



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA

**Análisis del factor de daño en
pozos productores de aceite
pesado de comportamiento no-
Newtoniano**

TESIS

Que para obtener el título de
Ingeniera Petrolera

P R E S E N T A

López Caballero Maricarmen

DIRECTOR DE TESIS

Ing. Héctor Erick Gallardo Ferrera



Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2019

JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dr. Salvador Ortuño Arzate

Secretario: Mtro. Héctor Erick Gallardo Ferrera

Vocal: Dr. Teodoro Iván Guerrero Sarabia

1^{er}. Suplente: Ing. Oswaldo David López Hernández

2do. Suplente: Ing. Humberto Santos Ríos

A la Universidad Nacional Autónoma de México y a la Facultad de Ingeniería, por haberme permitido formarme en ella y conocer extraordinarios profesores, compañeros y amigos. Por abrirme las puertas a nuevas experiencias y romper fronteras.

A mi director de tesis, Mtro. Erick Gallardo. Gracias por compartirme un poquito de todo su conocimiento y sabiduría, por los consejos y tiempo dado.

A mi familia, por todo el amor y apoyo incondicional. Mamá, espero enorgullecerte tanto como yo lo estoy de ti, Lupita. Hermanos, gracias por estar presentes siempre, aún en la distancia.

The ExxonMobil logo is displayed in red, with the word "Exxon" in a stylized font and "Mobil" in a standard sans-serif font.

Gracias al programa de Becas ExxonMobil para la Investigación 2018, por hacer posible la realización del presente trabajo. Gracias por darme la oportunidad de conocer admirables profesionistas y seres humanos, Belén Plasencia, Cesar Maldonado, Carla García, Alberto Ferrin, Luciana Tinker y Víctor Martínez; sin duda, son un ejemplo de éxito y motivación para culminar mis estudios de licenciatura de la mejor manera posible.

Thanks to the ExxonMobil Research Scholarship 2018 program, for making possible the realization of this work. Thank you for the opportunity to meet admirable professionals and human beings, Belén Plasencia, César Maldonado, Carla García, Alberto Ferrin, Luciana Tinker, and Víctor Martínez; undoubtedly, an example of success and motivation to complete my undergraduate studies in the best possible way.

Tabla de contenido

Resumen.....	VI
Abstract	VII
Objetivo	VIII
Alcances.....	VIII
Introducción.....	1
1. Problemática	1
1.1 Aceite pesado.....	4
1.2 Yacimientos.....	6
2. Revisión de la literatura.....	9
2.1 Impacto de la composición en el comportamiento de los aceites pesados	9
2.1.1 Solubilidad del gas.....	12
2.1.2 Viscosidad.....	16
2.2 Problemáticas asociadas a la reología de los aceites.....	20
2.3 Efecto de daño	23
2.3.1 Daño real a la formación	26
2.3.2 Pseudo factor de daño por disparos	27
2.3.3 Pseudo factor de daño por inclinación del pozo.....	29
2.3.4 Pseudo factor de daño por penetración parcial.....	30
2.3.5 Pseudo factor de daño por flujo a través de empacamiento de grava.....	31
2.3.6 Estimación de los factores de pseudo-daño	32
2.4 Aspectos relevantes	35
3. Estudios de casos	38
3.1 Modelo de un yacimiento con efectos tipo Ley de Potencias	39
3.2 Solución para los fluidos Ley de Potencias.....	43

3.3 Comportamiento de un fluido tipo Ley de Potencias con viscosidad límite	47
4. Análisis de resultados	52
4.1 Resultados de la simulación	52
4.2 Análisis de resultados.....	69
Conclusiones.....	71
Recomendaciones.....	72
Nomenclatura.....	73
Anexos	75
A. Ecuación de difusividad radial para fluido Ley de Potencias	75
B. Solución numérica de la ecuación parcial diferencial no lineal no-Newtoniana	80
C. Pseudo código	90

Índice de figuras

Capítulo 1. Problemática

<i>Figura 1.1 Consumo mundial de energía primaria</i> ²	2
<i>Figura 1.2 Producción Nacional de petróleo</i> ^{3,4}	3
<i>Figura 1.3 Producción Nacional de aceite por °API</i> ³	4
<i>Figura 1.4 Clasificación del aceite pesado</i> ⁶	5
<i>Figura 1.5 Yacimientos de aceite pesado en México</i> ⁸	6

Capítulo 2. Revisión de la literatura

<i>Figura 2.1 Tendencia del grado de biodegradación en los aceites pesados</i> ³	10
<i>Figura 2.2 Clasificación SARA de los aceites pesados</i> ³	11
<i>Figura 2.3 Comportamiento de la solubilidad del CO₂ en un aceite pesado saturado</i> ⁵	14
<i>Figura 2.4 Comportamiento de la solubilidad del CH₄ en un aceite pesado saturado</i> ⁵	15
<i>Figura 2.5 Comportamiento de la solubilidad del N₂ en un aceite pesado saturado</i> ⁵	15
<i>Figura 2.6 Comportamiento de la viscosidad de un aceite pesado en función del contenido de asfáltenos</i> ⁶	16
<i>Figura 2.7 Comportamiento de la viscosidad de un aceite pesado en función del contenido de asfáltenos</i> ⁶	17
<i>Figura 2.8 Comportamiento de la viscosidad del CO₂ en un aceite pesado saturado</i> ⁵	18
<i>Figura 2.9 Comportamiento de la viscosidad del CH₄ en un aceite pesado saturado</i> ⁵	18
<i>Figura 2.10 Comportamiento de la viscosidad del N₂ en un aceite pesado saturado</i> ⁵	19
<i>Figura 2.11 Tipo de fluidos no-Newtonianos</i> ⁷	20
<i>Figura 2.12 Clasificación de fluidos no-Newtonianos independientes del tiempo</i> ⁷	21
<i>Figura 2.13 Clasificación de fluidos no-Newtonianos dependientes del tiempo</i> ⁷	22

<i>Figura 2.14 Perfil de caídas de presión de un pozo con diferentes daños</i>	25
<i>Figura 2.15 Daño real a la formación</i>	27
<i>Figura 2.16 Pseudo factor de daño por disparos</i> ¹³	28
<i>Figura 2.17 Pseudo factor de daño por inclinación de pozo</i> ¹⁴	29
<i>Figura 2.18 Pseudo factor de daño por penetración parcial</i> ¹⁴	30
<i>Figura 2.19 Pseudo factor de daño por empacamiento de grava</i>	31

Capítulo 3. Estudios de casos

<i>Figura 3.1 Viscosidad aparente de un fluido Ley de Potencias con viscosidades límite en función de la velocidad de deformación</i> ⁹	41
<i>Figura 3.2 Regiones de flujo en un yacimiento radial para un fluido del tipo Ley de Potencia</i>	43
<i>Figura 3.3 Esquematación del método predictor-corrector</i>	45
<i>Figura 3.4 Presión vs Radio a diferentes tiempos de una inyección de fluidos no-Newtonianos en un yacimiento infinito</i>	46
<i>Figura 3.5 Comportamiento de la viscosidad del modelo Ley de Potencias truncado</i> ¹⁵	47
<i>Figura 3.6 Representación del modelo simulado</i> ¹⁶	49

Capítulo 4. Análisis de resultados

<i>Figura 4.1 Gráfico diagnóstico para n=0.5</i>	55
<i>Figura 4.2 Gráfico especializado para n=0.5</i>	56
<i>Figura 4.3 Gráfico diagnóstico para n=0.6</i>	57
<i>Figura 4.4 Gráfico especializado para n=0.6</i>	58
<i>Figura 4.5 Gráfica diagnóstico para n=0.8</i>	59
<i>Figura 4.6 Gráfico especializado para n=0.8</i>	60
<i>Figura 4.7 Gráfico diagnóstico para n=0.9</i>	61
<i>Figura 4.8 Gráfico especializado para n=0.9</i>	62

<i>Figura 4.9 Gráfico diagnóstico para $n=1$</i>	<i>63</i>
<i>Figura 4.10 Gráfico especializado para $n=1$</i>	<i>64</i>
<i>Figura 4.11 Gráfico diagnóstico para $n=1.1$</i>	<i>65</i>
<i>Figura 4.12 Gráfico especializado para $n=1.1$</i>	<i>66</i>
<i>Figura 4.13 Gráfico diagnóstico para $n=1.2$</i>	<i>67</i>
<i>Figura 4.14 Gráfico especializado para $n=1.2$</i>	<i>68</i>

Anexos

<i>Figura B.1 Esquematización de la solución numérica usada para flujo radial</i>	<i>84</i>
---	-----------

Resumen

El petróleo es la mayor fuente de energía en el mundo, por lo que para satisfacer la demanda global de este insumo ha sido necesario explorar recursos que presentan cada vez mayores dificultades para su extracción. Tal es el caso de los aceites pesados, que presentan diversos retos para su producción debido a su alta viscosidad y densidad, además pueden exhibir reologías no Newtonianas de tipo Ley de Potencias, Plásticos de Bingham o visco-elásticas.

Se analizará el comportamiento fluyente de sistemas petroleros que exhiben un comportamiento reológico del tipo Ley de Potencias (muchos de los cuales pueden estar presentes en yacimientos de México), mismos que se incluirán en los modelos clásicos mediante un modelo de pseudo-daño basado en los parámetros característicos de estos fluidos. Para validar los resultados se utilizarán pruebas sintéticas de sistemas de aceite no-Newtoniano y se compararán los valores obtenidos con aquellos provenientes de modelos clásicos Newtonianos.

Abstract

Oil is the largest energy source in the world, so to meet the global demand for this input, it has been necessary to explore new resources that are increasingly difficult to extract. Such is the case of heavy oil could exhibit non-Newtonian rheology's of the Power Law, Bingham Plastics or Visco-elastic type.

This thesis will be discussing the behavior of oil systems that exhibit a rheological behavior of the Power Law type (many of which could be present at Mexico reservoirs) that they will be included in the classical models through a model of pseudo-skin based on the characteristic parameters of these fluids. Synthetic test of non-Newtonian oil systems are used to validate the results and the values obtained will be compared with those from classical Newtonian models.

Objetivo

Analizar el impacto de la reología de un fluido del tipo Ley de Potencias en los problemas de flujo a través de medios porosos observados en las pruebas de presión a escala de pozo, considerando como base el comportamiento de sistemas de reología Newtoniana.

Alcances

- Aproximar el comportamiento fluyente de un pozo que produce un fluido tipo Ley de Potencias en el que la reología cambia en función de la velocidad de corte mediante un modelo de yacimiento compuesto.
- Ajustar el uso de un modelo de pseudo-daño para las condiciones descritas para ajustar los comportamientos descritos por las ecuaciones de flujo radial clásicas.
- Evaluar el impacto de estos efectos sobre la eficiencia de flujo de un pozo, considerando como ideal al modelo Newtoniano de flujo.

Introducción

Actualmente el suministro energético mundial es principalmente provisto por los combustibles fósiles. No obstante, debido al ritmo actual de extracción de hidrocarburos, los aceites pesados han cobrado especial importancia para lograr alcanzar las metas de producción.

Se ha encontrado evidencia en la literatura de que estos hidrocarburos, debido a su composición compleja, rica en asfáltenos, resinas e impurezas como finos y agua en emulsión; pueden exhibir comportamientos que diverjan de aquellos predichos por la ley de Darcy, siendo de particular importancia para este trabajo aquellos asociados a la reología de los sistemas.

Esta tesis se desarrolla para investigar el impacto de la reología de fluidos tipo Ley de Potencias sobre el comportamiento fluyente de los pozos durante una prueba de presión y su incorporación a modelos clásicos mediante un factor de pseudo-daño. Para ello se realiza un estudio de simulación que considera al medio como un sistema compuesto de dos movilidades distintas, evaluándose el efecto de la reología indicada a través del factor de daño que presenta el pozo. Asimismo, se evaluará y ajustará un modelo de pseudo-daño recientemente presentado. Finalmente, se discute la relevancia de analizar adecuadamente estos problemas, considerando para ello la eficiencia de flujo del pozo, siendo el caso ideal aquel definido para una geometría radial con reología Newtoniana.

1. Problemática

El petróleo es parte vital de nuestro día a día, sin él la vida como la conocemos sería muy diferente. El aceite crudo y sus refinados han contribuido a crear un mundo moderno. Desde principios del siglo XX, con la perforación en la colina Spindletop de Beaumont, Texas y la creación de automóviles con motores de combustión interna alimentados con gasolina, el petróleo se ha posicionado como la principal fuente de energía del mundo¹.

A pesar del declive en el consumo de aceite crudo desde los años 70's, el petróleo sigue siendo la fuente de energía más utilizada, como se puede ver la **Figura 1.1**. En el 2016 la energía obtenida a partir del aceite representa una tercera parte del consumo mundial, convirtiéndola en la fuente principal, seguida por el carbón, el cual tiene un 28.1% del total².

Por otro lado, las energías hidroeléctrica, nuclear y renovables han ido creciendo con los años, sin embargo, no alcanzan a tener un impacto mayor al 10% del consumo mundial de energía primaria, a pesar de que las fuentes renovables alcanzaron su récord de 3.2%. Estas cifras son una muestra tangible de que los combustibles fósiles son y seguirán siendo de suma importancia no solo en los países productores, sino también para el resto del mundo.

Se estima que la producción acumulada de aceite en México, desde 1960 hasta 2018, es de 42,167 millones de barriles (MMB) medidos a boca de pozo, la cual representa el área bajo la curva de producción nacional de la **Figura 1.2**. El mayor gasto anual se registró en el 2004 con 3,382.9 miles de barriles diarios (MBD), antecedido con una tendencia creciente fluctuante y en años posteriores este gasto únicamente ha disminuido³.

Consumo mundial de energía primaria

Porcentaje

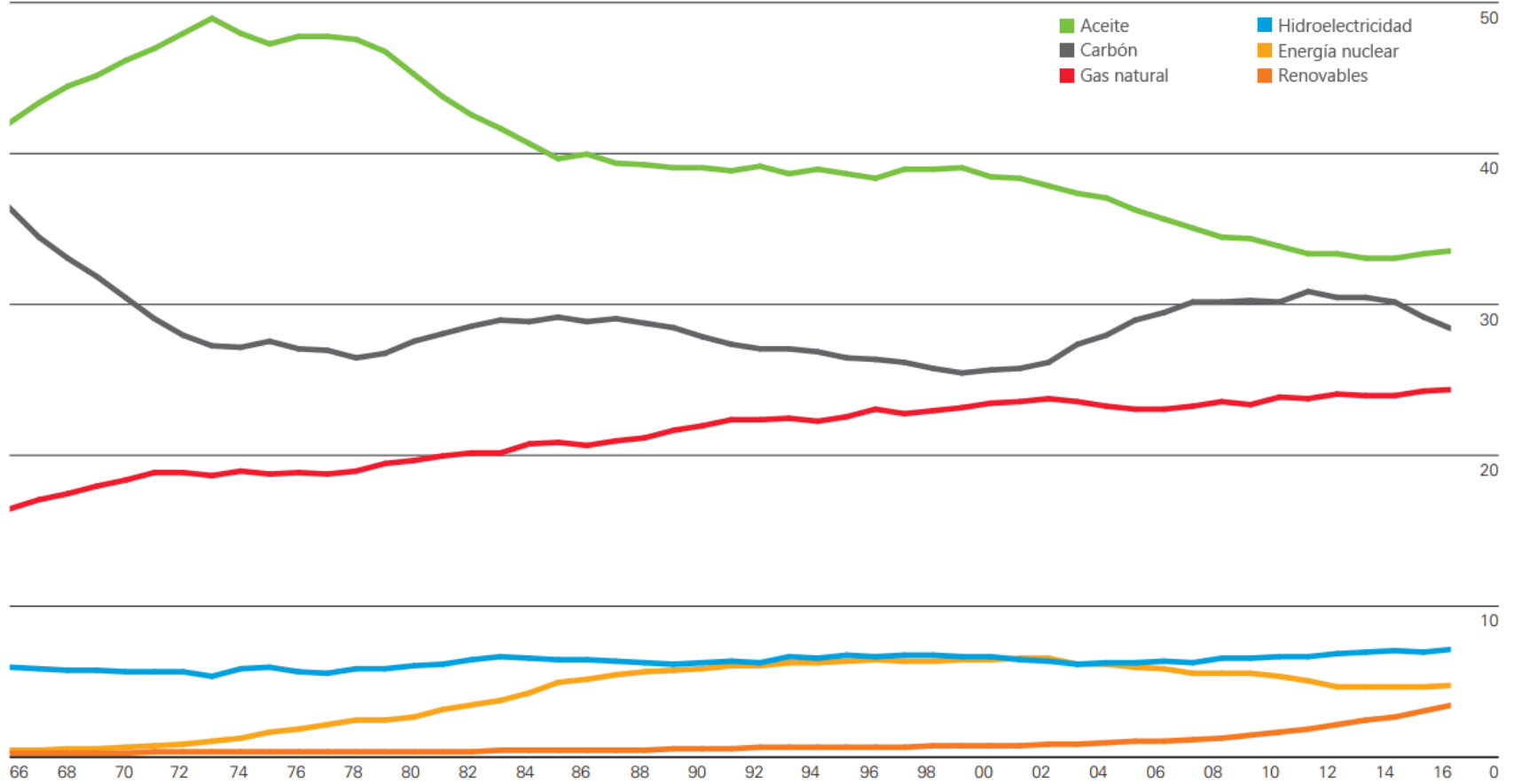


Figura 1.1 Consumo mundial de energía primaria²

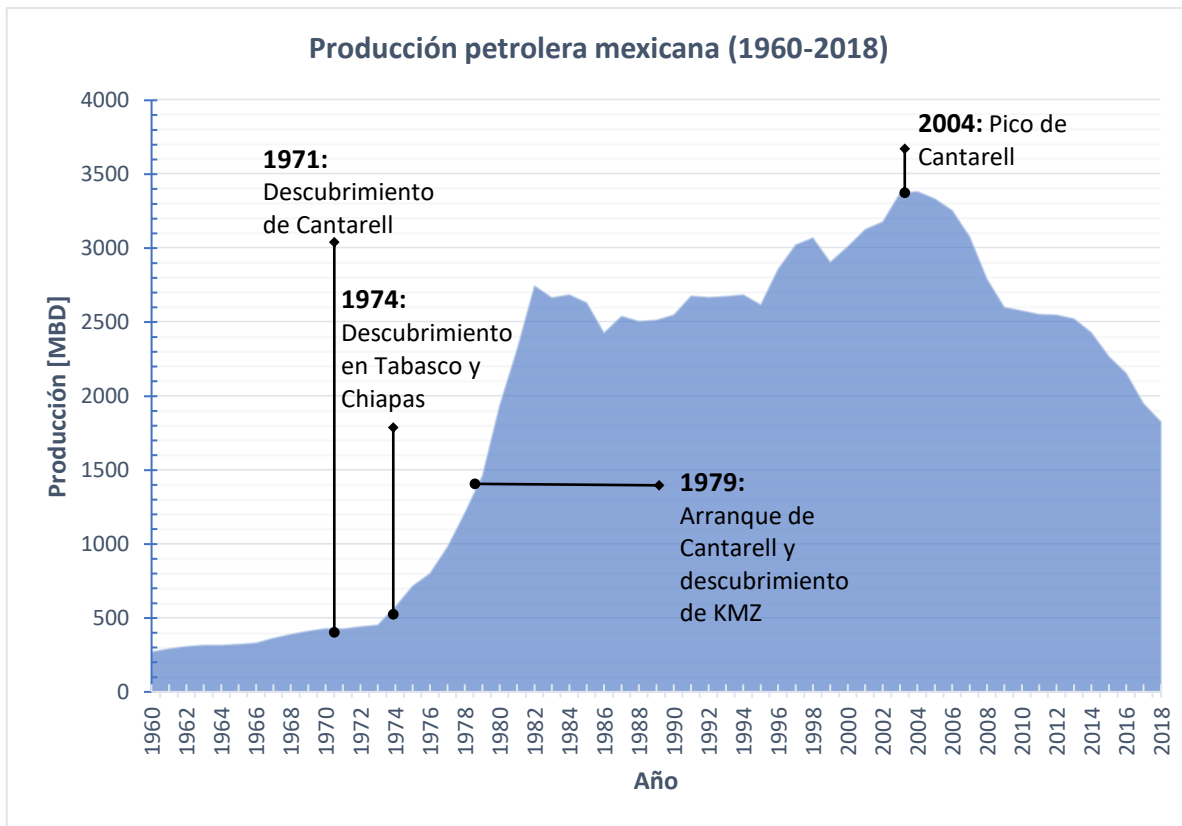


Figura 1.2 Producción Nacional de petróleo^{3,4}

A partir del 2016 la Comisión Nacional de Hidrocarburos a través del Sistema de Información de Hidrocarburos muestra los datos de producción Nacional de petróleo discretizado por °API, utilizando la clasificación por grados API publicada en el Diario Oficial de la Federación en febrero del 2015. En la **Figura 1.3** podemos observar que la producción Nacional anual depende del más del 50% de aceite pesado y extrapesado.

Mientras la producción de aceite ligero y mediano disminuye, la producción de los aceites pesados aumenta. Lo anterior no es debido a que ésta sea más atractiva o rentable, si no que conlleva más problemas de producción debido a su alta viscosidad, el contenido de impurezas y la naturaleza de las formaciones en donde se encuentra. Sin embargo, se está produciendo más aceite pesado porque es de este tipo el mayor número de reservas probadas que se tienen en nuestro país³.

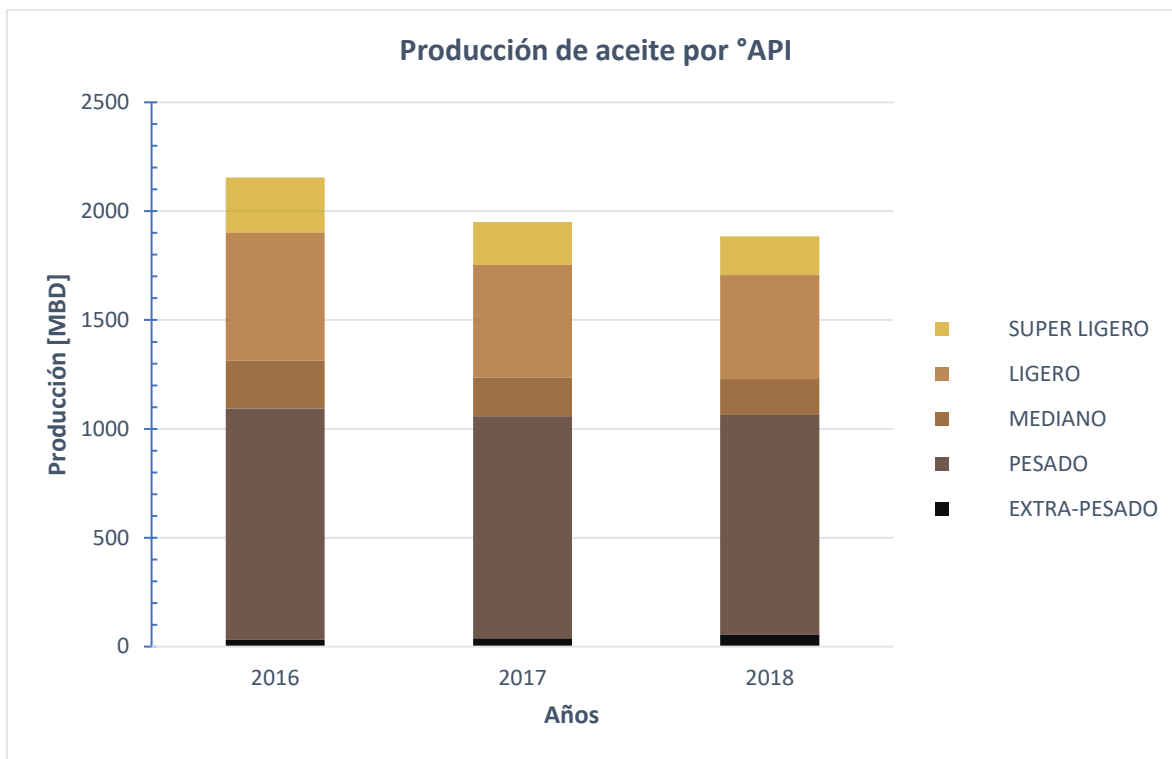


Figura 1.3 Producción Nacional de aceite por °API³

La producción de petróleo convencional está en declive; la mayor cantidad de reservas de hidrocarburos en el mundo corresponden a aceite pesado y extrapesado y la demanda de combustibles fósiles, prevalece. Por esta razón, es imperante la adecuada explotación y uso de petróleo no convencional para cubrir la demanda mundial.

1.1 Aceite pesado

El aceite convencional o “aceite crudo” es una mezcla de hidrocarburos que se encuentra en estado líquido a nivel de yacimiento y a condiciones atmosféricas. Este tiene un amplio rango de densidades que va de los 20 a 40 °API lo que le permite fluir fácilmente. Históricamente es de este tipo la mayor cantidad de aceite producido en el mundo⁵.

El aceite no convencional incluye aceite extrapesado, aceite pesado, arenas bituminosas, gas en lutitas y aceite en lutitas. Para producir este tipo de hidrocarburos se necesita de tecnologías capaces de manejar el comportamiento de flujo de estos yacimientos⁶.

En particular, el aceite pesado se caracteriza por su alta densidad y viscosidad. En la **Figura 1.4** se muestra una gráfica de la clasificación de éste de acuerdo con su densidad API y viscosidad :

- Aceite pesado convencional: 21 a 10 °API y viscosidad de 10 a 100 cp.
- Aceite extrapesado: 10 a 7 °API y viscosidad de 100 a 10×10^3 cp.
- Bitumen: menos de 7 °API y viscosidades mayores a 10×10^3 cp.

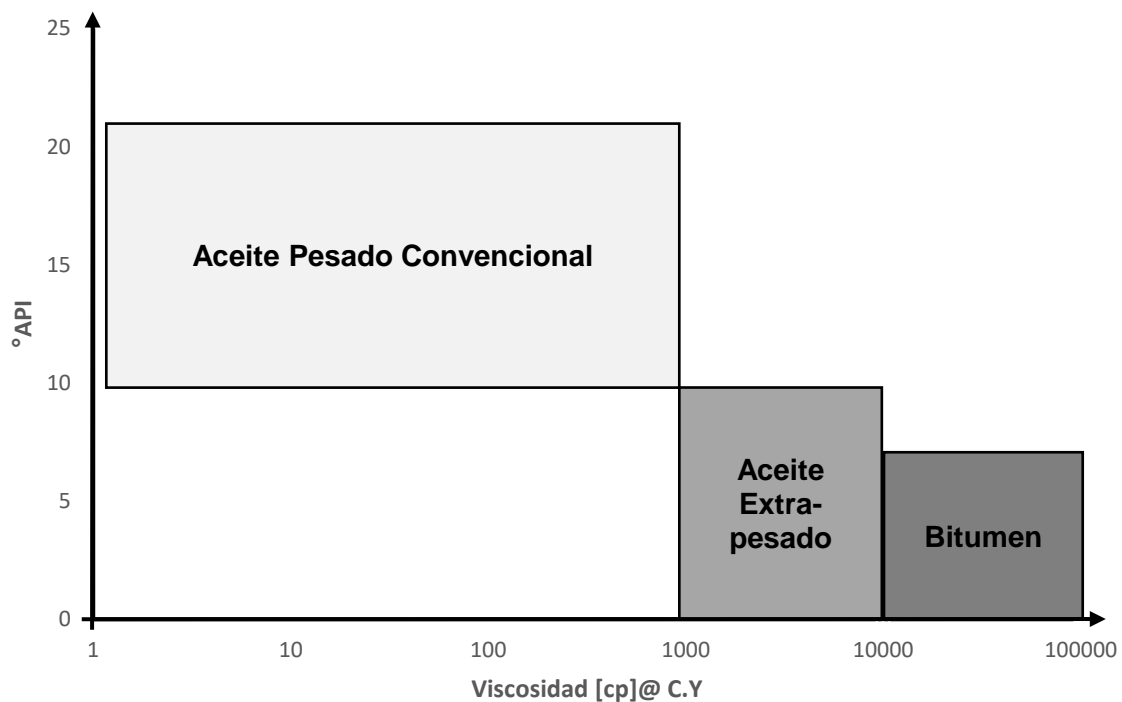


Figura 1.4 Clasificación del aceite pesado⁶

1.2 Yacimientos

Generalmente, los aceites pesados se producen de formaciones geológicamente jóvenes (Pleistoceno, Plioceno y Mioceno) los cuales también son más someras comparadas con las de los aceites convencionales⁷.

En México, los sistemas de aceite pesado presentan diferentes complejidades asociadas al tipo de formación; y existen dos principales edades de yacimientos de este tipo como se observa en la **Figura 1.5**. Ejemplo:

1. Jujo Mioceno, arenas con aceite pesado 8-12 °API.
2. Campos marinos: Ayarzil, Tekel y Tsimin 10-13 °API.



Figura 1.5 Yacimientos de aceite pesado en México⁸

En México, los yacimientos de aceite pesado y extrapesado muestran una alta heterogeneidad entre sí⁸, por lo que para los fines de este trabajo es posible clasificarlos como:

1. Yacimientos marinos en formaciones carbonatadas fracturadas, en donde las altas temperaturas (100-120 °C) y las fracturas aumentan la movilidad del petróleo; pero, el alto contenido de impurezas (H₂S, metales y asfáltenos) favorece la presencia de reologías complejas, que pueden ser de tipo Ley de Potencias o plásticos de Bingham.
2. Yacimientos terrestres en formaciones siliciclásticas del terciario, que ocurren en sistemas someros de arenas sucias, que en muchos casos no se encuentran consolidadas y donde las temperaturas existentes son relativamente bajas (20-50°C). En estos casos, dado que los yacimientos cuentan con baja energía de expansión y los efectos reológicos se ven potenciados por las condiciones del medio, la recuperación puede ser severamente afectada por la presencia de efectos no-Newtonianos, que pueden ser de tipo ley potencias.

