



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

---

**FACULTAD DE INGENIERÍA**

**Construcción de modelos para la  
caracterización de pavimentos**

**TESIS**

Que para obtener el título de

**Ingeniero Civil**

**P R E S E N T A**

Antonio Gutiérrez Morales

**DIRECTORA DE TESIS**

Dra. Martha María Suarez López



**Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2018**

## Tabla de contenido

<b>1. Antecedentes y Objetivo .....</b>	<b>1</b>
<b>2. Pavimentos y Terraplenes.....</b>	<b>3</b>
<b>3. Propagación de Ondas .....</b>	<b>9</b>
3.1. Conceptos básicos .....	10
3.2. Superposición de ondas .....	12
3.3. Sistemas de un grado de libertad .....	15
3.4. Reflexión y refracción .....	18
3.5. Propagación de ondas en un medio elástico, homogéneo e isótropo .....	19
3.6. Ley de Snell.....	22
<b>4. Análisis de Fourier.....</b>	<b>25</b>
4.1. Series de Fourier .....	26
4.2. Transformada discreta de Fourier .....	28
4.3. Transformada rápida de Fourier .....	29
<b>5. Análisis Dimensional y de Similitud.....</b>	<b>31</b>
5.1. Homogeneidad dimensional .....	32
5.2. Sistemas de unidades .....	33
5.3. Teorema $\Pi$ de Buckingham .....	34
5.4. Ejemplo de aplicación.....	36
<b>6. Medios Estratificados.....</b>	<b>39</b>
6.1. Espesor de los estratos .....	43
6.2. Contraste de densidades.....	56
<b>7. Experimentos y Resultados .....</b>	<b>62</b>
7.1. Metodología.....	64
7.2. Diseño de los experimentos .....	70
7.3. Resultados.....	76
7.4. Espectros de Fourier .....	78
7.5. Función de Transferencia .....	79
7.6. Fase.....	88
7.7. Coherencia .....	95
<b>8. Conclusiones .....</b>	<b>110</b>
<b>9. Referencias.....</b>	<b>112</b>

## 1. Antecedentes y objetivo

Debido a la enorme importancia que tienen las estructuras de pavimentos, estimar su 'estado de salud' es de gran interés para el país. Actualmente se aplican tres técnicas apropiadas y eficientes para conocer los cambios, en función del tiempo, de las propiedades mecánicas de los materiales que los. Estas técnicas son: el Radar de Penetración Terrestre (GPR), Analizadores Sísmicos de Pavimentos (SPA) y Deflectómetros de Impacto (FWD).

En su aplicación a pavimentos, el método sísmico utiliza técnicas de exploración con base en la propagación de ondas de cuerpo y superficiales implementadas en SAP, portátiles o transportables, que integran técnicas sónicas, ultrasónicas y de vibraciones resonantes en la exploración del pavimento. Así, con ondas superficiales se usa el análisis espectral de ondas superficiales (SASW), y la de ultrasonido (USW) y con ondas de cuerpo la de ultrasonido (UBW), y la respuesta al impulso (IR).

Debido a que la estructura típica de los pavimentos puede representarse mediante formaciones con varios estratos con impedancias acústicas grandes, y donde la velocidad de propagación puede decrecer con la profundidad, cada técnica utilizada se enfoca en resolver los diferentes espesores y módulos involucrados (Gucunski et. al, 2004, Inazaki et. Al, 2015, Ryden y Park, 2004). Mucho del éxito del uso de las técnicas geofísicas depende de la interpretación que se les dé a los resultados. Generalmente, la interpretación se lleva a cabo por personal experimentado y siempre va acompañada de pruebas directas para asegurarse de la certidumbre de los resultados.

Una forma paralela de mejorar las interpretaciones que se realizan durante la prospección sísmica, y de adquirir experiencia, consiste en llevar a cabo pruebas de laboratorio que permitan educar criterios en los fenómenos observados al propagar ondas sísmicas que perturben medios con anomalías específicas que se definen con intención. Usualmente se realizan pruebas en modelos construidos a escala natural (que pueden ser terraplenes), pero pocas veces se fabrican prototipos pequeños para realizar los experimentos. Es más económico efectuar las pruebas directamente en la obra, aprovechando quizá el control de calidad que se tiene de los materiales, pero son limitadas al incluir anomalías a la escala que se tiene durante la construcción, por lo que en el trabajo de esta tesis se propone explorar esta posibilidad al realizar las pruebas de laboratorio en distintos materiales.

Son varios los experimentos que se han elaborado para comprender el fenómeno de la propagación de las ondas utilizando modelos físicos. Entre ellos se encuentran particularmente los diseñados por J.Brune y colaboradores (1894, 1985, 1989, 1991, 1993) utilizando modelos construidos con poliuretano y obteniendo excelentes resultados. Destacan sus modelos para estudiar la propagación de ondas en topografías y presas y en los problemas relacionados con la interacción suelo-estructura. En las aplicaciones a suelos y materiales granulares se encuentra que en algunos experimentos incluso se ha utilizado el arroz inflado, con el propósito de medir en los procesos de compactación como se lleva a cabo la compresión del material y si esta se distribuye de manera adecuada. Para ello se han considerado los efectos de la emisión acústica(Valdes y Gallay, 2012).

En este trabajo se construyen algunos modelos utilizando metales, para analizar su respuesta en experimentos controlados. El propósito es conocer el grado de aproximación que se tiene en el manejo, análisis e interpretación de los datos para definir las características del subsuelo y para conocer los alcances de las técnicas que se utilizan.

## 2. Pavimentos y terraplenes

El pavimento es una estructura formada por una serie de capas planas que se apoyan sobre el suelo (natural o nivelado) con el propósito de aumentar su resistencia. Se diseñan para la circulación de vehículos o personas y se espera que tengan una vida útil determinada. La colocación de las capas que lo se realiza siguiendo las especificaciones de las normas creadas para darle una mayor durabilidad y resistencia. En general se busca que los materiales que conforman las capas de su estructura tengan determinadas características y espesores para que el pavimento mantenga un índice de servicio aceptable durante su vida de servicio. En las normas de cada región se especifica el tipo de material a utilizar para cada capa, su espesor y la compactación que deben tener para aumentar su densidad, su capacidad de soporte y estabilidad. Por esta razón, el control de calidad durante su construcción y vida útil es importante para garantizar sus propiedades mecánicas y los cambios que va teniendo en función del tiempo.

Las pruebas que se realizan para calificar las características mecánicas de cada capa sobre la base de estándares predefinidos por diseño o de especificaciones particulares de calidad, son de dos tipos: destructivas y no destructivas. Las primeras tienen la particularidad de requerir de la extracción de muestras para después realizar pruebas de laboratorio. Las bondades de este procedimiento estriban en que directamente sobre la muestra se miden sus propiedades mecánicas por lo que los resultados obtenidos son bastante precisos. La contraparte viene dada por el hecho de que únicamente se identifican las propiedades de las muestras extraídas y se asume que corresponden a toda la estructura; se altera la zona del pavimento en donde se extrajo la muestra, que posteriormente deberá ser restituida aplicando un método de compactación que no garantiza que sea igual al aplicado durante la construcción. Además, debido a lo invasivo de estas pruebas y a su costo, suelen no realizarse durante la vida útil del pavimento, permitiendo su deterioro. En cambio, las pruebas no destructivas se pueden aplicar en toda el área del pavimento en un tiempo muy corto, son económicas, tienen un alto poder de penetración lo que permite la detección de discontinuidades profundas del material; con ellas se puede determinar la posición, tamaño, orientación, forma y tipo de discontinuidades. Estas pruebas no son adecuadas para capas de poco espesor; y en materiales de grano grueso (tamaño de grano igual o mayor aun décimo de la longitud de onda).

Las pruebas no destructivas requieren de un conocimiento previo de las estructuras a explorar, lo que lo convierte en un procedimiento adecuado para los pavimentos pues se cuenta con las especificaciones de construcción, además de ser estructuras

muy largas. Básicamente lo que se busca es el conocer el perfil de la variación de las velocidades de propagación de ondas de sus diferentes capas, con ello se pueden determinar sus espesores y sus propiedades dinámicas, parámetros fundamentales para tener un control de calidad adecuado. Para ello, el primer paso es definir el procedimiento a seguir para la adquisición de datos. Son diferentes los procedimientos geofísicos empleados que pueden agruparse en: sísmicos, de gravedad y electromagnéticos. De estos tres, el primero es el que se analizará en esta tesis. Son tres los métodos sísmicos que existen, a saber: refracción, reflexión y de ondas superficiales. La atención se concentrará en los de ondas superficiales, específicamente en los métodos activos que son los que requieren de una fuente para generar un tren de ondas (se utiliza generalmente un martillo que percute en la superficie del terreno) que están en una banda de frecuencias de los 5 a los 50Hz. La señal es recogida por medio de una serie de sensores ubicados a distintas distancias de la fuente. La ubicación de cada sensor se hace con base en las dimensiones de los pavimentos que generalmente no llegan a medir decenas de metros. En la fig. 1 se presenta un diagrama esquemático de la adquisición de datos.

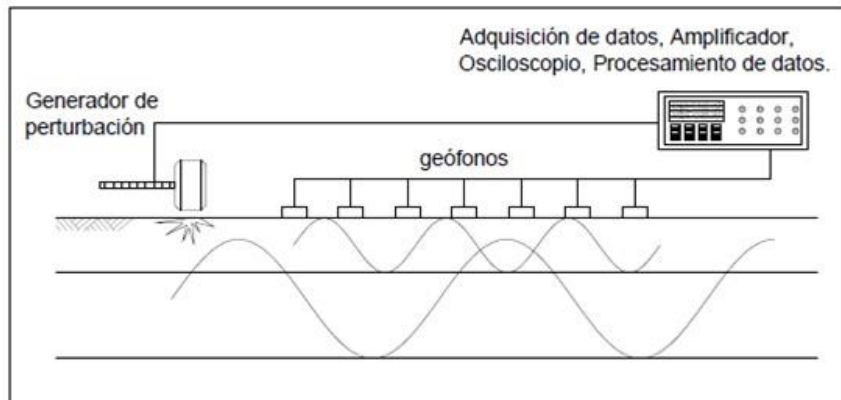


Figura 1 Diagrama esquemático de la adquisición de datos

Existen varias maneras de acomodar los receptores y fuentes (figura 2). Un ejemplo de las trazas de las señales captadas se presenta en la figura 3 en donde se han utilizado un total de 24 geófonos separados unos de otros un metro de distancia. Con estos datos es posible obtener la curva de dispersión y a partir de ella un perfil de la variación de velocidad con respecto a la profundidad (figura 4).

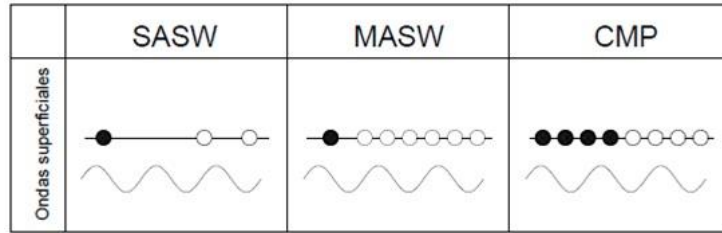


Figura 2 Formas de adquisición de datos a) SASW = Spectral Analysis of Surface Waves, b) MASW =Multi-channel Analysis of Surface Waves y c) CMP = Common-midpoint recording(Hayashi, 2003).

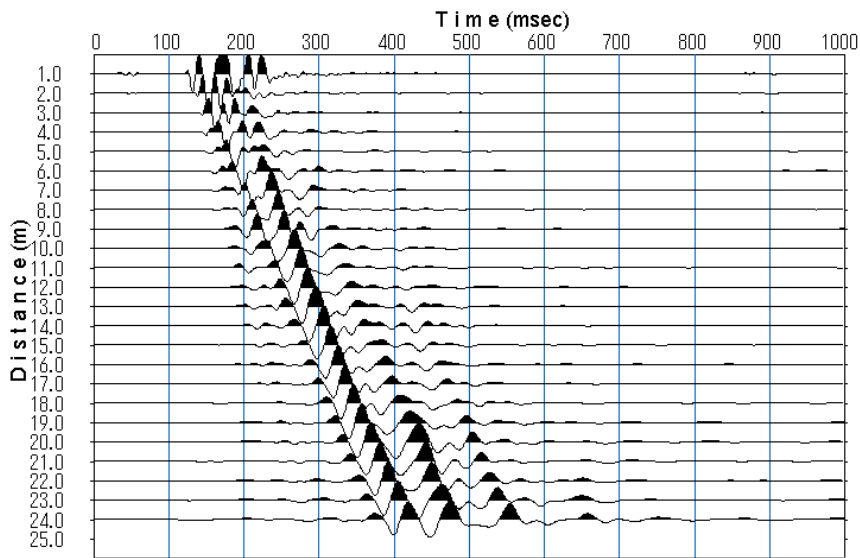


Figura 3 Trazas de las señales medidas con 24 geófonos separados una distancia de un metro, generadas por una fuente (un golpe dado con un mazo) ubicada en el punto cero. Los registros tienen una tasa de muestreo de 1ms(Hayashi, 2003).

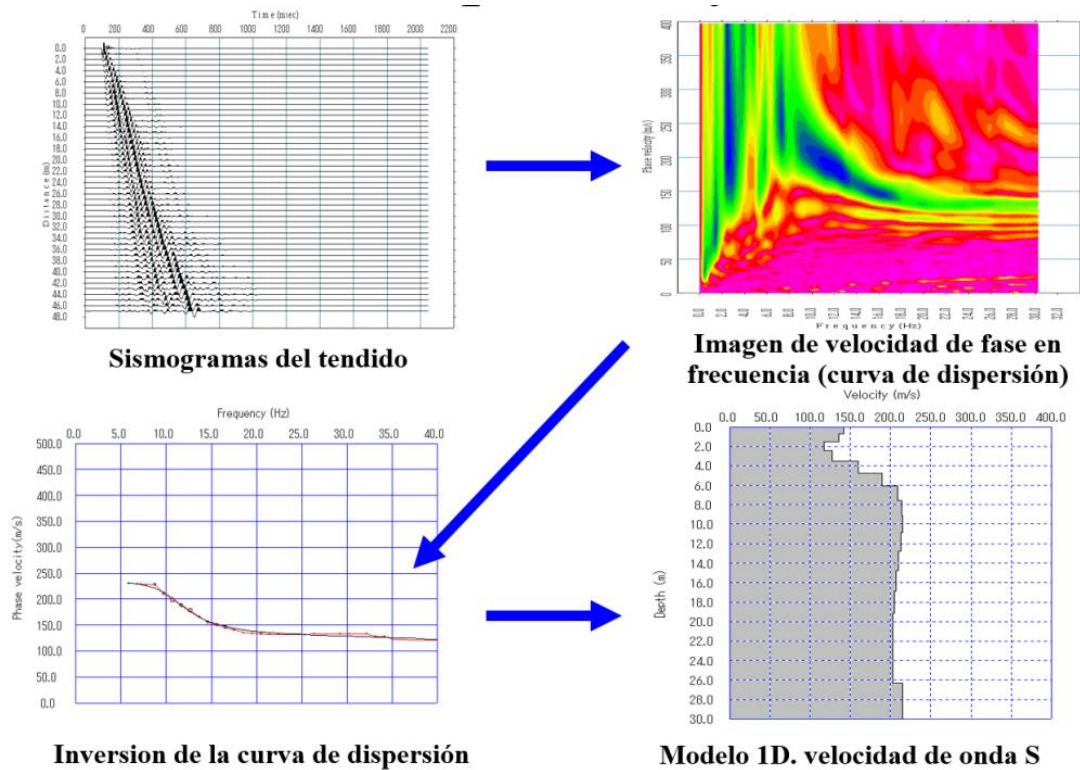


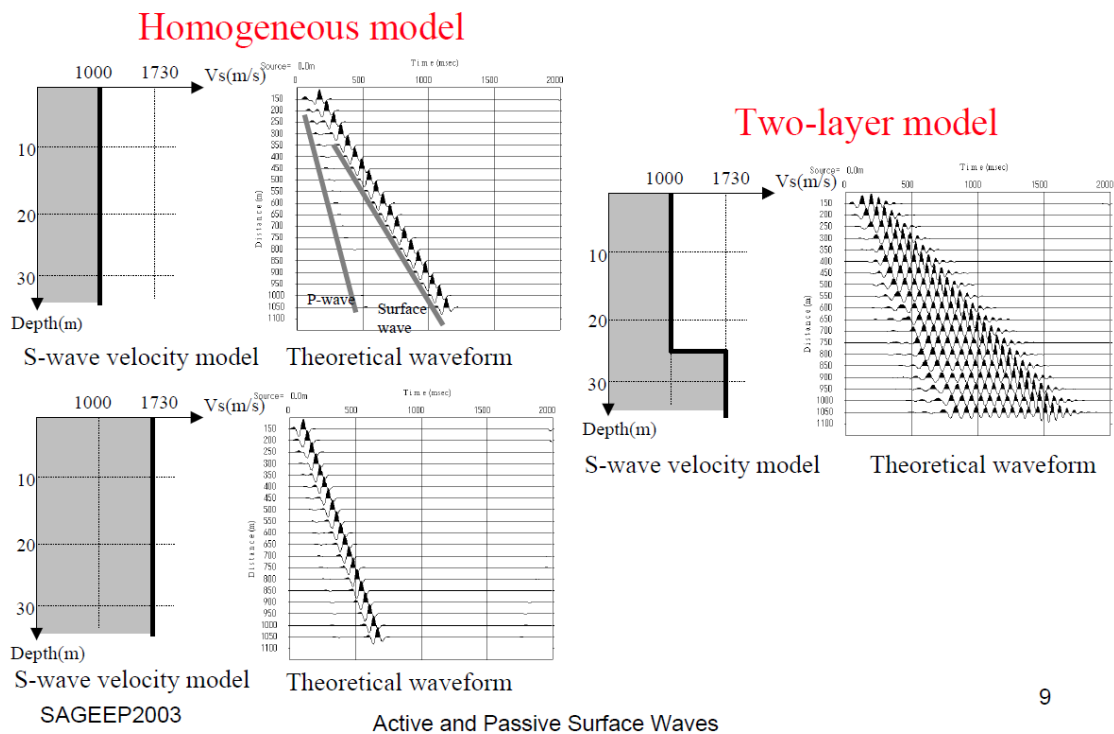
Figura 4. Obtención de la curva de dispersión a partir de la interpretación de las señales adquiridas con los geófonos para calcular un perfil de velocidades de las distintas capas(Hayashi, 2003).

La dispersión de ondas en un medio ocurre cuando este es heterogéneo, por lo que únicamente en el vacío no se genera dispersión. Existe una relación entre la dispersión de ondas y el material por el que atraviesan, su geometría e irregularidades, por lo que es factible utilizarla para definir el perfil de velocidades del conjunto de capas que conforman al pavimento. La dispersión se genera cuando la velocidad de fase varía con la frecuencia. A partir de esta variación y de su interpretación, se construyen una serie de modelos (cada uno de ellos con un perfil de velocidades de cortante) que cumplen con las condiciones iniciales del problema. De ellos, el que más se aproxime a las características de la estructura (de la que se tiene previamente conocimiento) será el más representativo. Las diferencias que se presenten de las propiedades iniciales o de proyecto en relación con las adquiridas, se atribuyen al envejecimiento, mala calidad de supervisión, generación de grietas, etc. En la figura 5 se aprecia el efecto de la heterogeneidad en la dispersión de ondas debido a la presencia de dos capas. Los modelos analizados son analíticos. En el primer caso se obtuvieron las trazas de las señales para un modelo de un



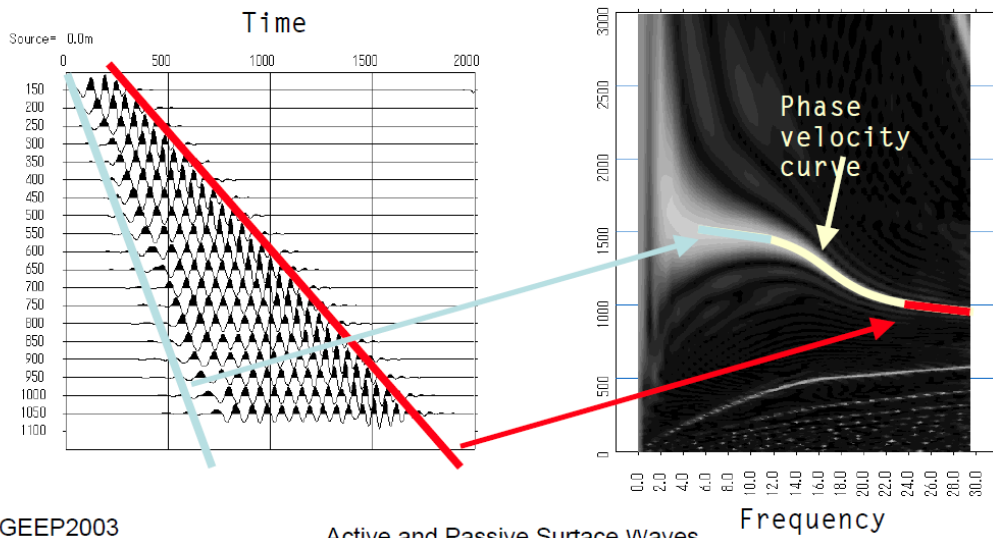
medio homogéneo infinito con velocidades de propagación de ondas de corte de 1000m/s. En el segundo ejemplo el modelo también consistió en un medio homogéneo pero con velocidad de ondas de corte de 1730 m/s y en el tercer caso el modelo está constituido con dos capas homogéneas, la capa más superficial con velocidades de ondas de corte de 1000m/s y espesor de 25m, y la capa más profunda con velocidad de 1730m/s y de espesor infinito. Se observa que para los dos primeros modelos el arribo de las ondas P y de las ondas S queda bien definido, existiendo una separación apreciable en el tiempo de llegada entre unas y otras. Para el modelo de las dos capas, la heterogeneidad queda definida por la presencia de la frontera entre estas. En este último caso, las trazas de las formas de onda se mezclan, haciéndose difícil la separación entre los dos tipos de onda y el definir cuál es su velocidad. En ellas se aprecia que las ondas de periodo largo (baja frecuencia) se transmiten rápidamente, mientras que las ondas de periodo corto (de alta frecuencia) lo hacen más lento. A esto se le llama ‘dispersión de ondas superficiales’ (figura 6).

## Surface-wave dispersion



9

Figura 5 Efecto de la heterogeneidad en la dispersión de ondas debido a la presencia de dos capas. (a) y (b) modelos homogéneos de un estrato. (c) modelo heterogéneo formado por dos capas. (Hayashi, 2003).



SAGEEP2003

Active and Passive Surface Waves

11

Figura 6 En la dispersión de ondas, las de periodo largo (baja frecuencia) se transmiten rápidamente, mientras que las de periodo corto (de alta frecuencia) lo hacen más despacio(Hayashi, 2003).

Pese a las bondades de estos métodos, su principal hándicap radica en que del análisis de datos surgen varias interpretaciones que pueden o no dar una idea adecuada de las características del subsuelo, por lo que es necesario siempre basarse en otro tipo de estudios (por ejemplo, sondeos directos) para confirmarlas.

### 3. Propagación de ondas

Las ondas son perturbaciones o variaciones en las características físicas del medio en el que se mueven. Al momento en que una onda pasa por un punto del medio en el que viaja, este experimentará variaciones en la presión, la temperatura, la intensidad eléctrica, la intensidad magnética, el potencial eléctrico o de sonido (deformación elástica). Las ondas implican transporte de energía sin transporte de materia. La onda puede tomar cualquier forma, sea un pulso finito, una onda infinita sinusoidal, etc. La velocidad con la que se propaga depende de las propiedades del medio y del tipo de onda.

Los delfines utilizan este fenómeno para trasladarse evadiendo obstáculos y para alimentarse atrapando a sus presas emitiendo ondas de sonido que chocan y rebotan contra los cuerpos que se encuentran frente a ellos. Con órganos altamente especializados, el delfín escucha la onda de sonido 'rebotada' y así crea una imagen de la forma, distancia y tamaño del objeto con el que la onda chocó. El humano ha creado distintas herramientas que le permiten generar ondas, escucharlas, grabarlas, analizarlas y representarlas, para así determinar las características del medio por el que viaja la señal sin dañar su estructura. Por ejemplo, los médicos utilizan la propagación de ondas para crear imágenes a partir de ultrasonidos.

Existen diversas técnicas no invasivas que utilizan las perturbaciones que generan las ondas para conocer las características del medio que se desea explorar. Por medio de 'micrófonos' localizados en lugares específicos, la señal ya modificada, se registra, graba, procesa, analiza e interpreta. Por ejemplo, los ingenieros generan vibraciones en estructuras como pavimentos, que son grabadas por uno o varios transductores colocados en su superficie, que detectan estas vibraciones que han sido alteradas al propagarse por el medio. Estas ondas contienen información valiosa acerca de las características del medio por donde se propagan. Una vez registradas y grabadas estas señales, son procesadas e interpretadas. Las modificaciones que presenta una señal durante su trayecto a través del pavimento darán cuenta de su estructura y de las características mecánicas de cada capa constitutiva.

El conocimiento de estas técnicas (transmisión-recepción de señales) y su adecuada interpretación forman parte del campo de la geofísica que ha tenido una buena acogida en varios campos de la ciencia -entre ellos en la ingeniería civil- gracias a sus aplicaciones no invasivas, las extensiones que abarcan y su grado de precisión, lo que las hace económicas y atractivas. Sin embargo, debido a la

heterogeneidad de los suelos, pueden existir varias interpretaciones de las señales captadas. Generalmente se utiliza la información geológica de sondeos o de pruebas de laboratorio recabados previamente, además de basarse en la experiencia, para interpretar las señales. En este trabajo se analizarán los criterios para determinar la eficacia de los métodos de prospección utilizando modelos construidos en un ambiente controlado con el propósito de estudiar que tan correctamente se están interpretando los resultados. Esta inquietud surge debido a que es subjetiva la forma en la que cada persona realiza su interpretación, por lo que los modelos que se construyan tendrán anomalías específicas definidas con intención para observar cómo son alteradas las características de una señal emitida al propagarse por el modelo. En los párrafos que siguen se presentan conceptos matemáticos sencillos de la forma de analizar las ondas y la respuesta en el medio en el que se propagan, con el propósito de proporcionar una idea para interpretar los resultados obtenidos de mediciones en laboratorio.

### 3.1 Conceptos básicos

Una onda es una perturbación que se traslada de un punto a otro del medio por el que viaja, es decir, es función del tiempo y del espacio. El movimiento armónico o sinusoidal es el caso más sencillo de movimiento vibratorio y su representación matemática está dada por:

$$\psi(x, t) = A \sin(\omega t \pm kx) \quad (1)$$

Donde

$A$  es la amplitud del movimiento con respecto a la condición estática del sistema,  $k = 2\pi/\lambda$  el número de onda,  $\lambda$  es la longitud de onda,  $t$  es el tiempo y  $x$  la posición. La frecuencia angular  $\omega$  es una medida en radianes del número de oscilaciones que ocurren por unidad de tiempo, donde  $2\pi \text{ rad}$  corresponden a un ciclo u oscilación completa. La frecuencia de oscilaciones en término de ciclos por unidad de tiempo (Hertz) está dada por

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \quad (2)$$

El tiempo que tarda una oscilación en repetirse es llamado período de vibración representado por

$$T = \frac{1}{f} \quad (3)$$

De esta forma se puede ver que para poder caracterizar cualquier movimiento armónico son necesarios dos valores. Los parámetros usados más comúnmente son la frecuencia y amplitud.

Los movimientos de vibración que se presentan en la realidad, rara vez son armónicos, generalmente el movimiento armónico solamente es obtenido bajo condiciones controladas de laboratorio. Existen tres tipos diferentes de movimientos vibratorios: periódico, transitorio y aleatorio. Las vibraciones periódicas son aquellas que se repiten en intervalos iguales de tiempo, las aleatorias jamás se repiten en el tiempo. Los movimientos transitorios están asociados a sistemas amortiguados a los que se les ha aplicado un impulso y que después de aplicársele la perturbación, el movimiento del sistema disminuirá hasta regresar a la condición inicial de reposo.

En algunas ocasiones es necesario utilizar la fase para especificar la relación que existe entre dos ondas con frecuencias iguales pero 'desfasadas' en el tiempo, es decir, sus valores pico no ocurren simultáneamente. Por ejemplo, en un punto específico de un sistema vibratorio, el movimiento que tiene está representado por:

$$z_1 = A_1 \text{sen}(\omega t) \quad (4)$$

El movimiento en otro punto del sistema puede estar definido por

$$z_2 = A_2 \text{sen}(\omega t - \phi) \quad (5)$$

Con  $-\pi \leq \phi \leq \pi$ .

Para valores positivos de  $\phi$  (fase), el movimiento en el punto 2 alcanza su valor máximo después de que el movimiento máximo ocurrió en el punto 1. En este caso el ángulo es un retraso de fase. Para valores negativos de  $\phi$ , el movimiento máximo ocurrirá después del movimiento máximo en 1, esto es llamado un adelanto de fase. En la figura 7 se han graficado dos ondas senoidales con amplitud igual a tres unidades, la onda roja está desfasada.

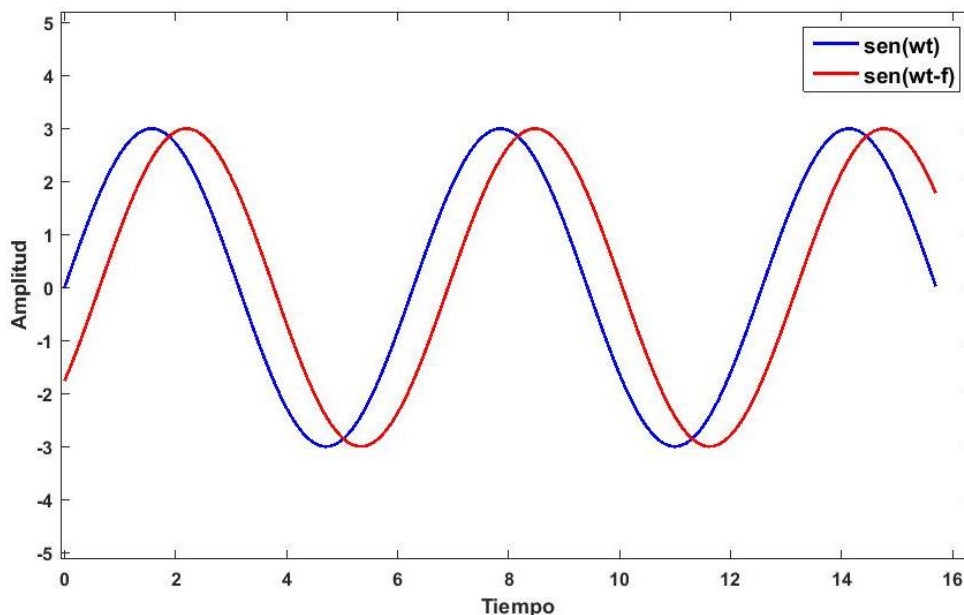


Figura 7 Señales senoidales con amplitud de 3 unidades desfasadas un ángulo  $\phi$ .

### 3.2 Superposición de ondas

Cuando dos ondas elásticas viajando en el mismo medio se cruzan, interfieren y dan en el punto de cruce una resultante con características bien definidas, pero las ondas prosiguen sin modificarse la una a la otra después de interactuar. La resultante es igual a la suma de las amplitudes de las ondas individuales. El principio de superposición puede ser aplicado cuando se presenta este fenómeno.

Supongamos que dos ondas  $z_1$  y  $z_2$  de igual amplitud y frecuencia, desfasadas una cantidad  $\phi$  viajan en la misma dirección. Cuando dos ondas con la misma amplitud, frecuencia y longitud de onda viajan en la misma dirección en un medio no dispersivo (esto es, todas las frecuencias viajan a la misma velocidad) se genera interferencia. La ecuación de movimiento que resulta al superponer las dos ondas viene dada por:

$$z_1 + z_2 = A_1 \text{sen}(kx + \omega t) + A_2 \text{sen}(kx + \omega t - \phi) \quad (6)$$

Cuando las ondas están en fase  $\phi = 0^\circ$ , se superponen e interfieren constructivamente, es decir, el desplazamiento resultante en el medio corresponde a la suma de los desplazamientos que genera cada onda. Cuando las ondas están desfasadas  $\phi = 180^\circ$  interfieren destructivamente y el desplazamiento en el medio es nulo. En la figura 8 se muestran dos casos de interferencia, el cuadro de la

izquierda presenta interferencia destructiva y el cuadro de la derecha, interferencia constructiva.

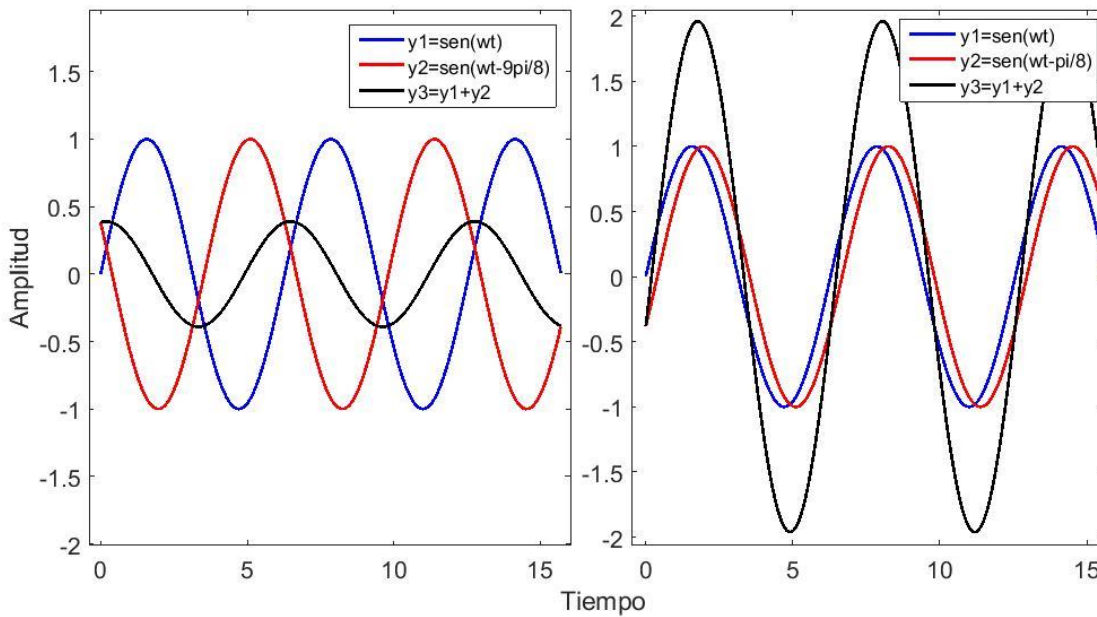


Figura 8 Suma de ondas armónicas con misma frecuencia y amplitud unitaria. La suma de las ondas de la gráfica izquierda corresponde a interferencia destructiva. En la gráfica derecha la suma resulta en interferencia constructiva.

Una onda estacionaria es un caso particular de interferencia y se produce cuando dos ondas con dirección contraria e igual frecuencia angular, amplitud y número de onda interfieren:

$$z_1 + z_2 = \sin(kx + \omega t) + \sin(kx - \omega t) = 2\cos(\omega t)\sin(kx) \quad (7)$$

Esta onda es estacionaria ya que la dependencia de tiempo y espacio ha sido separada. En este tipo de ondas la amplitud no cambia de posición, permanece oscilando en el mismo sitio, característica propia de las ondas estacionarias. Estas presentan puntos característicos con máximos desplazamientos llamados antinodos y puntos con desplazamiento nulo llamados nodos. En la figura 9 se ha graficado una onda estacionaria en diferentes instantes de tiempo.

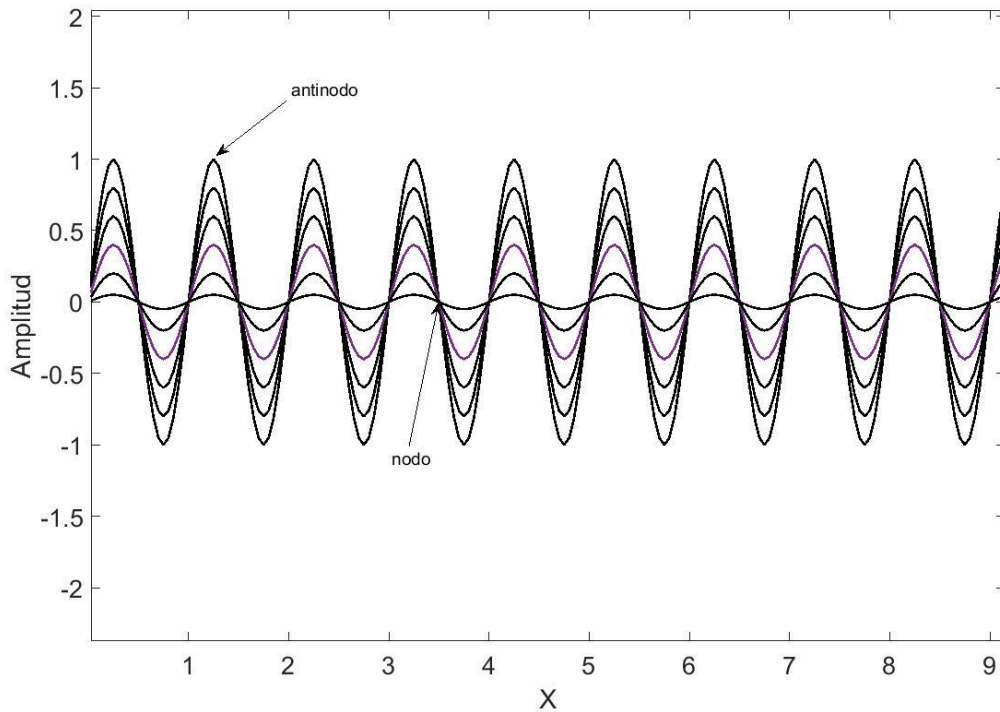


Figura 9 Onda estacionaria graficada en varios instantes. En los puntos llamados nodos no existe desplazamiento.

Cuando dos ondas armónicas  $z_1$  y  $z_2$  que viajan a la misma velocidad y dirección a través de un medio con amplitudes iguales pero frecuencias ligeramente diferentes se superponen, se genera un tipo de vibración llamado batido (beat). Este fenómeno es otro caso particular de interferencia. El incremento y decremento gradual de la amplitud en este tipo de movimiento armónico lo vuelve una vibración no armónica. La figura 10 muestra la suma de dos ondas armónicas con frecuencias similares. La amplitud resultante cambia de constructiva a destructiva.



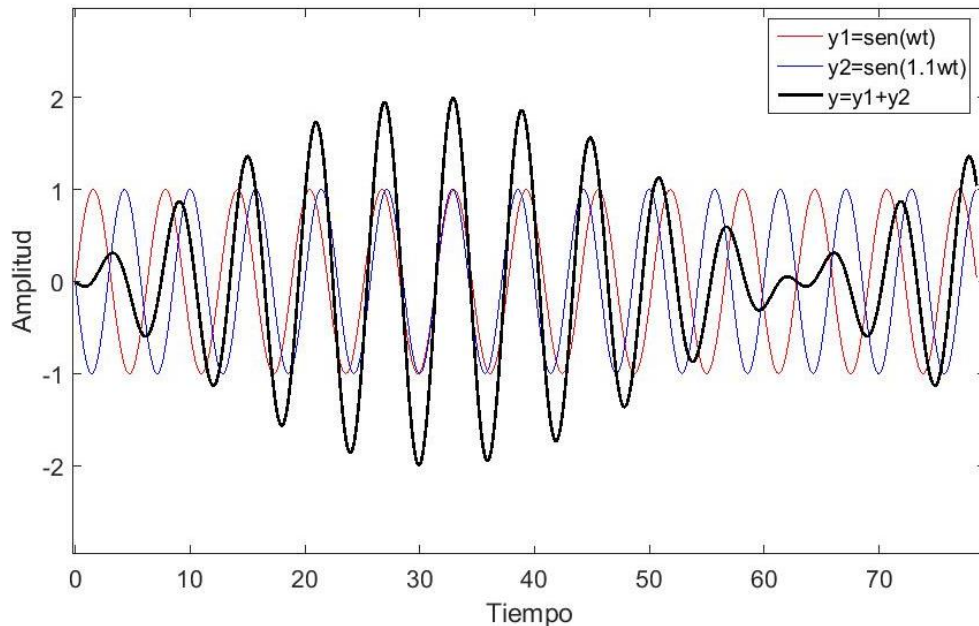


Figura 10 Suma de dos ondas senoidales con frecuencias ligeramente diferentes y amplitudes iguales.

