



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

**Estudio de Simulación del
Comportamiento de Yacimientos
con Fluidos de Reología del Tipo
Ley de Potencias Y Plástico de
Bingham**

T E S I S

Que para obtener el título de

INGENIERO PETROLERO

P R E S E N T A N

ALEXIS MORALES REYES

JAIR RODEA DÍAZ

DIRECTOR DE TESIS

ING. HÉCTOR ERICK GALLARDO FERRERA



Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2019

Agradecimientos

A Dios, por darme la oportunidad de vivir a lado de gente extraordinaria y por las experiencias que me tiene preparadas.

A mis padres, Javier Morales Manjarrez y Benita Reyes Reyes, por su amor, consejos y confianza. Ustedes son mi motor para seguir adelante día a día. Los amo.

A mis hermanos, porque siempre están ahí para brindarme su apoyo y su cariño.

A mis abuelos, que me dan el ejemplo de trabajar fuerte y nunca rendirse.

A mis tíos y primos, por sus consejos y porque siempre han creído en mí.

A los profesores de toda mi vida estudiantil, porque han contribuido a que yo sea mejor persona en lo académico y en lo personal.

A mis amigos de CCH-N, por hacer más ameno este trayecto. En especial a Brenda, Gabriela, Edgar, Carlos, Ricardo, Ulises, Ángel y Bruno.

A mis amigos y compañeros de la FI, por permitirme compartir momentos increíbles. En especial a Jackeline, Moserrat, Pilar, Loydah, Iván, Iván mi tocayo, Henríque, Jesús, Rubén y aquellos con los que siempre compartí risas.

Al Dr. Simón López Ramírez, Dra. Cecilia Durán Valencia (Q.E.P.D.), Ing. Rogelio Quiñones, Ing. Griselda Martínez, Ing. Gloria Ceballos, Ing. Rodrigo Galicia, Ing. Luis Cervantes, Ing. Claudia Espinosa, M.I. Norma Araceli García, Ing. Jessica Hernández y a mis amigos de Minera Tizapa, por su amistad, sus consejos y todo el apoyo que me han brindado para forjar mi persona. Los aprecio mucho.

A Jair Rodea Diaz, por toda su amistad, compañerismo y su esfuerzo en este proyecto.

A mi director de tesis M.I. Héctor Erick Gallardo Ferrera, porque es un gran amigo y una grata persona, por sus consejos y sus palabras de aliento. Además, por toda la ayuda brindada en la elaboración de esta tesis.

A los Sinodales por sus apreciables recomendaciones y su tiempo.

A mi alma mater, la Universidad Nacional Autónoma de México y a la Facultad de Ingeniería, por cambiar mi vida y sacar lo mejor de mí para servir a mi país.

Alexis Morales Reyes

A dios por cada prueba, error y éxito que a lo largo de mi vida personal y académica me ha impuesto, ya que estas han forjado mi carácter y me han llevado hasta este punto de mi vida por el cual me siento enormemente agradecido.

A mis padres Alfonso de Jesús Rodea Mancilla y Griselda Díaz Catzín que han sido el pilar más importante durante toda mi vida y un ejemplo a seguir; además de brindarme su apoyo incondicional no solo en mis estudios sino también en mi pasión por el atletismo y por todo el amor que me han brindado para verme lograr cada uno de mis objetivos.

A mi abuela Noemí Mancilla Hernández y mi abuelo Gregorio Díaz González por acogerme desde pequeño y estar siempre al pendiente de mí.

A mis compañeros de la prepa y Lic. Adolfo López Mateos por contribuir a mi formación académica, por su entrega y dedicación en cada clase que compartimos alentándome y motivándome a ser un mejor estudiante.

A mis amigos de la carrera porque con ellos encontré un nuevo significado a la palabra amistad, el compañerismo; y por cada risa, celebración y éxito que a lo largo de este tiempo pudimos compartir.

Al M. I. Héctor Erick Gallardo Ferrera y mi compañero Alexis Morales Reyes por su dedicación y esfuerzo en la elaboración del presente trabajo.

A la UNAM por cambiar mi vida y forjarme como profesionista.

Jair Rodea Díaz

Índice general

Agradecimientos	2
Índice general.....	4
Índice de figuras.....	6
Resumen.....	9
Introducción.....	10
Capítulo 1. Planteamiento de la problemática.....	11
Capítulo 2. Revisión de la literatura.....	12
2.1 Aceite extra-pesado como un fluido no-newtoniano	12
2.2 Espuma como un fluido no-newtoniano	13
2.3 Aplicaciones de los fluidos no-newtonianos en procesos de perforación, terminación y estimulación de pozos	13
2.4 Trabajos previos sobre el flujo de fluidos tipo ley de potencias	14
2.5 Modelos de Arps-Fetkovich.....	15
2.6 Modelos de declinación de Fetkovich	16
2.7 Conclusión de la literatura revisada	18
Capítulo 3. Conceptos fundamentales de la reología.....	19
3.1 Fluidos no-newtonianos independientes del tiempo	19
3.1.1 Fluidos tipo ley de potencia.....	20
3.1.2 Plásticos de Bingham.....	21
3.1.2 Fluidos Tipo Hershley-Buckley.....	22
3.2 Fluidos no-newtonianos dependientes del tiempo	24
3.3 Fluidos visco-elásticos	26
Capítulo 4. Desarrollo de la herramienta de cómputo para fluidos con reología tipo ley de potencias.....	27
4.1 Planteamiento de la problemática.....	28
4.2 Yacimiento infinito produciendo a gasto constante para un fluido tipo ley de potencias.....	29
4.3 Yacimiento infinito produciendo a presión de fondo constante para un fluido no- newtoniano tipo ley de potencias.....	37
4.4 Yacimiento cerrado produciendo a gasto constante para un fluido tipo ley de potencias.....	43

4.5 Yacimiento cerrado produciendo a presión de fondo constante para un fluido tipo ley de potencias	47
4.6 Modelos de Arps-Fetkovich para fluidos pseudo-plásticos	53
4.7 Diagrama de flujo del problema general para los fluidos tipo ley de potencias....	59
4.8 Conclusiones	61
Capítulo 5. Desarrollo de la herramienta de cómputo para fluidos con reología plástico de Bingham	62
5.1 Planteamiento de la problemática.....	62
5.2 Yacimiento infinito produciendo a gasto constante para un fluido plástico de Bingham.....	63
5.3 Yacimiento infinito produciendo a presión de fondo constante para un fluido tipo plástico de Bingham.....	67
5.4 Yacimiento cerrado produciendo a gasto constante para un fluido tipo plástico de Bingham.....	69
5.5 Yacimiento finito produciendo a presión de fondo constante para un fluido plástico de Bingham.....	71
5.6 Diagrama de flujo del problema general para los fluidos tipo plástico de Bingham	75
5.7 Conclusiones	77
Conclusiones.....	78
Recomendaciones.....	79
Referencias	80
Apéndice A. Método Predictor-Corrector de Douglas-Jones.....	85
Apéndice B. Transformación logarítmica del método Predictor-Corrector de Douglas-Jones.....	90
Apéndice C. Método Predictor-Corrector de Douglas-Jones aplicando condiciones de frontera.....	92
Apéndice D. Método de diferencias finitas para el simulador de fluidos plástico de Bingham.....	103
Apéndice E. Método de diferencias finitas para fluidos plástico de Bingham aplicando condiciones de frontera	105

Índice de figuras

Figura 3.1. Comportamiento de los fluidos no-newtonianos de acuerdo al esfuerzo de corte.	20
Figura 3.2. Comportamiento del fluido no-newtoniano Hershley-Buckley de acuerdo al esfuerzo de corte.	23
Figura 3.3. Comportamiento de los fluidos no-newtonianos tixotrópicos y reopéticos en curvas dependientes del tiempo.	25
Figura 4.2.1. Comparación entre la solución numérica para $n=1$ y la solución línea fuente.	31
Figura 4.2.2. Comparación entre la solución numérica y la solución analítica para $n=0.9$	32
Figura 4.2.3. Comparación entre la solución numérica y la solución analítica para $n=0.8$	33
Figura 4.2.4. Comparación entre la solución numérica y la solución analítica para $n=0.7$	34
Figura 4.2.5 Comparación entre la solución numérica y la solución analítica para $n=0.6$	35
Figura 4.2.6. Comparación entre la solución numérica y la solución analítica para $n=0.5$	36
Figura 4.3.1. Comparación entre la solución numérica y la solución analítica para $n=1$	38
Figura 4.3.2. Comparación entre la solución numérica y la solución analítica para $n=0.9$	39
Figura 4.3.3. Comparación entre la solución numérica y la solución analítica para $n=0.8$	40
Figura 4.3.4. Comparación entre la solución numérica y la solución analítica para $n=0.7$	41
Figura 4.3.5. Comparación entre la solución numérica y la solución analítica para $n=0.6$	42

Figura 4.4.1. Solución numérica y su derivada para los fluidos pseudo-plásticos con un $reD = 10$	44
Figura 4.4.2. Solución numérica y su derivada para los fluidos pseudo-plásticos con un $reD = 100$	45
Figura 4.4.3. Solución numérica y su derivada para los fluidos pseudo-plásticos con un $reD = 1000$	46
Figura 4.5.1. Solución numérica para los fluidos pseudo-plásticos con una $n = 1$	48
Figura 4.5.2. Solución numérica para los fluidos pseudo-plásticos con una $n = 0.9$	49
Figura 4.5.3. Solución numérica para los fluidos pseudo-plásticos con una $n = 0.8$	50
Figura 4.5.4. Solución numérica para los fluidos pseudo-plásticos con una $n = 0.7$	51
Figura 4.5.5. Solución numérica para los fluidos pseudo-plásticos con una $n = 0.6$	52
Figura 4.6.1. Solución numérica para los fluidos pseudo-plásticos con una $n = 1$ con las soluciones de Arps-Fetkovich.	54
Figura 4.6.2. Solución numérica para los fluidos pseudo-plásticos con una $n = 0.9$ con las soluciones de Arps-Fetkovich.	55
Figura 4.6.3. Solución numérica para los fluidos pseudo-plásticos con una $n = 0.8$ con las soluciones de Arps-Fetkovich.	56
Figura 4.6.4. Solución numérica para los fluidos pseudo-plásticos con una $n = 0.7$ con las soluciones de Arps-Fetkovich.	57
Figura 4.6.5. Solución numérica para los fluidos pseudo-plásticos con una $n = 0.6$ con las soluciones de Arps-Fetkovich.	58
Figura 4.7.1. Diagrama de Flujo del Problema General para los Fluidos Tipo ley de Potencias.	60
Figura 5.2.1. Gráfico log-log que muestra el ajuste de la solución analítica propuesta por Gallardo (2019) y la solución numérica para un fluido tipo plástico de Bingham con gradientes de presión, $G_D = 0.1, 0.01$ y 0.001	65
Figura 5.2.2. Presión adimensional y derivada de un fluido newtoniano, $G_D = 0$ mediante la solución numérica.	66
Figura 5.3.1. Gráfico del gasto numérico con $G_D = 1, 0.1, 0.01, 0.001$ y 0 ; donde se aprecia un repentino decremento en el gasto a tiempos menores conforme crece el gradiente de presión mínimo.	68

Figura 5.4.1. Gráfico log-log que muestra la caída de presión adimensional con su derivada en un yacimiento finito para un fluido newtoniano, $G_D = 0$ y plástico de Bingham con valores de $G_D = 1, 0.1, 0.01, 0.001$	70
Figura 5.5.1. Gráfico log-log con $G_D = 1$ a radios adimensionales, $r_{eD} = 10, 100, 1,000$ y $10,000$	72
Figura 5.5.2. Gráfico log-log con $G_D = 0$ a radios adimensionales, $r_{eD} = 10, 100, 1,000$ y $10,000$	73
Figura 5.5.3. Gráfico log-log con $G_D = 0.01$ a radios adimensionales, $r_{eD} = 10, 100, 1,000$ y $10,000$	74
Figura 5.6.1. Diagrama de Flujo del problema general para los fluidos tipo plástico de Bingham.	76

Resumen

En este trabajo se presenta un análisis del comportamiento del gasto en una sola fase en sistemas de fluidos con reología tipo ley de potencias y de plásticos de Bingham. Se extiende una metodología para aproximar las soluciones de Arps-Fetkovich, ya que a pesar de que existen trabajos previos que describen el comportamiento de flujo de fluidos no newtonianos en el medio poroso, estos son orientados al análisis de pruebas de presión. Debido a lo anterior, no hay indicios de una herramienta que permita interpretar parámetros adecuadamente y realizar evaluaciones técnico-económicas. Al obtener las aproximaciones mencionadas, se pretende dar el primer paso para el desarrollo de la herramienta.

En el primer capítulo se describe la importancia de las curvas de declinación para la estimación de reservas de hidrocarburos. Se plantea la problemática y se establecen los objetivos de la presente tesis, así como la justificación y los alcances de la misma. El segundo capítulo describe los fluidos usados en la industria petrolera que tienen comportamiento no-newtoniano, y los problemas de flujo que generan debido a su comportamiento. Asimismo, se explican las soluciones obtenidas por Arps-Fetkovich para el análisis de datos de producción. En el tercer capítulo se presentan conceptos fundamentales para entender las características principales de los fluidos no-newtonianos; tipo ley de potencias, plásticos de Bingham y fluidos tipo Hershey-Buckley. En los capítulos cuatro y cinco se explican las bases teóricas de las dos herramientas de cómputo desarrolladas para analizar a diferentes condiciones de flujo los fluidos tipo ley de potencias y plásticos de Bingham, respectivamente. Los resultados obtenidos se presentan en diversos gráficos donde se comparan y validan con soluciones analíticas propuestas en trabajos previos. El análisis se realiza variando el índice ley de potencias y el gradiente de presión, ya que son los parámetros reológicos característicos del comportamiento del flujo. Por último, se presentan las conclusiones de esta investigación y se enuncian las recomendaciones para obtener un mayor nivel de profundidad en el tema de estudio.

Introducción

Los aceites pesados y extra-pesados poseen comportamientos que no siempre se ajustan al predicho mediante el uso de la Ley de Darcy. Esto se debe a diversos factores, como la expansión del gas disuelto en solución, la formación de aceite espumante, la producción de arenas y la influencia de asfáltenos y componentes hetero-atómicos contenidos en las fracciones pesadas (Poon y Kisman, 1992). Los factores anteriormente listados, muchas veces, implican la existencia de reologías no-newtonianas a condiciones de yacimiento, que usualmente describen a la viscosidad aparente a través de modelos tipo ley de potencias (Ikoku, 1979) o de plástico de Bingham (Wu, 1992).

En la literatura existen trabajos dónde se desarrollan ecuaciones que, haciendo modificaciones a la ecuación de Darcy, permiten describir el flujo a través del yacimiento. No obstante, su aplicación se ha enfocado principalmente al desarrollo de métodos que potencialmente pueden ser utilizados para el análisis de pruebas de presión (Lund e Ikoku, 1981; Wu, 1992). Debido a las complicaciones asociadas a la realización de una prueba de presión, y la complejidad de los sistemas de aceite pesado y extra-pesado, varios autores plantean el uso de datos de producción para el estudio dinámico de los sistemas de hidrocarburos (Arps, 1945; Fetkovich; 1980; Blasingame, 2005). Sin embargo, además del trabajo de Dabholkar y Mahadevan (2011), no se ha encontrado evidencia del desarrollo de herramientas para estudiar esta problemática.

Es por ello que, en este trabajo, se estudiará el comportamiento del gasto en sistemas de aceite pesado y extra-pesado con reología tipo ley de potencias y plásticos de Bingham. Se extenderá la metodología utilizada para obtener una aproximación de las soluciones de Arps-Fetkovich. Estos conjuntos de curvas serán construidos mediante el uso de un par de simuladores numéricos, basados en los trabajos de Ikoku y Ramey (1979), Wu (1992) y Gallardo (2019).

Capítulo 1. Planteamiento de la problemática

En la industria petrolera es de gran interés determinar las reservas de hidrocarburos dentro de los yacimientos debido a que con ellas se realizan las evaluaciones técnico-económicas correspondientes. Sin embargo, en ocasiones no se cuenta con la información suficiente para estimar sus valores, por lo que se usan curvas de declinación como un método de caracterización efectivo.

Los modelos de curvas de declinación realizados por Arps-Fetkovich son los más utilizados en la industria. Esto debido a que requieren mediciones de los gastos del pozo, para obtener una curva de declinación, y algunos datos del yacimiento para la interpretación de los parámetros del sistema y la estimación de las reservas.

No obstante, los modelos anteriores se desarrollaron para una reología newtoniana (Arps, J. J., 1945; Fetkovich, M. J., 1980; Carter y Tracy, 1960). Esto podría ocasionar errores en la interpretación de parámetros en sistemas que muestran reologías diferentes (Gallardo, 2019). Algunos casos de interés son:

- Aceite extrapesado (Banrenblat et al., 1984; Kasraie et al., 1989; Gonzalo Rojas et al., 1977).
- Polímeros (Savins y Wallick, 1969; Gogarty; 1967; Christopher y Middleman; 1965).
- Fluidos de perforación, terminación, mantenimiento y estimulación (Cloud y Clark, 1985; Shah, 1982; Robertson y Stiff, 1976; Lyoho y Azar, 1981).

Considerando lo anterior, en este trabajo se busca extender la aplicación de los modelos tipo Arps-Fetkovich a casos de reología no-newtoniana de tipo ley de potencias y plásticos de Bingham, así como verificar la validez de los modelos de Arps en estas condiciones. Con tal fin, se desarrollarán dos herramientas de cómputo, basadas en trabajos previos (Ikoku, 1980; Wu, 1992; Gallardo, 2019), que permitan simular las respuestas de un sistema con un aceite no-newtoniano que considere las reologías indicadas.

Capítulo 2. Revisión de la literatura

De manera clásica, los problemas de flujo en ingeniería petrolera consideran que los fluidos poseen una reología newtoniana a condiciones de yacimiento (Muskat, 1947; Collins, 1961; Scheidegger, 1974). No obstante, existen aplicaciones en las que los fluidos involucrados pueden desviarse de dicho comportamiento y mostrar reologías no-newtonianas.

Se sabe que los fluidos no-newtonianos no son un concepto nuevo en la industria petrolera ya que sus propiedades han sido usadas como ventajas en las operaciones de perforación y en los procesos de fracturamiento hidráulico (Leonard y Melton, 1957), en el uso de polímeros, micro-emulsiones y espumas, usualmente inyectados como parte de procesos de recuperación mejorada y avanzada en los yacimientos (Dauben & Menzie, 1967; Mungan, 1966; Gogarty, 1967; Harvey & Menzie, 1970; Van Poolen, 1980).

A continuación, se presenta una revisión de literatura en la que se pretende indicar el estado actual de las aplicaciones que involucran problemas de flujo con fluidos de reología no-newtoniana. Asimismo, se presenta el estado de las soluciones obtenidas por Arps-Fetkovich para el análisis de datos de producción.

2.1 Aceite extra-pesado como un fluido no-newtoniano

El comportamiento no-newtoniano del aceite extra-pesado ha sido estudiado y reportado en la industria petrolera (Banrenblat et al., 1984; Kasraie et al., 1989; Rojas et al., 1977). Diversos autores explican que el flujo de aceite pesado dentro de un medio poroso no sigue la ley de Darcy e indican que su uso incluiría errores durante la predicción del comportamiento fluyente de estos sistemas.

Se han reportado casos en la literatura donde el aceite extra-pesado se comporta como un fluido tipo plástico de Bingham, lo que provoca la existencia de un esfuerzo de corte mínimo para iniciar el flujo en el yacimiento (Banrenblat et al., 1984; Rojas et al., 1977). Asimismo, otros autores indican la existencia de una reología que asemeja al modelo de una ley de potencias (Poon y Kisman, 1992; Cruz, 2012), exhibiendo comportamientos de un fluido dilatante o pseudo-plástico dependiendo de su composición. Además, se ha observado que en algunos casos la viscosidad efectiva puede modificarse en función de la velocidad de flujo (Poon y Kisman, 1992). En estos casos se encuentra un reajuste molecular entre el yacimiento y el pozo que puede modelarse a través de un fluido tipo ley de potencias en el que si el fluido exhibe dilatación se observará un aumento en la viscosidad cercana al pozo; por otro lado, si muestra efectos pseudo-plásticos, se reducirá la viscosidad efectiva.

2.2 Espuma como un fluido no-newtoniano

El flujo de espuma dentro de un medio poroso es actualmente un tema de investigación en algunas ciencias. Dentro de la ingeniería petrolera, se ha encontrado que su uso permite controlar la movilidad en los procesos de recuperación mejorada de aceite, así como en proyectos de almacenamiento de hidrocarburos. Además, se ha observado experimentalmente que la espuma comienza a fluir en un medio poroso sólo después de aplicar un gradiente de presión excedente a cierto valor límite (Albrecht y Marsden, 1970; Witherspoon et al., 1989).

2.3 Aplicaciones de los fluidos no-newtonianos en procesos de perforación, terminación y estimulación de pozos

Durante la perforación y fracturamiento de un pozo, el uso de fluidos no-newtonianos es una práctica común. En dichas operaciones, estos fluidos pueden alojarse en las vecindades del pozo causando un impacto en el flujo hacia este.

El comportamiento reológico de los lodos de perforación, cementos y fluidos fracturantes, normalmente se describen a través de modelos de plásticos de Bingham o ley de potencias (Cloud y Clark, 1985; Shah, 1982; Robertson y Stiff, 1976; Iyoho y Azar, 1981).

2.4 Trabajos previos sobre el flujo de fluidos tipo ley de potencias

El comportamiento transitorio de la presión durante el flujo de un fluido no-newtoniano se modeló inicialmente por Odeh y Yang (1979) y posteriormente por Ikoku y Ramey (1979). Estos últimos presentaron una ecuación diferencial en derivadas parciales que representa el flujo de fluidos tipo ley de potencias. La solución a dicho problema la obtuvieron mediante un procedimiento de linealización a través del gasto de producción, mismo que validaron con ayuda de un simulador numérico capaz de resolver el problema no-lineal mediante el método de Douglas-Jones. Las soluciones analíticas obtenidas por Ikoku y Ramey se han utilizado para analizar pruebas de inyección; no obstante, Vongvuthipornchai y Raghavan (1987) demostraron que estos modelos llevan a resultados erróneos cuando el índice de la ley de potencias, n , es menor a 0.6. En una investigación posterior, Ikoku y Ramey (1980) extendieron su trabajo para incluir el almacenamiento y efecto de daño usando un simulador numérico.

Otros trabajos relevantes que han extendido la aplicación de los modelos de Ikoku y Ramey (1979) son los siguientes: Poon y Kisman (1992) publicaron soluciones a condiciones de producción de presión de fondo fluyente constante, obtenidas mediante la aplicación del principio de superposición en el espacio de Laplace; Yu-Shu Wu (1990) presentó módulos para el tratamiento de reologías no-newtonianas, acoplando un simulador. Dabholkar y Mahadevan (2011) presentaron un estudio de flujo que considera el efecto del gas liberado en sistemas de aceites pesados, para lo que desarrollaron un simulador multifásico que considera al aceite con una reología no-newtoniana por debajo de su punto de saturación.

2.5 Modelos de Arps-Fetkovich

Los modelos más utilizados para el análisis de datos de producción en la industria petrolera continúan siendo aquellos desarrollados por Arps, quien ajustó la ecuación de una hipérbola para definir la relación del gasto contra el tiempo. La utilidad de estos modelos recae principalmente en poder obtener estimaciones para el abandono, tanto en tiempos, gastos y producción acumulada (Martínez, 2018).

Las soluciones de Fetkovich, obtenidas analíticamente como una solución a la ecuación de difusividad radial para fluidos newtonianos, complementan el trabajo de Arps en el período de flujo transitorio. De tal manera que, Fetkovich obtuvo una expresión para el gasto de un pozo producido a presión de fondo constante en un sistema cerrado a través de la solución para flujo pseudo-estacionario. Considerando que los modelos de Fetkovich, en el periodo dominado por las fronteras, muestran una declinación exponencial, es posible incluir los modelos de Arps a partir del momento en el que concluye el periodo transitorio de flujo en las curvas. De esta manera puede extenderse la aplicación para el análisis de datos de producción.

Sin embargo, en la investigación realizada, sólo se encontró el trabajo de los autores Dabholkar y Mahadevan (2011). Ellos analizaron datos de producción mediante un modelo creado para fluidos no-newtonianos; desarrollaron un modelo numérico capaz de describir el flujo de hidrocarburos en dos fases (gas y aceite) y en dos dimensiones con una reología no-newtoniana tipo ley de potencias para fluidos pseudo-plásticos. Además, propusieron un yacimiento en estado estacionario drenado por un pozo produciendo a presión de fondo fluyente constante, en donde generaron curvas IPR para diferentes valores del índice tipo ley de potencias (sólo para el caso de los fluidos pseudo-plásticos).

Sin embargo, no se encontró otro trabajo en el cual se analicen los modelos de Arps-Fetkovich normalizados para una reología no-newtoniana tipo ley de potencias (pseudo-plásticos y dilatantes).

2.6 Modelos de declinación de Fetkovich

Como una continuación al trabajo desarrollado por Arps en el periodo transitorio, Fetkovich lo complementa considerando las siguientes variables:

$$p_{DNN} = \frac{2\pi kh}{qB\mu_B} (p_i - p_{wf}), \quad \dots \quad \mathbf{2.1}$$

$$r_D = \frac{r}{r_{wa}}, \quad \dots \quad \mathbf{2.2}$$

$$t_{DNN} = \frac{\eta_B}{r_w^2} t, \quad \dots \quad \mathbf{2.3}$$

$$Q_{DNN} = \frac{qB\mu_B}{2\pi kh(p_i - p_{wf})}, \quad \dots \quad \mathbf{2.4}$$

donde r_{wa} representa el radio aparente del pozo, mientras el radio adimensional $r_{eD} = r_e/r_{wa}$. Es así que, para el periodo dominado por las fronteras, Fetkovich sugiere usar la fórmula de Dupoit (Fetkovich, 1980):

$$q_{iD} = \frac{1}{[\ln|r_{eD}| - \frac{1}{2}]}, \quad \dots \quad \mathbf{2.5}$$

entonces, se define el gasto de Gentry y Cummings (1986):

$$q_{Dd} = \frac{q}{q_i} = q_D \left[\ln|r_{eD}| - \frac{1}{2} \right] = \alpha q_D, \quad \dots \quad \mathbf{2.6}$$

y el gasto de la ecuación de Darcy

$$q_{Dd} = -\alpha \left(r_D \frac{\partial p_D}{\partial r_D} \right). \quad \dots \quad \mathbf{2.7}$$

De esta manera, Fetkovich obtuvo una expresión para el gasto de un pozo produciendo a presión de fondo constante en un yacimiento finito por medio de la solución para flujo pseudo-estacionario:

$$p_{wD}(t_D) = \frac{2t_D}{(r_{eD}^2 - 1)} + \ln|r_{eD}| - \frac{3}{4}, \quad \dots\dots\dots 2.8$$

utilizando el principio de superposición en el espacio de Laplace de acuerdo a van Everdingen y Hurst (1949)

$$\bar{p}_{wD}(s)\bar{q}_D(s) = \frac{1}{s^2}, \quad \dots\dots\dots 2.9$$

$$\bar{q}_D(s) = \frac{1}{s^2 \left[\frac{2}{s^2(r_{eD}^2 - 1)} + \frac{1}{s} \left(\ln|r_{eD}| - \frac{3}{4} \right) \right]}, \quad \dots\dots\dots 2.10$$

cuya anti-transformada es:

$$q_D = \frac{1}{[\ln|r_{eD}| - \omega]} \exp \left[-\frac{2}{(r_{eD}^2 - 1)(\ln|r_{eD}| - \omega)} t_D \right], \quad \dots\dots\dots 2.11$$

al simplificar los cocientes de los radios, el término ω es igual a 3/4, sin embargo Fetkovich propuso que el valor sea de 1/2 ya que brinda un mejor ajuste entre los valores resultantes de sus modelos y los medidos en la práctica (Martínez, 2018).

Si siguiendo con la misma lógica se puede definir a t_{Da} como:

$$t_{Da} = t_D \left[\frac{2}{(r_{eD}^2 - 1)(\ln|r_{eD}| - \omega)} \right] = \beta t_D. \quad \dots\dots\dots 2.12$$

Con ayuda de las definiciones presentadas, Fetkovich hizo el planteamiento de un pozo cilíndrico a presión de fondo fluyendo constante en un yacimiento finito (Martínez, 2018).

2.7 Conclusión de la literatura revisada

Aunque existen evidencias de comportamientos tipo ley de potencias en algunos yacimientos de aceite pesado, no se tienen modelos difundidos para su estudio. Esto puede causar problemas en la interpretación de los parámetros medidos en el yacimiento, por ejemplo, en la estimación de reservas y la producción esperada por cada pozo, lo que impacta en las evaluaciones realizadas para el desarrollo del proyecto.

En atención a lo anterior, el presente trabajo tiene como objetivo desarrollar aproximaciones a los modelos para el análisis de datos de producción tipo Arps-Fetkovich, basados en las ecuaciones de flujo de Ikoku y Ramey (1979) para fluidos con reología tipo ley de potencias y plástico de Bingham, útiles para la estimación de parámetros, evaluación y desarrollo del yacimiento.

Capítulo 3. Conceptos fundamentales de la reología

De acuerdo al comportamiento de la viscosidad, un fluido se clasifica como newtoniano o no-newtonianos; los primeros siguen la ley de resistencia a la viscosidad de Newton en la que dichos fluidos poseen una viscosidad constante. Los fluidos no-newtonianos se desvían de esta ley y presentan una viscosidad variable, este comportamiento generalmente se presenta por modelos reológicos o correlaciones de tasa de corte y esfuerzo cortante (Skelland, 1967; Savins y Wallick, 1969; Bird et al., 1960).

De acuerdo a su tasa de corte y esfuerzo de corte, los fluidos no-newtonianos se clasifican en tres grupos:

- 1.- Fluidos no-newtonianos independientes del tiempo.
- 2.- Fluidos no-newtonianos dependientes del tiempo.
- 3.- Fluidos visco-elásticos.

3.1 Fluidos no-newtonianos independientes del tiempo

Los fluidos no-newtonianos independientes del tiempo son aquellos en donde la tasa de corte es una función única no-lineal a un esfuerzo de corte, entre ellos se encuentran los que se incluyen en la **Figura 3.1**, que muestra el comportamiento de estos fluidos en una gráfica esfuerzo de corte contra la tasa de corte.