Considerando lo anterior, es de importancia contar con modelos capaces de predecir el comportamiento de los aceites pesados de México, ya que esto permitirá optimizar de manera adecuada las estrategias de desarrollo requeridas en los diferentes niveles del sistema de producción. En este trabajo se abordarán los aspectos relativos a la caracterización de los parámetros de modelos tipo Ley de Potencias a condiciones de flujo en el yacimiento.

Referencias

1. Roberts, P. (2005). *The End of Oil*. London: Bloomsbury.
2. BP PLC. (2017). *Statistical Review of World Energy* (pp.8-11).
3. Comisión Nacional de Información de Hidrocarburos (15 de 01 de 2019). *Sistema de Información de Hidrocarburos (SIH)*. Recuperado de: <https://portal.cnih.cnh.gob.mx/SIH/?redirected=1>
4. AMEXHI. (2018). *Agenda 2040 Transformando a México* (pp. 15-44). Ciudad de México.
5. Vassiliou, M. (2009). *Historical Dictionary of the Petroleum Industry* (4.^a ed.). Lanham (Md.): Scarecrow Press.
6. Banerjee, D. (2012). *Oil Sands, Heavy Oil, & Bitumen*. Tulsa, Okla.: PennWell Corp.
7. Curtis, C., Kooper, R., Decoster, E., Guzmán García, A., Huggins, C., Knauer, L., Minner, M., Kupsch, N., Linares, L. M., Rough, H., Waite, M. (2002). Heavy-Oil Reservoirs. *Oilfield Review*, (13), 30-51.
8. Castañeda Peña, O. (2014). *La Estimulación Matricial y Fracturamiento Hidráulico Aplicados a Pozos de Aceite Pesado* (Licenciatura). Universidad Nacional Autónoma de México.

2. Revisión de la literatura

Alrededor del mundo existen yacimientos de aceite pesado que producen a gastos más elevados de los esperados durante la producción primaria. Lo anterior, debido a diferentes causas, tales como: mecanismos asociados a la deformación del medio poroso, fenómenos de emulsión aceite-gas o mecanismos de empuje¹. Muchos de estos yacimientos producen o se asocian a reologías no-Newtonianas a condiciones de flujo en el yacimiento^{1,2} por ejemplo, Plásticos de Bingham, Leyes de Potencias o Viscoelasticidad.

Este trabajo se centra en el estudio de los efectos observados en sistemas de reología no-Newtoniana. A continuación, se describen algunos aspectos de interés que se encuentran reportados en la literatura.

2.1 Impacto de la composición en el comportamiento de los aceites pesados

La composición de una mezcla de hidrocarburos afecta sus diversas propiedades físicas, químicas y térmicas, así como con su valor en el mercado. Los aceites pesados, que suelen ubicarse a profundidades someras, en formaciones no-consolidadas y de alta permeabilidad; se encuentran fuertemente alterados por la infiltración de agua y ataques bacterianos. Estos procesos de degradación destruyen las moléculas ligeras y dejan un alto contenido de asfáltenos, resinas, metales pesados, nitrógeno y azufre en la mezcla³.

El grado de biodegradación de los aceites pesados está directamente relacionado con la concentración de $n-C_{17}$ y $n-C_{18}$, como se indica en la **Figura 2.1**, por lo que se usa durante la clasificación de estos hidrocarburos como un indicador directo de su calidad.

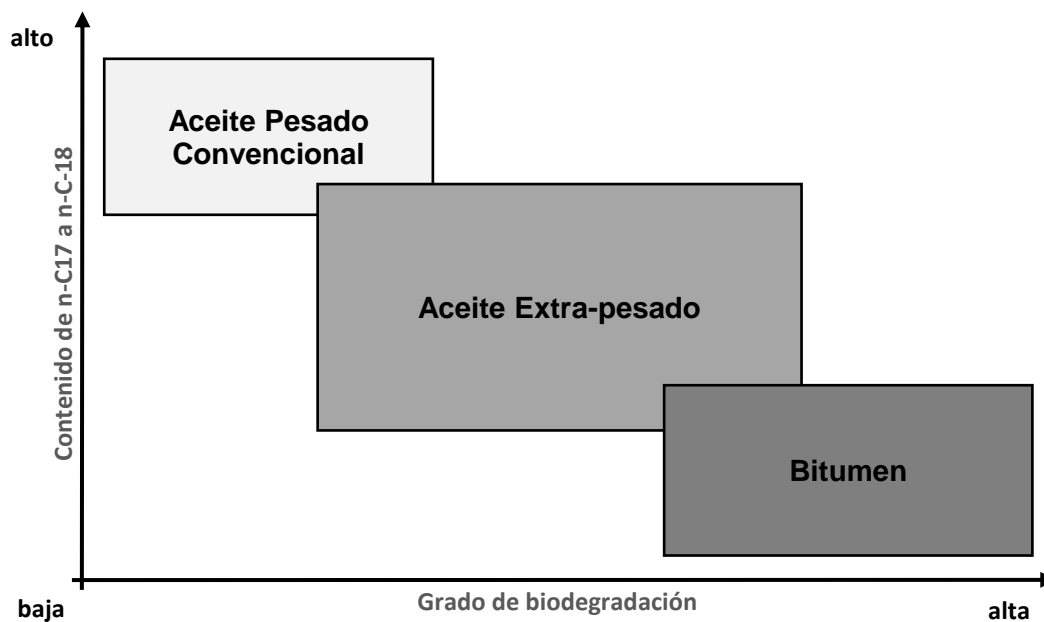


Figura 2.1 Tendencia del grado de biodegradación en los aceites pesados³

Los procedimientos comúnmente utilizados para caracterizar a los aceites pesados son:

- Métodos cromatográficos y de destilación;
- Caracterización de Polímeros, Olefinas, Naftenos y Aromáticos (PONA); y
- Análisis de Saturados, Aromáticos, Resinas y Asfáltenos (SARA).

A diferencia de las técnicas que permiten conocer la composición de una muestra por la volatilidad de sus componentes, el análisis SARA clasifica a las fracciones de acuerdo con su polaridad, el esquema de esta clasificación se

encuentra en la **Figura 2.2**. Así, la fracción parafínica agrupa a componentes saturados no-polares (incluyendo n- y ciclo- alcanos); mientras que la aromática, que es ligeramente más polar, contiene moléculas mono- y poli- aromáticas puras. Las dos fracciones remanentes, resinas y asfáltenos, son totalmente polares y su distinción se logra mediante criterios de solubilidad en presencia de n-alcanos.

Debido a la tendencia de los asfáltenos de precipitar en presencia de fracciones parafínicas, debe tenerse precaución al diluir los aceites pesados con otros más ligeros durante el transporte, pues pueden provocarse obstrucciones dentro de las tuberías superficiales. También el incremento térmico de estos hidrocarburos perturba el equilibrio de los asfáltenos, lo que aumenta considerablemente su floculación, inclusive en el yacimiento.

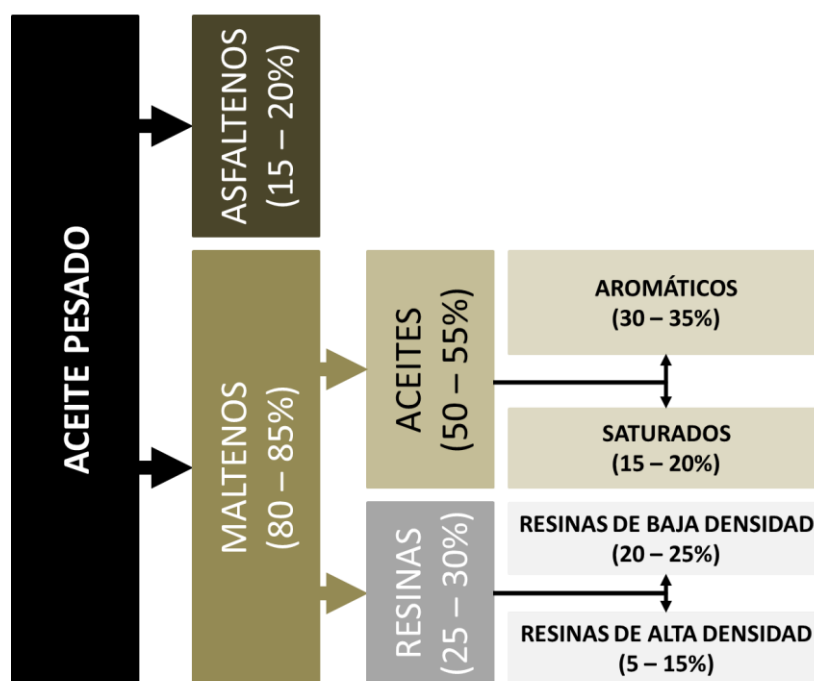


Figura 2.2 Clasificación SARA de los aceites pesados³

Los resultados de diversos análisis SARA realizados a muestras de bitumen de Canadá se reportan en la **Tabla 2.1**. Los datos muestran que los asfáltenos

poseen mayor peso molecular y contenido hetero-atómico respecto a los máltenos, así como una menor relación hidrógeno-carbono (H/C).

2.1.1 Solubilidad del gas

La cantidad de gas disuelto en el aceite aumenta, para un sistema isotérmico, proporcionalmente respecto a la presión; y para uno isobárico, de forma inversa con la temperatura. Independientemente de la presión y la temperatura, la solubilidad de los gases en el aceite incrementa de acuerdo con la cantidad de componentes intermedios en la mezcla, por esta razón, la cantidad de gas en los pesados es baja.

Tabla 2.1 Análisis SARA de Bitúmenes de Canadá⁴

	%peso	%C	%H	%N	%O	%S	H/C	MW
Peace River*								
Total	-	82.69	10.18	0.51	1.61	5.90	1.48	528
Saturados	20.7	86.13	13.30	0.03	0.98	0.00	1.85	375
Aromáticos	28.9	82.34	9.77	0.06	0.73	6.79	1.42	346
Resinas I	27.8	79.82	9.66	0.68	2.89	7.27	1.45	866
Resinas II	2.9	75.66	9.53	0.94	8.29	4.72	1.51	653
Asfáltenos	19.5	80.26	7.97	1.08	2.06	8.42	1.19	3948
Athabasca*								
Total	-	83.31	10.59	0.41	0.88	4.78	1.53	472
Saturados	24.6	86.75	13.52	0.03	0.35	0.00	1.87	364
Aromáticos	26.2	84.22	10.19	0.00	0.44	6.96	1.45	388
Resinas I	27.6	81.16	9.70	0.77	2.60	6.17	1.43	727
Resinas II	4.9	76.00	9.53	0.82	7.98	4.31	1.50	959
Asfáltenos	14.6	77.63	7.83	1.20	2.02	8.31	1.21	7464

Tabla 2.1 Análisis SARA de Bitúmenes de Canadá⁴

	%peso	%C	%H	%N	%O	%S	H/C	MW
Wabasca**								
Total	-	83.30	11.30	0.36	0.74	4.07	1.63	348
Saturados	26.6	83.78	13.80	0.06	0.83	0.31	1.98	282
Aromáticos	25.2	83.71	9.89	0.00	0.56	2.60	1.42	303
Resinas I	20.8	80.47	9.82	0.53	2.07	7.63	1.46	736
Resinas II	2.2	72.80	8.90	0.84	11.84	4.83	1.47	967
Asfáltenos	10.3	79.41	8.12	0.98	1.95	8.54	1.23	3981
Cold Lake*								
Total	-	83.12	10.73	0.34	1.42	4.17	1.55	526
Saturados	27.0	85.65	13.35	0.00	0.00	0.00	1.87	358
Aromáticos	26.5	84.70	10.16	0.00	0.81	5.02	1.44	374
Resinas I	25.6	81.38	9.75	0.64	2.77	5.69	1.44	781
Resinas II	2.1	80.50	9.44	0.93	4.58	3.90	1.41	1065
Asfáltenos	15.5	81.52	8.00	1.09	1.68	7.87	1.18	4767
Grosmont (Carbonatos)*								
Total	-	82.17	10.08	0.24	1.31	5.36	1.47	636
Saturados	18.5	85.81	13.16	0.12	0.30	0.87	1.84	329
Aromáticos	26.0	84.10	10.13	0.03	0.95	5.61	1.45	349
Resinas I	26.8	81.82	9.71	0.65	2.80	6.88	1.42	852
Resinas II	6.4	77.60	9.70	0.74	6.94	4.77	1.50	1055
Asfáltenos	19.6	79.65	8.04	0.05	2.39	7.15	1.21	3554

* Errores asociados a la medición de componentes ligeros

** Perdidas del ~15% debido a errores en los procedimientos del experimento

Las **Figuras 2.3 a 2.4** muestran el comportamiento isotérmico de la solubilidad del CO_2 , N_2 y CH_4 respecto a la presión en los sistemas de aceite pesado⁵. En forma individual, el CO_2 es el gas que mayor afinidad muestra hacia los componentes de los aceites pesados, en tanto que la solubilidad del CH_4 no resulta tan pronunciada y la del N_2 es la menor. En conjunto, la presencia de un gas en el aceite influencia la afinidad de otros componentes a permanecer en solución, es decir, sus solubilidades no son aditivas.

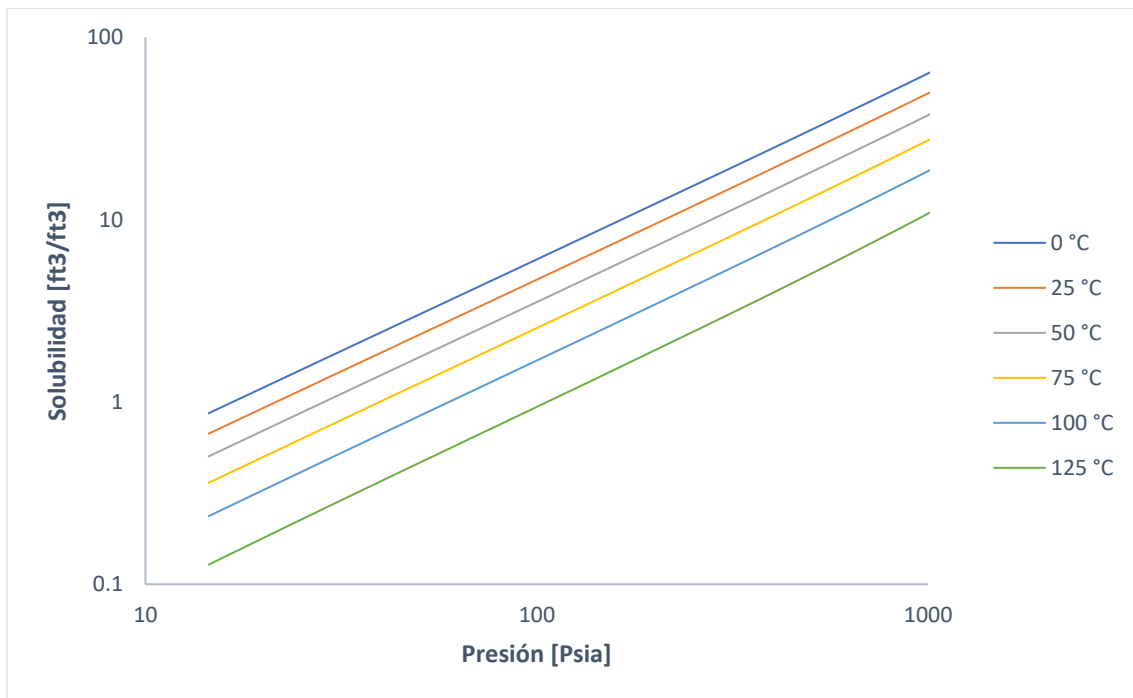


Figura 2.3 Comportamiento de la solubilidad del CO_2 en un aceite pesado saturado⁵

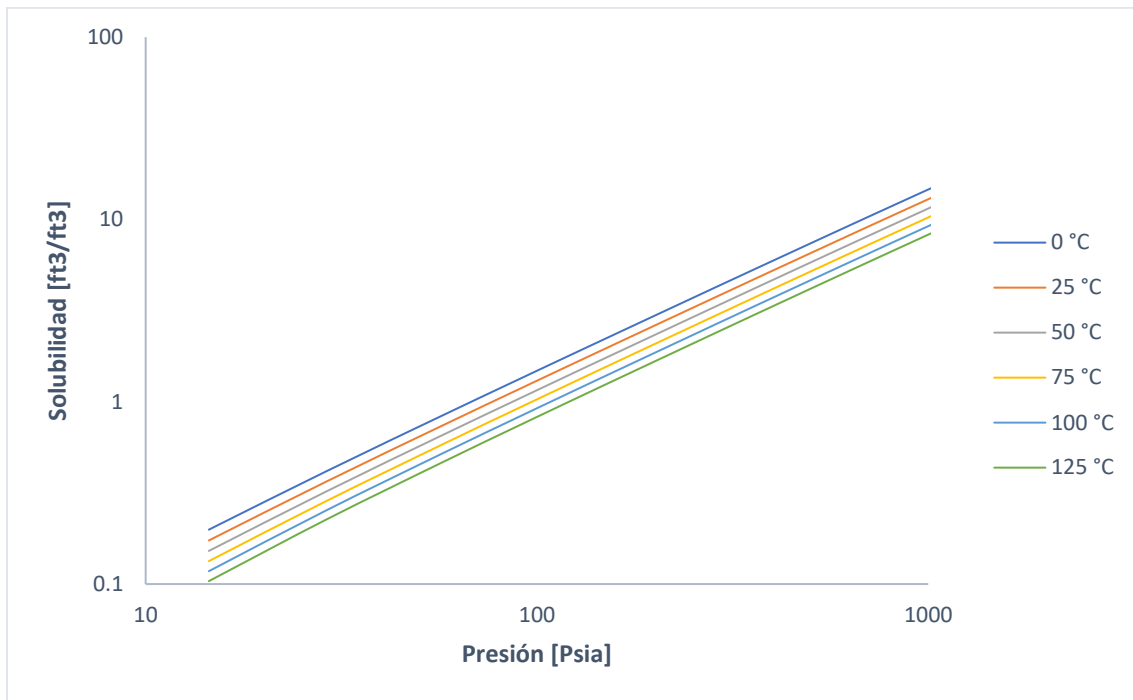


Figura 2.4 Comportamiento de la solubilidad del CH₄ en un aceite pesado saturado⁵

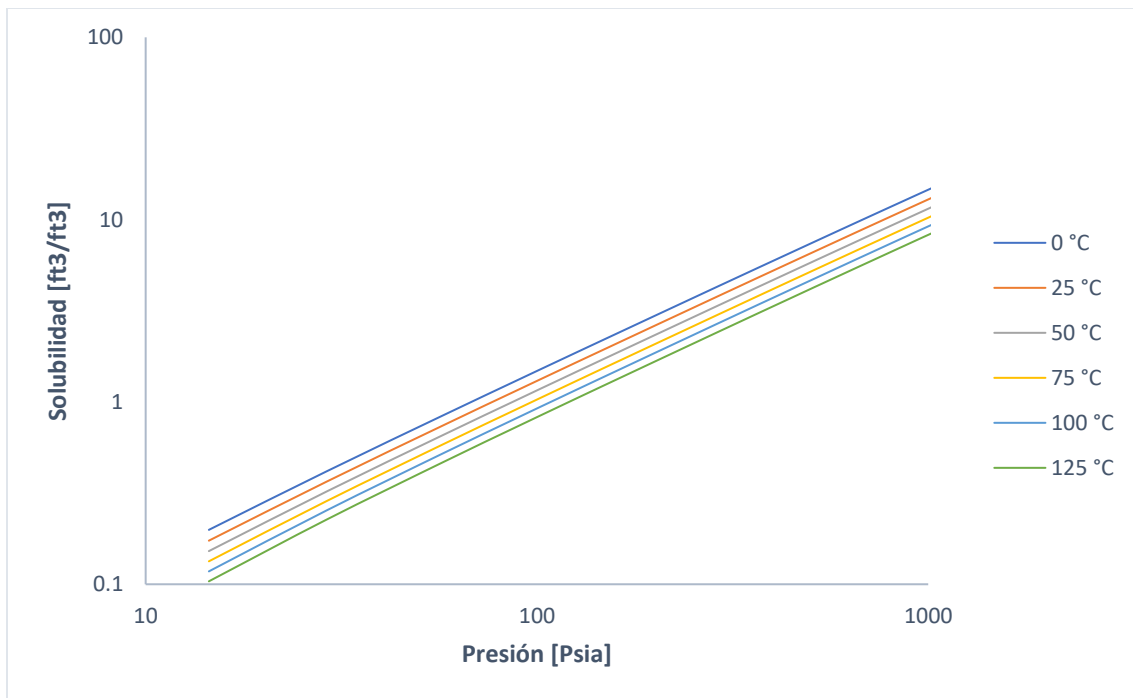


Figura 2.5 Comportamiento de la solubilidad del N₂ en un aceite pesado saturado⁵

2.1.2 Viscosidad

Comparado con otros aceites convencionales, el movimiento de un aceite pesado en el yacimiento requiere de gradientes de presión extremadamente altos e imprácticos, debido a su viscosidad. Por esta razón, la reducción de esta propiedad es el principal objetivo de los procesos de recuperación mejorada.

2.1.2.1 Efecto de la concentración de asfáltenos

Los asfáltenos son los componentes que mayor impacto tienen en la viscosidad de los aceites pesados. De acuerdo con su concentración, estas moléculas pueden permanecer diluidas en las resinas o traslaparse y formar láminas. Cuando esto ocurre, la viscosidad y las características elásticas de la mezcla incrementan, **Figura 2.6**. Se ha observado que el cambio entre estos dos regímenes ocurre por sobre una concentración crítica ($\sim 10\%$ del peso)⁶.

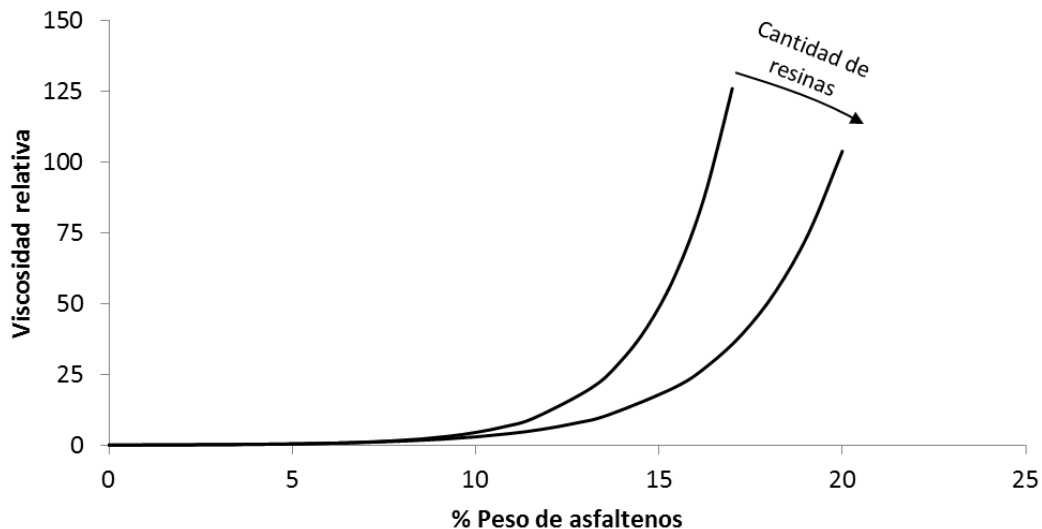


Figura 2.6 Comportamiento de la viscosidad de un aceite pesado en función del contenido de asfáltenos⁶

El contenido de resinas es de gran importancia para la estabilidad de los aceites pesados, pues se encuentran fuertemente adsorbidas en los asfáltenos y forman una capa a su alrededor que previene su traslape. En general, se ha observado que el efecto de los asfáltenos sobre la viscosidad se minimiza cuando la concentración de resinas es menor al 50% del peso de la mezcla. Cuando se excede este valor, las resinas también contribuyen a la viscosidad del aceite, **Figura 2.7**.

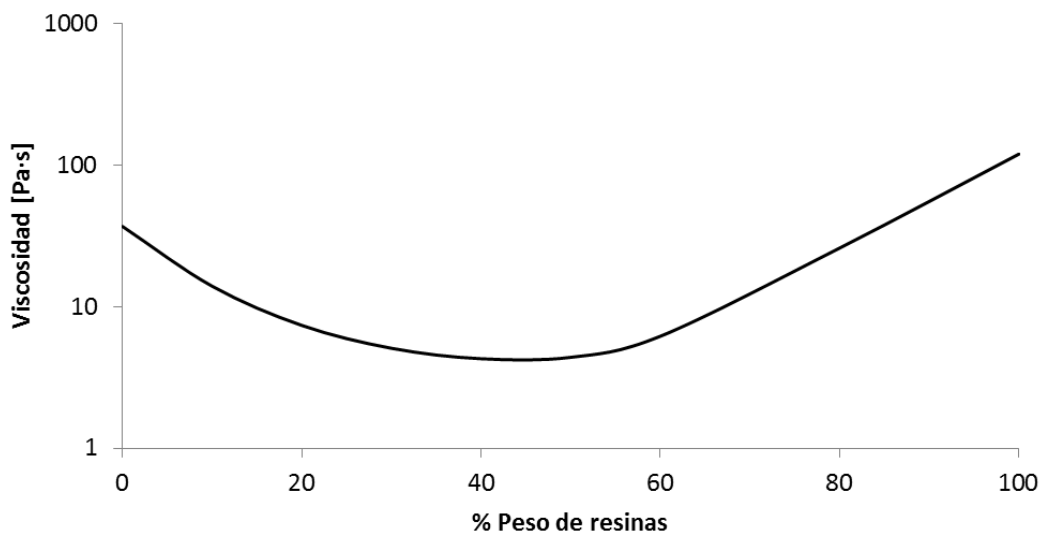


Figura 2.7 Comportamiento de la viscosidad de un aceite pesado en función del contenido de asfáltenos⁶

2.1.2.2 Efecto del gas disuelto

La cantidad de gas disuelto tiene un efecto significativo en la reducción de la viscosidad de los aceites pesados. Ésto se indica en las **Figuras 2.8 a 2.10**, donde se estudia el comportamiento de la viscosidad de un aceite pesado saturado causado por la solubilidad del CO_2 , N_2 y CH_4 . Se observa que el efecto del metano no es tan pronunciado como el del dióxido de carbono, mientras que el nitrógeno es el componente que menor impacto tiene en esta propiedad.

