UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

DETERMINACIÓN DEL INTERVALO DE CONFIANZA PARA EL LOTE ÓPTIMO DE UN SISTEMA DE INVENTARIO, UTILIZANDO EL MÉTODO DE SIMULACIÓN

TESIS PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRO EN INGENIERÍA
(INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES)

PRESENTA: ALEJANDRO SILVA BADILLO

ASESOR: DRA. ANA ELENA NARRO RAMÍREZ

2007

Agradecimientos

Quisiera mencionar el nombre de todos mis
amigos, familiares y maestros.
Los de cerca y los de lejos.
Los de siempre y los de ahora.
Los que veo cada día.
Los que raramente encuentro.
Los siempre recordados,
y los que a veces se me olvidan.
Los constantes y los inconstantes.
Los de las horas difíciles,
y los de las horas alegres.
A los que sin querer herí,
y a los que sin querer me hirieron.
Aquellos a los que conozco profundamente,
y a quienes conozco apenas por sus apariencias.
Los que me deben,
y a quienes debo mucho.
Mis amigos humildes,
y a mis amigos importantes.
Los nombro a todos,
a todos los que por mi vida pasaron
brindándome su amistad y sincero apoyo.
Sus nombres y recuerdos siempre permanecen
en mi corazón.

El binomio de Newton es tan bello como la Venus de Milo.
Lo que pasa es que poca gente se da cuenta.

Fernando Pessoa

Índice General

Introducción

El desempeño de las empresas que se dedican a la producción y venta de artículos, involucra de manera inmediata la administración de los productos, así como de las materias primas que sirven para su elaboración. La manipulación de la materia prima mediante procesos que le añaden valor hasta convertirla en un producto terminado, implica una serie de trabajo que inicia cuando se hace un pedido de los insumos que se utilizarán a lo largo del proceso. Así, al realizar un pedido al proveedor las preguntas cruciales son ¿cuánto pedir? y ¿cuándo pedir? La respuesta a estas preguntas no es fácil debido a los diversos factores que involucra tomar una decisión de este tipo.

Una empresa necesita tener sus insumos o productos terminados en un nivel óptimo de inventario, debido a que es necesario tener existencias de tales elementos en el momento que sean requeridos; ya sea porque el departamento de producción los solicite para la elaboración del producto o bien, porque algún cliente está realizando una compra. Este simple hecho, aunque parece una situación cotidiana que no debiera representar ninguna dificultad, representa una problemática muy importante ya que a partir de inventarios grandes, tanto de materia prima como artículos terminados, las empresas gastan gran cantidad de recursos los cuales pueden reducirse a los niveles óptimos de producción y de rotación de la mercancía. Los gastos en los que se incurren van desde la renta de una bodega, sueldos del personal que se encargue del manejo del inventario, mermas producidas por el deterioro de mercancía que lleva mucho tiempo en el almacén, o bien gastos relacionados con materia prima de baja rotación.

El capital invertido por la empresa se espera tenga un tiempo de recuperación lo más corto posible dependiendo del giro del negocio, y tal ideal puede ser afectado por tener grandes cantidades de capital ocioso, reflejado en mantener inventarios altos. Los inventarios altos llegan a incrementar el valor del producto terminado debido a que el costo de inventario puede representar un porcentaje importante en la cadena de producción, y este hecho a su vez puede perjudicar el desempeño de la empresa y verse desplazada por la competencia al no ofrecer un precio competitivo.

Las preguntas que pretende resolver este trabajo de investigación son: ¿cómo se puede mantener un inventario óptimo? y ¿qué herramientas se pueden utilizar para obtener el resultado deseado?

El desarrollo de esta tesis ayudará a resolver estas preguntas y brindará las herramientas necesarias para alcanzar el objetivo deseado, el cuál es, calcular el lote económico y el punto de reorden para tener el sistema de inventario en un nivel óptimo. Para llegar a ello, partiremos de la hipótesis de que los cálculos de los parámetros de interés obtenidos por el modelo matemático de inventario, se pueden refinar utilizado la metodología de simulación de sistemas. Cabe aclarar que el alcance de esta tesis involucra un modelo matemático de inventario para un artículo con costo por ordenar, déficit convertido en ventas pendientes y demanda estocástica. Aunque existen gran cantidad de modelos de inventario, el modelo propuesto en esta tesis cubre los elementos principales de este tipo de sistemas y brinda las herramientas necesarias para tener un entendimiento de la problemática y de la dirección que se debe tomar para resolver este tipo de problemas, así como la generalización a un problema de varios artículos.

El desarrollo de los elementos necesarios para alcanzar el objetivo de esta tesis comienza en el capítulo uno, donde se introducen los elementos que conforman un sistema y las métricas que involucran el desempeño del mismo. Este capítulo es de gran utilidad debido a que ayuda a fijar la idea de sistema, lo cual será la base para entender en forma conceptual los modelos que se describirán más adelante.

El capítulo dos nos adentra en el entendimiento de lo que es la simulación de sistemas y la enorme facilidad con la que se pueden resolver problemas aplicando dicha técnica sin necesidad de incurrir en gastos excesivos por la construcción y experimentación de un sistema en la realidad. Para entender esto, partimos de que la simulación de un sistema utiliza una computadora para reproducir el comportamiento de la realidad, por ejemplo, a menudo se usa simulación para realizar un análisis de riesgo de procesos financieros mediante una imitación repetida de la evolución de las transacciones necesarias para generar un perfil de los resultados posibles. La simulación también tiene un uso amplio en el análisis de sistemas estocásticos lo cual nos remite al comportamiento de la demanda para un artículo de interés. Para este tipo de sistemas, la computadora genera y registra las ocurrencias de los eventos que impulsan el sistema como si en realidad estuviera en operación física. Debido a su velocidad, la computadora puede simular incluso años de operación en cuestión de minutos. El registro del desempeño de la operación simulada del sistema para varias alternativas de diseño o procedimientos de operación permite evaluar y comparar estas alternativas antes de elegir una. A lo largo del capítulo dos se desarrollan las bases para construir la simulación de un sistema.

El capítulo tres describe los tipos de inventario y sus funciones, así como los elementos que conforman los modelos de inventario que son de interés para esta tesis. El primer modelo objeto de estudio, es el modelo básico de inventario con punto de reorden y cantidad de pedido, con el cual se entenderán los elementos primordiales en el análisis de inventarios. Una vez descrito el modelo básico, se ilustrará el modelo general para un sistema de inventario, dando pauta al modelo estocástico con costo por ordenar y déficit convertido en ventas pendientes; cuyo estudio, es de gran importancia para el desarrollo de este trabajo. Como parte final del capítulo se describe como se realiza la integración del modelo de inventario bajo una dinámica de simulación; creando para ello una herramienta construida con Visual Basic y Excel, tal herramienta se encuentra bajo el nombre de *Inventario.xls.*

En el capítulo cuatro se divide en dos secciones la primera describe la aplicación de *Inventario.xls* en que se puede seleccionar una distribución de probabilidad para la demanda del producto bajo la cual se realizará la simulación correspondiente. Adicionalmente, mediante una interfaz de usuario, se deben proporcionar los valores que definen tanto la distribución seleccionada como los costos asociados al modelo de inventario. Utilizando el sistema de simulación, se determina el lote económico esperado y el punto de reorden que mantienen el sistema de inventario en un nivel óptimo. Asimismo, se proporciona el intervalo de confianza para los parámetros antes mencionados y las estadísticas provenientes de la simulación. La segunda sección del capítulo desarrolla un caso de estudio cuyo contexto se sitúa en el mercado mexicano de gas natural, de tal modo que se analiza la opción de sustituir las importaciones de gas natural causadas por el déficit existente y por los ajustes que requiere hacer el sistema nacional de gasoductos, debido a que es necesario estabilizar las condiciones de presión en dicho sistema. Así que para sustituir las importaciones de gas natural se plantea implementar un Almacenamiento de gas y se analiza la dinámica bajo la cual debe trabajar el sistema de inventario asociado, utilizando el modelo de inventario objeto de este trabajo.

Posteriormente, se encuentra un apéndice cuya utilidad es proporcionar las bases estadísticas requeridas para esta tesis, y se incluye un anexo con la tabla de los valores calculados para la integral de la pérdida normal, la cual es de utilidad en el modelo de inventario abordado en este trabajo. De este modo, se busca proporcionar una metodología que ayude a entender y resolver el problema de determinar el nivel de inventario óptimo.

Abstract

Manufacturing enterprises' development involves production and raw materials management, which are necessary for manufacturing products. The processes of transforming the raw material to the final product add value and involve several steps which begin when the sale order is made to buy all materials that are needed during the process. Thus, we need to answer the core questions: How much material is needed? And when? Answering these questions is difficult because several factors need to be taken into account in such decisions.

Companies requires having the raw material and final products in an optimal level of stock at the moment when they are needed for the production department or for the customer. This seems to be a daily situation but represents a big problem, because with large inventories, the operations expenses are high, which could well be reduced with optimal levels of manufacture and rotations of goods. Examples of this kind of expenses are the rent of warehouses, salaries of the personnel which would undertake stock management, loss caused by damage to the goods for the time stored in a warehouse, or expenses connected with raw material of low rotation.

The invested capital on the companies is expected to have the shortest return time depending on the business, and such an ideal can be affected by having too much idle capital, due to excessive stock. The high stock level increases the cost of the final product because the price of stock can represent an important percentage of manufacture and this fact, can damage performance of the companies and losing shares in the market, because of the lack of a competitive price.

The question, which this work expects to answer is how to get optimum stock and what kind of tools can be used to obtain this result.

Development of this dissertation will help to solve these questions and will offer the necessary tools to arrive at the desired purpose, which consists in calculating an economic batch and reorder point, to have the system of stock at an optimum level. To reach it, we shall start with the hypothesis that calculations of parameters of interest, received by mathematical stock models, can be cleared using the simulation of systems methodology. It is necessary to point out, that the aim of this dissertation involves mathematical stock models for items with order cost, shortage transformed into pending sales, and stochastic demand. Even though plenty of stock models exist, the model given in this dissertation covers the main components of these types of systems and offers the necessary tools to have an understanding of the difficulties and a direction, which should be taken to solve these kinds of problems, as well as the generalization of a problem of several items.

The development of necessary components to reach the purpose of this dissertation

begins in chapter one, where components and metrics which involve performance of the system are introduced. This chapter is useful because it helps to clarify ideas about the system, which will be the basis to understand the conceptual form of the model which will be described below.

Chapter two goes deeper into the understanding of what simulation of systems is and how easy it can be to solve problems applying this technique without the need to run into excessive expenses due to construction and experimentation of the systems in the reality. To understand this, we can start by stating that simulation of systems uses a computer to reproduce real conditions, for example, simulation is often used to realize risk analysis of financial processes by the repeated imitation of transaction evolution, needed to make a structure of possible results. Simulation also has wide uses in the analysis of stochastic systems, which give us the behavior of the demand of an item. For these types of systems, the computer makes and registers incidents of events which push systems as though they actually were in physical operation. As a result of its speed, the computer can simulate even years of operation in minutes. Record of performance of the operation simulated system for several alternatives of design or procedures of operation allows the estimation and comparison these alternatives before choosing one. In chapter two this document will develop the bases to build system simulation.

Chapter three describes components and models of stock management relevant for this dissertation. The first model subject to study is the basic stock model with reorder point and economic batch, which will help us to understand the basic elements of stock management analysis. Once the basic model is described, we will procede to show the general model for the stock management system, leading to the stochastic model with order cost and shortage transformed into pending sales; the study of which is of great importance for the development of this work. At the end of the chapter the integration of a stock model under simulation dynamics is described and doing for this purpose a Visual Basic-Excel tool called *Inventario.xls*.

Chapter four is divided in two sections, the first one describes the application *Inventario.xls* where we can choose the probability distribution for the demand of the item under which the simulation will be executed. Additionally, through the interface, the user must introduce the values specifying the selected distribution as well as the costs related to the stock management model. Using the simulation system, the expected economic batch and the reorder point which keep the stock system at an optimum level is determined. Likewise, the confidence interval for the parameters mentioned above and the statistics from the simulation are given. The second section contains a case of study in the context of the mexican gas natural market, analyzing the option of substituting the imports of natural gas caused by existing shortage and required adjusment to the pipeline system due to pressure and operational conditions. The option suggested to substitute these imports is to implement natural gas storage, and the dynamics under which the underlying stock management system should operate, are analyzed using the model subject of this work.

Finally, there is an appendix addition, which gives the statistical bases required for this dissertation, and the annex with a table of the cost calculated for integral normal loss. Thus, this document tries to give methodology which would help to understand and solve a problem of the definition of an optimum stock level.

Capítulo 1

Enfoque de sistemas

Capítulo 1

La teoría general de sistemas a través del análisis de las totalidades y las interacciones internas de éstas, así como las interacciones externas con su medio, es en la actualidad, una poderosa herramienta que permite dar explicación de los fenómenos que suceden en la realidad y también hace posible la predicción de la conducta futura de la realidad, motivo por el cual el estudio de los sistemas juega un rol importante en los estudios de simulación. En el presente capítulo se presentan los elementos necesarios para el entendimiento del enfoque de sistemas, el cual es la base para conceptualizar los modelos de simulación que se describen en esta tesis. Así, al contar con el conocimiento del enfoque de sistemas y las herramientas que proporciona el estudio de simulación, abordaremos los modelos de invetario, de tal modo que al juntar el conocimiento adquirido se pueda construir un modelo de simulación para el sistema de inventario objeto de este estudio, y obtener un intervalo de confianza para los parámetros de interes del modelo de inventario.

1.1 Conceptos básicos

Se define *sistema* como un agregado o conjunto de objetos reunidos en alguna interacción o interdependencia regular [1]. En otras palabras, un sistema, es definido como un conjunto de elementos que funcionan conjuntamente para alcanzar una meta deseada. Los puntos claves en esta segunda concepción incluyen el hecho de que (1) un sistema consiste de múltiples elementos, (2) estos elementos están interrelacionados y trabajan en cooperación, (3) un sistema existe con el propósito de alcanzar objetivos específicos.

1.2 Elementos de un sistema

En la simulación, un sistema consiste de entidades, actividades, recursos y controles. Estos elementos definen el ¿quién?, ¿qué?, ¿dónde?, ¿cuándo? y ¿cómo? del proceso de la entidad. De este modo, la modelación considera que un sistema está formado de insumos, productos, actividades, mecanismos (recursos) y controles; los cuales conforman el todo.

Entidades

Las entidades son los elementos procesados a través del sistema, tales como: productos, clientes y documentos. Entidades diferentes pueden tener carcterísticas únicas tales como costo, prioridad, calidad o condición. Las entidades pueden ser además subdivididas en los siguientes tipos:

- Humanas o animadas: clientes, pacientes, etc.

[1] Geoffrey Gordon, Simulación de sistemas, Ed. Diana, Primera edición, Mayo de 1980, pág. 15.

- Inanimadas: partes, documentos, etc.
- Intangibles: llamadas, correo electrónico, etc.

Para los sistemas de manufactura y servicio, las entidades son elementos discretos. Este es el caso para manufacturar partes discretas y para los sistemas de servicios que procesan clientes, documentos, y otros. Para algunos sistemas de producción llamados sistemas continuos, una sustancia no discreta es procesada; por ejemplo, el sistema de una refinería o de una petroquimíca.

Actividades

Las actividades son las tareas desarrolladas en el sistema que, directa o indirectamente, involucran el procesamiento de las entidades. Ejemplos de actividades incluyen servicio a clientes, corte de partes, reparación de una pieza. Las actividades usualmente consumen tiempo y a menudo involucran el uso de recursos. Por otro lado, tenemos que las actividades pueden ser clasificadas como:

- Proceso de entidad: verificación, tratamiento, inspección, fabricación, etc.
- Movimiento de recursos y entidad: viaje, ascenso de un elevador, etc.
- Ajuste de recursos, mantenimiento y reparaciones: arranque de máquinas, reparación de máquinas, etc.

Recursos

Los recursos son los medios por los cuales las actividades se desarrollan, y proporcionan las facilidades de apoyo, equipo y personal para llevar a cabo las actividades. Mientras algunos recursos facilitan el proceso de la entidad, otros recursos inadecuados pueden restringir el procesamiento limitando la tasa a la cual el proceso tiene lugar. Los recursos tienen carácterísticas como capacidad, velocidad, tiempo de ciclo, y confiabilidad. Análogamente a las entidades, los recursos pueden ser clasificados como:

- Humanos o animados: operadores, doctores, personal de mantenimiento, etc.
- Inanimados: equipo, herramienta, espacio, etc.
- Intangibles: informacion, potencia eléctrica, etc.

Los recursos pueden también ser clasificados como de participación, permanentes o consumibles, y móviles o estacionarios.

Controles

Los controles dictan ¿cómo?, ¿cuándo?, y ¿dónde? son desarrolladas las actividades. Los controles imponen orden en el sistema y al nivel más alto, los controles consisten de programas, planes, y políticas. En su nivel más bajo, los controles toman la forma de procesos escritos y máquinas de control lógico. En todos los niveles, los controles proporcionan la información y lógica de decisión de como deberá ser operado el sistema. Ejemplos de controles incluyen:

- Secuencias de rutas.
- Planes de producción.
- Programas de trabajo.
- Priorización de tareas.
- Programas de control.
- Hojas de instrucción.

Variables de un sistema

Diseñar un nuevo sistema o hacer mejoras en un sistema existente, requiere más que la simple identificación de los elementos y metas de desempeño del sistema. Requiere de un entendimiento de cómo los elementos del sistema se afectan unos a otros e influyen en los objetivos de desempeño global. Para entender estas relaciones se necesita entender tres tipos de variables del sistema: variables de decisión , variables de respuesta y variables de estado.

Variables de decisión

Cuando se conduce un experimento, las variables de decisión, llamadas también insumos, son referidas como variables independientes en el experimento. Cambiando los valores de las variables independientes se afecta el comportamiento del sistema. Las variables independientes pueden ser controlables o no, dependiendo de si el experimentador está capacitado para manipular la variable o no. Las variables controlables pueden ser llamadas variables de decisión porque el decisor o experimentador controla los valores de las variables.

Cuando se define el sistema, las variables controlables son la información respecto al sistema que es más prescriptivo que descriptivo.

Variables de respuesta

Las variables de respuesta, llamadas también de desempeño o variables de salida, son variables que miden el desempeño del sistema en respuesta a una variable de decisión particular. Una variable de respuesta puede ser el número de entidades procesadas para un periodo dado. En un experimento, la variable de respuesta es la variable dependiente, la cual depende del valor particular asignado a las variables independientes. El experimentador no manipula variables dependientes, únicamente variables independientes o de decisión. La meta es encontrar los valores correctos o la asignación de las variables de decisión que generan los valores de respuesta deseados.

Variables de estado

Las variables de estado son variables que indican el estado del sistema en un tiempo específico. Ejemplos de estas variables de estado son el número de entidades esperando a ser procesadas o el estado actual de un recurso particular (ocupado, vacio, apagado, etc.). Las variables de respuesta pueden ser resumen de los cambios de las variables de estado sobre el tiempo. Por ejemplo, el tiempo individual que una máquina está ocupada, puede ser sumado sobre un periodo particular y dividido por el tiempo total disponible para reportar la utilización de la máquina en ese periodo de tiempo.

Las variables de estado son variables dependientes como las variables de respuesta, ya que dependen de valores asignados a las variables independientes. Las variables de estado se ignoran en experimentos dado que no son directamente controladas como las variables de decisión y no son de mucho interés para resumir el comportamiento reportado por las variables de respuesta.

1.3 Métricas de desempeño de un sistema

Las métricas son medidas usadas para asegurar el desempeño de un sistema. Al nivel más elevado de una empresa, las métricas miden el desempeño global en términos de beneficios, ingresos, costos relativos a presupuesto, retornos sobre inversión, etc. Estas métricas son típicamente financieras en naturaleza y muestran el desempeño general.

Desafortunadamente tales métricas no incluyen el desempeño operacional, y son reportados solo periódicamente. Desde un punto de vista operacional es más adecuado tratar factores como tiempo, calidad, cantidad, eficiencia y utilización. Estas métricas operacionales reflejan actividades inmediatas y son directamente controlables. Ellas también dirigen las métricas financieras relacionadas. Las métricas operacionales que describen la efectividad y eficiencia de sistemas de manufactura y servicio son las siguientes:

Tiempo de flujo: Es el tiempo promedio que toma un elemento o cliente en ser procesado a través del sistema. Sinónimos de ésto son el tiempo de ciclo y tiempo de envío de manufacturas. El tiempo de flujo puede ser acortado, reduciendo el tiempos de las actividades que contribuyen al tiempo de flujo y también puede reducirse, disminuyendo el trabajo en proceso o el número promedio de entidades en el sistema. Dado que el 80% del tiempo de ciclo se utiliza en tiempos de almacenamiento o de espera, la eliminación de estos tiende a producir una gran reducción en el tiempo de ciclo. Otra solución es agregar más recursos, pero esto puede incrementar los costos.

Utilización: Es el porcentaje de tiempo programado que personal, equipos y otros recursos, están en uso productivo. Para incrementar la utilización productiva, se debe incrementar la demanda de los recursos o reducir la cantidad o capacidad de recursos.

Tiempo de valor agregado: Es la cantidad de tiempo que requieren actualmente el material, clientes, etc., para recibir valor, donde el valor es definido como cualquier cosa por la cual el cliente esta dispuesto a pagar. Desde un punto de vista operacional, el tiempo de valor agregado es considerado el mismo que el tiempo de procesamiento o tiempo usado actualmente para una transformación física o de servicio. El tiempo de inspección y el tiempo de espera no se consideran tiempo de valor agregado.

Tiempo de espera: Es la cantidad de tiempo que el material o clientes, tienen que esperar para ser procesados. Este componente no es tiempo de valor agregado y puede disminuirse reduciendo el número de elementos en el sistema.

Tasa de flujo: Es el número de elementos producidos o clientes servidos por unidad de tiempo. Sus sinónimos incluyen tasa de producción, y tasa de procesamiento. La tasa de flujo puede ser incrementada por una mejor administración y una mejor utilización de recursos.

Inventario con niveles de cola: Es el número de clientes o elementos en espera o en áreas de almacén. Es deseable que los niveles de espera sean mínimos.

Rendimiento: Desde el punto de vista de la producción, es el porcentaje de productos completados que conforman las especificaciones del producto como un porcentaje del número total de productos que entran al sistema como materiales. El rendimiento también puede ser medido por su complemento, tasa de rechazos o desperdicios.

Respuesta a clientes: Es la habilidad del sistema para enviar productos en un tiempo específico, de manera que se minimice el tiempo de espera de los clientes. Se puede medir como tasa de cumplimiento, la cual es el número de órdenes de clientes que pueden ser satisfechas inmediatamente.

Varianza: Es el grado de fluctuación que ocurre en cualquiera de las métricas precedentes. La varianza introduce incertidumbre, y en consecuencia riesgo, en alcanzar las metas de desempeño establecidas. La varianza es reducida controlando tiempos de actividad y mejorando la confiabilidad de recursos.

Estas métricas pueden ser dadas para el sistema total o pueden ser asignadas a recursos individuales, tipo de entidad o alguna otra carácterística. Relacionando estas métricas a otros factores se pueden obtener métricas adicionales significativas que pueden ser derivadas para análisis comparativos. Métricas típicas relacionadas incluyen el mínimo tiempo de flujo dividido por el tiempo de flujo actual (eficiencia de tiempo de flujo), costo por unidad producida (costo unitario), inventario anual dividido por inventario promedio, o unidades producidas por costo o insumo de trabajo (productividad).

1.4 Modelado del sistema

Para estudiar un sistema es desde luego posible experimentar con él mismo, sin embargo, el objetivo de muchos estudios de sistemas es predecir la manera como se comportará el sistema antes de que sea construido. Es claro que no es factible experimentar con un sistema mientras está todavía en su forma hipotética. Una alternativa que se utiliza a veces es construir una cantidad de prototipos y probarlos, lo que puede ser muy costoso y tardado. Incluso con un sistema existente, es seguro que sea imposible o impráctico experimentar con el sistema real. Por ejemplo, no es factible estudiar los sistemas económicos mediante cambios arbitrarios de oferta y demanda de los bienes. En consecuencia, por lo general los estudios de sistemas se realizan con un modelo del sistema. Para fines de casi todos los estudios, no es necesario tener en cuenta todos los detalles de un sistema; en consecuencia, un modelo no sólo es el sustituto de un sistema, sino también una simplificación del mismo.

Entendiendo un modelo, como el cuerpo de información relativa a un sistema recabado para fines de estudiarlo; este estudio determina la naturaleza de la información que se reúne, podemos decir que no hay un modelo único de un sistema. Los distintos analistas interesados en diferentes aspectos del sistema, producirán distintos modelos del mismo sistema según cambie su comprensión del mismo.

La tarea de obtener un modelo de un sistema se dividirá en forma genérica en dos subtareas: (1) determinr la estructura del modelo y (2) proporcionar los datos. La determinación de la estructura fija la frontera del sistema e identifica las entidades, atributos y actividades del sistema. Los datos suministran los valores que los atributos pueden tener y definen las relaciones involucradas en las actividades. Las dos tareas, crear una estructura y sumisnistrar los datos, se definen como partes de una tarea, más que dos tareas por separado, debido a que por lo general están íntimamente relacionadas y no se puede hacer una sin la otra. Las suposiciones relativas al sistema orientan la recolección de datos, y el análisis de éstos confirma o refuta las suposiciones. Es común que los datos recolectados revelen una relación no sospechada que cambie la estructura del modelo.

1.5 Principios utilizados en el modelado

No es posible suministrar reglas según las cuales se construyan modelos matemáticos, aunque sí se puede expresar una diversidad de principios de guía. Tampoco se describen los pasos claros que se realizan en la construcción de un modelo, sino que se describen los distintos puntos de vista desde los cuales se puede juzgar la información a incluir en el modelo.

1. Formacion de bloques.- La descripción del sistema se debe organizar en una serie de bloques, o subsistemas. El propósito de formar los bloques es simplificar la especificación de las interacciones dentro del sistema. Cada bloque describe parte del sistema que depende de pocas (preferiblemente una) variables de entrada y produce unas pocas variables de salida. Luego puede describirse al sistema como un todo en términos de las interconexiones entre los bloques. En forma correspondiente, se puede representar gráficamente al sistema como un diagrama simple de bloques.

2. Relevancia.- El modelo sólo debe de incluir los aspectos del sistema relevantes a los objetivos del estudio.

3. Exactitud.- Debe tener en cuenta la exactitud de la información que se recabe.

4. Agregación.- Un factor adicional que debe de considerarse es el grado con que pueden agruparse las distintas entidades individuales en entidades más grandes.

Como un método de análisis se presenta el conjunto de pasos o etapas que se pueden seguir para alcanzar nuestro objetivo: describir y definir un sistema total. La metodología involucra describir lo siguiente:

1. Los objetivos del sistema total;

2. El medio en que vive el sistema;
3. Los recursos del sistema;
4. Los componentes del sistema;
5. La dirección del sistema.

Sin embargo, se debe comprender que en ningún caso, estos pasos deben forzosamente tomarse de acuerdo con la secuencia aquí presentada. Más bien, a medida que uno avanza en el análisis y descripción del sistema, es probable que uno deba reexaminar el trabajo realizado en los pasos previos. Este es un proceso lógico y la lógica es esencialmente un proceso de controlar y recontrolar nuestros razonamientos.

Con estas advertencias en mente, discutiremos estas cinco consideraciones básicas que el investigador debe tener presente cuando se enfrenta con la tarea de definir y describir un sistema.

Los objetivos del sistema total

Al hablar de los objetivos estamos pensando en la medición de la actuación del sistema total. En general, parece lógico comenzar un trabajo definiendo los objetivos, porque frecuentemente se cae en errores y en serios problemas cuando no se tienen claros los verdaderos objetivos del sistema. Sin embargo su definición no siempre es tarea fácil, puede existir confusión en su determinación. Generalmente los participantes del sistema no se preocupan, aun cuando sus objetivos y definiciones puedan tener una serie de propósitos independientes de la actuación del sistema.

El medio del sistema

Una vez que el investigador ha logrado clasificar los objetivos del sistema (o la medición de su actuación) el aspecto siguiente que debe estudiar y considerar es el medio que lo rodea. Este puede ser definido como aquello que está fuera, que no pertenece al sistema, que se encuentra más allá de sus " fronteras". También puede ser ésta una tarea difícil, pues no siempre es sencillo lograr este resultado.

Si observamos un automóvil, uno puede pensar, en un primer momento, que el medio de este sistema es todo aquello que esta fuera del automóvil. Incluso podemos decir que todo lo que esta más allá de la pintura exterior del vehículo conforma su medio. ¿Pero esto es correcto? ¿es correcto afirmar que lo que queda más allá, o fuera de las paredes de una fábrica es el medio de ese sistema? La fábrica puede tener representantes en diversos puntos del país, y aun en el extranjero, ya sea para la venta de sus productos o para la compra de equipos y materiales. Estas son, sin duda, partes del sistema total que constituye esa empresa industrial, y sin embargo, estas partes no se encuentran dentro de sus paredes. Para complicar más este caso, es posible que el gerente general de esa empresa pertenezca a un determinado grupo de poder, a través del cual pueda ejercer ciertas presiones políticas y así obtener ventajas para esa empresa. Sus actividades politícas podrían ser consideradas como pertenecientes al sistema, aunque difícilmente podrían ocurrir dentro del espacio físico ocupado por la empresa. Esto nos puede llevar a concluir que, posiblemente, la pintura exterior del automóvil no sea el límite o la frontera de ese sistema, como no lo es en el caso de la fábrica. Por lo que podemos decir, que el medio del sistema es el conjunto de todos aquellos elementos que intereactúan con el sistma.