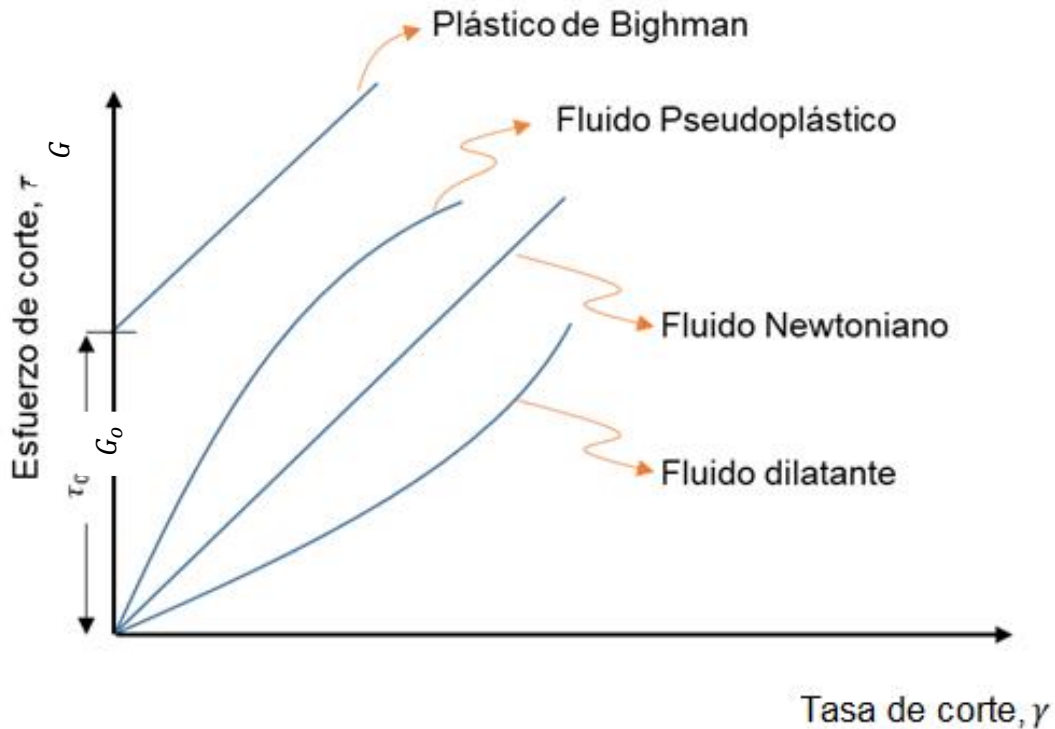


Figura 3.1: Comportamiento de los fluidos no-newtonianos de acuerdo al esfuerzo de corte.

3.1.1 Fluidos tipo ley de potencia

Los fluidos tipo ley de potencia o también llamados modelo de Otswald-de Waele (Bird et al, 1960), son los más comunes en los problemas de flujo de fluidos en medios porosos. El fluido tipo ley de potencias se puede representar a través de la **ecuación 3.1**:

$$G = H\gamma^n, \dots\dots\dots 3.1$$

en donde n es el índice ley de potencias y H es el índice de consistencia. Para $n = 1$ el fluido se convierte en newtoniano, si el exponente es menor a 1 se comporta como un pseudo-plástico y si es mayor a 1 se comportará como un dilatante.

La **ecuación 3.2** corresponde a una tipo Darcy con un fluido tipo ley de potencias en coordenadas radiales (Christopher y Middleman, 1965):

$$v_r = \left(-\frac{k_r}{\mu_{eff}} \frac{\partial p}{\partial r} \right)^{\frac{1}{n}}, \dots\dots\dots 3.2$$

donde:

$$\mu_{eff} = \frac{H}{12} \left(9 + \frac{3}{n} \right)^n (150k\phi)^{\frac{(1-n)}{2}} . \dots\dots\dots 3.3$$

3.1.2 Plásticos de Bingham

Otro fluido no-newtoniano es el denominado plástico de Bingham. Este tipo de fluido está formado por una estructura interna en tres dimensiones, la cual es capaz de prevenir el movimiento a valores de esfuerzo de corte menores a su valor de cedencia G_o . Para valores de esfuerzo de corte $G > G_o$ la estructura interna colapsará completamente permitiendo el flujo del fluido (Yu-Shu Wu y P.A. Witherspoon, 1992). este fluido se caracteriza por tener dos constantes

1. EL esfuerzo mínimo de cedencia G_o
2. El coeficiente del plástico de Bingham μ_B

La **ecuación 3.4** describe la reología para el plástico de Bingham.

$$G = G_o - \mu_B \gamma. \dots\dots\dots 3.4$$

La **ecuación 3.5** corresponde a una ecuación tipo Darcy con un fluido plástico de Bingham en coordenadas cartesianas (Yu-Shu Wu et. al, 1992):

$$v_{x,B} = \begin{cases} -\frac{k}{\mu_B} \left(1 - \frac{A}{\left| \frac{\partial p}{\partial x} \right|} \right) \frac{\partial p}{\partial x}, & \left| \frac{\partial p}{\partial x} \right| > A \\ 0 & \left| \frac{\partial p}{\partial x} \right| \leq A \end{cases}, \dots\dots\dots 3.5$$

donde:

$$A = \frac{G_o}{d} \dots\dots\dots 3.6$$

3.1.2 Fluidos Tipo Hershley-Buckley

Este tipo de fluido no-newtoniano se comporta como un plástico de Bingham, ya que de igual manera necesita de un esfuerzo de corte que supere el punto de cendencia para que el fluido comience a fluir. Si el esfuerzo de corte no sobrepasa este valor, el fluido se comportará como un sólido, sin embargo, cuando el esfuerzo de corte supera el punto de cendencia la relación entre esfuerzo de corte y tasa de corte, se comportará como un fluido tipo ley de potencias. La **ecuación 3.7** describe el comportamiento del esfuerzo de corte de este fluido (Ouyang et al., 2013).

$$\begin{cases} G = G_0 + H\gamma^n & , & |G| > G_0 \\ \gamma = 0 & , & |G| \leq G_0 \end{cases} \dots\dots\dots 3.7$$

En la **Figura 3.2** se muestra el esfuerzo de corte contra la tasa de corte, en la cual se observa el comportamiento típico del fluido no-newtoniano Hershley-Burckley.

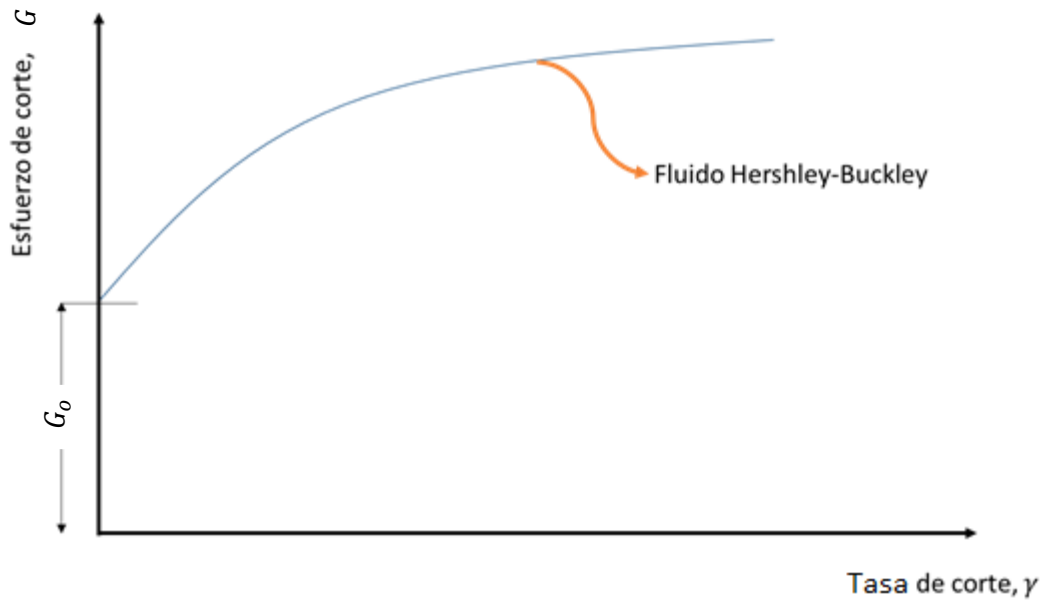


Figura 3.2: Comportamiento del fluido no-newtoniano Hershey-Buckley de acuerdo al esfuerzo de corte.

La **ecuación 3.8** de tipo Darcy describe el movimiento a través de un medio poroso para un fluido tipo Hershey-Buckley (Yi, 2004).

$$v_{H-B} = -\frac{kk_{r,H-B}}{\mu_{H-B}} \frac{\partial p}{\partial L}, \dots\dots\dots 3.8$$

$$\mu_{H-B} = \begin{cases} \frac{kk_r \left(-\frac{\partial p}{\partial L}\right)}{\left[\frac{kk_r}{\mu_{eff,H-B}} \left(\left(-\frac{\partial p}{\partial L}\right) - \sigma\tau_0\right)\right]^{\frac{1}{n}}} & \left(-\frac{\partial p}{\partial L}\right) > \sigma\tau_0 \\ +\infty & \left(-\frac{\partial p}{\partial L}\right) < \sigma\tau_0 \end{cases}, \dots\dots\dots 3.9$$

donde:

$$\mu_{eff,H-B} = \frac{H}{12} \left(9 + \frac{3}{n}\right)^n (72C\phi(S_{H-B} - S_{ir,H-B})kk_{r,H-B})^{\frac{1-n}{2}}, \dots\dots\dots 3.10$$

$$\sigma = N_n \sqrt{\frac{\phi(S_{H-B} - S_{ir,H-B})C}{2kk_{r,H-B}}}, \dots\dots\dots 3.11$$

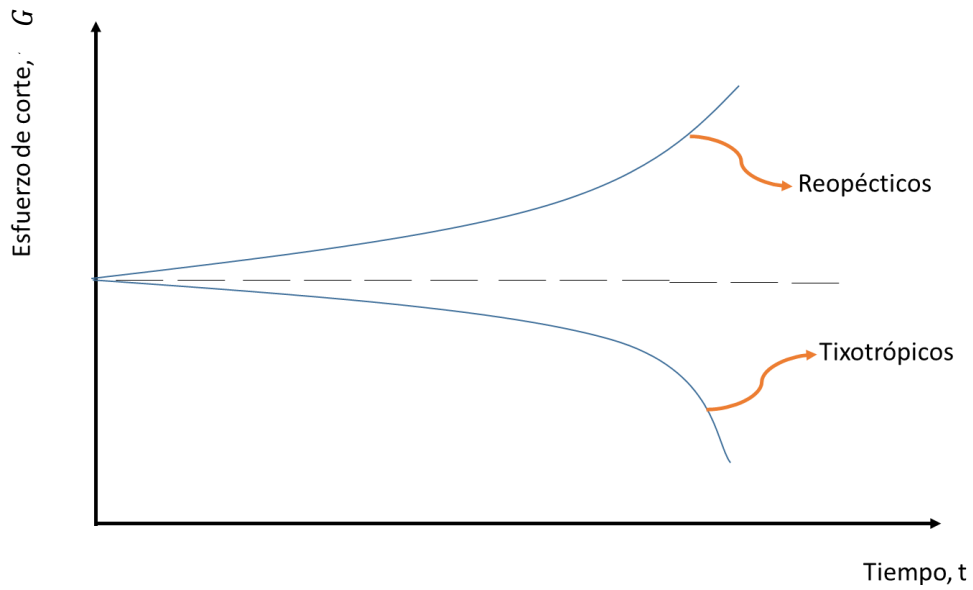
$$N_n = \frac{3n + 1}{2n + 1} - \frac{3}{16} \frac{(3n + 1)(1 - n)}{(2n + 1)^2(n + 1)}. \dots\dots\dots 3.12$$

3.2 Fluidos no-newtonianos dependientes del tiempo

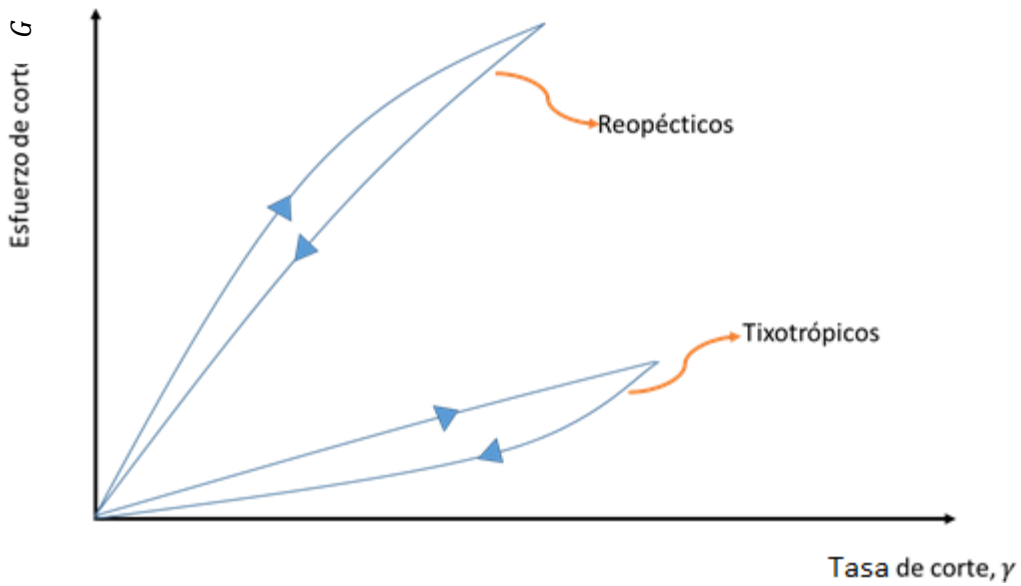
Estos fluidos dependen la tasa, esfuerzo e histórico de corte a los que se haya sometido el fluido. Estos se clasifican en tixotrópicos y reopécticos (Yu-Shu Wu, 1990).

En la **Figura 3.3 (a)** se observa que a medida que pasa el tiempo de corte, el esfuerzo de corte tendrá que ser mayor para que el fluido reopéctico tenga movilidad. Por otro lado, en un fluido tixotrópico a medida que pasa el tiempo de corte, el esfuerzo de corte será menor para que el fluido tenga movilidad.

En la **Figura 3.3 (b)** se muestra la dependencia del historial de la tasa de corte que se le ha aplicado al fluido, ya sea reopéctico o tixotrópico. Esta historia puede aumentar o disminuir.



(a) Comportamiento del fluido no-newtoniano bajo un esfuerzo de corte dado.



(b) Comportamiento del fluido no-newtoniano con una dependencia a una historia de tasa de corte.

Figura 3.3: Comportamiento de los fluidos no-newtonianos tixotrópicos y reopécticos en curvas dependientes del tiempo.

3.3 Fluidos visco-elásticos

Estos fluidos exhiben ambas propiedades: viscosas y elásticas, ya que estos empiezan a fluir cuando se le aplica un esfuerzo de corte y recupera su forma de manera parcial cuando ya no le es aplicado (Yu-Shu Wu, 1990). La **ecuación 3.42** describe el comportamiento reológico de este fluido, dicha ecuación fue propuesta por Maxwell (Skelland, 1967).

$$G = \mu \frac{d\gamma}{dt} - \frac{\mu}{\lambda} \frac{dG}{dt} \dots\dots\dots \mathbf{3.22}$$

Como se puede observar de la ecuación 3.42 no es posible determinar una relación entre el esfuerzo de corte y la tasa de corte por si solas.

Los fluidos con esta reología se han usado ampliamente en la industria petrolera en forma de surfactantes en operaciones de estimulación y terminación de pozos; ya que mantienen una formación baja de daño en las vecindades (Crews y Huang, 2008). Dado que este efecto sólo se presenta en pequeñas cantidades en las vecindades del pozo y que el aceite, en una escala macroscópica, no se comporta como un fluido visco-elástico, suele considerarse despreciable cuando el fluido no-newtoniano fluye a través de un medio poroso.

Capítulo 4. Desarrollo de la herramienta de cómputo para fluidos con reología tipo ley de potencias

En el presente capítulo se explican las bases teóricas de la herramienta de cómputo desarrollada en el lenguaje de programación C#. Estas permitió reproducir los resultados a los que llegaron Ikoku y Ramey (1980) considerando condiciones de frontera interna y externa para un yacimiento infinito que produce fluidos de reología tipo ley de potencias a gasto constante; de manera similar, se plantean las modificaciones propuestas a las condiciones de frontera para yacimientos cerrados.

La finalidad de la herramienta es exponer la extensión de la aplicación de los modelos de Arps-Fetkovich y la validación de los modelos de Arps para fluidos que presentan un comportamiento dilatante o pseudo-plástico. Por ello, tanto en el caso de yacimiento infinito como en el de un yacimiento cerrado, se presentan las condiciones matemáticas que plantean como constante al gasto y a la presión de fondo; mismas que son necesarias para resolver la ecuación diferencial parcial no-lineal que describe el flujo de fluidos con reología no-newtoniana en el medio poroso. Posteriormente, se presentan los gráficos de las soluciones obtenidas para diferentes valores del índice de flujo, n , a diversos radios adimensionales.

La solución se obtiene numéricamente a través del método de Douglas Jones, usando Microsoft Visual Studio, el cual se eligió por su interfaz gráfica y la familiarización con el lenguaje C#. Durante la obtención de los resultados, uno de los obstáculos fue el tiempo requerido por los equipos de cómputo para obtener cada una de las curvas que se presentan. Sin embargo, se realizaron ajustes a la programación para optimizar el funcionamiento de la herramienta.

4.1 Planteamiento de la problemática

Considerando la ecuación de flujo para fluidos tipo ley de potencias de Blake-Kozeny junto con la ecuación de continuidad; se obtiene el modelo inicial con la **ecuación 4.1**, propuesto por Ikoku y Ramey (1980):

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{n}{r} \frac{\partial p}{\partial r} = c_t \phi n \left(\frac{\mu_{eff}}{k_r} \right)^{\frac{1}{n}} \left(-\frac{\partial p}{\partial r} \right)^{\frac{n-1}{n}} \frac{\partial p}{\partial t}, \dots\dots\dots 4.1$$

Dicho modelo está bajo las siguientes condiciones

$$p(r, t = 0) = p_i, \dots\dots\dots 4.2$$

$$\left(-\frac{\partial p}{\partial r} \right)_{r=r_w} = \left(\frac{q}{2\pi h r_w} \right)^n \frac{\mu_{eff}}{k_r}, \quad \text{para todo } t \dots\dots\dots 4.3$$

$$p(r \rightarrow \infty, t > 0) = p_i. \dots\dots\dots 4.4$$

Para generalizar los análisis de datos de producción se define el siguiente grupo de ecuaciones

$$p_{DNN} = \frac{k}{\mu_{eff} r_w^{1-n}} \left(\frac{2\pi h}{qB} \right)^n (p - p_i), \dots\dots\dots 4.5$$

$$r_D = \frac{r}{r_w}, \dots\dots\dots 4.6$$

$$t_{DNN} = \frac{\eta_{NN}}{r_w^{3-n}} t, \dots\dots\dots 4.7$$

$$\eta_{NN} = \frac{k}{\mu_{eff} r_w^{1-n}} \left(\frac{2\pi h}{qB} \right)^{n-1}, \dots\dots\dots 4.8$$

$$\mu_{eff} = \frac{k}{12} \left(9 + \frac{3}{n} \right)^n (150 k_r \phi)^{\frac{(1-n)}{2}}. \dots\dots\dots 4.9$$

4.2 Yacimiento infinito produciendo a gasto constante para un fluido tipo ley de potencias

Para reproducir los resultados a los que llegaron Ikoku y Ramey (1980) se realizó una herramienta de cómputo en el lenguaje de programación C#, donde se resolvió la **ecuación 4.10** transformada en coordenadas cartesianas, como se muestra en el **apéndice B**, por medio del algoritmo de Douglas-Jones la derivación a detalle de este método se muestra en el **apéndice A**. Ahora, la ecuación fundamental de flujo que describe este problema es:

$$\frac{\partial^2 p_{DNN}}{\partial x^2} + (n + 1) \frac{\partial p_{DNN}}{\partial x} = e^{\left(\frac{n+1}{n}\right)x} \left(-\frac{\partial p_{DNN}}{\partial x}\right)^{\frac{n-1}{n}} \frac{\partial p_{DNN}}{\partial t_{DNN}}, \dots\dots\dots 4.10$$

mientras que las condiciones asociadas son:

$$p_{DNN}(x, 0) = 0, \dots\dots\dots 4.11$$

$$\left(\frac{\partial p_{DNN}}{\partial x}\right)_{x=1} = -1 \quad \text{para todo } t_{DNN}, \dots\dots\dots 4.12$$

$$p_{DNN}(x, t_{DNN}) \rightarrow 0 \quad \text{cuando } x \rightarrow \infty. \dots\dots\dots 4.13$$

La ecuación 4.10 permite predecir el comportamiento de la presión conforme avanza el tiempo con una reología tipo ley de potencias. Para comparar los resultados generados con la herramienta de cómputo se sobrepusieron en una misma gráfica los resultados obtenidos y la solución analítica (**ecuación 4.14**) propuesta por Ikoku y Ramey (1979).

$$p_{DNNw} \cong \frac{(3 - n)^{\frac{2(1-n)}{3-n}} t_{DNN}^{\frac{1-n}{3-n}}}{(1 - n)\Gamma\left(\frac{2}{3 - n}\right)} - \left(\frac{1}{1 - n}\right). \dots\dots\dots 4.14$$

La solución analítica para un fluido tipo ley de potencias no es válida cuando se tiene un fluido newtoniano ($n = 1$), por lo tanto, en este caso se utilizó la solución línea fuente descrita a través de la **ecuación 4.15**. La función gamma se obtuvo a partir de la aproximación polinomial de Abramowitz y Stegun (1972), en esta solución analítica se

describe el perfil de presión en un yacimiento infinito produciendo a gasto constante para el caso de un fluido con reología newtoniana.

$$p_D = \frac{1}{2} \ln|t_D| + 0.40455. \dots\dots\dots 4.15$$

Para corroborar el comportamiento correcto de los resultados se calculó y graficó la derivada de la solución numérica y la solución línea fuente en un mismo gráfico. Sin embargo, debido a que la función derivada es muy sensible a los datos de presión (Renard et al., 2009) la tendencia de la derivada proporciona un análisis cuantitativo de la representatividad de los resultados generados numéricamente. El cálculo de la función derivada utilizada en este trabajo se realizó con la **ecuación 4.16**.

$$\frac{\Delta(Y_{Dj})}{\Delta(X_{Dj})} = \frac{Y_{Dj+1} - Y_{Dj-1}}{\ln(X_{Dj+1}/X_{Dj-1})} \dots\dots\dots 4.16$$

donde j representa el paso de tiempo en la simulación.

En la **Figura 4.1** se muestra la solución de la ecuación 4.10 y 4.15 para una $n = 1$ con sus respectivas derivadas; el número de celdas de la malla fue de 20 con un espaciamiento de tiempo igual a 1. Posteriormente se mostrará la solución numérica de la ecuación 4.10, para un rango de valores del índice de potencias de $0.6 < n < 1$ (ya que representa el caso de un fluido pseudo-plástico), y se comparará con los resultados de la solución analítica, ecuación 4.14.

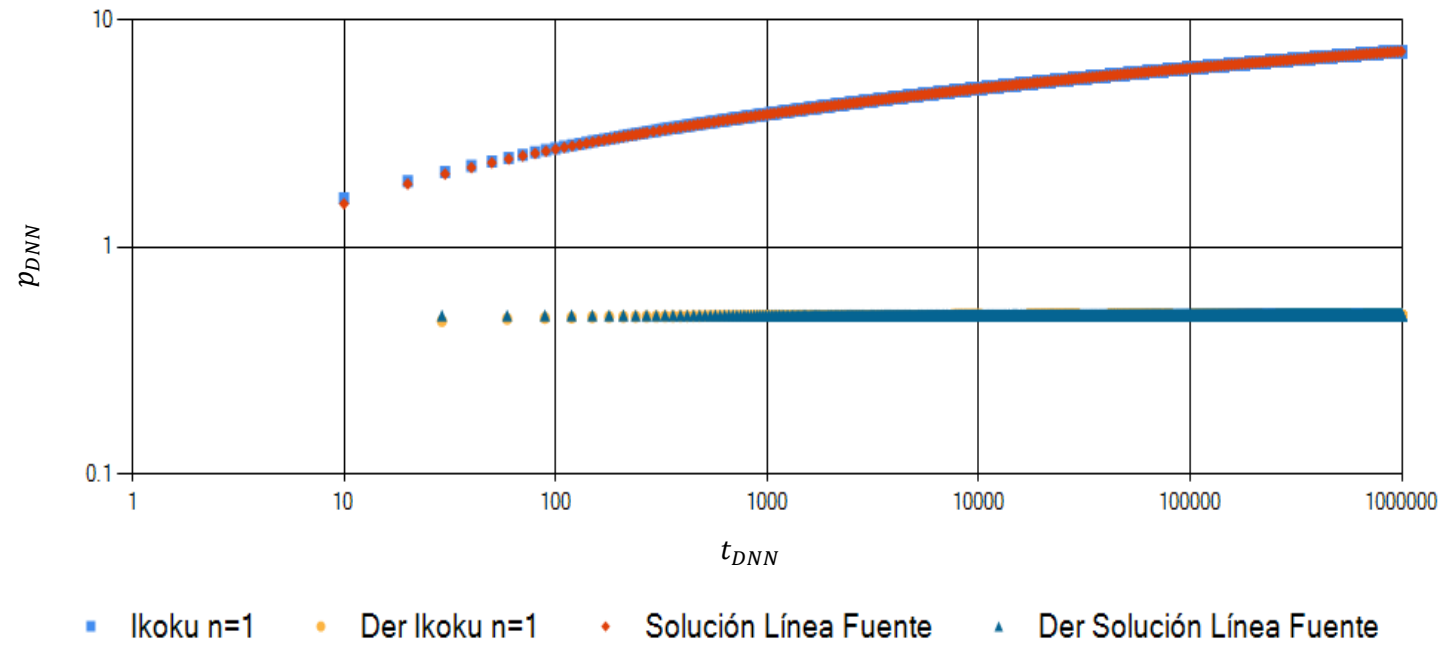


Figura 4.1: Comparación entre la solución numérica para $n = 1$ y la solución línea fuente

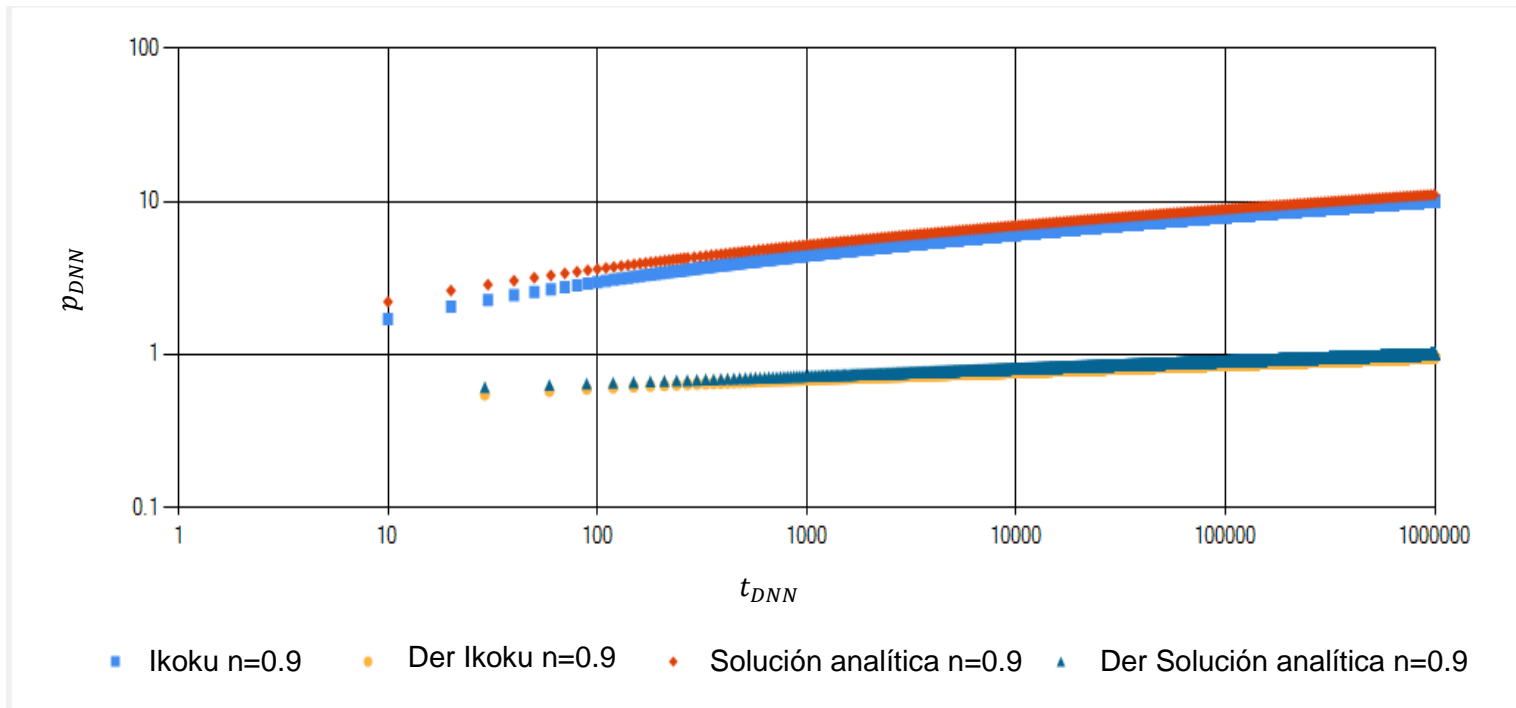


Figura 4.2: Comparación entre la solución numérica y la solución analítica para $n = 0.9$

