



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
**PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA**  
**INGENIERÍA ELÉCTRICA - CONTROL**

**RESPUESTA ONDULATORIA ANTE UNA EXCITACIÓN ACÚSTICA**  
**EN UN DUCTO PRESURIZADO**

**TESIS**  
**QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:**  
**MAESTRO EN INGENIERÍA**

**PRESENTA:**  
**ANGEL BENJAMIN OVIEDO SUAREZ**

**TUTORES**  
**DRA. MARÍA CRISTINA VERDE RODARTE,**  
**INSTITUTO DE INGENIERÍA**  
**DR. RAFAEL BERNARDO CARMONA PAREDES,**  
**INSTITUTO DE INGENIERÍA**

**CIUDAD DE MÉXICO ENERO, 2019**



JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dr. Maya Ortiz Paul Rolando  
Secretario: Dra. Torres Ortiz Flor Lizeth  
1er. Vocal: Dra. Verde Rodarte María Cristina  
2do. Vocal: Dr. Carmona Paredes Rafael Bernardo  
3er. Vocal: Dr. Benítez Pérez Héctor

La tesis se realizó en el Instituto de Ingeniería, UNAM.

TUTORES DE TESIS:

Dra. María Cristina Verde Rodarte,  
Instituto de Ingeniería

Dr. Rafael Bernardo Carmona Paredes,  
Instituto de Ingeniería

---







# Agradecimientos

---

Mi más grande agradecimiento es a mi familia por su apoyo incondicional a lo largo de mi vida. A tí mamá, te agradezco todo el amor, el apoyo y cuidado que siempre me has brindado; a tí papá, te agradezco los consejos, el soporte, el ejemplo y tus conocimientos. Todo lo que he logrado se los debo a ustedes.

A mis tutores, Dra. María Cristina Verde Rodarte y al Dr. Rafael Bernardo Carmona Paredes por las enseñanzas que me brindaron durante la maestría y por su apoyo para el desarrollo del presente proyecto de tesis. Se extiende este agradecimiento a todos los sinodales, quienes, con sus comentarios y correcciones, enriquecieron enormemente este trabajo.

A mis amigos de la maestría, por el tiempo y las gratas experiencias que hemos compartido juntos, en especial, a Hector por su amistad y palabras de apoyo.

A la Universidad Nacional Autónoma de México, al Programa de Maestría y Doctorado en Ingeniería y al Instituto de Ingeniería, por todos los conocimientos y habilidades adquiridas en sus aulas.

Finalmente, se agradece al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo económico brindado para realizar mis estudios.





# Índice general

---

<b>Índice de figuras</b>	<b>VII</b>
<b>Lista de Acrónimos</b>	<b>IX</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Justificación y Motivación . . . . .	1
1.2. Estado del arte . . . . .	2
1.3. Objetivos . . . . .	3
1.3.1. Objetivo específicos . . . . .	3
1.4. Contribuciones . . . . .	4
1.5. Estructura del documento . . . . .	4
<b>2. Modelo incremental de ondas acústicas en un fluido</b>	<b>5</b>
2.1. Ecuación de onda unidimensional en un ducto . . . . .	5
2.2. Matriz de transferencia del fluido . . . . .	9
2.2.1. Ducto de dimensión finita . . . . .	10
2.2.2. Ducto de dimensión infinita . . . . .	11
2.2.3. Elementos puntuales de un ducto . . . . .	13
2.3. Matriz de transferencia del fluido en ductos segmentados . . . . .	15
2.3.1. Ducto de dimensión finita con punto de visualización . . . . .	16
2.3.2. Ducto de dimensión finita con obstrucción y punto de visualización	17
2.3.3. Ducto de dimensión finita con tres segmentos acoplados con celdas puntuales . . . . .	18
2.4. Observación de la onda sonora en un punto arbitrario . . . . .	19
<b>3. Análisis de una perturbación acústica en un ducto</b>	<b>21</b>
3.1. Consideraciones Generales . . . . .	21
3.2. Respuesta de presión acústica para un ducto nominal . . . . .	22
3.3. Respuesta de presión acústica en un ducto con una reducción de área . .	24
3.4. Respuesta de presión acústica en un ducto con una obstrucción . . . . .	30
3.5. Respuesta de presión acústica en un ducto con dos obstrucciones . . . . .	34
<b>4. Conclusiones</b>	<b>41</b>

**Bibliografía**

**43**

# Índice de figuras

---

2.1. Fenómeno de propagación de la señal sonora en un medio . . . . .	6
2.2. Diagrama de cuerpo libre de un elemento diferencia $dx$ , debido a las fuerzas ejercidas por la perturbación . . . . .	7
2.3. Partículas contenidas en un diferencial de volumen del fluido perturbado	7
2.4. Pareja de variables en los puntos de interés del fluido . . . . .	9
2.5. Diagrama de bloques de un segmento uniforme de un ducto . . . . .	11
2.6. Representación del modelo del fluido en un ducto de dimensión infinita .	12
2.7. Celda puntual en $x_i$ y su representación matricial . . . . .	13
2.8. Esquema ducto en presencia de reducción de área . . . . .	13
2.9. Esquema ducto en presencia de obstrucción . . . . .	14
2.10. Esquema ducto en presencia de fuga . . . . .	14
2.11. Ducto dimensión finita con celda de visualización en $x_i$ . . . . .	16
2.12. Ducto de longitud $l$ con una obstrucción en $x_o$ y un sensor en $x_v$ . . . .	17
2.13. Ducto de longitud $l$ con dos obstrucciones y un punto de visualización .	18
2.14. Ducto de longitud $l$ con punto arbitrario $x_v$ de visualización . . . . .	19
3.1. Esquema ducto nominal con terminación rígida . . . . .	22
3.2. Presión acústica en el punto de visualización $x_v$ . . . . .	24
3.3. Esquema ducto con terminación rígida en presencia de una reducción de área . . . . .	25
3.4. Presión acústica en un punto de visualización $x_v$ ante una reducción a 7m	28
3.5. Presión acústica en un punto de visualización $x_v$ ante una reducción a 5m	28
3.6. Presión acústica en un punto de visualización $x_v$ ante una reducción a 3m	29
3.7. Esquema ducto con terminación rígida en presencia de una obstrucción .	30
3.8. Presión acústica en un punto de visualización $x_v$ ante una obstrucción a 7m . . . . .	33
3.9. Presión acústica en un punto de visualización $x_v$ ante una obstrucción a 5m . . . . .	33
3.10. Presión acústica en un punto de visualización $x_v$ ante una obstrucción a 3m . . . . .	34
3.11. Esquema ducto con terminación rígida en presencia de dos obstrucciones	35
3.12. Presión acústica en un punto de visualización $x_v$ ante dos obstrucciones localizadas a 2m y 8m . . . . .	39

3.13. Presión acústica en un punto de visualización  $x_V$  ante dos obstrucciones  
localizadas a 4m y 8m . . . . . 40

# Lista de Nomenclatura

---

$P$	Presión absoluta
$u$	Velocidad de partícula
$\varrho$	Densidad absoluta
$x$	Coordenada espacial
$t$	Tiempo
$f$	Función dependiente de $x, t$
$P_0$	Presión atmosférica
$p$	Presión acústica
$\rho_0$	Densidad del medio
$\rho$	Densidad acústica
$c$	Velocidad de propagación del medio
$M$	Masa Molar
$R$	Constante de los gases ideales
$T$	Temperatura absoluta
$C_p$	Capacidad calorífica a presión constante
$C_v$	Capacidad calorífica a volumen constante

## LISTA DE ACRÓNIMOS

---

$T_c$	Temperatura ambiental
$\gamma$	Parámetro de propagación de onda
$s$	Variable de Laplace
$\mu$	Impedancia característica del ducto
$l$	Longitud del ducto
$P(s)$	Presión acústica en el dominio de la frecuencia
$U(s)$	Velocidad de partícula en el dominio de la frecuencia
$u_o$	Velocidad del fluido
$\Delta p_0$	Pérdida de carga
$S_1$	Superficie sección ducto sin reducción de área
$S_2$	Superficie sección ducto con reducción de área
$Z(\cdot)$	Vector de variables de estado
$a$	Ancho de la señal de excitación
$A$	Amplitud de la presión acústica
$F$	Parámetro de obstrucción
$t_{pro_i}$	Tiempo de propagación y reflexión de la onda a lo largo del ducto
$P(0)$	Entrada del sistema. Presión aguas arriba del ducto como primera condición de frontera
$U(l)$	Entrada del sistema. Velocidad aguas abajo como segunda condición de frontera
$l_i$	Distancia entre elementos del ducto

# Introducción

---

## 1.1. Justificación y Motivación

En la actualidad los ductos son usados comúnmente para transportar diferentes tipos de fluidos de alto valor económico con sistemas de distribución compuestos por miles de kilómetros de tuberías. La gran mayoría de los sistemas de ductos están expuestos a sufrir fallas, ya sea por daños de fabricación, envejecimiento, falta de mantenimiento, corrosión en la pared, bloqueos parciales debido a componentes físicos o químicos debido a deposición de minerales, tomas clandestinas o por fenómenos naturales. Este tipo de fallas se deben de identificarse y localizarse a tiempo, ya que con el paso de los años han ocurrido algunas catástrofes industriales que han causado gran impacto histórico por las dimensiones de los daños, las grandes pérdidas económicas y las muertes ocasionadas, por la planta nuclear en Chernobyl en 1986, donde al realizar pruebas de fallas en el suministro eléctrico detonaron un aumento súbito de potencia en uno de los reactores, lo que termino provocando la explosión del hidrógeno acumulado en su interior, cuyas consecuencias implicaron 3 millones de personas enfermas, 150 mil kilómetros cuadrados con presencia de radiación y 4 mil muertos (Sea, 2009). Otro caso es el ocurrido en el Golfo de México en 2010, fue la explosión del pozo de la plataforma Deepwater Horizon de la compañía British Petroleum, siendo el derrame de crudo sobre el mar más grande registrado (Verde *et al.*, 2013). Por otro lado CONAGUA (2015) reporta pérdidas importantes de agua en las redes de distribución entre 30 y 50 por ciento debido, principalmente a la vida útil de las tuberías, a la falta de control de la presión y a la mala calidad de los materiales empleados. Por ende es necesario que los sistemas de distribución deben estar en constante vigilancia para garantizar la seguridad y una operación eficiente. Por lo que diversos métodos de análisis para el diagnóstico de ducto se han desarrollado, entre las principales se encuentran, el uso de pruebas con señales transitorias en los ductos, logrando con esto la identificación de múltiples fallas, pero teniendo el gran inconveniente que para generar dichos transitorios, la integridad de los ductos se ve comprometida, por lo que llevarlo a una aplicación industrial no es viable, es por eso, la búsqueda de métodos alternativos son necesarios, recientemente, el uso

de señales acústica ha demostrado ser una opción viable, llevándolo a una aplicación industrial.

### 1.2. Estado del arte

La localización de fallas en ductos es un tema de gran importancia que ha llamado la atención de investigadores del área de control y supervisión de procesos, quienes han propuesto diversas metodologías. En [Datta y Sarkar \(2016\)](#) se reportan métodos alternativos para la detección de fallas en ductos, los cuales se caracterizan por ser no invasivos en el sistema. Entre los diferentes tipos de métodos alternativos para la detección de fallas, los más utilizados se basan en un análisis de vibración, en el cual se estudia el efecto de las fallas en ductos mediante la medición de vibraciones que se producen al estar presente una falla, dichos parámetros de vibración se miden utilizando diferentes tipos de sensores. En [Lile \*et al.\* \(2012\)](#) se determinó que la vibración en el ducto en presencia de una obstrucción aumenta a medida que el área de flujo disminuye. Uno de los principales inconvenientes de este tipo de técnica, radica en la necesidad de tener múltiples puntos de medición y la gran susceptibilidad al ruido ambiental, el cual dificulta recuperar la señal producida por la falla. Otro de los métodos utilizados es el de balance de masa, el cual consiste en tomar la diferencia del flujo de masa entre la entrada y la salida del ducto. En [Sun y Chang \(2014\)](#), las fugas se logran identificar pero no es posible determinar su localización. También existen métodos basados en sensores piezoeléctricos, como por ejemplo el presentado en [Ozevin y Harding \(2012\)](#) que consiste en equipar el ducto con múltiples sensores conectados en serie en la parte exterior del ducto, donde las propiedades resistivas cambian en caso de presencia de fugas, permitiendo su localización. Los métodos basados en el uso del ruido ultrasónico, toman en cuenta que la presencia de una falla en un ducto provoca una señal acústica que es transmitida a través del ducto y puede ser medida por micrófonos ultrasónicos en varios puntos a lo largo del ducto; el tiempo de desfase de estas señales permite estimar aproximadamente la posición de las fallas.

Recientemente, [Rentería \*et al.\* \(2016\)](#) logró la identificación de múltiples fugas en un ducto, mediante la generación de una señal transitoria de prueba en el flujo del ducto, la cual se genera mediante el cierre de una válvula, ocasionando con esto la aparición del fenómeno de golpe de ariete, por lo que llevar a implementar de manera practica este tipo de maniobras, resulta ser muy poco factible, debido a que la integridad de la instalación se ve comprometida, por lo cual el uso de métodos alternativo son necesarios.

Una técnica de análisis para diagnosticar el estado de un ducto muy utilizada es la reflectometría acústica basada en la propagación y reflexión de la onda de presión cuando se genera una perturbación en el fluido. Cuando la onda de propagación llega al punto de falla, parte de la energía se desvía para formar una nueva onda reflejada que se disipa con el tiempo. Por tanto, la posición de las fallas puede determinarse a



partir de las discontinuidades en la señal de presión debido a las ondas reflejadas. En el trabajo de [Papadopoulou \*et al.\* \(2008\)](#) habla de la gran potencialidad del uso de este método, aplicable a diferentes tipos de configuración de ductos, tales como ductos rectos de longitudes de hasta dos kilómetros, inclusive para sistema de redes de ductos, logrando una identificación de obstrucciones parciales de hasta uno por ciento del valor nominal del diámetro del ducto, teniendo que el número necesario de fuentes acústicas y sensores dependen de la complejidad de la red. En [Wang \*et al.\* \(2009\)](#) considera el caso para fluidos de diferentes densidades como el aire y el aceite. En [Vidal \*et al.\* \(2013\)](#) se muestra la factibilidad de implementar este tipo de métodos al aplicarlos a nivel industrial.

El análisis que se presenta en este trabajo está inspirado en los trabajos previos de [Rentería \*et al.\* \(2016\)](#) y [Vidal \*et al.\* \(2013\)](#). La principal ventaja del uso del método de reflectometría, es que no es un método invasivo para el sistema, además que permite obtener frentes de onda con pocos términos en la expansión infinita, a partir de los argumentos y la amplitud de las funciones escalón de la respuesta, por tanto, se parametriza la posición de la falla.

## 1.3. Objetivos

Localizar la ubicación de múltiples fallas en un ducto utilizando los efectos de una perturbación acústica, la cual en condición de falla, genera una discontinuidad en el flujo, asumiendo un estado estacionario y que éstas se ubican aguas abajo de un sensor acústico.

### 1.3.1. Objetivo específicos

- Desarrollar un procedimiento general para obtener la expresión analítica de la onda de presión acústica inyectada a un ducto, en un punto de visualización del ducto en presencia de múltiples obstrucciones y reducciones de área.
- Estudiar la respuesta a un pulso en un ducto con terminación rígida aguas arriba en presencia de diferentes tipos de fallas en el ducto.
- Obtener la respuesta analítica de la onda de presión acústica en presencia de una obstrucción, una reducción de área y dos obstrucciones.
- Detectar y localizar la posición de diferentes fallas en un ducto con terminación rígida mediante la información del frente de onda de la presión acústica.
- Obtener la caracterización del comportamiento de la onda de presión acústica en presencia de diferentes tipos de fallas.

### 1.4. Contribuciones

En este trabajo se presenta un método basado en reflectometría para detectar múltiples fallas en ductos. Para ello se obtuvo un procedimiento general para la obtención de la expresión analítica de la onda de presión acústica al aplicarle una excitación al fluido en un punto de visualización, usando un modelo lineal de dimensión infinita en el dominio de Laplace, obteniendo la respuesta analítica de la onda de presión acústica en presencia de diferentes tipos de fallas a lo largo de un ducto, la cual depende de las propiedades del ducto, como son la longitud, la velocidad de la onda de presión y la posición de las fallas. En comparación con otros trabajos que se encuentra reportados en la literatura, los cuales realizan el análisis en el dominio de la frecuencia, utilizando únicamente señales de sinusoidales como excitación, la principal desventaja de utilizar este tipo de señales es que para señales de excitación que no sean armónicas, la obtención de la presión acústica es más difícil debido a que se debe de expresar en términos de una serie de Fourier, en la que es necesario conocer todos los coeficientes para determinar el comportamiento en intervalos de tiempo específicos. La principal ventaja de la representación aquí utilizada, es que permite obtener frentes de onda con pocos términos en la expansión infinita, a partir de los argumentos y la amplitud de las funciones escalón de la respuesta.

### 1.5. Estructura del documento

La estructura de este trabajo es la siguiente, en el Capítulo 2, el análisis se inicia formulando las ecuaciones del modelo unidimensional de un ducto recto horizontal, llevando la representación del modelo a una forma matricial, la cual es la base para obtener la solución analítica de la propagación de onda de presión acústica al aplicarle una excitación al fluido, obteniendo así las expresiones analíticas de la presión acústica en presencia de diferentes tipos de fallas, en particular obstrucciones y reducciones de área. En el Capítulo 3, se asignan las condiciones de frontera con el fin de obtener la presión acústica en un punto de visualización localizado en una posición arbitraria del ducto. Antes de transformar la respuesta de la presión acústica al dominio del tiempo, es necesario expresar la respuesta por medio de series infinitas de exponenciales negativos para determinar la respuesta durante intervalos de tiempo específicos. En el Capítulo 4 se dan las conclusiones a partir del desarrollo presentado basado en los resultados analíticos y aquellos obtenidos mediante simulación; se encontró que la información de mayor utilidad para la localización de la posición de obstrucciones y reducciones de área, se halla en el primer frente de onda de presión, después de haberse producido la perturbación o falla. Se verificó que por cada falla, se manifiesta como una discontinuidad en un instante de tiempo dependiente de la posición.

