



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

---

**FACULTAD DE INGENIERÍA**

**Interacción hidrodinámica  
entre dos burbujas en un  
fluido viscoelástico**

**TESIS**

Que para obtener el título de  
**Ingeniero mecánico**

**P R E S E N T A**

Alam Uziel Garcidueñas Correa

**DIRECTOR DE TESIS**

Dr. Roberto Zenit Camacho



**Ciudad Universitaria, Cd. Mx., Ingresada 2019**



*A Angélica, Javier y Kin, por ser el apoyo más grande que he tenido desde que llegué a este mundo, y por ser la inspiración más grande para dar todo mi potencial día con día.*

*A Jorge y a Julieta, por ofrecerme su asombrosa amistad en la universidad, por hacer que la carrera fuera divertida y por ser el mejor equipo de ingenieros mecánicos posible.*

*A Ileana, por ser la compañera de vida más cariñosa, divertida y aventurera; por hacer del final de la carrera algo increíble y ser mi motivación más grande para seguir creciendo.*

*A Oscar, Charlie, Alejandro y Jimmy, mis mejores amigos de toda la vida, porque sé que siempre contaré con su apoyo y que gracias a ustedes mi vida está llena de locuras.*

*A todos ustedes que hicieron, hacen y harán de mi vida algo extraordinario, les dedico este trabajo que representa todo mi esfuerzo puesto en lo que amo y el final de una etapa muy importante en mi vida...*



# Reconocimientos

---

Agradezco infinitamente a mi asesor, el Dr. Roberto Zenit Camacho, por haber tenido mucha paciencia y haber aceptado asesorarme en este trabajo a pesar de todos los contratiempos presentes. Por siempre estar al pendiente de mí y de mi trabajo, y sin importar las dificultades que hubo, por acceder a encontrar la manera de estar en comunicación y darme todo el apoyo necesario.

Agradezco al programa *Apoyo para ayudantes de investigador Nivel III o Emérito del Sistema Nacional de Investigadores* del CONACYT y, nuevamente, al Dr. Zenit por darme la oportunidad de recibir una beca que sin duda alguna hizo la realización de este trabajo algo más sencillo.

También doy gracias a Bernardo Palacios, por ayudarme con las mediciones reológicas y la preparación del fluido no newtoniano utilizado en esta investigación y a Verónica Ángeles por su apoyo con las mediciones del fluido newtoniano utilizado en el proyecto.

Finalmente, agradezco a Salvador Villareal por el intercambio intelectual, las recomendaciones y sugerencias sobre la investigación.



# Resumen

---

El desarrollo de nuevas tecnologías requiere atención prioritaria en las áreas menos estudiadas de la ciencia. Los fluidos no newtonianos, así como los flujos multifásicos, han sido ampliamente estudiados, sin embargo, el entendimiento de estos es muy poco comparado con el área de los fluidos newtonianos monofásicos. En esta investigación se estudió el comportamiento de un flujo multifásico no newtoniano específico: la interacción hidrodinámica que se presenta entre dos burbujas en ascenso alineadas verticalmente dentro de un fluido viscoelástico. Los resultados se compararon con el comportamiento ya estudiado en fluidos newtonianos. Se utilizaron tres tamaños de burbuja diferentes con el fin de verificar si había un comportamiento distinto dependiente del tamaño de estas. Se encontró que cuando las burbujas se encuentran por encima de un volumen crítico, estas presentan una interacción hidrodinámica significativamente distinta a la que se presentaría en un fluido newtoniano. Este comportamiento resalta las propiedades elásticas del fluido no newtoniano. Por otra parte, si la burbuja está por debajo de dicho volumen crítico, se descubrió que las burbujas tienen un comportamiento muy similar al comportamiento del fluido newtoniano.





# Índice general

---

|  |           |
|--|-----------|
| Índice de figuras  | IX        |
| Índice de tablas   | XIII      |
| <b>1. Introducción</b>   | <b>1</b>  |
| 1.1. Antecedentes . . . . .  | 1         |
| 1.1.1. Flujos multifásicos . . . . .   | 2         |
| 1.1.1.1. Descripción de un flujo multifásico . . . . .                                       | 2         |
| 1.1.1.2. Tipos de flujo multifásico . . . . .  | 2         |
| 1.1.1.3. Flujos multifásicos gas - líquido con burbujas en<br>conductos verticales . . . . . | 3         |
| 1.1.1.4. Ecuaciones de movimiento para una burbuja . . . . .                                 | 5         |
| 1.1.2. Fluidos no newtonianos . . . . .  | 8         |
| 1.1.2.1. Descripción de un fluido no newtoniano . . . . .                                    | 9         |
| 1.1.2.2. Tipos de fluido no newtoniano . . . . .   | 10        |
| 1.1.2.3. Fluidos viscoelásticos . . . . .  | 13        |
| 1.1.3. Burbujas en fluidos no newtonianos . . . . .  | 15        |
| 1.2. Presentación . . . . .  | 21        |
| 1.2.1. Objetivo . . . . .  | 21        |
| 1.2.2. Metodología . . . . .   | 21        |
| 1.2.3. Hipótesis . . . . .   | 23        |
| <b>2. Diseño experimental</b>  | <b>25</b> |
| 2.1. Diseño y construcción del dispositivo experimental . . . . .                            | 25        |
| 2.2. Diseño del experimento . . . . .  | 27        |
| 2.2.1. Fluidos . . . . .   | 29        |
| 2.2.2. Adquisición de datos . . . . .  | 31        |
| <b>3. Análisis de resultados</b>   | <b>33</b> |
| 3.1. Tratamiento de datos . . . . .  | 33        |
| 3.2. Burbujas aisladas . . . . .   | 37        |

## ÍNDICE GENERAL

---

|   |           |
|---|-----------|
| 3.3. Interacción entre burbujas . . . . .   | 45        |
| 3.4. Resumen de la interacción entre burbujas dentro del fluido viscoelástico . . . . . | 58        |
| <b>4. Conclusiones y alcances</b>   | <b>63</b> |
| 4.1. Conclusiones . . . . .   | 63        |
| 4.2. Alcances . . . . .   | 64        |
| <b>A. Código de MATLAB</b>  | <b>65</b> |
| <b>B. Razón de corte promedio</b>   | <b>69</b> |
| <b>Referencias</b>  | <b>71</b> |

## Índice de figuras

---

|       |   |    |
|-------|---|----|
| 1.1.  | Esquematzación de diferentes patrones de flujo en sistemas multifásicos: A) Flujo disperso de partículas sólidas en un medio líquido, B) Flujo disperso impulsado por gravedad de burbujas de gas en un medio líquido, C) Flujo separado líquido - líquido, D) Flujo separado anular de condensación de película con núcleo gaseoso . | 3  |
| 1.2.  | Fotografías de un flujo bifásico de aire y agua en un ducto vertical de 10.2 [cm] de diámetro. De izquierda a derecha: $\alpha_{aire} = 0.01$ , $\alpha_{aire} = 0.045$ , $\alpha_{aire} > 0.15$ . Tomado de (19) . . . . .   | 4  |
| 1.3.  | Algunos patrones de flujo para un sistema bifásico gas - líquido en un conducto vertical. De izquierda a derecha: Flujo burbuja, flujo bache, flujo tapón y flujo anular. Tomado de (36) . . . . .  | 5  |
| 1.4.  | Comparación de reogramas entre fluidos newtonianos y no newtonianos . . . . .   | 9  |
| 1.5.  | El efecto Weissenberg presente en un fluido viscoelástico. El fluido escala una barra giratoria. Tomado de (5) . . . . .  | 14 |
| 1.6.  | Efecto sifón sin tubo en un fluido viscoelástico. Solución acuosa de Polyox WSR 301. Tomado de (5) . . . . .  | 15 |
| 1.7.  | Comparación de la forma geométrica de una burbuja en un fluido newtoniano(izquierda) y en un fluido viscoelástico(derecha). Tomado de (30) . . . . .  | 16 |
| 1.8.  | Velocidad terminal de la burbuja como función del volumen de la burbuja en un fluido viscoelástico. Los diferentes símbolos representan mediciones tomadas a diferentes alturas en una columna de fluido. Tomado de (39) como adaptación de (23) . . . . .  | 17 |
| 1.9.  | Campo de velocidades de flujo para una burbuja ascendiendo en una solución de Poliacrilamida a 0.25 % en peso. Tomado de (17) .   | 17 |
| 1.10. | Evolución de la geometría de una burbuja ascendiendo en un fluido viscoelástico adelgazante. Tomado de (39) como adaptación de (30)   | 19 |
| 1.11. | Fotogramas de la sedimentación de dos partículas sólidas con el fenómeno <i>Drafting - Kissing - Tumbling</i> presente. Adaptado de (11)  | 20 |

## ÍNDICE DE FIGURAS

---

|   |    |
|---|----|
| 1.12. Grupos de burbujas en ascenso dentro de (a) fluido newtoniano, (b) fluido adelgazante, (c) y (d) fluido viscoelástico con viscosidad constante. Adaptado de (39) . . . . .  | 20 |
| 1.13. Esquema de la configuración del sistema experimental utilizado para la investigación. . . . .   | 22 |
| 2.1. Arreglo experimental utilizado. 1. Iluminación. 2. Pantalla para generar iluminación difusa. 3. Columna de vidrio transparente. 4. Aguja/Capilar. 5. Cámara Phantom de alta velocidad. 6. Bomba de aire. 7. Toma de aire ambiente. 8. Válvulas de paso. 9. Válvula anti - retorno. . . . . | 28 |
| 2.2. Mediciones reológicas del fluido viscoelástico. . . . .  | 30 |
| 2.3. Mediciones de los módulos de almacenamiento y pérdida. Para obtener el tiempo de relajamiento del fluido, se debe encontrar el valor donde las curvas $G'$ y $G''$ cruzan, y después tomar el recíproco de esa cantidad.. . . .  | 30 |
| 3.1. Resultado del análisis de imagen para un par de burbujas en un fluido viscoelástico con una aguja calibre 25G. Errores de localización debido a la mala calidad de imagen. . . . .   | 35 |
| 3.2. Remoción de picos en una colección de datos por medio de un filtro Hampel. . . . .   | 36 |
| 3.3. Suavizado de curva para la velocidad de una burbuja. . . . .   | 37 |
| 3.4. Velocidad contra tiempo para los tres experimentos seleccionados de cada calibre de aguja. . . . .   | 38 |
| 3.5. Coeficientes de arrastre ( $C_D$ ) y números de Reynolds ( $Re$ ) para cada caso en un fluido newtoniano. . . . .  | 40 |
| 3.6. Velocidad en función del tiempo para cada experimento en un fluido viscoelástico. . . . .  | 41 |
| 3.7. Ajuste por ley de potencias para la viscosidad del fluido no newtoniano. . . . .   | 43 |
| 3.8. Coeficientes de arrastre ( $C_D$ ) y números de Reynolds ( $Re$ ) para cada caso en un fluido viscoelástico adelgazante. . . . .   | 44 |
| 3.9. Desarrollo de la interacción hidrodinámica entre dos burbujas en un fluido newtoniano. La evolución está en función del tiempo adimensional $t^*$ . $Re = 5.15$ . . . . .  | 46 |
| 3.10. Desarrollo de la interacción hidrodinámica entre dos burbujas en un fluido viscoelástico. $Re = 29.71$ . . . . .  | 48 |
| 3.11. Definición del ángulo a considerar. . . . .   | 48 |

|  |    |
|--|----|
| 3.12. Comportamiento de la posición relativa entre las burbujas y el ángulo que forman con respecto a la vertical. $Re_{newtoniano} = 5.15$ , $Re_{viscoelástico} = 29.71$ , $De = 10.08$ . . . . .  | 49 |
| 3.13. Evolución de la velocidad de las burbujas en ambos fluidos. $Re_{newtoniano} = 5.15$ , $Re_{viscoelástico} = 29.71$ , $De = 10.08$ . . . . .   | 52 |
| 3.14. Comportamiento de la posición relativa entre las burbujas y el ángulo que forman con respecto a la vertical.. $Re_{newtoniano} = 6.29$ , $Re_{viscoelástico} = 41.61$ , $De = 10.35$ . . . . . | 54 |
| 3.15. Evolución de la velocidad de las burbujas en ambos fluidos. $Re_{newtoniano} = 6.29$ , $Re_{viscoelástico} = 41.61$ , $De = 10.35$ . . . . .   | 56 |
| 3.16. Comportamiento de la posición relativa entre las burbujas y el ángulo que forman con respecto a la vertical. $Re_{newtoniano} = 3.53$ , $Re_{viscoelástico} = 11.92$ , $De = 8.29$ . . . . .   | 57 |
| 3.17. Evolución de la velocidad de las burbujas en ambos fluidos. $Re_{newtoniano} = 3.53$ , $Re_{viscoelástico} = 11.92$ , $De = 8.29$ . . . . .  | 59 |
| 3.18. Evolución de la interacción hidrodinámica para las burbujas con diámetros más pequeños. . . . .  | 60 |
| 3.19. Comparación de la posición relativa de las burbujas en todos los casos con el fluido viscoelástico. $Re_{d=3.6[mm]} = 41.61$ , $Re_{d=3.1[mm]} = 29.71$ , $Re_{d=2.2[mm]} = 11.92$ . . . . .   | 61 |
| 3.20. Comparación de las velocidades de las burbujas en el fluido viscoelástico. $Re_{d=3.6[mm]} = 41.61$ , $Re_{d=3.1[mm]} = 29.71$ , $Re_{d=2.2[mm]} = 11.92$ . . . . .                            | 61 |



# Índice de tablas

---

|  |    |
|--|----|
| 1.1. Descripción de los fluidos viscosos no newtonianos . . . . .  | 11 |
| 1.2. Descripción de los fluidos con comportamientos dependientes del tiempo. . . . .   | 12 |
| 2.1. Especificaciones de las agujas utilizadas de acuerdo a la escala Birmingham.(3) . . . . .                                     | 26 |
| 2.2. Propiedades de los fluidos utilizados en el experimento. (Propiedades medidas a una temperatura de 25[°C]) . . . . .          | 31 |
| 2.3. Resumen de los parámetros para la adquisición de datos. . . . .   | 32 |
| 3.1. Velocidad promedio por cada experimento, promedio entre velocidades, diámetros y números de Reynolds para el caso newtoniano. | 39 |
| 3.2. Velocidades terminales para las burbujas aisladas en el fluido viscoelástico. . . . .   | 42 |
| 3.3. Viscosidades efectivas en función de la tasa de corte promedio. . .   | 43 |
| 3.4. Números de Deborah para los casos estudiados. . . . .   | 62 |





# Introducción

---

La realización de toda investigación requiere de establecer un contexto teórico y conceptual en el cual estará basada. Así mismo, es importante que se defina con precisión el alcance que tendrá dicha investigación. En este primer capítulo se presentan las bases teóricas y conceptos necesarios para una completa comprensión del material presentado. Posteriormente, se presentará el estado del arte en relación a la investigación presente. Además, se presentarán los límites de la investigación, así como sus objetivos principales, el método utilizado para su realización y la hipótesis planteada.

## 1.1. Antecedentes

El currículo universitario del área de mecánica de fluidos cubre solamente una pequeña porción de la amplia gama de diferentes tipos de fluidos y flujos que se encuentran en la naturaleza, dado que estos son los casos más simplificados para ser estudiados. No obstante, es importante conocer los fenómenos más complejos que ocurren en la naturaleza para poder ser aprovechados en el desarrollo de nuevas tecnologías.

La mecánica de fluidos que se estudia de manera introductoria se limita a los fluidos monofásicos newtonianos. Esta sección pretende definir lo que son los flujos monofásicos y multifásicos, explicar las diferencias entre los fluidos newtonianos y los fluidos no newtonianos, describir la importancia que tienen estos conceptos para esta investigación, y por supuesto, presentar la relevancia que tienen para el desarrollo tecnológico.

### 1.1.1. Flujos multifásicos

Un flujo monofásico es aquél donde el fluido está en una sola fase, o bien, que solo existe un componente o sustancia pura, e.g. flujos de agua en estado líquido.

Sin embargo, en la naturaleza existen muchos casos en los que se tienen diferentes componentes o diferentes fases de la misma sustancia en un solo flujo; a esto se le conoce como flujo multifásico.

#### 1.1.1.1. Descripción de un flujo multifásico

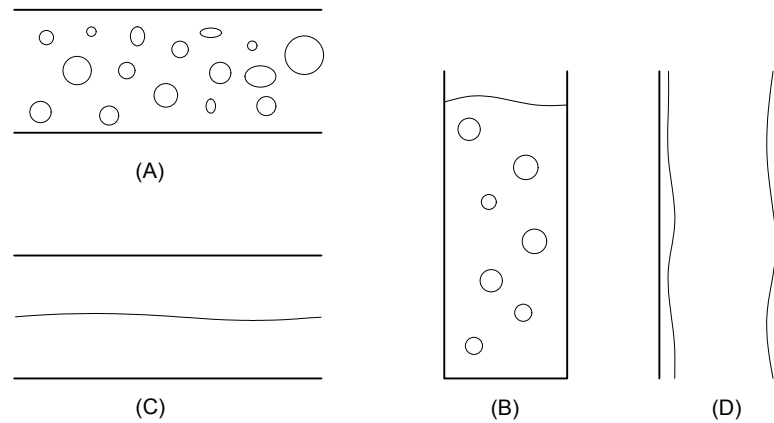
Un flujo multifásico es el flujo de una mezcla de fases tales como gases (burbujas) en un líquido, líquido (gotas) en un gas, líquidos de diferentes densidades, sólidos con diferentes sistemas cristalinos, entre otros.(20)

La presencia de estos sistemas en la naturaleza es vasta, e.g. el estudio de las olas del mar; ya que el sistema está compuesto por el flujo atmosférico del aire sobre el flujo de agua del mar. Otro ejemplo común aplicado a la tecnología, es el estudio de la atomización de combustible líquido para reacciones de combustión en un ambiente de oxígeno gaseoso.

#### 1.1.1.2. Tipos de flujo multifásico

Debido a la interacción de las distintas fases que se pueden encontrar en un sistema multifásico, se pueden generar diferentes patrones de flujo que dependen de las fuerzas de flotación, turbulencia, inercia, y tensión superficial de las fases involucradas.(14)

Existen muchas maneras de clasificar los sistemas multifásicos, depende de la literatura consultada. Se puede dividir a estos flujos en dos grandes grupos: *flujos separados* y *flujos dispersos*. Los *flujos dispersos* son aquellos que consisten de pequeñas partículas, gotas o burbujas dispersas en un volumen continuo de una sola fase líquida o gaseosa. Por otro lado, los *flujos separados* consisten de dos o más corrientes continuas de fluidos separados por interfaces. (6) Dentro de estas principales clasificaciones se tienen patrones de flujo más específicos; entre los sistemas dispersos, se pueden considerar flujos horizontales que son impulsados por diferencias de presión, e.g. el flujo de partículas sólidas dispersas en un líquido tal como se puede observar en el transporte de sedimentos o minerales. También existen los flujos verticales impulsados por el campo gravitacional de la Tierra, e.g. el flujo vertical de burbujas en un líquido estático tal como se podría observar en

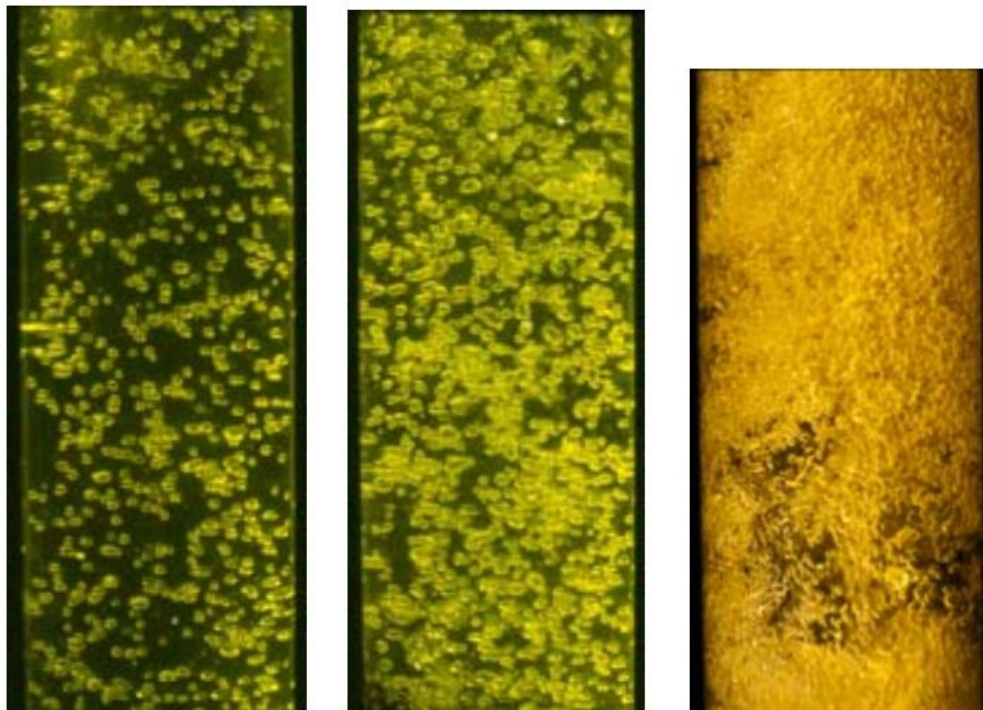


**Figura 1.1:** Esquemática de diferentes patrones de flujo en sistemas multifásicos: A) Flujo disperso de partículas sólidas en un medio líquido, B) Flujo disperso impulsado por gravedad de burbujas de gas en un medio líquido, C) Flujo separado líquido - líquido, D) Flujo separado anular de condensación de película con núcleo gaseoso

algunos reactores de la industria farmacéutica. En sistemas de *flujos separados* se pueden tener flujos estratificados, e.g. el flujo de aceite y agua en tuberías; también pueden presentarse flujos anulares generados por la condensación de películas de gas, entre otros. La figura 1.1 muestra de manera esquemática estos patrones de flujo.

### 1.1.1.3. Flujos multifásicos gas - líquido con burbujas en conductos verticales

Como se mencionó en la sección anterior, existen muchos patrones de flujo que describen la distribución geométrica de las fases en un sistema multifásico. En este estudio se trabajó con un sistema bifásico gas - líquido en un conducto vertical, por lo que se hará una descripción más extensa de los patrones de flujo dentro de esta categoría de flujos multifásicos. La mayoría de estos patrones de flujo puede ser identificado de manera visual, no obstante, para muchos casos, se ha investigado la dependencia que tienen estos patrones de flujo con respecto a las propiedades del sistema, tales como densidad, viscosidad, tensión superficial o fracción volumétrica.

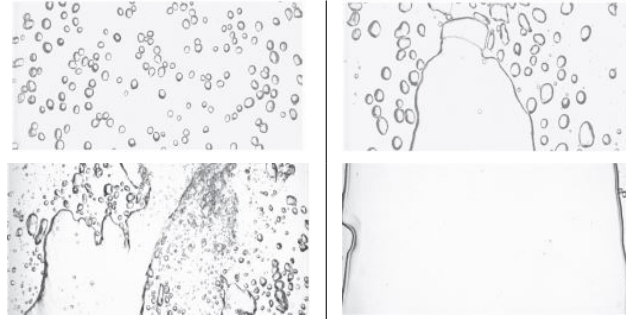


**Figura 1.2:** Fotografías de un flujo bifásico de aire y agua en un ducto vertical de 10.2 [cm] de diámetro. De izquierda a derecha:  $\alpha_{aire} = 0.01$ ,  $\alpha_{aire} = 0.045$ ,  $\alpha_{aire} > 0.15$ . Tomado de (19)

La fracción volumétrica de un componente o fase se denota por  $\alpha_N$ , donde  $N$  representa el componente o fase en cuestión. Para el caso bifásico, donde solo existen dos componentes o fases  $A$  y  $B$ , se tiene que  $\alpha_B = 1 - \alpha_A$ . Esta propiedad representa la fracción de volumen que ocupa la fase o componente  $N$  del volumen total del sistema. Es decir:

$$\alpha_N = \frac{V_N}{V_{sistema}} \quad (1.1)$$

La figura 1.2 muestra los patrones de flujo que se presentan en un sistema bifásico aire - agua con respecto a la fracción volumétrica del aire. Se puede apreciar que es fácil distinguir a simple vista la diferencia entre los patrones de flujo, y además que se tiene una dependencia respecto a la variable  $\alpha_{aire}$ . Con una fracción volumétrica baja se tiene un régimen de flujo en el que se tienen burbujas individuales ascendentes ( $\alpha_{aire} = 0.01$ ), conforme la fracción volumétrica incrementa, el flujo se vuelve inestable a un valor específico de  $\alpha_{aire}$ , el cual para este caso está ilustrado en el tercer caso donde  $\alpha_{aire} > 0.15$ .(6)



**Figura 1.3:** Algunos patrones de flujo para un sistema bifásico gas - líquido en un conducto vertical. De izquierda a derecha: Flujo burbuja, flujo bache, flujo tapón y flujo anular. Tomado de (36)

La figura 1.3 muestra algunos otros patrones de flujo que se presentan en los sistemas multifásicos gas - líquido en conductos verticales. Estos patrones de flujo no solo dependen de la fracción volumétrica del sistema, sino de otras propiedades del mismo, propiedades de los fluidos e incluso, propiedades del conducto como la rugosidad de las paredes, entre otros.