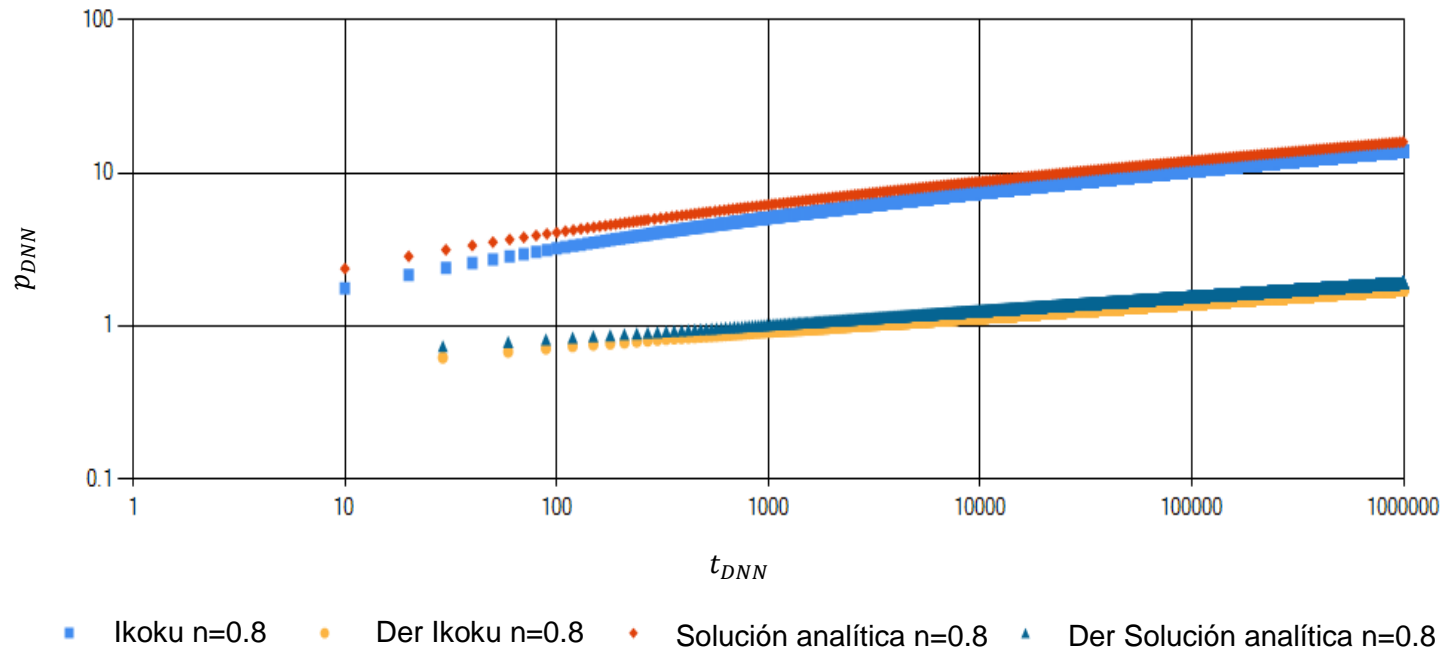


Figura 4.3: Comparación entre la solución numérica y la solución analítica para $n = 0.8$

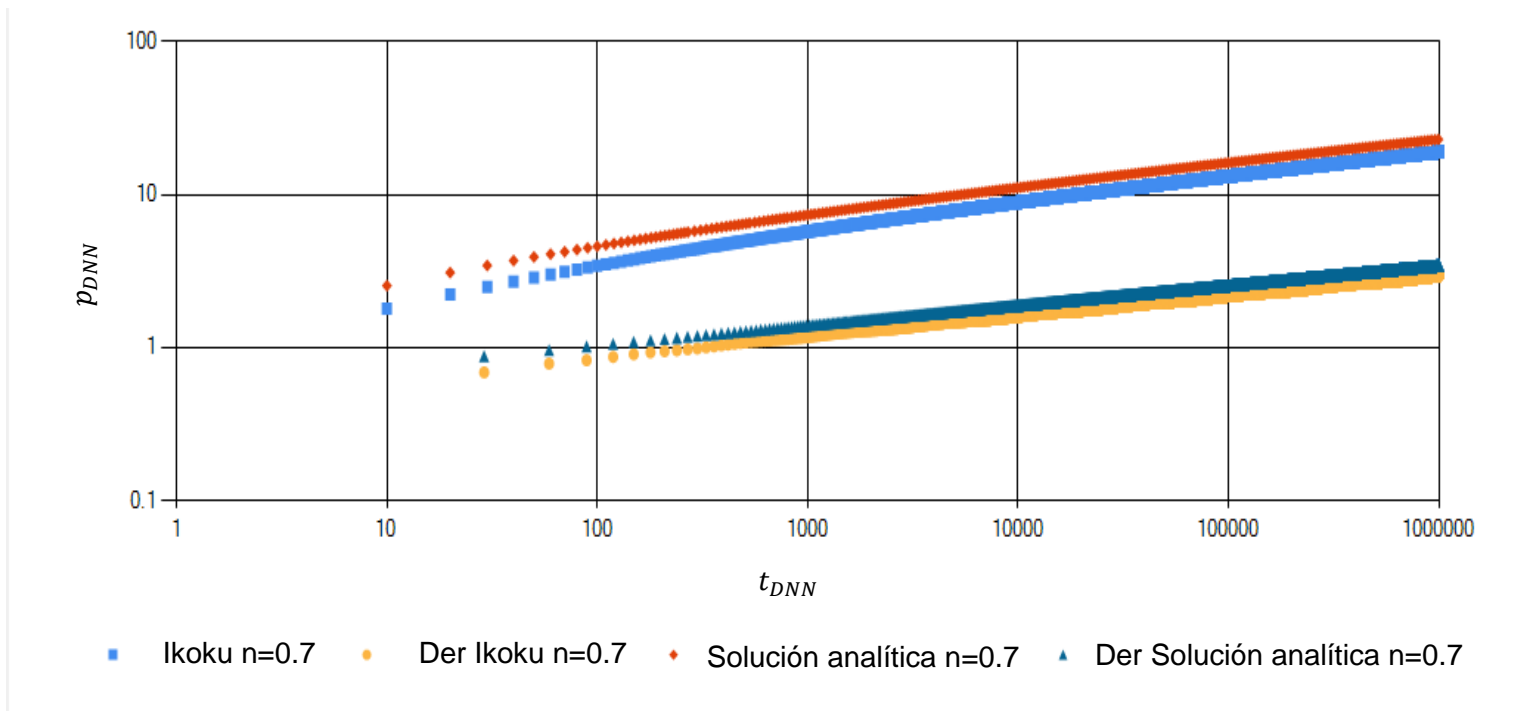


Figura 4.4: Comparación entre la solución numérica y la solución analítica para $n = 0.7$

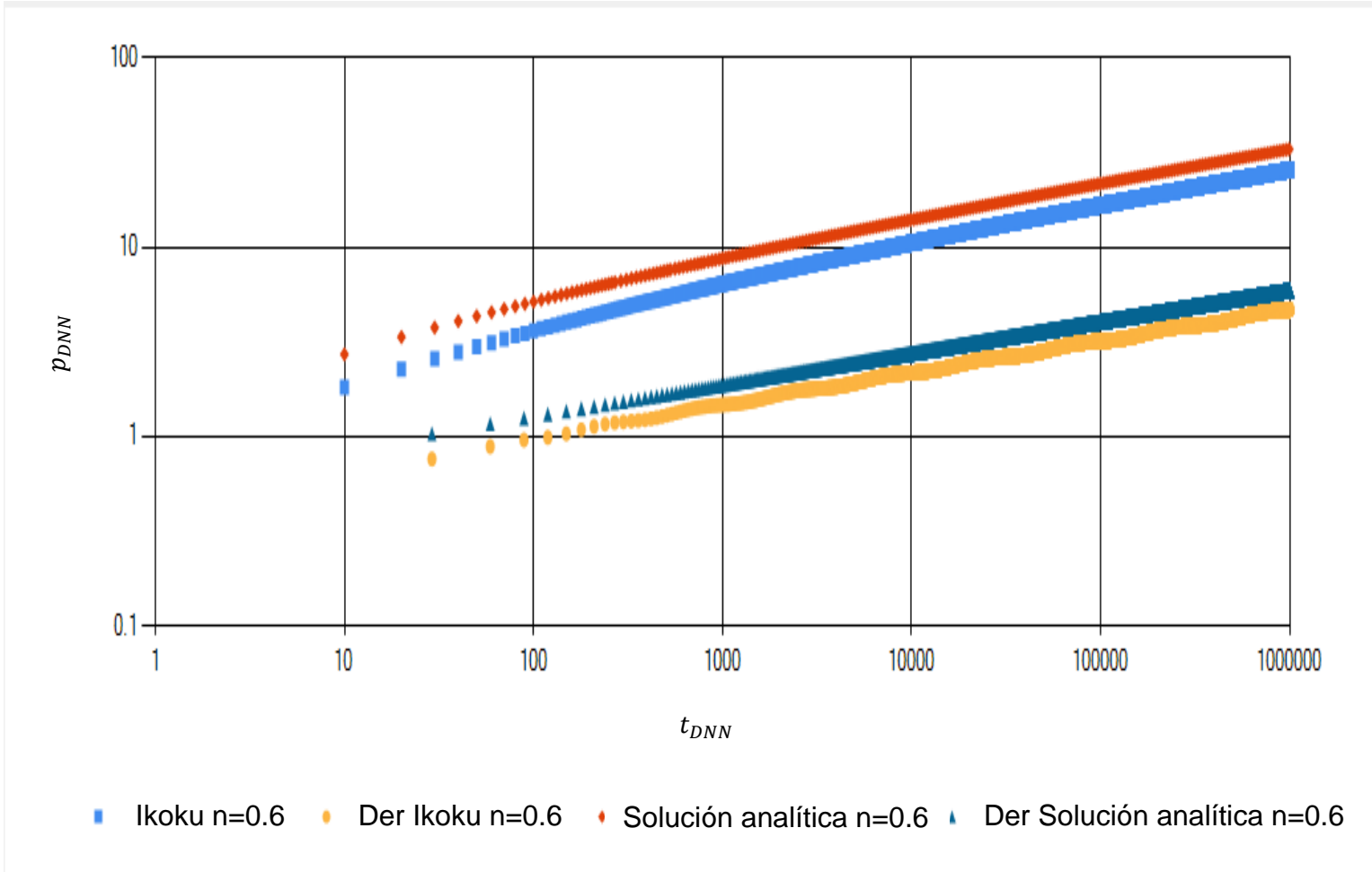


Figura 4.5: Comparación entre la solución numérica y la solución analítica para $n = 0.6$

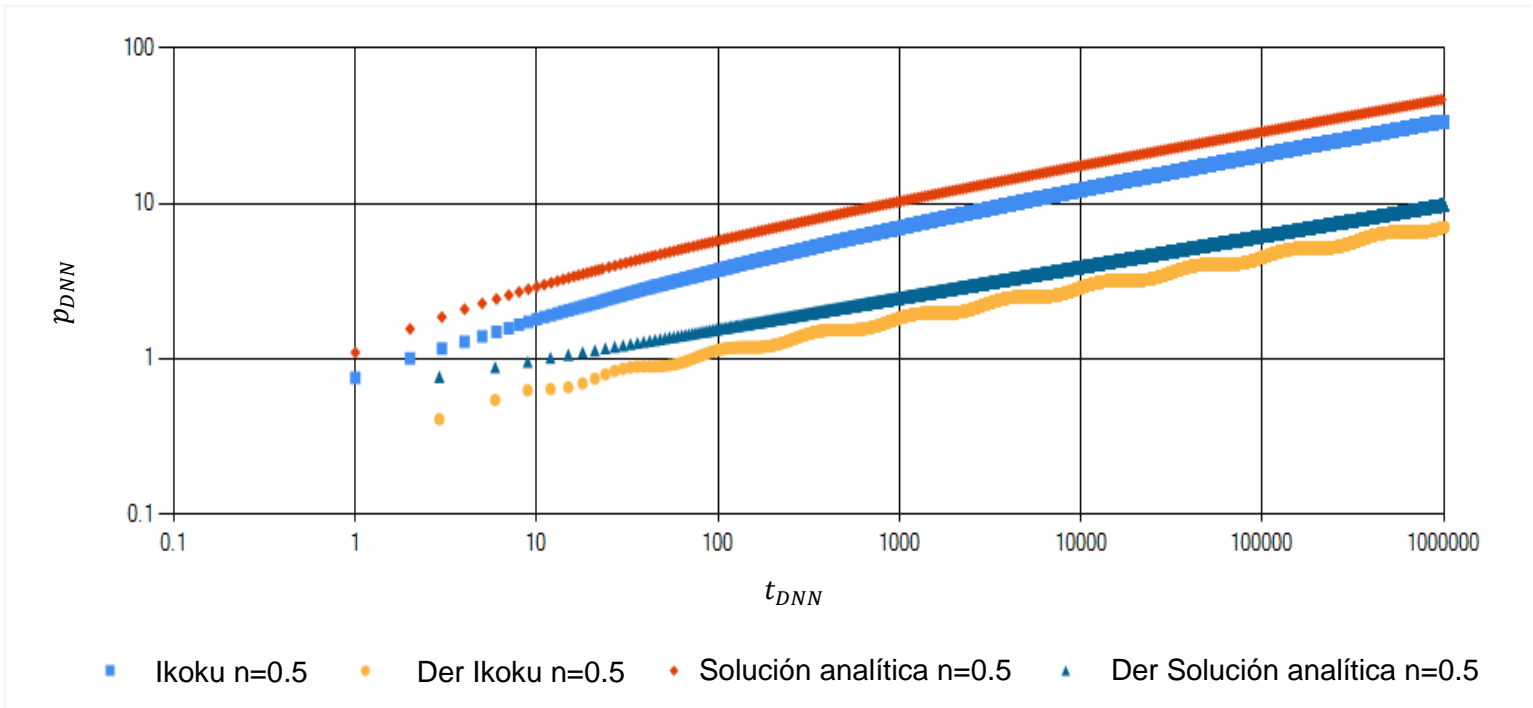


Figura 4.6: Comparación entre la solución numérica y la solución analítica para $n = 0.5$

4.3 Yacimiento infinito produciendo a presión de fondo constante para un fluido no-newtoniano tipo ley de potencias

Para determinar el gasto adimensional para un fluido tipo ley de potencias se consideró el problema original de acuerdo a la ecuación 4.10 con la condición de frontera interna de producción a presión de fondo constante como se muestra en la **ecuación 4.17**.

$$p_{DNN}(x_{D=1}, j) = 1, \quad \text{para todo } t_{DNN} \dots\dots\dots \mathbf{4.17}$$

Mientras que la frontera externa se modela como un yacimiento infinito de acuerdo a la **ecuación 4.13**. El gasto adimensional se determinó como la derivada de la presión con respecto al espacio entre cada celda de la malla como se muestra en la **ecuación 4.18**.

$$q_{DNN} = -\frac{\Delta p_{DNN}}{\Delta x} = -\frac{p_{DNN=2} - p_{DNN=1}}{\Delta x}, \quad \text{para todo } t_{DNN} \dots\dots\dots \mathbf{4.18}$$

En el caso de $n = 1$ la solución analítica se calculó como el inverso de la solución línea fuente y para $n < 1$ las soluciones analíticas se obtuvieron como el inverso de la ecuación 4.14 Cox (1979) y McDonald (1979), como se muestra en la **ecuación 4.19 y 4.20**, respectivamente.

$$q_D = \frac{1}{p_D} = \left(\frac{1}{2} \ln|t_D| + 0.40455\right)^{-1}, \quad \text{para todo } t_{DNN} \dots\dots\dots \mathbf{4.19}$$

$$q_{DNN} = \frac{1}{p_{DNNw}} = \left[\frac{(3-n)^{\frac{2(1-n)}{3-n}} t_{DNN}^{\frac{1-n}{3-n}}}{(1-n)\Gamma\left(\frac{2}{3-n}\right)} - \left(\frac{1}{1-n}\right) \right]^{-1}, \quad \text{para todo } t_{DNN} \dots\dots\dots \mathbf{4.20}$$

En la **figura 4.7** se presenta el gasto adimensional para $n = 1$ generado con la herramienta de cómputo y la nueva condición de frontera interna a través de la ecuación 4.18 y 4.19 respectivamente.

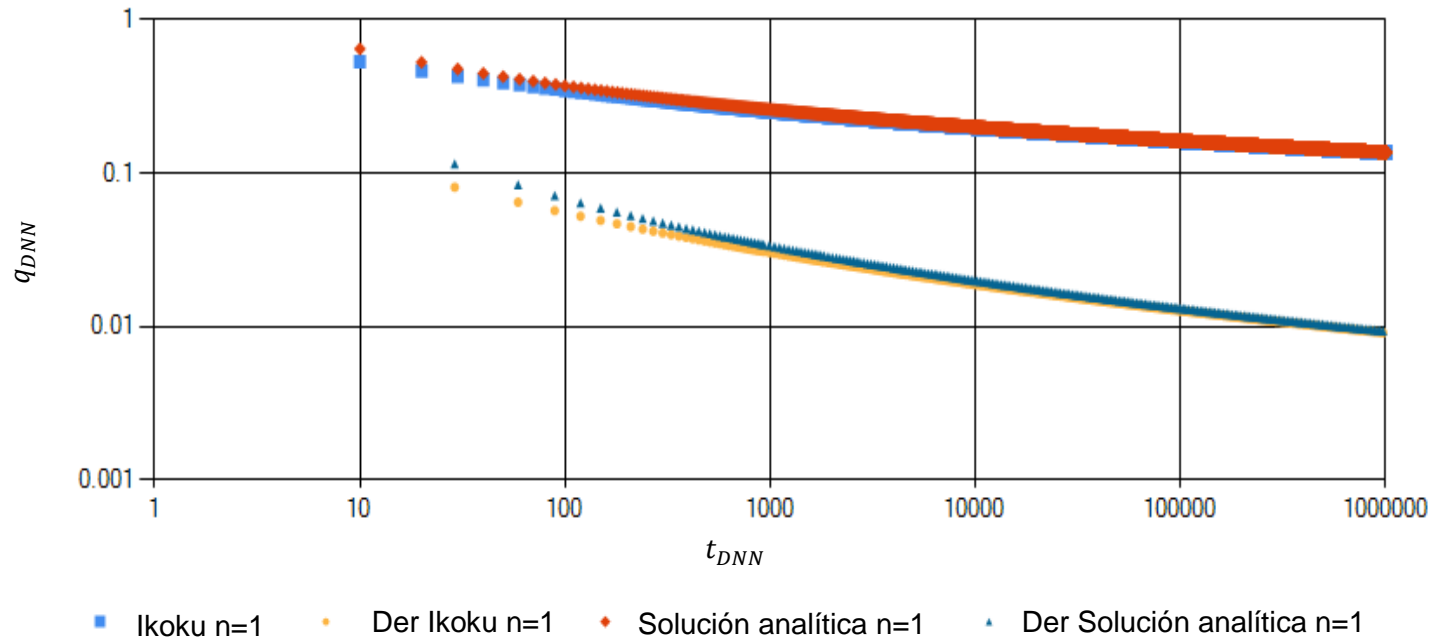


Figura 4.7: Comparación entre la solución numérica y la solución analítica para $n = 1$

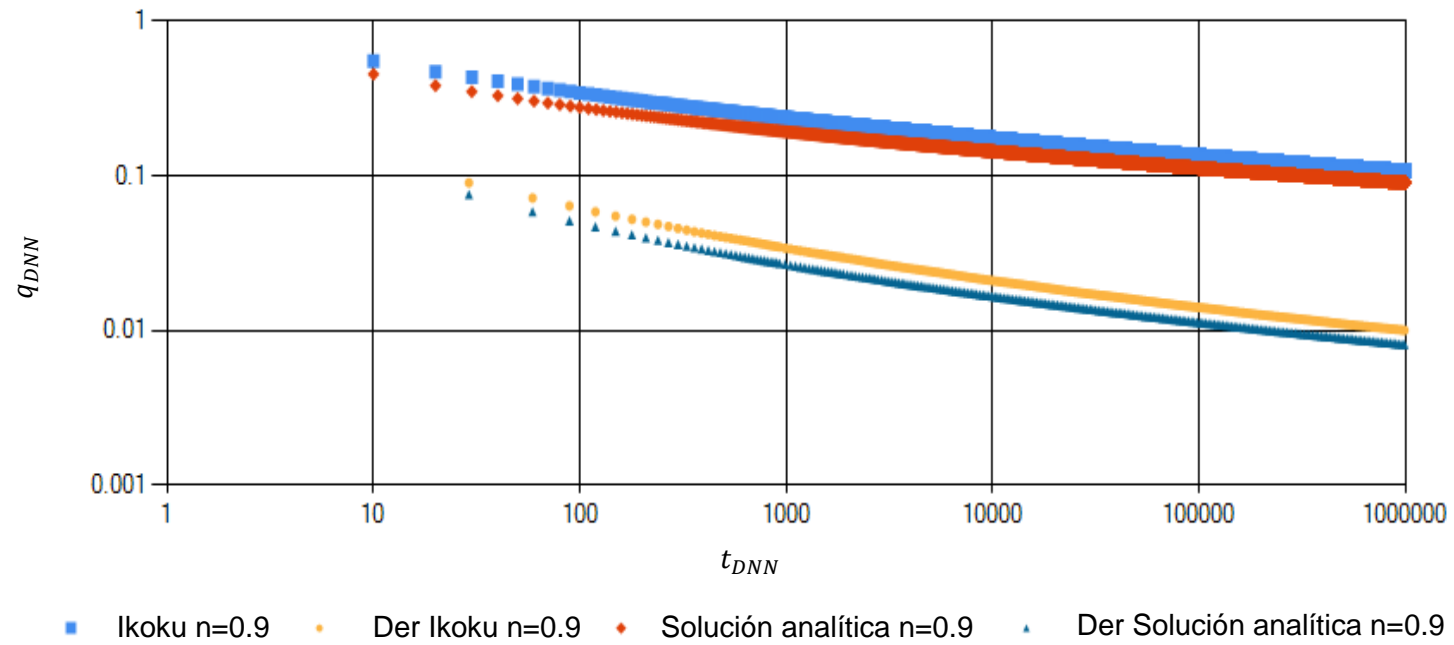


Figura 4.8: Comparación entre la solución numérica y la solución analítica para $n = 0.9$

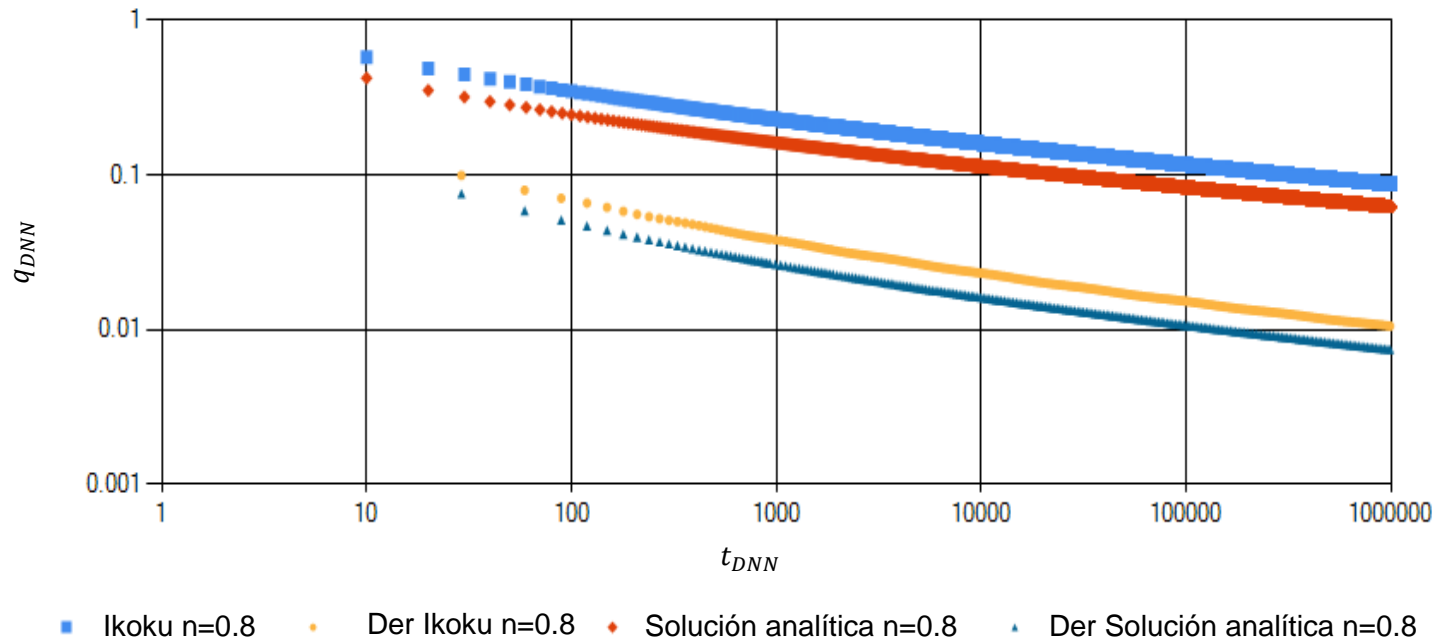


Figura 4.9: Comparación entre la solución numérica y la solución analítica para $n = 0.8$

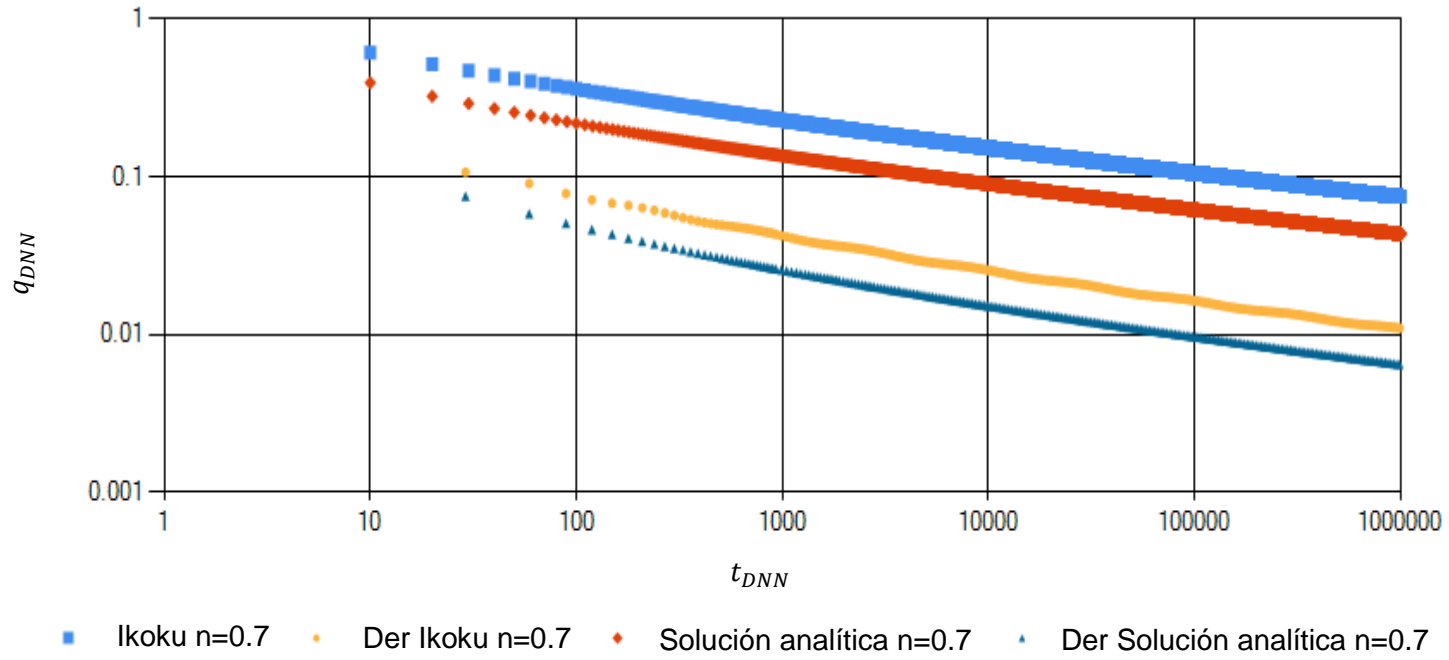


Figura 4.10: Comparación entre la solución numérica y la solución analítica para $n = 0.7$

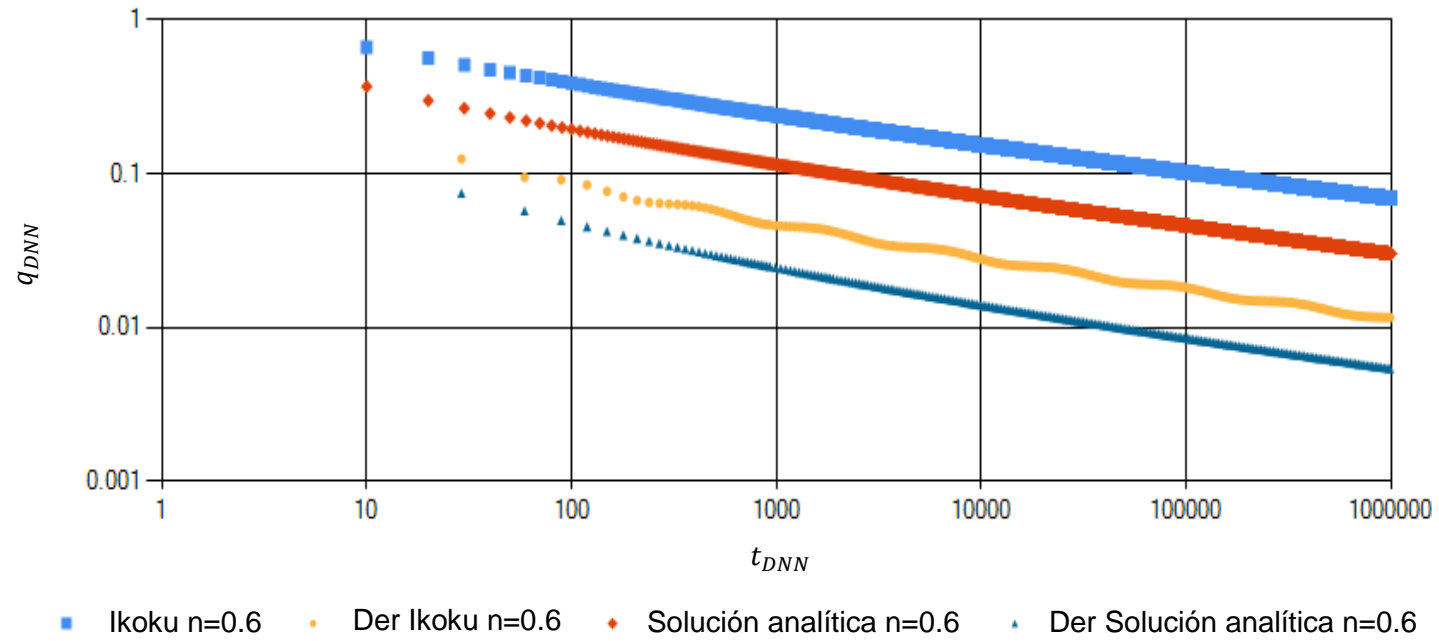


Figura 4.11: Comparación entre la solución numérica y la solución analítica para $n = 0.6$

4.4 Yacimiento cerrado produciendo a gasto constante para un fluido tipo ley de potencias

Este yacimiento se modela **ecuación 4.21**, manteniendo la presión en la frontera externa en y conjunto con el problema inicial descrito por la ecuación 4.10.

$$\left(\frac{\partial p_{DNN}}{\partial x}\right)_{x=N} = 0 \quad \text{para todo } t_{DNN}. \dots\dots\dots \mathbf{4.21}$$

Por otra parte, la condición de frontera interna se mantuvo a gasto constante de acuerdo a la ecuación 4.12. De la **figura 4.12** a la **figura 4.14** se muestra el comportamiento del perfil de presión con sus respectivas derivadas para este tipo de yacimiento; a radios fijos de 10,100 y 1000 con un rango de valores del índice de potencias de $0.6 < n < 1$. En estas figuras se observan que a tiempos largos, la presión reconoce las fronteras y por ende el yacimiento se encuentra en un estado pseudo-estacionario. Todas las curvas, tanto de presión como sus respectivas derivadas, presentan una pendiente unitaria una vez que el yacimiento se encuentra gobernado por las fronteras.