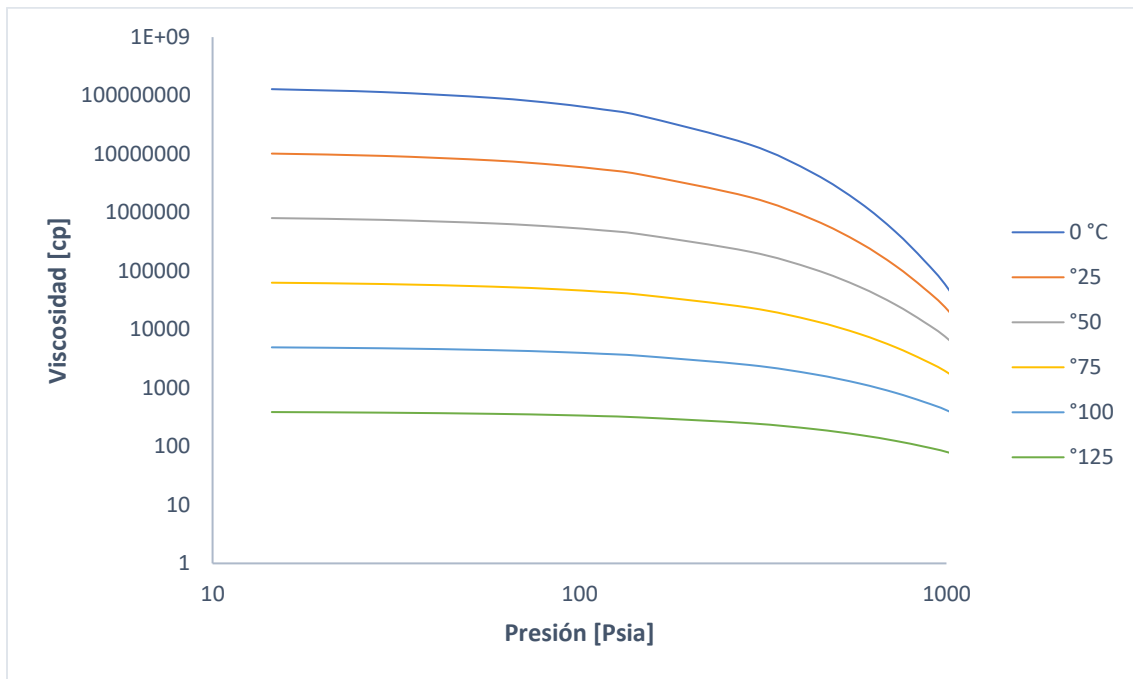


Figura 2.8 Comportamiento de la viscosidad del CO₂ en un aceite pesado saturado⁵

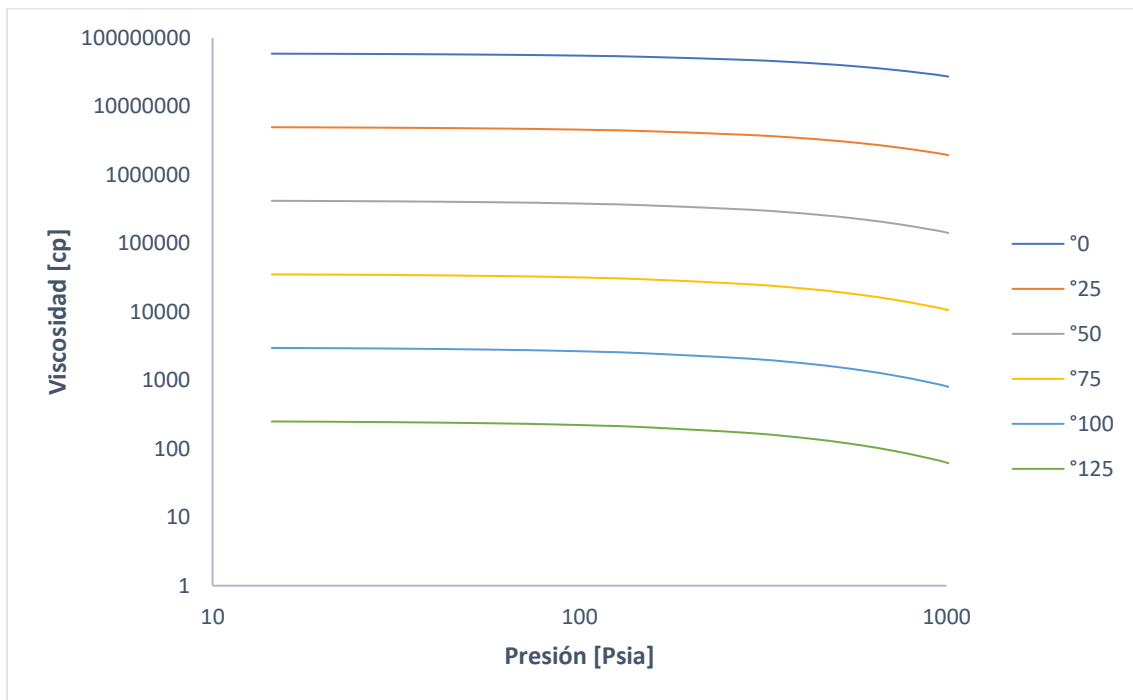


Figura 2.9 Comportamiento de la viscosidad del CH₄ en un aceite pesado saturado⁵

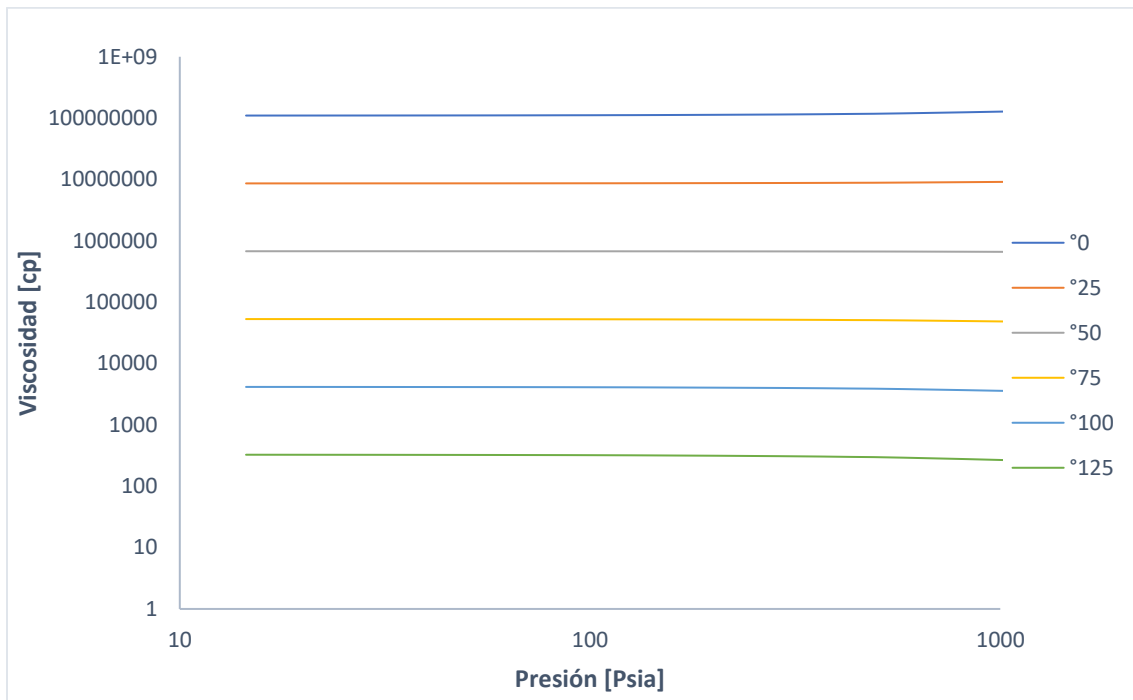


Figura 2.10 Comportamiento de la viscosidad del N₂ en un aceite pesado saturado⁵

2.1.2.3 Efecto de la presión y temperatura del yacimiento

Dado que los asfáltenos permanecen como una suspensión coloidal en las resinas, los aceites pesados pueden adquirir propiedades viscoelásticas y comportarse como semi-sólidos a condiciones de yacimiento, que pueden llegar a ser notorias durante la producción.

La viscosidad de un aceite saturado es inversamente proporcional a la presión, pues con ella incrementa la cantidad de gas disuelto. Sin embargo, la temperatura es el factor predominante en la reducción de la viscosidad. Debido a que tanto la presión como la temperatura aumentan con la profundidad, principalmente los yacimientos someros (por sus bajas temperaturas) tienden a manifestar efectos no-Newtonianos. No obstante, estos comportamientos también son observados en yacimientos a alta presión, ya que los componentes del aceite se encuentran más próximos entre sí, y se potencializan los efectos polares de los asfáltenos.

2.2 Problemáticas asociadas a la reología de los aceites

Un fluido no Newtoniano es todo aquel en donde la relación entre el esfuerzo de corte (τ) y la velocidad de deformación ($\dot{\gamma}$) no permanecen constantes, por lo que no es posible definir un factor de viscosidad (μ) en forma convencional, por esta razón es conveniente utilizar una viscosidad aparente para su estudio (μ_{ap})⁷. Existen diferentes tipos de fluidos no-Newtonianos, su clasificación se presenta en la **Figura 2.11**.

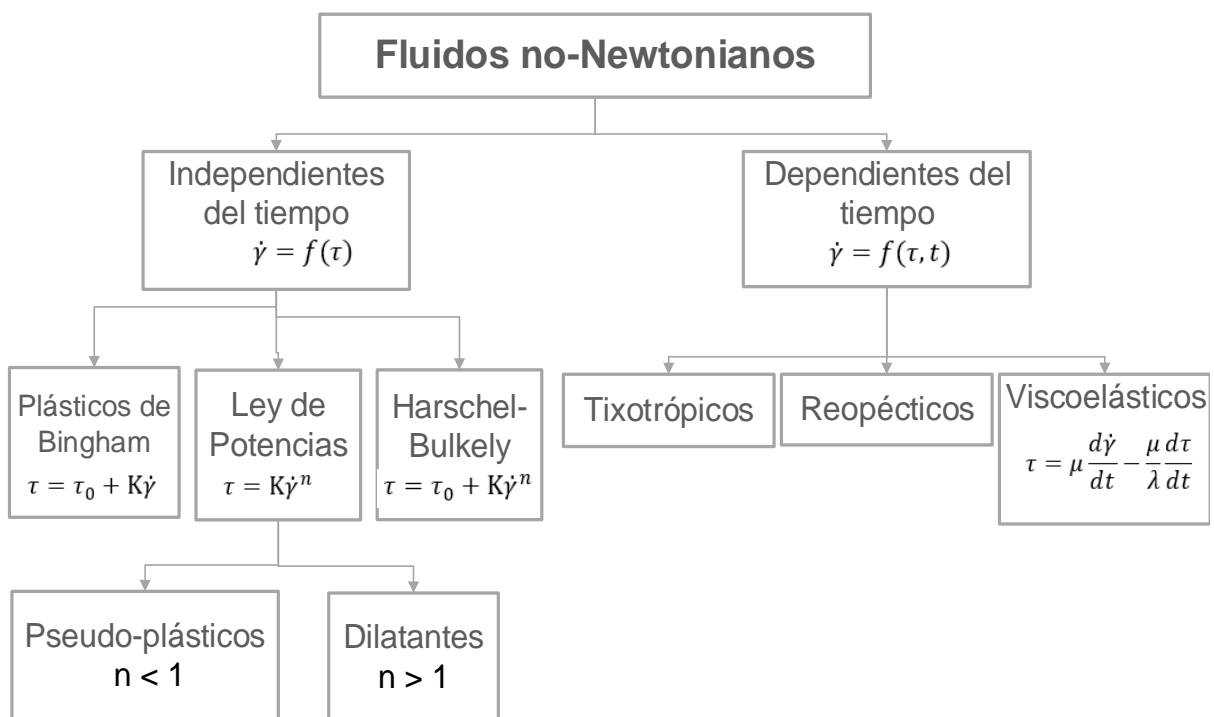


Figura 2.11 Tipo de fluidos no-Newtonianos⁷

Dentro de la literatura podemos encontrar distintos modelos para representar a los fluidos no-Newtonianos de acuerdo con su comportamiento reológico^{8,9,10,11}, mismos que pueden clasificarse en dos clases principales: independientes y dependientes del tiempo de deformación.

Los *fluidos no-Newtonianos independientes del tiempo* son aquellos en los que la velocidad de deformación para un determinado esfuerzo de corte es única, pero no lineal. Su comportamiento se describe mediante la siguiente ecuación:

$$\dot{\gamma} = f(\tau) . \quad (2.1)$$

Dentro de esta clasificación se pueden identificar tres modelos de fluidos no-Newtonianos independientes del tiempo. Éstos fluidos son: Plástico de Bingham, Ley de Potencias y Harschel-Bulkley. Del modelo de Ley de Potencias se derivan dos fluidos cuando el índice de comportamiento de flujo (n) es menor a 1, pseudo-plástico y mayor a 1, dilatantes. El comportamiento esfuerzo de corte vs velocidad de deformación se representa en la **Figura 2.12**.

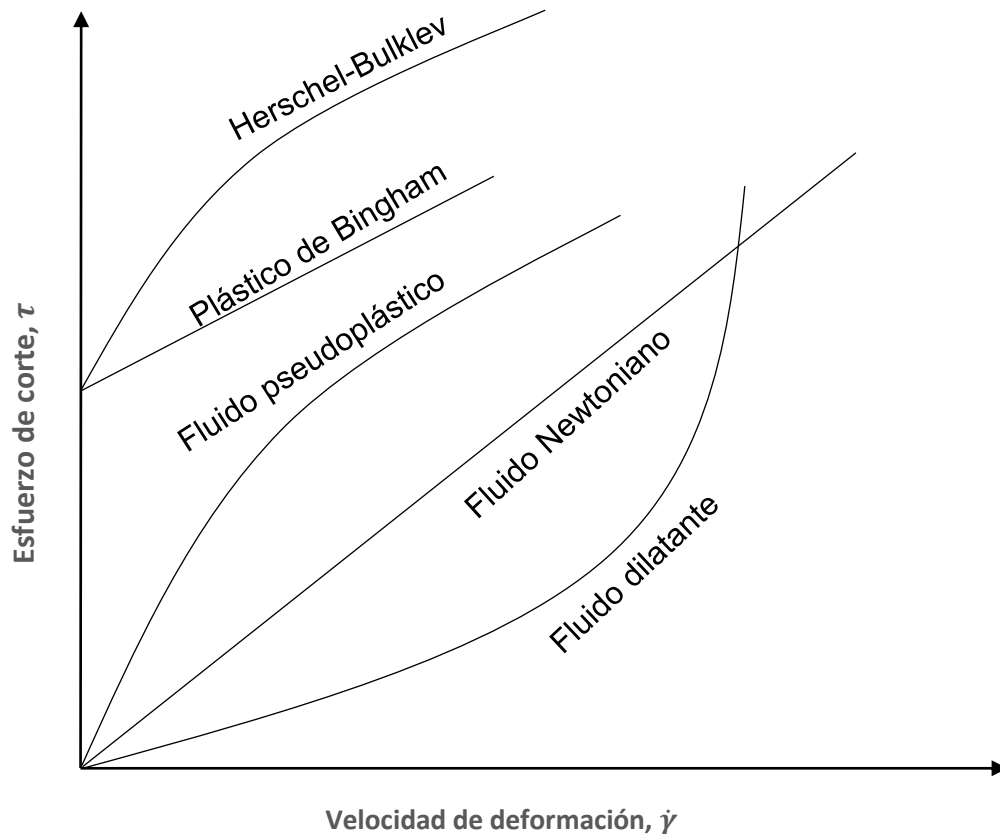


Figura 2.12 Clasificación de fluidos no-Newtonianos independientes del tiempo⁷

Por otro lado, los *fluidos no-Newtonianos dependientes del tiempo* tienen una relación más compleja entre el esfuerzo de corte (τ) y la velocidad de corte ($\dot{\gamma}$), debido al tiempo de corte o a la historia del esfuerzo de corte anterior. Como se muestra en la **Figura 2.13**, se pueden encontrar dos tipos de fluidos dependientes del tiempo: reopécticos y tixotrópicos. Los fluidos *reopécticos* son aquellos en donde aumenta el esfuerzo de corte cuando aumenta el tiempo al que está sometido el fluido a una velocidad de deformación y temperatura dadas, mientras que en los fluidos *tixotrópicos* este esfuerzo de corte disminuye a las mismas condiciones.

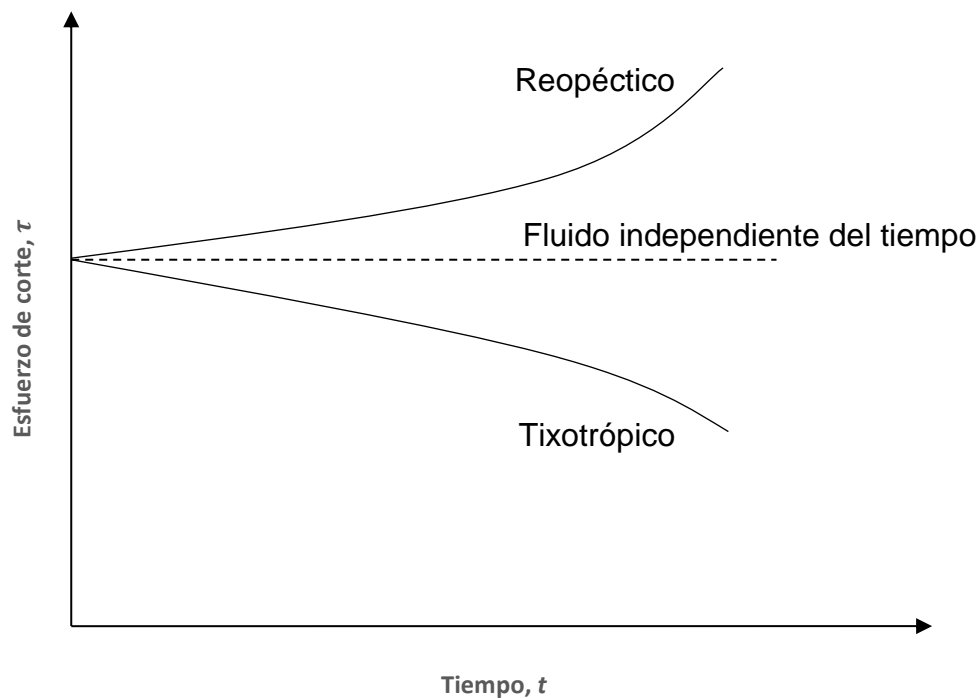


Figura 2.13 Clasificación de fluidos no-Newtonianos dependientes del tiempo⁷

Finalmente, dentro de los fluidos dependientes del tiempo tenemos el *viscoelástico*. Este tipo de fluido, tal como su nombre lo indica, muestra propiedades elásticas y viscosas. Las propiedades reológicas de estos fluidos, en cada

momento, están en función de la historia del material y no pueden describirse en relación del esfuerzo de corte ni velocidad de deformación únicamente, es necesario incorporar la derivada del tiempo de ambas variables.

A nivel de yacimiento los cambios en la viscosidad suponen una modificación a las condiciones de flujo¹. De esta manera, cuando la viscosidad aparente aumenta, en los modelos de flujo representa un daño; y cuando disminuye se interpreta como una estimulación a nivel de pozo. Como se aborda más adelante en este trabajo, estas implicaciones generan desviaciones a los modelos basados en Darcy.

2.3 Efecto de daño

Cuando se tiene un pozo en producción, su comportamiento observado puede no corresponder con las estimaciones hechas a través de modelos de flujo debido a un sinnúmero de posibilidades, mismas que pueden involucrar a los siguientes elementos:

1. yacimiento,
2. fluido,
3. pozo,
4. tipo de perforación o terminación,
5. reparaciones mayores o menores,
6. condiciones de operación,
7. otros.

Para agrupar todos los factores que pueden alterar la afluencia del pozo se utiliza un término llamado *factor de daño* (S).

Originalmente, el *daño* se considera como un impedimento al flujo en la cercanía del pozo que causa una caída de presión adicional¹³. Más tarde, al

concepto de daño también se le agregó el efecto negativo de daño, lo que se conoce como una estimulación.

Una de las formas más simples de representar el daño matemáticamente es con la siguiente ecuación¹².

$$P_{Ds} = P_D + S , \quad (2.2)$$

donde:

P_{Ds} , representa la caída total de presión,

P_D , es la caída de presión de la formación sin el daño o ideal, y

S , es el daño total.

El daño total (S) a su vez, está constituido por una suma de factores, que involucra a el daño real a la formación y a los pseudo-daños¹².

$$S = S_{tr} + S_p + S_\theta + S_{pen} + S_G + S_f , \quad (2.3)$$

donde:

S_{tr} , daño real a la formación,

S_p , pseudo factor de daño por disparos,

S_θ , pseudo factor de daño por inclinación del pozo,

S_{pen} , pseudo facto de daño por penetración parcial,

S_G , pseudo factor de daño por flujo a través de empacamiento de grava, y

S_f , pseudo factor de daño por fracturas, entre otros.

El daño y sus pseudo factores son una medida cuantitativa adimensional de las características de flujo cercano al pozo, relativo a un comportamiento ideal; estos pueden tener valores positivos, negativos y nulos, como se muestra en la **Figura 2.14**. Sin embargo, es el valor del daño total y las pérdidas de presión respecto a éste quienes determinan si un pozo se encuentra dañado o estimulado.

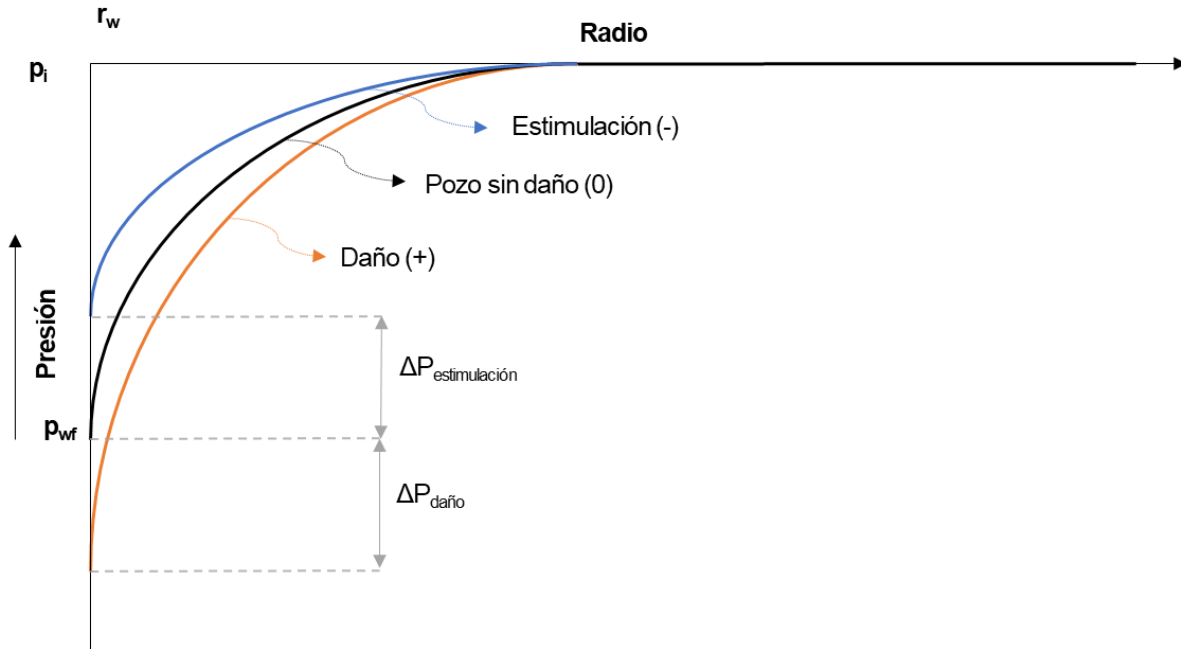


Figura 2.14 Perfil de caídas de presión de un pozo con diferentes daños

Debido a que en condiciones típicas de producción los gradientes de presión incrementan en las vecindades del pozo y a la concepción del daño como un gradiente de presión adicional, es posible incorporar el concepto de radio efectivo¹²:

$$r'_w = r_w e^{-S} \quad (2.4)$$

El radio efectivo se utiliza para simular el comportamiento de un pozo con flujo radial a través de modelos ideales. Con este concepto, para un pozo dañado

el radio efectivo será menor al real (el flujo está restringido), mientras que uno que esté estimulado el radio efectivo será mayor (mayor área de flujo).

2.3.1 Daño real a la formación

El factor de daño real a la formación se diferencia del daño total porque el primero representa únicamente el daño mecánico que ha sufrido el yacimiento debido a diferentes operaciones como la perforación, cementación, terminación y reparación, por tratamientos de estimulación, recuperación secundaria y/o mejorada.

El daño total, por su parte, involucra a los llamados pseudo factores de daño que simbolizan el efecto de la caída de presión adicional debida a la producción del pozo. Dado que estos factores no poseen un origen asociado a una alteración en las condiciones petrofísicas del medio, adquieren el prefijo “pseudo; “ y son más bien un efecto creado a partir de las condiciones de producción del pozo.

Por lo general, se presenta daño real a la formación en las cercanías al pozo, pues es aquí en donde se llevan a cabo las actividades que lo provocan y se representa con una zona dañada de radio (r_s) en la periferia del pozo, como lo muestra la **Figura 2.15**, cuyas propiedades petrofísicas son distintas a las originales de la formación.

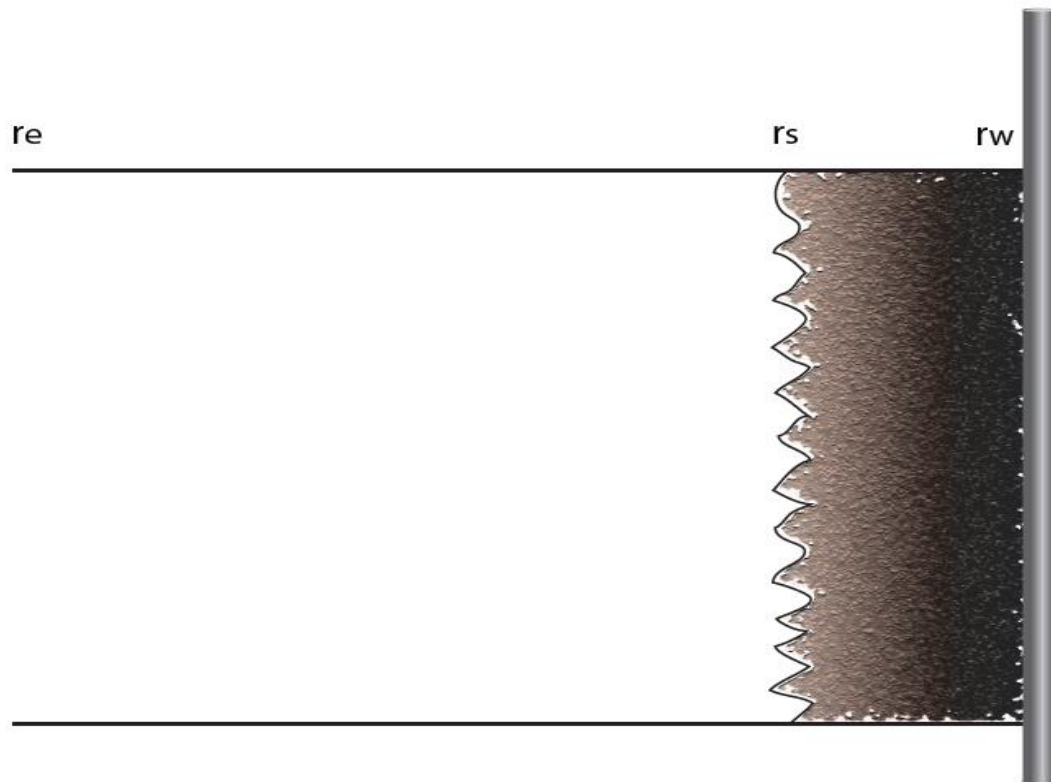


Figura 2.15 Daño real a la formación

El radio externo (r_e) es comúnmente mucho más grande que el radio de la zona dañada; abarca desde el radio de pozo (r_w) hasta la frontera externa del yacimiento.

2.3.2 Pseudo factor de daño por disparos

Los disparos son cavidades que comunican a la formación con el pozo y se realizan en la etapa de terminación. Para poder crear la comunicación en los pozos que se terminan con tubería de revestimiento, se introducen pistolas y en la zona a producir se detonan cargas que abren la tubería y penetran hasta la formación. Este pseudo factor de daño se puede expresar de la siguiente forma¹³:

$$S_p = S_{p1} + S_{p2}, \quad (2.5)$$

Donde:

S_p , pseudo factor de daño por disparos,

S_{p1} , pseudo factor de daño debido al flujo a través de los disparos,

S_{p2} , pseudo factor de daño debido a la convergencia del flujo, hacia los disparos en la zona disparada.

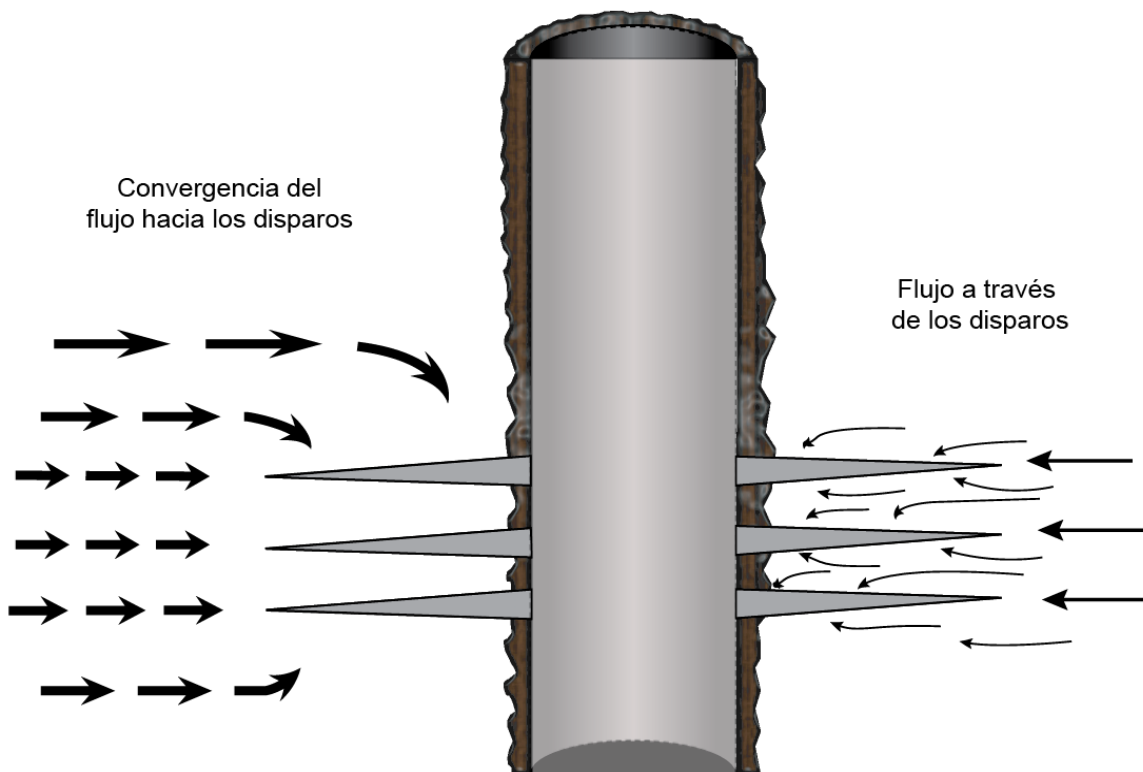


Figura 2.16 Pseudo factor de daño por disparos¹³

En la producción, el fluido que proviene de la formación tiene que pasar a través de los disparos lo que se traduce en una reducción del área transversal por la cual los hidrocarburos tienen que fluir, creando una caída de presión. Para las mismas condiciones de yacimiento, fluido y gasto, a mayor densidad de disparos se tendrá una menor caída de presión. En la zona disparada el fluido tiene que cambiar de dirección, creando una convergencia hacia la cavidad del disparo. La convergencia depende del arreglo, el espaciamiento, la penetración y el diámetro de los propios disparos¹³.