#### 1.1.1.4. Ecuaciones de movimiento para una burbuja

El sistema que se estudió en esta investigación es el flujo de dos burbujas de gas colineales impulsadas por gravedad en un fluido líquido estático. Esta sección presenta algunos modelos matemáticos que describen la dinámica de una burbuja inmersa en un líquido estático.

Se hacen algunas suposiciones:

- los efectos debidos a la interacción entre burbujas cercanas son despreciados
- el tamaño de la burbuja es mucho más pequeño que el del sistema completo
- la burbuja tiene un diámetro  $D$  y un radio  $R$
- el fluido estático es líquido, incompresible y newtoniano
- la única fuerza externa es la gravedad  $g$
- se considera un movimiento rectilíneo relativo en la dirección, convenientemente elegida,  $x_1$
- el número de Reynolds para el flujo alrededor de una burbuja es (39):

$$Re = \frac{\rho_{\text{liquido}} U_{\infty} D}{\mu_{\text{liquido}}} \quad (1.2)$$

## 1. INTRODUCCIÓN

---

Dadas las consideraciones anteriores, se tiene que las ecuaciones a resolver son: la ecuación de continuidad (1.3) y las ecuaciones de Navier - Stokes (ecuaciones de conservación de momentum) en su forma incompresible (1.4). (6)

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1.3)$$

$$\rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \rho g_i + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \quad (1.4)$$

donde  $\rho$  y  $\mu$  son la densidad y viscosidad dinámica del fluido líquido estático respectivamente. Para fluidos incompresibles, se tiene, entonces, un sistema de ecuaciones cerrado: cuatro icógnitas ( $P$ ,  $u_i$ ), y cuatro ecuaciones (continuidad y la ecuación vectorial de conservación de momentum).

Es necesario, además, tener condiciones de frontera para poder aplicar estas ecuaciones a casos específicos y obtener soluciones. De acuerdo a (10), las condiciones de frontera necesarias para una burbuja en un fluido son las siguientes:

- La velocidad normal en ambas fases debe ser igual en la interfaz.

$$u_{n_{liquido}} = u_{n_{burbuja}} \quad (1.5)$$

- La velocidad tangencial en ambas fases debe ser igual en la interfaz.

$$u_{t_{liquido}} = u_{t_{burbuja}} \quad (1.6)$$

- Los esfuerzos normales deben estar balanceados en la interfaz en condiciones de equilibrio.

$$P_{burbuja} + \tau_{ii_{burbuja}} - P_{liquido} - \tau_{ii_{liquido}} = \frac{2\sigma}{R} \quad (1.7)$$

donde  $\sigma$  es la tensión superficial o interfacial, y  $R$  es el radio de la burbuja.

- Los esfuerzos cortantes deben estar balanceados en la interfaz.

$$n_i \tau_{ij_{liquido}} - n_i \tau_{ij_{burbuja}} = \frac{\partial \sigma}{\partial x_j} \quad (1.8)$$

donde  $i \neq j$ , y  $n_i$  es un vector normal a la superficie de la burbuja.

Una vez planteadas estas condiciones de frontera, se pueden hacer simplificaciones y consideraciones adicionales para encontrar un modelo matemático que describa el sistema.

Hadamard (15) y Rybczynski (25) encontraron una aproximación a este sistema. Después de aplicar las consideraciones ya mencionadas, se considera que las fuerzas viscosas predominan sobre las inerciales, de manera que:  $Re \rightarrow 0$ . Las ecuaciones de Navier - Stokes se simplifican a la siguiente expresión:

$$\frac{\partial P}{\partial x_i} - \rho g_i = \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \quad (1.9)$$

La solución de estas ecuaciones con todas las simplificaciones, condiciones y suposiciones anteriores se conoce como solución de Hadamard - Rybczynski y nos da dos resultados muy importantes: la fuerza de arrastre ejercida por el fluido sobre la burbuja y la velocidad terminal de la burbuja dentro del fluido.

$$C_D = \frac{2F_D}{\pi \rho_{liquido} U^2 R^2} = \frac{8}{Re} \left( \frac{2 + 3\kappa}{1 + \kappa} \right) \quad (1.10)$$

$$U_\infty = \frac{2}{3} \frac{g R^2 \Delta \rho}{\mu_{liquido}} \left( \frac{1 + \kappa}{2 + 3\kappa} \right) \quad (1.11)$$

donde  $C_D$  y  $F_D$  son el coeficiente y la fuerza de arrastre respectivamente.  $U_\infty$  es la velocidad terminal.  $\rho$  es la densidad del líquido, y  $\Delta \rho$  es la diferencia entre densidades del líquido y la burbuja.  $\kappa$  es el cociente entre viscosidades  $\mu_{burbuja}/\mu_{liquido}$ .

Hadamard y Rybczynski nos dan una aproximación para el flujo alrededor de una burbuja, sin embargo, esta aproximación requiere de una interfaz burbuja - líquido completamente carente de contaminantes y eso, evidentemente, es una suposición muy alejada de la realidad. Por otro lado, se tiene la más conocida teoría de Stokes para calcular el flujo viscoso alrededor de cuerpos esféricos sólidos. Con esta teoría el coeficiente de arrastre y la velocidad terminal están dando por:

$$C_D = \frac{24}{Re} \quad (1.12)$$

$$U_\infty = \frac{g D^2 \Delta \rho}{18 \mu_{liquido}} \quad (1.13)$$

Con las ecuaciones de Stokes y de Hadamard - Rybczynski se puede acotar la velocidad terminal y el coeficiente de arrastre que tendrá el flujo real.

### 1.1.2. Fluidos no newtonianos

Para poder explicar lo que es un fluido no newtoniano, es imprescindible definir lo que es un fluido newtoniano.

Existe una entidad matemática conocida como tensor de esfuerzos que describe los esfuerzos internos que desarrolla un fluido. El tensor de esfuerzos para un fluido está definido por la siguiente ecuación:

$$T_{ij} = -P\delta_{ij} + \tau_{ij} \quad (1.14)$$

donde  $T$  es el tensor de esfuerzos,  $P$  es la presión y  $\tau$  es otro tensor conocido como tensor de esfuerzos viscosos, y es este tensor el que nos describe el comportamiento que tiene un fluido newtoniano y las diferencias con respecto a un fluido no newtoniano.

Para un fluido newtoniano el tensor de esfuerzos está descrito por la siguiente ecuación(21):

$$T_{ij} = -P\delta_{ij} - \frac{2}{3}\mu\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\delta_{ij} + 2\mu D_{ij} \quad (1.15)$$

donde  $D$  es el tensor de rapidez de deformación y está definido por:

$$D_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \quad (1.16)$$

Por lo tanto el tensor de esfuerzos viscosos está definido por:

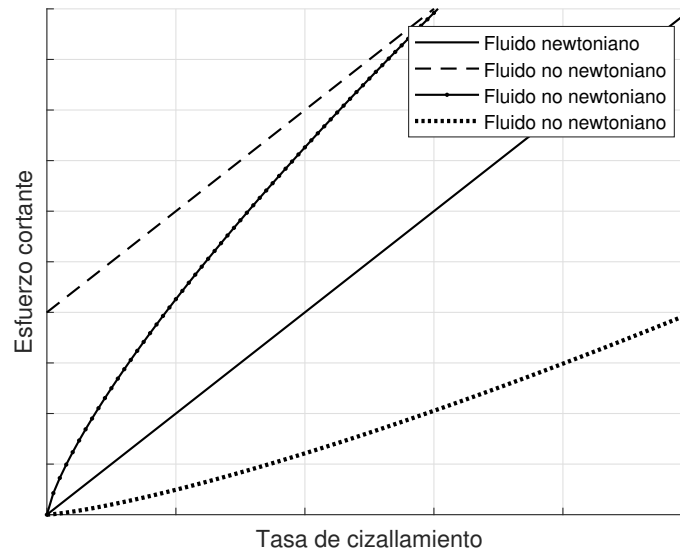
$$\tau_{ij} = -\frac{2}{3}\mu\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\delta_{ij} + 2\mu D_{ij} \quad (1.17)$$

Esto es, en esencia, lo que se conoce como Ley de Viscosidad de Newton(21). Si analizamos los elementos fuera de la diagonal de este tensor, es decir  $\tau_{ij}$  con  $i \neq j$ , podemos observar que  $\tau_{ij}$  es una medida de la oposición que tiene el fluido al movimiento(9).

La Ley de Viscosidad de Newton implica lo siguiente(21):

- el esfuerzo cortante es una función lineal de la rapidez de deformación.
- los coeficientes en el tensor de esfuerzos son funciones del estado termodinámico del sistema
- cuando el fluido es estacionario, el esfuerzo es la presión termodinámica





**Figura 1.4:** Comparación de reogramas entre fluidos newtonianos y no newtonianos

- el fluido es isótropo
- el tensor de esfuerzos es simétrico
- se hace la suposición de que la presión termodinámica y mecánica son iguales (Suposición de Stokes (13))

Los fluidos no newtonianos no satisfacen la primera propiedad.

#### 1.1.2.1. Descripción de un fluido no newtoniano

Un reograma o curva de flujo es una curva que describe el comportamiento del esfuerzo cortante en función de la tasa de cizallamiento(9). Dado que un fluido newtoniano tiene un comportamiento lineal, su curva de flujo es una línea recta con pendiente igual a  $\mu$ .

Un fluido no newtoniano es aquél cuyo reograma no es una curva recta o no pasa por el origen(9).

La figura 1.4 muestra el comportamiento del esfuerzo cortante con respecto a la rapidez de corte para un fluido newtoniano y algunos fluidos no newtonianos. Estos fluidos se pueden clasificar con base a este comportamiento.

### 1.1.2.2. Tipos de fluido no newtoniano

Los fluidos no newtonianos se pueden clasificar en tres grandes grupos(9):

1. Fluidos para los cuales el esfuerzo cortante está determinado solamente por el valor de la rapidez de corte en ese punto, en ese instante de tiempo. Estos fluidos se conocen como *fluidos independientes del tiempo, puramente viscosos, inelásticos* o *fluidos newtonianos generalizados*
2. Fluidos más complejos cuyo esfuerzo cortante depende de la duración del corte, e incluso a veces, del historial cinemático del fluido. Estos fluidos se conocen como *fluidos dependientes del tiempo*.
3. Fluidos que presentan características tanto de fluidos viscosos, como de sólidos elásticos. Es decir, muestran recuperación elástica parcial después de una deformación. Estos fluidos reciben el nombre de *fluidos viscoelásticos*.

Estas grandes categorías se pueden dividir en subcategorías debido a comportamientos más específicos. Dentro de la categoría de fluidos cuyo comportamiento es independiente del tiempo, se tienen tres clasificaciones: *fluidos adelgazantes*, *fluidos viscoplásticos* y *fluidos dilatantes*. La tabla 1.1 describe el comportamiento y las propiedades de este tipo de fluidos.

Para algunos fluidos no newtonianos independientes del tiempo, existen modelos matemáticos que permiten conocer la viscosidad del fluido. Si se grafica la relación entre el esfuerzo cortante y la tasa de corte en coordenadas logarítmicas, se puede observar una tendencia en línea recta sobre un rango limitado de tasas de corte. Para esta parte de la curva de flujo, se tiene la siguiente expresión (9):

$$\tau_{ij} = m(\dot{\gamma}_{ij})^n \quad (1.18)$$

donde  $i \neq j$ ,  $\tau_{ij}$  es el esfuerzo cortante y  $\dot{\gamma}_{ij}$  es la tasa de corte.

Así que la viscosidad aparente del fluido se obtiene por medio de la ecuación:

$$\mu_{eff} = \frac{\tau_{ij}}{\dot{\gamma}_{ij}} = m(\dot{\gamma}_{ij})^{n-1} \quad (1.19)$$

donde  $i \neq j$ . De acuerdo a los valores de n, si:

- $n < 1$ , el fluido exhibe un comportamiento pseudoplástico
- $n = 1$ , el fluido es newtoniano
- $n > 1$ , el fluido se comporta como dilatante

| Fluido viscoso no newtoniano | Características   | Ejemplos  |
|------------------------------|---|---|
| Adelgazante o pseudoplástico | En estos fluidos el esfuerzo cortante decrece conforme la rapidez de corte aumenta.   | Soluciones poliméricas, pintura, crema batida, Ketchup. La sangre humana posee propiedades no Newtonianas de un fluido adelgazante, es por esto que la sangre es capaz de fluir por los pequeños capilares del sistema cardiovascular sin problemas.  |
| Viscoplástico                | Este tipo de fluidos poseen un esfuerzo de cedencia ( $\tau_0$ ) que se debe superar para que el material comience a fluir. Si el esfuerzo cortante aplicado no es suficiente, el fluido únicamente se deformará elásticamente. | Ejemplos comunes son la mayonesa, el chocolate, la mostaza. La pasta de dientes es un ejemplo perfecto, pues se sabe que esta no fluye hasta que aplicamos cierta carga en su embase.   |
| Dilatante                    | Los fluidos dilatantes son un caso similar a los adelgazantes, sin embargo, tienen el efecto opuesto: el esfuerzo cortante aumenta conforme la rapidez de corte aumenta.  | La mezcla de maicena con agua es un ejemplo muy recurrente, ya que se utiliza demasiado en demostraciones de fluidos no newtonianos para la divulgación científica. Otro buen ejemplo es la arena movediza, uno queda atrapado dentro de este fluido ya que al moverse desesperadamente, el esfuerzo cortante aplicado por el fluido aumenta, oponiéndose así al movimiento humano. |

**Tabla 1.1:** Descripción de los fluidos viscosos no newtonianos

## 1. INTRODUCCIÓN

---

| Fluido               | Características   | Ejemplos  |
|----------------------|---|---|
| Fluidos Tixotrópicos | Los fluidos tixotrópicos tienen un comportamiento en el cual la viscosidad aparente cambia con respecto al tiempo; específicamente, la viscosidad aparente decrece mientras más tiempo dure el esfuerzo cortante aplicado.                              | Suspensiones concentradas, laponita, bentonita, suspensiones de arcilla, emulsiones, suspensiones proteínicas, entre otros(4).      |
| Fluidos Reopéticos   | La reopexia también es llamada tixotropía negativa, ya que es un fenómeno opuesto a la tixotropía. Este tipo de fluidos tienen un comportamiento en el cual su viscosidad aparente incrementa con el tiempo de duración del esfuerzo cortante aplicado. | Suspensiones de oleato de amonio, suspensiones coloidales de pentóxido de Vanadio(31), algunas soluciones proteínicas, entre otros. |

**Tabla 1.2:** Descripción de los fluidos con comportamientos dependientes del tiempo.

Este modelo se conoce como fluido de ley de potencias.

Por otro lado, se tienen los fluidos cuyo comportamiento depende del tiempo que pueden clasificarse en dos categorías: *fluidos tixotrópicos* y *fluidos reopéticos*. La tabla 1.2 describe las características de estos fluidos.

Finalmente, se tienen los fluidos con comportamiento viscoelástico. Estos fluidos se describirán con mayor detalle en la siguiente sección.

### 1.1.2.3. Fluidos viscoelásticos

Cuando a un sólido se le aplica un esfuerzo cortante, este sufrirá una deformación y si el esfuerzo no es lo suficientemente grande, el material recuperará su forma original una vez que el esfuerzo sea retirado. Por otro lado, si el sólido recibe un esfuerzo cortante lo suficientemente grande, es decir, se supera el esfuerzo de cedencia del material, entonces el material fluye y sufre una deformación permanente. Por otro lado, si a un fluido se le aplica un esfuerzo cortante, este fluirá, sufriendo así una deformación permanente desde el inicio sin recuperación alguna. Cuando un material presenta ambos comportamientos se le conoce como material viscoelástico(9).

En teoría, todos los materiales presentan cierto nivel de comportamiento elástico y viscoso. Sin embargo, prácticamente los efectos de uno u otro comportamiento son completamente despreciables o incluso indistinguibles.

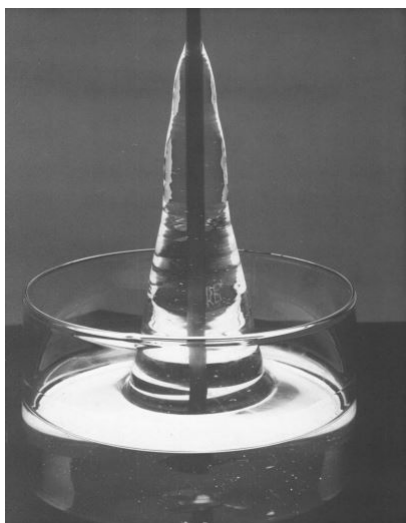
El hecho de que estos materiales posean propiedades, tanto de sólidos perfectamente elásticos, como de fluidos perfectamente viscosos hacen que un fluido viscoelástico presente muchos comportamientos interesantes que son completamente ajenos al comportamiento de los fluidos newtonianos a los que estamos acostumbrados. Esto es debido a que en este tipo de fluidos, se presentan nuevas características y propiedades reológicas importantes.

En un fluido viscoelástico, el movimiento cortante da lugar a esfuerzos normales desiguales (37). Para poder describir estos esfuerzos normales se utilizan dos propiedades conocidas como primera y segunda diferencia de esfuerzos normales. Estas propiedades están definidas como(9):

$$N_1 = \sigma_{11} - \sigma_{22} \tag{1.20}$$

$$N_2 = \sigma_{22} - \sigma_{33} \tag{1.21}$$

Estos esfuerzos normales resultantes provocan fenómenos curiosos, tal como el llamado *Efecto Weissenberg*. Si se hace girar una barra dentro de un contenedor con algún fluido newtoniano, la superficie libre forma una depresión cercana a la varilla debido a fuerzas inerciales(5). Por otro lado, si se realiza el mismo experimento pero con un fluido viscoelástico, el fluido que se encuentre cercano a la barra se abultará y si la velocidad es suficiente, el fluido escalará la barra. La figura 1.5 muestra este fenómeno.



**Figura 1.5:** El efecto Weissenberg presente en un fluido viscoelástico. El fluido escala una barra giratoria. Tomado de (5)

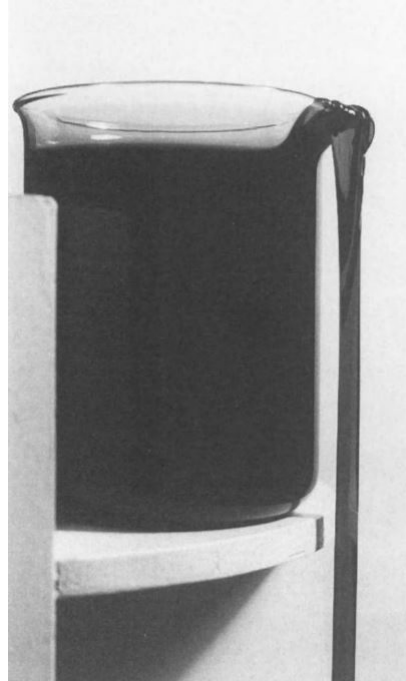
En los fluidos viscoelásticos se tienen moléculas largas y delgadas, y esto puede verse claramente en los fluidos poliméricos, pues estas moléculas son simplemente cadenas de polímero. Estas moléculas le dan comportamientos bastante particulares a este tipo de fluidos. Un fenómeno muy interesante es el fenómeno de sifón sin tubo que puede observarse en fluidos con viscosidades extensionales altas (resistencia u oposición a la extensión)(5). La figura 1.6 muestra este efecto.

Como ya se mencionó anteriormente, estos fluidos pueden tener un comportamiento tanto viscoso como elástico; pero el grado de viscosidad o elasticidad que estos presenten depende de la relación que haya entre la escala de tiempo de la deformación a la que el fluido es sometido y el tiempo que tarda el mecanismo en responder (28), esto es:

$$De = \frac{\lambda U_{\infty}}{D} \quad (1.22)$$

donde  $\lambda$  es el tiempo característico o tiempo de relajamiento (39), y  $\frac{D}{U_{\infty}}$  es la escala de tiempo de la deformación. El tiempo de relajamiento se puede definir como el tiempo que le toma a un material llegar al 63.2 % o  $[1 - (\frac{1}{e})]$  de su última respuesta elástica. Si  $De > 1$  los efectos elásticos son dominantes, por otra parte, si  $De < 1$ , entonces los efectos viscosos predominan (28).

En general, este tipo de fluidos presentan comportamientos muy distintos a los fluidos newtonianos que el ser humano está acostumbrado a observar en su



**Figura 1.6:** Efecto sifón sin tubo en un fluido viscoelástico. Solución acuosa de Polyox WSR 301. Tomado de (5)

vida cotidiana. No obstante, la teoría es muy escasa en comparación con la teoría para fluidos newtonianos, esto debido a la alta complejidad matemática que tiene el modelar el comportamiento de estos materiales.

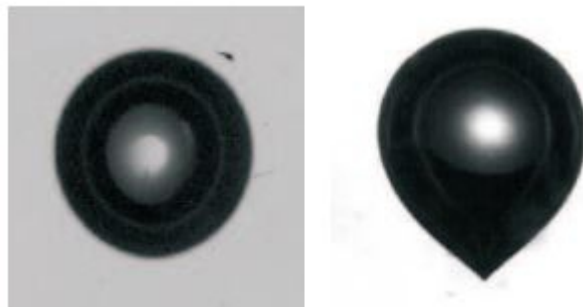
### 1.1.3. Burbujas en fluidos no newtonianos

Como ya se mencionó en las secciones anteriores, el estudio de flujos con burbujas ya es en sí complicado en fluidos newtonianos, pero el problema adquiere una dificultad muy alta cuando se estudia el mismo fenómeno dentro de un fluido no newtoniano. Cabe destacar, que aunque parezca poco probable encontrar un flujo de este tipo en la vida cotidiana, en realidad se tienen muchos casos existentes, sobre todo, dentro del ámbito tecnológico. Algunos ejemplos son los flujos generados por lodos utilizados para fracturas hidráulicas en la exploración petrolera(27), también existen biorreactores que dependen de grupos de burbujas que se encargan de mezclar fluidos no newtonianos que contienen biomoléculas grandes(8), entre otros.

Algunos estudios se han hecho y se han encontrado comportamientos particu-

## 1. INTRODUCCIÓN

---



**Figura 1.7:** Comparación de la forma geométrica de una burbuja en un fluido newtoniano(izquierda) y en un fluido viscoelástico(derecha). Tomado de (30)

lares para esta configuración de flujo. Al estudiar una burbuja aislada ascendiendo en un fluido viscoelástico, se han observado algunas características que indudablemente son diferentes a las que tendría la misma burbuja en un fluido newtoniano. La forma de la burbuja es diferente en fluidos no newtonianos, usualmente se tienen formas esféricas cuando la burbuja es pequeña pero para un fluido viscoelástico la burbuja adquiere una especie de forma de gota puntiaguda como se puede observar en la figura 1.7.

