

PROBLEMA DE LA CURVA BRAQUISTÓCRONA*

Oscar Morales López[†]

Ricardo Yáñez-Valdez[‡]

Facultad de Ingeniería, DIMEI-UNAM.

ABSTRACT

En el siglo XVII Johann Bernoulli presenta el problema de la braquistócrona, como el cálculo de la curva que une dos puntos dados de diferente elevación y que se recorre en el menor tiempo posible desde la posición más alta. Existen diferentes aproximaciones para la solución, en la que se incluye el método de conservación de energía. Para comprobar la eficacia de la curva braquistócrona se comparó el tiempo de caída de dicha curva, la de una recta con pendiente y la de una hipérbola.

Palabras clave: braquistócrona, cicloide, hipérbola equilateral.

I. INTRODUCCIÓN

El matemático Johan Bernoulli (1667-1748) presenta el problema de la braquistócrona como el cálculo de la curva que une dos puntos dados de diferente elevación y que se recorre en el menor tiempo posible desde la posición más alta (Goldstine, 1980). Este problema se llama así por las palabras griegas braquistos, que significa "más corto" y cronos que significa "tiempo" (Taylor, 2005). Bernoulli y Leibniz presentaron el problema a Newton quien, se dice, lo resolvió en una noche (Marrero, 2022). La solución de Galileo fue unir a los puntos con un segmento de circunferencia, aunque era una solución cercana, no era la mejor. Bernoulli comenzó su búsqueda por la curva usando principios de óptica, en específico usando la ley de Snell (Figura 1a). Esta ley dice que existe una relación entre el seno del ángulo de refracción con respecto a la vertical y el cuadrado del grosor del material por el que pasa la luz (Figura 1b) y siempre dará un valor constante.

*Este es un resumen de la experiencia adquirida por estudiantes de la Facultad de Ingeniería de la UNAM al desarrollar el tema "cálculo variacional" en la materia de "Temas selectos de mecánica aplicada: Mecánica clásica", impartida en el semestre 2019-1 en el posgrado de Ingeniería Mecánica de la UNAM. En abril de 2024 se actualizó el documento con el propósito de ofrecer una mayor claridad en el desarrollo de las ecuaciones, así como en las referencias consultadas. Agradecemos profundamente al Prof. Carlos López Bueno por sus observaciones que condujeron a la mejora del documento.

[†]Estudiante de posgrado en Ingeniería Mecánica FI-UNAM. (*ing.oscar.m194@gmail.com*)

[‡]Profesor del posgrado en Ingeniería Mecánica de la FI-UNAM (*ryv77@unam.mx*).

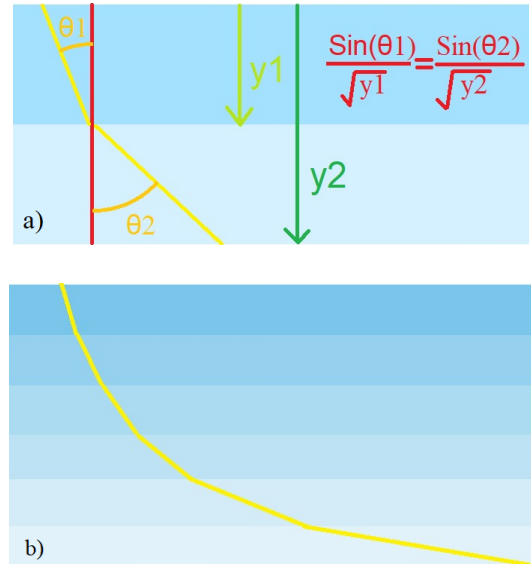


Figura 1. a) Ley de Snell. b) Aproximación a la curva con infinitas capas de distintos materiales.

Bernoulli vio que si un rayo de luz pasa por dos materiales diferentes dicho rayo de luz tomará un ángulo diferente que en el material anterior. Planteó un ambiente en el cual habría infinitas capas de materiales, ordenados de manera que un rayo de luz viajaría más rápido por el material siguiente que en el material anterior. El rayo de luz cambia su dirección en cada material y mientras más materiales exista, el rayo de luz describirá con más resolución una cicloide. De esta manera Bernoulli supo que la solución era una cicloide.

