



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA
INGENIERÍA ELÉCTRICA - CONTROL

**OBSERVADOR POR MODOS DESLIZANTES DE ORDEN SUPERIOR
PARA RECONSTRUCCIÓN DE FLUJOS DESCONOCIDOS EN
DUCTOS.**

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:
HÉCTOR ALBERTO FERNÁNDEZ BOBADILLA

TUTORES
DRA. MARÍA CRISTINA VERDE RODARTE
DR. JAIME ALBERTO MORENO PÉREZ

CIUDAD DE MÉXICO, 2018

JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dra. Torres Ortiz Flor Lizeth
Secretario: Dr. Rocha Cózatl Edmundo Gabriel
Vocal: Dra. Verde Rodarte María Cristina
1er. Suplente: Dr. Moreno Pérez Jaime Alberto
2o. Suplente: Dr. Fridman Leonid

La tesis se realizó en el Instituto de Ingeniería, UNAM.

TUTORES DE TESIS:

Dra. María Cristina Verde Rodarte

Dr. Jaime Alberto Moreno Pérez

*For though he was master of the world,
he was not quite sure what to do next.
But he would think of something.*
2001: A Space Odyssey
Arthur C. Clarke

Agradecimientos

Mi más grande agradecimiento es a mis padres y a mi familia por su apoyo incondicional a lo largo de mi vida. Todo lo que he logrado se los debo a ustedes.

A mi novia, Andrea, por todo el cariño y comprensión que he recibido de ella durante todos estos años. Sobre todo, gracias por escucharme, entenderme y animarme siempre a seguir adelante.

A mis amigos, por el tiempo y las gratas experiencias que hemos compartido juntos.

A la Universidad Nacional Autónoma de México, mi *alma mater*, por acogerme y formarme. A la Facultad de Ingeniería, al Programa de Maestría y Doctorado en Ingeniería y al Instituto de Ingeniería, por todos los conocimientos y habilidades adquiridos en sus aulas.

A mis profesores, particularmente a la Dra. María Cristina Verde Rodarte y al Dr. Jaime Alberto Moreno Pérez, por las enseñanzas que me brindaron durante la maestría y por su apoyo para el desarrollo del presente proyecto de tesis. Se extiende este agradecimiento a todos los sinodales, quienes, con sus comentarios y correcciones, enriquecieron enormemente este trabajo.

Finalmente, se agradece el apoyo recibido por parte del Proyecto CONACyT 241171, 280170 conv. 2016-3 Fondo Sectorial CONACyT Secretaría de Energía-Hidrocarburos y del Programa UNAM-PAPIIT Proyecto IN113617. Asimismo, agradezco a CONACyT por la beca otorgada para la realización de mis estudios de maestría, bajo el CVU 780091.

Resumen

En este trabajo, se introduce un esquema de observación para reconstruir gastos no medidos (simultáneos o secuenciales) en tuberías con ramales, aplicando técnicas de Modos Deslizantes de Orden Superior (HOSM, por sus siglas en inglés). El esquema propuesto hace uso únicamente de señales conocidas de presión y gasto en los extremos de la tubería. El diseño del esquema de observación está basado en el diferenciador HOSM de segundo orden, y explota la estructura Hessenberg del sistema, así como la naturaleza localmente estable del punto de operación nominal.

El desempeño del algoritmo propuesto es evaluado mediante simulaciones numéricas y usando datos experimentales provenientes de una tubería piloto. Adicionalmente, se hace una comparación con un esquema de observación previamente reportado en la literatura, basado en modos deslizantes de primer orden (FOSM, por sus siglas en inglés) en cascada.

Finalmente, se introduce una estrategia para detectar y aislar flujos desconocidos secuenciales en tuberías, la cual también emplea modos deslizantes de orden superior. Dicha técnica se evalúa mediante simulación y a partir de datos experimentales.

Abstract

In this work, a High-Order Sliding Modes (HOSM)- based observation scheme for unmeasured (simultaneous or sequential) flow rates reconstruction in branched pipelines is proposed. This scheme uses only available signals of pressure and flow rate at the ends of the pipeline. The observation scheme design is based on the second-order HOSM differentiator, and exploits the Hessenberg structure of the system, along with the stable nature of the nominal operating point.

The performance of the proposed algorithm is tested through numerical simulation and by using experimental data from a pilot pipeline. In addition, a comparison with a previously reported observation scheme based on First Order Sliding Mode (FOSM) in a cascade is performed.

Finally, an strategy for unknown sequential flow rate detection and identification is introduced. This method also uses HOSM and is tested through numerical simulations and experimental data.

Índice general

Índice de figuras	IX
Lista de Acrónimos	XI
1. Introducción	1
1.1. Planteamiento del Problema	2
1.2. Contribución	4
1.3. Estructura del Documento	5
2. Marco Teórico	7
2.1. Introducción a FTC y FDI	7
2.1.1. Técnicas Comunes para FDI	10
2.1.1.1. Diagnóstico Basado en Procesamiento de Señales	10
2.1.1.2. Diagnóstico Basado en Modelos Matemáticos	12
2.2. Observadores con Entradas Desconocidas (UIO)	15
2.2.1. Sistemas Lineales e Invariantes en el Tiempo	16
2.2.2. Sistemas No Lineales	20
2.3. Técnicas de Observación por Modos Deslizantes	23
2.3.1. Esquema FOSMO para Reconstrucción de Señales Desconocidas	24
2.3.1.1. Ensanchamiento de la Región de Atracción	28
2.3.2. Algoritmos SOSM	30
2.3.3. Sistemas Homogéneos y Estabilidad en Tiempo Finito	34
2.3.4. Diferenciadores HOSM	36
2.3.4.1. Diferenciadores Discontinuos	39
3. Reconstrucción de Flujos en Tuberías con Ramales	43
3.1. Modelo Dinámico del Flujo en una Tubería con Ramales	43
3.1.1. Modelo de Dimensión Finita	45
3.1.2. Modelo del Flujo en una Tubería con Dos Ramales	46
3.1.3. Propiedades de Observabilidad del Modelo Matemático	47

3.2. Reconstrucción de Fallas Múltiples en Tuberías por Medio de un Esquema FOSMO en Cascada	49
3.2.1. Observador 1: Estimador de Presión	50
3.2.2. Observador 2: Reconstructor de Flujos (Orden Completo)	51
3.2.3. Observador 2: Reconstructor de Flujos (Orden Reducido)	52
3.3. Reconstrucción de Fallas Múltiples en Tuberías por Medio de un Esquema HOSMO	53
3.4. Estrategia para Identificación y Aislamiento de Fallas Secuenciales	57
4. Análisis de Resultados	61
4.1. Resultados de Simulación	61
4.1.1. Reconstrucción de Fallas Simultáneas empleando el Esquema FOSMO en Cascada	63
4.1.2. Reconstrucción de Fallas Simultáneas empleando el Esquema HOSMO	67
4.2. Resultados Experimentales	68
4.3. Identificación y Aislamiento de Fallas	72
4.3.1. Resultados de Simulación	72
4.3.2. Resultados Experimentales	76
5. Conclusiones	83
A. Sistemas Hessenberg	85
B. Prueba de Convergencia del Esquema de Observación HOSMO	87
Bibliografía	97

Índice de figuras

2.1. Clasificación de sistemas de control tolerante a fallas	9
2.2. Arquitectura de un FTCS activo	10
2.3. Clasificación y técnicas para FDI	11
2.4. Esquema FDI basado en residuos	13
3.1. Diagrama de una tubería discretizada en k secciones	45
3.2. Definición de variables para una tubería con tres secciones	48
3.3. Reconstrucción de flujos desconocidos empleando FOSMO en cascada	50
3.4. Reconstrucción de flujos desconocidos empleando HOSMO	55
4.1. Entradas y salidas de la tubería con fallas simultáneas	64
4.2. Errores de salida de la tubería con fallas simultáneas empleando FOSMO en cascada	65
4.3. Estimación de presiones de la tubería con fallas simultáneas empleando FOSMO en cascada	65
4.4. Reconstrucción de fallas simultaneas usando FOSMO en cascada: (a) Ramal 1 (b) Ramal 2	66
4.5. Reconstrucción del estado intermedio con fallas simultáneas usando FOSMO en cascada: (a) Estado x_3 (b) Error e_3	66
4.6. Errores de observación de flujos para fallas simultáneas empleando HOSMO	67
4.7. Reconstrucción de fallas simultáneas usando el esquema HOSMO: (a) Ramal 1 (b) Ramal 2	68
4.8. Planta piloto	69
4.9. Entradas y salidas para la prueba experimental en la tubería piloto	70
4.10. Reconstrucción de fallas secuenciales en la tubería piloto: (a) Ramal 1 (b) Ramal 2	71
4.11. Entradas y salidas para la prueba experimental en la tubería piloto	71
4.12. Estimación del estado intermedio x_3	72
4.13. Reconstrucción de flujos y residuos para f_1	73
4.14. Reconstrucción de flujos y residuos para f_2	73
4.15. Reconstrucción de flujos y residuos para $f_1 \wedge f_2$	74
4.16. Comportamiento de los residuos para f_1 (a) r_2 vs. r_4 (b) $\text{atan2}(r_4/r_2)$	75
4.17. Comportamiento de los residuos para f_2 (a) r_2 vs. r_4 (b) $\text{atan2}(r_4/r_2)$	75

ÍNDICE DE FIGURAS

4.18. Comportamiento de los residuos para $f_1 \wedge f_2$ (a) r_2 vs. r_4 (b) $\text{atan2}(r_4/r_2)$	75
4.19. Señales de entrada y salida a la tubería piloto	76
4.20. Reconstrucción de flujos y residuos para f_1	77
4.21. Comportamiento de los residuos para f_1 (a) r_2 vs. r_4 (b) $\text{atan2}(r_4/r_2)$.	77
4.22. Estimación de los estados x_2 y x_4	78
4.23. Espectros de amplitud. (a) r_2 y r_4 (b) $\theta = \text{atan2}(r_4/r_2)$	78
4.24. Residuos filtrados r_2 y r_4	79
4.25. Reconstrucción de flujos y residuos para f_1 , después del filtrado	80
4.26. Comportamiento de los residuos después del filtrado. (a) r_2 vs. r_4 (b) $\text{atan2}(r_4/r_2)$	80

Lista de Acrónimos

ARR	Analytical Redundancy Relations <i>(Relaciones de Redundancia Analítica)</i>
DI	Differential Inclusion <i>(Inclusión Diferencial)</i>
FDI	Fault Detection and Isolation <i>(Detección e Identificación de Fallas)</i>
FFT	Fast-Fourier Transform <i>(Transformada Rápida de Fourier)</i>
FOSMO	First-Order Sliding Mode Observer <i>(Observador por Modos Deslizantes de Primer Orden)</i>
FTC	Fault-Tolerant Control <i>(Control Tolerante a Fallas)</i>
FTCS	Fault-Tolerant Control System <i>(Sistema de Control Tolerante a Fallas)</i>
FTS	Finite-Time Stability <i>(Estabilidad en Tiempo Finito)</i>
GSOA	Generic Second-Order Algorithm <i>(Algoritmo Genérico de Segundo Orden)</i>
GSTA	Generalized Super-Twisting Algorithm <i>(Algoritmo Super-Twisting Generalizado)</i>

LISTA DE ACRÓNIMOS

HOSM	High-Order Sliding Mode <i>(Modos Deslizantes de Orden Superior)</i>
HOSMO	High-Order Sliding Mode Observer <i>(Observador por Modos Deslizantes de Orden Superior)</i>
ISS	Input-to-States Stability <i>(Estabilidad Entrada a Estados)</i>
LH	Lower HOSMO <i>(HOSMO Inferior)</i>
LM	Lower Measured <i>(Inferiormente Medido)</i>
OL	Open Loop <i>(Lazo Abierto)</i>
PCA	Principal Component Analysis <i>(Análisis de Componentes Principales)</i>
SL LH	Strictly Linked Lower Hessenber <i>(Hessenberg Inferior Estrictamente Enlazado)</i>
SLUH	Strictly Linked Upper Hessenber <i>(Hessenberg Superior Estrictamente Enlazado)</i>
SLULH	Strictly Linked Upper and Lower Hessenber <i>(Hessenberg Superior e Inferior Estrictamente Enlazado)</i>
SMO	Sliding Mode Observer <i>(Observador por Modos Deslizantes)</i>
SOS	Sums Of Squares <i>(Suma de Cuadrados)</i>
SOSM	Second-Order Sliding Mode <i>(Modos Deslizantes de Segundo Orden)</i>
STA	Super-Twisting Algorithm <i>(Algoritmo Super-Twisting)</i>
TA	Twisting Algorithm <i>(Algoritmo Twisting)</i>

UH	Upper HOSMO <i>(HOSMO Superior)</i>
UI	Unknown Input <i>(Entrada Desconocida)</i>
UIO	Unknown Input Observer <i>(Observador con Entradas Desconocidas)</i>
UM	Upper Measured <i>(Superiormente Medido)</i>
VGSTA	Variable Generalized Super-Twisting Algorithm <i>(Algoritmo Super-Twisting Generalizado Variable)</i>

Introducción

La seguridad y confiabilidad de ductos y redes de tuberías representan una preocupación constante debido a los potenciales riesgos económicos y ambientales involucrados. Recientemente, el monitoreo automático de redes de ductos se ha convertido en un enorme reto para la comunidad ingenieril, tanto en el ámbito académico como en la industria, debido principalmente a la gran complejidad que implica el tamaño e interconexión de la red, así como a las enormes pérdidas económicas y graves riesgos asociados a fallas en la misma.

Para garantizar condiciones apropiadas y seguras en sistemas de transporte de fluidos, se requiere una gran cantidad de instrumentos de medición de las diversas variables físicas involucradas (principalmente presión y caudal). A pesar de que esto es necesario para poder llevar a cabo la supervisión automática del sistema de distribución, los altos costos asociados a instrumentar completamente una red tan vasta como la de nuestro país, la cual posee aproximadamente 55000 *km* de extensión (Pérez, 2003), aunados al esfuerzo humano y tecnológico requerido para implementar los mecanismos de monitoreo, son grandes limitantes para desarrollar un sistema de supervisión automático. La carencia de éste produce enormes pérdidas económicas al año debido a fallas en la red, las cuales pueden incluir desde fugas, lecturas erróneas en los sensores, hasta derrames y tomas clandestinas. La inmediata necesidad de la industria nacional de alternativas para realizar el monitoreo y diagnóstico en la red resulta, por tanto, patente.

Estrategias alternas para llevar a cabo el monitoreo de ductos incluyen observaciones *in situ*, aéreas (empleando, por ejemplo, drones) e incluso satelitales. Sin embargo, estas opciones siguen siendo sumamente costosas y tienen la desventaja de que no son aplicables si la tubería se encuentra bajo tierra o bajo el agua. Una mejor alternativa es la creación de algoritmos para la reconstrucción de señales desconocidas, empleando técnicas de observación de estados para sistemas dinámicos. Dichos algoritmos permiten estimar señales desconocidas (no medidas) a partir de un número reducido de mediciones, disminuyendo la cantidad de sensores y abatiendo, consecuentemente, los costos operativos. Puede pensarse en estos sistemas como *sensores por software*.

En el campo de control automático, el problema de reconstruir variables no medidas casi siempre está presente. Esta tarea es realizada por *observadores*, los cuales son sistemas dinámicos que se encargan de estimar las variables internas (estados) de otro sistema, a partir únicamente de las señales conocidas de entradas y de salidas, y del conocimiento de la estructura de la planta original. La reconstrucción de señales desconocidas y perturbaciones en sistemas dinámicos se efectúa empleando *observadores con entradas desconocidas* (UIO, por las siglas en inglés de *Unknown Input Observers*).

En un principio, los UIO fueron únicamente pensados para ser capaces de estimar correctamente el estado de un sistema *a pesar de* la existencia de señales externas o ajenas al sistema (entradas desconocidas), las cuales no están consideradas en el modelo matemático nominal de la planta. Posteriormente, mediante el empleo de técnicas avanzadas de observación, como modos deslizantes (Alwi *et al.*, 2011) o alta ganancia (Besançon, 2003), fue posible no solo observar correctamente los estados internos de un sistema en presencia de señales exógenas, sino que además se ha logrado reconstruir, bajo ciertas condiciones particulares, dichas señales desconocidas.

En el caso de los sistemas lineales, las condiciones necesarias y suficientes para la existencia de un UIO están claramente establecidas (Hautus, 1983). Sin embargo, la determinación de las propiedades de observabilidad (o detectabilidad) para sistemas no lineales es una labor mucho más sutil, especialmente cuando existen entradas desconocidas, tales como perturbaciones, incertidumbres, fallas, entre otras (Moreno *et al.*, 2014), (Moreno y Dochain, 2008).

El problema de estimar señales desconocidas puede ser considerado, además, desde el punto de vista de Detección e Identificación de Fallas (*FDI*, por las siglas en inglés de *Fault Detection and Identification*) (Isermann, 2006). Bajo esta perspectiva, se considera el estado nominal del sistema (condición de no falla) como aquel en el que no existen entradas desconocidas o señales exógenas que alteren la dinámica del mismo. Entonces, la presencia de una entrada desconocida será equivalente a la aparición de una falla, para la cual se tendrá que generar una estrategia que permita, idealmente, detectar su presencia, distinguirla de otras posibles condiciones de falla o de perturbaciones que no son de interés, y finalmente reconstruir su magnitud. Dentro del área específica de FDI se han creado condiciones que permiten decidir cuándo es factible detectar e identificar una falla, especialmente en el caso lineal.

1.1. Planteamiento del Problema

En el presente documento, se busca generar un algoritmo que permita reconstruir los flujos volumétricos no medidos que pueden presentarse de manera simultánea en una tubería con dos ramales de posiciones conocidas, midiendo únicamente las señales de presión y caudal en los extremos del ducto.

Anteriormente se han empleado técnicas distintas para la detección y aislamiento de fugas en tuberías. Por ejemplo, en (Verde, 2001) se propone un método basado en observadores con entradas desconocidas lineales para detectar dos fugas simultáneas;

sin embargo, la estimación es poco precisa ante comportamientos no lineales del fluido. En el trabajo de (Visairo y Verde, 2003) se dan condiciones necesarias y suficientes para el problema de detección y aislamiento de un conjunto de fallas, basándose en el enfoque geométrico. En (Verde *et al.*, 2007) se utiliza la respuesta transitoria para proponer un método que permita determinar la posición de dos fugas simultáneas; sin embargo, esta técnica tiene la desventaja de que debe aplicarse fuera de línea.

Más recientemente, en (Torres *et al.*, 2011) se aplican observadores de alta ganancia y el filtro extendido de Kalman para detección e identificación de una fuga y la estimación de la fricción. En (Verde y Rojas, 2017), se propone un esquema recursivo simple donde también se emplea el filtro extendido de Kalman, y que permite detectar y aislar un conjunto de fallas (fugas) secuenciales en una tubería, sin incrementar el orden ni la complejidad del sistema. También en este trabajo se hace un análisis de la sensibilidad del modelo respecto al factor de fricción y cómo éste afecta a la determinación de la posición de las fugas.

En años recientes, también se han aplicado diversos algoritmos basados en modos deslizantes para la detección e identificación de fugas en ductos. La técnica de modos deslizantes ha llamado la atención de la comunidad de control tolerante a fallas (*FTC*, por las siglas en inglés de *Fault-Tolerant Control*) y de FDI, debido a la inherente robustez que otorga la inyección de un término discontinuo en la retroalimentación y a su capacidad para compensar perturbaciones acopladas (Shtessel *et al.*, 2014).

Los observadores por modos deslizantes han sido ampliamente utilizados para reconstruir señales desconocidas. En particular para modos deslizantes de primer orden, esto puede llevarse a cabo mediante un escalamiento del llamado *error de salida equivalente* (análogo al *control equivalente*), el cual puede obtenerse al filtrar el término de inyección del error de salida, el cual es una señal discontinua (Utkin, 2013). La limitación más importante de los métodos basados en modos deslizantes de primer orden estriba en que el grado relativo desde las señales medibles hasta las entradas desconocidas debe ser igual a uno.

En (Alwi *et al.*, 2011), se propone un esquema de observadores de primer orden en cascada que permite emplear este enfoque para sistemas con grados relativos mayores a uno. En (Negrete y Verde, 2012), (Negrete, 2012) se aplica dicha estructura en cascada al caso particular de detección y reconstrucción de fugas simultáneas en tuberías, cuando las posiciones de éstas son conocidas. Este enfoque, sin embargo, tiene la desventaja de que hace uso del término de inyección del error de salida equivalente y, por tanto, requiere una etapa de filtrado, lo cual limita la velocidad de convergencia. Adicionalmente, la estructura en cascada del algoritmo propicia la propagación del error de etapa a etapa.

En el trabajo de (Angulo y Verde, 2013) se hace uso del algoritmo por modos deslizantes de segundo orden *Super-Twisting generalizado* (*GSTA*, *Generalized Super-Twisting Algorithm*) para identificar la magnitud y la posición de una sola fuga, o los flujos correspondientes de dos fugas con posiciones conocidas, en una tubería discretizada en tres secciones. Los resultados obtenidos son bastante buenos, pero el método no puede ser generalizado para sistemas con grado relativo mayor a dos.

1. INTRODUCCIÓN

Las soluciones propuestas en este trabajo requieren las siguientes consideraciones:

- El fluido que circula por el ducto es incompresible y monofásico.
- El movimiento del fluido a través del ducto (el cual es un sistema de parámetros distribuidos con dimensión infinita) puede ser modelado apropiadamente mediante un modelo discretizado espacialmente con un número finito de estados.
- Se conocen las señales de gasto y de presión en los extremos de las tuberías.
- En el ducto existen un máximo de dos ramales de posiciones conocidas, cuyos gastos no son medidos.
- El punto de operación del sistema bajo condiciones nominales es localmente estable.

Para lograr reconstruir flujos no medidos en los ramales de una tubería, se explota el hecho de que la planta en condiciones nominales (sin flujos de ramales) posee una estructura particular, conocida como Hessenberg, la cual le brinda propiedades de observabilidad (Bernard *et al.*, 1998). Adicionalmente, el punto de operación alrededor del cual existen las trayectorias del sistema es localmente estable. Esto nos permite estimar una parte del estado en lazo abierto.

Considerando estas características, se propone un observador basado en modos deslizantes de orden superior (*HOSMO*, por las siglas en inglés de *High-Order Sliding Mode Observer*), el cual permite estimar el estado completo del sistema junto con los flujos no medidos. En este sentido, puede pensarse en el *HOSMO* propuesto como un observador con entradas desconocidas, el cual tiene la peculiaridad de que parte de su término de inyección es discontinuo, lo cual lo hace robusto ante señales desconocidas cuya derivada es acotada.

Desde la perspectiva de FDI, el *HOSMO* propuesto permite la detección e identificación de los flujos en los ramales, entendiéndose éstos como fallas para el sistema nominal sin ramales. Una posible aplicación para este esquema es como sensor por software para tuberías con ramales, o como elemento de redundancia para detectar fallas en sensores de gasto. Se presenta, además, un esquema alternativo, extensión del anterior, basado también en modos deslizantes de orden superior, el cual permite generar residuos para identificar a través de cuál de los ramales circula un flujo, en el caso de fallas secuenciales.

1.2. Contribución

La principal contribución de este trabajo es el diseño de un observador basado en modos deslizantes de orden superior (*HOSMO*), el cual permite reconstruir todo el estado junto con los flujos no medidos en una tubería con ramales.

El antecedente directo de este trabajo es el desarrollado en (Negrete, 2012), en el cual se emplearon observadores por modos deslizantes de primer orden (FOSMO, *First-Order Sliding Mode Observer*) en cascada para resolver este mismo problema. Las ventajas que ofrece el algoritmo desarrollado en este trabajo consisten principalmente en que no se requiere una etapa de filtrado para reconstruir las señales desconocidas, sino que éstas se estiman en paralelo con el estado, lo cual, en teoría, permite una reconstrucción más rápida. Adicionalmente, se elimina la implementación en cascada, con lo cual no existe propagación del error entre etapas, por lo que los resultados obtenidos mediante este enfoque son más precisos. Cabe resaltar que las condiciones necesarias para la convergencia se relajan en el observador de orden superior; asimismo, la implementación de éste es mucho más sencilla y transparente al usuario que en el caso del algoritmo en cascada. Derivado del esquema de orden superior, se plantea, además, una estrategia que permite generar residuos para aislar e identificar las fallas; esta técnica, implementada en forma de banco de observadores, permitiría la detección e identificación de fugas secuenciales con posición desconocida en un tiempo arbitrariamente rápido. Dicha implementación se propone como trabajo a futuro.

1.3. Estructura del Documento

Este trabajo es resultado de la investigación sobre reconstrucción de fallas múltiples en ductos con ramales empleando observadores basados en modos deslizantes de orden superior, la cual fue realizada en el Instituto de Ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de México como parte del Programa de Maestría y Doctorado en Ingeniería.

La organización del documento es la siguiente: en el Capítulo 2 se presenta el marco teórico y los conceptos fundamentales necesarios para el entendimiento del trabajo. En el Capítulo 3 se introduce el modelo matemático de un fluido monofásico e incompresible que circula por un ducto con ramales en posiciones específicas. Posteriormente, se propone una discretización espacial por diferencias finitas utilizada para obtener un modelo en el espacio de estados, empleado con fines de observación. En este apartado también se discuten las principales propiedades de observabilidad del modelo, las cuales son de interés para nuestro objetivo. Finalmente, se consideran dos estrategias de solución para el problema planteado; la primera de ellas es una implementación FOSMO en cascada, tal y como se describe en (Negrete y Verde, 2012), salvo una ligera modificación en el modelo de la fricción. Esta estrategia se incluye como antecedente y patrón de comparación. Posteriormente, se introduce el método propuesto en esta investigación, el cual consiste en un observador basado en modos deslizantes de orden superior. Después, se plantea una extensión de la técnica que permite la generación de residuos para detectar e identificar las fallas cuando no se conoce cuál de éstas es la que está presente. El capítulo 4 muestra los resultados obtenidos por los esquemas previos, tanto en simulación como experimentales; posteriormente, se llevan a cabo el análisis y discusión de los resultados. Finalmente, el Capítulo 5 presenta algunas conclusiones y ciertas direcciones de trabajo a futuro.

Marco Teórico

En este capítulo, se presentarán brevemente los conceptos y técnicas matemáticas requeridos para el desarrollo del presente proyecto. Se incluye una breve introducción a la teoría de Control Tolerante a Fallas (*FTC, Fault-Tolerant Control*) y de Detección e Identificación de Fallas (*FDI, Fault Detection and Isolation*), sus fundamentos y las estrategias más comúnmente utilizadas. Posteriormente, se aborda el tópico de Observadores con Entradas Desconocidas (*UIO, Unknown Input Observers*), los cuales serán una herramienta muy útil para este trabajo; se incluyen, asimismo, definiciones básicas de observabilidad y detectabilidad cuando existen entradas desconocidas en un sistema dinámico, tanto en el caso lineal como en el no lineal. Finalmente, se introducen algunos conceptos básicos de los observadores por modos deslizantes, prestando especial atención a los algoritmos de primer orden, los cuales dependen de la inyección del error de salida equivalente, y a los diferenciadores de orden superior. Para este estudio, se consideran, además, algunas nociones mínimas sobre la teoría de sistemas homogéneos.

2.1. Introducción a FTC y FDI

La sociedad moderna depende enormemente del correcto desempeño de diversos y complejos procesos tecnológicos (industriales, manufactureros, de distribución y transporte, telecomunicaciones, etc). Debido al alto grado de especialización de los sistemas, así como a la interconexión entre ellos (la cual en ocasiones puede ser sumamente complicada), detectar una falla en un elemento de un proceso particular es una labor que puede presentar grandes dificultades y sutilezas. Aunado a esto, los riesgos asociados a una falla en un sistema crítico resultan sumamente altos, implicando posiblemente graves pérdidas, tanto económicas y materiales, como humanas, representando una grave amenaza para el proceso mismo y para la seguridad de los operadores, e incluso de la sociedad y del medio ambiente.

De manera informal, una falla es todo aquello que altera o modifica el comportamiento de un sistema, de forma tal que éste ya no cumple su propósito, o su desempeño se ve gravemente disminuido. En un principio, una falla puede provenir tanto del in-

2. MARCO TEÓRICO

terior del mismo sistema (como, por ejemplo, de los sensores o los actuadores), como de una fuente externa, como cambios en las condiciones ambientales, e incluso errores humanos. Queda claro que las posibilidades de falla en un sistema determinado son muy amplias, y su número incrementa a medida que aumenta la complejidad del mismo.

Antes de continuar, resulta necesario definir formalmente los conceptos de *falla* y *avería* (Blanke *et al.*, 2006), (Verde *et al.*, 2013), los cuales están íntimamente relacionados, pero no son equivalentes.

- **Falla (Fault):** Desviación no permisible de la estructura o de al menos un parámetro en la condición u operación nominal de un sistema.
- **Avería (Failure):** Interrupción permanente de la capacidad de un sistema para realizar una función requerida bajo condiciones específicas de operación.

Dado que la mayor parte de los procesos industriales han sido progresivamente automatizados y actualmente operan mediante computadoras y sistemas digitales que rigen su comportamiento, resulta natural que la tarea de garantizar la seguridad de los procesos recaiga en los sistemas de control. Es así como surge el Control Tolerante a Fallas (FTC). Un sistema FTC (*FTCS, Fault-Tolerant Control System*) es aquél capaz de lidiar con fallas en los componentes involucrados en el proceso de forma automática. Lo anterior implica que el sistema de control debe poseer la capacidad de mantener, por lo menos, un régimen de operación estable y seguro en presencia de fallas, además de garantizar un nivel aceptable de desempeño. Adicionalmente, es deseable que los sistemas FTC puedan adaptarse a la nueva situación, autorepararse y reestructurarse para compensar la presencia de fallas y mantener el régimen de operación tan cercano como sea posible al nominal.

Los FTCS pueden clasificarse esencialmente en dos tipos: pasivos y activos. En los FTCS pasivos, se asume que el sistema de control ha sido diseñado, *a priori*, para compensar apropiadamente los cambios en los parámetros ocasionados por la presencia de fallas. Esto es, el control es robusto ante las fallas y, por tanto, cuando éstas acaecen, debe ser capaz de mantener la estabilidad del sistema con una degradación tolerable del desempeño. Esquemas típicos de FTCS pasivos emplean técnicas de control robusto, por ejemplo, modos deslizantes o \mathcal{H}_∞ .

Por lo general, la capacidad de los FTCS pasivos para compensar apropiadamente las fallas es bastante limitada; por tanto, éstos no son capaces de lidiar con fallas graves o críticas. Además, no es posible diseñar un sistema que sea robusto ante todas las posibles fallas que pueden presentarse en la realidad.

Por otro lado, en los FTCS activos, se considera que al inicio la planta opera en ausencia de fallas, y que cuando éstas acaecen, pueden ser detectadas e identificadas por otro elemento del mismo sistema de control. A esta etapa se le denomina detección e identificación de fallas (FDI). Una vez que el sistema FDI ha obtenido la información importante relacionada con las fallas, ésta se comunica al resto del sistema para iniciar la reestructuración y reconfiguración del esquema de control, adaptándose entonces a la falla y compensándola apropiadamente para garantizar una operación segura.

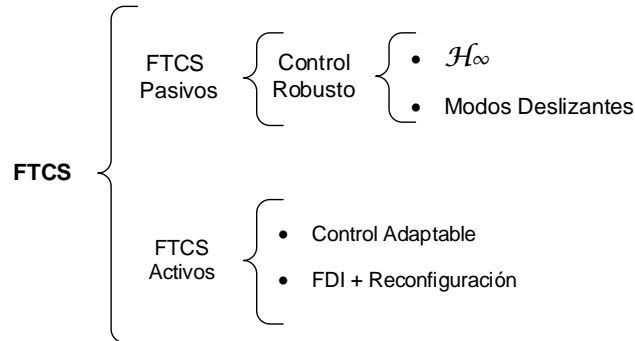


Figura 2.1: Clasificación de sistemas de control tolerante a fallas

De la discusión anterior, se aprecia que mientras los esquemas de FTCS pasivos se basan fundamentalmente en técnicas de control robusto, los FTCS activos requieren de una etapa de diagnóstico adicional, en la cual se obtiene la información relevante de la falla, para después comunicarla al sistema de control y realizar las acciones correspondientes. Los FTCS activos, en principio, son capaces de lidiar con una gamma más amplia de fallas que los esquemas pasivos. Adicionalmente, poseen la ventaja de que son capaces de determinar la existencia de un comportamiento anormal en el sistema y de comunicar esta información, sirviendo así también como un sistema de alarma para los operadores del proceso.

Un sistema FDI realiza, al menos teóricamente, las siguientes tareas:

- **Detección de fallas:** Determinación de la existencia de fallas en un sistema y del tiempo de detección de éstas.
- **Aislamiento de fallas:** Identificación de la clase y ubicación de una falla. Distinción entre distintas fallas.
- **Identificación de fallas:** Estimación de la magnitud y comportamiento en el tiempo de las fallas.

Durante la etapa de detección de fallas, el sistema de diagnóstico debe ser capaz de identificar un comportamiento anormal. Esto puede lograrse al analizar las variables medidas del proceso y compararlas con registros históricos, estadísticos o con las señales equivalentes provenientes de un modelo matemático del sistema nominal. Los diversos métodos comúnmente empleado para FDI se discutirán más adelante. Posteriormente, durante la etapa de aislamiento, el sistema de diagnóstico identifica en dónde se encuentra localizada y qué clase de falla es la que está presente. Asimismo, si se trata de distintas fallas, el sistema debe ser capaz de distinguir entre éstas. Cabe mencionar en este punto que, de acuerdo con la naturaleza del sistema y de las propias fallas, no siempre es posible distinguir las. Finalmente, la etapa de identificación consiste en reconstruir el comportamiento en el tiempo de las fallas, pudiendo así conocer su magnitud y su evolución. Nuevamente, no siempre es posible llevar a cabo esta tarea.

