



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

---

**FACULTAD DE INGENIERÍA**

**Análisis numérico de los  
efectos termoviscosos de un  
flujo electroosmótico en un  
microcanal**

**TESIS**

Que para obtener el título de  
**Ingeniero Mecánico**

**P R E S E N T A**

José Antonio Ruiz Díaz

**DIRECTOR(A) DE TESIS**

M.I. Edgar Ali Ramos Gómez



**Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2019**



# Agradecimientos

Esta tesis está dedicada a mis padres, quienes me enseñaron que con disciplina y perseverancia es posible alcanzar cualquier objetivo. También está dedicada a mi hermano, por haber sido un ejemplo a lo largo de mi vida.

Quiero agradecer a todas las personas y colegas que me apoyaron a lo largo del proceso de realización de este trabajo. En primer lugar, quisiera agradecer a mis padres y hermano por haberme ayudado y apoyado a llegar hasta aquí, a mi tutor, Edgar Ramos, por haberme dedicado incontables horas de orientación y apoyo. También expreso un profundo agradecimiento a los profesores que se tomaron el tiempo de recibirme y explicarme en horas extraescolares. Al jurado por su tiempo y comentarios brindados. Finalmente a mis amigos y pareja que me acompañaron con paciencia durante todo el proceso.

Así mismo, expreso mi reconocimiento y agradecimiento a la Facultad de Ingeniería por todas las atenciones y conocimiento brindado a lo largo de estos cinco años; a todos los profesores que contribuyeron en mi formación como ingeniero.

A la Universidad Nacional Autónoma de México por ser la sede de todo lo anterior.



# Nomenclatura

Símbolo	Significado	Unidades
$\rho$	Densidad	$kg/m^3$
$v_j$	Vector velocidad	$m/s$
$t$	Tiempo	$s$
$x_j$	Dirección j-ésima	$m$
$u$	Velocidad en dirección $x$	$m/s$
$v$	Velocidad en dirección $y$	$m/s$
$x$	Dirección horizontal	$m$
$y$	Dirección vertical	$m$
$\sigma_{ij}$	Tensor de esfuerzos	$Pa$
$b_i$	Vector de fuerzas de cuerpo	$N/kg$
$p$	Presión	$Pa$
$\delta_{ij}$	Delta de Kronecker	<i>adimensional</i>
$S_{ij}$	Tensor de esfuerzos deviatorio	$Pa$
$\eta$	Viscosidad	$Pa \cdot s$
$D_{ij}$	Tensor de rapidez de deformación	$Pa$
$\rho_e$	Densidad de carga eléctrica	$C/m^3$
$E_i$	Vector de campo eléctrico	$N/C$
$\mathcal{U}$	Energía interna específica	$J/kg$
$\nabla$	Operador nabla	$1/m$
$q$	Flujo de calor	$W/m^3$
$q_g$	Calor generado	$W/m^3$
$C_p$	Calor específico	$J/kg \cdot K$
$T$	Temperatura	$K$
$k$	Conductividad térmica	$W/m \cdot K$
$I$	Corriente eléctrica	$A$
$\sigma$	Conductividad eléctrica	$S$
$U_{HS}$	Velocidad de Helmholtz-Smoluchowski	$m/s$
$\Phi$	Potencial eléctrico total	$J/C$
$\psi$	Potencial eléctrico inducido	$J/C$
$\phi$	Potencial eléctrico aplicado	$J/C$
$E_x$	Campo eléctrico en dirección horizontal	$N/C$
$E_y$	Campo eléctrico en dirección vertical	$N/C$
$\epsilon$	Permitividad eléctrica	$C^2/N \cdot m^2$
$\eta$	Viscosidad	$Pa \cdot s$
$Ea$	Energía de activación	$J/mol$
$R$	Constante universal	$J/mol \cdot K$
$\theta$	Variable adimensional de temperatura	<i>adimensional</i>
$T_0$	Temperatura inicial	$K$

$\Delta T_c$	Incremento de temperatura característico	$K$
$\alpha$	Constante adimensional de temperatura	<i>adimensional</i>
$\gamma$	Constante adimensional de energía de activación	<i>adimensional</i>
$\eta_0$	Viscosidad a la temperatura inicial	$Pa \cdot s$
$U$	Energía interna	$J$
$\zeta$	Potencial zeta	$J/C$
$U_{HS}$	Velocidad de Helmholtz-Smoluchowski	$m/s$
$U_{HS_0}$	Velocidad de Helmholtz-Smoluchowski a viscosidad $\eta_0$	$m/s$
$\chi$	Variable adimensional de longitud en $x$	<i>adimensional</i>
$Y$	Variable adimensional de longitud en $y$	<i>adimensional</i>
$\varepsilon$	Variable adimensional de relación de tamaño	<i>adimensional</i>
$\bar{u}$	Variable adimensional de la velocidad en $x$	<i>adimensional</i>
$\bar{v}$	Variable adimensional de la velocidad en $y$	<i>adimensional</i>
$\bar{\psi}$	Variable adimensional del potencial inducido	<i>adimensional</i>
$\bar{\phi}$	Variable adimensional del potencial aplicado	<i>adimensional</i>
$\bar{\zeta}$	Variable adimensional relación de potencial	<i>adimensional</i>
$p'$	Presión modificada	$Pa$
$\Pi$	Variable adimensional de presión	<i>adimensional</i>
$Pe_0$	Número de Péclet a velocidad $U_{HS_0}$	<i>adimensional</i>
$Re_0$	Número de Reynolds a velocidad $U_{HS_0}$	<i>adimensional</i>
$\kappa_0$	Inverso de la longitud de Debye a temperatura $T_0$	$1/m$
$\bar{\kappa}_0$	$\kappa_0$ adimensional	<i>adimensional</i>
$\bar{E}_x$	Variable adimensional de campo eléctrico en $x$	<i>adimensional</i>
$\bar{E}_y$	Variable adimensional de campo eléctrico en $y$	<i>adimensional</i>
$\phi_0$	Potencial eléctrico inicial	$J/C$
$\Lambda$	Parámetro térmico adimensional	<i>adimensional</i>
$Bi$	Número de Biot	<i>adimensional</i>
$\bar{\gamma}$	Parámetro adimensional de viscosidad	<i>adimensional</i>

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>11</b>
<b>2. Planteamiento del problema</b>	<b>17</b>
2.1. Ecuaciones gobernantes . . . . .	18
2.2. Sistema de ecuaciones y condiciones de frontera . . . . .	22
2.3. Adimensionalización de las ecuaciones . . . . .	23
2.4. Sistema de ecuaciones y condiciones de frontera en su forma adimensional . . . . .	27
<b>3. Solución numérica</b>	<b>33</b>
3.1. Formulación variacional del problema . . . . .	35
<b>4. Resultados</b>	<b>40</b>
4.1. Potencial aplicado . . . . .	40
4.2. Potencial inducido . . . . .	41
4.3. Temperatura . . . . .	42
4.4. Presión . . . . .	46
4.5. Velocidad . . . . .	50
4.6. Caudal . . . . .	55
<b>5. Conclusiones</b>	<b>62</b>
<b>A. Ecuaciones de momentum</b>	<b>63</b>
<b>B. Adimensionalización de las ecuaciones</b>	<b>65</b>
<b>C. Apéndice de figuras</b>	<b>72</b>





# Abstract

In this work a new thermal analysis was performed for an electroosmotic flow in a rectangular microchannel. The central idea behind this work is simple: the Debye length that defines the thickness of the EDL as a function of the electrical charge density, and the viscosity depend on the temperature  $T$ . If there is any reason to include variable properties with temperature, Debye length and viscosity should be used with caution because it appears in most mathematical models of electroosmotic flows.

The Joule effect is present in the microchannel due to the application of an electric field, the heating is inevitable; generating significant temperature gradients along the microchannel, so that the isothermal hypothesis is no longer valid. In this way, the Debye length and the magnitude of the viscous effects are modified; leading to important changes in the velocity profiles and the volumetric flow. For this purpose, a dimensionless parameter  $\gamma$  is introduced to quantify the viscosity deviations due to the temperature gradients. The numerical solutions for this problem are obtained using FreeFem++ freeware.

# Resumen

En este trabajo se realizó un nuevo análisis térmico para un flujo electroosmótico en un microcanal rectangular. La idea central detrás del presente trabajo es sencilla: la longitud de Debye que define el espesor de la EDL en función de la densidad de carga eléctrica, y la viscosidad dependen de la temperatura  $T$ . Si existe alguna razón para incluir propiedades variables con la temperatura, la longitud de Debye y la viscosidad deben usarse con precaución porque aparece en la mayoría de los modelos matemáticos de flujos electroosmóticos.

El efecto Joule está presente en el microcanal debido a la aplicación de un campo eléctrico, el calentamiento es inevitable; generando importantes gradientes de temperatura a lo largo del microcanal, así entonces la hipótesis isotérmica ya no es válida. De esta manera, la longitud de Debye y la magnitud de los efectos viscosos se alteran; induciendo cambios importantes en el perfil de velocidades y el caudal volumétrico. Para este propósito, se introduce un parámetro adimensional  $\gamma$  para cuantificar las desviaciones de viscosidad debido a los gradientes de temperatura. Las soluciones numéricas para este problema se obtienen utilizando el software gratuito FreeFem ++.

# Capítulo 1

## Introducción

La Microfluídica ha tenido un gran auge en los últimos años. Más y más trabajos sobre el tema aparecen cada día. Pero, ¿qué es la Microfluídica? La Microfluídica es la ciencia e ingeniería de sistemas en donde el comportamiento normal de los fluidos en estudio difiere de la teoría de flujo convencional, debido principalmente a las pequeñas escalas del sistema [23].

A partir de la década de los 60's, el avance tecnológico se ha acelerado, éste comenzó con la miniaturización de los dispositivos electrónicos. La Microelectrónica ha cambiado la forma en la que trabajamos, inventamos y descubrimos. Hasta hace poco, la miniaturización de los dispositivos no electrónicos quedó rezagada respecto a la Microelectrónica, pero, a finales de la década de los 70's, la "tecnología de silicio" se extendió a los microdispositivos mecánicos; que más tarde fueron conocidos como sistemas microelectromecánicos (MEMS). [23] La primera "M" en MEMS representa la palabra *micro*, entonces, sería razonable pensar que el tamaño del dispositivo debe ser menor que un milímetro, sin embargo, la escala de longitud importante para la microfluídica no es el tamaño promedio del dispositivo, sino la escala longitud que determina el comportamiento del flujo. Sin embargo, es importante recalcar que es inapropiado (aunque común) usar el término MEMS para la microtecnología que se usa hoy en día. Cuando se integran componentes fluidicos y ópticos a los microdispositivos, tecnología de microsistemas (MST por las siglas de *Microsystem technology*) es una descripción más apropiada. El desarrollo tecnológico en microsensores de flujo, microbombas, y microválvulas a finales de la década de los 80's dominó la etapa temprana de la Microfluídica.

La Microfluídica tuvo su auge después del trabajo de Manz *et.al.* en la *Quinta Conferencia Internacional de Sensores de Estado Sólido y Actuadores*, donde se enfatizó y justificó que la Química y las Ciencias Biológicas son los principales campos de aplicación para la Microfluídica [33]. Las anteriores serían consideradas aplicaciones biológicas, también conocidos como "bioMEMS"; las aplicaciones no biológicas más relevantes se pueden resumir en sistemas de enfriamiento forzado para la última generación de microchips, los llamados "lab-on-a-chip", reportando una capacidad de enfriamiento de hasta  $100 W/cm^2$  [5]. Las aplicaciones de los fenómenos de transporte abordados por la Microfluídica son muy diversas en áreas de alta tecnología como la Biotecnología y la Ingeniería Biomédica, impresiones por microinyección de tinta, y gestión térmica de sistemas/dispositivos electrónicos. No obstante, la Microfluídica no es muy funcional por sí misma; requiere una interfaz de control robusta, además de avanzados protocolos de fabricación en miniatura para que los equipos y sistemas fluidicos sean funcionales y efectivos.

Actualmente, existe la tecnología necesaria para desarrollar sistemas en los que fuerzas motrices

son utilizadas para aprovechar los beneficios que nos pueden dar los dispositivos microfluídicos. Dichos fluidos, son generalmente bombeados, controlados y manipulados, utilizando volúmenes que van desde cientos de picolitros hasta cientos de microlitros. Microbombas, microválvulas, y micromezcladores se integran en dichos sistemas. En estos dispositivos se hace uso de partes móviles: haciendo delicada su operación y fabricación [23]. Para evitar lo anterior, una de las vertientes más recientes son las microbombas integradas sin partes móviles, utilizando el transporte electrocinético su mejor medio de control. Los efectos electrocinéticos son utilizados satisfactoriamente para el control de flujo y la manipulación de sustancias coloidales iónicas: inyección, separación, mezcla, concentración y reacción de muestras [9].

El estudio de los flujos electrocinéticos se remontan a las primeras observaciones realizadas por Reuss en 1809 [6], quien demostró que el agua puede percolar a través de un medio poroso mediante la aplicación de un campo eléctrico. Hay que tener presente que los sistemas coloidales están fuertemente relacionados con los efectos electrocinéticos, es decir, donde las partículas coloidales se mantienen en suspensión en el medio; formando una solución heterogénea. El planteamiento teórico formal para el estudio de estos flujos electrocinéticos requiere de la teoría de la doble capa eléctrica.

En 1870, el médico y físico alemán Hermann von Helmholtz desarrolló la teoría de la doble capa eléctrica (EDL por sus siglas en inglés), complementada más adelante por Guoy y Chapman; relaciona los parámetros eléctricos y los parámetros de flujo en un transporte electrocinético [34]. Cuando un fluido ionizado entra en contacto con una superficie que posee una carga eléctrica, la carga de la superficie tiene una fuerte influencia en la migración de cargas dentro del líquido cercano a la pared. Los iones presentes en el medio son fuertemente atraídos y forman una capa muy delgada -del orden del radio atómico- conocida como *capa de Stern* en la que los iones del líquido están emparejados con las cargas de la superficie. Las fuerzas de Coulomb presentes en esta capa debido a la diferencia de potencial son grandes en comparación con las presentes en el resto del fluido, inmovilizando las partículas en contacto con la pared, haciendo que para potenciales aplicados pequeños, se respete la condición de no deslizamiento.

La capa de Stern, a su vez, tiene una influencia en la distribución de cargas más alejadas de la pared; formando una capa significativamente más gruesa con un exceso de cargas del mismo signo, pero con una densidad de carga eléctrica menor a la capa de Stern. Esta capa es conocida como *capa difusa* o *capa de Guoy-Chapman*. Juntas, las dos capas anteriores forman la *doble capa eléctrica* (EDL) [23].

Opuesto a lo mencionado en la capa de Stern, la capa de Guoy-Chapman tiene una carga neta y puede ser transportada con la aplicación de un campo eléctrico. Consecuentemente, la frontera entre la capa de Stern y la capa difusa es llamada con frecuencia *superficie de corte* por el movimiento relativo que ocurre en ésta. El potencial en la pared es llamado *potencial de pared*  $\psi_o$  y el potencial en el plano de corte es llamado *potencial zeta*  $\zeta$ . La mayoría de los dispositivos microfluídicos tienden a fabricarse de vidrio y bases poliméricas que facilitan su fabricación a esas escalas, por lo que es común encontrar estructuras químicas con superficies deprotonadas o de carga negativas, dando a la EDL una carga positiva. El potencial puede resolverse mediante una relación de Poisson [23]:

$$\nabla^2\psi = -\frac{\rho_e}{\epsilon}$$

Al asumir una distribución de Boltzman entre la densidad de carga eléctrica  $\rho_e$  y el potencial  $\psi$ , y que el electrolito es simétrico, la ecuación del potencial se convierte en la ecuación de

Poisson-Boltzman [23]:

$$\frac{d^2\psi}{dy^2} = \frac{2Fzn_\infty}{\epsilon} \sinh\left(\frac{zF\psi}{kT}\right)$$

Claramente, es una ecuación no lineal, sin solución. Sin embargo, el espesor de la EDL es tan pequeño que el término del seno hiperbólico puede ser remplazado por el primer término de su expansión en series de Taylor (únicamente su argumento). Esta simplificación es conocida como aproximación de Debye-Hückel para el límite en EDL delgadas. Para lo anterior, se introduce un parámetro conocido como *longitud de Debye* que es la región en donde la transferencia de cargas y caída de potencial eléctrico es más relevante debido a la carga de la pared del canal. La longitud de Debye, referida como  $\lambda_D$  representa la dimensión de la EDL, en función de la energía iónica, determinada por la relación

$$\alpha_{ionic} = \frac{ez\zeta}{k_B T} \quad (1.1)$$

donde  $e$  es la carga elemental,  $z$  es la valencia de la sustancia iónica y  $\zeta$  es el potencial zeta, que es la energía por unidad de carga que se presenta en la frontera de la longitud de Debye con el bulto del fluido [12].

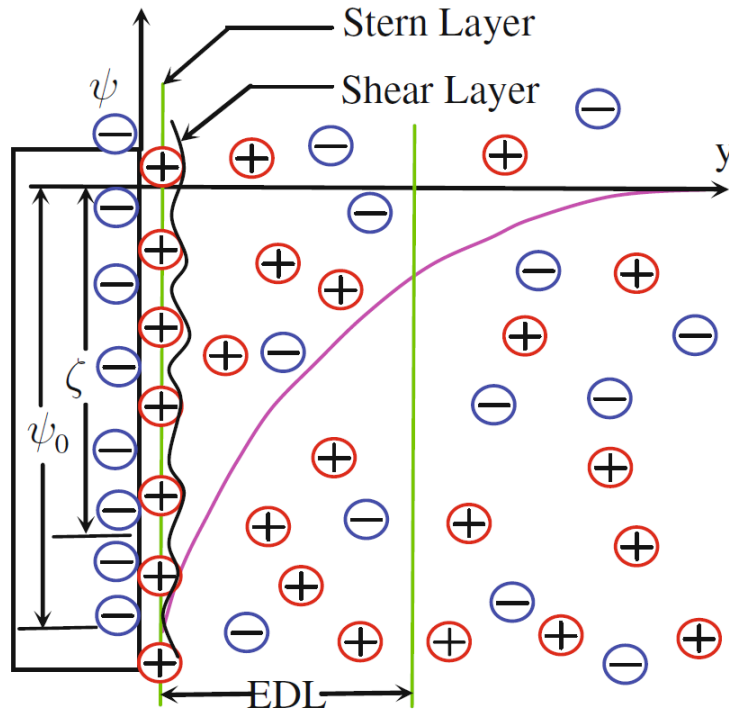


Figura 1.1: Doble capa eléctrica. La figura fue tomada de [5].

Los parámetros anteriores han servido como herramientas para plantear modelos matemáticos que modelan con precisión los fenómenos electrocinéticos que son ocupados para sustituir las partes móviles de los dispositivos microfluídicos mencionados anteriormente.

Existen cuatro tipos de efectos electrocinéticos [28]:

- *Electroósmosis*: Es el movimiento relativo de un líquido ionizado respecto a una superficie inmóvil con carga debido a la aplicación de un campo eléctrico. Véase la figura 1.2.

- *Electroforesis*: Es el movimiento relativo de una superficie cargada y macromoléculas respecto a un líquido estático debido a la aplicación de un campo eléctrico.
- *Potencial de transmisión*: Es el fenómeno de un campo eléctrico inducido por el movimiento relativo de un fluido ionizado a lo largo de una superficie inmóvil con carga (lo opuesto a electroósmosis).
- *Potencial de sedimentación*: Es el fenómeno de un campo eléctrico inducido por el movimiento relativo de partículas con carga respecto a un líquido estacionario (lo opuesto a electroforesis).

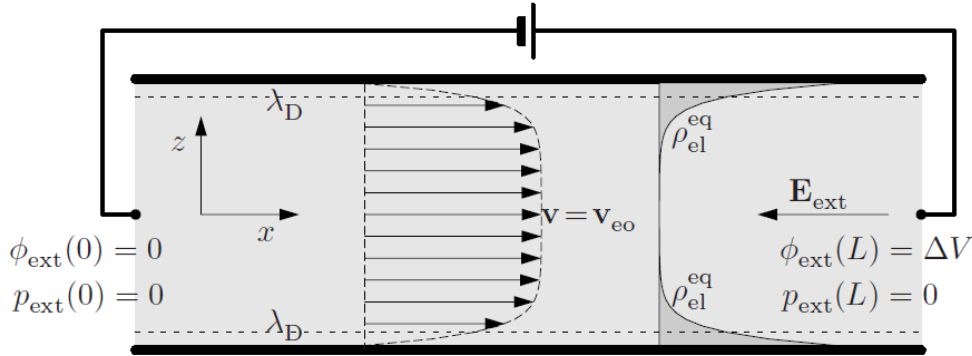


Figura 1.2: Esquema representativo del fenómeno de electroosmosis. La figura fue tomada de [14].

El presente trabajo aborda únicamente el fenómeno de la electroosmosis, que, con más detalle, se trata de una dispersión coloidal formada por un electrolito y partículas coloidales es contenido en un microcanal. Al entrar en contacto el electrolito con la pared del canal ocurre una transferencia de cargas y se forma una doble capa eléctrica (Electric Double Layer, EDL por sus siglas en inglés). La variación de la densidad de iones en esta capa obedece la distribución de Boltzman. Aplicar un campo eléctrico a lo largo de la superficie cargada (denotado en este trabajo como  $E$ ) provocará que fuerzas de Coulomb en los iones de la región de la doble capa eléctrica. El movimiento de los iones ocasionará el transporte del flujo por efecto viscoso, lo que resultará en un flujo electro-osmótico. Los flujos electroosmóticos se caracterizan por tener un bajo número de Reynolds. [12] El flujo electroosmótico es un fenómeno acoplado, puesto que existen efectos eléctricos, inerciales y térmicos.

Como mencionado con anterioridad, los efectos electrocinéticos son importantes para aplicaciones de transporte de masa en la escala micro y nano. Por ejemplo, la electroósmosis permite controlar el transporte de un fluido a través de campos eléctricos, eliminando así la necesidad de bombas mecánicas o válvulas con componentes móviles. Además, la comparación de un flujo transportado por electroósmosis y un flujo transportado generado por una diferencia de presiones revela diferencias importantes. Primero, el flujo volumétrico (por unidad de profundidad del canal) en un flujo electroosmótico varía linealmente con la altura del canal ( $H$ ), habilitando la posibilidad de inducir un flujo en microcanales con pequeños campos eléctricos. Sin embargo, el flujo volumétrico inducido por diferencias de presión varía con el cubo de la altura del canal ( $H^3$ ). Lo anterior indica que se requieren caídas de presión “irreales”, haciendo imprácticos a los flujos inducidos por diferencias de presiones para microcanales. Segundo, los perfiles de velocidad para flujos electroosmóticos son (en su mayor parte) uniformes (flujo tapón) [22],

mientras que en los flujos inducidos por una diferencia de presión los perfiles de velocidades son parabólicos. Ésta diferencia tiene efectos importantes en el transporte y dispersión en las aplicaciones de la microfluídica. Estos perfiles uniformes han podido ser observados por medio de la técnica de observación Micro-PIV.

Micro-PIV: También denominado  $\mu$ PIV por sus siglas en inglés Micro Particle Image Velocity. Es una técnica para observar y medir la velocidad instantánea de las partículas en un dispositivo microfluídico [7]. Consiste en implantar partículas sencillas de rastrear en el fluido en cuestión. Se busca que la densidad y viscosidad sean muy similares para no afectar el flujo del mismo. Por medio de una cámara digital con un chip de carga acoplada (CCD por sus siglas en inglés) y una alta resolución temporal (alta frecuencia de muestreo), se rastrean las partículas y con el método de diferencias finitas aproximan las velocidades instantáneas de las partículas trazadoras, que representan el perfil de velocidades del flujo en cuestión. Con la instrumentación apropiada se ha podido observar que, en efecto, la teoría de Helmholtz-Smoluchowski formulada para encontrar la velocidad de un flujo electroosmótico, también denominada velocidad de Helmholtz-Smoluchowski está en función de la conductividad del medio, el campo eléctrico aplicado, el potencial  $\zeta$  y la viscosidad. Está definida como [16]:

$$U_{HS} = -\frac{\epsilon E_x \zeta}{\eta} \quad (1.2)$$

Esta ecuación representa la máxima velocidad que puede alcanzar un flujo electrocinético. Para el presente trabajo, la viscosidad será tratada como una función de la temperatura, por lo que la velocidad electroosmótica característica será expresada como  $U_{HS_0}$  cuando la viscosidad  $\eta$  tenga el valor de la viscosidad característica  $\eta_0$ .

Recientemente, artículos como el de Lizardi *et. al.* [8] y el de Tang *et. al.* [13] han demostrado que la influencia de la temperatura en los fenómenos eléctricos no es despreciable; la densidad de carga eléctrica  $\rho_e$ , así como el potencial  $\zeta$  y la longitud de Debye  $\lambda_D$  son funciones de la temperatura. Los análisis de los flujos electroosmóticos con propiedades dependientes de la temperatura y condiciones de frontera no isotérmicas han alcanzado un importante lugar dentro de la comunidad científica para una mejor comprensión de los fenómenos electrocinéticos. A pesar de plantear y resolver el fenómeno de formas diferentes, todas las contribuciones anteriores toman en cuenta que el parámetro de la energía iónica  $\alpha_{ionic}$ , es constante si y sólo si la temperatura es uniforme.

En el presente caso de estudio, además de en las referencias citadas en este trabajo, el campo de temperatura de un flujo electroosmótico no es uniforme. Existen importantes gradientes de temperatura originados por la presencia del efecto Joule en conjunto con la presión. En consecuencia, los parámetros de energía adimensional, así como la longitud de Debye serán función de la temperatura. Una constante en los trabajos citados, así como en diferentes referencias de la literatura, es expresar la longitud de Debye por medio de su inverso  $\kappa$ ; es referido como parámetro de Debye-Hückel [12] y se define de la siguiente forma:

$$\kappa = \frac{1}{\lambda_D} = \sqrt{\frac{2z^2 e^2 n_\infty}{\epsilon k_B T}} \quad (1.3)$$

Para realizar un apropiado análisis de momentum y poder relacionar los efectos que tiene la presión en conjunto con los efectos eléctricos Adjari [2] propone usar la presión modificada  $p'$  adoptada por la mayor parte de las referencias citadas en este trabajo. La presión modificada

está en función de la presión en conjunto el parámetro de Debye-Hückel y el potencial inducido  $\psi$  debido a la transferencia de cargas.

$$p' = p - \frac{\epsilon\kappa^2\psi^2}{2} \quad (1.4)$$

Nótese que la presión modificada también podría estar en función de la temperatura, puesto que la longitud de Debye lo está, al igual que la conductividad eléctrica. Sin embargo, por razones de simplicidad para el presente trabajo, el parámetro  $\kappa$  en su forma adimensional será referido como  $\bar{\kappa}_0$ , refiriéndose al inverso de la longitud de Debye adimensional a una temperatura característica  $T_0$ . La conductividad será tratada como constante.