Los recursos del sistema

Cuando hablamos de los recursos del sistema nos estamos refiriendo a su interior, es decir, a sus recursos internos. Por lo tanto no deben ser confundidos con los recursos externos; es decir, aquellas fuentes de energía o de información que llegan al sistema a través de sus corrientes de entrada. Estos se encuentran fuera del sistema, pertenecen al medio.

Los recursos del sistema son los árbitros de que dispone para llevar a cabo el proceso de conversión y para mantener la estructura interna; en una palabra, para sobrevivir. En realidad, existen ciertos recursos que pueden ser considerados tanto como recursos externos y como recursos internos. Por ejemplo, la fuerza laboral de un sistema. Evidentemente que un ejecutivo, al estudiar la implementación de un proyecto o una decisión puede decir: cuento con tantos recursos humanos y en ese sentido, estará hablando de recursos internos.

Los componentes del sistema

Los recursos propios forman la reserva general del sistema a partir de la cual, se puede desarrollar para alcanzar sus objetivos reales. Las acciones específicas que se llevan a cabo las realizan sus componentes, sus partes o sus subsistemas. ¿Cuáles son los subsistemas? una forma de determinarlos podría ser a través del organismo que muestra las diferentes unidades administrativas (siempre que se dé en ellos el principio de la recursividad) en que se ha dividido el sistema, tomando así las ventajas de la división del trabajo o diferenciación y de la especialización. Así tenemos las divisiones, los departamentos, las secciones, etc. Sin embargo, un cuidadoso examen del sistema puede indicarnos que esos pueden no ser los componentes reales, aunque posean títulos que en un principio nos llevaran a tomarlos como tales.

La dirección del sistema

Si revisamos lo que hasta ahora ha hecho nuestro analista con el fin de definir con precisión lo que es un sistema total, observaremos que ha definido sus objetivos reales, (es decir, aquellos que determinan la actuación del sistema). Enseguida se enfrenta con el problema de determinar el medio que rodea al sistema, lo que sin duda, le sirve para conocer la extensión de su unidad de análisis. En tercer lugar examinó los recursos reales y potenciales con que cuenta el sistema para conseguir sus objetivos y finalmente, como vimos en el punto anterior, procedió a definir las partes, componentes o subsistemas que constituyen el sistema. Ahora ha llegado al último paso, en esta tarea, la administración o dirección del sistema.

Para los efectos del analista de sistemas, esta es la parte en donde se generan los planes para el sistema, es decir, se involucra su "inteligencia"y se establece su central de decisiones. Ahí es donde se consideran todos los aspectos que hemos discutido en los puntos anteriores. La dirección fija los objetivos de los componentes, distribuye los recursos y controla la actuación y el comportamiento del sistema.

La administración del sistema no sólo debe generar los planes que este debe desarrollar, sino también asegurarse de que los planes sean implementados de acuerdo con las ideas originales y si no es así, debe determinar el por qué. Esta actividad se conoce generalmente bajo el término de control, aunque la palabra en sí encierre un sentido negativo.

Estamos acostumbrados a la idea de control coercitivo, es decir, que obliga a realizar ciertas acciones; sin embargo, el concepto moderno de control (especialmente el desarrollado por la ciencia de la información, del control y la cibernética) lo plantea más bien en el sentido del piloto que controla la dirección del avión. Así, gran parte del control dentro del sistema opera a través del principio de excepción, de modo que la administración no interfiere en las actividades de las partes componentes a menos que la conducta de estos evidencíe una desviación demasiado grande de los planes.

Un entendimiento de la dinámica de sistemas es esencial para usar cualquier herramienta para la planeación de sistemas. Los sistemas de manufactura y servicios consisten de elementos interrelacionados (personal, equipo, etcétera) que funcionan interactivamente para producir un resultado específico (producto terminado, cliente satisfecho, etcétera). Los sistemas son hechos de entidades (el objeto que es procesado), recursos (el personal, equipo y facilidades usadas para procesar las entidades), actividades, y los pasos del proceso y controles (las reglas que especifican ¿quién?, ¿qué?, ¿dónde?, ¿cuándo? y ¿cuánto? del procesamiento de una entidad).

Ahora, con base en estos conceptos y su entendimiento podemos pasar formalmente al proceso de simulación de sistemas.

Capítulo 2

Simulación de sistemas

Capítulo 2

Dado un modelo matemático de un sistema, a veces es posible obtener información relativa del mismo por medios analíticos. Cuando esto no es posible, es necesario utilizar métodos de computo numerico para resolver las ecuaciones. Se han desarrollado una diversidad de métodos de cómputo numérico para resolver las ecuaciones de modelos matemáticos. En el caso de modelos matemáticos dinámicos, se ha llegado a identificar una técnica específica para resolver problemas mediante la simulación de sistemas, en la cual se resuelven simultáneamente todas las ecuaciones del modelo con valores estocásticos, o mejor dicho, que se comportan de acuerdo a una distribución de probabilidad; de tal manera que atacar un problema mediante simulación brinda una gran solidez siempre y cuando se modele el sistema de forma correcta, es decir, que en forma abstracta el modelo se apegue lo más posible al sistema real. Así, con base en las herramientas de simulación se dará solución a la problemática planteada en la introducción de esta tesis, de tal modo que al abordar los modelos de inventario que se explican en el capítulo tres, se creará un modelo de simulación con el cual se obtendrán los resultados deseados.

2.1 Definición de la simulación de sistemas

Definimos la simulación de sistemas como la técnica que imita la operación de un sistema del mundo real a medida que evoluciona con el tiempo. En otras palabras, la simulación de sistemas es una técnica con la cual se pueden resolver problemas siguiendo los cambios que experimenta el sistema a lo largo del tiempo mediante la conceptualización de un modelo dinámico. Un modelo de simulación por lo general toma la forma de un conjunto de suposiciones acerca de la operación del sistema, expresado como relaciones matemáticas o lógicas entre los objetos de interés en el sistema.

Ya que la técnica de simulación no pretende resolver analíticamente las ecuaciones de un modelo, por lo general un modelo matemático construido para fines de simulación es de naturaleza distinta a uno formado para técnicas analíticas. Al formar un modelo para la solucion analítica, es necesario tener presente las restricciones impuestas por la técnica y evitar complicar el modelo global. Se tienen que hacer muchas suposiciones generales para satisfacer estas restricciones, sin embargo, un modelo de simulación se puede construir con mayor libertad.

Típicamente, se forma de una serie de secciones que corresponden al método de diagrama de bloques, y se puede describir matemáticamente a cada sección en forma directa y natural sin dar demasiada consideración a la complejidad que se introduce por tener muchas de esas secciones. Sin embargo, es necesario formar y organizar las ecuaciones de tal manera que se pueda utilizar un procedimiento rutinario para resolverlas simultáneamente.

En los sistemas continuos, el interés primordial es en cambios suaves, generalmente se utilizan conjuntos de ecuaciones diferenciales para describirlos. Se dice que las simulaciones basadas en esos modelos son simulaciones continuas. Los sistemas de cómputo analógicos, pueden resolver conjuntos de ecuaciones diferenciales lineales en forma simultánea, y se utilizan extensamente para la simulación continua. Las computadoras digitales pueden realizar la misma función utilizando pequeños incrementos de intervalos para integrar las ecuaciones.

Para los sistemas discretos, en que el interés primario está en los eventos, las ecuaciones son esencialmente ecuaciones lógicas que expresan las condiciones para que ocurra un evento. La simulación consiste en seguir cambios en el estado del sistema, resultado de la sucesión de eventos. Se dice que esas simulaciones son discretas. Es posible avanzar el tiempo en pequeños incrementos y verificar en cada paso si ya es necesario ejecutar cualquier evento. Sin embargo, por regla general la simulación discreta se realiza decidiendo una secuencia de eventos y avanzando el tiempo al evento siguiente más inminente.

2.2 Naturaleza experimental de la simulación

La técnica de la simulación no intenta específicamente aislar las relaciones entre determinadas variables; en vez de ello, observa la manera en que cambian todas las variables del modelo con el tiempo. Las relaciones entre las variables deben deducirse de esas observaciones. Se tienen que realizar muchas corridas de simulación para comprender las relaciones que participan en el sistema, por lo que debe de planearse la simulación de un estudio como una serie de experimentos.

La manera en que se desarrollan los experimentos de simulación depende de la naturaleza del estudio. Por lo general, los estudios de sistemas son de tres tipos principales: análisis de sistemas, diseño de sistemas y postulación de sistemas.

En realidad, muchos estudios combinan dos o tres de estos aspectos o los alternan según avanza el estudio. Con frecuencia se utiliza el término ingeniería de sistemas para describir estudios de sistemas en los casos en que se pretende que una combinación del análisis y el diseño comprenda primero la manera cómo trabaja un sistema existente y luego prepare modificaciones al sistema para cambiar el comportamiento del mismo.

El análisis de sistemas pretende comprender la manera en que opera un sistema existente o propuesto. La situación ideal sería que el investigador pudiera experimentar con el propio sistema, pero lo que realmente se hace es construir un modelo del sistema y mediante simulación se investiga el comportamiento del modelo. Los resultados obtenidos se interpretan en términos del comportamiento del sistema.
En los estudios del diseño de sistemas, el propósito es producir un sistema que satisfaga algunas especificaciones. El diseñador puede elegir o planear determinados sistemas de componentes y conceptualmente elige una combinación determinada de componentes para construir un sistema. El sistema propuesto se modela y se predice su comportamiento a partir del conocimiento del comportamiento del modelo. Si el comportamiento predicho se compara favorablemente con el comportamiento deseado, se acepta el diseño. En caso contrario, se rediseña el sistema y se repite el proceso.

La postulación del sistema es característica de la manera en que se emplea la simulación en estudios sociales, económicos, políticos y médicos en que se conoce el comportamiento del sistema pero no así los procesos que producen dicho comportamiento.

Se establecen hipótesis de un conjunto probable de entidades y actividades que pueden explicar el comportamiento. El estudio compara la respuesta del modelo con base en esas hipótesis contra el comportamiento conocido.

Una comparación razonablemente buena conduce en forma natural a la suposición de que la estructura del modelo semeja el sistema real y permite postular una estructura del sistema. Con mucha seguridad, el comportamiento del modelo da una mejor percepción del sistema, que posiblemente ayude a formular un conjunto refinado de hipótesis.

2.3 Tipos de modelos de simulación

Los modelos de simulación se pueden clasificar atendiendo a diferentes criterios:

1. Según el instante temporal que representan:
   (a) Estáticos: representan a un sistema en un instante determinado.
   (b) Dinámicos: representan a un sistema que evoluciona a lo largo del tiempo.
2. Según la aleatoriedad de sus variables de estado:

   (a) Deterministas: la representación del sistema no contiene ninguna variable de estado aleatoria.
   (b) Estocásticos o aleatorios: la representación del sistema contiene al menos una variable de estado no determinista.

3. Según el modo en que evolucionan sus variables de estado:
   (a) Discretos o de eventos discretos: si las variables de estado del modelo varían en un conjunto contable de instantes de tiempo.
   (b) Continuos: si las variables de estado varían de modo continuo en función del tiempo.

El modelo de inventario que se construirá más adelante en el capítulo tres, se considera un modelo de simulación estática, de acuerdo a la clasificación del instante temporal, ya que el sistema que se estudia no requiere de un análisis a lo largo del tiempo, dado que la distribución de la demanda del producto se simula considerando que es la misma distribución para cualquier instante del tiempo. De acuerdo a la clasificación de aleatoriedad de su variable de estado, se considera un modelo estocástico ya que la variable que se simula es la demanda del producto. La clasificación del modelo según la evolución de la variable de estado, permanece sin aclarse debido a que el modelo no especifica el carácter del producto, por lo que este puede ser tipo discreto o continuo (ya sea que hablemos de productos que sean líquidos o bien granos, por mencionar algunos).

2.4 Ventajas y desventajas de la simulación

En algunas ocasiones, debido a la elevada complejidad de muchos sistemas resulta prácticamente imposible obtener un modelo matemático con solución analítica. En estos casos, habrá que recurrir necesariamente a la simulación. La utilización de un modelo de simulación para el estudio de un sistema presenta una serie de ventajas:

1. Permite estudiar el comportamiento de un sistema bajo un conjunto de condiciones de operación predeterminadas.

2. Pueden compararse diversas propuestas para modificar el sistema y encontrar la que mejor satisface un conjunto de requisitos establecidos, sin necesidad de implementar las propuestas de manera real, lo cual repercute en un ahorro.

3. Permite estudiar el sistema en un marco de tiempo de acuerdo al alcance que se defina, ya sea que se desee estudiar el sistema durante un mes, un semestre, un año, etc.

De todas formas, también presenta un conjunto de desventajas:

1. El diseño de modelos de simulación puede resultar un proceso costoso en recursos y tiempo, dependiendo de la complejidad del sistema.
2. Como ocurre en cualquier modelado de sistemas, siempre se cumple que la calidad del estudio está acotada por la calidad del modelo, es decir, si el modelo no representa de manera suficientemente aproximada el sistema, las conclusiones inferidas de los resultados de las simulaciones, pueden no ser correctas, por lo que siempre será necesario validar el modelo de simulación.

2.5 Metodología de un proceso de simulación

La técnica de simulación a diferencia de las soluciones matemáticas exactas que se obtienen en la mayor parte de los modelos analíticos, se puede describir como un método donde se realiza un muestreo basado en la simulación de situaciones inciertas del sistema en estudio; de donde se obtienen los valores esperados para variables no controlables mediante la selección aleatoria de los valores permisibles de la variable de interés. La probabilidad de elegir entre todos los resultados posibles está en estricta relación con sus respectivas distribuciones de probabilidad, de tal manera, que la selección o simulación de estos valores, implica la generación de números aleatorios de las variables aleatorias involucradas. Los pasos que involucra un proceso de simulación son los siguientes:

1. Definición del problema.
2. Obtención de información (esto es, investigar las distribuciones de probabilidad que involucra el proceso, así como datos generales del mismo que ayuden a conceptualizarlo).
3. Planteamiento del problema (es decir, modelar el proceso de simulación).
4. Validación del modelo (es decir, confirmar que el modelo sea el adecuado para obtener los resultados deseados).
5. Ejecución de la simulación (es decir, realizar las corridas).
6. Interpretación de resultados.

Ahora, considerando que más adelante esta metodolgía será aplicada al análisis de sistemas de inventario, se mostrarán ejemplos relacionados con la evaluación de proyectos de inversión para entender dicha técnica, así como los métodos para la generación de números aleatorios, esto último con la finalidad de construir una aplicación que permita realizar las corridas del modelo de inventarios.

2.6 Generación de números aleatorios

La llegada de sistemas de cómputo de gran escala ha convertido las técnicas de simulación en herramientas muy útiles para analizar sistemas complejos, constituidos por muchos componentes interdependientes. Ahora bien, en el proceso de simulación de estos sistemas surge la necesidad de simular fenómenos aleatorios que sean característicos de un sistema en especial. Por ejemplo, sí una tienda desea examinar su sistema de servicios, debe simular el flujo de clientes a la tienda, así como el tiempo necesario para llevar a efecto cada operación de servicio y estos sucesos constituyen eventos aleatorios. En el proceso de solución del problema se debe suponer una distribución de probabilidad apropiada para cada fenómeno y se genera una secuencia de valores (muestrales) para la correspondiente variable aleatoria. Considerando que dichas secuencias de números se generan mediante algoritmos numéricos que pueden repetirse exactamente, tales números no pueden ser considerados totalmente aleatorios y suelen denominarse pseudoaleatorios. Sin embargo, estos números tienen las suficientes propiedades aleatorias para utilizarse en muchas aplicaciones con el éxito suficiente. Y a continuación se mostrará la forma de generar números aleatorios a partir de alguna de las distribuciones de probabilidad, ya sean discretas o continuas que se describen en el apéndice A.

2.6.1 Método de transformación inversa

Una de las distribuciones que tiene un papel muy importante en la generación de números aleatorios es la distribución uniforme sobre el intervalo (0,1). Para ilustrar este hecho, considerese el siguiente teorema :

Teorema 2.6.1 *Para cualquier variable aleatoria continua X, la función de distribución acumulativa $F(x;\theta)$ con parámetro θ se puede representar por una variable aleatoria U, la cual se encuentra uniformemente distribuida sobre el intervalo unitario.*[1]*:*

Demostración : Dado que por definición la función de distribución acumulativa de X está dada por :

$$F(x;\theta) = \int_{-\infty}^{x} f(t;\theta)dt$$

a cada valor de x le corresponde un valor de $F(X;\theta)$ que necesariamente se encuentra en el intervalo (0,1).

[1] *Cfr.*, George C. Canavos, Probabilidad y Estadística - Aplicaciones y Métodos, Ed. MacGraw Hill, Primera edición Noviembre de 1995, pág 172.

Además,$F(X;\theta)$ también es una v.a. en virtud de la aleatoriedad de X. Para cada valor de u de la v.a. U, la función u = $F(X;\theta)$ define una correspondencia uno a uno entre U y X siendo la relación inversa x =$F^{-1}(u)$.

Al tener $du = dF(X;\theta) = f(x;\theta)dx$, el Jacobiano de la transformación es :

$$J = \left|\frac{dx}{du}\right| = [f(x;\theta)]^{-1} = [f(F^{-1}(u);\theta)]^{-1}$$

La función de densidad de probabilidad de la v.a. U, mediante el empleo de la siguiente identidad $f_Y(y) = f_x[g^{-1}(y)]\left|\frac{dx}{dy}\right|$ es [2]:

$$\begin{aligned} g(u) &= f(F^{-1}(u);\theta)[f(F^{-1}(u);\theta)]^{-1} \\ &= 1\ , \quad 0 \leq u \leq 1 \end{aligned}$$

La esencia del teorema recae en el hecho de que, para muchos casos, es posible determinar de manera directa el valor de x que corresponde al valor de u de las variables aleatorias X y U, respectivamente, de tal manera que $F(x;\theta) = u$. En consecuencia, por esta razón muchos de los sistemas de cómputo tienen en su estructura la capacidad de generar valores aleatorios a partir de una distribución uniforme sobre el intervalo unitario (0,1). Y muchos paquetes estadísticos como SAS, SPSS y IMSL, proporcionan al usuario la oportunidad de generar números aleatorios a partir de una distribución dada.
Por lo tanto, el método de transformación inversa consta de los siguientes pasos :

Sea X la v.a. de interés entonces

1. Generar un número aleatorio uniforme u entre 0 y 1.
2. Igualar $F(x) = u$ y despejar x, que resulta ser la observación aleatoria de interés que sigue la distribución de probabilidad establecida inicialmente. Donde $F(x) = P(X \leq x)$ la función de distribución acumulativa.

A continuación se ilustrará el uso del teorema y el método de transformación inversa en la generación de números aleatorios para algunas distribuciones de probabilidad específicas.

Distribución Uniforme sobre el intervalo (a,b)

[2] *Ibidem*, pág. 168.

La función de densidad de probabilidad es :

$$f(x; a, b) = 1/(b-a) \ , \quad a \leq x \leq b$$

Para generar un número aleatorio x, $a \leq x \leq b$,primero se genera un valor aleatorio u a partir de (0,1), se iguala a la función de distribución acumulativa, se integra y se resuelve para el límite superior x.

De esta forma :

$$\begin{aligned} (b-a)^{-1} \int_a^x dt &= u \\ \frac{x-a}{b-a} &= u, \quad o \\ x &= u(b-a) \ + \ a, \quad a \leq x \leq b \end{aligned}$$

Distribución Normal

La función de distribución acumulativa normal es :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{x} \ exp\Big(\ - \frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\Big) dt = u$$

No puede resolverse, en forma cerrada para x. De manera alternativa, puede demostrarse que si U_1 y U_2 son dos variables aleatorias independientes con distribución uniforme sobre el intervalo unitario, entonces

$$\begin{aligned} Z_1 &= (-2 \ lnU_1)^{1/2} \sin(2\pi U_2) \quad \text{y} \\ Z_2 &= (-2 \ lnU_1)^{1/2} \cos(2\pi U_2) \end{aligned}$$

Son dos variables aleatorias normales estandarizadas e independientes.

2.6.2 Método de aceptación-rechazo

En el caso de muchas distribuciones continuas, no es factible utilizar el método de transformación inversa, debido a que quizá $x = F^{-1}(r)$ no se pueda calcular (al menos en una forma eficiente). En dado caso, se pueden utilizar otros métodos que se han desarrollado para generar observaciones aleatorias a partir de esas distribuciones. Dichos métodos suelen ser mucho más rápidos que el método de transformación inversa, y uno de ellos es el llamado *método de aceptación-rechazo*.

Considerese la distribución triangular, que es ampliamente utilizada al introducir riesgo en proyectos de inversión y caminos críticos (PERT). Esta distribución se basa en una estimación pesimista, una más probable, y una optimista. Y por su sencillez es fácilmente comprendida por el analista y por personas encargadas de interpretar los resultados arrojados por el estudio realizado.

Definición 1 *Se dice que X es una variable aleatoria triangular si tiene la función de densidad dada por* [3] *:*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{(c-a)(b-a)}\ (x-a) & \text{para} \quad a \leq x < b \\ \\ \frac{-2}{(c-a)(c-b)}\ (x-c) & \text{para} \quad b \leq x \leq c \\ \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

con media

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_a^b \frac{2x(x-a)dx}{(c-a)(b-a)} + \int_b^c \frac{-2x(x-c)dx}{(c-a)(c-b)} \\ &= \frac{1}{3}\ (a+b+c) \end{aligned}$$

y varianza

$$\begin{aligned} Var(X) &= \int_a^b \frac{2x^2(x-a)dx}{(c-a)(b-a)} + \int_b^c \frac{-2x^2(x-c)dx}{(c-a)(c-b)} - \left(\frac{1}{3}\ (a+b+c)\right)^2 \\ &= \frac{1}{18}(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc) \end{aligned}$$

Es obvio que cuando la distribución triangular es simétrica, es decir, $b = (a+c)/2$ las expresiones anteriores se transforman en :

[3] *Cfr.* Raúl Coss Bu, Análisis y evaluación de proyectos de inversión, Segunda edición, Ed. Limusa, 1991, pág. 265-266.

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{a+c}{2} = b \\ Var(X) &= \frac{1}{24}(c-a)^2 \end{aligned}$$

Ahora, para valores de a = 0 , b = 1 y c = 2 tenemos que

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad 0 \leq x < 1 \\ 1-(x-1) & \text{si} \quad 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

El método de aceptación-rechazo utiliza los siguientes pasos (tal vez varias veces) para generar una observación aleatoria.[4]

1. Generar un número aleatorio uniforme r_1 entre 0 y 1, y establecer $x = 2r_1$ (de manera que el intervalo de valores posibles de x es de 0 a 2).

2. Aceptar x con probabilidad p, donde

$$p = \begin{cases} x & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 1-(x-1) & \text{si} \quad 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

   De este modo x es la observación aleatoria deseada (ya que esta probabilidad es igual a f(x)). De otra manera, rechazar x y repetir los dos pasos.

   Para generar el evento aleatorio de aceptar (o rechazar) x de acuerdo con esta probabilidad, el método pone en práctica el paso 3 como sigue :

[4]Frederick Hillier, Gerald Lieberman , Investigación de operaciones, Séptima edición, Ed. MacGraw Hill, 2001, págs. 1109-1110.

3. Generar un número aleatorio uniforme r_2 entre 0 y 1, y

$$\begin{cases} \text{Aceptar x} & \text{si } \; r_2 \leq f(x) \\ \text{Rechazar x} & \text{si } \; r_2 > f(x) \end{cases}$$

Si x se rechaza, repetir los tres pasos.

Como $x = 2r_1$ se acepta con probabilidad = f(x), la distribución de probabilidad de los valores aceptados tiene f(x) como su función de densidad, de manera que los valores aceptados son observaciones aleatorias válidas de f(x).

Por fortuna, en este ejemplo el valor más grande de f(x) para cualquier x era justo 1. Si este valor más grande fuera $L \neq 1$, entonces r_2 quedaría multiplicado por L en el paso 3. Con este ajuste, el método se extiende con facilidad a otras funciones de densidad de probabilidad en un intervalo finito y se pueden usar conceptos similares en un intervalo infinito.

2.6.3 Método monte carlo

El muestreo Monte Carlo es fundamental para el concepto de los sistemas de simulación que contienen elementos estocásticos o probabilísticos. Su origen y nombre se remontan al trabajo de Von Neumann y Ulan a finales de los años cuarenta, cuando acuñaron el término y aplicaron la técnica para resolver ciertos problemas de protección nuclear. El método Monte Carlo fue tan exitoso que su popularidad se extendió a varios campos y el término casi se ha vuelto sinónimo de simulación en la mente de muchas personas. Aunque nuestro interés principal en la técnica de muestreo Monte Carlo es su utilidad en las situaciones probabilísticas de simulación, puede usarse en ciertos problemas totalmente determinísticos que no pueden resolverse en forma analítica.

En la técnica de Monte Carlo, la experiencia o datos artificiales se generan mediante el uso de algún generador de números aleatorios y de la distribución de probabilidad acumulada de interés. El generador de números aleatorios puede ser cualquier fuente de dígitos aleatorios distribuidos uniformemente. La distribución de probabilidad por muestrear puede basarse en datos empíricos que se obtienen de registros anteriores, que pueden ser el resultado de un experimento reciente o puede ser una distribución teórica conocida. Los números aleatorios se usan para producir una secuencia aleatorizada de valores que duplicarán la experiencia esperada, la cual puede producirse mediante la distribución de probabilidad que se muestrea.

En concepto, el proceso o técnica es relativamente simple. Para obtener una muestra artificial al azar, a partir de una población descrita por alguna función de probabilidad es necesario:

1. Graficar o tabular los datos de interés (no los números aleatorios) como una función de distribución de probabilidad acumulada; con los valores de la variable sobre el eje de las abscisas (o bien eje x) y las probabilidades de 0 a 1 que se trazaron sobre el eje de las ordenadas (o eje y).

2. Seleccionar un número decimal aleatorio entre 0 y 1 (en tantos lugares como se desee), por medio de un generador de números aleatorios.

3. Proyectar horizontalmente el punto sobre el eje y que corresponda a este número decimal aleatorio, hasta que la línea de proyección intersecte la curva acumulativa.

4. Proyectar hacia abajo (es decir, hacia el eje x) el punto de intersección sobre la curva.

5. Escribir el valor de x correspondiente a este punto de intersección. Después este valor de x se toma como el valor de la muestra.

6. Repetir los pasos del 2 al 6 hasta que se hayan generado tantas variables aleatorias como se deseen, siguiendo la secuencia en la cual se obtuvieron.

2.6.4 Método hipercubo latino

El muestreo Hipercubo Latino es un reciente desarrollo en tecnología de muestreo, diseñada para recrear con precisión la distribución de entrada a través de sacar una muestra con menos iteraciones, comparando con el método Monte Carlo. La clave del muestreo Hipercubo Latino, es la estratificación de la distribución de probabilidad de interés. La estratificación consiste en dividir la curva acumulativa en intervalos iguales en la escala de probabilidad acumulada (0 a 1.0). Una muestra es tomada al azar de cada intervalo o “estratificación”, de la distribución de entrada. El muestreo es obligado para representar los valores en cada intervalo y así se obliga a recrear la distribución de probabilidad de entrada.

El método Monte Carlo no toma intervalos y realiza el muestreo con cierta libertad, lo cual repercute en un número mayor de iteraciones, de este modo para la obtención de muestras representativas se deben realizar alrededor de 1000 iteraciones; en contraste a esto, la técnica de Hipercubo Latino permite reducir el muestreo al orden de 400 iteraciones. En el gráfico 2.1 la curva acumulativa ha sido dividida en 5 intervalos y cada muestra es delineada de cada intervalo, de este modo se puede apreciar que con Hipercubo Latino, las muestras reflejan con más precisión la distribución de valores de la distribución de probabilidad de interés.