# Modelo incremental de ondas acústicas en un fluido

---

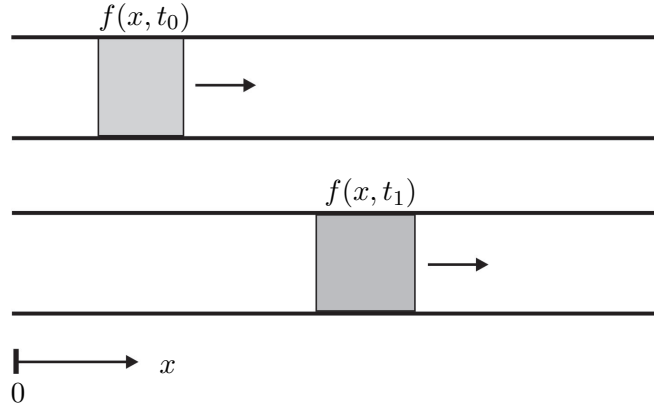
Para estudiar el problema de detección de fallas en ductos vía ondas acústicas en un fluido, este capítulo presenta, como marco teórico de referencia, el modelo de una onda de presión acústica que describe su propagación en un fluido confinado en un ducto sin considerar los efectos de absorción, de una sola dimensión y caracterizado por su densidad y geometría. A partir de dicho modelo, se deriva la expresión del estado de la onda de presión acústica en cualquier punto de observación para ductos no uniformes interconectados con elementos puntuales. Los acoplamientos puntuales considerados que rompen la continuidad del fluido son obstrucciones, fugas y reducciones del área transversal del ducto, además son los más comunes dentro de una red de transporte. Esta descripción de los elementos de interconexión pueden jugar diferentes roles incluyendo escenarios de daños en los ductos. Para simplificar el manejo del modelo del fluido en un ducto no uniforme (i.e. un ducto recto sin accesorios, como válvulas, codos, y sin fallas), la ecuación de onda linealizada y transformada al dominio de Laplace se expresa por segmentos de un ducto. Esta descripción permite caracterizar el estado del flujo de las partículas del fluido en cualquier posición  $x$  de forma muy simple como un producto de matrices de transferencia.

## 2.1. Ecuación de onda unidimensional en un ducto

La propagación de una onda acústica en un fluido homogéneo (i.e. fluido monofásico) confinado en un ducto genera perturbaciones en el medio que se traducen en variaciones de presión audibles producto del desplazamiento de partículas del medio como se muestra en la Figura 2.1 para dos instantes de tiempo  $t$  con una superficie abierta. En la descripción del ducto superior, al tiempo  $t_0$ , la perturbación genera un flujo continuo de las partículas, lo que provoca que la onda sea propagada en el ducto y, en un tiempo  $t_1$ , las partículas se encuentren en la posición mostrada en la parte inferior de la Figura

2.1.

En fluidos homogéneos, hay dos funciones que caracterizan el comportamiento de la onda en cada punto del espacio y del tiempo: la velocidad  $u(x, t)$  y la presión  $p(x, t)$  y que están gobernadas por las leyes de conservación para fluidos en movimiento.



**Figura 2.1:** Fenómeno de propagación de la señal sonora en un medio

La evolución de las funciones  $P(x, t)$  y  $u(x, t)$  en el medio depende de la propia perturbación o excitación, así como de las características del medio como la densidad, la velocidad del sonido, la compresibilidad, etc. Cuando las partículas del medio vibran perpendicularmente a la dirección de propagación de la perturbación se habla de ondas transversales, y cuando las partículas del medio vibran en la misma dirección de propagación se habla de ondas longitudinales.

Considere un segmento diferencial de longitud  $dx$  de un ducto de sección transversal  $S$  constante, caracterizado por las fuerzas consideradas en la Figura 2.2 en un punto  $x$  con la presión  $P(x, t)$ . Bajo estas consideraciones las fuerzas que actúan sobre el fluido se describen por la ecuación (2.1), reportada en Blackstock (2000)

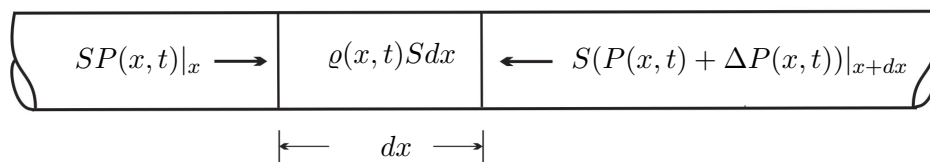
$$SP(x, t) - S(P(x, t) + \Delta P(dx, t)) = \varrho(x, t)Sdx \frac{du(x, t)}{dt} \quad (2.1)$$

donde  $\varrho(x, t)$  es la densidad del fluido en el diferencial  $dx$ , y  $u(x, t)$  representa la velocidad de partícula en el punto  $x$ . Así que la aceleración de las partículas en el medio  $du(x, t)/dt$  se puede escribir como

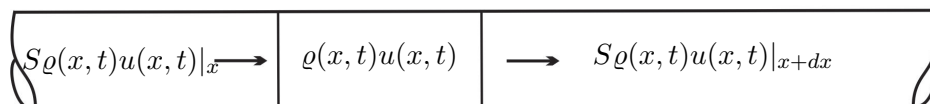
$$\frac{du(x, t)}{dt} = u(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \quad (2.2)$$

por tanto (2.1) que relaciona la presión y la velocidad de las partículas se reduce a la ecuación de Euler generalizada (Kinsler *et al.*, 1999).

$$-\frac{\partial P(x, t)}{\partial x} = \varrho(x, t) \frac{du(x, t)}{dt} \quad (2.3)$$



**Figura 2.2:** Diagrama de cuerpo libre de un elemento diferencial  $dx$ , debido a las fuerzas ejercidas por la perturbación



**Figura 2.3:** Partículas contenidas en un diferencial de volumen del fluido perturbado

Por otro lado, si se considera el comportamiento másico del fluido en el diferencial continuo de  $x$  mostrado en la Figura 2.3, se obtiene la ecuación de conservación de masa, reportada en [Blackstock \(2000\)](#)

$$\frac{\partial (\rho(x, t)u(x, t))}{\partial t} = S\rho(x, t)u(x, t) - S(\rho(x, t) + \Delta\rho(dx, t))u(x + dx) \quad (2.4)$$

y dado que se considera que el área transversal del ducto  $S$  es constante, la ecuación de conservación de masa (2.4) se puede escribir como

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} = -u(x, t) \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial x} \quad (2.5)$$

En general, para un modelo de pequeña señal, la presión y densidad son variables que se describen por medio de sus valores nominales en el punto de operación y sus desviaciones, por tanto, pueden describirse por

$$P(x, t) = P_0 + p(x, t) \quad (2.6)$$

$$\rho(x, t) = \rho_0 + \rho(x, t) \quad (2.7)$$

donde  $\rho_0$  corresponde a la densidad nominal del medio,  $P_0$  presión atmosférica, y  $\rho(x, t)$ ,  $p(x, t)$  son las variaciones producidas por la perturbación acústica, (densidad y presión respectivamente). Bajo estas consideraciones, la ecuación de Euler generalizada dada por (2.3), se puede reescribir como

$$-\frac{\partial}{\partial x} (P_0 + p(x, t)) = (\rho_0 + \rho(x, t)) \left( u(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right) \quad (2.8)$$

y la cual al desarrollarla se obtiene

$$-\frac{\partial p(x, t)}{\partial x} = \rho_0 \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \rho_0 u(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + \rho(x, t) u(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + \rho(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \quad (2.9)$$

Considerando que las variaciones de  $\rho(x, t)$  y  $u(x, t)$  de segundo orden con respecto a los valores nominales  $\rho_0$  se pueden despreciar, debido a que las variaciones que se consideran de la presión acústica son pequeñas en comparación con la presión atmosférica, por lo que la ecuación (2.9) se reduce a

$$-\frac{\partial p(x, t)}{\partial x} = \rho_0 \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \quad (2.10)$$

la cual se conoce como ecuación de Euler linealizada.

Por otro lado, expresando la ecuación de conservación de masa (2.5) en términos de  $\rho_0$  y  $\rho(x, t)$ , se tiene que

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_0 + \rho(x, t)) = -\frac{\partial}{\partial x} (\rho_0 + \rho(x, t)) u(x, t) \quad (2.11)$$

Considerando nuevamente que los términos de segundo orden pueden ser despreciados se tiene

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} = -\rho_0 \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} - \rho(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \quad (2.12)$$

por tanto, si  $\rho(x, t) < \rho_0$ , se puede despreciar el último término de la ecuación (2.12) y escribir la relación resultante como

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} = -\rho_0 \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \quad (2.13)$$

la cual se conoce como la ecuación de conservación de masa lineal.

Por otro lado, si el fluido es compresible se satisface la relación constitutiva entre la densidad del medio y la presión, dada por

$$\frac{p(x, t)}{\rho(x, t)} = c^2 \quad (2.14)$$

donde la velocidad de propagación de fluido  $c$  está dada por

$$c = \sqrt{\frac{\zeta RT}{M}} \quad (2.15)$$

y el coeficiente  $\zeta = C_p/C_v$  caracteriza la relación entre la capacidad calorífica a presión constante y volumen constante,  $R$  es la constante de los gases ideales,  $T$  es la temperatura absoluta, y  $M$  es la masa molar.

En el caso particular de considerar como medio de propagación al aire, la velocidad  $c$  se puede aproximar como

$$c \cong 332 + 0.608T_c \quad (2.16)$$

donde  $T_c$  es la temperatura del medio en grados centígrados. En particular, para una temperatura de  $20^\circ C$ , la velocidad  $c$  toma un valor aproximado de  $344[m/s]$ .

De las ecuaciones (2.13), (2.10) y (2.14) se obtienen las relaciones que existen entre la velocidad de partícula, presión y densidad, derivando la ecuación (2.13) con respecto al tiempo, así mismo, derivando la ecuación (2.10) con respecto al espacio, igualando cada una de estas ecuaciones se tiene que

$$-\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial^2 \rho(x, t)}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x^2} \quad (2.17)$$

sustituyendo  $\rho(x, t) = p(x, t)/c^2$  en la ecuación (2.17), se tiene que

$$\frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (2.18)$$

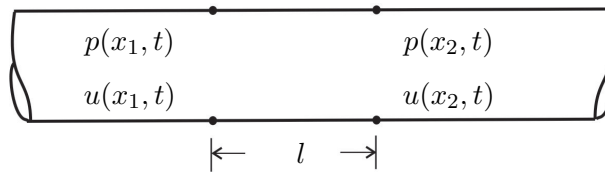
conocida como ecuación linealizada de onda unidimensional, la cual se encuentra reportada en [Kinsler \*et al.\* \(1999\)](#).

De manera similar a la presión se obtiene la ecuación de la velocidad de las partículas

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (2.19)$$

## 2.2. Matriz de transferencia del fluido

Cuando se está interesado en relacionar la pareja de las variables presión  $p(x_1, t)$  y velocidad  $u(x_1, t)$  en un punto arbitrario  $x_1$  del ducto con la respectiva pareja en otro punto también arbitrario  $x_2$ , como se presenta en la Figura 2.4, es conveniente primero transformar la ecuación en derivadas parciales (2.18) en una ecuación diferencial ordinaria a través de dominio de Laplace, suponiendo que los puntos de interés están separados a una distancia  $l = x_2 - x_1$  con  $x_1 < x_2$ . Esto se puede llevar a cabo independientemente de las condiciones de frontera en un fluido homogéneo en un ducto uniforme.



**Figura 2.4:** Pareja de variables en los puntos de interés del fluido

Transformando la ecuación de onda (2.18) al dominio de Laplace se tiene

$$s^2 P(x, s) - sP(x, 0) - \frac{\partial P(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = c^2 \frac{\partial^2 P(x, s)}{\partial x^2} \quad (2.20)$$

Si se considera que el fluido está en equilibrio, en toda la sección  $l$ ,  $P(x, 0) = 0$ , y también su derivada con respecto al tiempo vale cero a lo largo de todo la sección  $l$ , por tanto, (2.20) se puede escribir como

$$\frac{\partial^2 P(x, s)}{\partial x^2} - \gamma^2 P(x, s) = 0 \quad (2.21)$$

donde el parámetro de propagación  $\gamma^2 = \frac{s^2}{c^2}$  caracteriza la solución homogénea de la ecuación (2.21). Tomando en cuenta que  $s$  es una variable compleja se tiene, entonces

$$P(x, s) = C_1(s) \cosh(\gamma x) + C_2(s) \sinh(\gamma x) \quad (2.22)$$

donde las funciones  $C_1(s)$  y  $C_2(s)$  asociadas a las condiciones de frontera de la sección del ducto dependen únicamente de la variable  $s$ , por tanto, son funciones del tiempo.

Considerando que las variables  $u(x, t)$  y  $p(x, t)$  están vinculadas vía (2.9), si la densidad  $\rho_0$  es constante, la ecuación de Euler en el dominio de  $s$  se puede escribir como

$$U(x, s) = -\frac{1}{\rho_0 s} \frac{\partial P(x, s)}{\partial x} \quad (2.23)$$

Ésta permite obtener la velocidad de partícula  $U(x, s)$  derivando directamente (2.22) y sustituyéndola en (2.23). Así se obtiene la expresión de la velocidad de las partículas

$$U(x, s) = -\frac{1}{\rho_0 c} (C_1(s) \sinh(\gamma x) + C_2(s) \cosh(\gamma x)) \quad (2.24)$$

### 2.2.1. Ducto de dimensión finita

Con objeto de determinar las funciones  $C_1(s)$  y  $C_2(s)$  en (2.22) y (2.24), es posible considera al punto  $x_1$  del ducto como un cero relativo del ducto con  $x_2 = x$ . Esta transformación permite escribir para la relación entre la presión en  $x = 0$  y la función  $C_1(s)$  como

$$P(0, s) = C_1(s) \cosh(\gamma 0) + C_2(s) \sinh(\gamma 0) = C_1(s) \quad (2.25)$$

De manera similar al evaluar (2.24) en el origen, se obtiene la relación entre la velocidad en  $x = 0$  y la función  $C_2(s)$  a partir de

$$U(0, s) = -\frac{1}{\rho_0 s} (C_1(s) \sinh(\gamma 0) + C_2(s) \cosh(\gamma 0)) = -\frac{C_2(s)}{\rho_0 c} \quad (2.26)$$

Finalmente, sustituyendo  $C_1(s)$  y  $C_2(s)$  en (2.22) y (2.24), las ecuaciones de la presión y velocidad para toda  $x$  en el intervalo  $0 < x < x_2$  se pueden escribir en forma de matriz de transferencia, es decir

$$\begin{bmatrix} P(x, s) \\ U(x, s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh(\gamma x) & -\mu \sin(\gamma x) \\ -\frac{1}{\mu} \sinh(\gamma x) & \cosh(\gamma x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(0, s) \\ U(0, s) \end{bmatrix} \quad (2.27)$$



donde  $\mu = \rho_0 c$  corresponde a la impedancia característica del segmento del ducto. Esta descripción corresponde con un cuadripolo cuya matriz de transferencia para un segmento del ducto de longitud  $l$  está dada por

$$M_l = \begin{bmatrix} \cosh(\gamma l) & -\mu \sinh(\gamma l) \\ -\frac{1}{\mu} \sinh(\gamma l) & \cosh(\gamma l) \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

Por tanto, la matriz de transferencia  $M_l$  caracteriza el comportamiento de las partículas del fluido dentro del ducto uniforme de longitud  $l$  de forma muy compacta y permite interconectar ductos con celdas puntuales que pueden ser inclusive las condiciones de fronteras de un solo segmento de forma muy transparente.

Una desventaja de la descripción de matriz de transferencia en su aplicabilidad a modelos lineales y una vez que se ha concentrado la información en la matriz no permite introducir fuentes adicionales de excitación, ni visualizar variables internas del segmento del ducto  $l$ .

Por tanto, si se define el segmento de ducto vector de variables de cada puerto de la matriz de transferencia como

$$Z(x) = \begin{bmatrix} P(x, s) \\ U(x, s) \end{bmatrix}, \quad (2.29)$$

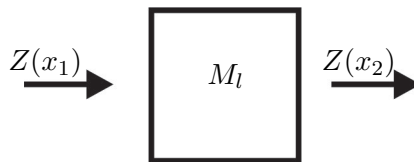
donde se ha eliminado la dependencia de  $s$  por simplicidad en la notación, para el segmento de longitud  $l = x_2 - x_1$  sin pérdida de generalidad se tiene el cuadripolo

$$Z(x_2) = M_l Z(x_1) \quad (2.30)$$

con la matriz de transferencia

$$M_l = \begin{bmatrix} \cosh(\gamma l) & -\mu \sinh(\gamma l) \\ -\frac{1}{\mu} \sinh(\gamma l) & \cosh(\gamma l) \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

mostrado en la Figura 2.5



**Figura 2.5:** Diagrama de bloques de un segmento uniforme de un ducto

### 2.2.2. Ducto de dimensión infinita

Cuando se considera que el fluido está en equilibrio en un ducto uniforme de dimensión infinita, el comportamiento de la presión  $P(x, t)$  y la velocidad  $U(x, t)$  para la excitación  $P(0, t) = f(t)$  en el origen  $x = 0$  se obtiene fácilmente considerando la forma exponencial de (2.22), es decir

$$\begin{aligned}
 P(x) &= \frac{C_1(s)}{2}(e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}) + \frac{C_2(s)}{2}(e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}) \\
 &= \frac{e^{\gamma x}}{2}(C_1(s) + C_2(s)) + \frac{e^{-\gamma x}}{2}(C_1(s) - C_2(s))
 \end{aligned} \tag{2.32}$$

Así, el problema se reduce a encontrar  $C_1(s)$  y  $C_2(s)$  que satisfacen

- para  $x = 0$ ,  $P(0, t) = f(t)$  o de manera equivalente  $P(0) = F(s)$ , y
- para  $x \rightarrow \infty$ ,  $P(x, t)$  debe tener un valor finito (Cheng, 1959).

