

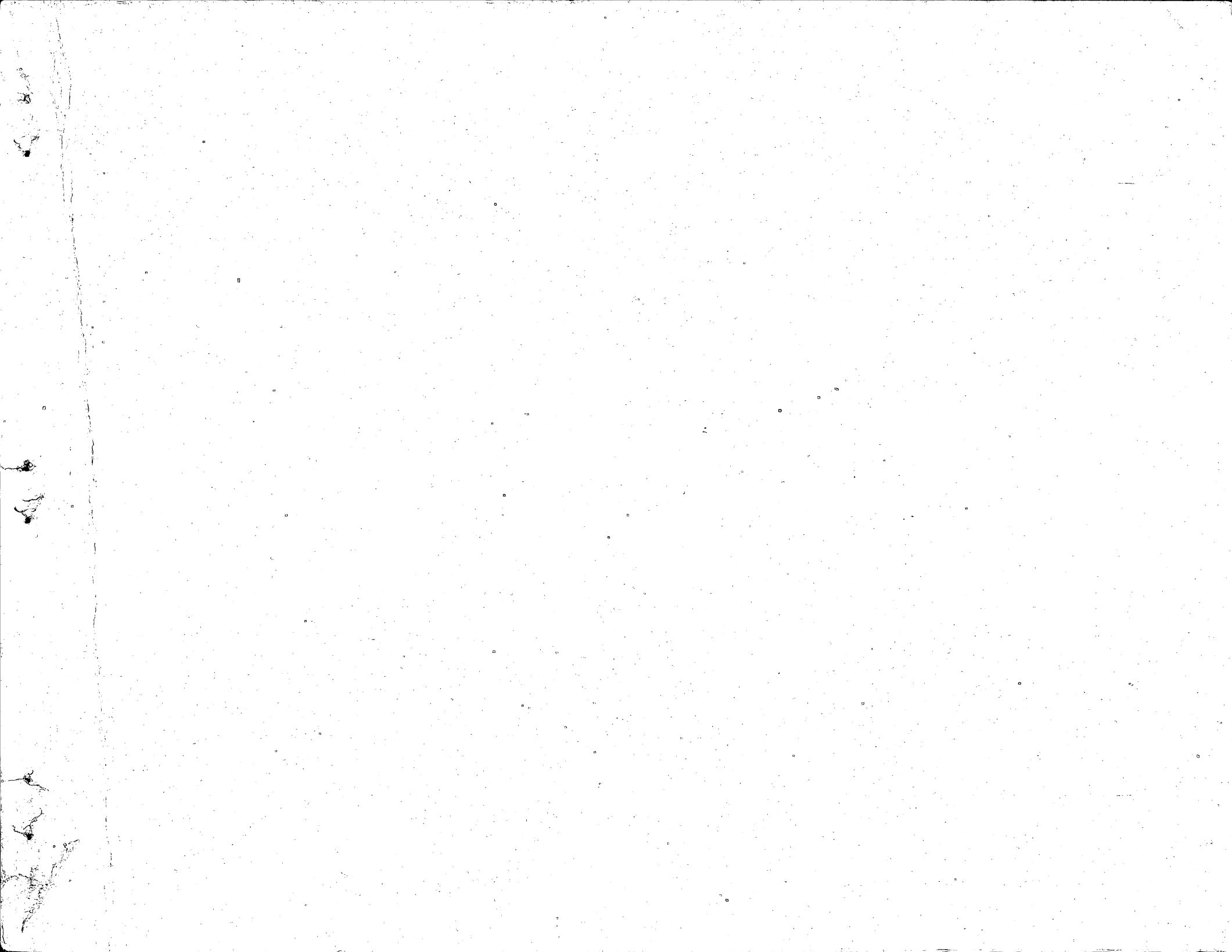
MECANICA DEL MEDIO CONTINUO

Notas preliminares para el primer curso.

Ramón Cervantes Beltrán*

Victor Porras Silva

*Profesores Investigadores, Facultad de Ingeniería, UNAM.



MECANICA DEL MEDIO CONTINUO
Notas Preliminares para un Primer Curso.

R. Cervantes B., y V. Porras S.

1. FUNDAMENTOS MATEMATICOS.

- 1.1 Introducción.
- 1.2 Vectores.
- 1.2.1 Notación simbólica.
- 1.3 Dependencia lineal.
- 1.4 Coordenadas cartesianas y vectores base.
- 1.5 Notación tensorial cartesiana.
- 1.6 Producto escalar de dos vectores.
- 1.6.1 Producto escalar en términos de las componentes vectoriales.
- 1.7 Producto vectorial de dos vectores.
- 1.7.1 Producto vectorial en términos de las componentes vectoriales.
- 1.7.2 Representación vectorial de superficies planas.
- 1.8 Otros productos entre vectores.
- 1.8.1 Triple producto escalar.
- 1.8.2 Triple producto vectorial.
- 1.9 Transformación de coordenadas debido a movimiento de cuerpo rígido de la referencia cartesiana.
- 1.10 Funciones vectoriales y derivadas.
- 1.11 Definiciones y teoremas integrales.
- 1.12 Leyes de transformación de los tensores cartesianos.
- 1.13 Problemas.

2. DEFORMACION.

- 2.1 Introducción.
- 2.2 Sistemas de referencia.
- 2.3 Gradientes de deformación y tensores de deformación (deformation).
- 2.3.1 Características tensorial de los tensores de deformación de Cauchy y de Green.
- 2.4 Tensores de deformación (Strain) y vector desplazamiento.
- 2.5 Representación geométrica de la deformación.
- 2.6 Deformaciones y rotaciones infinitesimales.
- 2.7 Interpretación geométrica de las componentes de los tensores de deformación y del de rotación.
- 2.8 Elipsoides de deformación y teoremas de Cauchy.
- 2.9 Deformaciones y direcciones principales.
- 2.10 Ecuaciones de compatibilidad.
- 2.11 Deformaciones de areas y volúmenes diferenciales.
- 2.12 Problemas.

3. MOVIMIENTO.

- 3.1 Introducción.
- 3.2 Rapidez de variación respecto al tiempo de vectores.
- 3.3 Derivadas materiales de diferenciales.
- 3.4 Derivadas materiales de integrales.
- 3.5 Tensores rapidez de deformación.
- 3.6 Axiomas fundamentales de la Mecánica del Medio Continuo.
- 3.7 Tensores Objetivos.
- 3.8 Problemas.

4. ESFUERZO.

- 4.1 Introducción.
- 4.2 Fuerzas resultantes.
- 4.3 Hipótesis de esfuerzo.
- 4.4 Tensor esfuerzo.
- 4.4.1 Carácter tensorial del tensor esfuerzo.
- 4.4.2 Esfuerzo en la frontera del cuerpo.
- 4.4.3 Notaciones usuales para el tensor esfuerzo.
- 4.5 Ecuaciones de equilibrio de Cauchy.
- 4.6 Cuadrática de esfuerzos de Cauchy.
- 4.7 Esfuerzos y direcciones principales.
- 4.8 Valores extremales de los esfuerzos cortantes.
- 4.9 Círculos de Mohr.
- 4.10 Descomposición del tensor esfuerzo.
- 4.11 Problemas.

5. TERMODINAMICA.

- 5.1 Introducción.
- 5.2 Principio de la conservación de la energía.
- 5.3 Energía potencial.
- 5.4 Energía de deformación.
- 5.5 Entropía.
- 5.6 Principio de entropía o desigualdad de Clausius-Duhem.
- 5.7 Restricciones termodinámicas de algunos materiales.
- 5.7.1 Sólidos elásticos.
- 5.7.2 Fluidos viscosos.
- 5.8 Equilibrios mecánico y termodinámico.
- 5.8.1 Sólidos elásticos.
- 5.8.2 Fluidos viscosos.
- 5.9 Principio del trabajo virtual.
- 5.10 Problemas.

6. ECUACIONES CONSTITUTIVAS.

- 6.1 Introducción.
- 6.2 Necesidad para las ecuaciones constitutivas.
- 6.3 Axiomas de la teoría constitutiva.
 - 6.3.1 Axioma de Causalidad.
 - 6.3.2 Axioma de Determinismo.
 - 6.3.3 Axioma de Equipresencia.
 - 6.3.4 Axioma de Objetividad.
 - 6.3.5 Axioma de Invariancia Material.
 - 6.3.6 Axioma de Vecindad.
 - 6.3.6.1 Vecindad Suave.
 - 6.3.7 Axioma de Memoria.
 - 6.3.7.1 Memoria Suave.
 - 6.3.7.2 Memoria Gradual (Fading).
 - 6.3.8 Axioma de Admisibilidad.
- 6.4 Materiales termomecánicos.
 - 6.4.1 Restricciones debidas al axioma de objetividad.
 - 6.4.1.1 Traslaciones rígidas de la referencia espacial.
 - 6.4.1.2 Cambio del origen de los tiempos.
 - 6.4.1.3 Rotaciones rígidas de la referencia espacial.
 - 6.4.2 Restricciones debidas al axioma de invariancia material.
 - 6.4.3 Restricciones debidas al axioma de vecindad suave.
 - 6.4.4 Restricciones debidas al axioma de memoria suave.
 - 6.4.5 Restricciones debidas al axioma de admisibilidad.
- 6.5 Sólidos elásticos.
 - 6.5.1 Sólidos hiperelásticos.
 - 6.5.2 Sólidos elásticos incompresibles.
- 6.6 Sólidos elásticos isotrópicos.
- 6.7 Flúidos de Stokes.
 - 6.7.1 Flúidos incompresibles.
- 6.8 Problemas.

MECANICA DEL MEDIO CONTINUO

Notas preliminares para el primer curso.

Ramón Cervantes Beltrán*

Victor Porras Silva

*Profesores Investigadores, Facultad de Ingeniería, UNAM.

CAPITULO 1

FUNDAMENTOS MATEMATICOS

1.1 Introducción

En el desarrollo de la Teoría de la Mecánica del Medio Continuo se manejan una serie de conceptos de la Física que al en - globalarlas en las leyes que los gobiernan se transforman sistemá - ticamente a modelos matemáticos. Las cantidades físicas comun - mente se especifican en un sistema de referencia apropiado para su medición pero no son exclusivos de él y por lo tanto son inde - pendientes del mismo. Desde el punto de vista matemático tales cantidades se les conoce con el nombre de tensores.

Las cantidades tensoriales se especifican en un sistema de

referencia en particular mediante un cierto conjunto de elementos conocidos como sus componentes. Al especificar las componentes de un tensor en un sistema de referencia también se podrán deter - minar sus componentes en otro cualesquiera mediante alguna ley de transformación. Las leyes de transformación de las componentes de un tensor proporcionan las bases para definir a dicho tensor.

Los tensores se pueden clasificar por su orden, de acuerdo con la forma particular de la ley de transformación que obedecen. Esta misma clasificación se ve reflejada en el número de componen - tes que un tensor posee en un espacio euclídeano de n dimensio - nes. Así un tensor de orden N posee 3^N componentes en un es - pacio de tres dimensiones. A los tensores de orden cero se les denomina escalares, a los de orden uno vectores a los de orden dos diadicas, a los de orden 3 triadicas, etc.

A continuación se presentan algunas características de los tensores usuales de este curso y generalmente se hará referencia al espacio euclídeano de tres dimensiones a menos que se especi - fique lo contrario.

1.2 Vectores

Ciertas cantidades de la Física, tales como las fuerzas, las velocidades, para poder especificarlas se requiere definir su mag - nitud y su dirección. También es usual representarlas geométrica - mente por líneas rectas dirigidas. Estas cantidades vienen a ser ejemplos de los entes matemáticos denominados vectores o tensores de primer orden.

Definición 1.2.1 Un vector es una cantidad caracterizada por los siguientes conceptos:

- i) Magnitud: que es su longitud o tamaño
- ii) Dirección o línea de acción: que es la línea sobre la cual se localiza
- iii) Sentido: que indica hacia qué extremo de la línea está dirigido.

La representación geométrica se indica en la fig 1.2.1

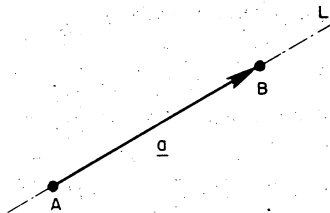


Fig 1.2.1 Representación geométrica del vector \underline{a} .

en donde se especifica al vector que va del punto A al punto B y en donde se pueden identificar los conceptos que intervienen en la definición de un vector, que son:

- i) Magnitud = $|\underline{AB}|$ = distancia entre los puntos A y B
- ii) Dirección; está dada por la línea L que es donde están contenidos los puntos A y B.
- iii) Sentido; se indica por la flecha y muestra que el vector está definido del punto A al punto B.

1.2.1 Notación simbólica

En la notación simbólica, un vector queda representado por algún símbolo que puede ser alguna letra de algún alfabeto, que es lo más usual, con una raya horizontal bajo dicho símbolo. Así el vector mostrado en la figura 1.2.1 está representado por \underline{a} . Esta notación no es única y se utilizan otras como las indicadas a continuación \vec{a} , \bar{a} , a , etc., pero la que actualmente se ha estado utilizando en los artículos relacionados con la mecánica es la que en estas notas se ha seleccionado.

La magnitud del vector \underline{a} quedará representada por $|\underline{a}|$.

Definición 1.2.2. Un vector que tenga magnitud igual a cero y dirección arbitraria se denomina vector cero o vector nulo. Se indica por $\underline{0}$.

Definición 1.2.3. Dos vectores \underline{a} y \underline{b} son iguales si y solo si sus magnitudes son iguales, sus líneas de acción son paralelas y sus sentidos son iguales. Lo anterior queda expresado mediante la ecuación vectorial siguiente

$$\underline{a} = \underline{b} \quad (1.2.1)$$

La representación geométrica de la ec 1.2.1 se muestra en la figura siguiente

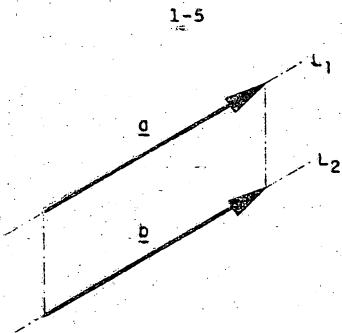


Fig 1.2.2 Representación geométrica de dos vectores iguales.

Definición 1.2.4. Suma de dos vectores. Para efectuar la suma del vector \underline{a} mas el vector \underline{b} se hace uso de la regla del paralelogramo que dice: A partir de un punto 0 se coloca el origen del vector \underline{a} cuyo extremo final quedará indicado por la letra A. Tomando como origen del vector \underline{b} el punto A, obtengase el extremo del vector \underline{b} indicado por el punto B. El vector formado con extremo inicial en 0 y extremo final en B resulta ser la suma de los vectores \underline{a} y \underline{b} . En la fig 1.2.3 se muestra graficamente la regla del paralelogramo para la suma de los vectores \underline{a} y \underline{b} .

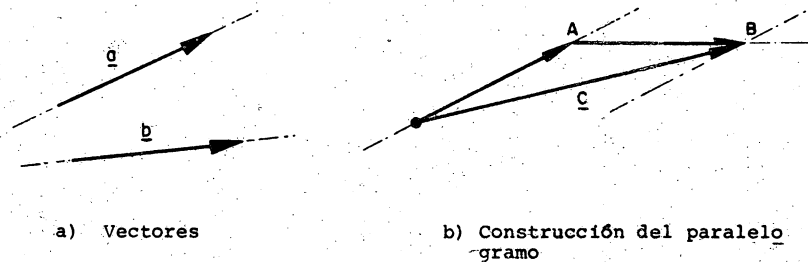


Fig 1.2.3 Regla del paralelogramo para suma de dos vectores.

La suma de dos vectores \underline{a} y \underline{b} es otro vector \underline{c} y se indica de la forma siguiente

$$\underline{c} = \underline{a} + \underline{b} \quad (1.2.2)$$

La suma vectorial es conmutativa y asociativa. Esta aseveración se demuestra mediante la definición de suma vectorial entre dos vectores.

$$\underline{a} + \underline{b} = \underline{b} + \underline{a} \quad \text{ley conmutativa} \quad (1.2.3)$$

$$(\underline{a} + \underline{b}) + \underline{d} = \underline{a} + (\underline{b} + \underline{d}) \quad \text{ley asociativa} \quad (1.2.4)$$

Definición 1.2.5. Multiplicación de un vector por un número real. Sea m un número real. Entonces $m \underline{a}$ es un vector con las siguientes características

- i) Magnitud: $|m \underline{a}| = |m| |\underline{a}|$
- ii) Línea de acción: igual a la del vector \underline{a}
- iii) Sentido: igual a la del vector \underline{a} si $m > 0$ contrario a la del vector \underline{a} si $m < 0$

Si $m = 0$; el vector $m \underline{a}$ será igual al vector $\underline{0}$.

En la multiplicación de un escalar por un vector se presentan las siguientes propiedades

$$m \underline{a} = \underline{a} m \quad \text{ley conmutativa} \quad (1.2.5)$$

$$(m n) \underline{a} = m (n \underline{a}) \quad \text{ley asociativa} \quad (1.2.6)$$

$$(m+n)\underline{a} = m\underline{a} + n\underline{a} \quad \text{ley distributiva} \quad (1.2.7)$$

$$m(\underline{a} + \underline{b}) = m\underline{a} + m\underline{b} \quad \text{ley distributiva} \quad (1.2.8)$$

donde m y n son números reales.

En base a la multiplicación de un vector por un número real se puede construir la diferencia entre dos vectores de acuerdo con la expresión siguiente

$$\underline{c} = \underline{a} + (-1)\underline{b} = \underline{a} - \underline{b} \quad (1.2.9)$$

En la fig 1.2.4 se muestra la operación resta de dos vectores comparada con la suma de los mismos

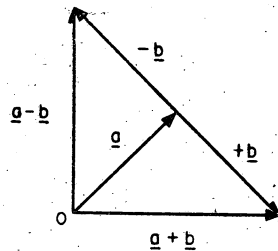


Fig 1.2.4 Resta de dos vectores

1.3 Dependencia Lineal

Definición 1.3.1. Los n vectores $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n$ son linealmente dependientes si y solo si existen n números reales m_1, m_2, \dots, m_n no todos iguales a cero de tal manera que se cumpla la expresión siguiente

$$m_1\underline{a}_1 + m_2\underline{a}_2 + \dots + m_n\underline{a}_n = \underline{0} \quad (1.3.1)$$

De no cumplirse la condición anterior se dice que los vectores son linealmente independientes.

Ejemplo 1.3.1. Un vector es linealmente dependiente si y solo si es el vector cero.

$$m\underline{a} = \underline{0}$$

$$\text{Si } m \neq 0 \quad \underline{a} = \underline{0}$$

Ejemplo 1.3.2. Dos vectores paralelos son linealmente dependientes.

$$\text{Si } \underline{a} // \underline{b} \quad \underline{b} = k\underline{a} \quad k \neq 0$$

$$\text{Si } k = -\frac{m_1}{m_2}$$

$$\underline{b} = -\frac{m_1}{m_2}\underline{a} \quad \text{con } m_1 \neq 0 \quad \text{y } m_2 \neq 0$$

$$m_1\underline{a} + m_2\underline{b} = \underline{0}$$

Definición 1.3.2. La totalidad de vectores $m\underline{a}$ para un número real m arbitrario y $\underline{a} \neq \underline{0}$, constituye un espacio vectorial lineal unidimensional.

Ejemplo 1.3.3 Tres vectores en un plano son linealmente dependientes. Sean \underline{a} , \underline{b} y \underline{c} tres vectores coplanares, por tal razón se podrá tener la situación mostrada en la fig 1.3.1 en donde se tiene que

$$\underline{c} = n \underline{a} + m \underline{b}$$

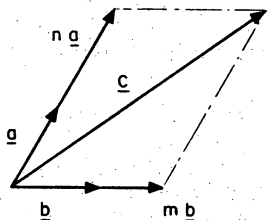


Fig 1.3.1 Dependencia lineal de tres vectores coplanares

Si en la ecuación anterior se sustituyen los siguientes valores

$$m = -\frac{m_1}{m_3} ; \quad n = -\frac{m_2}{m_3}$$

con m_1 , m_2 y m_3 no todos nulos se tendrá la expresión siguiente

$$m_1 \underline{a} + m_2 \underline{b} + m_3 \underline{c} = \underline{0}$$

Los resultados anteriores conducen a las definiciones siguientes

Definición 1.3.3. La fórmula $m \underline{a} + n \underline{b}$; donde \underline{a} y \underline{b} son dos vectores linealmente independientes y los números reales m y n arbitrarios, definen a un espacio vectorial bidimensional.

Definición 1.3.4. Si los n vectores $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n$ son linealmente independientes y los n números reales m_1, m_2, m_n son arbitrarios, entonces, la siguiente combinación lineal

$$m_1 \underline{a}_1 + m_2 \underline{a}_2 + \dots + m_n \underline{a}_n \tag{1.3.2}$$

define al espacio vectorial lineal n -dimensional.

Es de observarse que en un espacio vectorial n -dimensional, $n+1$ vectores son linealmente dependientes.

1.4 Coordenadas cartesianas, vectores base

En la definición 1.3.4 se especificó que en un espacio n -dimensional existen n vectores linealmente independientes. En particular para el espacio de tres dimensiones cualquier vector se podrá expresar como la combinación lineal de tres vectores linealmente independientes.

Definición 1.4.1. Sean $\underline{e}_1, \underline{e}_2$ y \underline{e}_3 tres vectores linealmente independientes en un espacio de tres dimensiones. Si los tres vectores anteriores permanecen fijos en el espacio y se utilizan para representar a cualquier vector arbitrario en el mismo espacio, entonces, a la terna de vectores fijos, linealmente independientes se les conoce con el nombre de vectores base. Si la magnitud de los vectores base es igual a la unidad, los vectores base reciben el nombre de vectores base rectilíneos unitarios o simplemente vectores unitarios rectilíneos. Si la dirección de los vectores base cambia en el espacio, no son rectilíneos.

Entonces cualquier vector \underline{a} del espacio de tres dimensiones se podrá expresar como

$$\underline{a} = a^1 \underline{e}_1 + a^2 \underline{e}_2 + a^3 \underline{e}_3 \quad (1.4.1)$$

a las cantidades a^1 , a^2 y a^3 se les conoce con el nombre de componentes del vector \underline{a} respecto a los vectores rectilíneos \underline{e}_1 , \underline{e}_2 y \underline{e}_3 . Los superíndices que aparecen en las componentes no son exponentes. La representación gráfica del vector \underline{a} indicado por la ec 1.4.1 se muestra en la fig 1.3.1 en donde se explica la idea de componentes de un vector

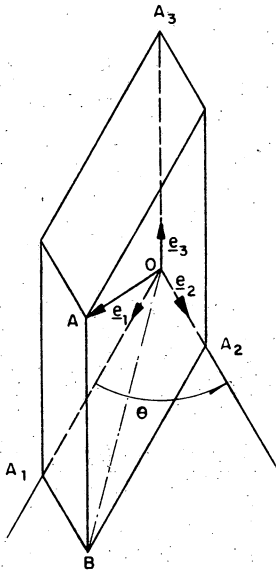


Fig 1.4.1. Representación gráfica de las componentes de un vector respecto a una base rectilínea.

En base a la fig 1.4.1 se obtienen los siguientes resultados

$$\underline{OA} = \underline{OB} + \underline{OA}_3 \quad (1.4.2)$$

$$\underline{OB} = \underline{OA}_1 + \underline{OA}_2 \quad (1.4.3)$$

sustituyendo la ec 1.4.3 en la ec 1.4.2 se obtiene

$$\underline{OA} = \underline{OA}_1 + \underline{OA}_2 + \underline{OA}_3 \quad (1.4.4)$$

considerando que los vectores base son unitarios, es decir

$$|\underline{e}_1| = 1 \quad (1.4.5a)$$

$$|\underline{e}_2| = 1 \quad (1.4.5b)$$

$$|\underline{e}_3| = 1 \quad (1.4.5c)$$

entonces se podrán obtener las expresiones siguientes

$$\underline{OA}_1 = |\underline{OA}_1| \underline{e}_1 \quad (1.4.6a)$$

$$\underline{OA}_2 = |\underline{OA}_2| \underline{e}_2 \quad (1.4.6b)$$

$$\underline{OA}_3 = |\underline{OA}_3| \underline{e}_3 \quad (1.4.6c)$$

sustituyendo las ecs 1.4.6 en la ec 1.4.4 se obtendrá la expresión

$$\underline{OA} = |\underline{OA}_1| \underline{e}_1 + |\underline{OA}_2| \underline{e}_2 + |\underline{OA}_3| \underline{e}_3 \quad (1.4.7)$$

De acuerdo a la fig 1.4.1 se podrá escribir que

$|\underline{OA}_1|$ = Proyección paralela de \underline{OA} sobre $\underline{e}_1 = a^1$

$|\underline{OA}_2|$ = Proyección paralela de \underline{OA} sobre $\underline{e}_2 = a^2$

$|\underline{OA}_3|$ = Proyección paralela de \underline{OA} sobre $\underline{e}_3 = a^3$

Representando al vector \underline{OA} como \underline{a} y escribiendo la ec 1.4.7 en términos de las proyecciones paralelas se tendrá

$$\underline{a} = a^1 \underline{e}_1 + a^2 \underline{e}_2 + a^3 \underline{e}_3 \quad (1.4.1)$$

que es la demostración de la ec 1.4.1. El desarrollo anterior sirve para identificar a las componentes del vector \underline{a} respecto a los vectores base rectilíneos como las proyecciones paralelas sobre los vectores base correspondientes.

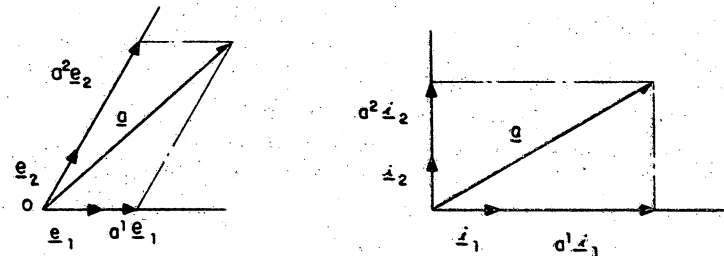
Definición 1.4.2. Los vectores base rectilíneos \underline{e}_1 , \underline{e}_2 y \underline{e}_3 se denomina sistema derecho, cuando el conjunto de vectores está orientado de tal manera que un tornillo de rosca derecha avanza en el sentido del vector \underline{e}_3 cuando se le hace girar con el movimiento que provoca la rotación del vector \underline{e}_1 hacia el vector \underline{e}_2 tomando como eje de giro el vector \underline{e}_3 y el ángulo de giro de \underline{e}_1 hacia \underline{e}_2 sea menor que 180° . De no presentarse estas condiciones, se dice que el sistema es izquierdo.

En la fig 1.4.1 si el ángulo θ que forman los vectores \underline{e}_1 y \underline{e}_2 es menor que 180° , entonces el sistema mostrado en dicha figura es un sistema derecho.

Definición 1.4.3. Cuando se tiene el caso particular de que los vectores base sean mutuamente perpendiculares reciben el nombre

de vectores base ortogonales. Si además los vectores son unitarios, entonces se les llama vectores base ortonormales.

Por ser un caso muy específico el sistema rectilíneo ortonormal, los vectores base se representarán con la letra i latina en vez de la letra e ; es decir, la base ortonormal se indicará por los vectores \underline{i}_1 , \underline{i}_2 , \underline{i}_3 . Al sistema rectilíneo ortonormal se le llama vectores base rectangular. En la fig 1.4.2 se mues-



a) Proyecciones paralelas b) Proyecciones ortogonales

Fig 1.4.2. Distribución entre proyecciones paralelas y ortogonales

tra gráficamente la diferencia entre las proyecciones paralelas y ortogonales para un sistema de vectores base rectilíneo general y un sistema de vectores base ortonormal.

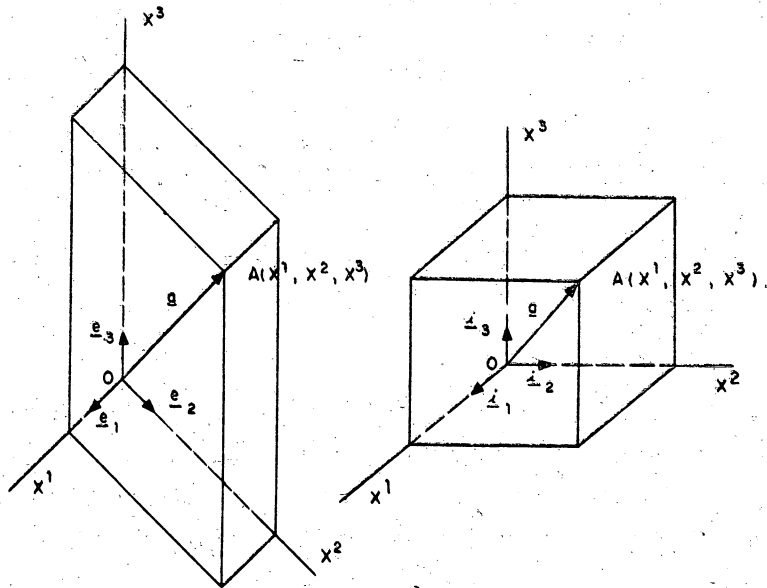
Definición 1.4.4. Si \underline{a} es el vector de posición \underline{OA} de un punto A entonces las componentes a^i respecto a la base \underline{e}_i se denominan coordenadas rectilíneas, mientras que las componentes a^i asociadas a la base \underline{i}_i se denominan coordenadas rectangulares.

Para identificar la línea de acción de los vectores base se acostumbra llamarlos por las letras x^1, x^2, x^3 tanto para los vectores base e_i como para los i_i . El vector de posición \underline{OA} se acostumbra representarlos por las expresiones siguientes

$$\underline{OA} = x^1 e_1 + x^2 e_2 + x^3 e_3 \quad ; \quad \text{en coordenadas rectilíneas} \quad (1.4.2)$$

$$\underline{OA} = x^1 i_1 + x^2 i_2 + x^3 i_3 \quad ; \quad \text{en coordenadas rectangulares} \quad (1.4.3)$$

La Fig 1.4.3 muestra la representación gráfica de las ecs 1.4.2 y 1.4.3.

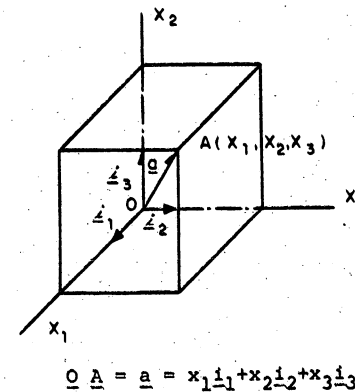


a) Coordenadas rectilíneas

b) Coordenadas rectangulares o
Coordenadas Cartesianas

Fig 1.4.3 Sistemas coordenados

La razón de emplear superíndices y subíndices en los conceptos anteriores se debe a la posibilidad de poder diferenciar explícitamente conceptos tales como: bases recíprocas, componentes covariantes y contravariantes de un vector, tensor métrico euclidiano y otros conceptos aplicables a sistemas de generales formados con vectores base rectilíneos. Los conceptos anteriores se simplifican sensiblemente en un sistema de referencia formado con vectores ortonormales y aparentemente pasan desapercibidos. El hecho de que en este curso se emplearán únicamente referencias ortogonales, hace que las componentes de un vector se puedan trabajar exclusivamente con subíndices y por lo tanto la referencia cartesiana quedará como se indica en la fig 1.4.4, mostrada a continuación



$$\underline{OA} = \underline{a} = x_1 i_1 + x_2 i_2 + x_3 i_3$$

Fig 1.4.4 Referencia cartesiana en términos de subíndice

1.5 Notación tensorial cartesiana.

El hecho de utilizar como referencia un sistema cartesiano implica que las ecuaciones que gobiernan a los conceptos planteados en la Mecánica del Medio Continuo y sus manipulaciones subsiguientes se harán en términos de las componentes cartesianas. Las manipulaciones anteriores resultan sumamente elaboradas cuando cada término tenga que ser escrito explícitamente y consecuentemente se tiene consigo el peligro de ocultar la simplicidad estructural de las ecuaciones, las manipulaciones y los resultados. Para evitar los peligros anteriores se utilizará una notación taquigráfica basada en unas cuantas convenciones sencillas que aquí se presentarán. La notación taquigráfica se conoce como notación índice cartesiana.

Definición 1.5.1. Rango. Cuando un término posee un subíndice no repetido, se deberá entender que dicho índice toma los valores 1, 2, ..., N. El valor N es un número entero especificado y recibe el nombre de rango.

Ejemplo 1.5.1

$$a_i = b_i \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.5.1)$$

En la ecuación anterior existe un solo índice, el rango es igual a 3 y en forma desarrollada resulta ser

$$\begin{array}{ll} \text{para } i = 1 & a_1 = b_1 \\ \text{para } i = 2 & a_2 = b_2 \end{array}$$

$$\text{para } i = 3 \quad a_3 = b_3$$

Definición 1.5.2. Convención suma. Cuando un índice aparece doble en un término, se deberá entender que representa una suma respecto a dicho índice sobre su rango.

Ejemplo 1.5.2

$$a_{ij}b_j = c_i \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (1.5.2)$$

En el término de la izquierda de la ecuación anterior aparecen dos índices, el i y el j ambos con rango igual a 3 pero el índice j aparece repetido y de acuerdo con la definición de convención suma se tendrá

$$a_{i1}b_1 + a_{i2}b_2 + a_{i3}b_3 = c_i$$

como el índice i no está repetido la ecuación anterior implica

$$\text{para } i = 1 \quad a_{11}b_1 + a_{12}b_2 + a_{13}b_3 = c_1 \quad (1.5.3a)$$

$$\text{para } i = 2 \quad a_{21}b_1 + a_{22}b_2 + a_{23}b_3 = c_2 \quad (1.5.3b)$$

$$\text{para } i = 3 \quad a_{31}b_1 + a_{32}b_2 + a_{33}b_3 = c_3 \quad (1.5.3c)$$

Las ecs 1.5.3 son la forma desarrollada de la ec 1.5.2 puesta en forma taquigráfica.

Definición 1.5.3. A los índices que aparecen solos se les llama índices libres mientras que los índices dobles se les denominan índices falsos. En un término donde aparezcan índices falsos

el símbolo de los mismos se puede cambiar siempre y cuando se conserve el rango.

Así

$$a_{ij}b_j = a_{ik}b_k = a_{il}b_l = a_{i\alpha}b_\alpha = \text{etc} ; \quad i, j, k, l, \alpha = 1, 2, 3.$$

Definición 1.5.4. La delta de Kronecker δ_{ij} , es un símbolo con doble índice de mismo rango definido de la forma siguiente

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (1.5.4)$$

Lo anterior en forma desarrollada queda:

para	$i = 1$	$j = 1$	$\delta_{11} = 1$	puesto que	$i = j = 1$
para	$i = 1$	$j = 2$	$\delta_{12} = 0$	puesto que	$i \neq j$
para	$i = 1$	$j = 3$	$\delta_{13} = 0$	puesto que	$i \neq j$
para	$i = 2$	$j = 1$	$\delta_{21} = 0$	puesto que	$i \neq j$
para	$i = 2$	$j = 2$	$\delta_{22} = 1$	puesto que	$i = j = 2$
para	$i = 2$	$j = 3$	$\delta_{23} = 0$	puesto que	$i \neq j$
para	$i = 3$	$j = 1$	$\delta_{31} = 0$	puesto que	$i \neq j$
para	$i = 3$	$j = 2$	$\delta_{32} = 0$	puesto que	$i \neq j$
para	$i = 3$	$j = 3$	$\delta_{33} = 1$	puesto que	$i = j = 3$

Ejemplo 1.5.3

$$a_i = \delta_{ij}b_j = b_i \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (1.5.5)$$

el índice repetido j indica suma, por lo tanto

$$a_i = \delta_{i1}b_1 + \delta_{i2}b_2 + \delta_{i3}b_3$$

$$\text{para } i = 1 \quad a_1 = \delta_{11}b_1 + \delta_{12}b_2 + \delta_{13}b_3 = b_1$$

$$\text{para } i = 2 \quad a_2 = \delta_{21}b_1 + \delta_{22}b_2 + \delta_{23}b_3 = b_2$$

$$\text{para } i = 3 \quad a_3 = \delta_{31}b_1 + \delta_{32}b_2 + \delta_{33}b_3 = b_3$$

que es la demostración de la ec (1.5.5).

Ejemplo 1.5.4

$$a_i = \delta_{ij}a_j \quad (1.5.6)$$

La demostración de esta ecuación es enteramente similar a la ec 1.5.5.

Definición 1.5.5. El símbolo de permutación e_{ijk} es un símbolo con tres índices de rango igual y puede tomar tres valores definidos como

- i) $e_{ijk} = 0$ Cuando al menos dos de los subíndices son iguales
- ii) $e_{ijk} = 1$ Cuando la secuencia de los valores numéricos asignados a los índices está dada por la secuencia 1, 2, 3 o alguna permutación par de la misma
- iii) $e_{ijk} = -1$ Cuando la secuencia de los valores numéricos asignados a los índices está dado por una permutación impar de la secuencia 1, 2, 3.

De acuerdo con la definición anterior se deberá tener que el símbolo de permutación e_{ijk} , posee 27 elementos cuyos valores son:

a) Valores nulos

$$e_{111} = e_{112} = e_{113} = e_{121} = e_{122} = e_{131} = e_{133} = 0$$

$$e_{211} = e_{212} = e_{221} = e_{222} = e_{223} = e_{232} = e_{233} = 0$$

$$e_{311} = e_{313} = e_{322} = e_{323} = e_{331} = e_{332} = e_{333} = 0$$

b) Valores positivos

$$e_{123} = e_{231} = e_{312} = 1$$

c) Valores negativos

$$e_{132} = e_{321} = e_{213} = -1$$

Ejemplo 1.5.5

$$a_i = e_{ijk} b_j c_k \quad i, j, k = 1, 2, 3 \quad (1.5.7)$$

Para desarrollar la explicación anterior se puede proceder de la forma siguiente

$$\text{para } i = 1 \quad a_1 = e_{1jk} b_j c_k \quad (1.5.7a)$$

Los índices repetidos j y k indican una suma toria que va a contener términos positivos, negativos y nulos dependiendo del valor del símbolo de permutación e_{ijk} .

Los únicos valores distintos de cero del símbolo de permutación e_{ijk} son:

$$e_{123} = 1 \quad \text{para } j = 2 \text{ y } k = 3$$

$$e_{132} = -1 \quad \text{para } j = 3 \text{ y } k = 2$$

Entonces sustituyendo en la ec 1.5.7a se tendrá que

$$a_1 = b_2 c_3 - b_3 c_2$$

con razonamientos análogos para calcular los valores distintos de cero para los símbolos de permutación e_{2jk} y e_{3jk} se concluye que

$$a_2 = b_3 c_1 - b_1 c_3$$

$$a_3 = b_1 c_2 - b_2 c_1$$

1.6 Producto escalar de dos vectores

Definición 1.6.1. El producto escalar de dos vectores \underline{a} y \underline{b} , da lugar a un escalar definido como el producto de la magnitud de los vectores por el coseno del ángulo que forman.

Los elementos de la definición anterior se muestran en la fig 1.6.1 en donde la expresión matemática del producto escalar

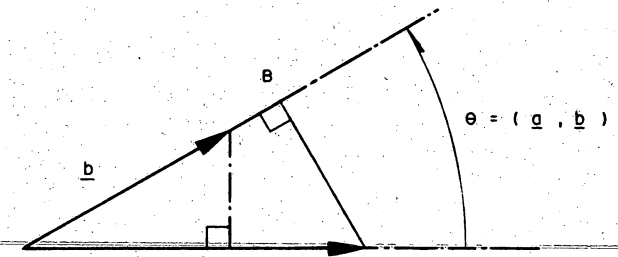


Fig. 1.6.1 Figura ilustrativa para el producto escalar.

indicado por $\underline{a} \cdot \underline{b}$, $\underline{a}^T \underline{b}$, $\underline{a}' \underline{b}$; queda

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = |\underline{a}| |\underline{b}| \cos(\underline{a}, \underline{b}) \quad (1.6.1)$$

La ecuación anterior se puede escribir como

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = |\underline{a}| \text{ Proyección ortogonal de } \underline{b} \text{ sobre } \underline{a} \quad (1.6.2)$$

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = |\underline{b}| \text{ Proyección ortogonal de } \underline{a} \text{ sobre } \underline{b} \quad (1.6.3)$$

Entonces una aplicación inmediata del producto escalar será para el cálculo de las proyecciones ortogonales de un vector sobre otro. De acuerdo con las ecs 1.6.2 y 1.6.3 se tiene

$$\text{Proyección ortogonal de } \underline{b} \text{ sobre } \underline{a} = \underline{a} \cdot \underline{b} / |\underline{a}| = \underline{u}_a \cdot \underline{b} \quad (1.6.4)$$

$$\text{Proyección ortogonal de } \underline{a} \text{ sobre } \underline{b} = \underline{a} \cdot \underline{b} / |\underline{b}| = \underline{a} \cdot \underline{u}_b \quad (1.6.5)$$

Los vectores \underline{u}_a y \underline{u}_b que se indican en las ecs 1.6.4 y 1.6.5 son vectores unitarios asociados a las direcciones de los vectores \underline{a} y \underline{b} respectivamente. Esto quiere decir que para calcular la proyección ortogonal de un vector sobre una dirección unitaria bastará con efectuar el producto escalar.

De la misma definición de producto escalar dada por la ec 1.6.1 se pueden concluir los resultados siguientes.

i) $\underline{a} \cdot \underline{b} = 0$ si y solo si cumple que $\underline{a} = \underline{0}$ o $\underline{b} = \underline{0}$ o bien $\cos(\underline{a}, \underline{b}) = 0$ lo que significaría que los vectores son perpendiculares.

ii) El producto escalar es asociativo, distributivo y conmutativo

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = \underline{b} \cdot \underline{a} \quad \text{conmutativo} \quad (1.6.6)$$

$$\underline{a} \cdot (\underline{b} + \underline{c}) = \underline{a} \cdot \underline{b} + \underline{a} \cdot \underline{c} \quad \text{distributivo} \quad (1.6.7)$$

$$m(\underline{a} \cdot \underline{b}) = (m \underline{a}) \cdot (\underline{b}) \quad \text{asociativo} \quad (1.6.8)$$

Los vectores base ortonormales \underline{i}_j satisfacen la expresión

$$\underline{i}_j \cdot \underline{i}_k = \delta_{jk} \quad (1.6.9)$$

La demostración es directa ya que

$$\underline{i}_j \cdot \underline{i}_k = |\underline{i}_j| |\underline{i}_k| \cos(\underline{i}_j, \underline{i}_k) = \cos(\underline{i}_j, \underline{i}_k)$$

$$\text{puesto que: } \cos(\underline{i}_j, \underline{i}_k) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k \\ 0 & \text{si } j \neq k \end{cases}$$

lo cual demuestra la ec 1.6.9, al tomar en cuenta la definición de la delta de Kronecker.

1.6.1 Producto escalar en términos de las componentes vectoriales. Sean \underline{a} y \underline{b} los vectores cuyas expresiones en términos de sus componentes rectangulares quedarán

$$\underline{a} = a_j \underline{i}_j$$

$$\underline{b} = b_k \underline{i}_k$$

entonces

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = (a_j \underline{i}_j) \cdot (b_k \underline{i}_k) = a_j b_k (\underline{i}_j \cdot \underline{i}_k) = a_j b_k \delta_{jk} = a_j b_j \quad (1.6.10)$$

La longitud $|\underline{a}|$ de un vector \underline{a} está dada por

$$\underline{a} \cdot \underline{a} = |\underline{a}| |\underline{a}| \cos 0^\circ = |\underline{a}|^2$$

$$|\underline{a}| = (\underline{a} \cdot \underline{a})^{1/2} \quad (1.6.11)$$

El ángulo que forman dos vectores \underline{a} y \underline{b} , de acuerdo con la ec 1.6.1 resulta ser

$$\cos (a,b) = \frac{\underline{a} \cdot \underline{b}}{|\underline{a}| |\underline{b}|} = \frac{a_j b_j}{(a_j a_j)^{1/2} (b_j b_j)^{1/2}} \quad (1.6.12)$$

Ejemplo 1.6.1. Sean los puntos A y B de coordenadas cartesianas A(5,2,3) y B(4,15,20). Calcule los siguientes conceptos:

- i) vectores de posición de los puntos A y B.
- ii) El vector que va del punto A al punto B.
- iii) El tamaño de los vectores anteriores
- iv) Los ángulos interiores del triángulo formado por el origen del sistema de referencia y los puntos A y B.
- v) La distancia normal del punto O a la línea AB.

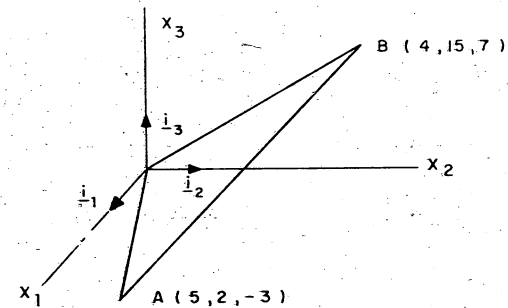


Fig. 1.6.2. Figura del ejemplo 1.6.1.

La solución se describe a continuación

- i) Los vectores de posición de los puntos A y B quedarán expresados como

$$\underline{OA} = \underline{a} = (5)\underline{i}_1 + (2)\underline{i}_2 + (-3)\underline{i}_3 = 5\underline{i}_1 + 2\underline{i}_2 - 3\underline{i}_3$$

$$\underline{OB} = \underline{b} = (4)\underline{i}_1 + (15)\underline{i}_2 + (7)\underline{i}_3 = 4\underline{i}_1 + 15\underline{i}_2 + 7\underline{i}_3$$

Las expresiones anteriores se basan en la ec 1.4.1

- i) El vector que une los puntos A y B se obtendrá al restar del vector \underline{b} el vector \underline{a} , es decir

$$\underline{AB} = \underline{c} = \underline{b} - \underline{a} = (4-5)\underline{i}_1 + (15-2)\underline{i}_2 + (7+3)\underline{i}_3$$

$$\underline{c} = \underline{i}_1 + 13\underline{i}_2 + 10\underline{i}_3$$

iii) El tamaño de los vectores \underline{a} , \underline{b} y \underline{c} se obtendrá de acuerdo con las ecs 1.6.10 y 1.6.11 de la forma siguiente

$$\underline{a} \cdot \underline{a} = |\underline{a}|^2 = (5)(5) + (2)(2) + (-3)(-3) = 25 + 4 + 9 = 38$$

$$\underline{b} \cdot \underline{b} = |\underline{b}|^2 = (4)(4) + (15)(15) + (7)(7) = 16 + 225 + 49 = 290$$

$$\underline{c} \cdot \underline{c} = |\underline{c}|^2 = (-1)(-1) + (13)(13) + (10)(10) = 1 + 169 + 100 = 270$$

$$|\underline{a}| = \sqrt{38} = 6.16$$

$$|\underline{b}| = \sqrt{290} = 17.05$$

$$|\underline{c}| = \sqrt{270} = 16.45$$

iv) Los ángulos interiores del triángulo mostrado en la figura se calcularán de acuerdo con la ec 1.6.12 y serán:

a) El ángulo con vértice en el origen es el ángulo que forman los vectores \underline{a} y \underline{b}

$$\angle AOB = (\underline{a}, \underline{b})$$

$$\cos(\underline{a}, \underline{b}) = \frac{\underline{a} \cdot \underline{b}}{|\underline{a}| |\underline{b}|}$$

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = (5)(4) + (2)(15) + (-3)(7) = 20 + 30 - 21 = 29$$

$$\cos(\underline{a}, \underline{b}) = \frac{29}{\sqrt{38} \sqrt{290}} = \frac{29}{6.16 \times 17.05} = 0.276$$

$$\angle AOB = (\underline{a}, \underline{b}) = \cos^{-1}(0.276) = 74^\circ$$

b) El ángulo con vértice en el punto B es el que forman los vectores $-\underline{b}$ y $-\underline{c}$

$$\angle OBA = (-\underline{b}, -\underline{c})$$

$$\cos(-\underline{b}, -\underline{c}) = \frac{\underline{b} \cdot \underline{c}}{|\underline{b}| |\underline{c}|}$$

$$\underline{b} \cdot \underline{c} = (4)(-1) + (15)(13) + (7)(10) = -4 + 195 + 70 = 261$$

$$\cos(-\underline{b}, -\underline{c}) = \frac{261}{\sqrt{290} \sqrt{270}} = \frac{261}{17.05 \times 16.45} = 0.931$$

$$\angle OBA = (-\underline{b}, -\underline{c}) = \cos^{-1}(0.931) = 21^\circ 20'$$

c) El ángulo con vértice en el punto A es el que está formado por los vectores $-\underline{a}$ y \underline{c}

$$\angle OAB = (-\underline{a}, \underline{c})$$

$$\cos(-\underline{a}, \underline{c}) = -\frac{\underline{a} \cdot \underline{c}}{|\underline{a}| |\underline{c}|}$$

$$\underline{a} \cdot \underline{c} = (5)(-1) + (2)(13) + (-3)(10) = -5 + 26 - 30 = -9$$

$$\cos(-\underline{a}, \underline{c}) = \frac{9}{\sqrt{38} \sqrt{270}} = \frac{9}{6.16 \times 16.45} = 0.089$$

$$\angle O A B = (-\underline{a}, \underline{c}) = \cos^{-1}(0.089) = 84^{\circ}40'$$

Una forma de comprobar estos resultados consiste en utilizar el teorema que establece que la suma de los ángulos interiores de un triángulo igual a 180° . Así

$$A O B = 74^{\circ}00'$$

$$O B A = 21^{\circ}20'$$

$$O A B = 84^{\circ}40'$$

$$179^{\circ}60' = \angle A O B + \angle O B A + \angle O A B$$

- v) La distancia normal del punto O a la línea AB de la fig 1.6.2 se obtiene de acuerdo con las ideas mostradas en la fig 1.6.3 en donde se utiliza el hecho de estar contenido en un plano del triángulo en estudio. Así, la distan -

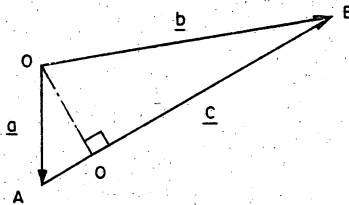


Fig. 1.6.3 Esquema auxiliar para el ejemplo 1.6.1.

cia que interesa es la que va del punto O al punto D y se podrá calcular con cualesquiera de los triángulos rectángulos formados.

- a) Utilizando el triángulo rectángulo $O A D$.

El lado AD es la proyección rectangular del vector $-a$ sobre el vector c y se podrá calcular con la operación producto escalar de acuerdo con la ec 1.6.1 quedando

$$|AD| = \text{Proy}(-\underline{a}) \text{ sobre } \underline{c} = |\underline{a}| \cos(-\underline{a}, \underline{c}) = -\frac{\underline{a} \cdot \underline{c}}{|\underline{c}|}$$

$$|AD| = \frac{-(-9)}{\sqrt{270}} = \frac{9}{\sqrt{270}}$$

por tratarse de un triángulo rectángulo y de acuerdo con el teorema de Pitagoras se deberá tener que

$$|OD| = \sqrt{|\underline{a}|^2 - |AD|^2} = \sqrt{38 - \frac{81}{270}} = \sqrt{\frac{10179}{270}}$$

- b) Utilizando el triángulo rectángulo $O B D$.

El lado DB es la proyección del vector b sobre el vector c y su valor resulta ser

$$|DB| = \text{Proy de } \underline{b} \text{ sobre } \underline{c} = b \cos(b, c) = \frac{\underline{b} \cdot \underline{c}}{|\underline{c}|}$$

$$|DB| = \frac{261}{\sqrt{270}}$$

Entonces el lado OD resultará ser

$$|OD| = \sqrt{|\underline{b}|^2 - |DB|^2} = \sqrt{290 - \frac{(261)^2}{270}} = \sqrt{\frac{10179}{270}}$$

que es igual al valor ya calculado.

1.7 Producto vectorial.

Definición 1.7.1. El producto vectorial de dos vectores \underline{a} y \underline{b} , representado simbólicamente por $\underline{a} \times \underline{b}$, se define como un vector con las características siguientes

- i) Magnitud = $|\underline{a} \times \underline{b}| = |\underline{a}| |\underline{b}| \text{sen}(\underline{a}, \underline{b})$
- ii) Dirección = Perpendicular al plano que forman los vectores \underline{a} y \underline{b}
- iii) Sentido = Es tal el grupo de los tres vectores \underline{a} , \underline{b} y $\underline{a} \times \underline{b}$ forman un sistema derecho simple y cuando se ordenen en dicho sentido.

Si a la dirección del vector $\underline{a} \times \underline{b}$ se le representa con el vector unitario \underline{n} , entonces la expresión del vector producto vectorial $\underline{a} \times \underline{b}$ estará dado por la ec 1.7.1 y la representación geométrica se muestra en la fig 1.7.1

$$\underline{a} \times \underline{b} = |\underline{a}| |\underline{b}| \text{sen}(\underline{a}, \underline{b}) \underline{n} \tag{1.7.1}$$

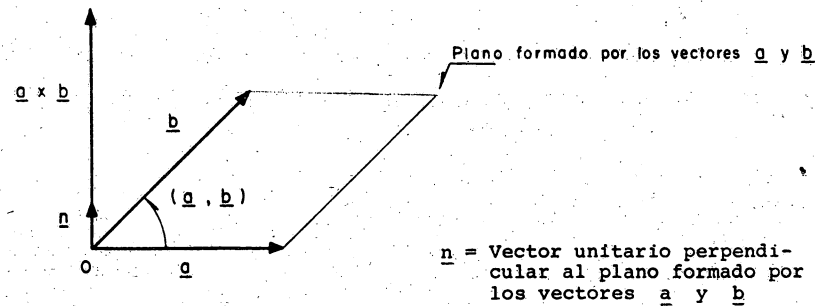


Fig 1.7.1 Ilustración geométrica del producto vectorial.

La representación geométrica de los términos que aparecen en la expresión para calcular la magnitud del vector $\underline{a} \times \underline{b}$ se indica en la fig 1.7.2. En dicha figura se puede observar

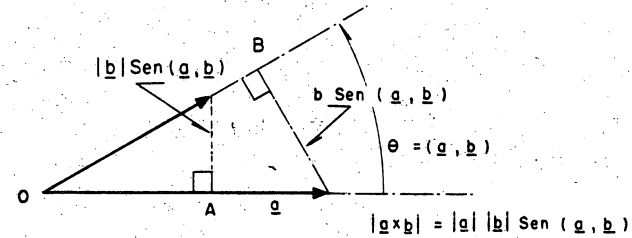


Fig 1.7.2. Elementos de la magnitud del producto vectorial $\underline{a} \times \underline{b}$

que la expresión $|\underline{a} \times \underline{b}|$ se puede escribir como

$$|\underline{a} \times \underline{b}| = |\underline{a}| (\text{Proyección ortogonal de } \underline{b} \text{ sobre la } \perp \text{ al vector } \underline{a}) \tag{1.7.1}$$

$$|\underline{a} \times \underline{b}| = |\underline{b}| (\text{Proyección ortogonal de } \underline{a} \text{ sobre la } \perp \text{ al vector } \underline{b}) \tag{1.7.2}$$

que es el producto de dos cantidades orientadas en direcciones ortogonales. De la definición de producto vectorial se pueden concluir lo siguiente

- i) $\underline{a} \times \underline{b} = \underline{0}$ si y solo si $\underline{a} = \underline{0}$, o $\underline{b} = \underline{0}$ o bien que $\text{sen}(\underline{a}, \underline{b}) = 0$. La última condición implica que los vectores \underline{a} y \underline{b} sean paralelos.
- ii) El producto vectorial es asociativo y distributivo.

$$(\underline{m} \underline{a}) \times (\underline{n} \underline{b}) = \underline{m} \underline{n} (\underline{a} \times \underline{b}) \quad \text{asociativo} \tag{1.7.3}$$

$$\underline{a} \times (\underline{b} + \underline{c}) = \underline{a} \times \underline{b} + \underline{a} \times \underline{c} \quad \text{distributivo} \quad (1.7.4)$$

iii) El producto vectorial no es conmutativo. Este hecho hace que al cambiar el orden de los multiplicandos se cambie únicamente el sentido del vector \underline{e} por lo tanto el del producto. Lo anterior conduce a la expresión siguiente

$$\underline{a} \times \underline{b} = -\underline{b} \times \underline{a} \quad (1.7.5)$$

iv) Los vectores base ortonormales \underline{i}_j satisfacen la expresión

$$\underline{i}_i \times \underline{i}_j = e_{ijk} \underline{i}_k \quad (1.7.6)$$

la demostración de la ec 1.7.6 se hace por sustitución directa obteniéndose

$$\underline{i}_1 \times \underline{i}_2 = e_{123} \underline{i}_3 = \underline{i}_3$$

$$\underline{i}_2 \times \underline{i}_3 = e_{231} \underline{i}_1 = \underline{i}_1$$

$$\underline{i}_3 \times \underline{i}_1 = e_{312} \underline{i}_2 = \underline{i}_2$$

$$\underline{i}_1 \times \underline{i}_1 = e_{11k} \underline{i}_k = \underline{0}$$

$$\underline{i}_2 \times \underline{i}_2 = e_{22k} \underline{i}_k = \underline{0}$$

$$\underline{i}_3 \times \underline{i}_3 = e_{33k} \underline{i}_k = \underline{0}$$

1.7.1 Producto vectorial en términos de las componentes

De acuerdo con la expresión de los vectores \underline{a} y \underline{b} en términos de sus componentes, expresadas como

$$\underline{a} = a_j \underline{i}_j$$

$$\underline{b} = b_k \underline{i}_k$$

El producto vectorial quedará

$$\underline{a} \times \underline{b} = (a_j \underline{i}_j) \times (b_k \underline{i}_k) = a_j b_k (\underline{i}_j \times \underline{i}_k)$$

al tomar en cuenta la ec 1.7.6, la ecuación anterior queda expresada como

$$\underline{a} \times \underline{b} = e_{ijk} a_j b_k \underline{i}_i \quad (1.7.7)$$

el desarrollo de la ecuación anterior se muestra a continuación

$$\underline{a} \times \underline{b} = e_{1jk} a_j b_k \underline{i}_1 + e_{2jk} a_j b_k \underline{i}_2 + e_{3jk} a_j b_k \underline{i}_3$$

$$\underline{a} \times \underline{b} = (e_{123} a_2 b_3 + e_{132} a_3 b_2) \underline{i}_1 + (e_{213} a_1 b_3 + e_{231} a_3 b_1) \underline{i}_2 + (e_{312} a_1 b_2 + e_{321} a_2 b_1) \underline{i}_3$$

$$\underline{a} \times \underline{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) \underline{i}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \underline{i}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \underline{i}_3 \quad (1.7.8)$$

La ec 1.7.8 corresponde al desarrollo del determinante siguiente

$$\underline{a} \times \underline{b} = \begin{vmatrix} \underline{i}_1 & \underline{i}_2 & \underline{i}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \underline{i}_1 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} \underline{i}_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \underline{i}_3 \quad (1.7.9)$$

Ejemplo 1.7.1. En el problema descrito en el ejemplo 1.6.1 calcule lo siguiente:

- i) La dirección normal al plano que pasa por los puntos O, A, B.
 ii) Igual al inciso v) del ejemplo 1.6.1.

La respuesta al inciso i) se puede obtener al calcular el producto escalar de dos vectores cualesquiera contenidos en el plano. Así

a) Usando los vectores \underline{a} y \underline{b} .

$$\underline{a} \times \underline{b} = \begin{vmatrix} \underline{i}_1 & \underline{i}_2 & \underline{i}_3 \\ 5 & 2 & -3 \\ 4 & 15 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 15 & 7 \end{vmatrix} \underline{i}_1 + \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} \underline{i}_2 + \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 15 \end{vmatrix} \underline{i}_3$$

$$\underline{a} \times \underline{b} = (14+45)\underline{i}_1 + (-12-35)\underline{i}_2 + (75-8)\underline{i}_3$$

$$\underline{a} \times \underline{b} = 59\underline{i}_1 - 47\underline{i}_2 + 67\underline{i}_3$$

Es práctica usual indicar las direcciones por vectores unitarios. Entonces la dirección del vector $\underline{a} \times \underline{b}$ se indicará por

$$\underline{n} = \frac{\underline{a} \times \underline{b}}{|\underline{a} \times \underline{b}|}$$

$$|\underline{a} \times \underline{b}| = \sqrt{(59)^2 + (-47)^2 + (67)^2} = \sqrt{10179}$$

$$\underline{n} = \frac{1}{\sqrt{10179}} (59\underline{i}_1 - 47\underline{i}_2 + 67\underline{i}_3)$$

b) empleando los vectores \underline{a} y \underline{c}

$$\underline{a} \times \underline{c} = \begin{vmatrix} \underline{i}_1 & \underline{i}_2 & \underline{i}_3 \\ 5 & 2 & -3 \\ -1 & 13 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 13 & 10 \end{vmatrix} \underline{i}_1 + \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 10 & -1 \end{vmatrix} \underline{i}_2 + \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 13 \end{vmatrix} \underline{i}_3$$

$$\underline{a} \times \underline{c} = (20+39)\underline{i}_1 + (3-50)\underline{i}_2 + (65+2)\underline{i}_3$$

$$\underline{a} \times \underline{c} = 59\underline{i}_1 - 47\underline{i}_2 + 67\underline{i}_3$$

$$\underline{n} = \frac{1}{\sqrt{10179}} (59\underline{i}_1 - 47\underline{i}_2 + 67\underline{i}_3)$$

c) utilizando los vectores \underline{b} y \underline{c}

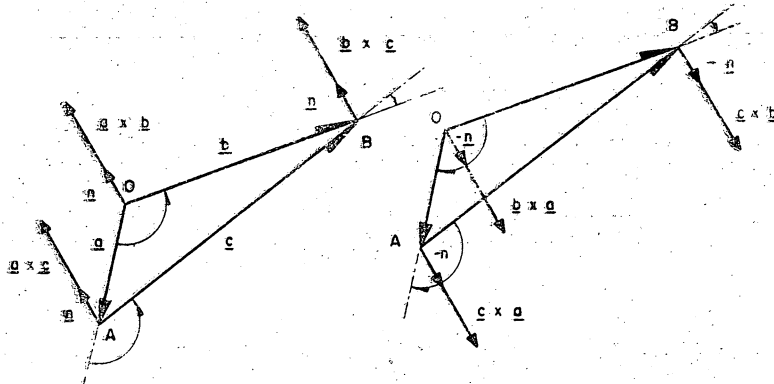
$$\underline{b} \times \underline{c} = \begin{vmatrix} \underline{i}_1 & \underline{i}_2 & \underline{i}_3 \\ 4 & 15 & 7 \\ -1 & 13 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 15 & 7 \\ 13 & 10 \end{vmatrix} \underline{i}_1 + \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 10 & -1 \end{vmatrix} \underline{i}_2 + \begin{vmatrix} 4 & 15 \\ -1 & 13 \end{vmatrix} \underline{i}_3$$

$$\underline{b} \times \underline{c} = (150-91)\underline{i}_1 + (-7-40)\underline{i}_2 + (52+15)\underline{i}_3$$

$$\underline{b} \times \underline{c} = 59\underline{i}_1 - 47\underline{i}_2 + 67\underline{i}_3$$

$$\underline{n} = \frac{1}{\sqrt{10179}} (59\underline{i}_1 - 47\underline{i}_2 + 67\underline{i}_3)$$

Se puede observar la igualdad entre los vectores unitarios calculados con cualquier par de vectores contenidos en el plano. También es de observarse que si se cambia el orden de los vectores se cambiaría también el sentido del vector unitario. Es decir un plano posee dos sentidos y en la práctica usual se habla de dos caras denominadas de diversas maneras. Por ejemplo: positiva y negativa, anterior y posterior, interna y externa, etc. La figura 1.7.5 muestra estas observaciones



- a) cara positiva, o cara posterior, o cara externa, etc. b) cara negativa o cara anterior, o cara interna, etc.

