MÓDULO 1. TRADUCCIÓN DEL LENGUAJE COMÚN AL LENGUAJE ALGEBRAICO Y VICEVERSA

Objetivos específicos

Al finalizar el estudio de este módulo, el alumno:

- *Dado el enunciado de un problema, traducirá la proposición a una expresión algebraica.*
- *Dada una expresión algebraica, la traducirá al lenguaje común.*

Cuadro sinóptico

Traducción del lenguaje común al lenguaje algebraico
1. Identificar las cantidades que son variables y las que son constantes. 2. Determinar las relaciones entre ellas. 3. Obtener la expresión algebraica que represente las relaciones existentes.
Traducción del lenguaje algebraico al lenguaje común
Enunciar las expresiones algebraicas sustituyendo símbolos y signos algebraicos por su equivalente en el lenguaje común.

1.1. Traducción del enunciado de un problema a una expresión algebraica

Para solucionar muchos problemas de ingeniería se procede fundamentalmente con modelos que en su mayoría son matemáticos. El más común de los lenguajes matemáticos es el álgebra, que permite expresar por medio de letras y signos una regla o proposición representativa de una situación teórica o real. Así pues, una expresión o fórmula algebraica es el modelo matemático de un fenómeno o problema.

> *Definición.* Fórmula es la expresión algebraica de una regla relativa a un problema o fenómeno teórico o real.

El valor numérico de una expresión algebraica se obtiene sustituyendo las letras que la componen por números representativos de un caso particular.

Para obtener la expresión algebraica que representa un problema dado es necesario identificar, a partir de su enunciado, las cantidades variables y las constantes, y establecer en seguida las relaciones entre ambas. Se eligen letras para representar las variables y las constantes involucradas, que pueden cambiar de un caso particular a otro. En general, para las variables se usan las últimas letras del abecedario, y las primeras para las constantes. Luego se determinan las relaciones entre unas y otras, y con esto se obtiene la expresión algebraica de un problema dado, la que permite representarlo en una forma abreviada.

Ejemplo 1

Expresar algebraicamente el hecho de que el volumen de un cono es igual a la tercera parte del producto del área de la base por la altura.

Solución

Sea r el radio de la base, h la altura del cono y V su volumen. Puesto que el área de la base es π por el cuadrado del radio, el volumen está representado por:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

Ejemplo 2

En un problema de movimiento rectilíneo, se sabe que el espacio recorrido por un punto móvil es el espacio inicial ya recorrido por el punto antes de empezar a estudiarlo, más la velocidad inicial por el tiempo, más la mitad del producto de la aceleración por el cuadro del tiempo. Escribir una expresión que indique el espacio recorrido en un tiempo cualquiera.

Solución

Sea e el espacio recorrido al cabo del tiempo t, e_0 el espacio inicial, v_0 la velocidad inicial y a la aceleración. Se tendrá entonces que:

$$e = e_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

1.2. Traducción del lenguaje algebraico al lenguaje común

Para la total comprensión y correcto empleo de las expresiones algebraicas resultantes de un proceso o de la formulación de un modelo matemático es indispensable saber interpretarlas. De ahí la necesidad de saber trasladar al lenguaje común todas las operaciones que indican los signos y que deben efectuarse mediante las cantidades expresadas con letras. Este proceso se ilustra con los siguientes ejemplos.

Ejemplo 3

La fórmula para obtener el volumen de un prisma de base hexagonal es la siguiente:

$$V = \frac{Pa}{2}h$$

Donde P es el perímetro de la base, a es la apotema de la misma y h es la altura del prisma; enunciar esta fórmula en lenguaje común.

Solución

El volumen de un prisma de base hexagonal es igual a la mitad del producto del perímetro de la base por la apotema multiplicado por la altura.

Ejemplo 4

Traducir al lenguaje común la expresión:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Solución

El cuadrado de la suma de dos números es igual al cuadrado del primero, más el doble producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo.

Ejemplo 5

En general, en un movimiento:

$$E_c = \frac{mv^2}{2}$$

Donde E_c es la energía cinética, m la masa y v la velocidad. Traducir esta expresión al lenguaje común.

Solución

La energía cinética adquirida por un cuerpo al desplazarse es igual a la mitad del producto de su masa por el cuadrado de su velocidad.

Ejercicios

1. Exprese algebraicamente la proposición: La suma de un número x disminuido en la unidad, más la mitad del número aumentado en la unidad, más el triple del cuadrado del número, es 8.
2. Escriba algebraicamente el siguiente enunciado: La resistencia R a la flexión de una viga de sección rectangular es proporcional al producto de la base b por el cuadrado de la altura h de la sección.
3. La temperatura C en grados centígrados es igual a las nueve quintas partes de la diferencia de la temperatura F en grados Fahrenheit, menos 32. Exprese este hecho en lenguaje algebraico.
4. Exprese algebraicamente que la suma de dos números, multiplicada por uno de ellos es igual al cuadrado de éste, más el producto de los dos números.
5. Traduzca al lenguaje común la expresión:

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

6. Escriba en lenguaje común la igualdad:

$$x^2 + \frac{3(x - 5)}{2} = 4x + 1$$

7. El volumen de una esfera está dado por la fórmula $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$, donde r es el radio de la esfera. Traduzca dicha fórmula al lenguaje común.

MÓDULO 2. OPERACIONES ALGEBRAICAS

Objetivos específicos

Al finalizar el estudio de este módulo, el alumno:

- *Reducirá los términos semejantes de una expresión algebraica.*
- *Efectuará adiciones con polinomios.*
- *Efectuará sustracciones con polinomios.*
- *Multiplicará polinomios.*
- *Dividirá polinomios.*
- *Dividirá un polinomio en x entre un binomio de primer grado de la forma x + a, aplicando la división sintética.*

Cuadro sinóptico

Propiedades de las operaciones algebraicas

Adición

- Existencia.
- Unicidad.
- Conmutatividad.
- Asociatividad.
- Propiedad aditiva de la igualdad.

Sustracción

- Operación inversa de la adición.
- Si $a > b$, la diferencia $a - b$ es positiva.
- Si $a < b$, la diferencia $a - b$ es negativa.
- Propiedad sustractiva de la igualdad

  $$a - b = a + (-b)$$

Multiplicación

- Existencia.
- Unicidad.
- Conmutatividad.
- Asociatividad.
- Propiedad multiplicativa de la igualdad.
- Propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la adición.

División

- Operación inversa de la multiplicación.
- Propiedad divisoria de la igualdad.
- Recíproco de a es $\frac{1}{a}$; $\frac{a}{b} = a\,\frac{1}{b}$

Leyes de los signos	Leyes de los exponentes
$\left.\begin{matrix}(+)(+)\\ \frac{(+)}{(+)}\end{matrix}\right\} = (+)$ $\left.\begin{matrix}(-)(-)\\ \frac{(-)}{(-)}\end{matrix}\right\} = (+)$	$a^m a^n = a^{m+n}$ $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$
	$(a^m)^n = a^{mn}$
$\left.\begin{matrix}(+)(-)\\ \frac{(+)}{(-)}\end{matrix}\right\} = (-)$ $\left.\begin{matrix}(-)(+)\\ \frac{(-)}{(+)}\end{matrix}\right\} = (-)$	$(ab)^m = a^m b^m$ $\frac{b^m}{b^n} = b^{m-n}$

2.1. Reducción de términos semejantes

A cualquier factor de un término algebraico se le llama *coeficiente* de los factores restantes. Así, en el término $2ax$, 2 es el coeficiente de ax, a es el coeficiente de $2x$, y x es el coeficiente de $2a$.

Frecuentemente se considera como coeficiente sólo el factor numérico del término. El coeficiente numérico de ab en el término $6ab$ es 6. El coeficiente literal de b^2x en el término ab^2x es a.

Definición. Términos semejantes son aquellos que difieren únicamente en sus coeficientes, como $2xy$, $-4xy$, xy.

Para reducir términos semejantes se suman algebraicamente los coeficientes y se anota el resultado como coeficiente de la parte común de todos ellos. Antes de empezar a operar es conveniente ordenar todos los términos de acuerdo con las potencias descendentes o ascendentes de una literal.

Ejemplo 1

Reducir los términos semejantes:

a) $2a^2 - 3ab + b^2 - 5a + 4a^2 + ab - b^2$

Solución

$$2a^2 - 3ab + b^2 - 5a + 4a^2 + ab - b^2 = 6a^2 - 2ab - 5a$$

b) $8x^2y + 4x^3y^2 + 6x^2y - 9x^3y^2 - 10 - 5xy^2 + 3 - 6xy^2 - 2x^2y$

Solución

Primero se ordenan los términos y en seguida se efectúa la reducción:

$$4x^3y^2 - 9x^3y^2 + 8x^2y + 6x^2y - 2x^2y - 5xy^2 - 6xy^2 - 10 + 3$$

$$= -5x^3y^2 + 12x^2y - 11xy^2 - 7$$

2.2. Operaciones de adición, sustracción, multiplicación, división de polinomios y división sintética

2.2.1. *Adición*

> *Definición.* Adición es la operación que tiene por objeto reunir dos o más expresiones algebraicas llamadas sumandos en una sola expresión algebraica llamada suma.

Propiedades

1. *Existencia.* Dados dos o más números, siempre existe otro número que es el resultado de la adición de ellos.
2. *Unicidad.* Dados dos números cualesquiera a y b, existe un solo número c tal que $a + b = c$.
3. *Conmutatividad.* Si a y b son dos números cualesquiera, entonces $a + b = b + a$.
4. *Asociatividad.* Si a, b y c son tres números cualesquiera, entonces $(a + b) + c = a + (b + c)$.
5. *Propiedad aditiva de la igualdad.* Dados tres números cualesquiera a, b y c tales que $a = b$, entonces $a + c = b + c$.

Estas propiedades pueden generalizarse para cualquier número de sumandos.

Para efectuar con facilidad una adición de polinomios conviene:

- Ordenarlos de acuerdo con las potencias descendentes o ascendentes de una misma literal.
- Escribir uno debajo de otro de modo que los términos semejantes queden en columna.

Ejemplo 2

Sumar los polinomios:

$$5x^2 - 4x + 7; \qquad x + 2x^2; \qquad 3 + 6x - x^2$$

Solución

$$\begin{array}{rl} 5x^2 - 4x + 7 & \text{(sumando)} \\ 2x^2 + x & \text{(sumando)} \\ - x^2 + 6x + 3 & \text{(sumando)} \\ \hline 6x^2 + 3x + 10 & \text{(suma)} \end{array}$$

2.2.2. *Sustracción*

> *Definición.* Sustracción es la operación inversa de la adición y se define como sigue: $a - b = c$ si $a = b + c$; donde a es el minuendo, b el sustraendo y c la resta o diferencia.

Propiedades

1. Si el minuendo a es mayor que el sustraendo b ($a > b$), la diferencia $c = a - b$ es positiva ($c > 0$); si el minuendo a es menor que el sustraendo b ($a < b$), la diferencia $c = a - b$ es negativa ($c < 0$), y si el minuendo y el sustraendo son iguales ($a = b$), la diferencia $c = a - b$ es cero ($c = 0$).
2. *Propiedad sustractiva de la igualdad.* Si a, b y c son números cualesquiera y $a = b$, entonces: $a - c = b - c$.
3. El *simétrico* de un número es el número que sumado a éste da como resultado cero. Así, el simétrico de un número positivo a es el número negativo $-a$, ya que $a + (-a) = 0$.

   La operación que consiste en restar de un número a otro número b es equivalente a la de sumar al número a el simétrico de b. En símbolos:

$$a - b = a + (-b)$$

Así,

$$12 - 7 = 12 + (-7) = 5$$
$$4 - 10 = 4 + (-10) = -6$$

En la adición y sustracción de expresiones algebraicas se requiere con frecuencia emplear símbolos de agrupación. Un paréntesis precedido del signo *más* puede suprimirse sin hacer ningún cambio, y un paréntesis precedido del signo *menos* puede suprimirse cambiando el signo de cada uno de los términos que agrupa. Así

$$(5a - 3x + 2) = 5a - 3x + 2$$
$$-(6xy - 3x + 4y) = -6xy + 3x - 4y$$

Un procedimiento para efectuar la sustracción de polinomios consiste en:

- Colocar el sustraendo debajo del minuendo de modo que los términos semejantes queden en columna.
- Efectuar la sustracción término a término para determinar la diferencia.

Otro procedimiento es:

- Escribir el minuendo.
- Cambiar el signo a todos los términos del sustraendo y escribir éste debajo del minuendo, con los términos semejantes en columna.
- Efectuar la suma término a término.

Ejemplo 3

a) Encontrar la diferencia de los polinomios:

$$(6a^3 + 2a^2b - 3ab^2 + b^3) - (ab^2 - 4a^2b + 2a^3)$$

Solución

Primer procedimiento.

$$\begin{array}{rrrrl} & 6a^3 + & 2a^2b - & 3ab^2 + b^3 & \text{(minuendo)} \\ - & 2a^3 - & 4a^2b + & ab^2 & \text{(sustraendo)} \\ \hline & 4a^3 + & 6a^2b - & 4ab^2 + b^3 & \text{(resta o diferencia)} \end{array}$$

Segundo procedimiento.

$$\begin{array}{rrrl} 6a^3 + & 2a^2b - & 3ab^2 + b^3 & \text{(minuendo)} \\ -2a^3 + & 4a^2b - & ab^2 & \text{(sustraendo)} \\ \hline 4a^3 + & 6a^2b - & 4ab^2 + b^3 & \text{(resta o diferencia)} \end{array}$$

b) Restar

$$7 - 6xy^3 + 4x^3 - 2x^2y \quad \text{de} \quad 7x^3 - \sqrt{2}xy - x^2y - 6xy^3$$

cambiando los signos en el sustraendo.

Solución

$$\begin{array}{rrrrr} 7x^3 - & x^2y - & 6xy^3 - & \sqrt{2}xy & \\ -4x^3 + & 2x^2y + & 6xy^3 & & - 7 \\ \hline 3x^3 + & x^2y + & 0xy^3 - & \sqrt{2}xy & - 7 \end{array}$$

Por lo tanto, la diferencia es

$$3x^3 + x^2y - \sqrt{2}xy - 7$$

2.2.3 Multiplicación

Definición. La multiplicación tiene por objeto encontrar un número P, el producto, que sea con respecto al multiplicando M, lo que el multiplicador m es respecto a la unidad. En símbolos:

$$P = M \times m$$

Propiedades

1. *Existencia.* Dados dos o más números, siempre existe otro número que es el producto de ellos.
2. *Unicidad.* Para dos números dados cualesquiera a y b, existe un solo número c, tal que $ab = c$.
3. *Conmutatividad.* Si a y b son dos números cualesquiera, entonces $ab = ba$.
4. *Asociatividad.* Si a, b y c son tres números cualesquiera, entonces $(ab)c = a(bc)$.
5. *Propiedad multiplicativa de la igualdad.* Si a y b son números tales que $a = b$, y c es un número cualquiera, entonces $ac = bc$.
6. *Propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la adición.* Si a, b y c son tres números cualesquiera, entonces $a(b + c) = ab + ac$.

Estas propiedades pueden generalizarse para cualquier número de factores.

Regla de los signos de la multiplicación. El producto de dos factores de signos iguales es positivo:

$$(+)(+) = (+), (-)(-) = (+)$$

y el producto de factores con signos contrarios es negativo:

$$(+)(-) = (-), (-)(+) = (-)$$

En general, el producto de un número cualquiera de factores es positivo si el número de factores negativos es impar.

Para llevar a cabo la multiplicación de expresiones algebraicas hay que tener en cuenta las tres siguientes *leyes de los exponentes*, en donde a y b son números cualesquiera y m y n son enteros positivos.

I. $a^m a^n = a^{m+n}$
II. $(a^m)^n = a^{mn}$
III. $(ab)^m = a^m b^m$

NOTA. Las leyes de los exponentes en general se tratan con más amplitud en el Módulo 5.

Producto de dos o más monomios. Éste puede obtenerse con la regla de los signos y las tres leyes de los exponentes.

Ejemplo 4

Efectuar las multiplicaciones.

a) $(3a^3x)(-2ax) = -6a^4x^2$
b) $(abc^2)(-4ab^2c)(-2a^2bc^2) = 8a^4b^4c^5$
c) $(-3x^2y^3)^2(-5x^3y^2) = (9x^4y^6)(-5x^3y^2) = -45x^7y^8$

Producto de un monomio por un polinomio. Para efectuarlo hay que tener en cuenta la ley distributiva de la multiplicación respecto a la adición, y lo ya tratado acerca del producto de dos monomios.

Producto de un polinomio por otro polinomio. En esta operación conviene escribir el multiplicador debajo del multiplicando, ordenados ambos con igual criterio de potencias descendentes de una misma literal, y escribir en columnas de términos semejantes los productos del multiplicador por el multiplicando, para efectuar con facilidad las sumas de dichos términos y obtener el producto buscado.

Ejemplo 5

Efectuar las multiplicaciones.

a) $a^2b(2ax - 3by) = a^2b(2ax) + a^2b(-3by) = 2a^3bx - 3a^2b^2y$

b) $-3cxy^2(5x^2 - 2a^2cx - 7c^2yz)$

$= (-3cxy^2)(5x^2) + (-3cxy^2)(-2a^2cx) + (-3cxy^2)(-7c^2yz)$

$= -15cx^3y^2 + 6a^2c^2x^2y^2 + 21c^3xy^3z$

c) $(x^2 + ax - 2a^2)(3a^2 + x^2 - 2ax) =$

$$
\begin{array}{rrrrrl}
x^2 & + \; ax & - \; 2a^2 & & & \text{(multiplicando)} \\
x^2 & - \; 2ax & + \; 3a^2 & & & \text{(multiplicador)} \\
\hline
x^4 & + \; ax^3 & - \; 2a^2x^2 & & & \\
 & - \; 2ax^3 & - \; 2a^2x^2 & + \; 4a^3x & & \\
 & & 3a^2x^2 & + \; 3a^3x & - \; 6a^4 & \\
\hline
x^4 & - \; ax^3 & - \; a^2x^2 & + \; 7a^3x & - \; 6a^4 & \text{(producto)}
\end{array}
$$

Evidentemente, los tres renglones anteriores al producto se obtienen de multiplicar respectivamente cada término del multiplicador por el multiplicando.

2.2.4. División

Definición. División es la operación inversa de la multiplicación: se establece así, para $b \neq 0$:

$$\frac{a}{b} = c \text{ si } a = bc$$

a es el dividendo, b el divisor y c el cociente.

En la definición anterior se excluye el caso $b = 0$, ya que la división entre cero no está definida.

Cabe recordar que la operación de dividir un número a entre un número $b \neq 0$ también puede escribirse en las formas:

$$a \div b = c \qquad \text{o} \qquad a : b = c$$

Propiedades

1. *Propiedad divisoria de la igualdad.* Si a, b y c son números cualesquiera, tales que $a = b$ y $c \neq 0$, entonces:

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$$

2. El recíproco de un número es el que multiplicado por éste, da como producto la unidad. Así, el recíproco de un número $c \neq 0$ es

$$\frac{1}{a}, \qquad \text{ya que} \qquad a\left(\frac{1}{a}\right) = 1$$

Entonces, la operación de dividir un número cualquiera a entre un número $b \neq 0$, es la misma que multiplicar a por el recíproco de b.

$$\frac{a}{b} = a\left(\frac{1}{b}\right)$$

Regla de los signos de la división. El cociente de dos números es positivo si el dividendo y el divisor tienen signos iguales:

$$\frac{(+)}{(+)} = (+) \qquad \frac{(-)}{(-)} = (+)$$

Dicho cociente es negativo si los signos del dividendo y el divisor son contrarios:

$$\frac{(+)}{(-)} = (-) \qquad \frac{(-)}{(+)} = (-)$$

Para dividir un monomio entre otro hay que tener en cuenta la regla de los signos de la división y las leyes de los exponentes involucradas en esta operación:

IV $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

V. $\frac{b^m}{b^n} = b^{m-n}$ para $m > n$ (m mayor que n)

Para dividir un polinomio entre un monomio se divide cada término del polinomio (dividendo) entre el monomio (divisor) y se suman los cocientes obtenidos para encontrar así el cociente buscado.

Ejemplo 6

Dividir:

a) $6a^3x^2$ entre $-2a^2x$

Solución

$$\frac{6a^3x^2}{-2a^2x} = \frac{6}{-2} \cdot \frac{a^3}{a^2} \cdot \frac{x^2}{x} = -3ax$$

b) $-15x^4yz$ entre $-3x^2y$

Solución

$$\frac{-15x^4yz}{-3x^2y} = \frac{-15}{-3} \cdot \frac{x^4}{x^2} \cdot \frac{y}{y} \cdot \frac{z}{1} = 5x^2z$$

c) $(4a^2bx^3 - 6ab^2x^2 - 2a^3b^4x^4)$ entre $2abx^2$

Solución

$$\frac{4a^2bx^3 - 6ab^2x^2 - 2a^3b^4x^4}{2abx^2} = \frac{4a^2bx^3}{2abx^2} + \frac{-6ab^2x^2}{2abx^2} + \frac{-2a^3b^4x^4}{2abx^2}$$

$$= 2ax - 3b - a^2b^3x^2$$

Para dividir un polinomio entre otro polinomio se procede como sigue:

- El dividendo y el divisor se ordenan según las potencias descendentes de una misma literal.
- Se divide el primer término del dividendo entre el primero del divisor: el resultado es el primer término del cociente. Se multiplica todo el divisor por este término y se resta al dividendo el producto obtenido.
- Se toma la diferencia obtenida como nuevo dividendo y se repite el proceso anterior para obtener el segundo término del cociente.
- Este proceso se repite hasta obtener una diferencia nula o de grado inferior a la del divisor, que constituye el residuo.

Un residuo nulo indica que el dividendo es múltiplo del divisor, o de otra manera, que el divisor es factor del dividendo. En este caso se dice también que el dividendo es *divisible* entre el divisor.

Así, si el polinomio P es divisible entre el polinomio Q, el cociente C es

$$\frac{P}{Q} = C$$

Si el residuo no es nulo, entonces

$$\frac{P}{Q} = C + \frac{R}{Q}$$

Donde el residuo R es de grado menor que el del divisor. Una expresión equivalente a la anterior es

$$P = QC + R$$

Ejemplo 7

Dividir

a) $x^2 - 84 - 5x$ entre $x + 7$

Solución

$$\begin{array}{rr l}
 & x - 12 & \text{(cociente)} \\
\text{(divisor) } x + 7 & \overline{\big)\, x^2 - 5x - 84} & \text{(dividendo)} \\
 & \underline{x^2 + 7x} & \text{(producto por } x\text{)} \\
 & -12x - 84 & \text{(resta parcial)} \\
 & \underline{-12x - 84} & \text{(producto por } -12\text{)} \\
 & 0 + 0 & \text{(residuo nulo)}
\end{array}$$

Por tanto, $x^2 - 5x - 84$ es divisible entre $x + 7$, y puede escribirse:

$$\frac{x^2 - 5x - 84}{x + 7} = x - 12$$

b) $x^4 - x^3y + 8xy^3 - x^2y^2 - 5y^4$ entre $xy - 2y^2 + x^2$

Solución:

$$\begin{array}{rr}
 & x^2 - 2xy + 3y^2 \\
x^2 + xy - 2y^2 & \overline{\big)\, x^4 - x^3y - x^2y^2 + 8xy^3 - 5y^4} \\
 & \underline{x^4 + x^3y - 2x^2y^2} \\
 & -2x^3y + x^2y^2 + 8xy^3 - 5y^4 \\
 & \underline{-2x^3y - 2x^2y^2 + 4xy^3} \\
 & 3x^2y^2 + 4xy^3 - 5y^4 \\
 & \underline{3x^2y^2 + 3xy^3 - 6y^4} \\
 & xy^3 + y^4
\end{array}$$

En este caso el residuo no nulo, $xy^3 + y^4$, implica que $x^2 + xy - 2y^2$ no es factor del dividendo, y se escribe:

$$\frac{x^4 - x^3y - x^2y^2 + 8xy^3 - 5y^4}{x^2 + xy - 2y^2} = x^2 - 2xy + 3y^2 + \frac{xy^3\ y^4}{x^2 + xy - 2y^2}$$

2.2.5. División sintética

Una forma simplificada para dividir un polinomio en x entre un binomio de la forma $x - r$ es aplicar la división sintética. Esta operación se puede disponer convenientemente en tres renglones, procediendo como sigue:

- En el primer renglón se escriben los coeficientes del polinomio ordenado según potencias descendentes de x: $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$, anotando un cero en el lugar del coeficiente de cada potencia que no aparezca. El número r se escribe aparte, a la izquierda.
- Se repite el coeficiente a_0 debajo de sí mismo en el tercer renglón. Se multiplica a_0 por r y se escribe el producto debajo de a_1 en el segundo renglón. Se suma a_1 con el producto a_0r y la suma $a_1 + a_0r$ se escribe en el tercer renglón, debajo de a_0r. Esta suma se multiplica por r, se escribe el producto en el segundo renglón debajo de a_2; se suma con a_2 y se escribe la suma en el tercer renglón.
- Se sigue este procedimiento hasta agotar los coeficientes del primer renglón, obteniendo en el tercer renglón tantos números como coeficientes hay en el primero. Estos números, hasta el penúltimo, son los coeficientes de las potencias descendentes del cociente, y el último número de la derecha es el residuo.

Ejemplo 8

Dividir:

a) $3x^3 - 2x^2 - 7$ entre $x - 2$

Solución

En este caso: $a_0 = 3, \quad a_1 = -2, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = -7; \quad r = 2.$

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 3 & -2 & 0 & -7 \\ & & 6 & 8 & 16 \\ \hline & 3 & 4 & 8 & 9 \end{array}$$

residuo

coeficientes de x^2, x y término independiente respectivamente

r (note el signo contrario)

Queda:

$$\frac{3x^3 - 2x^2 - 7}{x - 2} = 3x^2 + 4x + 8 + \frac{9}{x - 2}$$

b) $4x^4 + 18x + 10x^3 - 9$ entre $x + 3$

Solución

$$\begin{array}{r|rrrrr} -3 & 4 & 10 & 0 & 18 & -9 \\ & & -12 & 6 & -18 & 0 \\ \hline & 4 & -2 & 6 & 0 & -9 \end{array}$$

Que representa:

$$\frac{4x^4 + 10x^3 + 18x - 9}{x + 3} = 4x^3 - 2x^2 + 6x - \frac{9}{x + 3}$$

Ejercicios

Reduzca términos semejantes.

1. $2ab - 3a^2 + 5b^2 - ab + a^2 - b^2$

2. $6x^2 - 3 + 4x - 5 - 2x^2 + x$

3. $a^3 - 4x^3 + 5a^2x - 3ax^2 - x^3 + ax^2 - 2a^2x$

4. $\sqrt{2}y + 3x^2y + 5xy^2 + 2\sqrt{2}y - \sqrt{3}xy^2 - 2x^2y$

Sume los polinomios dados en cada caso.

5 $7a - 9 + 3a^2$; $6 - a^2 + 4a$, $2a^2 - 5a$

6. $4x^2 - 3xy + y^2$; $2xy + x^2 + 3y^2$; $9y^2 - xy + 5x^2 + 7$; $x^2 + 6xy - 2$

7. $5ax^3 - 2a^2x^2 + a^3x$; $3a^3 + 2x^3 + 7a^2x^2$; $6a^3x - 3ax^3 + a^3$; $x^3 + a^3 + 8$

Reste los siguientes polinomios.

8. $x^3 - 4x^2 + 2x - 5$ menos $-x^3 + 2x^2 - 3x - 3$

9. $2a + 4by - 2cy^2 + dy^3$ menos $2dy^3 - 2by - a + 3cy^2$

j) $x^3 - 19x + 30$ (caso 8). Si se procede con cuidado puede abreviarse la escritura de la división sintética operando mentalmente y no repitiendo los coeficientes del dividendo cuando un divisor propuesto no sea factor. Por ejemplo:

Factor probado	*División sintética*	*Factor propuesto y conclusión*
$x + 1$	$-1 \rfloor\ 1 \quad 0 \quad -19 \quad 30$ $1 \quad -1 \quad -18 \quad 48 \neq 0$	$(x + 1)$ no es factor.
$x - 1$	$+1 \rfloor\ 1 \quad 1 \quad -18 \quad 12 \neq 0$	$(x - 1)$ no es factor.
$x + 2$	$-2 \rfloor\ 1 \quad -2 \quad -15 \quad 60 \neq 0$	$(x + 2)$ no es factor.
$x - 2$	$+2 \rfloor\ 1 \quad 2 \quad -15 \quad 0 = R$	$(x - 2)$ sí es factor.
$x - 2$	$+2 \rfloor\ 1 \quad 4 \quad -7 \neq 0$	$(x - 2)$ no se repite.
$x + 3$	$-3 \rfloor\ 1 \quad -1 \quad -12 \neq 0$	$(x + 3)$ no es factor.
$x - 3$	$+3 \rfloor\ 1 \quad 5 \quad 0 = R$	$(x - 3)$ sí es factor.

1 y 5 representan el cociente $(x + 5)$, que también es factor; por lo cual queda:

$$x^3 - 19x + 30 = (x - 2)(x - 3)(x + 5)$$

k) $8x^3 + 12ax^2 + 6a^2x + a^3$. Si se observan las potencias de x y de a, la expresión dada puede escribirse:

$$8x^3 + 12ax^2 + 6a^2x + a^3 = (2x)^3 + 3(2x)^2a + 3(2x)a^2 + a^3$$

que corresponde al desarrollo de $(2x + a)^3$, caso 9. Queda finalmente:

$$8x^3 + 12ax^2 + 6a^2x + a^3 = (2x + a)^3$$

l) $x^2 - 2xy + y^2 - 16$. Los tres primeros términos forman el cuadrado de $(x - y)$ y 16 es el cuadrado de 4, así que pueden aplicarse los casos 3 y 2 para obtener:

$$x^2 - 2xy + y^2 - 16 = (x - y)^2 - 4^2 = (x - y + 4)(x - y - 4)$$

h) $6x^2 - 13x - 5$ (caso 7). Se deben buscar dos números que sumados den -13, y multiplicados den $-30 = 6(-5)$. Dichos números son -15 y 2. Se descompone:

$6x^2 - 13x - 5 = 6x^2 - 15x + 2x - 5$, y se aplica el caso 4.

$$6x^2 - 15x + 2x - 5 = 3x(2x - 5) + (2x - 5) = (3x + 1)(2x - 5)$$

Así que: $6x^2 - 13x - 5 = (3x + 1)(2x - 5)$

i) $x^3 - 4x^2 - 4x + 16$. Aunque puede aplicarse aquí el caso 4, se empleará el caso 8.

Factor probado	*División sintética*	*Conclusión*
$x + 1$	$\begin{array}{r\|rrrr} -1 & 1 & -4 & -4 & 16 \\ & & -1 & 5 & -1 \\ \hline & 1 & -5 & 1 & 15 \neq 0 \end{array}$	$(x + 1)$ no es factor.
$x - 1$	$\begin{array}{r\|rrrr} +1 & 1 & -4 & -4 & 16 \\ & & 1 & -3 & -7 \\ \hline & 1 & -3 & -7 & 9 \neq 0 \end{array}$	$(x - 1)$ no es factor.
$x + 2$	$\begin{array}{r\|rrrr} -2 & 1 & -4 & -4 & 16 \\ & & -2 & 12 & -16 \\ \hline & 1 & -6 & 8 & 0 = R \end{array}$	$(x + 2)$ sí es factor.

Como un mismo factor puede repetirse, se prueba nuevamente el factor obtenido.

$x + 2$	$\begin{array}{r\|rrr} -2 & 1 & -6 & 8 \\ & & -2 & 16 \\ \hline & 1 & -8 & 24 \neq 0 \end{array}$	El factor $(x + 2)$ no se repite
$x - 2$	$\begin{array}{r\|rrr} +2 & 1 & -6 & 8 \\ & & 2 & -8 \\ \hline & 1 & -4 & 0 = R \end{array}$	$(x - 2)$ sí es factor.

Los coeficientes resultantes, 1 y -4 representan el cociente $x - 4$, así que el polinomio dado queda factorizado como sigue:

$$x^3 - 4x^2 - 4x + 16 = (x + 2)(x - 2)(x - 4)$$

10. Dados $A = x^3 + 2x^2 - 3x + 1$; $B = 2x^3 - x^2 + 4x - 7$;

$C = x^3 - x^2 - 6x - 2$

obtenga:

a) $A + B - C$
b) $A - B - C$
c) $B - A - C$

Efectúe las multiplicaciones.

11. $(5ab^2)(4a^2b)$

12. $(-7x^2y^3)(2axy)$

13. $(-4a^2x)^2(3ax^2)$

14. $(7byz^3)(-2ab^2z)^3$

15. $xy^2(x^2 - 2y + 4)$

16. $12a^2by(5ax^2 - 3b^2xy - 4aby^2)$

17. $(3x - 7b)(x^2 + 2bx - 2b^2)$

18. $(x^2 + y^2 - 3xy)(2 - 3y + 2x)$

19. $(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)(a - b)$

20. $(xy - 2y^2 + x^2)(3y^2 + x^2 - 2xy)$

Efectúe las siguientes divisiones.

21. $(-4a^4b^3) \div (-2a^3b)$

22. $18x^2y^4z^3 \div 3x^2yz^2$

23. $(-27a^2bx^5y^2) \div (9bx^3y)$

24. $(2a^3bx - 3a^2b^2y) \div a^2b$

25. $(4ab^5x^3 - 8b^2x^2y) \div (-2b^2x)$

26. $(21x^3y^2 - 35ax^3y^3z + 49x^4y) \div (7x^2y)$

27. $2x^3 - 4 - 11x - 5x^2 \div 2x + 1$

28. $(x^3 + 4x - 3x^2 - 7) \div (x - 1 + x^2)$

29. $(3x^3y - 5xy^3 + 3y^4 - x^4) \div (x^2 + y^2 - 2xy)$

30. $\dfrac{x^4 + y^4}{x^3 - x^2y + xy^2 - y^3}$

Divida y conteste, aplicando la división sintética.

31. $(x^3 + 7x - 2 + 4x^2) \div (x + 2)$

32. $(x^2 - x^4 + x^6 - 2) \div (x - 1)$

    ¿Es $(x - 1)$ factor del dividendo?

33. $(4x^4 - 3x^2 + 3x + 7) \div (x + \dfrac{1}{2})$

34. ¿Es divisible $(x^4 - x + 5 - 5x^3)$ entre $(x - 5)$?

Cuadro sinóptico

Productos notables		*Casos de factorización*
1. Cuadrado de una suma	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	Trinomio cuadrado perfecto (caso 3)
2. Cuadro de una diferencia.	$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	
3. Binomios conjugados.	$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$	Diferencia de cuadrados (caso 2).
4. Producto de dos binomios que tienen un término común.	$(x+a)(x+b)$ $= x^2 + (a+b)x + ab$	Trinomio de segundo grado (caso 5).
5. Producto de dos binomios con un término semejante y el otro no común.	$(ax+b)(cx+d)$ $= acx^2 + (ad+bc)x + bd$	Trinomio de segundo grado (caso 7).
6. Cubo de la suma de un binomio.	$(a+b)^3$ $= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	Cubo perfecto (caso 9).
7. Cubo de la diferencia de un binomio.	$(a-b)^3$ $= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$	
8. Factores cuyo producto da una suma de cubos.	$(a+b)(a^2 - ab + b^2)$ $= a^3 + b^3$	Binomio de la forma: $x^n \pm y^n$ (caso 6).
9. Factores cuyo producto da una diferencia de cubos.	$(a-b)(a^2 + ab + b^2)$ $= a^3 - b^3$	
10. Productos de dos binomios que no tienen un término común.	$(a+b)(c+d)$ $= ac + ad + bc + bd$	Polinomio de cuatro términos (caso 4).

MÓDULO 3. PRODUCTOS NOTABLES Y FACTORIZACIÓN

Objetivos específicos

Al finalizar el estudio de este módulo, el alumno:

- *Desarrollará expresiones algebraicas haciendo uso de los productos notables:*

  — *Binomio al cuadrado.*
  — *Binomios conjugados.*
  — *Producto de dos binomios que tienen un término común y otro no común.*
  — *Cubo de un binomio.*
  — *Producto de dos binomios sin términos comunes o semejantes.*

- *Factorizará expresiones algebraicas según los casos:*

  — *Monomio factor común.*
  — *Diferencia de dos cuadrados.*
  — *Trinomio cuadrado perfecto.*
  — *Polinomio de cuatro términos.*
  — *Trinomio cuadrado de forma* $x^2 + (a + b)x + ab$
  — *Binomios de la forma* $x^n \pm y^n$ *donde* n *puede ser par o impar.*
  — *Extracción de un factor lineal de la forma* $x + b$ *de un polinomio en* x.
  — *Polinomio que es cubo perfecto.*

3.1. Productos notables

La frecuencia con que se presentan algunos productos sugiere la conveniencia de memorizarlos. Son llamados productos notables y sus fórmulas se presentan a continuación; y pueden comprobarse directamente efectuando las multiplicaciones.

1. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
4. $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$
5. $(ax + b)(cx + d) = acx^2 + (ad + bc)x + bd$
6. $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
7. $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
8. $(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$
9. $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$
10. $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$

Los productos notables pueden aplicarse también en ciertos casos donde a primera vista no aparece este tipo de productos, si se usan en forma adecuada la propiedad aditiva de la adición y la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la suma.

Ejemplo 1

Desarrollar:

a) $(3x + 2)^2 + (4x - 3)^2 = 9x^2 + 12x + 4 + 16x^2 - 24x + 9$
$= 25x^2 - 12x + 13$

b) $(5ax + 2b)(5ax - 2b) = 25a^2x^2 - 4b^2$

c) $(x + 5)(x + 4) - (2x + 3)(3x - 6)$
$= x^2 + 9x + 20 - [6x^2 + (-12 + 9)x - 18]$
$= x^2 + 9x + 20 - 6x^2 + 3x + 18 = -5x^2 + 12x + 38$

d) $(2x + y)^3 - (3y - x)^3$
$= 8x^3 + 3(4x^2)y + 3(2x)y^2 + y^3 - [27y^3 - 3(9y^2)x + 3(3y)x^2 - x^3]$
$= 8x^3 + 12x^2y + 6xy^2 + y^3 - 27y^3 + 27xy^2 - 9x^2y + x^3$
$= 9x^3 + 3x^2y + 33xy^2 - 26y3$

e) $(x + 1)(x^2 - x + 1) + (x^2 + 2x + 4)(x - 2) = x^3 + 1 + x^3 - 8$
$= 2x^3 - 7$

f) $(2x + a)(3y - b) = 6xy - 2bx + 3ay - ab$

g) $(y + z + 3)(y - z - 3) = [y + (z + 3)][y - (z + 3)]$
$= y^2 - (z + 3)^2 = y^2 - z^2 - 6z - 9$

h) $(\mu + 2v - 3)^2 = [(\mu + 2v) - 3]^2 = (\mu + 2v)^2 - 2(\mu + 2v)3 + 9$
$= \mu^2 + 4\mu v + 4v^2 - 6\mu - 12v + 9$

3.2. Factorización

La factorización consiste en que dada una expresión algebraica que es el producto de ciertos factores, puedan determinarse éstos. El problema de la factorización puede tratarse según los casos que se presentan en seguida; la mayor parte de los cuales se fundamentan en los productos notables.

Caso 1. Monomio factor común. Se presenta cuando todos los términos de la expresión contienen un mismo factor. Por ejemplo:

$$ax + ay - az = a(x + y - z)$$

Caso 2. Diferencia de dos cuadrados. La diferencia de los cuadrados de dos expresiones algebraicas puede descomponerse como el producto de dos binomios formados con la suma y la diferencia de dichas expresiones, como sugiere el producto notable número 3.

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

Caso 3. Trinomio cuadrado perfecto. Debe confirmarse que existan los cuadrados de dos expresiones con signo (+), y el doble producto de ellas con signo (+) o (−). Este caso corresponde a los productos notables 1 y 2.

$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$$

Caso 4. Polinomio de cuatro términos como el que aparece en el producto notable 10. Se puede proceder por partes: asociar los términos dos a dos, aplicar el caso 1 y volver a aplicar éste.

$$ac + ad + bc + bd = a(c + d) + b(c + d) = (a + b)(c + d)$$

Caso 5. Trinomio cuadrado de la forma:

$$x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$$

Este caso está sugerido por el producto notable 4. El coeficiente de x^2 es uno, y el coeficiente de x se puede descomponer en la suma de dos números, a y b, cuyo producto es el término independiente.

Caso 6. Binomios de la forma $x^n \pm y^n$, donde n es un número entero positivo. Pueden distinguirse cuatro subcasos, Según n sea par o impar y el signo sea (+) o (−). Se puede extraer un factor $(x + y)$ o $(x - y)$, como se consigna en la siguiente tabla.

n	*Signo*	*Factor*
a) impar	−	$x - y$
b) impar	+	$x + y$
c) par	−	$(x - y)(x + y)$
d) par	+	No es factorizable

El subcaso *a*) tiene una verificación parcial en el producto notable 9.

