



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO.

FACULTAD DE INGENIERÍA.

*“Análisis Cinemático y Balanceo de una
Plataforma Paralela de 5 GDL”*

T É S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
Maestro en Ingeniería

P R E S E N T A:

Ing. Jorge Enrique González Almanza

DIRECTOR DE TESIS

M. en I. Francisco Cuenca Jiménez

MÉXICO, D. F.

Agosto 2006

Agradecimientos

A mis padres por el apoyo que siempre me han brindado, quienes con su ejemplo han dado un gran impulso a mis proyectos.

A mi país México, que a pesar de sus múltiples problemas es tan generoso con sus ciudadanos. Que la educación siempre sea para todos

A mi Universidad, por ser esa institución tan impetuosa, a ti mi gratitud por siempre.

A mi tutor Francisco Cuenca, por todo el empeño y esfuerzo que puso en este trabajo y que ha compartido su experiencia con cada uno de sus alumnos.

A Leopoldo González, por el gran soporte que ha facilitado mucho el que yo pueda retribuirle a la Universidad parte del aprendizaje que en sus aulas obtuve.

A Eusebio Jiménez, quien en sus clases nos hizo entender la importancia de la profundidad en el conocimiento sistemático.

A mis cuates Robert, Lencho Priscilha, Marquiño, Campión, Palace, por haber pasado con uds. los mejores ratos y aventuras en estos años.

Al Conacyt, por la beca que me otorgó, con la cual pude realizar mis estudios de maestría.

Índice general

| | |
|---|-----------|
| 1. Generalidades | 4 |
| 1.1. Introducción | 4 |
| 1.2. Justificación | 9 |
| 1.3. Definiciones | 9 |
| 1.3.1. Rotaciones | 9 |
| 1.3.2. Transformaciones | 9 |
| 1.3.3. Cambio de Base | 10 |
| 1.3.4. Definición de Cuerpo Rígido | 12 |
| 1.3.5. Matrices de Rotación | 13 |
| 1.3.6. Matrices Homogéneas | 16 |
| 1.3.7. Transformaciones Principales | 18 |
| 2. Análisis Cinemático | 20 |
| 2.1. Análisis de Posición | 20 |
| 2.1.1. Desarrollo de Cadenas Motrices | 20 |
| 2.1.2. Desarrollo de Cadena Central | 32 |
| 3. Solución Algebraica | 41 |
| 3.1. Despeje de ángulos en las cadenas motrices | 41 |
| 3.1.1. Despeje de θ_{3i} | 41 |
| despejeteta3i.jpg (0) | |
| 43 | |
| 3.1.3. Despeje de θ_5 | 43 |
| 3.1.4. Despeje de θ_{6i} | 45 |
| 3.1.5. Despeje de θ_{8i} y θ_{9i} | 45 |
| 3.1.6. Despeje de θ_{13i} | 47 |
| 3.2. Despeje de ángulos en Cadena Central | 49 |
| 3.2.1. Despeje de θ_{2p} | 49 |
| 3.2.2. Despeje de θ_{4P} | 51 |
| 3.2.3. Despeje de θ_{5P} | 52 |

| | |
|---|-----------|
| 3.2.4. Despeje de θ_{7P} | 52 |
| 3.2.5. Despeje de θ_{8p} | 54 |
| 3.3. Solución Cinemática | 54 |
| 4. Balanceo Estático | 59 |
| 4.1. Balanceo Estático Con Contrapesos | 60 |
| 4.2. Balanceo Con Resortes | 66 |
| 4.3. Solución del Balanceo | 67 |
| 5. Análisis Estático | 73 |
| 5.1. Análisis Estático Empleando Torsores | 73 |
| 5.2. Análisis Estático de la Plataforma | 77 |
| 5.2.1. Cuerpo 1i | 78 |
| 5.2.2. Cuerpo 2i | 80 |
| 5.2.3. Cuerpo 3i | 82 |
| 5.2.4. Cuerpo 1p | 84 |
| 5.2.5. Cuerpo 2p | 87 |
| 5.2.6. Cuerpo Plato | 89 |
| 5.3. Comprobación estática | 91 |
| 6. Conclusiones | 94 |
| Apéndice A | 97 |

Prefacio

A lo largo de la historia, la Mecánica ha ido evolucionando conforme logra responderse así misma las preguntas que se plantea y al interrogarse, genera nuevas alternativas y/o cuestiones que a lo largo del tiempo han conformado un proceso iterativo de ideas; con esto se ha logrado el avance y evolución de los sistemas mecánicos pasando de sistemas que describen en un movimiento en el plano a los más sofisticados mecanismos tridimensionales como el que se desarrolla en este trabajo.

Concretamente en el campo de la robótica, ha habido un avance vertiginoso. Desde la década de los 50's donde aparecen los primeros robots seriales, con diferentes configuraciones, hasta las plataformas paralelas; todos estos con un número de grados de libertad que hace que se complique más o menos su estudio. Se podría pensar que en fechas recientes se encuentra estancado el desarrollo de estos mecanismos, ya sea por problemas con su propia configuración, las singularidades geométricas que pueden tener estos, las limitaciones en el movimiento con las que se enfrenta el diseñador; esto además de que no ha sido posible su comercialización de la forma como si lo han logrado los robots seriales.

A pesar de estos problemas a los que se enfrentan estos sistemas mecánicos, son las ventajas de estos mismos, las que han hecho que persista su estudio y con esto ir salvando de manera lenta pero sistemática, una a una las dificultades a las que se enfrentan las personas dedicadas al análisis y diseño de estos sistemas mecánicos; optándose en regresar a configuraciones más sencillas pero sin deteriorar el funcionamiento de las plataformas. Esto es benéfico ya que por un lado se simplifica la solución de las ecuaciones mecánicas al poder ser más simples, por otro lado la calibración y control de estos sistemas también se ven beneficiados.

Lo que se pretende con este trabajo es el ir avanzando poco a poco en el entendimiento de estos mecanismos dentro de la UNAM. Es de esperar que conforme se vayan logrando resolver las dificultades, mediante el estudio, el análisis y la investigación, seremos capaces de mantenernos al nivel tecnológico de los centros de desarrollo avanzados, sin sufrir un resago de esta índole en nuestra institución. Es deseable que se logren involucrar diversas áreas de la misma institución y en conjunto ir respondiendo a las interrogantes y problemas de manera que se puedan tener una retroalimentación de todos los participantes al conocer

los problemas específicos y generales que conlleva el desarrollo de las plataformas paralelas. En la UNAM existe el talento sólo hace falta encauzarlo de manera adecuada para el beneficio de todos, pero sobre todo de nuestra institución.

Es preciso que se persista en el análisis de este tipo de mecanismos y que se vayan encontrando más tipos de aplicaciones a las que actualmente existen para poder estar en los grupos tecnológicos de vanguardia y a la postre obtener beneficios al poder explotar económica y comercialmente estos sistemas mecánicos.

Capítulo 1

Generalidades

1.1. Introducción

Una plataforma se define como aquel mecanismo de lazo cerrado donde su órgano terminal está conectado a la base por varias e independientes cadenas cinemáticas. La primera plataforma fue la de Gough, que fue un mecanismo de 6 grados de libertad que sirvió para probar llantas en la Dunlop. De ahí en adelante se han desarrollado muchas configuraciones y arreglos. Desde plataformas esféricas de 3 grados de libertad, plataformas paralelas seriales e inclusive mecanismos paralelos compuestos de cables. Las personas que más se han dedicado a esto han sido Jorge Ángeles, Jean Pierre Merlett, Clement Gosselin

A lo largo del tiempo este tipo de plataformas han captado más atención por sus múltiples usos. Se les pueden hallar en diferentes aplicaciones tecnológicas, siendo la de mayor interés la de máquinas de alta precisión en particular las máquinas herramienta.

Para nuestro caso de estudio partiremos de una plataforma de 5 grados de

libertad con cinco actuadores rotacionales.

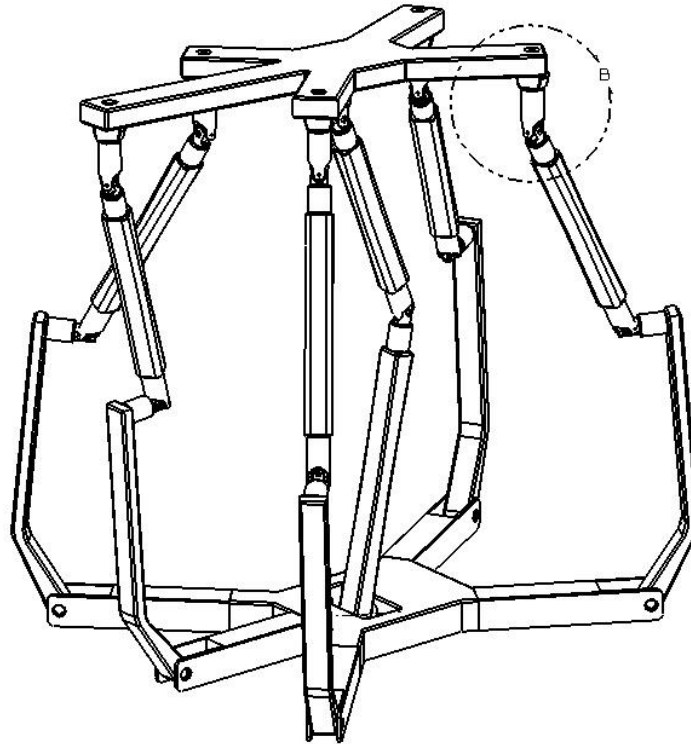


Fig 1.- Ilustracion del mecanismo de plataforma paralela para 5 GDL

Tiene 6 cadenas cinemáticas que incluyen 5 cadenas actuadas con la misma topología y una pasiva la cual conectará la base con la plataforma móvil. Las cinco cadenas cinemáticas cuentan con una junta rotacional actuada, un eslabón móvil, una junta de Hooke (universal), un segundo eslabón móvil y una junta esférica compuesta, esto es, está hecha con base en una junta de hooke y una junta rotacional a 90° colocada en una extensión al plato móvil.

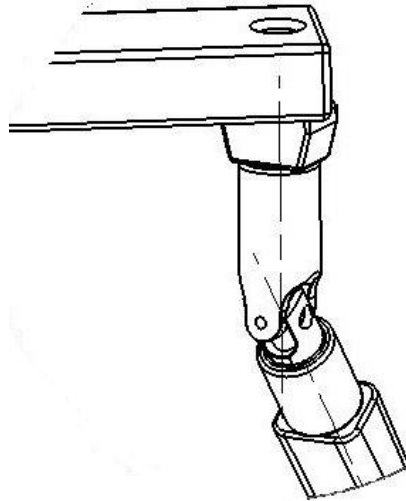


Fig 2.- Junta Universal

La sexta cadena que conecta a la base con la plataforma es una cadena pasiva restrictiva y tiene una arquitectura diferente a las 5 cadenas actuadas; ésta tiene una junta rotacional que conecta a la base con el primer eslabón móvil, una junta de Hooke que conecta al otro eslabón y otra junta de Hooke que conecta al segundo eslabón con la plataforma móvil. Esta última cadena es necesaria para

restringir el movimiento de la plataforma a sólo 5 grados de libertad.

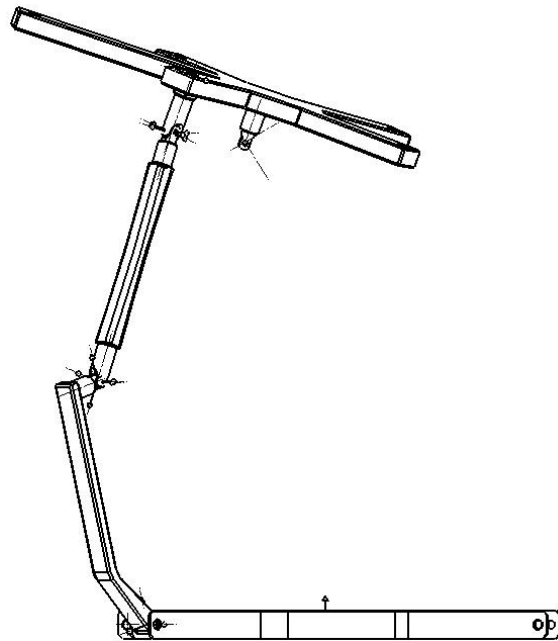


Fig 3.- Cadena de Restriccion

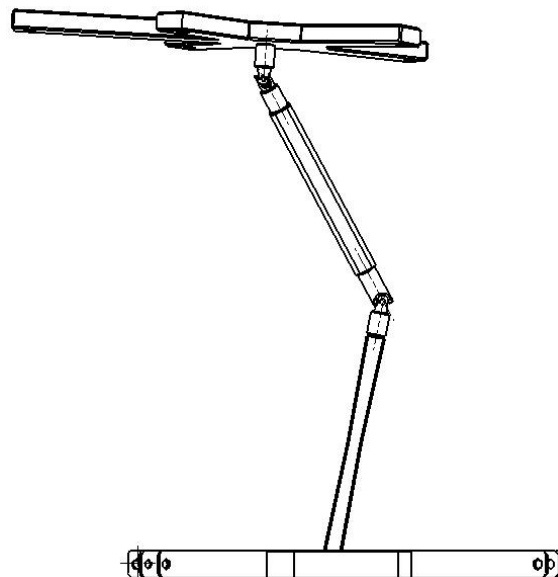


Fig 4.- Cadena de restriccion

La base inferior tiene una disposici3n axisim3trica donde las 2 patas superiores tienen un espaciamiento de 60 grados las 3 inferiores lo tienen de 45 grados entre ellas y respecto al eje horizontal. Cuatro de ellas tienen la misma longitud a excepci3n de la cuarta que es m3s corta que las otras 5.

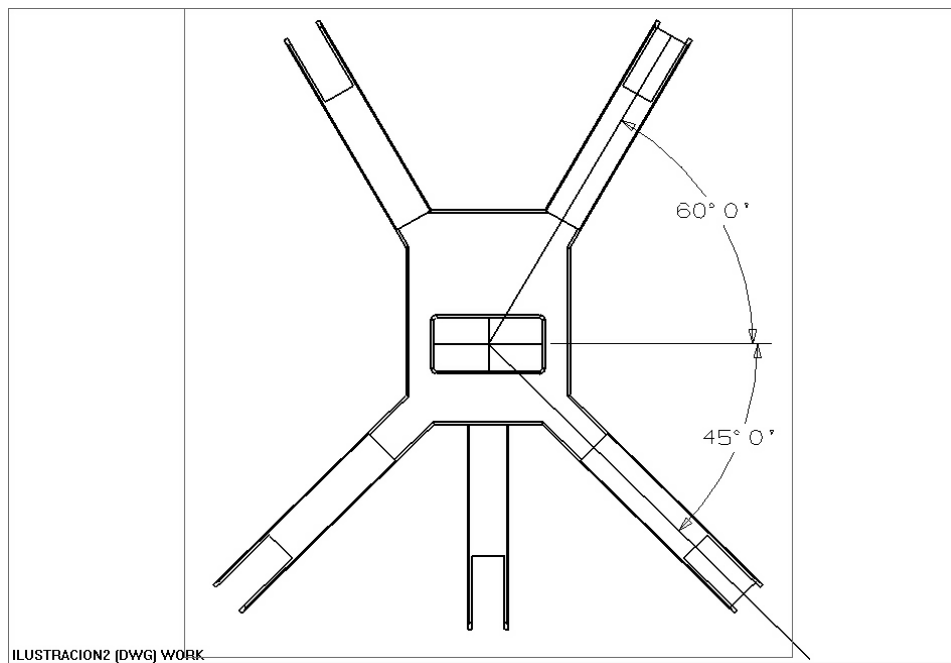


Fig 5.- Base inferior

La base superior tiene la misma disposición pero las magnitudes de las patas es completamente distinta

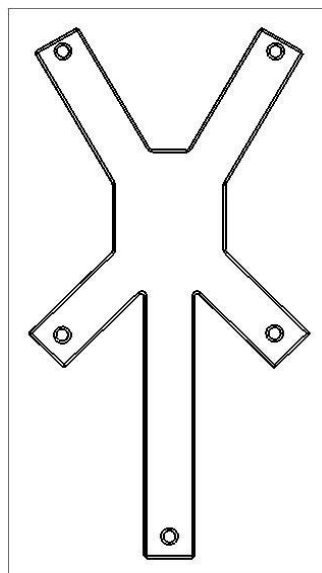


Fig 6.- Plataforma movil

1.2. Justificación

En la UNAM es relativamente reciente el estudio de estos sistemas de multicuerpos. Lo que pretende este trabajo es dar un paso más en el entendimiento del comportamiento mecánico de estos mecanismos. Primero se hace el estudio cinemático de la posición y se define una trayectoria arbitraria a través de la cual se mueve el órgano terminal o plataforma móvil, con esto se pretende comprobar el análisis planteado de manera matricial y verificar que los resultados obtenidos sean los esperados. Posteriormente se presenta el desarrollo del balanceo estático utilizando contrapesos y resortes, esto con el fin de comprobar el que se haya logrado el balanceo se presenta a continuación el análisis estático de la plataforma y es a través de este como se logra constatar que el balanceo de la plataforma fue efectivamente logrado para cualesquier punto de la trayectoria definida.

Finalmente se muestra los resultados obtenidos así como los análisis hechos en el desarrollo del trabajo matemático, agregándose un apéndice donde se ponen los dibujos de la plataforma así como algunos breves análisis matemáticos que ayudaron a resolver la tesis.

Más aún, se debe lograr involucrar a las áreas de la UNAM que se requieran para poder armar un grupo tecnológico como lo hacen en otras universidades a nivel internacional y en donde, mediante un equipo multidisciplinario, se logran desarrollar importantes proyectos que muchas de las veces conducen a la elaboración de prototipos con los que se verifican las hipótesis planteadas.

1.3. Definiciones

1.3.1. Rotaciones

Una rotación es una transformación lineal y homogénea que sirve para ubicar, dentro de un marco de referencia, algún objeto ubicado en el espacio.

1.3.2. Transformaciones

Una transformación \mathbf{T} de un espacio U^m a uno V^n es una regla de correspondencia entre un elemento de U con un único elemento de V ¹, esto se representa como

$$\mathbf{T} : U^m \rightarrow V^n$$

¹Ángeles, Jorge. Spatial Kinematics Chains, Springer Verlag 1982

Si $\mathbf{u} \in U^m$ y $\mathbf{v} \in V^n$, entonces la regla de correspondencia se establece como:

$$\mathbf{v} = \mathbf{T}\mathbf{u}$$

Se cumple que

- i) $\mathbf{T}(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) = \mathbf{T}(\mathbf{u}_1) + \mathbf{T}(\mathbf{u}_2)$
- ii) $\mathbf{T}(\alpha\mathbf{u}) = \alpha\mathbf{T}(\mathbf{u})$

De lo anterior se establece que \mathbf{v} es la imagen de \mathbf{u} bajo \mathbf{T} , esta transformación lineal deberá de ser uno a uno y sobreyectiva para que pueda ser invertible. Cuando esto ocurre $\forall \mathbf{v}$ corresponde un único \mathbf{u}

$$\mathbf{u} = \mathbf{T}^{-1}(\mathbf{v})$$

siendo \mathbf{T}^{-1} la transformación inversa de \mathbf{T}

1.3.3. Cambio de Base

Existe la necesidad de poder representar un objeto dentro de un marco de referencia, este puede ser medido en una cualesquier base definida previamente. En ocasiones, por motivos del análisis mismo, es conveniente cambiar de marco de referencia con el fin de tomar en cuenta propiedades del objeto que afectan o se relacionan con otro medido en una base distinta.

Dado un vector \vec{v} su representación de manera extendida será:

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3, \dots, v_n)^T$$

referida a una base

$$\mathbf{B} = [\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_n]$$

la cual es definida como un conjunto de vectores que producen \mathbf{v} como una combinación lineal de vectores de la base B. Por tanto

$$\mathbf{v} = v_1\beta_1 + v_2\beta_2 + \dots + v_n\beta_n$$

Aquí ambos lados de la igualdad son diferentes entidades a pesar de representar al mismo vector. Ahora si definimos al vector \mathbf{v}_B definido en la base \mathbf{L}_B . Sea también una base C definida como

$$\mathbf{C} = [\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots, \gamma_n]$$

ahora sea \mathbf{A}_B (definida en B) la matriz que relacionará a las 2 bases

$$\mathbf{A}_B = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \dots & \alpha_{2n} \\ \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\gamma_1 = \alpha_{11}\beta_1 + \alpha_{12}\beta_2 + \dots + \alpha_{1n}\beta_n$$

$$\gamma_2 = \alpha_{21}\beta_1 + \alpha_{22}\beta_2 + \dots + \alpha_{2n}\beta_n$$

·

·

·

$$\gamma_n = \alpha_{n1}\beta_1 + \alpha_{n2}\beta_2 + \dots + \alpha_{nn}\beta_n$$

Debido a esto se nombra v_i a la i ésima componente de \mathbf{v}_C , que es un vector formado con la base C, esto implica que

$$\mathbf{v}_C = v_1\gamma_1 + v_2\gamma_2 + \dots + v_n\gamma_n$$

lo cual nos lleva a

$$\mathbf{v}_C = \sum_j v_j' \sum_i \alpha_{ij} \vec{\beta}_j$$

la cual expresado de manera tensorial nos indica

$$v_i = \alpha_{ij} v_j'$$

osea

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{A}_B \mathbf{v}_C$$

y de manera equivalente

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{v}_B$$

Si definimos a \mathbf{w} como una imagen de \mathbf{v} bajo \mathbf{L} , se tiene que para las bases B y C [fig 7]

$$\mathbf{w}_B = \mathbf{L}_B(\mathbf{v}_B)$$

$$\mathbf{w}_C = \mathbf{L}_C(\mathbf{v}_C)$$

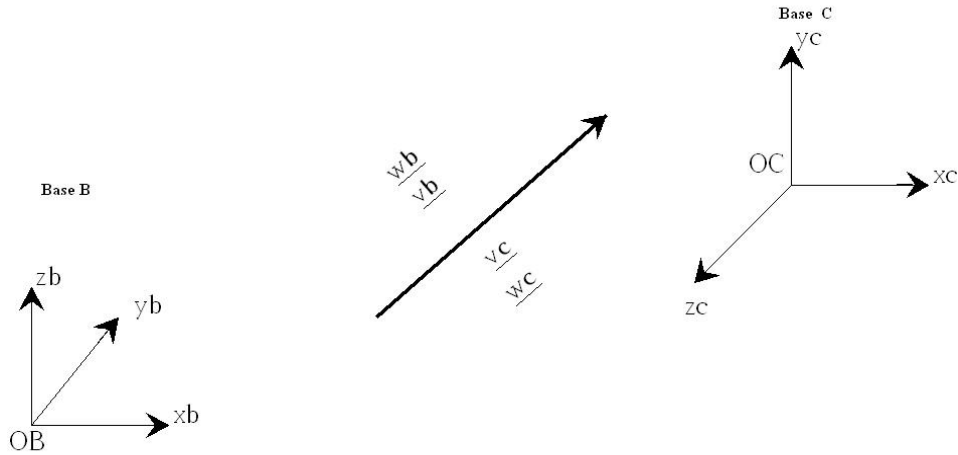


Fig 7.- Bases para el vector \mathbf{v}

Despejando de la ecuación anterior al vector \mathbf{w}_B se obtiene:

$$\mathbf{w}_B = \mathbf{A}_B \mathbf{L}_C \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{v}_B$$

obteniéndose la expresión para la transformación de bases

$$\mathbf{L}_B = \mathbf{A}_B \mathbf{L}_C \mathbf{A}_B^{-1}$$

1.3.4. Definición de Cuerpo Rígido

El cuerpo rígido es una abstracción matemática que se auxilia de la descripción de medio continuo. Esto es un volumen ubicado en un marco de referencia

donde todos los puntos y su frontera tienen las mismas características físicas y en donde el material que lo compone se distribuye de manera continua dentro del mismo y llena todo el espacio que ocupa en el espacio. Para fines de cinemática de los cuerpos rígidos estos son homogéneos e isotrópicos.

Además al someterse a un movimiento cumple con preservar la distancia entre cualesquier par de puntos; análogamente se puede ver como la preservación del ángulo entre cualesquier par de puntos dentro del cuerpo rígido.

1.3.5. Matrices de Rotación

Sea \underline{e} el eje unitario de cualesquier eje de rotación en el espacio alrededor de un punto, sea θ el ángulo correspondiente de la rotación.

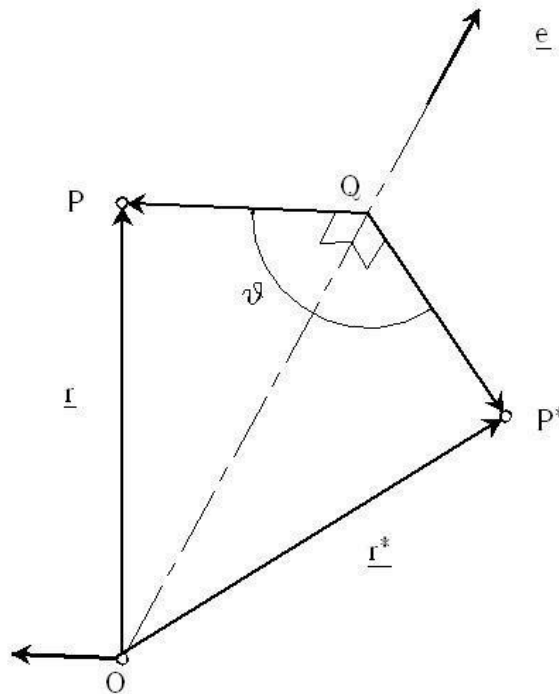


Fig 8.- Rotación de un punto respecto a un eje en el espacio se cumple que

$$\mathbf{r}' = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP'}$$

y

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ} &= \mathbf{r} - \overrightarrow{QP} \\ \mathbf{r}' &= \mathbf{r} - \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{QP'}\end{aligned}$$

definimos el segmento

$$\overrightarrow{QP''} = \mathbf{e} \otimes \mathbf{r}$$

$$\overrightarrow{QP} = -\mathbf{e} \otimes \overrightarrow{QP''} = -\mathbf{e} \otimes (\mathbf{e} \otimes \mathbf{r})$$

Además

$$\begin{aligned}\overrightarrow{QP'} &= \overrightarrow{QP} \cos(\theta) + \overrightarrow{QP''} \sin(\theta) \\ \overrightarrow{QP'} &= -\cos(\theta) [\mathbf{e} \otimes (\mathbf{e} \otimes \mathbf{r})] + \sin(\theta) (\mathbf{e} \otimes \mathbf{r})\end{aligned}$$

Substituyendo en la ecuación vectorial de \mathbf{r}'

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{e} \otimes (\mathbf{e} \otimes \mathbf{r}) - \cos(\theta) [\mathbf{e} \otimes (\mathbf{e} \otimes \mathbf{r})] + \sin(\theta) (\mathbf{e} \otimes \mathbf{r})$$

Si

$$\mathbf{e} \otimes (\mathbf{e} \otimes \mathbf{r}) = (\mathbf{e} \cdot \mathbf{r})\mathbf{e} - (\mathbf{e} \cdot \mathbf{e})\mathbf{r}$$

ya que

$$\begin{aligned}
\mathbf{e} \otimes (\mathbf{e} \otimes \mathbf{r}) &= \mathbf{e} \otimes (\mathbf{v}) \\
\mathbf{e} \otimes (\mathbf{v}) &= \varepsilon_{ikl} e_k v_l \\
&= \varepsilon_{ikl} e_k \varepsilon_{lkm} e_k r_m \\
&= \varepsilon_{ikl} \varepsilon_{lkm} e_k e_k r_m \\
&= \delta_{km}^{ik} e_k e_k r_m \\
&= (\delta_k^i \delta_m^k - \delta_m^i \delta_k^k) e_k e_k r_m \\
&= (\delta_k^i \delta_m^k - \delta_m^i) e_k e_k r_m \\
&= \delta_k^i \delta_m^k e_k e_k r_m - \delta_m^i r_m e_k e_k \\
&= \delta_m^k \delta_k^i e_k e_k r_m - \delta_m^i r_m e_k e_k \\
&= e_i \delta_m^k r_m e_k - r_i e_k e_k \\
&= e_i r_k e_k - r_i e_k e_k \\
&= (\mathbf{e} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{e} - (\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}) \mathbf{r}
\end{aligned}$$

Representando matricialmente esta identidad nos queda:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{e} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{e} - (\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}) \mathbf{r} &= (\mathbf{e}^T \cdot \mathbf{r}) \mathbf{e} - (\mathbf{e}^T \cdot \mathbf{e}) \mathbf{r} \\
&= \mathbf{e}^T [\mathbf{r} \cdot \mathbf{e} - \mathbf{e} \cdot \mathbf{r}] \\
&= (\mathbf{e}^T [\mathbf{r} \cdot \mathbf{e} - \mathbf{e} \cdot \mathbf{r}])^T \\
&= [\mathbf{r} \cdot \mathbf{e} - \mathbf{e} \cdot \mathbf{r}]^T \mathbf{e} \\
&= [\mathbf{e}^T \cdot \mathbf{r}^T - \mathbf{r}^T \cdot \mathbf{e}^T] \mathbf{e} \\
&= [\mathbf{e}^T \cdot \mathbf{r}^T \cdot \mathbf{e} - \mathbf{r}^T \cdot \mathbf{e}^T \cdot \mathbf{e}] \\
&= [\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}^T \cdot \mathbf{r}^T - \mathbf{r}^T] \\
&= [\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}^T - \mathbf{1}] \mathbf{r}^T
\end{aligned}$$

por lo que la expresión vectorial queda:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + (1 - \cos(\theta)) (\mathbf{e} \mathbf{e}^T - \mathbf{1}) \cdot \mathbf{r} + \sin(\theta) (\mathbf{1} \otimes \mathbf{e}) \cdot \mathbf{r}$$

finalmente

$$\begin{aligned}\mathbf{r}' &= [(1 - \cos(\theta)) \mathbf{e}\mathbf{e}^T - \cos(\theta) \mathbf{1} + \sin(\theta) \mathbf{1} \otimes \mathbf{e}] \cdot \mathbf{r} \\ \mathbf{r}' &= \mathbf{Q} \cdot \mathbf{r} \\ \mathbf{Q} &= [(1 - \cos(\theta)) \mathbf{e}\mathbf{e}^T - \cos(\theta) \mathbf{1} + \sin(\theta) \mathbf{1} \otimes \mathbf{e}]\end{aligned}$$

La matriz de rotación de un ángulo de magnitud θ definida para un eje $\hat{\mathbf{e}}$ cualesquier en el espacio es ²:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{e}\mathbf{e}^T + (\mathbf{1} - \mathbf{e}\mathbf{e}^T)\cos(\theta) + \sin(\theta) \mathbf{1} \otimes \mathbf{e}$$

Cuando el eje de rotación se convierte en los ejes unitarios i, j, k se tienen respectivamente las matrices de rotación canónicas:

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}_X &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \\ \mathbf{Q}_Y &= \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix} \\ \mathbf{Q}_Z &= \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

1.3.6. Matrices Homogéneas

La notación utilizada a lo largo de este trabajo es la de matrices homogéneas, debido a que tiene ventajas como ser compactas y poder representar de una manera fácil y legible las características del movimiento.

Los vectores homogéneos se expresan como

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_a &= \begin{bmatrix} \mathbf{u}_a \\ 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{u}_a &= [x, y, z]^T\end{aligned}$$

²Ángeles, Jorge. Op-Cit

Las transformaciones de estos como

$$\mathbf{r}_a = \mathbf{T}_{ab}\mathbf{r}_b$$

donde

$$\mathbf{T}(\theta)_{ab} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{ab} & \mathbf{u}_{ab} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$$

La inversa de esta transformación es:

$$\mathbf{T}_{ab}^{-1} = \mathbf{T}_{ba} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{ab}^T & -\mathbf{S}_{ab}\mathbf{u}_{ab} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$$

Hay que tomar en cuenta que las matrices \mathbf{T}_{ab} , \mathbf{T}_{ab}^{-1} no son ortonormales como \mathbf{S}_{ab} , \mathbf{S}_{ab}^T que si lo son.

