right), \quad \bar{w} = \left(w_1, w_2\right) \in \mathbb{R}^2$$

donde $\bar{v}$ y $\bar{w}$ están representados como matrices renglón y $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Determine si $\left(\bar{v} \mid \bar{w}\right)$ es un producto interno, si se sabe que la positividad se cumple.

6. Sea el espacio vectorial:

$$P_1 = \left\{ ax + b \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

Determine si la operación:

$$\left(p \mid q\right) = \left(\frac{dp}{dx}\right)\left(\frac{dq}{dx}\right) \quad ; \ \forall\ p, q \in P_1$$

es un producto interno.

7. En el espacio vectorial real M de las matrices de orden $n \times n$ con elementos reales, se define la operación:

$$\left(A \mid B\right) = \operatorname{Det}\left(A^T B\right) \quad ; \quad \forall\ A, B \in M$$

Determine si la operación $\left(A \mid B\right)$ es un producto interno y en caso de no serlo, indique los axiomas que no se cumplen.

8. En el espacio vectorial:

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ a+b & 2a \end{bmatrix} \middle| \; a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

sobre $\mathbb{R}$, se define la función:

$$\left(A \mid B \right) = ac - 2ad - 2bc + 4bd \quad ; \forall \; A = \begin{bmatrix} a & b \\ a+b & 2a \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} c & d \\ c+d & 2c \end{bmatrix} \in W$$

Si se sabe que se cumplen:

$$\left(A \mid B + C \right) = \left(A \mid B \right) + \left(A \mid C \right) \; ; \forall \; A, B, C \in W$$

$$\left(\alpha A \mid B \right) = \alpha \left(A \mid B \right) \; ; \; \forall \; \alpha \in \mathbb{R} \; \text{ y } \; \forall \; A, B \in W$$

determine si $\left(A \mid B \right)$ es un producto interno en W.

9. En el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$, se define el producto interno:

$$\left(\bar{u} \mid \bar{v} \right) = x_1 x_2 - x_1 y_2 - x_2 y_1 + 3 y_1 y_2 \; ; \quad \forall \; \bar{u} = (x_1, y_1), \; \bar{v} = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$$

Obtenga un vector $\bar{w} \in \mathbb{R}^2$ que, con el producto interno dado, sea ortogonal al vector $(9, 1)$ y su norma sea $\sqrt{33}$.

10. Si en el espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ se define el producto escalar ordinario y se tiene que $B = \{ \bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4 \}$ es su base canónica, obtenga un vector unitario que cumpla simultáneamente las dos condiciones siguientes:

a) Que sea ortogonal a $\bar{v}_1$ y $\bar{v}_4$, y

b) que forme ángulos iguales con $\bar{v}_2$ y $\bar{v}_3$.

11. En el espacio vectorial:

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \middle| \; a, b, c, d, e, f, g, h, i \in \mathbb{R} \right\}$$

se define el producto interno:

$$\left(A \mid B \right) = Tr\left(B^T A \right) \quad ; \quad \forall \; A, B \in M$$

Considerando las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

calcule:

a) La norma de la matriz A.

b) La distancia entre las matrices A y B.

c) El ángulo que forman las matrices A y B.

12. Sea P_1 el espacio vectorial real de los polinomios de grado menor o igual a uno con coeficientes reales y el producto interno en P_1 definido por:

$$\left(p \mid q \right) = \beta \int_{-1}^{2} p(x)\, q(x)\, dx \quad ; \quad \forall \; p, q \in P_1 \; ; \quad \beta \in \mathbb{R}, \; \beta > 0$$

Determine el valor de β para que la distancia entre los polinomios $m(x) = 2x + 1$ y $n(x) = 3$ sea igual a tres.

13. Sean $B = \left\{ \bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3 \right\}$ un conjunto ortonormal de vectores de un espacio vectorial real.

ÍNDICE
1
2
3
4
5

a) Determine los escalares α, β y γ para que el vector $\bar{u} = \alpha\,\bar{w}_3 - \beta\,\bar{w}_1 - \gamma\,\bar{w}_2$ sea ortogonal tanto a $\bar{w}_1$ como a $\bar{w}_2$.

b) Calcule la distancia entre los vectores $\bar{u}$ y $\bar{w}_3$, utilizando los escalares α, β y γ obtenidos en el inciso anterior.

14. Sea el espacio vectorial $P_2 = \left\{ a x^2 + b x + c \;\middle|\; a,\, b,\, c \in \mathbb{R} \right\}$, en el cual se define el producto interno:

$$\left(p \mid q \right) = \int_0^1 p(x)\; q(x)\; dx \quad ; \quad \forall \;\; p, q \in P_2$$

Determine un vector $f_3(x) \neq 0$ que sea ortogonal a los vectores $f_1(x) = x^2 + 1$ y $f_2(x) = x - 1$.

15. En el espacio vectorial F de funciones continuas reales en el intervalo $[-\pi\,,\,\pi]$, se define el siguiente producto interno:

$$\left(f \mid g \right) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\; g(t)\, dt \quad ; \quad \forall\, f, g \in F$$

a) Determine si las funciones $f(t) = \operatorname{sen} t$ y $g(t) = \cos t$ son ortogonales.

b) Calcule la norma de la función $g(t) = \cos t$.

16. Sea el producto interno usual en el espacio complejo $\mathbb{C}^2$ definido por:

$$\left(\bar{u} \mid \bar{v} \right) = u_1\, \bar{v}_1 + u_2\, \bar{v}_2 \quad ; \quad \forall \;\; \bar{u} = \left(u_1,\, u_2 \right) \;\; , \;\; \bar{v} = \left(v_1,\, v_2 \right) \in \mathbb{C}^2$$

donde $\bar{v}_1$ y $\bar{v}_2$ representan el conjugado de v_1 y v_2, respectivamente.

Obtenga un vector $\bar{z} \in \mathbb{C}^2$ con primera componente real, que sea ortogonal al vector $\bar{u} = (-3,\, i)$ y tal que la distancia entre $\bar{z}$ y $\bar{w} = (1 + i,\, -2i)$ sea igual a la distancia entre $\bar{u}$ y $\bar{w}$.

17. Sea V un espacio vectorial real y sean $\bar{u}, \bar{v} \in V$. Demuestre que si $\left\| \bar{u} + \bar{v} \right\| = \left\| \bar{u} - \bar{v} \right\|$, entonces los vectores $\bar{u}$ y $\bar{v}$ son ortogonales.

18. Sea el espacio vectorial $\mathbb{C}^2$ sobre $\mathbb{C}$, en el cual se define el producto interno usual:

$$\left(\bar{z} \mid \bar{w} \right) = z_1 \overline{w}_1 + z_2 \overline{w}_2 \quad ; \quad \forall\ \bar{z} = \left(z_1, z_2 \right),\ \bar{w} = \left(w_1, w_2 \right) \in \mathbb{C}^2$$

donde $\overline{w}_1$ y $\overline{w}_2$ representan el conjugado de w_1 y w_2, respectivamente.

Para los vectores $\bar{z} = \left(1 - i,\ -2i \right)$ y $\bar{w} = \left(2i,\ 2 - i \right)$, calcule:

a) La distancia entre $\bar{z}$ y $\bar{w}$.

b) El ángulo entre $\bar{z}$ y $\bar{w}$.

19. Sea V un espacio vectorial definido sobre el campo real con producto interno y sea $\bar{v} \in V$ con $\bar{v} \neq \bar{0}$. Obtenga los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los cuales los vectores:

$$\bar{x} = k\bar{v} + 2\bar{v}$$

$$\bar{y} = k^2\bar{v} - 5k\bar{v} + 6\bar{v}$$

son ortogonales.

20. Sea el espacio vectorial $\mathbb{C}^2$ con producto interno definido por:

$$\left(\bar{u} \mid \bar{v} \right) = u_1 \overline{v}_1 + u_2 \overline{v}_2 \quad ; \quad \forall\ \bar{u} = \left(u_1, u_2 \right),\ \bar{v} = \left(v_1, v_2 \right) \in \mathbb{C}^2$$

donde $\overline{v}_1$ y $\overline{v}_2$ representan el conjugado de v_1 y v_2, respectivamente.

Para los vectores $\bar{z} = \left(1, i \right)$ y $\bar{w} = \left(i, a \right) \in \mathbb{C}^2$:

a) Determine el número a para que $\left(\bar{z} \mid \bar{w} \right) = 3i$.

b) Con el valor de a obtenido en el inciso anterior, compruebe que:

$$\left\| \bar{z} + \bar{w} \right\| \leq \left\| \bar{z} \right\| + \left\| \bar{w} \right\|.$$

21. Sean P_2 el espacio vectorial real de los polinomios de grado menor o igual a dos con coeficientes reales y el producto interno en P_2 definido por:

$$\left(p \mid q \right) = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 \quad ; \quad \forall \; p(x) = a_1 x^2 + b_1 x + c_1 \,,$$

$$q(x) = a_2 x^2 + b_2 x + c_2 \quad \in P_2$$

y sean los vectores $\bar{u} = x^2 + x + a$ y $\bar{v} = x - 3$. Determine el conjunto de valores $a \in \mathbb{R}$, tal que:

a) El ángulo entre $\bar{u}$ y $\bar{v}$ sea $\dfrac{\pi}{2}$ radianes.

b) La norma de $\bar{u}$ sea igual a $\sqrt{18}$.

22. Sea el espacio vectorial real $M = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \middle| \; a, b \in \mathbb{R} \right\}$ con producto interno definido por:

$$\left(A \mid B \right) = Tr\left(AB^T \right) \quad ; \quad \forall \; A, B \in M$$

Obtenga una matriz $D \in M$ que forme un ángulo de 45° con la matriz $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ y que diste una unidad de la matriz $F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

23. Sea el espacio vectorial:

$$P = \left\{ ax^2 + bx + c \;\middle|\; a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

con producto interno definido por:

$$\left(p \mid q \right) = \int_0^k p(x)\, q(x)\, dx \quad ; \quad \forall \; p(x), q(x) \in P$$

y sea $B = \{ x, \; x - 2 \}$ un subconjunto de P.

Determine el valor de k para que:

a) El conjunto B sea ortogonal.

b) La distancia entre los vectores x, $x-2$ sea igual 4.

24. Sean V un espacio vectorial con producto interno, $A = \{ \bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \}$ una base ortogonal de V y los vectores:

$$\bar{m} = \bar{u} + \bar{v} + \bar{w}$$

$$\bar{n} = - \bar{v} - \bar{w}$$

Las normas de los vectores de A son $\| \bar{u} \| = 3$, $\| \bar{v} \| = 1$ y $\| \bar{w} \| = \sqrt{2}$.

a) Obtenga el ángulo que forman $\bar{m}$ y $\bar{n}$.

b) Utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, determine si el conjunto $\{ \bar{m}, \bar{n} \}$ es linealmente dependiente o linealmente independiente.

25. En el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$, está definido el producto interno:

$$\left(\bar{u} \mid \bar{v} \right) = u_1 v_1 + 2 u_2 v_2 \quad ; \quad \forall \ \bar{u} = \left(u_1, v_2 \right), \ \bar{v} = \left(v_1, v_2 \right) \in \mathbb{R}^2$$

Determine, mediante la desigualdad de Cauchy-Schwarz, el valor de $k \in \mathbb{R}$ para el cual el conjunto:

$$A = \{ (k + 5, \ k - 1), (-2, 1) \}$$

es linealmente dependiente.

26. Sea F el espacio vectorial de las funciones reales de variable real continuas en el intervalo $[0, \ 2\pi]$ y el producto interno definido por:

$$\left(f \mid g \right) = \int_0^{2\pi} f(x) \, g(x) \, dx \quad ; \quad \forall \ f, g \in F$$

a) Calcule el ángulo y la distancia entre las funciones

$$f(x) = 3 \quad \text{y} \quad g(x) = \cos x \quad ; \quad \forall \ x \in [0, \ 2\pi]$$

b) Obtenga una base ortogonal del subespacio de F generado por el conjunto:

$$A = \{ 3, \quad \cos x, \quad -9 \}$$

27. Sea el conjunto $B = \{ (1, 1, -1), (0, 1, -1), (1, 1, 0) \}$ una base del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$. Determine a partir de B una base ortonormal de dicho espacio, considerando el siguiente producto interno definido en $\mathbb{R}^3$:

$$(\bar{x} \mid \bar{y}) = 3x_1 y_1 + 2x_2 y_2 + x_3 y_3 \quad ; \quad \forall \ \bar{x} = (x_1, x_2, x_3), \ \bar{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$$

28. En el espacio vectorial:

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \middle| \ a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

se define el producto interno:

$$(M_1 \mid M_2) = \left(\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} \right) = a_1 a_2 + b_1 b_2 \quad ; \quad \forall \ M_1, M_2 \in M$$

Empleando el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt, obtenga una base ortonormal del espacio M a partir de la base:

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

29. Si en el espacio vectorial P_2 de los polinomios de grado menor o igual a dos se define el siguiente producto interno:

$$(p \mid q) = \sum_{i=0}^{2} p(i) \ q(i) \quad ; \quad \forall \ p, q \in P_2$$

a) Determine los valores de $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que el conjunto:

$$B = \{ 1, \quad x + a, \quad x^2 + bx + c \}$$

sea ortogonal para dicho producto interno.

b) Obtenga a partir de B una base ortonormal de P_2 para el producto interno dado.

30. Obtenga una base ortonormal del espacio vectorial P_2 de los polinomios de grado menor o igual a dos con coeficientes reales a partir de la base:

$$B = \{ 1, \quad 2t, \quad 12t^2 - 12t + 2 \}$$

considerando como producto interno a:

$$(p \mid q) = \int_0^1 p(t)\, q(t)\, dt \quad ; \quad \forall\ p, q \in P_2$$

31. Obtenga los valores de $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que para el producto interno:

$$(\bar{x} \mid \bar{y}) = a x_1 y_1 + b x_1 y_2 + b x_2 y_1 + c x_2 y_2 ; \quad \forall\ \bar{x} = (x_1, x_2), \ \bar{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$$

el conjunto $\{ (1, 0), (1, 1) \}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$.

32. En $\mathbb{R}^2$ se define el producto interno:

$$(\bar{x} \mid \bar{y}) = 2x_1 y_1 - x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_2 y_2 \quad ; \quad \forall\ \bar{x} = (x_1, x_2), \ \bar{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$$

a) Calcule la norma del vector $\bar{v} = (2, 2)$.

b) Obtenga el conjunto de vectores ortogonales al vector $\bar{u} = (1, 0)$.

c) Obtenga una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$ a partir de su base canónica.

33. Sea M el espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden dos en donde se define el producto interno real:

$$\left(A \mid B \right) = Tr\left(B^T A \right) \quad ; \quad \forall\ A,\ B \in M$$

Obtenga una base ortogonal de M a partir de:

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

34. Si en el espacio vectorial $\mathbb{C}^3$ se define el producto interno:

$$\left(\bar{z} \mid \bar{w} \right) = z_1 \bar{w}_1 + z_2 \bar{w}_2 + z_3 \bar{w}_3 \quad ; \quad \forall\ \bar{z} = \left(z_1,\ z_2,\ z_3 \right),\ \ \bar{w} = \left(w_1,\ w_2,\ w_3 \right) \in \mathbb{C}^3$$

donde $\bar{w}_1$, $\bar{w}_2$ y $\bar{w}_3$ denotan a los conjugados de w_1, w_2 y w_3, respectivamente, obtenga una base ortonormal del espacio generado por el conjunto de vectores:

$$B = \left\{ \left(1,\ i,\ 1 \right),\ \left(1+i,\ 0,\ 2 \right) \right\}$$

35. Sean el espacio vectorial real V con producto interno, $B = \left\{ \bar{v}_1,\ \bar{v}_2,\ \bar{v}_3 \right\}$ una base ortonormal de V y el vector $\bar{u} \in V$ ortogonal a $\bar{v}_1$, que forma un ángulo de $60°$ con $\bar{v}_2$ y tal que $\left\| \bar{u} \right\| = 2$. Determine un vector de coordenadas de $\bar{u}$ respecto a la base B.

36. Sean el espacio vectorial W con producto interno y $B = \left\{ \bar{e}_1,\ \bar{e}_2 \right\}$ una base ortogonal de W tal que $\left\| \bar{e}_1 \right\| = 2$ y $\left\| \bar{e}_2 \right\| = 3$, y sea el vector $\bar{v} \in W$ cuyo vector de coordenadas respecto a la base B es $\left(\bar{v} \right)_B = \left(1,\ -2 \right)$. Obtenga $\left(\bar{v} \mid \bar{e}_1 \right)$ y $\left(\bar{v} \mid \bar{e}_2 \right)$.

37. Sean el espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ con producto interno usual, $H = \left\{ \left(1, 1, 1, 1 \right) \right\}$ un subconjunto $\mathbb{R}^4$ y W el subespacio generado por H. Determine una base ortonormal del complemento ortogonal de W.

38. Sean el espacio vectorial $P_2 = \left\{ ax^2 + bx + c \;\middle|\; a,\ b,\ c \in \mathbb{R} \right\}$, en el cual se define el producto interno:

$$\left(p \middle| q \right) = \sum_{n=-1}^{1} p(n)\, q(n) \quad ; \quad \forall\, p,\, q \in P_2$$

y sea $W = \left\{ ax^2 + b \;\middle|\; a,\ b \in \mathbb{R} \right\}$ un subespacio de P_2. Obtenga el complemento ortogonal de W.

39. Sean M el espacio vectorial real de las matrices de orden 2×2, W el subespacio de M generado por el conjunto:

$$G = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

y el producto interno en M definido por:

$$\left(A \middle| B \right) = Tr\left(B^T A \right) \quad ; \quad \forall\, A,\, B \in M$$

Obtenga el complemento ortogonal de W.

40. Sea $W = \left\{ (x,\ y,\ z) \middle| \ x - 2y + 5z = 0 \ \text{ con } \ x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$ un subespacio de $\mathbb{R}^3$ y sea el producto escalar usual, el producto interno definido en $\mathbb{R}^3$.

a) Determine el complemento ortogonal de W.

b) Obtenga un vector que pertenezca al $W^{\perp}$ y que tenga norma igual a $4\sqrt{30}$.

41. Sea P_2 el espacio vectorial de polinomios de grado menor o igual a dos con coeficientes reales con producto interno definido por:

$$\left(p \middle| q \right) = \sum_{i=0}^{2} p(i)\, q(i) \quad ; \quad \forall\, p,\, q \in P_2$$

y sea $W=\left\{ ax^2+bx-(2a+b) \mid a,\ b\in\mathbb{R} \right\}$ un subespacio de P_2. Si $B=\left\{ x^2-2,\ \ 4x^2-9x+1 \right\}$ es una base ortogonal de W, determine el polinomio $q(x)\in W$ más cercano a $h(x)=x^2-x+1$.

42. Sea el espacio vectorial real:

$$M=\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle|\ a,\ b,\ c,\ d\in\mathbb{R} \right\}$$

con producto interno definido por:

$$M=\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} \right)=a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2+d_1d_2\ ;\ \forall \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}\in M$$

y sea:

$$W=\left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ y & z \end{bmatrix} \middle|\ x+y+z=0 \quad \text{con} \quad x,\ y,\ z\in\mathbb{R} \right\}$$

un subespacio de M. Determine la proyección de la matriz $H=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ sobre W.

43. Sean $W=\left\{ (x,\ x,\ y) \mid x,\ y\in\mathbb{R} \right\}$ y $B=\left\{ (1,1,0),(0,0,1) \right\}$ un subespacio de $\mathbb{R}^3$ y una base de W, respectivamente. Considerando el producto interno:

$$(\bar{u} \mid \bar{v})=x_1x_2+3y_1y_2+z_1z_2\ ;\ \forall\ \bar{u}=(x_1,\ y_1,\ z_1),\ \bar{v}=(x_2,\ y_2,\ z_2)\in\mathbb{R}^3$$

obtenga:

a) El vector $\bar{w}\in W$ más próximo al vector $\bar{a}=(6,\ 2,\ 1)$.

b) La distancia entre los vectores $\bar{w}$ y $\bar{a}$.

44. Sean M el espacio vectorial de matrices cuadradas de orden dos con elementos reales y el producto interno en M definido por:

$$\left(A\middle|\,B\right)=\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\middle|\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}\right)=Tr\left(AB^{T}\right)\ ;\ \forall\ A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}\in M$$

y sea $W=\left\{\begin{bmatrix} a & a-b \\ b & a \end{bmatrix}\middle|\ a,\ b\in\mathbb{R}\right\}$ un subespacio de M.

a) Determine el complemento ortogonal $W^{\perp}$ de W.

b) Exprese al vector $A=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ como la suma de $B+C$, donde $B\in W$ y $C\in W^{\perp}$.

c) Obtenga la proyección del vector A sobre $W^{\perp}$.

45. Sea $H=\left\{(x,\ y,\ z)\ \middle|\ x+y+z=0,\ 2x-y-z=0\ \text{ con }\ x,y,z\in\mathbb{R}\right\}$ un subespacio de $\mathbb{R}^3$ y el producto interno ordinario en $\mathbb{R}^3$.

a) Determine el complemento ortogonal $H^{\perp}$ de H.

b) Exprese al vector $\bar{v}=(-2,\ 1,\ 4)$ como $\bar{v}=\bar{w}_1+\bar{w}_2$, donde: $\bar{w}_1\in H$ y $\bar{w}_2\in H^{\perp}$.

46. Usando el teorema de proyección, obtenga el punto del plano $\pi:\ 2x-5y+z=0$ más cercano al punto $A\,(2,\ 3,\ -1)$, usando como producto interno el producto escalar de vectores.

47. Sean P_1 el espacio vectorial real de los polinomios de grado menor o igual a uno con coeficientes reales, W el subespacio de P_1 generado por el conjunto $G=\{1+x\ ,\ -3-3x\}$ y el producto interno en P_1 definido por:

$$\left(p\middle|\,q\right)=p(0)\,q(0)+p(1)\,q(1)\ \ ;\ \ \forall\ p,\ q\in P_1$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

Obtenga el polinomio $g(x) \in W$ que mejor se aproxime a $p(x) = -4x + 2$.

48. Sean $W = \{(x, y, z) | \; x + 2y - z = 0 \text{ con } x, y, z \in \mathbb{R}\}$ un subespacio de $\mathbb{R}^3$ y el producto interno usual en $\mathbb{R}^3$. Determine dos vectores $\bar{u} \in W$ y $\bar{v} \in W^{\perp}$, tales que $d(\bar{u}, \bar{v}) = \sqrt{32}$ y la abscisa de ambos sea igual a dos.