El subcaso *c*) se basa en principio en el caso 2 de factorización.

Caso 7. Trinomio cuadrado de la forma:

$$acx^2 + (ad + bc)x + bd = (ax + b)(cx + d)$$

Resulta ser el producto de dos binomios o con un término semejante y el otro término no común. Este caso está sugerido por el producto notable 5.

El coeficiente de x se puede descomponer en la suma de dos números (el número ad y el número bc), que multiplicados $(ad \cdot bc)$ den como resultado el producto del coeficiente de x^2 (ac) por el término independiente (bd); $(ad \cdot bc) = (ac)(bd)$.

Una vez obtenidos los números ad y bc se desarrolla el producto $(ad + bc)x = adx + bcx$, con lo que se obtiene una expresión de cuatro términos en la cual es posible aplicar el caso 4 de factorización.

Caso 8. Extracción de un factor lineal; es decir, de primer grado, de la forma $x \pm b$ de un polinomio en x.

Conviene buscar en forma tentativa los factores de la forma $x \pm b$ que pueda tener el polinomio por medio de la división sintética, sabiendo que un residuo nulo implica el haber dividido entre un factor.

Caso 9 Polinomio que es un cubo perfecto. Este caso se basa en los productos notables 6 y 7. Se trata de polinomios de cuatro términos en los que deben revisarse con cuidado los cubos de dos términos y los triples productos del cuadrado de un término por el otro con los signos adecuados.

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3$$

$$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3$$

Ejemplo 2

Factorizar indicando el caso correspondiente.

a) $2ax^3 - 6a^2x^2 + 10a^2x = 2ax(x^2 - 3ax + 5a)$ (caso 1).

b) $9a^2x^4 - 16b^2y^2 = (3ax^2 + 4by)(3ax^2 - 4by)$ (caso 2).

c) $x^2 - 6ax + 9a^2 = (x)^2 - 2(x)(3a) + (-3a)^2 = (x - 3a)^2$ (caso 3).

d) $3xy - 5x + 6ay - 10a = x(3y - 5) + 2a(3y - 5)$
$= (x + 2a)(3y - 5)$ (caso 4).

e) $x^2 - 4x - 21$, como $-4 = 3 - 7$ y $(3)(-7) = -21$, queda
$x^2 - 4x - 21 = (x + 3)(x - 7)$ (caso 5).

f) $x^3 - 27 = x^3 - 3^3$ (caso 6), con n impar, signo $(-)$. Se puede extraer el factor $(x - 3)$ y el otro factor puede obtenerse tomando como modelo el producto notable 9, o bien efectuando la división $(x^3 - 27) \div (x - 3)$. Queda:

$$x^3 - 27 = (x - 3)(x^2 + 3x + 9)$$

g) $16a^4 - 81b^4 = (2a)^4 - (3b)^4$ (caso 6), con n par, signo $(-)$. Se pueden extraer los factores $(2a - 3b)$ y $(2a + 3b)$. Puede comenzarse aplicando el caso 2, y volver a aplicarlo.

$$\begin{aligned} 16a^4 - 81b^4 &= [(2a)^2]^2 - [(3b)^2]^2 \\ &= [(2a)^2 - (3b)^2][(2a)^2 + (3b)^2] \\ &= (2a - 3b)(2a + 3b)(4a^2 + 9b^2) \end{aligned}$$

m) Factorizar y multiplicar los factores:

$$(29)^2 - (14)^2 = (29 - 14)(29 + 14) = 15(43) = 645$$

Ejercicios

Desarrolle:

1. $(3x + 4y)(3x - 4y)$
2. $(5x + 2a)^2$
3. $(a^2 + ab)^2$
4. $(4x - 7)(4x + 6)$
5. $(x^2 - 4)(2x^2 - 1)$
6. $(3y - 2z^2)^3$
7. $(3m + 4xy)^3$
8. $(y + a)(y^2 - ay + a^2)$
9. $(4y^2 + 6y + 9)(2y - 3)$
10. $(3x - 4y)(2x + 5y)$
11. $(x^4 + 1)(x^2 + 1)(x^2 - 1)$
12. $(a - b + c)(a + b + c)$
13. $(x + y + 1)(3 + y + x)$
14. $(ax + 7)(3y + b)$

Factorice, aplicando el caso indicado cuando se señale:

15. (caso 1) $3ax^3 - 6a^3xy + 9a^2by$
16. (caso 1 y 2) $8a^2 - 32b^2$
17. (caso 2) $16x^2 - (2y - 3)^2$
18. (caso 3) $9a^2 + 12ab + 4b^2$
19. (caso 4) $12xy + 9cy + 3cx + 4x^2$

20. (caso 5) $m^2 + 2m - 15$

21. (caso 2, dos veces o caso 6) $81x^4 - 16y^4$

22. (caso 6) $x^3 - 27$

23. (caso 7) $10x^2 - 13x - 3$

24. (caso 8) $x^3 - 7x + 4x^2 - 10$

25. (caso 9) $z^3 + 3z^2 + 3z + 1$

26. $4x^2y^2 - (z + 1)^2$

27. $4x^2(p + q) - 64(p + q)$

28. $a^2 - 4ab - 21b^2$

29. $r^4 - 8r^2 + 16$

30. $b^3 - 6b^2 + 12b - 8$

31. $3xy + 9ax - ay - 3a^2$

32. $8a^3 + 1$

33. $12z^3 - 11z^2 + 2z$

34. $x^3 - 3x - 4x^2 + 18$

Factorice y multiplique:

35. $(52)^2 - (48)^2 =$

36. $(55)^2 - (35)^2 =$

MÓDULO 4. FRACCIONES

Objetivos específicos

Al finalizar el estudio de este módulo, el alumno:

- *Determinará el mínimo común múltiplo de dos o más polinomios.*
- *Identificará cuándo una fracción simple es propia o impropia.*
- *Dada una fracción impropia, la transformará en la suma de una expresión entera y una fracción propia.*
- *Reducirá una fracción simple a sus términos más sencillos.*
- *Efectuará operaciones de adición, sustracción, multiplicación y división de fracciones simples.*
- *Simplificará fracciones compuestas.*
- *Descompondrá fracciones racionales en sumas de fracciones parciales.*

Cuadro sinóptico

Definiciones	
Múltiplo común.	Polinomio que es múltiplo de dos o más polinomios.
Mínimo común múltiplo.	Múltiplo común con el menor grado posible.
Fracción.	Cociente de dos expresiones algebraicas.
Fracción propia.	Grado del numerador < grado del denominador.
Fracción impropia.	Grado del numerador ≥ grado del denominador.
Fracción algebraica simple.	Cuando numerador y denominador son expresiones racionales enteras.
Fracción compuesta.	Numerador o denominador con una o más fracciones.
Fracción racional en x.	Fracción simple donde los exponentes de x son enteros y positivos.
Fracciones parciales.	Fracciones simples que sumadas dan una fracción racional.

4.1. Generalidades

Si un polinomio es divisible entre otro, se dice que el primero es múltiplo del segundo. Así:

$$x^3 - x^2 \text{ es múltiplo de } x - 1$$

Todo polinomio que es múltiplo de dos o más polinomios se llama *múltiplo común* de éstos. Así:

$$4x^2 - 9y^2 \text{ es múltiplo común de } (2x + 3y) \text{ y } (2x - 3y)$$

Dos o más polinomios tienen más de un múltiplo común; al de menor grado posible se le llama *mínimo común múltiplo* (mcm).

Para obtener el mcm de dos o más polinomios se multiplican todos los factores diferentes de estos polinomios, tomando cada factor con el mayor exponente que aparezca.

Ejemplo 1

a) Determinar el mcm de:

$x^2 + 2xy + y^2$; $\quad x^2 - y^2$

Solución

Conviene primero factorizar los polinomios dados:

$$x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$$

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$$

Los factores diferentes son:

$$(x + y) \text{ y } (x - y)$$

El mayor exponente con que aparece $(x + y)$ es 2, y el de $(x - y)$ es 1.

Luego, mcm $= (x + y)^2(x - y)$

b) Obtener el mcm de:

$x^2 - 4$, $\quad x^3 - 8 \quad$ y $\quad x^3 - 4x^2 + 4x$

Solución

Se factoriza:

$$x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$$

$$x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$$

$$x^3 - 4x^2 + 4x = x(x - 2)^2$$

Luego, mcm $= (x + 2)(x - 2)^2(x^2 + 2x + 4)x$

Se sabe que una fracción es el cociente de dos cantidades que toman los nombres de *numerador* y *denominador*. Así, en la fracción $\dfrac{P}{Q}$, P es el numerador y Q es el denominador ($Q \neq 0$).

Las operaciones con fracciones se efectúan en álgebra del mismo modo que en aritmética.

Puesto que la división es la operación en la que se originan las fracciones, todo lo relativo a dicha operación es aplicable a las fracciones.

Una fracción algebraica es una fracción *simple* cuando el numerador y el denominador son expresiones racionales enteras; esto es, cuando los exponentes que aparecen son solamente enteros positivos.

Son fracciones simples:

$$\frac{3}{x-2}, \quad \frac{2x+1}{x^2+2x+4}, \quad \frac{x^3-27}{x-2}$$

Si el grado del numerador es menor que el grado del denominador se trata de una *fracción propia.*

Si el grado del numerador es mayor o igual que el grado del denominador se dice que es una *fracción impropia.*

De las tres fracciones anteriores las dos primeras son propias, la tercera es impropia.

Después de efectuar la división indicada en una fracción impropia, ésta se puede escribir como la suma de un polinomio (el cociente), más una fracción propia (el residuo entre el denominador).

Para operar con fracciones es fundamental el siguiente teorema: *Si el numerador y el denominador de una fracción se multiplican o dividen por una misma cantidad no nula, el valor de la fracción no se altera.* Así:

$$\frac{x}{x+2} = \frac{x^2}{x^2+2x}; \quad \frac{x^4-3x^2}{2x^3} = \frac{x^2-3}{2x}$$

Las fracciones así determinadas son *fracciones equivalentes.*

4.2. Simplificación de fracciones

Una fracción está totalmente simplificada o reducida a sus términos más sencillos cuando no existe ningún factor común al numerador y denominador, distinto de uno.

Cuando una fracción no está totalmente simplificada, ello puede hacerse dividiendo numerador y denominador entre sus factores comunes. Conviene entonces factorizar primero numerador y denominador para hacer la simplificación.

Ejemplo 2

Simplificar:

a) $$\frac{x^2+x-6}{x^2-5x+6} = \frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x-3)} = \frac{x+3}{x-3}$$

Evidentemente la fracción dada no está reducida a sus términos más sencillos; el factor común que se presenta en el numerador y denominador es $(x - 2)$, que se elimina al dividir numerador y denominador entre dicho factor.

b) $$\frac{x^2 - 7x + 12}{16 - x^2} = \frac{(x - 4)(x - 3)}{(4 - x)(4 + x)}$$

Se observa que el factor $(4 - x)$ del denominador es el simétrico del factor $(x - 4)$ del numerador; luego, transformando el numerador al multiplicarlo dos veces por (-1): $(x - 4)(x - 3) = (4 - x)(3 - x)$, queda el factor común $(4 - x)$ que puede reducirse.

$$\frac{x^2 - 7x + 12}{16 - x^2} = \frac{(x - 4)(x - 3)}{(4 - x)(4 + x)} = \frac{(4 - x)(3 - x)}{(4 - x)(4 + x)} = \frac{3 - x}{4 + x}$$

c) Efectuar la división indicada en la fracción impropia y simplificar, si es posible, el resultado.

$$\frac{2x^3 - 3x^2 - x + 4}{x^2 - 1}$$

Se efectúa la división:

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 - 3x^2 - x + 4 & x^2 - 1 \\ \cline{2-2} 2x^3 \qquad\quad - 2x & 2x - 3 \\ \cline{1-1} - 3x^2 + x \quad\; & \\ - 3x^2 \qquad + 3 & \\ \cline{1-1} x + 1 & \end{array}$$

Queda:

$$\frac{2x^3 - 3x^2 - x + 4}{x^2 - 1} = 2x - 3 + \frac{x + 1}{x^2 - 1} = 2x - 3 + \frac{1}{x - 1}$$

ya que:

$$\frac{x + 1}{x^2 - 1} = \frac{x + 1}{(x + 1)(x - 1)} = \frac{1}{x - 1}$$

4.3. Operaciones algebraicas con fracciones

4.3.1. Adición y sustracción

Si dos fracciones tienen el mismo denominador, la suma o diferencia de ellas se obtiene escribiendo la suma o diferencia de los numeradores entre el denominador común. Así:

$$\frac{a+1}{x^2} + \frac{b-3}{x^2} = \frac{a+b-2}{x^2}$$

$$\frac{3x^2}{x+1} - \frac{x^2+7}{x+1} = \frac{2x^2-7}{x+1}$$

En esta misma forma se pueden sumar algebraicamente tres o más fracciones con denominador común.

Dos fracciones que no tengan el mismo denominador pueden ser transformadas de tal manera que tengan un común denominador para proceder como se indicó antes. Dicha transformación puede hacerse buscando que las fracciones tengan como denominador un múltiplo común de los denominadores, pero conviene que éste sea el mcm de ellos. Para sumar algebraicamente más de dos fracciones se procede en forma análoga.

Ejemplo 3

Efectuar la operación indicada.

a) Sumar:

$$\frac{x+a}{2ax^2} + \frac{x-a}{4a^2x}$$

Solución

Como el mcm de los denominadores es $4a^2x^2$, se transforman las fracciones dadas, multiplicando el numerador y el denominador de cada una por el factor que multiplicado por el denominador respectivo da como resultado el mcm.

$$\frac{x+a}{2ax^2} + \frac{x-a}{4a^2x} = \frac{(x+a)(2a)}{2ax^2(2a)} + \frac{(x-a)(x)}{4a^2x(x)}$$

$$= \frac{2ax+2a^2}{4a^2x^2} + \frac{x^2-ax}{4a^2x^2} = \frac{x^2+ax+2a^2}{4a^2x^2}$$

b) Sumar:

$$\frac{1}{x^2 - 9} + \frac{3}{x^2 + 3x} + \frac{2}{x^3 - 3x^2}$$

Solución

Se factorizan los denominadores para determinar el mcm:

$$x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$$

$$x^2 + 3x = x(x + 3)$$

$$x^3 - 3x^2 = x^2(x - 3)$$

El mcm de los denominadores es:

$$\text{mcm} = (x + 3)(x - 3)x^2$$

Se transforman las fracciones para después sumarlas:

$$\frac{x^2}{(x + 3)(x - 3)x^2} + \frac{3(x - 3)x}{(x + 3)(x - 3)x^2} + \frac{2(x + 3)}{(x + 3)(x - 3)x^2}$$

$$= \frac{x^2 + 3x^2 - 9x + 2x + 6}{(x + 3)(x - 3)x^2}$$

Al simplificar queda:

$$\frac{1}{x^2 - 9} + \frac{3}{x^2 + 3x} + \frac{2}{x^3 - 3x^2} = \frac{4x^2 - 7x + 6}{(x + 3)(x - 3)x^2}$$

c) Restar:

$$\frac{2x}{x^2 - 6x + 9} - \frac{x}{2x^2 - 5x - 3}$$

Solución

$$x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2;\ 2x^2 - 5x - 3 = (x - 3)(2x + 1)$$

$$\text{mcm} = (x - 3)^2(2x + 1)$$

$$\frac{2x}{x^2 - 6x + 9} - \frac{x}{2x^2 - 5x - 3}$$

$$= \frac{2x(2x + 1)}{(x - 3)^2(2x + 1)} - \frac{x(x - 3)}{(x - 3)^2(2x + 1)}$$

$$= \frac{4x^2 + 2x}{(x - 3)^2(2x + 1)} - \frac{x^2 - 3x}{(x - 3)^2(2x + 1)}$$

$$= \frac{4x^2 + 2x - x^2 + 3x}{(x - 3)^2(2x + 1)} = \frac{3x^2 + 5x}{(x - 3)^2(2x + 1)}$$

d) Sumar:

$$\frac{2r^2}{r^2 + rs + s^2} + r - s$$

Solución

$$\frac{2r^2}{r^2 + rs + s^2} + \frac{r - s}{1}$$

$$= \frac{2r^2}{r^2 + rs + s^2} + \frac{(r - s)(r^2 + rs + s^2)}{r^2 + rs + s^2}$$

$$= \frac{2r^2 + r^3 - s^3}{r^2 + rs + s^2} = \frac{r^3 + 2r^2 - s^3}{r^2 + rs + s^2}$$

4.3.2. Multiplicación y División

El producto de dos fracciones es otra fracción cuyo numerador es el producto de los numeradores de las fracciones dadas y cuyo denominador es el producto de sus denominadores. Así:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Esto se generaliza sin ninguna dificultad para más de dos fracciones. Por ejemplo, si se trata de multiplicar tres fracciones:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f} = \frac{ace}{bdf}$$

Para dividir una fracción entre otra cabe tener en cuenta que dividir una expresión entre una cantidad es lo mismo que multiplicar la expresión por el recíproco de la cantidad. Esto es:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

Esta operación se puede mecanizar fácilmente si se multiplica "en cruz", como se observa en el ejemplo:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$$

Ejemplo 4

Multiplicar y simplificar:

$$a)\quad \frac{2x}{a^2 + a} \cdot \frac{ax}{x - x^2} = \frac{2x(ax)}{(a^2 + a)(x - x^2)} = \frac{2ax^2}{a(a + 1)x(1 - x)}$$

$$= \frac{2x}{(a + 1)(1 - x)}$$

$$b)\quad \frac{b^2 - 2b + 1}{b^2 - 1} \cdot \frac{2b^2 - b - 3}{3b^2 - b - 2} = \frac{(b^2 - 2b + 1)(2b^2 - b - 3)}{(b^2 - 1)(3b^2 - b - 2)}$$

Para simplificar es conveniente primero factorizar, siempre que esto sea posible, para después reducir los factores comunes. Así:

$$\frac{(b^2 - 2b + 1)(2b^2 - b - 3)}{(b^2 - 1)(3b^2 - b - 2)}$$

$$= \frac{(b - 1)^2(2b - 3)(b + 1)}{(b + 1)(b - 1)(b - 1)(3b + 2)} = \frac{2b - 3}{3b + 2}$$

$$c)\quad (x^3 - y^3) \cdot \frac{x^2 + y^2}{2x^2y + 2xy^2 + 2y^3}$$

$$= \frac{x^3 - y^3}{1} \cdot \frac{x^2 + y^2}{2x^2y + 2xy^2 + 2y^3}$$

$$= \frac{(x^3 - y^3)(x^2 + y^2)}{2x^2y + 2xy^2 + 2y^3} = \frac{(x - y)(x^2 + xy + y^2)(x^2 + y^2)}{2y(x^2 + xy + y^2)}$$

$$= \frac{(x - y)(x^2 + y^2)}{2y}$$

Dividir y simplificar:

e) $\frac{x^2}{3} \div \frac{x}{2} = \frac{x^2}{3} \cdot \frac{2}{x} = \frac{2x^2}{3x} = \frac{2x}{3}$

f) $\frac{ab}{a + 1} \div (b + 1) = \frac{ab}{a + 1} \div \frac{b + 1}{1} = \frac{ab}{(a + 1)(b + 1)}$

(Una vez que se multiplicó "en cruz".)

g) $\frac{x^2 - 4}{x + 1} \div \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 1} = \frac{(x^2 - 4)(x^2 - 1)}{(x + 1)(x^2 + x - 6)}$

$$= \frac{(x + 2)(x - 2)(x + 1)(x - 1)}{(x + 1)(x + 3)(x - 2)} = \frac{(x + 2)(x - 1)}{x + 3}$$

4.4. Fracciones compuestas

> *Definición.* Una fracción compuesta es aquella que tiene una o más fracciones, ya sea en el numerador o en el denominador.

Ejemplo 5

$$\frac{\dfrac{3x - 2}{x^2 + 1}}{\dfrac{x + 1}{x} + \dfrac{x - 1}{x + 2}}\ ; \qquad \frac{\dfrac{\dfrac{1}{x} - 2}{x + 3}}{\dfrac{4 - x}{x} - 5}$$

Simplificar una fracción compuesta es transformarla en otra fracción simple reducida a sus términos más sencillos y que sea equivalente.

Una forma de lograrlo es transformar el numerador y el denominador en fracciones simples (si no lo son), y efectuar la división como se dijo antes. Así:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$$

Cuando una fracción compuesta tiene la forma:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$$

a y *d* se llaman *extremos; b* y *c* son los *medios.*

Una regla sencilla para transformar una fracción compuesta como la anterior en una fracción simple es escribir el producto de los extremos entre el producto de los medios. Por ejemplo:

$$\begin{array}{ll} \text{(extremo)} & \\ \text{(medio)} & \\ \text{(medio)} & \\ \text{(extremo)} & \end{array} \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{\text{ad}}{\text{bc}} \quad \begin{array}{l} \text{(producto de los extremos)} \\ \text{(producto de los medios} \end{array}$$

Ejemplo 6

Simplificar las fracciones compuestas.

$$a)\ \frac{x - \frac{y}{x}}{y - \frac{x}{y}} = \frac{\frac{x^2 - y}{x}}{\frac{y^2 - x}{y}} = \frac{x^2 - y}{x} \div \frac{y^2 - x}{y} = \frac{(x^2 - y)y}{x(y^2 - x)}$$

Conviene distinguir la raya del quebrado principal de otras que aparezcan para no confundirlas.

$$b)\ \frac{\dfrac{a+1}{a-2}-\dfrac{a-1}{a+2}}{4+\dfrac{8}{a-2}}=\frac{\dfrac{(a+1)(a+2)-(a-2)(a-1)}{(a-2)(a+2)}}{\dfrac{4(a-2)+8}{a-2}}$$

$$=\frac{[(a+1)(a+2)-(a-2)(a-1)](a-2)}{(a-2)(a+2)[4(a-2)+8]}$$

$$=\frac{(a+1)(a+2)-(a-2)(a-1)}{4a(a+2)}$$

$$=\frac{a^2+3a+2-a^2+3a-2}{4a(a+2)}$$

$$=\frac{6a}{4a(a+2)}=\frac{3}{2(a+2)}$$

$$c)\ \frac{\dfrac{1}{y-1}+y}{1-\dfrac{1}{y+\dfrac{1}{y}}}$$

El denominador es, a su vez, una fracción compuesta que deberá simplificarse primero.

$$1-\frac{1}{y+\dfrac{1}{y}}=1-\frac{1}{\dfrac{y^2+1}{y}}=1-\frac{y}{y^2+1}=\frac{y^2+1-y}{y^2+1}$$

Se simplifica el numerador también en forma separada.

$$\frac{1}{y-1}+y=\frac{1+(y-1)y}{y-1}=\frac{y^2-y+1}{y-1}$$

Se dividen las fracciones simplificadas del numerador y denominador.

$$\frac{y^2 - y + 1}{y - 1} \div \frac{y^2 - y + 1}{y^2 + 1} = \frac{(y^2 - y + 1)(y^2 + 1)}{(y - 1)(y^2 - y + 1)} = \frac{y^2 + 1}{y - 1}$$

4.5. Descomposición de una fracción racional en una suma de fracciones parciales

Una fracción racional en x es una fracción simple donde los exponentes de x son enteros positivos.

Como ya se dijo, la suma de dos o más fracciones algebraicas simples es una fracción cuyo denominador es el mínimo común múltiplo de los denominadores de las fracciones dadas, por ejemplo:

$$\frac{-4}{x + 2} + \frac{2}{x - 1} + \frac{5}{2x - 1} = \frac{x^2 + 23x - 18}{(x + 2)(x - 1)(2x - 1)}$$

Ahora se trata de resolver el problema inverso; o sea, descomponer una fracción dada en una suma de fracciones simples más sencillas, que son las fracciones parciales de la primera fracción.

En la igualdad anterior, las tres fracciones del primer miembro son las fracciones parciales de la fracción del segundo miembro.

Se consideran solamente fracciones racionales propias con una sola literal, es decir, fracciones propias donde el numerador y denominador son polinomios de una sola literal con exponentes enteros y positivos. El caso de una fracción impropia se trata, como ya se dijo, descomponiendo la fracción en un polinomio, más una fracción propia.

Es indispensable factorizar totalmente el denominador de la fracción que se va a descomponer, ya que la descomposición depende de los factores de dicho denominador.

La descomposición de una fracción racional en fracciones parciales se basa en el siguiente teorema, que se enuncia sin demostración:

Toda fracción propia reducida a su mínima expresión puede descomponerse como una suma de fracciones parciales de acuerdo con los siguientes casos:

1. A cada factor de primer grado $ax + b$ que no se repita como factor del denominador le corresponde una fracción parcial de la forma:

$$\frac{A}{ax + b}$$

En donde A es una constante distinta de cero.

2. A cada factor de primer grado $ax + b$ que aparezca k veces como factor del denominador le corresponde la suma de k fracciones parciales de la forma:

$$\frac{A_1}{ax + b} + \frac{A_2}{(ax + b)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(ax + b)^k}$$

En donde $A_1, A_2, \ldots A_k$ son constantes y $A_k \neq 0$.

3. A cada factor de segundo grado $ax^2 + bx + c$ que no se pueda factorizar y que aparezca una sola vez como factor del denominador le corresponde una fracción parcial de la forma:

$$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$$

Donde A y B son constantes y al menos una de ellas no es cero.

4. A cada factor de segundo grado $ax^2 + bx + c$ que no se pueda factorizar y que se repita k veces como factor del denominador le corresponde la suma de k fracciones parciales de la forma:

$$\frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \cdots + \frac{A_kx + B_k}{(ax^2 + bx + c)^k}$$

En donde $A_1, B_1, A_2, B_2, \ldots, A_k, B_k$ son constantes y A_k y B_k no son simultáneamente nulas.

Para determinar los valores de las constantes mencionadas en los cuatro casos presentados anteriormente, se escribe la identidad que resulta de multiplicar por el denominador de la fracción dada los dos miembros de la igualdad establecida en el planteamiento de la descomposición en fracciones parciales. Una vez hecho esto, se puede seguir alguno de los dos procedimientos siguientes.

1. Este procedimiento puede aplicarse cuando no se repiten los factores del denominador. Se asignan a x tantos valores como constantes se tengan. Estos valores van a ser las raíces de cada uno de los factores. Se sustituyen dichos valores de x en la identidad, y se van obteniendo así los valores de las constantes.
2. Éste es un procedimiento general, aplicable a cualquier caso. Se desarrollan los productos indicados y se agrupan los términos de cada una de las potencias de x. En seguida se igualan los coeficientes de potencias iguales de ambos miembros de la identidad mencionada. Con esto resulta

un sistema de ecuaciones de cuya solución se obtienen los valores de las constantes buscadas.

NOTA: si el estudiante no tiene práctica en la solución de sistemas de ecuaciones se recomienda consultar previamente el módulo 7.

Ejemplo 7

Descomponer la fracción dada en sus fracciones parciales.

a) $\dfrac{x^2 + 23x - 18}{(x - 1)(x + 2)(2x - 1)}$

Solución

Los tres factores de primer grado del denominador no se repiten; luego, la descomposición comprende tres fracciones cuyos denominadores son estos tres factores y cuyos numeradores son las constantes A, B y C por determinar. Queda la identidad:

$$\frac{x^2 + 23x - 18}{(x - 1)(x + 2)(2x - 1)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 2} + \frac{C}{2x - 1}$$

Si se multiplican ambos miembros por el denominador de la fracción dada, resulta:

$$x^2 + 23x - 18 = A(x + 2)(2x - 1) + B(x - 1)(2x - 1) + C(x - 1)(x + 2)$$

Esta igualdad, que es una identidad, debe ser cierta para cualquier valor de x. Los factores del denominador no se repiten; entonces, puede aplicarse el primer procedimiento indicado anteriormente para determinar los valores de A, B y C. Se le dan a x tres valores apropiados (los que hacen cero a alguno de los factores):

Para $x = 1$

$$1 + 23 - 18 = A(3)(1), \text{ luego } A = 2$$

Para $x = -2$

$$4 - 46 - 18 = B(-3)(-5), \text{ de donde } B = -4$$

Para $x = \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{4} + \frac{23}{2} - 18 = C\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right), \text{ luego } C = 5$$

Por lo tanto, la descomposición deseada es:

$$\frac{x^2 + 23x - 18}{(x - 1)(x + 2)(2x - 1)} = \frac{2}{x - 1} - \frac{4}{x + 2} + \frac{5}{2x - 1}$$

b) $\frac{x^3 + 1}{x(x - 1)^3}$

Solución

Se presentan en el denominador los factores de primer grado, x sin repetirse, y $(x - 1)$ repetido tres veces; así que el planteamiento de la descomposición, según los casos 1 y 2, es:

$$\frac{x^3 + 1}{x(x - 1)^3} = \frac{A}{x} + \frac{A_1}{x - 1} + \frac{A_2}{(x - 1)^2} + \frac{A_3}{(x - 1)^3}$$

Se multiplican ambos miembros por $x(x - 1)^3$

$$x^3 + 1 = A(x - 1)^3 + A_1x\,(x - 1)^2 + A_2x(x - 1) + A_3x$$

Se desarrollan los productos del segundo miembro y se agrupan términos según potencias de x para aplicar el segundo procedimiento.

$$x^3 + 1$$

$$= Ax^3 - 3Ax^2 + 3Ax - A + A_1x^3 - 2A_1x^2 + A_1 + A_2x^2 - A_2x + A_3x$$

$$x^3 + 1 = (A + A_1)x^3 + (-3A - 2A_1 + A_2)x^2 + (3A + A_1 - A_2 + A_3)x - A$$

Se igualan los coeficientes de las potencias de x con el mismo exponente en los dos miembros:

$$A + A_1 = 1 \quad (1)$$

$$-3A - 2A_1 + A_2 = 0 \quad (2)$$

$$3A + A_1 - A_2 + A_3 = 0 \quad (3)$$

$$-A = 1 \quad (4)$$

De (4):

$$A = -1$$

Al sustituir este valor en (1) resulta $A_1 = 2$. Se sustituyen $A = -1$ y $A_1 = 2$ en (2), y queda $A_2 = 1$. Estos dos valores se sustituyen en (3) y se obtiene que: $A_3 = 1$. Por tanto, la descomposición buscada es:

$$\frac{x^3 + 1}{x(x - 1)^3} = \frac{-1}{x} + \frac{2}{x - 1} + \frac{1}{(x - 1)^2} + \frac{2}{(x - 1)^3}$$

c) $\dfrac{1}{x^3 + 8}$.

Solución

Se factoriza el denominador y se obtiene:

$$\frac{1}{x^3 + 8} = \frac{1}{(x^2 - 2x + 4)(x + 2)}$$

Aparece el factor de segundo grado no repetido $(x^2 - 2x + 4)$, y el factor de primer grado $(x + 2)$ que tampoco se repite, entonces, según los casos 3 y 1, respectivamente, debe tenerse:

$$\frac{1}{(x^2 - 2x + 4)(x + 2)} = \frac{Ax + B}{x^2 - 2x + 4} + \frac{C}{x + 2}$$

De aquí:

$$1 = (Ax + B)(x + 2) + C(x^2 - 2x + 4)$$

Se procede como en el ejemplo anterior:

$$1 = Ax^2 + 2Ax + Bx + 2B + Cx^2 - 2Cx + 4C$$

$$1 = (A + C)x^2 + (2A + B - 2C)x + (2B + 4C)$$

Se igualan los coeficientes de las potencias de x con el mismo exponente:

$$A + C = 0 \qquad (1)$$

$$2A + B - 2C = 0 \qquad (2)$$

$$2B + 4C = 1 \qquad (3)$$

$$\text{De (1) } A = -C \qquad (4)$$

$$\text{De (3) } B = \frac{1 - 4C}{2} \qquad (5)$$

Se sustituyen (4) y (5) en (2): $2(-C) + \dfrac{1 - 4C}{2} - 2C = 0$

$$-4C + 1 - 4C - 4C = 0,\ 12C = 1, \text{ luego } C = \frac{1}{12}$$

Al sustituir este valor en (4) resulta: $A = -\dfrac{1}{12}$

Se sustituye el valor de C en (5) y se obtiene B:

$$B = \frac{1 - 4\frac{1}{12}}{2} = \frac{1 - \frac{1}{3}}{2} = \frac{\frac{3 - 1}{3}}{2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3};\ \text{esto es: } B = \frac{1}{3}$$

Así que la descomposición pedida es:

$$\frac{1}{x^3 + 8} = \frac{1}{(x^2 - 2x + 4)(x + 2)}$$

$$= \frac{-\frac{1}{12}x + \frac{1}{3}}{x^2 - 2x + 4} + \frac{\frac{1}{12}}{x + 2}$$

$$= \frac{\dfrac{-x+4}{12}}{x^2 - 2x + 4} + \frac{1}{12(x+2)} = \frac{4 - x}{12(x^2 - 2x + 4)} + \frac{1}{12(x+2)}$$

d) $\dfrac{2x^3 + x + 3}{(x^2 + 1)^2}$

El denominador presenta un factor de segundo grado repetido dos veces; así que, según el caso 4, la descomposición en fracciones parciales es:

$$\frac{2x^3 + x + 3}{(x^2 + 1)^2} = \frac{A_1x + B_1}{x^2 + 1} + \frac{A_2x + B_2}{(x^2 + 1)^2}$$

Se multiplica por $(x^2 + 1)^2$

$$\begin{aligned} 2x^3 + x + 3 &= (A_1x + B_1)(x^2 + 1) + A_2x + B_2 \\ &= A_1x^3 + B_1x^2 + A_1x + B_1 + A_2x + B_2 \\ &= A_1x^3 + B_1x^2 + (A_1 + A_2)x + B_1 + B_2 \end{aligned}$$

Se igualan coeficientes:

$A_1 = 2$
$B_1 = 0$
$A_1 + A_2 = 1$; luego, $2 + A_2 = 1$; por lo que $A_2 = -1$
$B_1 + B_2 = 3$; como $B_1 = 0$, $B_2 = 3$

La descomposición solicitada es:

$$\frac{2x^3 + x + 3}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x}{x^2 + 1} = \frac{-x + 3}{(x^2 + 1)^2}$$

Ejercicios

Halle el mcm de los polinomios dados (déjelo en forma factorizada):

1. $6xy^2$, $4x^3y$, $36xy$

2. $4x - 4$, $x^2 - 1$

3. $2x^2 + 2x - 4, \quad 3x^2 + 7x + 2$

4. $x^4 - 8x^2 - 9, \quad 4x^3 - 36x$

5. $2a^3 + a^2 - 3a, \quad a^2 - b - a + ab, \quad 2a^2 + 2ab + 3a + 3b$

Simplifique:

6. $\dfrac{a^2 + ab}{a^2 - b^2}$

7. $\dfrac{x^2 - y^2}{x^3 + y^3}$

8. $\dfrac{2x - x^2 - x^3}{x^3 - 3x + 2}$

Efectúe la división y simplifique, si es posible:

9. $\dfrac{x^3 + 4x^2 - 2x + 1}{x^2 + 1}$

Efectúe las sumas o restas algebraicas indicadas:

10. $\dfrac{a}{5} - \dfrac{a}{10} + \dfrac{7a}{25}$

11. $\dfrac{y}{y - 5} - \dfrac{3}{y}$

12. $\dfrac{1}{x + 1} + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x - 1}$

13. $\dfrac{3m - 1}{m^2 - 4} - \dfrac{2m + 5}{(m - 2)^2}$

14. $5 - \dfrac{2m - 3}{m - 1} - \dfrac{2}{m}$

15. $\dfrac{3}{3y - 5} - (2y - 3)$

16. $\dfrac{1 - x}{2 + x} - \dfrac{1 + x}{2 - x} - \dfrac{3x}{x^2 - 4}$

17. $\dfrac{3}{2x^2 + x - 1} + \dfrac{2}{6 + x - 2x^2} + \dfrac{1}{4x^2 + 4x - 3}$

18. $\dfrac{5x^2y}{3ab^2} \cdot \dfrac{9a^2b}{10xy^2}$

19. $\dfrac{x^2 + x}{y^2 - 1} \cdot \dfrac{y + 1}{x + 1}$

20. $\dfrac{ax}{a + x} \cdot \left(\dfrac{x}{a} - \dfrac{a}{x}\right)$

21. $(x^2 - 2xy - 3y^2)\ \dfrac{x^2 - 9y^2}{x^2 - 6xy + 9y^2} \cdot \dfrac{1}{7x + 21y}$

Divida y simplifique:

22. $\dfrac{9ab^2}{34x} \div \dfrac{27ab}{17x^2}$

23. $\dfrac{a - b}{x - 2y} \div \dfrac{2y - x}{2b - 2a}$

24. $\dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 - x - 2} \div \dfrac{x^2 - 6x + 9}{x^2 + 8x + 7}$

25. $\left(\dfrac{a^2}{x} - x\right) \div \left(\dfrac{a}{x} + 1\right)$

Simplifique las fracciones compuestas:

26. $\dfrac{\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{5}}{2 + \dfrac{4}{5}}$

27. $\dfrac{\dfrac{1}{x} - 1}{\dfrac{1}{x} + 1}$

28. $\dfrac{\dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2} + 1}{\dfrac{3}{x} - \dfrac{4}{x^2} + 1}$

29 $\dfrac{3 - \dfrac{x - 6}{x^2 - 6x + 8}}{2 + \dfrac{x + 7}{x^2 - 2x - 8}}$

30. $1 - \dfrac{3}{4 - \dfrac{2}{1 - \dfrac{1}{x}}}$

Descomponga en fracciones parciales:

31. $\dfrac{x - 5}{(x + 1)(x - 1)}$

32. $\dfrac{7 - 8x}{(2x - 1)^2}$

33. $\dfrac{x^2 + 3x - 1}{(x - 2)(x^2 + 5)}$

34. $\dfrac{1 - 13x - 10x^2}{(2x^2 + 2x + 1)(x - 2)}$

35. $\dfrac{3x^2 + 4x - 5}{(x^2 + 2)^2}$

36. $\dfrac{x^3 + 2x^2 + 3x}{(x^2 + x + 1)^2}$

MÓDULO 5. EXPONENTES

Objetivos específicos

Al finalizar el estudio de este módulo, el alumno:

- *Simplificará expresiones algebraicas, aplicando las leyes de los exponentes.*
- *Efectuará operaciones con exponentes fraccionarios.*
- *Identificará un exponente fraccionario de un exponente negativo.*
- *Efectuará operaciones con exponentes negativos.*

Cuadro Sinóptico

Leyes de los Exponentes	Significado	Ejemplo
I. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	Producto de varias potencias de una misma base.	$3x^5y^2 \cdot 2x^2y^3$ $= 3(2)x^{5+2}y^{2+3}$ $= 6x^7y^5$
II. $(a^m)^n = a^{mn}$	Potencia de una potencia	$(x^6)^3 = x^{6\cdot 3} = x^{18}$
III. $(ab)^m = a^m b^m$	Potencia de un producto.	$(5xy)^2 = 5^2x^2y^2 = 25x^2y^2$
IV. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m}$ $b \neq 0$	Potencia de una fracción	$\left(\dfrac{10ax}{5by}\right)^3 = \dfrac{(10\,ax)^3}{(5by)^3}$ $= \dfrac{1000\,a^3x^3}{125b^3y^3} = \dfrac{8a^3x^3}{b^3y^3}$
V. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ si $m > n$	Cociente de dos potencias de una misma base	$\dfrac{x^4b^8}{x^2b^6} = x^{4-2}b^{8-6}$ $= x^2b^2$
VI. $\dfrac{a^m}{a^n} = \dfrac{1}{a^{n-m}}$ si $n > m$	Cociente de dos potencias de una misma base.	$\dfrac{6x^3y^2}{3x^5y^8} = \dfrac{2}{x^{5-3}y^{8-2}}$ $= \dfrac{2}{x^2y^6}$

5.1. Leyes de los exponentes

La expresión a^n, donde al número a cualquiera se le denomina *base*, y n es un número entero positivo llamado *exponente*, representa el producto de n factores iguales a a; se dice que a^n es la enésima potencia de a. No se acostumbra escribir el exponente 1, y las potencias a^2 y a^3 reciben el nombre de *cuadrado* de a y *cubo* de a, respectivamente.