Esto implica que el término  $C_1(s) + C_2(s)$  que multiplica a la exponencial positiva en (2.32) es cero, de donde resulta

$$C_1(s) = -C_2(s) \text{ con } C_1(s) = P(0)$$

y por tanto

$$P(x) = e^{-\gamma x} P(0)$$

Por otro lado, derivando la solución de la presión con respecto a  $x$  se tiene

$$\frac{\partial P(x)}{\partial x} = -\gamma e^{-\gamma x} P(0)$$

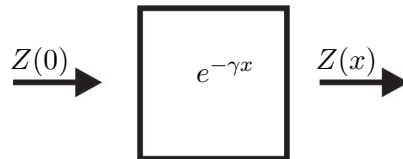
y al considerar la ecuación de Euler (2.23) resulta que la velocidad en  $x$  se reduce a

$$U(x) = \frac{e^{-\gamma x}}{s} P(0) = e^{-\gamma x} U(0)$$

lo cual indica que la onda viaja en el eje  $x$  sin reflexión. Por tanto

$$Z(x) = e^{-\gamma x} Z(0) = M_\infty Z(0) \tag{2.33}$$

con  $M_\infty$  una matriz de transferencia unitaria multiplicada por  $e^{-\gamma x}$  la cual equivale a un retardo puro en el tiempo  $x/c$ , cuando  $\gamma = \frac{s}{c}$ . El comportamiento de este cuádrupolo corresponde al mostrado en la Figura 2.1 al inicio del capítulo en el contexto de sistemas de cuádrupolos se presenta en la Figura (2.6).



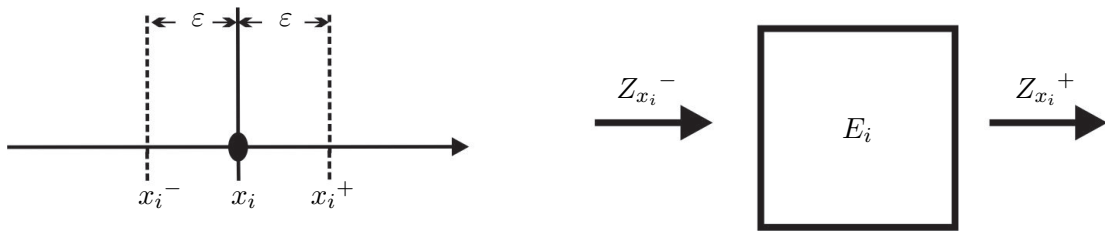
**Figura 2.6:** Representación del modelo del fluido en un ducto de dimensión infinita

### 2.2.3. Elementos puntuales de un ducto

Los ductos frecuentemente están integrados por diversos elementos tanto espaciales como puntuales, los cuales rompen la continuidad del fluido y se caracterizan como matrices de transferencias que pueden ser dinámicas o estáticas con retardos con sus vectores de entrada y salida respectivos. En el caso de un acoplamiento puntual entre dos segmentos en el punto  $x_i$ , como el mostrado en la Figura 2.7, se pueden caracterizar las celdas como una matriz constante determinadas en términos de  $Z(x, t)$  antes y después de punto  $x_i$ . Es decir modelando la celda como

$$Z(x_i^+) = E_i Z(x_i^-) \quad (2.34)$$

donde  $x_i^- = x_i - \epsilon$ ,  $x_i^+ = x_i + \epsilon$ , con  $\epsilon \rightarrow 0$  y la matriz  $E_i$  relaciona las condiciones de frontera aguas arriba y abajo de los segmentos que se acoplan.



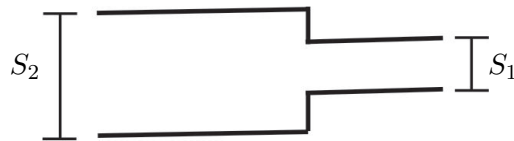
**Figura 2.7:** Celda puntual en  $x_i$  y su representación matricial

Así, la matriz de transferencia  $E_i$  es un cuadripolo que permite la interconexión entre diversos elementos y segmentos del ducto en cualquier posición  $x_i$  y puede representar la celda unitaria, obstrucción, reducción, fuga, punto de medición, incluyendo un ducto de longitud infinita, sólo por mencionar algunas.

Una ventaja de la descripción de celda puntual es que permite visualizar o conocer el vector  $Z(x_i, s)$  en cualquier punto  $x_i$  del ducto con ayuda de la celda puntual unitaria

$$Ev(x_i) := Ev_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

En la práctica, una situación común de ductos es que éstos tengan segmentos de diferentes diámetros, como se muestra en la Figura 2.8, bajo estas condiciones la celda reductora puntual está dada por [Munjal \(2014\)](#)

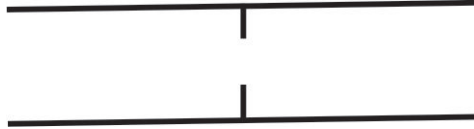


**Figura 2.8:** Esquema ducto en presencia de reducción de área

$$Er(x_i) := Er_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S_1/S_2 \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

donde  $S_1$  representa la superficie del ducto aguas arriba,  $S_2$  representa la superficie del ducto reducido aguas abajo.

Un elemento puntual útil para modelar ductos dañados con bloqueos u obstrucciones puntuales es la matriz de interconexión (Chaudhry, 1979), como se muestra en la Figura 2.9



**Figura 2.9:** Esquema ducto en presencia de obstrucción

bajo estas condiciones la celda asociada, está dada por

$$Eo(x_i) = Eo_i = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{2\Delta p_0}{u_0} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

donde  $\Delta p_0$  representa la pérdida de carga que depende del tamaño de la obstrucción y el flujo  $u_0$  que se encuentra en el ducto.

Finalmente para el caso de fugas puntuales en un punto  $x_i$  del ducto, como se muestra en la Figura 2.10.



**Figura 2.10:** Esquema ducto en presencia de fuga

la matriz puntual de interconexión de Chaudhry (1979)

$$Ef(x_i) = Ef_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -u_0/2p_0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

permite modelar el ducto como dos segmentos considerando porcentaje de fugas con respecto al gasto nominal del fluido.

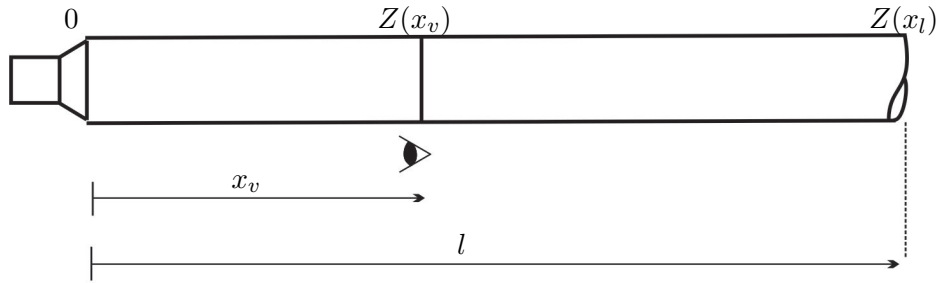
### 2.3. Matriz de transferencia del fluido en ductos segmentados

Cuando la onda acústica viaja en ductos con distintas propiedades o están formados por segmentos acoplados con elementos puntuales, se rompe la continuidad de la onda. Bajo estas condiciones, si se desea conocer el comportamiento de  $Z(x, t)$  a partir de las ecuaciones diferenciales parciales respectivas (2.18) y (2.19), el análisis resulta tedioso para algunas condiciones de frontera, aun con condiciones iniciales nulas. Sin embargo, es posible analizar la onda en puntos específicos de ducto derivando el modelo en función de matrices de transferencia de segmentos y acoplamientos puntuales. En estas condiciones el análisis del comportamiento de la onda sonora se puede simplificar considerando el modelo específico obtenido vía el álgebra de bloques en su forma matricial de los diversos segmentos espaciales  $M_j$  y las celdas puntuales de interconexión  $E_i$  respectivas.

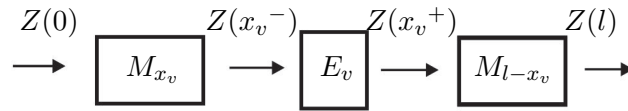
Para mostrar la simplicidad en la obtención del comportamiento de ondas sonoras en un punto  $x$  de una configuración modelada por medio de cuadripolos, se seleccionaron tres escenarios comunes. El de un ducto de dimensión finita con un punto de visualización  $x_v$ , el de un ducto de dimensión finita con una obstrucción  $x_{ob}$  y un punto de visualización aguas arriba de la obstrucción  $x_v$  y el caso general de  $n$  segmentos de un ducto de dimensión finita unidos a través de  $n - 1$  celdas puntuales.

Para analizar la evolución en el tiempo del comportamiento de  $Z(x_v)$  considerando señales de excitación y condiciones de frontera en el ducto y su aplicación al caso de fallas, en el siguiente capítulo se desarrolla un procedimiento computacional basado en la aproximación de las funciones trascendentes de la matrices  $M_{l_i}$  por medio de series.

### 2.3.1. Ducto de dimensión finita con punto de visualización



a) Esquema escenario nominal



b) Diagrama de bloques escenario nominal

**Figura 2.11:** Ducto dimensión finita con celda de visualización en  $x_i$

Consideré el escenario físico de un fluido en un ducto de dimensión  $l$  con un punto de visualización  $x_v$ , como se muestra en la Figura 2.11a. La condición impuesta por el punto de observación implica un modelo de dos cuadripolos  $M_v$  y  $M_{l-v}$  o segmentos continuos interconectados con la celda puntual de visualización (2.35). La Figura 2.11b describe la interconexión de los tres bloques. Por álgebra de bloques, la relación entre las presiones y velocidades en los extremos se obtiene multiplicando las tres matrices de transferencia que forman el sistema, es decir

$$Z(l) = M_{l-x_v} E_v M_{x_v} Z(0) = M_l Z(0) \quad (2.39)$$

denotada  $\mathcal{M}_l = M_l$ . Además, en el punto de observación el vector  $Z(x_v)$  satisface, tanto la relación con respecto a la fuente perturbadora  $Z(0)$

$$Z(x_v) = M_{x_v} Z(0) \quad (2.40)$$

como la relación con respecto al extremo del ducto  $l$

$$Z(x_v) = M_{l-x_v}^{-1} Z(l) \quad (2.41)$$

Dado que en el punto de visualización se satisfacen tanto (2.40) como (2.41), la matriz de transferencia

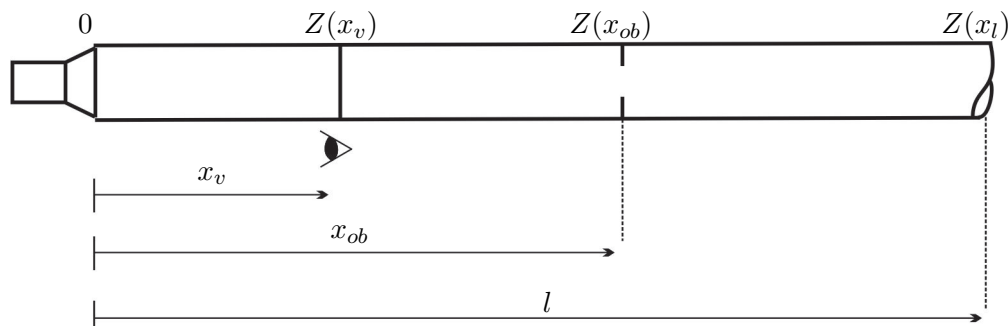
$$Z(x_v) = \frac{1}{2} (M_{x_v} Z(0) + M_{l-x_v}^{-1} Z(l)) \quad (2.42)$$

vincula el comportamiento de la onda en el punto de observación con cualquier condición de frontera  $Z(0)$  y  $Z(l)$ . Esta forma de expresar al vector  $Z(x_v)$  es muy

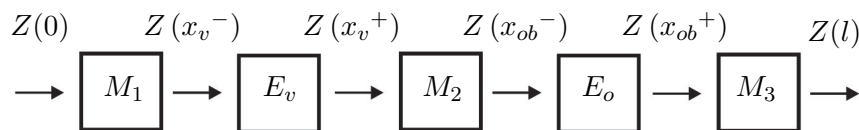
conveniente para determinar la señales sonoras que se desean maximizar o minimizar en el punto  $x_i$  como se verá en el siguiente capítulo.

### 2.3.2. Ducto de dimensión finita con obstrucción y punto de visualización

Consideré el escenario del ducto mostrado en al Figura 2.12 con su respectivo diagrama de bloques donde  $M_i$  son las matrices de transferencia de los tres sectores del ducto numeradas de izquierda a derecha y las dos celdas puntuales:  $E_v$  asociada al punto de observación  $x_v$  y  $E_o$  a la obstrucción en el punto  $x_{ob}$ .



a) Esquema de escenario con obstrucción



donde:  $M_1 = M_{x_v}$ ,  $M_2 = M_{x_{ob}-x_v}$ ,  $M_3 = M_{l-x_{ob}}$

b) Diagrama de bloques de escenario con obstrucción

**Figura 2.12:** Ducto de longitud  $l$  con una obstrucción en  $x_o$  y un sensor en  $x_v$

Por álgebra de bloques la relación entre  $Z(0)$  y  $Z(l)$  se puede escribir como

$$Z(l) = (M_3 E_o M_2 E_v M_1) Z(0) \quad (2.43)$$

y definir la matriz que vincula ambos extremos como  $\mathcal{M}_t = M_3 E_o M_2 E_v M_1$ .

Por otro lado, considerando como punto de interés  $x_v$ , el vector  $Z(x_v)$  puede expresarse en términos de las condiciones de frontera ya sea  $Z(0)$  o  $Z(l)$  o una combinación de ellas resultando

$$Z(x_v^-) = M_1 Z(0) \quad (2.44)$$

$$Z(x_v^+) = M_2^{-1} E_o^{-1} M_3^{-1} Z(l) \quad (2.45)$$

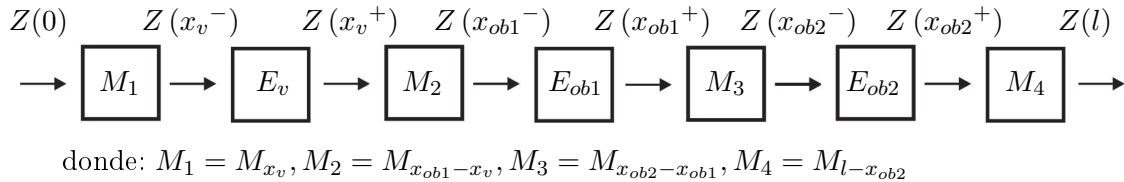
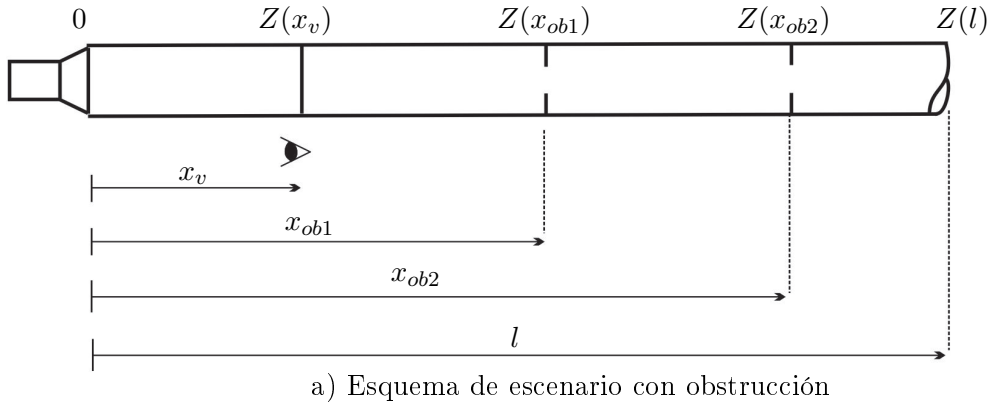
o simplemente

$$Z(x_v) = \frac{1}{2} (M_1 Z(0) + M_2^{-1} E_o^{-1} M_3^{-1} Z(l)) \quad (2.46)$$

Cualquiera de estas expresiones permite conocer el comportamiento de la onda  $Z(x_v)$  una vez que se hayan establecido las terminales del ducto y su relación vía  $\mathcal{M}_t$ . Por ejemplo, en el caso de considerar  $P(0)$  y  $U(l)$  como condiciones de frontera,  $U(0)$  se obtiene vía  $\mathcal{M}_t$ .