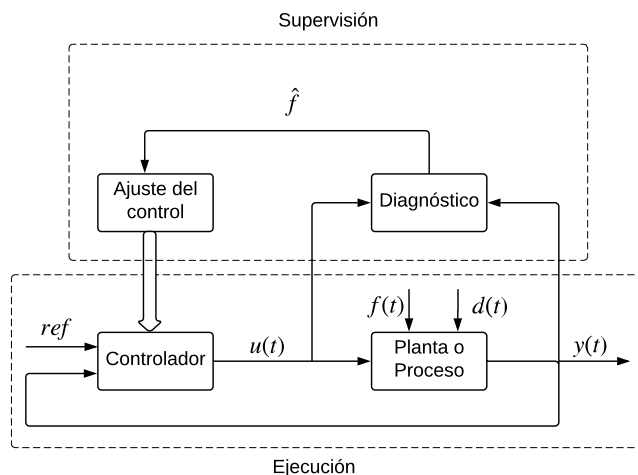


Figura 2.2: Arquitectura de un FTCS activo

En un sistema o proceso real, además de fallas, existen perturbaciones o incertidumbres, las cuales pueden ser ocasionadas por muy diversos factores. Aunque estas incertidumbres y perturbaciones también alteran el estado nominal de la planta, no son, en principio, consideradas como fallas y por tanto, el sistema de diagnóstico debería ser capaz de distinguir entre éstas. Es claro que diseñar un sistema de diagnóstico robusto ante perturbaciones e incertidumbres no medidas es una labor sumamente difícil, cuyo éxito depende de la estructura del sistema y de las mediciones disponibles; muy pocos métodos de diagnóstico pueden lidiar efectivamente con este problema, sobre todo cuando hay poca información disponible sobre el estado interno del sistema. Dificultades adicionales para el proceso de detección surgen cuando las fallas no se perciben fácilmente (por ejemplo, si éstas son muy pequeñas o si los sensores son poco sensibles), o cuando el propio sistema de control corrige la desviación asociada a la presencia de éstas.

2.1.1. Técnicas Comunes para FDI

En este apartado, se presentarán algunas estrategias típicamente empleadas para la detección, aislamiento e identificación de fallas en sistemas físicos. Estas técnicas se dividen básicamente en dos grandes ramas: métodos basados en señales y basados en modelos matemáticos.

2.1.1.1. Diagnóstico Basado en Procesamiento de Señales

Los métodos de detección de fallas basados en señales son útiles cuando no se dispone de un modelo matemático que represente apropiadamente el proceso, o cuando su obtención resulta muy complicada; son recomendables en procesos que involucran

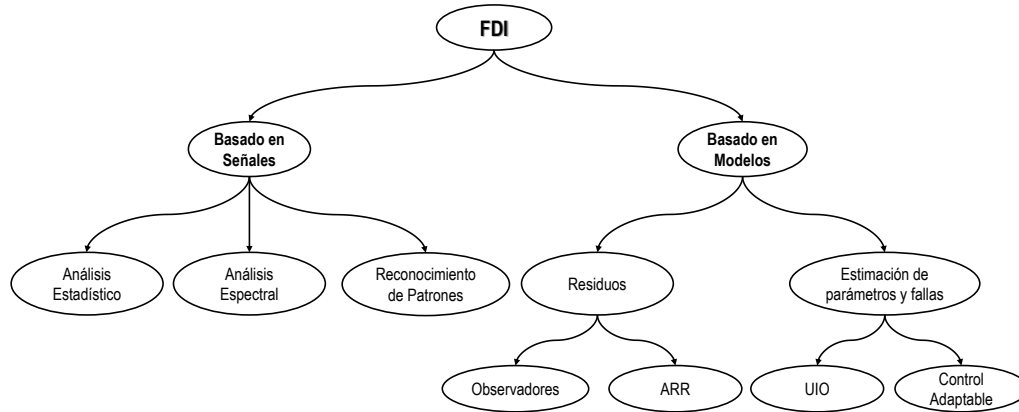


Figura 2.3: Clasificación y técnicas para FDI

pocas señales, cuyo comportamiento y valor en el estado nominal se encuentra bien determinado y documentado. Tal es el caso, por ejemplo, de plantas industriales con pocos cambios en el punto de operación.

Las técnicas de diagnóstico se dividen en tres grupos, principalmente:

- Métodos estadísticos.
- Análisis frecuenciales.
- Reconocimiento de patrones y algoritmos inteligentes.

Los métodos estadísticos emplean los registros históricos de los datos para obtener una tendencia en el comportamiento de las señales. De esta forma, parámetros como la media, la varianza y la desviación estándar de una muestra de datos puede arrojar información que conduzca a la detección de una falla, e incluso, a su correcta identificación. Sin embargo, por lo general sólo en casos muy específicos es posible localizar el componente con falla a través de este enfoque. El análisis estadístico es el método de diagnóstico más intuitivo, y el primero y más utilizado en plantas industriales.

Algunas desventajas de los métodos estadísticos son que no siempre pueden ser usados para efectuar el diagnóstico en línea, dada la necesidad de recolectar muestras y datos. Adicionalmente, en muchas ocasiones sólo se puede procesar una señal a la vez. También, si el proceso es complejo, cambia constantemente su régimen de operación o involucra muchas variables, el análisis con el enfoque estadístico puede ser sumamente complicado. Finalmente, el principal inconveniente de esta técnica es que exige tener a disposición una gran cantidad de datos históricos sobre el comportamiento nominal del proceso, así como de las distintas posibles fallas registradas, para poder hacer una hipótesis estadística válida.

Sin embargo, actualmente se disponen de diversas herramientas que han fortalecido enormemente este método; como ejemplo, puede mencionarse el análisis por componentes principales (*PCA*, *Principal Components Analysis*), el cual permite procesar

múltiples señales a la vez y encontrar relaciones entre éstas, a partir de la proyección en espacios de componentes de baja dimensión, haciendo posible apreciar comportamientos anormales poco visibles en las señales originales.

Otra opción muy utilizada en la práctica es analizar el contenido espectral de las señales mediante técnicas en el dominio de la frecuencia, empleando herramientas como la transformada rápida de Fourier (*FFT*, *Fast-Fourier Transform*) o con métodos modernos como las transformadas de onduletas. Los análisis armónicos son muy útiles cuando se tiene muy bien identificado el espectro frecuencial de las señales involucradas en el proceso en operación nominal. Por ende, la presencia de frecuencias atípicas es indicador de un comportamiento anormal en alguno de los componentes. Algunas aplicaciones clásicas donde el análisis frecuencial es muy usado para la detección de fallas son en sistemas rotatorios (generadores eléctricos, turbinas, etc) y redes eléctricas de corriente alterna.

Finalmente, el problema de diagnóstico basado en el análisis de señales puede abordarse empleando métodos inteligentes de clasificación de datos y reconocimiento de patrones. Estas estrategias han surgido gracias al enorme auge que recientemente han tenido las áreas de Inteligencia Artificial y Ciencias de la Computación. La idea básica de estos métodos es poder describir el comportamiento del sistema a partir de ciertas características o atributos específicos en sus señales, los cuales definen un patrón. A partir de este patrón y de los datos recolectados, el sistema es capaz de aprender y tomar decisiones que le permitan distinguir si se está operando en un régimen nominal o si existe alguna desviación que indique la presencia de fallas. En este último caso, el sistema debe poder ubicar el patrón de datos en alguna clase, empleando algoritmos de clasificación, los cuales pueden ser estadísticos o no estadísticos, por ejemplo, mediante redes neuronales.

Los principales inconvenientes de estos métodos consisten en que se debe disponer de una base de datos experimental que describa el comportamiento del sistema en situaciones varias, tanto en operación nominal como ante la presencia de diversas fallas; esto con el fin de que el algoritmo clasificador sea capaz de reconocer y ubicar apropiadamente el patrón de datos. Asimismo, otra gran dificultad que se encuentra en estas técnicas es la correcta determinación de los atributos que permitan generar un espacio de decisión mínimo y clases bien diferenciadas que permitan detectar y aislar el mayor número de fallas. Por último, en estos métodos la experiencia y la calidad del aprendizaje juegan un papel fundamental en la efectividad del diagnóstico.

2.1.1.2. Diagnóstico Basado en Modelos Matemáticos

Los métodos de diagnóstico basados en modelos matemáticos emplean los principios fundamentales de la Teoría de Control. Principalmente, existen dos enfoques para atacar el problema de detección de fallas en sistemas dinámicos cuando se conoce el modelo matemático: diagnóstico basado en residuos y basado en identificación del sistema y estimación de la falla.

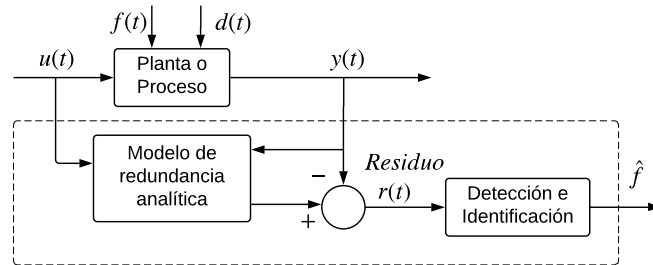


Figura 2.4: Esquema FDI basado en residuos

El diagnóstico empleando residuos parte del principio de coherencia entre el modelo matemático y la planta en ausencia de fallas. Esto es, si tanto al sistema real como a su correspondiente modelo se les alimenta con la misma información de entrada, entonces si no hay fallas presentes, la salida de ambos debe ser igual. En caso contrario, la desviación de las señales provenientes de la planta respecto a aquellas generadas con base en el modelo matemático es un indicador o síntoma de un funcionamiento anormal, comúnmente denominado *residuo*, el cual puede emplearse para detectar e identificar la falla.

Antes de continuar, conviene introducir el concepto de *redundancia* en un sistema, el cual se refiere a la capacidad de éste de obtener la misma información en alguna de sus variables o de generar la misma acción a partir de más de un medio. La redundancia puede ser de dos tipos: directa (también llamada física) y analítica. En la redundancia directa, el sistema está dotado de múltiples elementos físicos (hardware) que cumplen la misma función; este es el caso, por ejemplo, cuando se dispone de dos o más sensores para medir la misma variable, o cuando existen diversos actuadores para realizar la misma tarea. Esto, evidentemente, incrementa la confiabilidad de las mediciones y la seguridad en general del sistema. Sin embargo, la redundancia directa involucra costo adicional y aumenta las proporciones de la planta.

Una alternativa a la redundancia directa es la redundancia analítica, en la cual, en lugar de tener múltiples sensores para medir la misma señal, se diseña un observador que proporcione un estimado de la variable de interés, el cual se compara con la medición. De esta forma, se obtiene la misma información a partir de dos fuentes distintas, empleando un algoritmo matemático en lugar de hardware adicional. Por esta razón, en ocasiones dichos algoritmos también se conocen como sensores por software. Evidentemente, esta opción permite abatir costos y reducir las dimensiones de la planta, aunque involucra el esfuerzo de diseñar un observador, lo cual no siempre es una labor sencilla.

En la Figura 2.4 se ilustra el principio de diagnóstico basado en residuos. Se asume que para una planta o proceso dado, se dispone de un modelo matemático o de otra forma de obtener redundancia analítica. Si a éstos se les alimenta con la misma información de entrada, la salida de ambos deberá ser idéntica en ausencia de fallas. Si no es así, la diferencia entre las señales de salida de la planta y y del modelo asociado \hat{y} será una señal residuo que se puede emplear para diagnosticar la falla.

2. MARCO TEÓRICO

La redundancia analítica necesaria para generar las señales residuos se puede obtener principalmente de dos formas: empleando observadores o las llamadas relaciones redundantes analíticas (ARR, Analytical Redundancy Relations). Un observador es un sistema dinámico que se encarga de estimar el estado de otro sistema, a partir de conocer la estructura de éste y la información de sus entradas y salidas. Por otro lado, una ARR es una expresión diferencial (comúnmente expresadas en el dominio de la frecuencia s de Laplace) obtenida a partir del modelo nominal y que depende únicamente de las variables medibles, la cual se satisface exactamente en ausencia de fallas.

Para ser capaces de distinguir apropiadamente entre diversas fallas, cualquiera de las herramientas anteriores debe de diseñarse de forma tal que sea sensible a una falla en específico e insensible a todas las demás. En el caso de los observadores, esto puede lograrse mediante transformaciones especiales del estado que desacoplan las fallas, por ejemplo, el algoritmo propuesto en (Hou y Müller, 1994). Para las ARR, se emplean métodos basados en espacios de paridad (Chow y Willsky, 1984). De acuerdo con las características del sistema y de las propias fallas, no siempre es posible lograr la aislabilidad.

El diagnóstico basado en residuos es intuitivo y ampliamente utilizado, habiéndose implementado con éxito en un buen número de aplicaciones reales. A pesar de ello, presenta ciertas dificultades y desventajas inherentes; la principal de ellas es la complejidad que involucra diseñar sistemas generadores de residuos sensibles a fallas específicas e insensibles a otras, cosa que no siempre se puede lograr.

El otro enfoque para realizar diagnóstico cuando se conoce el modelo matemático consiste en identificación del sistema y estimación de la falla. La idea básica de este enfoque es simple: si se sabe cuáles serían los parámetros del sistema que se verían afectados al presentarse una falla, es posible utilizar un esquema de control adaptable para estimar en línea los parámetros constitutivos, reajustándose apropiadamente el control para compensar este cambio. Por otro lado, si la forma en la que incide una determinada falla en la estructura del sistema es conocida, ésta puede interpretarse como una entrada desconocida exógena. Entonces, dependiendo de las propiedades de observabilidad/detectabilidad del sistema, es posible diseñar un observador con entradas desconocidas (*UIO, Unknown Input Observer*), el cual permita reconstruir la falla. Técnicas comunes para estimar señales desconocidas involucran observadores de alta ganancia y por modos deslizantes.

A diferencia del diagnóstico basado en residuos, el enfoque de estimación de parámetros y de fallas no se basa en el principio de incongruencia, sino que asume cierto comportamiento conocido *a priori* inducido por la falla y trata de estimar los parámetros correspondientes, para poder compensarlos. En este caso, se efectúa todo el proceso en un sólo paso, a diferencia del esquema por etapas de residuos. Evidentemente, la limitante para este enfoque está dada por las propiedades de identificabilidad de los parámetros y de observabilidad/detectabilidad del sistema con fallas.

Existe todavía otra filosofía para enfrentar el problema de diagnóstico, la cual emplea modelos de falla. En ésta, se dispone del modelo del sistema en presencia de cierta falla específica y se compara con la respuesta de la planta real. Evidentemente, si los

datos obtenidos coinciden, se puede concluir que acaece dicha falla en específico. Sin embargo, este enfoque es poco empleado, debido a que exige el conocimiento de un modelo con falla, el cual no siempre es conocido para un conjunto de fallas posibles dado. Adicionalmente, requiere un procesamiento sumamente rápido y eficiente de la información, lo cual puede resultar difícil e incluso imposible de implementar, especialmente para sistemas con múltiples factibles escenarios de fallas.

2.2. Observadores con Entradas Desconocidas (UIO)

La teoría clásica de observadores se ocupa del problema de estimar señales internas no medidas en un sistema, a partir de la información conocida de las entradas y salidas. Es bien sabido que la capacidad de construir un observador para un sistema y asignar sus características (por ejemplo, el tipo y tiempo de convergencia) está determinada por las propiedades de observabilidad (detectabilidad) que dicho sistema posea.

En ausencia de incertidumbres, perturbaciones y señales exógenas desconocidas, la observabilidad corresponde con la posibilidad (al menos teórica) de estimar el estado en un horizonte finito de tiempo. Lo anterior equivale también a poder reconstruir la condición inicial del sistema. Una propiedad más débil que la observabilidad es la detectabilidad, la cual implica que la estimación del estado puede efectuarse únicamente de manera asintótica; esto también significa que, aunque no es posible reconstruir la condición inicial del sistema, la estimación del estado producida por un observador converge asintóticamente al estado verdadero de la planta.

En la realidad, además de desconocer la condición inicial del sistema a observar, éste puede estar sometido al efecto de perturbaciones, incertidumbres paramétricas, dinámicas parásitas no modeladas e incluso la presencia de señales exógenas desconocidas o no medidas. En estos casos, los conceptos clásicos de observabilidad y detectabilidad deben ser modificados, tomando en cuenta las incertidumbres dadas. Entonces, la observabilidad correspondería con la capacidad para estimar el estado en un horizonte finito de tiempo, aún en presencia de las incertidumbres y perturbaciones. De forma análoga, la detectabilidad significa que dicha reconstrucción sólo puede darse asintóticamente.

Para el caso lineal e invariante en el tiempo, existe un gran número de técnicas que permiten resolver este problema, tanto en el caso nominal como con incertidumbre. Adicionalmente, las condiciones necesarias y suficientes para reconstruir el estado de un sistema en presencia de entradas desconocidas arbitrarias se encuentran completamente determinadas (Hautus, 1983). Sin embargo, para sistemas no lineales, el análisis de observabilidad se vuelve sumamente complejo, en particular en la presencia de incertidumbre y de entradas desconocidas. Adicionalmente, existen muy pocas herramientas reportadas en la literatura para llevar a cabo dicho análisis.

En esta sección se presentarán las nociones fundamentales de observabilidad y detectabilidad de los sistemas, así como su relación con la existencia de los denominados *observadores fuertes* (strong observers), los cuales son sistemas dinámicos que son capaces de reconstruir el estado interno de otro sistema, a partir únicamente de la infor-

mación dada por la salida, es decir, sin ocupar la entrada. La discusión se presentará primero para el caso lineal e invariante en el tiempo y, posteriormente, se harán las extensiones correspondientes para el caso no lineal.

2.2.1. Sistemas Lineales e Invariantes en el Tiempo

En el caso de sistemas lineales e invariantes en el tiempo, las condiciones necesarias y suficientes para la existencia de un observador fuerte están perfectamente determinadas. Como se explicará a continuación, estas condiciones están íntimamente relacionadas con las propiedades de observabilidad del sistema, en particular con la denominada *detectabilidad fuerte** (strong* detectability).

Considere el sistema lineal e invariante en el tiempo

$$\Sigma_L : \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Dw(t), & x(0) = x_0 \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (2.1)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado, $u \in \mathbb{R}^m$, es la entrada conocida, $w \in \mathbb{R}^q$ es un vector de entradas exógenas desconocidas y $y \in \mathbb{R}^p$ es la salida. Asíumase que las matrices C y D son de rango completo, es decir, $\rho(C) = p$, $\rho(D) = q$, con $p \geq q$. Los espacios de las señales de entrada (u, w) son aquellos correspondientes a las señales medibles y acotadas para todo intervalo finito de tiempo, los cuales se denotarán mediante $\mathcal{U} = \mathcal{L}_{\infty e}^m$ y $\mathcal{W} = \mathcal{L}_{\infty e}^q$, respectivamente.

Para los sistemas lineales, la observabilidad no depende de la entrada conocida u , así que, sin pérdida de generalidad, puede considerarse $u = 0$. En el caso en que no existan entradas desconocidas ($w = 0$), la determinación de las propiedades de observabilidad/detectabilidad se efectúa a partir del rango de la matriz de observabilidad de Kalman

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}, \quad (2.2)$$

la cual representa el mapeo que lleva del estado x a la salida y de Σ_L y sus primeras $n - 1$ derivadas respecto al tiempo. Gracias al teorema de Cayley-Hamilton, no se requieren más derivadas para determinar la observabilidad. Si \mathcal{O} es de rango completo, entonces el sistema es observable. Si esto no se satisface, pero las dinámicas no observables son estables, entonces el sistema es detectable. En el primer caso, es posible asignar la velocidad de convergencia de un observador que reconstruya el estado interno x , mientras que en el segundo dicha convergencia será asintótica.

En presencia de alguna entrada desconocida ($w \neq 0$) en el sistema Σ_L , las definiciones de observabilidad detectabilidad deben modificarse. En este caso, existen dos nociones de detectabilidad : detectabilidad fuerte y detectabilidad fuerte*. Ambas son

propiedades distintas, las cuales, sin embargo, son equivalentes cuando $w = 0$. Las definiciones dadas en este apartado han sido tomadas de (Hautus, 1983).

Definición 1 (Detectabilidad fuerte) *El sistema Σ_L es fuertemente detectable si para $u(t) = 0$ se cumple*

$$\forall (w(t), x_0) \mid y(t) = 0, \quad \forall t > 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0. \quad (2.3)$$

Definición 2 (Detectabilidad fuerte*) *El sistema Σ_L es fuertemente* detectable si para $u(t) = 0$ se cumple*

$$\forall (w(t), x_0) \mid \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0. \quad (2.4)$$

A partir de las definiciones 1 y 2, se sigue que la detectabilidad fuerte* implica detectabilidad fuerte; sin embargo, el enunciado converso no es verdad para sistemas en tiempo continuo.

Definición 3 (Observabilidad fuerte) *El sistema Σ_L es fuertemente observable si para $u(t) = 0$ se cumple*

$$\forall (w(t), x_0) \mid y(t) = 0 \Rightarrow x(t) = 0, \quad \forall t > 0. \quad (2.5)$$

De la definición anterior, se tiene que la observabilidad fuerte implica detectabilidad fuerte, pero no necesariamente implica detectabilidad fuerte*. A continuación, se presentan los criterios algebraicos que permiten determinar las propiedades de observabilidad/detectabilidad para sistemas lineales. Estos resultados se presentarán en forma de teoremas, cuyas pruebas pueden encontrarse en (Hautus, 1983).

Teorema 1 *El sistema Σ_L es fuertemente detectable si y sólo si todos sus ceros z desde la entrada desconocida $w(t)$ a la salida $y(t)$ tienen parte real negativa; esto es, $Re\{z\} < 0, \forall z$.*

Empleando la matriz de Rosenbrock, el enunciado anterior se traduce a

$$\rho \begin{bmatrix} sI - A & -D \\ C & 0 \end{bmatrix} = n + q, \quad \forall s \in \mathbb{C}_+$$

donde ρ denota el rango de la matriz y \mathbb{C}_+ es el semiplano complejo cerrado derecho.

Teorema 2 *El sistema Σ_L es fuertemente* detectable si y sólo si es fuertemente detectable y, además, si el grado relativo desde la salida a la entrada desconocida es igual a uno. Esto es, el sistema debe satisfacer las siguientes condiciones:*

$$(a) \quad \rho \begin{bmatrix} sI - A & -D \\ C & 0 \end{bmatrix} = n + q, \quad \forall s \in \mathbb{C}_+$$

$$(b) \quad \rho(CD) = \rho(C) = q$$

Teorema 3 *El sistema Σ_L es fuertemente observable si y sólo si no existen ceros desde la salida hasta la entrada desconocida. Esto es*

$$\rho \begin{bmatrix} sI - A & -D \\ C & 0 \end{bmatrix} = n + q, \quad \forall s \in \mathbb{C}$$

Las propiedades de observabilidad/detectabilidad están íntimamente relacionadas con la existencia de un observador fuerte, es decir, aquel que es capaz de reconstruir los estados internos del sistema empleando únicamente información de la salida medible $y(t)$, y no de la entrada. Por esta razón, un observador fuerte puede emplearse como UIO.

Definición 4 *Un sistema dinámico Ω lineal e invariante en el tiempo con entrada $y(t)$ y salida $\hat{x}(t)$ es un observador fuerte para el sistema Σ_L si para toda entrada $u(t)$ y condición inicial x_0 de Σ_L , el sistema Ω brinda asintóticamente un estimado correcto del estado de Σ_L . Esto es:*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\hat{x}(t) - x(t)) = 0$$

Es necesario resaltar que ni la propiedad de detectabilidad fuerte, o incluso la observabilidad fuerte, son condiciones suficientes para la existencia de un UIO; éstas se encuentran dadas en el siguiente teorema.

Teorema 4 *Existe un observador fuerte para el sistema Σ_L si y sólo si éste es fuertemente* detectable.*

El Teorema 4 da las condiciones necesarias y suficientes para que un sistema tenga un UIO, las cuales deben cumplirse estrictamente cuando $w(t)$ es completamente arbitraria, pero pueden relajarse si se tiene algún conocimiento de las características de la señal desconocida, como por ejemplo, acotamiento.

A pesar de que el Teorema 4 da condiciones de existencia de un UIO, no es constructivo. A continuación, se presenta un método para diseñar un UIO, el cual se basa en llevar al sistema a una forma específica, mediante una transformación de similaridad. En primer lugar, para el sistema Σ_L defínase una salida auxiliar

$$\bar{y} = Sy = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \end{bmatrix}$$

con una matriz S regular, tal que

$$SCD = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}$$

La transformación de similaridad $z = Tx$ con

$$T = \begin{bmatrix} SC \\ M \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

donde $MD = 0$, lleva al sistema a la forma:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = \bar{A}_{11}z_1 + \bar{A}_{12}z_2 + \bar{B}_1u_1 + w \\ \dot{z}_2 = \bar{A}_{21}z_1 + \bar{A}_{22}z_2 + \bar{B}_2u_2 \\ \bar{y} = \bar{C}z = \begin{bmatrix} z_1 \\ \bar{C}_{22}z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (2.7)$$

donde

$$\bar{A} = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = TB = \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{C} = SCT^{-1} = \begin{bmatrix} I_q & 0_{q \times (n-q)} \\ 0_{(m-q) \times q} & \bar{C}_{22} \end{bmatrix}$$

con $\bar{C}_{22} = [I_{m-q} \ 0_{(m-q) \times (n-m)}]$. La transformación T desacopla el estado en dos partes: la parte del estado z_1 afectada por la entrada desconocida w es medida a través de la salida y_{a1} , mientras que el resto del estado z_2 no incluye a w . Por tanto, z_1 , a pesar de contener información incierta, es conocido. Para reconstruir todo el estado, se diseña un observador de orden reducido para z_2 , considerando a $z_1 = y_{a1}$ como una entrada conocida:

$$\begin{cases} \dot{\hat{z}}_2 = \bar{A}_{22}\hat{z}_2 + \bar{B}_2u_2 + \bar{A}_{21}\bar{y}_1 + L(\bar{y}_2 - \hat{y}_2) \\ \hat{y}_2 = \bar{C}_{22}\hat{z}_2 \end{cases} \quad (2.8)$$

Finalmente, el estado estimado \hat{x} se obtiene como:

$$\hat{x} = T^{-1}\hat{z} = T^{-1} \begin{bmatrix} \bar{y}_1 \\ \hat{z}_2 \end{bmatrix}, \quad \hat{x} \rightarrow x$$

Adicionalmente, si es posible obtener \dot{x} a partir de x (por ejemplo, mediante el uso de un diferenciador por modos deslizantes), entonces puede reconstruirse la entrada desconocida w empleando la ecuación (2.1).

2.2.2. Sistemas No Lineales

Como se analiza en el apartado anterior, en el caso lineal existen múltiples herramientas para determinar las propiedades de observabilidad/detectabilidad de un sistema, tanto sin entradas desconocidas como en presencia de éstas. Asimismo, las condiciones necesarias y suficientes para la existencia de un UIO están perfectamente establecidas.

Para el caso no lineal, sin embargo, ésta se vuelve una tarea mucho más compleja y sutil, particularmente cuando existen señales desconocidas y/o perturbaciones. La primera diferencia importante para el análisis de la observabilidad entre sistemas lineales y no lineales es que, en estos últimos, la observabilidad del sistema sí depende de la entrada conocida u . Por ende, muchas de las definiciones de observabilidad y detectabilidad para sistemas no lineales están dadas en función de la entrada.

Considere un sistema no lineal de la forma

$$\Sigma_{NL} : \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), w(t)), & x(0) = x_0 \\ y(t) = h(x(t)) \end{cases} \quad (2.9)$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ es el estado, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ es a entrada conocida, $w(t) \in \mathbb{R}^q$ es la entrada desconocida y $y(t) \in \mathbb{R}^p$ es la salida medida o conocida. Suponga que el campo vectorial $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^n$, así como la función $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ son suficientemente suaves. Asuma también que las trayectorias del sistema Σ_{NL} están definidas $\forall t > 0$, para cualquier entrada, lo cual es una hipótesis razonable para sistemas físicos.

En el caso en el que no hay entradas desconocidas, es decir, $w = 0$, existen diversas herramientas que permiten determinar la observabilidad de un sistema. Por ejemplo, si $u = 0$, la observabilidad se verifica mediante la inyectividad del mapeo

$$\mathcal{O}(x) = \begin{bmatrix} h(x) \\ L_f h(x) \\ \vdots \\ L_f^k h(x) \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

donde $L_f h(x)$ es la derivada de Lie de la función $h(x)$ a lo largo del campo vectorial $f(x)$, esto es:

$$L_f h(x) \triangleq \frac{\partial h(x)}{\partial x} f(x)$$

Para derivadas de Lie sucesivas, se cumple que:

$$\begin{aligned} L_f^k h(x) &= L_f L_f^{k-1} h(x) = \frac{\partial L_f^{k-1} h(x)}{\partial x} f(x) \\ L_f^0 h(x) &= h(x) \end{aligned}$$

La observabilidad local alrededor de un punto x_0 de un sistema no lineal sin entradas ($u = w = 0$) puede obtenerse a partir de la condición de rango completo de la matriz de observabilidad

$$d\mathcal{O}(x_0) \triangleq \frac{\partial \mathcal{O}(x_0)}{\partial x} = \begin{bmatrix} dh(x_0) \\ dL_f h(x_0) \\ \vdots \\ dL_f^k h(x_0) \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

donde se usa la notación $d(\cdot) = \frac{\partial}{\partial x}(\cdot)$. En las expresiones (2.10) y (2.11), k es el primer entero para el cual se satisface la condición de inyectividad del mapeo $\mathcal{O}(x)$ o el rango pleno de la matriz de observabilidad $d\mathcal{O}(x_0)$. Contrario al caso lineal, para sistemas no lineales no se conoce el número necesario de derivadas de la salida para obtener observabilidad.

Cuando no existen entradas desconocidas ($w = 0$), la observabilidad equivale a la ausencia de estados indistinguibles. Se dice que dos estados x y \bar{x} son indistinguibles si sus trayectorias respectivas $x(t, x, u)$ y $x(t, \bar{x}, u)$ son diferentes, pero tanto la salida como la entrada del sistema son iguales, es decir, $y(t, x, u) = y(t, \bar{x}, u)$. Queda claro que, únicamente a partir de la información entrada-salida del sistema es imposible saber si las trayectorias de éste corresponderán a x o a \bar{x} . Cuando se presentan entradas desconocidas ($w \neq 0$), pueden introducirse conceptos equivalentes a los ya discutidos. Es necesario resaltar que, generalmente, las propiedades de observabilidad para sistemas no lineales serán dependientes de la entrada conocida u , a diferencia del caso lineal. Las Definiciones 5, 6 así como el Teorema 5 han sido tomados de (Moreno *et al.*, 2014) y (Moreno y Dochain, 2008).

Definición 5 (Observabilidad y detectabilidad del estado con UI) *Considere el sistema no lineal Σ_{NL} con entrada conocida $u \in \mathcal{U}$, condición inicial x_0 y con entrada desconocida (UI) $w \in \mathcal{W}$.*

- Si $\bar{x} \neq x$ es tal que $y(t, x, u, w) = y(t, \bar{x}, u, \bar{w})$, $\forall t \geq 0$ para alguna $\bar{w} \in \mathcal{W}$, entonces \bar{x} es un estado fuertemente u -indistinguible de x . El conjunto de todos los estados fuertemente u -indistinguibles de x se denotará por $\mathcal{J}_{(u,x)}^{UI}$.
- El sistema Σ_{NL} es fuertemente u -observable si para cada x se cumple que $\mathcal{J}_{(u,x)}^{UI} = \{x\}$.
- El sistema Σ_{NL} es fuertemente u -detectable si para cada x , para cada $\bar{x} \in \mathcal{J}_{(u,x)}^{UI}$ y cualquier pareja (w, \bar{w}) que vuelve a \bar{x} indistinguible, esto es, $y(t, x, u, w) = y(t, \bar{x}, u, \bar{w})$, se cumple que $x(t, \bar{x}, u, \bar{w}) \rightarrow x(t, x, u, w)$ conforme $t \rightarrow \infty$.

- *El sistema Σ_{NL} es fuertemente u -asidetectable si $y(t, x, u, w) \rightarrow y(t, \bar{x}, u, \bar{w})$ implica que $x(t, \bar{x}, u, \bar{w}) \rightarrow x(t, x, u, w)$ conforme $t \rightarrow \infty$.*
- *El sistema Σ_{NL} será fuertemente observable (detectable, asidetectable) si es fuertemente u -observable (u -detectable, u -asidetectable) para toda $u \in \mathcal{U}$.*

Para sistemas sin entradas desconocidas, los conceptos previos se reducen a aquellos correspondientes a (u -)observabilidad y (u -)detectabilidad. Más aún, para el caso lineal, corresponden a aquellos introducidos en (Hautus, 1983) y que fueron analizados en la sección previa. Nótese que en la Definición 5 se acuña el término (u -)asidetectabilidad. Éste es completamente equivalente a la propiedad de detectabilidad fuerte*, y se emplea para referirse al hecho de que la convergencia asintótica de salidas para estados indistinguibles $y(t, x, u, w) \rightarrow y(t, \bar{x}, u, \bar{w})$ implica que las trayectorias de los estados indistinguibles también son asintóticamente convergentes, es decir, $x(t, \bar{x}, u, \bar{w}) \rightarrow x(t, x, u, w)$.

De forma análoga al caso lineal, dado que $y(t, x, u, w) = y(t, \bar{x}, u, \bar{w})$ también satisface que $y(t, x, u, w) \rightarrow y(t, \bar{x}, u, \bar{w})$, se sigue que la (u -)asidetectabilidad fuerte implica (u -)detectabilidad fuerte. Sin embargo, el enunciado converso no es cierto para sistemas en tiempo continuo. Más aún, la (u -)observabilidad fuerte implica (u -)detectabilidad fuerte, pero no necesariamente implica (u -)asidetectabilidad fuerte.

Un concepto similar al de observabilidad (detectabilidad) del estado con entradas desconocidas (UI) es el de observabilidad (detectabilidad) de la propia entrada desconocida. Para sistemas no lineales de la forma Σ_{NL} , la UI-observabilidad está asociada con la posibilidad de reconstruir unívocamente la entrada desconocida w en un horizonte de tiempo finito, mientras que la UI-detectabilidad implica que dicha estimación sólo se puede realizar asintóticamente. Cuando se deben estimar tanto el estado como las señales desconocidas, el concepto apropiado de indistinguibilidad está dado a continuación.

Definición 6 (Pares u -indistinguibles con UI) *Considere el sistema no lineal Σ_{NL} con entrada conocida $u \in \mathcal{U}$, condición inicial x y entrada desconocida $w \in \mathcal{W}$. Si las parejas $(x, w) \neq (\bar{x}, \bar{w})$ son tales que $y(t, x, u, w) = y(t, \bar{x}, u, \bar{w})$, $\forall t \geq 0$, entonces (\bar{x}, \bar{w}) es un par u -indistinguible de (x, w) .*

La observabilidad del estado y de la entrada desconocida está dada por la ausencia de pares u -indistinguibles, mientras que la convergencia de trayectorias provenientes de pares indistinguibles corresponde con la detectabilidad del estado y de la entrada desconocida.

Finalmente, es necesario mencionar la relación entre la (u -)asidetectabilidad fuerte y la existencia de un observador con entradas desconocidas para sistemas no lineales, la cual está dada en el siguiente teorema.

Teorema 5 *Si existe un UIO para el sistema Σ_{NL} , entonces éste es u -asidetectable.*

En el caso lineal, la propiedad de detectabilidad fuerte* era la condición necesaria y suficiente para que un sistema tuviera un UIO. Para el caso no lineal, sin embargo, la u -asidetectabilidad es únicamente una condición necesaria para la existencia de un UIO.