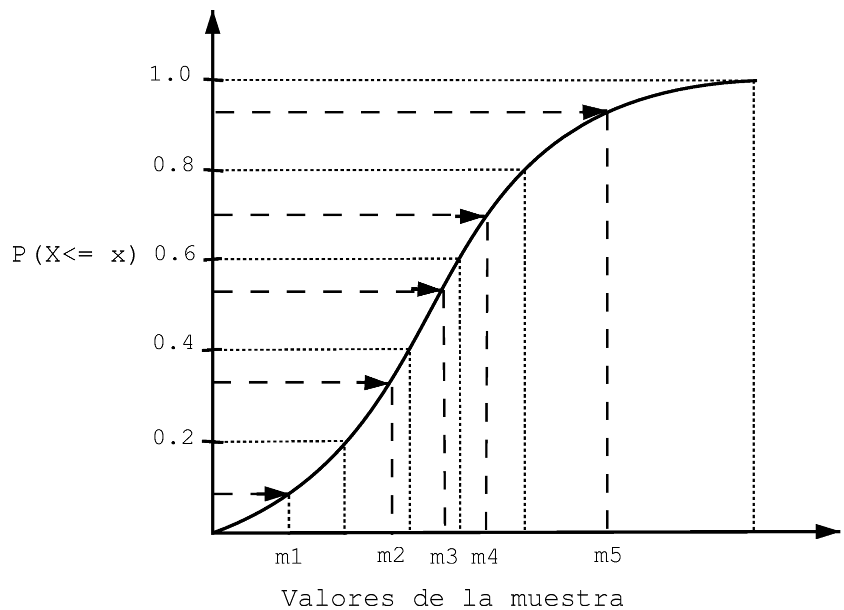


Gráfico 2.1: Cinco iteraciones del muestreo Hipercubo Latino

La técnica que está siendo usada durante el muestreo Hipercubo Latino es "muestreo sin reemplazo". El número de estratificaciones de la distribución acumulativa es igual al número de iteraciones realizadas. En el ejemplo anterior fueron 5 iteraciones y así fueron hechas 5 estratificaciones de la distribución acumulativa. Una muestra es tomada de cada estratificación. Sin embargo, una vez que una muestra es tomada de la estratificación, esta estratificación no es muestreada de nuevo (su valor ya esta representado en el conjunto muestreado).

Al usar la técnica de Hipercubo latino para muestras de múltiples variables, es importante mantener la independencia entre las variables. Los valores muestreados para una variable necesitan ser independientes de aquéllos muestreados para otra variable (a menos que, se quiera que esten correlacionados). Esta independencia es mantenida para seleccionar el intervalo aleatoriamente y de este modo obtener una muestra para cada variable. En una iteración dada, la variable1 debe ser muestreada de la estratificación #4, la variable2 debe ser muestreada de la estratificación #22 y así sucesivamente. Esto conserva aleatoriedad e independencia y evita la correlación no deseada entre las variables.

2.7 Simulación de un sistema discreto

La decisión que implica emprender un proyecto de inversión, va acompañada del factor riesgo. La técnica de simulación para el análisis de riesgo, es una herramienta importante y dados los elementos que intervienen en la evaluación de proyectos como lo son: el capital a invertir, la demanda esperada para cada período, la depreciación, los costos de producción, la duración del proyecto y los indicadores de evaluación como el VPN, TIR, TVR (además de la incertidumbre en los resultados que se obtendrán en el futuro), proporcionan la plataforma para un modelo de simulación.

Supóngase que la compañía ϵ desea construir una estación de gasolina. La investigación de mercado indica que la mayor incertidumbre es respecto al volumen de ventas y el margen de contribución por litro de gasolina vendido. La compañía ha determinado que la inversión debe ganar una tasa del 11%, y que el proyecto será emprendido, si la probabilidad de que la TIR sea mayor que la tasa de rendimiento, es mayor o igual a 0.90.

Después de un análisis de las variables, se llegó a que el volumen de ventas está normalmente distribuido con media 250,000 litros/año y desviación estándar de 30,000 litros. El margen de contribución se estima que está distribuido uniforme entre \$0.35 y \$0.70 por litro. La inversión inicial es de \$120,000, la cual se depreciará a una tasa del 10% anual, los gastos de operación anuales son de \$65,000 durante los 10 años que dura el proyecto. Por último se considera que la tasa de impuestos es del 15% y que el valor de rescate es despreciable al final del proyecto.

De este modo, con la información anterior se puede determinar la distribución de probabilidad de la TIR, y posteriormente tomar una decisión. Para obtener la distribución de la TIR es necesario:

1. Simular el volumen de ventas en litros para los próximos diez años.

2. Simular el margen de contribución por litro vendido para los próximos diez años.

3. Obtener el flujo de efectivo del proyecto para los próximos diez años, mediante la expresión:

$$F_t = (V_t M_t - G - D)\,(1 - T) + D \qquad \text{para t = 1,2, \ldots, 10}$$

Donde

$$\begin{aligned} V_t &= \text{Valor simulado de litros vendidos en el año } t \\ M_t &= \text{Valor simulado del margen de contribución del año } t \\ G &= \text{Gastos de operación} \\ D &= \text{Depreciación anual} \\ T &= \text{Tasa de impuestos} \end{aligned}$$

4. Calcular la TIR para los valores simulados mediante la expresión:

$$-12,000 + \sum_{t=1}^{10} \frac{F_t}{(1+TIR)^t} = 0$$

5. Repetir los pasos 1-4 tantas veces como sea posible.

Hay que notar, que al enumerar los pasos para obtener la distribución de la TIR, se está cumpliendo con los seis pasos que involucra un proceso de simulación. De esta manera, se da la definición del problema (1); la obtención de información (2), que implica investigar las distribuciones de probabilidad que involucra el proceso; el planteamiento del problema (3), que implica modelar el proceso de simulación mediante la obtención de la TIR para cada ensayo; la validación del modelo (4), que corresponde a definir correctamente la TIR y especificar los elementos que la constituyen; la ejecución de la simulación (5), mediante las corridas del modelo y finalmente, la interpretación de resultados (6), que se realizará al finalizar las corridas.

Primeramente se mostrará cómo se realiza la generación de números aleatorios para las variables aleatorias que involucra este proceso, de este modo, como el volumen de ventas está normalmente distribuido con media 250,000 litros/año y desviación estándar de 30,000 litros, para generar un número aleatorio de una variable aleatoria normal mediante el método *monte carlo* es necesario hacer lo siguiente:

1. Seleccionar un número decimal aleatorio entre 0 y 1. Para este caso tomaremos el número 0.5398, y lo consideraremos como probabilidad.

2. Posteriormente, de una tabla para variable aleatoria normal estándar, encontrar para qué valor de z_o corresponde la probabilidad seleccionada.

3. Después, despejar el valor de x que es una observación de la variable aleatoria normal con parámetros μ y σ; que para nuestros fines resulta ser el número aleatorio de interés.

Para detallar el tercer punto es necesario aclarar que una tabla de variable aleatoria normal estándar, porporciona la probabilidad:

$$P(Z \leq z_o) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z_o} exp\left(\frac{-t^2}{2}\right) dt$$

De este modo, tenemos que por medio de la transformación:

$$\frac{X - \mu}{\sigma}$$

Una variable aleatoria normal X, con parámetros μ y σ, se transforma en una variable normal estándar.

Por lo tanto, si

$$P(Z \leq z_o) = 0.5398 \quad \Rightarrow \quad z_o = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Entonces

$$X = (z_o)(\sigma) + \mu$$

Es la muestra de una v.a. normal con parámetros μ y σ. Para nuestro caso, se tiene que $z_o = 0.1$, por lo tanto

$$\begin{aligned} X &= (0.1)(30,000) + 250,000 \\ &= 3,000 + 250,000 \\ &= 253,000 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $X = 253{,}000$ es el volumen de ventas simulado.

Ahora, para obtener un número aleatorio de una distribución uniforme mediante el método de *transformación inversa* hay que realizar lo siguiente:

1. Generar un número aleatorio uniforme u entre 0 y 1. Para nuestro caso tomaremos 0.5.

2. Después, para obtener el número aleatorio con distribución uniforme sobre el intervalo (a,b), hay que utilizar la expresión: $x = u(b-a) \ + \ a$.

Entonces, para nuestro caso tenemos que el margen de contribución está distribuido uniforme entre \$0.35 y \$0.70 por litro. Por lo tanto, el número aleatorio de interés se obtiene como:

$$\begin{aligned} x &= u(b-a) \ + \ a \\ &= (0.5)(0.70-0.35)+0.35 \\ &= 0.525 \end{aligned}$$

Así, $x = 0.525$ es el margen de contribución por litro simulado. Ahora, para calcular el flujo de efectivo para el primer año, tenemos que:

$$\begin{aligned} F_t &= (V_t M_t - G - D)\,(1-T) + D \\ &= \big((253,000)(0.525) - 65,000 - 12,000\big)(1-0.15) + 12,000 \\ &= 59,451.25 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el flujo de efectivo para el primer año es de \$59,451.25. De este modo, repitiendo el proceso para los siguientes nueve años, se obtienen los valores simulados para el volumen de ventas y el margen de contribución por litro; con los que se obtiene el flujo de efectivo respectivo y la TIR asociada. Los resultados se pueden observar en las tablas 2.1, 2.2 y 2.3.

Año	$P(Z \leq z_0)$	z_o	No. aleatorio
1	0.5398	0.10	253,000
2	0.8413	1.00	280,000
3	0.1151	-1.20	214,000
4	0.9332	1.50	295,000
5	0.0107	-2.30	181,000
6	0.9987	3.00	340,000
7	0.0005	-3.30	151,000
8	0.6554	0.40	262,000
9	0.9938	2.50	325,000
10	0.3446	-0.40	238,000

Tabla 2.1 Números aleatorios normales
(Volumen de ventas)

Año	U(0,1)	a	b	No. aleatorio
1	0.500	0.35	0.70	0.525
2	0.901	0.35	0.70	0.665
3	0.934	0.35	0.70	0.677
4	0.284	0.35	0.70	0.449
5	0.954	0.35	0.70	0.684
6	0.301	0.35	0.70	0.455
7	0.734	0.35	0.70	0.607
8	0.271	0.35	0.70	0.445
9	0.778	0.35	0.70	0.622
10	0.946	0.35	0.70	0.681

Tabla 2.2 Números aleatorios uniformes
(Margen de contribución)

Tabla 2.3 **Cálculo de la TIR (Flujo de efectivo)**

	Año					
	0	1	2	3	4	5
Ventas		253,000.00	280,000.00	214,000.00	295,000.00	181,000.00
Margen		0.525	0.665	0.676	0.449	0.683
Ingresos		132,825.00	186,278.06	144,858.57	132,589.59	123,765.61
Gastos de Op.		65,000.00	65,000.00	65,000.00	65,000.00	65,000.00
Depreciación		12,000.00	12,000.00	12,000.00	12,000.00	12,000.00
UAII		55,825.00	109,278.06	67,858.57	55,589.59	46,765.61
Impuestos (15%)		8,373.75	16,391.71	10,178.78	8,338.43	7,014.84
Utilidad neta		47,451.25	92,886.35	57,679.78	47,251.15	39,750.77
Depreciación		12,000.00	12,000.00	12,000.00	12,000.00	12,000.00
Flujo de efectivo	-120,000.00	59,451.25	104,886.35	69,679.78	59,251.15	51,750.77

Tabla 2.3 Cálculo de la TIR (continuación)

	Año				
	6	7	8	9	10
Ventas	340,000.00	151,000.00	262,000.00	325,000.00	238,000.00
Margen	0.455	0.606	0.444	0.622	0.681
Ingresos	154,811.74	91,622.77	116,532.73	202,235.88	162,122.28
Gastos de Op.	65,000.00	65,000.00	65,000.00	65,000.00	65,000.00
Depreciación	12,000.00	12,000.00	12,000.00	12,000.00	12,000.00
UAII	77,811.74	14,622.77	39,532.73	125,235.88	85,122.28
Impuestos (15%)	11,671.76	2,193.41	5,929.91	18,785.38	12,768.34
Utilidad neta	66,139.98	12,429.35	33,602.82	106,450.49	72,353.93
Depreciación	12,000.00	12,000.00	12,000.00	12,000.00	12,000
Flujo de efectivo	78,139.98	24,429.35	45,602.82	118,450.49	84,353.93
TIR	0.59				

El cálculo anterior y la obtención de la TIR, se considera una corrida del modelo de simulación.

Una vez que se han realizado un número considerable de corridas[5], el resultado será el histograma que representa la distribución de probabilidad de la TIR, y a partir de este histograma, obtener la distribución acumulada de la TIR. Para este caso se realizaron 1500 iteraciones[6], de las cuales se obtuvieron los gráficos 2.1, 2.2 y las estadísticas de las tablas 2.4 y 2.5.

Estadísticas de la simulación	
mínimo	0.2288098
máximo	0.8680407
media	0.4798592
desv.est.	0.1002318
varianza	0.0100464
moda	0.4422867

Tabla 2.4 Resumen de estadísticas de la TIR

De la tabla 2.5, hay que aclarar que un *percentil* es el valor bajo el cual se encuentra un cierto porcentaje de los valores de la distribución. Por ejemplo, el percentil del 50% para éste caso es de 0.4711939, lo que nos indica que 0.4711939 es el valor bajo el cual se encuentra el 50% de los valores de la distribución.

De la distribución acumulada de la TIR en el gráfico 2.2, se puede observar que $P(TIR \leq 0.4845)$ es aproximadamente del 0.60, lo cual nos dice que la probabilidad de que el rendimiento del proyecto sea del 48.46% es cercana al 0.60 y tal rendimiento está por encima de las exigencias de la empresa.

Como el criterio de aceptación de la compañía indica que un proyecto será emprendido, si la $P(TIR > 0.11) \geq 0.90$ y dado que el valor mínimo que puede tomar la TIR es de 22.88%, la media es igual a 47.98% y la moda[7] es igual a 44.22%, implica que $P(TIR > 0.11) = 1$. Por lo tanto, el proyecto será aceptado.

[5] Con la finalidad de que se obtenga el mayor número de realizaciones distintas de las ditribuciones de probabilidad implicadas; donde arriba de 500 es un número acerptable

[6] Para facilitar el cálculo, se utilizó el programa de @risk proporcionado por Palisade, cuyo sitio es www.palisade.com.

[7] La moda es el valor de la observación que más se repite en una muestra.

Percentil	Valor	Percentil	Valor
5%	0.3333339	55%	0.4818758
10%	0.3592223	60%	0.4934249
15%	0.3780121	65%	0.5080959
20%	0.3940177	70%	0.5233358
25%	0.4088917	75%	0.5417681
30%	0.4240252	80%	0.5599841
35%	0.4354418	85%	0.5868644
40%	0.4449864	90%	0.6193359
45%	0.4568501	95%	0.6531904
50%	0.4711939		

Tabla 2.5 Percentiles para la distribución de la TIR

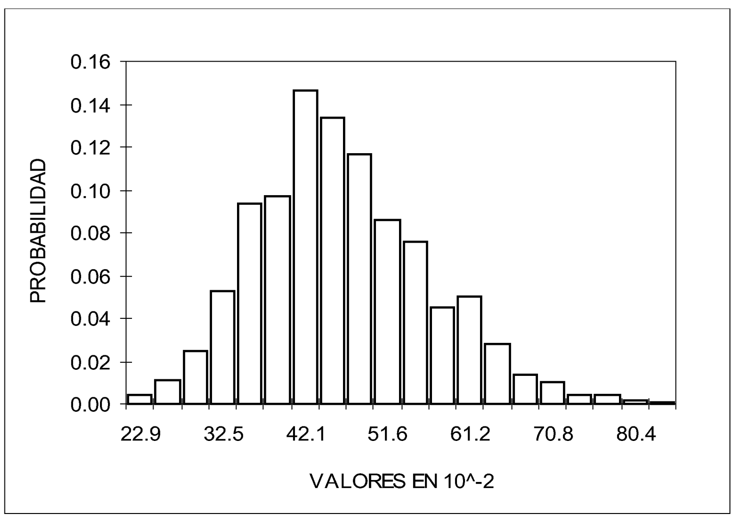


Gráfico 2.1: Histograma de la TIR

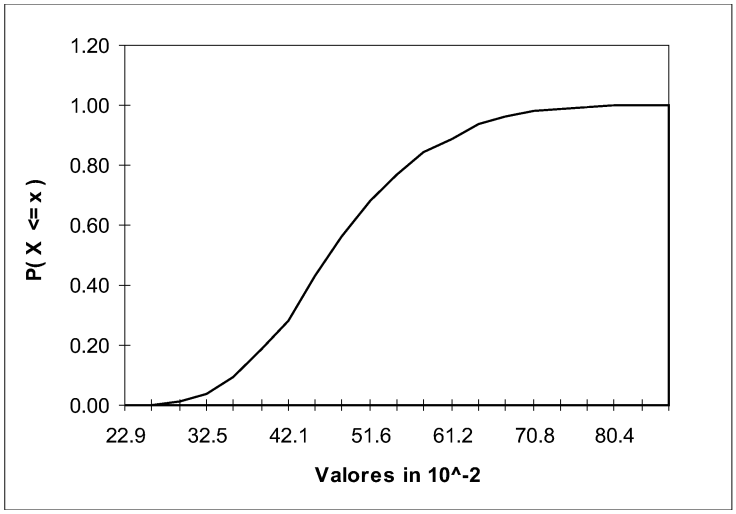


Gráfico 2.2: Distribución acumulada de la TIR

Una dificultad en la práctica es encontrar las distribuciones de probabilidad de las variables involucradas, de tal modo que una alternativa es suponer que tanto la inversión inicial como los flujos de efectivo del proyecto, están representados por distribuciones triangulares, esto es, debido a su fácil entendimiento y que es usual tomar un intervalo alrededor de dichos valores.

Ahora se ilustrará esta situación mediante el siguiente ejemplo: considere que la compañía β desea analizar un proyecto que promete generar los flujos de efectivo triangulares que aparecen en la tabla 2.6. Además, la tasa de rendimiento que pide la empresa es del 12% y el criterio de aceptación indica que un proyecto será emprendido por la compañía, si la $P(VPN > 0) \geq 0.90$.

Año	Estimación pesimista ($)	Estimación más probable ($)	Estimación optimista ($)
0	-180	-130	-90
1	50	60	70
2	37	47	57
3	35	45	55
4	28	35	36
5	20	25	29

Tabla 2.6 Flujos de efectivo triangulares (en miles)

Con la información anterior es posible determinar la distribución de probabilidad del VPN, y posteriormente se podrá tomar una decisión sobre el proyecto.

Para determinar la distribución de probabilidad es necesario:

1. Simular el valor de los seis flujos de efectivo que comprende el proyecto (donde F_t es el flujo simulado en el período t).
2. Calcular el VPN para los valores simulados mediante la expresión:

$$VPN = \sum_{t=0}^{5} \frac{F_t}{(1+0.12)^t}$$

3. Repetir los pasos anteriores tantas veces como sea posible.

Como en el caso anterior, primero se mostrará cómo se realiza la generación de números aleatorios para las variables aleatorias triangulares que involucra este proceso, de este modo, para generar un número aleatorio de una variable aleatoria triangular mediante el método *aceptación-rechazo* es necesario hacer lo siguiente:

1. Generar un número aleatorio uniforme r_1 entre 0 y 1 y establecer $x = 2r_1$ (de manera que el intervalo de valores posibles de x es de 0 a 2, de acuerdo a una v.a. triangular(0,1,2) donde cero es el valor pesimista, uno es el valor más probable y dos es el valor optimista). Como en nuestro caso necesitamos utilizar una v.a. triangular(a,b,c), utilizaremos la transformación: $(c-a)r_1 + a$, la cual proporcionará la observación aleatoria deseada, aunque el procedimiento lo seguiremos como si fuera una v.a. triangular(0,1,2).

2. Aceptar x con probabilidad p, donde

$$p = \begin{cases} x & \text{si} \quad 0 \leq x < 1 \\ 1-(x-1) & \text{si} \quad 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

   De este modo x es la observación aleatoria deseada (ya que esta probabilidad es igual a f(x)). De otra manera, rechazar x y repetir los dos pasos.

   Para generar el evento aleatorio de aceptar (o rechazar) x de acuerdo con esta probabilidad, el método pone en práctica el paso 3 como sigue :

3. Generar un número aleatorio uniforme r_2 entre 0 y 1 y

$$\begin{cases} \text{Aceptar x} & \text{si } \ r_2 \leq f(x) \\ \text{Rechazar x} & \text{si } \ r_2 > f(x) \end{cases}$$

Si x se rechaza, repetir los tres pasos.

Para aclarar el procedimiento, se realizará una corrida del modelo de simulación. Para esto, primero se calculará paso a paso, un número aleatorio triangular para el año cero del proyecto. De este modo, si seleccionamos $r_1 = 0.7322$. tenemos que se generan simultáneamente dos números aleatorios

$$\begin{aligned} x_1 &= 2(0.7322) = 1.4644 \\ x_2 &= (-90-(-180))(0.7322)+(-180) = (90)(0.7322)-180 = -114.1033 \end{aligned}$$

Donde

x_1 es la observación aleatoria de una variable triangular(0,1,2) y similarmente x_2 es la observación aleatoria de una variable triangular(-180,-130,-90).

Ahora, como $x_1 = 1.4644$ tenemos que la probabilidad asociada a este valor queda dada por: $p = 1-(1.4644 - 1) = 0.5356$. Posteriormente, si seleccionamos $r_2 = 0.50$, esto implica que $r_2 < 0.5356$. Por lo tanto, se acepta el número aleatorio x_1. Lo cual indica que el número aleatorio x_2, es aceptado y representará el flujo de efectivo del año cero.

Siguiendo este método podemos obtener los números aleatorios triangulares para cada período del proyecto, de este modo, tales resultados se pueden observar en la tabla 2.7.

Año	r_1	x_1	Prob. asoc.	r_2	c - a	x_2
0	0.7322	1.4644	0.5356	0.5000	90	-114.1033
1	0.3319	0.6638	0.6638	0.0231	20	56.6379
2	0.6180	1.2359	0.7641	0.4792	20	49.3595
3	0.7267	1.4535	0.5465	0.3571	20	49.5350
4	0.2291	0.4581	0.4581	0.1564	8	29.8324
5	0.0494	0.0988	0.0988	0.0030	9	20.4445

Tabla 2.7 Números aleatorios triangulares

Ahora, con los valores simulados para cada período, el paso siguiente es realizar el cálculo del VPN del proyecto mediante la expresión:

$$VPN = \sum_{t=0}^{5} \frac{F_t}{(1+0.12)^t} = \sum_{t=0}^{5} F_t C_t$$

El resultado de dichos cálculos se puede observar en la tabla 2.8.

Año	C_t (i=12%)	F_t	Valor descontado
0	1.0000	-114.1033	-114.1033
1	0.8929	56.6379	50.5720
2	0.7972	49.3595	39.3494
3	0.7118	49.5350	35.2590
4	0.6355	29.8324	18.9585
5	0.5674	20.4445	11.6002
VPN	$41.6358		

Tabla 2.8 Cálculo del VPN (en miles)

Por lo tanto, al finalizar la primer corrida del modelo de simulación, tenemos que el VPN del proyecto es igual a $41.6358.

Como en la simulación anterior, una vez que se han realizado un número considerable de corridas, el resultado será el histograma que representa la distribución de probabilidad del VPN, y a partir de este histograma, obtener la distribución acumulada del VPN. Para este caso se realizaron 1000 iteraciones[8], de las cuales se obtuvieron los gráficos 2.3, 2.4 y las estadísticas de las tablas 2.9 y 2.10.

Estadísticas de la simulación	
mínimo	-27.11665
máximo	71.59994
media	24.70426
desv.est.	19.29835
varianza	372.4264
moda	29.42899

Tabla 2.9 Resumen de estadísticas del VPN

Percentil	Valor	Percentil	Valor
5%	-8.207516	55%	28.49792
10%	-1.455629	60%	30.86359
15%	2.568763	65%	33.60048
20%	6.53715	70%	35.98497
25%	10.48525	75%	38.56359
30%	14.17774	80%	41.22368
35%	17.42565	85%	45.29248
40%	19.89756	90%	50.21569
45%	22.67505	95%	56.07576
50%	25.45205		

Tabla 2.10 Percentiles para la distribución del VPN

[8]Para facilitar el cálculo, una vez más se utilizó el programa de @risk.

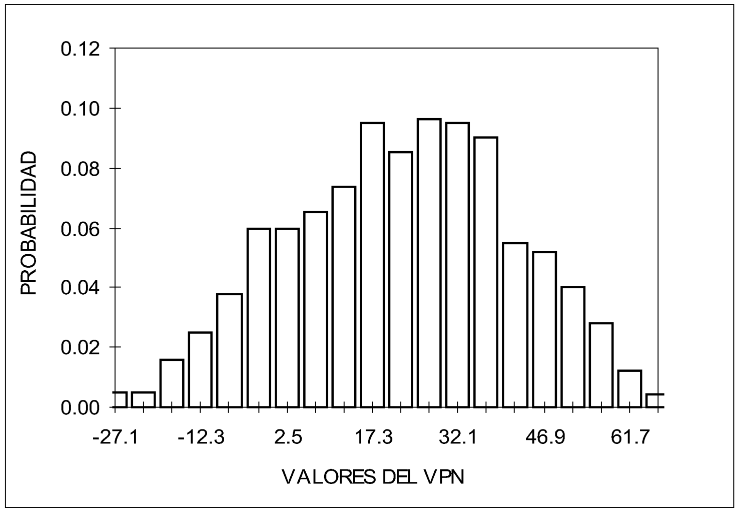


Gráfico 2.3: Histograma del VPN

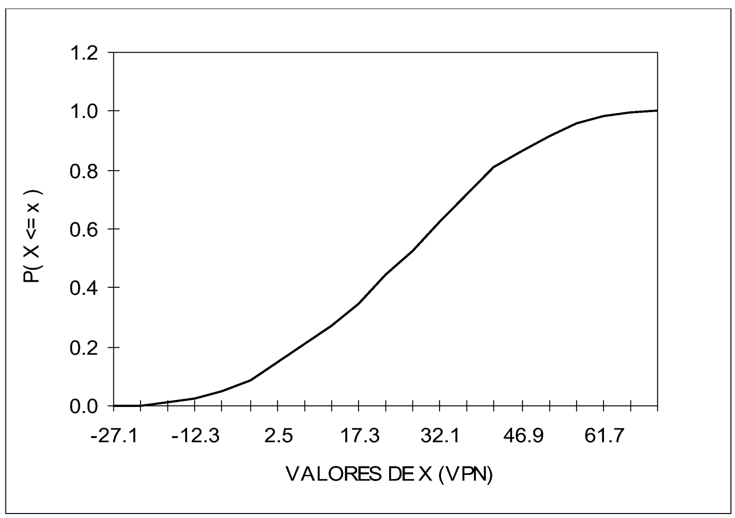


Gráfico 2.4: Distribución acumulada del VPN

En el gráfico 2.4, se puede observar que $P(VPN \leq 0)$ está ligeramente arriba del 0.10, lo cual se puede verificar en la tabla 2.10, donde los primeros tres percentiles son: 5% igual a -8.207516, 10% igual a -1.455629 y 15% igual a 2.568763; lo cual indica que la probabilidad de que el valor presente neto del proyecto sea menor o igual a 0% está entre 0.15 y 0.10.

Como el criterio de aceptación de la compañía indica que un proyecto será emprendido, si la $P(VPN > 0) \geq 0.90$ y dado que $P(VPN \leq 0)$ está entre 0.10 y 0.15, se concluye que el proyecto no cumple con el criterio de aceptación y será rechazado.

Capítulo 3

Sistemas de inventario

Capítulo 3

El control de inventarios es un aspecto crítico de la administración exitosa. Cuando el hecho de mantener inventarios implica un alto costo, las compañías no pueden darse el lujo de tener una cantidad de dinero detenida en existencias excesivas. Los objetivos de un buen servicio al cliente y de una producción eficiente deben ser satisfechos manteniendo los inventarios en un buen nivel mínimo. Esto es cierto aún cuando la inflación provoque que se incremente el valor de los inventarios de productos terminados. Tener existencias en los anaqueles significa tener dinero ocioso y para reducir éste al mínimo, una compañía debe de hacer que coincidan las oportunidades que ofrecen la demanda y la oferta, de manera que las existencias permanezcan en los anaqueles justo a tiempo para cuando las requiera el cliente; de aquí la importancia de su estudio. Asimismo, cabe destacar que en este capítulo es donde se conjuntan los conocimientos adquiridos a lo largo del texto, para poder finalmente integrar un modelo de simulación en el sistema de inventario de interés.

3.1 Tipos de inventario y sus funciones

Un inventario consiste en las existencias de productos físicos que se conservan en un lugar y un momento determinados. Cada artículo distinto del inventario que se encuentra en algún lugar, se denomina unidad de almacenamiento de existencias y cada lugar es un centro de almacenamiento. Por ejemplo, un mercado de una ciudad o pueblo es un centro de almacenamiento en el que se dispone de existencias inmensas de alimentos. Ahora, pensemos en la siguiente pregunta, ¿por qué mantienen inventarios las compañías? Los inventarios existen debido a que, por razones de índole física y económica, es imposible que la oferta y la demanda coincidan. Por ejemplo, la gente que acude a los supermercados con el propósito de comprar un litro de leche, ¿cómo puede ofrecerla la tienda sin necesidad de tenerla en inventario? Es obvio que la demanda del público no puede coincidir con lo que ofrece una vaca en términos de tiempo, lugar o forma.

Existencias para realizar transacciones

Las existencias que se prevén para llevar a cabo las transacciones son las necesarias para brindar apoyo a las operaciones de transformación, movimiento y ventas en las que participa la empresa. Los materiales activos, es decir, las existencias en proceso de fabricación (las que se están produciendo o desplazando entre centros de trabajo) constituyen una parte considerable de las existencias previstas para realizar las transacciones, como ocurre con los inventarios en tránsito. Los inventarios en proceso de transformación son inventarios en tránsito.

Existencias de la organización

Las existencias de la organización representan oportunidades de inversión que tienen como fin alcanzar la eficiencia en las operaciones. Las existencias variables o de seguridad son aquellas con las que cuenta la organización, diseñadas con el fin de amortiguar la incertidumbre. Por ejemplo, las ventas diarias promedio de veinte recipientes de leche se pueden satisfacer con una existencia de transacción de veinte unidades. Si las ventas rebasan esta cantidad, habrá que apoyarlas con una existencia de contingencia a fin de evitar que las existencias se agoten si las ventas son mayores de lo que se espera.