En la gran mayoría de los artículos y trabajos que abordan este tipo de problema, las ecuaciones son planteadas con ciertas consideraciones para facilitar la solución. Trabajos recientes como el de Vargas *et. al.* [4] hacen la consideración de expresar propiedades físicas dependientes de la temperatura como la viscosidad, el potencial  $\zeta$  y la conductividad eléctrica. Literatura especializada y trabajos como el de Venditti *et. al.* [27] demuestran que el potencial zeta está fuertemente influenciado por la temperatura. Complementando lo anterior, los artículos de Ramos *et. al.* [8] y Lizardi *et. al.* [15] demuestran, con diferentes métodos de solución, que la densidad de carga eléctrica  $\rho_e$  tiene también una fuerte influencia en el caudal, permitiendo así controlar la magnitud del mismo con la variación de parámetros térmicos característicos.

Las consideraciones anteriores conducen al presente trabajo a tomar en cuenta la dependencia de las propiedades físicas con la temperatura de las (ahora) variables: densidad de carga eléctrica  $\rho_e(T)$  y viscosidad  $\eta(T)$ .

La justificación de la tesis y el argumento principal es que para un flujo inducido por una diferencia de presiones para una escala macroscópica es difícil observar cambios importantes en la temperatura debido a la disipación viscosa que ocurre por el flujo mismo. Es necesario que el fluido viaje largas distancias para que se pueda apreciar un cambio en la temperatura, y, aún así; sería irrelevante para el análisis global del flujo. Sin embargo, en el caso de los flujos electroosmóticos es necesaria la aplicación de un campo eléctrico, que induce una corriente en el medio y debido a esto el efecto Joule está presente en el fenómeno, por ende, los efectos térmicos no pueden despreciarse, y a su vez, los efectos que tienen los gradientes de temperatura en las propiedades físicas del medio tampoco son despreciables. Si el medio tuviera una alta conductividad térmica y el efecto convectivo elevado, podrían asumirse condiciones isotérmicas cuando el flujo ya ha alcanzado el estado permanente, sin embargo, es posible que los gradientes de temperatura que se producen por una baja difusividad térmica del medio tengan repercusiones importantes en el flujo.

Es posible encontrar soluciones numéricas para las variables que conforman el conjunto de ecuaciones gobernantes de un flujo electroosmótico: si se asignan valores conformes a la realidad de las propiedades físicas del sistema y condiciones de frontera para controlar la magnitud de cada uno de los fenómenos involucrados, entonces es posible determinar la importancia de los efectos termoviscosos para cada caso. Así, el objetivo fundamental del análisis presente es determinar si los efectos térmicos tienen una influencia significativa en el comportamiento del flujo debido a los gradientes de viscosidad que inducen; de ser así, identificar los casos en los que no pueden ser despreciados.



# Capítulo 2

## Planteamiento del problema

En la Figura 2.1 se describe gráficamente el modelo físico a estudiar. Es un sistema bidimensional (2D) con un sistema de coordenadas rectangular  $(x, y)$ . El origen se sitúa al centro del canal en dirección vertical y en el extremo izquierdo del mismo. Aquí, se asume un flujo laminar [12], [3] de un fluido newtoniano. El canal tiene una altura de  $2H$  y una longitud  $L$ , de tal forma que  $H \ll L$ . El espesor de las paredes del canal es mucho menor que  $H$ , y se asume que es un excelente conductor de calor. Además, el flujo es forzado a través de fuerzas electrosmóticas que se inducen por la aplicación de un campo eléctrico  $E_0$  en la dirección longitudinal del canal y está dado por  $E_0 = \phi_0/L$ , donde  $\phi_0$  es el valor del potencial eléctrico aplicado. Ambos extremos del microcanal están conectados con dos sumideros, cuya presión y temperatura son  $P_0$  y  $T_0$  respectivamente. El flujo de calor en las fronteras en el intervalo  $0 \leq x \leq L$  están controlados por un proceso convectivo conocido.

Estas pérdidas de calor provocan que exista un gradiente de temperaturas en dirección longitudinal y transversal. Debido a que las paredes del microcanal están cargadas negativamente, existe una delgada capa conocida como “Doble capa eléctrica” (EDL) [5] de longitud  $\lambda_D$ . El potencial  $\zeta$  entre la superficie cargada y la solución electrolítica permanece constante. La capa de Stern, en donde se encuentra el potencial  $\zeta$ , es mucho más delgada que la altura del canal  $\lambda_D \ll 2H$  [12], por lo que se asume que este potencial se encuentra en las paredes ( $y = \pm H$ ). Se asume que la densidad de carga eléctrica  $\rho_e$  y la viscosidad  $\eta$  son funciones de la temperatura. La conductividad térmica  $k$  y la conductividad eléctrica  $\epsilon$  permanecen constantes.

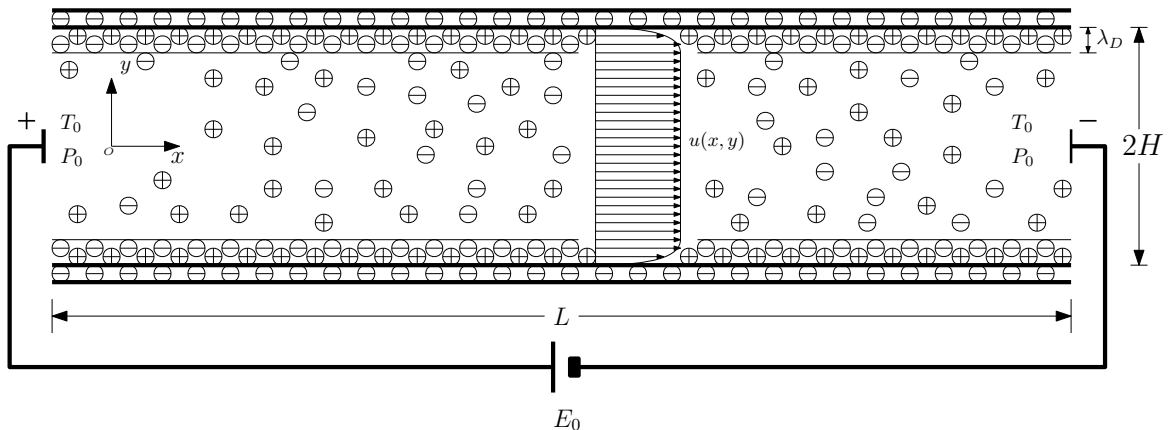


Figura 2.1: Flujo electrosmótico en un microcanal

## 2.1. Ecuaciones gobernantes

### Ecuación de continuidad

La ecuación de conservación de masa en forma diferencial [21] tiene la siguiente forma:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j} + \rho \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0$$

Para el análisis presente se considera un flujo completamente desarrollado, es decir, en estado estable; por lo que las derivadas temporales son iguales a cero. Adicionalmente se considera un flujo incompresible, por lo que los cambios espaciales de la densidad también son iguales a cero. Así entonces:

$$\frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0$$

Desarrollando las derivadas parciales para el caso de un análisis bidimensional, la ecuación toma la siguiente forma:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.1)$$

### Ecuaciones de momentum

Por razones de simplicidad, el desarrollo de la modificación de la ecuación de Navier-Stokes para un fluido con viscosidad variable se encuentra en el Apéndice A.

Las ecuaciones desarrolladas son las siguientes:

$$\rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + 2 \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \rho_e E_x \quad (2.2)$$

$$\rho \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \eta \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + 2 \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \rho_e E_y \quad (2.3)$$

### Ecuación de la energía

La ecuación de la energía en forma diferencial es [21]:

$$\rho \frac{DU}{Dt} = tr(\sigma \mathbf{D}) - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho q_g$$

El término  $tr(\sigma \mathbf{D})$  se refiere al trabajo mecánico que está ingresando al sistema, para el caso particular del análisis, éste término es cero. Además aparecen los términos de disipación viscosa, que es despreciable en términos de orden de magnitud en comparación con el Efecto Joule, por lo que también se desprecia. Desarrollando la derivada material con la consideración de que es un análisis en estado estable:

$$\rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathcal{U} = -\nabla \cdot \mathbf{q} + \rho q_g$$

El cambio en la energía interna  $\nabla \mathcal{U}$ , donde  $dU = m C_p dT^1$  [26] puede interpretarse como el gradiente espacial que presenta el campo escalar de temperaturas, así:

---

<sup>1</sup>Esta expresión está en unidades de energía, pero para el caso de la ecuación, ésta se expresa en energía por unidad de volumen  $\frac{m}{V} = \rho$

$$\rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathcal{U} = \rho v_j \frac{C_p \partial T}{\partial x_j}$$

Si el calor específico es constante:

$$\rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathcal{U} = \rho C_p v_j \frac{\partial T}{\partial x_j}$$

Desarrollando la suma:

$$\rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathcal{U} = \rho C_p \left( u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right)$$

El término  $\nabla \cdot q$  representa la divergencia del flujo de calor presente en el sistema. El flujo de calor  $q$  es debido a conducción, por la Ley de Fourier [11]:

$$q = -k \frac{\partial T}{\partial x_i}$$

Su divergencia es:

$$\nabla \cdot q = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( -k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right)$$

Si se considera una conductividad térmica  $k$  constante:

$$\nabla \cdot q = -k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_i} \right)$$

Si se desarrolla la suma para el caso de coordenadas rectangulares en el caso bidimensional:

$$\nabla \cdot q = -k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)$$

El último término  $q_g$  se refiere al calor generado. Como en un flujo electroosmótico se aplica un campo eléctrico, debido a la resistencia del electrolito y la corriente eléctrica, el Efecto Joule está presente. El calor por unidad de volumen debido al efecto Joule está definido como [12]:

$$q_g = \frac{I^2}{\sigma}$$

Donde  $I$  es la corriente eléctrica, que, para un flujo electroosmótico es:

$$I = \rho_e U_{HS} + \sigma \|\mathbf{E}\|$$

Pero, en el caso de EDL muy delgadas, el término  $\rho_e$  se desvanece en la mayor parte de la región de análisis, entonces se puede aproximar:

$$\rho_e U_{HS} + \sigma \|\mathbf{E}\| \approx \sigma \|\mathbf{E}\|$$

Y así, el calor generado debido al Efecto Joule es:

$$q_g = \sigma \|\mathbf{E}\|^2$$

La ecuación de la energía toma la siguiente forma final:

$$\rho C_p \left( u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \sigma \|\mathbf{E}\|^2 \quad (2.4)$$

### Ecuaciones de campo eléctrico y conservación de carga

El campo eléctrico puede escribirse como (menos) el gradiente del potencial total [14], que, en el caso particular de un flujo electroosmótico sería la suma del potencial aplicado y el potencial inducido.

$$\Phi = \phi(x) + \psi(y)$$

Aplicando el gradiente, entonces:

$$E_x = -\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial x} = -\frac{d\phi}{dx} \quad (2.5)$$

$$E_y = -\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y} = -\frac{d\psi}{dy} \quad (2.6)$$

El potencial eléctrico total satisface la ecuación de Poisson [19]:

$$\nabla^2 \Phi = -\frac{\rho_e}{\epsilon}$$

Donde  $\nabla^2$  es el operador laplaciano y  $\epsilon$  es la permitividad del medio. Entonces si se aplica el operador al caso bidimensional de coordenadas rectangulares:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = -\frac{\rho_e}{\epsilon}$$

Entonces:

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} + \frac{d^2 \psi}{dy^2} = -\frac{\rho_e}{\epsilon} \quad (2.7)$$

El campo de potencial eléctrico debido a un potencial aplicado se puede resolver con la ecuación diferencial de Laplace [12]:

$$\nabla^2 \phi = 0$$

Con lo anterior se obtiene la ecuación:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

Para el caso de estudio, el campo eléctrico aplicado depende únicamente de  $x$ , entonces:

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} = 0 \quad (2.8)$$

### Modelo de viscosidad

La viscosidad es una propiedad que varía en función de la presión y la temperatura, pero los gradientes de presión deben ser muy grandes para conseguir que los cambios de viscosidad sean significativos. Existen muchos modelos para expresar a la viscosidad en función de la temperatura.

Para el presente trabajo, se escoge un modelo de Arrhenius modificado, citado en trabajos como el de Haj-Kacem [25] y referido en la literatura especializada de la Asociación Francesa de Físico-Química [18]. El mismo modelo puede ser encontrado en el libro de Mezger [32].

$$\eta = Ae^{\left(\frac{Ea}{RT}\right)} \quad (2.9)$$

Donde  $\eta$  es la viscosidad,  $A$  es una constante con unidades de viscosidad,  $Ea$  la energía de activación,  $R$  es la constante universal y  $T$  es la temperatura.

Se propone el cambio de variable

$$\theta = \frac{T - T_0}{\Delta T_c} \quad (2.10)$$

$\Delta T_c$  es el incremento característico de temperatura<sup>2</sup>. Por lo tanto:

$$T = \Delta T_c \theta + T_0$$

Si

$$\alpha = \frac{\Delta T_c}{T_0} \quad (2.11)$$

entonces:

$$\eta = Ae^{\frac{Ea}{RT_0(1+\alpha\theta)}}$$

Para descomponer el argumento de la exponencial se propone una función  $F(\theta)$  de la siguiente manera:

$$\frac{Ea}{RT_0(1+\alpha\theta)} = \frac{Ea}{RT_0} + F(\theta)$$

Así la función  $F(\theta)$

$$F(\theta) = -\frac{Ea}{RT_0} \left( \frac{\alpha\theta}{1+\alpha\theta} \right)$$

Se propone el parámetro adimensional  $\gamma$ :

$$\gamma = \frac{Ea}{RT_0} \quad (2.12)$$

Con las consideraciones anteriores, el argumento de la exponencial toma la forma

$$\frac{Ea}{RT_0(1+\alpha\theta)} = \frac{Ea}{RT_0} - \alpha\gamma \left( \frac{\theta}{1+\alpha\theta} \right)$$

La ecuación de la viscosidad entonces

$$\eta = Ae^{\frac{Ea}{RT_0} - \alpha\gamma \left( \frac{\theta}{1+\alpha\theta} \right)}$$

Que se puede descomponer como el producto de dos exponenciales

$$\eta = Ae^{\frac{Ea}{RT_0}} e^{-\alpha\gamma \left( \frac{\theta}{1+\alpha\theta} \right)}$$

Nótese que cuando  $T = T_0$ , sustituyendo en la ecuación 2.9, se obtiene la viscosidad a la temperatura de referencia  $T_0$ . Que, para el presente trabajo, se denominará  $\eta_0$ . La ecuación entonces toma la forma

$$\eta = \eta_0 e^{-\alpha\gamma \left( \frac{\theta}{1+\alpha\theta} \right)}$$

---

<sup>2</sup>Se obtiene en la sección 2.3.

Se propone una variable adimensional como el producto de  $\alpha$  y  $\gamma$ :

$$\bar{\gamma} = \alpha\gamma \quad (2.13)$$

La exponencial se puede expresar como una expansión en series de Taylor:

$$\eta_0 e^{-\bar{\gamma}\left(\frac{\theta}{1+\alpha\theta}\right)} = \eta_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-\bar{\gamma}^n \left(\frac{\theta}{1+\alpha\theta}\right)^n}{n!}$$

Para la región de estudio, los primeros dos términos son los más relevantes, entonces, el modelo linealizado de la ecuación de viscosidad:

$$\eta = \eta_0 \left(1 - \bar{\gamma} \frac{\theta}{1 + \alpha\theta}\right) \quad (2.14)$$

## 2.2. Sistema de ecuaciones y condiciones de frontera

Las ecuaciones gobernantes se obtuvieron en la sección anterior, conforman un sistema de ecuaciones diferenciales parciales, algunas no lineales, que describen al fenómeno.

La ecuación 2.7 puede simplificarse sustituyendo la ecuación 2.8, ésta simplificación se considera para expresar la ecuación en su forma adimensional más adelante.

Del sistema de ecuaciones, las variables de las que se busca obtener la solución numérica son:  $u$ ,  $v$ ,  $p$ ,  $\phi$ ,  $\psi$  y  $T$ . Para obtener las soluciones es necesario establecer las condiciones de frontera. Primero, por la condición de no deslizamiento, la velocidad en todos los puntos en la superficie del canal es igual a cero. La temperatura y presión en los extremos del canal corresponden a la temperatura del sumidero  $T_0$  y  $P_0$  respectivamente. Debido a las Leyes de Kirchoff, la suma de potenciales en una malla cerrada debe ser igual a cero [29], por lo que el potencial aplicado en el extremo derecho del canal es igual a cero. El potencial  $\psi$  en el punto donde termina la capa de Stern es el potencial  $\zeta$ , pero se asume muy delgada, entonces el potencial se modela como si se encontrara justo en la pared del canal. La extracción de calor por las paredes es conocida y se modela con la ley de enfriamiento de Newton. Adicionalmente, se considera un fenómeno completamente simétrico respecto al eje  $x$ , y para garantizar esta simetría se proponen condiciones de frontera de Neumann [11]. El sistema de ecuaciones con sus respectivas condiciones de frontera es el siguiente:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.1)$$

$$\rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + 2 \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \rho_e E_x \quad (2.2)$$

$$\rho \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \eta \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + 2 \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \rho_e E_y \quad (2.3)$$

$$\rho C_p \left( u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \sigma \|\mathbf{E}\|^2 \quad (2.4)$$

$$E_x = -\frac{d\phi}{dx} \quad (2.5)$$

$$E_y = -\frac{d\psi}{dy} \quad (2.6)$$

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + \frac{d^2\psi}{dy^2} = -\frac{\rho_e}{\epsilon} \quad (2.7)$$

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = 0 \quad (2.8)$$

$$u(x, y = \pm H) = 0 = v(x, y = \pm H) = 0 \quad (2.15)$$

$$T(x = 0, y) = T(x = L, y) = T_0 \quad (2.16)$$

$$p(x = 0, y) = p(x = L, y) = P_0 \quad (2.17)$$

$$\phi(x = 0) = \phi_0, \phi(x = L) = 0 \quad (2.18)$$

$$\psi(x, y = \pm H) = \zeta \quad (2.19)$$

$$y = \pm H : -k\frac{\partial T}{\partial y} = h(T - T_\infty) \quad (2.20)$$

$$y = 0 : \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0 \quad (2.21)$$

## 2.3. Adimensionalización de las ecuaciones

El sistema de ecuaciones obtenido en la sección anterior es altamente no lineal. Es complicado obtener funciones analíticas que resuelvan el problema sin hacer aproximaciones como un análisis asintótico o teoría de lubricación, sin embargo, es posible resolverlo numéricamente sin estas consideraciones.

Para hacer la resolución numérica más eficiente, se manipulan las ecuaciones para expresarlas en términos de parámetros adimensionales<sup>3</sup>, que también serán útiles para comprender la física del problema y la importancia de cada término en las ecuaciones. Es necesario obtener variables adimensionales de longitud, velocidad, potencial, campo eléctrico, temperatura y presión para adimensionalizar las ecuaciones. En ésta sección las variables adimensionales son determinadas con la herramienta de un análisis de escalas. En el que se comparan magnitudes de diferentes fenómenos presentes en un flujo electroosmótico para determinar los parámetros correspondientes a cada una de las variables originales.

### Variables adimensionales de longitud

Las variables  $x$  y  $y$  se adimensionalizan con las longitudes características correspondientes a cada dirección  $L$  y  $H$ .

$$\chi = \frac{x}{L} \quad (2.22)$$

$$Y = \frac{y}{H} \quad (2.23)$$

---

<sup>3</sup>Algunos de ellos (2.10), (2.11) y (2.12) ya fueron propuestos en la sección 2.1.

Adicionalmente podemos proponer otra variable adimensional que nos permita observar la relación que existe entre la longitud y el alto del canal. Si es un canal muy largo respecto a lo alto, entonces esta variable tenderá a disminuir.

$$\varepsilon = \frac{H}{L} \quad (2.24)$$

### Variables adimensionales de velocidad

La velocidad en la dirección  $x$  se adimensionaliza con la velocidad característica de un flujo electroosmótico, la velocidad de Helmholtz-Smoluchowski [12], definida en la ecuación 1.2. La velocidad de Helmholtz-Smoluchowski es función de la viscosidad, que, para el presente análisis no es constante. Por lo tanto, para facilitar la adimensionalización, se escoge un valor característico de  $U_{HS}$  para la viscosidad de referencia  $\eta_0$ .<sup>4</sup>

$$U_{HS_0} = -\frac{\epsilon E_x \zeta}{\eta_0} \quad (2.25)$$

$$\bar{u} = \frac{u}{U_{HS_0}} \quad (2.26)$$

De la ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Para que la ecuación se cumpla, ambos términos deben tener el mismo orden de magnitud.

$$\frac{\partial u}{\partial x} \sim \frac{\partial v}{\partial y}$$

Y por lo tanto:

$$\frac{U_{HS_0}}{L} \sim \frac{U_{car_y}}{H}$$

Despejando la velocidad característica en  $y$ :

$$U_{car_y} = \frac{HU_{HS_0}}{L}$$

La velocidad adimensional en  $y$  sería entonces la velocidad  $v$  entre la velocidad característica.

$$\bar{v} = \frac{vL}{HU_{HS_0}} \quad (2.27)$$

### Variables adimensionales de potencial eléctrico

El potencial eléctrico  $\phi$  se divide entre el potencial eléctrico aplicado  $\phi_0$ , quedando el potencial adimensional de la siguiente manera:

$$\bar{\phi} = \frac{\phi}{\phi_0} \quad (2.28)$$

Para el potencial inducido  $\psi$ , se ocupa el potencial zeta.

$$\bar{\psi} = \frac{\psi}{\zeta} \quad (2.29)$$

---

<sup>4</sup>Véase la sección 2.1.



Para expresar la relación que existe entre el potencial aplicado e inducido se introduce el parámetro adimensional:

$$\varsigma = \frac{\phi_0}{\zeta} \quad (2.30)$$

### Variables dimensionales de campo eléctrico

El campo eléctrico característico en la dirección  $x$  es el potencial eléctrico aplicado  $\phi_0$  por la distancia en la que se aplica  $L$ , entonces:

$$E_0 = \frac{\phi_0}{L};$$

El campo eléctrico en su forma adimensional será el cociente del campo eléctrico y el campo eléctrico característico  $E_0$ .

$$\bar{E}_x = \frac{L}{\phi_0} E_x \quad (2.31)$$

Análogamente, el campo eléctrico característico para la dirección  $y$  es entonces:

$$E_{y0} = \frac{\zeta}{H}$$

Y la variable adimensional del campo eléctrico en dirección  $y$ :

$$\bar{E}_y = \frac{H}{\zeta} E_y \quad (2.32)$$

### Variables dimensionales de temperatura

El cambio de temperatura característico se obtiene a partir de un análisis con la Primera Ley de la Termodinámica. Se establece el volumen de control en las fronteras exteriores del canal.

$$\dot{m}C_p\Delta T_c \sim \sigma E_0^2 w 2HL + 2q_0 wL$$

Desarrollando el flujo másico como velocidad por densidad por área y el calor con la Ley de Fourier:

$$\rho U_{HS_0} 2HwC_p\Delta T_c \sim \sigma E_0^2 w 2HL - 2k \frac{\Delta T_c}{H} wL$$

El factor  $2w$  es una constante en todos los términos de la ecuación, por lo que se puede factorizar y eliminar de la ecuación. Agrupando los términos comunes con la variable de interés:

$$\Delta T_c \left( \rho U_{HS_0} H C_p + k \frac{L}{H} \right) \sim \sigma E_0^2 H L$$

Dividiendo ambos lados de la ecuación entre  $L$  y utilizando la variable  $\varepsilon$  definida en la ecuación (2.24):

$$\Delta T_c \left( \varepsilon \rho U_{HS_0} C_p + \frac{k}{H} \right) \sim \sigma E_0^2 H$$

El término  $\varepsilon$  es muy pequeño, y, la conductividad térmica  $k$  está dividida entre  $H$  que también es muy pequeño. Lo que se deduce de lo anterior es que el término de conducción es mucho más importante en términos de magnitud que el término de convección.

$$\frac{k}{H} \gg \varepsilon \rho U_{HS_0} C_p$$

Con la consideración anterior:

$$\varepsilon \rho U_{HS_0} C + \frac{k}{H} \approx \frac{k}{H}$$

Finalmente:

$$\Delta T_c = \frac{\sigma E_0^2 H^2}{k} \quad (2.33)$$

### Variable adimensional de presión

El gradiente de presión en dirección  $x$  es del orden del campo eléctrico aplicado en esta dirección.

$$\rho_e E_0 \sim \frac{\partial p}{\partial x}$$

A su vez, las fuerzas eléctricas son del orden de los efectos viscosos en  $y$ .

$$\rho_e E_0 \sim \eta_0 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Entonces, el gradiente de presión en  $x$  también es del orden de los efectos viscosos en  $y$ :

$$\frac{\partial p}{\partial x} \sim \eta_0 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Esto significa que

$$\frac{\Delta p}{L} \sim \eta_0 \frac{U_{HS_0}}{H^2}$$

Por lo tanto  $\Delta p$ , que es el cambio de presión característico:

$$\Delta p \sim \frac{\eta_0 U_{HS_0} L}{H^2}$$

La variable adimensional será:

$$\Pi = \frac{p' - p_0}{\Delta p}$$

Donde  $p'$  es conocida como la presión modificada, referida en la ecuación 1.4. Es importante resaltar que al introducir este parámetro, las ecuaciones de momentum están más entrelazadas con los fenómenos eléctricos, además de las evidentes fuerzas de Coulomb debidas al campo eléctrico aplicado. Finalmente, la variable adimensional de presión:

$$\Pi = \frac{(p' - p_0) H^2}{\eta_0 U_{HS_0} L} \quad (2.34)$$

## 2.4. Sistema de ecuaciones y condiciones de frontera en su forma adimensional

Las variables adimensionales que se obtuvieron en la sección 2.3 se sustituyen en las ecuaciones planteadas en la sección 2.2.