2.3.3 Pseudo factor de daño por inclinación del pozo

Los pozos desviados o inclinados presentan un comportamiento de flujo diferente a los pozos horizontales, debido al área de contacto pozo-formación. En un pozo desviado el área transversal expuesta al flujo resulta mayor que el área transversal en un pozo perpendicular a la formación. Esto provoca un efecto de daño negativo¹⁴.

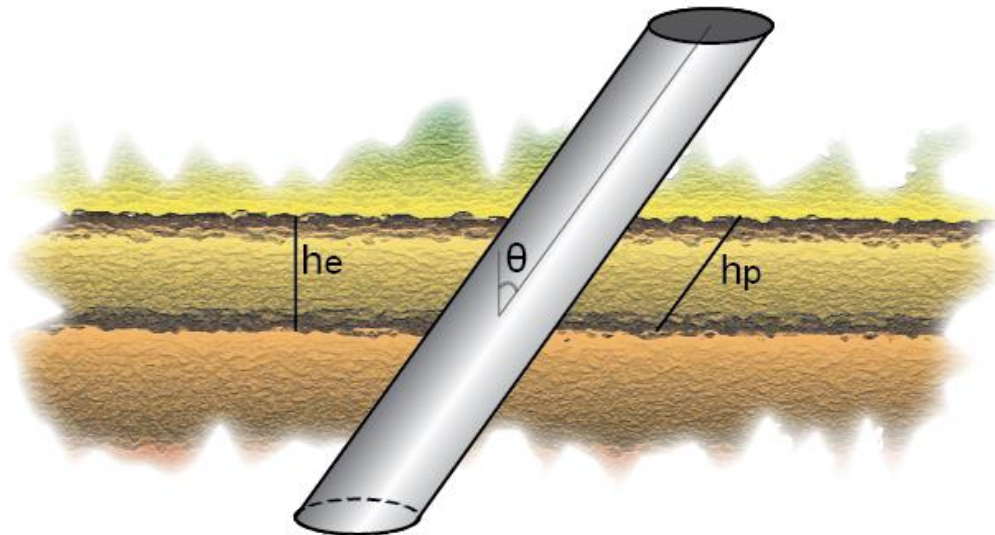


Figura 2.17 Pseudo factor de daño por inclinación de pozo¹⁴

2.3.4 Pseudo factor de daño por penetración parcial

La penetración parcial consiste en disparar una fracción del ancho total de la formación productora. La reducción del área transversal al flujo ocasionará una convergencia, no solo en el área de los disparos sino también en toda la cercanía al pozo, provocando un flujo esférico a tiempos cortos¹⁴.

En la **Figura 2. 18** observamos como el área efectiva al flujo es únicamente la longitud vertical del intervalo disparado (h_p), mientras que el espesor efectivo de la formación productora (h_e) es mayor.

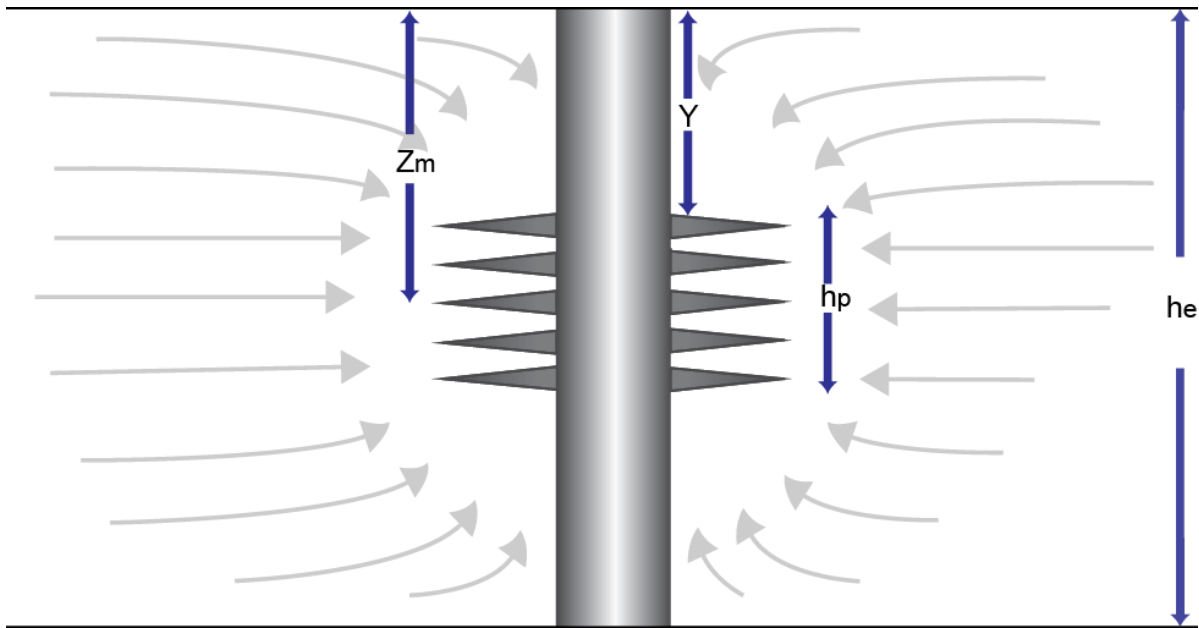


Figura 2. 18 Pseudo factor de daño por penetración parcial¹⁴

Este efecto de convergencia fue estudiado por varios autores como Bronns y Marting (1982) y Odeh (1980); En cuyo procedimiento de cálculo utilizan los valores de h_e , h_p , la distancia entre la parte superior de la zona productora y la parte superior del intervalo disparado (Y), la distancia entre la parte superior de la zona productora y la mitad del intervalo disparado (Z_m), entre otros como r_w , kh y k_v .

2.3.5 Pseudo factor de daño por flujo a través de empaque de grava

Los empacamientos de grava se colocan en la terminación de pozos para evitar la producción de arena. Los dos tipos más comunes de terminación son¹⁵:

- Empacamiento de grava en el interior de la tubería de revestimiento
- Empacamiento de grava en agujero descubierto

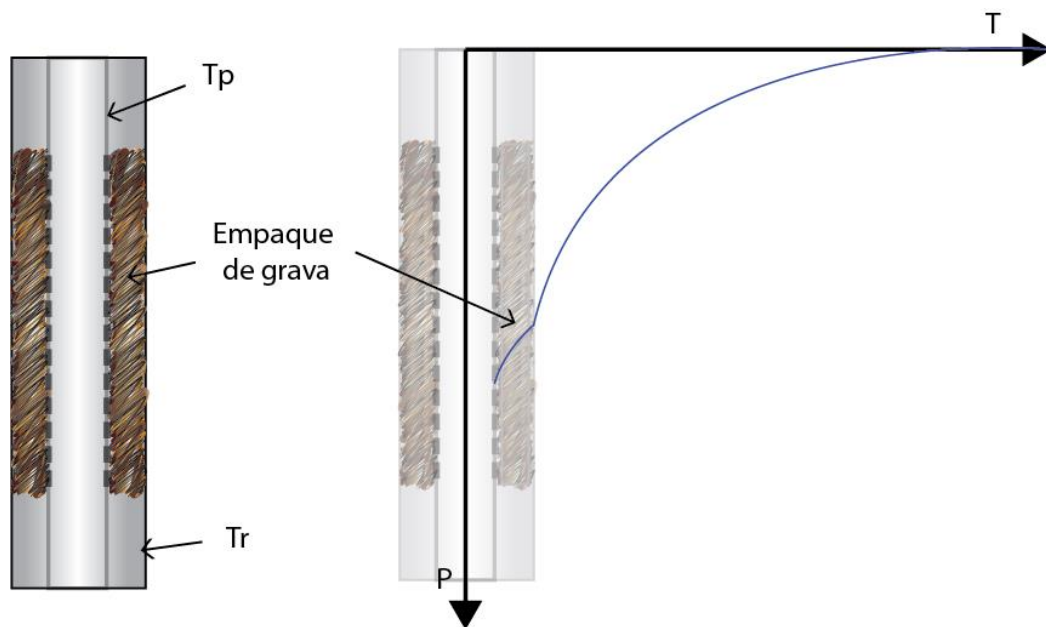


Figura 2. 19 Pseudo factor de daño por empaque de grava.

Un empaque de grava provoca un daño negativo al contribuir a la caída de presión, pero su impacto se ve reflejado en mayor medida en empacamientos de grava en el interior de la tubería¹².

2.3.6 Estimación de los factores de pseudo-daño

Una prueba de presión o el análisis de datos de producción permite estimar el factor de daño total. La única forma de saber los componentes del daño total es analizar el problema considerando el estado mecánico del pozo, las geometrías de flujo identificadas y las propiedades petrofísicas y de los fluidos del yacimiento, y discretizar los componentes de éste¹².

Diversos autores han estudiado los factores de pseudo-daño y han realizado modelos matemáticos para poder cuantificarlos. En la **Tabla 2.2** se resumen las principales ecuaciones y correlaciones utilizadas para los pseudo-daños más frecuentes.

La importancia de conocer los factores de daño, pseudo-factores de daño y su impacto al daño total, radica en el tratamiento que se le debe de dar pozo. En función del daño y el tipo de sistema productor se tiene el tipo de solución.

Tabla 2.2 Estimación de los factores de pseudo-daño¹²

Pseudo-daño	Autor(es)	Ecuación/Correlación
Disparos	Van Everdingen (1953)	$S_{p1} = 4,185 \times 10^{-9} \frac{q_o \rho_o k h_e}{A_o^2 \mu_o B_o N} ,$ <p>S_{p2} se define por nomogramas</p>
Inclinación del pozo	Cinco et al. (1975)	$S_\theta = - \left(\frac{\theta_w}{41} \right)^{2,06} - \left(\frac{\theta_w}{56} \right)^{1,865} \log \left(\frac{h_e}{100 r_w} \right).$
Penetración parcial	Odeh (1980)	$S_{pen} = 1,35 \left[\left(\frac{h_e}{h_p} - 1 \right)^{0,825} \left[\ln \left(h_e \sqrt{\frac{k_h}{k_v}} + 7 \right) - \left(0,49 + 0,1 \ln \left(h_e \sqrt{\frac{k_h}{k_v}} \right) \right) \ln(r_{wc} 1,95) \right] \right].$

Tabla 2.2 Estimación de los factores de pseudo-daño¹²

Pseudo-daño	Autor(es)	Ecuación/Correlación
Flujo a través de empacamiento de grava	Golan y Whitson (1991)	$S_G = 96 \frac{\left(\frac{k}{k_G}\right) h L_p}{d_p^2 n}.$
Efecto de fracturas	Prats (1961); Argawal et.al (1979) y Cinco y Samaniego (1981)	$F_{CD} = \frac{k_f \omega}{k X_f},$ $S_f + \ln\left(\frac{X_f}{r_w}\right) \text{ por grafica.}$
Pozos horizontales	Frick y Economides (1991)	$S'_{eq} = \left(\frac{k}{k_a} - 1\right) \ln \left[\frac{1}{(I_{ani} + 1)} \sqrt{\frac{4}{3} \left(\frac{a_{Hmáx}^2}{r_w^2} + \frac{a_{Hmáx}}{r_w} + 1 \right)} \right].$
Condensación de fluidos	Muskat (1949)	$S_b = \left(\frac{1}{h_{rgc}} - 1\right) \ln\left(\frac{r_b}{r_w}\right).$

2.4 Aspectos relevantes

Los aceites pesados son resultado de una biodegradación que destruye las moléculas ligeras y deja un alto contenido de asfáltenos, resinas, metales pesados, nitrógeno y azufre. Además, contienen poco gas en solución resultando en un aumento significativo de la viscosidad en estos aceites.

Los asfáltenos son compuestos polares que pueden permanecer diluidos en las resinas o traslaparse y formar láminas que harán que la viscosidad y las características de la mezcla de hidrocarburos aumente. Sin embargo, cuando permanecen diluidos en las resinas lo hacen en una suspensión coloidal; permitiendo adquirir propiedades viscoelásticas.

Los efectos no-Newtonianos estimulados por los compuestos polares dan como resultado una viscosidad variable al esfuerzo de corte, velocidad de deformación y al tiempo.

El efecto de la viscosidad se ve reflejado inversamente en la movilidad ($\lambda = \kappa / \mu$). Esta, a su vez, tiene repercusiones en la cantidad de energía (presión) necesaria para que los hidrocarburos sean llevados a superficie y por consecuente en la producción del yacimiento.

En producción, un aumento de la viscosidad aparente puede interpretarse como un daño al pozo y una disminución de la viscosidad aparente como una estimulación; efectos que de ser estimados correctamente ayudarán a un correcto desarrollo del pozo y mejor distribución de las caídas de presión durante la producción.

Referencias

1. Poon, D., & Kisman, K. (1992). Non-Newtonian Effects on The Primary Production of Heavy Oil Reservoirs. *Journal Of Canadian Petroleum Technology*, **31**(07). doi: 10.2118/92-07-06.
2. Rojas, G., Barrios, T., Scudeiro, B., & Ruiz, J. (1977). *Rheological Behaviour of Extra-Heavy Crude Oils from the Orinoco Oil Belt*. *Oil Sands*, 1, 284-302.
3. Banerjee, D. (2012). *Oil Sands, Heavy Oil, & Bitumen*. Tulsa, Okla.: PennWell Corp.
4. Prowse, D., & Ivory, J. (1983). *Some Physical Properties of Bitumen and Oil Sand*. Edmonton: Alberta Research Council, Oil Sands Research Dept.
5. Mehrotra, A., & Svrcek, W. (1982). Correlations for Properties of Bitumen Saturated with CO₂, CH₄ and N₂, and Experiments with Combustion Gas Mixtures. *Journal Of Canadian Petroleum Technology*, **21**(06). doi: 10.2118/82-06-05.
6. Argillier, J., Coustet, C., & Henaut, I. (2002). Heavy Oil Rheology as a Function of Asphaltene and Resin Content and Temperature. SPE International Thermal Operations And Heavy Oil Symposium And International Horizontal Well Technology Conference. doi: 10.2118/79496-ms.
7. Wu, Y. (1990). *Theoretical Studies of no-Newtonian and Newtonian Fluid Flow through Porous Media* (PhD dissertation). Uvinersity of California.
8. Skelland, A. (1967). *Non-Newtonian Flow and Heat Transfer*. New York, London and Sydney: John Wiley & Sons, Inc.
9. Savins, J. (1969). Non-Newtonian Flow through Porous Media. *Industrial & Engineering Chemistry*, **61**(10), 18-47. doi: 10.1021/ie50718a005.
10. Bird, R., Stewart, W., & Lightfoot, E. (1960). *Transport Phenomena*. New York: Wiley.
11. Scheidegger, A. (1974). *The Physics of Flow through Porous Media*. University of Toronto Press.

12. Ramírez Sabag, J. (2015). *Fundamentos de la tecnología de productividad de pozos petroleros*. Barcelona: Reverté.
13. Van Evendinger, A. F. (1953). The Skin Effect and its Influence on the Productive Capacity of a Well. *Journal of Petroleum Technology*, **5**(06), 171-176. doi: 10.2118/203-g.
14. Cinco-Ley, H., Ramey, H., & Miller, F. (1975). Pseudo-Skin Factors for Partially-Penetrating Directionally-Drilled Wells. *Fall Meeting Of The Society Of Petroleum Engineers Of AIME*. doi: 10.2118/5589-ms
15. Golan, M., & Whitson, C. (1991). *Well Performance* (2nd ed.). Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall.

3. Estudios de casos

Dentro de los primeros pasos para poder desarrollar un yacimiento se tiene la caracterización de éste, que implica conocer la formación productora, la geometría del yacimiento y finalmente, los fluidos que contiene.

En la **Revisión de la literatura** se analizaron los esfuerzos que diversos autores han realizado para comprender los mecanismos de flujo asociados a los aceites pesados y extrapesados. Se han registrado que los éstos presentan reologías complejas debido a los efectos que crean la concentración de asfáltenos, resinas y gas disuelto. Además, de la temperatura y presión de este tipo de yacimientos.

El aceite pesado y extrapesado son fluidos particulares con comportamientos no-Newtonianos, distintos al aceite o crudo convencional y no deberían tratarse igual. Actualmente, los simuladores comerciales no incorporan los efectos no-Newtonianos para evaluar el desarrollo de los yacimientos en el medio poroso.

Para ayudar al desarrollo de softwares que analicen el efecto en que crean los aceites pesados con comportamiento no-Newtoniano, se analizará el caso de un fluido tipo Ley de Potencias.

El modelo asume lo siguiente:

1. Temperatura constante a lo largo del yacimiento.

$$T_y = cte, \text{ para todo } r. \quad (3.1)$$

2. Yacimiento homogéneo, isotrópico y espesor constante.

$$\frac{\partial \theta}{\partial x_1} = \frac{\partial \theta}{\partial x_2} = \frac{\partial \theta}{\partial x_3} = 0, \quad (3.2)$$

$$\theta_{x1} = \theta_{x2} = \theta_{x3} = \bar{\theta}, \quad (3.3)$$

$$h = cte, \text{ para todo } r. \quad (3.4)$$

3. Pozo central produciendo a gasto constante y flujo radial.

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho_o u) = - \frac{\partial}{\partial t} (\varphi_{HC} \rho_o). \quad (3.5)$$

4. Fluido ligeramente compresible.

$$C_o = \frac{1}{\rho_o} \frac{\partial \rho_o}{\partial p}. \quad (3.6)$$

3.1 Modelo de un yacimiento con efectos tipo Ley de Potencias

El modelo Ley de Potencias se ha aplicado exitosamente para representar el comportamiento de flujo en medios porosos de polímeros y soluciones de espuma por diversos autores^{2,3,4,5,6,7} y también se han sugerido el uso de este modelo para representar el comportamiento de aceite pesado y extrapesado⁸. La Ley de Potencias está representada por la siguiente ecuación:

$$\tau = H \dot{\gamma}^n, \quad (3.7)$$

donde:

τ = esfuerzo de corte,

$\dot{\gamma}$ = velocidad de deformación,

H = coeficiente de consistencia, y

n = índice de comportamiento de flujo.

Para obtener a viscosidad del fluido se realiza una analogía con la viscosidad de un fluido Newtoniano:

$$\tau = \mu \dot{\gamma}, \quad (3.8)$$

y la ecuación que representa la Ley de Potencias (3.7); El resultado es la viscosidad aparente, que está determinada por la velocidad de corte a una temperatura fija:

$$\mu_{app} = \frac{d\tau}{d\dot{\gamma}} = H \dot{\gamma}^{n-1}. \quad (3.9)$$

Por otro lado, para poder representar el fluido en el medio porosos mediante la ecuación de Darcy, la movilidad se define en términos de la viscosidad efectiva⁹:

$$\mu_{eff} = \frac{H}{12} \left(9 + \frac{3}{n}\right)^n (150k\phi)^{\frac{1-n}{2}}. \quad (3.10)$$

De esta manera, la ecuación de Darcy modificada para flujo no-Newtoniano en medios porosos está definida de la siguiente forma:

$$v^n = - \frac{k}{\mu_{eff}} \frac{\Delta p}{\Delta x}. \quad (3.11)$$

La **Figura 3.1** muestra la relación de las viscosidades aparentes del modelo Ley de Potencias que, a su vez como ya se mencionó anteriormente, se divide en los fluidos pseudoplásticos y dilatantes. Para un fluido con índice de comportamiento de flujo menor a la unidad ($n < 1$) el fluido se comportará como

pseudoplástico y en la gráfica log-log μ_{app} contra $\dot{\gamma}$ se mostrará una pendiente negativa.

Por el contrario, si el índice es mayor a la unidad ($n > 1$) el fluido será dilatante. A muy altas velocidades y muy bajas velocidades el fluido se comporta como Newtoniano y la viscosidad aparente se mantiene constante¹⁰.

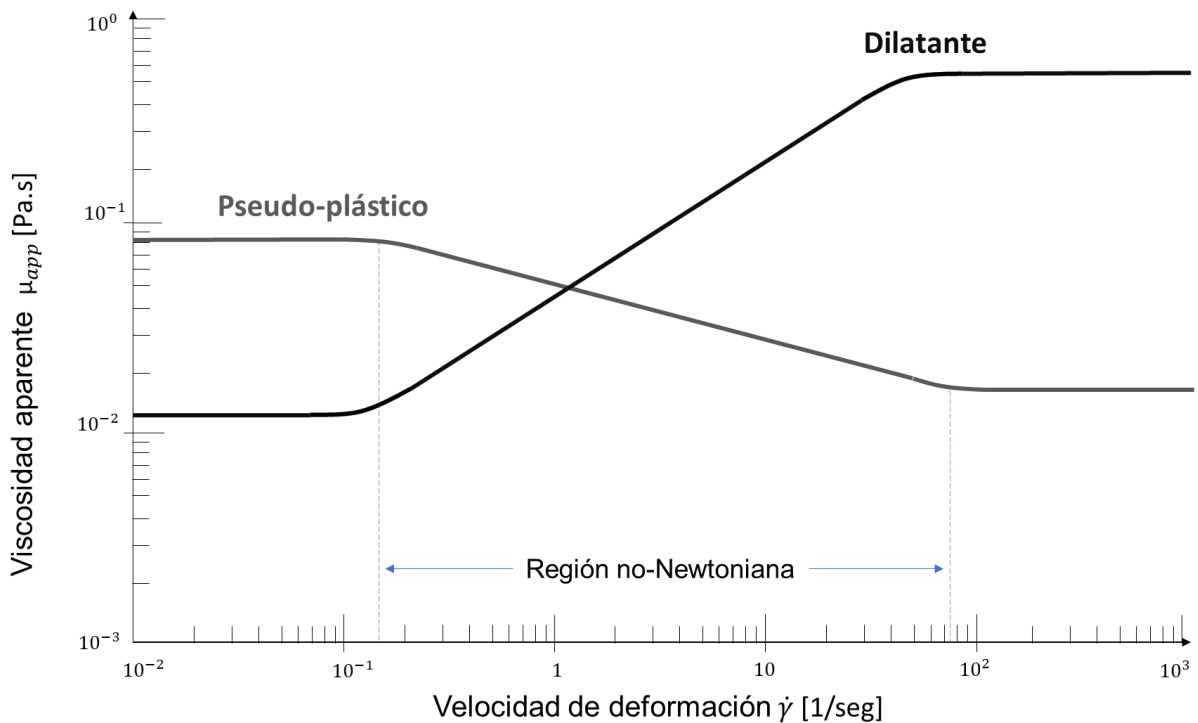


Figura 3.1 Viscosidad aparente de un fluido Ley de Potencias con viscosidades límite en función de la velocidad de deformación⁹

A lo largo del yacimiento se presentan diferentes velocidades de deformación, y son proporcionales al gradiente de presión. En la periferia del pozo se encuentran típicamente altas velocidades, al igual que las mayores caídas de presión dentro del yacimiento, como se muestra en la Figura 2.14. Para un fluido no-Newtoniano se traduce en una distribución de viscosidades aparentes.

Por consiguiente, la distribución de las viscosidades aparentes para un fluido Ley de Potencias en un yacimiento radial se representa como en la **Figura 3. 2**. El yacimiento exhibe dos zonas de flujo Newtoniano con diferentes viscosidades, separadas por una transición de flujo no-Newtoniano con dos posibles casos:

1. Pseudoplástico: la viscosidad a bajas velocidades de corte (μ_{N_1}) es mayor que la del resto del yacimiento. Por lo anterior, el hidrocarburo se resiste a fluir y se requerirá una gran caída de presión para lograr producir los fluidos que se encuentran lejos del pozo. Sin embargo, en medida que el fluido recorre el área de drene, la viscosidad disminuye hasta estabilizarse a altas velocidades de corte (μ_{N_2}). En este caso la movilidad es mejorada, provocando que la producción sea más fácil y pueda ser interpretado como una estimulación.
2. Dilatante: la viscosidad a bajas velocidades de corte (μ_{N_1}) es menor que la del resto del yacimiento, permitiendo que la producción sea más sencilla. No obstante, al avance de fluido y aumento de las caídas de presión, la viscosidad aumenta hasta estabilizarse a altas velocidades de corte (μ_{N_2}), el resultado de este comportamiento puede interpretarse como un daño.

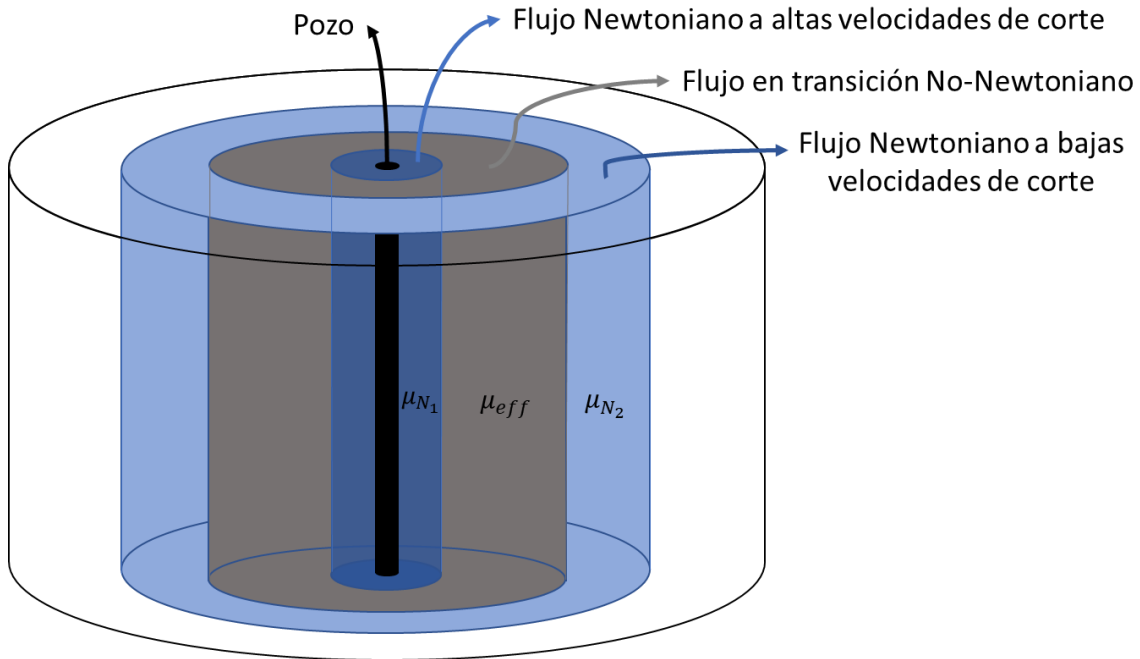


Figura 3. 2 Regiones de flujo en un yacimiento radial para un fluido del tipo Ley de Potencia

En este modelo se asume que el flujo Newtoniano gobierna la producción y los efectos no-Newtonianos se restringen a un área finita del medio poroso. Además, para su análisis se asume un factor de daño constante.

3.2 Solución para los fluidos Ley de Potencias

La ecuación parcial diferencial para un flujo radial de un fluido no-Newtoniano (3.12) fue derivada combinando la ecuación de continuidad, la ecuación de Darcy modificada para fluidos no-Newtonianos de Ley de Potencias (3.11) y ecuaciones constitutivas (ver **Anexo A**)¹¹.

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{n}{r} \frac{\partial p}{\partial r} = c_t \varphi \left(\frac{\mu_{eff}}{k_r} \right)^{\frac{1}{n}} \left(-\frac{\partial p}{\partial r} \right)^{\frac{n-1}{n}} \frac{\partial p}{\partial t}. \quad (3.12)$$

Esta ecuación asume un fluido ligeramente compresible y un medio poroso homogéneo e isotrópico. Sin embargo, resulta ser altamente no lineal y para su solución es necesario utilizar métodos numéricos.

Ikoku y Ramey¹² realizaron un estudio para analizar los datos de pruebas de pozos obtenidos durante la inyección de fluidos no-Newtonianos en un yacimiento petrolero. El estudio presenta una solución en diferencias finitas para la ecuación parcial diferencial no lineal de flujo transitorio no-Newtoniano, utilizando el método numérico Douglas-Jones.

El método Douglas-Jones o predictor-corrector es una modificación de la técnica de Crank-Nicholson, maneja además de un esquema implícito uno explícito y cada ecuación avanza la solución a la mitad de un incremento de tiempo¹³; se representa en la **Figura 3.3**.