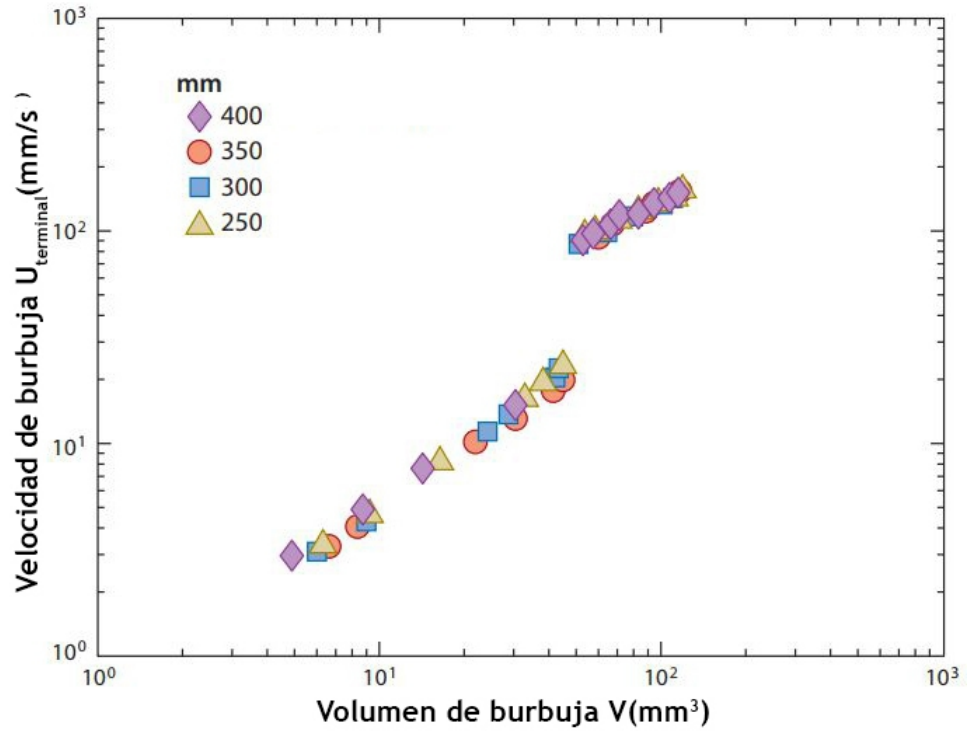
Otro efecto importante que se descubrió es que si se realiza una gráfica de volumen de la burbuja contra su velocidad terminal para un fluido viscoelástico, se puede observar que hay un salto discontinuo para un cierto *volumen crítico* tal como se puede ver en la figura 1.8. A esto se le conoce como *Bubble Velocity Discontinuity* (BVD).

Al querer dar una explicación a los fenómenos anteriores, se descubrió un fenómeno aún más inusual conocido ahora como *estela negativa de velocidad*(16) donde se puede apreciar que el fluido detrás de una burbuja ascendiendo va en sentido contrario a la burbuja, situación completamente opuesta a la observada en fluidos newtonianos. En la figura 1.9 se pueden apreciar los vectores en el campo de velocidad de una burbuja ascendiendo en un fluido viscoelástico; los vectores inmediatamente por debajo de la burbuja apuntan en dirección contraria al ascenso de la misma, esto es la estela negativa de velocidad de la burbuja.

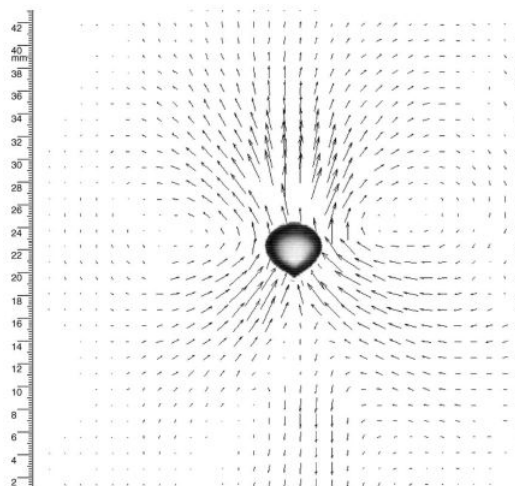
Este comportamiento inverso en la estela de una burbuja ascendiendo también se ha visto en gotas y partículas sólidas y se ha asociado con la naturaleza viscoelástica de los fluidos, en particular con su viscosidad extensional(39).

Con base a investigaciones previas sobre estos efectos, se ha propuesto una





**Figura 1.8:** Velocidad terminal de la burbuja como función del volumen de la burbuja en un fluido viscoelástico. Los diferentes símbolos representan mediciones tomadas a diferentes alturas en una columna de fluido. Tomado de (39) como adaptación de (23)



**Figura 1.9:** Campo de velocidades de flujo para una burbuja ascendiendo en una solución de Poliacrilamida a 0.25 % en peso. Tomado de (17)

## 1. INTRODUCCIÓN

---

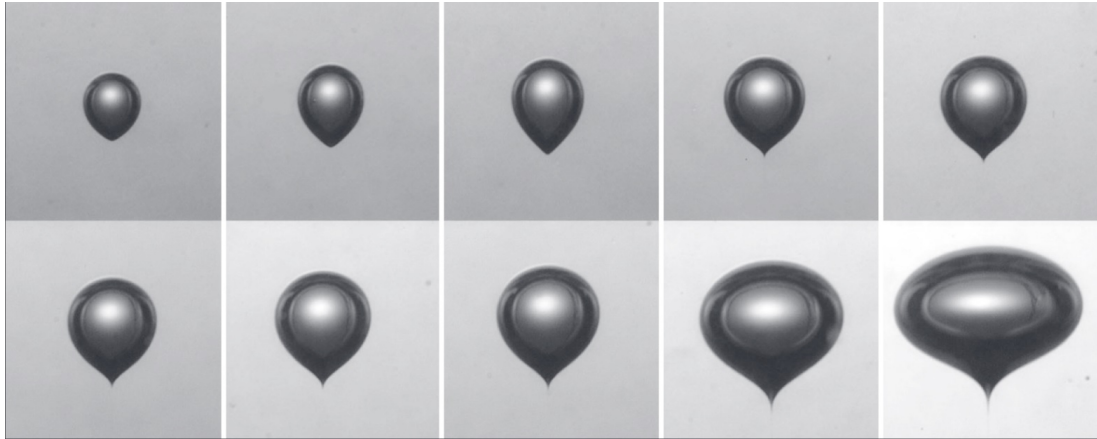
explicación al conjunto de fenómenos(39) que consiste en lo siguiente:

1. Como es de esperarse, cuando la burbuja incrementa de tamaño, la fuerza de flotación también aumenta, lo cual implica un aumento en la velocidad terminal de la burbuja.
2. Como resultado de este aumento de velocidad, las tasas de extensión y cortantes alrededor de la burbuja también crecen. Esto a su vez provoca una deformación en la burbuja; esta deformación consiste en la elongación de la burbuja en el sentido del flujo. Las fuerzas de arrastre sobre la burbuja disminuyen debido a la nueva geometría de la burbuja.
3. Al crecer la velocidad de la burbuja, esta sufre más deformación hasta el punto en el que se forma una punta en la cola de la burbuja. Esta nueva geometría puede disminuir la fuerza de arrastre hasta en un 50 %(30). La figura 1.10 muestra la evolución de geometría en una burbuja.
4. Si además de ser viscoelástico, el fluido tiene propiedades adelgazantes, entonces la viscosidad aparente del fluido disminuirá reduciendo la fuerza de arrastre sobre la burbuja(33).
5. Si la velocidad incrementa, la superficie de la burbuja podría limpiarse de posibles agentes activos(24). Esto podría generar que la condición de frontera en la interfaz de la burbuja con el fluido deje de ser del tipo de *no deslizamiento*. Este cambio de condiciones de frontera puede hacer que la fuerza de arrastre reduzca hasta un 33.33 %(10).
6. La elongación sobre la burbuja puede provocar la aparición de la estela negativa en el fluido(18) lo cual podría propulsar a la burbuja(22).

Los fenómenos presentes en el ascenso impulsado por gravedad de burbujas dentro de fluidos viscoelásticos están relacionados unos con otros, y todos son provocados por las características elásticas de los fluidos en cuestión. Es importante destacar que el salto discontinuo en la velocidad de la burbuja se debe ampliamente a la deformabilidad de la burbuja, lo cual indica que partículas sólidas o gotas líquidas no sufrirán exactamente el mismo comportamiento.

Estudiar el comportamiento de una burbuja en fluidos viscoelásticos nos hace pensar en qué efectos podrán tener un par de burbujas o un conjunto de burbujas en un fluido viscoelástico.

Menos se ha estudiado sobre las interacciones entre burbujas, comparado con el avance que se tiene en burbujas aisladas. Sin embargo, se sabe que el comportamiento de pares de burbujas es similar al de pares de partículas sólidas(39)

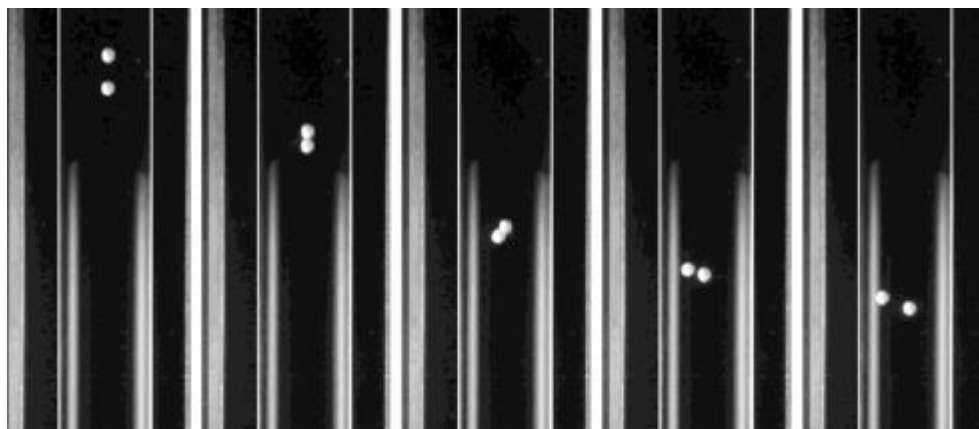


**Figura 1.10:** Evolución de la geometría de una burbuja ascendiendo en un fluido viscoelástico adelgazante. Tomado de (39) como adaptación de (30)

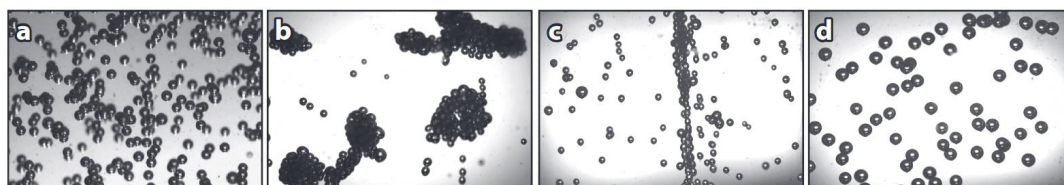
con algunas excepciones. Algunos comportamientos de burbujas en fluidos no newtonianos que se han observado son:

- Se sabe que si se liberan dos burbujas de diferentes tamaños colocadas una a lado de otra de manera simultánea, la burbuja más grande asciende más rápido y la pequeña es arrastrada por la estela de la grande. Posteriormente, la burbuja pequeña asciende hasta alcanzar a la grande para finalmente coalescer(12).
- Dos burbujas del mismo tamaño que son simultáneamente liberadas se atraen si la separación entre ellas es pequeña, posteriormente su línea de centros toma una orientación vertical. Si la separación inicial es grande, las burbujas tienden a repelerse(38).
- Cuando el fluido es adelgazante, un par de burbujas liberado de manera simultánea sufre un fenómeno parecido al *drafting—kissing—tumbling (DKT)* que ocurre en partículas sólidas. Este fenómeno consiste en que un par de partículas sólidas que son liberadas de manera simultánea, primeramente se atraen entre sí, posteriormente las partículas se acomodan a una configuración horizontal y finalmente se separan de manera abrupta. La figura 1.11 ilustra este fenómeno. Las burbujas sufren un comportamiento similar, sin embargo, si la naturaleza adelgazante del fluido es demasiado fuerte, la viscosidad alrededor de las burbujas previene que se lleve a cabo el último paso de este fenómeno, es decir, las burbujas no se separan y en su lugar, permanecen juntas con la línea de centros oscilando alrededor de la horizontal(32).

Cuando se tienen conjuntos grandes de burbujas en un fluido no newtoniano,



**Figura 1.11:** Fotogramas de la sedimentación de dos partículas sólidas con el fenómeno *Drafting - Kissing - Tumbling* presente. Adaptado de (11)



**Figura 1.12:** Grupos de burbujas en ascenso dentro de (a) fluido newtoniano, (b) fluido adelgazante, (c) y (d) fluido viscoelástico con viscosidad constante. Adaptado de (39)

estos tienden a agruparse, aunque en algunos casos también suelen sufrir dispersión(39). Los grupos de burbujas en fluidos newtonianos suelen dispersarse y no se puede apreciar algún tipo de agrupamiento alguno (Figura 1.12 (a)). Por otro lado, los conjuntos de burbujas en un fluido adelgazante tienden a ordenarse en grupos grandes mayormente horizontales o pares verticales de burbujas(35) (Figura 1.12 (b)). En fluidos viscoelásticos con viscosidad constante ocurren dos comportamientos diferentes dependiendo del tamaño de la burbuja. Cuando las burbujas están por debajo del volumen crítico, éstas tienden a ordenarse en cadenas verticales (Figura 1.12 (c)); en cambio, cuando las burbujas están por encima del volumen crítico, estas tienden a ascender de manera dispersa sin ningún tipo de agrupación apreciable(34) (Figura 1.12 (d)).

El comportamiento de burbujas dentro de fluidos viscoelásticos ofrece una amplia gama de fenómenos y efectos a estudiar. El propósito del presente estudio es investigar el comportamiento que tienen dos burbujas alineadas verticalmente y que ascienden en un fluido viscoelástico adelgazante. La siguiente sección explica

a detalle esta investigación.

## 1.2. Presentación

El comportamiento de burbujas ascendiendo en líquidos en reposo es un estudio correspondiente al área de flujos multifásicos dentro de la mecánica de fluidos. Esta área por sí misma ya es complicada, debido al acomplamiento de las ecuaciones que gobiernan el comportamiento de los fluidos; en otras palabras, se tienen que resolver ecuaciones para dos sistemas distintos que dependen uno del otro. Si a esto se le agrega que los fluidos en cuestión son fluidos no newtonianos, cuyo comportamiento puede estar poco entendido, entonces la dificultad de estudiar un sistema de este tipo es muy alta.

Como se ha mencionado a lo largo de este capítulo, ya se han estudiado algunos casos específicos del comportamiento de burbujas de gas dentro de fluidos no newtonianos, sin embargo, el panorama está aún muy poco descubierto. En la investigación presente se pretende añadir un poco de conocimiento sobre estos sistemas, porque como ya se mencionó, la aplicación de la teoría en estos tipos de flujo tiene un impacto importante en el desarrollo de tecnología en muchos sectores de la industria y la ciencia; aplicaciones que van desde la ingeniería química, hasta la tecnología médica.

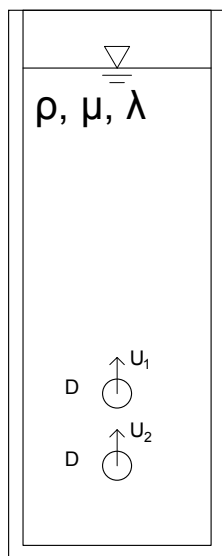
### 1.2.1. Objetivo

El objetivo de la presente investigación es descubrir el tipo de comportamiento y/o fenómenos presentes en el flujo de dos burbujas de gas liberadas una detrás de otra (Figura 1.13) dentro de un fluido viscoelástico adelgazante. Entender las interacciones hidrodinámicas presentes en el sistema, y poder contrastar dicho comportamiento al compararlo con una configuración de flujo similar, pero utilizando ahora un fluido newtoniano.

### 1.2.2. Metodología

La investigación se llevó a cabo con la metodología siguiente:

1. Se realizó una revisión previa en la literatura para estar al tanto del estado del arte relevante para la investigación presente.



**Figura 1.13:** Esquema de la configuración del sistema experimental utilizado para la investigación.

2. Se diseñó un dispositivo experimental cuya función es generar burbujas de manera controlada dentro de los fluidos en estudio. Este dispositivo se describe con más detalle en el Capítulo 2.
3. Se realizaron experimentos dentro un fluido viscoelástico adelgazante, así como dentro de un fluido newtoniano, a manera de poder contrastar los resultados en ambos tipos de fluido. Se variaron algunos parámetros en el experimento para conocer el cambio y/o dependencia que tiene el flujo con respecto a estos mismos parámetros; de igual manera, el diseño experimental se trata con más detalle en el Capítulo 2.
4. Los experimentos fueron grabados con una cámara de vídeo de alta velocidad para poder hacer observaciones que arrojen datos precisos.
5. Se realizó un análisis de imagen con ayuda de la herramienta informática MATLAB ©. Esto con el fin de poder obtener mediciones y construir gráficas para relacionar el comportamiento observable con los parámetros que previamente fueron elegidos como control experimental.
6. Se analizaron los resultados obtenidos con detalle para poder llegar a una conclusión.

### **1.2.3. Hipótesis**

Con base a los estudios previamente realizados sobre el tema se espera que las burbujas experimenten fuerzas de atracción o repulsión entre ellas, dependiendo del tamaño de la burbuja. Se anticipa también que estas fuerzas provoquen un fenómeno parecido al drafting - kissing - tumbling (DKT) que se ha observado en partículas sólidas. La estela negativa que se genera en el fluido por encima del volumen crítico de la burbuja puede provocar fuerzas de repulsión mucho más grandes de las esperadas que conduzcan a un fenómeno nuevo o una simple separación entre las burbujas.





## Diseño experimental

---

Para poder llevar a cabo la investigación se requiere de un dispositivo que pueda generar burbujas con algunos parámetros controlables de manera que puedan ser variados durante el experimento y así poder observar el comportamiento que tienen las burbujas en un fluido viscoelástico y en uno newtoniano. También es importante que se lleve un control de los parámetros a modificar durante el experimento y el tipo de variación que estos tendrán, este tema corresponde al diseño del experimento en sí. Las siguientes secciones describen a detalle la construcción y diseño del dispositivo experimental, así como el diseño del experimento como tal.

### **2.1. Diseño y construcción del dispositivo experimental**

El experimento consiste en liberar dos burbujas de igual tamaño desde el fondo de una columna con líquido de modo que se pueda estudiar el ascenso de las mismas y la interacción durante su ascenso. Las características del experimento a grandes rasgos son:

1. Las burbujas deben ser liberadas una tras otra a modo de lograr una configuración con alineamiento vertical.
2. Las burbujas deben tener aproximadamente el mismo tamaño.
3. Los fluidos utilizados serán un fluido viscoelástico adelgazante y un fluido newtoniano. Más detalles de las características y preparación de los fluidos en la siguiente sección.

## 2. DISEÑO EXPERIMENTAL

---

| Calibre | Diámetro Externo Nominal [mm] | Diámetro Interno Nominal [mm] | Color |
|---------|-------------------------------|-------------------------------|-------|
| 18G     | 1.27                          | 0.84                          |       |
| 21G     | 0.82                          | 0.51                          |       |
| 25G     | 0.51                          | 0.26                          |       |

**Tabla 2.1:** Especificaciones de las agujas utilizadas de acuerdo a la escala Birmingham.(3)

4. La columna de fluido debe ser considerablemente alta para asegurar que las burbujas estén en su velocidad terminal.
5. Tener tres tamaños de burbuja diferentes para poder utilizar el diámetro de la burbuja como parámetro en el experimento, y además observar si hay una conducta diferente por debajo y por encima del volumen crítico de la burbuja en el fluido viscoelástico.

Se decidió utilizar una bomba para pecera *Elite MAXIMA* para 113 L, ya que esta proporcionará la potencia necesaria para generar una presión suficiente para vencer la presión hidrostática de la columna de fluido y así poder generar burbujas de manera continua. Las especificaciones de la bomba carecen de información sobre la presión o el gasto que puede generar, no obstante, se eligió una bomba con potencia sobrada, ya que sería más fácil controlar el flujo por medio de válvulas.

La bomba está conectada por medio de una manguera plástica a una aguja que actúa como capilar y que es donde la burbuja se forma. Se utilizaron tres calibres de aguja: 18G, 21G y 25G de acuerdo a la escala *Birmingham* y cuyas especificaciones se encuentran en la tabla 2.1.

Se colocaron válvulas anti-retorno para evitar el flujo hacia la bomba y provocar algún daño, además de tratar de mantener una presión constante en esa sección de la manguera para que la bomba no tuviera que vencer la presión hidrostática de la columna del fluido cada vez que era accionada. La bomba tenía que tener la potencia necesaria para poder vencer el peso de la columna de fluido, pero una vez que esto se logra, la bomba genera burbujas demasiado grandes y a una alta velocidad. Por esto se optó por agregar dos válvulas de paso al sistema que sirven para controlar el flujo de gas que llega al capilar para la generación de burbujas. Estas válvulas permiten controlar la distancia inicial entre las burbujas y además proporcionan un control relativamente preciso sobre el tamaño de las mismas. El tamaño de las burbujas es controlado en mayor parte por el diámetro del cateter utilizado. La cantidad de burbujas es controlada simplemente inte-

rrumpiendo el flujo de aire desde la bomba hasta la aguja.

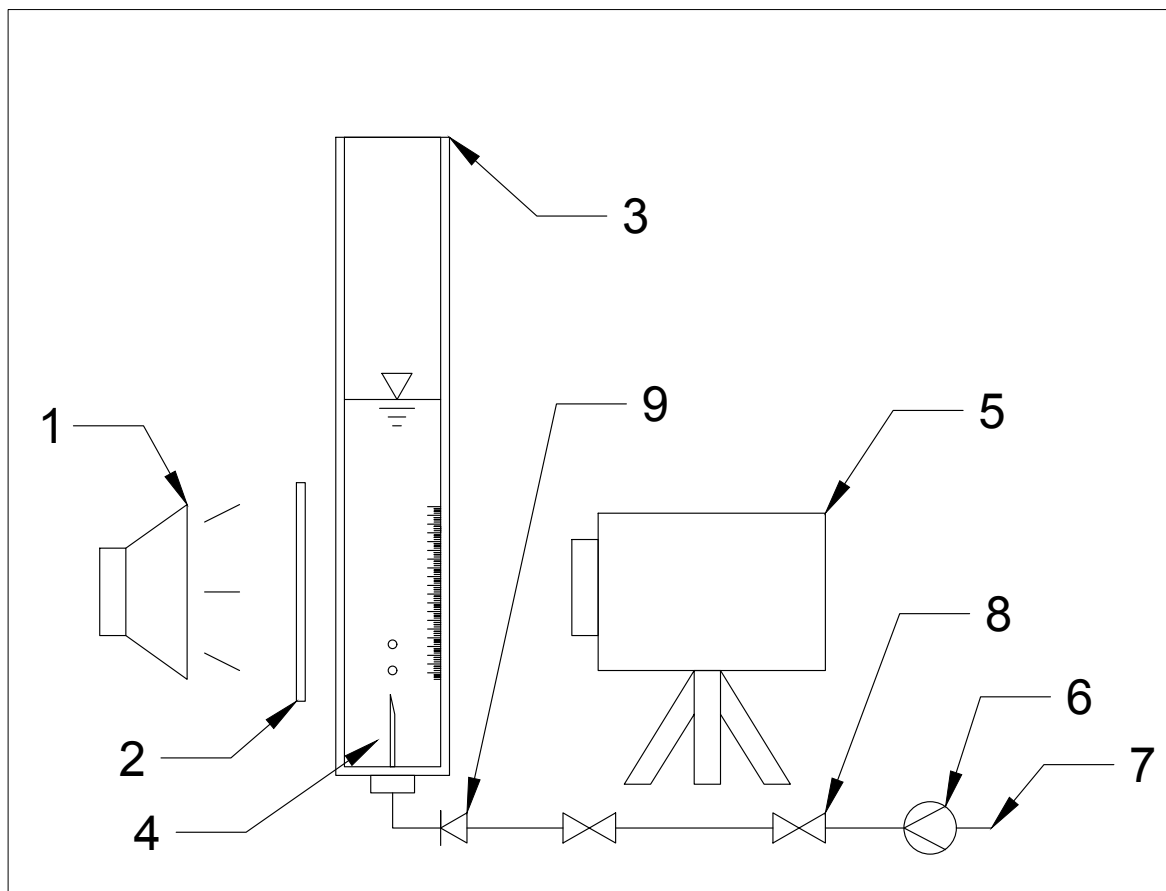
Se utilizará una columna de vidrio para poder visualizar las burbujas. La columna tiene un perfil cuadrado con dimensiones de 6 [cm] x 6 [cm]. Es importante resaltar que es un ducto relativamente pequeño y las paredes de la columna podrían afectar el comportamiento de las burbujas en ascenso. Para este estudio se despreciaron los efectos que podrían provocar las paredes de la columna.

Una cámara Phantom v9.1 de alta velocidad de marca Vision Research se agregó a la configuración experimental, ya que evidentemente los fenómenos que se están estudiando son transitorios y los detalles más interesantes podrían observarse mejor si se capturan a alta velocidad. La cámara utilizada tiene una resolución de 1600 x 1200 pixeles y una tasa de captura de hasta 1000 fotogramas por segundo (2), características que permiten obtener imágenes de alta definición y excelentes detalles para fenómenos transitorios de alta velocidad. Se utilizó una pantalla blanca para crear iluminación difusa y poder capturar las burbujas con mayor nitidez y contraste. Por supuesto, se tuvo que agregar un elemento con alguna escala al arreglo, de manera que cuando se haga el procesamiento de imágenes, se sepa con exactitud la escala a la que se trabaja.