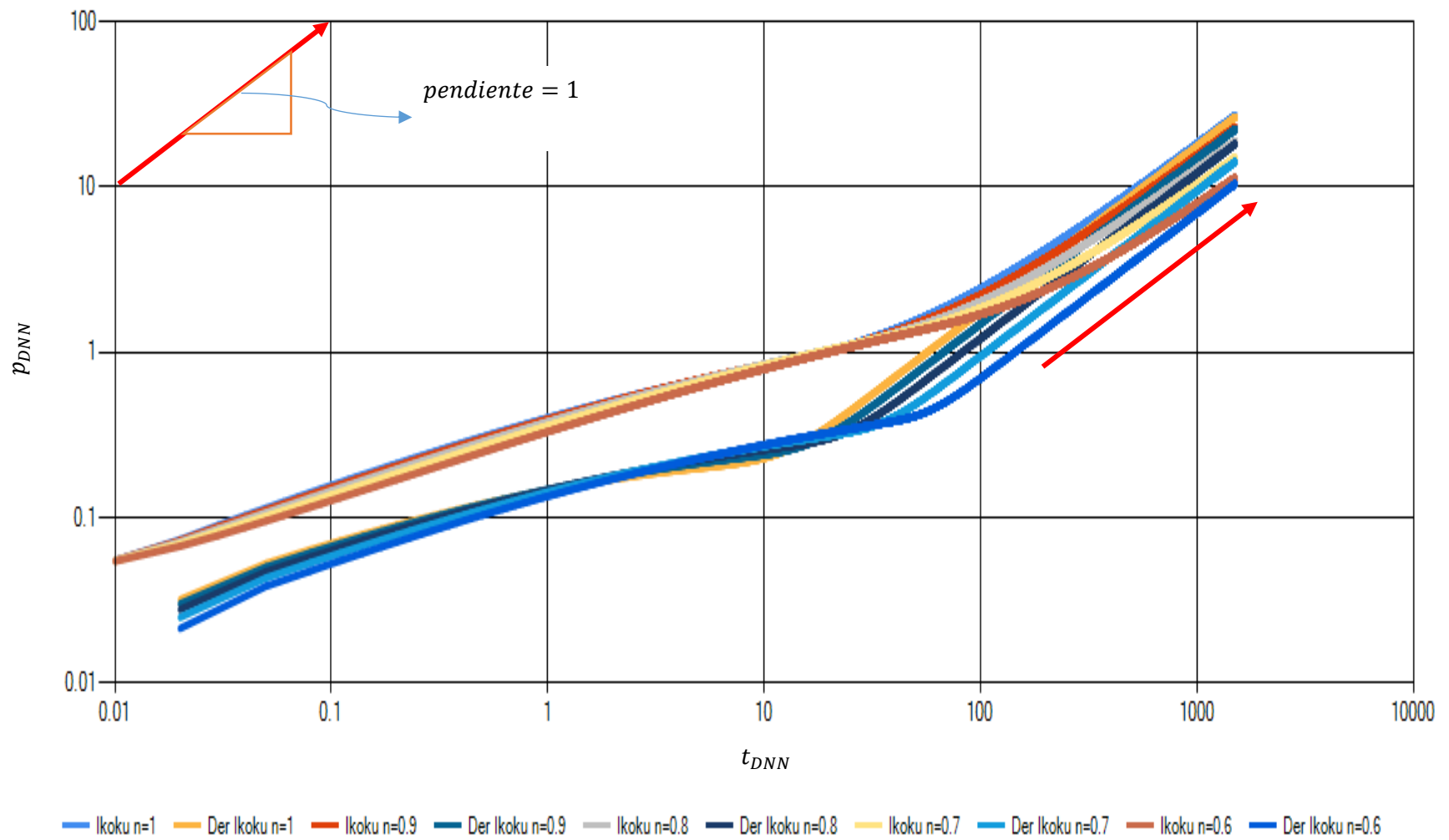


Figura 4.12: Solución numérica y su derivada para los fluidos pseudo-plásticos con un $r_{eD} = 10$

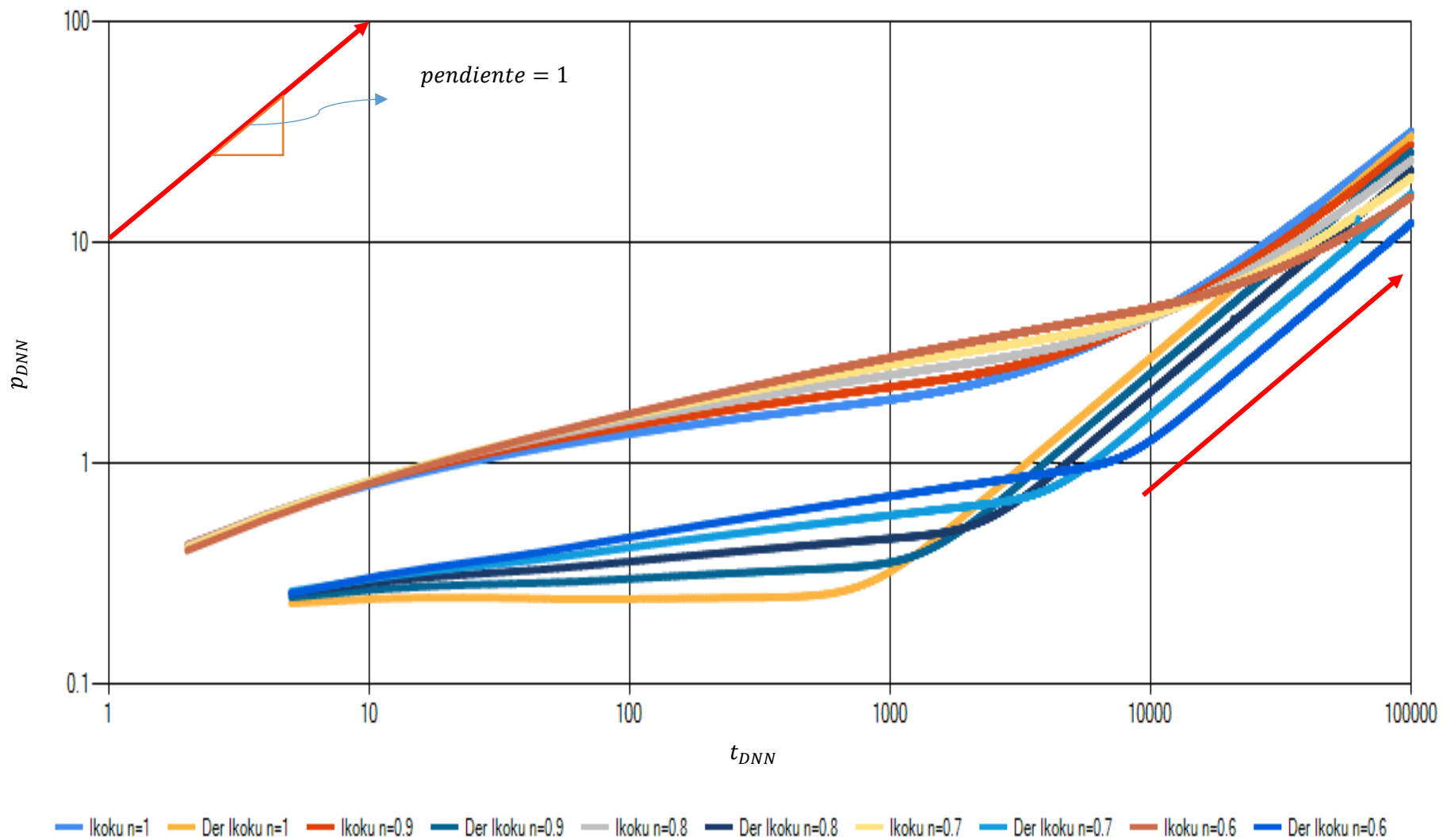


Figura 4.13: Solución numérica y su derivada para los fluidos pseudo-plásticos con un $r_{eD} = 100$

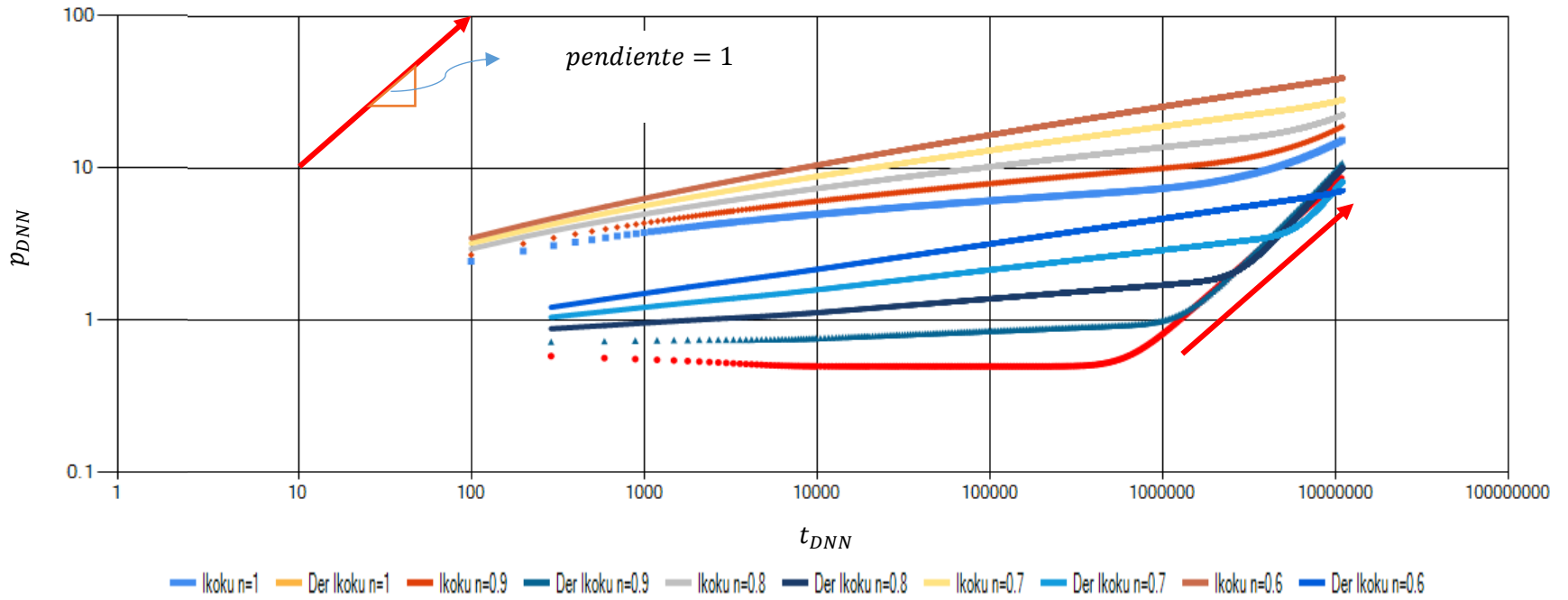


Figura 4.14: Solución numérica y su derivada para los fluidos pseudo-plásticos con un $r_{eD} = 1000$

4.5 Yacimiento cerrado produciendo a presión de fondo constante para un fluido tipo ley de potencias

Para este caso, al yacimiento se le cambio la condición de frontera externa para formar un mantenimiento de presión expresado por la ecuación 4.21. Se retomó el problema original de la ecuación 4.10, la condición inicial de la ecuación 4.11 y el pozo produciendo a presión de fondo constante a través de la ecuación 4.17. Se construyeron las figuras **4.15, 4.16, 4.17, 4.18 y 4.19.**

A continuación se muestran las figuras generadas con la herramienta de cómputo para valores del índice de potencias de $0.6 < n < 1$ con radios externos adimensionales fijos de 10, 100 y 1000. En estas, se observa que para todos los valores de n , los radios empalman con sus curvas en el periodo infinito de acuerdo a la magnitud del radio. Posteriormente, cuando se reconocen las fronteras del yacimiento, el gasto comienza a declinar. Además, cuando n tiende a disminuir, el impulso de la presión tarda más tiempo en reconocer las fronteras y la pendiente presenta una declinación más armónica.

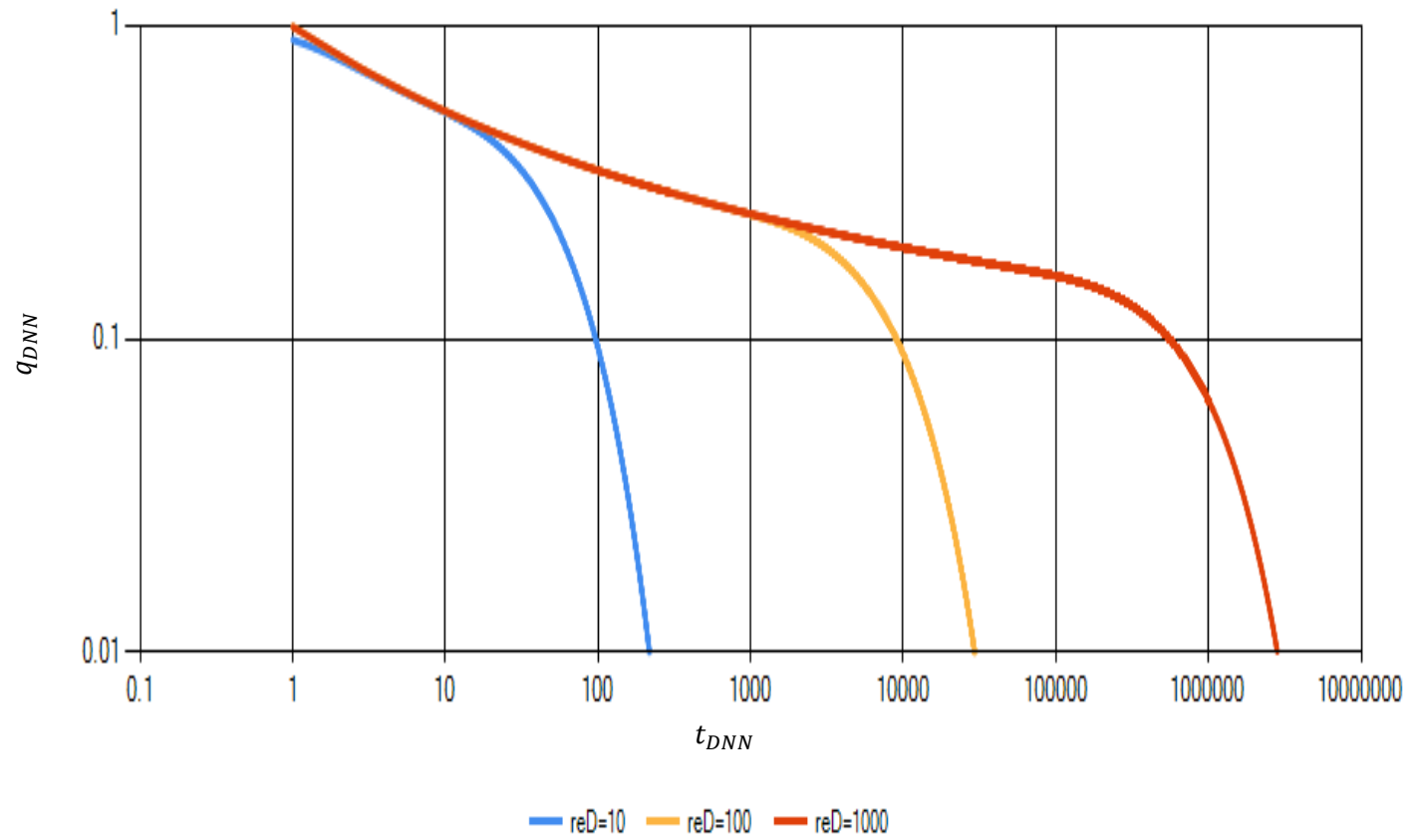


Figura 4.15: Solución numérica para los fluidos pseudo-plásticos con una $n = 1$

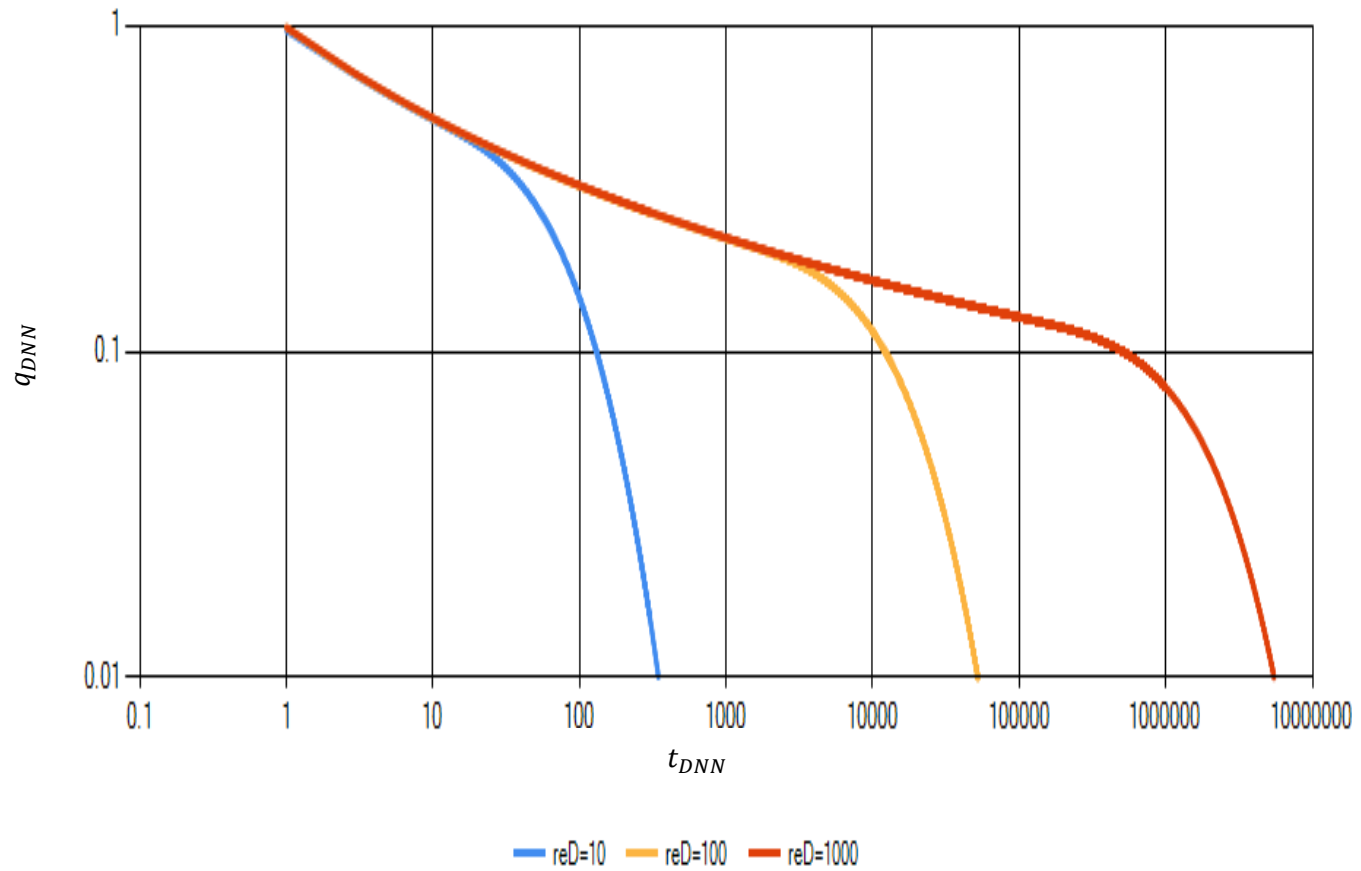


Figura 4.16: Solución numérica para los fluidos pseudo-plásticos con una $n = 0.9$

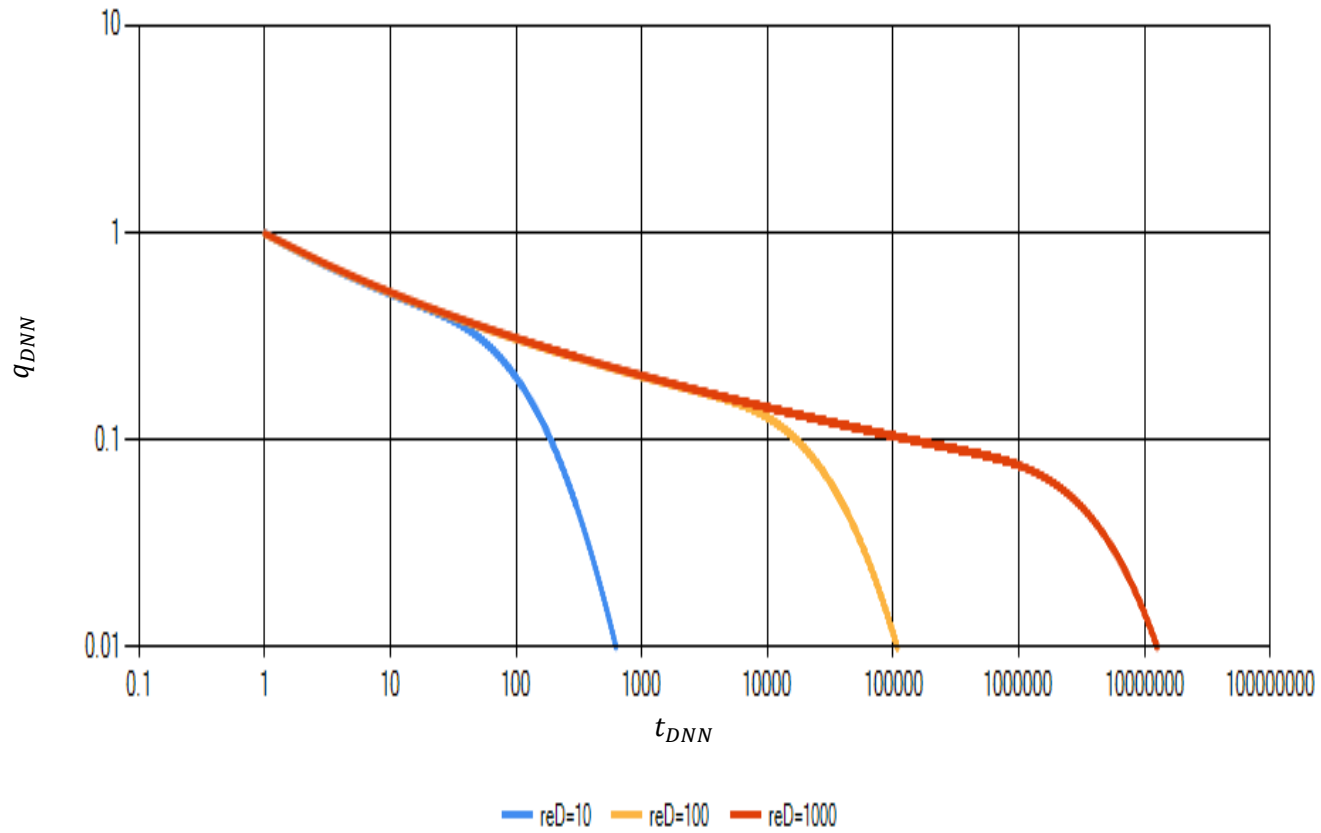


Figura 4.17: Solución numérica para los fluidos pseudo-plásticos con una $n = 0.8$

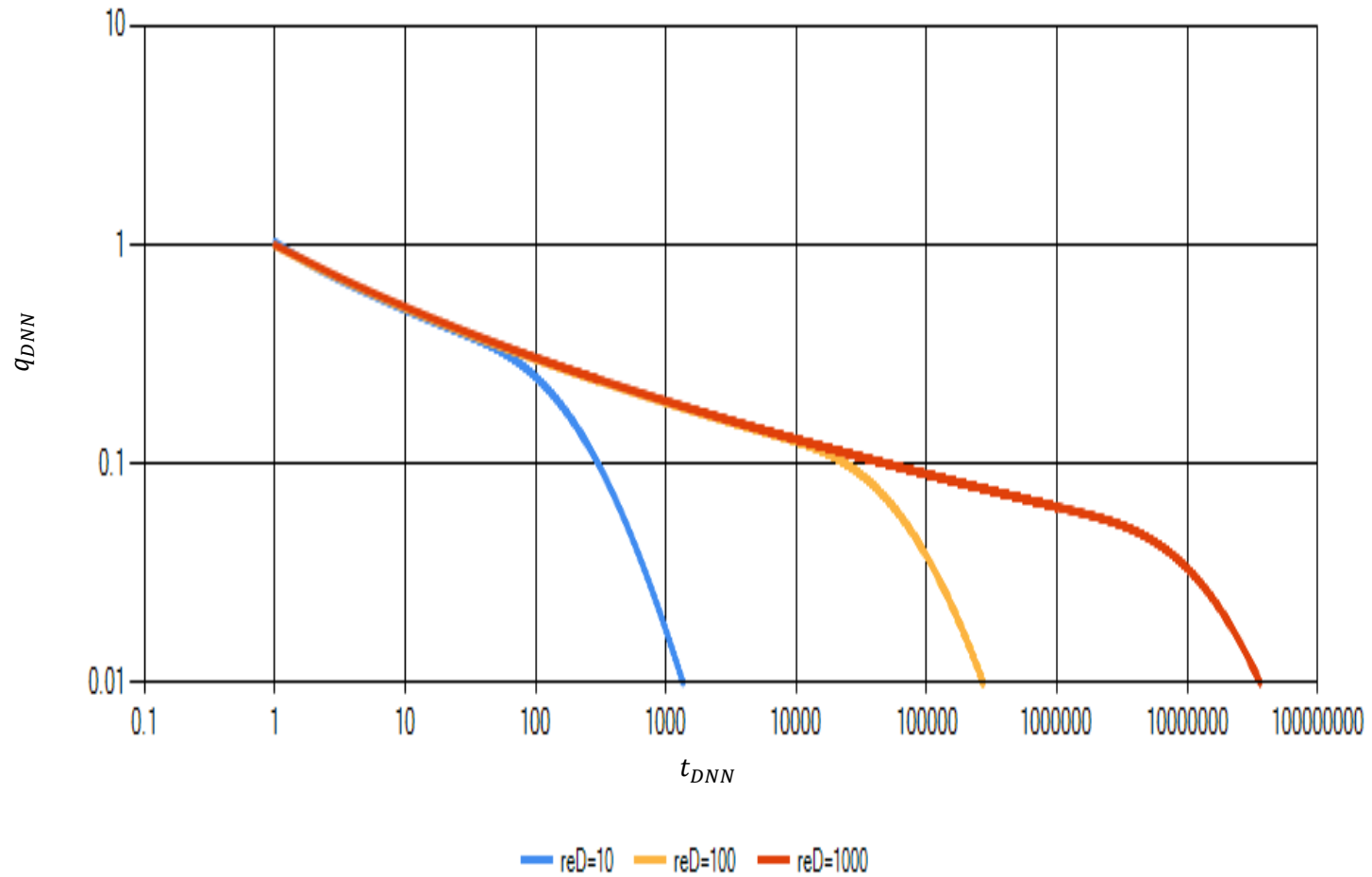


Figura 4.18: Solución numérica para los fluidos pseudo-plásticos con una $n = 0.7$

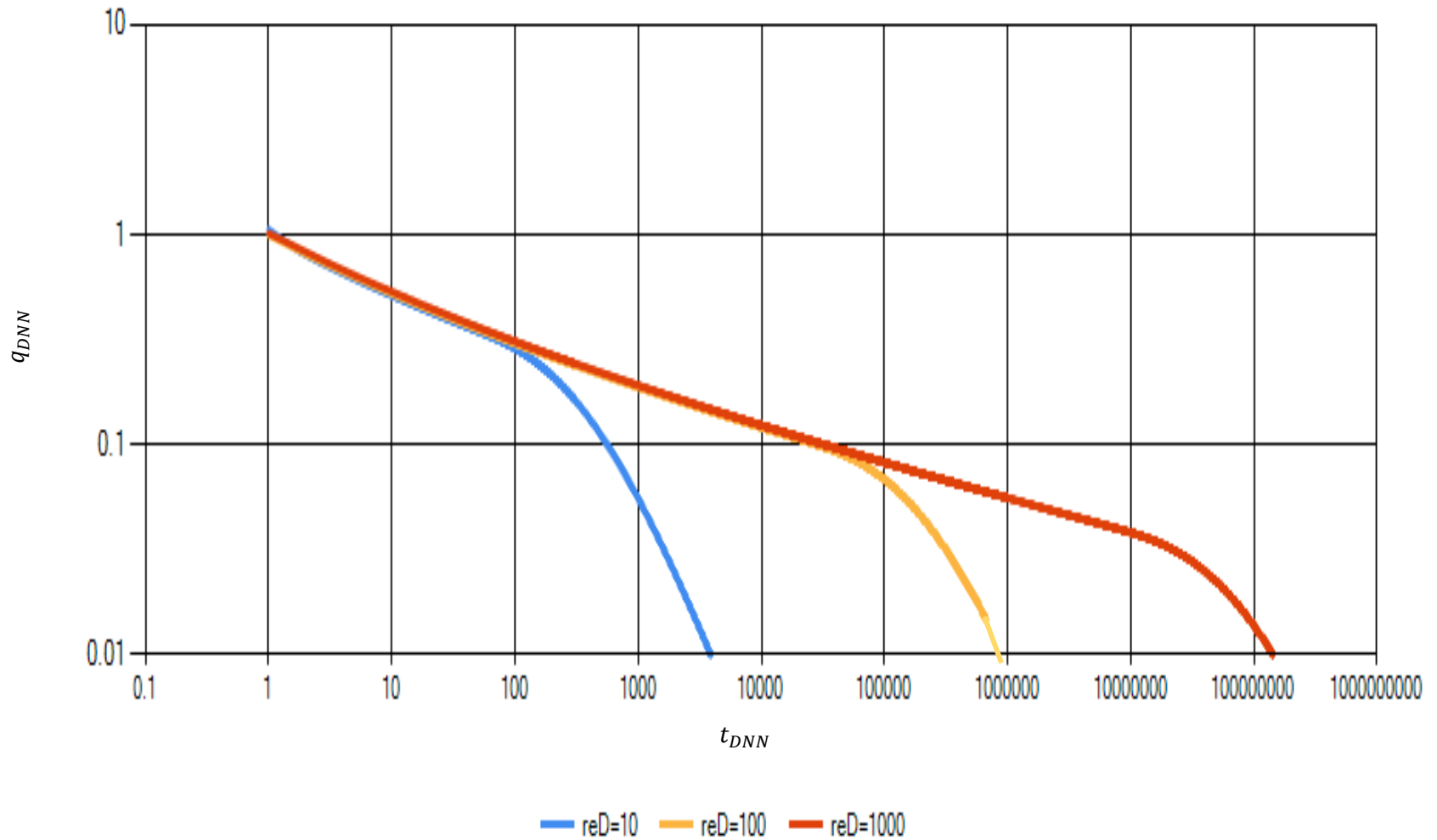


Figura 4.19: Solución numérica para los fluidos pseudo-plásticos con una $n = 0.6$

4.6 Modelos de Arps-Fetkovich para fluidos pseudo-plásticos

Los modelos de Arps-Fetkovich se utilizan para hacer estimaciones de abandono de producción en un yacimiento, así como el para el cálculo de reservas de hidrocarburos. Sin embargo, estos se desarrollaron para un fluido newtoniano.