49. Sean los espacios vectoriales:

$$V = \{(a, b, c) \mid a + b + c = 0 \; ; \; a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

$$W = \left\{(a, b, c) \,\middle|\, a = b + c, \; \frac{1}{3} a = -b - c \; ; \; a, b, c \in \mathbb{R}\right\}$$

a) Obtenga el complemento ortogonal del espacio $V \cap W$, empleando el producto interno usual en $\mathbb{R}^3$.

b) Exprese al vector $\bar{u} = (1, 1, 1)$ como la suma $\bar{w}_1 + \bar{w}_2$, donde:

$\bar{w}_1 \in V \cap W$ y $\bar{w}_2 \in (V \cap W)^{\perp}$

50. Sean el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ con producto interno usual y W el subespacio $\mathbb{R}^3$ cuyo complemento ortogonal $W^{\perp}$ tiene como una de sus bases a $B = \{(1, 2, 1), (1, 0, -1)\}$. El vector $\bar{a}$ es la proyección de $\bar{v} = (1, 1, 0)$ sobre $W^{\perp}$ y su vector de coordenadas respecto a la base B es $(\bar{a})_B = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Obtenga:

a) El vector $\bar{b} \in W$ más cercano a $\bar{v}$.

b) Una base de W.

51. Determine la ecuación de la recta de mínimos cuadrados que mejor se ajuste a los puntos $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 3)$ y $(0, 0)$.

ÍNDICE
1
2
3
4
5

52. Determine la ecuación de la curva de mínimos cuadrados de segundo grado que mejor se ajuste a los puntos $(-1,\ -1)$, $(0,\ 1)$, $(0,\ 0)$ y $(1,\ 1)$.

53. Para los puntos $(2,\ 2)$, $(3,\ 4)$, $(4,\ 5)$ y $(5,\ 7)$, determine:

a) La ecuación de la recta de mínimos cuadrados que mejor se ajuste a los puntos dados.

b) La ecuación de la curva de mínimos cuadrados de segundo grado que mejor se ajuste a dichos puntos.

c) Explique por qué se llega a la respuesta obtenida en el inciso **b)**.

54. Obtenga, empleando el método de mínimos cuadrados, una solución aproximada del sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 0 \\ -x & + & y & & & = & 1 \\ & & 2y & + & z & = & 0 \\ x & & & - & z & = & 1 \end{array}\right.$$

55. Obtenga, empleando el método de mínimos cuadrados, una solución aproximada del sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} -a & + & b & + & c & = & 0 \\ a & - & b & + & c & = & 0 \\ & & b & + & c & = & -1 \\ a & & & + & c & = & 1 \end{array}\right.$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

RESPUESTAS A EJERCICIOS PROPUESTOS

1. $\left(p \,|\, q \right)$ sí es un producto interno.

2. $\left(\bar{u} \,|\, \bar{v} \right)$ sí es un producto interno.

3. $\left(f \,|\, g \right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\; g(x) \cos x \, dx$ sí es un producto interno.

$\| \, 3 \text{ sen } x \, \| = \sqrt{3}$

4. $f\left(\bar{u} \,|\, \bar{v} \right) = u_1 v_1 - u_2 v_2$ no es un producto interno y el axioma que no se cumple es la positividad. El vector $\bar{u} = (0,\ 1) \neq \bar{0}$ no satisface este axioma.

5. $\left(\bar{v} \,|\, \bar{w} \right) = \bar{v}\; A\; \bar{w}^{\,T}$ sí es un producto interno.

6. $\left(p \,|\, q \right) = \left(\dfrac{dp}{dx} \right)\left(\dfrac{dq}{dx} \right)$ no es un producto interno.

7. $\left(A \,|\, B \right) = \text{Det}\left(A^T B \right)$ no es un producto interno.

Solo se cumple el axioma de la simetría o conmutatividad, los tres axiomas restantes no se cumplen.

8. $\left(A \,|\, B \right) = ac - 2ad - 2bc + 4bd$ no es un producto interno. El axioma que no se cumple es la positividad. La matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ no satisface este axioma.

9. Se tienen dos respuestas:

$$\bar{w}_1 = (3,\ 4) \quad \text{y} \quad \bar{w}_2 = (-3,\ -4)$$

10. $\bar{u} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(0,\ 1,\ 1,\ 0)$ (La respuesta no es única)

11. **a)** $\| A \| = \sqrt{10}$

b) $d(A,\ B) = 4$

c) $\theta = 78.46°$

12. $\beta = \dfrac{3}{4}$

13. **a)** $\alpha \in \mathbb{R}$

$\beta = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{u} = \alpha \bar{w}_3$

$\gamma = 0$

b) $d(\bar{u},\ \bar{w}_3) = |1 - \alpha|$ con $\alpha \in \mathbb{R}$

14. $f_3(x) = 110x^2 - 112x + 19$ (La respuesta no es única)

15. **a)** $f(t)$ y $g(t)$ son ortogonales.

b) $\| g(t) \| = \sqrt{\pi}$

16. Se tienen dos respuestas:

$\bar{z}_1 = (1,\ 3i)$ y $\bar{z}_2 = (-2,\ -6i)$

17. Sí se demuestra.

18. **a)** $d(\bar{z},\ \bar{w}) = \sqrt{15}$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

b) $\theta = 90°$ Obsérvese que $\left(\bar{z} \mid \bar{w} \right) \neq 0$, por lo tanto, $\bar{z}$ y $\bar{w}$ no son ortogonales; sin embargo, el ángulo entre $\bar{z}$ y $\bar{w}$ es $90°$.

19. $k_1 = -2$, $k_2 = 2$ y $k_3 = 3$

20. a) $a = 4$

b) $\sqrt{19} \leq \sqrt{2} + \sqrt{17} \quad \Rightarrow \quad 4.36 < 5.54$

21. a) $a = \dfrac{1}{3}$

b) $a = \pm\, 4$

22. $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

23. a) $k_1 = 0$ y $k_2 = 3$

b) $k = 4$

24. a) $\theta = 120°$

b) El conjunto $\{ \bar{m}, \bar{n} \}$ es linealmente independiente.

25. $k = -1$

26. a) El ángulo entre $f(x)$ y $g(x)$ es $90°$ y $d(f, g) = \sqrt{19\pi}$.

b) El subespacio generado por el conjunto A es:

$$E(A) = \left\{ a + b \cos x \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

y una base ortogonal de $E(A)$ es:

$$B_{\text{ort.}} = \{ 1, \cos x \}$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

27.

$$B_{\text{ortonormal}}=\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}}\right),\left(-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}}\right),\left(0,\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}}\right)\right\}$$

28. $$B_{\text{ortonormal}}=\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix},\ \sqrt{5}\begin{bmatrix}\frac{2}{5} & 0\\ 0 & \frac{1}{5}\end{bmatrix}\right\}$$

29. a) $a=-1,\quad b=-2$ y $c=\frac{1}{3}$

Por lo que la base ortogonal es:

$$B_{\text{ort.}}=\left\{1,\ x-1,\ x^2-2x+\frac{1}{3}\right\}$$

b) $$B_{\text{ortonormal}}=\left\{\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}(x-1),\ \frac{1}{\sqrt{6}}\left(3x^2-6x+1\right)\right\}$$

30. $$B_{\text{ortonormal}}=\left\{1,\ \sqrt{3}\,(2t-1),\ \sqrt{5}\left(6t^2-6t+1\right)\right\}$$

31. $a=1,\quad b=-1$ y $c=2$

32. a) $\|\bar{v}\|=2$

b) El conjunto de vectores ortogonales al vector $\bar{u}=(1,\ 0)$ es:

$$\left\{(a,\ 2a)\,\middle|\, a\in\mathbb{R}\right\}$$

c) $$B_{\text{ortonormal}}=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,\ 0),\ \sqrt{2}\left(\frac{1}{2},\ 1\right)\right\}$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

33. $B_{\text{ortogonal}} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \right\}$

34. $B_{\text{ortonormal}} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}(1, i, 1), \frac{1}{2\sqrt{6}}(2i, 1-3i, 3-i) \right\}$

35. Se tienen dos posibles respuestas:

$(\bar{u})_B = (0, 1, \sqrt{3})$ y $(\bar{u})_B = (0, 1, -\sqrt{3})$

36. $(\bar{v} \mid \bar{e}_1) = 4$ y $(\bar{v} \mid \bar{e}_2) = -18$

37. $B_{\text{ortonormal}} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 0, -1), \sqrt{\frac{2}{3}}\left(-\frac{1}{2}, 1, 0, -\frac{1}{2}\right), \frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1, -\frac{1}{3}\right) \right\}$

38. $W^{\perp} = \{ bx \mid b \in \mathbb{R} \}$

39. $W^{\perp} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix} \middle| \, b \in \mathbb{R} \right\}$

40. **a)** $W^{\perp} = \{ (a, -2a, 5a) \mid a \in \mathbb{R} \}$

b) $\bar{u} = (4, -8, 20)$ (La respuesta no es única)

41. $q(x) = -x^2 + 3x - 1$

42. La proyección de la matriz H sobre W es:

$$E = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -7 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

43. **a)** $\bar{w} = (3, 3, 1)$

b) $d(\bar{w}, \bar{a}) = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

44. **a)** $W^{\perp} = \left\{ \begin{bmatrix} -y-w & y \\ y & w \end{bmatrix} \middle| \; y, w \in \mathbb{R} \right\}$

b) $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \in W$ y $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \in W^{\perp}$

$$\Rightarrow \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

c) La proyección del vector A sobre $W^{\perp}$ es el vector $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

45. **a)** $H^{\perp} = \{ (a, b, b) \mid a, b \in \mathbb{R} \}$

b) $\bar{w}_1 = \left(0, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right) \in H$ y $\bar{w}_2 = \left(-2, \frac{5}{2}, \frac{5}{2} \right) \in H^{\perp}$

$$\Rightarrow \quad \bar{v} = \left(0, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right) + \left(-2, \frac{5}{2}, \frac{5}{2} \right)$$

46. El punto del plano π más cercano al punto A es:

$$P\left(\frac{14}{5}, 1 - \frac{3}{5} \right)$$

47. $g(x) = -\frac{2}{5}x - \frac{2}{5}$

48. $\bar{u} = (2, 0, 2) \in W$ (La respuesta no es única)

$\bar{v} = (2, 4, -2) \in W^{\perp}$

49. **a)** $(V \cap W)^{\perp} = \{(x, y, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$

b) Como $\bar{u} \perp (V \cap W)$, entonces $\bar{u} \in (V \cap W)^{\perp}$, por lo tanto:

$\bar{u} = (0, 0, 0) + (1, 1, 1)$

50. **a)** Como resulta que $\bar{a} = \bar{v}$, esto implica que $\bar{v} \in W^{\perp}$, por lo tanto, el vector $\bar{b} \in W$ más cercano a $\bar{v}$ es: $\bar{b} = (0, 0, 0)$

b) $B_W = \{(1, -1, 1)\}$

51. $y = x + \frac{1}{2}$

52. $y = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2}$

53. **a)** $y = \frac{8}{5}x - \frac{11}{10}$

b) $y = \frac{8}{5}x - \frac{11}{10}$

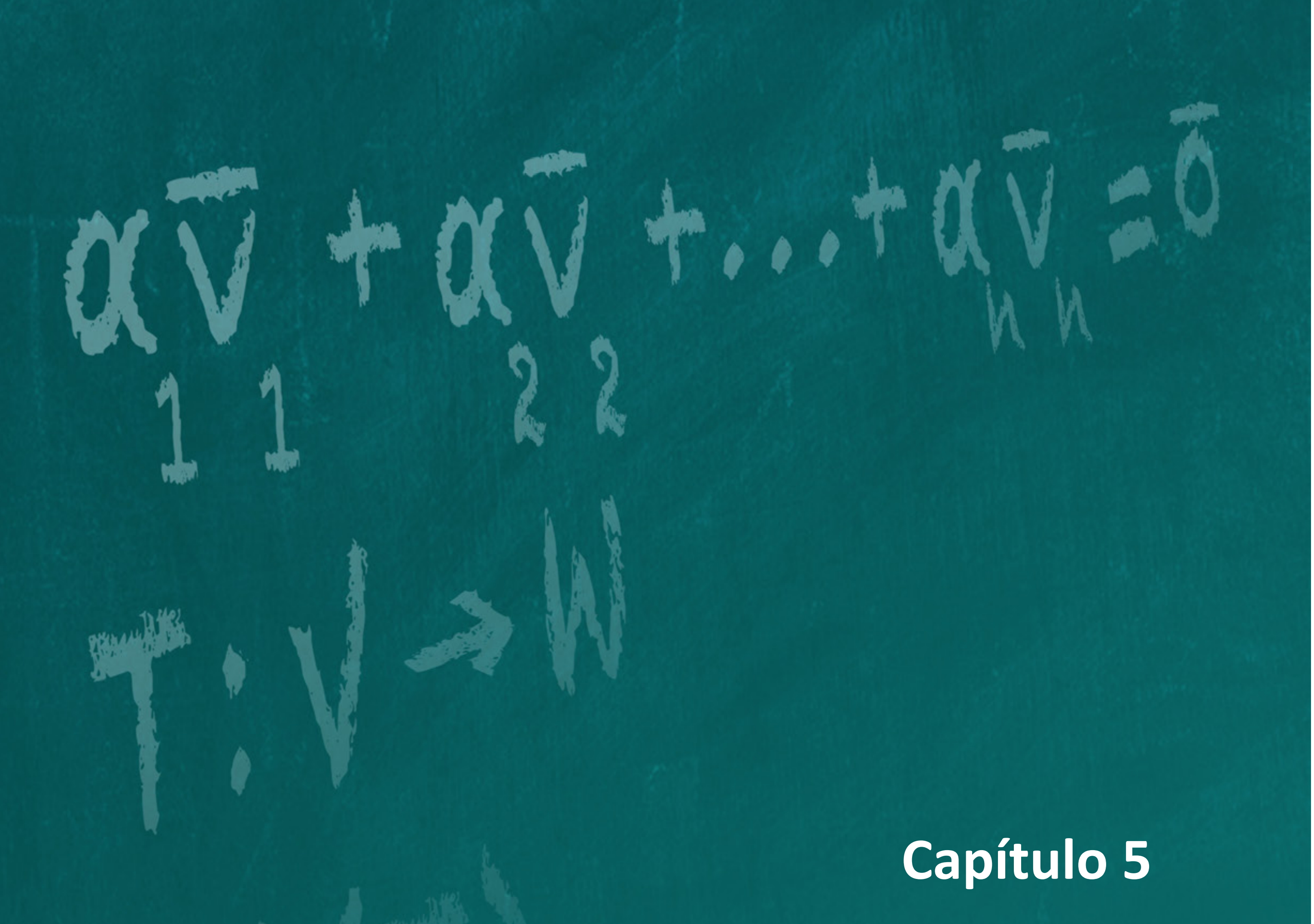
c) Como se busca un polinomio que pertenezca al conjunto de los polinomios de grado menor o igual a dos, el que mejor se ajusta es el polinomio obtenido, que resulta ser de primer grado e igual a la respuesta del inciso **a)**, esto es, no existe un polinomio de segundo grado que se ajuste mejor que la recta obtenida.

54. Los valores de x, y, z que resultan ser la mejor aproximación a la solución del sistema es:

$$x = 0 \ , \qquad y = \frac{2}{3} \ , \qquad z = -1$$

55. Los valores de a, b, c que resultan ser la mejor aproximación a la solución del sistema es:

$$a = \frac{1}{5} \ , \qquad b = -\frac{1}{5} \ , \qquad c = 0$$



Capítulo 5

OPERADORES LINEALES EN ESPACIOS CON PRODUCTO INTERNO

ÍNDICE
1
2
3
4
5

Adjunto de un operador

En un espacio vectorial V con producto interno, cada operador lineal T tiene un operador llamado su adjunto que también es lineal y representamos con T^*, cuya definición es:

Definición

Sea V un espacio con producto interno y sea $T: V \rightarrow V$ un operador lineal. Un operador $T^*: V \rightarrow V$ se dice que es el adjunto de T si se cumple que:

$$\left(T(\bar{u}) \,\middle|\, \bar{v} \right) = \left(\bar{u} \,\middle|\, T^*(\bar{v}) \right) \quad ; \quad \forall\, \bar{u}, \bar{v} \in V$$

Esta definición está basada en el producto interno, por lo que, el operador adjunto depende del producto interno considerado, es decir, el operador T tiene tantos adjuntos como productos internos se consideren, pero para cada producto interno el adjunto es único.

Propiedades del operador adjunto

Sea V un espacio vectorial sobre un campo K, con producto interno. Si S y T son operadores lineales en V y α es un escalar de K, entonces:

1. $\left(T^* \right)^* = T$

2. $\left(\alpha T \right)^* = \bar{\alpha}\, T^*$

3. $\left(S + T \right)^* = S^* + T^*$

4. $\left(T^* \right)^{-1} = \left(T^{-1} \right)^*$

5. $\left(S \circ T \right)^* = T^* \circ S^*$

Teorema

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno y sea B una base ortonormal de V. Si $T : V \to V$ es un operador lineal, entonces:

$$M_B^B\left(T^*\right) = \left[M_B^B(T)\right]^*$$

Donde el * del lado derecho de la igualdad representa la conjugada-transpuesta de la matriz.

Ejercicio 5.1 Obtenga el adjunto del operador lineal $T : P_1 \to P_1$, donde $P_1 = \left\{ ax + b \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$ y cuya regla de correspondencia es:

$$T(ax + b) = 2bx + (a - b)$$

con respecto al producto interno en P_1 definido por

$$\left((ax+b) \mid (mx+r) \right) = 2am + 2br \;\; ; \forall\ \bar{p} = ax+b, \;\; \bar{q} = mx+r \;\; \in P_1$$

SOLUCIÓN:

Como el espacio P_1 es de dimensión dos, entonces es isomorfo a $\mathbb{R}^2$, con lo cual si aplicamos dicho isomorfismo tenemos que la regla de correspondencia de T y el producto interno quedarían como:

$$T(a, b) = (2b, a-b) \qquad \ldots(1)$$

$$\left((a, b) \mid (m, r) \right) = 2am + 2br$$

Se sabe que el adjunto de T es un operador $T^*: P_1 \to P_1$ para el cual se debe cumplir que:

$$\left(T(\bar{p}) \mid \bar{q} \right) = \left(\bar{p} \mid T^*(\bar{q}) \right) \qquad \ldots(2)$$

Si suponemos que el adjunto de T es de la forma:

$$T^*(m,\ r) = (\alpha m + \beta r,\ \gamma m + \delta r) \qquad \dots(3)$$

y como:

$$\bar{p} = (a,\ b) \quad \text{y} \quad \bar{q} = (m,\ r)$$

entonces al sustituir en (2), tenemos:

$$\big(T(a,\ b) \big|\ (m,\ r)\big) = \big((a,\ b) \big|\ T^*(m,\ r)\big)$$

Aplicando las reglas de correspondencia de T y T^*, tenemos:

$$\big((2b,\ a-b) \big|\ (m,\ r)\big) = \big((a,\ b) \big|\ (\alpha m + \beta r,\ \gamma m + \delta r)\big)$$

desarrollando el producto interno en ambos lados:

$$4bm + 2ar - 2br = 2\alpha am + 2\beta ar + 2\gamma bm + 2\delta br$$

al agrupar tenemos:

$$(4b)\,m + (2a - 2b)\,r = (2\alpha a + 2\gamma b)\,m + (2\beta a + 2\delta b)\,r$$

por igualdad, se llega a:

$$\alpha = 0 \qquad \beta = 1$$

$$\gamma = 2 \qquad \delta = -1$$

con lo cual al sustituir estos valores en (3), tenemos que:

$$T^*(m,\ r) = (r,\ 2m - r)$$

Si se aplica el isomorfismo inverso, entonces el adjunto de T es:

$$T^*(mx + r) = rx + (2m - r)$$

Ejercicio 5.2 Sea el espacio vectorial $\mathbb{C}^2$ definido en el campo de los números complejos, en el cual se define el producto interno usual, y sea el operador lineal $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ con regla de correspondencia:

$$T(x, y) = \big(x + y,\ ix + (3 + 2i)\,y\big)$$

Obtenga el operador adjunto de T.

SOLUCIÓN:

Para resolver este ejercicio, haremos uso del teorema de las matrices asociadas a estos operadores que establece:

Si $T : V \to V$ es un operador lineal y B es una base ortonormal de V, entonces:

$$M_B^B\left(T^*\right) = \left[\ M_B^B(T)\ \right]^*$$

Dado que el campo de definición del espacio vectorial V es de los números complejos, entonces la dimensión de V es dos, por lo que una base ortonormal del espacio es:

$$B = \{(1, 0), (0, 1)\}$$

Dado que se trata de la base canónica, entonces la matriz asociada a T referida a dicha base sería:

$$\begin{aligned} \mathrm{T}(1, 0) &= (1, i) \\ \mathrm{T}(0, 1) &= (1, 3 + 2i) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad M_B^B(T) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & 3 + 2i \end{bmatrix}$$

Como $M_B^B\left(T^*\right) = \left[M_B^B(T)\right]^*$, entonces:

$$M_B^B\left(T^*\right) = \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 1 & 3 - 2i \end{bmatrix}$$

de donde la regla de correspondencia del operador adjunto de T viene dada por:

$$T^*(w,\ z) = \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 1 & 3-2i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w - iz \\ w + (3-2i)z \end{bmatrix}$$

$$\therefore \qquad T^*(w,\ z) = \left(w - iz,\ w + (3-2i)z\right)$$

Ejercicio 5.3 Sean el espacio vectorial real $P = \left\{ ax+b \;\middle|\; a,\ b \in \mathbb{R} \right\}$ con producto interno definido por:

$$\left(\overline{p} \;\middle|\; \overline{q} \right) = ac + bd \;\; ; \;\; \forall \;\; \overline{p}(x) = ax+b, \quad \overline{q}(x) = cx+d \in P$$

y el operador lineal $T : P \to P$ cuya regla de correspondencia es:

$$T\left(p(x)\right) = \frac{d\,\overline{p}(x)}{dx} \quad ; \quad \forall \;\; \overline{p}(x) \in P$$

Determine el operador adjunto de T.

SOLUCIÓN:

Este ejercicio lo resolveremos siguiendo los dos procedimientos utilizados en los ejercicios 5.1 y 5.2.