2.3. Técnicas de Observación por Modos Deslizantes

El propósito de un observador es estimar los estados internos no medibles de un sistema, empleando para esto únicamente información relativa a la estructura de éste y de las señales conocidas de las entradas y salidas. Básicamente, un observador es una copia del modelo matemático de un sistema, al cual se le agrega un término de corrección basado en el error de salida generado al comparar la salida del observador con aquella correspondiente a la planta real. En el observador clásico (o de Luenberger), el error de salida se retroalimenta linealmente en el sistema observador. Por ende, éste es un observador lineal. Sin embargo, si el sistema está sometido a perturbaciones, incertidumbre paramétrica y/o señales desconocidas, un observador de Luenberger convencional usualmente es incapaz de forzar a que el error de salida sea nulo y de proporcionar estimaciones correctas del estado observado.

En estos casos, un observador por modos deslizantes (*SMO*, *Sliding Mode Observer*) representa un esquema alternativo que proporciona mejores resultados que los métodos convencionales. La efectividad de los algoritmos basados en modos deslizantes radica en la inyección de un término de corrección no lineal, el cual suele ser discontinuo. Esto le proporciona al observador robustez ante incertidumbres y perturbaciones, siempre que éstas se encuentren acotadas. Adicionalmente, los SMO son capaces de forzar a que el error de salida converja a cero en tiempo finito, logrando posteriormente una convergencia asintótica en los estados observados. Otra gran ventaja que tienen los SMO es que son capaces de reconstruir ciertas señales desconocidas en el sistema. Por todas estas razones, los algoritmos por modos deslizantes tienen un gran potencial de aplicación en tareas de observación robusta, UIO y FDI.

En esta sección se presentarán algunos esquemas de observación basados en modos deslizantes, los cuales sirven como antecedente a la técnica desarrollada en el presente trabajo. Se analizan los observadores por modos deslizantes de primer orden, en particular aplicados a la reconstrucción de entradas desconocidas en sistemas no lineales; se mencionarán también algunos algoritmos importantes de segundo orden y posteriormente se abordan los esquemas de orden superior, específicamente, los diferenciadores HOSM. Dado que la teoría de modos deslizantes de orden superior hace un extensivo uso de propiedades derivadas de la homogeneidad, se hace un breve repaso de los sistemas homogéneos, estabilidad en tiempo finito y algunos resultados importantes relacionados.

2.3.1. Esquema FOSMO para Reconstrucción de Señales Desconocidas

Considérese un sistema no lineal con señales desconocidas

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x} = Ax + \Phi(x, u) + Df(t) \\ y = Cx \end{cases} \quad (2.12)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ corresponde al vector de estado, $u \in \mathbb{R}^m$ es el vector de entradas conocidas, $y \in \mathbb{R}^p$ es el vector de salidas medibles y $f(t) \in \mathbb{R}^q$ es un vector de señales desconocidas; las matrices asociadas tienen las siguientes dimensiones:

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n}, C \in \mathbb{R}^{p \times n}, D \in \mathbb{R}^{n \times q}$$

Nuestro objetivo es estimar el estado x del sistema, así como la señal desconocida $f(t)$. Para ello, asúmase que $q \leq p < n$ y que las matrices C y D son ambas de rango completo. La función no lineal $\Phi(x, u)$ se considera conocida y Lipschitz en x , uniformemente en alguna región de operación $u \in U \subset \mathbb{R}^m$; esto es

$$\|\Phi(x_1, u) - \Phi(x_2, u)\| \leq \gamma \|x_1 - x_2\| \quad (2.13)$$

para alguna constante γ . Además, se cumple que $\Phi(0, 0) = 0$. El vector de señales desconocidas $f(t)$ posee una matriz de distribución D y se considera acotado por una constante positiva conocida

$$\|f(t)\| < c \quad (2.14)$$

Se asume que se satisfacen las siguientes dos condiciones:

- (C1) El par (A, C) es observable.
- (C2) Las matrices C y D son tales que $\rho(CD) = q$, es decir, el grado relativo de la salida $y(t)$ a la señal desconocida $f(t)$ es igual a uno.

Introdúzcase ahora el siguiente sistema dinámico como un observador para (2.12):

$$O : \begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + \Phi(\hat{x}, u) + G\nu \\ \hat{y} = C\hat{x} \end{cases} \quad (2.15)$$

donde $G \in \mathbb{R}^{n \times p}$ es una matriz de ganancias a diseñar y $\nu \in \mathbb{R}^p$ es un término de inyección de error de salida, definido por componentes como

$$\nu_i = \rho \operatorname{sign}(\hat{y}_i - y_i) = \rho \operatorname{sign}(e_{y,i}), \quad i = 1, \dots, p \quad (2.16)$$

Defínase el error de estimación del estado como

$$e(t) \triangleq \hat{x}(t) - x(t) \quad (2.17)$$

Por otro lado, considérese la transformación lineal de estados

$$\xi = T_c x, \quad T_c = \begin{bmatrix} N_c^T & (n-p) \times n \\ C & p \times n \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

donde las columnas de $N_c \in \mathbb{R}^{n \times (n-p)}$ generan el espacio nulo de C , es decir

$$CN_c = 0$$

Al aplicar dicho cambio de coordenadas al sistema dado por (2.12), se obtiene el sistema transformado

$$\bar{\Sigma} : \begin{cases} \dot{\xi} = \bar{A}\xi + \bar{\Phi}(\xi, u) + \bar{D}f(t) \\ y = \bar{C}\xi \end{cases} \quad (2.19)$$

con

$$\begin{aligned} \bar{A} &\triangleq T_c A T_c^{-1}, \\ \bar{\Phi} &\triangleq T_c \Phi(x, u), \\ \bar{C} &\triangleq C T_c^{-1} = \begin{bmatrix} 0_{p \times (n-p)} & I_{p \times p} \end{bmatrix}, \\ \bar{D} &\triangleq T_c D \end{aligned} \quad (2.20)$$

De forma análoga, el observador (2.15) expresado en las nuevas coordenadas asume la forma:

$$\bar{O} : \begin{cases} \dot{\hat{\xi}} = \bar{A}\hat{\xi} + \bar{\Phi}(\hat{\xi}, u) + \bar{G}\nu \\ \hat{y} = \bar{C}\hat{\xi} \end{cases} \quad (2.21)$$

Asúmase que G se diseña de forma tal que, en las nuevas coordenadas, \bar{G} tiene la siguiente estructura:

$$\bar{G} \triangleq T_c G = \begin{bmatrix} L^{(n-p) \times p} \\ -I_{p \times p} \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

Ahora, supóngase que la matriz D está acoplada con G , es decir:

$$D = GX \quad (2.23)$$

para alguna $X \in \mathbb{R}^{p \times q}$. En (Alwi *et al.*, 2011) se muestra que, si la condición (C2) se satisface, entonces D siempre puede descomponerse de la forma anterior. Por lo tanto, y al considerar (2.22), en las coordenadas transformadas se tiene que

$$\bar{D} = T_c D = T_c G X = \bar{G} X = \begin{bmatrix} L^{(n-p) \times p} \\ -I_{p \times p} \end{bmatrix} X_{p \times q} = \begin{bmatrix} LX^{(n-p) \times q} \\ -X_{p \times q} \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

La transformación T_c divide al estado $\xi \in \mathbb{R}^n$ en dos partes:

$$\xi = T_c x = \begin{bmatrix} N_c^T \\ C \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} N_c^T x \\ Cx \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_c^T x \\ y \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} \xi_1^{(n-p) \times 1} \\ \xi_2^{p \times 1} \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

donde ξ_1 no depende de las variables medidas y ξ_2 corresponde a la salida.

Al tomar en cuenta lo anterior, junto con (2.24), puede expresarse al sistema transformado (2.19) como

$$\bar{\Sigma} : \begin{cases} \dot{\xi}_1 = \bar{A}_{11}\xi_1 + \bar{A}_{12}\xi_2 + \bar{\Phi}_1(\xi, u) + LXf(t) \\ \dot{\xi}_2 = \bar{A}_{21}\xi_1 + \bar{A}_{22}\xi_2 + \bar{\Phi}_2(\xi, u) - Xf(t) \\ y = \bar{C}\xi = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \xi_2 \end{cases} \quad (2.26)$$

con

$$\bar{A} \triangleq T_c A T_c^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix}, \quad (2.27)$$

$$\bar{\Phi} \triangleq T_c \Phi(x, u) = \begin{bmatrix} \bar{\Phi}_1(\xi, u) & \bar{\Phi}_2(\xi, u) \end{bmatrix}^T, \quad (2.28)$$

$$\bar{A}_{11} \in \mathbb{R}^{(n-p) \times (n-p)}, \quad \bar{A}_{12} \in \mathbb{R}^{(n-p) \times p}, \quad \bar{A}_{21} \in \mathbb{R}^{p \times (n-p)}, \quad \bar{A}_{22} \in \mathbb{R}^{p \times p}$$

$$\bar{\Phi}_1 \in \mathbb{R}^{(n-p)}, \quad \bar{\Phi}_2 \in \mathbb{R}^p$$

Se dice que el sistema (2.26) se encuentra en la forma regular de observación. De la misma manera, al considerar (2.22), el observador (2.21) se convierte en

$$\bar{O} : \begin{cases} \dot{\hat{\xi}}_1 = \bar{A}_{11}\hat{\xi}_1 + \bar{A}_{12}\hat{\xi}_2 + \bar{\Phi}_1(\hat{\xi}, u) + L\nu \\ \dot{\hat{\xi}}_2 = \bar{A}_{21}\hat{\xi}_1 + \bar{A}_{22}\hat{\xi}_2 + \bar{\Phi}_2(\hat{\xi}, u) - \nu \\ \hat{y} = \bar{C}\hat{\xi} = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\xi}_1 \\ \hat{\xi}_2 \end{bmatrix} = \hat{\xi}_2 \end{cases} \quad (2.29)$$

El error de estimación de estados en coordenadas transformadas es

$$\begin{aligned} \epsilon_1(t) &\triangleq \hat{\xi}_1(t) - \xi_1(t) \\ \epsilon_2(t) &\triangleq \hat{\xi}_2(t) - \xi_2(t) \\ \epsilon(t) &\triangleq \begin{bmatrix} \epsilon_1(t) & \epsilon_2(t) \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (2.30)$$

El error de estimación de salida es

$$\epsilon_y(t) \triangleq \hat{y}(t) - y(t) = \hat{\xi}_2(t) - \xi_2(t) = \epsilon_2(t) \quad (2.31)$$

Tomando en cuenta (2.26), (2.29) y (2.31), es posible obtener la dinámica del error de estimación de estados

$$\epsilon : \begin{cases} \dot{\epsilon}_1 = \bar{A}_{11}\epsilon_1 + \bar{A}_{12}\epsilon_y + \left(\bar{\Phi}_1(\hat{\xi}, u) - \bar{\Phi}_1(\xi, u) \right) + L\nu - LXf(t) \\ \dot{\epsilon}_2 = \dot{\epsilon}_y = \bar{A}_{21}\epsilon_1 + \bar{A}_{22}\epsilon_y + \left(\bar{\Phi}_2(\hat{\xi}, u) - \bar{\Phi}_2(\xi, u) \right) - \nu + Xf(t) \end{cases} \quad (2.32)$$

Ahora, para asegurar que se establezca una dinámica deslizante en la superficie $S \triangleq \{\epsilon \mid C\epsilon = \epsilon_y \equiv 0\}$, debe cumplirse la denominada *condición de alcanzabilidad* (Utkin, 2013), (Shtessel *et al.*, 2014)

$$\epsilon_y \dot{\epsilon}_y < -\eta \|\epsilon_y\| \quad (2.33)$$

O, componente a componente

$$\epsilon_{y,i} \dot{\epsilon}_{y,i} < -\eta |\epsilon_{y,i}|, \quad i = 1, \dots, p \quad (2.34)$$

Entonces, de (2.32), se tiene que

$$\epsilon_{y,i} \dot{\epsilon}_{y,i} = \epsilon_{y,i} \left[\bar{A}_{21,i} \epsilon_1 + \bar{A}_{22,i} \epsilon_y + \left(\bar{\Phi}_{2,i}(\hat{\xi}, u) - \bar{\Phi}_{2,i}(\xi, u) \right) - \nu_i + X_i f(t) \right], \quad i = 1, \dots, p \quad (2.35)$$

Tomando en cuenta la definición de ν dada en (2.16), así como las condiciones Lipschitz y de acotamiento para Φ y $f(t)$ en (2.13), (2.14), se llega a:

$$\epsilon_{y,i} \dot{\epsilon}_{y,i} < -|\epsilon_{y,i}| \left[\bar{A}_{21,i} \epsilon_1 + \bar{A}_{22,i} \epsilon_y + \gamma \underbrace{\|\hat{\xi} - \xi\|}_{\|\epsilon\| \leq \|\epsilon_1\| + \|\epsilon_y\|} + c \|X_i\| - \varrho \right], \quad i = 1, \dots, p \quad (2.36)$$

Por tanto, tomando

$$\varrho > \|(\bar{A}_{21} + \gamma I) \epsilon_1 + (\bar{A}_{22} + \gamma I) \epsilon_y + cX\| + \eta, \quad \eta > 0, \quad (2.37)$$

se satisface la condición de alcanzabilidad (2.34), asegurándose entonces que $\epsilon_y \rightarrow 0$ en tiempo finito. Denótese como t_r al instante de tiempo en el cual se establece el régimen deslizante sobre la superficie S ; entonces, para todo $t > t_r$, la dinámica del error de estimación dada por (2.32) es

$$\epsilon : \begin{cases} \dot{\epsilon}_1 = \bar{A}_{11} \epsilon_1 + \left(\bar{\Phi}_1(\hat{\xi}, u) - \bar{\Phi}_1(\xi, u) \right) + L\nu_{eq} - LXf(t) \\ 0 = \bar{A}_{21} \epsilon_1 + \left(\bar{\Phi}_2(\hat{\xi}, u) - \bar{\Phi}_2(\xi, u) \right) - \nu_{eq} + Xf(t), \end{cases} \quad (2.38)$$

la cual se denomina dinámica reducida en régimen deslizante. En ésta, el término ν_{eq} corresponde a la inyección de salida equivalente, la cual es la señal continua que teóricamente mantendría el modo deslizante sobre S . La inyección de salida ν_{eq} puede obtenerse a partir de ν filtrando ésta mediante un filtro pasa-bajas:

$$\dot{\nu}_{eq} = -\omega \nu_{eq} + \omega \nu \quad (2.39)$$

donde ω es la frecuencia de corte. De la segunda igualdad en (2.38), se tiene que

$$\nu_{eq} = \bar{A}_{21} \epsilon_1 + \left(\bar{\Phi}_2(\hat{\xi}, u) - \bar{\Phi}_2(\xi, u) \right) + Xf(t), \quad \forall t > t_r \quad (2.40)$$

Al sustituir esta expresión en la primera igualdad, se llega a

$$\dot{\epsilon}_1 = (\bar{A}_{11} + L\bar{A}_{21}) \epsilon_1 + \left(\bar{\Phi}_1(\hat{\xi}, u) - \bar{\Phi}_1(\xi, u) \right) + L \left(\bar{\Phi}_2(\hat{\xi}, u) - \bar{\Phi}_2(\xi, u) \right), \quad \forall t > t_r \quad (2.41)$$

Nótese que la dinámica reducida de ϵ_1 dada por (2.41) no depende de la señal desconocida $f(t)$. Debido a la propiedad de acoplamiento (2.24), la matriz L ya no es libre, sino que está restringida a cumplir dicha condición. Este observador sólo es capaz de garantizar la estabilidad local de $\epsilon = 0$. La ganancia G en coordenadas originales se calcula como:

$$G = T_c^{-1} \begin{bmatrix} L \\ -I \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

Una vez que el observador ha convergido, se tiene que $\hat{\xi} = \xi$; entonces, de (2.40)

$$\nu_{eq} = Xf(t), \quad (2.43)$$

por lo que

$$f(t) \approx (X^T X)^{-1} X^T \nu_{eq} \triangleq X^+ \nu_{eq} \quad (2.44)$$

donde X^+ es la matriz pseudo-inversa de Moore-Penrose para X .

2.3.1.1. Ensanchamiento de la Región de Atracción

Puede demostrarse que, para el diseño anterior, el régimen deslizante sólo se establecerá si el error inicial (ϵ_1, ϵ_y) pertenece a cierta región del espacio fase, y que el tamaño de dicha región puede aumentarse al incrementar la ganancia del término discontinuo ρ . Sin embargo, por consideraciones prácticas, no resulta conveniente tener valores elevados de ρ . Una forma más elegante de extender la región de atracción del observador y de robustificar el diseño es a partir de la introducción de una retroalimentación lineal del error de salida.

Considérese la nueva transformación de coordenadas:

$$T_s = \begin{bmatrix} I_{(n-p) \times (n-p)} & L_{(n-p) \times p} \\ 0_{p \times (n-p)} & I_{p \times p} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \xi'_1 \\ \xi'_2 \end{bmatrix} = T_s \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

Al aplicar T_s al sistema dado en (2.26), se obtiene:

$$\bar{\Sigma}' : \begin{cases} \dot{\xi}'_1 = \bar{A}'_{11} \xi'_1 + \bar{A}'_{12} \xi'_2 + \bar{\Phi}'_1(\xi', u) \\ \dot{\xi}'_2 = \bar{A}'_{21} \xi'_1 + \bar{A}'_{22} \xi'_2 + \bar{\Phi}'_2(\xi', u) - Xf(t) \\ y' = y = \xi'_2 \end{cases} \quad (2.46)$$

donde:

$$\begin{aligned} \bar{A}'_{11} &= \bar{A}_{11} + L\bar{A}_{21}, & \bar{A}'_{12} &= \bar{A}_{12} + L\bar{A}_{22} - \bar{A}_{11}L - L\bar{A}_{21}L \\ \bar{A}'_{21} &= \bar{A}_{21}, & \bar{A}'_{22} &= \bar{A}_{22} - \bar{A}_{21}L \end{aligned} \quad (2.47)$$

$$\begin{aligned}\bar{\Phi}'_1(\xi', u) &= \bar{\Phi}_1(\xi, u) + L\bar{\Phi}_2(\xi, u) \\ \bar{\Phi}'_2(\xi', u) &= \bar{\Phi}_2(\xi, u)\end{aligned}\quad (2.48)$$

De la misma manera, el observador (2.29) se convierte en:

$$\bar{O}' : \begin{cases} \dot{\hat{\xi}}'_1 = \bar{A}'_{11}\hat{\xi}'_1 + \bar{A}'_{12}\hat{\xi}'_2 + \bar{\Phi}'_1(\hat{\xi}', u) \\ \dot{\hat{\xi}}'_2 = \bar{A}'_{21}\hat{\xi}'_1 + \bar{A}'_{22}\hat{\xi}'_2 + \bar{\Phi}'_2(\hat{\xi}', u) - \nu \\ \hat{y}' = \hat{\xi}'_2 \end{cases}\quad (2.49)$$

Agregando a este observador un término lineal del error de salida, se tiene

$$\bar{O}' : \begin{cases} \dot{\hat{\xi}}'_1 = \bar{A}'_{11}\hat{\xi}'_1 + \bar{A}'_{12}\hat{\xi}'_2 + \bar{\Phi}'_1(\hat{\xi}', u) + \bar{G}'_{l1}\epsilon'_y \\ \dot{\hat{\xi}}'_2 = \bar{A}'_{21}\hat{\xi}'_1 + \bar{A}'_{22}\hat{\xi}'_2 + \bar{\Phi}'_2(\hat{\xi}', u) - \nu + \bar{G}'_{l2}\epsilon'_y \\ \hat{y}' = \hat{\xi}'_2 \end{cases}\quad (2.50)$$

con los siguientes errores de estimación

$$\begin{aligned}\epsilon'_1(t) &\triangleq \hat{\xi}'_1(t) - \xi'_1(t) \\ \epsilon'_2(t) &\triangleq \hat{\xi}'_2(t) - \xi'_2(t) = \epsilon'_y(t)\end{aligned}\quad (2.51)$$

De (2.46) y (2.50), la dinámica del error está dada por

$$\epsilon' : \begin{cases} \dot{\epsilon}'_1 = \bar{A}'_{11}\epsilon'_1 + \bar{A}'_{12}\epsilon'_y + \left(\bar{\Phi}'_1(\hat{\xi}', u) - \bar{\Phi}'_1(\xi', u) \right) + \bar{G}'_{l1}\epsilon'_y \\ \dot{\epsilon}'_y = \bar{A}'_{21}\epsilon'_1 + \bar{A}'_{22}\epsilon'_y + \left(\bar{\Phi}'_2(\hat{\xi}', u) - \bar{\Phi}'_2(\xi', u) \right) - \nu + \bar{G}'_{l2}\epsilon'_y - Xf(t) \end{cases}\quad (2.52)$$

Seleccionando las ganancias $\bar{G}'_{l1} = -\bar{A}'_{12}$ y $\bar{G}'_{l2} = -\bar{A}'_{22} + \bar{A}'_{22}{}^s$ con $\bar{A}'_{22}{}^s$ Hurwitz, el error en (2.52) es:

$$\epsilon' : \begin{cases} \dot{\epsilon}'_1 = \bar{A}'_{11}\epsilon'_1 + \bar{A}'_{12}\epsilon'_y + \left(\bar{\Phi}'_1(\hat{\xi}', u) - \bar{\Phi}'_1(\xi', u) \right) \\ \dot{\epsilon}'_y = \bar{A}'_{21}\epsilon'_1 + \bar{A}'_{22}{}^s\epsilon'_y + \left(\bar{\Phi}'_2(\hat{\xi}', u) - \bar{\Phi}'_2(\xi', u) \right) - \nu - Xf(t) \end{cases}\quad (2.53)$$

La matriz $\bar{A}'_{11} = \bar{A}_{11} + L\bar{A}_{21}$ debería ser Hurwitz por diseño. Al seleccionar ϱ suficientemente grande, se asegura la convergencia de ϵ'_y a cero en tiempo finito.

Finalmente, en coordenadas originales, el observador es:

$$O_L : \begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + \Phi(\hat{x}, u) + G\nu + GLe_y \\ \hat{y} = C\hat{x} \end{cases}\quad (2.54)$$

con las matrices de ganancias

$$G = T_c^{-1} \begin{bmatrix} L^{(n-p) \times p} \\ -I_{p \times p} \end{bmatrix} = T_c^{-1} T_s^{-1} \begin{bmatrix} 0^{(n-p) \times p} \\ -I_{p \times p} \end{bmatrix}, \quad (2.55)$$

$$G_L = T_c^{-1} T_s^{-1} \begin{bmatrix} -\bar{A}'_{12} \\ -\bar{A}'_{22} + \bar{A}'_{22} \end{bmatrix}$$

2.3.2. Algoritmos SOSM

Los algoritmos por modos deslizantes convencionales o de primer orden constituyen una solución robusta y sumamente precisa para una amplia gamma de problemas de control y de observación. Como muestra de ello, en el apartado anterior se presentó un método para diseñar un UIO para un sistema no lineal, el cual es capaz no sólo de estimar apropiadamente el estado, sino que además reconstruye la señal exógena desconocida.

Sin embargo, los algoritmos de primer orden poseen dos inherentes desventajas. En primer lugar, sólo resultan útiles cuando el grado relativo es igual a uno. En términos de control, esto significa que la variable de control $u(t)$ debe aparecer explícitamente en la primera derivada de la salida o variable deslizante σ , la cual se buscará llevar a cero en tiempo finito mediante una conmutación de alta frecuencia de $u(t)$, estableciéndose entonces la dinámica reducida sobre la superficie de deslizamiento $\sigma = 0$. En el ejemplo del apartado anterior, esta restricción se manifiesta en la condición (C2), la cual exige que el grado relativo de la salida medible $y(t)$ a la señal desconocida a reconstruir $f(t)$ sea igual a uno.

La otra principal desventaja de los algoritmos de primer orden es el *chattering*, o la conmutación de alta frecuencia en la variable de control $u(t)$, producida por la acción de la función signo, la cual es discontinua. Si bien esto resulta más problemático para tareas de control (dado que puede ser perjudicial para la planta y los actuadores), en labores de observación también implica ciertos inconvenientes. En el ejemplo del apartado anterior, la reconstrucción de la entrada desconocida $f(t)$ sólo puede lograrse a partir de filtrar la señal discontinua correspondiente al término de inyección de error de salida ν , obteniéndose entonces el denominado término de inyección de salida equivalente ν_{eq} .

Una solución para los problemas relativos a los modos deslizantes convencionales consiste en emplear algoritmos por modos deslizantes de segundo orden (*SOSM*, *Second-Order Sliding Mode*). A continuación se presentarán los algoritmos SOSM más relevantes y algunas de sus características. La discusión se enfocará en el problema de observación, especialmente en el de diferenciación.

El primero y más sencillo de los algoritmos SOSM es el denominado algoritmo Twisting (*TA*, *Twisting Algorithm*). Considere la planta de segundo orden

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = w(t) \\ y = x_1 \end{cases} \quad (2.56)$$

donde $w(t)$ está acotada. El TA para observar el estado del sistema anterior está dado por

$$TA : \begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2 \\ \dot{\hat{x}}_2 = -a[\dot{e}_1]^0 - b[e_1]^0 \end{cases} \quad (2.57)$$

en donde se usa la notación

$$[\cdot]^n \triangleq |\cdot|^n \text{sign}(\cdot) \quad (2.58)$$

con la función signo multivaluada

$$\text{sign}(\theta) = \begin{cases} +1 & \text{si } \theta > 0 \\ [-1, 1] & \text{si } \theta = 0 \\ -1 & \text{si } \theta < 0 \end{cases}$$

Nota 1 Obsérvese que

- $[\cdot]^1 = (\cdot)$
- $[\cdot]^0 = \text{sign}(\cdot)$

Los errores de observación son

$$e_1 \triangleq \hat{x}_1 - x_1, \quad e_2 \triangleq \hat{x}_2 - x_2$$

La dinámica del error de observación es, entonces

$$e_{TA} : \begin{cases} \dot{e}_1 = e_2 \\ \dot{e}_2 = -a[\dot{e}_1]^0 - b[e_1]^0 - w(t) \end{cases} \quad (2.59)$$

debido a que la dinámica (2.59) es discontinua, sus soluciones deben entenderse en el sentido de Filippov (Filipov, 1988). Para una elección correcta de los parámetros a y b , el TA asegura convergencia en tiempo finito de ambas variables e_1 y \dot{e}_1 , es decir, existe $T > 0$ tal que $e_1 = \dot{e}_1 = 0, \forall t > T$. Por lo tanto, se dice que el TA es un algoritmo SOSM, dado que establece la existencia de un modo deslizante en el origen $(e_1, \dot{e}_1) = (0, 0)$, esto es, lleva a una variable y a su primera derivada a cero en tiempo finito.

Una característica importante del TA es que elimina la necesidad de diseñar una superficie de deslizamiento, gracias al colapso en la dinámica del sistema. En este caso, la convergencia del estado completo se da en tiempo finito, a diferencia de los algoritmos de primer orden, donde la convergencia a la superficie de deslizamiento es en tiempo finito, pero una vez que se establece la dinámica reducida, la convergencia al origen sólo es exponencial. Lo anterior se logrará incluso en presencia de la perturbación $w(t)$, siempre que ésta sea acotada; esto es, la observación es robusta ante perturbaciones.

A pesar de sus características positivas, el TA fue sumamente criticado en un principio, debido a que hace uso de la derivada de la variable de deslizamiento para su

implementación. En el caso del sistema (2.56), si $\dot{e}_1 = e_2 = \hat{x}_2 - x_2$ es medible, entonces $x_2 = \hat{x}_2 - \dot{e}_1$ es conocido y, por ende, se tiene acceso a todo el estado, haciendo innecesario el uso de un observador.

Como respuesta a las desventajas del TA surgió el algoritmo Super-Twisting (*STA*, *Super-Twisting Algorithm*) propuesto originalmente en (Levant, 1993). Para la planta (2.56), el observador STA es

$$STA : \begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = -k_1 |e_1|^{1/2} + \hat{x}_2 \\ \dot{\hat{x}}_2 = -k_2 |e_1|^0 \end{cases} \quad (2.60)$$

donde se aprecia que ya no se requiere la derivada \dot{e}_1 . La correspondiente dinámica de error es

$$e_{STA} : \begin{cases} \dot{e}_1 = -k_1 |e_1|^{1/2} + e_2 \\ \dot{e}_2 = -k_2 |e_1|^0 - w(t) \end{cases} \quad (2.61)$$

Nuevamente, las soluciones de este sistema deben ser entendidas en el sentido de Filippov. El STA logra convergencia en tiempo finito de e_1 y e_2 , y es capaz de compensar cualquier perturbación $w(t)$ Lipschitz acotada, para un conjunto apropiado de ganancias k_1 y k_2 . La convergencia del STA ha sido probada a partir de métodos geométricos (Levant, 1993) o empleando herramientas de homogeneidad. Sin embargo, estas técnicas resultan sumamente complejas y de difícil aplicación. En (Moreno, 2011) se presenta un análisis de estabilidad basado en la teoría de Lyapunov para el STA y, en general, para los algoritmos SOSM.

Posteriormente, en (Moreno, 2009) se introduce un nuevo algoritmo de segundo orden, el cual es una extensión del STA, denominado Super-Twisting generalizado (*GSTA*, *Generalized Super-Twisting Algorithm*). Para la planta en análisis (2.56), el observador GSTA está dado por

$$GSTA : \begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = -k_1 \varphi_1(e_1) + \hat{x}_2 \\ \dot{\hat{x}}_2 = -k_2 \varphi_2(e_1) \end{cases} \quad (2.62)$$

$$\begin{aligned} \varphi_1(e_1) &= \mu_1 |e_1|^{1/2} + \mu_2 |e_1|^{3/2}, \quad \mu_1, \mu_2 > 0 \\ \varphi_2(e_1) &= \frac{\mu_1^2}{2} |e_1|^0 + 2\mu_1 \mu_2 e_1 + \frac{3\mu_2^2}{2} |e_1|^2 \end{aligned} \quad (2.63)$$

El error de observación es

$$e_{GSTA} : \begin{cases} \dot{e}_1 = -k_1 \varphi_1(e_1) + e_2 \\ \dot{e}_2 = -k_2 \varphi_2(e_1) - w(t) \end{cases} \quad (2.64)$$

Nuevamente, el GSTA logra convergencia en tiempo finito de e_1 y e_2 , siendo insensible a perturbaciones e incertidumbres Lipschitz acotadas. Sin embargo, a diferencia del STA, el tiempo de convergencia en el GSTA puede ser asignado para cualquier condición inicial arbitraria; esto es, el tiempo de convergencia es independiente de la condición inicial del observador. Esta propiedad se denomina convergencia en tiempo fijo.

Adicionalmente a los algoritmos ya mencionados, es posible encontrar otros esquemas en la literatura, como el algoritmo de ley de convergencia terminal (o algoritmo por

modos deslizantes terminal) (Levant, 1993), los controladores cuasi-continuos (Levant, 2006) y el controlador sub-óptimo (Bartolini et al., 1997).

Los algoritmos SOSM analizados en este apartado pertenecen a la familia del algoritmo genérico de segundo orden (*GSOA*, *Generic Second-Order Algorithm*), introducida en (Moreno, 2011). El GSOA está definido por

$$GSOA : \begin{cases} \dot{\varsigma}_1 = -k_1(t)\phi_1(\varsigma_1) + \varsigma_2 + \pi_1(t, \varsigma) \\ \dot{\varsigma}_2 = -k_2(t)\phi_2(\varsigma_1) + \pi_2(t, \varsigma) \end{cases} \quad (2.65)$$

donde ς_i , $i = 1, 2$ son las variables de estado, $k_i(t)$ son funciones de ganancia, positivas y continuas, a diseñar y $\pi_i(t, \varsigma)$ son perturbaciones acotadas. Las funciones no lineales $\phi_1(\varsigma_1)$ y $\phi_2(\varsigma_1)$ son

$$\begin{aligned} \phi_1(\varsigma_1) &= \mu_1[\varsigma_1]^p + \mu_2[\varsigma_1]^q \\ \phi_2(\varsigma_1) &= \mu_1^2 p [\varsigma_1]^{2p-1} + \mu_1 \mu_2 (p+q) [\varsigma_1]^{p+q-1} + \mu_2^2 q [\varsigma_1]^{2q-1} \end{aligned} \quad (2.66)$$

donde $\mu_1, \mu_2 \geq 0$ son constantes no negativas y $q \geq 1 \geq p \geq 1/2$ parámetros reales. Nótese que las funciones $\phi_1(\varsigma_1)$ y $\phi_2(\varsigma_1)$ son monótonas crecientes para $p > 1/2$. Sin embargo, para $p = 1/2$, la función $\phi_2(\varsigma_1)$ presenta una discontinuidad acotada en $\varsigma_1 = 0$. Los casos cuando $0 < p < 1/2$ se excluyen, dado que $\phi_2(\varsigma_1)$ presenta una discontinuidad no acotada en $\varsigma_1 = 0$. Dado que $\phi_2(\varsigma_1)$ no necesariamente es continua, las soluciones del sistema (2.65) deben ser entendidas en el sentido de Filippov.

Nótese también que el GSOA posee un término de bajo orden $\mu_1[\varsigma_1]^p$ con $1/2 \leq p \leq 1$ y otro de alto orden $\mu_2[\varsigma_1]^q$, $q \geq 1$. El tipo de convergencia del GSOA, con y sin perturbaciones, depende en gran medida de los valores escogidos de p y q .

Para diversos valores de los parámetros (μ_1, μ_2, p, q) se recuperan ciertos casos particulares de interés:

- (L) Si $(\mu_1, \mu_2, p, q) = (1, 0, 1, 1)$, se obtiene un algoritmo lineal ($\phi_1(\varsigma_1) = \phi_2(\varsigma_1) = \varsigma_1$).
- (TA) Si $(\mu_1, \mu_2, p, q) = (1, 0, 1/2, q)$, se obtiene el TA dado en (2.59), con el cambio de variables $\varsigma_i = e_i$, $i = 1, 2$ y tomando $k_1 = 0$, $k_2 = 2b$, $\pi_1(t, e) = 0$ y $\pi_2(t, e) = -a[e_2]^0 - w(t)$.
- (STA) Si $(\mu_1, \mu_2, p, q) = (1, 0, 1/2, q)$, se obtiene el STA clásico (2.61). Nótese que en este caso ϕ_2 es discontinua.
- (H) Para $(\mu_1, \mu_2, p, q) = (1, 0, p, q)$, $p \geq 1/2$, se obtiene un algoritmo homogéneo. Con $p = 1/2$ se recupera el STA.
- (GSTA) Para $(\mu_1, \mu_2, p, q) = (\mu_1, \mu_2, 1/2, 1)$, $\mu_1, \mu_2 \geq 0$, se obtiene el GSTA (2.64).

Todos los esquemas anteriores emplean ganancias k_1, k_2 constantes; sin embargo, un algoritmo Super-Twisting generalizado variable (*VGSTA*, *Variable Generalized Super-Twisting Algorithm*) puede obtenerse al usar ganancias $k_i(t)$ variantes en el tiempo.