### 2.3.3. Ducto de dimensión finita con tres segmentos acoplados con celdas puntuales

Sea el ducto esquematizado en la Figura 2.13 con dos obstrucciones  $x_{ob1}$  y  $x_{ob2}$  y un punto de visualización  $x_v$  localizado aguas arriba de las obstrucciones, es decir, que la posición de la primera obstrucción satisface  $x_{ob1} > x_v$ .



b) Diagrama de bloques de escenario con dos obstrucción

**Figura 2.13:** Ducto de longitud  $l$  con dos obstrucciones y un punto de visualización

A partir de la representación en diagrama de bloques del ducto se tiene que las variables en los extremos del ducto están interconectados de acuerdo con

$$Z(l) = \mathcal{M}_t Z(0) \quad (2.47)$$

donde

$$\mathcal{M}_t := (M_4 E_{o2} M_3 E_{o1} M_2 E_v M_1) \quad (2.48)$$



De manera análoga a los ejemplos anteriores, dado que se supone que el punto de visualización satisface  $x_v < x_{o1}$  el vector  $Z(x_v)$  se puede escribir en función del vector  $Z(0)$  o  $Z(l)$  de forma a partir de álgebra de bloques

$$Z(x_v^-) = M_1 Z(0) \quad (2.49)$$

$$Z(x_v^+) = M_2 E_{o1}^{-1} M_3^{-1} E_{o2}^{-1} M_4^{-1} Z(l) \quad (2.50)$$

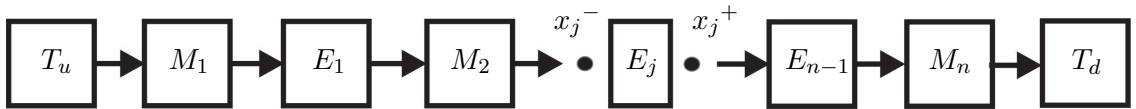
o simplemente

$$Z(x_v) = \frac{1}{2} (M_1 Z(0) + M_2^{-1} E_o^{-1} M_3^{-1} E_{o2}^{-1} M_4^{-1} Z(l)). \quad (2.51)$$

## 2.4. Observación de la onda sonora en un punto arbitrario

En los ejemplos anteriores se supuso el vector de variables de interés  $Z(x_{ob})$  a la izquierda, es decir, aguas arriba de todas las discontinuidades del fluido. A continuación se describe un procedimiento general para la obtención de la relación  $Z(x_{ob})$  en un ducto con  $n$  sectores y  $n - 1$  celdas con respecto a la fuente inicial  $Z(0)$  o final  $Z(l)$ , donde el punto de observación se encuentra en un punto arbitrario conocido. El diagrama de bloques de la Figura 2.14 ilustra este escenario y es el punto de partida donde se han incluido las terminales de los extremos del ducto  $T_u = Z(0)$  y  $T_d = Z(l)$  y el punto de observación  $x_j$  localizado entre el segmento  $j$  y  $j + 1$  con  $\hat{E}_j$  es la matriz unitaria que acopla ambos segmentos.

Para simplificar la notación se asocia el índice  $i$  a las celdas puntuales  $E$  de cualquier tipo localizadas entre el tramo  $i$  e  $i + 1$ .



**Figura 2.14:** Ducto de longitud  $l$  con punto arbitrario  $x_v$  de visualización

Consideraré el diagrama de bloques normalizado de la Figura 2.14 en donde las matrices de transferencia  $M_i$  corresponden a los ganancias de los tramos de ducto uniformes de longitud  $l_i$ , expresadas como

$$M_i = M(\gamma_i, l_i) \quad \text{para toda } i = 1, 2, \dots, n \quad (2.52)$$

con  $\sum_{i=1}^{i=n} l_i = l$ . Bajo estas consideraciones el siguiente procedimiento sintetiza los pasos para obtener la matriz de transferencia que relaciona  $Z(x_j) = Z(x_{ob})$  en términos de  $Z(0)$ , o  $Z(l)$  usando álgebra de cuádrupolos.

**Paso 1** Calcular la matriz de transferencia que relaciona la trayectoria directa de  $Z(0)$  hasta  $Z(l)$ , es decir obtener

$$\mathcal{M}_t = M_n \left( \prod_{i=n-1}^1 E_i M_i \right) = \begin{bmatrix} \mathcal{M}_{11} & \mathcal{M}_{12} \\ \mathcal{M}_{21} & \mathcal{M}_{22} \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

**Paso 2** Resolver el sistema de ecuaciones  $T_u = \mathcal{M}_t T_d$  a partir de las dos condiciones de frontera que caracterizan el escenario en cuestión, obteniendo así las dos funciones desconocidas respectivas impuestas por la configuración de los segmentos.

**Paso 3** Calcular las matrices de transferencias de  $M_1$  hasta  $\hat{E}_j$  y la de  $\hat{E}_j$  hasta  $M_n$  obteniendo tres operadores que relacionan las funciones de excitación  $Z(0)$  y  $Z(l)$  con el vector de observación  $Z(x_{ob})$ , resultan.

$$\begin{aligned} Z(x_{ob}) &= \hat{E}_j M_j E_{j-1} \dots E_1 M_1 Z(0) \\ Z(x_{ob}) &= \left( M_n E_{n-1} \dots E_{j+2} M_{j+1} \hat{E}_j \right)^{-1} Z(l) \\ Z(x_{ob}) &= \frac{\hat{E}_j M_j E_{j-1} \dots M_1}{2} Z(0) + \frac{\left( M_n E_{n-1} \dots M_{j+1} \hat{E}_j \right)^{-1}}{2} Z(l) \end{aligned}$$

Así, se puede seleccionar la relación más conveniente de las tres obtenidas para expresar el vector de observación en función de las condiciones de frontera consideradas.

Se hace notar que en el caso particular de un ducto cerrado, o sea,  $U(l) = 0$  y considerando una fuente de excitación de presión aguas arriba  $P(0) = F(s)$ , las condiciones en los extremos se reduce a

$$Z(0) = \begin{bmatrix} F(s) \\ -\mathcal{M}_{21}(\mathcal{M}_{22})^{-1}F(s) \end{bmatrix} \quad y \quad Z(l) = \begin{bmatrix} (\mathcal{M}_{11} - \mathcal{M}_{12}\mathcal{M}_{21}(\mathcal{M}_{22})^{-1})F(s) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

# Análisis de una perturbación acústica en un ducto

---

En este capítulo se analiza el comportamiento en función del tiempo de una onda de presión acústica en un punto  $x_v$  ubicado aguas abajo del origen del ducto para cuatro escenarios distintos. Para el desarrollo se estudia el caso del ducto sin absorción tanto en ausencia como en presencia de diferentes discontinuidades del fluido, tales como reducciones y obstrucciones, a partir de las matrices de transferencia correspondientes en cada caso.

## 3.1. Consideraciones Generales

Como caso particular a lo largo del análisis se considera un ducto  $l = 10[m]$  de longitud, con un fluido cuya densidad está dada por  $\rho_0 = 1[Kg/m^3]$  y una velocidad de propagación  $c = 1[m/s]$ . Esta última consideración tiene como objeto simplificar el estudio, es decir, cada segundo que viaje la onda implicará un desplazamiento de un metro recorrido por la onda. Para los diferentes casos de estudio se considera que el ducto tiene una fuente de presión  $P(0)$  en la posición  $x = 0$ , la cual excita al sistema con un pulso cuadrado de duración  $a = 0.5[s]$  y amplitud  $A = 1[Pa]$ . El punto de visualización se encuentra localizado en la posición  $x_v = 1[m]$  aguas abajo de la posición de la señal de excitación. En el extremo del ducto  $x = l$  se considera una terminación rígida, por lo que las condiciones de frontera en el dominio de Laplace están dadas por

$$P(0) = A \left( \frac{1}{s} - \frac{e^{-sa}}{s} \right) \quad U(l) = 0 \quad (3.1)$$

A partir de estas dos condiciones de fronteras se determinan las condiciones de frontera restantes,  $P(l), U(0)$ , con la ayuda de la matriz de transferencia  $\mathcal{M}_t$  correspondientes para cada caso de estudio. Para realizar el análisis en tiempo se sustituyen las

funciones hiperbólicas por su equivalente en exponenciales considerando las relaciones de Euler

$$\sinh(\gamma l) = \frac{1}{2}(e^{l\gamma} - e^{-l\gamma}), \quad \cosh(\gamma l) = \frac{1}{2}(e^{l\gamma} + e^{-l\gamma}) \quad (3.2)$$

Para los diferentes escenarios, se tiene que la presión acústica en el punto  $x_v$  tiene la forma general dada por

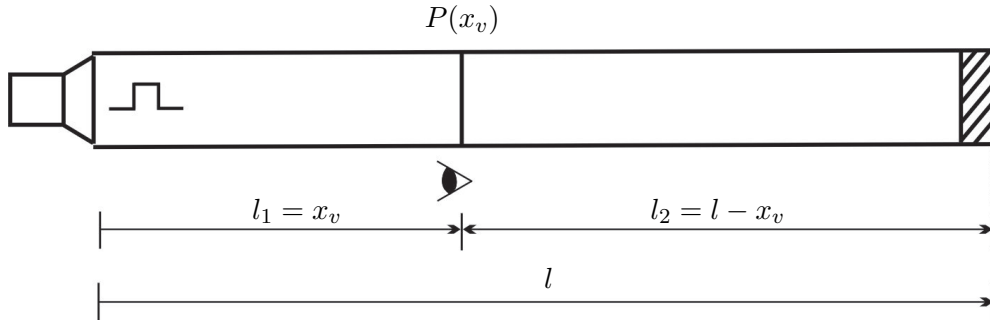
$$P(x_v, s) = \frac{\Upsilon}{(\Omega + \kappa)} = \Upsilon \Omega^{-1} (1 + \kappa)^{-1} \quad (3.3)$$

donde la función  $(1 + \kappa)^{-1}$  puede expresarse por medio de una serie binomial, tomado de (Bronshtein *et al.*, 2007)

$$(1 \pm \kappa)^{-1} = 1 \mp \kappa + \kappa^2 \mp \kappa^3 + \kappa^4 \mp \dots \quad (3.4)$$

### 3.2. Respuesta de presión acústica para un ducto nominal

Considere el esquema de la Figura 3.1 donde se tiene un ducto de longitud  $l$ , con condiciones de fronteras dadas por la ecuación (3.1) y dos secciones de ducto interconectadas con un punto de visualización  $x_v$ .



**Figura 3.1:** Esquema ducto nominal con terminación rígida

De acuerdo con esta configuración, es necesario obtener  $\mathcal{M}_t$ , la cual representa la matriz de transferencia total para un ducto en condiciones nominales, dada por (2.39),

$$\mathcal{M}_t = \begin{bmatrix} \cosh((l_1 + l_2)\gamma) & -\mu \sinh((l_1 + l_2)\gamma) \\ -\frac{1}{\mu} \sinh((l_1 + l_2)\gamma) & \cosh((l_1 + l_2)\gamma) \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

donde  $\gamma = s, \mu = \rho_0 c$ . Por tanto utilizando (2.54) se obtienen las condiciones de frontera restantes,  $U(0), P(l)$  que están dadas por

$$Z(0) = \begin{bmatrix} P(0) \\ \frac{1}{\mu} \tanh(\gamma l) P(0) \end{bmatrix} \quad y \quad Z(l) = \begin{bmatrix} (\cosh(\gamma l) - \tanh(\gamma l) \sinh(\gamma l)) P(0) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Así, sustituyendo (3.6) en la ecuación (2.42), se obtiene el comportamiento de la presión acústica en el punto de visualización  $x_v$

$$P(x_v) = \frac{\cosh(l_2 s)}{\cosh(l_1 + l_2)s} P(0) \quad (3.7)$$

Considerando las relaciones de Euler (3.2) en la ecuación (3.7), se obtiene

$$P(x_v) = \frac{e^{l_2 s} + e^{-l_2 s}}{e^{(l_1+l_2)s} + e^{-(l_1+l_2)s}} P(0) \quad (3.8)$$

equivalente a

$$P(x_v) = e^{-l_1 s} (1 + e^{-2l_2 s}) (1 + e^{-2(l_1+l_2)s})^{-1} P(0) \quad (3.9)$$

aproximando la función  $(1 + e^{-2(l_1+l_2)s})^{-1}$ , por medio de una serie binomial (3.4), tomando los primeros cuatro términos de la serie, se tiene

$$P(x_v) \cong e^{-l_1 s} (1 + e^{-2l_2 s}) \left( 1 - e^{-2(l_1+l_2)s} + e^{-4(l_1+l_2)s} - e^{-6(l_1+l_2)s} + \dots \right) \left( \frac{1}{s} - \frac{e^{-sa}}{s} \right) \quad (3.10)$$

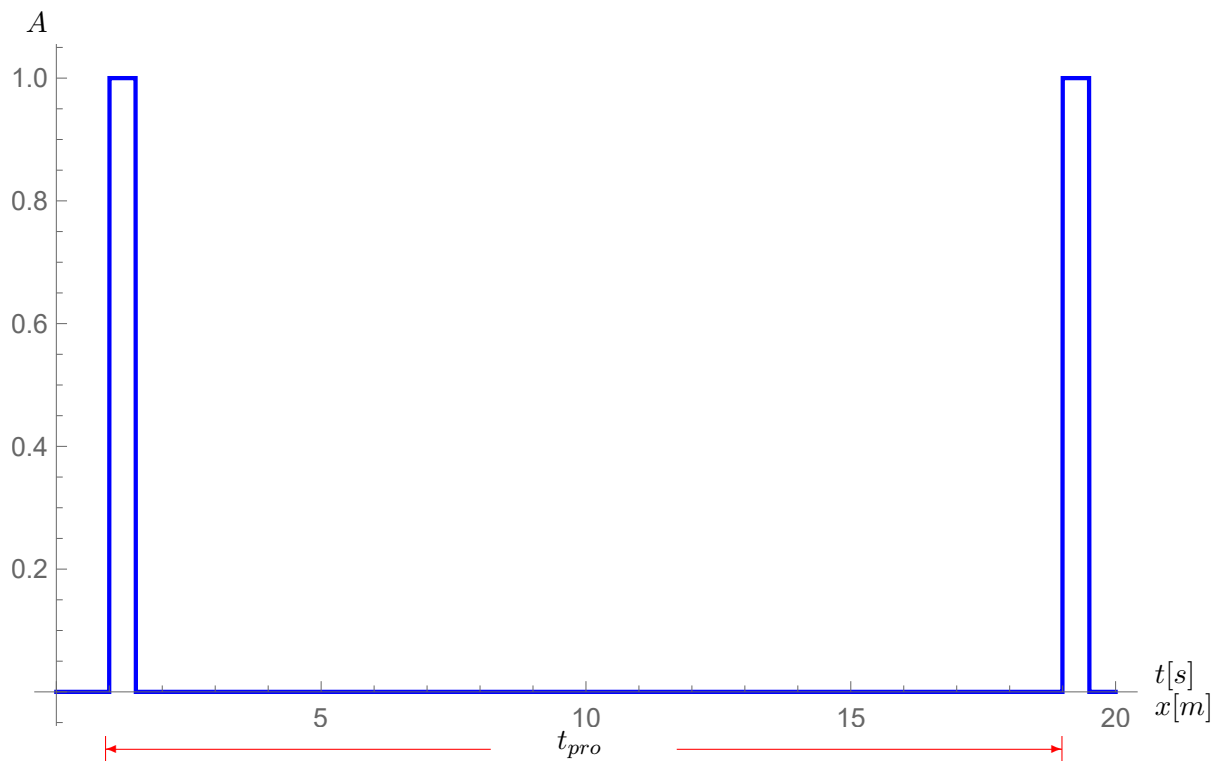
la cual desarrollando se reduce

$$P(x_v) \cong \left( \frac{1}{s} - \frac{e^{-sa}}{s} \right) (e^{-l_1 s} + e^{-l_1 s - 2l_2 s} + e^{-l_1 s - 6(l_1+l_2)s} + e^{-l_1 s - 8(l_1+l_2)s} - e^{-l_1 s - 2l_2 s} - e^{-l_1 s - 2l_2 s - 2(l_1+l_2)s} - e^{-l_1 s - 2l_2 s - 6(l_1+l_2)s} - \dots) \quad (3.11)$$

Transformando cada término de la sumatoria al dominio del tiempo, la presión acústica toma la forma de una sumatoria de funciones escalón con corrimientos de tiempo, dado por

$$\begin{aligned} p(x_v, t) = & \mathcal{U}(t - l_1) - \mathcal{U}(t - l_1 - a) + \mathcal{U}(t - 9l_1 - 10l_2) - \mathcal{U}(t - 7l_1 - 8l_2) \\ & + \mathcal{U}(t - 5l_1 - 6l_2) - \mathcal{U}(t - 3l_1 - 4l_2) + \mathcal{U}(t - l_1 - 2(l_2 + l_1)) \\ & + \mathcal{U}(t - l_1 - 8(l_1 + l_2)) - \mathcal{U}(t - l_1 - 6(l_1 + l_2)) + \mathcal{U}(t - l_1 - 4(l_1 + l_2)) \\ & - \mathcal{U}(t - l_1 - 2(l_1 + l_2)) - \mathcal{U}(t - a - 9l_1 - 10l_2) + \mathcal{U}(t - a - 7l_1 - 8l_2) \\ & - \mathcal{U}(t - a - 5l_1 - 6l_2) + \mathcal{U}(t - a - 3l_1 - 4l_2) - \mathcal{U}(t - a - l_1 - 8(l_1 + l_2)) \\ & + \mathcal{U}(t - a - l_1 - 6(l_1 + l_2)) - \mathcal{U}(t - a - l_1 - 4(l_1 + l_2)) \\ & + \mathcal{U}(t - a - l_1 - 2(l_1 + l_2)) \end{aligned} \quad (3.12)$$

donde  $\mathcal{U}(\cdot)$  denota la función escalón. En la Figura 3.2 se muestra el comportamiento de la presión acústica  $P(x_v)$  en el dominio del tiempo, considerando los siguientes parámetros  $l_1 = 1[m]$ ,  $l_2 = 9[m]$ ,  $a = 0.5[s]$



**Figura 3.2:** Presión acústica en el punto de visualización  $x_v$

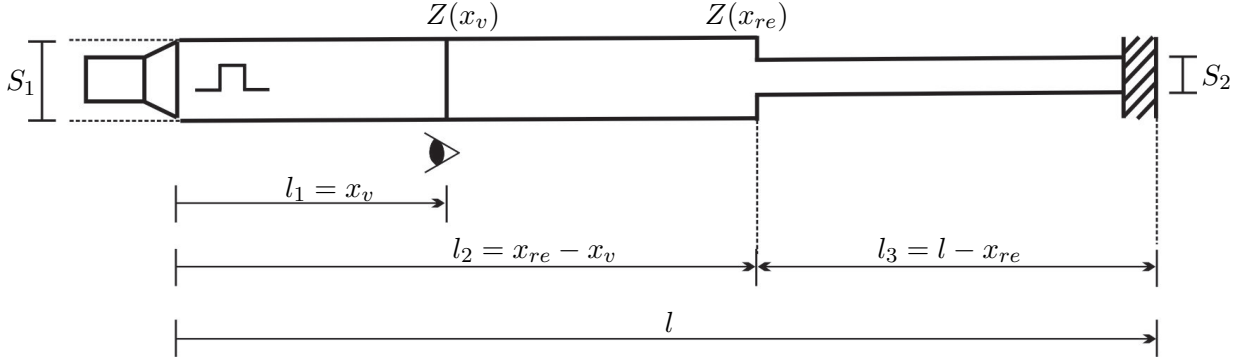
De la Figura 3.2 se observa el comportamiento de la presión acústica  $P(x_v)$ , donde el efecto de la perturbación se manifiesta como un tren de pulso, el cual está desfasado un segundo. El periodo del tren de pulso corresponde al tiempo que tarda el frente de onda en propagarse a lo largo de todo el ducto y reflejarse al punto de visualización  $x_v$ , dado por  $t_{pro} = 2(l - l_1) + 2a$ , donde la distancia recorrida por la perturbación está dada por  $x_{des} = (t_{prog}/2) + a$ , la cual corresponde a la posición del final del ducto; para este caso se tiene que  $t_{pro} = 19[s]$  y  $x_{des} = 10[m]$ . Este hecho coincide con los resultados reportados en los libros de acústica de [Kinsler \*et al.\* \(1999\)](#) y [Blackstock \(2000\)](#).