MÉTODO 1:

El espacio P es de dimensión dos, por lo tanto, isomorfo con $\mathbb{R}^2$, entonces, si aplicamos dicho isomorfismo, tenemos que:

Si $\quad \overline{p}(x) = ax + b$, entonces:

$$T(p) = \frac{d\,\overline{p}(x)}{dx} \quad \Rightarrow \quad T(ax+b) = a$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

Al aplicar el isomorfismo $f\left(ax+b\right)=\left(a,\ b\right)$, la regla de correspondencia de T y el producto interno quedarían como:

$$T\left(a,\ b\right)=\left(0,\ a\right)$$

$$\left(\left(a,\ b\right)\middle|\left(m,\ r\right)\right)=am+br$$

Si suponemos que el adjunto de T es de la forma:

$$T^{*}\left(m,\ r\right)=\left(\alpha m+\beta r\,,\ \gamma m+\delta r\right) \qquad \ldots(1)$$

Además, se sabe que el adjunto T es un operador $T^{*}: P \rightarrow P$, para el cual se debe cumplir que:

$$\left(T\left(\bar{p}\right)\middle|\ \bar{q}\right)=\left(\bar{p}\ \middle|\ T^{*}\left(\bar{q}\right)\right) \qquad \ldots(2)$$

donde:

$$\bar{p}=\left(a,\ b\right) \quad \text{y} \quad \bar{q}=\left(m,\ r\right)$$

sustituyendo en (2), tenemos:

$$\left(T\left(a,\ b\right)\middle|\left(m,\ r\right)\right)=\left(\left(a,\ b\right)\middle|\ T^{*}\left(m,\ r\right)\right)$$

Aplicando las reglas de correspondencia de T y T^{*}, tenemos:

$$\left(\left(0,\ a\right)\middle|\left(m,\ r\right)\right)=\left(\left(a,\ b\right)\middle|\left(\alpha m+\beta r\,,\ \ \gamma m+\delta r\right)\right)$$

desarrollando el producto interno:

$$ar=\alpha am+\beta ar+\gamma bm+\delta br$$

por igualdad se llega a:

$$\alpha=0 \qquad \gamma=0$$

$$\beta=1 \qquad \delta=0$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

Sustituyendo en (1), se tiene que:

$$T^*(m, r) = (r, 0)$$

Al aplicar el isomorfismo inverso, se llega a:

$$T^*(mx + r) = rx$$

MÉTODO 2:

Resolviendo el ejercicio mediante matrices asociadas, tenemos:

$$T(a, b) = (0, a)$$

Obteniendo $M(T)$ considerando la base ortonormal $B = \{(1, 0), (0, 1)\}$, tenemos:

$$\begin{array}{l} T(1, 0) = (0, 1) \\ T(0, 1) = (0, 0) \end{array} \quad \Rightarrow \quad M_B^B(T) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

como:

$$M_B^B(T^*) = \left[M_B^B(T)\right]^*$$

entonces:

$$M_B^B(T^*) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

de donde:

$$T^*(m, r) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix}$$

esto es:

$$T^*(m, r) = (r, 0)$$

Al aplicar el isomorfismo inverso, tenemos que el adjunto de T es:

$$T^*(mx + r) = rx$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

Operador normal

Sea V un espacio con producto interno y sea $T : V \to V$ un operador lineal. Se dice que T es un operador normal si se cumple que:

$$T \circ T^* = T^* \circ T$$

Debido a que para cada producto interno considerado el adjunto es diferente, un operador puede ser normal respecto a un producto interno y no serlo respecto a otro.

Propiedades de los operadores normales

Sea V un espacio con producto interno y sea $T : V \to V$ un operador normal.

1. $\| T(\bar{v}) \| = \| T^*(\bar{v}) \| \quad ; \quad \forall\, \bar{v} \in V$

2. Si $T(\bar{v}) = \lambda \bar{v}$, entonces $T^*(\bar{v}) = \lambda \bar{v}$

3. Si $\bar{v}_1$ y $\bar{v}_2$ son vectores característicos de T, correspondientes a valores característicos distintos, entonces los vectores $\bar{v}_1$ y $\bar{v}_2$ son ortogonales, es decir, $(\bar{v}_1 | \bar{v}_2) = 0$.

Teorema

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita definido en $\mathbb{C}$ con producto interno y sea $T : V \to V$ un operador normal. Existe una base ortonormal de V formada por vectores característicos de T, lo cual garantiza que todo operador normal es diagonalizable.

Ejercicio 5.4 Determine si el operador lineal $T:\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ con regla de correspondencia

$$T(x,\ y) = (2i\,x + y,\ \ -x - 2i\,y)$$

es un operador normal, considerando el producto interno usual en $\mathbb{C}^2$.

SOLUCIÓN:

Lo primero que tenemos que determinar es el operador adjunto de T. Para ello, consideremos a los vectores:

$$\bar{u} = (x,\ y) \quad \text{y} \quad \bar{v} = (w,\ z) \qquad \ldots(1)$$

y supongamos que:

$$T^*(w,\ z) = \left(\alpha_1 w + \alpha_2 z,\ \alpha_3 w + \alpha_4 z\right) \qquad \ldots(2)$$

con lo cual se debe cumplir:

$$\left(T(\bar{u}) \,\middle|\, \bar{v}\right) = \left(\bar{u} \,\middle|\, T^*(\bar{v})\right) \qquad \ldots(3)$$

sustituyendo (1) y (2) en (3), tenemos:

$$\left(T(x,\ y) \,\middle|\, (w,\ z)\right) = \left((x,\ y) \,\middle|\, T^*(w,\ z)\right)$$

de donde:

$$\left((2ix + y,\ -x - 2iy) \,\middle|\, (w,\ z)\right) = \left((x,\ y) \,\middle|\, (\alpha_1 w + \alpha_2 z,\ \alpha_3 w + \alpha_4 z)\right)$$

aplicando la regla de correspondencia del producto interno, se tiene:

$$2i\,x\,\bar{w} + y\,\bar{w} - x\,\bar{z} - 2i\,y\,\bar{z} = \bar{\alpha}_1\, x\bar{w} + \bar{\alpha}_2\, x\bar{z} + \bar{\alpha}_3\, y\bar{w} + \bar{\alpha}_4\, y\bar{z}$$

agrupando y factorizando, tenemos:

$$(2i\,\bar{w} - \bar{z})x + (\bar{w} - 2i\,\bar{z})y = \left(\bar{\alpha}_1\,\bar{w} + \bar{\alpha}_2\,\bar{z}\right)x + \left(\bar{\alpha}_3\,\bar{w} + \bar{\alpha}_4\,\bar{z}\right)y$$

por igualdad, se tiene que:

$$
\begin{array}{llll}
\text{si} & \bar{\alpha}_1 = 2i & \Rightarrow & \alpha_1 = -2i \\
\text{si} & \bar{\alpha}_2 = -1 & \Rightarrow & \alpha_2 = -1 \\
\text{si} & \bar{\alpha}_3 = 1 & \Rightarrow & \alpha_3 = 1 \\
\text{si} & \bar{\alpha}_4 = -2i & \Rightarrow & \alpha_4 = 2i
\end{array}
$$

Al sustituir los valores de α_i en la expresión (2), tenemos que el adjunto de T es: $T^*(w, z) = (-2iw - z,\ w + 2iz)$

Para determinar si T es un operador normal, debemos comprobar si se cumple que: $T \circ T^* = T^* \circ T$

esto es:

$$\left(T \circ T^*\right)(x, y) = \left(T^* \circ T\right)(x, y)$$

$$T\left[T^*(x, y)\right] = T^*\left[T(x, y)\right]$$

aplicando las reglas de correspondencia de T y T^* dentro de los corchetes, tenemos: $T(-2ix - y,\ x + 2iy) = T^*(2ix + y,\ -x - 2iy)$

aplicando de nuevo dichas reglas, se tiene:

$$\left[\,2i(-2ix - y) + (x + 2iy),\ -(-2ix - y) - 2i(x + 2iy)\,\right] =$$

$$\left[\,-2i(2ix + y) - (-x - 2iy),\ (2ix + y) + 2i(-x - 2iy)\,\right]$$

realizando operaciones:

$$(4x - 2iy + x + 2iy\ ,\ 2ix + y - 2ix + 4y) =$$

$$(4x - 2iy + x + 2iy\ ,\ 2ix + y - 2ix + 4y)$$

sumando términos semejantes, tenemos:

$$(5x\ ,\ 5y) = (5x\ ,\ 5y)$$

Como se cumple la igualdad, entonces se puede concluir que T es un operador normal.

Ejercicio 5.5 Sean el espacio vectorial real $M = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \middle| \; a , b \in \mathbb{R} \right\}$ con producto interno definido por:

$$\left(\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \right) = ac + bd \quad ; \quad \forall \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \in M$$

y el operador lineal $H : M \to M$ cuya regla de correspondencia es:

$$H \left(\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a+b & 0 \\ 0 & a-b \end{bmatrix} \quad ; \quad \forall \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \in M$$

a) Obtenga el operador adjunto de H.

b) Determine si H es un operador normal.

SOLUCIÓN:

a) Como el espacio vectorial M es de dimensión dos, entonces es isomorfo con $\mathbb{R}^2$. Si aplicamos el isomorfismo

$$f \left(\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \right) = (a , b)$$

a las reglas de correspondencia del operador H y del producto interno, tenemos:

$$H (a , b) = (a + b , a - b)$$

$$\big((a , b) \,|\, (c , d) \big) = ac + bd$$

Resolviendo el ejercicio mediante matrices asociadas, tenemos:

$B = \{ (1, 0), (0, 1) \}$ es una base ortonormal, por lo que:

ÍNDICE
1
2
3
4
5

$$\begin{matrix} H(1,\ 0) = (1,\ 1) \\ H(0,\ 1) = (1,\ -1) \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad M_B^B(H) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

de donde:

$$M_B^B(H^*) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

entonces:

$$H^*(m,\ r) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m+r \\ m-r \end{bmatrix}$$

con lo cual:

$$H^*(m,\ r) = (m+r,\ m-r)$$

Al aplicar el isomorfismo inverso, tenemos que el adjunto de H es:

$$H^*\left(\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} m+r & 0 \\ 0 & m-r \end{bmatrix}$$

Cabe hacer notar que, el operador adjunto H^* tiene la misma regla de correspondencia que el mismo operador H. A los operadores que tienen esa característica se les llama operadores hermitianos o, también, operadores simétricos cuando el campo de definición del espacio vectorial sobre el cual actúa el operador es real. Este tipo de operadores serán estudiados en el tema siguiente.

b) Para determinar si H es un operador normal, se debe cumplir que:

$$H \circ H^* = H^* \circ H$$

Como H y H^* tienen la misma regla de correspondencia, resulta evidente que esta igualdad se cumple, por lo tanto, podemos concluir que H sí es un operador normal.

Se deja al lector el verificar que $H \circ H^* = H^* \circ H$ aplicando las reglas de correspondencia.

Existen casos especiales o particulares de los operadores normales. A continuación, nos ocuparemos de definir algunos de ellos: Operadores hermitianos, antihermitianos, simétricos, antisimétricos, unitarios y ortogonales. Los nombres con que nos referimos a estos operadores lineales suelen cambiar cuando cambia el campo de definición del espacio vectorial sobre el cual actúa el operador. Estos campos, a los que nos referimos, son el campo complejo y el campo real. En cada una de las definiciones se hará la especificación correspondiente.

Operadores hermitianos, antihermitianos, simétricos y antisimétricos

Definición

Sea V un espacio vectorial definido en $\mathbb{C}$, en el cual se define un producto interno y sea $T : V \to V$ un operador lineal.

Si se cumple que:

$$\left(T\left(\bar{v}_1\right) \middle| \bar{v}_2 \right) = \left(\bar{v}_1 \middle| T\left(\bar{v}_2\right) \right) \quad ; \quad \forall\ \bar{v}_1 , \bar{v}_2 \in V$$

entonces se dice que T es un operador hermitiano.

Al operador T se le llama antihermitiano si se cumple que:

$$\left(T\left(\bar{v}_1\right) \middle| \bar{v}_2 \right) = -\left(\bar{v}_1 \middle| T\left(\bar{v}_2\right) \right) \quad ; \quad \forall\ \bar{v}_1 , \bar{v}_2 \in V$$

Si T es un operador hermitiano definido sobre el campo de los números reales, se le llama también operador simétrico.

Si T es un operador antihermitiano definido sobre el campo de los números reales, se le llama también operador antisimétrico.

Un operador T puede ser hermitiano con respecto a un producto interno y no serlo con respecto a otro; sin embargo, es suficiente con que sea hermitiano para algún producto interno para que se le llame de esta forma y cumpla con todas las propiedades de todo operador hermitiano.

Existe una forma alternativa para poder identificar a este tipo de operadores, a través de la característica que presenta el operador adjunto en relación con el operador original. Lo anterior se establece en la siguiente definición.

Definición

Sea V un espacio vectorial definido sobre $\mathbb{C}$ con producto interno y sea $T: V \to V$ un operador lineal. Se tiene que:

1) T es un operador hermitiano, si se cumple que $T^{*} = T$.

2) T es un operador antihermitiano, si se cumple que $T^{*} = -T$.

Si el espacio V está definido sobre $\mathbb{R}$, entonces a los operadores hermitianos también se les llama operadores simétricos y a los operadores antihermitianos también se les llama operadores antisimétricos.

Propiedades de los operadores hermitianos, simétricos, antihermitianos y antisimétricos

1) Si T es un operador hermitiano, entonces:

a) T es diagonalizable.

b) Sus valores característicos son números reales.

c) Los vectores característicos son ortogonales, siempre y cuando los valores característicos sean diferentes.

2) Si $T: V \to V$ es un operador hermitiano y B es una base ortonormal de V para algún producto interno definido en V, entonces $M_B^B(T)$ es una matriz hermitiana.

3) Si $M_B^B(T)$ es una matriz asociada a un operador hermitiano referida a una base B ortonormal, entonces:

a) La matriz diagonalizadora P es una matriz unitaria, si el campo de definición del espacio vectorial es complejo.

b) La matriz diagonalizadora P es una matriz ortogonal, si el campo de definición del espacio vectorial es real.

4) Si T es un operador antihermitiano, entonces sus valores característicos son imaginarios puros.

5) Si $T: V \to V$ es un operador antihermitiano y B es una base ortonormal de V, entonces $M_B^B(T)$ es una matriz antihermitiana.

Ejercicio 5.6 Sea el operador lineal $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, donde $\mathbb{C}^2$ está definido en el campo de los números complejos y cuya regla de correspondencia es:

$$T(a+bi,\ c+di) = \left(a-d+(b+c)i,\ b-ai\right) \ ;\ \forall\ a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{R}$$

Considerando al producto escalar ordinario en $\mathbb{C}^2$ como producto interno:

a) Determine si T es un operador hermitiano.

b) En caso de ser afirmativa la respuesta del inciso anterior, obtenga una matriz asociada a T referida a una base ortonormal de $\mathbb{C}^2$ y compruebe que dicha matriz es hermitiana.

c) Si T es un operador hermitiano, compruebe que sus valores característicos son reales.

d) ¿Los vectores característicos de T resultan ser ortogonales?

SOLUCIÓN:

a) Para determinar si T es un operador hermitiano, se debe cumplir que:

$$\left(T\left(\bar{v}_1\right) \middle| \bar{v}_2\right) = \left(\bar{v}_1 \middle| T\left(\bar{v}_2\right)\right) \ ;\ \forall\ \bar{v}_1,\ \bar{v}_2 \in \mathbb{C}^2$$

si consideramos los vectores:

$$\bar{v}_1 = (a+bi,\ c+di) \quad \text{y} \quad \bar{v}_2 = (x+yi,\ z+wi)$$

entonces

$$\left(T(a+bi,\ c+di) \middle| (x+yi,\ z+wi)\right) = \left((a+bi,\ c+di) \middle| T(x+yi,\ z+wi)\right)$$

desarrollando el lado izquierdo de la igualdad, tenemos:

$$\left(T(a+bi,\ c+di) \middle| (x+yi,\ z+wi)\right) = \left(\left(a-d+(b+c)i,\ b-ai\right) \middle| (x+yi,\ z+wi)\right)$$

$$= \left[(a-d)+(b+c)i\right](x-yi)+(b-ai)(z-wi)$$

$$= (ax-ayi-dx+dyi+bxi+by+cxi+cy)+(bz-bwi-azi-aw)$$

$$= (ax-dx+by+cy+bz-aw)+(-ay+dy+bx+cx-bw-az)i \qquad \ldots(1)$$

desarrollando el lado derecho se tiene:

$$\Big(\big(a+bi,\ c+di\big)\Big|\,T\big(x+yi,z+wi\big)\Big)=\Big(\big(a+bi,\ c+di\big)\Big|\big(x-w+(y+z)i,\ y-xi\big)\Big)$$

$$= (a+bi)\big[(x-w)-(y+z)i\big]+(c+di)(y+xi)$$

$$= (ax-aw-ayi-azi+bxi-bwi+by+bz)+(cy+cxi+dyi-dx)$$

$$= (ax-aw+by+bz+cy-dx)+(-ay-az+bx-bw+cx+dy)i \qquad \ldots(2)$$

Como las expresiones (1) y (2) son iguales, entonces el operador T es hermitiano.

b) Como el campo de definición del espacio $\mathbb{C}^2$ es complejo, entonces su dimensión es igual a dos y una base ortonormal de dicho espacio es:

$$B=\{(1,0),(0,1)\}$$

con lo cual, la matriz asociada al operador T será:

$$\begin{aligned} T(1,0)&=(1,-i)\\ T(0,1)&=(i,0)\end{aligned} \Rightarrow \quad M_B^B(T)=\begin{bmatrix}1 & i\\ -i & 0\end{bmatrix}=A$$

Comprobando que A es hermitiana, tenemos:

$$A^*=\begin{bmatrix}1 & i\\ -i & 0\end{bmatrix}$$

como $A=A^*$, entonces A es una matriz hermitiana.

c) Obteniendo los valores característicos de T, tenemos:

$$\det(A-\lambda\mathrm{I})=\begin{vmatrix}1-\lambda & i\\ -i & -\lambda\end{vmatrix}=-\lambda(1-\lambda)-1=\lambda^2-\lambda-1$$

Aplicando la fórmula para ecuaciones de segundo grado, se tiene:

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

por lo tanto, los valores característicos son:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$$

que resultaron ser números reales como se esperaba.

d) Dado que los valores característicos son diferentes, entonces, de acuerdo con la propiedad $1.c$, los vectores característicos son ortogonales.

Ejercicio 5.7 Sea el operador lineal $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definido por:

$$T(x, y) = (0, kx - 2y)$$

Determine el o los valores de $k \in \mathbb{R}$, de tal forma que T sea un operador simétrico con el siguiente producto interno:

$$\big((x_1, y_1) \,\big|\, (x_2, y_2) \big) = \frac{25}{144} x_1 x_2 + \frac{1}{9} (y_1 y_2 - x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

SOLUCIÓN:

Para que T sea un operador simétrico, se debe cumplir la igualdad:

$$\big(T(\bar{v}_1) \,\big|\, \bar{v}_2 \big) = \big(\bar{v}_1 \,\big|\, T(\bar{v}_2) \big) \quad ; \quad \forall \ \bar{v}_1, \bar{v}_2 \in \mathbb{R}^2$$

esto es:

$$\big(T(x_1, y_1) \,\big|\, (x_2, y_2) \big) = \big((x_1, y_1) \,\big|\, T(x_2, y_2) \big)$$

aplicando la regla de T , tenemos:

$$\left(\left(0,\ k x_1 - 2 y_1 \right) \middle| \left(x_2 ,\ y_2 \right) \right) = \left(\left(x_1 ,\ y_1 \right) \middle| \left(0,\ k x_2 - 2 y_2 \right) \right)$$

desarrollando el producto interno en ambos lados:

$$\frac{1}{9}\left[\left(k x_1 - 2 y_1 \right) y_2 - 0 - x_2 \left(k x_1 - 2 y_1 \right) \right] = \frac{1}{9}\left[y_1 \left(k x_2 - 2 y_2 \right) - x_1 \left(k x_2 - 2 y_2 \right) - 0 \right]$$

de donde se obtiene:

$$k x_1 y_2 - 2 y_1 y_2 - k x_1 x_2 + 2 x_2 y_1 = k x_2 y_1 - 2 y_1 y_2 - k x_1 x_2 + 2 x_1 y_2$$

simplificando términos semejantes, tenemos:

$$k x_1 y_2 + 2 x_2 y_1 = k x_2 y_1 + 2 x_1 y_2$$

de donde se puede concluir que con $k = 2$ se cumple la igualdad y, por lo tanto, con dicho valor, el operador T es simétrico.

Ejercicio 5.8 Sea la transformación lineal $T : P \to P$ definida por:

$$T\left(a x^2 + b x + c \right) = b x^2 + \left(2c - a \right) x - 2b \quad ; \ \forall \ a x^2 + b x + c \ \in P$$

donde:

$$P = \left\{ a x^2 + b x + c \ \middle| \ a ,\ b ,\ c \in \mathbb{R} \right\}$$

Determine si el operador T es antihermitiano con el producto interno:

$$\left(p(x) \middle| q(x) \right) = \frac{1}{4} p''(1)\, q''(1) + p'(0)\, q'(0) + p(0)\, q(0) \quad ; \ \forall \ p(x) ,\ q(x) \ \in P$$

SOLUCIÓN:

Este ejercicio lo resolvemos por dos caminos distintos. Aplicaremos las dos definiciones que nos permiten identificar a los operadores antihermitianos.