Si m y n son números enteros positivos, y a y b son expresiones algebraicas cualesquiera, con la condición de que al aparecer en un denominador no sean nulos, se tienen las siguientes leyes de los exponentes:

Leyes de los exponentes

I. $a^m a^n = a^{m+n}$

II. $(a^m)^n = a^{mn}$

III. $(ab)^m = a^m b^m$

IV. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m}$; $b \neq 0$

V. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ si $m > n$

VI. $\dfrac{a^m}{a^n} = \dfrac{1}{a^{n-m}}$ si $n > m$

Ejemplo 1

a) $3x^5y^2 \cdot 2x^2y^3 = 3(2)x^{5+2}\,y^{2+3} = 6x^7y^5$ (aplicando I).

b) $(2x^6)^3 = 2^3(x^6)^3 = 8x^{18}$ (aplicando II y III).

c) $(5xy)^2 = 25x^2y^2$ (aplicando III).

d) $$\left(\frac{10ax}{5by}\right)^3 = \frac{(10ax)^3}{(5by)^3} = \frac{1000a^3x^3}{125b^3y^3}$$

$$= \frac{8a^3x^3}{b^3y^3}$$ (aplicando IV y III).

e) $\dfrac{6x^4b^8}{x^2b^6} = (x^{4-2})(b^{8-6}) = x^2b^2$ (aplicando V).

f) $\dfrac{6x^3y^2}{3x^5y^8} = \dfrac{2}{x^{5-3}\,y^{8-2}} = \dfrac{2}{x^2y^6}$ (aplicando VI).

Debe tenerse en cuenta que estas leyes han sido establecidas para exponentes enteros y positivos. Si se consideran casos donde los exponentes no son enteros y positivos, es necesario establecer el significado que debe darse a los exponentes fraccionarios y negativos.

5.2. Exponentes fraccionarios y negativos

Sea q un número entero positivo y por tanto $1/q$ una fracción positiva. Considérese el significado de $1/q$ como exponente, o sea, el significado de $a^{\frac{1}{q}}$, cuando $q \neq 0$. Para que la primera ley de los exponentes sea válida para este exponente fraccionario, deberá verificarse que:

$$\underbrace{a^{\frac{1}{q}} a^{\frac{1}{q}} a^{\frac{1}{q}} \ldots a^{\frac{1}{q}}}_{q \text{ factores}} = a^{\frac{1}{q}+\frac{1}{q}+\cdots+\frac{1}{q}} = a^{(\frac{1}{q})q} = a$$

Esto es, $a^{\frac{1}{q}}$ debe tener la propiedad de que su potencia de grado q sea igual a a. Por lo anterior se define a $a^{\frac{1}{q}}$ como una raíz de índice q de a.

$$a^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a}$$

En donde el símbolo $\sqrt{}$ se llama *radical* y el entero positivo q es el *índice de la raíz.*

Para $q = 2$ se acostumbra omitir el índice, que corresponde a la raíz cuadrada.

5.3. Raíces principales

Cualquier número excepto cero, tiene q raíces distintas de índice q. Por ejemplo, el número 4 tiene dos raíces cuadradas, que son $+2$ y -2. Para evitar ambigüedad se asignará a $a^{\frac{1}{q}}$ un valor único llamado raíz principal, que se define como sigue:

1. Cuando el índice q es par. Si a es positivo, existen dos raíces reales de igual valor absoluto y de signos contrarios. En este caso, la raíz principal es la raíz positiva. Así, la raíz cuadrada principal de 4 es $+2$, que se escribe $4^{1/2}$.
2. Cuando el índice q es impar. Si a es positivo, existe solamente una raíz real que es positiva y que se toma como la raíz principal. Si a es negativo, existe una raíz real negativa que se toma como la raíz principal. Por ejemplo:

   El valor principal de la raíz cúbica de 8 es $+2$, representada por $8^{1/3}$; el valor principal de la raíz cúbica de -8 es -2, representada por $(-8)^{1/3}$.

Cuando a es negativo y q es par, $a^{\frac{1}{q}}$ no representa un número real.

Ejemplo 2

a) $(16y^2)^{1/2} = \sqrt{16y^2} = \pm 4y$

b) $(ax)^{1/4} = \sqrt[4]{ax}$

Generalizando, si p y q son enteros positivos, para que se verifique la segunda ley de los exponentes se deberá tener que:

$$\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^q = a^{\frac{p}{q}q} = a^p$$

De donde, por definición:

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$$

Es decir, que $a^{\frac{p}{q}}$ significa la raíz de índice q de la potencia de grado p de a.

Ejemplo 3

a) $8^{2/3} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$

b) $(3x)^{5/2} = \sqrt{(3x)^5} = \sqrt{243x^5}$

Si se toma únicamente la raíz principal, una potencia de exponente fraccionario se puede calcular efectuando la potencia y la raíz en cualquier orden, así que, en un exponente fraccionario, el numerador de éste corresponde a una potencia y el denominador a una raíz.

El exponente negativo se origina al dividir dos potencias de la misma base cuando el exponente del dividendo es menor que el exponente del divisor. Así, por ejemplo:

$$\frac{a^2}{a^3} = a^{2-3} = a^{-1} \qquad \text{o bien} \qquad \frac{x^3}{x^7} = x^{3-7} = x^{-4}$$

Toda cantidad elevada a un exponente negativo equivale a una fracción de numerador 1 y cuyo denominador es la misma cantidad con exponente positivo.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

De acuerdo con esto, en los ejemplos anteriores tenemos que:

$$a^{-1} = \frac{1}{a} \qquad \text{y} \qquad x^{-4} = \frac{1}{x^4}$$

Según lo anterior, cualquier factor del numerador de una fracción se puede escribir en el denominador y viceversa, si se cambia el signo de su exponente. Por ejemplo, sea la expresión:

$$\frac{a^{-2}b^{-3}}{x^{-4}y^{-5}}$$

De acuerdo con el significado del exponente negativo, se tiene:

$$\frac{a^{-2}b^{-3}}{x^{-4}y^{-5}} = \frac{1}{a^2b^3}\,\frac{x^4y^5}{1} = \frac{x^4y^5}{a^2b^3}$$

Obsérvese que los factores a^{-2} y b^{-3}, que aparecen en el numerador de la expresión original con exponentes negativos, pasan al denominador con exponentes positivos, y los factores x^{-4} y y^{-5}, que están en el denominador de la expresión original con exponentes negativos, pasan al numerador con exponentes positivos.

El exponente cero proviene de dividir potencias iguales de la misma base. Así:

$$\frac{a^2}{a^2} = a^{2-2} = a^0$$

$$\frac{x^5}{x^5} = x^{5-5} = x^0$$

Por lo anterior, se puede concluir que toda cantidad elevada a la potencia cero equivale a 1.

En efecto, según las leyes de los exponentes:

$$\frac{a^n}{a^n} = a^{n-n} = a^0, \qquad \text{pero} \qquad \frac{a^n}{a^n} = 1$$

Ahora bien, dos expresiones iguales a una tercera son iguales entre sí, por lo tanto:

$$a^0 = 1$$

Ejercicios

Efectúe el siguiente producto:

1. $(-4xy^2z)(-2x^2yz)(xyz^2)$

Desarrolle:

2. $(7x^5y^6z^8)^2$

3. $(3x^2y^3 - 7x^3y^2)^2$

Simplifique:

4. $\dfrac{2a^3bx - 3a^2b^2y - 2a^3b^3}{a^2b}$

5. $\dfrac{18x^4y^9z^2}{36x^6y^3z^4}$

Exprese con signo radical:

6. $xy^{1/2}$

7. $x^{3/2}, \quad y^{1/4}, \quad z^{1/5}$

8. $3x^{2/7}, \quad y^{4/5}, \quad z^{2/7}$

Exprese con exponente fraccionario:

9. $\sqrt[3]{x^7}$

10. $\sqrt[3]{x^7}\ \sqrt[5]{y^6}$

11. $5a\sqrt[5]{x^2y^3z^9}$

Simplifique

12. $\dfrac{1}{2x^{-2}}$

Escriba con exponentes positivos:

13. $\dfrac{x^{-1}y^{-2}z^{-3}}{a^{-2}b^{-5}c^{-8}}$

Escriba con exponentes positivos y simplifique:

14. $\dfrac{a^{-1/2}x^{-2}}{3a^3x^2y^{-1}}$

15. $\dfrac{x^{-2/3}y^{-1/4}}{x^2yz^{-1/2}}$

Exprese con signo radical y exponentes positivos. Simplifique:

16. $\dfrac{x^{3/5}}{y^{-2/5}}$

17. $(x^{2/3})^{-2}$

18. $(x^{-1/2})^{1/3}$

Exprese con exponentes positivos:

19. $2\sqrt{x^{-3}y^{-4}}$

20. $\dfrac{a^{2/3}}{\sqrt{x^{-5}}}$

21. $\dfrac{3x^{-2/3}}{\sqrt{y^{-4}}}$

22. Escriba en cada paréntesis de la columna derecha la letra del inciso de la columna izquierda que complete una proposición correcta.

a) $(a^m)^n$ puede expresarse como:

b) $a^m a^n$ puede expresarse como:

c) $\dfrac{a^m}{a^n}$ si $m > n$, también se escribe:

d) $x^{3/2}$ expresado con signo radical:

e) $\sqrt[4]{y^5}$ expresado con exponente fraccionario:

f) $\dfrac{1}{x^5}$ expresado con exponente negativo:

g) El valor x^0 es.

h) $\dfrac{a^m}{a^n}$ si $m < n$ también se escribe:

(   ) a^{m-n}

(   ) $a^{m/n}$

(   ) $y^{5/4}$

(   ) x^{-5}

(   ) a^3b^{-3}

(   ) a^{m+n}

(   ) $\sqrt[3]{x^2}$

(   ) 1

(   ) $\dfrac{a^3}{b^3}$

(   ) 3

i) La raíz principal de $9^{1/2}$ es: ( ) 0

j) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^3$ se puede escribir: ( ) $\sqrt{x^3}$

( ) a^{mn}

( ) $\dfrac{1}{x^{-5}}$

MÓDULO 6. RADICALES

Objetivos específicos

Al finalizar el estudio de este módulo, el alumno:

- *Efectuará con expresiones algebraicas la extracción e introducción de factores en radicales.*
- *Efectuará la racionalización del denominador de una fracción.*

Cuadro Sinóptico

Leyes de los radicales	Expresión en lenguaje común
I. $\sqrt[m]{a}\sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{ab}$	El producto de raíces con el mismo índice es igual a la raíz del producto de los subradicales.
II. $\dfrac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[m]{\dfrac{a}{b}}$	El cociente de dos raíces con el mismo índice es igual a la raíz del cociente de los subradicales.
III. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$	La raíz *n* de la raíz *m* de un número es igual a la raíz *mn* del número, e igual a la raíz *m* de la raíz *n* del número.

6.1. Generalidades

La expresión $\sqrt[q]{a}$ representa la raíz principal de índice q de la cantidad a. Al símbolo $\sqrt{}$ se le llama *radical*, y a la cantidad a bajo el radical se le nombra *radicando* o *subradical*; al número entero positivo q, como se mencionó, se le denomina *índice de la raíz* o *índice del radical*.

En el módulo 5, relativo a exponentes, se estableció que

$$a^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a}$$

lo cual indica que es posible sustituir los radicales por exponentes fraccionarios; por tanto, las operaciones con radicales pueden efectuarse utilizando las leyes de los exponentes, si se entiende que la raíz utilizada es la raíz principal.

6.2. Leyes de los radicales

I. $\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{ab}$

Ejemplo 1

$$\sqrt[3]{ax} \quad \sqrt[3]{by} = \sqrt[3]{abxy}$$

II. $\dfrac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[m]{\dfrac{a}{b}}$ para $b \neq 0$

Ejemplo 2

$$\frac{\sqrt[6]{2a}}{\sqrt[6]{3b}} = \sqrt[6]{\frac{2a}{3b}}$$

III. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$

Ejemplo 3

$$\sqrt[3]{\sqrt{a}} = (a^{1/2})^{1/3} = a^{1/2 \cdot 1/3} = a^{1/6} = \sqrt[6]{6}$$

6.3. Extracción e introducción de factores en radicales

La extracción de factores en radicales se lleva a cabo comúnmente en la simplificación de radicales.

Se dice que el radical $\sqrt[q]{a}$ está simplificado cuando satisface las siguientes condiciones:

- El subradical no contiene factores afectados de exponentes mayores que el índice q del radical.
- El subradical no contiene fracciones.
- El índice del radical es el menor posible.

En la sección 6.4 se estudiará otra forma de simplificación de radicales llamada racionalización.

Ejemplo 4

Simplificar los siguientes radicales:

$a)$ $\sqrt[3]{8a^5}$ $\qquad b)$ $\sqrt{\dfrac{27}{2}}$ $\qquad c)$ $\sqrt[6]{27}$

Solución

$$a)\ \sqrt[3]{8}a^5 = \sqrt[3]{2^3a^3a^2} = 2a\sqrt[3]{a^2}$$

$$b)\ \sqrt{\frac{27}{2}} = \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3^2 3}}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$c)\ \sqrt[6]{27} = \sqrt[6]{3^3} = 3^{3/6} = 3^{1/2} = \sqrt{3}$$

Para introducir el coeficiente de un radical bajo el signo radical se eleva dicho coeficiente a la potencia que indique el índice del radical. Esta operación es inversa a la simplificación de radicales.

Ejemplo 5

Introducir bajo el signo radical:

$a)$ $3a^2\sqrt[3]{a^2b}$; $\qquad b)$ $(1-a)\sqrt{\dfrac{1+a}{1-a}}$

Solución

$$a)\ 3a^2\sqrt[3]{a^2b} = \sqrt[3]{(3a^2)^3a^2b} = \sqrt[3]{27a^8b}$$

$$b)\ (1-a)\sqrt{\frac{1+a}{1-a}} = \sqrt{\frac{(1-a)^2(1+a)}{(1-a)}}$$

$$= \sqrt{(1-a)(1+a)} = \sqrt{1-a^2}$$

6.4. Racionalización

Racionalizar el denominador de una fracción consiste en convertir una fracción cuyo denominador es irracional en una fracción equivalente cuyo denominador sea racional.

Cuando se racionaliza el denominador irracional de una fracción desaparece todo signo radical del denominador. Se presentan los siguientes casos:

Caso 1. Racionalizar el denominador de una fracción donde éste es un monomio.

Cuando se presenta este caso se multiplican los dos términos de la fracción por el radical del mismo índice que el del denominador, que multiplicado por éste dé como producto una cantidad racional.

Ejemplo 6

Racionalizar el denominador de $\frac{3}{\sqrt{2x}}$

Solución

Se multiplican numerador y denominador por $\sqrt{2x}$

$$\frac{3}{\sqrt{2x}} = \frac{3}{\sqrt{2x}}\cdot\frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{2x}} = \frac{3\sqrt{2x}}{2x}$$

Ejemplo 7

Racionalizar el denominador de $\frac{2}{\sqrt[3]{9a}}$

Solución

El denominador $\sqrt[3]{9a}$ es igual a $\sqrt[3]{3^2a}$. Para que en el denominador quede una raíz exacta hay que multiplicar:

$$\sqrt[3]{3^2a} \quad \text{por} \quad \sqrt[3]{3a^2}$$

y para que la fracción no se altere se multiplica también el numerador por:

$$\sqrt[3]{3a^2}$$

$$\frac{2}{\sqrt[3]{9a}} = \frac{2}{\sqrt[3]{3^2a}}\ \frac{\sqrt[3]{3a^2}}{\sqrt[3]{3a^2}} = \frac{2\sqrt[3]{3a^2}}{\sqrt[3]{3^3a^3}} = \frac{2\sqrt[3]{3a^2}}{3a}$$

Caso 2. Racionalizar el denominador de una fracción donde éste es un binomio que contiene radicales de segundo grado.

Cuando se presenta este caso se multiplican ambos miembros de la fracción por el conjugado del denominador y se simplifica el resultado.

Binomios conjugados. Dos expresiones que contienen radicales de segundo grado, como $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ y $\sqrt{a} - \sqrt{b}$, o bien, $a + \sqrt{b}$ y $a - \sqrt{b}$, que difieren solamente en el signo que une sus términos, se dice que son conjugados. Así, el conjugado de $3\sqrt{2} - \sqrt{5}$ es $3\sqrt{2} + \sqrt{5}$; el conjugado de $4 - 3\sqrt{5}$ es $4 + 3\sqrt{5}$

El producto de dos binomios conjugados es racional. Así:

$$(3\sqrt{2} - \sqrt{5})(3\sqrt{2} + \sqrt{5}) = (3\sqrt{2})^2 - (\sqrt{5})^2 = 18 - 5 = 13$$

Ejemplo 8

Racionalizar el denominador de:

$$\frac{4 - \sqrt{2}}{2 + 5\sqrt{2}}$$

Solución

Se multiplican el numerador y el denominador por $2 - 5\sqrt{2}$:

$$\frac{4 - \sqrt{2}}{2 + 5\sqrt{2}} = \frac{4 - \sqrt{2}}{2 + 5\sqrt{2}} \cdot \frac{2 - 5\sqrt{2}}{2 - 5\sqrt{2}}$$

$$= \frac{8 - 22\sqrt{2} + 10}{4 - 50} = \frac{18 - 22\sqrt{2}}{-46}$$

Se simplifica:

$$\frac{9 - 11\sqrt{2}}{-23} = \frac{11\sqrt{2} - 9}{23}$$

Para racionalizar el denominador de una expresión que contiene tres radicales de segundo grado hay que repetir dos veces el procedimiento descrito antes, como se muestra en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 9

Racionalizar el denominador de:

$$\frac{\sqrt{2} - \sqrt{5}}{\sqrt{2} + \sqrt{5} - \sqrt{6}}$$

Solución

Considérese el denominador como el binomio:

$$(\sqrt{2} + \sqrt{5}) - \sqrt{6}$$

Por lo tanto:

$$\frac{\sqrt{2} - \sqrt{5}}{\sqrt{2} + \sqrt{5} - \sqrt{6}}$$

$$= \frac{(\sqrt{2} - \sqrt{5})(\sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{6})}{(\sqrt{2} + \sqrt{5} - \sqrt{6})(\sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{6})}$$

$$= \frac{2\sqrt{3} - \sqrt{30} - 3}{(\sqrt{2} + \sqrt{5})^2 - (\sqrt{6})^2} = \frac{2\sqrt{3} - \sqrt{30} - 3}{1 + 2\sqrt{10}}$$

Se multiplican ambos términos nuevamente por el conjugado del denominador:

$$\frac{(2\sqrt{3} - \sqrt{30} - 3)(1 - 2\sqrt{10})}{(1 + 2\sqrt{10})(1 - 2\sqrt{10})}$$

$$= \frac{22\sqrt{3} - 5\sqrt{30} - 3 + 6\sqrt{10}}{1 - 40}$$

$$= \frac{3 - 6\sqrt{10} + 5\sqrt{30} - 22\sqrt{3}}{39}$$

Ejercicios

Simplifique los factores que puedan extraerse de los radicales.

1. $\sqrt{25x^4y^3}$

2. $\sqrt{18xz^5}$

3. $2\sqrt[3]{54a^4b^6}$

4. $4\sqrt[3]{250\ a^3\ x^8}$

Introduzca en el signo radical todos los factores que no estén dentro de él y simplifique:

5. $5x^2y\sqrt{3}$

6. $3ax^3\sqrt{3ax}$

7. $(x + 1)\sqrt{\dfrac{2x}{x + 1}}$

8. $2xy^2\sqrt[3]{ay}$

9. $7a^2b^3\sqrt[3]{\dfrac{2a}{49b^2}}$

Racionalice el denominador de cada fracción.

10. $\dfrac{3}{4\sqrt{5}}$

11. $\dfrac{5}{5\sqrt{3x}}$

12. $\dfrac{a^2 + b^2}{4\sqrt{a^2 + b^2}}$

13. $\dfrac{\sqrt{a} + \sqrt{2b}}{\sqrt{a} - \sqrt{2b}}$

14. $\dfrac{\sqrt{2} - 3\sqrt{5}}{2\sqrt{2} + \sqrt{5}}$

15. $\dfrac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3} + \sqrt{5}}$

MÓDULO 7. ECUACIONES

Objetivos específicos

Al finalizar el estudio de este módulo, el alumno:

- *Resolverá ecuaciones de primer grado con una incógnita.*
- *Resolverá ecuaciones de segundo grado, aplicando los métodos de:*

  — *Completar cuadrados.*
  — *Por fórmula general.*
  — *Por descomposición en factores.*

- *Resolverá sistemas de dos ecuaciones de primer grado, con dos incógnitas y de tres ecuaciones de primer grado con tres incógnitas, aplicando los métodos de:*

  — *Sustitución.*
  — *Reducción.*
  — *Igualación.*

- *Calculará el valor de determinantes de segundo y tercer orden.*

Cuadro sinóptico

Fórmula general para la resolución de ecuaciones de segundo grado
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ecuaciones de segundo grado	**Descripción**
Completa $ax^2 + bx + c = 0$	Términos: — Segundo grado. — Primer grado. — Independiente.
Incompleta $ax^2 + c = 0$	Carece del término de primer grado.
Incompleta $ax^2 + bx = 0$	Carece del término independiente.

Sistemas de ecuaciones	**Descripción**
Compatible	Determinado: Una sola solución.
	Indeterminado: Una infinidad de soluciones.
Incompatible	No tiene solución.

7.1. Generalidades

Igualdad es la expresión en la cual dos cantidades algebraicas tienen el mismo valor. Por ejemplo, son igualdades:

$$a = b + c; \quad 3x^2 = 4x + 15$$

> *Definición.* Ecuación es una igualdad en la que hay una o varias cantidades desconocidas llamadas incógnitas y que sólo se verifica, o es verdadera, para determinados valores de las incógnitas.

Así, $5x + 2 = 17$ es una ecuación, porque es una igualdad en la que hay una incógnita (x) y sólo se verifica para el valor $x = 3$, o sea:

$$5(3) + 2 = 17; \quad 15 + 2 = 17$$

$$17 = 17$$

Identidad es una igualdad que se verifica para cualquier valor de las letras que intervienen en ella. Así, se tiene que:

$$(a - b)^2 = (a - b)(a - b)$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

son identidades porque se verifican para cualquier valor de las letras a y b.

El signo de identidad es $\equiv$, que se lee "idéntico a".

Así, la identidad $(x + y)^2 \equiv x^2 + 2xy + y^2$, se lee: $(x + y)^2$, idéntico a $x^2 + 2xy + y^2$.

Una *ecuación numérica* es aquella que no tiene más letras que las incógnitas, como $4x - 5 = x + 4$, donde la única letra es la incógnita x.

Una *ecuación literal* es la que además de las incógnitas tiene otras letras, que representan cantidades conocidas, como $3x + 2a = 5b - bx$.

Una ecuación es *entera* cuando ninguno de sus términos tiene denominador, como en los ejemplos anteriores. Es *fraccionaria* cuando algunos o todos sus términos tienen denominadores, como:

$$\frac{3x}{2} + \frac{6x}{5} = 5 + \frac{5}{x}$$

Grado de una ecuación con una sola incógnita es el mayor exponente que tiene la incógnita. Así:

$$4x - 6 = 3x - 1$$

es una ecuación de primer grado porque el mayor exponente de x es 1.

La ecuación $x^2 - 5x + 6 = 0$ es una ecuación de segundo grado porque el mayor exponente de x es 2.

Raíces o *soluciones* de una ecuación son los valores de las incógnitas que verifican o satisfacen la ecuación; es decir, que sustituidos en lugar de las incógnitas convierten la ecuación en identidad.

Así, en la ecuación $5x - 6 = 3x + 8$ la raíz es 7, porque haciendo $x = 7$

$$5(7) - 6 = 3(7) + 8 \Rightarrow 29 \equiv 29$$

Por tanto, "resolver una ecuación" es encontrar sus raíces; es decir, el valor o los valores de las incógnitas que satisfacen la ecuación.

7.2. Reglas de las ecuaciones

- Si a los dos miembros de una ecuación se les suma una misma cantidad, positiva o negativa, la igualdad subsiste.
- Si a los dos miembros de una ecuación se les resta una misma cantidad, positiva o negativa, la igualdad subsiste.
- Si los dos miembros de una ecuación se multiplican por una misma cantidad, positiva o negativa, la igualdad subsiste.
- Si los dos miembros de una ecuación se dividen entre una misma cantidad, positiva o negativa, la igualdad subsiste.
- Si los dos miembros de una ecuación se elevan a una misma potencia, o si a los dos miembros se les extrae una misma raíz, la igualdad subsiste.

La trasposición de términos consiste en cambiar los términos de una ecuación de un miembro a otro.

Cualquier término de una ecuación se puede pasar de un miembro a otro cambiándole el signo.

Términos iguales, con signos iguales en distinto miembro de una ecuación, pueden suprimirse. Así, en la ecuación $x + b = 2a + b$ se tiene el término b con signo + en los dos miembros. Este término puede suprimirse, quedando $x = 2a$.

Cambio de signo. Los signos de todos los términos de una ecuación se pueden cambiar sin que la ecuación se altere, ya que esto equivale a multiplicar los dos miembros de la ecuación por (-1), con lo cual la igualdad no varía.

Si en la ecuación $-2x - 3 = x - 15$ se multiplican ambos miembros por -1, se tiene:

$$2x + 3 = -x + 15$$

que es la ecuación dada con los signos de todos sus términos cambiados.

7.3. Ecuaciones de primer grado

Reglas generales para resolver ecuaciones de primer grado.

1. Se efectúan las operaciones indicadas, si las hay.
2. Se hace la trasposición de términos reuniendo en un miembro todos los términos que contengan la incógnita y en el otro todas las cantidades conocidas.

3. Se reducen los términos semejantes en cada miembro.
4. Se despeja la incógnita obteniendo así el valor buscado.

Ejemplo 1

Resolver la ecuación:

$$35 - 22x + 6 - 18x = 14 - 30x + 32$$

Solución

Se efectúa la trasposición de términos; en el primer miembro todos aquellos que contengan la incógnita, y en el otro todos los que no la contengan. Así:

$$-22x - 18x + 30x = 14 + 32 - 35 - 6$$

Se reduce:

$$-10x = 5$$

Se simplifica:

$$2x = -1$$

Se despeja:

$$x = -\frac{1}{2}$$

Verificación:

Al sustituir $x = -\frac{1}{2}$ en la ecuación dada se tiene:

$$35 - 22\left(-\frac{1}{2}\right) + 6 - 18\left(-\frac{1}{2}\right) = 14 - 30\left(-\frac{1}{2}\right) + 32$$

$$35 + 11 + 6 + 9 = 14 + 15 + 32$$

$$61 \equiv 61$$

Ejemplo 2

Resolver la ecuación:

$$10(x - 9) - 9(5 - 6x) = 2(4x - 1) + 5(1 + 2x)$$

Solución

Se efectúan los productos indicados:

$$10x - 90 - 45 + 54x = 8x - 2 + 5 + 10x$$

Se suprime $10x$ en ambos miembros, se trasponen términos y se reduce, con lo que queda:

$$54x - 8x = -2 + 5 + 90 + 45$$

$$46x = 138$$

Se despeja x:

$$x = \frac{138}{46} = 3 \quad \therefore\ x = 3$$

Verificación

Haciendo $x = 3$ en la ecuación dada se tiene:

$$10(3 - 9) - 9(5 - 18) = 2(12 - 1) + 5(1 + 6)$$

$$-60 + 117 = 22 + 35$$

$$57 \equiv 57$$

Ejemplo 3

Resolver la ecuación:

$$2 - \frac{x - 1}{40} = \frac{2x - 1}{4} - \frac{4x - 5}{8}$$

Solución

Se encuentra el mínimo común múltiplo de los denominadores 40, 4 y 8, que es 40, y se multiplican los dos miembros por él, con lo que se obtiene la ecuación:

$$40(2) - (x - 1) = 10(2x - 1) - 5(4x - 5)$$

Se efectúan las operaciones indicadas:

$$80 - x + 1 = 20x - 10 - 20x + 25$$

Se trasponen términos y se reduce:

$$-x = -10 + 25 - 80 \quad 1$$

$$-x = -66 \quad \therefore x = 66$$

Por tanto, la raíz de la ecuación o el valor que la satisface es:

$$x = 66$$

Ejemplo 4

Resolver la ecuación:

$$\frac{2}{3x} - \frac{5}{x} = \frac{7}{10} - \frac{3}{2x} + 1$$

Solución

El mcm de los denominadores es $30x$; después de multiplicar ambos miembros por éste, queda la ecuación:

$$10(2) - 30(5) = 3x(7) - 15(3) + 30x$$

Se efectúan las operaciones indicadas:

$$20 - 150 = 21x - 45 + 30x$$

Se trasponen términos y se reduce:

$$-21x - 30x = -45 - 20 + 150$$

$$-51x = 85$$

Se despeja x:

$$x = -\frac{85}{51}$$

Se divide entre 17 numerador y denominador:

$$x = -\frac{5}{3}$$

Ejemplo 5

Resolver la ecuación:

$$\frac{6x + 5}{15} - \frac{5x + 2}{3x + 4} = \frac{2x + 3}{5} - 1$$

Solución

El mcm de los denominadores es $15(3x + 4)$; queda entonces la ecuación:

$$(6x + 5)(3x + 4) - 15(5x + 2) = 3(3x + 4)(2x + 3) - 15(3x + 4)$$

Efectuamos las operaciones indicadas:

$$18x^2 + 24x + 15x + 20 - 75x - 30$$

$$= 18x^2 + 27x + 24x + 36 - 45x - 60$$

Trasponemos términos y simplificamos:

$$39x - 75x - 51x + 45x = 36 - 60 - 20 + 30$$

$$-42x = -14$$

Despejamos x:

$$x = \frac{14}{42} = \frac{1}{3} \quad \therefore x = \frac{1}{3}$$

Ejemplo 6

Resolver la ecuación:

$$x(3 - 2b) - 1 = x(2 - 3b) - b^2$$

Solución

Primero se efectúan las operaciones indicadas.

$$3x - 2bx - 1 = 2x - 3bx - b^2$$

Se trasponen términos:

$$3x - 2bx - 2x + 3bx = 1 - b^2$$

Se reducen términos semejantes:

$$x + bx = 1 - b^2$$

Se factoriza en ambos miembros:

$$x(1 + b) = (1 - b)(1 + b)$$

Se despeja x:

$$x = \frac{(1 + b)(1 - b)}{(1 + b)}$$

Queda:

$$x = 1 - b$$

Ejemplo 7

Resolver la ecuación:

$$\frac{a - 1}{x - a} - \frac{2a(a - 1)}{x^2 - a^2} = - \frac{2a}{x + a}$$

Solución

El mcm de los denominadores es $x^2 - a^2$; queda la ecuación:

$$(x + a)(a - 1) - 2a(a - 1) = -2a(x - a)$$

Efectuamos las operaciones indicadas:

$$ax - x + a^2 - a - 2a^2 + 2a = -2ax + 2a^2$$

Reducimos:

$$3ax - x = 3a^2 - a$$

Factorizamos:

$$x(3a - 1) = a(3a - 1)$$

Despejamos x:

$$x = \frac{a(3a - 1)}{(3a - 1)}$$

Simplificamos:

$$x = a$$

Ejemplo 8

Una persona paga \$870.00 por un libro, un traje y un sombrero. El sombrero costó \$50.00 más que el libro y \$200.00 menos que el traje. ¿Cuánto pagó por cada cosa?

Solución

Sea x el precio del libro.

El sombrero costó \$200.00 menos que el traje, por lo tanto el traje costó \$200.00 más que el sombrero.

Así:

$$x + 50 + 200 = x + 250 = \text{precio del traje}$$

Como las tres cosas costaron \$870.00, se tiene:

$$x + x + 50 + x + 250 = 870$$

$$3x = 870 - 250 - 50$$

$$3x = 570; \qquad x = \frac{570}{3}; \quad x = 190$$

Por tanto:

$$x = \text{precio del libro} = \$190.00$$

$$\text{precio del sombrero} = x + 50 = 190 + 50 = \$240.00$$

$$\text{precio del traje} = x + 250 = 190 + 250 = \$440.00$$

Verificación:

$$190 + 240 + 440 = 870$$

$$870 \equiv 870$$

Ejemplo 9

La suma de dos números es 77; si el mayor se divide entre el menor, el cociente es 2 y el residuo 8. Determinar estos números.

Solución

Sea x el número mayor. Por lo tanto, $77 - x$ = número menor.

De acuerdo con las condiciones del problema, al dividir el número mayor x entre el menor $77 - x$, el cociente es 2 y el residuo es 8; pero si al dividendo x se le resta el residuo 8, la división de $x - 8$ entre $77 - x$ es exacta y resulta el cociente 2, así se tendrá la ecuación:

$$\frac{x - 8}{77 - x} = 2$$

Se resuelve:

$$x - 8 = 2(77 - x); \quad x - 8 = 154 - 2x$$

$$3x = 162; \quad x = 54$$

El número mayor es 54, luego el menor es $77 - 54 = 23$.

Entonces, los números buscados son 23 y 54.

7.4. Ecuaciones de segundo grado

Ecuación de segundo grado es toda ecuación en la cual, una vez simplificada, el mayor **exponente** de la **incógnita** es 2. Así:

$$4x^2 + 7x + b = 0$$

es una ecuación de segundo grado.

Las ecuaciones *completas* de segundo grado son ecuaciones de la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

que tienen un término en x^2, un término en x, y un término independiente de x. Así:

$$2x^2 + 7x - 15 = 0 \quad \text{y} \quad x^2 - 8x = -15$$

son ecuaciones completas de segundo grado.

Las ecuaciones *incompletas* de segundo grado son ecuaciones de la forma:

- $ax^2 + c = 0$, que carecen de término en x,
- $ax^2 + bx = 0$, que carecen de término independiente.

Así:

$$x^2 - 16 = 0 \quad \text{y} \quad 3x^2 + 5x = 0$$

son ecuaciones incompletas de segundo grado.

Las raíces de una ecuación de segundo grado son los valores de la incógnita que satisfacen la ecuación.

Toda ecuación de segundo grado tiene dos raíces o valores de la incógnita que satisfacen la ecuación.

7.5 Resolución de ecuaciones de segundo grado con una incógnita por el método de completar cuadrados

Método de completar cuadrados. Este método se explicará mediante la resolución de un ejemplo.

Ejemplo 10

Resolver la ecuación:

$$2x^2 - 2x - 1 = 0$$

Solución

El término independiente se pasa al segundo miembro de la ecuación:

$$2x^2 - 2x = 1$$

Ahora, se divide toda la ecuación entre el coeficiente de x^2, y queda:

$$x^2 - x = \frac{1}{2}$$

El primer miembro resultará un cuadrado perfecto si se agrega el cuadrado de la mitad del coeficiente de x en ambos miembros de la ecuación:

$$x^2 - x + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$$

Se simplifica:

$$x^2 - x + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Ahora, el primer miembro es un cuadrado perfecto.

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

Se extrae raíz cuadrada en ambos miembros:

$$x - \frac{1}{2} = \pm\sqrt{\frac{3}{4}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Se despeja x:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

Finalmente, los valores que resuelven la ecuación son:

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}; \quad x_2 = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}$$

7.6. Resolución de una ecuación de segundo grado con una incógnita por medio de la fórmula general

Dada una ecuación de segundo grado de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, pueden obtenerse sus raíces por medio de la fórmula general:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

de la que se obtienen los valores:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Con la aplicación directa de la fórmula general se cuenta con la ventaja de poder determinar qué tipo de raíces tiene la ecuación, calculando primero el valor del indicador o discriminante: $I = b^2 - 4ac$.

- Si $I > 0$ las raíces son reales, desiguales.
- Si $I = 0$ las raíces son reales, iguales.
- Si $I < 0$ las raíces son complejas.

Ejemplo 11

Resolver por fórmula la ecuación:

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

Solución

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-3)}}{2(1)} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2}$$

Se obtienen los valores:

$$x_1 = \frac{2 + 4}{2} = \frac{6}{2} = 3 \quad \therefore \; x_1 = 3$$

$$x_2 = \frac{2 - 4}{2} = -\frac{2}{2} = -1 \quad \therefore \; x_2 = -1$$

Los valores $x_1 = 3$ y $x_2 = -1$ resuelven la ecuación.

7.7. Resolución de ecuaciones de segundo grado con una incógnita por factorización

Caso 1. Dado $ax^2 + bx + c = 0$, $c = 0 \Rightarrow ax^2 + bx = 0$
Al factorizar se obtiene:

$$x(ax + b) = 0$$

lo que equivale a dos ecuaciones lineales, pues un producto es cero sólo si alguno de sus factores es cero.

Primera solución:

$$x_1 = 0$$

Segunda solución:

$$ax + b = 0 \Rightarrow x_2 = -\frac{b}{a}$$

Ejemplo 12

Resolver la ecuación:

$$2x^2 + 6x = 0$$

Solución

Factorizamos:

$$x(2x + 6) = 0$$

Primera solución:

$$x_1 = 0$$

Segunda solución:

$$2x + 6 = 0 \Rightarrow x_2 = -\frac{6}{2} = -3$$

Los valores $x_1 = 0$ y $x_2 = -3$ resuelven la ecuación.

Caso 2. Dado $ax^2 + bx + c = 0$, $b = 0 \Rightarrow ax^2 + c = 0$; o sea:

$$x^2 = -\frac{c}{a} \Rightarrow x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

Si a y c tiene el mismo signo, las raíces son imaginarias. Si a y c tienen signos contrarios, las raíces son reales y simétricas.

Ejemplo 13

Resolver la ecuación:

$$6x^2 - 24 = 0$$

Solución

$$x^2 = \frac{24}{6} = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$$

$$x_1 = -2 \quad \text{y} \quad x_2 = 2$$

Los valores $x_1 = -2$ y $x_2 = 2$ satisfacen la ecuación dada.

Ejemplo 14

La longitud de un terreno rectangular es el doble que su ancho. Si la longitud se aumenta en 40 m y el ancho en 6 m el área se duplica. Encontrar las dimensiones del terreno.

Solución

Sea x igual al ancho del terreno. Entonces $2x$ es igual a la longitud del terreno. Por tanto, el área del terreno es $(x)(2x) = 2x^2$. Si aumentamos su longitud en 40 m tenemos $(2x + 40)$. Si aumentamos el ancho en 6 m queda $(x + 6)$. El área es ahora

$$(2x + 40)(x + 6) = 2x^2 + 52x + 240$$

Sin embargo, dadas las condiciones del problema, esta área debe ser el doble que la anterior $2x^2$.

Entonces:

$$2x^2 + 52x + 240 = 4x^2$$

Trasponemos y reducimos:

$$-2x^2 + 52x + 240 = 0$$

Cambiamos signos y dividimos entre 2.

$$x^2 - 26x - 120 = 0$$

Al resolver la ecuación se obtiene:

$$x_1 = 30 \quad \text{y} \quad x_2 = -4$$

Tomamos la solución $x_1 = 30$, pues una medida de longitud nunca es negativa. Así, el ancho del terreno es 30 m y la longitud es $2x = 60$ m.

7.8. Sistemas de ecuaciones de primer grado

Sistema de ecuaciones es la reunión de dos o más ecuaciones con dos o más incógnitas. Así:

$$2x + 3y = 13 \qquad 4x - y = 5$$

es un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.

Solución de un sistema de ecuaciones es un grupo de valores de las incógnitas que satisfacen todas las ecuaciones del sistema.

La solución del sistema anterior es: $x_1 = 2$, $y_1 = 3$.

Un sistema de ecuaciones es *compatible* cuando tiene solución y es *incompatible* cuando no la tiene. Un sistema compatible es *determinado* cuando tiene una sola solución e *indeterminado* cuando tiene una infinidad de soluciones.

Para resolver un sistema de dos ecuaciones simultáneas de primer grado con dos incógnitas es necesario obtener de las dos ecuaciones dadas una sola ecuación con una incógnita. Esta operación se llama *eliminación*.

Los métodos de eliminación más usuales son tres: igualación, sustitución y reducción; éste último se llama también de suma y resta.

Método de igualación

Dado el sistema de ecuaciones, se despeja cualquiera de las incógnitas de ambas ecuaciones y se igualan entre sí los valores obtenidos, con lo que resulta una ecuación con una incógnita. Se resuelve esta ecuación y el valor que la satisface se sustituye en cualquiera de las ecuaciones dadas, generalmente en la más sencilla, para obtener así el valor de la otra incógnita.

Ejemplo 15

Resolver el sistema:

$$7x + 4y = 13$$
$$5x - 2y = 19$$

Solución

Se despeja x de ambas ecuaciones:

$$7x = 13 - 4y \quad \therefore x = \frac{13 - 4y}{7}$$

$$5x = 19 + 2y \quad \therefore x = \frac{19 + 2y}{5}$$

Se igualan los valores de x obtenidos:

$$\frac{13 - 4y}{7} = \frac{19 + 2y}{5}$$

Resulta entonces una sola ecuación con una incógnita.

Se resuelve la ecuación:

$$5(13 - 4y) = 7(19 + 2y)$$

$$65 - 20y = 133 + 14y \Rightarrow -20y - 14y = 133 - 65$$

$$\therefore -34y = 68; \qquad y = -2$$

Se sustituye este valor de y en cualquiera de las ecuaciones del sistema dado

$$7x + 4(-2) = 13 \qquad 7x - 8 = 13$$

$$7x = 21 \qquad \therefore x = 3$$

La solución del sistema es entonces:

$$x = 3; \qquad y = -2$$

Método de sustitución

Dado el sistema de ecuaciones, se despeja cualquiera de las incógnitas de una de ellas, y al sustituir este valor en la ecuación restante resulta una ecuación con una incógnita. Se resuelve esta ecuación y el valor que la satisface se sustituye en cualquiera de las ecuaciones dadas, para obtener así el valor de la otra incógnita.