La forma en como se compone el movimiento a través de distintas bases mediante la concatenación de las matrices de transformación. Se sigue que:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= \mathbf{T}_{12}\mathbf{r}_2 \\ \mathbf{r}_2 &= \mathbf{T}_{23}\mathbf{r}_3 \\ \mathbf{r}_{n-1} &= \mathbf{T}_{n-1}\mathbf{r}_n \\ \mathbf{r}_1 &= \mathbf{T}_{12}\mathbf{T}_{23}\dots\mathbf{T}_{n-1}\mathbf{r}_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= \mathbf{T}_{1n}\mathbf{r}_n \\ \mathbf{T}_{1n} &= \mathbf{T}_{12}\mathbf{T}_{23}\dots\mathbf{T}_{n-1,n} \end{aligned}$$

La matriz describe el movimiento de un punto en el espacio desde el sistema n hasta el inercial 1. Si fuera necesario proceder de manera contraria se tendría que: ³

$$\mathbf{T}_{n1} = (\mathbf{T}_{12}\mathbf{T}_{23}\dots\mathbf{T}_{n-1,n})^{-1} = \mathbf{T}_{n-1,n}^{-1}\dots\mathbf{T}_{23}^{-1}\mathbf{T}_{12}^{-1}$$

³Stekjal, V & Valasek, M.. Kinematics and Dynamics of Machinery, John Wiley & Sons, 1996

1.3.7. Transformaciones Principales

Dentro del estudio del movimiento existen 6 transformaciones las cuales se describen a continuación

Desplazamiento en x

$$\mathbf{T}_{z1}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Desplazamiento en y

$$\mathbf{T}_{z2}(\mathbf{y}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Desplazamiento en z

$$\mathbf{T}_{z3}(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotación alrededor de x

$$\mathbf{T}_{z4}(\phi_x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi_x & -\sin \phi_x & 0 \\ 0 & \sin \phi_x & \cos \phi_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotación alrededor de y

$$\mathbf{T}_{z5}(\varphi_y) = \begin{bmatrix} \cos \phi_y & 0 & \sin \varphi_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \varphi_y & 0 & \cos \varphi_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotación alrededor de z

$$\mathbf{T}_{z6}(\varphi_z) = \begin{bmatrix} \cos \phi_z & -\sin \varphi_z & 0 & 0 \\ \sin \varphi_z & \cos \phi_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Capítulo 2

Análisis Cinemático

2.1. Análisis de Posición

2.1.1. Desarrollo de Cadenas Motrices

Para el desarrollo del análisis de posición se tomarán ciertas convenciones para facilitar el entendimiento del mismo.

Para un sistema de coordenadas x, y, k los ángulos de rotación variables serán θ , para ángulos de rotación constantes δ , y para ángulos de Euler α, β, γ respectivamente.

Teniendo en cuenta esta convención se inicia con el sistema de referencia inercial x_0, y_0, z_0 el cual se encuentra al centro de la plataforma [Fig. 9]. El sistema local se desplaza a la primera junta rotacional de la cadena cinemática rotando primero sobre z_0 un ángulo δ por medio de la matriz: $\mathbf{T}_{z_6}(\delta_{1i})$

generando un sistema (x_{1i}, y_{1i}, z_{1i}) , después la siguiente transformación será un desplazamiento d_{2i} sobre x_{1i} de la forma $\mathbf{T}_{z_1}(d_{2i})$, la cual se multiplica con la anterior para darnos :

$$\mathbf{T}_{z_6}(\delta_{1i})\mathbf{T}_{z_1}(d_{2i})$$

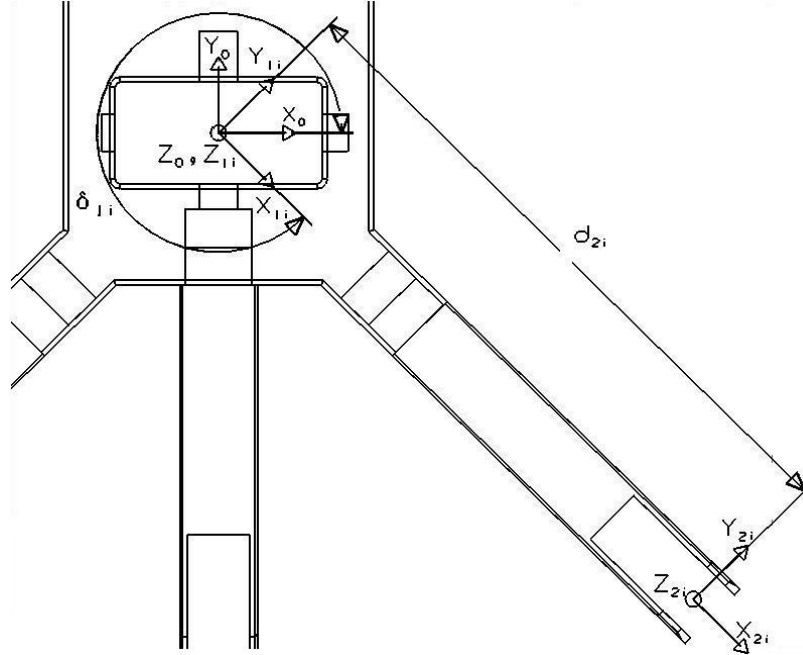


Fig 9.- Base Inferior

Obteniéndose el sistema (x_{2i}, y_{2i}, z_{2i}) , se rota éste nuevo sistema local alineándolo con el primer brazo motriz un ángulo θ_{3i} y se genera el sistema local (x_{3i}, y_{3i}, z_{3i}) mediante la transformación $\mathbf{T}_{z5}(\theta_{3i})$. Desplazando este sistema una distancia (longitud del brazo) d_{4i} por medio de la transformación $\mathbf{T}_{z3}(d_{4i})$, se forma el sistema (x_{4i}, y_{4i}, z_{4i}) , con lo cual estas dos últimas transformaciones se integran a la ecuación de lazo como:

$$\mathbf{T}_{z6}(\delta_{1i})\mathbf{T}_{z1}(d_{2i})\mathbf{T}_{z5}(\theta_{3i})\mathbf{T}_{z3}(d_{4i})$$

Este sistema local se encuentra en el nodo de la cruceta de la primer junta

universal paralelo al sistema anterior.

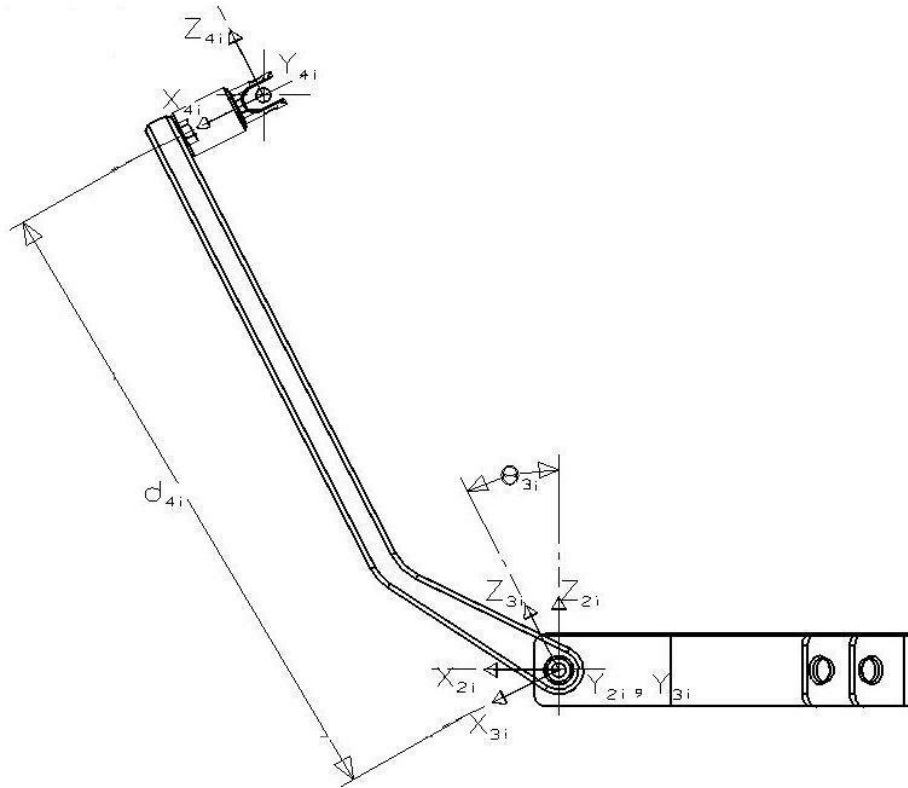


Fig 10.- Transformaciones 3 y 4

La primera rotación de la junta se hará sobre z_4 por medio de $T_{z_6}(\theta_{5i})$ obteniéndose el sistema (x_{5i}, y_{5i}, z_{5i}) [Fig11].

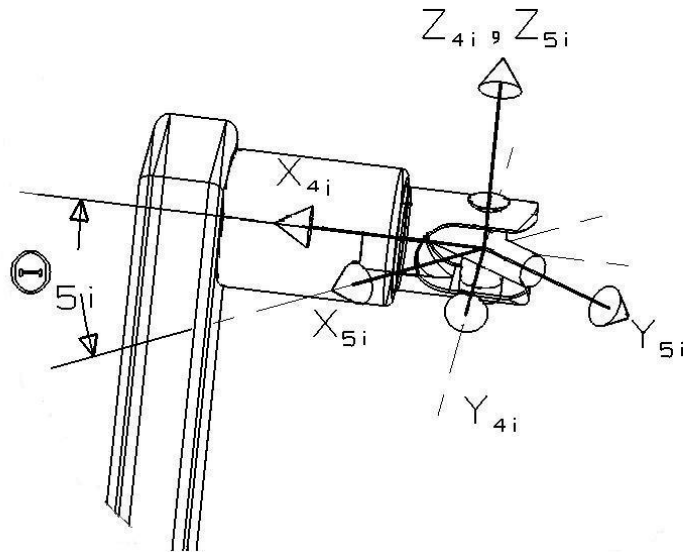


Fig 11.- Transformacion el sistema 4 al 5

En esta parte del movimiento el sistema cinco queda completamente acoplado a la cruceta de la junta universal.

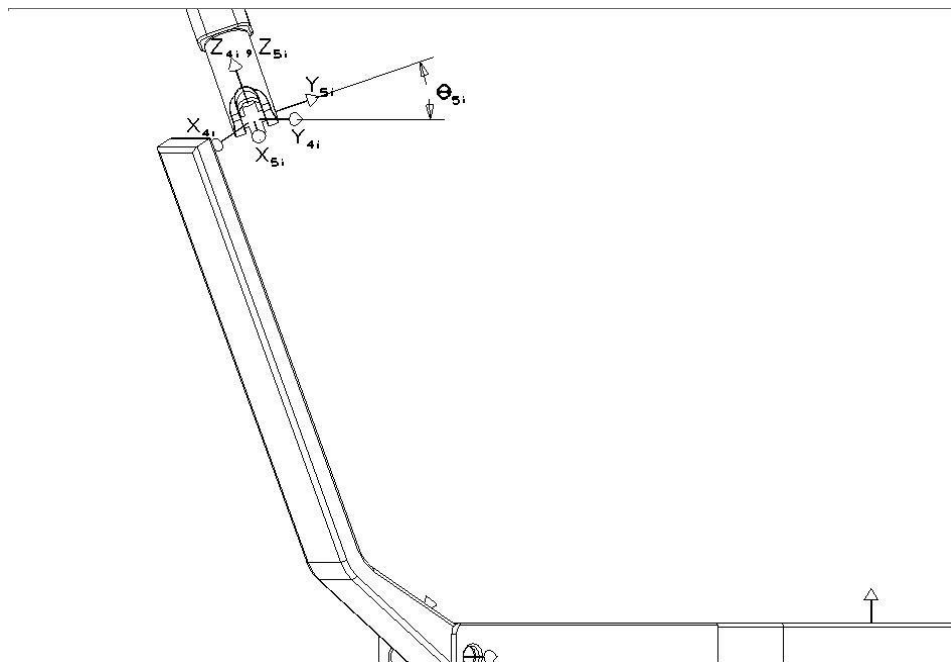


Fig 12.- Transformacion del sistema 4 al 5

La segunda rotación se hace sobre y_{5i} , por medio de la transformación

$\mathbf{T}_{z5}(\theta_{6i})$ para obtener el sistema local (x_{6i}, y_{6i}, z_{6i}) , que sería la salida de la junta de Hooke.. Estas 2 últimas transformaciones se integran a la ecuación de lazo la cual queda como

$$\mathbf{T}_{z6}(\delta_{1i})\mathbf{T}_{z1}(d_{2i})\mathbf{T}_{z5}(\theta_{3i})\mathbf{T}_{z3}(d_{4i})\mathbf{T}_{z6}(\theta_{5i})\mathbf{T}_{z5}(\theta_{6i})$$

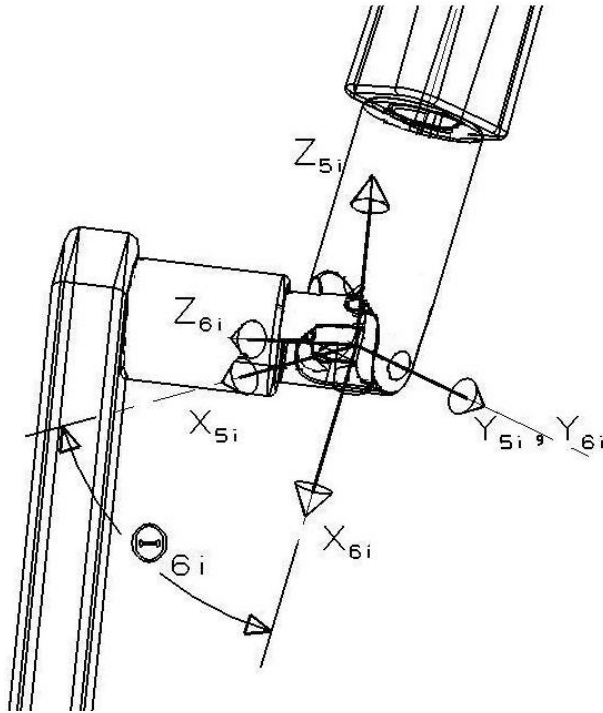


Fig 13.- Transformación del sistema 5 al 6

La secuencia del movimiento se encuentra el sistema local (x_{6i}, y_{6i}, z_{6i}) que es la parte inicial del segundo brazo de la pierna motriz. Continuando con el movimiento habrá que desplazarse una longitud d_{7i} sobre x_{6i} , que es la magnitud del eslabón superior, esto con el fin de llegar a la segunda junta de Hooke por medio de $\mathbf{T}_{z1}(-d_{7i})$ debido a que la orientación del eje x_{6i} quedó positiva apuntando hacia abajo [Fig 13 y 14], con este desplazamiento se llega al sistema de referencia (x_{7i}, y_{7i}, z_{7i}) el cual es paralelo al anterior pero ubicado en la junta

de Hooke.

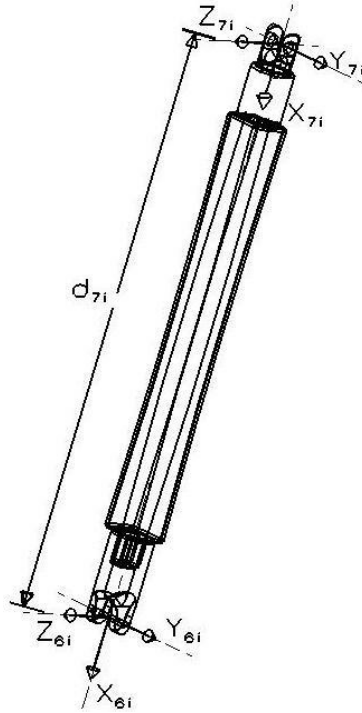


Fig 14.- Desplnto. al sist. 7

Ya aquí nuevamente se desarrollan las rotaciones de la junta de Hooke como en el caso anterior, primero girando en y y por medio un ángulo θ_{8i} alrededor del eje y_{7i} utilizando la transformación $\mathbf{T}_{z5}(\theta_{8i})$.

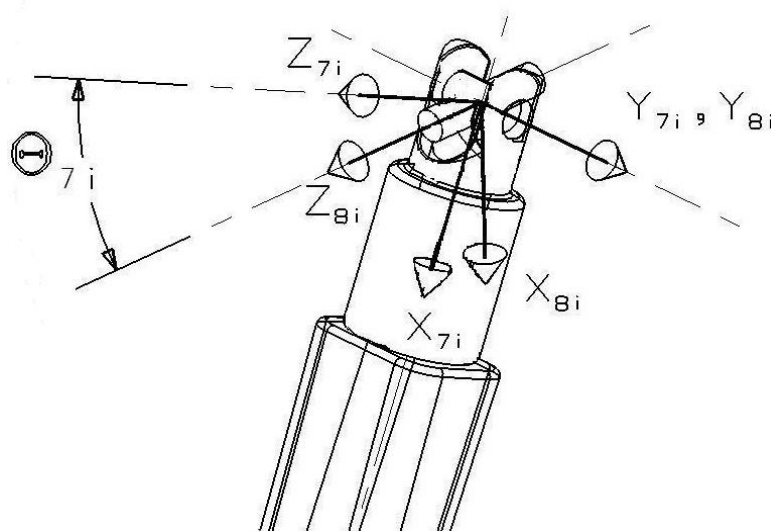


Fig 15.- Transformacion del sist. 7 al 8

Este movimiento genera a (x_{8i}, y_{8i}, z_{8i}) , para posteriormenete girar en z a través de la transformación $\mathbf{T}_{z6}(\theta_{9i})$ que alcanza al sistema (x_{9i}, y_{9i}, z_{9i}) . Estas

últimas 3 transformaciones se acumulan en nuestro lazo matricial de la siguiente manera:

$$\mathbf{T}_{z6}(\delta_{1i})\mathbf{T}_{z1}(d_{2i})\mathbf{T}_{z5}(\theta_{3i})\mathbf{T}_{z3}(d_{4i})\mathbf{T}_{z6}(\theta_{5i})\mathbf{T}_{z5}(\theta_{6i})\mathbf{T}_{z1}(-d_{7i})\mathbf{T}_{z5}(\theta_{8i})\mathbf{T}_{z6}(\theta_{9i})$$

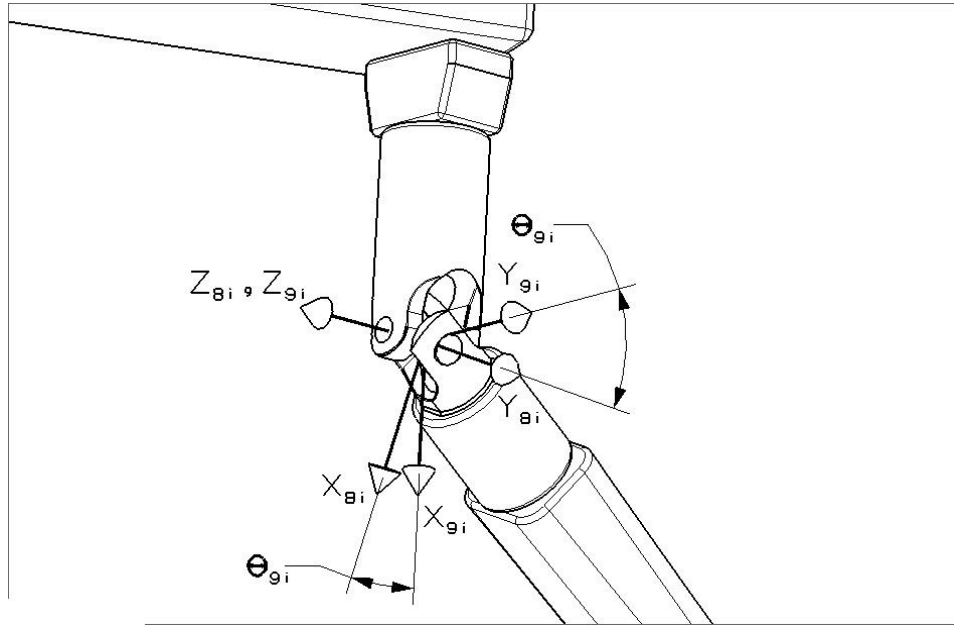


Fig 16.- Transformacion del sistema 8 al 9

Con esta primera parte de las transformaciones se llega a la cruceta de la segunda junta de Hooke, el cual es el punto donde se cerrará la ecuación de lazo matricial [fig 17]. Para formar éste de una manera más compacta, ésta primer parte del lazo matricial se puede representar como:

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_{02i} &= \mathbf{T}_{z6}(\delta_{1i}) \mathbf{T}_{z5}(\theta_y) \\ \mathbf{T}_{24i} &= \mathbf{T}_{z6}(\theta_{3i}) \mathbf{T}_{z5}(d_4) \\ \mathbf{T}_{46i} &= \mathbf{T}_{z6}(\theta_{5i}) \mathbf{T}_{z5}(\theta_{6i}) \\ \mathbf{T}_{69i} &= \mathbf{T}_{z6}(-d_{7i}) \mathbf{T}_{z5}(\theta_{8i}) \mathbf{T}_{z5}(\theta_{9i})\end{aligned}$$

Por lo que ésta primera parte del lazo cinemático queda análogamente representado por

$$\mathbf{T}_{02}\mathbf{T}_{24}\mathbf{T}_{46}\mathbf{T}_{69}$$

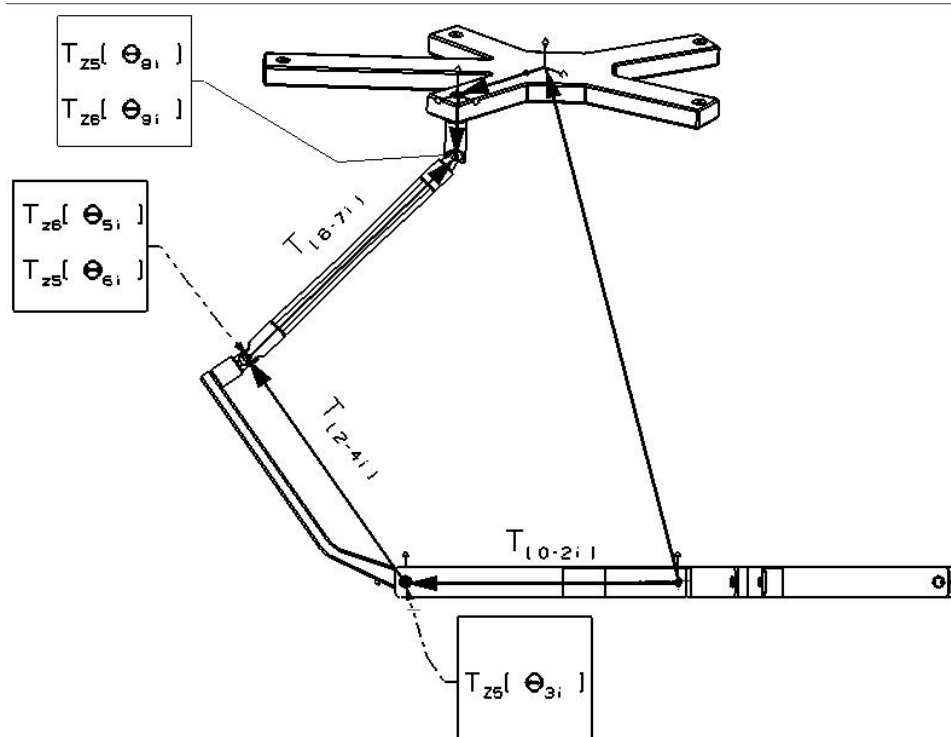


Fig 17.- Transformaciones a través de la cadena motriz

Con la primera parte del lazo matricial ensamblada, se planteará el llegar al mismo punto pero partiendo por el otro lado, directamente de la plataforma fija a la móvil directamente. Se toman en cuenta los tres desplazamientos en cada uno de los ejes del sistema de referencia inercial [Fig 18], los cuales tienen una

representación matricial $\mathbf{T}_{xyx} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{u} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$, siendo \mathbf{I} la matriz identidad de 3×3

$$y \quad u = (x, y, z)^T .$$

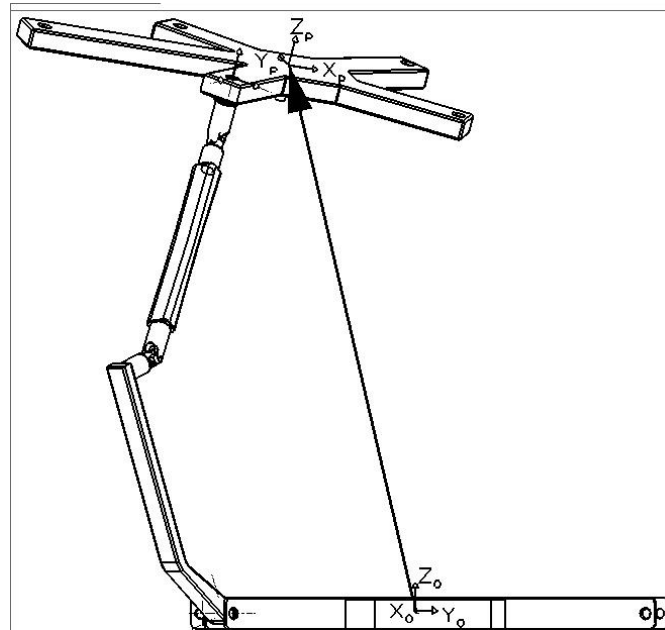


Fig 18.- Transformaciones del sistema 0 al P

Ubicados en el centro de la plataforma móvil se necesitan las transformaciones de Hooke [Fig 19] características de esta plataforma de 5 grados de libertad definidas como $\mathbf{T}_{Hooke} = \mathbf{T}_{z4}(\theta_x)\mathbf{T}_{z5}(\theta_y)$

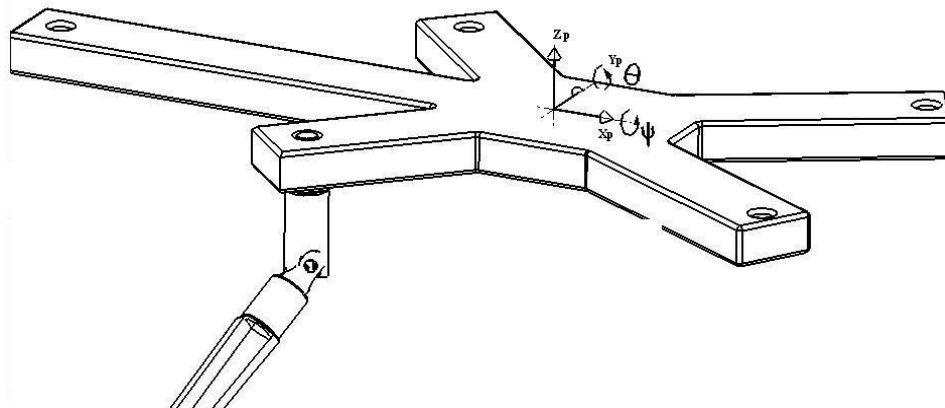


Fig 19.- Transformaciones de Hooke para la plataforma móvil

Estas 2 transformaciones darán la ubicación y la orientación de la plataforma móvil, realizan un desplazamiento respecto a los ejes inerciales (x_0, y_0, z_0) , ya colocados en la base local de la plataforma móvil se producen los giros que tendría ésta respecto a los ejes locales x_p y y_p . Estas se integraran a la segunda parte del lazo matricial como

$$\mathbf{T}_{xyx} \mathbf{T}_{Hooke}$$

Ya en la parte superior de la plataforma hay que rotar un ángulo δ_{pi} con $\mathbf{T}_{z6}(\delta_{pi})$, que indicará la orientación de cada brazo de la plataforma superior respecto a su origen; posteriormente se avanzará una distancia d_{11i} que es específica de cada brazo de ésta [Fig 20] con la matriz $\mathbf{T}_{z1}(d_{11i})$

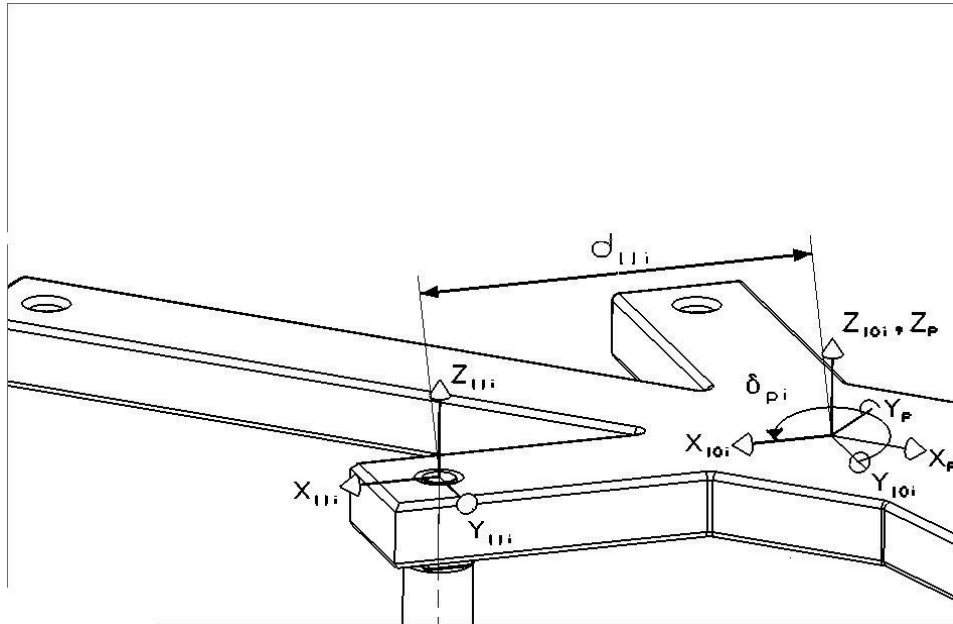


Fig 20.- Desplazamiento del sistema 10 al 11

A continuación se hace una rotación de 90° en el eje y_{11i} , [Fig21] con la transformación $\mathbf{T}_{z5}(\frac{\pi}{2})$, esto se acopla con la ecuación matricial de la forma

$$\mathbf{T}_{xyx} \mathbf{T}_{Hooke} \mathbf{T}_{z6}(\delta_{pi}) \mathbf{T}_{z1}(d_{11i}) \mathbf{T}_{z5}(\frac{\pi}{2})$$

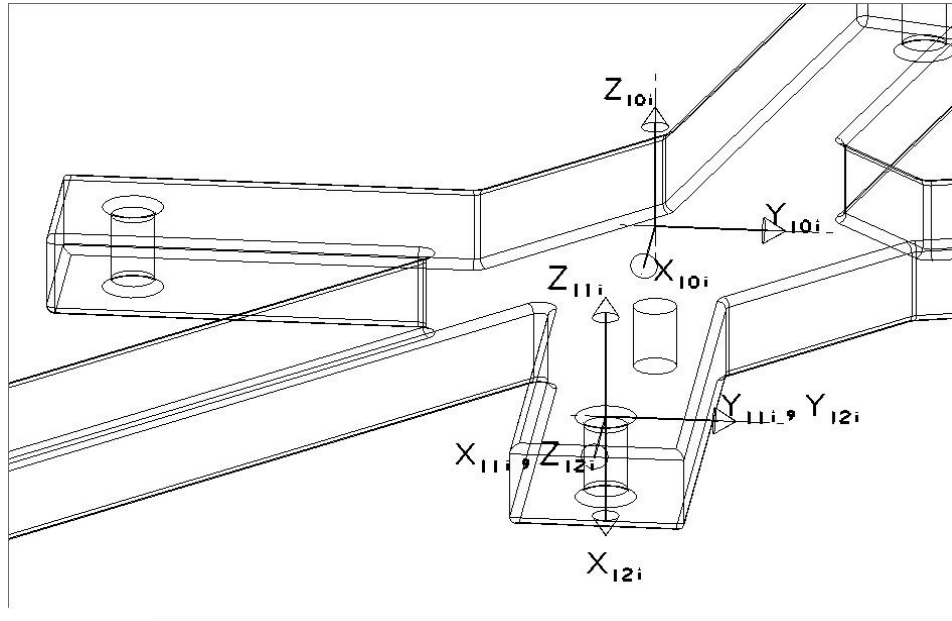


Fig 21.- Desplazamiento del sistema 11 al 12

Ya acomodado el sistema local $(x_{12i}, y_{12i}, z_{12i})$ (x_{12i} apunta hacia abajo) se introduce el giro de la junta rotacional ubicada en este sistema de referencia con el ángulo θ_{13i} por medio de $\mathbf{T}_{z6}(\theta_{13i})$, obteniéndose el sistema local $(x_{13i}, y_{13i}, z_{13i})$ para después desplazar este sistema una distancia d_{14i} [Fig22] empleando a la matriz $\mathbf{T}_{z5}(d_{14i})$; todas estas transformaciones se integran en la ecuación de lazo quedando

$$\mathbf{T}_{xyx} \mathbf{T}_{Hooke} \mathbf{T}_{z6}(\delta_{pi}) \mathbf{T}_{z1}(d_{11i}) \mathbf{T}_{z5}\left(\frac{\pi}{2}\right) \mathbf{T}_{z6}(\theta_{13i}) \mathbf{T}_{z5}(d_{14i})$$