En el presente trabajo se pretende aproximar dichos modelos a una reología tipo ley de potencias. Debido a que las gráficas de presión contra tiempo, para el caso de un yacimiento cerrado produciendo a presión de fondo constante con diferentes n arrojaron pendientes unitarias a tiempos largos, se aplicarán las soluciones de Arps-fetkovich a los resultados obtenidos del simulador para aproximarlas a la reología deseada. Estos modelos son representados a través de las ecuaciones 2.5 y 2.12, y al aplicarlos a las soluciones obtenidas se expresan como:

$$q_{DNNd} = q_{DNN} \left[\ln|r_{eD}| - \frac{1}{2} \right] = \alpha q_{DNN}, \dots\dots\dots 4.22$$

$$t_{DNNd} = t_{DNN} \left[\frac{2}{(r_{eD}^2 - 1)(\ln|r_{eD}| - \frac{1}{2})} \right] = \beta t_{DNN}. \dots\dots\dots 4.23$$

Así, las ecuaciones 4.22 y 4.23 reproducen los modelos de Arps-Fetkovich para un fluido tipo ley de potencias.

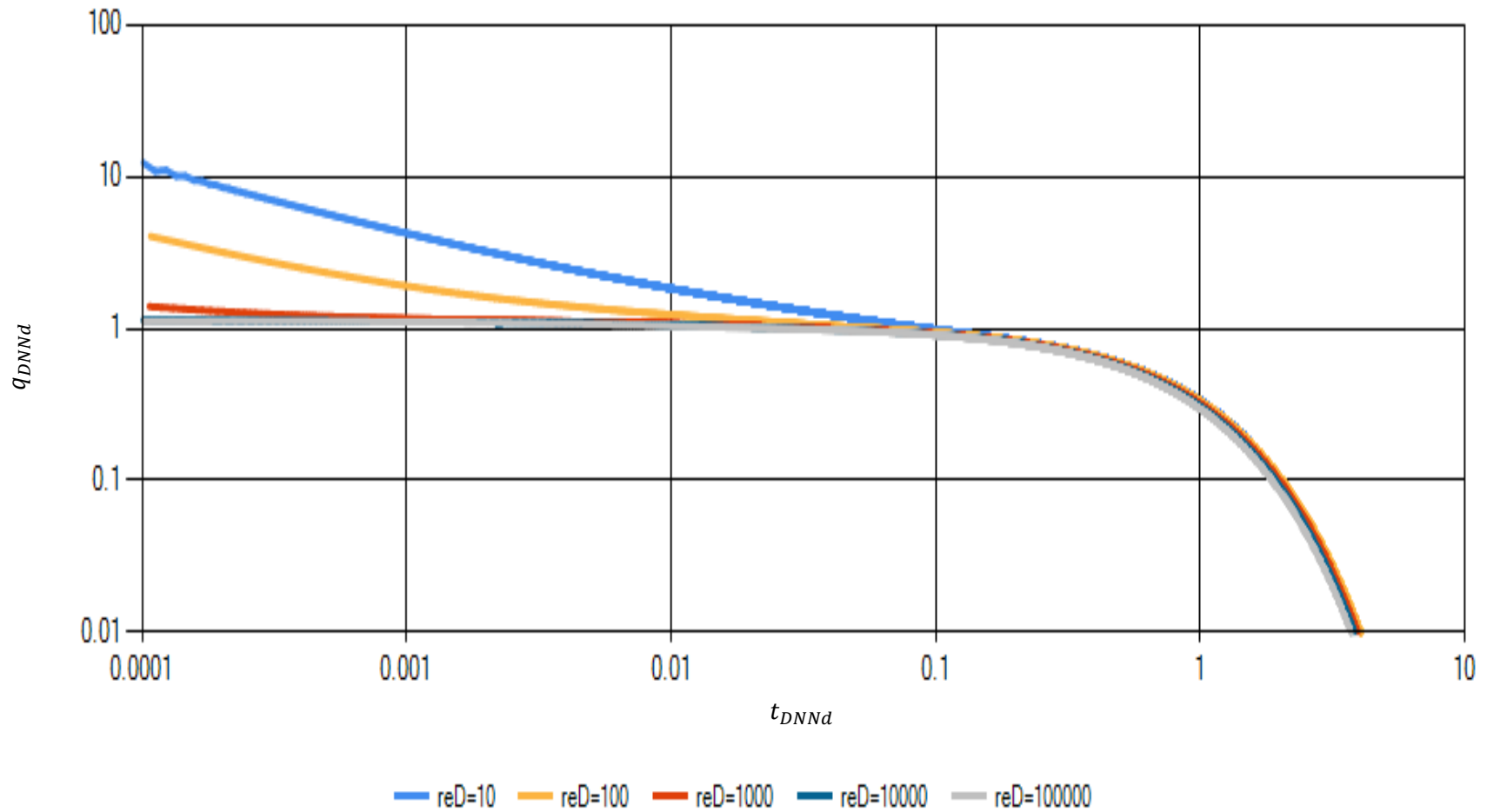


Figura 4.20: Solución numérica para fluidos pseudo-plásticos con $n = 1$ usando las soluciones de Arps-Fetkovich

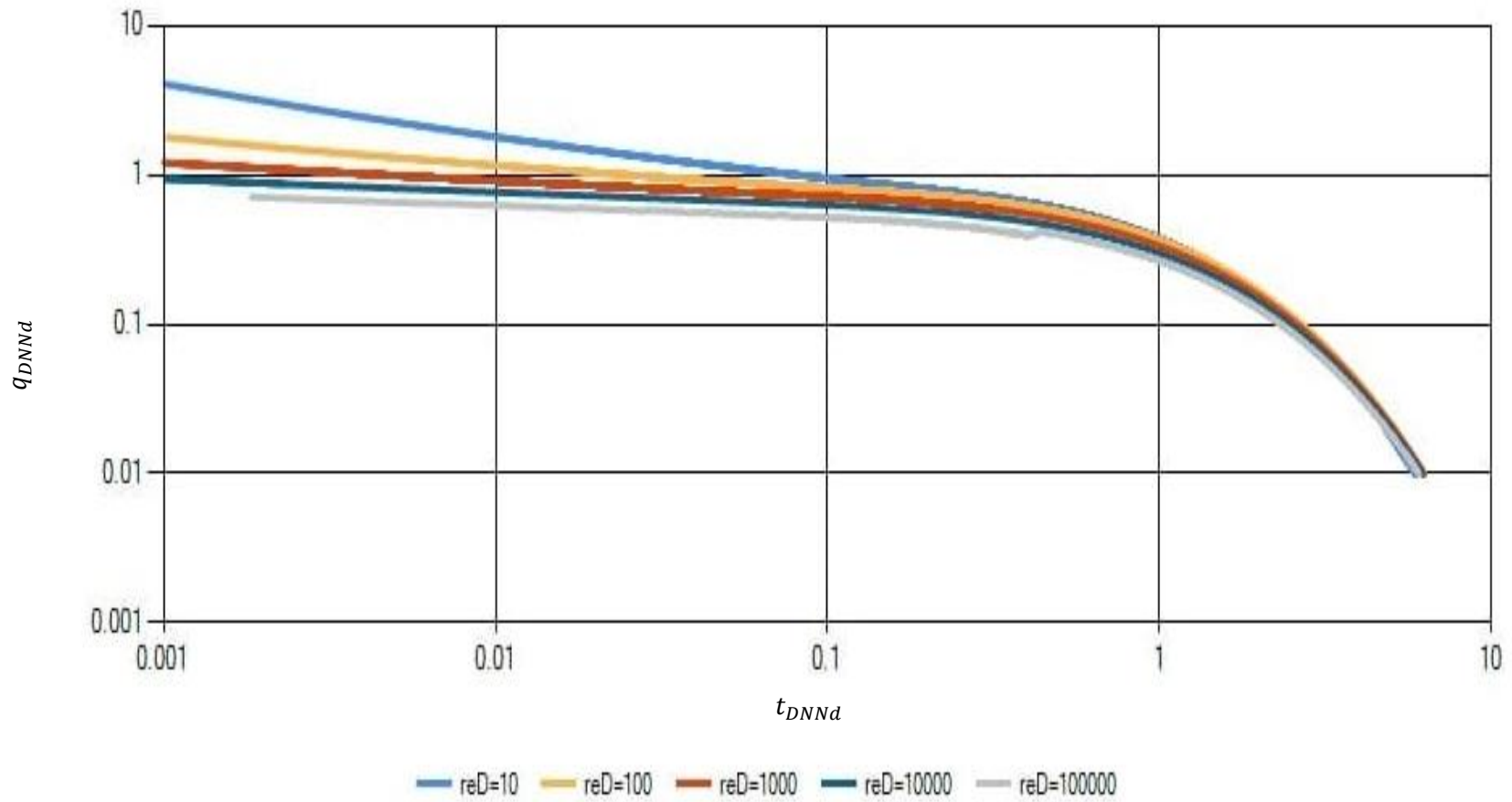


Figura 4.21: Solución numérica para fluidos pseudo-plásticos con $n = 0.9$ usando las soluciones de Arps-Fetkovich

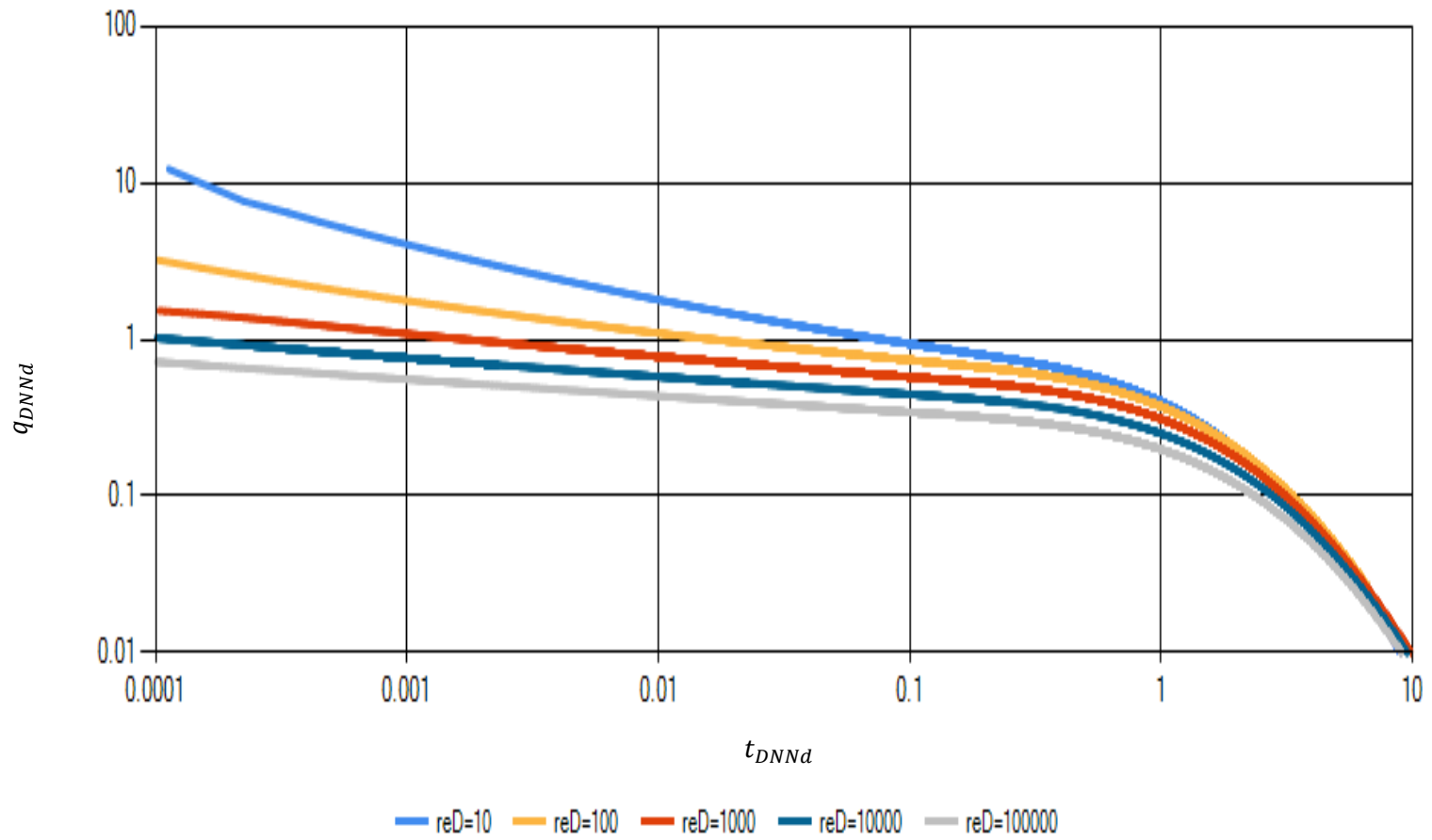


Figura 4.22: Solución numérica para fluidos pseudo-plásticos con $n = 0.8$ usando las soluciones de Arps-Fetkovich

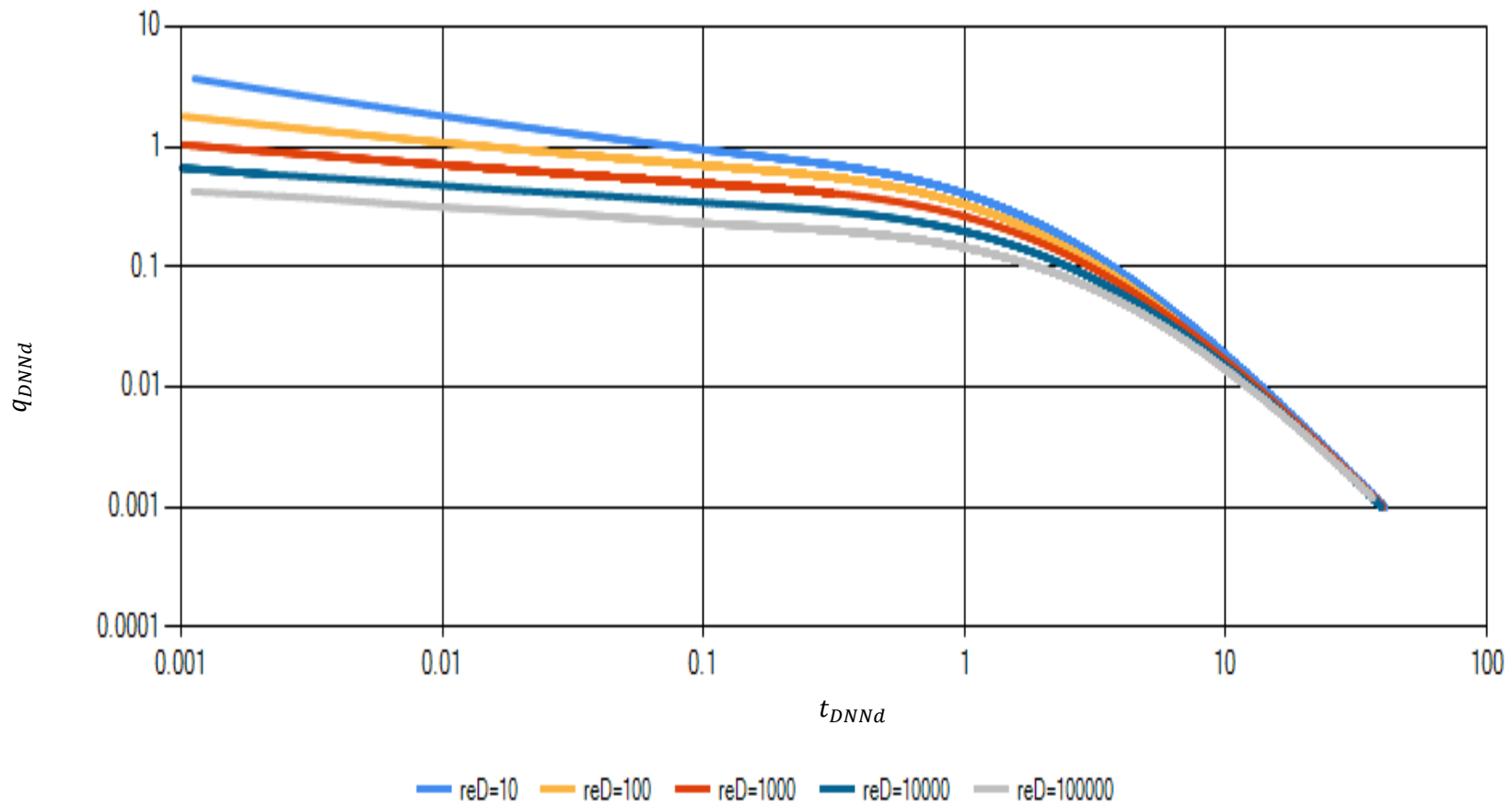


Figura 4.23: Solución numérica para fluidos pseudo-plásticos con $n = 0.8$ usando las soluciones de Arps-Fetkovich

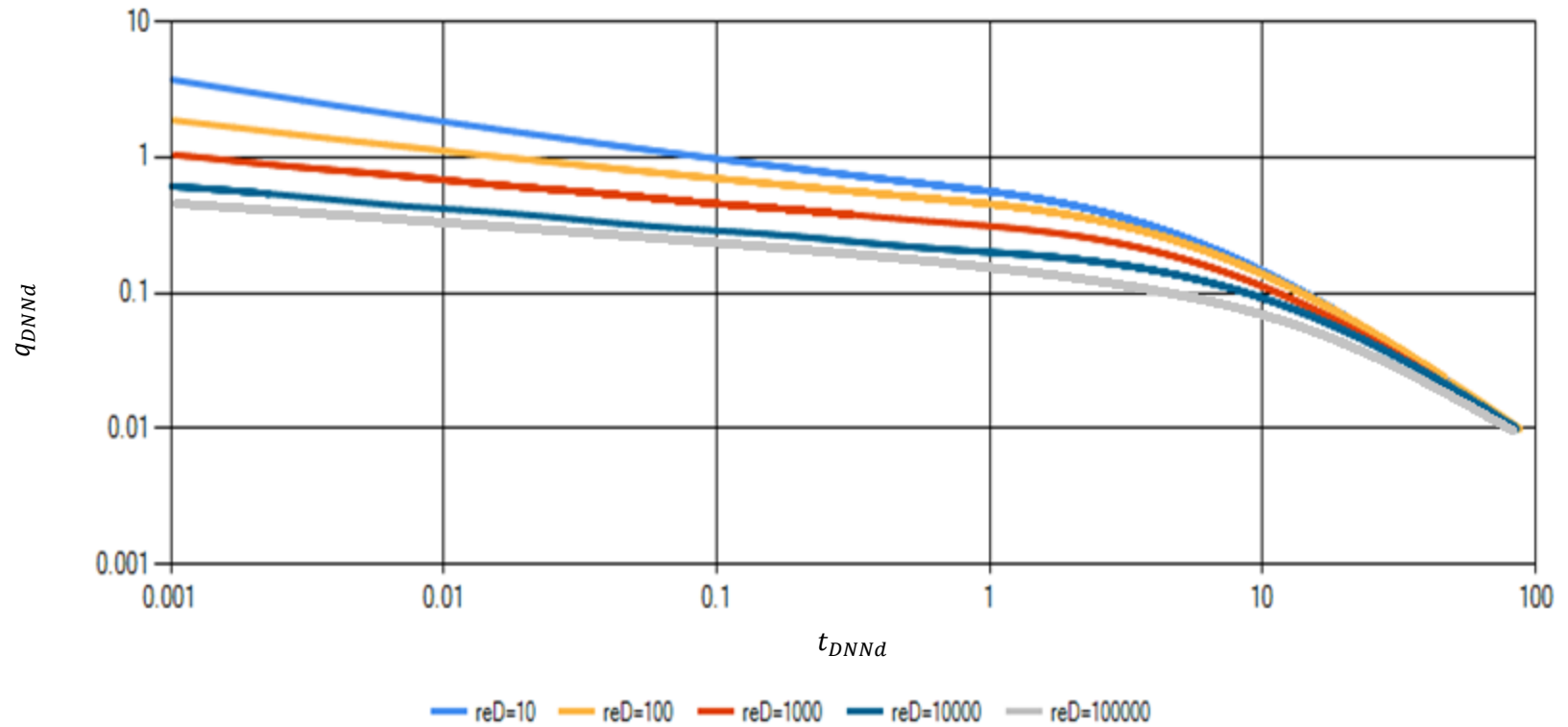


Figura 4.24: Solución numérica para fluidos pseudo-plásticos con $n = 0.6$ usando las soluciones de Arps-Fetkovich

4.7 Diagrama de flujo del problema general para los fluidos tipo ley de potencias

El diagrama de flujo de la herramienta de cómputo utilizada para analizar los fluidos con reología tipo ley de potencias se describe de manera general en la **figura 4.25**. El primer paso consiste en definir los vectores iniciales con los cuales se formará la matriz tridiagonal que surge de las diferencias finitas centradas, del mismo modo se plantean los vectores que almacenarán los valores de la presión o del gasto y su derivada. Posterior a ello, se establece la condición de frontera interna, que para todos los casos es de cero. El tiempo adimensional, t_{DNN} , al cual se esperan los resultados, se alcanza estableciendo deltas de tiempo. En cada paso de tiempo se calcula la presión mediante el método Predictor-Corrector de Douglas-Jones (desarrollado en el Apéndice A) que resuelve de manera iterativa la ecuación diferencial parcial representada en la ecuación 4.10 con las respectivas condiciones de frontera expuestas en el Apéndice C.

El método Predictor-Corrector tiene la ventaja de generar un sistema de ecuaciones lineales que nos llevan a formar la matriz tridiagonal. La precisión del método es de segundo orden; los avances de la solución se tienen cada mitad de un incremento de tiempo (Ikoku y Ramey, 1978). Cuando el tiempo es $j + \frac{1}{2}$ el predictor estima una aproximación de la presión a través de un sistema de ecuaciones lineales que forma una primera matriz tridiagonal, posteriormente las incógnitas serán al tiempo $j + 1$ donde las ecuaciones del corrector serán incondicionalmente estables y también generarán una matriz tridiagonal. Ambas matrices son resueltas por el método numérico de Thomas. La presión exacta se obtiene cuando la diferencia absoluta de las presiones calculadas por el predictor y el corrector, es menor a una tolerancia propuesta.

Para los casos de yacimientos a producción de presión de fondo constante se calcula el gasto, q_{DNN} , con la ecuación 4.18, y/o o la derivada para observar mejor su comportamiento. En el caso de “Yacimiento cerrado produciendo a presión de fondo constante para un fluido tipo ley de potencias” se aplica el modelo de ajuste de las curvas de Arps- Fetkovich para obtener q_{DNNd} y t_{DNNd} , con ello se hace el análisis de declinación luego de graficar los resultados y de haber llegado al tiempo final de simulación.

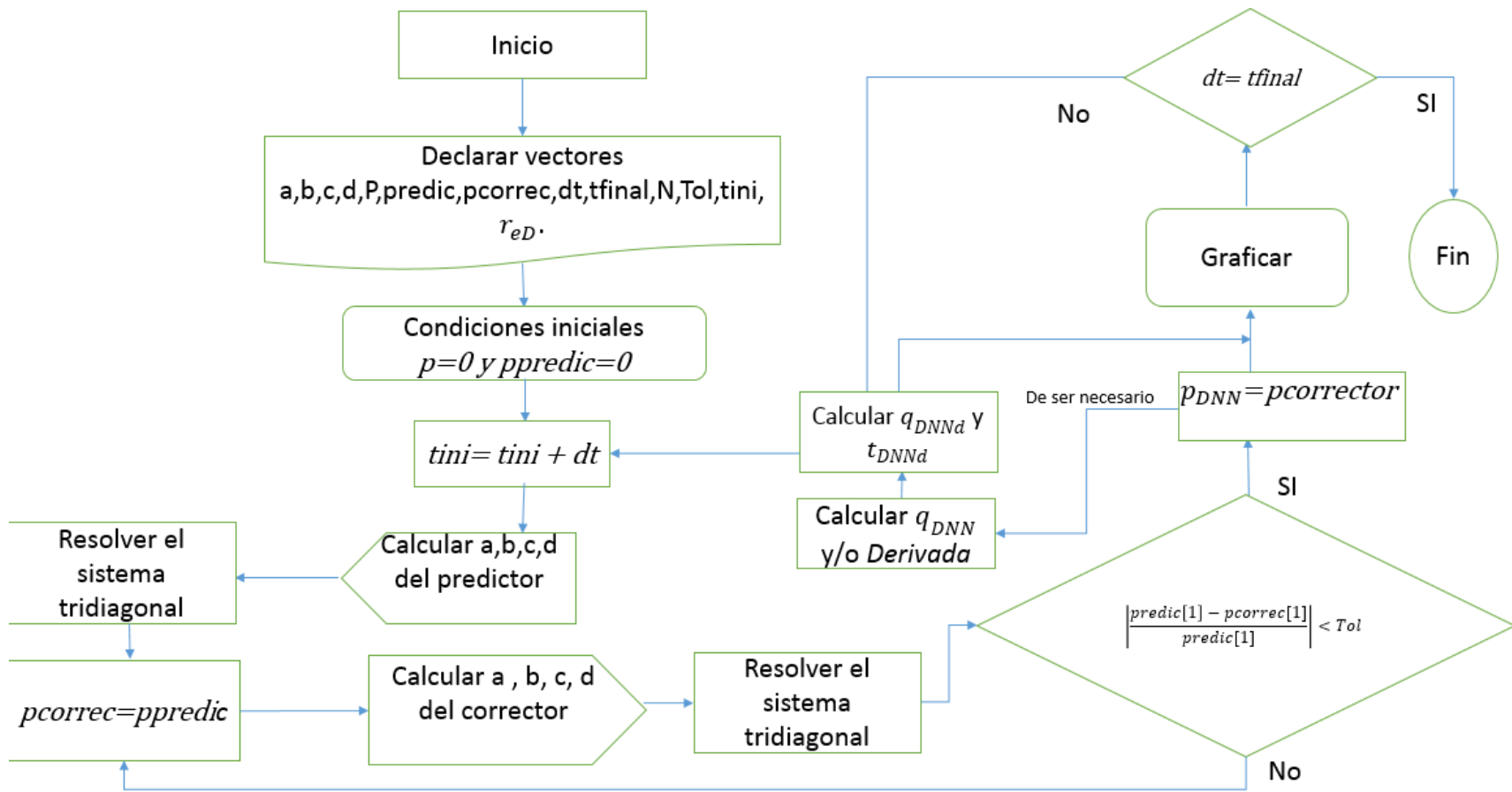


Figura 4.25: Diagrama de Flujo del Problema General para los Fluidos Tipo ley de Potencias

4.8 Conclusiones

- Se observó que las variables de Fetkovich pueden utilizarse sin mayor problema para generalizar el análisis de los casos asociados a un fluido tipo ley de potencias.
- Se notó que la ecuación 4.10 es altamente dependiente al tamaño de la malla.
- En todos los casos se percibió que, para los fluidos pseudo-plásticos, conforme n sea menor a la unidad las curvas se unen y se ajustan a los comportamientos indicados por las declinaciones de Arps.
- Para $n \leq 0.5$, la solución numérica de la ecuación para fluidos tipo ley de potencias arroja resultados erróneos ya que el comportamiento grafico de la derivada presenta dispersión numérica.
- Para el rango de valores de $0.6 \leq n \leq 1$, el comportamiento de los modelos de declinación será más armónico para valores cercanos a 0.6. Por el contrario, será más exponencial para valores cercanos a 1.
- En el caso de los fluidos pseudo-plásticos se puede notar el estado pseudo-estacionario y una pendiente unitaria en la curva de presión y su derivada, para valores de $0.6 \leq n \leq 1$ y radios adimensionales externos de 10,100 y 1000. Sin embargo, para valores mayores a éste último, el simulador arroja resultados incorrectos debido a la alta no linealidad de la ecuación de flujo que describe a estos fluidos.
- En el caso de un yacimiento infinito produciendo a presión de fondo constante, se logra apreciar una tendencia similar entre la declinación del gasto producido calculado con el simulador y la solución analítica cuando n se acerca a la unidad.

Capítulo 5. Desarrollo de la herramienta de cómputo para fluidos con reología plástico de Bingham

En este capítulo se presentan los modelos utilizados para describir el comportamiento de flujo de fluidos con reología plástico de Bingham, así como sus resultados y validación obtenidos a partir del simulador numérico desarrollado.

5.1 Planteamiento de la problemática

Autores como Wu y Rojas et al. (1992) han sugerido el modelo plástico de Bingham para representar el flujo de aceite con alto contenido de asfaltenos en el medio poroso. Este implica la existencia de un gradiente de presión asociado a la reducción de la recuperación de aceite y a la formación de áreas de estancamiento dentro del yacimiento (Gallardo,2019).