El esquema de la figura 2.1 ilustra el arreglo de los dispositivos utilizados para el experimento.

## 2.2. Diseño del experimento

En la sección anterior se describió a detalle los dispositivos utilizados y el arreglo elegido para poder obtener datos experimentales de manera óptima. En esta sección, en cambio, se describe a detalle los parámetros relevantes del experimento en sí, tales como los fluidos utilizados y sus propiedades, el número de experimentos realizados, la configuración de la cámara y, finalmente, se hace una descripción de la metodología utilizada para procesar los datos; en otras palabras, se detallará de manera cualitativa el programa diseñado para analizar las imágenes obtenidas en los experimentos.



**Figura 2.1:** Arreglo experimental utilizado. 1. Iluminación. 2. Pantalla para generar iluminación difusa. 3. Columna de vidrio transparente. 4. Aguja/Capilar. 5. Cámara Phantom de alta velocidad. 6. Bomba de aire. 7. Toma de aire ambiente. 8. Válvulas de paso. 9. Válvula anti - retorno.

### 2.2.1. Fluidos

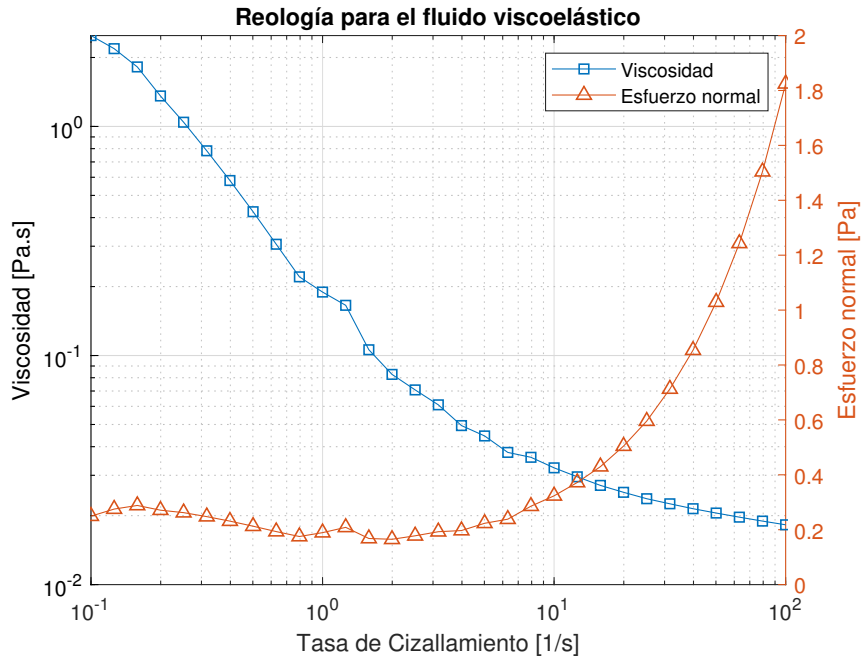
La primera consideración para el experimento es la elección de los fluidos a utilizar. Como ya se mencionó antes, se requiere de un fluido viscoelástico y un fluido newtoniano. El fluido viscoelástico se preparó con base a una receta ya antes utilizada en el laboratorio, siendo esta una solución de PAAm (Poliacrilamida) al 0.2 % en masa, en 50 % glicerina - 50 % agua en masa(18). La preparación del fluido consiste en dos simples pasos:

1. Preparación de una solución de PAAm en agua, con las proporciones calculadas para la mezcla final. La solución se dejó mezclando a una velocidad alta por un día completo, de modo que al día siguiente los grumos de polímero estén completamente disueltos en el agua.
2. La glicerina se agrega posteriormente. La cantidad, de igual manera, es la requerida para la mezcla final. El fluido se deja mezclando lentamente ya que el polímero puede degradarse si se hace a altas velocidades. La preparación final requiere de un tiempo de mezclado similar, es decir, un día completo.

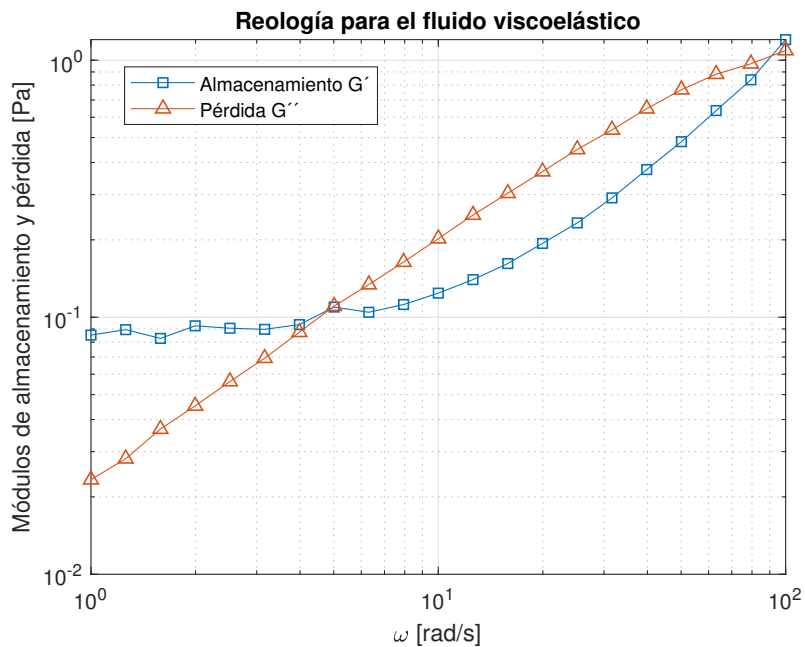
Al finalizar la preparación del fluido viscoelástico, se hizo una caracterización reológica para corroborar que efectivamente se había preparado un fluido viscoelástico. Las mediciones se realizaron en un reómetro Ares G2 con una geometría de cono de 50[mm] y placa. Primero se llevó a cabo una prueba de amplitud donde se escogió una deformación del 10 % para realizar una prueba de frecuencia. Se realizó la prueba de frecuencia para obtener mediciones sobre los módulos de almacenamiento y de pérdida del fluido. Finalmente, se hizo una prueba de flujo para obtener mediciones sobre el comportamiento de la viscosidad del fluido. Todas las mediciones fueran hechas con un cono y una placa de acero inoxidable. Las mediciones están detalladas en las figuras 2.2 y 2.3. El fluido viscoelástico es además adelgazante, por lo que su viscosidad no permanece constante con respecto a la rapidez de corte. El fluido newtoniano se escogió de tal manera que tuviera un valor de viscosidad constante y que este valor se encontrara aproximadamente a un valor medio entre el rango de viscosidades del fluido no newtoniano ( $0.05 - 1[Pa \cdot s]$ ). Se optó por preparar una solución de 80 % glicerina - 20 % agua en masa (26), ya que esta mezcla teóricamente produciría una viscosidad de  $0.1[Pa \cdot s]$ .

La preparación del fluido newtoniano, a diferencia del viscoelástico, es sumamente sencilla: se agrega la cantidad requerida de glicerina a la cantidad de agua necesaria y se mezcla vigorosamente. El mezclado puede ser a altas velocidades y no requiere de mucho tiempo. Se midió la viscosidad del fluido newtoniano

## 2. DISEÑO EXPERIMENTAL



**Figura 2.2:** Mediciones reológicas del fluido viscoelástico.



**Figura 2.3:** Mediciones de los módulos de almacenamiento y pérdida. Para obtener el tiempo de relajamiento del fluido, se debe encontrar el valor donde las curvas  $G'$  y  $G''$  cruzan, y después tomar el recíproco de esa cantidad..

| Propiedad            | Solución PAAm<br>0.2% en 50%<br>agua - 50%<br>glicerina | Solución 80%<br>glicerina - 20%<br>agua | Aire                            |
|----------------------|---|---|---------------------------------|
| Tipo de fluido       | Viscoelástico adelgazante                               | Newtoniano                              | Newtoniano                      |
| Densidad             | 1117[kg/m <sup>3</sup> ]                                | 1217[kg/m <sup>3</sup> ]                | 1.225[kg/m <sup>3</sup> ]       |
| Viscosidad           | 0.01 – 2[Pa.s]  | 0.092[Pa.s]                             | 18.37 × 10 <sup>-6</sup> [Pa.s] |
| Tiempo de relajación | 0.2[s]  | NA                                      | NA                              |

**Tabla 2.2:** Propiedades de los fluidos utilizados en el experimento. (Propiedades medidas a una temperatura de 25[°C])

con ayuda de un viscosímetro Brookfield y los resultados dieron una viscosidad muy cercana a la esperada, por lo que se decidió utilizar los dos fluidos preparados.

Se prepararon dos litros de cada fluido para tener suficiente fluido en caso de requerir una columna de líquido alta. Sin embargo, se hicieron pruebas preliminares y se descubrió que una columna de 22[cm] era la opción más conveniente ya que permitía que las burbujas alcanzaran su velocidad terminal y además permitía un control bastante bueno en la bomba, y por ende, en la generación de burbujas.

Cabe mencionar que el gas utilizado para la formación de burbujas es aire. La tabla 2.2 resume las propiedades relevantes para esta investigación de los fluidos utilizados.

### 2.2.2. Adquisición de datos

La cámara Phantom v9.1 tiene una capacidad de grabar a una velocidad de hasta 1000[fps] a una resolución de 1600 × 1200[*pixeles*], sin embargo se utilizó una tasa de 600[fps] ya que el tamaño de los archivos se reducía considerablemente, reduciendo así el tiempo de cómputo que se requeriría posteriormente, esto sin comprometer la resolución temporal del experimento.

La cámara capturaría vídeos que serían analizados posteriormente con técnicas de procesamiento y análisis de imagen. Estas técnicas nos pueden dar información acerca de la posición, velocidad, forma y tamaño de las burbujas; técnicas que serán detalladas en la siguiente sección. Con base a estos parámetros se diseñó

## 2. DISEÑO EXPERIMENTAL

---

| Experimento     | Solución PAAm en agua - glicerina       | Solución acuosa de glicerina            |
|-----------------|---|---|
| Burbuja aislada | 18G/5 experimentos @ 600[ <i>fps</i> ]  | 18G/5 experimentos @ 600[ <i>fps</i> ]  |
|                 | 21G/5 experimentos @ 600[ <i>fps</i> ]  | 21G/5 experimentos @ 600[ <i>fps</i> ]  |
|                 | 25G/5 experimentos @ 600[ <i>fps</i> ]  | 25G/5 experimentos @ 600[ <i>fps</i> ]  |
| Par de burbujas | 18G/15 experimentos @ 600[ <i>fps</i> ] | 18G/15 experimentos @ 600[ <i>fps</i> ] |
|                 | 21G/15 experimentos @ 600[ <i>fps</i> ] | 21G/15 experimentos @ 600[ <i>fps</i> ] |
|                 | 25G/15 experimentos @ 600[ <i>fps</i> ] | 25G/15 experimentos @ 600[ <i>fps</i> ] |

**Tabla 2.3:** Resumen de los parámetros para la adquisición de datos.

una serie de experimentos que nos permitiría obtener información suficiente para hacer comparaciones del comportamiento de las burbujas con respecto a estos parámetros.

Primero se experimentó con el ascenso de burbujas aisladas, y dado que se tienen dos fluidos diferentes y tres tamaños de aguja diferentes, se realizaron seis series diferentes de experimentos. En este conjunto de experimentos, solo se busca obtener información de la velocidad terminal de la burbuja, para poder compararla con las velocidades terminales de los pares de burbujas. Por esta razón, no se requirió de un número grande de experimentos. Cada caso se repetiría cinco veces, por lo que al final se obtuvieron 30 vídeos para el caso de la burbuja aislada.

Una vez realizado el experimento de la burbuja aislada, se realizaron experimentos con pares de burbujas. Dado que este caso es el de mayor interés para este estudio, se realizaron quince experimentos para cada configuración. Es decir, quince vídeos por tamaño de aguja para el fluido viscoelástico, y quince vídeos por tamaño de aguja para el fluido newtoniano; dando como resultado un total de 90 vídeos. Se optó por realizar un número mayor de experimentos, dado que la información que se extraería de estas películas sería mucho mayor, y por lo tanto se requería de tener más vídeos de donde elegir en caso de tener algunos vídeos que fueran más complicados de procesar que otros.

La tabla 2.3 resume los parámetros utilizados para la adquisición de datos.



## Análisis de resultados

---

Después de haber obtenido información suficiente con las cámaras de alta velocidad, se realizó un análisis de imagen conveniente a modo de obtener información relevante de todos los vídeos obtenidos. El proceso que se llevó a cabo para darle un tratamiento a estos datos y presentarlos de manera clara se describe en este Capítulo. Primero se hará una descripción del proceso que se siguió para la obtención de datos, posteriormente se presentarán los resultados obtenidos para las burbujas aisladas y finalmente se analizarán las interacciones hidrodinámicas entre las burbujas para ambos casos de fluido.

Es importante destacar que como en todo estudio relacionado con la mecánica de fluidos, es mejor trabajar con variables adimensionales, ya que así se generalizan los comportamientos y no depende del flujo específico que se está estudiando. Se hará una descripción más detallada de la adimensionalidad conforme se avance en el capítulo.

### 3.1. Tratamiento de datos

Como ya se mencionó antes, el proceso para obtener datos de los vídeos obtenidos se realizó con ayuda de Matlab, la rutina consistió en los siguientes pasos:

1. El programa toma un archivo de vídeo y lo transforma en un formato manipulable por Matlab. Es decir, Matlab extrae todos los cuadros del vídeo y los transforma en matrices de  $1600 \times 1200$  (resolución de la cámara), donde cada elemento de la matriz representa el tono de gris de ese pixel.
2. Se hace un recorte de imagen de manera que se estudie solo la porción de la imagen donde ocurre el fenómeno, así se reduce el tiempo de cómputo.

### 3. ANÁLISIS DE RESULTADOS

---

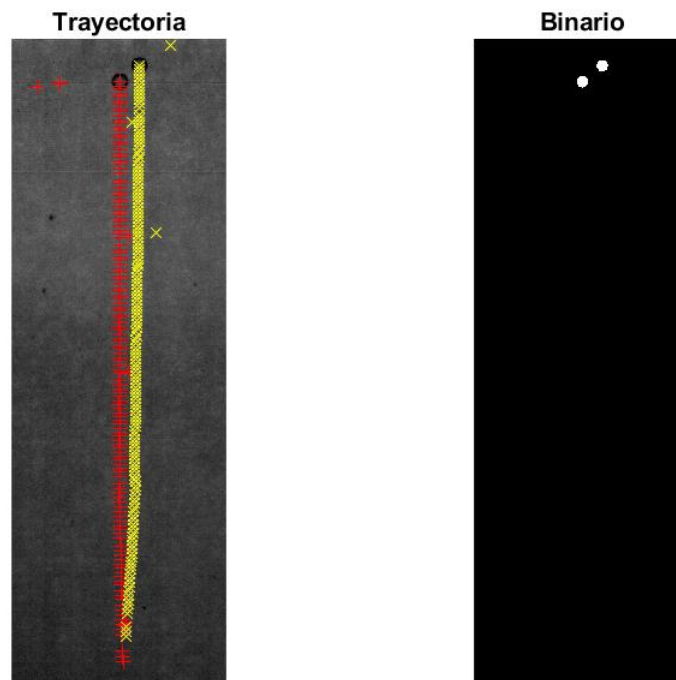
3. Cuadro por cuadro MATLAB hará una limpieza de imagen, a modo que se tenga una imagen binaria final donde solo aparezcan las burbujas con un valor de 1 (blanco) en la matriz, y el resto sean ceros (negro).
4. Cuadro por cuadro, Matlab obtiene la información de las regiones obtenidas con la limpieza de imagen. Esta información contiene la posición del centroide, el área, el diámetro equivalente, ejes mayores y menores, entre otras.
5. El programa va trazando un marcador de los centroides de las burbujas por cada cuadro, de esta manera al finalizar el programa mostrará un trazo de la trayectoria que siguió la burbuja.
6. Posteriormente el programa calcula la velocidad de las burbujas por medio de un esquema de diferencias centrales 3.1.
7. También se realiza el cálculo de la distancia entre centros de las burbujas, así como el ángulo que se forma entre la línea que va de centro a centro y la vertical. Esto, evidentemente, solo para el caso de interacción entre burbujas.
8. Se aplica la escala correspondiente para obtener datos en  $[m/s]$  y no  $[pixeles/s]$ .

$$V_i = \frac{\sqrt{(x_{i+1} - x_{i-1})^2 + (y_{i+1} - y_{i-1})^2}}{2\Delta t} \quad (3.1)$$

donde  $i$  = cuadro en estudio.

La precisión y desempeño del programa depende mucho de la calidad de los vídeos obtenidos. Por lo que para algunos casos las imágenes fueron más fáciles de trabajar, y esto puede provocar que exista ruido en los datos obtenidos. El programa busca dos manchas en la imagen y obtiene sus propiedades, sin embargo, la calidad de la imagen puede provocar que dichas manchas no sean las burbujas en algunos casos. Esto genera que la velocidad se dispare, ya que el programa cree que la burbuja cambió de lugar drásticamente. Sin embargo, estos picos en los datos son fáciles de eliminar.

La figura 3.1 muestra el resultado de correr el programa para uno de los vídeos que se obtuvieron. Este vídeo tenía una muy mala calidad de imagen, había mucho ruido, la iluminación no fue la óptima y además las burbujas en estudio eran las más pequeñas, lo cual hace más difícil su procesamiento. Se puede apreciar



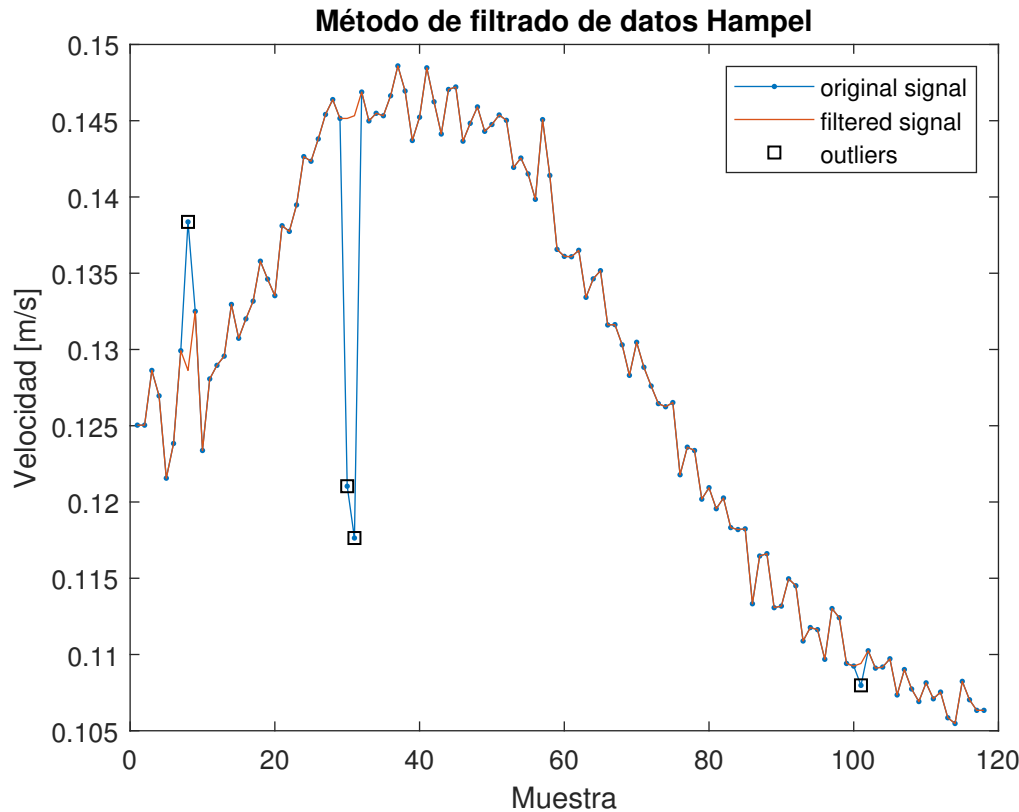
**Figura 3.1:** Resultado del análisis de imagen para un par de burbujas en un fluido viscoelástico con una aguja calibre 25G. Errores de localización debido a la mala calidad de imagen.

como en un punto del análisis, el programa detectó manchas completamente fuera de la trayectoria de la burbuja, esto genera picos en los resultados obtenidos. Se escogió este caso para ejemplificar el tipo de errores que se pueden obtener durante la obtención de datos.

Los errores que genera esta pérdida de la posición de la burbuja generan picos en todas las variables que se obtienen del análisis. Para la limpieza de estos datos se utilizó un filtro Hampel. Un filtro Hampel consiste en analizar punto a punto la colección de datos, por cada punto que se analiza se toman un número  $n$  de valores a la izquierda y a la derecha del punto en cuestión, se calcula el promedio de estos valores y su desviación estándar. Si el punto en cuestión es mayor a  $m$  desviaciones estándar, entonces este valor se sustituye por el promedio previamente obtenido (1). En Matlab es posible controlar los parámetros  $n$  y  $m$ , es decir, el tamaño de la muestra que tomará para la evaluación y el número de desviaciones estándar al cual el punto en estudio no deberá superar. Este método de filtración de datos resulta muy efectivo, pues no modifica la señal original, solo elimina picos de la colección de datos. La figura 3.2 muestra un ejemplo de como funciona este método de filtrado.

### 3. ANÁLISIS DE RESULTADOS

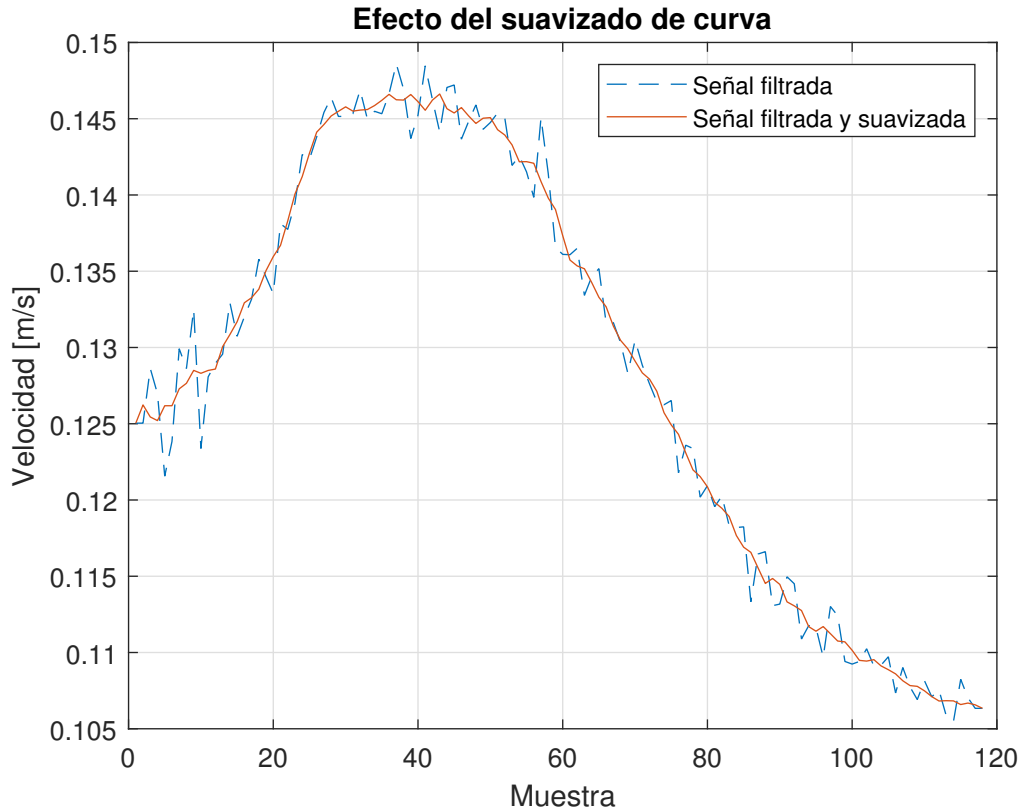
---



**Figura 3.2:** Remoción de picos en una colección de datos por medio de un filtro Hampel.

Se puede apreciar que los datos originales son preservados, y solo aquellos valores que salen drásticamente de la tendencia son removidos. Para el ejemplo mostrado en la figura 3.2 se utilizó una  $n = 5$ , es decir, se estudiaron 5 valores a la derecha y 5 a la izquierda del punto en cuestión, y una  $m = 2$ , lo cual quiere decir que solo los valores que superaran dos desviaciones estándar fueron removidos. A lo largo del análisis de resultados se utilizó este método de filtrado para asegurarnos que los datos fueran más limpios. Evidentemente, se aplicaron filtros con diferente sensibilidad dependiendo el caso.