Fig. 1.7.3 Orientación de las caras de un plano.

La respuesta al inciso ii) se puede obtener tomando en cuenta la definición de la magnitud del producto vectorial. Usando la fig 1.6.2 se puede escribir que

$$|\underline{O D}| = \text{Proyección ortogonal de } \underline{a} \text{ sobre la } \perp \text{ al vector } \underline{c} = \frac{|\underline{a} \times \underline{c}|}{|\underline{c}|}$$

también se podrá expresar como

$$|\underline{O D}| = \text{Proyección ortogonal de } \underline{b} \text{ sobre la } \perp \text{ al vector } \underline{c} = \frac{|\underline{a} \times \underline{c}|}{|\underline{c}|}$$

De acuerdo con los resultados anteriores se tiene que

$$|\underline{a} \times \underline{c}| = |\underline{b} \times \underline{c}| = \sqrt{10179}$$

entonces

$$|\underline{O D}| = \frac{\sqrt{10179}}{\sqrt{270}} = \sqrt{\frac{10179}{270}}$$

que es el mismo resultado obtenido en el inciso 1.6 pero con la operación producto vectorial resulta mucho mas sencillo y rápido.

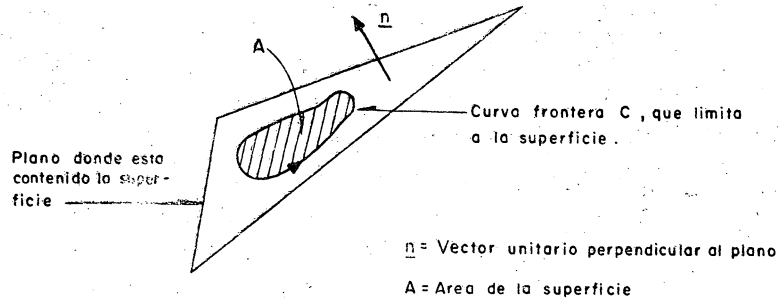
1.7.2 Representación vectorial de superficies planas.

La superficie contenida en un plano se podrá especificar por el área y por la orientación del plano que la contiene. Los elementos anteriores se pueden hacer identificar como los elementos de un vector de la forma siguiente.

- i) magnitud. Será el área A de la superficie
- ii) dirección. Perpendicular al plano donde esta contenida la superficie. Esta dirección se indicará por el vector unitario \underline{n} .
- iii) sentido. Lo del avance de un tornillo de rosca derecha cuando se hace girar en el sentido asociado a la curva frontera que limita a dicha superficie.

La fig 1.7.4 ilustra esta definición. Si se considera que el plano donde esta contenida la superficie es el mismo del ejemplo 1.6.1 y el área de la superficie es igual a A. El vector asociado será

$$\underline{A} = \frac{A}{\sqrt{10179}} (59\underline{i}_1 - 47\underline{i}_2 + 67\underline{i}_3)$$



$$\underline{A} = A \underline{n} = \text{vector superficie}$$

Fig 1.7.4 Representación vectorial de una superficie plana.

Una aplicación muy frecuente se presenta cuando se tiene un cuerpo cuyo volumen esta limitado por una superficie cerrada y desde luego no plana según se muestra en la fig 1.7.5. La representación en forma vectorial de la diferencial de área dA , aso-

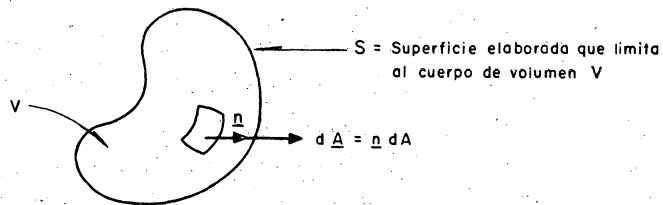


Fig 1.7.5 Diferencial de área para superficies alabeadas.

ciada a un punto P cualesquiera de la superficie frontera S será:

$$d\underline{A} = \underline{n} dA$$

donde \underline{n} es un vector unitario, perpendicular al plano tangente a la superficie S en el punto P, orientado de tal manera que salga de los puntos interiores encerrados por la superficie S.

1.8 Otros productos entre vectores.

Debido a su utilidad, es conveniente que ciertos productos entre vectores queden indicados en forma explícita. De los más usuales se cuentan a los productos entre tres vectores.

1.8.1 Triple producto escalar

El triple producto escalar de los vectores \underline{a} , \underline{b} y \underline{c} , indicado por $\underline{a} \times \underline{b} \cdot \underline{c}$ o bien $[\underline{a} \ \underline{b} \ \underline{c}]$, es un escalar con las siguientes características

- i) El valor numérico de $\underline{a} \times \underline{b} \cdot \underline{c}$ es igual al volumen del paralelepípedo cuyas aristas son los tres vectores \underline{a} , \underline{b} , \underline{c} . El signo será positivo si la terna de vectores está orientada como una base derecha, y será negativo si la orientación es izquierda. La fig 1.8.1 muestra el paralelepípedo.
- ii) El volumen será nulo si alguno de los vectores \underline{a} , \underline{b} y \underline{c} son nulos o bien \underline{a} es paralelo a \underline{b} o $\underline{a} \times \underline{b}$ es perpendicular a \underline{c} .

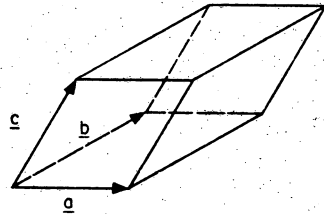


Fig 1.8.1 Triple producto escalar.

iii) Si los vectores \underline{a} , \underline{b} y \underline{c} están dados en términos de sus componentes rectangulares se tendrá que

$$\underline{a} = a_i \underline{i}_i$$

$$\underline{b} = b_j \underline{i}_j$$

$$\underline{c} = c_k \underline{i}_k$$

$$\underline{a} \times \underline{b} \cdot \underline{c} = (e_{lij} a_i b_j \underline{i}_l) \cdot (c_k \underline{i}_k) = e_{lij} a_i b_j c_k \delta_{lk}$$

$$\underline{a} \times \underline{b} \cdot \underline{c} = e_{kij} a_i b_j c_k = e_{ijk} a_i b_j c_k \quad (1.8.1)$$

La ec 1.8.1 es el desarrollo del siguiente determinante

$$\underline{a} \times \underline{b} \cdot \underline{c} = [\underline{a} \ \underline{b} \ \underline{c}] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \quad (1.8.2)$$

iv) El intercambio del punto por la cruz no altera al triple producto escalar. Es decir

$$\underline{a} \times \underline{b} \cdot \underline{c} = \underline{a} \cdot \underline{b} \times \underline{c} \quad (1.8.3)$$

1.8.2 Triple producto vectorial.

Se define así al vector \underline{d} definido como

$$\underline{d} = \underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) \quad (1.8.4)$$

El vector \underline{d} es perpendicular a \underline{a} y a $\underline{b} \times \underline{c}$ lo cual lo obliga a estar contenido en el plano formado por \underline{b} y \underline{c} . Al desarrollar la ec 1.8.4 se llega a obtener la siguiente expresión

$$\underline{d} = \underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) = (\underline{c} \cdot \underline{a}) \underline{b} - (\underline{b} \cdot \underline{a}) \underline{c} \quad (1.8.4)$$

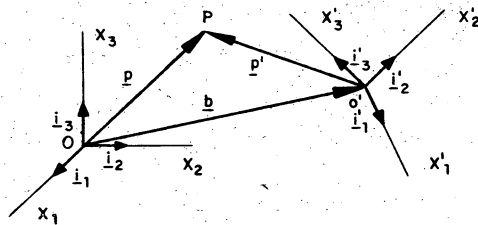
Es de esperarse la expresión siguiente para el triple producto vectorial

$$\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) \neq (\underline{a} \times \underline{b}) \times \underline{c} \quad (1.8.5)$$

1.9 Transformación de coordenadas debido a movimiento de cuerpo rígido de la referencia cartesiana.

Sea el sistema de referencia rectangular cuyos vectores base ortonormales son $\underline{i}_1, \underline{i}_2, \underline{i}_3$. Cuando a la referencia anterior se le desplaza y gira, la orientación de los vectores base ortonormales son por lo general distintos a la referencia original y se

les representará por $\underline{i}'_1 \underline{i}'_2 \underline{i}'_3$. La fig 1.9.1 muestra las referencias descritas. Entonces cualquier punto p se podrá ex-



- a) Referencia inicial, o Referencia original, o primera referencia
- b) Referencia final, o Referencia transformada, o segunda referencia

Fig 1.9.1 Rotación y traslación de referencias rectangulares.

presar en forma vectorial como

$$\underline{p} = x_{k-k} \underline{i}_{k-k} \quad \text{en el sistema original} \quad (1.9.1)$$

$$\underline{p} = x'_{m-m} \underline{i}'_{m-m} \quad \text{en el sistema transformado} \quad (1.9.2)$$

al vector de posición \underline{b} , del origen del sistema transformado se podrá expresar de acuerdo con

$$\underline{b} = b_{k-k} \underline{i}_{k-k} \quad \text{en el sistema original} \quad (1.9.3)$$

$$\underline{b} = b'_{k-k} \underline{i}'_{k-k} \quad \text{en el sistema transformado} \quad (1.9.4)$$

La relación vectorial entre las dos referencias se muestran en la fig 1.9.1 quedando expresadas como

$$= \underline{p}' + \underline{b} \quad (1.9.5)$$

$$\underline{i}_{-k} = x'_{m-m} \underline{i}'_{m-m} + b'_{m-m} \underline{i}'_{m-m} \quad (1.9.6)$$

ltiplicando escalarmente los términos de la ec 1.9.6 por el vec \underline{i}_{-k} se tendrá

$$\underline{i}_{-k} \cdot \underline{i}_{-k} = x'_{m-m} \underline{i}'_{m-m} \cdot \underline{i}_{-k} + b'_{m-m} \underline{i}'_{m-m} \cdot \underline{i}_{-k} \quad (1.9.6)$$

mo $\underline{i}_{-k} \cdot \underline{i}_{-k} = 1$ y además

$$\underline{i}_{-k} \cdot \underline{i}'_{m-m} = \cos(\underline{i}'_{m-m}, \underline{i}_{-k}) = \cos(\underline{i}_{-k}, \underline{i}'_{m-m}) = q_{mk} \quad (1.9.7)$$

e viene a ser los cosenos directores de los ejes de una referencia respecto a otra. Para diferenciar de que referencia se ata se hace uso de la tabla 1.9.1.

Tabla 1.9.1 Cosenos directores entre sistemas de referencia rectangulares.

		Referencia original		
		x_1	x_2	x_3
Referencia transformada	x'_1	q_{11}	q_{12}	q_{13}
	x'_2	q_{21}	q_{22}	q_{23}
	x'_3	q_{31}	q_{32}	q_{33}

La tabla anterior también puede representarse mediante la matriz siguiente

$$(q_{ij}) = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{bmatrix} \quad (1.9.8)$$

Entonces los renglones representan los cosenos directores de los ejes de la referencia transformada medidos respecto a la referencia original mientras que las columnas representan los cosenos directores de la referencia original medidos respecto a la referencia transformada.

Ec 1.9. 5 quedará

$$x_k = q_{mk} x'_m + q_{mk} b'_m \quad (1.9.9)$$

que permitirá conocer las componentes x_k referidas al sistema original siempre y cuando se conozcan

- i) Las componentes x'_m medidas en el sistema transformado.
- ii) Los cosenos directores q_{mk}
- iii) Las componentes b'_m medidas en el sistema transformado.

De la ec 1.9.5 se tiene que

$$p' = p - b \quad (1.9.10)$$

$$x'_{m-m} = x_k i_k - b_k i_k \quad (1.9.11)$$

multiplicando escalarmente los términos de la ec 1.9.11 por el vector i'_m se tendrá

$$x'_{m-m} i'_m = x_k i_k i'_m - b_k i_k i'_m \quad (1.9.12)$$

o bien

$$x'_m = q_{mk} x_k - q_{mk} b_k \quad (1.9.13)$$

La ecuación anterior permite conocer las componentes x'_m medidas en el sistema transformado siempre y cuando se conozcan los elementos siguientes

- i) Las componentes x_m medidas en el sistema original
- ii) Los cosenos directores q_{mk}
- iv) Las componentes b_m medidas en el sistema original.

Para el caso particular en que únicamente exista rotación en el sistema de referencia, es decir $b_k = 0$, las ecs 1.9.9 y 1.9.13 se reducen a

$$x_k = q_{mk} x'_m \quad (1.9.14)$$

$$x'_m = q_{mk} x_k \quad (1.9.15)$$

al sustituir la ec 1.9.15 en la ec 1.9.14 se obtiene que

$$x_k = q_{mk} q_{ml} x_l = \delta_{kl} x_l \quad (1.9.16)$$

lo cual implica la siguiente conclusión

$$q_{mk}^q q_{ml} = q_{km}^q q_{lm} = \delta_{kl} \quad (1.9.17)$$

Ejemplo 1.9.1 Si los cosenos directores entre un sistema de referencia original y un sistema de referencia transformado está dado por la siguiente matriz de transformación

$$[q_{ij}] = \begin{vmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/2 & -1/2 \end{vmatrix}$$

desarrolle los siguientes puntos

- i) Es realmente la matriz dada una matriz de cosenos directores entre referencias rectangulares?
- ii) En caso de serlo, calcule los mismos conceptos del ejemplo 1.6.1. en la referencia transformada.

Para contestar el inciso i) se hará uso de la ec 1.9.17 que establece las condiciones de ortonormalidad entre los cosenos d_i rectores.

$$q_{mk}^q q_{ml} = \delta_{kl} \quad (1.9.17)$$

$$\text{para } k = 1 \quad l = 1$$

$$q_{11}^q q_{11} + q_{21}^q q_{21} + q_{31}^q q_{31} = \delta_{11}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

$$\text{para } k = 1 \quad l = 2$$

$$q_{11}^q q_{12} + q_{21}^q q_{22} + q_{31}^q q_{32} = \delta_{12}$$

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + (0)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\text{para } k = 1 \quad l = 3$$

$$q_{11}^q q_{13} + q_{21}^q q_{23} + q_{31}^q q_{33} = \delta_{13}$$

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) + (0)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\text{para } k = 2 \quad l = 1$$

$$q_{12}^q q_{11} + q_{22}^q q_{21} + q_{32}^q q_{31} = \delta_{21}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(0) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$$

$$\text{para } k = 2 \quad l = 2$$

$$q_{12}^q q_{12} + q_{22}^q q_{22} + q_{32}^q q_{32} = \delta_{22}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

para $k = 2 \quad l = 3$

$$q_{12}q_{13} + q_{22}q_{23} + q_{32}q_{33} = \delta_{23}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$$

para $k = 3 \quad l = 1$

$$q_{13}q_{11} + q_{23}q_{21} + q_{33}q_{31} = \delta_{31}$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(0) + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$$

para $k = 3 \quad l = 2$

$$q_{13}q_{12} + q_{23}q_{22} + q_{33}q_{32} = \delta_{32}$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

para $k = 3 \quad l = 3$

$$q_{13}q_{13} + q_{23}q_{23} + q_{33}q_{33} = \delta_{33}$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) = 1$$

La ec 1.9.17 se puede escribir en forma matricial de la forma siguiente

$$[q_{ij}]^T [q_{ij}] = [\delta_{ij}] \quad (1.9.18)$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

El inciso ii) se puede llevar a cabo de la forma siguiente usando la ec 1.9.15.

$$x'_1 = q_{11}x_1 + q_{12}x_2 + q_{13}x_3$$

$$x'_2 = q_{21}x_1 + q_{22}x_2 + q_{23}x_3$$

$$x'_3 = q_{31}x_1 + q_{32}x_2 + q_{33}x_3$$

o bien

$$\underline{x}' = [q_{ij}] \underline{x} \quad (1.9.19)$$

a) transformación del vector de posición a

$$\underline{a}' = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 5(\sqrt{2}-2) \\ -2 \\ 5(\sqrt{2}+2) \end{bmatrix}$$

b) transformación del vector de posición \underline{b}

$$\underline{b}' = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 15 \\ 7 \end{bmatrix} = \frac{2}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 2(\sqrt{2}-1) \\ 11 \\ 2(\sqrt{2}+1) \end{bmatrix}$$

c) transformación del vector \underline{c}

$$\underline{c}' = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 13 \\ 10 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 3\sqrt{2}+2 \\ 46 \\ 3\sqrt{2}-2 \end{bmatrix}$$

obtención de las magnitudes de los vectores

$$\underline{a}' \cdot \underline{a}' = \frac{1}{8} (25(\sqrt{2}-2)^2 + (-2)^2 + 25(\sqrt{2}+2)^2) = 38$$

$$\underline{b}' \cdot \underline{b}' = 2 (4(\sqrt{2}-1)^2 + 121 + 4(\sqrt{2}+1)^2) = 290$$

$$\underline{c}' \cdot \underline{c}' = \frac{1}{8} [(3\sqrt{2}+2)^2 + (46)^2 + (3\sqrt{2}-2)^2] = 270$$

Las operaciones anteriores se realizaron con el fin de ejemplificar en forma objetiva el hecho de que los conceptos que se han estado manejando no dependen de la posición del observador, es decir, de la diferencia utilizada para cuantificarla y por lo tanto serán las mismas independientes de la referencia utilizada.

1.10 Funciones vectoriales y derivadas.

Es de esperarse que el estudiante conozca los conceptos relativos al cálculo diferencial aplicado a funciones escalares que son funciones de otras escalares. En este inciso se presentará brevemente las extensiones de tales conceptos a funciones que involucren a vectores y escalares. Las variables que usualmente se considerarán serán las que determinan la posición de un punto en una referencia y se indicarán por el vector de posición \underline{x} y la variable tiempo t , que es una escalar cuyos valores están definidos en un intervalo finito.

Definición 1.10.1. Si para cada valor de la variable escalar t , le corresponde un valor al vector \underline{u} entonces el vector \underline{u} es función de la escalar t y se indica como

$$\underline{u} = \underline{u}(t)$$

Definición 1.10.2. Si para cada valor del vector \underline{x} le corresponde un valor a la escalar ϕ , entonces la escalar ϕ

es función del vector \underline{x} y se escribe

$$\phi = \phi(\underline{x}) \quad (1.10.2)$$

Definición 1.10.3. Si para cada valor del vector \underline{x} le corresponde un valor al vector \underline{u} , entonces \underline{u} es función de \underline{x} y se escribe como

$$\underline{u} = \underline{u}(\underline{x}) \quad (1.10.3)$$

Las relaciones funcionales expresadas en las ecs 1.10.1 a 1.10.3 son formas especiales de las relaciones mas generales indicadas por

$$\phi = \phi(\underline{x}, t) \quad (1.10.4)$$

$$\underline{u} = \underline{u}(\underline{x}, t) \quad (1.10.5)$$

como \underline{x} es el vector y t el tiempo se dice que ϕ es una *escalar función de posición y del tiempo* mientras que \underline{u} es un *vector función de posición y del tiempo*. En términos de las componentes ϕ y \underline{u} se podrán escribir de la forma siguiente tomando en cuenta que las componentes de \underline{x} son (x_1, x_2, x_3) . Entonces

$$\phi = \phi(\underline{x}, t) = \phi(x_1, x_2, x_3, t) \quad (1.10.6a)$$

$$\underline{u} = \underline{u}(\underline{x}, t) = u_1(\underline{x}, t)\mathbf{i}_1 + u_2(\underline{x}, t)\mathbf{i}_2 + u_3(\underline{x}, t)\mathbf{i}_3 \quad (1.16.5b)$$

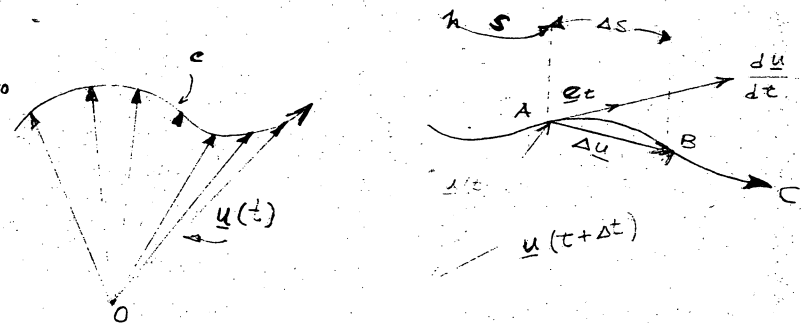
donde

$$u_1(\underline{x}, t) = u_1(x_1, x_2, x_3, t) \quad (1.10.6c)$$

$$u_2(\underline{x}, t) = u_2(x_1, x_2, x_3, t) \quad (1.10.6d)$$

$$u_3(\underline{x}, t) = u_3(x_1, x_2, x_3, t) \quad (1.10.6e)$$

Definición 1.10.4. Una función de posición escalar o vectorial asigna a cada punto \underline{x} en un tiempo t , un valor definido de una escalar o un vector. A todos los puntos de la región especificada junto con sus correspondientes valores de las cantidades escalar o vectorial reciben el nombre de campo. Si se trata de funciones escalares se tiene un campo escalar y si se trata de funciones vectoriales se tiene un campo vectorial. La fig 1.10.1 muestra la variación del vector \underline{u} respecto a t . El extremo de \underline{u} define la curva C . Con los elementos mostrados en la fig 1.10.1 se puede definir la



a) Curva C trazada por $\underline{u}(t)$

Fig 1.10.1 Ilustración para la derivada de $\underline{u}(t)$.

La derivada del vector $\underline{u}(t)$ de la forma siguiente

$$\begin{aligned} \frac{d\underline{u}}{dt} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Delta \underline{u}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\underline{A} \cdot \underline{B}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\underline{A} \cdot \underline{B}}{\Delta S} \frac{\Delta S}{\Delta t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\underline{A} \cdot \underline{B}}{\Delta S} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} \end{aligned} \quad (1.10.7)$$

$$\text{como } \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt} \quad (1.10.8)$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\underline{A} \cdot \underline{B}}{\Delta S} = \underline{e}_t \quad (1.10.9)$$

donde ΔS es la magnitud del arco sobre la curva C y que va del punto A al punto B . \underline{e}_t es un vector unitario con dirección tangente a la curva en el punto A y sentido el correspondiente a moverse del punto A al punto B .

Sustituyendo las ecs 1.10.8 y 1.10.9 en la ec 1.10.7 se obtiene la expresion

$$\frac{d\underline{u}}{dt} = \frac{dS}{dt} \underline{e}_t \quad (1.10.10)$$

Aplicando la definición de derivada se puede demostrar las expresiones siguientes

$$\frac{d}{dt} (\lambda \underline{u}) = \lambda \frac{d\underline{u}}{dt} + \frac{d\lambda}{dt} \underline{u} \quad (1.10.11)$$

$$\frac{d}{dt} (\underline{u} + \underline{v}) = \frac{d\underline{u}}{dt} + \frac{d\underline{v}}{dt} \quad (1.10.12)$$

$$\frac{d}{dt} (\underline{u} \cdot \underline{v}) = \frac{d\underline{u}}{dt} \cdot \underline{v} + \underline{u} \cdot \frac{d\underline{v}}{dt} \quad (1.10.13)$$

$$\frac{d}{dt} (\underline{u} \times \underline{v}) = \frac{d\underline{u}}{dt} \times \underline{v} + \underline{u} \times \frac{d\underline{v}}{dt} \quad (1.10.14)$$

donde λ es una función escalar.

En caso de que el vector \underline{u} esté dado en términos de sus componentes se tendrá que

$$\frac{d}{dt} \underline{u} = \frac{d}{dt} u_k \underline{i}_k = \frac{du_k}{dt} \underline{i}_k + u_k \frac{d\underline{i}_k}{dt}$$

puesto que los vectores \underline{i}_k base son vectores fijos, la ec anterior se indica como

$$\frac{d\underline{u}}{dt} = \frac{du_k}{dt} \underline{i}_k = \frac{du_1}{dt} \underline{i}_1 + \frac{du_2}{dt} \underline{i}_2 + \frac{du_3}{dt} \underline{i}_3 \quad (1.10.15)$$

Para calcular la derivada de una función escalar ϕ función del vector de posición \underline{x} se hará uso de los elementos mostrados en la fig 1.10.2 y de la

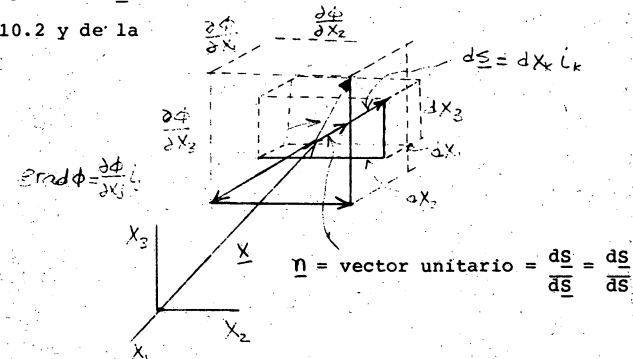


Fig 1.10.2 Ilustración para la derivada de $\phi(\underline{x})$.

ec 1.6.6a que indica a la función ϕ en términos de los componentes del vector \underline{x} , es decir

$$\phi = \phi(x_1, x_2, x_3) \quad (1.10.15)$$

Entonces la diferencial $d\phi$ quedará expresada como

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \phi}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial \phi}{\partial x_3} dx_3 = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_j} i_j \right) \cdot (dx_k i_k) \quad (1.10.16)$$

En la ecuación anterior la diferencial $d\phi$ quedó expresada en términos de un producto escalar de los vectores

$$\text{grad } \phi = \text{gradiente de } \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x_j} i_j \quad (1.10.17)$$

$$d\underline{s} = \text{diferencial del vector posición} = dx_k i_k \quad (1.10.17)$$

El vector $d\underline{s}$ indica la dirección en que se calcula la diferencial $d\phi$ y se puede expresar en términos de una dirección unitaria de acuerdo con la expresión

$$d\underline{s} = |d\underline{s}| \underline{n} = dS \underline{n} \quad (1.10.18)$$

sustituyendo la ec 1.10.18 en la ec 1.10.16 y dividiendo ambos miembros entre dS , se obtiene la derivada de la función ϕ respecto a dS .

$$\frac{d\phi}{dS} = (\text{grad } \phi) \cdot \frac{d\underline{s}}{dS} \underline{n} = \text{grad } \phi \cdot \underline{n} \quad (1.10.19)$$

De acuerdo con la definición de producto escalar se tendrá que la ec 1.10.19 se puede expresar como

$$\frac{d\phi}{dS} = |\text{grad } \phi| |\underline{n}| \cos(\text{grad } \phi, \underline{n}) = |\text{grad } \phi| \cos(\text{grad } \phi, \underline{n}) \quad (1.10.19a)$$

El valor máximo de la ecuación anterior se presenta cuando coseno del ángulo que forman el vector $\text{grad } \phi$ y el vector unitario \underline{n} vale uno es decir

$$\left(\frac{d\phi}{dS} \right)_{\text{max}} = |\text{grad } \phi| \quad (1.10.20)$$

La ecuación anterior permite interpretar al vector gradiente de ϕ como un vector de las siguientes características

$$\text{grad } \phi = \begin{cases} \text{Magnitud} = |\text{grad } \phi| = \left(\frac{\partial \phi}{\partial S} \right)_{\text{max}} \\ \text{dirección y sentido} = \text{Quedan especificadas a través de sus componentes indicadas en la ec 1.10.17.} \end{cases}$$

Definición 1.10.5 Al operador diferencial vectorial cuya expresión en términos de los componentes cartesianas está dado por la expresión siguiente

$$\underline{\nabla} = i_k \frac{\partial}{\partial x_k} = i_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + i_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + i_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \quad (1.10.21)$$

se le conoce con el nombre de nábla o del y se representa con el símbolo $\underline{\nabla}$

El vector $\text{grad } \phi$ se puede escribir usando el operador nábla mediante

$$\text{grad } \phi = \underline{\nabla} \phi \quad (1.10.21)$$

Puesto que nábla es un operador vectorial, entonces los operadores $\underline{\nabla}$ y $\underline{\nabla} \times$ se pueden asociar a cualquier campo vectorial lográndose las definiciones siguientes

Definición 1.10.6. La divergencia de un campo vectorial \underline{u} es una cantidad escalar y se define de acuerdo con la operación siguiente

$$\text{div } \underline{a} = \underline{\nabla} \cdot \underline{u} = \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \quad (1.10.22)$$

Definición 1.10.7. El rotacional de un campo vectorial \underline{u} es una cantidad vectorial definida de acuerdo con la operación siguiente:

$$\text{rot } \underline{u} = \text{curl } \underline{u} = \nabla \times \underline{u} = e_{ijk} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} e_i \quad (1.10.23)$$

Definición 1.10.8. El operador de Laplace o Laplaciano es un operador diferencial escalar de segundo orden definido mediante la expresión siguiente:

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \quad (1.10.24)$$

La combinación del operador nabla da lugar a expresiones como las mostradas a continuación:

$$\nabla \cdot \nabla \phi = \text{div (grad } \phi) \quad (1.10.25)$$

$$\nabla \times \nabla \phi = \text{rot (grad } \phi) \quad (1.10.26)$$

$$\nabla (\nabla \cdot \underline{u}) = \text{grad (div } \underline{u}) \quad (1.10.27)$$

$$\nabla \cdot \nabla \times \underline{u} = \text{div (rot } \underline{u}) \quad (1.10.28)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \underline{u}) = \text{rot (rot } \underline{u}) \quad (1.10.29)$$

1.11 Teoremas integrales

1.11. Definiciones y teoremas integrales.

En el inciso anterior se definieron en forma diferencial los conceptos de gradiente, divergencia y rotacional. En este inciso corresponde explicándolos en forma integral y enuncian los teoremas integrales resultantes.

Definición 1.11.1. Otra forma de definir al vector gradiente de un campo escalar $\phi(\underline{x})$ se hará de acuerdo con la expresión siguiente:

$$\text{grad } \phi = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_{\Delta S} \phi \underline{n} \, da \quad (1.11.1)$$

donde cada uno de los términos que aparece en la ecuación anterior se muestran en la figura 1.11.1 que se presenta a un punto P conteniendo dentro de una superficie cerrada ΔS en cuyos puntos se define una diferencial de superficie en forma vectorial, $\underline{n} da$ orientada de adentro hacia afuera.

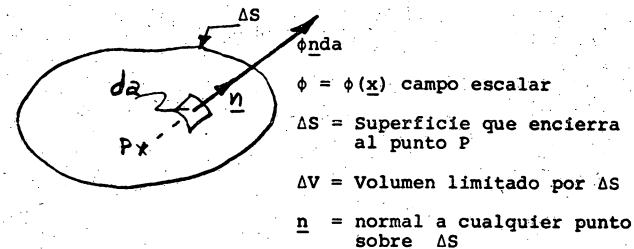


Fig 1.11.1 Elementos para la definición integral de un gradiente

Definición 1.11.2 Sea P un punto del campo vectorial $\underline{u} = \underline{u}(\underline{x})$ y los elementos mostrados en la fig 1.11.2. Entonces el flujo neto en el punto P del campo \underline{u} por *unidad* de volumen de la región que la encierra es la divergencia del campo \underline{u} .

$$\text{div } \underline{u} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_{\Delta S} \underline{u} \cdot \underline{n} \, da \quad (1.11.2)$$

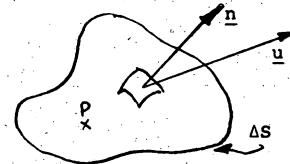


fig 1.11.2 Elementos para la definición integral de divergencia

Definición 1.11.3 Usando los elementos de la fig 1.11.2 se define al rotacional de un campo vectorial de acuerdo con la expresión siguiente

$$\text{rot } \underline{u} = - \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta v} \oint \underline{u} \times \underline{n} \, da = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta v} \oint \underline{n} \times \underline{u} \, da \quad (1.11.3)$$

Definición 1.11.4 Las componentes del rotacional de un campo $\underline{u} = \underline{u}(\underline{x})_C$ en términos de su circulación alrededor de una curva contenida en el plano con normal \underline{n} esta dada por la ecuación

$$\underline{n} \cdot \text{rot } \underline{u} = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta a} \oint_{C_n} \underline{u} \cdot \underline{n}_s \, ds = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta a} \oint \underline{u} \cdot d\underline{s} \quad (1.11.4)$$

donde los elementos de la ec 1.11.4 se muestran en la fig 1.11.4 y la circulación se define como la integral siguiente

$$\text{circulación de } \underline{u} = \oint_{C_n} \underline{u} \cdot \underline{n}_s \, ds \quad (1.11.5)$$

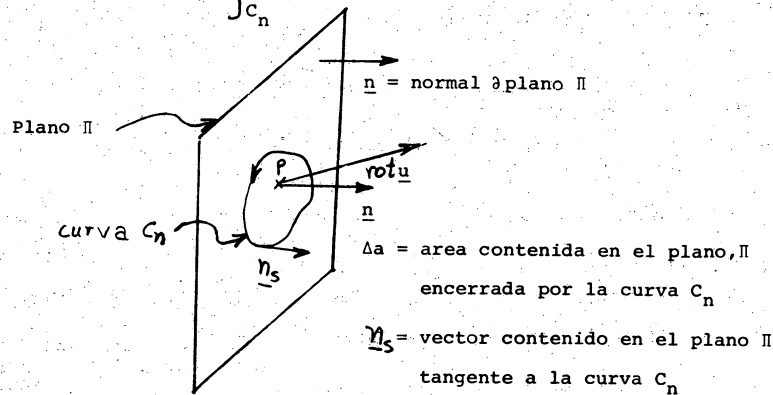


fig 1.11.3 Componente de un rotacional en términos de la circulación.

Las ecs 1.11.1 a 1.11.4 se pueden poner en forma diferencial al tomar el límite quedando

$$dV \text{ grad } \phi = \oint_{\Delta S} \phi \, \underline{n} \, da \quad (1.11.6)$$

$$dV \text{ div } \underline{u} = \oint_{\Delta S} \underline{u} \cdot \underline{n} \, da \quad (1.11.7)$$

$$dV \text{ rot } \underline{u} = - \oint_{\Delta S} \underline{u} \times \underline{n} \, da \quad (1.11.8)$$

$$\underline{n} \cdot \text{rot } \underline{u} = \oint_{C_n} \underline{u} \cdot d\underline{s} \quad (1.11.9)$$

Las ecs 1.11.6 a 1.11.9 son la base para la demostración de los teoremas integrales siguientes en donde V es el Volumen limitado por la superficie S .

Teorema 1.11.1 Teorema del gradiente

$$\oint_S \phi \, \underline{n} \, da = \oint_V \text{grad } \phi \, dV \quad (1.11.10)$$

Teorema 1.11.2 Teorema de la divergencia o Teorema de Gauss

$$\oint_S \underline{u} \cdot \underline{n} \, da = \oint_V \text{div } \underline{u} \, dV \quad (1.11.11)$$

Teorema 1.11.3 Teorema del rotacional

$$- \oint_S \underline{u} \times \underline{n} \, da = \oint_V \text{rot } \underline{u} \, dV \quad (1.11.12)$$

Teorema 1.11.4 Teorema de Stokes (ver fig 1.11.4)

$$\oint_{C_n} \underline{u} \cdot d\underline{s} = \int_S \text{rot } \underline{u} \cdot \underline{n} \, da \quad (1.11.13)$$

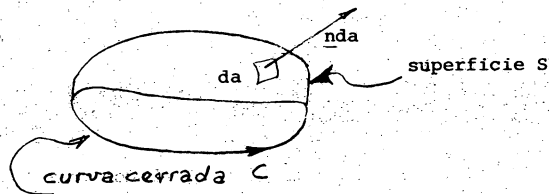


fig 1.11.4 Elementos del teorema de Stokes

1.12 Leyes de transformación de los tensores cartesianos

En los temas de este inciso se considerarán dos sistemas de referencia rectangulares, uno será el original con coordenadas x_k y el otro será el transformado con coordenadas x'_m . Los cosenos directores de un sistema respecto al otro serán q_{mk} .

Definición 1.12.1 Un tensor cartesiano general es un conjunto de números caracterizados por un determinado número de índices asociados a los ejes de un sistema de referencia cartesiano. Dicho conjunto de números se debe de transformar de acuerdo con la expresión siguiente que es la ley de transformación asociada al tensor de orden n.

$$t'_{j_1 j_2 \dots j_n} = q_{i_1 j_1} q_{i_2 j_2} \dots q_{i_n j_n} t_{i_1 i_2 \dots i_n} \quad (1.12.1)$$

en forma recíproca se deberá tener que

$$t_{i_1 i_2 \dots i_n} = q_{i_1 j_1} q_{i_2 j_2} \dots q_{i_n j_n} t'_{j_1 j_2 \dots j_n} \quad (1.12.2)$$

Lo anterior enfatiza el hecho de que un tensor no se caracteriza simplemente por el número de componentes y en asociación a cierto número de índices. La característica esencial consiste en que los índices se refieran estrictamente a un sistema

coordinado y que las componentes se transforman de acuerdo con una ley en particular.

En base a la definición general indicada por las ecs 1.12.1 y 1.12.2 se presentará las formas particulares de algunos tensores cartesianos.

Definición 1.12.1 Escalares o tensores de orden cero. Son aquellas cantidades que conservan su valor en cualquier sistema de referencia ya que para su transformación no se requiere conocer los cosenos directores q_{mk} .

La temperatura en un ejemplo de escalar y si $\phi = \phi(x)$ es un campo escalar se deberá tener que

$$\phi(x'_1, x'_2, x'_3) = \phi(x_1, x_2, x_3) \quad (1.12.3)$$

Definición 1.12.3 Vectores o tensores de orden uno. Son las cantidades con un subíndice y se transformarán de acuerdo con las expresiones

$$u'_j = q_{ij} u_i \quad (1.12.4)$$

$$u_i = q_{ij} u'_j \quad (1.12.5)$$

El gradiente de la escalar ϕ es un tensor de orden uno ya que sus componentes $\partial\phi/\partial x_i$ se transforman de acuerdo con la expresión siguiente

$$\frac{\partial\phi}{\partial x'_j} = \frac{\partial\phi}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial x'_j} = \frac{\partial\phi}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x'_j} (q_{ij} x'_j) = q_{ij} \frac{\partial\phi}{\partial x_i}$$

Definición 1.12.4 Tensores de segundo orden o Diádicas. Son cantidades con dos subíndices cuya ley de transformación está dada por las expresiones

$$t'_{j'l} = q_{ij} q_{kl} t_{ik} \quad (1.12.6)$$

$$t_{ik} = q_{ij} q_{kl} t'_{jl}$$

Ejemplo 1.12.1. Demuestre que la delta de Kronecker es un tensor cartesiano de segundo orden.

En caso de serlo deberá satisfacer la ec 1.12.6, es decir

$$\delta'_{je} = a_{ij} a_{ke} \delta_{ik} = a_{ij} a_{ie}$$

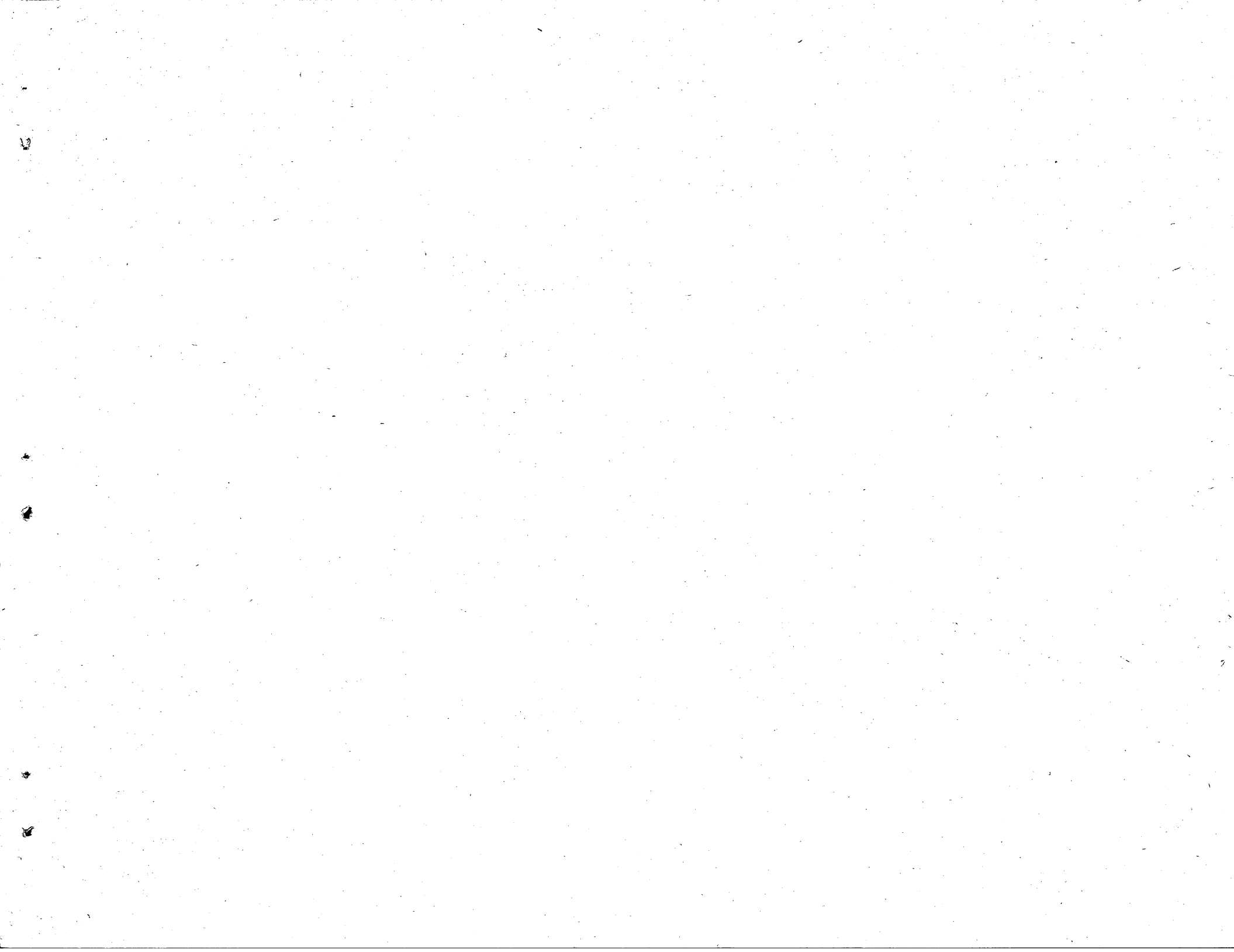
La ec anterior es idéntica a la ec 1.9.17 y por lo tanto se cumple la demostración.

Otro ejemplo lo constituye $\partial u_i / \partial x_k$ y se demuestra a continuación

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'_j}{\partial x'_e} &= \frac{\partial}{\partial x'_e} (a_{ij} u_i) = a_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x'_e} = a_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial x'_e} \\ &= a_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial (a_{ke} x'_e)}{\partial x'_e} = a_{ij} a_{ke} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \end{aligned}$$

A medida que se vaya desarrollando el curso irán apareciendo otros tensores de segundo orden.

1.13 Problemas



MECANICA DEL MEDIO CONTINUO

Notas preliminares para un primer curso.

Ramón Cervantes Beltrán *

Victor Porras Silva

* Profesores Investigadores, Facultad de Ingeniería, UNAM.

CAPITULO 2

DEFORMACION

2.1. Introducción

Es un hecho experimental el que todos los cuerpos construidos con alguna substancia natural/sintética cuando se les somete a cargas externas sufren cambios de forma y se mueven. Es el propósito de este capítulo desarrollar las bases necesarias que permitan medir el movimiento y los cambios geométricos de los puntos de un medio continuo sin importar el tipo de substancia y las fuerzas en cuestión.

El desarrollo de este capítulo conducirá a la obtención de un modelo matemático que exprese las características físicas del problema. En un principio se manejarán fenómenos de la física y su representación matemática con sus respectivas manipulaciones para construir el modelo.

La observación, muestra a un cuerpo que posee un cierto volumen con una forma determinada. Desde el punto de vista matemático al cuerpo anterior se le identificará por un conjunto de

puntos denominados puntos materiales que forman un volumen \mathcal{V} limitado por una superficie cerrada \mathcal{S} . Es conveniente hacer énfasis en la existencia de puntos interiores y de puntos frontera que forman la superficie \mathcal{S} . El conjunto de puntos materiales interiores y de frontera forman una región B y se expresará con la ecuación

$$\text{Región } B = B = \mathcal{V} + \mathcal{S} \quad (2.1.1.)$$

En lo que sigue el cuerpo queda representado por la ec 2.1.1. y el movimiento y el cambio de forma de dicha región representará al movimiento y al cambio de forma del cuerpo.

2.2 Sistemas de Referencia.

La localización de los puntos de la región B se hará en base a un sistema de referencia cartesiano.

Definición 2.2.1. A la posición que guardan todos los puntos materiales en un instante dado se llama configuración.

Entonces, la región en un instante dado está dada por la configuración correspondiente.

El movimiento y el cambio de forma ^{que} sufre un cuerpo de un tiempo t_1 a otro tiempo t_n se podrá conocer si se conocen las configuraciones correspondientes a cualquier tiempo t comprendido entre t_1 y t_n es decir, $t_1 \leq t \leq t_n$. La fig 2.2.1 muestra en forma esquemática el movimiento y cambio de forma

del cuerpo B en el intervalo $t_1 \leq t \leq t_n$.

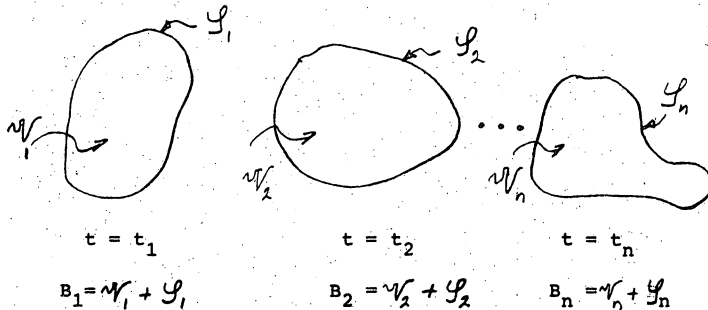


fig 2.2.1 Esquema para el movimiento y cambio de forma del cuerpo B.

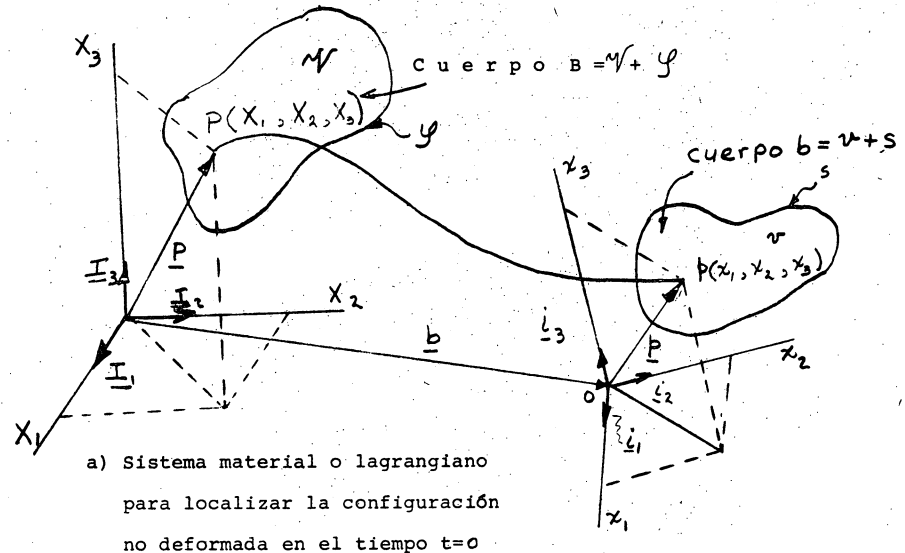
Si se conocen las leyes que permitan pasar de la configuración B a la configuración B₂, el proceso se repetiría con las configuraciones subsecuentes hasta llegar a la configuración final B_n. En este capítulo únicamente se desarrollarán las leyes que relacionan a dos configuraciones sucesivas. A la configuración primera se le llamará configuración no deformada y a la sucesiva se le llamará configuración deformada.

A los puntos que constituyen la configuración no deformada se denominan puntos materiales y su localización se hará mediante un sistema de referencia cartesiano denominado material o Lagrangiano. Todas las variables medidas en el sistema lagrangiano se representarán con letras mayúsculas.

A los puntos que constituyen la configuración deformada se denominan puntos espaciales y su localización se hará con otro sistema de referencia cartesiano denominado sistema espacial o euleriano.

Así mismo la representación de las cantidades en este sistema

se hará mediante letras minúsculas. La fig 2.2.2 muestra las definiciones anteriores.



a) Sistema material o lagrangiano para localizar la configuración no deformada en el tiempo t=0

b) Sistema espacial o euleriano para localizar la configuración deformada en el tiempo t = t

Fig 2.2.2 Sistemas de referencia en dos configuraciones sucesivas.

De acuerdo con la terminología anterior se podrá definir a la deformación y al movimiento como el transporte de los puntos espaciales en un tiempo t. La expresión matemática de lo anterior será

$$x_k = x_k (X_1, X_2, X_3, t) = x_k (X_k, t) \quad (2.2.1)$$

la expresión inversa de lo anterior será

$$x_k = X_k(x_1, x_2, x_3, t) = X_k(x_k, t) \quad (2.2.2.)$$

en notación vectorial simbólica las ecs. quedarán expresadas

como

$$\begin{aligned} \underline{x} &= \underline{x}(X, t) & \underline{X} &= \underline{X}(x, t) \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

La ec 2.2.3a. representa un mapeo de puntos de la región B a la región b y la ec 2.2.3b mapea puntos de la región b a la región B. En lo que sigue se supondrá que el mapeo indicado en las ecs. 2.2.3 es monovaluado y las derivadas parciales respecto a sus argumentos son continuas hasta el orden deseado. Además se supondrá que la ec 2.2.1 es la inversa única de la ec 2.2.2. y viceversa.

La hipótesis anterior se conoce como el axioma de continuidad en la teoría de medios continuos y expresa el hecho ^{de} que la materia no se destruye ni se genera y además es impenetrable. Lo anterior es equivalente a asegurar que una región de volumen finito no puede deformarse en otra región con volumen nulo o volumen infinito y que dos o más puntos ^{de la configuración} no deformada no pueden estar representados por uno solo en la región deformada.

El axioma de continuidad se asegura con el teorema de la función implícita y se anuncia a continuación.

Teorema 2.2.1 Teorema de la función implícita. Si para un tiempo t las funciones $x_k(X_k, t)$

- i) Son continuas con derivadas parciales de primer orden continuas en una vecindad $|X_k' - X_k| < \Delta$, del punto P

- ii) El jacobiano j de la transformación en la misma vecindad no se anule, es decir

$$j = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (2.2.4)$$

entonces existe una inversa única dada por la ec 2.2.2 en una vecindad $|x_k' - x_k| < \delta$ del punto p en el mismo tiempo t.

Ejemplo 2.2.1 La descripción euleriana del movimiento de un cuerpo dada por

$$x_1 = (2A X_1 + B)^{1/2} \quad (2.2.5a)$$

$$x_2 = CX_2 \quad (2.2.5b)$$

$$x_3 = DX_3 \quad (2.2.5c)$$

donde las coordenadas X_k y x_k son cartesianas y A, B, C, y D son constantes. Se pide calcular, en caso de ser posible, las ecuaciones lagrangianas del movimiento.

De acuerdo con el teorema de la función implícita si dada la ec

$$x_k = x_k(X_k, t) \quad (2.2.1)$$

para que exista la ecuación inversa

$$X_k = X_k(x_k, t) \quad (2.2.2)$$

se deberán cumplir los requisitos especificados en dicho teorema y son

a) Que las funciones x_k sean monovaluadas y continuas en las vecindades de los puntos.

Por inspección se puede asegurar que las ecs. 2.2.5 son monovaluadas siempre y cuando en la ec 2.2. 5a se especifique únicamente un solo valor ya sea el positivo o el negativo del radical y continuas en cualquier vecindad seleccionada.

b) Las primeras derivadas parciales de las funciones x_k también deben ser continuas.

El cálculo de los elementos del gradiente de deformación $x_{k,k}$ quedará

$$\frac{\partial x_1}{\partial X_1} = \frac{A}{\sqrt{2AX_1+B}} = \frac{A}{x_1} \quad \frac{\partial x_1}{\partial X_2} = 0 \quad \frac{\partial x_1}{\partial X_3} = 0$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial X_1} = 0 \quad \frac{\partial x_2}{\partial X_2} = C \quad \frac{\partial x_2}{\partial X_3} = 0$$

$$\frac{\partial x_3}{\partial X_1} = 0 \quad \frac{\partial x_3}{\partial X_2} = 0 \quad \frac{\partial x_3}{\partial X_3} = D$$

También por inspección se concluye que las primeras derivadas

parciales $\frac{\partial x_k}{\partial X_k}$, son continuas

b) El jacobiano de la transformación debe ser distinto de cero en la misma vecindad

$$j = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} A(2AX_1+B)^{-1/2} & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & D \end{vmatrix}$$

$$j = ACD (2AX_1 + B)^{-1/2}$$

para que el jacobiano de la transformación sea distinto de cero se requiere que

$$A \neq 0, \quad C \neq 0 \quad \text{y} \quad D \neq 0$$

De acuerdo con lo anterior se puede asegurar la existencia de las ecuaciones Lagrangianas del movimiento y resultarán ser

i) De la ec 2.2.5a se tiene que $X_1 = \frac{1}{2A}(x_1^2 - B)$

ii) De la ec 2.2.5b se tiene que $X_2 = x_2 / C$

iii) De la ec 2.2.5c se tiene que $X_3 = x_3 / D$

Entonces las ecuaciones anteriores definen el movimiento lagrangiano del cuerpo.

De acuerdo con la fig 2.2.2 se podrán escribir los vectores de posición de cualquier punto ya sea material o bien espacial mediante las expresiones

$$\underline{p} = x_k \underline{i}_k \quad \text{Vector de posición, punto material} \quad (2.2.6a)$$

$$\underline{e} = x_k \underline{i}_k \quad \text{Vector de posición, punto espacial} \quad (2.2.6b)$$

los vectores infinitesimales $d\underline{p}$ y $d\underline{e}$ se podrán obtener de las ecs 2.2.6 de la forma siguiente

$$d\underline{p} = \frac{\partial \underline{p}}{\partial X_k} dx_k = dx_k \underline{i}_k \quad (2.2.7a)$$

$$dx_k = \frac{\partial x_k}{\partial X_k} dx_k$$

$$= x_{k,j} dx_j$$

$$d\underline{p} = \frac{\partial p}{\partial x_k} dx_k = dx_k \cdot \underline{i}_k \quad (2.2.7b)$$

$$dx_k = \frac{\partial x_k}{\partial X_k} dX_k = X_{kK} dX_K$$

El tamaño de los vectores $d\underline{p}$ y $d\underline{p}$ se calculará mediante

$$(ds)^2 = |d\underline{p}|^2 = d\underline{p} \cdot d\underline{p} = (dx_k \cdot \underline{i}_k) \cdot (dx_L \cdot \underline{i}_L) = \delta_{kL} dx_k dx_L = dx_k dx_k \quad (2.2.8a)$$

$$(ds)^2 = |d\underline{p}|^2 = d\underline{p} \cdot d\underline{p} = (dx_k \cdot \underline{i}_k) \cdot (dx_L \cdot \underline{i}_L) = \delta_{kL} dx_k dx_L = dx_k dx_k \quad (2.2.8b)$$

NOTA 2.2.1. Los sistemas de referencia lagrangiano y euleriano se han seleccionado cartesianos y por lo tanto sus vectores base correspondientes son ortonormales. Entonces, el producto escalar

$$\underline{i}_k \cdot \underline{i}_k = \underline{i}_k \cdot \underline{i}_k = \delta_{kk} = \delta_{kk} \quad (2.2.9)$$

proporciona los cosenos directores entre los sistemas de referencia. Conviene enfatizar que el sistema de referencia lagrangiano se definió para medir una configuración no deformada y el sistema de referencia euleriano se definió para medir una configuración deformada, y para tener presente esta distinción, el producto escalar indicado por la ec 2.2.9 se representará por el símbolo δ_{kk} y se bautizará con el nombre de cambiador pero se operará con las reglas indicadas en el inciso 1.9, y por lo tanto el cambiador δ_{kk} es idéntico a la matriz $[g_{mk}]$.

De acuerdo con esta observación, si se tienen las componentes v_k de un vector medido en el sistema euleriano, sus componentes V_K en el sistema lagrangiano se podrán obtener de acuerdo con la expresión

$$\underline{V}_K = \delta_{Kk} v_k \quad (2.2.9)$$

o bien si se conocen sus componentes v_k en el sistema lagrangiano sus correspondientes en el sistema euleriano se calcularán mediante

$$v_k = \delta_{Kk} V_K \quad (2.2.10)$$

Además la ec 1.9.17 conduce a las relaciones siguientes

$$\delta_{Kk} \delta_{Lk} = \delta_{KL} \quad (2.2.11a)$$

$$\delta_{Kk} \delta_{kL} = \delta_{KL} \quad (2.2.11b)$$

Es de observarse la diferencia que existe entre las deltas de Kronecker δ_{KL} o δ_{kL} y los cambiadores δ_{Kk} .

2.3 Gradientes de deformación y Tensores de deformación (deformation).

Definición 2.3.1. Se define la notación derivada parcial de una función escalar ϕ o una vectorial U_k respecto a las variables independientes x_j mediante las expresiones

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_j} = \phi_{,j}$$

$$\frac{\partial U_k}{\partial x_j} = U_{k,j}$$

en caso de tenerse derivadas parciales de orden superior se escribirán como

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j \partial x_k} = \phi_{,jk}$$

$$\frac{\partial^3 U_k}{\partial x_i \partial x_m \partial x_n} = U_{k,lmn} \dots, etc.$$

Las diferenciales de las ecuaciones de movimiento (ecs 2.2.1 y 2.2.2) quedarán:

$$dx_k = \frac{\partial x_k}{\partial X_k} dX_k = x_{k,k} dX_k \quad (2.3.1a)$$

$$dX_k = \frac{\partial X_k}{\partial x_k} dx_k = X_{k,k} dx_k \quad (2.3.1b)$$

Las cantidades $x_{k,k} = \partial x_k / \partial X_k$ y $X_{k,k} = \partial X_k / \partial x_k$ reciben el nombre de gradientes de deformación. De acuerdo con la regla de la cadena, las ecs. 2.3.1 conducen a las ecs. siguientes:

$$\frac{\partial x_k}{\partial X_k} \frac{\partial X_k}{\partial x_l} = \frac{dx_k}{dx_l} \quad \text{o bien} \quad x_{k,k} X_{k,l} = \delta_{kl} \quad (2.3.2a)$$

$$\frac{\partial X_k}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial X_l} = \frac{dX_k}{dX_l} \quad \text{o bien} \quad X_{k,k} x_{k,l} = \delta_{kl} \quad (2.3.2b)$$

Las ecs. 2.3.2a o 2.3.2b representan sistemas de ecuaciones algebraicas, es decir, nueve ecuaciones con nueve incógnitas.

En caso de considerar como incógnitas a los valores de $X_{k,k}$ y de acuerdo con la regla de Kramer se tendrá:

$$X_{k,k} = \frac{\text{cofactor } x_{k,k}}{j} = \frac{1}{2j} e_{KLM} e_{klm} x_{l,L} x_{m,M} \quad (2.3.3)$$

$$j = |x_{k,k}| = \frac{1}{6} e_{KLM} e_{klm} x_{k,K} x_{l,L} x_{m,M} \quad (2.3.4)$$

Al derivar la ec. 2.3.4 se podrá obtener la identidad de Jacobi expresado como:

$$\frac{\partial j}{\partial x_{k,k}} = \text{cofactor } x_{k,k} = j X_{k,k} \quad (2.3.5)$$

Sustituyendo en las ecs. 2.2.6 las correspondiente dadas -- por las ecs. 2.3.1 se obtendrá:

$$d\underline{P} = (X_{k,k} \underline{I}_k) dx_k = \underline{c}_k dx_k \quad (2.3.6a)$$

$$d\underline{P} = (x_{k,k} \underline{i}_k) dX_k = \underline{G}_k dX_k \quad (2.3.6b)$$

En las ecs. 2.3.6 se definen en forma natural dos nuevos -- vectores base los \underline{c}_k y los \underline{G}_k de acuerdo con las expresiones.

$$\underline{c}_k = \underline{c}_k(\underline{x}, t) = X_{k,k} \underline{I}_k \quad (2.3.7a)$$

$$\underline{G}_k = \underline{G}_k(\underline{X}, t) = x_{k,k} \underline{i}_k \quad (2.3.7b)$$

Usando las ecs. 2.3.7 y las relaciones dadas por las ecs. 2.3.2 se obtendrán las expresiones inversas de las ecs. 2.3.7 quedando :

$$\underline{I}_K = X_{k,K} \underline{e}_k \quad (2.3.8a)$$

$$\underline{i}_k = X_{K,k} \underline{E}_K \quad (2.3.8b)$$

Otra forma de calcular las magnitudes de los vectores diferenciales $d\underline{p}$ y $d\underline{p}$ se obtendrá usando las ecs. (2.3.6).

$$\begin{aligned} (ds)^2 &= d\underline{p} \cdot d\underline{p} = (\underline{e}_k dx_k) \cdot (\underline{e}_l dx_l) \\ &= \underline{e}_k \cdot \underline{e}_l dx_k dx_l = c_{kl} dx_k dx_l \quad (2.3.9a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (ds)^2 &= d\underline{p} \cdot d\underline{p} = (\underline{E}_K dX_K) \cdot (\underline{E}_L dX_L) \\ &= \underline{E}_K \cdot \underline{E}_L dX_K dX_L = G_{KL} dX_K dX_L \quad (2.3.9b) \end{aligned}$$

En las ecs. 2.3.9 se utilizan las definiciones dadas por las expresiones siguientes :

$$\begin{aligned} c_{kl} &= \underline{e}_k \cdot \underline{e}_l = (X_{k,K} \underline{I}_K) \cdot (X_{l,L} \underline{I}_L) \\ &= \delta_{KL} X_{K,k} X_{L,l} = X_{K,k} X_{K,l} = c_{lk} \quad (2.3.10a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_{KL} &= \underline{E}_K \cdot \underline{E}_L = (X_{k,K} \underline{i}_k) \cdot (X_{l,L} \underline{i}_l) \\ &= \delta_{kl} X_{k,K} X_{l,L} = X_{k,K} X_{k,L} = G_{LK} \quad (2.3.10b) \end{aligned}$$

Definición 2.3.2. Al elemento c_{kl} cuyos valores se calculan con la ec. 2.3.10a se le llama tensor de deformación (deformation) de Cauchy. Este tensor permite cuantificar en el sistema de referencia ^{superior} la magnitud del vector $d\underline{p}$ asociado a una configuración no deformada mediante la ec. 2.3.9a .