Considerando la siguiente ecuación parcial diferencial no lineal:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = g_1 \left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial u}{\partial t} + g_2 \left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x} \right). \quad (3.13)$$

El método está formado por los siguientes dos pasos:

1. Predicción. Se calcula la solución aproximada en el tiempo $t_{j+1/2}$, usando un esquema implícito de primer orden, pero con una reserva bastante grande de estabilidad.

$$\begin{aligned} & \frac{w_{i-1}^{j+1/2} - 2w_i^{j+1/2} + w_{i+1}^{j+1/2}}{(\Delta x^2)} \\ & = g_1 \left(x_i, t_{j+1/2}, w_i^j, \frac{w_{i+1}^j - w_{i-1}^j}{2\Delta x} \right) \frac{w_i^{j+1/2} - w_i^j}{\Delta t/2} \\ & + g_2 \left(x_i, t_{j+1/2}, w_i^j, \frac{w_{i+1}^j - w_{i-1}^j}{2\Delta x} \right). \end{aligned} \quad (3.14)$$

2. Corrección. La solución auxiliar obtenida en la predicción se corrige usando un esquema de segundo orden en todo el intervalo (t_j, t_{j+1}) .

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(w_{i-1}^{j+1} - 2w_i^{j+1} + w_{i+1}^{j+1}) + \frac{1}{2}(w_{i-1}^j - 2w_i^j + w_{i+1}^j) \\ & \quad (\Delta x^2) \\ & = g_1 \left(x_i, t_{j+1/2}, w_i^{j+1/2}, \frac{w_{i+1}^{j+1/2} - w_{i-1}^{j+1/2}}{2\Delta x} \right) \frac{w_i^{j+1} - w_i^j}{\Delta t} \\ & \quad + g_2 \left(x_i, t_{j+1/2}, w_i^{j+1/2}, \frac{w_{i+1}^{j+1/2} - w_{i-1}^{j+1/2}}{2\Delta x} \right). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Aplicando el Predictor a la ecuación (3.12) para una $i = 1, 2 \leq i \leq N - 1$ y $i = N$, se obtiene un sistema de ecuaciones tridiagonal $n \times n$, que es resuelto con el algoritmo de Thomas¹⁴. De este primer paso se obtiene una aproximación de presiones a tiempo $t_{j+1/2}$ para cada nodo a lo largo del yacimiento, que posteriormente serán corregidas.

La Corrección se realiza de manera análoga al Predictor, aplicando el esquema (3.15) a la ecuación (3.12) para cada uno de los valores de i , pero con las presiones iniciales obtenidas del predictor. Se obtiene así, presiones a tiempo t_{j+1} a lo largo del yacimiento.

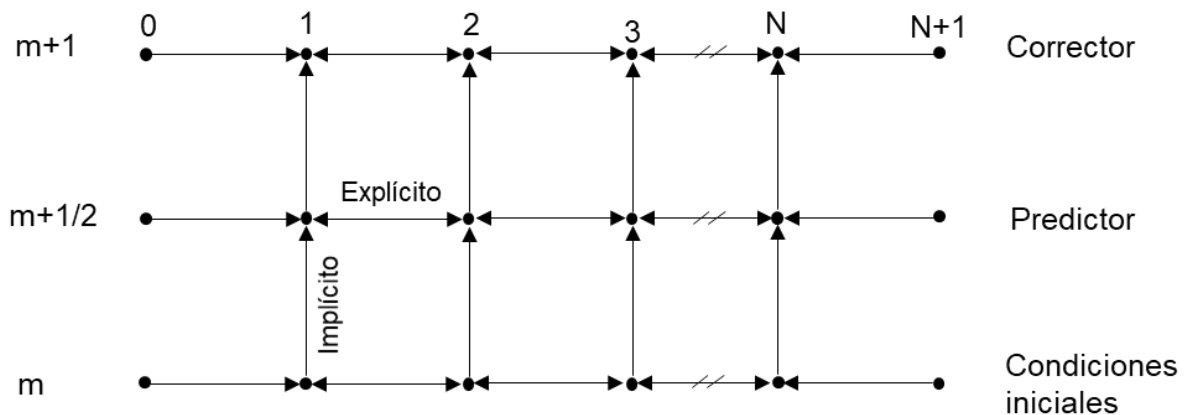


Figura 3.3 Esquematización del método predictor-corrector

Finalmente, las presiones a tiempo t_{j+1} y $t_{j+1/2}$ se comparan para validar la precisión de los cálculos a razón de una tolerancia dada. De no cumplir con el límite de diferencia permitido, comenzará con un proceso iterativo; dónde las presiones obtenidas del Corrector pasarán a ser insumos del Predictor para comenzar de nuevo el procedimiento (ver **Anexo 0**).

Para dar solución al flujo en transición no-Newtoniano se replicó la solución numérica de Ikoku y Ramey para inyección de polímeros, de la cual se obtienen curvas del aumento de la presión en el yacimiento, a diferentes tiempos y gasto de inyección constate, **Figura 3.4**.

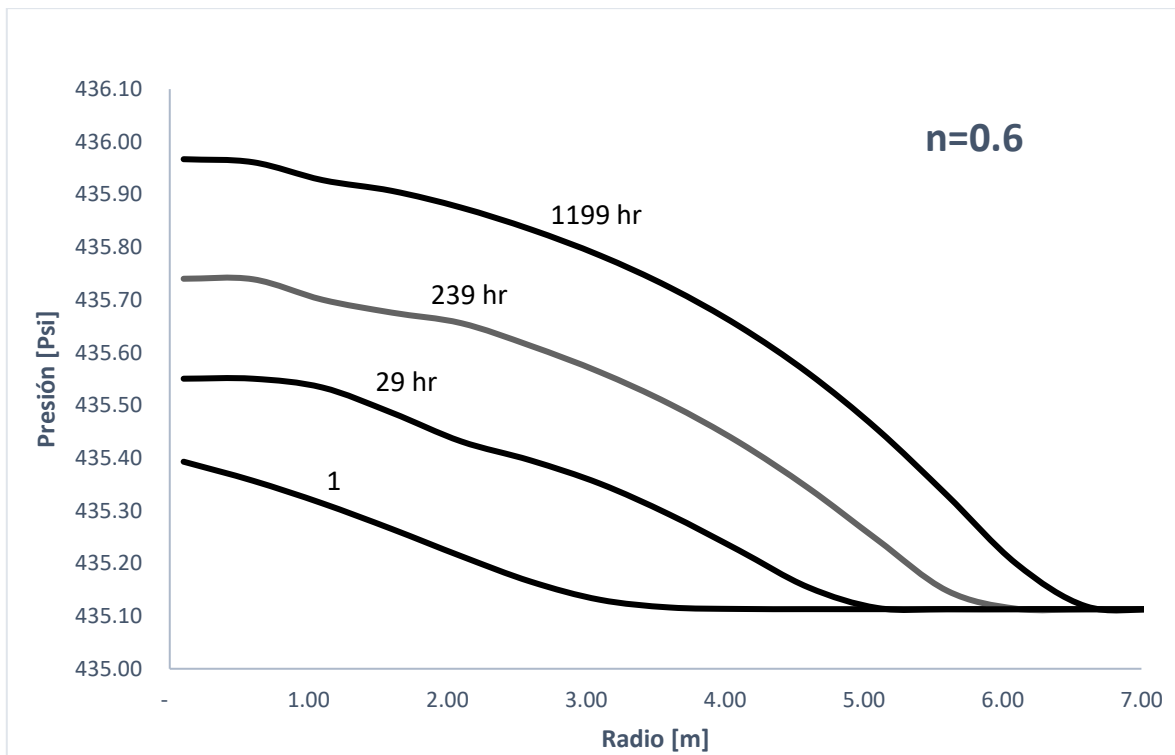


Figura 3.4 Presión vs Radio a diferentes tiempos de una inyección de fluidos no-Newtonianos en un yacimiento infinito

Sin embargo, para el caso de estudio que se pretende analizar, el yacimiento se encuentra en producción. Por lo tanto, es necesario modificar la solución numérica para que represente una salida de fluidos y en consecuencia un abatimiento de presión. Es preciso validar el comportamiento de esta representación y posteriormente acoplarlo con el fluido Newtoniano a bajas velocidades de corte.

3.3 Comportamiento de un fluido tipo Ley de Potencias con viscosidad límite

Para este estudio se considera la aproximación de Vongvuthipornchai y Raghaven (1987), en la que sólo se toma una viscosidad límite a bajas velocidades de deformación, y la sección Newtoniana que ocurre a altas velocidades de flujo se desprecia, **Figura 3. 5.**

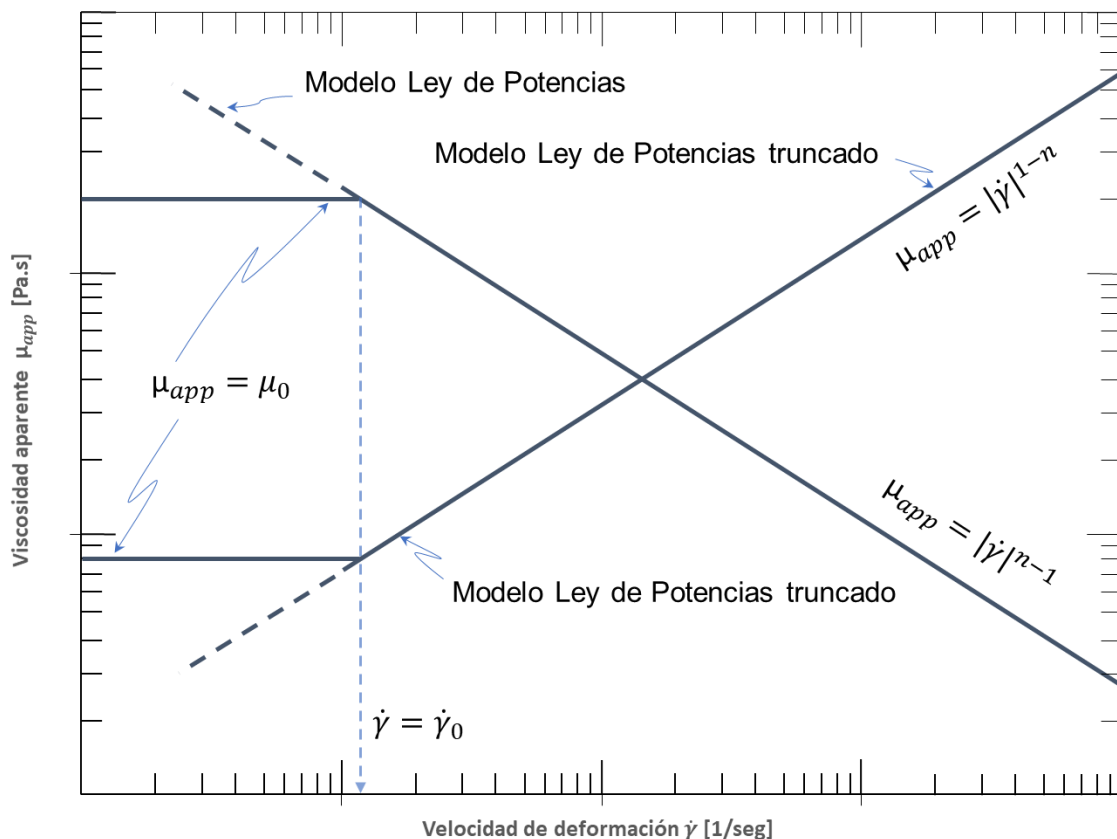


Figura 3. 5 Comportamiento de la viscosidad del modelo Ley de Potencias truncado¹⁵

A su vez, el modelo de simulación que representa este problema es aproximado como un sistema acoplado de dos moviidades distintas, como se propone por Lund e Ikoku (1981) y se muestra en la **Figura 3.6**. La ecuación fundamental de flujo para este problema se encuentra definida por la ecuación (3.12), considerando que la reología del fluido cambia al llegar la caída de presión a un radio de afectación, r_{DNN} , después del cual n toma un valor unitario (sección Newtoniana de flujo a baja velocidad).

Las condiciones de frontera utilizadas para resolver este problema son las siguientes:

Presión inicial es igual para todo el sistema a tiempo cero:

$$p_1 = p_2 = p_i \text{ para todo } r \text{ a } t = 0, \quad (3.16)$$

flujo no-Newtoniano en la primera sección

$$\left(-\frac{\partial p_1}{\partial r}\right)_{r=r_w} = \left(\frac{q}{2\pi h r_w}\right)^n \frac{\mu_{eff}}{k}; t > 0, \quad (3.17)$$

el yacimiento se considera infinito:

$$p_2(r \rightarrow \infty, t) = p_i \text{ para todo } t, \quad (3.18)$$

y entre las fronteras de las regiones del sistema compuesto se define continuidad en la presión y los gastos:

$$p_1 = p_2 \text{ a } r = r_{DNN}, \quad (3.19)$$

$$\left[\lambda_{eff} \left(-\frac{\partial p_1}{\partial r}\right)\right]_{r=r_{DNN}}^{1/2} = \lambda_2 \left(-\frac{\partial p_2}{\partial r}\right)_{r=r_{DNN}}. \quad (3.20)$$

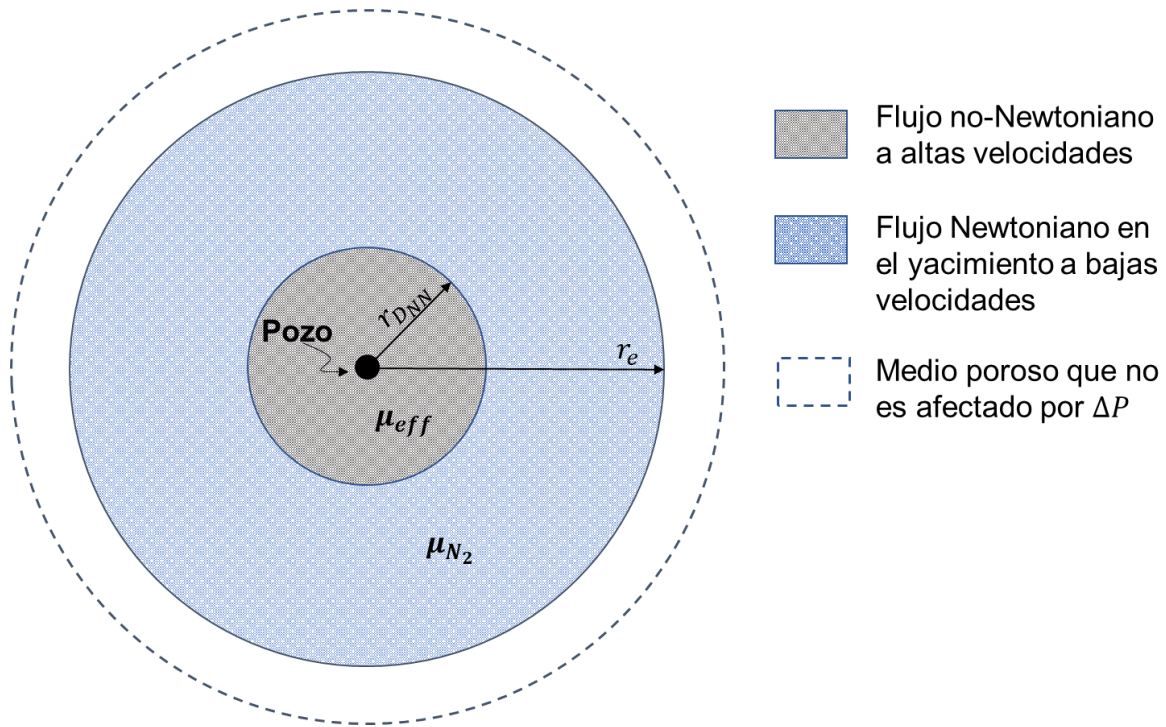


Figura 3.6 Representación del modelo simulado¹⁶

Cabe señalar que si bien la frontera de la sección no-Newtoniana debería ser móvil y cambiar en términos de la velocidad de deformación, al ser éste un modelo de pozo que representa el problema típico de una prueba de presión, se considera que el radio al que cambia la reología es constante.

Referencias

1. Wu, Y., Pruess, K., Witherspoon, P. (1992). Flow and Displacement of Bingham non-Newtonian Fluids in Porous Media. *SPE Reservoir Engineering*, **7**(03), 369-376. doi: 10.2118/20051-pa.
2. Christopher, R., Middleman, S. (1965). Power-Law Flow through a Packed Tube. *I & EC Fundamentals*, **4**(4), 422-426.
3. McKinley, R. M., Jahns, H. O., Harris, W. W. Greenkorn, R. A. (1966). Non-Newtonian Flow in Porous Media. *AIChE Jour*, **12**(1), 17-20.
4. Gogarty, W. B. (1967). Mobility Control with Polymer Solutions. *Society of Petroleum Engineers Journal*, 161-173.
5. Harvery, a. H. & Mezie, D. E. (1970). Polymer Solution Flow in Porous Media. *Society of Petroleum Engineers Journal*, 51-62.
6. Mungan, N. (1972). *Fundamentals of Soil Behavior*. New York: John Wiley & Sons Inc.
7. Hirasaki, G. J. Pope, G. A. (1974). Analysis of Factors Influencing Mobility and Adsorption in the Flow of Polymer Solution through Porous Media. *Society of Petroleum Engineers Journal*, 337-346.
8. Wang, Y., Chen, C. (2001). Enhanced Oil Production Owing to Sand Flow in Conventional and Heavy-Oil Reservoirs. *SPE Reservoir Evaluation & Engineering*, **4**(05), 366-374. doi: 10.2118/73827-pa.
9. Poon, D., Kisman, K. (1992). Non-Newtonian Effects on The Primary Production of Heavy Oil Reservoirs. *Journal Of Canadian Petroleum Technology*, **31**(07). doi: 10.2118/92-07-06.
10. Ikoku, C., Ramey, H. (1979). Transient Flow of Non-Newtonian Power-Law Fluids in Porous Media. *Society Of Petroleum Engineers Journal*, **19**(03), 164-174. doi: 10.2118/71139-pa.
11. Ikoku, C. (1979). Practical Application of Non-Newtonian Transient Flow Analysis. *SPE Annual Technical Conference And Exhibition*. doi: 10.2118/8351-ms.

12. Ikoku, C., Ramey Jr., H. (1978). Numerical Solution of the Nonlinear Non-Newtonian Partial Differential Equation. *Society Of Petroleum Engineers Journal*. doi: <https://doi.org/NA>.
13. Skiba, Y. (2005). *Métodos y Esquemas Numéricos* (pp. 322-347). México, D.F.: Universidad Nacional Autónoma de México.
14. Izar Landeta, J. (1998). *Elementos de Métodos Numéricos para Ingenieros* (pp. 49-51). San Luis Potosí, México: Universitaria Potosina.
15. Vongvuthipornchai, S., Raghavan, R. (1987). Pressure Falloff Behavior in Vertically Fractured Wells: Non-Newtonian Power-Law Fluids. *SPE Formation Evaluation*, **2**(04), 573-589. doi: 10.2118/13058-pa.
16. Lund, O., Ikoku, C. (1981). Pressure Transient Behavior of Non-Newtonian/Newtonian Fluid Composite Reservoirs. *Society Of Petroleum Engineers Journal*, **21**(02), 271-280. doi: 10.2118/9401-pa.

4. Análisis de resultados

En este capítulo se presentan casos de simulación utilizados para la validación del modelo conceptual de los efectos no-Newtonianos de un fluido tipo Ley de Potencias como un factor de pseudo-daño. Cabe señalar que el único modelo encontrado en la literatura para representar este efecto es el que propone Gallardo (2019):

$$S_{NN} = \left(\frac{qB}{2\pi h} \right)^{n-1} \frac{\mu_{eff} [r_{NN}^{1-n} - r_w^{1-n}]}{\mu (1-n)} - \ln \left| \frac{r_{NN}}{r_w} \right|. \quad (4.1)$$

4.1 Resultados de la simulación

Los valores utilizados para la simulación se incluyen en la **Tabla 4.1**. Los comportamientos obtenidos se validaron a través de los gráficos diagnóstico (log-log) y especializado (semi-log).

Tabla 4.1 Parámetros para la simulación de fluido tipo Ley de Potencias

Radio de pozo	$r_w = 0.1 \text{ m (0.33 ft)}$
Radio externo	$r_e = 800 \text{ m (2,625 ft)}$
Espesor	$h = 5.0 \text{ m (16.4 ft)}$
Porosidad	$\phi = 0.20$
Permeabilidad	$k = 100 \text{ md}$
Gasto	$q = 5.5204 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s (300 BPD)}$
Compresibilidad total de la formación	$c_t = 1.0 \times 10^{-9} \text{ Pa}^{-1} (6.89 \times 10^{-6} \text{ psi}^{-1})$
Índice de comportamiento de flujo	$n = 0.6$
Índice de consistencia de flujo	$H = 0.020 \text{ N} \cdot \text{s}^n/\text{m}^2$
Viscosidad	$\mu_N = 0.003 \text{ Pa} \cdot \text{s (3.0 cp)}$
Presión inicial	$P_i = 30,000,000.0 \text{ Pa (4,351.13 Psi)}$

Los resultados obtenidos se muestran en las **Figuras 4.1 a 4.14**, donde se incluyen los gráficos diagnósticos y especializados para flujo radial. Los resultados interpretados para cada caso se presentan en la **Tabla 4.2**.

Tabla 4.2 Casos de simulación

CASOS	m_{radial}	k	b_{radial}	S
Simulación para n = 0.5	1.76E+06	9.98E+14	-6.86E+06	-2.26
Simulación para n = 0.6	1.86E+06	9.46E-14	-8.03E+06	-2.45
Simulación para n = 0.8	1.60E+06	1.10E-13	-3.52E+06	-1.46
Simulación para n = 0.9	1.64E+06	1.07E-13	-9.29E+05	-0.63
Simulación para n = 1.0	1.78E+06	9.87E-14	3.07E+06	0.55
Simulación para n = 1.1	1.71E+06	1.03E-13	1.39E+07	3.2
Simulación para n=1.2	1.71E+06	1.02E-13	3.03E+07	8.49

La pendiente (m) y la ordenada al origen (b) son leídos directamente de las gráficas, mientras que la permeabilidad y el daño se calcularon mediante las siguientes ecuaciones²:

$$k = 162.6 \frac{Bq\mu}{mh} \quad (4.2)$$

$$s = 1.1513 \left[\frac{b}{m} - \ln \left(\frac{k}{\phi\mu c_t r_w^2} \right) + 3.2275 \right] \quad (4.3)$$