2.3.3. Sistemas Homogéneos y Estabilidad en Tiempo Finito

En este trabajo, se hará uso de sistemas que tienen una propiedad bastante útil, conocida como homogeneidad. Ésta ha sido ampliamente explotada por la teoría de Modos Deslizantes, particularmente como herramienta para demostrar la estabilidad de algoritmos de orden superior (Fridman, 2011), (Moreno, 2018). En esta sección, se presentan las nociones mínimas de sistemas homogéneos, necesarias para entender este trabajo. Asimismo, se analiza la relación existente entre la homogeneidad de un sistema y otra importante propiedad denominada estabilidad en tiempo finito (*FTS*, *Finite-Time Stability*). Las definiciones y teoremas en este apartado han sido tomados de (Shtessel *et al.*, 2014) y (Sanchez *et al.*, 2017).

Considere un vector $x = [x_1, \dots, x_n]^\top \in \mathbb{R}^n$, donde a cada coordenada x_i se le ha asignado un número $r_i > 0$ conocido como su peso o grado de homogeneidad; lo anterior se denota como $\text{deg}(x_i) = r_i$, $i = 1, \dots, n$. Sea $r = [r_1, \dots, r_n]^\top \in \mathbb{R}^n$ el vector de pesos de las componentes de x . Sea además un escalar positivo $\epsilon > 0$.

Definición 7 (Dilatación) *El operador de dilatación homogénea (o simplemente dilatación) del vector x está dado por:*

$$\Delta_\epsilon^r x \triangleq \left[\epsilon^{r_1} x_1, \dots, \epsilon^{r_n} x_n \right]^\top \quad (2.67)$$

A partir de la definición de dilatación homogénea anterior, es posible establecer la propiedad de r -homogeneidad (o simplemente homogeneidad) para funciones, campos vectoriales y campos vectoriales multivaluados.

Definición 8 *Una función $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es r -homogénea con grado de homogeneidad $\text{deg}(V) = l \in \mathbb{R}$ si la identidad*

$$V(\Delta_\epsilon^r x) = \epsilon^l V(x) \quad (2.68)$$

se satisface para cualquier $\epsilon > 0$.

Sean V_1 y V_2 dos funciones homogéneas no idénticamente nulas de $x \in \mathbb{R}^n$, con grados de homogeneidad l_1 y l_2 , respectivamente. Sea además un escalar $\lambda \in \mathbb{R}$. Las siguientes son reglas simples de álgebra homogénea:

1. $\forall \lambda \neq 0$ se tiene que $\text{deg}(\lambda) = 0$. El grado de homogeneidad de $\lambda = 0$ no está definido.
2. La suma $V_1(x) + V_2(x)$ es homogénea sólo si $l_1 = l_2$.
3. $\text{deg}(V_1 V_2) = \text{deg}(V_1) + \text{deg}(V_2) = l_1 + l_2$.

4. $\deg(V_1/V_2) = \deg(V_1) - \deg(V_2) = l_1 - l_2$.
5. $\deg(\lambda V_1) = \deg(V_1) = l_1$.
6. $\deg\left(\frac{\partial V_1(x)}{\partial x_i}\right) = \deg(V_1) - \deg(x_i) = l_1 - r_i$, siempre que $\frac{\partial V_1(x)}{\partial x_i} \neq 0$.

Definición 9 Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial (o $F(x) \subset \mathbb{R}^n$ un campo vectorial multivaluado). Éste es r -homogéneo de grado m si la identidad

$$f(\Delta_\epsilon^r x) = \epsilon^m \Delta_\epsilon^r f(x) \quad \left(F(\Delta_\epsilon^r x) = \epsilon^m \Delta_\epsilon^r F(x) \right) \quad (2.69)$$

se satisface para cualquier $\epsilon > 0$.

La derivada de Lie de una función homogénea $V(x)$ a lo largo de un campo vectorial homogéneo $f(x)$

$$L_f V(x) \triangleq \frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x)$$

es homogénea de grado $\deg(V) + \deg(f)$.

Definición 10 (Norma homogénea) Dada la dilatación $\Delta_\epsilon^r x$ del vector $x \in \mathbb{R}^n$ con el vector de pesos de homogeneidad r , la norma homogénea está dada por

$$\|x\|_{r,p} \triangleq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^{\frac{p}{r_i}} \right)^{1/p} \quad (2.70)$$

$\forall x \in \mathbb{R}^n$ y para cualquier $p \geq 1$.

El conjunto $S \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_{r,p} = 1\}$ es la esfera homogénea unitaria correspondiente al valor particular de p . Una propiedad importante de los sistemas homogéneos es que las trayectorias de éstos pueden ser obtenidas en cualquier región del espacio mediante una dilatación de las trayectorias en la esfera unitaria. Esto significa que la estabilidad local implica estabilidad global.

Otra propiedad interesante de los sistemas homogéneos está asociada a la estabilidad en tiempo finito. Considérese el sistema

$$\dot{x} = f(x), \quad x(0) = 0,$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es el estado y $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es el campo vectorial asociado, tal que $f(0) = 0$. Asíumase que el origen $x = 0$ es un punto de equilibrio asintóticamente estable. Si el campo f es discontinuo, el sistema puede reemplazarse por la inclusión diferencial (*DI*, *Differential Inclusion*)

$$\dot{x} \in F(x) \subset \mathbb{R}^n, \quad 0 \in F(x).$$

El campo vectorial multivaluado $F(x)$ y las soluciones de la DI anterior se entienden en el sentido de Filippov (Filipov, 1988).

Definición 11 (Estabilidad en tiempo finito) Sea $B_\varrho(y) \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - y\| < \varrho\}$ la bola abierta centrada en $y \in \mathbb{R}^n$ con radio $\varrho > 0$ y denótese por $B_\varrho = B_\varrho(0)$ a una bola abierta con radio ϱ centrada en el origen. Se dice que el punto $x = 0$ es FTS si éste es asintóticamente estable y para cada $x_0 \in B_\varrho - \{0\}$, cualquier trayectoria $x(t, x_0)$ alcanza el origen en algún instante finito de tiempo $t = T(x_0)$ y permanece ahí para cualquier $t > T(x_0)$. La función $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ se llama tiempo de asentamiento. Si $B_\varrho = \mathbb{R}^n$, se dice que el origen es globalmente FTS.

El siguiente teorema establece que, para sistemas homogéneos, la estabilidad asintótica implica también estabilidad global y en tiempo finito, siempre que el grado de homogeneidad sea negativo.

Teorema 6 *Asuma que el origen de la DI $\dot{x} \in F(x)$ es fuerte y asintóticamente estable, y que $F(x)$ es homogéneo con grado de homogeneidad negativo. Entonces, $x = 0$ es fuerte y globalmente FTS.*

Por último, se menciona un importante resultado, análogo al teorema converso de Lyapunov para sistemas homogéneos.

Teorema 7 *Asuma que el origen de la DI homogénea $\dot{x} \in F(x)$ es fuerte, global y asintóticamente estable. Entonces, existe una función homogénea infinitamente diferenciable $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que es una función de Lyapunov fuerte para el sistema.*

2.3.4. Diferenciadores HOSM

En los algoritmos HOSM frecuentemente se presenta la necesidad de obtener derivadas de órdenes superiores de diversas señales. Esta labor puede ejecutarse por medio de diferenciadores robustos por modos deslizantes de orden arbitrario. Los diferenciadores HOSM tienen la propiedad, además, de ser exactos cuando no hay presencia de ruido en la señal a derivar.

Considere una señal $f(t)$ medible en el sentido de Lebesgue definida para todo $t > 0$. Asuma que esta señal se encuentra conformada de la siguiente forma:

$$f(t) = f_0(t) + \eta(t), \quad (2.71)$$

donde $f_0(t)$ es una componente base desconocida de $f(t)$ y $\eta(t)$ es una señal incierta y acotada de ruido.

Se considerará que la n -ésima derivada de $f_0(t)$ está acotada por una constante conocida, es decir

$$\left| f_0^{(n)}(t) \right| \leq \Delta$$

Para estimar las primeras $n - 1$ derivadas de $f_0(t)$, se propone el siguiente conjunto de variables de estado

$$\zeta_1 = f_0(t), \quad \zeta_2 = \dot{f}_0(t), \quad \dots, \quad \zeta_n = f_0^{(n-1)}(t) \quad (2.72)$$

Entonces, se genera el siguiente sistema dinámico

$$\begin{cases} \dot{\zeta}_i = \zeta_{i+1}, & i = 1, \dots, n-1 \\ \dot{\zeta}_n = f_0^{(n)}(t) \end{cases} \quad (2.73)$$

A continuación, se emplea la siguiente familia de diferenciadores:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = x_{i+1} - k_i [x_1 - f(t)]^{\frac{r_{i+1}}{r_1}}, & i = 1, \dots, n-1 \\ \dot{x}_n = -k_n [x_1 - f(t)]^{\frac{r_{n+1}}{r_1}} \end{cases} \quad (2.74)$$

en donde se usa la notación dada en (2.58). En (2.74), los parámetros r_i se calculan como

$$r_i = 1 - (n - i)d, \quad i = 1, \dots, n + 1 \quad (2.75)$$

con $d \in [-1, 0]$. Resulta entonces obvio que la familia de diferenciadores se encuentra parametrizada en función de d . Dos casos particulares de gran importancia en esta familia se obtienen en los extremos del intervalo de variación de d . Para $d = 0$, se obtiene un diferenciador lineal

$$\begin{cases} \dot{x}_i = x_{i+1} - k_i (x_1 - f(t)), & i = 1, \dots, n-1 \\ \dot{x}_n = -k_n (x_1 - f(t)) \end{cases} \quad (2.76)$$

Con $d = -1$, se obtiene un diferenciador discontinuo (Levant, 2003), cuyas soluciones son entendidas en el sentido de Filippov (Filipov, 1988). Considérese el caso sin ruido, es decir, $\eta = 0$ y $f(t) = f_0(t)$. El error de diferenciación se define como:

$$e_i \triangleq x_i - f_0^{(i-1)}(t), \quad i = 1, \dots, n \quad (2.77)$$

la dinámica del error es

$$\begin{cases} \dot{e}_i = e_{i+1} - k_i [e_1]^{\frac{r_{i+1}}{r_1}}, & i = 1, \dots, n-1 \\ \dot{e}_n = -k_n [e_1]^{\frac{r_{n+1}}{r_1}} - f_0^{(n)}(t) \end{cases} \quad (2.78)$$

2. MARCO TEÓRICO

De acuerdo con la Definición 9, para el caso continuo ($d > -1$) y con $f_0^{(n)}(t) = 0$, la dinámica (2.78) es homogénea de grado d con pesos $r = [r_1, \dots, r_n]^\top$. En el caso discontinuo ($d = -1$), la DI asociada a la dinámica (2.78) es $\dot{e} \in F(e)$, con

$$F(e) = \begin{bmatrix} e_2 - k_1 [e_1]^{\frac{n-1}{n}} \\ \vdots \\ e_n - k_{n-1} [e_1]^{\frac{1}{n}} \\ -k_n [e_1]^0 + [-\Delta, \Delta] \end{bmatrix} \quad (2.79)$$

la cual nuevamente es homogénea de grado $d = -1$ y pesos $r = [n \ n-1, \dots, 1]^\top$. Debido a esto, la familia (2.74) recibe el nombre de diferenciadores homogéneos.

Introduciendo ahora la transformación de estados

$$z_i = \frac{e_i}{k_{i-1}}, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.80)$$

con $k_0 = 1$, la dinámica del error asume la forma

$$\begin{cases} \dot{z}_i = -\tilde{k}_i \left([z_1]^{\frac{r_{i+1}}{r_1}} - z_{i+1} \right), & i = 1, \dots, n-1 \\ \dot{z}_n = -\tilde{k}_n [z_1]^{\frac{r_{n+1}}{r_1}} + \delta(t) \end{cases} \quad (2.81)$$

donde

$$\tilde{k}_i = \frac{k_i}{k_{i-1}}, \quad i = 1, \dots, n, \quad \delta(t) \triangleq -\frac{f_0^{(n)}(t)}{k_{n-1}}$$

Si ahora $\eta \neq 0$, la dinámica del error (2.81) se transforma en

$$\begin{cases} \dot{z}_i = -\tilde{k}_i \left([z_1 + \eta]^{\frac{r_{i+1}}{r_1}} - z_{i+1} \right), & i = 1, \dots, n-1 \\ \dot{z}_n = -\tilde{k}_n [z_1 + \eta]^{\frac{r_{n+1}}{r_1}} + \delta(t) \end{cases} \quad (2.82)$$

Puede probarse que, para una elección apropiada de ganancias k_i , el origen del sistema (2.81) es estable y que una función de Lyapunov para $n \geq 2$ está dada por:

$$V(z) = \sum_{j=1}^{n-1} \beta_j \mathcal{Z}_j(z_j, z_{j+1}) + \frac{\beta_n}{p} |z_n|^p, \quad \beta_j > 0, \quad j = 1, \dots, n \quad (2.83)$$

$$\mathcal{Z}_j(z_i, z_{i+1}) = \frac{r_i}{p} |z_i|^{\frac{p}{r_i}} - z_i [z_{i+1}]^{\frac{p-r_i}{r_{i+1}}} + \frac{p-r_i}{p} |z_{i+1}|^{\frac{p}{r_{i+1}}}, \quad i = 1, \dots, n-1 \quad (2.84)$$

con $p \geq 2 - (2n-3)d \geq 2$ para $n \geq 2$.

Teorema 8 (Cruz-Zavala y Moreno (2016)) *Sea la señal $f(t)$ como se definió en (2.71). Considere la familia de diferenciadores homogéneos (2.74) y la función $V(z)$ dada en (2.83). Para cualquier $\beta_i > 0$, $i = 1, \dots, n$ se cumple que:*

- a) Si $\eta(t) = 0$, $d \in (-1, 0]$ y $f_0^{(n)}(t) = 0$, entonces existe un conjunto de ganancias k_i , $i = 1, \dots, n$ tal que $V(z)$ es una función de Lyapunov fuerte para la dinámica del error (2.81) y los estados estimados x_i convergen a $f_o^{(i-1)}(t)$ conforme $t \rightarrow \infty$.
- b) Si $\eta(t) = 0$ y $|f_0^{(n)}(t)| \leq \Delta$ para $d = -1$, entonces para cualquier $k_n > \Delta$ existe un conjunto de ganancias $k_i > 0$ tales que $V(z)$ es una función de Lyapunov fuerte para la dinámica del error (2.81) y los estados estimados x_i convergen a $f_o^{(i-1)}(t)$ en tiempo finito.
- c) Si $|\eta(t)| \leq N$ y $|f_0^{(n)}(t)| \leq \Delta$ para $d \in (-1, 0]$ ($d = -1$), entonces existe un conjunto de ganancias k_i tales que (2.82) es entrada a estados estable (ISS, Input-to-States Stable) con respecto a $\delta(t)$ y $\eta(t)$ (con respecto a $\eta(t)$) y $V(z)$ es una función de Lyapunov ISS para (2.82). Más aún, el origen $z = 0$ está uniforme y finalmente acotado en tiempo finito.

Nótese que el diferenciador discontinuo ($d = -1$) tiene la propiedad de ser exacto en ausencia de ruido. En el caso en que exista ruido, las estimaciones de las derivadas no son exactas, pero el error está uniforme y finalmente acotado.

Empleando la transformación lineal

$$\varepsilon = Le_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad L > 0 \quad (2.85)$$

la dinámica del error resultante es

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_i = \varepsilon_{i+1} - \lambda^i k_i [\varepsilon_1]^{\frac{r_{i+1}}{r_1}}, & i = 1, \dots, n-1 \\ \dot{\varepsilon}_n = -\lambda^n k_n [\varepsilon_1]^{\frac{r_{n+1}}{r_1}} + L\delta(t), & \lambda = L^{-d/r_1} \end{cases} \quad (2.86)$$

Entonces, si el conjunto de ganancias $\{k_1, \dots, k_n\}$ hace que el diferenciador sea estable, el conjunto $\{\lambda^1 k_1, \dots, \lambda^n k_n\}$ también garantizará estabilidad.

2.3.4.1. Diferenciadores Discontinuos

Un caso especial de los diferenciadores homogéneos es el diferenciador discontinuo o de Levant (Levant, 2003). Este se obtiene a partir de la familia (2.74) haciendo $d = -1$. Por tanto, se tiene:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = x_{i+1} - k_i [x_1 - f(t)]^{\frac{n-i}{n}}, & i = 1, \dots, n-1 \\ \dot{x}_n = -k_n [x_1 - f(t)]^0 \end{cases} \quad (2.87)$$

Aplicando el cambio de coordenadas (2.80), la dinámica del error para el diferenciador discontinuo está dada por

$$\begin{cases} \dot{z}_i = -\tilde{k}_i \left(|z_1|^{\frac{n-i}{n}} - z_{i+1} \right), & i = 1, \dots, n-1 \\ \dot{z}_n = -\tilde{k}_n |z_1|^0 + \delta(t) \end{cases} \quad (2.88)$$

Y una función de Lyapunov puede obtenerse a partir de (2.83). Por ejemplo, el diferenciador HOSM discontinuo de primer orden ($n = 2$) es

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - k_1 |x_1 - f(t)|^{\frac{1}{2}} \\ \dot{x}_2 = -k_2 |x_1 - f(t)|^0 \end{cases} \quad (2.89)$$

el cual corresponde con el algoritmo Super-Twisting dado en (2.60). La correspondiente dinámica de error en coordenadas z está dada por

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = -\tilde{k}_1 \left(|z_1|^{\frac{1}{2}} - z_2 \right) \\ \dot{z}_2 = -\tilde{k}_2 |z_1|^0 + \delta(t) \end{cases} \quad (2.90)$$

con $\tilde{k}_1 = k_1$, $\tilde{k}_2 = k_2/k_1$ y $\delta(t) = -\frac{\ddot{f}_0(t)}{k_1}$. Una función de Lyapunov para este sistema dada por (2.83) es

$$V(z) = \beta_1 \left(\frac{2}{3} |z_1|^{3/2} - z_1 |z_2|^1 + \frac{1}{3} |z_2|^3 \right) + \frac{\beta_2}{3} |z_2|^3, \quad \beta_1, \beta_2 > 0 \quad (2.91)$$

Ahora, si $n = 3$ se obtiene el diferenciador HOSM discontinuo de segundo orden

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - k_1 |x_1 - f(t)|^{\frac{2}{3}} \\ \dot{x}_2 = x_3 - k_2 |x_1 - f(t)|^{\frac{1}{3}} \\ \dot{x}_3 = -k_3 |x_1 - f(t)|^0 \end{cases} \quad (2.92)$$

con dinámica de error en coordenadas z

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = -\tilde{k}_1 \left(|z_1|^{\frac{2}{3}} - z_2 \right) \\ \dot{z}_2 = -\tilde{k}_2 \left(|z_1|^{\frac{1}{3}} - z_3 \right) \\ \dot{z}_3 = -\tilde{k}_3 |z_1|^0 + \delta(t) \end{cases} \quad (2.93)$$

con $\tilde{k}_1 = k_1$, $\tilde{k}_2 = k_2/k_1$, $\tilde{k}_3 = k_3/k_2$ y $\delta(t) = -\frac{\ddot{f}_0(t)}{k_2}$. Una función de Lyapunov es

$$V(z) = \beta_1 \left(\frac{3}{5} |z_1|^{5/3} - z_1 |z_2|^1 + \frac{2}{5} |z_2|^{5/2} \right) + \beta_2 \left(\frac{2}{5} |z_2|^{5/2} - z_2 |z_3|^3 + \frac{3}{5} |z_3|^5 \right) + \frac{\beta_3}{5} |z_3|^5, \\ \beta_1, \beta_2, \beta_3 > 0 \quad (2.94)$$

El Teorema 8 garantiza la existencia de un conjunto de ganancias que logren la convergencia del diferenciador; sin embargo, no es constructivo. En (Cruz-Zavala y Moreno, 2016) se describe un procedimiento basado en sumas de cuadrados (*SOS*, Sums Of Squares), el cual permite obtener un conjunto de ganancias para los diferenciadores homogéneos a partir de la función de Lyapunov dada por (2.83). Por ejemplo, para el diferenciador discontinuo de segundo orden mencionado arriba, un conjunto de ganancias obtenido mediante este procedimiento es $(k_1, k_2, k_3) = (3.1, 5, 1.01)$.

Reconstrucción de Flujos en Tuberías con Ramales

En este capítulo se presenta el modelo matemático de un fluido incompresible que circula por una tubería horizontal. A partir de éste, se analiza el caso particular de una tubería discretizada espacialmente en tres secciones y dos ramales con posiciones conocidas. A continuación, se discuten las propiedades de observabilidad del modelo. Posteriormente, se plantean estrategias para reconstruir los flujos desconocidos que salen por los ramales, empleando observadores por modos deslizantes.

3.1. Modelo Dinámico del Flujo en una Tubería con Ramales

Considérese en primer lugar una tubería sin ramales, a través de la cual circula un fluido incompresible. Asimismo, asúmase que la distribución de velocidad en el área de sección transversal del ducto es uniforme. Empleando las Leyes de Conservación de Masa y de Cantidad de Movimiento, es posible obtener el modelo matemático del fluido, el cual está dado por (Chaudhry, 2014):

$$\frac{\partial Q(z, t)}{\partial t} + gA_T \frac{\partial H(z, t)}{\partial z} + J(Q) = 0 \quad (3.1)$$

$$b^2 \frac{\partial Q(z, t)}{\partial z} + gA_T \frac{\partial H(z, t)}{\partial t} = 0 \quad (3.2)$$

donde $Q(z, t)$ es el flujo volumétrico [m^3/s], $H(z, t)$ es la presión [m], g es la aceleración de gravedad [m/s^2], A_T es el área de sección transversal del ducto [m^2], b es la velocidad de la onda de presión [m/s], z es la coordenada espacial a lo largo de la

3. RECONSTRUCCIÓN DE FLUJOS EN TUBERÍAS CON RAMALES

tubería $[m]$ y t es el tiempo $[s]$. La función $J(Q)$ se conoce como la *pérdida de carga* en el ducto y tiene la siguiente forma general:

$$J(Q) = \mu[Q]^2 \quad (3.3)$$

El factor μ está asociado con la fricción al interior del ducto y puede expresarse como

$$\mu = \frac{f_r}{2dA_T}, \quad (3.4)$$

siendo d el diámetro de la tubería $[m]$. Por lo general, el coeficiente de fricción f_r se asume constante, correspondiendo entonces al coeficiente de Darcy-Weisbach (Negrete y Verde, 2012). La consideración anterior implica que se tiene un régimen de flujo turbulento; sin embargo, si el flujo se encuentra en la zona de transición entre régimen laminar y turbulento, el uso de un factor de fricción f_r constante no refleja apropiadamente en comportamiento del fluido. Investigaciones recientes han encontrado que, en estos casos, un modelo lineal del parámetro f_r conduce a mejores resultados. Por ende, en este trabajo se considerará que

$$f_r = \theta_\alpha|Q| + \theta_\beta \quad (3.5)$$

Las constantes θ_α y θ_β dependen de parámetros físicos del sistema (rugosidad, viscosidad cinemática, etc). Sin embargo, se han creado estrategias para determinar su valor a partir de señales de presión y gasto medibles (Rojas, 2017). Incluyendo el modelo para f_r dado en (3.5), la función μ toma la forma:

$$\mu(Q) = \alpha|Q| + \beta \quad (3.6)$$

con $\alpha \triangleq \frac{\theta_\alpha}{2dA_T}$, $\beta \triangleq \frac{\theta_\beta}{2dA_T}$. Por lo tanto, la función de pérdida de carga J es

$$J(Q) \triangleq \alpha[Q]^3 + \beta[Q]^2 \quad (3.7)$$

Ahora, si se considera que la tubería tiene un ramal por el que circula un flujo f_i , se produce una discontinuidad en el modelo del ducto definido en (3.1)-(3.2), la cual queda determinada por una condición de frontera entre secciones sin ramales (Verde, 2004):

$$Q_{i,b} = Q_{i,a} + f_i \quad (3.8)$$

donde $Q_{i,b}$ y $Q_{i,a}$ son los flujos volumétricos antes y después del ramal, respectivamente. Para $k - 1$ ramales, el flujo dentro de la tubería quedará definido por k pares de ecuaciones diferenciales de la forma (3.1)-(3.2) junto con $k - 1$ condiciones de frontera (3.8) donde $i = 1, \dots, k - 1$.

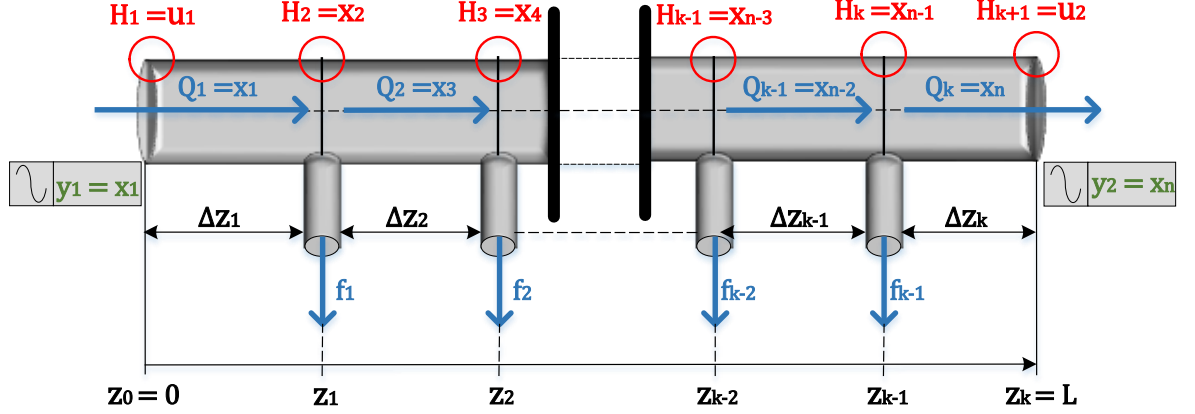


Figura 3.1: Diagrama de una tubería discretizada en k secciones

3.1.1. Modelo de Dimensión Finita

El modelo dinámico de la tubería dado por (3.1)-(3.2) está definido en términos de ecuaciones en derivadas parciales, lo cual implica que se trata de un modelo de dimensión infinita con parámetros distribuidos. Para tareas de observación, se requiere un modelo de dimensión finita, el cual puede ser obtenido del anterior efectuando una discretización en la coordenada espacial z . Una forma de llevar esto a cabo es aproximando las derivadas parciales respecto a z mediante diferencias finitas.

Evidentemente, mientras más secciones se utilicen para la discretización (esto es, mientras más pequeñas sean las secciones), el modelo discretizado espacialmente representará mejor al sistema real; sin embargo, esto también incrementará la dificultad del análisis y el costo computacional. Por ende, existe un compromiso entre confiabilidad y complejidad al momento de obtener un modelo útil para labores de observación y diagnóstico.

Considérese que el ducto se divide en k secciones, no necesariamente del mismo tamaño, de forma tal que los límites de éstas corresponden con los $k - 1$ ramales. Si se denota por $\Delta z_i = z_i - z_{i-1}$ a la longitud de la i -ésima sección, entonces, debe cumplirse que $L = \sum_{i=1}^k \Delta z_i = \Delta z_1 + \dots + \Delta z_k$, donde L es la longitud total de la tubería [m]. Las derivadas parciales se aproximan por

$$\frac{\partial H(z, t)}{\partial z} \approx \frac{H_{i+1}(t) - H_i(t)}{\Delta z_i}, \quad \forall i = 1, \dots, k - 1 \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial Q(z, t)}{\partial z} \approx \frac{Q_i(t) - Q_{i-1}(t)}{\Delta z_i}, \quad \forall i = 2, \dots, k \quad (3.10)$$

donde $H_i(t)$ y $Q_i(t)$ son la presión y el flujo, respectivamente, al inicio de la i -ésima sección.

3. RECONSTRUCCIÓN DE FLUJOS EN TUBERÍAS CON RAMALES

De esta forma, el modelo dinámico del ducto discretizado espacialmente es

$$\begin{cases} \dot{Q}_i = a_{1i}(H_i - H_{i+1}) - J(Q_i), & \forall i = 1, \dots, k \\ \dot{H}_j = a_{2j}(Q_{j-1} - Q_j - f_{j-1}), & \forall j = 2, \dots, k \end{cases} \quad (3.11)$$

Los parámetros a_{1i} , a_{2j} están dados por:

$$a_{1i} = \frac{gA_T}{\Delta z_i}, \quad a_{2j} = \frac{b^2}{gA_T \Delta z_{j-1}} \quad (3.12)$$

Para obtener un modelo en el espacio de estados, puede definirse

$$\begin{aligned} x &= [x_1 \ x_2 \ x_3 \ \cdots \ x_{n-2} \ x_{n-1} \ x_n]^\top \\ &\triangleq [Q_1 \ H_2 \ Q_2 \ \cdots \ Q_{k-1} \ H_k \ Q_k]^\top \end{aligned} \quad (3.13)$$

con $n = 2k - 1$. Nótese que en la definición anterior, los estados impares corresponden a los flujos en cada sección, mientras que los estados pares son las presiones al inicio de cada sección. Si se considera que se conocen las presiones y los flujos a la entrada y a la salida de la tubería, se tiene que el modelo en el espacio de estados para una tubería discretizada en k secciones con $k - 1$ ramales es

$$\begin{cases} \dot{x}_{2i-1} = a_{1i}(x_{2i-2} - x_{2i}) - J(x_{2i-1}), & \forall i = 1, \dots, k \\ \dot{x}_{2j-2} = a_{2j}(x_{2j-3} - x_{2j-1} - f_{j-1}), & \forall j = 2, \dots, k \\ y_1 = x_1 \\ y_2 = x_{2k-1} \end{cases} \quad (3.14)$$

donde $x_0 \triangleq u_1 = H_1 = H(t, 0)$, $x_{2k} \triangleq u_2 = H_{k+1} = H(t, L)$, $y_1 = Q_1 = Q(t, 0)$, $y_2 = Q_k = Q(t, L)$ son las presiones y flujos, respectivamente, a la entrada y a la salida del ducto. Véase la Figura 3.1

3.1.2. Modelo del Flujo en una Tubería con Dos Ramales

En el presente trabajo, se utilizará extensamente el modelo en espacio de estados de una tubería con tres secciones y dos ramales, el cual puede ser obtenido inmediatamente de los resultados anteriores haciendo $k = 3$.

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}(u_1 - x_2) - J(x_1) \\ \dot{x}_2 = a_{22}(x_1 - x_3 - f_1) \\ \dot{x}_3 = a_{12}(x_2 - x_4) - J(x_3) \\ \dot{x}_4 = a_{23}(x_3 - x_5 - f_2) \\ \dot{x}_5 = a_{13}(x_4 - u_2) - J(x_5) \\ y_1 = x_1 \\ y_2 = x_5 \end{cases}, \quad (3.15)$$

Dicho modelo Σ puede representarse de forma matricial como sigue

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + \phi(x) + Df(t) \\ y = Cx \end{cases}, \quad (3.16)$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ H_2 \\ Q_2 \\ H_3 \\ Q_3 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_3 \end{bmatrix}$$

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_4 \end{bmatrix}, \quad f(t) = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$$

$$A \triangleq \begin{bmatrix} 0 & -a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{22} & 0 & -a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & a_{12} & 0 & -a_{12} & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} & 0 & -a_{23} \\ 0 & 0 & 0 & a_{13} & 0 \end{bmatrix}, \quad B \triangleq \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -a_{13} \end{bmatrix}$$

$$\phi(x) \triangleq \begin{bmatrix} -J(x_1) \\ 0 \\ -J(x_3) \\ 0 \\ -J(x_5) \end{bmatrix}, \quad D \triangleq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -a_{22} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -a_{23} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C \triangleq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

donde x es el vector de estados, u es el vector de entradas conocidas, y es el vector de salidas y $f(t)$ corresponde al vector de señales desconocidas. Adicionalmente, $\phi(x)$ es un vector de funciones no lineales.

3.1.3. Propiedades de Observabilidad del Modelo Matemático

En la presente sección se presentarán las propiedades de observabilidad y detectabilidad (véase Sección 2.2) correspondientes al modelo matemático de una tubería discretizada en tres secciones con dos ramales. A pesar de que los resultados corresponden a este caso particular, éstos pueden extenderse fácilmente a una tubería discretizada en k secciones con $k - 1$ ramales.

3. RECONSTRUCCIÓN DE FLUJOS EN TUBERÍAS CON RAMALES

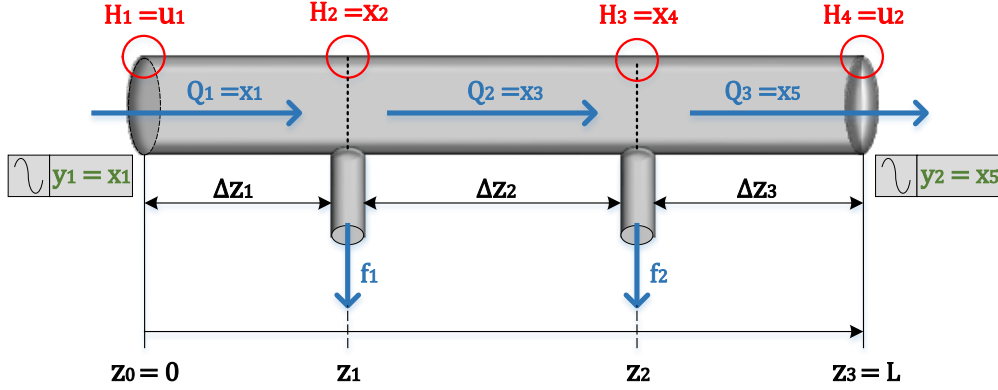


Figura 3.2: Definición de variables para una tubería con tres secciones

Sea el sistema Σ definido en (3.15), el cual posee las siguientes propiedades:

- Cuando la señal desconocida $f(t)$ es nula, entonces:
 - El sistema posee la estructura Hessenberg estrictamente agrupada, superior e inferior (SLULH, por sus siglas en inglés). Adicionalmente, el sistema es superior e inferiormente medido; esto significa que las salidas medibles corresponden al primer y al último estado. Debido a esto, el sistema es observable (Bernard *et al.*, 1998). El par (A, C) es también observable.
 - El sistema es afín en la entrada conocida u .
 - El sistema tiene un punto de operación estable dado por

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = \bar{x}_3 = \bar{x}_5 = J^{-1} \left(\frac{gA_T(\bar{u}_1 - \bar{u}_2)}{L} \right) \\ \bar{x}_{2i} = \bar{u}_1 - \frac{z_i(\bar{u}_1 - \bar{u}_2)}{L}, \quad i = 1, 2 \end{cases}$$

para cualquier par de entradas admisibles acotadas (\bar{u}_1, \bar{u}_2) con $\bar{u}_1 > \bar{u}_2$.