Dado a que los efectos de absorción no son considerados, el tren de pulsos se mantiene.

### 3.3. Respuesta de presión acústica en un ducto con una reducción de área

Considere el esquema de la Figura 3.3 donde se tiene un ducto de longitud  $l$ , con condiciones de fronteras dadas por la ecuación (3.1) y tres secciones de ducto interconectadas. En particular se considera que las primeras dos secciones tiene un área transversal

$S_1 = 1[m]$  y la tercera sección del ducto tiene una área transversal  $S_2 = 0.5[m]$ , un punto de visualización  $x_v$  y una reducción de área localizada en la posición  $x_{re}$ .



**Figura 3.3:** Esquema ducto con terminación rígida en presencia de una reducción de área

De acuerdo con esta configuración es necesario obtener la matriz de transferencia total  $\mathcal{M}_t$ , la cual representa la matriz de transferencia de un ducto en presencia de una reducción de área transversal, dada por 2.53

$$\mathcal{M}_t = \begin{bmatrix} \mathcal{M}_{11} & \mathcal{M}_{12} \\ \mathcal{M}_{21} & \mathcal{M}_{22} \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

donde los elementos de la matriz  $\mathcal{M}_t$  están dados por

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{11} &= \frac{(S_2 - S_1) \cosh((l_1 + l_2 - l_3)\gamma) + (S_1 + S_2) \cosh((l_1 + l_2 + l_3)\gamma)}{2S_2} \\ \mathcal{M}_{12} &= \frac{\mu(S_1 - S_2) \sinh((l_1 + l_2 - l_3)\gamma) - (S_1 + S_2) \sinh((l_1 + l_2 + l_3)\gamma)}{2S_2} \\ \mathcal{M}_{21} &= \frac{(S_1 - S_2) \sinh((l_1 + l_2 - l_3)\gamma) - (S_1 + S_2) \sinh((l_1 + l_2 + l_3)\gamma)}{2\mu S_2} \\ \mathcal{M}_{22} &= \frac{(S_1 - S_2) \cosh((l_1 + l_2 - l_3)\gamma) + (S_1 + S_2) \cosh((l_1 + l_2 + l_3)\gamma)}{2S_2} \end{aligned} \quad (3.14)$$

donde  $\gamma = s$ ,  $\mu = \rho_0 c$ . A partir de (3.13) y utilizando (2.54) se obtienen las condiciones de frontera restantes,  $U(0)$ ,  $P(l)$ , resultando

$$U(0) = \frac{P(0)[(S_1 - S_2) \sinh((l_1 + l_2 - l_3)s) + (S_1 + S_2) \sinh((l_1 + l_2 + l_3)s)]}{\mu[(S_1 - S_2) \cosh((l_1 + l_2 - l_3)s) + (S_1 + S_2) \cosh((l_1 + l_2 + l_3)s)]} \quad (3.15)$$

$$P(l) = \frac{2S_1 P(0)}{(S_1 - S_2) \cosh((l_1 + l_2 - l_3)s) + (S_1 + S_2) \cosh((l_1 + l_2 + l_3)s)} \quad (3.16)$$

Por tanto, sustituyendo (3.15) y (3.16) en la ecuación (2.53), se obtiene el comportamiento de la presión acústica en un punto de visualización  $x_v$ , entonces se reduce

$$P(x_v) = \frac{num}{den} P(0) \quad (3.17)$$

donde

$$num = S_1 \cosh(l_2 s) \cosh(l_3 s) + S_2 \sinh(l_2 s) \sinh(l_3 s) \quad (3.18)$$

$$den = \sinh(l_1 s)(S_1 \cosh(l_3 s) \sinh(l_2 s) + S_2 \cosh(l_2 s) \sinh(l_3 s)) + \cosh(l_1 s)(S_1 \cosh(l_2 s) \cosh(l_3 s) + S_2 \sinh(l_2 s) \sinh(l_3 s)) \quad (3.19)$$

Considerando las relaciones de Euler (3.2) en la ecuación (3.17), se obtiene

$$P(x_v) = \frac{e^{-l_1 s}((1 + e^{-2l_2 s})(1 + e^{-2l_3 s})S_1 + (1 - e^{-2l_2 s})(1 - e^{-2l_3 s})S_2)}{(1 + e^{-2(l_1+l_2)s})(1 + e^{-2l_3 s})S_1 + (1 - e^{-2(l_1+l_2)s})(1 - e^{-2l_3 s})S_2} P(0) \quad (3.20)$$

o equivalente

$$P(x_v) = e^{-l_1 s}((1 + e^{-2l_2 s})(1 + e^{-2l_3 s})S_1 + (1 - e^{-2l_2 s})(1 - e^{-2l_3 s})S_2) ((1 + e^{-2(l_1+l_2)s})(1 + e^{-2l_3 s})S_1)^{-1} (1 + \kappa)^{-1} P(0) \quad (3.21)$$

donde  $\kappa = (1 - e^{-2(l_1+l_2)s})(1 - e^{-2l_3 s})S_2 / ((1 + e^{-2(l_1+l_2)s})(1 + e^{-2l_3 s})S_1)$ , aproximando la función  $\kappa$  puede expresarse por medio de una serie binomial (3.4), tomando los primeros cuatro términos de la serie, se tiene

$$P(x_v) \cong \left( \frac{1}{s} - \frac{e^{-sa}}{s} \right) e^{-l_1 s} ((1 + e^{-2l_2 s})(1 + e^{-2l_3 s})S_1 + (1 - e^{-2l_2 s})(1 - e^{-2l_3 s})S_2) (S_1^4 - e^{-12(l_1+l_2+l_3)s} (1 - e^{2(l_1+l_2)s})^2 (1 + e^{4(l_1+l_2)s} + e^{8(l_1+l_2)s}) (1 - e^{2l_3 s})^2 (1 + e^{4(l_1+l_2)s} + e^{8(l_1+l_2)s}) (1 - e^{2l_3 s})^2 (1 + e^{4l_3 s} + e^{8l_3 s})) S_1^3 S_2 + e^{-24(l_1+l_2+l_3)s} ((1 - e^{-2(l_1+l_2)s})^4 (1 + e^{4(l_1+l_2)s} + e^{8(l_1+l_2)s})^2) (1 - e^{2l_3 s})^4 (1 + e^{4l_3 s} + e^{8l_3 s})^2 S_1^2 S_2^2 + \dots \quad (3.22)$$

la cual al desarrollarse, se tiene



$$\begin{aligned}
 P(x_v) \cong & \frac{1}{S_1} e^{-l_1 s} (1 - e^{-10(l_1+l_2)s} + e^{-8(l_1+l_2)s} - e^{-6(l_1+l_2)s} + e^{-4(l_1+l_2)s} - e^{-2(l_1+l_2)s}) \\
 & (1 - e^{-10l_3 s} + e^{-8l_3 s} - e^{-6l_3 s} + e^{-4l_3 s} - e^{-2l_3 s}) ((1 + e^{-2l_2 s})(1 + e^{-2l_3 s}) S_1 + \\
 & (1 - e^{-2l_2 s})(1 - e^{-2l_3 s}) S_2) (1 - (1 - e^{-2(l_1+l_2)s})(1 - e^{-10(l_1+l_2)s} + e^{-8(l_1+l_2)s} \\
 & - e^{-6(l_1+l_2)s} + e^{-4(l_1+l_2)s} - e^{-2(l_1+l_2)s})(1 - e^{-2l_3 s})(1 - e^{-10l_3 s} + e^{-8l_3 s} - e^{-6l_3 s} \\
 & + e^{-4l_3 s} - e^{-2l_3 s}) \left( \frac{S_2}{S_1} \right)) + (1 - e^{-2(l_1+l_2)s})^2 (1 - e^{-10(l_1+l_2)s} + e^{-8(l_1+l_2)s} - \\
 & - e^{-6(l_1+l_2)s} + e^{-4(l_1+l_2)s} - e^{-2(l_1+l_2)s})^2 (1 - e^{-2l_3 s})^2 (1 - e^{-10l_3 s} + e^{-8l_3 s} \\
 & - e^{-6l_3 s} + e^{-4l_3 s} - e^{-2l_3 s})^2 \left( \frac{S_2}{S_1} \right)^2 - \dots
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

Al transformarse cada término de la sumatoria al dominio del tiempo, la presión acústica toma la forma de una sumatoria de funciones escalón con corrimientos de tiempo, dado por

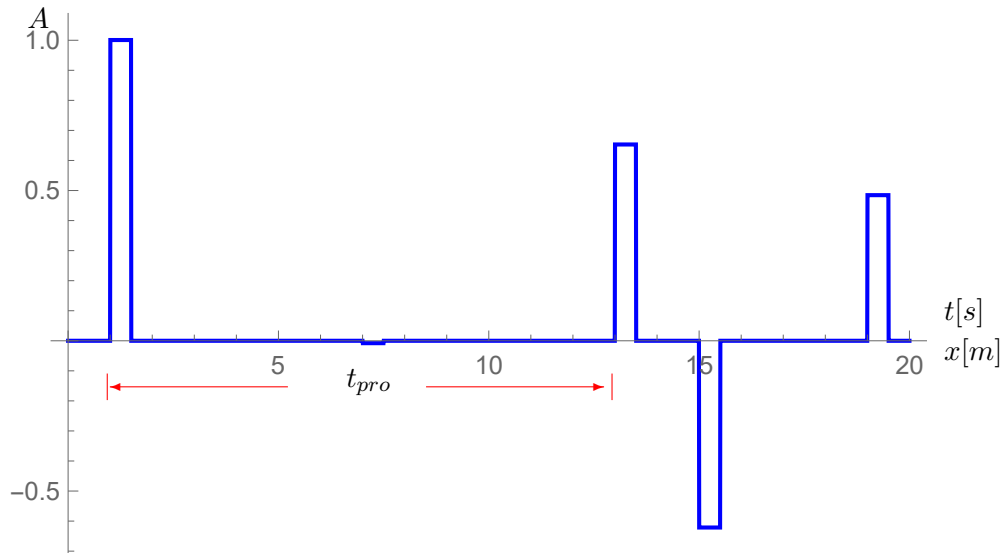
$$\begin{aligned}
 p(x_v, t) \cong & \frac{1}{S_1} \left[ -\frac{90S_2^5}{S_1^4} \mathcal{U}(t - l_1 - 2l_2 - 2(l_1 + l_2) - 2l_3) + \frac{128S_2^4}{S_1^3} \mathcal{U}(t - l_1 - 2l_2 - 2(l_1 \right. \\
 & + l_2) - 2l_3) - \frac{72S_2^3}{S_1^2} \mathcal{U}(t - l_1 - 2l_2 - 2(l_1 + l_2) - 2l_3) + \frac{32S_2^2}{S_1} \mathcal{U}(t - l_1 - 2l_2 - \\
 & 2(l_1 + l_2) - 2l_3) - 8S_2 \mathcal{U}(t - l_1 - 2l_2 - 2(l_1 + l_2) - 2l_3) + \frac{90S_2^5}{S_1^4} \mathcal{U}(t - l_1 - 2(l_1 \\
 & + l_2) - 2l_3) + \frac{16S_2^4}{S_1^3} \mathcal{U}(t - l_1 - 2(l_1 + l_2) - 2l_3) - \frac{12S_2^3}{S_1^2} \mathcal{U}(t - l_1 - 2(l_1 + l_2) \\
 & - 2l_3) + \frac{8S_2^2}{S_1} \mathcal{U}(t - l_1 - 2(l_1 + l_2) - 2l_3) - 4S_2 \mathcal{U}(t - l_1 - 2(l_1 + l_2) - 2l_3) + \\
 & \frac{410S_2^5}{S_1^4} \mathcal{U}(t - l_1 - 2l_2 - 4(l_1 + l_2) - 2l_3) - \frac{528S_2^4}{S_1^3} \mathcal{U}(t - l_1 - 2l_2 - 4(l_1 + l_2) \\
 & - 2l_3) + \dots + \mathcal{U}(t - l_1) \left. \right] - \frac{1}{S_1} \left[ -\frac{90S_2^5}{S_1^4} \mathcal{U}(t - l_1 - 2l_2 - 2(l_1 + l_2) - 2l_3 - a) + \right. \\
 & \frac{128S_2^4}{S_1^3} \mathcal{U}(t - l_1 - 2l_2 - 2(l_1 + l_2) - 2l_3 - a) - \frac{72S_2^3}{S_1^2} \mathcal{U}(t - l_1 - 2l_2 - 2(l_1 + \\
 & l_2) - 2l_3 - a) + \frac{32S_2^2}{S_1} \mathcal{U}(t - l_1 - 2l_2 - 2(l_1 + l_2) - 2l_3 - a) - 8S_2 \mathcal{U}(t - l_1 - 2l_2 \\
 & \left. - 2(l_1 + l_2) - 2l_3 - a) + \dots + \mathcal{U}(t - l_1 - a) \right]
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

A continuación se muestra el comportamiento de la presión acústica  $P(x_v)$  en el dominio del tiempo en presencia de una reducción en diferentes posiciones a lo largo del ducto. En la Figura 3.4 se muestra el comportamiento de la presión acústica  $P(x_v)$

### 3. ANÁLISIS DE UNA PERTURBACIÓN ACÚSTICA EN UN DUCTO

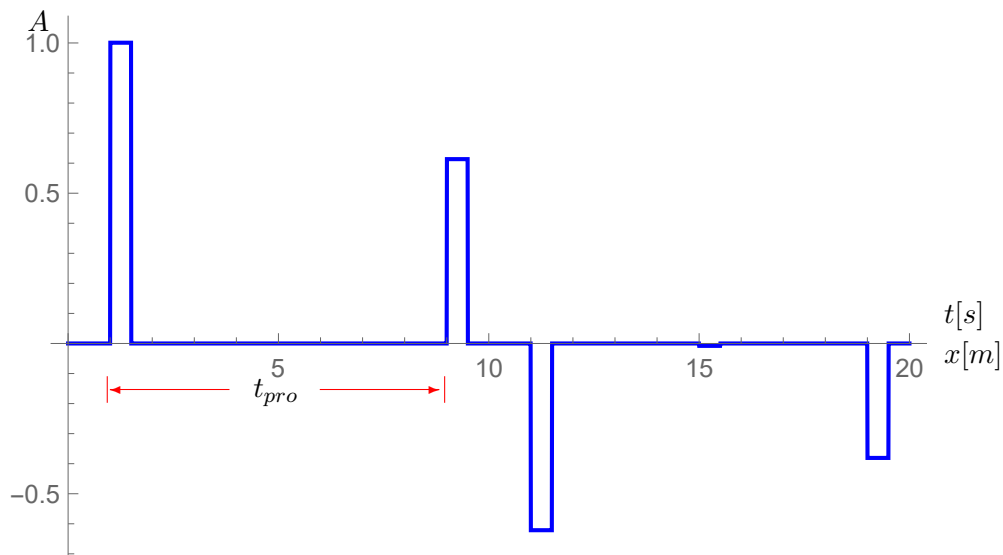
---

en presencia de una reducción de área localizada en  $x_{re} = 7[m]$  con  $l_1 = 1[m], l_2 = 6[m], l_3 = 3[m]$