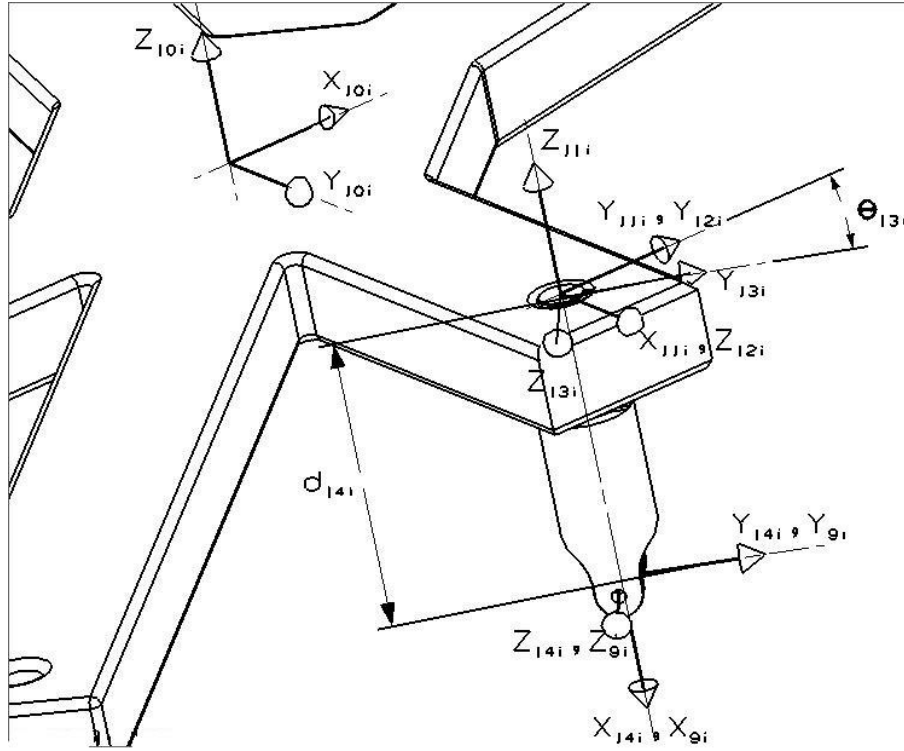


Fig 22.- Desplazamiento del sistema 13 al 14

El sistema $(x_{14i}, y_{14i}, z_{14i})$ será paralelo al sistema local que le antecede y al (x_{9i}, y_{9i}, z_{9i}) que se obtuvo en el análisis de las primeras juntas cinemáticas, acomodando estas transformaciones de manera similar a la primera parte de la ecuación del lazo matricial tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{xyx} &= \mathbf{T}_{z1}(x)\mathbf{T}_{z2}(y)\mathbf{T}_{z3}(z) \\ \mathbf{T}_{Hooke} &= \mathbf{T}_{z4}(\theta)\mathbf{T}_{z5}(\psi) \\ \mathbf{T}_{p11i} &= \mathbf{T}_{z6}(\delta_{pi})\mathbf{T}_{z1}(d_{11i}) \\ \mathbf{T}_{1114i} &= \mathbf{T}_{z5}\left(\frac{\pi}{2}\right)\mathbf{T}_{z4}(\theta_{13i})\mathbf{T}_{z1}(d_{14i}) \end{aligned}$$

Ya cerrado el lazo y con las transformaciones planteadas para la ubicación de la junta de Hooke en el segundo eslabón de la plataforma móvil [Fig 23] se muestra el lazo matricial que se utilizará para resolver las variables cinemáticas

$$\mathbf{T}_{02i}\mathbf{T}_{24i}\mathbf{T}_{46i}\mathbf{T}_{69i} = \mathbf{T}_{xyx}\mathbf{T}_{Hooke}\mathbf{T}_{p11i}\mathbf{T}_{1114i} \quad (2.1)$$

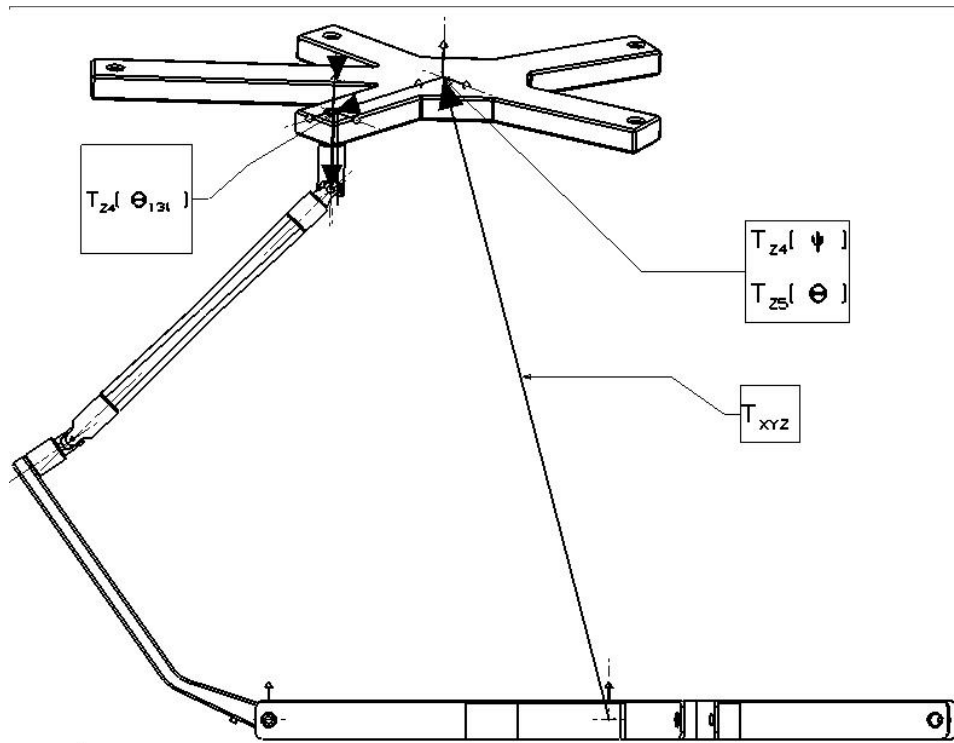


Fig 23.- Transformaciones de la plataforma móvil respecto al sistema inercial

2.1.2. Desarrollo de Cadena Central

La cadena central se muestra en la figura siguiente [Fig 24]. El procedimiento para encontrar los ángulos es el mismo que el utilizado anteriormente para la

cadena motriz.

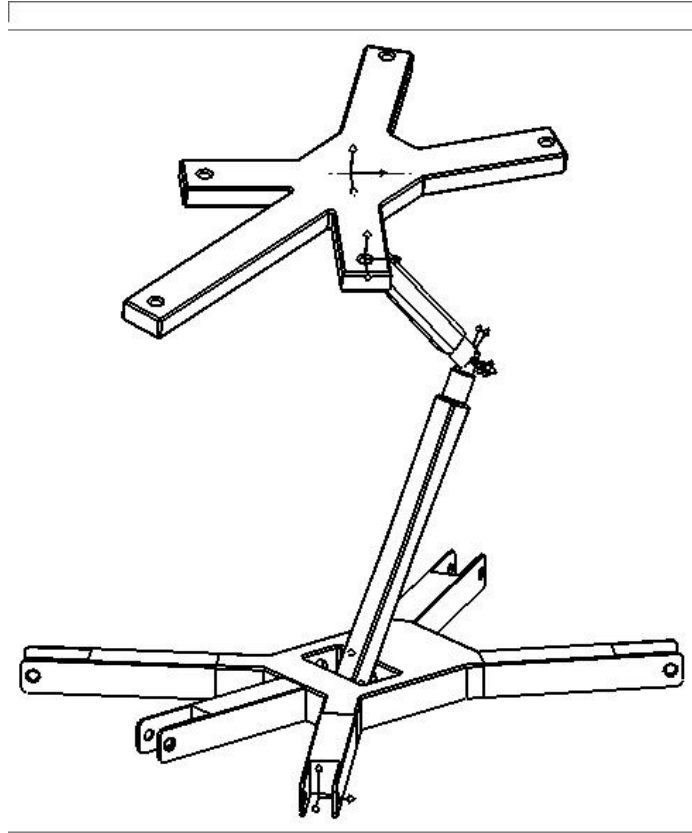


Fig 24.- Cadena Central

Se inicia con el sistema de referencia inercial (x_0, y_0, z_0) este se encuentra al centro de la plataforma. Para desplazarnos a la primera junta rotacional de la cadena cinemática se debe rotar primero sobre z_0 [Fig 25] un ángulo δ_{1P} por medio de la matriz $\mathbf{T}_{z_0}(\delta_{1P})$

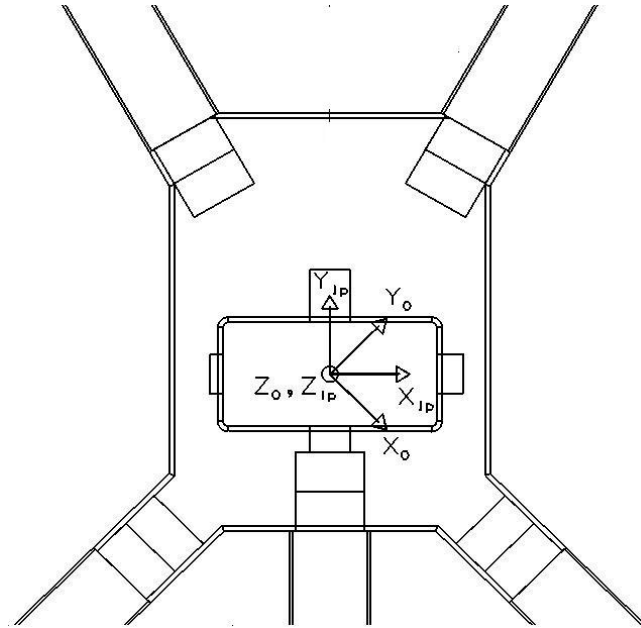


Fig 25.- Rotacion sobre el sistema inercial 0p

Después hay que rotar este nuevo sistema local alineándolo con el primer brazo central un ángulo $-\theta_{2p}$ a través de $\mathbf{T}_{z4}(-\theta_{2p})$, ya ubicado en esta posición, el sistema (x_2, y_2, z_2) se desplazará el sistema local una distancia d_{3p} por medio de la transformación sobre el eje z_{2P} $\mathbf{T}_{z3}(d_{3p})$ como se muestra a continuación [Fig 26] , estas transformaciones se multiplican consecutivamente para hasta este punto de la forma siguiente:

$$\mathbf{T}_{z6}(\delta_{1p})\mathbf{T}_{z4}(-\theta_{2p})\mathbf{T}_{z3}(d_{3p})$$

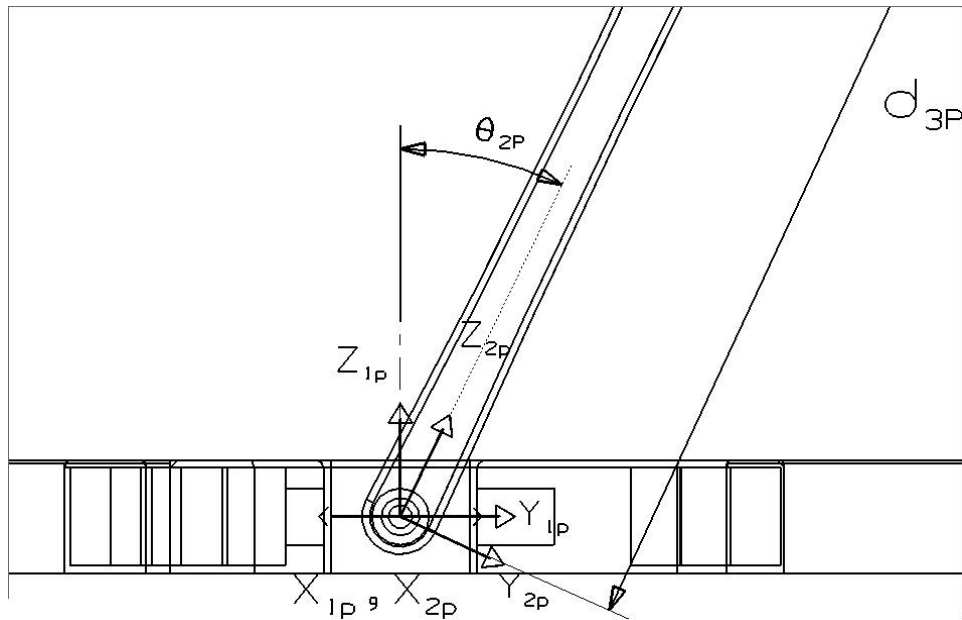


Fig 26.- Transformación del sistema 1p a 2p

Con esta transformación se ha llegado a la primera junta de Hooke se realizan sus respectivas rotaciones $\mathbf{T}_{z4}(-\theta_{4p})$ y $\mathbf{T}_{z6}(-\theta_{5p})$ que se muestran en las figuras 27 y 28

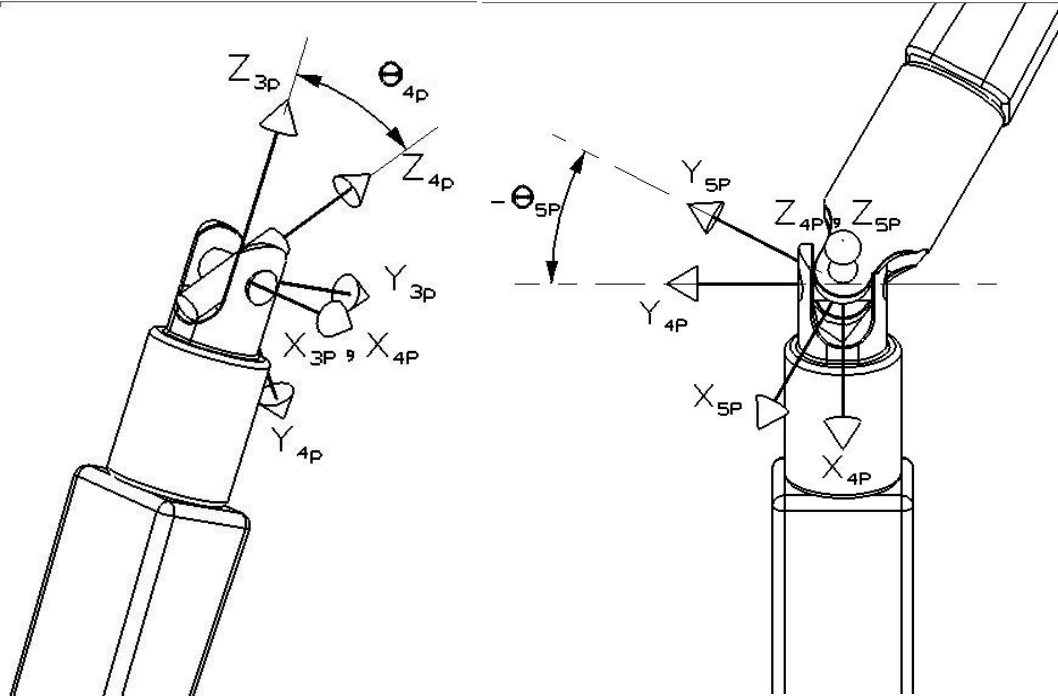


Fig 28.- Transformacion de 4P a 5P

Fig 27.- Transformacion de 3P a 4P

Tomando en cuenta éstas dos últimas transformaciones, la ecuación de lazo matricial para el movimiento de la cadena central de restricción quedaría hasta este punto como:

$$\mathbf{T}_{z6}(\delta_{1p})\mathbf{T}_{z4}(-\theta_{2p})\mathbf{T}_{z3}(d_{3p})\mathbf{T}_{z4}(-\theta_{4p})\mathbf{T}_{z6}(-\theta_{5p})$$

Con el sistema local (x_{5p}, y_{5p}, z_{5p}) se realiza un desplazamiento $-d_{6p}$ utilizando la transformación $\mathbf{T}_{z2}(-d_{6p})$ [Fig 29], la magnitud queda expresada con signo negativo debido a que el eje y_{5p} apunta hacia la parte inferior del segundo eslabón y al recorrer el eslabón en sentido contrario provoca que se agregue el signo menos

en la transformación.

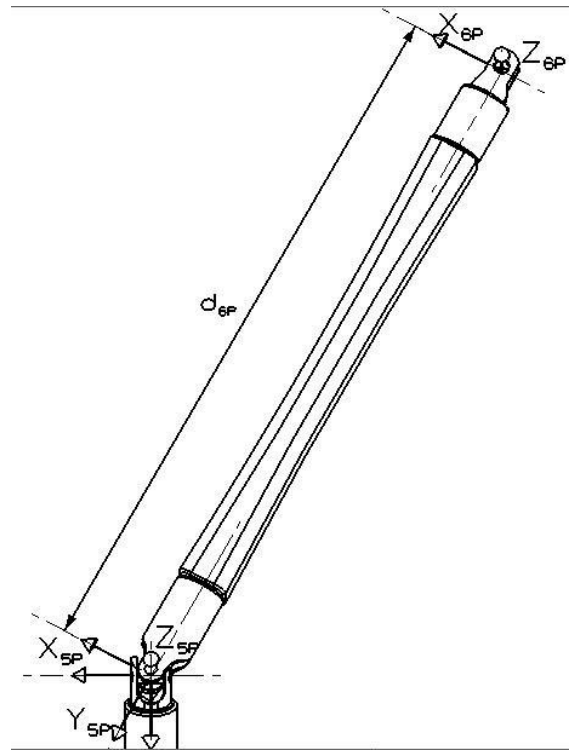


Fig 29.- Desplazamiento de 5P al 6P

El nuevo sistema (x_{6p}, y_{6p}, z_{6p}) se encuentra ubicado en la última junta de Hooke, por lo tanto las siguientes transformaciones se harán en la cruceta de la junta a través de $\mathbf{T}_{z_6}(\theta_{7p})$ la cual es una rotación es sobre el eje z_{6P} [Fig 30]

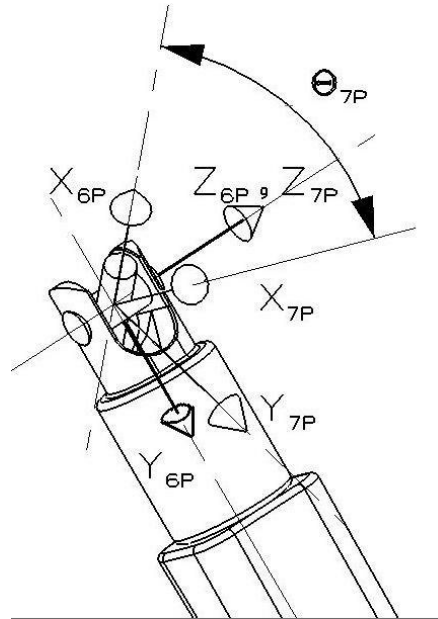


Figura 30.- Rotacion de sistema 6p al 7P

Posteriormente corresponde la rotación hacerse x_{7P} [Fig 31] con la matriz $\mathbf{T}_{z4}(\theta_{8p})$, con estas 2 últimas transformaciones se alcanza el sistema (x_{6p}, y_{6p}, z_{6p}) . Estas transformaciones posmultiplicarán a la ecuación matricial que describe el movimiento de esta cadena central de restricción, lo que se muestra a continuación

$$\mathbf{T}_{z6}(\delta_{1p})\mathbf{T}_{z4}(-\theta_{2p})\mathbf{T}_{z3}(d_{3p})\mathbf{T}_{z4}(-\theta_{4p})\mathbf{T}_{z6}(-\theta_{5p})\mathbf{T}_{z2}(-d_{6p})\mathbf{T}_{z6}(\theta_{7p})\mathbf{T}_{z4}(\theta_{8p})$$

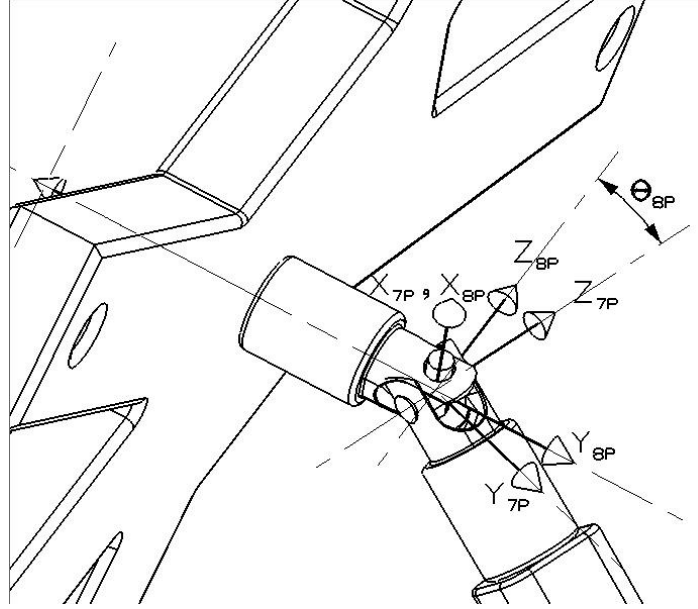


Fig 31.- Transformacion del sistema 7P al 8P

Para llegar al centro de la plataforma móvil a través de la cadena cinemática central se tienen que hacer las últimas 2 transformaciones, una sobre y_{8p} recorriendo la distancia d_{9p} [Fig 32], la cual es la distancia entre ésta última junta de Hooke y el centro de la plataforma, esto a través de $\mathbf{T}_{z2}(-d_{9p})$. Posterior a este movimiento se hace un giro de 90° sobre el eje x_{8p} utilizando la matriz de rotación $\mathbf{T}_{z4}(\frac{\pi}{2})$, lo cual provoca que el sistema $(x_{10p}, y_{10p}, z_{10p})$ quede alineado con el sistema (x_p, y_p, z_p) local de la plataforma, encontrándose que la ecuación que describe el movimiento de la cadena central quede hasta este momento como:

$$\mathbf{T}_{z6}(\delta_{1p})\mathbf{T}_{z4}(-\theta_{2p})\mathbf{T}_{z3}(d_{3p})\mathbf{T}_{z4}(-\theta_{4p})\mathbf{T}_{z6}(-\theta_{5p})\mathbf{T}_{z2}(-d_{6p})\mathbf{T}_{z6}(\theta_{7p})\mathbf{T}_{z4}(\theta_{8p})\mathbf{T}_{z2}(-d_{9p})\mathbf{T}_{z4}(\frac{\pi}{2})$$

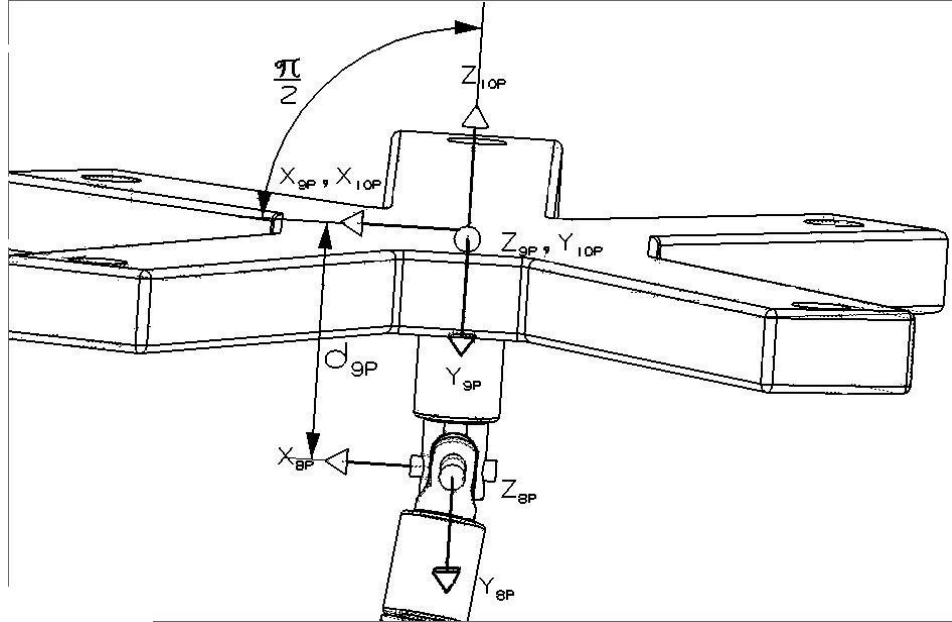


Fig 32.- Movimientos finales para cadena de restricción

Para obtener una expresión más compacta bastará con ordenar las transformaciones de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{02P} &= \mathbf{T}_{z6}(\delta_{1p}) \mathbf{T}_{z4}(-\theta_{2p}) \\ \mathbf{T}_{24P} &= \mathbf{T}_{z3}(d_{3p}) \mathbf{T}_{z4}(-\theta_{4p}) \\ \mathbf{T}_{46P} &= \mathbf{T}_{z6}(-\theta_{5p}) \mathbf{T}_{z2}(-d_{6p}) \\ \mathbf{T}_{68P} &= \mathbf{T}_{z6}(\theta_{7p}) \mathbf{T}_{z4}(\theta_{8p}) \\ \mathbf{T}_{810P} &= \mathbf{T}_{z2}(-d_{9p}) \mathbf{T}_{z4}\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

Con estas expresiones se tiene la descripción geométrica del movimiento de la cadena central a través de los pares cinemáticos que la conforman. El último paso será relacionar estas transformaciones con las que se desempeñan para llegar directamente del sistema inercial al centro de la plataforma móvil las cuales son $\mathbf{T}_{xyx} = \mathbf{T}_{z1}(x)\mathbf{T}_{z2}(y)\mathbf{T}_{z3}(z)$ además de $\mathbf{T}_{Hooke} = \mathbf{T}_{z4}(\theta)\mathbf{T}_{z5}(\psi)$ con lo que finalmente la ecuación de lazo matricial que describirá al movimiento de la cadena de restricción quedará como:

$$\mathbf{T}_{02P}\mathbf{T}_{24P}\mathbf{T}_{46P}\mathbf{T}_{68P}\mathbf{T}_{810P} = \mathbf{T}_{xyx}\mathbf{T}_{Hooke} \quad (2.2)$$

Capítulo 3

Solución Algebraica

3.1. Despeje de ángulos en las cadenas motrices

Aquí se despejarán cada uno de los ángulos variables de la plataforma mediante la aplicación de los lazos vectoriales así como matriciales, y por medio de una manipulación algebraica de matrices y despejes de variables, se pondrán los ángulos variables de la plataforma en función del resto de los términos. Para este despeje de variables es necesario definir la siguiente matriz:

$$\mathbf{T}_{datos} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix}$$

la cual será utilizada para substituir las siguientes matrices

$$\mathbf{T}_{datos} = \mathbf{T}_{xyz} \mathbf{T}_{Hooke} \mathbf{T}_{p11}$$

3.1.1. Despeje de θ_{3i}

A través de vectores se plantea la ecuación de magnitud vectorial, donde se involucra la distancia d_7 , que es la magnitud del 2° eslabón de la pierna, además, se logran eliminar los ángulos de la segunda junta de hooke al cerrar nuestro lazo vectorial en ese punto [Figura 33]; esto se plantea de la forma siguiente:

Formamos dos vectores que parten del sistema de referencia y que apunten a las dos juntas de Hooke del segundo eslabón móvil, por un lado el primer vector

apunta al sistema local (x_{4i}, y_{4i}, z_{4i}) , que se encuentra en la primera junta, este se compone de la siguiente forma

$$\mathbf{R}_{04i} = \mathbf{T}_{z6}(\delta_{1i})\mathbf{T}_{z1}(d_{2i})\mathbf{T}_{z5}(\theta_{3i}) r_{d4i}$$

El vector que apunta a la segunda de hooke se compone de las transformaciones

$$\mathbf{R}_{014i} = \mathbf{T}_{datos} \mathbf{T}_{z5}(90^\circ)\mathbf{T}_{z4}(\theta_{13i}) r_{d14i}$$

La diferencia de ambos nos dará el vector que recorre a todo el segundo eslabón [Fig 33] el cual servirá para poder obtener la magnitud del mismo y poder generar la ecuación necesaria para despejar el ángulo θ_{3i} de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{414i} &= \mathbf{R}_{014i} - \mathbf{R}_{04i} \\ \mathbf{R}_{414i} \cdot \mathbf{R}_{414i} &= (d_{7i})^2 \end{aligned}$$

3.1.2.

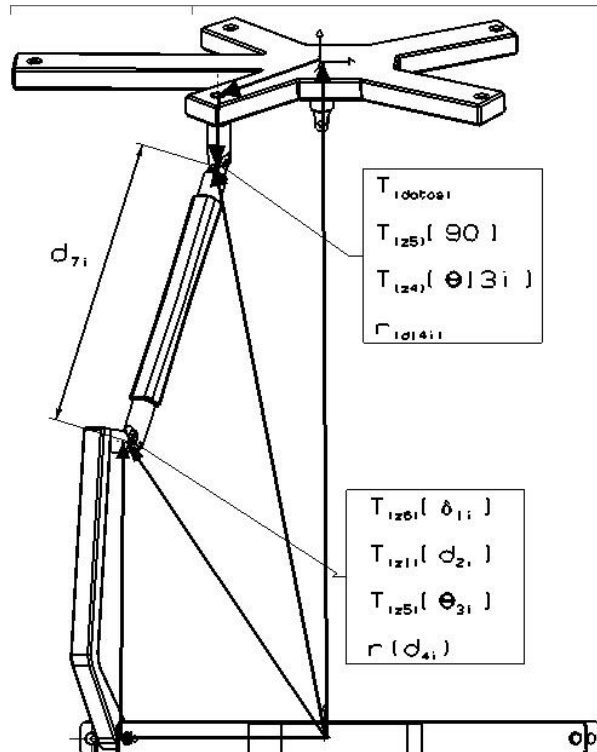


Fig 33.- Despeje $\theta_{3i}, \theta_{5i}, \theta_{6i}$

con ambas ecuaciones se obtendrá una expresión algebraica de la siguiente forma:

$$c_{3i} + c_{1i} \cos \theta_{3i} + c_{2i} \text{sen} \theta_{3i} = 0^1$$

Esta ecuación aplicando el método explicado en el apéndice A conduce a una expresión para el ángulo θ_{3i} cuyos coeficientes son:

$$c_{1i} = 2d_{14i} D_{33i} d_{4i} - 2D_{34i} d_{4i}$$

$$\begin{aligned} c_{2i} = & D_{13i}^2 d_{14i}^2 - 2D_{13i} d_{14i} D_{14i} + D_{14i}^2 + d_{14i}^2 D_{23i}^2 - 2d_{14i} D_{23i} D_{24i} \\ & + D_{24i}^2 + d_{2i}^2 + d_{14i}^2 D_{33i} D_{34i} + D_{34i}^2 + d_{4i}^2 - d_{7i}^2 \\ & + 2(D_{13i} d_{14i} - D_{14i}) d_{2i} \cos(\delta_{1i}) + c_{1i} \cos(\theta_{3i}) + \\ & 2d_{14i} D_{23i} D_{14i} d_{2i} \text{sen}(\delta_{1i}) + 2 D_{24i} d_{2i} \text{sen}(\delta_{1i}) + c_{2i} \text{sen}(\theta_{3i}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{3i} = & D_{13i}^2 d_{14i}^2 - 2D_{13i} d_{14i} D_{14i} + D_{14i}^2 - d_{14i}^2 D_{23i} - \\ & 2d_{14i} D_{23i} D_{24i} + D_{24i}^2 + d_{2i}^2 + d_{14i}^2 D_{33i}^2 - 2d_{14i} D_{33i} D_{34i} \\ & + D_{34i}^2 + d_{4i}^2 - d_{7i}^2 + 2(D_{134i} d_{14i} - D_{14i}) d_{2i} \cos(\delta_{1i}) \\ & + 2d_{14i} D_{23i} d_{2i} \text{sen}(\delta_{1i}) - 2D_{24i} d_{2i} \text{sen}(\delta_{1i}) \end{aligned}$$

Estos forman la siguiente expresión del ángulo θ_{3i}

$$\theta_{3i} = \tan^{-1} \left(\frac{c_{2i}}{c_{1i}} \right) \pm \cos^{-1} \left(\frac{-c_{3i}}{\sqrt{c_{1i}^2 + c_{2i}^2}} \right) \quad (3.1)$$

3.1.3. Despeje de θ_5

Para este caso, lo que se hace es formar una ecuación de lazo vectorial que termine en la segunda junta de Hooke por un lado y por otro. La expresión que utiliza es la siguiente

$$\mathbf{T}_{z6}(\delta_{1i}) \mathbf{T}_{z1}(d_{2i}) \mathbf{T}_{z5}(\theta_{3i}) \mathbf{T}_{z3}(d_{4i}) \mathbf{T}_{z6}(\theta_{5i}) \mathbf{T}_{z5}(\theta_{6i}) \mathbf{r}_{d7i}$$

¹La forma de resolver este tipo de ecuaciones se presenta en el Apéndice A

En donde $\mathbf{r}_{d7i} = (-\mathbf{d}_{7i}, 0, 0, 1)$ es la distancia que va de la primera a la segunda junta de Hooke. Por el otro lado también se establece la expresión que deberá de llegar al mismo punto [Fig 33] mediante:

$$\mathbf{T}_{Datos} \mathbf{T}_{z5}\left(\frac{\pi}{2}\right) \mathbf{T}_{z4}(\theta_{13i}) \bullet \mathbf{r}_{d14i}$$