A continuación se enlistan dichas variables.

$$\chi = \frac{x}{L}, \quad Y = \frac{y}{H}, \quad \varepsilon = \frac{H}{L}, \quad \bar{u} = \frac{u}{U_{HS_0}}, \quad \bar{v} = \frac{vL}{HU_{HS_0}}, \quad \bar{\phi} = \frac{\phi}{\phi_0}, \quad \bar{\psi} = \frac{\psi}{\zeta}$$

$$\Delta T_c = \frac{\sigma E_0^2 H^2}{k}, \quad \Pi = \frac{(p' - p_0)H^2}{\eta_0 U_{HS_0} L}, \quad \theta = \frac{T - T_0}{\Delta T_c}$$

Adicionalmente se consideran los siguientes parámetros adimensionales:

$$\varsigma = \frac{\phi_0}{\zeta}, \quad Re_0 = \frac{\rho U_{HS_0} H}{\eta_0}, \quad Pe_0 = \frac{\rho C_p U_{HS_0} H}{k}, \quad \bar{\kappa}_0 = \kappa_0 H,$$

$$\bar{\kappa}_0^2 = \frac{2z^2 e^2 n_\infty}{\epsilon k_B T_0}, \quad \alpha = \frac{\Delta T_c}{T_0}, \quad \gamma = \frac{Ea}{RT_0}, \quad \bar{\gamma} = \alpha \gamma$$

Por motivos de simplicidad, las adimensionalizaciones detalladas de las ecuaciones se encuentran en el Apéndice B.

Para que exista congruencia con las ecuaciones, las condiciones de frontera también deben expresarse en su forma adimensional.

### Condición de no deslizamiento

La condición original (2.15):

$$u(x, y = \pm H) = v(x, y = \pm H) = 0$$

En su forma adimensional:

$$\bar{u}(\chi, Y = \pm 1) = \bar{v}(\chi, Y = \pm 1) = 0 \quad (2.35)$$

### Condición de temperatura

La condición original (2.16):

$$T(x = 0, y) = T(x = L, y) = T_0$$

En su forma adimensional:

$$\theta(\chi = 0, Y) = \theta(\chi = 1, Y) = 0 \quad (2.36)$$

### Condición de presión

La condición original (2.17):

$$p(x = 0, y) = p(x = L, y) = P_0$$

En su forma adimensional:

$$\Pi(\chi = 0, Y) = \Pi(\chi = 1, Y) = 0 \quad (2.37)$$

### Condición de Kirchoff

La condición original (2.18):

$$\phi(x = 0) = \phi_0, \phi(x = L) = 0$$

En su forma adimensional:

$$\bar{\phi}(\chi = 0) = 1, \bar{\phi}(\chi = 1) = 0 \quad (2.38)$$

### Condición de potencial $\zeta$

La condición original (2.19):

$$\psi(x, y = \pm H) = \zeta$$

En su forma adimensional:

$$\bar{\psi}(\chi, Y = \pm 1) = 1 \quad (2.39)$$

### Condición de convección

La condición original (2.20):

$$y = \pm H : -k \frac{\partial T}{\partial y} = h(T - T_\infty)$$

En su forma adimensional:

$$\begin{aligned} -\frac{k\Delta T_c}{H} \frac{\partial \theta}{\partial Y} &= h(\Delta T_c \theta + T_0 - T_\infty) \\ \frac{\partial \theta}{\partial Y} &= -\left( \frac{hH}{k} \theta + \frac{h(T_0 - T_\infty)H}{\sigma E_0^2 H^2} \right) \\ \frac{\partial \theta}{\partial Y} &= -\left( \frac{hH}{k} \theta + \frac{h(T_0 - T_\infty)}{\sigma E_0^2 H} \right) \\ \frac{\partial \theta}{\partial Y} &= -\frac{h(T_0 - T_\infty)}{\sigma E_0^2 H} \left( \frac{\sigma E_0^2 H^2}{k(T_0 - T_\infty)} \theta + 1 \right) \end{aligned}$$

Se introducen dos parámetros adimensionales:

$$\Lambda = \frac{h(T_0 - T_\infty)}{\sigma E_0^2 H} \quad (2.40)$$

Y

$$\beta = \frac{\sigma E_0^2 H^2}{k(T_0 - T_\infty)} \quad (2.41)$$

El parámetro  $\Lambda$  compara los efectos de convección contra los efectos de generación, éste contrasta qué tanta extracción de calor hay a través de la pared en comparación con lo que se genera debido al efecto Joule. Por otro lado, el parámetro  $\beta$  compara los efectos de generación contra los efectos de conducción, éste contrasta qué tanta de la energía generada en el canal llega a las paredes debido a la conducción térmica del fluido para poder ser extraída por convección. Finalmente:

$$Y = \pm H : \frac{\partial \theta}{\partial Y} = -\Lambda(1 + \beta\theta) \quad (2.42)$$

Ahora, ésta condición de frontera está comparando efectos conductivos y convectivos, por lo que el número adimensional de Biot puede ser introducido en la ecuación 2.42 de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\theta}{\partial Y} &= -\left(\frac{hH}{k}\theta + \frac{h(T_0 - T_\infty)}{\sigma E_0^2 H}\right) \\ &= -(Bi\theta + \Lambda)\end{aligned}$$

Entonces la condición de frontera de la ecuación 2.42 también puede expresarse en términos del número de Biot como:

$$Y = \pm H : \frac{\partial\theta}{\partial Y} = -(Bi\theta + \Lambda) \quad (2.43)$$

### Condición de simetría

La condición original (2.21):

$$y = 0 : \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0$$

En su forma adimensional:

$$Y = 0 : \frac{\partial \bar{u}}{\partial Y} = \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial Y} = 0 \quad (2.44)$$

Éste nuevo sistema gobierna el mismo fenómeno, con la particularidad de que algunos parámetros adimensionales (2.12, 2.40, 2.41) podrán ser modificados con facilidad en la resolución numérica, que será equivalente a modificar los valores de las propiedades físicas del medio y darle un "peso" numérico a cada uno de los parámetros y fenómenos. Tomando en cuenta, las variables adimensionales anteriormente, el sistema de ecuaciones adimensional queda de la siguiente forma:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \chi} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial Y} = 0 \quad (B.1)$$

$$\begin{aligned}\varepsilon Re_0 \left( \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \chi} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial Y} \right) &= -\frac{\partial \Pi}{\partial \chi} - \bar{\kappa}_0^2 \frac{\alpha}{2\varsigma} \frac{\bar{\psi}^2}{(1 + \alpha\theta)^2} \frac{\partial \theta}{\partial \chi} \\ &+ \left( 1 - \bar{\gamma} \frac{\theta}{1 + \alpha\theta} \right) \left( \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \chi^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial Y^2} \right) \\ &- 2\bar{\gamma} \varepsilon^2 \frac{1}{(1 + \alpha\theta)^2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \chi} \frac{\partial \theta}{\partial \chi} \\ &- \bar{\gamma} \frac{1}{(1 + \alpha\theta)^2} \left( \varepsilon^2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial \chi} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial Y} \right) \frac{\partial \theta}{\partial Y} \\ &- \bar{\kappa}_0^2 \frac{\bar{\psi}}{(1 + \alpha\theta)} \frac{d\bar{\phi}}{d\chi}\end{aligned} \quad (B.2)$$

$$\begin{aligned}\varepsilon^3 Re_0 \left( \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \chi} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial Y} \right) &= -\frac{\partial \Pi}{\partial Y} - \bar{\kappa}_0^2 \frac{\alpha}{2\varsigma} \frac{\bar{\psi}^2}{(1 + \alpha\theta)^2} \frac{\partial \theta}{\partial Y} \\ &+ \varepsilon^2 \left( 1 - \bar{\gamma} \frac{\theta}{1 + \alpha\theta} \right) \left( \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \chi^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial Y^2} \right) \\ &- 2\varepsilon^2 \bar{\gamma} \frac{1}{(1 + \alpha\theta)^2} \frac{\partial \bar{v}}{\partial Y} \frac{\partial \theta}{\partial Y} \\ &- \varepsilon^2 \bar{\gamma} \frac{1}{(1 + \alpha\theta)^2} \left( \varepsilon^2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial \chi} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial Y} \right) \frac{\partial \theta}{\partial \chi}\end{aligned} \quad (B.3)$$

$$\varepsilon P e_0 \left( \bar{u} \frac{\partial \theta}{\partial \chi} + \bar{v} \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right) = \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial \chi^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} + \left( \frac{d\bar{\phi}}{d\chi} \right)^2 + \frac{1}{\varepsilon^2 \varsigma^2} \left( \frac{d\bar{\psi}}{dY} \right)^2 \quad (\text{B.4})$$

$$\frac{d^2 \bar{\psi}}{dY^2} = \frac{\bar{\kappa}_0^2}{1 + \alpha \theta} \bar{\psi} \quad (\text{B.7})$$

$$\frac{d^2 \bar{\phi}}{d\chi^2} = 0 \quad (\text{B.8})$$

La dependencia de  $\bar{\Phi}$  de la variable  $\bar{\psi}$  fue omitida debido a que en el presente caso de estudio, el campo aplicado  $\bar{\phi}$  depende únicamente de la dirección  $\chi$  y la variable  $\bar{\psi}$  depende únicamente de la dirección  $Y$ . Con sus respectivas condiciones de frontera:

$$\bar{u}(\chi, Y = \pm 1) = \bar{v}(\chi, Y = \pm 1) = 0 \quad (\text{2.35})$$

$$\theta(\chi = 0, Y) = \theta(\chi = 1, Y) = 0 \quad (\text{2.36})$$

$$\Pi(\chi = 0, Y) = \Pi(\chi = 1, Y) = 0 \quad (\text{2.37})$$

$$\bar{\phi}(\chi = 0) = 1, \bar{\phi}(\chi = 1) = 0 \quad (\text{2.38})$$

$$\bar{\psi}(\chi, Y = \pm 1) = 1 \quad (\text{2.39})$$

$$Y = \pm H : \frac{\partial \theta}{\partial Y} = -\Lambda(1 + \beta \theta) \quad (\text{2.42})$$

$$Y = 0 : \frac{\partial \bar{u}}{\partial Y} = \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial Y} = 0 \quad (\text{2.44})$$

Las ecuaciones de campo eléctrico son omitidas por razones de simplicidad y eficiencia en la resolución numérica. Todas las ecuaciones son expresadas en términos de parámetros característicos adimensionales que describen el flujo. Debido a esto, los análisis de escalas deben ser coherentes con la física del problema.

Nótese por ejemplo, que en la ecuación adimensional de momentum en  $x$  (B.2) aparece un  $\varepsilon$  en los efectos inerciales del flujo, lo que es coherente con la física porque los flujos electroosmóticos están dominados en su mayor parte por los efectos viscosos. Y, como  $H \ll L$  implica que  $\varepsilon \ll 1$ . Nótese ahora que en los términos inerciales de la ecuación adimensional de momentum en  $y$  (B.3), aparece un  $\varepsilon^3$ , comparando los términos inerciales en dirección vertical y dirección horizontal ( $\varepsilon^3 \ll \varepsilon$ ), lo que es físicamente coherente, ya que el flujo se está moviendo principalmente en la dirección horizontal, y por lo tanto, sus efectos inerciales en esta dirección son más importantes.

En ambas ecuaciones de momentum (B.2 y B.3) del lado izquierdo de la igualdad se encuentran los efectos inerciales, compitiendo con los efectos viscosos en el lado derecho de la ecuación, pero, los términos adicionales que surgen en la ecuación debido a la modificación de viscosidad variable ( $\bar{\gamma} \neq 0$ ) tienen un signo contrario a los efectos viscosos, lo que físicamente representa una disminución en la magnitud de los efectos viscosos.

En la ecuación de la energía el último término se refiere a los efectos generadores de calor (Efecto Joule) y es el más importante en términos de orden de magnitud, ya que tiene el coeficiente  $1/\varepsilon^2 \gg 1$ ; compite directamente con los términos de advección y difusión de calor.

Teniendo el sistema de ecuaciones con sus respectivas condiciones de frontera ya adimensionales, se procede a resolverlo numéricamente. Nos auxiliamos de las tablas 2.1 y 2.2 con los

valores correspondientes a las propiedades físicas del medio y los límites que tienen las variables adimensionales propuestas para que sean coherentes con la física del problema. Por ejemplo en la ecuación 2.14, hay valores límites para  $\alpha$  y  $\gamma$ . Numéricamente es posible resolverlo sin esos límites, pero una viscosidad negativa involucraría una contribución de la viscosidad a los efectos inerciales, lo que es físicamente inadmisibile.

Adicionalmente, para que las ecuaciones puedan ser reconocidas por el software Freefem++, es necesario expresar las ecuaciones en su forma débil (variacional).

Parámetro	Valor	Unidades
$H$	50 – 200	$\mu m$
$L$	100	$cm$
$C_p$	4180	$J/kg K$
$\rho$	998	$kg/m^3$
$T_0$	293.15	$K$
$P_0$	101325	$Pa$
$k$	0.68	$W/m K$
$h$	20 – 100	$W/m^2 K$
$\zeta$	$10^{-2}$	$V$
$\phi_0$	10	$V$
$\epsilon$	$10^{-10}$	$C/V m$
$\sigma$	5	$S/m$
$E_0$	$10^3$	$V/m$
$\lambda_D$	$10^{-10} - 10^{-9}$	$m$
$\eta_0$	$10^{-3}$	$Pa \cdot s$

Tabla 2.1: Propiedades físicas y geométricas

Parámetro	Valor
$\epsilon$	0.01
$\zeta$	$10^3$
$\bar{\kappa}_0$	40
$Re_0$	0.1
$Pe_0$	0.01 – 0.5
$\Lambda$	0.4 – 1
$Bi$	0.0008 – 0.0032
$\gamma$	0 – 1
$\alpha$	0 – 0.1

Tabla 2.2: Parámetros adimensionales

Los límites de los parámetros adimensionales son encontrados con valores reales de las propiedades físicas del medio.

La relevancia de los cambios en la viscosidad se controlan por medio del valor de  $\bar{\gamma}$  definido en la ecuación 2.13 como el producto de  $\alpha$  y  $\gamma$ . Aún así,  $\alpha$  y  $\gamma$  con calculados de forma independiente, lo que puede resultar en un valor de  $\bar{\gamma}$  sobredimensionado; obteniendo resultados incoherentes con la física. En las ecuaciones de momentum se observa que el término  $\bar{\gamma}$  forma

parte de un factor que multiplica al laplaciano. Es posible que para valores de  $\bar{\gamma}$  altos, el término que multiplica al laplaciano cambie de signo, alterando la física del problema y asumiendo erróneamente que la viscosidad está teniendo una contribución a los efectos inerciales, lo que es físicamente inadmisibles. Teniendo en cuenta lo anterior los límites de  $\alpha$  y  $\gamma$  en conjunto van a ser función de la temperatura máxima que exista en el canal.

Resolviendo la ecuación

$$\alpha\gamma\frac{\theta_{max}}{1 + \alpha\theta_{max}} = 1$$

para el valor máximo de  $\alpha$  se deduce que cuando  $\alpha = 0.1$ , el valor de  $\gamma$  no puede alcanzar el valor máximo propuesto de  $\gamma = 1$ .

En el apéndice C, la figura C.2 demuestra el poder de resolución numérica de FreeFem++. A pesar de que los parámetros físicos adimensionales propuestos salen de los valores obtenidos en esta sección, el software es capaz de resolverlo, obteniendo resultados coherentes numéricamente.



# Capítulo 3

## Solución numérica

Numerosos artículos abordan este fenómeno con diferentes enfoques, obteniendo resultados que han contribuido a la formalización de la teoría y haciendo posible su fabricación e implementación en MEMS. Estos diferentes enfoques incluyen diferentes acercamientos a la solución del problema que representa modelar un flujo de este tipo, entre ellos se incluyen soluciones a través de métodos numéricos, método de elemento finito, diferencias finitas, soluciones asintóticas y aproximaciones por medio de la teoría de lubricación.

Para los modelos solucionados con métodos numéricos y elemento finito se ha recurrido a herramientas computacionales de alto nivel, tales como ANSYS, OpenFOAM, Abaqus, COMSOL CFD, CONVERGE CFD, NUMECA OMNIS, FreeFem++++, FluidSIM, etc.

El presente trabajo recurre al uso de FreeFem++++, por ser (al igual que OpenFoam) un software de uso libre. Fruto de un largo proceso de maduración, FreeFem++++ es un entorno de desarrollo integrado (IDE) de alto nivel para resolver numéricamente ecuaciones diferenciales parciales (PDE) en dos y tres dimensiones. Es una herramienta muy útil para aplicar el método de elemento finito, también destaca en el ámbito de la investigación para probar nuevas teorías físicas complejas.

FreeFem++ tiene un generador de malla automático avanzado, capaz de adaptarse a una malla a posteriori, tiene un resolvidor diferencial elíptico de propósito general que está interconectado con algoritmos de soluciones rápidas como el método multifrontal UMFPACK, SuperLU, MUMPS. Resuelve problemas iterativos prescritos por el usuario con el lenguaje de alto nivel que maneja. Tiene una gran diversidad de elementos finitos triangulares, incluyendo elementos discontinuos [10].

Tiene la ventaja de ser un software altamente adaptable, esto permite particularizar un fenómeno por medio de las ecuaciones físicas que lo representan. Recientes trabajos de análisis térmicos como el de Nguyen *et. al.* [31] y análisis específicos de convección como el de Castro *et. al.* [1] demuestran la alta capacidad de resolver problemas integrodiferenciales/sistemas de ecuaciones diferenciales parciales.

A diferencia de los software comerciales, para que FreeFem++++ pueda resolver el problema requiere el planteamiento del problema en su forma variacional. En resumen, para poder resolver el problema planteado en el capítulo 2, se siguió una serie de pasos que se enlistan a continuación.

1. Identificar el problema.

2. Plantear las ecuaciones que modelan al fenómeno.
3. Proponer parámetros característicos para adimensionalizar las ecuaciones.
4. Expresar el sistema de ecuaciones en su forma adimensional.
5. Expresar el sistema de ecuaciones en su forma variacional/débil.

La ventaja que ofrece el protocolo anterior es favorecer la posibilidad de hacer un análisis de escalas para la simplificación del problema, adicionalmente se obtiene un mejor entendimiento del fenómeno al identificar los parámetros característicos adimensionales que intervienen en cada una de las ecuaciones; permitiendo así anticipar la influencia que tendrán en cada una de las soluciones numéricas del sistema. **Malla**

Se comenzó por definir la malla, que es de tipo triangular con cincuenta nodos a lo largo y cincuenta nodos a lo ancho del canal como se muestra en la figura 3.1.

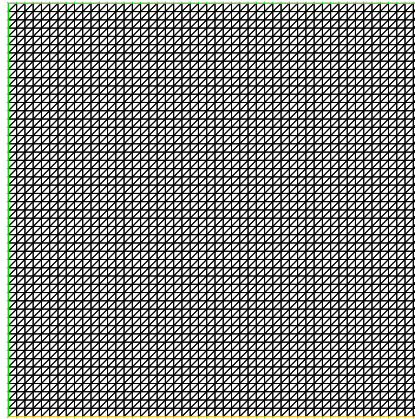


Figura 3.1: Malla triangular en el canal.

Este tipo de malla se conoce como "malla estructurada", porque sigue un patrón reticular a lo largo de la geometría. Particularmente es una malla estructurada de tipo triangular con un dominio rectangular.

Los elementos están espaciados de forma homogénea, por lo que se garantiza una distribución apropiada de los nodos a lo largo y ancho del canal. Adicionalmente a esto, el código se diseñará de tal manera que guarde las soluciones en cada uno de los nodos para valores constantes de  $\chi$  y  $Y$ , en múltiplos de 0.1.

### Convergencia

Si una ecuación diferencial no lineal se resuelve por métodos numéricos, es necesario establecer un criterio de convergencia que convenga para el método de solución. Si existe una función  $f(x)$  que se resuelve con un método numérico, partiendo de un valor semilla  $x_0$ , dará como resultado  $f(x_0) = x_1$ . Como es un proceso iterativo, la sucesión lógica será que se resuelva para  $f(x_1) = x_2$  y así sucesivamente. Se dice que converge a un resultado cuando se cumple la siguiente condición:

$$|f(x_{i-1}) - x_i| < |\xi_i|$$

Donde  $\xi$  es el parámetro de convergencia, también referido como el error de la  $i$ -ésima iteración. Para escoger este valor, se refiere al trabajo realizado por Lizardi, J. J. et. al. [15]. El valor

de  $\xi$  como función de soluciones asintóticas obtenidas por medio de Teoría de Lubricación, proponiendo a  $\xi$  con un valor de  $1 \times 10^{-9}$  para cada variable. Este criterio de convergencia es válido para todo el sistema.

### Funciones semilla

Para aumentar la velocidad de convergencia y garantizar cálculos eficientes se proponen funciones de partida para cada una de las variables, el trabajo realizado por Ramos *et. al.* [8] aproxima soluciones analíticas por medio de la Teoría de Lubricación, así, las funciones respectivas a cada una de las incógnitas parten de la solución teórica en la iteración cero, perdiendo esta referencia y tomando la solución numérica como la solución del tiempo  $n$  para hallar  $n + 1$  en la siguiente iteración.

### Métodos numéricos

FreeFem++++ cuenta con una amplia variedad de métodos numéricos para solucionar el problema, se ocuparon diferentes métodos para las diferentes ecuaciones.

### UMFPACK

Las ecuaciones de continuidad, momentum, energía y potencial aplicado se resolvieron con la librería *UMFPACK*, que es un método de resolución de ecuaciones por descomposición LU multifrontal. Lo anterior se refiere a que no es relevante si la matriz de coeficientes es simétrica o si tiene un comportamiento aleatorio. Este es un tipo de acercamiento con un enfoque iterativo muy útil para resolver los problemas no lineales. [30]

### Crout

El método de Crout consiste en descomponer la matriz de coeficientes en una matriz superior e inferior, funciona cuando se cumplen condiciones aunque la matriz de coeficientes sea singular. Si su determinante es igual a cero se dice que es una matriz indefinida y por lo tanto el método no funciona. Al igual que el método de Gauss ocupa pivotamiento, por lo que muchos ceros en la matriz será un problema y el algoritmo fallará en encontrar la solución. [17]

## 3.1. Formulación variacional del problema

Para que el programa sea capaz de resolver las ecuaciones, es necesario expresarlas en su forma variacional (o débil). Así se pueden enunciar las ecuaciones de forma integral en el dominio correspondiente a cada una de las ecuaciones y condiciones de frontera. Por razones de simplicidad y eficiencia computacional, el software resolverá las ecuaciones para la mitad del canal (de  $Y = 0$  a  $Y = H$ ), y, la condición de simetría garantiza soluciones simétricas respecto del eje  $x$ , adicionalmente se refiere a este dominio como  $\Omega$  y a sus fronteras como  $\partial\Omega_1$ ,  $\partial\Omega_2$ ,  $\partial\Omega_3$  y  $\partial\Omega_4$ , partiendo de la frontera coincidente al centro del canal y recorriendo el perímetro del dominio en sentido contrario a las manecillas del reloj. El diferencial de área de la región  $\Omega$  se abrevia como  $d\Omega = d\chi dY$ . Las variables auxiliares necesarias para expresar el sistema en su forma variacional serán expresadas con un subíndice  $w$ .

### Ecuación de continuidad

Partiendo de la ecuación adimensional B.1, multiplicando la ecuación por una variable auxiliar e integrando en el dominio se obtiene la siguiente ecuación

$$\iint_{\Omega} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \chi} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial Y} \right) \Pi_w d\Omega = 0 \quad (3.1)$$

La anterior consideración de multiplicarlo por la variable auxiliar relacionada directamente con la presión es para interconectar los espacios de elemento finito donde se resuelven las variables, facilitando su solución.

### Ecuaciones de momentum

Para definir un criterio de convergencia, es necesario agregar la parte temporal de la ecuación aunque se esté resolviendo en estado estable, este tiempo virtual es necesario para renovar las variables en cada iteración. Por razones de simplicidad, los coeficientes constantes que aparecen multiplicando a los términos de la ecuación serán omitidos en el proceso de la formulación variacional.