- Si alguna de las dos señales f_1 o f_2 es conocida (por ejemplo, igual a cero) y la otra es desconocida, se tiene que el sistema es fuertemente observable. Esto significa que el estado completo puede ser reconstruido a partir de las salidas y sus derivadas, a pesar de la presencia de la entrada desconocida.
- Si se tiene que ambas f_1 y f_2 son desconocidas, entonces:
 - a) El subsistema definido por los estados $\{x_1, x_2\}$ es fuertemente observable respecto a las entradas desconocidas (f_1, x_3) .
 - b) El subsistema dado por los estados $\{x_4, x_5\}$ es, de la misma forma, fuertemente observable respecto a las entradas desconocidas (f_1, x_3) .

- c) El sistema completo Σ es fuertemente detectable (dado que la parte no observable correspondiente al estado x_3 es estable), pero no es fuertemente* detectable, dado que el grado relativo desde la salida medida $y(t)$ a la señal desconocida $f(t)$ es igual a dos.

A partir de las características enunciadas en a), b) y c), es posible concluir que, en el caso en que tanto f_1 como f_2 son desconocidas, no es posible estimar el estado x_3 arbitrariamente rápido empleando únicamente la salida $y(t)$ y sus derivadas respecto al tiempo. Sin embargo, la dinámica del error en x_3 es estable, por lo cual el sistema completo es detectable. Lo anterior significa que, sin importar el observador empleado, no es posible asignar la velocidad de convergencia para un estimado de x_3 , sino que éste convergerá por acción de su propia dinámica. Esto es una propiedad estructural inherente al sistema. Nótese, además, que la propiedad de detectabilidad fuerte en x_3 es debida a la presencia de los términos no lineales, es decir, la linealización del sistema Σ no es fuertemente detectable. Esta característica implica que, para diseñar un UIO para el sistema, forzosamente debe emplearse el modelo no lineal, dado que en este caso, la linealización no resulta útil. También, es necesario resaltar que el sistema Σ no satisface las condiciones clásicas para la existencia de un UIO. Esto se debe a que el grado relativo desde la salida medible a las señales desconocidas es igual a dos. Lo anterior significa que dicho sistema representa un reto considerable para la observación de estados y la reconstrucción de las entradas desconocidas.

El objetivo del presente trabajo es diseñar un observador el cual sea capaz de obtener estimados correctos para el estado completo x y que, adicionalmente, permita reconstruir las señales desconocidas f_1 y f_2 . Para lograr esto, es necesario imponer restricciones adicionales sobre dichas entradas desconocidas, además de emplear un término de inyección de error discontinuo.

3.2. Reconstrucción de Fallas Múltiples en Tuberías por Medio de un Esquema FOSMO en Cascada

En esta sección, se abordará un método propuesto en (Negrete y Verde, 2012) para reconstruir múltiples fallas en tuberías, mediante la implementación en cascada de observadores por modos deslizantes de primer orden como los analizados en la sección 2.3.1. Esta técnica se presenta únicamente como antecedente del método desarrollado en el presente trabajo y, además, para fines de comparación.

Tomando como base al modelo Σ expresado matricialmente en (3.16), resulta que no es posible reconstruir directamente las señales desconocidas f_1 y f_2 mediante el método descrito en la sección 2.3.1, dado que la condición (C2) no se satisface; lo anterior implica que el grado relativo desde las salidas hasta las entradas desconocidas en Σ es mayor a uno. Sin embargo, aún es posible reconstruir f_1 y f_2 mediante la implementación de dos FOSMO en cascada, como se aprecia en la Figura 3.3.

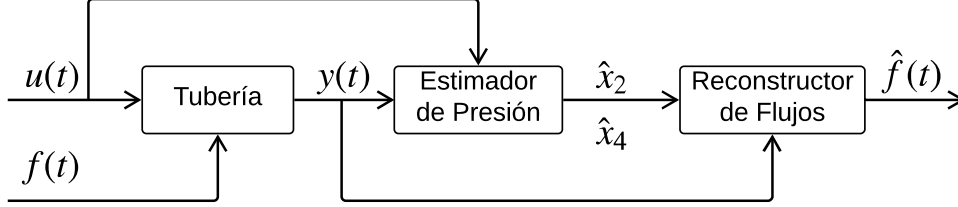


Figura 3.3: Reconstrucción de flujos desconocidos empleando FOSMO en cascada

La idea básica detrás de esta estructura es primero reconstruir aquellas señales no medidas que son alcanzables desde la salida con un grado relativo igual a uno, en este caso, x_2 y x_4 . Una vez que éstas señales han sido estimadas, pueden considerarse como salidas medidas, con lo cual se obtiene un grado relativo igual a uno hasta los flujos desconocidos $f(t)$, y un segundo FOSMO puede diseñarse para reconstruirlos. Como se describe en (Negrete y Verde, 2012), este procedimiento puede ser extendido para cualquier sistema con estructura Hessenberg de orden arbitrario.

3.2.1. Observador 1: Estimador de Presión

A partir del modelo de estado dado por (3.15), considérese en primer lugar la dinámica reducida consistente en los estados x_1 y x_5 , dada por:

$$R_1 : \begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}(u_1 - x_2) - J(x_1) \\ \dot{x}_5 = a_{13}(x_4 - u_2) - J(x_5) \\ y_1 = x_1 \\ y_2 = x_5 \end{cases} \quad (3.17)$$

Definiendo

$$r_1 \triangleq \begin{bmatrix} x_1 \\ x_5 \end{bmatrix}, \quad y_{r1} \triangleq \begin{bmatrix} x_1 \\ x_5 \end{bmatrix}, \quad u_{r1} \triangleq \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad f_{r1} \triangleq \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

el modelo R_1 puede expresarse matricialmente como:

$$R_1 : \begin{cases} \dot{r}_1 = A_{r1}r_1 + B_{r1}u_{r1} + \phi_{r1}(r_1) + D_{r1}f_{r1} \\ y_{r1} = C_{r1}r_1 \end{cases} \quad (3.18)$$

$$A_{r1} \triangleq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_{r1} \triangleq \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & -a_{13} \end{bmatrix}, \quad \phi_{r1}(r_1) \triangleq \begin{bmatrix} -J(x_1) \\ -J(x_5) \end{bmatrix},$$

$$C_{r1} \triangleq I_{2 \times 2}, \quad D_{r1} \triangleq \begin{bmatrix} -a_{11} & 0 \\ 0 & a_{13} \end{bmatrix}$$

Nótese que para el sistema R_1 , los estados x_2 y x_4 pueden considerarse como señales o entradas desconocidas. Para esta dinámica reducida, las condiciones (C1) y (C2) dadas en la sección 2.3.1 se satisfacen, y por tanto, es posible diseñar un FOSMO para reconstruir a x_2 y x_4 . Asimismo, dado que C_{r1} es una matriz identidad, (3.18) ya se encuentra en la forma regular y, en este caso, no existe parte no medible del estado. La transformación de coordenadas asociada, tal y como se describe en la sección 2.3.1, es $T_{c1} = I_{2 \times 2}$.

De acuerdo con (2.54), un FOSMO que puede emplearse para estimar f_{r1} en coordenadas originales es:

$$OR_1 : \begin{cases} \dot{\hat{r}}_1 = A_{r1}\hat{r}_1 + B_{r1}u_{r1} + \phi_{r1}(\hat{r}_1) + G_1\nu_1 + G_{L1}e_{y_{r1}} \\ \hat{y}_{r1} = C_{r1}\hat{r}_1 \end{cases} \quad (3.19)$$

con

$$\nu_1 = \varrho_1 \begin{bmatrix} [\hat{r}_{11} - r_{11}]^0 \\ [\hat{r}_{12} - r_{12}]^0 \end{bmatrix} = \varrho_1 \begin{bmatrix} [\hat{x}_1 - x_1]^0 \\ [\hat{x}_5 - x_5]^0 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

y las matrices de ganancia G_1 y G_{L1} diseñadas de acuerdo con la expresión (2.55). La matriz X_1 empleada para reconstruir las señales desconocidas f_{r1} a partir de la inyección de salida equivalente $\nu_{1,eq}$ mediante (2.44) puede obtenerse a partir de la ecuación de acoplamiento

$$D_{r1} = G_1 X_1$$

Resulta importante resaltar que este primer observador reconstruye las señales de presión intermedias de la tubería a partir de las señales medibles de flujo en los extremos de la misma. Por ende, éste puede ser considerado como un estimador de presiones o un sensor de presión por software.

3.2.2. Observador 2: Reconstructor de Flujos (Orden Completo)

Ya que se han estimado los estados x_2 y x_4 en la fase previa, éstos pueden utilizarse para extender la salida del sistema Σ descrito en forma matricial en (3.16), con lo cual se satisfacen las condiciones (C1) y (C2) dadas en la sección 2.3.1 para la reconstrucción del estado y de las señales desconocidas mediante un FOSMO.

Tomando x_2 y x_4 del estimador de presiones previo como salidas adicionales, el sistema Σ asume la forma:

$$\Sigma_{a1} : \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + \phi(x) + Df(t) \\ y_{a1} = C_{a1}x \end{cases} \quad (3.21)$$

donde:

$$C_{a1} \triangleq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

3. RECONSTRUCCIÓN DE FLUJOS EN TUBERÍAS CON RAMALES

Como ya se mencionó, con esta nueva definición de salidas se satisfacen las condiciones para diseñar un FOSMO que permita reconstruir las señales desconocidas $f(t)$.

De acuerdo con (2.54), se propone el siguiente observador:

$$O\Sigma_{a1} : \begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + \phi(\hat{x}) + G_2\nu_2 + G_{L2}e_{y_{a1}} \\ \hat{y}_{a1} = C_{a1}\hat{x} \end{cases} \quad (3.22)$$

$$\nu_2 = \varrho_2 \begin{bmatrix} [\hat{x}_1 - x_1]^0 \\ [\hat{x}_2 - x_2]^0 \\ [\hat{x}_4 - x_4]^0 \\ [\hat{x}_5 - x_5]^0 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

y G_2 y G_{L2} se diseñan mediante (2.55). Asimismo, la matriz X_2 empleada para reconstruir $f(t)$ se obtiene de la ecuación de acoplamiento

$$D = G_2X_2$$

3.2.3. Observador 2: Reconstructor de Flujos (Orden Reducido)

En el apartado previo, se utilizó un observador de orden completo para reconstruir las señales desconocidas $f(t)$; sin embargo, no es estrictamente necesario volver a estimar todo el estado, de forma tal que puede construirse un observador con entradas desconocidas de orden reducido. A partir de Σ en (3.16), tómesese únicamente la dinámica correspondiente a x_2 , x_3 y x_4 . Una vez obtenidos los estados x_2 y x_4 mediante el estimador de presiones, estos se toman como las salidas para un nuevo sistema dinámico reducido R_2 .

$$R_2 : \begin{cases} \dot{x}_2 = a_{22}(y_1 - x_3 - f_1) \\ \dot{x}_3 = a_{12}(x_2 - x_4) - J(x_3) \\ \dot{x}_4 = a_{23}(x_3 - y_2 - f_2) \\ y_{r21} = x_2 \\ y_{r22} = x_4 \end{cases} \quad (3.24)$$

Definiendo

$$r_2 \triangleq \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \quad y_{r2} \triangleq \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$$u_{r2} \triangleq \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad f_{r2} \triangleq \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix},$$

el sistema reducido R_2 puede expresarse matricialmente como:

$$R_2 : \begin{cases} \dot{r}_2 = A_{r2}r_2 + B_{r2}u_{r2} + \phi_{r2}(r_2) + D_{r2}f_{r2} \\ y_{r2} = C_{r2}r_2 \end{cases} \quad (3.25)$$

$$A_{r_2} \triangleq \begin{bmatrix} 0 & -a_{22} & 0 \\ a_{12} & 0 & -a_{12} \\ 0 & a_{23} & 0 \end{bmatrix}, \quad B_{r_2} \triangleq \begin{bmatrix} a_{22} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -a_{23} \end{bmatrix}, \quad \phi_{r_2}(r_2) \triangleq \begin{bmatrix} 0 \\ -J(x_3) \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C_{r_2} \triangleq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_{r_2} \triangleq \begin{bmatrix} -a_{22} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -a_{23} \end{bmatrix}$$

Para el sistema R_2 anterior, es sencillo verificar que se satisfacen las condiciones (C1) y (C2) para el diseño de un FOSMO que permita reconstruir los estados x_2 , x_3 y x_4 , así como las señales desconocidas f_1 y f_2 .

Se propone ahora el siguiente FOSMO basado en (2.54) para R_2 en coordenadas originales:

$$OR_2 : \begin{cases} \dot{\hat{r}}_2 = A_{r_2}\hat{r}_2 + B_{r_2}u_{r_2} + \phi_{r_2}(\hat{r}_2) + G_2\nu_2 + G_{L_2}e_{y_{r_2}} \\ \hat{y}_{r_2} = C_{r_2}\hat{r}_2 \end{cases} \quad (3.26)$$

con

$$\nu_2 = \varrho_2 \begin{bmatrix} [\hat{r}_{21} - r_{21}]^0 \\ [\hat{r}_{23} - r_{23}]^0 \end{bmatrix} = \varrho_2 \begin{bmatrix} [\hat{x}_2 - x_2]^0 \\ [\hat{x}_4 - x_4]^0 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

y las matrices de ganancia G_2 y G_{L_2} diseñadas de acuerdo con (2.55). La matriz L_2 se selecciona de acuerdo al procedimiento descrito en la sección 2.3.1. De la misma manera, la matriz X_2 puede obtenerse de

$$D_{r_2} = G_2 X_2$$

Las señales desconocidas f_{r_2} se calculan a partir de $\nu_{2,eq}$ como en (2.44).

3.3. Reconstrucción de Fallas Múltiples en Tuberías por Medio de un Esquema HOSMO

En la sección anterior, se discutió un método para reconstruir fallas múltiples en tuberías, mediante el uso de observadores por modos deslizantes de primer orden (FOSMO) interconectados en cascada. Las condiciones para que el procedimiento pueda ser aplicado se resumen en la verificación de (C1) y (C2) de la sección 2.3.1; la primera de ellas es una condición de observabilidad, mientras que la segunda es una condición de grado relativo uno, la cual es sumamente restrictiva. Aunque el sistema no tenga dicho grado relativo desde las salidas medibles a las entradas desconocidas, el método aún puede ser aplicable a partir de una implementación en cascada, como se comprobó previamente. Es posible mostrar que este procedimiento puede extenderse a cualquier sistema con estructura Hessenberg de orden arbitrario.

3. RECONSTRUCCIÓN DE FLUJOS EN TUBERÍAS CON RAMALES

A pesar de la eficacia del algoritmo previo para la detección e identificación de fallas, no siempre es conveniente llevar a cabo este proceso mediante una interconexión en cascada, debido a que los errores de estimación cometidos en las etapas previas invariablemente serán propagados a las siguientes. Aunque dichos errores puedan ser relativamente pequeños, si existe un gran número de etapas en cascada, el error final será considerable, e inclusive, podría provocar que el resultado del proceso completo de estimación difiera en gran medida de la realidad.

Es por ello que es necesario explorar alternativas para la reconstrucción de fallas en sistemas dinámicos que no requieran una implementación en cascada. En este caso, nos enfrentamos con el desafío de reconstruir entradas desconocidas en un sistema con un grado relativo mayor a uno desde las mediciones. Una técnica que ha resultado capaz de lidiar exitosamente con este problema es la de los Observadores por Modos Deslizantes de Orden Superior (HOSMO). Por ende, se explorará la posibilidad de aplicar dicha teoría para el problema de reconstrucción de fallas en tuberías. En esta sección, se presenta un método para reconstruir flujos desconocidos en tuberías con ramales, utilizando HOSMO. A partir del modelo Σ presentado en (3.15) y aprovechando la estructura Hessenberg del sistema, se propone el siguiente HOSMO para reconstruir los flujos f_1 y f_2 :

$$\text{HOSMO} : \left\{ \begin{array}{l}
 \text{UH} : \begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = -a_{11}\hat{x}_2 - L_1 k_1 |e_1|^{2/3} + a_{11}u_1 - J(x_1) \\ \dot{\hat{x}}_2 = -a_{22}\hat{f}_1 + L_1^2 \frac{k_2}{a_{11}} |e_1|^{1/3} + a_{22}(x_1 - \hat{x}_3) \\ \dot{\hat{f}}_1 = -L_1^3 \frac{k_3}{a_{11}a_{22}} |e_1|^0 \end{cases} \\
 \text{OL} : \{ \dot{\hat{x}}_3 = a_{12}(\hat{x}_2 - \hat{x}_4) - J(\hat{x}_3) \\
 \text{LH} : \begin{cases} \dot{\hat{x}}_5 = a_{13}\hat{x}_4 - L_2 k_1 |e_5|^{2/3} - a_{13}u_2 - J(x_5) \\ \dot{\hat{x}}_4 = -a_{23}\hat{f}_2 - L_2^2 \frac{k_2}{a_{13}} |e_5|^{1/3} + a_{23}(\hat{x}_3 - x_5) \\ \dot{\hat{f}}_2 = L_2^3 \frac{k_3}{a_{13}a_{23}} |e_5|^0 \end{cases}
 \end{array} \right. \quad (3.28)$$

donde

$$\begin{aligned}
 e_1 &\triangleq \hat{x}_1 - x_1 = \hat{x}_1 - y_1 \\
 e_5 &\triangleq \hat{x}_5 - x_5 = \hat{x}_5 - y_2
 \end{aligned}$$

En la Figura 3.4 se aprecia la estructura del observador propuesto; éste se encuentra constituido, a su vez, por tres observadores. El primero de ellos, HOSMO superior (UH, *Upper HOSMO*) se encarga de estimar los estados x_1 y x_2 , junto con el primer flujo desconocido f_1 , empleando únicamente información de u_1 y y_1 . La parte correspondiente al HOSMO inferior (LH, *Lower HOSMO*) estima los estados x_5 y x_4 , además del

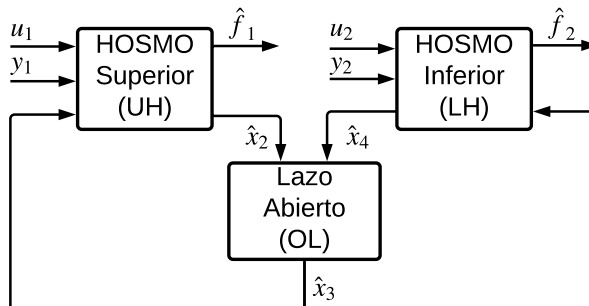


Figura 3.4: Reconstrucción de flujos desconocidos empleando HOSMO

segundo flujo no medido f_2 . La última parte (OL, *Open Loop*) estima el estado intermedio x_3 , el cual actúa como un vínculo entre las partes superior e inferior. Obsérvese que la reconstrucción de x_3 se realiza en lazo abierto; esto es posible gracias a que la dinámica del error $\dot{e}_3 \triangleq \hat{x}_3 - \dot{x}_3$ es estable.

El observador (3.28) posee las siguientes propiedades:

- Es capaz de estimar el estado completo x y las señales desconocidas f_1 y f_2 .
- Es robusto ante las señales desconocidas f_1 y f_2 , las cuales aparecen en el último canal de UH y LH, gracias al uso de la función signo (inyección de error de salida discontinuo) en el término de corrección del observador (Shtessel *et al.*, 2014), (Fridman, 2011).
- Impone convergencia en tiempo finito para los errores de salida e_1 y e_5 . Sin embargo, debido a la falta de observabilidad en x_3 , el tiempo de convergencia de dicho estado y de las entradas desconocidas f_1 y f_2 a sus valores reales no puede ser asignado, sino que depende de la dinámica en lazo abierto de x_3 . Este punto ya había sido discutido en el apartado 3.1.3, encontrándose que esto no es debido al observador utilizado, sino que es una característica intrínseca del sistema.
- Las partes UH y LH del observador no son independientes, sino que están relacionadas a través del estado intermedio x_3 . Debido a esto, cualquier error en alguna de ambas partes se propagará inevitablemente a la otra. Nuevamente, esto es ocasionado por la estructura de la planta y será heredado por cualquier observador.

Los términos de corrección del observador (3.28) corresponden a aquellos del diferenciador HOSM de segundo orden, mencionado en la sección 2.3.4. Una condición suficiente para que el esquema de observación HOSMO sea convergente es que la interconexión entre los subsistemas UH, OL y LH sea suficientemente débil, como se establece en el siguiente teorema.

3. RECONSTRUCCIÓN DE FLUJOS EN TUBERÍAS CON RAMALES

Teorema 9 *Sea el sistema Σ dado en (3.15). Asuma que las derivadas de las señales desconocidas \dot{f}_1, \dot{f}_2 están acotadas. Si las constantes a_{22}, a_{12}, a_{23} son suficientemente pequeñas, entonces el esquema de observación HOSMO definido en (3.28) es un UIO local para Σ que estima asintóticamente el estado completo \hat{x} y las señales desconocidas \hat{f}_1, \hat{f}_2 .*

Prueba. Véase Apéndice B. ■

La idea fundamental de la prueba para el Teorema 9 radica en mostrar que cada una de las partes que componen al esquema HOSMO, sin los términos de interconexión, es estable. Entonces, de acuerdo con la intuición dada por el Teorema de Pequeñas Ganancias (cuya versión clásica no se usa en este trabajo dado que la dinámica de error es discontinua), se puede concluir que el sistema interconectado será estable si la interconexión es débil. Las constantes a_{22}, a_{12}, a_{23} corresponden precisamente con los términos de interconexión, por lo que es razonable que el teorema exija que éstas sean suficientemente pequeñas.

La localidad del resultado proviene de la naturaleza de la función no lineal de pérdida de carga J dada por (3.7), en la cual el término estabilizante es el cuadrático (para $\beta > 0$), que domina cerca del origen al término cúbico (y desestabilizante para $\alpha < 0$). Si la constante α en la función J es positiva, el resultado es global. La convergencia sólo es asintótica debido a la falta de observabilidad en x_3 ante la presencia simultánea de ambas señales desconocidas f_1, f_2 .

La prueba rigurosa de la convergencia para el esquema (3.28) está basada en funciones de Lyapunov y emplea conceptos de sistemas homogéneos y de diferenciadores HOSM (Moreno, 2018), (Cruz-Zavala y Moreno, 2016), (Sanchez *et al.*, 2017).

Para asegurar la convergencia del observador, es necesario que \dot{f}_1 y \dot{f}_2 estén acotadas. Seleccionando L_1 y L_2 suficientemente grandes, se asegura la convergencia, independientemente del tamaño de la cota y de las condiciones iniciales. El acotamiento de \dot{f}_1 y \dot{f}_2 es también la razón por la cual es posible reconstruir el estado completo y las señales desconocidas, aún cuando las condiciones clásicas para la existencia de un observador con entradas desconocidas no se satisfacen.

El esquema HOSMO (3.28) ofrece un muy buen desempeño y exactitud en la reconstrucción de flujos en tuberías. Adicionalmente, este observador es menos restrictivo que otros esquemas y puede ser utilizado en un campo más amplio de aplicaciones.

Algunas ventajas del HOSMO frente al esquema FOSMO en cascada discutido previamente son:

1. El error de estimación disminuye.
2. El esquema HOSMO es menos restrictivo. La implementación con FOSMO en cascada exige que el estado completo x y las señales desconocidas $f(t)$ estén acotados. Al emplear el HOSMO, únicamente se requiere el acotamiento en \dot{f}_1 y \dot{f}_2 . Además, en este último, no existen limitaciones en el grado relativo, al menos de forma teórica. Sistemas con grados relativos mayores sólo requieren la implementación de observadores de modos deslizantes de órdenes superiores.

3. No se requiere etapa de filtrado. En el esquema HOSMO, las señales desconocidas son reconstruidas directamente junto con el estado, al contrario de la implementación de FOSMO en cascada. Al emplear filtros pasa-baja para obtener el control equivalente necesario para reconstruir las entradas desconocidas, inevitablemente se introduce un error en la estimación; aún más, el tiempo de convergencia está limitado por la constante de tiempo del filtro.
4. No es necesaria una implementación en cascada. Al emplear FOSMO, la convergencia de etapas posteriores depende de las etapas previas; además, existe propagación del error de etapa a etapa.

3.4. Estrategia para Identificación y Aislamiento de Fallas Secuenciales

El esquema de observación HOSMO definido en (3.28) es capaz de reconstruir correctamente los flujos desconocidos en una tubería con dos ramales con posiciones conocidas. Particularmente, el esquema es eficaz aún cuando las fallas ocurren simultáneamente, caso en el que se pierde la observabilidad del estado intermedio x_3 , como se discutió previamente. Sin embargo, debido precisamente a esta pérdida de observabilidad, únicamente es posible estimar x_3 en lazo abierto, lo que inevitablemente produce que la convergencia de dicho estado y de la estimación de los flujos f_1 y f_2 sea asintótica.

En el caso, sin embargo, en el que las fallas no se presenten simultáneamente, sino que sean secuenciales, es posible hacer una modificación al esquema (3.28) que permite efectuar la estimación en tiempo finito.

Para introducir esta idea, considérese que en el modelo matemático Σ de una tubería discretizada espacialmente en tres secciones con dos ramales dado en (3.15) únicamente existe un flujo desconocido, por ejemplo, en el primer ramal; esto es, se asume que $f_1 \neq 0$ y $f_2 = 0$. Entonces, para este caso en particular y gracias a la estructura del sistema, es posible estimar f_1 mediante un observador basado en el diferenciador HOSM de segundo orden, al igual que se hace en (3.28), mientras el observador que reconstruye la sección inferior del estado puede extenderse de forma análoga a un diferenciador HOSM de tercer orden, esto con el fin de estimar hasta el estado x_2 a partir de la salida $y_2 = x_5$. Se propone entonces el siguiente sistema dinámico como observador para Σ , el cual además de estimar el estado completo reconstruye también el flujo f_1 :

$$d_1 : \begin{cases} \dot{\hat{x}}_{1u} = -a_{11}\hat{x}_{2u} - Mm_1[e_1]^{2/3} - J(x_1) + a_{11}u_1 \\ \dot{\hat{x}}_{2u} = -a_{22}\hat{f}_1 + M^2\frac{m_2}{a_{11}}[e_1]^{1/3} + a_{22}(x_1 - \hat{x}_{3l}) \\ \dot{\hat{f}}_1 = -M^3\frac{m_3}{a_{11}a_{22}}[e_1]^0 \\ \dot{\hat{x}}_{5l} = a_{13}\hat{x}_{4l} - Kk_1[e_5]^{3/4} - J(x_5) - a_{13}u_2 \\ \dot{\hat{x}}_{4l} = a_{23}\hat{x}_{3l} - K^2\frac{k_2}{a_{13}}[e_5]^{2/4} - a_{23}x_5 \\ \dot{\hat{x}}_{3l} = a_{12}\hat{x}_{2l} - K^3\frac{k_3}{a_{13}a_{23}}[e_5]^{1/4} - J(\hat{x}_{3l}) - a_{12}\hat{x}_{4l} \\ \dot{\hat{x}}_{2l} = -K^4\frac{k_4}{a_{13}a_{23}a_{12}}[e_5]^0 + a_{22}(x_1 - \hat{x}_{3l} - \hat{f}_1) \end{cases}, \quad (3.29)$$

donde,

$$\begin{aligned} e_1 &\triangleq \hat{x}_{1u} - x_1 = \hat{x}_{1u} - y_1 \\ e_5 &\triangleq \hat{x}_{5l} - x_5 = \hat{x}_{5l} - y_2 \end{aligned}$$

Con lo anterior, es posible estimar el estado x y la falla f_1 en tiempo finito. Nótese además, que ahora se dispone de dos estimaciones del estado x_2 , la primera de ellas x_{2u} obtenida mediante el observador HOSM de segundo orden a partir de y_1 (o, mediante la sección superior del sistema), mientras que x_{2l} se consigue mediante el observador HOSM de tercer orden a partir de y_2 (o mediante la sección inferior del sistema). Esta información redundante será de gran utilidad, como se explicará más adelante.

De la misma manera, si ahora se considera que sólo existe flujo en el segundo ramal, es decir $f_1 = 0$ y $f_2 \neq 0$, es posible extender el observador de la parte superior a uno de tercer orden, el cual permitiría estimar hasta el estado x_4 por la parte superior del sistema.

$$d_2 : \begin{cases} \dot{\hat{x}}_{1u} = -a_{11}\hat{x}_{2u} - Kk_1[e_1]^{3/4} - J(x_1) + a_{11}u_1 \\ \dot{\hat{x}}_{2u} = -a_{22}\hat{x}_{3u} + K^2\frac{k_2}{a_{11}}[e_1]^{2/4} + a_{22}x_1 \\ \dot{\hat{x}}_{3u} = -a_{12}\hat{x}_{4u} - K^3\frac{k_3}{a_{11}a_{22}}[e_1]^{1/4} - J(\hat{x}_{3u}) + a_{12}\hat{x}_{2u} \\ \dot{\hat{x}}_{4u} = K^4\frac{k_4}{a_{11}a_{22}a_{12}}[e_1]^0 + a_{23}(\hat{x}_{3u} - x_5 - \hat{f}_2) \\ \dot{\hat{x}}_{5l} = a_{13}\hat{x}_{4l} - Mm_1[e_5]^{2/3} - J(x_5) - a_{13}u_2 \\ \dot{\hat{x}}_{4l} = -a_{23}\hat{f}_2 - M^2\frac{m_2}{a_{13}}[e_5]^{1/3} + a_{23}(\hat{x}_{3u} - x_5) \\ \dot{\hat{f}}_2 = M^3\frac{m_3}{a_{13}a_{23}}[e_5]^0 \end{cases} \quad (3.30)$$

Nuevamente, este esquema permite estimar el estado completo y el flujo desconocido f_2 . Al igual que en el caso previo, existe información redundante, en particular la estimación del estado x_4 , tanto a partir de un observador de tercer orden por la parte superior del sistema x_{4u} , como mediante la parte inferior del mismo x_{4d} . Al sistema (3.29) se le denominará d_1 , dado que funge como un detector de flujo únicamente para el primer ramal, mientras que el sistema (3.30) funciona como un detector únicamente para el flujo en el segundo ramal d_2 .

Cada uno de los detectores d_1 y d_2 funciona apropiadamente cuando se satisfacen sus hipótesis respectivas, es decir, que sólo uno de las dos fallas esté presente. Nótese también de que dichos detectores tienen una estructura de dos observadores interconectados, uno para la parte superior del estado y otra para la inferior. En el caso de d_1 , la parte superior está constituida por un observador de segundo orden y estima los estados x_1 , x_2 y la señal f_1 . La sección inferior está dada por un observador de tercer orden que estima x_5 , x_4 , x_3 y x_2 ; ambas partes están interconectadas a través de x_3 y f_1 . Análogamente, las dos partes de d_2 se hallan comunicadas mediante x_3 y f_2 . Debido a dichas interconexiones, las porciones superiores e inferiores en d_1 y d_2 se encuentran acopladas, y cualquier error en una parte se propagará inevitablemente a la otra.

Lo anterior resulta particularmente cierto en caso de que exista flujo a través del ramal contrario a aquél con base en el cual fue diseñado el detector. Esto significa que la reconstrucción obtenida, por ejemplo, a partir de d_1 será correcta cuando $f_2 = 0$, pero será errónea si $f_2 \neq 0$. El problema análogo se presenta en d_2 . El caso interesante es, entonces, aquel en el que no se sabe cuál o cuáles flujos están presentes, si sólo f_1 , sólo f_2 o ambos. Queda claro que si sólo un ramal está activo, uno de los detectores proporcionará una reconstrucción correcta, mientras el otro arrojará resultados falsos. Si ambos flujos están presentes, ambos detectores producirán datos erróneos. Dado lo anterior, el problema estriba en poder identificar cuándo alguno de los detectores está equivocado, lo cual se traduce en poder distinguir entre las fallas f_1 y f_2 .

Afortunadamente, tanto d_1 como d_2 poseen información redundante que puede ser utilizada para distinguir las fallas. En el detector d_1 , se tiene acceso a dos estimaciones de x_2 , las cuales serán iguales si el detector brinda información correcta (esto es, cuando $f_2 = 0$), pero diferirán en caso contrario ($f_2 \neq 0$). De la misma manera, las dos estimaciones disponibles del estado x_4 coincidirán únicamente cuando $f_1 = 0$, y serán diferentes si esto no se cumple.

Con base en lo anterior, es posible proponer dos residuos base, los cuáles permitirán distinguir las fallas f_1 y f_2 . Para d_1 se tiene:

$$r_2 \triangleq \hat{x}_{2u} - \hat{x}_{2l} \quad (3.31)$$

Análogamente, para d_2 :

$$r_4 \triangleq \hat{x}_{4u} - \hat{x}_{4l} \quad (3.32)$$

Si $r_2 = 0$ implica que $\hat{x}_{2u} = \hat{x}_{2l}$, es decir, las estimaciones de x_2 obtenidas a partir de y_1 y y_2 coinciden; de la discusión anterior, esto significa que $f_1 \neq 0$ y $f_2 = 0$. En este caso, también, se tendrá que $x_{4u} \neq x_{4d}$ y por tanto $r_4 \neq 0$. Si, por el contrario, se tiene el caso en que $f_1 = 0$ y $f_2 \neq 0$, entonces $r_2 \neq 0$ y $r_4 = 0$.

3. RECONSTRUCCIÓN DE FLUJOS EN TUBERÍAS CON RAMALES

Tabla 3.1: Matriz de Firma de Fallas

Residuo	f_1	f_2	$f_1 \wedge f_2$
r_2		•	•
r_4	•		•

Por último, si tanto f_1 como f_2 son distintos de cero, entonces ambos detectores estarán equivocados y los dos residuos serán no nulos. Lo anterior puede resumirse a modo de una matriz de firma de fallas, como se muestra en la Tabla 3.1. Los renglones de dicha matriz son linealmente independientes, lo que implica que, en un principio, las fallas son distinguibles.

Análisis de Resultados

En el presente apartado, se aplicarán las técnicas descritas en el Capítulo 3 para reconstruir los flujos desconocidos en una tubería discretizada espacialmente en tres secciones y con dos ramales de posiciones conocidas, cuyo modelo dinámico está dado por (3.15). Dado que esta aplicación también puede verse como un problema de FDI, se denominarán genéricamente como *fallas* a los flujos desconocidos que se pretenden reconstruir.

En la primera sección se presentan resultados de simulación, donde se reconstruyen fallas simultáneas empleando tanto el esquema FOSMO en cascada descrito en la sección 3.2 como el HOSMO definido en (3.28). Lo anterior, con el fin de evaluar el desempeño de la técnica desarrollada y compararlo con una estrategia previamente reportada para resolver el mismo problema. Posteriormente, se presentan resultados experimentales a partir de datos obtenidos de una tubería piloto localizada en el Instituto de Ingeniería de la UNAM.

Finalmente, se muestran y discuten los resultados de simulación y experimentales para la estrategia de detección y aislamiento de fallas secuenciales introducida en la sección 3.4.