En este caso $\mathbf{r}_{d14i} = (\mathbf{d}_{14i}, 0, 0, 1)$ representa la distancia del cople superior hacia la segunda junta de Hooke [Fig 33], al estar ambas expresiones representando al mismo punto pueden ser igualadas para realizar los despejes necesarios, esto con el fin de tener posibilidad de despejar el ángulo θ_{5i} , expresándose de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{z6}(\theta_{5i}) \mathbf{T}_{z5}(\theta_{6i}) \mathbf{r}_{d7i} &= \mathbf{T}_{z3}(d_{4i}) \mathbf{T}_{z5}(-\theta_{3i}) \mathbf{T}_{z1}(-d_{2i}) \mathbf{T}_{z6}(-\delta_{1i}) \\ &\quad \mathbf{T}_{Datos} \mathbf{T}_{z5}\left(\frac{\pi}{2}\right) \mathbf{T}_{z4}(\theta_{13i}) \bullet \mathbf{r}_{d14i} \end{aligned}$$

Esta última ecuación tiene una representación vectorial homogénea con 3 componentes vectoriales y una cuarta que es la homogénea y que será igual a 1. Igualando componente por componente, se harán los despejes necesarios para llegar a expresiones que estén en términos de θ_{5i} , y para despejar este ángulo finalmente se utiliza una función trigonométrica.

$$\begin{aligned} x_{ai} &= \cos(\theta_{3i}) [d_{2i} + (D_{13i} d_{14i} - D_{14i}) \cos(\delta_{1i}) + d_{14i} D_{23i} \text{sen}(\delta_{1i}) \\ &\quad - D_{24i} \text{sen}(\delta_{1i})] + (d_{14i} D_{33i} - D_{34i}) \text{sen}(\theta_{3i}) \end{aligned}$$

$$y_{ai} = [-(D_{23i} d_{14i} + D_{24i}) \cos(\delta_{1i}) + (d_{14i} D_{13i} - D_{14i}) \text{sen}(\delta_{1i})]$$

$$\theta_{5i} = \text{arcTan} \left(\frac{y_{ai}}{x_{ai}} \right) \quad (3.2)$$

3.1.4. Despeje de θ_{6i}

De la misma ecuación vectorial que apunta hacia la segunda junta de hooke [Fig 33], se realizan los despejes necesarios, para poder tener acceso al ángulo θ_{6i} , esto se hace de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{z6}(\theta_{5i})\mathbf{T}_{z5}(\theta_{6i})\mathbf{r}_{d7i} &= \mathbf{T}_{z3}(d_{4i})\mathbf{T}_{z5}(-\theta_{3i})\mathbf{T}_{z1}(-d_{2i})\mathbf{T}_{z6}(-\delta_{1i}) \cdot \\ &\cdot \mathbf{T}_{Datos}\mathbf{T}_{z5}\left(\frac{\pi}{2}\right)\mathbf{T}_{z4}(\theta_{13i})\mathbf{r}_{d14i} \end{aligned}$$

establecida esta ecuación lo que queda de la manipulación algebraica de la expresión es lo siguiente:

$$\begin{aligned} z_{ai} &= -d_{4i} + [-(D_{33i} d_{14i} - D_{34i}) \cos(\theta_{3i}) - (d_{2i} + D_{13i} d_{14i} \cos(\delta_{1i}) - \\ &D_{14i} \cos(\delta_{1i}) + d_{14i} D_{23i} \text{sen}(\delta_{1i}))] \text{sen}(\theta_{3i}) \end{aligned}$$

$$\theta_{6i} = \text{arcTan}\left(\frac{z_{ai} \cos([\theta_{5i}])}{-x_{ai}}\right) \quad (3.3)$$

3.1.5. Despeje de θ_{8i} y θ_{9i}

Para obtener este ángulo lo que se utiliza es un lazo matricial que apunte a la base de la plataforma móvil [Fig 34], el vector \mathbf{r}_{d14i} es un vector ascendente y se cierra el lazo vectorial en la junta rotacional que existe en cada uno de los brazos de la base superior por medio de:

$$\begin{aligned} &\mathbf{T}_{z6}(\delta_{1i})\mathbf{T}_{z1}(d_{2i})\mathbf{T}_{z5}(\theta_{3i})\mathbf{T}_{z3}(d_{4i})\mathbf{T}_{z6}(\theta_{5i})\mathbf{T}_{z5}(\theta_{6i}) \cdot \\ &\mathbf{T}_{z1}(-d_{7i})\mathbf{T}_{z5}(\theta_{8i})\mathbf{T}_{z6}(\theta_{9i})\mathbf{r}_{d14i} \\ &= \mathbf{T}_{Datos}\mathbf{n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{d14i} &= \begin{pmatrix} d_{14i} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \mathbf{n} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Se reacomoda la expresión anterior quedando

$$\begin{aligned} & \mathbf{T}_{z5}(\theta_{8i})\mathbf{T}_{z6}(\theta_{9i})\mathbf{r}_{d14i} \\ = & \mathbf{T}_{z1}(d_{7i})\mathbf{T}_{z5}(-\theta_{6i})\mathbf{T}_{z6}(-\theta_{5i})\mathbf{T}_{z3}(-d_{4i})\mathbf{T}_{z5}(-\theta_{3i}) \\ & \mathbf{T}_{z1}(-d_{2i})\mathbf{T}_{z6}(-\delta_{1i})\mathbf{T}_{Datos}\mathbf{n} \end{aligned}$$

Aquí definimos a $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, el cual será un vector nulo pero con la cualidad de que al ocuparlo, ayuda a obtener la posición, desde el sistema de referencia, del punto en análisis. De esta forma al ocuparlo en la expresión anterior estamos obteniendo la información de la posición del punto que cerraría el lazo vectorial homogéneo.

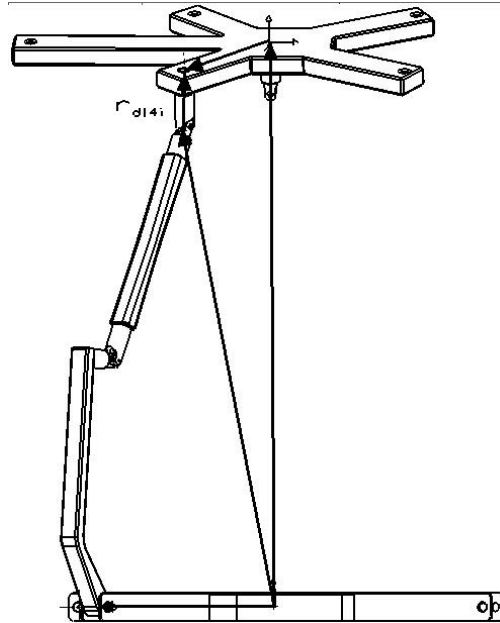


Figura 34.- Despejes de θ_{8i}, θ_{9i}

Nuevamente se tiene una expresión con un vector homogéneo con 4 componentes de las cuales se utilizan las 3 primeras donde existe información del movimiento. De esta expresión se toman de ambos lados las respectivas componentes para dejar despejados los ángulos θ_{8i} y θ_{9i} lo cual se expresa de la siguiente

forma:

$$\begin{aligned}
 x_{bi} = & d_{7i} - D_{34i} \cos(\theta_{5i}) \cos(\theta_{6i}) \operatorname{sen}(\theta_{3i}) + D_{24i} \cos(\delta_{1i}) \cos(\theta_{6i}) \operatorname{sen}(\theta_{5i}) \\
 & - D_{14i} \cos(\theta_{6i}) \operatorname{sen}(\delta_{1i}) \operatorname{sen}(\theta_{5i}) + d_{4i} \operatorname{sen}(\theta_{6i}) + d_{2i} \operatorname{sen}(\theta_{3i}) \operatorname{sen}(\theta_{6i}) \\
 & - D_{14i} \cos(\delta_{1i}) \operatorname{sen}(\theta_{3i}) \operatorname{sen}(\theta_{6i}) - D_{24i} \operatorname{sen}(\delta_{1i}) \operatorname{sen}(\theta_{3i}) \operatorname{sen}(\theta_{6i}) + \\
 & \cos(\theta_{3i}) [-\cos(\theta_{5i}) \cos(\theta_{6i}) [d_{2i} - D_{14i} \cos(\delta_{1i}) - D_{24i} \operatorname{sen}(\delta_{1i})] \\
 & - D_{33i} \operatorname{sen}(\theta_{6i})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y_{bi} = & [-(D_{14i} \cos(\theta_{5i}) \operatorname{sen}(\delta_{1i})) + (\cos(\theta_{3i}) (d_{2i} + D_{24i} \operatorname{sen}(\delta_{1i})) \\
 & + D_{34i} \operatorname{sen}(\theta_{3i}) + d_{14i} D_{23i} \operatorname{sen}(\delta_{1i})) \operatorname{sen}(\theta_{5i})] \\
 & + \cos(\delta_{1i}) [D_{24i} \cos(\theta_{5i}) - d_{14i} \cos(\theta_{3i})] \operatorname{sen}(\theta_{5i})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 z_{ai} = & \cos(\theta_{6i}) (-d_{4i} + D_{34i} \cos(\theta_{3i}) + (-d_{2i} + D_{14i} \cos(\delta_{1i}) \\
 & + D_{24i} \operatorname{sen}(\delta_{1i})) \operatorname{sen}(\theta_{3i}) - \cos(\theta_{3i}) \cos(\theta_{5i}) (d_{2i} - D_{14i} \cos(\delta_{1i}) \\
 & - D_{24i} \operatorname{sen}(\delta_{1i})) - D_{34i} \cos(\theta_{5i}) \operatorname{sen}(\theta_{3i}) \\
 & + (D_{24i} \cos(\delta_{1i}) - D_{14i} \operatorname{sen}(\delta_{1i})) \operatorname{sen}(\theta_{5i}) \operatorname{sen}(\theta_{6i})
 \end{aligned}$$

$$\theta_{8i} = \tan^{-1} \left(\frac{z_{bi}}{-x_{bi}} \right) \quad (3.4)$$

$$\theta_{9i} = \tan^{-1} \left(\frac{y_{bi} \cos(\theta_{8i})}{x_{bi}} \right) \quad (3.5)$$

3.1.6. Despeje de θ_{13i}

En la obtención de este ángulo se hará uso nuevamente de las ecuaciones de lazo matricial, pero para este caso, se cerrarán en la primera junta de Hooke [Figura 35], utilizando nuevamente el vector neutro. Esto se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{T}_{02i} \mathbf{T}_{24i} \mathbf{n} &= \mathbf{T}_{xyz} \mathbf{T}_{Hooke} \mathbf{T}_{p11i2i} \mathbf{T}_{1114i} \mathbf{r}_{d7i} \\
 \mathbf{r}_{d7i} &= \begin{pmatrix} d_{7i} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 \mathbf{T}_{1114} &= \mathbf{T}_{z5} \left(\frac{\pi}{2} \right) \mathbf{T}_{z4}(\theta_{13i}) \mathbf{T}_{z1}(d_{14i})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_{ci} &= \cos(\delta_{pi}) \cos(\psi) [-y + \text{sen}(\delta_{1i}) (d_{2i} + d_{4i} \text{sen}(\theta_{3i}))] \\
&\quad + (-z + d_{4i} \cos(\theta_{3i})) \text{sen}(\psi) + \sin(\delta_{pi}) \cos(\theta) [x - \cos(\delta_{1i}) \\
&\quad (d_{2i} + d_{4i} \text{sen}(\theta_{3i}))] - \text{sen}(\theta) [(z - d_{4i} \cos(\theta_{3i})) \cos(\psi) \\
&\quad - (y - \text{sen}(\delta_{1i}) (d_{2i} + d_{4i} \text{sen}(\theta_{3i}))) \text{sen}(\psi)] \\
\theta_{13i} &= \tan^{-1} \left(\frac{y_{ci} \text{sen}(\theta_{8i}) + x_{ci} \cos(\theta_{8i}) \text{sen}(\theta_{9i})}{x_{ci} \text{sen}(\theta_{8i}) + y_{ci} \cos(\theta_{8i}) \text{sen}(\theta_{9i})} \right) \quad (3.6)
\end{aligned}$$

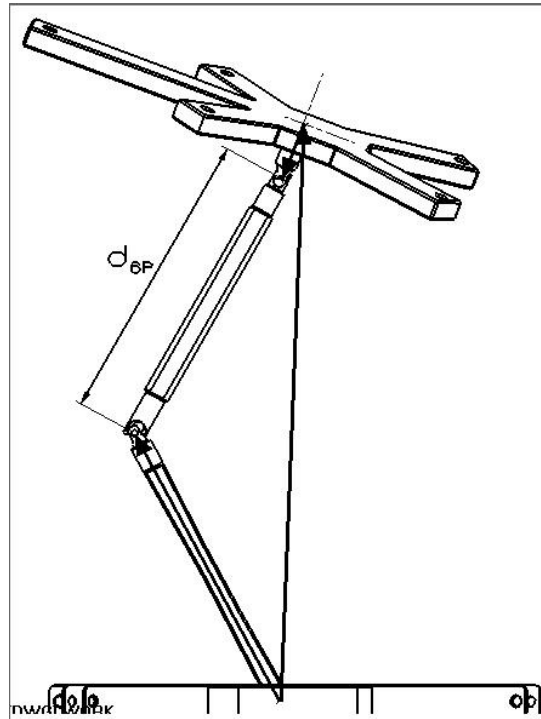
3.2. Despeje de ángulos en Cadena Central

3.2.1. Despeje de θ_{2p}

Por medio de la utilización de vectores homogéneos se plantea la ecuación de magnitud vectorial al vector resultante de la diferencia entre 2 puntos; aquí se involucra la distancia d_{6P} [Figura 36], que es la magnitud del 2° eslabón de la pierna, además, se eliminan los ángulos de la segunda junta de hooke por la forma en que se arma el lazo vectorial, por medio de la siguiente expresión:

$$\mathbf{E}_{c1p} = \mathbf{T}_{02P} \mathbf{r}_{d2P3P} - \mathbf{T}_{XYZ} \mathbf{T}_{Hooke} \mathbf{T}_{810PIV} \mathbf{r}_{d10p9p}$$

$$\mathbf{E}_{c1p}^T \mathbf{E}_{c1p} = d_{6P}^2$$

Fig 36.- Despeje de θ_{2p}, θ_{3P}

con ambas ecuaciones se obtendrá una expresión algebraica de la siguiente forma:

$$c_{2p} = -2d_{3p}z + 2d_{3p}d_{9p}\cos(\theta)\cos(\psi) + 2d_{3p}d_{9p}\sen(\psi)$$

$$\begin{aligned} c_{3P} = & d_{3P}^2 - d_{6P}^2 + 2d_{9P}^2 + x^2 + y^2 + z^2 - 2d_{9p}y\cos(\psi) \\ & - 2d_{9p}z\cos(\theta)\cos(\psi) + 2d_{9p}x\sen(\theta) \\ & - 2d_{9p}z\sen(\psi) + 2d_{9p}y\cos(\theta)\sen(\psi) \end{aligned}$$

$$c_{3P} + c_{2P}\cos(\theta_{2p}) + c_{1P}\sen(\theta_{2P})$$

$$\theta_{2P} = \tan^{-1}\left(\frac{c_{2p}}{c_{1p}}\right) \pm \cos^{-1}\left(\frac{-c_{3P}}{\sqrt{c_{1P}^2 + c_{2P}^2}}\right) \quad (3.7)$$

3.2.2. Despeje de θ_{4P}

Se plante la siguiente ecuación vectorial cerrando el lazo en la segunda junta de Hooke [Figura 37]

$$\mathbf{T}_{z4}(-\theta_{4P})\mathbf{T}_{z6}(-\theta_{5P})\mathbf{r}_{d14i} = \mathbf{T}_{z3}(-d_{3P})\mathbf{T}_{z4}(\theta_{2P})\mathbf{T}_{z6}(-\delta_{1P}) \cdot \mathbf{T}_{xyz}\mathbf{T}_{Hooke}\mathbf{T}_{810P}^{-1}\mathbf{T}_{68P}^{-1}\mathbf{n}$$

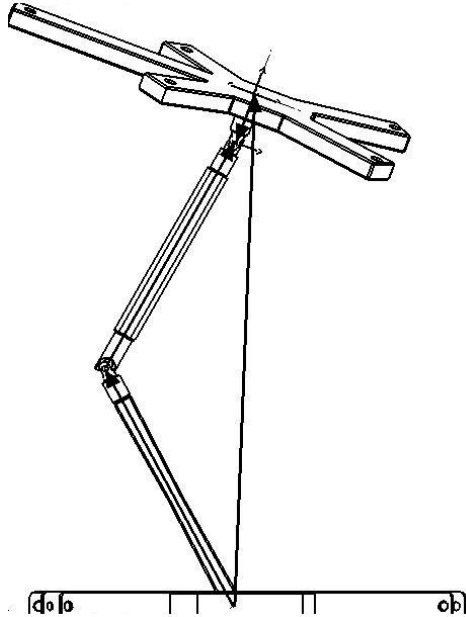


Fig 37.- Despeje de θ_{4P}, θ_{5P}

igualando las componentes de esta ecuación vectorial se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} y_{di} = & y\cos(\delta_{1P})\cos(\theta_{2P}) - x\cos(\theta_{2P})\text{sen}(\delta_{1P}) - z\text{sen}(\theta_{2P}) \\ & + d_{9p}[\cos(\theta_{2P})\text{sen}(\delta_{1P})\text{sen}(\theta) + \cos(\theta)\cos(\psi)\text{sen}(\theta_{2P}) \\ & + \cos(\delta_{1P})\cos(\theta)\cos(\theta_{2P})\text{sen}(\psi)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_{di} = & -d_{3P} + z\cos(\theta_{2P}) + y\cos(\delta_{1P})\text{sen}(\theta_{2P}) - x\text{sen}(\delta_{1P})\text{sen}(\theta_{2P}) \\ & - d_{9p}[\cos(\theta)\cos(\theta_{2P})\cos(\psi) - \text{sen}(\delta_{1P})\text{sen}(\theta)\text{sen}(\theta_{2P}) \\ & - \cos(\delta_{1P})\cos(\theta)\text{sen}(\theta_{2P})\text{sen}(\psi)] \end{aligned}$$

$$\tan(\theta_{4P}) = \frac{-z_{di}}{y_{di}}$$

3.2.3. Despeje de θ_{5P}

Del desarrollo anterior se toman los mismos elementos, pero además se agrega la siguiente componente

$$\begin{aligned} y_{di} = & x \cos(\delta_{1P}) + y \sin(\delta_{1P}) - d_{9p} [\cos(\delta_{1P}) \sin(\theta) \\ & - \cos(\theta) \sin(\delta_{1P}) \sin(\psi)] \end{aligned}$$

$$\tan(\theta_{5P}) = \frac{x_{di} \cos(\theta_{4P})}{y_{di}}$$

3.2.4. Despeje de θ_{7P}

El desarrollo para despejar estos ángulos es diferente al par de ángulos anteriores ya que ahora se cierra el lazo vectorial en el origen de la plataforma móvil [Fig 38]. Se plantea el lazo matricial de tal forma que se cierre en la base de la plataforma movi, para posteriormente hacer el desarrollo a fin de llegar a una expresión de donde se pueda despejar el ángulo. Esto se muestra a continuación

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{02p} \mathbf{T}_{24p} \mathbf{T}_{46p} \mathbf{T}_{68p} \mathbf{T}_{810P} \mathbf{n} &= \mathbf{T}_{xyx} \mathbf{T}_{Hooke} \mathbf{n} \\ \mathbf{T}_{68p} \mathbf{T}_{810p} \mathbf{n} &= \mathbf{T}_{46p}^{-1} \mathbf{T}_{24p}^{-1} \mathbf{T}_{02p}^{-1} \mathbf{T}_{xyx} \mathbf{T}_{Hooke} \mathbf{n} \end{aligned}$$

3.2.5. Despeje de θ_{8p}

La ecuación para el ángulo θ_{8p} se obtiene tomando como base el desarrollo anterior [Figura 38] para el despeje de θ_{7p} , solo que ahora se utiliza la componente z del vector utilizado para despejar

$$\begin{aligned} z_{ei} = & -d_{3P} \cos(\theta_{4p}) + y [\cos(\delta_{1p}) \cos(\theta_{4p}) \operatorname{sen}(\theta_{2p}) + \cos[\delta_{1P}] \cos(\theta_{2p}) \operatorname{sen}(\theta_{4p})] \\ & -x \cos(\theta_{4p}) \operatorname{sen}(\delta_{1p}) \operatorname{sen}(\theta_{2p}) + \cos(\theta_{2p}) \operatorname{sen}(\delta_{1p}) \operatorname{sen}(\theta_{4p}) \\ & +z [\cos(\theta_{2p}) \cos(\theta_{4p}) - \operatorname{sen}(\theta_{2p}) \operatorname{sen}(\theta_{4p})] \end{aligned}$$

$$\tan(\theta_{8p}) = \frac{z_{ei} \operatorname{sen}(\theta_{7p})}{x_{ei}}$$

3.3. Solución Cinemática

En esta parte del trabajo se plantean cómo es que se solucionan las ecuaciones cinemáticas de la posición tanto para las cadenas motrices así como la cadena de restricción. Durante el desarrollo de la cinemática fué necesario primero resolver las ecuaciones de la cadena central para acotar el cómo es que se iba a mover la plataforma móvil. Además a pesar de que la plataforma es de 5 GDL se tuvo que considerar como incógnita al ángulo θ , el cual es la rotación sobre el eje x local de la plataforma móvil, esto debido a que la asignación de θ como un valor arbitrario, producirá posiciones en la plataforma que no satisfacen las ecuaciones cinemáticas de la cadena central, teniendo como consecuencias que el análisis estático, que es dependiente de la posición, no pudiera demostrar el análisis de balanceo previamente hecho.

Para el movimiento de la plataforma móvil se asigna una trayectoria recta entre su configuración inicial y la final donde se toma al sistema local de la plataforma $[x_P, y_P, z_P]$ como punto de referencia. Los valores respecto al sistema inercial de referencia son:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{ini} &= \begin{pmatrix} x_{Pini} & y_{Pini} & z_{Pini} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,5 \end{pmatrix} \\ \mathbf{P}_{fin} &= \begin{pmatrix} x_{Pfin} & y_{Pfin} & z_{Pfin} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,15 & 0,3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Existe una línea recta a través de la cual se mueve el punto central de la plataforma móvil (ubicado en el centro del plato superior) y la cual tiene la siguiente descripción paramétrica:

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{P}_{ini} + \frac{t}{100}(\mathbf{P}_{fin} - \mathbf{P}_{ini})$$

Para el incremento del ángulo se utiliza la siguiente ecuación

$$\begin{aligned}\psi_{Ini} &= 0^\circ \\ \psi_{Fin} &= 20^\circ \\ Angulo &= \psi_{IniIni} + \frac{t}{100}\psi_{Fin}\end{aligned}$$

En estas ecuaciones t únicamente es un parámetro que aumentará gradualmente desde 0 a 60.

y en donde el ángulo ψ aumentó de 0 a 20° .

La trayectoria es una recta paramétrica definida de la siguiente manera

Para la cadena 1 se tienen

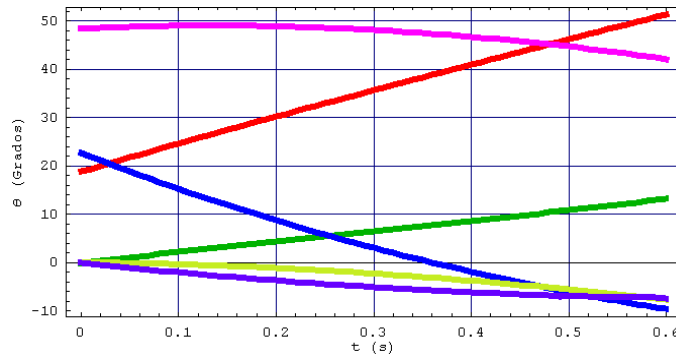


Fig 39.- Angulos de cadena motriz 1

la cadena 2

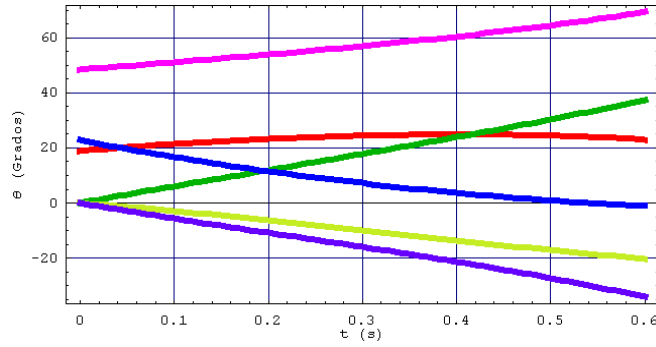


Figura 40.- Angulos cadena motriz 2

la cadena 3

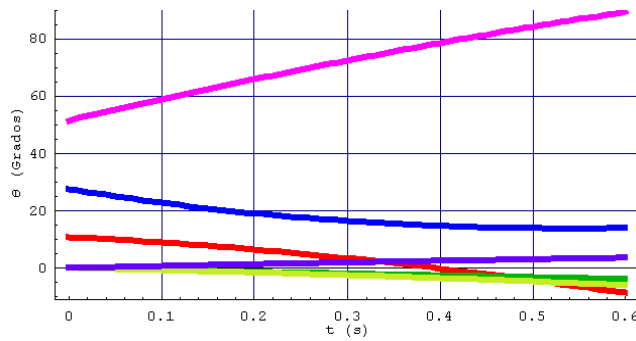


Figura 41.- Angulos de la cadena motriz 3

la cadena 4

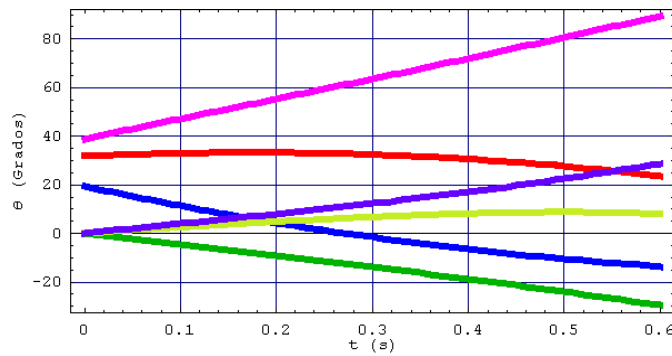


Fig 42.- Angulos de la cadena 4

la cadena 5

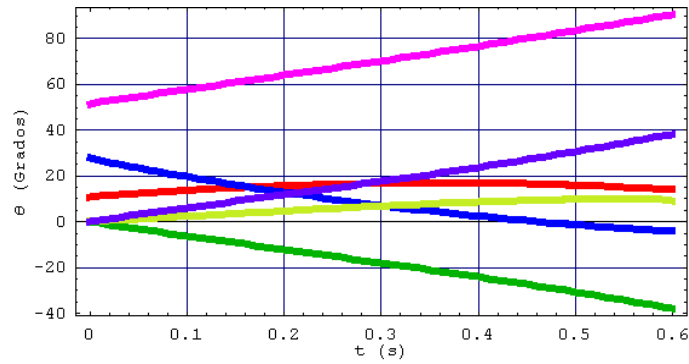


Fig 43.- Angulos de la cadena motriz 5
la cadena de restricción

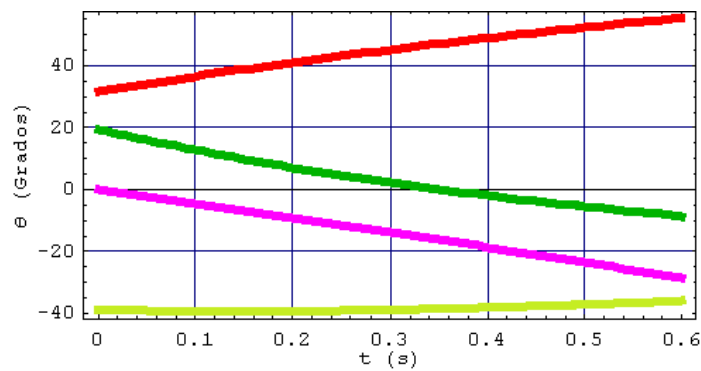


Fig 44.- Angulos de la cadena de restricción

Para finalizar, se muestra dos imágenes con la posición final y la inicial de la plataforma obtenidas en el Mathematica

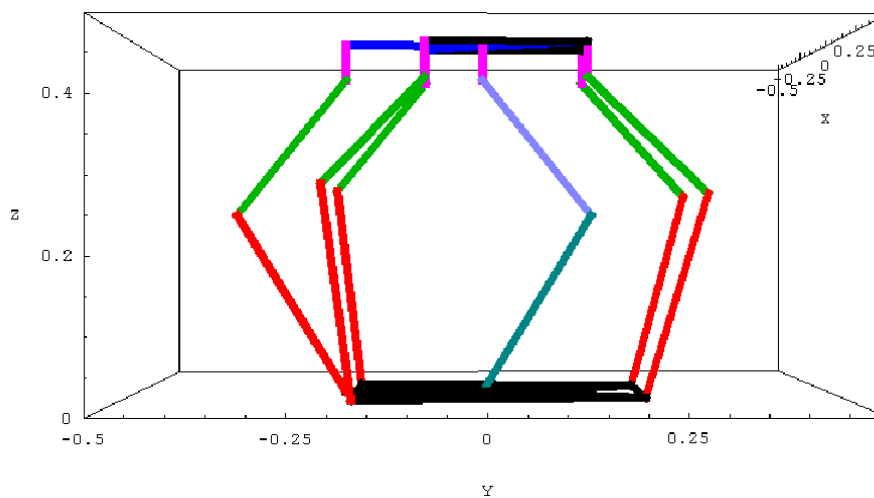


Fig 45.- Plataforma en posición inicial

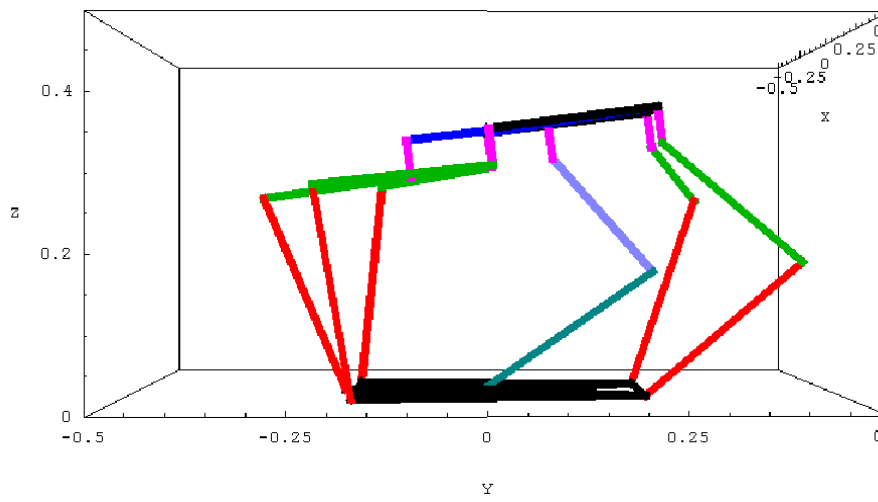


Fig 46.- Plataforma en posición final

Capítulo 4

Balaneo Estático

Una plataforma balanceada tiene un mejor comportamiento dinámico al reducir la potencia aplicada de los actuadores así como reducir las vibraciones que se pudiesen generar en el mecanismo al momento de estar en operación. El objetivo del balanceo es que los actuadores no tengan que contribuir en soportar el peso de los cuerpos que forman la plataforma y que se utilicen únicamente para generar las condiciones de aceleración necesarias para moverla.

El balanceo estático de la plataforma será por medio de contrapesos y resortes. El método plantea realizar el balanceo mediante el método conocido como compensación de la gravedad. El método de balanceo con resortes plantea el equilibrio de la energía potencial tanto de los cuerpos así como de los resortes. El balanceo se logra cuando se obtienen valores nulos de torques en los actuadores para cualquier posición del mecanismo. El desarrollo matemático consistirá en poder armar expresiones tanto del centro global de masa así como el plantamiento energético, en función de la posición.

Las dos maneras de balancear mecanismos generan ventajas y desventajas, debido a que, en el caso del balanceo por contrapesos, la solución que se obtenga podría de requerir de una masa muy grande o de un brazo de palanca que inclusive pudiera ser desproporcionado.

Cuando el balanceo se hace por medio de resortes el peso de todo el mecanismo puede ser compensado por medio del uso de la energía potencial de los resortes, esto significa, menor masa agregada al manipulador. Sin embargo, los mecanismos balanceados por medio de resortes, estarán balanceados únicamente para una sola dirección de la gravedad.