MÉTODO 1:

Sabemos que un operador es antihermitiano si se cumple que:

$$\left(T(\bar{p}) \middle| \bar{q}\right) = -\left(\bar{p} \middle| T(\bar{q})\right) \qquad \ldots(1)$$

Considerando:

$$\bar{p}(x) = a_1 x^2 + b_1 x + c_1$$

$$\bar{q}(x) = a_2 x^2 + b_2 x + c_2$$

se tiene que:

$$T(\bar{p}(x)) = T\left(a_1 x^2 + b_1 x + c_1\right) = b_1 x^2 + \left(2c_1 - a_1\right)x - 2b_1$$

$$T(\bar{q}(x)) = T\left(a_2 x^2 + b_2 x + c_2\right) = b_2 x^2 + \left(2c_2 - a_2\right)x - 2b_2$$

de donde:

$$\left(T(\bar{p}) \,|\, \bar{q}\right) = \left(b_1 x^2 + \left(2c_1 - a_1\right)x - 2b_1 \,\middle|\, a_2 x^2 + b_2 x + c_2\right)$$

Si:

$$\bar{p}_1(x) = b_1 x^2 + \left(2c_1 - a_1\right)x - 2b_1 \qquad \bar{q}(x) = a_2 x^2 + b_2 x + c_2$$

$$\bar{p}_1'(x) = 2b_1 x + \left(2c_1 - a_1\right) \qquad \bar{q}'(x) = 2a_2 x + b_2$$

$$\bar{p}_1''(x) = 2b_1 \qquad \bar{q}''(x) = 2a_2$$

Aplicando la regla de correspondencia del producto interno, tenemos:

$$\left(T(\bar{p}) \middle| \bar{q}\right) = \frac{1}{4}\left(2b_1\right)\left(2a_2\right) + \left(2c_1 - a_1\right)\left(b_2\right) + \left(-2b_1\right)\left(c_2\right)$$

$$\left(T(\bar{p}) \middle| \bar{q}\right) = a_2 b_1 + 2b_2 c_1 - a_1 b_2 - 2b_1 c_2 \qquad \ldots(2)$$

Por otro lado, se tiene que:

$$\left(\bar{p} \middle| T(\bar{q})\right) = \left(a_1 x^2 + b_1 x + c_1 \,\middle|\, b_2 x^2 + \left(2c_2 - a_2\right)x - 2b_2\right)$$

$$\left(\bar{p}\,\middle|\,T(\bar{q})\right) = \frac{1}{4}(2a_1)(2b_2)+(b_1)(2c_2-a_2)+(c_1)(-2b_2)$$

$$\left(\bar{p}\,\middle|\,T(\bar{q})\right) = a_1b_2+2b_1c_2-a_2b_1-2b_2c_1$$

con lo cual:

$$-\left(\bar{p}\,\middle|\,T(\bar{q})\right) = -a_1b_2-2b_1c_2+a_2b_1+2b_2c_1 \qquad \ldots(3)$$

Sustituyendo (2) y (3) en (1), tenemos:

$$a_2b_1+2b_2c_1-a_1b_2-2b_1c_2 = -a_1b_2-2b_1c_2+a_2b_1+2b_2c_1$$

Como la igualdad se cumple, entonces podemos concluir que el operador T es antihermitiano.

MÉTODO 2:

En este método, obtendremos el adjunto de T y si se cumple la igualdad $T^* = -T$, entonces concluiremos que T es un operador antihermitiano.

Se sabe que:

$$\left(T(\bar{p})\,\middle|\,\bar{q}\right) = \left(\bar{p}\,\middle|\,T^*(\bar{q})\right) \qquad \ldots(1)$$

Si $\bar{p}(x) = a_1x^2+b_1x+c_1$ y $\bar{q}(x) = a_2x^2+b_2x+c_2$

y suponemos que:

$$T^*(\bar{q}) = T^*\left(a_2x^2+b_2x+c_2\right) = \alpha_1a_2x^2+\alpha_2b_2x+\alpha_3c_2$$

entonces:

$$\left(T(\bar{p})\,\middle|\,\bar{q}\right) = \left(T\left(a_1x^2+b_1x+c_1\right)\,\middle|\,a_2x^2+b_2x+c_2\right)$$

$$\left(T(\bar{p})\,\middle|\,\bar{q}\right) = \left(b_1x^2+\left(2c_1-a_1\right)x-2b_1\,\middle|\,a_2x^2+b_2x+c_2\right)$$

Si

$$\bar{p}_1(x) = b_1 x^2 + (2c_1 - a_1)x - 2b_1 \qquad q(x) = a_2 x^2 + b_2 x + c_2$$

$$\bar{p}_1'(x) = 2b_1 x + (2c_1 - a_1) \qquad q'(x) = 2a_2 x + b_2$$

$$\bar{p}_1''(x) = 2b_1 \qquad q''(x) = 2a_2$$

Aplicando la regla de correspondencia del producto interno, tenemos:

$$\left(T(\bar{p}) \,\middle|\, \bar{q} \right) = \frac{1}{4}(2b_1)(2a_2) + (2c_1 - a_1)(b_2) + (-2b_1)(c_2)$$

$$\left(T(\bar{p}) \,\middle|\, \bar{q} \right) = a_2 b_1 + 2b_2 c_1 - a_1 b_2 - 2b_1 c_2 \qquad \ldots (2)$$

Por otro lado, tenemos:

$$\left(\bar{p} \,\middle|\, T^*(\bar{q}) \right) = \left(a_1 x^2 + b_1 x + c_1 \,\middle|\, \alpha_1 a_2 x^2 + \alpha_2 b_2 x + \alpha_3 c_2 \right)$$

Aplicando la regla de correspondencia del producto interno, tenemos:

$$\left(\bar{p} \,\middle|\, T^*(\bar{q}) \right) = \frac{1}{4}(2a_1)(2\alpha_1 a_2) + (b_1)(\alpha_2 b_2) + (c_1)(\alpha_3 c_2)$$

$$\left(\bar{p} \,\middle|\, T^*(\bar{q}) \right) = \alpha_1 a_1 a_2 + \alpha_2 b_1 b_2 + \alpha_3 c_1 c_2 \qquad \ldots (3)$$

sustituyendo (2) y (3) en (1), tenemos:

$$a_2 b_1 + 2b_2 c_1 - a_1 b_2 - 2b_1 c_2 = \alpha_1 a_1 a_2 + \alpha_2 b_1 b_2 + \alpha_3 c_1 c_2$$

factorizando y reordenando términos:

$$-a_1 b_2 + (a_2 - 2c_2) b_1 + 2b_2 c_1 = \alpha_1 a_1 a_2 + \alpha_2 b_1 b_2 + \alpha_3 c_1 c_2$$

Por igualdad, se tiene:

$$-a_1 b_2 = \alpha_1 a_1 a_2 \Rightarrow \alpha_1 = \frac{-a_1 b_2}{a_1 a_2} \qquad \therefore \qquad \alpha_1 = -\frac{b_2}{a_2}$$

$$\left(a_2 - 2c_2\right)b_1 = \alpha_2 b_1 b_2 \Rightarrow \alpha_2 = \frac{\left(a_2 - 2c_2\right)b_1}{b_1 b_2} \quad \therefore \quad \alpha_2 = \frac{a_2 - 2c_2}{b_2}$$

$$2b_2 c_1 = \alpha_3 c_1 c_2 \Rightarrow \alpha_3 = \frac{2b_2 c_1}{c_1 c_2} \qquad \therefore \qquad \alpha_3 = \frac{2b_2}{c_2}$$

Sustituyendo en la expresión del adjunto, tenemos:

$$T^*\left(a_2 x^2 + b_2 x + c_2\right) = \left(-\frac{b_2}{a_2}\right)a_2 x^2 + \left(\frac{a_2 - 2c_2}{b_2}\right)b_2 x + \left(\frac{2b_2}{c_2}\right)c_2$$

por lo tanto, el adjunto de T es:

$$T^*\left(a_2 x^2 + b_2 x + c_2\right) = -b_2 x^2 + \left(a_2 - 2c_2\right)x + 2b_2$$

Veamos ahora si se cumple la igualdad:

$$T^* = -T$$

sustituyendo:

$$-b_2 x^2 + \left(a_2 - 2c_2\right)x + 2b_2 = -\left(bx^2 + \left(2c - a\right)x - 2b\right)$$

$$-b_2 x^2 + \left(a_2 - 2c_2\right)x + 2b_2 = -bx^2 + \left(a - 2c\right)x + 2b$$

Si eliminamos el subíndice 2 de la expresión del lado izquierdo de la igualdad, el cual fue colocado únicamente para identificar al polinomio $q\left(x\right)$, entonces podemos afirmar que la igualdad sí se cumple y, por lo tanto, el operador T es antihermitiano.

Operadores ortogonales y unitarios

Definición

Sea V un espacio vectorial definido en $\mathbb{C}$, en el cual se define un producto interno y sea $T : V \rightarrow V$ un operador lineal.

Si se cumple que:

$$\left(T\left(\bar{v}_1\right) \middle| T\left(\bar{v}_2\right) \right) = \left(\bar{v}_1 \middle| \bar{v}_2 \right) \quad ; \ \forall\, \bar{v}_1 \,,\ \bar{v}_2 \in V$$

entonces se dice que T es un operador unitario.

Si T es un operador unitario definido sobre el campo de los números reales, se le llama también operador ortogonal.

En forma alternativa, podemos identificar a este tipo de operadores a través de la siguiente definición:

Definición

Sea V un espacio vectorial definido sobre $\mathbb{C}$ con producto interno y sea $T : V \rightarrow V$ un operador lineal. Se tiene que:

T es un operador unitario, si se cumple que $T^* = T^{-1}$.

Si el espacio V está definido sobre $\mathbb{R}$, entonces a los operadores unitarios también se les llama operadores ortogonales.

Propiedades de los operadores unitarios y ortogonales

Cabe resaltar el hecho de que todo operador ortogonal es también un operador unitario, por lo que las propiedades que a continuación se enuncian se cumplen para ambos operadores.

1) Si T es un operador unitario, entonces T conserva las normas, esto es:

$$\| T(\bar{v}) \| = \| \bar{v} \| \quad ; \quad \forall \ \bar{v} \in V$$

2) Los valores característicos de un operador unitario tienen módulo uno, esto es:

$$| \lambda | = 1$$

3) La matriz asociada a un operador unitario referida a una base ortonormal es una matriz unitaria y tiene las siguientes propiedades:

a) La suma de los productos de los elementos de cualquier fila (renglón o columna) por los conjugados de los correspondientes elementos de cualquier otra fila paralela es igual a cero, es decir, si las filas se consideran como vectores, entonces estos resultan ser ortogonales.

b) La suma de los cuadrados de los módulos de los elementos de cualquier fila es igual a uno, esto es, si las filas se consideran como vectores, entonces estos son vectores unitarios.

Ejercicio 5.9 En el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ con el producto escalar ordinario, se tiene el operador ortogonal $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, en donde:

$$T(1, 0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

Calcule $T(0, 1)$.

SOLUCIÓN:

Se sabe que un operador ortogonal cumple la condición:

$$\left(T\left(\overline{v}_1 \right) \middle| T\left(\overline{v}_2 \right) \right) = \left(\overline{v}_1 \middle| \overline{v}_2 \right)$$

de donde, se tiene:

$$\left(T(1, 0) \middle| T(0, 1) \right) = \left((1, 0) \middle| (0, 1) \right)$$

$$\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \middle| (a, b) \right) = 0$$

desarrollando el producto interno:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} a - \frac{1}{\sqrt{2}} b = 0$$

$$a - b = 0 \qquad \ldots (1)$$

Por otro lado, como se trata de un operador ortogonal, entonces preserva la norma, esto es:

$$\left\| T(0, 1) \right\| = \left\| (0, 1) \right\|$$

$$\left\| (a, b) \right\| = 1$$

$$\sqrt{a^2 + b^2} = 1$$

$$a^2 + b^2 = 1 \qquad \ldots (2)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones que se forma con (1) y (2), tenemos:

$$\begin{cases} a - b = 0 & \Rightarrow \quad a = b \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases}$$

de (2), se tiene:

$$a^2 + a^2 = 1$$

$$2a^2 = 1$$

$$a^2 = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad a = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad b = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Dado que los vectores para los cuales se obtiene su imagen bajo T, esto es, $T(1,0)$ y $T(0,1)$ constituyen una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$, entonces la matriz $M(T)$ referida a dicha base tiene que ser ortogonal, es decir, debe cumplir que:

$$MM^T = M^TM = \mathrm{I}$$

entonces, las únicas imágenes correctas del vector $(0,\ 1)$ son:

$$T_1(0,1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$T_2(0,1) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

Es importante aclarar que, el hecho de tener dos posibles imágenes para el vector $(0,1)$, en realidad esto implica que existen dos operadores ortogonales T_1 y T_2 con los cuales se satisfacen las condiciones del problema y con cada uno de estos operadores se obtiene la imagen correspondiente del vector $(0,1)$. Las matrices asociadas a estos operadores, referidas a la base canónica son:

$$M(T_1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad M(T_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Lo cual implica, obviamente, dos operadores ortogonales T_1 y T_2 con sus respectivas reglas de correspondencia.

Ejercicio 5.10 Determine si el operador lineal $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ cuya regla de correspondencia es:

$$T(x, y, z) = \left(\frac{2x - 2y + z}{3}, \frac{2x + y - 2z}{3}, \frac{x + 2y + 2z}{3} \right)$$

es un operador ortogonal, considerando como producto interno el producto escalar ordinario en $\mathbb{R}^3$.

SOLUCIÓN:

Para resolver este ejercicio se pueden seguir dos métodos: El primero de ellos sería verificar si el operador T satisface la condición

$$\left(T(\bar{v}_1) \,\middle|\, T(\bar{v}_2) \right) = \left(\bar{v}_1 \,\middle|\, \bar{v}_2 \right)$$

si es así, entonces T es un operador ortogonal.

El otro método sería verificando la condición relativa a la matriz asociada a dicho operador. Si T es un operador ortogonal, entonces la matriz asociada a T referida a una base ortonormal deber ser una matriz ortogonal.

De estos dos métodos de solución, el primero resulta ser muy laborioso dadas las características de la regla de correspondencia de T, por lo cual se optará por el segundo método descrito.

Si consideramos como base de $\mathbb{R}^3$ a la base canónica, esta resulta ser una base ortonormal con el producto interno considerado.

Obteniendo la matriz asociada a T, tenemos:

$$T(1, 0, 0) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right)$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

$$T(0,1,0) = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right)$$

$$T(0,0,1) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right)$$

$$\therefore \quad M(T) = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} = A$$

Comprobando si la matriz A es ortogonal, se tiene que:

$$A A^T = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathrm{I}$$

Como $A A^T = \mathrm{I}$, entonces A es una matriz ortogonal y, por lo tanto, podemos afirmar que T es un operador ortogonal.

Ejercicio 5.11 Sea el espacio vectorial $\mathbb{C}^2$ definido sobre $\mathbb{C}$ y el operador lineal $T : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ cuya regla de correspondencia es:

$$T(x, y) = \left(\frac{1+i}{\sqrt{3}} x + \frac{i}{\sqrt{3}} y , \frac{1}{\sqrt{3}} x + \alpha y \right) \quad ; \forall (x, y) \in \mathbb{C}^2$$

Determine el valor de $\alpha \in \mathbb{C}$ para el cual T sea un operador unitario. Considere como producto interno al producto escalar ordinario en $\mathbb{C}^2$.

SOLUCIÓN:

Para que T sea un operador unitario, se debe cumplir que:

$$\left(T\left(\bar{v}_1\right) \middle| T\left(\bar{v}_2\right)\right) = \left(\bar{v}_1 \middle| \bar{v}_2\right) \quad ; \quad \forall\ \bar{v}_1, v_2 \in \mathbb{C}^2$$

si consideramos $\bar{v}_1 = \left(x_1, y_1\right)$ y $\bar{v}_2 = \left(x_2, y_2\right)$, entonces:

$$\left(T\left(x_1, y_1\right) \middle| T\left(x_2, y_2\right)\right) = \left(\left(x_1, y_1\right) \middle| \left(x_2, y_2\right)\right)$$

aplicando T, tenemos:

$$\left(\left(\frac{1+i}{\sqrt{3}} x_1 + \frac{i}{\sqrt{3}} y_1, \frac{1}{\sqrt{3}} x_1 + \alpha y_1 \right) \middle| \left(\frac{1+i}{\sqrt{3}} x_2 + \frac{i}{\sqrt{3}} y_2, \frac{1}{\sqrt{3}} x_2 + \alpha y_2 \right) \right) = x_1 \bar{x}_2 + y_1 \bar{y}_2$$

desarrollando el producto interno del lado izquierdo, se tiene:

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{3}} x_1 + \frac{i}{\sqrt{3}} y_1 \right) \overline{\left(\frac{1+i}{\sqrt{3}} x_2 + \frac{i}{\sqrt{3}} y_2 \right)} + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} x_1 + \alpha y_1 \right) \overline{\left(\frac{1}{\sqrt{3}} x_2 + \alpha y_2 \right)} = x_1 \bar{x}_2 + y_1 \bar{y}_2$$

conjugando y factorizando $\frac{1}{\sqrt{3}}$, tenemos:

$$\frac{1}{3}\left[\left((1+i) x_1 + i y_1 \right) \left((1-i) \bar{x}_2 - i \bar{y}_2 \right) + \left(x_1 + \sqrt{3}\, \alpha y_1 \right) \left(\bar{x}_2 + \sqrt{3}\, \bar{\alpha} \bar{y}_2 \right) \right] = x_1 \bar{x}_2 + y_1 \bar{y}_2$$

multiplicando por 3 en ambos lados y desarrollando los productos, tenemos:

$$2x_1 \bar{x}_2 - i x_1 \bar{y}_2 + x_1 \bar{y}_2 + i \bar{x}_2 y_1 + \bar{x}_2 y_1 + y_1 \bar{y}_2 + x_1 \bar{x}_2 + \sqrt{3}\, \bar{\alpha} x_1 \bar{y}_2 + \sqrt{3}\, \alpha \bar{x}_2 y_1 + 3\, \alpha \bar{\alpha} y_1 \bar{y}_2$$

$$= 3x_1 \bar{x}_2 + 3 y_1 \bar{y}_2$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

simplificando y agrupando:

$$3x_1\,\bar{x}_2+\left(1-i+\sqrt{3}\;\bar{\alpha}\right)x_1\;\bar{y}_2+\left(1+i+\sqrt{3}\,\alpha\right)\,\bar{x}_2\;y_1+\left(1+3\,\alpha\,\bar{\alpha}\right)y_1\;\bar{y}_2=3\;x_1\;\bar{x}_2+3\,y_1\bar{y}_2$$

Por igualdad, se tiene:

$$\begin{cases} 1-i+\sqrt{3}\;\bar{\alpha} = 0 & \ldots(1) \\ 1+i+\sqrt{3}\;\alpha = 0 & \ldots(2) \\ 1+3\;\alpha\;\bar{\alpha} = 3 & \ldots(3) \end{cases}$$

de (2), tenemos que:

$$\alpha = -\frac{1+i}{\sqrt{3}}$$

verificando si el valor de α satisface a las ecuaciones (1) y (3), se tiene:

sustituyendo en (1):

$$1-i+\sqrt{3}\;\overline{\left(-\frac{1+i}{\sqrt{3}}\right)} = 0$$

$$1-i+\left(-1+i\right) = 0$$

$$0 = 0 \qquad \therefore \text{ satisface}$$

sustituyendo en (3) :

$$1+3\left(-\frac{1+i}{\sqrt{3}}\right)\overline{\left(-\frac{1+i}{\sqrt{3}}\right)} = 3$$

$$1+\left(-1-i\right)\left(-1+i\right) = 3$$

$$1+2 = 3$$

$$3 = 3 \qquad \therefore \text{ satisface}$$

Por lo que si $\alpha = -\dfrac{1+i}{\sqrt{3}}$, entonces el operador T es unitario.

ÍNDICE
1
2
3
4
5

Teorema espectral

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ de dimensión finita y con producto interno, y sea $T : V \to V$ un operador normal:

Si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ son los diferentes valores característicos de T, $E(\lambda_i)$ es el espacio característico correspondiente a λ_i y P_i es el operador de proyección ortogonal sobre $E(\lambda_i)$, entonces:

a) $T = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \ldots + \lambda_k P_k$

b) $P_1 + P_2 + \ldots + P_k = \mathrm{I}$

c) $P_i \circ P_j = 0$, para toda $i \neq j$

Si el espacio vectorial V está definido sobre un campo real, entonces el teorema espectral también se cumple para un operador T simétrico.

Ejercicio 5.12 Para el operador simétrico $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ cuya regla de correspondencia es:

$$T(x, y) = (-x + 2y,\ 2x + 2y)$$

a) Obtenga la descomposición espectral del operador T.

b) Verifique que se cumple la condición $P_1 + P_2 = \mathrm{I}$

c) Compruebe que $P_1 \circ P_2 = 0$.

SOLUCIÓN:

a) Obteniendo los valores, vectores y espacios característicos, tenemos:

$$\begin{aligned} T(1, 0) &= (-1, 2) \\ T(0, 1) &= (2, 2) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad M(T) = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = A$$

de donde:

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}-1-\lambda & 2\\ 2 & 2-\lambda\end{vmatrix}=(-1-\lambda)(2-\lambda)-4$$

$$=\lambda^2-\lambda-2-4$$

entonces:

$$P(\lambda)=\lambda^2-\lambda-6$$

$$P(\lambda)=(\lambda-3)(\lambda+2)$$

con lo cual los valores característicos son:

$$\lambda_1=3$$

$$\lambda_2=-2$$

Obteniendo los vectores característicos, se tiene:

Para $\lambda_1=3$:

$$\begin{bmatrix}-4 & 2\\ 2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

de donde surge el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases}-4x+2y=0\\ 2x-y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x-y=0\\ 0=0\end{cases}\Rightarrow y=2x$$

si $x=k_1 \Rightarrow y=2k_1$

con lo cual los vectores característicos asociados a $\lambda_1=3$ son:

$$\bar{v}_1=(k_1,\ 2k_1)\quad \text{con}\quad k_1\neq 0$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

Para $\lambda_2 = -2$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y & = 0 \\ 2x + 4y & = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y & = 0 \\ 0 & = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -2y$$

si $y = k_2 \quad \Rightarrow \quad x = -2k_2$

con lo cual los vectores característicos asociados a $\lambda_2 = -2$ son:

$$\bar{v}_2 = \left(-2k_2 ,\ k_2 \right) \text{ con } k_2 \neq 0$$

Por lo que, los correspondientes espacios característicos son:

$$E\left(\lambda_1\right) = \left\{ \left(k_1 ,\ 2k_1 \right) \middle|\ k_1 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$E\left(\lambda_2\right) = \left\{ \left(-2k_2 ,\ k_2 \right) \middle|\ k_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

Obsérvese que los vectores característicos con el producto escalar ordinario en $\mathbb{R}^2$ como producto interno, resultan ser ortogonales y, por lo tanto, los espacios característicos son uno complemento ortogonal del otro, por lo que cualquier vector $\left(x,\ y \right) \in \mathbb{R}^2$ puede ser expresado en forma única como la suma de dos vectores que, en este caso, serían uno de cada espacio característico.