Simulación para n=0.5

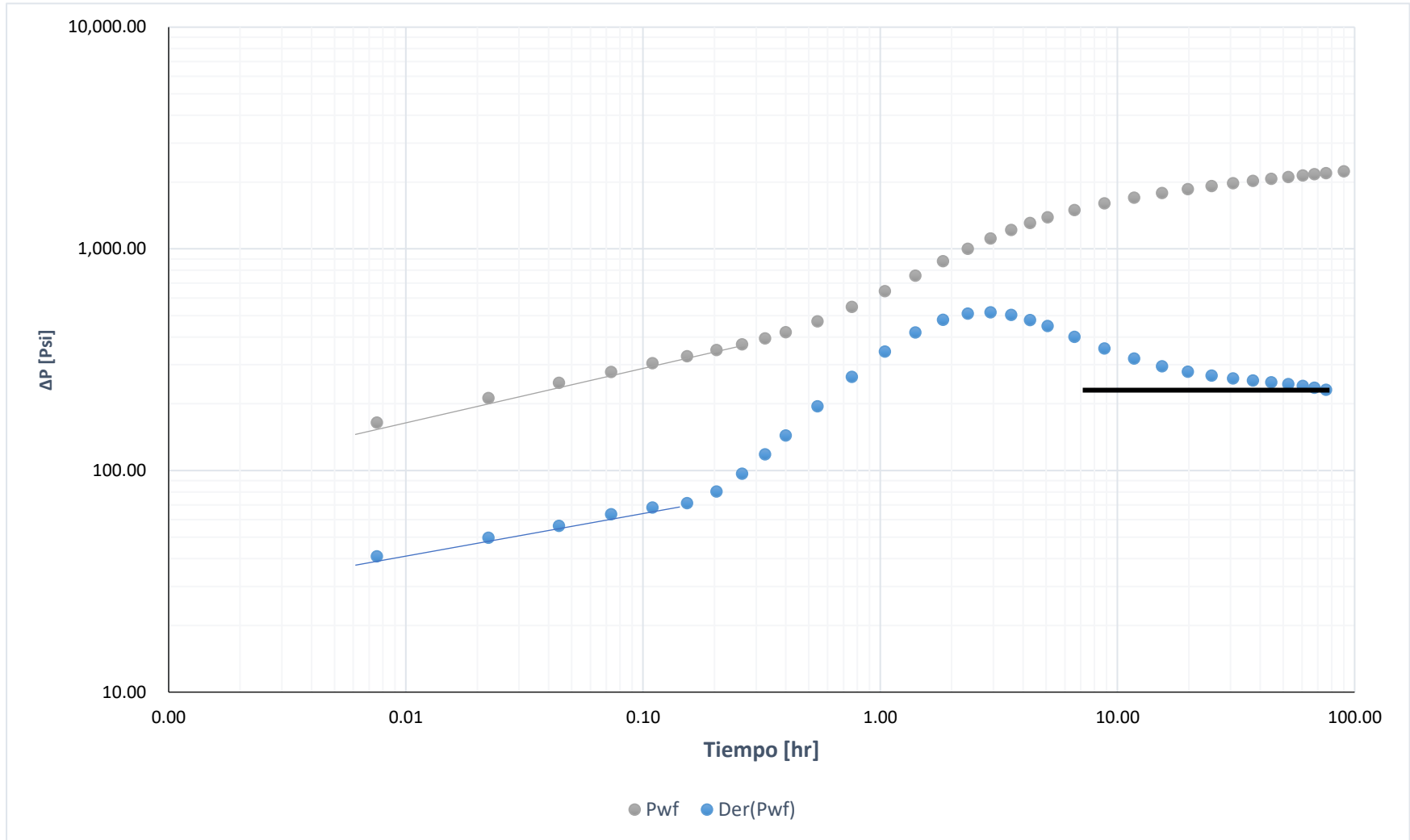


Figura 4.1 Gráfico diagnóstico para n=0.5

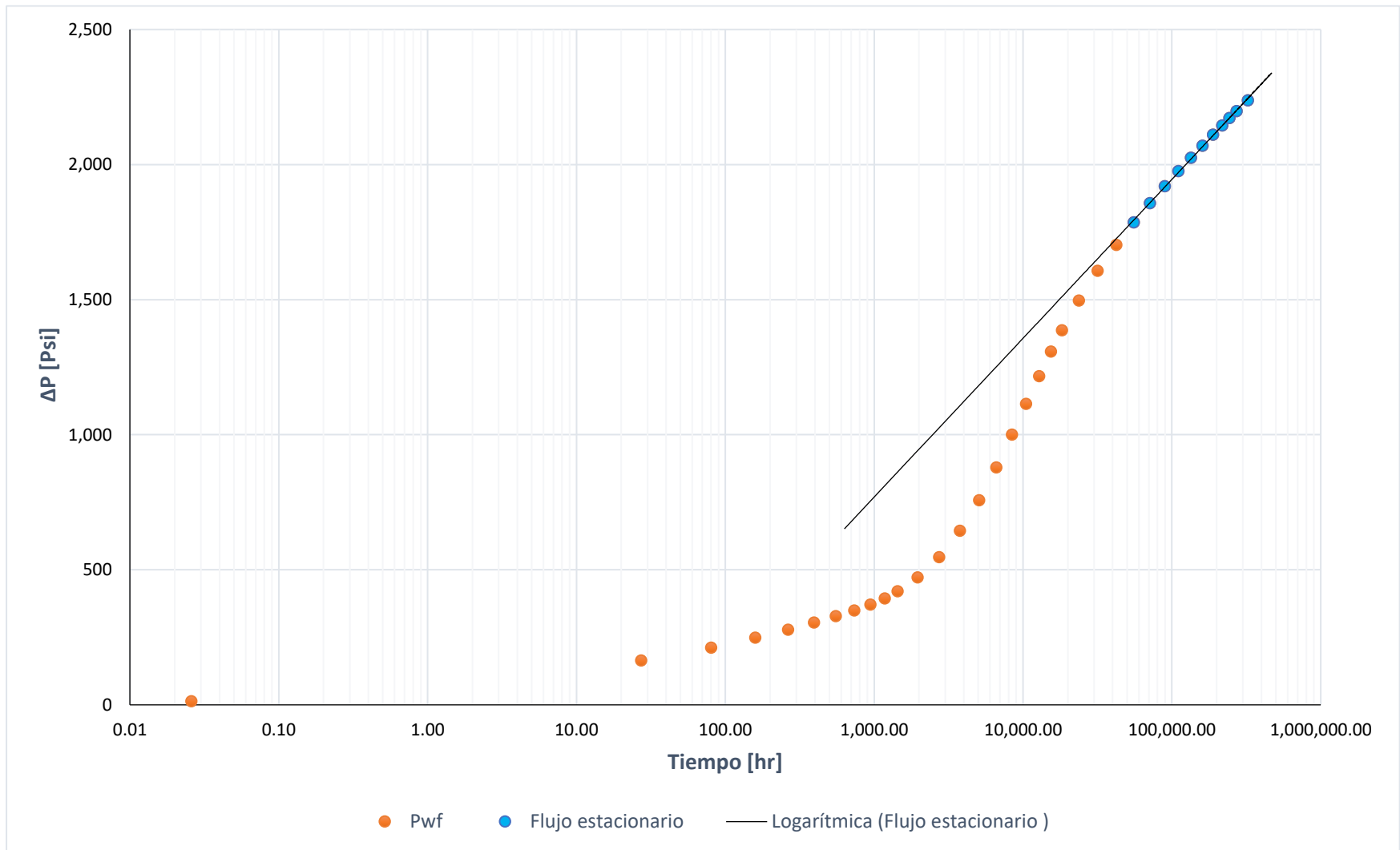


Figura 4.2 Gráfico especializado para $n=0.5$

Simulación para n=0.6

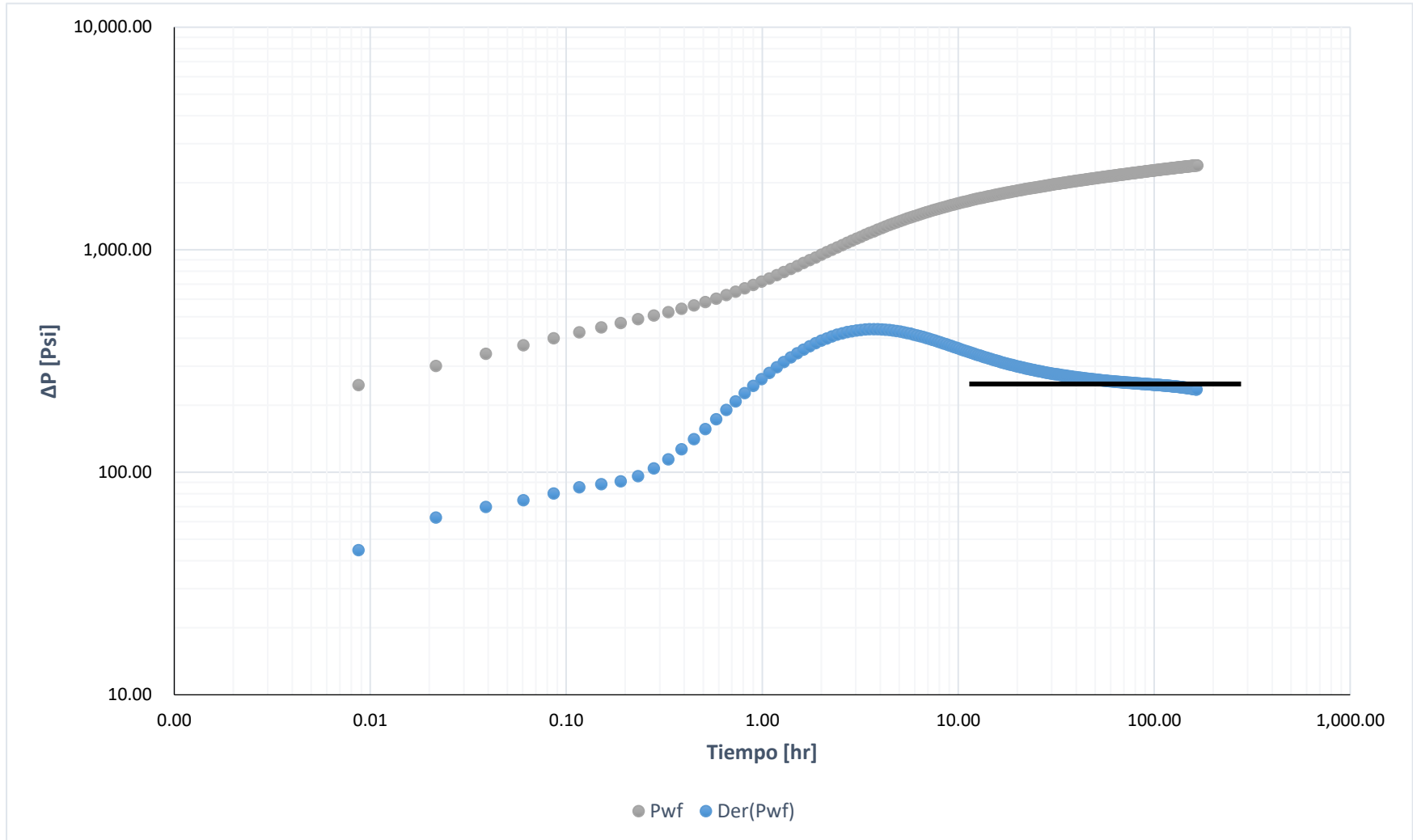


Figura 4.3 Gráfico diagnóstico para n=0.6

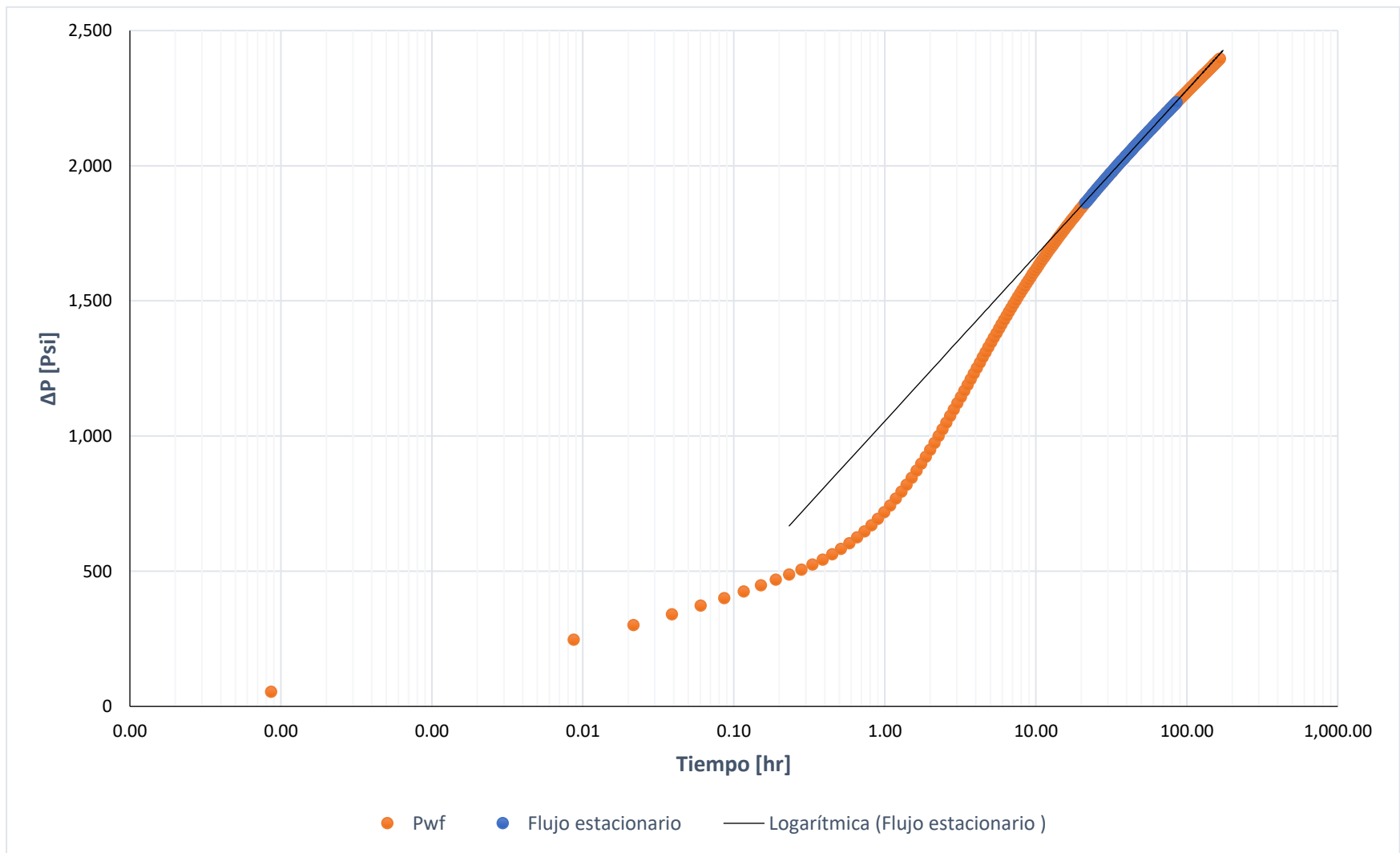


Figura 4.4 Gráfico especializado para $n=0.6$

Simulación para n=0.8

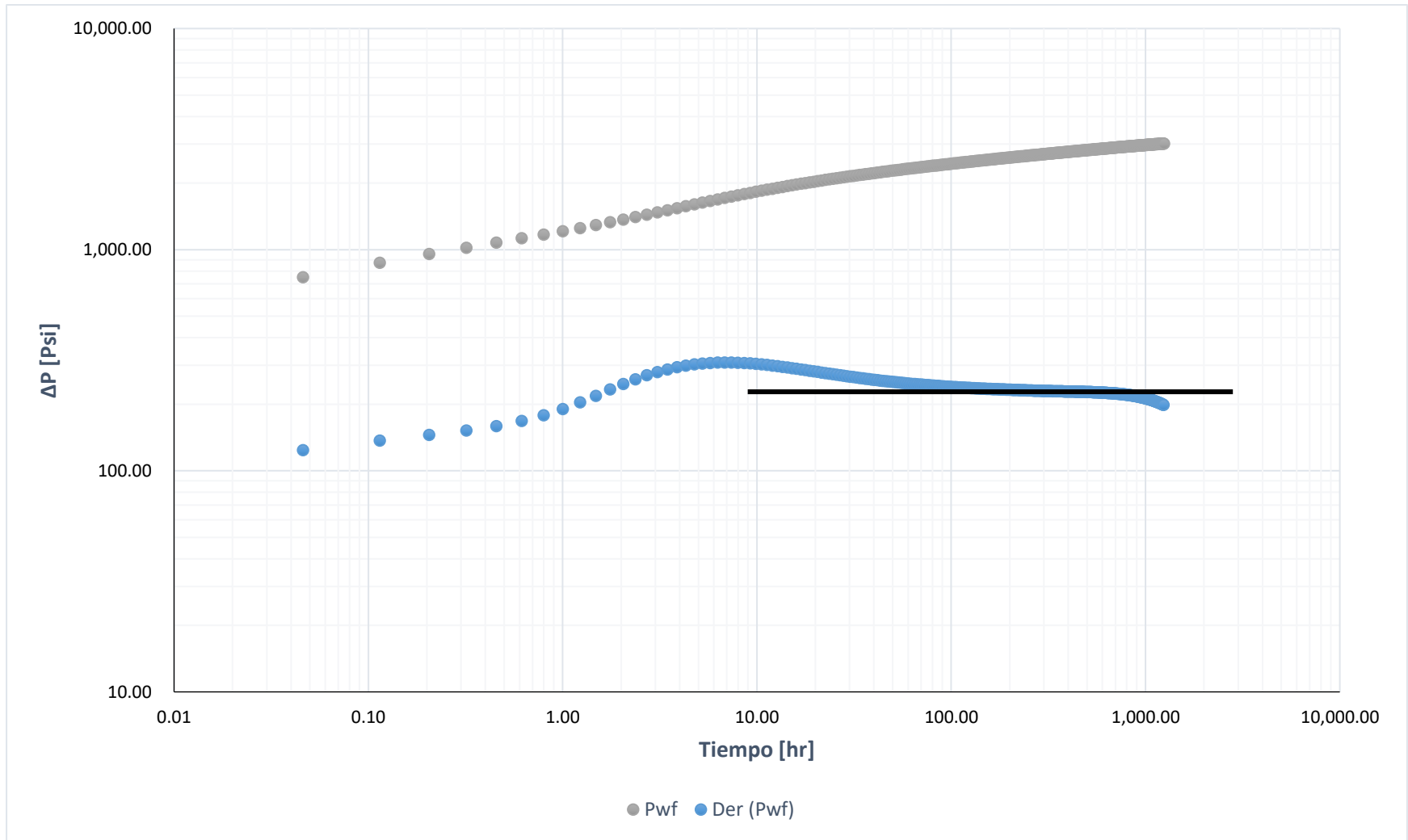


Figura 4.5 Gráfica diagnóstico para n=0.8

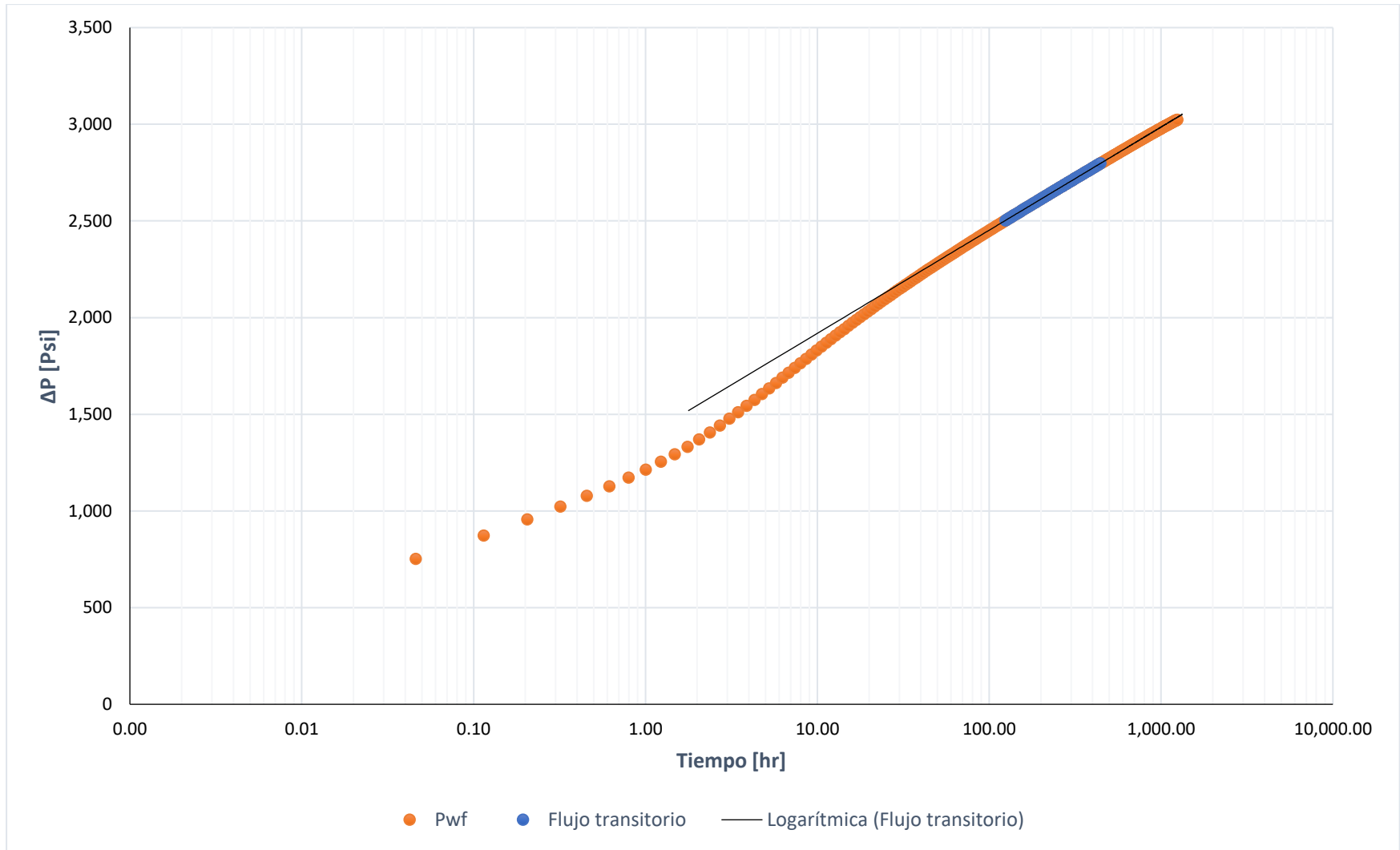


Figura 4.6 Gráfico especializado para $n=0.8$

Simulación para n=0.9

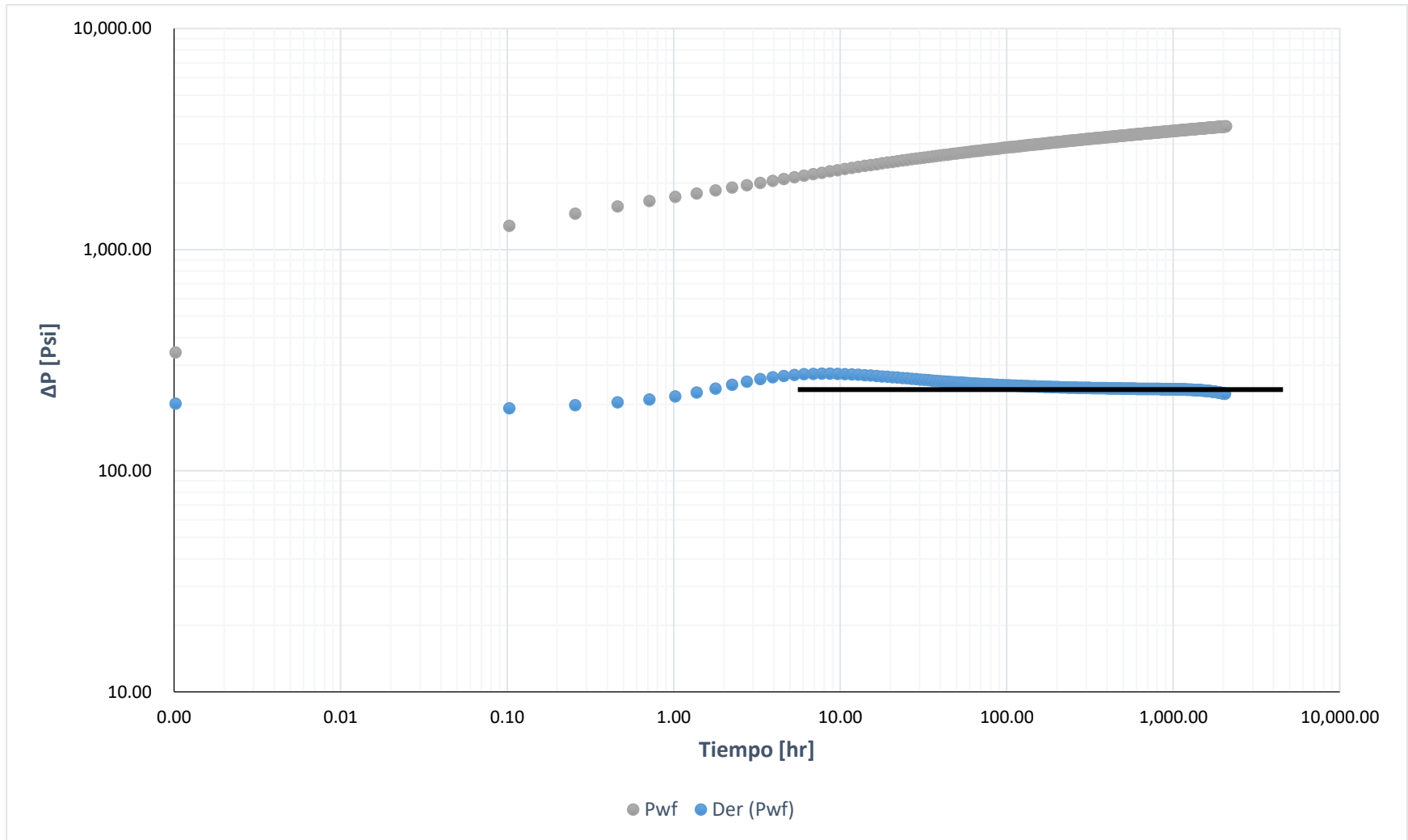


Figura 4.7 Gráfico diagnóstico para n=0.9

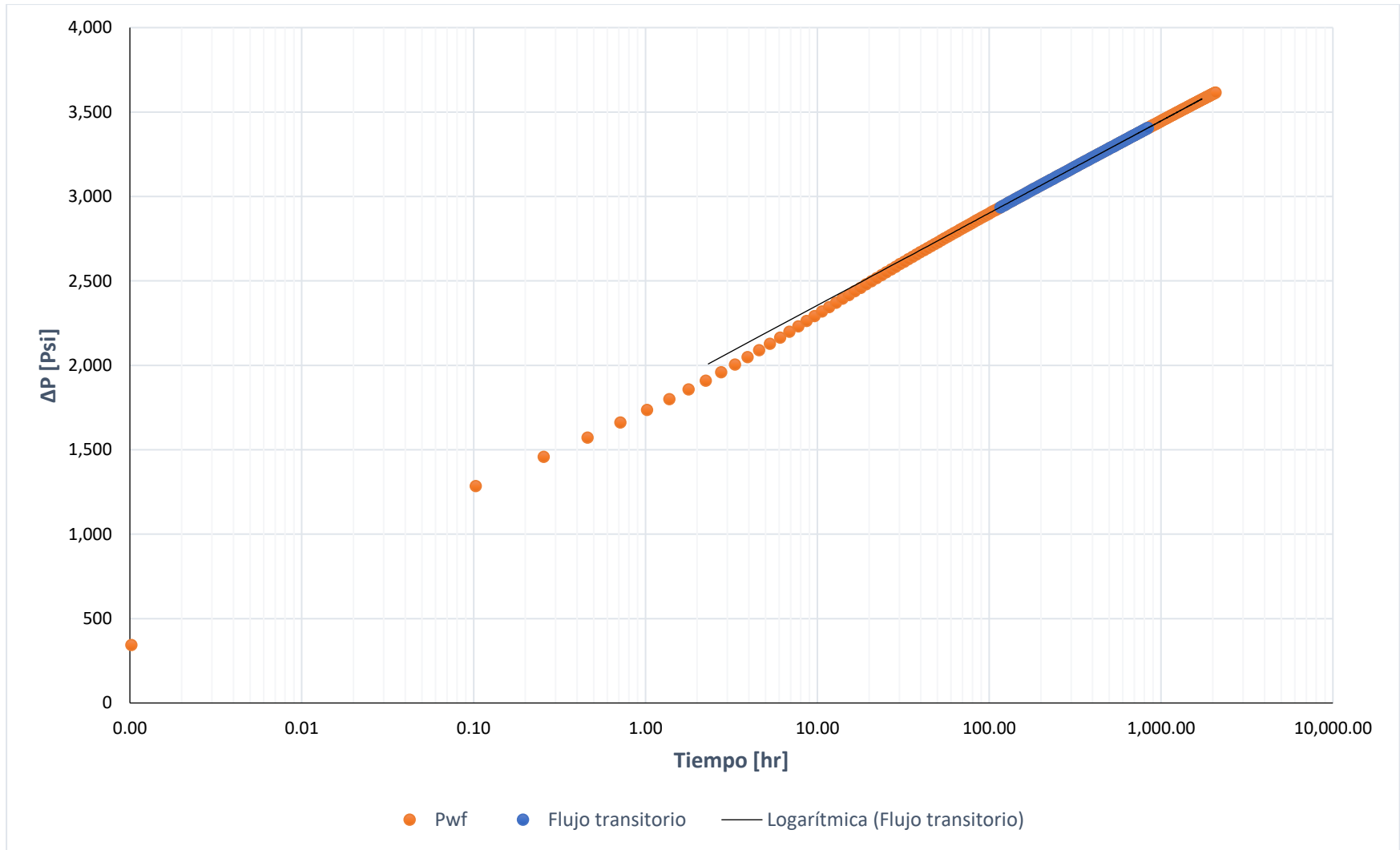


Figura 4.8 Gráfico especializado para $n=0.9$

Simulación para n=1.0

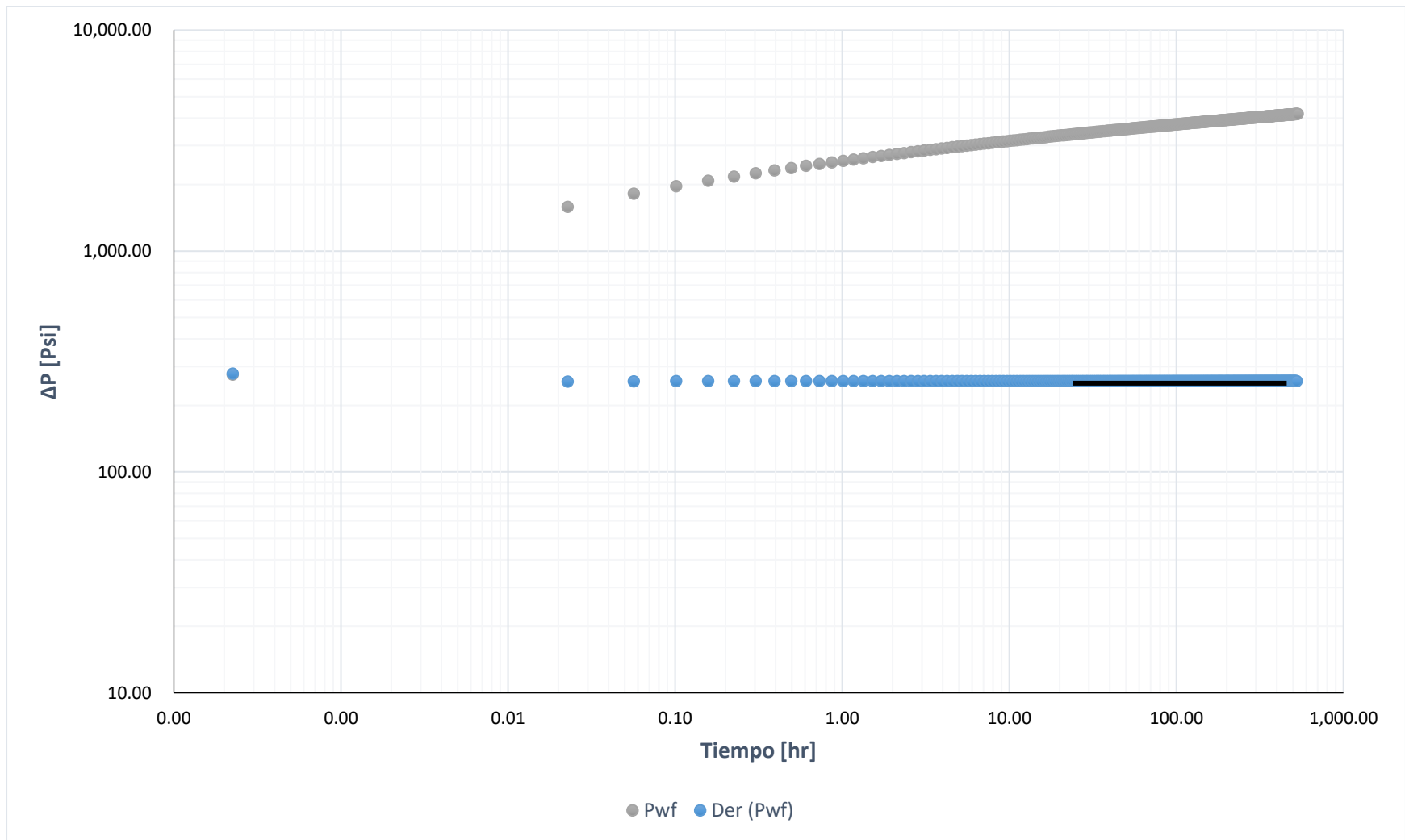


Figura 4.9 Gráfico diagnóstico para n=1

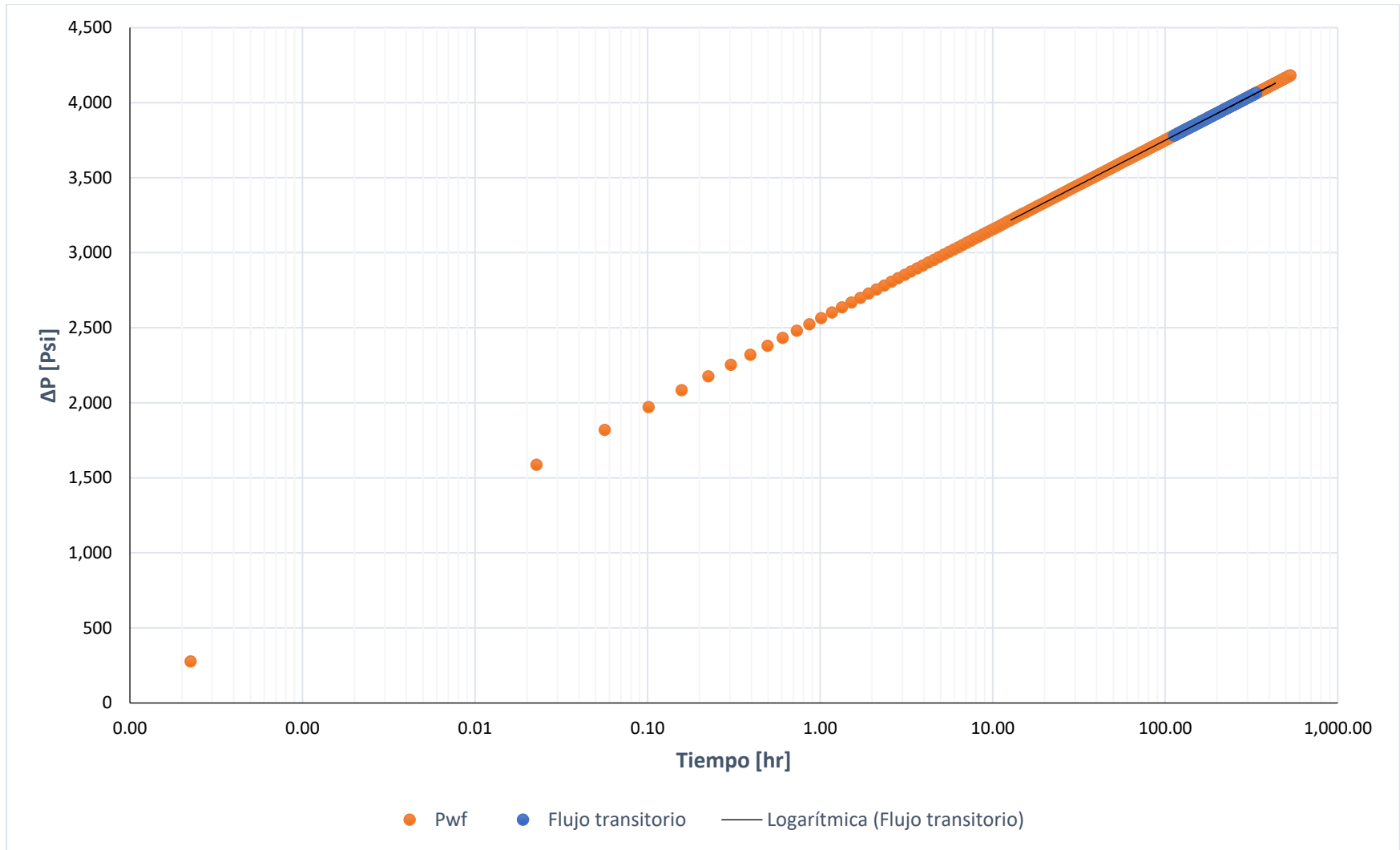


Figura 4.10 Gráfico especializado para $n=1$

Simulación para n=1.1

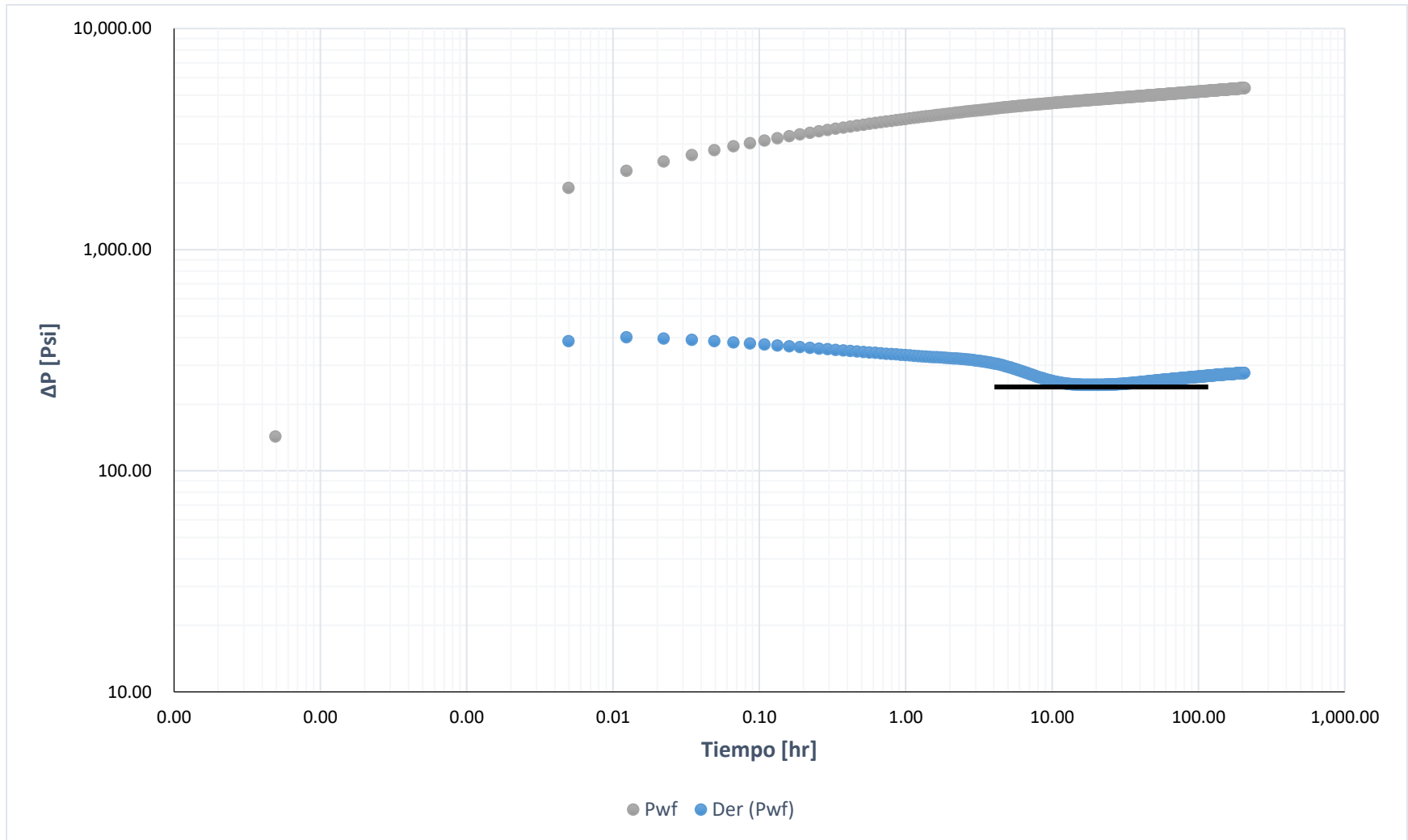


Figura 4.11 Gráfico diagnóstico para n=1.1

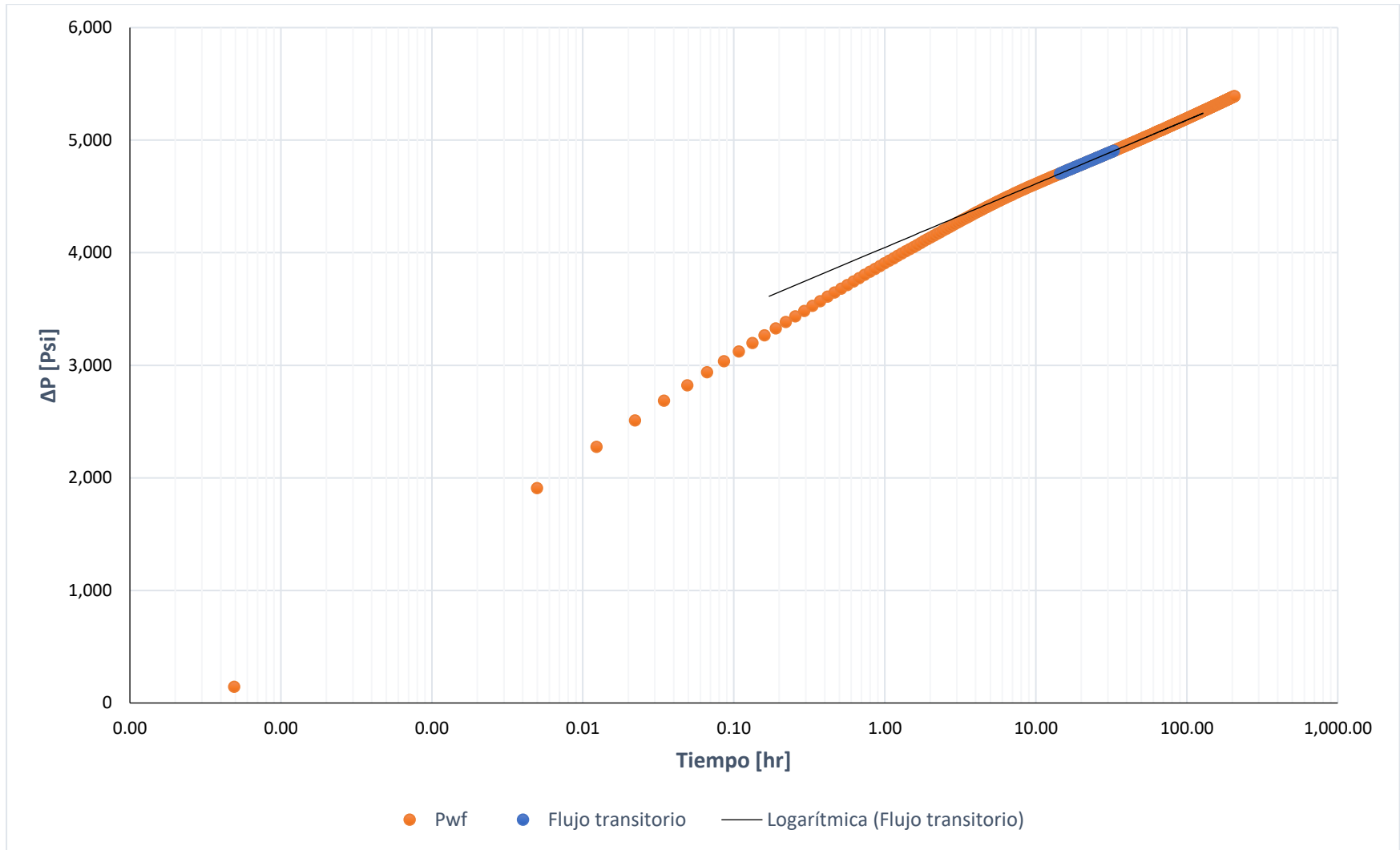


Figura 4.12 Gráfico especializado para $n=1.1$

Simulación para n=1.2

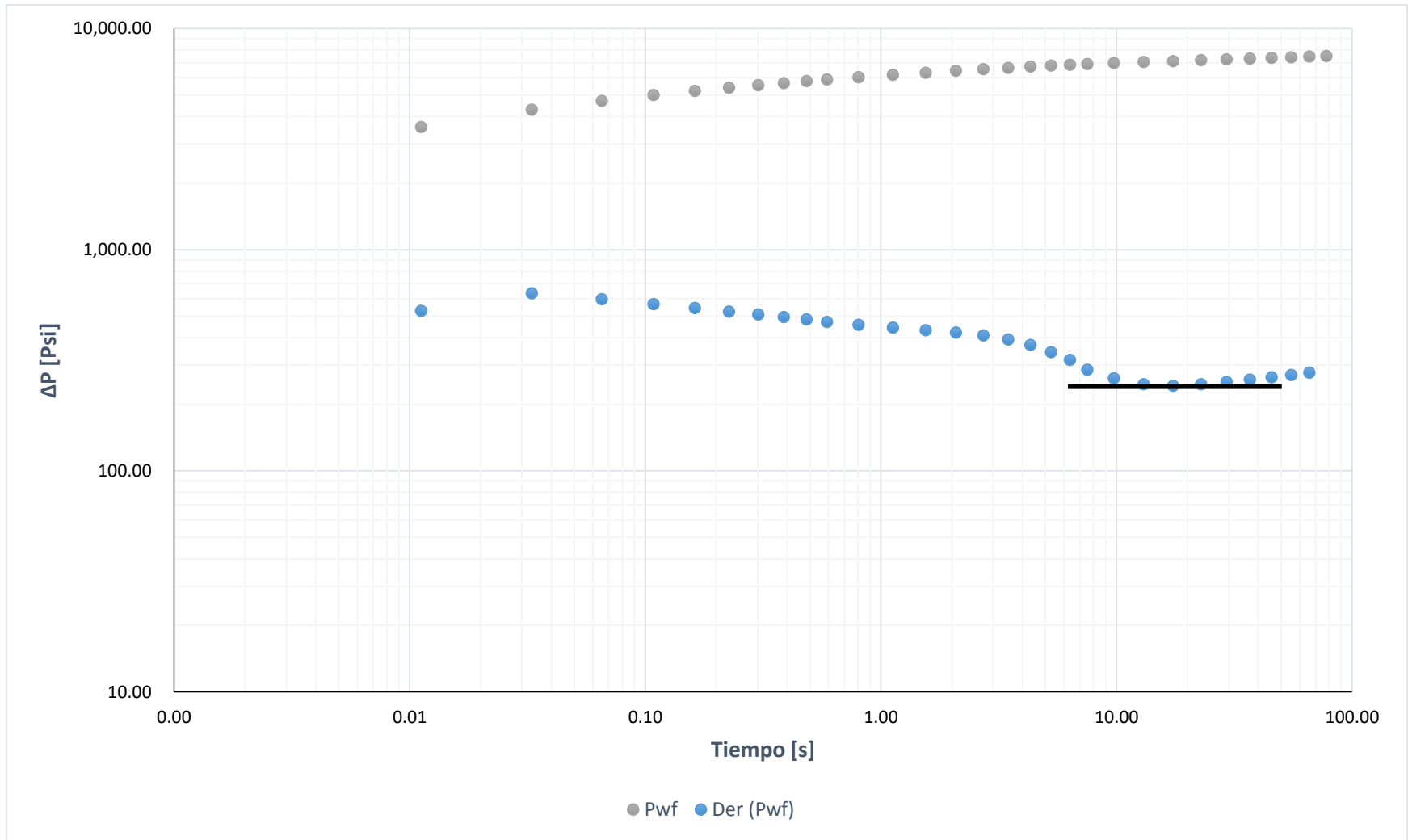


Figura 4.13 Gráfico diagnóstico para n=1.2

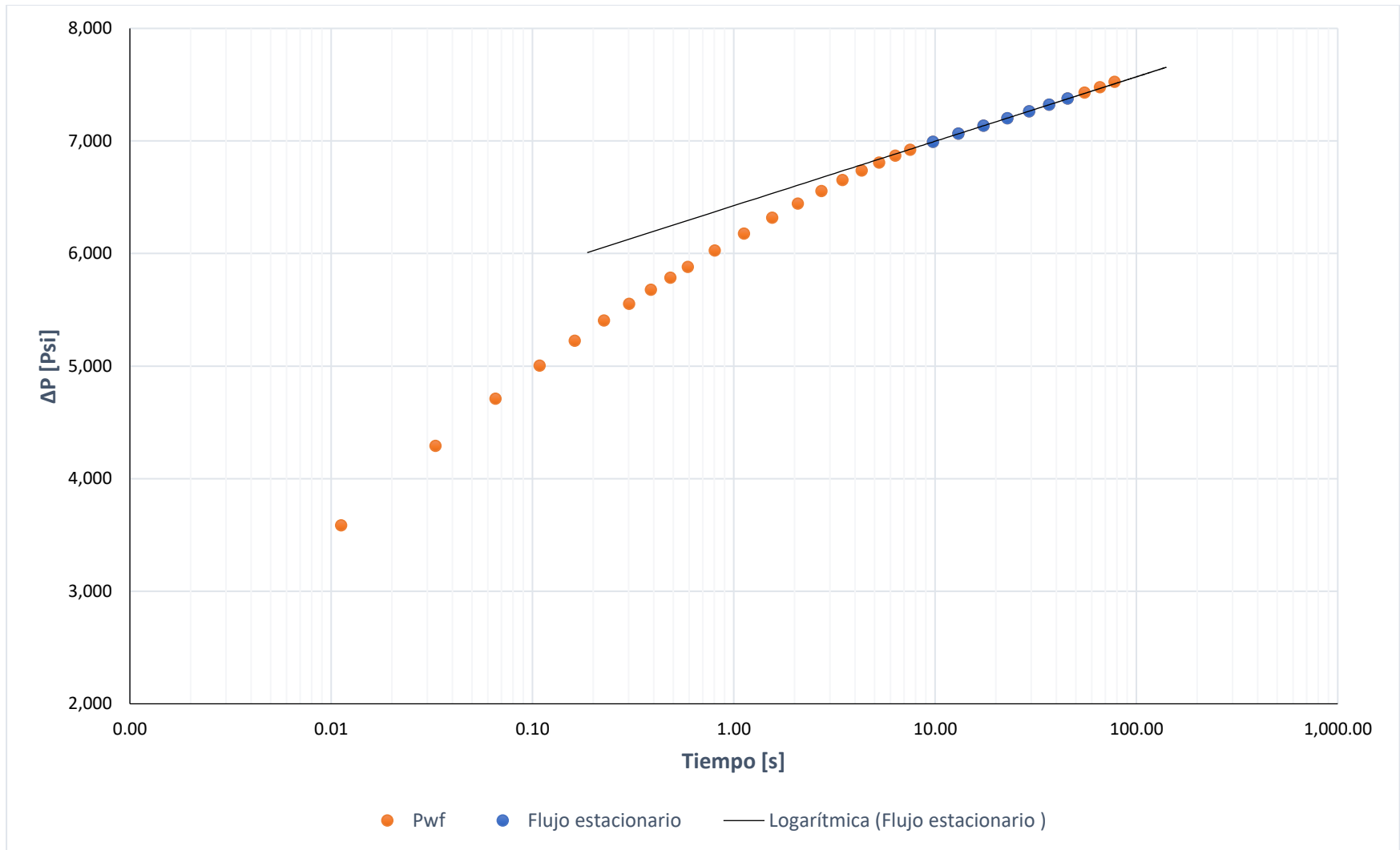


Figura 4.14 Gráfico especializado para n=1.2

4.2 Análisis de resultados

Se observa que el comportamiento simulado para el periodo radial corresponde a la conceptualización realizada, siendo el valor del pseudo-daño mayor conforme el grado de dilatación del fluido aumenta. De esta manera, para fluidos tipo pseudoplásticos, el pseudo-daño es negativo, mientras que para los que son dilatantes, este es positivo.

Además, al predecir el valor del factor de pseudo-daño con el modelo analítico, se encontró que las predicciones para los fluidos pseudoplásticos debían ser corregidas en un factor de dos, mientras que los dilatantes ajustaban de manera adecuada. No obstante, las magnitudes eran las esperadas.

Los resultados obtenidos se resumen en la **Tabla 4.3**, en donde además se incluye la eficiencia de flujo de cada escenario para comparar su comportamiento respecto al Newtoniano.

Tabla 4.3 Resumen de resultados

<i>n</i>	<i>S</i>	<i>S_{NN}</i>	<i>EF</i>	<i>Q_{real}</i> [BPD]	Tipo de fluido
0.5	-2.56	-2.32	1.31	393	$n < 1, s < 0$ pseudoplástico
0.6	-2.45	-2.11	1.27	381	$n < 1, s < 0$ pseudoplástico
0.8	-1.46	-1.55	1.19	357	$n < 1, s < 0$ pseudoplástico
0.9	-0.63	-0.95	1.11	333	$n < 1, s < 0$ pseudoplástico
1.0	0.55	0	1.00	300	$n = 1, s \approx 0$ Newtoniano
1.1	3.72	3.52	0.74	222	$n > 1, s > 0$ dilatante
1.2	8.49	9.63	0.51	153	$n > 1, s > 0$ dilatante

Pese a que un daño negativo pudiera resultar un factor favorable, cabe señalar que en general se esperarían mayores factores de recuperación en sistemas del tipo dilatante (que presentan daños positivos), esto debido a que la mayor parte del yacimiento se comporta como un fluido Newtoniano de menor viscosidad a bajas velocidades, lo que supone un mejor uso de la energía disponible.

Referencias

1. Gallardo Ferrera, H. (2019). *Development of Analytical solutions for the study of oils with Non-Newtonian Rheology of the type of Power-Law and Bingham-Plastic* (Master dissertation). UNAM.
2. Ramírez Sabag, J. (2015). *Fundamentos de la Tecnología de Productividad de Pozos Petroleros*. Barcelona: Reverté.

Conclusiones

A partir de los resultados de esta tesis se pueden establecer las conclusiones siguientes:

1. Se realizó el estudio de reología de los aceites pesados de comportamiento no-Newtoniano, en específico los modelos de Poon y Kisman, Ikkoku y Wu para el tipo Ley de Potencias.
2. Considerando la existencia de efectos viscoelásticos en los aceites pesados y extrapesados, se realizó un simulador de pruebas de presión. Con los resultados obtenidos se corroboró la existencia de un pseudo daño asociado a la reología.
3. Dos posibles casos fueron confirmados: los aceites con comportamiento dilatante presentan un daño positivo y los aceites con comportamiento pseudoplástico un daño negativo.
4. En general, pese a que puede describir un daño positivo, es deseable que el sistema sea de tipo dilatante, ya que las viscosidades en la mayor parte del yacimiento serán menores. Esto puede promover una recuperación mayor del volumen original de hidrocarburos.
5. El método predictor-corrector es altamente no lineal y muy sensible a los deltas de tiempo y espacio.
6. El efecto no-Newtoniano de los aceites pesados repercute de manera tangible en el gasto real obtenido de cada pozo, no considerarlo puede generar errores en el dimensionamiento de las instalaciones, quema de bombas y en generar una mala administración del yacimiento.

Recomendaciones

Las recomendaciones para investigación futura son:

1. Corroborar el modelo Plástico de Bingham con el desarrollo de un simulador que involucre el esfuerzo de cedencia necesario descrito para este caso.
2. Validar el comportamiento de los modelos con más casos de campo para poder asociar el índice de flujo a diferentes tipos de aceites pesados y para poder ampliar los modelos con un radio de influencia no-Newtoniano móvil dependiente del tiempo.
3. Continuar con el desarrollo del pseudo código para poder incorporar los efectos no-Newtonianos en medios porosos a softwares comerciales y tener un estudio del comportamiento del yacimiento más completo.
4. Realizar un estudio que considere no sólo la eficiencia de flujo, sino también el factor de recuperación final en un yacimiento con fluidos del tipo Ley de Potencias.

Nomenclatura

Nombre		Unidades métricas	Unidades inglesas	Unidades de campo
C_t	Compresibilidad total	Pa ⁻¹	Psi ⁻¹	Psi ⁻¹
S	Daño total	1	1	1
ρ	Densidad	kg/m ³	lb/in ³	g/cm ³
τ	Esfuerzo de corte	Pa	Psi	Psi
h	Espesor de la formación	m	ft	m
B_o	Factor de volumen	m ³ @c.y/m3 @c.e	ft ³ @c.y/ft3 @c.e	Bls @c.y/Bls @c.e
q	Gasto	m ³ /s	ft ³ /s	bl/día
n	Índice de comportamiento de flujo	1	1	1
H	Índice de consistencia de flujo	Pa·s ⁿ		
k	Permeabilidad	m ²	ft ²	mD
ϕ	Porosidad	fracción	fracción	fracción

Nombre		Unidades métricas	Unidades inglesas	Unidades de campo
P	Presión	Pa	Psi	Psi
r	Radio	m	ft	m
t	Tiempo	s	s	hr
μ	Viscosidad	Pa·s	lb.s/ft ²	cp

Subíndices

a Aparente

e Externo

eff Efectivo

i Inicial

m Masa

nn No-Newtoniano

t Total

w Pozo

x Dirección x

0 Cero velocidad de deformación

Anexos

A. Ecuación de difusividad radial para fluido Ley de Potencias

El flujo en medios porosos puede representarse con una ecuación que engloba las características del fluido, el medio en el que fluye y el gasto que se produce. Dicha ecuación es deducida a partir de tres principales:

1. Ecuaciones constitutivas (Ec.de estado);
2. ecuación de transporte (Ec. de Darcy); y