Ante la pregunta: dados dos puntos a distintas alturas, ¿qué recorrido debe seguir un móvil que se deja caer desde el punto más alto para llegar al más bajo en el menor tiempo posible afectado sólo por la gravedad? la solución, se sabe, es la curva braquistócrona. En la presente memoria estudiamos el problema de la braquistócrona en el que también deseamos obtener la trayectoria de descenso más rápido y la comparamos a la curva braquistócrona con una recta con pendiente y una forma hipérbolica.

II. CONSTRUCCIÓN DE LAS TRAYECTORIAS

RECTA CON PENDIENTE

Una condición que deben cumplir los puntos por los cuales va a viajar un objeto es que el punto final (denominado punto B), no se encuentre exactamente debajo del punto inicial (punto A) como se observa en la Figura 2. Esto debido a que, si no se cumple esa condición, el problema se reduce a un problema de caída libre. Con base en esos dos puntos A y B se construirán las ecuaciones de la recta con pendiente y las dos curvas; braquistócrona e hipérbola, así como el tiempo que le tomará viajar a un cuerpo del punto A al punto B.

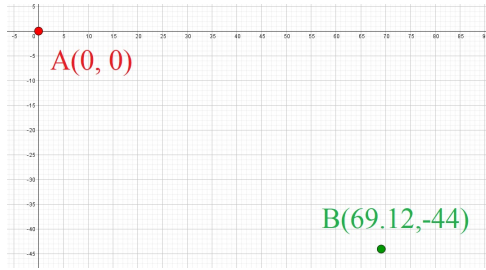


Figura 2. Puntos A y B en un plano cartesiano.

Se proponen las coordenadas de los puntos A y B como A(0, 0) y B(69.12, -44.00). La intuición sugeriría que la trayectoria que garantizaría el menor tiempo es una línea recta, uniendo el destino con el origen. Para calcular el tiempo de trayecto se comienza considerando las fuerzas que son ejercidas sobre un cuerpo de masa m en cualquier punto de la trayectoria como se muestra en la Figura 3.

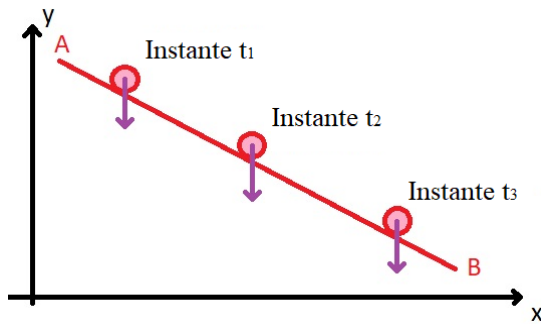


Figura 3. Un cuerpo viaja por una trayectoria recta en tres momentos.

Por ser el caso recto se sabe que el movimiento del cuerpo, tanto en el eje horizontal como en el vertical, será descrito por un movimiento uniformemente acelerado (Johnston y Cornwell, 2010), lo cual significa que las ecuaciones de la proyec-

ción de la gravedad en cada eje pueden ser descritas de la siguiente manera:

$$a_x = g_x \quad (1)$$

$$a_y = -g_y \quad (2)$$

Al integrar las ecuaciones 1 y 2 con respecto al tiempo obtendremos la velocidad.

$$v_x = \int_{t_0}^t a_x dt = g_x(t - t_0) + v_{x0} \quad (3)$$

$$v_y = - \int_{t_0}^t a_y dt = g_y(t - t_0) + v_{y0} \quad (4)$$

Como el cuerpo comenzará el trayecto desde el reposo, en el tiempo inicial cero, tanto la posición como la velocidad inicial serán nulos. Se integran las ecuaciones 3 y 4 para obtener las ecuaciones de posición. Esto es

$$S_x = \int_{t_0}^t v_x dt = \frac{g_x}{2} t^2 \quad (5)$$

$$S_y = - \int_{t_0}^t v_y dt = -\frac{g_y}{2} t^2 \quad (6)$$

Los valores de las proyecciones de la gravedad g_x y g_y sobre la recta se obtienen con el ángulo θ (ángulo entre la vertical y la pendiente de la recta) como se muestra en la Figura 4:

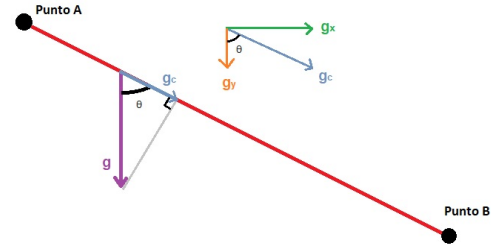


Figura 4. Proyección del vector gravedad sobre la recta.

$$g_x = g_c \sin(\theta) = g \cos(\theta) \sin(\theta) \quad (7)$$

$$g_y = g_c \cos(\theta) = g \cos^2(\theta) \quad (8)$$

El valor del ángulo θ es constante para toda la recta, esto es;

$$\theta = \frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{-44}{69.12}\right) = 1.004 \text{ [rad]} = 57.52 \text{ [}^\circ\text{]} \quad (9)$$

Las ecuaciones de posición de la recta dependen del parámetro del tiempo t , al sustituir los valores de las coordenadas del punto B(69.12, -44) [cm] y despejar t , el valor que toma será el tiempo en que tarde el cuerpo en recorrer el trayecto.

$$t = \sqrt{\frac{2S_x}{g_x}} = \sqrt{\frac{2(0.6912)}{4.44}} = .558 \text{ [s]}$$

$$t = \sqrt{\frac{2S_y}{-g_y}} = \sqrt{\frac{2(-0.44)}{-2.83}} = .558 \text{ [s]}$$

El tiempo $t = 0.558$ [s] es el tiempo en el que tardará el cuerpo en llegar del punto A al punto B. El valor de t tanto de la ecuación de X como de Y es el mismo para cualquier punto de la recta AB por lo que al igualar las ecuaciones y despejar la variable y obtendremos la ecuación de la trayectoria recta.

$$y = \frac{-g_y}{g_x} x = -\cot(\theta) x$$

$$y = -\cot(57.52^\circ)x = -0.637x \quad (10)$$

Con la ecuación de la trayectoria recta se construye la gráfica de la Figura 5.

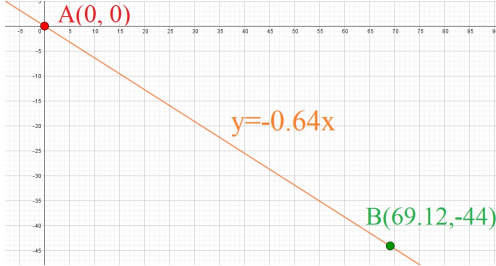


Figura 5. Gráfica de la recta $y = -0.637x$.

CURVA BRAQUISTÓCRONA

Para este caso usaremos las definiciones de conservación de energías potencial y cinética.

$$U = T \quad (11)$$

$$mgy = \frac{1}{2}mv^2 \quad (12)$$

Se despeja la velocidad de 12:

$$v = \sqrt{2gy}$$

Al definir a la velocidad como:

$$v = \frac{ds}{dt} \quad (13)$$

Se despeja dt y se integran ambos lados de la igualdad:

$$\int dt = \int \frac{ds}{v} = \int \frac{ds}{\sqrt{2gy}}$$

El diferencial de superficie ds también puede ser expresado como:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx\sqrt{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1} = dx\sqrt{(y')^2 + 1}$$

al sustituir queda:

$$t = \int \frac{dx\sqrt{(y')^2 + 1}}{\sqrt{2gy}} = \int \frac{\sqrt{(y')^2 + 1}}{2gy} dx$$

La función que se busca integrar se renombra y se sustituye en la ecuación de Euler-Lagrange (Barger & Olsson, 1995):

$$f = \frac{\sqrt{(y')^2 + 1}}{2gy} \quad (14)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0 \quad (15)$$

Sin embargo, la ecuación f no depende de la variable x por lo que la derivada con respecto a esa variable es nula. Se puede utilizar la identidad de Beltrami (Bagchi, 2017).