Los inventarios anticipados o de nivelación pueden representar una inversión atractiva en caso de que resulte más económico mantener las existencias que alterar la capacidad de producción a corto plazo. Los picos de temporada en la demanda pueden ser satisfechos acumulando existencias durante periodos previos de escasez de demanda y exceso de capacidad.

Los inventarios por tamaño de lote o de ciclo se mantienen con el fin de compensar en alguna medida, el costo de habilitar el equipo. Una vez que el equipo se habilita, el personal responsable de la fabricación deseará invariablemente que las corridas de producción se prolonguen, con el fin de evitar tener que habilitar de nuevo el equipo para el mismo artículo en un futuro cercano. Por ejemplo, ir al cajero a sacar dinero implica tiempo para desplazarse que se resta a otras actividades. Por este motivo, casi todas las personas llevan en su cartera un lote de dinero o existencias de ciclo, con el propósito de evitar tener que ir al banco cada vez que quieran comprar algo.

Los dos últimos tipos de existencias destinadas a la organización son oportunidades de inversión más especializadas. Las existencias de programación son existencias de trabajo en proceso que se mantienen entre las operaciones, para que los responsables de la programación dispongan de una variedad de puestos de trabajo que pueden colocar donde más les convenga en la cadena productiva; de esta manera es posible lograr una alta utilización de los recursos. Las existencias especulativas son aquellas que se mantienen con el fin de anticiparse a los incrementos en el precio.

Existencias excedente

La existencia excedente no cumple función alguna a diferencia de las existencias de transacción y las existencias de la organización, ésta se debe a la previsión desmedida más que a la necesidad o a la eficiencia operativa.

Niveles de inventario

Dentro del marco de referencia de las existencias de transacción, de la organización y excedentes, el nivel de inventario puede presentarse en distintos niveles o jerarquías dentro de la compañía. Una jerarquía, nivel o etapa, es un punto de las existencias que se encuentra bajo el control de la empresa. La materia prima, los productos en proceso, los componentes de alto nivel y los productos terminados pertenecen a distintas jerarquías. La materia prima es primaria en el sentido de que la compañía no le ha sometido a proceso alguno. Los inventarios de producto en proceso son inventarios que están sometidos a un proceso, o bien que se encuentran en la línea en los centros de trabajo cuyas capacidades en cuanto a personal y maquinaria son similares. Los componentes de alto nivel son piezas y partes listos para ensamblarse en los productos terminados. Éstos se almacenan listos para ensamblarse cuando se necesite. Los productos terminados son artículos listos para llegar al consumidor.

3.2 Medición del rendimiento de los sistemas de inventario

El rendimiento sobre la inversión (ROI, por las siglas en inglés de Return On Investiment) es de gran importancia para los administradores de nivel superior a quienes se exige que rindan cuentas de la rentabilidad de la empresa. ¿Dónde entran los inventarios en el esquema de la compañía? Considerese el siguiente análisis del ROI:

$$ROI = \frac{\text{ventas - costo de los productos vendidos}}{\text{existencias físicas + cuentas por cobrar + inventario}}$$

Los inventarios representan 25% de los activos de muchas empresas. De todos los elementos que comprende la fórmula del ROI, el inventario es el que tiene mayor potencial para casi todos los administradores y consultores. Una disminución en la inversión de inventarios es susceptible de generar mejoras rápidas en el ROI.

Sin embargo, al considerar el sistema de inventarios en sí, se descubre que la medida de su rendimiento refleja los intereses de quienes en él participan. La mercadotecnia origina una medida de servicio al cliente: con base en las existencias, debe enviarse cierto número de pedidos completos, o bien, cierto porcentaje de las unidades que se pidieron, sin dejar pedidos pendientes. Las existencias agotadas significan un servicio deficiente, y un historial inaceptable de existencias agotadas quizá signifique el despido del responsable de la administración de inventarios.

Los responsables de la administración financiera piensan en términos de costos: cuanto menor sea el inventario tanto mejor. Tal vez porque no les agrada solicitar financiamiento con tasas altas de interés, el personal especializado en las finanzas teme mantener los costos de inventario. Dado que cuantificar estos costos es fácil, en alguna medida, muchos financieros ejercen una influencia indebida en los sistemas de inventario. Suponen de manera errónea, que todo el inventario representa excedentes de existencias o que el único inventario que debe mantenerse es el que se destina a las transacciones. Desde luego, los administradores financieros a quienes complace que el control de la producción siga un rumbo determinado comprenden que las existencias de la organización deben analizarse como una inversión.

Además de los costos de mantener inventarios, la gente especializada en las finanzas piensa también en términos de las rotaciones de inventario. La rotación de inventario es la relación entre el costo de las ventas durante un periodo y el costo del inventario promedio disponible. Suponga, por ejemplo, que el costo de las ventas del último mes fue de \$100,000 con un inventario inicial de \$40,000 y uno final de \$60,000, lo que da un promedio de \$50,000. Esto equivale a dos rotaciones por periodo. Aunque es interesante que la medida de la rotación de inventario varíe tanto dependiendo del tipo de empresa, al analizarla se sugiere aplicar un criterio juicioso si no es que con cierto escepticismo.

El personal responsable de la manufactura también participa en las decisiones referentes a los inventarios. Si se ven afectados por numerosos contratiempos y tiempos perdidos, ¿es acaso necesario preguntarse por que les provoca frustración las corridas de producción cortas cuando se les pide que fabriquen de nuevo el mismo producto por haberse hecho una corrida de producción demasiado pequeña dos semanas atrás? Desafortunadamente, pocas empresas llevan registros exactos de los costos que genera la preparación de equipo, y no los consideran en su debida magnitud como factores de los objetivos de inversión en inventarios. Esto se debe, en parte, a la dificultad que implica proporcionar estimados razonables de los costos de habilitación. El nivel jerárquico inferior del personal responsable de la fabricación, en relación con el personal de finanzas y mercadotecnia en algunas compañias, también contribuye a la escasa atención que se pone en los costos de habilitación.

La planeación y el control de inventarios requiere de interacciones entre los tres objetivos principales del sistema: servicio al cliente, inversión en inventarios y eficiencia en la producción. Siempre existen los costos implícitos o explícitos que se relacionan con estos objetivos, independientemente de si son o no susceptibles de ser cuantificados con exactitud.

Los costos de llevar o mantener los inventarios son relevantes en cuanto a la decisión de qué cantidad hay que pedir y cuándo, de tal forma que representan flujos de efectivo a futuro que se modificarán en función de las decisiones que atañen a mantener inventarios más grandes o de menor cuantía. En el contexto de la economía actual, los seguros, la obsolescencia, el deterioro, los impuestos a la propiedad y el costo de capital pueden significar hasta 40% del costo del artículo. Es evidente que los costos de mantener inventarios son de relevancia en cuanto a la decisión de pedir una unidad más. Si una empresa tiene que afrontar un costo inmediato de $10 por unidad para poner un artículo en los anaqueles y debe solicitar financiamiento con un interes de 25%, entonces el costo de llevar ese artículo extra es de $2.50, más el costo de seguros, obsolescencia, deterioro e impuestos. Es probable que la compañía esté dispuesta a pagar hasta $2.50 a cambio de obtener $10. Si a la compañía se le presentara la oportunidad de obtener en otro lugar el 30% de una inversión, la administración estaría dispuesta a pagar hasta $3 para obtener $10. El concepto clave es el de los costos que deben erogarse de inmediato. Si ya se dispone de existencias en una etapa temprana de la fabricación, el costo de mantener inventarios en una etapa posterior es el incremento en la inversión que implica hacer pedidos de artículos hasta la etapa siguiente.

Los costos de preparación o costos de pedido (k), que varían dependiendo de la frecuencia con que se hacen los pedidos, deben tomarse en cuenta al tomar las decisiones referentes al inventario. Los costos de las actividades de oficina que conlleva elaborar y recibir pedidos, deben analizarse con cuidado a fin de asegurar que sólo los costos marginales de las actividades de oficina sean considerados como costos de pedido. Los costos de la mano de obra que implica preparar el equipo son un componente de los costos de preparación. Las utilidades predeterminadas debidas a los tiempos perdidos, que suelen omitirse, deben incluirse cuando el equipo opera a su plena capacidad. En el área de las ventas al menudeo y la distribución, se utiliza el término costos de pedido (o costos por ordenar); el término costos de preparación por lo regular se refiere a la suma de los costos de preparación y de pedido en un ambiente de fabricación.

Es casi imposible cuantificar o medir los costos de agotar existencias (o costo por déficit). Las existencias se agotan cuando un cliente demanda un artículo cuyas existencias no son suficientes para satisfacer la demanda. Esto puede convertirse en una venta perdida o en un pedido pendiente. Si se convierte en una venta perdida, se pierde ingreso; si se convierte en un pedido pendiente, se generan costos extra de actividades y trámites de oficina. En ambos casos se da lugar a una pérdida de la confianza y aceptación por parte de los consumidores. De las diversas medidas de rendimiento de los sistemas de inventario, a la que más atención se ha dado es a los costos en que se incurre para mantener los inventarios. Por ejemplo, un sistema de control de inventarios muy común clasifica el inventario por su volumen en términos de dinero, con el objeto implícito de aislar aquellas unidades de almacenamiento que mantienen ociosa una cantidad grande de dinero. Debido a que este problema aparece en casi todas las empresas, el estudio de los métodos de control de inventarios objeto de esta tesis, se enfocará en el modelo básico de punto de reorden, en el modelo general y en el modelo estocástico con costo por ordenar y déficit convertido en ventas pendientes; tales modelos se describirán a continuación aplicando la relación entre estos así como el concepto de simulación de sistemas.

3.3 Sistema básico de inventario con punto de reorden y cantidad de pedido

En esta sección la atención se centra en las decisiones fundamentales concernientes a la administración de inventarios y a contestar a las preguntas respecto a 1) cuándo hacer los pedidos y 2) cuánto pedir. Si bien en la práctica no es común encontrarse con los sistemas más elementales, comprenderlos permite trabajar con los modelos más complejos. En los sistemas de inventario que operan en condiciones de certidumbre, la demanda se considera fija para una cantidad específica, y una vez que se comprenden estos sistemas se pueden modificar para tomar en cuenta la incertidumbre.

Para introducir el modelo básico supongamos que la demanda anual de un artículo es d = 10,000 unidades. A lo largo de este ejemplo se supone una semana de cinco días hábiles con dos semanas de vacaciones en julio, de lo cual se obtiene un año de 250 días. Así, la cantidad de demandada será Q = 10,000/250 = 40 por día. Además, los costos anuales por mantener inventarios (h) equivalen a 40% del costo del artículo. Del costo del artículo c = \$10, se obtiene que h = 0.4 * \$10 = \$4. Los costos de preparación (o costos por ordenar) son k = \$500. De tal modo que Z, denota el costo total.

Lo anterior, nos lleva a querer conocer el nivel de inventario donde se obtenga el menor costo total, es decir, efectuar la siguiente optimización:

$$\text{Min Z} \;=\; \text{Costo por ordenar} + \text{Costo de Adquisición} * Q + \text{Costo por inventario} * Q$$

es decir

$$\text{Min Z} \;=\; k + c * Q + h * Q$$

con

$$\begin{aligned} k &\geq 0 \\ c &\geq 0 \\ h &\geq 0 \\ Q &> 0 \end{aligned}$$

Considerando que el costo total está asociado a un año, tenemos que la ecuación debe considerar el número de pedidos a realizarse en el año, para lo que se analizará la siguiente situación:

Cantidad de orden (Q)	Número de ordenes	Costo anual de preparación (en dólares)
10,000	1	500
1,000	10	5,000
1	10,000	5,000,000

Tabla 3.1 Costos de preparación para tamaños de lote de prueba.

¿Cuándo y qué tanto debe fabricar la compañía? La tabla 3.1 muestra tres cantidades de pedido o tamaños de lote. De inmediato se descarta ordenar una unidad por pedido pues 5 millones de dólares anuales resulta un precio prohibitivo. Con una demanda anual d = 10,000 y una cantidad de pedido Q = 1,000, se observa que, a lo largo de un año se registrarán 10,000/1 ,000 = 10 pedidos; es decir, d/Q = 10. El costo anual de preparación es sólo el número de pedidos multiplicado por el costo de preparación por pedido, o (d/Q) * k. Para Q = 1,000 se tiene un costo anual de preparación de (10,000/1,000) * \$500. Los costos anuales de preparación se incrementan conforme disminuye Q, como se observa en el gráfico 3.1. El análisis marginal revela que los costos anuales de habilitación A disminuyen con Q a una tasa de $-dk/Q^2$, ya que $dA/dQ = dk/Q^2$. Al incrementarse Q de 1,000 a 2,000 se ahorran \$2,500 no obstante, al aumentar de 4,000 a 5,000 se ahorran sólo \$250.

Al tiempo que los costos anuales de preparación disminuyen en función de incrementos en el tamaño del lote, los costos anuales por mantener inventarios aumentan. Con un pedido de Q = 1,000 el inventario promedio sería Q/2 = 500. Esto puede observarse en el gráfico 3.2. A lo largo de los primeros 100 días del año, nos desplazamos a través de cuatro ciclos de 1,000 unidades en inventario a cero unidades. El inventario disminuye linealmente entre A = 1,000 y B = O. Para tal función lineal el promedio cae en el punto medio, o punto de equilibrio geométrico de (A + B)/2. Como A = Q y B = 0, el inventario promedio es Q/2. Por tanto, este modelo depende en gran medida de suponer una cantidad de ventas constante que generará una disminución lineal en la posición de inventario. En tal caso, los costos anuales de mantener inventarios son (Q/2)h. En nuestro caso, h = 0.40 * \$10 = \$4, de lo que se obtiene una línea anual de costos de mantener inventarios de \$4Q/2 = \$2Q. Esto se ilustra en el gráfico 3.3.

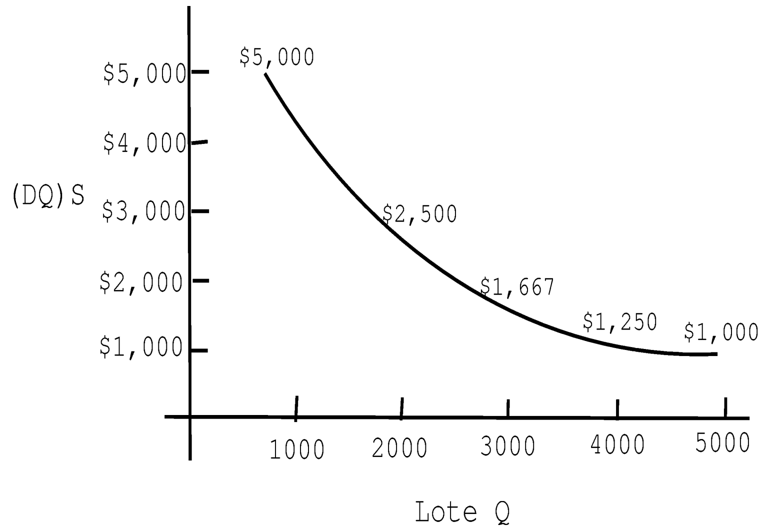


Gráfico 3.1: Costo anual de preparación como una función del tamaño del lote.

Utilizando el análisis marginal, los costos anuales de mantener inventarios h incrementan con Q a una tasa de $2, ya que

$$\frac{dh}{dQ} = \frac{d\left(\frac{Q}{2} * h\right)}{dQ} \quad = \quad \frac{h}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Al incrementarse Q de 1,000 a 2,000 unidades, los costos anuales de mantener inventarios aumentan en $2,000, exactamente el mismo incremento en costos que se generaría al cambiar de Q = 4,000 unidades a Q = 5,000 unidades.

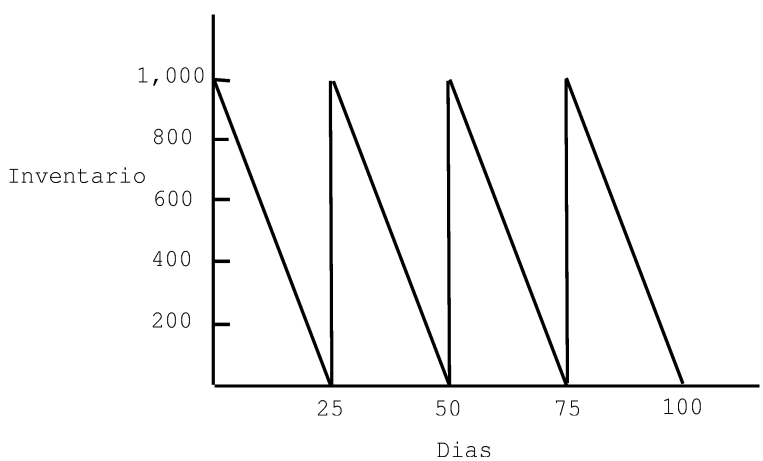


Gráfico 3.2: Ciclos de inventario.

Debe existir disposición a incrementar Q en tanto los incrementos de ahorro en cuanto a costos de preparación superan el incremento en costos de mantener inventarios. El costo anual de preparación cambia en $-dk/Q^2$, que equivale a un ahorro de dk/Q^2. Al igualar los ahorros con los incrementos en los costos de mantener inventarios, se obtiene

$$Q* = \sqrt{\frac{2dk}{h}}$$

donde Q* es la fórmula famosa de cantidad de lote (pedido) económico (EOQ por las siglas en inglés de Economic Order Quantity), una reliquia que data de 1915. Al aplicarla a nuestro ejemplo, la cantidad óptima de pedido resulta ser

$$Q^* = \sqrt{\frac{2*10000*500}{4}} = 1581$$

Con una EOQ de 1581, el incremento en costos de preparacion de \$2 por unidad se compensa con el incremento en costo de mantener inventarios de \$2 por unidad: es decir, $dk/Q^2 = h/2$. Lo peculiar en las funciones de costo que corresponden a este modelo es que los costos anuales de preparación equivalen a los costos anuales de mantener inventarios en el caso de la Q óptima: es decir, dk/Q = (Q/2)h. Lo cual es equivalente a obtener $Q*$ de la primera derivada de Z, tomando en cuenta que el costo de adquisición anual es $c*Q*d/Q$ que es lo mismo que $c*d$, por lo que no depende Q. Por lo tanto,

$$\mathrm{Z}' = \frac{dk}{Q^2} - \frac{h}{2} = 0$$

de donde obtenemos el lote económico

$$Q^* = \sqrt{\frac{2dk}{h}}$$

calculando la segunda derivada con respecto a Q

$$\mathrm{Z}'' = \frac{2dk}{Q^3} > 0$$

por lo que obtenemos que el punto crítico es un mínimo.

Para este caso, los incrementos en costos equivalen a los costos anuales, pero esto no debe aceptarse como un principio general para otras funciones de costos. Aunque el modelo EOQ supone una cantidad de demanda constante, el modelo es en sí sólido. Los cambios en la demanda anual o en la relación entre costos de habilitación y costos de mantener inventarios no dan lugar a cambios radicales de Q.

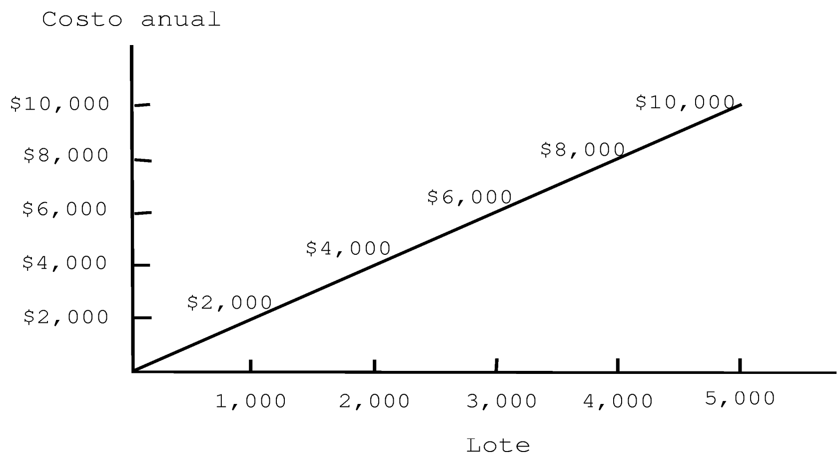


Gráfico 3.3: Costo anual de mantener inventario como una función del tamaño del lote.

De manera análoga, los cambios mínimos en Q no provocan cambios de magnitud considerable en los costos relevantes totales (TRC, por las siglas en inglés de Total Relevant Costs). Para observar esto, considere la ecuación de costos de inventario TRC(Q) = (Q/2)h + (d/Q)k. Sólo se consideran aquellos costos relevantes para la decisión de inventarios, mediante el símbolo TRC(Q) para indicar que los costos relevantes totales dependen de Q. El gráfico 3.4 combina los costos de mantener inventarios del gráfico 3.3 y los costos de habilitación del gráfico 3.1 en una cifra de costo total relevante. En el caso de la Q óptima = 158, los costos relevantes totales son

$$TRC = \frac{1581}{2} * 4 + \frac{10,000}{1581} * 500 \quad = \quad \$3162 + \$3162 = \$6324$$

Si duplicamos la demanda de 10,000 a 20,000, no se duplicará Q, pero se incrementará a 2,236 o $\sqrt{2}$ veces la antigua EOQ. Si se inserta la demanda duplicada en la fórmula de EOQ, se obtiene la nueva EOQ:

$$EOQ = \sqrt{\frac{2(2d)k}{h}} = \sqrt{2}\sqrt{\frac{2dk}{h}}$$

De manera análoga, los costos relevantes totales no son muy sensibles a las desviaciones pequeñas respecto a EOQ. Para Q = 1,000; TRC(Q) = $ 7,000 y para Q = 2,000; TRC(Q) = $6,500. Ninguna de las dos cifras esta muy lejos de TRC(Q) = $6,324 para la EOQ.

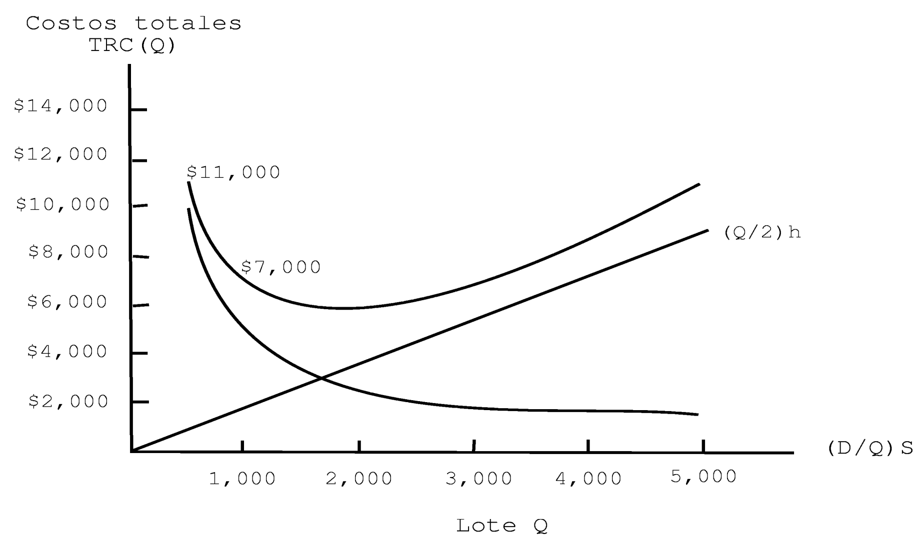


Gráfico 3.4: Costos relevantes totales.

En la explicación dada hasta ahora se ha demostrado el orden siguiente al que se llega precisamente en el momento en que se utiliza el primer lote. La EOQ ha respondido a la pregunta relativa de qué tanto pedir. Ahora hay que intentar determinar cuándo hacer el pedido. El término tiempo de espera tiene que definirse como el tiempo que transcurre entre el momento en que se hace el pedido y cuando se recibe. Suponga que el tiempo de espera es de cinco días (L = 5). Dado que hay certeza en cuanto a la demanda, cinco días de oferta cubrirán la demanda del tiempo de espera. Si el punto en que debe hacerse un nuevo pedido (ROP, por las siglas en inglés de Reorderpoint) se establece en S=LD= 5 * 40= 200 unidades, para cubrir la demanda durante el tiempo de espera, entonces se hará un pedido por Q* = 1,581 unidades cuando el inventario disponible llegue a 200 unidades.

3.4 Modelo general

Ahora que tenemos las bases para entender cómo funciona un sistema de inventario, pasaremos a la descripción del modelo general para sistemas de inventario con el cual se podrá entender y construir el modelo estocástico con costo por ordenar y deficit convertido en ventas pendintes.

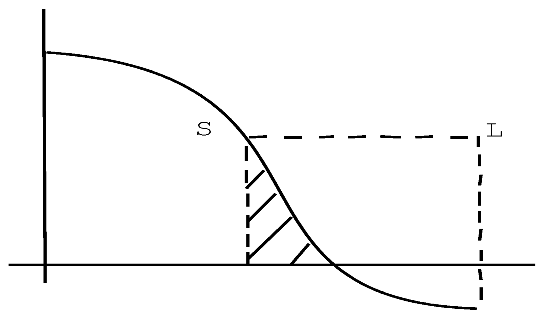


Gráfico 3.5: Representación del modelo general.

Del gráfico 3.5 se pueden apreciar los elementos que conforman el modelo general de inventario, donde s es el punto de reorden y L es el periodo de entrega. Por consiguiente, definiremos $f_L(u)du$ como la distribución de la demanda durante el periodo de entrega.

De este modo si

$$f_L(u)du \quad = \quad \text{La distribución de la demanda durante L.}$$

tenemos que

$$\begin{aligned} \int_0^S f_L(u)du &= P\big(d_L \leq s\big) \\ \int_a^b f_L(u)du &= P\big(a \leq d_L \leq b\big) \end{aligned}$$

Sea

$$\overline{y}(s) \quad = \quad \int_0^S \big(s-u\big) f_L(u)du, \qquad \text{para} \quad u \leq s$$

Donde

$$d_L = \int_0^\infty u f_L(u) du$$

Es el valor esperado de la demanda y

$$\overline{y}_d(s) = \int_0^\infty \big(u - s\big) f_L(u) du \qquad \text{para} \quad u \geq s$$

es la ecuación para obtener el défcit. De tal forma que,

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \big(s - u\big) f_L(u) du &= s \int_0^\infty f_L(u) du - \int_0^\infty u f_L(u) du \\
&= \int_0^s \big(s - u\big) f_L(u) du - \int_s^\infty \big(u - s\big) f_L(u) du \\
&= s - d_L \\
&= \overline{y}(s) - \overline{y}_d(s)
\end{aligned}$$

De donde se obtienen las siguienters igualdades:

$$\begin{aligned}
\overline{y}(s) &= \overline{y}_d(s) + s - d_L \\
\overline{y}_d(s) &= \overline{y}(s) - s + d_L
\end{aligned}$$

3.5 Modelo estocástico con costo por ordenar y déficit convertido en ventas pendientes

Una vez descrito el modelo general, podemos describir un modelo de inventario más completo, de tal modo que involucremos factores que forman un papel importante en el análisis de tales sistemas.

Partiendo de que se va a tener una política (S,Q) donde S es el punto de reorden, consideremos la siguiente expresión:

$$\overline{y}(S,Q) = \overline{y}(S) + \Phi(Q)$$

Donde $\Phi(Q)$, es la mitad del inventario promedio al recibir una orden. Por lo que tenemos una ecuación que está en función del nivel de inventario.

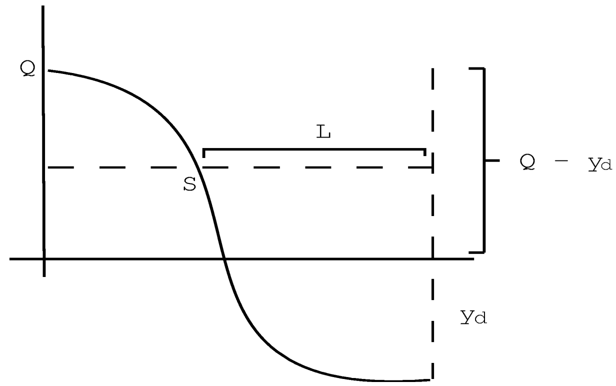


Gráfico 3.6: Elementos del modelo estocástico con costo por ordenar y déficit.