Ejemplo 16

Resolver el sistema

$$\begin{aligned} 2x + 5y &= -24 \\ 8x - 3y &= 19 \end{aligned}$$

Solución

Se despeja una de las incógnitas de una de las ecuaciones dadas:

$$2x = -24 - 5y \qquad \therefore\ x = \frac{-24 - 5y}{2}$$

Este valor se sustituye en la otra ecuación:

$$8\frac{-24 - 5y}{2} - 3y = 19$$

y se obtiene una sola ecuación con una incógnita.

Se resuelve la ecuación:

$$4(-24 - 5y) - 3y = 19; \qquad -96 - 20y - 3y = 19$$

$$-23y = 96 + 19; \qquad -23y = 115$$

$$\therefore\ y = -\frac{115}{23}; \qquad y = -5$$

Se sustituye $y = -5$ en cualquiera de las ecuaciones dadas:

$$2x + 5(-5) = -24; \qquad 2x - 25 = -24$$

$$2x = 1 \qquad \therefore\ x = \frac{1}{2}$$

La solución del sistema es:

$$x = \frac{1}{2}; \qquad y = -5$$

Método de reducción

En este método se igualan los coeficientes de una de las incógnitas sumando o restando, según convenga, una ecuación de la otra para eliminar una de las incógnitas y así obtener una ecuación con una sola incógnita. Se resuelve esta ecuación y el valor que la satisface se sustituye en cualquiera de las ecuaciones dadas, para obtener el valor de la otra incógnita.

Ejemplo 17

Resolver el sistema:

$$\begin{aligned} 5x + 6y &= 20 \\ 4x - 3y &= -23 \end{aligned}$$

Solución

Se igualan los coeficientes de una de las incógnitas. Se escoge y, pues en este caso resulta lo más sencillo. Se multiplica la segunda ecuación por 2 y se obtiene:

$$\begin{aligned} 5y + 6y &= 20 \\ 8x - 6y &= -46 \end{aligned}$$

Como los coeficientes de y que se han igualado tienen signos distintos, se suman estas ecuaciones, porque con ello se elimina y:

$$\begin{array}{r} 5x + 6y = 20 \\ 8x - 6y = -46 \\ \hline 13x = -26 \end{array}$$

De aquí:

$$13x = -26 \qquad \therefore\ x = -\frac{26}{13} = -2$$

Al sustituir $x = -2$ en la primera de las ecuaciones dadas (puede ser en cualquiera de ellas) se tiene:

$$5(-2) + 6y = 20; \qquad -10 + 6y = 20; \qquad 6y = 30 \qquad \therefore\ y = 5$$

La solución del sistema es:

$$x = -2; \qquad y = 5$$

Ejemplo 18

La diferencia de dos números es 14, y un cuarto de su suma es 13. Encontrar estos números.

Solución

$$x = \text{número mayor}; \qquad y = \text{número menor}$$

De acuerdo con las condiciones del problema se tiene el sistema:

$$\begin{aligned} x - y &= 14 \\ \frac{x + y}{4} &= 13 \end{aligned}$$

Resolvemos el sistema:

$$\begin{array}{r} x - y = 14 \\ x + y = 52 \\ \hline 2x \qquad = 66 \end{array} \qquad \therefore\ x = 33$$

Sustituimos $x = 33$ en cualquiera de las ecuaciones:

$$33 - y = 14 \qquad \therefore\ y = 19$$

Así los números buscados son 33 y 19.

7.9. Determinantes

Un *determinante* de orden n, designado por Δ_n, se representa por un arreglo en forma de cuadrado de n^2 cantidades llamadas elementos, dispuestos en n renglones y n columnas, como se muestra

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \dots & l_1 \\ a_2 & b_2 & \dots & l_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & b_n & \dots & l_n \end{vmatrix}$$

Se acostumbra encerrar este arreglo entre dos líneas rectas verticales.

Ya que n representa el *orden* de un determinante, se dice que un determinante de segundo orden tendrá dos renglones y dos columnas; un determinante de tercer orden tres filas y tres columnas, y así sucesivamente.

Un determinante de segundo orden se representa como:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

Donde los elementos a_1 y b_2 forman la diagonal principal. El valor de Δ_2 se define como el producto de los elementos en la diagonal principal, menos el producto de los elementos en la otra diagonal. Es decir, por definición:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

El segundo miembro de esta igualdad se llama *desarrollo de* Δ_2.

Ejemplo 19

Resolver el siguiente determinante de segundo orden:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}$$

Solución.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = 2(1) - (-4)(3) = 2 + 12 = 14$$

Un determinante de tercer orden se representa como:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

El modo más sencillo de hallar el valor de un determinante de tercer orden es aplicando la *Regla de Sarrus*. Esta sencilla regla se explicará por medio de un ejemplo.

Ejemplo 20

Resolver el siguiente determinante por la Regla de Sarrus.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -4 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

Pasos a seguir

a) Debajo del tercer renglón se repiten los dos primeros renglones:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -4 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & -3 \\ -4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

b) Se trazan tres diagonales de derecha a izquierda y tres de izquierda a derecha, como se indica a continuación:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -4 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & -3 \\ -4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

c) Se multiplican entre sí los tres números por los que pasa cada diagonal.
d) Los productos de los números comprendidos en las diagonales trazadas de izquierda a derecha se escriben con su propio signo.
e) Los productos de los números que comprenden las diagonales trazadas de derecha a izquierda se anotan con el signo cambiado. Así:

$$\begin{aligned}&(1)(2)(3) + (-4)(-1)(-3) + (5)(-2)(1)\\ &-(-3)(2)(5) - (1)(-1)(1) - (3)(-2)(-4)\\ &= 6 + (-12) + (-10) - (-30) - (-1) - (24)\\ &= 6 - 12 - 10 + 30 + 1 - 24\\ &= -9\end{aligned}$$

Ejercicios

Resuelva:

1. $8x + 9 - 12x = 4x - 13 - 5x$

2. $x + 3(x - 1) = 6 - 4(2x + 3)$

3. $(x - 4)(2x + 5) = (2x + 3)(x - 4) + 5$

4. $\dfrac{3x}{5} - \dfrac{2x}{3} + \dfrac{1}{5} = 0$

5. $\left(3 - \dfrac{x}{2}\right) - \left(1 - \dfrac{x}{3}\right) = 7 - \left(x - \dfrac{x}{2}\right)$

6. $\dfrac{5}{1 + x} - \dfrac{3}{1 - x} - \dfrac{6}{1 - x^2} = 0$

7. $\dfrac{10x - 7}{15x + 3} = \dfrac{3x + 8}{12} - \dfrac{5x^2 - 4}{20x + 4}$

8. $(m + 4x)(3m + x) = (2x - m)^2 + m(15x - m)$

9. $\dfrac{x + a}{3} = \dfrac{(x - b)^2}{3x - a} + \dfrac{3ab - 3b^2}{9x - 3a}$

10. A tiene 14 años menos que B, y ambas edades suman 56 años. ¿Qué edad tiene cada uno?

11. Reparta \$310.00 entre 3 personas de modo que la segunda reciba \$20.00 menos que la primera y \$40.00 más que la tercera.

12. Una pluma y un lapicero costaron 18 dólares. Si la pluma hubiera costado 6 menos y el lapicero 4 más, habrían costado lo mismo. ¿Cuánto costó cada uno?

13. Divida 260 en dos partes tales que el duplo de la mayor dividido entre el triple de la menor, dé 2 de cociente y 40 de residuo.

14. Una persona tenía cierta suma de dinero. Gastó \$20.00 y prestó dos terceras partes de lo que le quedaba. Si ahora tiene \$10.00. ¿Cuánto tenía al principio?

15. *Resuelva la siguiente ecuación completando cuadrados.*

$$4x^2 + 3x - 22 = 0$$

16. *Resuelva la siguiente ecuación por la fórmula general.*

$$5x^2 - 7x - 90 = 0$$

17. *Resuelva:*

$$5x^2 - 9 = 46$$

18. $x^2 - 3x = 3x^2 - 4x$

19. A tiene 3 años más que B, y el cuadrado de la edad de A aumentado en el cuadrado de la edad de B equivale a 317 años. Determine ambas edades.

20. *Resuelva por el método de igualación el sistema*

$$\begin{aligned} 3x + 5y &= 7 \\ 2x - y &= -4 \end{aligned}$$

21. *Resuelva por el método de sustitución el sistema*

$$\begin{aligned} 32x - 25y &= 13 \\ 16x + 15y &= 1 \end{aligned}$$

22. *Resuelva por el método de reducción el sistema*

$$\begin{aligned} 9x + 7y &= -4 \\ 11x - 13y &= -48 \end{aligned}$$

23. Un cuarto de la suma de dos números es 45 y un tercio de su diferencia es 4. Determine los números.

Resuelva los siguientes determinantes:

24. $\begin{vmatrix} 7 & 9 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}$

25. $\begin{vmatrix} 9 & -11 \\ -3 & 7 \end{vmatrix}$

26. $\begin{vmatrix} -5 & -8 \\ -19 & -21 \end{vmatrix}$

27. $\begin{vmatrix} 31 & -85 \\ -20 & 43 \end{vmatrix}$

28. $\begin{vmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 7 \end{vmatrix}$

29. $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 6 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$

30. $\begin{vmatrix} 12 & 5 & 10 \\ 8 & -6 & 9 \\ 7 & 4 & -2 \end{vmatrix}$

31. *Relacione las expresiones de la columna de la izquierda con las de la derecha, según convenga.*

a) Expresión en la cual dos cantidades algebraicas tienen el mismo valor:	( ) Identidad.
b) Igualdad en la que hay una o varias incógnitas y que se verifica para determinados valores de las incógnitas:	( ) Trasposición de términos.
c) Igualdad que se verifica para cualquier valor de las letras que intervienen en ella:	( ) Ecuación incompleta de segundo grado.
d) Los valores de las incógnitas que verifican o satisfacen la ecuación se llaman:	( ) $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$

e) Acción de cambiar los términos de una ecuación de un miembro a otro:	( )	Resolver un sistema de ecuaciones.
f) A toda ecuación en la cual, una vez simplificada, el mayor exponente de la incógnita es 2 se le llama:	( )	Igualdad.
g) A la ecuación $ax^2 + c = 0$ se le llama:	( )	Raíces o soluciones de la ecuación.
h) Aplicación de la fórmula: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	( )	Obtener las raíces de una ecuación de segundo grado.
i) Un sistema de ecuaciones es:	( )	Resolver un determinante de tercer orden.
j) Determinante de segundo orden:	( )	Ecuación.
k) La Regla de Sarrus es para:	( )	Ecuación de segundo grado.
	( )	La reunión de dos o más ecuaciones con dos o más incógnitas.

MÓDULO 8. DESIGUALDADES E INECUACIONES DE UNA VARIABLE

Objetivos específicos

Al finalizar el estudio de este módulo, el alumno:

- *Identificará los conceptos de desigualdad, desigualdad absoluta e inecuación.*
- *Resolverá problemas aplicando las propiedades de las desigualdades.*
- *Dada una inecuación aplicará las propiedades de las desigualdades hasta obtener el dominio de la incógnita que contenga.*

Cuadro sinóptico

Propiedades de las desigualdades	
Se conserva el sentido de la desigualdad	*Se invierte el sentido de la desigualdad*
(1) $a > b \Rightarrow a \pm c > b \pm c$	(3) $a > b$ y $c < 0 \Rightarrow \begin{cases} ac < bc \\ \dfrac{a}{c} < \dfrac{b}{c} \end{cases}$
(2) $a > b$ y $c > 0 \Rightarrow \begin{cases} ac > bc \\ \dfrac{a}{c} > \dfrac{b}{c} \end{cases}$	
(4) $a > b$ y $c > d \Rightarrow a + c > b + d$	
(5) $a > b$ y $b > c \Rightarrow a > c$	(7) $a > b \Rightarrow \dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{b}$
(6) $\left.\begin{matrix} a, b, c, d > 0 \\ \text{y} \\ a > b \text{ y } c > d \end{matrix}\right\} \Rightarrow ac > bd$	
(8) $a > b$ y $n > 0 \Rightarrow \begin{cases} a^n > b^n \\ \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b} \end{cases}$	(9) $a < 0, b < 0$ y $a > b \Rightarrow$ $\Rightarrow a^n < b^n$ para n par

8.1. Generalidades

Desigualdad es una expresión que nos indica que una cantidad es mayor o menor que otra.

Los sentidos de una desigualdad son dos:

$>$ *mayor que*: $a > b$ (a mayor que b)

$<$ *menor que*: $b < a$ (b menor que a)

Se llama primer miembro de una desigualdad a la parte que está a la izquierda y segundo miembro a la que está a la derecha del signo de desigualdad.

8.2. Propiedades de las desigualdades

1. El sentido de una desigualdad no se altera si se suma o se resta la misma cantidad a ambos miembros.

$$a > b \Rightarrow a \pm c > b \pm c$$

2. El sentido de una desigualdad no se altera si ambos miembros se multiplican o dividen entre la misma cantidad positiva.

$$a > b \text{ y } c > 0 \Rightarrow \begin{cases} ac > bc \\ \dfrac{a}{c} > \dfrac{b}{c} \end{cases}$$

3. El sentido de una desigualdad se invierte si ambos miembros se multiplican o dividen entre la misma cantidad negativa.

$$a > b \text{ y } c < 0 \Rightarrow \begin{cases} ac < bc \\ \dfrac{a}{c} < \dfrac{b}{c} \end{cases}$$

4. Si se suman miembro a miembro dos desigualdades del mismo sentido, la suma da origen a una desigualdad del mismo sentido.

$$a > b \text{ y } c > d \Rightarrow a + c > b + d$$

5. Las desigualdades son transitivas.

$$a > b \text{ y } b > c \Rightarrow a > c$$

6. Si dos desigualdades entre números positivos tienen el mismo sentido, se pueden multiplicar miembro a miembro y los productos son desiguales en el mismo sentido.

$$\left.\begin{array}{c} a,\ b,\ c,\ d > 0 \\ \text{y} \\ a > b \text{ y } c > d \end{array}\right\} \Rightarrow ac > bd$$

7. Si en una desigualdad se sustituyen ambos miembros por sus recíprocos, se invierte su sentido.

$$a > b \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$$

8. Si los miembros de una desigualdad son positivos y se elevan a una misma potencia positiva, o se les extrae una misma raíz positiva, el signo de desigualdad no cambia.

$$a > b \text{ y } n > 0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a^n > b^n \\ \\ \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b} \end{array}\right.$$

9. Si los dos miembros de una desigualdad son negativos y se elevan a una misma potencia par positiva, el signo de la desigualdad cambia.

$$a < 0,\ b < 0 \text{ y } a > b \Rightarrow a^n < b^n \text{ para } n = 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ \ldots$$

8.3. Desigualdades absolutas

Una desigualdad absoluta es análoga a una identidad tal como: "Si a y b son números positivos desiguales, $a^3 + b^3 > a^2b + ab^2$".

Es posible demostrar una desigualdad absoluta mediante pasos lógicos, aplicando las propiedades de las desigualdades hasta lograr una desigualdad más sencilla y evidente. No es fácil averiguar los pasos que conviene seguir en la transformación de la desigualdad; sin embargo, con la práctica se adquiere destreza en el análisis.

Ejemplo 1

Demostrar la siguiente desigualdad:

Si a y b son positivos y diferentes, $a^3 + b^3 > a^2b + ab^2$

Solución

Partimos de la desigualdad dada y tratamos de llegar a un resultado conocido.

- Se factoriza el segundo miembro:

$$a^3 + b^3 > ab(a + b)$$

- Como a y b son positivos, $(a + b)$ es positivo y por lo tanto podemos dividir ambos miembros entre $(a + b)$ sin alterar el sentido de la desigualdad (véase el producto notable 8, sección 3.1).

$$a^2 - ab + b^2 > ab$$

- Se traspone ab al primer miembro:

$$a^2 - 2ab + b^2 > 0$$

- Se sustituye el primer miembro por su equivalente:

$$(a - b)^2 > 0$$

lo cual es evidentemente cierto para dos números positivos y diferentes.

La demostración de la desigualdad dada se obtiene ahora considerando los pasos anteriores en sentido inverso.

8.4. Inecuaciones de una variable

Inecuación es una desigualdad en la que hay una o más cantidades desconocidas (incógnitas), y que sólo se verifica para determinados valores de estas incógnitas.

Tal es el caso de la desigualdad $2x - 3 > x + 5$, que es una inecuación pues tiene "x" como incógnita y sólo se verifica para valores de $x > 8$.

Solución de inecuaciones. Resolver una inecuación es hallar los valores de las incógnitas que la satisfacen. La solución de inecuaciones se funda en las propiedades de las desigualdades expuestas al principio de este módulo, y en las consecuencias que de las mismas se derivan.

Ejemplo 2

Resolver la inecuación

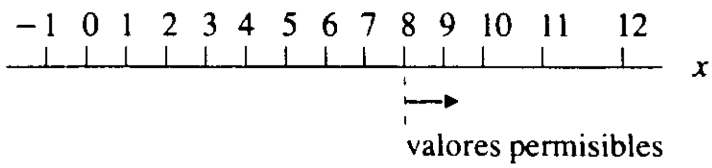
$$2x - 3 > x + 5$$

Solución

$$2x - x - 3 + 3 > x - x + 5 + 3$$

$$2x - x > 5 + 3$$

$$x > 8$$



Ejemplo 3

Resolver la inecuación

$$7 - \frac{z}{2} > \frac{5z}{3} - 6$$

Solución

Multiplicamos por 6:

$$42 - 3z > 10z - 36$$

Trasponemos:

$$-3z - 10z > -36 - 42$$

Reducimos:

$$-13z > -78$$

Invertimos el sentido:

$$13z < 78$$

Dividimos entre 13:

$$z < 6$$

Ejemplo 4

Resolver la inecuación

$$x^2 - 2x - 3 < 0$$

Solución

Se factoriza el primer miembro y queda:

$$(x + 1)(x - 3) < 0$$

Aquí se puede observar que la expresión $x^2 - 2x - 3$ vale cero si $x = -1$ o si $x = 3$. Para cualquier valor de x diferente de -1 o 3, el primer miembro es positivo o negativo; es decir, es mayor que cero o menor que cero:

Es mayor que cero cuando los dos factores $(x + 1)$ y $(x - 3)$ tienen el mismo signo, y es menor que cero cuando los signos de esos factores son distintos; nos interesa el último caso.

Para que dichos factores tengan signos distintos hay en principio dos posibilidades; una de ellas es:

$$x + 1 < 0; \quad x - 3 > 0$$

Ahora bien:

$$x + 1 < 0 \Rightarrow x < -1$$
$$x - 3 > 0 \Rightarrow x > 3$$

Pero, como se observa, estas condiciones no pueden ser satisfechas en forma simultánea por ningún número x.

La otra posibilidad es:

$$x + 1 > 0; x - 3 < 0$$

$$x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1$$
$$x - 3 < 0 \Rightarrow x < 3$$

Estas condiciones sí pueden ser satisfechas en forma simultánea. Por tanto, la solución es:

$$-1 < x < 3$$

Ejercicios

Resuelva las siguientes inecuaciones:

1. $2x - 2 > \frac{8}{3}x - 6$

2. $\frac{1}{4}(x + 10) > \frac{2}{3}x + 5$

3. $3x - 4 + \frac{x}{4} < \frac{5x}{2} + 2$

4. $\frac{1}{2}(3x + 7) < \frac{7}{3}x - 4$

5. $x^2 - 4x + 3 < 0$

6. $x^2 - x - 6 < 0$

MÓDULO 9. VALOR ABSOLUTO

Objetivos específicos

Al terminar el estudio de este módulo, el alumno:

- *Explicará el concepto de valor absoluto.*
- *Enunciará las propiedades elementales del valor absoluto.*
- *Resolverá una ecuación de una variable que contenga valor absoluto obteniendo el conjunto solución.*
- *Resolverá una inecuación de una variable que contenga valor absoluto obteniendo el conjunto solución.*

Cuadro sinóptico

Definición de valor absoluto
$\lvert a \rvert = a$ si $a \geq 0$
$\lvert a \rvert = -a$ si $a < 0$

Propiedades elementales
$\lvert a \rvert \geq 0$ (el valor absoluto nunca es negativo)
$\lvert a \rvert = 0$ implica $a = 0$.
$\lvert a \rvert^2 = a^2$
$+\sqrt{a^2} = \lvert a \rvert$

Propiedades del valor absoluto para los números reales
$\lvert x \rvert \leq b$ implica $-b \leq x \leq b$
$\lvert x - a \rvert \leq b$ implica $-b \leq x - a \leq b$
$\lvert x - a \rvert \leq b$ implica $a - b \leq x \leq a + b$
$\lvert x \rvert \geq b$ implica $x \leq b$ o $x \geq b$
$\lvert a + b \rvert \leq \lvert a \rvert + \lvert b \rvert$
$\lvert a + b \rvert = \lvert a \rvert + \lvert b \rvert$ implica que a y b tienen igual signo
$\lvert a + b \rvert < \lvert a \rvert + \lvert b \rvert$ implica que a y b tienen signos opuestos
$\lvert ab \rvert = \lvert a \rvert \, \lvert b \rvert$

9.1. Generalidades

El *valor absoluto* o *valor numérico* de cualquier número real a se representa con $|a|$ y se define:

$$|a| = a \quad \text{si} \quad a \geq 0$$
$$|a| = -a \quad \text{si} \quad a < 0$$

Note que el valor absoluto de cualquier número distinto de cero es positivo.

Ejemplo 1

a) $|3| = 3$

b) $|-7| = 7$

c) $|0| = 0$

9.2. Propiedades del valor absoluto

Las principales propiedades del valor absoluto son las siguientes:

Para todo número real a se tiene:

1. $|a| \geq 0$ o sea, que el valor absoluto nunca es negativo.
2. $|a| = 0$ implica $a = 0$
3. $|a|^2 = a^2$
4. $+\sqrt{a^2} = |a|$
5. $-|a| \leq a \leq |a|$

Ejemplo 2

a) $|2|^2 = 2^2 = 4$

b) $+\sqrt{6^2} = |6| = 6$

c) $+\sqrt{(-11)^2} = +\sqrt{121} = |11| = 11$

d) Para $a = 4$, la propiedad 5 queda:

$$-|4| \leq 4 \leq |4| \quad \text{esto es:} \quad -4 < 4 = 4$$

Además de las propiedades anteriores del valor absoluto, se tiene que para cualesquiera números reales a, x y b, con $b \geq 0$,

6. $|x| \leq b$ implica $-b \leq x \leq b$

7. $|x - a| \leq b$ implica $-b \leq x - a \leq b$

8. $|x - a| \leq b$ implica $a - b \leq x \leq a + b$

9. $|x| \geq b$ implica $x \leq -b$, o bien, $x \geq b$

Ejemplo 3

a) $|x| \leq 5$ es verdadera si y solamente si: $-5 \leq x \leq 5$

b) $|x - 4| \leq 9$ es verdadera si y solamente si: $-9 \leq x - 4 \leq 9$

c) $|x - 3| \leq 2$ es verdadera si y solamente si: $3 - 2 \leq x \leq 3 + 2$ esto es, $1 \leq x \leq 5$

d) $|x| \geq 7$ es verdadera si y solamente si: $x \leq -7$, o bien si: $x \geq 7$

El valor absoluto cumple también la propiedad:

10. El valor absoluto de la suma de dos números reales a y b es menor o igual que la suma de sus valores absolutos.

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

Ejemplo 4

a) Si $a = 5$ y $b = 3$,

$$|a + b| = |5 + 3| = |8| = 8$$

$$|a| = |5| = 5,\ |b| = |3| = 3 \text{ y } |a| + |b| = 5 + 3 = 8$$

En este caso en que: $a > 0$ y $b > 0$,

$$|5 + 3| = |5| + |3|$$

b) Si $a = 7$ y $b = -9$,

$$|a + b| = |7 + (-9)| = |7 - 9| = |-2| = 2$$

$$|a| = |7| = 7,\ |b| = |-9| = 9 \text{ y } |a| + |b| = 7 + 9 = 16;$$

$$2 < 16$$

En este caso en que: $a > 0$ y $b < 0$,

$$|7 + (-9)| < |7| + |-9|$$

c) Tomando $a = -10$, $b = 13$,

$$|a + b| = |-10 + 13| = |3| = 3$$

$$|a| + |b| = |-10| + |13| = 10 + 13 = 23;$$

$$3 < 23$$

o sea que:

$$|-10 + 13| < |-10| + |13|$$

d) Para $a = -4$ y $b = -1$,

$$|a + b| = |-4 + (-1)| = |-4 - 1| = |-5| = 5$$

$$|a| + |b| = |-4| + |-1| = 4 + 1 = 5$$

$$|-4 + (-1)| = |-4| + |-1|$$

Puede observarse que si dos números reales a y b tienen el mismo signo, entonces $|a + b| = |a| + |b|$, y si tienen signos contrarios entonces $|a + b| < |a| + |b|$.

Por último, otra propiedad del valor absoluto es:

11. El valor absoluto del producto de dos números reales a y b es igual al producto de sus valores absolutos.

$$|ab| = |a|\,|b|$$

Ejemplo 5

a) Si $a = 8$ y $b = 3$,

$$|ab| = |8(3)| = |24| = 24$$

$$|a|\,|b| = |8|\,|3| = 8(3) = 24$$

$$\therefore\ |8(3)| = |8|\,|3|$$

b) Para $a = -11$ y $b = 4$,

$$|ab| = |(-11)4| = |-44| = 44$$

$$|a|\,|b| = |-11|\,|4| = (11)4 = 44$$

$$\therefore\ |(-11)4| = |-11|\,|4|$$

c) Si $a = -3$ y $b = -9$,

$$|(-3)(-9)| = |27| = 27$$

$$|-3|\,|-9| = 3(9) = 27$$

$$|(-3)(-9)| = |-3|\,|-9|$$

Ejemplo 6

Resolver la ecuación:

$$|x - 3| = 5$$

Solución

Por la definición de valor absoluto, la expresión $|a| = b$ (con $b \geq 0$) es verdadera si y solamente si $a = -b$ o $a = b$, por lo cual

$$|x - 3| = 5 \text{ implica } x - 3 = 5 \text{ o } x - 3 = -5$$

Al despejar x:

$$x_1 = 8;\ x_2 = -2$$

son las soluciones de la ecuación $|x - 3| = 5$.

Comprobación:

Para $x_1 = 8$

$$|8 - 3| = 5; \ |5| = 5; \ 5 = 5$$

Para $x_2 = -2$

$$|-2 - 3| = 5; \ |-5| = 5; \ 5 = 5$$

Ejemplo 7

Resolver la desigualdad $|x - 2| \leq 4$ y expresar la solución como un intervalo (es decir, como una expresión del tipo $a \leq x \leq b$).

Solución

La expresión $|x - 2| \leq 4$ es verdadera si y solamente si

$$-4 \leq x - 2 \leq 4$$

por lo cual

$$2 - 4 \leq x \leq 2 + 4$$

esto es:

$$-2 \leq x \leq 6$$

Ejemplo 8

Resolver la desigualdad:

$$|x - 4| > 3$$

Solución

$|x - 4| > 3$ es verdadera si y solamente si

$$x - 4 < -3 \qquad \text{o} \qquad x - 4 > 3$$

La proposición

$$x - 4 < -3$$

es equivalente a

$$x < 1$$

y la proposición

$$x - 4 > 3$$

es equivalente a

$$x > 7$$

entonces la solución de la desigualdad $|x - 4| > 3$ es

$$x < 1 \text{ o } x > 7$$

Ejemplo 9

Resolver la ecuación:

$$|3x + 2| = 5 - x$$

Solución

La ecuación propuesta implica

$$3x + 2 = 5 - x \qquad \text{o} \qquad 3x + 2 = -(5 - x)$$

Se resuelve la primera ecuación:

$$3x + 2 = 5 - x$$

$$4x = 3$$

$$x = \frac{3}{4}$$

Ahora se resuelve la segunda:

$$3x + 2 = -(5 - x)$$

$$3x + 2 = -5 + x$$

$$2x = -7$$

$$x = -\frac{7}{2}$$

Por tanto, las soluciones de la ecuación propuesta son:

$$x_1 = \frac{3}{4} \qquad \text{y} \qquad x_2 = -\frac{7}{2}$$

Ejercicios

Resuelva las ecuaciones:

1. $|x - 4| = 3$

2. $|2x + 3| = 4 - x$

3. $|3 - x| = |1 + x|$

4. $|x + 4| = |x + 2|$

Resuelva las desigualdades siguientes y exprese su solución en la forma $a \leq x \leq b$ o en la forma $a < x < b$, según el caso.

5. $|x| \leq 5$

6. $|3x| < 27$

7. $|x - 2| \leq 1$

8. $|2x - 3| < 5$

Resuelva las desigualdades:

9. $|2x| > 8$

10. $|x - 1| \geq 5$

11. $|3x - 5| > 4$

MÓDULO 10. LOGARITMOS

Objetivos específicos

Al terminar el estudio de este módulo, el alumno:

- *Dado un número real positivo obtendrá su logaritmo decimal o natural en tablas.*
- *Dado un número logarítmico obtendrá su antilogaritmo en tablas.*
- *Empleando logaritmos efectuará operaciones aritméticas de multiplicación, división, potenciación y radicación; simples y combinadas.*

Cuadro sinóptico

Logaritmos	*Decimales o de base 10*	*a*) La parte entera es la característica. *b*) La parte decimal es la mantisa; se obtiene por medio de tablas. *c*) El número que corresponde a un logaritmo dado es el antilogaritmo.
	Naturales o de base e	A diferencia de los logaritmos decimales, la característica y la mantisa de los logaritmos naturales se obtienen por medio de las tablas.

10.1. Generalidades

Para toda base positiva "b" con $b \neq 1$ y para todo número positivo "y" existe un número real "x" tal que:

$$b^x = y \tag{1}$$

A tal número "x" se le denomina *logaritmo de base "b" del número "y"*; lo cual se expresa:

$$x = \log_b y \tag{2}$$

Existen tantos sistemas logarítmicos como bases se pueden tomar; sin embargo, los más usuales son los logaritmos decimales (base 10) y los logaritmos naturales (base e).

Componentes de un logaritmo. Todo número logarítmico se compone de una parte entera llamada *característica* y una parte decimal llamada *mantisa*. La mantisa es siempre positiva, a diferencia de la característica, que puede ser negativa, lo cual se indica con una raya o "testa": $\overline{3}$, $\overline{10}$, etcétera.

Ejemplo 1

Dada una ecuación logarítmica obtener el dato faltante.

a) Si $3 = \log_2 y$, $y = ?$

$3 = \log_2 y \Rightarrow 2^3 = y$; como $2^3 = 8$, entonces $y = 8$

b) Si $x = \log_3 81$, $x = ?$

$x = \log_3 81 \Rightarrow 3^x = 81$; como $3^4 = 81$, entonces $x = 4$

c) Si $4 = \log_b \frac{1}{16}$; $b = ?$

$4 = \log_b \frac{1}{16} \Rightarrow b^4 = \frac{1}{16}$; como $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$, entonces $b = \frac{1}{16}$

10.2 Logaritmos decimales o de base 10

El sistema logarítmico de base 10 presenta la ventaja de que su característica es fácilmente determinable, y la mantisa que se obtiene en tablas es la misma para todos los números cuya única diferencia es la colocación del punto decimal, tales como 5.7349,5734.9,0.00057349, etcétera.

Notación. Este sistema logarítmico se denota:

$$\log_{10} y = x \quad \text{asociado a} \quad 10^x = y$$

Aunque para base 10 también se acostumbra omitir la base:

$$\log y = x \Rightarrow 10^x = y$$

Obtención de la característica. Si definimos como *posición de referencia* (*P.R.*) la ubicada entre los dos primeros dígitos significativos que forman un número, por ejemplo:

a) 3 ¦ 25.27 *P.* ¦ *R.* *b*) .009 ¦ 318 *P.* ¦ *R.* *c*) 01 ¦ 053.9 *P.* ¦ *R.* *d*) 9 ¦ .87 *P.* ¦ *R.*

Entonces, la característica del logaritmo en base 10 es igual al número de dígitos existentes entre la *P.R.* y el punto decimal; es positiva si el número es mayor que 1 y negativa en caso contrario.

Así pues, para los ejemplos anteriores las características son:

a) 2 *b*) $\bar{3}$ *c*) 3 *d*) 0

Obtención de la mantisa en las tablas. La mantisa del logaritmo se obtiene en las tablas, haciendo caso omiso del punto decimal, tomado ya en cuenta en la característica. Por ejemplo: Obtener el logaritmo del número 375.61. Evidentemente, la característica es 2; ahora bien, la mantisa se obtiene como sigue:

Tabla de logaritmos

N	0 1 2 3 4	5	6 7 8 9	*Partes proporcionales*								
				1	2	3	4	5	6	7	8	9
⋮	⋮	⋮	⋮									
37		5740							7			

$$\begin{array}{r} 5740 \\ +\ \ 7 \\ \hline 5747 \end{array} \quad \text{(Mantisa)}$$

$$\therefore \log 375.61 = 2.5747$$

Como se ve, sólo pueden ser consideradas cuatro cifras significativas de este número: dos en la columna N, una en el renglón y la última en las partes proporcionales e interpolándolas. Para los números que exceden a cuatro cifras significativas se considera una aproximación.

Ejemplo 2

Obtener los logaritmos siguientes:

a) $\log 153.14 = 2.1850$ (compruebe en tablas).

b) $\log 0.7263 = \bar{1}.8611$

c) $\log 3.562 = 0.5516$

d) $\log 0.000{,}010{,}01 = \bar{5}.0004$

e) $\log 1 = 0$

El proceso inverso a obtener el logaritmo de un número es encontrar su *antilogaritmo.* Así, si log 507.4 = 2.7053, entonces, antilog 2.7053 = 507.4.

Evidentemente, el proceso a seguir para la obtención del antilogaritmo corresponde con el seguido para la obtención del logaritmo de un número.

Sabemos que todo número logarítmico está compuesto de una característica y una mantisa, las cuales son ahora conocidas. La característica nos indica la posición del punto decimal respecto a nuestra útil posición de referencia (*P.R.*), situada entre las dos primeras cifras significativas del número. Para características positivas (*P.R.*) está a la izquierda del punto decimal, para negativas a la derecha.

La obtención de las cifras significativas que forman el número se hace a partir de la mantisa, la que es leída en las tablas de antilogaritmos. Para mayor claridad se obtiene aquí antilog 2.5152

La mantisa, que es .5152, leída en tablas:

Tabla de logaritmos

N	0 1 2 3 4	5	6 7 8 9	*Partes proporcionales* 1	2	3	4	5	6	7	8	9
⋮												
0.51		3273			2							

$$\begin{array}{r} 3273 \\ +\ 2 \\ \hline 3275 \end{array} \quad \text{(cifras significativas)}$$

Como la característica es 2, el punto decimal está dos dígitos a la derecha de la *P.R.*:

$$\begin{array}{r|l} 3 & 27.5 \\ P. & R. \end{array}$$

$$\text{antilog } 2.5152 = 327.5$$

Ejemplo 3

a) antilog $\bar{3}.2731 = 0.001875$ (compruebe en tablas).

b) antilog $0.4352 = 2.724$

c) antilog $4.9368 = 86\ 460$

d) antilog $9.3010 = 2\ 000\ 000\ 000$

10.3. Propiedades de los logaritmos

Las propiedades logarítmicas que se enuncian a continuación ayudan a efectuar operaciones aritméticas combinadas de cierta dificultad, convirtiéndolas en operaciones sencillas y prácticas.

- *Para un producto.* El logaritmo del producto de dos o más números positivos es igual a la suma de los logaritmos de dichos números.

$$\log_b[m \cdot n \cdot p] = \log_b m + \log_b n + \log_b p \tag{3}$$

- *Para un cociente.* El logaritmo del cociente de dos números positivos es igual a la diferencia del logaritmo del numerador menos el logaritmo del denominador.

$$\log_b\left(\frac{m}{n}\right) = \log_b m - \log_b n \tag{4}$$

- *Para una potencia.* El logaritmo de la enésima potencia de un número m positivo es igual a n veces el logaritmo del número.

$$\log_b (m^n) = n \log_b m \tag{5}$$

- *Para una raíz.* El logaritmo de la raíz enésima positiva real de un número, es igual a dividir el logaritmo del número entre el índice n de la raíz.

$$\log_b \sqrt[n]{m} = \frac{\log_b m}{n} \tag{6}$$

10.4 Reglas auxiliares para operaciones con logaritmos

Como sabemos, la mantisa y la característica de un logaritmo son independientes, lo cual provoca que las operaciones entre números logarítmicos sean diferentes a las que se realizan entre números reales. Probablemente es este el punto donde el estudiante encuentra mayores dificultades si no cuenta con una orientación adecuada. El propósito de este subtema es establecer reglas sencillas que permitan la fácil operación entre logaritmos.

Regla para la suma

Sume en forma independiente las mantisas y las características, sumando finalmente ambos resultados.

Ejemplo 4

a) $\bar{5}.9507 + 2.3010 = \bar{5} + 2 + .9507 + .3010 = \bar{3} + 1.2517 = \bar{2}.2517$

b) $4.3973 + 1.8792 = 4 + 1\ (.3973 + .8792) = 5 + 1.2765 = 6.2765$

Reglas para la resta

- Reste en forma independiente las mantisas y las características, sumando finalmente ambos resultados.
- Si la mantisa del minuendo es menor que la del sustraendo, complemente tomando una unidad de la característica del minuendo.

Ejemplo 5

a) $2.6799 - 2.3109 = 2 - 2 + (.6799 - .3109) = 0.3690$

b) $\bar{3}.0792 - 2.6091 = \bar{4} - 2 + (1.0792 - .6091) = \bar{6} + 0.4701 = \bar{6}.4701$

c) $\bar{1}.7868 - \bar{4}.7782 = \bar{1} - (\bar{4}) + (.7868 - .7782) = \bar{1} + 4 + 0.0086$

$= 3.\ 0086$

Regla para la multiplicación

Multiplique en forma independiente las mantisas y las características, sumando finalmente ambos resultados.

Ejemplo 6

a) $2(\bar{3}.9566) = 2(\bar{3} + 0.9566) = \bar{6} + 1.9132 = \bar{5}.9132$

b) $3(1.8574) = 3(1 + .8574) = 3 + 2.5722 = 5.5722$

Reglas para la división

- Divida en forma independiente las mantisas y las características, sumando finalmente ambos resultados.
- Si la característica no es exactamente divisible, compleméntela cediendo unidades a la mantisa y restándolas a la característica.

Ejemplo 7

a) $\frac{1}{2}(\bar{3}.9031) = \frac{1}{2}(\bar{4} + 1.9031) = \bar{2} + 0.9515 = \bar{2}.9515$

b) $\frac{1}{3}(7.8576) = \frac{1}{3}(6 + 1.8576) = 2 + 0.6192 = 2.6192$

Una vez comprendidos los métodos de operación de los logaritmos, pasaremos a efectuar dichas operaciones combinadas aplicando sus propiedades.