$$f - y' \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = C \quad (16)$$

Se deriva la ecuación 14 y se multiplica por y' :

$$y' \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = \frac{2y^2}{2\sqrt{1+y'^2}\sqrt{2gy}} \quad (17)$$

Se sustituyen las ecuaciones 14 y 17 en 16:

$$\sqrt{\frac{(y')^2 + 1}{2gy}} - \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}\sqrt{2gy}} = C$$

Se realiza la suma y se elevan al cuadrado ambos términos de la igualdad.

$$\frac{(1+y'^2) - y'^2}{\sqrt{1+y'^2}\sqrt{2gy}} = C$$

$$\frac{1}{(1+y'^2)(2gy)} = C^2$$

$$(1+y'^2)y = \frac{1}{2gC^2}$$

$$\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)y = \frac{1}{2gC^2}$$

Se iguala el término de la derecha de la igualdad a una constante siempre positiva.

$$\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)y = \frac{1}{2gC^2} = k^2 \quad (18)$$

Resolviendo la ecuación diferencial se obtienen dos ecuaciones paramétricas como solución:

$$x(\theta) = \frac{1}{2}k^2(\theta - \sin(\theta)) \quad (19)$$

$$y(\theta) = \frac{1}{2}k^2(1 - \cos(\theta)) \quad (20)$$

Las ecuaciones solución representan una cicloide, es decir, una curva que puede ser dibujada con un círculo de radio R rotando respecto a una línea y dibujando la trayectoria desde un punto en la circunferencia (Figura 6). De las ecuaciones de una cicloide se obtiene la equivalencia $k^2 = D$ (Levi, 2009).

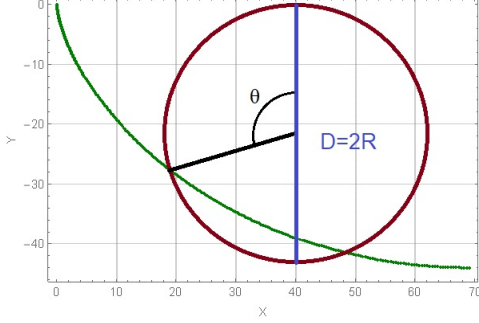


Figura 6. Circunferencia trazando una curva cicloide.

Para que el parámetro de las ecuaciones sea el tiempo t se requiere derivar el diferencial dS con respecto a θ .

$$\frac{dS}{d\theta} = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}$$

Se derivan las ecuaciones solución 19 y 20 y se sustituyen en dS .

$$\begin{aligned} \left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 &= R^2 - 2R^2 \cos(\theta) + R^2 \cos^2(\theta) \\ \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 &= R^2 \sin^2(\theta) \\ \frac{dS}{d\theta} &= \sqrt{R^2 - 2R^2 \cos(\theta) + R^2 \cos^2(\theta) + R^2 \sin^2(\theta)} \\ \frac{dS}{d\theta} &= \sqrt{2R^2(1 - \cos(\theta))} = R\sqrt{(2 - 2\cos(\theta))} \end{aligned}$$

De la ecuación obtenida de conservación de energía, ecuación 12, se obtuvo la velocidad v :

$$v = \sqrt{2gy} = \sqrt{2gR(1 - \cos(\theta))}$$

Volviendo a derivar dS , en esta ocasión con respecto al tiempo:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \frac{dS}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = R\sqrt{(2 - 2\cos(\theta))} \frac{d\theta}{dt} \\ \frac{dS}{dt} &= v = \sqrt{2gR(1 - \cos(\theta))} \end{aligned}$$

Igualando las dos ecuaciones e integrando ambos lados de la igualdad:

$$\begin{aligned} R\sqrt{2}\sqrt{(1 - \cos(\theta))} \frac{d\theta}{dt} &= \sqrt{2gR}\sqrt{(1 - \cos(\theta))} \\ \frac{d\theta}{dt} &= \frac{\sqrt{2gR}\sqrt{(1 - \cos(\theta))}}{\sqrt{2R^2}\sqrt{(1 - \cos(\theta))}} \\ \int d\theta &= \int \sqrt{\frac{g}{R}} dt \\ \theta &= \sqrt{\frac{g}{R}} t \end{aligned} \quad (21)$$