Los operadores P_1 y P_2 que proyectan cualquier vector de $\mathbb{R}^2$ sobre los espacios característicos son:

$$\left.\begin{aligned} P_1\left(a,\ b \right) &= \left(a,\ 2a \right) \in E\left(\lambda_1\right) \\ P_2\left(a,\ b \right) &= \left(-2b,\ b \right) \in E\left(\lambda_2\right) \end{aligned}\right\} \qquad \ldots (\mathrm{I})$$

Al expresar un vector cualquiera $\left(x,\ y \right) \in \mathbb{R}^2$ como la suma de vectores pertenecientes a los espacios característicos, tenemos:

$$\left(x,\ y \right) = \left(a,\ 2a \right) + \left(-2b,\ b \right) \qquad \ldots (1)$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

de donde surge el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x = a - 2b & \dots (2) \\ y = 2a + b & \dots (3) \end{cases}$$

de (2), se tiene:

$$a = x + 2b \qquad \dots (4)$$

sustituyendo (4) en (3):

$$y = 2(x + 2b) + b$$

$$y = 2x + 5b$$

$$b = \frac{-2x + y}{5} \qquad \dots (5)$$

sustituyendo (5) en (4):

$$a = x + 2\left(\frac{-2x + y}{5}\right)$$

$$a = \frac{x + 2y}{5} \qquad \dots (6)$$

De acuerdo con las reglas de correspondencia que tienen los operadores proyección que se muestran en (I) y los valores obtenidos de a y b, se tiene que:

$$P_1(x, y) = \left(\frac{x + 2y}{5}, \frac{2x + 4y}{5}\right)$$

$$P_2(x, y) = \left(\frac{4x - 2y}{5}, \frac{-2x + y}{5}\right)$$

Como la descomposición espectral del operador T es de la forma:

$$T = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

entonces la descomposición espectral de T es:

$$T\,(\,x,\;y\,)\;=\;3\left(\frac{x\,+\,2y}{5}\,,\;\frac{2x\,+\,4y}{5}\right)\;-\;2\left(\frac{4x\,-\,2y}{5}\,,\;\frac{-2x\,+\,y}{5}\right)$$

realizando las operaciones indicadas para comprobar que dicha descomposición es correcta, tenemos:

$$T\,(\,x,\;y\,)\;=\;\left(\frac{3x+6y}{5}\,,\;\frac{6x\,+\,12y}{5}\right)\;+\;\left(\frac{-8x\,+\,4y}{5}\;+\;\frac{4x-2y}{5}\right)$$

sumando se llega a:

$$T\,(\,x,\;y\,)\;=\;(\,-x\,+\,2y\,,\;\;2x\,+\,2y\,)$$

Como se llega a la misma regla de correspondencia dada en el enunciado del ejercicio, entonces podemos concluir que la descomposición espectral de T a la que se llegó, es correcta.

b) Se debe verificar que la suma de los operadores proyección es igual al operador identidad, esto es:

$$P_1\;+\;P_2\;=\;\mathrm{I}$$

Esto se puede expresar como:

$$\mathrm{I}\,(\,x,\,y\,)\;=\;\left(P_1+P_2\right)\,(\,x,\,y\,)$$

$$\mathrm{I}\,(\,x,\,y\,)\;=\;P_1(\,x,\,y\,)+P_2(\,x,\,y\,)$$

sustituyendo P_1 y P_2 tenemos:

$$\mathrm{I}\,(\,x,\;y\,)\;=\;\left(\frac{x\,+\,2y}{5}\,,\;\frac{2x\,+\,4y}{5}\right)\;+\;\left(\frac{4x\;-\;2y}{5}\,,\;\frac{-2x\,+\,y}{5}\right)$$

al sumar, se obtiene:

$$\mathrm{I}\,(\,x,\;y\,)\;=\;(\,x,\;y\,)\qquad\therefore\;\;\text{cumple}$$

c) Se debe cumplir que:

$$P_1 \circ P_2 = 0$$

Cabe hacer notar que el "0" de la expresión $P_1 \circ P_2 = 0$, en realidad nos representa al operador nulo, esto es:

$$0(x, y) = (0, 0) \; ; \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

De acuerdo con esto, entonces se tiene que:

$$\left(P_1 \circ P_2 \right)(a, b) = 0(a, b) \text{ donde } (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

Aplicando la definición de la operación composición del lado izquierdo de la igualdad y el operador nulo del lado derecho, tenemos:

$$P_1 \left[P_2 (a, b) \right] = (0, 0)$$

Ahora, aplicando la regla de correspondencia del operador P_2, se tiene que:

$$P_1 \left(\frac{4a - 2b}{5}, \frac{-2a + b}{5} \right) = (0, 0)$$

y aplicando la regla de P_1, tenemos:

$$\left[\frac{\frac{4a - 2b}{5} + 2\left(\frac{-2a + b}{5} \right)}{5}, \frac{2\left(\frac{4a - 2b}{5} \right) + 4\left(\frac{-2a + b}{5} \right)}{5} \right] = (0, 0)$$

realizando operaciones, se tiene:

$$\left(\frac{\frac{4a - 2b}{5} + \frac{-4a + 2b}{5}}{5}, \frac{\frac{8a - 4b}{5} + \frac{-8a + 4b}{5}}{5} \right) = (0, 0)$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

sumando:

$$\left(\frac{0}{5} \, , \quad \frac{0}{5} \right) = (0 , \ 0)$$

$$(0 , \ 0) = (0 , \ 0)$$

Con lo cual se comprueba que la composición de los operadores proyección nos da el operador nulo.

Ejercicio 5.13 Sea el espacio vectorial real $P = \left\{ a x^2 + b x + c \mid a , \ b , \ c \in \mathbb{R} \right\}$

y sea el operador hermitiano $T : P \to P$ cuya regla de correspondencia es:

$$T = \left(a x^2 + b x + c \right) = (2a + b) \, x^2 + (a + 2b) \, x + 4c \quad ; \quad \forall \, a x^2 + b x + c \ \in P$$

y con producto interno:

$$\left(p \mid q \right) = \left(a_1 x^2 + b_1 x + c_1 \,\middle|\, a_2 x^2 + b_2 x + c_2 \right) = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 \quad ; \ \forall \ p , q \in P$$

a) Obtenga la descomposición espectral del operador T.

b) Verifique que se cumple la condición $P_1 + P_2 + P_3 = \mathrm{I}$.

c) Compruebe que $P_i \circ P_j = 0 \ ; \ \forall \ i \neq j$

SOLUCIÓN:

a) Aplicando el isomorfismo:

$$f \left(a x^2 + b x + c \right) = (a , \ b , \ c)$$

las reglas de correspondencia de T y del producto interno quedan como:

$$T (a , \ b , \ c) = (2a + b , \ a + 2b , \ 4c)$$

$$\left((a_1 , \ b_1 , \ c_1) \,\middle|\, (a_2 , \ b_2 , \ c_2) \right) = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2$$

ÍNDICE 1 2 3 4 5

Obteniendo los valores, vectores y espacios característicos, tenemos:

$$\begin{aligned} T(1,0,0) &= (2,1,0) \\ T(0,1,0) &= (1,2,0) \quad \Rightarrow \quad M(T) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = A \\ T(0,0,1) &= (0,0,4) \end{aligned}$$

de donde:

$$\det(A - \lambda \mathrm{I}) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(2-\lambda)(4-\lambda) - (4-\lambda)$$

$$P(\lambda) = (4-\lambda)\left[(2-\lambda)^2 - 1\right] = (4-\lambda)\left(\lambda^2 - 4\lambda + 3\right)$$

$$P(\lambda) = (4-\lambda)(\lambda-3)(\lambda-1)$$

con lo cual los valores característicos son:

$$\lambda_1 = 1 \,, \qquad \lambda_2 = 3 \qquad \text{y} \qquad \lambda_3 = 4$$

Para $\lambda_1 = 1$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ x + y = 0 \\ 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 0 \quad \Rightarrow \quad y = -x \\ z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

si $x = k_1 \quad \Rightarrow \quad y = -k_1$ con $z = 0$

con lo cual los vectores característicos asociados a $\lambda_1 = 1$ son:

$$\bar{v}_1 = \left(k_1, -k_1, 0\right) \quad \text{con} \quad k_1 \neq 0$$

Para $\lambda_2 = 3$:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x + y = 0 \\ x - y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + y = 0 \Rightarrow x = y \\ z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

si $y = k_2 \quad \Rightarrow \quad x = k_2 \quad$ con $\quad z = 0$

por lo que los vectores característicos asociados a $\lambda_2 = 3$ son:

$$\bar{v}_2 = \left(k_2 , k_2 , 0 \right) \quad \text{con} \quad k_2 \neq 0$$

Para $\lambda_3 = 4$:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x + y = 0 \\ x - 2y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y = 0 \\ -3y = 0 \Rightarrow y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

de donde:

$$x = 0 , \qquad y = 0 , \qquad z = k_3$$

con lo cual los vectores característicos asociados a $\lambda_3 = 4$ son:

$$\bar{v}_3 = \left(0, \; 0, \; k_3 \right) \quad \text{con} \quad k_3 \neq 0$$

por lo que los espacios característicos son:

$$E\left(\lambda_1\right) = \left\{ \left(k_1 , -k_1 , 0 \right) \mid k_1 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$E\left(\lambda_2\right) = \left\{ \left(k_2 , k_2 , 0 \right) \mid k_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$E\left(\lambda_3\right) = \left\{ \left(0 , 0 , k_3 \right) \mid k_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

Aplicando el isomorfismo inverso, los espacios característicos son:

$$E(\lambda_1) = \{ k_1 x^2 - k_1 x \mid k_1 \in \mathbb{R} \}$$

$$E(\lambda_2) = \{ k_2 x^2 + k_2 x \mid k_2 \in \mathbb{R} \}$$

$$E(\lambda_3) = \{ k_3 \mid k_3 \in \mathbb{R} \}$$

entonces los operadores P_1 , P_2 y P_3 que proyectan cualquier vector de P sobre los espacios característicos son:

$$P_1(ax^2 + bx + c) = ax^2 - ax \quad \in E(\lambda_1)$$

$$P_2(ax^2 + bx + c) = bx^2 + bx \quad \in E(\lambda_2)$$

$$P_3(ax^2 + bx + c) = c \quad \in E(\lambda_3)$$

Sabemos también que un polinomio cualquiera del espacio P puede ser expresado como la suma de sus tres proyecciones, por lo que:

$\forall \ \alpha x^2 + \beta x + \gamma \in P$, se tiene que:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = (ax^2 - ax) + (bx^2 + bx) + c$$

por igualdad, surge el sistema:

$$\begin{cases} a + b = \alpha \\ -a + b = \beta \\ c = \gamma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = \alpha \\ 2b = \alpha + \beta \\ c = \gamma \end{cases} \Rightarrow b = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

sustituyendo en la primera ecuación, tenemos:

$$a + \frac{\alpha + \beta}{2} = \alpha \quad \Rightarrow \quad a = \alpha - \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\therefore \quad a = \frac{\alpha - \beta}{2}$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

con lo cual se tiene que:

$$a = \frac{\alpha - \beta}{2} , \quad b = \frac{\alpha + \beta}{2} \quad \text{y} \quad c = \gamma$$

entonces los operadores proyección quedan como:

$$P_1\left(\alpha x^2 + \beta x + \gamma\right) = \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) x^2 - \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) x$$

$$P_2\left(\alpha x^2 + \beta x + \gamma\right) = \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) x^2 + \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) x$$

$$P_3\left(\alpha x^2 + \beta x + \gamma\right) = \gamma$$

por lo que la descomposición espectral del operador T es:

$$T\left(\alpha x^2 + \beta x + \gamma\right) = 1\left[\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) x^2 - \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) x\right] + 3\left[\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) x^2 + \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) x\right] + 4(\gamma)$$

Veamos si se cumple la condición:

$$T = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3$$

tenemos entonces que:

$$T\left(\alpha x^2 + \beta x + \gamma\right) = \left[\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) x^2 - \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) x\right] + \left[\left(\frac{3\alpha + 3\beta}{2}\right) x^2 + \left(\frac{3\alpha + 3\beta}{2}\right) x\right] + 4\gamma$$

sumando términos semejantes, tenemos:

$$T\left(\alpha x^2 + \beta x + \gamma\right) = \left(2\alpha + \beta\right) x^2 + \left(\alpha + 2\beta\right) x + 4\gamma$$

que resulta igual a la regla de correspondencia de T, dada en el enunciado del ejercicio.

b) Veamos si se cumple la condición:

$$\mathrm{I} = P_1 + P_2 + P_3$$

de donde:

$$\mathrm{I}\left(\alpha x^2 + \beta x + \gamma\right) = \left(P_1 + P_2 + P_3\right)\left(\alpha x^2 + \beta x + \gamma\right)$$

$$\mathrm{I}\left(\alpha x^2 + \beta x + \gamma\right) = P_1\left(\alpha x^2 + \beta x + \gamma\right) + P_2\left(\alpha x^2 + \beta x + \gamma\right) + P_3\left(\alpha x^2 + \beta x + \gamma\right)$$

sustituyendo las reglas de correspondencia de los operadores proyección, tenemos:

$$\mathrm{I}\left(\alpha x^2 + \beta x + \gamma\right) = \left[\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)x^2 - \left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)x\right] + \left[\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)x^2 + \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)x\right] + \gamma$$

sumando términos semejantes, tenemos:

$$\mathrm{I}\left(\alpha x^2 + \beta x + \gamma\right) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$

por lo tanto, se cumple la condición.

c) Se debe comprobar que $P_i \circ P_j = 0 \quad ; \quad \forall\ i \neq j$

Con lo cual los casos por analizar son:

$$P_1 \circ P_2 = 0$$

$$P_1 \circ P_3 = 0$$

$$P_2 \circ P_3 = 0$$

Recuerde que el cero del lado derecho de estas igualdades representa al operador nulo.

Para $P_1 \circ P_2 = 0$, tenemos:

$$\left(P_1 \circ P_2\right)\left(\alpha x^2 + \beta x + \gamma\right) = 0\left(\alpha x^2 + \beta x + \gamma\right)$$

Aplicando la definición de composición, tenemos:

$$P_1\left[P_2\left(\alpha x^2+\beta x+\gamma\right)\right] = 0\left(\alpha x^2+\beta x+\gamma\right)$$

$$P_1\left[\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)x^2+\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)x\right] = 0\left(\alpha x^2+\beta x+\gamma\right)$$

Aplicando la regla de correspondencia de P_1, tenemos:

$$\left[\frac{\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{2}\right]x^2+\left[\frac{\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{2}\right]x = 0\left(\alpha x^2+\beta x+\gamma\right)$$

de donde, se llega a:

$$0\left(\alpha x^2+\beta x+\gamma\right) = 0x^2+0x+0$$

$$\therefore \quad \text{cumple}$$

Para $P_1 \circ P_3 = 0$, tenemos:

$$\left(P_1 \circ P_3\right)\left(\alpha x^2+\beta x+\gamma\right) = 0\left(\alpha x^2+\beta x+\gamma\right)$$

$$P_1\left[P_3\left(\alpha x^2+\beta x+\gamma\right)\right] = 0\left(\alpha x^2+\beta x+\gamma\right)$$

$$P_1\left(\gamma\right) = 0\left(\alpha x^2+\beta x+\gamma\right)$$

$$\Rightarrow \quad 0\left(\alpha x^2+\beta x+\gamma\right) = 0x^2+0x+0$$

$$\therefore \quad \text{cumple}$$

Para $P_2 \circ P_3 = 0$, tenemos:

$$\left(P_2 \circ P_3 \right)\left(\alpha x^2 + \beta x + \gamma \right) = 0\left(\alpha x^2 + \beta x + \gamma \right)$$

$$P_2 \left[P_3 \left(\alpha x^2 + \beta x + \gamma \right) \right] = 0\left(\alpha x^2 + \beta x + \gamma \right)$$

$$P_2 \left(\gamma \right) = 0\left(\alpha x^2 + \beta x + \gamma \right)$$

$$\Rightarrow \quad 0\left(\alpha x^2 + \beta x + \gamma \right) = 0x^2 + 0x + 0$$

$\therefore$ cumple

Ejercicio 5.14 Sea el espacio vectorial real:

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \middle| \; a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

y sea el operador simétrico $T : M \to M$ cuya regla de correspondencia es:

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2a & b + c \\ b + c & b + c \end{bmatrix} \quad ; \quad \forall \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \in M$$

y con producto interno definido por:

$$\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & c_1 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & c_2 \end{bmatrix} \right) = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 \; ; \quad \forall \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & c_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & c_2 \end{bmatrix} \in M$$

Obtenga la descomposición espectral del operador T.

SOLUCIÓN:

Aplicando el isomorfismo:

$$f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \right) = \left(a, b, c \right)$$

Las reglas de correspondencia de T y del producto interno quedan como:

$$T\,(a,\ b,\ c) = (2a,\ b+c,\ b+c)$$

$$\big(\,(a_1,\ b_1,\ c_1)\,\big|\,(a_2,\ b_2,\ c_2)\,\big) = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2$$

Obteniendo los valores, vectores y espacios característicos, tenemos:

$$\begin{aligned} T\,(1,\ 0,\ 0) &= (2,\ 0,\ 0) \\ T\,(0,\ 1,\ 0) &= (0,\ 1,\ 1) \quad \Rightarrow \quad M\,(T) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = A \\ T\,(0,\ 0,\ 1) &= (0,\ 1,\ 1) \end{aligned}$$

de donde:

$$\det\,(A - \lambda\,\mathrm{I}) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda)^2 - (2-\lambda)$$

$$P\,(\lambda) = (2-\lambda)\left[\,(1-\lambda)^2 - 1\,\right] = (2-\lambda)\,(\lambda^2 - 2\lambda)$$

$$P\,(\lambda) = \lambda\,(2-\lambda)\,(\lambda - 2)$$

con lo cual los valores característicos son:

$$\lambda_1 = 0 \qquad \text{y} \qquad \lambda_{2,3} = 2$$

Para $\lambda_1 = 0$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} 2x \qquad &= 0 \\ y + z &= 0 \\ y + z &= 0 \end{aligned} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} y + z &= 0 \ \Rightarrow \ z = -y \\ x &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned} \right.$$

Si $y = k_1 \quad \Rightarrow \quad z = -\,k_1$ con $x = 0$

con lo cual los vectores característicos asociados a $\lambda_1 = 0$ son:

$$\bar{v}_1 = \left(0,\ k_1,\ -k_1 \right) \text{ con } k_1 \neq 0$$

Para $\lambda_{2,3} = 2$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ -y + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y - z = 0 \Rightarrow y = z \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Si $z = k_2 \quad \Rightarrow \quad y = k_2$ con $x = k_3$

con lo cual los vectores característicos asociados a $\lambda_{2,3} = 2$ son:

$$\bar{v}_2 = \left(k_3,\ k_2,\ k_2 \right) \text{ con } k_3 \text{ y/o } k_2 \neq 0$$

por lo que los espacios característicos son:

$$E\left(\lambda_1\right) = \left\{ \left(0,\ k_1,\ -k_1\right) \middle|\ k_1 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$E\left(\lambda_{2,3}\right) = \left\{ \left(k_3,\ k_2,\ k_2\right) \middle|\ k_2,\ k_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

Aplicando el isomorfismo inverso, los espacios característicos son:

$$E\left(\lambda_1\right) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & k_1 \\ k_1 & -k_1 \end{bmatrix} \middle|\ k_1 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$E\left(\lambda_{2,3}\right) = \left\{ \begin{bmatrix} k_3 & k_2 \\ k_2 & k_2 \end{bmatrix} \middle|\ k_2,\ k_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

entonces los operadores P_1 y P_2 que proyectan cualquier vector de M sobre los espacios característicos son:

$$P_1\left(\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & a \\ a & -a \end{bmatrix} \in E(\lambda_1)$$

$$P_2\left(\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} c & b \\ b & b \end{bmatrix} \in E(\lambda_{2,3})$$

Obsérvese que los vectores característicos resultan ser ortogonales con el producto interno definido, lo cual implica que los espacios característicos resultan ser, uno complemento ortogonal del otro, por lo que cualquier vector $\begin{bmatrix} x & y \\ y & z \end{bmatrix} \in M$ puede ser expresado como la suma de dos vectores (como se afirma en la definición de la proyección de un vector sobre un subespacio dada en el capítulo anterior), uno de cada espacio característico, esto es:

$$\begin{bmatrix} x & y \\ y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a \\ a & -a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & b \\ b & b \end{bmatrix}$$

de donde se obtiene:

$$\begin{cases} x = c \\ y = a + b \\ z = b - a \end{cases}$$

al resolver el sistema, se llega a:

$$a = \frac{y - z}{2} \quad , \quad b = \frac{y + z}{2} \quad \text{y} \quad c = x$$

Entonces los operadores proyección quedan como:

$$P_1\left(\begin{bmatrix} x & y \\ y & z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{y-z}{2} \\ \dfrac{y-z}{2} & \dfrac{-y+z}{2} \end{bmatrix}$$

$$P_2\left(\begin{bmatrix} x & y \\ y & z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x & \dfrac{y+z}{2} \\ \dfrac{y+z}{2} & \dfrac{y+z}{2} \end{bmatrix}$$

con lo cual la descomposición espectral del operador T es:

$$T\left(\begin{bmatrix} x & y \\ y & z \end{bmatrix}\right) = 0\begin{bmatrix} 0 & \dfrac{y-z}{2} \\ \dfrac{y-z}{2} & \dfrac{-y+z}{2} \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} x & \dfrac{y+z}{2} \\ \dfrac{y+z}{2} & \dfrac{y+z}{2} \end{bmatrix}$$

Veamos si se cumple la condición:

$$T = \lambda_1 P_1 + \lambda_{2,3} P_2$$

de donde:

$$T\left(\begin{bmatrix} x & y \\ y & z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x & y+z \\ y+z & y+z \end{bmatrix}$$

que resulta ser igual a la regla de correspondencia de T, que se da en el enunciado del ejercicio.

Se deja al lector el comprobar que:

$$P_1 + P_2 = \mathrm{I}$$

$$P_1 \circ P_2 = 0$$

Formas cuádricas

Una de las múltiples aplicaciones que tienen los valores y vectores característicos es la que se da en las formas cuádricas, que nos permite simplificar el estudio de las cónicas y de las superficies, cuando estas tienen sus ejes oblicuos a los ejes del sistema de referencia, esto es, los valores y vectores característicos pueden ser usados para resolver problemas donde se requiere hacer una rotación de ejes.