4.1. Resultados de Simulación

En esta sección se presentan los resultados de simulación numérica relativos a la reconstrucción de flujos desconocidos (fallas) correspondientes a los gastos no medidos en los ramales de una tubería. Para ello, se utiliza el modelo matemático Σ dado por (3.15). En la Tabla 4.1 se presentan los parámetros físicos empleados para la simulación. Las posiciones de los ramales son $z_1 = 100 [m]$ y $z_2 = 156.2 [m]$.

4. ANÁLISIS DE RESULTADOS

Tabla 4.1: Parámetros físicos de la tubería

Parámetro	Símbolo	Valor	Unidad
Longitud Total	L	169.43	[m]
Diámetro	d	0.1016	[m]
Área de Sección Transversal	A_T	8.1073×10^{-3}	[m ²]
Velocidad de la Onda de Presión	b	1330	[m/s]
Aceleración de Gravedad	g	9.81	[m/s ²]
Coefficiente de Fricción	θ_α	-1.7217	[s/m ³]
Coefficiente de Fricción	θ_β	0.0956	[1]
Posición del Ramal 1	z_1	100	[m]
Posición del Ramal 2	z_2	156.2	[m]

Empleando estos valores para los parámetros físicos, se obtienen los siguientes parámetros del modelo:

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= 7.9533 \times 10^{-4} \\
 a_{22} &= 2.2241 \times 10^5 \\
 a_{12} &= 1.4152 \times 10^{-3} \\
 a_{23} &= 3.9575 \times 10^5 \\
 a_{13} &= 6.0115 \times 10^{-3}
 \end{aligned}$$

Es posible también calcular los puntos de operación del sistema para condiciones nominales, es decir, cuando $f = 0$, haciendo $\dot{x} = 0$ en (3.15) y resolviendo para x . Las entradas de operación se seleccionan como:

$$\bar{u}_1 = 18.3 [m], \quad \bar{u}_2 = 3.5 [m] \quad (4.1)$$

Para estas entradas nominales, existen tres soluciones a la ecuación $\dot{x} = 0$, las cuales son:

$$PO_1 : \begin{cases} \bar{x}_1 = \bar{x}_3 = \bar{x}_5 = 12.42 \times 10^{-3} [m^3/s] \\ \bar{x}_2 = 9.56483 [m] \\ \bar{x}_4 = 4.65566 [m] \end{cases} \quad (4.2)$$

$$PO_2 : \begin{cases} \bar{x}_1 = \bar{x}_3 = \bar{x}_5 = 53.16 \times 10^{-3} [m^3/s] \\ \bar{x}_2 = 9.56483 [m] \\ \bar{x}_4 = 4.65566 [m] \end{cases} \quad (4.3)$$

$$PO_3 : \begin{cases} \bar{x}_1 = \bar{x}_3 = \bar{x}_5 = -10.07 \times 10^{-3} [m^3/s] \\ \bar{x}_2 = 9.56483 [m] \\ \bar{x}_4 = 4.65566 [m] \end{cases} \quad (4.4)$$

De éstos, PO_1 corresponde a un punto de operación localmente estable, PO_2 es un punto de operación inestable y PO_3 no es físico. Por ende, se trabajará con el punto de operación físico localmente estable PO_1 .

Para propósitos de simulación únicamente, los flujos de los ramales f_1 y f_2 fueron modelados con la estructura

$$f_i = \lambda_i \sqrt{x_{2i}}, \quad \forall i = 1, 2$$

donde λ_i es un parámetro constitutivo para el i -ésimo ramal. Los valores de λ empleados en todas las simulaciones son $\lambda_1 = 7 \times 10^{-4}$ and $\lambda_2 = 3.5 \times 10^{-4}$.

Adicionalmente, para verificar el desempeño de ambos esquemas de estimación en presencia de desviaciones en el punto de operación, las entradas de control u_1 y u_2 empleadas en la simulación se tomaron como señales sinusoidales centradas en el valor nominal, con amplitud igual a dos y con un periodo de 10 [s], es decir

$$u_i = \bar{u}_i + 2 \sin\left(\frac{\pi t}{5}\right), \quad i = 1, 2. \quad (4.5)$$

Además, tanto a las señales de entrada u como de salida y les fue sumada una componente uniforme de ruido blanco con media cero.

4.1.1. Reconstrucción de Fallas Simultáneas empleando el Esquema FOSMO en Cascada

A continuación se presentan los resultados para la reconstrucción de flujos no medidos en los ramales (fallas) simultáneos en la tubería empleando el esquema FOSMO en cascada discutido en la sección 3.2. Particularmente, para el reconstructor de flujos se usará el esquema de orden reducido. La simulación se llevó a cabo de la siguiente manera: al inicio no existe flujo en los ramales ($f = 0$); esto es, la planta trabaja bajo condiciones nominales de operación. En el tiempo $t = 20$ [s], se presentan simultáneamente los dos flujos en los ramales f_1 y f_2 . Para este caso, las ganancias empleadas fueron

$$\begin{aligned} \varrho_1 &= 1, & \varrho_2 &= 1000 \\ G_1 &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, & G_{L1} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ G_2 &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, & G_{L2} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -a_{12} & a_{12} \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

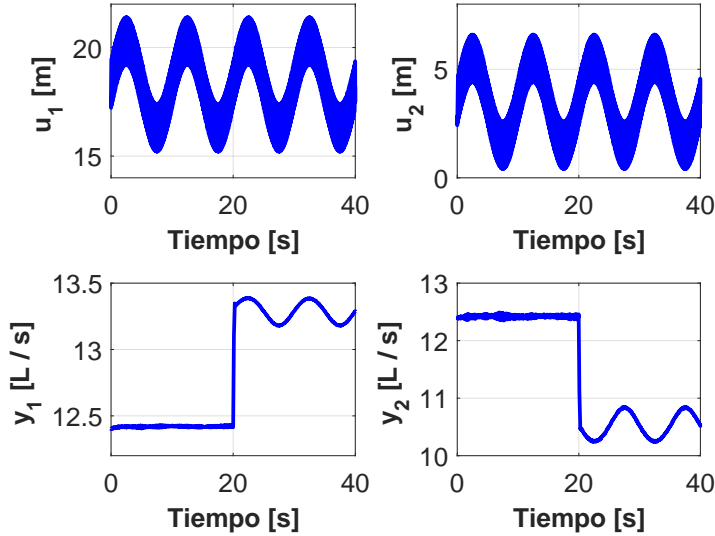


Figura 4.1: Entradas y salidas de la tubería con fallas simultáneas

Nótese que la ganancia ϱ_2 es mucho mayor a ϱ_1 ; esto es debido a que en el primer observador, correspondiente al estimador de presión, las señales desconocidas (x_2, x_4) son del orden de 10^1 , pero entran en el sistema mediante la matriz D_{r1} , la cual incluye términos del orden de 10^{-3} ; por ende, no se precisa una ganancia ϱ_1 grande. Asimismo, la robustificación a partir de un término lineal en el observador es innecesaria, por lo que $G_{L1} = 0$. Para el segundo observador, encargado de reconstruir a los flujos desconocidos (f_1, f_2), las señales desconocidas son del orden de 10^{-3} , pero entran multiplicadas por la matriz D_{r2} , la cual incluye términos del orden de 10^5 ; por ende, la ganancia ϱ_2 debe ser del orden de 10^3 para que la función signo domine a las entradas desconocidas. En este caso, la adición de una ganancia lineal G_{L2} es necesaria para robustificar el diseño.

En la Figura 4.1 se presentan las señales medibles de entrada u y de salida y . Las Figuras 4.2 y 4.3 muestran, respectivamente, los errores de salida e_1, e_5 y la estimación de presiones x_2, x_4 obtenidos mediante el estimador de presiones para el esquema FOSMO en cascada.

En la primera de dichas figuras, se aprecia que el esquema FOSMO es capaz de reconstruir correctamente los flujos de medidos, llevando los errores de salida e_1 y e_5 a cero en tiempo finito. Por otro lado, la estimación de las presiones x_2 y x_4 , aunque apropiada, no logra la reconstrucción completa de la respuesta transitoria, al presentarse las fallas.

A continuación, se analizará el desempeño del reconstructor de flujos, el cual emplea la información correspondiente a las presiones x_2 y x_4 estimadas en la etapa anterior. La Figura 4.4 presenta la reconstrucción de los flujos f_1 y f_2 . Se aprecia que la convergencia es sólo exponencial, debido a la falta de observabilidad en x_3 . Asimismo, no es posible

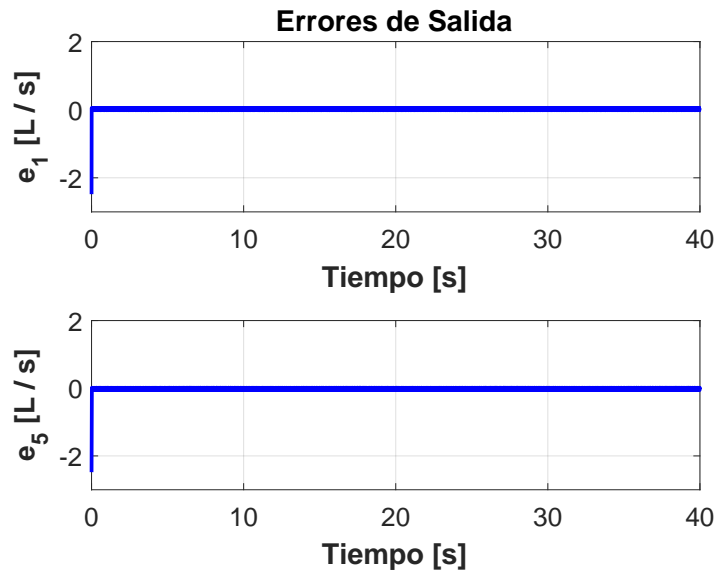


Figura 4.2: Errores de salida de la tubería con fallas simultáneas empleando FOSMO en cascada

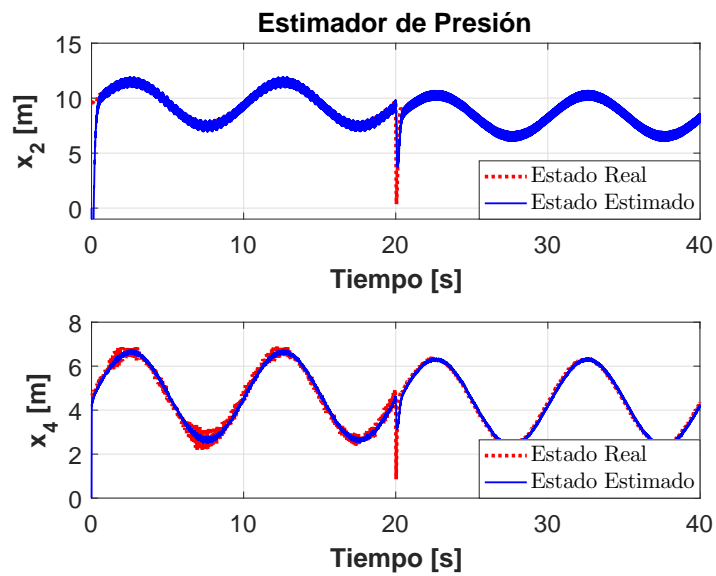


Figura 4.3: Estimación de presiones de la tubería con fallas simultáneas empleando FOSMO en cascada

4. ANÁLISIS DE RESULTADOS

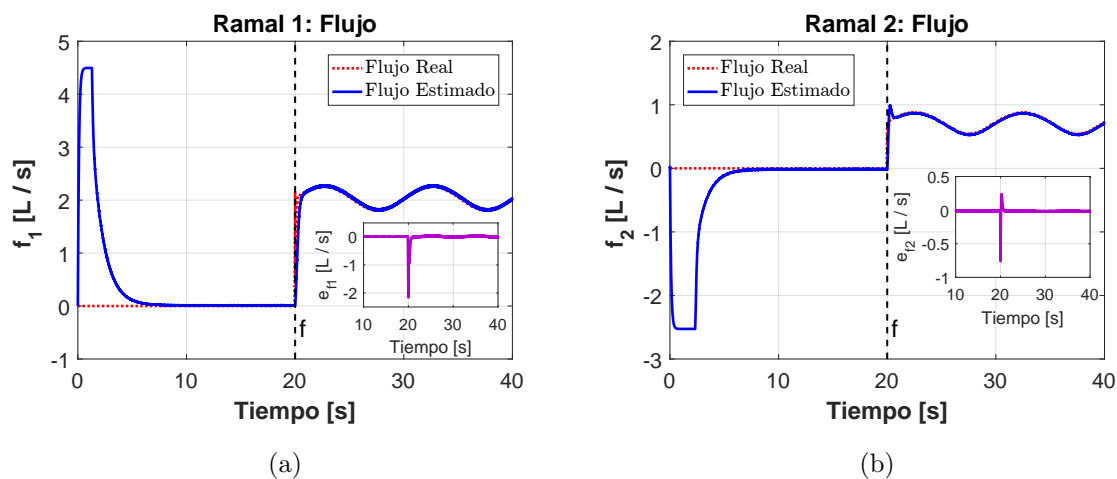


Figura 4.4: Reconstrucción de fallas simultaneas usando FOSMO en cascada: (a) Ramal 1 (b) Ramal 2

reconstruir completamente el comportamiento transitorio cuando se presentan las fallas. Adicionalmente, existe un ligero error en estado permanente inducido por un pequeño desfase entre las señales de falla y sus estimados, el cual es producido por el filtro pasa-bajas necesario para la reconstrucción de las señales desconocidas.

Finalmente, la Figura 4.5 muestra la estimación del estado x_3 y su correspondiente error de observación. Nuevamente, la convergencia es exponencial, sin embargo, una vez que se ha alcanzado ésta, el seguimiento es sumamente bueno, incluso ante la presencia de fallas. Cuando éstas acaecen, sólo existe un breve transitorio, el cual se desvanece rápidamente.

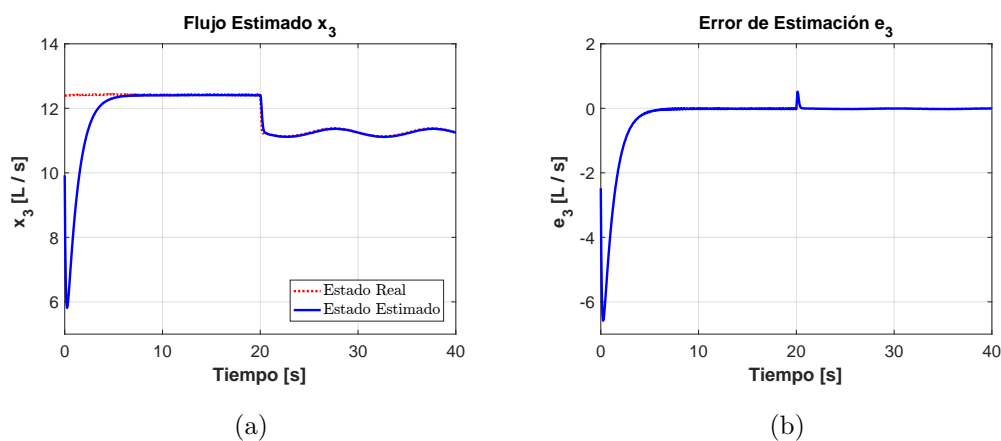


Figura 4.5: Reconstrucción del estado intermedio con fallas simultáneas usando FOSMO en cascada: (a) Estado x_3 (b) Error e_3

4.1.2. Reconstrucción de Fallas Simultáneas empleando el Esquema HOSMO

En este apartado, se muestra la reconstrucción de los flujos desconocidos en los ramales de una tubería, empleando el esquema HOSMO propuesto en (3.28). En este caso, el conjunto de ganancias empleado es

$$(k_1, k_2, k_3) = (3.1, 5, 1.01)$$

$$L_1 = L_2 = 5$$

Las ganancias (k_1, k_2, k_3) utilizadas en este trabajo corresponden a un conjunto válido para un diferenciador HOSM de segundo orden. Estos valores de ganancias garantizan la estabilidad del algoritmo y fueron obtenidos mediante una función de Lyapunov (Moreno, 2018), (Cruz-Zavala y Moreno, 2016). Para poder ser usadas en el observador propuesto, se llevó a cabo un escalamiento de dichas ganancias, el cual ya está incluido en (3.28).

En la Figura 4.6 se presentan los errores de observación en los flujos e_1 , e_3 , e_5 de la tubería. Es posible apreciar en esta figura que la convergencia de los estados x_1 y x_5 se da en tiempo finito, mientras que para el estado x_3 es sólo exponencial, dado que éste se estima en lazo abierto. Sin embargo, una vez que el observador converge, el error nunca se desvía de cero, a pesar de la presencia de fallas. Esto indica que, a diferencia del esquema en cascada, el HOSMO es capaz de reconstruir completamente la respuesta transitoria.

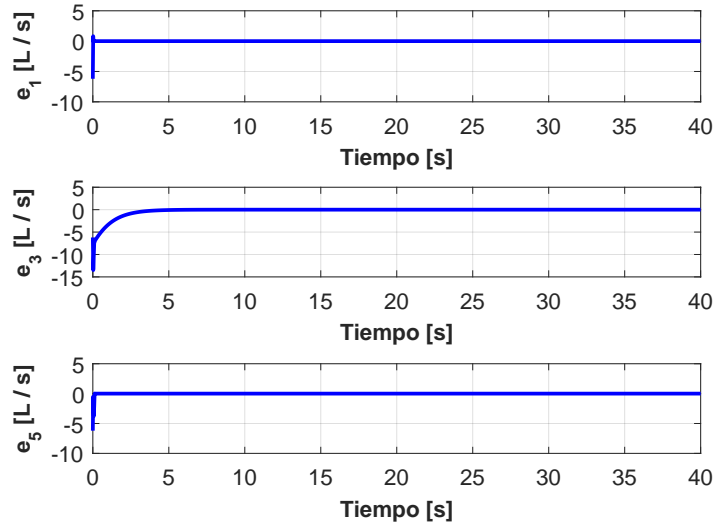


Figura 4.6: Errores de observación de flujos para fallas simultáneas empleando HOSMO

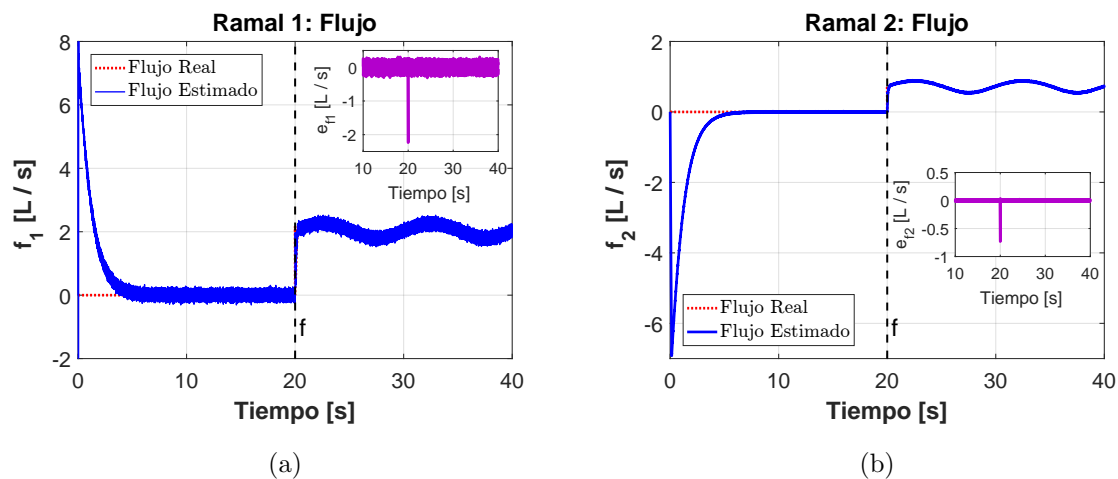


Figura 4.7: Reconstrucción de fallas simultáneas usando el esquema HOSMO:

(a) Ramal 1 (b) Ramal 2

En la Figura 4.7 se muestra la estimación de los flujos desconocidos en los ramales. Es posible apreciar que ésta es bastante buena y completa, es decir, incluye la respuesta transitoria. La convergencia nuevamente es exponencial, debido a la estimación de x_3 en lazo abierto. La reconstrucción del flujo en el primer ramal se ve afectada ligeramente por el efecto del *chattering* y del ruido; sin embargo, recuérdese que, al contrario del esquema en cascada, aquí no se emplea ninguna etapa de filtrado. A pesar de esto, el observador estima la señal desconocida f_1 apropiadamente. Para el flujo del segundo ramal, la reconstrucción es básicamente exacta. Nótese que en este caso no existe desfase inducido por la acción de un filtro.

4.2. Resultados Experimentales

En la sección anterior, se verificó el desempeño del HOSMO propuesto en (3.28) para reconstruir flujos desconocidos simultáneos en una tubería. Asimismo, también se obtuvo la estimación a partir de un esquema de observadores FOSMO en cascada, únicamente para fines comparativos, y se discutieron las diferencias entre estas dos técnicas.

En términos generales, se aprecia que la reconstrucción empleando HOSMO no hace uso de la inyección de error de salida equivalente, es decir, no requiere de una etapa de filtrado, por lo cual, directamente, la solución obtenida es más exacta; ésta también es más completa, ya que este observador es capaz de recuperar la respuesta transitoria en su totalidad. Adicionalmente, el esquema HOSMO básicamente genera estimaciones de las fallas que son insensibles entre sí, a diferencia del método en cascada.



Figura 4.8: Planta piloto

A continuación, se presentan los resultados obtenidos al aplicar los esquemas previos para reconstruir flujos en una tubería piloto, la cual se encuentra en el Instituto de Ingeniería, de la UNAM. Dicha tubería está construida de acero al carbón y tiene un diámetro de 4 [in]. El ducto cuenta en total con 6 derivaciones de la línea principal, cuyas posiciones son conocidas, las cuales, mediante el uso de válvulas manuales y eléctricas, sirven para emular fallas (fugas, flujos de ramales, etc). Adicionalmente, la instalación cuenta con instrumentos para medir el gasto y la presión piezométrica a la entrada y a la salida de la tubería. Los parámetros físicos de la planta piloto corresponden con aquellos reportados en la Tabla 4.1. El punto de operación para el sistema está dado por (4.1)-(4.2).

Para la prueba experimental, se provocaron dos flujos a través de válvulas manuales representando los ramales, localizadas a $z_1 = 100$ [m] y $z_2 = 156.2$ [m]. Al principio del experimento, no hay gasto de salida a través de las válvulas; la tubería funciona bajo condiciones nominales de operación. Aproximadamente a $t = 18$ [s], se abre la primera válvula simulando el primer flujo desconocido f_1 . Posteriormente, en $t = 33$ [s] se abre la segunda válvula, correspondiente al segundo ramal por donde circula un gasto f_2 . Éstas permanecen abiertas hasta el final del experimento.

La Figura 4.9 muestra las señales medidas de entrada y de salida en la tubería, correspondientes a las presiones y flujos en sus extremos. En estas gráficas, es posible notar la presencia de los flujos de salida que atraviesan las válvulas; esto es particularmente perceptible en las gráficas del gasto en los extremos del ducto. También, existe una notoria caída de presión cada vez que se presenta una falla.

Para reconstruir los flujos desconocidos f_1 y f_2 , se emplean los esquemas FOSMO en cascada y HOSMO descritos en las secciones 3.2 y 3.3, respectivamente. Los conjuntos de ganancias empleados son los mismos que en las simulaciones. En la Figura 4.10 se presenta la estimación de los gastos en los ramales f_1 y f_2 . En primer término, nótese que la reconstrucción presenta una etapa transitoria con sobrepaso, antes de

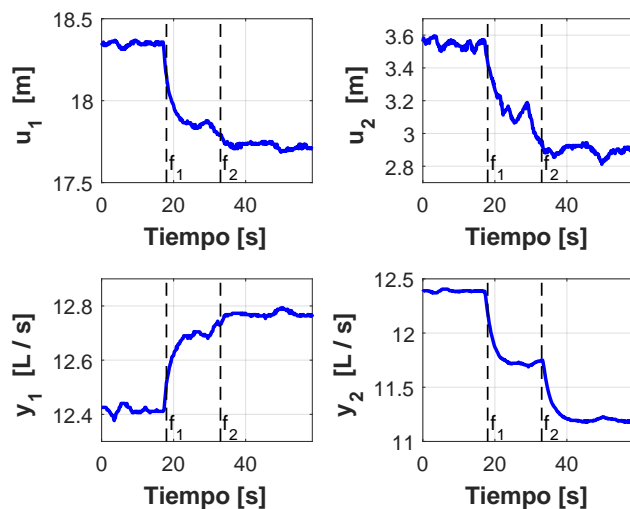


Figura 4.9: Entradas y salidas para la prueba experimental en la tubería piloto

converger exponencialmente al valor real de los flujos. Para el flujo del primer ramal, f_1 , es posible notar en la gráfica que la reconstrucción obtenida por ambos esquemas es sumamente buena, considerando que los datos provienen de un ducto real. En esta misma gráfica, se muestra, adicionalmente, un acercamiento para instantes previos a que se presente la primera falla y hasta antes de la segunda (aproximadamente, desde $t = 10$ [s] hasta $t = 30$ [s]). Durante este intervalo de tiempo, la magnitud total del gasto desconocido f_1 , por consideraciones de continuidad, debe ser igual a la diferencia entre los flujos volumétricos de entrada y salida en la tubería, es decir, $y_1 - y_2$. Dicha diferencia de gastos se muestra en el acercamiento, junto con la estimación generada. Se aprecia que, la diferencia de gastos $y_1 - y_2$ se encuentra ligeramente por encima del valor reconstruido, lo cual sugiere la presencia de incertidumbres paramétricas y errores en la reconstrucción.

En el caso del segundo ramal, se aprecia en la Figura 4.10 que durante los primeros 30 segundos del experimento, la estimación permanece cercana a cero y, después de este punto, cuando se abre la segunda válvula, el valor se incrementa hasta aproximadamente 1×10^{-3} [m^3/s].

En la Figura 4.11 se presenta la señal desconocida total $\hat{f}_1 + \hat{f}_2$ reconstruida, la cual incluye toda otra posible perturbación o incertidumbre presente en el sistema. Nótese que esta señal coincide para ambos esquemas con la diferencia de gastos medidos en los extremos de la tubería. Finalmente, la estimación del estado intermedio x_3 obtenida mediante el esquema HOSMO se presenta en la Figura 4.12. Recuérdese que la observación de este estado se efectúa en lazo abierto. Puede apreciarse que se tiene un comportamiento estable y que la convergencia es sólo exponencial, determinada por la dinámica propia de este estado.

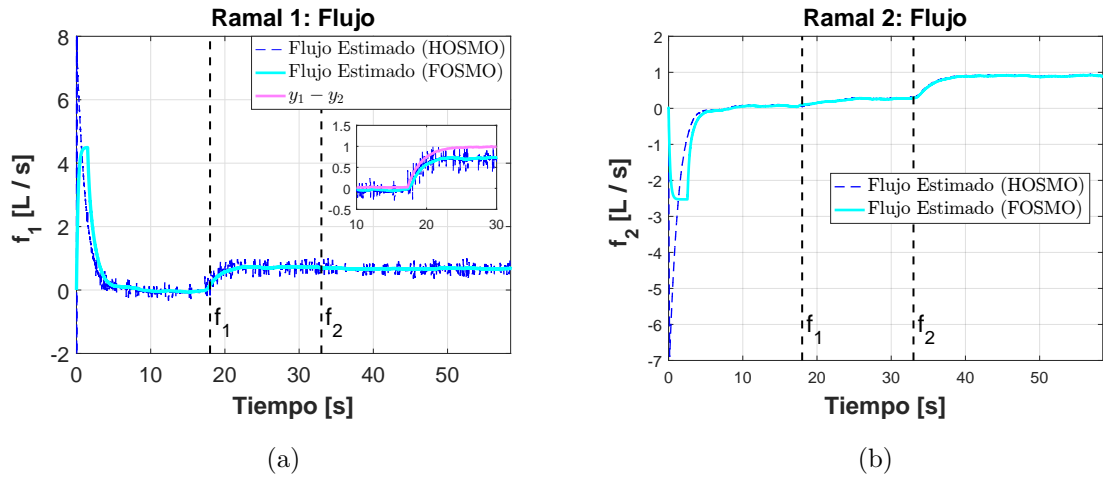


Figura 4.10: Reconstrucción de fallas secuenciales en la tubería piloto: (a) Ramal 1 (b) Ramal 2

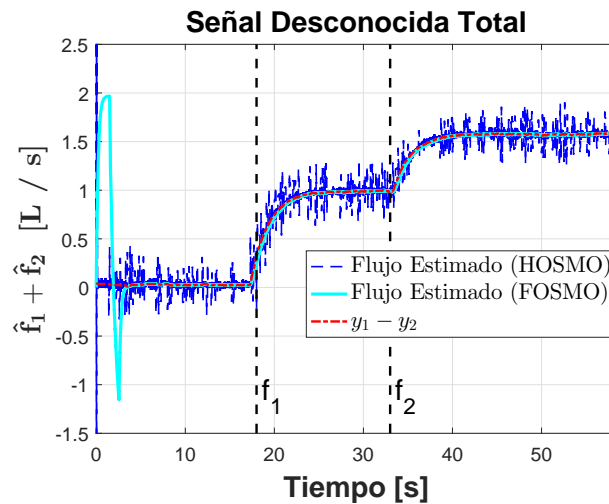


Figura 4.11: Entradas y salidas para la prueba experimental en la tubería piloto

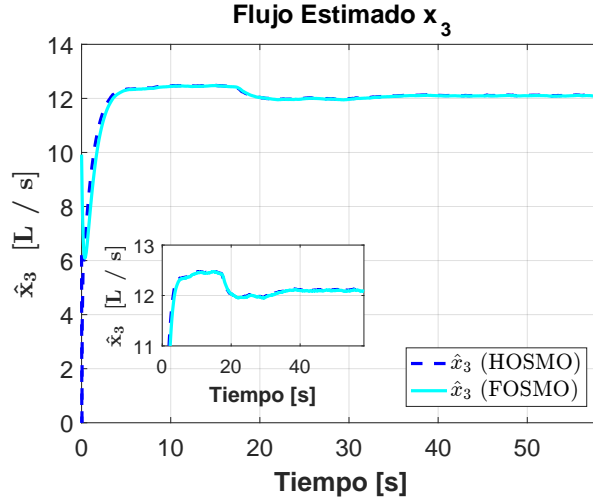


Figura 4.12: Estimación del estado intermedio x_3

El HOSMO (3.28) permite observar completamente el estado x del sistema, con convergencia en tiempo finito en los errores de salida. Debido a la falta de observabilidad inherente al sistema, el estado x_3 , así como las señales desconocidas f_1 y f_2 sólo pueden ser estimados asintóticamente. En términos generales, el observador diseñado exhibe un muy buen desempeño y proporciona estimaciones de los flujos desconocidos con un alto grado de exactitud.

4.3. Identificación y Aislamiento de Fallas

En esta sección, se presentan los resultados obtenidos para la estrategia de identificación y aislamiento de fallas discutida en la sección 3.4. En primer término, se muestran los resultados de simulación y posteriormente aquellos obtenidos con datos provenientes de la tubería piloto.

4.3.1. Resultados de Simulación

En la Figura 4.13 se presenta la reconstrucción de flujos dada por los detectores d_1 y d_2 , así como los respectivos residuos, r_2 y r_4 . En este caso, únicamente existe flujo en el primer ramal ($f_2 = 0$). Las ganancias empleadas en los observadores son:

$$K = M = 5$$

$$(m_1, m_2, m_3) = (3.1, 5, 1.01), \quad (k_1, k_2, k_3, k_4) = (6, 19, 16.15, 1.01)$$

las cuales corresponden a un diferenciador HOSM de 2° y 3° orden, respectivamente (Sanchez *et al.*, 2017). A partir de la figura, es posible apreciar que la reconstrucción de

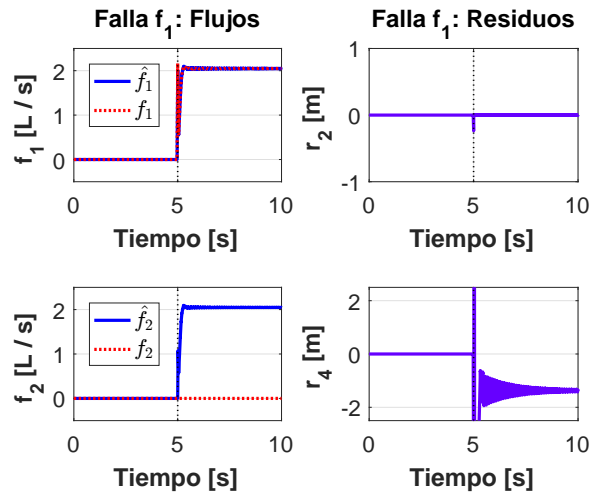


Figura 4.13: Reconstrucción de flujos y residuos para f_1

f_1 es exacta y se da en tiempo finito. Adicionalmente, el residuo asociado r_2 permanece en cero, lo cual indica que el detector d_1 brinda resultados correctos. Por el contrario, después de que aparece la falla f_1 , el residuo r_4 se desvía de cero, indicando que la reconstrucción hecha de f_2 por parte del sistema d_2 es incorrecta. Nótese, sin embargo, que las estimaciones del flujo desconocido f_1 obtenida mediante los dos detectores son idénticas. Lo anterior se debe a la capacidad del algoritmo por modos deslizantes para compensar exactamente cualquier discrepancia entre el modelo matemático y el sistema, siempre y cuando la derivada de ésta sea acotada.

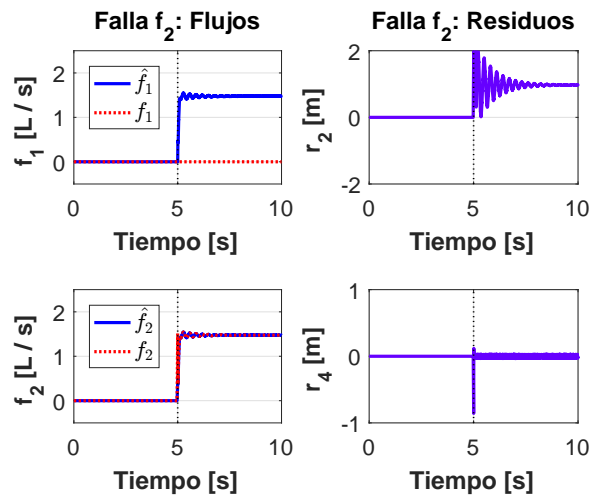


Figura 4.14: Reconstrucción de flujos y residuos para f_2

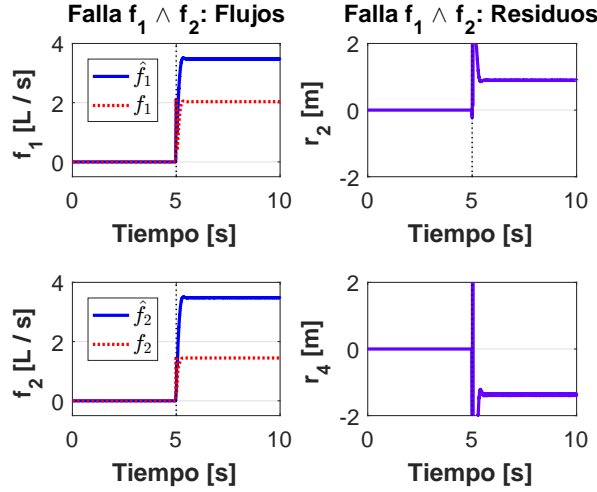


Figura 4.15: Reconstrucción de flujos y residuos para $f_1 \wedge f_2$

De la misma manera, la Figura 4.14 muestra las reconstrucciones obtenidas para el flujo del segundo ramal, junto con el comportamiento de los residuos. En este caso, el residuo r_4 permanece en cero, indicando que la reconstrucción dada por d_2 es correcta, es decir, que la falla que se encuentra presente es f_2 .