Definición 2.3.3. Al elemento G_{KL} cuyos valores se calculan con la ec. 2.3.10b se le llama tensor de deformación (deformation) de Green. Este tensor permite cuantificar en un sistema de referencia lagrangiano la magnitud del vector $d\underline{p}$ a una configuración deformada mediante la ec. 2.3.9b .

2.3.1. Característica tensorial de los tensores de deformación de Cauchy y de Green.

Para demostrar que una cantidad es un tensor se deberá estudiar su ley de transformación al cambiar la referencia en que se mide. En la demostración del carácter tensorial de los tensores de Cauchy y de Green se trabajará únicamente con el tensor de Green que opera en el sistema de referencia Lagrangiano. La demostración para el tensor de Cauchy será enteramente similar.

Supóngase que el sistema coordenado X_K se transforme a otro X'_k de acuerdo con la ecuación

$$X_K = X_k (X'_1, X'_2, X'_3) \quad (2.3.11)$$

Entonces la diferencial dX_K quedará

$$dX_K = \frac{\partial X_K}{\partial X'_M} dX'_M \quad (2.3.12)$$

Sustituyendo la ec. 2.3.12 en la ec. 2.3.10b se tendrá :

$$(ds)^2 = G_{KL} \frac{\partial X_K}{\partial X'_M} \frac{\partial X_L}{\partial X'_N} dX'_M dX'_N = G'_{MN} dX'_M dX'_N \quad (2.3.13)$$

donde

$$G'_{MN} = G_{KL} \frac{\partial X_K}{\partial X'_M} \frac{\partial X_L}{\partial X'_N} \quad (2.3.14)$$

Los tensores *de segundo orden* son cantidades que se transforman de acuerdo -- con la ley de transformación especificada en la ec. 2.3.14 .

Ejemplo 2.3.1 utilizando los datos del ejemplo 2.2.1 .

Calcule los conceptos siguientes :

- Los componentes de los vectores \underline{c}_k y \underline{G}_k
- Los componentes de los tensores de Cauchy c_{kl} y de Green G_{KL} .
- El incremento de tamaño del vector diferencial al ocurrir la deformación, en ambos sistemas de referencia, y compruebe su equivalencia.

De acuerdo con la ec. 2.3.7a se tiene que :

$$\underline{c}_k = X_{k,k} \underline{I}_k$$

Habrá que calcular los elementos del gradiente de deformación

$$\frac{\partial X_1}{\partial x_1} = \frac{x_1}{A}$$

$$\frac{\partial X_1}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial X_1}{\partial x_3} = 0$$

$$\frac{\partial X_2}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial X_2}{\partial x_2} = \frac{1}{C}$$

$$\frac{\partial X_2}{\partial x_3} = 0$$

$$\frac{\partial X_3}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial X_3}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial X_3}{\partial x_3} = \frac{1}{D}$$

$$\underline{e}_1 = \frac{\partial X_1}{\partial x_1} \underline{I}_1 + \frac{\partial X_2}{\partial x_1} \underline{I}_2 + \frac{\partial X_3}{\partial x_1} \underline{I}_3 = \frac{x_1}{A} \underline{I}_1$$

$$\underline{e}_2 = \frac{\partial X_1}{\partial x_2} \underline{I}_1 + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} \underline{I}_2 + \frac{\partial X_3}{\partial x_2} \underline{I}_3 = \frac{1}{C} \underline{I}_2$$

$$\underline{e}_3 = \frac{\partial X_1}{\partial x_3} \underline{I}_1 + \frac{\partial X_2}{\partial x_3} \underline{I}_2 + \frac{\partial X_3}{\partial x_3} \underline{I}_3 = \frac{1}{D} \underline{I}_3$$

De acuerdo con la ec. 2.3.7b se tiene que:

$$\underline{G}_k = X_{k,k} \underline{I}_k$$

En el ejercicio 2.2.1 ya se calcularon los elementos del -- gradiente de deformación $X_{k,k}$, entonces

$$\underline{G}_1 = \frac{\partial x_1}{\partial X_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial x_2}{\partial X_1} \dot{x}_2 + \frac{\partial x_3}{\partial X_1} \dot{x}_3 = \frac{A}{x_1} \dot{x}_1$$

$$\underline{G}_2 = \frac{\partial x_1}{\partial X_2} \dot{x}_1 + \frac{\partial x_2}{\partial X_2} \dot{x}_2 + \frac{\partial x_3}{\partial X_2} \dot{x}_3 = C \dot{x}_2$$

$$\underline{G}_3 = \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \dot{x}_1 + \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \dot{x}_2 + \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \dot{x}_3 = D \dot{x}_3$$

Las componentes del tensor de Cauchy se determinan según la ec. 2.3.10a quedando su arreglo en forma matricial de la forma siguiente:

$$[C_{kl}] = \begin{bmatrix} \underline{G}_1 \cdot \underline{G}_1 & \underline{G}_1 \cdot \underline{G}_2 & \underline{G}_1 \cdot \underline{G}_3 \\ \underline{G}_2 \cdot \underline{G}_1 & \underline{G}_2 \cdot \underline{G}_2 & \underline{G}_2 \cdot \underline{G}_3 \\ \underline{G}_3 \cdot \underline{G}_1 & \underline{G}_3 \cdot \underline{G}_2 & \underline{G}_3 \cdot \underline{G}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x_1^2}{A^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{C^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{D^2} \end{bmatrix}$$

El tensor de Green se construirá de acuerdo con la ec. 2.3.10b y queda:

$$[G_{KL}] = \begin{bmatrix} \underline{G}_1 \cdot \underline{G}_1 & \underline{G}_1 \cdot \underline{G}_2 & \underline{G}_1 \cdot \underline{G}_3 \\ \underline{G}_2 \cdot \underline{G}_1 & \underline{G}_2 \cdot \underline{G}_2 & \underline{G}_2 \cdot \underline{G}_3 \\ \underline{G}_3 \cdot \underline{G}_1 & \underline{G}_3 \cdot \underline{G}_2 & \underline{G}_3 \cdot \underline{G}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{A^2}{x_1^2} & 0 & 0 \\ 0 & C^2 & 0 \\ 0 & 0 & D^2 \end{bmatrix}$$

El enunciado del inciso iii) se expresa de acuerdo con la ecuación siguiente:

$$(ds)^2 - (dS)^2 = |d\underline{p}|^2 - |d\underline{P}|^2$$

La Ecuación 2.3.15 se puede cuantificar tanto en un sistema lagrangiano como en un sistema euleriano.

Para valuar la ec. 2.3.15 en un sistema de referencia espacial o euleriano se podrá hacer de la forma siguiente:

$$(ds)^2 = |d\underline{p}|^2 = dx_k dx_k = \delta_{kl} dx_k dx_l \quad (2.2.8b)$$

$$(dS)^2 = |d\underline{P}|^2 = G_{kl} dx_k dx_l = d\underline{x}^T [C_{kl}] d\underline{x} \quad (2.3.9a)$$

$$\text{donde: } d\underline{x}^T = dx_k \dot{k}_k = [dx_1 \quad dx_2 \quad dx_3]$$

$$(dS)^2 = [dx_1 \quad dx_2 \quad dx_3] \begin{bmatrix} \frac{x_1^2}{A^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{C^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{D^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{bmatrix} = \frac{x_1^2}{A^2} (dx_1)^2 + \frac{(dx_2)^2}{C^2} + \frac{(dx_3)^2}{D^2} \quad (a)$$

De acuerdo con las ecs. 2.2.8b y a se tiene:

$$(ds)^2 - (dS)^2 = \left(1 - \frac{x_1^2}{A^2}\right) (dx_1)^2 + \left(1 - \frac{1}{C^2}\right) (dx_2)^2 + \left(1 - \frac{1}{D^2}\right) (dx_3)^2 \quad (b)$$

Para encontrar el valor de la ec. 2.3.15 en el sistema de referencia material o lagrangiano.

$$(ds)^2 = G_{KL} dX_K dX_L = d\mathbf{X}^T [G_{KL}] d\mathbf{X} \quad (2.3.9b)$$

donde : $d\mathbf{X} = dX_K \mathbf{I}_K = [dX_1 \ dX_2 \ dX_3]$

$$(ds)^2 = [dX_1 \ dX_2 \ dX_3] \begin{bmatrix} \frac{A^2}{x_1^2} & 0 & 0 \\ 0 & C^2 & 0 \\ 0 & 0 & D^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dX_1 \\ dX_2 \\ dX_3 \end{bmatrix} = \frac{A^2}{x_1^2} (dX_1)^2 + C^2 (dX_2)^2 + D^2 (dX_3)^2 \quad (c)$$

usando la ecs. c y d se obtiene :

$$(ds)^2 = |d\mathbf{P}|^2 = dX_K dX_K = \delta_{KL} dX_K dX_L \quad (2.2.8a)$$

usando las ecs. 2.2.8a y c se tendrá :

$$(ds)^2 - (dS)^2 = \left(\frac{A^2}{x_1^2} - 1\right) (dX_1)^2 + (C^2 - 1) (dX_2)^2 + (D^2 - 1) (dX_3)^2 \quad (d)$$

La forma de comprobar las ecs. b y d anteriores (cuantifican la misma cantidad pero en diferentes sistemas) se hará usando las ecuaciones 2.2.5 y 2.3.1

$$dx_1 = \frac{\partial x_1}{\partial X_K} dX_K = \frac{A}{x_1} dX_1$$

$$dx_2 = \frac{\partial x_2}{\partial X_K} dX_K = C dX_2 \quad (e)$$

$$dx_3 = \frac{\partial x_3}{\partial X_K} dX_K = D dX_3$$

Sustituyendo las ecs. e en la ec. b se obtiene la ecuación siguiente:

$$(ds)^2 - (dS)^2 = \left(\frac{A^2}{x_1^2} - 1\right) (dX_1)^2 + (C^2 - 1) (dX_2)^2 + (D^2 - 1) (dX_3)^2$$

que es la ecuación d.

2.4 Tensores de deformación (Strain) y vector desplazamiento.

Observando las ecs. 2.2.8 y 2.3.9 se resume que han desarrollado dos expresiones para cuantificar el cuadrado de las magnitudes $(ds)^2 - (dS)^2$ del vector diferencial deformado y no deformado $d\mathbf{P}$ y $d\mathbf{P}$. Las dos formas corresponden a mediciones asociadas a los sistemas de referencia que se han convenido usar, es decir :

$$(ds)^2 = \delta_{KL} dX_K dX_L = c_{kl} dx_k dx_l \quad (2.4.1a)$$

$$(dS)^2 = G_{KL} dX_K dX_L = \bar{\delta}_{kl} dx_k dx_l \quad (2.4.1b)$$

Una medida de cambio ^{de} forma de un cuerpo se podrá cuantificar a través de la diferencia $(ds)^2 - (dS)^2$ asociada a cada punto del cuerpo.

Es de esperarse que cuando la diferencia anterior se anule para todos los puntos del cuerpo, el movimiento que esté únicamente podrá ser de cuerpo rígido. Al cuantificar la diferencia en un mismo sistema de referencia se tendrán las expresiones siguientes:

$$\begin{aligned} (ds)^2 - (dS)^2 &= G_{KL} dX_K dX_L - \delta_{KL} dX_K dX_L = (G_{KL} - \delta_{KL}) dX_K dX_L \\ &= 2E_{KL} dX_K dX_L \quad (\text{en el sistema lagrangiano}) \quad (2.4.2a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (ds)^2 - (dS)^2 &= \delta_{kl} dx_k dx_l - c_{kl} dx_k dx_l = (\delta_{kl} - c_{kl}) dx_k dx_l \\ &= 2e_{kl} dx_k dx_l \quad (\text{en el sistema euleriano}) \quad (2.4.2b) \end{aligned}$$

Debido a la igualdad de las ecs. 2.4.2a y 2.4.2b se podrá escribir :

$$(ds)^2 - (dS)^2 = 2E_{KL} dX_K dX_L = 2e_{kl} dx_k dx_l \quad (2.4.3)$$

Donde se definen dos cantidades nuevas de acuerdo con las expresiones siguientes :

$$2E_{KL} = (G_{KL} - \delta_{KL}) \quad (2.4.4)$$

$$2e_{kl} = (\delta_{kl} - c_{kl}) \quad (2.4.5)$$

Definición 2.4.1 Al elemento E_{KL} cuyos valores se calculan con la ec. 2.4.4 se le llama tensor de deformación (Strain) de Lagrange. Este tensor permite cuantificar el cambio de longitud $(ds)^2 - (dS)^2$ asociado a un punto de un cuerpo, cuando éste pasa de una configuración lagrangiana a una configuración euleriana.

Las componentes de E_{KL} están referidas a un sistema lagrangiano. El tensor de deformación de Lagrange es simétrico debido a que el tensor de Green y la delta de Kronecker también lo son.

Definición 2.4.2 Al elemento e_{kl} cuyos valores se calculan con la ec. 2.4.5 reciben el nombre de tensor de deformación (Strain) de Euler.

Este tensor permite medir el mismo cambio de longitud que el tensor de Lagrange pero en un sistema de referencia euleriano. El tensor de deformación de Euler es simétrico puesto que el tensor de Cauchy y la delta de Kronecker también lo son.

NOTA 2.4.1 Al definir los tensores de deformación de Cauchy y de Green se les asoció la palabra inglesa " deformation " y a los tensores de deformación de Lagrange y de Euler la palabra " Strain ". La razón de tal hecho se debe a que en español no existe una traducción bien definida. Desde luego que todos los tensores anteriores permiten cuantificar el cambio de forma pero cada uno lo hace con una característica especial

Para evitar confusiones se convendrá asociarle al término - tensor el nombre con que fueron bautizados y el estudiante deberá tener presente la distinción entre ellos. Así al tensor c_{kl} se le llamará tensor de deformación de Cauchy, al tensor G_{KL} se le llamará tensor de deformación de Green, al tensor E_{KL} tensor de deformación de Lagrange y al tensor e_{kl} tensor de deformación de Euler.

Usando las ecs. 2.3.1 y 2.4.3 se pueden obtener las relaciones siguientes:

$$E_{KL} = e_{kl} x_{k,K} x_{l,L} \quad (2.4.6a)$$

$$e_{kl} = E_{KL} X_{K,k} X_{L,l} \quad (2.4.6b)$$

Definición 2.4.3. Se llamará vector desplazamiento \underline{u} de un punto de un medio continuo, al vector que une a un mismo punto en dos configuraciones. El extremo inicial del vector desplazamiento se encuentra en la configuración no deformada y el extremo final en la configuración deformada.

La fig. 2.4.1 muestra el vector desplazamiento.

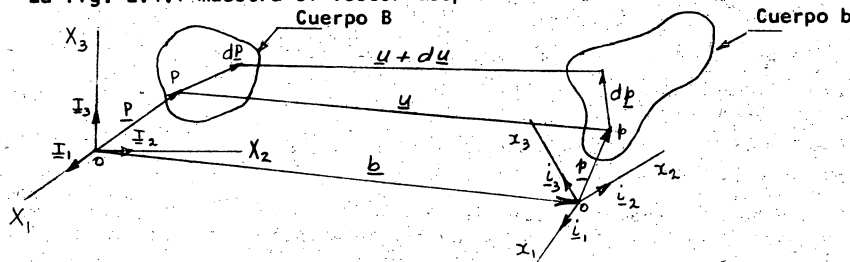


Fig. 2.4.1 Vector desplazamiento.

De la fig. 2.4.1 se puede escribir:

$$\underline{u} = \underline{p} - \underline{P} + \underline{b} = x_l \underline{i}_l - X_L \underline{I}_L + \underline{b} \quad (2.4.7)$$

Los vectores \underline{u} y \underline{b} se pueden referir a cualquier sistema de referencia, así:

$$\underline{u} = u_L \underline{I}_L = u_l \underline{i}_l \quad (2.4.8a)$$

$$\underline{b} = B_L \underline{I}_L = b_l \underline{i}_l \quad (2.4.8b)$$

Multiplicando escalarmente ambos miembros de la ec. 2.4.7 por los vectores \underline{i}_k se tendrá .

$$\underline{u} \cdot \underline{i}_k = x_l \underline{i}_k \cdot \underline{i}_l - X_L \underline{I}_L \cdot \underline{i}_k + \underline{b} \cdot \underline{i}_k$$

Sustituyendo las ecs. 2.2.9 y 2.4.8 en la ecuación anterior se obtiene

$$u_k = x_k - \delta_{Lk} X_L + b_k \quad (2.4.9)$$

Si ahora se multiplica escalarmente la ec. 2.4.7 por el vector \underline{I}_K y efectuando un proceso análogo al anterior se obtiene la ecuación sig:

$$U_K = \delta_{Kl} x_l - X_K + B_K \quad (2.4.10)$$

La definición del vector de desplazamientos permite expresar a los tensores de deformación en términos de las componentes de dicho vector de acuerdo con el desarrollo presentado a continuación.

De las ecs. 2.3.7 y 2.4.7 se podrán calcular los vectores \underline{G}_k y \underline{C}_k

$$\underline{G}_k = \frac{\partial P}{\partial X_k} = \frac{\partial}{\partial X_k} (P + u - b) = \frac{\partial P}{\partial X_k} + \frac{\partial u}{\partial X_k} = \underline{I}_k + u_{m,k} \underline{I}_m \quad (2.4.11)$$

$$\underline{C}_k = \frac{\partial P}{\partial X_k} = \frac{\partial}{\partial X_k} (P - u + b) = \frac{\partial P}{\partial X_k} - \frac{\partial u}{\partial X_k} = \underline{I}_k - u_{m,k} \underline{I}_m \quad (2.4.12)$$

Los tensores de deformación de Cauchy se calcularán mediante las ecs. 2.3.10, 2.4.11 y 2.4.12

$$\underline{G}_{KL} = \underline{G}_K \cdot \underline{G}_L = (\underline{I}_K + u_{m,K} \underline{I}_m) \cdot (\underline{I}_L + u_{n,L} \underline{I}_n)$$

$$\underline{G}_{KL} = \delta_{KL} + u_{k,L} + u_{L,K} + \delta_{MN} u_{M,K} u_{N,L} \quad (2.4.12)$$

$$\underline{C}_{kl} = \underline{C}_k \cdot \underline{C}_l = (\underline{I}_k - u_{m,k} \underline{I}_m) \cdot (\underline{I}_l - u_{n,l} \underline{I}_n)$$

$$\underline{C}_{kl} = \delta_{kl} - u_{k,l} - u_{l,k} + \delta_{mn} u_{m,k} u_{n,l} \quad (2.4.14)$$

Los tensores de deformación de Lagrange y Euler se calcularán usando las ecs. 2.4.4., 2.4.5, 2.4.13 y 2.4.14

$$2 \underline{E}_{KL} = \underline{G}_{KL} - \delta_{KL} = u_{k,L} + u_{L,K} + \delta_{MN} u_{M,K} u_{N,L} \quad (2.4.15)$$

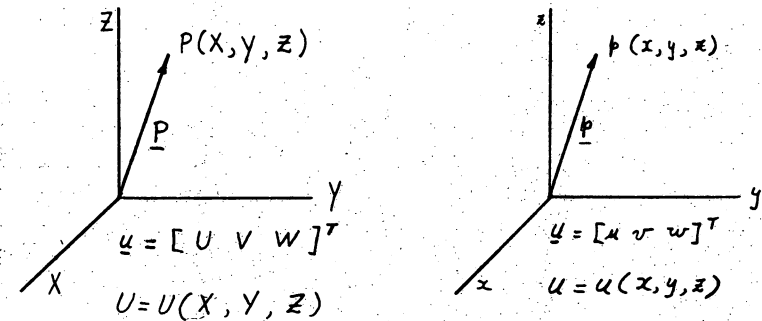
$$2 \underline{e}_{kl} = \delta_{kl} - \underline{C}_{kl} = u_{k,l} + u_{l,k} - \delta_{mn} u_{m,k} u_{n,l} \quad (2.4.16)$$

Es usual escribir a los tensores de deformación en forma matricial quedando :

$$[\underline{E}_{KL}] = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{bmatrix}, \quad [\underline{e}_{kl}] = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{bmatrix} \quad (2.4.17)$$

Debido a la simetría de los tensores \underline{E}_{KL} y \underline{e}_{kl} , de las nueve cantidades que forman a dichos tensores se requiere conocer únicamente a seis; los tres alojados sobre la diagonal principal y los otros tres serán los que están arriba o abajo de la diagonal principal.

Quando se tiene el modelo matemático desarrollado y se busca el método de solución, es práctica usual trabajar con variables sin subíndices, según se muestra en la figura 2.4.2



a) Sistema de referencia lagrangiano.

b) Sistema de referencia euleriano.

fig. 2.4.2 Variables en los sistemas de referencia para representar los modelos matemáticos en su etapa de solución.

Al expresar las ecs. 2.4.15 y 2.4.16 en tales sistemas se tendrá.

$$2 \underline{E}_{XX} = G_{XX} - 1 = 2 \frac{\partial u}{\partial X} + \left(\frac{\partial u}{\partial X} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial X} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial X} \right)^2$$

$$2E_{YY} = G_{YY} - 1 = 2 \frac{\partial V}{\partial Y} + \left(\frac{\partial U}{\partial Y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial Y}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial Y}\right)^2$$

$$2E_{ZZ} = G_{ZZ} - 1 = 2 \frac{\partial W}{\partial Z} + \left(\frac{\partial U}{\partial Z}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial Z}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial Z}\right)^2 \quad (2.4.18a)$$

$$2E_{XY} = 2E_{YX} = G_{XY} = \frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{\partial V}{\partial X} + \frac{\partial U}{\partial X} \frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{\partial V}{\partial X} \frac{\partial V}{\partial Y} + \frac{\partial W}{\partial X} \frac{\partial W}{\partial Y}$$

$$2E_{YZ} = 2E_{ZY} = G_{YZ} = \frac{\partial V}{\partial Z} + \frac{\partial W}{\partial Y} + \frac{\partial U}{\partial Y} \frac{\partial U}{\partial Z} + \frac{\partial V}{\partial Y} \frac{\partial V}{\partial Z} + \frac{\partial W}{\partial Y} \frac{\partial W}{\partial Z}$$

$$2E_{ZX} = 2E_{XZ} = G_{ZX} = \frac{\partial W}{\partial X} + \frac{\partial U}{\partial Z} + \frac{\partial U}{\partial Z} \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Z} \frac{\partial V}{\partial X} + \frac{\partial W}{\partial Z} \frac{\partial W}{\partial X}$$

$$2e_{xx} = 1 - c_{xx} = 2 \frac{\partial u}{\partial x} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2$$

$$2e_{yy} = 1 - c_{yy} = 2 \frac{\partial v}{\partial y} - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2$$

$$2e_{zz} = 1 - c_{zz} = 2 \frac{\partial w}{\partial z} - \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 - \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 - \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 \quad (2.4.18b)$$

$$2e_{xy} = 2e_{yx} = -c_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}$$

$$2e_{yz} = 2e_{zy} = -c_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$2e_{zx} = 2e_{xz} = -c_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial x}$$

Definición 2.4.4. Los componentes de los tensores de deformación E_{KL} y e_{kl} con subíndice repetido, es decir, los que están alojados sobre la diagonal principal en la ec. 2.4.17, reciben el nombre de deformaciones longitudinales o normales, mientras que los que están alojados -- fuera de la diagonal principal se llaman deformaciones angulares o de corte.

Ejemplo 2.4.1 Utilizando los datos del ejemplo 2.3.1

Calcule los conceptos siguientes:

- i) El tensor de deformación de Euler e_{kl} utilizando el tensor de Cauchy c_{kl} .
- ii) El tensor de deformación de Lagrange utilizando el tensor de Green G_{KL} .
- iii) El tensor de deformaciones de Euler utilizando el tensor de deformaciones de Lagrange.
- iv) El tensor de deformaciones de Lagrange utilizando el tensor de deformaciones de Euler.

De acuerdo con la ec. 2.4.5 se tiene que :

$$2e_{kl} = (\delta_{kl} - c_{kl})$$

En el ejercicio 2.3.1 ya se calculó el tensor c_{kl} , entonces

$$[e_{kl}] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 - \frac{x_1^2}{A^2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{1}{C^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{1}{D^2} \end{bmatrix} \quad (a)$$

De acuerdo con la ec. 2.4.4 se tiene que :

$$2E_{KL} = (G_{KL} - \delta_{KL})$$

Utilizando los resultados obtenidos en el ejercicio 2.3.1 para el tensor de Green G_{KL} se tiene

$$[E_{KL}] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{A^2}{X_1^2} - 1 & 0 & 0 \\ 0 & C^2 - 1 & 0 \\ 0 & 0 & D^2 - 1 \end{bmatrix} \quad (b)$$

El inciso iii) se resuelve utilizando la ec. 2.4.6b que se expresa como

$$e_{kl} = E_{KL} X_{K,k} X_{L,l} \quad \text{o} \quad [e_{kl}] = [X_{K,k}]^T [E_{KL}] [X_{L,l}]$$

Utilizando los elementos del gradiente de deformación calculados en el ejercicio 2.3.1 se tiene

$$[e_{kl}] = \begin{bmatrix} \frac{X_1}{A} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{C} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{A^2}{X_1^2} - 1 & 0 & 0 \\ 0 & C^2 - 1 & 0 \\ 0 & 0 & D^2 - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{X_1}{A} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{C} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - X_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{1}{C^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{1}{D^2} \end{bmatrix} \quad (c)$$

El inciso iv) se resuelve con la ec. 2.4.6a que se expresa como

$$E_{KL} = e_{kl} X_{k,K} X_{l,L} \quad \text{o} \quad [E_{KL}] = [X_{k,K}]^T [e_{kl}] [X_{l,L}]$$

Empleando los resultados obtenidos en el ejercicio 2.2.1 -- para el gradiente de deformación $X_{k,K}$ se tiene

$$[E_{KL}] = \begin{bmatrix} \frac{A}{X_1} & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - \frac{X_1^2}{A^2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{1}{C^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{1}{D^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{A}{X_1} & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{A^2}{X_1^2} - 1 & 0 & 0 \\ 0 & C^2 - 1 & 0 \\ 0 & 0 & D^2 - 1 \end{bmatrix} \quad (d)$$

Se hacen notar en este problema las distintas formas de calcular los tensores de deformación, dependiendo de las cantidades que se conozcan. Así, en el inciso i) y iii) se calcula el tensor de deformaciones de Euler en dos formas distintas y los resultados, como es de esperarse, son iguales. Lo mismo se puede decir del tensor de Lagrange calculado en los incisos ii) y iv).

Ejemplo 2.4.2 Sea el campo de desplazamiento referido a un sistema de referencia euleriano x, y, z el dado por

$$u = \frac{Axz}{r^3} \quad ; \quad v = \frac{Ayz}{r^3} \quad ; \quad w = A \left[\frac{z^2}{r^3} + \left(\frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} \right) \frac{1}{r} \right]$$

donde $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$; A , λ y μ son constantes.

Calcular el tensor de deformaciones de Euler e_{kl} en el punto de coordenadas $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ y con valores de las constantes

$$A = 3\sqrt{3} \times 10^{-2}, \quad \lambda = 10^5, \quad \mu = 3 \times 10^5$$

De acuerdo con las ecs. 2.4.18b para valuar las componentes del tensor se tendrán que calcular los elementos del gradiente de desplazamiento como sigue:

$$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} = r^{1/2}$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{2} r^{-1/2} (2 \cdot x) = r^{-1} x \quad ; \quad \frac{\partial r}{\partial y} = r^{-1} y \quad ; \quad \frac{\partial r}{\partial z} = r^{-1} z$$

$$\frac{\partial r^{-3}}{\partial x} = -3r^{-4} \frac{\partial r}{\partial x} = -3r^{-5} x \quad ; \quad \frac{\partial r^{-3}}{\partial y} = -3r^{-5} y \quad ; \quad \frac{\partial r^{-3}}{\partial z} = -3r^{-5} z$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = Axz \frac{\partial (x r^{-3})}{\partial x} = Axz \left[x(-3r^{-5} x) + r^{-3} \right] = \frac{Ax}{r^5} (r^2 - 3x^2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = Axz \frac{\partial r^{-3}}{\partial y} = -3Axz r^{-5} \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{Ax}{r^5} (r^2 - 3z^2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -3Axy z r^{-5} \quad ; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{Ay}{r^5} (r^2 - 3y^2) \quad ; \quad \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{Ay}{r^5} (r^2 - 3z^2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = A \left[z^2 \frac{\partial r^{-3}}{\partial x} + \left(\frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} \right) \frac{\partial r^{-1}}{\partial x} \right] = -\frac{Ax}{r^5} \left[3z^2 + \left(\frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} \right) r^2 \right]$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{Ay}{r^5} \left[3z^2 + \left(\frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} \right) r^2 \right]$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = A \left[z^2 \frac{\partial r^{-3}}{\partial z} + r^{-3} \frac{\partial z^2}{\partial z} + \left(\frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} \right) \frac{\partial r^{-1}}{\partial z} \right] = \frac{Az}{r^5} \left[-3z^2 + r^2 - \left(\frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} \right) r^2 \right]$$

Para los valores de $A = 3\sqrt{3} \times 10^{-2}$, $\lambda = 10^5$, $\mu = 3 \times 10^5$, $x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}$ se tiene

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = -3 \times 10^{-2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y} = -10.5 \times 10^{-2} \quad ; \quad \frac{\partial w}{\partial z} = -4.5 \times 10^{-2}$$

entonces sustituyendo en 2.4.18b

$$2e_{xx} = 0 - 0 - 9 \times 10^{-4} - 110.25 \times 10^{-4} = -0.011925$$

$$2e_{yy} = 0 - 0 - 9 \times 10^{-4} - 110.25 \times 10^{-4} = -0.011925$$

$$2e_{zz} = -9 \times 10^{-2} - 0 - 0 - 110.25 \times 10^{-4} = -0.092025$$

$$2e_{xy} = 2e_{yx} = -3 \times 10^{-2} - 3 \times 10^{-2} - 0 - 0 - 110.25 \times 10^{-4} = -0.071025$$

$$2e_{yz} = 2e_{zy} = 0 - 10.5 \times 10^{-2} - 0 - 0 - 47.25 \times 10^{-4} = -0.109725$$

$$2e_{zx} = 2e_{xz} = -10.5 \times 10^{-2} - 0 - 0 - 0 - 47.25 \times 10^{-4} = -0.109725$$

$$[e_{kl}] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -0.011925 & -0.071025 & -0.109725 \\ -0.071025 & -0.011925 & -0.109725 \\ -0.109725 & -0.109725 & -0.092025 \end{bmatrix}$$

simétrica

2.5 Representación geométrica de la deformación.

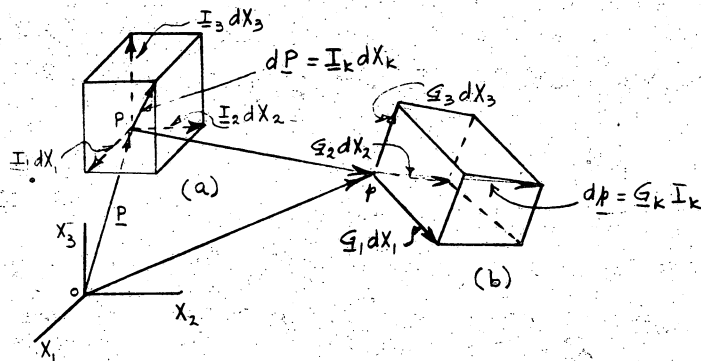
De las ecs. 2.4.11 y 2.4.12 se podrán expresar las diferenciales de los vectores

$$d\underline{p} = \underline{G}_k dX_k = (\delta_{Mk} + u_{M,k}) \underline{I}_M dX_k = \underline{i}_k dx_k \quad (2.5.1)$$

$$d\underline{p} = \underline{G}_k dx_k = (\delta_{mk} - u_{m,k}) \underline{i}_m dx_k = \underline{I}_K dX_K \quad (2.5.2)$$

Puesto que la deformación transforma al vector $d\underline{p}$ en el vector $d\underline{p}$, -- entonces es conveniente observar cómo se deforman las figuras geométricas elementales.

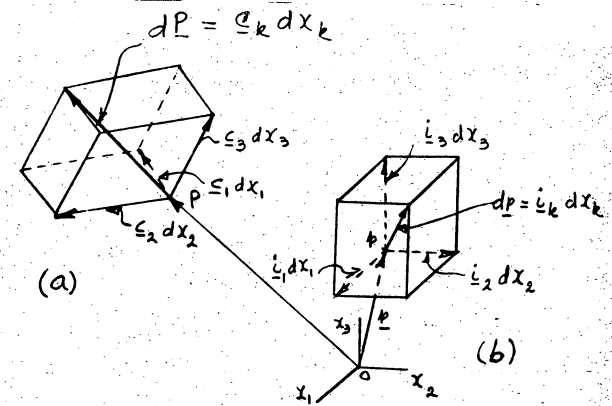
La fig. 2.5.1 muestra cómo se deforma un paralelepípedo rectangular en un paralelepípedo rectilíneo y cómo se cuantifican las aristas de éste.



a) Paralelepípedo rectangular en la configuración no deformada. b) Paralelepípedo rectilíneo en la configuración deformada.

fig. 2.5.1 Deformación de un paralelepípedo en una representación lagrangiana.

En la fig. 2.5.2 se presenta la geometría que debería de tener un cuerpo para que en su configuración deformada le correspondiera un paralelepípedo rectangular.



a) Paralelepípedo rectilíneo en la configuración no deformada. b) Paralelepípedo rectangular en la configuración deformada.

Fig. 2.5.2 Deformación de un paralelepípedo en una representación euleriana

Las ecuaciones 2.5.1 y 2.5.2 al multiplicarse escalarmente por los vectores base \underline{i}_k y \underline{I}_K quedarán como:

$$dx_k = (\delta_{Mk} + u_{M,k}) \underline{I}_M \cdot \underline{i}_k dX_K = (\delta_{Mk} + u_{M,k}) \delta_{Mk} dX_K \quad (2.5.3)$$

$$dX_K = (\delta_{mk} - u_{m,k}) \underline{i}_m \cdot \underline{I}_K dx_k = (\delta_{mk} - u_{m,k}) \delta_{mk} dx_k \quad (2.5.4)$$

2.6 Deformaciones y rotaciones infinitesimales.

Al observar las expresiones de los tensores E_{KL} y e_{kl} se puede observar la presencia de términos lineales y términos cuadráticos.

Definición 2.6.1. Se define a los tensores de deformación (Strain) - infinitesimales \tilde{E}_{KL} y \tilde{e}_{kl} a los tensores formados con los términos lineales de los tensores correspondientes E_{KL} y e_{kl} .

De acuerdo con las ecs. 2.4.15 y 2.4.16 se tendrá:

$$\tilde{E}_{KL} = \frac{1}{2} (U_{K,L} + U_{L,K}) \quad (2.6.1)$$

$$\tilde{e}_{kl} = \frac{1}{2} (u_{k,l} + u_{l,k}) \quad (2.6.2)$$

Los tensores infinitesimales anteriores son simétricos.

Definición 2.6.2. Los tensores de rotación infinitesimales se definen con las expresiones siguientes:

$$\tilde{R}_{KL} = \frac{1}{2} (U_{K,L} - U_{L,K}) \quad (2.6.3)$$

$$\tilde{r}_{kl} = \frac{1}{2} (u_{k,l} - u_{l,k}) \quad (2.6.4)$$

Al analizar las ecuaciones anteriores se puede concluir que los tensores de rotación infinitesimales son antisimétricos, es decir satisfacen la expresión.

$$\tilde{R}_{KL} = -\tilde{R}_{LK} \quad ; \quad \tilde{r}_{kl} = -\tilde{r}_{lk} \quad (2.6.5)$$

Las formas matriciales de la ec 2.6.5 quedan como

$$[\tilde{R}_{KL}] = \begin{bmatrix} 0 & \tilde{R}_{12} & \tilde{R}_{13} \\ -\tilde{R}_{12} & 0 & \tilde{R}_{23} \\ -\tilde{R}_{13} & -\tilde{R}_{23} & 0 \end{bmatrix} ; [\tilde{r}_{kl}] = \begin{bmatrix} 0 & \tilde{r}_{12} & \tilde{r}_{13} \\ -\tilde{r}_{12} & 0 & \tilde{r}_{23} \\ -\tilde{r}_{13} & -\tilde{r}_{23} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.6.6)$$

Puesto que en cada tensor de rotaciones infinitesimales existen únicamente tres componentes independientes, entonces se puede pensar en representar por un vector al tensor antisimétrico de la forma siguiente.

$$\tilde{r}_k = \frac{1}{2} \epsilon_{klm} \tilde{r}_{lm} \quad \text{o} \quad \tilde{r} = \frac{1}{2} [\tilde{r}_{23} \quad -\tilde{r}_{13} \quad \tilde{r}_{12}] \quad (2.6.7a)$$

$$\tilde{R}_K = \frac{1}{2} \epsilon_{KLM} \tilde{R}_{LM} \quad \text{o} \quad \tilde{R} = \frac{1}{2} [\tilde{R}_{23} \quad -\tilde{R}_{13} \quad \tilde{R}_{12}] \quad (2.6.7b)$$

Al sumar las ecs. 2.6.1 y 2.6.3 se obtiene

$$U_{K,L} = \tilde{E}_{KL} + \tilde{R}_{KL} \quad (2.6.8)$$

sumando ahora las ecs. 2.6.2 y 2.6.4

$$u_{k,l} = \tilde{e}_{kl} + \tilde{r}_{kl} \quad (2.6.9)$$

Sustituyendo las ecs. 2.6.8 y 2.6.9 en las ecs. 2.4.15 y 2.4.16 se obtendrán las ecuaciones siguientes:

$$E_{KL} = \tilde{E}_{KL} + \frac{1}{2} (\tilde{E}_{MK} + \tilde{R}_{MK}) (\tilde{E}_{ML} + \tilde{R}_{ML}) \quad (2.6.10)$$

$$e_{kl} = \tilde{e}_{kl} - \frac{1}{2} (\tilde{e}_{mk} + \tilde{r}_{mk}) (\tilde{e}_{ml} + \tilde{r}_{ml}) \quad (2.6.11)$$

De la ec. 2.6.10 se puede concluir: para que los tensores E_{KL} y \tilde{E}_{KL} sean iguales se requiere que los términos cuadráticos $\tilde{E}_{MK} \tilde{E}_{ML}$, $\tilde{R}_{MK} \tilde{R}_{ML}$, $\tilde{E}_{MK} \tilde{R}_{ML}$ y $\tilde{R}_{MK} \tilde{E}_{ML}$ sean de orden inferior respecto a los lineales para que adicionados no modifiquen a los términos lineales. Lo mismo se podrá decir para los términos no lineales de la ec. 2.6.11; con lo anterior en mente se deberá tener que

$$\tilde{E}_{KL} \approx \tilde{E}_{KL} \quad \text{y} \quad e_{kl} \approx \tilde{e}_{kl} \quad (2.6.12)$$

También, usando las ecs. 2.5.3, se podrá calcular la expresión siguiente

$$\chi_{k,k} \chi_{l,l} = (\delta_{MK} + u_{M,k})(\delta_{NL} + u_{N,l}) \delta_{MK} \delta_{NL} \quad (2.6.13)$$

Considerando la hipótesis de que los elementos $u_{M,k}$ y $u_{N,l}$ corresponden a deformaciones infinitesimales se tendrá que :

$$\chi_{k,k} \chi_{l,l} \approx \delta_{MK} \delta_{NL} \delta_{MK} \delta_{NL} \approx \delta_{KK} \delta_{LL} \quad (2.6.14)$$

Sustituyendo la ec. 2.6.14 en la ec. 2.4.6a se llega a

$$\tilde{E}_{KL} \approx e_{kl} \delta_{KK} \delta_{LL} \quad (2.6.15)$$

Análogamente la ec. 2.4.6b se transforma en

$$\tilde{e}_{kl} \approx \tilde{E}_{KL} \delta_{KK} \delta_{LL} \quad (2.6.16)$$

En base a las consideraciones enunciadas para las deformaciones infinitesimales y las ecs. 2.5.3 y 2.5.4 los cambiadores de la ec. 2.6.16 se convierten en deltas de Kronecker y, por lo tanto, se pierde la distinción entre una referencia lagrangiana y una euleriana. Por lo anterior se puede concluir que donde se utilizan tensores de deformaciones infinitesimales no se hace necesaria la utilización de los dos sistemas de referencia.

Es conveniente enfatizar que en general el hecho que el tensor de deformaciones infinitesimales se anule ($\tilde{E}_{KL} = 0$) no implica que el tensor de deformaciones de Lagrange también se anule ($E_{KL} = 0$) y por lo tanto la condición $\tilde{E}_{KL} = 0$ no es una condición suficiente para movimiento de cuerpo rígido ya que \tilde{E}_{KL} no es una medida de la deformación, sino una aproximación para el caso infinitesimal.

Ejemplo 2.6.1 Utilizando los datos del ejemplo 2.4.2...

Calcule los conceptos siguientes :

i) El tensor de deformaciones infinitesimales \tilde{E}_{kl} y compararlo con el tensor de deformaciones finitas E_{kl} , expresando en por ciento las diferencias entre las componentes respectivas de ambos tensores.

ii) El tensor de rotaciones infinitesimales \tilde{r}_{kl}

De acuerdo con la ec. 2.6.2 se tiene que :

$$\tilde{E}_{kl} = \frac{1}{2} (u_{k,l} + u_{l,k})$$

En el ejercicio 2.4.2 ya se calcularon los elementos del ---
gradiente de desplazamiento, entonces :

$$\tilde{e}_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$\tilde{e}_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\tilde{e}_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = -4,5 \times 10^{-2}$$

$$\tilde{e}_{xy} = \tilde{e}_{yx} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \right] = -3 \times 10^{-2}$$

$$\tilde{e}_{yz} = \tilde{e}_{zy} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right] = -5,25 \times 10^{-2}$$

$$\tilde{e}_{zx} = \tilde{e}_{xz} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right] = -5,25 \times 10^{-2}$$

$\begin{matrix} e \\ k,l \end{matrix}$	e_{kl}	\tilde{e}_{kl}	*Diferencia relativa %
xx	-0.0059625	0	-100
yy	-0.0059625	0	-100
zz	-0.0460125	-0.045	-2.22
xy	-0.0355125	-0.03	-15.6
xz	-0.0548625	-0.0525	-4.3
yz	-0.0548625	-0.0525	-4.3

* ESTOS VALORES ESTAN CALCULADOS RESPECTO A LAS COMPONENTES DE e_{kl}

El inciso ii) se resuelve utilizando la ec. 2.6.4 que se expresa como

$$\tilde{\Gamma}_{kl} = \frac{1}{2} (u_{k,l} - u_{l,k})$$

sustituyendo los resultados obtenidos en el ejemplo 2.4.2 para los elementos del gradiente de desplazamiento, se tiene

$$\tilde{\Gamma}_{xx} = \tilde{\Gamma}_{yy} = \tilde{\Gamma}_{zz} = 0$$

$$\tilde{\Gamma}_{xy} = -\tilde{\Gamma}_{yx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} (-3 + 3) \times 10^{-2} = 0$$

$$\tilde{\Gamma}_{xz} = -\tilde{\Gamma}_{zx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} (0 + 10,5) \times 10^{-2} = 5,25 \times 10^{-2}$$

$$\tilde{\Gamma}_{yz} = -\tilde{\Gamma}_{zy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} (0 + 10,5) \times 10^{-2} = 5,25 \times 10^{-2}$$

$$[\tilde{\Gamma}_{kl}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0,0525 \\ 0 & 0 & 0,0525 \\ -0,0525 & -0,0525 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2.6.2. Dado el gradiente de desplazamiento en forma matricial como

$$[U_{K,L}] = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 3 \\ -3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Determinar los tensores \tilde{R}_{KL} y \tilde{E}_{KL}

De acuerdo a la ec. 2.6.8 que se expresa como

$$U_{K,L} = \tilde{E}_{KL} + \tilde{R}_{KL} \quad \text{o} \quad [U_{K,L}] = [\tilde{E}_{KL}] + [\tilde{R}_{KL}]$$

Por lo tanto sustituyendo

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 3 \\ -3 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 1.5 \\ -3 & 1.5 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.5 \\ 0 & -1.5 & 0 \end{bmatrix}$$

luego

$$[\tilde{E}_{KL}] = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 1.5 \\ -3 & 1.5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\tilde{R}_{KL}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.5 \\ 0 & -1.5 & 0 \end{bmatrix}$$

2.7 Interpretación geométrica de los componentes de los tensores de deformación y de rotación.

Existe una forma de asignarles un significado geométrico a los elementos de los tensores de deformación y de rotación, mediante el cálculo de los cambios en ángulo y de longitud que se presentan en el proceso de deformación.

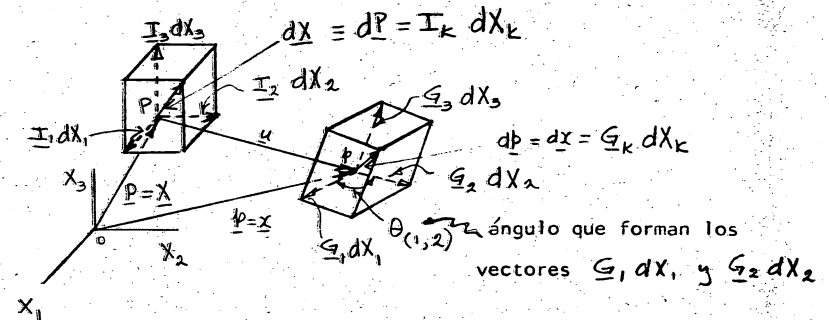


Fig. 2.7.1 Deformación de un paralelepípedo rectangular

En la fig. 2.7.1 se muestra la deformación que sufre un paralelepípedo rectangular infinitesimal en una representación lagrangiana. Si se definen a dos vectores unitarios \underline{n} y \underline{n} alojados en las direcciones de $d\underline{P}$ y $d\underline{p}$ respectivamente, entonces sus expresiones serán

$$\underline{N} = \frac{dP}{|dP|} = \frac{dX}{|dX|} = \frac{dX}{ds} \quad \sigma \quad N_k = \frac{dX_k}{ds} \quad (2.7.1)$$

$$\underline{n} = \frac{dP}{|dP|} = \frac{dx}{|dx|} = \frac{dx}{ds} \quad \sigma \quad n_k = \frac{dx_k}{ds} \quad (2.7.2)$$

Definición 2.7.1. Al cociente constituido con las magnitudes de los vectores diferenciales $|dX|$ y $|dP|$ se denominará alargamiento y se representará por la letra griega $\Lambda_{(N)}$ o $\lambda_{(n)}$ según se exprese en términos de cantidades medidas en un sistema de referencia lagrangiano o euleriano, es decir :

$$\Lambda_{(N)} = \frac{ds}{dS} = \frac{\sqrt{G_{KL} dX_K dX_L}}{dS} = \sqrt{\frac{G_{KL} dX_K dX_L}{dS dS}} \quad (2.7.3)$$

$$= \sqrt{G_{KL} N_K N_L}$$

$$\lambda_{(n)} = \frac{ds}{dS} = \frac{1}{\frac{dS}{ds}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{g_{kl} dx_k dx_l}}{ds}} = \frac{1}{\sqrt{g_{kl} \frac{dx_k}{ds} \frac{dx_l}{ds}}} \quad (2.7.4)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{g_{kl} n_k n_l}}$$

Desde luego que los alargamientos $\Lambda_{(N)}$ y $\lambda_{(n)}$ son iguales, nada más que se cuantifican en diferentes sistemas de referencia.

Para tener una idea más objetiva sobre el alargamiento, considérese que está alojado sobre el eje X_1 , entonces

$$N_1 = 1, \quad N_2 = N_3 = 0$$

$$\Lambda_{(1)} = \sqrt{G_{11}} \quad \sigma \quad G_{11} = \Lambda_{(1)}^2 \quad (2.7.5)$$

También se deberá tener que

$$n_1 = 1, \quad n_2 = n_3 = 0$$

$$\lambda_{(1)} = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \quad \sigma \quad g_{11} = \frac{1}{\lambda_{(1)}^2} \quad (2.7.6)$$

Los resultados anteriores ejemplifican que la ec. 2.7.3 indica que la componente del tensor G_{KL} en la dirección de \underline{N} está dada por el cuadrado del alargamiento en la misma dirección - mientras que la ec. 2.7.4 establece que la componente de g_{kl} en la dirección de \underline{n} está dada por el recíproco del cuadrado del alargamiento en tal dirección.

Definición 2.7.2 - Se define a la extensión, cuya representación está dada mediante $E_{(N)}$ o $e_{(n)}$, de acuerdo con la expresión siguiente

$$E_{(N)} = e_{(n)} = \Lambda_{(N)}^{-1} = \lambda_{(n)}^{-1} = \frac{ds - dS}{dS} \quad (2.7.7)$$

La extensión, para el caso de estar \underline{N} orientado en la dirección del eje X_1 , valdrá

$$E_{(1)} = \Lambda_{(1)}^{-1} = \sqrt{G_{11}}^{-1} - 1 = \sqrt{1 + 2E_{11}} - 1 \quad (2.7.8)$$

o bien

$$E_{11} = \frac{1}{2} \left[(1 + E_{(1)})^2 - 1 \right] = \frac{1}{2} (\Lambda_{(1)}^2 - 1) \quad (2.7.9)$$

La expresión anterior permite cuantificar las componentes normales del tensor de deformación de Lagrange en términos de las extensiones o de los alargamientos asociados a las mismas direcciones.

Al desarrollar la ec. 2.7.9 se obtiene

$$E_{11} = E_{(1)} + \frac{1}{2} E_{(1)}^2 \quad (2.7.10)$$

En la teoría de las deformaciones infinitesimales los términos cuadráticos son de orden inferior a los lineales; se tendrá que

$$E_{11} \approx \tilde{E}_{11} \approx E_{(1)} \quad (2.7.11)$$

La ec. 2.7.11 permite aseverar que las componentes normales del tensor de deformación infinitesimales son aproximadamente iguales a las extensiones asociadas a las direcciones de los ejes del sistema coordenado de referencia para el caso de la teoría de la deformación infinitesimal.

Al calcular las extensiones en un sistema de referencia euleriano se tendrá

$$e_{(1)} = \lambda_{(1)} - 1 = \frac{1}{\sqrt{1 - 2e_{11}}} - 1 \quad (2.7.12)$$

o bien

$$e_{11} = \frac{1}{2} \left[1 - (1 + e_{(1)})^{-2} \right] = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\lambda_{(1)}^2} \right) \quad (2.7.13)$$

$$e_{11} = \frac{1}{2} \left[1 - (1 - 2e_{(1)} + 3e_{(1)}^2 - 4e_{(1)}^3 + \dots) \right] \quad (2.7.14)$$

Para el caso de deformaciones infinitesimales en donde los términos elevados a una potencia igual o mayor a dos son de orden superior a los términos lineales, se tendrá

$$e_{11} \approx \tilde{E}_{11} \approx e_{(1)} \quad (2.7.15)$$

que viene a comprobar lo afirmado para los tensores de deformación de Lagrange y de Euler para el caso especial de la teoría de deformaciones infinitesimales.

Para visualizar el significado geométrico de las deformaciones de conte E_{12} , E_{13} , E_{23} del tensor de deformaciones, se calculará el cambio de ángulo que sufren dos direcciones \underline{M}_1 y \underline{M}_2 .

Para simplificar el proceso se considerarán los dos vectores $\underline{\Xi}_1 dX_1$ y $\underline{\Xi}_2 dX_2$ los cuales en la configuración deformada, corresponden a los vectores $\underline{S}_1 dX_1$ y $\underline{S}_2 dX_2$ respectivamente (ver fig. 2.7.1). De acuerdo con la definición de producto escalar se tendrá:

$$\cos \theta_{(1,2)} = \frac{(\underline{S}_1 dX_1) \cdot (\underline{S}_2 dX_2)}{|\underline{S}_1 dX_1| |\underline{S}_2 dX_2|} = \frac{S_{12}}{\sqrt{S_{11} S_{22}}} = \frac{2 E_{12}}{\sqrt{1+2E_{11}} \sqrt{1+2E_{22}}} \quad (2.7.16)$$

La ec. 2.7.16 se puede transformar usando la ec. 2.7.8 y quedará

$$2 E_{12} = (1 + E_{(1)}) (1 + E_{(2)}) \cos \theta_{(1,2)} \quad (2.7.17)$$

Para el caso de las deformaciones infinitesimales la ec. 2.7.17 se puede escribir como:

$$2\varepsilon_{12} \approx 2\tilde{\varepsilon}_{12} \approx \cos \theta_{(1,2)} \quad (2.7.18)$$

el cambio de ángulo que sufren los vectores $\underline{I}_1 dX_1$ y $\underline{I}_2 dX_2$, inicialmente rectos, se escribirá como

$$\Gamma_{(1,2)} = \frac{\pi}{2} - \theta_{(1,2)} \quad \text{o bien} \quad \theta_{(1,2)} = \frac{\pi}{2} - \Gamma_{(1,2)} \quad (2.7.19)$$

Como se considera pequeño este cambio de ángulo, se justifica la operación siguiente

$$\cos \theta_{(1,2)} = \cos \left[\frac{\pi}{2} - \Gamma_{(1,2)} \right] = \sin \Gamma_{(1,2)} = \Gamma_{(1,2)} \quad (2.7.20)$$

sustituyendo a la ec. 2.7.20 en la ec. 2.7.18 se obtiene

$$2\varepsilon_{12} \approx 2\tilde{\varepsilon}_{12} \approx \Gamma_{(1,2)} \quad (2.7.21)$$

La ecuación anterior establece que las deformaciones de corte infinitesimales son aproximadamente iguales a la mitad del cambio de ángulo que sufren los ejes coordenados inicialmente rectos.

También de la ecuación 2.7.16 se concluye que, para que en una configuración deformada no ocurran cambios de ángulo, es condición necesaria y suficiente que se anulen las deformaciones de corte del tensor de deformaciones. Además, de la ecuación 2.7.8 se concluye que, para que se anule la extensión, es necesario y suficiente que se anulen las deformaciones normales del tensor de deformaciones de Lagrange $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = 0$ o bien que las deformaciones normales del tensor de Green sean iguales a la unidad: $G_{11} = G_{22} = G_{33} = 1$.

Resumiendo las conclusiones se puede aseverar que, para que un movimiento sea una deformación de cuerpo rígido, se requiere que se satisfagan algunas de las condiciones siguientes:

$$G_{KL} = \delta_{KL} \quad (2.7.22a)$$

$$C_{kl} = \delta_{kl} \quad (2.7.22b)$$

$$E_{KL} = e_{KL} = 0 \quad (2.7.22c)$$

Los elementos del tensor de deformaciones infinitesimales -- tienen una interpretación gráfica más objetiva que la anterior y es la que se describe a continuación.

Para las deformaciones normales considérese la componente a lo largo del eje X_1 , como se muestra en la fig. 2.7.2 en donde se

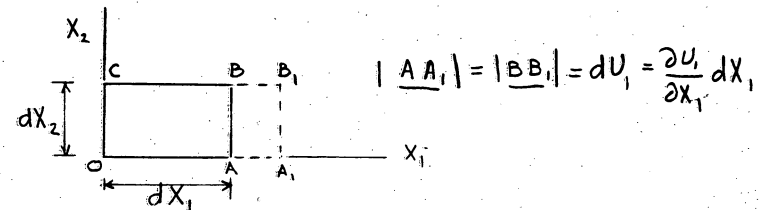


Fig. 2.7.2 Deformación normal del tensor de deformaciones infinitesimales.

muestra la cara del paralelepípedo rectangular contenido en el plano formado por los ejes coordenados X_1, X_2 . La configuración no deformada será el rectángulo $OABC$ y la configuración deformada, para el caso en que existan únicamente deformaciones

normales, será la del rectángulo $OABC$. Tomando en cuenta la igualdad entre extensiones y deformaciones normales se tendrá

$$\tilde{\epsilon}_{11} = \epsilon_{(1)} = \frac{dU_1}{dX_1} = \frac{|OA_1| - |OA|}{|OA|} = \frac{dU_1}{dX_1} = \frac{\frac{\partial U_1}{\partial X_1} dX_1}{dX_1} = \frac{\partial U_1}{\partial X_1}$$

Para el caso de que existan únicamente deformaciones de corte, en la fig. 2.7.3 se muestra la configuración no deformada por el rectángulo $OABC$ y la configuración deformada por el paralelepípedo $OA_1B_1C_1$.

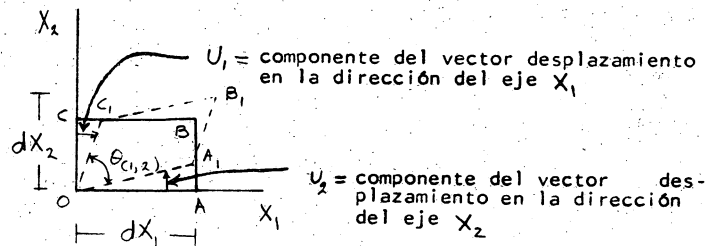


Fig. 2.7.3 Deformación de cortante del tensor de deformaciones infinitesimales.

Si Γ_1 y Γ_2 son los ángulos que forman las líneas OA_1 con OA y OC_1 con OC respectivamente y considerando que son infinitesimales se deberá tener:

$$\Gamma_1 = \tan(\angle A_1OA) = \angle A_1OA = \frac{\frac{\partial U_2}{\partial X_1} dX_1}{dX_1} = \frac{\partial U_2}{\partial X_1}$$

$$\Gamma_2 = \tan(\angle C_1OC) = \angle C_1OC = \frac{\frac{\partial U_1}{\partial X_2} dX_2}{dX_2} = \frac{\partial U_1}{\partial X_2}$$

Entonces el cambio de ángulo que sufren los ejes coordenados X_1, X_2 se podrá calcular como

$$\frac{\pi}{2} - \theta_{(1,2)} = \Gamma_1 + \Gamma_2 \approx \frac{\partial U_1}{\partial X_2} + \frac{\partial U_2}{\partial X_1} = 2\tilde{\epsilon}_{12}$$

El significado geométrico de las rotaciones infinitesimales se hará en base a la definición de la rotación media de un punto introducida por Novozhilov y la terminología se presenta en la fig. 2.7.4. Sea \underline{N} un vector unitario alojado en el plano

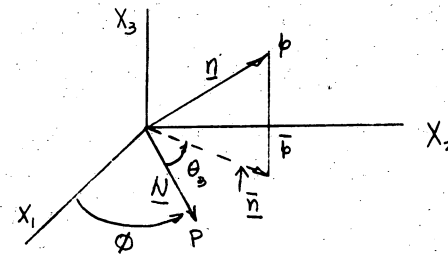


Fig. 2.7.4 Representación geométrica para la rotación media de un punto.

X_1, X_2 en la configuración no deformada y sea \underline{n} el mismo vector pero en la configuración deformada. Sea θ_3 el ángulo que gira la dirección \underline{N} respecto al eje X_3 y será función de ϕ .

¹ Novozhilov, VV., "Foundations of the Nonlinear Theory of Elasticity", Graylock Press (1953)

Definición 2.7.3. Se define al valor medio de $\tan \theta_3$, ($\langle \tan \theta_3 \rangle$) sobre todo el rango del ángulo, $\phi (0, 2\pi)$ mediante la expresión siguiente

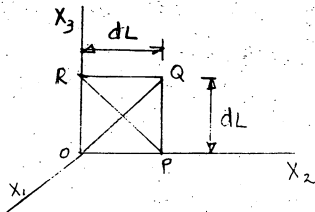
$$\langle \tan \theta_3 \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tan \theta_3(\phi) d\phi \quad (2.7.23)$$

de acuerdo con Eringen² la expresión anterior resulta ser

$$\langle \tan \theta_3 \rangle = - \frac{\tilde{R}_{1,2}}{[(1+\tilde{\epsilon}_{11})(1+\tilde{\epsilon}_{22}) - \tilde{\epsilon}_{12}^2]^{1/2}} \approx -\tilde{R}_{1,2} \quad (2.7.24)$$

la ecuación anterior establece la relación entre la rotación media de un punto y las componentes del tensor de rotación infinitesimales.