Sea

$$\overline{y}(S,Q) \;=\; \overline{y}(S) + \frac{Q - \overline{y}_d(S)}{2}$$

donde $\overline{y}_d(S)$ es el déficit. Por consiguiente,

$$\begin{aligned}
E(CT) &= k\frac{d}{Q} + h\Big(\overline{y}(S) + \Big(\frac{Q - \overline{y}_d(S)}{2}\Big)\Big) + \Pi\frac{d}{Q}\; y_d(S) \\
&= k\frac{d}{Q} + h\overline{y}(S) + \frac{hQ}{2} + \Big(\Pi\;\frac{d}{Q} - \frac{h}{2}\Big)\; y_d(S) \\
&= \Big(k + \Pi\; y_d(S)\Big)\frac{d}{Q} + \frac{hQ}{2} + h\overline{y}(S) - \frac{h}{2}y_d(S) \\
\frac{dE(CT)}{dQ} &= -\big(k + \Pi\; y_d(S)\big)\;\frac{d}{Q^2} + \frac{h}{2} = 0 \\
&= \sqrt{\frac{2\big(k + \Pi y_d(S)\big)d}{h}} \qquad (3.1)
\end{aligned}$$

De donde obtenemos la siguiente relación

$$
\begin{aligned}
E(CT) &= k\frac{d}{Q} + \frac{hQ}{2} + h\big(\overline{y}(S)\big) + \big(\Pi\frac{d}{Q} - \frac{h}{2}\big)\ \big(\overline{y}(S) - S + d_L\big) \\
E(CT) &= k\frac{d}{Q} + \frac{hQ}{2} + \big(\Pi\frac{d}{Q} - \frac{h}{2}\big)\ d_L + \big(\Pi\frac{d}{Q} + \frac{h}{2}\big)\overline{y}(S) - \big(\Pi\frac{d}{Q} - \frac{h}{2}\big)S \\
\frac{dE(CT)}{dS} &= \big(\Pi\frac{d}{Q} + \frac{h}{2}\big)P\big(d_L \leq S\big) - \big(\Pi\frac{d}{Q} - \frac{h}{2}\big) = 0
\end{aligned}
$$

$$
P\big(d_L \leq S\big) = \frac{\Pi\frac{d}{Q} - \frac{h}{2}}{\Pi\frac{d}{Q} + \frac{h}{2}} \tag{3.2}
$$

donde

$$
\frac{d}{dS}\int_0^s (s-u)f_L(u)du = \int_0^s f_L(u)du = P\big(d_L \leq s\big)
$$

Así, una vez establecidas las ecuaciones 3.1 y 3.2 podemos dar paso al algoritmo que determina los valores de S y Q.

ALGORITMO

Paso 1. Estimar Q con la ecuación (3.1) suponiendo que $\overline{y}_d(S) = 0$, es decir, no hay déficit.

Paso 2. Estimar S con Q obtenida del paso 1, usando la ecuación (3.2).

Paso 3. Estimar Q con (3.1) usando S obtenida del paso 2.

Paso 4. Repetir el paso 2 hasta que los valores sucesivos de Q no difieran en forma significativa.

Ejemplo.

Consideremos un sistema de inventario donde se presentan las siguientes características:

$$
\begin{aligned}
L &= 1 \text{ semana} \\
Q &= \text{se desconoce} \\
h &= 1 \text{ \$/semana} \\
\Pi &= 10 \text{ \$/unidad} \\
S & \quad \text{se desconoce}
\end{aligned}
$$

La *demanda* tiene una distribución N(8,3). El costo por ordenar es, $k = \$8$.

Paso 1.

$$\begin{aligned} Q &= \sqrt{\frac{2\big(k + \Pi y_d(S)\big)\overline{d}}{h}} \\ Q &= \sqrt{\frac{2k\overline{d}}{h}} \end{aligned}$$

Debido a que el *paso* 1 supone que no hay déficit, obtenemos Q como sigue:

$$\begin{aligned} Q &= \sqrt{\frac{2(8)(8)}{1}} \\ &= 8\sqrt{2} = 11.31 \end{aligned}$$

Paso 2.

$$\begin{aligned} P\big(d_L \leq S\big) &= \frac{\Pi\frac{\overline{d}}{Q} - \frac{h}{2}}{\Pi\frac{\overline{d}}{Q} + \frac{h}{2}} \\ &= \frac{\frac{10\ (8)}{11.31} - \frac{1}{2}}{\frac{10\ (8)}{11.31} + \frac{1}{2}} \\ &= \frac{\frac{80}{11.31} - 0.5}{\frac{80}{11.31} + 0.5} \\ &= 0.868 \end{aligned}$$

Aplicando la estandarización obtenemos que,

$$\begin{aligned} P\big(d_L \leq S\big) &= 0.868 \\ P\big(Z \leq \frac{S-8}{3}\big) &= 0.868 \end{aligned}$$

De donde

$$Z_0 = 1.1 = \frac{S-8}{3} \ \Rightarrow\ S = 11.3$$

Paso 3.

Para obtener el valor de Q primero hay que encontrar el valor del déficit, utilizando la tabla de *pérdida normal*[1].

$$
\begin{aligned}
y_d(S) &= \sigma \int_{1.1}^{\infty} (u - 1.1)\ f_L(u)du \\
&= 3 \int_{1.1}^{\infty} (u - 1.1)\ f_L(u)du \\
&= 3(0.0686) \\
&= 0.2058
\end{aligned}
$$

Entonces

$$
\begin{aligned}
Q &= \sqrt{\frac{2\big(k + \Pi y_d(S)\big)\overline{d}}{h}} \\
&= \sqrt{\frac{2\big(8 + 10(0.2058)\big)8}{1}} \\
&= \sqrt{160.928} \\
&= 12.69
\end{aligned}
$$

Paso 4.

Regresando al paso 2, realizamos otra iteración obteniendo que

$$
\begin{aligned}
P\big(d_L \leq S\big) &= \frac{\Pi\frac{\overline{d}}{Q} - \frac{h}{2}}{\Pi\frac{\overline{d}}{Q} + \frac{h}{2}} \\
&= \frac{\frac{10\ (8)}{12.68} - \frac{1}{2}}{\frac{10\ (8)}{12.68} + \frac{1}{2}} \\
&= \frac{\frac{80}{12.68} - 0.5}{\frac{80}{12.68} + 0.5} \\
&= 0.853
\end{aligned}
$$

Aplicando la estandarización obtenemos que,

[1]vid anexo 1

$$\begin{aligned} P\big(d_L \leq S\big) &= 0.853 \\ P\big(Z \leq \frac{S-8}{3}\big) &= 0.853 \end{aligned}$$

De donde

$$Z_0 = 1.04 = \frac{S-8}{3} \;\Rightarrow\; S = 11.12$$

Entonces

$$\begin{aligned} y_d(S) &= \sigma \int_{1.04}^{\infty} (u-1.04)\ f_L(u)du \\ &= 3 \int_{1.04}^{\infty} (u-1.04)\ f_L(u)du \\ &= 3(0.0787) \\ &= 0.2361 \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} Q &= \sqrt{\frac{2\big(K + \Pi y_d(S)\big)\overline{d}}{h}} \\ &= \sqrt{\frac{2\big(8 + 10(0.2361)\big)8}{1}} \\ &= \sqrt{165.776} \\ &= 12.875 \end{aligned}$$

Por lo tanto, como la diferencia no es significativa podemos decir que $Q = 13$ y $S = 11$.

Ahora, dado el entendimiento del modelo podemos pasar a la última etapa del análisis, lo cual nos lleva a utilizar la metodología de simulación para llegar a los valores a los cuales convergen Q y S, y de este modo obtener un intervalo de confianza para estos valores como resultado de la corrida de simulación.

3.6 Simulación del sistema de inventario estocástico con costo por ordenar y déficit

La simulación de un sistema, como se ha mencionado previamente, consiste en la repetición del comportamiento de un sistema mediante ensayos estadistícos, tomando en cuenta qué elementos del mismo tienen un comportamiento aleatorio. Así, la simulación del sistema de inventario estocástico con costo por ordenar y déficit convertido en ventas pendientes, toma en cuenta que la demanda del artículo se comporta de acuerdo a una distribución de probabilidad. Lo anterior nos lleva a partir del entendido que mediante un análisis previo, debemos determinar el comportamiento de la demanda y conocer su distribución de probabilidad asociada.

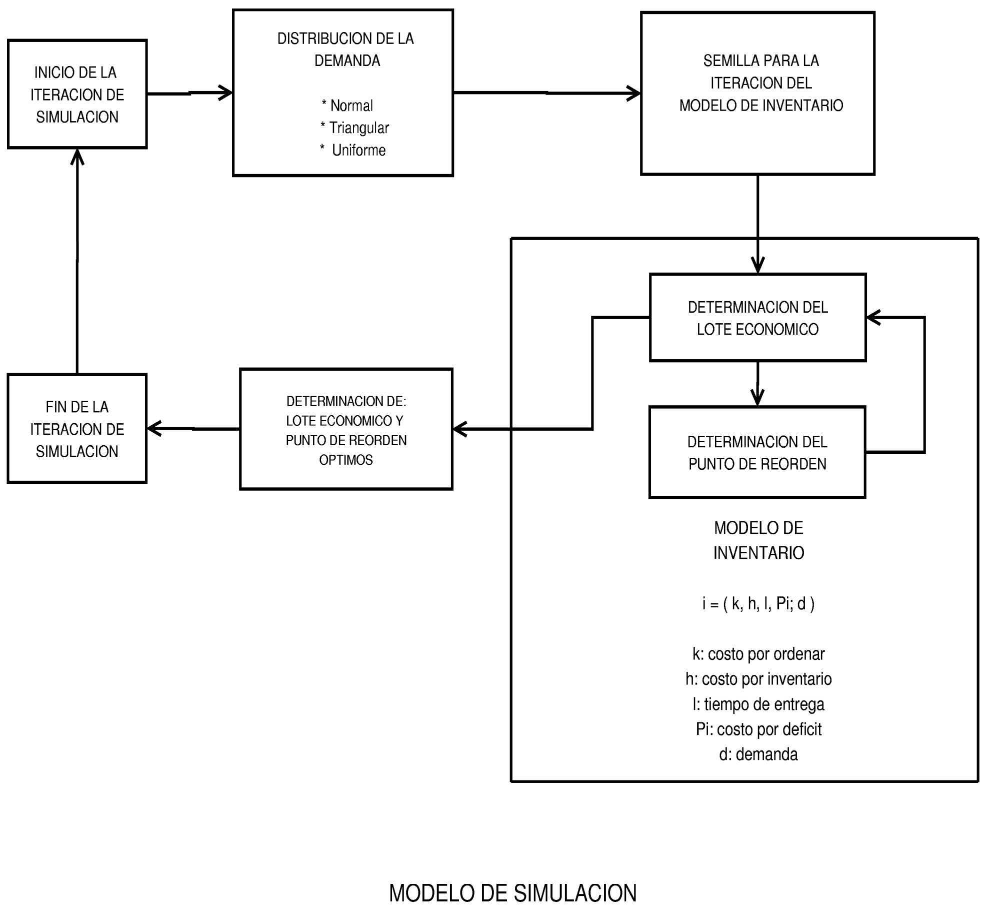


Gráfico 3.7: Diagrama de proceso.

De este modo, al aplicar la metodología de simulación podemos llegar a valores promedio para los estimados de Q y S, los cuales se obtienen mediante las diversas iteraciones que produce el algoritmo del sistema de inventario estocástico, que a su vez, provienen de tomar una observación de la distribución de probabilidad asociada a la demanda. Para efectos de esta tesis, solamente consideraremos como distribución de la demanda las distribuciones de probabilidad normal, uniforme y triangular; aclarando que el análisis se puede extender a otras distribuciones de probabilidad estimadas.

Siguiendo el sistema de inventario del ejemplo anterior, realizaremos las corridas de simulación considerando los supuestos anteriores, de tal modo que los valores de $Q = 13$ y $S = 11$ se tomarán como los valores provenientes de la primera iteración del modelo de simulación. Para efectos de aplicar esta técnica a modelos de inventario, realizaremos dos iteraciones a modo de construir un intervalo de confianza para los parámetros de interés y poder tomar valores promedio de las iteraciones del algoritmo, provenientes de la corrida de simulación.

Iteración 1.

Se tienen los valores $Q = 13$ y $S = 11$ provenientes de la sección anterior.

Iteración 2.

Como la *demanda* tiene una distribución N(8,3); al realizar la simulación sobre esta distribución, debemos encontrar números aleatorios que se apeguen a dicha función de probabilidad, entonces primeramente se mostrará cómo se realiza la generación de números aleatorios para las variables aleatorias que involucra este proceso, de este modo, para generar un número aleatorio de una variable aleatoria normal mediante el método *monte carlo* es necesario hacer lo siguiente:

1. Seleccionar un número decimal aleatorio entre 0 y 1. Para este caso tomaremos el número 0.631, y lo consideraremos como probabilidad.

2. Posteriormente, de una tabla para variable aleatoria normal estándar[2], encontrar para qué valor de z_o corresponde la probabilidad seleccionada.

3. Después, despejar el valor de x que es una observación de la variable aleatoria normal con parámetros μ y σ; que para nuestros fines resulta ser el número aleatorio de interés.

[2]Vid Apéndice A.

Para detallar el tercer punto es necesario aclarar que una tabla de variable aleatoria normal estándar, porporciona la probabilidad:

$$P(Z \leq z_o) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z_o} exp\left(\frac{-t^2}{2}\right)\ dt$$

De este modo, tenemos que por medio de la transformación:

$$\frac{X-\mu}{\sigma}$$

Una variable aleatoria normal X, con parámetros μ y σ, se transforma en una variable normal estándar.

Por lo tanto, si

$$P(Z \leq z_o) = 0.631 \quad \Rightarrow \quad z_o = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

Entonces

$$x = (z_o)(\sigma) + \mu$$

Es la muestra de una v.a. normal con parámetros μ y σ. Para nuestro caso, se tiene que $z_o = 0.33$, por lo tanto

$$\begin{aligned} x &= (0.33)(3) + 8 \\ &= 8.99 \end{aligned}$$

Por lo tanto, x = 8.99 es el valor simulado para la demanda.

Una vez establecido el valor para la demanda pasemos a resolver el algoritmo.

Paso 1.

$$\begin{aligned} Q &= \sqrt{\frac{2\big(k + \Pi y_d(S)\big)\overline{d}}{h}} \\ Q &= \sqrt{\frac{2k\overline{d}}{h}} \end{aligned}$$

Debido a que el *paso* 1 supone que no hay déficit, obtenemos Q como sigue:

$$\begin{aligned} Q &= \sqrt{\frac{2(8)(9)}{1}} \\ &= 8\sqrt{2} = 12 \end{aligned}$$

Paso 2.

$$\begin{aligned} P\big(d_L \leq S\big) &= \frac{\Pi\frac{\overline{d}}{Q} - \frac{h}{2}}{\Pi\frac{\overline{d}}{Q} + \frac{h}{2}} \\ &= \frac{\frac{10\ (9)}{12} - \frac{1}{2}}{\frac{10\ (9)}{12} + \frac{1}{2}} \\ &= \frac{\frac{90}{12} - 0.5}{\frac{90}{12} + 0.5} \\ &= 0.875 \end{aligned}$$

Aplicando la estandarización obtenemos que,

$$\begin{aligned} P\big(d_L \leq S\big) &= 0.875 \\ P\big(Z \leq \frac{S-9}{3}\big) &= 0.875 \end{aligned}$$

De donde

$$Z_0 = 1.15 = \frac{S-9}{3} \ \Rightarrow\ S = 12.45$$

Paso 3.

Para obtener el valor de Q primero hay que encontrar el valor del déficit, utilizando la tabla de *pérdida normal*.

$$
\begin{aligned}
y_d(S) &= \sigma \int_{1.1}^{\infty} (u-1.1)\ f_L(u)du \\
&= 3 \int_{1.15}^{\infty} (u-1.15)\ f_L(u)du \\
&= 3(0.0621) \\
&= 0.1862
\end{aligned}
$$

Entonces

$$
\begin{aligned}
Q &= \sqrt{\frac{2\big(k+\Pi y_d(S)\big)\overline{d}}{h}} \\
&= \sqrt{\frac{2\big(8+10(0.1862)\big)9}{1}} \\
&= 13.32
\end{aligned}
$$

Paso 4.

Regresando al paso 2, realizamos otra iteración obteniendo que

$$
\begin{aligned}
P\big(d_L \leq S\big) &= \frac{\Pi\frac{\overline{d}}{Q}-\frac{h}{2}}{\Pi\frac{\overline{d}}{Q}+\frac{h}{2}} \\
&= \frac{\frac{10\ (9)}{13.32}-\frac{1}{2}}{\frac{10\ (9)}{13.32}+\frac{1}{2}} \\
&= \frac{\frac{90}{13.32}-0.5}{\frac{90}{13.32}+0.5} \\
&= 0.862
\end{aligned}
$$

Aplicando la estandarización obtenemos que,

$$
\begin{aligned}
P\big(d_L \leq S\big) &= 0.862 \\
P\big(Z \leq \frac{S-9}{3}\big) &= 0.862
\end{aligned}
$$

De donde

$$Z_0 = 1.09 = \frac{S-9}{3} \;\Rightarrow\; S = 12.27$$

Entonces

$$\begin{aligned} y_d(S) &= \sigma \int_{1.09}^{\infty} (u-1.09)\ f_L(u)du \\ &= 3\int_{1.09}^{\infty} (u-1.09)\ f_L(u)du \\ &= 3(0.07) \\ &= 0.21 \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} Q &= \sqrt{\frac{2\big(k+\Pi y_d(S)\big)\overline{d}}{h}} \\ &= \sqrt{\frac{2\big(8+10(0.21)\big)9}{1}} \\ &= 13.48 \end{aligned}$$

Por lo tanto, como la diferencia no es significativa podemos decir que $Q = 13$ y $S = 12$.

Repitiendo este proceso 1000 veces, llegamos a los siguientes resultados estadistícos.

Estadísticas de la simulación	
mínimo	7
máximo	17
media	12.59
desv.est.	2.14
varianza	4.58
Límite inferior	10.45
Límite superior	14.73

Tabla 3.2 Resumen de estadísticas del modelo de inventario.

De donde podemos observar que los valores de Q y S convergen a 12.6 y 11, respectivamente.

Cabe señalar que al aplicar este método partimos de definir una distribución de probabilidad para la demanda y posteriormente, al obtener un valor simulado de dicha distribución, se alimenta éste al modelo de inventario de tal forma que se realizan las iteraciones necesarias para determinar los valores de S y Q una vez que el algoritmo converge. La observación anterior significa que el algoritmo del modelo de inventario se detiene cuando la diferencia entre las iteraciones es cercana a cero. Así, bajo esta metedología se repite el proceso tantas veces como se desee de tal modo que se complete una corrida de simulación. Para efectos de esta tesis se realizarán 1000 iteraciones de simulación para determinar una corrida del modelo, debido a que por facilidad de cálculo computacional se supera en un tiempo breve la simulación de 500 iteraciones, las cuales son sugeridas para abarcar la mayor cantidad de realizaciones de la distribución de probabilidad indicada.

Para finalizar, se analizan las estadísticas de la simulación sobre los valores de Q y se determina el intervalo de confianza para el lote económico de acuerdo con dichas estadísticas. Definiendo a Q* como el valor promedio a donde converge Q de acuerdo a las 1000 iteraciones de simulación y asignando como límite inferior del intervalo a Q* - 2σ, y como límite superior del intervalo a Q* + 2σ. Donde *sigma* es la desviación estándar de la corrida de simulación sobre Q. Así, obtenemos como intervalo de confianza para el lote económico: (Q* - 2σ, Q* + 2σ).

El intervalo de confianza anteriormente descrito se construye con base en el teorema central del límite[3]; debido a que puede argumentarse que $\overline{X} \rightarrow \mathrm{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$,

[3]Vid. Apéndice A teorema A.2.1

conforme n $\to \infty$; de tal manera que la probabilidad de que $\overline{X}$ se encuentre dentro de dos desviaciones estándar alrededor de μ, es de aproximadamente, 0.95. En otras palabras, para n grande,

$$P\Big(|\overline{X} - \mu| < 2 * \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Big) \quad = \quad 0.95$$

de tal forma que

$$\begin{aligned} P\Big(-2 * \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \overline{X} - \mu < 2 * \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Big) &= 0.95 \\ P\Big(\overline{X} - 2 * \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + 2 * \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Big) &= 0.95 \end{aligned}$$

Lo que sugiere que el lote óptimo sea tan grande como el límite superior o tan pequeño como el límite inferior a un 95% de confianza, es decir, como $\overline{X}$ es una variable aleatoria, el intervalo propuesto es un intervalo aleatorio, y la probabilidad de que este intervalo contenga el valor verdadero del lote óptimo es de 0.95. En otras palabras, si se obtuviesen varias corridas del modelo (o mejor dicho, muestras del mismo tamaño en forma repetida de la población), y cada vez que éstas se seleccionan se calculan los valores específicos para el intervalo aleatorio; entonces debe esperarse que un 95% de estos intervalos contengan el valor del lote económico.

Por lo tanto, para el ejemplo aquí mostrado el intervalo de confianza para el lote óptimo es: (8.31,16.87).

En el capítulo siguiente se describe un caso práctico en el cual se emplea la metodología aquí mostrada; aplicada mediante una herramienta desarrollada con Microsoft Excel y Visual Basic.

Capítulo 4

Caso de estudio

Capítulo 4

En el presente capítulo, se abordan dos temas en relación a un caso práctico para el modelo de inventario expuesto en éste trabajo. La primer sección describe una herramienta elaborada para ésta tesis, cuyo desarrollo se llevó acabo mediante *Microsoft Excel* y *Visual Basic*, en donde se automatizó el modelo de simulación que involucra el modelo de inventario con costo por ordenar y déficit. La segunda sección, consiste en el planteamiento y análisis de un caso práctico cuyo contexto se sitúa en el mercado mexicano de gas natural, en donde una de las principlaes problemáticas que vive Pemex-Gas se ve representada por un déficit de gas natural que ha persistido durante varios años, el cual se podría disminuir vía almacenamiento. Así, al inclinarse por la alternativa de almacenar el gas natural, resulta primordial conocer los niveles adecuados de inventario para minimizar los costos asociados a la inversión y operación. A continuación se desarrolla el contenido del presente capítulo, comenzando por la automatización del sistema Inventario.

4.1 Descripción del Sistema Inventario.xls

Como parte de este trabajo se ha desarrollado una aplicación llamada *Inventario.xls* la cual efectúa el procedimiento mencionado en el capítulo anterior, tomando como elementos de entrada los valores requeridos por el modelo de inventario, de donde se sigue a realizar las simulaciones sobre dicho modelo, seleccionando una de las siguientes opciones para determinar la distribución de la demanda:

1. Distribución Normal;

2. Distribución Uniforme;

3. Distribución Triangular.

En la imagen 4.1 se muestra la pantalla de inicio de *Inventario.xls*, donde el usuario debe seleccionar el botón de *correr* para tener acceso al modelo de simulación. Como opción adicional, el usuario puede oprimir el botón de “limpiar”, con el cual se quitan los valores provenientes de una corrida previa.

Imagen 4.1: Inicio de la aplicación para simular el modelo de inventario.

En la imagen 4.2, aparece la pantalla de opciones donde el usuario debe introducir los parámetros para el modelo de inventario.

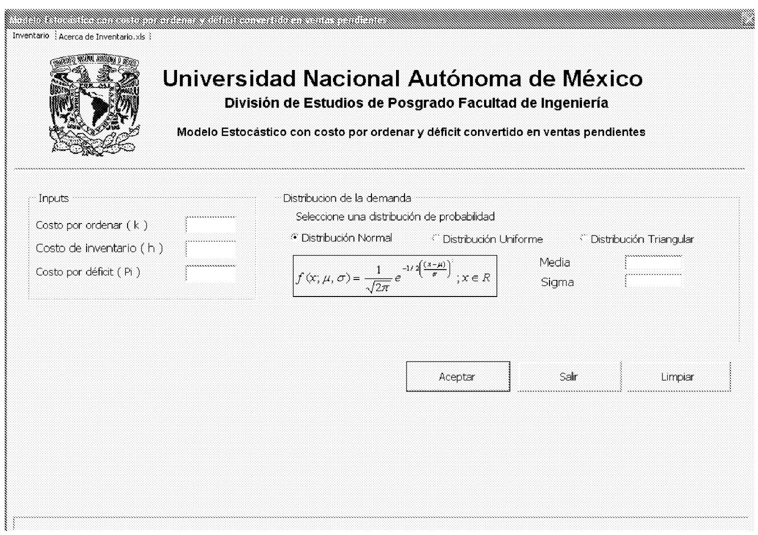


Imagen 4.2: Pantalla de opciones y parámetros del modelo de simulación.

Posteriormente, el usuario debe seleccionar la distribución de la demanda bajo la cual correrá el modelo de simulación, especificando los parámetros para tal opción.

Imagen 4.3: Menú seleccionado para correr una simulación con la distribución normal de la demanda dados los parámetros de entrada del modelo de inventario.

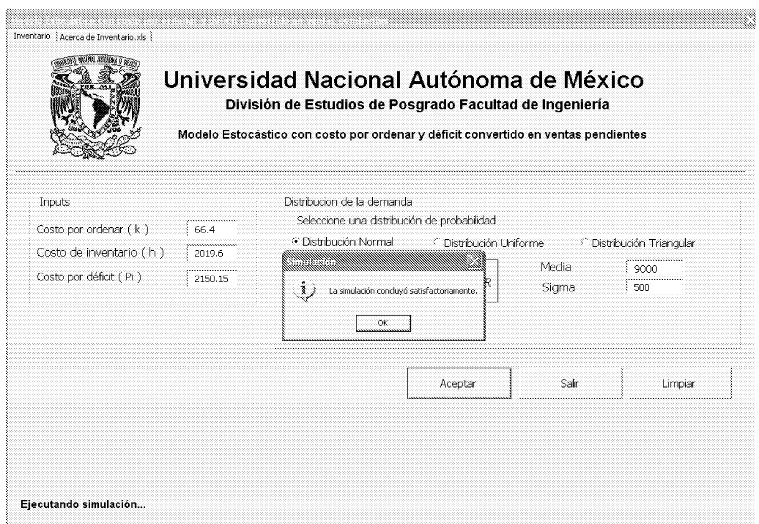


Imagen 4.4: Aviso de simulación concluida.

Una vez introducidos los valores de interés, el usuario debe presionar el botón de "Aceptar" para que se realicen las 1000 iteraciones del modelo, donde al concluir dichas iteraciones se muestra un aviso con la leyenda "La simulación concluyó satisfactoriamente".

Cuando el usuario aprieta el botón de "OK", aparece la pantalla de inicio con los resultados provenientes de las 1000 iteraciones, de tal modo que se determina el valor de Q y S, y se muestran las estadísticas de la simulación para el lote económico, así como el intervalo de confianza para el mismo.

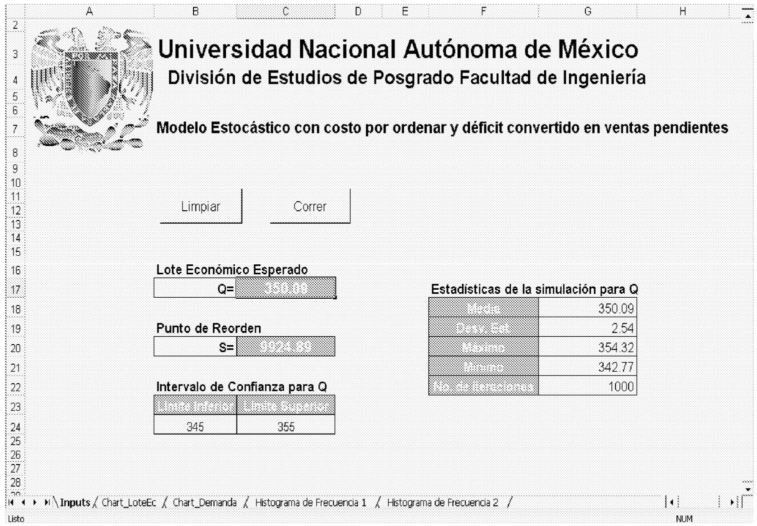


Imagen 4.5: Resultados de la simulación.

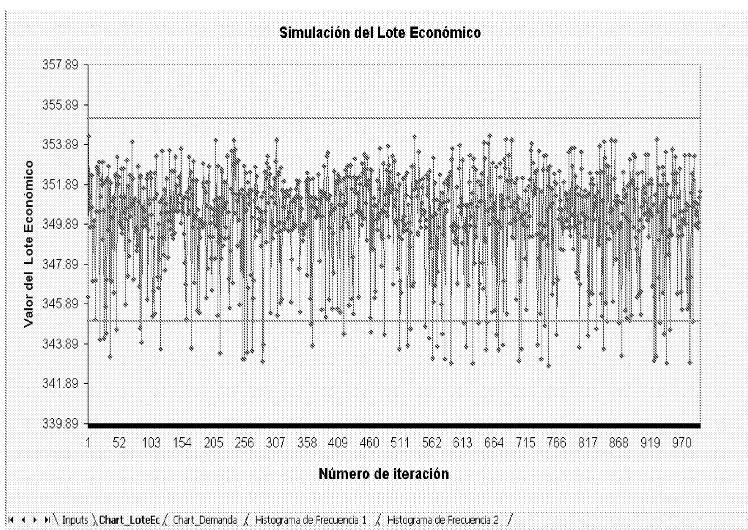


Imagen 4.6: Dispersión de los valores simulados para el lote económico.

Adicionalmente, la aplicación muestra los gráficos de dispersión asociados a los 1000 valores simulados para la demanda y el lote económico. Para el gráfico del lote económico se incluyen las bandas del intervalo de confianza.