Las ecuaciones:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyx + gx + hy + iz + j = 0$$

corresponden a las ecuaciones generales de segundo grado en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, respectivamente.

A las expresiones que solo consideran los términos de segundo grado, se les llaman formas cuádricas o formas cuadráticas, esto es:

$ax^2 + bxy + cy^2 \longrightarrow$ Forma cuádrica para el caso de $\mathbb{R}^2$.

$ax^2+by^2+cz^2+dxy+exz+fyz \longrightarrow$ Forma cuádrica para el caso de $\mathbb{R}^3$.

Las formas cuádricas pueden ser expresadas matricialmente de la siguiente forma:

$$ax^2 + bxy + cy^2 = \underbrace{\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}}_{\overline{x}^T} \underbrace{\begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{\overline{x}} = \overline{x}^T A \overline{x}$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

$$ax^2+by^2+cz^2+dxy+exz+fyz=\underbrace{\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}}_{\overline{x}^T}\underbrace{\begin{bmatrix} a & \frac{d}{2} & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & b & \frac{f}{2} \\ \frac{e}{2} & \frac{f}{2} & c \end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{\overline{x}}=\overline{x}^T A\,\overline{x}$$

Considerando la ecuación general de segundo grado, se tiene:

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$$

representando en forma matricial esta ecuación, tenemos:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}}_{\overline{x}^T}\underbrace{\begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{\overline{x}}+\underbrace{\begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix}}_{k}\underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{\overline{x}}+f=0$$

con lo cual la ecuación queda como:

$$\overline{x}^T A\,\overline{x}+k\,\overline{x}+f=0 \qquad \ldots(1)$$

si se hace:

$$\overline{x}=P\,\overline{x}' \qquad \ldots(2)$$

esto es:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=P\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

Donde x' y y' son los ejes del nuevo sistema de referencia ya rotado. P es la matriz diagonalizadora de la matriz A, que figura en la ecuación (1), formada por vectores característicos unitarios, con lo cual P es una matriz ortogonal, es decir, $P^{-1} = P^{T}$. Se debe cuidar además que $\det(P) = 1$, lo cual garantiza el giro de ejes. Si el $\det(P) = -1$, entonces será suficiente con intercambiar las columnas de P.

Al sustituir la expresión (2) en (1), se tiene:

$$(P\,\bar{x}')^{T} A\,(P\,\bar{x}') + k(P\,\bar{x}') + f = 0$$

de donde:

$$(\bar{x}')^{T} P^{T} A P \bar{x}' + (kP)\,\bar{x}' + f = 0$$

dado que el producto de matrices es asociativo, tenemos:

$$(\bar{x}')^{T}\left(P^{T} A P\right)\bar{x}' + (kP)\,\bar{x}' + f = 0 \qquad \ldots(3)$$

como:

$$P^{T} A\,P = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

donde λ_1 y λ_2 son los valores característicos de A.

Entonces la ecuación (3) expresada con matrices quedaría como:

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + f = 0$$

efectuando los productos indicados llegaríamos a una ecuación de la forma:

$$\lambda_1 (x')^2 + \lambda_2 (y')^2 + d'x' + e'y' + f = 0 \qquad \ldots(4)$$

donde:

$$d' = d\,P_{11} + e\,P_{21}$$

$$e' = d\,P_{12} + e\,P_{22}$$

Como se puede apreciar en la ecuación (4), se trata de una ecuación de segundo grado donde el término xy ya no aparece, lo cual quiere decir que los ejes de la cónica son coincidentes o paralelos a los ejes del nuevo sistema de referencia x', y'.

Para el caso de la ecuación general de segundo grado en $\mathbb{R}^3$, es decir, cuando se tienen superficies cónicas cuyos ejes sean oblicuos al sistema de referencia, el procedimiento a seguir para rotar dicho sistema, de tal manera que los nuevos ejes resulten coincidentes o paralelos a los ejes de la superficie, es exactamente el mismo al seguido para el caso de $\mathbb{R}^2$, con la única diferencia de que la matriz A ahora será de 3×3 y se tendrán tres valores y tres vectores característicos.

Ejercicio 5.15 Para la cónica cuya ecuación es:

$$9x^2 + 4xy + 6y^2 + 12x + 36y + 44 = 0$$

a) Determine una matriz P correspondiente al giro que hace paralelos los ejes coordenados con los ejes de la cónica.

b) Obtenga la ecuación de la cónica en un sistema de referencia (x'', y''), que no contenga término mixto ni términos lineales.

c) Calcule el ángulo de giro.

d) Dibuje la cónica, así como los distintos sistemas de referencia.

SOLUCIÓN:

a) La matriz P que se pide determinar es la matriz diagonalizadora de A.

La representación matricial de la ecuación de la cónica es:

$$\bar{x}^T A\, \bar{x} + k\, \bar{x} + 44 = 0 \qquad \ldots (1)$$

donde:

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \quad ; \quad k = \begin{bmatrix} 12 & 36 \end{bmatrix} \quad ; \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Como se sabe, la matriz P está formada por la disposición en columna de los vectores característicos unitarios de la matriz A, entonces:

$$\det(A - \lambda \mathrm{I}) = \begin{vmatrix} 9-\lambda & 2 \\ 2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (9-\lambda)(6-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 15\lambda + 50 = (\lambda - 10)(\lambda - 5)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 10 \\ \lambda_2 = 5 \end{cases} \quad \text{valores característicos}$$

Obteniendo los vectores característicos tenemos:

Para $\lambda_1 = 10$:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow (2) \begin{cases} -x + 2y = 0 \\ 2x - 4y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + 2y = 0 \Rightarrow x = 2y \\ 0 = 0 \end{cases}$$

si $y = k_1 \Rightarrow x = 2k_1 \therefore \bar{v}_1 = (2k_1, k_1)$ con $k_1 \neq 0$ vectores característicos

Para $\lambda_2 = 5$:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} + \\ (-2) \end{matrix} \begin{cases} 4x + 2y = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 0 \Rightarrow y = -2x \\ 0 = 0 \end{cases}$$

si $x = k_2 \Rightarrow y = -2k_2 \therefore \bar{v}_2 = \left(k_2, -2k_2\right)$ con $k_2 \neq 0$ vectores característicos

Si hacemos que $k_1 = 1$ y $k_2 = -1$, entonces se obtienen los siguientes vectores característicos:

$\bar{u}_1 = (\ 2,\ 1\ )$ donde $\| \bar{u}_1 \| = \sqrt{5}$ Considerando como producto interno el producto escalar ordinario.

$\bar{u}_2 = (\ -1,\ 2\ )$ donde $\| \bar{u}_2 \| = \sqrt{5}$

Entonces los vectores característicos unitarios son:

$$\bar{e}_1 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}},\ \frac{1}{\sqrt{5}} \right)$$

$$\bar{e}_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}},\ \frac{2}{\sqrt{5}} \right)$$

Con lo cual la matriz diagonalizadora P buscada es:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

Se tiene además que:

$$\det(P) = 1$$

y al ser P una matriz ortogonal, entonces se cumple que:

$$P^T = P^{-1}$$

Por otro lado, si realizamos:

$$\left(\bar{u}_1 \middle| \bar{u}_2 \right) = \left((2,\ 1) \middle| (-1,\ 2) \right) = -2 + 2 = 0$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

con lo cual se tiene que los vectores característicos son ortogonales. Estos vectores nos definirán la dirección de los ejes del nuevo sistema de referencia con el giro requerido.

b) Si hacemos $\bar{x} = P\,\bar{x}'$ y sustituimos en la ecuación (1), tenemos:

$$(P\,\bar{x}')^T A\,(P\,\bar{x}') + k\,(P\,\bar{x}') + 44 = 0$$

de donde se tiene que:

$$(\bar{x}')^T P^T A\,P\bar{x}' + (k\,P)\,\bar{x}' + 44 = 0$$

agrupando:

$$(\bar{x}')^T \left(P^T A\,P\right)\bar{x}' + (k\,P)\,\bar{x}' + 44 = 0$$

Como $P^T = P^{-1}$ entonces $P^T A\,P = D$, con la cual se llega a:

$$(\bar{x}')^T D\,\bar{x}' + (k\,P)\,\bar{x}' + 44 = 0$$

sustituyendo tenemos:

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 & 36 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dfrac{2}{\sqrt{5}} & -\dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{5}} & \dfrac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + 44 = 0$$

realizando operaciones:

$$10\,(x')^2 + 5\,(y')^2 + \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 12 & 36 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + 44 = 0$$

$$10\left(x'\right)^2 + 5\left(y'\right)^2 + \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 60 & 60 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + 44 = 0$$

$$10\left(x'\right)^2 + 5\left(y'\right)^2 + \frac{60}{\sqrt{5}}x' + \frac{60}{\sqrt{5}}y' + 44 = 0$$

Obsérvese que en esta ecuación ya no se tiene término con producto entre las variables; sin embargo, aún se tienen términos lineales. Para eliminar estos términos, se hará un desplazamiento del sistema de referencia para hacer coincidir el centro de la cónica con el origen del nuevo sistema de referencia $\left(x'', y''\right)$. Para esto, se requiere completar trinomios que sean cuadrados perfectos y hacer la factorización correspondiente.

Agrupando y factorizando tenemos:

$$10\left[\left(x'\right)^2 + \frac{6}{\sqrt{5}}x'\right] + 5\left[\left(y'\right)^2 + \frac{12}{\sqrt{5}}y'\right] = -44$$

completando trinomios:

$$10\left[\left(x'\right)^2 + \frac{6}{\sqrt{5}}x' + \frac{9}{5}\right] + 5\left[\left(y'\right)^2 + \frac{12}{\sqrt{5}}y' + \frac{36}{5}\right] = -44 + 18 + 36$$

$$10\left(x' + \frac{3}{\sqrt{5}}\right)^2 + 5\left(y' + \frac{6}{\sqrt{5}}\right)^2 = 10$$

$$\left(x' + \frac{3}{\sqrt{5}}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(y' + \frac{6}{\sqrt{5}}\right)^2 = 1$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

si se hace que:

$$x'' = x' + \frac{3}{\sqrt{5}}$$

$$y'' = y' + \frac{6}{\sqrt{5}}$$

entonces se tiene:

$$(x'')^2 + \frac{(y'')^2}{2} = 1$$

En este sistema de referencia $(x'',\ y'')$ la ecuación carece de término mixto y lineal, que es lo que se pedía obtener en el inciso **b)**.

Al observar la ecuación a la que se llegó, es evidente que se trata de una elipse con centro en el origen y con semiejes $a = 1$ y $b = \sqrt{2}$.

c) Para calcular el ángulo de giro, se deberá obtener el ángulo que forman el vector característico $\bar{u}_1 = (2,\ 1)$ que define la dirección del eje x', con el vector unitario $i = (1,\ 0)$.

Sabemos que:

$$\cos\theta = \frac{(\bar{u}_1 \mid i)}{\|\bar{u}_1\|\,\|i\|}$$

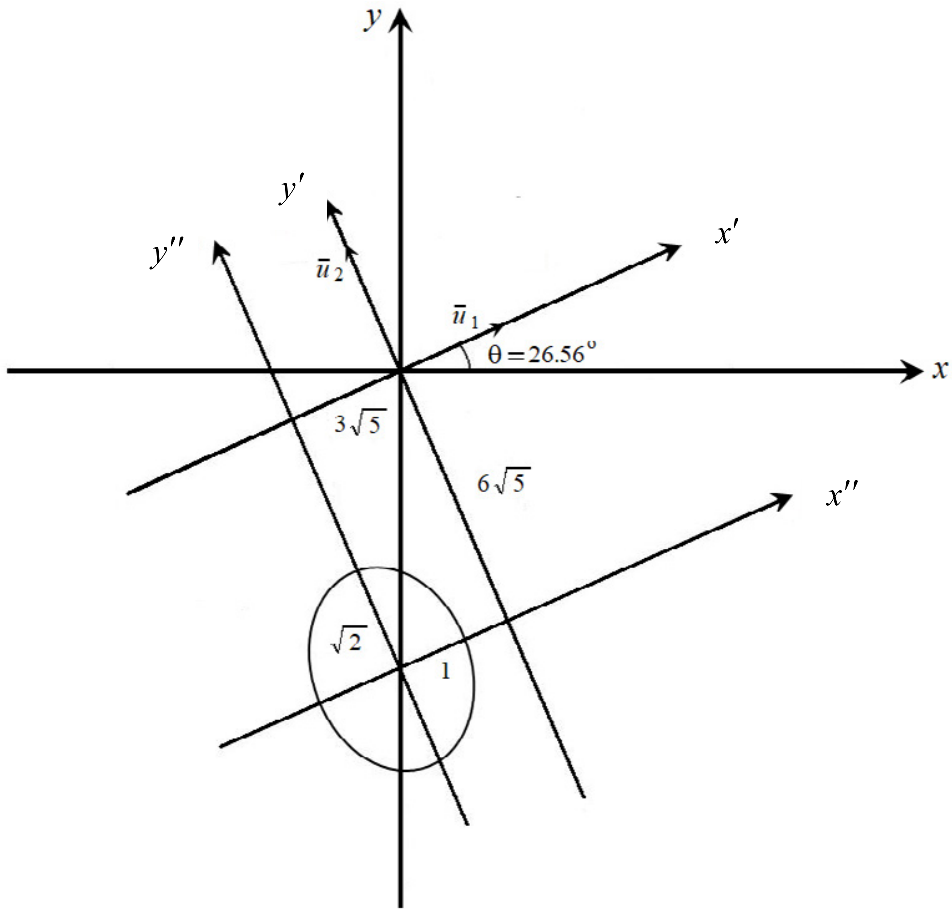
sustituyendo:

$$\cos\theta = \frac{((2,\ 1) \mid (1,\ 0))}{(\sqrt{5})(1)}$$

$$\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}} \quad \therefore \quad \theta = 26.56°$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

d) Trazo aproximado de la cónica y los sistemas de referencia.



Ejercicio 5.16 Para la cónica cuya ecuación es:

$$2x^2 + 4xy + 2y^2 + 6\sqrt{2}\,x + 2\sqrt{2}\,y + 4 = 0$$

a) Determine una matriz P correspondiente al giro que hace coincidir los ejes coordenados con los ejes de la cónica.

b) Obtenga la ecuación de la cónica, en un sistema de referencia (x', y'), que no contenga término mixto.

c) Calcule el ángulo de giro.

d) Dibuje la cónica, así como los dos sistemas de coordenadas.

SOLUCIÓN:

a) La matriz P que se pide es la matriz que diagonaliza a la matriz A.

La representación matricial de la ecuación de la cónica es:

$$\bar{x}^T A \bar{x} + k \bar{x} + 4 = 0 \qquad \ldots (1)$$

donde:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad ; \quad k = \begin{bmatrix} 6\sqrt{2} & 2\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad ; \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

La matriz P está formada por la disposición en columna de los vectores característicos unitarios de la matriz A, entonces tenemos:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 4 = \lambda^2 - 4\lambda = \lambda(\lambda - 4)$$

Los valores característicos son:

$$\lambda_1 = 4 \quad \text{y} \quad \lambda_2 = 0$$

Obteniendo los vectores característicos tenemos:

Para $\lambda_1 = 4$:

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x + 2y = 0 \\ 2x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + y = 0 \Rightarrow x = y \\ 0 = 0 \end{cases}$$

si $y = k_1 \quad \Rightarrow \quad x = k_1$

$\therefore \quad \bar{v}_1 = (k_1, k_1)$ con $k_1 \neq 0$ vectores característicos

Para $\lambda_2 = 0$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 0 & \Rightarrow \; y = -x \\ 0 = 0 \end{cases}$$

si $x = k_2 \quad \Rightarrow \quad y = -k_2$

$\therefore \quad \bar{v}_2 = (k_2, -k_2)$ con $k_2 \neq 0$ vectores característicos

si hacemos que $k_1 = 1$ y $k_2 = -1$, entonces se obtienen los siguientes vectores característicos:

$\bar{u}_1 = (1, 1)$ donde $\|\bar{u}_1\| = \sqrt{2}$ Considerando como producto interno el producto escalar ordinario.

$\bar{u}_2 = (-1, 1)$ donde $\|\bar{u}_2\| = \sqrt{2}$

Entonces los vectores característicos unitarios son:

$$\bar{e}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \quad \text{y} \quad \bar{e}_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

por lo tanto, la matriz diagonalizadora P solicitada es:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad \text{donde} \quad \det(P) = 1$$

y al ser P una matriz ortogonal, entonces se cumple que:

$$P^T = P^{-1}$$

Por otro lado, si realizamos:

$$(\bar{u}_1 \mid \bar{u}_2) = ((1, 1) \mid (-1, 1)) = -1 + 1 = 0$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

lo cual implica que los vectores característicos son ortogonales. Estos vectores nos definirán la dirección de los ejes del nuevo sistema de referencia con el giro requerido.

b) Al sustituir $\overline{x} = P\,\overline{x}'$ en la ecuación (1), se llega a:

$$(\overline{x}')^T \left(P^T A P\right)\overline{x}' + (kP)\overline{x}' + 4 = 0$$

Como $P^T = P^{-1}$, entonces $P^T A P = D$, con lo cual se llega a:

$$(\overline{x}')^T D\,\overline{x}' + (kP)\overline{x}' + 4 = 0$$

sustituyendo, tenemos:

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6\sqrt{2} & 2\sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + 4 = 0$$

$$\begin{bmatrix} 4x' & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + 4 = 0$$

$$4(x')^2 + 8x' - 4y' + 4 = 0$$

$$(x')^2 + 2x' - y' + 1 = 0$$

Completando el trinomio cuadrado perfecto, tenemos:

$$(x')^2 + 2x' + 1 = y' - 1 + 1$$

$$(x' + 1)^2 = y'$$

Se trata de una parábola con vértice en el punto $(-1,\ 0)$ que abre hacia el lado positivo del eje y'.

ÍNDICE
1
2
3
4
5

c) El ángulo de giro se calcula con el vector $\bar{u}_1 = (1,\ 1)$ que define la dirección del eje x' y el vector unitario $i = (1, 0)$, considerando como producto interno el producto escalar ordinario.

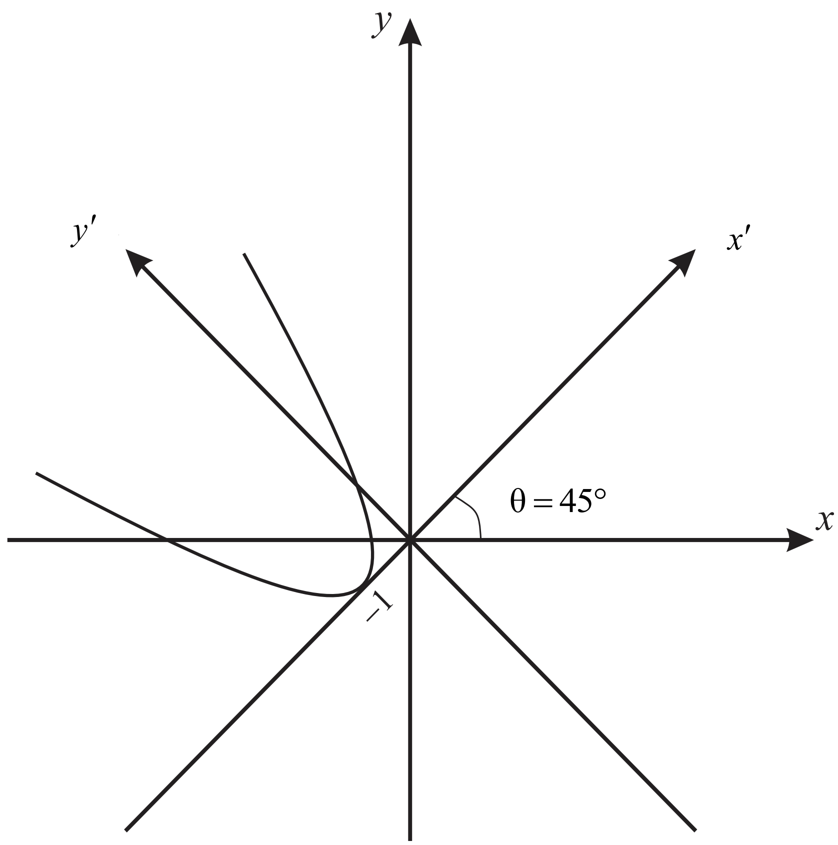
$$\cos\theta = \frac{(\bar{u}_1 \mid i)}{\|\bar{u}_1\|\,\|i\|}$$

$$\cos\theta = \frac{((1,\ 1) \mid (1,\ 0))}{\sqrt{2}\,(1)}$$

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore\ \theta = 45°$$

d) Trazo aproximado de la cónica y los sistemas de referencia.



ÍNDICE
1
2
3
4
5

Ejercicio 5.17 Para la cónica cuya ecuación es:

$$4xy = 1$$

a) Determine una matriz P correspondiente al giro que hace coincidentes los ejes coordenados con los ejes de la cónica.

b) Obtenga la ecuación de la cónica, en un sistema de referencia (x', y'), que no contenga término mixto.

c) Calcule el ángulo de giro.

SOLUCIÓN:

a) La representación matricial de la ecuación de la cónica es:

$$\bar{x}^T A \bar{x} + k \bar{x} = 1$$

donde:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad k = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

como $k = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$, entonces se tiene:

$$\bar{x}^T A \bar{x} = 1 \qquad \ldots (1)$$

Obteniendo los valores y vectores característicos unitarios, tenemos:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4 = (\lambda - 2)(\lambda + 2)$$

Los valores característicos son:

$$\lambda_1 = 2 \quad \text{y} \quad \lambda_2 = -2$$

Obteniendo los vectores característicos, tenemos:

Para $\lambda_1 = 2$:

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x + 2y = 0 \\ 2x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad x = y$$

si $y = k_1 \Rightarrow x = k_1$

$\therefore \quad \bar{v}_1 = (k_1, k_1)$ con $k_1 \neq 0$ vectores característicos

Para $\lambda_2 = -2$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad x = -y$$

si $y = k_2 \Rightarrow x = -k_2$

$\therefore \quad \bar{v}_2 = (-k_2, k_2)$ con $k_2 \neq 0$ vectores característicos

si hacemos $k_1 = k_2 = 1$, entonces se obtienen los siguientes vectores característicos:

$\bar{u}_1 = (1, 1)$ donde $\| \bar{u}_1 \| = \sqrt{2}$ Considerando como producto interno el producto escalar ordinario.