3. ecuación de continuidad.

La ecuación de continuidad (A.1) nos proporciona nuestro balance de materia en donde la masa que entre menos la masa que sale es igual a la masa acumulada.

$$\dot{m}e - \dot{m}s = \dot{m}ac, \quad (\text{A.1})$$

$$\dot{m}s = [v_r \rho h] 2\pi r \Delta t, \quad (\text{A.2})$$

$$\dot{m}e = [v_r \rho h + \Delta(v_r \rho h)] [2\pi(r + \Delta r)] \Delta t. \quad (\text{A.3})$$

Sustituyendo (A.2) y (A.3) en (A.1):

$$\dot{m}ac = 2\pi \Delta t [v_r \rho h \Delta r + \Delta(v_r \rho h) r + \Delta(v_r \rho h) \Delta r]. \quad (\text{A.4})$$

Por definición, la acumulación puede representarse con:

$$\begin{aligned} \text{acumulación} &= m|_{t+\Delta t} - m|_t, \\ \text{acumulación} &= V_b + \phi s_f \rho|_{t+\Delta t} - V_b \phi s_f \rho|_t, \end{aligned}$$

Se asume que la red de poros en un elemento sólido, homogéneo e isotrópico; las áreas se mantienen constantes, al igual que el volumen total. Además, el único fluido es aceite y encuentra en una sola fase.

$$acumulación = (2\pi rh\Delta r\phi\rho)_{t+\Delta t} - (2\pi rh\Delta r\phi\rho)_t. \quad (A.5)$$

Igualando (A.4) y (A.5), cancelando términos semejantes, despreciando el producto de mayor orden entre diferenciales y dividiendo entre $2\pi r\Delta t\Delta r$, se obtiene:

$$\frac{v_r\rho h}{r} + \frac{\Delta(v_r\rho h)}{\Delta r} = h \frac{(\phi\rho_{t+\Delta t} - \phi\rho_t)}{\Delta t}. \quad (A.6)$$

Asumimos que el delta de distancia, r y tiempo, t es infinitesimal y el espesor constante.

$$\Delta r \rightarrow 0; \Delta t \rightarrow 0; h = cte,$$

$$\frac{v_r\rho}{r} + \frac{\partial(v_r\rho)}{\partial r} = \frac{\partial(\phi\rho)}{\partial t}. \quad (A.7)$$

Aplicando la ecuación de Darcy modificada para flujo radial no-Newtoniano en medios porosos (3.11) en (A.7):

$$v_r = \left(-\frac{k_r}{\mu_{eff}} \frac{\partial p}{\partial r} \right)^{\frac{1}{n}}, \quad (A.8)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r\rho \left(-\frac{k_r}{\mu_{eff}} \frac{\partial p}{\partial r} \right)^{\frac{1}{n}} \right] = \frac{\partial(\phi\rho)}{\partial t}. \quad (A.9)$$

Desarrollando el segundo miembro de la ecuación (A.9):

$$\frac{\partial(\phi\rho)}{\partial t} = -\left(\phi \frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial\phi}{\partial t}\right) \cdot \frac{\partial p}{\partial p} = -\phi\rho \frac{\partial p}{\partial t} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial\rho}{\partial p} + \frac{1}{\phi} \frac{\partial\phi}{\partial p}\right). \quad (\text{A.10})$$

Sabiendo que la compresibilidad está dada por:

$$C_t = C_o + C_f, \quad (\text{A.11})$$

$$C_o = \frac{1}{\rho} \frac{\partial\rho}{\partial p},$$

$$C_f = \frac{1}{\phi} \frac{\partial\phi}{\partial p},$$

$$\frac{\partial(\phi\rho)}{\partial t} = -\phi\rho C_t \frac{\partial p}{\partial t}. \quad (\text{A.12})$$

Sustituyendo (A.12) en (A.9):

$$\frac{\rho}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \left(-\frac{k_r}{\mu_{eff}} \frac{\partial p}{\partial r} \right)^{\frac{1}{n}} \right] + \left(-\frac{k_r}{\mu_{eff}} \frac{\partial p}{\partial r} \right)^{\frac{1}{n}} \cdot \frac{\partial\rho}{\partial r} = -\phi\rho C_t \frac{\partial p}{\partial t}, \quad (\text{A.13})$$

Para fluidos isotérmicos, la compresibilidad, c , es definida por:

$$c = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial\rho}{\partial p} \right)_T, \quad (\text{A.14})$$

Si c es constante, la ecuación (A.14) puede ser integrada para producir:

$$\rho = \rho_0 e^{c(p-p_0)}. \quad (\text{A.15})$$

donde ρ_0 es el valor de ρ a una presión de referencia, p_0 .

De esta manera de la ecuación (A.15) obtenemos:

$$\frac{\partial \rho}{\partial r} = c\rho \frac{\partial p}{\partial r}, \quad (\text{A.16})$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = c\rho \frac{\partial p}{\partial t}, \quad (\text{A.17})$$

Expandiendo la ecuación (A.13) y sustituyendo (A.16)(A.17):

$$\frac{\rho}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \left(-\frac{k_r}{\mu_{eff}} \frac{\partial p}{\partial r} \right)^{\frac{1}{n}} \right] - c\rho \left(\frac{k_r}{\mu_{eff}} \right)^{\frac{1}{n}} \left(-\frac{\partial p}{\partial r} \right)^{\frac{1+n}{n}} = -\phi\rho C_t \frac{\partial p}{\partial t}. \quad (\text{A.18})$$

Se asume la permeabilidad constante y se cancelan las ρ 's.

$$\frac{1}{r} \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(-\frac{\partial p}{\partial r} \right)^{\frac{1}{n}} + \left(-\frac{\partial p}{\partial r} \right)^{\frac{1}{n}} \frac{\partial}{\partial r} (r) \right] - c \left(-\frac{\partial p}{\partial r} \right)^{\frac{1+n}{n}} = -\phi C_t \frac{\partial p}{\partial t} \cdot \left(\frac{\mu_{eff}}{k_r} \right)^{\frac{1}{n}}, \quad (\text{A.19})$$

$$\frac{1}{n} \left(-\frac{\partial p}{\partial r} \right)^{\frac{1}{n}-1} \left(-\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} \right) + \frac{1}{r} \left(-\frac{\partial p}{\partial r} \right)^{\frac{1}{n}} - c \left(-\frac{\partial p}{\partial r} \right)^{\frac{1+n}{n}} = -\phi C_t \frac{\partial p}{\partial t} \cdot \left(\frac{\mu_{eff}}{k_r} \right)^{\frac{1}{n}}, \quad (\text{A.20})$$

$$\begin{aligned}
\left(-\frac{\partial^2 p}{\partial r^2}\right) + \frac{1}{r}\left(-\frac{\partial p}{\partial r}\right)^{\frac{1}{n}} \cdot n\left(-\frac{\partial p}{\partial r}\right)^{1-\frac{1}{n}} - c\left(-\frac{\partial p}{\partial r}\right)^{\frac{1+n}{n}} \cdot n\left(-\frac{\partial p}{\partial r}\right)^{1-\frac{1}{n}} \\
= -\phi C_t \frac{\partial p}{\partial t} \cdot \left(\frac{\mu_{eff}}{k_r}\right)^{\frac{1}{n}} \cdot n\left(-\frac{\partial p}{\partial r}\right)^{1-\frac{1}{n}}, \tag{A.21}
\end{aligned}$$

$$\left(-\frac{\partial^2 p}{\partial r^2}\right) + \frac{n}{r}\left(-\frac{\partial p}{\partial r}\right) - cn\left(-\frac{\partial p}{\partial r}\right)^2 = -\phi C_t n \left(\frac{\mu_{eff}}{k_r}\right)^{\frac{1}{n}} \left(-\frac{\partial p}{\partial r}\right)^{1-\frac{1}{n}} \frac{\partial p}{\partial t}. \tag{A.22}$$

Considerando que la compresibilidad del fluido es constante y tan pequeña que puede ser despreciable. Además, los gradientes de presión pequeños, de modo que el gradiente de presión al cuadrado también es despreciable. Así, la ecuación (A.22) se convierte en la ecuación parcial diferencial para el flujo radial no-Newtoniano, Ley de Potencias a través de un medio poroso:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{n}{r}\left(\frac{\partial p}{\partial r}\right) = \phi C_t n \left(\frac{\mu_{eff}}{k_r}\right)^{\frac{1}{n}} \left(-\frac{\partial p}{\partial r}\right)^{\frac{n-1}{n}} \frac{\partial p}{\partial t}. \tag{A.23}$$

Esta ecuación es análoga a la Ecuación de Difusividad, sin embargo, esta es una ecuación parcial diferencial no lineal. Para un fluido Newtoniano, $n = 1$ y $\mu = H$.