Ejemplo 2.7.1. Sea el cuadrado infinitesimal mostrado en la figura



Para la descripción euleriana del movimiento

$$x_1 = (A X_1 + B)^{1/2}, \quad x_2 = C X_2, \quad x_3 = D X_3$$

del problema 2.2.1, Calcular los alargamientos $\Delta_{(N)}$, $\lambda_{(n)}$ y las extensiones $E_{(N)}$, $e_{(n)}$ para

i) El elemento OP paralelo al eje X_2

² Eringen, A.C. "Mechanics of Continua", John-Wiley (1967)

ii) El elemento diagonal OQ

De acuerdo a las expresiones 2.7.3 y 2.7.4 se tiene que

$$\Lambda_{(N)}^2 = G_{KL} N_K N_L \quad \text{o} \quad \Lambda_{(N)}^2 = \underline{N}^T [G_{KL}] \underline{N}$$

$$\lambda_{(n)}^2 = \frac{1}{c_{kl} n_k n_l} \quad \text{o} \quad \frac{1}{\lambda_{(n)}^2} = \underline{n}^T [c_{kl}] \underline{n}$$

Para la dirección paralela al eje X_2

$$\underline{N}_2 = [0 \quad 1 \quad 0]$$

En el ejercicio 2.3.1 ya se calculó el tensor G_{KL} , entonces

$$\Lambda_{(N_2)}^2 = [0 \quad 1 \quad 0] \begin{bmatrix} \frac{A^2}{x_1^2} & 0 & 0 \\ 0 & C^2 & 0 \\ 0 & 0 & D^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = C^2$$

Para calcular $\lambda_{(n)}$ es necesario obtener \underline{n} , es decir la dirección paralela al eje X_1 en la configuración deformada, por lo tanto:

$$\underline{n}_2 = [0 \quad 1 \quad 0]$$

En el ejercicio 2.3.1 ya se calculó el tensor c_{kl} entonces

$$\frac{1}{\lambda_{(n)}^2} = [0 \quad 1 \quad 0] \begin{bmatrix} \frac{x_1^2}{A^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{C^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{D^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{C^2}$$

De acuerdo a la expresión 2.7.7

$$E_{(N)} = e_{(N)} = \Lambda_{(N)} - 1 = \lambda_{(N)} - 1 = C - 1$$

Para resolver el inciso ii) se determinará \underline{N} y \underline{n} en la dirección de la diagonal OQ

$$\underline{N} = \frac{1}{\sqrt{dL^2 + dE^2}} (0 \underline{I}_1 + dL \underline{I}_2 + dE \underline{I}_3) = \frac{1}{\sqrt{2}} [0 \ 1 \ 1]$$

$$\Lambda_{(N)}^2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{dL^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & c^2 & 0 \\ 0 & 0 & d^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} (c^2 + d^2)$$

$$\Lambda_{(N)} = \sqrt{\frac{1}{2} (c^2 + d^2)}$$

Para encontrar \underline{n} se tiene

$$\underline{OQ} = 0 \underline{I}_1 + dL \underline{I}_2 + dE \underline{I}_3$$

utilizando la transformación dada por la descripción euleriana - del movimiento las posiciones de los puntos O y Q son $(B^{1/2}, 0, 0)$ y $(B^{1/2}, c d L, d d L)$ respectivamente

$$\text{luego } \underline{OQ} = 0 \underline{i}_1 + c d L \underline{i}_2 + d d L \underline{i}_3$$

$$|\underline{OQ}| = \sqrt{c^2 + d^2} dL ; \underline{n} = \frac{\underline{OQ}}{|\underline{OQ}|} = \frac{1}{\sqrt{c^2 + d^2}} [0 \ c \ d]$$

$$\frac{1}{\lambda_{(n)}} = \left(\frac{1}{c^2 + d^2} \right) \begin{bmatrix} \frac{X_1^2}{A^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{c^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{d^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ c \\ d \end{bmatrix} = \frac{2}{c^2 + d^2}$$

$$\lambda_{(n)}^2 = \frac{1}{2} (c^2 + d^2) ; \lambda_{(n)} = \sqrt{\frac{1}{2} (c^2 + d^2)}$$

finalmente

$$E_{(N)} = e_{(N)} = \sqrt{\frac{1}{2} (c^2 + d^2)} - 1$$

Ejemplo 2.7.2 El campo de desplazamiento de un cuerpo está dado por

$$U_1 = -C X_2 + B X_3$$

$$U_2 = -A X_3 + C X_1$$

$$U_3 = A X_2 - B X_1$$

donde A, B, C , son constantes pequeñas. Si se considera válida - la teoría de deformaciones pequeñas, investigar bajo que condiciones el cuerpo tiene una deformación de cuerpo rígido.

Para que la deformación sea de cuerpo rígido se debe satisfacer cualquiera de las condiciones expresadas por las ecs. 2.7.22 como

$$G_{KL} = \delta_{KL} ; C_{KL} = \delta_{KL} ; E_{KL} = E_{KL} = 0$$

Para el campo de desplazamiento dado, utilizando la ec. 2.4.12 se tiene

$$G_{11} = 1 + 0 + 0 + 0 + c^2 + B^2 = 1 + c^2 + B^2$$

$$G_{22} = 1 + 0 + 0 + c^2 + 0 + A^2 = 1 + c^2 + A^2$$

$$G_{33} = 1 + 0 + 0 + B^2 + A^2 + 0 = 1 + B^2 + A^2$$

$$G_{12} = 0 - C + C + 0 + 0 - AB = -AB$$

$$G_{13} = 0 + B - B + 0 - AC + 0 = -AC$$

$$G_{23} = 0 - A + A - CB + 0 + 0 = -CB$$

despreciando términos de orden superior.

$$[G_{KL}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ;$$

luego se trata de una deformación de cuerpo rígido.

2.8 Elipsoide de deformación. Teoremas de Cauchy.

Para fortalecer la noción de la deformación local en la vecindad de un punto P de un cuerpo no deformado, se estudiará la deformación de una esfera infinitesimal de radio constante con centro en el punto P localizado por el vector de posición \underline{X} . Si $d\underline{X}$ es la representación de cualquier radio de la esfera infinitesimal, su ecuación estará dada por

$$\delta_{KL} dx_K dx_L = d\underline{X} \cdot d\underline{X} = (dS)^2 = k^2 \quad (2.8.1)$$

La ecuación anterior es una forma cuadrática positiva definida.

La forma cuadrática de la ecuación 2.8.2 medida en una configuración deformada quedará, de acuerdo con la ecuación 2.3.9a

$$c_{kl} dx_k dx_l = (dS)^2 = k^2 \quad (2.8.2)$$

que también será una forma cuadrática positiva definida y la forma geométrica será un elipsoide.³

De manera similar considérese una esfera en la configuración deformada con radio constante ds , cuya ecuación será una forma cuadrática dada por

$$\delta_{kl} dx_k dx_l = (ds)^2 = k^2 \quad (2.8.3)$$

en la configuración no deformada, la esfera se transforma en una forma cuadrática según la ecuación 2.3.9b que corresponde a un elipsoide.

$$G_{KL} dX_K dX_L = (ds)^2 = k^2 \quad (2.8.4)$$

A los elipsoides anteriores se les conocen con el nombre de elipsoide de deformación de Cauchy. El elipsoide dado por la ec. 2.8.2 se conoce con el nombre de elipsoide material de Cauchy y el descrito por la ec. 2.8.4 elipsoide espacial de Cauchy. El estudio de las características básicas de alguno de los elipsoides contribuirá a clasificar el carácter de la deformación en la vecindad de un punto.

Un análisis que proporciona mucha información consiste en estudiar cómo se deforma una terna de radios de la esfera construida en el punto P .

Este problema se contempla en los teoremas de Cauchy descritos a continuación.

Teorema 2.8.1. Primer teorema de Cauchy.

Los diámetros perpendiculares en una esfera infinitesimal en \underline{X} se deforman en diámetros conjugados de elipsoide material en \underline{x} .

La demostración del teorema se hace al considerar dos vectores diferenciales ortogonales $d\underline{X}^1, d\underline{X}^2$ según se muestran en la fig. 2.8.1

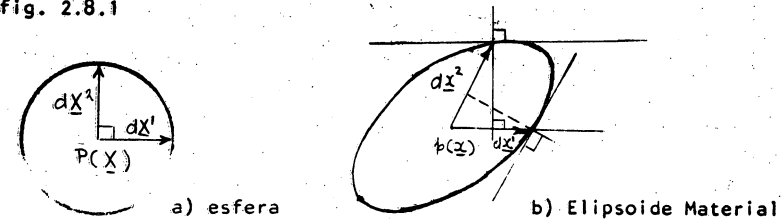


Fig. 2.8.1 Deformación de una esfera en un elipsoide de Cauchy.

3 N. E. Firov., " Formas Cuadráticas y Matrices " , Editorial MIR (1970)

De la fig. 2.8.1a se tiene que la condición de ortogonalidad quedará

$$(\underline{e}_k dx_k^1) \cdot (\underline{e}_l dx_l^1) = e_{kl} dx_k^1 dx_l^1 = 0 \quad (2.8.5)$$

De acuerdo con las ecs. 2.3.7 la ecuación anterior se transforma en :

$$(\underline{e}_k dx_k^1) \cdot (\underline{e}_l dx_l^1) = e_{kl} dx_k^1 dx_l^1 = 0 \quad (2.8.6)$$

La ec. 2.8.6 indica que el vector gradiente del elipsoide en el extremo de dx_k^1 , $e_{kl} dx_k^1$ es perpendicular al vector dx_l^1 .

También se puede interpretar como el vector gradiente del elipsoide en el extremo de dx_k^1 , $e_{kl} dx_k^1$ perpendicular al vector dx_l^1 . Lo anterior se muestra con la fig. 2.8.1b.

De acuerdo con las propiedades geométricas del elipsoide se pueden concluir los corolarios siguientes:

Corolario 2.8.1. En un punto $P(\underline{x})$ de la configuración no deformada existen, al menos, tres direcciones mutuamente perpendiculares, las cuales en la configuración deformada permanecen mutuamente perpendiculares y constituyen los ejes principales del elipsoide de deformación en el punto $p(\underline{x})$.

El corolario anterior se debe a que en un elipsoide existen al menos tres diámetros que son perpendiculares a sus planos conjugados y son precisamente los ejes del elipsoide.

Corolario 2.8.2. Si el tensor de Cauchy en el punto P está referido a los ejes principales, las deformaciones de cortante se anulan; es decir $e_{12} = e_{13} = e_{23} = e_{21} = e_{31} = e_{32} = 0$

Lo anterior se basa en el hecho de que si se construye un paralelepípedo rectangular en la terna de diámetros en P , correspondientes a los ejes principales del elipsoide de deformación en p , el paralelepípedo sigue siendo rectangular por no haber cambios angulares de los ejes sobre los que se construyó.

Corolario 2.8.3. La deformación gira los ejes principales del elipsoide de deformación en \underline{x} a los ejes principales del elipsoide de deformación en \underline{x} .

La fig. 2.8.2 muestra las aseveraciones del corolario 2.8.3 para los elipsoides de Cauchy material y espacial.

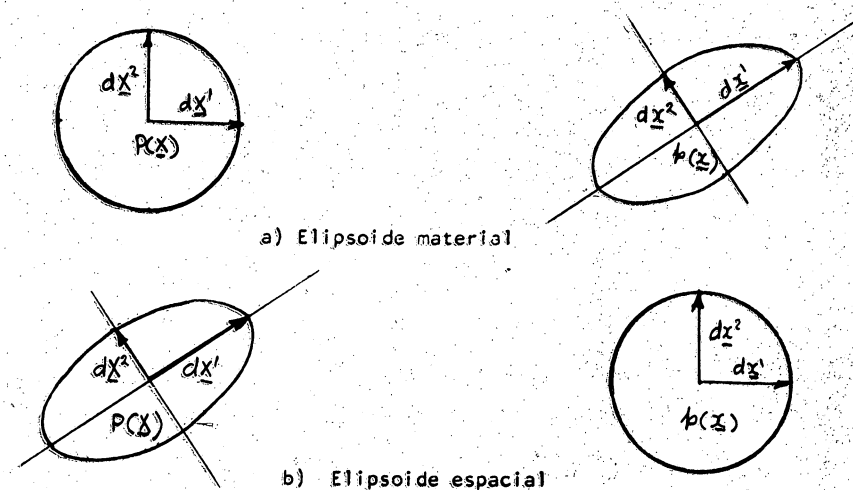


Fig. 2.8.2 Rotación de los ejes principales con la deformación

Bajo condiciones especiales los elipsoides pueden degenerarse en el elipsoide de rotación o en esferas. En el caso de elipsoides de rotación, la terna de ejes principales se deformará de --
 que los diámetros de una esfera en el punto material P se deforman
 Se ha observado en los diámetros de una elipsoide en el punto espacial p . Por lo tanto se puede concluir que los alargamientos son los cocientes formados con los diámetros del elipsoide entre los diámetros correspondientes de la esfera.
 En un elipsoide se puede observar que las longitudes de los ejes principales son tales que al menos uno es mayor, otro es menor y al tercero está entre los anteriores.

Teorema 2.8.2 Segundo teorema de Cauchy.

En cualquier punto p existen el menos tres direcciones mutuamente perpendiculares en donde se presenta la particularidad siguiente

i) Sobre alguna dirección se presenta que el alargamiento no es menor que para cualquier dirección.

ii) De las dos direcciones restantes, en alguna se presentará un alargamiento que no es mayor que en otra dirección cualesquiera.

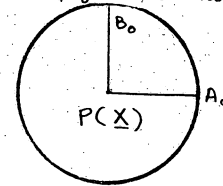
iii) En la tercera dirección el alargamiento es un minimax.

Cuando los alargamientos se ordenan como $\Lambda_{(1)} \geq \Lambda_{(2)} \geq \Lambda_{(3)}$, se conservarán en la proporción $\Lambda_{(1)} : \Lambda_{(2)} : \Lambda_{(3)}$ la longitud de los ejes principales del elipsoide de deformación.

De acuerdo con lo anterior la extensión máxima $E_{(1)} = \Lambda_{(1)} - 1$ ocurrirá a lo largo del eje mayor del elipsoide de deformación, la extensión menor $E_{(3)}$ ocurrirá sobre el eje menor. A las extensiones que ocurren sobre los ejes principales del elipsoide de deformación se denominarán extensiones principales.

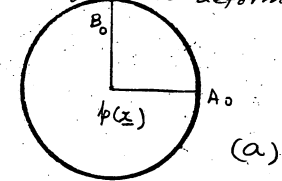
Con los razonamientos presentados en este inciso se puede aseverar que el proceso de la deformación local queda lo suficientemente claro. También se puede sintetizar que los puntos materiales localizados sobre la esfera en el punto P y sobre sus diámetros, adquieren una posición final sobre un elipsoide en p y sus diámetros correspondientes. La posición final se puede visualizar en las tres etapas mostradas en la fig. 2.8.3.

Configuración no deformada

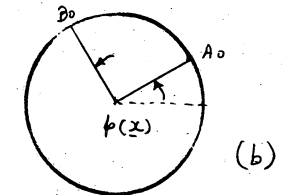


a) Movimiento de cuerpo rígido. Traslación.

Configuración deformada



b) Movimiento de cuerpo rígido. Rotación.



c) Cambio de geometría.

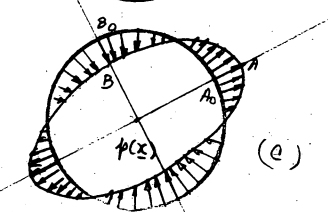


Fig. 2.8.3 Deformación de una esfera diferencial en el punto P

En el movimiento asociado a las etapas a y b se preservan las distancias originales entre los puntos materiales y es por eso que se le llama movimiento de cuerpo rígido. En la etapa c únicamente se modifican las distancias originales y por lo tanto el cambio de geometría.

El proceso de la deformación se resume en el teorema siguiente cuya demostración se encuentra en el libro de Eringen¹

Teorema 2.8.3. La deformación en un punto, de cualquier elemento lineal se puede considerar como el resultado de una translación y una rotación de cuerpo rígido de los ejes principales de deformación y de alargamientos a lo largo de dichos ejes.

Ejemplo 2.8.1 Dada la descripción euleriana del movimiento por

$$x = \frac{b}{a} X \quad , \quad y = Y$$

Verificar que esta transformación mapea;

- i) La elipse $\left(\frac{b^2}{a^2}\right) X^2 + Y^2 = b^2$ en el círculo $x^2 + y^2 = b^2$.
 ii) El círculo $X^2 + Y^2 = a^2$ en la elipse $\left(\frac{a^2}{b^2}\right) x^2 + y^2 = a^2$.

Aplicada la transformación $x = \frac{a}{b} X$, $y = Y$ a la elipse $\left(\frac{b^2}{a^2}\right) X^2 + Y^2 = b^2$ se tiene $x^2 + y^2 = b^2$

Para el inciso ii) se aplica la transformación al círculo

$$X^2 + Y^2 = a^2 \quad \text{y se tiene} \quad \left(\frac{a}{b} X\right)^2 = a^2$$

$$\left(\frac{a^2}{b^2}\right) x^2 + y^2 = a^2$$

2.9 Deformaciones y direcciones principales.

En el inciso anterior se dijo que la deformación gira las direcciones principales del elipsoide de deformación en P a las direcciones principales del elipsoide de deformación en P' .

También se dijo que en las direcciones principales se presentan los valores extremales de los alargamientos. Entonces conviene conocer las orientaciones de las direcciones principales respecto al sistema de referencia que se esté utilizando; para ello se requiere plantear el problema para encontrar los valores extremales de los alargamientos.

Si $N_k = \frac{dX_k}{dS}$ son las componentes de la dirección unitaria de uno de los ejes principales, el cálculo del alargamiento en dicha dirección se hará de acuerdo con la ec. 2.7.3

$$\Lambda^2(N) = G_{KL} N_K N_L \quad (2.9.1)$$

en donde N_k debe satisfacer la condición de ser una dirección unitaria.

$$\delta_{KL} N_K N_L = 1 \quad \text{o bien} \quad \delta_{KL} N_K N_L - 1 = 0 = 1 - \delta_{KL} N_K N_L \quad (2.9.2)$$

El problema de encontrar los valores extremales de la ec. 2.9.1 con la condición de que las variables independientes satisfagan la restricción indicada en la ec. 2.9.2, se simplifica si se utiliza el método de los multiplicadores de Lagrange⁴. Si λ es el multiplicador de Lagrange, la función por minimizar será

⁴ ver por ejem. Courant, R. Y Hilbert, D. "Methods of Mathematical Physics", Interscience Publishers, 1953

$$F = G_{KL} N_K N_L + G (1 - \delta_{KL} N_K N_L) \quad (2.9.3)$$

de la condición

$$\frac{\partial}{\partial N_M} [G_{KL} N_K N_L + G (1 - \delta_{KL} N_K N_L)] = 0 \quad (2.9.4)$$

se obtienen las expresiones siguientes

$$(G_{KL} - G \delta_{KL}) N_L = 0 \quad (2.9.4)_-$$

El problema indicado por la ec. 2.9.4 es un caso particular de un modelo matemático conocido con el nombre de Problema de Valores Característicos y expresado en forma matricial de la forma siguiente:

$$A \underline{x} = \lambda \underline{x} \quad \text{o bien} \quad (A - \lambda I) \underline{x} = 0 \quad (2.9.5)$$

Definición 2.9.1. A los vectores \underline{x} que satisfacen la ec. 2.9.5 se les conoce con los nombres de vectores característicos, -- eigenvectores o vectores propios.

Definición 2.9.2. Los valores del parámetro λ que satisfacen la ec. 2.9.5 reciben el nombre de valores característicos, eigenvalores o valores propios.

La identificación de los términos de la ec. 2.9.4 con la ec. 2.9.5 son tales que al tensor de Green G_{KL} le corresponde la matriz A , la delta de Kronecker δ_{KL} con la matriz identidad I , el multiplicador de Lagrange G con

el valor característico λ y el vector asociado a la dirección de los ejes principales N_L con el vector característico \underline{x}

La ec. 2.9.4 se puede expresar en términos del tensor de Lagrange E_{KL} usando la ec. 2.4.4 y queda

$$(E_{KL} - E \delta_{KL}) N_L = 0 \quad (2.9.6)$$

donde

$$E = \frac{1}{2} (G - 1) \quad (2.9.7)$$

El método que más se acomoda para resolver el problema de ^{valores} característicos, ya que G_{KL} y E_{KL} son matrices de 3×3 , es el de encontrar las raíces del polinomio característico⁵.

Definición 2.9.3. Se denomina polinomio característico al determinante del sistema indicado por las ecs. 2.9.4. o 2.9.5 o -- 2.9.6 igualado a cero. Así para la ec. 2.9.6 el polinomio característico será

$$|E_{KL} - E \delta_{KL}| = \begin{vmatrix} E_{11} - E & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} - E & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} - E \end{vmatrix} = 0 \quad (2.9.8)$$

De acuerdo con teoremas desarrollados en la teoría del problema de valores característicos se puede concluir lo siguiente para el caso muy especial de la matriz E_{KL} .

⁵ ver por ejem. Wilkinson, J. H. "The Algebraic Eigenvalue Problem", Clarendon Press (1965)

i) Existen tres valores de E indicados por E_1, E_2 y E_3 , tres vectores N_1, N_2, N_3 , a cada valor E_α le corresponde un vector N_α , $\alpha = 1, 2, 3$.

ii) Por ser el tensor E_{kl} real y simétrico se puede aseverar que los valores característicos E_α y los vectores característicos N_α son reales. Además los vectores característicos serán ortogonales.

Definición 2.9.4. A los valores del multiplicador de Lagrange E_α que vienen a ser los valores característicos de la ec. 2.9.6, *deformaciones principales. De acuerdo con el método de solución seleccionado*, las deformaciones principales se obtienen al calcular las raíces del polinomio característico.

Al desarrollar la ec. 2.9.8 se obtiene

$$-E^3 + I_E E^2 - II_E E + III_E = 0 \quad (2.9.9)$$

donde los coeficientes del polinomio están dados por las expresiones

$$I_E = E_{kk} = E_{11} + E_{22} + E_{33} \quad (2.9.10)$$

$$II_E = E_{12} E_{23} + E_{23} E_{31} + E_{31} E_{12} - E_{12}^2 - E_{23}^2 - E_{31}^2$$

$$III_E = \begin{vmatrix} E_{22} & E_{23} \\ E_{32} & E_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} E_{11} & E_{13} \\ E_{31} & E_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{vmatrix} \quad (2.9.11)$$

$$III_E = E_{11} E_{22} E_{33} + 2E_{12} E_{23} E_{31} - E_{11} E_{23}^2 - E_{22} E_{31}^2 - E_{33} E_{12}^2$$

$$III_E = \begin{vmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{vmatrix} \quad (2.9.12)$$

Definición 2.9.5. A los tres vectores característicos N_α asociados a las tres deformaciones principales E_α , se les llaman direcciones principales. Desde luego que, de acuerdo con el método ^{se} seleccionado, las direcciones principales se calcularán de los sistemas de ecuaciones homogéneas que resulten al sustituir los valores E_α en la ec. 2.9.6 es decir

- i) Para E_1 , se forma el sistema $(E_{KL} - E_1 \delta_{KL}) N_{1L} = 0$
- ii) Para E_2 , se forma el sistema $(E_{KL} - E_2 \delta_{KL}) N_{2L} = 0$
- iii) Para E_3 , se forma el sistema $(E_{KL} - E_3 \delta_{KL}) N_{3L} = 0$

El Tensor de deformación se simplifica sensiblemente cuando el sistema de referencia utilizado para su medición coincide con las direcciones principales. En este sistema de referencia las direcciones principales N_α deberán satisfacer

$$N_{\alpha k} = 0 \quad \text{para } \alpha \neq k$$

$$N_{\alpha k} = 1 \quad \text{para } \alpha = k$$

entonces $N_{\alpha k}$ en este sistema de referencia es una delta de Kronecker, es decir

$$N_{\alpha k} = \delta_{\alpha k} \quad (2.9.13)$$

Al sustituir E_{α} y $N_{\alpha k}$ en la ecuación 2.9.6 se tiene

$$E_{KL} N_{\alpha L} = E_{\alpha} \delta_{KL} N_{\alpha L} = E_{\alpha} N_{\alpha k} \quad (2.9.14)$$

NOTA 2.9.1. Una raya horizontal sobre un índice indicará que se destruye la notación suma; es decir

$E_{\alpha} N_{\alpha k}$ no indica suma sobre el índice α

sustituyendo la ec. 2.9.1 en la ec. 2.9.14 se tiene

$$E_{KL} \delta_{\alpha L} = E_{\alpha} \delta_{\alpha k}$$

que se transforma en

$$E_{k\alpha} = E_{\alpha} \delta_{\alpha k} \quad (2.9.15)$$

La ecuación anterior puesta en forma matricial queda

$$\begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & E_3 \end{bmatrix} \quad (2.9.16)$$

Lo anterior demuestra que las deformaciones principales E_k son deformaciones normales asociadas a los ejes principales.

También se puede aseverar que las componentes de cortante (E_{kl} para $k \neq l$) se anulan en un sistema de referencia paralelo a los ejes principales.

La ecuación del elipsoide de deformación referido a un sistema de referencia principal queda como

$$(ds)^2 = k^2 = G_{KL} dX_k dX_L = \sum_{\alpha} G_{\alpha} (dX_{\alpha})^2 \quad (2.9.17)$$

donde los G_{α} llamados números propios se calculan con la ec. 2.9.7.

Los alargamientos calculados con las ecs. 2.7.3 y 2.7.4 tomando en cuenta la ec. 2.9.17 y la ecuación del elipsoide espacial en términos de los números propios e_{α} de e_{kl} quedan

$$\Lambda(\alpha) = \frac{k}{dX_{\alpha}} = \sqrt{G_{\alpha}} \quad (2.9.18)$$

$$\lambda(\alpha) = \frac{dx_{\alpha}}{k} = \frac{1}{\sqrt{e_{\alpha}}} \quad (2.9.19)$$

como $\Lambda(\alpha) = \lambda(\alpha)$ se tiene que

$$G_{\alpha} = \frac{1}{e_{\alpha}} = \lambda_{\alpha}^2 \quad (2.9.20)$$

También se puede demostrar que las direcciones principales del elipsoide de deformación material están relacionadas con las direcciones principales del elipsoide de deformación espacial mediante las expresiones siguientes

$$N_{\alpha k} = X_{k,j} n_{\alpha j} / \sqrt{e_{\alpha}} \quad (2.9.21)$$

$$n_{\alpha k} = \sqrt{e_{\alpha}} = X_{k,j} N_{\alpha j} \quad (2.9.22)$$

Los coeficientes de la ecuación característica cuando se utiliza el tensor de deformaciones referido a los ejes principales (ec. 2.9.16), quedan

$$I_E = E_1 + E_2 + E_3 \quad (2.9.23)$$

$$II_E = E_2 E_3 + E_3 E_1 + E_1 E_2 \quad (2.9.24)$$

$$III_E = E_1 E_2 E_3 \quad (2.9.25)$$

Puesto que las longitudes físicas no cambian en una transformación de coordenadas, se tendrá que los términos I_E , II_E y III_E son invariantes respecto a cualquier transformación de coordenadas.

Definición 2.9.6. Al término I_E se le llama primer invariante o invariante lineal del tensor de deformaciones E_{KL} . Al término II_E se le llama segundo invariante o invariante cuadrático del tensor de deformaciones E_{KL} y, al término III_E se le denomina tercer invariante o invariante cúbico del tensor de deformaciones.

Desde luego que existen invariantes de los tensores de deformación de Cauchy, Green y Euler y se puede demostrar que son válidas las relaciones siguientes.

$$I_G = 3 + I_E \quad (2.9.26)$$

$$II_G = 3 + 4 I_E + 4 II_E \quad (2.9.27)$$

$$III_G = 1 + 2 I_E + 4 II_E + 4 III_E \quad (2.9.28)$$

$$I_e = 3 - 2 I_E \quad (2.9.29)$$

$$II_e = 3 - 4 I_E \quad (2.9.30)$$

$$III_e = 1 - 2 I_E + 4 II_E - 8 III_E \quad (2.9.31)$$

Nota 2.9.1. La representación gráfica del estado de deformación de un cuerpo en un punto, se hace mediante los conocidos círculos de Mohr. Debido a que esta representación gráfica es similar a la del estado de esfuerzos en un punto, la descripción de los círculos de Mohr se hará en el capítulo 4, para no hacer más extenso el capítulo en desarrollo.

Ejemplo 2.9.1. Dado el tensor de deformaciones de Lagrange como

$$[E_{KL}] = \begin{bmatrix} 0.0025 & -0.002 & 0 \\ -0.002 & 0.002 & -0.001 \\ 0 & -0.001 & 0.001 \end{bmatrix}$$

determinar las deformaciones y direcciones principales para esta deformación.

De acuerdo a la 2.9.6 el problema de deformaciones y direcciones principales se reduce a resolver el modelo siguiente

$$(E_{KL} - E\delta_{KL}) N_L = 0$$

Una forma de encontrar los valores de E , es resolviendo la ec. característica dada por 2.9.9 como

$$-E^3 + I_E E^2 - II_E E + III_E = 0$$

Utilizando las ecs. 2.9.10 a 2.9.12

$$I_E = E_{KK} = 5.5 \times 10^{-3}$$

$$II_E = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \times 10^{-3} + \begin{vmatrix} 2.5 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \times 10^{-3} + \begin{vmatrix} 2.5 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \times 10^{-3} = 7.5 \times 10^{-3}$$

$$III_E = \begin{vmatrix} 2.5 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \times 10^{-3} = 2 \times 10^{-3}$$

$$\text{luego } -E^3 + 5.5 \times 10^{-3} E^2 - 7.5 \times 10^{-3} E + 2 \times 10^{-3} = 0$$

$$\text{haciendo } \lambda = E \times 10^3 \quad (a)$$

$$\lambda^3 \times 10^{-9} - 5.5 \times 10^{-9} \lambda^2 + 7.5 \times 10^{-9} \lambda + 2 \times 10^{-9} = 0$$

$$\lambda^3 - 5.5 \lambda^2 + 7.5 \lambda + 2 = 0 \quad (b)$$

Uno de los métodos utilizados para resolver la ec.

(b) es el de Newton Raphson y división sintética, en donde se tiene

$$P(\lambda) = \lambda^3 - 5.5 \lambda^2 + 7.5 \lambda - 2 = 0$$

$$P'(\lambda) = 3\lambda^2 - 11\lambda + 7.5$$

las raíces se pueden obtener mediante

$$r_{i+1} = r_i - \frac{P(r_i)}{P'(r_i)} \quad (c)$$

Por lo tanto, sea $r_0 = 0.5$

$$\begin{array}{r|l} 1 & -5.5 & 7.5 & -2.0 & 0.5 \\ & 0.5 & -2.5 & 2.5 & \\ \hline 1 & -5.0 & 5 & 0.5 & \end{array} ; P(r_1) = 0.5$$

$$\begin{array}{r|l} 3 & -11 & 7.5 & 0.5 \\ & 1.5 & -4.75 & \\ \hline 3 & -9.5 & 2.75 & \end{array} ; P(r_2) = 2.75$$

Aplicando (c); $r_2 = 0.5 - \frac{0.5}{2.75} = 0.5 - 0.18 = 0.32$

$$\begin{array}{r|l} -1 & -5.5 & 7.5 & -2.0 & 0.32 \\ & 0.32 & 1.67 & 1.87 & \\ \hline 1 & -5.18 & 5.83 & -0.13 & \end{array} ; P(r_3) = -0.13$$

$$\begin{array}{r|l} 3 & -11 & 7.5 & 0.32 \\ & 0.96 & -3.2 & \\ \hline 3 & -10.0 & 4.3 & \end{array} ; P'(r_2) = 4.3$$

2-73

Aplicando (c) ; $\Gamma_3 = 0.32 - \frac{-0.12}{4.3} = 0.32 + 0.03 = 0.35$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & -5.5 & 7.5 & -2 & 0.35 \\ & 0 & -1.8 & 2. & \\ \hline 1 & -5.15 & 5.7 & 0 & \end{array}$$

Luego $\lambda_1 = 0.35$

y la ec. cúbica se reduce a una ec. de 2º grado dada por

$$\lambda^2 - 5.15\lambda + 5.7 = 0$$

resolviendo esta ecuación se tiene

$$\lambda = 2.575 \pm \sqrt{6.6 - 5.7} = 2.575 \pm 0.95$$

por lo tanto

$$\lambda_2 = 1.625 \quad ; \quad \lambda_3 = 3.525$$

Sustituyendo los valores de λ_1 , λ_2 y λ_3 en (a) se obtienen las deformaciones principales

$$E_1 = 0.35 \times 10^{-3} \quad ; \quad E_2 = 1.625 \times 10^{-3} \quad ; \quad E_3 = 3.525 \times 10^{-3}$$

Las direcciones principales asociadas a cada valor de la deformación principal, se obtienen al substituir los valores E_2 en la ec. 2.9.6, es decir

Para E_1 , se forma el sistema

$$(E_{KL} - E_1 \delta_{KL}) N_{1L} = 0$$

2-74

$$\begin{bmatrix} 2.5 - 0.35 & -2 & 0 \\ -2 & 2 - 0.35 & -1 \\ 0 & -1 & 1 - 0.35 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{11} \\ N_{12} \\ N_{13} \end{bmatrix} = 0$$

$$2.15 N_{11} - 2 N_{12} = 0 \quad (d)$$

$$-2 N_{11} + 1.65 N_{12} - N_{13} = 0 \quad (f)$$

$$-N_{12} + 0.65 N_{13} = 0 \quad (g)$$

que es un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas pero sólo dos de ellas son independientes y la tercera ecuación resulta de la condición 2.9.2 dada por

$$N_{11}^2 + N_{12}^2 + N_{13}^2 = 1 \quad (h)$$

despejando de (d) y (g) N_{12} y N_{13} respectivamente y substituyendo en (h) se tiene

$$N_{12} = 1.075 N_{11} \quad ; \quad N_{13} = 1.65 N_{11} \quad (i)$$

$$N_{11}^2 + 1.15 N_{11}^2 + 2.71 N_{11}^2 = 1$$

$$4.86 N_{11}^2 = 1 \quad ; \quad N_{11} = \sqrt{\frac{1}{4.86}} = \pm 4.55 \times 10^{-1}$$

substituyendo en (i) $N_{12} = \pm 4.86 \times 10^{-1} \quad ; \quad N_{13} = \pm 7.5 \times 10^{-1}$

De manera similar se obtiene

$$N_{21} = \pm 7.75 \times 10^{-1} \quad ; \quad N_{22} = \pm 3.4 \times 10^{-1} \quad ; \quad N_{23} = \mp 5.4 \times 10^{-1}$$

$$N_{31} = \pm 8.7 \times 10^{-1} \quad ; \quad N_{32} = \mp 4.46 \times 10^{-1} \quad ; \quad N_{33} = \mp 1.78 \times 10^{-1}$$

Existen otros métodos para resolver el problema de valores característicos, y uno de los más utilizados es el método de Jacobi. En el apéndice A se describe un programa de computadora que resuelve el problema de valores característicos por este método.

2.10 Ecuaciones de Compatibilidad.

Se ha trabajado en un espacio de tres dimensiones y se han definido los tensores de deformación de Green y de Lagrange en términos de seis componentes independientes. De acuerdo con la ecuación 2.4.15, dichos tensores se pueden expresar en términos de las tres componentes del vector desplazamiento U_k

$$E_{KL} = \frac{1}{2} (G_{KL} - \delta_{KL}) = \frac{1}{2} (U_{k,L} + U_{L,k} + U_{M,k} U_{M,L}) \quad (2.10.1)$$

Es fácil comprobar que si el vector desplazamiento U_k , posee derivadas parciales de primer orden continuas, entonces se podrán calcular las seis componentes independientes de los tensores E_{KL} y G_{KL} , según la ecuación 2.10.1.

También es válido plantear el problema inverso; es decir, si dadas las seis componentes del tensor de deformación E_{KL} , existe un campo de desplazamiento continuo, monovaluado asociado a dicho tensor de deformaciones. Al observar la ecuación 2.10.1 se puede concluir que es un sistema de seis ecuaciones en derivadas parciales — una para cada componente independiente del tensor — con tres incógnitas U_k . Es de afirmarse que el sistema 2.10.1 puede no tener solución para las tres incógnitas U_k , a menos que se satisfagan ciertas condiciones de integrabilidad. Las condiciones de integrabilidad constituyen un conjunto de ecuaciones en derivadas parciales que involucran únicamente a las componentes de E_{KL} y se denominan ecuaciones de compatibilidad. Cuando se violan las ecuaciones de compatibilidad habrá de esperarse campos de desplazamiento que

no sean únicos como los mostrados en la fig. 2.10.1. En la fig. 2.10.1a se tiene localizado un triángulo en un cuerpo no deformado. En las figs. 2.10.1 b y c se presentan posibles configuraciones deformadas asociadas a deformaciones que violan las ecuaciones de compatibilidad.

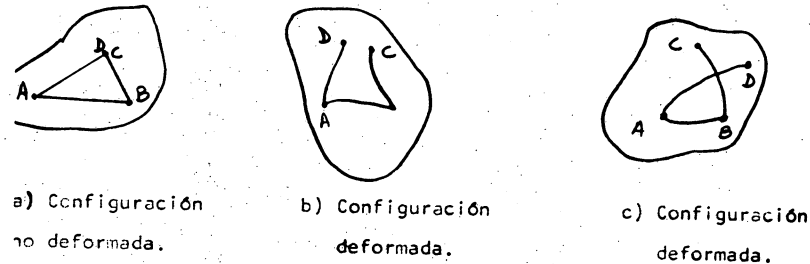


Fig 2.10.1. Ilustración esquemática de configuraciones deformadas no compatibles.

Una forma de obtener las ecuaciones de compatibilidad consiste en eliminar los desplazamientos U_k de la ecuación 2.10.1. Tal eliminación se deberá llevar a cabo mediante derivaciones parciales. Es conveniente aclarar que para el caso de deformaciones infinitesimales este proceso es relativamente simple mientras que para las deformaciones finitas el proceso resulta ser tedioso.

Otra forma para obtener las ecuaciones de compatibilidad consiste en hacer uso del teorema siguiente

Teorema 2.10.1. Teorema de Riemann. Las condiciones necesarias y suficientes para que un tensor simétrico a_{kl} sea un tensor métrico en un espacio euclideo serán:

- i) Que a_{kl} sea un tensor no singular, positivo definido.
- ii) Que se anule el tensor de Riemann - Christoffel, $R_{klmn}^{(a)}$ formado con tal tensor.

Para argumentar el uso del teorema de Riemann conviene recordar que las configuraciones no deformadas están referidas a un sistema cartesiano. También las magnitudes al cuadrado de los vectores dP y dP están dadas por las ecs. 2.4.1, es decir

$$(dS)^2 = \delta_{KL} dX_K dX_L = c_{kl} dx_k dx_l \quad (2.10.2a)$$

$$(ds)^2 = G_{KL} dX_K dX_L = \delta_{kl} dx_k dx_l \quad (2.10.2b)$$

Desde luego que se consideró que el cuerpo en su configuración no deformada como en su configuración deformada está en un espacio euclideo. La ec. 2.10.2a indica que la longitud original se puede calcular en el sistema X_K siempre y cuando se conozca el tensor de deformación de Cauchy. La ec. 2.10.2b implica que la longitud deformada se puede calcular en la referencia X_K cuando se conozca el tensor de deformación de Green. Si se piensa en el movimiento definido por la ec. 2.2.1, es decir

$$x_k = x_k(X_K, t), \quad (2.10.3)$$

como una transformación de coordenadas de la referencia rectangular X_K la curvilinea x_k entonces el tensor de --

Cauchy c_{kl} juega el papel de un tensor métrico en las coordenadas curvilineas x_k . Lo mismo es válido para el tensor de Green G_{KL} en el movimiento inverso dado por la ec. 2.2.2. Además conviene recordar que en un espacio euclideo seis cantidades - cualesquiera a_{kl} constituyen un tensor métrico si satisfacen el teorema de Riemann.

Conviene recordar que los tensores c_{kl} y G_{KL} satisfacen el inciso i) del Teorema de Riemann. Además el tensor de Riemann - Christoffel, $R_{klmn}^{(a)}$ formado con el tensor a_{kl} resulta ser

$$R_{klmn}^{(a)} = \frac{1}{2} (a_{kn,lm} + a_{lm,kn} - a_{km,ln} - a_{ln,km}) + a_{rs}^{-1} ([lm,s][kn,r] - [ln,s][km,r]) \quad (2.104)$$

donde $[kl,m]$ es el símbolo de Christoffel de primera clase -- cuya expresión está dada por

$$[kl,m] = \frac{1}{2} (a_{km,l} + a_{lm,k} - a_{kl,m})$$

y a_{rs}^{-1} es el inverso de a_{rs} de tal manera que deberá satisfacer la expresión siguiente

$$a_{ns}^{-1} a_{sl} = a_{ns} a_{sl}^{-1} = \delta_{nl} \quad (2.10.5)$$

Entonces para que c_{kl} y G_{KL} sean tensores métricos se requieren que satisfagan las expresiones siguientes

$$R_{klmn}^{(G)} = 0 \quad (2.10.6)$$

$$R_{klmn}^{(c)} = 0 \quad (2.10.7)$$

El tensor de Riemann-Christoffel, R_{klmn} en un espacio de tres dimensiones posee 81 componentes pero únicamente seis son algebraicamente independientes y no representan una identidad de ceros. La ec. 2.10.6 conduce a ecuaciones en derivadas parciales en términos de G_{KL} y constituyen las ecuaciones de compatibilidad para dicho tensor. Las ecuaciones de compatibilidad para el tensor de Cauchy se obtendrán de la ec. 2.10.7. Las ecuaciones de compatibilidad para los tensores de deformación de Lagrange E_{KL} y de Euler e_{kl} se obtendrán usando las ecs. 2.10.6 y 2.10.7 junto con las ecs. 2.4.4 y 2.4.5 dados por

$$E_{KL} = \frac{1}{2} (G_{KL} - \delta_{KL}) \quad (2.10.8)$$

$$e_{kl} = \frac{1}{2} (C_{kl} - \delta_{kl}) \quad (2.10.9)$$

Si se sustituye la ec. 2.10.9 en la ec. 2.10.7 se obtendrá la expresión siguiente:

$$e_{kn,lm} + e_{lm,kn} - e_{ln,km} - e_{km,ln} - \\ - C_{rs}^{-1} [(e_{kr,n} + e_{nr,k} - e_{kn,r}) (e_{ls,m} + e_{ms,l} - e_{lm,s}) (2.10.10) \\ - (e_{kr,m} + e_{mr,k} - e_{km,r}) (e_{ls,n} + e_{ns,l} - e_{ln,s})] = 0$$

Para el caso de querer las ecuaciones de compatibilidad del tensor de deformaciones infinitesimales \tilde{e}_{kl} los términos lineales de la ec. 2.10.10. son los únicos que se conservarán, quedando:

$$\tilde{e}_{kn,lm} + \tilde{e}_{lm,kn} - \tilde{e}_{km,ln} - \tilde{e}_{ln,km} = 0 \quad (2.10.11)$$

También se presentará el método de eliminar las componentes de desplazamiento para obtener las ecuaciones de compatibilidad del tensor de deformaciones infinitesimales \tilde{e}_{kl} . De acuerdo con las ecs. 2.6.2 se tendrá:

$$\tilde{e}_{kl} = \frac{1}{2} (u_{k,l} + u_{l,k}) \quad (2.10.12)$$

derivando dos veces parcialmente la ecuación anterior respecto a x_m y x_n se obtendrá

$$\tilde{e}_{kl,mn} = \frac{1}{2} (u_{k,lmn} + u_{l,kmn}) \quad (2.10.13)$$

de manera similar se podrán obtener las expresiones siguientes

$$\tilde{e}_{mn,kl} = \frac{1}{2} (u_{m,nkl} + u_{n,mkl}) \quad (2.10.14)$$

$$\tilde{e}_{ln,km} = \frac{1}{2} (u_{l,nkm} + u_{n,lkm}) \quad (2.10.15)$$

$$\tilde{e}_{km,ln} = \frac{1}{2} (u_{k,mln} + u_{m,kl n}) \quad (2.10.16)$$

Combinando las ecs. 2.10.13 a 2.10.16 se obtendrá la expresión siguiente

$$\tilde{e}_{kl,mn} + \tilde{e}_{mn,kl} - \tilde{e}_{ln,km} - \tilde{e}_{km,ln} = 0 \quad (2.10.17)$$

es fácil demostrar que

$$\tilde{e}_{kl,mn} + \tilde{e}_{mn,kl} = \tilde{e}_{kn,lm} + \tilde{e}_{lm,kn} \quad (2.10.18)$$

De las 81 ecuaciones indicadas por las ecs. 2.10.11 o 2.10.17 únicamente seis son algebraicamente independientes. Las seis --- ecuaciones de compatibilidad expresadas en un sistema de referen

cia rectangular con variables x, y, z quedan

$$\frac{\partial^2 \tilde{e}_{xx}}{\partial y \partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \tilde{e}_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{e}_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \tilde{e}_{xy}}{\partial z} \right) = 0 \quad (2.10.19a)$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{e}_{yy}}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial \tilde{e}_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{e}_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \tilde{e}_{xy}}{\partial z} \right) = 0 \quad (2.10.19b)$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{e}_{zz}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\partial \tilde{e}_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{e}_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{e}_{xy}}{\partial z} \right) = 0 \quad (2.10.19c)$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{e}_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tilde{e}_{yy}}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \tilde{e}_{xy}}{\partial x \partial y} = 0 \quad (2.10.19d)$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{e}_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \tilde{e}_{zz}}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \tilde{e}_{yz}}{\partial y \partial z} = 0 \quad (2.10.19e)$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{e}_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{e}_{xx}}{\partial z^2} - 2 \frac{\partial^2 \tilde{e}_{zx}}{\partial x \partial z} = 0 \quad (2.10.19f)$$

Ejemplo 2.10.1. Da-do el tensor de deformaciones infinitesimales de un cuerpo como

$$[\tilde{e}_{kl}] = \begin{bmatrix} x^2 & y^2 & xz \\ y^2 & z & z^2 \\ xz & z^2 & 5 \end{bmatrix}$$

verificar si es un estado compatible de deformación.

De acuerdo a las ecs. 2.10.9^{que} representan las ecs. de compatibilidad, con las cuales, si se satisfacen, se asegura que el estado de deformación es compatible

$$\frac{\partial^2 x^2}{\partial y \partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial x^2}{\partial x} - \frac{\partial xz}{\partial y} - \frac{\partial y^2}{\partial z} \right) = 0$$

2.10.19a se satisface

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial z} + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial z^2}{\partial x} + \frac{\partial xz}{\partial y} - \frac{\partial y^2}{\partial z} \right) = 0$$

2.10.19b se satisface

$$\frac{\partial^2 (5)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\partial z^2}{\partial x} - \frac{\partial xz}{\partial y} + \frac{\partial yz}{\partial z} \right) = 0$$

2.10.19c se satisface

$$\frac{\partial^2 x^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 y^2}{\partial x \partial y} = 0$$

2.10.19d se satisface

$$\frac{\partial^2 z}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 (5)}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 z^2}{\partial y \partial z} = 0$$

2.10.19e se satisface

$$\frac{\partial^2 (5)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 x^2}{\partial z^2} - 2 \frac{\partial^2 xz}{\partial x \partial z} = -2$$

No se satisfacen 2.10.19f

luego el tensor \tilde{e}_{kl} no representa un estado compatible de deformación.

2.11 Deformaciones de áreas y volúmenes diferenciales.

Las expresiones de las diferenciales de área como vector $d\mathbf{a}$ y de volumen dv , en un sistema de referencia euleriano, son de uso frecuente en la Mecánica del Medio Continuo por eso es conveniente cuantificarlas.

En las figs. 2.5.1 y 2.7.1 se ha presentado la deformación de un paralelepípedo rectangular. De nuevo se graficará este paralelepípedo en la fig. 2.11.1 con el fin de visualizar los desarro-

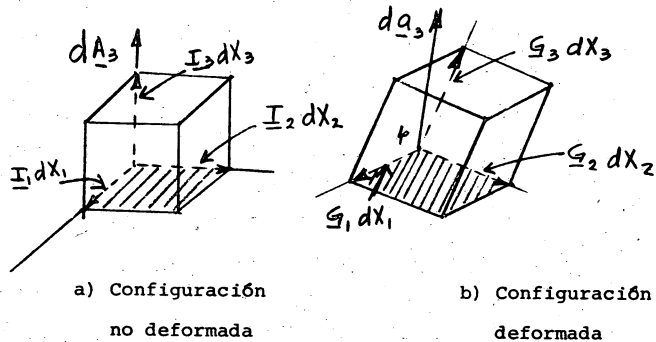


Fig. 2.11.1 Deformación de un paralelepípedo rectangular infinitesimal.

llos siguientes

El vector $d\mathbf{a}_3$ se calculará de acuerdo con el producto vectorial de los vectores $\underline{G}_1 dx_1$ y $\underline{G}_2 dx_2$

$$d\mathbf{a}_3 = (\underline{G}_1 dx_1) \times (\underline{G}_2 dx_2) = \underline{G}_1 \times \underline{G}_2 dx_1 dx_2 \quad (2.11.1)$$

usando la ec. 2.3.7b y el hecho que $dA_3 = dx_1 dx_2$ la ec.

2.11.1 se transforma en

$$d\mathbf{a}_3 = x_{k,1} x_{l,2} \underline{i}_k \times \underline{i}_l dA_3 = \epsilon_{klm} x_{k,1} x_{l,2} \underline{i}_m dA_3 \quad (2.11.2)$$

Al desarrollar la ec. 2.3.4 se llega a la expresión

$$j = |\mathbf{x}_{k,k}| = \epsilon_{klm} x_{k,1} x_{l,2} x_{m,3} \quad (2.11.3)$$

o bien

$$j x_{3,m} = \epsilon_{klm} x_{k,1} x_{l,2} \quad (2.11.4)$$

sustituyendo la ec. 2.11.4 en la ec. 2.11.2 se tiene que

$$d\mathbf{a}_3 = j x_{3,m} \underline{i}_m dA_3 \quad (2.11.5)$$

los valores de da_1 y da_2 serán análogos al de la ec. 2.11.5.

El vector $d\mathbf{a}$ estará dado por

$$d\mathbf{a} = d\mathbf{a}_1 + d\mathbf{a}_2 + d\mathbf{a}_3 = j(x_{1,k} dA_1 + x_{2,k} dA_2 + x_{3,k} dA_3) \underline{i}_k$$

$$d\mathbf{a} = j x_{k,k} dA_k \underline{i}_k \quad (2.11.6)$$

$$da_k = j x_{k,k} dA_k \quad (2.11.7)$$

La magnitud del área da se calculará mediante el producto escalar, es decir

$$|d\mathbf{a}|^2 = da^2 = d\mathbf{a} \cdot d\mathbf{a} = j^2 x_{k,k} x_{l,l} dA_k dA_l \quad (2.11.8)$$

De acuerdo con la ec. 2.3.10b y 2.11.3 y la definición del tercer invariante del tensor G_{KL} se tendrá

$$|G_{KL}| = |X_{k,jk} X_{l,jL}| = |X_{k,jk}|^2 = III_G = j^2 \quad (2.11.9)$$

De la definición del inverso del tensor G_{KL} se tendrá

$$G_{KL} G_{LM}^{-1} = \delta_{KM} \quad (2.11.10)$$

sustituyendo la ec. 2.3.10b en la ec. 2.11.10 se tiene

$$X_{k,jk} X_{l,jL} G_{LM}^{-1} = \delta_{KM} \quad (2.11.11)$$

multiplicando ambos miembros por $X_{k,jk} X_{L,jk}$ y tomando en cuenta la ec. 2.3.2b se tendrá

$$X_{k,jk} X_{k,jk} X_{L,jk} X_{k,jL} G_{LM}^{-1} = \delta_{KM} X_{k,jk} X_{L,jk}$$

$$G_{LM}^{-1} = \delta_{KM} X_{k,jk} X_{L,jk}$$

$$G_{KL}^{-1} = X_{k,jk} X_{L,jk} \quad (2.11.12)$$

sustituyendo las ecs. 2.11.9 y 2.11.12 en la ec. 2.11.8 se llega a la expresión siguiente

$$da^2 = III_G G_{KL}^{-1} dA_k dA_L \quad (2.11.13)$$

De la ec. 2.11.7 se tiene que

$$dA_k = j^{-1} x_{k,jk} da_k \quad (2.11.14)$$

o bien

$$d\underline{A} = j^{-1} x_{k,jk} d\underline{a}_k \underline{I}_k \quad (2.11.15)$$

Para calcular la diferencial de volumen euleriano dv se hará uso de la fig. 2.11.1b en donde el volumen del paralelepípedo estará dado por

$$dv = d\underline{a}_3 \cdot \underline{G}_3 dX_3 \quad (2.11.16)$$

Sustituyendo en la ecuación anterior el valor de $d\underline{a}_3$ dado por la ecuación 2.11.5 y el valor de \underline{G}_3 dado por la ecuación 2.3.7b se obtendrá

$$dv = (j X_{3,jk} \underline{l}_k dA_3) \cdot (x_{m,3} \underline{l}_m dX_3) = j X_{3,jk} x_{m,3} \underline{l}_k \cdot \underline{l}_m dA_3 dX_3$$

$$dv = j X_{3,jk} x_{m,3} \delta_{km} dV = j X_{3,jk} x_{k,3} dV = j dV \quad (2.11.17)$$

Tomando en cuenta la ecuación 2.11.9, la ecuación 2.11.17 se puede escribir como

$$dv = j dV = \sqrt{III_G} dV \quad (2.11.18)$$

Usando las ecuaciones 2.11.18 y 2.9.28 se podrá escribir la expresión siguiente

$$\frac{dv}{dV} = j = \sqrt{III_G} = (1 + 2I_E + 4II_E + 8III_E)^{1/2} \quad (2.11.19)$$

Para el caso especial de las deformaciones infinitesimales, -
la ecuación 2.11.19 se puede escribir como

$$\frac{dv}{dV} \approx (1 + 2I_{\tilde{E}})^{1/2} \approx 1 + I_{\tilde{E}} \quad (2.11.20)$$

o bien de la forma siguiente

$$\frac{dv - dV}{dV} \approx I_{\tilde{E}} \approx I_{\tilde{E}} \quad (2.11.21)$$

La ecuación anterior indica que en la teoría de deformaciones infinitesimales el incremento de volumen entre el volumen inicial es igual al primer invariante $I_{\tilde{E}} = I_{\tilde{E}}$, del tensor de deformaciones infinitesimales. Al término $(dv - dV)/dV$ se le llama dilatación ^{volumétrica} y únicamente en la teoría de las deformaciones infinitesimales es igual al primer invariante del tensor de deformaciones.

MECANICA DEL MEDIO CONTINUO

Notas preliminares para un primer curso.

Ramón Cervantes Beltrán *

Victor Porras Silva

* Profesores Investigadores, Facultad de Ingeniería, UNAM.

CAPITULO 3
MOVIMIENTO

3.1 Introducción.

En el capítulo anterior se estudió la forma de poder relacionar dos configuraciones en dos instantes específicos del movimiento. Es decir cómo medir los conceptos de un medio continuo al pasar de una configuración no deformada a otra deformada. Es objeto de este capítulo el poder estudiar al movimiento como el cambio continuo de configuraciones respecto al tiempo. Por lo tanto en los conceptos que aquí se van a introducir juega un papel muy importante la variable tiempo.

3.2 Rapidez de Variación respecto al tiempo de Vectores.

En la cinemática de los medios continuos es usual trabajar con rapidez de variación respecto al tiempo de cantidades vectoriales asociadas a puntos materiales. En la determinación de las rapidez de variación respecto al tiempo de cantidades de

campo transportadas por un punto material se debe tener en cuenta además del cambio en un punto espacial fijo (cambio local), el cambio en el campo como el observado por la partícula debido únicamente a su movimiento (cambio convectivo).

Definición 3.2.1. La rapidez de variación material respecto al tiempo de un vector o tensor \underline{y} o derivada respecto al tiempo de un vector o tensor \underline{y} se define mediante la expresión siguiente

$$\frac{d\underline{y}}{dt} = \dot{\underline{y}} = \left. \frac{\partial \underline{y}}{\partial t} \right|_{\underline{x}} \quad (3.2.1)$$

Lo anterior implica que las variables \underline{x} permanecen constantes en el proceso de derivación. Si \underline{y} es una función material, es decir

$$\underline{y} = \underline{y}(\underline{x}, t) = Y_k(\underline{x}, t) \underline{I}_k \quad (3.2.2)$$

entonces de acuerdo con la ec. 3.2.1 se deberá tener que

$$\frac{d\underline{y}}{dt} = \frac{\partial Y_k}{\partial t} \underline{I}_k \quad (3.2.3)$$

puesto que las variables \underline{x}, t son independientes en la referencia material o Lagrangiana y además \underline{I}_k es un vector fijo. Si \underline{y} es una función espacial, se tendrá que

$$\underline{y} = \underline{y}(\underline{x}, t) = y_k(\underline{x}, t) \underline{e}_k \quad (3.2.4)$$

y aplicando la ec. 3.2.1 a la función espacial anterior se obten

drá la expresión siguiente

$$\frac{dy}{dt} = \left(\frac{\partial y_k}{\partial t} \right)_{\underline{x}} + \frac{\partial y_k}{\partial x_l} \frac{\partial x_l}{\partial t} \dot{x}_k \quad (3.2.5)$$

lo anterior se presenta ya que de acuerdo con la ecuación de movimiento dado por la ec. 2.2.1 se tiene que la variable \underline{x} en la función y , también es función de la variable \underline{x} , es decir

$$\underline{x} = \underline{x}(\underline{x}, t) \quad (3.2.6)$$

$$\underline{y} = \underline{y}(\underline{x}, t) = \underline{y}[\underline{x}(\underline{x}, t), t] \quad (3.2.7)$$

La ec. 3.2.5 se puede escribir como

$$\frac{dy}{dt} = \dot{y} = \frac{Dy_k}{Dt} \dot{x}_k = \dot{y}_k \dot{x}_k \quad (3.2.8)$$

Definición 3.2.2. La derivada material de una función espacial y_k está dada por la ecuación siguiente

$$\frac{D}{Dt} y_k = \dot{y}_k = \frac{\partial y_k}{\partial t} + y_{k,l} \frac{\partial x_l}{\partial t} \quad (3.2.9)$$

Al primer término del miembro de la derecha de la ec. 3.2.9 se le llama rapidez local o estacionaria mientras que al segundo se le llama rapidez convectiva.

Se puede usar el símbolo $\frac{D}{Dt}$ para indicar la derivada material de vectores espaciales y vectores materiales de acuerdo con las expresiones siguientes

i) vectores materiales; $Y_k = Y_k(\underline{x}, t)$

$$\frac{D}{Dt} Y_k = \dot{Y}_k = \frac{\partial Y_k}{\partial t} \quad (3.2.10)$$

ii) vectores espaciales; $y_k = y_k(\underline{x}, t)$

$$\frac{D}{Dt} y_k = \dot{y}_k = \frac{\partial y_k}{\partial t} + y_{k,l} \frac{\partial x_l}{\partial t} \quad (3.2.11)$$

NOTA 3.2.1. Obsérvese que, en general, para un vector espacial se presenta la desigualdad siguiente entre operadores

$$\frac{\partial}{\partial t} \neq \frac{D}{Dt} \quad (3.2.12)$$

Es fácil comprobar que la derivada material obedece las reglas de derivación parcial que involucran sumas y productos, es decir

$$\frac{D}{Dt} (y_k + z_k) = \frac{D}{Dt} y_k + \frac{D}{Dt} z_k \quad (3.2.13)$$

$$\frac{D}{Dt} (y_k z_l) = \frac{D}{Dt} y_k z_l + y_k \frac{D}{Dt} z_l \quad (3.2.14)$$

Definición 3.2.3. El vector Velocidad \underline{v} de una partícula ^{es la} rapidez de variación material respecto al tiempo de su vector de posición.

$$\underline{v} = \underline{v}(\underline{x}, t) = \frac{d\underline{r}}{dt} = v_k \dot{x}_k \quad (3.2.15)$$

donde
$$\underline{v}_k = \frac{\partial x_k}{\partial t} = \dot{x}_k = \frac{Dx_k}{Dt} \quad (3.2.16)$$

donde \underline{x} es constante en $\underline{x}_k = \underline{x}_k(\underline{x}, t)$

De acuerdo con la ec. 2.4.7 se tiene que

$$\underline{p} = \underline{P} + \underline{u} - \underline{b} \quad (3.2.17)$$

Como \underline{b} es un vector constante y \underline{P} es independiente del tiempo se tendrá que en base a la ec. 3.2.17 la ec. 3.2.15 se reduce a

$$\underline{v} = \underline{\dot{u}} \quad \text{o bien} \quad \underline{v}_k = \frac{D}{Dt} u_k \quad (3.2.18)$$

considerando a \underline{x} constante.

En la ec. 3.2.15 se puede considerar que se conoce la identidad de la partícula \underline{x} y tener

$$\underline{v} = \underline{v}(\underline{x}, t) \quad (3.2.18)$$

que de acuerdo con el movimiento inverso dado por la ec. 2.2.2, es decir $\underline{x} = \underline{x}(\underline{x}, t)$, la ecuación 3.2.18 queda

$$\underline{v} = \underline{v}[\underline{x}(\underline{x}, t), t] = \underline{v}(\underline{x}, t) \quad (3.2.19)$$

Entonces se puede concluir que existen dos formas para describir al vector velocidad \underline{v} ; la descripción material dada por la ec. 3.2.18 y la descripción espacial dada por la ec. 3.2.19.

Definición 3.2.4. El vector aceleración \underline{a} de una partícula es la rapidez de variación respecto al tiempo del vector velocidad material

locidad correspondiente. Es decir

$$\underline{a} = \frac{d\underline{v}}{dt} = \frac{D\underline{v}_k}{Dt} \underline{e}_k \quad (3.2.20)$$

$$a_k = \frac{\partial v_k}{\partial t} + v_{k,l} v_l \quad (3.2.21)$$

NOTA 3.2.2. En la representación lagrangiana, es identificable la partícula material con una velocidad o aceleración dadas. Este esquema es una extensión inmediata de la mecánica de la partícula. Sin embargo la descripción euleriana no tiene equivalencia en la mecánica de la partícula y lo que sucede es que en un tiempo t se conocen los vectores velocidad y aceleración asociados a cada punto espacial pero no se conoce la partícula que lo ocupa. Como el movimiento mapea puntos materiales a puntos espaciales, el punto mapeado adquirirá la velocidad y la aceleración asociadas a tal punto en tal instante.

Definición 3.2.5. Punto de estancamiento es aquel en el cual $\underline{v} = \underline{0}$

Definición 3.2.6. Movimiento estacionario es aquel que su velocidad no varía con el tiempo, es decir $\underline{v} = \underline{v}(\underline{x})$.

Definición 3.2.7. Movimiento unidimensional o lineal es aquel en que se anulan dos componentes del vector velocidad y la tercera componente depende de una sola variable espacial. Las ecuaciones siguientes definen a tal movimiento

$$v_1 = v_1(x_1, t) \quad ; \quad v_2 = v_3 = 0 \quad (3.2.22)$$

En forma análoga se puede definir el movimiento plano.

Una vez definido el concepto de derivada material conviene aplicarlo a los conceptos que están presentes en los axiomas básicos de la Mecánica. Dentro de los conceptos se cuentan las diferenciales de longitud, superficie y de volumen, las integrales que involucran regiones tales como líneas, superficies y volúmenes los tensores de deformación, etc. En el inciso 3-3 se presentan tales aplicaciones.

Ejemplo 3.2.1. El campo de desplazamientos de un cuerpo está dado en su forma lagrangiana como $u_1 = 0$; $u_2 = e^t(x_2 - x_3)/2 + e^{-t}(x_2 - x_3)/2 - x_2$; $u_3 = e^t(x_2 + x_3)/2 - e^{-t}(x_2 - x_3)/2 - x_3$. Determinar las componentes de velocidad en su forma lagrangiana.

De acuerdo a la Ec. 3.2.18 se tiene que

$$\underline{v} = \dot{\underline{u}} = \frac{D\underline{u}}{Dt}$$

Como \underline{u} es una función material

$$v_i = \frac{\partial u_i}{\partial t} \quad \text{o} \quad v_k = \frac{\partial u_k}{\partial t}$$

entonces

$$v_1 = 0; v_2 = e^t(x_2 + x_3)/2 - e^{-t}(x_2 - x_3)/2; v_3 = e^t(x_2 + x_3)/2 + e^{-t}(x_2 - x_3)/2$$

Ejemplo 3.2.2. El campo de velocidades de un cuerpo está dado por las siguientes ecuaciones

$$v_1 = x_1/(1+t); \quad v_2 = 2x_2/(1+t); \quad v_3 = 3x_3/(1+t)$$

Determinar las componentes de aceleración para este movimiento.