En ocasiones no sólo el desplazamiento que presenta el medio es necesario. Existen problemas en los que la velocidad y aceleración del medio son variables importantes en el estudio del sistema vibratorio. Estas son obtenidas de la primera y segunda derivadas del desplazamiento con respecto al tiempo como se muestra a continuación:

$$\text{Desplazamiento} = z = A \text{sen}(\omega t - \phi) \quad (8)$$

$$\text{Velocidad} = \frac{dz}{dt} = \omega A \text{cos}(\omega t - \phi) \quad (9)$$

$$\text{Aceleración} = \frac{d^2z}{dt^2} = -\omega^2 A \text{sen}(\omega t - \phi) \quad (10)$$

### 3.3 Sistemas de un grado de libertad

Para analizar la respuesta de sistemas reales ante vibraciones se realizan simplificaciones que idealizan los parámetros que intervienen en el fenómeno. La forma más simple de idealización es el sistema de un solo grado de libertad con amortiguamiento viscoso consiste en un conjunto de masa ( $m$ ), resorte ( $k$ ) y amortiguador ( $c$ ) (figura 11). Aunque esta simplificación es sencilla, proporciona una idea del comportamiento de sistemas en su modo fundamental de vibrar, además

de ser un modelo matemático adecuado para entender cómo afectan cada una de las variables (masa, amortiguamiento, rigidez) a la respuesta del sistema. La fuerza debida a la masa es proporcional a la aceleración, la fuerza debida al amortiguador es proporcional a la velocidad y la fuerza en el resorte es proporcional al desplazamiento. El número de grados de libertad es igual al número de variables independientes necesarias para definir la posición del sistema.

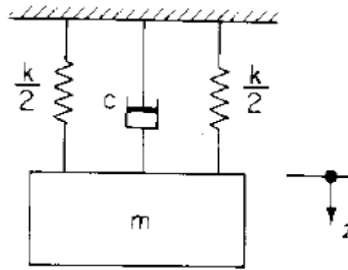


Figura 11 Sistema de un solo grado de libertad con amortiguamiento viscoso (Richart 1970)

Aplicando la segunda Ley de Newton ( $F = ma$ ) se obtiene:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad (11)$$

Para el caso en el que no existe amortiguamiento, la solución de esta ecuación tiene la siguiente forma:

$$z = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t) \quad (12)$$

Donde las constantes  $A$  y  $B$  dependen de las condiciones iniciales del sistema y  $\omega = \sqrt{k/m}$  es la frecuencia de vibración sin amortiguamiento. De lo anterior se observa que una vibración libre de un sistema de un grado de libertad sin amortiguamiento es un movimiento armónico y ocurre con una frecuencia natural de vibración:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (13)$$

Si existe disipación de energía por medio de un amortiguador hay tres posibles soluciones para el sistema dependiendo de la relación entre  $c^2$  y  $4km$ . Si  $c^2 > 4km$  la amplitud del movimiento decrecerá exponencialmente sin cambio de signo. En esta situación no ocurrirán oscilaciones y el sistema estará sobre amortiguado. Cuando  $c^2 = 4km$  el sistema oscila una sola vez y al valor  $c = 2km$  se lo llama coeficiente de amortiguamiento crítico. En el tercer caso donde  $c^2 < 4km$  el

amortiguamiento del sistema es menor que el crítico, su movimiento será oscilatorio y la amplitud disminuirá con el tiempo. En la figura 12 se muestra el efecto del amortiguamiento en un sistema sub-amortiguado.

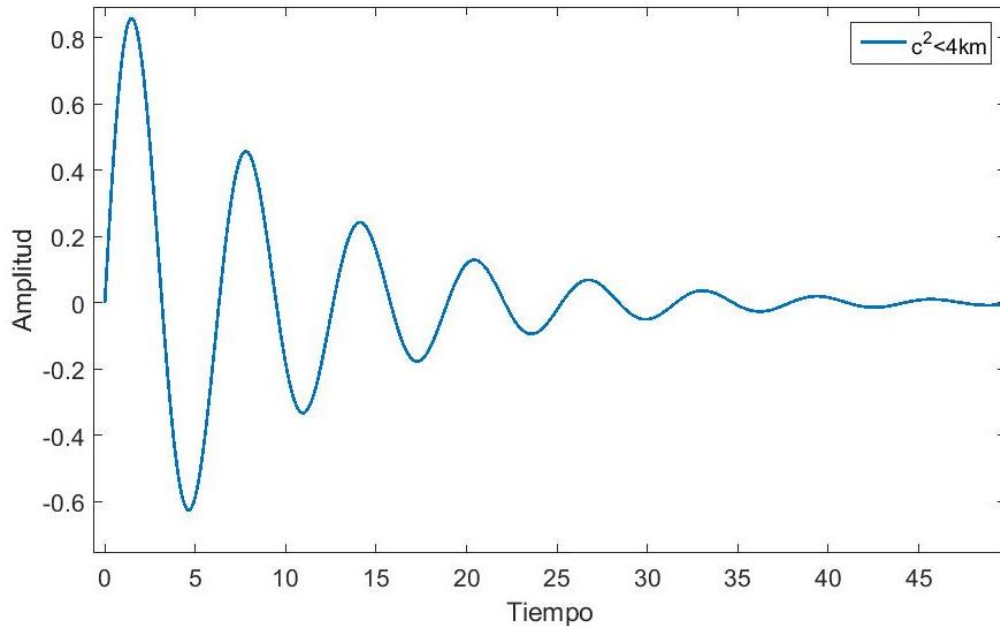


Figura 12 Vibración libre de sistema con amortiguación viscosa.

Las situaciones anteriores pueden ser extendidas a muchos otros tipos de problemas. La presencia de resortes en serie o en paralelo, sistemas forzados con fuerzas armónicas, vibración en la base del sistema y sistemas de múltiples grados de libertad.

La vibración de varios sistemas físicos (vibración de cuerdas tensas, vibración longitudinal y torsional de barras, ondas de presión en líquidos ideales) puede ser descrita mediante la ecuación de onda representada por la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d^2u}{dt^2} = v^2 \frac{d^2u}{dx^2} \quad (14)$$

donde  $v$  es la velocidad de propagación de la onda y  $u$  el desplazamiento en dirección  $x$ . La solución de la ecuación de onda depende de las condiciones de frontera.

### 3.4 Reflexión y refracción

Las ondas poseen energía y momento por lo que cuando encuentran un obstáculo, parte de su energía es reflejada y parte es absorbida. En el caso de una onda sísmica viajando en la tierra, las interfaces (estratos) presentarían reflexiones y refracciones. Al fenómeno de la onda que se refleja por chocar contra un obstáculo se le llama reflexión. La reflexión de ondas es utilizada en radares, métodos de prospección no invasivos y es responsable de las ondas estacionarias. A la energía que es absorbida por el obstáculo se la conoce como refracción.

Suponiendo una onda viajando en una cuerda, un obstáculo sería un cambio en la densidad de la cuerda. La velocidad a la que una onda viaja a través de una cuerda depende de la tensión e inercia (masa por unidad de longitud) de la cuerda. Si un extremo de la cuerda estuviera empotrado (no hay movimiento) a un medio infinitamente rígido (no hay refracción) y una onda viajando a través de ella choca contra el medio, la onda reflejada tendrá un cambio de polaridad (desfase). Si el extremo de la cuerda se encuentra libre y una onda que se transmite llega al extremo, la onda reflejada tendrá la misma velocidad y amplitud que la onda incidente, pero dirección contraria. La amplitud de la onda en el extremo libre tiene amplitud del doble de la de la onda incidente (interferencia constructiva). Cuando la onda encuentra una interfaz que no es totalmente rígida ni libre, parte de la energía es reflejada y parte es transmitida. El comportamiento de las reflexiones y transmisiones dependen de las propiedades del material en ambos lados de la interfaz.

Una propiedad importante de los materiales es su impedancia. La impedancia  $Z$  de un material es el producto de su densidad y la velocidad de onda ( $Z = \rho v$ ).

La amplitud  $A_r$  de una onda reflejada en una interfaz entre dos medios es:

$$A_r = Z_1 - Z_2 Z_1 + Z_2 A_1 \quad (15)$$

y la amplitud  $A_t$  de la onda transmitida:

$$A_t = 2Z_1 Z_1 + Z_2 A_1 \quad (16)$$

### 3.5 Propagación de ondas en un medio elástico, homogéneo e isótropo.

De acuerdo con la teoría de la elasticidad, dos tipos de onda de cuerpo se pueden propagar a través de un medio infinito, homogéneo, isotrópico y elástico:

1. Ondas longitudinales, también llamadas ondas de compresión, irrotacionales, de desplazamiento o P, debido a que son las ondas que se desplazan con mayor velocidad por lo que llegan Primero. Cuando estas ondas se propagan a través del medio, las partículas se desplazan en dirección de la propagación induciendo compresiones y extensiones en las partículas.
2. Ondas transversales, también llamadas ondas de cortante, rotacionales, de deformación o S debido a que su velocidad es menor que la de las ondas de compresión y llegan en Segundo lugar. Estas ondas inducen rotación y esfuerzos cortantes en el medio. La dirección del movimiento de las partículas es perpendicular a la dirección de propagación.

Del equilibrio del elemento infinitesimal con densidad ( $\rho$ ) de la *figura 13* se tiene que:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \quad (17)$$

$$\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \quad (18)$$

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \quad (19)$$

donde  $(x, y, z)$  representa el sistema cartesiano coordenado,  $(u, v, w)$  los desplazamientos correspondientes en las tres direcciones  $x, y$  y  $z$  respectivamente,  $\sigma_n$  y  $\tau_{nm}$  los componentes del tensor de esfuerzo. Las siguientes relaciones para medios elásticos son utilizadas para expresar las ecuaciones anteriores en términos de desplazamientos.

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \lambda \bar{\epsilon} + 2\mu \epsilon_x \tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \gamma_{xy} \\ \sigma_y &= \lambda \bar{\epsilon} + 2\mu \epsilon_y \tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \gamma_{yz} \quad (20) \\ \sigma_z &= \lambda \bar{\epsilon} + 2\mu \epsilon_z \tau_{zx} = \tau_{xz} = \mu \gamma_{zx} \\ \mu &= \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \end{aligned}$$

Donde  $\mu$  y  $\lambda$  son las constantes de Lamé,  $\nu$  es el módulo de Poisson y  $\bar{\epsilon}$  es la deformación volumétrica definida por  $\bar{\epsilon} = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$ . Las siguientes relaciones para deformación en términos de rotación y desplazamiento también son utilizadas.

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} & 2\bar{\omega} &= \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} & 2\bar{\omega} &= \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \\ \epsilon_z &= \frac{\partial u}{\partial x} \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} & 2\bar{\omega} &= \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \end{aligned}$$

Donde  $\bar{\omega}$  es la rotación alrededor de cada eje.

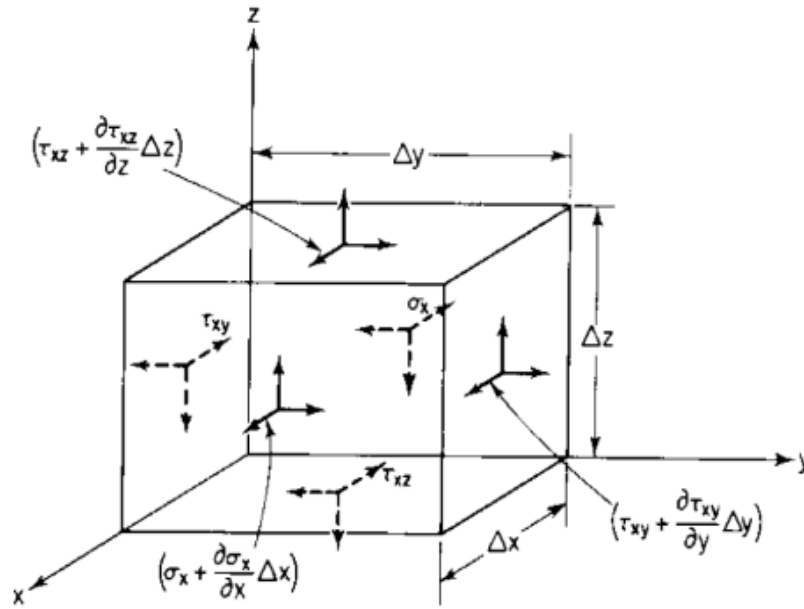


Figura 13 Esfuerzos en un elemento infinitesimal de un medio elástico

Utilizando relaciones de esfuerzo – deformación para medios elásticos, las constantes de Lamé ( $\lambda$  y  $G$ ), el módulo de Poisson ( $\nu$ ) y expresando las deformaciones en términos de rotaciones ( $\bar{\omega}$ ) y desplazamientos es posible enunciar las ecuaciones de equilibrio de forma vectorial llamadas ecuaciones de Navier, como:

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (20)$$

Llamada ecuación de movimiento y cuyas soluciones se pueden expresar como:

$$u, v, w = A e^{i(k(x,y,z) - \omega t)} + B e^{i(k(x,y,z) + \omega t)} \quad (21)$$

Sustituyendo las soluciones (21) en la ecuación de movimiento (20) es posible obtener dos soluciones para cada ecuación de movimiento. La primera describe la propagación de ondas P y la segunda solución describe la propagación de ondas S. La primera solución se obtiene derivando las ecuaciones de movimiento respecto a  $x$ ,  $y$  y  $z$  respectivamente y posteriormente sumando las tres expresiones, resultando una ecuación con la siguiente forma:

$$\frac{\partial^2 \bar{\epsilon}}{\partial t^2} = v_p^2 \nabla^2 \bar{\epsilon} \quad (22)$$

Donde  $\bar{\epsilon} = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$  es el cambio de volumen y  $v_p$  la velocidad de propagación de onda.

$$v_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2G}{\rho}} \quad (23)$$

De esta manera se observa que el cambio de volumen  $\bar{\epsilon}$  se propaga a una velocidad  $v_p$ .

La otra solución a las ecuaciones de movimiento puede ser obtenida diferenciando la ecuación de movimiento en  $v$  respecto a  $z$  y diferenciando la ecuación de movimiento en  $w$  respecto a  $y$ . Posteriormente se elimina  $\bar{\epsilon}$  restando las expresiones obtenidas, resultando:

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) = G \nabla^2 \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad (24)$$

Y sustituyendo la relación de rotación en términos de desplazamiento en la ecuación anterior, se obtiene:

$$\frac{\partial^2 \bar{\omega}_x}{\partial t^2} = v_s^2 \nabla^2 \bar{\omega}_x \quad (25)$$

Las expresiones para  $\bar{\omega}_y$  y  $\bar{\omega}_z$  pueden ser obtenidas análogamente, lo cual implica que las ondas de rotación se propagan a una velocidad de

$$v_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (26)$$

Con esto es posible ver que en un medio infinito y elástico pueden propagarse dos tipos de ondas, que representan diferentes tipos de movimiento en el medio y que viajan a diferente velocidad. Las ondas longitudinales se propagan con una velocidad  $v_p$  mayor a las ondas transversales que se propagan con una velocidad  $v_s$ .

Las ondas P y S son los tipos de ondas que pueden propagarse en un medio infinito, pero dependiendo del tipo de fronteras otros tipos de ondas pueden desarrollarse. En un semiespacio es posible encontrar otro tipo de solución a las ecuaciones de movimiento. La solución corresponde a un tipo de onda que se propaga en la zona cercana al límite del semiespacio, su velocidad es independiente de la frecuencia (no dispersiva). Este fenómeno fue estudiado inicialmente por Lord Rayleigh (1885) para posteriormente ser descrito por Horace Lamb (1904).

La onda estudiada por estos investigadores es llamada la onda de Rayleigh (onda R) y esta confinada en la vecindad de la superficie del semiespacio. Si el medio está conformado por un estrato sobre un semiespacio, es posible encontrar otro tipo de onda superficial llamada onda de Love la cual está polarizada horizontalmente y disminuye de amplitud con la profundidad.

Cuando una onda reflejada encuentra la superficie del medio, esta es reflejada totalmente por la interfaz de suelo – aire. Las reflexiones en la superficie pueden generar un tipo de ondas polarizadas horizontalmente llamado ondas de Love. Las ondas de Love no pueden desarrollarse si la capa superficial presenta la velocidad de propagación mayor.

### **3.6 Ley de Snell**

Cuando una onda de cuerpo viaja a través de un medio y encuentra una frontera, una parte de la energía de la onda incidente será reflejada en el medio por el que viajaba y otra parte será transmitida al segundo medio. Utilizando la teoría de la elasticidad y las condiciones de frontera adecuadas es posible determinar la distribución de energía entre las ondas reflejadas y transmitidas y su naturaleza.

Para determinar la distribución de energía en una interface hay que considerar los dos tipos de ondas de cuerpo y el plano en el que actúan, esto es, ondas P, SH y SV. Las ondas S son consideradas como dos componentes independientes debido al movimiento que presentan. Las ondas SV tienen un movimiento perpendicular al plano de la interface mientras que las ondas SH tienen un movimiento paralelo a la interface.



En la figura 14 se representa lo siguiente: cuando una onda P incide en una interface se generan 4 ondas resultantes: (1) una onda P reflejada, (2) una onda SV reflejada, (3) una onda P refractada y (4) una onda SV refractada. Las ondas resultantes de una onda SV incidente son: (1) una onda SV reflejada, (2) una onda P reflejada, (3) una onda SV refractada y (4) una onda P refractada. Mientras que las ondas incidentes SV y P producen ondas SV y P, las ondas SH solo producen ondas SH. Las ondas SH no producen ondas P ni SV debido a que no tienen componente normal al plano de la interface. Las ondas resultantes de una onda incidente SH son: (1) una onda SH reflejada y (2) una onda SH refractada. El ángulo al que las ondas resultantes dejan la interfaz depende del ángulo de incidencia y de la relación de velocidades de propagación de cada estrato. Los ángulos pueden ser calculados utilizando la ley de Snell.

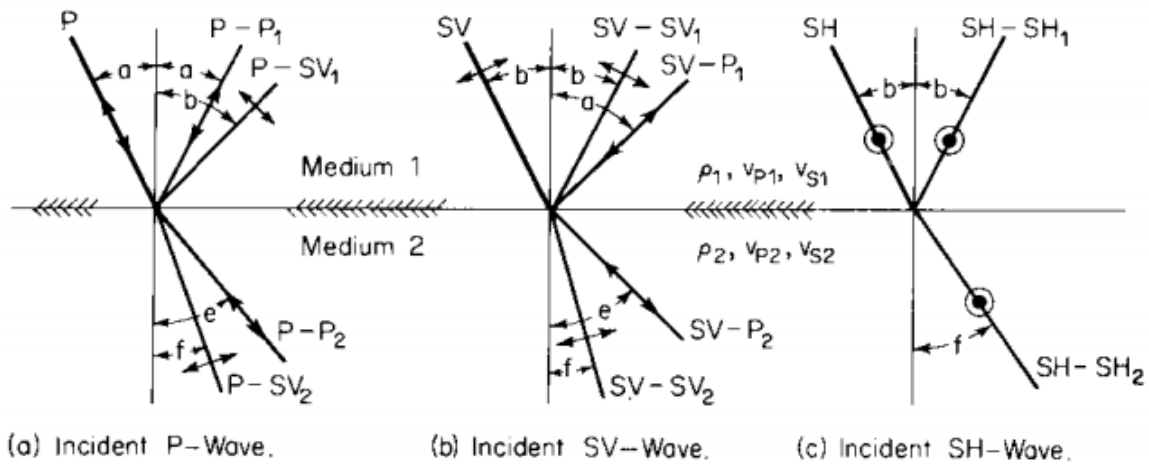


Figura 14 Reflexiones y refracciones de una onda elástica en una interface entre dos medios. (Richart, 1970)

Si las ondas satisfacen las condiciones de frontera descritas arriba, los argumentos de las ondas que interfieren en una interface deben ser iguales. Entonces, el número de onda y la velocidad de las ondas son iguales y las ondas se propagan a lo largo de la interface a la misma velocidad y en fase, con lo cual se puede obtener la Ley de Snell:

$$\frac{\text{sen } a}{v_{P1}} = \frac{\text{sen } b}{v_{S1}} = \frac{\text{sen } c}{v_{P2}} = \frac{\text{sen } d}{v_{S2}} \quad (27)$$

donde  $v_{P1}$  es la velocidad de la onda P el medio 1,  $v_{S1}$  la velocidad de la onda S en el medio 1,  $v_{P2}$  la velocidad de la onda P en el medio 2 y  $v_{S2}$  la velocidad de la

onda S en el medio 2 y  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , y  $d$  son los ángulos medidos desde la normal a la interface. La ecuación también se aplica a ondas SH pero sin cambio de polaridad.

De acuerdo con la ley de Snell, el ángulo de refracción depende del ángulo de incidencia y de la velocidad de propagación en cada medio:

$$b = \sin^{-1} \left( \frac{v_{S1}}{v_{P1}} \operatorname{sen} a \right) \quad (28)$$

Cuando la velocidad de la onda refractada o reflejada es mayor que la de la onda incidente, se presenta una situación límite en la que el ángulo de reflexión o refracción es de  $90^\circ$ . Al ángulo en que la onda incidente no se refracta, sino que va paralela a la frontera de los medios se le conoce como ángulo crítico. A este tipo de onda confinada en la frontera entre dos medios se le llama onda guiada. Para ángulos de incidencia mayores que el ángulo crítico, la onda no se refracta y se crea una perturbación que pierde energía rápidamente con la distancia al sitio de incidencia. Esta onda es llamada evanescente pues no transmite energía fuera de la interface. La energía restante es repartida a la onda reflejada ya que no se propaga a través del segundo medio. A este fenómeno se le denomina reflexión interna total.

## 4. Análisis de Fourier

El análisis de Fourier es una técnica que permite describir una onda en el dominio del tiempo en términos del dominio de la frecuencia y de fase. El análisis de Fourier estudia la representación de funciones como el resultado de la superposición de ondas armónicas. Su herramienta fundamental son las series de Fourier que se utilizan para analizar funciones periódicas a través de su representación como sumas de funciones sinusoidales simples.

La medición de ondas en el dominio del tiempo es la forma más ampliamente utilizada, pero estas mediciones solo muestran cierta parte del fenómeno. Cuando una onda es descrita en términos del tiempo es posible hacer una nueva descripción en términos de la frecuencia, es decir, se puede representar a la misma onda en dos planos distintos (plano temporal y plano frecuencial). Estos planos son normales entre sí.

Es posible pensar en la representación temporal de la onda como una proyección en el plano temporal que se encuentra a cierta distancia de ese plano. Esta distancia es medida a lo largo del eje de frecuencia y corresponde al valor recíproco del periodo de la onda. La representación en frecuencia es similar a la temporal, suponiendo a la onda como una proyección en el plano de frecuencia como se muestra en la figura 15.

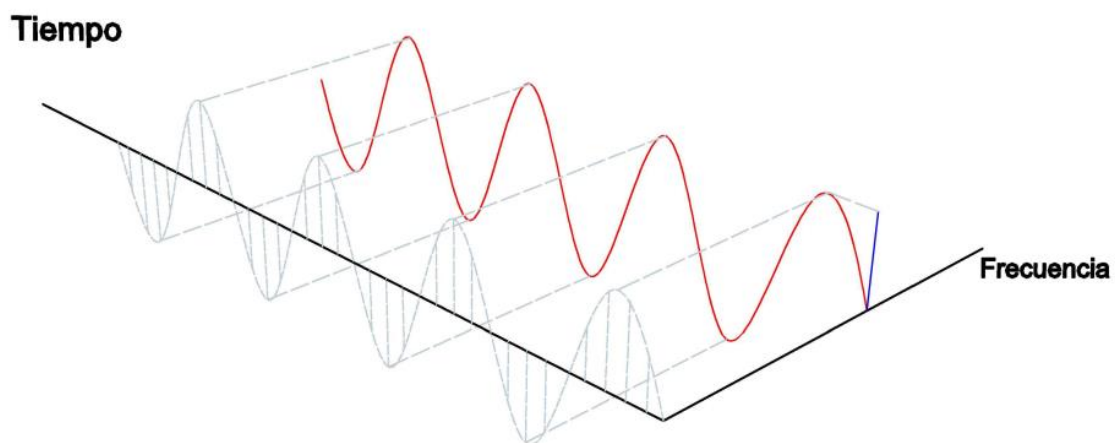


Figura 15. Señal (rojo) representada en el dominio del tiempo y de la frecuencia.

Las técnicas clásicas del Análisis de Fourier solamente pueden ser utilizadas cuando las funciones son representadas por ecuaciones. La transformada discreta de Fourier (DFT) puede ser empleada para obtener la transformada de las señales

digitales. La Transformada rápida de Fourier (FFT) es un algoritmo numérico implementado para la computadora para el cálculo de la transformada discreta de Fourier. Con el uso de la FFT la complejidad de los cálculos es reducida. En ocasiones es necesaria información adicional para desplazar a la onda al cero de referencia. Esta información es dada por un diagrama de fase que consiste en un pulso localizado en un plano frecuencial y cuya amplitud indica el ángulo de desfase asociado a la onda.

Sin la representación en el dominio de la frecuencia de las ondas, los cambios en la forma de las señales en el tiempo solo indican que ciertas componentes han sido modificadas. Por ejemplo, al utilizar filtros en ondas, solo ciertas componentes de las señales son modificadas.

#### 4.1 Series de Fourier

Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) fue un científico de una capacidad sin igual. Su interés en la conducción de calor lo llevó al descubrimiento de la relación que existe entre la conducción de calor a través de cuerpos sólidos con series matemáticas de senos y cosenos. Las series que llevan su nombre tienen la siguiente forma:

$$y = \frac{a_0}{2} + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos x + b_2 \sin x) + \dots \quad (29)$$

Esta relación dice que se pueden construir diversas formas de ondas no sinusoidales a partir de la suma de ondas sinusoidales. Una serie de Fourier es una serie infinita y que probablemente constituyen la primera aplicación de series trigonométricas a la solución de problemas. Son utilizadas para analizar funciones periódicas a través de su descomposición en funciones más simples. Las series de Fourier junto con la integral del mismo nombre son las herramientas básicas en el análisis de Fourier o análisis armónico.

Algunas de las áreas de aplicación del análisis de Fourier son el análisis de sistemas lineales, antenas, vibración mecánica, óptica y biomedicina.

Si una señal puede ser representada mediante una serie de Fourier, los componentes de la serie describen completamente a la señal en el dominio de la frecuencia. Para que esto sea posible, deberán cumplirse ciertas condiciones.

La primera condición es la periodicidad de la señal. Esto es, para una señal  $x(t)$  existe un periodo de tiempo constante  $T$ , para el cual  $x(t) = x(t + T)$ . Debido a que la periodicidad debe ser para un dominio del tiempo de menos infinito a infinito y esta condición es cumplida muy pocas veces, esta regla se modifica definiendo a la función en un intervalo observable. Otras condiciones para que la serie de Fourier de una función exista están enunciadas en las llamadas condiciones de Dirichlet resumidas a continuación: La señal debe tener un número finito de discontinuidades, un número finito de máximos y mínimos y debe ser integrable en el periodo de estudio. La forma general de la serie de Fourier de la función periódica  $x(t)$  con periodo  $T$  puede ser expresada por

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t \quad (30)$$

Donde  $\omega_0 = 2\pi/T$  es la frecuencia angular que corresponde al periodo de  $x(t)$ . Utilizando la propiedad de ortogonalidad de las funciones  $1, \cos \omega_0 t, \cos 2\omega_0 t, \dots, \cos n\omega_0 t, \sin \omega_0 t, \sin 2\omega_0 t, \dots, \sin n\omega_0 t$  es posible encontrar el valor de los coeficientes de Fourier.

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt \quad (31)$$

$$a_n = \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos(n\omega_0 t) dt, \quad n = 1, 2, \dots \quad (32)$$

$$b_n = \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin(n\omega_0 t) dt, \quad n = 1, 2, \dots \quad (33)$$

La serie (30) describe el contenido de frecuencias de una onda con el que se pueden graficar los espectros de magnitud y de fase. El análisis de Fourier es el estudio de los espectros de las diferentes ondas. Un espectro discreto es una gráfica creada a partir de las componentes espectrales de la serie localizadas en un eje de frecuencias. Cada componente espectral está representada por una línea (pulso) cuya longitud indica la amplitud o fase.

La frecuencia fundamental  $f_0 = \omega_0/2\pi$  es el recíproco del periodo de la onda. Cada término de la serie es un múltiplo de la frecuencia fundamental y es llamado armónico. Si es posible identificar el tipo de simetría de una función en el dominio del tiempo, se pueden predecir ciertas características de su espectro. Las funciones

pares, impares o pueden ser representadas mediante la suma de funciones pares e impares, respectivamente.

Es posible expresar a los términos trigonométricos de la serie de Fourier en su forma exponencial y expresándola como

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft} dt \quad (34)$$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt \quad (35)$$

Las ecuaciones (34) y (35) son conocidas como la integral inversa y la integral de Fourier.

A diferencia de las series de Fourier, la integral es aplicable a funciones no periódicas (periodo infinito), resultando en funciones continuas de frecuencia. Estos diagramas son espectros continuos ya que a medida que el periodo de una función crece, más componentes espectrales son tomadas en cuenta y el espacio entre ellas disminuye. Esto implica que un pulso está formado por infinitas componentes senoidales.

## 4.2 Transformada discreta de Fourier

Es posible transformar series de datos digitales aplicando la integral de Fourier sobre el intervalo de muestreo. Mediante manipulaciones de la integral de Fourier se puede obtener la transformada discreta de Fourier (DFT) y la transformada inversa discreta:

$$X(k\Delta f) = \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} x(n\Delta t)e^{-j2\pi k\Delta f n\Delta t} \quad (36)$$

$$x(n\Delta t) = \Delta f \sum_{k=0}^{N-1} X(k\Delta f)e^{j2\pi k\Delta f n\Delta t} \quad (37)$$

donde:

$N$  = número de muestras

$\Delta t$  = intervalo de muestreo en el dominio del tiempo

$\Delta f$  = intervalo de muestreo en el dominio de la frecuencia

$n$  = índice de muestra ( $n = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ )

$k$  = índice de la componente de frecuencia ( $k = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ )

$x(n\Delta t)$  = conjunto de muestras en el dominio del tiempo

$X(k\Delta f)$  = conjunto de coeficientes de Fourier

Estas expresiones permiten transformar series de muestras en el dominio del tiempo en series de muestras en el dominio de la frecuencia y viceversa.

### 4.3 Transformada Rápida de Fourier (FFT)

La FFT es un algoritmo para el cálculo de la DFT. El uso de este algoritmo produce los mismos resultados que la DFT pero con ruido digital, diferente orden de los resultados y menor tiempo de cálculo.

La implementación de la DFT requiere de una serie de  $N^2$  operaciones, por lo que su uso no era adecuado para la mayoría de sus aplicaciones. El artículo publicado en 1903 por C. Runge describe la técnica conocida como FFT. En 1942 Danielson y Lanczos publican un artículo en el que se reconocen ciertas simetrías y periodos similares en los cálculos y se reduce el número de operaciones aritméticas a  $N \log_2 N$ .

Las técnicas descritas fueron creadas para su evaluación "a mano" por lo que el análisis de Fourier no fue aceptado ampliamente hasta la aparición de la computadora digital. En la década de 1960, Richard L. Galwin solicitó de su colega James W. Tukey la creación de un programa de computadora que implementara la FFT. Tukey involucró a J. W. Cooley para programar el algoritmo de computadora que actualmente es conocido como FFT (Fast Fourier Transform).

En la figura 16 se ha graficado la FFT de tres funciones periódicas  $y_1 = \text{sen}(25\omega t)$ ,  $y_2 = \text{sen}(30\omega t)$  y  $y_3 = \text{sen}(10\omega t)$  en azul, rojo y negro, respectivamente con ayuda del programa Matlab. Se puede ver que la amplitud de los espectros de las señales con mayor frecuencia es más cercana a uno ya que mientras mayor sea la longitud de la señal la resolución aumenta. La FFT de suma de las funciones ( $y_1 + y_2 + y_3$ ) también se han graficado con línea discontinua para su comparación. Se aprecia que los picos del espectro de la función suma, coinciden con los de cada función monocromática.

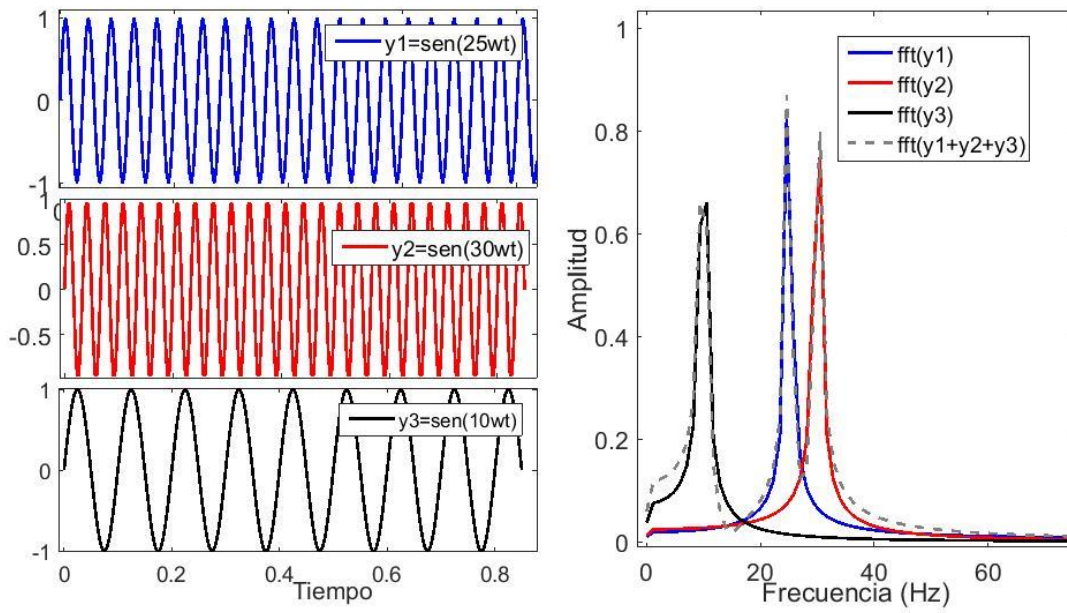


Figura 16. FFT de tres ondas senoidales y de la suma de las ondas



## 5. Análisis dimensional y similitud

La ciencia se basa en conocimientos obtenidos mediante la observación y descripción de lo observado. Para describir las propiedades físicas de los fenómenos, estas se comparan. Para obtener leyes que describan a los fenómenos se hace uso de las matemáticas. Es frecuente el utilizar modelos para analizar los fenómenos observados. Para ello los modelos se deben construir considerando las propiedades del prototipo o fenómeno real. En el método de análisis dimensional se proporcionan leyes de similitud para poder relacionar el fenómeno estudiado con el modelo construido para analizarlo. Este análisis dimensional es especialmente útil cuando se realizan experimentos en modelos con escala diferente, porque permite extrapolar resultados entre distintos modelos y reduce el número de experimentos.

Con el análisis dimensional se estudia la relación que existe entre las variables que intervienen en problemas físicos. El método se deduce de la premisa que dice que toda ecuación que represente un fenómeno físico es válida si el resultado es el mismo sin importar las unidades base elegidas.

En la obtención de resultados de problemas en donde las ecuaciones constitutivas y condiciones de frontera se conocen, el análisis dimensional, puede ser ventajoso al revelar similitud mediante los grupos adimensionales. Cuando se requiere la solución de problemas sin ecuaciones constitutivas ni condiciones de frontera bien definidas, el análisis dimensional es la única opción.

Si ciertas cantidades físicas son tomadas como unidades básicas, todas las demás cantidades podrán ser expresadas en términos de las unidades básicas. Las unidades tomadas como básicas son llamadas unidades fundamentales y las unidades restantes son llamadas derivadas. La categorización de una cantidad física en base o derivada es arbitraria.

Debido a que el origen de las cantidades base es físico, el cambio en las unidades base no afecta la magnitud del fenómeno físico. Esto está postulado en el principio de significado absoluto de magnitud relativa de Bridgman que dice que un número  $Q$  obtenido de evaluar una fórmula es una cantidad física si al cambiar las unidades base la relación entre dos resultados cualesquiera permanece constante.

Por convención, las cantidades se especifican por su valor numérico seguido por las unidades base. Por ejemplo, la declaración  $Q = 343 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  indica que la cantidad  $Q$  con dimensión  $L \cdot t^{-1}$  posee una magnitud de 343 si la distancia es medida en metros y el tiempo en segundos.

En el caso particular de problemas en donde intervienen excitaciones dinámicas, uno de los parámetros clave para definir la escala a la que deberá construirse el modelo que represente al sistema real o prototipo (o bien, identificar qué tipo de situaciones reales son representadas por el modelo), es la longitud de onda ( $\lambda$ ); de tal suerte que la escala entre el modelo ( $m$ ) y el prototipo ( $p$ ) está dada por:

$$escala = \frac{\lambda_m}{\lambda_p} \quad (38)$$

#### 4.1 Homogeneidad dimensional

La dimensión de cualquier cantidad física (base o derivada) es una fórmula que define el cambio en su valor numérico cuando la unidad base cambia. Un principio fundamental del análisis dimensional consiste en que las ecuaciones correctamente formuladas deben ser dimensionalmente homogéneas. Solo las ecuaciones que permanecen verdaderas sin importar la elección del sistema de unidades son correctas. La ecuación

$$A = B + C \quad (39)$$

es válida solamente si  $A$ ,  $B$  y  $C$  poseen las mismas dimensiones, esto es:

$$[A] = [B] + [C] \quad (40)$$

Para que una ecuación sea dimensionalmente homogénea se debe cumplir:

1. Que ambos lados de la ecuación tengan la misma dimensión;
2. Las sumas de cantidades en la ecuación deben de poseer las mismas dimensiones;
3. Los argumentos de funciones especiales (exponenciales, logaritmos, trigonométricas) deben ser adimensionales.

## 4.2 Sistemas de unidades

Para la obtención de resultados con significado físico en el uso de relaciones matemáticas es necesario elegir un sistema de unidades. Un sistema de unidades está definido por

1. Un conjunto de cantidades base;
2. Las unidades base, y
3. Las cantidades derivadas.

La tabla 1 presenta las cantidades base del SI (Système International), la tabla 2 muestra algunas cantidades derivadas:

Tabla 1. Sistema Internacional

Cantidad, Dimensión	Nombre	Símbolo
Longitud, L	metro	m
Tiempo, t	segundo	s
Masa, M	kilogramo	kg
Temperatura, T	kelvin	K
Corriente, I	ampere	A
Número de partículas	mol	mol
Intensidad lumínica	candela	cd

Tabla 2. Algunas cantidades derivadas del SI

Cantidad	Ecuación o ley	Dimensión	Símbolo dimensional	Nombre
Frecuencia	$f=1/T$	$t^{-1}$	$s^{-1}$	hertz (Hz)
Aceleración	$a=d^2x/dt^2$	$Lt^{-2}$	$ms^{-2}$	---
Fuerza	$F=Ma$	$MLt^{-2}$	$kg\ m\ s^{-2}$	newton (N)
Esfuerzo	$p=F/A$	$ML^{-1}t^{-2}$	$N\ m = kg\ m^2\ s^{-2}$	pascal (Pa)

En el SI existen seis cantidades base: longitud, tiempo, masa, temperatura, corriente eléctrica, número de partículas e intensidad lumínica. Las unidades de longitud, tiempo y masa son el metro ( $m$ ), el segundo ( $s$ ) y el kilogramo ( $kg$ ), respectivamente. La fuerza es una cantidad derivada ( $F = ma$ ).

La tabla 3 muestra diferentes tipos de sistemas de unidades. Un sistema es del mismo tipo que otro si tienen las mismas unidades base (magnitud diferente), y si las cantidades derivadas y leyes físicas tienen la misma forma matemática.

Tabla 3. Tres tipos de cantidades base.

	tipo 1	tipo 2	tipo 3
Cantidades base y dimensión	L, M, t	L, F, t	L, m, F, t

La dimensión de las cantidades derivadas depende de la elección del sistema de unidades y del observador, no de la naturaleza física de la cantidad.

### 4.3 Teorema II de Buckingham

El teorema II de Buckingham dice que, si una ecuación que describe un fenómeno físico es dimensionalmente homogénea, la relación se mantiene válida independientemente de la magnitud de las unidades base. Las  $n$  cantidades físicas independientes involucradas en una ecuación pueden ser reducidas a un conjunto de  $n - k$  productos adimensionales, donde  $k$  es el máximo número de variables originales que son dimensionalmente independientes.

El teorema solo indica el número de cantidades adimensionales que afectan el valor de una variable adimensional dependiente. La forma de las variables adimensionales deberá ser obtenida por experimentación o resolviendo el problema teórico.

Es posible encontrar el valor  $Q_0$  de una cantidad física particular que depende de ciertas variables independientes  $Q_1 \dots Q_n$  al definir las cantidades físicas que intervienen en el proceso. Un análisis correcto dependerá de un conjunto completo de variables independientes. Un conjunto incompleto dará resultados erróneos. También es necesario discernir las variables imprescindibles ya que variables superfluas incluidas en el análisis complicarán el resultado.