Partiendo de la ecuación adimensional B.2, se multiplica la ecuación por la variable auxiliar  $u_w$ , que cumple con las condiciones de frontera de  $u$  y se desvanece en  $\partial\Omega$ , se integra en el dominio  $\Omega$ . Para los términos difusivos que contienen las segundas derivadas se ocupó el teorema integral de Green e integración por partes para reducir el orden de las derivadas.

$$\begin{aligned}
\iint_{\Omega} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \chi} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial Y} \right) u_w d\Omega &= - \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial \Pi}{\partial \chi} u_w + \left( \frac{\bar{\psi}}{1 + \alpha \theta} \right)^2 \frac{\partial \theta}{\partial \chi} u_w \right) d\Omega \\
&- \iint_{\Omega} \left( 1 - \bar{\gamma} \frac{\theta}{1 + \alpha \theta} \right) \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \chi} \frac{\partial u_w}{\partial \chi} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial Y} \frac{\partial u_w}{\partial Y} \right) d\Omega \\
&- \iint_{\Omega} \frac{1}{(1 + \alpha \theta)^2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \chi} \frac{\partial \theta}{\partial \chi} u_w d\Omega \\
&- \iint_{\Omega} \frac{1}{(1 + \alpha \theta)^2} \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial \chi} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial Y} \right) \frac{\partial \theta}{\partial Y} u_w d\Omega \\
&- \iint_{\Omega} \left( \frac{\bar{\psi}}{1 + \alpha \theta} \frac{d\bar{\phi}}{d\chi} u_w \right) d\Omega
\end{aligned}$$

Es necesario discretizar la parte temporal para que los incrementos de tiempo sean controlados y se pueda definir con criterios de convergencia, así, la ecuación variacional de momentum en  $\chi$  en una forma semi-discreta se puede expresar de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
\iint_{\Omega} \frac{\bar{u}^{n+1} - \bar{u}^n}{\Delta t} u_w d\Omega + \iint_{\Omega} \left( \bar{u}^{n+1} \frac{\partial \bar{u}^{n+1}}{\partial \chi} + \bar{v}^{n+1} \frac{\partial \bar{u}^{n+1}}{\partial Y} \right) u_w d\Omega &= - \iint_{\Omega} \frac{\partial \Pi^{n+1}}{\partial \chi} u_w d\Omega \\
&- \iint_{\Omega} \left( \frac{\bar{\psi}^{n+1}}{1 + \alpha \theta^{n+1}} \right)^2 \frac{\partial \theta^{n+1}}{\partial \chi} u_w d\Omega \\
&- \iint_{\Omega} \left( 1 - \bar{\gamma} \frac{\theta^{n+1}}{1 + \alpha \theta^{n+1}} \right) \left( \frac{\partial \bar{u}^{n+1}}{\partial \chi} \frac{\partial u_w}{\partial \chi} + \frac{\partial \bar{u}^{n+1}}{\partial Y} \frac{\partial u_w}{\partial Y} \right) d\Omega \\
&- \iint_{\Omega} \frac{1}{(1 + \alpha \theta^{n+1})^2} \frac{\partial \bar{u}^{n+1}}{\partial \chi} \frac{\partial \theta^{n+1}}{\partial \chi} u_w d\Omega \\
&- \iint_{\Omega} \frac{1}{(1 + \alpha \theta^{n+1})^2} \left( \frac{\partial \bar{v}^{n+1}}{\partial \chi} + \frac{\partial \bar{u}^{n+1}}{\partial Y} \right) \frac{\partial \theta^{n+1}}{\partial Y} u_w d\Omega \\
&- \iint_{\Omega} \left( \frac{\bar{\psi}^{n+1}}{1 + \alpha \theta^{n+1}} \frac{d\bar{\phi}^{n+1}}{d\chi} u_w \right) d\Omega
\end{aligned}$$

Análogamente para la dirección  $Y$ :

$$\begin{aligned}
& \iint_{\Omega} \frac{\bar{v}^{n+1} - \bar{v}^n}{\Delta t} v_w d\Omega + \iint_{\Omega} \left( \bar{u}^{n+1} \frac{\partial \bar{v}^{n+1}}{\partial \chi} + \bar{v}^{n+1} \frac{\partial \bar{v}^{n+1}}{\partial Y} \right) v_w d\Omega = - \iint_{\Omega} \frac{\partial \Pi^{n+1}}{\partial Y} v_w d\Omega \\
& - \iint_{\Omega} \left( \frac{\bar{\psi}^{n+1}}{1 + \alpha \theta^{n+1}} \right)^2 \frac{\partial \theta^{n+1}}{\partial Y} v_w d\Omega \\
& - \iint_{\Omega} \left( 1 - \bar{\gamma} \frac{\theta^{n+1}}{1 + \alpha \theta^{n+1}} \right) \left( \frac{\partial \bar{v}^{n+1}}{\partial \chi} \frac{\partial v_w}{\partial \chi} + \frac{\partial \bar{v}^{n+1}}{\partial Y} \frac{\partial v_w}{\partial Y} \right) d\Omega \\
& - \iint_{\Omega} \frac{1}{(1 + \alpha \theta^{n+1})^2} \frac{\partial \bar{v}^{n+1}}{\partial Y} \frac{\partial \theta^{n+1}}{\partial Y} v_w d\Omega \\
& - \iint_{\Omega} \frac{1}{(1 + \alpha \theta^{n+1})^2} \left( \frac{\partial \bar{v}^{n+1}}{\partial \chi} + \frac{\partial \bar{u}^{n+1}}{\partial Y} \right) \frac{\partial \theta^{n+1}}{\partial \chi} v_w d\Omega
\end{aligned}$$

### Ecuación de la energía

Siguiendo el mismo procedimiento para la formulación variacional de la ecuación de la energía en su forma semi-discreta se llega a la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned}
& \iint_{\Omega} \frac{\theta^{n+1} - \theta^n}{\Delta t} \theta_w d\Omega + \iint_{\Omega} \left( \bar{u} \frac{\partial \theta^{n+1}}{\partial \chi} + \bar{v} \frac{\partial \theta^{n+1}}{\partial Y} \right) \theta_w d\Omega = - \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial \theta^{n+1}}{\partial \chi} \frac{\partial \theta_w}{\partial \chi} + \frac{\partial \theta^{n+1}}{\partial Y} \frac{\partial \theta_w}{\partial Y} \right) d\Omega \\
& + \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \chi} \right)^2 \theta_w d\Omega \\
& + \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial Y} \right)^2 \theta_w d\Omega
\end{aligned}$$

### Ecuación de Poisson

En el caso de esta ecuación y la siguiente, también se agrega una parte temporal que renueva las funciones en cada iteración.

$$\iint_{\Omega} \frac{\bar{\psi}^{n+1} - \bar{\psi}^n}{\Delta t} \psi_w d\Omega - \iint_{\Omega} \frac{d\bar{\psi}^{n+1}}{dY} \frac{d\psi_w}{dY} d\Omega = \iint_{\Omega} \frac{1}{1 + \alpha \theta^{n+1}} \bar{\psi}^{n+1} \psi_w d\Omega$$

### Ecuación de Laplace

La formulación variacional de las segundas derivadas se traducen en un producto de las derivadas de la variable auxiliar y la variable original respecto a la misma dirección.

$$\iint_{\Omega} \frac{\bar{\phi}^{n+1} - \bar{\phi}^n}{\Delta t} d\Omega - \iint_{\Omega} \frac{d\bar{\phi}^{n+1}}{d\chi} \frac{d\phi_w}{d\chi} d\Omega = 0$$

Las ecuaciones del campo eléctrico son omitidas en la formulación variacional debido a que se busca optimizar el código para realizar la mayor cantidad de simulaciones con diferentes condiciones que serán importantes en el análisis de resultados; con la anterior consideración, el sistema de ecuaciones con sus coeficientes respectivos y en su forma débil toma la siguiente forma:

$$\iint_{\Omega} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \chi} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial Y} \right) q_w d\Omega = 0 \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned}
& \iint_{\Omega} \frac{\bar{u}^{n+1} - \bar{u}^n}{\Delta t} u_w d\Omega + \varepsilon Re_0 \iint_{\Omega} \left( \bar{u}^{n+1} \frac{\partial \bar{u}^{n+1}}{\partial \chi} + \bar{v}^{n+1} \frac{\partial \bar{u}^{n+1}}{\partial Y} \right) u_w d\Omega = - \iint_{\Omega} \frac{\partial \Pi^{n+1}}{\partial \chi} u_w d\Omega \\
& - \bar{\kappa}_0^2 \frac{\alpha}{2\zeta} \iint_{\Omega} \frac{1}{(1 + \alpha \theta^{n+1})^2} (\bar{\psi}^{n+1})^2 \frac{\partial \theta^{n+1}}{\partial \chi} u_w d\Omega \\
& - \iint_{\Omega} \left( 1 - \bar{\gamma} \frac{\theta^{n+1}}{1 + \alpha \theta^{n+1}} \right) \left( \varepsilon^2 \frac{\partial \bar{u}^{n+1}}{\partial \chi} \frac{\partial u_w}{\partial \chi} + \frac{\partial \bar{u}^{n+1}}{\partial Y} \frac{\partial u_w}{\partial Y} \right) d\Omega \\
& - 2\bar{\gamma} \varepsilon^2 \iint_{\Omega} \frac{\partial \bar{u}^{n+1}}{\partial \chi} \frac{\partial \theta^{n+1}}{\partial \chi} u_w d\Omega \\
& - \bar{\gamma} \iint_{\Omega} \frac{1}{(1 + \alpha \theta^{n+1})^2} \left( \varepsilon^2 \frac{\partial \bar{v}^{n+1}}{\partial \chi} + \frac{\partial \bar{u}^{n+1}}{\partial Y} \right) \frac{\partial \theta^{n+1}}{\partial Y} u_w d\Omega \\
& - \bar{\kappa}_0^2 \iint_{\Omega} \frac{1}{1 + \alpha \theta^{n+1}} \bar{\psi}^{n+1} \frac{d\bar{\phi}^{n+1}}{d\chi} u_w d\Omega
\end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned}
& \iint_{\Omega} \frac{\bar{v}^{n+1} - \bar{v}^n}{\Delta t} v_w d\Omega + \varepsilon^3 Re_0 \iint_{\Omega} \left( \bar{u}^{n+1} \frac{\partial \bar{v}^{n+1}}{\partial \chi} + \bar{v}^{n+1} \frac{\partial \bar{v}^{n+1}}{\partial Y} \right) v_w d\Omega = - \iint_{\Omega} \frac{\partial \Pi^{n+1}}{\partial Y} v_w d\Omega \\
& - \bar{\kappa}_0^2 \frac{\alpha}{2\zeta} \iint_{\Omega} \frac{1}{(1 + \alpha \theta^{n+1})^2} (\bar{\psi}^{n+1})^2 \frac{\partial \theta^{n+1}}{\partial Y} v_w d\Omega \\
& - \varepsilon^2 \iint_{\Omega} \left( 1 - \bar{\gamma} \frac{\theta^{n+1}}{1 + \alpha \theta^{n+1}} \right) \left( \frac{\partial \bar{v}^{n+1}}{\partial \chi} \frac{\partial v_w}{\partial \chi} + \frac{\partial \bar{v}^{n+1}}{\partial Y} \frac{\partial v_w}{\partial Y} \right) d\Omega \\
& - 2\varepsilon^2 \bar{\gamma} \iint_{\Omega} \frac{1}{(1 + \alpha \theta^{n+1})^2} \frac{\partial \bar{v}^{n+1}}{\partial Y} \frac{\partial \theta^{n+1}}{\partial Y} v_w d\Omega \\
& - \varepsilon^2 \bar{\gamma} \iint_{\Omega} \frac{1}{(1 + \alpha \theta^{n+1})^2} \left( \varepsilon^2 \frac{\partial \bar{v}^{n+1}}{\partial \chi} + \frac{\partial \bar{u}^{n+1}}{\partial Y} \right) \frac{\partial \theta^{n+1}}{\partial \chi} v_w d\Omega
\end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned}
& \iint_{\Omega} \frac{\theta^{n+1} - \theta^n}{\Delta t} \theta_w d\Omega + \varepsilon Pe_0 \iint_{\Omega} \left( \bar{u} \frac{\partial \theta^{n+1}}{\partial \chi} + \bar{v} \frac{\partial \theta^{n+1}}{\partial Y} \right) \theta_w d\Omega = \\
& - \iint_{\Omega} \left( \varepsilon^2 \frac{\partial \theta^{n+1}}{\partial \chi} \frac{\partial \theta_w}{\partial \chi} + \frac{\partial \theta^{n+1}}{\partial Y} \frac{\partial \theta_w}{\partial Y} \right) d\Omega \\
& + \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \chi} \right)^2 \theta_w d\Omega \\
& + \frac{1}{\varepsilon^2 \zeta^2} \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial Y} \right)^2 \theta_w d\Omega
\end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\iint_{\Omega} \frac{\bar{\psi}^{n+1} - \bar{\psi}^n}{\Delta t} \psi_w d\Omega - \iint_{\Omega} \frac{d\bar{\psi}^{n+1}}{dY} \frac{d\psi_w}{dY} d\Omega = \bar{\kappa}_0^2 \iint_{\Omega} \frac{1}{1 + \alpha \theta^{n+1}} \bar{\psi}^{n+1} \psi_w d\Omega \tag{3.5}$$

$$\iint_{\Omega} \frac{\bar{\phi}^{n+1} - \bar{\phi}^n}{\Delta t} d\Omega - \iint_{\Omega} \frac{d\bar{\phi}^{n+1}}{d\chi} \frac{d\phi_w}{d\chi} d\Omega = 0 \quad (3.6)$$

Con las ecuaciones expresadas en su forma adimensional FreeFem++ es capaz de resolverlo, se hicieron diferentes casos para analizar el comportamiento del flujo en función de los parámetros adimensionales. Las condiciones de frontera permanecen sin cambios, puesto que FreeFem++ asume que las variables auxiliares cumplen las condiciones de frontera de las variables originales y se desvanecen en la frontera.

La formulación del problema en su forma variacional permite reducir el orden de las derivadas. En las ecuaciones adimensionales, existen derivadas de segundo orden, lo que impone una condición de continuidad en las soluciones hasta la segunda derivada. Sin embargo, en la formulación variacional, la máxima derivada es de primer orden.

Computacionalmente es mucho más viable la resolución del problema expresado en su forma variacional.

### Interfaz

Se vinculó el procesador de texto Geany para establecer comunicación con FreeFem++. Del lado izquierdo de la figura 3.2 se observan las ecuaciones de momentum y continuidad, así como la ecuación de la energía y potencial expresadas en su forma variacional en Geany. Del lado derecho de la pantalla se observa el resolutor de FreeFem++ y la gráfica de temperatura.

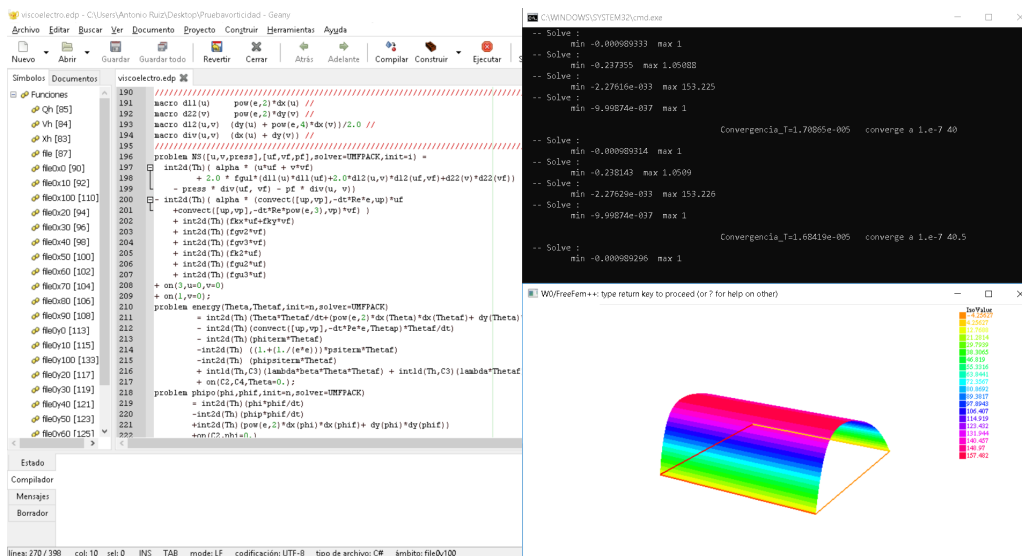


Figura 3.2: Interfaz de Geany y FreeFem++ resolviendo un código.

# Capítulo 4

## Resultados

Después de resolver numéricamente el código con los datos presentados en la tabla de parámetros adimensionales 2.2 se realizó el procesamiento de datos para interpretar los resultados con ayuda de gráficos que se presentan a continuación con sus respectivos análisis.

Los diferentes valores de los parámetros adimensionales representan distintos escenarios con condiciones físicas específicas y diferentes entre ellas para analizar distintos casos en los que se puede afectar la solución numérica de forma significativa.

El objetivo del trabajo es determinar los efectos térmicos que tienen influencia significativa en el flujo, por lo que la atención del mismo se centrará principalmente en las variables adimensionales  $\theta$ ,  $\bar{u}$  como funciones de  $\alpha$  y  $\gamma$ .

### 4.1. Potencial aplicado

La expresión adimensional del campo eléctrico se reduce a una ecuación de segundo orden homogénea, con condiciones de frontera definidas. Por lo que tiene solución analítica y es trivial.

Integrando la ecuación B.8 respecto a  $\chi$  se obtiene

$$\frac{d\bar{\phi}}{d\chi} = C_1$$

Integrando nuevamente:

$$\bar{\phi} = C_1\chi + C_2$$

Sustituyendo las condiciones de frontera para  $\bar{\phi}$  referidas en la ecuación 2.38 se obtienen los valores para las constantes  $C_1 = -1$  y  $C_2 = 1$ , por lo tanto, la solución analítica para el potencial aplicado es la función

$$\bar{\phi}(\chi) = -\chi + 1$$

que se observa en la figura 4.1.



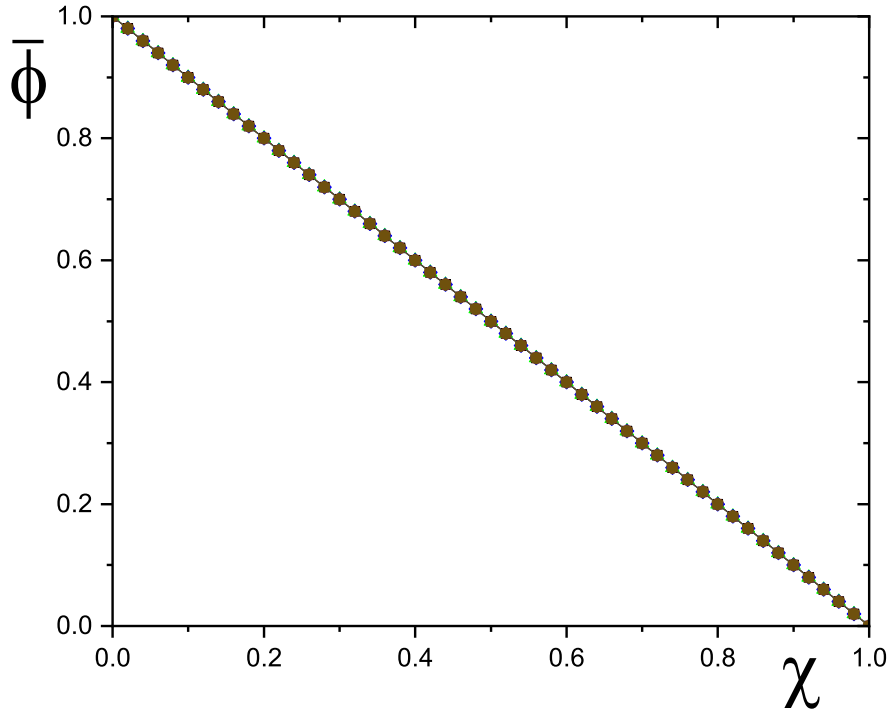


Figura 4.1:  $\bar{\phi}(\chi)$  para diferentes valores de  $\alpha$ .

Lo más importante a resaltar de la figura 4.1 es que la solución para la variable  $\bar{\phi}$  es una línea recta, con pendiente  $-1$ , ésto será relevante para el análisis de las soluciones de  $\Pi$ . No es dependiente de la temperatura ni de los parámetros adimensionales  $\alpha$  y  $\gamma$ , por lo que su solución permanece estable en todos los casos.

## 4.2. Potencial inducido

Los efectos térmicos sí tienen repercusiones (aunque no relevantes para el trabajo) en el potencial inducido. La ecuación B.7 refleja que tiene una ligera influencia de los parámetros adimensionales  $\bar{\kappa}_0$ ,  $\alpha$  y la variable adimensional  $\theta$ . Lo anterior se debe a que los gradientes del potencial adimensional son severamente afectados por la longitud de Debye, que a su vez, está en función de la temperatura.

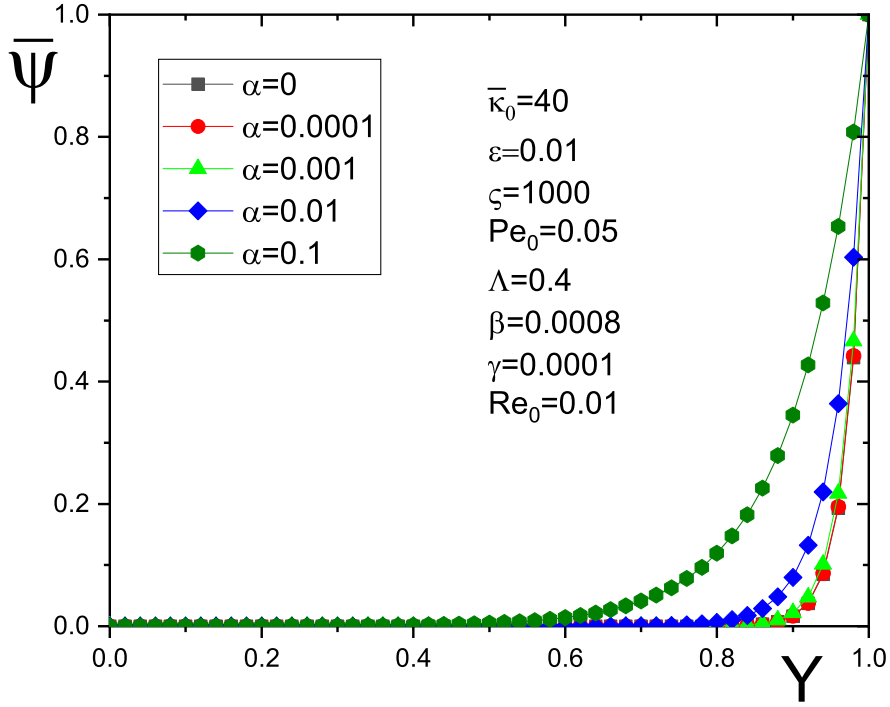


Figura 4.2:  $\bar{\psi}(Y)$  para diferentes valores de  $\alpha$ .

Es importante mencionar que la región de  $Y$  en la que se desvanece el potencial inducido es mayor conforme  $\alpha$  aumenta, lo anterior permitirá que exista un efecto osmótico/viscoso en una zona más amplia cercana a la pared, lo que será reflejado en los perfiles de velocidad.

Esta gráfica representa la fuerte dependencia de los fenómenos eléctricos de la temperatura. Es importante observar que cuando los fenómenos térmicos son importantes (valores de  $\alpha$  elevados), las simplificaciones de Debye-Hückel y de que el potencial  $\zeta$  se encuentra en la pared ya no son válidas. Lo anterior se puede verificar en la figura C.1 referida en el apéndice C, donde se observa claramente que el potencial zeta ya no se encuentra en la pared y la única razón por la que cumple  $\bar{\psi}(Y = \pm 1) = 1$  es por la condición de frontera que se programó.

### 4.3. Temperatura

En el caso de la temperatura adimensional  $\theta$ , se graficó en función de la coordenada longitudinal para diferentes números de Biot. Los cambios de la variable  $\theta$  en dirección transversal son despreciables, por lo que será tratada únicamente como función de  $\chi$ . En la figura 4.3 se representan los cambios de  $\theta$  para diferentes valores de  $\alpha$  y un valor de  $\gamma$  fijo.

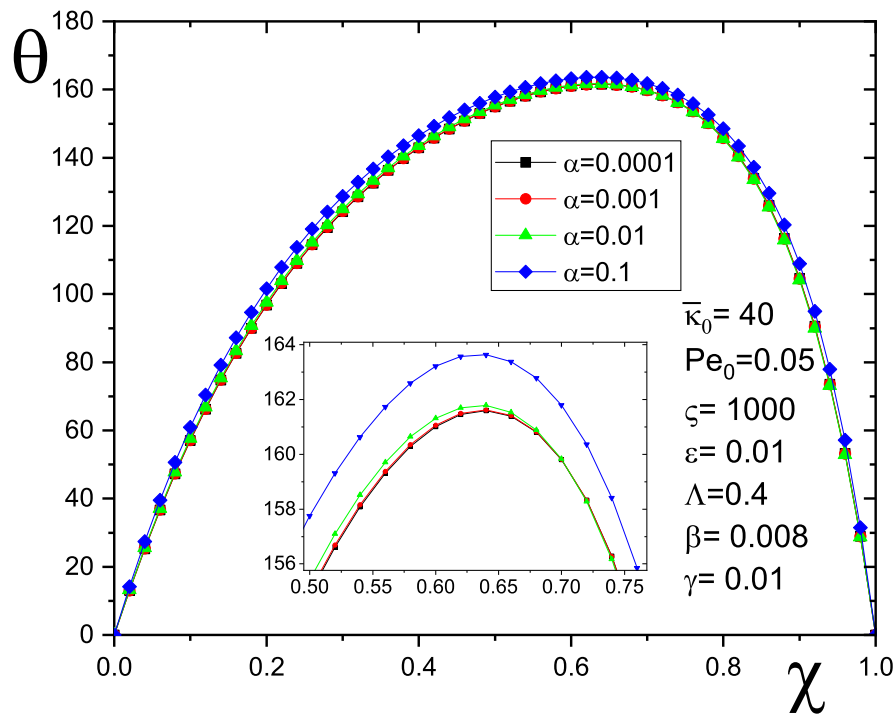


Figura 4.3:  $\theta(\chi)$  para diferentes valores de  $\alpha$  y  $\gamma = 0.01$ .

Análogamente, se observan en la figura 4.4 los cambios en el perfil de temperaturas para diferentes valores de  $\gamma$  y un valor de  $\alpha$  fijo.

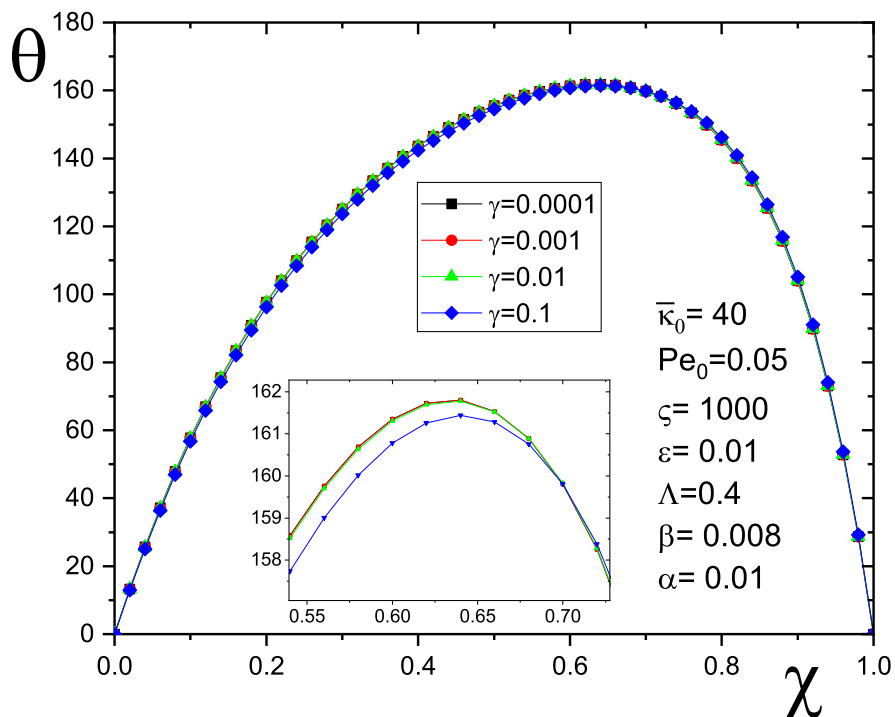


Figura 4.4:  $\theta(\chi)$  para diferentes valores de  $\gamma$  y  $\alpha = 0.01$ .

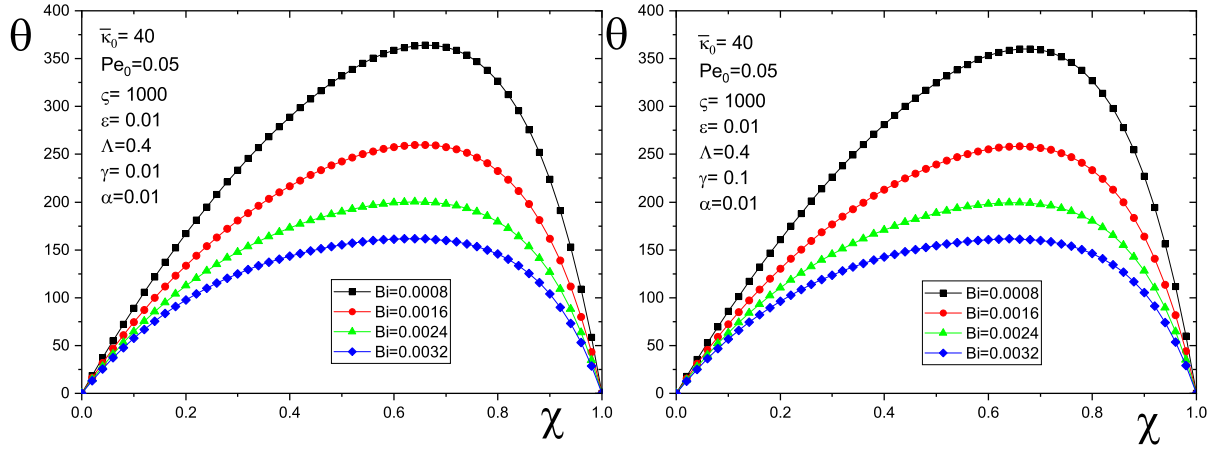


Figura 4.5:  $\theta(\chi)$  para diferentes números de Biot.