4.1. Balanceo Estático Con Contrapesos

Se parte de la premisa de que el centro de gravedad del sistema de multicuerpos está formado por la suma de todos los centros de gravedad de cada uno de los cuerpos móviles de la plataforma. Todos estos centros de gravedad tendrán que ser medidos en la misma base (la inercial del mecanismo) para poder hacer la suma de los mismos [Figura 47]. Aunque las coordenadas del centro de gravedad para cada cuerpo serán medidas en la base local correspondiente. Una simplificación en el análisis es que los coples rotacionales, los cuales unen a la base móvil con cada una de las cadenas motrices, se han considerado como parte integrada a la base superior, por lo que tanto sus masas y sus inercias serán contabilizadas dentro del total de la plataforma móvil.¹

Se plantea la siguiente ecuación para la suma de centros de gravedad

$$M\mathbf{R}_G = m_M\mathbf{R}_M + m_{1p}\mathbf{R}_{G1p} + m_{2p}\mathbf{R}_{G2p} + \sum_{i=1}^5 (m_{1i}\mathbf{R}_{G1i} + m_{2i}\mathbf{R}_{G2i}) \quad (4.1)$$

¹Gosselin, Clemente & Wang J. Static balancing of spatial four-degree-of-freedom parallel mechanisms, Mechanism and Machine Theory 35 (2000)

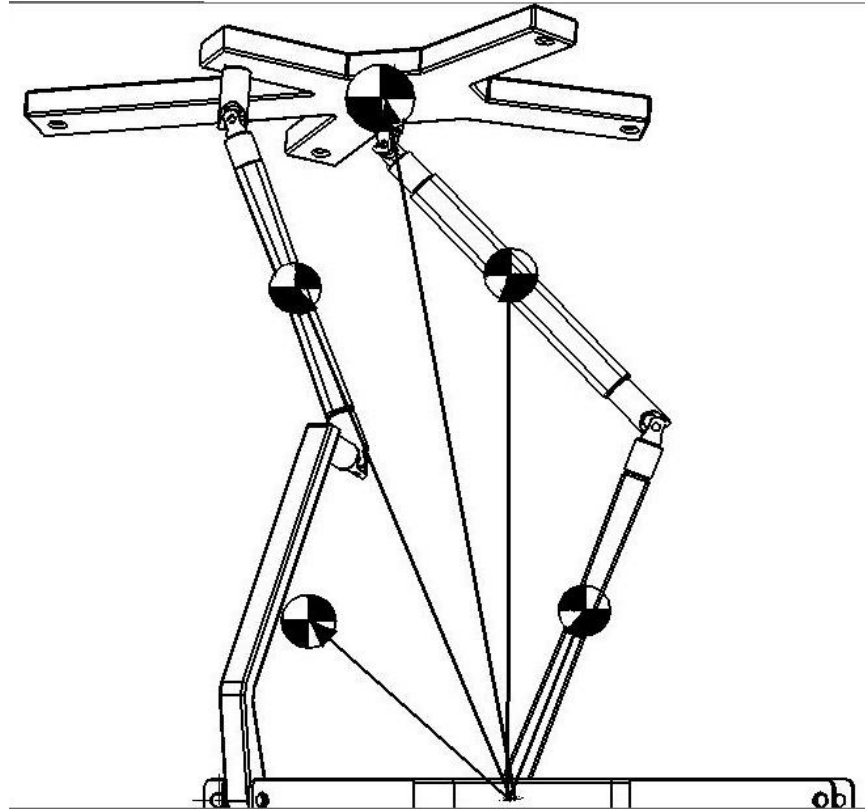


Figura 47.- Centros de gravedad de cadenas motriz y restricción

M es la suma de todas las masas de los cuerpos móviles en el sistema de multicuerpos:

$$M = \sum_{i=1}^n m_i$$

Cada uno de los vectores \mathbf{R} apunta hacia los centros de gravedad de los respectivos cuerpos móviles. \mathbf{R}_M apunta al centro de gravedad de la plataforma móvil [Figura 48]

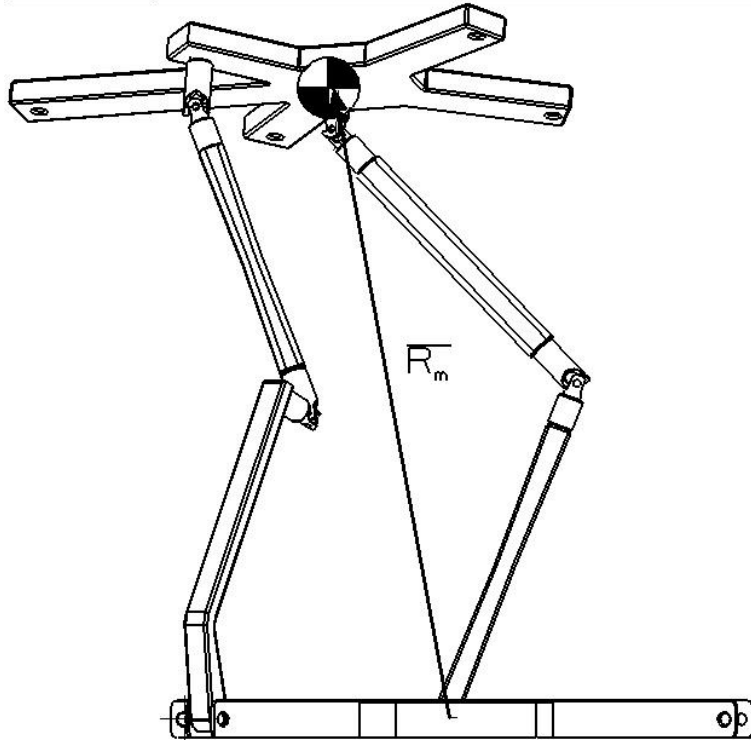


Figura 48.- Centro de gravedad de plataforma móvil

$$\mathbf{R}_M = \mathbf{T}_{xyz} \mathbf{T}_{Hooke} \mathbf{r}_{GM} \quad \mathbf{r}_{GM} = \begin{pmatrix} x_{GM} & y_{GM} & z_{GM} & 1 \end{pmatrix}^T$$

(x_{GM}, y_{GM}, z_{GM}) son las coordenadas del centro de gravedad ubicadas en la base local (x_p, y_p, z_p) de la plataforma móvil. \mathbf{R}_{G1p} , \mathbf{R}_{G2p} son los vectores que apuntan al centro de gravedad de cada uno de los eslabones que componen la cadena cinemática central. Para el primer eslabón se tiene lo siguiente [Figura 49]

$$\mathbf{R}_{G1p} = \mathbf{T}_{02P} \mathbf{r}_{G1p} \quad \mathbf{r}_{G1p} = \begin{pmatrix} x_{G1p} & y_{G1p} & z_{G1p} & 1 \end{pmatrix}^T$$

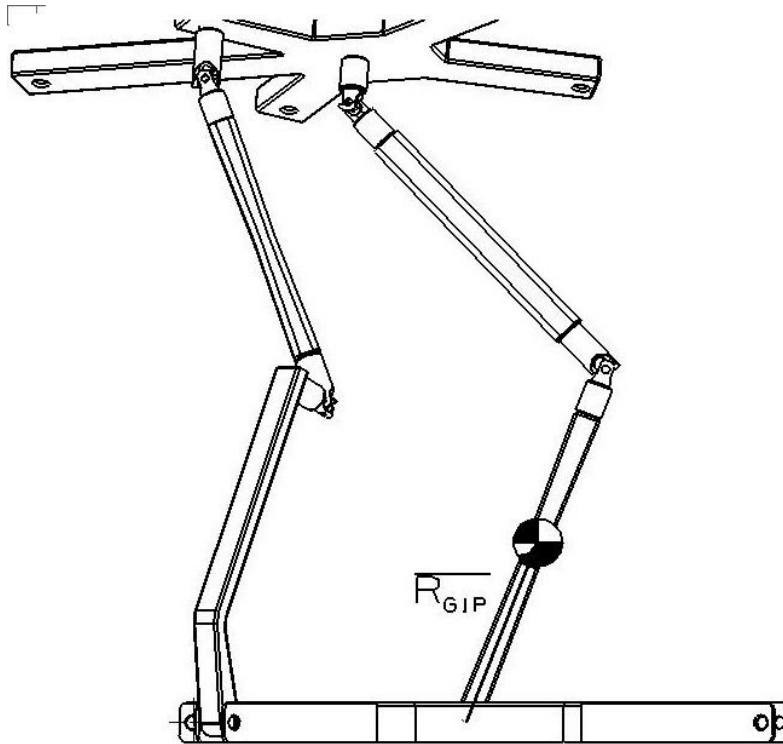


Fig 49.- Vector del centro de masa R_{G1p}, R_{G2p}

Para el segundo su vector es

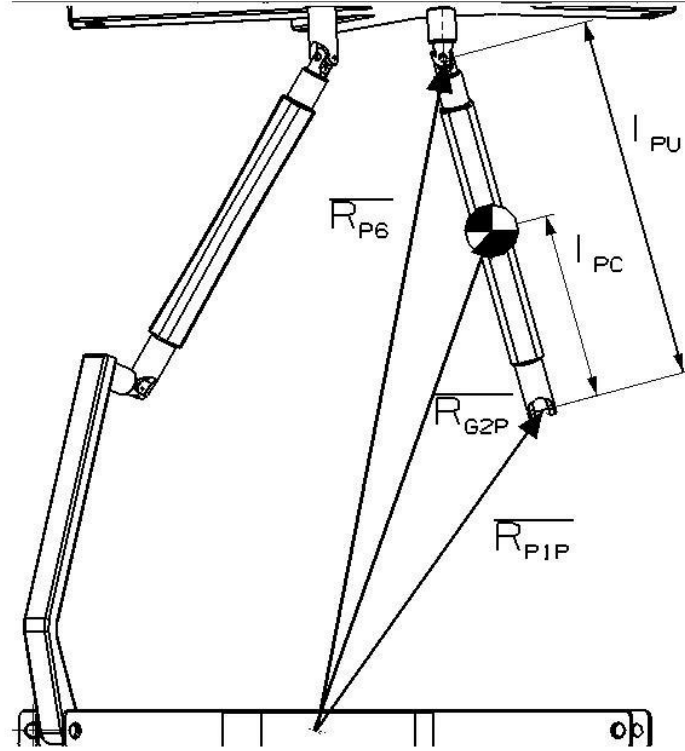


Figura 50.- Centro de masa del 2do eslabon

$$\mathbf{R}_{G2P} = \mathbf{R}_{p6} - \left(1 - \frac{l_{PC}}{l_{PU}}\right) (\mathbf{R}_{P6} - \mathbf{R}_{p1P})$$

$$\mathbf{R}_{p6} = \mathbf{T}_{xyz} \mathbf{T}_{Hooke} \mathbf{r}_{d9p} \quad \mathbf{r}_{d9p} = \begin{pmatrix} 0, & 0, & -d_{9p}, & 1 \end{pmatrix}^T$$

$$\mathbf{R}_{p1P} = \mathbf{T}_{02} \mathbf{r}_{d3P} \quad \mathbf{r}_{d3P} = \begin{pmatrix} 0, & 0, & d_{3P}, & 1 \end{pmatrix}^T$$

Los vectores que están dentro de la sumatoria son los que apuntan a cada uno de los eslabones de las cadenas cinemáticas motrices [Fig 51], los cuales son por un lado:

$$\mathbf{R}_{G1i} = \mathbf{T}_{02} \mathbf{T}_{Z5} (\theta_{3i}) \mathbf{r}_{G1i} \quad \mathbf{r}_{G1i} = \begin{pmatrix} x_{G1i} & y_{G1i} & z_{G1i} & 1 \end{pmatrix}^T$$

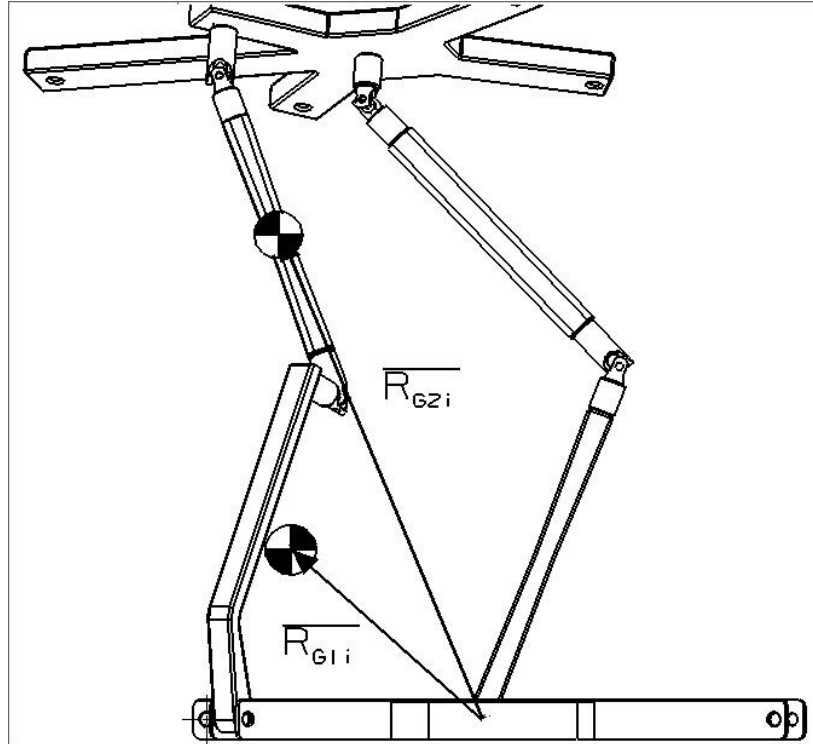


Fig 51.- Centros de masa de cadena motriz R_{G1i}, R_{G2i}

El vector del centro de masa para el segundo cuerpo se plantea de la siguiente forma [Figura 52]: ²

Lo que se hace es a través de las ecuaciones de lazo cinemático, obtener la posición del centro de gravedad del segundo eslabón; es necesario el crear un vector que apunte a la segunda junta de Hooke \mathbf{R}_{pi} , y cuya dirección vaya de la segunda a la primera $-(\mathbf{R}_{pi}-\mathbf{R}_{p1i})$ (hacia abajo). Ahora, ya colocados ahí ese vector va a quedar en términos de la distancia al centro de masa l_{ic} y de la magnitud del eslabón l_{iu} . Eso se logra si tomamos como magnitud de ese vector $\left(1 - \frac{l_{ic}}{l_{iu}}\right)$. Con esto llegamos finalmente a esta expresión:

$$\mathbf{R}_{G2i} = \mathbf{R}_{pi} - \left(1 - \frac{l_{ic}}{l_{iu}}\right) (\mathbf{R}_{pi} - \mathbf{R}_{p1i})$$

²Gosselin, Clemente & Wang J. Op-Cit

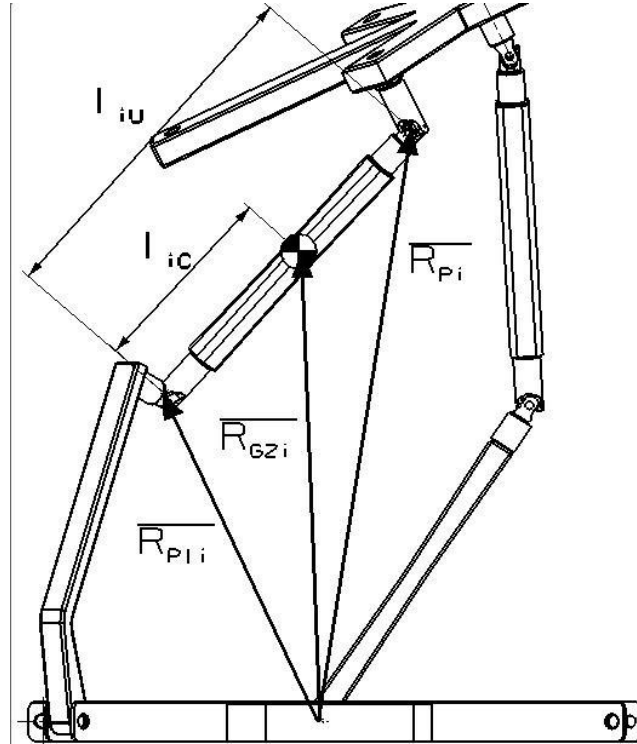


Fig 52.- Centro de masa segundo eslabon

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{pi} &= \mathbf{T}_{xyz} \mathbf{T}_{Hooke} \mathbf{T}_{p11i} \mathbf{T}_{Z5} (\theta_{13i}) \mathbf{r}_{d14i} & \mathbf{r}_{d14i} &= \begin{pmatrix} d_{14i} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T \\ \mathbf{R}_{p1i} &= \mathbf{T}_{02} \mathbf{T}_{Z5} (\theta_{3i}) \mathbf{r}_{d4i} & \mathbf{r}_{d4i} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & d_{4i} & 1 \end{pmatrix}^T \end{aligned}$$

4.2. Balanceo Con Resortes

Se considera el siguiente arreglo, los resortes están situados en la parte inferior de todas las cadenas cinemáticas, en un extremo sujeta a la extensión de los eslabones inferiores y en el otro con la base fija [Figura 53]. Para hacer el análisis de balanceo se cuentan con los siguientes parámetros:

s_i es la distancia que existe entre el centro de rotación del eslabón y el punto donde se sujeta el resorte a la pata móvil. Este valor es propuesto.

h_i es la distancia desde el centro de rotación del eslabón móvil a la parte de la base fija de la plataforma paralela, de donde se sujeta el otro extremo del resorte. Este valor es propuesto.

k_i es la constante de rigidéz del resorte. Este valor es calculado en las ecuaciones de balanceo

e_i es la deformación que sufre el resorte y que se pone en funcion del ángulo del eslabón móvil (θ_{3i}).³

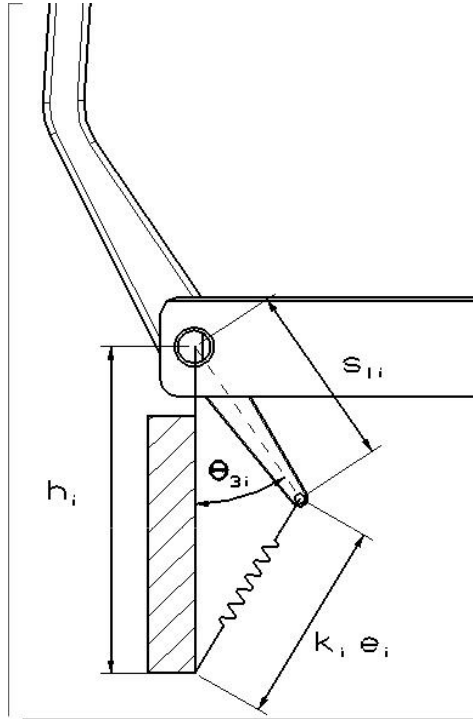


Fig 53.- Configuracion de resortes para balanceo

El planteamiento de las ecuaciones para el balanceo por medio de resortes, parte del equilibrio de la energía potencial y la elástica

$$V = V_W + V_s$$

$$V_W = r_z g$$

4.3. Solución del Balanceo

Para fines de simplificación algebraica, los movimientos angulares de la plataforma móvil se representarán con la siguiente matriz:

³Gosselin, Clemente & Wang J. Op-Cit

$$\mathbf{T}_{HOOKER} = \mathbf{T}_{z4}(\psi)\mathbf{T}_{z5}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & 0 \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} & 0 \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ya asumida esta simplificación , la ecuación de centros de masa se define como:

$$\begin{aligned} M\mathbf{R}_G &= m_P\mathbf{R}_m + m_1\mathbf{R}_{G1P} + m_2\mathbf{R}_{G2P} + (m_{11}\mathbf{R}_{G11} + m_2\mathbf{R}_{G21}) + (m_{12}\mathbf{R}_{G12} + m_{22}\mathbf{R}_{G22}) \\ &+ (m_{13}\mathbf{R}_{G13} + m_{23}\mathbf{R}_{G23}) + (m_{14}\mathbf{R}_{G14} + m_{24}\mathbf{R}_{G24}) + (m_{15}\mathbf{R}_{G15} + m_{25}\mathbf{R}_{G25}) \end{aligned}$$

con esta ecuación vectorial se arman las ecuaciones de balance, tomándose la componente 3, se asignan los parámetros siguientes a todas aquellas variables que puedan verse afectadas por el tiempo y que pertenecen a esta 3° componente

$$\begin{aligned} t_1 &= \cos(\theta_{31}) & t_5 &= \cos(\theta_{33}) & t_9 &= \cos(\theta_{35}) & t_{13} &= z \\ t_2 &= \sen(\theta_{31}) & t_6 &= \sen(\theta_{33}) & t_{10} &= \sen(\theta_{35}) & t_{14} &= q_{31} \\ t_3 &= \cos(\theta_{32}) & t_7 &= \cos(\theta_{34}) & t_{11} &= \cos(\theta_{2P}) & t_{15} &= q_{32} \\ t_4 &= \sen(\theta_{32}) & t_8 &= \sen(\theta_{34}) & t_{12} &= \sen(\theta_{2P}) & t_{16} &= q_{33} \end{aligned}$$

Ya con estos parámetros asignados a la componente 3 de la ecuación de los centros de masa, se factoriza esta para agrupar todas las constantes que afectan a los términos que se cambian respecto del tiempo para tener una expresión más compacta. Los factores que afectan a los parámetros listados en la tabla son los siguientes:

$$C_{z1} = d_{41}m_{21} - \frac{d_{41}L_{1C}m_{21}}{d_{41}} + m_{11}z_{G11}$$

$$C_{z2} = -m_{11}x_{G11}$$

$$C_{z3} = d_{42}m_{22} - \frac{d_{42}L_{2C}m_{22}}{d_{72}} + m_{12}z_{G12}$$

$$C_{z4} = -m_{12}x_{G12}$$

$$C_{z5} = d_{43}m_{23} - \frac{d_{43}L_{3C}m_{23}}{d_{73}} + m_{13}z_{G13}$$

$$C_{z6} = -m_{13}x_{G13}$$

$$C_{z7} = d_{44}m_{24} - \frac{d_{44}L_{4C}m_{24}}{d_{74}} + m_{14}z_{G14}$$

$$C_{z8} = -m_{14}x_{G14}$$

$$C_{z9} = d_{45}m_{25} - \frac{d_{45}L_{5C}m_{25}}{d_{75}} + m_{15}z_{G15}$$

$$C_{z10} = -m_{15}x_{G15}$$

$$C_{z11} = d_{3P}m_{2P} - \frac{d_{3P}L_{6C}m_{2P}}{d_{6P}} + m_{1P}z_{G1P}$$

$$C_{z12} = -m_{1P}y_{G1P}$$

$$C_{z13} = \frac{L_{1C}m_{21}}{d_{71}} + \frac{L_{2C}m_{22}}{d_{72}} + \frac{L_{3C}m_{23}}{d_{73}} + \frac{L_{4C}m_{24}}{d_{74}} + \frac{L_{5C}m_{25}}{d_{75}} + \frac{L_{6C}m_{2P}}{d_{6P}} + m_P$$

$$\begin{aligned} C_{z14} = & m_P x_{GM} + \frac{d_{111}L_{1C}m_{21}\text{Cos}(\delta_{p1})}{d_{71}} + \frac{d_{112}L_{2C}m_{22}\text{Cos}(\delta_{p2})}{d_{72}} \\ & + \frac{d_{113}L_{3C}m_{23}\text{Cos}(\delta_{p3})}{d_{73}} + \frac{d_{114}L_{4C}m_{24}\text{Cos}(\delta_{p4})}{d_{74}} \\ & + \frac{d_{115}L_{5C}m_{25}\text{Cos}(\delta_{p5})}{d_{75}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{z15} = & m_P y_{GM} + \frac{d_{111}L_{1C}m_{21}\text{Sen}(\delta_{p1})}{d_{71}} + \frac{d_{112}L_{2C}m_{22}\text{Sen}(\delta_{p2})}{d_{72}} \\ & + \frac{d_{113}L_{3C}m_{23}\text{Sen}(\delta_{p3})}{d_{73}} + \frac{d_{114}L_{4C}m_{24}\text{Sen}(\delta_{p4})}{d_{74}} \\ & + \frac{d_{115}L_{5C}m_{25}\text{Sen}(\delta_{p5})}{d_{75}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{z16} = & m_P z_{GM} - \frac{d_{141}L_{1C}m_{21}}{d_{71}} + \frac{d_{142}L_{2C}m_{22}}{d_{72}} + \frac{d_{143}L_{3C}m_{23}}{d_{73}} \\ & + \frac{d_{144}L_{4C}m_{24}}{d_{74}} + \frac{d_{145}L_{5C}m_{25}}{d_{75}} + \frac{d_{9P}L_{6C}m_{2P}}{d_{6P}} \end{aligned}$$

Posteriormente se asignan estas constantes en la siguiente que se obtiene de la componente 3 del vector R_G

$$R_z = M\mathbf{R}_G [3] = C_{z1}t_1 + C_{z2}t_2 + C_{z3}t_3 + C_{z4}t_4 + C_{z5}t_5 + C_{z6}t_6 + C_{z7}t_7 + C_{z8}t_8 \\ + C_{z9}t_9 + C_{z10}t_{10} + C_{z11}t_{11} + C_{z12}t_{12} + C_{z13}t_{13} + C_{z14}t_{14} + C_{z15}t_{15} \quad (4.2)$$

Esta es una expresión simplificada de la tercer componente del vector del centro de masa, el cual al estar balanceado su resultado debe ser cero; de ahí se puede establecer que

$$\begin{aligned} C_{z1} &= 0 & C_{z9} &= 0 \\ C_{z2} &= 0 & C_{z10} &= 0 \\ C_{z3} &= 0 & C_{z11} &= 0 \\ C_{z4} &= 0 & C_{z12} &= 0 \\ C_{z5} &= 0 & C_{z13} &= 0 \\ C_{z6} &= 0 & C_{z14} &= 0 \\ C_{z7} &= 0 & C_{z15} &= 0 \\ C_{z8} &= 0 & C_{z16} &= 0 \end{aligned}$$

Tomando en cuenta los datos del dibujo de la plataforma utilizado a lo largo del trabajo, obtenemos las coordenadas de los centros de masa de cada uno de los cuerpos cuya información se enlista a continuación:

$$\begin{aligned} z_{G11} &= -0,5 \text{ m} & x_{G11} &= 0 \text{ m} \\ z_{G12} &= -0,5 \text{ m} & x_{G12} &= 0 \text{ m} \\ z_{G13} &= -0,5 \text{ m} & x_{G13} &= 0 \text{ m} \\ z_{G14} &= -0,5 \text{ m} & x_{G14} &= 0 \text{ m} \\ z_{G15} &= -0,5 \text{ m} & x_{G15} &= 0 \text{ m} \\ z_{G1P} &= -1,05 \text{ m} & y_{G1P} &= 0 \text{ m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{GM} &= 0 \text{ m} \\ y_{GM} &= -0,0075 \text{ m} \\ z_{GM} &= -0,05 \text{ m} \\ L_{6C} &= -0,625 \text{ m} \end{aligned}$$

Ya definida esta expresión para los centros de masa ahora se deben de elaborar las expresiones para introducir la energía producida por los resortes y que

deberán de permitir obtener una expresión para el equilibrio energético en donde se encuentren tanto los centros de masa como las expresiones para la energía elástica de los resortes. Estas expresiones son para cada uno de los eslabones que tendrán articulados un resorte en la parte inferior por medio de una extensión adicional a cada una de los eslabones involucrados. Las expresiones de energía potencial de los resortes son las siguientes

$$\begin{aligned} V_{s1} &= \frac{1}{2}k_1e_1^2 & V_{s4} &= \frac{1}{2}k_4e_4^2 \\ V_{s2} &= \frac{1}{2}k_2e_2^2 & V_{s5} &= \frac{1}{2}k_5e_5^2 \\ V_{s3} &= \frac{1}{2}k_3e_3^2 & V_{sP} &= \frac{1}{2}k_p e_P^2 \end{aligned}$$

La suma de todas estas es:

$$V_{ST} = V_{s1} + V_{s2} + V_{s3} + V_{s4} + V_{s5} + V_{sP}$$

Por otro lado la energía potencial perteneciente a cada uno de los elementos móviles se representa por:

$$V_W = g \cdot R_{Gz}$$

Con estas dos energías se obtiene el total de energía con la que se establece la condición de el equilibrio energético, la expresión de la energía total es:

$$V_{TOT} = V_{ST} + V_W$$

$$\begin{aligned} V_{TOT} &= \frac{1}{2} (h_1^2 k_1 + h_2^2 k_2 + h_3^2 k_3 + h_4^2 k_4 + h_5^2 k_5 + h_P^2 k_P + k_1 s_1^2 + k_2 s_2^2) + \\ &+ \frac{1}{2} (k_3 s_3^2 + k_4 s_4^2 + k_5 s_5^2 + k_P s_P^2) (C_{Z1} g - h_1 k_1 s_1) t_1 + C_{Z2} g t_2 + \\ &(C_{Z3} g - h_2 k_2 s_2) t_3 + C_{Z4} g t_4 + (C_{Z5} g - h_3 k_3 s_3) t_5 + C_{Z6} g t_6 \\ &+ (C_{Z7} g - h_4 k_4 s_4) t_7 + C_{Z8} g t_8 + (C_{Z9} g - h_5 k_5 s_5) t_9 + C_{Z10} g t_{10} \\ &+ (C_{Z11} g - h_P k_P s_P) t_{11} + C_{Z12} g t_{12} + C_{Z13} g t_{13} + C_{Z14} g t_{14} + C_{Z15} g t_{15} \end{aligned}$$

Como se ve, en esta expresión existen términos que afectan los parámetros que dependen del tiempo (t_i), también existen términos que son independientes de cualquier variación del mismo. Lo que sigue es armar un sistema de ecuaciones solamente con los los factores que afectan a los parámetros dependientes del tiempo para establecer las condiciones de equilibrio.

$$\begin{array}{ll}
C_{z1}g - h_1k_1s_1 = 0 & C_{z9}g - h_5k_5s_5 = 0 \\
C_{z2}g = 0 & C_{z10}g = 0 \\
C_{z3}g - h_2k_2s_2 = 0 & C_{z11}g - h_pk_ps_p = 0 \\
C_{z4}g = 0 & C_{z12}g = 0 \\
C_{z5}g - h_3k_3s_3 = 0 & C_{z13}g = 0 \\
C_{z6}g = 0 & C_{z14}g = 0 \\
C_{z7}g - h_4k_4s_4 = 0 & C_{z15}g = 0 \\
C_{z8}g = 0 & C_{z16}g = 0
\end{array}$$

De la tabla anterior se observa que existen 6 componentes que involucran las constantes de los resortes, utilizando los valores correspondientes en las dimensiones de cada uno de los eslabones y masas de la plataforma, se obtienen los siguientes valores en las constantes de los resortes:

$$\begin{array}{l}
k_1 = 1203,57 \text{ N/m} \\
k_2 = 1203,57 \text{ N/m} \\
k_3 = 1203,57 \text{ N/m} \\
k_4 = 1203,57 \text{ N/m} \\
k_5 = 1203,57 \text{ N/m} \\
k_P = 938,5 \text{ N/m}
\end{array}$$

Capítulo 5

Análisis Estático

5.1. Análisis Estático Empleando Torsores

Se tiene el análisis de cuerpo libre siguiente:

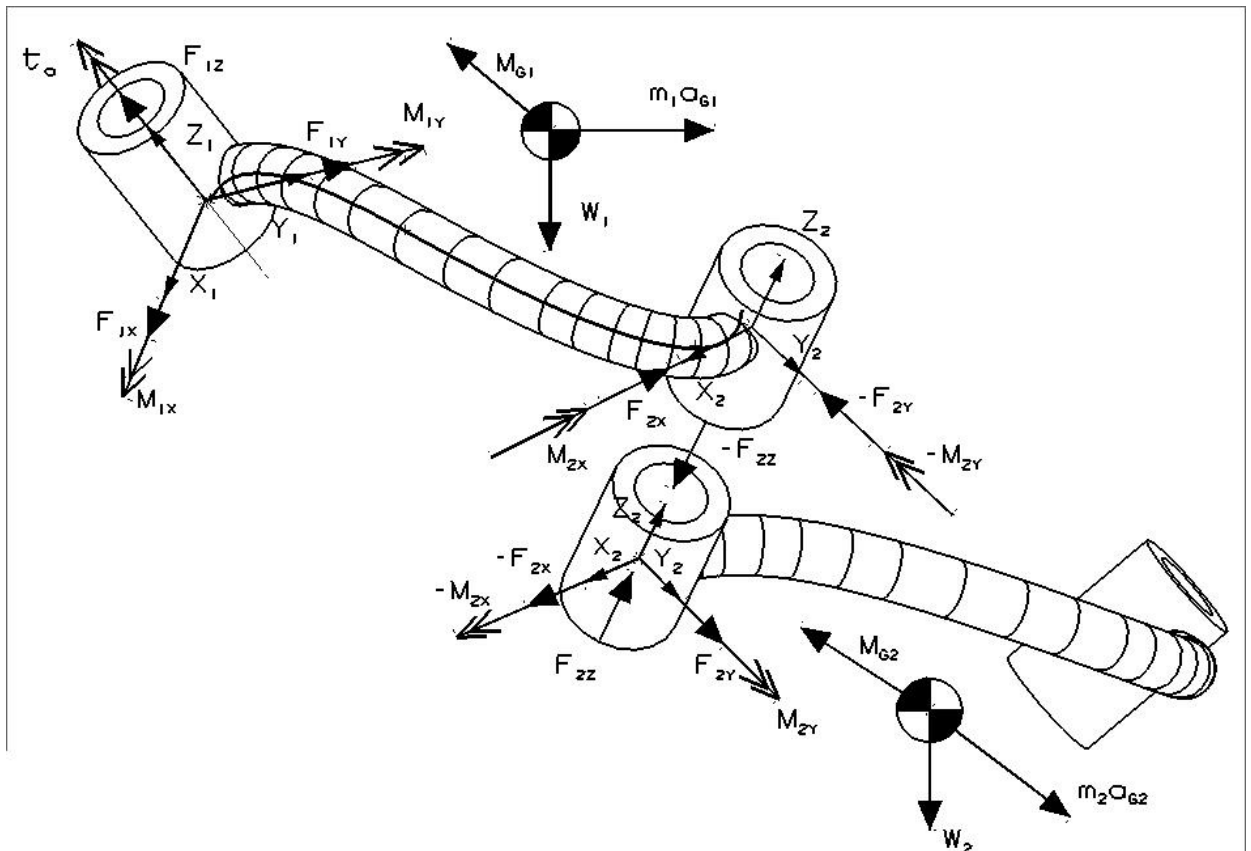


Fig 54.- Analisis de Cuerpo Rigido

Este análisis hace uso de la primera ley de Newton donde se establece el principio de la acción y la reacción. Por medio de este se contabilizan todas las fuerzas generadas en las juntas cinemáticas del mecanismo paralelo.