Ejemplo 8

Aplicando las propiedades de los logaritmos efectuar el producto k.

$$k = (735.92)(.000937)$$

Solución

Se aplica (3):

$$\log k = \log 735.92 + \log .000937 = 2.8668 + \bar{4}.9717$$

$$= 2 + \bar{4} + (.8668 + .9717) = \bar{2} + 1.8385 = \bar{1}.8385$$

Se toman antilogaritmos:

$$k = \text{antilog } \bar{1}.8385 = \underline{\underline{0.6895}}$$

Ejemplo 9

Efectuar la división aplicando las propiedades de los logaritmos.

$$k = 97690/687.5$$

Solución

Se aplica (4):

$$\log k = \log 97690 - \log 687.5 = 4.9898 - 2.8373 = 2.1525$$

Se toman antilogaritmos:

$$k = \text{antilog } 2.1525 = \underline{\underline{142.1}}$$

Ejemplo 10

Empleando las propiedades de los logaritmos efectuar la potencia.

$$k = (4.835)^{3.4}$$

Solución

Se aplica (5):

$$\log k = 3.4 \log 4.835 = 3.4(0.6843) = 2.3266$$

Se toman antilogaritmos:

$$k = \text{antilog } 2.3266 = \underline{\underline{212.1}}$$

Ejemplo 11

Calcular la raíz indicada por medio de las propiedades de los logaritmos.

$$k = \sqrt[7]{.009431}$$

Solución

Se aplica (6):

$$\log k = \frac{1}{7}\log .009431 = \frac{1}{7}(\bar{3}.9745) = \frac{1}{7}(\bar{7} + 4.9745) = \bar{1} + 0.71064 =$$

$$= \bar{1}.71064$$

Se toman antilogaritmos:

$$k = \text{antilog } \bar{1}.71064 = \underline{\underline{.5136}}$$

Ejemplo 12

Aplicando las propiedades de los logaritmos efectuar las operaciones indicadas.

$$k = \left[\frac{\sqrt[3]{0.0805}\,(17.39)^3}{(0.00905)^2\,(1108.5)}\right]^4$$

Solución

$$\log k = 4\left[\left(\frac{1}{3}\log 0.0805 + 3 \log 17.39\right) - \left(2 \log 0.00905 + \log 1108.5\right)\right]$$

$$\log k = 4\left[\left(\frac{1}{3}\right)(\bar{2}.9058) + 3(1.2402) - \left(2(\bar{3}.9566) + 3.0446\right)\right]$$

$$\log k = 4\left[\left(\frac{1}{3}(\bar{3} + 1.9058) + 3.7206\right) - \left(2(\bar{3} + .9566) + 3.0446\right)\right]$$

$$\log k = 4[(\bar{1} + 0.6352 + 3.7206) - (\bar{6} + 1.9132 + 3.0446)]$$

$$\log k = 4[(3.3558) - (\bar{2}.9578)] = 4(2 - \bar{2}) + 4(1.3558) - .9578)$$

$$\log k = 4(4) + 4(.3980) = 16 + 1.592 = 17.592$$

Se calculan antilogaritmos:

$$k = \text{antilog } 17.592$$

$$k = 390\ 800\ 000\ 000\ 000\ 000$$

10.5 Logaritmos naturales o de base e

El sistema logarítmico *natural* es aquel cuya base es el número e = 2.71828. . . Para este sistema adoptamos la notación siguiente:

$$\ln y = x \qquad \text{asociada a} \qquad e^x = y$$

A diferencia de los logaritmos decimales, tanto la mantisa como la característica de los logaritmos naturales se encuentran en tablas impresas. Dichas tablas contienen los logaritmos naturales de los números comprendidos entre 1 y 10, pudiéndose obtener el ln de cualquier número mediante su descomposición en potencias de 10.

Para ilustrar mejor estos conceptos y el manejo de las tablas véase lo siguiente:

$$\ln 862 = \ln 8.62 + 2 \ln 10; \quad \text{ya que } 862 = 8.62 \times 10^2$$

$$\ln .00862 = \ln 8.62 - 3 \ln 10; \quad \text{ya que } .00862 = 8.62 \times 10^{-3}$$

Ahora en las tablas:

N	1	2	3 4 5 6 7 8 9
8.6		2.1541	

m	$\ln 10^m$
1	2.3026
2	4.6052
3	6.9078
4	9.2103
5	11.5129

$$\therefore \quad \ln = 862 = \ln 8.62 + 2 \ln 10 = 2.1541 + 4.6052 = 6.7593$$

La única regla operacional que agregamos en este sistema es para el ln de un número comprendido entre cero y uno. Esta operación se realiza restando a la mantisa de la potencia de 10 la mantisa del número, y restando las características en el orden acostumbrado. Así:

$$\ln .0862 = \ln 8.62 - 2 \ln 10 = 2.1541 - 4.6052$$
$$= 2 - 4 + (.6052 - .1541) = \bar{2}.4511$$

Ejemplo 13

Obtener los logaritmos naturales indicados:

a) $\ln 1789 = \ln 1.789 + 3 \ln 10 = .5816 + 6.9078$

$\ln 1789 = \underline{\underline{7.4894}}$

b) $\ln .0000915 = \ln 9.15 - 5 \ln 10 = 2.2138 - 11.5129$

$= 2 - 11 + (.5129 - .2138) = \bar{9}.2991$

$\ln .0000915 = \underline{\underline{\bar{9}.2991}}$

c) $\ln .00237 = \ln 2.37 - 3 \ln 10 = 0.8629 - 6.9078$

$= 0 - 6 + (.9078 - .8629) = \bar{6}.0449$

$\ln .00237 = \underline{\underline{\bar{6}.0449}}$

Ejercicios

1. *Enuncie los conceptos que se indican en la siguiente expresión:*

$$\underline{\hspace{5cm}} \rightarrow r = \log_v z \leftarrow \underline{\hspace{3cm}}$$
$$\underline{\hspace{3cm}}$$

2. *Si* $r = \log_v z$, *elija la expresión correcta:*

   a) $r = z^v$ *b*) $z = v^r$ *c*) $v = r^z$

3. *Dadas las siguientes ecuaciones logarítmicas, obtenga el dato faltante.*

   a) $x = \log_6 1296$; $x = ?$

   b) $1 = \log_4 q$; $q = ?$

   c) $3 = \log_b \dfrac{1}{343}$; $b = ?$

4. *Obtenga los siguientes logaritmos:*

   a) $\log 2 =$

   b) $\log .0002 =$

   c) $\log 25376.8 =$

   d) $\log .8716 =$

5. *Determine los siguientes antilogaritmos:*

   a) antilog $\bar{6}.4753 =$

   b) antilog $8.2105 =$

c) antilog 0 =

d) antilog $\bar{1}.6927$ =

6. *Efectúe las siguientes operaciones:*

a) $\bar{3}.8517 + 2.2931 =$

b) $\bar{4}.1532 - 1.2745 =$

c) $\bar{2}.3927 - \bar{6}.4912 =$

d) $5(\bar{4}.8763) =$

e) $\dfrac{1}{4}(\bar{6}.2248) =$

f) $\dfrac{1}{5}(12.2675) =$

7. *Obtenga los siguientes logaritmos naturales:*

a) ln 4397 =

b) ln .000 395 =

c) ln .000 001 01 =

8. *Efectúe las operaciones indicadas, aplicando las propiedades de los logaritmos naturales:*

a) $k = \dfrac{(0.00749)(49.37)^2}{29.16}$

b) $k = \dfrac{\sqrt[3]{27.78}\sqrt{48.91}}{\sqrt[3]{.0018}}$

c) $k = \left[\dfrac{(1.001)^3(.0339)^2}{\sqrt[3]{99.99}\sqrt[4]{.0007}}\right]^4$

CALCULO DIFERENCIAL VECTORIAL

3

CAPITULO

Si t es una variable escalar, entonces una *función escalar* f asigna a cada t en algún intervalo un único escalar $f(t)$ llamado el *valor* de f en t. En general, la variable representa o tiempo o un conjunto de coordenadas.

Una *función vectorial* $\mathbf{f}$ de una sola variable escalar t asigna a cada t en algún intervalo un vector único $\mathbf{f}(t)$ llamado el *valor* de $\mathbf{f}$ en t.

En un sistema coordenado rectangular que sea independiente de una variable escalar t,

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(t) &= [f_1(t), f_2(t), f_3(t)] \\ &= f_1(t)\mathbf{i} + f_2(t)\mathbf{j} + f_3(t)\mathbf{k}, \qquad (3.1) \end{aligned}$$

donde $f_1(t)$, $f_2(t)$ y $f_3(t)$ son funciones escalares de t y se llaman las componentes de $\mathbf{f}(t)$.

3.1 Límites y continuidad de vectores

Sea $\mathbf{f}(t)$ una función vectorial definida para todos los valores de t en alguna vecindad de un punto t_0, excepto posiblemente para el valor t_0. Entonces $\mathbf{a}$ es el *vector límite* de $\mathbf{f}(t)$ cuando t se acerca a t_0 y se expresa como

$$\lim_{t \to t_0} \mathbf{f}(t) = \mathbf{a} \qquad (3.2)$$

si y sólo si, para cada número real $\epsilon > 0$, existe un número $\delta > 0$ tal que

$$|\mathbf{f}(t) - \mathbf{a}| < \epsilon \text{ siempre que } 0 < |t - t_0| < \delta.$$

Esta definición se vuelve la de límite de una función escalar si se reemplaza $\mathbf{f}(t)$ por una función escalar, y $\mathbf{a}$ por un escalar.

Una función vectorial $\mathbf{f}(t)$ se llama *continua* en $t = t_0$ si está definida en alguna vecindad de t_0 y

$$\lim_{t \to t_0} \mathbf{f}(t) = \mathbf{f}(t_0). \qquad (3.3)$$

Así que usando (3.2), $\mathbf{f}(t)$ es continua en $t = t_0$ si y sólo si, para $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que

$$|\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}(t_0)| < \epsilon \text{ siempre que } |t - t_0| < \delta.$$

PROBLEMA 3.1 Si $\mathbf{f} = f_1(t)\mathbf{i} + f_2(t)\mathbf{j} + f_3(t)\mathbf{k}$ y $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$, entonces demostrar que

$$\lim_{t \to t_0} \mathbf{f}(t) = \mathbf{a} \qquad (3.4)$$

si y sólo si

$$\lim_{t \to t_0} f_i(t) = a_i, \quad i = 1, 2, 3. \tag{3.5}$$

Solución: Si $\lim_{t \to t_0} \mathbf{f}(t) = \mathbf{a}$, entonces, para cada número real $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|\mathbf{f}(t) - \mathbf{a}| < \epsilon$ siempre que $0 < |t - t_0| < \delta$. Así que,

$$\mathbf{f}(t) - \mathbf{a} = [f_1(t) - a_1]\mathbf{i} + [f_2(t) - a_2]\mathbf{j} + [f_3(t) - a_3]\mathbf{k},$$

y para $0 < |t - t_0| < \delta$,

$$|f_i(t) - a_i| \leq |\mathbf{f}(t) - \mathbf{a}| < \varepsilon,$$

donde $i = 1, 2, 3$. Por consiguiente,

$$\lim_{t \to t_0} f_i(t) = a_i.$$

Recíprocamente, si $\lim_{t \to t_0} f_i(t) = a_i$, ($i = 1, 2, 3$) para cada $\epsilon > 0$, entonces existe $\delta > 0$ tal que $|f_i(t) - a_i| < \epsilon/3$ siempre que $0 < |t - t_0| < \delta$. Entonces usando la desigualdad del triángulo para valores absolutos,

$$\begin{aligned} |\mathbf{f}(t) - \mathbf{a}| &= |[f_1(t) - a_1]\mathbf{i} + [f_2(t) - a_2]\mathbf{j} + [f_3(t) - a_3]\mathbf{k}| \\ &\leq |f_1(t) - a_1| + |f_2(t) - a_2| + |f_3(t) - a_3| \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Por consiguiente, $\lim_{t \to t_0} \mathbf{f}(t) = \mathbf{a}$.

PROBLEMA 3.2 Demostrar que el límite de la suma de dos funciones vectoriales es la suma de sus límites; esto es, si $\lim_{t \to t_0} \mathbf{f}(t) = \mathbf{a}$ y $\lim_{t \to t_0} \mathbf{g}(t) = \mathbf{b}$, entonces

$$\lim_{t \to t_0} [\mathbf{f}(t) + \mathbf{g}(t)] = \mathbf{a} + \mathbf{b}. \tag{3.6}$$

Solución: Si $\lim_{t \to t_0} \mathbf{f}(t) = \mathbf{a}$ y $\lim_{t \to t_0} \mathbf{g}(t) = \mathbf{b}$, entonces para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para $0 < |t - t_0| < \delta$,

$$|\mathbf{f}(t) - \mathbf{a}| < \tfrac{1}{2}\,\varepsilon \quad \text{y} \quad |\mathbf{g}(t) - \mathbf{b}| < \tfrac{1}{2}\,\varepsilon.$$

Entonces, usando la desigualdad del triángulo para valores absolutos,

$$\begin{aligned} |[\mathbf{f}(t) + \mathbf{g}(t)] - (\mathbf{a} + \mathbf{b})| &= |[\mathbf{f}(t) - \mathbf{a}] + [\mathbf{g}(t) - \mathbf{b}]| \\ &\leq |\mathbf{f}(t) - \mathbf{a}| + |\mathbf{g}(t) - \mathbf{b}| \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Por consiguiente, $\lim_{t \to t_0} [\mathbf{f}(t) + \mathbf{g}(t)] = \mathbf{a} + \mathbf{b}$.

PROBLEMA 3.3 Si $\lim_{t \to t_0} \mathbf{f}(t) = \mathbf{a}$, y $\lim_{t \to t_0} \phi(t) = c$, entonces demostrar que

$$\lim_{t \to t_0} \phi(t)\mathbf{f}(t) = c\mathbf{a}. \tag{3.7}$$

Solución: Si $\lim_{t \to t_0} \mathbf{f}(t) = \mathbf{a}$ y $\lim_{t \to t_0} \phi(t) = c$, entonces para $0 < \epsilon' < 1$ (ϵ' se hallará después), existe $\delta > 0$ tal que para $|t - t_0| < \delta$, $|\mathbf{f}(t) - \mathbf{a}| < \epsilon'$ y $|\phi(t) - c| < \epsilon'$. Entonces,

$$|\phi(t)| = |c + [\phi(t) - c]| < |c| + \epsilon' < |c| + 1.$$

Escribiendo

$$\phi(t)\mathbf{f}(t) - c\mathbf{a} = \phi(t)\mathbf{f}(t) - \phi(t)\mathbf{a} + \phi(t)\mathbf{a} - c\mathbf{a}$$
$$= \phi(t)[\mathbf{f}(t) - \mathbf{a}] + [\phi(t) - c]\mathbf{a},$$

tenemos

$$|\phi(t)\mathbf{f}(t) - c\mathbf{a}| = |\phi(t)[\mathbf{f}(t) - \mathbf{a}] + [\phi(t) - c]\mathbf{a}|$$
$$\leq |\phi(t)|\,|\mathbf{f}(t) - \mathbf{a}| + |\phi(t) - c|\,|\mathbf{a}|$$
$$< (|c| + 1)\varepsilon' + \varepsilon'|\mathbf{a}|$$
$$= \varepsilon'(|c| + 1 + |\mathbf{a}|).$$

Así que escogiendo $\varepsilon' < \varepsilon/(|c| + 1 + |\mathbf{a}|)$ y también $\varepsilon' < 1$,

$$|\phi(t)\mathbf{f}(t) - c\mathbf{a}| < \varepsilon.$$

Por consiguiente,

$$\lim_{t\to t_0} \phi(t)\mathbf{f}(t) = c\mathbf{a}. \qquad [3.7]$$

Si $\mathbf{f}(t) = \mathbf{a}$ y $\lim_{t\to t_0} \phi(t) = c$, entonces (3.7) se reduce a

$$\lim_{t\to t_0} \phi(t)\mathbf{a} = c\mathbf{a}. \qquad (3.8)$$

PROBLEMA 3.4 Demostrar que una función vectorial $\mathbf{f}(t) = \mathbf{f}_1(t)\mathbf{i} + \mathbf{f}_2(t)\mathbf{j} + \mathbf{f}_3(t)\mathbf{k}$ es continua en t_0 si $f_i(t)$ $(i = 1, 2, 3)$ es continua en t_0.

Solución: Como $\mathbf{f}(t)$ es continua en $t = t_0$, tenemos que $\lim_{t\to t_0} \mathbf{f}(t) = \mathbf{f}(t_0)$. Otra vez $\mathbf{f}(t) = f_1(t)\mathbf{i} + f_2(t)\mathbf{j} + f_3(t)\mathbf{k}$; por consiguiente $\mathbf{f}(t_0) = f_1(t_0)\mathbf{i} + f_2(t_0)\mathbf{j} + f_3(t_0)\mathbf{k}$. Usando (3.6),

$$\lim_{t\to t_0} \mathbf{f}(t) = \lim_{t\to t_0} [f_1(t)\mathbf{i} + f_2(t)\mathbf{j} + f_3(t)\mathbf{k}]$$
$$= \lim_{t\to t_0} f_1(t)\mathbf{i} + \lim_{t\to t_0} f_2(t)\mathbf{j} + \lim_{t\to t_0} f_3(t)\mathbf{k}.$$

Como $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ son constantes, se sigue de (3.8),

$$\lim_{t\to t_0} \mathbf{f}(t) = \mathbf{i}\lim_{t\to t_0} f_1(t) + \mathbf{j}\lim_{t\to t_0} f_2(t) + \mathbf{k}\lim_{t\to t_0} f_3(t).$$

Por otra parte, $f_i(t)$ es continua en $t = t_0$. Por consiguiente,

$$\mathbf{i}\lim_{t\to t_0} f_1(t) + \mathbf{j}\lim_{t\to t_0} f_2(t) + \mathbf{k}\lim_{t\to t_0} f_3(t) = f_1(t_0)\mathbf{i} + f_2(t_0)\mathbf{j} + f_3(t_0)\mathbf{k}.$$

Entonces por la definición de igualdad de vectores,

$$\lim_{t\to t_0} f_i(t) = f_i(t_0), \quad \text{donde } i = 1, 2, 3$$

3.2 Diferenciación de vectores

La *derivada* $\mathbf{f}'(t)$ de una función vectorial $\mathbf{f}(t)$ se define por

$$\mathbf{f}'(t) = \frac{d\mathbf{f}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\mathbf{f}(t + \Delta t) - \mathbf{f}(t)}{\Delta t} \qquad (3.9)$$

El vector $\mathbf{f}(t)$ se dice también *diferenciable* y la derivada $\mathbf{f}'(t)$ es también una función vectorial. Así, si $\mathbf{f}(t) = f_1(t)\mathbf{i} + f_2(t)\mathbf{j} + f_3(t)\mathbf{k}$, entonces $\mathbf{f}'(t)$ existe si y sólo si las derivadas

$$f_i'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f_i(t + \Delta t) - f_i(t)}{\Delta t} \qquad (3.10)$$

de $f_i(t)$ ($i = 1, 2, 3$) existen y

$$\mathbf{f}'(t) = f_1'(t)\mathbf{i} + f_2'(t)\mathbf{j} + f_3'(t)\mathbf{k}. \qquad (3.11)$$

Las derivadas de orden superior de una función vectorial se definen de manera similar a la de una función escalar de una sola variable. Así,

$$\mathbf{f}''(t) = \frac{d^2\mathbf{f}(t)}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left[\frac{d\mathbf{f}(t)}{dt}\right], \qquad (3.12)$$

y así sucesivamente.

Del cálculo elemental, sabemos que una *función diferenciable es necesariamente continua pero el recíproco es falso.* Lo mismo puede decirse con respecto a una función vectorial debido a (3.11). A menos que se advierta lo contrario, en este libro consideraremos solamente aquellas funciones que sean diferenciables hasta cualquier orden que se requiera en una discusión particular.

Las reglas para diferenciación de funciones vectoriales son similares a las correspondientes para funciones escalares con una excepción. Para diferenciar el producto vectorial de funciones vectoriales, debe conservarse el orden de los factores, porque el producto vectorial no es una operación conmutativa.

Si $\mathbf{A}(t)$, $\mathbf{B}(t)$ y $\mathbf{C}(t)$ son funciones vectoriales diferenciables y $\phi(t)$ es una función escalar diferenciable, entonces

(1) $$\frac{d}{dt}[\mathbf{A}(t) + \mathbf{B}(t)] = \mathbf{A}'(t) + \mathbf{B}'(t), \qquad (3.13)$$

(2) $$\frac{d}{dt}[\phi(t)\,\mathbf{A}(t)] = \phi(t)\,\mathbf{A}'(t) + \phi'(t)\,\mathbf{A}(t), \qquad (3.14)$$

(3) $$\frac{d}{dt}[\mathbf{A}(t)\cdot\mathbf{B}(t)] = \mathbf{A}(t)\cdot\mathbf{B}'(t) + \mathbf{A}'(t)\cdot\mathbf{B}(t), \qquad (3.15)$$

(4) $$\frac{d}{dt}[\mathbf{A}(t)\times\mathbf{B}(t)] = \mathbf{A}(t)\times\mathbf{B}'(t) + \mathbf{A}'(t)\times\mathbf{B}(t), \qquad (3.16)$$

(5) $$\frac{d}{dt}[\mathbf{A}(t)\cdot\mathbf{B}(t)\times\mathbf{C}(t)] = \mathbf{A}'(t)\cdot\mathbf{B}(t)\times\mathbf{C}(t) + \mathbf{A}(t)\cdot\mathbf{B}'(t)\times\mathbf{C}(t) + \mathbf{A}(t)\cdot\mathbf{B}(t)\times\mathbf{C}'(t), \qquad (3.17)$$

(6) $$\frac{d}{dt}\{\mathbf{A}(t)\times[\mathbf{B}(t)\times\mathbf{C}(t)]\} = \mathbf{A}'(t)\times[\mathbf{B}(t)\times\mathbf{C}(t)] + \mathbf{A}(t)\times[\mathbf{B}'(t)\times\mathbf{C}(t)] + \mathbf{A}(t)\times[\mathbf{B}(t)\times\mathbf{C}'(t)]. \qquad (3.18)$$

(7) *Regla de la cadena:* Si $t = g(s)$ es diferenciable, entonces

$$\frac{d\mathbf{A}(t)}{ds} = \frac{d\mathbf{A}[g(s)]}{ds} = \frac{d\mathbf{A}(t)}{dt}\,\frac{dg(s)}{ds}. \qquad (3.19)$$

PROBLEMA 3.5 Demostrar (3.14).

Solución: Si $\mathbf{f}(t) = \phi(t)\,\mathbf{A}(t)$, entonces tenemos $\mathbf{f}(t + \Delta t) = \phi(t + \Delta t)\,\mathbf{A}(t + \Delta t)$, y

$$\begin{aligned}\mathbf{f}(t + \Delta t) - \mathbf{f}(t) &= \phi(t + \Delta t)\,\mathbf{A}(t + \Delta t) - \phi(t)\,\mathbf{A}(t)\\ &= \phi(t + \Delta t)\,[\mathbf{A}(t + \Delta t) - \mathbf{A}(t)] + [\phi(t + \Delta t) - \phi(t)]\,\mathbf{A}(t).\end{aligned}$$

Se divide a ambos lados por Δt y se acerca Δt hacia cero para obtener

$$\frac{d}{dt}[\phi(t)\,\mathbf{A}(t)] = \mathbf{f}'(t)$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{f}(t + \Delta t) - \mathbf{f}(t)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \phi(t + \Delta t)\left[\frac{\mathbf{A}(t + \Delta t) - \mathbf{A}(t)}{\Delta t}\right] + \lim_{\Delta t \to 0}\left[\frac{\phi(t + \Delta t) - \phi(t)}{\Delta t}\right]\mathbf{A}(t)$$

$$= \phi(t)\,\mathbf{A}'(t) + \phi'(t)\,\mathbf{A}(t).$$

Casos especiales: Si $\phi(t) = k$ es una constante escalar, entonces

$$\frac{d}{dt}[k\,\mathbf{A}(t)] = k\,\mathbf{A}'(t). \tag{3.20}$$

Si $\mathbf{A}(t) = \mathbf{a}$ es un vector constante, entonces

$$\frac{d}{dt}[\phi(t)\,\mathbf{a}] = \phi'(t)\,\mathbf{a}. \tag{3.21}$$

PROBLEMA 3.6 Demostrar (3.15).

Solución: Si $\psi(t) = \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{B}(t)$, entonces

$$\psi(t + \Delta t) - \psi(t) = \mathbf{A}(t + \Delta t) \cdot \mathbf{B}(t + \Delta t) - \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{B}(t)$$
$$= \mathbf{A}(t + \Delta t) \cdot [\mathbf{B}(t + \Delta t) - \mathbf{B}(t)] + [\mathbf{A}(t + \Delta t) - \mathbf{A}(t)] \cdot \mathbf{B}(t).$$

Se divide a ambos lados por Δt y se hace tender Δt hacia cero para obtener

$$\psi'(t) = \frac{d}{dt}[\mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{B}(t)] = \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{B}'(t) + \mathbf{A}'(t) \cdot \mathbf{B}(t).$$

Solución alterna: Sean $\mathbf{A}(t) = [A_1(t), A_2(t), A_3(t)]$ y $\mathbf{B}(t) = [B_1(t), B_2(t), B_3(t)]$. Entonces, por la definición del producto punto (2.24),

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{B}(t)] = \frac{d}{dt}[A_1(t)\,B_1(t) + A_2(t)\,B_2(t) + A_3(t)\,B_3(t)]$$
$$= A_1(t)\,B_1'(t) + A_1'(t)\,B_1(t) + A_2(t)\,B_2'(t) + A_2'(t)\,B_2(t)$$
$$+ A_3(t)\,B_3'(t) + A_3'(t)\,B_3(t)$$
$$= [A_1(t)\,B_1'(t) + A_2(t)\,B_2'(t) + A_3(t)\,B_3'(t)] + [A_1'(t)\,B_1(t)$$
$$+ A_2'(t)\,B_2(t) + A_3'(t)\,B_3(t)]$$
$$= \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{B}'(t) + \mathbf{A}'(t) \cdot \mathbf{B}(t).$$

PROBLEMA 3.7 Mostrar que la derivada de un vector de magnitud constante es ortogonal a él. (Esto incluye la posibilidad de que la derivada sea el vector cero.)

Solución: Si $\mathbf{B}(t) = \mathbf{A}(t)$ en (3.15), entonces

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{A}(t)] = 2\mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{A}'(t). \tag{3.22}$$

Pero,

$$\mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{A}(t) = |\mathbf{A}(t)|^2 = \text{constante} \tag{3.23}$$

Así que la derivada es

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{A}(t)\cdot\mathbf{A}(t)] = 0. \tag{3.24}$$

Entonces, por (3.22),

$$2\mathbf{A}(t)\cdot\mathbf{A}'(t) = 0. \tag{3.25}$$

Por consiguiente,

$$\mathbf{A}(t)\cdot\mathbf{A}'(t) = 0; \tag{3.26}$$

o sea que un vector es ortogonal a su derivada.

PROBLEMA 3.8 Demostrar (3.16).

Solución: Si $\mathbf{f}(t) = \mathbf{A}(t)\times\mathbf{B}(t)$, entonces

$$\mathbf{f}(t+\Delta t) - \mathbf{f}(t) = \mathbf{A}(t+\Delta t)\times\mathbf{B}(t+\Delta t) - \mathbf{A}(t)\times\mathbf{B}(t).$$

Sumando y restando $\mathbf{A}(t+\Delta t)\times\mathbf{B}(t)$ y simplificando se obtiene

$$\mathbf{f}(t+\Delta t) - \mathbf{f}(t) = \mathbf{A}(t+\Delta t)\times[\mathbf{B}(t+\Delta t) - \mathbf{B}(t)] + [\mathbf{A}(t+\Delta t) - \mathbf{A}(t)]\times\mathbf{B}(t).$$

Dividiendo a ambos lados por Δt y tomando el límite cuando $\Delta t \to 0$,

$$\mathbf{f}'(t) = \frac{d}{dt}[\mathbf{A}(t)\times\mathbf{B}(t)] = \mathbf{A}(t)\times\mathbf{B}'(t) + \mathbf{A}'(t)\times\mathbf{B}(t).$$

Se recalca de nuevo que debe conservarse el orden de los factores.

PROBLEMA 3.9 Mostrar que

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{A}(t)\times\mathbf{A}'(t)] = \mathbf{A}(t)\times\mathbf{A}''(t). \tag{3.27}$$

Solución: Si $\mathbf{B}(t) = \mathbf{A}'(t)$ en (3.16), entonces

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{A}(t)\times\mathbf{A}'(t)] = \mathbf{A}(t)\times\mathbf{A}''(t) + \mathbf{A}'(t)\times\mathbf{A}'(t).$$

Por (2.30),

$$\mathbf{A}'(t)\times\mathbf{A}'(t) = \mathbf{0},$$

y se sigue (3.27).

PROBLEMA 3.10 Si $\mathbf{f}(t) = e^{2t}\mathbf{a} + e^{3t}\mathbf{b}$, donde $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son vectores constantes, mostrar que

$$\mathbf{f}''(t) - 5\mathbf{f}'(t) + 6\mathbf{f}(t) = \mathbf{0}.$$

Solución: Como $\mathbf{f}(t) = e^{2t}\mathbf{a} + e^{3t}\mathbf{b}$, entonces por (3.13) y (3.21),

$$\mathbf{f}'(t) = 2e^{2t}\mathbf{a} + 3e^{3t}\mathbf{b},$$

$$\mathbf{f}''(t) = 4e^{2t}\mathbf{a} + 9e^{3t}\mathbf{b}.$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned}\mathbf{f}''(t) - 5\mathbf{f}'(t) + 6\mathbf{f}(t) &= 4e^{2t}\mathbf{a} + 9e^{3t}\mathbf{b} - 10e^{2t}\mathbf{a} - 15e^{3t}\mathbf{b} + 6e^{2t}\mathbf{a} + 6e^{3t}\mathbf{b}\\ &= (4 - 10 + 6)e^{2t}\mathbf{a} + (9 - 15 + 6)e^{3t}\mathbf{b}\\ &= \mathbf{0}.\end{aligned}$$

• 3.3 Derivadas parciales de funciones vectoriales de más de una variable

Una *función vectorial* **f** de dos variables u y v asigna a cada punto (u, v) de alguna región un vector único $\mathbf{f}(u, v)$ llamado el valor de **f** en (u, v). De modo similar, $\mathbf{f}(u, v, w)$ es una *función vectorial* de las tres variables u, v, w.

En un sistema coordenado rectangular que sea independiente de tres variables escalares u, v y w,

$$\mathbf{f}(u, v, w) = [f_1(u, v, w), f_2(u, v, w), f_3(u, v, w)]$$
$$= f_1(u, v, w)\mathbf{i} + f_2(u, v, w)\mathbf{j} + f_3(u, v, w)\mathbf{k}, \tag{3.28}$$

donde f_1, f_2, f_3 son las funciones escalares de u, v y w y se llaman las *componentes* de $\mathbf{f}(u, v, w)$.

La *derivada parcial* $\mathbf{f}_u$ de **f** con respecto a u se define por

$$\mathbf{f}_u = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\mathbf{f}(u + \Delta u, v, w) - \mathbf{f}(u, v, w)}{\Delta u}, \tag{3.29}$$

siempre que exista este límite. De modo similar, definimos las derivadas parciales de **f** con respecto a v y w así:

$$\mathbf{f}_v = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial v} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\mathbf{f}(u, v + \Delta v, w) - \mathbf{f}(u, v, w)}{\Delta v}, \tag{3.30}$$

$$\mathbf{f}_w = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial w} = \lim_{\Delta w \to 0} \frac{\mathbf{f}(u, v, w + \Delta w) - \mathbf{f}(u, v, w)}{\Delta w}, \tag{3.31}$$

siempre que estos límites existan.

Las derivadas parciales de orden superior se pueden definir también de esta manera. Por ejemplo,

$$\mathbf{f}_{uu} = \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial u^2} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u}\right),$$

$$\mathbf{f}_{uv} = \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial v \partial u} = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u}\right),$$

$$\mathbf{f}_{vu} = \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial u \partial v} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial v}\right).$$

Como se vio en la sección 3.2, si **A** y **B** son funciones vectoriales diferenciables de u, v y w, y ϕ es una función escalar diferenciable de u, v y w, entonces,

(1) $$\frac{\partial}{\partial u}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathbf{A}_u + \mathbf{B}_u, \tag{3.32}$$

(2) $$\frac{\partial}{\partial u}(\phi \mathbf{A}) = \phi \mathbf{A}_u + \phi_u \mathbf{A}, \tag{3.33}$$

(3) $$\frac{\partial}{\partial u}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}_u + \mathbf{A}_u \cdot \mathbf{B}, \tag{3.34}$$

(4) $$\frac{\partial}{\partial u}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B}_u + \mathbf{A}_u \times \mathbf{B}. \tag{3.35}$$

Debe observarse que se debe mantener el orden de los factores que aparecen en (3.35).

PROBLEMA 3.11 Si $\mathbf{f}(u, v, w) = f_1(u, v, w)\mathbf{i} + f_2(u, v, w)\mathbf{j} + f_3(u, v, w)\mathbf{k}$, entonces demostrar que

$$\mathbf{f}_u = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u} = \frac{\partial f_1}{\partial u}\mathbf{i} + \frac{\partial f_2}{\partial u}\mathbf{j} + \frac{\partial f_3}{\partial u}\mathbf{k}. \tag{3.36}$$

Solución: Por la definición de derivada parcial (3.29),

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_u &= \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\mathbf{f}(u + \Delta u, v, w) - \mathbf{f}(u, v, w)}{\Delta u} \\
&= \lim_{\Delta u \to 0} \left[\frac{f_1(u + \Delta u, v, w) - f_1(u, v, w)}{\Delta u}\mathbf{i} + \frac{f_2(u + \Delta u, v, w) - f_2(u, v, w)}{\Delta u}\mathbf{j} \right. \\
&\qquad \left. + \frac{f_3(u + \Delta u, v, w) - f_3(u, v, w)}{\Delta u}\mathbf{k} \right] \\
&= \frac{\partial f_1}{\partial u}\mathbf{i} + \frac{\partial f_2}{\partial u}\mathbf{j} + \frac{\partial f_3}{\partial u}\mathbf{k}.
\end{aligned}$$

PROBLEMA 3.12 Si $\mathbf{f}(u, v) = e^{uv}\,\mathbf{i} + (u - v)\mathbf{j} + u(\operatorname{sen} v)\mathbf{k}$, calcular (a) $\mathbf{f}_u$, (b) $\mathbf{f}_v$, (c) $\mathbf{f}_{uu}$ y (d) $\mathbf{f}_u \times \mathbf{f}_v$.

Solución: Por (3.36),

(a) $$\begin{aligned}\mathbf{f}_u &= \frac{\partial}{\partial u}(e^{uv})\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial u}(u - v)\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial u}(u \operatorname{sen} v)\mathbf{k} \\ &= ve^{uv}\mathbf{i} + \mathbf{j} + (\operatorname{sen} v)\mathbf{k};\end{aligned}$$

(b) $$\begin{aligned}\mathbf{f}_v &= \frac{\partial}{\partial v}(e^{uv})\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial v}(u - v)\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial v}(u \operatorname{sen} v)\mathbf{k} \\ &= ue^{uv}\mathbf{i} - \mathbf{j} + u(\cos v)\mathbf{k};\end{aligned}$$

(c) $$\begin{aligned}\mathbf{f}_{uu} &= \frac{\partial}{\partial u}\mathbf{f}_u = \frac{\partial}{\partial u}(ve^{uv})\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial u}(1)\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial u}(\operatorname{sen} v)\mathbf{k} \\ &= v^2 e^{uv}\mathbf{i};\end{aligned}$$

(d) de acuerdo con (2.27) y por los resultados de las partes (a) y (b),

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_u \times \mathbf{f}_v &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ ve^{uv} & 1 & \operatorname{sen} v \\ ue^{uv} & -1 & u\cos v \end{vmatrix} \\ &= (u\cos v + \operatorname{sen} v)\mathbf{i} + u(\operatorname{sen} v - v\cos v)e^{uv}\mathbf{j} - (v + u)e^{uv}\mathbf{k}.\end{aligned}$$

3.4 Curvas en el espacio

Sea $\mathbf{f}(t)$ una función vectorial de una variable escalar t; i.e.,

$$\mathbf{f}(t) = f_1(t)\mathbf{i} + f_2(t)\mathbf{j} + f_3(t)\mathbf{k}, \tag{3.37}$$

donde $f_1(t)$, $f_2(t)$ y $f_3(t)$ son funciones escalares de t. Entonces para cada valor de t, existe un *vector de posición*

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \tag{3.38}$$

cuyo punto inicial está en el origen de un sistema coordenado dado y cuyo punto final especifica un punto P del espacio. Cuando t varía, se dice que P se mueve en una trayectoria *curva*. Así por la definición de igualdad de vectores,

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t). \tag{3.39}$$

Las ecuaciones (3.39) se llaman *ecuaciones paramétricas* de la curva C en el espacio, que es una función de $\mathbf{f}(t)$ con t como *parámetro*.

Como se muestra en la figura 3.1, sea P un punto de una curva C para el cual $\mathbf{f} = \mathbf{f}(t)$, y Q el punto que corresponde a $\mathbf{f}(t + \Delta t)$. Entonces,

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{f}(t + \Delta t) - \mathbf{f}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{PQ}}{\Delta t} = \mathbf{f}'(t) \tag{3.40}$$

es un vector que es *tangente* a la curva espacial C en P; este se llama el *vector tangente* a C en P.

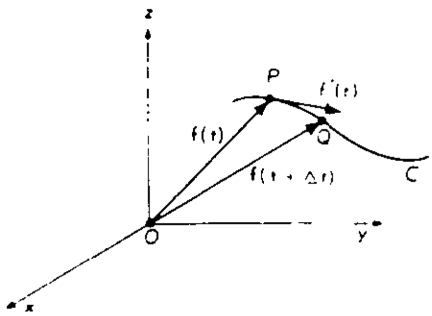


Figura 3.1 Una tangente a una curva en el espacio.

Un punto t_i en una curva en el espacio C se llama *punto singular* de C si $\mathbf{f}'(t_i) = 0$; de otro modo, se llama *punto no singular*.

La *dirección* de la curva en el espacio C en un punto no singular P, es la del vector tangente a C en P.

Una *función vectorial suave* es una función vectorial que tiene una derivada continua y no tiene puntos singulares.

PROBLEMA 3.13 Trazar la curva C representada por la función vectorial

$$\mathbf{f}(t) = (a \cos t)\mathbf{i} + (a \operatorname{sen} t)\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \tag{3.41}$$

en el espacio, y hallar su dirección en el punto (0, a, 0).

Solución: Las ecuaciones paramétricas de la curva C representadas por $\mathbf{f}(t)$ son

$$x = a \cos t, \quad y = a \operatorname{sen} t, \quad z = 0. \tag{3.42}$$

Por (3.42),

$$x^2 + y^2 = a^2 (\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t) = a^2.$$

En $t = 0$,

$$x = a, \quad y = 0, \quad z = 0,$$

y en $t = 2\pi$,

$$x = a, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

La curva C es un círculo en el plano xy centrado en el origen con radio a, que comienza y termina en el punto $(a, 0, 0)$ cuando t cambia de 0 a 2π. (Véase figura 3.2).

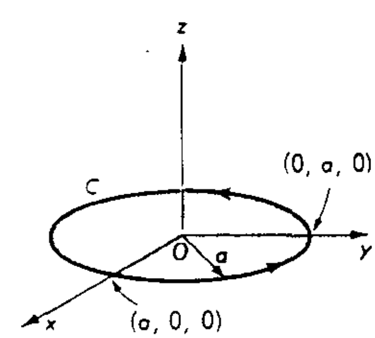


Figura 3.2 Solución al problema 3.13

El punto $(0, a, 0)$ corresponde al de $t = \pi/2$. Ahora por (3.41),

$$\mathbf{f}'(t) = -a \operatorname{sen} t \, \mathbf{i} + a \cos t \, \mathbf{j}.$$

Así que,

$$\mathbf{f}'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -a \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\mathbf{i} + a \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\mathbf{j}$$
$$= -a\,\mathbf{i}.$$

Por tanto, la dirección de la curva en $(0, a, 0)$ está en la dirección negativa del eje x.

PROBLEMA 3.14 (a) Hallar la función vectorial $\mathbf{f}(t)$ que representa la recta L que pasa por un punto (A_1, A_2, A_3) y es paralela a un vector dado no nulo $\mathbf{B} = [B_1, B_2, B_3]$.
(b) Hallar las ecuaciones paramétricas para la recta L.

Solución: (a) Se representan los puntos (A_1, A_2, A_3) y (x, y, z) por los vectores de posición $\mathbf{A} = [A_1, A_2, A_3]$ y $\mathbf{r} = [x, y, z]$, respectivamente.

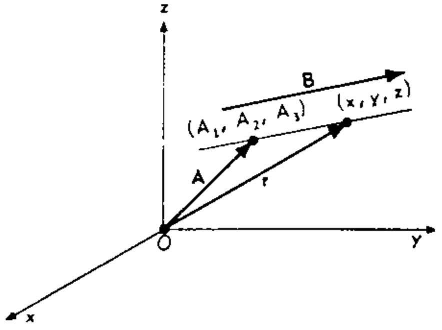


Figura 3.3 Solución al problema 3.14.

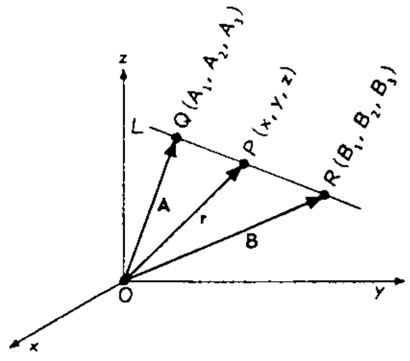


Figura 3.4 Solución al problema 3.15.