Los valores de la temperatura permanecen constantes en las figuras 4.3 y 4.4. Esto se explica porque los parámetros  $\Lambda$  y  $\beta$  están fijos. Como se menciona en la sección 2.4,  $\beta$  compara el efecto Joule contra la conducción que existe en el medio, mientras  $\Lambda$  compara los efectos convectivos contra el efecto Joule. La temperatura del canal depende únicamente de la sinergia que exista entre los tres efectos mencionados: el efecto Joule, la conducción en el medio y la extracción de calor por convección. Al fijar los parámetros  $\Lambda$  y  $\beta$  se garantiza que el perfil de temperaturas permanece constante sin importar el valor de los demás parámetros adimensionales. Así, se concluye que los parámetros  $\alpha$  y  $\gamma$  no tienen ninguna influencia significativa en la solución para las temperaturas. Sin embargo, existen variables que no aparecen explícitamente en la ecuación, sino en las condiciones de frontera:  $\Lambda$  y el número de Biot, que serán fundamentales para el análisis de la temperatura. Recordando la definición del número de Biot como  $Bi = hH/k$ , un incremento en el mismo significará físicamente que el efecto convectivo incrementa y/o que el flujo de calor por conducción es menor, lo que representa un decremento relevante en las temperaturas máximas alcanzadas en el canal. Es importante notar que las variaciones del número de Biot no afectan el punto en  $\chi$  del canal en el que se presenta la máxima temperatura. De la definición en 2.42, la variación del número de Biot se controla dejando  $\Lambda$  fijo y variando el valor de  $\beta$ .

El número de Péclet, por el contrario, sí afecta el punto en  $\chi$  donde se presenta el valor máximo de temperatura. Físicamente está representando que el campo de velocidades está transportando el campo de temperaturas más rápido en dirección longitudinal del canal, así, si los efectos de advección son más importantes respecto a los efectos difusivos la temperatura irá aumentando a lo largo del canal. Se observa una disminución en la temperatura justo antes de llegar al canal debido a la condición de frontera  $\theta(\chi = 1) = 0$ , pero para canales que no estén sujetos a esta condición, la temperatura seguirá aumentando a lo largo del canal. En la siguiente gráfica se observa el comportamiento antes mencionado, a mayor número de Péclet, mayor será la coordenada  $\chi$  en la que se presente el valor máximo de temperatura.

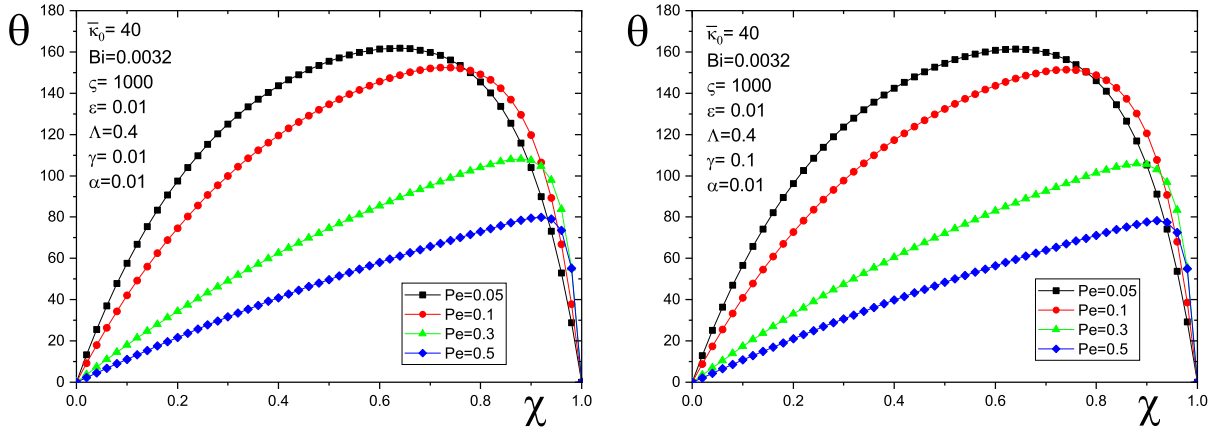


Figura 4.6:  $\theta(\chi)$  para diferentes números de Péclet.

Adicionalmente se observa que a pesar de transportar en dirección longitudinal el pico de temperatura, también el valor máximo para cada caso es menor.

Análogamente, para el caso de la figura 4.5, si se grafica  $\theta(\chi)$  para diferentes valores  $\Lambda$ , se obtiene un resultado similar, puesto que está variando el número de Biot, definido en éste trabajo como  $Bi = \beta\Lambda$ .

Para la figura 4.7 se controla la variación del número de Biot con un  $\beta$  fijo y para diferentes valores de  $\Lambda$ . La gráfica está expresada en términos de  $\Lambda$  y no en términos del número de Biot, esto se debe a que identificar la relevancia del parámetro convectivo  $\Lambda$  será fundamental para el análisis del caudal como función de los efectos térmicos.

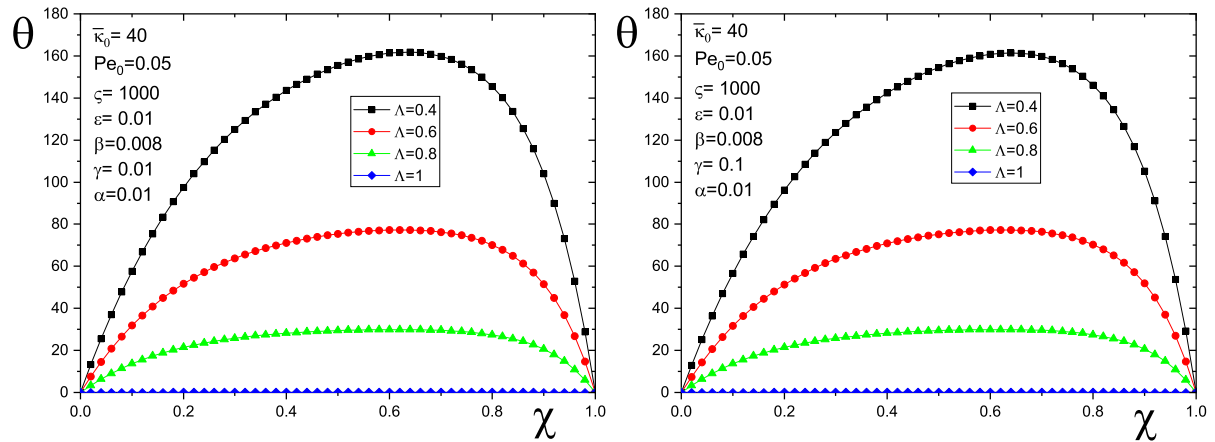


Figura 4.7:  $\theta(\chi)$  para diferentes valores de  $\Lambda$ .

El valor de  $\Lambda$  compara la magnitud del efecto convectivo y el efecto Joule. Cuando  $\Lambda = 1$  la extracción de calor es entonces igual a la generación en el canal, por lo tanto, los incrementos de temperatura que se presentan son despreciables, dando así un caso isotérmico, en el que todo el calor generado es extraído casi de forma inmediata a través de las fronteras del canal, permitiendo así mantener la temperatura constante en todo el dominio de estudio. Como los cambios de viscosidad están en función de la temperatura, un valor de  $\Lambda = 1$  hará que los efectos de  $\gamma$  no tengan ninguna influencia en el flujo.

De esta sección se concluye que los perfiles de temperatura están únicamente determinados por la magnitud de las variables  $\Lambda$  y  $\beta$ , por lo tanto, también por el número de Biot.

## 4.4. Presión

El parámetro  $\gamma$  introducido en este trabajo aparece únicamente en las ecuaciones de momentum: B.2 y B.3, al igual que la presión. Los gradientes de velocidad que generan los efectos térmicos también tendrán una repercusión importante en la presión. Por lo anterior, se deduce que los efectos térmicos por sí mismos representarán un cambio en la presión a lo largo del canal.

Como un primer acercamiento a la solución, la figura 4.8 representa los resultados obtenidos de la presión en función de efectos térmicos. En las figuras de presión en las que se varía  $\alpha$  o  $\gamma$ , se incluye el caso isotérmico  $\alpha = 0$  como referencia, en el que los gradientes de presión.

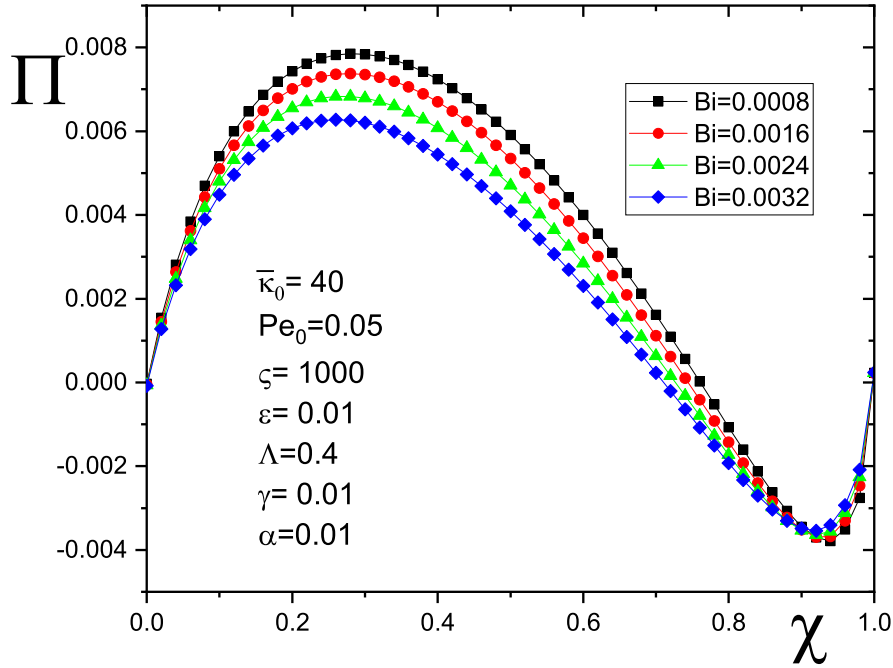


Figura 4.8:  $\Pi(\chi)$  para diferentes valores del número de Biot.

En la figura 4.8 se observa que los gradientes de presión se acentúan conforme el número de Biot disminuye. Trabajos como el de Ramos *et. al.* [8] y Lizardi *et. al.* [15] demuestran que los efectos térmicos inducen gradientes de presión. En la sección 4.3 se comenta que el valor del número de Biot se obtiene fijando un valor de  $\Lambda$  y variando los valores de  $\beta$ . Al variar los valores de  $\beta$  que compara los incrementos de temperatura característicos causados por el efecto Joule contra los decrementos característicos de temperatura ocasionados por la conductividad del medio hacia las fronteras donde existe el efecto convectivo. Al incrementar el valor de  $\beta$ , los gradientes de presión son menores.

En el caso isotérmico  $\alpha = 0$  la presión se mantiene constante e igual a cero, teniendo un flujo electroosmótico puro [24]. La presión se ve directamente afectada por el parámetro térmico  $\alpha$ , como demuestran Ramos *et. al.* [8] y Lizardi *et. al.* [15] y corroborado en la figura 4.10. En la figura 4.9 se observa el efecto que tiene únicamente el parámetro  $\alpha$  en el perfil de presiones, se escogió un valor de  $\gamma = 0.0001$  para que los efectos termoviscosos sean despreciables.

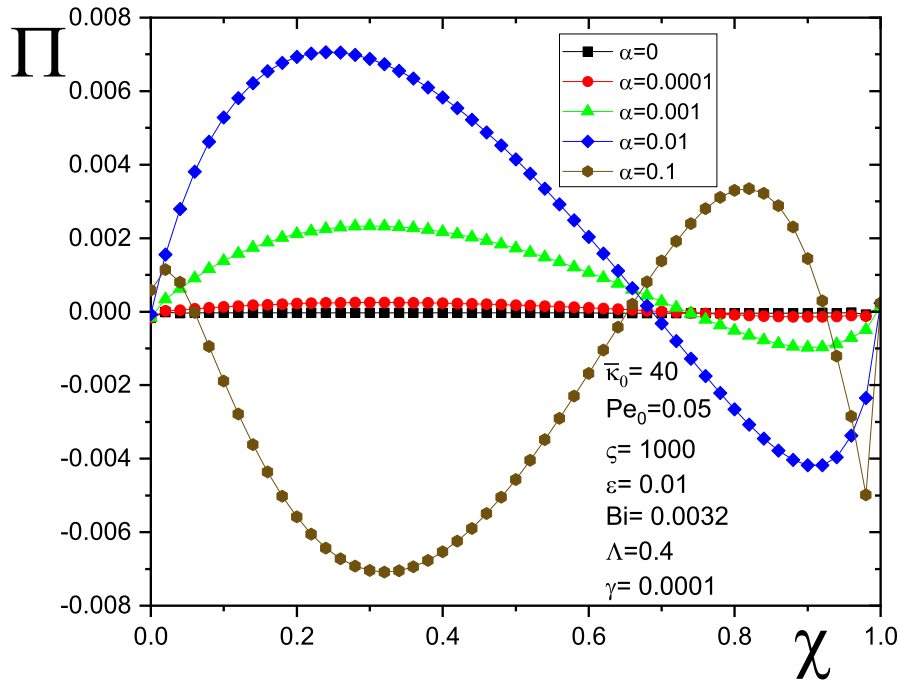


Figura 4.9:  $\Pi(\chi)$  para diferentes valores de  $\alpha$  y  $\gamma = 0.0001$ .

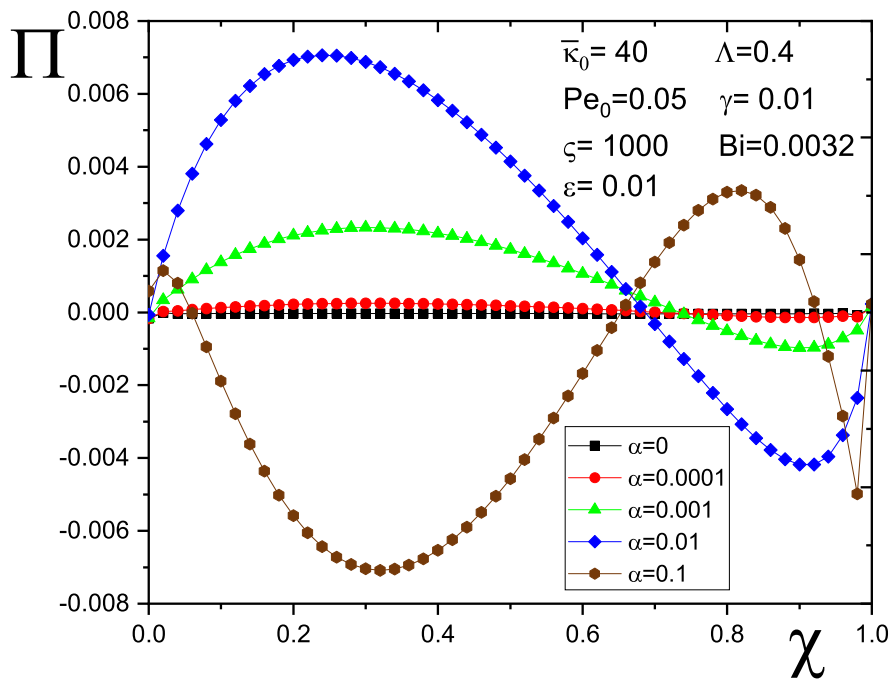


Figura 4.10:  $\Pi(\chi)$  para diferentes valores de  $\alpha$  y  $\gamma = 0.01$ .

Cuando el valor de  $\alpha$  alcanza el valor crítico de 0.1, el comportamiento de la presión se invierte por completo. La tendencia de aumentar el valor máximo de presión conforme  $\alpha$  aumenta coincide con los resultados obtenidos por los dos trabajos mencionados, sin embargo, para valores grandes del parámetro  $\alpha$ , los efectos considerados por  $\bar{\gamma}$  también aumentan considerablemente. Las figuras 4.11 y 4.12 demuestran que el parámetro  $\gamma$  tiene una fuerte influencia en los gradientes de presión si y solo si el valor de  $\alpha$  es considerable.

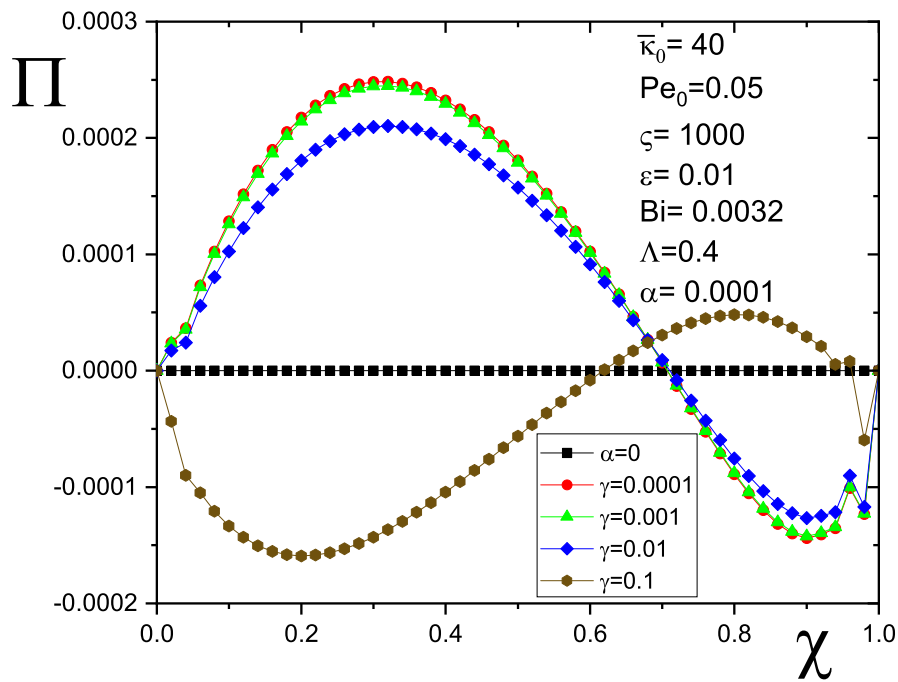


Figura 4.11:  $\Pi(\chi)$  para diferentes valores de  $\gamma$  y  $\alpha = 0.0001$ .

En todos los casos de la figura 4.11 el perfil de presión es creciente al inicio, alcanza un valor máximo y después disminuye, pero en el caso de  $\gamma = 0.1$  tiene el comportamiento opuesto. Lo anterior significa que existe un cambio en alguna otra variable que está provocando estos cambios de presión. De la anterior figura también se puede deducir que los efectos termoviscosos de  $\gamma$  sí pueden tener influencia cuando  $\gamma$  alcanza su valor máximo, aunque el valor de  $\alpha$  sea pequeño. En contraparte, cuando un valor grande de  $\alpha$  permite que los efectos termoviscosos tengan mayor importancia en el flujo, para cualquier valor de  $\gamma$  el comportamiento será equivalente a invertir el perfil original de presión, como se muestra en la figura 4.12



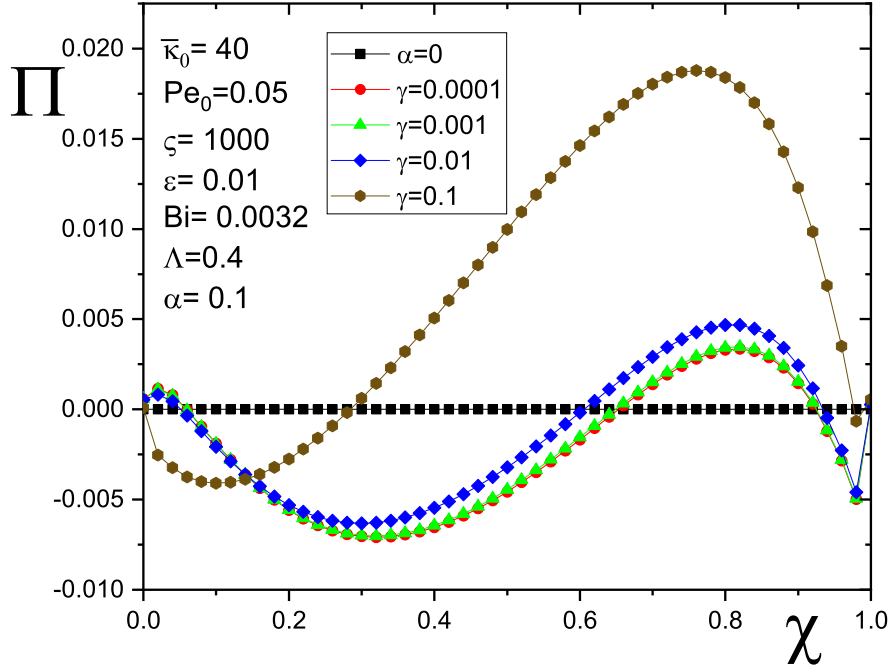


Figura 4.12:  $\Pi(\chi)$  para diferentes valores de  $\gamma$  y  $\alpha = 0.1$ .

El comportamiento de la presión al aumentar  $\gamma$  es consistente con la física y coincide con el comportamiento de la presión respecto a  $\alpha$ , sin embargo un análisis de escalas permite concluir que los cambios que se inducen variando  $\gamma$  y un  $\alpha$  pequeño son despreciables respecto a la influencia que tiene el número de Biot. El comportamiento para el caso de  $\alpha = 0$  se justifica con un análisis de orden de magnitud de la ecuación B.2, en el que los términos de orden de magnitud ( $\varepsilon$ ,  $\varepsilon Re_0$  y  $\varepsilon^2$ ) son despreciados. Así, el término  $\partial_\chi \Pi = 0$ .

En la figura 4.12 se aprecia que el campo de presiones se invierte por completo, alcanzando valores pico de hasta 3 veces lo alcanzado para valores inferiores de  $\gamma$ . Lo anterior se debe a que la velocidad está aumentando de forma significativa, y, a pesar de que en un flujo inducido por una diferencia de presiones significaría completamente lo contrario, es necesario recordar que las fuerzas eléctricas están presentes en todo momento.

En el comentario de la figura 4.1 se mencionó que la solución analítica del campo eléctrico es una línea recta con pendiente  $-1$ . De la definición del campo eléctrico expresada en la ecuación B.5, se obtiene la fuerza resultante en su forma adimensional, que es igual a la unidad. La fuerza inducida en el fluido debido al gradiente de presiones es contraria a la fuerza eléctrica presente, sin embargo, de las figuras 4.8 - 4.12, se observa que su magnitud es (en el mejor de los casos) del orden de  $10^{-2}$ , por lo que las fuerzas electroosmóticas predominan en el flujo, dejando a la presión como un término de orden mucho menor.

Las variaciones en la presión inducidas por los efectos térmicos permiten que el perfil de velocidades se modifique, rompiendo la uniformidad del mismo. Si se realizara un análisis del tipo “Bernoulli”, una caída de presión significaría un aumento en la velocidad, lo anterior se confirma analizando los efectos que tiene  $\gamma$  en el campo de velocidades  $\bar{u}$ .

## 4.5. Velocidad

Para el caso de las velocidades como función de  $\alpha$  y  $\gamma$  es necesario referirse a la ecuación B.2, en la que se observa que en ningún término aparece el parámetro  $\gamma$  sin el parámetro  $\alpha$ , por lo anterior es que se llevó a cabo la consideración de la ecuación 2.13. En el trabajo de Lizardi [15] se demuestra que numéricamente en el caso de viscosidad constante, el incremento del parámetro  $\alpha$  tiene un efecto adverso al flujo, disminuyendo la magnitud de la velocidad, como se muestra en el caso de la figura 4.13. Coherente en relación con el perfil de presiones de la figura 4.9, sin embargo, la presión en el caso de  $\alpha = 0.1$  tiene un comportamiento diferente. Lo que quiere decir que existen cambios también a lo largo del canal que pudieran inducir esos cambios de presión. De la figura 4.13, se observa que la influencia que tiene el parámetro  $\gamma$  es mínima, sin embargo la velocidad que se alcanza en el perfil plano sí se ve afectada por el parámetro  $\alpha$  en los tres casos, coherente con los resultados reportados por Ramos et. al. [8] y Lizardi et. al. [15], y con el gasto como función de parámetros térmicos presentado más adelante. En la figura 4.14 se aprecia que no hay cambios relevantes cuando los efectos de  $\alpha$  y  $\gamma$  son pequeños. Sin embargo, dejando a un lado los efectos de  $\gamma$ , el valor de  $\alpha$  por sí mismo sí involucra cambios longitudinales del perfil de velocidades, como se refleja en la figura 4.15.

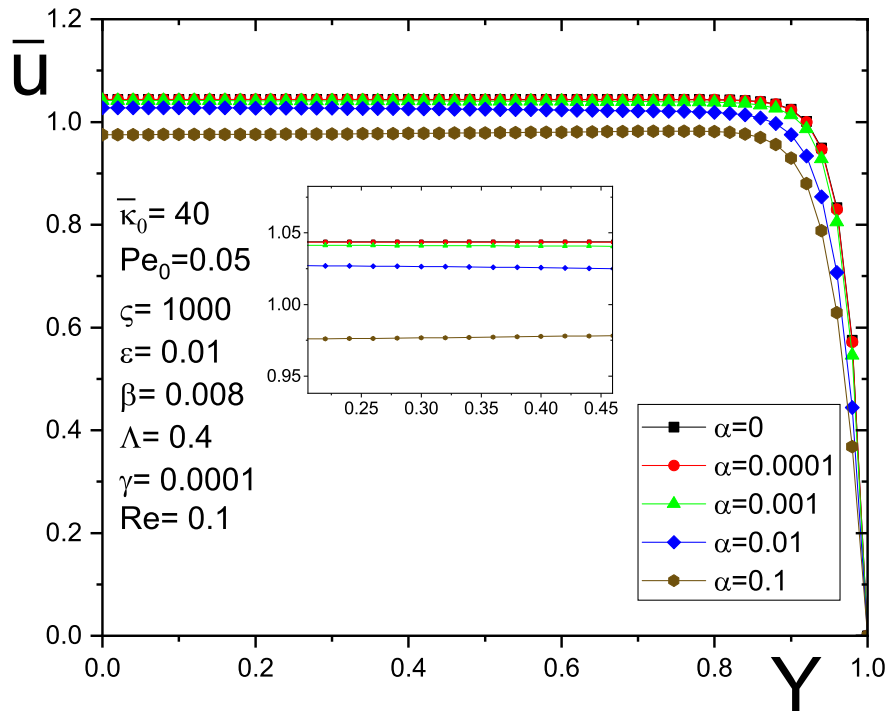


Figura 4.13:  $\bar{u}(Y)$  para diferentes valores de  $\alpha$  y  $\gamma = 0.0001$ .