Para encontrar las variables adimensionales se siguen los siguientes pasos:

1. Identificar las variables independientes  $Q_1 \dots Q_n$  que determinan el valor de  $Q_0$ ,

$$Q_0 = f(Q_1, Q_2, \dots, Q_n) \quad (41)$$

El conjunto de variables independientes está completo si ninguna otra cantidad afecta el valor de  $Q_0$ .

- Después se determina la dimensión de la variable dependiente y de las variables independientes. En siguiente ejemplo se ha elegido un sistema de cantidades base del tipo 1 (tabla 3):

$$[Q_i] = L^{l_i} M^{m_i} t^{\tau_i} \quad (42)$$

donde  $l_i$ ,  $m_i$  y  $\tau_i$  son números adimensionales obtenidos de la definición de cada cantidad.

Después se elige del conjunto de variables independientes  $Q_1 \dots Q_n$  un subconjunto dimensionalmente independiente  $Q_1 \dots Q_k$  donde ( $k \leq n$ ), y se expresa la dimensión de las variables  $Q_{k+1} \dots Q_n$  y  $Q_0$  como un producto de potencias de  $Q_1 \dots Q_k$ . La dimensión de cualquier cantidad física se puede expresar como productos de potencias de las cantidades base. También es posible expresar la dimensión de una cantidad física como producto de potencias de cantidades derivadas.

Un subconjunto  $Q_1 \dots Q_k$  es dimensionalmente independiente si ninguno de sus elementos tiene una dimensión que se pueda expresar a partir de la dimensión de los elementos restantes. El subconjunto está completo si las dimensiones de las cantidades  $Q_{k+1} \dots Q_n$  pueden ser expresados a partir de las dimensiones de  $Q_1 \dots Q_k$ . El subconjunto  $Q_1 \dots Q_k$  es elegido por prueba y error.

Habiendo elegido el subconjunto de cantidades dimensionalmente independientes, es posible expresar las dimensiones de  $Q_0$  y las cantidades restantes  $Q_{k+1} \dots Q_n$  en términos de las dimensiones de  $Q_1 \dots Q_k$ :

$$[Q_i] = [Q_1^{N_{i1}} Q_2^{N_{i2}} \dots Q_k^{N_{ik}}] \quad (43)$$

Los exponentes  $N_{ik}$  son números adimensionales y pueden ser encontrados por inspección o por métodos algebraicos formales.

- Ahora se definen los grupos adimensionales dividiendo a cada una de las  $n - k$  variables independientes del subconjunto  $Q_{k+1} \dots Q_n$  y a la variable dependiente  $Q_0$  entre el producto de las potencias de  $Q_1 \dots Q_k$  que posee la misma dimensión:

$$\Pi_i = \frac{Q_{k+1}}{Q_1^{N_{(k+i)1}} Q_2^{N_{(k+i)2}} \dots Q_k^{N_{(k+i)k}}} \quad (44)$$

donde  $i = 1, 2, \dots, n - k$ . La forma adimensional de la variable dependiente es:

$$\Pi_0 = \frac{Q_0}{Q_1^{N_{01}} Q_2^{N_{02}} \dots Q_k^{N_{0k}}} \quad (45)$$

4. Se escribe la relación inicial  $Q_0 = f(Q_1, Q_2, \dots, Q_n)$  en forma adimensional:

$$\Pi_0 = f(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{n-k}) \quad (46)$$

#### 4.4 Ejemplo de aplicación

Se supone que se desea determinar el periodo de vibración de una estructura metálica.

1. Según el procedimiento descrito arriba, el primer paso en el análisis dimensional consiste en identificar un conjunto de variables independientes que determinen su periodo. En nuestro caso, se sabe que las variables que intervienen en la frecuencia de vibrar ( $f$ ) de una estructura son: la geometría ( $G$ ) y el tamaño de la estructura ( $L$ ), y la densidad ( $\rho$ ) y las propiedades elásticas del material ( $E, \nu$ ).

$$f = f(G, L, \rho, E, \nu)$$

2. El segundo paso es listar las dimensiones de las variables independientes y de la variable dependiente y se elige un grupo de variables dimensionalmente independientes. En la tabla 4 se muestra el valor de las potencias a las que está elevada cada unidad base en su fórmula dimensional.

Tabla 4

	$[f]$	$[G]$	$[L]$	$[\rho]$	$[E]$	$[\nu]$
L	0	0	0	1	1	0
M	0	0	1	-3	-1	0
T	-1	0	0	0	-2	0

Haciendo un análisis se observa que  $f, L$  y  $\rho$  constituyen un grupo de variables dimensionalmente independientes y se puede realizar un sistema

de ecuaciones para obtener los exponentes de cantidades en los grupos adimensionales.

$$\begin{cases} 1 = N_\rho \\ -1 = N_L - 3 N_\rho \\ -2 = -N_f \end{cases} \rightarrow \begin{cases} N_f = 2 \\ N_\rho = 1 \\ N_L = 2 \end{cases}$$

3. El tercer paso consiste en crear fórmulas adimensionales con las variables restantes.

$$\begin{aligned} \Pi_0 &= \frac{E}{f^2 L^2 \rho} \\ \Pi_1 &= \nu \\ \Pi_2 &= G \end{aligned}$$

4. El proceso finaliza al enunciar la relación adimensional.

$$\Pi_0 = f(\Pi_1, \Pi_2)$$

Donde se observa que el problema inicial con  $n = 5$  variables independientes ha sido reducido a uno de  $n - k = 2$ .

Este proceso nos acerca a las leyes de similitud para el problema considerado, es decir, la equivalencia que existe entre dos fenómenos físicos que son diferentes. Por ejemplo, bajo ciertas condiciones se pueden relacionar dos estructuras diferentes en tamaño y material constitutivo. Si la geometría de los dos modelos es la misma, la variable correspondiente se elimina:

$$\Pi_0 = f(\Pi_1)$$

Entonces, se puede construir un modelo con un tamaño y material diferentes del original. De acuerdo a la relación anterior se puede deducir que los materiales deberán poseer coeficientes de Poisson similares.

$$\frac{E}{f^2 L^2 \rho} = f(\nu)$$

Se puede concluir que la frecuencia depende de un factor de escala  $\lambda$  si  $\nu_r \approx \nu_e$ . Donde  $r$  corresponde a la estructura real y  $e$  al modelo a escala. Con el análisis dimensional es posible obtener información acerca del comportamiento de un sistema a escala natural haciendo pruebas en un modelo a escala diferente

geométricamente similar. El modelo puede ser disminuido o aumentado de tamaño dependiendo de las condiciones.

$$\left(\frac{E}{f^2 L^2 \rho}\right)_r = \left(\frac{E}{f^2 L^2 \rho}\right)_e$$

$$f_r = \left(\frac{E}{L^2 \rho}\right)_r \left(\frac{L^2 \rho}{E}\right)_r f_e$$

Si

$$\lambda = \left(\frac{E}{L^2 \rho}\right)_r \left(\frac{L^2 \rho}{E}\right)_r ; \quad f_r = \lambda f_e$$



## 6. Medios estratificados

Los medios estratificados son medios dispersivos (la velocidad de fase depende de la frecuencia). Este tipo de relación está representada en las curvas de dispersión. Las curvas de dispersión dependen de las propiedades de los materiales (módulo de Poisson, densidad, módulo de cortante) y de su geometría (espesor de los estratos, discontinuidades). La curva de dispersión de un medio es considerada un tipo de representación de sus propiedades. Las funciones de dispersión de medios estratificados son obtenidas usando métodos matriciales (matriz de transferencia, matriz global, matriz de rigidez). Thomson (1953) y Haskell (1950) introdujeron, por primera vez, una solución a la propagación de ondas en medios estratificados utilizando la matriz de transferencia.

Muchos de los problemas de propagación de ondas involucran medios estratificados. Esto implica una situación distinta a la que se tiene con medios infinitos o semi-espacios. Los modelos conformados por capas con diferentes propiedades mejoran la relación entre los datos teóricos y los observados. La superficie libre y las discontinuidades entre los estratos generan ondas guiadas dispersivas por lo que no es posible medir ondas P y S puras en la superficie. Las ondas que se pueden medir en la superficie corresponden a superposiciones de ondas P y S debidas a reflexiones y transmisiones en las fronteras entre capas. Este tipo de movimiento puede ser predicho basándose en la linealidad y en la ley de Snell para las interacciones en las fronteras.

Cuando una onda que viaja en un medio se encuentra con una discontinuidad, parte de su energía es reflejada y otra parte es transmitida a través de la discontinuidad. Si el medio es estratificado horizontalmente y se tiene una fuente de energía superficial, parte de la energía que se propague dentro del medio viajará de regreso a la superficie debido a que las ondas son reflejadas en cada una de las interfaces. Las componentes de frecuencias altas presentes en un sismograma corresponden a ondas P y S mientras que las ondas más lentas y con frecuencias menores son el resultado de dispersión y cambio de dirección de las ondas debido a la heterogeneidad de las estructuras de suelo.

En los problemas de modelado inverso se requiere relacionar datos obtenidos *in situ* con datos que procedan de modelos con características definidas. Al relacionar los datos teóricos con los obtenidos se pueden inferir las propiedades y profundidad de cada estrato para obtener curvas de velocidad - profundidad. El método matricial Thomson – Haskell es un método útil para crear curvas de dispersión teóricas que ayuden a determinar las propiedades del modelo físico.

El caso de propagación de ondas en medios infinitos con estratos horizontales es más complicado que los sistemas descritos en el capítulo III. La adición de una o más capas a un semiespacio generará que se presenten ondas dispersivas guiadas.

Se sabe que la ecuación de Navier es expresada en forma vectorial como:

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial x} + \mu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (47)$$

Su solución puede ser descrita mediante dos potenciales  $\Phi$  y  $\Psi$  que representan a las ondas P y S.

$$\mathbf{u} = \nabla \Phi - \nabla_x \Psi \quad (48)$$

Los potenciales son funciones exponenciales del tipo:

$$\Phi = f(z) e^{i(\omega t \pm kz)} \quad (49)$$

$$\Psi = g(z) e^{i(\omega t \pm kz)} \quad (50)$$

Las funciones  $f(z)$  y  $g(z)$  representan la variación en la amplitud con la profundidad y son de la forma general:

$$f(z) = A e^{-qz} + B e^{qz} \quad (51)$$

$$g(z) = C e^{-sz} + B e^{sz} \quad (52)$$

donde

$$q^2 = k_R^2 - \omega^2 / k_P^2 \quad (53)$$

$$s^2 = k_R^2 - \omega^2 / k_S^2 \quad (54)$$

Debido a reflexiones y refracciones en las interfaces, los potenciales estarán formados por dos partes, una que describe a las ondas que viajan hacia abajo ( $D$ ) y otra para describir a las ondas viajando hacia arriba ( $U$ ). Considerando un medio con  $N - 1$  estratos elásticos, homogéneos e isotrópicos sobre un semiespacio con  $z = 0$  en la superficie como se ilustra en la figura (17), la función potencial para el estrato  $n$  es:

$$\Phi_n = \Phi_n^U + \Phi_n^D = (A_n e^{-q_n(z-Z_{n-1})} + B_n e^{q_n(z-Z_{n-1})}) e^{i(\omega t - kx)} \quad (55)$$

$$\Psi_n = \Psi_n^U + \Psi_n^D = (C_n e^{-s_n(z-Z_{n-1})} + D_n e^{s_n(z-Z_{n-1})}) e^{i(\omega t - kx)} \quad (56)$$

Donde  $Z_{n-1}$  es la profundidad de la interface  $(n - 1)$  encima del estrato  $n$ ,  $Z_{n-1} \leq z \leq Z_n$  es la profundidad desde la superficie del medio.  $A_n$  y  $C_n$  son coeficientes de ondas que disminuyen en dirección positiva de  $z$  y  $B_n$  y  $D_n$  coeficientes de ondas que disminuyen en dirección negativa de  $z$ .

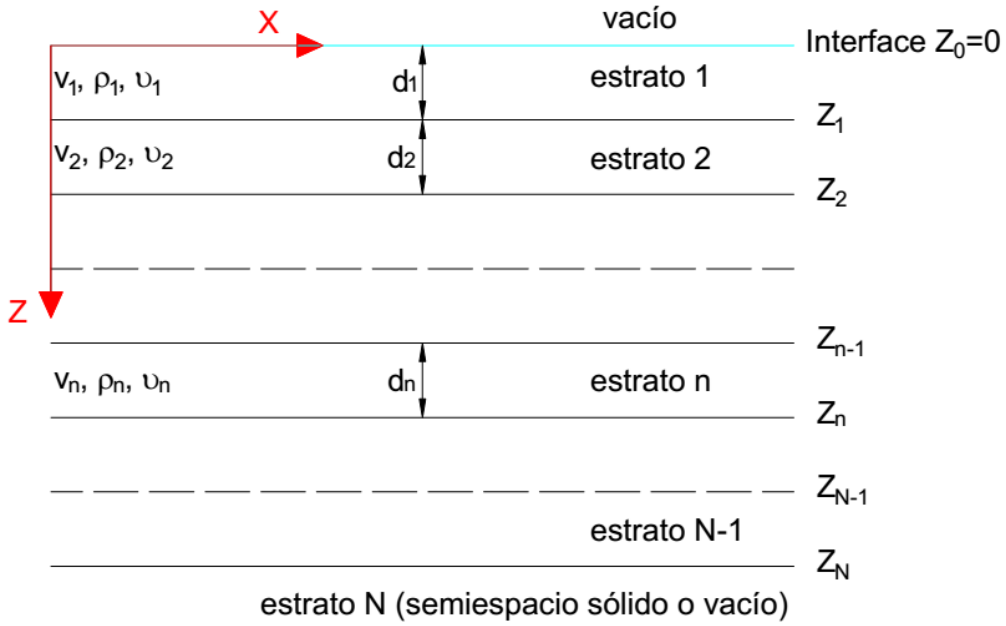


Figura 17 Modelo bidimensional de N estratos sobre un semiespacio

Considerando ondas de Rayleigh planas viajando en dirección positiva de  $x$  y sustituyendo los potenciales en la ecuación (47) y en las ecuaciones (20) se tiene para ondas planas los desplazamientos  $u_n$  y  $w_n$ , y los esfuerzos  $\sigma_{zz,n}$  y  $\tau_{xz,n}$ :

$$u_n = \frac{\partial \Phi_n}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_n}{\partial z} = [-ik_R s_n - ik_R - s_n] [\Phi_n^U \Psi_n^U \Phi_n^D \Psi_n^D]^T \quad (57)$$

$$w_n = \frac{\partial \Phi_n}{\partial z} + \frac{\partial \Psi_n}{\partial x} = [q_n ik_R - q_n ik_R] [\Phi_n^U \Psi_n^U \Phi_n^D \Psi_n^D]^T \quad (58)$$

$$\sigma_{zz,n} = \lambda \bar{\epsilon} + 2\mu \epsilon_{zz} = [\mu a_n \ 2i\mu k_R s_n \mu a_n \ -2i\mu k_R s_n] [\Phi_n^U \Psi_n^U \Phi_n^D \Psi_n^D]^T \quad (59)$$

$$\tau_{xz,n} = \mu \gamma_{xz} = [-2i\mu k_R q_n \ \mu a_n \ 2i\mu k_R q_n \ \mu a_n] [\Phi_n^U \Psi_n^U \Phi_n^D \Psi_n^D]^T \quad (60)$$

Donde

$$a_n = (2k_R^2 - \omega^2 / (v_S^n)^2)(61)$$

Definiendo los vectores  $S_n(z)$  y  $P_n(z)$  y la matriz de transformación  $T_n$  para el estrato  $n$ :

$$S_n(z) = [u_n(z) w_n(z) \sigma_{zz,n}(z) \tau_{xz,n}(z)]^T (62)$$

$$P_n(z) = [\Phi_n^U \Psi_n^U \Phi_n^D \Psi_n^D]^T (63)$$

$$T_n = \begin{bmatrix} -ik_R s_n & -ik_R - s_n \\ q_n & ik_R & -q_n ik_R \\ \mu a_n & 2i\mu k_R s_n \mu a_n & -2i\mu k_R s_n \\ -2i\mu k_R q_n & \mu a_n & 2i\mu k_R q_n \mu a_n \end{bmatrix} (64)$$

Los desplazamientos y esfuerzos en cualquier punto  $z$  del estrato pueden escribirse en forma matricial:

$$S_n(z) = T_n P_n(z) (65)$$

Con la ecuación anterior es posible obtener al vector potencial a partir de los esfuerzos y desplazamientos:

$$P_n(z) = T_n^{-1} S_n(z) (66)$$

Al relacionar los desplazamientos y esfuerzos en la interface superior e inferior del estrato  $n$  y asumiendo igualdad de esfuerzos y deformaciones en la interface de los estratos  $n$  y  $(n + 1)$  se pueden obtener los desplazamientos y esfuerzos en cualquier punto del medio dando las propiedades de los estratos y los esfuerzos y deformaciones en la superficie. La ecuación tiene la forma:

$$S_n(Z_n) = G_n S_n(Z_{n-1}) (67)$$

Donde  $G_n$  es una matriz que relaciona los potenciales de la parte superior e inferior del estrato  $n$ . Se pueden generalizar los resultados obtenidos a un sistema formado por  $n$  estratos paralelos que pueden estar o no sobre un semiespacio aplicando la ecuación anterior repetidamente para determinar la relación entre los desplazamientos y esfuerzos en la superficie del medio con cualquier interface a una profundidad  $Z_{n-1}$ :

$$S_n(Z_{n-1}) = \prod_{i=n-1}^1 G_i S_1(Z_0) \quad (68)$$

Para obtener la solución de la ecuación anterior se debe encontrar el determinante  $|R_n| = 0$  que es función del número de onda  $k$  y de la frecuencia  $\omega$ . Donde

$$R_n = \prod_{i=n-1}^1 G_i \quad (69)$$

Al resolver el determinante para una frecuencia específica, se obtiene la velocidad de fase de esa frecuencia en el medio.

El estudio los pavimentos, desde el punto de vista dinámico, se puede abordar considerando modelos sencillos de varias capas estratificadas. Uno de los métodos utilizados frecuentemente en geofísica para definir el comportamiento dinámico de una serie de capas de suelo al ser sometidas a una excitación establecida, es el método de Thomson-Haskell. Con este método es posible obtener la función de transferencia de una serie de capas apiladas sobre un semiespacio. Sin embargo, este método tiene algunas restricciones. Por ejemplo, además de suponer linealidad de las propiedades en las capas, la excitación a la que se somete el modelo es a una generada por alguna de estas opciones: ondas P, ondas polarizadas horizontalmente (ondas SH) u ondas polarizadas verticalmente (SV). No se toman en cuenta las ondas de Love o Rayleigh que se generan en las fronteras entre estratos o en la superficie del modelo. Se considera que la excitación establecida a la que se somete el modelo es de amplitud unitaria y el frente de onda que arriba a través del semiespacio, es plano. Al utilizar este método se observa que, bajo ciertas características de los modelos estudiados, aparentemente se presentan algunas irregularidades que hacen pensar que la técnica de Thomson-Haskell utilizada para analizarlos, es errónea, sin embargo, básicamente ese comportamiento se debe a las hipótesis adoptadas y a la complejidad de los resultados que se obtienen. Tómense, por ejemplo, los siguientes casos en donde se ha considerado una incidencia vertical de ondas planas.

#### **a) Espesor de los estratos**

Cuando se analiza la tendencia del periodo fundamental de un estrato, se observa que su periodo aumenta cuando aumenta el espesor. Este comportamiento es sistemático sin importar que tan pequeño sea el estrato (ver figs. 18 a 20). El contraste de impedancias entre el estrato y semiespacio no sólo afecta la posición de las frecuencias pico, sino también su amplitud (compárense las figs. 19 con la

20). Sin embargo, cuando se trata de un conjunto de estratos, su función de transferencia presenta un comportamiento que se antoja atípico, pero, en realidad, solo refleja la interacción de las ondas entre sí, cuando van propagándose por los diferentes estratos. Se puede observar que las funciones de transferencia obtenidas para varias capas, no presentan la simplicidad y elegancia que se aprecia cuando sólo se tiene una sola capa, y, por consiguiente, son más difíciles de interpretar. Considérense, por ejemplo, dos estratos sobre un semiespacio con las siguientes características (nótese que el solo se varía espesor del estrato intermedio entre el estrato superior y el semiespacio):

**Tabla 5. Perfil estratigráfico**

	Estrato 1	Estrato 2	Semiespacio
Densidad	2.7	1.2	5
Velocidad de ondas de corte	800	200	1000
Velocidad de ondas longitudinales	2500	1500	6000
Factor de calidad (Q)	1000	1000	1000
Espesor	10	varía	

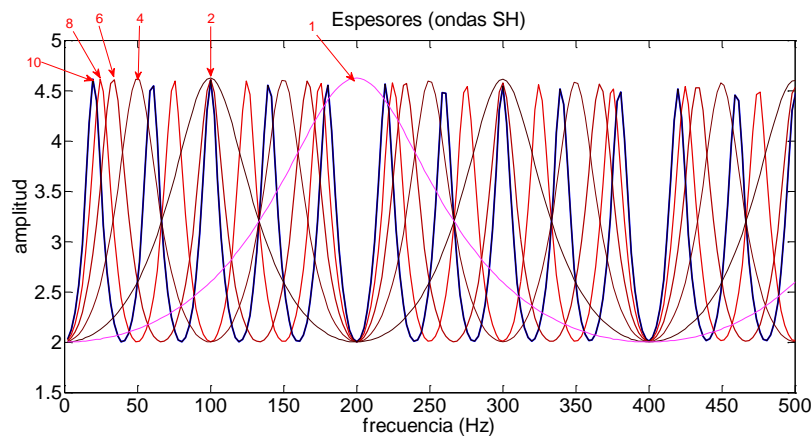


Figura 18 Frecuencias pico para un estrato sobre un semiespacio con diferentes espesores (indicados con las flechas rojas) considerando un contraste de impedancias de 0.432.

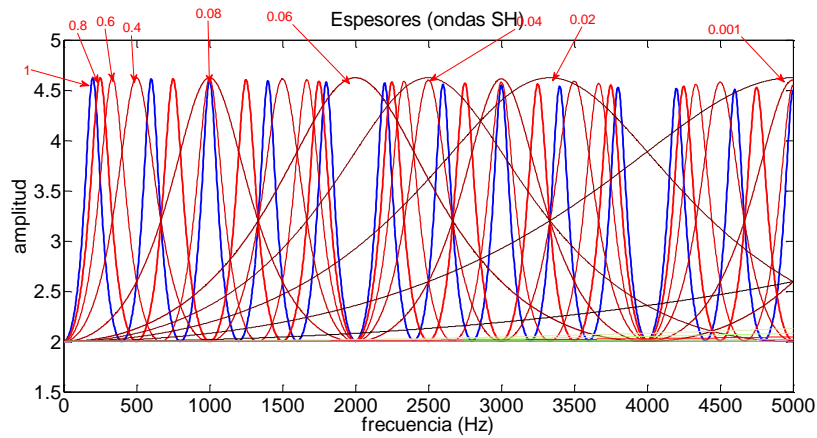


Figura19 Frecuencias pico para un estrato sobre un semiespacio con diferentes espesores (indicados con las flechas rojas) considerando un contraste de impedancias de 0.432.

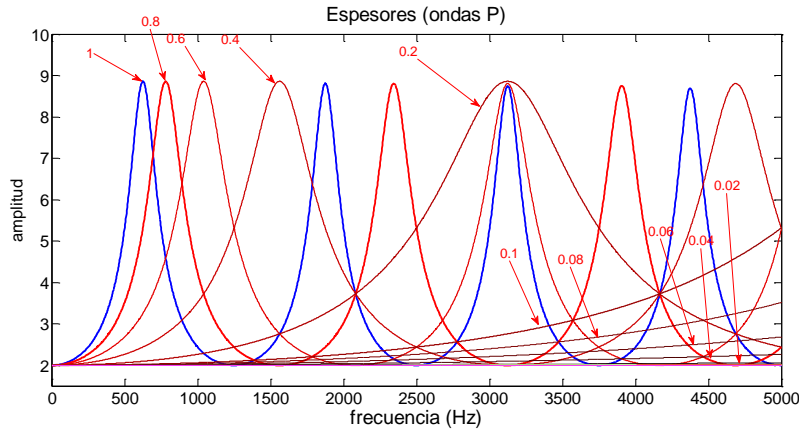


Figura20 Frecuencias pico para un estrato sobre un semiespacio con diferentes espesores (indicados con las flechas rojas) considerando un contraste de impedancias de 0.225.

Las funciones de transferencia que se obtienen al utilizar el método de Thomson-Haskell se presentan en las figuras 21 a 28. En la figura 21 se grafican los resultados para ondas longitudinales, cuando el espesor del estrato 2 varía de 8 a 1 unidades (u) (el espesor del estrato 1 se mantiene constante con un valor de 10 u). Se aprecia que la función de transferencia presenta picos que se agrupan en dos y en tres grupos y que el patrón se repite para frecuencias superiores, denotando la influencia de las frecuencias fundamentales de ambos estratos. Por ejemplo, para un espesor de 8u (línea azul), los picos se agrupan en secuencias de tres-dos-dos para posteriormente repetirse en frecuencias superiores (ver figura 22). Si se considera un espesor de 6u para el segundo estrato, la secuencia es solo de dos picos (figura 23).

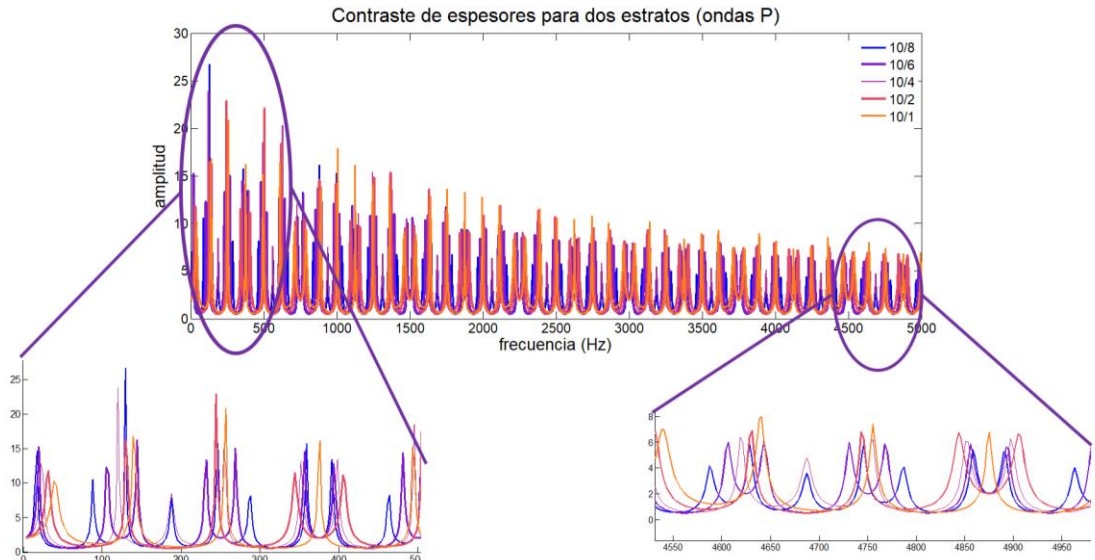


Figura 21 Función de transferencia para el perfil estratigráfico de la tabla 4. Se consideran ondas longitudinales. Los espesores para el segundo estrato son: 8, 6, 4, 2 y 1 u.

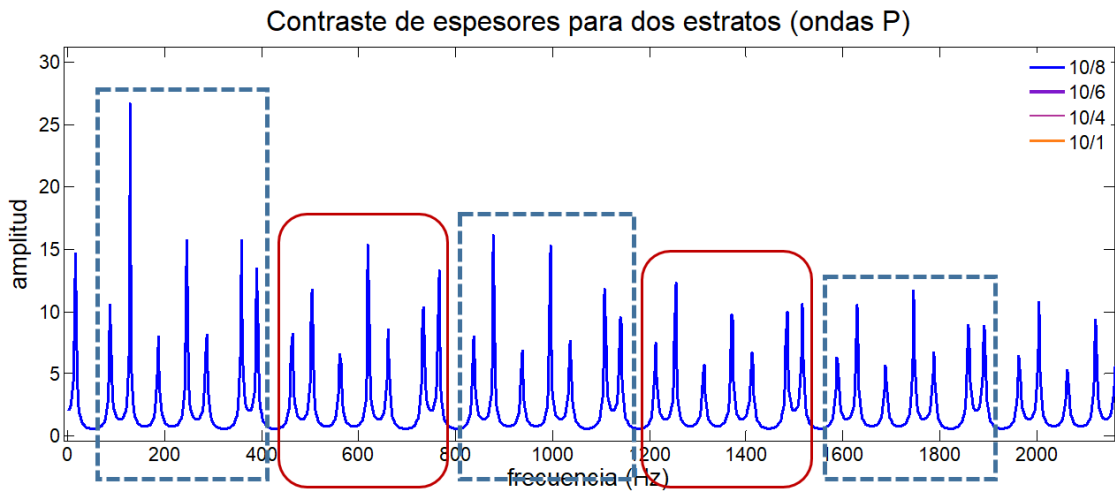


Figura 22 Función de transferencia de la fig. 21 para un espesor de 8U. Los cuadros azul y rojo indican el patrón de repetición de los picos que se agrupan en dos y tres picos.



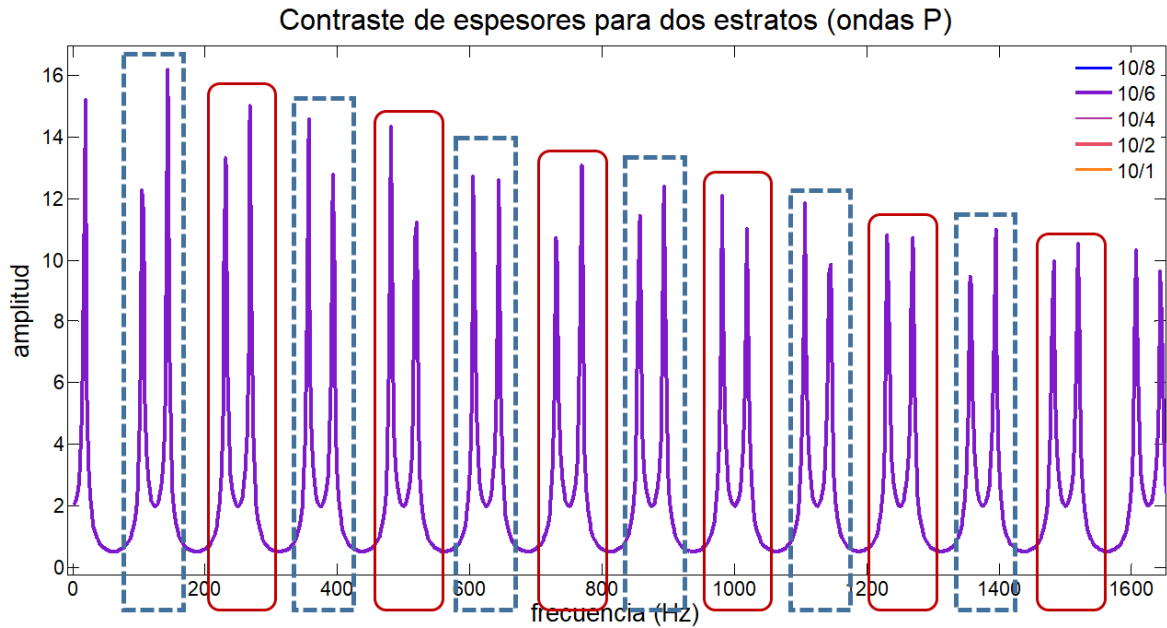


Figura 23 Función de transferencia de la fig. 21 para un espesor de 6U. Los cuadros azul y rojo indican el patrón de repetición de los picos que se agrupan de dos en dos.

Cuando los espesores del estrato 2 son pequeños en comparación con el espesor del primer estrato, la influencia del segundo estrato en la función de transferencia es poco significativa, como se aprecia en la fig. 24. En este caso, el espesor de la capa 2 varía de 0.8 a 0.1 u (el estrato 1 se mantiene constante con un valor de 10u). Aquí, las frecuencias pico para el estrato con espesor de 0.8u tienen un comportamiento diferente al presentado para espesores menores. Esto es, aparece una periodicidad cada nueve frecuencias pico. Para espesores menores (de 0.6 a 0.1) el comportamiento del perfil estratigráfico para dos estratos es parecido al que se tiene para una sola capa sobre un semiespacio, es decir, mientras más pequeña es la capa, los picos de las frecuencias son más distantes unos de otros, sin embargo, el primer pico en todos los casos se presenta para la misma frecuencia sin importar el tamaño del estrato.

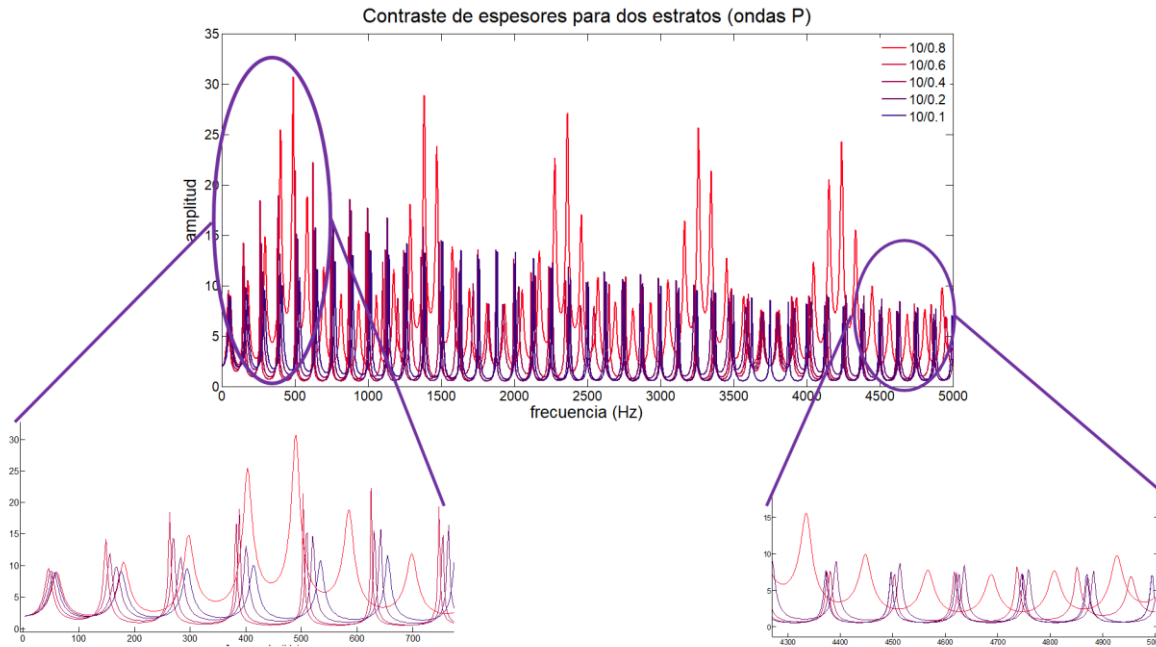


Figura 24 Función de transferencia para el perfil estratigráfico de la tabla 4. Se consideran ondas longitudinales. Los espesores para el segundo estrato son: 0.8, 0.6, 0.4, 0.2 y 0.1 u.

Cuando el espesor del estrato 2 varía de 0.05 a 0.001 u (el espesor del estrato 1 se mantiene constante con un valor de 10 u), se observa algo parecido a lo descrito para la fig. 24. El hecho de que los estratos en este caso sean muy pequeños hace que la separación de las frecuencias pico entre modelos sea muy pequeña, de tal forma que solo es posible conocer que en la figura se grafican varios modelos con distintos espesores, al analizar las frecuencias muy altas, en donde se puede observar ya la separación de los picos (fig. 25). Esto tiene que ver con la longitud de onda. Para frecuencias altas, las longitudes de onda son pequeñas, por consiguiente, las capas de espesores muy pequeños no son invisibles para la onda que se propaga.

Lo explicado arriba para las figs. 21 a 25 es válido para las figs. 26 a 29 en donde se grafican las funciones de transferencia para ondas de corte.

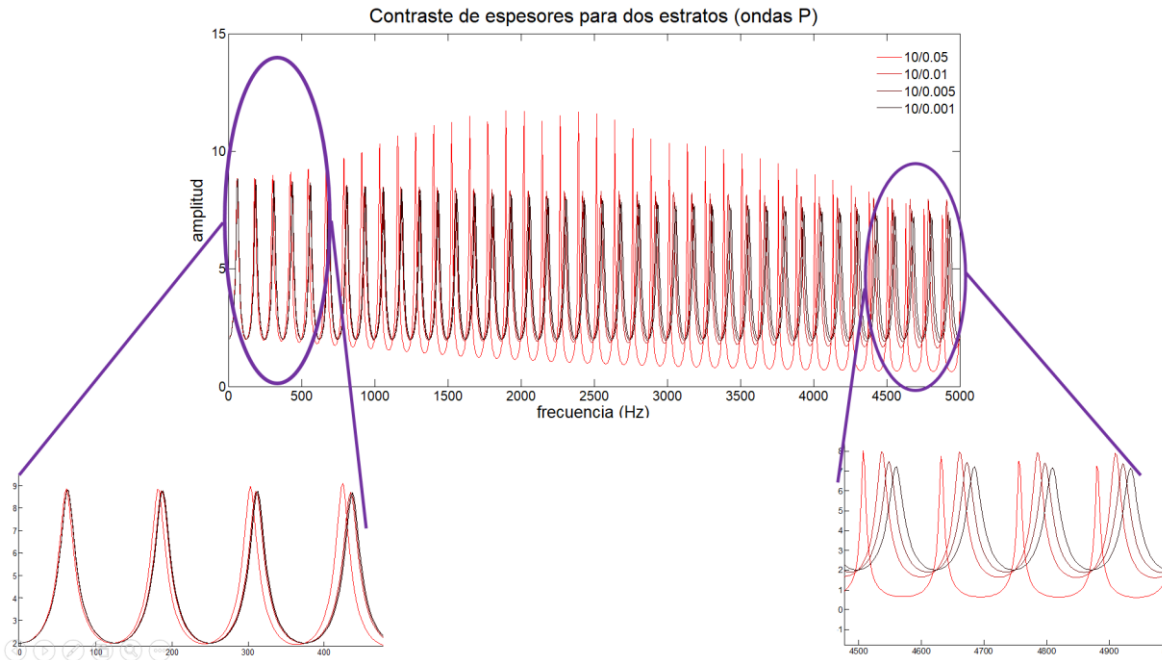


Figura 25 Función de transferencia para el perfil estratigráfico de la tabla 1. Se consideran ondas longitudinales. Los espesores para el segundo estrato son: 0.05, 0.01, 0.005 y 0.001 u.

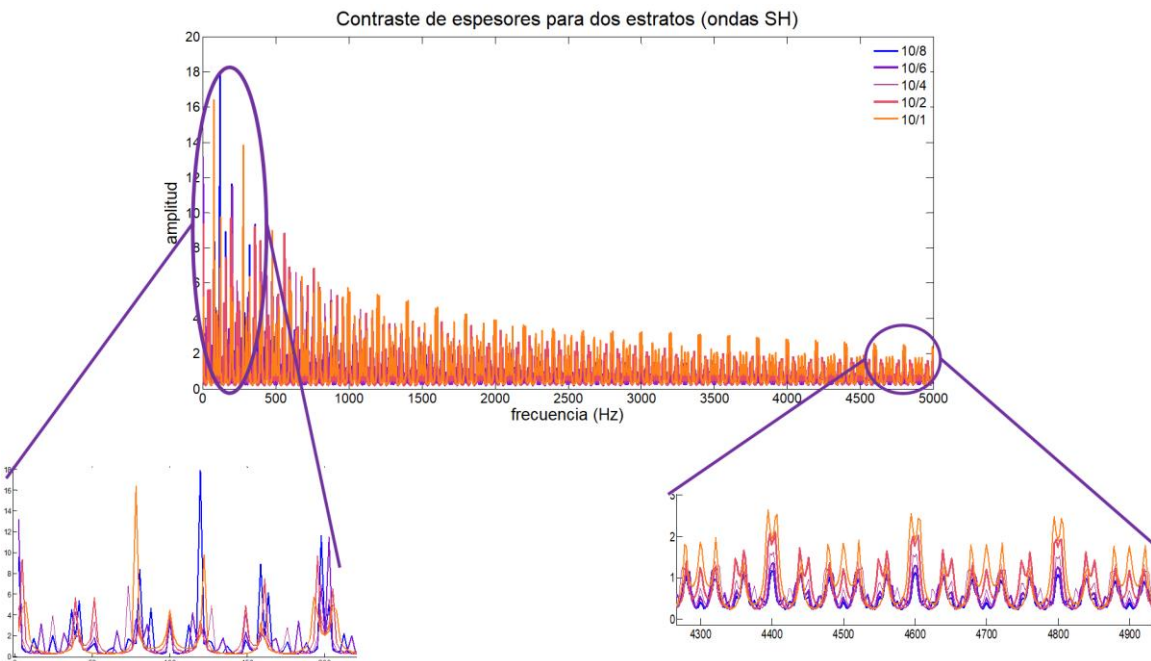


Figura 26 Función de transferencia para el perfil estratigráfico de la tabla 4. Se consideran ondas de corte. Los espesores para el segundo estrato son: 8, 6, 4, 2 y 1 u.