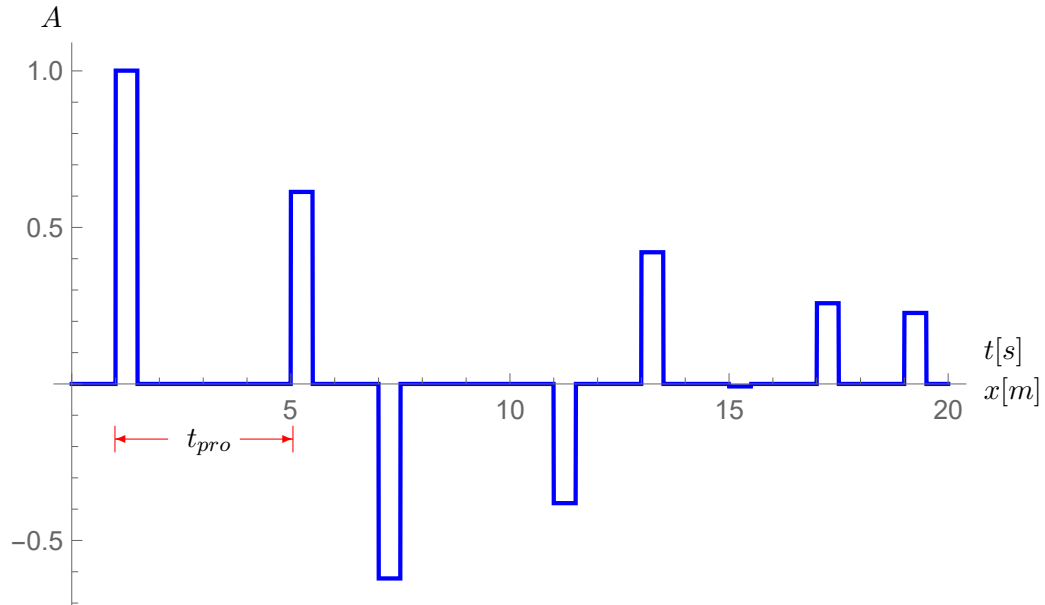
**Figura 3.4:** Presión acústica en un punto de visualización  $x_v$  ante una reducción a 7m

En la Figura 3.5 se muestra el comportamiento de la presión acústica  $P(x_v)$  en presencia de una reducción de área localizada en  $x_{re} = 5[m]$  con  $l_1 = 1[m], l_2 = 4[m], l_3 = 5[m]$



**Figura 3.5:** Presión acústica en un punto de visualización  $x_v$  ante una reducción a 5m

En la Figura 3.6 se muestra el comportamiento de la presión acústica  $P(x_v)$  en presencia de una reducción de área localizada en  $x_{re} = 3[m]$  con  $l_1 = 1[m]$ ,  $l_2 = 2[m]$ ,  $l_3 = 7[m]$



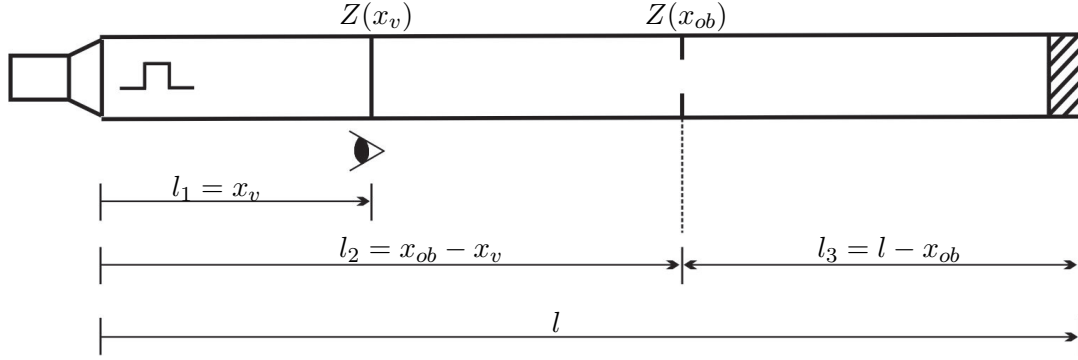
**Figura 3.6:** Presión acústica en un punto de visualización  $x_v$  ante una reducción a 3m

De las Figuras 3.4 a 3.6 se observa que la presión acústica  $P(x_v, t)$  se atenúa, a pesar de que los efectos de la absorción fueron despreciados. Esto se debe a que la reducción de área actúa como un elemento disipador, de manera que la onda de presión se desvanece cuando el tiempo tiende a infinito.

Comparando las Figuras 3.4 a 3.6, el efecto que tiene la discontinuidad en la presión acústica, que mientras más cercana al punto de visualización se encuentre la discontinuidad como se muestra en la Figura 3.6, los efectos de múltiples reflexiones se hacen presentes, a medida de que la discontinuidad se aleja del punto de visualización  $P(x_v)$  como se muestra en las Figuras 3.4 y 3.5, donde se observa que los efectos de múltiples reflexiones desaparecen, siendo más fácil localizar la posición de la discontinuidad. Se tiene que el tiempo que tarda el frente de onda en propagarse y reflejarse de la discontinuidad al punto de visualización  $P(x_v)$ , pese a las múltiples reflexiones, está dado por  $t_{prog} = 2(x_{re} - x_v) + 2a$ , donde la distancia recorrida por la perturbación está dada por  $x_{des} = (t_{prog}/2) + a$ , la cual corresponde a la posición donde se encuentran localizadas las discontinuidades, para el caso de la Figura 3.4, se tiene que  $t_{prog} = 13[s]$  y  $x_{des} = 7[m]$ , para el caso de la Figura 3.5, se tiene que  $t_{prog} = 9[s]$  y  $x_{des} = 5[m]$ , finalmente para el caso de la Figura 3.6 se tiene que  $t_{prog} = 5[s]$  y  $x_{des} = 3[m]$ , cabe señalar que el primer frente de onda que se percibe nos proporciona información suficiente para poder localizar la posición de la discontinuidad.

### 3.4. Respuesta de presión acústica en un ducto con una obstrucción

Considere el esquema de la Figura 3.7 donde se tiene un ducto de longitud  $l$ , con condiciones de fronteras dadas por la ecuación (3.1), tres secciones de ducto interconectadas, un punto de visualización  $x_v$  y una obstrucción en la posición  $x_{ob}$ .



**Figura 3.7:** Esquema ducto con terminación rígida en presencia de una obstrucción

De acuerdo con esta configuración es necesario obtener  $\mathcal{M}_t$ , la cual representa la matriz de transferencia de un ducto en presencia de una obstrucción, dada por 2.43.

$$\mathcal{M}_t = \begin{bmatrix} \mathcal{M}_{11} & \mathcal{M}_{12} \\ \mathcal{M}_{21} & \mathcal{M}_{22} \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

donde los elementos de la matriz  $\mathcal{M}_t$  están dados por

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{11} &= \cosh((l_1 + l_2 + l_3)\gamma) + \frac{F(\sinh((l_1 + l_2 - l_3)\gamma) + \sinh((l_1 + l_2 + l_3)\gamma))}{2\mu} \\ \mathcal{M}_{12} &= \frac{1}{2}(-F \cosh((l_1 + l_2 - l_3)\gamma) - F \cosh((l_1 + l_2 + l_3)\gamma) - 2\mu \sinh((l_1 + l_2 + l_3)\gamma)) \\ \mathcal{M}_{21} &= -\frac{F \cosh((l_1 + l_2 + l_3)\gamma) - F \cosh((l_1 + l_2 - l_3)\gamma) + 2\mu \sinh((l_1 + l_2 + l_3)\gamma)}{2\mu^2} \\ \mathcal{M}_{22} &= \cosh((l_1 + l_2 + l_3)\gamma) + \frac{F(-\sinh((l_1 + l_2 - l_3)\gamma) + \sinh((l_1 + l_2 + l_3)\gamma))}{2\mu} \end{aligned} \quad (3.26)$$

donde  $F = 2\Delta p_0/u_0$ ,  $\gamma = s$ ,  $\mu = \rho_0 c$ . A partir de (3.25) y utilizando (2.54), se obtienen las condiciones de frontera restantes,  $U(0)$ ,  $P(l)$

$$U(0) = \frac{-F \cosh((l_1 + l_2 - l_3)s) - F \cosh((l_1 + l_2 + l_3)s) - 2\mu \sinh((l_1 + l_2 + l_3)s)P(0)}{\mu(2\mu \cosh((l_1 + l_2 + l_3)s) + F(\sinh((l_1 + l_2 + l_3)s) - \sinh((l_1 + l_2 - l_3)s)))} \quad (3.27)$$

$$P(l) = \frac{P(0)}{\cosh((l_1 + l_2 + l_3)s) + F(\sinh((l_1 + l_2 + l_3)s) - \sinh((l_1 + l_2 - l_3)s))} \quad (3.28)$$

Por tanto, sustituyendo (3.27), (3.28) en la ecuación (2.42), se obtiene el comportamiento de la presión acústica en un punto de visualización  $x_v$ , se reduce

$$P(x_v) = \frac{num}{den} P(0) \quad (3.29)$$

donde

$$num = 2P(0)(\cosh(l_2)s(F \sinh(l_3)s + \mu \cosh(l_3)s) + \mu \sinh(l_2)s \sinh(l_3)s) \quad (3.30)$$

$$den = F(\sinh((l_1 + l_2 + l_3)s) - \sinh((l_1 + l_2 - l_3)s)) + 2\mu \cosh((l_1 + l_2 + l_3)s) \quad (3.31)$$

Considerando las relaciones de Euler (3.2) en la ecuación (3.29), se obtiene

$$P(x_v) = \frac{e^{-l_1 s} (F(1 + e^{-2l_2 s})(1 - e^{-2l_3 s}) + 2\mu(1 + e^{-2(l_2 + l_3)s}))}{F(1 - e^{-2l_3 s})(1 + e^{-2(l_1 + l_2)s}) + \mu(1 + e^{-2(l_1 + l_2 + l_3)s})} P(0) \quad (3.32)$$

o equivalente

$$P(x_v) = e^{-l_1 s} \left( F(1 + e^{-2l_2 s})(1 - e^{-2l_3 s}) + 2\mu(1 + e^{-2(l_2 + l_3)s}) \right) \left( F(1 - e^{-2l_3 s})(e^{-2(l_1 + l_2)s} + 1) \right)^{-1} (1 + \kappa)^{-1} P(0) \quad (3.33)$$

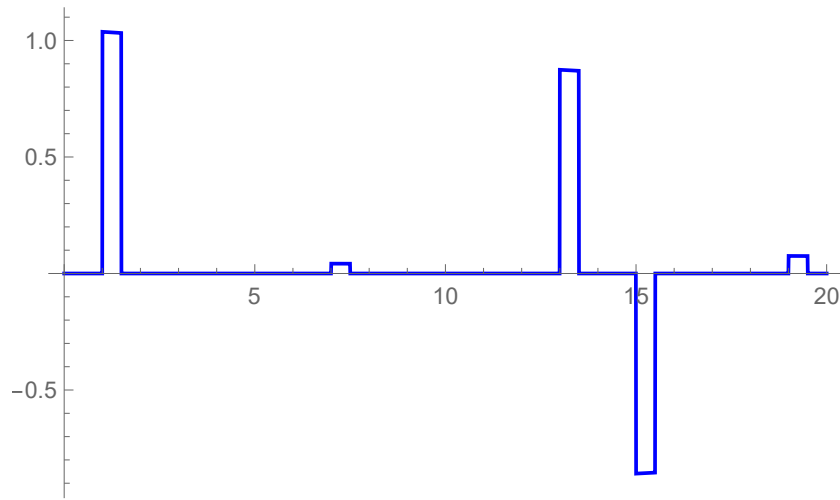
donde  $\kappa = \mu(1 + e^{-2(l_1 + l_2 + l_3)s}) / F(1 - e^{-2l_3 s})(1 + e^{-2(l_1 + l_2)s})$ , aproximando la función  $\kappa$  por medio de una serie binomial (3.4), tomando los primeros cuatro términos de la serie, se tiene

$$\begin{aligned} P(x_v) \cong & \frac{1}{F^4} (F^4 - (1 + e^{-8(l_1 + l_2)s} - e^{-6(l_1 + l_2)s} + e^{-4(l_1 + l_2)s} - e^{-2(l_1 + l_2)s})(1 + e^{-8l_3s} \\ & + e^{-6l_3s} + e^{-4l_3s} + e^{-2l_3s})(1 + e^{-2l_2s})(1 - e^{-2l_3s})F + 2(1 + e^{-2(l_2 + l_3)s})\mu) \\ & (F^4 - (1 + e^{-8(l_1 + l_2)s} - e^{-6(l_1 + l_2)s} + e^{-4(l_1 + l_2)s} - e^{-2(l_1 + l_2)s})(1 + e^{-8l_3s} \\ & + e^{-6l_3s} + e^{-4l_3s} + e^{-2l_3s})(1 + e^{-2(l_1 + l_2 + l_3)s})F^3\mu + (1 + e^{-8(l_1 + l_2)s} \\ & - e^{-6(l_1 + l_2)s} + e^{-4(l_1 + l_2)s} - e^{-2(l_1 + l_2)s})^2(1 + e^{-8l_3s} + e^{-6l_3s} + e^{-4l_3s} \\ & + e^{-2l_3s})^2(1 + e^{-2(l_1 + l_2 + l_3)s})^2 F^2 \mu^2 - (1 + e^{-8(l_1 + l_2)s} - e^{-6(l_1 + l_2)s} \\ & + e^{-4(l_1 + l_2)s} - e^{-2(l_1 + l_2)s})^3(1 + e^{-8l_3s} + e^{-6l_3s} + e^{-4l_3s} + e^{-2l_3s})^3 F \mu^3 + \\ & (1 + e^{-8(l_1 + l_2)s} - e^{-6(l_1 + l_2)s} + e^{-4(l_1 + l_2)s} - e^{-2(l_1 + l_2)s})^4(1 + e^{-8l_3s} + e^{-6l_3s} \\ & + e^{-4l_3s} + e^{-2l_3s})^4(1 + e^{-2(l_1 + l_2 + l_3)s})^4 \mu^4 \end{aligned} \quad (3.34)$$

Transformando cada término de la sumatoria al dominio del tiempo, la presión acústica toma la forma de una sumatoria de funciones escalón con corrimientos de tiempo, dado por

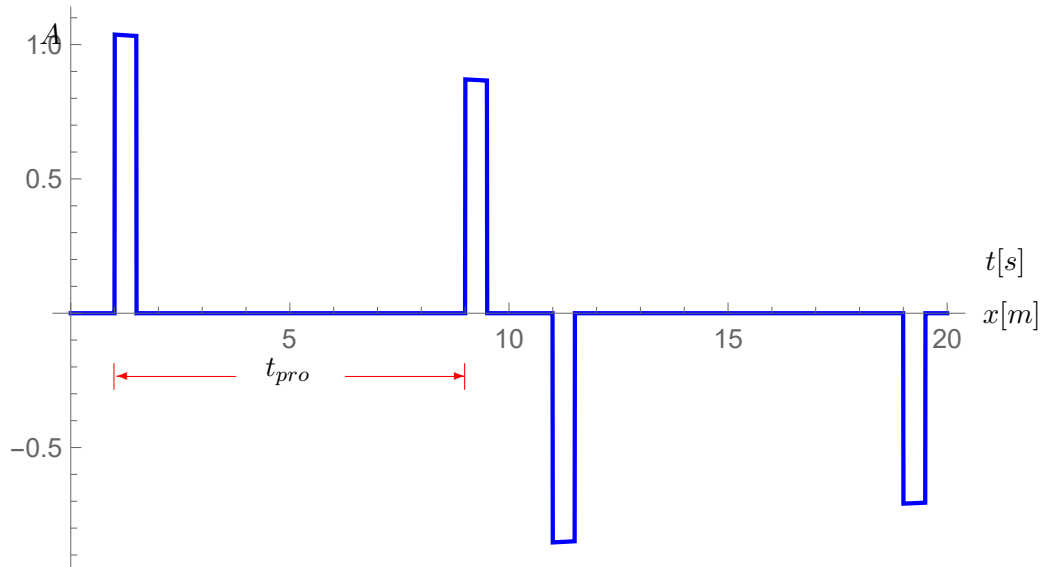
$$\begin{aligned}
 p(x_v, t) = & \frac{1}{F} \left[ -\frac{200\mu^5}{F^4} \mathcal{U}(t - l_1 - 2(l_1 + l_2) - 2l_3 - 2(l_2 + l_3) - 2(l_1 + l_2 + l_3)) + \frac{96\mu^4}{F^3} \right. \\
 & \mathcal{U}(t - l_1 - 2(l_1 + l_2) - 2l_3 - 2(l_2 + l_3) - 2(l_1 + l_2 + l_3)) - \frac{36\mu^3}{F^2} \mathcal{U}(t - l_1 - 2(l_1 \\
 & + l_2) - 2l_3 - 2(l_2 + l_3) - 2(l_1 + l_2 + l_3)) + \frac{8\mu^2}{F} \mathcal{U}(t - l_1 - 2(l_1 + l_2) - 2l_3 - 2(l_2 \\
 & + l_3) - 2(l_1 + l_2 + l_3)) + \frac{600\mu^5}{F^4} \mathcal{U}(t - l_1 - 4(l_1 + l_2) - 2l_3 - 2(l_2 + l_3) - 2(l_1 \\
 & + l_2 + l_3)) - \frac{240\mu^4}{F^3} \mathcal{U}(t - l_1 - 4(l_1 + l_2) - 2l_3 - 2(l_2 + l_3) - 2(l_1 + l_2 + l_3)) \\
 & + \dots + F \mathcal{U}(t - l_1) \left. \right] - \frac{1}{F} \left[ -\frac{200\mu^5}{F^4} \mathcal{U}(t - l_1 - 2(l_1 + l_2) - 2l_3 - 2(l_2 + l_3) - 2(l_1 \\
 & + l_2 + l_3) - a) + \frac{96\mu^4}{F^3} \mathcal{U}(t - l_1 - 2(l_1 + l_2) - 2l_3 - 2(l_2 + l_3) - 2(l_1 + l_2 + l_3) \\
 & - a) + \frac{36\mu^3}{F^2} \mathcal{U}(t - l_1 - 2(l_1 + l_2) - 2l_3 - 2(l_2 + l_3) - 2(l_1 + l_2 + l_3)) + \frac{8\mu^2}{F} \mathcal{U}(t \\
 & - l_1 - 2(l_1 + l_2) - 2l_3 - 2(l_2 + l_3) - 2(l_1 + l_2 + l_3)) + \dots + F \mathcal{U}(t - l_1 - a) \right]
 \end{aligned} \tag{3.35}$$

A continuación se muestra el comportamiento de la presión acústica  $P(x_v)$  en el dominio del tiempo en presencia de una obstrucción en diferentes posiciones a lo largo del ducto. En la Figura 3.8 se muestra el comportamiento de la presión acústica  $P(x_v)$  en presencia de una obstrucción localizada en  $x_{ob} = 7[m]$  con  $l_1 = 1[m]$ ,  $l_2 = 6[m]$ ,  $l_3 = 3[m]$ .