Por último, la Figura 4.15 muestra las reconstrucciones y los residuos cuando las fallas ocurren simultáneamente. En este caso, ambos residuos son distintos de cero y el flujo reconstruido por ambos detectores corresponde con la suma del gasto en los dos ramales. De este modo, se verifica la matriz de firma de fallas presentada previamente en la Tabla 3.1. Con base en los resultados anteriores se concluye que, idealmente, los residuos base r_2 y r_4 permiten distinguir entre las fallas f_1 y f_2 . Sin embargo, el desempeño de dichos residuos puede verse degradado en presencia de ruido, incertidumbres y perturbaciones. A partir de los residuos base, pueden obtenerse otros indicadores para distinguir las fallas. En particular, se plantea utilizar la gráfica r_2 vs. r_4 , así como la de $\theta \triangleq \text{atan2}(r_2/r_4)$.

En la Figura 4.16 se presenta la gráfica r_2 vs. r_4 ante la falla f_1 . Es posible apreciar que, una vez pasado el transitorio, la gráfica presenta una tendencia vertical, coincidente con el eje r_4 . Esto también se puede observar en la gráfica correspondiente al ángulo entre los residuos, cuyo valor tiende a $-\pi/2$. En el caso de que la falla existente sea f_2 , el comportamiento de los residuos se presenta en la Figura 4.17. Se aprecia que la gráfica r_2 vs. r_4 en este caso es horizontal, coincidente con el eje r_2 . Esto también implica que el ángulo entre los dos residuos es de cero. Finalmente, en la Figura 4.18 se muestra la curva r_2 vs. r_4 para fallas simultáneas, la cual en este caso no presenta ninguna tendencia marcada. Sin embargo, el ángulo entre los dos residuos tiende a -1 [rad]. Con base en los resultados anteriores, puede extenderse la matriz de firma de fallas, incluyendo los comportamientos cualitativos de los residuos con el fin de facilitar la identificación, como se muestra en la Tabla 4.2.

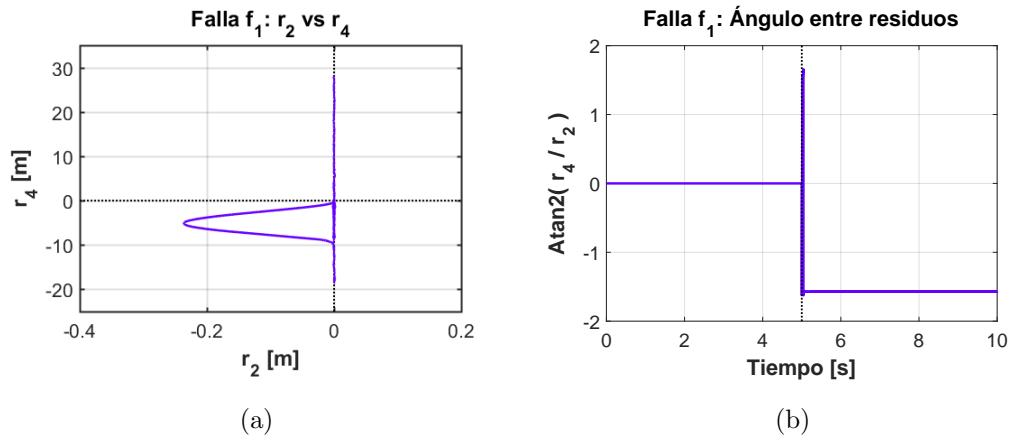


Figura 4.16: Comportamiento de los residuos para f_1 (a) r_2 vs. r_4 (b) $\text{atan2}(r_4/r_2)$

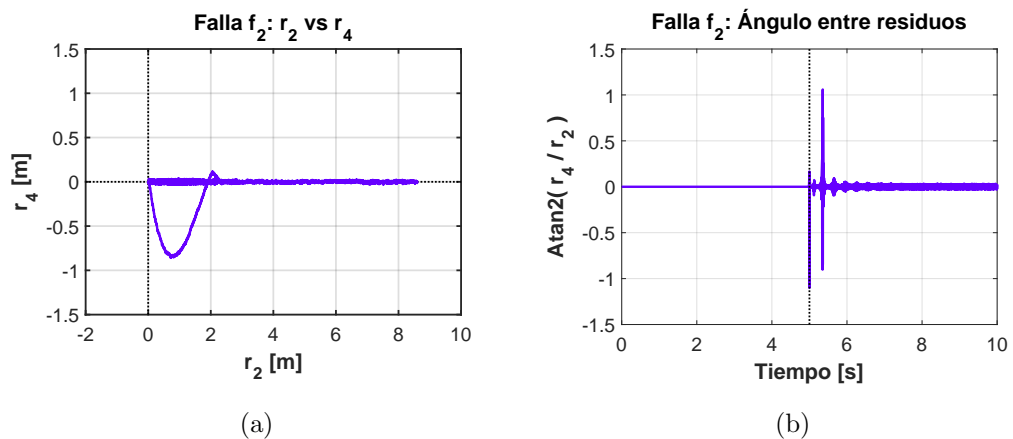


Figura 4.17: Comportamiento de los residuos para f_2 (a) r_2 vs. r_4 (b) $\text{atan2}(r_4/r_2)$

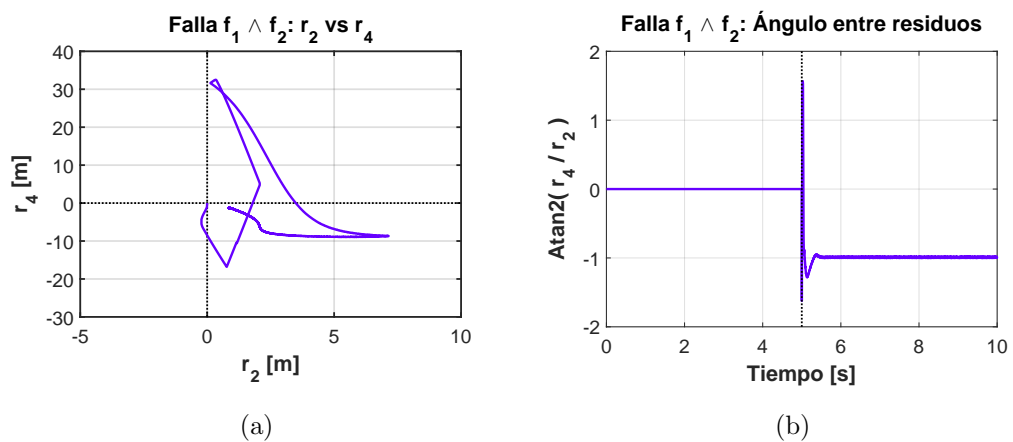


Figura 4.18: Comportamiento de los residuos para $f_1 \wedge f_2$ (a) r_2 vs. r_4 (b) $\text{atan2}(r_4/r_2)$

4. ANÁLISIS DE RESULTADOS

Tabla 4.2: Matriz de Firma de Fallas

Indicador	f_1	f_2	$f_1 \wedge f_2$
r_2	0	$\neq 0$	$\neq 0$
r_4	$\neq 0$	0	$\neq 0$
r_2 vs. r_4	Vertical	Horizontal	-
$\text{atan2}(r_4/r_2)$	$-\pi/2$	0	-1

4.3.2. Resultados Experimentales

En este apartado, se analiza el esquema de identificación propuesto previamente a partir de datos obtenidos de la tubería piloto. Únicamente se presenta el caso cuando $f_1 \neq 0$ y $f_2 = 0$. Las señales medidas de entradas y salidas se muestran en la Figura 4.19. Las reconstrucciones del flujo f_1 dadas por d_1 y d_2 , así como los residuos r_2 y r_4 se observan en la Figura 4.20. En la gráfica es posible notar que la reconstrucción del flujo f_1 es bastante aproximada, aún cuando existe un pequeño error en estado permanente, el cual puede deberse a la presencia de un sesgo en el instrumento de medición. Sin embargo, en este caso es más difícil distinguir cuál es el comportamiento de los residuos, dado que éstos aparecen con bastante ruido.

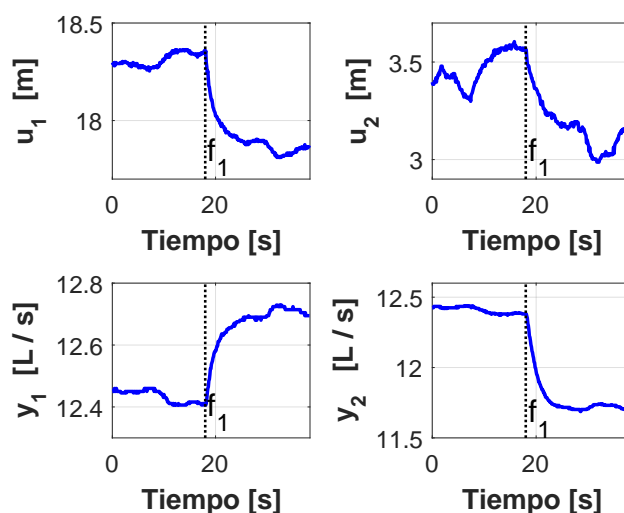


Figura 4.19: Señales de entrada y salida a la tubería piloto

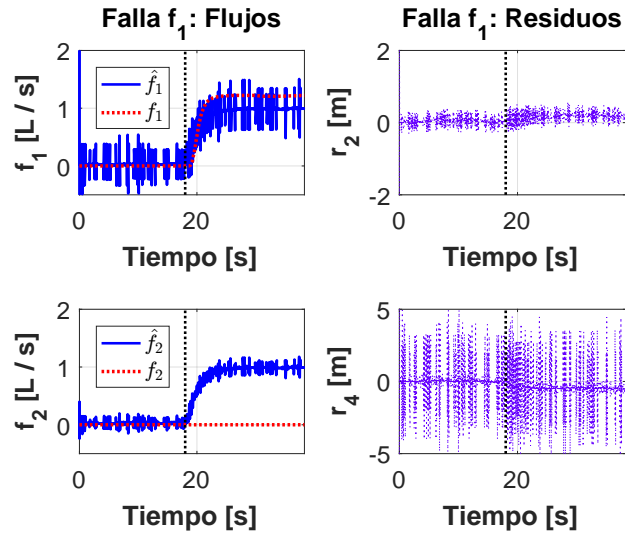


Figura 4.20: Reconstrucción de flujos y residuos para f_1

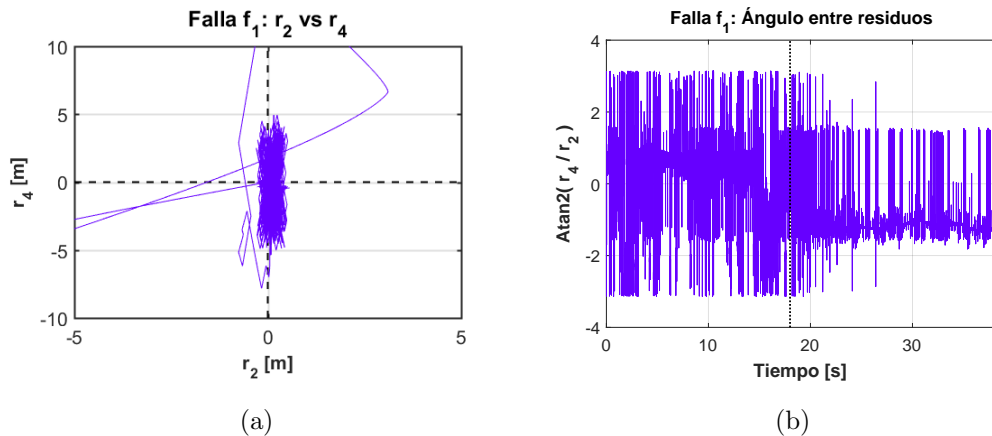


Figura 4.21: Comportamiento de los residuos para f_1 (a) r_2 vs. r_4 (b) $\text{atan2}(r_4/r_2)$

La Figura 4.21 muestra las gráficas de r_2 vs. r_4 y $\text{atan2}(r_2/r_4)$. Es importante resaltar que, aún en la presencia de ruido, la tendencia de los residuos sigue siendo vertical, tal como se había pronosticado teóricamente. Esto no es tan obvio a partir del ángulo entre residuos, aunque sí se aprecia que éste se aleja de cero en su valor medio.

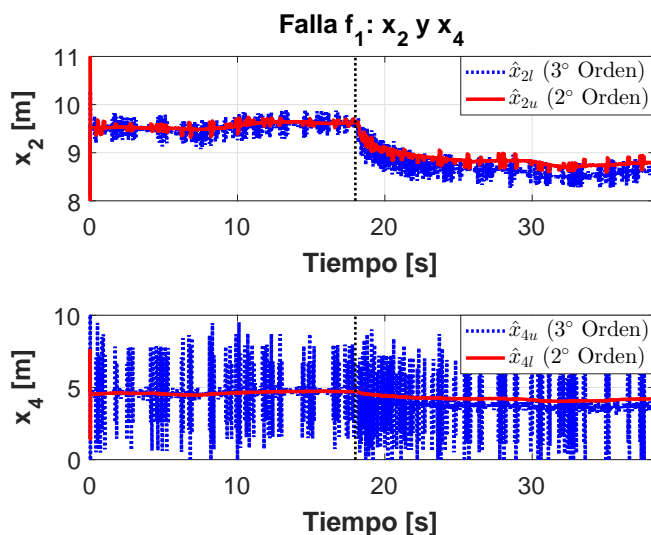


Figura 4.22: Estimación de los estados x_2 y x_4

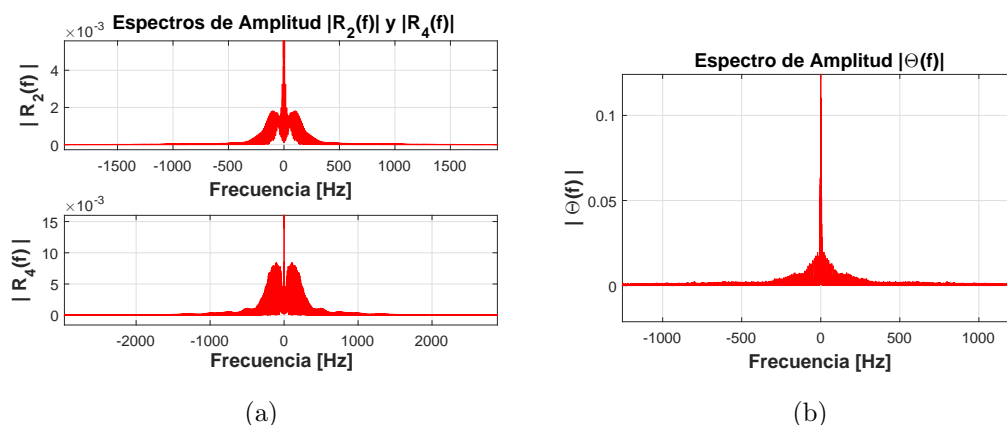


Figura 4.23: Espectros de amplitud. (a) r_2 y r_4 (b) $\theta = \text{atan2}(r_4/r_2)$

Al observar las Figuras 4.19 y 4.20 aparece la interrogante de qué es lo que causa tal degradamiento en las estimaciones del flujo y en el cálculo de los residuos. A pesar de que las entradas y salidas a la planta no se mantienen constantes, éstas no presentan un nivel significativo de ruido, por lo que no se puede atribuir la caída en el desempeño a la instrumentación. La Figura 4.22 sirve para aclarar esta cuestión; en ella se muestran las reconstrucciones de los estados x_2 y x_4 , para los detectores d_1 y d_2 , respectivamente, los cuales además se usan para calcular los residuos r_2 y r_4 .

Como se mencionó anteriormente, para estos estados se tiene información redundante; una estimación proviene de un observador HOSM de segundo orden mientras la otra se obtiene mediante uno de tercer orden. En la figura se aprecia que la reconstrucción

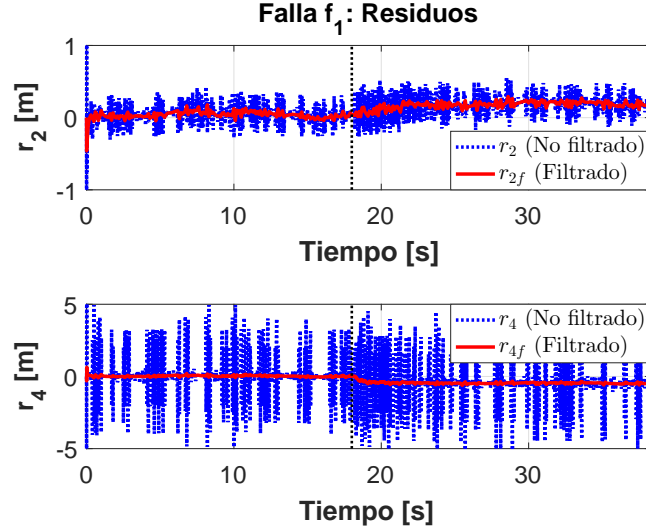


Figura 4.24: Residuos filtrados r_2 y r_4

obtenida a partir del observador de tercer orden se degrada considerablemente respecto a aquella proveniente del observador de segundo orden. Básicamente, el degradamiento es consecuencia del hecho de incrementar en uno el orden, con lo cual también se amplifica el ruido de la señal. Esto es análogo a lo que ocurre con los diferenciadores cuando se intenta obtener la derivada del orden inmediato superior. Como es bien sabido, la operación de derivar tiende a amplificar el ruido.

Una solución relativamente sencilla para subsanar lo anterior consiste en filtrar los residuos r_2 y r_4 . Para esto, es necesario conocer el contenido frecuencial de dichas señales. Esta información se presenta en la Figura 4.23, donde se incluyen los espectros de amplitud de r_2 , r_4 y $\theta = \text{atan2}(r_4/r_2)$. Con base en las gráficas, es fácil identificar las bandas de frecuencia en las cuales se encuentra el ruido inducido por el incremento de orden. A continuación, se procedió a filtrar las señales de los residuos r_2 y r_4 mediante un filtro pasa-bajas lineal de primer orden con ganancias unitaria.

$$\dot{r}_{i,f} = \omega_c r_i - \omega_c r_{i,f}, \quad i = 2, 4$$

donde r_i es el i -ésimo residuo sin filtrar, $r_{i,f}$ corresponde al i -ésimo residuo filtrado y ω_c es la frecuencia de corte. En este caso, se empleó $\omega_c = 10$ [rad/s].

La Figura 4.24 muestra los residuos r_2 y r_4 antes y después de la etapa de filtrado. Se aprecia que el valor medio de la señal se mantiene y el ruido de alta frecuencia es atenuado correctamente. En la Figura 4.25 se presentan las reconstrucciones del flujo f_1 junto con los respectivos residuos r_2 y r_4 ya filtrados. De esta gráfica es fácil observar que el residuo que se aleja de cero es r_4 , lo que nos indica que la falla presente es f_1 y que la reconstrucción obtenida con d_1 es correcta.

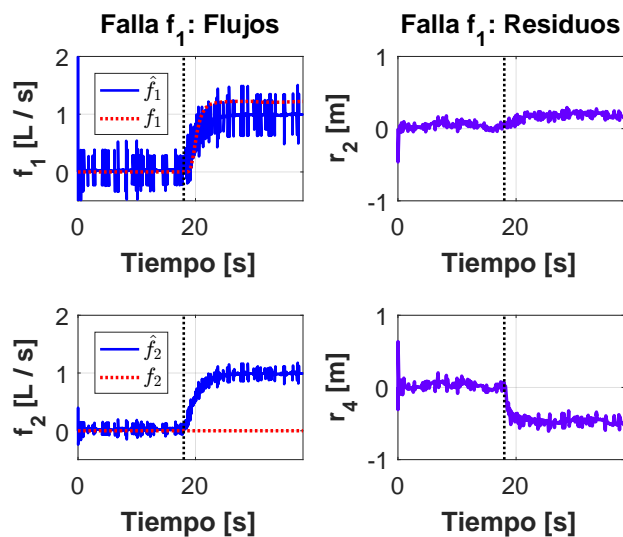


Figura 4.25: Reconstrucción de flujos y residuos para f_1 , después del filtrado

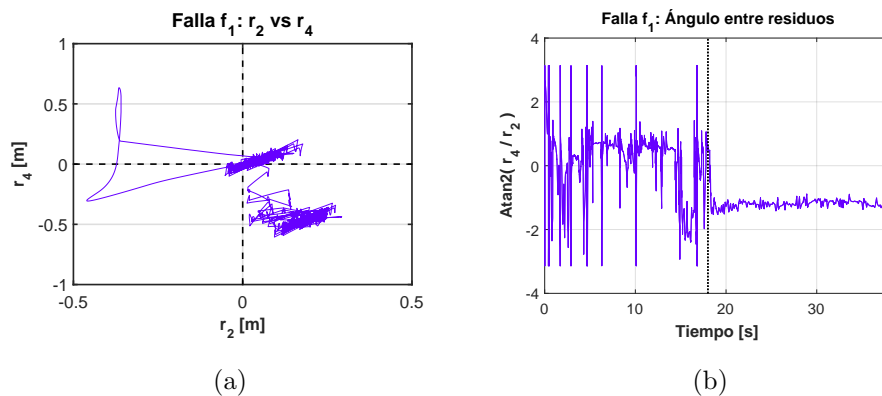


Figura 4.26: Comportamiento de los residuos después del filtrado. (a) r_2 vs. r_4 (b) $\text{atan2}(r_4/r_2)$

Finalmente, en la Figura 4.26 se tienen los comportamientos de los indicadores r_2 vs. r_4 y $\text{atan2}(r_4/r_2)$. Es notorio que el filtrado destruye la tendencia vertical de los residuos, por lo cual a partir de esta gráfica no se puede distinguir la falla; sin embargo, el valor del ángulo entre residuos se aparta de cero, tal y como se había pronosticado.

En este apartado, se presentó una estrategia que permite la identificación de la falla en una tubería con dos ramales definida por el modelo 3.15. En principio, este método podría ser útil para corroborar el correcto desempeño de sensores de gasto encargados de medir el flujo en los ramales. Sin embargo, la utilidad de esta estrategia puede ser mucho mayor. Esta técnica, ampliada e implementada en forma de un banco de observadores,

puede ser capaz de detectar y reconstruir en tiempo finito fugas en una tubería (cuya posición es desconocida), siempre y cuando éstas no se presenten de forma simultánea, lo cual en la práctica es poco probable. Al identificar correctamente el flujo de fuga, el algoritmo podría realizar la compensación correspondiente en el modelo matemático, por lo que, al menos teóricamente, este método puede emplearse para detectar, aislar y reconstruir un número arbitrario de fugas secuenciales. Un análisis e implementación más exhaustivos de este enfoque se proponen como trabajo a futuro.

Conclusiones

En el presente trabajo se propuso un esquema de observador por modos deslizantes de orden superior (HOSMO) para reconstruir los gastos no medidos en ramales (de posición conocida) de una tubería, empleando únicamente información mensurable de presión y flujo en los extremos del ducto. El diseño del observador explota la estructura Hessenberg del sistema, así como la estabilidad del punto de operación, y se basa en el diferenciador por modos deslizantes de orden superior de 2° orden.

El esquema de observación propuesto es capaz de estimar correctamente el estado completo de la planta, así como las señales desconocidas correspondientes al flujo que circula en los ramales, a pesar de que el sistema en presencia de gastos simultáneos en ramales no cumple las condiciones clásicas para la existencia de un observador con entradas desconocidas. Lo anterior se logra incluso en presencia de ruido en las mediciones y cambios en el punto de operación. La efectividad del algoritmo fue probada mediante simulaciones numéricas, así como a partir de datos experimentales provenientes de una tubería piloto.

Adicionalmente, se llevó a cabo una comparación entre el HOSMO propuesto y una técnica anteriormente reportada en la literatura (Negrete y Verde, 2012), la cual consiste en un esquema de observadores por modos deslizantes de primer orden (FOSMO) implementado en cascada. Si bien ambos métodos proporcionan resultados bastante buenos, el HOSMO es aplicable para un mayor número de sistemas. Particularmente, el HOSMO resulta ser menos restrictivo que el FOSMO, ya que sólo exige que la derivada de las señales desconocidas se encuentre acotada, mientras que el segundo requiere acotamiento en todas las demás señales.

Aún más, la reconstrucción efectuada empleando el esquema FOSMO en cascada depende del concepto de inyección de error equivalente, lo que se traduce en la necesidad de filtrar una señal discontinua para obtener una estimación de las señales desconocidas. Dicha etapa de filtrado no es necesaria en el HOSMO, facilitando enormemente la implementación del algoritmo.

Es necesario mencionar que las estimaciones obtenidas mediante el HOSMO parecen ser más ruidosas que aquellas calculadas con la implementación en cascada. Esto es efecto del chattering propio de los modos deslizantes. Sin embargo, recuérdese que en el

5. CONCLUSIONES

esquema FOSMO en cascada se emplea una etapa de filtrado, la cual no es necesaria en el HOSMO. En realidad, esa es la razón de que las señales reconstruidas mediante los observadores de primer orden se vean menos ruidosas. Evidentemente, se puede efectuar un procesamiento análogo en el caso del HOSMO para obtener resultados equivalentes. Sin embargo, hay que resaltar que, en principio, esto no es necesario.

Otra ventaja del HOSMO es que no involucra una implementación en cascada, sino que éste está compuesto de dos observadores por modos deslizantes de segundo orden interconectados mediante la dinámica de una parte intermedia del sistema, la cual es estable. De esta manera, se evita la propagación del error de etapa a etapa y se permite una convergencia más rápida para algunos estados, mientras que la convergencia de la sección intermedia, así como de las señales desconocidas es asintótica. Esto último no es debido al observador empleado, sino que es consecuencia de las propiedades de observabilidad/detectabilidad de la planta.

Este método puede ser generalizado para aplicarse a cualquier sistema estable de orden arbitrario con estructura Hessenberg estrictamente agrupada, superior e inferiormente medido. En el caso de tuberías, sin embargo, no es posible emplearlo para reconstruir más de dos señales desconocidas si únicamente se dispone de mediciones en los extremos del ducto. Lo anterior se debe a que no es posible estimar más señales desconocidas que mediciones. El esquema también presenta la desventaja de que no es robusto ante incertidumbre paramétricas. Esto dado que el observador reconstruye toda posible discrepancia entre la planta y el modelo matemático nominal (siempre que la derivada de dicha diferencia sea acotada), y lo agrupa en la reconstrucción de las señales desconocidas.

También en este documento se presenta una estrategia, extensión de la anterior, que permite distinguir cuál de los flujos en los ramales, entendidos éstos como fallas, está presente en la tubería. Dicho de otra forma, este método permite detectar e identificar dos fallas en el ducto, siempre que éstas no sean simultáneas. Para esto, se diseñaron dos sistemas detectores, cada uno de los cuales está formado por dos observadores por modos deslizantes, uno de segundo orden y otro de tercer orden. Estos detectores asumen que sólo existe una falla en el sistema. Con base en esta consideración, es posible obtener redundancia en la estimación de uno de los estados, con lo cual se pueden plantear dos residuos base que permiten la identificación de la falla. Este método, sin embargo, presenta el inconveniente de que el aumento de orden en el observador tiende a degradar el desempeño del sistema, dado que se amplifica enormemente el ruido.

Esta segunda técnica también fue validada a partir de simulaciones numéricas y datos provenientes de la tubería piloto, obteniéndose resultados satisfactorios y correspondiendo el comportamiento experimental con el observado en simulación. El potencial de esta segunda estrategia es que, implementada en forma de banco de observadores, podría ser utilizada para detectar e identificar fugas secuenciales en tuberías. Este análisis se propone como una posible extensión a futuro del trabajo reportado en este documento. Una posible aplicación de las técnicas desarrolladas en este trabajo es como sensor de flujo por software en tuberías.

Sistemas Hessenberg

En este apartado se presenta una clase de sistemas no lineales comúnmente denominados Hessenberg (Bernard *et al.*, 1998). Este tipo de sistemas aparece muy frecuentemente en modelos biológicos. Sin embargo, bajo hipótesis razonables, los sistemas uniforme e infinitesimalmente diferenciables pueden llevarse a esta forma mediante un apropiado cambio de coordenadas. Los sistemas Hessenberg son importantes para el desarrollo del presente trabajo dado que poseen propiedades estructurales y de observabilidad que resultan sumamente útiles.

Considere un sistema definido en un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x}(t) = F(x(t), u(t)), & u \in \mathcal{U} \\ y(t) = h(x(t)) \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados, $u \in \mathbb{R}^m$ es el vector de entradas y $y \in \mathbb{R}^p$ es el vector de salidas. \mathcal{U} es el conjunto de controles permisibles. Asimismo, las funciones $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ se asumen suficientemente suaves.

Definición 1 *El sistema Σ es Hessenberg inferior (LH, Lower Hessenberg) si para todo $(x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathcal{U}$ y para toda pareja de índices (i, j) se cumple que*

$$\frac{\partial F_i(x, u)}{\partial x_j} = 0 \quad \text{si } j > i + 1 \quad (\text{A.2})$$

Definición 2 *El sistema Σ es Hessenberg superior (UH, Upper Hessenberg) si para todo $(x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathcal{U}$ y para toda pareja de índices (i, j) se cumple que*

$$\frac{\partial F_i(x, u)}{\partial x_j} = 0 \quad \text{si } i > j + 1 \quad (\text{A.3})$$

Las definiciones 1 y 2 son equivalentes a decir que el jacobiano $\frac{\partial F(x, u)}{\partial x}$ es una matriz Hessenberg inferior o superior, respectivamente.

Definición 3 *El sistema Σ es Hessenberg inferior estrictamente enlazado (SLLH, Strictly Linked Lower Hessenber) si es Hessenberg inferior y para todo $(x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathcal{U}$ se cumple*

$$\frac{\partial F_i(x, u)}{\partial x_{i+1}} \neq 0 \quad \forall i \quad (\text{A.4})$$

Definición 4 *El sistema Σ es Hessenberg superior estrictamente enlazado (SLUH, Strictly Linked Upper Hessenber) si es Hessenberg superior y para todo $(x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathcal{U}$ se cumple*

$$\frac{\partial F_i(x, u)}{\partial x_{i-1}} \neq 0 \quad \forall i \quad (\text{A.5})$$

Definición 5 *El sistema Σ es Hessenberg inferior y superior estrictamente enlazado (SLULH, Strictly Linked Upper and Lower Hessenber) si para todo $(x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathcal{U}$ se cumplen (A.2), (A.3), (A.4) y (A.5).*

Las siguientes definiciones aplican para sistemas de la forma (A.1) con una sola salida ($p = 1$).

Definición 6 *Un sistema SLLH (SLUH) es superiormente (inferiormente) medido (UM, Upper Measured o LM, Lower Measured, respectivamente) si $\forall x \in \Omega$*

$$\begin{aligned} (\text{UM}) : \quad & h(x(t)) = h(x_1(t)), \quad \frac{\partial h}{\partial x_1} \neq 0 \\ (\text{LM}) : \quad & h(x(t)) = h(x_n(t)), \quad \frac{\partial h}{\partial x_n} \neq 0 \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

La definición anterior sólo indica que la salida es función únicamente del primer o del último estado. Una propiedad muy importante de los sistemas SLULH es que éstos son uniformemente observables, si son UM y/o LM, tal y como se establece en el siguiente teorema (Bernard *et al.*, 1998).

Teorema 10 (Observabilidad de los sistemas Hessenberg)

- (a) *Los sistemas SLLH son uniformemente observables si son UM.*
- (b) *Los sistemas SLUH son uniformemente observables si son LM.*
- (c) *Los sistemas SLULH son uniformemente observables tanto si son UM como LM.*

Prueba de Convergencia del Esquema de Observación HOSMO

Considere el modelo en variables de estado para una tubería discretizada espacialmente en tres secciones y con dos ramales, el cual está descrito por la ecuación (3.15), la cual se repite a continuación

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}(u_1 - x_2) - J(x_1) \\ \dot{x}_2 = a_{22}(x_1 - x_3 - f_1) \\ \dot{x}_3 = a_{12}(x_2 - x_4) - J(x_3) \\ \dot{x}_4 = a_{23}(x_3 - x_5 - f_2) \\ \dot{x}_5 = a_{13}(x_4 - u_2) - J(x_5) \\ y_1 = x_1 \\ y_2 = x_5 \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

En ésta $x = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5]^\top$ es el vector de estados, u_1, u_2 son entradas conocidas, y_1, y_2 son salidas medibles y f_1, f_2 son entradas desconocidas. Los parámetros de modelo a_{1i} , $i = 1, 2, 3$ y a_{2j} , $j = 1, 2$ están determinados por las constantes físicas del sistema, de acuerdo con (3.12). La función no lineal de pérdida de carga está dada por (3.7), la cual nuevamente se repite aquí

$$J(Q) \triangleq \alpha[Q]^3 + \beta[Q]^2 \quad (\text{B.2})$$

donde $\alpha \triangleq \frac{\theta_\alpha}{2dA_T} < 0$, $\beta \triangleq \frac{\theta_\beta}{2dA_T} > 0$. Los parámetros físicos del sistema se presentan en la Tabla 4.1. Con el objetivo de estimar el estado completo x del sistema, junto con las entradas desconocidas f_1, f_2 , en este trabajo se propuso un esquema de observación HOSMO, presentado en la sección 3.3. Para motivos de claridad en la explicación, el esquema se presenta a continuación.