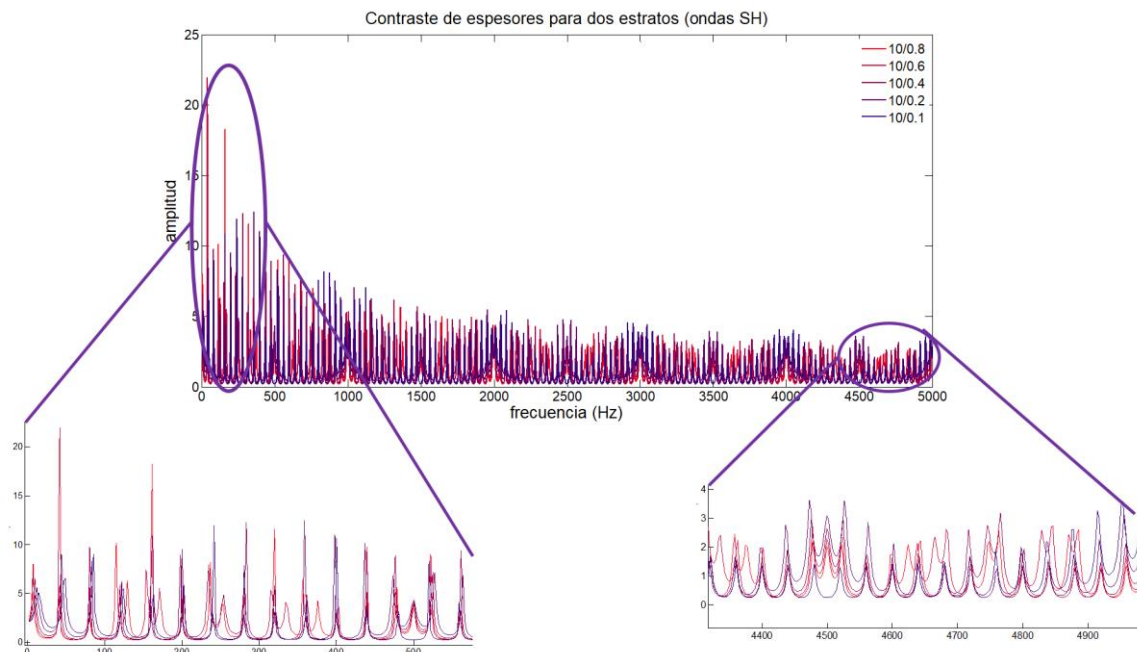


Figura 27 Función de transferencia para el perfil estratigráfico de la tabla 4. Se consideran ondas de corte. Los espesores para el segundo estrato son: 0.8, 0.6, 0.4, 0.2 y 0.1 u.

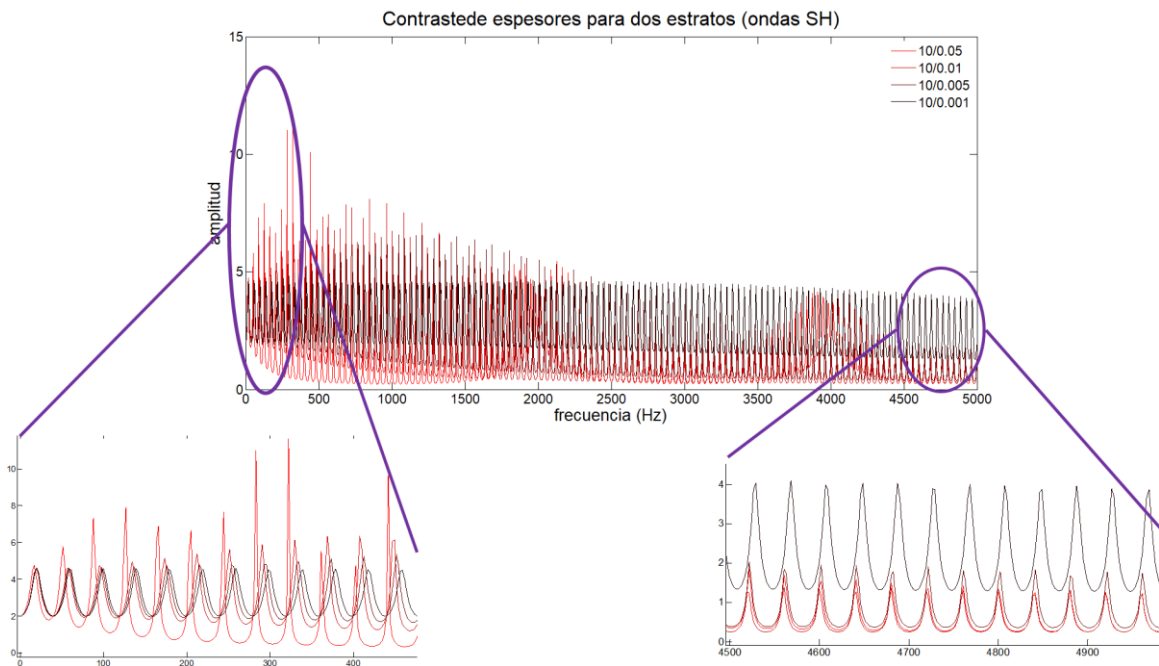


Figura 28 Función de transferencia para el perfil estratigráfico de la tabla 4. Se consideran ondas de corte. Los espesores para el segundo estrato son: 0.05, 0.01, 0.005 y 0.001 u.

Si ahora las características de los dos estratos sobre un semiespacio son las siguientes (nótese que el solo se varía espesor del estrato superior, las del intermedio y el semiespacio se mantienen constantes):

**Tabla 6. Perfil Estratigráfico**

	Estrato 1	Estrato 2	Semiespacio
Densidad	1.2	2.7	5
Velocidad de ondas de corte	200	800	1000
Velocidad de ondas longitudinales	1500	2500	6000
Factor de calidad (Q)	1000	1000	1000
Espesor	varía	10	

Se obtienen los resultados mostrados en las figs. 29 a 35. Al igual que para los modelos analizados en la fig. 21, se observa que la función de transferencia presenta picos que se agrupan, repitiendo esa agrupación en frecuencias superiores (fig. 29).

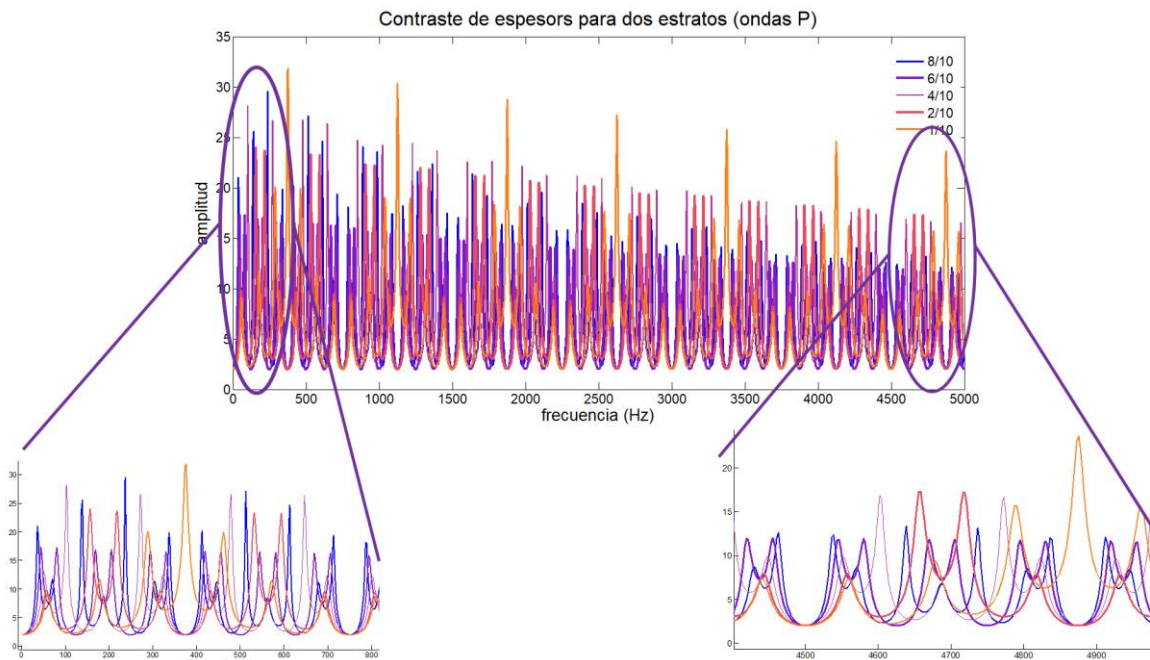


Figura 29 Función de transferencia para el perfil estratigráfico de la tabla 5. Se consideran ondas longitudinales. Los espesores para el primer estrato son: 8, 6, 4, 2 y 1 u.

En la fig. 30 se grafican las frecuencias resonantes armónicas para el perfil estratigráfico de la tabla 5 considerando un espesor del estrato superficial de 1u y se comparan con las frecuencias resonantes graficadas en la fig.

20 correspondientes a un modelo con los datos de la tabla 5 pero sin la capa superficial. En ella se aprecia la función de transferencia con sus armónicos (línea roja) y la correspondiente a una capa (línea azul). Lo que se observa es que la existencia de un estrato blando en la superficie, genera amplitudes en la respuesta del estrato mucho mayores que las observadas para un solo estrato, aun cuando el espesor de este sea diez veces menor que el estrato de abajo. También se aprecia que las frecuencias pico solo coinciden en algunas frecuencias, notándose la influencia que tiene el agregar una capa.

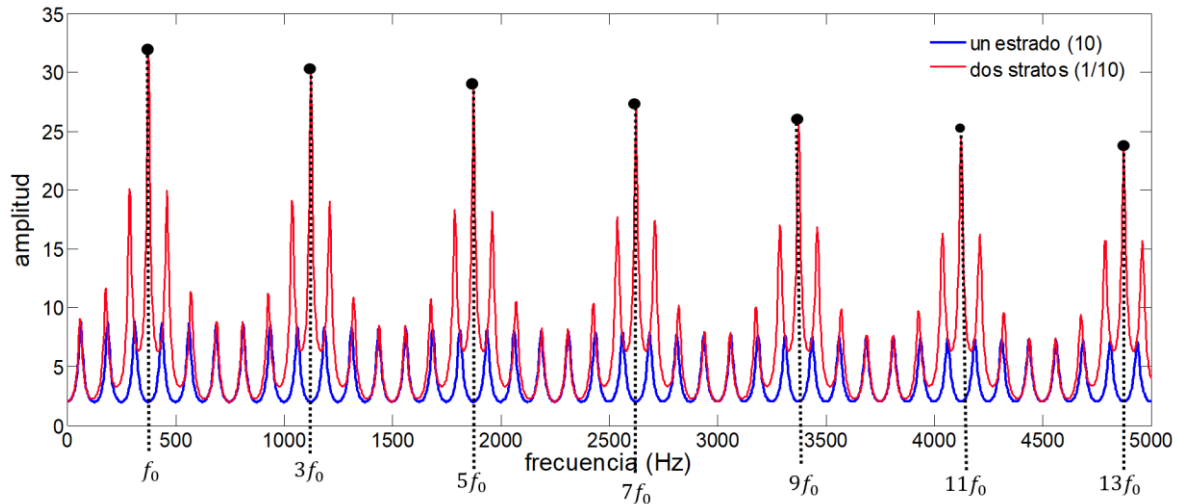


Figura 30 Armónicos de la función de transferencia de la fig. 26 para un espesor de 1U del estrato superficial (línea roja). Con línea azul se presenta la función de transferencia para un estrato con las características del estrato 2 de la tabla 5, apoyado en un semiespacio.

En la figura 31 se presentan las funciones de transferencia para estratos superficiales con espesores de 0.8 a 0.1u. Al igual que lo descrito para la figura 24, el primer pico en todos los casos se presenta para la misma frecuencia sin importar el espesor del estrato y, mientras más pequeña es la capa, los picos de las demás frecuencias son más distantes unos de otros. En la figura 32 se aprecian los detalles en altas y bajas frecuencias de cada uno de estos modelos. Cuando el estrato superficial tiene espesores muy pequeños (del 0.01 al 0.001% del estrato subyacente) la influencia de esta capa es despreciable por lo que el modelo se puede analizar considerando solo una capa (figura 33).

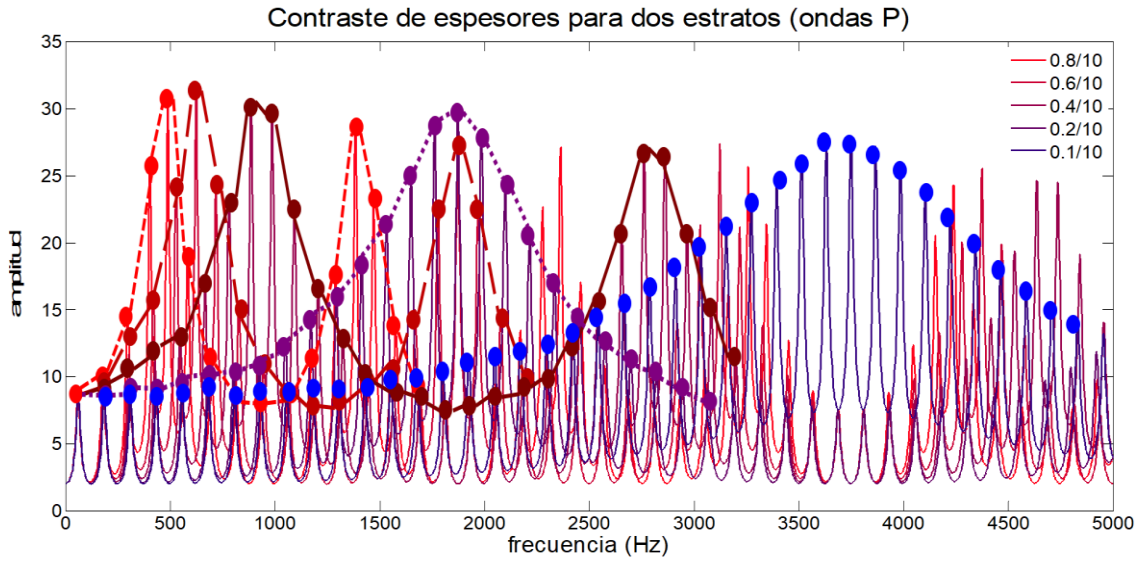


Figura 31 Armónicos de la función de transferencia para el perfil estratigráfico de la tabla 5. Se consideran ondas longitudinales. Los espesores para el primer estrato son: 0.8, 0.6, 0.4, 0.2 y 0.1 u. Además se muestra la envolvente de los pico para cada modelo.

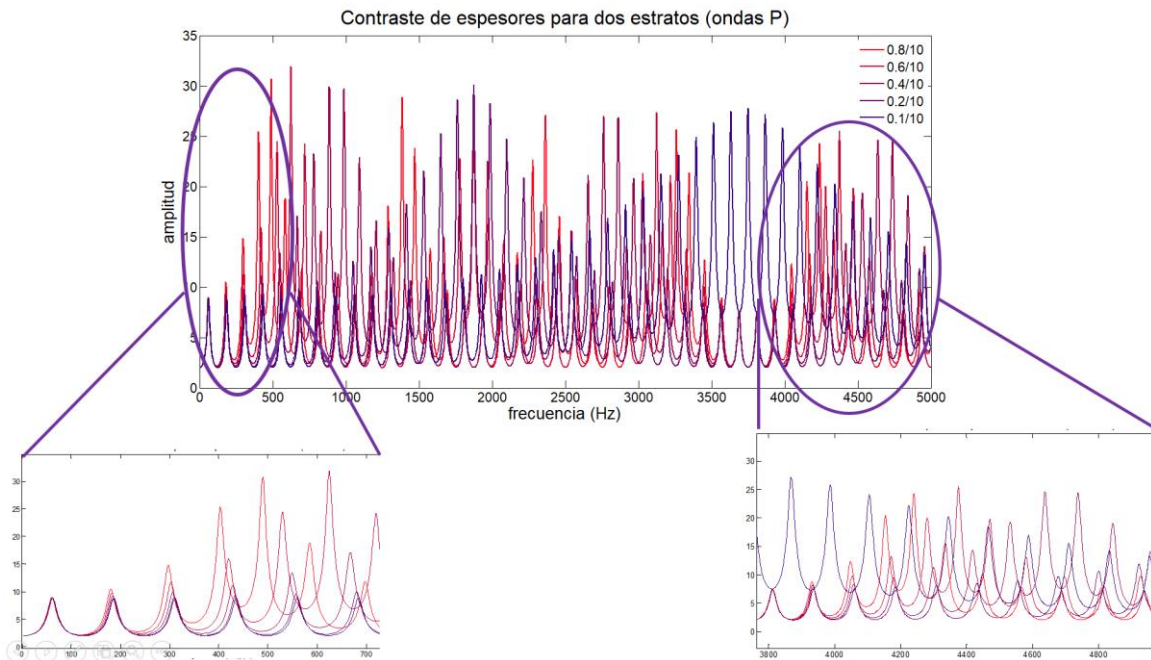


Figura 32 Función de transferencia para el perfil estratigráfico de la tabla 5. Se consideran ondas longitudinales. Los espesores para el primer estrato son: 0.8, 0.6, 0.4, 0.2 y 0.1 u.

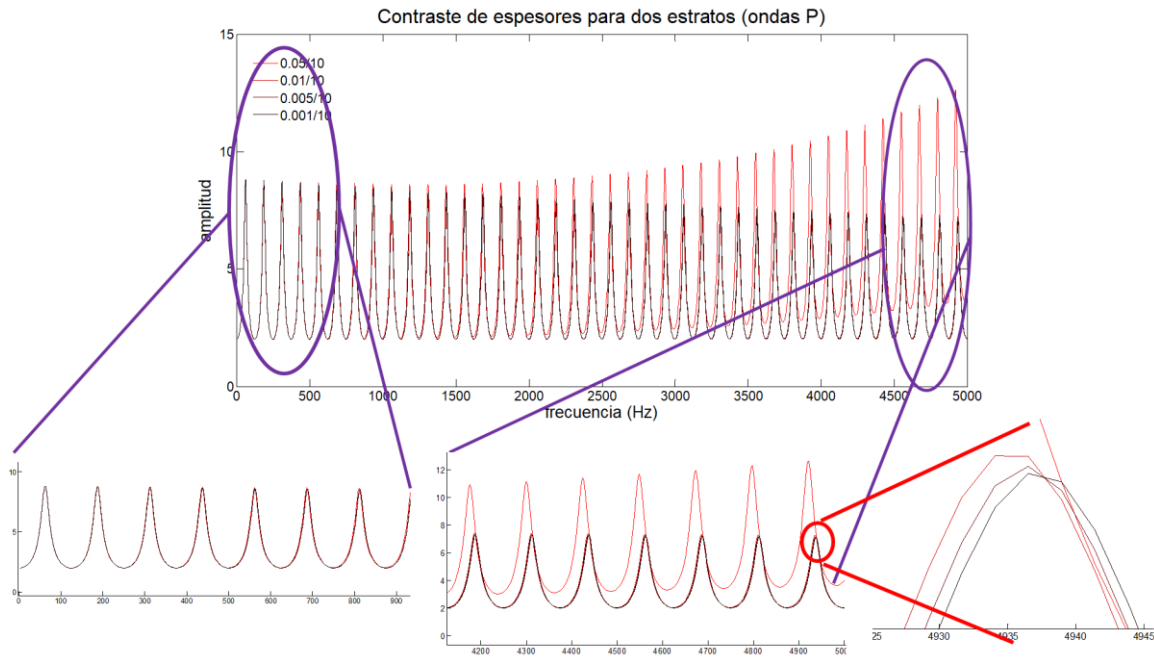


Figura 33 Función de transferencia para el perfil estratigráfico de la tabla 5. Se consideran ondas longitudinales. Los espesores para el estrato de la superficie son: 0.05, 0.01, 0.005 y 0.001 u.

Las figs. 34 a 36 muestran las funciones de transferencia para los perfiles estratigráficos de la tabla 5 al someter a los modelos a la incidencia de ondas SH.



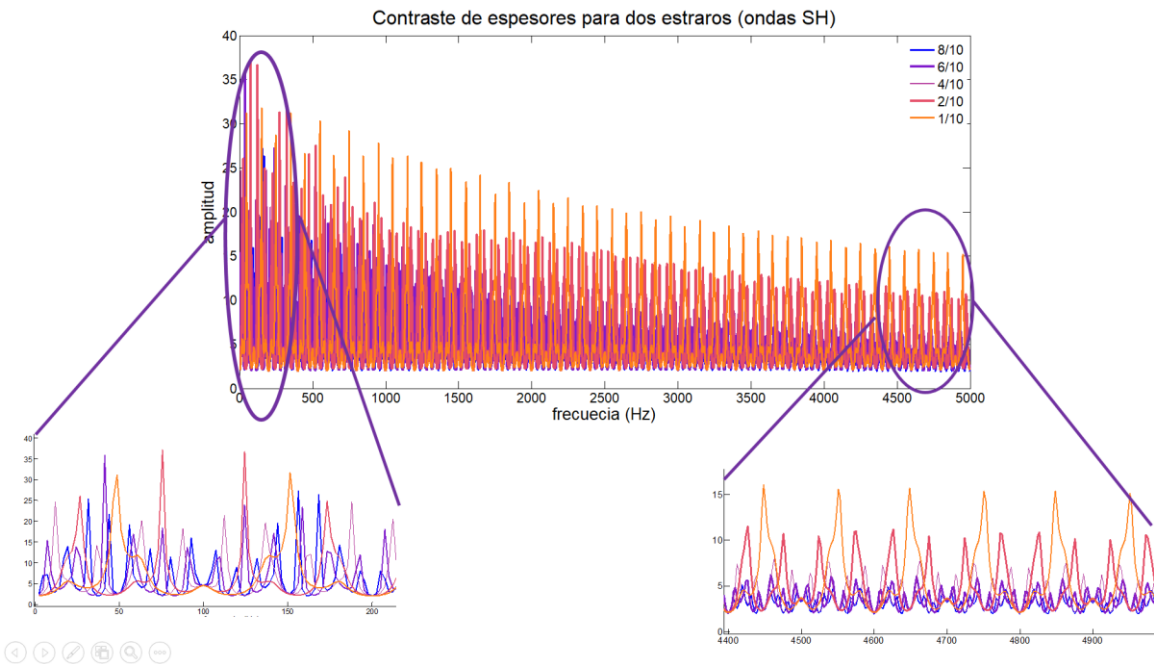


Figura 34 Función de transferencia para el perfil estratigráfico de la tabla 5. Se consideran ondas de corte. Los espesores para el segundo estrato son: 8, 6, 4, 2 y 1 u.

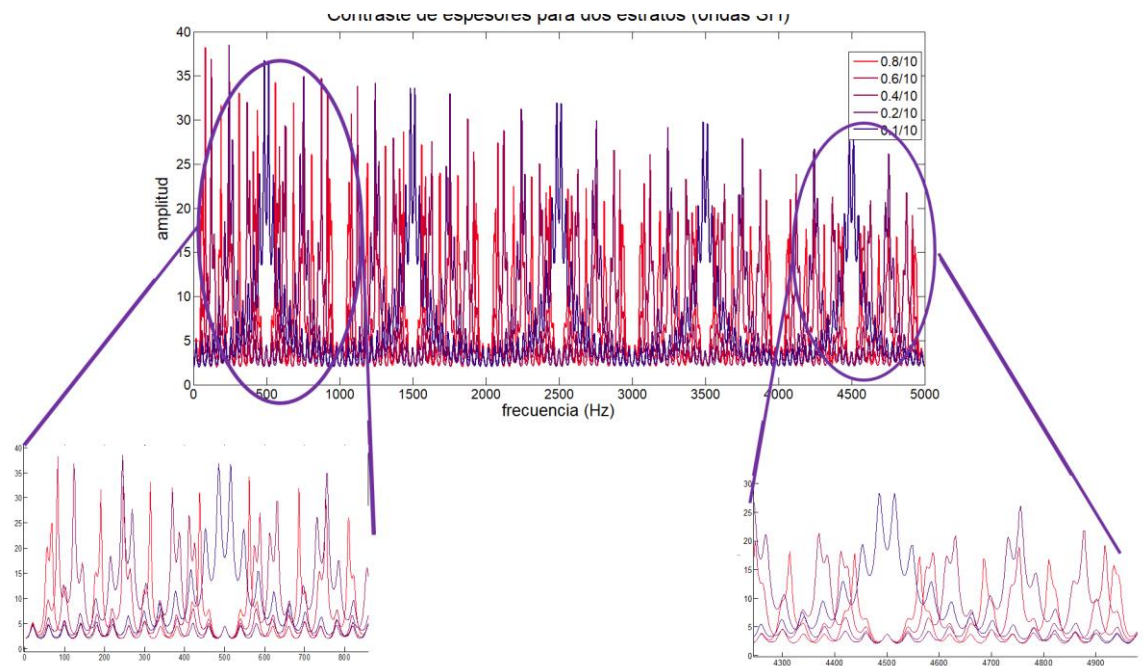


Figura 35 Función de transferencia para el perfil estratigráfico de la tabla 5. Se consideran ondas de corte. Los espesores para el segundo estrato son: 0.8, 0.6, 0.4, 0.2 y 0.1 u.

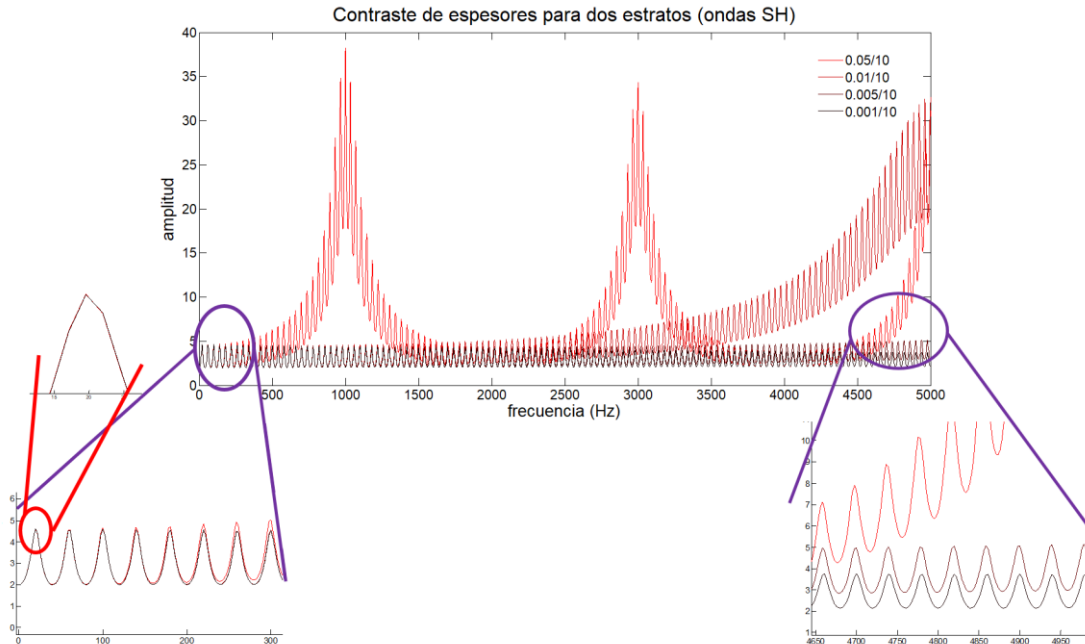


Figura 36 Función de transferencia para el perfil estratigráfico de la tabla 5. Se consideran ondas de corte. Los espesores para el segundo estrato son: 0.05, 0.01, 0.005 y 0.001 u.

### b) Contraste de densidades

Se analiza la tendencia de las funciones de transferencia del perfil estratigráfico mostrado en la tabla 6, variando la densidad del semiespacio del doble al uno por ciento la del estrato. En las figs. 37 y 38 se presentan los resultados obtenidos cuando se considera incidencia de ondas longitudinales y de corte, respectivamente. En ambas figuras se aprecia que a mayor densidad de semiespacio, comparada con la del estrato, es mayor la amplitud que se presenta en las frecuencias pico. Cuando se evalúa para la frecuencia con valor nulo, esto es, para el caso estático, la amplitud es del doble de la amplitud de la excitación de entrada (debido a la frontera libre, contacto del estrato con la atmósfera). Sin embargo, cuando la densidad del semiespacio es menor que la del estrato (la cuarta parte para las ondas longitudinales y las tres cuartas partes para las ondas de corte), las amplitudes son menores del doble debido a que la refracción de las ondas en el estrato, no es tan eficiente.

Tabla 7. Perfil Estratigráfico

	Estrato	Semiespacio
Densidad	2.5	varía
Velocidad de ondas de corte	800	1600
Velocidad de ondas longitudinales	3000	6000
Factor de calidad (Q)	1000	1000
Espesor	10	

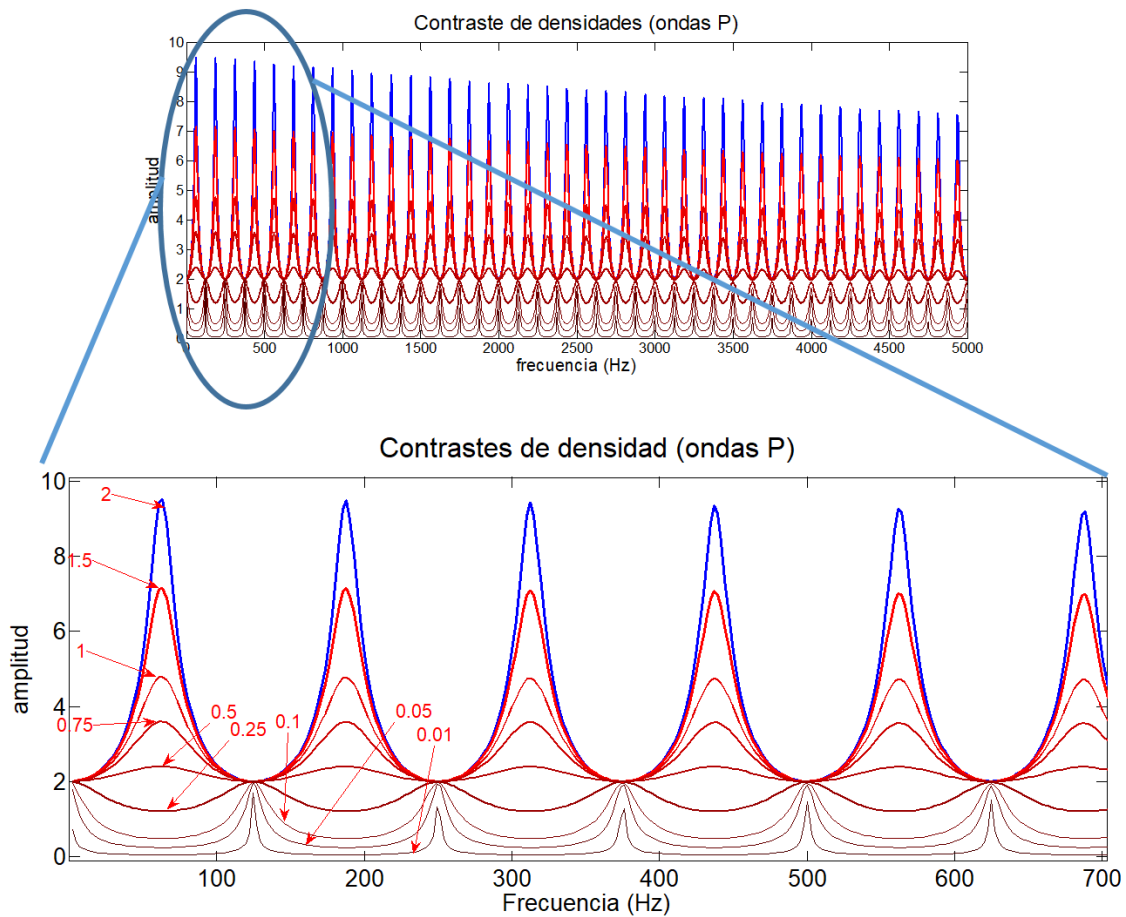


Figura 37 Función de transferencia para el perfil estratigráfico de la tabla 6. Se consideran ondas longitudinales. Las densidades del semiespacio son: 2, 1.5, 1, 0.75, 0.5, 0.25, 0.1, 0.05 y 0.01 u.

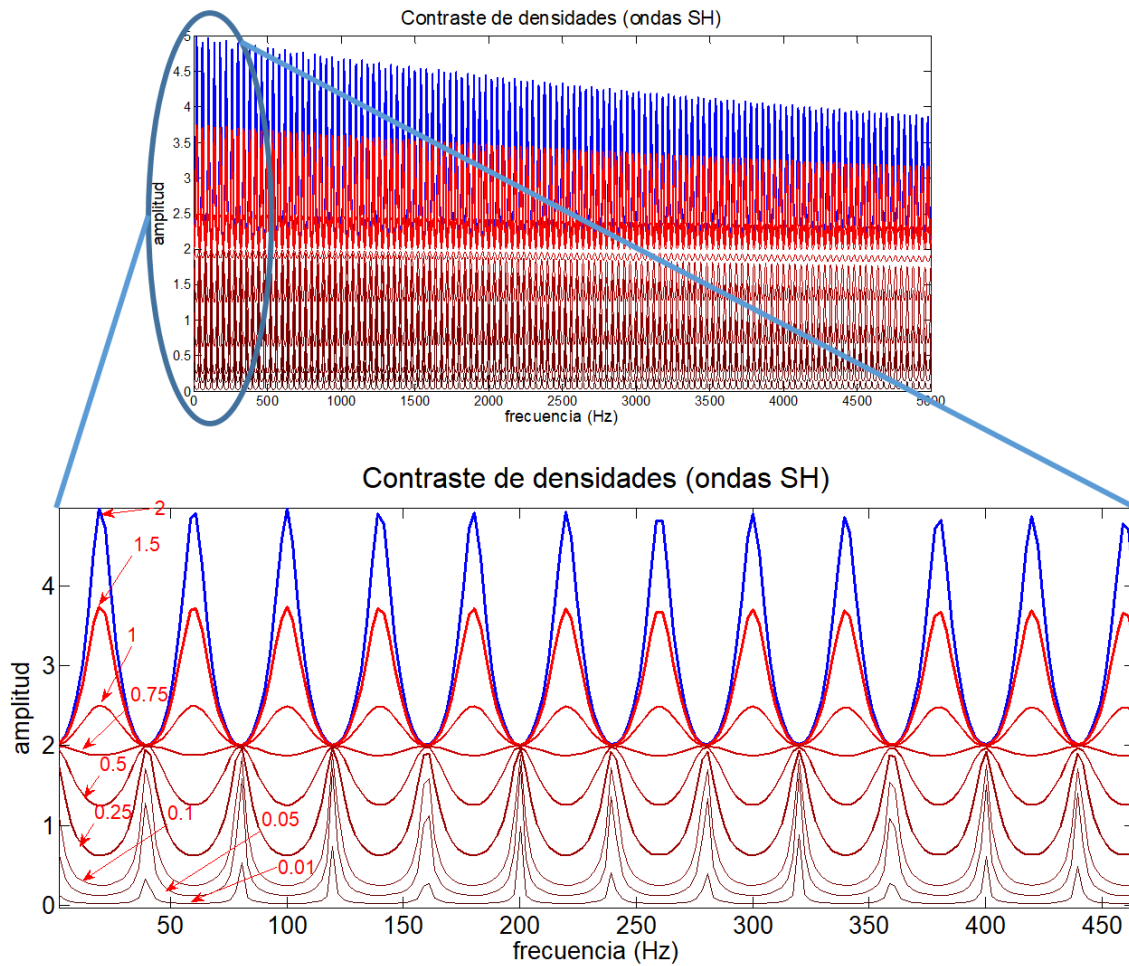


Figura 38 Función de transferencia para el perfil estratigráfico de la tabla 6. Se consideran ondas de corte. Las densidades del semiespacio son: 2, 1.5, 1, 0.75, 0.5, 0.25, 0.1, 0.05 y 0.01 u.

### c) Geometría del perfil

La función de transferencia de un perfil estratigráfico es función de su geometría. La respuesta del sistema ante una vibración dependerá del contenido de frecuencias de la vibración excitadora y de su función de transferencia. En el siguiente modelo de tres estratos sobre un semiespacio, la densidad, espesor y velocidades de onda se han mantenido constantes para cada estrato (tabla 7), sólo se han cambiado sus posiciones relativas al semiespacio, como se observa en la tabla 8. La respuesta del sistema está condicionada a los trayectos que sigan las ondas en los modelos, presentándose amplificaciones o de-amplificaciones dependiendo de la excitación. La velocidad de propagación del modelo 1 aumenta con la profundidad.

En los demás modelos la distribución de la velocidad no depende de la profundidad y las frecuencias pico cambian dependiendo de la posición de los estratos.

Se observa que para el modelo 1 que tiene un aumento en la velocidad con la profundidad, la frecuencia fundamental se presenta a 20 Hz aproximadamente y tiene la mayor amplitud. Esto debido a que el estrato menos rígido tiene una interface libre, lo que fomenta mayores amplitudes de movimiento. Los demás modelos disminuyen su frecuencia fundamental (alrededor de 10 Hz). Las frecuencias fundamentales más bajas y de menor amplitud corresponden a los modelos 4 y 3, en los cuales se ha colocado la capa menos densa bajo las otras dos. Esto sugiere que la presencia de una capa de menor densidad bajo una capa de mayor densidad disminuye la frecuencia y la amplitud del movimiento.

**Tabla 8. Perfil Estratigráfico**

	Estrato 1	Estrato 2	Estrato 3	Semiespacio
Densidad	1	2	3	5
Velocidad de ondas de corte	400	600	800	1000
Velocidad de ondas longitudinales	1000	2000	3000	5000
Factor de calidad (Q)	1000	1000	1000	1000
Espesor	10	10	10	

**Tabla 9. Posición de los estratos**

	Modelo 1	Modelo 2	Modelo 3	Modelo 4	Modelo 5
Posición estratos	[1,2,3]	[2,1,3]	[2,3,1]	[3,2,1]	[3,1,2]

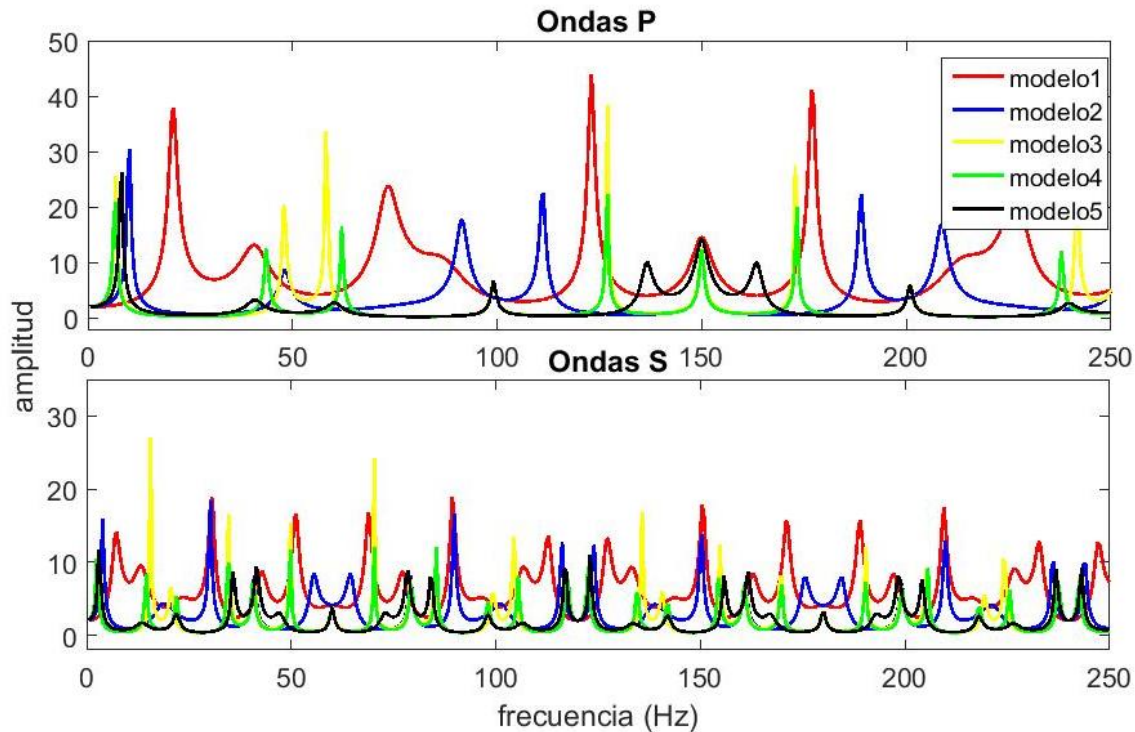


Figura 39 Función de transferencia de modelos con distintos perfiles estratigráficos.