Las condiciones de equilibrio se plantearán en la base local de cada uno de los cuerpos por lo que será necesario expresar adecuadamente cada una de las fuerzas y momentos de reacción aplicados

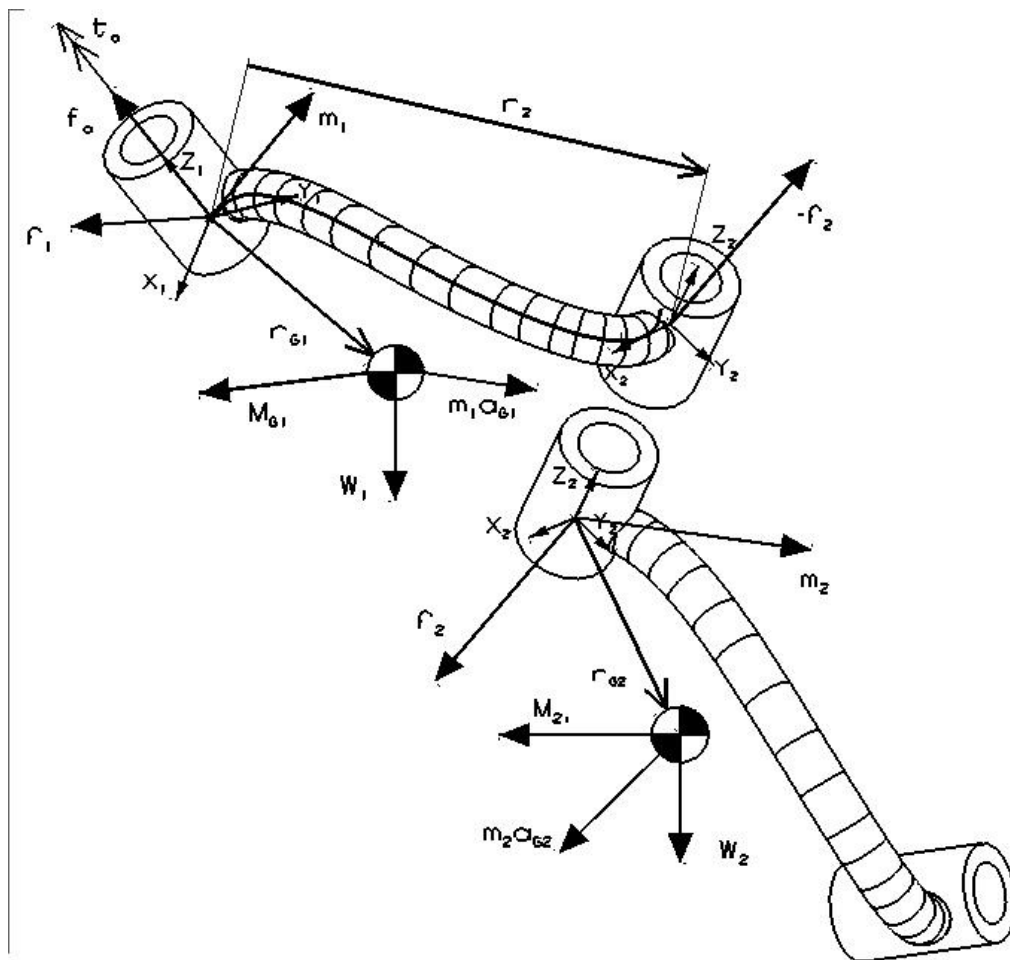


Fig 55.- Aplicacion de torses en el cuerpo rigido

Las ecuaciones de equilibrio dinámico se definen como:

$$\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a}_G$$

$$\sum \mathbf{M} = \mathbf{M}_G + \mathbf{r} \otimes m\mathbf{a}_G$$

Donde $m\mathbf{a}_G$ y \mathbf{M}_G son las fuerzas y momentos inerciales respectivamente. Aplicando las ecuaciones de equilibrio dinámico al cuerpo 1 y definiéndolas en la base local (x_1, y_1, z_1) , se tiene que [Fig 54]:

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_a + \mathbf{f}_1 + \mathbf{R}_{1,2}(-\mathbf{f}_2) + \mathbf{R}_{1,0}\mathbf{W}_1 &= \mathbf{R}_{1,0}(m_1\mathbf{a}_G) \\ \mathbf{t}_a + \mathbf{m}_1 + \mathbf{R}_{1,2}(-\mathbf{m}_2) + \mathbf{r}_2 \otimes \mathbf{R}_{1,2}(-\mathbf{f}_2) + \mathbf{r}_{G1} \otimes \mathbf{R}_{1,0}\mathbf{w}_1 &= \mathbf{R}_{1,0}\mathbf{M}_{G1} + \mathbf{r}_{G1} \otimes \mathbf{R}_{1,0}(m\mathbf{a}_G)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_a &= [0, 0, f_a]^T \\ \mathbf{f}_1 &= [f_{1x}, f_{1y}, 0]^T \\ \mathbf{f}_2 &= [f_{2x}, f_{2y}, f_{2z}]^T \\ \mathbf{W}_a &= [0, 0, -m_{1G}]^T \\ \mathbf{t}_a &= [0, 0, t_a]^T \\ \mathbf{m}_1 &= [M_{1x}, M_{1y}, 0]^T \\ \mathbf{m}_2 &= [M_{2x}, M_{2y}, 0]^T \\ \mathbf{M}_{G1} &= [M_{G1x}, M_{G1y}, M_{G1z}]^T\end{aligned}$$

Los vectores $\mathbf{f}_a, \mathbf{f}_1, \mathbf{t}_a$ y \mathbf{m}_1 están definidos en la base (x_1, y_1, z_1) . Los vectores $\mathbf{f}_2, \mathbf{m}_2$ están definidos en la base (x_2, y_2, z_2) . Los vectores $\mathbf{W}_1, \mathbf{a}_{G1}, \mathbf{M}_{G1}$, están definidos en la base (x_0, y_0, z_0) . $\mathbf{R}_{1,0}$ y $\mathbf{R}_{1,2}$ son matrices que transforman a los vectores de la base (x_0, y_0, z_0) a la base (x_1, y_1, z_1) y de la base (x_2, y_2, z_2) a la base (x_1, y_1, z_1) respectivamente. Los vectores que no son transformados, ya están definidos en la base (x_1, y_1, z_1) . Empleando matrices antisimétricas para definir el producto cruz, esto es, $\mathbf{S} = \mathbf{r} \otimes$, las ecuaciones anteriores se reescriben como:

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_a + \mathbf{f}_1 + \mathbf{R}_{1,2}(-\mathbf{f}_2) + \mathbf{R}_{1,0}\mathbf{w}_1 &= \mathbf{R}_{1,0}(m_1\mathbf{a}_G) \\ \mathbf{t}_a + \mathbf{m}_1 + \mathbf{R}_{1,2}(-\mathbf{m}_2) + \mathbf{S}_2\mathbf{R}_{1,2}(-\mathbf{f}_2) + \mathbf{S}_{G1}\mathbf{R}_{1,0}\mathbf{w}_1 &= \mathbf{R}_{1,0}\mathbf{M}_{G1} + \mathbf{S}_{G1}\mathbf{R}_{1,0}(m_1\mathbf{a}_G)\end{aligned}$$

Matricialmente

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} \mathbf{f}_a \\ \mathbf{t}_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{m}_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{1,2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_2\mathbf{R}_{1,2} & \mathbf{R}_{1,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_2 \\ \mathbf{m}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{1,0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_{G1}\mathbf{R}_{1,0} & \mathbf{R}_{1,0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{W}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \\
= & \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{1,0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_{G1}\mathbf{R}_{1,0} & \mathbf{R}_{1,0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1\mathbf{a}_G \\ \mathbf{M}_{G1} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Renombrando

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_a + \mathbf{F}_1 - \mathbf{Q}_{1,2}\mathbf{F}_2 + \mathbf{Q}_{1,0}\mathbf{W}_1 &= \mathbf{Q}_{1,0}\mathbf{F}_G \\
\mathbf{F}^A + \mathbf{F}^R + \mathbf{F}^I &= \mathbf{0}
\end{aligned} \tag{5.1}$$

La ecuación anterior representa las ecuaciones de equilibrio dinámico mediante el uso de torsores de fuerzas y momentos. Un torsor es un vector de 6 componentes, las primeras 3 son fuerzas asociadas a la traslación del cuerpo y los segundas 3 componentes son torques o momentos asociados al giro del cuerpo. Una expresión similar se hace para el cuerpo 2.

Donde:

\mathbf{F}^A = Torsor de fuerzas y momentos aplicados al cuerpo

\mathbf{F}^R = Torsor de fuerzas y momentos de reacción del cuerpo

\mathbf{F}^I = Torsor de fuerzas y momentos inerciales

\mathbf{Q}^A = Matriz de transformación de torsores

A partir de la Figura 55 se tiene que:

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_a &= [\mathbf{f}_a, \mathbf{t}_a]^T = [0, 0, f_a, 0, 0, t_a]^T \\
\mathbf{F}_1 &= [\mathbf{f}_1, \mathbf{m}_1]^T = [f_{1x}, f_{1y}, 0, m_{1x}, m_{1y}, 0]^T \\
\mathbf{F}_2 &= [\mathbf{f}_2, \mathbf{m}_2]^T = [f_{2x}, f_{2y}, f_{2z}, m_{2x}, m_{2y}, 0]^T \\
\mathbf{W}_1 &= [\mathbf{w}_1, 0]^T = [0, 0, -m_1g, 0, 0, 0]^T \\
\mathbf{F}_G &= [m_1\mathbf{a}_{G1}, \mathbf{M}_{G1}]^T = [m_1a_{G1x}, m_1a_{G1y}, m_1a_{G1z}, M_{G1x}, M_{G1y}, M_{G1z}]^T \\
\mathbf{Q}_{1,0} &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{1,0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_{G1}\mathbf{R}_{1,0} & \mathbf{R}_{1,0} \end{bmatrix} \\
\mathbf{Q}_{1,2} &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{1,2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_2\mathbf{R}_{1,2} & \mathbf{R}_{1,2} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

5.2. Análisis Estático de la Plataforma

La ecuación 11 se generaliza para todos los cuerpos de cada cadena de la plataforma mediante la siguiente nomenclatura

$$\mathbf{F}_{ij}^A + \mathbf{F}_{ij}^R + \mathbf{F}_{ij}^I = \mathbf{0}$$

donde

i – Base donde se expresan las fuerzas y momentos j – Número del cuerpo

También se definen las siguientes matrices de rotación con eje de giro x , y , z respectivamente

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{z4}(\theta_x) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_x & -\sin \theta_x \\ 0 & \sin \theta_x & \cos \theta_x \end{bmatrix} \\ \mathbf{R}_{z5}(\theta_y) &= \begin{bmatrix} \cos \theta_y & 0 & -\sin \theta_y \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta_y & 0 & \cos \theta_y \end{bmatrix} \\ \mathbf{R}_{z6}(\theta_z) &= \begin{bmatrix} \cos \theta_z & -\sin \theta_z & 0 \\ \sin \theta_z & \cos \theta_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Las matrices antisimétricas se definen a continuación

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{z1}(x) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x \\ 0 & x & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{S}_{z2}(y) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \\ -y & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{S}_{z3}(y) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \\ -y & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

5.2.1. Cuerpo 1i

Del diagrama de cuerpo libre [Fig 48] Para este caso las fuerzas serán referenciadas en la base 3i de la cadena motriz

$$\mathbf{F}_{3i,1i}^A + \mathbf{F}_{3i,1i}^R + \mathbf{F}_{3i,1i}^I = \mathbf{0} \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{3i,1i}^A &= \mathbf{F}_{ent} + \mathbf{Q}_{3i,0} \mathbf{W}_{1i} + \mathbf{Q}_{3i,0} \mathbf{F}_{R1i} \\ \mathbf{F}_{3i,1i}^R &= \mathbf{F}_{1i} - \mathbf{Q}_{3i,5i} \mathbf{F}_{2i} \\ \mathbf{F}_{3i,1i}^I &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

Donde

\mathbf{F}_{ent} .- Torsor de torque aplicado al cuerpo 1i, definido en la base 3i

\mathbf{W}_{1i} .- Torsor de peso del cuerpo 1i, definido en la base 0

\mathbf{F}_{R1i} .- Torsor de fuerza del resorte aplicado al cuerpo 1i, definido en la base 0

\mathbf{F}_{1i} .- Torsor de fuerza de reacción aplicado al cuerpo 1i por la base fija

\mathbf{F}_{2i} .- Torsor de fuerza de reacción aplicado al cuerpo 2i por el cuerpo 1i, definido en la base 5i

$\mathbf{Q}_{3i,0}$.- Matriz que transforma torsores de la base 0 a la base 3i

$\mathbf{Q}_{3i,5i}$.- Matriz que transforma torsores de la base 5i a la base 3i

Además:

De manera explícita estas fuerzas se representan de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{ent} &= \begin{bmatrix} 0, & 0, & 0, & 0, & T_{1i}, & 0 \end{bmatrix}^T \\ \mathbf{W}_{1i} &= \begin{bmatrix} 0, & 0, & -m_{1i}g, & 0, & 0, & 0 \end{bmatrix}^T \\ \mathbf{F}_{R1i} &= \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{R1i}, & 0, & 0, & 0 \end{bmatrix}^T \\ \mathbf{F}_{1i} &= \begin{bmatrix} f_{1ix}, & f_{1iy}, & f_{1iz}, & M_{1ix}, & 0, & M_{1iz} \end{bmatrix}^T \\ \mathbf{F}_{2i} &= \begin{bmatrix} f_{2ix}, & f_{2iy}, & f_{2iz}, & M_{2ix}, & 0, & 0 \end{bmatrix}^T \end{aligned}$$

Las fuerzas generadas por los resortes se describen a continuación [Fig 56]

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{Ri} &= \left(\mathbf{f}_{Ri}, 0, 0, 0 \right)^T & \mathbf{f}_{Ri} &= (k_i e_i) \mathbf{u}_i \\ \mathbf{u}_i &= \frac{1}{\|\mathbf{R}_{Ai} - \mathbf{R}_{Bi}\|} (\mathbf{R}_{Ai} - \mathbf{R}_{Bi}) \\ \mathbf{R}_{Ai} &= \mathbf{T}_{02i} \mathbf{r}_{Ai} & \mathbf{r}_{Ai} &= \left(0, 0, -h_i, 1 \right)^T \\ \mathbf{R}_{Bi} &= \mathbf{T}_{02i} \mathbf{T}_{z5}(\theta_{3i}) \mathbf{r}_{Bi} & \mathbf{r}_{Bi} &= \left(0, 0, -s_i, 1 \right)^T \\ e_i &= \sqrt{h_i^2 + s_i^2 - 2 h_i s_i \cos(\theta_{3i})} \end{aligned}$$

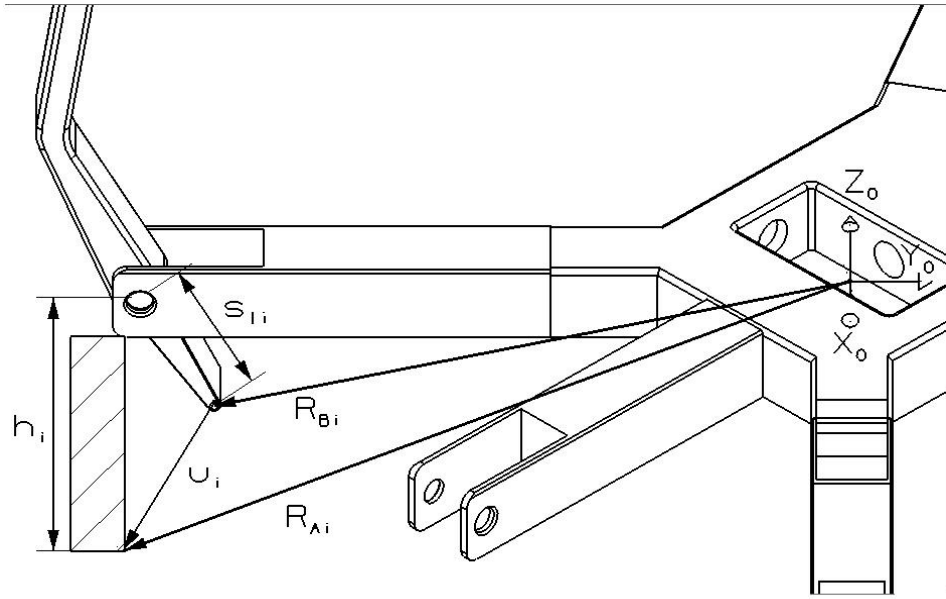


Fig 56.- Descripción geométrica para las fuerzas de los resortes

Las matrices de transformación de torsores se definen como:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{3i,0} &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{3i,0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_{3i,0} \mathbf{R}_{3i,0} & \mathbf{R}_{3i,0} \end{bmatrix} \\ \mathbf{R}_{3i,0} &= (\mathbf{R}_{0,3i})^T = \mathbf{R}_{z5}(-\theta_{3i}) \mathbf{R}_{z6}(-\delta_{1i}) \\ \mathbf{r}_{G1i} &= \left(x_{G1i}, y_{G1i}, z_{G1i} \right)^T \\ \mathbf{S}_{30i} &= \begin{bmatrix} 0 & -z_{G1i} & y_{G1i} \\ z_{G1i} & 0 & -x_{G1i} \\ -y_{G1i} & x_{G1i} & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Donde \mathbf{r}_{G1i} es el vector del centro de gravedad del cuerpo 1i definido en la base local 3i. La matriz $\mathbf{S}_{3i,0}$ es la matriz antisimétrica formada con las componentes de \mathbf{r}_{G1i} . La matriz está definida en la base local 3i. De manera similar:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{35i} &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{35i} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_{35i}\mathbf{R}_{35i} & \mathbf{R}_{35i} \end{bmatrix} \\ \mathbf{R}_{35i} &= \mathbf{R}_{z6}(\theta_{5i}) \\ \mathbf{r}_{d4i} &= \left(0, 0, d_{4i} \right)^T \\ \mathbf{S}_{3i,5i} &= \begin{bmatrix} 0 & -d_{4i} & 0 \\ d_{4i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{S}_{z3}(d_{4i}) \end{aligned}$$

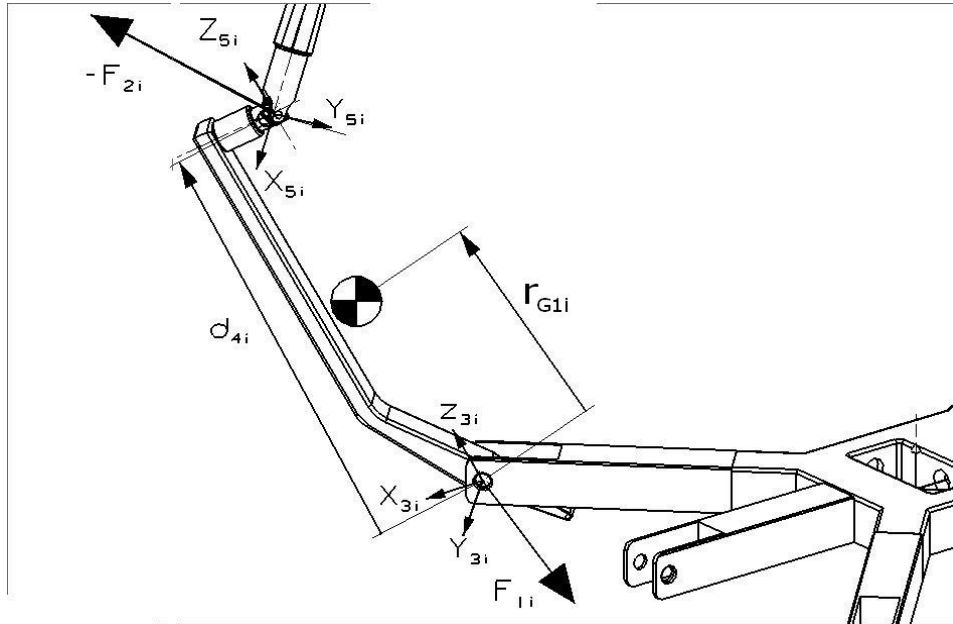


Fig 57.- Fuerzas de reacción en el cuerpo 1i (cadena motriz)

5.2.2. Cuerpo 2i

Del diagrama de cuerpo libre [Fig 58] para este caso las fuerzas serán referenciadas en la base 5i de la cadena motriz

$$\mathbf{F}_{5i,2i}^A + \mathbf{F}_{5i,2i}^R + \mathbf{F}_{5i,2i}^I = \mathbf{0} \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{5i,2i}^A &= \mathbf{Q}_{5i,0} \mathbf{W}_{2i} \\ \mathbf{F}_{5i,2i}^R &= \mathbf{F}_{2i} - \mathbf{Q}_{5i,8i} \mathbf{F}_{3i}, \\ \mathbf{F}_{5i,2i}^I &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

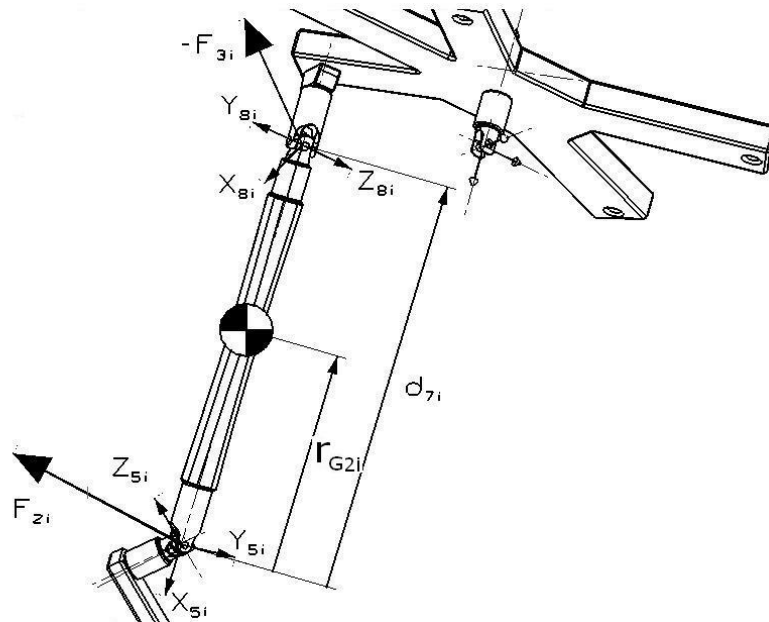


Fig 58.- Fuerzas aplicadas en el segundo eslabon de la cadena motriz

Donde

\mathbf{W}_{2i} .- Torsor de peso del cuerpo 2i, definido en la base 0

\mathbf{F}_{2i} .- Torsor de fuerza de reacción aplicado al cuerpo 2i por la base 3i

\mathbf{F}_{3i} .- Torsor de fuerza de reacción aplicado al cuerpo 2i por el cuerpo 3i, definido en la base 8i

$\mathbf{Q}_{5i,0}$.- Matriz que transforma torsores de la base 0 a la base 5i

$\mathbf{Q}_{5i,8i}$.- Matriz que transforma torsores de la base 8i a la base 5i

Además:

De manera explícita estas fuerzas se representan de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_{2i} &= \begin{bmatrix} 0, & 0, & -m_{2i}g, & 0, & 0, & 0 \end{bmatrix}^T \\ \mathbf{F}_{3i} &= \begin{bmatrix} f_{3ix}, & f_{3iy}, & f_{3iz}, & M_{3ix}, & 0, & 0 \end{bmatrix}^T \end{aligned}$$

Las matrices de transformación de torsores se definen como:

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}_{5i,0} &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{5i,0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_{5i,0}\mathbf{R}_{5i,0} & \mathbf{R}_{5i,0} \end{bmatrix} \\
\mathbf{R}_{5i,0} &= (\mathbf{R}_{0,5i})^T = \mathbf{R}_{z6}(-\theta_{5i})\mathbf{R}_{z5}(-\theta_{3i})\mathbf{R}_{z6}(-\delta_{1i}) \\
\mathbf{r}_{G2i} &= \begin{pmatrix} x_{G2i}, & y_{G2i}, & z_{G2i} \end{pmatrix}^T \\
\mathbf{S}_{5i,0} &= \begin{bmatrix} 0 & -z_{G2i} & y_{G2i} \\ z_{G2i} & 0 & -x_{G2i} \\ -y_{G2i} & x_{G2i} & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Donde \mathbf{r}_{G2i} es el vector del centro de gravedad del cuerpo 2i definido en la base local 5i. La matriz $\mathbf{S}_{3i,0}$ es la matriz antisimétrica formada con las componentes de \mathbf{r}_{G2i} . La matriz está definida en la base local 5i. De manera similar:

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}_{5i,8i} &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{5i,8i} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_{5i,8i}\mathbf{R}_{5i,8i} & \mathbf{R}_{5i,8i} \end{bmatrix} \\
\mathbf{R}_{5i,8i} &= \mathbf{R}_{z5}(\theta_{6i})\mathbf{R}_{z5}(\theta_{8i}) \\
\mathbf{r}_{d7i} &= \begin{pmatrix} 0, & 0, & d_{7i} \end{pmatrix}^T \\
\mathbf{S}_{5i,8i} &= \mathbf{R}_{z5}(\theta_{6i})\mathbf{S}_{z1}(-d_{7i})\mathbf{R}_{z5}(-\theta_{6i}) \\
\mathbf{S}_{z1}(-d_{7i}) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_{7i} \\ 0 & -d_{7i} & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

5.2.3. Cuerpo 3i

Del diagrama de cuerpo libre [Fig 59] las fuerzas serán referenciadas en la base 8i de la cadena motriz

$$\mathbf{F}_{8i,3i}^A + \mathbf{F}_{8i,3i}^R + \mathbf{F}_{8i,3i}^I = \mathbf{0} \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_{8i,3i}^A &= \mathbf{Q}_{8i,0}\mathbf{W}_{3i} \\
\mathbf{F}_{8i,3i}^R &= \mathbf{F}_{3i} - \mathbf{Q}_{8i,12i}\mathbf{F}_{4i}, \\
\mathbf{F}_{8i,3i}^I &= \mathbf{0}
\end{aligned}$$

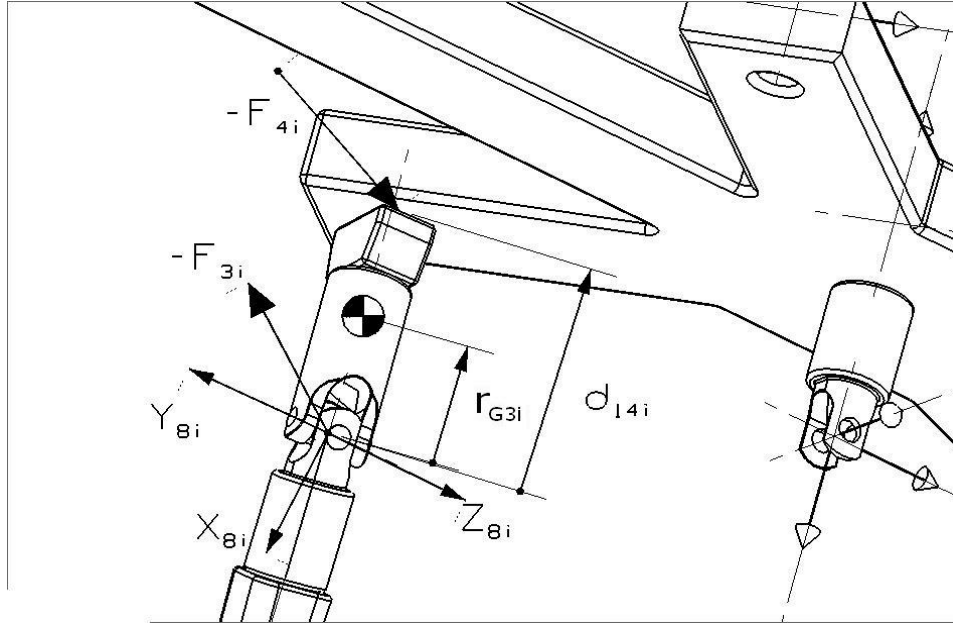


Fig 59.- Cuerpo 3i de la cadena motriz

Donde

\mathbf{W}_{3i} .- Torsor de peso del cuerpo 3i, definido en la base 0

\mathbf{F}_{3i} .- Torsor de fuerza de reacción aplicado al cuerpo 3i definido en la base 8i

\mathbf{F}_{4i} .- Torsor de fuerza de reacción aplicado al cuerpo 3i por el cuerpo 4i (plataforma móvil), definido en la base 8i

$\mathbf{Q}_{8i,0}$.- Matriz que transforma torsores de la base 0 a la base 8i

$\mathbf{Q}_{8i,12i}$.- Matriz que transforma torsores de la base 12i a la base 8i

Además:

De manera explícita estas fuerzas se representan de la siguiente forma:

$$\mathbf{W}_{3i} = \begin{bmatrix} 0, & 0, & -m_{3i}g, & 0, & 0, & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{F}_{4i} = \begin{bmatrix} f_{4ix}, & f_{4iy}, & f_{4iz}, & 0, & M_{4iy}, & M_{4iz} \end{bmatrix}^T$$

Las matrices de transformación de torsores se definen como:

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}_{8i,0} &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{8i,0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_{8i,0}\mathbf{R}_{8i,0} & \mathbf{R}_{8i,0} \end{bmatrix} \\
\mathbf{R}_{8i,0} &= (\mathbf{R}_{0,8i})^T = \mathbf{R}_{z5}(-\theta_{8i})\mathbf{R}_{z6}(-\theta_{6i})\mathbf{R}_{z6}(-\theta_{5i})\mathbf{R}_{z5}(-\theta_{3i})\mathbf{R}_{z6}(-\delta_{1i}) \\
\mathbf{r}_{G3i} &= \begin{pmatrix} x_{G3i} & y_{G3i} & z_{G3i} \end{pmatrix}^T \\
\mathbf{S}_{8i,0} &= \begin{bmatrix} 0 & -z_{G3i} & y_{G3i} \\ z_{G3i} & 0 & -x_{G3i} \\ -y_{G3i} & x_{G3i} & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Donde \mathbf{r}_{G3i} es el vector del centro de gravedad del cuerpo 3i definido en la base local 8i. La matriz $\mathbf{S}_{5i,0}$ es la matriz antisimétrica formada con las componentes de \mathbf{r}_{G3i} . La matriz está definida en la base local 8i. De manera similar:

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}_{8i,12i} &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{8i,12i} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_{8i,12i}\mathbf{R}_{8i,12i} & \mathbf{R}_{8i,12i} \end{bmatrix} \\
\mathbf{R}_{8i,12i} &= \mathbf{R}_{z6}(\theta_{9i})\mathbf{R}_{z4}(-\theta_{13i}) \\
\mathbf{r}_{d14i} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & d_{14i} \end{pmatrix}^T \\
\mathbf{S}_{8i,12i} &= \mathbf{R}_{z6}(\theta_{9i})\mathbf{S}_{z1}(-d_{14i})\mathbf{R}_{z6}(-\theta_{9i}) \\
\mathbf{S}_{z1}(-d_{14i}) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_{14i} \\ 0 & -d_{14i} & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