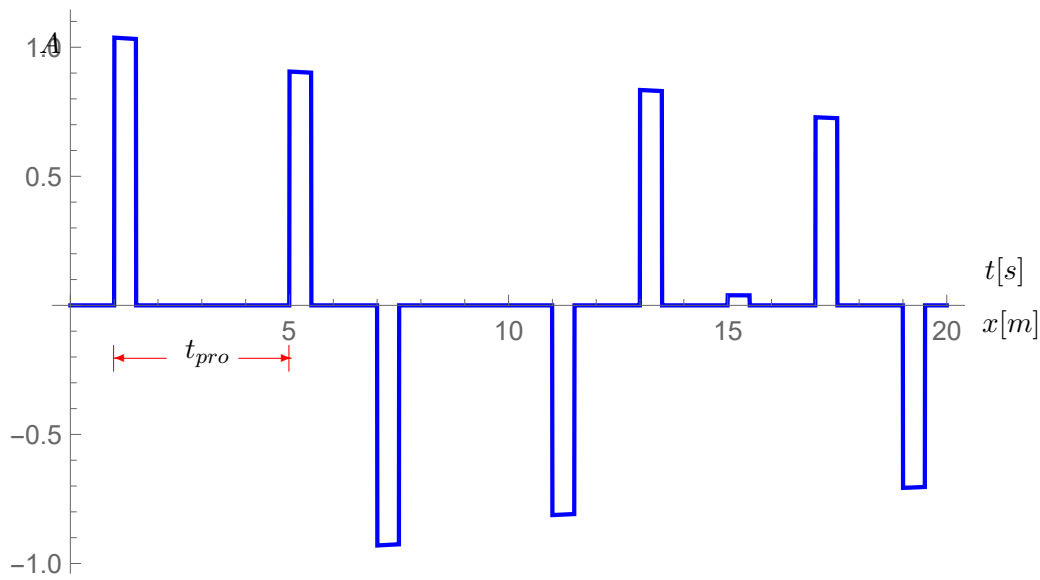
**Figura 3.8:** Presión acústica en un punto de visualización  $x_v$  ante una obstrucción a 7m

En la Figura 3.9 se muestra el comportamiento de la presión acústica  $P(x_v)$  en presencia de una obstrucción localizada en  $x_{ob} = 5[m]$  con  $l_1 = 1[m]$ ,  $l_2 = 4[m]$ ,  $l_3 = 5[m]$ .



**Figura 3.9:** Presión acústica en un punto de visualización  $x_v$  ante una obstrucción a 5m

En la Figura 3.10 se muestra el comportamiento de la presión acústica  $P(x_v)$  en presencia de una obstrucción localizada en  $x_{ob} = 3[m]$  con  $l_1 = 1[m]$ ,  $l_2 = 2[m]$ ,  $l_3 = 7[m]$



**Figura 3.10:** Presión acústica en un punto de visualización  $x_v$  ante una obstrucción a 3m

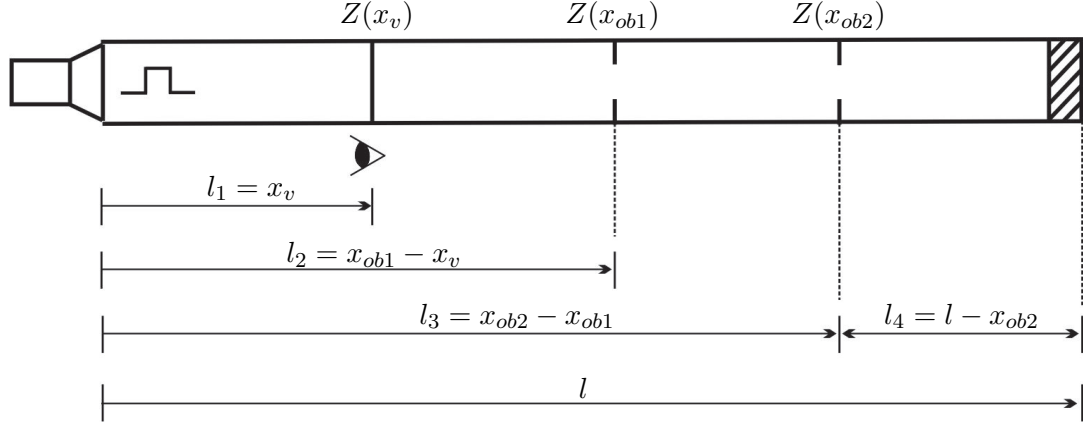
De las Figuras 3.8 a 3.10 se observa que la presión acústica  $P(x_v)$  en presencia de una obstrucción, a pesar de que los efectos de la absorción fueron despreciados, la obstrucción actúa como un elemento disipador de manera análoga al caso de reducción de área. De igual forma se observa en la Figura 3.10 que se producen múltiples reflexiones, esto debido a la cercanía de la falla al punto de visualización  $P(x_v)$ , en las Figuras 3.9 y 3.8 se observa que a medida de que la posición de la discontinuidad se aleja, los efectos de los rebotes desaparecen, siendo más fácil localizar la posición de la discontinuidad. Se tiene que el tiempo que tarda el frente de onda en propagarse y reflejarse de la discontinuidad a  $P(x_v)$ , está dado por  $t_{pro} = 2(x_{ob} - x_v) + 2a$ , donde la distancia recorrida por la perturbación, está dada por  $x_{des} = (t_{pro}/2) + a$ , la cual corresponde a la posición donde se encuentran localizadas las discontinuidades, para el caso de la Figura 3.8, se tiene que  $t_{pro} = 13[s]$  y  $x_{des} = 7[m]$ ; para el caso de la Figura 3.9, se tiene que  $t_{pro} = 9[s]$  y  $x_{des} = 5[m]$ ; finalmente para el caso de la Figura 3.10, se tiene que  $t_{pro} = 5[s]$  y  $x_{des} = 3[m]$ ; cabe señalar que el primer frente de onda nos proporciona información suficiente para la localización de la discontinuidad.

### 3.5. Respuesta de presión acústica en un ducto con dos obstrucciones

Considere el esquema en la Figura 3.11 donde se tiene un ducto de longitud  $l$ , con condiciones de fronteras dadas por la ecuación (3.1), cuatro secciones de ducto interconectados, un punto de visualización  $x_v$  y dos obstrucciones en las posiciones



$x_{ob1}$ ,  $x_{ob2}$  respectivamente



**Figura 3.11:** Esquema ducto con terminación rígida en presencia de dos obstrucciones

De acuerdo con esta configuración es necesario obtener  $\mathcal{M}_t$ , la cual representa la matriz de transferencia de un ducto en presencia de dos obstrucciones, está dada por 2.48

$$\mathcal{M}_t = \begin{bmatrix} \mathcal{M}_{11} & \mathcal{M}_{12} \\ \mathcal{M}_{21} & \mathcal{M}_{22} \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

donde los elementos de la matriz  $\mathcal{M}_t$  están dados por

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{11} = & \frac{1}{4\mu^2} (F_1 F_2 \cosh(l_1 + l_2 + l_3 - l_4)\gamma - F_1 F_2 \cosh(l_1 + l_2 - l_3 - l_4)\gamma \\ & - F_1 F_2 \cosh(l_1 + l_2 - l_3 + l_4)\gamma + F_1 F_2 \cosh(l_1 + l_2 + l_3 + l_4)\gamma \\ & + 4\mu^2 \cosh(l_1 + l_2 + l_3 - l_4)\gamma + 2F_1 \mu \sinh(l_1 + l_2 - l_3 - l_4)\gamma \\ & + 2F_2 \mu \sinh(l_1 + l_2 + l_3 - l_4)\gamma + 2F_1 \mu \sinh(l_1 + l_2 + l_3 + l_4)\gamma \\ & + 2F_2 \mu \sinh(l_1 + l_2 + l_3 + l_4)\gamma) \end{aligned} \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{12} = & -\frac{1}{4\mu} (2F_1 \mu \cosh(l_1 + l_2 - l_3 - l_4)\gamma + 2F_2 \cosh(l_1 + l_2 + l_3 - l_4)\gamma \\ & + 2F_1 \mu \cosh(l_1 + l_2 + l_3 + l_4)\gamma + 2F_2 \mu \cosh(l_1 + l_2 + l_3 - l_4)\gamma \\ & - F_1 F_2 \sinh(l_1 + l_2 - l_3 - l_4)\gamma + F_1 F_2 \sinh(l_1 + l_2 + l_3 - l_4)\gamma \\ & - F_1 F_2 \sinh(l_1 + l_2 - l_3 + l_4)\gamma + F_1 F_2 \sinh(l_1 + l_2 + l_3 + l_4)\gamma \\ & - 4\mu^2 \sinh(l_1 + l_2 + l_3 + l_4)\gamma) \end{aligned} \quad (3.38)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{21} = & -\frac{1}{4\mu^3}(-2F_1\mu \cosh(l_1 + l_2 - l_3 - l_4)\gamma - 2F_2 \cosh(l_1 + l_2 + l_3 - l_4)\gamma \\
& + 2F_1\mu \cosh(l_1 + l_2 + l_3 + l_4)\gamma + 2F_2\mu \cosh(l_1 + l_2 + l_3 + l_4)\gamma \\
& + F_1F_2 \sinh(l_1 + l_2 - l_3 - l_4)\gamma - F_1F_2 \sinh(l_1 + l_2 + l_3 - l_4)\gamma \\
& - F_1F_2 \sinh(l_1 + l_2 - l_3 + l_4)\gamma + F_1F_2 \sinh(l_1 + l_2 + l_3 + l_4)\gamma \\
& + 4\mu^2 \sinh(l_1 + l_2 + l_3 + l_4)\gamma)
\end{aligned} \tag{3.39}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{22} = & \frac{1}{4\mu^2}(F_1F_2 \cosh(l_1 + l_2 - l_3 - l_4)\gamma - F_1F_2 \cosh(l_1 + l_2 + l_3 - l_4)\gamma \\
& - F_1F_2 \cosh(l_1 + l_2 - l_3 + l_4)\gamma + F_1F_2 \cosh(l_1 + l_2 + l_3 + l_4)\gamma \\
& + 4\mu^2 \cosh(l_1 + l_2 + l_3 + l_4)\gamma - 2F_1\mu \sinh(l_1 + l_2 - l_3 - l_4)\gamma \\
& - 2F_2\mu \sinh(l_1 + l_2 + l_3 - l_4)\gamma + 2F_1\mu \sinh(l_1 + l_2 + l_3 + l_4)\gamma \\
& + 2F_2\mu \sinh(l_1 + l_2 + l_3 + l_4)\gamma)
\end{aligned} \tag{3.40}$$

donde  $F_1 = 2\Delta p_1/u_1, F_2 = 2\Delta p_2/u_2, \gamma = s, \mu = \rho_0 c$ . A partir de (3.36) y utilizando (2.54), se obtienen las condiciones de frontera restantes,  $U(0), P(l)$

$$U(0) = \frac{num}{den} \tag{3.41}$$

con

$$\begin{aligned}
num = & (-2F_1\mu \cosh(l_1 + l_2 + l_3 - l_4)s + 2(F_1 + F_2)\mu \cosh(l_1 + l_2 + l_3 - l_4)s \\
& - F_2(2\mu \cosh(l_1 + l_2 + l_3 - l_4)s + F_1(-\sinh(l_1 + l_2 - l_3 - l_4)s) \\
& + \sinh(l_1 + l_2 + l_3 - l_4)s + \sinh(l_1 + l_2 - l_3 + l_4)s) \\
& + (F_1F_2 + 4\mu^2) \sinh(l_1 + l_2 + l_3 + l_4)s)P(0)
\end{aligned} \tag{3.42}$$

$$\begin{aligned}
den = & (\mu(F_1F_2 \cosh(l_1 + l_2 - l_3 - l_4)s - F_1F_2 \cosh(l_1 + l_2 + l_3 - l_4)s \\
& - F_1F_2 \cosh(l_1 + l_2 - l_3 + l_4)s + 2(F_1F_2 + 4\mu^2) \cosh(l_1 + l_2 + l_3 + l_4)s \\
& - 2F_1\mu \sinh(l_1 + l_2 - l_3 - l_4)s - 2F_2\mu \sinh(l_1 + l_2 + l_3 - l_4)s \\
& + 2(F_1 + F_2)\mu \sinh(l_1 + l_2 + l_3 + l_4)s))
\end{aligned} \tag{3.43}$$

$$P(l) = \frac{num}{den} \tag{3.44}$$

con

$$num = 4\mu^2 P(0) \tag{3.45}$$

$$\begin{aligned}
 den &= F_1 F_2 \cosh(l_1 + l_2 - l_3 - l_4)s - F_1 F_2 \cosh(l_1 + l_2 + l_3 - l_4)s \\
 &\quad - F_1 F_2 \cosh(l_1 + l_2 - l_3 + l_4)s + (F_1 F_2 + 4\mu^2) \cosh(l_1 + l_2 + l_3 + l_4)s \\
 &\quad - 2F_1 \mu \sinh(l_1 + l_2 - l_3 - l_4)s - 2F_2 \mu \sinh(l_1 + l_2 + l_3 - l_4)s \\
 &\quad + 2(F_1 + F_2) \mu \sinh(l_1 + l_2 + l_3 + l_4)s
 \end{aligned} \tag{3.46}$$

Por tanto, sustituyendo (3.36) en la ecuación (2.51), se obtiene el comportamiento de la presión acústica en un punto de visualización  $x_v$ , y se reduce

$$P(x_v) = \frac{num}{den} P(0) \tag{3.47}$$

donde

$$\begin{aligned}
 num &= 4\mu \sinh(l_2 s) [\mu \cosh(l_4 s) \sinh(l_3 s) + (\mu \cosh(l_3 s) + F_2 \sinh(l_3 s)) \\
 &\quad \sinh(l_4 s)] + \cosh(l_2 s) (\mu \cosh(l_3 s) (\mu \cosh(l_4 s) + (F_1 + F_2) \sinh(l_4 s)) \\
 &\quad + \sinh(l_3 s) (F_1 \mu \cosh(l_4 s) + (F_1 F_2 + \mu^2) \sinh(l_4 s))
 \end{aligned} \tag{3.48}$$

$$\begin{aligned}
 den &= F_1 F_2 \cosh((l_1 + l_2 - l_3 - l_4)s) - F_1 F_2 \cosh((l_1 + l_2 + l_3 - l_4)s) \\
 &\quad - F_1 F_2 \cosh((l_1 + l_2 - l_3 + l_4)s) + F_1 F_2 \cosh((l_1 + l_2 + l_3 + l_4)s) \\
 &\quad + 4\mu^2 \cosh((l_1 + l_2 + l_3 + l_4)s) - 2F_1 \mu \sinh((l_1 + l_2 - l_3 - l_4)s) \\
 &\quad - 2F_2 \mu \sinh((l_1 + l_2 + l_3 - l_4)s) + 2F_1 \mu \sinh((l_1 + l_2 + l_3 + l_4)s) \\
 &\quad + 2F_2 \mu \sinh((l_1 + l_2 + l_3 + l_4)s)
 \end{aligned} \tag{3.49}$$

Considerando las relaciones de Euler (3.2) en la ecuación (3.47), se obtiene

$$P(x_v) = \frac{num}{den} \tag{3.50}$$

donde

$$\begin{aligned}
 num &= e^{(l_2 + l_3 + l_4)s} ((1 + e^{-2l_2 s}) F_1 ((1 - e^{-2l_3 s}) (1 - e^{-2l_4 s}) F_2 + 2(1 - e^{-2(l_3 + l_4)s}) \mu) \\
 &\quad + 2\mu ((1 + e^{-2(l_2 + l_3)s}) (1 - e^{-2l_4 s}) F_2 + 2(1 - e^{-2(l_2 + l_3 + l_4)s})) P(0) \\
 den &= \frac{1}{2} e^{(l_1 + l_2 + l_3 + l_4)s} ((1 + e^{-2(l_1 + l_2)s}) F_1 ((1 - e^{-2l_3 s}) (1 - e^{-2l_4 s}) F_2 + 2(1 - e^{-2(l_3 + l_4)s}) \mu) \\
 &\quad + 2\mu ((1 + e^{-2(l_1 + l_2 + l_3)s}) (1 - e^{-2l_4 s}) F_2 + 2(1 + e^{(l_1 + l_2 + l_3 + l_4)s}) \mu))
 \end{aligned} \tag{3.51}$$

o equivalente

$$\begin{aligned}
 P(x_v) &= e^{(l_2 + l_3 + l_4)s} ((1 + e^{-2l_2 s}) F_1 ((1 - e^{-2l_3 s}) (1 - e^{-2l_4 s}) F_2 + 2(1 - e^{-2(l_3 + l_4)s}) \mu) \\
 &\quad + 2\mu ((1 + e^{-2(l_2 + l_3)s}) (1 - e^{-2l_4 s}) F_2 + 2(1 - e^{-2(l_2 + l_3 + l_4)s})) (1 + \varsigma)^{-1} (1 + \kappa)^{-1} \\
 &\quad \alpha^{-1} P(0)
 \end{aligned} \tag{3.52}$$

donde

$$\begin{aligned}
 \alpha^{-1} &= \frac{1}{(1 + e^{-2(l_1+l_2)s})F_1(1 - e^{-2l_3s})(1 - e^{-2l_4s})F_2} \\
 \varsigma &= \frac{2(1 - e^{-2(l_3+l_4)s})\mu(1 + e^{-2(l_1+l_2)s})F_1}{(1 + e^{-2(l_1+l_2)s})F_1(1 - e^{-2l_3s})(1 - e^{-2l_4s})F_2} \\
 \kappa &= \frac{\mu((1 + e^{-2(l_1+l_2+l_3)s})(1 - e^{-2l_4s})F_2 + 2(1 + e^{(l_1+l_2+l_3+l_4)s})\mu)}{(1 + e^{-2(l_1+l_2)s})F_1(1 - e^{-2l_3s})(1 - e^{-2l_4s})F_2} \quad (3.53)
 \end{aligned}$$