Al sustituir esta relación ahora las ecuaciones paramétricas dependen del tiempo:

$$x(t) = R\left(\sqrt{\frac{g}{R}}t - \sin\left(\sqrt{\frac{g}{R}}t\right)\right) \quad (22)$$

$$y(t) = R\left(-1 + \cos\left(\sqrt{\frac{g}{R}}t\right)\right) \quad (23)$$

Al sustituir los valores de las coordenadas del punto B(69.12, -44), se obtiene el tiempo que tarda un cuerpo en caer por la trayectoria calculada:

$$\begin{aligned} t &= \sqrt{\frac{R}{g}} \arctan\left(1 - \frac{y}{R}\right) = \sqrt{\frac{0.22}{9.81}} \arccos\left(1 + \frac{-44}{22}\right) \\ t &= .4705 \text{ [s]} \end{aligned}$$

La gráfica de las ecuaciones de la curva braquistócrona se muestra en la Figura 7.

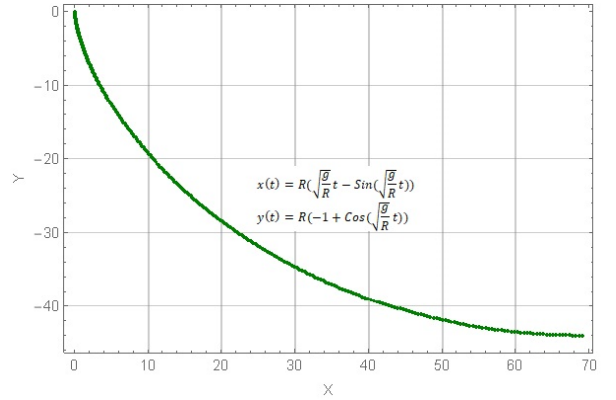


Figura 7. Gráfica de la curva braquistócrona en función del parámetro tiempo.

CURVA HIPERBÓLICA

Para la tercera curva que une a los puntos A y B se buscó que la partícula tuviera una súbita caída del punto A para después avanzar hacia el punto B, se decidió que la forma de esta trayectoria fuera descrita por una forma hiperbólica. La gráfica de la función

$$h(x) = \frac{a}{x} \quad (24)$$

es una hipérbola equilátera, cuyas asíntotas son los ejes coordenados (Figura 8) (Bronštejn et al., 2015). Los puntos de discontinuidad están en $x = 0$ con $y = \pm\infty$ mientras que el signo de a determina la forma de la gráfica. Si $a > 0$, la gráfica de $h(x)$ se encuentra en el primer y tercer cuadrante. Si $a < 0$, la gráfica de $h(x)$ se encuentra en el segundo y cuarto cuadrante.

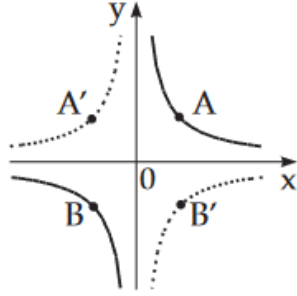


Figura 8. Hipérbola equilátera.

Así, al proponer la ecuación

$$y + b = \frac{r^2}{x + a} \quad (25)$$

de la cual el valor de r es el radio que amortigua y redirecciona la caída del punto A al B, y el punto (a, b) representa las coordenadas del foco de la hipérbola que hace que coincida con los puntos de interés. Si proponemos el valor de $r = 10$, los valores de a y b son calculados sustituyendo las coordenadas de los puntos A y B. Al resolver el sistema de ecuaciones como se muestra a continuación:

$$y + b = \frac{100}{x+a}$$

para el punto A(0, 0)

$$(0) + b = \frac{100}{(0) + a} \rightarrow b = \frac{100}{a} \quad (26)$$

Para el punto B(69.12, -44)

$$(-44) + b = \frac{100}{(69.12) + a} \rightarrow b = \frac{100}{69.12 + a} + 44 \quad (27)$$