De acuerdo a la ec. 3.2.20 se tiene $\underline{a} = \frac{D\underline{v}}{Dt}$

Como \underline{v} es una función espacial por la Ec. 3.2.9

$$\frac{Dv_k}{Dt} = \left(\frac{\partial v_k}{\partial t} + \frac{\partial v_k}{\partial x_l} \frac{\partial x_l}{\partial t} \right) \dot{x}_k = 0$$

$$\frac{Dv_k}{Dt} = \frac{\partial v_k}{\partial t} + v_{k,l} v_l = \frac{\partial v_k}{\partial t} + v_{k,1} v_1 + v_{k,2} v_2 + v_{k,3} v_3 = 0$$

$$a_1 = \frac{Dv_1}{Dt} = \frac{-x_1}{(1+t)^2} + \frac{1}{1+t} \left(\frac{x_1}{1+t} \right) + 0 + 0 = 0$$

$$a_2 = \frac{Dv_2}{Dt} = -\frac{2x_2}{(1+t)^2} + 0 + \frac{2}{(1+t)} \left(\frac{2x_2}{1+t} \right) + 0 = \frac{2x_2}{(1+t)^2}$$

$$a_3 = \frac{Dv_3}{Dt} = -\frac{3x_3}{(1+t)^2} + 0 + 0 + \frac{3}{(1+t)} \left(\frac{3x_3}{1+t} \right) = \frac{6x_3}{(1+t)^2}$$

3.3 Derivadas Materiales de diferenciales.

Se requiere este tipo de rapidez de variación ya que aparecen acompañados con los operadores de integración.

Para los desarrollos que siguen se necesita conocer la derivada material de los gradientes de desplazamiento.

La derivada material de la diferencial dx_k se obtendrá usando la ec. 2.3.1a

$$\frac{D}{Dt} (dx_k) = \frac{D}{Dt} \left(\frac{\partial x_k}{\partial X_k} dX_k \right) \quad (3.3.1)$$

puesto que en la definición de derivada material X se considera fija y además los operadores $\frac{D}{Dt}$ y $\frac{\partial}{\partial X_k}$ son intercambiables, entonces la ec. 3.3.1 se reduce a

$$\frac{D}{Dt} (dx_k) = \frac{\partial}{\partial X_k} \left(\frac{Dx_k}{Dt} \right) dX_k \quad (3.3.2)$$

sustituyendo la ec. 3.2.16 en la ec. 3.3.2 y usando la regla de la cadena para derivadas parciales se tendrá que

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} (dx_k) &= \frac{\partial v_k}{\partial X_k} dX_k = \frac{\partial v_k}{\partial x_l} \frac{\partial x_l}{\partial X_k} dX_k = \\ &= v_{k,l} x_{l,k} dX_k = v_{k,l} dx_l \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

Si en la ec. 3.3.3 se sustituye el valor de dx_k por el dado en la ec. 2.3.1a se tendrá

$$\frac{D}{Dt} (x_{l,k} dx_k) = \frac{D}{Dt} (x_{l,k}) dx_k = \sqrt{v_{k,l}} x_{l,k} dx_k \quad (3.3.4)$$

la ecuación anterior se puede escribir como

$$\frac{D}{Dt} (x_{k,k}) = \sqrt{v_{k,l}} x_{k,l} \quad (3.3.5)$$

Para calcular la derivada del gradiente de deformación $\frac{D}{Dt} (x_{k,l})$ se parte de la ec. 2.3.2a

$$\frac{D}{Dt} (\delta_{kl}) = \frac{D}{Dt} (x_{k,k} x_{k,l}) = \frac{D}{Dt} (x_{k,k}) x_{k,l} + x_{k,k} \frac{D}{Dt} (x_{k,l}) \quad (3.3.6)$$

tomando en cuenta que $\frac{D}{Dt} (\delta_{kl}) = 0$ y la ec. 3.3.5, la ec. 3.3.6 se reduce a

$$x_{k,k} \frac{D}{Dt} (x_{k,l}) + \sqrt{v_{k,m}} x_{m,k} x_{k,l} = 0 \quad (3.3.7)$$

tomando en cuenta que la ec. 2.3.2a establece que

$$x_{m,k} x_{k,l} = \delta_{ml} \quad (3.3.8)$$

sustituyendo la ec. 3.3.8 en la ec. 3.3.7 se tiene

$$x_{k,k} \frac{D}{Dt} (x_{k,l}) + \sqrt{v_{k,m}} \delta_{ml} = 0 \quad (3.3.9)$$

multiplicando la ec. 3.3.9 por $x_{k,l}$ y usando la ec. 2.3.2a se tiene

$$x_{k,l} x_{k,k} \frac{D}{Dt} (x_{k,k}) + \sqrt{v_{k,l}} x_{k,l} = 0$$

o bien

$$\delta_{kl} \frac{D}{Dt} (x_{k,k}) + \sqrt{v_{k,l}} x_{k,l} = 0 \quad (3.3.10)$$

la ec. 3.3.10 se puede escribir como

$$\frac{D}{Dt} (x_{k,k}) = -\sqrt{v_{k,l}} x_{k,l} \quad (3.3.11)$$

Teorema 3.3.1 La derivada material del cuadrado de la diferencial de longitud está dada por

$$\frac{D}{Dt} (ds)^2 = 2 d_{kl} dx_k dx_l \quad (3.3.12)$$

donde d_{kl} es el tensor rapidez de deformación de Euler cuya expresión estará dada por

$$d_{kl} = \sqrt{v_{k,l}} = \frac{1}{2} (\sqrt{v_{k,l}} + \sqrt{v_{l,k}}) \quad (3.3.13)$$

De acuerdo con la ec. 2.2.8 y la ec. 3.3.3 se tiene el desarrollo siguiente

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} (ds)^2 &= \frac{D}{Dt} (dx_k dx_k) = 2 dx_k \frac{D}{Dt} (dx_k) = \\ &= 2 \sqrt{v_{k,l}} dx_k dx_l \end{aligned} \quad (3.3.13)$$

Tomando en cuenta que la ec. 3.3.13 es simétrica, se podrá escribir como

$$\frac{D}{Dt} (ds)^2 = (\sqrt{v_{k,l}} + \sqrt{v_{l,k}}) dx_k dx_l = 2 d_{kl} dx_k dx_l \quad (3.3.12)$$

que es precisamente la ec. 3.3.12.

De la ec. 3.3.12 se puede aseverar que $\frac{D}{Dt}(ds)^2 = 0$ si y sólo si $d_{kl} = 0$. Lo anterior implica que la distancia entre dos puntos vecinos $|dx|$, no varía respecto al tiempo, que es por definición el movimiento de cuerpo rígido. Lo anterior está contemplado en el teorema de Killing.

Teorema 3.3.2. Teorema de Killing. La anulacion del tensor de deformación de Euler constituye la condición necesaria y suficiente para que el movimiento de un cuerpo sea de cuerpo rígido.

Teorema 3.3.3. La derivada material de la diferencial de área, -- está dada por la ecuación siguiente

$$\frac{D}{Dt}(da_k) = \bar{v}_{m,m} da_k - \bar{v}_{k,m} da_m \quad (3.3.13)$$

Para demostrar la ec. 3.3.13 se requiere calcular la derivada material del jacobiano de la transformación, j .

$$\frac{D}{Dt} j = \frac{D}{Dt} |x_{k,l}| = \frac{\partial j}{\partial (x_{k,l})} \frac{D x_{k,l}}{Dt} \quad (3.3.14)$$

sustituyendo las ecs. 2.3.5, 3.3.5 en la ec. 3.3.14 se obtiene la expresión siguiente

$$\frac{D}{Dt} j = \int x_{k,k} \bar{v}_{l,l} x_{l,k} = j \delta_{kl} \bar{v}_{k,l} = j \bar{v}_{k,k} \quad (3.3.15)$$

Para calcular $\frac{D}{Dt} da_k$ se hará uso de la ec. 2.11.7.

$$\frac{D}{Dt}(da_k) = j \bar{v}_{m,m} x_{k,k} dA_k - j \bar{v}_{k,l} x_{k,l} dA_k \quad (3.3.16)$$

sustituyendo las ecs. 3.3.11 y 3.3.15 en la ec 3.3.16 se obtiene

$$\frac{D}{Dt}(da_k) = j \bar{v}_{m,m} x_{k,k} dA_k - j \bar{v}_{k,l} x_{k,l} dA_k \quad (3.3.17)$$

usando la ec. 2.11.7 se tendrá

$$\frac{D}{Dt}(da_k) = \bar{v}_{m,m} da_k - \bar{v}_{k,l} da_l \quad (3.3.13)$$

que es la ec. 3.3.13.

Teorema 3.3.4. La derivada material de la diferencial de volumen está dada por la expresión

$$\frac{D}{Dt}(d\bar{v}) = \bar{v}_{k,k} d\bar{v} = I_d d\bar{v} \quad (3.3.18)$$

donde I_d es el primer invariante del tensor rapidez de deformación de Euler.

Para la demostración de este teorema se hará uso de las ecs. 2.11.18 y 3.3.14 obteniéndose

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt}(d\bar{v}) &= \frac{D}{Dt}(j d\bar{v}) \\ &= \frac{Dj}{Dt} d\bar{v} \\ &= j \bar{v}_{k,k} d\bar{v} \\ &= \bar{v}_{k,k} d\bar{v} \\ &= I_d d\bar{v} \end{aligned} \quad (3.3.18)$$

3.4 Derivadas materiales de integrales.

En la Mecánica del Medio Continuo se presentan conceptos expresados a través de integrales de línea, superficie y volumen. A continuación se presentan las derivadas materiales de tales integrales.

La derivada material de la integral de línea de cualquier campo φ sobre una curva material C , está dado por

$$\frac{D}{Dt} \int_C \varphi dx_k = \int_C (\dot{\varphi} dx_k + \varphi v_{k,l} dx_l) \quad (3.4.1)$$

Puesto que la curva C es material, la integral sobre tal curva tendrá un límite fijo en la descripción material y se podrá efectuar el intercambio de los operadores derivada material e integral. Entonces, trabajando con el término de la izquierda de la ec. 3.4.1, se tiene

$$\frac{D}{Dt} \int_C \varphi dx_k = \int_C \frac{D}{Dt} (\varphi dx_k) = \int_C \left[\frac{D}{Dt} \varphi dx_k + \varphi \frac{D}{Dt} dx_k \right] \quad (3.4.2)$$

sustituyendo la ec. 3.3.3 en la ec. 3.4.2 se tendrá la ec. 3.4.1.

Cuando la integral se hace sobre una curva espacial fija, la derivada material resultará ser

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_C \varphi dx_k = \int_C \frac{\partial \varphi}{\partial t} dx_k \quad (3.4.3)$$

La derivada material de una integral de superficie de cualquier campo sobre una superficie material \mathcal{S} estará dada por las expresiones siguientes.

$$\frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{S}} \varphi da_k = \int_{\mathcal{S}} [\dot{\varphi} da_k + \varphi (v_{l,k} da_l - v_{k,l} da_l)] \quad (3.4.4)$$

$$\frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{S}} q_k da_k = \int_{\mathcal{S}} (\dot{q}_k + q_k v_{l,k} - q_l v_{k,l}) da_k \quad (3.4.5)$$

La demostración de las ecs. 3.4.4 y 3.4.5 se hace al poder intercambiar los operadores y utilizando la ec. 3.3.13. Para el caso de la superficie de integración sea espacial y fija se deberán tener las expresiones.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{S}} \varphi da_k = \int_{\mathcal{S}} \frac{\partial \varphi}{\partial t} da_k \quad (3.4.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{S}} q_k da_k = \int_{\mathcal{S}} \frac{\partial q_k}{\partial t} da_k \quad (3.4.7)$$

La derivada material de una integral de volumen de cualquier campo sobre un volumen material estará dada por la expresión

$$\frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{V}} \varphi d\tau = \int_{\mathcal{V}} (\dot{\varphi} + \varphi v_{k,k}) d\tau = \int_{\mathcal{V}} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + (\varphi v_k)_{,k} \right] d\tau \quad (3.4.8)$$

La demostración de la ec. 3.4.8 se hace al intercambiar los operadores y al utilizar la ec. 3.3.18.

3.5 Tensores rapidez de deformación.

Se ha definido al tensor rapidez de deformación de Euler $\dot{\Lambda}$ como la parte simétrica del gradiente de velocidades y está dado por la ec. 3.3.13

$$d_{kl} = \dot{\nu}_{(k,l)} = \frac{1}{2} (\dot{\nu}_{k,l} + \dot{\nu}_{l,k}) \quad (3.5.1)$$

También se puede definir un tensor antisimétrico con la parte antisimétrica del gradiente de velocidades. Tal tensor se representa por el símbolo $\dot{\omega}_{kl}$ y se denomina tensor giro (spin).

$$\dot{\omega}_{kl} = \dot{\nu}_{[k,l]} = \frac{1}{2} (\dot{\nu}_{k,l} - \dot{\nu}_{l,k}) \quad (3.5.2)$$

Al sumar las ecs. 3.5.1 y 3.5.2 se obtiene la expresión

$$\dot{\nu}_{k,l} = d_{kl} + \dot{\omega}_{kl} \quad (3.5.3)$$

De manera similar a como se trabajó con el tensor de rotaciones infinitesimales, del tensor de giro se puede construir un vector axial $\dot{\omega}_k$, llamado vector de vorticidad.

$$\dot{\omega}_k = \epsilon_{klm} \dot{\omega}_{ml} = \epsilon_{klm} \dot{\nu}_{m,l} \quad (3.5.4)$$

o bien

$$\dot{\omega} = \text{rot } \underline{v} \quad (3.5.5)$$

El significado físico de las componentes de los tensores rapidez de deformación y giro se entenderá tal y como se hizo para los tensores de deformación, o sea, mediante el estudio de la rapidez de variación respecto al tiempo de las longitudes y ángulos.

Para el caso del tensor rapidez de deformación de Euler, d_{kl} , se definirán las cantidades físicas siguientes.

Definición 3.5.1. Se entenderá por rapidez de alargamiento en la dirección unitaria \underline{n} en un punto \underline{x} , a la cantidad $d(\underline{n})$ definida por la expresión siguiente.

$$d(\underline{n}) = \frac{1}{ds} \frac{D(ds)}{Dt} = d_{kl} n_k n_l \quad (3.5.6)$$

$$\text{donde } n_k = \frac{dx_k}{ds} \quad (3.5.7)$$

Definición 3.5.2. Se define a la rapidez de corte $\dot{\Theta}(\underline{n}_1, \underline{n}_2)$ a la rapidez de variación respecto al tiempo del ángulo que forman dos vectores unitarios \underline{n}_1 y \underline{n}_2 en el punto \underline{x} .

Si las direcciones unitarias \underline{n}_1 , y \underline{n}_2 están dadas por la expresión

$$\underline{n}_1 = \frac{dx_1}{ds_1} \quad ; \quad \underline{n}_2 = \frac{dx_2}{ds_2} \quad (3.5.8)$$

la rapidez de corte $\dot{\Theta}(\underline{n}_1, \underline{n}_2)$ se obtendrá de la expresión

$$\dot{\Theta}(\underline{n}_1, \underline{n}_2) \sin \Theta(\underline{n}_1, \underline{n}_2) = 2 d_{kl} n_{1k} n_{2l} - [d(n_1) + d(n_2)] \cos \Theta(\underline{n}_1, \underline{n}_2) \quad (3.5.9)$$

Si la dirección \underline{n} de la ec. 3.5.6 se selecciona de tal manera que coincida con un eje coordenado, y sea éste el eje x_1 . Entonces se tendrá que $n_1 = 1$ y $n_2 = n_3 = 0$.

Con tales valores, la rapidez de alargamiento a lo largo del eje x_1 resulta ser, de acuerdo con la ec. 3.5.6,

$$d_{(1)} = d_{11} \quad (3.5.10)$$

Cuando se hace coincidir a \underline{n} con los otros ejes se tendrá que

$$d_{(2)} = d_{22} \quad ; \quad d_{(3)} = d_{33} \quad (3.5.11)$$

Si las direcciones $\underline{n}_1, \underline{n}_2$ que definen a la rapidez de corte $\dot{\phi}(\underline{n}_1, \underline{n}_2)$ se hacen coincidir con algunas direcciones de los ejes coordenados, por ejemplo \underline{n}_1 con x_1 y \underline{n}_2 con x_2 se tendrá, de acuerdo con la ec. 3.5.9.

$$-\dot{\phi}(1,2) = 2d_{12} \quad (3.5.12)$$

los siguientes resultados se obtienen al tomar los pares restantes de los ejes coordenados

$$-\dot{\phi}(2,3) = 2d_{23} \quad ; \quad -\dot{\phi}_{31} = 2d_{31} \quad (3.5.13)$$

Los resultados indicados por las ecs. 3.5.10 a 3.5.13 se resumen en el teorema siguiente.

Teorema 3.5.1. Las componentes normales del tensor rapidez de deformación de Euler son las rapidezces de alargamiento en las direcciones de los ejes coordenados y los componentes mixtos son la mitad de las rapidezces de corte de los ejes coordenados.

Para visualizar el significado físico del tensor de giro se deberá calcular la rapidez con la cual un elemento diferencial $d\underline{x}$ gira alrededor de una dirección unitaria \underline{D} .

Si $\phi(\underline{D}, \underline{n})$ es el ángulo tal que

$$\cos \phi(\underline{D}, \underline{n}) = \cos(\underline{D}, d\underline{x}) = \frac{d\underline{x}_k}{ds} D_k = n_k D_k \quad (3.5.14)$$

al calcular la derivada material de la ec. 3.5.14 se tiene

$$-\dot{\phi}(\underline{D}, \underline{n}) \sin \phi(\underline{D}, \underline{n}) = \sqrt{h_{ik}} n_k D_i - d(\underline{n}) \cos \phi(\underline{D}, \underline{n}) \quad (3.5.14)$$

Si el ángulo original entre $d\underline{x}$ y \underline{D} es de $\pi/2$, la ec. 3.5.14 se transforma en

$$-\dot{\phi}(\underline{D}, \underline{n}) = \sqrt{h_{ik}} n_k D_i \quad (3.5.15)$$

Si \underline{D} y \underline{n} se hacen coincidir con los ejes coordenados, por ejemplo, \underline{D} con x_1 y \underline{n} con x_2 , la ec. 3.5.15 se reduce a

$$-\dot{\phi}_{12} = \sqrt{h_{12}} \quad (3.5.16)$$

De acuerdo con la ec. 3.5.16 se puede afirmar que $\sqrt{h_{12}}$ es la rapidez a la cual un elemento alojado en la dirección del eje x_2 , está rotando hacia la dirección alojada en el eje x_1 y con sentido contrario a las manecillas del reloj.

La fig. 3.5.1 muestra la rapidez de rotación de los ejes x_1 y x_2 . De acuerdo con el concepto de

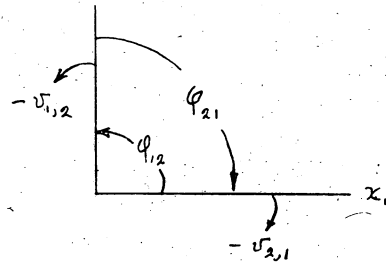


Fig. 3.5.1 Rapideces de rotación de los ejes coordenados x_1 y x_2 .

rapidez de corte, ésta se podrá calcular de acuerdo con los conceptos indicados en la fig. 3.5.1 y queda

$$-\theta_{(1,2)} = -\dot{\varphi}_{1,2} - \dot{\varphi}_{2,1} = 2d_{12} \quad (3.5.14)$$

Ahora bien, para calcular la rapidez de rotación en el sentido contrario a las manecillas del reloj, de acuerdo con la fig. 3.5.1 se tendrá que

$$\dot{\varphi}_{2,1} - \dot{\varphi}_{1,2} = v_{1,2} - v_{2,1} = 2d_{12} \quad (3.5.15)$$

Entonces la ec. 3.5.15 establece que la componente $w_{1,2}$ del tensor de giro, es la mitad de la diferencia relativa de las rapideces de rotación - en sentido contrario a las manecillas del

reloj - de los ejes coordenados x_1 y x_2 . Interpretaciones enteramente análogas se podrían hacer para las componentes restantes del tensor de giro.

Otra interpretación física que puede asociársele al tensor de giro se puede concluir del desarrollo siguiente

Sea \underline{n} un vector unitario dado por la Ec. 3.5.7, su derivada material estará dada por la expresión

$$\dot{n}_k = \frac{D}{Dt} \left(\frac{dx_k}{da} \right) = \frac{1}{da} \frac{D}{Dt} (dx_k) - \frac{1}{(da)^2} \frac{D(da) da}{Dt} \quad (3.5.16)$$

la ec. 3.5.16 se transforma en base a las ecs. 3.3.3 y 3.5.6 y queda

$$\dot{n}_k = [v_{k,l} - dc_{nl}] \delta_{kl} n_l = [d_{kl} + w_{kl} - dc_{nl}] n_l$$

$$\dot{n}_k = [d_{kl} - dc_{nl}] n_l + w_{kl} n_l \quad (3.5.17)$$

Si \underline{n} es una dirección principal del tensor rapidez de deformación de Euler, entonces debe satisfacer la expresión siguiente

$$(d_{kl} - dc_{nl}) \delta_{kl} n_l = 0 \quad (3.5.18)$$

Entonces para el caso de ser \underline{n}_k las direcciones principales del tensor d_{kl} se tiene que la forma especial de la ec. 3.5.17 - deberá ser la siguiente, en base a la ec. 3.5.18-

$$\dot{n}_k = w_{kl} n_l \quad (3.5.19)$$

La ec. 3.5.20 permite la interpretación física del tensor de giro contenida en el teorema siguiente

Teorema 3.5.2.

El tensor de giro es la velocidad angular de los ejes principales del tensor rapidez de deformación de Euler.

Teorema 3.5.3

Las derivadas materiales de los tensores de deformación de -

Lagrange y de Euler se cuantifican de acuerdo con las expresiones siguientes

$$\dot{E}_{KL} = \frac{D}{Dt} E_{KL} = d_{kl} X_{k,K} X_{L,l} \quad (3.5.20)$$

$$\dot{e}_{kl} = \frac{D}{Dt} e_{kl} = d_{kl} - e_{mk} v_{m,l} - e_{ml} v_{m,k} \quad (3.5.21)$$

Para demostrar la ec. 3.5.20 se partirá de la definición de derivada material, es decir

$$\dot{E}_{KL} = \frac{DE_{KL}}{Dt} = \frac{\partial E_{KL}}{\partial t} \quad (3.5.22)$$

la ec. 3.5.22 se desarrollará usando la ec. 2.4.4

$$\dot{E}_{KL} = \frac{1}{2} \frac{D}{Dt} (G_{KL} - \delta_{KL}) = \frac{1}{2} \frac{DG_{KL}}{Dt} \quad (3.5.23)$$

en base a la ec. 2.3.10b la ec. 3.5.23 se puede escribir como

$$\dot{E}_{KL} = \frac{1}{2} \frac{D}{Dt} (X_{k,K} X_{L,l}) = \frac{1}{2} \left[\frac{D(X_{k,K})}{Dt} X_{L,l} + X_{k,K} \frac{D(X_{L,l})}{Dt} \right] \quad (3.5.24)$$

la ec. 3.5.24 se transforma en la ec. 3.5.20 al hacer uso de la ec. 3.3.5.

Para demostrar la ec. 3.5.21 se hace uso de la ec. 2.4.6b. Así

$$\begin{aligned} \dot{e}_{kl} &= \frac{D}{Dt} (E_{KL} X_{k,K} X_{L,l}) = \dot{E}_{KL} X_{k,K} X_{L,l} + E_{KL} \frac{D}{Dt} (X_{k,K} X_{L,l}) \\ &\quad + E_{KL} X_{k,K} \frac{D}{Dt} X_{L,l} \quad (3.5.25) \end{aligned}$$

al sustituir las ecs. 3.5.20 y 3.3.11 en la ec. 3.5.25, ésta se transforma en la ec. 3.5.21.

También es fácil demostrar que

$$\dot{G}_{KL} = 2 \dot{E}_{KL} \quad (3.5.25)$$

$$\dot{e}_{kl} = -2 \dot{e}_{kl} = c_{mk} v_{m,l} - c_{ml} v_{m,k} \quad (3.5.26)$$

De las ecs 3.5.20 y 3.5.21 se puede observar que tanto \dot{E}_{KL} como \dot{e}_{kl} son distintos de d_{kl} . Para el caso especial de tener $t=0$, es decir en la configuración no deformada se tendrá que

$$X_K = \delta_{kK} X_k \quad (3.5.27)$$

$$\dot{E}_{KL}(X, 0) = d_{kl} \delta_{kK} \delta_{lL} \quad (3.5.28)$$

$$\dot{e}_{kl}(X, 0) = d_{kl} \quad (3.5.29)$$

Para el caso de la teoría de deformaciones infinitesimales los gradientes de deformación son aproximadamente iguales a los cambiadores y estos a su vez son deltas de Kronecker. Por lo tanto, de acuerdo con la ec. 3.5.20 se tendrá que

$$\dot{E}_{KL} \approx d_{kl} \delta_{kK} \delta_{lL} \quad (3.5.30)$$

Para que se presente la condición siguiente

$$\dot{e}_{kl} \approx d_{kl} \quad (3.5.31)$$

se requiere que tanto ϵ_{kl} , d_{kl} y w_{kl} sean infinitesimales para que de la ec. 3.5.21 se pueda pasar a la ec. 3.5.31.

Ejemplo 3.5.1. Sea la descripción euleriana del movimiento de un cuerpo

$$x_1 = X_1 + X_3 (e^{-3t} - 1)$$

$$x_2 = X_2 + X_3 (e^{-2t} - 1)$$

$$x_3 = X_3$$

Considerando válida la teoría de deformaciones pequeñas, y los sistemas coordenados $Ox_1x_2x_3$, $OX_1X_2X_3$ superpuestos con $\underline{b}=0$, calcular los siguientes conceptos

- Los campos de desplazamientos y velocidades.
- Los tensores infinitesimales de deformación $\tilde{\epsilon}_{kl}$ y de rotación $\tilde{\Gamma}_{kl}$.
- Los tensores infinitesimales rapidez de deformación d_{kl} y giro (spin) w_{kl} .
- Los tensores $\tilde{\epsilon}_{kl}$ y $\tilde{\Gamma}_{kl}$ y comparar los resultados con los obtenidos en el inciso iii).

De acuerdo con la ec. 2.4.9

$$u_k = x_k - X_k \quad \text{por lo tanto}$$

$$u_1 = X_3 (e^{-3t} - 1), \quad u_2 = X_3 (e^{-2t} - 1), \quad u_3 = 0$$

utilizando la ec. 3.2.18

$$\underline{v} = \frac{D\underline{U}}{Dt}$$

Como \underline{U} es una función espacial, se utiliza la ec. 3.2.11 y se tiene

$$\underline{v} = \frac{D\underline{U}}{Dt} = \left(\frac{\partial u_k}{\partial t} + \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \frac{\partial x_l}{\partial t} \right) \underline{i}_k$$

$$v_k = \frac{\partial u_k}{\partial t} + \frac{\partial u_k}{\partial x_l} v_l = \frac{\partial u_k}{\partial t} + \frac{\partial u_k}{\partial x_1} v_1 + \frac{\partial u_k}{\partial x_2} v_2 + \frac{\partial u_k}{\partial x_3} v_3$$

$$v_1 = -3X_3 e^{-3t}; \quad v_2 = -2X_3 e^{-2t}; \quad v_3 = 0$$

Para resolver el inciso ii) se hace uso de la expresión 2.6.9 dada por

$$u_{k,l} = \tilde{\epsilon}_{kl} + \tilde{\Gamma}_{kl} \quad \sigma \quad [u_{k,l}] = [\tilde{\epsilon}_{kl}] + [\tilde{\Gamma}_{kl}]$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \frac{\partial u_3}{\partial x_1} = \frac{\partial u_3}{\partial x_2} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_3} = e^{-3t} - 1; \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_3} = e^{-2t} - 1$$

$$[u_{k,l}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & e^{-3t} - 1 \\ 0 & 0 & e^{-2t} - 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

descomponiendo la matriz en una parte simétrica y una antisimétrica:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & e^{-3t} - 1 \\ 0 & 0 & e^{-2t} - 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & e^{-3t} - 1 \\ 0 & 0 & e^{-2t} - 1 \\ e^{-3t} - 1 & e^{-2t} - 1 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & e^{-3t} - 1 \\ 0 & 0 & e^{-2t} - 1 \\ -e^{-3t} + 1 & -e^{-2t} + 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\tilde{\epsilon}_{kl}] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & e^{-3t} - 1 \\ 0 & 0 & e^{-2t} - 1 \\ e^{-3t} - 1 & e^{-2t} - 1 & 0 \end{bmatrix}$$

3-25

$$[\tilde{\Gamma}_{kl}] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & e^{-3t} \\ 0 & 0 & e^{-2t} \\ -e^{-3t} & -e^{-2t} & 0 \end{bmatrix}$$

Para resolver el inciso iii) se hace uso de la expresión 3.5.3. -
dada por

$$v_{k,l} = d_{kl} - w_{kl} \quad \sigma \quad [v_{k,l}] = [d_{kl}] + [w_{kl}]$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} = \frac{\partial v_1}{\partial x_2} = \frac{\partial v_2}{\partial x_1} = \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = \frac{\partial v_3}{\partial x_1} = \frac{\partial v_3}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_3} = -3e^{-3t} \quad ; \quad \frac{\partial v_2}{\partial x_3} = -2e^{-2t}$$

$$[d_{k,l}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3e^{-3t} \\ 0 & 0 & -2e^{-2t} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

haciendo la descomposición de la matriz en una parte simétrica y una antisimétrica, se tiene

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -3e^{-3t} \\ 0 & 0 & -2e^{-2t} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{3}{2}e^{-3t} \\ 0 & 0 & -e^{-2t} \\ -\frac{3}{2}e^{-3t} & -e^{-2t} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{3}{2}e^{-3t} \\ 0 & 0 & -e^{-2t} \\ \frac{3}{2}e^{-3t} & e^{-2t} & 0 \end{bmatrix}$$

$$[d_{kl}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{3}{2}e^{-3t} \\ 0 & 0 & -e^{-2t} \\ -\frac{3}{2}e^{-3t} & -e^{-2t} & 0 \end{bmatrix}$$

3-26

$$[w_{kl}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3e^{-3t} \\ 0 & 0 & -e^{-2t} \\ \frac{3}{2}e^{-3t} & e^{-2t} & 0 \end{bmatrix}$$

El inciso iv) se resuelve utilizando el co-concepto de derivada material, es decir $\dot{\tilde{E}} = \frac{D\tilde{E}_{kl}}{Dt}$; como \tilde{E}_{kl} es una función escalar, utilizando la expresión 3.2.9, se tiene

$$\frac{D\tilde{E}_{kl}}{Dt} = \frac{\partial \tilde{E}_{kl}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{E}_{kl}}{\partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial t}$$

$$\frac{D\tilde{E}_{11}}{Dt} = \frac{D\tilde{E}_{22}}{Dt} = \frac{D\tilde{E}_{33}}{Dt} = \frac{D\tilde{E}_{12}}{Dt} = \frac{D\tilde{E}_{21}}{Dt} = 0$$

$$\frac{D\tilde{E}_{13}}{Dt} = \frac{D\tilde{E}_{31}}{Dt} = -3e^{-3t}$$

$$\frac{D\tilde{E}_{23}}{Dt} = \frac{D\tilde{E}_{32}}{Dt} = -2e^{-2t}$$

$$[\dot{\tilde{E}}_{kl}] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3e^{-3t} \\ 0 & 0 & -2e^{-2t} \\ -3e^{-3t} & -2e^{-2t} & 0 \end{bmatrix}$$

resultado que es de esperarse, debido a la expresión 3.3.1, mediante la cual, $d_{kl} \approx \tilde{E}_{kl}$; finalmente

$$[\dot{\tilde{\Gamma}}_{kl}] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3e^{-3t} \\ 0 & 0 & -2e^{-2t} \\ 3e^{-3t} & 2e^{-2t} & 0 \end{bmatrix}$$

de donde

$$\dot{\tilde{\Gamma}}_{kl} \approx w_{kl}$$

3.6 Axiomas fundamentales de la Mecánica del Medio Continuo.

En este inciso se definen los elementos necesarios para enunciar cuatro de los cinco principios básicos que se van a utilizar en el desarrollo de la teoría de la Mecánica del Medio Continuo. Los principios básicos se consideran que son los resultados auto-evidentes de nuestra experiencia con el mundo físico.

En la mecánica a cada cuerpo se le asocia una medida de la materia, denominada masa.

Definición 3.6.1. Se define a la masa M de un cuerpo, como una cantidad no negativa, aditiva e invariante al movimiento. Son válidas las aseveraciones siguientes

- i) La masa se define con su propia dimensión, independiente de la longitud y del tiempo.
- ii) Si la masa es absolutamente continua en las variables espaciales, existe entonces una densidad de masa ρ tal que la masa total del cuerpo se podrá calcular con la expresión.

$$M = \int_{\mathcal{V}} \rho \, dv \quad (3.6.1)$$

La densidad ρ tendrá unidades de masa por unidad de volumen, es decir, ML^{-3} .

- iii) La densidad de masa será tal que cumpla la condición

$$0 \leq \rho < \infty \quad (3.6.2)$$

Definición 3.6.2. La cantidad de movimiento o cantidad de movimiento lineal \underline{P} de un medio continuo de volumen total \mathcal{V} , se define mediante la expresión siguiente

$$\underline{P} = \int_{\mathcal{V}} \rho \underline{v} \, dv \quad (3.6.2)$$

donde \underline{v} es el vector velocidad y ρ la densidad de masa del medio. \underline{P} es una cantidad vectorial.

Definición 3.6.3. El momento de la cantidad de movimiento o cantidad de movimiento angular \underline{H}^0 respecto al origen O , de un medio continuo de volumen total \mathcal{V} , se define como:

$$\underline{H}^0 = \int_{\mathcal{V}} \rho \underline{p} \times \underline{v} \, dv \quad (3.6.3)$$

\underline{p} es el vector de posición de la partícula con diferencial de masa, $dm = \rho \, dv$. También \underline{H}^0 es una cantidad vectorial.

Definición 3.6.4. La energía cinética \mathcal{K} de un medio continuo de volumen \mathcal{V} se define mediante

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} \rho \underline{v} \cdot \underline{v} \, dv \quad (3.6.4)$$

La energía cinética es una cantidad escalar.

Las ecs. 3.6.2 a 3.6.4, expresadas en términos de las componentes en un sistema cartesiano de referencia, quedan

$$P_k = \int_{\mathcal{V}} \rho v_k \, dv \quad (3.6.5)$$

$$H_k^0 = \int_{\mathcal{V}} \rho e_{klm} x_l v_m \, dv \quad (3.6.6)$$

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} \rho v_k v_k \, dv \quad (3.6.7)$$

Axioma Fundamental No. 1 - PRINCIPIO DE LA CONSERVACION DE LA MASA. La masa total del cuerpo no cambia durante el movimiento. Cuando este principio es válido para una vecindad infinitesimal

mal de cada punto material, se dice que la masa se conserva localmente.

Si ρ_0 , es la densidad de masa inicial del medio continuo, entonces su masa total M en cualquier configuración debe ser la misma. Lo anterior se expresa con:

$$M = \int_{\mathcal{M}} \rho \, dv = \int_V \rho_0 \, dV \quad (3.6.8)$$

Otra forma de expresar la conservación de la masa consiste en hacer cero su derivada material, es decir

$$\frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{M}} \rho \, dv = 0 \quad (3.6.9)$$

Al trabajar con el criterio dado por la ec. 3.6.8 se pueden presentar las formas siguientes para el principio de conservación de la masa.

i) Conservación global de la masa. Usando la ec. 2.11.18, la ec. 3.6.8 se transforma en

$$\int_V (\rho_0 - j\rho) \, dV = 0 \quad (3.6.10a)$$

$$\int_{\mathcal{M}} (\rho - j^{-1}\rho_0) \, dv = 0 \quad (3.6.10b)$$

ii) Conservación local de la masa. Al hacer $V \rightarrow 0$ en la ec. 3.6.10a, se tendrá que

$$\rho_0 = j\rho = \rho \sqrt{III_e} = (1 + 2I_E + 4II_e + 8III_e)^{1/2} \quad (3.6.11a)$$

Al hacer $\mathcal{M} \rightarrow 0$ en la ec. 3.6.10b se obtiene

$$\rho = j^{-1}\rho_0 = \rho_0 \sqrt{III_e} = \rho_0 (1 - 2I_e + 4II_e - 8III_e)^{1/2} \quad (3.6.11b)$$

Al trabajar con el criterio dado por la ec. 3.6.9 se llega a la forma siguiente del principio de conservación de la masa

i) Conservación global de la masa. Intercambiando operadores en la ec. 3.6.9 y usando la ec. 3.3.18 se obtendrá

$$\frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{M}} \rho \, dv = \int_{\mathcal{M}} \frac{D}{Dt} (\rho \, dv) = 0 \quad (3.6.12a)$$

$$\frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{M}} \rho \, dv = \int_{\mathcal{M}} [\dot{\rho} + \rho v_{k,k}] \, dv = \int_{\mathcal{M}} (\dot{\rho} + \rho v_{k,k}) \, dv = \int_{\mathcal{M}} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho v_k)_{,k} \right] \, dv = 0 \quad (3.6.12b)$$

ii) Conservación local de la masa. Al hacer $\mathcal{M} \rightarrow 0$ en las ecs. 3.6.12 se obtiene

$$\frac{D}{Dt} (\rho \, dv) = 0 \quad (3.6.13a)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho v_k)_{,k} = 0 \quad (3.6.13b)$$

Algunos autores acostumbran llamar ecuaciones de continuidad a las ecuaciones resultantes del principio de conservación de la masa.

Axioma fundamental No. 2. PRINCIPIO DEL BALANCE DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO. La rapidez de cambio respecto al tiempo de la cantidad de movimiento es igual a la fuerza resultante $\underline{\mathcal{F}}$ que actúa sobre dicho cuerpo.

$$\frac{d\underline{P}}{dt} = \underline{\mathcal{F}} \quad (3.6.14a)$$

o bien

$$\frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{M}} \rho v_k \, dv = \mathcal{F}_k \quad (3.6.14b)$$

Axioma fundamental No. 3. PRINCIPIO DEL BALANCE DEL MOMENTO DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO. La rapidez de cambio respecto al tiempo del momento de la cantidad de movimiento alrededor de un punto fijo O , es igual al momento resultante $\underline{\mathcal{M}}$, respecto al mismo punto O , que actúa en dicho cuerpo.

$$\frac{d\underline{H}^O}{dt} = \underline{\mathcal{M}} \quad (3.6.15a)$$

o bien

$$\frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{W}} \rho e_{kelm} x_l v_m dv = \dot{M}_k \quad (3.6.15b)$$

Nota 3.6.1. Las ecs. 3.6.14 y 3.6.15 son las ecuaciones de Euler del movimiento y se pueden considerar como extensiones de las leyes de Newton del movimiento para una partícula.

Axioma fundamental No. 4. PRINCIPIO DE LA CONSERVACION DE LA ENERGIA. La rapidez de cambio de la energía cinética \mathcal{K} , más la energía interna \mathcal{E} , es igual a la suma del trabajo que desarrollan las fuerzas externas por unidad de tiempo \mathcal{W} más otras energías que entran o salen del cuerpo, por unidad de tiempo \mathcal{U}_α .

$$\frac{D}{Dt} (\mathcal{K} + \mathcal{E}) = \mathcal{W} + \sum_{\alpha} \mathcal{U}_{\alpha}$$

Las fuentes de energía por unidad de tiempo \mathcal{U}_{α} pueden ser de energía calorífica, energía eléctrica, energía química, etc. Este axioma implica que las energías son aditivas y que el término que sirve para balancear todas las energías debidas a efectos externos es la energía interna \mathcal{E} . Para los Medios Continuos se supone una densidad de energía interna por unidad de masa, ε , tal que

$$\mathcal{E} = \int_{\mathcal{W}} \rho \varepsilon dv \quad (3.6.16)$$

En los capítulos que siguen se estudiarán en forma minuciosa los axiomas fundamentales 2, 3 y 4 y también se plantearán las bases para el axioma fundamental No. 5.

3.7 Tensores objetivos.

Conviene introducir en este capítulo un concepto relacionado con el movimiento del observador.

Definición 3.7.1. Se llaman cantidades objetivas aquellas cuyo valor es independiente del movimiento del observador.

Ejemplos de cantidades objetivas lo son la distancia entre dos puntos, el ángulo entre dos direcciones, las propiedades que definen a un material, etc. Cantidades como la posición y la velocidad de un punto sí dependen de la posición del observador y por lo tanto no son cantidades objetivas.

Si se tiene que un sistema de referencia rectangular \mathcal{R} está en movimiento de cuerpo rígido respecto a otro sistema de referencia también rectangular \mathcal{R}' , entonces un punto de coordenadas rectangulares x_k en la referencia \mathcal{R} y en el tiempo t , tendrá coordenadas rectangulares x'_k en la referencia \mathcal{R}' en el tiempo t' . Puesto que ambas referencias están en movimiento de cuerpo rígido una respecto de otra, se deberá tener la relación siguiente

$$x'_k(t') = Q_{kl}(t) x_l + b_k(t); \quad t' = t - a \quad (3.7.1)$$

La constante a , permite seleccionar el origen de los tiempos en las referencias \mathcal{X} y \mathcal{X}' . Desde luego que las cantidades $Q_{kl}(t) \equiv Q(t)$ y $b_k(t)$ son funciones del tiempo puesto que $b_k(t)$ es el movimiento del origen del sistema \mathcal{R} y $Q_{kl}(t)$ son los cosenos directores de la referencia \mathcal{R}' respecto a \mathcal{R} . Es decir

$$Q_{kl} Q_{ml} = Q_{kk} Q_{lm} = \delta_{km} \quad (3.7.2)$$

Se puede demostrar que la transformación dada por la ec. 3.7.1 con la condición indicada por la ec. 3.7.2 es la más gene--

ral en donde permanecen invariantes la longitud y el cambio de ángulo.

Un vector objetivo \underline{a} en la referencia \mathcal{R} , tendrá componentes a_k mientras que en la referencia \mathcal{R}' tendrá

$$a'_k = Q_{kl} a_l \quad (3.7.3)$$

Definición 3.7.2. Dos movimientos $X_k(X, t)$ y $X'_k(X, t')$ son objetivamente equivalentes si y sólo si satisfacen la expresión

$$X'_k(X, t') = Q_{kl}(t) X_l(X, t) + b_k(t); \quad t' = t - a \quad (3.7.4)$$

con $Q_{kl}(t)$ restringido por la ec. 3.7.2.

Dos movimientos objetivamente equivalentes difieren únicamente en la referencia y en el origen de los tiempos.

Así, si una referencia está fija y para un tiempo también fijo, los movimientos pueden hacerse coincidir mediante la superposición de un movimiento de cuerpo rígido y un movimiento del origen de los tiempos.

Definición 3.7.3. Se dice que una cantidad tensorial es objetiva si en cualquier par de movimientos, objetivamente equivalentes, obedecen las leyes de transformación apropiadas para cada tensor y para todos los tiempos.

Si a_k es un vector y S_{kl} un tensor de segundo orden, ambos objetivos, entonces, en dos movimientos objetivamente equivalentes deben satisfacer las leyes de transformación siguientes

$$a'_k(X, t') = Q_{kl}(t) a_l(X, t) \quad (3.7.5)$$

$$S'_{kl}(X, t') = Q_{km}(t) Q_{ln}(t) S_{mn}(X, t) \quad (3.7.6)$$

Desde luego que todos los tensores que son independientes del

tiempo son objetivos pero los que sí dependen del tiempo puede que no lo sean. Por ejemplo, considérese el vector velocidad \underline{v}'_k .

Usando la ec. 3.7.4 se tendrá

$$\frac{D}{Dt'} X'_k = Q_{kl} \dot{X}_l + \dot{Q}_{kl} X_l + \dot{b}_k \quad (3.7.7)$$

o bien:

$$v'_k = Q_{kl} v_l + \dot{Q}_{kl} X_l + \dot{b}_k \quad (3.7.8)$$

desde luego se puede observar que la ec. 3.7.8 no es de la forma dada por la ec. 3.7.5 y por lo tanto, la velocidad no es un tensor objetivo.

Teorema 3.7.1. El tensor rapidez de deformación de Euler d_{kl} es un tensor objetivo.

Usando la ec. 3.7.8 y la regla de la cadena se puede obtener la expresión

$$v'_{k,l} = Q_{km} v_{m,n} \frac{\partial X_n}{\partial X'_l} + \dot{Q}_{km} \frac{\partial X_m}{\partial X'_l} \quad (3.7.9)$$

Para calcular la derivada $\frac{\partial X_m}{\partial X'_l}$ se hará uso de la ec. 3.7.1. Es decir, despejando X_k se obtiene

$$X_k = Q_{mk} (X'_m - b_m) \quad (3.7.10)$$

entonces

$$\frac{\partial X_n}{\partial X'_l} = Q_{nl} \quad (3.7.11)$$

usando la ec. 3.7.11, la ec. 3.7.9 se transforma en

$$v'_{k,l} = Q_{km} Q_{ln} v_{m,n} + \dot{Q}_{km} Q_{lm} \quad (3.7.12)$$

análogamente, se podrá obtener la expresión siguiente

$$v'_{l,k} = Q_{km} Q_{ln} v_{n,m} + \dot{Q}_{lm} Q_{kl} \quad (3.7.13)$$

Sumando las ecs. 3.7.12 y 3.7.13 se obtienen

$$(\dot{v}_{k,l} + \dot{v}_{l,k}') = Q_{km} Q_{ln} (\dot{v}_{m,n} + \dot{v}_{n,m}') + \dot{Q}_{km} Q_{ln} + Q_{km} \dot{Q}_{ln} \quad (3.7.14)$$

Tomando en cuenta la ec. 3.7.2 se puede tener

$$\text{o bien} \quad \frac{D}{Dt} (\delta_{km}) = \frac{D}{Dt} (Q_{kl} Q_{ml})$$

$$0 = \dot{Q}_{kl} Q_{ml} + Q_{kl} \dot{Q}_{ml} \quad (3.7.15)$$

Usando la ec. 3.7.15 y la definición del tensor rapidez de deformación, la ec. 3.7.14 se transforma en

$$d'_{kl} = Q_{km} Q_{ln} d_{mn} \quad (3.7.16)$$

lo cual demuestra al teorema.

También se puede demostrar que el tensor de giro w_{kl} no es -- objetivo. La demostración se hace al tener en cuenta la definición del tensor w_{kl} y las ecs. 3.7.12 y 3.7.13.

El concepto de objetividad tiene una aplicación muy importante en la teoría constitutiva de los materiales como se verá en el capítulo 6.

MECÁNICA DEL MEDIO CONTINUO

Notas preliminares para un primer curso.

Ramón Cervantes Beltrán *

Victor Porras Silva

* Profesores Investigadores, Facultad de Ingeniería, UNAM.

CAPITULO 4

ESFUERZO

4.1 Introducción.

En el capítulo anterior y precisamente en los principios de balance se hace mención de la resultante de las fuerzas externas que actúan sobre un cuerpo, así como del momento resultante respecto a un punto fijo. Es de esperarse que el concepto de fuerza se presente con mucha frecuencia en la mecánica y es el propósito de este capítulo el describir las hipótesis que este concepto involucra en la Mecánica del Medio Continuo.

4.2 Fuerzas resultantes.

Es un hecho experimental que un cuerpo se deforma cuando está sometido a la acción de fuerzas externas e internas. También es demostrable que las fuerzas pueden ser de origen mecánico, eléctrico, químico o de algún otro tipo.

De acuerdo con la mecánica newtoniana, las fuerzas mecánicas que actúan sobre una partícula son funciones del vector de posición \underline{x} , vector de velocidades \underline{v} y el tiempo t . Sin embargo

en la Mecánica del Medio Continuo se analiza el movimiento de una colección muy grande de partículas de tal manera que si se contuara con el criterio utilizado para una partícula, las fuerzas dependerán de las historias de la posición y velocidad de todas las partículas de la colección. Además, como las partículas no se identifican se tendrá que hacer intervenir las historias de las deformaciones relativas de las partículas respecto a sus vecinas. Entonces las fuerzas podrán depender de los gradientes espaciales de varios órdenes, de las rapidezces de variación respecto al tiempo e integrales de varios órdenes, así como variables eléctricas, químicas y otro tipo.

En vista de lo anterior se procederá a adicionar a la lista de cantidades no definidas constituidas por la posición, el tiempo y la masa, otras dos que son la fuerza \underline{F} y el par \underline{M} que actúan sobre el cuerpo. Ambas son cantidades vectoriales, conocidas a priori, y se cuantifican de acuerdo con las siguientes expresiones

$$\underline{F} = \int_{V'} d\underline{F} \quad (4.2.1)$$

$$\underline{M} = \int_{V'} (\underline{p} \times d\underline{F} + d\underline{M}) \quad (4.2.2)$$

De las ecs. 4.2.1 y 4.2.2 se puede observar que la fuerza total \underline{F} , consiste de la suma total de todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo y que el par total \underline{M} , consiste de dos partes: la primera agrupa al momento total de todas las fuerzas $d\underline{F}$ respecto a un punto p , y la segunda es la suma total de los pares $d\underline{M}$. Por facilidad se hace coincidir el punto p con el origen del sistema de referencia.

Desde el punto de vista de un continuo, las fuerzas y pares se pueden dividir en tres categorías independientemente de su origen

y son

Definición 4.2.1. Cargas de cuerpo. Son las fuerzas y pares que se presentan de los efectos externos y actúan sobre la masa asociada a cada punto del cuerpo.

Las fuerzas de cuerpo se cuantifican al suponer la existencia de una densidad de fuerza de cuerpo por unidad de masa \underline{f} , y una densidad de par de cuerpo por unidad de masa \underline{l} . Ejemplos de este tipo de cargas lo son las fuerzas de gravedad y las electroestáticas. No son cantidades objetivas.

Definición 4.2.2. Cargas de superficie. Se llaman así a las cargas ocasionadas por la acción de un cuerpo sobre otro a través de las superficies frontera.

También se supone la existencia de las densidades de fuerza de superficie por unidad de área $\underline{t}(\underline{n})$ y pares de superficie por unidad de área $\underline{m}(\underline{n})$. Es de esperarse que las fuerzas de superficie y pares de superficie dependan de la orientación de la superficie donde actúan y tal orientación se indicará por el vector unitario \underline{n} orientado con la normal exterior a la superficie. La presión hidrostática es un ejemplo representativo de las cargas de superficie.

Definición 4.2.3. Cargas internas. Se definen así a aquellas que resultan de las acciones mutuas de pares de partículas localizadas en el interior del cuerpo.

De acuerdo con la tercera ley de Newton, la acción mutua de un par de partículas consiste de dos fuerzas que actúan a lo largo de la línea que las une, iguales en magnitud y de sentidos opuestos de tal manera que su resultante es igual a cero y por lo tanto son cantidades objetivas.

El efecto de las fuerzas entre partículas en un medio continuo

se presenta como el efecto resultante de una parte del cuerpo sobre la otra a través de la superficie común a ambas. Este concepto conduce a la hipótesis de esfuerzo que se estudiará en el inciso que sigue.

Además de las cargas anteriores, se puede suponer la existencia de fuerzas concentradas \underline{F}_α que actúan sobre el cuerpo, en puntos \underline{p}_α , así como de pares concentrados \underline{M}_α . α es un subíndice para indicar un número finito de las cantidades concentradas.

La resultante de las fuerzas externas que actúan sobre el cuerpo $\mathcal{V} + \mathcal{V}'$, así como de sus momentos respecto a un punto fijo o , se podrán calcular de acuerdo con las expresiones siguientes.

$$\underline{F} = \int_{\mathcal{V}} \underline{t}(\underline{n}) da + \int_{\mathcal{V}'} \rho \underline{f} dv + \sum_{\alpha} \underline{F}_\alpha \quad (4.2.3)$$

$$\underline{M} = \int_{\mathcal{V}} [\underline{m}(\underline{n}) + \underline{p} \times \underline{t}(\underline{n})] da + \int_{\mathcal{V}'} \rho (\underline{l} + \underline{p} \times \underline{f}) dv + \sum_{\alpha} (\underline{M}_\alpha + \underline{p}_\alpha \times \underline{F}_\alpha) \quad (4.2.4)$$

Con el fin de evitar dificultades en los teoremas concernientes a situaciones locales, por ejemplo, esfuerzos infinitos en la vecindad de una carga concentrada, se supondrá que los teoremas locales se aplicarán a puntos donde no existan cargas concentradas. En el caso de teoremas globales la hipótesis anterior no es necesaria.

Para evitar singularidades no se considerarán cargas concentradas y las ecs. 4.2.3 y 4.2.4 se reducen a

$$\underline{F} = \int_{\mathcal{V}} \underline{t}(\underline{n}) da + \int_{\mathcal{V}'} \rho \underline{f} dv \quad (4.2.5)$$

$$\underline{M} = \int_{\mathcal{V}} [\underline{m}(\underline{n}) + \underline{p} \times \underline{t}(\underline{n})] da + \int_{\mathcal{V}'} \rho (\underline{l} + \underline{p} \times \underline{f}) dv \quad (4.2.6)$$

Una vez cuantificados la resultante de las fuerzas externas \underline{F} y el momento resultante \underline{M} , las ecuaciones correspondientes al balance de la cantidad de movimiento (ec. 3.6.14), y al balance del momento de la cantidad de movimiento (ec. 3.6.15), quedan expresadas como

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \rho \underline{v} dv = \int_{\mathcal{S}} \underline{t}(\underline{n}) da + \int_{\mathcal{V}} \rho \underline{f} dv \quad \frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{V}} \rho \underline{r} \times \underline{v} dv = \underline{M}_k \quad (4.2.7)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \rho \underline{r} \times \underline{v} dv = \int_{\mathcal{S}} [\underline{m}(\underline{n}) + \underline{r} \times \underline{t}(\underline{n})] da + \int_{\mathcal{V}} \rho (\underline{I} + \underline{r} \times \underline{f}) dv \quad (4.2.8)$$

Las ecuaciones anteriores son las ecuaciones de Euler del movimiento. Por no ser objetivas las fuerzas de cuerpo, las ecuaciones de Euler no son objetivas.

4.3 Hipótesis de Esfuerzo.

Las cargas internas y su conexión con las cargas de superficie se puede explicar mediante la aplicación del principio del balance de la cantidad de movimiento a una región contenida parcial o totalmente en el cuerpo $\mathcal{Y} + \mathcal{V}$. Así en la fig. 4.3.1 se muestra una región pequeña totalmente contenida en el cuerpo $\mathcal{Y} + \mathcal{V}$. La región pequeña está definida por un volumen \mathcal{V} limitado por una superficie cerrada \mathcal{S} . En un punto p

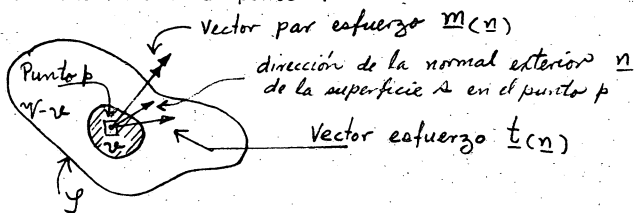


fig. 4.3.1. Representación de los vectores esfuerzo y par de esfuerzo.

de Δ , el efecto del cuerpo $\mathcal{V} + \mathcal{R}$ es equipolente a un sistema de fuerzas y a pares de superficie $\underline{t}(\underline{n})$ denominados vectores de esfuerzo y a pares de superficie $\underline{m}(\underline{n})$ llamados vectores par de esfuerzo. Desde luego que ambos vectores son objetivos. Si por el mismo punto p , se hacen pasar otras superficies con orientaciones diferentes, los vectores esfuerzo y par de esfuerzo también serán, en general, diferentes. Entonces las cargas anteriores dependen no sólo del vector de posición \underline{r} en la frontera \mathcal{S} , sino de la normal exterior \underline{n} asociada a dicha superficie en el mismo punto. La dependencia anterior se indica explícitamente mediante el subíndice \underline{n} asociado en los vectores $\underline{t}(\underline{n})$ y $\underline{m}(\underline{n})$. Las cargas de cuerpo que actúan en el cuerpo $\mathcal{V} + \mathcal{R}$ son equipolentes a la fuerza de cuerpo por unidad de volumen $\rho \underline{f}$ y a un par de cuerpo por unidad de volumen $\rho \underline{I}$. Los principios de balance llamados así al principio de la cantidad de movimiento (ec. 4.2.7) y al principio del balance del momento de la cantidad de movimiento (ec. 4.2.8), definidos para la región $\mathcal{V} + \mathcal{Y}$, también son válidos para la región pequeña $\mathcal{V} + \mathcal{R}$.

La dependencia de los vectores esfuerzo y par de esfuerzo respecto a la normal exterior, se hará evidente al aplicar los principios de balance a una región pequeña; definida de una manera muy especial con el fin de poder cuantificar cantidades en un sistema de referencia euleriano.

La región pequeña se formará de tal manera ^{que} la superficie frontera \mathcal{R} esté formada por 4 regiones según se muestra en la fig. 4.3.2. Las regiones $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ y \mathcal{R}_3 están localizadas sobre los planos de referencia y por lo tanto sus normales exteriores coincidirán con los vectores base \underline{i}_k , pero con sentido contrario.

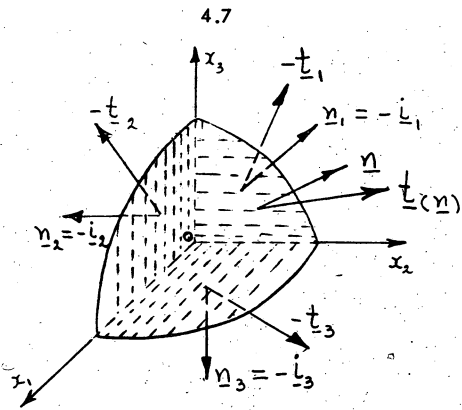


Fig. 4.3.2. Cuerpo pequeño $\nu + \Delta$ para visualizar la dependencia de $\underline{t}(\underline{n})$ y $m(\underline{n})$, respecto a \underline{n} .

La región \mathcal{R}_4 , es la superficie restante que hace que $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3 + \mathcal{R}_4$ sea una superficie cerrada, y la normal exterior correspondiente se indicará, para cualquier punto, con \underline{n} . Los vectores esfuerzo que actúan sobre las superficies $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ y \mathcal{R}_3 se indican con $-\underline{t}_1, -\underline{t}_2$ y $-\underline{t}_3$ respectivamente, mientras que el vector esfuerzo actuante en \mathcal{R}_4 se indicará con $\underline{t}(\underline{n})$. Las magnitudes de las superficies $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3$ y \mathcal{R}_4 se indicarán como $\Delta a_1, \Delta a_2, \Delta a_3$ y Δa respectivamente.

Al aplicar la ec. 4.2.7 al cuerpo en estudio, las integrales se estimarán de acuerdo con el teorema del valor medio, quedando

$$\frac{d}{dt} (\rho^* \underline{v}^* \Delta \nu) = \underline{t}^*(\underline{n}) \Delta a - \underline{t}_k^* \Delta a_k + \rho^* \underline{f}^* \Delta \nu \quad (4.3.1)$$

donde ρ^*, \underline{v}^* y \underline{f}^* son, respectivamente, los valores de ρ, \underline{v} y \underline{f} en algún punto interior de ν mientras que $\underline{t}^*(\underline{n})$ y \underline{t}_k^* son los valores de $\underline{t}(\underline{n})$ y \underline{t}_k en algún punto de Δa y Δa_k respectivamente.

4.8

De acuerdo con el principio de la conservación de la masa --- (ec. 3.6.13a) se tendrá que

$$\frac{d}{dt} (\rho^* \underline{v}^* \Delta \nu) = \rho^* \dot{\underline{v}}^* \Delta \nu \quad (4.3.2)$$

sustituyendo a la ec. 4.3.2 en la ec. 4.3.1 y dividiendo ambos miembros entre Δa se tiene

$$\rho^* \underline{v}^* \frac{\Delta \nu}{\Delta a} = \underline{t}^*(\underline{n}) - \underline{t}_k^* \frac{\Delta a_k}{\Delta a} + \rho^* \underline{f}^* \frac{\Delta \nu}{\Delta a} \quad (4.3.3)$$

Al tomar el límite de la ecuación anterior cuando $\Delta a \rightarrow 0$ se -- tendrá que el punto interior donde se cuantifican las cantidades -- con asterisco tiende hacia la superficie \mathcal{R}_4 que a su vez, se puede considerar como un plano. Además como las cantidades ρ^*, \underline{v}^* y \underline{f}^* están acotadas y $\Delta \nu / \Delta a \rightarrow 0$, la ecuación 4.3.3 en el límite, resulta ser

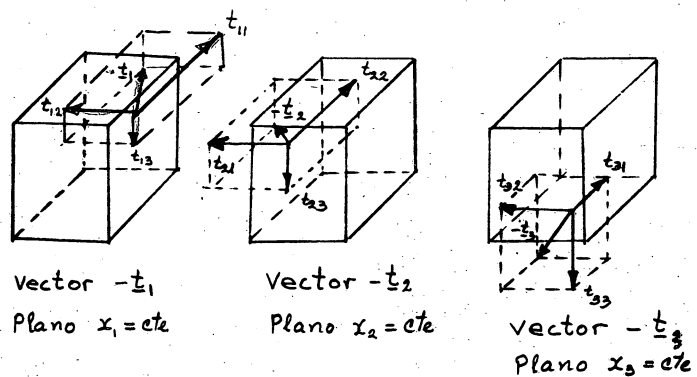
$$\underline{t}(\underline{n}) = \underline{t}_k \frac{da_k}{da} \quad (4.3.4)$$

Como $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3 + \mathcal{R}_4$ y por estar $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ y \mathcal{R}_3 en las caras coordenadas, la representación vectorial de superficies con --

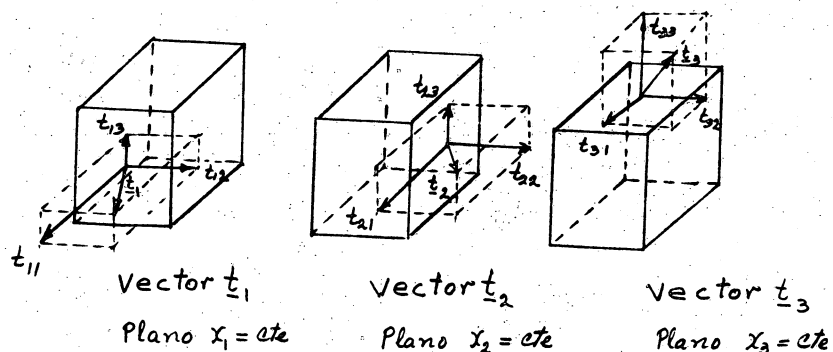
$$d\underline{a} = \underline{n} da = da_k \underline{i}_k \quad (4.3.5a)$$

$$da_k = n_k da \quad (4.3.5b)$$

Al sustituir la ec. 4.3.5 en la ec. 4.3.4 se obtiene la ecuación siguiente



a) Caras anteriores



b) Caras posteriores

Fig 4.4.1. Elementos del tensor esfuerzo.