El objetivo de la construcción de un pavimento es el mejorar la superficie por donde circularán determinado tipo de vehículos. Los pavimentos constan de una serie de capas de distintas calidades, siendo la de las especificaciones más estrictas la más superficial, además de ser la de menor espesor. Para conocer el comportamiento dinámico de este tipo de estructuras, el método de Thomson-Haskell no es adecuado debido a las hipótesis con las que fue formulado y por lo mencionado arriba (la capa superficial es de espesor pequeño comparada con los estratos que la sostienen y de mayor densidad), por lo que se debe buscar un método más adecuado. Son varios los autores que han propuesto el considerar las ondas de Lamb para este análisis, aunque estas ondas se refieran a una placa delgada, no apoyada, por donde se propagan las ondas.

Lamb(1917) encontró que se pueden propagar dos tipos de ondas en una placa: ondas simétricas y ondas anti simétricas. Para el caso de una placa libre, Lamb derivó una ecuación de dispersión que incluye las ondas P, S y de Rayleigh en una placa. En la figura 40 se muestran los modos simétrico y anti-simétrico para una placa con relación de Poisson de 0.35. Los modos fundamentales de vibrar simétrico (S0) y anti-simétrico (A0) se han graficado con línea gruesa. Estos dos modos tienden a la velocidad de las ondas de Rayleigh en frecuencias altas. Existen modos

superiores simétricos y anti-simétricos que se desarrollan solo a cierta frecuencia. Estos modos superiores muestran dos características importantes: 1. A frecuencias altas, tienden a la velocidad de ondas de corte, y 2. tienen una meseta que se presenta a la velocidad de ondas longitudinales, aproximadamente. Algunos investigadores muestran que las curvas de dispersión obtenidas de los resultados del análisis de pruebas de campo llevadas a cabo en pavimentos, pueden ser interpretadas basándose en las ondas de Lamb. Los resultados que se han obtenido son prometedores (Ryden, 2004) por lo que se antoja utilizarla, aunque queda fuera del alcance de esta tesis.

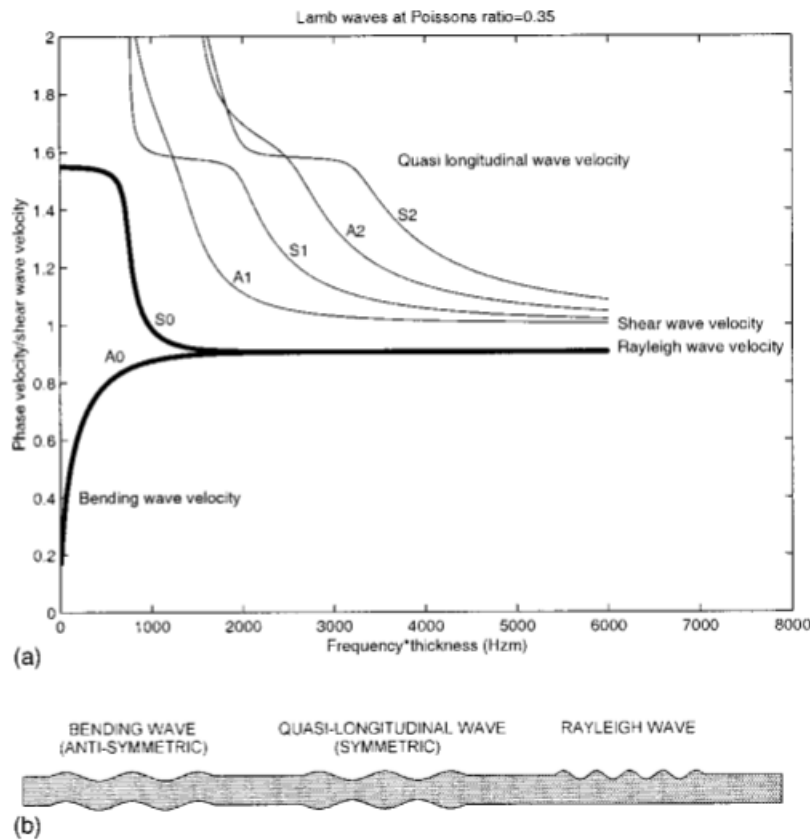


Figura 40. a) Curva de dispersión para una placa libre. b) Desplazamiento de la placa para los modos fundamentales simétrico, anti-simétrico y de ondas de Rayleigh. (Ryden, 2004)

## 7. Experimentos y resultados

Una forma paralela de conocer la precisión si las interpretaciones que se generan son adecuadas, consiste en realizar pruebas de laboratorio. Usualmente las pruebas se realizan en modelos construidos a escala natural (que pueden ser terraplenes), pero pocas veces se fabrican prototipos pequeños para realizar los experimentos, sobre todo porque en estos últimos va incluido un factor de escala que tiene que ver con, por ejemplo, la velocidad de propagación de ondas en los materiales. Aunado a esto está el factor costo. Es más económico realizar las pruebas directamente en la obra, aprovechando quizá el control de calidad que se tiene de los materiales, y reportar posteriormente los resultados en revistas especializadas. Sin embargo, el deterioro de los materiales utilizados en la construcción, o la alteración de las estructuras del subsuelo y el cambio de sus propiedades, sigue siendo un problema serio de interpretación, y es aquí en donde difícilmente se recurre a sondeos directos (pruebas destructivas) y, en donde convendría tener un mejor conocimiento de las aproximaciones que se hacen al interpretar los resultados.

Son varios los experimentos realizados para comprender el fenómeno de la propagación de las ondas utilizando modelos físicos. Entre ellos se encuentran los diseñados por J.Brune y colaboradores (1894, 1985, 1989, 1991, 1993) utilizando modelos construidos con poliuretano y obteniendo excelentes resultados. Destacan sus modelos para estudiar la propagación de ondas en topografías y presas y en los problemas relacionados con la interacción suelo-estructura.

En algunos experimentos incluso se ha utilizado el arroz inflado, con el propósito de medir los procesos de compactación considerando los efectos de la emisión acústica (Valdés, 2012).

El reproducir en laboratorio con modelos pequeños, los fenómenos dinámicos observados en campo cuando se realizan sondeos activos utilizando una fuente y varios geófonos para determinar la estructura y propiedades de los materiales del subsuelo, es el propósito más ambicioso de lograr, principalmente debido a que es difícil reproducir las condiciones de campo y las características dinámicas de la estructura en el modelo, porque los factores de escala que se tienen que resolver que son complicados. En esta tesis se realizan pruebas de laboratorio con modelos en escala con el propósito de entender cómo irregularidades definidas con intención, afectan la respuesta dinámica de los modelos.



Las pruebas en laboratorio también se clasifican en ensayos destructivos y no destructivos en materiales. Las diferencias entre ellos son:

En los ensayos destructivos:

- Los resultados son solo aplicables al objeto ensayado
- En general la pieza ensayada no puede ser utilizada
- Proveen datos cuantitativos, precisos y confiables de la pieza ensayada
- Proveen datos muy útiles para diseño

En los ensayos No destructivos:

- Permiten, en algunos casos, predecir la vida útil de la pieza
- La pieza puede ser utilizada luego del ensayo
- Las condiciones superficiales e internas de cada ítem pueden ser examinadas
- Algunas partes pueden examinarse en servicio
- Algunos dispositivos de ensayo no destructivo son portables
- Son dependientes en mayor o menor medida del operador
- No proveen información cuantitativa
- La orientación y el tipo de discontinuidad debe ser considerado
- La evaluación de los resultados puede ser muy subjetiva

Debido a que el interés de esta tesis se centra en la detección de inclusiones y de discontinuidades, se decidió por los ensayos no destructivos.

Para planear experimentos en laboratorio se requieren considerar las dimensiones del modelo, el equipo de medición y análisis, y las características del material a utilizar. Este último es de particular importancia si se desea que los modelos a escala sean pequeños, para ello, el material debe cumplir con las siguientes características:

- a) Tener una velocidad de propagación de ondas adecuada para lograr medir los fenómenos en modelos pequeños.
- b) Ser fácilmente manejable y económico.
- c) Fabricarse con distintas características elásticas o ser relativamente sencillo el conseguir variarlas, mediante su manipulación.
- d) No degradarse al ser sujeto a los experimentos.

El poliuretano -material utilizado en los experimentos llevados a cabo por Brune y colaboradores del Nevada Seismological Laboratory con cámaras de alta velocidad y sensores- cumple con las características mencionadas además de tener propiedades de atenuación con factores de calidad  $Q$  cercanos a 10 y módulos de Poisson de 0.3, comparables a los presentados en los suelos (Brune, 1991). Inicialmente se pensó en realizar los experimentos con este material porque se

consigue en el mercado en diferentes presentaciones y densidades, es fácil de moldear para fabricar modelos y es económico. Sin embargo, debido a la baja velocidad con la que se propagan las ondas en el poliuretano y al equipo con el que se contaba en el laboratorio en la institución donde realicé esta investigación, se descartó esta idea. Se decidió entonces por el uso de metales como material para los experimentos. Para ello realice las siguientes acciones:

- a) Estudio de la literatura especializada en el tema de experimentos en metales.
- b) Búsqueda y solicitud de los manuales de operación de los equipos con los que trabajaría.
- c) Pruebas de ensayo y error para identificar las funciones del equipo, su conexión con el modelo y como transmitir/recibir y grabar la información.
- d) Indagación de los sensores más apropiados para las pruebas.

## 7.1 Metodología

Se pensó en pruebas considerando métodos ecopulsados que consisten en introducir pequeñas ráfagas de energía (pulsos) dentro de la pieza ensayada con intervalos regulares de tiempo. Si en el espécimen se encuentra una superficie reflectante, toda o alguna parte de la energía se refleja. La cantidad de energía reflejada depende del tamaño de la superficie reflectante en relación con el tamaño del haz incidente. La dirección de la señal reflejada (eco) depende de la orientación de la superficie reflectante respecto a la dirección de incidencia del haz. La energía reflejada es monitoreada, considerando, la cantidad de energía reflejada en una dirección específica y el tiempo de demora entre la transmisión del pulso inicial. La mayoría de los equipos de ecopulsado consisten en:

- Reloj electrónico.
- Generador electrónico de señal o pulsador.
- Transductor de envío.
- Transductor de recepción.
- Amplificador de eco señal.
- Dispositivo de salida.

Los transductores constan de transmisor que convierte pulsos eléctricos en mecánicos y receptor que convierte pulsos mecánicos en eléctricos. Para reducir la dispersión y la pobre definición de los primeros arribos en el receptor, el transmisor debe generar longitudes de onda al menos tres veces la dimensión promedio de las irregularidades a medir de la probeta. El acoplamiento del transductor al espécimen se realiza mediante una delgada capa de adhesivo eléctricamente conductor de tipo epoxi.

El pulso de voltaje aplicado al transductor transmisor y la salida voltaje del transductor receptor son visualizados en un osciloscopio que tiene una respuesta esencialmente plana entre frecuencias de 5kHz y cuatro veces la frecuencia resonante de los transductores. El osciloscopio es esencial para el análisis espectral de las ondas y el procesamiento de señales digitales.

Para emitir y recibir correctamente la señal, los transductores deben estar perfectamente acoplados con el espécimen para evitar que cualquier discontinuidad o bolsa de aire en la interface genere la dispersión de la señal.

Para llevar a cabo los experimentos se requirió:

- a. Caracterizar el material a utilizar. Muchas compañías proporcionan las características de los materiales que ofrecen, sin embargo, se requirió comprobarlas.
- b. Construir un prototipo y probarlo con el propósito de sensibilizarme con los resultados que se obtienen y el conocer las diferentes capacidades del modelo y del equipo de medición. Probar distintos transductores para determinar cuál era el que mejor satisfacía las necesidades en los experimentos.
- c. Diseñar los experimentos con el propósito de probar varios escenarios que consideraran materiales con distintas características.
- d. Procesar los datos adquiridos, analizarlos e interpretarlos.

Para los experimentos se pensó en tres metales con distintas propiedades: **cobre, aluminio y latón.**

### **Aluminio**

Considerando el peso de los elementos abundantes constitutivos de las rocas en la Tierra, el aluminio es el tercer elemento más abundante pues constituye el 8% (el Oxígeno tiene un 45% y el Silicio el 28%), posee una alta conductividad eléctrica y térmica, y su resistencia a la corrosión es excelente. Las características que reporta el vendedor son:

**Tabla 10. Propiedades del aluminio**

Constantes físicas (pureza 99.5%)	
Peso específico	2.7 gr/cm <sup>3</sup>
Coefficiente de dilatación térmica (20 a 100°)	0.0000239 mm/°c
Módulo de elasticidad	7030 Kg/mm <sup>2</sup>
Punto de fusión	660°

## **Cobre**

Se utilizó el cobre C10200 (99.95% de cobre) porque se considera de muy alta conductividad térmica y eléctrica. Las características reportadas por el proveedor son:

**Tabla 11. Propiedades del cobre**

Punto de fusión (líquido)	1083C
Densidad	8.91 gm/cm <sup>3</sup> ( 20 C)
Conductividad eléctrica	101% IACS (20C)
Resistividad eléctrica	1.71 microhm-cm (20C)
Conductividad térmica	226 BTU ft/(hr*ft <sup>2</sup> °F)
Coefficiente de expansion térmica	16.9 x10 <sup>-6</sup> por cada °C (20 – 100 C)
Módulo de elasticidad a la tensión	117,000 MPa
% Cobre	99.95 Mín.
% Oxígeno	0.0010 Máx.

## **Latón**

Es un metal con distintas proporciones de zinc y cobre (en ocasiones se les adiciona otros elementos), lo que da como resultado una gran gama de latones con diferentes propiedades. La aleación del latón usado en los experimentos fue: Cu 61.5%, Zn 35.5%, Pb 3% siguiendo las especificaciones de 360 ASTM B-16.

Los metales se adquirieron en forma de barras (con sección de 5.08cm por lado) de las que se extrajeron las probetas. Se pensó en tres tamaños diferentes para las probetas, la construcción de los modelos fue con base en estas probetas. Algunas de ellas contaron con un orificio en su centro que las atravesó completamente, esto con el propósito de comparar el efecto en las respuestas al introducir una discontinuidad. En la tabla 11 se presentan los tamaños y características de las probetas utilizadas.

Tabla 12. Tamaño de las probetas

Bloque	Tamaño	Material			Orificio
		Cobre	Latón	Aluminio	
A'	3/8"	x	x	x	Sí
A	3/8"	x	x	x	No
B	1"	x	x	x	No
C'	4 7/8"	x	x	x	Sí
C	4 7/8"	x	x	x	No

Con la asesoría del personal del laboratorio de Electrónica e Instrumentación, en especial del Maestro Miguel Ángel Mendoza García, se comenzó con las pruebas midiendo directamente con un equipo de Tektronix TDS 1001C-EDU (figura 40), colocando las muestras (figura 41) en distintas posiciones para ver la viabilidad de realizar los experimentos. Los resultados que se obtuvieron nos daban la confianza de que era posible utilizar un generador de señales eléctricas para obtener las aceleraciones en los materiales probados. Los primeros resultados mostraron que, al probar dos probetas diferentes, en las señales que atravesaban las probetas se notaba una diferencia en cuanto a amplitud y forma (figura 42).

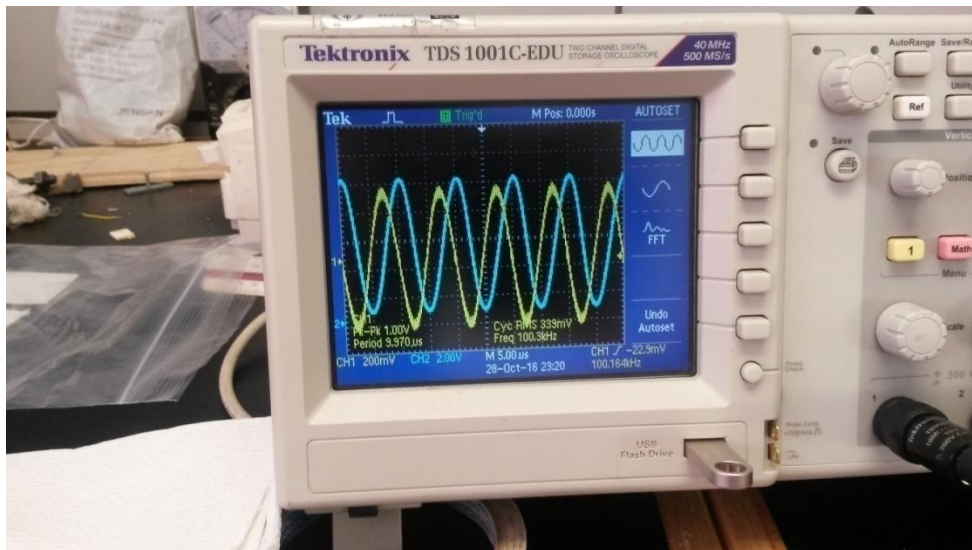


Figura 40 Equipo del laboratorio de Electrónica e Instrumentación



Figura 41 Pruebas preliminares en probetas del material a utilizar para ver la viabilidad de los experimentos.

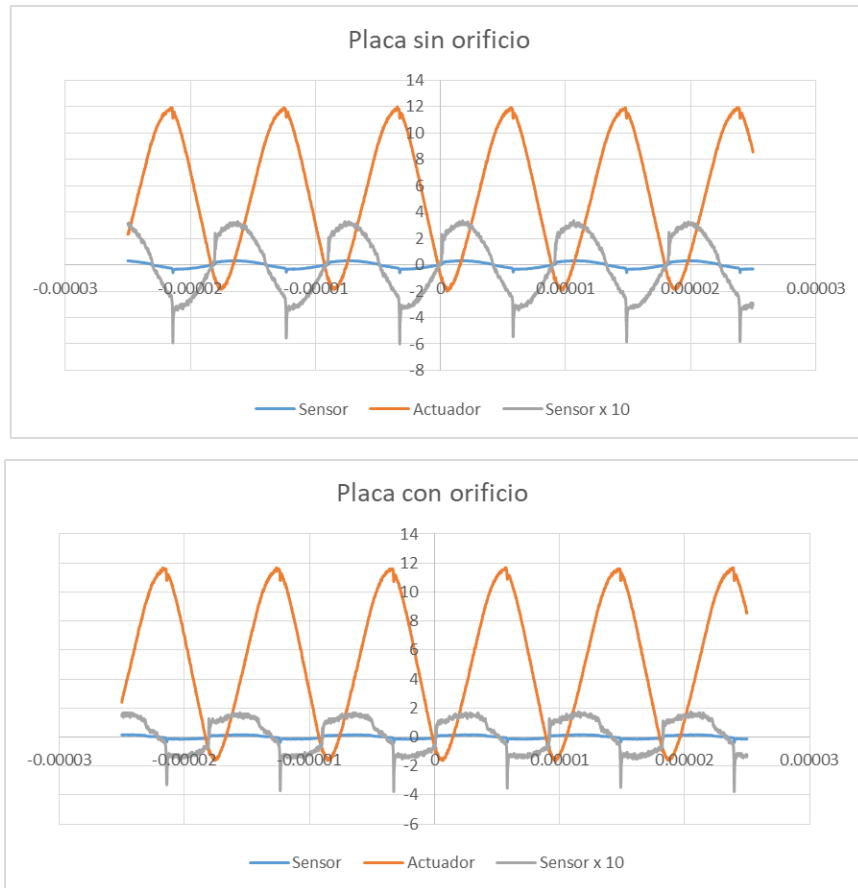


Figura 42 Prueba de la viabilidad de los experimentos. En la figura se indica con línea gris los resultados de medición al pasar una señal continua a través de las probetas de aluminio (una de ellas con un orificio en su centro) observándose una diferencia en las señales recibidas (en color gris), muy probablemente debidas a la presencia del orificio.

Dentro del equipo utilizado se encontraba un sistema de adquisición de datos de National Instruments USB-6351 DAQ Serie x que es un dispositivo USB multifuncional de 16 bits y tasa de muestreo alta, hasta 1.25 MS/s, además de elementos adicionales como, cables, acelerómetros y transductores (figura 43).



Figura 43 Material necesario adquirido para los experimentos.

Con los ensayos de prueba iniciales identificamos el tipo de sensores convenientes para la transmisión y recepción de señales, su ubicación óptima, la mejor manera de sujetar las probetas y el tipo de señal conveniente.

## 7.2 Diseño de los experimentos

Se realizaron pruebas en modelos con diferentes materiales que tienen distintas anomalías (espesor, densidad, discontinuidades) impuestas con la intención de observar el efecto que tienen en la propagación de ondas.

Los experimentos se basaron en la emisión acústica a través de tres metales con distintas propiedades: **cobre, aluminio y latón** (tabla 11 y figura 44). Para ello se construyeron modelos con las probetas fabricadas que tienen las características mostradas en la tabla 12.

Tabla 13. Propiedades de los materiales que conforman las probetas

Material	Densidad g/cm <sup>3</sup>	Módulo elástico Ksi
Cu ( Aleación C-1100)	8.91	17000
Aluminio (Si,Fe,Cu,Mg)	2.7	10000
Latón (62%Cu, 35%Zn, 3%Pb)	8.5	14360



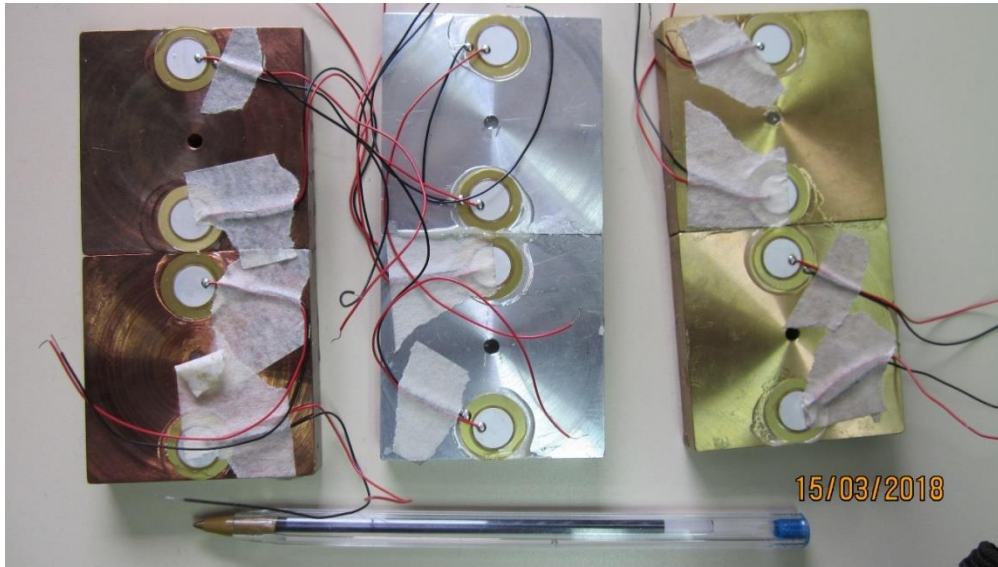


Figura 44 Cobre, aluminio y latón son los metales utilizados en los experimentos

En la emisión y recepción de ondas se utilizaron **transductores cerámicos** con efecto piezoeléctrico, unidos a las probetas con pegamento epoxi. Los transductores son discos cerámicos que actúan curvándose. Se componen de un substrato pasivo hecho de metal de 15mm. Al elegir la posición de los transductores se tomó en cuenta la forma de vibrar de una placa y la posición del equipo para prospecciones sísmicas en pavimentos. La técnica utilizada fue de emisión – recepción, es decir, para cada experimento se montaron dos transductores en cada modelo. La frecuencia de trabajo de los cristales fue de 100kHz.

Para emitir la señal eléctrica se utilizó un generador de señales arbitrarias modelo **Tektronix afg3021b**. La señal consistió en un pulso cuadrado de 1V de amplitud y frecuencia de 100kHz con duración de 50ms para evitar interferencia entre pulsos. La duración del pulso fue de 8% de la duración total de la señal. Se utilizó un amplificador electrónico activo debido a que el voltaje que provee el generador no es suficiente para generar una onda que se pudiera leer con el equipo con que contábamos. El amplificador recibe una señal eléctrica y aumenta su voltaje aproximadamente 100 veces. Se muestra un croquis del arreglo utilizado en la figura 46.

La elección de la frecuencia del pulso se determinó a partir de la frecuencia máxima que el amplificador soporta debido a que para frecuencias mayores a 100kHz la amplitud de la señal disminuye. Para la lectura y almacenamiento de las señales se utilizó un osciloscopio modelo **Tektronix tbs1102b-edu**. Para evitar daños en el equipo y para una mejor comparación entre las señales, la señal proveniente del amplificador se aminoró con una **sonda TPP0200** con atenuación de 10x (figura

45). El osciloscopio se configuró para comenzar la captura de la señal a partir del inicio del pulso y para hacer un promedio de 16 señales. En el canal uno se colocó el pulso inicial y en canal dos la señal de respuesta. La base de tiempo utilizada fue de 250us. La conducción de las señales se hizo con cables BNC.

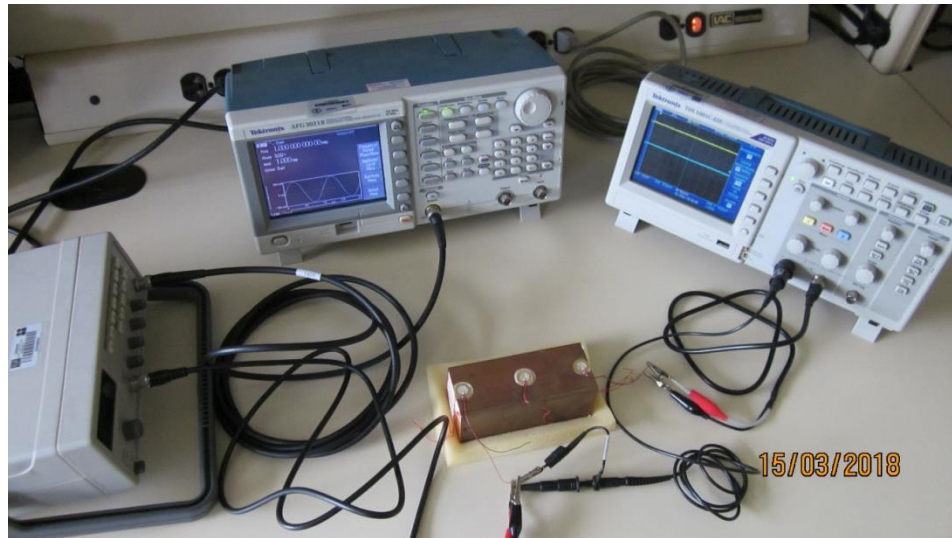


Figura 45 Equipo usado en los experimentos de emisión, transmisión, amplificación, lectura y almacenamiento de señales

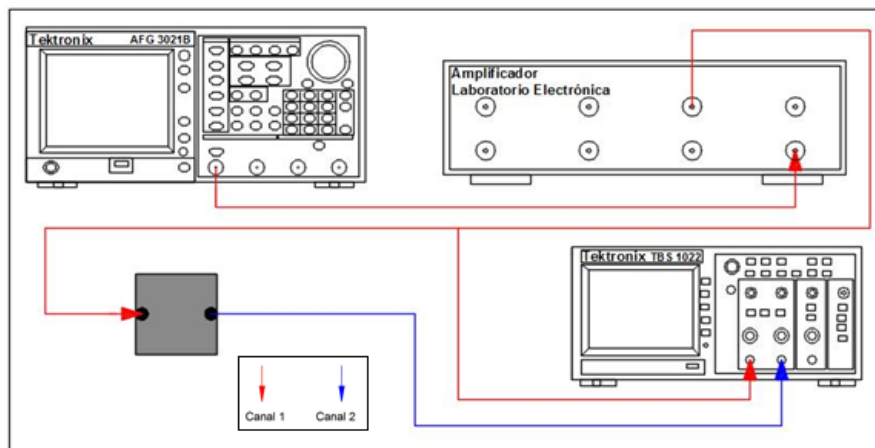


Figura 46. Diagrama de conexión con los diferentes instrumentos de medición usados en los experimentos.

Se realizaron diversas mediciones considerando diferentes posiciones y combinación de probetas. Los experimentos se clasificaron dependiendo de la ubicación que se les dio a los transductores (figura 47). El primer tipo de experimentos se llevó a cabo en los bloques de 3/8" y 1" colocando los transductores en dos extremos distales de la cara cuadrada de las probetas. Este experimento también se realizó con combinaciones de dos y tres placas de 3/8"

adheridas entre sí con el mismo pegamento epoxi que se usó para fijar los transductores. El propósito fue el de simular capas o estratos (figuras 48 y 49). Para el segundo tipo de pruebas se utilizaron las barras, colocando los transductores en la parte media y distal de una de las caras con mayor superficie (figura50). En la tercera clase de experimentos se unieron dos placas por una de sus caras con menor superficie (figura51) y la señal se emitió en dos sitios diferentes, registrándola en dos posiciones, como se muestra en la fig. 47.

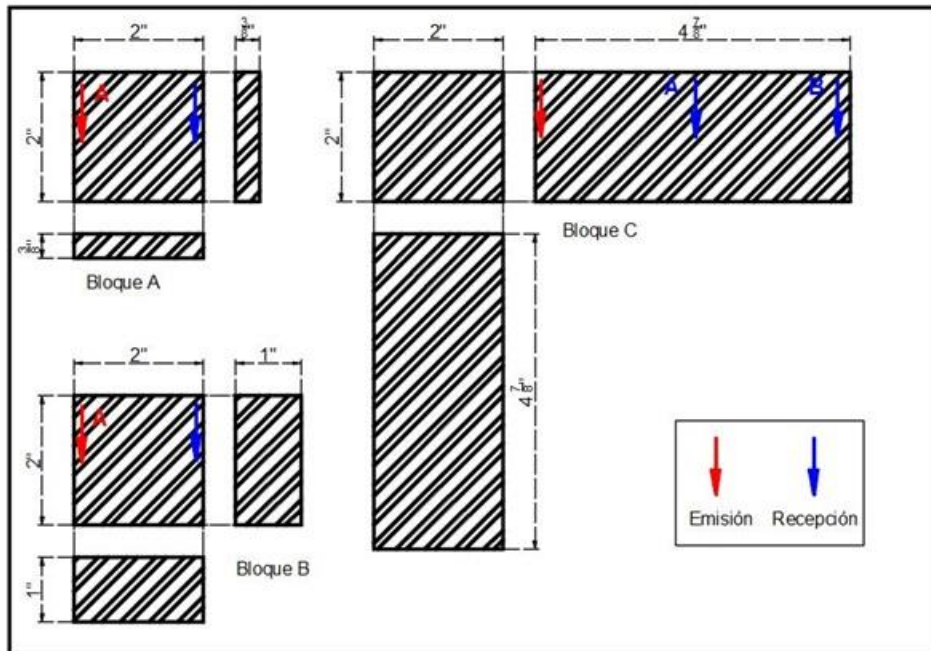


Figura 47 Isométricos de las probetas y posición de los transductores mostrados con flechas.

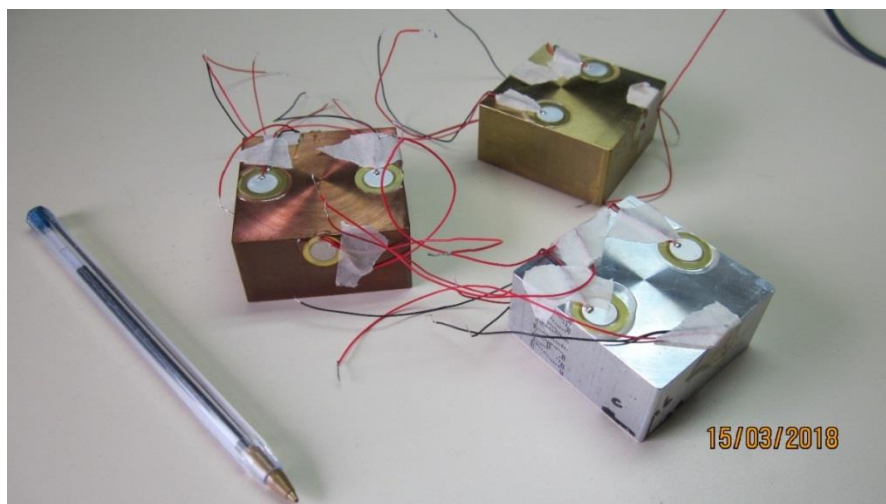


Figura 48 Probetas con espesor de 1" preparadas para los experimentos del primer tipo.

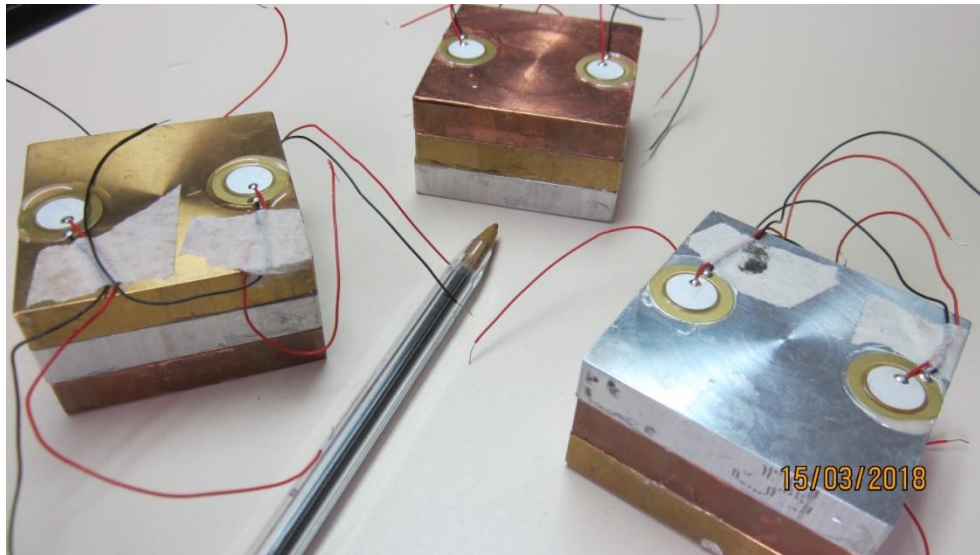


Figura 49 Modelos con 3 probetas de distinto material colocadas en capas y de espesor de 3/8" preparadas para los experimentos del primer tipo.

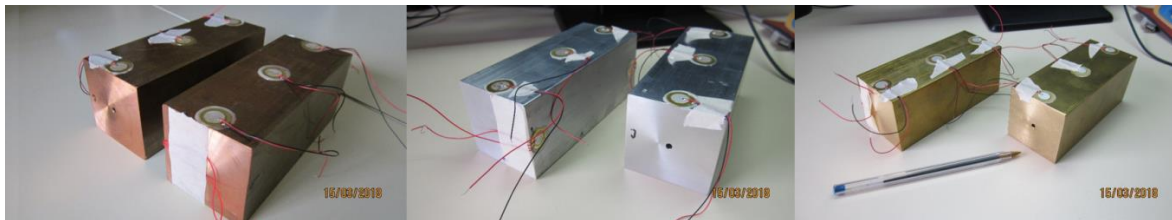


Figura 50 Experimentos en barras (segundo tipo).

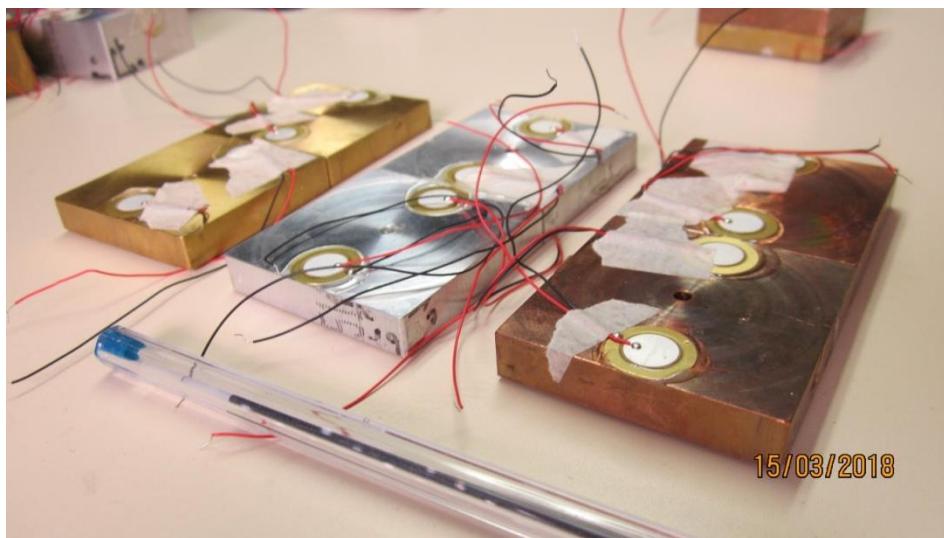


Figura 51 Experimentos del tercer tipo en barras de 3/8".

La elección de las características del pulso inicial se hizo con base en las propiedades del amplificador y de los transductores piezoeléctricos. Inicialmente se utilizaron ondas monocromáticas pero no se pudo obtener información de las señales de respuesta. Con el uso del amplificador, fue posible reconocer una señal de respuesta dependiente de la señal original y tomando en cuenta que una técnica ampliamente utilizada en la prospección ultrasónica, en metales utiliza ecos de un pulso inicial, se eligió un pulso como señal excitadora. La frecuencia del pulso se escogió con respecto a la frecuencia mayor que el amplificador reproducía sin alteración en el voltaje. La duración del pulso fue menor que el tiempo de recorrido de la onda hasta el segundo transductor (figura 52).

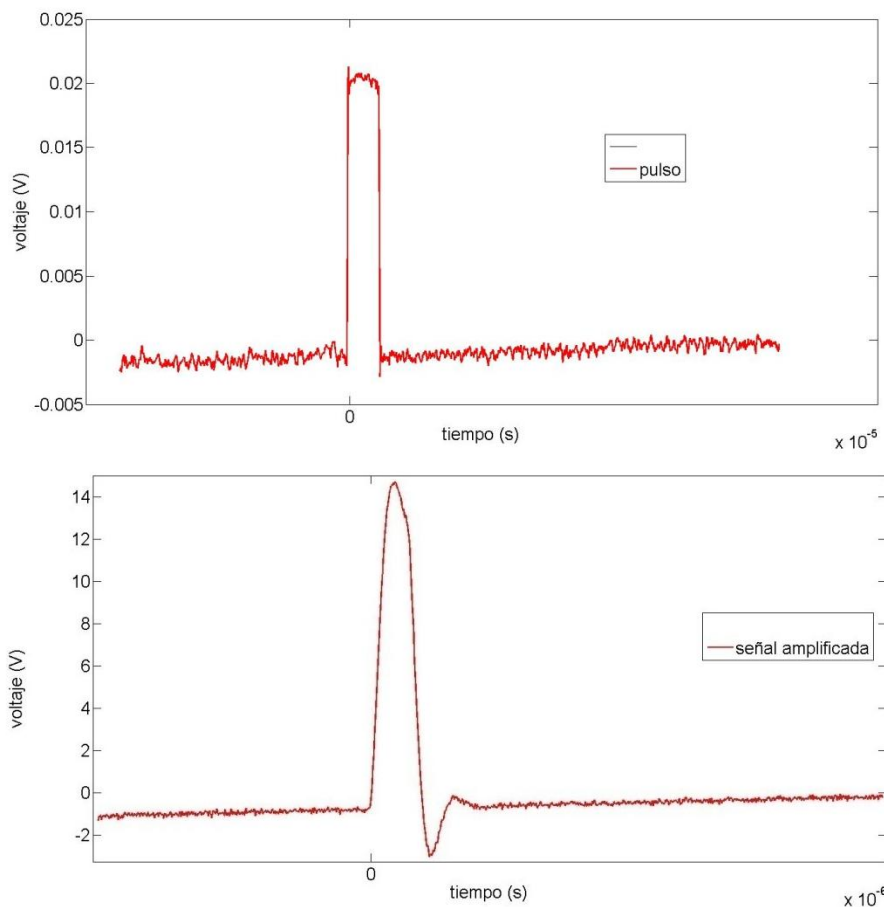


Figura 52 La imagen superior corresponde a un pulso proveniente del generador de señales, la de abajo es la misma señal pero amplificada.