5.2.4. Cuerpo 1p

Del diagrama de cuerpo libre [Fig 60] Para este caso las fuerzas serán referenciadas en la base 3i de la cadena motriz

$$\mathbf{F}_{2p,1p}^A + \mathbf{F}_{2p,1p}^R + \mathbf{F}_{2p,1p}^I = \mathbf{0} \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_{2p,1p}^A &= \mathbf{Q}_{2p,0}\mathbf{W}_{1p} + \mathbf{Q}_{2p,0}\mathbf{F}_{R1p} \\
\mathbf{F}_{2p,1p}^R &= \mathbf{F}_{1p} - \mathbf{Q}_{2p,4p}\mathbf{F}_{2p} \\
\mathbf{F}_{2p,1p}^I &= \mathbf{0}
\end{aligned}$$

Donde

\mathbf{W}_{1p} .- Torsor de peso del cuerpo 1i, definido en la base 0

\mathbf{F}_{R1p} .- Torsor de fuerza del resorte aplicado al cuerpo 1p, definido en la base 0

\mathbf{F}_{1p} .- Torsor de fuerza de reacción aplicado al cuerpo 1p por la base fija

\mathbf{F}_{2p} .- Torsor de fuerza de reacción aplicado al cuerpo 2p por el cuerpo 1p, definido en la base 4p

$\mathbf{Q}_{2p,0}$.- Matriz que transforma torsores de la base 0 a la base 2p

$\mathbf{Q}_{2p,4p}$.- Matriz que transforma torsores de la base 4p a la base 2p

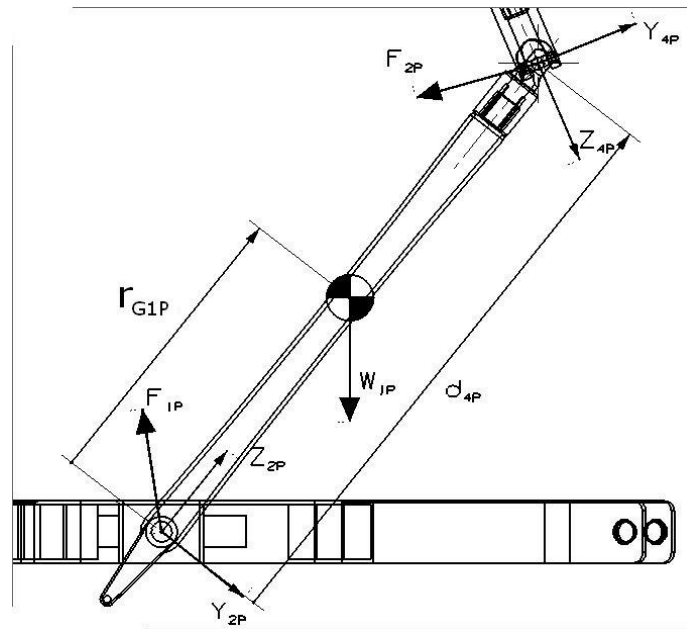


Fig 60.- Descripción de reacciones cuerpo 1p

Además:

De manera explícita estas fuerzas se representan de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\mathbf{W}_{1p} &= \begin{bmatrix} 0, & 0, & -m_{1p}g, & 0, & 0, & 0 \end{bmatrix}^T \\ \mathbf{F}_{R1i} &= \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{R1p}, & 0, & 0, & 0 \end{bmatrix}^T \\ \mathbf{F}_{1p} &= \begin{bmatrix} f_{1px}, & f_{1py}, & f_{1pz}, & M_{1px}, & 0, & M_{1pz} \end{bmatrix}^T \\ \mathbf{F}_{2p} &= \begin{bmatrix} f_{2px}, & f_{2py}, & f_{2pz}, & M_{2px}, & 0, & 0 \end{bmatrix}^T\end{aligned}$$

Las fuerzas generadas por los resortes se describen a continuación [Fig 60]

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}_{Ri} &= \left(\mathbf{f}_{Ri}, 0, 0, 0 \right)^T & \mathbf{f}_{Rp} &= (k_p e_p) \mathbf{u}_p \\
 \mathbf{u}_p &= \frac{1}{\|\mathbf{R}_{Ap} - \mathbf{R}_{Bp}\|} (\mathbf{R}_{Ap} - \mathbf{R}_{Bp}) \\
 \mathbf{R}_{Ap} &= \mathbf{T}_{02p} \mathbf{r}_{Ap} & \mathbf{r}_{Ap} &= \left(0, 0, -h_p, 1 \right)^T \\
 \mathbf{R}_{Bi} &= \mathbf{T}_{02p} \mathbf{T}_{z5}(\theta_{2p}) \mathbf{r}_{Bp} & \mathbf{r}_{Bp} &= \left(0, 0, -s_p, 1 \right)^T \\
 e_p &= \sqrt{h_p^2 + s_p^2 - 2 h_p s_p \cos(\theta_{2p})}
 \end{aligned}$$

Las matrices de transformación de torsores se definen como:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Q}_{2p,0} &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{2p,0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_{2p,0} \mathbf{R}_{2p,0} & \mathbf{R}_{2p,0} \end{bmatrix} \\
 \mathbf{R}_{2p,0} &= (\mathbf{R}_{0,2p})^T = \mathbf{R}_{z5}(-\theta_{2p}) \mathbf{R}_{z6}(-\delta_{1p}) \\
 \mathbf{r}_{G1p} &= \left(x_{G1p}, y_{G1p}, z_{G1p} \right)^T \\
 \mathbf{S}_{2p,0} &= \begin{bmatrix} 0 & -z_{G1p} & y_{G1p} \\ z_{G1p} & 0 & -x_{G1p} \\ -y_{G1p} & x_{G1p} & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Donde \mathbf{r}_{G1p} es el vector del centro de gravedad del cuerpo 1p definido en la base local 3p. La matriz $\mathbf{S}_{2p,0}$ es la matriz antisimétrica formada con las componentes de \mathbf{r}_{G1p} . La matriz está definida en la base local 2p. De manera similar:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Q}_{2p,4p} &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{2p,4p} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_{2p,4p} \mathbf{R}_{2p,4p} & \mathbf{R}_{2p,4p} \end{bmatrix} \\
 \mathbf{R}_{2p,4p} &= \mathbf{R}_{z4}(-\theta_{4p}) \\
 \mathbf{r}_{d4p} &= \left(0, 0, d_{4p} \right)^T \\
 \mathbf{S}_{2p,4p} &= \mathbf{S}_{z3}(d_{3p}) = \begin{bmatrix} 0 & -d_{3p} & 0 \\ d_{3p} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

5.2.5. Cuerpo 2p

Del diagrama de cuerpo libre [Fig 61] Para este caso las fuerzas serán referenciadas en la base 3i de la cadena motriz

$$\mathbf{F}_{4p,2p}^A + \mathbf{F}_{4p,2p}^R + \mathbf{F}_{4p,2p}^I = \mathbf{0} \quad (5.6)$$

$$\mathbf{F}_{4p,2p}^A = \mathbf{Q}_{4p,0} \mathbf{W}_{2p}$$

$$\mathbf{F}_{4p,2p}^R = \mathbf{F}_{2p} - \mathbf{Q}_{4p,7p} \mathbf{F}_{3p}$$

$$\mathbf{F}_{4p,2p}^I = \mathbf{0}$$

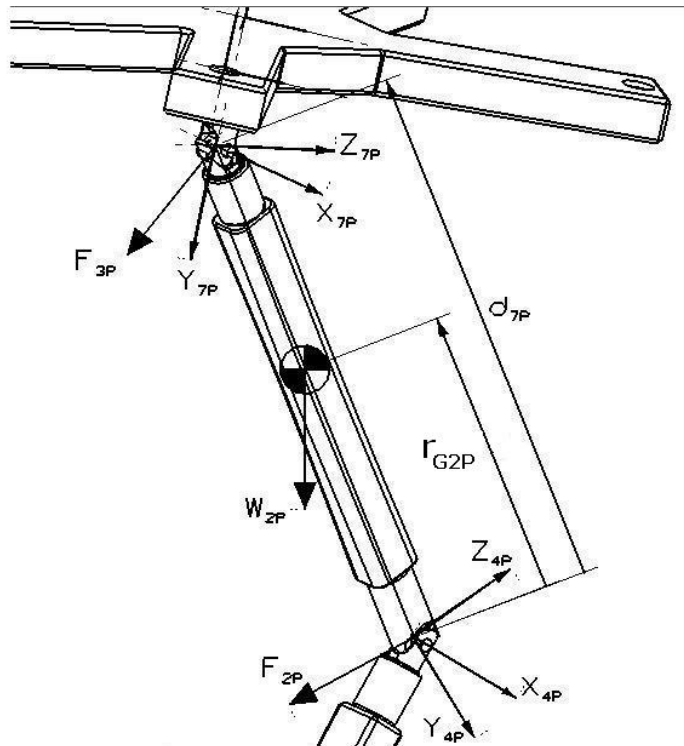


Fig 61-Fuerzas en el 2do eslabon cadena central

Donde

\mathbf{W}_{2p} .- Torsor de peso del cuerpo 2p, definido en la base 0

\mathbf{F}_{2p} .- Torsor de fuerza de reacción aplicado al cuerpo 2p por el cuerpo 1p, definido en la base 4p

\mathbf{F}_{3p} .- Torsor de fuerza de reacción aplicado al cuerpo 2p por la plataforma móvil, definido en la base 7p

$\mathbf{Q}_{4p,0}$.- Matriz que transforma torsores de la base 0 a la base 4p

$\mathbf{Q}_{4p,7p}$.- Matriz que transforma torsores de la base 7p a la base 4p

De manera explícita estas fuerzas se representan de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\mathbf{W}_{2p} &= \begin{bmatrix} 0, & 0, & -m_{2p}g, & 0, & 0, & 0 \end{bmatrix}^T \\ \mathbf{F}_{2p} &= \begin{bmatrix} f_{2px}, & f_{2py}, & f_{2pz}, & M_{2px}, & 0, & 0 \end{bmatrix}^T \\ \mathbf{F}_{3p} &= \begin{bmatrix} f_{3px}, & f_{3py}, & f_{3pz}, & 0, & M_{3py}, & 0 \end{bmatrix}^T\end{aligned}$$

Las matrices de transformación de torsores se definen como:

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}_{4p,0} &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{4p,0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_{4p,0}\mathbf{R}_{4p,0} & \mathbf{R}_{4p,0} \end{bmatrix} \\ \mathbf{R}_{4p,0} &= (\mathbf{R}_{0,4p})^T = \mathbf{R}_{z4}(\theta_{4p})\mathbf{R}_{z4}(-\theta_{2p})\mathbf{R}_{z6}(-\delta_{1p}) \\ \mathbf{r}_{G2p} &= \begin{pmatrix} x_{G2p}, & y_{G2p}, & z_{G2p} \end{pmatrix}^T \\ \mathbf{S}_{2p,0} &= \begin{bmatrix} 0 & -z_{G2p} & y_{G2p} \\ z_{G2p} & 0 & -x_{G2p} \\ -y_{G2p} & x_{G2p} & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Donde \mathbf{r}_{G2p} es el vector del centro de gravedad del cuerpo 2p definido en la base local 4p. La matriz $\mathbf{S}_{2p,0}$ es la matriz antisimétrica formada con las componentes de \mathbf{r}_{G1p} . La matriz está definida en la base local 2p. De manera similar:

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}_{4p,7p} &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{4p,7p} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_{4p,7p}\mathbf{R}_{4p,7p} & \mathbf{R}_{4p,7p} \end{bmatrix} \\ \mathbf{R}_{4p,7p} &= \mathbf{R}_{z6}(-\theta_{5p})\mathbf{R}_{z5}(\theta_{7p}) \\ \mathbf{r}_{d9p} &= \begin{pmatrix} 0, & 0, & -d_{9p} \end{pmatrix}^T \\ \mathbf{S}_{4p,7p} &= \mathbf{R}_{z6}(-\theta_{5p})\mathbf{S}_{z2}(-d_{7p})\mathbf{R}_{z5}(\theta_{5p}) \\ \mathbf{S}_{z2}(d_{3p}) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & d_{3p} \\ 0 & 0 & 0 \\ -d_{3p} & 0 & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

5.2.6. Cuerpo Plato

Del diagrama de cuerpo libre [Fig 62] Para este caso las fuerzas serán referenciadas en la base 3i de la cadena motriz

$$\mathbf{F}_{p,p}^A + \mathbf{F}_{p,p}^R + \mathbf{F}_{p,p}^I = \mathbf{0} \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{p,p}^A &= \mathbf{Q}_{p,0} \mathbf{W}_p \\ \mathbf{F}_{p,p}^R &= \sum_{i=1}^{i=5} \mathbf{Q}_{p,12i} \mathbf{F}_{4i} - \mathbf{Q}_{p,7p} \mathbf{F}_{3p} \\ \mathbf{F}_{p,p}^I &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

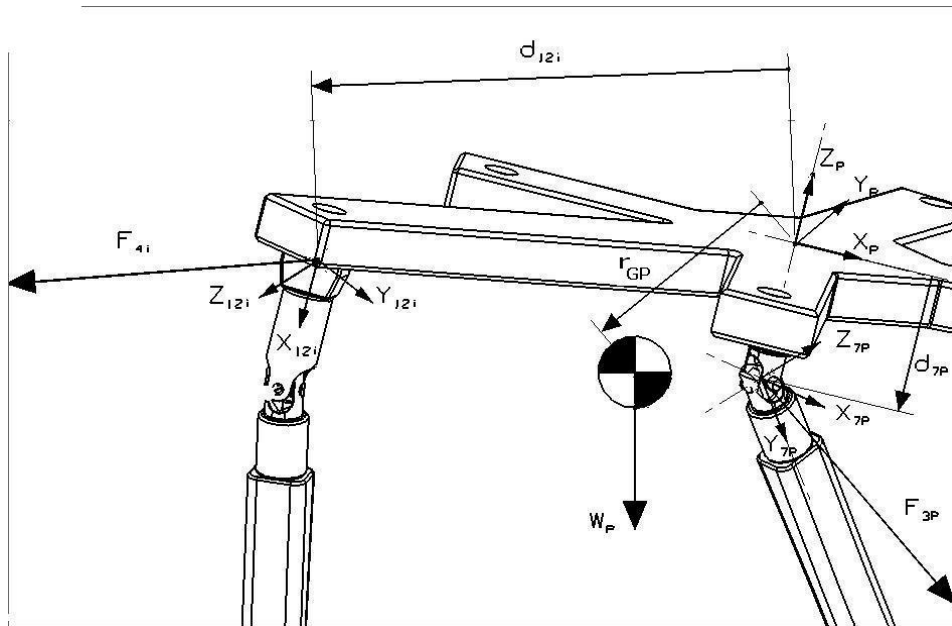


Fig 53.- Fuerzas en la plataforma móvil

Donde

\mathbf{W}_p .- Torsor de peso de la plataforma, definido en la base 0

\mathbf{F}_{4i} .- Torsor de fuerza de reacción aplicado a la plataforma por el cuerpo 2i, definido en la base 12i

\mathbf{F}_{3p} .- Torsor de fuerza de reacción aplicado al cuerpo 2p por la plataforma móvil, definido en la base 7p

$\mathbf{Q}_{p,0}$.- Matriz que transforma torsores de la base 0 a la base p

$\mathbf{Q}_{p,7p}$.- Matriz que transforma torsores de la base 7p a la base p

$\mathbf{Q}_{p,12}$.- Matriz que transforma torsores de la base 12i a la base p

De manera explícita estas fuerzas se representan de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\mathbf{W}_p &= \begin{bmatrix} 0, & 0, & -m_p g, & 0, & 0, & 0 \end{bmatrix}^T \\ \mathbf{F}_{4i} &= \begin{bmatrix} f_{4ix}, & f_{4iy}, & f_{4iz}, & 0, & M_{4iy}, & M_{4iz} \end{bmatrix}^T \\ \mathbf{F}_{3p} &= \begin{bmatrix} f_{3px}, & f_{3py}, & f_{3pz}, & 0, & M_{3py}, & 0 \end{bmatrix}^T\end{aligned}$$

Las matrices de transformación de torsores se definen como:

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}_{p,0} &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{p,0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_{p,0} \mathbf{R}_{p,0} & \mathbf{R}_{p,0} \end{bmatrix} \\ \mathbf{R}_{p,0} &= (\mathbf{R}_{0,p})^T = \mathbf{R}_{z5}(\psi) \mathbf{R}_{z5}(\theta) \\ \mathbf{r}_{Gp} &= \begin{pmatrix} x_{Gp}, & y_{Gp}, & z_{Gp} \end{pmatrix}^T \\ \mathbf{S}_{p,0} &= \begin{bmatrix} 0 & -z_{Gp} & y_{Gp} \\ z_{Gp} & 0 & -x_{Gp} \\ -y_{Gp} & x_{Gp} & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Donde \mathbf{r}_{Gp} es el vector del centro de gravedad de la plataforma definido en la base local p. La matriz $\mathbf{S}_{p,0}$ es la matriz antisimétrica formada con las componentes de \mathbf{r}_{Gp} . La matriz está definida en la base local p. De manera similar:

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}_{p,7p} &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{p,7p} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_{p,7p}\mathbf{R}_{p,7p} & \mathbf{R}_{p,7p} \end{bmatrix} \\
\mathbf{R}_{p,7p} &= \mathbf{R}_{z6}(-\theta_{5p})\mathbf{R}_{z5}(\theta_{7p}) \\
\mathbf{r}_{d9p} &= \begin{pmatrix} 0, & 0, & -d_{9p} \end{pmatrix}^T \\
\mathbf{S}_{p,7p} &= \mathbf{S}_{z2}(d_{9p}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & d_{9p} \\ 0 & 0 & 0 \\ -d_{9p} & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\mathbf{Q}_{p,12i} &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{p,12i} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_{p,12i}\mathbf{R}_{p,12i} & \mathbf{R}_{p,12i} \end{bmatrix} \\
\mathbf{R}_{p,12i} &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{pi})\mathbf{R}_{z5}\left(\frac{\pi}{2}\right) \\
\mathbf{r}_{d12i} &= \begin{pmatrix} d_{12x}, & d_{12iy}, & d_{12iz} \end{pmatrix}^T \\
\mathbf{S}_{p,12i} &= \mathbf{S}_{z2}(d_{12i}) = \begin{bmatrix} 0 & -d_{12iz} & d_{12iy} \\ d_{12iz} & 0 & -d_{12iX} \\ -d_{12iy} & d_{12iX} & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

5.3. Comprobación estática

En esta sección se resuelven las ecuaciones estáticas planteadas en la sección anterior, donde los datos de contrapesos y resortes obtenidos del análisis de balanceo serán tomados en cuenta. Para esto, las ecuaciones se escriben para un iterador $i=1,2,3,4,5$. Dando como resultado que las cadenas cinemáticas actuadas porporcionen 90 ecuaciones estáticas . Lo anterior debido a que se cuenta con 5 cadenas cinemáticas motrices, cada una de ellas consta de 3 cuerpos, esto da un total de 15 cuerpos en movimiento, para los que se escriben 6 ecuaciones estáticas-especiales (3 de suma de fuerzas y 3 de suma de momentos), dando en total 90 ecuaciones.

Para la cadena central y la plataforma es posible escribir 18 ecuaciones estáticas, esto debido a que se cuenta con 3 cuerpos y se tienen igualmente 6 necuaciones para cada uno de ellos.

Finalmente se puede decir que tenemos un sistema con 108 ecuaciones con 108 incógnitas (momentos y fuerzas de reacción)

La solución que se genera, se hace considerando la trayectoria definida para la solución cinemática (una recta paramétrica y en donde cambian los dos ángulos de la plataforma de manera lineal).. La solución mostrada a continuación, confirma que el balanceo producido por los contrapesos y resortes produce cero "torque en los actuadores. Ya que los contrapesos y resortes mantienen en equilibrio a la plataforma paralela para cualquier posición y orientación de la plataforma móvil.

$$\begin{aligned}\tau_{11} &= 43,7 \times 10^{-6} \\ \tau_{12} &= 43,7 \times 10^{-6} \\ \tau_{13} &= 135,7 \times 10^{-6} \\ \tau_{14} &= 154,2 \times 10^{-6} \\ \tau_{15} &= 135,7 \times 10^{-6}\end{aligned}$$

Los torques para la posición tienen un valores muy cercano a cero a lo largo de la trayectoria, esto es:

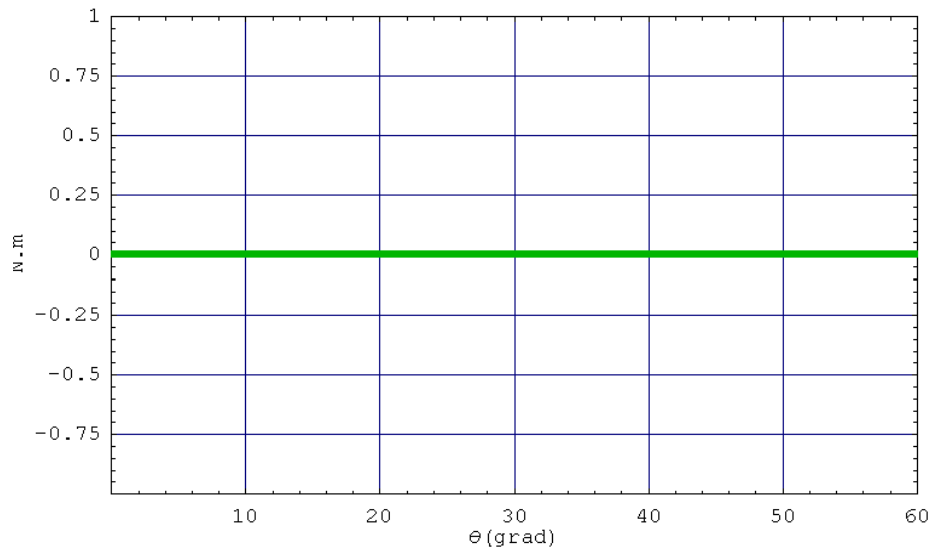


Fig 62.- Valor de torques en las cadenas motrices

Otra forma de corroborar este resultado es con el cálculo de las reacciones en la base de la plataforma, la suma de todas ellas debe ser constante para toda la trayectoria, como se muestra a continuación

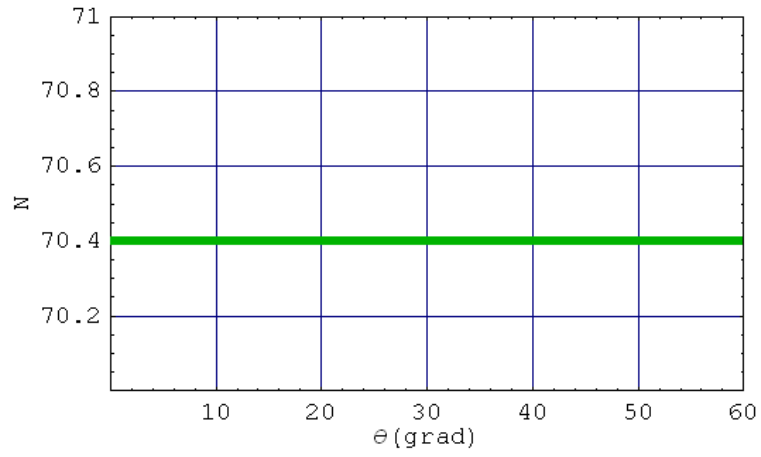


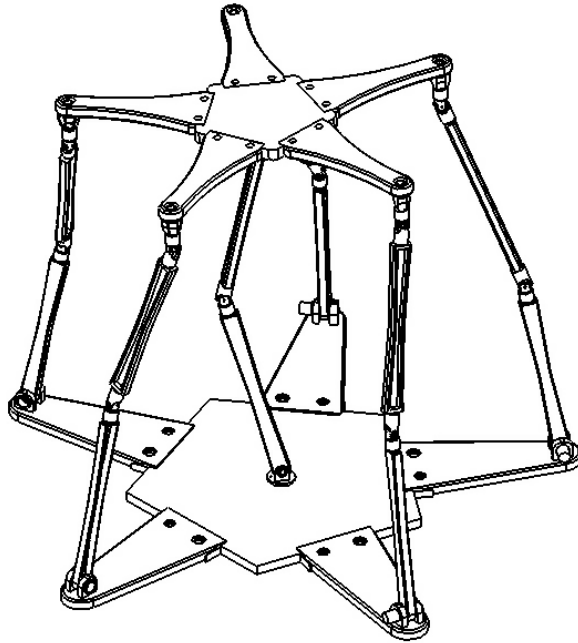
Fig 62.- Mag. de las reacciones en la base del mecanismo

Capítulo 6

Conclusiones

Con los resultados obtenidos en este trabajo se puede concluir que las hipótesis utilizadas para el desarrollo del mismo son válidas y congruentes con los datos obtenidos. Aunque surgieron algunos problemas que obliga a revisar y saber qué causas son las que provocan la aparición de los mismos.

Para el caso del desarrollo cinemático inicialmente se había pensado en una plataforma paralela con los los puntos de apoyo de las cadenas cinemáticas móviles en la base fija espaciadas de manera regular, con ángulos y magnitudes iguales para cada una respecto al origen de la plataforma paralela. Esta configuración se repetía también en la plataforma móvil (configuración tipo estrella)



ISOMÉTRIC01 (DWG) WORK

Fig 63.- Plataforma inicial simetrica previa al analisis.

Sin embargo debido a problemas que surgieron en la verificación del balanceo (comprobación estática) se pudo observar que esta configuración no logra balancearse estáticamente con la teoría utilizada en esta tesis. A pesar de que se habían resuelto las ecuaciones de movimiento adecuadamente e inclusive se habían revisado que los valores obtenidos en los desplazamientos angulares fueran coherentes, al verificar el cierre de los lazos cinemáticos, aparecían valores residuales que fueron inesperados, valores pequeños pero que simplemente no tenían por qué haber aparecido. Este error forzó a hacer un cambio en el diseño de nuestra plataforma por el que se muestra en este trabajo. Al realizar nuevamente el análisis de posición y estático el error este desapareció y permitió el comprobar el balanceo de la plataforma al mostrar, en el algoritmo estático, que los valores del torque en los actuadores eran cero para cualquier posición de nuestra plataforma (en la trayectoria definida anteriormente). Este tipo de fenómenos observados en la resolución de este trabajo ameritan el seguirse estudiando ya que aunque el cambio hecho sirvió para resolver las ecuaciones, no es suficiente el reaccionar de esta forma sin entender qué condiciones del sistema de ecuaciones están induciendo estos resultados.

En el caso del balanceo, se aprendió a plantear correctamente los valores (fracciones) para hacer el cálculo de los centros de masa respecto a sus orígenes de referencia, ya que puede ser un poco confusa la manera en que se deben de armar los lazos vectoriales. Se verificó que las fracciones que resultan en este planteamiento sean realmente las que indican las proporciones correctas para ubicar tanto al centro de masa de los eslabones como la distancia a la que se debe de colocar el contrapeso de los eslabones superiores. Con los valores obtenidos de los contrapesos y las constantes de los resortes de la plataforma, queda para un trabajo posterior el rediseñar la plataforma utilizada en este proyecto ya que, sin ser estos exagerados, sería bueno el poder recalcular las distancias a donde se deberían de situar los contrapesos y así mismo las masas obtenidas. Ambos son valores razonables pero se prefiere reducir las distancias aumentando la masa utilizada para los mismos.

Apéndice A

Usualmente en el análisis matemático de los mecanismos se suele encontrar el siguiente tipo de expresiones

$$A(\theta) \operatorname{Cos}\psi + B(\theta) \operatorname{Sen}\psi = C(\theta)$$

su solución a estas expresiones es:

$$\psi(\theta) = \operatorname{Tan}^{-1}\left(\frac{B(\theta)}{A(\theta)}\right) \pm \operatorname{Cos}^{-1}\left(\frac{C(\theta)}{\sqrt{A(\theta)^2 + B(\theta)^2}}\right)$$

Esta expresión se obtiene de del siguiente planteamiento:

Haciendo uso del método de solución trigonométrica para las integrales tenemos la ecuación

$$A(\theta) \operatorname{Cos}\psi + B(\theta) \operatorname{Sen}\psi = C(\theta)$$

y dividimos entre el radical $\sqrt{A(\theta)^2 + B(\theta)^2}$, obtenemos los siguientes términos

$$\operatorname{Cos}\delta = \frac{A(\theta)}{\sqrt{A(\theta)^2 + B(\theta)^2}} \quad \text{y} \quad \operatorname{Sen}\delta = \frac{B(\theta)}{\sqrt{A(\theta)^2 + B(\theta)^2}}$$

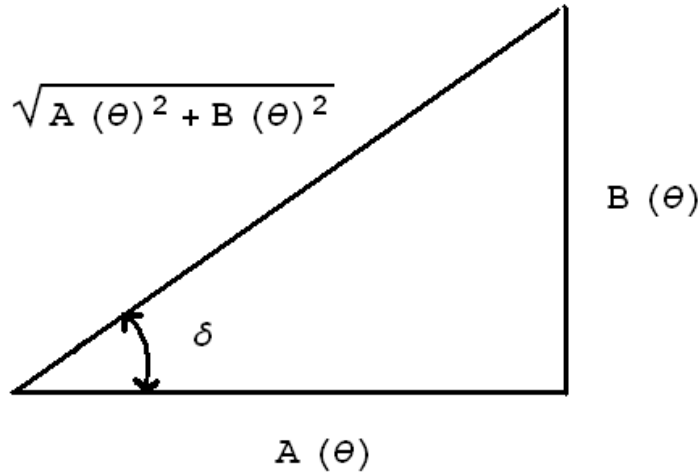


Fig. 64.- Triangulo de Funciones

Lo que nos entrega la siguiente expresión:

$$\text{Cos}\delta \text{ Cos}\psi + \text{Sen}\delta \text{ Sen}\psi = \text{Cos}(\psi - \delta)$$

Aplicando la identidad trigonométrica correspondiente se tiene que

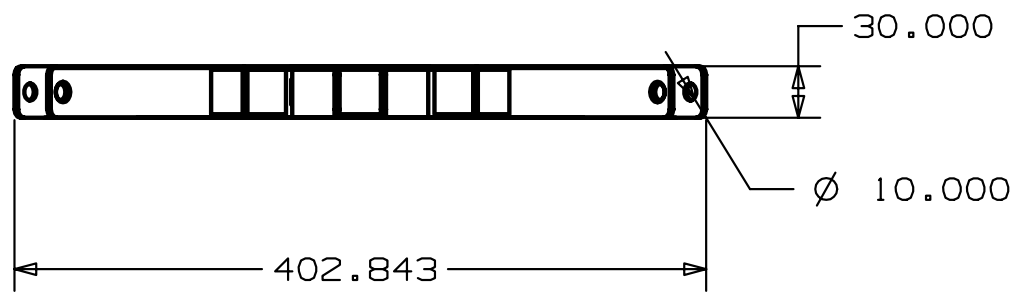
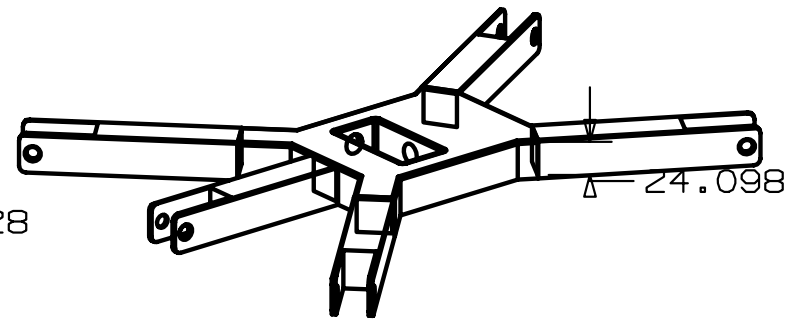
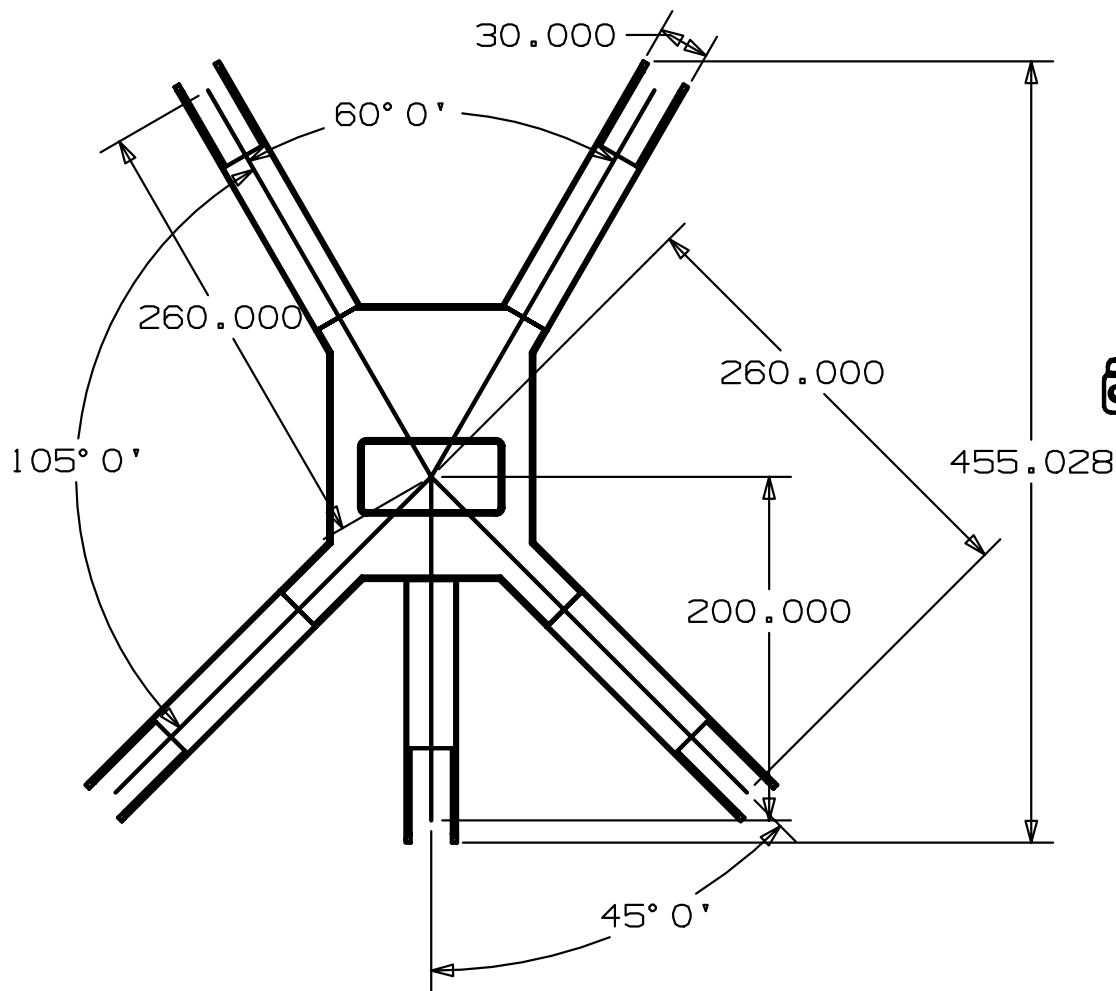
$$\text{Cos}(\psi - \delta) = \frac{C(\theta)}{\sqrt{A(\theta)^2 + B(\theta)^2}}$$