$\bar{u}_2 = (-1, 1)$ donde $\| \bar{u}_2 \| = \sqrt{2}$

Entonces los vectores característicos unitarios son:

$$\bar{e}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \quad \text{y} \quad \bar{e}_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

Por lo tanto, la matriz diagonalizadora P solicitada es:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

de donde:

$$\det\left(P \right) = 1$$

y al ser P una matriz ortogonal, entonces se cumple que:

$$P^{T} = P^{-1}$$

También se tiene que:

$$\left(\bar{u}_1 \,\middle|\, \bar{u}_2 \right) = \left(\left(1, 1 \right) \,\middle|\, \left(-1, 1 \right) \right) = -1 + 1 = 0$$

Lo cual implica que los vectores característicos son ortogonales. Estos vectores nos definirán la dirección de los ejes del nuevo sistema de referencia con el giro requerido.

b) Al sustituir $\bar{x} = P\,\bar{x}'$ en la ecuación (1), se llega a:

$$\left(\bar{x}' \right)^{T} \left(P^{T} A\, P \right) \bar{x}' = 1$$

Como $P^{T} = P^{-1}$, entonces $P^{T} A P = D$, con lo cual se llega a:

$$\left(\bar{x}' \right)^{T} D\, \bar{x}' = 1$$

sustituyendo tenemos:

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = 1$$

$$2\left(x' \right)^2 - 2\left(y' \right)^2 = 1$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

En este sistema de referencia $(x', \; y')$ la ecuación carece de término mixto.

Se trata de una hipérbola con centro en el origen, cuyas ramas abren en ambos sentidos del eje x'.

c) El ángulo de giro se calcula con el vector $\bar{u}_1 = (1, 1)$ que define la dirección del eje x' y el vector unitario $i = (1, 0)$, considerando como producto interno el producto escalar ordinario.

$$\cos\theta = \frac{(\bar{u}_1 | i)}{\|\bar{u}_1\| \, \|i\|}$$

$$\cos\theta = \frac{((1, \; 1) | (1, \; 0))}{\sqrt{2}\,(1)}$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \; \theta = 45°$$

ÍNDICE
1
2
3
4
5

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Obtenga el adjunto del operador lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, cuya regla de correspondencia es:

$$T(x, y) = (2x - y, x - 3y)$$

Considere como producto interno el producto escalar ordinario en $\mathbb{R}^2$.

2. Sea el espacio vectorial:

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

definido en el campo de los números reales y sea el operador lineal $T : M \to M$ con regla de correspondencia:

$$T\left(\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a-b & 0 \\ 0 & a+b \end{bmatrix} \quad ; \quad \forall \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \in M$$

Determine el operador adjunto de T, considerando el siguiente producto interno:

$$\left(\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} \right) = ax + by \quad ; \quad \forall \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} \in M$$

3. Sea el espacio vectorial $\mathbb{C}$ definido en el campo complejo con producto interno definido por:

$$(z \mid w) = z\,\overline{w} \quad ; \quad \forall\, z, w \in \mathbb{C}$$

donde $\overline{w}$ representa el conjugado de w.

ÍNDICE
1
2
3
4
5

Obtenga el adjunto del operador lineal $S : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ cuya regla de correspondencia es:

$$S(z) = \alpha z \quad ; \quad \forall\ z \in \mathbb{C}$$

donde $\alpha \in \mathbb{C}$ es un número fijo dado.

4. En el espacio vectorial de los polinomios $P = \left\{ ax + b \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R} \right\}$ sobre el campo de los reales, se define el siguiente producto interno:

$$(f \mid g) = f(0)\, g(0) + f'(0)\ g'(0) \quad ; \quad \forall\ f, g \in P$$

Obtenga el adjunto del operador lineal $T : P \rightarrow P$ cuya regla de correspondencia es:

$$T(ax + b) = (3a + b)\, x + (a + b) \quad ; \quad \forall\ ax + b \in P$$

5. En el espacio vectorial $\mathbb{C}^3$ sobre $\mathbb{C}$ con producto interno:

$$\left((x_1, y_1, z_1) \middle| (x_2, y_2, z_2) \right) = x_1 \overline{x}_2 + y_1 \overline{y}_2 + z_1 \overline{z}_2 \ ; \ \forall (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{C}^3$$

donde $\overline{x}_2$, $\overline{y}_2$ y $\overline{z}_2$ son los conjugados de x_2, y_2 y z_2 respectivamente, se define el operador lineal $T : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ como:

$$T(x, y, z) = (2z, iy, 3ix) \quad ; \quad \forall\ (x, y, z) \in \mathbb{C}^3$$

Obtenga el adjunto del operador T.

6. Obtenga el adjunto del operador lineal $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, cuya regla de correspondencia es:

$$T(x, y) = \left(\frac{x - y}{2}, \frac{-x + y}{2} \right) \ ; \ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Considere como producto interno el producto escalar ordinario en $\mathbb{R}^2$.

7. Sea el espacio vectorial:

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \middle| \, a,\ b,\ c \in \mathbb{R} \right\}$$

definido en el campo de los números reales y sea el operador lineal $T: M \to M$ con regla de correspondencia:

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a - c & a + 2b + c \\ a + 2b + c & 2a + 4c \end{bmatrix} \quad ; \quad \forall \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \in M$$

Determine el adjunto de T, considerando el siguiente producto interno:

$$\left(A \,\middle|\, B \right) = Tr\left(AB^T \right) \quad ; \ \forall\ A, B \in M$$

8. Para el operador lineal $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ con regla de correspondencia:

$$T(x,\ y,\ z) = (x + 2y + 3z,\ \ x - y,\ \ y - z) \quad ; \quad \forall\ (x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3$$

Obtenga el operador adjunto T^*, utilizando el producto interno usual en $\mathbb{R}^3$.

9. Sea el operador lineal $T: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, donde $\mathbb{C}^2$ está definido en el campo complejo y cuya regla de correspondencia es:

$$T(x,\ y) = (2x + iy,\ \ y - ix) \quad ; \quad \forall\ (x,\ y) \in \mathbb{C}^2$$

a) Determine si T es un operador normal respecto al producto interno usual en $\mathbb{C}^2$.

b) Obtenga $\left\| \, T^*(1 + i,\ 1 - i) \, \right\|$.

10. Sea el espacio vectorial $\mathbb{C}^2$ definido sobre el campo de los números complejos y sea el operador lineal $T: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ cuya regla de correspondencia es:

$$T(x,\ y) = \left(ix + (1 + i)\, y\ ,\ (-1 + i)\, x + 2iy \right) \ ; \forall\, (x,\ y) \in \mathbb{C}^2$$

Determine si T es un operador normal respecto al producto interno usual en $\mathbb{C}^2$.

ÍNDICE
1
2
3
4
5

11. Sea el espacio vectorial real:

$$P = \left\{ a x^2 + b x + c \;\middle|\; a,\ b,\ c \in \mathbb{R} \right\}$$

con producto interno definido por:

$$\left(\bar{p} \,\middle|\, \bar{q} \right) = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 \quad ;\forall\ \bar{p} = a_1 x^2 + b_1 x + c_1 ,\quad \bar{q} = a_2 x^2 + b_2 x + c_2 \in P$$

y sea el operador lineal $H : P \to P$ cuya regla de correspondencia es:

$$H\left(a x^2 + b x + c\right) = (2a+b)x^2 + (-c)x + a \quad ;\ \forall a x^2 + b x + c \in P$$

a) Obtenga el adjunto del operador H.

b) Determine si H es un operador normal.

12. Para el operador lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ con regla de correspondencia:

$$T\left(x,\ y,\ z \right) = \left(3x + 2z,\ \ 3y + z,\ \ 2z \right) \ ;\ \forall\ \left(x,\ y,\ z \right) \in \mathbb{R}^3$$

Considerando el producto escalar ordinario en $\mathbb{R}^3$:

a) Obtenga el adjunto del operador T.

b) Determine si T es un operador normal.

13. En el espacio vectorial $\mathbb{C}^2$ sobre $\mathbb{C}$ se define el operador lineal $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ como:

$$T\left(x,\ y \right) = \left(4x + \left(2 + i \right) y\ ,\ \left(2 - i \right) x \right) \quad ;\ \forall\ \left(x, y \right) \in \mathbb{C}^2$$

Considerando el producto escalar ordinario en $\mathbb{C}^2$ como producto interno:

a) Obtenga el adjunto del operador T.

b) Determine si T es un operador normal.

14. Sea el espacio vectorial de polinomios $P = \left\{ ax + b \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R} \right\}$ sobre el campo $\mathbb{R}$, y sea $T : P \to P$ un operador lineal definido por:

$$T(ax+b) = (2a - 2b)x + (5b - 2a) \quad ; \quad \forall \; ax + b \in P$$

Considerando como producto interno:

$$\left(f \,\middle|\, g \right) = f(0)\, g(0) + f'(0)\, g'(0) \quad ; \quad \forall \; f, g \in P$$

a) Determine si T es un operador hermitiano.

b) En caso de ser afirmativa la respuesta del inciso anterior, obtenga una matriz asociada a T referida a una base ortonormal de P y compruebe que dicha matriz es hermitiana.

c) Si T es un operador hermitiano, compruebe que sus valores característicos son reales.

d) Verifique que los vectores característicos de T resultan ser ortogonales.

15. Determine la relación que deben tener $a, b \in \mathbb{R}$, tal que el operador lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ cuya regla de correspondencia es:

$$T(x, y) = (2x + ay,\; bx - y) \quad ; \quad \forall \; (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

sea un operador simétrico con el producto escalar ordinario.

16. Sea el operador lineal $T : P \to P$ definido por:

$$T\left(ax^2 + bx + c\right) = -2bx^2 + (2a + c)x - b \quad ; \quad \forall \; ax^2 + bx + c \in P$$

donde:

$$P = \left\{ ax^2 + bx + c \,\middle|\, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

Determine si T es un operador antihermitiano con el producto interno:

$$\left(p \,\middle|\, q \right) = \frac{1}{4}\, p''(1)\, q''(1) + p'(0)\, q'(0) + p(0)\, q(0) \quad ; \quad \forall \; p, q \in P$$

17. Sea el espacio vectorial $\mathbb{C}^3$ sobre $\mathbb{C}$ con producto interno usual en $\mathbb{C}^3$ y sea el operador lineal $T: \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ con regla de correspondencia:

$$T(a, b, c) = \big(a + b + 3c + (4b - c)i \ , \ a + 2b + (c - 4a)i \ , \ 3a + (a - b)i\big) \ ; \ \forall\, (a, b, c) \in \mathbb{C}^3$$

Determine si el operador T es hermitiano.

18. Sean el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ con producto interno usual y el operador lineal $S: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que:

$$\begin{aligned} S(1, 1, 0) &= (3, 2, 0) \\ S(0, -1, 0) &= (-2, 0, 1) \\ S(0, 2, 2) &= (6, -2, 4) \end{aligned}$$

Determine si S es un operador simétrico.

19. Sea el operador lineal $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por:

$$T(x, y) = (x + ky, \ 2x + 5y) \quad ; \quad \forall \ (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

y el producto escalar ordinario.

Determine el valor de $k \in \mathbb{R}$ de tal manera que T sea un operador hermitiano.

20. Sea el operador lineal $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por:

$$T(x, y) = (\alpha y, \ x) \quad ; \quad \forall \ (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Determine el valor de $\alpha \neq 0$ para que T sea un operador simétrico con el producto interno:

$$\big((x_1, x_2) \,|\, (y_1, y_2)\big) = 2x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_2 y_2 \ ; \ \forall \,(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}$$

21. Sea el espacio vectorial $\mathbb{C}^2$ definido sobre el campo de los números complejos, con el producto interno usual en $\mathbb{C}^2$ y el operador lineal $H : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ cuya regla de correspondencia es:

$$H(x,\ y) = \big(ix + (1+i)y,\ (-1+i)x + 2iy\big) \quad ; \quad \forall\ (x,\ y) \in \mathbb{C}^2$$

Determine si H es un operador antihermitiano.

22. Demostrar que el operador lineal $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ definido por:

$$T(z_1, z_2) = (z_1 + z_2,\ z_1) \quad ; \quad \forall\ (z_1,\ z_2) \in \mathbb{C}^2$$

es un operador hermitiano con el producto escalar ordinario en $\mathbb{C}^2$ y verificar que, como consecuencia de ello, sus valores característicos son reales.

23. Sea el operador lineal $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por:

$$S(a, b, c) = (a + b - c,\ a + 3b - 2c,\ -a + 2b + c) \ ; \ \forall\ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$$

Determine si S es un operador simétrico respecto al producto interno usual en $\mathbb{R}^3$.

24. Sea el espacio vectorial $\mathbb{C}^2$ sobre $\mathbb{C}$ con producto interno usual en $\mathbb{C}^2$ y sea el operador lineal $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ cuya regla de correspondencia es:

$$T(x, y) = \big(2x + (1-i)y,\ (-1+i)x + 5y\big) \ ; \ \forall\ (x,\ y) \in \mathbb{C}^2$$

Determine si T es un operador hermitiano.

25. Determine si el operador lineal $H : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por:

$$H(x,\ y,\ z) = (x,\ y,\ z) \ ; \ \forall\ (x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3$$

es, respecto al producto escalar en $\mathbb{R}^3$:

a) Hermitiano.
b) Antihermitiano.
c) Unitario.

26. En el espacio vectorial $\mathbb{C}^2$ sobre $\mathbb{C}$ se define el operador lineal $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ de la siguiente manera:

$$T(a+bi\,,\,c+di) = (-b+ai, d-ci) \quad ; \quad \forall \; (a+bi\,,\,c+di) \in \mathbb{C}^2$$

a) Determine si el operador T es hermitiano, antihermitiano y/o unitario, considerando como producto interno al producto escalar ordinario complejo.

b) En caso de ser posible, obtenga una matriz diagonal que represente al operador lineal T.

27. Determine si el operador lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuya regla de correspondencia es:

$$T(x,y,z) = \left(\frac{2x}{\sqrt{14}} + \frac{y}{\sqrt{14}} + \frac{3z}{\sqrt{14}}\,,\, \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{y}{\sqrt{3}} - \frac{z}{\sqrt{3}}\,,\, -\frac{4x}{\sqrt{42}} + \frac{5y}{\sqrt{42}} + \frac{z}{\sqrt{42}} \right) \;;\; \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

es un operador ortogonal, considerando como producto interno el producto escalar ordinario en $\mathbb{R}^3$.

28. Sea el espacio vectorial:

$$\mathbb{C} = \left\{ z \;\middle|\; z = a+bi \;\; ; \;\; \forall \;\; a, b \in \mathbb{R} \quad \text{con} \quad i^2 = -1 \right\}$$

sobre $\mathbb{C}$ y sea el operador lineal $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definido por:

$$T(z) = zi \quad ; \quad \forall \; z \in \mathbb{C}$$

Determine si T es un operador unitario con el siguiente producto interno:

$$(u \mid v) = u\,\overline{v} \quad ; \quad \forall \;\; u, v \in \mathbb{C}$$

donde $\overline{v}$ es el conjugado de v.

ÍNDICE
1
2
3
4
5

29. Sean T y S operadores lineales de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$ definidos por las siguientes reglas de correspondencia:

$$T(x, y, z) = (y+z, x, z-y) \quad ; \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

$$S(x, y, z) = \left(x, -\frac{3}{5}y + \frac{4}{5}z, \frac{4}{5}y + \frac{3}{5}z\right) \quad ; \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

a) Determine cuál de los operadores es un operador ortogonal con el producto escalar ordinario.

b) Si se sabe que $\|T(\bar{v})\| = 15$ y $\|S(\bar{v})\| = 10\sqrt{2}$, determine la $\|\bar{v}\|$, usando los resultados del inciso anterior.

30. Para el operador lineal $T: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ definido por:

$$T(z_1, z_2) = (-\alpha i z_2, \alpha i z_1) \quad ; \quad \forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$$

donde $\mathbb{C}^2$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$, con producto interno usual en $\mathbb{C}^2$.

Determine el valor de $\alpha \in \mathbb{R}^+$, tal que T sea un operador unitario.

31. Sean el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ con producto interno usual y el operador lineal $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuya regla de correspondencia es:

$$T(x, y, z) = (x\cos\theta - y \operatorname{sen}\theta, x \operatorname{sen}\theta + y\cos\theta, z) \quad ; \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

Determine si T es un operador ortogonal.

32. Sea un operador lineal $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por:

$$T(x, y) = \left(\frac{\sqrt{3}x - y}{2}, \frac{x + \sqrt{3}y}{2}\right) \quad ; \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Determine si T es un operador ortogonal considerando como producto interno el producto escalar ordinario.

33. Para el operador hermitiano $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ cuya regla de correspondencia es:

$$T(x, y) = \left(2x, \ -\frac{1}{3}x + y\right) \quad ; \quad \forall \ (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

y el producto interno:

$$\left(\bar{x} \mid \bar{y}\right) = x_1 x_2 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + 3 y_1 y_2 \quad ; \quad \forall \ \bar{x} = \left(x_1, y_1\right), \bar{y} = \left(x_2, y_2\right) \in \mathbb{R}^2$$

a) Obtenga la descomposición espectral del operador T.

b) Verifique que se cumple la condición $P_1 + P_2 = \mathrm{I}$.

c) Compruebe que $P_1 \circ P_2 = 0$.

34. Para el operador simétrico $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ cuya regla de correspondencia es:

$$T(x, y) = (2x - y, \ -x + 2y) \quad ; \quad \forall \ (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

y el producto escalar ordinario en $\mathbb{R}^2$, obtenga la descomposición espectral del operador T.

35. Sea el espacio vectorial $\mathbb{C}^2$ con producto interno complejo usual. Determine la descomposición espectral del operador lineal $T : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ cuya matriz asociada respecto a la base $B = \{(1, 0), (0, 1)\}$ es:

$$M(T) = \begin{bmatrix} 4 & -3i \\ -3i & 4 \end{bmatrix}$$

Compruebe, además, que se cumple que $P_1 + P_2 = \mathrm{I}$.

36. Sea el espacio vectorial real:

$$P = \left\{ a x^2 + b x + c \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

y sea el operador normal $H: P \to P$ cuya regla de correspondencia es:

$$H\left(ax^2+bx+c\right)=5ax^2+\left(3b+2c\right)x+\left(2b+3c\right) \quad ; \ \forall \ ax^2+bx+c \ \in P$$

y con el producto interno definido por:

$$\left(\left(a_1x^2+b_1x+c_1\right)\middle|\left(a_2x^2+b_2x+c_2\right)\right)=a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2$$

Obtenga la descomposición espectral del operador H.

37. Sea el espacio vectorial real:

$$M=\left\{\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \middle| \ a,\ b \in \mathbb{R}\right\}$$

y sea el operador simétrico $T: M \to M$ cuya regla de correspondencia es:

$$T\left(\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} a-b & 0 \\ 0 & -a+b \end{bmatrix} \quad ; \ \forall \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \in M$$

y con producto interno definido por:

$$\left(\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{bmatrix}\middle|\begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix}\right)=a_1a_2+b_1b_2 \quad ; \ \forall \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} \in M$$

Obtenga la descomposición espectral del operador T.

38. Sean el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ con producto interno usual, el operador lineal simétrico $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y sus vectores característicos $\bar{v}_1=(2,\ 1)$ y $\bar{v}_2=(1,\ -2)$ asociados a los valores característicos $\lambda_1=1$ y $\lambda_2=6$, respectivamente. Obtenga la regla de correspondencia del operador T, utilizando la descomposición espectral de T.

39. Para la cónica cuya ecuación es:

$$x^2 + 2xy + y^2 - \frac{10}{\sqrt{2}}x + \frac{2}{\sqrt{2}}y + 14 = 0$$

a) Determine una matriz P correspondiente al giro que hace paralelos los ejes coordenados con los ejes de la cónica.

b) Obtenga la ecuación de la cónica, en un sistema de referencia (x'', y''), que no contenga término mixto ni términos lineales.

c) Calcule el ángulo de giro.

d) Dibuje la cónica, así como los distintos sistemas de referencia.

40. Dada la elipse de ecuación $3x^2 + 2y^2 = 5$, obtenga la ecuación de esta elipse referida a un sistema (x', y'), donde el eje x' forma un ángulo de $30°$, medidos en sentido antihorario, con respecto al eje x.

41. Para la cónica cuya ecuación es:

$$2x^2 + \sqrt{3}xy + y^2 = 4$$

a) Determine una matriz P correspondiente al giro que hace paralelos los ejes coordenados con los ejes de la cónica.

b) Obtenga la ecuación de la cónica, en un sistema de referencia (x', y'), que no contenga término mixto.

c) Dibuje la cónica, así como los distintos sistemas de referencia.

42. Sea la cónica de ecuación:

$$2x^2 - 4xy - y^2 + 8 = 0$$

a) Obtenga la matriz mediante la cual se realice un giro de ejes que elimine el término xy de la ecuación.

b) Obtenga la ecuación de la cónica en el nuevo sistema (x', y').

c) Dibuje la cónica, así como los dos sistemas de coordenadas.

43. Sea la cónica de ecuación:

$$3x^2 - 4xy + 3y^2 = 15$$

a) Obtenga la matriz mediante la cual se realice un giro de ejes que elimine el término xy de la ecuación.

b) Obtenga la ecuación de la cónica en el nuevo sistema (x', y').

c) Dibuje la cónica, así como los dos sistemas de coordenadas.

44. Sea la cónica de ecuación:

$$11x^2 + 10\sqrt{3}xy + y^2 = 4$$

a) Obtenga la matriz mediante la cual se realice un giro de ejes que elimine el término xy de la ecuación.

b) Obtenga la ecuación de la cónica en el nuevo sistema (x', y').

c) Calcule el ángulo de giro.

d) Dibuje la cónica, así como los distintos sistemas de referencia.

RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS PROPUESTOS

1. $T^*(w, z) = (2w + z, -w - 3z)$

2. $T^*\left(\begin{bmatrix} w & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} w + z & 0 \\ 0 & -w + z \end{bmatrix}$

3. $S^*(w) = \bar{\alpha} w$

4. $T^*(\alpha x + \beta) = (3\alpha + \beta)x + (\alpha + \beta)$

5. $T^*(a, b, c) = (-3i\,c, -ib, 2a)$

6. $T^*(w, z) = \left(\dfrac{w - z}{2}, \dfrac{-w + z}{2}\right)$

7. $T^*\left(\begin{bmatrix} x & y \\ y & z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x + 2y + 2z & 2y \\ 2y & -x + 2y + 4z \end{bmatrix}$

8. $T^*(a, b, c) = (a + b, 2a - b + c, 3a - c)$

9. **a)** T es un operador normal.

b) $\left\| T^*(1 + i, 1 - i) \right\| = \sqrt{26}$

10. T es un operador normal.

11. **a)** $H^*(\alpha x^2 + \beta x + \gamma) = (2\alpha + \gamma)x^2 + \alpha x - \beta$

b) H no es un operador normal.