La derivación realizada por Wu et al. (1992) a la sustitución de la ecuación 3.5 en la ecuación de continuidad da origen a la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{G}{r} = \frac{1}{\eta_B} \frac{\partial p}{\partial t} \dots\dots\dots 5.1$$

Cuya solución fue encontrada por los autores, estableciendo las siguientes condiciones de frontera con un enfoque polinómico (Gallardo, 2019):

$$p(r, t = 0) = p_i, \dots\dots\dots 5.2$$

$$q(r_w, t > 0) = q_w, \dots\dots\dots 5.3$$

$$p(r \rightarrow \infty, t > 0) = p_i. \dots\dots\dots 5.4$$

Para la ecuación 5.1, Gallardo (2019) también plantea el siguiente grupo de variables adimensionales:

$$p_{DNN} = \frac{2\pi kh}{qB\mu_B} (p_i - p), \dots\dots\dots 5.5$$

$$r_D = \frac{r}{r_w}, \dots\dots\dots 5.6$$

$$t_{DNN} = \frac{\eta_B}{r_w^2} t, \dots\dots\dots 5.7$$

$$G_D = \frac{2\pi khr_w}{qB\mu_B} G. \dots\dots\dots 5.8$$

5.2 Yacimiento infinito produciendo a gasto constante para un fluido plástico de Bingham

La herramienta de cómputo para conocer el comportamiento del flujo de fluidos con reología plástico de Bingham, basa su desarrollo en la **ecuación 5.9**, cuya derivación se explica en el **Apéndice E**.

$$\frac{\partial^2 p_D}{\partial x^2} + e^x G_D = e^{2x} \frac{\partial p_D}{\partial t_D}. \dots\dots\dots 5.9$$

Asimismo, se emplea el siguiente modelo de condiciones de frontera

$$p_{DNN}(x, 0) = 0, \dots\dots\dots 5.10$$

$$\left(\frac{\partial p_{DNN}}{\partial x}\right)_{x=x_0} = -1 - G_D \quad \text{para todo } t_{DNN}, \dots\dots\dots 5.11$$

$$p_{DNN}(x \rightarrow \infty) = 0 \quad \text{para todo } t_{DNN}. \dots\dots\dots 5.12$$

Para hacer un comparativo entre la solución numérica que arroja la herramienta de cómputo y una solución analítica, se hará uso de las soluciones propuestas por Gallardo (2019); las cuales fueron desarrolladas mediante la transformada de Laplace.

$$p_{DNN}(r_D = 1, t_D) = -\frac{1}{2}E_i\left(-\frac{0.25}{t_{DNN}}\right) + \frac{1}{2}\ln(1 - G_D) + G_D[1 + \delta(t_{DNN})], \quad \dots\dots 5.13$$

$$p_{DNN}(r_D = 1, t_D) = -\frac{1}{2}E_i\left(-\frac{0.25}{t_{DNN}}\right) + G_D\delta(t_{DNN})\omega, \quad \dots\dots\dots 5.14$$

donde $\omega = 0.0019\ln(t_{DNN})^2 - 0.0072\ln(t_{DNN}) + 0.6173$,

y $\delta(t_{DNN})$ representa la distancia de penetración para la solución de un yacimiento finito, siendo asociada con la **ecuación 5.13**

$$\delta(t_{DNN}) = \sqrt{(1 - G_D t_{DNN} \exp^{0.8091+2G_D})}. \quad \dots\dots\dots 5.15$$

Al asignar valores a G_D , que van de 0.1 a 0.001, en la **Figura 5.1** se observa que los resultados de la solución analítica propuesta por Gallardo (2019), ecuación 5.13, se ajusta a la solución numérica del simulador. Cabe mencionar que los valores de G_D fueron menores a uno debido a que el autor sugiere que es una de las limitantes de la solución que propone. Por otro lado, en la **Figura 5.2** se detalla el comportamiento de un fluido newtoniano, esto es, cuando $G_D = 0$.

Con respecto a lo mencionado en la figura 5.2.1, también se observa que entre mayor es el valor del gradiente de presión, G_D , la afectación en el flujo de hidrocarburos con reología plástico de Bingham será más aguda. Esto debido a que el comportamiento de los fluidos se parecerá menos al de uno con reología newtoniana y, por tanto, se necesitará mayor presión para que los fluidos puedan desplazarse dentro del medio poroso. De manera similar, se observa que, al modificar el gradiente de presión mínimo, no existe perturbación en el tiempo que transcurre el régimen transitorio.

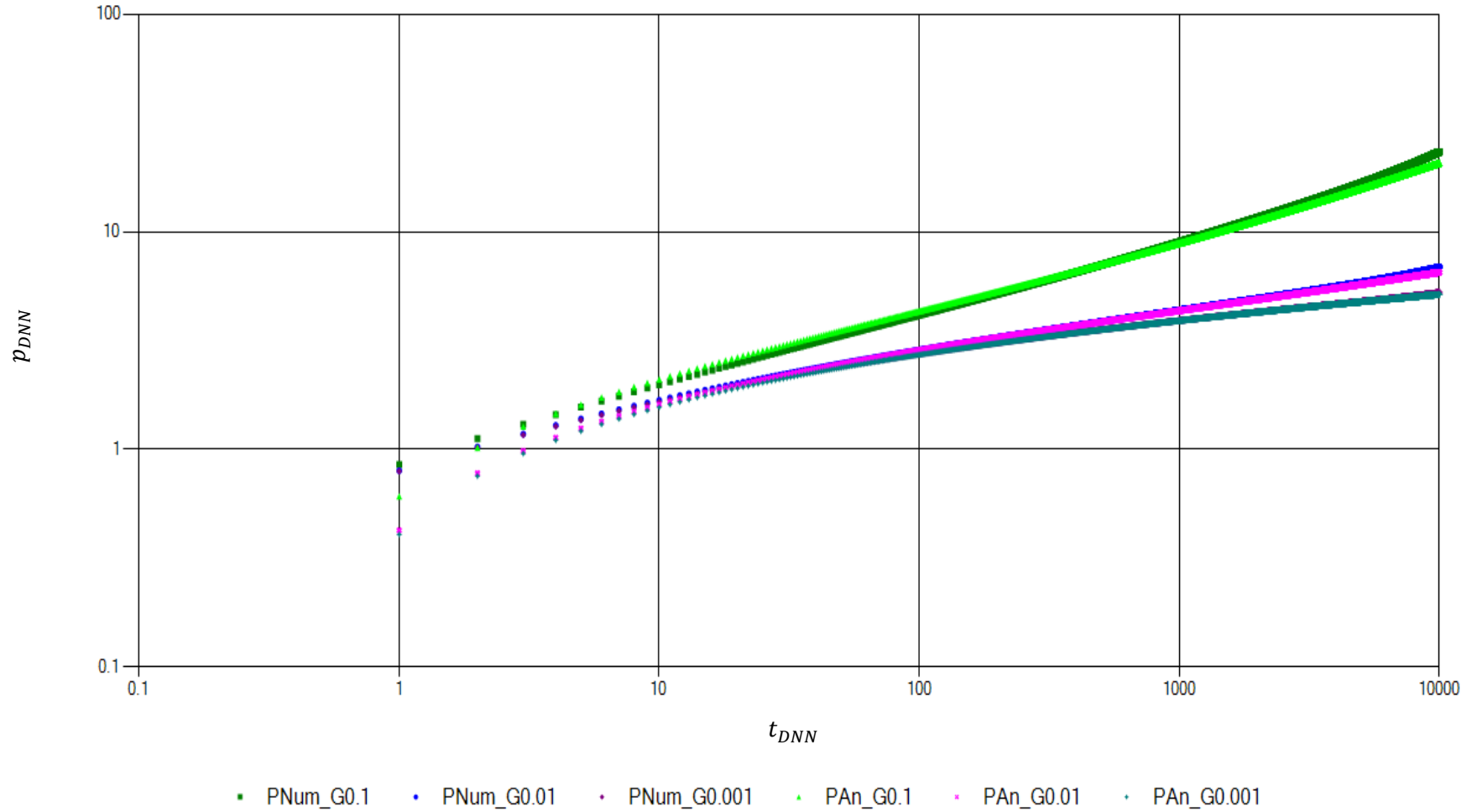


Figura 5.1: Gráfico log-log que muestra el ajuste de la solución analítica propuesta por Gallardo (2019) y la solución numérica para un fluido tipo plástico de Bingham con gradientes de presión, $G_D = 0.1, 0.01$ y 0.001

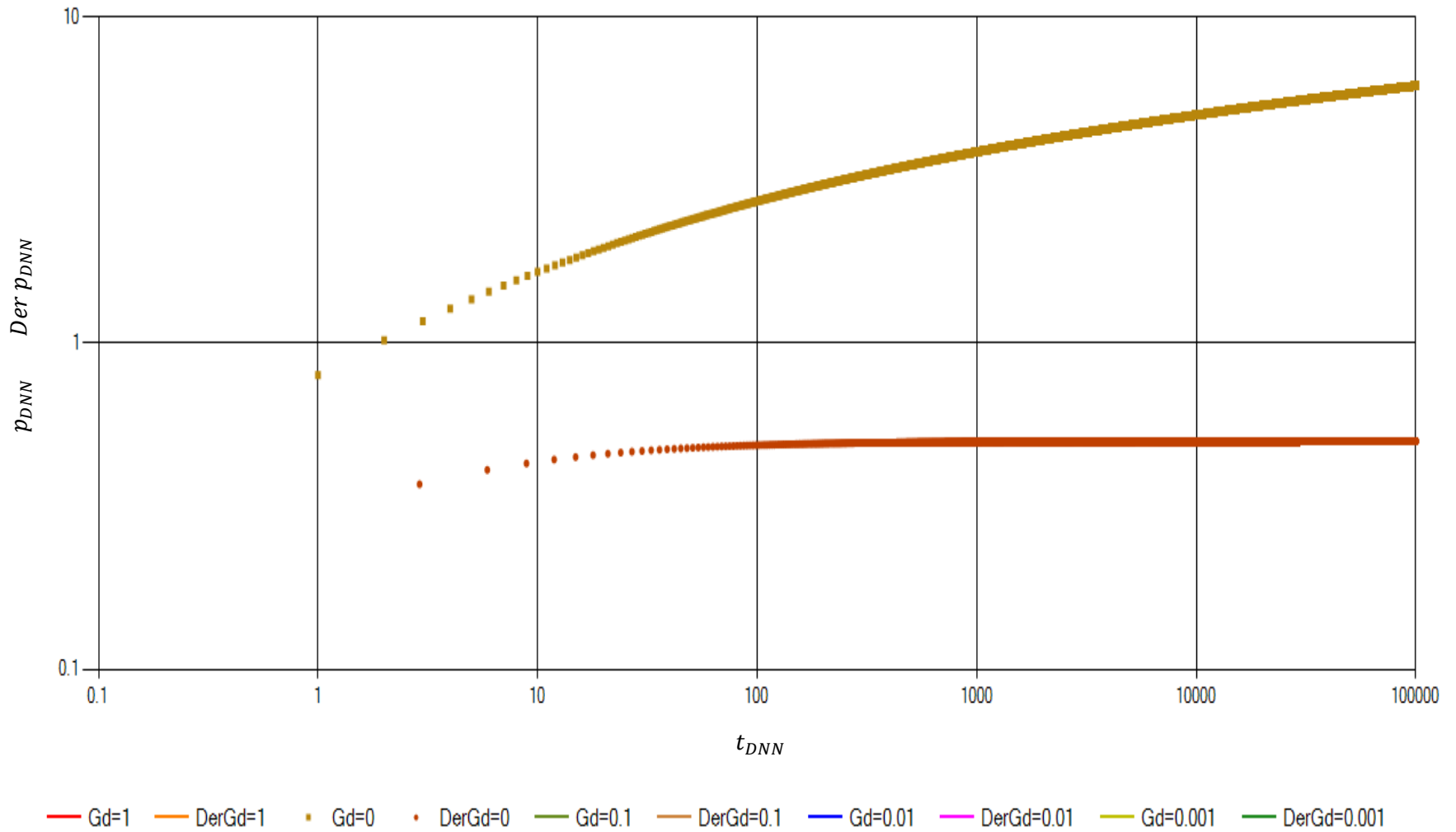


Figura 5.2: Presión adimensional y derivada de un fluido newtoniano, $G_D = 0$, mediante la solución numérica

5.3 Yacimiento infinito produciendo a presión de fondo constante para un fluido tipo plástico de Bingham

Con la finalidad de determinar el gasto adimensional en el periodo donde se desconocen las fronteras, se retoma la ecuación 5.9 y al modelo propuesto en el caso anterior, se le modifica la condición de frontera interna, ecuación 5.11, por la condición de frontera representada con la ecuación 4.17.

Posteriormente, el gasto adimensional se estima como el inverso de la presión. Mientras que para el caso de la solución analítica, esta consideración no aplica debido a que la ecuación 5.13 es no homogénea. Dichas modificaciones se describen con mayor detalle en el **Apéndice E**.

Los cambios propuestos se ven reflejados en las curvas que muestran el gasto en el periodo transitorio. Por ejemplo, la **Figura 5.3** describe el comportamiento del gasto de un fluido newtoniano; aquí se observa que G_D , al valer cero, no genera alteración alguna en este periodo de flujo. No obstante, el gradiente de presión mínimo, con valores de 1, 0.1, 0.01 y 0.001 permite visualizar los efectos de la frontera móvil cuando el gasto decrece abruptamente a tiempos más cortos conforme G_D se aleja de cero; debido a que las caídas de presión penetran con menor profundidad en el medio poroso. Al ocurrir esto, se requerirá mayor energía para vencer a G_D y μ_b que son los dos principales factores reológicos que controlan el flujo de fluidos con reología plástico de Bingham.

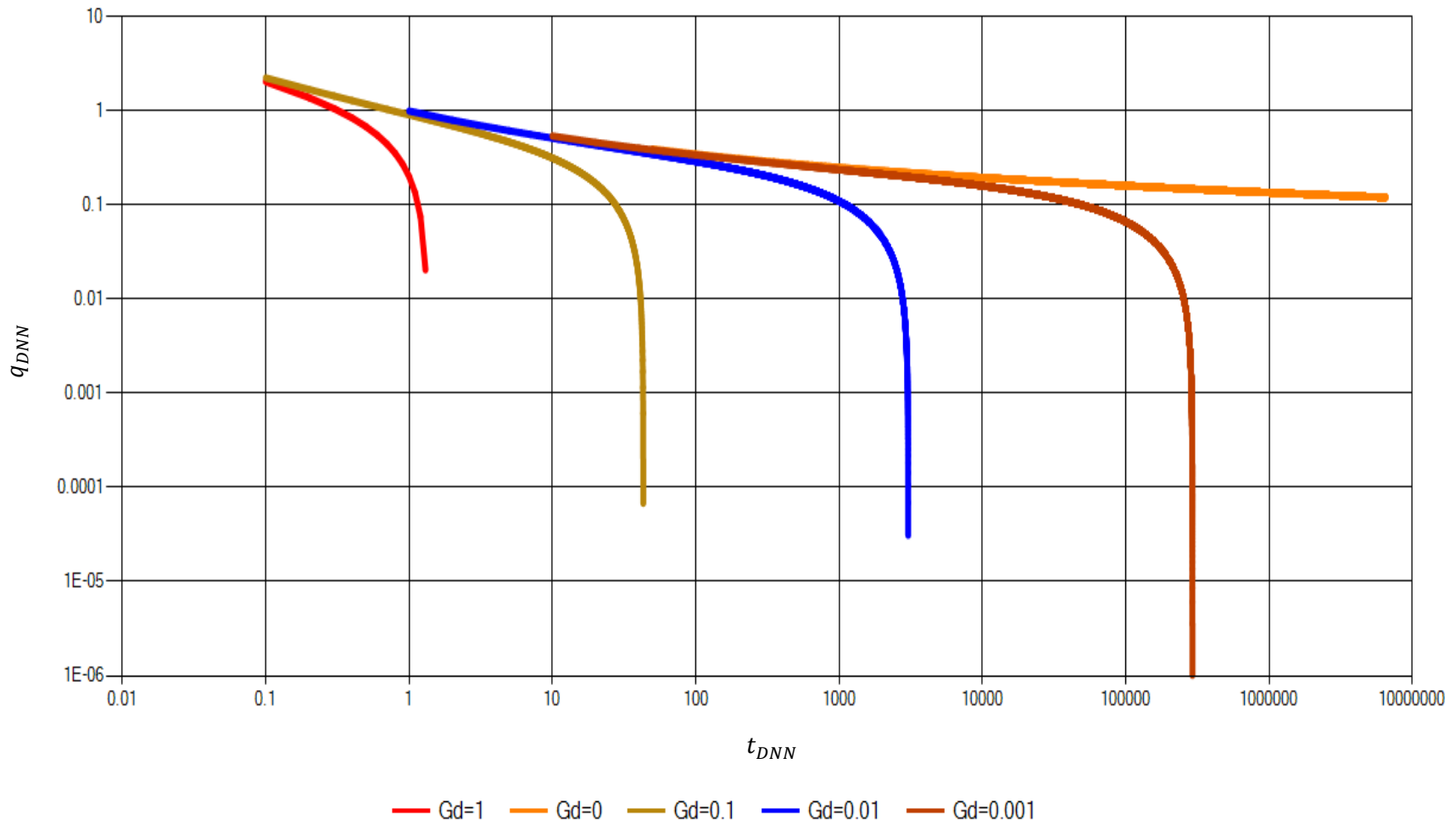


Figura 5.3: Gráfico del gasto numérico con $G_D = 1, 0.1, 0.01, 0.001$ y 0 .

5.4 Yacimiento cerrado produciendo a gasto constante para un fluido tipo plástico de Bingham

En este caso se plantea que en la frontera externa del yacimiento no existe flujo; se considera que el yacimiento es un cuerpo cerrado, por lo que, se modifica con la ecuación 5.16 a la condición de frontera externa del caso “Yacimiento infinito produciendo a gasto constante para un fluido tipo plástico de Bingham”, ecuación 5.12.

Esta modificación y los cambios que produce en la herramienta de cómputo se presentan en el **Apéndice E**.

El gráfico obtenido de este caso se observa en la **Figura 5.4**, la cual compara el comportamiento de un fluido newtoniano y uno plástico de Bingham con valores de $G_D = 1, 0.1, 0.01$ y 0.001 con un radio adimensional de $r_{eD} = 200$.

Matemáticamente el gradiente de presión mínimo es inversamente dependiente del gasto de producción, entonces, al observar el comportamiento de la presión a diferentes valores de G_D , se puede concluir que un incremento en la velocidad de flujo en el medio poroso va a ocasionar que G_D tenga menor influencia en la producción de hidrocarburos. (Gallardo, 2019).

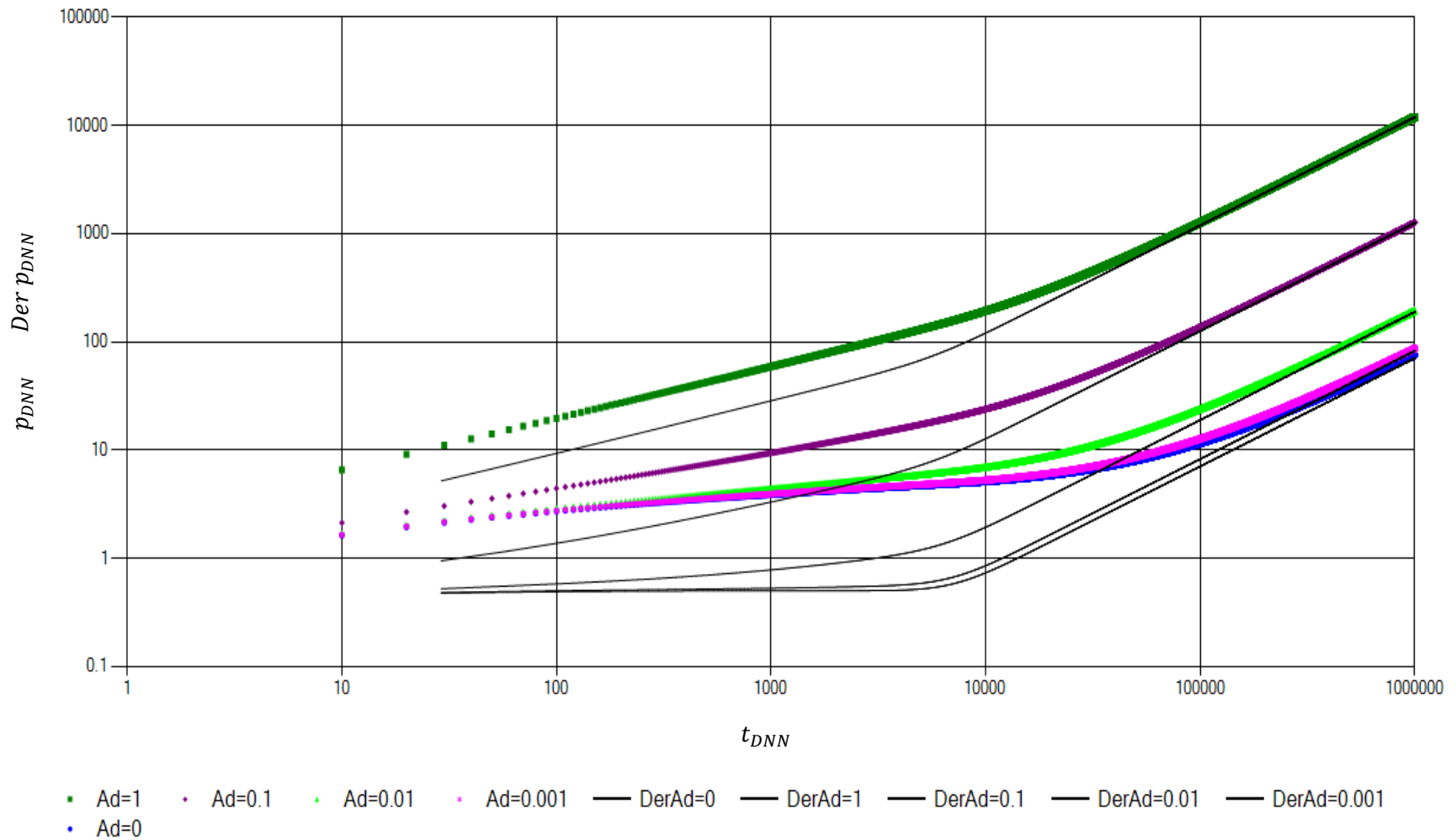


Figura 5.4: Gráfico log-log que muestra la caída de presión adimensional con su derivada en un yacimiento finito para un fluido newtoniano, $G_D = 0$ y plástico de Bingham con valores de $G_D = 1, 0.1, 0.01, 0.001$

5.5 Yacimiento finito produciendo a presión de fondo constante para un fluido plástico de Bingham

Para ampliar el análisis del comportamiento de flujo de fluidos con reología plástica de Bingham, se propone el siguiente modelo donde sólo se modifica la condición de frontera interna del modelo presentado en el subtema “Yacimiento cerrado produciendo a gasto constante para un fluido tipo plástico de Bingham”, por la condición presentada con la ecuación 4.17.

En el **Apéndice E** se describen los cambios realizados en la herramienta de cómputo desarrollada con el método de diferencias finitas considerando nodos centrales.

Al igual que con los fluidos de reología tipo ley de potencias, el gasto adimensional se estableció matemáticamente con la ecuación 4.18.

Con ello se generó una serie de curvas con $r_{eD} = 10, 100, 1,000$ y $10,000$ para $G_D = 1, 0$ y 0.01 en las **Figuras 5.5, 5.6 y 5.7**, respectivamente. A través de éstas se observa una tendencia similar en los gastos adimensionales, por lo tanto, G_D no es factor en el comportamiento del periodo pseudo-estacionario. Sin embargo, si el gasto de producción se mantiene constante, la presión en el pozo decrecerá más rápido según sea el incremento de G_D .

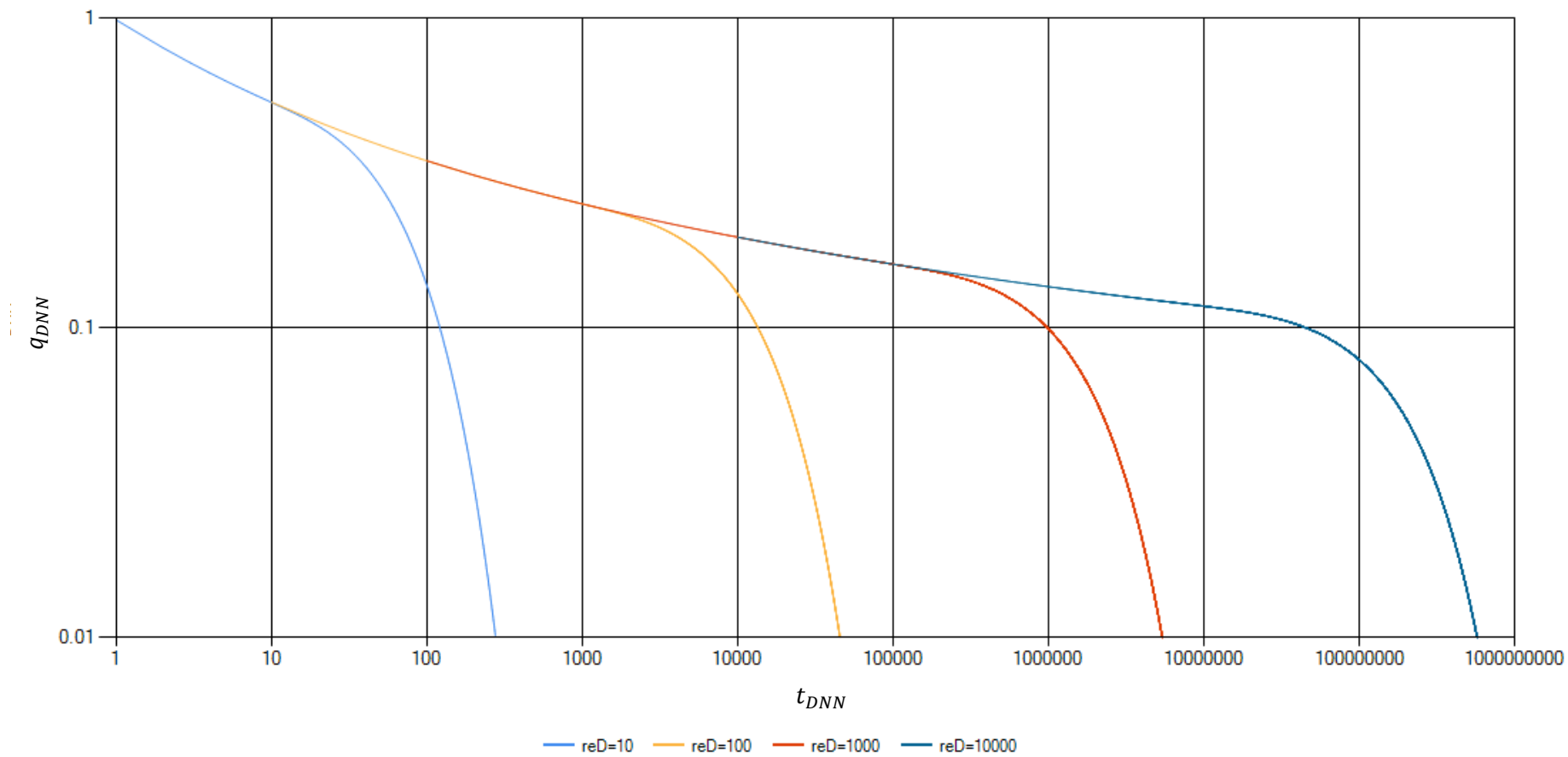


Figura 5.5: Gráfico log-log con $G_D = 1$ a radios adimensionales, $r_{eD} = 10, 100, 1,000$ y $10,000$

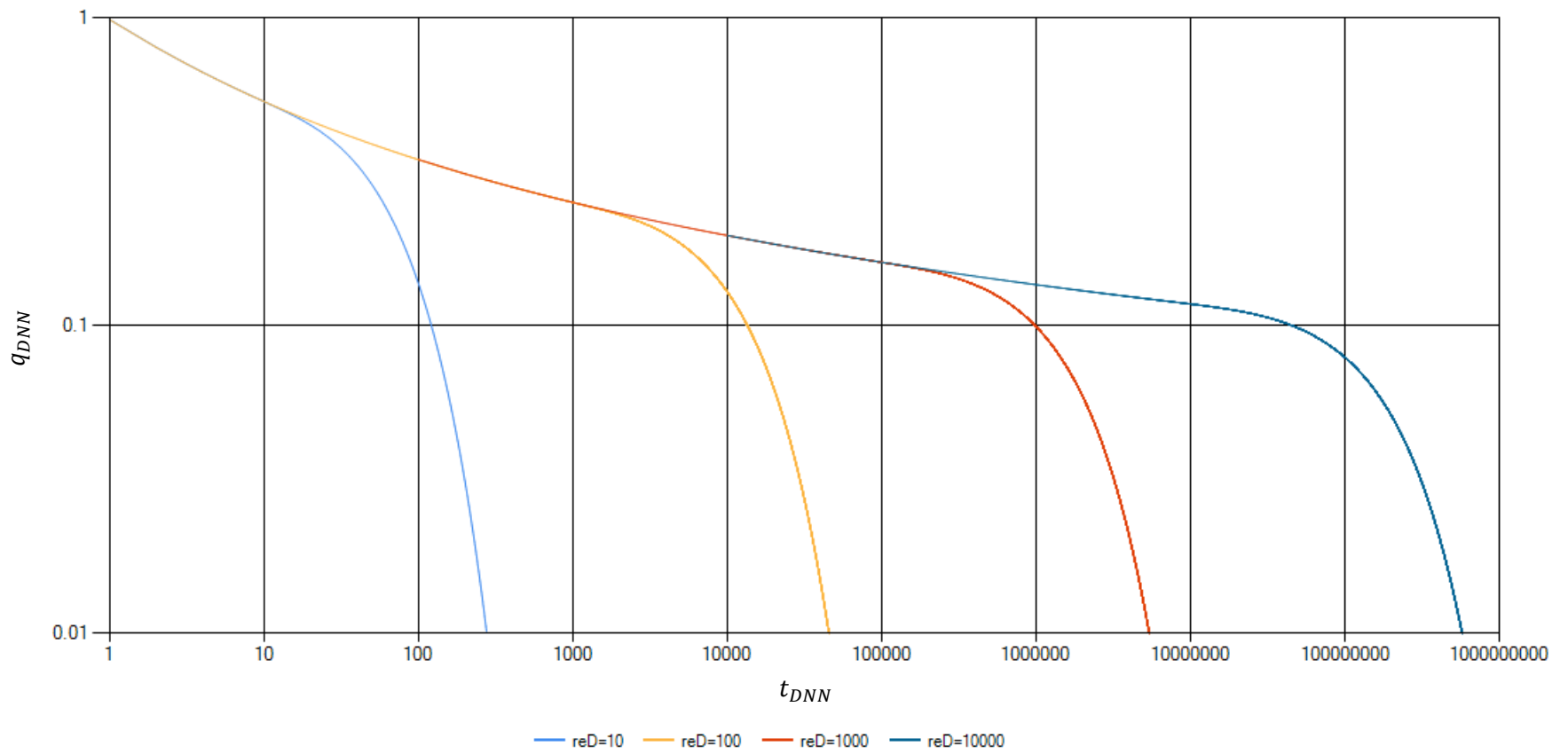


Figura 5.6: Gráfico log-log con $G_D = 0$ a radios dimensionales, $r_{eD} = 10, 100, 1,000$ y $10,000$

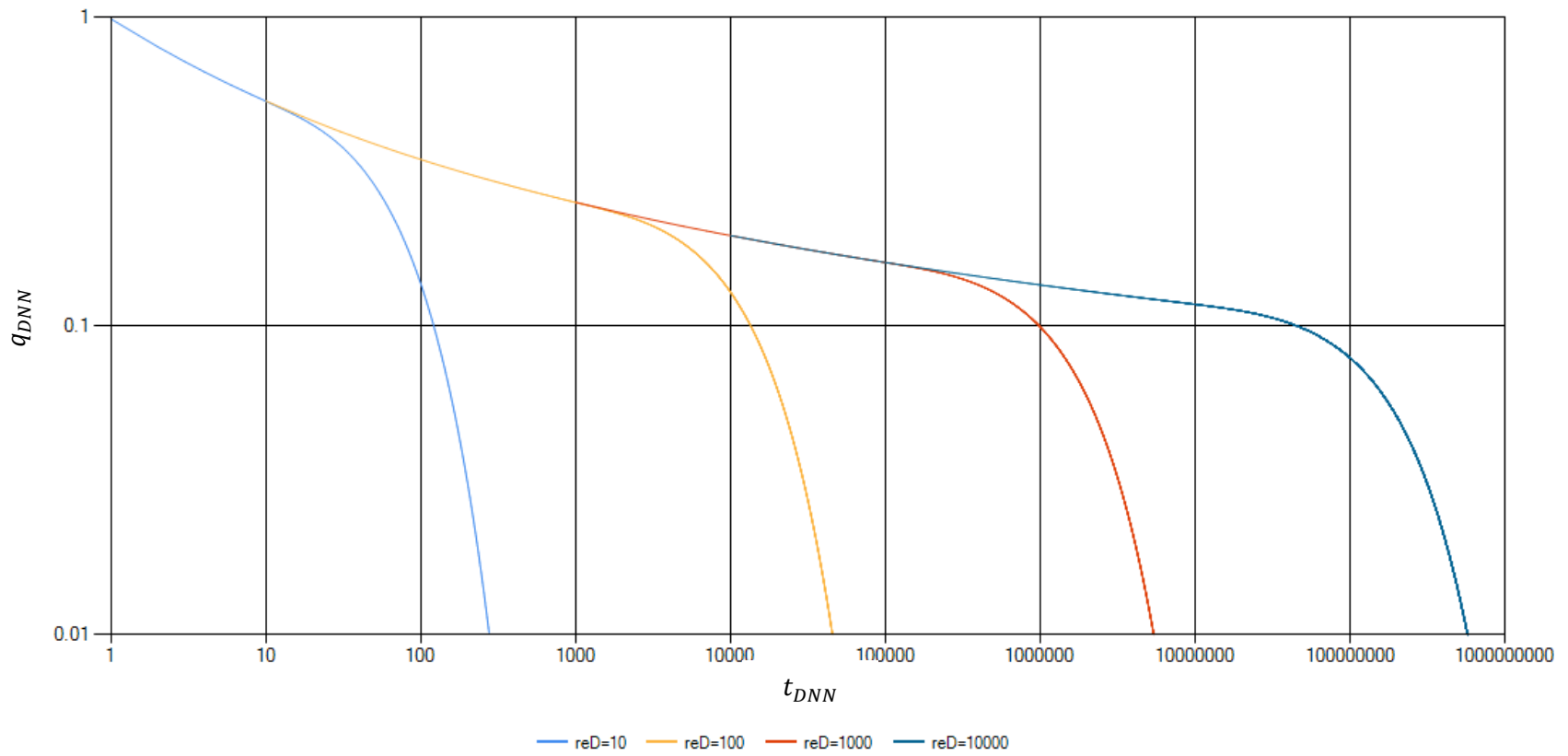


Figura 5.7: Gráfico log-log con $G_D = 0.01$ a radios adimensionales, $r_{eD} = 10, 100, 1,000$ y $10,000$

5.6 Diagrama de flujo del problema general para los fluidos tipo plástico de Bingham

La estructura general de la herramienta de cómputo utilizada para analizar el comportamiento de flujo de los fluidos con reología plásticos de Bingham está representada en el diagrama de flujo de la **figura 5.8**. Este comienza planteando los vectores iniciales que serán utilizados para la matriz tridiagonal (a, b, c y d) y los vectores λ_i y ω_i que simplifican operaciones dentro del programa. Posteriormente, son ingresados los valores de la malla, N , el gradiente de presión mínimo, G_D , el delta de tiempo, dt , tiempo final, t_{final} , y el incremento de espacio, dx . El radio adimensional, r_{eD} , es usado para casos donde se conocen las fronteras.