B. Solución numérica de la ecuación parcial diferencial no lineal no-Newtoniana

Partiendo de la ecuación parcial diferencial para flujo radial no-Newtoniano

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{n}{r} \frac{\partial p}{\partial r} = C_t \varphi^n \left(\frac{\mu_{eff}}{kr} \right)^{\frac{1}{n}} \left(-\frac{\partial p}{\partial r} \right)^{\frac{n-1}{n}} \frac{\partial p}{\partial t} . \quad (B.1)$$

Condiciones iniciales y de frontera

$$\Delta P(r, 0) = 0$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial r} \right)_{r=r_w} = \frac{p_i - p}{\left(\frac{q}{2\pi h} \right)^n \frac{\mu_{eff} r_w^{1-n}}{kr}}$$

$$p(r \rightarrow \infty) = p_i$$

Transformación logarítmica

$$x = \ln \left(\frac{r}{r_w} \right),$$

$$\frac{r}{r_w} = e^x ,$$

$$d \left(\frac{r}{r_w} \right) = e^x dx ,$$

$$\frac{de^x}{dx} = e^x ,$$

$$de^x = \frac{r}{r_w} dx ,$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{e^x r_w} ,$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{1}{e^x} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (\text{B.2})$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial p}{\partial r} \right) = \frac{\partial x}{\partial r} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial x}{\partial r} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \right),$$

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \frac{\partial \ln \left(\frac{r}{rw} \right)}{\partial r} = \frac{rw}{r} \cdot \frac{1}{rw} = \frac{1}{r},$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial x} \right) = \frac{1}{e^x rw} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{e^x rw} \frac{\partial p}{\partial x} \right) = \frac{e^{-x}}{rw} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \frac{e^{-x}}{rw} - \frac{e^{-x}}{rw} \frac{\partial p}{\partial x} \right),$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} = \frac{e^{-2x}}{rw^2} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{\partial p}{\partial x} \right), \quad (\text{B.3})$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} \frac{n}{r} = \frac{n}{r} \frac{\partial x}{\partial r} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{n}{r} \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{rw^2}{r^2} \frac{n}{rw^2} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{e^{-2x}}{rw^2} \frac{n}{1} \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (\text{B.4})$$

Aplicando la transformación logarítmica en la ecuación (B.1)

$$\frac{e^{-2x}}{rw^2} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{e^{-2x}}{rw^2} \frac{n}{1} \frac{\partial p}{\partial x} = C_t \varphi n \left(\frac{\mu_{eff}}{kr} \right)^{\frac{1}{n}} \left(-\frac{1}{e^x} \frac{\partial p}{\partial x} \right)^{\frac{n-1}{n}} \frac{\partial p}{\partial t},$$

$$\frac{1}{e^{2x} rw^2} \left[\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - (1-n) \frac{\partial p}{\partial x} \right] = C_t \varphi n \left(\frac{\mu_{eff}}{kr} \right)^{\frac{1}{n}} \left(-\frac{1}{e^x} \frac{\partial p}{\partial x} \right)^{\frac{n-1}{n}} \frac{\partial p}{\partial t},$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - (1-n) \frac{\partial p}{\partial x} = e^{\left(\frac{n+1}{n}\right)2x} rw^2 C_t \varphi n \left(\frac{\mu_{eff}}{kr} \right)^{\frac{1}{n}} \left(-\frac{\partial p}{\partial x} \right)^{\frac{n-1}{n}} \frac{\partial p}{\partial t}, \quad (\text{B.5})$$

Agrupando las constantes, la ecuación de flujo es:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - (1 - n) \frac{\partial p}{\partial x} = e^{\left(\frac{n+1}{n}\right)rw^2\eta_{NN}} \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^{\frac{n-1}{n}} \frac{\partial p}{\partial t}. \quad (\text{B.6})$$

Douglas-Jones

Aplicando el método predictor-corrector en la ecuación **(B.6)** para obtener el predictor:

$$\begin{aligned} & \frac{P_{i-1}^{j+\frac{1}{2}} - 2P_i^{j+\frac{1}{2}} + P_{i+1}^{j+\frac{1}{2}}}{(\Delta x)^2} + (n-1) \left(\frac{P_{i+1}^j - P_{i-1}^j}{2\Delta x} \right) \\ & = e^{\left(\frac{n+1}{n}\right)(i-1)\Delta x} \eta_{NN} \left(-\frac{P_{i+1}^j - P_{i-1}^j}{2\Delta x} \right)^{\frac{n-1}{n}} \frac{P_i^{j+\frac{1}{2}} - P_i^j}{\Delta t/2}, \end{aligned}$$

O:

$$\begin{aligned} & P_{i-1}^{j+\frac{1}{2}} - \left[2 + e^{\left(\frac{n+1}{n}\right)(i-1)\Delta x} \eta_{NN} \left(\frac{P_{i+1}^j - P_{i-1}^j}{2\Delta x} \right)^{\frac{n-1}{n}} \left(\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t/2} \right) \right] P_i^{j+\frac{1}{2}} + P_{i+1}^{j+\frac{1}{2}} \\ & = \Delta x(1-n) \frac{P_{i+1}^j - P_{i-1}^j}{2} \\ & - \left[e^{\left(\frac{n+1}{n}\right)(i-1)\Delta x} \eta_{NN} \left(\frac{P_{i+1}^j - P_{i-1}^j}{2\Delta x} \right)^{\frac{n-1}{n}} \left(\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t/2} \right) \right] P_i^j. \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

El correcto está dado por:

$$\begin{aligned} & \frac{\frac{1}{2}(P_{i-1}^{j+1} - 2P_i^{j+1} + P_{i+1}^{j+1}) + \frac{1}{2}(P_{i-1}^j - 2P_i^j + P_{i+1}^j)}{(\Delta x)^2} + (n-1) \frac{P_{i+1}^{j+\frac{1}{2}} - P_{i-1}^{j+\frac{1}{2}}}{2\Delta x} \\ & = e^{\left(\frac{n+1}{n}\right)(i-1)\Delta x} \eta_{NN} \left(\frac{P_{i+1}^{j+\frac{1}{2}} - P_{i-1}^{j+\frac{1}{2}}}{2\Delta x} \right)^{\frac{n-1}{n}} \frac{P_i^{j+1} - P_i^j}{\Delta t}, \end{aligned}$$

O:

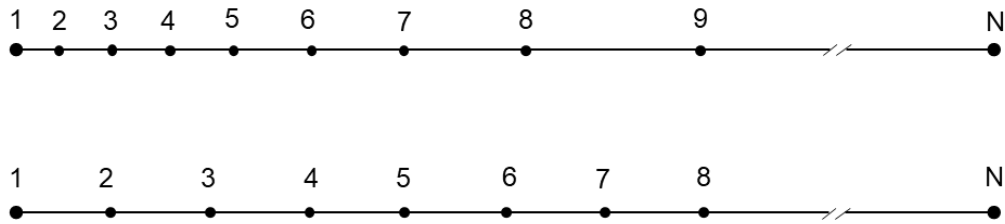
$$\begin{aligned} & P_{i-1}^{j+1} - \left[2 + e^{\left(\frac{n+1}{n}\right)(i-1)\Delta x} \eta_{NN} \left(\frac{P_{i+1}^j - P_{i-1}^j}{2\Delta x} \right)^{\frac{n-1}{n}} \left(\frac{2(\Delta x)^2}{\Delta t} \right) \right] P_i^{j+1} + P_{i+1}^{j+1} \\ & = -P_{i-1}^j \\ & + \left[2 - e^{\left(\frac{n+1}{n}\right)(i-1)\Delta x} \eta_{NN} \left(\frac{P_{i+1}^j - P_{i-1}^j}{2\Delta x} \right)^{\frac{n-1}{n}} \left(\frac{2(\Delta x)^2}{\Delta t} \right) \right] P_i^j - P_{i+1}^j \quad (\text{B.8}) \\ & + \Delta x(1-n) \left(P_{i+1}^{j+\frac{1}{2}} - P_{i-1}^{j+\frac{1}{2}} \right). \end{aligned}$$

Donde:

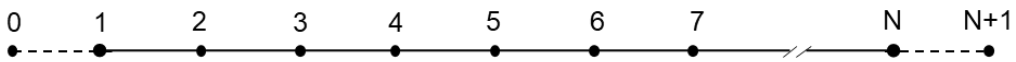
$$i = 1, 2, 3, \dots, N+1$$

$$j = 0, 1, 2, 3, \dots$$

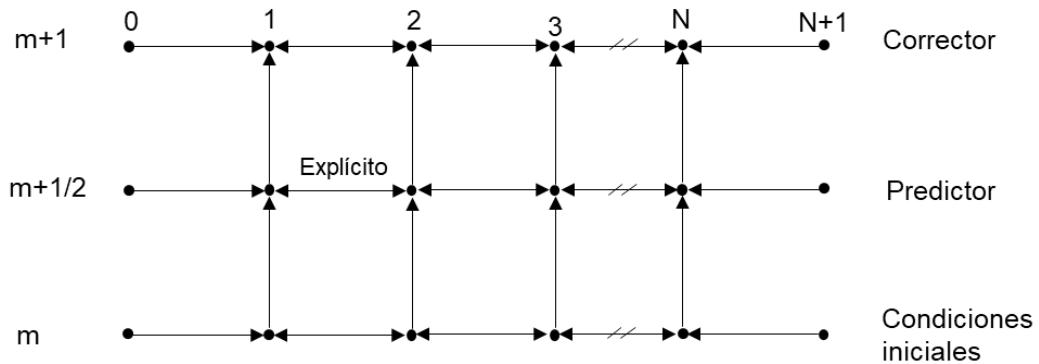
En la **Figura B.1** se esquematizan los pasos realizados para llegar a la solución numérica.



1. Transformación logarítmica para el problema de flujo radial.



2. Representación de los nodos imaginarios utilizados para las condiciones de frontera.



3. Aproximación numérica usada para las derivadas del tiempo.

Figura B.1 Esquematización de la solución numérica usada para flujo radial.

Condiciones iniciales y de frontera

1. Condición inicial

$$P_i = P \text{ para } j = 0. \quad (\text{B.9})$$

2. Condiciones de frontera en el pozo:

a) Predictor

$$\frac{P_2^{j+\frac{1}{2}} - P_0^{j+\frac{1}{2}}}{2\Delta x} = -\left(\frac{q}{A}\right)^n \frac{k_r}{\mu_{eff}}. \quad (\text{B.10})$$

b) Corrector

$$\frac{P_2^{j+1} - P_0^{j+1}}{2\Delta x} = -\left(\frac{q}{A}\right)^n \frac{k_r}{\mu_{eff}}. \quad (\text{B.11})$$

3. Condición de frontera externa del yacimiento:

$$P_i \rightarrow 0 \text{ como } i \rightarrow \infty \text{ para toda } j \quad (\text{B.12})$$

Considerando el predictor, Ecuación (B.10):

Para $i = 1$

$$\begin{aligned}
 P_o^{j+\frac{1}{2}} - \left[2 + e^{\left(\frac{n+1}{n}\right)(0)\Delta x} \eta_{NN} \left(\frac{P_2^j - P_0^j}{2\Delta x} \right)^{\frac{n-1}{n}} \left(\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t/2} \right) \right] P_1^{j+\frac{1}{2}} + P_2^{j+\frac{1}{2}} \\
 = \Delta x(1-n) \frac{P_2^j - P_0^j}{2} \\
 - \left[e^{\left(\frac{n+1}{n}\right)(0)\Delta x} \eta_{NN} \left(\frac{P_2^j - P_0^j}{2\Delta x} \right)^{\frac{n-1}{n}} \left(\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t/2} \right) \right] P_1^j,
 \end{aligned}$$

$$P_o^{j+\frac{1}{2}} - \left[2 + \eta_{NN} C^{\frac{n-1}{n}} \alpha \right] P_1^{j+\frac{1}{2}} + P_2^{j+\frac{1}{2}} = \Delta x^2(1-n)C - [rw^2 \eta_{NN} C \alpha] P_1^j,$$

$$-(2 + rw^2 \eta_{NN} C \alpha) P_1^{j+\frac{1}{2}} + 2P_2^{j+\frac{1}{2}} = \Delta x^2(1-n)C - \left[\eta_{NN} C^{\frac{n-1}{n}} \alpha \right] P_1^j - 2\Delta x C. \text{ (B.13)}$$

Para $2 \leq i \leq N-1$

$$\begin{aligned}
 P_{i-1}^{j+\frac{1}{2}} - \left[2 + e^{\left(\frac{n+1}{n}\right)(i-1)\Delta x} \eta_{NN} \left(\frac{P_{i+1}^j - P_{i-1}^j}{2\Delta x} \right)^{\frac{n-1}{n}} \alpha \right] P_i^{j+\frac{1}{2}} + P_{i+1}^{j+\frac{1}{2}} \\
 = \Delta x(1-n) \frac{P_{i+1}^j - P_{i-1}^j}{2} \tag{B.14} \\
 - \left[e^{\left(\frac{n+1}{n}\right)(i-1)\Delta x} \eta_{NN} \left(\frac{P_{i+1}^j - P_{i-1}^j}{2\Delta x} \right)^{\frac{n-1}{n}} \alpha \right] P_i^j.
 \end{aligned}$$

Para $i = N$

$$\begin{aligned}
P_{N-1}^{j+\frac{1}{2}} - \left[2 + e^{\left(\frac{n+1}{n}\right)(N-1)\Delta x} \eta_{NN} \left(\frac{P_{N+1}^j - P_{N-1}^j}{2\Delta x} \right)^{\frac{n-1}{n}} \alpha \right] P_N^{j+\frac{1}{2}} + P_{N+1}^{j+\frac{1}{2}} \\
= \Delta x(1-n) \frac{P_{N+1}^j - P_{N-1}^j}{2} \\
- \left[e^{\left(\frac{n+1}{n}\right)(N-1)\Delta x} \eta_{NN} \left(\frac{P_{N+1}^j - P_{N-1}^j}{2\Delta x} \right)^{\frac{n-1}{n}} \alpha \right] P_N^j.
\end{aligned} \tag{B.15}$$

Las ecuaciones (B.13) a (B.15) forman un sistema de N ecuaciones con N incógnitas o variables. Los coeficientes forman una matriz tridiagonal. El sistema de ecuaciones puede resolverse usando el algoritmo de Thomas.

Considerando el corrector, ecuación. (B.11):

Para $i = 1$

$$\begin{aligned}
P_0^{j+1} - \left[2 + e^{\left(\frac{n+1}{n}\right)(0)\Delta x} \eta_{NN} \left(\frac{P_2^j - P_0^j}{2\Delta x} \right)^{\frac{n-1}{n}} \left(\frac{2(\Delta x)^2}{\Delta t} \right) \right] P_1^{j+1} + P_2^{j+1} \\
= -P_0^j + \left[2 - e^{\left(\frac{n+1}{n}\right)(0)\Delta x} \eta_{NN} \left(\frac{P_2^j - P_0^j}{2\Delta x} \right)^{\frac{n-1}{n}} \left(\frac{2(\Delta x)^2}{\Delta t} \right) \right] P_1^j \\
- P_2^j + \Delta x(1-n) \left(P_2^{j+\frac{1}{2}} - P_0^{j+\frac{1}{2}} \right).
\end{aligned}$$

Simplificando y aplicando condiciones iniciales y de frontera

$$-2\Delta x C + P_2^{j+1} - \left[2 + \eta_{NN} C^{\frac{n-1}{n}} \alpha \right] P_1^{j+1} + P_2^{j+1} = -(-2\Delta x C + P_2^j) + \left[2 - \eta_{NN} C^{\frac{n-1}{n}} \alpha \right] P_1^j - P_2^j + 2\Delta x^2(1-n)C.$$

Agrupando

$$\begin{aligned} & - \left[+\eta_{NN} C^{\frac{n-1}{n}} \alpha \right] P_1^{j+1} + 2P_2^{j+1} \\ & = -2P_2^j + \left[2 - \eta_{NN} C^{\frac{n-1}{n}} \alpha \right] P_1^j + 2\Delta x^2(1-n)C + 4\Delta x C. \end{aligned} \quad (\text{B. 16})$$

Para $2 \leq i \leq N-1$

$$\begin{aligned} & P_{i-1}^{j+1} - \left[2 + e^{\left(\frac{n+1}{n}\right)(i-1)\Delta x} \eta_{NN} \left(\frac{P_{i+1}^j - P_{i-1}^j}{2\Delta x} \right)^{\frac{n-1}{n}} \left(\frac{2(\Delta x)^2}{\Delta t} \right) \right] P_i^{j+1} + P_{i+1}^{j+1} \\ & = -P_{i-1}^j - P_{i+1}^j \\ & + \left[2 - e^{\left(\frac{n+1}{n}\right)(i-1)\Delta x} \eta_{NN} \left(\frac{P_{i+1}^j - P_{i-1}^j}{2\Delta x} \right)^{\frac{n-1}{n}} \left(\frac{2(\Delta x)^2}{\Delta t} \right) \right] P_i^j \\ & + \Delta x(1-n) \left(P_{i+1}^{j+\frac{1}{2}} - P_{i-1}^{j+\frac{1}{2}} \right). \end{aligned} \quad (\text{B. 17})$$

Para $i = N$

$$\begin{aligned}
 P_{N-1}^{j+1} - \left[2 + e^{\left(\frac{n+1}{n}\right)(N-1)\Delta x} \eta_{NN} \left(\frac{P_{N+1}^j - P_{N-1}^j}{2\Delta x} \right)^{\frac{n-1}{n}} \left(\frac{2(\Delta x)^2}{\Delta t} \right) \right] P_N^{j+1} + P_{N+1}^{j+1} \\
 = -P_{N-1}^j - P_{N+1}^j \\
 + \left[2 - e^{\left(\frac{n+1}{n}\right)(N-1)\Delta x} \eta_{NN} \left(\frac{P_{N+1}^j - P_{N-1}^j}{2\Delta x} \right)^{\frac{n-1}{n}} \left(\frac{2(\Delta x)^2}{\Delta t} \right) \right] P_N^j \quad (\text{B. 18}) \\
 + \Delta x(1-n) \left(P_{N+1}^{j+\frac{1}{2}} - P_{i-1}^{j+\frac{1}{2}} \right).
 \end{aligned}$$

De la misma manera, las ecuaciones (B. 16) a (B. 18) forman un sistema de ecuaciones tridiagonal $n \times n$ que también puede ser resuelto con el algoritmo de Thomas.

En los dos sistemas anteriores se tiene que:

$$\alpha = \frac{2(\Delta x)^2}{\Delta t}$$

$$C = -\left(\frac{q}{A}\right)^n \frac{k_r}{\mu_{eff}}$$

Δx = incremento en espacio

N = numero de intervalos Δx

C. Pseudo código

'Flujo transitorio no-Newtoniano, fluido Ley de Potencias a través de un medio
'poroso. Resuelto por el método predictor-corrector Douglas-Jones para la solución
'numérica de la ecuación parcial diferencial no lineal.

'Al tiempo $j=0$ la presión es la inicial en todo el yacimiento. El flujo dentro del
'yacimiento es constante, la presión en el límite externo tiende al infinito. La presión
'se muestra cada paso de tiempo. El sistema tridiagonal de ecuaciones resultado de
'cada paso de tiempo es resuelto por la subrutina Thomas.

```
Public Sub Predictor_Corrector()
```

```
'-----
```

```
'Declaración de variables
```

```
'Ecuación
```

```
Dim a() As Variant, b() As Variant, c() As Variant, d() As Variant
```

```
Dim pDNN() As Variant, x() As Variant
```

```
'Coeficientes
```

```
Dim rw As Variant, n As Variant, ct As Variant, phi As Variant, kr As Variant, _  
dx As Variant, deltat As Variant, Tf As Variant, nodes As Variant, Npi As Variant, _  
H As Variant, pini As Variant, nt As Double, espesor As Double, gasto As Double
```

```
'Constantes
```

```
Dim Nnn As Variant, epsilon As Variant, Float1 As Variant, Float2 As Variant, _  
dpi As Variant, dpi2 As Variant, pid2 As Variant, rho As Variant, o As Integer
```

```
'Contadores
```

```
Dim i As Double, j As Double, k As Double, l As Double, m As Double, _  
ñ As Double, alpha_N As Double, alpha_NN As Double, mn As Double
```


'i para nodos, j para nodos y número de tiempos simulados, k para número de iteraciones y m para el tiempo

'-----

'Se leen los valores

rw = Worksheets("Hoja1").Cells(3, 2)

n = 1.1

ct = Worksheets("Hoja1").Cells(5, 2)

phi = Worksheets("Hoja1").Cells(6, 2)

H = Worksheets("Hoja1").Cells(7, 2)

kr = Worksheets("Hoja1").Cells(8, 2)

'deltax = Cells(9, 2)

deltat = 10

Tf = Worksheets("Hoja1").Cells(11, 2)

gasto = Worksheets("Hoja1").Cells(12, 2)

'area = Worksheets("Hoja1").Cells(13, 2)

epsilon = 1

nodes = 20

pini = Worksheets("Hoja1").Cells(16, 2)

espesor = 5

nt = 50000000

o = 12

mn = 100

'-----

'Se calculan las constantes

dx = deltax(1500, rw, nodes)

Npi = nodes + 1

'Se limpia la hoja de resultados

Call Limpiar

If (deltat = 0) Then GoTo 99

'Se redimensionan las variables al número de nodos

ReDim a(1 To Npi), b(1 To Npi), c(1 To Npi), d(1 To Npi)

ReDim pDNN(1 To Npi, 1 To 2), x(1 To Npi) 'pstar(1 to i+1,1), pi(1 to i+1,2),_
prime(1 to i+1,3)

'-----

'Condiciones iniciales

For i = 1 To Npi Step 1

For j = 1 To 2

pDNN(i, j) = 0

Next j, i

'-----

'Inicia ciclo de tiempo

'-----

j = 0

alpha_N = alphaNN(dx, deltat)

alpha_NN = alphaNN(dx, deltat)

For m = 1 To nt Step 1

'-----

'PREDICTOR avanza en j+1/2

'-----

'Primeros renglones

a(1) = 0

b(1) = -2

If pDNN(1, 2) <> pDNN(2, 2) Then b(1) = b(1) - alpha_NN

c(1) = 2

d(1) = -2 * dx

If pDNN(1, 2) <> pDNN(2, 2) Then d(1) = d(1) + dx * dx * (n - 1)

If pDNN(1, 2) <> pDNN(2, 2) Then d(1) = d(1) - alpha_NN * pDNN(1, 2)

'Renglones pDNN

For i = 2 To nodes Step 1

Float1 = i - 1

dpi = (pDNN(i - 1, 2) - pDNN(i + 1, 2)) / 2

a(i) = 1

b(i) = -2

If i <= 0 And dpi > 0 Then

 b(i) = b(i) - Exp(E1(n, dx) * Float1) * alpha_NN * (dx / dpi) ^ E2(n)

End If

If i > 0 And dpi > 0 Then

 b(i) = b(i) - Exp(E1(1, dx) * Float1) * alpha_N * (dx / dpi) ^ E2(1)

End If

c(i) = 1

d(i) = 0

```

If i <= 0 And dpi > 0 Then
    d(i) = dx * (n - 1) * dpi
    d(i) = d(i) - Exp(E1(n, dx) * Float1) * pDNN(i, 2) * alpha_NN * (dx / dpi) ^ E2(n)
End If

```

```

If i > 0 And dpi > 0 Then
    d(i) = -Exp(E1(1, dx) * Float1) * pDNN(i, 2) * alpha_N * (dx / dpi) ^ E2(1)
End If

```

```

Next i

```

```

'Últimos renglones

```

```

c(nodes) = 0
d(nodes) = d(nodes) - pDNN(Npi, 1)

```

```

Call Thomas(a, b, c, d, nodes, x)

```

```

For i = 1 To nodes Step 1

```

```

    pDNN(i, 1) = x(i)

```

```

Next i

```

```

'-----

```

```

'CORECTOR avanza en j+1

```

```

'-----

```

```

'iteraciones

```

```

k = 0

```

```

'Primer renglón

```

```

a(1) = 0

```

```

b(1) = -(2 + alphaNN(dx, deltat))
c(1) = 2
40 d(1) = -2 * pDNN(2, 2) + (2 - alpha_NN) * pDNN(1, 2)
d(1) = d(1) + 2 * dx * dx * (n - 1)
d(1) = d(1) - 4 * dx
If pDNN(1, 2) = pDNN(2, 2) Then d(1) = d(1) + 2 * dx

```

'Renglonos pDNN

```

For i = 2 To nodes Step 1
  Float2 = i - 1
  dpi2 = (pDNN(i - 1, 1) - pDNN(i + 1, 1)) / 2 / dx
  If i = 0 And pDNN(o - 1, 1) > pDNN(o + 1, 1) Then
    dpi2 = Exp(E3(n, dx) * Float2) * ((pDNN(i - 1, 1) - pDNN(i + 1, 1)) / 2 / dx) ^ n
  End If
  If dpi2 > 0 Then pid2 = 1 / dpi2
  a(i) = 1
  b(i) = -2
  If i <= 0 And pid2 > 0 Then
    b(i) = b(i) - Exp(E1(n, dx) * Float2) * alpha_NN * pid2 ^ E2(n)
  End If
  If i > 0 And pid2 > 0 Then
    b(i) = b(i) - Exp(E1(1, dx) * Float2) * alpha_N * pid2 ^ E2(1)
  End If
  c(i) = 1
  d(i) = -(pDNN(i - 1, 2) + pDNN(i + 1, 2)) + 2 * pDNN(i, 2)
  If i <= 0 And pid2 > 0 Then d(i) = d(i) + 2 * dx * dx * (n - 1) * dpi2
  If i <= 0 And pid2 > 0 Then
    d(i) = d(i) - Exp(E1(n, dx) * Float2) * alpha_NN * pid2 ^ E2(n) * pDNN(i, 2)
  End If

```

```
If i > 0 And pid2 > 0 Then
    d(i) = d(i) - Exp(E1(1, dx) * Float2) * alpha_N * pid2 ^ E2(1) * pDNN(i, 2)
End If
```

```
Next i
```

```
'Último renglón
```

```
c(nodes) = 0
```

```
d(nodes) = d(nodes) - pDNN(Npi, 2)
```

```
Call Thomas(a, b, c, d, nodes, x)
```

```
k = k + 1
```

```
'Checamos la tolerancia
```

```
rho = (x(1) - pDNN(1, 1)) / x(1)
```

```
If (Abs(rho) < 0.1) Then GoTo 61
```

```
For i = 1 To nodes Step 1
```

```
    pDNN(i, 1) = x(i)
```

```
Next i
```

```
GoTo 40
```

```
61
```

```
For i = 1 To nodes Step 1
```

```
    pDNN(i, 2) = x(i)
```

```
Next i
```

'Se imprimen los valores

If l = mn Or m = 1 Or m = nt Then

 ñ = ñ + 1

 Worksheets("Resultados").Cells(3 + ñ, 2) = tDnn_to_t(m * deltat + deltat, ct, phi, n, mu_eff(H, n, kr, phi), kr, espesor, gasto, rw)

 Worksheets("Resultados").Cells(2, 2 + 1) = rw * Exp(dx)

 Worksheets("Resultados").Cells((3 + ñ), 2 + 1) = -pDNN_to_p(pDNN(1, 2), 0, _gasto, espesor, n, mu_eff(H, n, kr, phi), rw, kr)

 l = 0

 mn = mn + 100

End If

j = j + 1

l = l + 1

rho = 0

Next m

Stop

99 End Sub