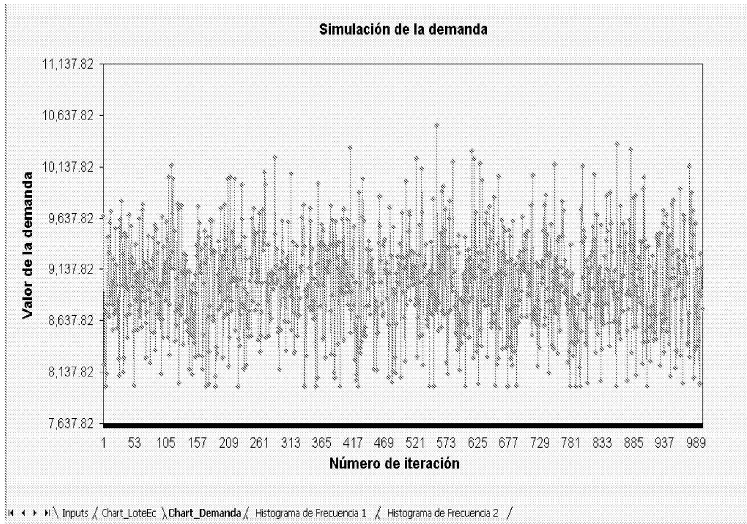


Imagen 4.7: Dispersión de los valores simulados para la demanda.

Por último, la aplicación construye dos Histogramas de frecuencia para los datos simulados del Lote Económico.

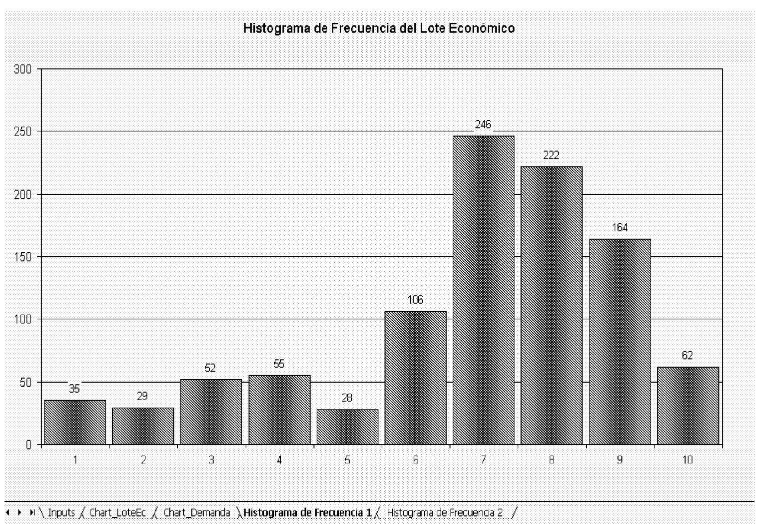


Imagen 4.8: Histograma de frecuencia del Lote Económico.

Primero, se considera la agrupación de los datos en un Histograma con diez intervalos, el cual se puede comparar con un segundo Histograma que se construye utilizando quince intervalos para su elaboración.

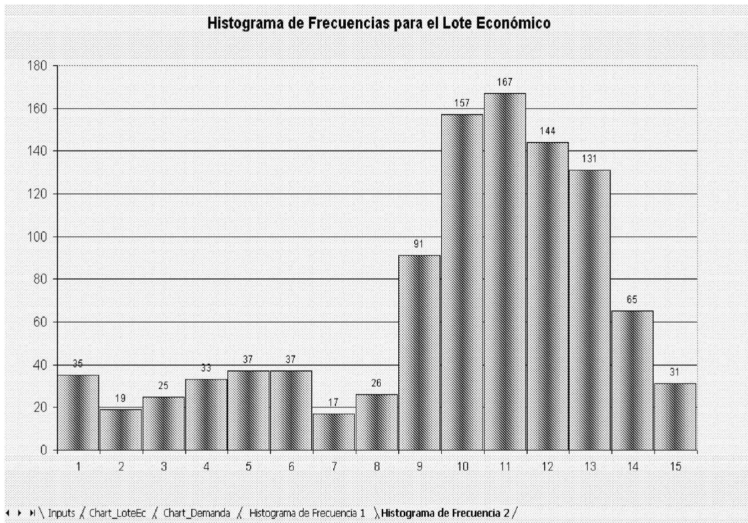


Imagen 4.9: Histograma de frecuencia del Lote Económico.

4.2 Análisis para el Almacenamiento de Gas Natural

Como se mencionó al principio del presente capítulo, el caso práctico se realiza en el contexto del mercado mexicano de gas natural, tomando en cuenta que dicho mercado ha experimentado un déficit constante a través de los últimos años, tal situación ha llevado a *Pemex-Gas* a elevar sus costos de suministro en la parte norte del país. Lo anterior, debido al hecho de que para abastecer la demanda diaria del norte y mantener el sistema nacional de gasoductos en condiciones estables de operación, *Pemex-Gas* se ha visto en la necesidad de importar cantidades aproximadamente iguales a la octava parte de la producción diaria del país. Las importaciones de gas natural realizadas son provenientes de los Estados Unidos de Norte América, específicamente del sur de Texas, lo que involucra un costo por importación, representado por la tarifa de transporte de los Estados Unidos a México a través de los diversos gasoductos, sin dejar de lado el incremento en el precio de la molécula. Estos sobre costos que absorve *Pemex-Gas* anualmente, representan una cantidad considerable que podría ser evitada utilizando la alternativa del Almacenamiento de Gas Natural, lo cual nos lleva a encontrar el nivel adecuado de capacidad y su dinámica de operación para minimizar sus costos.

Alcance del Análisis

El objetivo del siguiente análisis se enfoca en determinar el punto de reórden y el intervalo de confianza para el lote económico asociado al inventario de gas natural necesario para cubrir el défit. El hecho de cubrir el défcit de gas natural requiere de inventarios físicos, lo que conlleva a implementar *almacenamiento de gas natural*, el cual no existe hoy en día en el mercado mexicano de gas natural. Es importante destacar que el presente trabajo no pretende desarrollar un estudio completo para evaluar un proyecto de almacenamiento, sino calcular algunos de los principales elementos a considerar para dicha evaluación. Con el modelo propuesto a lo largo de este trabajo se puede dimencionar la infraestructura requerida así como la dinámica bajo la cual se debe hacer el reabastecimiento del almacenamiento, lo cual proporciona los cimientos para arrancar un estudio más completo. Los estudios vinculados con la evaluación del proyecto de almacenamiento deben incluir: 1) el estudio financiero, con el cual se debe cuantificar el monto de las inversiones y determinar las fuentes de financiamiento, así como la rentabilidad del proyecto; y 2) el estudio de factibilidad operativa, con el que se debe determinar la infraestructura necesaria para la adecuada operación del almacenamiento, así como la selección del lugar más adecuado para situar el almacenamiento, en función de la demanda diaria y de las condiciones del Sistema Nacional de Gasoductos; estas últimas consideraciones van en relación a que en la práctica común, el almacenamiento de gas natural se lleva acabo en cavernas que permiten guardar cantidades significativamente grandes del energético.

Como parte del análisis realizado en esta sección, se describirán varios conceptos que ayudarán a entender el mercado mexicano de gas natural,[1] y se analizará un balance de gas natural con la finalidad de determinar el déficit.

4.2.1 Descripción del mercado de gas natural

En primera instancia se definirá qué es el *gas natural* y se describirán algunas de sus características.

Gas natural

El gas natural es una mezcla gaseosa en condiciones normales de presión y temperatura. No tiene olor ni color, y por lo general se encuentra en forma natural mezclado con otros hidrocarburos fósiles. Al momento de su extracción, el gas natural con-

[1]Fuente PEMEX GAS, www.gas.pemex.com

tiene impurezas como agua, ácido sulfhídrico, dióxido de carbono y nitrógeno, que tienen que ser removidas antes de su transporte y comercialización.

Típicamente el gas natural comercial está compuesto en un 95% o más de metano y el 5% restante de una mezcla de etano, propano y otros componentes más pesados. Como medida de seguridad, en la regulación se estipula que los distribuidores deberán adicionar un odorizante al gas natural para que se pueda percibir su presencia en caso de posibles fugas durante su manejo y distribución al consumidor final.

Productos y Servicios

En sus centros procesadores *Pemex Gas y Petroquímica Básica* (*Pemex Gas*) produce gas seco (mejor conocido como gas natural), gas licuado, etano, azufre y gasolinas naturales. La producción de algunos de ellos es apoyada por las refinerías, que son parte de la estructura de Pemex Refinación.

La cadena industrial de Pemex Gas consiste en tres procesos básicos:

- Endulzamiento: se eliminan gases ácidos y se recupera azufre que posteriormente se coloca en el mercado nacional e internacional.
- Recuperación de licuables vía plantas criogénicas: se producen gas seco e hidrocarburos líquidos.
- Fraccionamiento de hidrocarburos: de la corriente de hidrocarburos líquidos proveniente de las plantas criogénicas se separan el etano, el gas licuado y las gasolinas naturales.

Asimismo en la imágen 4.10 se puede apreciar la cadena de valor del gas natural en México, la cual considera (1) la Exploración y Producción (realizada por PEP, Pemex Exploración y Producción), (2) Procesamiento, (3) Transporte, (4) Comercialización y (5) Distribución a usuarios finales.

Los productos de Pemex Gas se transportan a sus centros de consumo principalmente a través de ductos, barcos, autotanques y carrotanques.

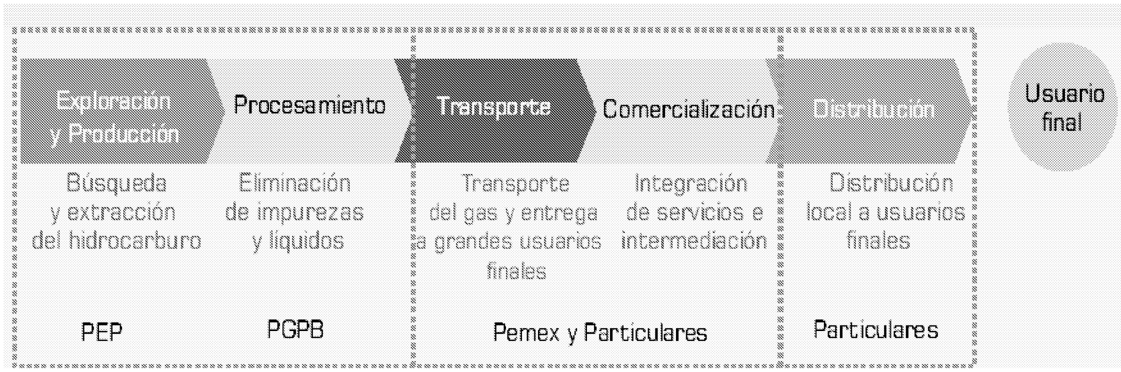


Imagen 4.10: Cadena de Valor del Gas Natural en México.

Transporte de Gas Natural

El Sistema Nacional de Gasoductos (SNG) pasa por 18 estados de la República. Inicia en Chiapas y pasa por Veracruz y Tabasco hasta Tamaulipas con líneas de 24, 36 y 48 pulgadas de diámetro; posteriormente se prolonga por los estados de Nuevo León, Coahuila, Durango y Chihuahua, con líneas de 24 y 36 pulgadas de diámetro. Existen tres líneas importantes de 18, 24 y 36 pulgadas que recorren el centro del país pasando por los estados de Veracruz, Puebla, Tlaxcala, Hidalgo, México, Querétaro, Guanajuato, San Luis Potosí, Michoacán y Jalisco.

En Naco, Sonora, inicia un ducto de 327 kilómetros de longitud para la importación de gas natural, de los Estados Unidos de América a Hermosillo. La extensión total del SNG es de 9,031 km y cuenta con 8 estaciones de compresión; 3 en el sur del sistema en el área de Cárdenas y Minatitlán, una en Valtierrilla, Guanajuato, y 4 en la parte norte en los estados de Tamaulipas y Nuevo León.

El SNG cuenta con puntos de inyección de gas natural de origen nacional y puntos de conexión internacional. A través de estos últimos se pueden realizar operaciones de importación o exportación con los Estados Unidos.

A partir de la aplicación del acceso abierto, el servicio de transporte se puede dar en forma independiente a través de un contrato, en el que Pemex Gas se compromete a recibir, conducir y entregar el gas natural a cambio de una tarifa por el transporte. El servicio de transporte consiste en la conducción del gas natural a través de gasoductos desde las plantas de proceso, puntos de inyección internacionales y desde puntos de interconexión con otros sistemas hasta los puntos de consumo si éstos se encuentran fuera de zonas geográficas de distribución, y hasta los puntos de entrega ("city gates") en el caso de que los puntos de consumo estén dentro de las zonas de distribución; y también eventualmente a puntos de interconexión con otros sistemas de transporte.

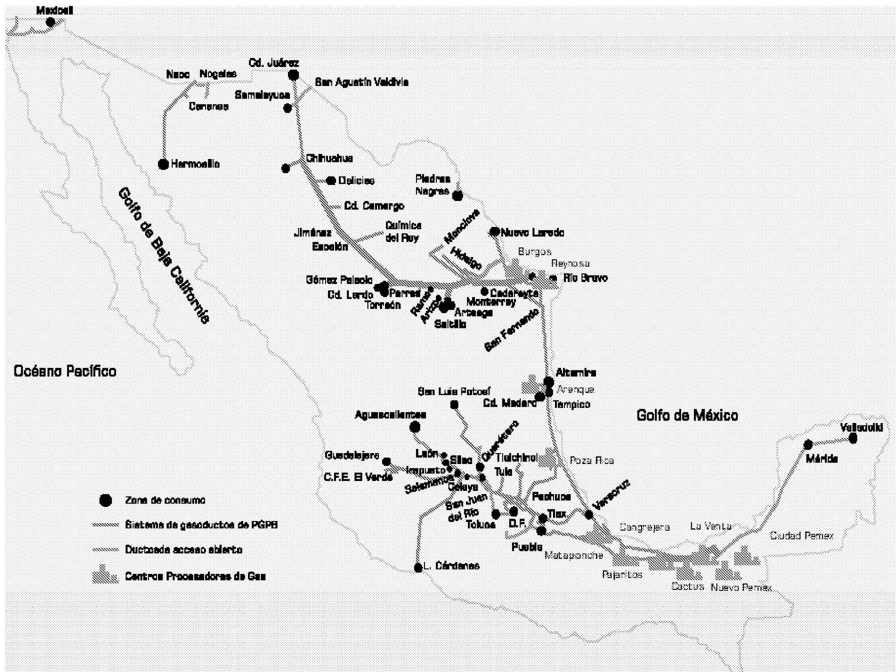


Imagen 4.11: Sistema Nacional de Gasoductos.

Las dos modalidades más comunes en el servicio de transporte que ofrece Pemex Gas y utilizadas en la práctica internacional son: Base Firme e Interrumpible.

- Servicio de Transporte en Base Firme: bajo esta modalidad el usuario debe realizar la reservación de capacidad necesaria para cubrir sus requerimientos de gas. Pemex Gas, por su parte, se compromete a no realizar interrupciones en la conducción hasta por dicha cantidad reservada. El usuario tiene el derecho de utilizar el total de la capacidad reservada durante el periodo definido en el contrato; generalmente se contratan periodos anuales. El servicio en base firme se ofrece hasta que se agota por completo la capacidad de los ductos en el SNG, en cuyo caso los usuarios pueden optar por el servicio interrumpible o acudir al mercado secundario de capacidad.
- Servicio de Transporte en Base Interrumpible: en este servicio se realiza la conducción del gas siempre que exista una diferencia entre la capacidad reservada

por todos los usuarios y la que realmente utilicen en un periodo determinado, por lo que, si se requiere, el suministro puede ser interrumpido para dar prioridad a los contratos de servicio en base firme. El servicio también puede ser interrumpido a petición del usuario en caso de no requerir el transporte del energético.

A continuación se introducirán dos conceptos de gran importancia en términos de transporte de gas natural.

Empaque

El concepto de empaque es uno de los elementos de gran importancia que está en relación con el transporte de gas natural, debido a que involucra la estabilidad del sistema nacional de gasoductos. El empaque consiste en gas que permanece dentro del sistema nacional de gasoductos cuya finalidad es mantener las condiciones de presión para que el transporte de gas pueda realizarse de forma segura; de tal forma que el gas utilizado para empaque debe permanecer entre un límite inferior y un límite superior llamados comunmente "bandas de empaque".

Desbalance

El desbalance consiste en la medición realizada como la diferencia entre la inyección y la extracción determinada para un cliente, es decir, una vez que el transportista realiza la entrega del gas natural en la planta de proceso del cliente este último puede tomar del ducto una cantidad de gas natural mayor o menor a la estipulada en el contrato; situación por la cual se realiza un *desbalance* en el ducto. Un desbalance repercute en cambios en el empaque, lo cual puede afectar las condiciones operativas para mantaner los niveles correctos de presión en el gasoducto, de lo anterior se desprende que en la práctica común se tengan penalizaciones por desbalance, aplicandose tanto a los clientes como a los transportistas encargados de entregar el gas natural.

4.2.2 Almacenamiento de gas natural

El gas natural, como la mayoría de los productos, puede ser almacenado por un periodo de tiempo indefinido. La exploración, producción, y transportación de gas natural toma tiempo, y el gas natural que alcanza su destino no es siempre necesitado inmediatamente, así que es inyectado dentro de instalaciones de almacenaje subterráneo. Estas instalaciones de almacenaje pueden ser localizadas cerca de centros de mercado que no tienen una oferta lista de gas natural producido localmente.

Tradicionalmente, el gas natural ha sido un combustible de estación, es decir, que la demanda de gas natural es usualmente más alta durante el invierno, particularmente porque es usado para la calefacción residencial y de comercios, aunque este hecho es más marcado en el mercado estadounidense. El almacenamiento de gas natural juega un papel vital en garantizar que algún exceso de oferta efectuado durante los meses de verano está disponible para la creciente demanda de los meses de invierno. Sin embargo, con la reciente tendencia hacia la generación eléctrica con gas natural, la demanda de gas natural durante los meses de verano está incrementándose ahora (debido a la demanda para electricidad, aire acondicionado entre otros). El almacenamiento de gas natural también sirve como seguro contra un accidente imprevisto, desastres naturales, u otras ocurrencias que pueden afectar la producción o entrega de gas natural.

El almacenamiento de gas natural juega un papel importante dentro del mantenimiento de la fiabilidad de la oferta necesaria para mantener la demanda de los clientes. Ahora, además de servir para estos proaósitos, el almacenamiento de gas natural puede ser usado para razones comerciales, por ejemplo, almacenando gas cuando los precios son bajos, y sacándolo para consumirlo o venderlo cuando los precios son altos.

Carga Base vs Carga Pico

Hay básicamente dos usos para las instalaciones de almacenamiento de gas natural: los requerimientos en carga base y los requerimientos en carga pico. En el mercado estadounidense el almacenamiento de gas natural es requerido por dos razones: abastecer los requerimientos de la demanda por estación, y como un seguro contra interrupciones imprevistas de la demanda. La capacidad de almacenamiento en carga baja es usada para hacer frente a los incrementos en la demanda. Las instalaciones de carga base son capaces de mantener suficiente gas natural para satisfacer los requerimientos de la demanda estacional de largo plazo. Típicamente, la tasa de entrega para el gas natural con estos medios es de un año, el gas natural es generalmente inyectado durante el verano (conocido como "non-heating season"en el mercado estadounidense), la cual abarca del mes de abril hasta el mes de octubre, y la extracción ocurre durante el invierno (heating season), que abarca del mes de noviembre al mes de marzo. Estas reservas son grandes, pero su tasa entrega es relativamente baja, lo cual significa que el gas natural que puede ser extraído cada día es limitado. En cambio, esta modalidad provee una prolongada y segura oferta de gas natural. Las reservas de gas agotadas son el tipo más común de instalación para el almacenamiento en carga base.

Las modalidades de almacenamiento en carga pico, por otro lado, son diseñadas para tener un alta capacidad de entrega en periodos cortos de tiempo, esto significa que el gas natural puede ser extraído rápidamente del almacenamiento. Las modalidades en carga pico son pensadas para enfrentarse repentinamente a incrementos de la demanda en el corto plazo. Estas modalidades no pueden retener tanto gas natural como las modalidades de carga base, sin embargo, pueden entregar cantidades pequeñas de gas natural más rápido, y también pueden ser llenadas en un periodo de tiempo más corto que en las modalidades en carga base. Mientras las modalidades en carga base tienen un largo periodo de inyección y extracciones estacionales, la entrega del gas natural en dicha modalidad es alrededor de una vez al año, y las modalidades de carga pico pueden tener una frecuencia de extracción tan corta como unos pocos días o semanas. Las cavernas salinas son los lugares más comunes para las modalidades en carga pico, aunque los acuíferos pueden ser también usados para hacer frente a estas demandas.

El gas natural es usualmente almacenado bajo tierra en grandes reservas de almacenamiento. Hay tres tipos de almacenamiento subterráneo: reservas de gas agotadas, acuíferas y cavernas de sal. Además de almacenamiento subterráneo, el gas natural puede ser almacenado como gas natural licuado (GNL). El GNL permite al gas ser transportado y almacenado en forma líquida, esto significa que ocupa mucho menos espacio que en estado gaseoso.

Tipos de almacenamiento subterráneo

Los centros de almacenamiento subterráneo de gas natural se desarrollaron poco después de la segunda guerra mundial. Al mismo tiempo la industria del gas natural notó que el incremento en la demanda estacional no podía factiblemente ser enfrentada por solamente entrega vía gasoducto. Para enfrentarse a la creciente demanda estacional, las entregas vía gasoducto tuvieron que incrementarse drásticamente, así como las dimensiones de los mismos. Sin embargo, la tecnología requerida para construir tales gasoductos para el consumo de las regiones fue en ese tiempo impractica e inalcanzable. Para ser capaces de hacer frente a la creciente demanda estacional, los centros de almacenamiento subterráneos fueron la única opción.

Como se ha mencionado hay tres tipos de almacenamiento subterráneo. Esencialmente, cualquier modalidad de almacenamiento es reacondicionada antes de la inyección, para crear un tipo de vasija subterránea. El gas natural es inyectado dentro de la estructura, creando presión tanto más gas natural es añadido. En este sentido, la estructura subterránea llega a ser un tipo de contenedor de gas presurizado. Como con los nuevos pozos perforados, la alta presión en la instalación de almacenamiento debe ser controlada debido a la readmisión de gas, por lo que el gas excedente debe ser extraído. Una vez que la presión desciende en la entrada del pozo no hay diferencial de presión que empuje el gas natural a la salida de la instalación de almacenamiento. Esto significa que, en cualquier instalación de almacenamiento hay una cierta cantidad que nunca debe ser extraída. Esto es conocido como gas físicamente irrecuperable; es decir que esta permanentemente integrado en la estructura.

Además de este gas físicamente irrecuperable, las instalaciones de almacenamiento subterráneas contienen un gas de soporte el cual es llamado "gas base". Esto es el volumen de gas que debe permanecer en la instalación de almacenamiento para proveer la presurización requerida para extraer el gas restante. En la operación normal, este gas de soporte queda oculto, sin embargo una porción de él debe ser extraído en la entrada usando un equipo de compresión especializado.

El gas de trabajo es el volumen de gas natural en la reserva de almacenamiento que puede ser extraído durante la operación normal de la instalación de almacenamiento. Este es el gas natural que está siendo almacenado y extraído; la capacidad de la instalación de almacenamiento es normalmente referido a su capacidad del gas de trabajo. Al principio del ciclo de extracción, la presión interna en la instalación de almacenamiento está a su máximo. Lo cual significa que el gas de trabajo puede ser extraído a una periodicidad alta. Como el volumen de gas dentro de la instalación de almacenamiento baja, la presión en la instalación de almacenamiento también disminuye. Periódicamente, los operadores de la instalación de almacenamiento deben reclasificar las porciones de gas de trabajo y de gas base después de evaluar la operación de sus instalaciones.

Reservas de gas agotadas

La más prominente y común forma de almacenamiento subterráneo consiste de reservas de gas agotadas. Las reservas agotadas son formaciones que han sido ya explotadas de todo su gas natural extraíble, esto deja una formación subterránea, geológicamente capaz de mantener gas natural. Además, usando una reserva de gas ya agotada para proaósitos de almacenaje, permite el uso del equipo de extracción y distribución dejado de cuando el campo era productivo. Al tener una red de extracción en la zona, reduce los costos de convertir a una reserva agotada en una instalación de almacenamiento. Las reservas agotadas son atractivas también porque sus características geológicas son ya bien conocidas. De los tres tipos de almacenamiento subterráneo, reservas agotadas es en promedio la más barata y fácil de desarrollar, operar y mantener.

Los factores que determinan cuando una reserva agotada puede o no utilizarse convenientemente como una instalación de almacenamiento, son el factor Geográfico y el factor geológico. Geográficamente, una reserva agotada debe estar relativamente más cerca de regiones de consumo. Y geológicamente, las formaciones de la reserva agotada deben tener una alta permeabilidad y porosidad. La porosidad de la formación determina la cantidad de gas natural que puede retener, mientras que su permeabilidad determina la velocidad de inyección y extracción a la cual los flujos de gas natural son arrojados de la formación, lo que a su vez determina la tasa de inyección y extracción del gas de trabajo. Bajo esta modalidad de almacenamiento cerca del 50% del gas natural en la formación debe ser mantenido como gas base.

Acuíferos

Los acuíferos son subsuelos porosos, formaciones de roca permeable que actúan como reservas de agua natural. Sin embargo, en ciertas situaciones, estas formaciones contienen agua y deben ser reacondicionadas para utilizarse como una instalación de almacenaje de gas natural. Como los acuíferos son más caros para adecuarse que las reservas agotas, estos tipos de instalaciones de almacenamiento son usualmente usadas solamente en áreas donde no hay cerca reservas agotadas. Tradicionalmente, estas instalaciones son operadas solo en el periodo de extracción de invierno (tomando de referencia el mercado estadounidense), aunque son utilizados también para hacer frente a los requerimientos de carga pico.

Los acuíferos son lo menos deseable y el más caro tipo de instalación de almacenamiento de gas natural por un buen número de razones. Primero, las características geológicas de las formaciones acuíferas no son tan conocidas a fondo como con las reservas agotadas. Esto significa que una cantidad de tiempo y dinero se utilizan para descubrir las características geológicas de un acuífero, y determinar su conveniencia como instalación de almacenaje. Pruebas sísmicas deben ser efectuadas tal como son hechas para la exploración de yacimientos potenciales de gas natural. El área de la formación, la composición y porosidad de la misma formación, así como la presión existente en la formación, deben ser descubiertas antes de cualquier desarrollo. Además, la capacidad de la reserva es desconocida y debe ser solamente determinada una vez que la formación es más desarrollada.

Por orden para desarrollar un acuífero natural en una efectiva instalación de almacenamiento, toda la infraestructura asociada debe ser también desarrollada. Esto incluye la instalación del pozo, equipo de extracción, gasoductos, instalaciones de deshidratación, y equipo de compresión. Ya que los acuíferos están naturalmente llenos de agua; en algunas instancias un equipo potente inyección debe ser usado para permitir suficiente presión de inyección que empuje el agua residente y se reemplace con gas natural. En las formaciones acuíferas, los requerimientos de gas base pueden ser altos tanto como un 80% del total del volumen del gas.

Cavernas de sal

Las formaciones subterráneas de sal ofrecen otra opción para el almacenaje de gas natural. Estas formaciones son bien ajustadas para almacenamiento de gas natural mediante cavernas de sal, una vez formadas estás permiten que poca inyección del gas natural se escape de la formación a menos que específicamente se extraiga. Los muros de una caverna de sal también tienen una estructura dura como el acero, la cual las hace muy resistentes contra la degradación de la reserva sobre la vida de la instalación de almacenamiento.

Esencialmente, las cavernas de sal están formadas de depósitos de sal existentes. Estos depósitos de sal subterráneos existen en dos posibles formas: domos de sal y capas salinas. Los domos salinos son formaciones espesas creadas de depósitos de sal natural que pasado el tiempo tiran demasiadas capas sedimentarias para formar una estructura grande tipo domo. Estos domos pueden ser tan grandes como una milla de diámetro y 30,000 pies de alto. Típicamente, los domos de sal usados para almacenamiento de gas natural están entre los 6,000 y 1,500 pies debajo de la superficie, aunque en ciertas circunstancias pueden estar mucho más cerca de la superficie. Las capas salinas son básicamente formaciones delgadas, que usualmente no son de más de 1,000 pies de alto. Dado que las capas salinas son formaciones delgadas y extensas, una vez que una caverna de sal es introducida, esta es más propensa al deterioro y es más caro desarrollarla que un domo salino. Sin embargo, una vez creada, una caverna de sal ofrece un buen almacenamiento de gas natural con una alta capacidad de entrega. Además, los requerimientos de gas base son los más bajos de los tres tipos de almacenamiento, ya que con las cavernas de sal solamente se requiere el 33 por ciento del total de la capacidad del gas para ser usado como gas base.

Las cavernas de sal no pueden mantener el volumen de gas necesario para enfrentar los requerimientos de un almacenamiento en carga base, sin embargo, capacidad de entrega de las cavernas de sal es típicamente más grande que los acuíferos o las reservas agotadas. Otra característica de las cavernas de sal es que son llenadas más rápidamente que otros tipos de instalaciones de almacenamiento.

Como marco de referencia, se presenta una tabla con los principales paises que tienen una capacidad considerable de almacenamiento de gas natural a 2005, expresando las unidades en Millones de Pies Cúbicos Diarios (Mpcd).[2]

[2]Fuente: Natural Gas Information, International Energy Agency.