Al sustituir la 26 en 27:

$$\begin{aligned} b &= \frac{100}{69.12+a} + 44 \\ (b - 44)(69.12 + a) &= 100 \\ (69.12b + ab - 3041.06 - 44a) &= 100 \\ (69.12 \left(\frac{100}{a}\right) - 3041.06 - 44a) &= 0 \\ 6912 - 3041.06a - 44a^2 &= 0 \end{aligned}$$

Al resolver con la ecuación cuadrática:

$$\begin{aligned} a &= \frac{-3041.06 \pm \sqrt{(3041.06)^2 - 4(-44)(6912)}}{2(-44)} \\ a_1 &= 2.2025 \\ a_2 &= -71.318 \end{aligned}$$

Obtenemos los valores de b:

$$\begin{aligned} b_1 &= 45.403 \\ b_2 &= 1.402170 \end{aligned}$$

Como se observa en la Figura 9, el par de coordenadas que generan la hipérbola son (a_1, b_1) con la siguiente ecuación:

$$y = \frac{100}{x + 2.2} - 45.4 \quad (28)$$

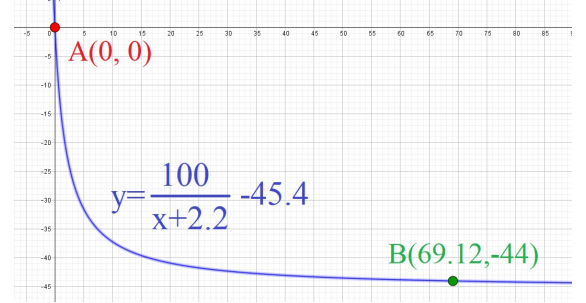


Figura 9. Gráfica de la curva hiperbólica.

Para conocer el tiempo que tardará una partícula en caer por la trayectoria hiperbólica nos valemos de las ecuaciones paramétricas de la hipérbola con centro en $C(x_0, y_0)$, dadas por (Bronštejn et al., 2015):

$$x(t) = a \sec t, \quad y(t) = b \tan t \quad (29)$$

Así, al despejar el tiempo t de la ecuación 29

$$t = \tan^{-1} \left(\frac{y}{b} \right) \quad (30)$$

obtenemos,

$$t = \tan^{-1} \left(\frac{44}{45.403} \right) = .769 \text{ s.}$$

Al obtener las ecuaciones de las diferentes trayectorias bajo el parámetro t , se puede conocer el tiempo teórico que le tomará a una partícula recorrer cada trayectoria.

III. DEMOSTRACIÓN

Para comprobar los resultados obtenidos y demostrar cualitativamente la eficiencia de la curva braquistócrona, se construyó un prototipo con MDF en corte laser siguiendo las tres curvas ya estudiadas. Se cortaron seis placas (dos para cada curva) para crear rieles por los cuales pueda pasar una esfera de vidrio. El resultado se muestra en la Figura 9.



Figura 9. Experimento.

El tiempo que le tomó a cada esfera recorrer la trayectoria fue comprobado mediante el programa de cómputo Tracker, herramienta gratuita de análisis y modelado de vídeo basada en el marco Java Open Source Physics (OSP). Se calibró y midió la trayectoria de cada recorrido, obteniendo así el tiempo que le tomó a cada proyectil llegar a su destino. La Figura 10 muestra la trayectoria de la trayectoria recta con pendiente.

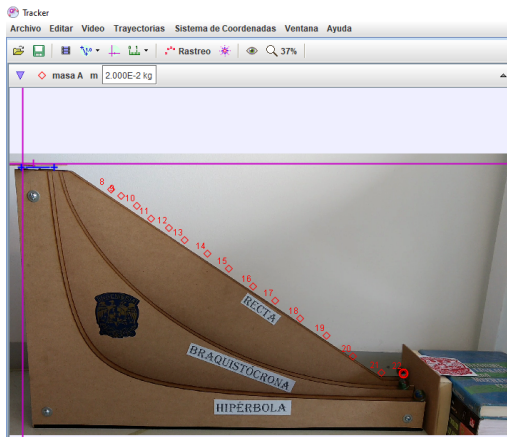


Figura 10. Trayectoria que sigue el proyectil en la recta con pendiente.