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \begin{array}{l}
 \begin{array}{l}
 \dot{\hat{x}}_1 = -a_{11}\hat{x}_2 - L_1 k_1 [e_1]^{2/3} + a_{11}u_1 - J(x_1) \\
 \dot{\hat{x}}_2 = -a_{22}\hat{f}_1 + L_1^2 \frac{k_2}{a_{11}} [e_1]^{1/3} + a_{22}(x_1 - \hat{x}_3) \\
 \dot{\hat{f}}_1 = -L_1^3 \frac{k_3}{a_{11}a_{22}} [e_1]^0
 \end{array} \\
 \begin{array}{l}
 OL : \dot{\hat{x}}_3 = a_{12}(\hat{x}_2 - \hat{x}_4) - J(\hat{x}_3) \\
 \\
 \begin{array}{l}
 \dot{\hat{x}}_5 = a_{13}\hat{x}_4 - L_2 k_1 [e_5]^{2/3} - a_{13}u_2 - J(x_5) \\
 \dot{\hat{x}}_4 = -a_{23}\hat{f}_2 - L_2^2 \frac{k_2}{a_{13}} [e_5]^{1/3} + a_{23}(\hat{x}_3 - x_5) \\
 \dot{\hat{f}}_2 = L_2^3 \frac{k_3}{a_{13}a_{23}} [e_5]^0
 \end{array}
 \end{array}
 \right. \quad (B.3)
 \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
 e_1 &\triangleq \hat{x}_1 - x_1 = \hat{x}_1 - y_1 \\
 e_5 &\triangleq \hat{x}_5 - x_5 = \hat{x}_5 - y_2
 \end{aligned}$$

son los errores de salida. El error de observación está definido como

$$e_i \triangleq \hat{x}_i - x_i, \quad i = 1, \dots, 5 \quad (B.4)$$

Asimismo, los errores de reconstrucción de las señales desconocidas son

$$e_{fk} \triangleq \hat{f}_k - f_k, \quad k = 1, 2 \quad (B.5)$$

Sin pérdida de generalidad, puede considerarse $L_1 = L_2 = 1$. De acuerdo con las expresiones (B.1) y (B.3), la dinámica del error es:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \begin{array}{l}
 \dot{e}_1 = -k_1 [e_1]^{2/3} - a_{11}e_2 \\
 \dot{e}_2 = \frac{k_2}{a_{11}} [e_1]^{1/3} - a_{22}(e_{f1} + e_3) \\
 \dot{e}_{f1} = -\frac{k_3}{a_{11}a_{22}} [e_1]^0 - \dot{f}_1
 \end{array} \\
 \dot{e}_3 = a_{12}(e_2 - e_4) - (J(\hat{x}_3) - J(x_3)) \\
 \\
 \begin{array}{l}
 \dot{e}_5 = -k_1 [e_5]^{2/3} + a_{13}e_4 \\
 \dot{e}_4 = -\frac{k_2}{a_{13}} [e_5]^{1/3} - a_{23}(e_{f2} - e_3) \\
 \dot{e}_{f2} = \frac{k_3}{a_{13}a_{23}} [e_5]^0 - \dot{f}_2
 \end{array}
 \end{array} \right. \quad (B.6)$$

Efectuando el cambio de variables

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= e_1, & \epsilon_2 &= -a_{11}e_2, & \epsilon_3 &= a_{11}a_{22}e f_1, \\ \eta_1 &= e_5, & \eta_2 &= a_{13}e_4, & \eta_3 &= -a_{13}a_{23}e f_2, \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

obtenemos la siguiente dinámica de error

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{\epsilon}_1 &= -k_1 |\epsilon_1|^{2/3} + \epsilon_2 \\ \dot{\epsilon}_2 &= -k_2 |\epsilon_1|^{1/3} + \epsilon_3 + a_{11}a_{22}e_3 \\ \dot{\epsilon}_3 &= -k_3 |\epsilon_1|^0 - a_{11}a_{22}\dot{f}_1 \\ \dot{\epsilon}_3 &= -\frac{a_{12}}{a_{11}}\epsilon_2 - \frac{a_{12}}{a_{13}}\eta_2 + J(x_3) - J(\hat{x}_3) \\ \dot{\eta}_1 &= -k_1 |\eta_1|^{2/3} + \eta_2 \\ \dot{\eta}_2 &= -k_2 |\eta_1|^{1/3} + \eta_3 + a_{13}a_{23}e_3 \\ \dot{\eta}_3 &= -k_3 |\eta_1|^0 + a_{13}a_{23}\dot{f}_2 \end{aligned} \right. \quad (\text{B.8})$$

Introduciendo el nuevo cambio de variables

$$\begin{aligned} z_1 &= \epsilon_1, & z_2 &= \frac{\epsilon_2}{k_1}, & z_3 &= \frac{\epsilon_3}{k_2}, \\ \zeta_1 &= \eta_1, & \zeta_2 &= \frac{\eta_2}{k_1}, & \zeta_3 &= \frac{\eta_3}{k_2}, \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

se llega a

$$\Sigma_e : \left\{ \begin{aligned} \dot{z}_1 &= -\bar{k}_1 \left(|z_1|^{2/3} - z_2 \right) \\ \dot{z}_2 &= -\bar{k}_2 \left(|z_1|^{1/3} - z_3 \right) + \frac{a_{11}a_{22}}{\bar{k}_1} e_3 \\ \dot{z}_3 &= -\bar{k}_3 |z_1|^0 + \delta_1(t) \\ \dot{\zeta}_3 &= -\frac{a_{12}\bar{k}_1}{a_{11}} z_2 - \frac{a_{12}\bar{k}_1}{a_{13}} \zeta_2 + J(x_3) - J(\hat{x}_3), \\ \dot{\zeta}_1 &= -\bar{k}_1 \left(|\zeta_1|^{2/3} - \zeta_2 \right) \\ \dot{\zeta}_2 &= -\bar{k}_2 \left(|\zeta_1|^{1/3} - \zeta_3 \right) + \frac{a_{13}a_{23}}{\bar{k}_1} e_3 \\ \dot{\zeta}_3 &= -\bar{k}_3 |\zeta_1|^0 + \delta_2(t) \end{aligned} \right. \quad (\text{B.10})$$

donde

$$\begin{aligned} \bar{k}_i &= \frac{k_i}{k_{i-1}}, \quad i = 1, 2, 3 \quad k_0 = 1 \\ \delta_1(t) &= -\frac{a_{11}a_{22}}{k_2} \dot{f}_1, \quad \delta_2(t) = \frac{a_{13}a_{23}}{k_2} \dot{f}_2 \end{aligned}$$

Puede apreciarse que la dinámica de error descrita por Σ_e está formada por tres subsistemas interconectados entre sí. Los subsistemas formados por los estados z y ζ corresponden básicamente al error de estimación de un diferenciador HOSM discontinuo de 2° orden, tal y como se describió en la sección 2.3.4, más un término de interconexión proveniente del sistema \dot{e}_3 . Asimismo, en este último existen términos de interconexión dependientes de z_2 y ζ_2 .

Para cada uno de estos subsistemas, sin la interconexión, el origen es un punto de equilibrio estable. Para verificar esto, considere los siguientes sistemas:

$$\Sigma_1 : \begin{cases} \dot{z}_1 = -\bar{k}_1 (|z_1|^{2/3} - z_2) \\ \dot{z}_2 = -\bar{k}_2 (|z_1|^{1/3} - z_3) \\ \dot{z}_3 = -\bar{k}_3 |z_1|^0 + \delta_1(t) \end{cases} \quad (\text{B.11})$$

$$\Sigma_2 : \begin{cases} \dot{\zeta}_1 = -\bar{k}_1 (|\zeta_1|^{2/3} - \zeta_2) \\ \dot{\zeta}_2 = -\bar{k}_2 (|\zeta_1|^{1/3} - \zeta_3) \\ \dot{\zeta}_3 = -\bar{k}_3 |\zeta_1|^0 + \delta_2(t) \end{cases} \quad (\text{B.12})$$

$$\Sigma_3 : \{\dot{e}_3 = J(x_3) - J(\hat{x}_3)\} \quad (\text{B.13})$$

Los cuales corresponden a los subsistemas individuales que conforman la dinámica del error, sin los términos de interconexión. Particularmente, Σ_1 y Σ_2 son las dinámicas de error para un diferenciador HOSM discontinuo de 2° orden, dadas por (2.93). De acuerdo con (2.94), funciones de Lyapunov para dichos sistemas son:

$$V_1(z) = \beta_1 \left(\frac{3}{5} |z_1|^{5/3} - z_1 |z_2|^1 + \frac{2}{5} |z_2|^{5/2} \right) + \beta_2 \left(\frac{2}{5} |z_2|^{5/2} - z_2 |z_3|^3 + \frac{3}{5} |z_3|^5 \right) + \frac{\beta_3}{5} |z_3|^5, \quad (\text{B.14})$$

$$V_2(\zeta) = \beta_1 \left(\frac{3}{5} |\zeta_1|^{5/3} - \zeta_1 |\zeta_2|^1 + \frac{2}{5} |\zeta_2|^{5/2} \right) + \beta_2 \left(\frac{2}{5} |\zeta_2|^{5/2} - \zeta_2 |\zeta_3|^3 + \frac{3}{5} |\zeta_3|^5 \right) + \frac{\beta_3}{5} |\zeta_3|^5, \quad (\text{B.15})$$

con $\beta_1, \beta_2, \beta_3 > 0$. Además, se tiene que las derivadas \dot{V}_1, \dot{V}_2 a lo largo de las trayectorias de los sistemas Σ_1 y Σ_2 , respectivamente, satisfacen (Sanchez *et al.*, 2017):

$$\dot{V}_1(z) \leq -W_1(z), \quad W_1(z) = c_1 \left(|z_1|^{4/3} + |z_2|^2 + |z_3|^4 \right) > 0 \quad (\text{B.16})$$

$$\dot{V}_2(\zeta) \leq -W_2(\zeta), \quad W_2(\zeta) = c_2 \left(|\zeta_1|^{4/3} + |\zeta_2|^2 + |\zeta_3|^4 \right) > 0 \quad (\text{B.17})$$

donde c_1 y c_2 son constantes positivas dependientes de las ganancias $\bar{k}_1, \bar{k}_2, \bar{k}_3$ y de $\beta_1, \beta_2, \beta_3$. Con esto, se muestra la negatividad definida de la derivada de las funciones de Lyapunov \dot{V}_1, \dot{V}_2 , implicando esto la estabilidad de los orígenes de Σ_1 y Σ_2 .

Adicionalmente, si se asignan pesos de homogeneidad para las coordenadas z y ζ como sigue

$$\deg(z_1) = \deg(\zeta_1) = 3, \quad \deg(z_2) = \deg(\zeta_2) = 2, \quad \deg(z_3) = \deg(\zeta_3) = 1$$

entonces, las funciones $V_1(z)$ y $V_2(\zeta)$ resultan ser homogéneas de grado 5 (veáse Definición 8), mientras que $W_1(z)$ y $W_2(\zeta)$ son homogéneas de grado 4.

Por otro lado, considere el sistema Σ_3 , con la función J dada por (B.2). Para efectuar el análisis de estabilidad del sistema, se despreciará el término cúbico (el cual es desestabilizante lejos del origen) en la función de pérdida de carga J , dado que cerca del origen, el término cuadrático es dominante (y estabilizante). Esto tiene como consecuencia que todos los resultados siguientes sean locales. Si el parámetro α en (B.2) fuese positivo, los resultados serían globales.

Defínase la función monótona creciente

$$\tilde{J}(Q) = \gamma[Q]^2 \tag{B.18}$$

para cierta constante γ positiva. Entonces, cerca del origen, las trayectorias de Σ_3 pueden aproximarse por las producidas por el sistema

$$\tilde{\Sigma}_3 : \left\{ \dot{e}_3 = \tilde{J}(x_3) - \tilde{J}(\hat{x}_3) \right. \tag{B.19}$$

Sea ahora la función

$$V_3(e_3) = \frac{r}{m+1} |e_3|^{m+1}, \tag{B.20}$$

la cual es positiva definida para $r > 0$, $m \geq 0$. La derivada de $V_3(e_3)$ a lo largo de las trayectorias de $\tilde{\Sigma}_3$ es

$$\begin{aligned} \dot{V}_3(e_3) &= \frac{\partial V_3}{\partial e_3} \dot{e}_3 = r |e_3|^m \left(\tilde{J}(x_3) - \tilde{J}(\hat{x}_3) \right) = -r\gamma |e_3|^m \left(|\hat{x}_3|^2 - |x_3|^2 \right) \\ \dot{V}_3(e_3) &= -r\gamma |e_3|^m \left| |\hat{x}_3|^2 - |x_3|^2 \right| \text{sign} \left(|\hat{x}_3|^2 - |x_3|^2 \right) \end{aligned}$$

Pero $\text{sign} \left(|\hat{x}_3|^2 - |x_3|^2 \right) = \text{sign} \left(|\hat{x}_3|^1 - |x_3|^1 \right) = \text{sign} \left(\hat{x}_3 - x_3 \right) = \text{sign}(e_3)$. Por ende:

$$\dot{V}_3(e_3) = -r\gamma \left| |\hat{x}_3|^2 - |x_3|^2 \right| |e_3|^m \text{sign}(e_3) = -r\gamma \left| |\hat{x}_3|^2 - |x_3|^2 \right| |e_3|^m \tag{B.21}$$

A partir de (B.21) puede apreciarse la negatividad definida \dot{V}_3 , con lo que se garantiza estabilidad del punto $e_3 = 0$. A continuación, se hará uso del siguiente lema.

Lema 1 (Cruz-Zavala (2014)) Para $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ y cualesquiera números reales p, q no nulos, tales que $0 < p \leq q$, la desigualdad

$$\left| |x_1|^p + |x_2|^p \right|^{1/p} \leq 2^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \left| |x_1|^q + |x_2|^q \right|^{1/q} \tag{B.22}$$

se satisface. Más aún, la igualdad se mantiene si y sólo si $p = q$ o $x_1 = x_2$.

B. PRUEBA DE CONVERGENCIA DEL ESQUEMA DE OBSERVACIÓN HOSMO

Aplicando el lema anterior a la expresión $\left| [\hat{x}_3]^2 - [x_3]^2 \right|$ con $p = 1, q = 2$, se llega a

$$\left| [\hat{x}_3]^2 - [x_3]^2 \right| \geq \frac{1}{2} |e_3|^2$$

Y, por tanto

$$\dot{V}_3(e_3) = -r\gamma \left| [\hat{x}_3]^2 - [x_3]^2 \right| |e_3|^m \leq -\frac{r\gamma}{2} |e_3|^{m+2}$$

Entonces

$$\dot{V}_3(e_3) \leq -W_3(e_3), \quad W_3(e_3) = -\frac{r\gamma}{2} |e_3|^{m+2} > 0 \quad (\text{B.23})$$

Si se asigna $\deg(e_3) = 1$ y $m = 2$, entonces W_3 es homogénea de grado 4. Considérese ahora la dinámica de error Σ_e , para la cual se propone

$$V(z, \zeta, e_3) = V_1(z) + V_2(\zeta) + V_3(e_3) \quad (\text{B.24})$$

como función candidata de Lyapunov. Denótese

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \dot{z}_n + u_1(e_3) \\ \dot{\zeta} &= \dot{\zeta}_n + u_2(e_3) \\ \dot{e}_3 &= \dot{e}_{3n} + u_3(z_2, \zeta_2), \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

donde

$$\begin{aligned} \dot{z}_n &= \begin{bmatrix} -\bar{k}_1 (|z_1|^{2/3} - z_2) \\ -\bar{k}_2 (|z_1|^{1/3} - z_3) \\ -\bar{k}_3 |z_1|^0 + \delta_1(t) \end{bmatrix}, \quad u_1(e_3) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{a_{11}a_{22}}{k_1} e_3 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \dot{\zeta}_n &= \begin{bmatrix} -\bar{k}_1 (|\zeta_1|^{2/3} - \zeta_2) \\ -\bar{k}_2 (|\zeta_1|^{1/3} - \zeta_3) \\ -\bar{k}_3 |\zeta_1|^0 + \delta_2(t) \end{bmatrix}, \quad u_2(e_3) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{a_{13}a_{23}}{k_1} e_3 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \dot{e}_{3n} &= \tilde{J}(x_3) - \tilde{J}(\hat{x}_3), \quad u_3(z_2, \zeta_2) = -\frac{a_{12}\bar{k}_1}{a_{11}} z_2 - \frac{a_{12}\bar{k}_1}{a_{13}} \zeta_2 \end{aligned}$$

La derivada $\dot{V}(z, \zeta, e_3)$ a lo largo de las trayectorias de Σ_e está dada por

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{V}_1 + \dot{V}_2 + \dot{V}_3 = \frac{\partial V_1}{\partial z} \dot{z} + \frac{\partial V_2}{\partial \zeta} \dot{\zeta} + \frac{\partial V_3}{\partial e_3} \dot{e}_3 \\ \dot{V} &= \underbrace{\frac{\partial V_1}{\partial z} \dot{z}_n}_{\leq W_1(z)} + \underbrace{\frac{\partial V_2}{\partial \zeta} \dot{\zeta}_n}_{\leq W_2(\zeta)} + \underbrace{\frac{\partial V_3}{\partial e_3} \dot{e}_{3n}}_{\leq W_3(e_3)} + \frac{\partial V_1}{\partial z} u_1(e_3) + \frac{\partial V_2}{\partial \zeta} u_2(e_3) + \frac{\partial V_3}{\partial e_3} u_3(z_2, \zeta_2) \end{aligned}$$

En la expresión anterior, los primeros tres términos corresponden a aquellos que se obtendrían para los subsistemas independientes Σ_1 , Σ_2 y $\tilde{\Sigma}_3$, mientras que los tres últimos aparecen debido a los términos de interconexión u_1 , u_2 y u_3 . A partir de ahora, se omitirán los cálculos relacionados con ζ , dado que éstos son idénticos a aquellos relativos a z .

Realizando los cálculos necesarios, se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{\partial V_1}{\partial z} u_1(e_3) &= \frac{\partial V_1}{\partial z_2} \left(\frac{a_{11} a_{22}}{\bar{k}_1} e_3 \right) \\ &= -\frac{\beta_1 a_{11} a_{22}}{\bar{k}_1} z_1 e_3 + \frac{(\beta_1 + \beta_2) a_{11} a_{22}}{\bar{k}_1} [z_2]^{3/2} e_3 - \frac{\beta_2 a_{11} a_{22}}{\bar{k}_1} [z_3]^3 e_3\end{aligned}$$

Se obtiene una expresión completamente análoga para $\frac{\partial V_2}{\partial \zeta} u_3(e_3)$. Ahora tómesese $m = 2$ en $V_3(e_3)$. Entonces

$$\frac{\partial V_3}{\partial e_3} u_3(z_2, \zeta_2) = r [e_3]^2 \left(-\frac{a_{12} \bar{k}_1}{a_{11}} z_2 - \frac{a_{12} \bar{k}_1}{a_{13}} \zeta_2 \right) = -\frac{r a_{12} \bar{k}_1}{a_{11}} z_2 [e_3]^2 - \frac{r a_{12} \bar{k}_1}{a_{13}} \zeta_2 [e_3]^2$$

Sustituyendo los resultados anteriores en \dot{V}

$$\begin{aligned}\dot{V} &\leq -W_1 - W_2 - W_3 - \frac{\beta_1 a_{11} a_{22}}{\bar{k}_1} z_1 e_3 + \frac{(\beta_1 + \beta_2) a_{11} a_{22}}{\bar{k}_1} [z_2]^{3/2} e_3 \\ &\quad - \frac{\beta_2 a_{11} a_{22}}{\bar{k}_1} [z_3]^3 e_3 - \frac{\beta_1 a_{13} a_{23}}{\bar{k}_1} \zeta_1 e_3 + \frac{(\beta_1 + \beta_2) a_{13} a_{23}}{\bar{k}_1} [\zeta_2]^{3/2} e_3 \\ &\quad - \frac{\beta_2 a_{13} a_{23}}{\bar{k}_1} [\zeta_3]^3 e_3 - \frac{r a_{12} \bar{k}_1}{a_{11}} z_2 [e_3]^2 - \frac{r a_{12} \bar{k}_1}{a_{13}} \zeta_2 [e_3]^2\end{aligned}\tag{B.26}$$

Nótese que \dot{V} es homogénea de grado 4. A continuación, se hará uso de la desigualdad de Young para reducir los términos cruzados provenientes de la interconexión. Nuevamente, los cálculos para ζ son idénticos a aquellos de z , y por tanto, se omitirán.

Lema 2 (Desigualdad de Young (Hardy *et al.*, 1988)) *Para cualesquiera números reales positivos, $a > 0$, $b > 0$, $\epsilon > 0$, $p > 1$, $q > 1$, tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, siempre se satisface la desigualdad*

$$ab \leq \frac{\epsilon^p}{p} a^p + \frac{\epsilon^{-q}}{q} b^q\tag{B.27}$$

La igualdad se mantiene si y sólo si $a^p = b^q$.

Al aplicar la desigualdad de Young a los términos cruzados en (B.26) se obtiene lo siguiente:

- **Término $z_1 e_3$:** $a = |z_1|$, $b = |e_3|$, $p = \frac{4}{3}$, $q = 4$.

$$z_1 e_3 \leq |z_1| |e_3| \leq \frac{3\epsilon_1^{4/3}}{4} |z_1|^{4/3} + \frac{\epsilon_1^{-4}}{4} |e_3|^4\tag{B.28}$$

- **Término $[z_2]^{3/2} e_3$:** $a = |z_2|^{3/2}$, $b = |e_3|$, $p = \frac{4}{3}$, $q = 4$.

$$[z_2]^{3/2} e_3 \leq |z_2|^{3/2} |e_3| \leq \frac{3\epsilon_2^{4/3}}{4} |z_2|^2 + \frac{\epsilon_2^{-4}}{4} |e_3|^4\tag{B.29}$$

- **Término $[z_3]^3 e_3$** : $a = |z_3|^3$, $b = |e_3|$, $p = \frac{4}{3}$, $q = 4$.

$$[z_3]^3 e_3 \leq |z_3|^3 |e_3| \leq \frac{3\varepsilon_3^{4/3}}{4} |z_3|^4 + \frac{\varepsilon_3^{-4}}{4} |e_3|^4 \quad (\text{B.30})$$

- **Término $z_2 [e_3]^2$** : $a = |z_2|$, $b = |e_3|^2$, $p = 2$, $q = 2$.

$$z_2 [e_3]^2 \leq |z_2| |e_3|^2 \leq \frac{\varepsilon_4^2}{2} |z_2|^2 + \frac{\varepsilon_4^{-2}}{2} |e_3|^4 \quad (\text{B.31})$$

Por último, al sustituir (B.16), (B.17), (B.23), (B.28), (B.29), (B.30), (B.31) en (B.26), se llega a

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & \left(\frac{3\varepsilon_1^{4/3} \beta_1 a_{11} a_{22}}{4\bar{k}_1} - c_1 \right) |z_1|^{4/3} + \left(\frac{3\varepsilon_2^{4/3} (\beta_1 + \beta_2) a_{11} a_{22}}{4\bar{k}_1} + \frac{\varepsilon_4^2 r a_{12} \bar{k}_1}{2a_{11}} - c_1 \right) |z_2|^2 \\ & + \left(\frac{3\varepsilon_3^{4/3} \beta_2 a_{11} a_{22}}{4\bar{k}_1} - c_1 \right) |z_3|^4 + \left(\frac{3\varepsilon_1^{4/3} \beta_1 a_{13} a_{23}}{4\bar{k}_1} - c_2 \right) |\zeta_1|^{4/3} \\ & + \left(\frac{3\varepsilon_2^{4/3} (\beta_1 + \beta_2) a_{13} a_{23}}{4\bar{k}_1} + \frac{\varepsilon_4^2 r a_{12} \bar{k}_1}{2a_{13}} - c_2 \right) |\zeta_2|^2 + \left(\frac{3\varepsilon_3^{4/3} \beta_2 a_{13} a_{23}}{4\bar{k}_1} - c_2 \right) |\zeta_3|^4 \\ & + \left(\frac{\varepsilon_1^{-4} \beta_1 a_{11} a_{22}}{4\bar{k}_1} + \frac{\varepsilon_2^{-4} (\beta_1 + \beta_2) a_{11} a_{22}}{4\bar{k}_1} + \frac{\varepsilon_3^{-4} \beta_2 a_{11} a_{22}}{4\bar{k}_1} + \frac{\varepsilon_1^{-4} \beta_1 a_{13} a_{23}}{4\bar{k}_1} \right. \\ & \left. + \frac{\varepsilon_2^{-4} (\beta_1 + \beta_2) a_{13} a_{23}}{4\bar{k}_1} + \frac{\varepsilon_3^{-4} \beta_2 a_{13} a_{23}}{4\bar{k}_1} + \frac{\varepsilon_4^{-2} r a_{12} \bar{k}_1}{2a_{11}} + \frac{\varepsilon_4^{-2} r a_{12} \bar{k}_1}{2a_{13}} - \frac{r\gamma}{2} \right) |e_3|^4 \end{aligned} \quad (\text{B.32})$$

A partir de las expresiones (B.26) y (B.32) es posible apreciar que si los valores de las constantes a_{22} , a_{12} y a_{23} son suficientemente pequeños, entonces los términos cruzados en \dot{V} siempre pueden ser dominados por aquellos de signo definido, provenientes de W_1 , W_2 y W_3 . Éste es un resultado que coincide con el Teorema de Pequeñas Ganancias, dado que los parámetros a_{22} , a_{12} y a_{23} corresponden precisamente a los términos de interconexión entre los distintos subsistemas que conforman la dinámica de error Σ_e . Como cada uno de los sistemas Σ_1 , Σ_2 , $\tilde{\Sigma}_3$ por si mismo tiene al origen como un punto de equilibrio estable, la interconexión entre éstos seguirá siendo estable si ésta es lo suficientemente débil. En éste caso, sin embargo, no se hace uso de la versión clásica del Teorema de Pequeñas Ganancias debido a que el sistema analizado es discontinuo.

Finalmente, el origen $(z, \zeta, e_3) = (0, 0, 0)$ de Σ_e será un punto de equilibrio local y asintóticamente estable si los términos de interconexión entre los subsistemas Σ_1 , Σ_2 , Σ_3 son suficientemente débiles. Esto siempre puede cumplirse, dado que sin importar el valor de los demás parámetros, siempre existen constantes a_{22} , a_{12} y a_{23} suficientemente pequeñas que hacen que la derivada \dot{V} en (B.26) y (B.32) sea negativa definida.

En principio, la anterior sólo es una condición suficiente para la estabilidad. La localidad del resultado proviene del hecho de despreciar el término cúbico en la función de pérdida de carga J , mientras que la convergencia asintótica se debe a que el estado

\hat{x}_3 se estima en lazo abierto y, por ende, la velocidad de convergencia depende de su propia dinámica. La estimación se hace de esta forma dado que en presencia de ambas señales desconocidas f_1 , f_2 , se pierde la observabilidad en el estado x_3 , el cual se vuelve únicamente detectable.

Es necesario mencionar que el cálculo explícito de un conjunto de ganancias $\{k_1, k_2, k_3\}$ que garantice la estabilidad del sistema independientemente del valor del resto de los parámetros, no es una labor sencilla, debido a la complejidad de la expresión (B.32). Aunado a esto, las constantes c_1 , c_2 provenientes de las funciones W_1 y W_2 (las cuales acotan superiormente a las derivadas \dot{V}_1 , \dot{V}_2 , garantizando así la convergencia del diferenciador HOSM de 2° orden) dependen también de las ganancias k_1, k_2, k_3 y de los parámetros $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, de forma tal que el análisis se vuelve sumamente complejo.

La obtención de un conjunto de ganancias admisible queda más allá de los alcances de este trabajo. Sin embargo, se ha comprobado mediante simulaciones numéricas y datos experimentales que un conjunto de ganancias $\{k_1, k_2, k_3\}$ diseñado para el diferenciador HOSM discontinuo de segundo orden obtenido, por ejemplo, mediante el método descrito en (Sanchez *et al.*, 2017), logra que el esquema de observación propuesto sea convergente.

Bibliografía

- Alwi, Halim, Christopher Edwards y Chee Pin Tan (2011). *Fault detection and fault-tolerant control using sliding modes*. Springer Science & Business Media. [2](#), [3](#), [25](#)
- Angulo, Marco Tulio y Cristina Verde (2013). Second-order sliding mode algorithms for the reconstruction of leaks. En: *Control and Fault-Tolerant Systems (SysTol), 2013 Conference on*. IEEE. pp. 566–571. [3](#)
- Bartolini, Giorgio, Antonella Ferrara y Elio Usai (1997). Output tracking control of uncertain nonlinear second-order systems. *Automatica* **33**(12), 2203–2212. [33](#)
- Bernard, Olivier, Gauthier Sallet y Antoine Sciandra (1998). Nonlinear observers for a class of biological systems: application to validation of a phytoplanktonic growth model. *IEEE Transactions on Automatic Control* **43**(8), 1056–1065. [4](#), [48](#), [85](#), [86](#)
- Besançon, Gildas (2003). High-gain observation with disturbance attenuation and application to robust fault detection. *Automatica* **39**(6), 1095–1102. [2](#)
- Blanke, Mogens, Michel Kinnaert, Jan Lunze, Marcel Staroswiecki y J Schröder (2006). *Diagnosis and fault-tolerant control*. 2 ed. Springer. [8](#)
- Chaudhry, M Hanif (2014). *Applied Hydraulic Transients*. Springer. [43](#)
- Chow, EYEEY y AS Willsky (1984). Analytical redundancy and the design of robust failure detection systems. *IEEE Transactions on automatic control* **29**(7), 603–614. [14](#)
- Cruz-Zavala, Emmanuel (2014). Funciones de Lyapunov de Control para el Diseño de Controladores Discontinuos.. Tesis de doctorado. Universidad Nacional Autónoma de México. Programa de Maestría y Doctorado en Ingeniería. [91](#)
- Cruz-Zavala, Emmanuel y Jaime A Moreno (2016). Lyapunov functions for continuous and discontinuous differentiators. *IFAC-PapersOnLine* **49**(18), 660–665. [38](#), [41](#), [56](#), [67](#)
- Filipov, Aleksei Fedorovich (1988). Differential equations with discontinuous right-hand side. En: *Amer. Math. Soc.* pp. 191–231. [31](#), [35](#), [37](#)

- Fridman, Leonid (2011). Sliding mode enforcement after 1990: Main results and some open problems. En: *Sliding modes after the first decade of the 21st century*. pp. 3–57. Springer. [34](#), [55](#)
- Hardy, Godfrey Harold, John Edensor Littlewood y George Pólya (1988). *Inequalities*. Cambridge university press. [93](#)
- Hautus, Malo LJ (1983). Strong detectability and observers. *Linear Algebra and its applications* **50**, 353–368. [2](#), [15](#), [17](#), [22](#)
- Hou, M y Peter C Müller (1994). Fault detection and isolation observers. *International Journal of Control* **60**(5), 827–846. [14](#)
- Isermann, Rolf (2006). *Fault-diagnosis systems: an introduction from fault detection to fault tolerance*. Springer Science & Business Media. [2](#)
- Levant, Arie (1993). Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control. *International journal of control* **58**(6), 1247–1263. [32](#), [33](#)
- Levant, Arie (2003). Higher-order sliding modes, differentiation and output-feedback control. *International journal of Control* **76**(9-10), 924–941. [37](#), [39](#)
- Levant, Arie (2006). Homogeneous quasi-continuous sliding mode control. En: *Advances in Variable Structure and Sliding Mode Control*. pp. 143–168. Springer. [33](#)
- Moreno, Jaime A (2009). A linear framework for the robust stability analysis of a generalized super-twisting algorithm. En: *6th International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control, CCE, 2009*. IEEE. pp. 1–6. [32](#)
- Moreno, Jaime A (2011). Lyapunov approach for analysis and design of second order sliding mode algorithms. En: *Sliding Modes after the first decade of the 21st Century*. pp. 113–149. Springer. [32](#), [33](#)
- Moreno, Jaime A (2018). Lyapunov-based design of homogeneous high-order sliding modes. En: *Advances in Variable Structure Systems and Sliding Mode Control—Theory and Applications*. pp. 3–38. Springer. [34](#), [56](#), [67](#)
- Moreno, Jaime A, Edmundo Rocha-Cózatl y Alain Vande Wouwer (2014). A dynamical interpretation of strong observability and detectability concepts for nonlinear systems with unknown inputs: application to biochemical processes. *Bioprocess and biosystems engineering* **37**(1), 37–49. [2](#), [21](#)
- Moreno, Jaime A y Denis Dochain (2008). Global observability and detectability analysis of uncertain reaction systems and observer design. *International Journal of Control* **81**(7), 1062–1070. [2](#), [21](#)

- Negrete, Marco A. (2012). Reconstrucción de fugas múltiples en tuberías usando observadores de modos deslizantes. Tesis de maestría. Universidad Nacional Autónoma de México. Programa de Maestría y Doctorado en Ingeniería. [3](#), [5](#)
- Negrete, Marco A y Cristina Verde (2012). Multi-leak reconstruction in pipelines by sliding mode observers. *IFAC Proceedings Volumes* **45**(20), 934–939. [3](#), [5](#), [44](#), [49](#), [50](#), [83](#)
- Pérez, R. (2003). Evolution of natural gas and LPG pipeline transmission in Mexico. *Ductos, Pemex*. [1](#)
- Rojas, Jorge y Verde, Cristina (2017). Caracterización estática de la pérdida de carga en un ducto con una función polinomial. *Congreso Nacional de Control Automático (CNCA)*. [44](#)
- Sanchez, Tonametl, Emmanuel Cruz-Zavala y Jaime A Moreno (2017). An sos method for the design of continuous and discontinuous differentiators. *International Journal of Control* pp. 1–18. [34](#), [56](#), [72](#), [90](#), [95](#)
- Shtessel, Yuri, Christopher Edwards, Leonid Fridman y Arie Levant (2014). *Sliding mode control and observation*. Vol. 10. Springer. [3](#), [27](#), [34](#), [55](#)
- Torres, Lizeth, Gildas Besançon, Adrian Navarro, Ofelia Begovich, Didier Georges et al. (2011). Examples of pipeline monitoring with nonlinear observers and real-data validation. En: *8th International IEEE Multi-Conference on Systems, Signals and Devices*. [3](#)
- Utkin, Vadim I (2013). *Sliding modes in control and optimization*. Springer Science & Business Media. [3](#), [27](#)
- Verde, Cristina (2001). Multi-leak detection and isolation in fluid pipelines. *Control Engineering Practice* **9**(6), 673–682. [2](#)
- Verde, Cristina (2004). Minimal order nonlinear observer for leak detection. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control* **126**(3), 467–472. [44](#)
- Verde, Cristina, Nancy Visairo y Sylviane Gentil (2007). Two leaks isolation in a pipeline by transient response. *Advances in water resources* **30**(8), 1711–1721. [3](#)
- Verde, Cristina, Sylviane Gentil y Rubén Morales-Menéndez (2013). *Monitoreo y diagnóstico automático de fallas en sistemas dinámicos*. Trillas. [8](#)
- Verde, Cristina y Jorge Rojas (2017). Recursive scheme for sequential leaks' identification. En: *Modeling and Monitoring of Pipelines and Networks*. pp. 125–145. Springer. [3](#)
- Visairo, Nancy y Cristina Verde (2003). Leak isolation conditions in a pipeline via a geometric approach. *5th IFAC Safeprocess03* pp. 1023–1028. [3](#)