En la figura 3.3 se ve que el punto (x, y, z) estará situado en la recta pedida si y solamente si $\mathbf{r} - \mathbf{A}$ es paralelo a $\mathbf{B}$. Ahora, por (1.4) dos vectores son paralelos si y sólo si son múltiplos escalares uno del otro; así,

$$\mathbf{r} - \mathbf{A} = t\,\mathbf{B}, \tag{3.43}$$

donde t es algún escalar. Escribiendo de nuevo (3.43),

$$\mathbf{r} = \mathbf{A} + t\,\mathbf{B}. \tag{3.44}$$

Por consiguiente, haciendo $\mathbf{r} = \mathbf{f}(t)$ obtenemos la función vectorial deseada

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{A} + t\,\mathbf{B}. \tag{3.45}$$

(b) Escribiendo (3.44) en términos de las componentes de los vectores,

$$x = A_1 + tB_1, \quad y = A_2 + tB_2, \quad z = A_3 + tB_3, \tag{3.46}$$

que son las ecuaciones paramétricas para la recta L que pasa por (A_1, A_2, A_3) y es paralela a $\mathbf{B} = [B_1, B_2, B_3]$.

PROBLEMA 3.15 (a) Hallar la función vectorial $\mathbf{f}(t)$ que representa la recta L que pasa por los puntos (A_1, A_2, A_3) y (B_1, B_2, B_3). (b) Hallar las ecuaciones paramétricas para la recta L.

Solución: (a) Representar los dos puntos (A_1, A_2, A_3) y (B_1, B_2, B_3) por los vectores de posición $\mathbf{A} = [A_1, A_2, A_3]$ y $\mathbf{B} = [B_1, B_2, B_3]$, respectivamente. Sea (x, y, z) un punto de L representado por el vector de posición $\mathbf{r} = [x, y, z]$. Entonces en la figura 3.4, se ve que debe haber un escalar t tal que

$$\overrightarrow{QP} = t\,\overrightarrow{QR}.$$

Por otra parte $\overrightarrow{QP} = \mathbf{r} - \mathbf{A}$ y $\overrightarrow{QR} = \mathbf{B} - \mathbf{A}$; así que,

$$\mathbf{r} - \mathbf{A} = t(\mathbf{B} - \mathbf{A}), \tag{3.47}$$

o, simplificando,

$$\mathbf{r} = \mathbf{A} + t(\mathbf{B} - \mathbf{A}) = (1 - t)\mathbf{A} + t\,\mathbf{B}. \tag{3.48}$$

Entonces, haciendo $\mathbf{r} = \mathbf{f}(t)$, obtenemos la función vectorial deseada

$$\mathbf{f}(t) = (1 - t)\mathbf{A} + t\,\mathbf{B}. \tag{3.49}$$

(b) Escribiendo (3.48) en términos de las componentes de los vectores, obtenemos las ecuaciones paramétricas para la recta; i.e.,

$$x = (1 - t)A_1 + tB_1, \quad y = (1 - t)A_2 + tB_2, \quad z = (1 - t)A_3 + tB_3. \tag{3.50}$$

Eliminando el parámetro t de (3.50),

$$\frac{x - A_1}{B_1 - A_1} = \frac{y - A_2}{B_2 - A_2} = \frac{z - A_3}{B_3 - A_3}, \tag{3.51}$$

que es la *ecuación no paramétrica* de la recta.

PROBLEMA 3.16 Si una curva en el espacio C está representada por una función vectorial suave $\mathbf{f}(t)$ para $a \leq t \leq b$, entonces demostrar que su longitud l está dada por la integral

$$l = \int_a^b |\mathbf{f}'(t)|\,dt = \int_a^b [\mathbf{f}'(t)\cdot\mathbf{f}'(t)]^{1/2}\,dt. \tag{3.52}$$

Solución: Si $\mathbf{f}(t) = f_1(t)\mathbf{i} + f_2(t)\mathbf{j} + f_3(t)\mathbf{k}$, entonces C se puede describir por las ecuaciones paramétricas $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, $z = f_3(t)$ para $a < t < b$.

Por cálculo elemental el *elemento de arco ds* sobre C se define por

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \tag{3.53}$$

Por (3.53) y las ecuaciones paramétricas,

$$\begin{aligned}\frac{ds}{dt} &= \left[\left(\frac{df_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{df_2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{df_3}{dt}\right)^2\right]^{1/2}\\ &= \{[f_1'(t)]^2 + [f_2'(t)]^2 + [f_3'(t)]^2\}^{1/2}\\ &= [\mathbf{f}'(t)\cdot\mathbf{f}'(t)]^{1/2}\\ &= |\mathbf{f}'(t)|.\end{aligned} \tag{3.54}$$

Por consiguiente, el elemento de arco ds es

$$ds = |\mathbf{f}'(t)|\,dt. \tag{3.55}$$

Así que la longitud total l es la integral de ds sobre C; i.e.,

$$l = \int_C ds = \int_a^b |\mathbf{f}'(t)|\,dt = \int_a^b [\mathbf{f}'(t)\cdot\mathbf{f}'(t)]^{1/2}\,dt.$$

PROBLEMA 3.17 Hallar la longitud de la curva representada por la función vectorial

$$\mathbf{f}(t) = (a\cos t)\mathbf{i} + (a\ \mathrm{sen}\ t)\mathbf{j}, \quad 0 \le t \le 2\pi. \tag*{[3.41]}$$

Solución: La derivada de $\mathbf{f}(t)$ es

$$\mathbf{f}'(t) = -a\ \mathrm{sen}\ t\ \mathbf{i} + a\cos t\ \mathbf{j}, \quad 0 \le t \le 2\pi, \tag{3.56}$$

y su magnitud es

$$|\mathbf{f}'(t)| = (a^2\ \mathrm{sen}^2\ t + a^2\cos^2 t)^{1/2} = a. \tag{3.57}$$

Así que por (3.52) la longitud de la curva es

$$l = \int_0^{2\pi} |\mathbf{f}'(t)|\,dt = \int_0^{2\pi} a\,dt = 2\pi a. \tag{3.58}$$

La *longitud de arco* $s(t)$ de una curva es una función de la variable escalar t desde algún punto fijo a hasta t. Esta es la longitud l de C con el límite superior b de (3.52) sustituído por t; i.e.,

$$s(t) = \int_a^t |\mathbf{f}'(t)|\,dt. \tag{3.59}$$

PROBLEMA 3.18 Demostrar que la longitud de arco s puede servir como un parámetro en las representaciones de curvas sin puntos singulares.

Solución: Diferenciando la longitud de arco, (3.59), de una curva, obtenemos para $a \leqslant t \leqslant b$,

$$\frac{ds}{dt} = |\mathbf{f}'(t)| > 0. \tag{3.60}$$

Así, que s es una función creciente y continua en $a \leqslant t \leqslant b$. Esto implica que s tiene una única inversa $t = q(s)$ para $0 \leqslant s \leqslant L$ Por consiguiente, una función vectorial suave con parámetro s

$$\mathbf{g}(s) = \mathbf{f}[q(s)] \tag{3.61}$$

puede representar la misma curva C que se representa por $\mathbf{f}(t)$.

Determinando el vector de posición $\mathbf{r} = [x, y, z]$ como

$$\mathbf{r} = \mathbf{g}(s) = g_1(s)\mathbf{i} + g_2(s)\mathbf{j} + g_3(s)\mathbf{k}, \tag{3.62}$$

obtenemos las ecuaciones paramétricas de C con parámetro s; i.e.,

$$x = g_1(s), \quad y = g_2(s), \quad z = g_3(s). \tag{3.63}$$

En lugar de las funciones vectoriales f(t) o g(s) para representar la curva C en el espacio, usaremos con frecuencia r(t) o r(s). Así que

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}, \qquad a \leq t \leq b, \tag{3.64}$$

$$\mathbf{g}(s) = \mathbf{r}(s) = x(s)\mathbf{i} + y(s)\mathbf{j} + z(s)\mathbf{k}, \qquad 0 \leq s \leq l. \tag{3.65}$$

Aunque se usen las mismas formas funcionales r(t) y r(s), debe observarse que r(s) no se obtiene de r(t) por simple intercambio del parámetro t por s; r(s) se obtiene de r(t) cambiando el parámetro t a $q(s)$. El problema 3.19 ilustra este hecho.

PROBLEMA 3.19 Una curva C se denota por la función vectorial

$$\mathbf{f}(t) = a \cos t\ \mathbf{i} + a \operatorname{sen} t\ \mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Representar a C por una función vectorial con la longitud de arco s como parámetro. (Cf. problema 3.17).

Solución: Por la definición de longitud de arco (3.59) y usando (3.57),

$$s = \int_0^t |\mathbf{f}'(t)|\, dt = \int_0^t a\, dt = at. \tag{3.66}$$

Por consiguiente, $t = s/a$ y la función vectorial pedida es

$$\mathbf{g}(s) = \mathbf{f}\left(\frac{s}{a}\right) = \left[a \cos\left(\frac{s}{a}\right)\right]\mathbf{i} + \left[a \operatorname{sen}\left(\frac{s}{a}\right)\right]\mathbf{j}, \quad 0 \leq s \leq 2\pi a. \tag{3.67}$$

PROBLEMA 3.20 Cuando una curva C se representa por una función vectorial $g(s)$ con longitud de arco s como parámetro, demostrar que

$$\frac{d\mathbf{g}(s)}{ds} = \mathbf{g}'(s) = \mathbf{T}, \tag{3.68}$$

donde $\mathbf{T}$ es el vector unitario tangente a C en cualquier punto.

Solución: Por (3.40) el vector tangente a la curva C que se representa por una función vectorial suave f(t) en cualquier punto es el vector f$'(t)$. Por consiguiente, para $|\mathbf{f}'(t)| \neq 0$, el vector unitario $\mathbf{T}$ tangente a C en cualquier punto se expresa

$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{f}'(t)}{|\mathbf{f}'(t)|}. \tag{3.69}$$

Además, puesto que $\mathbf{g}(s) = \mathbf{f}[q(s)]$ y $t = q(s)$, tenemos que diferenciando y usando la regla de la cadena,

$$\frac{d\mathbf{g}(s)}{ds} = \mathbf{g}'(s) = \mathbf{f}'(t)\frac{dt}{ds} = \frac{\mathbf{f}'(t)}{\dfrac{ds}{dt}} = \frac{\mathbf{f}'(t)}{|\mathbf{f}'(t)|}. \tag{3.70}$$

Por consiguiente, por (3.69–70),

$$\mathbf{g}'(s) = \frac{\mathbf{f}'(t)}{|\mathbf{f}'(t)|} = \mathbf{T}.$$

PROBLEMA 3.21 Hallar el vector unitario tangente a la curva C representada por la función vectorial

$$\mathbf{f}(t) = (a \cos t)\mathbf{i} + (a \operatorname{sen} t)\mathbf{j}, \quad 0 \le t \le 2\pi,$$

en $t = \pi/2$. (Cf. problema 3.13).

Solución: Por (3.67), la curva C se representa también por

$$\mathbf{g}(s) = \left[a \cos\left(\frac{s}{a}\right)\right]\mathbf{i} + \left[a \operatorname{sen}\left(\frac{s}{a}\right)\right]\mathbf{j}, \quad 0 \le s \le 2\pi a. \qquad [3.67]$$

Por (3.68), el vector unitario $\mathbf{T}$ tangente a C en cualquier punto es

$$\mathbf{T} = \mathbf{g}'(s) = -\left[\operatorname{sen}\left(\frac{s}{a}\right)\right]\mathbf{i} + \left[\cos\left(\frac{s}{a}\right)\right]\mathbf{j}, \quad 0 \le s \le 2\pi a. \qquad (3.71)$$

Ahora, por (3.66) tenemos en $t = \pi/2$, $s = at|_{t=\pi/2} = \frac{1}{2}a\pi$. Por lo tanto, en el punto $t = \pi/2$ o $s = a\pi/2$, el vector tangente unitario es

$$\mathbf{T} = -\left[\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]\mathbf{i} + \left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]\mathbf{j} = -\mathbf{i}, \qquad (3.72)$$

pues sen $(\pi/2) = 1$ y cos $(\pi/2) = 0$.

Alternativamente, se puede obtener el mismo resultado de (3.69) usando (3.56) y (3.57). Así que para $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$

$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{f}'(t)}{|\mathbf{f}'(t)|} = \frac{1}{a}\left[-(a \operatorname{sen} t)\mathbf{i} + (a \cos t)\mathbf{j}\right]$$

$$= -(\operatorname{sen} t)\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j}. \qquad (3.73)$$

Entonces, en $t = \pi/2$,

$$\mathbf{T} = -\left[\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]\mathbf{i} + \left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]\mathbf{j} = -\mathbf{i}.$$

PROBLEMA 3.22 Mostrar que el vector definido por $d\mathbf{T}/ds$ es normal o perpendicular al vector unitario tangente $\mathbf{T}$ en cualquier punto de la curva C.

Solución: Como $\mathbf{T}$ es el vector tangente unitario, el producto punto da

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{T} = 1. \qquad (3.74)$$

Diferenciando ambos lados con respecto a s,

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} \cdot \mathbf{T} = 0, \qquad (3.75)$$

lo que implica que $d\mathbf{T}/ds$ es normal a $\mathbf{T}$. (Véase problema 3.7).

3.5 Superficies

En la sección 3.4 las curvas del espacio se describen mediante ecuaciones vectoriales del tipo

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} \qquad (3.76)$$

en donde interviene un sólo parámetro t. La representación paramétrica de curvas en el espacio es

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t). \qquad (3.77)$$

Las *superficies* se describen, en general, por medio de ecuaciones paramétricas del tipo

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \qquad (3.78)$$

donde u y v son parámetros. Si se fija v, i.e., $v = c$, una constante, entonces (3.78) se vuelve una expresión paramétrica de un parámetro que describe una curva en el espacio a lo largo de la cual varía u. Esta es la curva que se designa con $v = c$. Así para cada v existe una curva en el espacio. De modo similar, v varía a lo largo de la curva $u = k$, una constante; el lugar de todas las curvas $v = c$ y $u = k$ es una *superficie* S. Los parámetros u y v se llaman *coordenadas curvilíneas* del punto r sobre la superficie, y las curvas u y v se llaman *curvas paramétricas*. (Véase figura 3.5).

Si el punto terminal del vector de posición $\mathbf{r}$ genera la superficie S, entonces (3.78) se puede expresar como

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}. \tag{3.79}$$

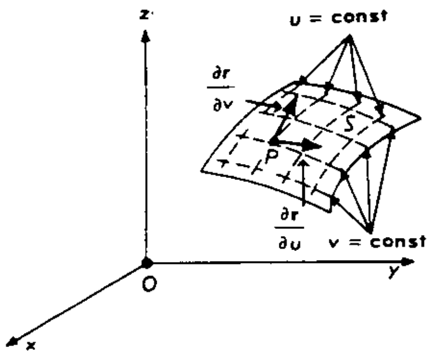


Figura 3.5 Una superficie en el espacio.

PROBLEMA 3.24 Mostrar que el vector unitario $\mathbf{n}$ definido por

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}, \tag{3.80}$$

donde $\mathbf{r}_u = \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \mathbf{r}_v = \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$, es normal a la superficie S representada por $\mathbf{r}(u, v)$ si $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \neq \mathbf{0}$.

Solución: De acuerdo con (3.40), en cualquier punto P,

$$\mathbf{r}_u = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\mathbf{k} \tag{3.81}$$

es un vector tangente a una curva constante v en P. De modo similar,

$$\mathbf{r}_v = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v}\mathbf{k} \tag{3.82}$$

es un vector tangente a una curva constante u en P. Por consiguiente, se sigue que en cualquier punto P, el vector $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ es normal a la superficie S en P. Como $|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|$ es la magnitud de este vector,

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}$$

es un vector unitario normal a S en P.

Un punto (u, v) sobre una superficie S se llama *punto singular* si $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \mathbf{0}$. De otro modo, se llama *punto no singular*. Si $\mathbf{r}_u$ y $\mathbf{r}_v$ son continuas, entonces los planos tangentes existen solamente en los puntos no singulares. Geométricamente la condición para que $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \neq \mathbf{0}$ es que las curvas $u = k$ y $v = c$, donde k y c son costantes, no sean singulares ni mutuamente tangentes en su punto de intersección.

PROBLEMA 3.24 Hallar un vector unitario normal $\mathbf{n}$ para una superficie S representada por

$$x = x, \quad y = y, \quad z = z(x, y), \tag{3.83}$$

donde x e y son parámetros.

Solución: Por (3.83), la superficie S se puede representar por

$$\mathbf{r}(x, y) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z(x, y)\mathbf{k}. \tag{3.84}$$

Por consiguiente las derivadas parciales son

$$\mathbf{r}_x = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} = \frac{\partial x}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial x}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial x}\mathbf{k} = \mathbf{i} + \frac{\partial z}{\partial x}\mathbf{k}, \tag{3.85}$$

$$\mathbf{r}_y = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = \frac{\partial x}{\partial y}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial y}\mathbf{k} = \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial y}\mathbf{k}. \tag{3.86}$$

El vector producto de $\mathbf{r}_x$ con $\mathbf{r}_y$ es

$$\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & \dfrac{\partial z}{\partial x} \\ 0 & 1 & \dfrac{\partial z}{\partial y} \end{vmatrix} = -\frac{\partial z}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial z}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k}. \tag{3.87}$$

O sea que la magnitud es

$$|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y| = \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1\right]^{1/2}. \tag{3.88}$$

Por consiguiente, por (3.80) el vector unitario normal es

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y}{|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y|} = \frac{-\dfrac{\partial z}{\partial x}\mathbf{i} - \dfrac{\partial z}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\left[\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1\right]^{1/2}}. \tag{3.89}$$

PROBLEMA 3.25 Hallar un vector unitario normal $\mathbf{n}$ para una superficie S que esté representada por

$$\phi(x, y, z) = 0. \tag{3.90}$$

Solución: Si consideramos a (3.90) como una función de x e y que define implícitamente a z, podemos suponer que $\phi_z \neq 0$. Entonces por cálculo elemental y por (3.85), (3.86), las derivadas parciales son

$$\mathbf{r}_x = \mathbf{i} + \frac{\partial z}{\partial x}\mathbf{k} = \mathbf{i} - \frac{\dfrac{\partial \phi}{\partial x}}{\dfrac{\partial \phi}{\partial z}}\mathbf{k} = \mathbf{i} - \frac{\phi_x}{\phi_z}\mathbf{k}, \tag{3.91}$$

$$\mathbf{r}_y = \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial y}\mathbf{k} = \mathbf{j} - \frac{\dfrac{\partial \phi}{\partial y}}{\dfrac{\partial \phi}{\partial z}}\mathbf{k} = \mathbf{j} - \frac{\phi_y}{\phi_z}\mathbf{k}. \tag{3.92}$$

Por consiguiente, el producto vectorial es

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & -\dfrac{\phi_x}{\phi_z} \\ 0 & 1 & -\dfrac{\phi_y}{\phi_z} \end{vmatrix} \\ &= \frac{\phi_x}{\phi_z}\mathbf{i} + \frac{\phi_y}{\phi_z}\mathbf{j} + \mathbf{k} \\ &= \frac{1}{\phi_z}(\phi_x\mathbf{i} + \phi_y\mathbf{j} + \phi_z\mathbf{k}), \end{aligned} \tag{3.93}$$

Así que el vector unitario normal es

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y}{|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y|} = \frac{\phi_x\mathbf{i} + \phi_y\mathbf{j} + \phi_z\mathbf{k}}{[(\phi_x)^2 + (\phi_y)^2 + (\phi_z)^2]^{1/2}} = \frac{\dfrac{\partial \phi}{\partial x}\mathbf{i} + \dfrac{\partial \phi}{\partial y}\mathbf{j} + \dfrac{\partial \phi}{\partial z}\mathbf{k}}{\left[\left(\dfrac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial \phi}{\partial z}\right)^2\right]^{1/2}}. \tag{3.94}$$

Si $\phi_x \neq 0$ ó $\phi_y \neq 0$, con un cálculo similar se obtendría el mismo resultado.

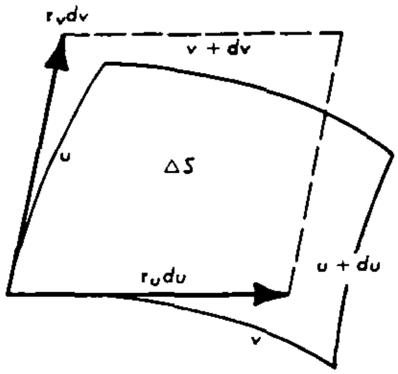


Figura 3.6 Un elemento diferencial de área de una superficie.

El elemento *diferencial de área de una superficie* es un vector dado por

$$d\mathbf{S} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\,du \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\,dv = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\,du\,dv. \tag{3.95}$$

Por la definición de vector unitario normal (3.80) vemos que $d\mathbf{S}$ es un vector normal a la superficie representada por $\mathbf{r}(u, v)$ en cualquier punto P; su magnitud

$$dS = |d\mathbf{S}| = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\,du\,dv, \tag{3.96}$$

es aproximadamente igual al área de la superficie S limitada por cuatro curvas situadas sobre S. (Véase figura 3.6).

Por (3.80) y (3.96), (3.95) se puede expresar como

$$d\mathbf{S} = \mathbf{n}\,dS. \tag{3.97}$$

El *área de la superficie* S se puede obtener entonces integrando (3.97) sobre S; i.e.,

$$S = \iint dS = \iint \mathbf{n} \cdot d\mathbf{S}, \tag{3.98}$$

donde $\mathbf{n}$ es un vector unitario normal de S en cualquier punto P.

PROBLEMA 3.26 Hallar el área de una superficie S representada por

$$x = a \operatorname{sen}\theta\cos\phi, \quad y = a \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, \quad z = a\cos\theta, \tag{3.99}$$

donde $0 < \theta < \pi$ y $0 < \phi < 2\pi$.

Solución: Aquí los dos parámetros θ y ϕ se usan en lugar de u y v. Por consiguiente,

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_\theta &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = \frac{\partial x}{\partial \theta}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial \theta}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial \theta}\mathbf{k} \\
&= a\cos\theta\cos\phi\,\mathbf{i} + a\cos\theta\operatorname{sen}\phi\,\mathbf{j} - a\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{k}, \\
\mathbf{r}_\phi &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} = \frac{\partial x}{\partial \phi}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial \phi}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial \phi}\mathbf{k} \\
&= -a\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi\,\mathbf{i} + a\operatorname{sen}\theta\cos\phi\,\mathbf{j}.
\end{aligned}$$

Así que el producto vectorial es

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_\phi &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a\cos\theta\cos\phi & a\cos\theta\operatorname{sen}\phi & -a\operatorname{sen}\theta \\ -a\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi & a\operatorname{sen}\theta\cos\phi & 0 \end{vmatrix} \\
&= a^2\operatorname{sen}^2\theta\cos\phi\,\mathbf{i} + a^2\operatorname{sen}^2\theta\operatorname{sen}\phi\,\mathbf{j} + a^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta\,\mathbf{k},
\end{aligned}$$

y su magnitud es

$$\begin{aligned}
|\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_\phi| &= a^2\operatorname{sen}\theta[\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\phi + \operatorname{sen}^2\theta\operatorname{sen}^2\phi + \cos^2\theta]^{1/2} \\
&= a^2\operatorname{sen}\theta[\operatorname{sen}^2\theta\,(\cos^2\phi + \operatorname{sen}^2\phi) + \cos^2\theta]^{1/2} \\
&= a^2\operatorname{sen}\theta.
\end{aligned}$$

Entonces, por (3.96), la magnitud del elemento diferencial del área es

$$dS = a^2\operatorname{sen}\theta\,d\theta\,d\phi. \tag{3.100}$$

Así, integrando, el área superficial es

$$S = \int\int dS = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} a^2 \operatorname{sen}\,\theta\, d\theta d\phi = 2\pi a^2 \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\,\theta\, d\theta$$
$$= 2\pi a^2(-\cos\,\theta)\big|_0^{\pi}$$
$$= 2\pi a^2\{-[(-1) - 1]\}$$
$$= 4\pi a^2.$$

Se observa que (3.99) son las ecuaciones paramétricas de una esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2. \tag{3.101}$$

De la figura 3.7 se puede obtener (3.100) por observación. Así que si mantenemos fijo a ϕ y hacemos variar a θ en $d\theta$, obtenemos un arco de longitud $a\,d\theta$. Fijando θ y haciendo variar a ϕ en $d\phi$, obtenemos un arco de círculo de radio a sen θ que tiene longitud a sen θ $d\phi$. Por consiguiente el elemento diferencial de área dS se puede expresar como

$$dS = a\,d\theta \cdot a \operatorname{sen}\,\theta\, d\phi = a^2 \operatorname{sen}\,\theta\, d\theta d\phi.$$

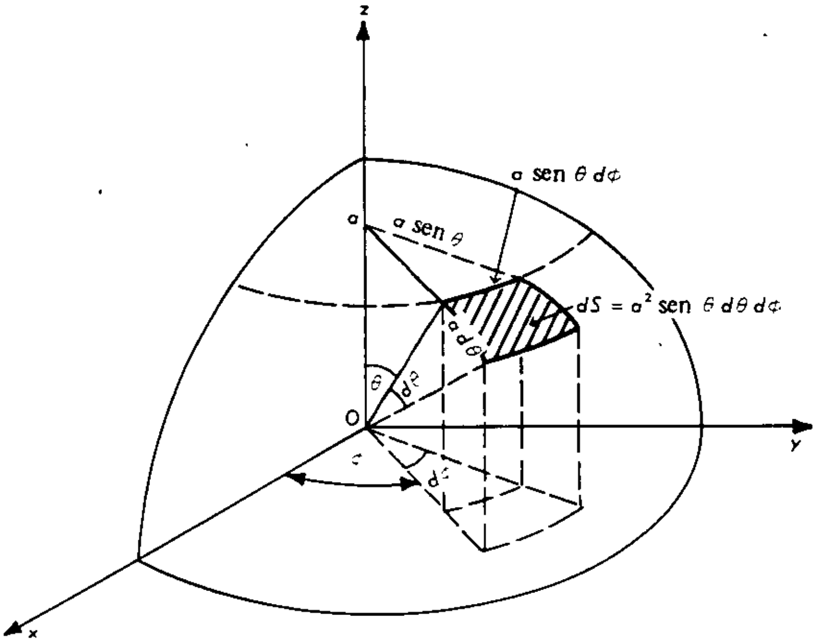


Figura 3.7 Un elemento diferencial de área de la superficie de una esfera.

PROBLEMA 3.27 Expresar el elemento diferencial de área de la superficie dS para una superficie S representada por

$$z = z(x, y). \tag{3.102}$$

Solución: Por (3.88),

$$|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y| = \left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]^{1/2}.$$

Entonces, usando (3.96),

$$dS = |\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y|\; dxdy = \left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]^{1/2} dxdy. \tag{3.103}$$

3.6 Derivada direccional y gradiente

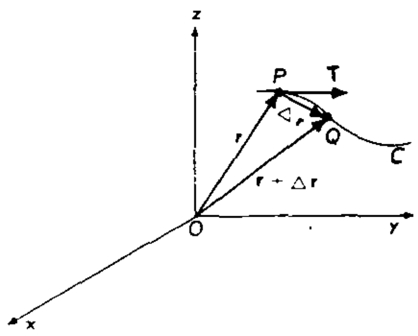


Figura 3.8 La derivada direccional.

Un campo escalar $\phi(x, y, z)$ es la totalidad de los escalares $\phi(x, y, z)$ asignados a cada punto (x, y, z) de una región R del espacio.

Un *campo vectorial* $\mathbf{f}(x, y, z)$ es la totalidad de los vectores $\mathbf{f}(x, y, z)$ asignados a cada punto (x, y, z) de una región R del espacio.

Sea $P(x, y, z)$ un punto no singular de una curva C en el espacio y $Q(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$, otro punto de C. (Véase figura 3.8). Entonces los vectores de posición $\mathbf{r}$ y $\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}$ de P y Q son

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k},$$

$$\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r} = (x + \Delta x)\mathbf{i} + (y + \Delta y)\mathbf{j} + (z + \Delta z)\mathbf{k}.$$

Sea $\phi(x, y, z)$ una función escalar continua y diferenciable en una región R que contiene el arco de C desde P hasta Q. Entonces, la *derivada direccional* de $\phi(x, y, z)$ en P en la dirección del vector unitario $\mathbf{T}$ tangente a C en P se define como

$$\frac{\partial \phi}{\partial s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\phi(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - \phi(x, y, z)}{\Delta s}, \tag{3.104}$$

donde Δs es la longitud de arco de C desde P hasta Q.

El *gradiente* de la función escalar $\phi(x, y, z)$, escrito *grad* ϕ, es un vector que se define

$$\text{grad}\ \phi \equiv \frac{\partial \phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\mathbf{k}. \tag{3.105}$$

PROBLEMA 3.28 Mostrar que la derivada direccional de $\phi(x, y, z)$ en la dirección de la curva C puede expresarse como

$$\frac{\partial \phi}{\partial s} = \text{grad}\ \phi \cdot \mathbf{T}, \tag{3.106}$$

donde $\mathbf{T}$ es el vector unitario tangente a C.

Solución: Por (3.68), el vector unitario $\mathbf{T}$ tangente a C en cualquier punto es

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{dx}{ds}\mathbf{i} + \frac{dy}{ds}\mathbf{j} + \frac{dz}{ds}\mathbf{k}. \tag{3.107}$$

Por cálculo,

$$\frac{\partial \phi}{\partial s} = \frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\frac{dz}{ds}, \tag{3.108}$$

que es la forma de un producto escalar de grad ϕ y $\mathbf{T}$. Por tanto,

$$\frac{\partial \phi}{\partial s} = \text{grad}\ \phi \cdot \mathbf{T}.$$

Introduciendo el *operador diferencial* ∇ (léase *nabla* o *del*),

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}, \tag{3.109}$$

el gradiente de ϕ se escribe

$$\text{grad } \phi = \nabla\phi = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k}. \tag{3.110}$$

Por (3.110), las propiedades del gradiente son

$$\nabla(c\phi) = c\,\nabla\phi, \tag{3.111}$$

$$\nabla(\phi + \psi) = \nabla\phi + \nabla\psi, \tag{3.112}$$

$$\nabla(\phi\psi) = \phi\nabla\psi + \psi\nabla\phi, \tag{3.113}$$

donde ϕ y ψ son funciones escalares diferenciables en alguna región del espacio y c es una constante.

PROBLEMA 3.29 Verificar (3.113)

Solución: Por la definición de gradiente (3.110),

$$\begin{aligned}
\nabla(\phi\psi) &= \frac{\partial}{\partial x}(\phi\psi)\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}(\phi\psi)\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}(\phi\psi)\mathbf{k} \\
&= \left(\phi\frac{\partial\psi}{\partial x} + \psi\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)\mathbf{i} + \left(\phi\frac{\partial\psi}{\partial y} + \psi\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)\mathbf{j} + \left(\phi\frac{\partial\psi}{\partial z} + \psi\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)\mathbf{k} \\
&= \phi\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\psi}{\partial z}\mathbf{k}\right) + \psi\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k}\right) \\
&= \phi\nabla\psi + \psi\nabla\phi.
\end{aligned}$$

PROBLEMA 3.30 Mostrar que la magnitud y dirección del gradiente $\nabla\phi$ es independiente del sistema coordenado. Esto es, mostrar que la magnitud del gradiente $|\nabla\phi|$ es igual al valor máximo de la derivada direccional de $\phi(x, y, z)$ y su dirección es la de la rapidez máxima de crecimiento de la función ϕ.

Solución: Por las definiciones de derivada direccional (3.106) y el producto escalar (1.25), la derivada direccional de ϕ en el punto (x, y, z) es

$$\frac{\partial\phi}{\partial s} = \nabla\phi\cdot\mathbf{T} = |\nabla\phi|\,|\mathbf{T}|\cos\theta = |\nabla\phi|\cos\theta, \tag{3.114}$$

donde θ es el ángulo entre $\nabla\phi$ y el vector unitario $\mathbf{T}$ tangente a la curva C. Como $-1 \leqslant \cos\theta \leqslant 1$, $\partial\phi/\partial s$ es máximo cuando $\theta = 0$, i.e., cuando la dirección de $\mathbf{T}$ es la dirección de $\nabla\phi$ y

$$\left.\frac{\partial\phi}{\partial s}\right|_{\max} = |\nabla\phi|. \tag{3.115}$$

Así que la magnitud del gradiente es $\partial\phi/\partial s|_{\max}$ y su dirección es la de la máxima rapidez de crecimiento de la función

PROBLEMA 3.31 Si $\phi(x, y, z)$ es una función escalar y $\nabla\phi \neq \mathbf{0}$ en un punto P en el espacio, entonces mostrar que $\nabla\phi$ es perpendicular a la superficie S definida por

$$\phi(x, y, z) = c, \tag{3.116}$$

donde c es una constante.

Solución: Usando (3.94) del problema 3.25, un vector unitario normal $\mathbf{n}$ para la superficie S definida por (3.116) es

$$\mathbf{n} = \frac{\dfrac{\partial \phi}{\partial x}\mathbf{i} + \dfrac{\partial \phi}{\partial y}\mathbf{j} + \dfrac{\partial \phi}{\partial z}\mathbf{k}}{\left[\left(\dfrac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial \phi}{\partial z}\right)^2\right]^{1/2}} = \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|}. \tag{3.117}$$

Entonces, concluimos que $\nabla\phi$ es perpendicular a S.

Solución alterna: Si suponemos que una curva **C** del espacio, situada en una superficie S está representada por

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k},$$

entonces por (3.116) tenemos, para c constante,

$$\phi[x(t),\ y(t),\ z(t)] = c.$$

Diferenciando esto con respecto a t,

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}\,x'(t) + \frac{\partial \phi}{\partial y}\,y'(t) + \frac{\partial \phi}{\partial z}\,z'(t) = \nabla\phi \cdot \mathbf{r}'(t) = 0, \tag{3.118}$$

donde por (3.40), el vector tangente a C en P es

$$\mathbf{r}'(t) = x'(t)\,\mathbf{i} + y'(t)\,\mathbf{j} + z'(t)\,\mathbf{k}.$$

Por otra parte, (3.118) implica que $\nabla\phi \perp r'(t)$, i.e., es perpendicular a C en P.

Este razonamiento se puede aplicar a cualquier curva suave sobre la superficie S que pase por P. Por consiguiente, $\nabla\phi$ es perpendicular a todas esas curvas en P, lo que puede cumplirse sólo si $\nabla\phi$ es perpendicular a la superficie S.

PROBLEMA 3.32 Hallar (a) la derivada direccional de $\phi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ en la dirección de $P(1, 1, 0)$ a $Q(2, 1, 1)$ y (b) su valor máximo y dirección en $(1, 1, 0)$.

Solución: (a) Sean $\mathbf{r}_1 = [1, 1, 0]$ y $\mathbf{r}_2 = [2, 1, 1]$ los vectores de posición que representan los puntos $P(1, 1, 0)$ y $Q(2, 1, 1)$ y sea $\mathbf{T}$ el vector unitario en la dirección de P hacia Q. Entonces por la definición de vector unitario y (2.23),

$$\begin{aligned}\mathbf{T} = \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} = \frac{(2-1)\,\mathbf{i} + (1-1)\,\mathbf{j} + (1-0)\,\mathbf{k}}{[(2-1)^2 + (1-1)^2 + (1-0)^2]^{1/2}} &= \frac{\mathbf{i} + \mathbf{k}}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathbf{k} \\ &= \left[\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right].\end{aligned}$$

Por otra parte, por (3.110) con $\phi(x, y, z)$ dado,

$$\nabla\phi = 2x\,\mathbf{i} + 2y\,\mathbf{j} + 2z\,\mathbf{k}.$$

Así que en $(1, 1, 0)$ el gradiente es

$$\nabla\phi = 2\,\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} + 0\,\mathbf{k} = [2, 2, 0],$$

y su magnitud es

$$|\nabla\phi| = (2^2 + 2^2 + 0)^{1/2} = 2\sqrt{2}.$$

Por consiguiente, por (3.106) la derivada direccional de ϕ en $(1, 1, 0)$ es

$$\frac{\partial \phi}{\partial s} = \nabla\phi \cdot \mathbf{T} = (2)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + (2)(0) + (0)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}.$$

Esto significa que el valor de ϕ se incrementa en $\sqrt{2}$ por unidad de distancia mientras pasa de $P(1, 1, 0)$ a $Q(2, 1, 1)$.

(b) El valor máximo de $\partial\phi/\partial s$ en $(1, 1, 0)$ es $|\Delta\phi| = 2\sqrt{2}$ y su dirección es la de $\Delta\phi = [2, 2, 0]$.

PROBLEMA 3.33 Hallar un vector unitario $\mathbf{n}$ normal a la superficie dada por $z = x^2 + y^2$ en el punto $(1, 0, 1)$.

Solución: Como $z = x^2 + y^2$, la superficie se define como

$$\phi(x, y, z) \equiv x^2 + y^2 - z = 0.$$

El gradiente es $\quad \nabla\phi = 2x\,\mathbf{i} + 2y\,\mathbf{j} - \mathbf{k}.$

Así en $(1, 0, 1)$, $\nabla\phi = 2\,\mathbf{i} - \mathbf{k}$. Por tanto, según (3.117), el vector unitario es

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|} = \frac{2\,\mathbf{i} - \mathbf{k}}{[2^2 + 0 + (-1)^2]^{1/2}} = \frac{2\,\mathbf{i} - \mathbf{k}}{\sqrt{5}} = \left[\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right].$$

PROBLEMA 3.34 Para un vector arbitrario constante $\mathbf{a}$, mostrar que

$$\nabla(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}) = \mathbf{a}, \qquad (3.119)$$

donde $\mathbf{r}$ es el vector de posición.

Solución: Sea $\mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3]$; puesto que $\mathbf{r} = [x, y, z]$,

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{r} = a_1 x + a_2 y + a_3 z.$$

Así que,

$$\begin{aligned} \nabla(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}) &= \frac{\partial}{\partial x}(a_1 x + a_2 y + a_3 z)\,\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}(a_1 x + a_2 y + a_3 z)\,\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}(a_1 x + a_2 y + a_3 z)\,\mathbf{k} \\ &= a_1\,\mathbf{i} + a_2\,\mathbf{j} + a_3\,\mathbf{k} \\ &= \mathbf{a}. \end{aligned}$$

PROBLEMA 3.35 Si $\phi = \phi(x, y, z)$, mostrar que

$$\nabla\phi\cdot d\mathbf{r} = d\phi. \qquad (3.120)$$

Solución: Si $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, entonces su diferencial es

$$d\mathbf{r} = dx\,\mathbf{i} + dy\,\mathbf{j} + dz\,\mathbf{k}.$$

Por (3.110), $\nabla\phi = \dfrac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \dfrac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \dfrac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k}$. Por consiguiente, tomando el producto escalar,

$$\nabla\phi\cdot d\mathbf{r} = \frac{\partial\phi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}\,dy + \frac{\partial\phi}{\partial z}\,dz = d\phi.$$

La identidad (3.120) se puede expresar como

$$(d\mathbf{r}\cdot\nabla)\phi = d\phi. \qquad (3.121)$$

PROBLEMA 3.36 Si $\phi = \phi(x, y, z, t)$, mostrar que

$$d\phi = d\mathbf{r}\cdot\nabla\phi + \frac{\partial\phi}{\partial t}\,dt. \qquad (3.122)$$

Solución: Si $\phi = \phi(x, y, z, t)$, entonces, por procedimientos de cálculo su diferencial es

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial \phi}{\partial y}\,dy + \frac{\partial \phi}{\partial z}\,dz + \frac{\partial \phi}{\partial t}\,dt.$$

Por los resultados del problema 3.35,

$$\begin{aligned} d\phi &= (\nabla\phi)\cdot d\mathbf{r} + \frac{\partial \phi}{\partial t}\,dt \\ &= d\mathbf{r}\cdot\nabla\phi + \frac{\partial \phi}{\partial t}\,dt. \end{aligned}$$

PROBLEMA 3.37 Hallar $\nabla\phi$ si $\phi = r = |\mathbf{r}| = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$.

Solución: La superficie definida por $\phi = r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} =$ const es una esfera con centro en el origen (0, 0, 0). Por consiguiente, de acuerdo con el resultado del problema 3.31, ∇r es normal a la esfera y por lo tanto es paralelo al vector de posición $\mathbf{r} = [x, y, z]$. Así, podemos escribir $\nabla r = k\mathbf{r}$. Por (3.120),

$$dr = \nabla r \cdot d\mathbf{r} = k\,\mathbf{r}\cdot d\mathbf{r} = kr\,dr.$$

Así que

$$k = \frac{1}{r},$$

y por tanto

$$\nabla r = \frac{1}{r}\,\mathbf{r} = \mathbf{e}_r, \tag{3.123}$$

donde $\mathbf{e}_r$ es el vector unitario en la dirección del vector de posición $\mathbf{r}$.