La Figura 11 muestra el tiempo que le tomó al proyectil completar la trayectoria.

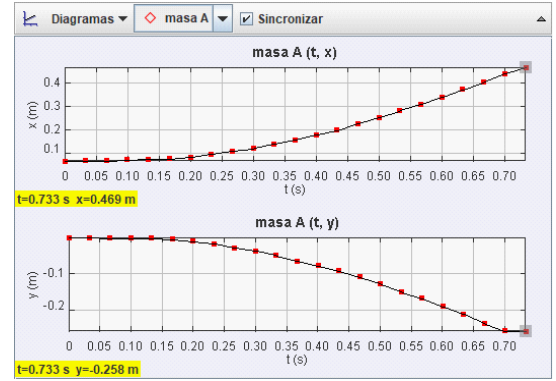


Figura 11. Tiempo que le toma al proyectil recorrer la trayectoria recta con pendiente.

Al repetir el mismo procedimiento a cada una de las trayectorias restantes se obtienen los tiempos de llegada.

III. RESULTADOS

La Tabla 1 muestra el resumen y comparación de resultados.

Tabla 1. Resumen de resultados.

Trayectoria	t teórico [s]	t experimental [s]
Recta	.558	.733
Braquistócrona	.475	.677
Hipérbola	.769	.700

De acuerdo con los resultados, tanto la trayectoria con un recorrido menor (recta con pendiente) como la trayectoria con una caída pronunciada (hipérbola) no provocan la caída de un cuerpo tan rápido como lo hace la curva braquistócrona.

Al estudiar la curva braquistócrona en $\theta = \pi$ se encuentra que la pendiente de la recta tangente es nula, por lo que la llegada de un cuerpo es más suave que en otros casos (como la línea recta con pendiente).

Finalmente se propone estudiar la velocidad y aceleración de la curva braquistócrona en diferentes puntos y comparar los resultados con las demás curvas con el fin de encontrar peculiaridades. Hay deportes en los que se utilizan rampas, si la velocidad a lo largo de la curva braquistócrona es mayor que las demás entonces se puede aprovechar la geometría en una rampa para obtener mayor momentum lineal. Con fines de entretenimiento se propone la construcción de un prototipo a escala con el propósito de ser un juguete científico para difundir el concepto y discurrir potenciales aplicaciones.

CONCLUSIONES

Al aplicar el método de conservación de energía y las ecuaciones de Lagrange, se encontró que la curva que logra que un proyectil viaje de un punto a otro en el menor tiempo, es la curva braquistócrona. Se construyó un prototipo para

demostrar este hecho y se comprobó mediante un programa de cómputo que el tiempo que le toma a un proyectil recorrer la trayectoria es menor. Un video en el que se puede apreciar el experimento se puede consultar en el siguiente enlace:

<https://youtu.be/RqzguGAFifA>

REFERENCIAS

Bagchi, B. (2017). *Advanced Classical Mechanics*. CRC Press. pp. 180-182.

Barger V. & Olsson M. (1995). *Classical Mechanics: A modern Perspective*. University of Wisconsin Madison. McGraw Hill.

Bronštejn, I. N., Semendjaev, K. A., Gerhard M., Heiner M. (2015). *Handbook of mathematics*. Springer Berlin, Heidelberg. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-662-46221-8>.

Goldstine, H. (1980). *A History of the Calculus of Variations from the 17th through the 19th Century*. Springer New York, NY. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-1-4613-8106-8>.

Johnston & Cornwell. (2010). *Mecánica vectorial para ingenieros: dinámica*. USA. McGraw Hill. Segunda edición.

Levi M. (2009). *The Mathematical Mechanic*. Pennsylvania State University. USA.

Marrero Hernández, S. (2022). *El problema de la braquistócrona discreta*. Final Degree Project. Universidad de Sevilla. Departamento de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico.

Taylor, J. (2005). *Classical mechanics*. University Science Book. USA.