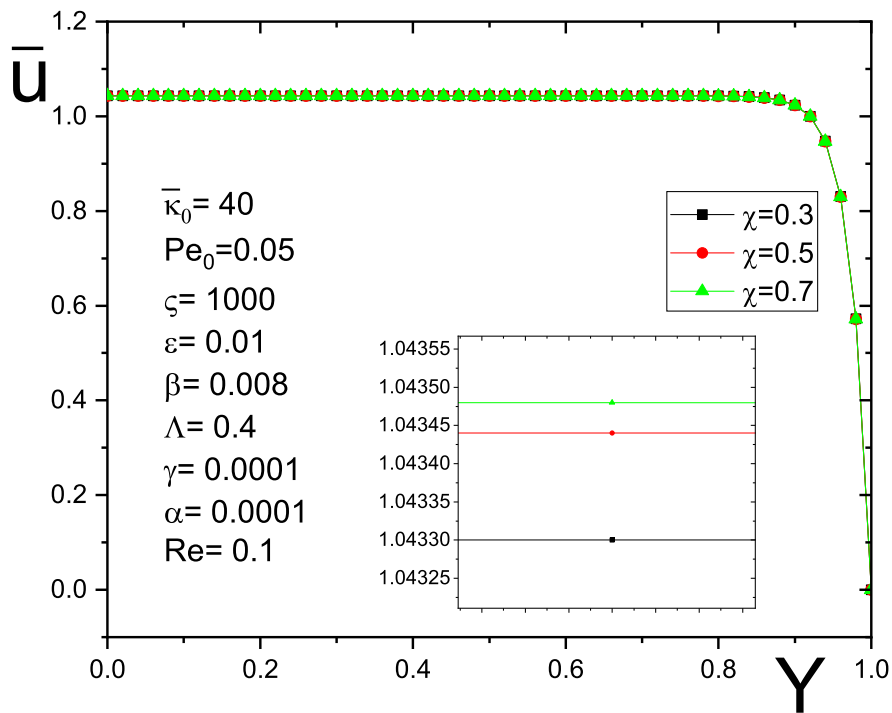


Figura 4.14:  $\bar{u}(Y)$  para diferentes valores de  $\chi$ ,  $\alpha = 0.0001$   $\gamma = 0.0001$ .

Los valores de las velocidades en la figura 4.14 corresponden con los valores de presión en

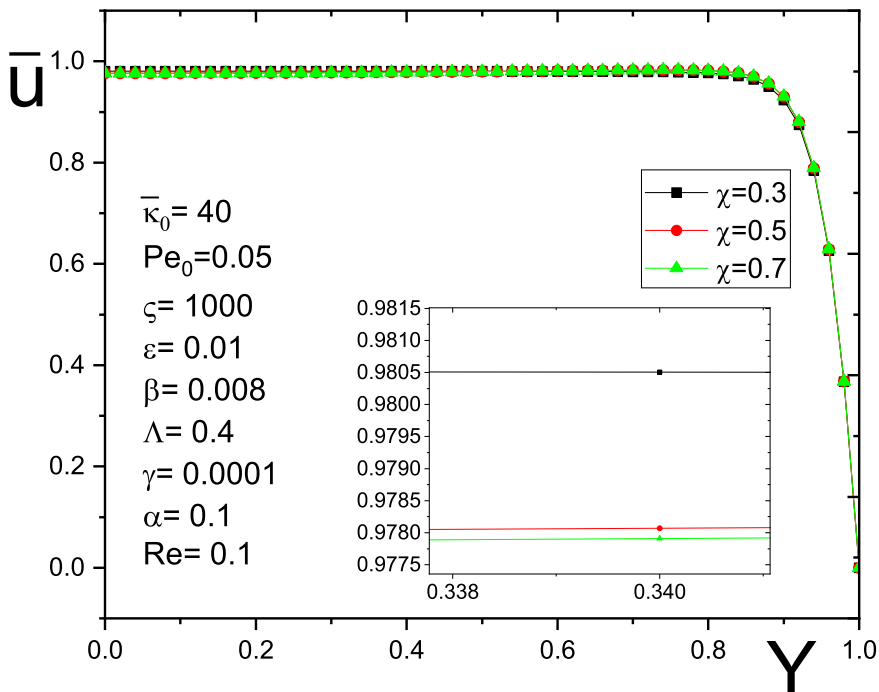


Figura 4.15:  $\bar{u}(Y)$  para diferentes valores de  $\chi$ ,  $\alpha = 0.1$   $\gamma = 0.0001$ .

La figuras 4.14 tiene una relación directa con la figura 4.9. El valor de la presión en  $\chi = 0.3$  es mayor que en la coordenada  $\chi = 0.5$  y ésta última es mayor que el valor en la coordenada  $\chi = 0.7$ . Los gradientes de presión inducidos por los efectos térmicos están generando cambios en las velocidades, las caídas de presión de la figura 4.9 corresponden con los aumentos de

velocidad de la figura 4.14. En el caso de la figura 4.15, el comportamiento es diferente. La magnitud de la velocidad disminuye conforme la coordenada  $\chi$  aumenta. En la figura 4.9 se observa que la presión en  $\chi = 0.3$  es el valor mínimo que alcanza en ese caso, mientras que su velocidad es máxima; cuando  $\chi = 0.5$  el valor de la presión aumenta respecto a  $\Pi(\chi = 0.3)$  y la presión es aún mayor cuando  $\chi = 0.7$ . De las figuras anteriores se concluye que los gradientes de presión inducidos por los efectos térmicos tienen repercusiones en el perfil de velocidades. Un aumento en la presión conllevará una disminución de la velocidad en ese punto de la coordenada  $\chi$ , mientras que una caída de presión significa un aumento en el valor de la velocidad. La comparación de las figuras 4.14 y 4.15 refleja que se altera la magnitud del perfil de velocidades en cualquier punto longitudinal del caudal cuando  $\alpha$  aumenta, despreciando los efectos termoviscosos ( $\gamma = 0.0001$ ), al considerarlos (con un valor de  $\gamma = 0.1$ ) el comportamiento de la velocidad respecto a  $\alpha$  es opuesto, es decir, la velocidad incrementa; como se muestra en la figura 4.16.

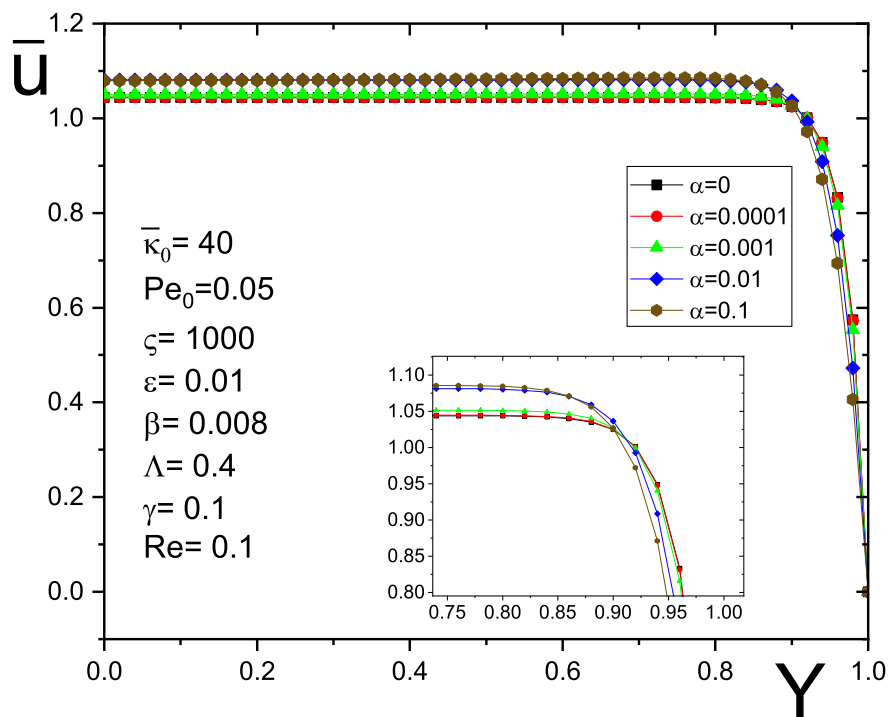


Figura 4.16:  $\bar{u}(Y)$  para diferentes valores de  $\alpha$  y  $\gamma = 0.1$ .

Lo anterior es prueba suficiente para concluir que para  $\gamma = 0.1$ , los efectos termoviscosos predominan sobre los efectos térmicos que controlan el caudal en el caso de un fluido con viscosidad constante. El valor de  $\bar{\gamma}$  alcanza su valor máximo cuando  $\alpha = \gamma = 0.1$ , en la figura 4.17 se muestra este caso para diferentes valores de  $\chi$ . Para el caso de la figura 4.16, el comportamiento de la velocidad respecto a  $\alpha$  se invierte, ahora aumentando conforme  $\alpha$  aumenta. Este resultado coincide con los obtenidos de la presión, con lo anterior se deduce que los efectos de los cambios de viscosidad sólo tienen relevancia en el flujo para valores de  $\gamma \geq 0.1$ .

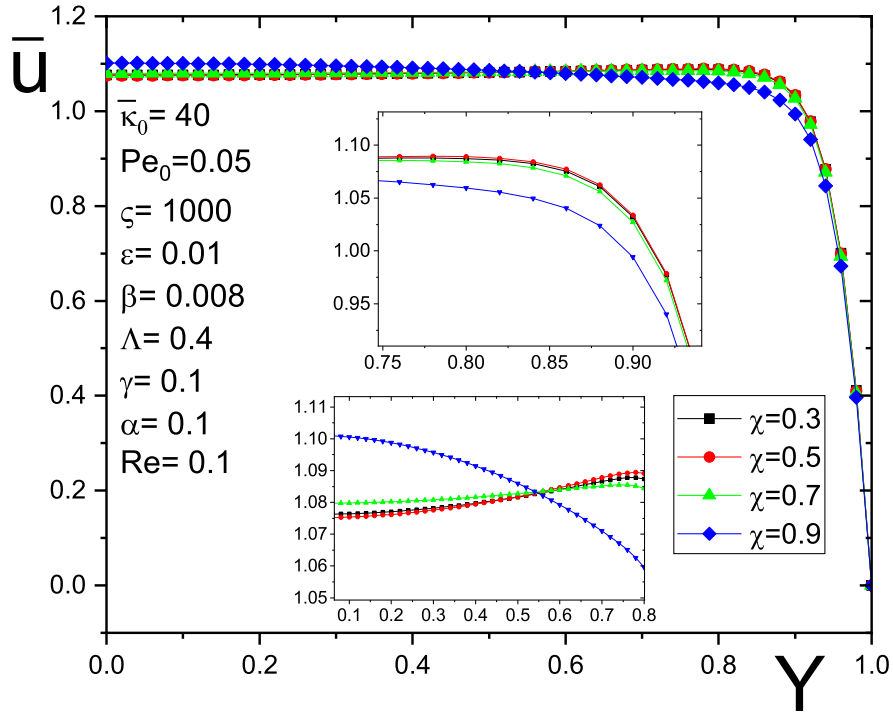


Figura 4.17:  $\bar{u}(Y)$  para diferentes valores de  $\chi$ ,  $\alpha = 0.1$  y  $\gamma = 0.1$ .

Un flujo electrosmótico de estas condiciones todavía podría ser considerado un flujo tapón, sin embargo, el perfil de velocidades ya no es recto en su mayor parte. Cuando los efectos térmicos van adquiriendo importancia con el incremento de la variable  $\alpha$ , la zona en donde el potencial inducido tiene el mayor gradiente es más amplia (figura 4.2), por lo tanto, la zona en donde la velocidad del fluido pasa de ser relativamente uniforme a cero también es mayor. Se puede observar que en el valor superior de  $\bar{\gamma}$  el perfil deja de ser plano, debido a que los gradientes de presión inducidos por el aumento súbito de la velocidad para este caso son ya muy considerables. Por conservación de masa, una disminución en la zona cercana al centro del canal, significará un aumento en la velocidad cercana a la pared. Un análisis más profundo sobre el tema se puede encontrar en el artículo de Masilamani *et. al.* [20] y Tang *et. al.*[13].

La importancia del parámetro  $\gamma$  se muestra en las figuras 4.18 y 4.19, en donde se observan los perfiles de velocidades en función de  $\gamma$ . Las velocidades fueron analizadas en  $\chi = 0.7$  debido a que en ese punto se presenta la mayor temperatura para un  $Pe_0 = 0.05$ ; como mencionado en el análisis de la figura 4.6. El efecto del parámetro  $\gamma$  sólo será relevante para valores altos del parámetro  $\alpha$ . Esta aseveración se puede comprobar con la figura 4.19, donde se toma el valor máximo de  $\alpha$ , (que es cuando  $\bar{\gamma}$  alcanza el valor máximo), y se grafica la velocidad para diferentes valores de  $\gamma$ .

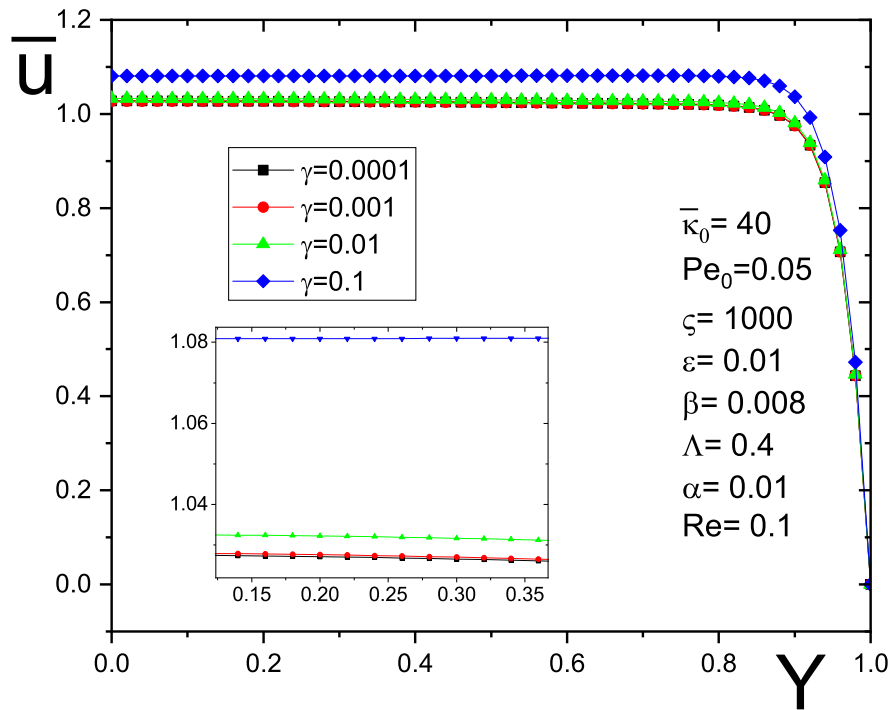


Figura 4.18:  $\bar{u}(Y)$  para diferentes valores de  $\gamma$  y  $\alpha = 0.01$ .

Nuevamente, se corrobora que al aumentar el valor de  $\gamma$ , la velocidad aumenta en el canal, en la figura 4.19 se observa el mismo comportamiento, pero con un valor de  $\alpha$  mayor.

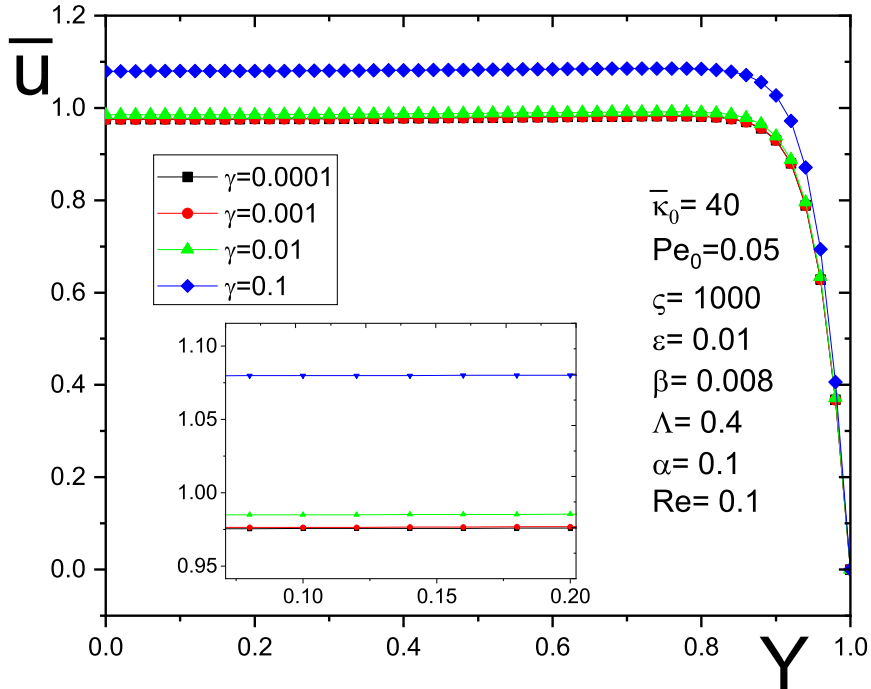


Figura 4.19:  $\bar{u}(Y)$  para diferentes valores de  $\gamma$  y  $\alpha = 0.1$ .

## 4.6. Caudal

Como resultado global del presente trabajo y como manera de cuantificar los efectos termoviscosos, el cálculo del caudal es relevante. Se graficó el caudal ( $\bar{Q}$ ) volumétrico adimensional como función del parámetro  $\Lambda$  y para diferentes valores de  $\alpha$ . Ambos regulan simultáneamente el flujo volumétrico como deducen Ramos *et. al.* [8]. Los presentes resultados numéricos muestran que los flujos electroosmóticos sujetos a condiciones no isotérmicas pueden ser alterados de forma significativa.

Como mencionado anteriormente y como conclusión de la sección 4.5, se asevera que el valor de  $\gamma = 0.0001$  es insignificante, por lo que se podría considerar el caso ideal de la viscosidad constante, reflejado en la figura 4.20; se observa que para valores grandes de  $\alpha$  y bajos de  $\Lambda$  el caudal disminuye significativamente. Congruente con los perfiles de velocidad obtenidos en función de  $\alpha$  en la sección 4.5.

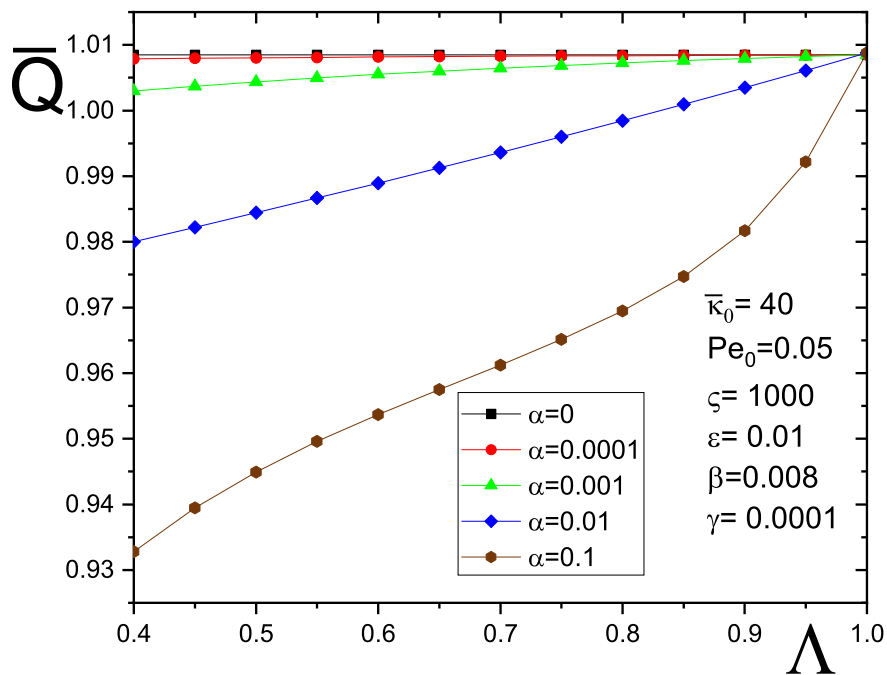


Figura 4.20:  $\bar{Q}(\Lambda)$  para diferentes valores de  $\alpha$  y  $\gamma = 0.0001$ .

De la figura 4.7 se concluye que para valores de  $\Lambda = 1$  se presenta el caso isotérmico, por esta razón es que todas las líneas intersectan en ese punto, porque los parámetros térmicos no tienen importancia en un escenario en el que el sistema tiene temperatura constante.

En la sección 4.5 existen dos fenómenos térmicos visibles en los resultados:

- Los efectos que tiene el incremento de  $\alpha$  en la velocidad  $\bar{u}$  para el caso de viscosidad constante es reducir la magnitud de la velocidad y por lo tanto el caudal será menor (como se ve en las figuras 4.13 y 4.20). Para el caso en el que la viscosidad tiene cambios en función de la temperatura,  $\alpha$  tendrá el efecto contrario, reduciendo la viscosidad y a su vez, aumentando la velocidad conforme  $\alpha$  aumenta.
- De nuevo, en el caso ideal de viscosidad constante, el caudal aumenta conforme  $\Lambda$  también aumenta, contrario al efecto que tendrán los efectos termoviscosos, que disminuirán con-

forme  $\Lambda$  aumenta porque las temperaturas máximas alcanzadas serán menores, referirse a la figura 4.7.

Los dos fenómenos opuestos anteriores a) y b) estarán compitiendo en magnitud para aumentar o reducir el caudal, la trascendencia de los efectos térmicos sobre la viscosidad están controlados por el parámetro adimensional  $\gamma$ . En la figura 4.21 se observa la contraparte de la figura 4.20, en la que los efectos de  $\gamma$  eran despreciables.

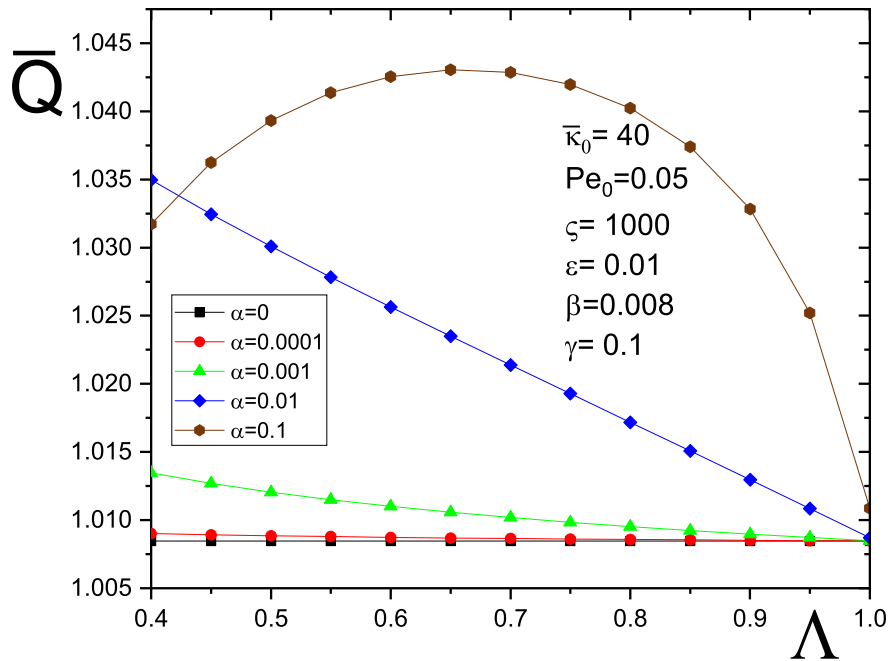


Figura 4.21:  $\bar{Q}(\Lambda)$  para diferentes valores de  $\alpha$  y  $\gamma = 0.1$ .

Conrtario a lo supuesto, el valor máximo para el caudal no se encuentra en el valor máximo de  $\bar{\gamma}$  y mínimo de  $\Lambda$ , que es cuando la temperatura es mayor. Para una representación más clara del efecto de  $\gamma$ , en las figuras 4.23 y 4.24 se plasma el comportamiento del caudal como función de  $\Lambda$  y  $\gamma$  para valores fijos de  $\alpha$ . En la figura 4.22 se observa que para valores pequeños de  $\alpha$  los caudales tienden a acercarse al caso isotérmico. En la figura 4.23 se observa un comportamiento similar; en ambos casos, cuando  $\gamma = 1$  los efectos termoviscosos predominan para controlar el caudal. De lo anterior se concluye que cuando  $\alpha \geq 0.001$  y  $\gamma = 0.1$ , entonces los cambios que inducen efectos térmicos en la viscosidad del medio no son despreciables.



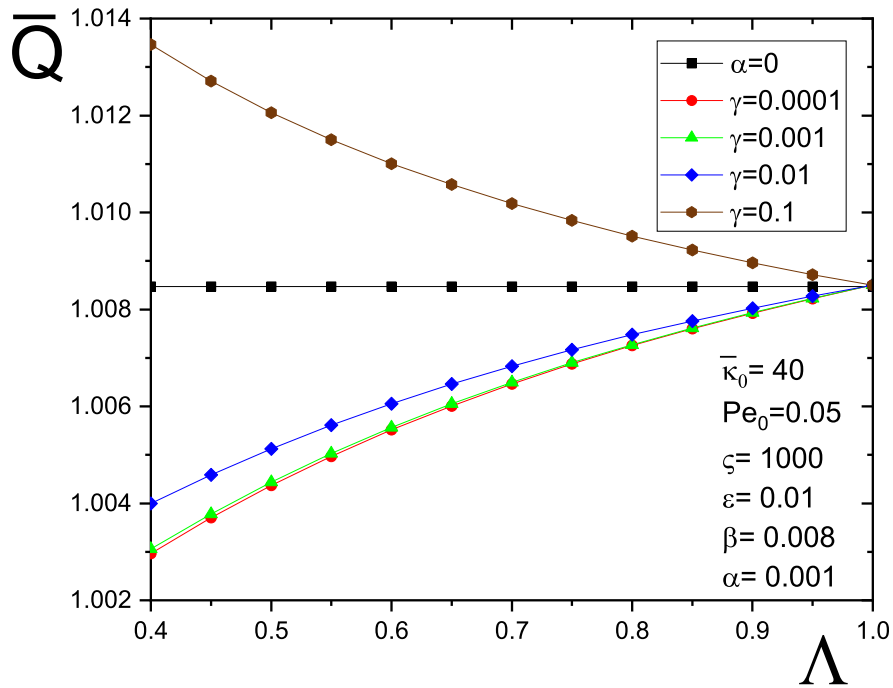


Figura 4.22:  $\bar{Q}(\Lambda)$  para diferentes valores de  $\gamma$  y  $\alpha = 0.001$ .