12. **a)** $T^*(a, b, c) = (3a, \ 3b, \ 2a + b + 2c)$

b) T no es un operador normal.

13. **a)** $T^*(a, b) = (4a + (2+i)b, \ (2-i)a)$

b) T es un operador normal.

14. **a)** T es un operador hermitiano.

b) $M_B^B(T) = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ es una matriz hermitiana donde

$B = \{x, 1\}$ es una base ortonormal.

c) $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 6$ son valores característicos reales.

d) Los vectores característicos asociados a λ_1 y λ_2 sí son ortogonales.

15. $a = b$

16. T sí es un operador antihermitiano.

17. T sí es un operador hermitiano.

18. S sí es un operador simétrico.

19. Con $k = 2$, el operador T es hermitiano.

20. Con $\alpha = \frac{1}{2}$, T es un operador simétrico.

21. H sí es un operador antihermitiano.

22. T sí es un operador hermitiano y sus valores característicos son:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \in \mathbb{R}$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \in \mathbb{R}$$

23. S no es un operador simétrico.

24. T no es un operador hermitiano.

25. **a)** H sí es un operador hermitiano.

b) H no es un operador antihermitiano.

c) H sí es un operador unitario.

26. **a)** T no es un operador hermitiano.

T sí es un operador antihermitiano.

T sí es un operador unitario.

b) $D = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$

27. T sí es un operador ortogonal.

28. T sí es un operador unitario.

29. **a)** T no es un operador ortogonal.

S sí es un operador ortogonal.

b) $\left\| \bar{v} \right\| = 10\sqrt{2}$

30. T es un operador unitario si $\alpha = 1 \in \mathbb{R}^+$.

31. T sí es un operador ortogonal.

32. T sí es un operador ortogonal.

33. **a)** $T(x, y) = 2\left(x, -\dfrac{x}{3}\right) + 1\left(0, \dfrac{x}{3} + y\right)$

b) Sí se cumple.

c) Sí se cumple.

34. $T(x, y) = 1\left(\dfrac{x+y}{2}, \dfrac{x+y}{2}\right) + 3\left(\dfrac{x-y}{2}, \dfrac{-x+y}{2}\right)$

35. $T(x, y) = (4+3i)\left(\dfrac{x-y}{2}, \dfrac{-x+y}{2}\right) + (4-3i)\left(\dfrac{x+y}{2}, \dfrac{x+y}{2}\right)$

La condición $P_1 + P_2 = \mathrm{I}$ se cumple.

36. $H\left(\alpha x^2 + \beta x + \gamma\right) = 1\left[\left(\dfrac{\beta-\gamma}{2}\right)x + \left(\dfrac{-\beta+\gamma}{2}\right)\right] + 5\left[\alpha x^2 + \left(\dfrac{\beta+\gamma}{2}\right)x + \left(\dfrac{\beta+\gamma}{2}\right)\right]$

37. $T\left(\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}\right) = 0\begin{bmatrix} \dfrac{x+y}{2} & 0 \\ 0 & \dfrac{x+y}{2} \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} \dfrac{x-y}{2} & 0 \\ 0 & \dfrac{-x+y}{2} \end{bmatrix}$

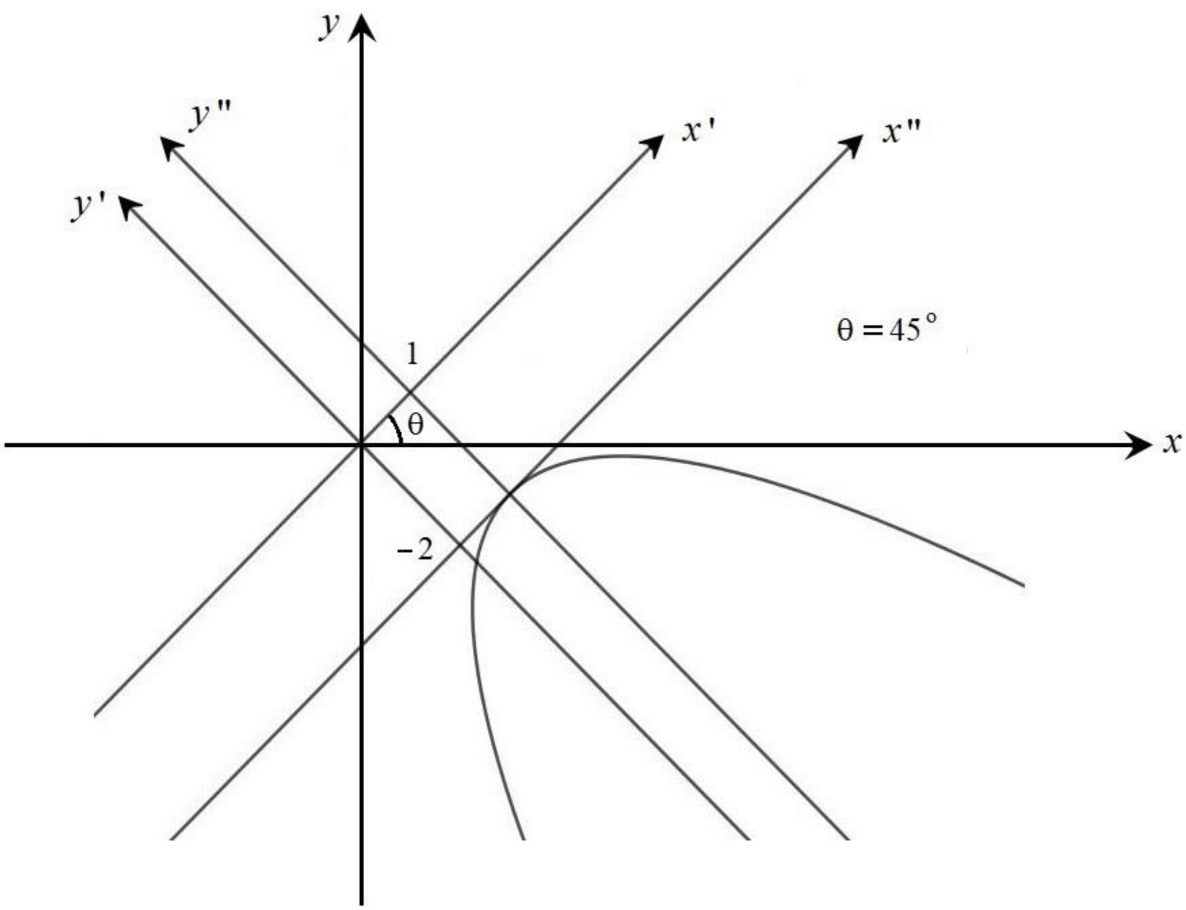
38. $T(x, y) = (2x - 2y, -2x + 5y)$

39. **a)** $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

b) $(x'')^2 = -3(y'')$

c) $\theta = 45°$

d)

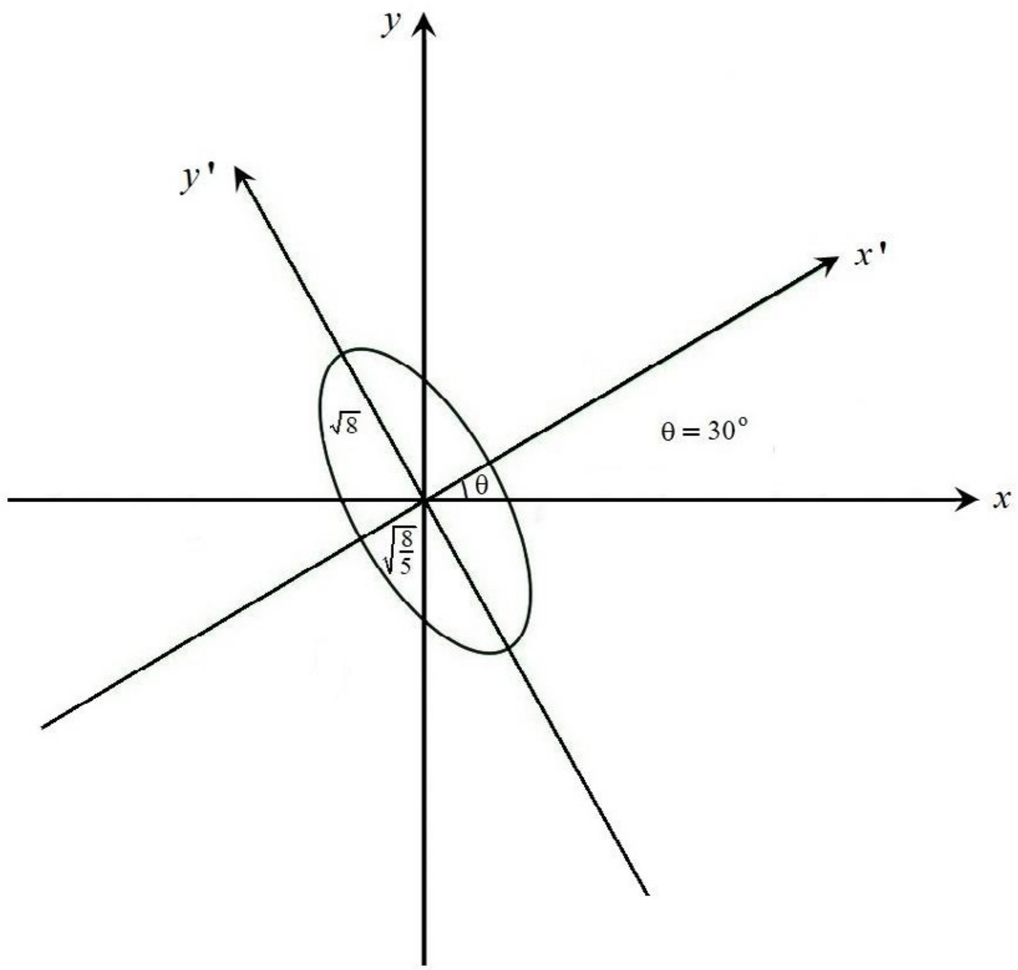


40. $11(x')^2 - 2\sqrt{3}x'y' + 9(y')^2 = 20$

41. a) $P = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$

b) $5(x')^2 + (y')^2 = 8$ o $\dfrac{(x')^2}{\frac{8}{5}} + \dfrac{(y')^2}{8} = 1$, elipse

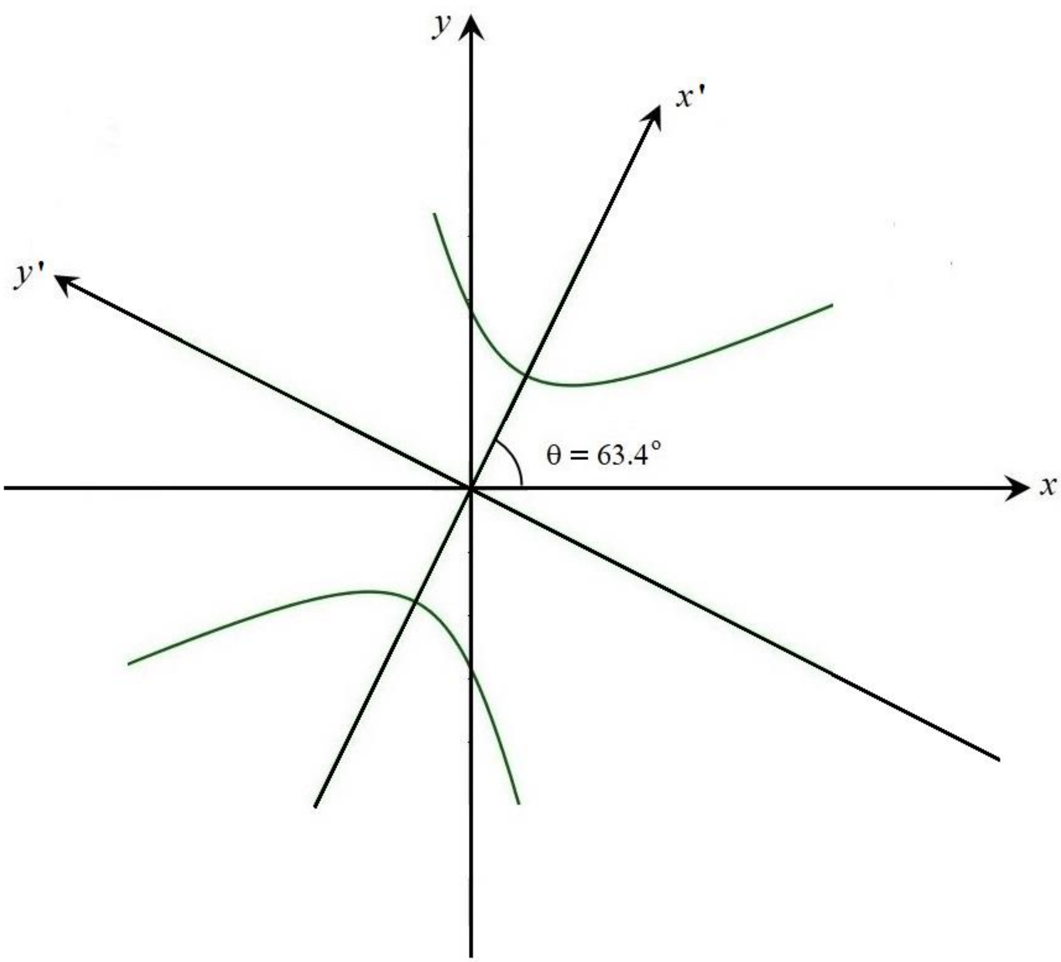
c)



42. a) $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$

b) $2\left(x'\right)^2 - 3\left(y'\right)^2 = 8$ o $\frac{\left(x'\right)^2}{4} - \frac{\left(y'\right)^2}{\frac{8}{3}} = 1$, hipérbola

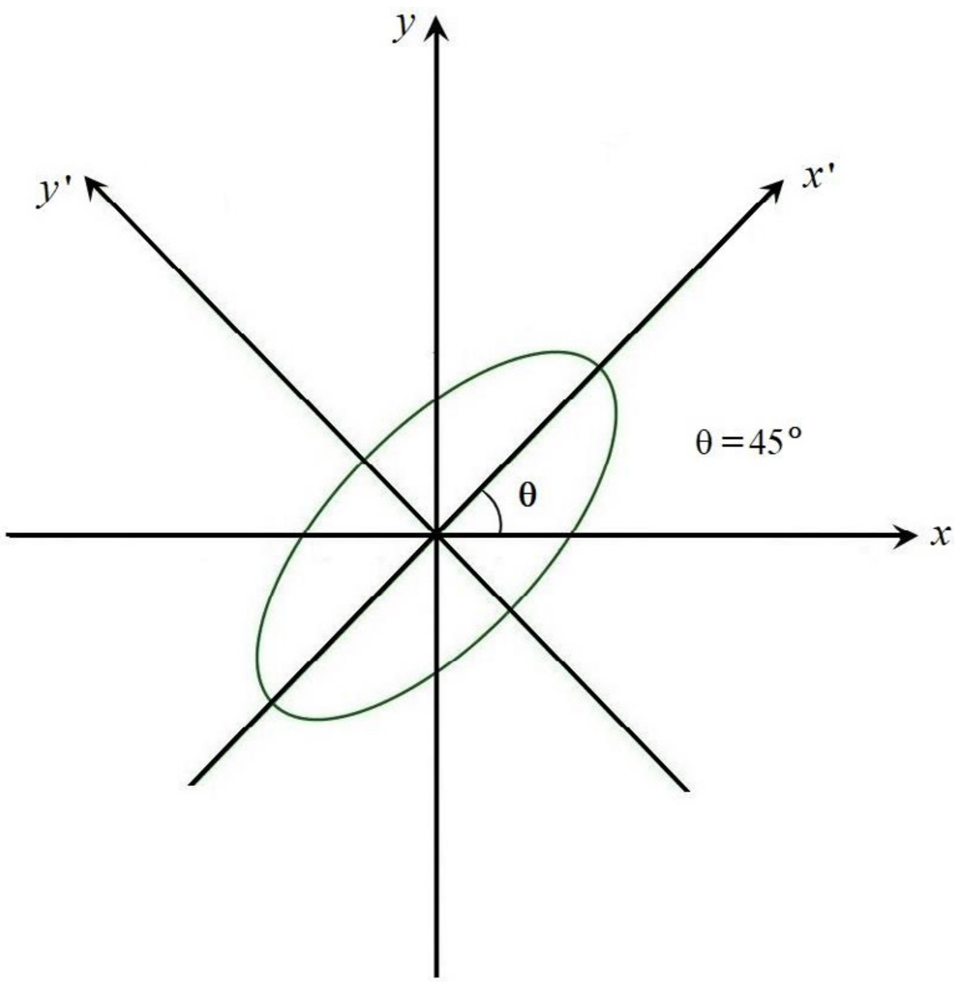
c)



43. **a)** $P = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

b) $(x')^2 + 5(y')^2 = 15$ o $\dfrac{(x')^2}{15} + \dfrac{(y')^2}{3} = 1$

c)

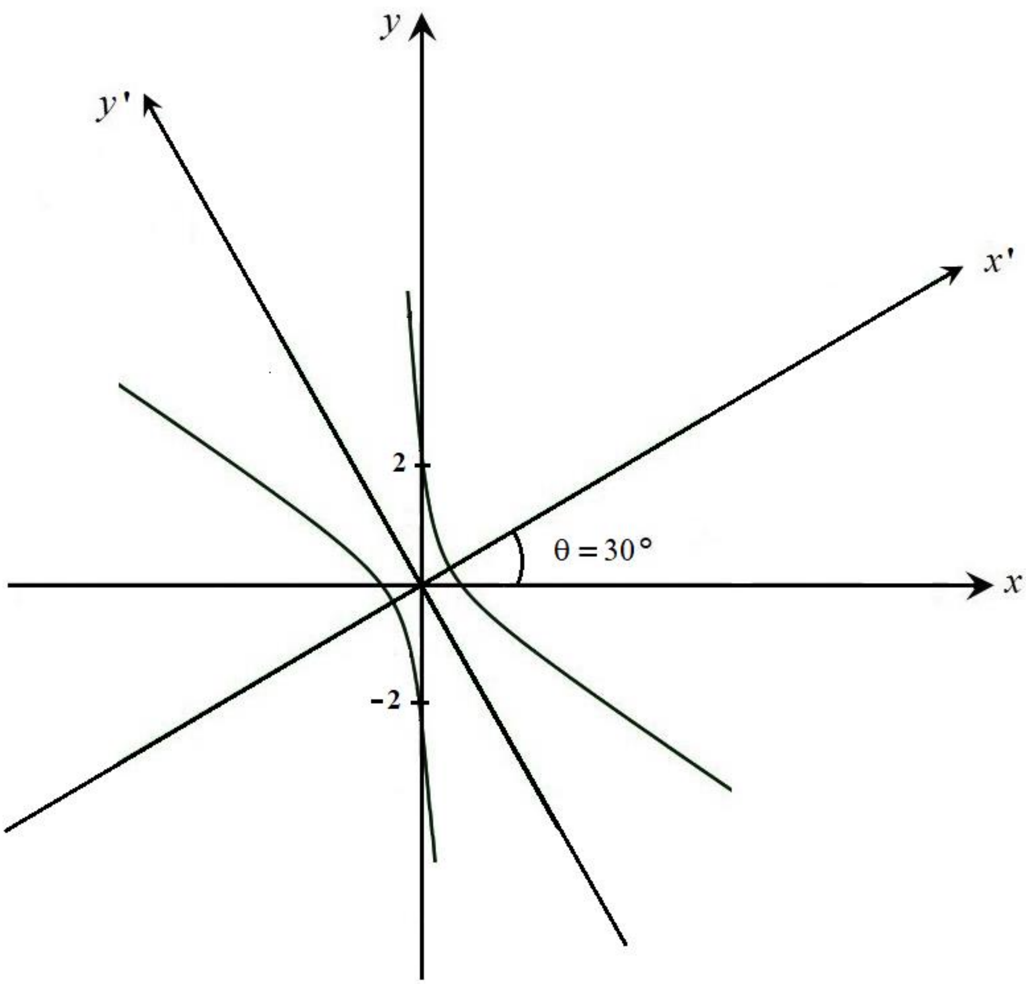


44. **a)** $P = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$

b) $4(x')^2 - (y')^2 = 1$ o $\dfrac{(x')^2}{\frac{1}{4}} - \dfrac{(y')^2}{1} = 1$

c) $\theta = 30°$

d)



ÍNDICE
1
2
3
4
5

BIBLIOGRAFÍA

ANTON, H., R. Chris, *Introducción al Álgebra lineal*, 5a. edición, México, Limusa Noriega, 2011.

AYRES, Frank Jr., *Álgebra moderna*, México, Mc Graw Hill, 2011.

GROSSMAN, S. I., J.J. Flores G., *Álgebra lineal*, 7a. edición, México, Mc Graw Hill, 2012.

LAY, D. C., S. R. Lay, J.J. McDonald, *Álgebra lineal y sus aplicaciones*, 5a. edición, México, Pearson, 2016.

LARSON, R., D. Falvo, *Fundamentos de Álgebra lineal*, 7a. edición, México, Cengage Learning Editores, 2015.

LIPSCHUTZ, Seymour*, Álgebra lineal*, 2a. edición, México, Mc Graw Hill, 1992.

POOLE, D., *Álgebra lineal*, 4a. edición, México, Cengage Learning Editores, 2017.

SOLAR G. E., L. Speziale, *Apuntes de Álgebra lineal*, 3a. edición, México, Limusa-Facultad de Ingeniería-UNAM, 1996.

WEISS-DUBISCH, *Álgebra superior*, México, Limusa, 1986.

udae
PUBLICACIONES FI

Fundamentos de álgebra lineal y ejercicios
Se publicó la segunda edición electrónica de un ejemplar (50 MB) en formato PDF en agosto de 2019, en el repositorio de la Facultad de Ingeniería, UNAM, Ciudad Universitaria, Ciudad de México. C.P. 04510

El diseño estuvo a cargo de la Unidad de Apoyo Editorial de la Facultad de Ingeniería. Las familias tipográficas utilizadas fueron Calibri para texto y Alegreya para títulos, ambas con sus respectivas variantes.