De manera similar a la herramienta de cómputo para fluidos de tipo ley de potencia, se inicializa las condiciones iniciales de presión, $p_{DNN} = 0$, a tiempo $t_{DNN} = 0$. Esta condición es la misma para los cuatro casos estudiados en este trabajo.

Conforme el tiempo incrementa hasta llegar al tiempo final de la simulación, en cada paso de tiempo, dt , se calculan los vectores derivados del método de diferencias finitas que resuelven la ecuación diferencial parcial 5.9. Esto es explicado más a fondo en el Apéndice D. El sistema de ecuaciones lineales da apertura a una única matriz tridiagonal que es resuelta mediante el método numérico de Thomas. La presión resultante no pasa por ningún método iterativo en comparación con la herramienta de los fluidos tipo ley de potencias, sin embargo, dependiendo el caso de estudio, se calcula el gasto adimensional; esto es cuando se tratan yacimientos a presión de fondo constante.

Por último, la presión adimensional o el gasto adimensional es graficado contra el tiempo en términos adimensionales al llegar al tiempo final ingresado.

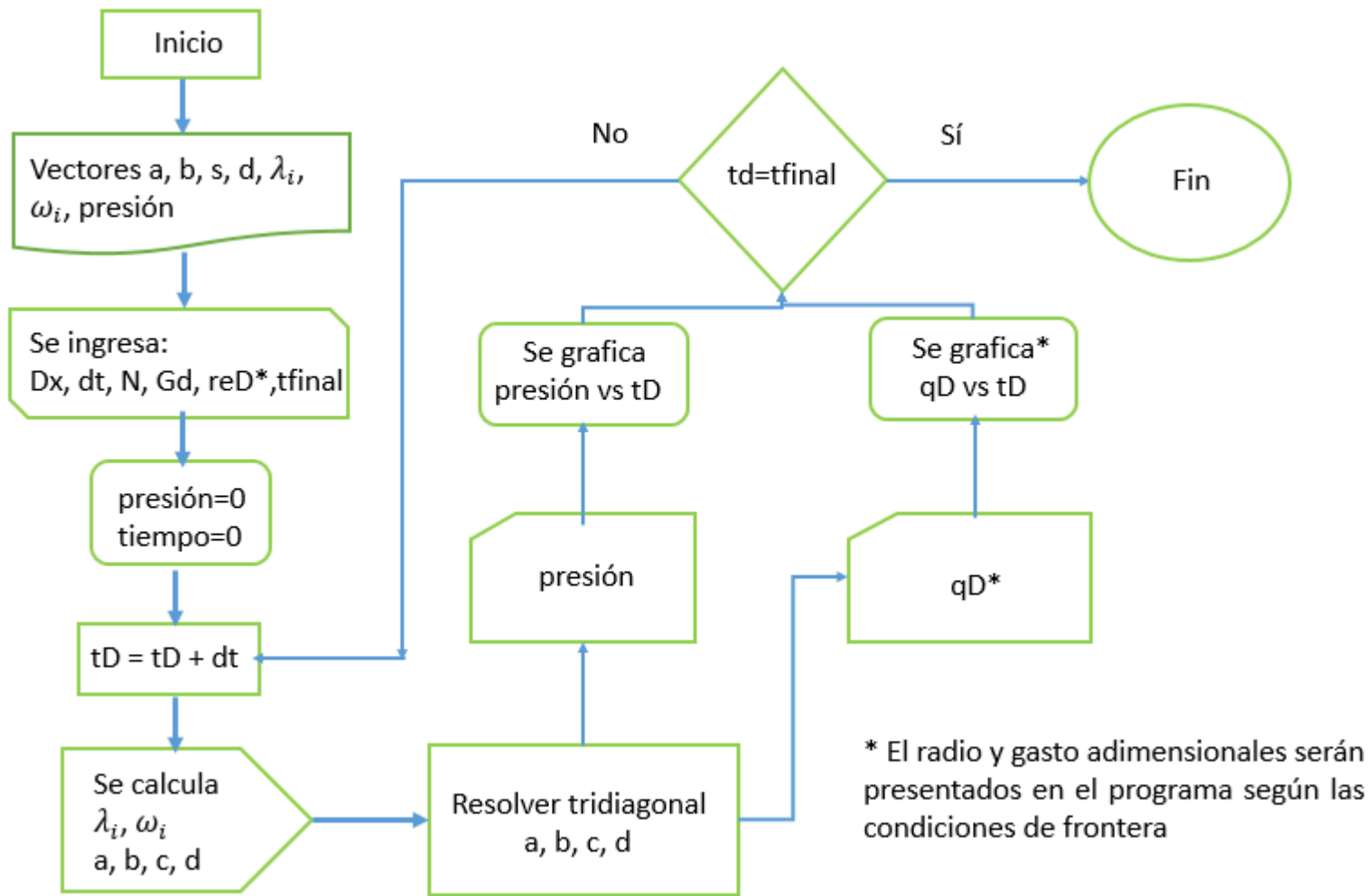


Figura 5.8: Diagrama de Flujo del problema general para los fluidos tipo plástico de Bingham

5.7 Conclusiones

- En todos los casos se observa que cuando el gradiente de presión mínimo se aleja de cero, los problemas de flujo se agudizan ya que se requiere más energía para que la resistencia al flujo impuesta por G_D y μ_b , se venza.
- El simulador numérico en el caso de yacimiento infinito a presión de fondo constante permite determinar que el gasto sufre una disminución repentina; la cual sucede más rápido cuando el gradiente de presión mínimo aumenta considerablemente. Sin embargo, el estímulo de la presión se sigue distribuyendo en el medio poroso siendo $P_{DNN} < G_D$.
- La generación de altas velocidades de flujo en el medio poroso ocasiona que G_D tenga una menor influencia en la producción de hidrocarburos.
- A pesar de que el gradiente de presión mínimo influye en el gasto obtenido en el periodo transitorio, no interviene en el tiempo que éste dura, ni en el comportamiento del periodo gobernado por las fronteras. No obstante, es posible notar los efectos de la frontera móvil en la producción cuando G_D es grande.

Conclusiones

- Se analizaron problemas de flujo de fluidos con reología no-newtoniana del tipo ley de potencias y plásticos de Bingham, observándose un comportamiento similar al descrito en los modelos de Arps para los problemas de producción a presión de fondo constante.
- Los modelos existentes para fluidos tipo ley de potencias son altamente no-lineales, y parámetros como el número de malla, el índice de potencias, el radio externo del yacimiento y la tolerancia, afectan sensiblemente los resultados.
- La diferencia entre las dos herramientas de cómputo empleadas radica en los parámetros que los autores consideraron para describir el comportamiento reológico de los casos no-newtonianos presentados. Aunado al proceso iterativo que tiene el simulador para fluidos tipo ley de potencia.
- La no homogeneidad de la ecuación que describe el flujo de fluidos con reología plástico de Bingham, dificulta su análisis bajo las normalizaciones propuestas en los modelos de Arps-Fetkovich.
- La herramienta de cómputo utilizada para los plásticos con Bingham permite observar que conforme el valor del gradiente de presión mínimo aumenta, se requerirá más energía para vencer la resistencia al flujo impuesta por G_D y μ_b .
- El gradiente de presión mínimo, no interviene en el tiempo que dura el periodo transitorio, ni en el comportamiento del periodo gobernado por las fronteras. No obstante, es posible notar los efectos de la frontera móvil en la producción cuando G_D es grande.

Recomendaciones

De acuerdo a los resultados obtenidos durante la presente investigación acerca del estudio del comportamiento de flujo en el medio poroso con fluidos de reología no-newtoniana, se da apertura a las siguientes recomendaciones:

- Implementar un modelo matemático homogéneo que permita el ajuste de las soluciones Arps-Fetckovich para el caso de yacimiento infinito a presión de fondo constante con fluidos de reología plástico de Bingham.
- Estudiar la relación entre G_D y el gasto de producción como un problema no-lineal, para entender el efecto de la frontera móvil sobre la producción en forma realista.
- Se recomienda estudiar el efecto de diferentes sistemas artificiales de producción o métodos térmicos a nivel de pozo sobre el valor de G_D .
- Estudiar el problema de flujo de un fluido tipo ley de potencias mediante métodos diferentes al de Douglas-Jones.
- Desarrollar los modelos de Arps-Fetckovich cuando el fluido presenta una reología no-newtoniana tipo ley de potencias dilatante ($n > 1$).
- Extender el modelo predictor-corrector para fluidos tipo ley de potencias con mallas de dos y/o tres dimensiones incluyendo la presencia de dos o más faces para tener un marco más cercano a la realidad.

Referencias

1. Ikoku, C. U., y Ramey, H.J. 1979. Transient of Non-Newtonian Power-Law Fluids in Porous Media. *Society of Petroleum Engineers*. Doi:10.2118/7139-PA.
2. Ikoku, C. U., y Ramey, H.J. 1978. Numerical Solution of the Nonlinear Non-Newtonian Partial Diferential Equation. *Society of Petroleum Engineers*. Doi:NA.
3. McDonald, A. E. 1979. Aproximate Solutions for Flow on Non-Newtonian Power Law Fluids Through Poros Media. *Society of Petroleum Engineers*. Doi:10.2118/7690-MS.
4. Cox, D. O. 1979. The Solution Of Problems Associated With Constant Well Pressure. *Society of Petroleum Engineers*. Doi:10.2118/8386-MS.
5. Lund, O., y Ikoku, C. U. 1981. Pressure Transient Behavior of Non-Newtonian/Newtonian Fluid Composite Reservoirs. *Society of Petroleum Engineers*. Doi:10.2118/9401-PA.
6. Wu, Y. S. 1990. "Theoretical Studies of Non-Newtonian and Newtonian Fluid Flow Through Poros Media", PhD dissertation, U. of California, Berkeley.
7. Poon, D. y Ken, K. 1992. Non-Newtonian Effects On The Primary Production Of Heavy Oil Reservoirs. *Society of Petroleum Engineers*. Doi:10.2118/92-07-06.
8. Ikoku, C. U., y Ramey, H.J. 1980. Wellbore Store and Skin Effects During the Transient Flow of Non-Newtonian Power-Law Fluids in Porous Media. *Society of Petroleum Engineers*. Doi:10.2118/7449-PA.
9. Dabholkar, D. S., y Mahadevan, J. 2011. Effect of Gas Dissolution on Heavy Oil Well Performance: Rheology Considerations. *SPE Heavy Oil Conference and Exhibition*. doi:10.2118/150286-ms
10. Rojas, G., Barrios, T., Scuidero, B., y Ruiz, J. 1977. Rheological Behaviour of Extra-Heavy Crude Oils from the Orinoco Oil Belt. *Oil Sands*, 1, 284-302.
11. Abramowitz, M., y Stegun, I. A. 1972. Handbook of Mathematical Functions With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables. National Bureau of Standards Applied Mathematics Series, 10, 257.

12. Van Everdingen, A. F. y Hurst, W. 1949. The Application of the Laplace Transformation to Flow Problems in Reservoirs. *Trans AIME* (186), pp 305-324.
13. Cruz, A. B. 2012. "Determinación Del Comportamiento Reológico De Los Aceites Extrapesados A Condiciones De Yacimiento". Tesis de licenciatura, Universidad Nacional Autónoma de México, D.F., México (2012).
14. Fetkovich, M. J. 1980. Decline Curve Analysis Using Type Curves. *JPT* **32**(6), 1065-1077.
15. Martínez J. 2018. "Estudio comparativo entre los modelos y métodos de análisis de pruebas de presión y datos de producción como herramientas para la caracterización dinámica de yacimientos". Tesis de licenciatura, Universidad Nacional Autónoma de México, CDMX, México (Mayo, 2018).
16. Gallardo, H. 2019. "Development Of Analytical Solutions For The Study Of Oils With Nonnewtonian Rheology Of The Type Of Power-Law And Bingham-Plastic". Tesis de Maestría, Universidad Nacional Autónoma de México, CDMX, México (Enero 2019).
17. Arps, J.J. 1945. "Analysis of decline curves." *Trans AIME* 160, 228-247.
18. Odeh, A. y Yang, H. 1979. Flow of Non-Newtonian Power-Law Fluids Through Porous Media. *Society of Petroleum Engineers*. Doi:10.2118/7150-PA.
19. Joseph S., Olarewaju y King Fahd,U. (1992). A Reservoir Model Of Non-Newtonian Fluid Flow. *Society of Petroleum Engineers*. Doi:NA.
20. Yi, X. 2004. Model for Displacement of Herschel-Bulkey Non-Newtonian Fluid by Newtonian Fluid in Porous Media and Its Application in Fracturing Fluid Cleanup. *Society of Petroleum Engineers*. Doi:10.2118/86491-MS.
21. Renard. P., Glenz. D. y Mejias M. 2009. Understanding Diagnostic Plots for Well-Test Interpretation. *Hydrogeology Journal* **17**(3): 589-600. Doi: N/A.
22. Wu, Y.S., Pruess, K., y Witherspoon, P. A. 1992. Flow and Displacement of Bingham Non-Newtonian Fluids in Porous Media. *Society of Petroleum Engineers*. Doi:10.2118/20051-PA.

23. Blasingame, T. A., y Rushing, J. A. 2005. A Production-Based Method for Direct Estimation of Gas in Place and Reserves. *SPE Eastern Regional Meeting*. Doi:10.2118/98042-MS.
24. Carter, R. D. y Tracy, G. W. 1960. An Improved Method for Calculating Water Influx. *Society of Petroleum Engineers*. ID: SPE-1626-G.
25. Wallick, G. C., y Savins, J. G. 1969. A Comparison of Differential and Integral Descriptions of the Annular Flow of a Power-Law Fluid. *Society of Petroleum Engineers Journal* **9** (03): 311–315. DOI:10.2118/2431-PA.
26. Cloud, J. E., y Clark, P. E. 1985. Alternatives to the Power-Law Fluid Model for Crosslinked Fluids. *Society of Petroleum Engineers Journal* **25** (06): 935–942. Doi: 10.2118/9332-PA.
27. Shah, S. N. 1982. Proppant Settling Correlations for Non-Newtonian Fluids Under Static and Dynamic Conditions. *Society of Petroleum Engineers Journal* **22** (02): 164–170. Doi: 10.2118/9330-PA.
28. Robertson, R. E., y Stiff, H. A. 1976. An Improved Mathematical Model for Relating Shear Stress to Shear Rate in Drilling Fluids and Cement Slurries. *Society of Petroleum Engineers Journal* **16** (01): 31–36. doi:10.2118/5333-pa.
29. Iyoho, A. W., y Azar, J. J. 1981. An Accurate Slot-Flow Model for Non-Newtonian Fluid Flow Through Eccentric Annuli. *Society of Petroleum Engineers Journal* **21** (05): 565–572. Doi:10.2118/9447-PA.
30. Muskat, M. 1947. The Performance of Bottom Water-drive Reservoirs. *AIME* **170** (01): 81–111. Doi:10.2118/947081-G.
31. Scheidegger, A.E. 1974. *The Physics of Flow through Porous Media*. University of Toronto Press, Toronto.
32. Dauben, D. L., y Menzie, D. E. 1967. Flow of Polymer Solutions Through Porous Media. *Journal of Petroleum Technology* **19** (08): 1065–1073. Doi:10.2118/1688-PA.
33. Melton, L.L. y Saunders C. D. 1957. Rheological Measurements of Non-Newtonian Fluids. *Society of Petroleum Engineers*, ID: SPE-716-G.
34. Mungan, N. 1966. Interfacial Effects in Immiscible Liquid-Liquid Displacement in Porous Media. *Society of Petroleum Engineers Journal* **6** (03): 247–253. Doi:10.2118/1442-PA.

35. Gogarty, W. B. 1967. Mobility Control With Polymer Solutions. *Society of Petroleum Engineers Journal* **7** (02): 161–173. Doi:10.2118/1566-B.
36. Harvey, A. H., y Menzie, D. E. 1970. Polymer Solution Flow in Porous Media. *Society of Petroleum Engineers Journal* **10** (02): 111–118. Doi:10.2118/2369-PA.
37. H.K Van Pollen y Associates, Inc. 1980. *Fundamental of Enhanced Oil Recovery*, Tulsa, Oklahoma.
38. Barenblatt, G. E., Entov, B. M. y Rizhik, B. M. 1984. *Flow of Liquids and Gases in Natural Formations*, Nedra, Moscú.
39. Kasraie, M., Ali, S. M. F. 1989. Role of Foam, Non-Newtonian Flow, and Thermal Upgrading in Steam Injection. SPE California Regional Meeting. Doi:10.2118/18784-MS.
40. Albrecht, R. A., y Marsden, S. S. 1970. Foams as Blocking Agents in Porous Media. *Society of Petroleum Engineers Journal* **10** (01): 51–55. Doi:10.2118/2357-PA.
41. Witherspoon, P. A., Benson, S., Persoff, P., Pruess, K., Radke, C. J. y Y. -S. Wu. 1989. Feasibility Analysis and Development of Foam Protected Underground Natural Gas Storage Facilities. División de Ciencias de la Tierra, Laboratorio Lawrence Berkeley, CA.
42. Vongvuthipornchai, S., y Raghavan, R. 1987. Well Test Analysis of Data Dominated by Storage and Skin: Non-Newtonian Power-Law Fluids. *SPE Formation Evaluation* **2** (04): 618–628. Doi:10.2118/14454-PA.
43. Skelland, A. H. P. 1967. *Non-Newtonian and heat Transfer*. John, Wiley & Sons Inc., New York.
44. Christopher, R. H. y Middleman, S. 1965. "Power-Law Flow through a Packed Tube". *I & EC Fundamentals*, Vo1.4, N0.4, 422-426.
45. Bird, R. B., Stewart, W. E., y Lightfoot, E. N. 1960. *Transport Phenomena*. New York: John Wiley y Sons, Inc.
46. Ouyang, L., Hill, A. D., y Zhu, D. 2013. Theoretical and Numerical Simulation of Herschel-Bulkley Fluid Flow in Propped Fractures. SPE Hydraulic Fracturing Technology Conference. Doi:10.2118/163841-MS.

47. Crews, J. B., y Huang, T. 2008. Performance Enhancements of Viscoelastic Surfactant Stimulation Fluids With Nanoparticles. Europec/EAGE Conference and Exhibition. Doi:10.2118/113533-MS.
48. Cummings, C. A., y Gentry, R. W. 1986. A Method for Predicting Solution Gas-Drive Production Decline. Permian Basin Oil and Gas Recovery Conference. doi:10.2118/15021-ms

Apéndice A. Método Predictor-Corrector de Douglas-Jones

Se considera la siguiente ecuación diferencial parcial no lineal

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = g_1 \left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial u}{\partial t} + g_2 \left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial t} \right). \quad \dots\dots\dots \mathbf{A1}$$

La solución es obtenida a partir del uso del predictor

$$\frac{w_{i-1}^{j+\frac{1}{2}} - 2w_i^{j+\frac{1}{2}} + w_{i+1}^{j+\frac{1}{2}}}{(\Delta x)^2} = g_1 \left(x_i, t_{j+\frac{1}{2}}, w_i^j, \frac{w_{i+1}^j - w_{i-1}^j}{2\Delta x} \right) \frac{w_i^{j+\frac{1}{2}} - w_i^j}{\frac{\Delta t}{2}} \dots\dots\dots \mathbf{A2}$$

$$+ g_2 \left(x_i, t_{j+\frac{1}{2}}, w_i^j, \frac{w_{i+1}^j - w_{i-1}^j}{2\Delta x} \right)$$

Y del corrector,

$$\frac{\frac{1}{2}(w_{i-1}^{j+1} - 2w_i^{j+1} + w_{i+1}^{j+1}) + \frac{1}{2}(w_{i-1}^j - 2w_i^j + w_{i+1}^j)}{(\Delta x)^2} = g_1 \left(x_i, t_{j+\frac{1}{2}}, w_i^{j+\frac{1}{2}}, \frac{w_{i+1}^{j+\frac{1}{2}} - w_{i-1}^{j+\frac{1}{2}}}{2\Delta x} \right) \frac{w_i^{j+1} - w_i^j}{\Delta t} \dots\dots\dots \mathbf{A3}$$

$$+ g_2 \left(x_i, t_{j+\frac{1}{2}}, w_i^{j+\frac{1}{2}}, \frac{w_{i+1}^{j+\frac{1}{2}} - w_{i-1}^{j+\frac{1}{2}}}{2\Delta x} \right)$$

La ecuación diferencial parcial **A4** es fundamental para describir el flujo radial de un fluido no-newtoniano de pequeña y constante compresibilidad en un medio homogéneo e isotrópico (Ikoku y Ramey, 1978):

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{n}{r} \frac{\partial p}{\partial r} = c_t \phi n \left(\frac{\mu_{eff}}{k_r} \right)^{\frac{1}{n}} \left(-\frac{\partial p}{\partial r} \right)^{\frac{n-1}{n}} \frac{\partial p}{\partial t} \quad \dots\dots\dots \mathbf{A4}$$

Al aplicar el método Predictor-Corrector a su transformación logarítmica, representada en **A5** y su desarrollo en el **Apéndice B**,

$$\frac{\partial^2 p_{DNN}}{\partial x^2} + (n-1) \frac{\partial p_{DNN}}{\partial x} = e^{\left(\frac{n+1}{n}\right)x} \left(-\frac{\partial p_{DNN}}{\partial x} \right)^{\frac{n-1}{n}} \frac{\partial p_{DNN}}{\partial t_{DNN}}, \quad \dots\dots\dots \mathbf{A5}$$

obtenemos para el predictor la ecuación **A6**:

$$\begin{aligned} & \frac{p_{i-1}^{j+1/2} - 2p_i^{j+1/2} + p_{i+1}^{j+1/2}}{(\Delta x)^2} \\ & + (n-1) \frac{p_{i+1}^j - p_{i-1}^j}{2\Delta x}, \quad \dots\dots\dots \mathbf{A6} \\ & = e^{\frac{n+1}{n}\Delta x(i-1)} \left(\frac{p_{i-1}^j - p_{i+1}^j}{2\Delta x} \right)^{\frac{n-1}{n}} \left(\frac{p_i^{j+1/2} - p_i^j}{\Delta t/2} \right) \end{aligned}$$

que al ir desarrollando en las ecuaciones **A7**

$$\begin{aligned} & p_{i-1}^{j+1/2} - 2p_i^{j+1/2} + p_{i+1}^{j+1/2} \\ & = e^{\frac{n+1}{n}\Delta x(i-1)} \left(\frac{p_{i-1}^j - p_{i+1}^j}{2\Delta x} \right)^{\frac{n-1}{n}} \left(\frac{p_i^{j+1/2} - p_i^j}{\frac{\Delta t}{2}} \right) (\Delta x)^2, \quad \dots\dots\dots \mathbf{A7} \\ & + (1-n) \left(\frac{p_{i+1}^j - p_{i-1}^j}{2} \right) (\Delta x) \end{aligned}$$

y reacomodando términos en **A8**

$$\begin{aligned}
 p_{i-1}^{j+1/2} - 2P_i^{j+1/2} - \left(e^{\frac{n+1}{n}\Delta x(i-1)} \left(\frac{p_{i-1}^j - p_{i+1}^j}{2\Delta x} \right)^{\frac{n-1}{n}} \left(\frac{2p_i^{j+1/2}}{\Delta t} \right) (\Delta x)^2 \right) \\
 + p_{i+1}^{j+1/2} \quad , \quad \dots\dots\dots \mathbf{A8} \\
 = -e^{\frac{n+1}{n}\Delta x(i-1)} \left(\frac{p_{i-1}^j - p_{i+1}^j}{2\Delta x} \right)^{\frac{n-1}{n}} \left(\frac{2p_i^j}{\Delta t} \right) (\Delta x)^2 \\
 + (1-n) \left(\frac{p_{i+1}^j - p_{i-1}^j}{2} \right) (\Delta x)
 \end{aligned}$$

para que el Predictor quede definido en la ecuación **A9** como,

$$\begin{aligned}
 p_{i-1}^{j+1/2} - \left(2 + e^{\frac{n+1}{n}\Delta x(i-1)} \left(\frac{p_{i-1}^j - p_{i+1}^j}{2\Delta x} \right)^{\frac{n-1}{n}} \left(\frac{2(\Delta x)^2}{\Delta t} \right) \right) p_i^{j+1/2} + p_{i+1}^{j+1/2} \\
 = (1-n) \left(\frac{p_{i+1}^j - p_{i-1}^j}{2} \right) (\Delta x) \quad \dots\dots\dots \mathbf{A9} \\
 - e^{\frac{n+1}{n}\Delta x(i-1)} \left(\frac{p_{i-1}^j - p_{i+1}^j}{2\Delta x} \right)^{\frac{n-1}{n}} \left(\frac{2(\Delta x)^2}{\Delta t} \right) p_i^j
 \end{aligned}$$

Mientras, para el Corrector, ecuación **A10**:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2}(p_{i-1}^{j+1} - 2p_i^{j+1} + p_{i+1}^{j+1}) + \frac{1}{2}(p_{i-1}^j - 2p_i^j + p_{i+1}^j) \\
 (\Delta x)^2 \\
 = e^{\frac{n+1}{n}(i-1)\Delta x} \left(- \left(\frac{p_{i+1}^{j+1/2} - p_{i-1}^{j+1/2}}{2\Delta x} \right) \right)^{\frac{n-1}{n}} \left(\frac{p_i^{j+1} - p_i^j}{\Delta t} \right) \quad \dots\dots \mathbf{A10} \\
 + (1-n) \left(\frac{p_{i+1}^{j+1/2} - p_{i-1}^{j+1/2}}{2\Delta x} \right)
 \end{aligned}$$

al ir acomodando términos semejantes en la ecuación **A11**:

$$\begin{aligned}
 & (p_{i-1}^{j+1} - 2p_i^{j+1} + p_{i+1}^{j+1}) + (p_{i-1}^j - 2p_i^j + p_{i+1}^j) \\
 &= e^{\frac{n+1}{n}(i-1)\Delta x} \left(\frac{p_{i-1}^{j+1/2} - p_{i+1}^{j+1/2}}{2\Delta x} \right)^{\frac{n-1}{n}} \left(\frac{p_i^{j+1} - p_i^j}{\Delta t} \right) 2(\Delta x)^2 \quad , \quad \dots\dots\dots \quad \mathbf{A11} \\
 &+ (1-n)(p_{i+1}^{j+1/2} - p_{i-1}^{j+1/2})\Delta x
 \end{aligned}$$

y agrupando en ecuación **A12**,

$$\begin{aligned}
 & p_{i-1}^{j+1} - 2p_i^{j+1} + p_{i+1}^{j+1} \\
 & - \left(e^{\frac{n+1}{n}(i-1)\Delta x} \left(\frac{p_{i-1}^{j+\frac{1}{2}} - p_{i+1}^{j+\frac{1}{2}}}{2\Delta x} \right)^{\frac{n-1}{n}} \left(\frac{p_i^{j+1}}{\Delta t} \right) 2(\Delta x)^2 \right) \quad , \quad \dots\dots\dots \quad \mathbf{A12} \\
 &= -e^{\frac{n+1}{n}(i-1)\Delta x} \left(\frac{p_{i-1}^{j+1/2} - p_{i+1}^{j+1/2}}{2\Delta x} \right)^{\frac{n-1}{n}} \left(\frac{p_i^j}{\Delta t} \right) 2(\Delta x)^2 \\
 &+ (1-n) \left(p_{i+1}^{j+\frac{1}{2}} - p_{i-1}^{j+\frac{1}{2}} \right) \Delta x - (p_{i-1}^j - 2p_i^j + p_{i+1}^j)
 \end{aligned}$$

se define al Corrector como la ecuación **A13**

$$\begin{aligned}
 p_{i-1}^{j+1} - \left[2 + e^{\frac{n+1}{n}(i-1)\Delta x} \left(\frac{p_{i-1}^{j+\frac{1}{2}} - p_{i+1}^{j+\frac{1}{2}}}{2\Delta x} \right)^{\frac{n-1}{n}} \left(\frac{2(\Delta x)^2}{\Delta t} \right) \right] p_i^{j+1} + p_{i+1}^{j+1} \\
 = -p_{i-1}^j \\
 + \left[2 - e^{\frac{n+1}{n}(i-1)\Delta x} \left(\frac{p_{i-1}^{j+\frac{1}{2}} - p_{i+1}^{j+\frac{1}{2}}}{2\Delta x} \right)^{\frac{n-1}{n}} \left(\frac{2(\Delta x)^2}{\Delta t} \right) \right] p_i^j \\
 - p_{i+1}^j + (1-n) \left(p_{i+1}^{j+\frac{1}{2}} - p_{i-1}^{j+\frac{1}{2}} \right) \Delta x
 \end{aligned} \quad \dots \quad \mathbf{A13}$$

Donde en el corrector y el predictor:

$$i = 1, 2, 3 \dots, N + 1$$

$$j = 1, 2, 3 \dots$$

y p es una aproximación a la presión adimensional, p_{DNN} .