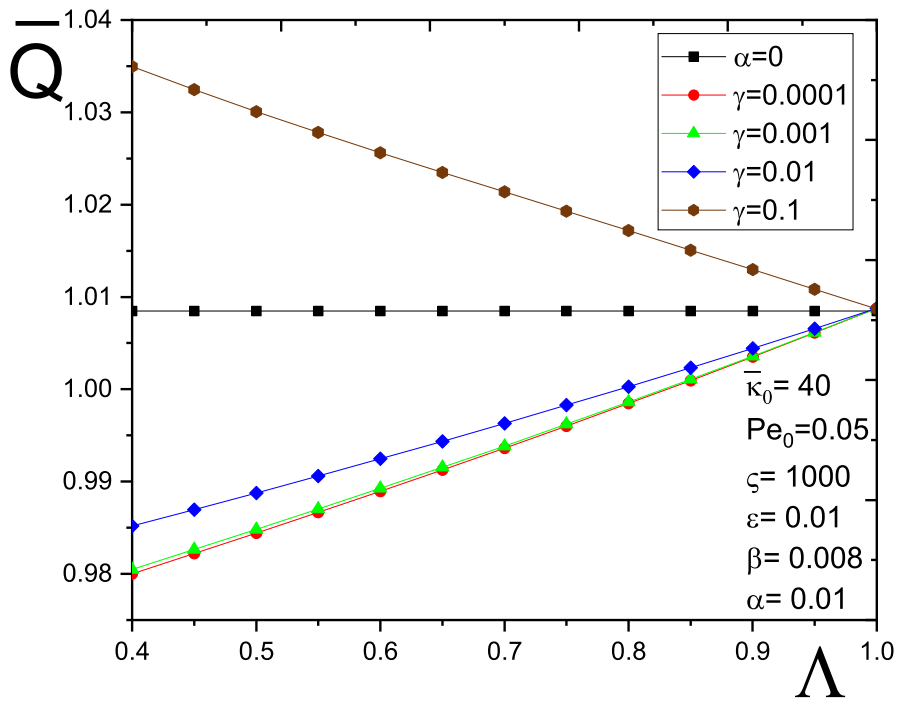


Figura 4.23:  $\bar{Q}(\Lambda)$  para diferentes valores de  $\gamma$  y  $\alpha = 0.01$ .

Para un valor más alto de  $\alpha$ :

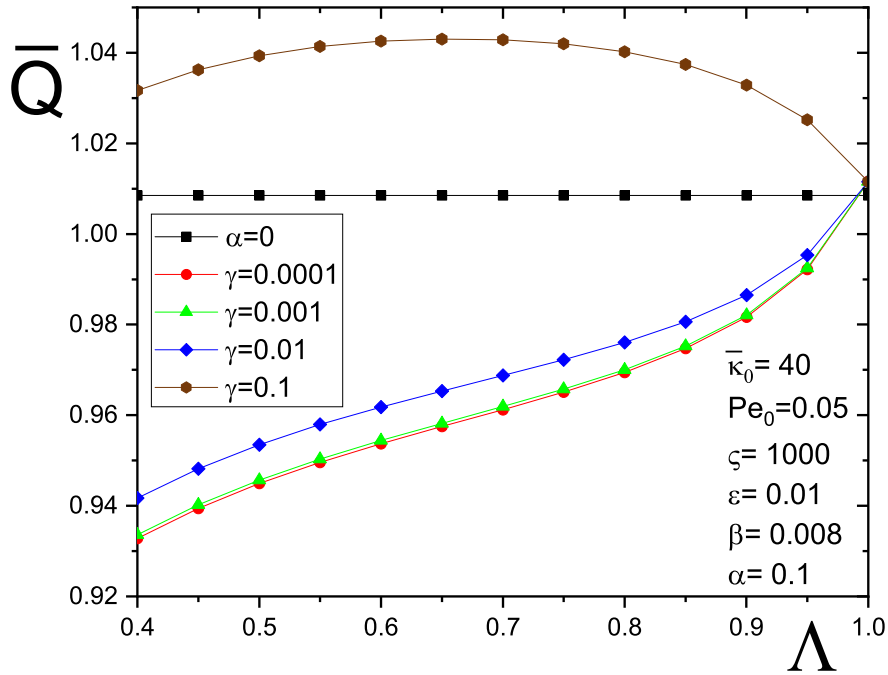


Figura 4.24:  $\bar{Q}(\Lambda)$  para diferentes valores de  $\gamma$  y  $\alpha = 0.1$ .

Definitivamente existe un incremento en los efectos inerciales del flujo cuando los efectos térmicos son importantes, sin embargo, la disminución de la viscosidad no garantiza un incremento de la velocidad únicamente en la dirección longitudinal. Cuando los gradientes de viscosidad son importantes, se generan incrementos en la velocidad transversal  $\bar{v}$ . Lo anterior afirma un incremento en magnitud de los términos inerciales, pero no garantiza un incremento en el gasto volumétrico. Las figuras 4.25, 4.26 y 4.27 reflejan que los efectos inerciales en la dirección transversal al flujo también incrementan. Se hizo un zoom a la solución vectorial de la velocidad en la zona rectangular delimitada por los puntos de coordenadas  $P(\chi, Y)$ :  $A(0.75, 0.8)$  y  $B(0.75, 0.8)$ . La consideración del flujo unidimensional para soluciones analíticas ya no es válida.

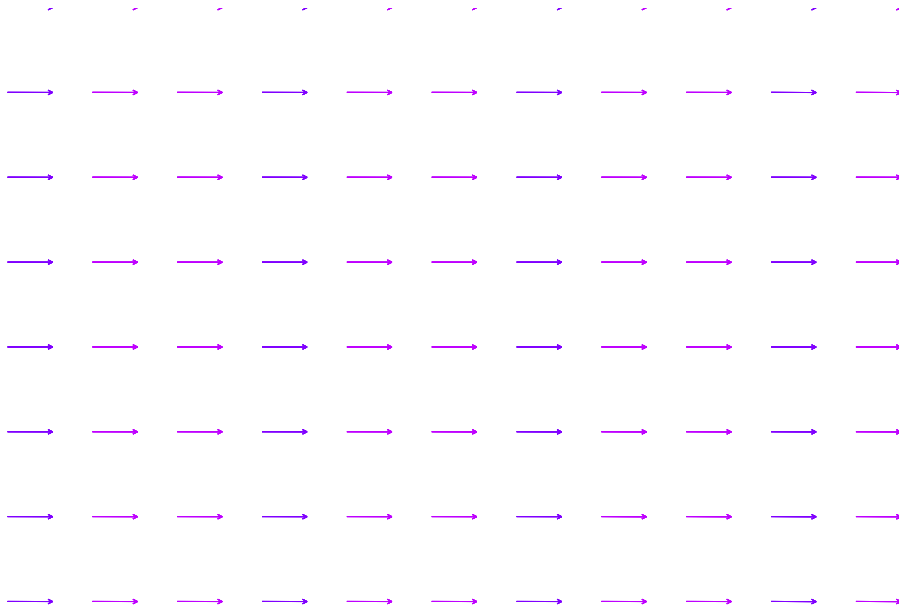


Figura 4.25: Solución vectorial de la velocidad para  $\gamma = 0.0001$  y  $\alpha = 0.0001$ .

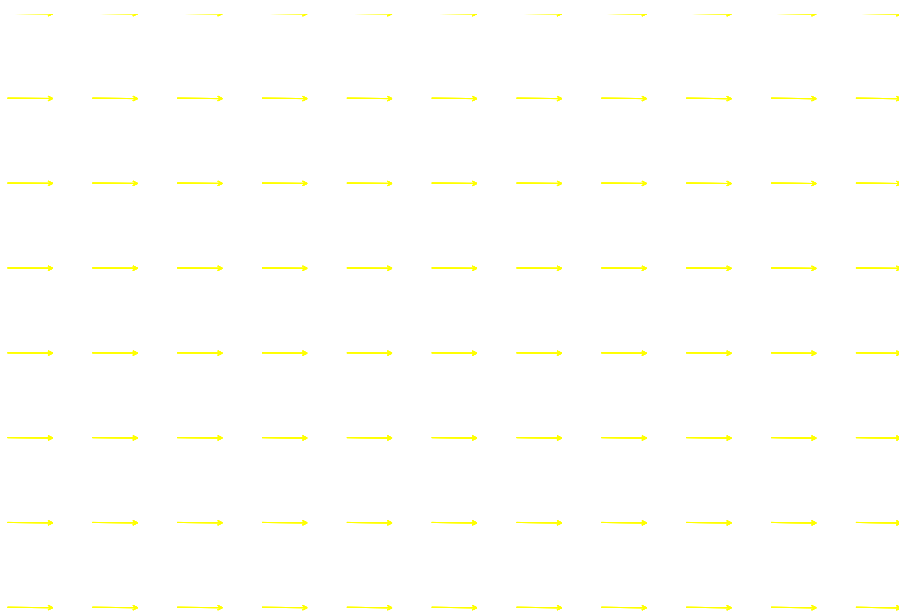


Figura 4.26: Solución vectorial de la velocidad para  $\gamma = 0.01$  y  $\alpha = 0.1$ .



Figura 4.27: Solución vectorial de la velocidad para  $\gamma = 0.1$  y  $\alpha = 0.1$ .

Se puede apreciar que la velocidad en dirección transversal también aumenta considerablemente, dando como resultado una disminución neta del caudal, debida a los gradientes de viscosidad y velocidad. Al igual que en el análisis de la presión adimensional y la velocidad, para valores de  $\gamma = 0.1$  el comportamiento se invierte completamente. El significado físico de lo anterior es que los efectos del cambio en la viscosidad están predominando sobre los efectos que intervienen en el caso ideal de la viscosidad constante. Existe un incremento en el caudal respecto a la referencia. La solución analítica referida en [8] expresa el caudal como función de los parámetros y variables:

$$\bar{Q} = 1 - \frac{\tanh(\bar{\kappa}_0)}{\bar{\kappa}_0} + \frac{1}{3}\alpha \left( g_1 \frac{d\theta_{0,0}}{dx} - h_1 \theta_{0,0} - \frac{d\Pi_{0,1}}{dx} \right) \quad (4.1)$$

Donde:

$$g_1 = \frac{3}{16\zeta} \frac{1}{\cosh^2(\bar{\kappa}_0)} \left( \frac{\sinh(2\bar{\kappa}_0)}{2\bar{\kappa}_0} - \cosh 2\bar{\kappa}_0 - \frac{4}{3}\bar{\kappa}_0^2 \right)$$

y

$$h_1 = \frac{3}{2} \left( \tanh^2(\bar{\kappa}_0) + \frac{\tanh(\bar{\kappa}_0)}{\bar{\kappa}_0} - 1 \right)$$

Para todos los casos de  $\gamma$ , cuando  $\alpha = 0$ , sólo está expresado únicamente en función del parámetro de Debye Hückel 1.3, no obstante, cuando  $\alpha$  comienza a ser relevante, los gradientes de temperatura y presión comienzan a tomar importancia en el caudal. Se concluyó en la sección 4.4 que el efecto que tenía  $\gamma$  en los gradientes de presión era invertirlos a partir de que  $\gamma = 0.1$ . Así, en la solución analítica 4.1 estarían compitiendo los efectos de  $g_1 \frac{d\theta_{0,0}}{dx}$  con  $\frac{d\Pi_{0,1}}{dx}$ , que ahora son opuestos a lo que eran con la consideración de la viscosidad constante.

El modelo lineal de la ecuación 2.14 representa la disminución de la viscosidad con respecto a la temperatura. Lo más razonable sería pensar que para el caso donde los efectos térmicos tienen más relevancia  $\alpha = 0.1$  y  $\Lambda = 0.4$  la viscosidad será mínima y eso llevaría a la falsa conclusión de que en ese punto se obtiene el máximo en el caudal. Los gradientes de viscosidad

para el caso mencionado, provocan que exista un incremento considerable en la velocidad  $\bar{v}$ , que ocurre en dirección vertical. Lo que provocará una disminución lógica en el caudal calculado por unidad de área transversal al flujo. Los efectos mencionados en la sección 4.6 enlistados como a) y b) también tienen relevancia en la disminución del caudal. Se observa que en los casos no isotérmicos, y con  $\gamma$  despreciable, la influencia que tiene  $\alpha$  en el caudal es disminuirlo, para cualquier caso, a excepción de  $\Lambda = 1$ , ya que en ese punto se regresa el fenómeno al estado isotérmico.

# Capítulo 5

## Conclusiones

En este trabajo se obtuvieron soluciones numéricas para un flujo electroosmótico, la viscosidad y la densidad de carga eléctrica son funciones de la temperatura. Para los valores seleccionados de los parámetros adimensionales usados en el presente trabajo, se concluye que al omitir la dependencia de la temperatura de variables y parámetros físicos se subestima el valor numérico del caudal. En particular, en este trabajo se demuestra que el caudal se incrementa en al menos un 11%. Por lo tanto, en cualquier trabajo en el que el efecto Joule provoque un incremento de temperaturas considerable, la variación de la viscosidad no puede ser despreciada.

Los efectos que tiene el parámetro  $\gamma$  sólo son relevantes para valores de  $\alpha$  mayores a 0.001 y  $\gamma = 0.1$ . Sin embargo, la combinación de los dos resulta en un cambio considerable en el caudal, permitiendo así controlarlo por medio de condiciones térmicas, además de eléctricas.

El trabajo futuro incluye realizar un análisis más completo del fenómeno, en donde la conductividad eléctrica, la longitud de Debye y el potencial zeta también son funciones de la temperatura. Además de acoplar un segundo fenómeno conductivo que represente la transferencia de calor a través de las paredes del canal hacia el fenómeno convectivo. Para un campo eléctrico fijo, el caudal está determinado en su mayor parte por el proceso convectivo, y los parámetros  $\alpha$  y  $\gamma$ .

Valores elevados para el parámetro  $\gamma$  no son sinónimo de aumentar el gasto volumétrico, porque los nuevos gradientes de viscosidad que se generan también inducen pequeñas vorticidades en el flujo, haciendo que la velocidad transversal aumente. Sólo es necesario considerar los cambios de viscosidad para números de Biot menores a 0.0032, en los que el proceso convectivo de extracción de calor es pequeño en comparación con la conductividad del canal.

Para obtener valores de  $\alpha$  que permitan que la consideración del parámetro  $\gamma$  sea admisible, es necesario tener un medio que sea muy buen conductor de calor y un campo eléctrico aplicado superior a los  $10^3 V/m$ .

Los gradientes de presión inducidos en el caso de  $\gamma = 0.1$  y  $\alpha = 0.1$  son lo suficientemente importantes para alterar el perfil de velocidades y romper la uniformidad del mismo, formando una pequeña concavidad en el mismo. Si se necesita tener un control preciso del caudal (por ejemplo, en aplicaciones biomédicas), se requiere un análisis que contemple estos cambios y así tener mayor precisión en el manejo del gasto volumétrico, o, en su defecto, un efecto convectivo de la magnitud suficiente para controlar los incrementos de temperatura y así reducir los efectos termoviscosos presentes.

# Apéndice A

## Ecuaciones de momentum

Partiendo de la ecuación de momentum lineal en su forma diferencial [21]:

$$\rho \left( v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho b_i$$

Donde  $b_i$  son los componentes del vector de fuerzas de cuerpo y  $\sigma_{ij}$  los componentes del tensor de esfuerzos. El tensor de esfuerzos puede dividirse en dos partes:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + S_{ij}$$

De tal forma que  $S_{ij}$  depende solamente de la velocidad de deformación, así, cuando es cero, la única contribución al tensor de esfuerzos es la presión hidrostática. Para un fluido newtoniano, el tensor de esfuerzos viscosos  $S_{ij}$  está definido de la siguiente manera:

$$S_{ij} = \lambda \Delta \delta_{ij} + 2\eta D_{ij}$$

Donde  $\lambda$  y  $\eta$  son propiedades materiales,  $\Delta = D_{kk}$  y  $D_{ij}$  es el tensor de rapidez de deformación.

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

La traza del tensor  $D_{ij}$  físicamente representa un cambio de volumen, entonces, para el caso de un flujo incompresible  $\Delta = 0$ . Sustituyendo en la ecuación de momentum:

$$\rho \left( v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = -\frac{\partial}{\partial x_j} (p\delta_{ij}) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \eta \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \eta \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \rho b_i$$

Aprovechando la propiedad distributiva de la derivada:

$$\rho \left( v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = -\frac{\partial}{\partial x_j} (p\delta_{ij}) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \eta \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \eta \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \rho b_i$$

Si se desarrollan las derivadas de los productos:

$$\rho \left( v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x_j} \delta_{ij} + \eta \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial \eta}{\partial x_j} + \eta \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_j \partial x_i} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial \eta}{\partial x_j} + \rho b_i$$

En el antepenúltimo término, se pueden agrupar las derivadas como  $\eta \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right)$ , pero  $\frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0$  como obtenido antes en la ecuación de continuidad. Tomando en cuenta lo anterior y agrupando términos:

$$\rho \left( v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x_j} \delta_{ij} + \eta \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial \eta}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \rho b_i$$

Las fuerzas de cuerpo en el caso particular de un flujo electrosmótico se refieren a las fuerzas eléctricas que se ocasionan a partir del campo eléctrico aplicado, se representan como  $\rho b_i = \rho_e E_i$  [8] donde  $E$  es el campo eléctrico y  $\rho_e$  es la densidad de carga eléctrica. Así, el conjunto de ecuaciones escrita en forma abreviada es:

$$\rho \left( v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x_j} \delta_{ij} + \eta \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial \eta}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \rho_e E_i$$

Se desarrolla la suma en notación indicial para el caso bidimensional:

$$\rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + 2 \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \rho_e E_x$$

$$\rho \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \eta \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + 2 \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \rho_e E_y$$



# Apéndice B

## Adimensionalización de las ecuaciones

### Ecuación adimensional de continuidad

Partiendo de la ecuación (2.1):

$$\begin{aligned}\frac{\partial(U_{HS_0}\bar{u})}{\partial(\chi L)} + \frac{\partial\left(\frac{U_{HS_0}H\bar{v}}{L}\right)}{\partial(YH)} &= 0 \\ \frac{U_{HS_0}}{L}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\chi} + \frac{U_{HS_0}}{L}\frac{\partial\bar{v}}{\partial Y} &= 0 \\ \frac{\partial\bar{u}}{\partial\chi} + \frac{\partial\bar{v}}{\partial Y} &= 0\end{aligned}\tag{B.1}$$

### Ecuaciones adimensionales de momentum

Partiendo de la ecuación (2.2) y adimensionalizando por partes, en dirección x:  
Los efectos convectivos:

$$\begin{aligned}\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) &= \rho\left(\frac{U_{HS_0}^2}{L}\bar{u}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\chi} + \frac{U_{HS_0}^2H}{LH}\bar{v}\frac{\partial\bar{u}}{\partial Y}\right) \\ &= \frac{\rho U_{HS_0}^2}{L}\left(\bar{u}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\chi} + \bar{v}\frac{\partial\bar{u}}{\partial Y}\right)\end{aligned}$$

Los efectos de presión<sup>1</sup>:

$$\begin{aligned}-\frac{\partial p}{\partial x} &= -\frac{\eta_0 U_{HS_0} L}{H^2 L} \frac{\partial \Pi}{\partial \chi} - \frac{z^2 e^2 n_\infty \zeta^2}{k_B T_0 L} \frac{\partial\left(\frac{\bar{\psi}^2}{1+\alpha\theta}\right)}{\partial \chi} \\ &= -\frac{\eta_0 U_{HS_0}}{H^2} \frac{\partial \Pi}{\partial \chi} + \frac{z^2 e^2 n_\infty \zeta^2 \alpha}{k_B T_0 L} \frac{\bar{\psi}^2}{(1+\alpha\theta)^2} \frac{\partial \theta}{\partial \chi}\end{aligned}$$

Los efectos difusivos (viscosos):

$$2\frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} = -\xi \frac{2\eta_0 U_{HS_0}}{L^2(1+\alpha\theta)^2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \chi} \frac{\partial \theta}{\partial \chi}$$

---

<sup>1</sup>Véase la ecuación 1.4 y 1.3.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \eta}{\partial y} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= -\xi \frac{\eta_0 U_{HS_0}}{H^2 L^2 (1 + \alpha \theta)^2} \left( H^2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial \chi} + L^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial Y} \right) \frac{\partial \theta}{\partial Y} \\ &= -\xi \frac{\eta_0 U_{HS_0}}{H^2 (1 + \alpha \theta)^2} \left( \varepsilon^2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial \chi} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial Y} \right) \frac{\partial \theta}{\partial Y}\end{aligned}$$

Los efectos de las fuerzas de cuerpo (eléctricos):

$$\begin{aligned}\rho_e E_x &= \left( -\frac{2z^2 e^2 n_\infty \zeta \bar{\psi}}{k_B T} \right) \left( -\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \\ &= \frac{2z^2 e^2 n_\infty \zeta \bar{\psi}}{k_B T_0 (1 + \alpha \theta)} \frac{\phi_0}{L} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \chi}\end{aligned}$$

Multiplicando todos los términos por  $\frac{H^2}{\eta_0 U_{HS_0}}$ :

Los efectos convectivos:

$$\begin{aligned}\frac{\rho U_{HS_0}^2}{L} \frac{H^2}{\eta_0 U_{HS_0}} \left( \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \chi} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial Y} \right) &= \frac{H}{L} \frac{\rho U_{HS_0} H}{\eta_0} \left( \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \chi} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial Y} \right) \\ &= \varepsilon Re_0 \left( \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \chi} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial Y} \right)\end{aligned}$$

Los efectos de presión <sup>2</sup>:

$$\begin{aligned}-\frac{\eta_0 U_{HS_0}}{H^2} \frac{H^2}{\eta_0 U_{HS_0}} \frac{\partial \Pi}{\partial \chi} + \frac{z^2 e^2 n_\infty \zeta^2 \alpha}{k_B T_0 L} \frac{H^2}{\eta_0 U_{HS_0}} \frac{\bar{\psi}^2}{(1 + \alpha \theta)^2} \frac{\partial \theta}{\partial \chi} \\ = -\frac{\partial \Pi}{\partial \chi} - \bar{\kappa}_0^2 \frac{\alpha}{2\zeta} \frac{\bar{\psi}^2}{(1 + \alpha \theta)^2} \frac{\partial \theta}{\partial \chi}\end{aligned}$$

Los efectos difusivos (viscosos):

$$\begin{aligned}\frac{U_{HS_0} \eta_0}{H^2} \frac{H^2}{\eta_0 U_{HS_0}} \left( 1 - \gamma \frac{\theta}{1 + \alpha \theta} \right) \left( \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \chi^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial Y^2} \right) &= \left( 1 - \gamma \frac{\theta}{1 + \alpha \theta} \right) \left( \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \chi^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial Y^2} \right) \\ -\gamma \frac{2\eta_0 U_{HS_0}}{L^2 (1 + \alpha \theta)^2} \frac{H^2}{\eta_0 U_{HS_0}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \chi} \frac{\partial \theta}{\partial \chi} &= -2\gamma \varepsilon^2 \frac{1}{(1 + \alpha \theta)^2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \chi} \frac{\partial \theta}{\partial \chi} \\ -\gamma \frac{\eta_0 U_{HS_0}}{H^2 (1 + \alpha \theta)^2} \frac{H^2}{\eta_0 U_{HS_0}} \left( \varepsilon^2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial \chi} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial Y} \right) \frac{\partial \theta}{\partial Y} &= -\gamma \frac{1}{(1 + \alpha \theta)^2} \left( \varepsilon^2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial \chi} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial Y} \right) \frac{\partial \theta}{\partial Y}\end{aligned}$$

Los efectos de fuerzas de cuerpo (eléctricos):

$$\begin{aligned}\frac{2z^2 e^2 n_\infty \zeta \phi_0 \bar{\psi}}{L k_B T_0 (1 + \alpha \theta)} \frac{H^2}{\eta_0 U_{HS_0}} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \chi} &= -\frac{2z^2 e^2 n_\infty \zeta \phi_0 \bar{\psi}}{L k_B T_0 (1 + \alpha \theta)} \frac{H^2 L \eta_0}{\eta_0 \varepsilon \zeta \phi_0} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \chi} \\ &= -\frac{2z^2 e^2 n_\infty H^2}{\varepsilon k_B T_0} \frac{\bar{\psi}}{(1 + \alpha \theta)} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \chi} \\ &= -\bar{\kappa}_0^2 \frac{\bar{\psi}}{(1 + \alpha \theta)} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \chi}\end{aligned}$$

<sup>2</sup>Véase la definición de  $U_{HS}$  en la ecuación (1.2).