Tabla 4.1 **Capacidad Mundial de Almacenamiento de Gas Natural a 2005**

País	Gas disponible (Mpcd)	Producción máxima (Mpcd)	Gas disponible por tipo de almacenamiento			
			Yacimientos agotados	Acuíferos	Domos salinos	Otros
Estados Unidos	4,029.9	82,816	87.0	9.2	3.8	-
Alemania	668.6	16,420	56.8	7.9	33.4	1.9
Canadá	622.5	10,421	59.4	-	0.6	40.0
Italia	451.7	10,457	100.0	-	-	-
Francia	381.4	6,685	-	92.2	7.8	-
Reino Unido	132.7	4,206	73.3	-	12.2	14.5
Rumania	126.8	848	100.0	-	-	-
Hungria	120.1	1,677	100.0	-	-	-
Austria	99.6	1,119	100.0	-	-	-
Eslovaquia	96.8	1,180	100.0	-	-	-
Holanda	87.5	6,039	96.9	-	-	3.1
España	83.6	441	100.0	-	-	-
República Checa	80.7	1,603	91.0	6.6	-	2.4
Polinia	63.4	780	76.9	-	23.1	-
Turqu'ıa	56.5	530	100.0	-	-	-
Australia	46.2	713	98.7	-	-	1.3
Dinamarca	28.6	473	-	45.1	54.9	-
Bélgica	23.1	763	-	91.6	-	8.4
Croacia	19.4	177	100.0	-	-	-
Bulgaria	14.5	117	100.0	-	-	-
Total	**7,234**	**147,465**	**77**	**12.6**	**6.8**	**3.6**

Enseguida, con la finalidad de entender la necesidad del estudio de almacenamiento, se dará un panorama general de la situación de comercio exterior de PGPB, ya que existen dos razones principales por las que existe dicho comercio exterior. La primer razón es debido a que el déficit de gas natural que se ha presentado a lo largo de varios años se abastece principalmente mediante las importaciones provenientes del sur de Texas y la segunda razón, es debido a que para mantener las condiciones necesarias de operación y específicamente de presión en los gasoductos, se requiere hacer importaciones o exportaciones de gas natural dependiendo de si los gasoductos están con baja o alta presión respectivamente.

4.2.3 Comercio Exterior

Como se mencionó previamente, en materia de gas natural México tiene una cercana relación con Estados Unidos debido a que las operaciones que se realizan en los diversos mercados de la zona fronteriza ayudan a abastecer la demanda total de gas natural para ciertas regiones, como sucede en el noroeste del país en las zonas de Mexicali y Naco, debido a que tales mercados no tienen conexión con el sistema nacional de gasoductos y su suministro requiere ser atendido por gas de importación. Los 15 puntos de interconexión con EU por los cuales se lleva acabo el comercio exterior se muestran en la imágen 4.12.

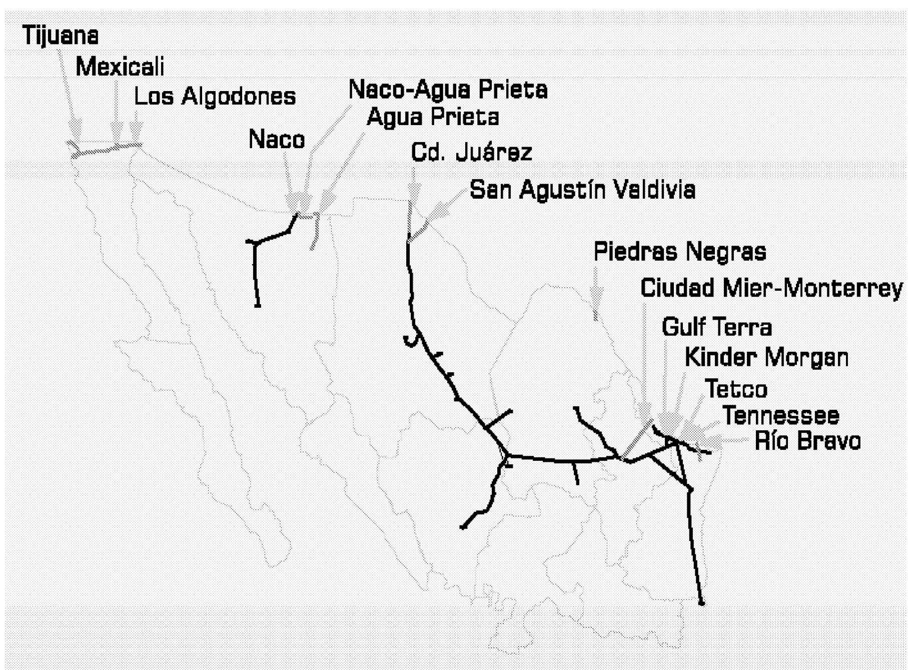


Imagen 4.12: Mapa de Interconexiones de gas natural con EU.

La capacidad máxima de transporte contratada para 2005 es de 3,419 mmpcd, tomado en cuenta las capacidades contratadas en base firme así como en base interrumpible en cada punto de interconexión, el detalle se puede ver en la tabla 4.2.[3]

Las exportaciones realizadas para el año 2005 fueron a través de los gasoductos Gulf Terra, Kinder Morgan, Tetco y Tennessee, que poseen la característica de ser utilizados de forma bidireccional y la capacidad conjunta de tales gasoductos permiten a Pemex exportar hasta 750 mmpcd de gas natural en el momento que los flujos de comercio exterior así se necesiten.

Punto de intercambio en México		Capacidad máxima (Mpcd)	
		Importación	Exportación
Total		**3,419**	**750**
1.	Tijuana, B.C.	300	-
2.	Mexicali, B.C.	29	-
3.	Los Algodones, B.C.	500	-
4.	Naco, Son.	130	-
5.	Naco-Agua Prieta, Son.	215	-
6.	Agua Prieta, Son.	85	-
7.	CD Juárez, Chih.	80	-
8.	San Agustín Valdivia, Chih.	312	-
9.	Piedras Negras, Coah.	38	-
10.	Ciudad Mier, Tamps.	425	-
11.	Argüelles (Gulf Terra), Tamps.	35	50
12.	Argüelles (Kinder Morgan), Tamps.	340	250
13.	Reynosa (Tetco), Tamps.	250	150
14.	Reynosa (Tennessee), Tamps.	350	300
15.	Reynosa (Río Bravo), Tamps.	330	-

Tabla 4.2 Capacidad de las Interconexiones de gas natural con EU

[3]Fuente: Prospectiva del Mercado de Gas Natural 2006-2015.

4.2.4 Balance de gas natural

Como parte del análisis se presenta el balance de gas natural para el periodo comprendido entre 2003 y 2005,[4] el cual nos permitirá entender el comportamiento del mercado de gas natural en los ultimos años para así poder determinar los cifras de interés en el estudio de almacenamiento.

De la tabla 4.3 se puede observar que para el año 2004 la producción nacional fué de 4,626 Mpcd y las importaciones totales corresponden a 1,124 Mpcd, de las cuales las importaciones de PGPB por balance [5] fueron del orden de 515 Mpcd. Por otra parte, la demanda nacional para el año 2004 fué de 5,722 Mpcd y la variación de inventarios y diferencias fué del orden de 27 Mpcd. Analogamente, para el año 2005 la producción nacional fué de 5,046 Mpcd y las importaciones totales corresponden a 905 Mpcd, de las cuales las importaciones de PGPB por balance fueron del orden de 249 Mpcd. La demanda nacional, para el año 2005 fué de 5,890 Mpcd; la exportación y la variación de inventarios y diferencias fué de 24 Mpcd y de 38 Mpcd respectivamente.

Concepto	2003	2004	2005
Origen	**5,322**	**5,750**	**5,952**
Producción nacional	4,326	4,626	5,046
Importación	995	1,124	905
Importaciones por logística	468	609	656
Importaciones de PGPB por balance	527	515	249
Destino	**5,287**	**5,722**	**5,914**
Demanda nacional	5,287	5,722	5,890
Exportación	-	-	24
Variación de inventarios y diferencias	35	27	38

Tabla 4.3 Balance nacional de gas natural, 2003-2005 (Mpcd)

Con tales cifras podemos observar que tanto la producción nacional como la demanda han crecido en ese periodo y que los ajustes vía importación han variado considerablemente, de tal manera que las importaciones por balance se han disminuido aproximadamente en un 52 % lo que es un cambio importante debido a que las perdidas por importación se ven disminuidas.

[4] Fuente: Prospectiva del Mercado de Gas Natural 2006-2015.

[5] Las importaciones por balance permiten equilibrar la oferta y la demanda de gas natural mediante las operaciones de comercio exterior.

Ahora, para poder determinar la distribución del déficit,[6] es necesario efectuar un análisis más detallado de las importaciones por balance y para ello se utilizarán las importaciones totales de PGPB.

Como el interés de este estudio se enfoca en analizar las importaciones que abastecen el déficit entre la oferta y la demanda, mejor conocidas como *Importaciones por Balance*, se procede a estimar dichas importaciones vía las importaciones Logísticas y para ello se cuantificaron las cantidades de gas natural que llegan los sistemas Naco, Ciudad Juárez, Piedras negras y Reynosa Río Bravo, de tal forma que al obtener el promedio de las cifras registradas para los añ 2004 y 2005 se concluye que el factor de ajuste, es decir, la cantidad de gas natural que hay que descontar a las importaciones totales PGPB para obtener las importaciones de balance corresponde a 232 Mpcd. Para obtener dicho factor de ajuste basta con efectuar las operaciones antes mencionadas con base en los datos de la tabla 4.4 considerando solamente las importaciones realizadas por PGPB.[7]

Para obtener las importaciones por balance se utilizó un horizonte de análisis de 24 meses, de tal forma que haciendo uso de la información proveniente del página de Pemex Gas [8] se construyó la tabla 4.5 que contiene las importaciones totales de PGPB expresadas en Mpcd con frecuencia mensual, así al restar el factor de ajuste a cada observación de la serie histórica, se obtiene la tabla 4.6 con las importaciones por balance estimadas para cada uno de los 24 meses que considera el análisis[9]. La razón por la que se consideraron solamente 24 observaciones de la serie histórica es debido a que el comportamiento del mercado de gas natural depende de varios factores económicos como lo son la oferta y la demanda del hidrocarburo, así como del precio de la molécula, por tal motivo un horizonte de dos años es adecuado y representativo para reflejar la evolución del mercado de gas natural.

Una vez que se cuenta con las importaciones por balance el paso siguiente es encontrar la distribución de probabilidad asociada a tales importaciones, las cuales representan el déficit de gas de PGPB, es decir, la demanda que se abastece mediante las operaciones de comercio exterior. En la siguiente sección se realiza el ajuste de dicha distribución de probabilidad para el déficit.

[6]Para efectos del modelo de inventario sería equivalente a determinar la demanda del producto.
[7]Fuente: Prospectiva del Mercado de Gas Natural 2006-2015.
[8]www.gas.pemex.com
[9]Fuente: www.gas.pemex.com

Tabla 4.4 **Comercio exterior de gas natural por punto de Interconexión de gas con EU**

	Punto de internación en México	Importadores	2004	2005
Total Importaciones			**1,124**	**905**
1.	Tijuana, B.C.	Sector eléctrico público	-	-
2.	Mexicali, B.C.	Particulares	11	11
3.	Los Algodones, B.C.		216	237
		Sector eléctrico público	115	113
		Particulares	89	117
4.	Naco, Son.		36	37
		PGPB	10	9
		Sector eéctrico público	26	28
5.	Naco-Agua Prieta, Son.	Sector eéctrico público	38	38
6.	Agua Prieta, Son.	Particulares	10	10
7.	CD Juárez, Chih.		201	191
		PGPB	170	170
		Sector eléctrico público	31	21
8.	Piedras Negras, Coah.		7	6
		PGPB	-	-
		Particulares	7	6

Tabla 4.4 **Comercio exterior de gas natural por punto de Interconexión de gas natural con EU(Continuación)**

	Punto de internación en México	Importadores	2004	2005
9.	Ciudad Mier, Tamps.	PGPB	172	102
10.	Argüelles (Gulf Terra), Tamps.	PGPB	2	-
11.	Argüelles (Kinder Morgan), Tamps.	PGPB	167	72
12.	Reynosa (Tetco), Tamps.	PGPB	2	-
13.	Reynosa (Tennessee), Tamps.	PGPB	172	75
14.	Reynosa (Río Bravo), Tamps.		92	125
		PGPB	59	45
		Sector eléctrico público	33	80
Total exportaciones			-	**24**
1.	Reynosa (SNG-PGPB)	PGPB	-	24

Periodo	MPCD	MPC
2005		
Abril	390	11,696
Mayo	470	14,584
Junio	637	19,097
Julio	494	15,322
Agosto	474	14,680
Septiembre	388	11,650
Octubre	348	10,784
Noviembre	263	7,884
Diciembre	241	7,462
2006		
Enero	277	8,590
Febrero	379	10,609
Marzo	451	13,969
Abril	429	12,873
Mayo	651	20,181
Junio	683	20,502
Julio	623	19,316
Agosto	522	16,173
Septiembre	333	9,993
Octubre	390	12,078
Noviembre	317	9,510
Diciembre	348	10,788
2007		
Enero	376	11,662
Febrero	314	8,784
Marzo	293	9,074

Tabla 4.5 Importación Total de PGPB

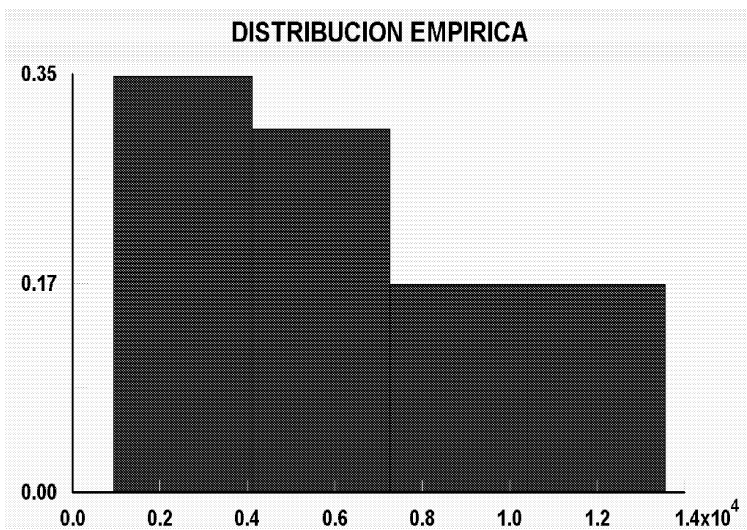
Periodo	MPCD	MPC
2005		
Abril	158	4,751
Mayo	239	7,408
Junio	405	12,152
Julio	263	8,145
Agosto	242	7,503
Septiembre	157	4,705
Octubre	116	3,607
Noviembre	31	939
Diciembre	9	286
2006		
Enero	46	1,414
Febrero	147	4,127
Marzo	219	6,792
Abril	198	5,928
Mayo	420	13,005
Junio	452	13,557
Julio	392	12,140
Agosto	290	8,996
Septiembre	102	3,048
Octubre	158	4,901
Noviembre	86	2,565
Diciembre	117	3,612
2007		
Enero	145	4,486
Febrero	82	2,302
Marzo	61	1,897

Tabla 4.6 Importaciones de Balance (estimadas)

4.2.5 Determinación del lote económico e intervalo de confianza para el inventario de gas natural

El primer paso para poder correr la aplicación de Inventario.xls es determinar la distribución de la demanda que se abastece por medio de las operaciones de comercio exterior, es decir, hay que obtener la distribución de probabilidad del déficit de gas natural. Para dicho ajuste, se considera la información a partir del mes de abril de 2005 al mes de marzo de 2007, lo cual proporciona 24 observaciones de la serie histórica.

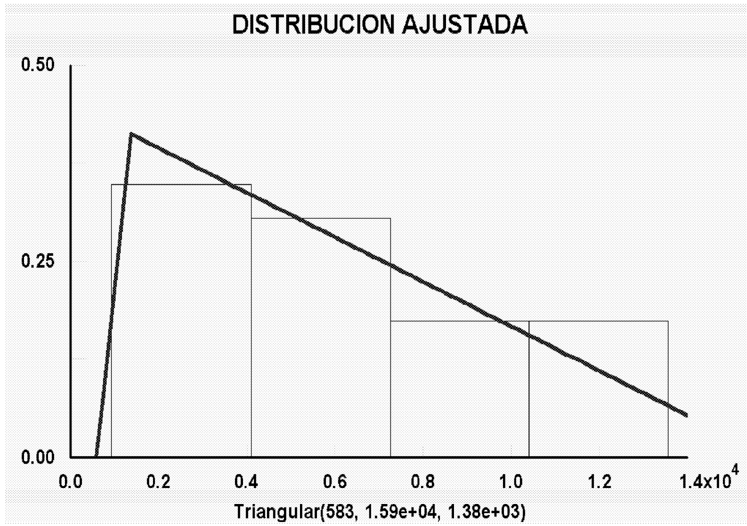
Para la determinación de la distribución se utilizó el programa *Promodel*[10] con el cual se obtuvo una función adecuada[11] para al comportamiento del déficit, por lo que la distribución T(583, 15900, 1380), denota una distribución triangular con valor mínimo 583 Mpcd, valor máximo 15,900 Mpcd y valor más probable de 1380 Mpcd de acuerdo a la notación proveniente del programa. La gráfica la distribución empírica del déficit y su ajuste a una distribución triangular se muestran a continuación.



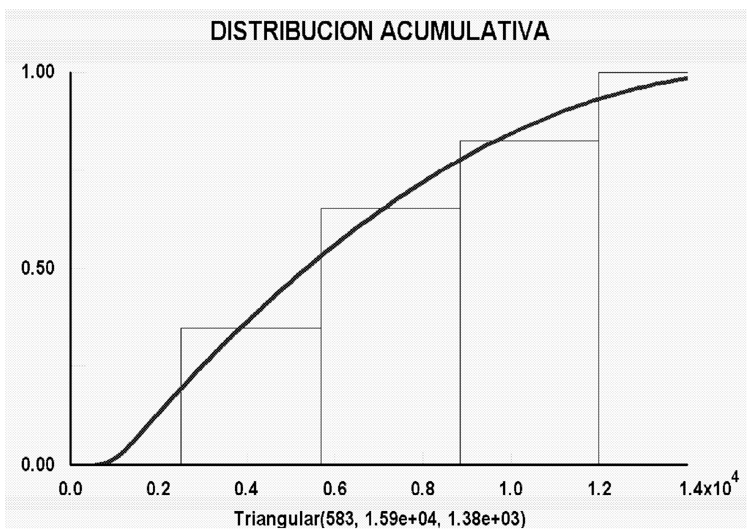
Gráfica 4.1: Distribución empírica del déficit.

[10] Para mayor información entrar al sitio www.Promodel.com

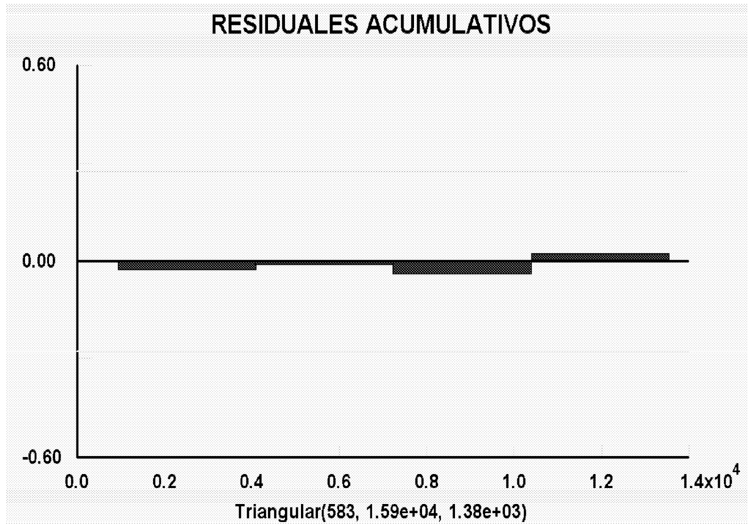
[11] Para la bondad de ajuste, Promodel utiliza la prueba de Kolmogorov Smirnov y la Prueba Chi-Cuadrada.



Gráfica 4.2: Ajuste para la distribución del déficit.



Gráfica 4.3: Distribución acumulativa del déficit.



Gráfica 4.4: Residuales acumulativos para la distribución del déficit.

La gráfica de residuales, es una gráfica que muestra las diferencia entre la distribución empírica de los datos de entrada y la distribución ajustada.

Ahora que se tiene la distribución de probabilidad del déficit, solamente hay que determinar los costos asociados al almacenamiento de gas natural y para ello se tomarán de referencia las tarifas de transporte de *Petal Gas Storage*[12], empresa estadounidense ubicada en Houston, Texas que tiene como negocio el almacenamiento del hidrocarburo.

En la tabla siguiente se muestran las tarifas de transporte de almacenamiento, donde la Tarifa de Uso representa el cobro que se hace al usuario cada vez que se hace uso del gas que está sujeto a almacenamiento, es decir, cada vez que el usuario desee inyectar o extraer gas de la instalación de almacenamiento se le cobrará la tarifa correspondiente de uso. Asimismo, la Tarifa en Firme representa el cobro que se le hace al usuario por cada unidad guardada en la instalación de almacenamiento.

[12]Las unidades están expresadas en Dólares por Millón de Unidad Térmica Británica o MMBtu como su abreviación en inglés.

Tarifa de Transporte	Usd/MMBtu	Usd/Mpcd
Tarifa en Firme	2.0196	2,019.6
Tarifa de Uso	0.0664	66.4

Tabla 4.7 Tarifas de Transporte de Petal Gas Storage

Una vez que se cuenta con la información necesaria para correr la aplicación de Inventario.xls y poder así efectuar las simulaciones sobre el sistema de inventario, se define el costo por déficit como la suma de la Tarifa en Firme y la Tarifa en Uso (que es la suma de los costos por transporte), más el costo de servicio ponderado para los clientes industriales que corresponde a 64.15 USD/Mpcd para el año 2006. Por lo tanto, los costos a incluir en el modelo de inventario están dados en la siguiente tabla:

Elemento	Usd/Mpcd
Costo por ordenar (k)	66.40
Costo de inventario (h)	2,019.60
Costo por déficit (Π)	2,150.15

Tabla 4.8 Costos del modelo de inventario

Finalmente, al correr la aplicación de Inventario.xls se obtienen los valores del Lote Económico, el Punto de Reorden y el Intervalo de confianza para el Lote Económico, así como las estadísticas de la simulación.

Elemento	Mpcd
Lote Económico (Q)	2,880.27
Punto de Reorden (S)	7,348.78
Intervalo de Confianza para Q al 95%	(1655 ; 4105)

Tabla 4.9 Resultados Finales

Estadística	Mpcd
Media para Q	2,880.27
Desv. est. para Q	612.54
Máximo para Q	3,814.40
Mínimo para Q	1,685.09

Tabla 4.10 Estadísticas de la simulación

4.2.6 Conclusiones

Para concluir el estudio de almacenamiento, cabe mencionar que con los resultados obtenidos se determina la dinámica bajo la cual se opera un almacenamiento de gas natural a costo mínimo de acuerdo a las características del déficit calculado y su distribución de probabilidad asociada. Por otro lado, hay que aclarar que dicha dinámica de operación requiere una instalación de almacenamiento con una capacidad sufuciente que permita operar un gas de trabajo de 10,229 Mpcd, con el cual se abastecerá el déficit mensual de gas natural, considerando que se deben planear las operaciones de comercio exterior de tal modo que al llegar el inventario de gas a un nivel de 7,349 Mpcd se pueda abastecer a tiempo, el inventario de gas natural con un Lote Económico de 2,880 Mpcd.

Como parte del análisis se proporcionó el intervalo de confianza al 95% para el Lote Económico, con el cual se puede operar el almacenamiento en forma confiable, sabiendo que el abastecimiento del inventario se puede hacer bajo un margen de seguridad, es decir, que al verse en una situación en la que se tenga que realizar un pedido para abastecer el inventario, tal pedido no tiene que ser rigido e igual a 2,880 Mpcd, gracias a que se conocen los límites de tolerancia con los que se puede solicitar un Lote Económico confiable que no sea necesariamente el Lote Económico bajo el que converge la simulación. Por lo que cualquier pedido que esté entre 1,655 y 4,105 Mpcd tendrá un alto margen de confiabilidad y permitirá en un periodo corto de tiempo hacer las operaciones de comercio exterior que ajusten el nivel de inventario al punto idóneo de gas de trabajo.

Las ventajas de implantar el almacenamiento de gas natural son varias e igual de importantes, ya que con dicho almacenamiento se pordrá hacer una mejor planeación de las operaciones de comercio exterior lo que permitirá disminuir las pérdidas por importación, a su vez, la estabilización del empaque del sistema nacional de gasoductos será más fácil ya que se podrá inyectar o extraer gas natural con una capacidad de respuesta más oportuna a menor costo. Además, el beneficio para los usuarios repercute en que se tendrán menos cortes de suministro, lo cual le significa grandes ahorros a la Comisión Federal de Electricidad, ya que sus costos de operación disminurán en forma significativa y el riesgo asociado al corte de suministro será mínimo.

Conclusiones Generales

Como resultado del trabajo realizado a lo largo de los cuatro capítulos, se introdujó y desarrolló la metodología para obtener el lote económico óptimo y el punto de reorden, de tal modo que se describieron los elementos necesarios para poder entender y analizar los modelos descritos en esta tesis. Así, la modelación de sistemas y la metodología de simulación son la base para poder analizar casi cualquier tipo de sistema y poder llevarlo a un plano conceptual con la finalidad de estudiarlo y poder descubrir cuáles son los elementos clave para llevar acabo las mejoras pertinentes en dicho sistema. Asimismo, al aplicar estas herramientas en los modelos de inventario se logró determinar el intervalo de confianza al 95% para el Lote Económico, el cual permite operar bajo una dinámica confiable sin caer en un valor rígido al momento de realizar el reabastecimiento del inventario. Lo anterior es de gran utilidad debido a que las condiciones de mercado no permiten siempre llevar acabo las operaciones de comercio exterior a un precio favorable, por lo que en ocasiones sea necesario realizar más de una operación para poder llegar a los niveles deseados de gas de trabajo.

Por lo tanto, al finalizar este trabajo aplicando la metodología de simulación al sistema de inventario se logró comprobar la hipótesis de que la simulación refina la aproximación de los parámetros y proporciona los valores a los que convergen debido al número de ensayos estadísticos realizados.

Para sistemas de inventario con una distribución de la demanda más dispersa en términos de la media y la desviación estándar, el beneficio de aplicar simulación al sistema de inventario se puede apreciar con mayor detalle debido a que proporcionará valores a los cuales converge el sistema, así como el intervalo de confianza para el perámetro de intrés.

Como líneas de trabajo vinculadas con esta tesis, se puede mencionar la investigación de nuevos algoritmos que proporcionen números aleatorios que esten menos correlacionados; analizar modelos de inventario con demanda estacional y costos por ordenar estacionales, ya que estos elementos afectan de manera importante los sistemas de inventario y brindan un enfoque más completo de dicho estudio.

Con respecto al caso de estudio, es necesario hacer futuros análsis, ya que vale la pena mencionar que la próxima Prospectiva de Gas Natural contempla un escenario exportador para los próximos años, lo cual impacta el estudio realizado, más no lo invalida, debido a que el mantener un almacenamiento facilitará las operaciones de comercio exterior, programando mejor las exportaciones y poder así colocarlas en el mercado del sur de Texas a un mejor precio, reduciendo así las pérdidas por comercio exterior.

Por lo tanto, implementar un almacenamiento de gas natural traerá varios beneficios tanto a los usuarios como al mismo mercado de gas natural.

Apéndice A

Conceptos de probabilidad y estadística

Apéndice A

El estudio de un proceso de *simulación* involucra tener un amplio conocimiento de otras disciplinas, entre las cuales se encuentran la *probabilidad y estadística.* En este apéndice se desglosaran los principales conceptos y herramientas necesarias para nuestro estudio. Las ideas que envuelven estas disciplinas son de particular importancia e interés, ya que el comportamiento probabilístico es una característica de la mayoría de los modelos de simulación. Para ésto, utilizaremos las funciones de densidad de probabilidad, que describen los valores que puede tomar una variable aleatoria ya sea en forma discreta o continua.

Una de las herramientas principales de la simulación es la generación de números aleatorios, que involucra el construir una muestra de una población ficticia, que a nuestro interés será la que se ajusta al comportamiento del modelo de simulación; ésto con la finalidad de introducir una cantidad considerable de realizaciones de nuestro proceso de estudio, para posteriormente pasar a la etapa de análisis.

Además, que las bases de probabilidad y estadística mostradas a continuación, servirán para el análisis de riesgo correpondiente a un proyecto de inversión.

A.1 Variables aleatorias

Las variables aleatorias (v.a.) son el instrumento por medio del cual conceptualizamos el comportamiento probabilístico sobre fenomenos de nuestro entorno. Y su conocimiento nos proporcionará una mejor perspectiva del estudio de los modelos de simulación. Para esto consideremos las siguientes definiciones:

Definición A.1.1 *El conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio recibe el nombre de espacio muestral.*[1]

Ahora, podemos introducir la definición de variable aleatoria

Definición A.1.2 *Sea S un espacio muestral sobre el que se encuentra definida una función de probabilidad. Sea X una función de valor real definida sobre S, de manera que transforme los resultados de S en puntos sobre la recta de los reales. Se dice entonces que X es una variable aleatoria.*[2]

[1] George C. Canavos, Probabilidad y Estadística - Aplicaciones y Métodos, Ed. MacGraw Hill, Primera edición Noviembre de 1995, pág. 32.