La necesidad de una convención de signos se deriva de la dependencia de la orientación de los planos coordenados respecto al sistema de referencia usado y también de la necesidad de orientar las componentes del vector esfuerzo respecto a los ejes coordenados. Así el elemento t_{23} corresponde a la componente a lo largo del eje x_3 del vector esfuerzo t_2 que actúa en el plano $x_2 = \text{constante}$.

Las nueve cantidades t_{kl} mostradas en la fig. 4.4.1 se acostumbra ordenarlas en un arreglo matricial de la forma siguiente

$$[t_{kl}] = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix} \quad (4.4.3)$$

En la fig. 4.4.1 se observa que las componentes del tensor esfuerzo normales a la superficie donde actúa el vector esfuerzo, poseen subíndices repetidos, mientras que a las componentes contenidas en el plano les corresponden subíndices distintos. A las componentes con índice repetido, es decir, t_{11} , t_{22} , t_{33} , se les llama esfuerzos normales y a las componentes con índices diferentes se les llama esfuerzos cortantes. En el arreglo matricial indicado por la ec. 4.4.3 los esfuerzos normales están alojados en la diagonal principal y los esfuerzos cortantes fuera de ella.

Al sustituir la ec. 4.4.2 en la ec. 4.3.6 se obtiene la expresión siguiente

$$t_{(n)} = t_{kl} n_k \cdot i_l \quad (4.4.4)$$

o en términos de sus componentes

$$t_{(n)l} = t_{kl} n_k \quad (4.4.5)$$

Las ecuaciones 4.4.4 y 4.4.5 constituyen la prueba del teorema siguiente.

Teorema 4.4.1. El vector esfuerzo que actúa en cualquier plano que se hace pasar por un punto, está completamente definido por el tensor de esfuerzos correspondiente a dicho punto.

4.4.1. Carácter tensorial del tensor esfuerzo.

A continuación se demostrará que las cantidades t_{kl} constituyen en realidad un tensor cartesiano de orden dos y así justifican el nombre de tensor.

Supongamos que el sistema de referencia x_k , donde se calcula el tensor t_{kl} , se gira a otro sistema también rectangular x'_k . Siendo \underline{i}_k los vectores base de la referencia x_k ; entonces los vectores base de x'_k se indicarán por \underline{i}'_k . Si t'_{rs} es el tensor esfuerzo medido en la referencia girada x'_k , el vector esfuerzo $\underline{t}_{(n)}$ se podrá calcular tanto en una referencia como en otra de acuerdo con la expresión siguiente

$$\underline{t}_{(n)} = t_{kl} n_k \underline{i}_l = t'_{rs} n'_r \underline{i}'_s \quad (4.4.6)$$

La normal exterior \underline{n} medida en x_k tendrá componentes indicadas por n_k y cuando se mide en la referencia girada x'_k tendrá componentes n'_r . La relación existente entre las componentes n_k y n'_r , por ser \underline{n} una cantidad vectorial, estará dada por

$$n_k = Q_{rk} n'_r \quad (4.4.7)$$

donde

$$Q_{rk} = \underline{i}'_r \cdot \underline{i}_k \quad (4.4.8)$$

multiplicando escalarmente los términos de la ec. 4.4.6 con el vector \underline{i}'_m se obtiene

$$t'_{rs} n'_r \underline{i}'_s \cdot \underline{i}'_m = t_{kl} n_k \underline{i}_l \cdot \underline{i}'_m \quad (4.4.9)$$

sustituyendo en la ecuación anterior las ecs. 4.4.7 y 4.4.8 se obtendrá

$$t'_{rs} n'_r = t_{kl} Q_{rk} Q_{sl} n'_r \quad (4.4.10)$$

por ser arbitrario el vector \underline{n}' , la ec. 4.4.10 se reduce a la forma siguiente

$$t'_{rs} = Q_{rk} Q_{sl} t_{kl} \quad (4.4.11)$$

Procediendo de una manera enteramente similar se puede demostrar que

$$t_{rs} = Q_{kr} Q_{ls} t'_{kl} \quad (4.4.12)$$

Las ecuaciones 4.4.11 y 4.4.12 establecen que las cantidades t_{kl} se transforman como lo hacen los tensores cartesianos de segundo orden. El término cartesiano se debe a la referencia utilizada. Se puede demostrar que en coordenadas curvilíneas t_{kl}

se transforma de acuerdo con las leyes de transformación para tensores. Todo lo anterior justifica el nombre de tensor esfuerzo para t_{kl} .

Es muy frecuente el problema de conocer al tensor de esfuerzos t_{kl} en una referencia X_k y se requiere obtener sus componentes pero referidas a otro sistema de referencia X'_k . Si ambos sistemas de referencia son cartesianos la expresión que resuelve el problema es la ec. 4.4.11 y cuya expresión en forma matricial resulta ser la siguiente

$$\begin{bmatrix} t'_{11} & t'_{12} & t'_{13} \\ t'_{21} & t'_{22} & t'_{23} \\ t'_{31} & t'_{32} & t'_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{21} & Q_{31} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{32} \\ Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} \end{bmatrix} \quad (4.4.13)$$

La matriz de transformación Q_{kr} , cuyos elementos son los cosenos directores de los ejes del sistema de referencia X'_k respecto a los ejes X_k , se puede esquematizar en la tabla siguiente.

Tabla 4.4.1. Matriz de transformación de ejes cartesianos.

	X_1	X_2	X_3
X'_1	Q_{11}	Q_{12}	Q_{13}
X'_2	Q_{21}	Q_{22}	Q_{23}
X'_3	Q_{31}	Q_{32}	Q_{33}

En la tabla anterior los renglones representan los cosenos directores de los ejes girados. También se puede interpretar de tal manera que las columnas sean los cosenos directores de los

ejes originales respecto a los girados.

4.4.2. Esfuerzos en la frontera del cuerpo.

A la superficie S que rodea a un cuerpo, desde el punto de vista matemático se le conoce con el nombre de frontera. En la frontera se conocen ya sea en una parte o en su totalidad, el valor de las cargas de superficie. Si S es el vector fuerza de superficie que actúa en la frontera, su relación con el tensor de esfuerzos se obtiene de las ecs. 4.4.4 y 4.4.5 conduciendola a la siguiente expresión denominada condiciones de frontera

$$t_{kl} n_k = S_l \quad \text{en } S \quad (4.4.14)$$

4.4.3. Notaciones usuales para el tensor esfuerzo.

La notación para indicar las componentes del tensor esfuerzo no es única y en la actualidad las más utilizadas son las que se muestran en la tabla mostrada a continuación.

Tabla 4.4.2 Notación usual para el tensor esfuerzo utilizada por varios autores.

Autores	Símbolos utilizados
Eringen, Truesdell	$t_{11} \quad t_{22} \quad t_{33} \quad t_{12} \quad t_{23} \quad t_{31}$
Timoshenko y los ingenieros	$\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yx} \quad \tau_{zx}$
Green y Zerna, Rusas, Alemanes	$\tau_{11} \quad \tau_{22} \quad \tau_{33} \quad \tau_{12} \quad \tau_{23} \quad \tau_{31}$
Algunos Ingleses, Americanos	$\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{33} \quad \sigma_{12} \quad \sigma_{23} \quad \sigma_{31}$ $\sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{zz} \quad \sigma_{xy} \quad \sigma_{yz} \quad \sigma_{zx}$

4.5 Ecuaciones de equilibrio de Cauchy.

Las ecuaciones de balance o ecuaciones de Euler para un medio continuo, no polar, resultan ser

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \rho \underline{v} \, dv = \oint_{\mathcal{S}} \underline{t} \cdot (\underline{n}) \, da + \int_{\mathcal{V}} \rho \underline{f} \, dv \quad (4.5.1)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \rho \underline{p} \times \underline{v} \, dv = \oint_{\mathcal{S}} \underline{p} \times \underline{t} \cdot (\underline{n}) \, da + \int_{\mathcal{V}} \rho \underline{p} \times \underline{f} \, dv \quad (4.5.2)$$

Si se considera válido el principio de la conservación local de la masa dado por la ecuación siguiente

$$\frac{D}{Dt} (\rho \, dv) = 0 \quad (4.5.3)$$

y si además se trabaja con una región pequeña $\mathcal{U} + \mathcal{A}$, y totalmente contenida dentro del cuerpo $\mathcal{V} + \mathcal{S}$, las ecs. de Euler se transforman en

$$\int_{\mathcal{U}} \rho \underline{a} \, dv = \oint_{\mathcal{A}} \underline{t}_k \, n_k \, da + \int_{\mathcal{U}} \rho \underline{f} \, dv \quad (4.5.4)$$

$$\int_{\mathcal{U}} \rho \underline{p} \times \underline{a} \, dv = \oint_{\mathcal{A}} \underline{p} \times \underline{t}_k \, n_k \, da + \int_{\mathcal{U}} \rho \underline{p} \times \underline{f} \, dv \quad (4.5.5)$$

En las expresiones anteriores también se utilizaron las ecuaciones 4.4.2 y 4.4.4. Para transformar las integrales de superficie a integrales de volumen se hace uso del teorema de Green (ec.1.11.11.) quedando

$$\oint_{\mathcal{A}} \underline{t}_k \, n_k \, da = \int_{\mathcal{U}} \underline{t}_{k,k} \, dv \quad (4.5.6)$$

$dV_{\mathcal{U}} = \int_{\mathcal{A}} \frac{1}{\Delta V} \, da$

$\underline{v} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$
 $\underline{u} = u_i \underline{e}_i$

$\left[\frac{\partial}{\partial x_k} \right]$
 $\left[\frac{\partial}{\partial x_i} \right]$

$$\oint_{\mathcal{A}} \underline{p} \times \underline{t}_k \, n_k \, da = \int_{\mathcal{U}} (\underline{p} \times \underline{t}_{k,k}) \, dv = \int_{\mathcal{U}} (\underline{i}_k \times \underline{t}_k + \underline{p} \times \underline{t}_{k,k}) \, dv \quad (4.5.7)$$

en la ec. 4.5.7 se hizo uso de la definición de \underline{i}_k expresado como

$$\underline{i}_k = \underline{p}_{,k} \quad (4.5.8)$$

sustituyendo las ecs. 4.5.6 y 4.5.7 en las ecs. 4.5.4 y 4.5.5 respectivamente se llega a

$$\int_{\mathcal{U}} [\underline{t}_{k,k} + \rho(\underline{f} - \underline{a})] \, dv = 0 \quad (4.5.9)$$

$$\int_{\mathcal{U}} \{ \underline{i}_k \times \underline{t}_k + \underline{p} \times [\underline{t}_{k,k} + \rho(\underline{f} - \underline{a})] \} \, dv = 0 \quad (4.5.10)$$

Las ecuaciones anteriores son las expresiones matemáticas del balance global del momento de la cantidad de movimiento siempre y cuando se cumpla el principio de la conservación local de la masa. La condición necesaria y suficiente para que lo anterior sea válido en cualquier volumen arbitrario \mathcal{U} , es que los integrantes se anulen. Entonces, se obtienen las expresiones respectivas del balance local y son

$$\underline{t}_{k,k} + \rho(\underline{f} - \underline{a}) = 0 \quad \text{Ec. de Cauchy} \quad (4.5.11)$$

$$\underline{i}_k \times \underline{t}_k = 0 \quad (4.5.12)$$

La ecuación correspondiente al balance local de la cantidad de movimiento (ec. 4.5.11), se puede escribir en términos de las componentes cartesianas de los vectores que intervienen y para el

Cauchy - Euler en forma local

4.21

caso específico del vector esfuerzo t_k , se utilizará la ec. (4.4.2), quedando

$$(t_{kl})_{,k} + \rho(f_k - a_k) = 0 \quad (4.5.11a)$$

o bien

$$t_{kl,k} + \rho(f_k - a_k) = 0 \quad (4.5.13)$$

Al sustituir la ec. 4.4.2 en la expresión del balance local del momento de la cantidad de movimiento (ec. 4.5.12) se obtiene

$$\dot{i}_k \times (t_{kl} \dot{i}_l) = \dot{i}_k \times \dot{i}_l t_{kl} = 0 \quad (4.5.12a)$$

recordando que el producto vectorial de los vectores base ortonormales se puede expresar mediante el símbolo de permutación e_{klm} , de acuerdo con la ec.

$$\dot{i}_k \times \dot{i}_l = e_{klm} \dot{i}_m \quad (4.5.14)$$

sustituyendo la ec. 4.5.14 en la ec. 4.5.12a se obtiene

$$e_{klm} t_{kl} \dot{i}_m = 0 \quad (4.5.12b)$$

o bien en términos de las componentes cartesianas de los vectores que intervienen

$$e_{klm} t_{kl} = 0 \quad (4.5.12c)$$

De acuerdo con los valores del símbolo de permutación se tiene que

1. Medio c. no polar
 2. Principio de la conservación de la masa en su forma local se cumple.
 3. El tensor esfuerzo t_{kl} está medido en un sistema de referencia euleriano
- ① $t_{kl} + \rho(t_k - a_k) = 0$
 ② $t_{kl} = t_{lk}$

4.22

$$e_{klm} = -e_{lk m} \quad (4.5.15)$$

La ec. 4.5.12c se puede escribir de la forma siguiente utilizando la ec. 4.5.15.

$$t_{kl} = t_{lk} \quad (4.5.16)$$

A la ec. 4.5.13, que representa el balance local de la cantidad de movimiento, se le conoce con el nombre primera ley de Cauchy del movimiento. A la ec. 4.5.16, que es la expresión del balance local del momento de la cantidad de movimiento, se le conoce con el nombre de segunda ley de Cauchy del movimiento.

Los desarrollos anteriores son las demostraciones de los siguientes teoremas.

Teorema 4.5.1. La primera ley de Cauchy del movimiento es la condición necesaria y suficiente para que se satisfaga el balance local de la cantidad de movimiento.

Teorema 4.5.2. La segunda ley de Cauchy del movimiento es la condición necesaria y suficiente para que se satisfaga el balance local del momento de la cantidad de movimiento.

Cabe recordar que las ecuaciones de Cauchy son válidas para un medio continuo no polar en donde se cumple el principio de la conservación local de la masa. También se debe tener presente que el tensor de esfuerzos t_{kl} está medido en una referencia euleriana y recibe el nombre de tensor de esfuerzos de Cauchy. Entonces las ecs. de Cauchy son las ecuaciones del movimiento medido en una referencia euleriana. Para expresar las ecuaciones del movimiento en una

referencia lagrangiana se hace uso del tensor de esfuerzos de Piola - Kirchoff que es muy útil para estudios de medios continuos no lineales. En este primer curso de Mecánica del Medio Continuo no se presentará esta formulación.

Cuando se utiliza la nomenclatura no indicial para el sistema de referencia cartesiano, las ecuaciones de Cauchy se pueden escribir en forma explícita como

$$\frac{\partial t_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial t_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial t_{zx}}{\partial z} + \rho(f_x - a_x) = 0$$

$$\frac{\partial t_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial t_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial t_{zy}}{\partial z} + \rho(f_y - a_y) = 0 \quad (4.5.17)$$

$$\frac{\partial t_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial t_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial t_{zz}}{\partial z} + \rho(f_z - a_z) = 0$$

$$t_{xy} = t_{yx} \quad (4.5.18)$$

$$t_{yz} = t_{zy}$$

$$t_{zx} = t_{xz}$$

El vector aceleración a_k , está dado por

$$a_k = \frac{D}{Dt} v_k = \frac{\partial v_k}{\partial t} + v_{k,i} v_i \quad (4.5.19)$$

donde v_k es el vector de velocidad y está dado en términos del vector desplazamiento u_k como

$$v_k = \frac{D}{Dt} u_k \quad (4.5.20)$$

Las ecs 4.5.19 y 4.5.20 expresadas en forma explícita quedan

$$a_x = \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_x}{\partial z} v_z$$

$$a_y = \frac{\partial v_y}{\partial t} + \frac{\partial v_y}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_y}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_y}{\partial z} v_z \quad (4.5.21)$$

$$a_z = \frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{\partial v_z}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_z}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_z}{\partial z} v_z$$

$$v_x = \frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial u_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial u_x}{\partial y} v_y + \frac{\partial u_x}{\partial z} v_z$$

$$v_y = \frac{\partial v_y}{\partial t} + \frac{\partial v_y}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_y}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_y}{\partial z} v_z \quad (4.5.22)$$

$$v_z = \frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{\partial v_z}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_z}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_z}{\partial z} v_z$$

4.6 Cuadrática de esfuerzo de Cauchy.

La componente normal N del vector esfuerzo $\underline{t}(n)$ que actúa en un punto p de la superficie A con normal exterior \underline{n} , según se muestra en la fig. 4.6.1, se puede calcular como la proyección de $\underline{t}(n)$ sobre la dirección \underline{n} .

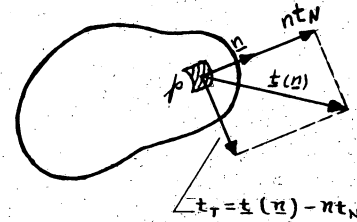


fig. 4.6.1 Componentes del vector esfuerzo $\underline{t}(n)$.

$$t_N = \underline{t}(n) \cdot \underline{n} = t_{k1} n_k n_1 \quad (4.6.1)$$

Supongamos que el valor de t_M permanezca fijo y que la variable sea la orientación \underline{n} de la superficie ρ en ρ . Con esta consideración la ec. 4.6.1 representa una superficie cuadrática denominada cuadrática de esfuerzo de Cauchy. Las variables n_k están sujetas a la condición de ser cosenos directores, es decir

$$n_k n_k = \delta_{nk} n_k n_l = 1 \quad (4.6.2)$$

4.7 Esfuerzos y direcciones principales.

Este problema es totalmente similar al problema planteado en el inciso 2.9. La razón desde luego la constituye el hecho que desde el punto de vista matemático los tensores de deformación y el tensor de esfuerzos son tensores cartesianos del mismo orden. El hecho de repetir algunos desarrollos creemos que ayudará a la interpretación física de los elementos del tensor de esfuerzos.

Para calcular los valores extremales de la función t_M dada por la ec. 4.7.1 en donde las variables están sujetas a la restricción dada por la ec. 4.6.2, se hará uso del método de los multiplicadores de Lagrange. Entonces si t es el multiplicador de Lagrange, la función que tendrá que minimizarse será

$$\xi = t_M - t (\delta_{kl} n_k n_l - 1) = t_{kl} n_k n_l - t (\delta_{kl} n_k n_l - 1) \quad (4.7.1)$$

entonces

$$\frac{\partial \xi}{\partial n_m} = \frac{\partial}{\partial n_m} [t_{kl} n_k n_l - t (\delta_{kl} n_k n_l - 1)] = 0 \quad (4.7.2)$$

desarrollando la ecuación anterior se obtendrá

$$(t_{kl} - t \delta_{kl}) n_l = 0 \quad (4.7.3)$$

La ec. 4.7.3 representa un sistema de ecuaciones algebraicas homogéneas que puestas en notación matricial quedan

$$\begin{bmatrix} t_{11}-t & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22}-t & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33}-t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.7.4)$$

El sistema de ecuaciones mostrado en la ecuación anterior consiste de tres ecuaciones y cuatro incógnitas que son n_1 , n_2 , n_3 , y t . Por ser el sistema homogéneo y para obtener una solución distinta de la trivial se deberá tener que el determinante del sistema debe de anularse. así

$$|t_{kl} - t \delta_{kl}| = \begin{vmatrix} t_{11}-t & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22}-t & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33}-t \end{vmatrix} = 0 \quad (4.7.5)$$

Al determinante anterior se le conoce con el nombre de determinante característico. A la ecuación cúbica en t que resulta al desarrollar el determinante característico se llama ecuación característica y es de la forma siguiente.

$$t^3 - I_t t^2 + II_t t - III_t = 0 \quad (4.7.6)$$

Los coeficientes de la ecuación característica reciben el nombre de invariantes de esfuerzo y se cuantifican de acuerdo con

$$I_t = t_{kk} = t_{11} + t_{22} + t_{33} \quad (4.7.7)$$

$$\begin{aligned} II_t &= \frac{1}{2} (t_{kk} t_{ll} - t_{kl} t_{lk}) = t_{22} t_{33} + t_{33} t_{11} + t_{11} t_{22} \\ &= t_{22} t_{33} + t_{33} t_{11} + t_{11} t_{22} - t_{23}^2 - t_{31}^2 - t_{12}^2 \end{aligned} \quad (4.7.8)$$

$$= \begin{vmatrix} t_{22} & t_{23} \\ t_{32} & t_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} t_{11} & t_{31} \\ t_{13} & t_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} III_t &= t_{11} t_{22} t_{33} + 2t_{12} t_{23} t_{31} - t_{11} t_{23}^2 - t_{22} t_{31}^2 - t_{33} t_{12}^2 \\ &= \det(t_{kl}) = \begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (4.7.9)$$

Al invariante I_t se le llama primer invariante de esfuerzo debido a que contiene únicamente términos lineales. El invariante

II_t es el segundo invariante de esfuerzo y contiene términos cuadráticos, mientras que III_t es el tercer invariante de esfuerzo formado por términos cúbicos.

Definición 4.7.1. A las tres direcciones \underline{n}_α asociadas a los tres valores extremales t_α se les llaman direcciones principales del tensor esfuerzo t_{kl} .

Definición 4.7.2. A los tres valores extremales t_α se les denominan esfuerzos principales.

Los esfuerzos principales se obtendrán mediante la ec. 4.7.6 y las direcciones principales de las ecuaciones homogéneas 4.7.3 que

resultande sustituir cada valor t_α . Es decir,

- i) Para t_1 , se forma el sistema homogéneo: $(t_{kl} - t_1 \delta_{kl}) \eta_{1l} = 0$
- ii) Para t_2 , se forma el sistema homogéneo: $(t_{kl} - t_2 \delta_{kl}) \eta_{2l} = 0$
- iii) Para t_3 , se forma el sistema homogéneo: $(t_{kl} - t_3 \delta_{kl}) \eta_{3l} = 0$

También se puede demostrar que las componentes del tensor de esfuerzos de Cauchy referidas al sistema de referencia paralelo a las direcciones principales resulta ser

$$[t_{kl}] = \begin{bmatrix} t_1 & 0 & 0 \\ 0 & t_2 & 0 \\ 0 & 0 & t_3 \end{bmatrix} \quad (4.7.9)$$

en donde se puede observar que en las direcciones principales existen únicamente componentes normales del tensor esfuerzo. También de la terna t_α se conocerán los valores máximo y mínimo de los esfuerzos y la orientación de la superficie donde actúan.

Los vectores esfuerzo que actúan en las direcciones principales quedarán expresados en cualquier referencia por

$$\underline{t}(\underline{n}_\alpha) = t_\alpha \underline{n}_\alpha \quad (4.7.10)$$

Cuando el sistema de referencia sea el principal, \underline{n}_α coincidirá con la base ortonormal \underline{e}_α y en tal sistema la ec. 4.7.10 quedará como

$$\underline{t}(\underline{e}_\alpha) = t_\alpha \underline{e}_\alpha \quad (4.7.11)$$

El vector esfuerzo en cualquier dirección \underline{n} medido respecto a la principal quedará según las ecs. 4.4.4 y 4.7.9.

$$\underline{t}^{(n)} = t_1 n_1 + t_2 n_2 + t_3 n_3 \quad (4.7.12)$$

Los componentes del vector 4.7.12 referido al sistema principal resultan ser

$$t^{(n)}_1 = t_1 n_1 \quad (4.7.13a)$$

$$t^{(n)}_2 = t_2 n_2 \quad (4.7.13b)$$

$$t^{(n)}_3 = t_3 n_3 \quad (4.7.13c)$$

tomando en cuenta que el vector \underline{n} es unitario se debe tener que

$$(n_1)^2 + (n_2)^2 + (n_3)^2 = 1 \quad (4.7.14)$$

al sustituir las ecs. 4.7.13 en la ec. 4.7.14 se obtiene

$$\frac{t^{(n)2}_1}{t_1^2} + \frac{t^{(n)2}_2}{t_2^2} + \frac{t^{(n)2}_3}{t_3^2} = 1 \quad (4.7.15)$$

La ec. 4.7.15 puede tener la interpretación siguiente. Sea un sistema de referencia rectangular en donde las variables que se miden a lo largo de los ejes tienen unidades de esfuerzo. Si en cada eje se mide una componente del vector esfuerzo $\underline{t}^{(n)}$ entonces la ec. 4.7.15 representa la ecuación de un elipsoide en su forma canónica. Cada punto de la superficie del elipsoide representa por lo tanto a un vector esfuerzo $\underline{t}^{(n)}$. Además los semiejes del elipsoide son los esfuerzos principales. Al elipsoide dado por la ec. 4.7.15 se le conoce con el nombre de elipsoide de Lamé.

4.8 Valores extremales de los esfuerzos cortantes.

La componente tangencial o de corte del vector $\underline{t}^{(n)}$ mostrado en la fig. 4.6.1 resulta ser

$$t_T^2 = |\underline{t}^{(n)}|^2 - t_N^2 \quad (4.8.1)$$

De las ecs. 4.6.1 y 4.7.12 se obtiene que

$$t_N = \underline{t}^{(n)} \cdot \underline{n} = t_1 n_1^2 + t_2 n_2^2 + t_3 n_3^2 \quad (4.8.2)$$

$$|\underline{t}^{(n)}|^2 = \underline{t}^{(n)} \cdot \underline{t}^{(n)} = t_1^2 n_1^2 + t_2^2 n_2^2 + t_3^2 n_3^2 \quad (4.8.3)$$

sustituyendo las ecs. 4.8.2 y 4.8.3 en la ec. 4.8.1 se tiene

$$t_T^2 = t_1^2 n_1^2 + t_2^2 n_2^2 + t_3^2 n_3^2 - (t_1 n_1^2 + t_2 n_2^2 + t_3 n_3^2)^2 \quad (4.8.4)$$

Es conveniente ordenar los valores extremales de los esfuerzos de tal manera que

$$t_1 \geq t_2 \geq t_3 \quad (4.8.5)$$

El cálculo de los valores extremales de t_T^2 con la restricción

$$n_k n_k = 1 \quad (4.8.6)$$

se podrá hacer usando el método de los multiplicadores de Lagrange. Si λ es el multiplicador de Lagrange, la condición de valor

extremal

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} (t_T^2 - \lambda n_1 n_2 n_3) = 0 \quad (4.8.7)$$

conduce a las ecuaciones siguientes

$$n_1 [t_1^2 - 2t_1(t_1 n_1^2 + t_2 n_2^2 + t_3 n_3^2) + \lambda] = 0 \quad (4.8.8a)$$

$$n_2 [t_2^2 - 2t_2(t_1 n_1^2 + t_2 n_2^2 + t_3 n_3^2) + \lambda] = 0 \quad (4.8.8b)$$

$$n_3 [t_3^2 - 2t_3(t_1 n_1^2 + t_2 n_2^2 + t_3 n_3^2) + \lambda] = 0 \quad (4.8.8c)$$

Los valores máximos de t_T^2 y sus direcciones correspondientes resultan ser.

o vect. de direcciones

$$\underline{n}_1 = [0, \pm 1/\sqrt{2}, \pm 1/\sqrt{2}]; \quad t_T = \frac{1}{2}(t_2 - t_3) \quad (4.8.9)$$

componente tangencial

$$\underline{n}_2 = [\pm 1/\sqrt{2}, 0, \pm 1/\sqrt{2}]; \quad t_T = \frac{1}{2}(t_3 - t_1) \quad (4.8.10)$$

$$\underline{n}_3 = [\pm 1/\sqrt{2}, \pm 1/\sqrt{2}, 0]; \quad t_T = \frac{1}{2}(t_1 - t_2) \quad (4.8.11)$$

De las ecs. 4.8.9 a 4.8.11 se puede concluir que las direcciones de los cortantes máximos están a 45° respecto a las direcciones de los normales máximos.

4.9 Círculo de Mohr.

En este inciso se demostrará que existe una representación gráfica en un plano del estado de esfuerzos en un punto. Para ello se requiere que el sistema de referencia sea principal y tomando en cuenta las ecs 4.8.1 a 4.8.6 se tendrá:

$$t_N = t_1 n_1^2 + t_2 n_2^2 + t_3 n_3^2 \quad (4.9.1)$$

$$t_N^2 + t_T^2 = t_1^2 n_1^2 + t_2^2 n_2^2 + t_3^2 n_3^2 \quad (4.9.2)$$

$$1 = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 \quad (4.9.3)$$

Del sistema de ecuaciones anteriores se obtiene que

$$n_1^2 = \frac{(t_N - t_2)(t_N - t_3) + t_T^2}{(t_1 - t_2)(t_1 - t_3)} \quad (4.9.4)$$

$$n_2^2 = \frac{(t_N - t_3)(t_N - t_1) + t_T^2}{(t_2 - t_3)(t_2 - t_1)} \quad (4.9.5)$$

$$n_3^2 = \frac{(t_N - t_1)(t_N - t_2) + t_T^2}{(t_3 - t_1)(t_3 - t_2)} \quad (4.9.6)$$

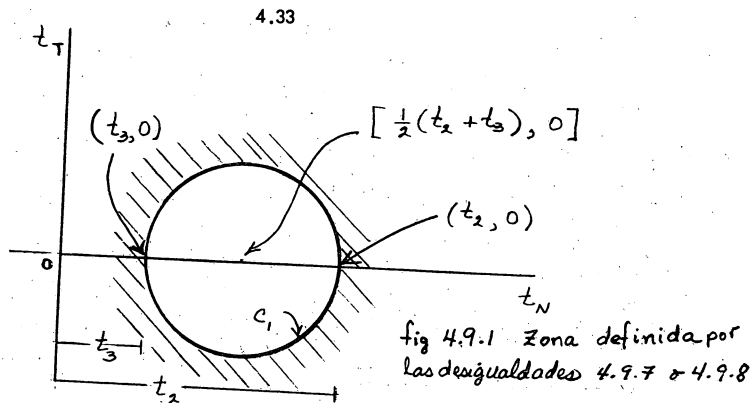
Definición 4.9.1. Plano de Mohr o Plano de esfuerzo : es aquel en donde ^{sobre} el eje de las abscisas se miden las componentes normales de los vectores esfuerzo y sobre el eje de las ordenadas las componentes de cortante. Es decir cualquier vector de posición en tal plano representa a un vector esfuerzo en ^{el} espacio tridimensional.

El análisis de las ecs. 4.9.4 a 4.9.6 en un plano de esfuerzos -- conduce a los círculos de Mohr.

Al estudiar la ec. 4.9.4, puesto que $n_1^2 \geq 0$ y de acuerdo con las condiciones dadas por la ec. 4.8.5 se tendrá:

$$(t_N - t_2)(t_N - t_3) + t_T^2 \geq 0 \quad (4.9.7)$$

La desigualdad 4.9.7 graficada en el plano de esfuerzos representa puntos (t_N, t_T) del área asegurada mostrada en la fig. 4.9.1



Desigualdad 4.9.7 se puede poner de la forma siguiente

$$\left[t_N - \frac{1}{2}(t_2 + t_3) \right]^2 + t_T^2 \geq \left[\frac{1}{2}(t_2 - t_3) \right]^2 \quad (4.9.8)$$

La igualdad en la desigualdad 4.9.8 representa a la circunferencia C_1 mostrada en la fig. 4.9.1

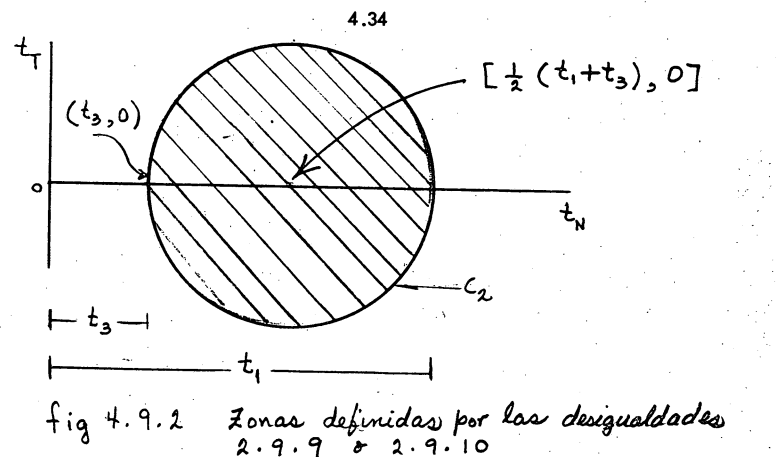
La ec. 4.9.5 conduce a la desigualdad siguiente

$$(t_N - t_3)(t_N - t_1) + t_T^2 \leq 0 \quad (4.9.9)$$

o bien

$$\left[t_N - \frac{1}{2}(t_1 + t_3) \right]^2 + t_T^2 \leq \left[\frac{1}{2}(t_3 - t_1) \right]^2 \quad (4.9.10)$$

La fig. 4.9.2 muestra las zonas limitadas por las desigualdades 4.9.9 o 4.9.10 en un plano de esfuerzos. La igualdad en la desigualdad 4.9.10 es la ec. de la circunferencia C_2 mostrada en la fig. 4.9.2.



La ec. 4.9.6 es equivalente a las desigualdades siguientes

$$(t_N - t_1)(t_N - t_3) + t_T^2 \geq 0 \quad (4.9.11)$$

o bien

$$\left[t_N - \frac{1}{2}(t_1 + t_2) \right]^2 + t_T^2 \geq \left[\frac{1}{2}(t_1 - t_2) \right]^2 \quad (4.9.12)$$

La zona definida por las desigualdades 4.9.11 o 4.9.12 en un plano de esfuerzos, se muestra en la fig. 4.9.3

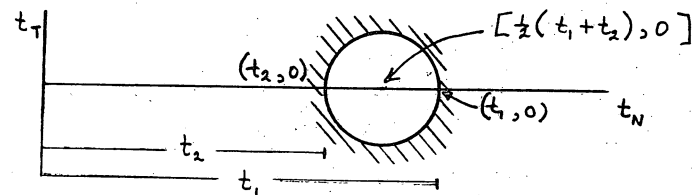


fig 4.9.3 Zona definida por las desigualdades 4.9.11 y 4.9.12

La ec. de la circunferencia C_3 mostrada en la fig. 4.9.3 se obtiene al tomar la igualdad en la desigualdad 4.9.12

Una vez estudiados por separado el comportamiento de las ecs. 4.9.4 a 4.9.6 para el rango de los cosenos directores $[n_1, n_2, n_3]$ conviene aclarar que las ecs. 4.9.6 están ligadas por la ec. 4.9.3, es decir deben de combinarse para definir una región única. Al combinar las desigualdades 4.9.8, 4.9.10 y 4.9.12 se obtiene el área asciurada mostrada en la fig. 4.9.4

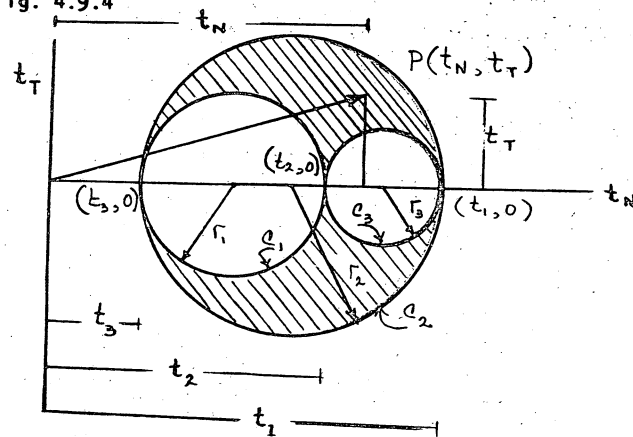


Fig. 4.9.4 Diagrama de Mohr o representación gráfica de los vectores esfuerzo en un punto

Desde luego que el área asciurada representa a todos los vectores esfuerzo que resultan al variar la orientación de la superficie donde se supone que actúan.

Definición 4.9.2. A las circunferencias C_1, C_2 y C_3 definidas por el símbolo de igualdad en las desigualdades 4.9.8, 4.9.10 y 4.9.12 reciben el nombre de círculos de Mohr.

Definición 4.9.3. Al área comprendida entre los círculos de Mohr, en un plano de esfuerzo, recibe el nombre de diagrama de Mohr. El diagrama de Mohr es la representación gráfica de los vectores esfuerzo que pasan por un punto.

De acuerdo con lo anterior se puede afirmar que con el Diagrama de Mohr se conoce el lugar geométrico de todos los vectores esfuerzo que pasan por un punto. Entonces en el diagrama de Mohr, para localizar un vector esfuerzo en especial habrá que especificar la dirección del área en que actúa tal vector.

Para localizar una dirección unitaria en el plano de Mohr analicemos la localización de dicha dirección en una esfera unitaria referida a los ejes principales según se muestra en la fig. 4.9.5

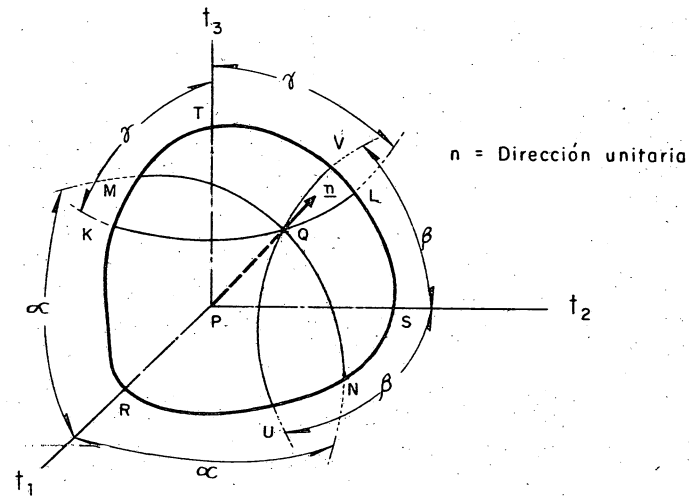


Fig 4.9.5 Dirección unitaria referida a una esfera unitaria en un sistema de ejes principales

Un punto Q sobre la esfera se puede localizar mediante la intersección de un par de circunferencias, por ejem. \widehat{KL} y \widehat{MN} , \widehat{KL} y \widehat{UV} o bien \widehat{MN} y \widehat{UV} . Las circunferencias \widehat{KL} , \widehat{MN} y \widehat{UV} se pueden considerar -- como la intersección de superficies cónicas, cuyos ejes son los ejes coordenados y vértice común P, con la esfera. Así a la circunferencia \widehat{MN} le corresponde el cono con ángulo α ; a la circunferencia \widehat{UV} el cono con ángulo β y a la circunferencia \widehat{KL} el cono con ángulo γ . De acuerdo con lo anterior se debe tener que

$$n_1 = \cos \alpha \quad ; \quad n_2 = \cos \beta \quad ; \quad n_3 = \cos \gamma \quad (4.9.13)$$

Usando las ecs. 4.9.4, 4.9.13 y la fig. 4.9.5 se podrán obtener -- las conclusiones siguientes

- 1) Si $n_1=0$ entonces $\alpha = \frac{\pi}{2}$ y la circunferencia \widehat{MN} sí coincidirá con \widehat{ST} .
- 2) Usando la ec. 4.9.4 se obtiene la ecuación de la circunferencia C_1
- 3) En el plano de Mohr los ejes principales aparecen de punta. El eje t_1 se localiza en el centro de la circunferencia C_1
- 4) Puesto que los ejes coordenados en la fig. 4.9.5 forman un ángulo de 90° mientras que en el plano de Mohr forman un ángulo de 180° , es de pensarse que cualquier ángulo, en el plano de Mohr, sea el doble de un ángulo real. Lo anterior se ve ^{corroborado} en el caso de que las cortantes extremales forman un ángulo de 45° respecto a los ejes principales y en la representación de Mohr forman un ángulo de 90°
- 5) De acuerdo con la fig. 4.9.5 a la circunferencia C_1 la cortan las circunferencias \widehat{KL} y \widehat{UV} en los puntos L y V respectivamente. El punto V se localiza al trazar el ángulo β que forma el cono con eje el coordenado, t_2 . En la representación de Mohr el ángulo será de 2β con vértice en el centro de C_1 y se medirá del punto t_2 al

punto t_3 . El punto L se localiza al trazar el ángulo γ en el cono cuyo eje coincide con t_3 . En la representación de Mohr se hará al medir un ángulo de 2γ con origen en el centro de C_1 y se medirá del punto t_3 al punto t_2 .

6) De acuerdo con la fig. 4.9.5 la circunferencia \widehat{KL} es concéntrica con la circunferencia \widehat{RS} , que se obtiene al hacer $\gamma = \frac{\pi}{2}$ y de acuerdo con la ec. 4.9.6 resulta ser la circunferencia C_3 . Entonces, la circunferencia que pasa por el punto L tiene su centro igual a la C_3 y deberá cortar a la circunferencia C_2 en el punto K

7) En base a la fig. 4.9.5 La circunferencia \widehat{UV} es concéntrica con la circunferencia \widehat{RT} y esta se obtiene del hacer $\beta = \frac{\pi}{2}$ y de acuerdo con la ec. 4.9.5 resulta ser la ecuación de la circunferencia C_2 . Por lo tanto, la circunferencia que pasa por el punto V tiene el mismo centro que la circunferencia C_2 .

8) Al trazar las circunferencias que pasan por los puntos L y V se obtendrá el punto de intersección Q que corresponderá en la representación de Mohr, al vector esfuerzo asociado a la dirección con cosenos directores $[\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma] = [n_1, n_2, n_3]$

La fig. 4.9.6 muestra la representación de Mohr discutida en los puntos anteriores

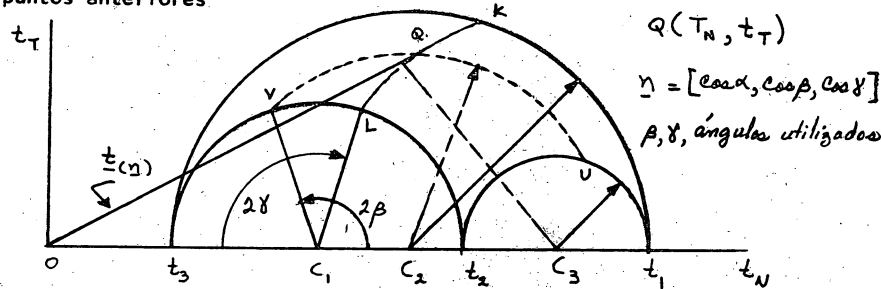


Fig 4.9.6 Localización del vector esfuerzo $t(n)$ usando como base la circunferencia C_1 .

Desde luego que la representación de Mohr puede realizarse usando como base las circunferencias restantes.

Así la fig. 4.9.7 muestra tal representación usando a la circunferencia C_2 y en la fig. 4.9.7 se utiliza la circunferencia, C_3 .

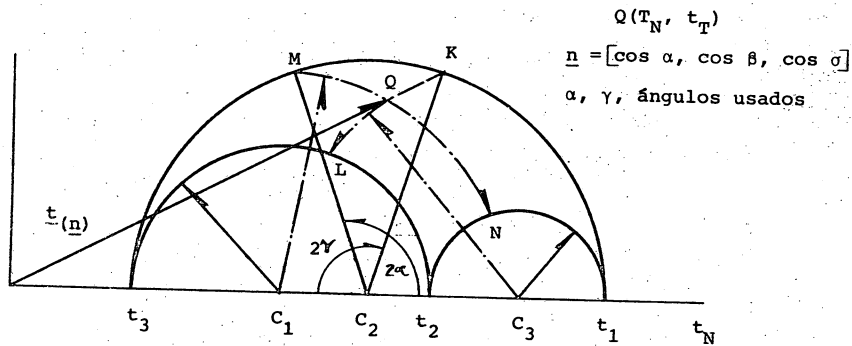


Fig 4.9.7. Localización del vector esfuerzo $\underline{t}(\underline{n})$ usando como base la circunferencia C_2 .

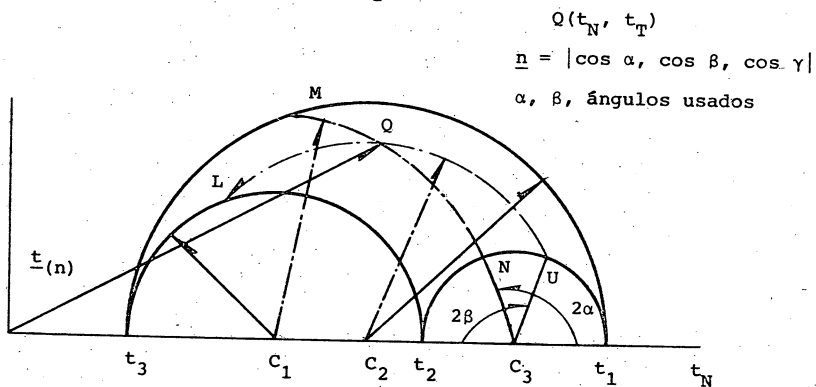


Fig 4.9.8. Localización del vector esfuerzo $\underline{t}(\underline{n})$, usando como base la circunferencia C_3 .

NOTA 4.9.1. En las fig 4.9.6 a 4.9.8 únicamente se dibujarán las --mitades de los diagramas de Mohr ya que estos son simétricos con respecto al eje t_N . Lo anterior aparentemente puede ocasionar confusiones al definir las intersecciones en la circunferencia que se este utilizando como base. La confusión desaparece al tener presente la simetría del diagrama de Mohr.

4.10 Descomposición del tensor esfuerzo.

En ciertas aplicaciones es conveniente descomponer al tensor de esfuerzo de Cauchy t_{kl} en las dos componentes indicada en la ecuación siguiente.

$$t_{kl} = \frac{1}{3} t_{mm} \delta_{kl} + S_{kl} = \bar{t}_{kl} + S_{kl} \quad (4.10.1)$$

en donde el tensor \bar{t}_{kl} se le llama tensor esférico o hidrostático y es un tensor diagonal de la forma

$$\bar{t}_{kl} = \frac{1}{3} t_{mm} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{t} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{t} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{t} \end{bmatrix} \quad (4.10.2)$$

y el tensor S_{kl} denominado esfuerzo desviador, es de la forma

$$S_{kl} = t_{kl} - \bar{t}_{kl} = \begin{bmatrix} t_{11} - \bar{t} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} - \bar{t} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} - \bar{t} \end{bmatrix} \quad (4.10.3)$$

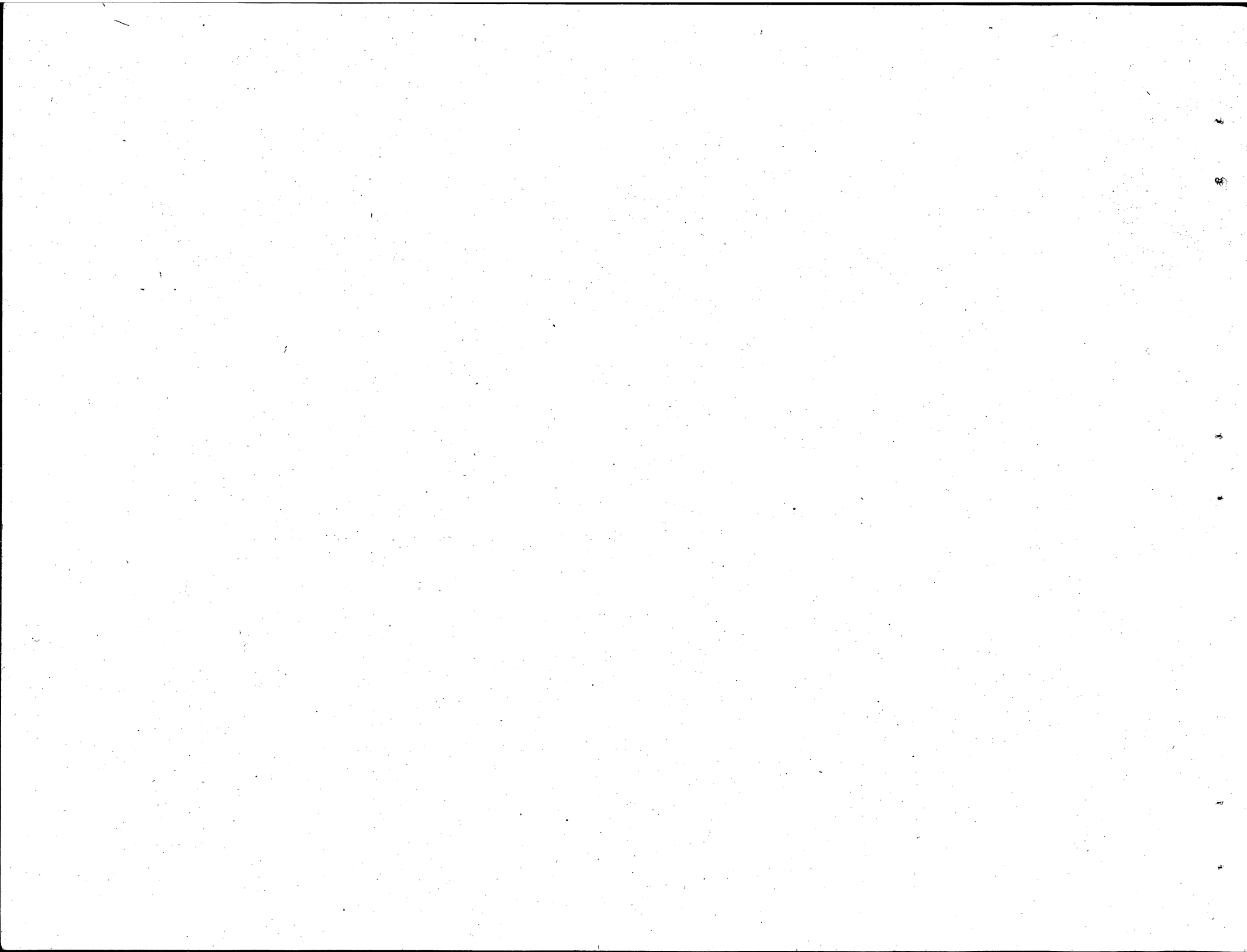
Es fácil demostrar que

- 1) Las direcciones principales del tensor de esfuerzo desviador S_{kl} coinciden con la del tensor t_{kl} .
- 2) Los esfuerzos principales S_k del tensor esfuerzo desviador, S_{kl} están dados en términos de los esfuerzos principales t_k del tensor

mediante la expresión siguiente

$$s_k = t_k - \bar{t} \quad (4.10.4)$$

3) El primer invariante I_3 del tensor esfuerzo desviador es nulo.



MECANICA DEL MEDIO CONTINUO.

Notas preliminares para un primer curso.

Ramón Cervantes Beltrán *

Victor Porras Silva

* Profesores Investigadores, Facultad de Ingeniería, UNAM.

CAPITULO 5

TERMODINAMICA

5.1 Introducción

En este capítulo se presentan brevemente los conceptos de termodinámica de los medios continuos considerando únicamente energías caloríficas. Se establecen los axiomas fundamentales de la conservación de la energía y de entropía, las restricciones termodinámicas de materiales muy usuales como lo son los sólidos elásticos y los fluidos viscosos. También se hace la distinción entre los equilibrios termodinámico y mecánico y se establece un principio variacional válido para cuerpos en equilibrio térmico y mecánico.

5.2 Principio de la conservación de la energía.

El principio de la conservación de la energía, en su forma global se enunció en el inciso 3.6. La expresión matemática de tal principio en términos de la energía cinética \mathcal{K} , la energía interna \mathcal{E} , el trabajo desarrollado \mathcal{W} por unidad de tiempo, por las fuerzas actuantes y las energías $\sum_{\alpha} u_{\alpha}$ que por unidad de tiempo se le asocian a un medio continuo de volumen \mathcal{V} y superficie frontera \mathcal{S} resulta ser

$$\frac{D}{Dt}(\mathcal{K} + \mathcal{E}) = \dot{\mathcal{K}} + \dot{\mathcal{E}} = \mathcal{W} + \sum_{\alpha} u_{\alpha} \quad (5.2.1)$$

En el término asociado a las energías $\sum_{\alpha} u_{\alpha}$, se incluyen a los varios tipos de energías, que puedan presentarse, por ejemplo, las energías térmicas, química, electromagnética, etc. Por cuestión de simplicidad en los modelos matemáticos resultantes se consideraran únicamente sistemas termomecánicos definidos como:

Definición 5.2.1. Sistemas termomecánicos, son aquellos en los cuales la energía térmica es la única que puede estar presente.

Si la energía térmica, por unidad de tiempo, que está presente en un sistema termomecánico se representa por Q el principio de la conservación de la energía para tal sistema resultará ser

$$\dot{\mathcal{K}} + \dot{\mathcal{E}} = \mathcal{W} + Q \quad (5.2.2)$$

Las unidades de las cantidades \mathcal{W} y Q son de trabajo por unidad de tiempo, es decir, distancia (L) por fuerza (ML/T²) entre tiem.

po (T) o bien, ML^2/T^3

La primera ley de termodinámica se puede obtener de la ec 5.2.2 a suponer el caso particular de la termostática, es decir, al considerar cambios independientes del tiempo. Para tales cambios se cumplen las condiciones siguientes

$$\dot{K} = 0 \quad (5.2.3a)$$

$$\dot{E} dt = d\bar{E} \quad (5.2.3b)$$

$$\dot{W} dt = \delta W \quad (5.2.3c)$$

$$\dot{Q} dt = \delta Q \quad (5.2.3d)$$

donde los términos de la derecha de las ecs. 5.2.3c,d se refieren a incrementos y no a diferenciales. Sustituyendo las ecs. 5.2.3 en la ec. 5.2.2 se obtiene

$$d\bar{E} = \delta W + \delta Q \quad (5.2.4)$$

que es la expresión de la primera ley de la termodinámica.

En un medio continuo $V+Y$ el calor Q puede asociarse a la superficie Y por donde puede entrar o salir tal energía o bien al volumen V en donde pueden existir fuentes de calor

Para cuantificar la energía de calor, que por unidad de tiempo, entra o sale del cuerpo se supondrá que en cada punto x sobre la superficie Y existe un vector calor q por unidad de área.

La orientación del área donde actúa el vector calor se indicará por n . La energía de calor asociada al volumen se cuantificará al suponer en cada punto interior la existencia de una fuente de calor asociada al volumen se cuantificará al suponer en cada punto interior la existencia de una fuente de calor h por unidad de masa. De acuerdo con estas consideraciones, la energía de calor Q en todo el cuerpo, resultará ser

$$Q = \oint_Y q \cdot n da + \int_V \rho h dv = \oint_Y q_k n_k da + \int_V \rho h dv \quad (5.2.5)$$

La energía mecánica o trabajo W que desarrollan las fuerzas de cuerpo f y de superficie $t_{(n)}$ se obtendrán de la definición de potencia, es decir,

$$\dot{W} = \oint_Y t_{(n)} \cdot v da + \int_V \rho f \cdot v dv = \oint_Y t_{ik} v_k n_i da + \int_V \rho f_k v_k da \quad (5.2.6)$$

Las expresiones de la energía cinética K e interna E se obtienen del inciso 3.6 (ecs 3.6.7 y 3.6.16)

$$K = \frac{1}{2} \int_V \rho v_k v_k dv \quad (5.2.7)$$

$$E = \int_V \rho \bar{E} dv \quad (5.2.8)$$

Las derivadas materiales de las ecs 5.2.7 y 5.2.8 resultarán

$$\dot{\mathcal{K}} = \int_{\mathcal{V}} \left[\rho \dot{v}_k a_k + \frac{1}{2} \dot{v}_k v_k \frac{D}{Dt} (\rho dv) \right] \quad (5.2.9)$$

$$\dot{\mathcal{E}} = \int_{\mathcal{V}} \left[\rho \dot{\mathcal{E}} dv + \epsilon \frac{D}{Dt} (\rho dv) \right] \quad (5.2.10)$$

Las ecs 5.2.5 y 5.2.6 se pueden poner en términos de integrales de volumen al usar el teorema de Gauss y quedan

$$Q = \int_{\mathcal{V}} (q_{k,k} + \rho h) dv \quad (5.2.11)$$

$$\dot{\mathcal{W}} = \int_{\mathcal{V}} (t_{lk,l} v_l + t_{lk} v_{k,l} + \rho f_k v_k) dv \quad (5.2.12)$$

sustituyendo las ecs 5.2.9 a 5.2.12 en la ec 5.2.2, se obtiene la expresión siguiente.

$$\int_{\mathcal{V}} (\rho \dot{\mathcal{E}} - t_{lk} v_{k,l} - q_{k,k} - \rho h) dv + \int_{\mathcal{V}} (\epsilon + \frac{1}{2} v_k v_k) \frac{D}{Dt} (\rho dv) - \int_{\mathcal{V}} v_k [t_{lk,l} + \rho (f_k - a_k)] dv = 0 \quad (5.2.13)$$

La ec 5.2.13 es la expresión final del principio de la conservación de la energía en su forma global.

Cuando la expresión de la conservación de la energía (ec 5.2.13)

se aplica a una vecindad infinitesimal arbitraria, de un punto (x) , se deberá satisfacer la expresión siguiente

$$(\rho \dot{\mathcal{E}} - t_{lk} v_{k,l} - q_{k,k} - \rho h) + (\epsilon + \frac{1}{2} v_k v_k) \frac{D}{Dt} (\rho dv) - v_k [t_{lk,l} + \rho (f_k - a_k)] = 0 \quad (5.2.14)$$

tomando en cuenta que en la condición anterior se son válidos los principios, en su forma local, de conservación de la masa y balance de la cantidad de movimiento, es decir

$$\frac{D}{Dt} (\rho dv) = 0 \quad (5.2.15)$$

$$t_{lk,l} + \rho (f_k - a_k) = 0 \quad (5.2.16)$$

la ecuación 5.2.14 se reduce a la expresión siguiente

$$\rho \dot{\mathcal{E}} = t_{kl} v_{l,k} + q_{k,k} + \rho h \quad (5.2.17)$$

que es la expresión de la conservación local de la energía para un medio no polar, considerado como un sistema termomecánico. Tomando en cuenta las ecs. 3.5.1, 3.5.2 y 3.5.3 se tendrá que

$$v_{l,k} = d_{lk} + w_{lk} \quad (5.2.18)$$

$$t_{kl} v_{l,k} = t_{kl} d_{lk} + t_{kl} w_{lk} = t_{kl} d_{lk} = \phi \quad (5.2.19)$$

y la ec. 5.2.17 se puede escribir como

$$\rho \dot{E} = t_{kl} d_{lk} + q_{k,k} + \rho h = \phi + q_{k,k} + \rho h \quad (5.2.20)$$

donde al término ϕ se acostumbra llamarlo potencia de esfuerzo.

La ec. 5.2.20 establece que el cambio de la energía interna por unidad de tiempo se debe a la potencia de esfuerzo y a la energía calorífica.

5.3 Energía Potencial.

En la mecánica de la partícula se llega al concepto de energía potencial cuando la fuerza considerada es función del vector de posición y pueda, a su vez obtenerse de un potencial. En la mecánica del medio continuo se trabaja con fuerzas de superficie y con fuerzas de cuerpo. A las fuerzas de cuerpo se les asociará el concepto de energía potencial.

Si las fuerzas de cuerpo son estacionarias y se pueden obtener de un potencial $U(x)$, se podrá definir el concepto de energía potencial en los medios continuos. Bajo las condiciones anteriores se podrá escribir

$$f_k = -U_{,k} \quad (5.3.1)$$

Definición 5.3.1. Energía potencial u , es la cantidad obtenida mediante la expresión siguiente

$$u = \int_V \rho U \, dv \quad (5.3.2)$$

Tomando en cuenta que las fuerzas de cuerpo son estacionarias, se podrá escribir que

$$\frac{\partial U}{\partial t} = 0 \quad (5.3.3)$$

entonces, la derivada material de la energía potencial será

$$\dot{u} = \int_V \rho \dot{U} \, dv + \int_V \rho U \frac{D}{Dt} (p \, dv) = \int_V \rho U_{,k} v_k \, dv + \int_V \rho U \frac{D}{Dt} (p \, dv) \quad (5.3.4)$$

o bien

$$\int_V \rho U_{,k} v_k \, dv = \dot{u} - \int_V \rho U \frac{D}{Dt} (p \, dv) \quad (5.3.5)$$

sustituyendo las ecs. 5.3.1 y 5.3.5 en la ec. 5.2.6 se podrá obtener los desarrollos siguientes

$$\begin{aligned} \dot{W} &= \int_V t_{kl} v_l n_k \, da - \int_V \rho U_{,k} v_k \, dv \\ &= \int_V t_{kl} v_l n_k \, da + \int_V \rho U \frac{D}{Dt} (p \, dv) - \dot{u} \end{aligned} \quad (5.3.6)$$

Al sustituir la ec. 5.3.6 en el principio de la conservación de la energía (ec 5.2.2) se obtiene

$$\dot{K} + \dot{E} + \dot{Q} = \int_{\mathcal{V}} t_{kl} v_l da + \int_{\mathcal{V}} \rho U(\rho dv) + Q \quad (5.3.7)$$

En base a la ec. 5.3.7 se puede enunciar el teorema siguiente.

Teorema 5.3.1. Conservación de la energía mecánica. La suma de las energías cinética, interna y potencial es constante. Este teorema es válido si se satisfacen las hipótesis siguientes.

i) El cuerpo está aislado térmicamente, es decir

$$Q = 0 \quad (5.3.8)$$

ii) La energía generada por las fuerzas de superficie es nula, o sea.

$$\int_{\mathcal{V}} t_{kl} v_l da = 0 \quad (5.3.9)$$

iii) El potencial total generado por la variación de la masa se anula.

$$\int_{\mathcal{V}} \rho U \frac{D}{Dt} (\rho dv) = 0 \quad (5.3.10)$$

5.4 Energía de deformación.

Puesto que la energía potencial se asoció a las fuerzas de cuerpo, es natural preguntarse si puede existir una situación similar para las fuerzas de superficie. Se puede afirmar que la contestación a esta pregunta conducirá al concepto de energía de deformación.