Finalmente:

$$\begin{aligned}
\varepsilon Re_0 \left( \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \chi} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial Y} \right) &= -\frac{\partial \Pi}{\partial \chi} - \bar{\kappa}_0^2 \frac{\alpha}{2\zeta} \frac{\bar{\psi}^2}{(1+\alpha\theta)^2} \frac{\partial \theta}{\partial \chi} \\
&+ \left( 1 - \gamma \frac{\theta}{1+\alpha\theta} \right) \left( \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \chi^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial Y^2} \right) \\
&- 2\gamma \varepsilon^2 \frac{1}{(1+\alpha\theta)^2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \chi} \frac{\partial \theta}{\partial \chi} \\
&- \gamma \frac{1}{(1+\alpha\theta)^2} \left( \varepsilon^2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial \chi} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial Y} \right) \frac{\partial \theta}{\partial Y} \\
&- \bar{\kappa}_0^2 \frac{\bar{\psi}}{(1+\alpha\theta)} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \chi}
\end{aligned} \tag{B.2}$$

Partiendo de la ecuación (2.3) y adimensionalizando por partes, en dirección y: Los efectos convectivos:

$$\begin{aligned}
\rho \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= \rho \left( \frac{U_{HS_0}^2 H}{L^2} \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \chi} + \frac{U_{HS_0}^2 H}{L^2} \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial Y} \right) \\
&= \frac{\rho U_{HS_0}^2 H}{L^2} \left( \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \chi} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial Y} \right)
\end{aligned}$$

Los efectos de presión:

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial p}{\partial y} &= -\frac{L\eta_0 U_{HS_0}}{H^3} \frac{\partial \Pi}{\partial Y} + \frac{z^2 e^2 n_\infty \zeta^2 \bar{\psi}}{Hk_B T_0 (1+\alpha\theta)^2} \left( \alpha \bar{\psi} \frac{\partial \theta}{\partial Y} - 2(1+\alpha\theta) \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial Y} \right) \\
&= -\frac{L\eta_0 U_{HS_0}}{H^3} \frac{\partial \Pi}{\partial Y} + \frac{z^2 e^2 n_\infty \zeta^2 \bar{\psi}^2 \alpha}{Hk_B T_0 (1+\alpha\theta)^2} \frac{\partial \theta}{\partial Y} - \frac{2z^2 e^2 n_\infty \zeta^2 \bar{\psi}}{Hk_B T_0 (1+\alpha\theta)} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial Y}
\end{aligned}$$

Los efectos difusivos (viscosos):

$$\begin{aligned}
\eta \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) &= \frac{\eta_0 U_{HS_0}}{HL^3} \left( 1 - \gamma \frac{\theta}{1+\alpha\theta} \right) \left( H^2 \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \chi^2} + L^2 \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial Y^2} \right) \\
&= \frac{\eta_0 U_{HS_0}}{HL} \left( 1 - \gamma \frac{\theta}{1+\alpha\theta} \right) \left( \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \chi^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial Y^2} \right) \\
2 \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} &= -\gamma \frac{2\eta_0 U_{HS_0}}{HL(1+\alpha\theta)^2} \frac{\partial \bar{v}}{\partial Y} \frac{\partial \theta}{\partial Y} \\
\frac{\partial \eta}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= -\gamma \frac{\eta_0 U_{HS_0}}{HL^3(1+\alpha\theta)^2} \left( H^2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial \chi} + L^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial Y} \right) \frac{\partial \theta}{\partial \chi} \\
&= -\gamma \frac{\eta_0 U_{HS_0}}{HL(1+\alpha\theta)^2} \left( \varepsilon^2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial \chi} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial Y} \right) \frac{\partial \theta}{\partial \chi}
\end{aligned}$$

Los efectos de fuerzas de cuerpo (eléctricos):

$$\begin{aligned}
\rho_e E_y &= \left( -\frac{2z^2 e^2 n_\infty \zeta \bar{\psi}}{k_B T_0 (1+\alpha\theta)} \right) \frac{\zeta}{H} \left( -\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial Y} \right) \\
&= \frac{2z^2 e^2 n_\infty \zeta^2 \bar{\psi}}{Hk_B T_0 (1+\alpha\theta)} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial Y}
\end{aligned}$$

Multiplicando todos los términos por  $\frac{H^3}{\eta_0 U_{HS_0} L}$ :

Los efectos convectivos:

$$\begin{aligned} \frac{\rho U_{HS_0}^2 H}{L^2} \frac{H^3}{\eta_0 U_{HS_0} L} \left( \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \chi} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial Y} \right) &= \frac{H^3}{L^3} \frac{\rho U_{HS_0} H}{\eta_0} \left( \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \chi} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial Y} \right) \\ &= \varepsilon^3 Re_0 \left( \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \chi} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial Y} \right) \end{aligned}$$

Los efectos de presión:

$$\begin{aligned} -\frac{L \eta_0 U_{HS_0}}{H^3} \frac{H^3}{\eta_0 U_{HS_0} L} \frac{\partial \Pi}{\partial Y} + \frac{z^2 e^2 n_\infty \zeta^2 \bar{\psi}^2 \alpha}{H k_B T_0 (1 + \alpha \theta)^2} \frac{H^3}{\eta_0 U_{HS_0} L} \frac{\partial \theta}{\partial Y} - \frac{2z^2 e^2 n_\infty \zeta^2 \bar{\psi}}{H k_B T_0 (1 + \alpha \theta)} \frac{H^3}{\eta_0 U_{HS_0} L} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial Y} \\ = -\frac{\partial \Pi}{\partial Y} - \frac{z^2 e^2 n_\infty H^2 \alpha \zeta}{\epsilon k_B T_0} \frac{\bar{\psi}^2}{\phi_0 (1 + \alpha \theta)^2} \frac{\partial \theta}{\partial Y} + \frac{2z^2 e^2 n_\infty H^2}{\epsilon k_B T_0} \frac{\zeta \bar{\psi}}{\phi_0 (1 + \alpha \theta)} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial Y} \\ = -\frac{\partial \Pi}{\partial Y} - \bar{\kappa}_0^2 \frac{\alpha}{2\zeta (1 + \alpha \theta)^2} \frac{\bar{\psi}^2}{\partial Y} \frac{\partial \theta}{\partial Y} + \bar{\kappa}_0^2 \frac{\bar{\psi}}{\zeta (1 + \alpha \theta)} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial Y} \end{aligned}$$

Los efectos difusivos:

$$\begin{aligned} \frac{\eta_0 U_{HS_0}}{HL} \frac{H^3}{\eta_0 U_{HS_0} L} \left( 1 - \xi \frac{\theta}{1 + \alpha \theta} \right) \left( \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \chi^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial Y^2} \right) &= \varepsilon^2 \left( 1 - \xi \frac{\theta}{1 + \alpha \theta} \right) \left( \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \chi^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial Y^2} \right) \\ -\xi \frac{2\eta_0 U_{HS_0}}{HL(1 + \alpha \theta)^2} \frac{H^3}{\eta_0 U_{HS_0} L} \frac{\partial \bar{v}}{\partial Y} \frac{\partial \theta}{\partial Y} &= -2\varepsilon^2 \xi \frac{1}{(1 + \alpha \theta)^2} \frac{\partial \bar{v}}{\partial Y} \frac{\partial \theta}{\partial Y} \\ -\xi \frac{\eta_0 U_{HS_0}}{HL(1 + \alpha \theta)^2} \frac{H^3}{\eta_0 U_{HS_0} L} \left( \varepsilon^2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial \chi} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial Y} \right) \frac{\partial \theta}{\partial \chi} &= -\xi \varepsilon^2 \frac{1}{(1 + \alpha \theta)^2} \left( \varepsilon^2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial \chi} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial Y} \right) \frac{\partial \theta}{\partial \chi} \end{aligned}$$

Los efectos de fuerzas de cuerpo (eléctricos):

$$\begin{aligned} \frac{2z^2 e^2 n_\infty \zeta^2 \bar{\psi}}{H k_B T_0 (1 + \alpha \theta)} \frac{H^3}{\eta_0 U_{HS_0} L} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial Y} &= -\frac{2z^2 e^2 n_\infty H^2}{\epsilon k_B T_0} \frac{\zeta \bar{\psi}}{\phi_0 (1 + \alpha \theta)} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial Y} \\ &= -\bar{\kappa}_0^2 \frac{\bar{\psi}}{\zeta (1 + \alpha \theta)} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial Y} \end{aligned}$$

Finalmente:

$$\begin{aligned} \varepsilon^3 Re_0 \left( \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \chi} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial Y} \right) &= -\frac{\partial \Pi}{\partial Y} - \bar{\kappa}_0^2 \frac{\alpha}{2\zeta (1 + \alpha \theta)^2} \frac{\bar{\psi}^2}{\partial Y} \frac{\partial \theta}{\partial Y} + \bar{\kappa}_0^2 \frac{\bar{\psi}}{\zeta (1 + \alpha \theta)} \frac{d\bar{\psi}}{dY} \\ &+ \varepsilon^2 \left( 1 - \xi \frac{\theta}{1 + \alpha \theta} \right) \left( \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \chi^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial Y^2} \right) \\ &- 2\varepsilon^2 \xi \frac{1}{(1 + \alpha \theta)^2} \frac{\partial \bar{v}}{\partial Y} \frac{\partial \theta}{\partial Y} \\ &- \varepsilon^2 \xi \frac{1}{(1 + \alpha \theta)^2} \left( \varepsilon^2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial \chi} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial Y} \right) \frac{\partial \theta}{\partial \chi} \\ &- \bar{\kappa}_0^2 \frac{\bar{\psi}}{\zeta (1 + \alpha \theta)} \frac{d\bar{\psi}}{dY} \end{aligned}$$

Simplificando:

$$\begin{aligned}
\varepsilon^3 Re_0 \left( \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \chi} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial Y} \right) &= -\frac{\partial \Pi}{\partial Y} - \bar{\kappa}_0^2 \frac{\alpha}{2\zeta} \frac{\bar{\psi}^2}{(1+\alpha\theta)^2} \frac{\partial \theta}{\partial Y} \\
&+ \varepsilon^2 \left( 1 - \xi \frac{\theta}{1+\alpha\theta} \right) \left( \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \chi^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial Y^2} \right) \\
&- 2\varepsilon^2 \xi \frac{1}{(1+\alpha\theta)^2} \frac{\partial \bar{v}}{\partial Y} \frac{\partial \theta}{\partial Y} \\
&- \varepsilon^2 \xi \frac{1}{(1+\alpha\theta)^2} \left( \varepsilon^2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial \chi} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial Y} \right) \frac{\partial \theta}{\partial \chi}
\end{aligned} \tag{B.3}$$

Cuando se analicen los resultados más adelante, se espera que cuando la variación de la viscosidad sea cero respecto a la temperatura ( $\xi = 0$ ), entonces se obtendrían los mismos resultados reportados en los análisis que no consideran la viscosidad variable. Si en las ecuaciones anteriores (B.2 y B.3) se hace esa consideración ( $\xi = 0$ ) y que  $\bar{\psi}$  no depende de  $\chi$ , se obtiene la misma ecuación que la reportada en el artículo de Ramos et.al. [8].

### Ecuación adimensional de energía

Adimensionalizando término a término, partiendo de la ecuación (2.4):

Los efectos advectivos:

$$\begin{aligned}
\rho C_p \left( u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) &= \rho C_p \left( \frac{U_{HS_0} \Delta T_c}{L} \bar{u} \frac{\partial \theta}{\partial \chi} + \frac{U_{HS_0} H \Delta T_c}{LH} \bar{v} \right) \\
&= \frac{\rho C_p \Delta T_c U_{HS_0}}{L} \left( \bar{u} \frac{\partial \theta}{\partial \chi} + \bar{v} \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right) \\
&= \frac{\rho C_p U_{HS_0} \sigma \phi_0^2 H^2}{kL^3} \left( \bar{u} \frac{\partial \theta}{\partial \chi} + \bar{v} \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right)
\end{aligned}$$

Los efectos difusivos:

$$\begin{aligned}
k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) &= k \left( \frac{\Delta T_c}{L^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \chi^2} + \frac{\Delta T_c}{H^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) \\
&= \frac{k \Delta T_c}{H^2} \left( \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial \chi^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) \\
&= \frac{\sigma \phi_0^2}{L^2} \left( \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial \chi^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right)
\end{aligned}$$

Los efectos generadores:

$$\begin{aligned}
\sigma \|\mathbf{E}\|^2 &= \sigma \left( \left( -\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left( -\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right) \\
&= \sigma \left( \left( \frac{\phi_0}{L} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \chi} + \frac{\zeta}{L} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \chi} \right)^2 + \frac{\zeta^2}{H^2} \left( \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial Y} \right)^2 \right) \\
&= \sigma \left( \frac{\phi_0^2}{L^2} \left( \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \chi} \right)^2 + \frac{\zeta^2}{L^2} \left( \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \chi} \right)^2 + 2 \frac{\phi_0 \zeta}{L^2} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \chi} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \chi} + \frac{\zeta^2}{H^2} \left( \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial Y} \right)^2 \right) \\
&= \frac{\sigma \phi_0^2}{H^2} \left( \varepsilon^2 \left( \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \chi} \right)^2 + \frac{\varepsilon^2}{\zeta^2} \left( \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \chi} \right)^2 + \frac{2\varepsilon^2}{\zeta} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \chi} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \chi} + \frac{1}{\zeta^2} \left( \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial Y} \right)^2 \right)
\end{aligned}$$

Multiplicando cada término por  $\frac{L^2}{\sigma\phi_0^2}$ , la ecuación completa toma la forma:

$$\varepsilon P e_0 \left( \bar{u} \frac{\partial \theta}{\partial \chi} + \bar{v} \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right) = \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial \chi^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} + \left( \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \chi} \right)^2 + \frac{1}{\varsigma^2} \left( \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \chi} \right)^2 + \frac{2 \partial \bar{\phi} \partial \bar{\psi}}{\varsigma \partial \chi \partial \chi} + \frac{1}{\varepsilon^2 \varsigma^2} \left( \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial Y} \right)^2$$

Como el campo eléctrico inducido no depende de la dirección horizontal, entonces:

$$\varepsilon P e_0 \left( \bar{u} \frac{\partial \theta}{\partial \chi} + \bar{v} \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right) = \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial \chi^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} + \left( \frac{d\bar{\phi}}{d\chi} \right)^2 + \frac{1}{\varepsilon^2 \varsigma^2} \left( \frac{d\bar{\psi}}{dY} \right)^2 \quad (\text{B.4})$$

### Ecuaciones adimensionales de campo eléctrico

En dirección  $x$ , partiendo de la ecuación (2.5):

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{d\phi}{dx} \\ E_0 \bar{E}_x &= -\frac{\phi_0}{L} \frac{d\bar{\phi}}{d\chi} \\ \frac{\phi_0}{L} \bar{E}_x &= -\frac{\phi_0}{L} \frac{d\bar{\phi}}{d\chi} \\ \bar{E}_x &= -\frac{d\bar{\phi}}{d\chi} \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

En dirección  $y$ , partiendo de la ecuación (2.6):

$$\begin{aligned} E_y &= -\frac{d\psi}{dy} \\ E_{y0} \bar{E}_y &= -\frac{\zeta}{H} \frac{d\bar{\psi}}{dY} \\ \frac{\zeta}{H} \bar{E}_y &= -\frac{\zeta}{H} \frac{d\bar{\psi}}{dY} \\ \bar{E}_y &= -\frac{d\bar{\psi}}{dY} \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

### Ecuación adimensional de Poisson

Partiendo de la ecuación (2.7):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} &= -\frac{\rho_e}{\epsilon} \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} &= \frac{2z^2 e^2 n_\infty \psi}{\epsilon k_B T} \\ \frac{\phi_0}{L^2} \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial \chi^2} + \frac{\zeta}{L^2} \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \chi^2} + \frac{\zeta}{H^2} \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial Y^2} &= \frac{2z^2 e^2 n_\infty \zeta \bar{\psi}}{\epsilon k_B T_0 (1 + \alpha \theta)} \\ \frac{\zeta}{H^2} \left( \varepsilon^2 \varsigma \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial \chi^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \chi^2} + \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial Y^2} \right) &= \frac{2z^2 e^2 n_\infty \zeta \bar{\psi}}{\epsilon k_B T_0 (1 + \alpha \theta)} \end{aligned}$$

$$\varepsilon^2 \varsigma \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial \chi^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \chi^2} + \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial Y^2} = \frac{2z^2 e^2 n_\infty H^2}{\epsilon k_B T_0} \frac{\bar{\psi}}{1 + \alpha \theta}$$

Finalmente:

$$\varepsilon^2 \varsigma \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial \chi^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \chi^2} + \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial Y^2} = \frac{\bar{\kappa}_0^2}{1 + \alpha \theta} \bar{\psi}$$

Como el campo eléctrico inducido no depende de la dirección horizontal, y la segunda derivada del potencial aplicado es igual a cero:

$$\frac{d^2 \bar{\psi}}{dY^2} = \frac{\bar{\kappa}_0^2}{1 + \alpha \theta} \bar{\psi} \quad (\text{B.7})$$

### Ecuación adimensional de Laplace

Partiendo de la ecuación (2.8):

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \phi}{dx^2} &= 0 \\ \frac{\phi_0}{L^2} \frac{d^2 \bar{\phi}}{d\chi^2} &= 0 \\ \frac{d^2 \bar{\phi}}{d\chi^2} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

# Apéndice C

## Apéndice de figuras

En la figura C.1 se observa la importancia de los fenómenos térmicos en el análisis y solución del potencial inducido. La consideración de que el potencial  $\zeta$  se encuentra en la pared es incorrecta, provocando cambios bruscos en la solución numérica debido a la condición de frontera impuesta. Cuando los efectos térmicos son importantes, entonces la aproximación de Debye-Hückel para el límite en EDL delgadas deja de ser válido, ya que se considera la densidad de carga eléctrica como función de la temperatura.

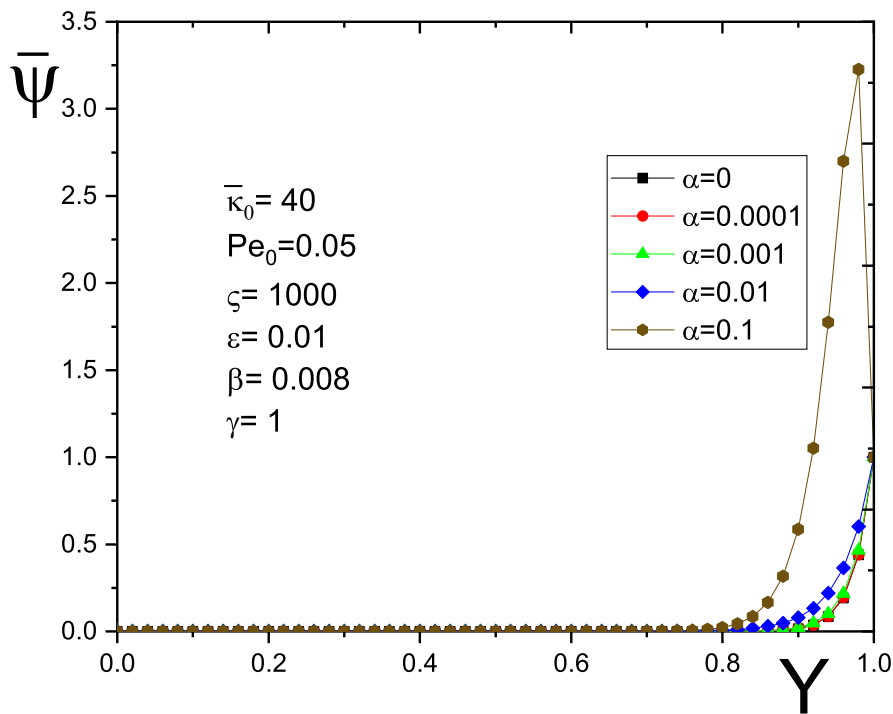


Figura C.1:  $\psi(Y)$  para diferentes valores de  $\alpha$  y  $\gamma = 1$ .

En la figura C.2 se observan las soluciones que tiene el perfil de velocidades con consideraciones de los parámetros adimensionales que tienen como consecuencia el plantear incongruencias con la física del problema, como valores tan grandes de  $\bar{\gamma}$  que representen una viscosidad negativa. FreeFem++ es capaz de resolverlo, no obstante, la física del problema pierde coherencia y se obtienen resultados fuera de la realidad.



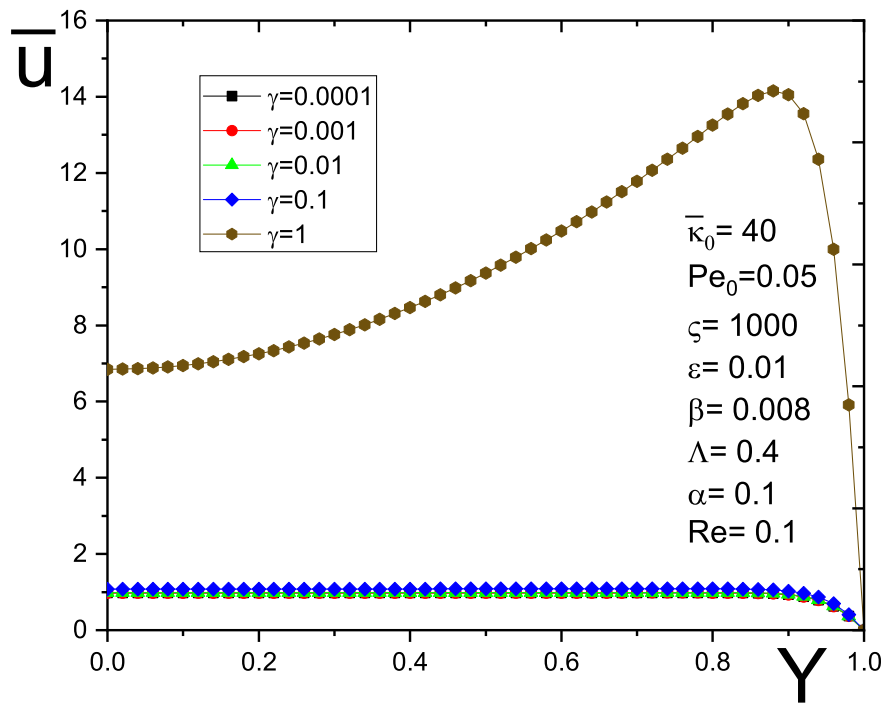


Figura C.2:  $\psi(Y)$  para diferentes valores de  $\gamma$  y  $\alpha = 0.1$ .

# Bibliografía

- [1] Castro A.M., Mayorga E.Y. y Moreno F.L. «Mathematical modelling of convective drying of feijoa (*Acca sellowiana* Berg) slices». En: *Journal of Food Engineering* (2019).
- [2] Adjari Armand. «Electro-Osmosis in Inhomogeneously Charged Surfaces». En: *Physical Review Letters* (1995).
- [3] Kirby Brian J. *Micro- and Nanoscale Fluid Mechanics Transport in Microfluidic Devices*. Cambridge University Press, 2010.
- [4] Vargas C., Bautista O. y Méndez F. «Effect of temperature-dependent properties on electroosmotic mobility at arbitrary zeta potentials». En: *Applied Mathematical Modelling* (2018).
- [5] Suman Chakraborty. *Microfluidics and Microfabrication*. Springer Science+Business Media, 2010.
- [6] Biscombe Christian J. C. «The Discovery of Electrokinetic Phenomena: Setting the Record Straight». En: *Angewandte Chemie International Edition*, 56(29), 8338–8340. (2016).
- [7] Wong C.P., Moon Kyoung-Sik y Li Yi. *Nano-Bio-Electronic, Photonic and MEMS Packaging*. Springer Science+Business Media, 2010.
- [8] Ramos E.A., Bautista O., Lizardi J.J. y Méndez F. «A perturbative thermal analysis for an electro-osmotic flow in a slit microchannel based on a Lubrication theory». En: *International Journal of Thermal Sciences* (2016).
- [9] Ramos Gómez Edgar Ali. «Análisis del flujo electro-osmótico en un microcanal considerando los efectos inducidos de la presión y la temperatura». Tesis de maestría. Facultad de Ingeniería - UNAM, jun. de 2016.
- [10] Hecht F. «New development in FreeFem++». En: *Journal of Numerical Mathematics* (2012).
- [11] Incropera Frank P., DeWitt David P., Bergman Theodore L. y Lavine Adrienne S. *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*. John Wiley y Sons Inc., 2007.
- [12] Karniadakis George, Beskok Ali y Narayan Aluru. *Microflows and Nanoflows Fundamentals and Simulation*. Springer Science+Business Media, 2005.
- [13] Tang G.H., He Y.L. y Tao W.Q. «Numerical analysis of mixing enhancement for micro-electroosmotic flow». En: *Journal of Applied Physics* (2010).
- [14] Bruus Henrik. *Theoretical Microfluidics*. Oxford University Press, 2008.
- [15] Lizardi J. J., Ramos E. A. y Méndez F. «Numerical Analysis for Temperature Changes in an Electro-Osmotic Flow in a Microchannel». En: *Journal of Thermophysics and Heat Transfer* (2019).

- [16] Hunter J. R. *Zeta potential in colloid science: principles and applications*. Academic Press, 2013.
- [17] Gentle James E. *Matrix Algebra: Theory, Computations, and Applications in Statistics*. Springer, 2007.
- [18] Lascombe Jean. *Molecular Motions in Liquids*. Société de Chimie Physique, 1972.
- [19] Hsu Jyh-Ping y Aleksandar M. Spasic. *Interfacial Electroviscoelasticity and Electrophoresis*. Taylor y Francis Group, 2010.
- [20] Masilamani Kannan, Ganguly Suvankar, Feichtinger Christian y Rüde Ulrich. «Hybrid lattice-Boltzmann and finite-difference simulation of electroosmotic flow in a microchannel». En: *Fluid Dynamics Research* (2011).
- [21] Lai W. Michael, Rubin David y Krempf Erhard. *Introduction to Continuum Mechanics*. Elsevier Ltd., 2010.
- [22] Nekoubin Nader. «Electroosmotic flow of power-law fluids in curved rectangular microchannel with high zeta potentials». En: *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics* (2018).
- [23] Nguyen Nam-Trung y Wereley Steven T. *Fundamentals and Applications of Microfluidics*. Artech House, 2006.
- [24] Bautista O, Sánchez S., Arcos J.C. y F. Méndez. «Theoretical conjugate heat transfer analysis in a parallel flat plate microchannel under electro-osmotic and pressure forces with a phan-thien-tanner fluid.» En: *International Journal of Thermal Sciences* (2011).
- [25] Haj-Kacem R.B., Ouerfelli N., Herráez J.V., Guettari M., Hamnda H. y Dallel M. «Contribution to modeling the viscosity Arrhenius-type equation for some solvents by statistical correlations analysis». En: *Fluid Phase Equilibria* (2014).
- [26] Sonntag Richard E., Borgnakke Claus y Van Wylen Gordon J. *Fundamentals of Thermodynamics*. John Wiley y Sons Inc., 2003.
- [27] Venditti Roberto, Xuan Xiangchun y Li Dongqing. «Experimental characterization of the temperature dependence of zetapotential and its effect on electroosmotic flow velocity in microchannels». En: *Microfluid Nanofluid* (2006).
- [28] Probstein Ronald F. *Physicochemical Hydrodynamics*. John Wiley y Sons Inc., 1994.
- [29] Zemansky Sears y Freedman Young. *Física Universitaria con Física Moderna*. Pearson, 2009.
- [30] Betchold Tamara, Rudnyi Evgenii B. y Korvink Jan. G. *Fast Simulation of Electro-Thermal MEMS: Efficient Dynamic Compact Models*. Springer, 2007.
- [31] Nguyen The Truc, Shun Ito y Kazuyoshi Fushinobu. «Numerical and experimental investigation on the reactant gas crossover in a PEM fuel cell». En: *International Journal of Heat and Mass Transfer* (2018).
- [32] Mezger Thomas G. *The Rheology Handbook: For Users of Rotational and Oscillatory Rheometers*. Vincentz Network GmbH & Co KG, 2006.
- [33] Hessel V., Hardt S. y Löwe H. «Chemical Micro Process Engineering». En: *Weinheim: Wiley-VCH* (2004).
- [34] Staffan Wall. «The history of electrokinetic phenomena». En: *Current Opinion in Colloid & Interface Science* (2009).