### 7.3 Resultados

Para el análisis y la representación gráfica de las señales utilicé códigos que elaboré en la plataforma de Matlab. Con ellos obtuve su espectro de frecuencia, la coherencia entre señales, la densidad espectral y las funciones de transferencia.

Primero se realizaron mediciones en las barras sin orificio con el propósito de caracterizar a los metales. De acuerdo con los datos proporcionados por el proveedor para cada material y las velocidades medidas en los experimentos, se obtuvieron los resultados proporcionados en la tabla 13.

**Tabla 14. Velocidades calculadas a partir de las propiedades mecánicas proporcionadas por el proveedor y las medidas en los experimentos**

Material	E(Pa)	D(kg/m <sup>3</sup> )	V(m/s)	%e
Al	6.90E+10	2720	5036.63	6.37%
Cu	1.17E+11	8910	3626.98	0.15%
Lat	9.65E+10	8497.731	3370.33	2.71%

En las figuras 53 a 58 se presentan los resultados obtenidos en las probetas largas de metal (ver figura 47). En ellas se aprecian los cambios que sufre la señal de entrada (la emitida) en relación con la que se recibe en un transductor colocado a cierta distancia del emisor, esto debido a las interacciones de las ondas reflejadas y difractadas por las esquinas de la probeta. El tamaño y forma de las señales de salida dependió de la forma de la señal fuente, del material probado, de la forma y dimensiones de la probeta, y de la ubicación de fuentes y receptores. En los experimentos, las fuentes emisoras se colocan en una orilla o en el centro de la barra, al igual que los receptores, como se indica en las figuras.

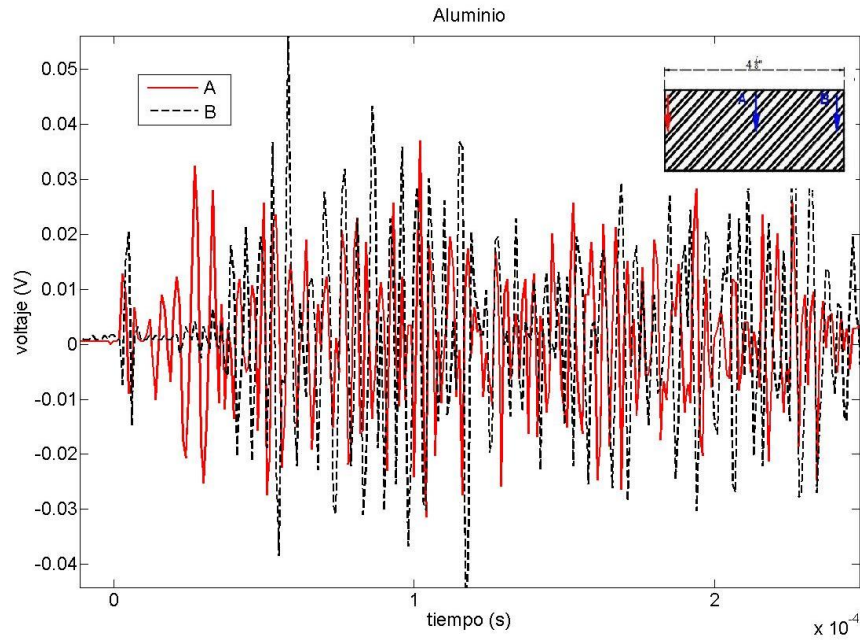


Figura 53 Barra de aluminio (figura 47) sujeta a la excitación de la figura 52, detectada a una distancia A (línea roja) y a B (línea negra).

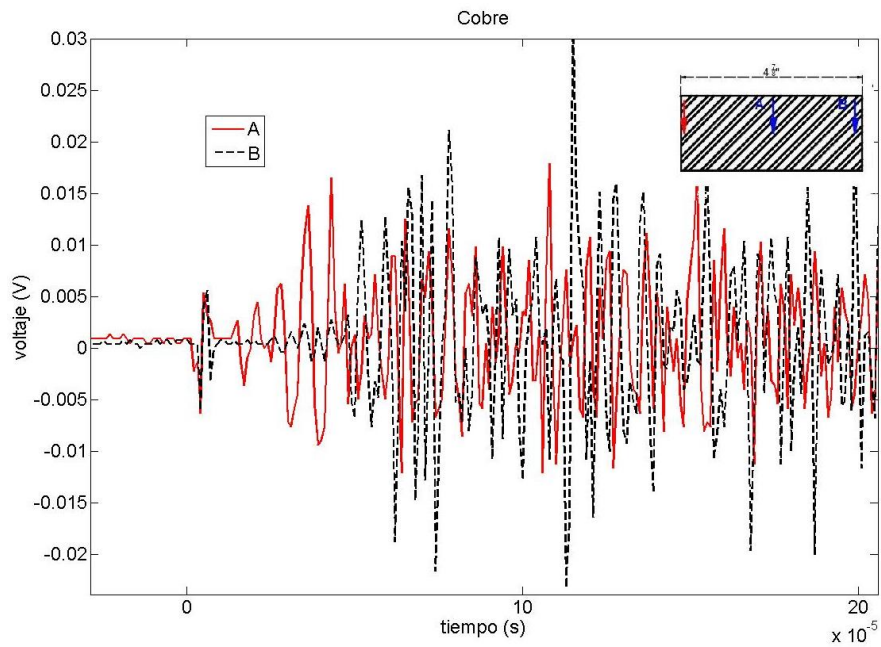


Figura 54 Barra de cobre (figura 47) sujeta a la excitación de la figura 52, detectada a una distancia A (línea roja) y B(línea negra).

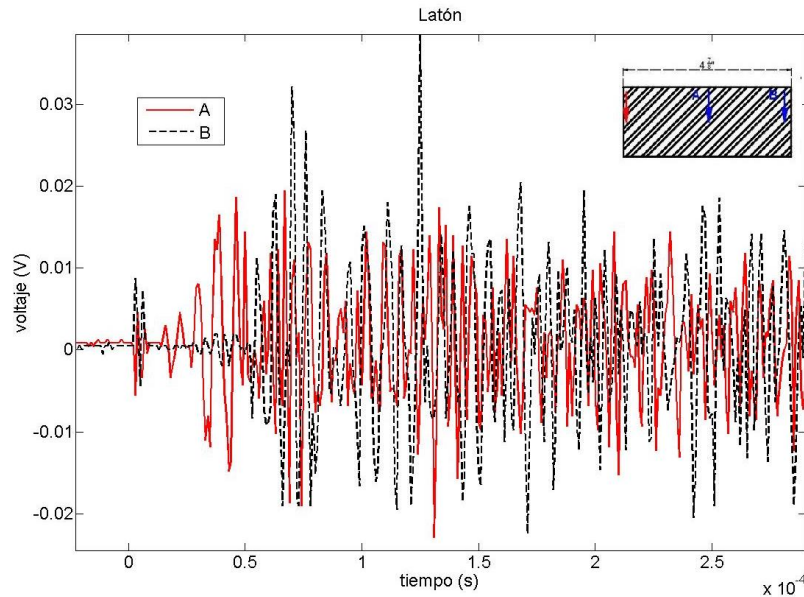


Figura 55 Barra de latón (figura57) sujeta a la excitación de la figura 52, detectada a una distancia A (línea roja) y B(línea negra).

Uno de los primeros retos en los experimentos fue el introducir las mismas señales fuente en modelos diferentes, con ello las diferencias entre las señales de salida indicarían las anomalías debidas a los cambios de material, dimensión, discontinuidades, etc. Para esto se desarrolló un software en MatLab que permitiera a cualquier usuario obtener y comparar de manera sencilla las diferencias entre dos señales, tanto en el dominio del tiempo como en el de la frecuencia, y la potencia cruzada de la densidad espectral y la magnitud al cuadrado de la coherencia. En el anexo A se proporciona el código de este programa. Como no se tenía un control exacto de que la señal incidente fuera la misma para todos los modelos, se cambió de estrategia (abajo se explica).

## 7.4 Espectros de Fourier

En el análisis de señales es muy frecuente recurrir a la transformada de Fourier. La razón es que permite ver a la señal en una dimensión diferente, pues la transforma del dominio del tiempo al de la frecuencia. Desde este punto de vista es posible comprender que tipo de frecuencias serán las que mayor influencia tengan en el comportamiento de las estructuras. Como se expresó en el cap. III de esta tesis, una estructura tiene un periodo fundamental de vibrar que depende de sus características de masa y rigidez. Si una excitación dinámica tiene amplitudes espectrales grandes cercanas a los periodos de vibrar de la estructura, se espera que los desplazamientos que genere en esta sean grandes. Por ello, se deberá tender a diseñar para que las estructuras tengan frecuencias fundamentales



diferentes a las que se sabe que tienen una afectación mayor en el sitio donde se desplantarán.

En los modelos utilizados para los experimentos, la señal que se les introduce difiere de la señal de salida. La modificación que sufre la señal, como se puede apreciar de las figuras 53 a 55, es en cuanto a amplitud y forma, lo que indica que el modelo actúa como un filtro permitiendo pasar sólo determinado número de frecuencias y amortiguando la señal. Este filtro no sólo depende de las características de rigidez, masa y amortiguamiento del modelo, sino también de su geometría y anomalías que se encuentren. Desde el punto de vista geométrico, en la fig. 56 se ilustra como la presencia de una anomalía, en este caso un orificio, genera difracción y rebotes de ondas que no se presentan en su ausencia, modificando de esta manera a la señal de salida en relación con aquella referente al modelo sin orificio.

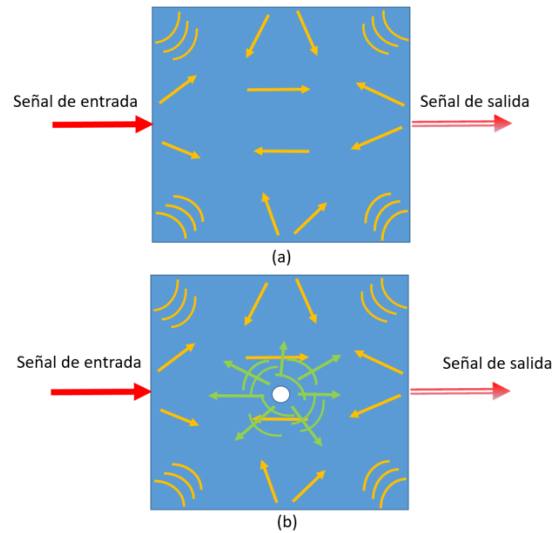


Figura 56. Los cuadros azules representan el material (o filtro) por donde atraviesa una señal ondulatoria. La señal de salida es diferente a la señal de entrada por las reflexiones y difracciones que sufre la onda al chocar con las paredes y esquinas del material (flechas amarillas). En el cuadro de abajo (b) hay una modificación adicional debido a rebotes y difracciones generados por la perforación en su centro (flechas verdes).

## 7.5 Función de Transferencia (Cocientes espectrales)

Debido a que no existía el control en que la señal de entrada fuera la misma para todos los modelos, se optó por comparar las funciones del filtro o funciones de transferencia que representan la respuesta del modelo cuando es sujeto a una señal con amplitud unitaria. En pocas palabras, una función de transferencia se define

como el cociente de las transformadas de Fourier de la señal de salida entre la señal de entrada:

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} \quad (70)$$

donde  $H(\omega)$  es la función de transferencia y  $X(\omega)$  y  $Y(\omega)$  son los espectros de Fourier de las señales de entrada y salida, respectivamente. Así, la función de transferencia representa las variaciones internas del modelo que van a actuar como filtro de la señal de entrada, siempre y cuando el modelo sea lineal e invariante en el tiempo. Debido a que las señales ingresadas en los modelos son de amplitudes pequeñas, se supone que el modelo se comporta linealmente, además, se admite la invariabilidad con respecto al tiempo. La función de transferencia también indica las frecuencias a las que el modelo responde más eficientemente, por lo que son una buena alternativa para revisar las alteraciones que exhibe un modelo al añadirle anomalías o capas del mismo material o de otro diferente. De las figs. 26 a 28 se presentan las funciones de transferencia para modelos sin orificio y se comparan con las que sí lo tienen, para los tres metales analizados en esta tesis (aluminio, cobre y latón). El área transversal del orificio practicado representa aproximadamente el 0.4% del área transversal de las probetas. Se observa que la presencia del orificio para el cobre y el latón prácticamente no afecta a las funciones de transferencia para frecuencias bajas. Esto se debe a que la longitud de onda en esas frecuencias es muy grande en comparación con el tamaño del orificio (aprox. 0.350cm) por lo que resulta invisible. Para frecuencias altas (mayores a  $1.5 \times 10^5$  Hz) la longitud de onda decrece por lo que el orificio ya es detectado. En todos los casos las diferencias detectadas tienen que ver con la posición en las que se presentan las frecuencias pico y su amplitud. En relación con las frecuencias pico cercanas a las calculadas, las correspondientes a las probetas con orificio son ligeramente menores que a las de las probetas inalteradas.

En la práctica, una manera de conocer de forma muy aproximada la localización del periodo fundamental en un estrato de espesor  $H$  y con dimensión lateral infinita y velocidad de propagación de ondas de corte  $\beta$ , es aplicando la fórmula:

$$T = \frac{4H}{\beta} \quad (71)$$

Considerando la expresión anterior, en la tabla 14 se presentan las frecuencias fundamentales ( $f$ ) calculadas para los materiales analizados. Estos valores se comparan con las frecuencias pico señaladas en las figuras 57 a 59.

Tabla 15. Frecuencias pico calculadas y observadas para las probetas con y sin orificio

Material	H(cm)	$\beta$ (m/s)	T(s)	$f$ (s <sup>-1</sup> ) Calculada	$f$ (s <sup>-1</sup> ) con orificio	$f$ (s <sup>-1</sup> ) sin orificio
Al	0.9525	5036.63	7.5646e <sup>-06</sup>	1.322e <sup>+05</sup>	1.318e <sup>+05</sup>	1.323e <sup>+05</sup>
Cu	0.9525	3626.98	10.5046e <sup>-06</sup>	9.52e <sup>+04</sup>	9.692e <sup>+04</sup>	9.717e <sup>+04</sup>
Lat	0.9525	3370.33	11.3056e <sup>-06</sup>	8.845e <sup>+04</sup>	8.984e <sup>+04</sup>	9.009e <sup>+04</sup>

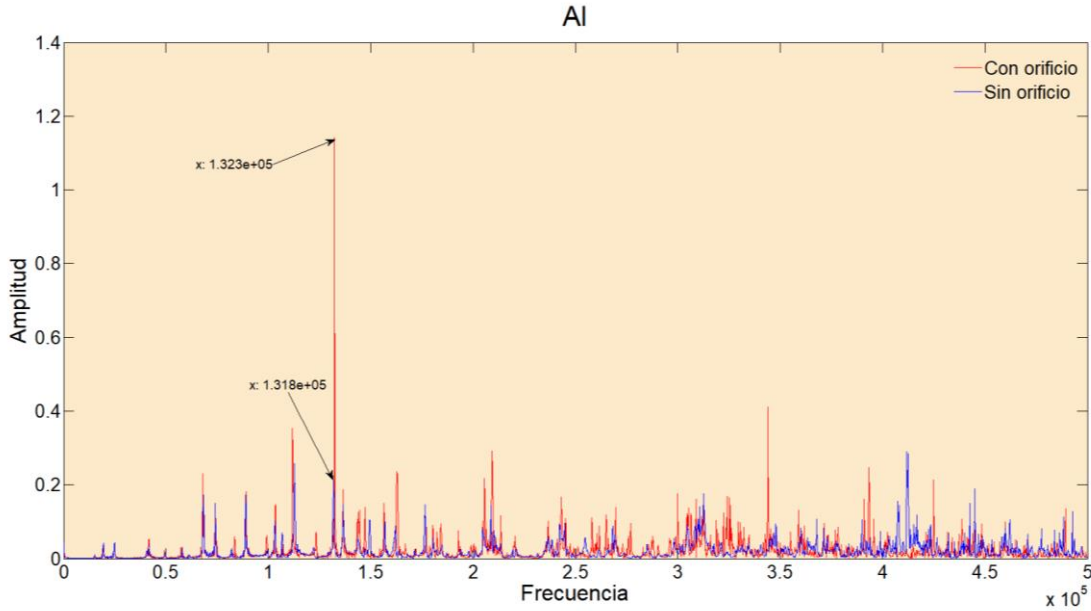


Figura 57 Funciones de transferencia para modelos fabricados con aluminio. La línea roja representa a la probeta sin orificio y la azul la que sí lo tiene.

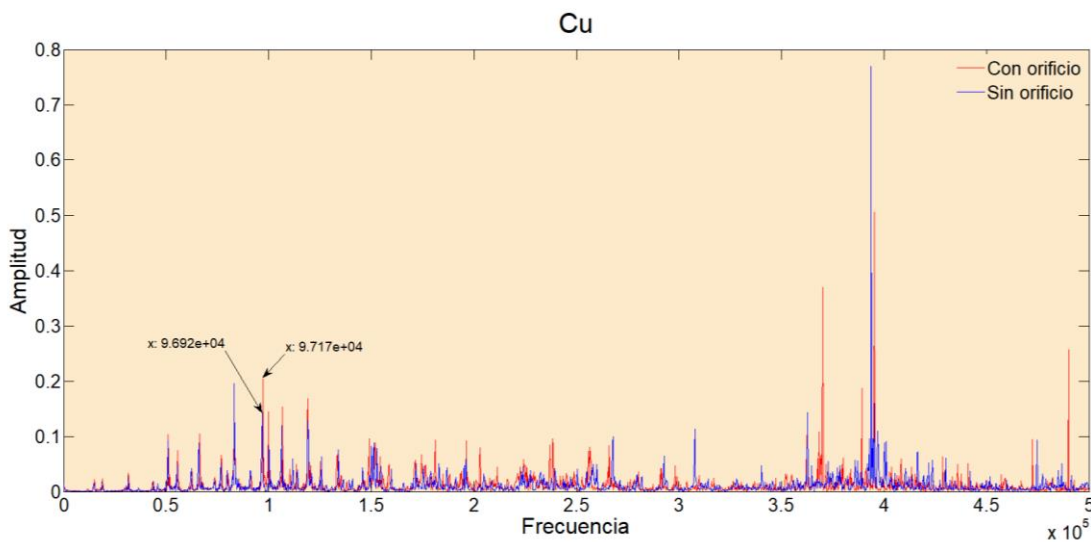


Figura 58 Funciones de transferencia para modelos fabricados con cobre. La línea roja representa a la probeta sin orificio y la azul la que sí lo tiene.

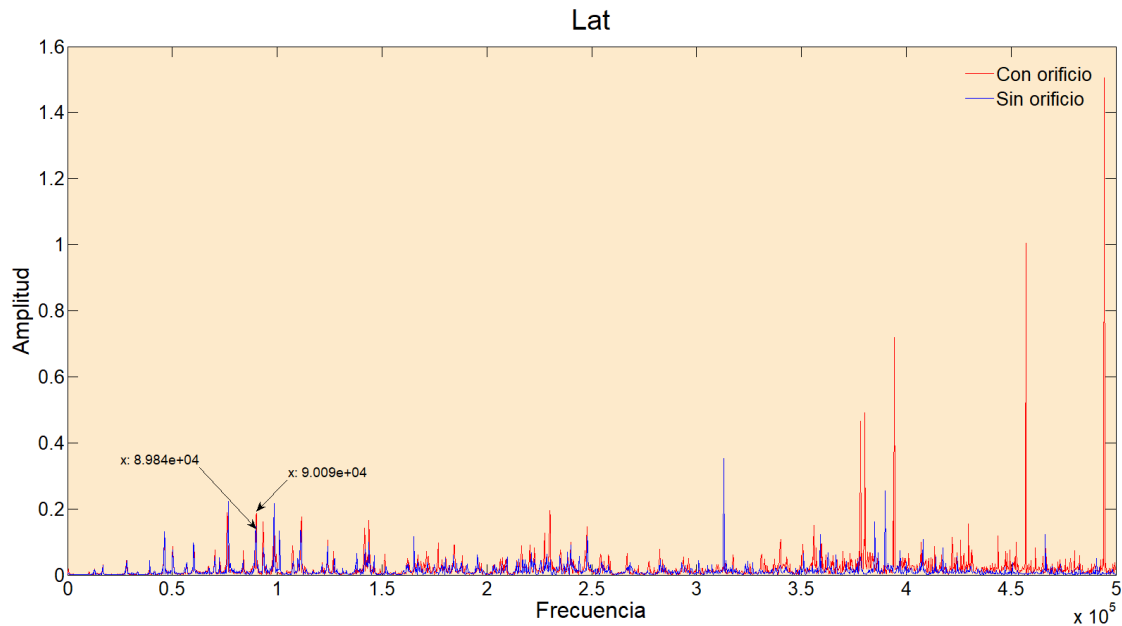


Figura 59 Funciones de transferencia para modelos fabricados con Latón. La línea roja representa a la probeta sin orificio y la azul la que sí lo tiene.

Para estudiar el efecto de capas con distintas propiedades, se fabricaron probetas con combinaciones de materiales. En la tabla 15 se presentan los casos considerados y en la tabla 16 se proporcionan las frecuencias fundamentales calculadas con la expresión (71) para capas con longitud lateral infinita de Al, Cu o Lat, con espesores de 3/8" y 6/8".

Tabla 16. Modelos estratificados analizados

DOS CAPAS	I	II	III	IV	V	VI
Combinaciones	Al-Cu	Cu-Al	Al-Lat	Lat-Al	Cu-Lat	Lat-Cu
TRES CAPAS	VII	VIII	IX	X	XI	XII
Combinaciones	Al-Lat-Cu	Al-Cu-Lat	Cu-Al-Lat	Cu-Lat-Al	Lat-Al-Cu	Lat-Cu-Al

Tabla 17. Frecuencias pico calculadas con la expresión 71 para distintos espesores

Material	$\beta$ (m/s)	H(cm)	T(s)	$f$ (s <sup>-1</sup> )	H(cm)	T(s)	$f$ (s <sup>-1</sup> )
Al	5036.63	0.9525	$7.5646e^{-06}$	$1.322e^{+05}$	1.905	$15.129e^{-06}$	$6.6097e^{+04}$
Cu	3626.98	0.9525	$10.5046e^{-06}$	$9.52e^{+04}$	1.905	$21.0092e^{-06}$	$4.7598e^{+04}$
Lat	3370.33	0.9525	$11.3056e^{-06}$	$8.845e^{+04}$	1.905	$22.6112e^{-06}$	$4.4225e^{+04}$

En las fig. 60 a 62 se aprecian los espectros obtenidos para los modelos que consideran dos capas, cada una con un material distinto y de espesor de 3/8". En ellas se ha indicado con una flecha, la frecuencia fundamental del Al, Cu y Lat mostradas en la tabla 6, para un espesor 6/8". De los tres materiales usados, el aluminio es el que tiene una mayor velocidad de propagación de ondas (es más rígido), por lo que, en los casos en los que la señal se introdujo por el material menos competente (de menor rigidez) para después propagarse por el aluminio, las amplitudes espectrales fueron mayores. Cuando la señal entró por el aluminio, para después atravesar al material más blando, la capa de este último generó una deamplificación de la señal en frecuencias altas, (ver figs. 60 y 61) como se apreció, en todos los casos estudiados en el capítulo VI, para los modelos en donde el estrato más blando se encontraba en la superficie. En los modelos formados con estratos de cobre y latón, el espectro obtenido es muy similar ya sea, si la señal entró primero por el cobre o si lo hace primero por el Latón. Esto se debe que sus propiedades dinámicas son similares (ver tablas 13 y 16), no obstante, uno de los picos del espectro del modelo, se acerca más a la frecuencia fundamental calculada para un estrato formado únicamente por latón (ver fig. 62 y tabla 16).

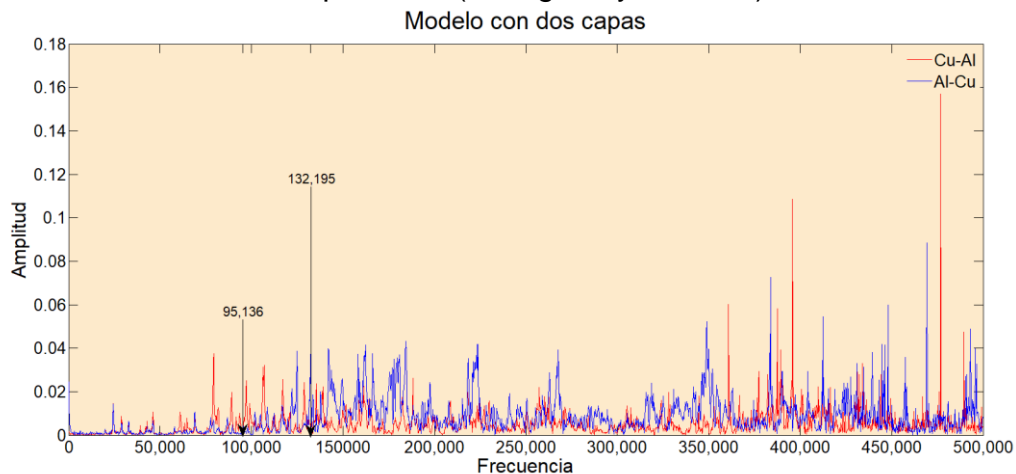


Figura 60 Funciones de transferencia para modelos con dos capas de materiales diferentes. Las flechas indican en donde se localizan las frecuencias fundamentales del Al y del Cu (ver tabla 16).

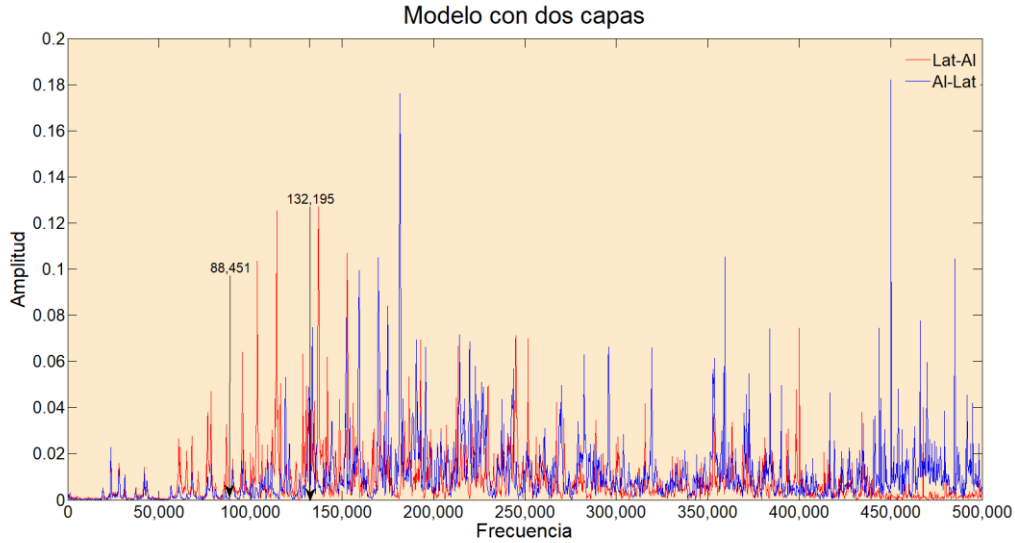


Figura 61 Funciones de transferencia para modelos con dos capas de materiales diferentes. Las flechas indican en donde se localizan as frecuencias fundamentales del AI y del Lat (ver tabla 16).

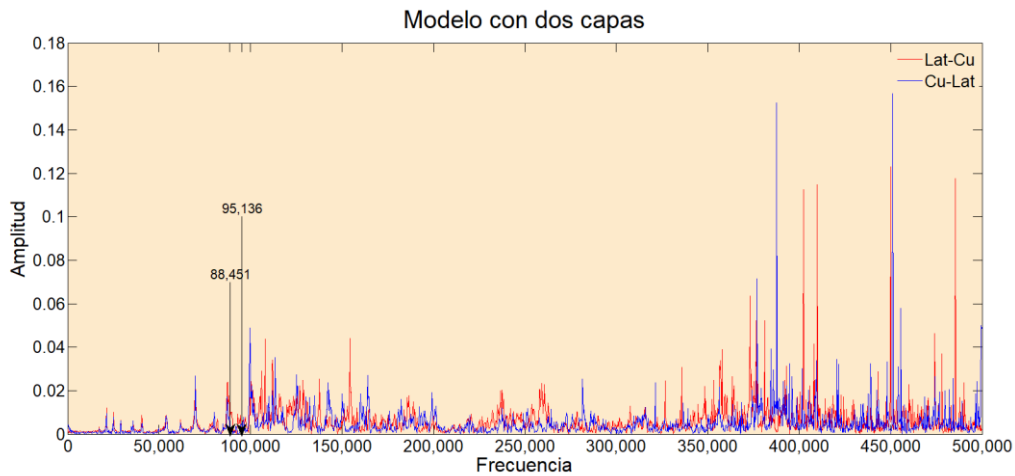


Figura 62 Funciones de transferencia para modelos con dos capas de materiales diferentes. Las flechas indican en donde se localizan as frecuencias fundamentales del Cu y del Lat (ver tabla 16).

Los espectros obtenidos para los modelos con tres capas, cada capa de material distinto, se presentan en las figs. 63 a 66. En ellas se menciona la posición de los distintos materiales en los modelos. Esto es, para el modelo con materiales 'A-B-C', 'C' es el material que recibe la señal (y que llamaré base), que después pasa por el material 'B' y por último atraviesa el material 'A' (que será llamado como material superficial, haciendo alusión a una pila de estratos en donde 'A' está en la superficie). En las figuras se aprecia que la colocación de las capas influye de manera significativa las frecuencias en donde se presentan los picos y sus

amplitudes. Por ejemplo, si la capa más competente (el aluminio) se localiza en la superficie, aunque es pequeña la influencia del acomodo de las otras dos capas (cobre y latón) que contienen propiedades similares, se aprecian algunas diferencias en toda la banda espectral (fig. 32). Estas diferencias son más significativas que para el caso en el que este estrato competente reciba la señal (fig. 33) en donde incluso se aprecia que las amplitudes espectrales tienden a ser menores. Como se observó en el capítulo VI, la función de transferencia de un sistema depende de su geometría y para conocer su respuesta, se debe conocer también el contenido de frecuencias de la excitación.

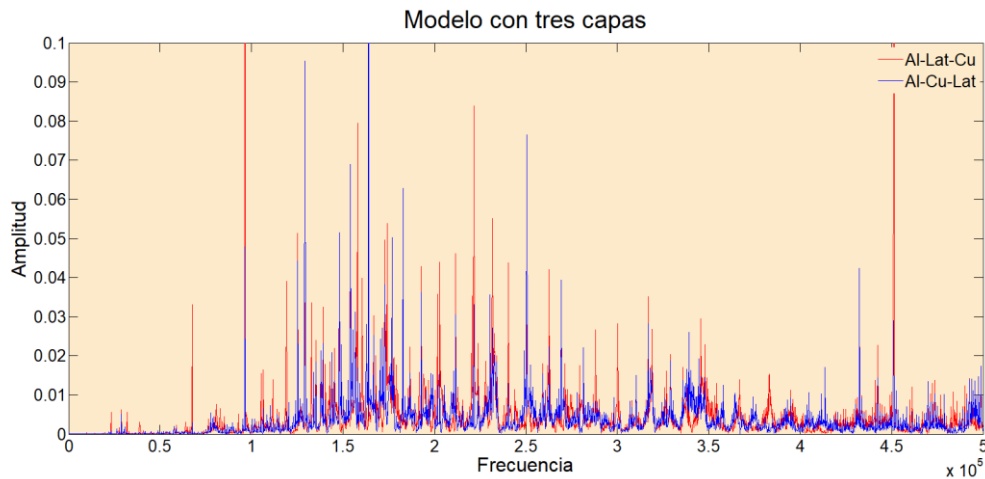


Figura 63 Funciones de transferencia para modelos con tres capas de materiales diferentes. Aquí, el estrato más rígido (aluminio) se encuentra en la superficie (ver tabla 16).

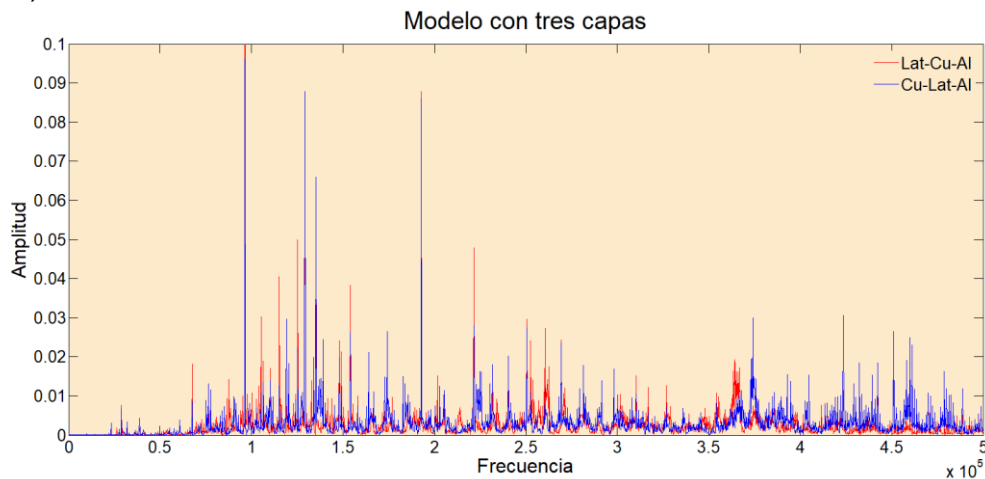


Figura 64 Funciones de transferencia para modelos con tres capas de materiales diferentes. Aquí, el estrato más rígido (aluminio) es el primero en recibir la excitación (ver tabla 16).

En las funciones de transferencia mostradas en las figuras 65 y 66 se mantuvo la posición del estrato de cobre que tiene propiedades intermedias entre el aluminio y el latón (el aluminio es más rígido, y el latón tiene menor rigidez, aunque la diferencia de las propiedades de este último y el cobre no sean muy significativas). Para obtenerlas, la capa de cobre se ubicó en medio del latón y el aluminio (figura 65) y en la base (figura 66). En ambas figuras se aprecia que, cuando el estrato menos rígido se encuentra en la superficie, se presenta una amplificación en la función de transferencia para frecuencias menores a  $1.5 \times 10^5$ . Para frecuencias superiores el proceso se invierte. Tomando en cuenta estos modelos, y lo que implican estos resultados es que, dependiendo del contenido de frecuencias de la excitación, se presentarán o no, amplificaciones en su respuesta. Esto ha sido observado en la ciudad de México, en donde, dependiendo del contenido de frecuencias del sismo, los estratos tienden a amplificar el movimiento en las distintas zonas, que no siempre son aquellas en donde se encuentran los suelos más blandos.

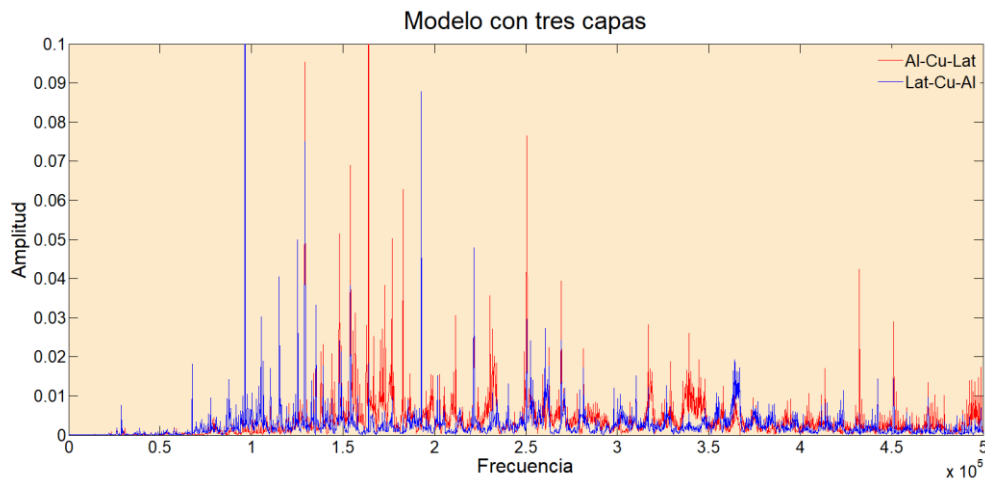


Figura 65 Funciones de transferencia para modelos con tres capas de materiales diferentes. Aquí, el estrato con rigidez intermedia (cobre) se encuentra en medio de los otros dos materiales (ver tabla 16).



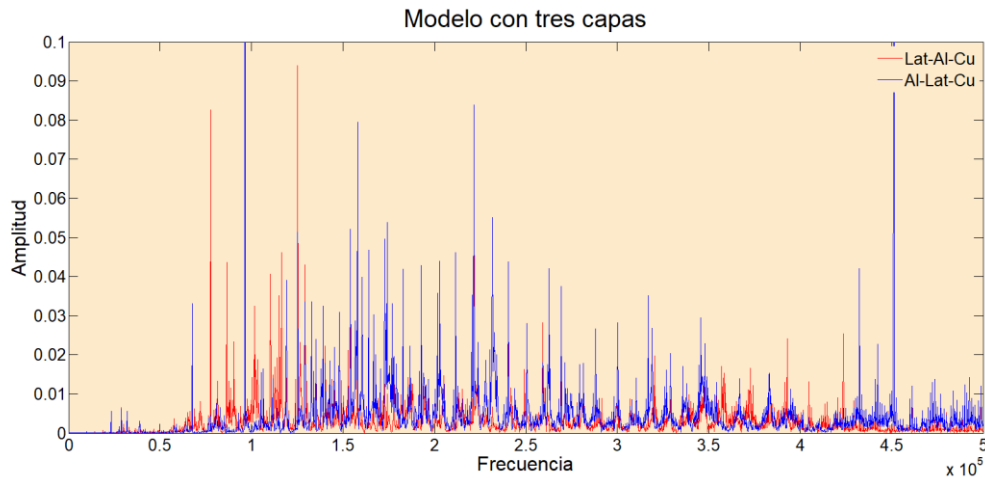


Figura 66 Funciones de transferencia para modelos con tres capas de materiales diferentes. Aquí, el estrato con rigidez intermedia (cobre) es el primero en recibir la excitación (ver tabla 16).

La influencia que la posición del material menos rígido tiene en la función de transferencia, se presenta en las figs. 67 y 68. Se aprecia que cuando el estrato de latón está en la superficie, en general, el rango de frecuencias en donde aparecen las mayores amplitudes espectrales son menores se presenta a menores frecuencias (comparar figura 63 con 67).

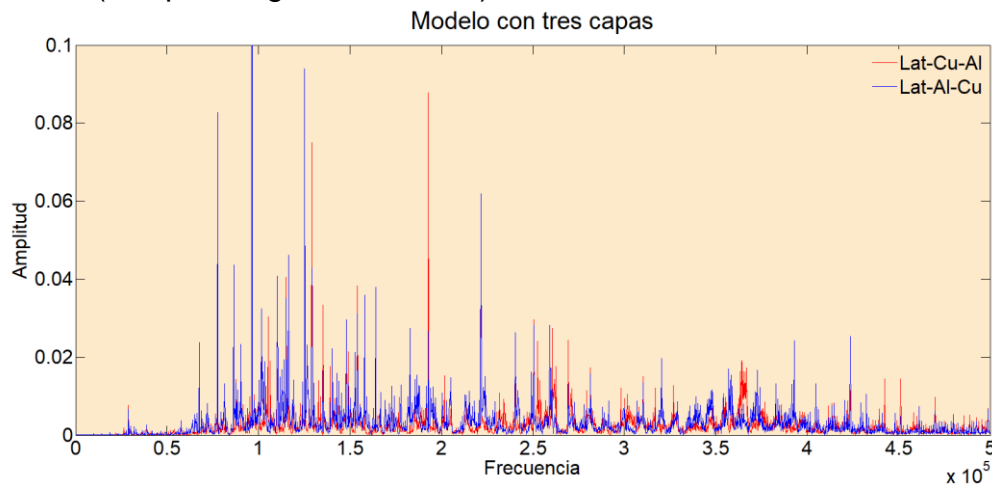


Figura 67 Funciones de transferencia para modelos con tres capas de materiales diferentes. Aquí, el estrato más blando (Latón) se encuentra en la superficie (ver tabla 16).