Existen bases experimentales para suponer que el tensor de esfuerzos se puede escribir como

$$t_{kl} = {}_E t_{kl} + {}_D t_{kl} \quad (5.4.1)$$

en donde el tensor ${}_E t_{kl}$ representa a un tensor de esfuerzos correspondiente a la parte reversible o recuperable del tensor t_{kl} , que puede obtenerse de un potencial. El tensor ${}_D t_{kl}$ corresponderá a la parte irreversible o disipativa del tensor t_{kl} . Al tensor recuperable ${}_E t_{kl}$ se acostumbra llamarlo tensor de esfuerzos hiperelástico y el potencial donde se deriva se considerará únicamente función del gradiente de deformaciones, es decir

$$\sigma = \sigma(I_{k,k}) \quad (5.4.2)$$

y sometido a la condición siguiente

$$\rho \dot{\sigma} = t_{kl} d_{lk} = {}_E t_{kl} v_{l,k} \quad (5.4.3)$$

Usando las ecs 5.4.1 y 5.4.3 la expresión de la conservación local de la energía (ec 5.2.17) quedará expresada como

$$\begin{aligned} \rho \dot{\epsilon} &= {}_E t_{kl} d_{kl} + {}_D t_{kl} d_{kl} + q_{k,k} + \rho h = \\ &= \rho \dot{\zeta} + {}_D t_{kl} d_{kl} + q_{k,k} + \rho h \end{aligned} \quad (5.4.4)$$

Al integrar la ec 5.4.4 sobre el volumen \mathcal{V} del cuerpo, la ecuación resultante será

$$\int_{\mathcal{V}} \rho \dot{\epsilon} dv = \int_{\mathcal{V}} \rho \dot{\zeta} dv + \int_{\mathcal{V}} {}_D t_{kl} d_{kl} dv + \int_{\mathcal{V}} (q_{k,k} + \rho h) dv \quad (5.4.5)$$

Si se definen las cantidades siguientes

$$\mathcal{P} = \int_{\mathcal{V}} \rho \zeta dv = \text{Energía de deformación total} \quad (5.4.6)$$

$$\mathcal{D} = \int_{\mathcal{V}} {}_D t_{kl} d_{kl} dv = \text{Potencia disipación total} \quad (5.4.7)$$

la ec 5.4.5 se reduce a la expresión dada a continuación

$$\dot{\mathcal{E}} = \dot{\mathcal{P}} + \mathcal{D} + \mathcal{Q} \quad (5.4.8)$$

conviene recordar que la ec 5.2.17 es válida si se cumplen localmente, el principio de la conservación de la masa y el balance de la cantidad de movimiento (primera ecuación de Cauchy), y por lo tanto, la ec 5.4.3 también tendrá tal restricción y no correspon-

derá a una expresión general para la conservación global de la energía. La expresión general para la conservación global de la energía se obtendrá al usar las ecs. 5.2.13, 5.4.1, 5.4.3, 5.4.6, y 5.4.7 y resulta ser

$$\dot{\mathcal{E}} = \dot{\mathcal{P}} + \mathcal{D} + \mathcal{Q} - \mathcal{K} - \int_{\mathcal{V}} \rho \frac{D}{Dt} (\rho dv) + \int_{\mathcal{V}} v_k (t_{lk,l} + \rho f_k) dv \quad (5.4.9)$$

Para el caso particular en que la densidad de energía interna ξ sea igual al potencial de energía ζ ($\xi = \zeta$) la ec 5.4.8 se reduce a

$$\mathcal{D} + \mathcal{Q} = 0 \quad (5.4.10)$$

la ec 5.4.10 establece que la energía disipativa se transforma totalmente en calor.

La expresión del tensor de esfuerzo hiperelástico ${}_E t_{kl}$ se puede obtener en forma explícita según se indica a continuación. La derivada material de ζ se puede escribir de la manera siguiente al usar la ec 3.3.5

$$\dot{\zeta} = \frac{D\zeta}{Dt} = \frac{\partial \zeta}{\partial x_{k,k}} \frac{D}{Dt} (x_{k,k}) = \frac{\partial \zeta}{\partial x_{k,k}} v_{k,l} x_{l,k} \quad (5.4.11)$$

sustituyendo la ec 5.4.11 en la ec 5.4.3 resulta

$$\rho \frac{\partial \zeta}{\partial x_{k,k}} x_{l,k} v_{k,l} = {}_E t_{lk} v_{k,l} \quad (5.4.12)$$

tomando en cuenta que el tensor de esfuerzo es simétrico, la ec. 5.4.12 conduce a las expresiones siguientes

$$\epsilon t_{lk} = \rho \frac{\partial \epsilon}{\partial x_{(k,k}} x_{l)},_k \quad (5.4.13)$$

$$0 = \rho \frac{\partial \epsilon}{\partial x_{[k,k}} x_{l]}],_k \quad (5.4.14)$$

Se tiene un caso muy especial de energía de deformación cuando el potencial de energía es función únicamente del jacobiano de la transformación $j = \det(x_{k,k})$

$$\epsilon = \epsilon(j) = \epsilon(\rho_0 / \rho) \quad (5.4.15)$$

Usando la ec 2.3.5 al calcular el tensor de esfuerzo hiperelástico con las ecs 5.4.13 y 5.4.14 se obtiene

$$\epsilon t_{lk} = \rho \frac{\partial \epsilon}{\partial j} \frac{\partial j}{\partial x_{(k,k}} x_{l)},_k = \rho \frac{\partial \epsilon}{\partial j} j X_{k,k} x_{l,k} = \rho \frac{\partial \epsilon}{\partial j} j \delta_{kl} = -\pi \delta_{kl} \quad (5.4.16)$$

en donde al término

$$\pi = \pi(j) = -\rho j \frac{\partial \epsilon}{\partial j} = -\rho_0 \frac{\partial \epsilon}{\partial j} \quad (5.4.17)$$

se le conoce con el nombre de presión hidrostática.

sustituyendo la ec 5.4.16 en la ec 5.4.3 y haciendo uso de la ec.

3.3.18 se obtiene

$$\rho \dot{\epsilon} = -\pi v_{k,k} = -\pi \frac{D}{Dt} (dv) \quad (5.4.18)$$

la ec. 5.4.18 es equivalente a

$$\dot{Q} = - \int_M \pi \frac{D}{Dt} (dv) + \int_M \epsilon \frac{D}{Dt} (\rho dv) \quad (5.4.19)$$

De los resultados anteriores se puede deducir como un caso particular el primer principio de la termostática. La termostática clásica trata con sistemas homogéneos y los esfuerzos consisten únicamente de presión hidrostática constante. Se puede suponer que, en general, la presión hidrostática π , sea función del tiempo, es decir

$$\pi = \pi(t) \quad (5.4.20)$$

bajo tales condiciones la ec 5.4.19 se reduce a

$$\dot{Q} = -\pi \dot{M} \quad (5.4.21)$$

Puesto que la potencia disipativa debe ser nula, $\mathcal{D} = 0$, la ec.

5.4.8 se puede escribir como

$$d\xi = -\pi dV + \delta Q \quad (5.4.22)$$

en donde

$$d\xi = \dot{\xi} dt \quad (5.4.23)$$

$$\delta Q = Q dt \quad (5.4.24)$$

y las consideraciones adicionales de que todas las variaciones son independientes del tiempo y están asociadas a cambios entre estados vecinos.

La ec 5.4.22, que es la expresión de la primera ley de la termostática está sujeta a las hipótesis siguientes.

- i) El sistema es uniforme y explícitamente independiente del tiempo.
- ii) La parte disipativa del tensor esfuerzo se anula.
- iii) La parte no disipativa del tensor esfuerzo consiste únicamente de presión hidrostática.

5.5 Entropía.

La ecuación clásica del primer principio de la termostática (ec 5.4.22) se puede poner en una forma diferencial siempre y cuando se pueda encontrar un factor de integración de tal manera que

la variación del calor δQ se pueda expresar como una diferencial total. El factor de integración se indicará como $1/\bar{\theta}$ de tal manera que se cumpla la ecuación siguiente

$$\frac{\delta Q}{\bar{\theta}} = dH \quad (5.5.1)$$

Al utilizar la ec 5.5.1, la ec 5.4.22 se podrá escribir en forma diferencial como

$$d\xi = -\pi dV + \bar{\theta} dH \quad (5.4.2)$$

Las nuevas variables $\bar{\theta}$ y H que aparecen en las ecs. 5.5.1 y 5.5.2 reciben los nombres de temperatura absoluta y entropía total, respectivamente. Carathéodory fue el primero que investigó bajo que condiciones era posible la ec 5.5.1, y llegó al concepto de temperatura y entropía mediante el concepto de equilibrio térmico y la hipótesis de que para cualquier estado, existe otro, arbitrariamente cercano, que el sistema termodinámico no podrá alcanzar a menos de que expanda trabajo.

Para procesos que no están en equilibrio, que son mas naturales que los que si están, todos los intentos para definir la entropía y la temperatura afrontan grandes dificultades al grado que en la actualidad todavía no existe una teoría adecuada para la termodinámica irreversible.

La introducción de los conceptos de entropía y temperatura como

variables primitivas, enteramente similar a como se hizo para la masa, es el acceso mas acertado en la termodinámica actual. Entonces, para calcular la entropía total H , se supondrá una densidad de entropía por unidad de masa η , de tal manera que

$$H = \int_M \rho \eta dV \quad (5.5.3)$$

La densidad de entropía tendrá unidades de energía por unidad de temperatura por unidad de masa.

Definición 5.5.1. Estado termodinámico. Se define así a la clase de las $n+1$ variables independientes η, ν_α ($\alpha=1,2,\dots,n$), que influyen sobre la densidad de energía interna ϵ y la temperatura θ de un punto material \underline{X} que ocupa un lugar \underline{x} en un tiempo t . Los parámetros ν_α tienen dimensiones de unidades mecánicas y eléctricas.

De acuerdo con la definición anterior se podrán formular las ecuaciones siguientes.

$$\epsilon = \epsilon(\eta, \nu_\alpha, \underline{X}) \quad (5.5.4)$$

$$\theta = \theta(\eta, \nu_\alpha, \underline{X}) \quad (5.5.5)$$

y vienen a ser las ecuaciones constitutivas termomecánicas de la densidad de energía interna y la temperatura. Adelantándonos al concepto de ecuaciones constitutivas las ecs 5.5.4 y 5.5.5 estarán sujetas a las restricciones impuestas por la desigualdad de CLAUSIUS-DUHEM y a los axiomas de la teoría constitutiva que se estudiarán posteriormente. La selección de las variables ν_α (en ocasiones se escribirá en forma vectorial, es decir $\nu_\alpha = \underline{\nu}$), depende del estado termodinámico del cuerpo. La experiencia con el sistema físico es la base para definir el carácter termodinámico del cuerpo y por lo tanto la selección de las variables $\underline{\nu}$. Una vez seleccionados los valores de ν_α , se tendrá el estado termodinámico de un determinado sistema ideal. Para que este estado represente a alguno físico, se deben de comprobar que no contradiga los axiomas básicos de la mecánica, los de la termodinámica y los de la teoría constitutiva. El grupo de restricciones que forman, los axiomas referidos constituyen las condiciones de admisibilidad en los estados termodinámicos de un sistema ideal.

Definición 5.5.2. Procesos termodinámicos. Así se denominan a los cambios que ocurren en la densidad de energía interna ϵ y la temperatura θ debido a los cambios en el estado termodinámico η y ν_α .

La descripción de los procesos termodinámicos se presenta en las ecs 5.5.4 y 5.5.5 razón por la que en ocasiones se les llama ecuaciones de estado.

Definición 5.5.3. Proceso termodinámico homogéneo. Es aquél en donde las funciones ϵ y θ son independientes de la posición \underline{X} .

Conviene enfatizar que para un proceso termodinámico estacionario las formas funcionales de la densidad de energía interna ϵ y la temperatura son las mismas para todos los puntos del cuerpo.

Si de la ec 5.5.5 se puede resolver η , se podrá seleccionar a θ como una variable de estado nueva que reemplazará a η . Una condición suficiente para que η se pueda resolver de la ec 5.5.5, en alguna vecindad de η y para valores fijos de ν_α , consiste en que la expresión

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right|_{\nu, \underline{X}}$$

sea continua y no se anule en la vecindad requerida de η . Para tal caso se deberá tener que

$$\eta = \eta(\theta, \nu_\alpha, \underline{X}) \quad (5.5.6)$$

$$\epsilon = \epsilon[\eta(\theta, \nu_\alpha, \underline{X}), \nu, \underline{X}] = \hat{\epsilon}(\theta, \nu, \underline{X}) \quad (5.5.7)$$

donde las funciones η y $\hat{\epsilon}$ están dadas para el punto \underline{X} . En caso de tenerse un proceso termodinámico homogéneo, las funciones η y $\hat{\epsilon}$ serán independientes de \underline{X} y por lo tanto serán las mismas para todos los puntos del cuerpo.

Definición 5.5.4. Temperatura termostática. Se representa con $\bar{\theta}$ y se define mediante la expresión siguiente

$$\bar{\theta} = \left. \frac{\partial \epsilon}{\partial \eta} \right|_{\nu, \underline{X}} \quad (5.5.8)$$

Se debe de enfatizar la distinción entre la temperatura θ y la temperatura termostática $\bar{\theta}$. En incisos posteriores se presentarán las condiciones para que sean iguales en algunos sistemas termomecánicos.

Definición 5.5.5. Tensiones termostáticas. Se representan con $\bar{\tau}_\alpha$ y se definen con las expresiones siguientes

$$\bar{\tau}_\alpha = \left. \frac{\partial \epsilon}{\partial \nu_\alpha} \right|_{\eta, \underline{X}, \nu_\beta} \quad \alpha \neq \beta \quad (5.5.9)$$

Un cambio arbitrario de un estado termodinámico en un punto material \underline{X} provocará un cambio en la densidad de energía interna que se obtendrá al usar las ecs. 5.5.4, 5.5.8 y 5.5.9 quedará expresado como

$$d\epsilon = \bar{\theta} d\eta + \bar{\tau}_\alpha d\nu_\alpha \quad (5.5.10)$$

la ec 5.5.10 se le conoce con el nombre de ecuación de Gibbs en su forma local. Para un punto fijo \underline{X} se deberá tener la expresión

$$\dot{\epsilon} = \bar{\theta} \dot{\eta} + \bar{\tau}_\alpha \dot{x}_\alpha \quad (5.5.11)$$

En base a las ecs 5.5.8 y 5.5.9 se tendrá que las funciones $\bar{\theta}$ y $\bar{\tau}_\alpha$ son de la forma

$$\bar{\theta} = \bar{\theta}(\eta, \underline{v}, \underline{x}) \quad (5.5.12)$$

$$\bar{\tau}_\alpha = \bar{\tau}_\alpha(\eta, \underline{v}, \underline{x}) \quad (5.5.13)$$

Si η se puede obtener de la ec 5.5.12, se podrá seleccionar $d\bar{\theta}$ como una variable de estado nueva que sustituya a η , pudiéndose escribir las ecuaciones siguientes

$$\eta = \eta(\bar{\theta}, \underline{v}, \underline{x}) \quad (5.5.14)$$

$$\epsilon = \bar{\epsilon}(\bar{\theta}, \underline{v}, \underline{x}) \quad (5.5.15)$$

$$\bar{\tau}_\alpha = \bar{\tau}_\alpha(\bar{\theta}, \underline{v}, \underline{x}) \quad (5.5.16)$$

5.6 Principio de Entropía.

Axioma fundamental No. 5. Desigualdad de Clausius-Duhem.

La rapidez de variación del cambio de la entropía total H , nunca es menor que la suma de la entrada de la entropía \underline{S} a través de la superficie \mathcal{Y} del cuerpo y de la entropía B suministrada por las fuentes de cuerpo. Esto se postulará como verdad para todas las partes del cuerpo para todos los procesos independientes.

La expresión de la desigualdad de Clausius-Duhem quedará

$$\Gamma \equiv \frac{dH}{dt} - B - \int_{\mathcal{Y}} \underline{S} \cdot d\underline{a} \geq 0 \quad (5.6.1)$$

donde se define a la cantidad Γ llamada producción de entropía total. Si se define a la fuente de entropía local b , mediante la expresión

$$B = \int_{\mathcal{V}} \rho b dv \quad (5.6.2)$$

la desigualdad de Clausius-Duhem podrá escribirse como

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \rho \eta dv - \int_{\mathcal{V}} \rho b dv - \int_{\mathcal{Y}} s_k da_k \geq 0 \quad (5.6.3)$$

cuando la ec 5.6.3 es válida para una vecindad diferencial arbitraria, se deberá tener la producción local de entropía

$$\rho \gamma \equiv \rho \dot{\eta} - \rho b - S_{k,k} \geq 0 \quad (5.6.4)$$

donde $\dot{\gamma}$ es la producción de entropía local. La entrada de entropía \underline{s} y las fuentes de entropía b dependerán de los diversos fenómenos debidos a cambios térmicos, de fusión, químicos, eléctricos, etc. Siempre será posible expresar a la entrada de entropía y a la fuente de entropía como se indica a continuación

$$\underline{s} = \frac{q}{\theta} + \underline{s}_1 \quad (5.6.5)$$

$$b = \frac{h}{\theta} + b_1 \quad (5.6.6)$$

en las expresiones anteriores se tendrá que $\frac{q}{\theta}$ es la entrada de entropía debido al calor de entrada y $\frac{h}{\theta}$ es la fuente de entropía debido a la fuente de calor, mientras que \underline{s}_1 es la entrada de entropía y b_1 , la fuente de entropía debidas a los tipos restantes de efectos que provocan entropía.

Si la fuente de calor h se obtiene de la conservación local de la energía (ec 5.2.17), la ec 5.6.6 se podrá escribir como

$$\rho \theta b = \rho \theta b_1 + \rho \dot{E} - t_{kl} v_{l,k} - q_{k,k} \quad (5.6.7)$$

Al sustituir las ecs 5.6.5 y 5.6.7 en la ec 5.6.4 se transforma en

$$\rho \dot{\gamma} \equiv \rho \left(\dot{\eta} - \frac{\dot{E}}{\theta} \right) + \frac{1}{\theta} t_{kl} v_{l,k} + \frac{1}{\theta^2} q_k \theta_{,k} - \text{div } \underline{s}_1 - \rho b_1 \geq 0 \quad (5.6.8)$$

Definición 5.6.1. Proceso termomecánico simple. Se llama así a un proceso termodinámico en donde la entropía la causa el calor, es decir.

$$\underline{s}_1 = 0 \quad (5.6.9)$$

$$b_1 = 0 \quad (5.6.10)$$

$$\underline{s} = \frac{1}{\theta} \underline{q} \quad (5.6.11)$$

$$b = \frac{h}{\theta} \quad (5.6.12)$$

Para un proceso termomecánico simple la desigualdad de Clausius-Duhem en su forma local (ec 5.6.8) se reduce a

$$\rho \dot{\gamma} \equiv \rho \left(\dot{\eta} - \frac{\dot{E}}{\theta} \right) + \frac{1}{\theta} t_{kl} v_{l,k} + \frac{1}{\theta^2} q_k \theta_{,k} \geq 0 \quad (5.6.13)$$

y la expresión global de tal desigualdad quedará

$$\Pi \equiv \dot{H} - \oint_y \frac{1}{\theta} \underline{q} \cdot d\underline{a} - \int_V \frac{\rho h}{\theta} dv \geq 0 \quad (5.6.14)$$

Para un primer curso de esta materia se tratarán únicamente procesos termomecánicos simples. Para un proceso adiabático se tendrá que $\underline{q} = 0$, $h = 0$ lo cual hace que la ec 5.6.14 se reduzca a

$\dot{H} \geq 0$. Lo anterior establece que en un proceso adiabático, la entropía global no puede disminuir.

A la temperatura se le impondrá la condición de ser absoluta, es decir.

$$\theta > 0 \quad \inf \theta = 0 \quad (5.6.15)$$

Al introducir la función de energía libre de Helmholtz ψ , definida como

$$\psi = \varepsilon - \theta \eta \quad (5.6.16)$$

la ec 5.6.13 se puede escribir según se indica a continuación

$$P \dot{\gamma} \equiv - \frac{P}{\theta} (\dot{\psi} + \eta \dot{\theta}) + \frac{1}{\theta} t_{kl} \dot{v}_{l,k} + \frac{1}{\theta^2} q_k \theta_{,k} \geq 0 \quad (5.6.17)$$

Definición 5.6.2. Proceso admisible termodinámico. Se llama así a un proceso termodinámico que obedece la desigualdad local de Clausius-Duhem y posee una temperatura finita no negativa.

Lo anterior se puede escribir como:

$$\gamma \geq 0 \quad (5.6.18a)$$

$$0 < \theta < \infty, \quad \inf \theta = 0 \quad (5.6.18b)$$

Definición 5.6.3. Proceso admisible mecánicamente o consistente.

Así, se llama a un proceso termodinámico que obedece los axiomas de movimiento. Los axiomas de movimiento los forman los axiomas de conservación de la masa, el balance de la cantidad de movimiento, el balance del momento de la cantidad de movimiento y la conservación de la energía. Cabe mencionar que un proceso es admisible constitutivamente si está restringido por los axiomas de la teoría constitutiva (los axiomas de la teoría constitutiva se presentarán en el capítulo 6).

Teorema 5.6.1. En un proceso termomecánico simple, admisible termodinámico, caracterizado por un conjunto de variables de estado η, v_α con las características siguientes.

- i) Las variables v_α son independientes de la variable η .
- ii) El proceso es independiente de las rapidez de variación e integrales, respecto al tiempo, de la variable η .

Entonces la temperatura θ y la temperatura termostática $\bar{\theta}$ son iguales.

De acuerdo con la definición 5.6.2, la restricción del proceso será la ec 5.6.13, que en base a las ecs 5.5.4 y 5.5.9 se puede escribir como

$$\left(\theta - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta}\right) \dot{\eta} - P \dot{v}_\alpha + t_{kl} \dot{v}_{l,k} + \frac{1}{\theta^2} q_k \theta_{,k} \geq 0 \quad (5.6.19)$$

para mantener la ec 5.6.19 independiente de $\dot{\eta}$, se deberá anular su coeficiente, teniéndose

$$\theta = \left. \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \eta} \right|_{\nu, \underline{x}} \quad (5.6.20)$$

la ec 5.6.20 viene a ser la definición de la temperatura termostática dada por la ec 5.5.8.

5.7 Restricciones Termodinámicas de algunos materiales.

Con el fin de hacer énfasis en los temas desarrollados en este capítulo, se presentarán las restricciones termodinámicas de dos materiales que todavía ^{se} no han estudiado en este curso pero para efectos de aplicación bastará con definirlos.

5.7.1 Sólidos elásticos.

Un sólido elástico se define de tal manera que las ecuaciones mecánicas y térmicas se pueden escribir como

$$t_{kl} = t_{kl}(\eta, x_{k,k}) \quad (5.7.1)$$

$$q_k = q_k(\eta, x_{k,k}) \quad (5.7.2)$$

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}(\eta, x_{k,k}) \quad (5.7.3)$$

$$\theta = \theta(\eta, x_{k,k}) \quad (5.7.4)$$

las ecs 5.7.1 a 5.7.3 se pueden interpretar como el haber elegido a los valores siguientes de ν_α .

$$\nu_\alpha = x_{k,k} \quad \alpha = 1, 2, \dots, 9; \quad \nu_\alpha = 0 \quad \forall \alpha > 9 \quad (5.7.5)$$

La temperatura termostática $\bar{\theta}$ y las tensiones termodinámicas se obtendrán de las ecs 5.5.8, 5.5.9 y 5.7.5

$$\bar{\sigma}_{kk} = \left. \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x_{k,k}} \right|_{\eta} \quad (5.7.6)$$

$$\bar{\theta} = \left. \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \eta} \right|_{x_{k,k}} \quad (5.7.7)$$

La derivada material de la densidad de energía interna \mathcal{E} , se calcula usando las ecs. 5.7.3 y 3.3.5

$$\dot{\mathcal{E}} = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \eta} \dot{\eta} + \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x_{k,k}} \frac{D(x_{k,k})}{Dt} = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \eta} \dot{\eta} + \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x_{k,k}} \nu_{k,l} x_{l,k} \quad (5.7.8)$$

sustituyendo la ec 5.7.8 en la ec 5.6.13 se obtiene

$$p\delta = p\left(1 - \frac{1}{\theta} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \eta}\right) \dot{\eta} + \frac{1}{\theta} \left(t_{kl} - p \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x_{k,k}}\right) \nu_{k,l} + \frac{1}{\theta^2} q_k \theta_{,k} \geq 0 \quad (5.7.9)$$

La ec 5.7.9 es función de η , $v_{k,l}$ y $\theta_{,k}$ pero las ecs. 5.7.1 a 5.7.4 indican que tales cantidades no intervienen en t_{kl} , q_k , ε y θ . Para que las cantidades η , $v_{k,l}$, y $\theta_{,k}$ tengan variaciones independientes y se satisfaga la desigualdad dada por la ec 5.7.9, se deberán anular los coeficientes de η , $v_{k,l}$, y $\theta_{,k}$, obteniéndose las expresiones siguientes

$$\theta = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta} \quad (5.7.10)$$

$$t_{kl} = \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial v_{k,l}} x_{l,k} \quad (5.7.11)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_{[k,k]} x_{l],k} = 0 \quad (5.7.12)$$

$$q_k = 0 \quad (5.7.13)$$

comparando las ecs 5.7.10 y 5.7.6 se concluye que la temperatura θ y la temperatura termostática son iguales

$$\theta = \bar{\theta} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta} \quad (5.7.14)$$

Al sustituir la ec 5.7.6 en la ec 5.7.11 se obtiene la relación entre el tensor esfuerzo y las tensiones termostáticas

$$t_{kl} = \rho \bar{\sigma}(k k x_l)_{,k} \quad (5.7.15)$$

Los resultados anteriores son la demostración del teorema siguiente.

Teorema 5.7.1. Un sólido elástico con ecuaciones constitutivas dadas por las ecs. 5.7.1 a 5.7.4 es admisible termodinámicamente si y solo si se satisfacen las ecs. 5.7.10 a 5.7.13.

La ec 5.7.13 establece que los sólidos únicamente responden a cambios adiabáticos. Se puede demostrar que la restricción dada por la ec 5.7.12 es equivalente a establecer que la densidad de energía interna ε , debe ser función del tensor de deformación de Green.

5.7.2 Fluidos Viscosos.

Se puede definir a una clase de fluidos viscosos mediante las ecuaciones constitutivas siguientes.

$$t_{kl} = t_{kl}(\eta, \frac{1}{\rho}, v_{k,l}) \quad (5.7.16)$$

$$q_k = q_k(\eta, \frac{1}{\rho}, v_{k,l}) \quad (5.7.17)$$

$$\varepsilon = \varepsilon(\eta, \frac{1}{\rho}, v_{k,l}) \quad (5.7.18)$$

$$\theta = \theta(\eta, \frac{1}{\rho}, v_{k,l}) \quad (5.7.19)$$

De acuerdo con la ec 5.7.18, la derivada material de la densidad de energía interna ϵ , resulta ser

$$\dot{\epsilon} = \frac{\partial \epsilon}{\partial \eta} \dot{\eta} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \epsilon}{\partial \bar{\rho}'} \dot{\rho}' + \frac{\partial \epsilon}{\partial v_{k,l}} \dot{v}_{k,l} \quad (5.7.20)$$

donde $\bar{\rho}'$ indica $1/\rho$. Tomando en cuenta la ec 3.6.11b se podrá obtener la expresión siguiente

$$\frac{D}{Dt} (\rho_0) = \frac{D}{Dt} (j\rho) = \rho \frac{D}{Dt} j + j \frac{D}{Dt} \rho \quad (5.7.21)$$

puesto que $\frac{D}{Dt} (\rho_0) = 0$ y usando la ec 3.3.15, la ec 5.7.21 se reduce a

$$\dot{\rho}' = - \frac{\rho}{j} \frac{Dj}{Dt} = - \rho v_{k,k} \quad (5.7.22)$$

usando la ec 5.7.22, la ec 5.7.20 se puede escribir como

$$\dot{\epsilon} = \frac{\partial \epsilon}{\partial \eta} \dot{\eta} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \epsilon}{\partial \bar{\rho}'} v_{k,k} + \frac{\partial \epsilon}{\partial v_{k,l}} v_{k,l} \quad (5.7.23)$$

sustituyendo la ec 5.7.23 en la ec 5.6.13 se obtiene

$$\rho \dot{\gamma} \equiv \rho \left(1 - \frac{1}{\theta} \frac{\partial \epsilon}{\partial \eta}\right) \dot{\eta} - \frac{1}{\theta} \frac{\partial \epsilon}{\partial v_{k,l}} \dot{v}_{k,l} - \frac{1}{\theta} \frac{\partial \epsilon}{\partial \bar{\rho}'} v_{k,k} + \frac{1}{\theta} \tau_k v_{l,k} + \frac{1}{\theta} \tau_k \theta_{,k} \geq 0 \quad (5.7.24)$$

para que la desigualdad dada por la ec 5.7.24 se cumpla para cualquier variación arbitraria de $\dot{\eta}$ y $v_{k,l}$ se deberán anularse sus

coeficientes respectivos y se obtiene con tal restricción que

$$\theta = \frac{\partial \epsilon}{\partial \eta} \quad (5.7.25)$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial v_{k,l}} = 0 \quad (5.7.26)$$

La ecuación 5.7.26 establece que la densidad de energía ϵ , debe ser independiente del gradiente de velocidades $v_{k,l}$ y por las ecs 5.5.4 y 5.5.5, la temperatura θ también lo deberá ser. Además la ec 5.7.25 establece que la temperatura θ y la temperatura termostática $\bar{\theta}$ son iguales. De acuerdo con lo establecido por las ecs 5.7.25 y 5.7.26 se podrá escribir lo siguiente.

$$\epsilon = \epsilon \left(\eta, \frac{1}{\rho} \right) \quad (5.7.27)$$

$$\theta = \theta \left(\eta, \frac{1}{\rho} \right) = \frac{\partial \epsilon}{\partial \eta} \Big|_{\rho'} = \bar{\theta} \quad (5.7.28)$$

y la ec 5.7.24 se reduce a

$$\rho \dot{\gamma} \equiv \frac{1}{\theta} (t_{kl} + \pi \delta_{kl}) v_{l,k} + \frac{1}{\theta} \tau_k \theta_{,k} \geq 0 \quad (5.7.29)$$

en donde al término π , definido por la ecuación

$$\pi = - \frac{\partial \epsilon}{\partial \bar{\rho}'} \Big|_{\eta} = \pi \left(\eta, \frac{1}{\rho} \right) \quad (5.7.30)$$

se le conoce con el nombre de presión termodinámica.

Tomando en cuenta que t_{kl} y π son independientes de $\theta_{,k}$, para que se siga satisfaciendo la desigualdad de la ec 5.7.30 al tener cualquier variación $\theta_{,k}$ se deberá tener que;

$$q_k = 0 \quad (5.7.31)$$

y la desigualdad de la ec 5.7.29 se reduce a

$$(t_{kl} + \pi \delta_{kl}) v_{l,k} \geq 0 \quad (5.7.32)$$

conocida como desigualdad de disipación.

Los desarrollos anteriores son la demostración del teorema siguiente.

Teorema 5.7.2. Un fluido viscoso que tenga las ecuaciones constitutivas dadas por las ecs 5.7.16 a 5.7.19 es admisible termodinámicamente si y solo si ϵ y θ están dadas por las ecs 5.7.27 y 5.7.28 y el tensor de esfuerzos satisface la desigualdad de disipación. Además tales fluidos únicamente pueden responder a cambios adiabáticos.

5.8 Equilibrios Termodinámico y Mecánico.

Definición 5.8.1. Equilibrio mecánico. Se define así al equilibrio asociado a un sistema en donde se anula la aceleración para cualquier sistema inercial. Para el caso de equilibrio local se tendrá que $\underline{a} = \underline{\dot{v}} = \underline{0}$ y las ecuaciones de Cauchy se reducen a

$$t_{kl,k} + \rho f_l = 0 \quad (5.8.1)$$

$$t_{kl} = t_{lk} \quad (5.8.2)$$

Definición 5.8.2. Equilibrio termodinámico o térmico. Es el asociado al sistema cuando la producción de entropía es nula. Puede asociarse al caso local o al global en donde;

$$\Gamma = 0 \quad \text{equilibrio térmico global} \quad (5.8.3)$$

$$\gamma = 0 \quad \text{equilibrio térmico local} \quad (5.8.4)$$

en base a los materiales utilizados en el inciso 5.7 se harán las observaciones siguientes.

5.8.1 Sólidos elásticos

Para los sólidos elásticos especificados en el inciso 5.7.1 se obtuvieron las condiciones siguientes para que sea admisible termodinámicamente.

$$\theta = \frac{\partial E}{\partial \eta} \quad (5.8.5)$$

$$t_{kl} = \rho \frac{\partial E}{\partial x_{[k,k}} x_{l]},_k \quad (5.8.6)$$

$$\rho \frac{\partial E}{\partial x_{[k,k}} x_{l]},_k = 0 \quad (5.8.7)$$

$$q_k = 0 \quad (5.8.8)$$

En base a las ecs 5.8.4 a 5.8.8 se puede establecer el teorema siguiente.

Teorema 5.8.1. Los sólidos elásticos admisibles termodinámicamente y caracterizados por ecuaciones constitutivas de la forma dadas por las ecs. 5.7.1 a 5.7.4, están en equilibrio térmico. Para tales sólidos, la temperatura y los esfuerzos se derivan de un potencial, que es la densidad de energía interna.

5.8.2 Fluidos Viscosos.

Los fluidos viscosos caracterizados por las ecs 5.7.16 a 5.7.19, estarán en equilibrio térmico local si se satisfacen las ecs siguientes.

$$t_{kl} = -\pi \delta_{kl} = \frac{\partial E}{\partial p} \delta_{kl} \quad (5.8.9)$$

$$\theta = \frac{\partial E}{\partial \eta} \quad (5.8.10)$$

$$\frac{\partial E}{\partial v_{k,l}} = 0 \quad (5.8.11)$$

$$q_k = 0 \quad (5.8.12)$$

las ecuaciones anteriores son la demostración del teorema siguiente.

Teorema 5.8.2. Los fluidos viscosos admisibles termodinámicamente y caracterizados por las ecuaciones constitutivas de la forma dadas por las ecs 5.7.16 a 5.7.19 están en equilibrio térmico si y solo si el esfuerzo es una presión hidrostática. Para tales fluidos la temperatura se deriva de un potencial que es la densidad de energía interna.

5.9 Principio del Trabajo Virtual.

Para el caso de cuerpos que estén tanto en equilibrio térmico como en equilibrio mecánico es posible construir un principio del trabajo virtual, de donde se pueda derivar la primera ecuación de Cauchy y sus condiciones de frontera, como un caso especial de un criterio general de equilibrio.

Definición 5.9.1. Considérese una familia de deformaciones ---
 $\underline{x} = \underline{x}(\underline{X}, \lambda)$, donde λ es un parámetro y su-
 póngase que está dada la deformación para $\lambda = 0$, es decir, -
 $\underline{x} = \underline{x}(\underline{X}, 0)$. Se define a la primera variación
 de \underline{x} , e indicada como $\delta \underline{x}$, mediante la expresión.

$$\delta \underline{x} = \left. \frac{\partial \underline{x}}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0, \underline{X}} d\lambda \quad (5.9.1)$$

El símbolo de variación δ y el operador derivado parcial son
 conmutativos. También conviene, aclarar que el operador $\frac{\delta}{d\lambda}$ -
 es similar a la derivación material al reemplazar λ por t .

Se postulará como criterio general de equilibrio a la unión -
 del principio del trabajo virtual con el equilibrio termodinámi-
 co y se expresa mediante

$$\delta \int_V \rho \epsilon dv = \int_S t_{(n)k} \delta x_k da + \int_V \rho f_k \delta x_k dv \quad (5.9.2)$$

$$\delta \int_V \rho \eta dv = 0 \quad (5.9.3)$$

con la condición de que todas las variaciones satisfagan el prin-
 cipio de conservación local de la masa.

$$\delta(\rho dv) = 0 \quad (5.9.4)$$

En la ec 5.9.2 se establece que la variación de la energía in -

terna total es igual al trabajo virtual que desarrollan las fuer-
 zas de cuerpo y de superficie y en la ec 5.9.3 establece que la -
 variación de la entropía total es nula. Tomando en cuenta que son
 conmutativos los operadores variación δ e integración \int , -
 la ecuación 5.9.2 se puede escribir como

$$\int_V [\rho dv \delta \epsilon + \epsilon \delta(\rho dv)] = \int_S t_{(n)k} \delta x_k da + \int_V \rho f_k \delta x_k dv \quad (5.9.5)$$

la variación $\delta \epsilon$ se puede calcular en forma similar a como se -
 obtuvo la ec 5.5.10, obteniéndose

$$\delta \epsilon = \bar{\theta} \delta \eta + \bar{\tau}_\alpha \delta \nu_\alpha \quad (5.9.6)$$

sustituyendo las ecs 5.9.4 y 5.9.6 en la ec 5.9.5 se obtiene

$$\int_V (\rho \bar{\theta} \delta \eta + \rho \bar{\tau}_\alpha \delta \nu_\alpha) dv = \int_S t_{(n)k} \delta x_k da + \int_V \rho f_k \delta x_k dv \quad (5.9.7)$$

usando la ec 5.9.4, la ec 5.9.3 se puede escribir como,

$$\int_V \rho \delta \eta dv = 0 \quad (5.9.8)$$

en donde se establece que η es constante y su variación se -
 anula. Tomando en cuenta este resultado, la ec 5.9.7 se reduce a

$$\int_V \rho \bar{\tau}_\alpha \delta \nu_\alpha dv = \int_S t_{(n)k} \delta x_k da + \int_V \rho f_k \delta x_k dv \quad (5.9.9)$$

Si las variaciones δx_α y δx_k se tratan como variables independientes la ec 5.9.9 conducirá a los resultados siguientes.

$$\bar{\sigma}_\alpha = 0 ; \quad t_{(n)k} = 0 ; \quad f_k = 0 \quad (5.9.10)$$

Si los valores de x_α se toman como $x_{k,k}$, que corresponde al sólido elástico de los incisos anteriores, la ec 5.9.9 se puede escribir de la manera siguiente

$$\int_V \rho \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x_{k,k}} \delta x_{k,k} dv = \int_Y t_{(n)k} \delta x_k da + \int_V \rho f_k \delta x_k dv \quad (5.9.11)$$

de manera similar a como se obtuvo la ec 3.3.5, se podrá obtener la expresión siguiente $\delta(x_{k,k}) = (\delta x_k)_{,k}$ (5.9.12)

Al usar la ec 5.9.12, el integrando del miembro de la izquierda de la ec 5.9.11 se puede escribir como

$$\rho \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x_{k,k}} \delta x_{k,k} = \left(\rho \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x_{l,k}} x_{l,k} \delta x_k \right)_{,l} - \rho \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x_{l,k}} x_{l,k} \right)_{,l} \delta x_k \quad (5.9.13)$$

Al sustituir la ec 5.9.13 en la ec 5.9.11 se obtiene

$$\int_Y t_{(n)k} \delta x_k da - \int_V \left(\rho \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x_{l,k}} x_{l,k} \delta x_k \right)_{,l} dv + \int_V \left[\left(\rho \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x_{l,k}} x_{l,k} \right)_{,l} + \rho f_k \right] \delta x_k dv = 0 \quad (5.9.14)$$

Al usar el teorema de Gauss para transformar la primera integral de volumen quedo

$$\int_Y \left(t_{(n)k} - \rho \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x_{l,k}} x_{l,k} n_l \right) \delta x_k da + \int_V \left[\left(\rho \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x_{l,k}} x_{l,k} \right)_{,l} + \rho f_k \right] \delta x_k dv = 0 \quad (5.9.15)$$

Las condiciones locales para el equilibrio conduce a que los integrandos que multiplican a las variaciones δx_k se anulan y se podrán escribir las ecuaciones siguientes.

$$\left(\rho \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x_{l,k}} x_{l,k} \right)_{,l} + \rho f_k = 0 \quad \text{en } V \quad (5.9.16)$$

$$t_{(n)k} = \left(\rho \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x_{l,k}} x_{l,k} \right) n_l \quad \text{sobre } Y \quad (5.9.17)$$

En base a lo establecido en los incisos 5.7 y 5.8, se podrá escribir que

$$t_{lk} = \rho \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x_{k,k}} x_{l,k} \quad (5.9.18)$$

lo que establece que los esfuerzos de equilibrio son iguales a los esfuerzos termodinámicos. Las ecs 5.9.16 y 5.9.17 quedan expresadas como.

$$t_{lk,l} + \rho f_k = 0 \quad \text{en } V \quad (5.9.19)$$

$$t_{(n)k} = t_{lk} n_l \quad \text{sobre } Y \quad (5.9.20)$$

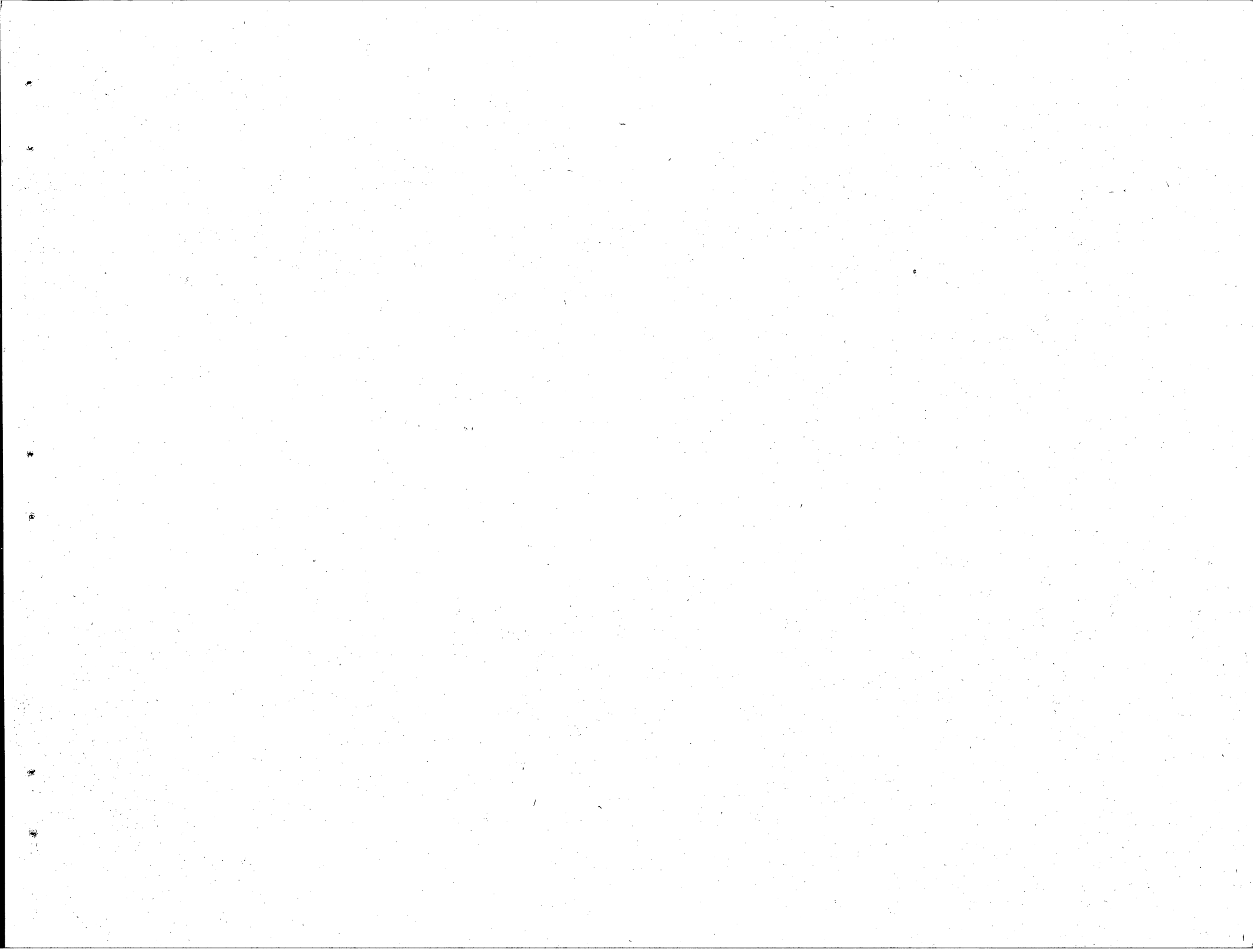
Mientras que el principio del trabajo virtual conduce a la primera ley de Cauchy del movimiento y a las condiciones de frontera para el equilibrio, la segunda ley de Cauchy no se puede obtener. Se puede demostrar que al postular la invariancia de la densidad de energía

interna E , a rotaciones de cuerpo rígido del cuerpo deformado,
se podrá obtener la segunda ley de Cauchy bajo la forma.

$$\frac{\partial E}{\partial x_{[k,k}} x_l],_k = 0$$

(5.9.21)

5.10 Problemas.



MECANICA DEL MEDIO CONTINUO.

Notas preliminares para un primer curso.

Ramón Cervantes Beltrán *

Víctor Porras Silva

* Profesores Investigadores, Facultad de Ingeniería, UNAM.

CAPITULO 6

ECUACIONES CONSTITUTIVAS

6.1 Introducción

Las leyes básicas del movimiento, proporcionadas por las axiomas fundamentales de la mecánica, que son la conservación de la masa, el balance de la cantidad de movimiento, el balance del momento de la cantidad de movimiento, la conservación de energía y el principio de entropía, son válidas para todos los tipos de materiales. Es un hecho experimental el que dos cuerpos de geometría y cargas iguales pero formados con materiales diferentes poseen comportamientos diferentes. En general; un sólido sometido a cargas pequeñas sufre deformaciones pequeñas mientras que un fluido fluye y toma la forma del recipiente.

La causa de comportamientos diferentes se debe a la constitución interna del material que en general, es distinta de un material a otro. La organización axiomática de la teoría constitutiva es tan reciente que en la actualidad únicamente está tomando forma.

Ya existe material para estudiar series de este tema por la universalidad de los axiomas en que se sustenta, la verificación de experiencias añejas y el desarrollo de teorías para materiales nuevos. Los temas desarrollados en este capítulo, en general comprenderán puntos como la necesidad de las ecuaciones constitutivas, los axiomas en que se basa el estudio de las ecuaciones constitutivas y algunos materiales con características especiales.

6.2 Necesidad para las ecuaciones constitutivas

Los principios básicos de la mecánica del medio continuo desarrollados en los capítulos anteriores se podrán resumir en las ecuaciones siguientes, referidas a un sistema cartesiano.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho v_k)_{,k} = 0 \quad (6.2.1)$$

$$t_{kl,l} + (f_k - \dot{v}_k) = 0 \quad (6.2.2)$$

$$t_{kl} = t_{lk} \quad (6.2.3)$$

$$\rho \varepsilon = t_{kl} \dot{v}_{l,k} + q_{k,k} + h \quad (6.2.4)$$

$$\rho \gamma = \left(\dot{\eta} - \frac{\varepsilon}{\theta} \right) + \frac{1}{\theta} t_{kl} v_{l,k} + \frac{1}{\theta^2} q_k \theta_{,k} \geq 0 \quad (6.2.5)$$

Al analizar las ecs 6.2.1 a 6.2.5 se puede concluir que se tienen ocho ecuaciones independientes (una en 6.2.1, tres en 6.2.2, tres en 6.2.3 y una en 6.2.4 ya que la ec 6.2,5 es una desigualdad) y diecinueve incógnitas. (una por cada elemento de la lista $\rho, \varepsilon, \eta, \theta$, tres por cada una de v_k, q_k y nueve para t_{kl}) ya que en general h, f_k se especifican. El problema que se presenta es de indeterminación, ya que existe un déficit de once ecuaciones. Cabe recordar que el problema se complicaría en extremo al considerar otro tipo de variables, por ejemplo, las eléctricas y las

químicas.

La situación anterior no debe provocar sorpresas puesto que la obtención de las ecs 6.2.1 a 6.2.5 se hizo independientemente de los materiales y por lo tanto son válidos para todos. El carácter del material se introducirá en la formulación mediante las ecuaciones constitutivas apropiadas para cada material con las variables constitutivas restringidas a la región de definición. Deberá tenerse presente que las ecuaciones constitutivas definen a un material ideal.

En la selección de las variables constitutivas y en la formulación de las ecuaciones constitutivas se deberán satisfacer ciertas consideraciones físicas y matemáticas. En la actualidad no existe una regla definida que incluya a todas las variables que deban estar presentes para un material dado. También deberá quedar establecido que no podrá haber avances en la descripción de materiales, sin un conocimiento a priori, aunque sea burdo, de la dependencia del comportamiento del material a cargas externas y del rango que se espera cubrir. Por lo tanto una teoría constitutiva únicamente se encamina a describir un número limitado de fenómenos físicos determinados al principio para un material dado.

6.3 Axiomas de la teoría constitutiva

Para ^{que} una teoría constitutiva represente adecuadamente a un material, se deberán satisfacer ciertos requisitos físicos y matemáticos.

A continuación se presentan los axiomas que forman la base de las ecuaciones constitutivas.

- i) Axioma de Causalidad
- ii) Axioma de determinismo
- iii) Axioma de Equipresencia

- iv) Axioma de Objetividad
- v) Axioma de Invariancia material
- vi) Axioma de Vecindad
- vii) Axioma de Memoria
- viii) Axioma de Admisibilidad

6.3.1 Axioma de Causalidad.

El axioma de Causalidad está encaminado a la selección de las variables constitutivas independientes de un material sometido a cambios limitados y establece lo siguiente: Se considera al movimiento de los puntos materiales de un cuerpo y sus temperaturas como efectos observables, autoevidentes, en cualquier comportamiento termodinámico del cuerpo. Las cantidades restantes, distintas a las que puedan obtenerse de la temperatura y del movimiento, que intervienen en las ecs 6.2.1 a 6.2.5 son las causas o variables constitutivas dependientes.

En un material sometido a fuerzas externas se observa que ocurren ciertos cambios, por ejemplo, se deforma y ocurren cambios térmicos, químicos y electromagnéticos. Al principio se podrá seleccionar a un conjunto independiente de cambios observables como los efectos producidos en el cuerpo. Este conjunto constituye las variables constitutivas independientes para una clase limitada de fenómenos físicos y químicos observables en un material. Una vez seleccionadas las variables constitutivas independientes, las variables restantes que no se pueden obtener de ellas y que aparecen en las ecuaciones de movimiento (ecs 6.2.1 a 6.2.5) forman la lista de variables constitutivas dependientes. En este curso únicamente se tratarán fenómenos termomecánicos.

Las ideas de fenómenos naturales son el resultado de algunas observaciones simples o experiencias pasadas. Sin tales experiencias y sin la observación no será posible construir un modelo de la naturaleza. En base a lo anterior, el axioma de causalidad es adecuado para una decisión, que no necesariamente será única, sobre el conjunto de variables constitutivas independientes. Una vez decididos los efectos, las causas se obtendrán de las expresiones de los axiomas de la mecánica. Para fenómenos termomecánicos, las variables independientes, en base al axioma de causalidad, serán

$$\underline{x} = \underline{x}(\underline{X}, t) \quad (6.3.1)$$

$$\theta = \theta(\underline{X}, t) \quad (6.3.2)$$

Las variables que son derivables de las ecs 6.3.1 y 6.3.2 resultan ser

- i) La velocidad, $\underline{v} = \dot{\underline{x}}$
- ii) El gradiente de velocidades, $\underline{v}_{i,k}$
- iii) La densidad de masa $\rho_0 = \rho_j$

Las variables constitutivas independientes resultan ser

- i) El tensor esfuerzo t_{k1} , que en ocasiones se escribirá como \underline{t}
- ii) El vector calor \underline{q}_k (\underline{q})
- iii) La densidad de energía interna ϵ
- iv) La densidad de entropía η

6.3.2 Axioma de Determinismo.

El axioma de determinismo es un axioma de exclusión y establece lo siguiente: Los valores de las funciones constitutivas termomecánicas \underline{t} , \underline{q} , ϵ , η , en un punto material \underline{x} del cuerpo \mathcal{B} , en el

tiempo t , están determinados por la historia del movimiento y temperatura de todos los puntos materiales de \mathcal{B}

Este axioma excluye la dependencia del comportamiento material en \underline{x} sobre cualquier punto exterior al cuerpo y sobre eventos futuros. Por lo tanto, los fenómenos futuros relativos al comportamiento del cuerpo estarán totalmente determinados al conocer todos los movimientos pasados. De acuerdo con este teorema, las ecuaciones constitutivas termomecánicas se podrán escribir como

$$\underline{t}(\underline{x}, t) = \mathcal{F}[\underline{x}(\underline{x}', t'), \theta(\underline{x}', t'), \underline{x}, t] \quad (6.3.3)$$

$$\underline{q}(\underline{x}, t) = \mathcal{G}[\underline{x}(\underline{x}', t'), \theta(\underline{x}', t'), \underline{x}, t] \quad (6.3.4)$$

$$\epsilon(\underline{x}, t) = \mathcal{E}[\underline{x}(\underline{x}', t'), \theta(\underline{x}', t'), \underline{x}, t] \quad (6.3.5)$$

$$\eta(\underline{x}, t) = \mathcal{N}[\underline{x}(\underline{x}', t'), \theta(\underline{x}', t'), \underline{x}, t] \quad (6.3.6)$$

donde \mathcal{F} es una funcional valuada tensorialmente, \mathcal{G} es una funcional valuada vectorialmente y \mathcal{E} , \mathcal{N} , son dos funcionales valuadas escalarmente y definidas sobre el campo de las funciones reales $\underline{x}(\underline{x}', t)$ y $\theta(\underline{x}', t')$ con

$$\underline{x}' \in \mathcal{B} \forall t' \leq t \quad (6.3.7)$$

6.3.3 Axioma de Equipresencia

Este axioma es una medida de precaución y establece que al principio, todas las funcionales constitutivas deberán expresarse en términos de las misma lista de variables constitutivas independientes hasta que se demuestre lo contrario.

El axioma de equipresencia ayuda a no olvidar o a estar prejuiciado contra cierta clase de variables o bien en favor de otras en la expresión de las funcionales constitutivas.

Se deberá estar de acuerdo en emplear la misma lista de variables constitutivas independientes hasta que no se demuestre otra cosa.

6.3.4. Axioma de Objetividad.

Establece que las ecuaciones constitutivas deben ser de forma invariante respecto a movimientos de cuerpo rígido del sistema de referencia espacial.

Desde luego que las propiedades del material no pueden depender del movimiento del observador. Si dos referencias \bar{x} y x se pueden hacer coincidir con un movimiento de cuerpo rígido y un cambio en el origen de los tiempos, ambos deberán quedar relacionados mediante la expresión

$$\bar{x}(X, \bar{t}) = Q(t)x(X, t) + b(t) \quad (6.3.8)$$

donde Q es la matriz de cosenos directores de la referencia \bar{x} respecto a x y por lo tanto una transformación ortogonal propia, $b(t)$ es la traslación del origen y \bar{t} se obtiene de t mediante un cambio de origen de tiempo. Lo anterior se podrá indicar con

$$Q Q^T = Q^T Q = I, \det Q = 1, \bar{t} = t - a \quad (6.3.9)$$

De acuerdo con el axioma de objetividad, las funcionales constitutivas deberán ser de forma invariante cuando se use \bar{x} en lugar de x para el conjunto de transformaciones propias $\{Q(t)\}$ y traslaciones $\{b(t)\}$ del sistema de referencia espacial y el conjunto de cambios de origen de los tiempos $\{a\}$. En base a que el conjunto de transformaciones $\{Q\}$ puede incluir reflexiones de ejes, es decir

$$\det Q = \pm 1 \quad (6.3.10)$$

se pueden tener las definiciones siguientes.

Definición 6.3.4.1. Hemitropía Espacial. Se llama así a la situación en donde las funcionales constitutivas son de forma invariante cuando el conjunto de transformaciones $\{Q(t)\}$ es tal que $\det Q = 1$

Definición 6.3.4.2. Isotropía Espacial. Se define así a la situación en donde las funcionales constitutivas son de forma invariante cuando el conjunto de transformaciones $\{Q(t)\}$ es tal que $\det Q = \pm 1$

6.3.5. Axioma de Invariancia Material

Existen en los materiales orientaciones preferenciales que ocasionan restricciones en las ecuaciones constitutivas. Sea $\{S\}$ el conjunto de orientaciones que puede ser un subconjunto del grupo total de las transformaciones ortogonales, y sea $\{B\}$ el conjunto correspondiente a las traslaciones. El axioma de invariancia material establece lo siguiente:

Las ecuaciones constitutivas deben ser de forma invariante respecto a un grupo de transformaciones ortogonales $\{S\}$ y traslaciones $\{B\}$ de las coordenadas materiales. Las restricciones anteriores son el resultado de condiciones de simetría indicadas por $\{S\}$ y $\{B\}$ en el sistema de referencia material X .

De acuerdo con el axioma de invariancia material, las funcionales constitutivas deberán de ser de forma invariante bajo las transformaciones de la forma

$$\bar{X} = S X + B \quad (6.3.11)$$

donde

$$S S^T = S^T S = I, \det S = \pm 1 \quad (6.3.12)$$

El grupo de transformaciones ortogonales $\{\underline{S}\}$, que en general es un subconjunto del conjunto total de transformaciones, representa simetrías geométricas en las propiedades físicas de los materiales en un punto \underline{X} mientras que el conjunto de traslaciones representa a las no homogeneidades de dichas propiedades, en el mismo punto \underline{X} .

Definición 6.3.5.1. Materiales Hemitrópicos. Son aquellos en donde las simetrías geométricas $\{\underline{S}\}$ en las propiedades físicas comprenden al grupo total de transformaciones ortogonales propias.

Definición 6.3.5.2. Materiales Isotrópicos. Son aquellos en donde las simetrías geométricas $\{\underline{S}\}$ en las propiedades físicas comprenden al grupo total de transformaciones ortogonales.

Definición 6.3.5.3. Materiales Homogéneos. Son aquellos en que las propiedades físicas no dependen de las traslaciones $\{\underline{B}\}$ del origen de las coordenadas materiales. Si no sucede lo anterior se dice que el material es no homogéneo.

6.3.6. Axioma de Vecindad.

Este axioma establece lo siguiente: Los valores de las variables constitutivas independientes localizadas en puntos materiales distantes del punto \underline{X} , no afectan en forma apreciable los valores de las variables constitutivas dependientes en el punto \underline{X} .

El axioma de vecindad implica que los movimientos $\underline{x}(\underline{X}', t')$ y las temperaturas $\theta(\underline{X}', t')$ de puntos materiales \underline{X}' que no están cercanos al punto \underline{X} , no contribuirán, en forma apreciable, en

los valores de \underline{t} , \underline{q} , $\underline{\varepsilon}$, $\underline{\eta}$ en el punto \underline{X} . Lo anterior es equivalente a establecer que los valores de las funcionales constitutivas en el punto \underline{X} y tiempo \underline{t} , son insensibles a las historias de los movimientos y temperaturas de puntos distantes de \underline{X} . En la actualidad no existe una forma simple para formular este principio. A continuación se presenta la mas usual.

6.3.6.1 Vecindad Suave.

Supóngase que las variables constitutivas independientes $\underline{x}(\underline{X}', t')$ y $\theta(\underline{X}', t')$ admitan desarrollos en serie de Taylor alrededor del punto $\underline{X}' = \underline{X}$ y para todo $t' \leq t$ y terminadas hasta gradientes de orden P para $\underline{x}(\underline{X}', t')$ y Q para $\theta(\underline{X}', t')$. Entonces,

$$\begin{aligned} \underline{x}(\underline{X}', t') = & \underline{x}(\underline{X}, t') + (X'_{k_1} - X_{k_1}) \underline{x}_{,k_1}(\underline{X}, t') + \\ & + \frac{1}{2!} (X'_{k_1} - X_{k_1})(X'_{k_2} - X_{k_2}) \underline{x}_{,k_1 k_2}(\underline{X}, t') + \dots + \\ & + \frac{1}{P!} (X'_{k_1} - X_{k_1}) \dots (X'_{k_P} - X_{k_P}) \underline{x}_{,k_1 \dots k_P}(\underline{X}, t') \quad (6.3.13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta(\underline{X}', t') = & \theta(\underline{X}, t') + (X'_{k_1} - X_{k_1}) \theta_{,k_1}(\underline{X}, t') + \\ & + \frac{1}{2!} (X'_{k_1} - X_{k_1})(X'_{k_2} - X_{k_2}) \theta_{,k_1 k_2}(\underline{X}, t') + \dots + \\ & + \frac{1}{Q!} (X'_{k_1} - X_{k_1}) \dots (X'_{k_Q} - X_{k_Q}) \theta_{,k_1 \dots k_Q}(\underline{X}, t') \quad (6.3.14) \end{aligned}$$

Se dice que un material satisface la hipótesis de vecindad suave en un punto \underline{X} y para todo $t' \leq t$ si las funcionales constitutivas son lo suficientemente suaves de tal manera que se puedan aproximar por las funcionales definidas en el campo de las funciones reales dadas a continuación.

$$\underline{x}(\underline{x}, t'), \underline{x}_{,k_1}(\underline{x}, t'), \dots, \underline{x}_{,k_1 k_2 \dots k_p}(\underline{x}, t') \quad (6.3.15)$$

$$\theta(\underline{x}, t'), \theta_{,k_1}(\underline{x}, t'), \dots, \theta_{,k_1 k_2 \dots k_q}(\underline{x}, t') \quad (6.3.16)$$

A los materiales de este tipo se les conoce con el nombre ^{de materiales} no simples del tipo gradiente material. En algunas consideraciones, el rango de la vecindad se establece con los gradientes mas altos de deformación y de temperatura que se hacen intervenir.

6.3.7 Axioma de Memoria

Este principio es la contraparte del axioma de vecindad en el dominio del tiempo y se puede enunciar como.

Los valores de las variables constitutivas independientes asociados a tiempos pasados y distantes del presente no afectan en forma apreciable a los valores de las funciones constitutivas dependientes.

De acuerdo con este axioma se puede afirmar que la memoria de movimientos y temperaturas pasadas de cualquier punto material decae rápidamente. Tampoco existe una formulación matemática única y a continuación se presentan dos casos que actualmente se están estudiando.

6.3.7.1 Memoria Suave.

Supóngase que las historias termomecánicas $\underline{x}(\underline{x}', t)$ y $\theta(\underline{x}', t)$ admitan desarrollarse en serie de Taylor respecto al tiempo $t' = t$, a partir de un tiempo t_0 y para todos los puntos \underline{x}' contenidos en

la región material \mathcal{B} de tal manera que se lleguen hasta rapidezces de variación de orden p para $\underline{x}(\underline{x}', t')$ y q para $\theta(\underline{x}', t')$.

$$\underline{x}(\underline{x}', t') = \underline{x}(\underline{x}', t) + (t' - t) \dot{\underline{x}}(\underline{x}', t) + \dots + \frac{(t' - t)^p}{p!} \underline{x}^{(p)}(\underline{x}', t) \quad (6.3.17)$$

$$\theta(\underline{x}', t') = \theta(\underline{x}', t) + (t' - t) \dot{\theta}(\underline{x}', t) + \dots + \frac{(t' - t)^q}{q!} \theta^{(q)}(\underline{x}', t) \quad (6.3.18)$$

para todo t' comprendido entre $t_0 < t' \leq t$ y puntos materiales \underline{x}' contenidos en la región material \mathcal{B} . En las ecs 6.4.7 y 6.3.8 aparecen los términos siguientes.

$$\underline{x}^{(p)} = \left. \frac{\partial^p \underline{x}}{\partial t^p} \right|_{\underline{x}'} \quad (6.3.19)$$

$$\theta^{(q)} = \left. \frac{\partial^q \theta}{\partial t^q} \right|_{\underline{x}'} \quad (6.3.20)$$

Se dice que un material satisface la hipótesis de vecindad suave, en un punto $\underline{x}' \in \mathcal{B}$ y para todo $t_0 < t' \leq t$ si las funciones constitutivas son lo suficientemente suaves de tal manera que se puedan aproximar por las funcionales definidas en el campo de las funciones reales dadas a continuación

$$\underline{x}(\underline{x}', t), \dot{\underline{x}}(\underline{x}', t), \dots, \underline{x}^{(p)}(\underline{x}', t) \quad (6.3.21)$$

$$\theta(\underline{x}', t), \dot{\theta}(\underline{x}', t), \dots, \theta^{(q)}(\underline{x}', t) \quad (6.3.22)$$

A los materiales de este tipo se les conoce con el nombre de materiales del tipo de rapidez de variación respecto al tiempo.