De la ilustración anterior es evidente que

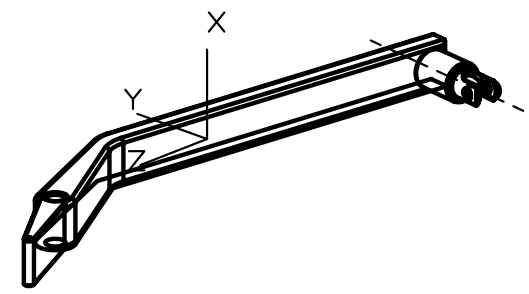
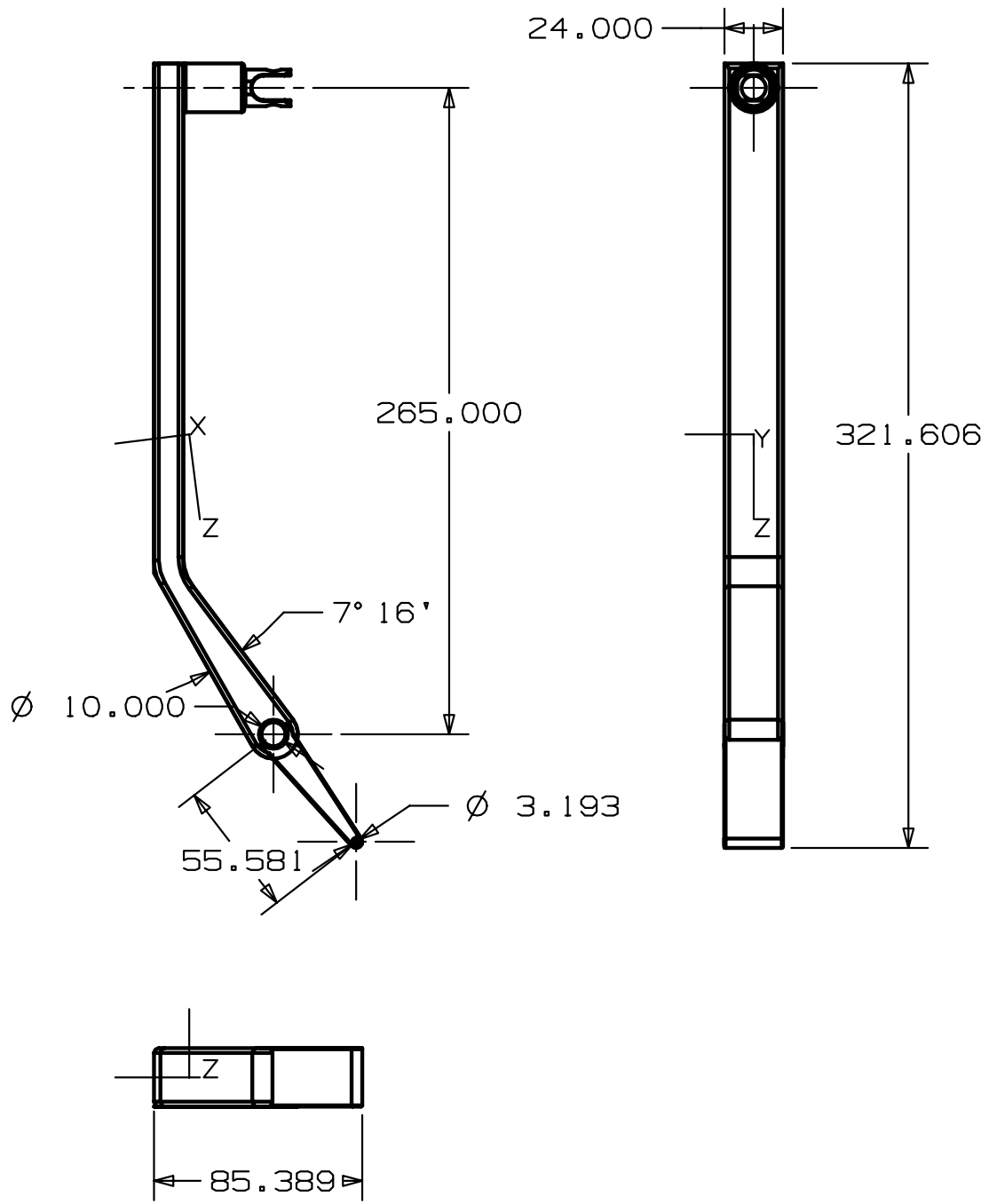
$$\text{Tan}\delta = \frac{B(\theta)}{A(\theta)}$$

Finalmente obtenemos la expresión

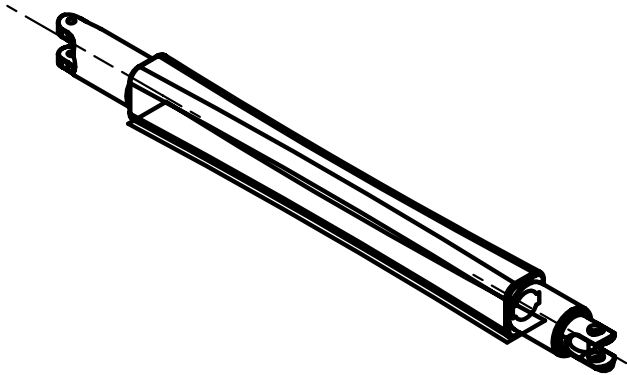
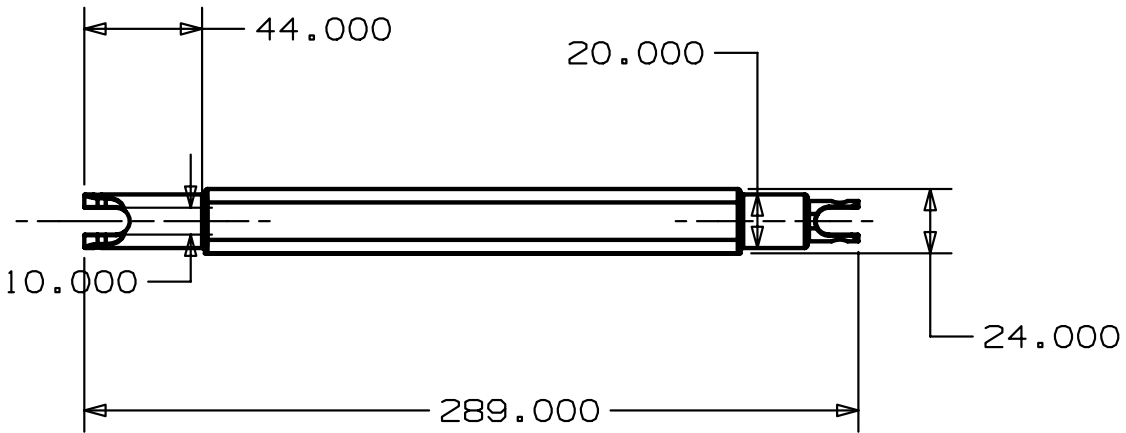
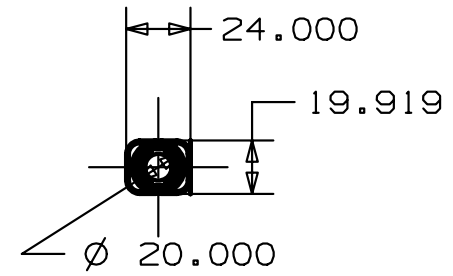
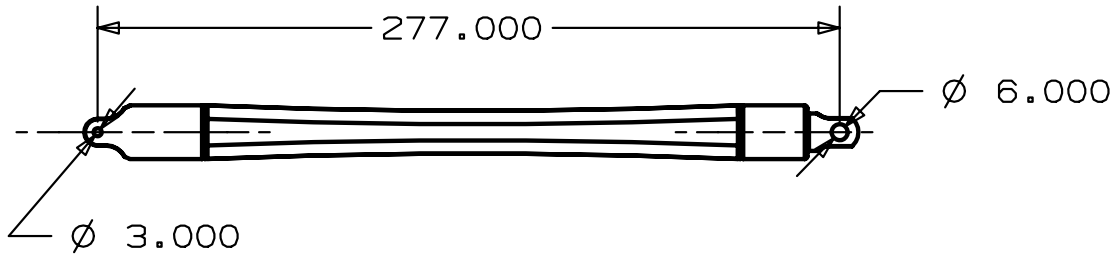
$$\psi(\theta) = \text{Tan}^{-1}\left(\frac{B(\theta)}{A(\theta)}\right) \pm \text{Cos}^{-1}\left(\frac{C(\theta)}{\sqrt{A(\theta)^2 + B(\theta)^2}}\right)$$



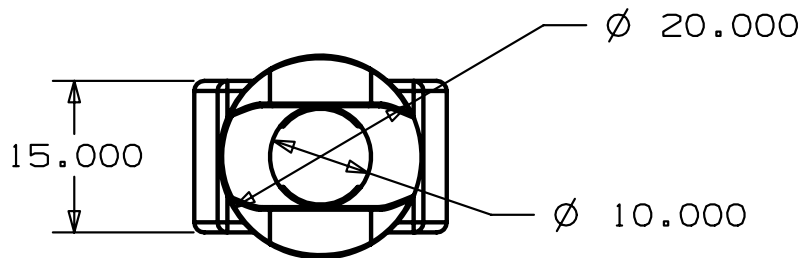
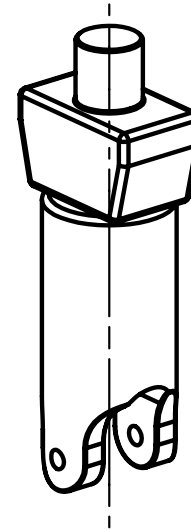
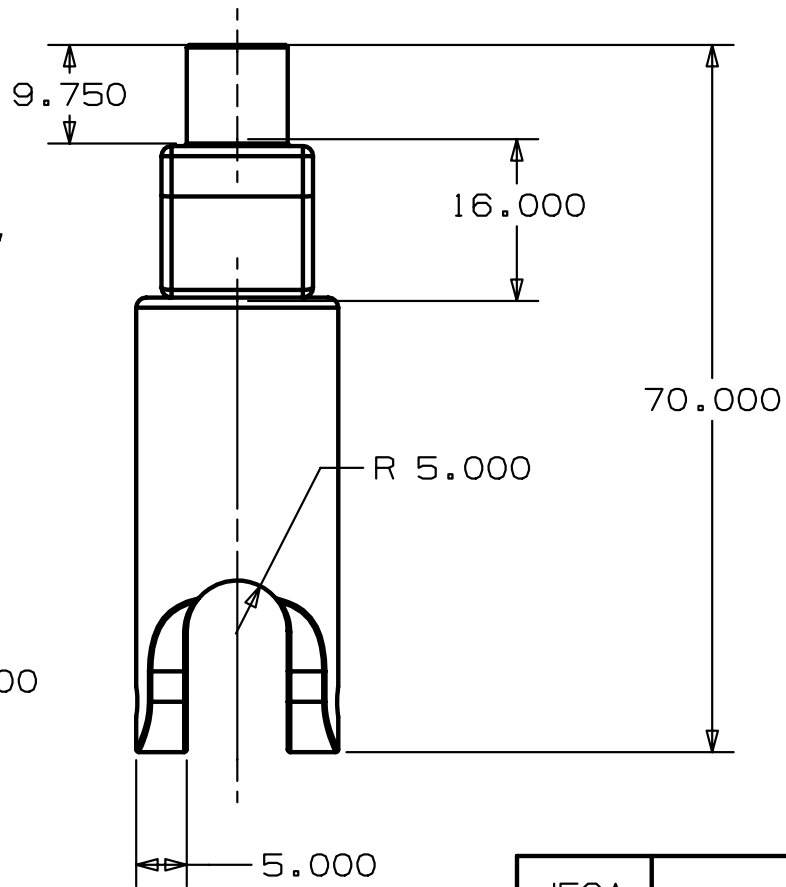
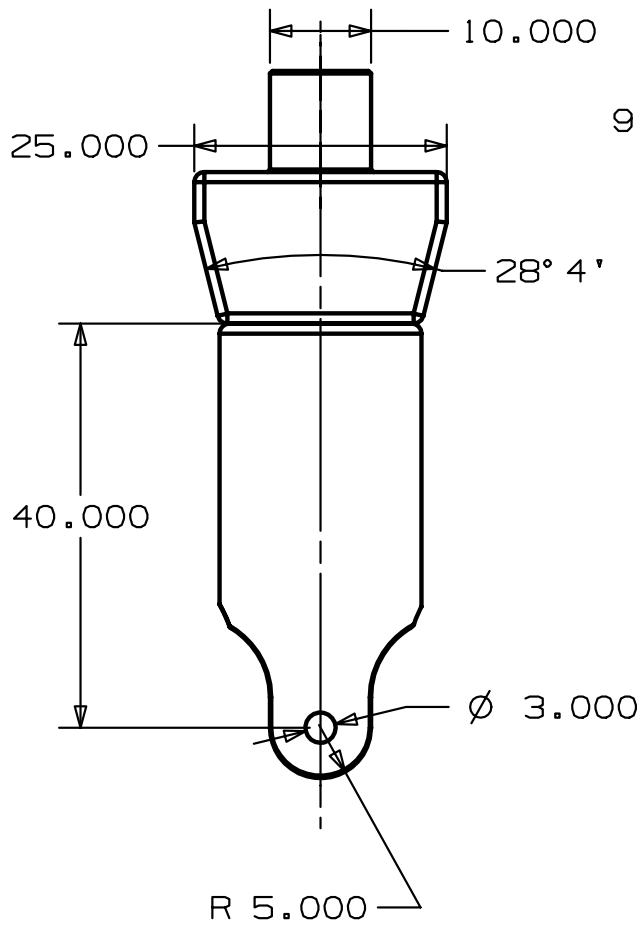
| | | |
|---------------------|---------------------------------|-----------------|
| JEGA 06/05/06 | UNAM F.I. Posgrado | |
| Esc: S/E Uds: mm | Plataforma Paralela de 5 GDL | Dibujo No: 1 |
| A4 | Base Inferior Fija | |
| | | |



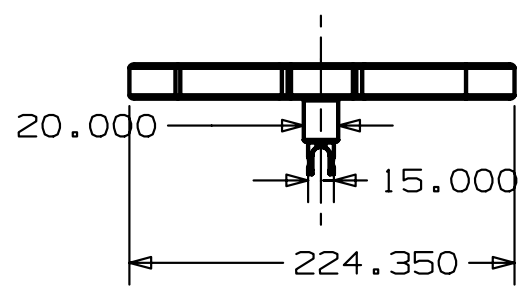
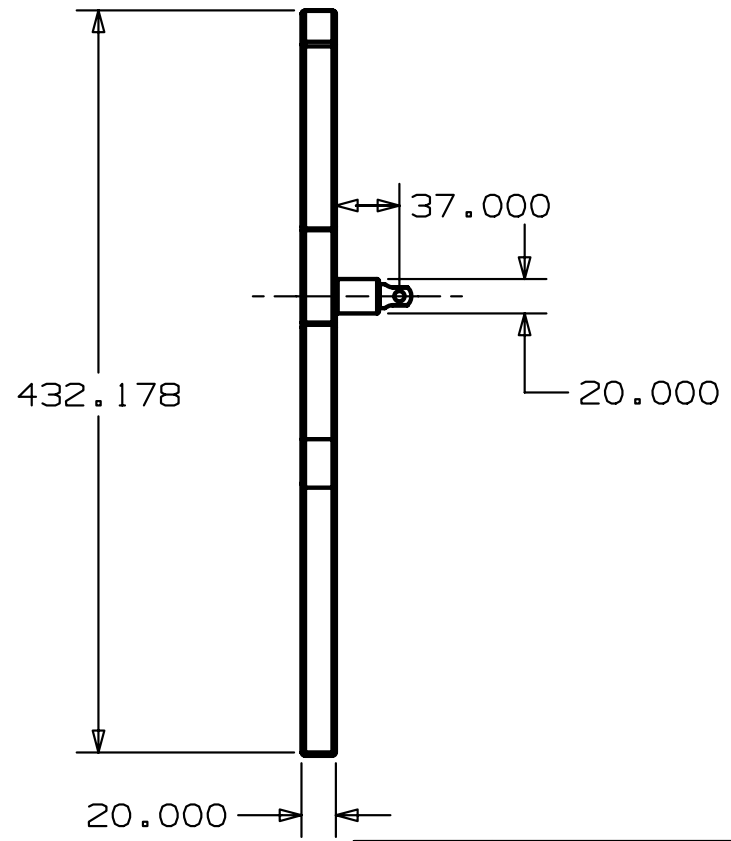
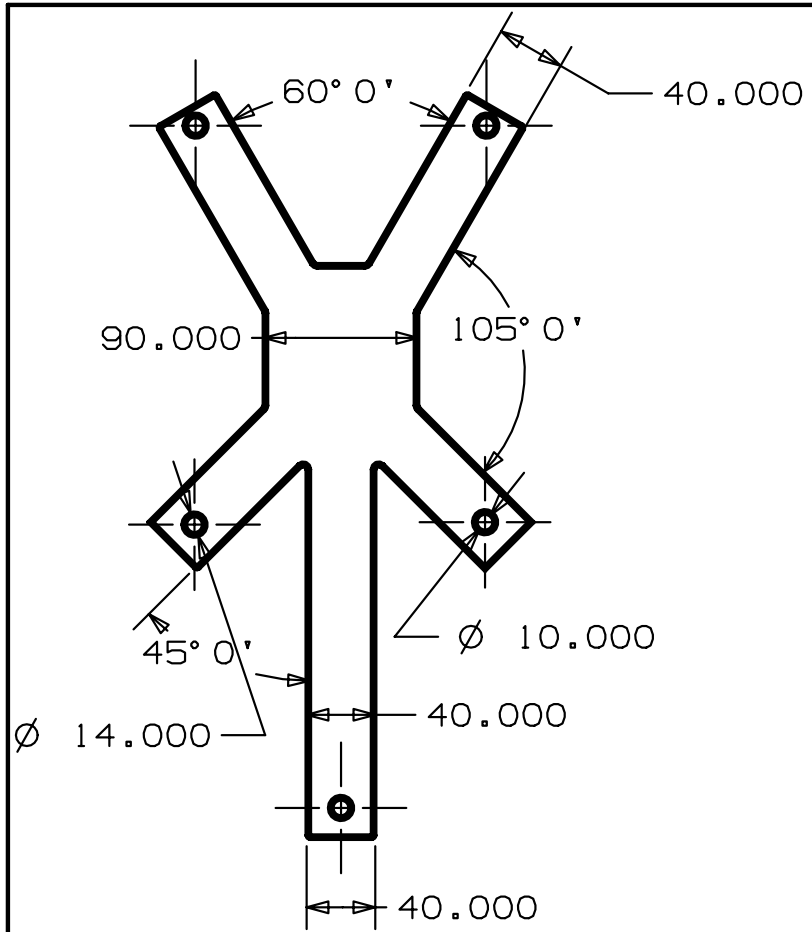
| | | |
|---------------------|---|-----------------|
| JEGA 06/05/06 | UNAM F.I. Posgrado | |
| Esc: S/E Uds: mm | Plataforma Paralela de 5 GDL | Dibujo No: 2 |
| A4 | Eslabón Inferior de la cadena motriz | |
| | | |



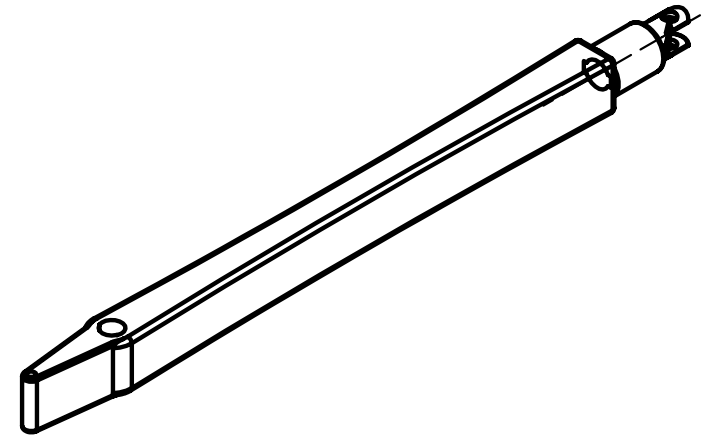
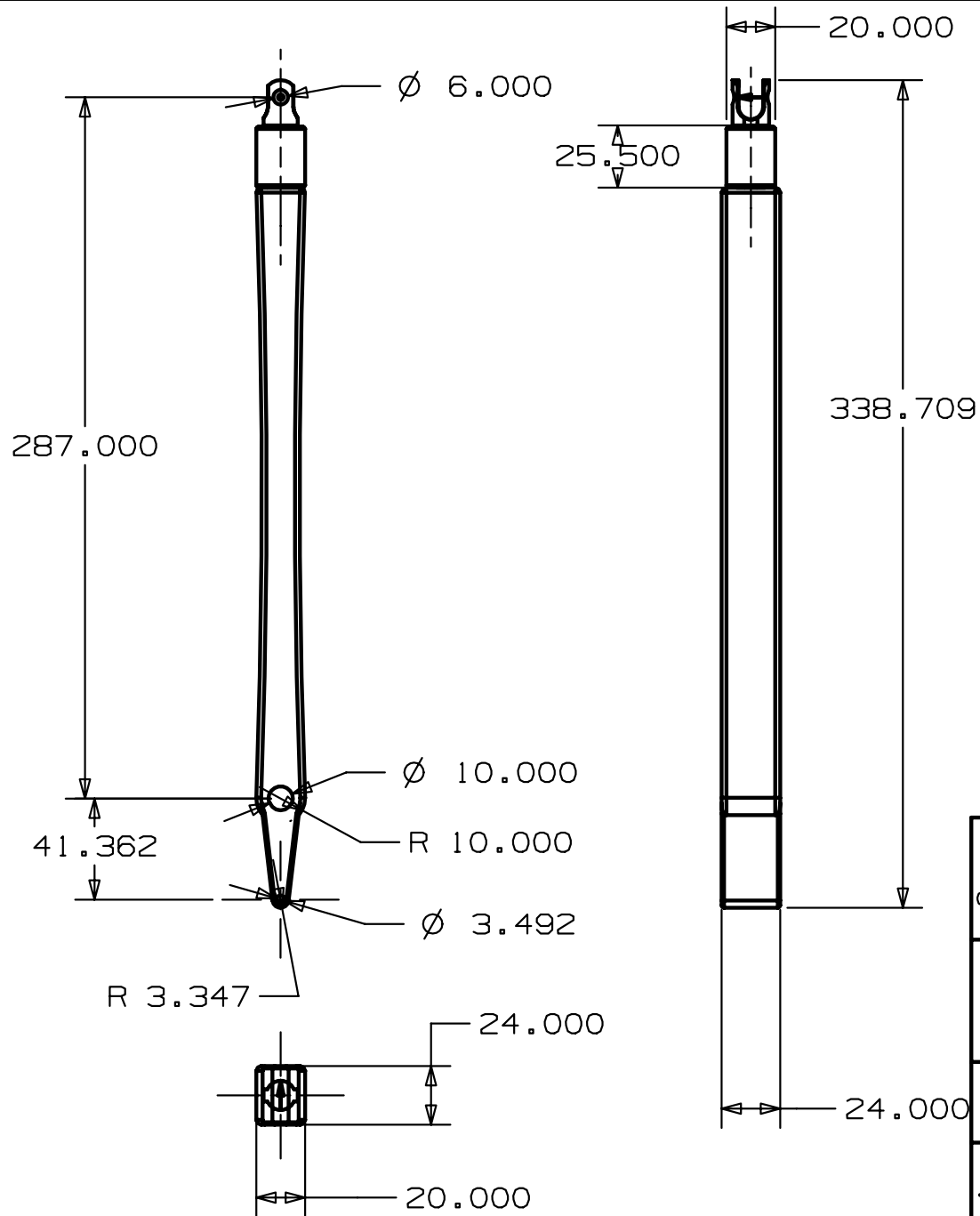
| | | |
|---------------------|---|-----------------|
| JEGA 06/05/06 | UNAM F.I. Posgrado | |
| Esc: S/E Uds: mm | Plataforma Paralela de 5 GDL | Dibujo No: 3 |
| A4 | Eslabón superior cadena motriz y restrictiva | |
| | | |



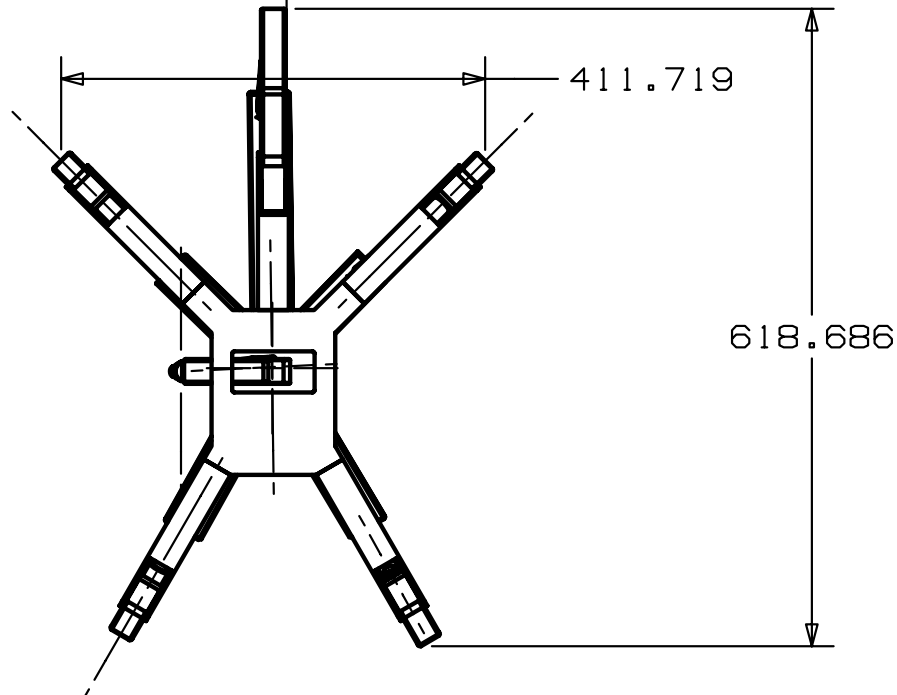
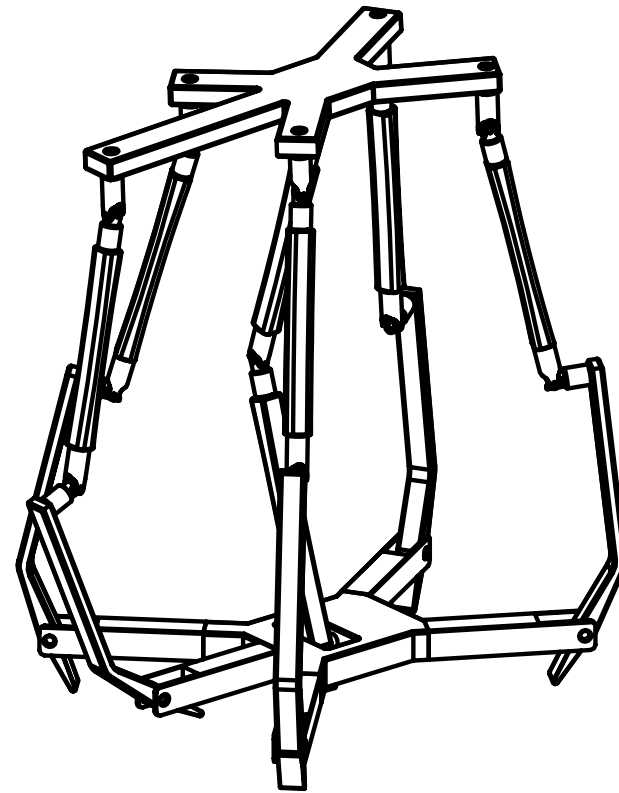
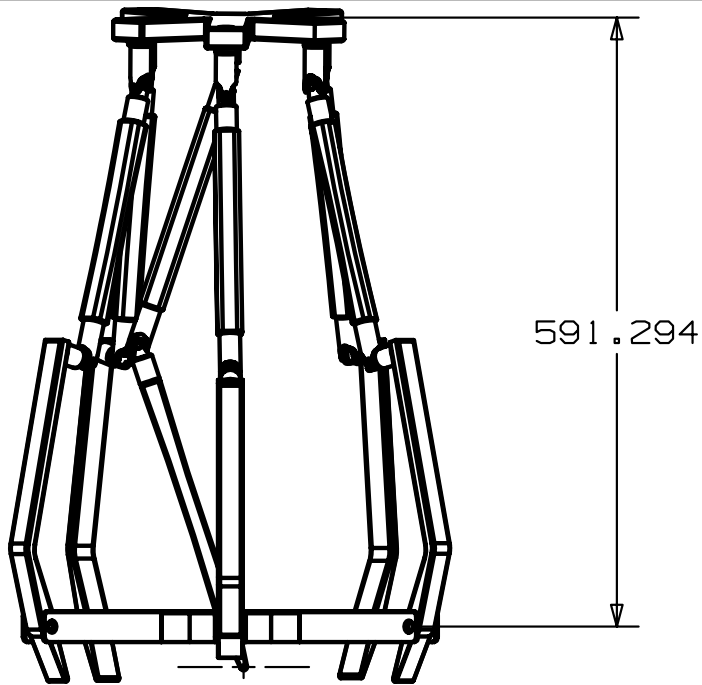
| | | |
|---------------------|---|-----------------|
| JEGA 06/05/06 | UNAM F.I. Posgrado | |
| Esc: S/E Uds: mm | Plataforma Paralela de 5 GDL | Dibujo No: 4 |
| A4 | Cople rotacional de la cadena motriz | |
| | | |



| | | |
|---------------------|---------------------------------|-----------------|
| JEGA 06/05/06 | UNAM F.I. Posgrado | |
| Esc: S/E Uds: mm | Plataforma Paralela de 5 GDL | Dibujo No: 5 |
| A4 | Plato Superior Movil | |
| | | |



| | | |
|---------------------|--|-----------------|
| JEGA 06/05/06 | UNAM F.I. Posgrado | |
| Esc: S/E Uds: mm | Plataforma Paralela de 5 GDL | Dibujo No: 6 |
| A4 | Eslabón inferior de la cadena restrictiva | |
| | | |



| | | |
|---------------------|---|-----------------|
| JEGA | UNAM F.I. Posgrado | |
| Esc: S/E Uds: mm | Plataforma Paralela de 5 GDL | Dibujo No: 7 |
| A4 | Ilustracion de ensamble de plataforma movi l | |
| | | |