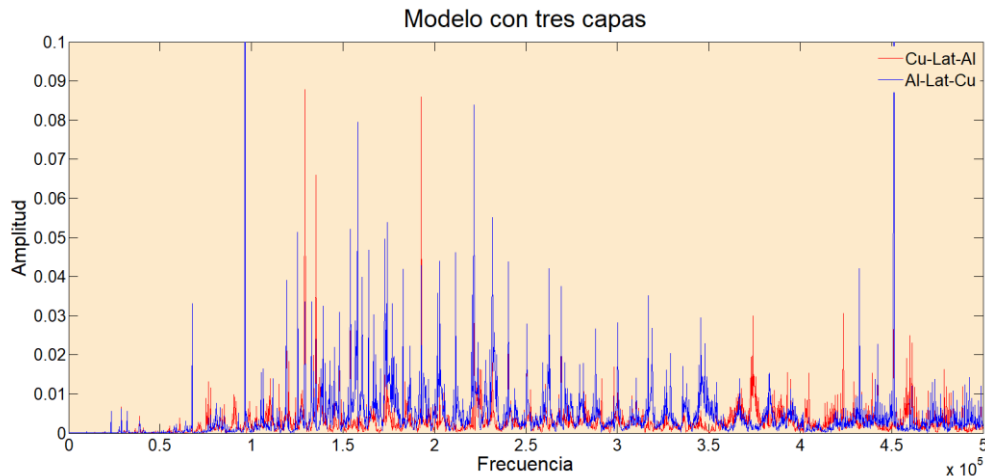


Figura 68 Funciones de transferencia para modelos con tres capas de materiales diferentes. Aquí, el estrato con menor rigidez (Latón) se encuentra en medio de los otros dos materiales (ver tabla 16).

La teoría clásica en sismología que explica la transmisión de ondas en un medio elástico, se sustenta sobre las bases de la ley de Hooke, que relaciona linealmente los esfuerzos aplicados a un cierto sólido con la deformación que éste sufre. Si bien ésta es válida en la mayoría de los casos, es posible que no explique todos los fenómenos ondulatorios en medios elásticos. Para algunos casos es necesaria una relación constitutiva que incluya términos de mayor orden, o términos no lineales. Particularmente, el método de Thomson-Haskell tiene, además, el gran defecto de considerar a los estratos por donde se propagan las ondas, de longitud infinita, por ello, para este estudio que incorpora la transmisión de ondas entre medios con fronteras finitas, las soluciones que se presentan en los modelos teóricos no concuerdan con lo observado en el laboratorio, principalmente debido a la complejidad de los modelos físicos. Sin embargo, los modelos teóricos si ayudan a explicar algunos de los fenómenos que se observaron.

## 7.6 Fase

La fase de una onda (o señal) tiene que ver con la magnitud de onda que se presenta en un instante dado. En el capítulo III se abordan ampliamente los parámetros que caracterizan a las ondas. En el análisis de señales, la fase provee de la información del medio por donde se propaga y de sus fronteras. Baste recordar que cuando una onda se encuentra con una frontera rígida, invierte su fase cuando se refleja, y si la frontera no es totalmente rígida, parte de onda se refleja y la otra se transmite con una velocidad diferente, dependiendo de las características del medio. Las ondas que son reflejadas, al interactuar con las ondas incidentes y de

otros tipos (difractadas, radiadas y refractadas), tenderan a incrementar, decrementar, e incluso a anular, los efectos de las otras ondas, dependiendo de las coincidencias de las fases. Esto es, para que se cancelen dos ondas por completo, tienen que ser iguales y coincidir perfectamente los valles de una con las crestas de la otra onda, si esto no sucede, el resultado de la combinación e interacción de ondas producirá una nueva onda con amplitudes y fases diferentes a las originales.

Al tratar con series de Fourier, se recuerda que estas son la suma de un conjunto de ondas armónicas, cada una con una amplitud, frecuencia y fase definidas (ver cap. IV). Esto es:

$$F(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 + \delta_n)$$

Donde  $\delta_n$  representa la fase de la función armónica  $C_n \cos(n\omega_0 + \delta_n)$ . En las figs. 38 a 49 se presentan las fases de cada una de las ondas con frecuencia circular  $n\omega_0$  que son sumandos de la serie de Fourier. En todas ellas se comparan las fases para dos modelos estudiados, apreciándose una gran diferencia entre ellos. En los casos en los que las probetas que tienen o no orificio, las diferencias observadas en cuanto a amplitud, son básicamente para las altas frecuencias (ver figs. 38 a 40) como ya se había identificado cuando se analizaron las funciones de transferencia (figs. 26-28).

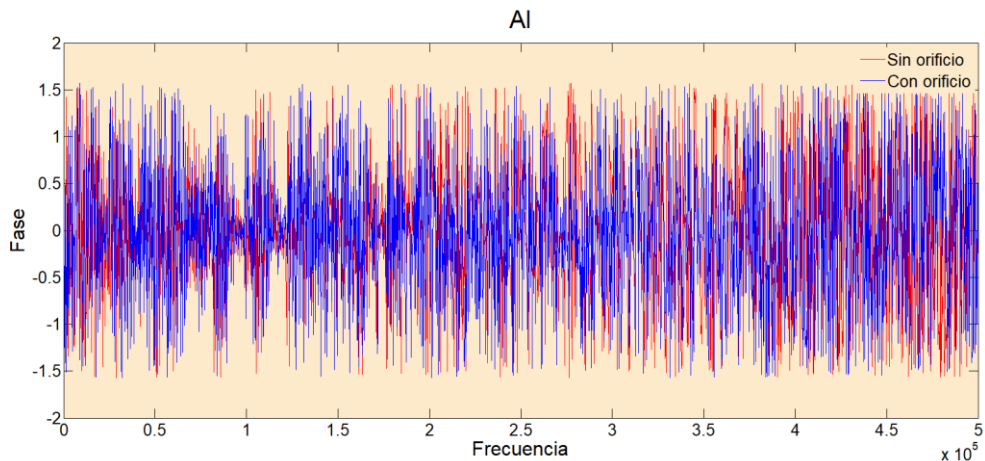


Figura 38 Variación de la fase para modelos fabricados con aluminio. La línea roja representa a la probeta sin orificio y la azul la que sí lo tiene.

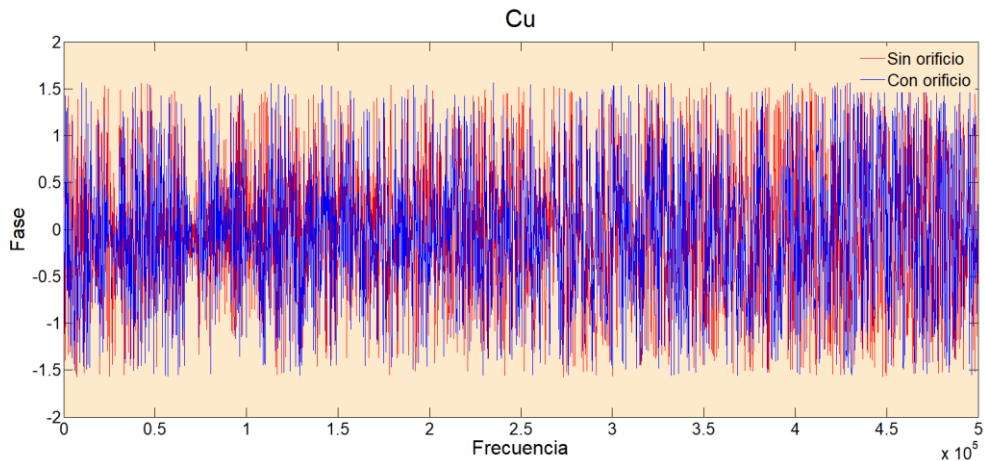


Figura 39 Variación de la fase para modelos fabricados con cobre. La línea roja representa a la probeta sin orificio y la azul la que sí lo tiene.

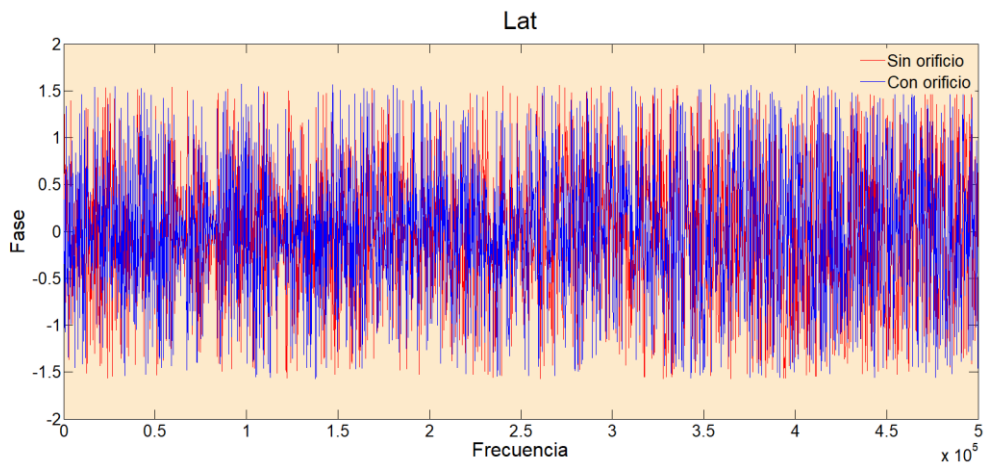


Figura 40 Variación de la fase para modelos fabricados con Latón. La línea roja representa a la probeta sin orificio y la azul la que sí lo tiene.

Cuando se comparan las fases para dos o más capas con materiales de distintas propiedades y debido a la interacción de las fronteras, es difícil de identificar en estas gráficas algún patrón de comportamiento (figs. 41-49). Lo que se puede concluir es que, para un solo modelo, dependiendo del material en donde incide la señal, se obtiene una huella determinada de variación y amplitud de fase (ver figs. 29 a 31).

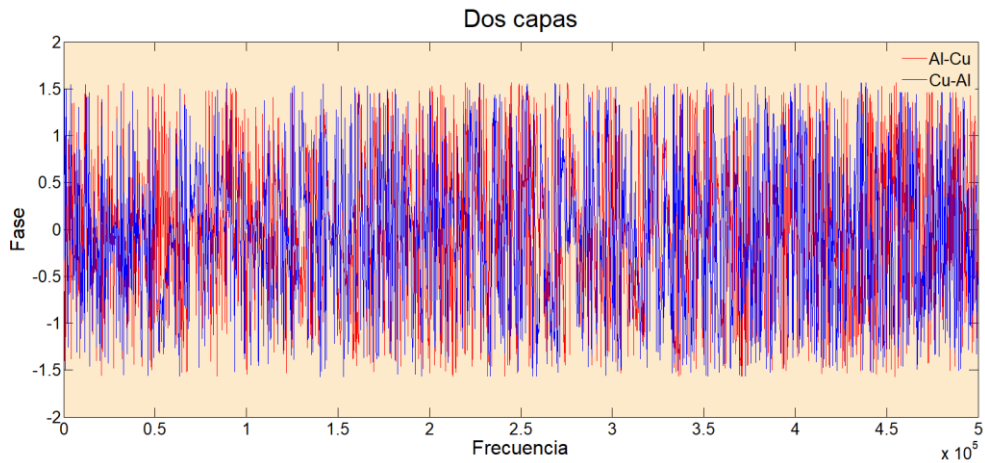


Figura 41 Variación de la fase para modelos con dos capas, una de aluminio y la otra de cobre. La línea roja representa los resultados cuando la onda incide en el cobre, y la azul cuando lo hace en el aluminio.

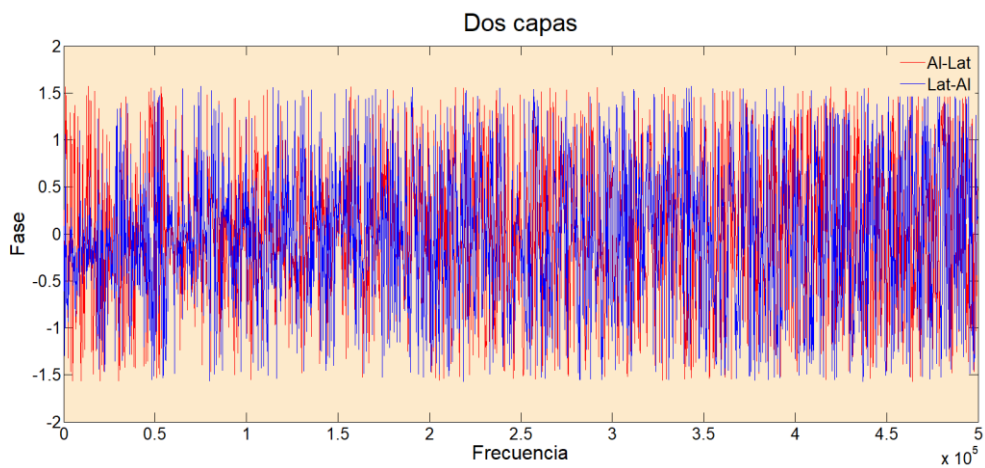


Figura 42 Variación de la fase para modelos con dos capas, una de aluminio y la otra de latón. La línea roja representa los resultados cuando la onda incide en el latón, y la azul cuando lo hace en el aluminio.

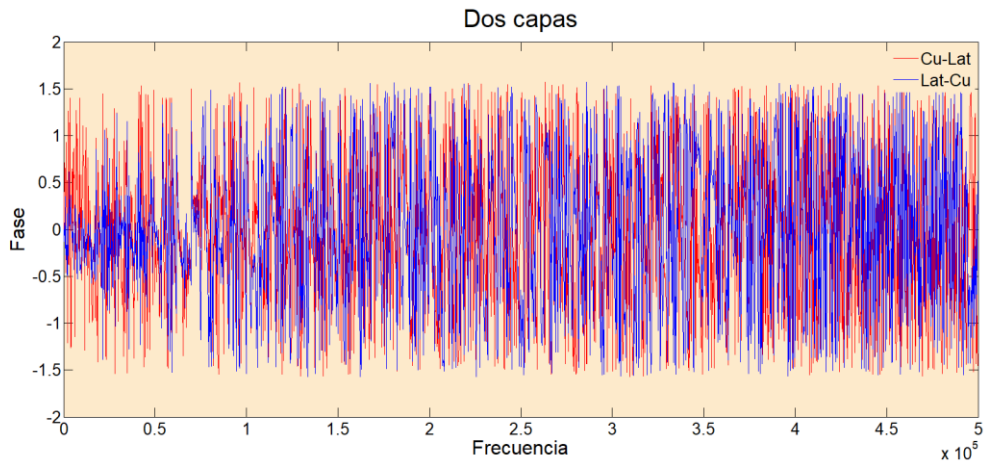


Figura 43 Variación de la fase para modelos con dos capas, una de cobre y la otra de latón. La línea roja representa los resultados cuando la onda incide en el latón, y la azul cuando lo hace en el cobre.

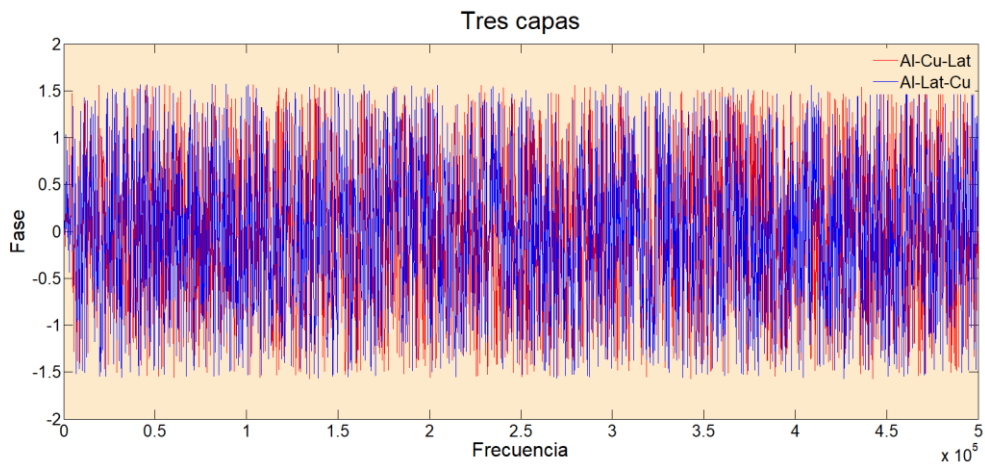


Figura 44 Variación de la fase para modelos con tres capas (aluminio, cobre y latón). La línea roja representa los resultados cuando la onda incide en el latón, atraviesa el cobre y posteriormente al aluminio, y la azul cuando lo hace por el cobre, atraviesa el latón y posteriormente al aluminio.

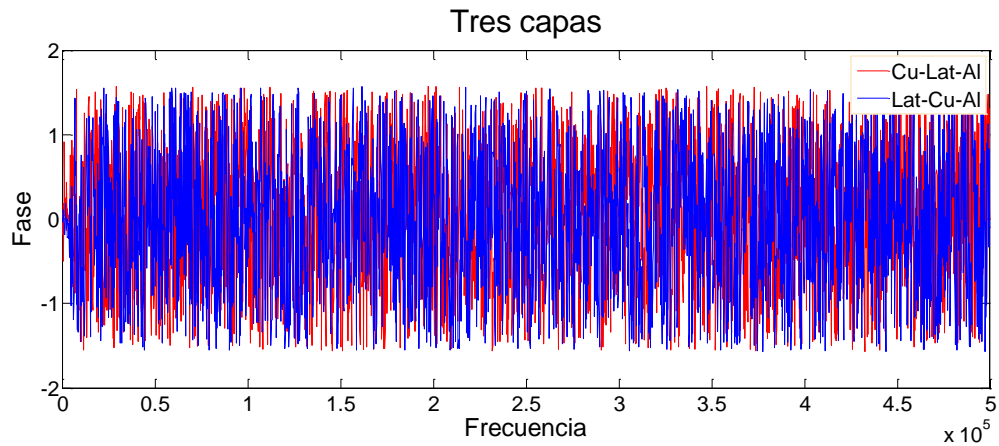


Figura 45 Variación de la fase para modelos con tres capas (aluminio, cobre y latón). La línea roja representa los resultados cuando la onda incide en el aluminio, atraviesa el latón y posteriormente al cobre, y la azul cuando lo hace por el aluminio, atraviesa el cobre y posteriormente al latón.

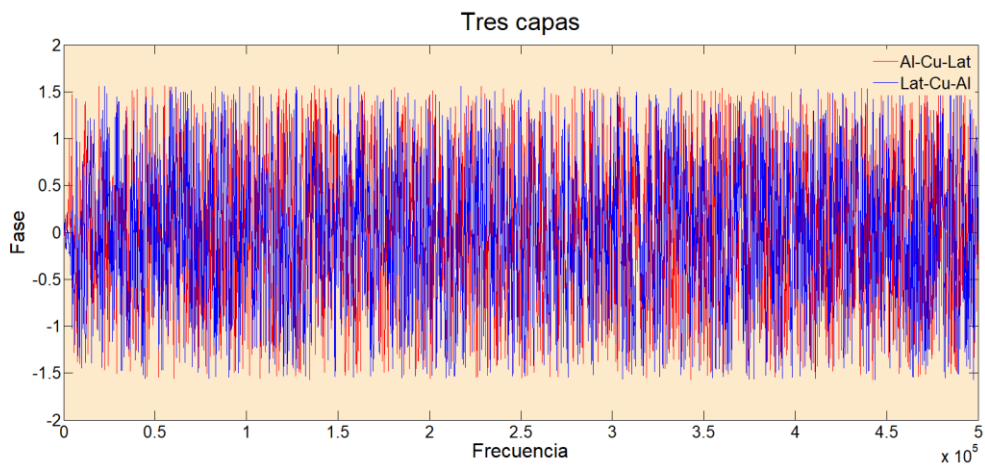


Figura 46 Variación de la fase para modelos con tres capas (aluminio, cobre y latón). La línea roja representa los resultados cuando la onda incide en el latón, atraviesa el cobre y posteriormente al aluminio, y la azul cuando lo hace por el aluminio, atraviesa el cobre y posteriormente al latón.

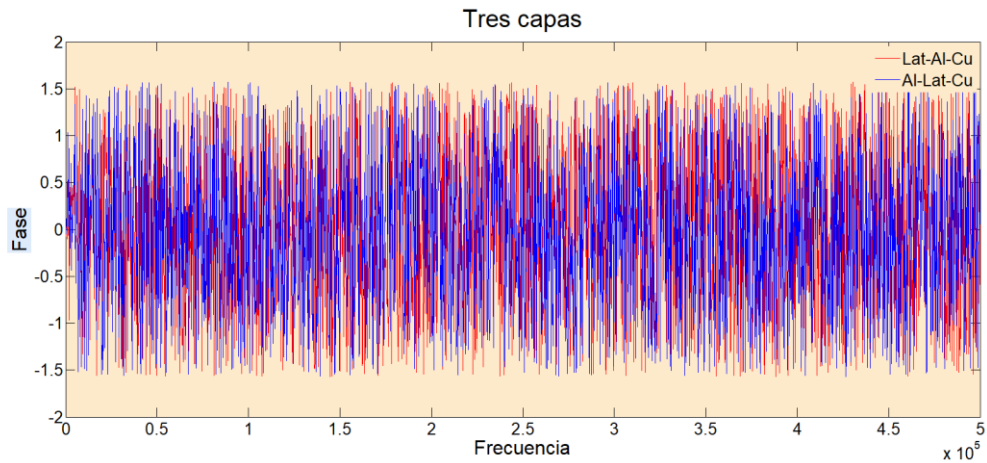


Figura 47 Variación de la fase para modelos con tres capas (aluminio, cobre y latón). La línea roja representa los resultados cuando la onda incide en el cobre, atraviesa el aluminio y posteriormente al latón, y la azul cuando lo hace por el cobre, atraviesa el latón y posteriormente al aluminio.

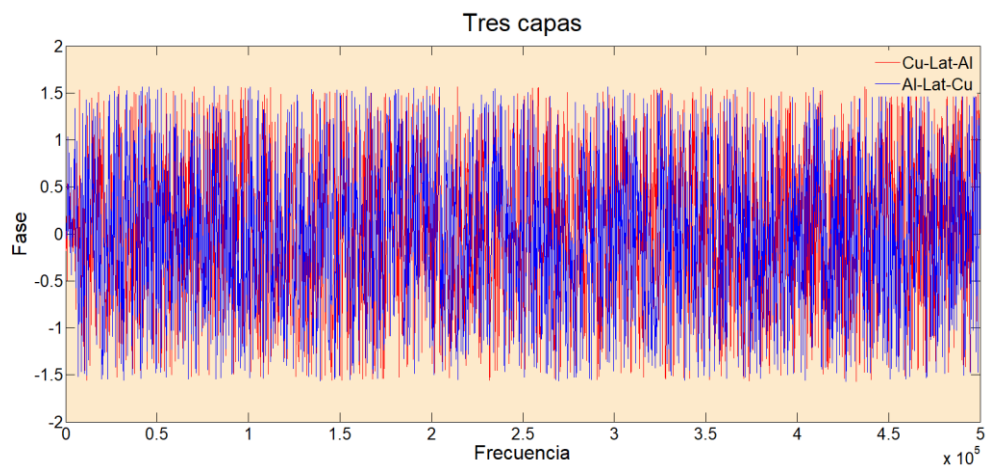


Figura 48 Variación de la fase para modelos con tres capas (aluminio, cobre y latón). La línea roja representa los resultados cuando la onda incide en el aluminio, atraviesa el latón y posteriormente al cobre, y la azul cuando lo hace por el cobre, atraviesa el latón y posteriormente al aluminio.



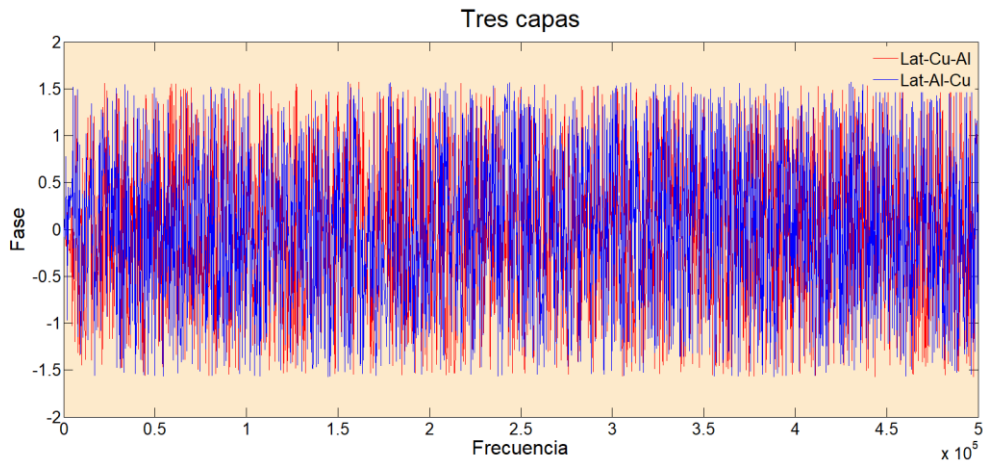


Figura 49 Variación de la fase para modelos con tres capas (aluminio, cobre y latón). La línea roja representa los resultados cuando la onda incide en el aluminio, atraviesa el cobre y posteriormente al latón, y la azul cuando lo hace por el cobre, atraviesa el aluminio y posteriormente al latón.

## 7.7 Coherencia

La coherencia permite describir la correlación que existe entre las cantidades físicas de una onda, varias ondas o entre paquetes de ondas. Se puede decir que dos fuentes de onda son perfectamente coherentes si tienen una misma frecuencia, forma de onda y diferencia de fase, esto es, tienen una fase relativa constante. Esta condición de fase relativamente constante es difícil encontrarla en la realidad, porque los materiales generalmente no son lineales y esta no linealidad puede alargar o acortar la longitud de las ondas, generando modificaciones en sus fases.

Existen dos tipos de coherencia, la espacial y la temporal. La espacial describe la correlación entre ondas en distintos puntos del espacio, ya sea lateral o longitudinal; y la temporal lo hace en diferentes momentos de tiempo. La coherencia espacial describe la habilidad de interferir en la onda de dos puntos ubicados en el espacio ( $x_1$  y  $x_2$ ) a lo largo de esa onda, cuando se promedia en relación con el tiempo.

La cantidad de coherencia, que indica el tamaño de la interferencia de los flecos (picos) relacionados con las ondas incidentes conforme la fase varía, puede ser medida estadísticamente mediante las funciones de correlación. El grado de coherencia representa a la correlación normalizada y es útil para cuantificar la coherencia entre dos campos de ondas. En las figs. 51 a 55 se proporcionan algunos ejemplos de coherencia espacial. En ellas, los puntos  $x_1$  y  $x_2$  están

separados una distancia  $\Delta x$ ,  $\lambda$  es la longitud de onda,  $L_c$  y  $A_c$  son la longitud y el área de la coherencia, respectivamente.

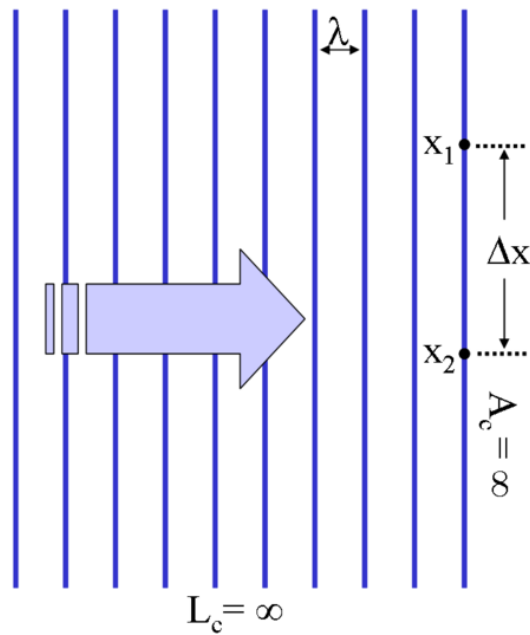


Figura51 Onda plana con una longitud de coherencia  $L_c$  infinita ([https://en.wikipedia.org/wiki/Coherence\(physics\)\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Coherence(physics))))

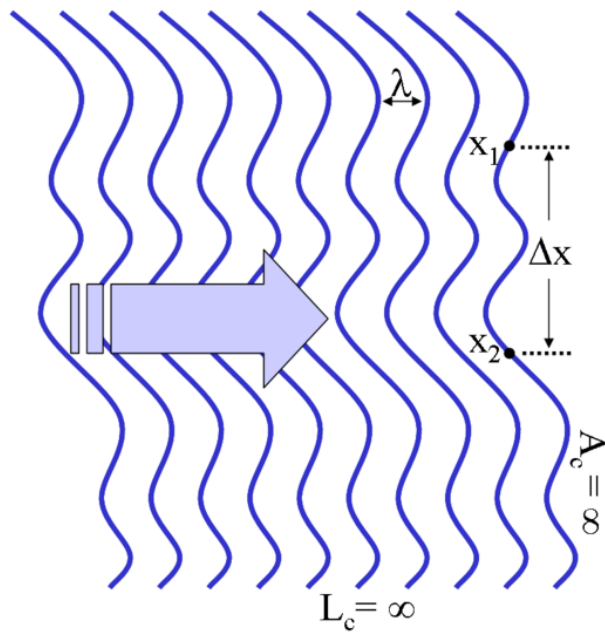


Figura 52 Onda con un perfil de frente de onda variable y con longitud de coherencia  $L_c$  infinita. ([https://en.wikipedia.org/wiki/Coherence\(physics\)\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Coherence(physics))))

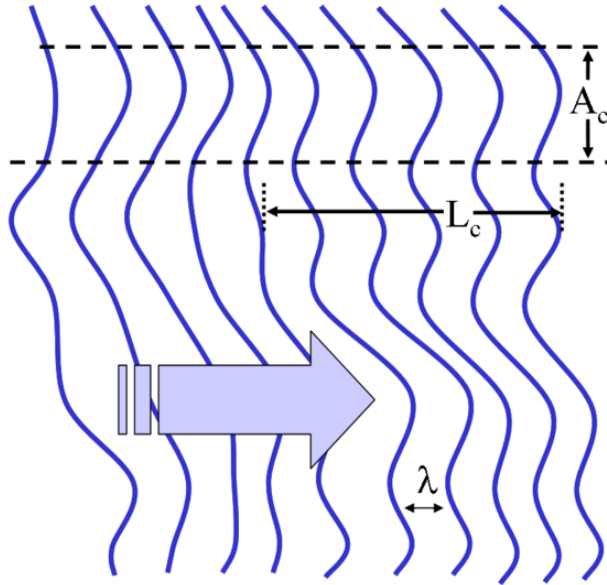


Figura 53 Frente de onda variable y longitud de coherencia  $L_c$  finita  
[https://en.wikipedia.org/wiki/Coherence\\_\(physics\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Coherence_(physics))

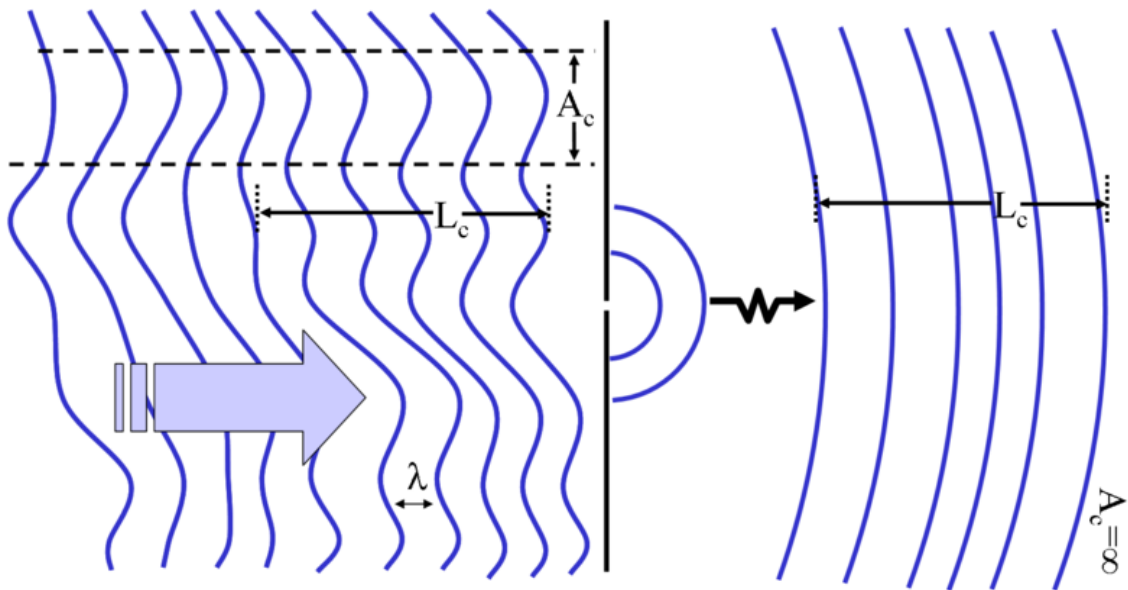


Figura 54 Una onda con área coherente finita incide sobre una pantalla que tiene un orificio. Lejos del orificio el frente de onda emerge de forma esférica con formas de onda relativamente planas. El área de coherencia  $A_c$  es ahora infinita y la longitud de la coherencia  $L_c$  no cambia ([https://en.wikipedia.org/wiki/Coherence\\_\(physics\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Coherence_(physics))).

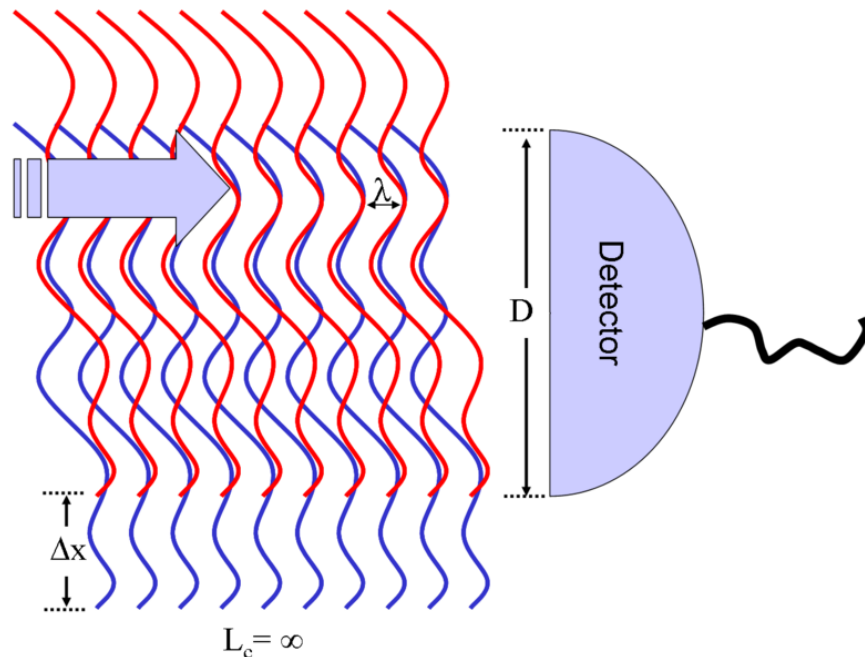


Figura 55 Una onda con área de coherencia  $A_c$  infinita (color azul) se combina con una onda que es copia de esa onda pero que espacialmente se traslada (color rojo) de tal forma que algunas secciones de la onda interfieren entre si constructivamente y otras destructivamente. Promediando estas secciones, un detector con longitud  $D$  medirá una interferencia reducida.  
 ([https://en.wikipedia.org/wiki/Coherence\(physics\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Coherence(physics))).

La coherencia temporal mide el promedio de la correlación entre el valor de una onda consigo misma, pero a un tiempo diferente  $\tau$ . Esta coherencia indica que tan monocromática es la fuente, esto es, caracteriza que tan bien puede la onda interferir consigo misma en distintos estados de tiempo. La tardanza en la que deambula la fase o amplitud es definida como el tiempo de coherencia  $\tau_c$ . Para un retraso de  $\tau=0$  el grado de coherencia es perfecto, pero decae significativamente cuando  $\tau=\tau_c$ . La longitud de la coherencia  $L_c$  se define como la distancia en que la onda viaja en el tiempo. Algunos ejemplos de coherencia temporal se proporcionan en las figs. 56 a 58.

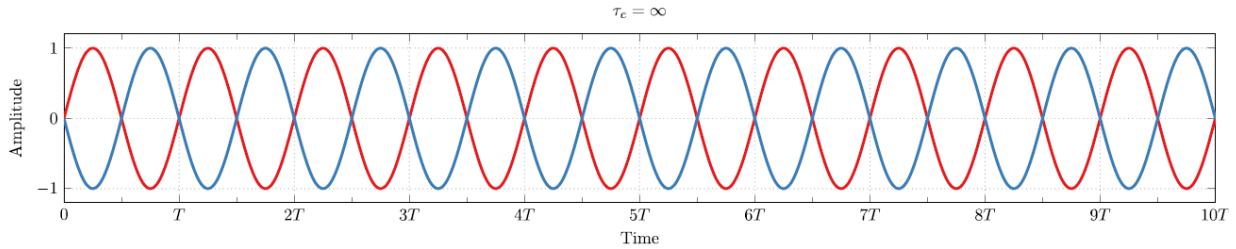


Figura 56 Amplitud de una onda monocromática en función del tiempo (roja) y la copia de la misma onda un tiempo  $\tau$  después (azul). El tiempo de coherencia  $\tau_c$  es infinito debido a que existe una correlación perfecta de la onda consigo misma sin importar el retraso ([https://en.wikipedia.org/wiki/Coherence \(physics\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Coherence_(physics)))).

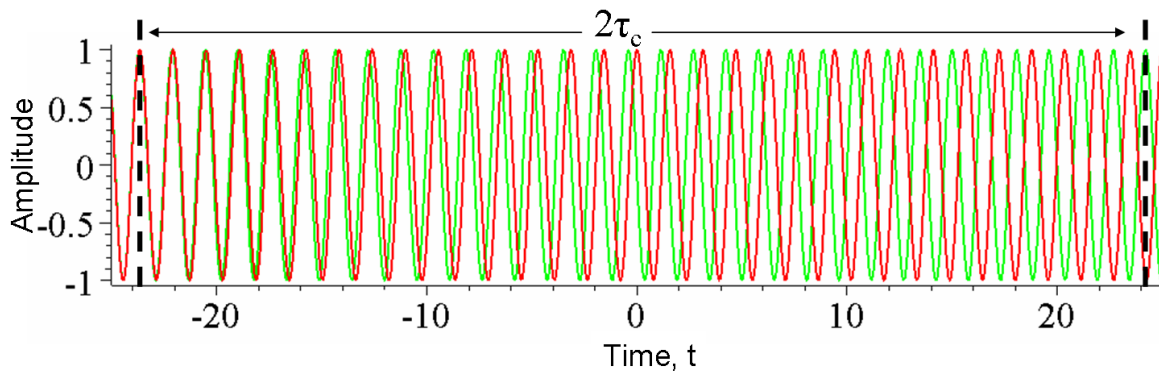


Figura 57 Amplitud de una onda con longitud de onda que se alarga significativamente con el tiempo  $\tau_c$ , y una copia de la misma onda que se retrasa un tiempo  $2\tau_c$  (verde). En un tiempo particular  $T$  la onda se interfiere perfectamente con su copia, pero debido a que la mitad del tiempo las ondas están en fase y la otra mitad no, cuando se promedia con respecto a  $t$ , cualquier interferencia desaparece si se considera este retraso ( $2\tau_c$ ) ([https://en.wikipedia.org/wiki/Coherence \(physics\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Coherence_(physics)))).

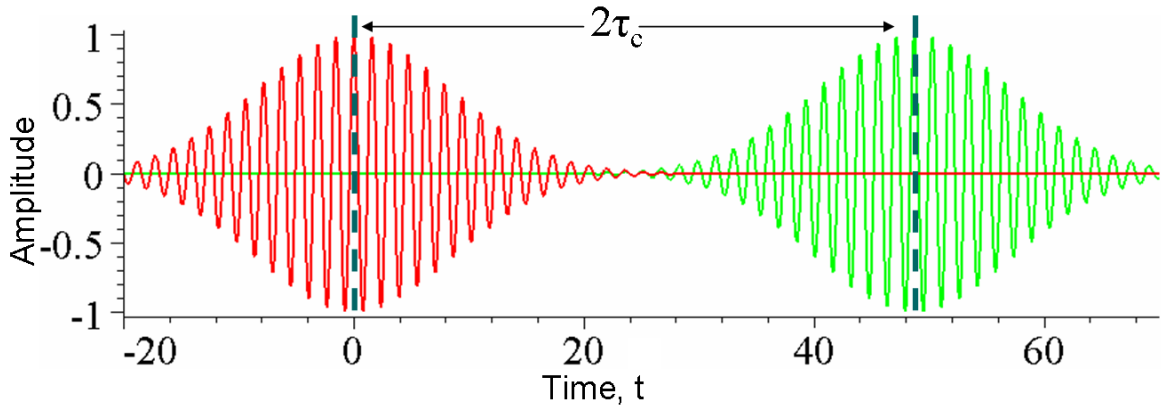


Figura 58 Amplitud de un paquete de ondas(roja) y una copia de la misma onda desplazada en el tiempo  $2\tau_c$  (verde). En cualquier tiempo en particular, las ondas verdes y las rojas no están correlacionadas porque, mientras una oscila, la otra permanece constante por lo que no habrá coherencia ([https://en.wikipedia.org/wiki/Coherence \(physics\)\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Coherence_(physics)))).