La naturaleza de las diferencias centrales utilizada para calcular la velocidad es efectiva para obtener datos menos ruidosos, sin embargo, hay algunos fenómenos que se aprecian mucho mejor cuando se tiene una curva más suave. Por esta razón se le aplicó un suavizado ligero a los datos de velocidad de las burbujas en interacción. Matlab tiene una función para realizar este suavizado de curvas, y el efecto se puede apreciar en la figura 3.3.



**Figura 3.3:** Suavizado de curva para la velocidad de una burbuja.

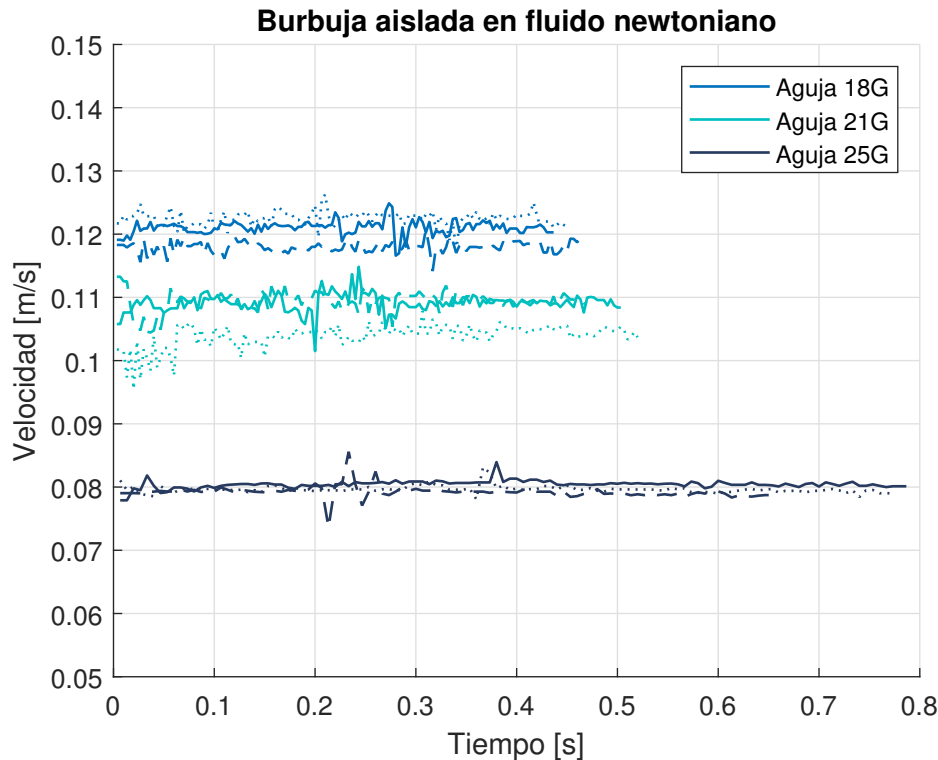
Una vez explicadas las técnicas de obtención y tratamiento de datos, se explicarán los resultados obtenidos para las burbujas aisladas.

## 3.2. Burbujas aisladas

El primer paso para poder estudiar la interacción entre dos burbujas es tener un punto de comparación en donde las burbujas fluyan libremente y de manera aislada. De esta manera sabremos cuál es la velocidad terminal de una burbuja dentro del fluido cuando esta no tiene una burbuja acompañante que modifique su comportamiento. Esta sección describe los resultados que se obtuvieron sobre las burbujas aisladas para cada tamaño de aguja y para cada fluido, así como la manera en que se llegó a esos resultados.

### 3. ANÁLISIS DE RESULTADOS

---



**Figura 3.4:** Velocidad contra tiempo para los tres experimentos seleccionados de cada calibre de aguja.

#### Caso newtoniano

Ya se mencionó antes que para cada calibre de aguja se tomaron cinco vídeos. Se analizaron los cinco vídeos para cada caso buscando obtener la velocidad terminal de las burbujas. Una vez que se obtuvo la velocidad como función del tiempo para cada experimento, se aplicó un filtro Hampel para eliminar los picos de la señal y se obtuvo el promedio y la desviación estándar de cada uno de los experimentos. Se seleccionaron los tres experimentos con desviaciones estándar menores, de esta manera se podría asegurar que los promedios serían los mejores. Finalmente se obtuvo la media de los promedios de cada experimento para poder llegar a una velocidad terminal definitiva.

La figura 3.4 muestra la velocidad con respecto al tiempo para los tres experimentos seleccionados de cada calibre de aguja. Se puede apreciar que la velocidad permanece constante, lo cual es una prueba simple de que el experimento alcanzó su velocidad terminal y los vídeos fueron tomados en un momento apropiado.

| Aguja       | Experimento   | Promedio             | $U_\infty$ | D [mm] | Re   |
|-------------|---------------|----------------------|------------|--------|------|
|             |               | $U_\infty$<br>[mm/s] | [mm/s]     |        |      |
| Calibre 18G | Experimento 1 | 121                  | 120.5      | 4      | 6.29 |
|             | Experimento 2 | 118                  |            |        |      |
|             | Experimento 3 | 122.4                |            |        |      |
| Calibre 21G | Experimento 1 | 109.1                | 107.5      | 3.6    | 5.15 |
|             | Experimento 2 | 109.4                |            |        |      |
|             | Experimento 3 | 103.9                |            |        |      |
| Calibre 25G | Experimento 1 | 80.4                 | 79.8       | 3.3    | 3.53 |
|             | Experimento 2 | 79.2                 |            |        |      |
|             | Experimento 3 | 79.6                 |            |        |      |

**Tabla 3.1:** Velocidad promedio por cada experimento, promedio entre velocidades, diámetros y números de Reynolds para el caso newtoniano.

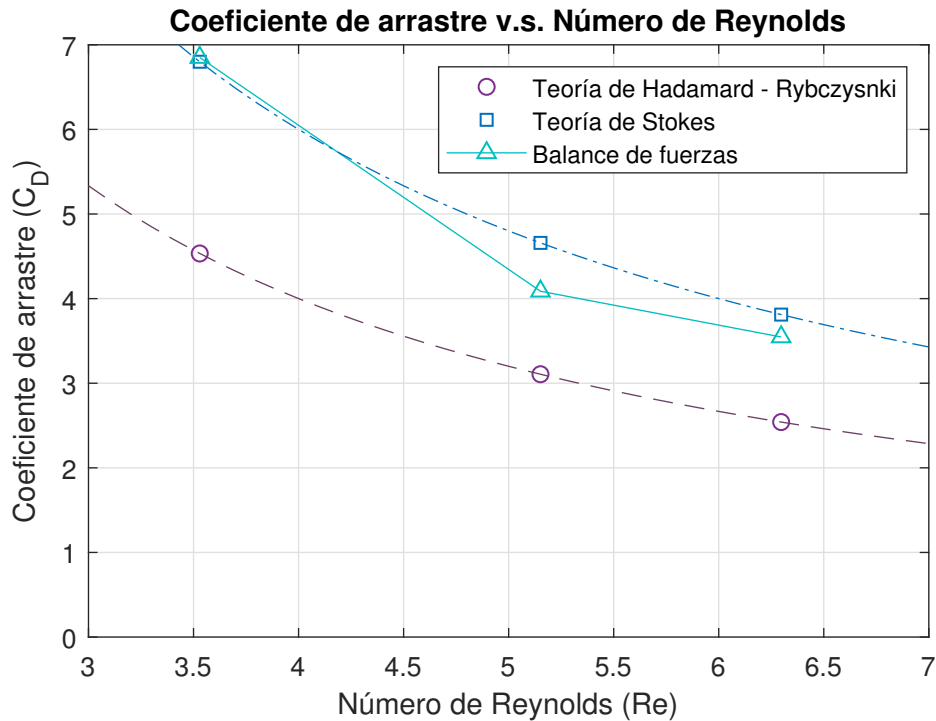
También podemos observar que cada calibre de aguja arroja una velocidad diferente, esto también es un resultado esperado ya que diferentes tamaños de aguja generan diferentes tamaños de burbuja y por ende la fuerza de flotación para cada burbuja será diferente modificando la velocidad terminal de cada una.

La tabla 3.1 muestra el promedio de velocidad para cada experimento y a su vez el promedio entre experimentos; este último promedio es la velocidad terminal que se buscaba obtener. Ahora se tienen valores definitivos para las velocidades terminales de cada calibre de aguja en el fluido newtoniano.

De una manera similar, se obtuvieron los diámetros de las burbujas: de esos mismos experimentos, se obtuvo el promedio del diámetro equivalente usando Matlab, y posteriormente se calculó la media entre promedios, llegando así a un diámetro de burbuja definitivo para cada tamaño de burbuja. Cabe mencionar que la limpieza de imagen realizada en el programa reduce el tamaño de la burbuja, por lo que se tuvo que obtener un factor que compensara esa reducción y poder así obtener los diámetros reales. La tabla 3.1 muestra los diámetros de las burbujas para cada calibre de aguja.

Con esta información se puede calcular el número de Reynolds ( $Re$ ) y el coeficiente de arrastre ( $C_D$ ) para cada caso. Dado que es un fluido newtoniano, el número de Reynolds se puede calcular haciendo uso de la ecuación 1.2, así que basta con sustituir la ecuación con las velocidades y diámetros obtenidos, y las propiedades de los fluidos.

### 3. ANÁLISIS DE RESULTADOS



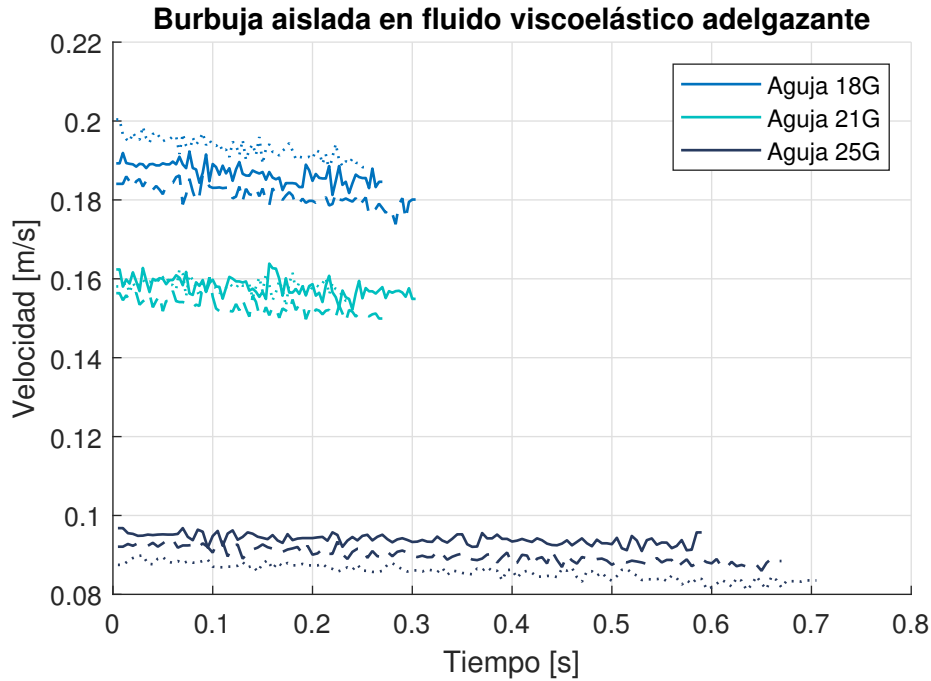
**Figura 3.5:** Coeficientes de arrastre ( $C_D$ ) y números de Reynolds ( $Re$ ) para cada caso en un fluido newtoniano.

Con fines de comparación, se calcularon los coeficientes de arrastre con base en la ecuación de Hadamard - Rybczynski (Ecuación 1.10), a la ecuación de Stokes (Ecuación 1.12) y un tercer coeficiente de arrastre obtenido del balance de fuerzas de arrastre, gravitacional y de flotación (Ecuación 3.2),

$$C_D = \frac{4 g D (\rho_l - \rho_g)}{3 U_\infty^2 \rho_l} \quad (3.2)$$

En la figura 3.5 se puede apreciar que el coeficiente de arrastre obtenido de la definición general de fuerza de arrastre se encuentra entre los definidos por las teorías de Hadamard - Rybczynski y Stokes. Esto tiene completo sentido y, además, es un resultado esperado pues Hadamard - Rybczynski requiere que la burbuja esté completamente libre de contaminantes en la interfaz, y Stokes funciona para el caso de una partícula sólida no deformable. Este resultado es anticipable ya que la burbuja no tiene una interfaz completamente limpia, y además es deformable. El hecho de no tener una interfaz completamente limpia, como lo requieren Hadamard y Rybczynski, significa que el arrastre será mayor, por otro





**Figura 3.6:** Velocidad en función del tiempo para cada experimento en un fluido viscoelástico.

lado, se tiene una burbuja hecha de un fluido deformable; esto puede generar que la burbuja adquiera una forma que no es perfectamente esférica aumentando o disminuyendo el coeficiente de arrastre. En este caso el coeficiente de arrastre parece estar ligeramente por debajo de la predicción de Stokes, lo cual quiere decir que la burbuja podría estar ligeramente elongada adquiriendo una geometría más hidrodinámica. Se puede comprobar que las teorías de Stokes y Hadamard - Rybczynski son buenas aproximaciones en caso de requerir una predicción previa a un experimento.

### Caso Viscoelástico

La obtención de los resultados para el caso viscoelástico se llevó a cabo con el mismo procedimiento utilizado para el caso newtoniano. Se obtuvo el promedio de velocidad por experimento, se seleccionaron los tres mejores experimentos y se obtuvo la velocidad terminal y el diámetro de burbuja para cada caso.

La figura 3.6 muestra la velocidad en función del tiempo para cada experimento por calibre de aguja en el fluido viscoelástico. El contraste más evidente

### 3. ANÁLISIS DE RESULTADOS

---

| Aguja       | $U_\infty$ [mm/s] | D [mm] | Re    |
|-------------|-------------------|--------|-------|
| Calibre 18G | 187.1             | 3.6    | 41.61 |
| Calibre 21G | 156.3             | 3.1    | 29.71 |
| Calibre 25G | 91.3              | 2.2    | 11.92 |

**Tabla 3.2:** Velocidades terminales para las burbujas aisladas en el fluido viscoelástico.

con respecto al caso newtoniano es que existe una diferencia muy grande entre la velocidad de la burbuja pequeña (Calibre 25G) y las burbujas más grandes (Calibres 21G y 18G). Esto se puede deber al hecho de que la burbuja pequeña está por debajo del volumen crítico, mientras que los otros dos tamaños de burbuja están por encima del mismo. En otras palabras, el fenómeno *Bubble Velocity Discontinuity (BVD)* podría estar presente; de ser así, se espera que la interacción entre burbujas pequeñas sea significativamente diferente a la interacción entre las burbujas más grandes. La tabla 3.2 muestra las velocidades terminales para cada caso y sus diámetros respectivamente.

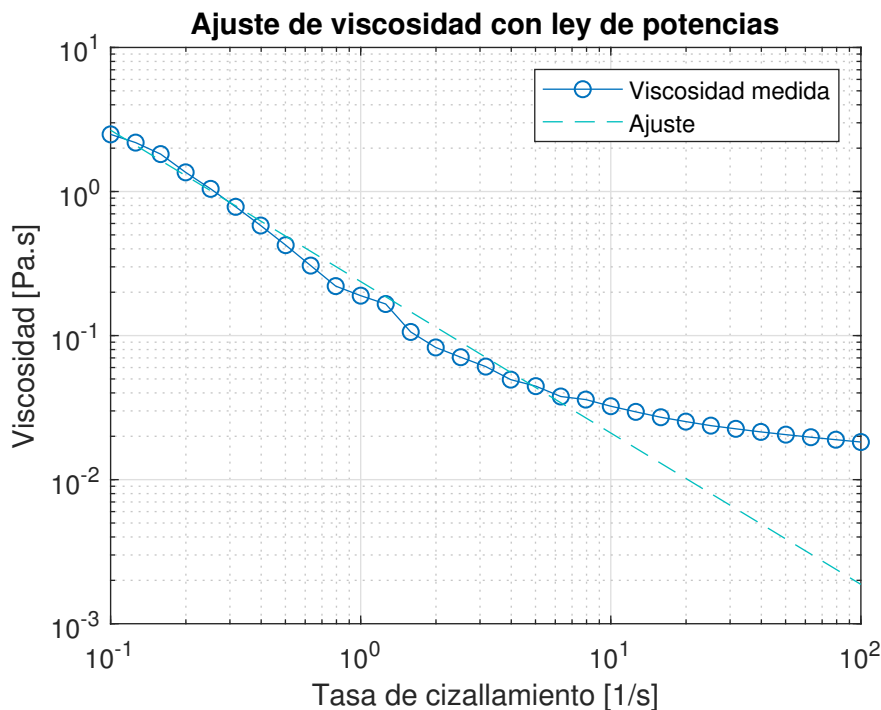
Nuevamente se pretende calcular el número de Reynolds para ver como se comporta el coeficiente de arrastre con respecto a este parámetro. Sin embargo, y en contraste con el caso anterior, el número de Reynolds adquiere una definición nueva cuando se trata de un fluido no newtoniano. En este caso, sabemos que se trata de un fluido no newtoniano viscoelástico adelgazante, por lo que el modelo más apropiado para este fluido es diferente. El Reynolds tiene la misma forma en esencia:

$$Re = \frac{\rho_l U_\infty D}{\mu_{eff}}$$

No obstante, la viscosidad es sustituida por una viscosidad efectiva, la cual está definida por la ecuación 1.19, pero sustituyendo la tasa de corte por una medida promedio de la tasa de corte (Apéndice B).

$$\dot{\gamma}_{ij} = \frac{2U_\infty}{D} \quad (3.3)$$

Se procedió a obtener los coeficientes  $m$  y  $n$  de la ecuación 1.19 por medio de un ajuste de curva con los datos obtenidos en las mediciones reológicas del fluido. Los coeficientes obtenidos fueron  $m = 0.2370$  y  $n = -0.0509$  y se puede observar como  $n < 1$ , esto implica que, en efecto, se trabajó con un fluido no newtoniano pseudoplástico o adelgazante.



**Figura 3.7:** Ajuste por ley de potencias para la viscosidad del fluido no newtoniano.

| Aguja       | $\frac{2U_{\infty}}{D}$ [ $\frac{1}{s}$ ] | $\mu_{eff}$ [ $Pa.s$ ] |
|-------------|---|------------------------|
| Calibre 18G | 103.51                                    | 0.0182                 |
| Calibre 21G | 100.86                                    | 0.0182                 |
| Calibre 25G | 82.96                                     | 0.0188                 |

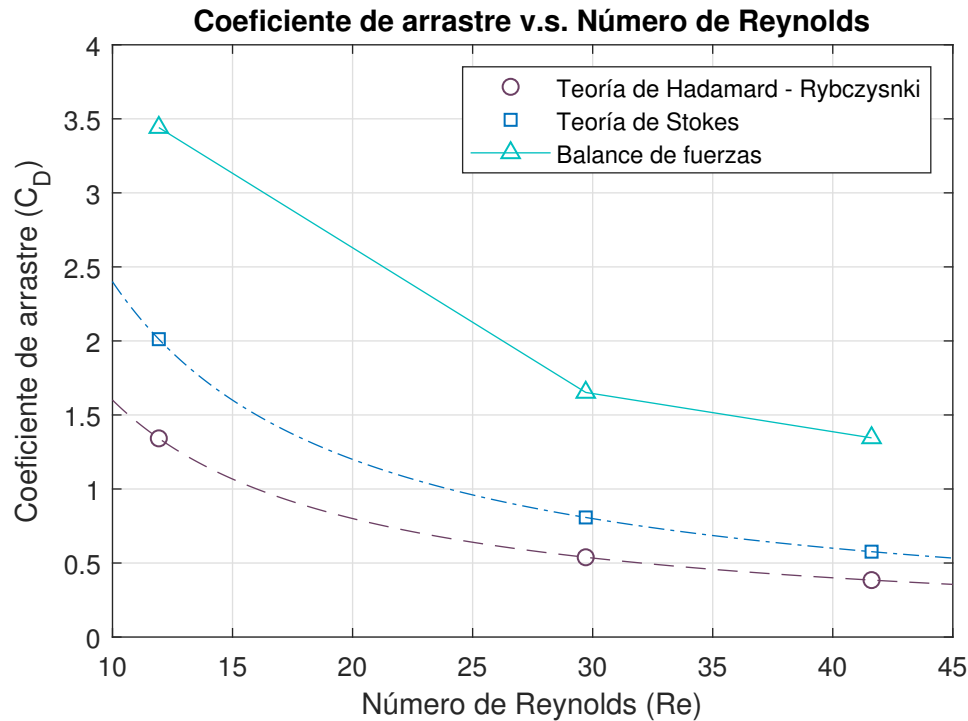
**Tabla 3.3:** Viscosidades efectivas en función de la tasa de corte promedio.

Como se mencionó en el capítulo 1, el ajuste de ley de potencias regularmente es útil para un rango específico de tasas de corte. Se puede observar que a partir de una tasa de cizallamiento de orden  $10^1$ , las curvas experimental y ajustada comienzan a diverger. La tasa de corte promedio de los flujos de esta investigación se encuentran en el orden de  $10^2$  por lo que el ajuste por ley de potencias será inútil. En su lugar, se hizo una extrapolación de los valores experimentales con el método *Piecewise Cubic Hermite Interpolating Polynomial (PCHIP)*, y se obtuvieron valores de viscosidad efectiva correctos. Estos valores se encuentran en la tabla 3.3.

Con base en los datos mostrados en la figura 3.8, podemos observar que a

### 3. ANÁLISIS DE RESULTADOS

---



**Figura 3.8:** Coeficientes de arrastre ( $C_D$ ) y números de Reynolds ( $Re$ ) para cada caso en un fluido viscoelástico adelgazante.

diferencia del fluido newtoniano, en este caso las predicciones de Hadamard - Rybczynski y de Stokes están por debajo de los resultados obtenidos con la descripción general del coeficiente de arrastre. Esto se debe a que las ecuaciones de Hadamard - Rybczynski y de Stokes no están obtenidas para un fluido adelgazante, y mucho menos toman en cuenta los efectos elásticos del fluido. La naturaleza viscoelástica del fluido es la que puede estar aumentando significativamente el coeficiente de arrastre en el flujo, ya que ahora no solo se tiene una componente viscosa en la fuerza de arrastre, sino una componente elástica también. De investigaciones previas, se esperaba que los coeficientes de arrastre para un fluido viscoelástico sean mayores que para un fluido newtoniano.(29)

Esta información servirá como punto de partida y validación para el análisis de la interacción entre dos burbujas. Se comprobó que el fluido newtoniano presenta resultados esperados, y el viscoelástico muestra resultados interesantes que servirán como comparación para la siguiente sección.

### 3.3. Interacción entre burbujas

Se validó que los experimentos fueran consistentes, que se estuviera en el régimen correcto de estudio y se obtuvieron resultados que sirven de punto de partida para analizar la interacción entre dos burbujas en la sección anterior. En esta sección se presentarán los resultados que arrojan las interacciones entre burbujas organizadas por tamaño. Primero se analiza el caso con la aguja calibre 21G, pues es el diámetro intermedio; posteriormente se estudia el efecto que se tiene con burbujas de diámetro mayor, aunque con base en los resultados con burbujas aisladas, se espera un comportamiento similar pero con magnitudes diferentes. Finalmente, se presenta el análisis para la aguja calibre 25G, de este caso se espera un comportamiento distinto, pues parece que la burbuja se encuentra por debajo del volumen crítico en la discontinuidad de velocidad.