[2] *Ibidem*, pág. 52.

De lo anterior, la descripción de que X es *aleatoria* se debe a que involucra la probabilidad de los valores del espacio muestral y que X es una función definida sobre el espacio muestral, transformando los posibles valores del espacio muestral en cantidades numéricas.

Ahora, ya que hemos introducido el concepto de variable aleatoria es necesario ir expandiendo esta idea intrínsecamente hacia su naturaleza discreta o continua del espacio muestral.

Definición A.1.3 *Se dice que una variable aleatoria X es discreta si el número de valores que puede tomar es contable (ya sea finito o infinito) y si éstos pueden arreglarse en una secuencia que corresponde con los enteros positivos.*[3]

Definición A.1.4 *Se dice que una variable aleatoria X es continua si sus valores consisten en uno a más intervalos de la recta de los reales.*[4]

A.2 Funciones de probabilidad

En este apartado entra en consideración el concepto de distribución de probabilidad de una variable aleatoria, tal que al tomar en cuenta una variable aleatoria discreta X que representa los resultados de un espacio muestral se dice que $P(X = x)$ es la probabilidad de que X tome el valor de x. Por lo tanto, al tomar todos los posibles valores que puede tomar la variable aleatoria X, se puede crear una función matemática que asigne una probabilidad a cada realización x. Tal función recibe el nombre de *función de probabilidad* de la variable aleatoria X. Que se define a continuación :

Definición A.2.1 *Sea X una variable aleatoria discreta. Se llamará a $p(x) = P(X = x)$ función de probabilidad de la variable aleatoria X, si satisface las siguientes propiedades*[5]*:*

1. $p(x) \geq 0$ para todos lo valores x de X

2. $\sum_x p(x) = 1$

De aqui se sigue la siguiente definición

[3] *Ibidem*, pág. 53.
[4] *Ibidem*, pág. 53.
[5] *Ibidem*, pág. 54.

Definición A.2.2 *La función de distribución acumulativa de la variable aleatoria X es la probabilidad de que X sea menor o igual a un valor específico de x y está dada por* [6]*:*

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p(x_i)$$

Es decir, la función de distribución acumulativa es la que representa la suma de las probabilidades puntuales hasta el valor de x. Por otro lado,la función de distribución acumulativa F(x) de una variable aleatoria discreta es una función no decreciente de los valores de X, de tal modo que :

1. $0 \leq F(x) \leq 1$ para todos lo valores x

2. $F(x_i) \geq F(x_j)$ si $x_i \geq x_j$

3. $P(X > x) = 1 - F(x)$

Analogamente, la distribución de probabilidad de una variable aleatoria continua X está denotada por una función f(x) que recibe el nombre de *función de densidad de probabilidad*. Que a diferencia de la función de probabilidad para el caso discreto, no representa la probabilidad de que $X = x$. Pero proporciona un medio para calcular la probabilidad de un intervalo a $\leq X \leq b$. Entonces, la función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria continua X se define formalmente de la siguiente forma:

Definición A.2.3 *Si existe una función f(x) tal que* [7]

1. f(x)$\geq$ 0, -$\infty < x < \infty$,

2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$, y

3. $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$

Para cualquier a y b, se tiene que f(x) es la función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria continua X.

[6] *Ibidem*, pág. 54.
[7] *Ibidem*, pág. 58.

De igual manera que en el caso discreto, la función de distribución acumulativa de una variable aleatoria continua X es la probabilidad de que X tome un valor menor o igual a algún x fijo. Es decir,

$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$

De donde es fácil ver que

$P(X = x) = \int_{x}^{x} f(t)dt = 0$

Por lo que de las últimas dos implicaciones obtenemos :

$P(X \leq x) = P(X < x) = F(x)$

Con esto, podemos decir que la distribución acumulativa F(x), es una función lisa no decreciente con las siguientes propiedades :

1. F(-∞) $=$ 0

2. F(∞) $=$ 1

3. $P(a < X < b) =$ F(b) - F(a)

4. dF(x)/dx $=$ f(x)

Considerando esta última propiedad una consecuencia del teorema fundamental del cálculo integral.

Ahora, siguiendo el estudio de las variables aleatorias pasamos a un concepto fundamental, el denominado *valor esperado* o *esperanza* de una variable aleatoria.

A.2.1 Valor esperado de una variable aleatoria

Definición A.2.4 *El valor esperado de una variable aleatoria X es el promedio o valor medio de X y está dado por* [8]*:*

[8] *Ibidem*, pág. 63.

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_x x\ p(x) \qquad \text{si } X \text{ es discreta, o} \\ E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x\ f(x)dx \qquad \text{si } X \text{ es continua} \end{aligned}$$

Donde p(x) y f(x) son funciones de probabilidad y de densidad de probabilidad, respectivamente.

Para mostrar con más detalle lo anterior, se calculará el valor esperado para la *distribución Normal* que es una v.a. continua y para la *distribución Poisson* que es una v.a. discreta.

Distribución Normal

Definición A.2.5 *Se dice que una variable aleatoria X se encuentra normalmente distribuida si su función de densidad de probabilidad está dada por* [9]*:*

$$f(x;\ \mu,\sigma) = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\ exp\Big(\ -\tfrac{1}{2}\Big(\tfrac{x-\mu}{\sigma}\Big)^2\Big)$$

$$\text{para} \quad -\infty < x < \infty, \quad -\infty < \mu < \infty, \quad \sigma > 0$$

Los parámetros de la distribución normal son μ y σ, además determinan de manera completa la función de densidad de probabilidad, y son la media y la desviación estándar de X respectivamente.

La media de la variable aleatoria distribuida normalmente se encuentra definida por:

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x\ \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\ exp\Big(\ -\frac{1}{2}\Big(\frac{x-\mu}{\sigma}\Big)^2\Big) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} x\ exp\Big(\ -\Big(\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\Big)\Big)dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)\ exp\Big(-\Big(\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\Big)\Big)dx \quad + \\ &\quad \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \mu\ exp\Big(-\Big(\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\Big)\Big)dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)\ exp\Big(\ -\Big(\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\Big)\Big)dx \quad + \quad \mu \end{aligned}$$

[9] *Ibidem*, pág. 131.

Dado que el valor de la segunda integral es uno. Al efectuar un cambio de variable de integración en (1) de manera tal que $y = \frac{(x-\mu)}{\sigma}$, $x = \sigma y + \mu$, y $dx = \sigma dy$, se tiene:

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y \; exp\Big(-\frac{y^2}{2}\Big) dy + \mu \\ &= -\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \; exp\Big(-\frac{y^2}{2}\Big)\Big|_{-\infty}^{\infty} + \mu \\ &= \mu \end{aligned}$$

Dado que el valor de esta integral es cero. Debido, a que el integrando es una función par y la integración se lleva acabo sobre un intervalo simétrico alrededor de cero.

Una distribución normal es simétrica alrededor de su media μ. Si el valor máximo de la función de densidad de probabilidad normal ocurre cuando $x = \mu$, μ es la media, la moda y la mediana de cualquier v.a. distribuida normalmente.

Distribución Poisson

Definición A.2.6 *Sea X una variable aleatoria que representa el número de eventos aleatorios independientes que ocurren a una rapidez constante sobre el tiempo o el espacio. Se dice entonces que la variable aleatoria X tiene una distribución Poisson con función de probabilidad* [10]*:*

$$p(x;\lambda) = \begin{cases} e^{-\lambda} \; \frac{\lambda^x}{x!}, & x = 0,1,2,3,\ldots \; ; \quad \lambda > 0 \\ O, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

El parámetro λ , es el número promedio de ocurrencias del evento aleatorio por unidad de tiempo.

La probabilidad de que una variable aleatoria Poisson X, sea menor o igual a un valor de x se determina por la función de distribución (acumulativa).

$$p(X \leq \; x) = \; F(x;\lambda) = \; \sum_{i=0}^{x} \; e^{-\lambda} \; \frac{\lambda^i}{i!}$$

[10] *Ibidem*, pág. 100.

La esperanza de la v.a. de Poisson se determina de la siguiente forma :

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{x=0}^{\infty} x e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} \\ &= e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^x}{(x-1)!} \\ &= \lambda e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} \\ &= \lambda e^{-\lambda} \sum_{y=0}^{\infty} \frac{\lambda^y}{y!}, \qquad y = x-1 \\ &= \lambda \end{aligned}$$

A continuación se enunciarán y demostrarán algunas propiedades importantes de la esperanza de una variable aleatoria. A pesar de que estas propiedades también son validas para variables aleatorias discretas, se demostrarán para el caso continuo. Sea X una variable aleatoria continua con una función de densidad de probabilidad f(x), entonces se tiene que :

1. El valor esperado, o esperanza de una constante c es el valor de la constante.

$$E(c) = \int_{-\infty}^{\infty} c\ f(x)dx = c \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = c$$

2. El valor esperado, o esperanza de la cantidad aX + b, en donde a y b son constantes, es el producto de a por el valor esperado de X más b.

$$\begin{aligned} E(aX+b) &= \int_{-\infty}^{\infty} (aX+b)\ f(x)dx = a \int_{-\infty}^{\infty} x\ f(x)dx + b \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \\ &= aE(X)+b \end{aligned}$$

3. El valor esperado de la suma de dos funciones g(X) y h(X) de X es la suma de los valores esperados de g(X) y h(X).

$$\begin{aligned} E[g(x)+h(X)] &= \int_{-\infty}^{\infty} [g(X)+h(X)]\ f(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx\ +\ \int_{-\infty}^{\infty} h(x)f(x)dx \\ &= E[g(x)]\ +\ E[h(x)] \end{aligned}$$

En seguida cabe mencionar los *momentos* de una variable aleatoria X, que son los valores esperados de ciertas funciones de X. Tales valores puden caracterizar la distribución de probabilidad de X y especificarla si todos los momentos de X son conocidos.

Considerando que los momentos más comunes se definen alrededor del cero y del valor esperado de la v.a. X. Sin olvidar, que todas las proposiciones con respecto a los momentos se encuentran sujetas a la existencia de las sumas o integrales que las definan.

Definición A.2.7 *Sea X una variable aleatoria. El r-ésimo momento de X alrededor del cero se define por* [11]*:*

$$\begin{aligned} \mu_r^{'} &= E(X^r) = \sum_x x^r\ p(x) && \text{si } X \text{ es discreta, o} \\ \mu_r^{'} &= E(X^r) = \int_{-\infty}^{\infty} x^r\ f(x)dx && \text{si } X \text{ es continua} \end{aligned}$$

Tenemos que el primer momento alrededor del cero es la *media o valor esperado* de la v.a. y se denota por μ; de tal manera se tiene que $\mu_1^{'} = \mu =$ E(x). La media de una v.a. es una medida de tendencia central donde los valores de la v.a. tienden a agruparse.

Definición A.2.8 *Sea X una variable aleatoria. El r-ésimo momento central de X o el r-ésimo momento alrededor de la media se define por* [12] *:*

$$\begin{aligned} \mu_r &= E(X-\mu)^r = \sum_x (x-\mu)^r\ p(x) && \text{si } X \text{ es discreta,o} \\ \mu_r &= E(X-\mu)^r = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^r\ f(x)dx && \text{si } X \text{ es continua} \end{aligned}$$

A.2.2 Varianza de una variable aleatoria

Un momento de gran importancia es el segundo momento central, que recibe el nombre de varianza de la variable aleatoria. Dado por :

[11] *Ibidem*, pág. 67.
[12] *Ibidem*, pág.67.

$$
\begin{aligned}
\mu_2 = Var(X) &= E(X-\mu)^2 \\
&= E(X^2 - 2X\mu + \mu^2) \\
&= E(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2 \\
&= \mu_2^{'} - \mu^2
\end{aligned}
$$

la varianza de una v.a. denotada por σ^2 es el segundo momento alrededor del origen menos el cuadrado de la media. Tomando en cuenta que la varianza de una v.a. es una medida de dispersión de la distribución de probabilidad de X. Considerando además, que la raíz cuadrada positiva de la varianza, es conocida como *desviación estándadr* y se denota por σ.

Analogamente al valor promedio, la varianza cumple ciertas propiedades, entre las cuales hay que notar que la varianza de la v.a. es invariable, esto es, que Var(X + b) = Var(X) para cualquier constante b. Además se demostrara la propiedad general siguiente : Var(aX + b) =a^2 Var(X), para cualesquiera dos constantes a y b.

$$
\begin{aligned}
Var(aX+b) &= E[(aX+b)^2] - E^2[\ aX+b\ ] \\
&= E(a^2X^2 + 2abX + b^2) - [aE(X)+b]^2 \\
&= a^2E(X^2) + 2abE(X) + b^2 - a^2E^2(X) - 2abE(X) - b^2 \\
&= a^2E(X^2) - a^2E^2(X) \\
&= a^2[E(X^2) - E^2(X)] \\
&= a^2Var(X)
\end{aligned}
$$

A.2.3 Covarianza

Partiendo de que a la varianza es una medida de dispersión de una variable aleatoria, la *covarianza* es una medida de la variabilidad conjunta de X y de Y variables aleatorias. Motivo por el cual, la covarianza es una medida de asociación entre los valores de X y de Y y sus respectivas dispersiones. De este modo, definimos la covarianza por:

$$
Cov(X,Y) = E\left((X-\mu_x)(Y-\mu_y)\right)
$$

Desarrollando la expresión tenemos que

$$\begin{aligned}
E\left((X-\mu_x)(Y-\mu_y)\right) &= E\left(XY - X\mu_y - Y\mu_x + \mu_x\mu_y\right) \\
&= E(XY) - E(X)\mu_y - E(Y)\mu_x + \mu_x\mu_y \\
&= E(XY) - \mu_x\mu_y - \mu_y\mu_x + \mu_x\mu_y \\
&= E(XY) - \mu_x\mu_y
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Es importante señalar que cuando las variables aleatorias son independientes, implica que $E(XY) = E(X)E(Y)$, de donde se desprende que Cov(X,Y) sea igual a cero.

Cuando se tiene una probabilidad alta de que valores grandes de X se relacionen con valores grandes de Y, la covarianza será positiva. De manera similar, si se tiene una probabilidad alta de que valores grandes de X se relacionen con valores pequeños de Y, o viceversa, la covarianza será negativa.

Una relación importante que involucra a la covarianza, es el *coeficiente de correlación*, que es definido como:

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_x\sigma_y}$$

Donde X y Y son v.a.

El coeficiente de correlación es sólo una medida de la asociación lineal que existe entre dos variables aleatorias; y se encuentra contenido en el intervalo $-1 \leq \rho \leq 1$. De tal modo que $\rho = 0$ implica que no existe asociación lineal entre dichas variables; y los valores de -1 y 1, indican relaciones lineales perfectas, ya sea positivamente $(\rho = 1)$ o negativamente $(\rho = -1)$.

Por otro lado, como método alternativo para determinar los momento de una variable aleatoria, se puede calcular la esperanza, o valor esperado de cierta función conocida como la *función generadora de momentos*.

A.2.4 Función generadora de momentos

Definición A.2.9 *Sea X una variable aleatoria. El valor esperado de $exp(tX)$ recibe el nombre de función generadora de momentos, y se denota por $m_X(t)$, si el valor esperado existe para cualquier valor de t en algún intervalo $-c < t < c$ en donde c es un número positivo. En otras palabras* [13] *:*

$$
\begin{aligned}
m_X(t) &= E[exp(tX)] = \sum_x exp(tx)\ p(x) && \text{si } X \text{ es discreta, o} \\
m_X(t) &= E[exp(tX)] = \int_{-\infty}^{\infty} exp(tx)\ f(x) && \text{si } X \text{ es continua}
\end{aligned}
$$

A continuación se calcularán la varianzas de las distribuciones consideradas anteriormente y la función generadora de momentos de sus respectivas distribuciones.

Para determinar la función generadora de momentos; por definición tenemos que:

$$
\begin{aligned}
m_{X-\mu}(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} exp\Big(\ t(x-\mu)\Big)\ exp\Big(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\Big)dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} exp\Big(\ \frac{1}{2\sigma^2}[(x-\mu)^2 - 2\sigma^2\ t(x-\mu)]\Big)dx
\end{aligned}
$$

Se completa el cuadrado en el interior del paréntesis rectangular y se tiene :

$$
\begin{aligned}
(x-\mu)^2\ - 2\sigma^2 t(x-\mu) &= (x-\mu)^2\ - 2\sigma^2 t(x-\mu) + \sigma^4 t^2 - \sigma^4 t^2 \\
&= (x-\mu-\sigma^2 t)^2 - \sigma^4 t^2
\end{aligned}
$$

Entonces

$$
\begin{aligned}
m_{X-\mu}(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} exp\Big(\ \frac{\sigma^2 t^2}{2}\Big)\ exp\Big(-\frac{[x-(\mu+\sigma^2 t)]^2}{2\sigma^2}\Big)dx \\
&= exp\Big(\ \frac{\sigma^2 t^2}{2}\Big)\ \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} exp\Big(-\frac{[x-(\mu+\sigma^2 t)]^2}{2\sigma^2}\Big)dx \\
&= exp\Big(\ \frac{\sigma^2 t^2}{2}\Big)
\end{aligned}
$$

[13] *Ibidem*, pág. 80.

Dado que el integrando junto con el factor $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}$ es una función de densidad de probabilidad normal con parámetros $\mu + \sigma^2 t$ y σ.

La segunda derivada de $m_{X-\mu}(t)$ evaluada en t= 0 (considerando la expresión en serie de taylor), es la varianza y está dada por:

$$Var(X) = \left.\frac{d^2 m_{X-\mu}(t)}{dt^2}\right|_{t=0} = \left.\sigma^2 + \frac{12\sigma^4 t^2}{4 * 2!} + \frac{30\sigma^6 t^4}{8 * 3!} + \cdots\right|_{t=0} = \sigma^2$$

De esta manera la desviación estándar es σ.

Analogamente,

La función generadora de momentos para la distribución Poisson es:

$$\begin{aligned} m_x(t) &= \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx} e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} \\ &= e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} (\lambda e^t)^x \frac{1}{x!} \\ &= e^{-\lambda}\ e^{\lambda e^t} \\ &= exp[\ \lambda(e^t - 1)] \end{aligned}$$

Para la varianza de la Poisson tenemos que :

$$\begin{aligned} E[X(X-1)] &= \sum_{x=0}^{\infty} x(x-1) e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} \\ &= \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{x=2}^{\infty} \frac{\lambda^{x-2}}{(x-2)!} \\ &= \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{y=0}^{\infty} \frac{\lambda^y}{y!}, \qquad y = x - 2 \\ &= \lambda^2 \end{aligned}$$

Tal que, calculando el segundo momento tenemos :

$$E(X^2) = \lambda^2 + \lambda$$

Por lo tanto, la varianza de la distribución Poisson es :

$$Var(X) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

Distribución Normal Estándar

La aplicación de la distribución normal en su forma estandarizada es de gran importancia para diversos estudios y disciplinas. Para tal aplicación, partamos de la probabilidad de que una v.a. normalmente distribuida X sea menor o igual a un valor específico x, la cual está dada por la siguiente expresión :

$$P(X \leq x) = \ F(x;\ \mu,\ \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{x} \ exp\Big(\ - \Big(\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\Big)\Big) dt$$

que es la función de distribución acumulativa. Tal expresión resulta inconveniente de valuar para diferentes valores de σ y μ, debido a que se requiere de tablas específicas para cada par de valores. Por lo tanto, considerese la siguiente transformación :

Sea Z una v.a. definida como sigue :

$$Z = \ \frac{(X-\mu)}{\sigma}$$

donde μ y σ son la media y la desviación estándar de la v.a. X. Entonces, se dice que Z es una v.a. normal estandarizada con media cero y desviación estándar uno; para la cual exiten tablas que se pueden encontrar en cualquier libro de estadística.

Tal que

$$\begin{aligned} P(X \leq x) = \ P\Big(Z \leq \frac{(x-\mu)}{\sigma}\Big) \ &= \ \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{\frac{(x-\mu)}{\sigma}} \ exp\Big(- \frac{z^2}{2}\Big) \sigma dz \\ &= \ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{(x-\mu)}{\sigma}} \ exp\Big(- \frac{z^2}{2}\Big) dz \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$P(X \leq x) = F_x(x;\ \mu,\ \sigma) = F_z(z;\ 0,\ 1)$$

Analogamente, la probabilidad de que una v.a. normalmente distribuida X se encuentre entre dos valores a y b, está dada por :

$$P(a \leq X \leq b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_a^b exp\Big(-\Big(\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\Big)\Big) dx$$

que mediante la estandarización se obtiene :

$$\begin{aligned} P(a \leq X \leq b) &= P\Big(\frac{a-\mu}{\sigma} \leq Z \leq \frac{b-\mu}{\sigma}\Big) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{a-\mu}{\sigma}}^{\frac{(b-\mu)}{\sigma}} exp\Big(-\frac{z^2}{2}\Big) dz \\ &= F_z\Big(\frac{(b-\mu)}{\sigma};\ 0,1\Big) - F_z\Big(\frac{(a-\mu)}{\sigma};\ 0,1\Big) \end{aligned}$$

Ejemplo : Sea X una v.a. que representa la cantidad en miles proveniente del flujo de efectivo de un período dado. Si X es N(95,10), obtener la probabilidad de que X este entre 90 y 125.

De este modo tenemos que

$$\begin{aligned} P(95 \leq X \leq 120) &= P\Big(\frac{90-95}{10} \leq Z \leq \frac{125-95}{10}\Big) \\ &= P(-0.5 \leq Z \leq 3) \\ &= F_z(3;\ 0,1) - F_z(-0.5;\ 0,1) \\ &= 0.9987 - 0.3085 = 0.6902 \end{aligned}$$

El último resultado de esta sección es también respecto a la distribución normal y es de los más importantes en inferencia estadística, conocido como el teorema del límite central.

Teorema A.2.1 *Sean X_1,X_2,X_3,...,X_n n variables aleatorias independientes e identicamente distribuidas (IID) con una distribución de probabilidad no especificada y que tienen una media μ y una varianza σ^2 finita. El promedio muestral $\overline{X} = (X_1,X_2,\ \ldots,\ X_n)/n$ tiene una distribución con media μ y varianza*

σ^2/n que tiende hacia una distribución normal conforme n tiende a ∞. En otras palabras, la variable aleatoria $Z = (\overline{X} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n})$ tiene como límite una distribución normal estándar.[14]

La demostración de dicho resultado se puede consultar en cualquier libro de estadística.[15]

Lo importante de este resultado es que Z sigue aproximadamente una distribución normal independientemente del tipo del modelo de probabilidad del cual se obtuvo la muestra. Dado que el teorema establece que Z está normalmente distribuida cuando n tiende a infinito, la pregunta que surge en la práctica es, ¿ qué tan grande debe ser n de tal modo que la distribución de Z se aproxime a una distribución normal ?. La respuesta a tal pregunta no es fácil, ya que depende de las características de la distribución de la cual proviene la muestra. Y desde un punto de vista práctico se tiene lo siguiente, si la distribución de la muestra es simétrica el valor de n debe ser mayor o igual a 4, si la distribución es uniforme el valor de n debe ser mayor o igual a 12. Y para distribuciones irregulares n debe ser mayor o igual a 100.

Como dato adicional, consideremos que la varianza de una muestra está definida por la siguiente expresión:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{x_i=1}^{n} (x_i - \mu)^2$$

Lo concerniente a todos los conceptos anteriores ayudará al entendimiento de las variables involucradas en los modelos de simulación y lo relacionado con el análisis de riesgo. El paso que sigue es explicar y desarrollar la idea de los números aleatorios que generarán los datos que se requieren para dicho análisis.

[14] *Ibidem*, pág. 230.
[15] *Cfr.*, George C. Canavos, Probabilidad y Estadística - Aplicaciones y Métodos, Ed. MacGraw Hill, Primera edición Noviembre de 1995, págs. 247-249.

Anexo 1. Tabla de valores de la integral pérdida normal

$$I(\Phi) \;\; = \;\; \int_{\Phi}^{\infty} \left(u - \phi\right) \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} e^{\frac{-u^2}{2}} du$$

Para valores de $\Phi < 0$, $I(\Phi) = I(-\Phi) - \Phi$

Ejermplo:

I(0.00)= 0.3989
$I(-2) = 0.0035 + 2 = 2.0085$

Tabla A.1 Integral Pérdida Normal

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0	0.3989	0.394	0.389	0.3841	0.3793	0.3744	0.3697	0.3649	0.3602	0.3556
0.1	0.3509	0.3464	0.3418	0.3373	0.3328	0.3284	0.324	0.3197	0.3154	0.3111
0.2	0.3069	0.3027	0.2936	0.2944	0.2904	0.2861	0.2826	0.2784	0.2745	0.2706
0.3	0.2664	0.263	0.2592	0.2555	0.2518	0.2481	0.2445	0.2409	0.2374	0.2339
0.4	0.2304	0.227	0.2236	0.2203	0.2169	0.2137	0.2104	0.2072	0.204	0.2009
0.5	0.1978	0.1947	0.1917	0.1887	0.1857	0.1828	0.18	0.1771	0.1742	0.1714
0.6	0.1687	0.1659	0.1632	0.1606	0.158	0.1554	0.1528	0.1503	0.1478	0.1453
0.7	0.1429	0.1405	0.1381	0.1358	0.1333	0.1312	0.1289	0.1267	0.1245	0.1225
0.8	0.1202	0.1181	0.116	0.114	0.112	0.11	0.1039	0.1061	0.1042	0.1023
0.9	0.1004	0.0986	0.0968	0.095	0.0933	0.0916	0.0899	0.0882	0.0865	0.0849
1	0.0833	0.0817	0.0802	0.0787	0.0772	0.0757	0.0742	0.0728	0.0714	0.07
1.1	0.0686	0.0673	0.066	0.0646	0.0634	0.0621	0.0609	0.0596	0.0584	0.0573
1.2	0.0561	0.055	0.0538	0.0527	0.0517	0.0506	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465
1.3	0.0455	0.0446	0.0436	0.0422	0.0418	0.0409	0.04	0.0392	0.0383	0.0375

1.4	0.0367	0.0359	0.0351	0.0343	0.0336	0.0328	0.0321	0.0314	0.0307	0.03
1.5	0.0293	0.0286	0.028	0.0274	0.0267	0.0261	0.0255	0.0249	0.0244	0.0238
1.6	0.0232	0.0227	0.0222	0.0216	0.0211	0.0206	0.0201	0.0197	0.0192	0.0187
1.7	0.0183	0.0178	0.0174	0.017	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.015	0.0146
1.8	0.0143	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0126	0.0123	0.0119	0.0116	0.0113
1.9	0.0111	0.0108	0.0105	0.0102	0.01	0.0097	0.0094	0.0092	0.009	0.0087
2	0.0085	0.0083	0.008	0.0078	0.0075	0.0074	0.0072	0.007	0.0068	0.0066
2.1	0.0065	0.0063	0.0061	0.006	0.0058	0.0056	0.0055	0.0053	0.0052	0.005
2.2	0.0049	0.0048	0.0046	0.0045	0.0044	0.0042	0.0041	0.004	0.0039	0.0038
2.3	0.0037	0.0036	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.003	0.0029	0.0028
2.4	0.0027	0.0026	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021
2.5	0.002	0.0019	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015
2.6	0.0015	0.0014	0.0014	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011
2.7	0.0011	0.001	0.001	0.001	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008
2.8	0.0008	0.0007	0.0007	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006
2.9	0.0005	0.0005	0.0005	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004

Bibliografía

1. CANAVOS George, Probabilidad y Estadística - Aplicaciones y Métodos, Ed. MacGraw Hill, Primera edición Noviembre de 1995, 651 págs.

2. COSS BU Raúl , Análisis y Evaluación de Proyectos de Inversión, Ed. Limusa, Segunda edición, 1991, 375 págs.

3. GORDON Geoffrey, Simulación de Sistemas, Ed. Diana, Primera edición, Mayo de 1980, 344 págs.

4. HILLIER Frederick, Lieberman Gerald, Investigación de Operaciones, Ed. MacGraw Hill, Séptima edición, 2001, 1223 págs.

5. INFANTE Arturo, Evaluación Financiera de Proyectos de Inversión, Ed. Norma, Duodécima reimpresión, Marzo de 1996, 400 págs.

6. ROSS Stephen, Westerfield, Jaffe, Finanzas Corporativas, trad. de Corporate Finance, Ed. MacGraw Hill, Primera edición en español de la Tercera edición en inglés, 1995, 1044 págs.

7. ROSS Stephen, Westerfield, Jordan, Fundamentos de Finanzas Corporativas, trad. de Fundamentals of Corporate Finance, Ed. MacGraw Hill, Primera edición en español de la Segunda edición en inglés, 1996, 939 págs.

8. SAPAG Nassir, Sapag Reinaldo, Preparación y Evaluación de Proyectos, Ed. MacGraw Hill, Tercera edición, 1995, 408 págs.

OTROS :

- Apuntes de simulación: Rubén Téllez Sánchez
- Apuntes de inventarios: Ana Elena Narro Ramírez
- Prospectiva del Mercado de Gas Natural 2006-2015.