Apéndice B. Transformación logarítmica del método Predictor-Corrector de Douglas-Jones

Antes de iniciar con la transformación es necesario retomar el grupo de variables adimensionales mencionadas en el capítulo 4 (ecuaciones 4.5-4.9) que al ser aplicado en la ecuación **A4**, queda como:

$$\frac{\partial^2 p_{DNN}}{\partial r_D^2} + \frac{n}{r_D} \frac{\partial p_{DNN}}{\partial r_D} = \left(-\frac{\partial p_{DNN}}{\partial x} \right)^{\frac{n-1}{n}} \frac{\partial p_{DNN}}{\partial t_{DNN}}. \quad \dots\dots\dots \mathbf{B1}$$

Al hacer una transformación logarítmica al método Predictor-Corrector de Douglas Jones, podemos hacer uso de una malla de tamaño uniforme. La transformación está dada por los siguientes parámetros expresados en **B2**

$$x = \ln(r_D), \quad r_D = e^x, \quad \dots\dots\dots \mathbf{B2}$$

al diferenciar

$$dr_D = e^x dx. \quad \dots\dots\dots \mathbf{B3}$$

Por lo tanto

$$\frac{\partial p_{DNN}}{\partial r_D} = \frac{1}{e^x} \frac{\partial p_{DNN}}{\partial x}, \quad \dots\dots\dots \mathbf{B4}$$

entonces

$$\frac{\partial^2 p_{DNN}}{\partial r_D^2} = \frac{\partial}{\partial r_D} \left(\frac{1}{e^x} \frac{\partial p_{DNN}}{\partial x} \right) = \frac{1}{e^x} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{e^x} \frac{\partial p_{DNN}}{\partial x} \right) = \frac{1}{e^{2x}} \left(\frac{\partial^2 p_{DNN}}{\partial x^2} - \frac{\partial p_{DNN}}{\partial x} \right), \quad \dots \mathbf{B5}$$

al sustituir en **B1**:

$$\frac{1}{e^{2x}} \left(\frac{\partial^2 p_{DNN}}{\partial x^2} - \frac{\partial p_{DNN}}{\partial x} \right) + \frac{n}{e^{2x}} \frac{\partial p_{DNN}}{\partial x} = \frac{1}{e^{\left(\frac{n-1}{n}\right)x}} \left(-\frac{\partial p_{DNN}}{\partial x} \right)^{\frac{n-1}{n}} \frac{\partial p_{DNN}}{\partial t_{DNN}}, \quad \dots \quad \mathbf{B6}$$

para obtener como resultado la ecuación que rige el flujo de fluidos no-newtonianos en variables adimensionales en su forma logarítmica:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + (n - 1) \frac{\partial p_{DNN}}{\partial x} = e^{\left(\frac{n+1}{n}\right)x} \left(-\frac{\partial p_{DNN}}{\partial x} \right)^{\frac{n-1}{n}} \frac{\partial p_{DNN}}{\partial t_{DNN}}. \quad \dots \quad \mathbf{B7}$$

Apéndice C. Método Predictor-Corrector de Douglas-Jones aplicando condiciones de frontera

Yacimiento infinito produciendo a gasto constante para un fluido no-newtoniano tipo ley de potencias.

Las condiciones iniciales y de frontera son:

1. Condición inicial:

$$p_i(x, 0) = 0 \text{ en } j = 0. \quad \dots\dots\dots \mathbf{C1}$$

2. Condiciones de frontera en el pozo:

A) Predictor

$$\frac{p_2^{j+1/2} - p_0^{j+1/2}}{2\Delta x} = -1. \quad \dots\dots\dots \mathbf{C2}$$

B) Corrector

$$\frac{p_2^{j+1} - p_0^{j+1}}{2\Delta x} = -1. \quad \dots\dots\dots \mathbf{C3}$$

3. Condición en la frontera externa

$$p_i(x, t_{DNN}) \rightarrow 0 \quad \text{cuando } i \rightarrow \infty \text{ para toda } j. \quad \dots\dots\dots \mathbf{C4}$$

Cuando $i = 1$ el predictor resulta en **ecuación C5**:

$$-(2 + \alpha)P_1^{j+\frac{1}{2}} + 2P_2^{j+\frac{1}{2}} = (n - 1)(\Delta x)^2 - \alpha P_1^j - 2\Delta x. \quad \dots\dots\dots \mathbf{C5}$$

Para $2 < i < N - 1$, resulta en **ecuación C6**;

$$\begin{aligned}
p_{i-1}^{j+1/2} - \left(2 + e^{\frac{n+1}{n}\Delta x(i-1)} \left(\frac{p_{i-1}^j - p_{i+1}^j}{2\Delta x} \right)^{\frac{n-1}{n}} \alpha \right) p_i^{j+\frac{1}{2}} + p_{i+1}^{j+\frac{1}{2}} \\
= (1-n) \left(\frac{p_{i+1}^j - p_{i-1}^j}{2} \right) (\Delta x) \dots \dots \dots \mathbf{C6} \\
- e^{\frac{n+1}{n}\Delta x(i-1)} \left(\frac{p_{i-1}^j - p_{i+1}^j}{2\Delta x} \right)^{\frac{n-1}{n}} \alpha p_i^j
\end{aligned}$$

Para $i = N$, **ecuación C7**;

$$\begin{aligned}
p_{N-1}^{j+1/2} - \left(2 + e^{\frac{n+1}{n}\Delta x(N-1)} \left(\frac{p_{N-1}^j - p_{N+1}^j}{2\Delta x} \right)^{\frac{n-1}{n}} \alpha \right) p_N^{j+\frac{1}{2}} \\
= (1-n) \left(\frac{p_{N+1}^j - p_{N-1}^j}{2} \right) (\Delta x) \dots \dots \dots \mathbf{C7} \\
- e^{\frac{n+1}{n}\Delta x(N-1)} \left(\frac{p_{N-1}^j - p_{N+1}^j}{2\Delta x} \right)^{\frac{n-1}{n}} \alpha p_N^j - p_{N+1}^{j+\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Considerando $i = 1$ en el corrector, resulta en **ecuación C8**:

$$-(2 + \alpha)p_1^{j+1} + 2p_2^{j+1} = -2p_2^j + 2(\Delta x)^2(n-1) - 4\Delta x + (2 - \alpha)p_1^j. \dots \dots \mathbf{C8}$$

Para $2 < i < N - 1$, resulta en la **ecuación C9**:

$$\begin{aligned}
p_{i-1}^{j+1} - \left[2 + e^{\frac{n+1}{n}(i-1)\Delta x} \left(\frac{p_{i-1}^{j+\frac{1}{2}} - p_{i+1}^{j+\frac{1}{2}}}{2\Delta x} \right)^{\frac{n-1}{n}} \alpha \right] p_i^{j+1} + p_{i+1}^{j+1} \\
= -(p_{i-1}^j + p_{i+1}^j) \dots \dots \dots \mathbf{C9} \\
+ \left[2 - e^{\frac{n+1}{n}(i-1)\Delta x} \left(\frac{p_{i-1}^{j+\frac{1}{2}} - p_{i+1}^{j+\frac{1}{2}}}{2\Delta x} \right)^{\frac{n-1}{n}} \alpha \right] p_i^j \\
+ (1-n) \left(p_{i+1}^{j+\frac{1}{2}} - p_{i-1}^{j+\frac{1}{2}} \right) \Delta x
\end{aligned}$$

Para $i = N$:

$$\begin{aligned}
 p_{N-1}^{j+1} - \left[2 + e^{\frac{n+1}{n}(i-1)\Delta x} \left(\frac{p_{N-1}^{j+\frac{1}{2}} - p_{N+1}^{j+\frac{1}{2}}}{2\Delta x} \right)^{\frac{n-1}{n}} \right] \alpha p_N^{j+1} \\
 = -(p_{N-1}^j + p_{N+1}^j) \\
 + \left[2 - e^{\frac{n+1}{n}(N-1)\Delta x} \left(\frac{p_{N-1}^{j+\frac{1}{2}} - p_{N+1}^{j+\frac{1}{2}}}{2\Delta x} \right)^{\frac{n-1}{n}} \right] \alpha p_N^j \quad \cdot \dots\dots\dots \text{C10} \\
 + (1-n) \left(p_{N+1}^{j+\frac{1}{2}} - p_{N-1}^{j+\frac{1}{2}} \right) \Delta x - p_{N+1}^{j+1}
 \end{aligned}$$

Con las ecuaciones C5- C7 que corresponden al predictor y las ecuaciones C8-C10 que corresponden al corrector, se forman dos matrices tridiagonales de $N \times N$ que pueden resolverse por el algoritmo de Thomas.

El término $\frac{2(\Delta x)^2}{\Delta t}$ se simplificó como $\alpha, \Delta x$ es el incremento de espacio, y N representa el número de intervalos.

Yacimiento infinito produciendo a presión de fondo constante para un fluido no-newtoniano tipo ley de potencias.

Las condiciones iniciales y de frontera son:

1- Condición inicial:

$p(x, 0) = 0$ en $j = 0$ **C11**

2- Condiciones de frontera en el pozo

A) Predictor

$p_1^{j+1/2} = 1$ **C12**

B) Corrector

$p_1^{j+1} = 1$ **C13**

3- Condición en la frontera interna

$p_1^{j+1} = 1$ **C14**

Cuando $i = 1$ el predictor resulta en **ecuación C15**:

$p_i(x_{DNN} = 1, j) = 1$ para todo t_{DNN} **C15**

Para $2 < i < N - 1$, resulta en **ecuación C16**;

$$\begin{aligned}
 p_{i-1}^{j+1/2} - \left(2 + e^{\frac{n+1}{n}\Delta x(i-1)} \left(\frac{p_{i-1}^j - p_{i+1}^j}{2\Delta x} \right)^{\frac{n-1}{n}} \alpha \right) p_i^{j+\frac{1}{2}} + p_{i+1}^{j+\frac{1}{2}} \\
 = (1 - n) \left(\frac{p_{i+1}^j - p_{i-1}^j}{2} \right) (\Delta x) \dots \dots \dots \text{C16} \\
 - e^{\frac{n+1}{n}\Delta x(i-1)} \left(\frac{p_{i-1}^j - p_{i+1}^j}{2\Delta x} \right)^{\frac{n-1}{n}} \alpha p_i^j
 \end{aligned}$$

Para $i = N$, **ecuación C17**;

$$\begin{aligned}
 p_{N-1}^{j+1/2} - \left(2 + e^{\frac{n+1}{n}\Delta x(N-1)} \left(\frac{p_{N-1}^j - p_{N+1}^j}{2\Delta x} \right)^{\frac{n-1}{n}} \alpha \right) p_N^{j+\frac{1}{2}} \\
 = (1 - n) \left(\frac{p_{N+1}^j - p_{N-1}^j}{2} \right) (\Delta x) \dots \dots \dots \text{C17} \\
 - e^{\frac{n+1}{n}\Delta x(N-1)} \left(\frac{p_{N-1}^j - p_{N+1}^j}{2\Delta x} \right)^{\frac{n-1}{n}} \alpha p_N^j - p_{N+1}^{j+\frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

Considerando $i = 1$ en el corrector, resulta en **ecuación C18**:

$$p_1^{j+1} = p_1^j. \dots \dots \dots \text{C18}$$

Para $2 < i < N - 1$, resulta en **ecuación C19**:

$$\begin{aligned}
 p_{i-1}^{j+1} - \left[2 + e^{\frac{n+1}{n}(i-1)\Delta x} \left(\frac{p_{i-1}^{j+\frac{1}{2}} - p_{i+1}^{j+\frac{1}{2}}}{2\Delta x} \right)^{\frac{n-1}{n}} \right] \alpha p_i^{j+1} + p_{i+1}^{j+1} \\
 = -(p_{i-1}^j + p_{i+1}^j) \\
 + \left[2 - e^{\frac{n+1}{n}(i-1)\Delta x} \left(\frac{p_{i-1}^{j+\frac{1}{2}} - p_{i+1}^{j+\frac{1}{2}}}{2\Delta x} \right)^{\frac{n-1}{n}} \right] \alpha p_i^j \cdot \dots\dots\dots \mathbf{C19} \\
 + (1 - n) \left(p_{i+1}^{j+\frac{1}{2}} - p_{i-1}^{j+\frac{1}{2}} \right) \Delta x
 \end{aligned}$$

Para $i = N$:

$$\begin{aligned}
 p_{N-1}^{j+1} - \left[2 + e^{\frac{n+1}{n}(i-1)\Delta x} \left(\frac{p_{N-1}^{j+\frac{1}{2}} - p_{N+1}^{j+\frac{1}{2}}}{2\Delta x} \right)^{\frac{n-1}{n}} \right] \alpha p_N^{j+1} \\
 = -(p_{N-1}^j + p_{N+1}^j) \\
 + \left[2 - e^{\frac{n+1}{n}(N-1)\Delta x} \left(\frac{p_{N-1}^{j+\frac{1}{2}} - p_{N+1}^{j+\frac{1}{2}}}{2\Delta x} \right)^{\frac{n-1}{n}} \right] \alpha p_N^j \cdot \dots\dots\dots \mathbf{C20} \\
 + (1 - n) \left(p_{N+1}^{j+\frac{1}{2}} - p_{N-1}^{j+\frac{1}{2}} \right) \Delta x - p_{N+1}^{j+1}
 \end{aligned}$$

Yacimiento cerrado produciendo a gasto constante para un fluido no-newtoniano tipo ley de potencias.

Las condiciones iniciales y de frontera son:

1. Condición inicial:

$$p_i(x, 0) = 0 \text{ en } j = 0. \quad \dots\dots\dots \text{ C21}$$

2. Condiciones de frontera externa

A) Predictor

$$\frac{p_{N+1}^{j+1/2} - p_{N-1}^{j+1/2}}{2\Delta x} = 0. \quad \dots\dots\dots \text{ C22}$$

B) Corrector

$$\frac{p_{N+1}^{j+1} - p_{N-1}^{j+1}}{2\Delta x} = 0. \quad \dots\dots\dots \text{ C23}$$

3. Condición en la frontera interna

A) Predictor

$$\frac{p_2^{j+1/2} - p_0^{j+1/2}}{2\Delta x} = -1. \quad \dots\dots\dots \text{ C24}$$

B) Corrector

$$\frac{p_2^{j+1} - p_0^{j+1}}{2\Delta x} = -1. \quad \dots\dots\dots \text{ C25}$$

Cuando $i = 1$

$$-(2 + \alpha)p_1^{j+\frac{1}{2}} + 2p_2^{j+\frac{1}{2}} = (n - 1)(\Delta x)^2 - \alpha p_1^j - 2\Delta x. \quad \dots\dots\dots \text{ C26}$$

Para $2 < i < N - 1$, resulta en **ecuación C27**;

$$\begin{aligned}
 p_{i-1}^{j+1/2} - \left(2 + e^{\frac{n+1}{n}\Delta x(i-1)} \left(\frac{p_{i-1}^j - p_{i+1}^j}{2\Delta x} \right)^{\frac{n-1}{n}} \alpha \right) p_i^{j+\frac{1}{2}} + p_{i+1}^{j+\frac{1}{2}} \\
 = (1 - n) \left(\frac{p_{i+1}^j - p_{i-1}^j}{2} \right) (\Delta x) \dots \dots \dots \text{C27} \\
 - e^{\frac{n+1}{n}\Delta x(i-1)} \left(\frac{p_{i-1}^j - p_{i+1}^j}{2\Delta x} \right)^{\frac{n-1}{n}} \alpha p_i^j
 \end{aligned}$$

Para $i = N$, **ecuación C28**;

$$p_{N-1}^{j+1/2} - p_N^{j+\frac{1}{2}} = 0. \dots \dots \dots \text{C28}$$

Considerando $i = 1$ en el corrector, resulta en **ecuación C29**:

$$-(2 + \alpha)p_1^{j+\frac{1}{2}} + 2p_2^{j+\frac{1}{2}} = (n - 1)(\Delta x)^2 - \alpha p_1^j - 2\Delta x. \dots \dots \dots \text{C29}$$

Para $2 < i < N - 1$, resulta en **ecuación C30**:

$$\begin{aligned}
 p_{i-1}^{j+1} - \left[2 + e^{\frac{n+1}{n}(i-1)\Delta x} \left(\frac{p_{i-1}^{j+\frac{1}{2}} - p_{i+1}^{j+\frac{1}{2}}}{2\Delta x} \right)^{\frac{n-1}{n}} \alpha \right] p_i^{j+1} + p_{i+1}^{j+1} \\
 = -(p_{i-1}^j + p_{i+1}^j) \\
 + \left[2 - e^{\frac{n+1}{n}(i-1)\Delta x} \left(\frac{p_{i-1}^{j+\frac{1}{2}} - p_{i+1}^{j+\frac{1}{2}}}{2\Delta x} \right)^{\frac{n-1}{n}} \alpha \right] p_i^j \dots \dots \dots \text{C30} \\
 + (1 - n) \left(p_{i+1}^{j+\frac{1}{2}} - p_{i-1}^{j+\frac{1}{2}} \right) \Delta x
 \end{aligned}$$

Para $i = N$:

$$p_{N-1}^{j+1} - p_N^{j+1} = 0. \quad \dots\dots\dots \text{C31}$$

Yacimiento pseudo-estacionario por las fronteras produciendo a presión de fondo fluyente constante para fluidos no-newtonianos pseudo-plásticos.

Las condiciones iniciales y de frontera son:

1. Condición inicial:

$$p_i(x, 0) = 0 \text{ en } j = 0. \quad \dots\dots\dots \text{C32}$$

2. Condiciones de frontera externa

A) Predictor

$$\frac{p_{N+1}^{j+1/2} - p_{N-1}^{j+1/2}}{2\Delta x} = 0. \quad \dots\dots\dots \text{C33}$$

B) Corrector

$$\frac{p_{N+1}^{j+1} - p_{N-1}^{j+1}}{2\Delta x} = 0. \quad \dots\dots\dots \text{C34}$$

3. Condición en la frontera interna

A) Predictor

$$p_1^{j+1/2} = 1. \quad \dots\dots\dots \text{C35}$$

B) Corrector

$$p_1^{j+1} = 1. \quad \dots\dots\dots \text{C36}$$

Cuando $i = 1$ el predictor resulta en **ecuación C37**:

$$p_1^{j+\frac{1}{2}} = p_1^j. \quad \dots\dots\dots \mathbf{C37}$$

Para $2 < i < N - 1$, resulta en **ecuación C38**;

$$\begin{aligned}
 p_{i-1}^{j+\frac{1}{2}} - \left(2 + e^{\frac{n+1}{n}\Delta x(i-1)} \left(\frac{p_{i-1}^j - p_{i+1}^j}{2\Delta x} \right)^{\frac{n-1}{n}} \alpha \right) p_i^{j+\frac{1}{2}} + p_{i+1}^{j+\frac{1}{2}} \\
 = (1 - n) \left(\frac{p_{i+1}^j - p_{i-1}^j}{2} \right) (\Delta x) \quad \dots\dots\dots \mathbf{C38} \\
 - e^{\frac{n+1}{n}\Delta x(i-1)} \left(\frac{p_{i-1}^j - p_{i+1}^j}{2\Delta x} \right)^{\frac{n-1}{n}} \alpha p_i^j
 \end{aligned}$$

Para $i = N$, **ecuación C39**;

$$p_{N-1}^{j+\frac{1}{2}} - p_N^{j+\frac{1}{2}} = 0. \quad \dots\dots\dots \mathbf{C39}$$

Considerando $i = 1$ en el corrector, resulta en **ecuación C40**:

$$p_1^{j+\frac{1}{2}} = p_1^j. \quad \dots\dots\dots \mathbf{C40}$$

Para $2 < i < N - 1$, resulta en **ecuación C41**:

$$\begin{aligned}
 p_{i-1}^{j+1} - \left[2 + e^{\frac{n+1}{n}(i-1)\Delta x} \left(\frac{p_{i-1}^{j+\frac{1}{2}} - p_{i+1}^{j+\frac{1}{2}}}{2\Delta x} \right)^{\frac{n-1}{n}} \right] \alpha & p_i^{j+1} + p_{i+1}^{j+1} \\
 &= -(p_{i-1}^j + p_{i+1}^j) \\
 &+ \left[2 - e^{\frac{n+1}{n}(i-1)\Delta x} \left(\frac{p_{i-1}^{j+\frac{1}{2}} - p_{i+1}^{j+\frac{1}{2}}}{2\Delta x} \right)^{\frac{n-1}{n}} \right] \alpha p_i^j \cdot \dots\dots\dots \mathbf{C41} \\
 &+ (1 - n) \left(p_{i+1}^{j+\frac{1}{2}} - p_{i-1}^{j+\frac{1}{2}} \right) \Delta x
 \end{aligned}$$

Para $i = N$:

$$p_{N-1}^{j+1} - p_N^{j+1} = 0. \quad \dots\dots\dots \mathbf{C42}$$

Apéndice D. Método de diferencias finitas para el simulador de fluidos plástico de Bingham

Partiendo de la ecuación 5.1 que considera el problema de plástico de Bingham, se implementa el grupo de variables adimensionales (ecuaciones 5.5 - 5.8) con el fin de generalizar las posibles soluciones.

$$\frac{\partial^2 p_{DNN}}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial p_{DNN}}{\partial r_D} - \frac{G_D}{r_D} = \frac{\partial p_{DNN}}{\partial t_{DNN}}, \quad \dots \quad \mathbf{D1}$$

Retomando los mismos parámetros expresados en **B2** del **Apéndice B** para obtener la transformación logarítmica, **ecuación D2**, con la finalidad de que el simulador sea lineal y totalmente implícito para un esquema de diferencias finitas de nodo central

$$\frac{\partial^2 p_D}{\partial x^2} + e^x G_D = e^{2x} \frac{\partial p_D}{\partial t_D}, \quad \dots \quad \mathbf{D2}$$

Donde las derivadas se ven representadas como:

$$\frac{\partial^2 p_D}{\partial x^2} \approx \frac{p_{i-1}^{m+1} - 2p_i^{m+1} + p_{i+1}^{m+1}}{\Delta x^2}, \quad \dots \quad \mathbf{D3}$$

$$\frac{\partial p_D}{\partial t_D} \approx \frac{p_i^{m+1} - p_i^m}{\Delta t}, \quad \dots \quad \mathbf{D4}$$

Que al ser sustituidas en **D2** y, posteriormente, agrupando los términos semejantes, resulta el modelo siguiente

$$p_{i-1}^{m+1} - (2 + \lambda_i)p_i^{m+1} + p_{i+1}^{m+1} = -\omega_i G_D - \lambda_i p_i^m, \quad \dots \quad \mathbf{D5}$$

donde ω_i y λ_i son igual a

$$\omega_i = \Delta x^2 \exp^{\Delta x(i-1)}, \quad \lambda_i = \frac{\Delta x^2}{\Delta t} \exp^{2\Delta x(i-1)}. \quad \dots\dots\dots \mathbf{D6}$$

Este modelo permitirá presentar los diferentes casos de análisis para fluidos con reología plástico de Bingham cuando se asignen las condiciones inicial y de frontera pertinentes. Posteriormente se obtendrá un modelo numérico, el cual, generará una matriz tridiagonal que, se sugiere, se resuelva a través del método de Thomas.

Apéndice E. Método de diferencias finitas para fluidos plástico de Bingham aplicando condiciones de frontera

Yacimiento infinito produciendo a gasto constante para un fluido newtoniano tipo plástico de Bingham.

Se plantean las siguientes condiciones inicial y de frontera para las modificaciones a la herramienta de cómputo

$$p_{DNN}(x, 0) = 0, \quad \dots\dots\dots \text{E1}$$

$$\left(\frac{\partial p_{DNN}}{\partial x}\right)_{x=x_0} = -1 - G_D \quad t_{DNN} > 0, \quad \dots\dots\dots \text{E2}$$

$$p_{DNN}(x \rightarrow \infty) = 0 \quad t_{DNN} > 0. \quad \dots\dots\dots \text{E3}$$

Que junto con **D5** nos permiten el siguiente modelo numérico:

para $x = 0$ cuando $i = 1$

$$-(2 + \lambda_i)p_1^{m+1} + 2p_2^{m+1} = -2\Delta x - G_D(\omega_i + 2\Delta x) - \lambda_i p_1^m, \quad \dots\dots\dots \text{E4}$$

en los nodos intermedios $2 < i < N$,

$$p_{i-1}^{m+1} - (2 + \lambda_i)p_i^{m+1} + p_{i+1}^{m+1} = -\omega_i G_D - \lambda_i p_i^m, \quad \dots\dots\dots \text{E5}$$

en $x = x_e$ cuando $i = N$

$$p_{i-1}^{m+1} - (2 + \lambda_i)p_i^{m+1} = -\omega_i G_D - \lambda_i p_i^m. \quad \dots\dots\dots \text{E6}$$

Yacimiento infinito produciendo a presión de fondo constante para un fluido no-newtoniano tipo plástico de Bingham.

Las condiciones de frontera asignadas para este caso son:

$$p_{DNN}(x, 0) = 0 \quad \dots\dots\dots \mathbf{E7}$$

$$p_{DNN}(x_{D=1}, j) = 1 \quad t_{DNN} > 0, \quad \dots\dots\dots \mathbf{E8}$$

$$p_{DNN}(x \rightarrow \infty) = 0 \quad t_{DNN} > 0. \quad \dots\dots\dots \mathbf{E9}$$

Que junto con **D5** permiten el siguiente modelo numérico:

para $x = 0$ cuando $i = 1$

$$p_1^{m+1} = 1 \quad \dots\dots\dots \mathbf{E10}$$

en lo nodos intermedios $2 < i < N$,

$$p_{i-1}^{m+1} - (2 + \lambda_i)p_i^{m+1} = -\omega_i G_D - \lambda_i p_i^m, \quad \dots\dots\dots \mathbf{E11}$$

en $x = x_e$ cuando $i = N$

$$p_{i-1}^{m+1} - (2 + \lambda_i)p_i^{m+1} = -\omega_i G_D - \lambda_i p_i^m. \quad \dots\dots\dots \mathbf{E12}$$

Yacimiento cerrado produciendo a gasto constante para un fluido tipo plástico de Bingham.

Para los casos de yacimientos dominados por las fronteras, cambiará la frontera externa. Sin embargo, se consideran todas las condiciones de frontera con el fin de que sean claras las modificaciones realizadas a la herramienta de cómputo:

$$p_{DNN}(x, 0) = 0, \quad \dots\dots\dots \mathbf{E13}$$

$$\left(\frac{\partial p_{DNN}}{\partial x}\right)_{x=x_0} = -1 - G_D \quad t_{DNN} > 0, \quad \dots\dots\dots \mathbf{E14}$$

$$\left(\frac{\partial p_{DNN}}{\partial x}\right)_{x=x_e} = 0 \quad t_{DNN} > 0. \quad \dots\dots\dots \mathbf{E15}$$

Entonces, el resultado final del modelo en cada uno de los nodos, N, es el siguiente:

para $x = 0$ cuando $i = 1$

$$-(2 + \lambda_i)p_1^{m+1} + 2p_2^{m+1} = -2\Delta x - G_D(\omega_i + 2\Delta x) - \lambda_i p_1^m, \quad \dots\dots\dots \mathbf{E16}$$

en los nodos intermedios $2 < i < N$

$$p_{i-1}^{m+1} - (2 + \lambda_i)p_i^{m+1} + p_{i+1}^{m+1} = -\omega_i G_D - \lambda_i p_i^m, \quad \dots\dots\dots \mathbf{E17}$$

en $x = x_e$ cuando $i = N$

$$2p_{N-1}^{m+1} - (2 + \lambda_N)p_N^{m+1} = -\omega_N G_D - \lambda_N p_N^m. \quad \dots\dots\dots \mathbf{E18}$$

Yacimiento cerrado produciendo a presión de fondo constante para un fluido tipo plástico de Bingham.

La variante para este caso, comparado al anterior, es la condición de frontera interna

$$p_{DNN}(x, 0) = 0. \quad \dots\dots\dots \mathbf{E19}$$

$$p_{DNN}(x_{D=1}, j) = 1 \quad t_{DNN} > 0, \quad \dots\dots\dots \mathbf{E20}$$

$$\left(\frac{\partial p_{DNN}}{\partial x}\right)_{x=x_e} = 0 \quad t_{DNN} > 0. \quad \dots\dots\dots \mathbf{E21}$$

Entonces, el resultado final del modelo en cada uno de los nodos, N, es el siguiente:
para $x = 0$ cuando $i = 1$

$$p_1^{m+1} = 1, \quad \dots\dots\dots \mathbf{E22}$$

en lo nodos intermedios $2 < i < N$

$$p_{i-1}^{m+1} - (2 + \lambda_i)p_i^{m+1} + p_{i+1}^{m+1} = -\omega_i G_D - \lambda_i p_i^m, \quad \dots\dots\dots \mathbf{E23}$$

en $x = x_e$ cuando $i = N$

$$2p_{N-1}^{m+1} - (2 + \lambda_N)p_N^{m+1} = -\omega_N G_D - \lambda_N p_N^m. \quad \dots\dots\dots \mathbf{E24}$$