#### **Burbujas con diámetro intermedio ( $d_{newtoniano} = 3.6[mm]$ y $d_{viscoelastico} = 3.1[mm]$ )**

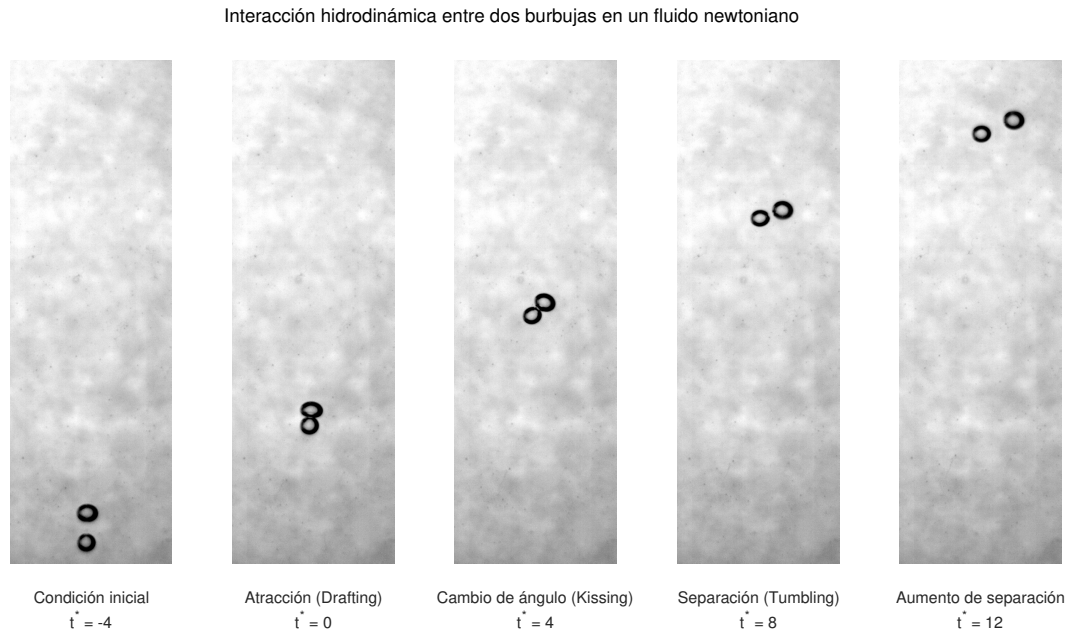
El primer caso se estudió con una aguja calibre 21G en ambos fluidos y se obtuvo un diámetro intermedio para el caso del fluido newtoniano, y un diámetro que parece estar por encima del valor crítico de la discontinuidad en la velocidad de las burbujas para el caso del fluido viscoelástico.

Las figuras 3.9 y 3.10 muestran la evolución de la interacción hidrodinámica entre las burbujas para el fluido newtoniano y para el fluido viscoelástico adelgazante respectivamente. Esta evolución se muestra en función de un tiempo adimensional definido como el tiempo real dividido por un tiempo característico:  $t^* = tU_\infty/D$ . Donde además, se define  $t^* = 0$  para el momento en el que la distancia entre burbujas es mínima. Para el caso donde la burbuja asciende dentro de un fluido newtoniano se tiene un fenómeno de *Drafting - Kissing - Tumbling*. La figura 3.9 muestra el proceso de esta interacción:

1. Las burbujas son liberadas en una configuración vertical, el ascenso comienza y se puede observar como la burbuja líder empieza a atraer a la burbuja seguidora. (Figura 3.9, primer cuadro)
2. La burbuja seguidora es atraída hacia la burbuja líder hasta hacer contacto, y debido a que la burbuja seguidora lleva una velocidad mayor que la líder, estas al chocar sufren una deformación considerable. La atracción y contacto

### 3. ANÁLISIS DE RESULTADOS

---



**Figura 3.9:** Desarrollo de la interacción hidrodinámica entre dos burbujas en un fluido newtoniano. La evolución está en función del tiempo adimensional  $t^*$ .  $Re = 5.15$

entre las burbujas es la parte del *drafting* en el fenómeno DKT. (Figura 3.9, segundo cuadro)

3. Una vez que las burbujas están juntas cambian de posición haciendo un giro. Si se traza una recta del centro de la burbuja líder al centro de la burbuja seguidora se podría observar como esta recta pasa de estar alineada con la vertical a formar un ángulo con la misma. Este proceso es la parte de *kissing* en el fenómeno DKT. (Figura 3.9, tercer cuadro)
4. Una vez que las burbujas cambian de posición, estas comienzan a repelerse. Esta es la fase final del fenómeno DKT y se conoce como *tumbling*. (Figura 3.9, cuarto cuadro)
5. Las burbujas ahora parecen haber alcanzado una velocidad terminal, sin embargo estas continúan alejándose entre ellas; es decir, la distancia entre centros continúa aumentando. (Figura 3.9, quinto cuadro)

Al observar la evolución de la interacción hidrodinámica entre las burbujas dentro de los diferentes fluidos, parecería que ocurre lo mismo para ambos casos, y aunque el fenómeno es parecido, tiene diferencias importantes. La interacción

hidrodinámica entre las burbujas dentro del fluido viscoelástico adelgazante se lleva a cabo de la siguiente manera:

1. Las burbujas son liberadas en una configuración vertical y el ascenso a través del fluido viscoelástico comienza. La burbuja líder comienza a atraer a la burbuja seguidora. (Figura 3.10, primer cuadro)
2. La burbuja seguidora tiene una velocidad mayor a la de la burbuja seguidora, de modo que esta asciende más rápido reduciendo su distancia con la burbuja líder, sin embargo las burbujas jamás se tocan. Poco antes de que la burbuja seguidora toque a la burbuja líder, esta parece rebotar; esto podría deberse a la componente elástica del fluido. (Figura 3.10, segundo cuadro)
3. Al mismo tiempo que sucede el rebote entre las burbujas, estas cambian de posición generando un ángulo con la vertical, la burbuja líder permanece por encima de la burbuja seguidora. De hecho, parece que la burbuja seguidora empuja a la burbuja líder, aunque sin hacer contacto, y esto hace que cambien de posición. (Figura 3.10, tercer cuadro)
4. La burbuja líder está por encima de la burbuja seguidora, pero ya no se tiene un alineamiento vertical. En este caso, las burbujas parecen haber alcanzado una posición relativa a ellas mismas constante. Es decir, la distancia entre centros y el ángulo que forman con respecto a la vertical está fijo. (Figura 3.10, cuarto cuadro)
5. Las burbujas llegan a una velocidad terminal después de todo el proceso y continúan su ascenso con la distancia entre centros y el ángulo con respecto a la vertical constantes. (Figura 3.10, quinto cuadro)

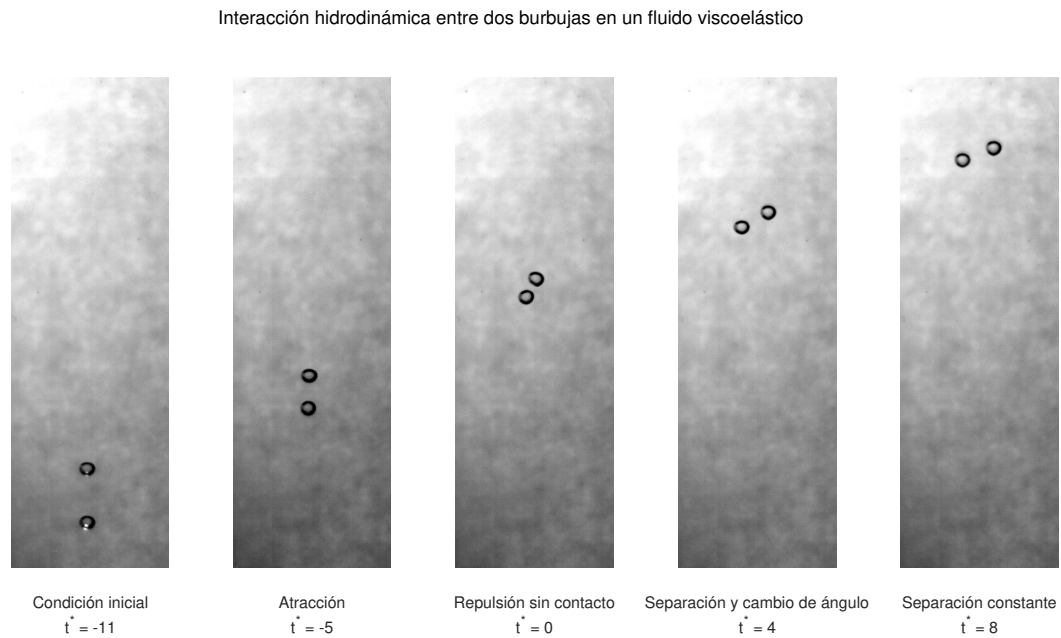
Una vez que se hizo una descripción cualitativa del proceso que se lleva a cabo dentro de ambos fluidos, se puede proceder a analizar los datos cuantitativos que se obtuvieron de la interacción hidrodinámica entre las burbujas para cada fluido.

Conviene que se estudie el comportamiento de las características que tienen la distancia entre centros y el ángulo que esta distancia forma con respecto a la vertical. La manera de definir este ángulo está esquematizada en la figura 3.11.

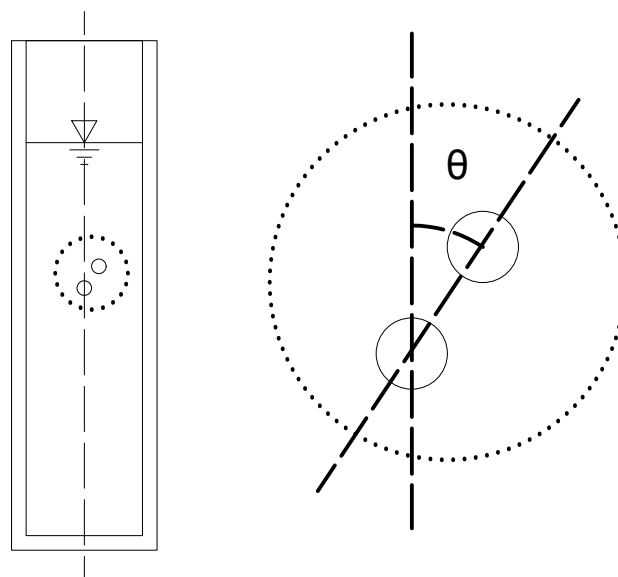
La figura 3.12 muestra como evoluciona la distancia que hay entre los centros de las burbujas tanto para el fluido newtoniano, como para el fluido viscoelástico. Esta distancia se encuentra normalizada con el diámetro medio de la burbuja. Al mismo tiempo se muestra la evolución del ángulo que la recta que va de centro

### 3. ANÁLISIS DE RESULTADOS

---

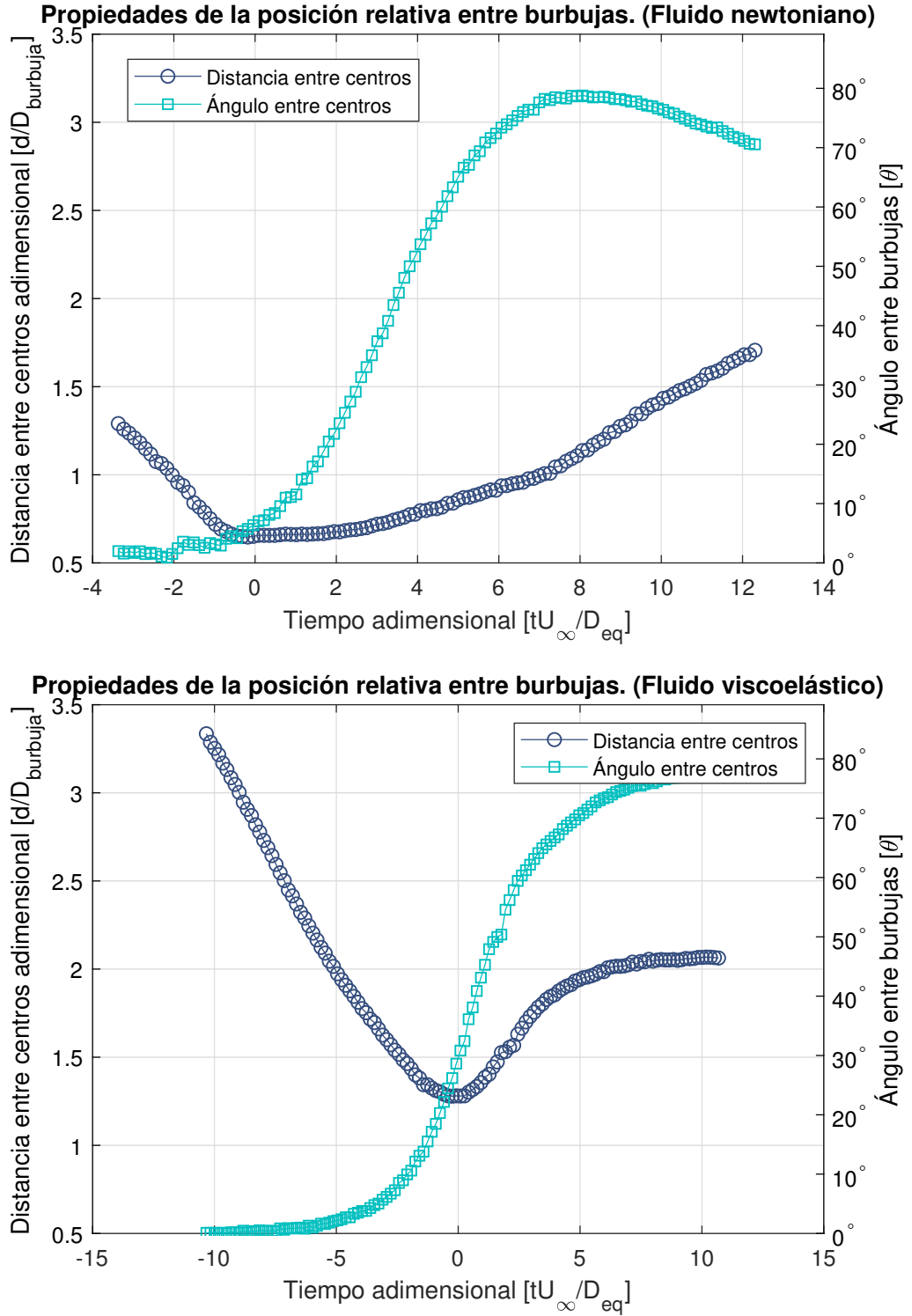


**Figura 3.10:** Desarrollo de la interacción hidrodinámica entre dos burbujas en un fluido viscoelástico.  $Re = 29.71$



**Figura 3.11:** Definición del ángulo a considerar.





**Figura 3.12:** Comportamiento de la posición relativa entre las burbujas y el ángulo que forman con respecto a la vertical.  $Re_{newtoniano} = 5.15$ ,  $Re_{viscoelástico} = 29.71$ ,  $De = 10.08$

### 3. ANÁLISIS DE RESULTADOS

---

a centro forma con respecto a la vertical. El eje horizontal muestra el tiempo adimensional  $t^*$ , de modo que se tienen solamente variables adimensionales con el fin de poder hacer una comparación válida entre ambos casos.

En el caso newtoniano las burbujas comienzan con una distancia inicial de  $1.3D$  (diámetros) y conforme el tiempo avanza, esta distancia comienza a reducirse; esto evidentemente es la atracción entre las burbujas. Al llegar al tiempo adimensional 0 las burbujas llegan a una distancia entre centros mínima, siendo esta  $0.6D$  aproximadamente, esto nos dice que no solo las burbujas están tocándose, sino que las burbujas deben haber sufrido una deformación de tal manera que se pueda tener una distancia menor a un diámetro entre sus centros. La distancia entre centros permanece en su punto mínimo por un período corto de tiempo y posteriormente continua creciendo. Se puede apreciar que la distancia entre centros parece crecer indefinidamente; a partir del tiempo adimensional 2 la curva de distancias entre centros adquiere una pendiente positiva y parece que no cambia con el tiempo.

En cuanto al ángulo, se tiene un ángulo  $0^\circ$  al inicio del proceso. Cuando las burbujas alcanzan su distancia mínima, el ángulo comienza a cambiar rápidamente yendo desde el valor inicial de  $0^\circ$  hasta un valor cercano a  $80^\circ$  y finalmente estableciéndose en  $70^\circ$ . Esto significa que el comportamiento del ángulo tiene un sobrepaso pequeño y después parece continuar decreciendo con el tiempo.

Por otra parte, para el fluido viscoelástico se tienen características muy diferentes. La distancia inicial entre las burbujas es de  $2.6D$ , pero esta distancia de igual manera comienza a reducirse debido a que la burbuja seguidora está siendo atraída por la burbuja líder. La distancia llega a un punto mínimo, y se puede apreciar que a diferencia del caso newtoniano, este punto mínimo es cercano a  $1.3D$ , esto quiere decir que efectivamente las burbujas no se tocan. La burbuja seguidora es atraída a la burbuja líder pero poco antes de tocarse esta es repelida. La diferencia más importante es que una vez que las burbujas se repelen, la distancia entre centros llega a un valor constante. Se puede observar que del tiempo adimensional 5 al 10 la curva adquiere una forma plana lo cual significa que las burbujas mantienen una distancia fija entre ellas.

En el ángulo también se puede observar una diferencia significativa. Contrario al caso newtoniano el ángulo pasa de su estado inicial de  $0^\circ$  a un valor mayor antes de que las burbujas se encuentran a una distancia mínima entre ellas. Esto podría deberse a que existe una estela negativa que provoca que la burbuja seguidora cambie de orientación tiempo antes de llegar a tocar a la burbuja líder. No obstante, en el fluido viscoelástico no hay presencia de un sobrepaso en el ángulo,

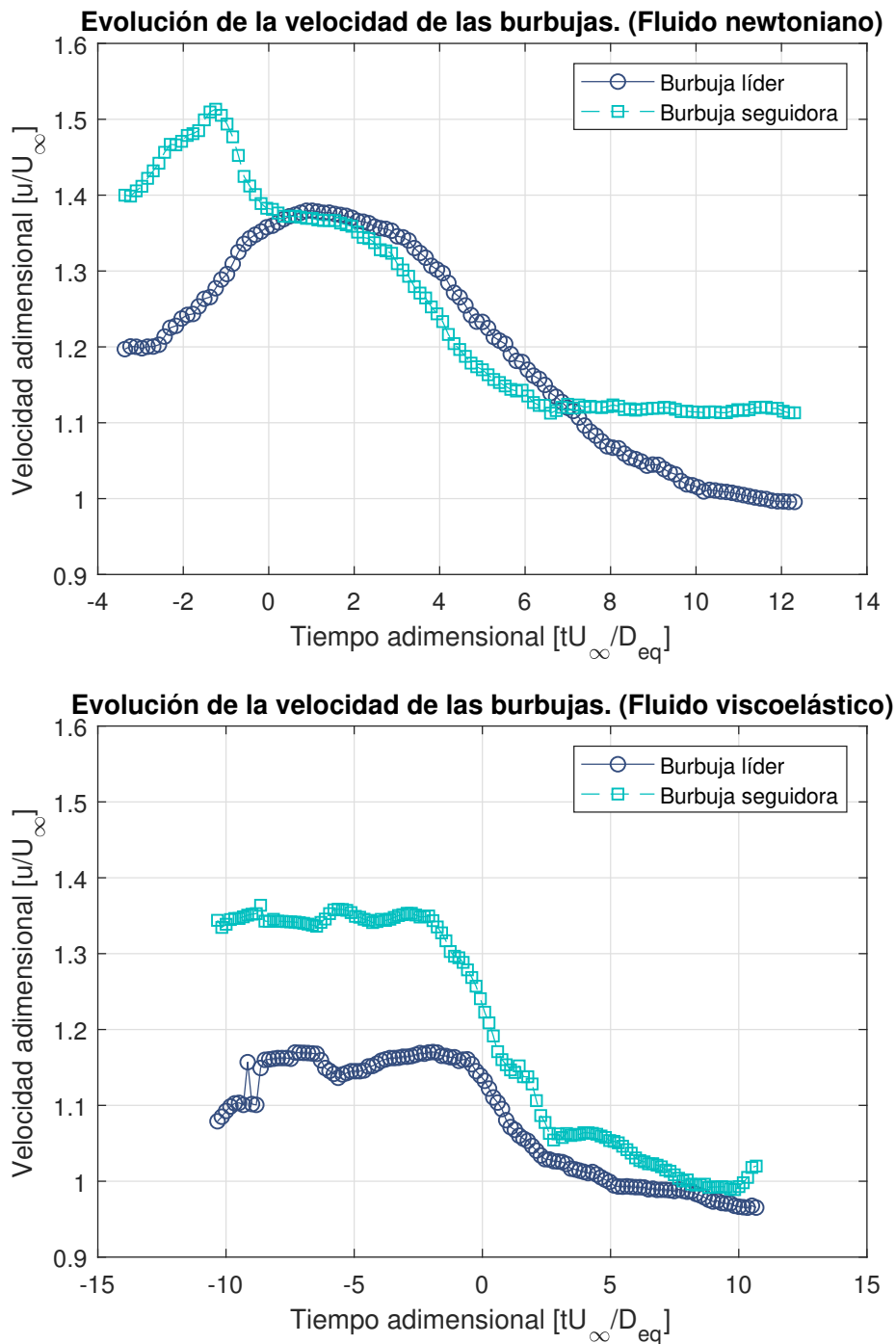
este pasa de un valor inicial de  $0^\circ$  a un valor final de poco menos de  $80^\circ$ . En el fluido viscoelástico los coeficientes de arrastre son mayores para las burbujas, por lo que se podría argumentar que al haber una fuerza de arrastre mayor se impide la aparición de un sobrepaso en el comportamiento de ángulo entre centros.

Una vez mostrado el comportamiento de la distancia entre centros y su respectivo ángulo, se puede proceder a analizar el comportamiento de las velocidades de las burbujas. La figura 3.13 muestra la velocidad de las burbujas normalizada con la velocidad terminal obtenida para las burbujas aisladas, contra el tiempo adimensional usado en el análisis anterior.

Claramente se puede afirmar que se tienen tendencias muy distintas. Para el caso newtoniano ambas burbujas inician con una velocidad mayor a la velocidad terminal; sin embargo, la burbuja seguidora tiene una velocidad mayor que la velocidad de la burbuja líder esto se debe a la atracción que se genera entre las burbujas. Cuando las burbujas están cercanas a tocarse la burbuja seguidora comienza a disminuir su velocidad, pero la burbuja líder la aumenta hasta llegar a un máximo. Durante este punto de velocidad máxima para la burbuja líder, la velocidad de la burbuja seguidora pasa a ser menor; esto se puede observar del tiempo adimensional 0 al 4 y durante este mismo período la velocidad de ambas burbujas disminuye. Esta reducción de velocidad puede deberse a que, como ya se mencionó antes, exista una deformación temporal de las burbujas lo cual haga que, debido a la geometría, el arrastre incremente significativamente. Una vez que se alcanza el tiempo adimensional 6, la burbuja seguidora adquiere una velocidad terminal al 110 % de la velocidad terminal de la burbuja aislada, mientras que la burbuja líder sigue disminuyendo su velocidad hasta que llega al 100 % de la velocidad terminal de la burbuja aislada.

Al estudiar el comportamiento de la velocidad en el fluido viscoelástico se aprecia que de igual manera ambas burbujas inician con una velocidad mayor a la velocidad terminal de la burbuja aislada. Sin embargo, la magnitud es menor para ambas burbujas: en el caso newtoniano la burbuja líder inicia con un 120 % de la velocidad terminal, mientras que en el fluido viscoelástico es tan solo el 110 %; la burbuja seguidora en el fluido newtoniano inicia con 140 % de la velocidad terminal, cuando en el fluido viscoelástico tiene un 135 % de la velocidad terminal de la burbuja aislada. Esta reducción en magnitud puede ser resultado del mayor arrastre que se genera en un fluido viscoelástico. La velocidad permanece constante durante el período de atracción entre burbujas, lo cual es un contraste con el proceso complicado que ocurre en las velocidades de las burbujas en el fluido newtoniano. Una vez que las burbujas llegan al punto de distancia mínima entre ellas, la velocidad de ambas burbujas comienza a disminuir. Al

### 3. ANÁLISIS DE RESULTADOS



**Figura 3.13:** Evolución de la velocidad de las burbujas en ambos fluidos.  $Re_{newtoniano} = 5.15$ ,  $Re_{viscoelástico} = 29.71$ ,  $De = 10.08$

igual que con el fluido newtoniano, esto puede ser debido a una deformación de las burbujas que provoque que la fuerza de arrastre aumente, disminuyendo así su velocidad. Las burbujas llegan a una velocidad terminal, la cual de hecho es igual a la velocidad terminal de la burbuja aislada; una diferencia más con respecto al fluido newtoniano. Esto podría ser causado por la naturaleza elástica del fluido: cuando las burbujas llegan a su nueva alineación final en el fluido newtoniano, estas comienzan a alejarse por que no hay nada que las mantenga unidas, sin embargo, en el fluido viscoelástico hay una componente elástica que hace que el fluido quiera regresar a su estado original; entonces cuando las burbujas adquieren su nuevo alineamiento, el fluido que se encuentra entre ellas hace que permanezcan fijas una con respecto a la otra adquiriendo así la misma velocidad.