Las ondas con diferentes frecuencias pueden interferir para formar un pulso si tienen una relación de fase relativamente constante (fig. 59). Contrariamente, si las ondas con diferentes frecuencias no son coherentes, entonces, cuando se combinan crean una onda que es continua en el tiempo (fig. 60). La duración temporal del pulso  $\Delta t$  está limitada por la banda espectral  $\Delta f$  de acuerdo con  $\Delta f \Delta t \geq 1$ .

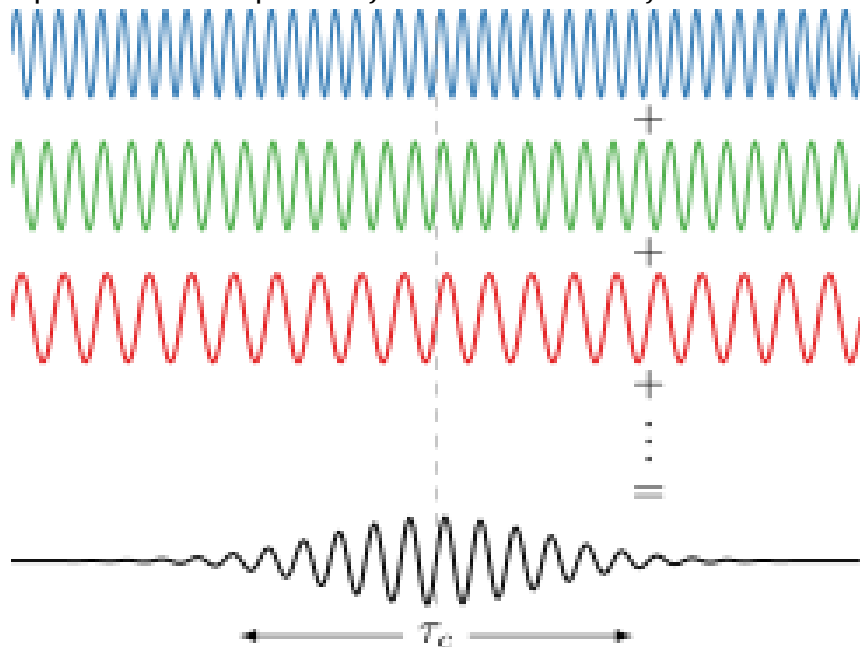


Figura 59 Ondas con diferentes frecuencias que interfieren para formar un pulso si son coherentes ([https://en.wikipedia.org/wiki/Coherence \(physics\)\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Coherence_(physics)))).

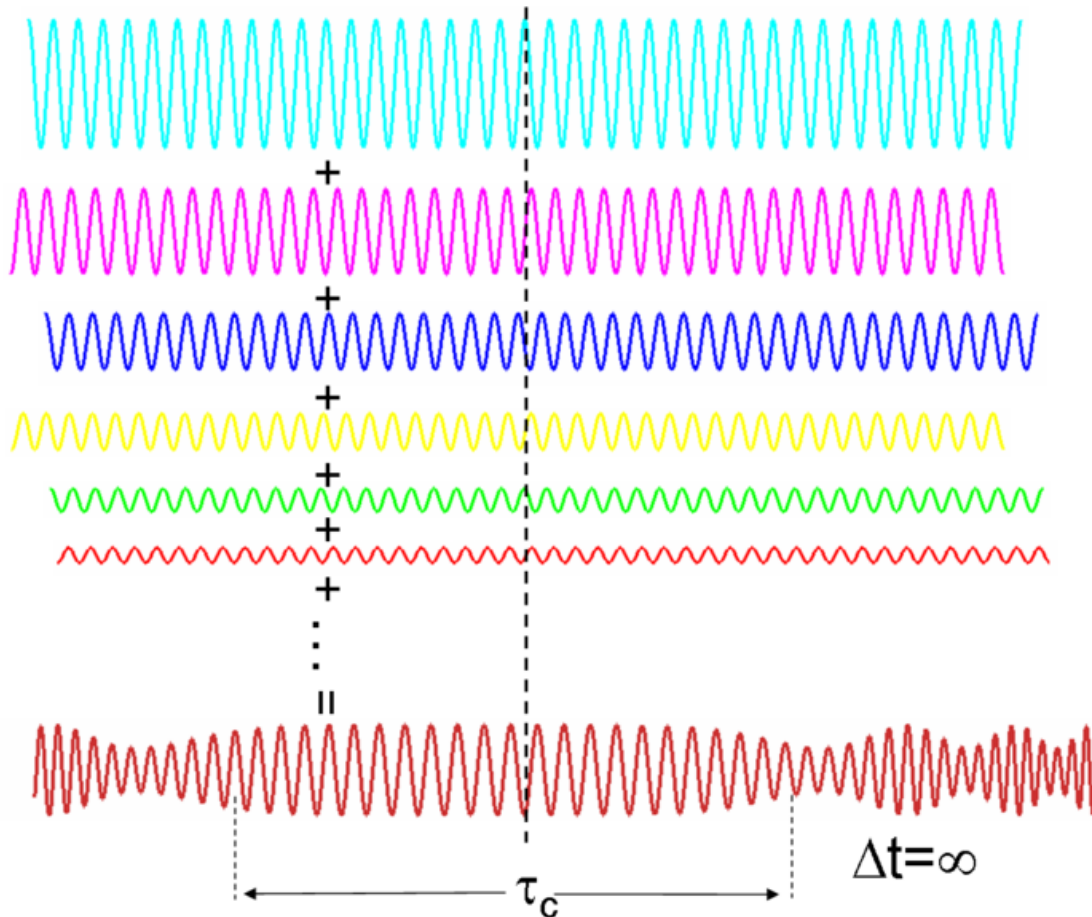


Figura 60 Ondas espectralmente incoherentes que forman una onda continua con una variación de fase y amplitud aleatoria ([https://en.wikipedia.org/wiki/Coherence \(physics\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Coherence_(physics)))..

La función de la coherencia entre dos señales  $x(t)$  y  $y(t)$  esta dada por:

$$\gamma_{xy}^2(f) = \frac{[S_{xy}(f)]^2}{S_{xx}(f)S_{yy}(f)}$$

donde  $S_{xy}(f)$  es la densidad espectral cruzada de la señal y  $S_{xx}(f)$  y  $S_{yy}(f)$  son las funciones de densidad espectral de potencia de  $x(t)$  y  $y(t)$ , respectivamente. La densidad espectral cruzada y la densidad espectral de potencia quedan definidas por las transformadas de Fourier de la correlación cruzada y de la autocorrelación. Esto es, si dos señales son funciones del tiempo, la correlación cruzada es la medida de similitud de las dos señales como una función del retraso del tiempo relativas la una a la otra, y la auto-correlación es la medida de la

similitud de cada señal consigo misma en diferentes instantes de tiempo. En este caso la coherencia es función de la frecuencia. La coherencia varía en el intervalo  $0 \leq \gamma_{xy}^2(f) \leq 1$ . Si  $\gamma_{xy}^2(f) = 1$  significa que las señales están perfectamente correlacionadas y si  $\gamma_{xy}^2(f) = 0$  significa que no están correlacionadas. Si en un sistema lineal se mide la señal incidente  $x(t)$  y la señal de salida  $y(t)$ , la función de coherencia será unitaria. Si el sistema no es lineal, la coherencia fluctuará entre 0 y 1.

En las figs. 61 a 63 se grafican las coherencias de las señales que atraviesan las probetas de aluminio, cobre y latón, cuando estas no tienen alteraciones y cuando a las mismas probetas se les genera una anomalía representada por un orificio que las atraviesa. En todas ellas se observan los estragos en la señal, causados por las variaciones de su fase debidas a la introducción de esa pequeña anomalía.

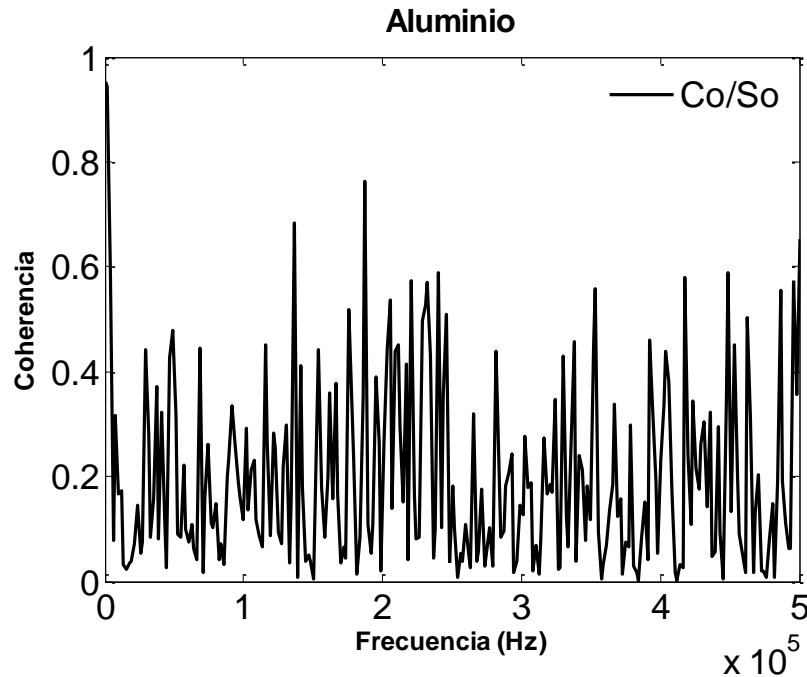


Figura 61 Coherencia en las señales que atraviesan el modelo fabricado con aluminio. Se mide para probetas sin orificio y con orificio.



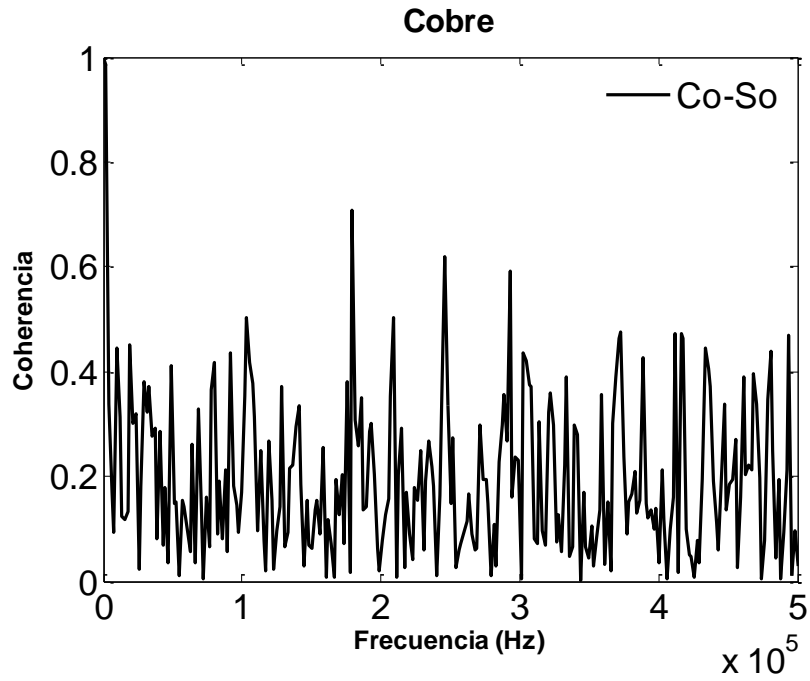


Figura 62 Coherencia en las señales que atraviesan el modelo fabricado con cobre. Se mide para probetas sin orificio y con orificio.

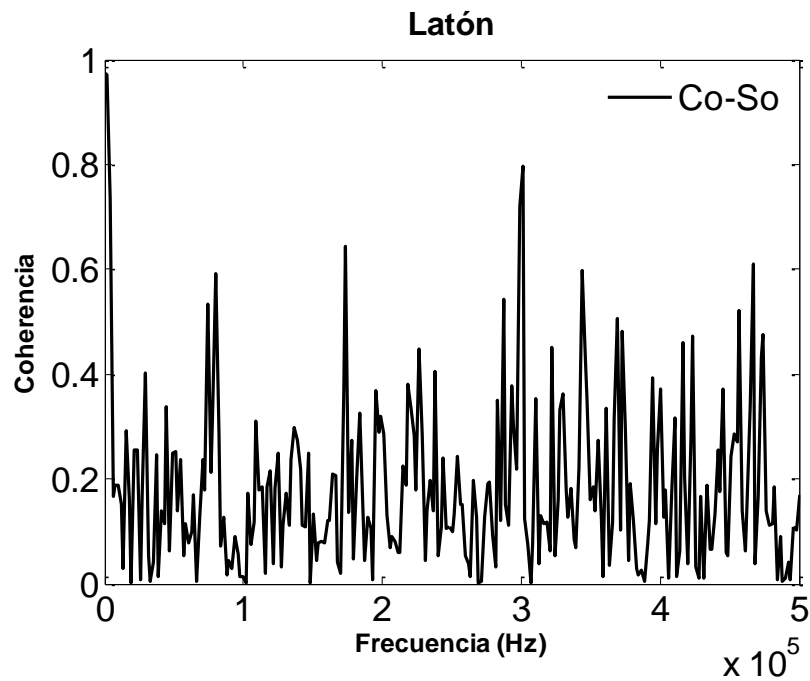


Figura 63 Coherencia en las señales que atraviesan el modelo fabricado con Latón. Se mide para probetas sin orificio y con orificio.

El efecto que en las ondas se genera cuando estas atraviesan probetas construidas con dos y tres capas se presenta en las figs. 64 a 72. En las figs. 64 a 66 se grafica la coherencia entre las señales que se propagan por dos capas, considerando que una de las señales atraviesa la capa uno y después transita por la segunda capa, y la segunda señal se transmite de la capa dos a la uno. El simple hecho de invertir el orden de transmisión hace que las señales sean poco coherentes.

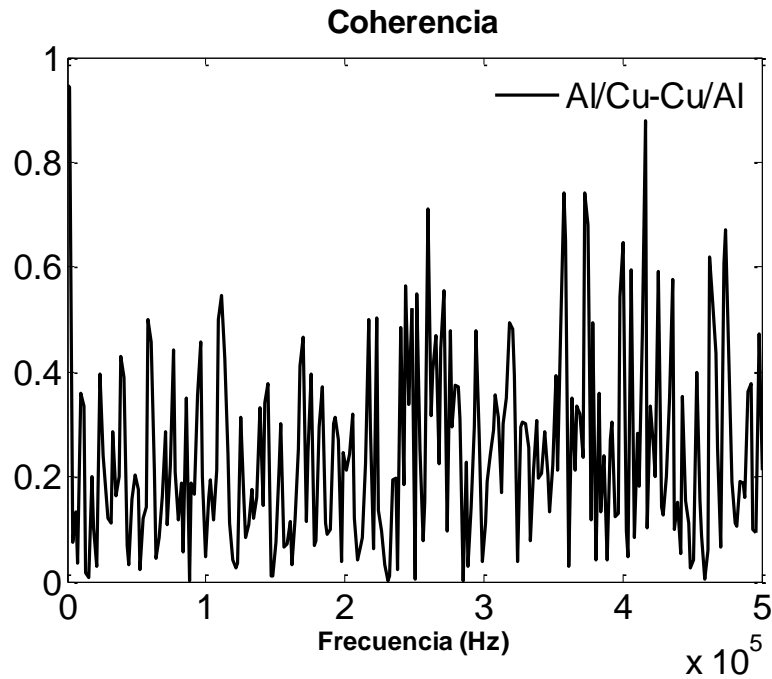


Figura 64 Coherencia en las señales que atraviesan dos capas. Una de ellas se propaga por el aluminio y después por el cobre, y a otra por el cobre y después el aluminio.

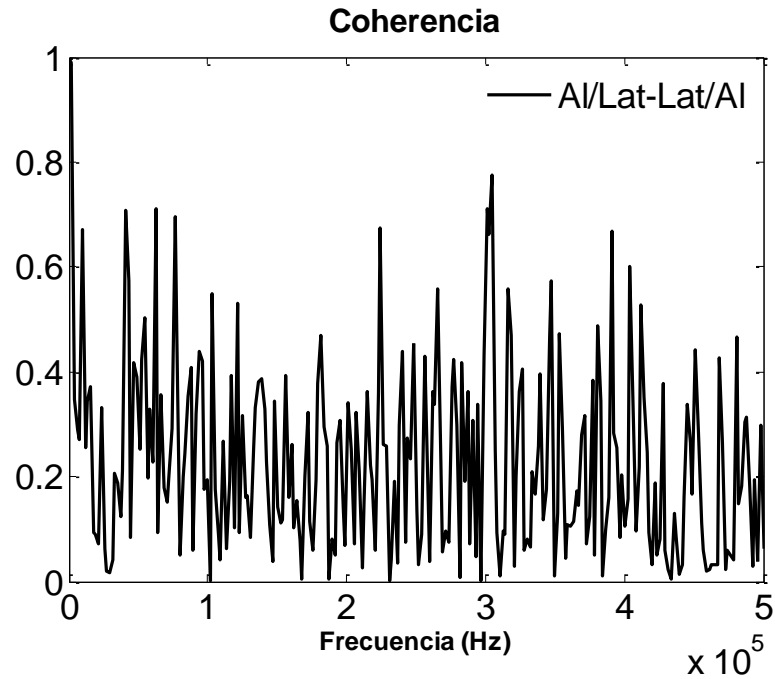


Figura 65 Coherencia en las señales que atraviesan dos capas. Una de ellas se propaga por el aluminio y después por el latón, y a otra por el latón y después el aluminio.

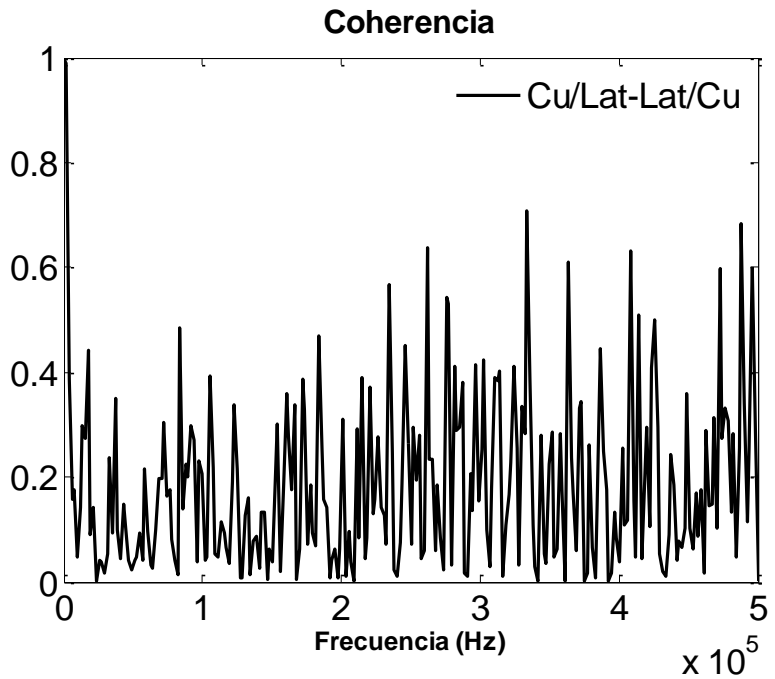


Figura 66 Coherencia en las señales que atraviesan dos capas. Una de ellas se propaga por el cobre y después por el latón, y a otra por el latón y después el cobre

En las figuras 67 a 72 se grafican las coherencias para probetas construidas con tres materiales diferentes. Las señales que se comparan son las obtenidas al variar el orden de cómo se presentan los estratos.

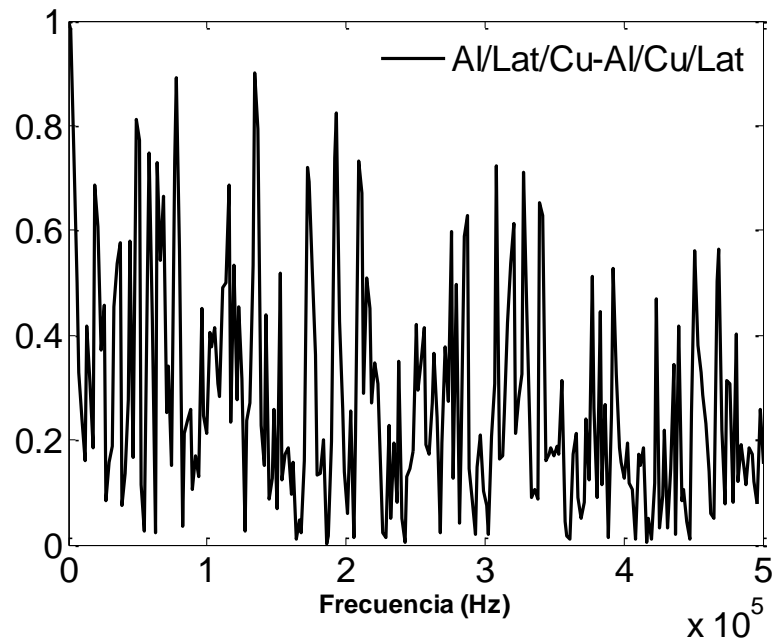


Figura 67 Coherencia en las señales que atraviezan tres capas. Una de ellas se propaga por el aluminio, latón y cobre; y la otra por el aluminio, cobre y latón.

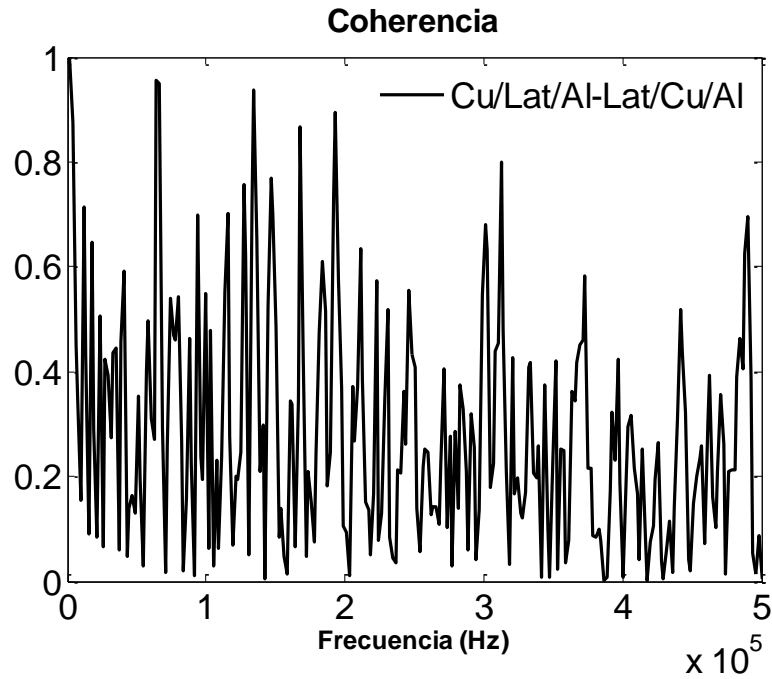


Figura 68 Coherencia en las señales que atraviesan tres capas. Una de ellas se propaga por el cobre, latón y aluminio; y la otra por el latón, cobre y aluminio.

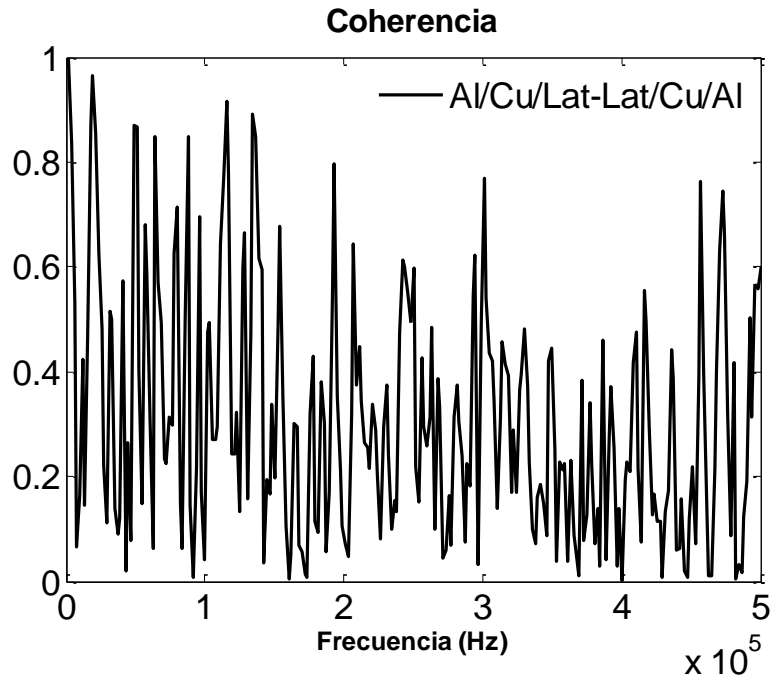


Figura 69 Coherencia en las señales que atraviesan tres capas. Una de ellas se propaga por el aluminio, cobre y latón; y la otra por el latón, cobre y aluminio.

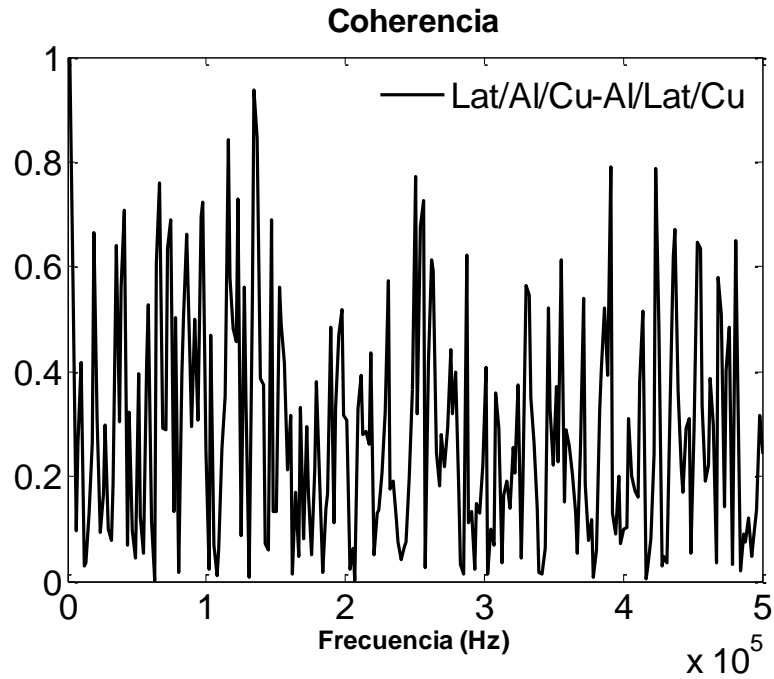


Figura 70 Coherencia en las señales que atraviesan tres capas. Una de ellas se propaga por el latón, aluminio y cobre; y la otra por el aluminio, latón y cobre.

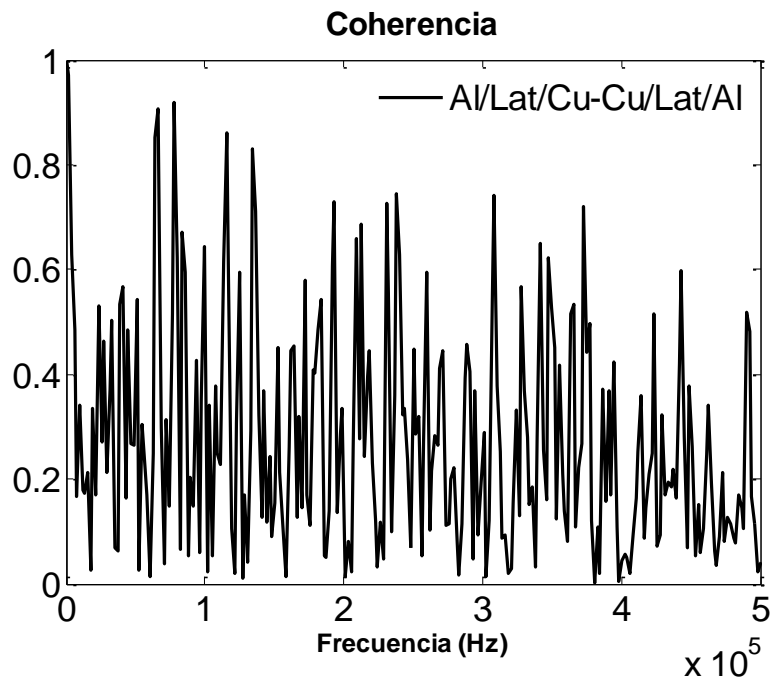


Figura 71 Coherencia en las señales que atraviesan tres capas. Una de ellas se propaga por el aluminio, latón y cobre; y la otra por el cobre, latón y aluminio.

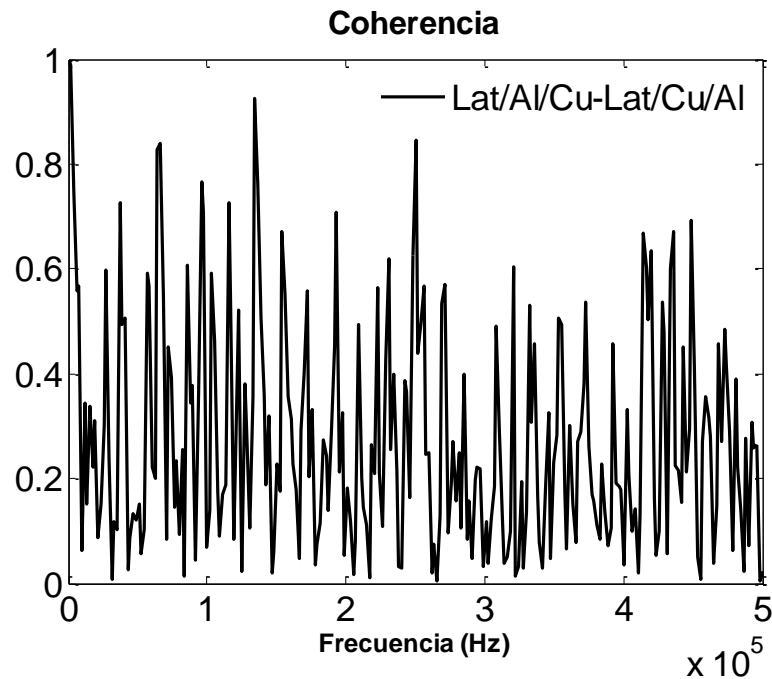


Figura 72 Coherencia en las señales que atraviesan tres capas. Una de ellas se propaga por el latón, aluminio y cobre; y la otra por el latón, cobre y aluminio.

En las comparaciones realizadas en este capítulo de las funciones de transferencia, fase y coherencia para las probetas ensayadas, se observan diferencias importantes en las señales cuando se generan anomalías en los medios (representadas por el orificio practicado en la probeta) en relación con las que no tiene anomalías, o cuando se tienen diferentes materiales en una sola probeta y se varía el orden de los mismos al propagar la señal. Es evidente que el fenómeno es complejo y debido a las reflexiones, difracciones y rebotes de la señal que se propaga al atravesar los distintos medios, alterando las fases de las ondas que provienen de la fuente y que, al final, al combinarse con las provenientes de las fronteras de la probeta y de sus anomalías, genera interferencias constructivas y destructivas. También está implícita la no linealidad de los materiales, que no se considera en estado estacionario, aunque se tiene conciencia de que están presentes. Pese a ello, parte de los fenómenos se explican considerando únicamente la heterogeneidad de las probetas. Las explicaciones se proporcionan en el cuerpo de este capítulo.

## 8. Conclusiones

Los pavimentos son estructuras de gran importancia para la economía del país por lo que se necesita un alto control de calidad en su construcción para que su funcionamiento sea óptimo. Los métodos no invasivos permiten conocer las propiedades de estas estructuras sin alterar sus propiedades y abarcando grandes zonas en menor tiempo que con las técnicas invasivas. Estas técnicas también pueden ser aplicadas en la prospección preventiva para dar mantenimiento en las zonas de la estructura que así lo requieran.

Para la aplicación de técnicas geofísicas es necesario el conocimiento de la física involucrada en la propagación de ondas, la representación de las ondas en el dominio de la frecuencia, el análisis de señales y de la instrumentación utilizada para grabar, generar y procesar información. En el caso de los pavimentos la velocidad no aumenta con la profundidad, sino que la capa superficial tiene una velocidad mayor que las capas inferiores. Esto hace que las técnicas apropiadas para el análisis de pavimentos no sean exactamente las que utilizan el método de Thomson-Haskell ni las que se basan en las sondas de Lamb (ondas en placas delgadas) para la interpretación de las señales. Sin embargo, ambos métodos aportan una explicación al fenómeno de propagación de ondas. En el caso particular de la propagación de las ondas en placas (ondas de Lamb), parecen prometedores los resultados que han obtenido algunos investigadores al aplicarlos a pavimentos, esto debido a que la capa más competente se encuentra en la superficie y es la de menor espesor; sin embargo, el estudio de las ondas en placas no contempla que estas estén apoyadas (ambas fronteras de la placa deben ser libres) que es una hipótesis que no cumple la capa superficial del pavimento. Este método no fue abordado en esta tesis, pero se reconoce que requiere ser estudiado.

La construcción de modelos físicos es de gran ayuda cuando se requiere conocer la dependencia de la respuesta de un sistema a cambios en su geometría o propiedades mecánicas. El trabajo con modelos se realiza con el objetivo de representar una situación real en un experimento. Ya que la construcción de modelos a escala natural puede ser costoso, en ocasiones se recurre a la construcción de modelos pequeños para realizar pruebas que representen el comportamiento de las estructuras. El análisis dimensional es una herramienta que permite obtener las leyes de semejanza entre el modelo y el prototipo con el que se pretenda representar el proceso físico. Para que un prototipo represente adecuadamente un proceso físico este deberá poseer semejanza geométrica, cinemática y/o dinámica. Los modelos estáticos son diferentes a los dinámicos y



habrá que prestar atención a las frecuencias para obtener similitud entre el modelo y el prototipo.

Relacionar la respuesta de un pavimento con la de un modelo a escala diferente es un objetivo ambicioso que, sin embargo, proporciona resultados valiosos útiles en la interpretación del fenómeno real.

Un eje principal del estudio de señales es el Análisis de Fourier. El análisis de señales como una superposición de armónicos permite la representación de las señales en el espectro de la frecuencia, lo que simplifica muchos de los problemas prácticos. “Si lo que quieres es encontrar los secretos del universo, piensa en términos de energía, frecuencia y vibración” (N. Tesla).

Los diferentes modelos estudiados (analíticos y experimentales) han permitido comprender el fenómeno de propagación de ondas y con ello modelar criterios para el diseño o análisis de estructuras, entre ellas, los pavimentos. Al saber que las ondas que se propagan por un medio depende las características de la señal y de las propiedades de ese medio, de su análisis se puede identificar cualquier anomalía, característica o deterioro que ese medio tiene.

El fenómeno de propagación de ondas está presente en todos los aspectos de la vida y su estudio debería ser practicado a todos los niveles. Como se sugiere: “Cualquier ciencia verdadera centra su estudio en un campo vibratorio” (Daniel Schmidt).

## 9. Referencias

Anooshehpoor, A., J.N. Brune, and R.H. Loveberg (1988). Foam rubber modeling of soil-structure interaction; Proceedings of the Earthquake Engineering and Soil Dynamics Conference 2. Sponsored by the Amer. Soc. of Engineers Geotechnical Engineering Division, June 27-30, 1988, p. 218-232.

Anooshehpoor, A., J.N. Brune (1989). Foam rubber modeling of topographic and dam interaction effects at Pacoima Dam, Bulletin of the Seismological Society of America, vol. 79, pp 1347-1360.

Anooshehpoor, A., and Brune, J.N., (1989). Foam Rubber Modeling of the Lotung Large-Scale Seismic Experiment, AGU Spring 1989 Meeting, EOS, Transactions, Vol. 70, No. 15, p.396, 4/11/89.

Anooshehpoor, A., and Brune, J.N. (1989). Foam Rubber Model Studies of the Large-Scale Soil-Structure Interaction Experiment at Lotung, Taiwan, 84th Annual Meeting, Seismological Society of America.

Anooshehpoor, A., and J.N. Brune (1994). Frictional Heat Generation and Seismic Radiation in a Foam Rubber Model of Earthquakes, accepted for publication in the special issue of PAGEOPH on Rock Friction, Faulting and Earthquake Mechanics, vol. 142, no.3/4, 735-747.

Anooshehpoor, A., and J.N. Brune, (1994). Dynamics and Frictional Heat Generation in a Foam Rubber Model of Earthquake Stick-Slip, USGS Red Book NEHRP Open-File Report 94-228 , Proceedings of Workshop LXIII The Mechanical Involvement of Fluids in Faulting, June 6-10, 1993, in Fish Camp, CA, 443-459.

Anooshehpoor, A., and J.N. Brune, (1994) Dynamics of Fault Creep and Rupture Nucleation in Foam Rubber Earthquake Models, EOS, Transactions, Fall Meeting, Vol. 75, No. 44, p. 439.

Anooshehpoor, A., and J.N. Brune, (2004). Study of Rupture Directivity in a Foam Rubber Physical Model, PEER Lifeline Task 1D01 Report, Pacific Earthquake Engineering Research Center College of Engineering University of California, Berkeley July 2004

Brune, J.N. (1984): Preliminary results on topographic seismic amplification effect on a foam rubber model of the topography near Pacoima Dam; in Proceedings 8th

World Conf. on Earthquake Eng., July 21-28, San Francisco, California, V. II, 663-670.

Brune, J.N., R. Annoshehpour, R. Loveberg, and L.Wang (1985): Topographic seismic amplifications and dam-foundation interaction effect on a foam rubber model near Pacoima Dam; in R. Scholl and J.E. King, eds., Proceedings: Strong Ground Motion Simulation and Earthquake Engineering, Earthquake Eng. Res. Inst. and Electric Power Res. Institute, Palo Alto, California, 26-1 to 26-8.

Brune, J.N., Johnson, P.A. and Slater, C. (1989): Constitutive Relations for Foam Rubber Stick-Slip, 84th Annual Meeting, Seismological Society of America

Brune, J.N. and A. Anoshehpour (1991). Foam rubber modeling of the El Centro terminal substation building, EERI: Earthquake Spectra, Vol. 7 pp 45-79.

Brune, J.N. and A. Anoshehpour (1991). Foam rubber modeling of the Lotung large-scale seismic experiment, Earthquake Spectra, Vol. 7 pp 165-178.

Brune, J.N., S. Brown and P. Johnson, (1991) Rupture Mechanism and Interface Separation in Foam Rubber Models of Earthquakes: a Possible Solution to the Heat Flow Paradox and the Paradox of Large Overthrusts, AGU Fall 1991 Meeting, EOS, Transactions, Vol. 72, No. 44, p. 326, 10/29/91.

Brune, J.N., S. Brown and P. Johnson, (1993). Rupture mechanism and interface separation in foam rubber models of earthquakes: a possible solution to the heat flow paradox and the paradox of large overthrusts. Proceedings of the International Workshop: "New Horizons in Strong Motion: Seismic Studies and Engineering Practice," Santiago, June 4-7, 1991, Tectonophysics, 218, 59-67.

Fletcher, J.B., L.C. Haar, F.L. Vernon, J.N. Brune, T.C. Hanks, and J. Berger (1985): The effects of attenuation on the scaling of source parameters for earthquakes at Anza, California; in Earthquake Source Mechanics, Geophys. Monog. 37, (M. Ewing V. 6), Amer. Geophys. Union, Washington, D.C. 331-338.

Haskell, N. A. (1953). The dispersion of surface waves on multilayered media, Bull. Seismol. Soc. Am. 43, 17-34.

Hayashi K, (2003), "Data Acquisition and Analysis of Active and Passive Surface Wave Methods, (Active and Passive Surface Waves)", SAGEEP 2003 Short Course, OYO Corporation.

Lin, Shibin (2014). Advancements in active surface wave methods: modeling, testing, and inversion. Iowa State University. Ames, Iowa.

Valdes Julio R., Gallay Johan C., (2012) Compactación localizada en un medio granular sometido a compresión unidimensional 166 Rev. Int. de Desastres Naturales, Accidentes e Infraestructura Civil. Vol. 12(1)

Richart, F.E. Jr. (1970) Department of Civil Engineering. The University of Michigan, Ann Arbor, Michigan. Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.

Russel D, "Acoustics and vibrations animations", <https://www.acs.psu.edu/drussell/demos.html>

Rydén, N. (2004). Surface Wave Testing of Pavements Nils Ryden, Department of Engineering Geology, Lund Institute of Technology, Lund University, BOX 118, 22100 Lund.

Sonin, Ain A. (2001). The Physical Basis of Dimensional Analysis. Department of Mechanical Engineering, MIT. Cambridge, MA 02139.

Thomson, W. T. (1950). Transmission of elastic waves through a stratified solid medium, J. Appl. Phys. 21, 89–93.

Wikipedia The Free Enciclopedia, [https://en.wikipedia.org/wiki/Coherence\\_\(physics\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Coherence_(physics))