6.3.7.2 Memoria Gradual (Fading).

Se pueden presentar situaciones en donde las funciones $\underline{x}(X, t)$ y $\theta(X, t)$ no son tan suaves como para admitir expansiones en serie de Taylor de la forma dadas por las ecs 6.3.17 y 6.3.18. Sin embargo las funcionales constitutivas pueden ser tales que suavicen las discontinuidades en las funciones $\underline{x}(X', t')$, $\theta(X', t')$ o bien en sus derivadas respecto al tiempo. Esta situación conduce a establecer criterios que no se discutirán en este primer curso de mecánica del medio continuo.

6.3.8. Axioma de Admisibilidad.

Este axioma establece lo siguiente: Todas las ecuaciones constitutivas deben ser consistentes con los principios básicos de la mecánica del medio continuo. Es decir, deben estar sujetas a los principios de conservación de la masa, balance de la cantidad de movimiento, balance del momento de la cantidad de movimiento, conservación de la energía y desigualdad de Clausius-Duhem.

El axioma de admisibilidad ayuda a eliminar la dependencia sobre ciertas variables constitutivas siempre que se puedan obtener mediante las ecuaciones de movimiento.

6.4 Materiales Termomecánicos.

Usualmente la deformación y el movimiento provocan calor e inversamente los materiales sometidos a la acción del calor se deforman y fluyen. El efecto de los cambios térmicos sobre el comportamiento del material dependerá de la magnitud y el rango de tales cambios.

Las ecuaciones constitutivas termomecánicas están encaminadas a describir las propiedades físicas de los materiales cuyo comportamiento está influenciado por la deformación y los cambios térmicos. De acuerdo con los axiomas de causalidad, determinismo y

y equipresencia, las ecuaciones constitutivas de tales materiales son las indicadas por las ecs 6.3.3 a 6.3.6 anotadas a continuación

$$\underline{t}(X, t) = \mathcal{F}[\underline{x}(X', t'), \theta(X', t'), X, t] \quad (6.4.1)$$

$$\underline{q}(X, t) = \mathcal{G}[\underline{x}(X', t'), \theta(X', t'), X, t] \quad (6.4.2)$$

$$\underline{\epsilon}(X, t) = \mathcal{E}[\underline{x}(X', t'), \theta(X', t'), X, t] \quad (6.4.3)$$

$$\eta(X, t) = \mathcal{N}[\underline{x}(X', t'), \theta(X', t'), X, t] \quad (6.4.4)$$

Ahora las funcionales \mathcal{F} , \mathcal{G} , \mathcal{E} y \mathcal{N} estarán sujetas a las restricciones impuestas por los axiomas restantes de las ecuaciones constitutivas, es decir, los axiomas de objetividad, invariancia material, vecindad, memoria y admisibilidad. A continuación se describirán las consecuencias de tales restricciones.

NOTA 6.4.1. Puesto que el procedimiento descrito a continuación es enteramente similar para las cuatro funcionales \mathcal{F} , \mathcal{G} , \mathcal{E} y \mathcal{N} el procedimiento se desarrollará únicamente con la funcional \mathcal{F} .

6.4.1 Restricciones debidas al axioma de objetividad.

De acuerdo con el axioma de objetividad, la funcional \mathcal{F} debe ser invariante respecto a dos movimientos objetivamente equivalentes cualesquiera \underline{x} y \bar{x} , la relación entre \bar{x} y \underline{x} estará dada por

$$\underline{x}(X', \bar{t}') = Q(t')\underline{x}(X', t') + \underline{b}(t') \quad (6.4.5)$$

con las condiciones dadas por

$$\underline{Q}\bar{\underline{Q}} = \underline{Q}^T \underline{Q} = \underline{I} \quad ; \quad \bar{t}' = t' - a \quad (6.4.6)$$

La invariancia de la funcional \mathcal{F} que dará indicada como

$$\mathcal{F}[\underline{x}(\underline{X}', t'), \theta(\underline{x}', t'), \underline{X}, t] = \mathcal{F}[\underline{x}(\underline{X}, \bar{t}), \theta(\underline{x}, \bar{t}), \underline{X}, \bar{t}] \quad (6.4.7)$$

En general a un movimiento de cuerpo rígido de la referencia material se le puede describir mediante una traslación un cambio de origen de tiempos y una rotación.

A continuación se describen tales pasos.

6.4.1.1. Traslación rígida de la referencia espacial

Para este caso los elementos \underline{a} , \underline{b} y \underline{c} de la ec 6.4.5 -- tome los valores siguientes

$$\underline{a}(t') = \underline{I} \quad (6.4.8a)$$

$$\underline{b}(t') = -\underline{x}(\underline{X}, t) \quad (6.4.8b)$$

$$\underline{c} = 0 \quad (6.4.8c)$$

Las ecs 6.4.8 indican que la traslación es tal que el punto material \underline{X} en el tiempo t' se encuentra en el origen.

Los movimientos objetivamente equivalentes quedarán relacionados como

$$\underline{x}(\underline{X}', \bar{t}') = \underline{x}(\underline{X}', t') - \underline{x}(\underline{X}, t'); \quad \bar{t}' = t' \quad (6.4.9)$$

Usando las ecs 6.4.7 y 6.4.9, la ec 6.4.1 se puede escribir como

$$\underline{t}(\underline{X}, t) = \mathcal{F}[\underline{x}(\underline{X}', t') - \underline{x}(\underline{X}, t'), \theta(\underline{x}', t'), \underline{X}, t] \quad (6.4.10)$$

6.4.1.2 Cambio del origen de los tiempos

Este caso se puede realizar al hacer lo siguiente

$$\underline{a}(t') = \underline{I} \quad (6.4.11a)$$

$$\underline{b}(t') = \underline{0} \quad (6.4.11b)$$

$$\underline{c} = t \quad (6.4.11c)$$

con las ecs 6.4.11, la ec 6.4.5 resulta ser

$$\underline{x}(\underline{X}', \bar{t}') = \underline{x}(\underline{X}', t'); \quad \bar{t}' = t' - t; \quad \infty < \bar{t}' \leq 0 \quad (6.4.12)$$

Al sustituir la ec 6.4.12 en la ec 6.4.7 se obtiene que

$$\mathcal{F}[\underline{x}(\underline{X}', t'), \theta(\underline{x}', t'), \underline{X}, t] = \mathcal{F}[\underline{x}(\underline{X}', t'), \theta(\underline{x}', t' - t), \underline{X}, t' - t] \quad (6.4.13)$$

Para que sea válida la ec 6.4.13 la funcional de esfuerzo \mathcal{F} debe ser explícitamente independiente de t , es decir

$$\underline{t}(\underline{X}, t) = \mathcal{F}[\underline{x}(\underline{X}', t'), \theta(\underline{x}', t'), \underline{X}] \quad (6.4.14)$$

se define a τ' la diferencia de tiempos, como

$$\tau' = t - t' \geq 0; \quad 0 \leq \tau' < \infty \quad (6.4.15)$$

Al utilizar los resultados dados en las ecs 6.4.14 y 6.4.15 la ec 6.4.10_{III} se puede escribir

$$\underline{\epsilon}(\underline{x}, t) = \mathcal{F}[\underline{x}(\underline{x}', t - \tau') - \underline{x}(\underline{x}, t - \tau'), \theta(\underline{x}', t - \tau'), \underline{x}] \quad (6.4.16)$$

La ec 6.4.16 establece que la funcional \mathcal{F} es función de los movimientos relativos respecto al actual y de las temperaturas de todas las partículas $\underline{x}' \in \mathcal{B}$

6.4.1.3 Rotaciones rígidas de la referencia espacial.

Las rotaciones rígidas arbitrarias de la referencia espacial se indicará mediante los valores siguientes.

$$\underline{Q}(t') \quad \text{arbitrario} \quad (6.4.17a)$$

$$\underline{b}(t') = 0 \quad (6.4.17b)$$

$$a = 0 \quad (6.4.17c)$$

El tensor esfuerzo \underline{t} , sometido a la rotación dada por la ec. 6.4.17, deberá transformarse de acuerdo con la ec 4.4.11 y expresada en notación matricial queda

$$\underline{\bar{t}}(\underline{x}, t) = \underline{Q}(t) \underline{t}(\underline{x}, t) \underline{Q}^T(t) \quad (6.4.18)$$

Además el movimiento relativo $\underline{x}(\underline{x}', t - \tau') - \underline{x}(\underline{x}, t - \tau')$ que es una cantidad vectorial, al ser sometido a la rotación dada por la ec 6.4.17 se transformará mediante la expresión

$$\underline{\bar{x}}(\underline{x}', t - \tau') - \underline{\bar{x}}(\underline{x}, t - \tau') = \underline{Q}(t - \tau') [\underline{x}(\underline{x}', t - \tau') - \underline{x}(\underline{x}, t - \tau')] \quad (6.4.19)$$

En base a las ecs 6.4.18 y 6.4.19, la funcional \mathcal{F} deberá estar restringida a la condición siguiente.

$$\mathcal{F}[\underline{x}(\underline{x}', t - \tau') - \underline{x}(\underline{x}, t - \tau'), \theta(\underline{x}', t - \tau'), \underline{x}] \underline{Q}^T(t) = \mathcal{F}[\underline{Q}(t - \tau') [\underline{x}(\underline{x}', t - \tau') - \underline{x}(\underline{x}, t - \tau')], \theta(\underline{x}', t - \tau'), \underline{x}] \quad (6.4.20)$$

Puesto que el movimiento de cuerpo rígido más general asociado a la referencia espacial junto con un cambio de origen en los tiempos se puede obtener por una sucesión de los cambios indicados en

los incisos 6.4.1.1 a 6.4.1.3, se podrá afirmar que la funcional \mathcal{F} dada por la ec 6.4.1 satisface el principio de objetividad.

Si tiene la forma mostrada en la ec 6.4.16 y esta sometida a la restricción especificada en la ec 6.4.20.

6.4.2 Restricciones debidas al axioma de invariancia material.

Este axioma se refiere a la simetría que, en caso de existir, está caracterizada por un conjunto de transformaciones ortogonales $\{\underline{\mathcal{S}}\}$ y traslaciones $\{\underline{B}\}$ del sistema de referencia material \underline{X} . Entonces, las funcionales constitutivas deberán ser de forma invariante bajo la transformación

$$\underline{\bar{X}} = \underline{\mathcal{S}} \underline{X} + \underline{B} \quad (6.4.21)$$

$$\underline{\mathcal{S}} \underline{\mathcal{S}}^T = \underline{\mathcal{S}}^T \underline{\mathcal{S}} = \underline{I} \quad ; \quad \det \underline{\mathcal{S}} = \pm 1 \quad (6.4.22)$$

para todos los elementos del conjunto $\{\underline{\mathcal{S}}\}$. Como la restricción de invariancia material respecto a la transformación dada por la ec 6.4.21 es enteramente similar a la restricción establecida para la referencia espacial dada por la ec 6.4.5, es válido concluir que para conocer las consecuencias del axioma de invariancia material se procederá de manera similar a como se hizo en el axioma de objetividad pero trabajando con la referencia material \underline{X} . Por ejemplo, la expresión correspondiente a

la dada por la ec 6.4.7 se podrá escribir como

$$\mathcal{F}[\underline{x}(\underline{x}', t-z') - \underline{x}(\underline{x}, t-z'), \theta(\underline{x}', t-z'), \underline{x}] \quad (6.4.23)$$

$$= \mathcal{F}[\underline{x}(\underline{s}\underline{x}' + \underline{B}, t-z'), \underline{x}(\underline{s}\underline{x} + \underline{B}, t-z'), \theta(\underline{s}\underline{x}' + \underline{B}, t-z'), \underline{s}\underline{x} + \underline{B}]$$

Conviene recordar que cuando el conjunto $\{\underline{s}\}$ es el grupo de las transformaciones ortogonales propias ($\det \underline{s} = +1$), se tendrá un material hemitrópico, si el conjunto $\{\underline{s}\}$ es el grupo de transformaciones ortogonales completo ($\det \underline{s} = \pm 1$), se tendrá un material isotrópico. Cuando las propiedades del material son las mismas para todos los puntos del cuerpo ($\underline{B} = \underline{0}$) se tiene un material homogéneo.

6.4.3 Restricciones debidas al axioma de vecindad suave.

De acuerdo con el axioma de vecindad suave, las funciones $\underline{x}(\underline{x}', t-z')$ y $\theta(\underline{x}', t-z')$ poseen expansiones en series de Taylor alrededor del punto $\underline{x}' = \underline{x}$ para todo $z' \geq 0$ como se indica en las ecs. 6.3.13 y 6.3.14 y las funcionales constitutivas se podrán representar como se indica a continuación.

$$\underline{x}(\underline{x}, t) = \mathcal{F}[\underline{x}_{,k_1}(t-z'), \underline{x}_{,k_1 k_2}(t-z'), \dots, \underline{x}_{,k_1 k_2 \dots k_p}(t-z'), \theta(t-z'), \theta_{,k_1}(t-z'), \dots, \theta_{,k_1 k_2 \dots k_q}(t-z'), \underline{D}_k, \underline{x}] \quad (6.4.24)$$

donde los subíndices $k_1, k_2, \dots, k_p, \dots, k_q$ varían de 1, 2, 3.

NOTA 6.4.2. En la ec 6.4.24 se emplea la notación siguiente:

$$\underline{x}_{,k}(t-z') = \underline{x}_{,k}(\underline{x}, t-z') \quad (6.4.25a)$$

$$\theta_{,k}(t-z') = \theta_{,k}(\underline{x}, t-z') \quad (6.4.25b)$$

NOTA 6.4.3. En la ec 6.4.24 se indica la dependencia de la funcional \mathcal{F} respecto a tres vectores \underline{D}_k . Lo anterior se debe a que en un espacio de tres dimensiones todos los vectores direccionales $\underline{x}' - \underline{x}$, que se originan en el punto \underline{x} , se pueden representar con tres vectores base \underline{D}_k . La presencia de los vectores direccionales $\underline{x}' - \underline{x}$ se debe a la forma de la serie de Taylor dada por la ec 6.3.13.

Definición 6.4.1. Descriptores materiales. Se llaman así a los vectores base \underline{D}_k .

Los descriptores materiales \underline{D}_k se pueden escoger coincidentes con los vectores base ortonormales \underline{I}_k . El hecho de indicar explícitamente la dependencia en los funcionales constitutivas de los descriptores \underline{D}_k , consiste en enfatizar la dependencia direccional de las propiedades de los materiales en un punto \underline{x} . Cuando no existe ambigüedad para indicar tal dependencia, se podrá quitar a \underline{D}_k de los argumentos.

A los materiales caracterizados por las ecuaciones constitutivas de la forma indicada en la ec 6.4.24 se les llama materiales no simples del tipo gradiente material. El orden de los materiales se especifica en términos de los órdenes de los gradientes indicados por P y Q .

Definición 6.4.2. Un material se dice que es de grado mecánico P y grado térmico Q , indicado como $\mathcal{G}(P, Q)$, si y solo si las funciona-

les constitutivas dependen de gradientes de orden P para $x(\underline{X}, t - \tau')$ y gradientes de orden Q para $\theta(\underline{X}, t - \tau')$.

Para muchos materiales, las variables constitutivas dependientes $t, \underline{x}, \underline{\epsilon}$ y η en \underline{X} se pueden considerar únicamente influenciadas por vecindades inmediatas, es decir aquellas donde $|\underline{x}' - \underline{x}|$ es pequeña. En tales casos se acostumbra usar gradientes de primer orden y tales materiales reciben el nombre de materiales simples.

Definición 6.4.3. Los materiales termomecánicos de grado mecánico uno y grado térmico uno, es decir $G(1,1)$, se denominan materiales simples. Para tales materiales las ecuaciones constitutivas dadas por la ec 6.4.24 se reduce a

$$\underline{t}(\underline{X}, t) = \mathcal{F}[\underline{x}_{,k}(t - \tau'), \theta(t - \tau'), \theta_{,k}(t - \tau'), \underline{D}_k, \underline{X}] \quad (6.4.26)$$

Es importante hacer notar que los materiales simples contienen a muchos materiales usuales, a continuación se esquematizan algunos

- i) Los materiales independientes de $\underline{x}_{,k}$, $G(0,1)$, son materiales rígidos.
- ii) Los materiales independientes de $\theta_{,k}$, $G(1,0)$, son materiales no conductores de calor
- iii) Otros materiales específicos como los sólidos elásticos, fluidos de Stokes, etc.

Se puede construir una funcional escalar F_{KL} , que sea invariante a movimientos de cuerpo rígido del sistema de referencia espacial, mediante la expresión siguiente

$$F_{KL} = x_{k,k} x_{l,l} \tilde{F}_{kl} \quad (6.4.27)$$

La función F_{KL} se puede escribir de otra manera en base a un teorema de Cauchy que establece lo siguiente: Una función monovaluada F_{KL} de los argumentos $\underline{x}_{,k}, \underline{x}_{,k_1, k_2}, \dots, \theta_{,k_1}, \theta_{,k_1 k_2}, \dots$ se puede reducir a funciones de los productos escalares de los vectores ^{tomados por pares. Como la lista de los vectores argumentos} argumentos de la funcional dada por la ec 6.4.24 es muy grande y además complicada, se presentarán a continuación las correspondientes a materiales simples. (ec 6.4.26)

$$x_{k,k}(t - \tau') x_{l,l}(t - \tau') \delta_{kl} = G_{KL} \quad (6.4.28)$$

$$|x_{k,k}(t - \tau')| = j = \frac{p_0}{P(t - \tau')} \quad (6.4.29)$$

En base a las ecs 6.4.28 y 6.4.29, la ec 6.4.27 para materiales simples, se podrá escribir como:

$$F_{KL} = F_{KL}[G_{MN}(t - \tau'), \bar{p}'(t - \tau'), \theta(t - \tau'), \theta_{,k}(t - \tau'), \underline{D}_k, \underline{X}] \quad (6.4.30)$$

como la ec 6.4.27 se puede escribir como

$$\tilde{F}_{kl} = F_{KL} X_{k,k} X_{l,l} \quad (6.4.31)$$

al sustituir las ecs 6.4.30 y 6.4.31 en la ec 6.4.26 se obtiene la expresión siguiente

$$\underline{t}_{kl}(\underline{X}, t) = F_{KL}[G_{MN}(t - \tau'), \bar{p}'(t - \tau'), \theta(t - \tau'), \theta_{,k}(t - \tau'), \underline{D}_M, \underline{X}] X_{k,k} X_{l,l} \quad (6.4.32)$$

6.4.4. Restricciones debidas al axioma de memoria suave.

Si las funciones argumento de \tilde{F} en la ec 6.4.24, poseen derivadas

parciales respecto a $\bar{\sigma}'$ en $\bar{\sigma}' = t$, entonces este axioma establece que las funcionales, para una clase de materiales con memoria limitada al rango $\bar{\sigma}_0 < t' < t$ y $-\infty < \bar{\sigma}_0$, se pueden representar por funciones que involucran varias rapidezces de variación de la temperatura y los gradientes asociados a la deformación y a la temperatura. Si \underline{f} es la función tensorial, la ec 6.4.24, por este axioma, se podrán escribir como;

$$\underline{t}(\underline{X}, t) = \underline{f}(\underline{x}_{,k_1}, \dot{\underline{x}}_{,k_1}, \ddot{\underline{x}}_{,k_1}, \dots, \underline{x}_{,k_1 k_2}, \dot{\underline{x}}_{,k_1 k_2}, \dots) \quad (6.4.33)$$

$$[\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}, \dots, \theta_{,k_1}, \dot{\theta}_{,k_1}, \dots, \underline{D}_k, \underline{X}]$$

El número de las rapidezces asociadas a cada gradiente dependerá de los fundamentos, que en algún sentido, tiene la memoria en dichos gradientes. Es claro que el axioma de objetividad restringirá la forma de las funciones \underline{f} . Si los argumentos que aparecen en la función

F_{KL} de la ec 6.4.32 poseen derivadas parciales continuas respecto a $\bar{\sigma}'$, hasta de orden p asociado a C_{MN} y q asociado a θ , dicha ecuación podrá escribirse, en base al axioma de memoria suave, de la manera siguiente

$$t_{kl}(\underline{X}, t) = F_{KL}(C_{MN}, \dot{C}_{MN}, \ddot{C}_{MN}, \dots, C_{MN}^{(p)}, \bar{\rho}', \dot{\rho}', \ddot{\rho}', \dots, \rho^{(p)}, \theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}, \dots, \theta^{(q)}, \theta_{,k}, \dot{\theta}_{,k}, \ddot{\theta}_{,k}, \dots, \theta_{,k}^{(q)}, \underline{D}_M, \underline{X}) X_{K,k} X_{L,l} \quad (6.4.34)$$

6.4.4. Restricciones debidas al axioma de admisibilidad.

De acuerdo con el principio de la conservación local de la masa expresada como

$$\frac{\rho_0}{\rho} = j \quad \text{si bien} \quad \frac{\rho_0}{\rho(\underline{X}, t')} = \det \frac{\partial x_k(\underline{X}, t')}{\partial X_k} \quad (6.4.35)$$

se podrá afirmar que se puede excluir la dependencia de F_{KL} de $\bar{\rho}'$ ya que se incluirá al tomar en cuenta la dependencia de C_{KL} . El resultado anterior establece ^{que} la funcional F_{KL} debe ser compatible con la ecuación de la conservación de la masa.

Conviene aclarar que para ciertos materiales (fluidos por ejemplo) desaparece la dependencia de F_{KL} en $C_{KL}(x_k, k)$ y por lo tanto la dependencia de $\bar{\rho}'$ deberá de permanecer.

La desigualdad de Clausius-Duhem incorpora restricción de importancia a las formas de las funcionales constitutivas. En los incisos que restan de este capítulo se hará énfasis en las ecuaciones constitutivas de ciertos materiales que son de uso frecuente.

6.5. Sólidos elásticos

Definición 6.5.1. Material elástico. Un material simple se llama elástico si el tensor esfuerzo t_{kl} , el vector calor q_k , la densidad de energía interna ϵ , y la densidad de entropía η , unicamente dependen del gradiente de deformaciones $x_{,k}$ y la temperatura θ en el punto (\underline{X}, t) y no de la historia termomecánica completa.

De acuerdo con la definición anterior, las ecuaciones constitutivas para los materiales elásticos estarán dadas por

$$t_{kl}(\underline{X}, t) = \underline{f}(\underline{x}_{,k}, \theta, \underline{D}_k, \underline{X}) \quad (6.5.1)$$

$$q_k(\underline{X}, t) = \underline{g}(\underline{x}_{,k}, \theta, \underline{D}_k, \underline{X}) \quad (6.5.2)$$

$$\epsilon(\underline{X}, t) = \underline{e}(\underline{x}_{,k}, \theta, \underline{D}_k, \underline{X}) \quad (6.5.3)$$

$$\eta(\underline{X}, t) = \underline{n}(\underline{x}_{,k}, \theta, \underline{D}_k, \underline{X}) \quad (6.5.4)$$

Las ecuaciones anteriores son casos particulares de las ecuaciones indicadas por la ec 6.4.26 en donde no se considera la dependencia del gradiente de temperatura $\theta_{,k}(t-z')$ y se elimina la dependencia de la memoria en los términos $\underline{x}_{,k}(t-z')$ y $\theta(t-z')$ para $z' \neq t$. Desde luego que también serán c.s.s particulares de las ecs 6.4.33.

El cambio de los materiales elásticos se debe únicamente a cambios de la configuración en el tiempo t . Si se selecciona como configuración inicial a la configuración \underline{X} , no deformada, sin esfuerzos y con temperatura uniforme, la ec 6.5.1 establece que el tensor esfuerzo en el tiempo t , se debe a cambios relativos respecto al estado inicial, de la configuración y la temperatura, mientras que los cambios intermedios no intervienen. De acuerdo con lo anterior se puede afirmar que los materiales elásticos poseen únicamente memoria de la configuración inicial.

Las funciones F_{KL} y Q_K similares a la dada por la ec 6.4.27 resultan ser

$$F_{KL} = x_{k,K} x_{l,L} f_{kl} \quad (6.5.5)$$

$$Q_K = x_{k,K} g_k \quad (6.5.6)$$

Las funciones F_{KL}, Q_K, e y η deben ser objetivas. Tomando en cuenta el teorema de Cauchy enunciado en el inciso 6.4.3, las ecs 6.5.1 a 6.5.4 se podrá escribir de la forma siguiente

$$F_{KL} = F_{KL}(G_{KL}, \bar{P}^{-1}, \theta, \underline{D}_K, \underline{X}) \quad (6.5.7)$$

$$Q_K = Q_K(G_{KL}, \bar{P}^{-1}, \theta, \underline{D}_K, \underline{X}) \quad (6.5.8)$$

$$e = e(G_{KL}, \bar{P}^{-1}, \theta, \underline{D}_K, \underline{X}) \quad (6.5.9)$$

$$\eta = \eta(G_{KL}, \bar{P}^{-1}, \theta, \underline{D}_K, \underline{X}) \quad (6.5.10)$$

lo anterior se debe a las ecs 6.4.28 y 6.4.29.

Tomando en cuenta que el argumento \bar{P}^{-1} está incluido en el término C_{KL} mediante la ec 6.4.29, que es una forma de la conservación local de la energía, y en base al axioma de admisibilidad se podrá quitar. Puesto que F_{KL} y Q_K están referidas al sistema material X_K , los descriptores materiales \underline{D}_K podrán quitarse de los argumentos pues ya no será necesario enfatizar tal dependencia. En base a lo anterior y en las ecs 6.5.5 y 6.5.6, las ecs 6.5.7 a 6.5.10 se pueden escribir como.

$$t_{kl} = F_{KL}(C_{KL}, \theta, X_K) X_{k,K} X_{l,L} \quad (6.5.11)$$

$$q_k = Q_K(G_{KL}, \theta, X_K) X_{k,K} \quad (6.5.12)$$

$$e = e(G_{KL}, \theta, X_K) \quad (6.5.13)$$

$$\eta = \eta(G_{KL}, \theta, X_K) \quad (6.5.14)$$

El axioma de admisibilidad establece que las ecs 6.5.11 a 6.5.14 sean consistentes con los axiomas fundamentales de la mecánica cuyas expresiones son

$$\frac{p_0}{\rho} = \det G_{KL} = (III G)^{1/2} \quad (6.5.15)$$

$$t_{kl,k} + p(\dot{f}_l - \dot{v}_l) = 0 \quad (6.5.16)$$

$$t_{kle} = t_{kek} \quad (6.5.17)$$

$$p\dot{E} = t_{kle} d_{ek} + q_{k,k} + p\dot{h} \quad (6.5.18)$$

$$p\left(\dot{\eta} - \frac{\dot{E}}{\theta}\right) + \frac{1}{\theta} t_{kle} d_{ek} + \frac{1}{\theta^2} q_k \theta_{,k} \geq 0 \quad (6.5.19)$$

La ec 6.5.15 ^{se} utilizó al eliminar la variable p^{-1} en las ecs 6.5.11 a 6.5.14. A continuación se usará la desigualdad de Clausius-Duhem para obtener las restricciones termodinámicas del material elástico.

De acuerdo con las ecs 6.5.13 y 6.5.14 se puede escribir que

$$\dot{\eta} = \frac{\partial \eta}{\partial G_{KL}} \dot{G}_{KL} + \frac{\partial \eta}{\partial \theta} \dot{\theta} \quad (6.5.20)$$

$$\dot{E} = \frac{\partial E}{\partial G_{KL}} \dot{G}_{KL} + \frac{\partial E}{\partial \theta} \dot{\theta} \quad (6.5.21)$$

usando las ecs 3.5.20 y 3.5.23 se obtendrá que

$$\dot{G}_{KL} = 2 d_{kle} x_{k,k} x_{l,L} \quad (6.5.22)$$

Sustituyendo la ec 6.5.22 en las ecs 6.5.20 y 6.5.21 y tales resultados permitirán escribir a la ec 6.5.19 como

$$\left[2p \left(\frac{\partial \eta}{\partial G_{KL}} - \frac{1}{\theta} \frac{\partial E}{\partial G_{KL}} \right) x_{e,k} x_{e,L} + \frac{1}{\theta} t_{kle} \right] d_{lk} + p \left(\frac{\partial \eta}{\partial \theta} - \frac{1}{\theta} \frac{\partial E}{\partial \theta} \right) \dot{\theta} + \frac{1}{\theta^2} q_k \theta_{,k} \geq 0 \quad (6.5.23)$$

para que la desigualdad anterior se satisfaga para todos los procesos

termomecánicos independientes donde d_{kle} , $\dot{\theta}$ y $\theta_{,k}$ sean arbitrarios y que esté presente el material modelado con las ecs 6.5.11 a 6.5.14, se deberán cumplir las condiciones siguientes

$$t_{kl} = 2p \left(\frac{\partial E}{\partial G_{KL}} - \theta \frac{\partial \eta}{\partial G_{KL}} \right) x_{(k,k} x_{l),L} \quad (6.5.24)$$

$$2p \left(\frac{\partial E}{\partial G_{KL}} - \theta \frac{\partial \eta}{\partial G_{KL}} \right) x_{[k,k} x_{l]},L = 0 \quad (6.5.25)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial \theta} - \frac{1}{\theta} \frac{\partial E}{\partial \theta} = 0 \quad (6.5.26)$$

$$q_k = 0 \quad (6.5.27)$$

donde las ecs 6.5.24 y 6.5.25 se obtienen al anular el coeficiente de d_{kle} y las ecs 6.5.26 y 6.5.27 son los coeficientes de $\dot{\theta}$ y $\theta_{,k}$ igualada a cero, de la ec 6.5.23. Al hacer uso de la función de energía libre de Helmholtz ψ definida como

$$\psi = \psi(G_{KL}, \theta, x) = E - \theta \eta = E - \theta \eta \quad (6.5.28)$$

las ecs 6.5.24 a 6.5.27 se pueden escribir de la manera siguiente

$$t_{kl} = 2p \frac{\partial \psi}{\partial G_{KL}} x_{(k,k} x_{l),L} \quad (6.5.29)$$

$$2p \frac{\partial \psi}{\partial G_{KL}} x_{[k,k} x_{l]},L = 0 \quad (6.5.30)$$

$$\eta = - \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad (6.5.31)$$

$$q_k = 0 \quad (6.5.32)$$

Las ecuaciones correspondientes a las ecs 6.5.7 a 6.5.10 se podrán escribir usando las ecs 6.5.29 a 6.5.30 y quedarán

$$F_{KL} = 2\rho \frac{\partial \Psi}{\partial G_{MN}} G_{MK} G_{NL} \quad (6.5.33)$$

$$Q_K = 0 \quad (6.5.34)$$

$$\epsilon = \Psi - \theta \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \quad (6.5.35)$$

$$\eta = -\frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \quad (6.5.36)$$

los desarrollos anteriores corresponden a la demostración del teorema siguiente.

Teorema 6.5.1. Un material sólido elástico es admisible termodinámicamente si y solo si el tensor esfuerzo, la densidad de energía interna y la densidad de entropía se obtienen de un potencial Σ y deberá estar sujeto a cambios adiabáticos locales. La expresión de las ecuaciones constitutivas quedan como se indica a continuación

$$t_{kl} = 2 \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial \Sigma}{\partial G_{KL}} X_{(k,K} X_{l),L} \quad (6.5.37)$$

$$q_k = 0 \quad (6.5.38)$$

$$\epsilon = \frac{1}{\rho_0} \left(\Sigma - \theta \frac{\partial \Sigma}{\partial \theta} \right) \quad (6.5.39)$$

$$\eta = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \Sigma}{\partial \theta} \quad (6.5.40)$$

en donde el potencial Σ está relacionado con la función de ener

gía libre de Helmholtz Ψ mediante la expresión

$$\Sigma = \Sigma(G_{KL}, \theta, X_K) = \rho_0 \Psi(G_{KL}, \theta, X_K) \quad (6.5.41)$$

y estará sometido a la restricción siguiente

$$2 \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial \Sigma}{\partial G_{KL}} X_{[k,K} X_{l],L} = 0 \quad (6.5.42)$$

NOTA 6.5.1. El hecho de ser simétrico el tensor de deformación de Green, la ec 6.5.42 resultará ser una identidad.

6.5.1 Sólidos hiperelásticos o sólidos elásticos de Green.

Definición 6.5.2. Sólidos hiperelásticos o sólidos elásticos de Green. A los materiales caracterizados por las ecuaciones constitutivas dadas por las ecs 6.5.37 a 6.5.40 reciben el nombre de sólidos elásticos de Green o sólidos hiperelásticos.

En los materiales sólidos hiperelásticos los cambios en la densidad de entropía se deben únicamente a las fuentes de calor h .

Lo anterior se demuestra como se indica a continuación. Al sustituir las ecs 6.5.37 a 6.5.40 en la ecuación de la conservación de la energía (ec 6.5.18) se tendrá

$$\frac{\rho}{\rho_0} \left(\dot{\Sigma} - \dot{\theta} \frac{\partial \Sigma}{\partial \theta} - \theta \frac{\partial \dot{\Sigma}}{\partial \theta} \right) = 2 \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial \Sigma}{\partial G_{KL}} X_{k,K} X_{l,L} + \rho h \quad (6.5.43)$$

Al tomar en cuenta la ec 6.5.22 y la expresión siguiente

$$\dot{\Sigma} = \dot{\theta} \frac{\partial \Sigma}{\partial \theta} + G_{KL} \frac{\partial \Sigma}{\partial G_{KL}} \quad (6.5.44)$$

la ec 6.5.43 se reduce a

$$-\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \dot{\Sigma}}{\partial \theta} = \frac{h}{\theta} \quad (6.5.45)$$

al usar la ec 6.5.40, la ec 6.5.45 se reduce a

$$\dot{\eta} = \frac{h}{\theta} \quad (6.5.46)$$

que es la aseveración que se quería demostrar. De la ec 6.5.46 se puede concluir que si no existen las fuentes de calor (h), $\dot{\eta} = 0$

También se debe de enfatizar que las ecuaciones constitutivas dadas por las ecs 6.5.37 a 6.5.40 se obtuvieron al tomar la igualdad a cero en la desigualdad de Clausius-Duhem (ec 6.5.23) por lo tanto, se tendrá demostrado el teorema siguiente

Teorema 6.5.2. Los materiales sólidos hiperelásticos están en equilibrio térmico.

La ecuación de la conservación de la energía (ec 6.5.18) se puede expresar de otra forma, al usar las ecuaciones constitutivas de los sólidos elásticos de Green, según se indica a continuación.

Sustituyendo las ecs 6.5.39 y 6.5.46 en la ec 6.5.18 se obtiene:

$$\frac{\rho}{\rho_0} \left(\dot{\Sigma} - \dot{\theta} \frac{\partial \Sigma}{\partial \theta} - \theta \frac{\partial \dot{\Sigma}}{\partial \theta} \right) = t_{kl} d_{lk} + \rho \dot{\eta} \theta \quad (6.5.46)$$

la ec 6.5.46 se puede escribir de la forma siguiente al usar la ec 6.5.40

$$\frac{\rho}{\rho_0} \dot{\Sigma} + \rho \dot{\eta} \theta = t_{kl} d_{lk} \quad (6.5.47)$$

6.5.2. Sólidos elásticos incompresibles

La desigualdad de Clausius-Duhem dada por la ec 6.5.23 se puede satisfacer bajo otras condiciones distintas a la descrita por ejemplo, se puede tener $\theta = 0$ ó constante y no será necesario la restricción $q_k = 0$. También podría tenerse el caso $d_{kl} = 0$ que corresponde a un movimiento de cuerpo rígido (teorema 3.3.2), el tensor esfuerzo t_{kl} quedará indefinido. Las situaciones anteriores corresponden a algunas restricciones en la dependencia de las funciones constitutivas o en sus variables. Cuando las restricciones existen en forma natural se tendrán que hacer las modificaciones correspondientes a las ecuaciones constitutivas y en especial en este inciso se considerarán los sólidos elásticos incompresibles definidos como:

Definición 6.5.3. Sólidos elásticos incompresibles. Se definen así a los materiales sólidos elásticos en donde la densidad de masa permanece constante. Lo anterior se puede escribir, al usar la ecuación de conservación de la masa (ec 6.5.15), de la manera siguiente

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \sqrt{III_G} = 1 \quad (6.5.48)$$

La condición dada por la ec 6.5.48 establece restricciones al tensor de Green de tal manera que todas las componentes de G_{KL} no son independientes y por lo tanto se debe tener cuidado para calcular las derivadas parciales $\frac{\partial \Pi_G}{\partial G_{KL}}$ y $\frac{\partial \Sigma}{\partial G_{KL}}$. Para lograr las derivadas parciales se hará uso del método de los multiplicadores de Lagrange y de la ecuación siguiente

$$\frac{\partial III_G}{\partial G_{MN}} G_{MK} = III_G \delta_{NK} \quad (6.5.49)$$

La demostración de la ec 6.5.49 se presenta a continuación. La ec 2.3.5 se puede escribir como

$$\frac{\partial j}{\partial x_{k,k}} = \frac{\partial j}{\partial G_{MN}} \frac{\partial G_{MN}}{\partial x_{k,k}} = j X_{k,k} \quad (6.5.50)$$

al usar la ec 2.3.10b se podrá escribir que

$$\frac{\partial G_{MN}}{\partial x_{k,k}} = \delta_{KM} X_{k,N} \quad (6.5.51)$$

al sustituir la ec 6.5.51 en la ec 6.5.50 y multiplicando ambos miembros por el gradiente $X_{N,l}$ se obtendrá

$$\frac{\partial j}{\partial G_{MN}} \delta_{KM} X_{k,N} X_{N,l} = j X_{k,k} X_{N,l} \quad (6.5.52)$$

en base a las ecs 2.3.2a y 2.11.12, la ec 6.5.52 se puede escribir como

$$\frac{\partial j}{\partial G_{MN}} \delta_{KM} = j G_{KN}^{-1} \quad (6.5.53)$$

o bien

$$\frac{\partial j}{\partial G_{MN}} G_{MN} = j \quad (6.5.54)$$

y el pasar de la ec 6.5.54 a la ec 6.5.49 ya resulta trivial.

Regresando al problema de calcular las derivadas parciales $\frac{\partial \psi}{\partial G_{KL}}$ con la restricción indicada por la ec 6.5.48 se utilizará el método de los multiplicadores de Lagrange utilizando la función

$$\psi - \frac{p}{2\rho_0} (\text{III}_G - 1) \quad (6.5.55)$$

en vez de ψ donde p es un multiplicador de Lagrange.

De acuerdo con la ec 6.5.33, se deberá tener que

$$\begin{aligned} F_{KL} &= 2\rho \frac{\partial}{\partial G_{MN}} \left[\psi - \frac{p}{2\rho_0} (\text{III}_G - 1) \right] G_{MK} G_{NL} \\ &= 2\rho \frac{\partial \psi}{\partial G_{MN}} G_{MK} G_{NL} - \frac{p\rho}{\rho_0} \frac{\partial \text{III}_G}{\partial G_{MN}} G_{MK} G_{NL} \end{aligned} \quad (6.5.56)$$

al usar la ec 6.5.49 en la ec 6.5.56 se obtiene

$$\begin{aligned} F_{KL} &= 2\rho \frac{\partial \psi}{\partial G_{MN}} G_{MK} G_{NL} - \frac{p\rho}{\rho_0} \text{III}_G \delta_{NK} G_{NL} \\ &= 2\rho \frac{\partial \psi}{\partial G_{MN}} G_{MK} G_{NL} - p G_{KL} \end{aligned} \quad (6.5.57)$$

en la ec 6.5.57 la derivada $\partial \psi / \partial G_{MN}$ se debe calcular en la restricción indicada en la ec 6.5.48. Al sustituir la ec 6.5.57 en la ec 6.5.11 se obtiene

$$t_{kl} = 2\rho \frac{\partial \psi}{\partial G_{MN}} G_{MK} G_{NL} X_{k,k} X_{l,l} - p G_{kl} X_{k,k} X_{l,l} \quad (6.5.58)$$

$$\begin{aligned} t_{kl} &= 2\rho \frac{\partial \psi}{\partial G_{MN}} X_{m,M} X_{n,N} \delta_{mk} \delta_{nl} - p \delta_{kl} \delta_{rr} \\ &= 2\rho \frac{\partial \psi}{\partial G_{MN}} X_{k,M} X_{l,N} - p \delta_{kl} \end{aligned} \quad (6.5.59)$$

al hacer uso del potencial Σ (ec 6.5.41) y la condición $\rho_0/\rho = 1$ (ec 6.5.48), la ec 6.5.49 se reduce a

$$t_{kl} = 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial G_{KL}} X_{(k,k} X_{l),L} - p \delta_{kl} \quad (6.5.60)$$

que es la ecuación constitutiva del tensor esfuerzo para sólidos elásticos incompresibles. El multiplicador de Lagrange p es una incógnita del problema y se le conoce con el nombre de presión.

6.6 Sólidos elásticos isótropos

Las ecuaciones constitutivas dadas por las ecs 6.5.37a 6.5.40 y 6.5.60 son válidas para los materiales elásticos anisotrópicos, --- entonces el axioma de invariancia material les impondrá restricciones asociadas a las condiciones de simetría, en caso de que estas existan. Si el material posee condiciones de simetría caracterizadas por los conjuntos de transformaciones ortogonales $\{\underline{S}\}$ y traslaciones $\{\underline{B}\}$ de los ejes materiales \underline{X} , es decir

$$\bar{\underline{X}} = \underline{S} \underline{X} + \underline{B} \quad ; \quad \underline{S} \underline{S}^T = \underline{S}^T \underline{S} = \underline{I} \quad ; \quad \det \underline{S} = \pm 1 \quad (6.6.1)$$

entonces el axioma de invariancia material establecerá que el potencial Σ sea de forma invariante cuando cualquier sistema de referencia material $\bar{\underline{X}}$ esté relacionado mediante la ec 6.6.1, es decir,

$$\Sigma(\bar{G}_{KL}, \bar{\theta}, \bar{\underline{X}}) = \Sigma(G_{KL}, \theta, \underline{X}) \quad (6.6.2)$$

en la ec 6.6.2, además de la ec 6.6.1, se usan las relaciones siguientes:

$$\bar{G}_{KL} = \underline{S} G_{KL} \underline{S}^T \quad (6.6.3)$$

$$\bar{\theta} = \theta \quad (6.6.4)$$

La ec 6.6.2 también se puede escribir como

$$\Sigma(\underline{S} G_{KL} \underline{S}^T, \theta, \underline{S} \underline{X} + \underline{B}) = \Sigma(G_{KL}, \theta, \underline{X}) \quad (6.6.5)$$

y será válida para todos los miembros de los grupos $\{\underline{S}\}$ y $\{\underline{B}\}$. Un caso particular de material será aquel en donde se satisfagan las condiciones

$$\underline{S} = \underline{I} \quad \text{y} \quad \underline{B} = -\underline{X} \quad (6.6.6)$$

ocasionando que la ec 6.6.5 sea independiente de los puntos materiales \underline{X} . A tales materiales se les denominan homogéneos y la ec 6.6.5 se reduce a las expresiones siguientes.

$$\Sigma = \Sigma(G_{KL}, \theta) \quad (6.6.7)$$

$$\Sigma(\underline{S} G_{KL} \underline{S}^T, \theta) = \Sigma(G_{KL}, \theta) \quad (6.6.8)$$

La simetría material más simple se obtiene cuando el grupo $\{\underline{S}\}$ es el grupo total de transformaciones ortogonales o lo que es lo mismo, las propiedades de los materiales no dependen de la orientación de los ejes materiales. Tales materiales se denominan isótropos.

Definición 6.6.1. Sólido elástico isótropo. Se dice que un material sólido elástico es isótropo si el potencial Σ es invariante bajo el grupo total de las transformaciones ortogonales $\{\underline{S}\}$ de los ejes materiales \underline{X}_k .

Para que lo dicho en la definición 6.6.1 sea cierto se deberá tener que Σ sea función de los invariantes del tensor de deformaciones de Green, G_{KL} . Entonces para un material elástico e isótropo se deberá tener que

$$\Sigma = \Sigma(I_G, II_G, III_G, \underline{X}) \quad (6.6.9)$$

Tomando en cuenta las relaciones establecidas entre los tensores de deformación de Cauchy c_{kl} , Green G_{KL} , Lagrange E_{KL} y Euler e_{kl} en el capítulo 2, se podrá enunciar el teorema siguiente.

Teorema 6.6.1. El potencial Σ , para los materiales hiperelásticos isotrópicos, se puede considerar como función de cualesquiera de las medidas de la deformación dadas por los tensores de deformación de Cauchy c_{kl} , Green G_{KL} , Lagrange E_{KL} y Euler e_{kl} .

En base al teorema 6.6.1 el potencial Σ , para los materiales elásticos e isotrópicos se podrá escribir en la forma siguiente;

$$\Sigma = \Sigma (I, II, III, \theta, X) \quad (6.6.10)$$

donde I, II y III representan a los invariantes de alguna de las medidas para la deformación. Para los materiales en cuestión existe una forma especial de las ecuaciones constitutivas que se desarrollará a continuación. Supongase que se utilizará al tensor de deformación de Cauchy c_{kl} , entonces la ec 6.6.10 queda

$$\Sigma = \Sigma (c_{kl}, \theta, X_k) = \Sigma (I_c, II_c, III_c, \theta, X) \quad (6.6.11)$$

para calcular el tensor esfuerzo t_{kl} se usará la ec 6.5.47 y sus elementos se calcularán como.

$$\dot{\Sigma} = \frac{\partial \Sigma}{\partial c_{kl}} \dot{c}_{kl} + \frac{\partial \Sigma}{\partial \theta} \dot{\theta} \quad (6.6.12)$$

De acuerdo con las ecs. 2.4.5 y 3.5.21 se tendrá que

$$\dot{c}_{kl} = \frac{D}{Dt} (d_{kl} - 2e_{kl}) = -2\dot{e}_{kl} = -2d_{kl} + 2e_{ml} v_{m,l} + 2e_{ml} \bar{w}_{,k} \quad (6.6.13)$$

sustituyendo la ec 3.5.3. en la ec 6.6.13 y tomando en cuenta la simetría del tensor rapidez de deformación de Euler d_{kl} y la antisimetría del tensor giro w_{kl} , se podrá escribir

$$\dot{c}_{kl} = -2c_{m(k} d_{m)l} - 2c_{m(k} w_{m)l} \quad (6.6.14)$$

sustituyendo las ecs. 6.5.40 y 6.6.14 en la ec 6.6.12 se obtiene que

$$\dot{\Sigma} = -2 \frac{\partial \Sigma}{\partial c_{kl}} c_{m(k} d_{m)l} - 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial c_{kl}} c_{m(k} w_{m)l} - \rho_0 \dot{\theta} \quad (6.6.15)$$

Al sustituir la ec 6.6.15 en la ec 6.5.47 se obtiene la expresión siguiente

$$-2 \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial \Sigma}{\partial c_{kl}} c_{m(k} d_{m)l} - 2 \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial \Sigma}{\partial c_{kl}} c_{m(k} w_{m)l} = t_{kl} d_{kl} \quad (6.6.16)$$

puesto que la ec 6.6.16 se debe satisfacer para valores arbitrarios de los tensores d_{kl} y w_{kl} , se deberá satisfacer que

$$t_{kl} = - \frac{2\rho}{\rho_0} \frac{\partial \Sigma}{\partial c_{m(l} } c_{k)m} \quad (6.6.17)$$

$$-2 \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial \Sigma}{\partial c_{m(l} } c_{k)m} = 0 \quad (6.6.18)$$

Las ecs 6.6.17 y 6.6.18 son las ecuaciones constitutivas del tensor esfuerzo para materiales elásticos e isotrópicos. Las ecs 6.6.17 y 6.6.18 se pueden expresar en términos del tensor de Euler e_{kl} al -

usar la ec 2.4.5 y quedan como se indica a continuación

$$t_{kl} = \frac{p}{\rho_0} \left(\frac{\partial \Sigma}{\partial e_{kl}} - \frac{\partial \Sigma}{\partial e_{ml}} e_{km} - \frac{\partial \Sigma}{\partial e_{km}} e_{lm} \right) \quad (6.6.19)$$

$$\frac{p}{\rho_0} \left(\frac{\partial \Sigma}{\partial e_{mk}} e_{lm} - \frac{\partial \Sigma}{\partial e_{ml}} e_{km} \right) = 0 \quad (6.6.20)$$

La ecuación constitutiva de esfuerzos para materiales elásticos - isotrópicos e incompresibles, correspondientes a la ec 6.6.19 se puede demostrar que resulta ser

$$t_{kl} = -p \delta_{kl} + \frac{\partial \Sigma}{\partial e_{kl}} - \frac{\partial \Sigma}{\partial e_{ml}} e_{km} - \frac{\partial \Sigma}{\partial e_{km}} e_{lm} \quad (6.6.21)$$

Puesto que para un material incompresible $\text{III}_e = 1$, en la ec. 6.6.21 el potencial Σ es función de los invariantes I y II únicamente, además de θ y \underline{X} , por ejemplo

$$\Sigma = \Sigma(I_e, II_e, \theta, \underline{X}) \quad (6.6.22)$$

y el tercer invariante III_e quedará expresado como se indica a continuación, al usar las ecs 2.9.29 a 2.9.31,

$$\text{III}_e = -\frac{1}{4} I_e + \frac{1}{2} II_e \quad (6.6.23)$$

6.7 Fluidos de Stokes.

A un fluido se le puede reconocer por el hecho de que en cualquier configuración deformada la densidad de masa no cambia y además no posee memoria de configuraciones pasadas. Lo anterior permite la definición siguiente.

Definición 6.7.1. Fluido. Se llama así a los materiales que continúan a un medio continuo en cuyas configuraciones deformadas la densidad de masa no cambia y tales configuraciones pueden tomarse como referencias.

Al considerar un material simple que contenga hasta primeras rapidez de variación respecto al tiempo, la ec 6.4.34 se reduce a

$$t_{kl}(X, t) = F_{KL}(G_{MN}, G'_{MN}, \rho, \dot{\rho}, \theta, \dot{\theta}, \theta_{,k}, \dot{\theta}_{,k}, X) X_{k,L} X_{L,l} \quad (6.7.1)$$

De acuerdo con la definición de fluido, cualquier configuración se puede tomar como referencia y se escogerá a

$$\underline{X} = x \quad \text{con } \rho \text{ constante} \quad (6.7.2)$$

La ec 6.7.2 establece lo siguiente

$$X_{k,L} \rightarrow \delta_{kl} \quad (6.7.3)$$

$$G_{MN} \rightarrow \delta_{mn} \quad (6.7.4)$$

$$\dot{G}_{KL} = 2 d_{kl} X_{k,K} X_{l,L} \rightarrow 2 d_{kl} \quad (6.7.5)$$

$$\theta_{,k} \rightarrow \theta_{,k} \quad (6.7.6)$$

$$\dot{\theta}_{,k} \rightarrow \dot{\theta}_{,k} \quad (6.7.7)$$

La eliminación de $\dot{\rho}$ en la ec 6.7.1 se puede hacer al tomar en cuenta la ec 5.7.22 que es una forma de expresar la ley de la conser-

vación de la masa. También al tomar en cuenta las ecs 6.7.2 a 6.7.7 la ec 6.7.1 se puede escribir como

$$t_{kl} = f_{kl}(d_{mn}, \bar{p}', \theta, \dot{\theta}, \theta_{,k}, \dot{\theta}_{,k}, \underline{x}) \quad (6.7.8)$$

A continuación se estudiará un fluido que sea independiente de $\dot{\theta}$, $\theta_{,k}$ y $\dot{\theta}_{,k}$, definido como.

Definición 6.7.2. Fluido de Stokes. Es ^{un} medio termomecánico cuyas ecuaciones constitutivas están dadas por las expresiones siguientes

$$t_{kl} = f_{kl}(d_{mn}, \bar{p}', \theta, \underline{x}) \quad (6.7.9)$$

$$g_k = g_k(d_{mn}, \bar{p}', \theta, \underline{x}) \quad (6.7.10)$$

$$\epsilon = \epsilon(d_{mn}, \bar{p}', \theta, \underline{x}) \quad (6.7.11)$$

$$\eta = \eta(d_{mn}, \bar{p}', \theta, \underline{x}) \quad (6.7.12)$$

y están sometidas a los axiomas de objetividad, invariancia material y admisibilidad.

El axioma de objetividad que está presente en la ec 6.7.1 se destruye al tomar la configuración indicada por la ec 6.7.2 y llegar a las ecs 6.7.9 a 6.7.12. Puesto que el axioma de objetividad establece que f_{kl} , g_k , ϵ y η ^{deben} ser de forma invariante bajo movimientos de cuerpo rígido dependientes del tiempo, de la referencia espacial. Si \underline{x} y $\bar{\underline{x}}$ son dos movimientos objetivamente equivalentes se deberá tener que

$$\bar{\underline{x}} = \underline{Q}(t) \underline{x} + \underline{b}(t) \quad (6.7.13)$$

$$\underline{Q} \underline{Q}^T = \underline{Q}^T \underline{Q} = \underline{I} \quad (6.7.14)$$

entonces la ec 6.7.9 quedará como

$$\bar{t}_{kl} = f_{kl}(\bar{d}_{mn}, \bar{p}', \theta, \bar{\underline{x}}) = f_{kl}(d_{mn}, \bar{p}', \theta, \underline{x}) \quad (6.7.15)$$

si $\underline{Q} = \underline{I}$ y $\underline{b} = -\underline{x}$, la ec 6.7.15 se puede escribir

$$t_{kl} = f_{kl}(d_{mn}, \bar{p}', \theta, \underline{0}) = f_{kl}(d_{mn}, \bar{p}', \theta, \underline{x}) \quad (6.7.16)$$

por lo que t_{kl} no debe depender explícitamente de \underline{x} . Lo anterior es válido para g_k , ϵ y η .

Si se selecciona a $\underline{b} = \underline{0}$ y $\underline{Q}(t)$ arbitrario, las transformaciones vectoriales g_k y tensoriales t_{kl} y d_{kl} deberán ser

$$\bar{t}_{kl} = \underline{Q} t_{kl} \underline{Q}^T \quad (6.7.17)$$

$$\bar{d}_{kl} = \underline{Q} d_{kl} \underline{Q}^T \quad (6.7.18)$$

$$\bar{g}_k = \underline{Q} g_k \quad (6.7.19)$$

La objetividad de las ecuaciones constitutivas al usar las ecs 6.7.17 a 6.7.19 quedarán expresadas como

$$\underline{Q} f_{kl}(d_{mn}, \bar{p}', \theta) \underline{Q}^T = f_{kl}(\underline{Q} d_{mn} \underline{Q}^T, \bar{p}', \theta) \quad (6.7.20)$$

$$\underline{Q} g_k (d_{mn}, \bar{p}', \theta) = g_k (\underline{Q} d_{mn} \underline{Q}^T, \bar{p}', \theta) \quad (6.7.21)$$

$$e (d_{mn}, \bar{p}', \theta) = e (\underline{Q} d_{mn} \underline{Q}^T, \bar{p}', \theta) \quad (6.7.22)$$

$$n (d_{mn}, \bar{p}', \theta) = n (\underline{Q} d_{mn} \underline{Q}^T, \bar{p}', \theta) \quad (6.7.23)$$

El axioma de admisibilidad establece que t_{kl} , g_k , ϵ y η deben satisfacer las ecuaciones de conservación de la masa, balance de la cantidad de movimiento, balance del momento de la cantidad de movimiento, conservación de la energía y principio de entropía, es decir

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho v_k)_{,k} = 0 \quad (6.7.24)$$

$$t_{kl,k} + \rho (f_l - \dot{v}_l) = 0 \quad (6.7.25)$$

$$t_{kl} = t_{lk} \quad (6.7.26)$$

$$\rho \dot{\epsilon} = t_{kl} d_{ek} + g_{k,k} + \rho h \quad (6.7.27)$$

$$\rho \left(\dot{\eta} - \frac{\dot{\epsilon}}{\theta} \right) + \frac{1}{\theta} t_{kl} d_{ek} + \frac{1}{\theta^2} g_k \theta_{,k} \geq 0 \quad (6.7.28)$$

cuando las ecs 6.7.9 a 6.7.12 se sustituyen en la ec 6.7.28 se obtiene la expresión siguiente

$$\rho \left(\frac{\partial n}{\partial d_{kl}} - \frac{1}{\theta} \frac{\partial e}{\partial d_{kl}} \right) d_{kl} - \left(\frac{\partial n}{\partial \bar{p}'} - \frac{1}{\theta} \frac{\partial e}{\partial \bar{p}'} \right) \frac{\dot{\bar{p}'}}{\rho} + \quad (6.7.29)$$

$$+ \rho \left(\frac{\partial n}{\partial \theta} - \frac{1}{\theta} \frac{\partial e}{\partial \theta} \right) \dot{\theta} + \frac{1}{\theta} t_{kl} d_{ek} + \frac{1}{\theta^2} g_k \theta_{,k} \geq 0$$

Si la ec 6.7.29 se cumple para cualquier proceso termomecánico asociado a un medio continuo formado con el material indicado por las ecs 6.7.9 a 6.7.12 se deberá anular los coeficientes de los términos d_{kl} , $\dot{\theta}$ y $\theta_{,k}$, es decir

$$\frac{\partial n}{\partial d_{kl}} - \frac{1}{\theta} \frac{\partial e}{\partial d_{kl}} = 0 \quad (6.7.30)$$

$$\frac{\partial n}{\partial \theta} - \frac{1}{\theta} \frac{\partial e}{\partial \theta} = 0 \quad (6.7.31)$$

$$g_k = 0 \quad (6.7.32)$$

Al usar la ec 5.7.22 junto con las ecs 6.7.30, 6.7.32 y la ec 6.7.29 se reduce a

$$\left(\frac{\partial n}{\partial \bar{p}'} - \frac{1}{\theta} \frac{\partial e}{\partial \bar{p}'} \right) d_{kk} + \frac{1}{\theta} f_{kl} d_{ek} \geq 0 \quad (6.7.33)$$

Si se introduce la función de energía libre de Helmholtz, es decir;

$$\psi = e - \theta n \quad (6.7.34)$$

la ec 6.7.30 establece que ψ es independiente de d_{kl} y por lo tanto

$$\psi = \psi(\bar{p}', \theta) = e - \theta n \quad (6.7.35)$$

además la ec 6.7.31 junto con la ec 6.7.35 permite escribir la ecuación

ción siguiente.

$$\eta = - \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad (6.7.36)$$

La ec. 6.7.33 se puede escribir como

$$\frac{1}{\theta} (f_{kk} + \pi d_{kk}) d_{kk} \geq 0 \quad (6.7.37)$$

donde π es la presión termodinámica y está dada por

$$\pi = - \frac{\partial \psi}{\partial \bar{p}'} = \pi(\bar{p}', \theta) \quad (6.7.38)$$

puesto que $\theta > 0$ y tomando en cuenta que

$${}_D t_{kk} = \dot{t}_{kk} + \pi \delta_{kk} \quad (6.7.39)$$

la ec 6.7.37 se puede escribir como

$${}_D t_{kk} d_{kk} \geq 0 \quad (6.7.40)$$

y la desigualdad de Clausius-Duhem establece que la energía disipativa debe ser no negativa (ec 6.7.40).

Al sustituir las ecs 6.7.35, 6.7.36 y 6.7.38, la ecuación asociada a la conservación de la energía, ec 6.7.27, se reduce a

$$\rho \theta \dot{\eta} = \dot{t}_{kk} d_{kk} + \rho h \quad (6.7.41)$$

y la ec 6.7.41 establece que únicamente la energía disipativa y las fuentes de calor son las que contribuyen a los cambios de la entro-

pla.

El equilibrio termodinámico se podrá establecer, según la ec. - 6.7.40, mediante las condiciones siguientes.

$$i) \quad t_{kk} = - \pi \delta_{kk} \quad (6.7.42)$$

o lo que es lo mismo, al tratar con fluidos no viscosos.

$$ii) \quad d_{kk} = 0 \quad (6.7.43)$$

Al tratarse de movimientos de cuerpo rígido.

$$iii) \quad {}_D t_{kk} \perp d_{kk} \quad (6.7.44)$$

La ecuación 6.7.44 es la expresión en la cual, los movimientos de los alargamientos principales son perpendiculares a los esfuerzos principales, lo cual corresponde a un caso hipotético y raro.

El resumen de las ecuaciones constitutivas para los fluidos de - Stokes, queda como sigue

$$t_{kk} = -\pi(\bar{p}', \theta) \delta_{kk} + {}_D f_{kk}(t_{mn}, \bar{p}', \theta) \quad (6.7.45)$$

$$q_k = 0 \quad (6.7.46)$$

$$E = \psi(\bar{p}', \theta) - \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad (6.7.47)$$

$$\eta = - \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad (6.7.48)$$

donde

$$\pi(\bar{p}', \theta) = - \frac{\partial \psi}{\partial \bar{p}'} \quad (6.7.49)$$

y la parte disipativa del tensor esfuerzo $D^{t_{kk}}$ estará sometido a las condiciones.

$$\underline{Q}(t) D^{t_{kk}}(d_{mn}, \bar{p}', \theta) \underline{Q}^T(t) = \underline{t}_{kk}(\underline{Q} d_{mn} \underline{Q}^T, \bar{p}', \theta) \quad (6.7.50)$$

$$D^{t_{kk}} d_{kk} \geq 0 \quad (6.7.51)$$

La ec 6.7.51 establece además que si $D^{t_{kk}}$ es continua en d_{kk} , se tendrá que

$$D^{t_{kk}}(\underline{Q}, \bar{p}', \underline{x}) = \underline{0} \quad (6.7.52)$$

y por lo tanto se podrá afirmar que la parte disipativa del tensor esfuerzo se anula al anularse el tensor rapidez de deformación de Euler.

Definición 6.7.3. Fluido de Stokes incompresible. Es aquel material definido por las ecuaciones constitutivas dado por las ecs 6.7.45 a 6.7.51 en donde la densidad de masa es cortante, es decir

$$\rho = \text{constante} = \rho_0 \quad (6.7.53)$$

La restricción 6.7.53 plantea problemas para calcular la ec 6.7.49 ya que resulta ser indefinida tal operación. Tal operación se hará usando los multiplicadores de Lagrange p , y se reemplazará a $\psi(\bar{p}', \theta)$ por la expresión.

$$\psi + p \left(\frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho} \right) \quad (6.7.54)$$

al usar el término dado por la ec 6.7.54 en vez de ψ , la ec. 6.7.49 se reduce a

$$\pi = \pi(\theta) = p \quad (6.7.55)$$

y para este caso la expresión de la parte disipativa del tensor esfuerzo quedará

$$D^{t_{kk}} = t_{kk} + p \delta_{kk} \quad (6.7.56)$$

La presión p definida por la ec 6.7.55 es una incógnita de la teoría y se deberá determinar al resolver las ecuaciones de movimiento bajo ciertas condiciones de frontera.

6.8 Problemas.