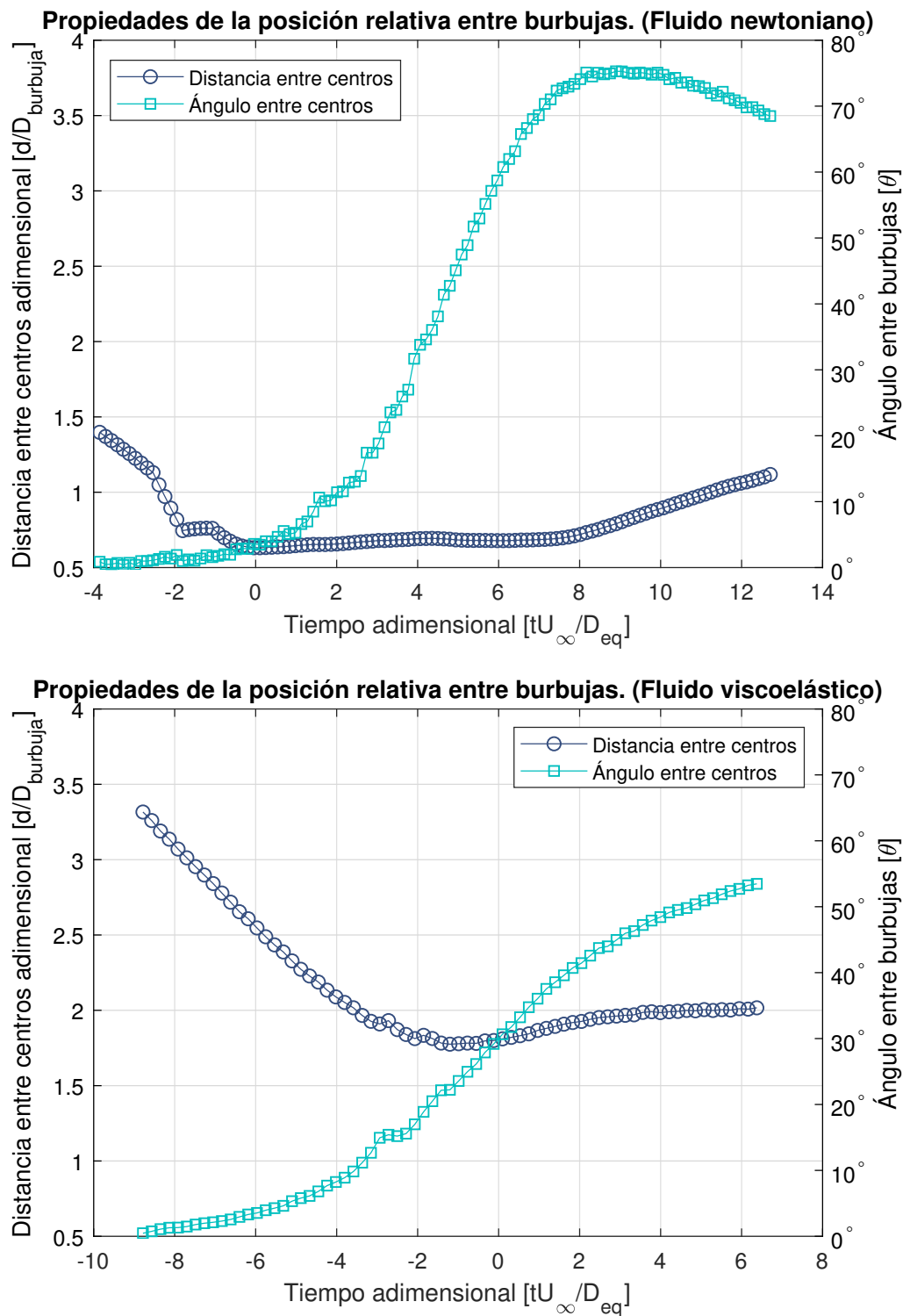
### **Burbujas con diámetro mayor ( $d_{newtoniano} = 4.0[mm]$ y $d_{viscoelastico} = 3.6[mm]$ )**

Los resultados obtenidos de los experimentos hechos con burbujas generadas por la aguja calibre 18G son cualitativamente similares, las magnitudes son las que varían un poco. Por esta razón, se hará una descripción de las diferencias con respecto al tamaño de burbuja anterior.

En cuanto al comportamiento de la posición relativa entre burbujas se tienen tendencias muy similares a las presentes en el experimento anteriormente descrito. La figura 3.14 muestra que las burbujas en el fluido newtoniano se atraen, se tocan mientras sufren una deformación y después se separan y terminan su ascenso con la separación entre ellas creciendo indefinidamente. El ángulo va de un valor inicial de  $0^\circ$  a un valor final de  $70^\circ$  con un sobrepaso de aproximadamente  $85^\circ$ . Por otro lado, en el fluido viscoelástico las burbujas se atraen, adquieren una posición con una nueva alineación con respecto a la vertical y posteriormente continúan su ascenso con una separación constante entre ellas. Las diferencias que hay que destacar en cuanto al otro tamaño de burbujas son:

- La separación mínima entre las burbujas en el fluido viscoelástico es mucho mayor que antes. Ahora se acercan hasta una distancia cercana a  $1.75D$  en contraste con  $1.3D$  con la burbuja anterior. Las burbujas al ser más grandes podrían estar comprimiendo una mayor porción de fluido el cual responde con una fuerza repulsiva mayor debido a la elasticidad del mismo y a la tensión superficial de la burbuja.
- El ángulo del fluido viscoelástico tiene un valor final menor a comparación de la burbuja producida por la aguja calibre 21G. La explicación a esto

### 3. ANÁLISIS DE RESULTADOS



**Figura 3.14:** Comportamiento de la posición relativa entre las burbujas y el ángulo que forman con respecto a la vertical..  $Re_{newtoniano} = 6.29$ ,  $Re_{viscoelástico} = 41.61$ ,  $De = 10.35$

puede ser exactamente la misma que para la separación, las fuerzas elásticas son mayores a mayor tamaño de burbuja y estas impiden que las burbujas cambien su posición drásticamente.

En la figura 3.15 se aprecia que la tendencia en el comportamiento de las velocidades es cualitativamente igual, y cuantitativamente similar. La magnitud de las velocidades varía ligeramente, siendo un poco menor en comparación con el caso anterior. Se podría suponer que hay fuerzas elásticas mayores que generan esta ligera disminución de velocidad.

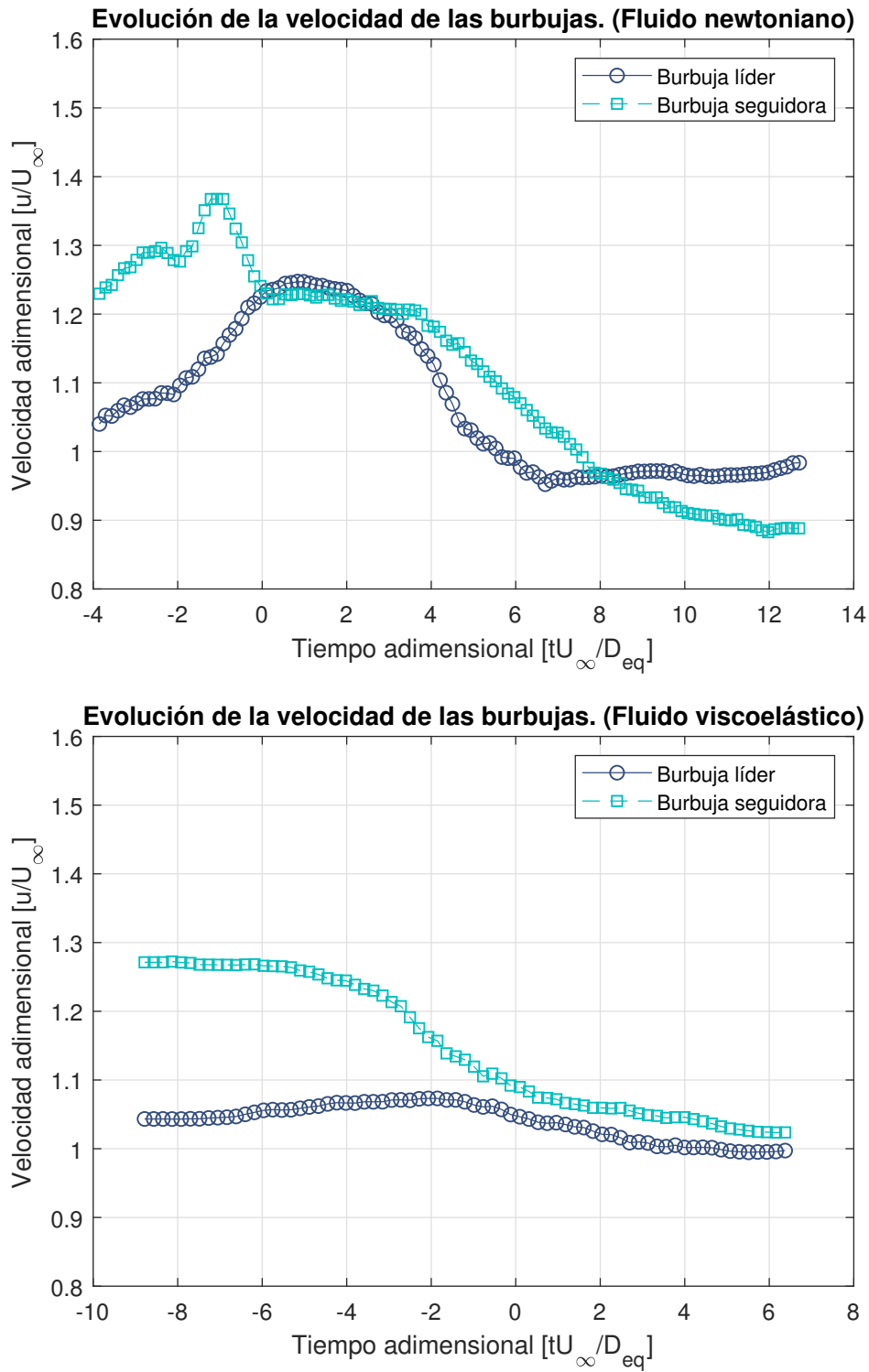
### **Burbujas con diámetro menor ( $d_{newtoniano} = 3.3[mm]$ y $d_{viscoelastico} = 2.2[mm]$ )**

Cuando se hizo el análisis de las propiedades del flujo con las burbujas aisladas, se descubrió que probablemente la burbuja generada con la aguja más pequeña estaba por debajo de la discontinuidad de velocidad y por ende, se espera que el comportamiento del par de burbujas tenga algunas diferencias con respecto a los casos anteriores.

La primera diferencia que se puede apreciar es la forma de la gráfica que describe el comportamiento de la posición relativa entre las burbujas. La figura 3.16 muestra el comportamiento del par de burbujas en el fluido newtoniano y en el fluido viscoelástico; en esta configuración de flujo la gráfica del fluido newtoniano y la gráfica del fluido viscoelástico se ven muy similares. Las burbujas en el fluido viscoelástico se tocan, y posteriormente hay un cambio de posición para finalmente terminar con una separación que va incrementando entre ellas. La evolución del ángulo, de hecho, también presenta un sobrepaso en esta situación, y esto es algo que no se presentó en las burbujas con diámetros mayores. La evolución de la posición relativa entre burbujas es muy similar en ambos casos, con la diferencia de que en el fluido viscoelástico ocurre con mayor rapidez que en el fluido newtoniano.

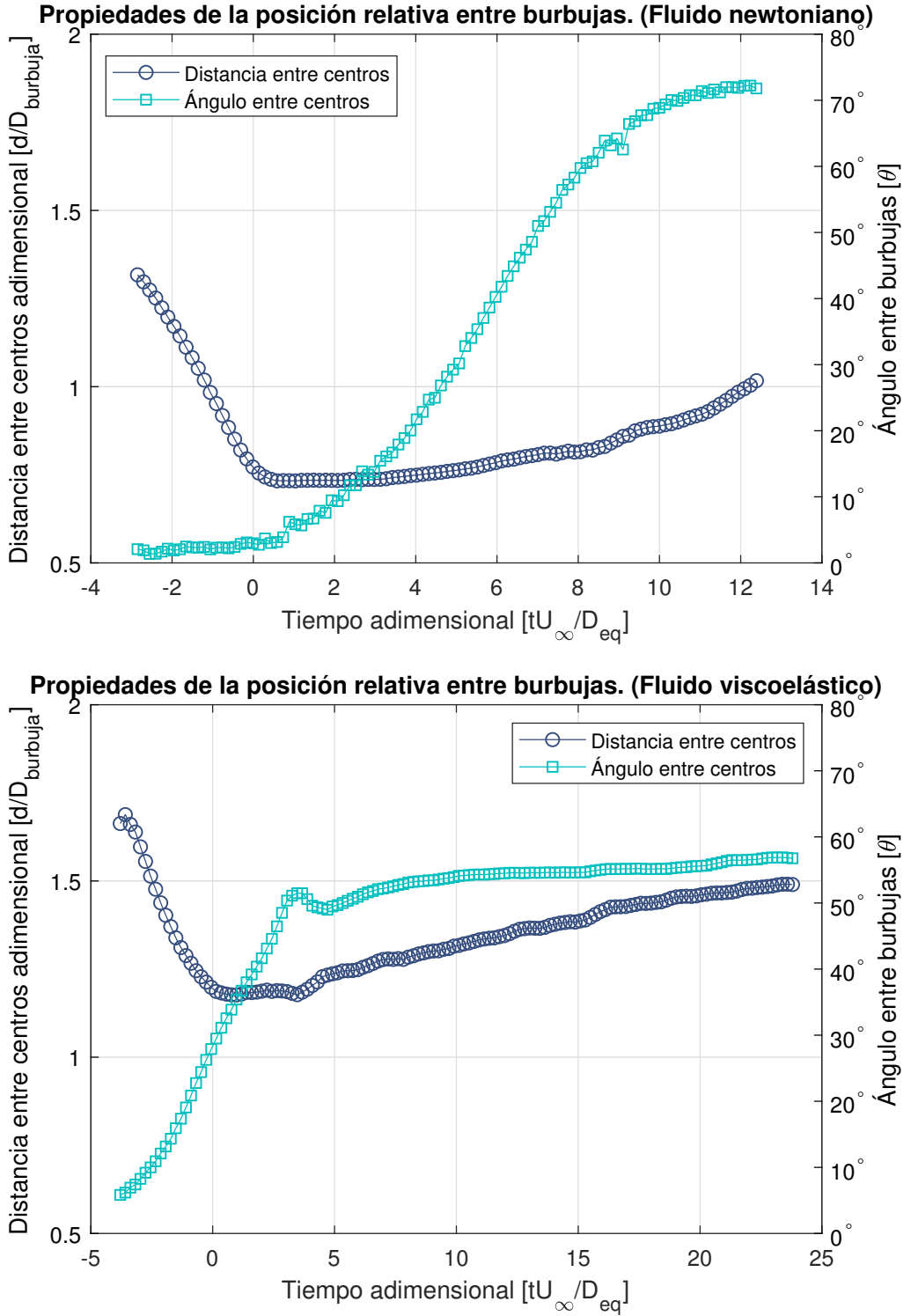
La velocidad menor de la burbuja hace que la viscosidad del fluido sea mayor ya que es un fluido adelgazante, y esto tiene como consecuencia que el fluido se asemeje más a un fluido meramente viscoso. La velocidad de las burbujas también presenta una diferencia muy importante con respecto a las burbujas con diámetros mayores; en este caso la velocidad adimensional de las burbujas está por encima de 1.4 tanto para la burbuja líder como para la burbuja seguidora; en

### 3. ANÁLISIS DE RESULTADOS



**Figura 3.15:** Evolución de la velocidad de las burbujas en ambos fluidos.  $Re_{newtoniano} = 6.29$ ,  $Re_{viscoelástico} = 41.61$ ,  $De = 10.35$





**Figura 3.16:** Comportamiento de la posición relativa entre las burbujas y el ángulo que forman con respecto a la vertical.  $Re_{newtoniano} = 3.53$ ,  $Re_{viscoelástico} = 11.92$ ,  $De = 8.29$

### 3. ANÁLISIS DE RESULTADOS

---

cambio en las burbujas con diámetros mayores la velocidad no pasa de 1.5. Las burbujas de diámetros mayores son más propensas a sufrir deformaciones elipsoidales horizontales a causa de la estela negativa en el fluido de tal manera que la fuerza de arrastre sea mayor, reduciendo así sus velocidades. Se puede apreciar que al final de la interacción, las burbujas llegan a su velocidad terminal siendo esta un 20 % mayor que la velocidad terminal de las burbujas aisladas.

La figura 3.17 muestra como la velocidad de ambas burbujas tiene un aumento significativo durante el tiempo adimensional 3 y 5. Este período de tiempo es justo donde se presenta el sobrepaso en el comportamiento del ángulo de las burbujas con respecto a la vertical. El salto de velocidad puede deberse a que la elasticidad del fluido hace que el sobrepaso angular se establezca a un valor terminal pero, a comparación del caso newtoniano, con una fuerza mayor.

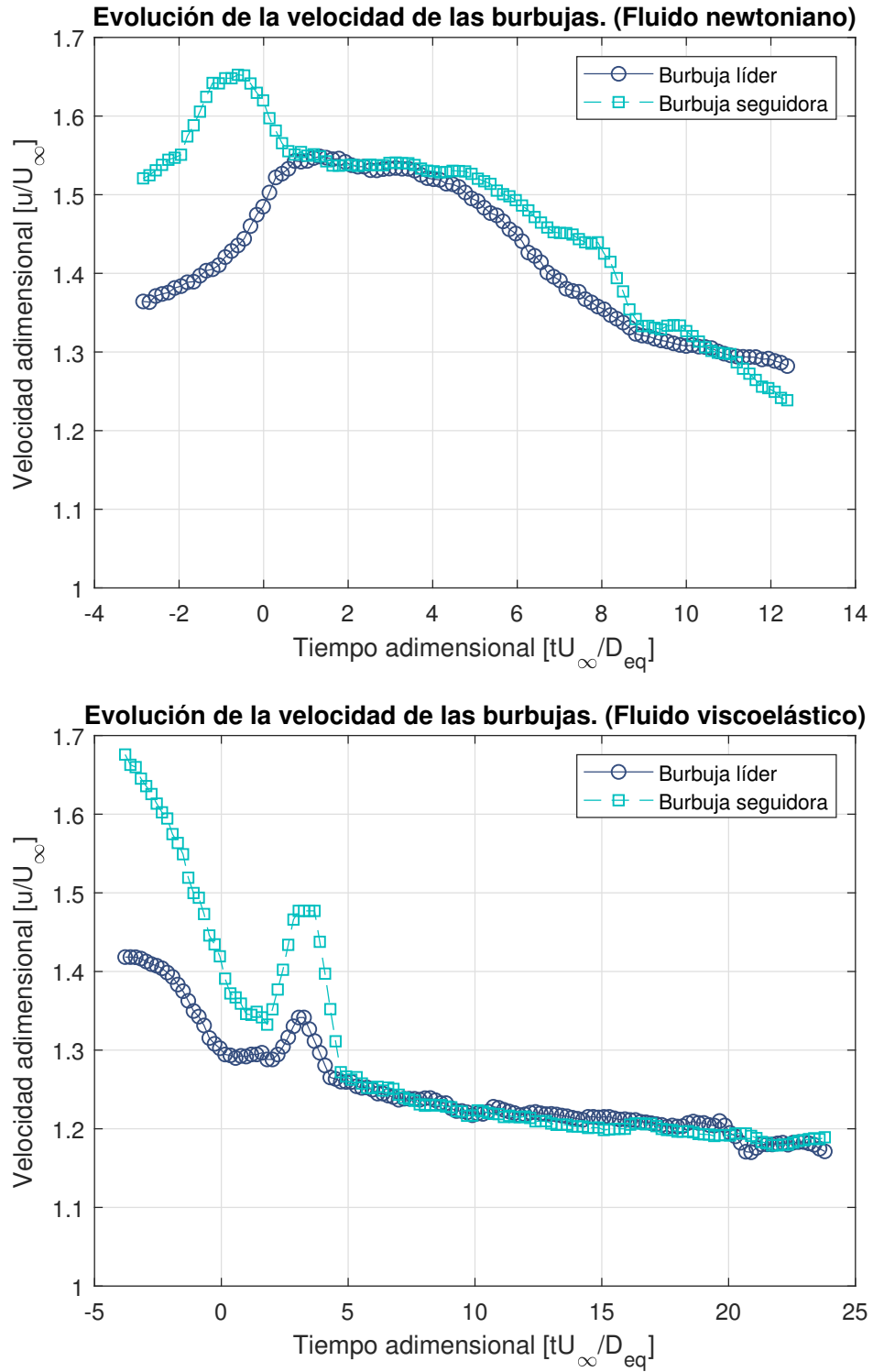
La figura 3.18 muestra capturas de varios momentos en el tiempo donde se puede apreciar al comportamiento del par de burbujas con diámetros más pequeños dentro del fluido viscoelástico. Se puede apreciar que en este caso, las burbujas sí se tocan, y hay presencia de DKT.

#### 3.4. Resumen de la interacción entre burbujas dentro del fluido viscoelástico

Ya que se hizo el análisis caso por caso del tipo de interacción y los procesos que ocurren en el ascenso de dos burbujas en un fluido newtoniano y en un fluido viscoelástico, resulta conveniente entonces hacer una recapitulación del comportamiento de las burbujas en el fluido viscoelástico.

##### Evaluación de la posición relativa entre las burbujas

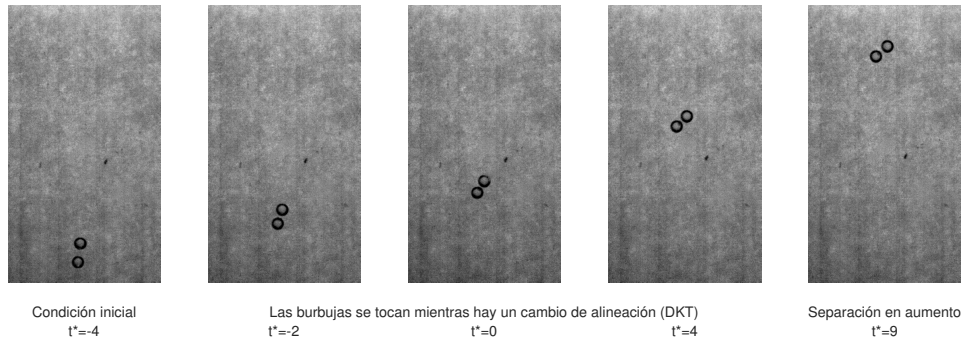
El fenómeno de interacción entre dos burbujas dentro de un fluido viscoelástico puede ser descrito por la figura 3.19. Cuando las burbujas tienen un diámetro que se encuentre por encima de la discontinuidad en velocidad (BVD), entonces las burbujas tenderán a atraerse entre ellas hasta que se encuentren a una distancia mínima entre ellas; esta distancia es mayor o cercana a un diámetro de tal manera que apenas y se toquen entre ellas. Hay una especie de rebote entre ellas que las alinea de tal manera que ahora forman un ángulo con la vertical y finalmente continúan su ascenso con una distancia entre ellas constante. Sin em-



**Figura 3.17:** Evolución de la velocidad de las burbujas en ambos fluidos.  $Re_{newtoniano} = 3.53$ ,  $Re_{viscoelástico} = 11.92$ ,  $De = 8.29$

### 3. ANÁLISIS DE RESULTADOS

Interacción hidrodinámica entre dos burbujas en un fluido viscoelástico



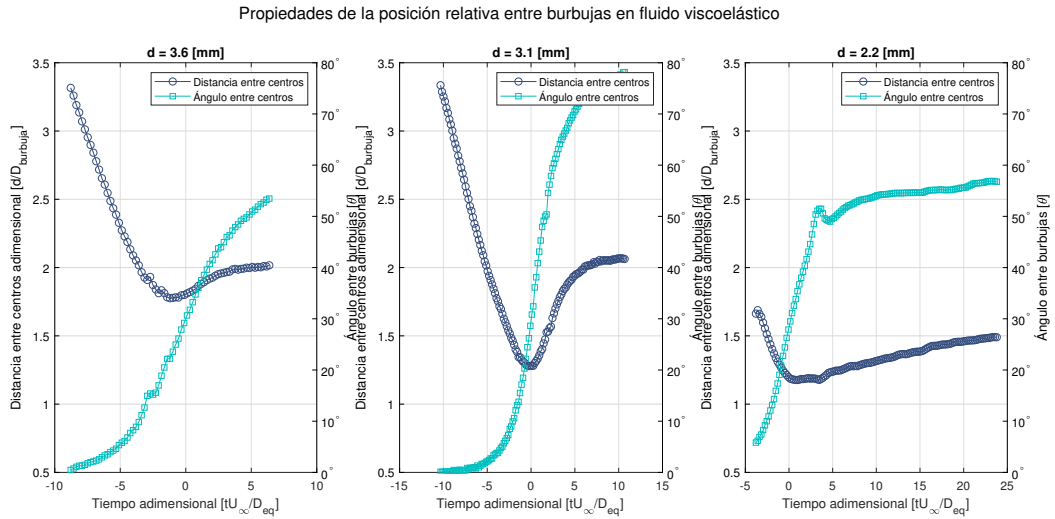
**Figura 3.18:** Evolución de la interacción hidrodinámica para las burbujas con diámetros más pequeños.

bargo, si la burbuja se encuentra por debajo de la discontinuidad de velocidad, esta presenta un comportamiento muy similar al newtoniano, es decir *Drafting - Kissing - Tumbling*.