Solución alterna: Por (3.110) el gradiente es

$$\begin{aligned} \nabla r &= \nabla (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}\,\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}\,\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}\,\mathbf{k} \\ &= \frac{1}{2}\,\frac{2x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}\,\mathbf{i} + \frac{1}{2}\,\frac{2y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}\,\mathbf{j} + \frac{1}{2}\,\frac{2z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}\,\mathbf{k} \\ &= \frac{x}{r}\,\mathbf{i} + \frac{y}{r}\,\mathbf{j} + \frac{z}{r}\,\mathbf{k} \\ &= \frac{1}{r}\,\mathbf{r} \\ &= \mathbf{e}_r. \end{aligned}$$

PROBLEMA 3.38 Si $\phi = \phi(u)$, donde $u = u(x, y, z)$, entonces mostrar que

$$\nabla\phi = \nabla\phi(u) = \phi'(u)\nabla u. \tag{3.124}$$

Solución: Por (3.110), el gradiente es

$$\begin{aligned} \nabla\phi = \nabla\phi(u) &= \frac{\partial \phi}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\,\mathbf{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\,\mathbf{k} \\ &= \phi'(u)\,\frac{\partial u}{\partial x}\,\mathbf{i} + \phi'(u)\,\frac{\partial u}{\partial y}\,\mathbf{j} + \phi'(u)\,\frac{\partial u}{\partial z}\,\mathbf{k} \\ &= \phi'(u)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\,\mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\,\mathbf{k}\right) \\ &= \phi'(u)\nabla u. \end{aligned}$$

PROBLEMA 3.39 Si $r = |\mathbf{r}| = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$, hallar ∇r^n y $\nabla(1/r)$, donde n es cualquier número real.

Solución: Sea $\phi = \phi(r) = r^n$. Entonces por (3.124) y el resultado (3.123) del problema 3.37,

$$\begin{aligned}\nabla(r^n) = \frac{d}{dr}(r^n)\nabla r &= nr^{n-1}\nabla r \\ &= nr^{n-1}\mathbf{e}_r \\ &= nr^{n-2}\mathbf{r}. \qquad (3.125)\end{aligned}$$

Haciendo $n = -1$ en (3.125),

$$\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^3}\mathbf{r} = -\frac{1}{r^2}\mathbf{e}_r. \qquad (3.126)$$

3.7 El operador ∇

El operador vectorial diferencial

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}, \qquad [3.109]$$

no es un vector, sino un operador. Puede considerarse como un vector *simbólico*. Así si ϕ es un campo escalar, entonces $\phi\nabla$ es un operador, mientras que $\nabla\phi$ da la importante función vectorial llamada *gradiente*. De modo similar, si $\mathbf{f}$ es una función vectorial diferenciable, entonces $\mathbf{f}\nabla$ y $\mathbf{f}\times\nabla$ son operadores, mientras que $\nabla\mathbf{f}$ y $\nabla\times\mathbf{f}$ dan importantes funciones escalar y vectorial respectivamente. (Véanse secciones 3.8-9).

Por tanto, multiplicando ∇ a la izquierda da operadores, mientras que multiplicándolo a la derecha da importantes funciones escalares y vectoriales. En otras palabras, ∇ sólo opera sobre lo que le sigue.

3.8 Divergencia de una función vectorial

Si una función vectorial es $\mathbf{f} = [f_1, f_2, f_3]$, donde f_1, f_2, f_3 son funciones escalares, entonces su producto punto o escalar con el vector simbólico ∇ es

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\mathbf{f} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)\cdot(f_1\mathbf{i} + f_2\mathbf{j} + f_3\mathbf{k}) \\ &= \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}.\end{aligned}$$

Por consiguiente, una función vectorial $\mathbf{f}$ se transforma en una función escalar cuando se opera con ∇ por la izquierda. Esta función escalar se llama la *divergencia* de la función vectorial $\mathbf{f}$ y se escribe como div $\mathbf{f}$. Así que,

$$\operatorname{div}\mathbf{f} = \nabla\cdot\mathbf{f} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}. \qquad (3.127)$$

Aunque la definición (3.127) no da significado físico o geométrico alguno al concepto de divergencia, da su forma de fácil cálculo. En el capítulo 4 se dan otras definiciones de divergencia con su interpretación física también.

PROBLEMA 3.40 Si $\mathbf{f}$ y $\mathbf{g}$ son dos funciones vectoriales, mostrar que

$$\nabla\cdot(\mathbf{f} + \mathbf{g}) = \nabla\cdot\mathbf{f} + \nabla\cdot\mathbf{g}. \qquad (3.128)$$

Solución: Sean $\mathbf{f} = [f_1, f_2, f_3]$ y $\mathbf{g} = [g_1, g_2, g_3]$. Entonces,

$$\mathbf{f} + \mathbf{g} = (f_1 + g_1)\mathbf{i} + (f_2 + g_2)\mathbf{j} + (f_3 + g_3)\mathbf{k}.$$

Por (3.127),

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\mathbf{f} + \mathbf{g}) &= \frac{\partial}{\partial x}(f_1 + g_1) + \frac{\partial}{\partial y}(f_2 + g_2) + \frac{\partial}{\partial z}(f_3 + g_3)\\ &= \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial g_1}{\partial x} + \frac{\partial g_2}{\partial y} + \frac{\partial g_3}{\partial z}\right)\\ &= \nabla \cdot \mathbf{f} + \nabla \cdot \mathbf{g}.\end{aligned}$$

PROBLEMA 3.41 Si $\mathbf{r}$ es el vector de posición, hallar la divergencia $\nabla \cdot \mathbf{r}$.

Solución: Si $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, entonces por (3.127),

$$\nabla \cdot \mathbf{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3. \tag{3.129}$$

PROBLEMA 3.42 Hallar la divergencia de $\mathbf{f} = xyz\mathbf{i} + x^2y^2z\mathbf{j} + yz^3\mathbf{k}$.

Solución: Por (3.127), la divergencia es

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathbf{f} = \nabla \cdot \mathbf{f} &= \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}\\ &= \frac{\partial}{\partial x}(xyz) + \frac{\partial}{\partial y}(x^2y^2z) + \frac{\partial}{\partial z}(yz^3)\\ &= yz + 2x^2yz + 3yz^2.\end{aligned} \tag{3.130}$$

Si ϕ es una función escalar, entonces la *divergencia del gradiente de* ϕ es:

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad}\phi) = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}. \tag{3.131}$$

PROBLEMA 3.43 Verificar (3.131).

Solución: El gradiente es

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\operatorname{grad}\phi) = \nabla \cdot (\nabla\phi) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)\\ &= \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}.\end{aligned}$$

La divergencia del gradiente $\nabla \cdot \nabla$ se escribe como ∇^2. Entonces $\nabla \cdot (\nabla\phi)$ se escribe como $\nabla \cdot \nabla\phi = \nabla^2\phi$. El operador ∇^2 se llama el Laplaciano; i.e.,

$$\text{Laplaciano} = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \tag{3.132}$$

$$\nabla^2\phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}. \tag{3.133}$$

Una función escalar ϕ se dice *armónica* si es continua, tiene segundas derivadas parciales continuas y satisface la *ecuación de Laplace*

$$\nabla^2 \phi = 0. \tag{3.133}$$

PROBLEMA 3.44 Mostrar que la función $1/r$, donde $r = |\mathbf{r}| = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ es una función armónica, siempre que $r \neq 0$.

Solución: Claramente $1/r$ es continua, pues x^2, y^2, z^2 y r son continuas. Entonces por (3.131), el Laplaciano es

$$\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}.$$

Por otra parte la primera y la segunda derivadas parciales de $1/r$ con respecto a x son

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} = -x(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2},$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} &= \frac{\partial}{\partial x}[-x(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}] \\ &= 3x^2(x^2 + y^2 + z^2)^{-5/2} - (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} \\ &= 3x^2r^{-5} - r^{-3}.\end{aligned} \tag{3.134}$$

De modo similar, las segundas derivadas parciales de $1/r$ con respecto a y y a z son

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} = 3y^2r^{-5} - r^{-3}, \tag{3.135}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} = 3z^2r^{-5} - r^{-3}. \tag{3.136}$$

Como x, y, z y r son continuas, las segundas derivadas parciales son continuas también si $r \neq 0$.

Agregando (3.134-6),

$$\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = 3r^{-5}(x^2 + y^2 + z^2) - 3r^{-3} = 3r^{-5}r^2 - 3r^{-3} = 3r^{-3} - 3r^{-3} = 0, \tag{3.137}$$

con tal que $r \neq 0$. Así que se satisface la ecuación de Laplace y la función $1/r$ es armónica.

3.9 Rotacional de una función vectorial

Si una función vectorial es $\mathbf{f} = [f_1, f_2, f_3]$, donde f_1, f_2 y f_3 son funciones escalares con primeras derivadas continuas, entonces su producto cruz o vectorial con el vector simbólico ∇ es

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{f} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right) \times (f_1\mathbf{i} + f_2\mathbf{j} + f_3\mathbf{k}) \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right)\mathbf{k}.\end{aligned} \tag{3.138}$$

Llamamos a esta función el *rotacional* (rot f) de la función vectorial f; i.e.,

$$\text{rotacional } \mathbf{f} = \nabla \times \mathbf{f}. \tag{3.139}$$

Debe observarse que $\nabla \times \mathbf{f}$ no es necesariamente perpendicular a f aunque tratamos a ∇ como un vector simbólico. En el capítulo 4 se discute el significado físico del rotacional de f.

PROBLEMA 3.45 Si f y g son dos funciones vectoriales, mostrar que

$$\nabla \times (\mathbf{f} + \mathbf{g}) = \nabla \times \mathbf{f} + \nabla \times \mathbf{g}. \tag{3.140}$$

Solución: Sean $\mathbf{f} = [f_1, f_2, f_3]$ y $\mathbf{g} = [g_1, g_2, g_3]$. Entonces,

$$\mathbf{f} + \mathbf{g} = (f_1 + g_1)\mathbf{i} + (f_2 + g_2)\mathbf{j} + (f_3 + g_3)\mathbf{k}.$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned}
\nabla \times (\mathbf{f} + \mathbf{g}) &= \left[\frac{\partial(f_3 + g_3)}{\partial y} - \frac{\partial(f_2 + g_2)}{\partial z}, \dots\right] \\
&= \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \dots\right) + \left(\frac{\partial g_3}{\partial y} - \frac{\partial g_2}{\partial z}, \dots\right) \\
&= \nabla \times \mathbf{f} + \nabla \times \mathbf{g}.
\end{aligned}$$

PROBLEMA 3.46 Si r es el vector de posición, hallar $\nabla \times \mathbf{r}$.

Solución: Como $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, por (3.138) el rotacional es

$$\nabla \times \mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = \mathbf{0}. \tag{3.141}$$

PROBLEMA 3.47 Hallar el rotacional de $\mathbf{f} = xyz\mathbf{i} + x^2y^2z\mathbf{j} + yz^3\mathbf{k}$.

Solución: Por (3.138), el rotacional es

$$\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{f} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xyz & x^2y^2z & yz^3 \end{vmatrix} \\
&= \left[\frac{\partial}{\partial y}(yz^3) - \frac{\partial}{\partial z}(x^2y^2z)\right]\mathbf{i} + \left[\frac{\partial}{\partial z}(xyz) - \frac{\partial}{\partial x}(yz^3)\right]\mathbf{j} \\
&\quad + \left[\frac{\partial}{\partial x}(x^2y^2z) - \frac{\partial}{\partial y}(xyz)\right]\mathbf{k} \\
&= (z^3 - x^2y^2)\mathbf{i} + (xy)\mathbf{j} + (2xy^2z - xz)\mathbf{k}.
\end{aligned}$$

Si ϕ es una función escalar con segundas derivadas continuas, entonces el *rotacional del gradiente* de ϕ es el vector cero; i.e.,

$$\nabla \times (\nabla \phi) = \mathbf{0}. \tag{3.142}$$

PROBLEMA 3.48 Verificar (3.142)

Solución: El gradiente de ϕ es

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k}.$$

Por consiguiente, suponiendo que ϕ tiene segundas derivadas parciales continuas,

$$\begin{aligned}\nabla\times(\nabla\phi) &= \begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ \dfrac{\partial\phi}{\partial x} & \dfrac{\partial\phi}{\partial y} & \dfrac{\partial\phi}{\partial z}\end{vmatrix}\\ &= \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial y\,\partial z} - \frac{\partial^2\phi}{\partial z\,\partial y}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial z\,\partial x} - \frac{\partial^2\phi}{\partial x\,\partial z}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2\phi}{\partial y\,\partial x}\right)\mathbf{k}\\ &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

pues las segundas derivadas son continuas y por lo tanto,

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial y\,\partial z} = \frac{\partial^2\phi}{\partial z\,\partial y},\quad \frac{\partial^2\phi}{\partial z\,\partial x} = \frac{\partial^2\phi}{\partial x\,\partial z},\quad \frac{\partial^2\phi}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2\phi}{\partial y\,\partial x}.$$

Si la función vectorial es $\mathbf{f} = [f_1, f_2, f_3]$, donde las componentes escalares f_1, f_2, f_3 tienen segundas derivadas continuas, entonces la *divergencia del rotacional de* f *es cero;* esto es,

$$\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{f}) = 0. \tag{3.143}$$

PROBLEMA 3.49 Verificar (3.143).

Solución: Si $\mathbf{f} = f_1\mathbf{i} + f_2\mathbf{j} + f_3\mathbf{k}$, entonces por (3.138) su rotacional es

$$\nabla\times\mathbf{f} = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right)\mathbf{k}.$$

Por lo tanto, suponiendo que $\mathbf{f}$ tiene segundas derivadas parciales continuas, por (3.127), la divergencia del rotacional es

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{f}) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right)\\ &= \frac{\partial^2 f_3}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2 f_2}{\partial x\,\partial z} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial y\,\partial z} - \frac{\partial^2 f_3}{\partial y\,\partial x} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial z\,\partial x} - \frac{\partial^2 f_1}{\partial z\,\partial y}\\ &= 0\end{aligned}$$

pues las segundas derivadas son continuas y por lo tanto,

$$\frac{\partial^2 f_3}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 f_3}{\partial y\,\partial x},\qquad \frac{\partial^2 f_2}{\partial x\,\partial z} = \frac{\partial^2 f_2}{\partial z\,\partial x},\qquad \frac{\partial^2 f_1}{\partial y\,\partial z} = \frac{\partial^2 f_1}{\partial z\,\partial y}.$$

PROBLEMA 3.50 Mostrar que si $\mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A}$, entonces $\mathbf{A}$ no está unívocamente determinada por $\mathbf{B}$.

Solución: Si ψ es una función escalar arbitraria, sea

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\psi. \tag{3.144}$$

Entonces por (3.140) el rotacional de $\mathbf{A}'$ es

$$\begin{aligned}\nabla\times\mathbf{A}' &= \nabla\times(\mathbf{A} + \nabla\psi)\\ &= \nabla\times\mathbf{A} + \nabla\times(\nabla\psi)\\ &= \nabla\times\mathbf{A}\end{aligned} \tag{3.145}$$

pues $\nabla \times (\nabla \psi) = \mathbf{0}$ por (3.142). Así que $\mathbf{B}$ se puede expresar como $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}'$, lo que indica que $\mathbf{A}$ no está determinada unívocamente a partir de $\mathbf{B}$, pues ψ es arbitrario.

3.10 Operaciones con ∇ y algunas identidades vectoriales

Usando el operador ∇, hemos definido gradiente, divergencia y rotacional para obtener cantidades escalares y vectoriales. En esta sección consideraremos varias combinaciones del operador ∇ con funciones escalares y vectoriales.

Debe recalcarse que el orden en el cual aparecen los símbolos en las expresiones que usan ∇ es muy importante, pues el operador ∇ solamente opera en lo que le sigue. Así por ejemplo,

$$(\mathbf{f} \cdot \nabla)\mathbf{g} \neq \mathbf{g}(\mathbf{f} \cdot \nabla).$$

El lado izquierdo de esta expresión es un campo vectorial, mientras que el derecho es un operador. (Véase problema 3.51).

PROBLEMA 3.51 Determinar el significado que puede asignarse a $(\mathbf{f}\cdot\nabla)\phi$ y $(\mathbf{f}\cdot\nabla)\mathbf{g}$. (Véase problema 3.35).

Solución: Como ∇ es un operador diferencial con respecto a las coordenadas en el espacio; sólo opera con lo que le sigue. Así que interpretamos $(\mathbf{f}\cdot\nabla)\phi$ como producto vectorial del vector $\mathbf{f}$ con el gradiente $\nabla\phi$; i.e.,

$$(\mathbf{f}\cdot\nabla)\phi = \mathbf{f}\cdot(\nabla\phi). \tag{3.146}$$

Se pueden obtener resultados similares interpretando a ∇ como un vector simbólico; i.e.,

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}.$$

Entonces tomando su producto escalar a izquierda con $\mathbf{f}$,

$$\mathbf{f}\cdot\nabla = f_1\frac{\partial}{\partial x} + f_2\frac{\partial}{\partial y} + f_3\frac{\partial}{\partial z}. \tag{3.147}$$

Así que,

$$\begin{aligned}(\mathbf{f}\cdot\nabla)\phi &= \left(f_1\frac{\partial}{\partial x} + f_2\frac{\partial}{\partial y} + f_3\frac{\partial}{\partial z}\right)\phi \\ &= f_1\frac{\partial\phi}{\partial x} + f_2\frac{\partial\phi}{\partial y} + f_3\frac{\partial\phi}{\partial z} \\ &= \mathbf{f}\cdot(\nabla\phi).\end{aligned}$$

Como $\nabla\mathbf{g}$ no está definida, usamos el operador diferencial (3.147) que opera sobre $\mathbf{g}$ para obtener

$$\begin{aligned}(\mathbf{f}\cdot\nabla)\mathbf{g} &= \left(f_1\frac{\partial}{\partial x} + f_2\frac{\partial}{\partial y} + f_3\frac{\partial}{\partial z}\right)\mathbf{g} \\ &= f_1\frac{\partial\mathbf{g}}{\partial x} + f_2\frac{\partial\mathbf{g}}{\partial y} + f_3\frac{\partial\mathbf{g}}{\partial z}.\end{aligned} \tag{3.148}$$

PROBLEMA 3.52 Hallar $(\mathbf{f}\cdot\nabla)\phi$ y $(\mathbf{f}\cdot\nabla)\mathbf{g}$ en $(1, 1, 1)$ si $\mathbf{f} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, $\mathbf{g} = 3xyz^2\mathbf{i} + 2xy^3\mathbf{j} - x^2yz\mathbf{k}$ y $\phi = xyz$.

Solución: Como

$$\nabla\phi = \frac{\partial}{\partial x}(xyz)\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}(xyz)\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}(xyz)\mathbf{k} = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k},$$

tenemos

$$(\mathbf{f}\cdot\nabla)\phi = \mathbf{f}\cdot\nabla\phi = (-y)(yz) + (x)(xz) + (z)(xy)$$
$$= -y^2z + x^2z + xyz.$$

Por tanto en $(1, 1, 1)$, $(\mathbf{f}\cdot\nabla)\phi = -1 + 1 + 1 = 1$.

Multiplicando $\mathbf{f}\cdot\nabla$ por $\mathbf{g}$ a la derecha da

$$\begin{aligned}
(\mathbf{f}\cdot\nabla)\mathbf{g} &= (-y)\frac{\partial}{\partial x}(3xyz^2\mathbf{i} + 2xy^3\mathbf{j} - x^2yz\mathbf{k}) \\
&\quad + (x)\frac{\partial}{\partial y}(3xyz^2\mathbf{i} + 2xy^3\mathbf{j} - x^2yz\mathbf{k}) \\
&\quad + (z)\frac{\partial}{\partial z}(3xyz^2\mathbf{i} + 2xy^3\mathbf{j} - x^2yz\mathbf{k}) \\
&= (-y)(3yz^2\mathbf{i} + 2y^3\mathbf{j} - 2xyz\mathbf{k}) + (x)(3xz^2\mathbf{i} + 6xy^2\mathbf{j} - x^2z\mathbf{k}) \\
&\quad + (z)(6xyz\mathbf{i} - x^2y\mathbf{k}) \\
&= (-3y^2z^2 + 3x^2z^2 + 6xyz^2)\mathbf{i} + (-2y^4 + 6x^2y^2)\mathbf{j} \\
&\quad + (2xy^2z - x^3z - x^2yz)\mathbf{k}.
\end{aligned}$$

Entonces en $(1, 1, 1)$,

$$(\mathbf{f}\cdot\nabla)\mathbf{g} = (-3 + 3 + 6)\mathbf{i} + (-2 + 6)\mathbf{j} + (2 - 1 - 1)\mathbf{k} = 4\mathbf{j} = [0, 4, 0].$$

PROBLEMA 3.53 Si $\mathbf{r}$ es el vector de posición, mostrar que

$$(\mathbf{f}\cdot\nabla)\mathbf{r} = \mathbf{f}. \tag{3.149}$$

Solución: Si $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, entonces

$$\begin{aligned}
(\mathbf{f}\cdot\nabla)\mathbf{r} &= f_1\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x} + f_2\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial y} + f_3\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial z} \\
&= f_1\mathbf{i} + f_2\mathbf{j} + f_3\mathbf{k} \\
&= \mathbf{f}.
\end{aligned}$$

PROBLEMA 3.54 Mostrar que

$$(d\mathbf{r}\cdot\nabla)\mathbf{f} = d\mathbf{f}. \tag{3.150}$$

Solución: Por (3.147),

$$d\mathbf{r}\cdot\nabla = dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y} + dz\frac{\partial}{\partial z}.$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned}
(d\mathbf{r}\cdot\nabla)\mathbf{f} &= dx\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial x} + dy\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial y} + dz\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial z} \\
&= \frac{\partial\mathbf{f}}{\partial x}dx + \frac{\partial\mathbf{f}}{\partial y}dy + \frac{\partial\mathbf{f}}{\partial z}dz \\
&= d\mathbf{f}.
\end{aligned}$$

PROBLEMA 3.55 Si $\mathbf{f} = \mathbf{f}(x, y, z, t)$, entonces mostrar que

$$d\mathbf{f} = (d\mathbf{r}\cdot\nabla)\mathbf{f} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t}\,dt. \tag{3.151}$$

Solución: Como $\mathbf{f} = \mathbf{f}(x, y, z, t)$, tenemos por la definición de diferenciales,

$$\begin{aligned} d\mathbf{f} &= \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x}\,dx + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y}\,dy + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial z}\,dz + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t}\,dt \\ &= dx\,\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} + dy\,\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y} + dz\,\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t}\,dt \\ &= (d\mathbf{r}\cdot\nabla)\mathbf{f} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t}\,dt. \end{aligned}$$

PROBLEMA 3.56 Determinar el significado que puede darse a $(\mathbf{f} \times \nabla)\phi$ y $(\mathbf{f} \times \nabla)\mathbf{g}$.

Solución: Como el operador ∇ sólo actúa sobre lo que le sigue, interpretamos $(\mathbf{f} \times \nabla)\,\phi$ como el producto vectorial de $\mathbf{f}$ por el gradiente $\nabla\phi$; i.e.,

$$(\mathbf{f} \times \nabla)\phi = \mathbf{f} \times (\nabla\phi). \tag{3.152}$$

Se pueden obtener resultados similares interpretando ∇ como un vector simbólico; i.e.,

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}.$$

Como $\mathbf{f} \times \nabla$ es un operador,

$$\begin{aligned} \mathbf{f} \times \nabla &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ f_1 & f_2 & f_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} \\ &= \left(f_2\,\frac{\partial}{\partial z} - f_3\,\frac{\partial}{\partial y}\right)\mathbf{i} + \left(f_3\,\frac{\partial}{\partial x} - f_1\,\frac{\partial}{\partial z}\right)\mathbf{j} + \left(f_1\,\frac{\partial}{\partial y} - f_2\,\frac{\partial}{\partial x}\right)\mathbf{k}. \end{aligned} \tag{3.153}$$

Así que,

$$\begin{aligned} (\mathbf{f} \times \nabla)\phi &= \left[\left(f_2\,\frac{\partial}{\partial z} - f_3\,\frac{\partial}{\partial y}\right)\mathbf{i} + \left(f_3\,\frac{\partial}{\partial x} - f_1\,\frac{\partial}{\partial z}\right)\mathbf{j} + \left(f_1\,\frac{\partial}{\partial y} - f_2\,\frac{\partial}{\partial x}\right)\mathbf{k}\right]\phi \\ &= \left(f_2\,\frac{\partial \phi}{\partial z} - f_3\,\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)\mathbf{i} + \left(f_3\,\frac{\partial \phi}{\partial x} - f_1\,\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)\mathbf{j} + \left(f_1\,\frac{\partial \phi}{\partial y} - f_2\,\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)\mathbf{k} \\ &= \mathbf{f} \times (\nabla\phi). \end{aligned}$$

No se asigna definición alguna a $(\mathbf{f} \times \nabla)\mathbf{g}$ ya que éste es un tipo de operador diferencial con cantidades vectoriales.

Aunque no se asigne significado a cantidades tales como $\nabla\mathbf{g}$ y $(\mathbf{f} \times \nabla)\mathbf{g}$, ellas son generalizaciones de vectores y se llaman *diádicos*. Formalmente, un diádico es una generalización de un vector.

PROBLEMA 3.57 Si $\mathbf{f}$ y $\mathbf{g}$ son dos funciones vectoriales, mostrar que

$$(\mathbf{f} \times \nabla)\cdot\mathbf{g} = \mathbf{f}\cdot(\nabla \times \mathbf{g}). \tag{3.154}$$

Solución: Por (3.153),

$$(\mathbf{f}\times\nabla)\cdot\mathbf{g} = \left(f_2\frac{\partial}{\partial z} - f_3\frac{\partial}{\partial y}\right)(\mathbf{i}\cdot\mathbf{g}) + \left(f_3\frac{\partial}{\partial x} - f_1\frac{\partial}{\partial z}\right)(\mathbf{j}\cdot\mathbf{g})$$
$$+\left(f_1\frac{\partial}{\partial y} - f_2\frac{\partial}{\partial x}\right)(\mathbf{k}\cdot\mathbf{g})$$
$$= \left(f_2\frac{\partial g_1}{\partial z} - f_3\frac{\partial g_1}{\partial y}\right) + \left(f_3\frac{\partial g_2}{\partial x} - f_1\frac{\partial g_2}{\partial z}\right) + \left(f_1\frac{\partial g_3}{\partial y} - f_2\frac{\partial g_3}{\partial x}\right)$$
$$= f_1\left(\frac{\partial g_3}{\partial y} - \frac{\partial g_2}{\partial z}\right) + f_2\left(\frac{\partial g_1}{\partial z} - \frac{\partial g_3}{\partial x}\right) + f_3\left(\frac{\partial g_2}{\partial x} - \frac{\partial g_1}{\partial y}\right)$$
$$= \mathbf{f}\cdot(\nabla\times\mathbf{g})$$

pues $\mathbf{i}\cdot\mathbf{g} = g_1$, $\mathbf{j}\cdot\mathbf{g} = g_2$ y $\mathbf{k}\cdot\mathbf{g} = g_3$.

Ahora consideraremos un grupo de identidades vectoriales bien conocidas que incluyen al operador ∇. Aun cuando estas identidades se pueden verificar por desarrollo directo usando las componentes de la función vectorial estableceremos estas identidades heurísticamente tratando ∇ como un vector simbólico y también como un operador diferencial. Entonces las expresiones se manipulan de acuerdo con las fórmulas apropiadas del álgebra vectorial. En el resultado final ∇ se da con su significado operacional.

PROBLEMA 3.58 Demostrar que

$$\nabla\cdot(\phi\mathbf{f}) = \phi\nabla\cdot\mathbf{f} + \mathbf{f}\cdot\nabla\phi. \tag{3.155}$$

Solución: Como ∇ es un operador diferencial, la regla para diferenciación de un producto puede expresarse como

$$\nabla\cdot(\phi\mathbf{f}) = \nabla_\phi\cdot(\phi\mathbf{f}) + \nabla_\mathbf{f}\cdot(\phi\mathbf{f}).$$

El producto punto C$\phi\cdot(\phi\mathbf{f})$ significa que $\mathbf{f}$ es fijo y ∇ opera sobre ϕ. De modo similar, ∇ $\mathbf{f}\cdot(\phi\mathbf{f})$ significa que es fijo y ∇ opera sobre $\mathbf{f}$. Como $\nabla\cdot\phi$ no está definido,

$$\nabla_\phi\cdot(\phi\mathbf{f}) = \mathbf{f}\cdot\nabla\phi,$$
$$\nabla_\mathbf{f}\cdot(\phi\mathbf{f}) = \phi\nabla\cdot\mathbf{f}.$$

Sumando las dos ecuaciones anteriores,

$$\nabla\cdot(\phi\mathbf{f}) = \mathbf{f}\cdot\nabla\phi + \phi\cdot\nabla\mathbf{f}.$$

Solución alterna: Usando componentes,

$$\nabla\cdot(\phi\mathbf{f}) = \frac{\partial}{\partial x}(\phi f_1) + \frac{\partial}{\partial y}(\phi f_2) + \frac{\partial}{\partial z}(\phi f_3)$$
$$= \phi\frac{\partial f_1}{\partial x} + f_1\frac{\partial\phi}{\partial x} + \phi\frac{\partial f_2}{\partial y} + f_2\frac{\partial\phi}{\partial y} + \phi\frac{\partial f_3}{\partial z} + f_3\frac{\partial\phi}{\partial z}$$
$$= \phi\left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}\right) + \left(f_1\frac{\partial\phi}{\partial x} + f_2\frac{\partial\phi}{\partial y} + f_3\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)$$
$$= \phi\nabla\cdot\mathbf{f} + \mathbf{f}\cdot\nabla\phi.$$

PROBLEMA 3.59 Demostrar que

$$\nabla\times(\phi\mathbf{f}) = \phi\nabla\times\mathbf{f} + (\nabla\phi)\times\mathbf{f} = \phi\nabla\times\mathbf{f} - \mathbf{f}\times\nabla\phi. \tag{3.156}$$

Solución: Como $\nabla\times(\phi\mathbf{f}) = \nabla\phi\times(\phi\mathbf{f}) + \nabla\mathbf{f}\times(\phi\mathbf{f})$ y $\nabla\times\phi$ no está definido,

$$\nabla_\phi \times (\phi \mathbf{f}) = (\nabla\phi) \times \mathbf{f} = -\mathbf{f} \times \nabla\phi,$$
$$\nabla_\mathbf{f} \times (\phi \mathbf{f}) = \phi\nabla \times \mathbf{f}.$$

Entonces, sumando estas dos ecuaciones,

$$\nabla \times (\phi \mathbf{f}) = (\nabla\phi) \times \mathbf{f} + \phi\nabla \times \mathbf{f} = \phi\nabla \times \mathbf{f} - \mathbf{f} \times \nabla\phi.$$

PROBLEMA 3.60 Demostrar que

$$\nabla \cdot (\mathbf{f} \times \mathbf{g}) = \mathbf{g} \cdot (\nabla \times \mathbf{f}) - \mathbf{f} \cdot (\nabla \times \mathbf{g}). \tag{3.157}$$

Solución: Podemos escribir

$$\nabla \cdot (\mathbf{f} \times \mathbf{g}) = \nabla_\mathbf{f} \cdot (\mathbf{f} \times \mathbf{g}) + \nabla_\mathbf{g} \cdot (\mathbf{f} \times \mathbf{g}),$$

donde los subíndices tienen el mismo significado de antes; esto es, $\nabla_\mathbf{f} \cdot (\mathbf{f} \times \mathbf{g})$ significa que $\mathbf{g}$ es fijo y ∇ opera sobre $\mathbf{f}$. Por (1.77),

$$\nabla_\mathbf{f} \cdot (\mathbf{f} \times \mathbf{g}) = \mathbf{g} \cdot \nabla \times \mathbf{f},$$
$$\nabla_\mathbf{g} \cdot (\mathbf{f} \times \mathbf{g}) = -\mathbf{f} \cdot \nabla \times \mathbf{g}.$$

Así que,

$$\nabla \cdot (\mathbf{f} \times \mathbf{g}) = \mathbf{g} \cdot \nabla \times \mathbf{f} - \mathbf{f} \cdot \nabla \times \mathbf{g}.$$

PROBLEMA 3.61 Verificar

$$\nabla \times (\mathbf{f} \times \mathbf{g}) = \mathbf{f}(\nabla \cdot \mathbf{g}) - \mathbf{g}(\nabla \cdot \mathbf{f}) + (\mathbf{g} \cdot \nabla)\mathbf{f} - (\mathbf{f} \cdot \nabla)\mathbf{g}. \tag{3.158}$$

Solución: Como $\nabla \times (\mathbf{f} \times \mathbf{g}) = \nabla_\mathbf{f} \times (\mathbf{f} \times \mathbf{g}) + \nabla_\mathbf{g} \times (\mathbf{f} \times \mathbf{g})$, aplicando la regla del término central para el triple producto vectorial (1.83) da

$$\nabla_\mathbf{f} \times (\mathbf{f} \times \mathbf{g}) = (\mathbf{g} \cdot \nabla)\mathbf{f} - \mathbf{g}(\nabla \cdot \mathbf{f}),$$
$$\nabla_\mathbf{g} \times (\mathbf{f} \times \mathbf{g}) = \mathbf{f}(\nabla \cdot \mathbf{g}) - (\mathbf{f} \cdot \nabla)\mathbf{g}.$$

Por consiguiente,

$$\nabla \times (\mathbf{f} \times \mathbf{g}) = \mathbf{f}(\nabla \cdot \mathbf{g}) - \mathbf{g}(\nabla \cdot \mathbf{f}) + (\mathbf{g} \cdot \nabla)\mathbf{f} - (\mathbf{f} \cdot \nabla)\mathbf{g}.$$

Las cantidades $(\mathbf{g} \cdot \nabla)\mathbf{f}$ y $(\mathbf{f} \cdot \nabla)\mathbf{g}$ se definen en (3.148).

PROBLEMA 3.62 Demostrar que

$$\nabla(\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}) = \mathbf{f} \times (\nabla \times \mathbf{g}) + \mathbf{g} \times (\nabla \times \mathbf{f}) + (\mathbf{f} \cdot \nabla)\mathbf{g} + (\mathbf{g} \cdot \nabla)\mathbf{f}. \tag{3.159}$$

Solución: Aplicamos la regla del término central para el triple producto vectorial (1.83) a $\mathbf{f} \times (\nabla \times \mathbf{g})$, donde la función vectorial $\mathbf{f}$ es una constante. Entonces,

$$\mathbf{f} \times (\nabla \times \mathbf{g}) = \nabla_\mathbf{g}(\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}) - (\mathbf{f} \cdot \nabla)\mathbf{g}. \tag{3.160}$$

Por consiguiente,

$$\nabla_\mathbf{g}(\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}) = \mathbf{f} \times (\nabla \times \mathbf{g}) + (\mathbf{f} \cdot \nabla)\mathbf{g}, \tag{3.161}$$

e intercambiando $\mathbf{f}$ y $\mathbf{g}$,

$$\nabla_\mathbf{f}(\mathbf{g} \cdot \mathbf{f}) = \nabla_\mathbf{f}(\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}) = \mathbf{g} \times (\nabla \times \mathbf{f}) + (\mathbf{g} \cdot \nabla)\mathbf{f}. \tag{3.162}$$

En consecuencia, usando (3.161-2),

$$\begin{aligned}\nabla(\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}) &= \nabla_\mathbf{f}(\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}) + \nabla_\mathbf{g}(\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}) \\ &= \mathbf{g} \times (\nabla \times \mathbf{f}) + \mathbf{f} \times (\nabla \times \mathbf{g}) + (\mathbf{g} \cdot \nabla)\mathbf{f} + (\mathbf{f} \cdot \nabla)\mathbf{g}.\end{aligned}$$

Si f es una función vectorial con segundas derivadas continuas, entonces el *rotacional del rotacional* de f es

$$\text{rot (rot f)} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{f}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{f}) - \nabla^2\mathbf{f} \qquad (3.163)$$
$$= \text{grad (div f)} - \nabla^2\mathbf{f}.$$

PROBLEMA 3.63 Verificar (3.163).

Solución: Por la fórmula para el triple producto vectorial (1.83),

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}; \qquad [1.83]$$

entonces haciendo $\mathbf{A} = \mathbf{B} = \nabla$ y $\mathbf{C} = \mathbf{f}$,

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{f}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{f}) - (\nabla \cdot \nabla)\mathbf{f}$$
$$= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{f}) - \nabla^2\mathbf{f}.$$

En lugar de escribir $(\nabla \cdot \mathbf{f})\nabla$, debemos escribir $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{f})$ de modo que ∇ opera sobre **f**. Entonces por (3.163),

$$\nabla^2\mathbf{f} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{f}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{f}), \qquad (3.164)$$

que es la fórmula para calcular $\nabla^2\mathbf{f}$.

PROBLEMA 3.64 Calcular $\nabla \cdot [f(r)\mathbf{r}]$ si **r** es el vector de posición y $r = |\mathbf{r}|$.

Solución: Por (3.155)

$$\nabla \cdot [f(r)\mathbf{r}] = f(r)\nabla \cdot \mathbf{r} + \mathbf{r} \cdot \nabla[f(r)],$$

y por (3.129),

$$\nabla \cdot \mathbf{r} = 3.$$

Entonces por (3.123-4),

$$\nabla[f(r)] = f'(r)\nabla r = f'(r)\frac{\mathbf{r}}{r} = f'(r)\mathbf{e}_r. \qquad (3.165)$$

por tanto, puesto que $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = r^2$,

$$\nabla \cdot [f(r)\mathbf{r}] = 3f(r) + \frac{f'(r)}{r}\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = 3f(r) + rf'(r). \qquad (3.166)$$

PROBLEMA 3.65 Calcular $\nabla \cdot (r^{n-1}\mathbf{r})$.

Solución: Haciendo $f(r) = r^{n-1}$ en (3.166),

$$\nabla \cdot (r^{n-1}\mathbf{r}) = 3r^{n-1} + (n-1)r^{n-1}$$
$$= (n+2)r^{n-1}. \qquad (3.167)$$

Haciendo $n = -2$ en (3.167), obtenemos, para $r \neq 0$,

$$\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3}\right) = 0. \qquad (3.168)$$

Ahora, por (3.126) tenemos $\nabla(1/r) = -1/r^3\ \mathbf{r}$; por lo tanto (3.168) indica que para $r \neq 0$,

$$\nabla \cdot \nabla\left(\frac{1}{r}\right) = \nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = 0. \qquad [3.137]$$

PROBLEMA 3.66 Calcular $\nabla \times [f(r)\mathbf{r}]$.

Solución: Usando (3.156),

$$\nabla \times [f(r)\mathbf{r}] = f(r)\nabla \times \mathbf{r} + [\nabla f(r)] \times \mathbf{r}.$$

Ahora, por (3.141), $\nabla \times \mathbf{r} = \mathbf{0}$ y por (3.165), $\nabla[f(r)] = f'(r)\,\mathbf{r}/r$. Por tanto,

$$\nabla \times [f(r)\mathbf{r}] = \frac{f'(r)}{r}\,\mathbf{r} \times \mathbf{r} = \mathbf{0} \tag{3.169}$$

pues $\mathbf{r} \times \mathbf{r} = \mathbf{0}$ por (1.58).

PROBLEMA 3.67 Calcular $\nabla \cdot \nabla[f(r)] = \nabla^2 f(r)$.

Solución: Por (3.165),

$$\nabla[f(r)] = \frac{f'(r)}{r}\,\mathbf{r}.$$

Así que por (3.155),

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \nabla[f(r)] &= \nabla \cdot \left[\frac{f'(r)}{r}\,\mathbf{r}\right]\\ &= \frac{f'(r)}{r}\,\nabla \cdot \mathbf{r} + \mathbf{r} \cdot \nabla\left[\frac{f'(r)}{r}\right].\end{aligned}$$

Entonces por (3.129) y (3.165), obtenemos $\nabla \cdot \mathbf{r} = 3$ y

$$\nabla\left[\frac{f'(r)}{r}\right] = \frac{1}{r}\,\frac{d}{dr}\left[\frac{f'(r)}{r}\right]\mathbf{r} = \frac{1}{r}\left[\frac{1}{r}\,f''(r) - \frac{1}{r^2}\,f'(r)\right]\mathbf{r}.$$

Así, puesto que $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = r^2$,

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \nabla[f(r)] &= \frac{3}{r}\,f'(r) + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{r}\,f''(r) - \frac{1}{r^2}\,f'(r)\right]\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}\\ &= \frac{2}{r}\,f'(r) + f''(r).\end{aligned} \tag{3.170}$$

PROBLEMA 3.68 Calcular $\nabla \cdot \nabla r^n = \nabla^2 r^n$.

Solución: Haciendo $f(r) = r^n$ en (3.170),

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \nabla r^n = \nabla^2 r^n &= \frac{2}{r}\,\frac{d}{dr}\,r^n + \frac{d^2}{dr^2}\,r^n\\ &= 2nr^{n-2} + n(n-1)r^{n-2}\\ &= n(n+1)r^{n-2}.\end{aligned} \tag{3.171}$$

Haciendo $n = -1$ en (3.171), tenemos para $r \neq 0$, $\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = 0$, que es (3.137).