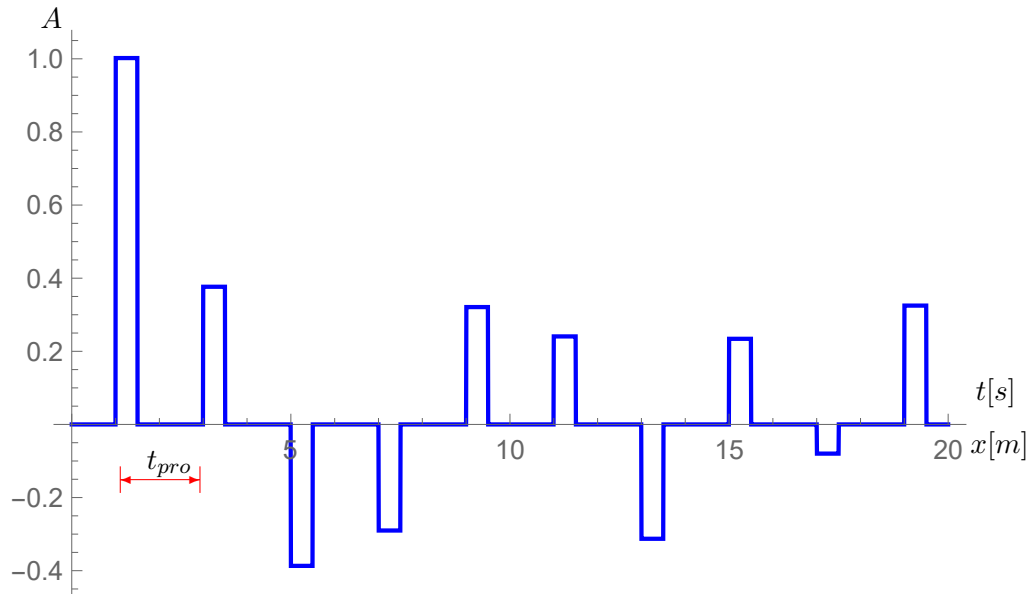
donde  $(1 + \varsigma)^{-1}$ ,  $(1 + \kappa)^{-1}$ , aproximando las funciones  $\varsigma, \kappa$  por medio de una serie binomial (3.4), tomando los primeros cuatro términos de cada serie, se tiene

$$\begin{aligned}
 P(x_v) &\cong e^{-l_1s}(1 - 2(1 - e^{-6(l_1+l_2)s} + e^{-4(l_1+l_2)s} - e^{-2(l_1+l_2)s})(1 + e^{-2(l_3+l_4)s})\mu \\
 &\quad (1 - e^{-6l_3s} + e^{-4l_3s} - e^{-2l_3s})(1 - e^{-6l_4s} + e^{-4l_4s} - e^{-2l_4s})(1 + e^{-2(l_3+l_4)s})\frac{\mu}{F_2} \\
 &\quad + 4(1 - e^{-6(l_1+l_2)s} + e^{-4(l_1+l_2)s} - e^{-2(l_1+l_2)s})^2(1 + e^{-2(l_1+l_2)s})^2(1 - e^{-6l_3s} \\
 &\quad + e^{-4l_3s} - e^{-2l_3s})^2(1 - e^{-6l_4s} + e^{-4l_4s} - e^{-2l_4s})^2(1 + e^{-2(l_3+l_4)s})^2\frac{\mu^2}{F_2^2} \\
 &\quad - 8(1 - e^{-6(l_1+l_2)s} + e^{-4(l_1+l_2)s} - e^{-2(l_1+l_2)s})^3(1 + e^{-2(l_1+l_2)s})^3(1 + e^{-6l_3s} \\
 &\quad + e^{-4l_3s} + e^{-2l_3s})^3 + (1 + e^{-6l_3s} + e^{-4l_3s} + e^{-2l_3s})^3(1 - e^{-6l_4s} + e^{-4l_4s} \\
 &\quad + e^{-2l_4s})^3(1 + e^{-2(l_3+l_4)s})^3\frac{\mu^3}{F_2^3} + \dots \quad (3.54)
 \end{aligned}$$

Transformando cada término de la sumatoria al dominio del tiempo, la presión acústica toma la forma de una sumatoria de funciones escalón con corrimientos de tiempo, para el caso de dos obstrucciones y obtener la expresión  $P(x_v, t)$  se evalúan las posiciones y longitudes del ducto, con los siguientes valores  $x_v = 1[m]$ ,  $x_{ob1} = 2[m]$ ,  $x_{ob2} = 8[m]$ , se tiene

$$\begin{aligned}
 P(x_v, t) &\cong \frac{1}{759375}[1521\mathcal{U}(t-1) + 814\mathcal{U}(t-3) + 5\mathcal{U}(t-5) + 5718\mathcal{U}(t-7) \\
 &\quad - 5874\mathcal{U}(t-9) + 5330\mathcal{U}(t-11) + 1566\mathcal{U}(t-13) + 2712\mathcal{U}(t-15) \\
 &\quad - 2243\mathcal{U}(t-17) + 62346\mathcal{U}(t-19) - 8366\mathcal{U}(t-21) + 3684\mathcal{U}(t-23) \\
 &\quad - 3862\mathcal{U}(t-25) - 1254\mathcal{U}(t-27) + 3235\mathcal{U}(t-29) - 9492\mathcal{U}(t-31) \\
 &\quad + \dots - 6264\mathcal{U}(t-499)] - \frac{1}{759375}[1521\mathcal{U}(t-1.5) + 814\mathcal{U}(t-3.5) + \\
 &\quad 5\mathcal{U}(t-5.5) + 5718\mathcal{U}(t-7.5) - 5874\mathcal{U}(t-9.5) + 5330\mathcal{U}(t-11.5) \\
 &\quad + 1566\mathcal{U}(t-13.5) - 2712\mathcal{U}(t-15.5) - 2243\mathcal{U}(t-17.5) + 62346\mathcal{U}(t \\
 &\quad - 19.5) - 8366\mathcal{U}(t-21.5) - \dots - 6264\mathcal{U}(t-499.5)]
 \end{aligned}$$

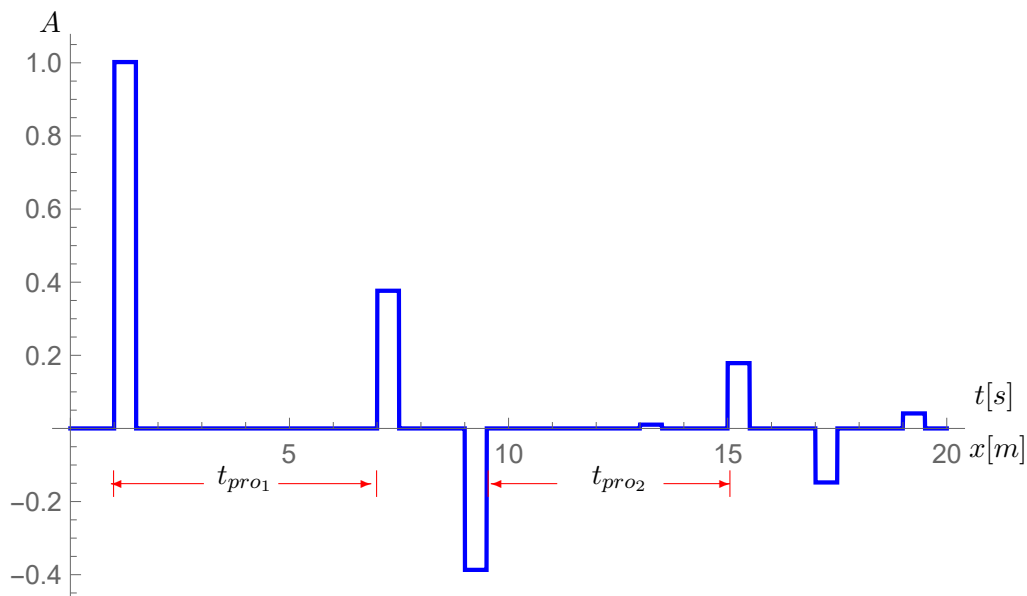
En la Figura 3.12 se muestra el comportamiento de la señal acústica en presencia de dos obstrucciones localizadas  $x_{ob1} = 2[m]$ ,  $x_{ob2} = 8[m]$  respectivamente.



**Figura 3.12:** Presión acústica en un punto de visualización  $x_V$  ante dos obstrucciones localizadas a 2m y 8m

En la Figura 3.13 se muestra el comportamiento de la señal acústica en presencia de dos obstrucciones localizadas en  $x_{ob1} = 4[m]$  y  $x_{ob2} = 8[m]$ , respectivamente.  $\mathcal{U}$

$$\begin{aligned}
 P(x_v, t) \cong & \frac{1}{759375} [244U(t-1) + 183U(t-7) - 188U(t-9) + 5U(t-13) - 141U(t-15) \\
 & + 156U(t-17) + 19U(t-19) - 39U(t-21) + 117U(t-23) - 137U(t-25) \\
 & - 41U(t-27) + 91U(t-31) + 111U(t-33) + 78U(t-35) - 143U(t-37) \\
 & + 72U(t-39) + 100U(t-41) - 107U(t-43) + 182U(t-45) + 88U(t-47) \\
 & + 9U(t-49) + 135U(t-51) + \dots - 1635U(t-499)] - \frac{1}{759375} [ \\
 & 244U(t-1.5) + 183U(t-7.5) - 188U(t-9.5) + 5U(t-13.5) - 141U(t-15.5) \\
 & + 156U(t-17.5) + 19U(t-19.5) - 39U(t-21.5) + 117U(t-23.5) - 137U(t-25.5) \\
 & - 41U(t-27.5) + 91U(t-31.5) - \dots - 1635U(t-499.5)]
 \end{aligned}$$



**Figura 3.13:** Presión acústica en un punto de visualización  $x_V$  ante dos obstrucciones localizadas a 4m y 8m

De la Figura 3.12 se observa el comportamiento de la presión acústica  $P(x_v)$  en presencia de dos obstrucciones, debido a la cercanía de la primera obstrucción al punto de visualización  $P(x_v)$  la presencia de múltiples reflexiones se hacen presentes, ocasionando que los efectos que tiene la segunda obstrucción en el ducto sean imperceptibles. De la Figura 3.13 se observa, que a medida de que la primera obstrucción se aleja del punto de visualización  $P(x_v)$ , los efectos de las múltiples reflexiones desaparece, logrando localizar e identificar los efectos de ambas obstrucciones, cabe señalar que los efectos de la segunda obstrucción se ven atenuados, esto debido a la disipación que ocasiona por la primera obstrucción que actúa como un elemento disipador. Se tiene que el tiempo que tarda el frente de onda en propagarse y reflejarse de la discontinuidad a  $P(x_v)$ , para el caso de la Figura 3.12 se tiene que el tiempo de propagación, está definido como  $t_{pro} = 2(x_{ob1} - x_v) + 2a$ , donde la distancia recorrida por la perturbación está dada por  $x_{des} = (t_{pro}/2) + a$ , por tanto  $t_{pro} = 3[s]$  y  $x_{des} = 2[m]$ , el cual corresponde a la posición de la primera obstrucción. Para el caso de la Figura 3.13 se tiene tiempo de propagación, está definido como  $t_{pro1} = 2(x_{ob1} - x_v) + 2a$  que corresponde al tiempo que tarda la señal acústica en viajar y reflejarse de la primera obstrucción al punto de visualización y  $t_{pro2} = 2(x_{ob2} - x_v) + 2a$  que corresponde al tiempo que tarda la señal acústica en viajar y reflejarse de la segunda obstrucción al punto de visualización, por tanto la distancia recorrida está dada por  $x_{des1} = (t_{pro1}/2) + a$ ,  $x_{des2} = (t_{pro2}/2) + a$ , por tanto,  $t_{pro1} = 7[s]$ ,  $t_{pro2} = 15[s]$ ,  $x_{des1} = 4[m]$ ,  $x_{des2} = 8[m]$ , las cuales corresponden a las posiciones de ambas obstrucciones presentes en el ducto.

## Conclusiones

---

En este trabajo, se formalizó una técnica alternativa para la detección de múltiples fallas en los ductos aplicando señales acústicas, obteniendo resultados analíticos y simulaciones, los cuales coinciden con los resultados reportados en [Vidal \*et al.\* \(2013\)](#) obtenidos de manera experimental.

Se obtuvo un procedimiento general con la finalidad de conseguir, la solución analítica de la propagación de onda de la presión acústica en punto de visualización  $x_v$  localizado aguas arriba del punto de excitación, indiferente a las condiciones de frontera a considerar y el número de discontinuidades consideradas en el ducto, a partir de un modelo linealizado de dimensión infinita, utilizando el concepto de matriz de transferencia. A partir de lo anterior se pudo obtener la expresión analítica, en el dominio de Laplace, no obstante, convertir la expresión en el dominio del tiempo es difícil, ya que contiene términos hiperbólicos, tanto en el numerador como denominador. La tarea se simplificó al expresar dichos términos por medio de series binomiales con exponentes negativos para determinar la respuesta durante intervalos específicos de tiempo.

Con base en los resultados analíticos se encontró que la información de mayor utilidad para localizar obstrucciones y reducciones de área, se obtiene del primer frente de onda de presión después de haberse producido la señal de excitación. Cabe señalar para el caso de una reducción de área y una obstrucción, la respuesta obtenida de la onda de presión es muy similar en ambos casos, por lo cual no es posible identificar qué tipo de falla se presenta, aunque sí la posición en que se encuentra.

Es importante recalcar los efectos que se tiene con el procedimiento propuesto, ante una discontinuidad cercana al punto de visualización. Bajo esta condición se presentan múltiples reflexiones, dificultando la identificación de las fallas presentes en el ducto.





# Bibliografía

---

- Blackstock, D. T. (2000). *Fundamentals of physical acoustics*. John Wiley & Sons. 6, 7, 24
- Bronshtein, I. N., K. A. Semendyayev, G. Musiol y H. Muehlig (2007). *Handbook of Mathematics*. Springer Science & Business Media. 22
- Chaudhry, M. H. (1979). *Applied hydraulic transients*. Springer. 14
- Cheng, D. K. (1959). *Analysis of Linear Systems*. Addison-Wesley. 12
- CONAGUA (2015). *mantemiento y reparacion de tuberias y piezas especiales*. 1
- Datta, S. y S. Sarkar (2016). A review on different pipeline fault detection methods. *Journal of Loss Prevention in the Process Industries* 41, 97–106. 2
- Kinsler, L. E., A. R. Frey, A. B. Coppens y J. V. Sanders (1999). *Fundamentals of acoustics*. John Wiley & Sons. 6, 9, 24
- Lile, N. L. T., M. H. M. Jaafar, M. R. Roslan y M. S. M. Azmi (2012). Blockage detection in circular pipe using vibration analysis. *International journal on advanced science, engineering and information technology* 2(3), 252–255. 2
- Munjal, M. L. (2014). *Acoustics of ducts and mufflers*. John Wiley & Sons. 13
- Ozevin, D. y J. Harding (2012). Novel leak localization in pressurized pipeline networks using acoustic emission and geometric connectivity. *International Journal of Pressure Vessels and Piping* 92, 63–69. 2
- Papadopoulou, K. A., M. N. Shamout, B. Lennox, D. Mackay, A. R. Taylor, J.T. Turner y X. Wang (2008). An evaluation of acoustic reflectometry for leakage and blockage detection. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science* 222(6), 959–966. 3
- Rentería, F., C. Verde y Torres. L. (2016). Analisis de la respuesta al escalon en un ducto para localizacion de fugas. 2, 3

- Sea, A. (2009). Subject index chernobyl: Consequences of the catastrophe for people and the environment. *aquatic (water)* **227**, 228t. [1](#)
- Sun, L. y N. Chang (2014). Integrated-signal-based leak location method for liquid pipelines. *Journal of Loss Prevention in the Process Industries* **32**, 311–318. [2](#)
- Verde, C., S. Gentil y R. Morales-Menéndez (2013). *Monitoreo y diagnóstico automático de fallas en sistemas dinámicos*. Editorial Trillas. [1](#)
- Vidal, J. L., L. Silva, T. Netto, P. C. Monteiro et al. (2013). Acoustic reflectometry for blockages detection in pipeline. En: *OTC Brasil*. Offshore Technology Conference. [3](#), [41](#)
- Wang, X., B. Lennox, J. Turner, K. Lewis, Z. Ding, G. Short y K. Dawson (2009). Blockage detection in long lengths of pipeline using a new acoustic method. En: *Proceeding of 16th international congress on sound and vibration, ICSV16. Kraków, Poland*. Vol. 1. pp. 140–147. [3](#)