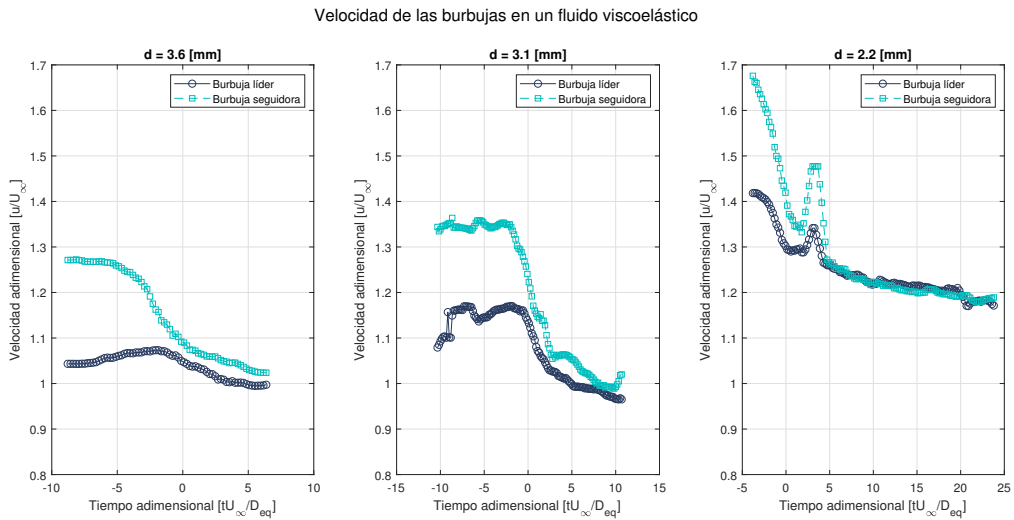
Con respecto a la velocidad, se tiene un comportamiento simple y sencillo de describir, tal y como se puede ver en la figura 3.20. La velocidad de la burbuja seguidora es mayor de modo que es atraída a la burbuja líder, una vez que las burbujas cambian de alineación la velocidad de ambas burbujas tiende a ser parecida y además tiene un valor constante cercano a la velocidad terminal de la burbuja aislada. Sin embargo, se puede apreciar que mientras más pequeño es el diámetro de la burbuja, la velocidad normalizada es más grande al inicio del ascenso de las burbujas, de hecho, si el tamaño de la burbuja es lo suficientemente pequeño como para estar debajo del límite de la discontinuidad de velocidad, entonces, la velocidad normalizada de las burbujas en interacción crece demasiado a comparación de los casos que se encuentran por encima de la discontinuidad; además de que las burbujas por debajo de la discontinuidad no tienen una velocidad terminal igual a la velocidad terminal de la burbuja aislada con el mismo diámetro. Además, se tiene que la velocidad de las burbujas más pequeñas tiene un aumento súbito justo durante el cambio de alineación, una investigación futura podría profundizar en las causas de estas perturbaciones en la tendencia del comportamiento de las burbujas.

Se puede definir un número de elasticidad  $El = 2De/Re$  tal que si  $El > 12$  entonces los efectos elásticos predominan en el flujo. (7) Como se puede apreciar en la tabla 3.4, los números de elasticidad ( $El$ ) son todos menores a 12, lo cual nos

### 3.4 Resumen de la interacción entre burbujas dentro del fluido viscoelástico



**Figura 3.19:** Comparación de la posición relativa de las burbujas en todos los casos con el fluido viscoelástico.  $Re_{d=3.6[mm]} = 41.61$ ,  $Re_{d=3.1[mm]} = 29.71$ ,  $Re_{d=2.2[mm]} = 11.92$



**Figura 3.20:** Comparación de las velocidades de las burbujas en el fluido viscoelástico.  $Re_{d=3.6[mm]} = 41.61$ ,  $Re_{d=3.1[mm]} = 29.71$ ,  $Re_{d=2.2[mm]} = 11.92$

### 3. ANÁLISIS DE RESULTADOS

---

| Aguja       | De    | Re    | El   |
|-------------|-------|-------|------|
| Calibre 18G | 10.35 | 41.61 | 0.49 |
| Calibre 21G | 10.08 | 29.71 | 0.68 |
| Calibre 25G | 8.29  | 11.92 | 1.39 |

**Tabla 3.4:** Números de Deborah para los casos estudiados.

dice que los efectos elásticos no predominan en el flujo. Los números de Deborah pueden llegar a estar cercanos a  $De = 2000$  (39) para el fluido utilizado en este estudio, por lo que se puede afirmar que el régimen de flujo está lejos de ser predominantemente elástico.

## Conclusiones y alcances

---

### 4.1. Conclusiones

La hipótesis inicial de esta investigación espera que las burbujas experimenten fuerzas de atracción o repulsión entre ellas, dependiendo del tamaño de la burbuja. Se anticipa también que estas fuerzas provoquen un fenómeno parecido al drafting - kissing - tumbling (DKT) que se ha observado en partículas sólidas. La estela negativa que se genera en el fluido por encima del volumen crítico de la burbuja puede provocar fuerzas de repulsión mucho más grandes de las esperadas que conduzcan a un fenómeno nuevo o una simple separación entre las burbujas.

La hipótesis se comprobó de manera parcial además de que ahora se sabe con exactitud el tipo de comportamiento que las burbujas presentan. Se puede concluir que:

- La hipótesis fue correcta en el sentido que esta esperaba que las fuerzas de repulsión serían mucho más grandes por encima de la discontinuidad de velocidad. Estas fuerzas de repulsión impiden que las burbujas se toquen, mientras que en el fluido newtoniano se tocan y además se deforman durante la interacción.
- El comportamiento de las burbujas cuando se encuentran por debajo del volumen crítico es similar al comportamiento que se da en fluidos newtonianos.
- La interacción hidrodinámica de las burbujas podría considerarse como una variación del fenómeno de *Drafting - Kissing - Tumbling* con la diferencia de que el *Kissing* es mucho más breve que en fluidos newtonianos, y que el *Tumbling* queda limitado a una distancia máxima, de modo que las burbujas terminan su ascenso con una distancia constante entre ellas.

- La componente elástica en el fluido genera fuerzas de arrastre superiores a las que están presentes en un fluido newtoniano, de modo que muchos de los efectos que se aprecian durante la interacción son más suaves a comparación del fluido newtoniano.
- Las predicciones de Hadamard - Rybczynski y de Stokes pueden dar un límite inferior para el cálculo de velocidades terminales y de coeficiente de arrastre, sin embargo están bastante lejanos a los valores reales.
- Con base en el cálculo de los números de elasticidad, se puede afirmar que los efectos elásticos no predominan aún para para las burbujas cuyos volúmenes se encuentran por debajo del volumen crítico. Sin embargo, se podrían obtener números de Deborah ( $De$ ) mucho mayores.

### 4.2. Alcances

Esta investigación estuvo limitada a descubrir si había un comportamiento distinto para la interacción hidrodinámica entre dos burbujas en ascenso dentro de un fluido viscoelástico y en caso de haberlo, describir que tipo de comportamiento fue el encontrado. Sin embargo, se podrían hacer futuras investigaciones profundizando en las causas exactas de los fenómenos vistos en la interacción de las burbujas, haciendo un énfasis en el cambio de comportamiento entre las burbujas por encima del volumen crítico y las burbujas que están por debajo del mismo; ya que resulta interesante que a pesar de ser un fluido con características diferentes y además de que los efectos elásticos predominan en el flujo, se tiene un comportamiento muy similar al que está presente en un fluido newtoniano.

También es importante considerar un estudio con PIV (*Particle Image Velocimetry*) para poder obtener los campos de velocidad presentes en el ascenso de las burbujas, ya que esto permitiría comprobar las causas de los fenómenos observados en esta investigación.



## Código de MATLAB

---

```
1 clc
2 clear
3 close all
4 cd( 'newtonian_21G ' )
5 %PARAMETERS
6 path = 'newtonian_6 ' ;
7     %video reading
8     vid = VideoReader( [path, '.avi ' ] ) ;
9     n = vid.NumberOfFrames ;
10 fps = 600 ;
11 first_frame = 61 ;
12 last_frame = 416 ;
13 step = 3 ;
14 deltat = step / fps ;
15 scale = 13400 ; %footage scale in pix/m
16 d1 = 15 ;
17 d2 = 6 ;
18 min = 0 ;
19 max = 50 ;
20 %bubble tracking
21 figure( 1 ) ;
22 colormap( gray ) ;
23 title( [ 'Trayectoria de burbujas en ', path ] )
24 j = 1 ;
25 for i = first_frame : step : last_frame
26     %read and crop photo
27     photo = read( vid , i ) ;
28     photo = imcrop( photo , [ 500 0 400 1200 ] ) ;
```

## A. CÓDIGO DE MATLAB

---

```
29     %show un-processed picture
30     subplot(1,2,1);
31     imshow(photo, 'InitialMagnification', 'fit');
32     axis image;
33     %clean image
34     photo1 = imtophat(photo, strel('disk', d1));
35     photo2 = imadjust(photo1, [min/255 max/255], []);
36     level = graythresh(photo2);
37     photo3 = im2bw(photo2);
38     e = strel('disk', d2);
39     photo3 = imerode(photo3, e);
40     photo3 = imclose(photo3, e);
41     photo3 = imdilate(photo3, e);
42     photo3 = imfill(photo3, 'holes');
43     photo3 = bwareaopen(photo3, 250);
44     photo3 = bwareafilt(photo3, 2);
45     %show processed image
46     subplot(1, 2, 2);
47     title('Binario')
48     imshow(photo3, 'InitialMagnification', 'fit')
49     axis image
50     %compute properties
51     [labeled, numObjects] = bwlabel(photo3,8);
52     graindata = regionprops(labeled, 'Area', 'Centroid', '
        BoundingBox', 'Orientation', 'MajorAxisLength', '
        MinorAxisLength', 'EquivDiameter');
53     graindata2=struct2table(graindata);
54     [tmp index]=sort(graindata2.Area,1, 'descend');
55     graindata=table2struct(graindata2);
56
57     if length(index) == 2
58         pos_top=graindata(1).Centroid;
59         x_top(j)=pos_top(1);
60         y_top(j)=pos_top(2);
61         sizex_top(j)=graindata(1).MajorAxisLength;
62         sizey_top(j)=graindata(1).MinorAxisLength;
63         d_top(j)=graindata(1).EquivDiameter;
64
65         pos_bottom=graindata(2).Centroid;
66         x_bottom(j)=pos_bottom(1);
67         y_bottom(j)=pos_bottom(2);
```

---

```

68     sizex_bottom(j)=graindata(2).MajorAxisLength;
69     sizey_bottom(j)=graindata(2).MinorAxisLength;
70     d_bottom(j)=graindata(2).EquivDiameter;
71     else %if bubble gets lost, computer position according
       to mean distance
72     if abs(y_bottom(j-1)-y_bottom(j-2)) > abs(mean(
       diff(y_bottom)))
73
74         delay = 2;
75     else
76         delay = 1;
77     end
78     x_top(j)=x_top(j-delay) + delay*mean(diff(x_top));
79     y_top(j)=y_top(j-delay) + delay*mean(diff(y_top));
80     sizex_top(j)=sizex_top(j-1);
81     sizey_top(j)=sizey_top(j-1);
82     d_top(j)=d_top(j-1);
83
84     x_bottom(j)= x_bottom(j-delay) + delay*mean(diff(
       x_bottom));
85     y_bottom(j)= y_bottom(j-delay) + delay*mean(diff(
       y_bottom));
86     sizex_bottom(j)=sizex_bottom(j-1);
87     sizey_bottom(j)=sizey_bottom(j-1);
88     d_bottom(j)=d_bottom(j-1);
89     end
90
91     t(j)=j*deltat;
92
93     subplot(1,2,1);
94     title('Trayectoria')
95     hold on
96     plot(x_top,y_top,'r+')
97     plot(x_bottom,y_bottom,'y x')
98     subplot(1, 2, 2);
99     title('Binario')
100    j=j+1;
101 end
102
103 x_top=x_top/scale;
104 y_top=y_top/scale;

```

---

## A. CÓDIGO DE MATLAB

---

```
105 dh_top=size_x_bottom/scale;
106 dv_top=size_y_bottom/scale;
107 d_top=d_top/scale;
108 chi_top=dh_top./dv_top;
109
110 for i=2:length(y_top)-1,
111     desp_top=sqrt((x_top(i+1)-x_top(i-1)).^2 + (y_top(i
112         +1)-y_top(i-1)).^2);
113     v_top(i)=desp_top/(2*deltat);
114 end
115 v_top(1) = v_top(2);
116 v_top(length(y_top)) = v_top(length(y_top)-1);
117
118 x_bottom=x_bottom/scale;
119 y_bottom=y_bottom/scale;
120 dh_bottom=size_x_bottom/scale;
121 dv_bottom=size_y_bottom/scale;
122 d_bottom=d_bottom/scale;
123 chi_bottom=dh_bottom./dv_bottom;
124
125 for i=2:length(y_bottom)-1,
126     desp_bottom=sqrt((x_bottom(i+1)-x_bottom(i-1)).^2 + (
127         y_bottom(i+1)-y_bottom(i-1)).^2);
128     v_bottom(i)=desp_bottom/(2*deltat);
129 end
130 v_bottom(1) = v_bottom(2);
131 v_bottom(length(y_bottom)) = v_bottom(length(y_bottom)-1);
132
133 for i=1:length(y_top),
134     distance(i)=sqrt((y_bottom(i)-y_top(i)).^2+(x_bottom(i)
135         -x_top(i)).^2);
136     angle(i)=atan((y_bottom(i)-y_top(i))/(x_bottom(i)-
137         x_top(i)));
138 end
139 data = [x_top; y_top; v_top; d_top; dh_top; dv_top;
140         x_bottom; y_bottom; v_bottom; d_bottom; dh_bottom;
141         dv_bottom; t; distance; angle];
142 xlswrite(path,data);
143 cd ../
```

## Razón de corte promedio

---

Se sabe que la tasa de corte en la superficie de un objeto en movimiento no es constante, sin embargo, para determinar la magnitud de las fuerzas sobre dicho objeto se necesita conocer una tasa de corte promedio. En este trabajo se utilizó  $\dot{\gamma} = 2U_\infty/D$ . En este apéndice se probará que esta suposición es correcta.

La tasa de corte promediada sobre la superficie  $\dot{\gamma}$  es:

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{4\pi R^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (\dot{\gamma}_{r\theta})_{r=R} R^2 \sin^2\theta d\theta d\phi \quad (\text{B.1})$$

donde  $\dot{\gamma}_{r\theta}$  es la tasa de corte en la dirección  $r - \theta$  definida como:

$$\dot{\gamma}_{r\theta} = r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{U_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial U_r}{\partial \theta}$$

donde  $U_\theta$  y  $U_r$  son las componentes de velocidad en las direcciones  $\theta$  y  $r$  respectivamente. Para el flujo de alrededor de una esfera en flujo de Stokes, estas componentes están dadas por:

$$U_r = \frac{1}{2} U \cos\theta \left( 2 - 3\frac{R}{r} + \left(\frac{R}{r}\right)^3 \right)$$

$$U_\theta = \frac{1}{4} U \sin\theta \left( \left(\frac{R}{r}\right)^3 + 3\frac{R}{r} - 4 \right)$$

Luego entonces, la tasa de corte en la superficie es:

$$(\dot{\gamma}_{r\theta})_{r=R} = \frac{3}{2} \frac{U \sin\theta}{R}$$

Por lo tanto, si se integra la ecuación B.1, se obtiene:

## B. RAZÓN DE CORTE PROMEDIO

---

$$\dot{\gamma} = \frac{U}{R}$$

sustituyendo  $R = D/2$ , y a  $U = U_\infty$ :

$$\dot{\gamma} = \frac{2U_\infty}{D} \tag{B.2}$$

Si el número de Reynolds aumenta, la tasa de corte promedio sobre la superficie de la esfera podría diverger de la aproximación para el flujo de Stokes.

## Referencias

---

- [1] **Outlier removal using Hampel identifier.** <https://www.mathworks.com/help/signal/ref/hampel.html>. [En línea; visitado 5/Mayo/2019]. 35
- [2] **Phantom v9.1.** <http://www.adept.net.au/cameras/visionresearch/Phantomv9.1.shtml>. [En línea; visitado 30/Abril/2019]. 27
- [3] **Syringe Needle Gauge Chart.** <https://www.sigmaaldrich.com/chemistry/stockroom-reagents/learning-center/technical-library/needle-gauge-chart.html>. [En línea; visitado 29/Abril/2019]. XIII, 26
- [4] H. A. BARNES. **Thixotropy—a review.** *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, **70**(1):1 – 33, 1997. 12
- [5] D. V. BOGER AND K. WALTERS. *Rheological phenomena in focus.* Rheology Series. Elsevier, Burlington, MA, 1993. IX, IX, 13, 14, 15
- [6] C. E. BRENNEN. *Fundamentals of Multiphase Flow.* Cambridge University Press, 2005. 2, 4, 6
- [7] A. CASTILLO, W. L. MURCH, J. EINARSSON, B. MENA, E. S. G. SHAQFEH, AND R. ZENIT. **Drag coefficient for a sedimenting and rotating sphere in a viscoelastic fluid.** *Physical Review Fluids*, **4**(6), 2019. 60
- [8] M. O. CERRI, L. FUTIWAKI, C. D. F. JESUS, A. J. G. CRUZ, AND A. C. BADINO. **Average shear rate for non-Newtonian fluids in a concentric-**

## REFERENCIAS

---

- tube airlift bioreactor.** *Biochemical Engineering Journal*, **39**(1):51 – 57, 2008. [15](#)
- [9] R. CHHABRA AND J. F. RICHARDSON. *Non-Newtonian Flow and Applied Rheology*. 01 2008. [8](#), [9](#), [10](#), [13](#)
- [10] R. CLIFT, J. R. GRACE, AND M. E. WEBER. *Bubbles, drops and particles*. Mineola, New York : Dover, 2005, 2005. [6](#), [18](#)
- [11] S. M. DASH AND T. S. LEE. **Two spheres sedimentation dynamics in a viscous liquid column.** *Computers Fluids*, **123**:218 – 234, 2015. [IX](#), [20](#)
- [12] D. DE KEE, R. CHHABRA, AND A. DAJAN. **Motion and Coalescence of Gas Bubbles in Non-Newtonian Polymer Solutions.** *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, **37**:1–18, 12 1990. [19](#)
- [13] M. GAD-EL HAK. **Questions in Fluid Mechanics: Stokes’ Hypothesis for a Newtonian, Isotropic Fluid.** *Journal of Fluids Engineering-transactions of The Asme - J FLUID ENG*, **117**, 03 1995. [9](#)
- [14] E. GUZMÁN. *Análisis de un flujo bifásico con tapones hidrodinámicos largos en un sistema de producción costa-afuera*. PhD thesis, 2009. [2](#)
- [15] J. S. HADAMARD. **Mouvement permanent lent d’une sphere liquid et visqueuse dans un liquide visqueux.** *C. R. Hebd. Seances Acad. Sci. Paris*, **152**:1735–1738, 1911. [7](#)
- [16] O. HASSAGER. **Negative Wake Behind Bubbles in Non-Newtonian Liquids.** *Nature*, **279**:402–3, 06 1979. [16](#)
- [17] J. R. HERRERA-VELARDE, R. ZENIT, D. CHEHATA, AND B. MENA. **Flow of Non-Newtonian Fluids Around Bubbles on the Jump Discontinuity.** 11 2002. [IX](#), [17](#)



- 
- [18] J. R. HERRERA-VELARDE, R. ZENIT, D. CHEHATA, AND B. MENA. **The flow of non-Newtonian fluids around bubbles and its connection to the jump discontinuity.** *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, **111**:199–209, 04 2003. [18](#), [29](#)
- [19] H. K. KYTÖMAA AND C. E. BRENNEN. **Small amplitude kinematic wave propagation in two-component media.** *International Journal of Multiphase Flow*, **17**(1):13 – 26, 1991. [IX](#), [4](#)
- [20] E. MICHAELIDES, C. T. CROWE, AND J. D. SCHWARZKOPF. *Multiphase Flow Handbook*. CRC Press, 2 edition, 2016. [2](#)
- [21] R. L. PANTON. *Incompressible flow*. John Wiley Sons, 4 edition, 2013. [8](#)
- [22] S. B. PILLAPAKKAM, P. SINGH, D. BLACKMORE, AND N. AUBRY. **Transient and steady state of a rising bubble in a viscoelastic fluid.** *Journal of Fluid Mechanics*, **589**:215–252, 2007. [18](#)
- [23] C. PILZ AND G. BRENN. **On the critical bubble volume at the rise velocity jump discontinuity in viscoelastic liquids.** *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, **145**(2):124 – 138, 2007. [IX](#), [17](#)
- [24] D. RODRIGUE, D. DE KEE, AND C. F. CHAN MAN FONG. **An experimental study of the effect of surfactants on the free rise velocity of gas bubbles.** *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, **66**(2):213 – 232, 1996. [18](#)
- [25] W. RYBCZYNSKI. **Über die fortschreitende bewegung einer flussigen kugel in einem zahren medium.** *Bull. Acad. Sci. Cracovie A*, **1**:40–46, 1911. [7](#)
- [26] J. B. SEGUR AND H. E. OBERSTAR. **Viscosity of Glycerol and Its Aqueous Solutions.** *Industrial & Engineering Chemistry*, **43**(9):2117–2120, 1951. [29](#)

- [27] S. N. SHAH. **Rheological Characterization of Hydraulic Fracturing Slurries.** *SPE Production Facilities - SPE PRODUCTION FACILITIES*, **8**:123–130, 05 1993. [15](#)
- [28] A. SHENOY. *Rheology of Filled Polymer Systems*, **90**. 01 1999. [14](#)
- [29] M. J. SOLOMON AND S. J. MULLER. **Flow past a sphere in polystyrene-based Boger fluids: the effect on the drag coefficient of finite extensibility, solvent quality and polymer molecular weight.** *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, **62(1)**:81 – 94, 1996. [44](#)
- [30] E. SOTO. *Flow of single air bubbles in complex fluids.* PhD thesis, 2008. [IX](#), [IX](#), [16](#), [18](#), [19](#)
- [31] R. I. TANNER. *Engineering Rheology*. 2 edition, 2000. [12](#)
- [32] J. R. VÉLEZ-CORDERO, J. LANTENET, J. HERNÁNDEZ-CORDERO, AND R. ZENIT. **Compact bubble clusters in Newtonian and non-Newtonian liquids.** *Physics of Fluids*, **26**:053101, 05 2014. [19](#)
- [33] J. R. VÉLEZ-CORDERO, D. SÁMANO, P. YUE, J. J. FENG, AND R. ZENIT. **Hydrodynamic interaction between a pair of bubbles ascending in shear-thinning inelastic fluids.** *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, **166(1)**:118 – 132, 2011. [18](#)
- [34] J. R. VÉLEZ-CORDERO, D. SÁMANO, AND R. ZENIT. **Study of the properties of bubbly flows in Boger-type fluids.** *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, s 175–176:1–9, 05 2012. [20](#)
- [35] J. R. VÉLEZ-CORDERO AND R. ZENIT. **Bubble cluster formation in shear-thinning inelastic bubbly columns.** *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, **166(1)**:32 – 41, 2011. [20](#)

- [36] J. WEISMAN AND S. Y. KANG. Flow pattern transitions in vertical and upwardly inclined lines. *International Journal of Multiphase Flow*, 7(3):271 – 291, 1981. [ix](#), [5](#)
- [37] K. WEISSENBERG. A Continuum Theory of Rheological Phenomena. , 159:310–311, 1947. [13](#)
- [38] F. WENYUAN, M. YOUGUANG, L. XIAOLEI, AND L. HUAIZHI. Study on the Flow Field around Two Parallel Moving Bubbles and Interaction Between Bubbles Rising in CMC Solutions by PIV. *Chinese Journal of Chemical Engineering*, 17(6):904 – 913, 2009. [19](#)
- [39] R. ZENIT AND J. J. FENG. Hydrodynamic Interactions Among Bubbles, Drops, and Particles in Non-Newtonian Liquids. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 50(1):505–534, 2018. [ix](#), [ix](#), [x](#), [5](#), [14](#), [16](#), [17](#), [18](#), [19](#), [20](#), [62](#)