PROBLEMA 3.69 Mostrar que

$$\nabla \cdot (\phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi) = \phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi. \tag{3.172}$$

Solución: Haciendo $\mathbf{f} = \nabla \psi$ en (3.155),

$$\nabla \cdot (\phi \nabla \psi) = \phi \nabla \cdot \nabla \psi + \nabla \psi \cdot \nabla \phi = \phi \nabla^2 \psi + \nabla \psi \cdot \nabla \phi; \tag{3.173}$$

entonces intercambiando ϕ y ψ en (3.173),

$$\nabla \cdot (\psi \nabla \phi) = \psi \nabla^2 \phi + \nabla \phi \cdot \nabla \psi. \tag{3.174}$$

Sustrayendo (3.174) de (3.173) se obtiene

$$\nabla \cdot (\phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi) = \phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi$$

pues $\nabla \phi \cdot \nabla \psi = \nabla \psi \cdot \nabla \phi$.

3.11 Problemas suplementarios

PROBLEMA 3.70 Sean $\mathbf{A}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$ y $\mathbf{B}(t) = \mathbf{i} + t\mathbf{j} + (1-t)\mathbf{k}$. En t = 1, calcular (a) $\mathbf{A}'(t)$, (b) $(d/dt)\,[\mathbf{A}(t)\cdot\mathbf{B}(t)]$ y (c) $(d/dt)\,[\mathbf{A}(t)\times\mathbf{B}(t)]$,
Respuesta: (a) [1, 2, 3], (b) 3, (c) [−1, 1, 0].

PROBLEMA 3.71 Mostrar que si las terceras derivadas de la función vectorial $\mathbf{f}(t)$ existen, entonces

(a) $\dfrac{d}{dt}\,[\mathbf{f}(t)\times\mathbf{f}'(t)] = \mathbf{f}(t)\times\mathbf{f}''(t)$,

(b) $\dfrac{d}{dt}\,[\mathbf{f}(t)\;\mathbf{f}'(t)\;\mathbf{f}'''(t)] = [\mathbf{f}(t)\;\mathbf{f}'(t)\;\mathbf{f}'''(t)]$.

PROBLEMA 3.72 Si $\mathbf{f}(t)\times\mathbf{f}'(t) = \mathbf{0}$, entonces mostrar que $\mathbf{f}(t)$ tiene una dirección fija. [*Sugerencia:* Sea $\mathbf{f}(t) = f(t)\;\mathbf{e}(t)$, donde $\mathbf{e}(t)$ es un vector unitario. Deducir que $\mathbf{e}(t)\times\mathbf{e}'(t) = \mathbf{0}$ y $\mathbf{e}(t)\cdot\mathbf{e}'(t) = 0$].

PROBLEMA 3.73 Verificar la regla de la cadena para derivadas (3.19).

PROBLEMA 3.74 Si $\mathbf{f} = uvw\mathbf{i} + uw^2\mathbf{j} - v^3\mathbf{k}$ y $\mathbf{g} = u^3\mathbf{i} - uvw\mathbf{j} + u^2w\mathbf{k}$, calcular

(a) $\dfrac{\partial^2\mathbf{f}}{\partial u\,\partial v}$ a en el origen,

(b) $\dfrac{\partial^2\mathbf{f}}{\partial v^2}\times\dfrac{\partial^2\mathbf{g}}{\partial u^2}$ en el punto (1, 1, 0).

Respuesta: (a) 0, (b) [0, −36, 0].

PROBLEMA 3.75 Trazar las curvas representadas por las siguientes funciones vectoriales:

(a) $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{k}$, $0 \le t \le 2\pi$;

(b) $\mathbf{r}(t) = a\cos t\,\mathbf{i} + a\operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + bt\,\mathbf{k}$, $b > 0$ y $0 \le t < \infty$;

(c) $\mathbf{r}(t) = t^3\mathbf{i} - t\,\mathbf{j}$, $-\infty < t < \infty$.

Respuesta: (a) Una elipse, (b) una hélice cilíndrica.

PROBLEMA 3.76 Hallar la longitud de las curvas representadas por las siguientes funciones vectoriales:

(a) $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{k}$, $0 \le t \le 2\pi$,

(b) $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} 2\pi t\,\mathbf{j} + \cos 2\pi t\,\mathbf{k}$, $0 \le t \le 1$,

(c) $\mathbf{r}(t) = \cos 3t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} 3t\,\mathbf{j}$, $0 \le t \le 2\pi$.

Respuesta: (a) 3π, (b) $\sqrt{1+4\pi^2}$, (c) 6π.

PROBLEMA 3.77 Hallar el vector unitario **T** tangente a las curvas representadas por las siguientes funciones vectoriales en los puntos especificados:

(a) $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$, en $t = \pi$;

(b) $\mathbf{r}(t) = \left(t - \dfrac{t^3}{3}\right)\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \left(t + \dfrac{t^3}{3}\right)\mathbf{k}$, en $t = 1$;

(c) $\mathbf{r}(t) = a(t - \operatorname{sen} t)\mathbf{i} + a(1 - \cos t)\mathbf{j}$, en cualquier punto t.

Respuesta: (a) $\left[0, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right]$, (b) $\left[0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right]$, (c) $\left(\operatorname{sen}\dfrac{t}{2}\right)\mathbf{i} + \left(\cos\dfrac{t}{2}\right)\mathbf{j}$.

PROBLEMA 3.78 Hallar un vector unitario **n** normal en (0, 0, 0) a la superficie S representada por $z = 3x^2 + 4y^2$.
Respuesta: $[0, 0, -1]$.

PROBLEMA 3.79 Hallar un vector unitario **n** normal en (1, 1, 1) a la superficie S representada por $x^2 + y^2 - z - 1 = 0$.
Respuesta: $\left[\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right]$.

PROBLEMA 3.80 Hallar un vector unitario **n** normal a la superficie S representada por la ecuaciones paramétricas $x = u \cos v$, $y = u$ sen v, $z = z(u)$.

Respuesta: $\frac{1}{\sqrt{1 + [(z'(u)]^2}} [-z'(u) \cos v, -z'(u) \operatorname{sen} v, 1]$.

PROBLEMA 3.81 Hallar la derivada direccional de $\phi(x, y, z) = z^2y + y^2z + z^2x$ en (1, 1, 1) en la dirección de C representada por $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$.
Respuesta: $18/\sqrt{14}$.

PROBLEMA 3.82 Si $\phi(x, y, z) = xy + yz + zx$, hallar

(a) $\nabla\phi$ en (1, 1, 3),

(b) $\frac{\partial\phi}{\partial s}$ en (1, 1, 3) en la dirección de $[1, 1, 1]$,

(c) la derivada normal $\frac{\partial\phi}{\partial n} = \nabla\phi\cdot\mathbf{n}$ en (1, 1, 3), donde **n** es un vector unitario normal a la superficie S definida por una constante $\phi(x, y, z)$.

Respuesta: (a) $[4, 4, 2]$, (b) $10/\sqrt{3}$, (c) 6.

PROBLEMA 3.83 Hallar la divergencia y el rotacional de $\mathbf{f} = (x - y)\mathbf{i} + (y - z)\mathbf{j} + (z - x)\mathbf{k}$ y $\mathbf{g} = (x^2 + yz)\mathbf{i} + (y^2 + zx)\mathbf{j} + (z^2 + xy)\mathbf{k}$.
Respuesta: $\nabla\cdot\mathbf{f} = 3$, $\nabla\times\mathbf{f} = [1, 1, 1]$, $\nabla\cdot\mathbf{g} = 2(x + y + z)$ y $\nabla\times\mathbf{g} = \mathbf{0}$.

PROBLEMA 3.84 Si $\phi = 3x^2 - yz$ y $\mathbf{f} = 3xyz^2\mathbf{i} + 2xy^3\mathbf{j} - x^2yz\mathbf{k}$, hallar en $(1, -1, 1)$, (a) $\nabla\phi$, (b) $\nabla\cdot\mathbf{f}$, (c) $\nabla\times\mathbf{f}$, (d) $\mathbf{f}\cdot\nabla\phi$, (e) $\nabla\cdot(\phi\mathbf{f})$, (f) $\nabla\times(\phi\mathbf{f})$, y (g) $\nabla^2\phi$.
Respuesta: (a) $[6, -1, 1]$, (b) 4, (c) $[-1, -8, -5]$, (d) -15, (e) 1, (f) $[-3, -41, -35]$, y (g) 6.

PROBLEMA 3.85 Si $\nabla\times\mathbf{f} = \mathbf{0}$, donde $\mathbf{f} = (xyz)^m\,(x^n\mathbf{i} + y^n\mathbf{j} + z^n\mathbf{k})$, mostrar que $m = 0$ o bien $n = -1$.

PROBLEMA 3.86 Para un vector arbitrario constante **a**, y el vector de posición **r**, mostrar que

(a) $\nabla\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{r}) = 0$,

(b) $\nabla\times(\mathbf{a}\times\mathbf{r}) = 2\mathbf{a}$,

(c) $\nabla\left(\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}}{r^3}\right) - \nabla\times\left(\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{r}}{r^3}\right) = \mathbf{0}$,

(d) $\nabla\left(\mathbf{a}\cdot\nabla\frac{1}{r}\right) + \nabla\times\left(\mathbf{a}\times\nabla\frac{1}{r}\right) = \mathbf{0}$.

PROBLEMA 3.87 Para cualquier función vectorial **f** diferenciable y el vector de posición **r**, mostrar que

$$\nabla \cdot (\mathbf{f} \times \mathbf{r}) = \mathbf{r} \cdot (\nabla \times \mathbf{f}).$$

PROBLEMA 3.88 Mostrar que si ϕ y ψ son armónicas, entonces $\phi + \psi$ y $c\,\phi$, para una constante arbitraria c, son también armónicas.

PROBLEMA 3.89 Si las segundas derivadas de las funciones ϕ y ψ existen, entonces demostrar que

$$\text{(a)}\quad \nabla^2(\phi\psi) = \phi\nabla^2\psi + 2\nabla\phi\cdot\nabla\psi + \psi\nabla^2\phi, \qquad \text{(b)}\quad \nabla\left(\frac{\phi}{\psi}\right) = \frac{\psi\nabla\phi - \phi\nabla\psi}{\psi^2}.$$

PROBLEMA 3.90 Si **u** es un vector unitario constante y **f** es una función vectorial diferenciable, mostrar que $\mathbf{u} \cdot [\nabla(\mathbf{f} \cdot \mathbf{u}) - \nabla \times (\mathbf{f} \times \mathbf{u}) = \nabla \cdot \mathbf{f}$.

PROBLEMA 3.91 Si $\mathbf{f} = 2z\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + x\mathbf{k}$ y $\phi = 2x^2y^2z^2$, hallar $(\mathbf{f} \times \nabla)\,\phi$ en el punto $(1, -1, 1)$.
Respuesta: $[-8, -4, 4]$.

PROBLEMA 3.92 Se dice que el campo vectorial **f** es *solenoidal* si **f** es diferenciable y $\nabla \cdot \mathbf{f} = 0$; se llama *irrotacional* si **f** es diferenciable y $\nabla \times \mathbf{f} = \mathbf{0}$. Mostrar que si **f** y **g** son irrotacionales, entonces $\mathbf{f} \times \mathbf{g}$ es solenoidal.

PROBLEMA 3.93 Si ϕ y ψ son funciones escalares que tienen segundas derivadas continuas, entonces mostrar que $\nabla\phi \times \nabla\psi$ es solenoidal.

PROBLEMA 3.94 Si ϕ es armónica, entonces mostrar que $\nabla\phi$ es solenoidal e irrotacional.

PROBLEMA 3.95 Si $c\mathbf{f} = \nabla\phi$, donde c es una constante, entonces mostrar que $\mathbf{f} \cdot \nabla \times \mathbf{f} = 0$.

PROBLEMA 3.96 Mostrar que si **f** es cualquier función vectorial diferenciable, entonces

$$(\mathbf{f} \cdot \nabla)\,\mathbf{f} = \frac{1}{2}\,\nabla(\mathbf{f} \cdot \mathbf{f}) - \mathbf{f} \times (\nabla \times \mathbf{f}).$$

PROBLEMA 3.97 Mostrar que para funciones escalares diferenciables cualesquiera $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$ y $w(x, y, z)$,

$$[\nabla u\ \nabla v\ \nabla w] = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial u}{\partial z} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} & \dfrac{\partial v}{\partial z} \\ \dfrac{\partial w}{\partial x} & \dfrac{\partial w}{\partial y} & \dfrac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix}$$

Este se llama el *Jacobiano* de u, v, w y se denota por

$$J\left[\frac{(u, v, w)}{(x, y, z)}\right] = \frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)}.$$

PROBLEMA 3.98 Demostrar que una condición necesaria y suficiente es que el jacobiano de u, v, w se anule para u, v, w para ser *funcionalmente dependiente;* esto es, u, v, w satisfacen la ecuación $F(u, v, w) = 0$.

PROBLEMA 3.99 Verificar que $u = x + y$, $v = x - y + z$, y $w = (2x + z)^2 + (2y - z)^2$ son funcionalmente dependientes.

CAPITULO 4

CALCULO INTEGRAL VECTORIAL

4.1 Integrales de línea

En la sección 3.4, una curva C, para $a \leq t \leq b$, se representa por

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k}, \tag{3.38}$$

donde $\mathbf{r}$ es el vector de posición y t es cualquier parámetro. El *vector de desplazamiento diferencial* $d\mathbf{r}$ a lo largo de C es

$$d\mathbf{r} = dx\,\mathbf{i} + dy\,\mathbf{j} + dz\,\mathbf{k}. \tag{4.1}$$

Las integrales que incluyen vectores de desplazamiento diferencial $d\mathbf{r}$ se llaman *integrales de línea*. Consideremos las siguientes integrales de línea a lo largo de una curva C que puede ser abierta o cerrada:

$$\int_C \phi\, d\mathbf{r}, \tag{4.2}$$

$$\int_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}, \tag{4.3}$$

$$\int_C \mathbf{A}\times d\mathbf{r}. \tag{4.4}$$

Con un escalar ϕ, la integral de línea (4.2) se reduce a

$$\int_C \phi\, d\mathbf{r} = \int_C \phi\,(dx\,\mathbf{i} + dy\,\mathbf{j} + dz\,\mathbf{k})$$

$$= \mathbf{i}\int_C \phi\, dx + \mathbf{j}\int_C \phi\, dy + \mathbf{k}\int_C \phi\, dz. \tag{4.5}$$

Para reducir (4.2), hemos usado la relación

$$\int_C \mathbf{i}\,\phi\, dx = \mathbf{i}\int_C \phi\, dx, \text{ etc.,} \tag{4.6}$$

ya que los vectores base $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ del sistema coordenado rectangular tienen magnitud y dirección constantes.

Cuando la curva del espacio C forma una trayectoria cerrada, (4.2) se escribe como

$$\oint_C \phi\, d\mathbf{r}. \tag{4.7}$$

En particular, si C es una curva plana cerrada simple, y la dirección de integración puede describirse, los símbolos que se usan son

$$\oint_C \phi\, d\mathbf{r}, \quad \oint_C \phi\, d\mathbf{r}.$$

La primera integral indica movimiento a lo largo de la curva cerrada C en la dirección positiva o sea contraria a la de las manecillas del reloj; i.e., el movimiento a lo largo de C es tal que la región que encierra está siempre a la izquierda. La segunda integral indica movimiento en la dirección negativa o sea la misma en que se mueve un reloj.

PROBLEMA 4.1 Si $\phi = xy$, calcular $\int_C \phi\, d\mathbf{r}$ desde (0, 0, 0) hasta (1, 1, 0) a lo largo de (a) la curva C especificada por $y = x^2$, $z = 0$ y (b) la recta C que une (0, 0, 0) y (1, 1, 0).

Solución: (a) La curva C puede representarse paramétricamente por

$$x = t, \quad y = t^2, \quad z = 0, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Por consiguiente, a lo largo de esta trayectoria,

$$d\mathbf{r} = dx\,\mathbf{i} + dy\,\mathbf{j} + dz\,\mathbf{k} = dt\,\mathbf{i} + 2t\,dt\,\mathbf{j}$$

y $\phi = (t)(t^2) = t^3$. Entonces,

$$\begin{aligned}\int_{(0,0,0)}^{(1,1,0)} \phi\, d\mathbf{r} &= \int_0^1 t^3(\mathbf{i} + 2t\mathbf{j})\,dt \\ &= \mathbf{i}\int_0^1 t^3\,dt + \mathbf{j}\int_0^1 2t^4\,dt \\ &= \frac{1}{4}\mathbf{i} + \frac{2}{5}\mathbf{j}.\end{aligned}$$

(b) Por el resultado del problema 3.15, la línea recta C que conecta (0, 0, 0) y (1, 1, 0) puede representarse paramétricamente por $x = t$, $y = t$, $z = 0$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Por lo tanto, a lo largo de esta trayectoria,

$$d\mathbf{r} = dx\,\mathbf{i} + dy\,\mathbf{j} + dz\,\mathbf{k} = dt\,\mathbf{i} + dt\,\mathbf{j}$$

y $\phi = (t)(t) = t^2$. Entonces,

$$\begin{aligned}\int_{(0,0,0)}^{(1,1,0)} \phi\, d\mathbf{r} &= \int_0^1 t^2(\mathbf{i} + \mathbf{j})\,dt \\ &= \mathbf{i}\int_0^1 t^2\,dt + \mathbf{j}\int_0^1 t^2\,dt \\ &= \frac{1}{3}\mathbf{i} + \frac{1}{3}\mathbf{j}.\end{aligned}$$

Como muestran los resultados del problema 4.1, los valores de este tipo de integral de línea dependen generalmente del camino de integración.

PROBLEMA 4.2 Calcular $\oint_C d\mathbf{r}$ a lo largo del círculo representado por $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$.

Solución: Por el resultado del problema 3.13, el círculo de $x^2 + y^2 = a^2, z = 0$ puede representarse paramétricamente por

$$x = a\cos t, \quad y = a\,\text{sen}\,t, \quad z = 0, \qquad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Por consiguiente,

$$d\mathbf{r} = dx\,\mathbf{i} + dy\,\mathbf{j} + dz\,\mathbf{k} = -a \text{ sen } t\,dt\,\mathbf{i} + a \cos t\,dt\,\mathbf{j}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\oint d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} (-a \text{ sen } t\,\mathbf{i} + a\cos t\,\mathbf{j})\,dt \\ &= \mathbf{i}\int_0^{2\pi} -a \text{ sen } t\,dt + \mathbf{j}\int_0^{2\pi} a\cos t\,dt \\ &= \mathbf{i}\,a\cos t\,\Big|_0^{2\pi} + \mathbf{j}\,a \text{ sen } t\,\Big|_0^{2\pi} \\ &= \mathbf{i}(a-a) + \mathbf{j}(0-0) \\ &= \mathbf{0}.\end{aligned} \tag{4.8}$$

La integral de línea (4.3) se llama a veces la *integral escalar de línea* o simplemente *integral de línea* de un campo vectorial f.

La integral de línea de f alrededor de una curva cerrada C se llama la *circulación* de f alrededor de C y es

$$\text{circ}\,\mathbf{f} = \oint_C \mathbf{f}\cdot d\mathbf{r}. \tag{4.9}$$

PROBLEMA 4.3 Si **T** es el vector unitario tangente a lo largo de una curva C, mostrar que

$$\int_C \mathbf{f}\cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{f}\cdot\mathbf{T}\,ds. \tag{4.10}$$

Solución: Si en (3.38), $t = s$ es la longitud de arco de C medida desde algún punto fijo, entonces C puede representarse por

$$\mathbf{r}(s) = x(s)\,\mathbf{i} + y(s)\,\mathbf{j} + z(s)\,\mathbf{k}, \quad a \le s \le b. \tag{4.11}$$

Por (3.68) el vector unitario tangente **T** a lo largo de C es

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}. \tag{4.12}$$

Entonces, por (4.12),

$$d\mathbf{r} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}\,ds = \mathbf{T}\,ds. \tag{4.13}$$

Por lo tanto,

$$\int_C \mathbf{f}\cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{f}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{ds}\,ds = \int_C \mathbf{f}\cdot\mathbf{T}\,ds. \tag{4.14}$$

Como el producto vectorial $\mathbf{f}\cdot\mathbf{T}$ es igual a la componente de **f** en la dirección de **T**, i.e., la dirección de C, (4.10) muestra que la integral de línea de **f** es equivalente a la integración de la componente tangencial de **f** a lo largo de C con respecto a la longitud de arco.

PROBLEMA 4.4 Si $\mathbf{f} = f_1(x, y, z)\mathbf{i} + f_2(x, y, z)\mathbf{j} + f_3(x, y, z)\mathbf{k}$, mostrar que

$$\int_C \mathbf{f}\cdot d\mathbf{r} = \int_C (f_1\,dx + f_2\,dy + f_3\,dz). \tag{4.15}$$

Solución: Como $d\mathbf{r} = dx\,\mathbf{i} + dy\,\mathbf{j} + dz\,\mathbf{k}$,

$$\mathbf{f}\cdot d\mathbf{r} = f_1\,dx + f_2\,dy + f_3\,dz,$$

y por consiguiente,

$$\int_C \mathbf{f}\cdot d\mathbf{r} = \int_C (f_1\, dx + f_2\, dy + f_3\, dz).$$

PROBLEMA 4.5 Si $\mathbf{f} = x^2\mathbf{i} + y\mathbf{j} + xyz\mathbf{k}$, calcular $\int_C \mathbf{f}\cdot d\mathbf{r}$ desde (0, 0, 0) a (1, 1, 1) a lo largo de (a) una recta que conecta estos dos puntos y (b) un camino C, como se muestra en la figura 4.1, que consiste en tres segmentos de recta C_1, C_2, C_3 que ligan estos dos puntos vía (1, 0, 0) y (1, 1, 0)

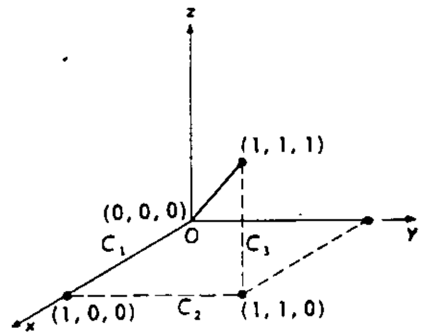


Figura 4.1 Solución al problema 4.5.

Solución: (a) Por el resultado del problema 3.15, la recta C que conecta (0, 0, 0) y (1, 1, 1) puede representarse paramétricamente por

$$x = t, \quad y = t, \quad z = t.$$

Por consiguiente, la curva C está representada por

$$\mathbf{r} = t\,\mathbf{i} + t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le 1.$$

Entonces, a lo largo de esta trayectoria,

$$d\mathbf{r} = dt\,\mathbf{i} + dt\,\mathbf{j} + dt\,\mathbf{k}, \qquad \mathbf{f} = t^2\mathbf{i} + t\,\mathbf{j} + t^3\mathbf{k},$$

así que,

$$\int_C \mathbf{f}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 (t^2 + t + t^3)\,dt = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{13}{12}.$$

(b) En este caso,

$$\int_C \mathbf{f}\cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{f}\cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{f}\cdot d\mathbf{r} + \int_{C_3} \mathbf{f}\cdot d\mathbf{r}.$$

Para C_1, $d\mathbf{r} = dx\,\mathbf{i}$ y $\mathbf{f} = x^2\mathbf{i}$; por consiguiente,

$$\int_{C_1} \mathbf{f}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 x^2\, dx = \frac{1}{3}.$$

Para C_2, $d\mathbf{r} = dy\,\mathbf{j}$ y $\mathbf{f} = (1)^2\mathbf{i} + y\mathbf{j} = \mathbf{i} + y\mathbf{j}$; por consiguiente,

$$\int_{C_2} \mathbf{f}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 y\, dy = \frac{1}{2}.$$

Para C_3, $d\mathbf{r} = dz\,\mathbf{k}$ y $\mathbf{f} = (1)^2\mathbf{i} + (1)\mathbf{j} + (1)(1)z\mathbf{k} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + z\mathbf{k}$; por tanto,

$$\int_{C_3} \mathbf{f}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 z\, dz = \frac{1}{2}.$$

Así que,

$$\int_C \mathbf{f}\cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{4}{3}.$$

Como lo muestran los resultados del problema 4.5, los valores de las integrales de línea de un campo vectorial dependen también en general, de la trayectoria de integración.

PROBLEMA 4.6 Si $\mathbf{f} = x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, calcular $\int_C \mathbf{f}\cdot d\mathbf{r}$ desde, (0, 0, 0) hasta (1, 1, 1) a lo largo de (a) una recta que conecte estos dos puntos y (b) una trayectoria C, como se muestra en la figura 4.1, que consiste en tres segmentos de recta C_1, C_2, C_3 que ligan estos dos puntos vía (1, 0, 0) y (1, 1, 0). (Cf. prob. 4.5).

Solución: (a) Por los resultados del problema 4.5,

$$d\mathbf{r} = dt\,\mathbf{i} + dt\,\mathbf{j} + dt\,\mathbf{k}.$$

Como la representación paramétrica de f es $\mathbf{f} = t\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, la integral es

$$\int_C \mathbf{f}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 (t + 2t + t)\,dt = \int_0^1 4t\,dt = 2.$$

(b) Para una trayectoria C, consistente en segmentos lineales C_1, C_2, C_3,

$$\int_C \mathbf{f}\cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{f}\cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{f}\cdot d\mathbf{r} + \int_{C_3} \mathbf{f}\cdot d\mathbf{r}.$$

Para C_1, $d\mathbf{r} = dx\,\mathbf{i}$ y $\mathbf{f} = x\mathbf{i}$; por consiguiente,

$$\int_{C_1} \mathbf{f}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}.$$

Para C_2, $d\mathbf{r} = dy\,\mathbf{j}$ y $\mathbf{f} = \mathbf{i} + 2y\,\mathbf{j}$; por consiguiente,

$$\int_{C_2} \mathbf{f}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 2y\,dy = 1.$$

Para C_3, $d\mathbf{r} = dz\,\mathbf{k}$ y $\mathbf{f} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + z\mathbf{k}$; por consiguiente,

$$\int_{C_3} \mathbf{f}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 z\,dz = \frac{1}{2}.$$

Así que,

$$\int_C \mathbf{f}\cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} = 2.$$

El resultado del problema 4.6 muestra que en este caso el valor de la integral [illegible] es el mismo para dos trayectorias diferentes que unen (0, 0, 0) a (1, 1, 1). [illegible] de la integral es 2 para *cualquier* trayectoria que une estos puntos. Para [illegible]

$$\int_C \mathbf{f}\cdot d\mathbf{r} = \int_C x\,dx + 2y\,dy + z\,dz,$$

$$x\,dx + 2y\,dy + z\,dz = d(x^2/2 + y^2 + z^2/2),$$

tenemos

[illegible]

lo que muestra que el resultado depende sólo de los puntos (0, 0, 0) y (1, 1, 1) [illegible] *independiente* de la trayectoria de integración.

La discusión anterior muestra que si la integral [illegible]

(4.15) es la diferencial total de [illegible] la trayectoria que une los puntos [illegible] suficientes para que la integral de línea [illegible] trayectoria se discuten en la sec. 4.10.

PROBLEMA 4.7 Hallar $\oint_C \mathbf{r}\cdot d\mathbf{r}$ a lo largo del círculo C representado por $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$.

Solución: Con referencia al problema 4.2, la ecuación paramétrica de la curva es

$$\mathbf{r} = a\cos t\,\mathbf{i} + a\,\text{sen}\,t\,\mathbf{j}, \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

Por consiguiente, $d\mathbf{r} = -a\,\text{sen}\,t\,dt\mathbf{i} + a\cos t\,dt\mathbf{j}$. Entonces

$$\mathbf{r}\cdot d\mathbf{r} = -a^2\cos t\,\text{sen}\,t\,dt + a^2\,\text{sen}\,t\cos t\,dt = 0\,dt = 0.$$

Por lo tanto,

$$\oint_C \mathbf{r}\cdot d\mathbf{r} = 0. \tag{4.16}$$

PROBLEMA 4.8 Si $\mathbf{f} = f_1\mathbf{i} + f_2\mathbf{j} + f_3\mathbf{k}$, mostrar que

$$\int_C \mathbf{f}\times d\mathbf{r} = \mathbf{i}\int_C (f_2\,dz - f_3\,dy) + \mathbf{j}\int_C (f_3\,dx - f_1\,dz) + \mathbf{k}\int_C (f_1\,dy - f_2\,dx). \tag{4.17}$$

Solución: Por (2.27), el producto vectorial de $\mathbf{f}$ con $d\mathbf{r}$ es

$$\mathbf{f}\times d\mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ f_1 & f_2 & f_3 \\ dx & dy & dz \end{vmatrix} = \mathbf{i}(f_2\,dz - f_3\,dy) + \mathbf{j}(f_3\,dx - f_1\,dz) + \mathbf{k}(f_1\,dy - f_2\,dx).$$

Por lo tanto, la integral es

$$\int_C \mathbf{f}\times d\mathbf{r} = \mathbf{i}\int_C (f_2\,dz - f_3\,dy) + \mathbf{j}\int_C (f_3\,dx - f_1\,dz) + \mathbf{k}\int_C (f_1\,dy - f_2\,dx).$$

PROBLEMA 4.9 Calcular $\oint_C \mathbf{r}\times d\mathbf{r}$ a lo largo del círculo representado por $x^2 + y_2 = a^2$, $z = 0$.

Solución: Con referencia al problema 4.2, C se representa paramétricamente por

$$\mathbf{r} = a\cos t\,\mathbf{i} + a\,\text{sen}\,t\,\mathbf{j}, \quad 0 \le t \le 2\pi,$$

y por consiguiente, $d\mathbf{r} = -a\,\text{sen}\,t\,dt\,\mathbf{i} + a\cos t\,dt\,\mathbf{j}$. Así que

$$\mathbf{r}\times d\mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a\cos t & a\,\text{sen}\,t & 0 \\ -a\,\text{sen}\,t\,dt & a\cos t\,dt & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{k}(a^2\cos^2 t + a^2\,\text{sen}^2\,t)\,dt = a^2\,dt\,\mathbf{k}.$$

De modo que integrando sobre C,

$$\oint_C \mathbf{r} \times d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \mathbf{k}\, a^2\, dt = \mathbf{k}\, a^2 \int_0^{2\pi} dt = 2\pi a^2 \mathbf{k}, \tag{4.18}$$

lo que muestra que el resultado es un vector en la dirección de z con magnitud $2\pi a^2$, que es el doble del área de un círculo. (Véanse problemas 4.68 y 4.69).

4.2 Integrales de superficie

Una superficie S se representa por

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\,\mathbf{i} + y(u, v)\,\mathbf{j} + z(u, v)\,\mathbf{k},$$

donde $\mathbf{r}$ es el vector de posición y u, v son parámetros. (Cf. sección 3.5) El elemento diferencial $d\mathbf{S}$ del área de la superficie es

$$d\mathbf{S} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \, du\, dv.$$

Como se muestra en el capítulo 3, (3.95) se puede escribir como

$$d\mathbf{S} = \mathbf{n}\, dS,$$

donde $\mathbf{n}$ es el vector unitario normal a la superficie en el punto que corresponde [illegible] coordenadas u y v, de modo que

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|},$$

$$dS = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\, du\, dv.$$

Las integrales que incluyen el elemento diferencial de área dS se llaman [illegible] *superficie*. Consideremos las integrales de superficie

$$\iint_S \phi\, d\mathbf{S},$$

$$\iint_S \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S},$$

$$\iint_S \mathbf{f} \times d\mathbf{S},$$

cada una de las cuales está sobre una superficie S que puede estar abierta o [illegible]

Si S es una superficie cerrada, las integrales de superficie se expresan

$$\oint\!\!\!\oint_S \phi\, d\mathbf{S}, \quad \oint\!\!\!\oint_S \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S}, \quad \oint\!\!\!\oint_S \mathbf{f} \times d\mathbf{S}.$$

Para superficies cerradas, es común suponer que la dirección positiva de la [illegible] dirigida hacia afuera de la superficie.

PROBLEMA 4.10 Calcular $\iint_S dS$ sobre la parte $z > 0$ de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Solución: Por el resultado del problema 3.26, la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ puede representarse paramétricamente cambiando θ en u y ϕ en v. Así que,

$$\mathbf{r}(u, v) = a \operatorname{sen} u \cos v\, \mathbf{i} + a \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v\, \mathbf{j} + a \cos u\, \mathbf{k}, \tag{4.22}$$

donde $0 \leq u \leq \pi$, $0 \leq v \leq 2\pi$. El elemento diferencial dS del área de la superficie es

$$\begin{aligned} d\mathbf{S} &= \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \, dudv \\ &= a^2 \operatorname{sen}^2 u \cos v \, dudv \, \mathbf{i} + a^2 \operatorname{sen}^2 u \operatorname{sen} v \, dudv \, \mathbf{j} \\ &\quad + a^2 \operatorname{sen} u \cos u \, dudv \, \mathbf{k}. \end{aligned} \tag{4.23}$$

Como S es la parte de la esfera donde $z > 0$, el recorrido u debe cambiarse a $0 \leqslant u \leqslant \pi/2$ pues $\cos u < 0$ para $\pi/2 < u \leqslant \pi$. Por consiguiente,

$$\iint_S d\mathbf{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \, dudv$$

$$= \mathbf{i} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} a^2 \operatorname{sen}^2 u \cos v \, dudv + \mathbf{j} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} a^2 \operatorname{sen}^2 u \operatorname{sen} v \, dudv$$

$$+ \mathbf{k} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} u \cos u \, dudv.$$

Como $\int_0^{2\pi} \cos v \, dv = \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} v \, dv = 0,$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} a^2 \operatorname{sen}^2 u \cos v \, dudv = a^2 \int_0^{2\pi} \cos v \, dv \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 u \, du = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} a^2 \operatorname{sen}^2 u \operatorname{sen} v \, dudv = a^2 \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} v \, dv \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 u \, du = 0,$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} a^2 \operatorname{sen} u \cos u \, dudv &= a^2 \int_0^{2\pi} dv \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} u \cos u \, du \\ &= 2\pi a^2 \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} u \cos u \, du \\ &= 2\pi a^2 \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} u \, d\,(\operatorname{sen} u) \\ &= 2\pi a^2 \cdot \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 u \Big|_0^{\pi/2} \\ &= 2\pi a^2 \cdot \frac{1}{2} \\ &= \pi a^2. \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\iint_S d\mathbf{S} = \pi a^2 \mathbf{k}, \tag{4.24}$$

lo que muestra que el vector resultante está dirigido en la dirección de z y tiene magnitud πa^2, i.e., el área rodeada por la intersección de la esfera con el plano xy. (Véase figura 4.2).

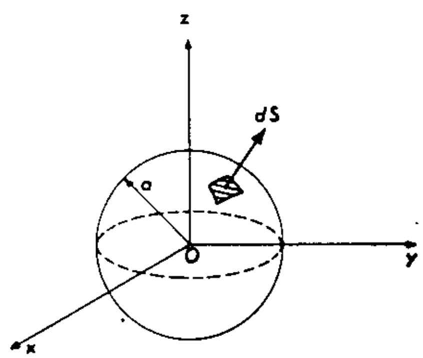


Figura 4.2 La esfera del problema 4.10.

PROBLEMA 4.11 Mostrar que sobre la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$,

$$\oint\!\!\!\oint_S d\mathbf{S} = \mathbf{0}. \tag{4.25}$$

Solución: Si S_1 y S_2 son las partes de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ para las cuales $z > 0$ y $z < 0$ respectivamente, entonces

$$\oiint_S d\mathbf{S} = \iint_{S_1} d\mathbf{S} + \iint_{S_2} d\mathbf{S}.$$

Por los resultados del problema 4.10.

$$\iint_{S_1} d\mathbf{S} = \pi a^2 \mathbf{k}. \tag{4.24}$$

Para S_2, puesto que $z < 0$, el recorrido de u en (4.22) y por lo tanto en (4.23), es $\pi/2 \leq u \leq \pi$. Entonces,

$$\iint_{S_2} d\mathbf{S} = \int_0^{2\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \, du dv,$$

y por cálculos similares,

$$\int_0^{2\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} a^2 \operatorname{sen}^2 u \cos v \, du dv = \int_0^{2\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} a^2 \sin^2 u \operatorname{sen} v \, du dv = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} a^2 \operatorname{sen} u \cos u \, du dv = 2\pi a^2 \cdot \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 u \Big|_{\pi/2}^{\pi} = 2\pi a^2 \left(-\frac{1}{2}\right) = -\pi a^2.$$

Por consiguiente,

$$\iint_{S_2} d\mathbf{S} = -\pi a^2 \mathbf{k}. \tag{4.26}$$

Sumando (4.24) y (4.26),

$$\oiint_S d\mathbf{S} = \pi a^2 \mathbf{k} - \pi a^2 \mathbf{k} = \mathbf{0}.$$

La relación (4.25) es válida para cualquier superficie cerrada. (Véase problema 4.50).

La integral de superficie (4.20) de un campo vectorial f se llama el *flujo de f a través* de S y se representa por

$$\iint_S \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S}.$$

PROBLEMA 4.12 Si S se representa por $\mathbf{r}(u, v)$, mostrar que el flujo de **f** a través de S es

$$\iint_S \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{R_{uv}} [\mathbf{f} \; \mathbf{r}_u \; \mathbf{r}_v] \, du dv, \tag{4.28}$$

donde $[\mathbf{f} \; \mathbf{r}_u \; \mathbf{r}_v] = \mathbf{f} \cdot \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ es el triple producto escalar y R_{uv} es la región en (u, v) que corresponde a S.

Solución: El elemento diferencial de área de la superficie es

$$d\mathbf{S} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \, du dv.$$

Por consiguiente el flujo de **f** a través de S es

$$\iint_S \mathbf{f}\cdot d\mathbf{S} = \iint_{R_{uv}} \mathbf{f}\cdot\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \, dudv = \iint_{R_{uv}} [\mathbf{f}\ \mathbf{r}_u\ \mathbf{r}_v] \, dudv.$$

PROBLEMA 4.13 Si $\mathbf{f} = \cos u \cos v\,\mathbf{i} + \cos u \operatorname{sen} v\,\mathbf{j} - \operatorname{sen} u\,\mathbf{k}$, donde $0 \leqslant u \leqslant \pi$ y $0 \leqslant v \leqslant 2\pi$, calcular $\iint_S \mathbf{f}\cdot d\mathbf{S}$ sobre la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ para la cual $z > 0$.

Solución: Por el problema 3.26, las componentes del vector que genera la superficie son

$$\mathbf{r}_u = a \cos u \cos v\,\mathbf{i} + a \cos u \operatorname{sen} v\,\mathbf{j} - a \operatorname{sen} u\,\mathbf{k},$$

$$\mathbf{r}_v = -a \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v\,\mathbf{i} + a \operatorname{sen} u \cos v\,\mathbf{j}.$$

De acuerdo con la definición de triple producto escalar (2.53),

$$[\mathbf{f}\ \mathbf{r}_u\ \mathbf{r}_v] = \begin{vmatrix} \cos u \cos v & \cos u \operatorname{sen} v & -\operatorname{sen} u \\ a \cos u \cos v & a \cos u \operatorname{sen} v & -a \operatorname{sen} u \\ -a \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v & a \operatorname{sen} u \cos v & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

Como las filas primera y segunda del determinante son proporcionales, su valor es cero. En consecuencia, por (4.28)

$$\iint_S \mathbf{f}\cdot d\mathbf{S} = 0. \tag{4.29}$$

PROBLEMA 4.14 Hallar $\iint_S \mathbf{r}\cdot d\mathbf{S}$, donde S es la superficie de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Solución: En el punto (x, y, z) de la superficie de la esfera S, el vector de posición $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ y el vector unitario exterior $\mathbf{n}$ normal a la superficie S apuntan directamente hacia el lado opuesto del origen. Así que,

$$\mathbf{n} = \mathbf{e}_r = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}. \tag{4.30}$$

Entonces, para puntos de la superficie,

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{n} = \mathbf{r}\cdot\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} = \frac{|\mathbf{r}|^2}{|\mathbf{r}|} = |\mathbf{r}| = a,$$

y como el área de la superficie de una esfera es $4\pi a^2$ por el problema 3.26,

$$\iint_S \mathbf{r}\cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{r}\cdot\mathbf{n}\, dS = a \iint_S dS = a(4\pi a^2) = 4\pi a^3.$$

PROBLEMA 4.15 Si $\mathbf{f} = f_1(x, y, z)\mathbf{i} + f_2(x, y, z)\mathbf{j} + f_3(x, y, z)\mathbf{k}$, mostrar que la integral de superficie de $\mathbf{f}$ se puede expresar como

$$\iint_S \mathbf{f}\cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{f}\cdot\mathbf{n}\, dS = \pm \iint_{R_{yz}} f_1\, dydz \pm \iint_{R_{zx}} f_2\, dzdx \pm \iint_{R_{xy}} f_3\, dxdy, \tag{4.31}$$

donde R_{yz}, R_{zx} y R_{xy} son las proyecciones de S sobre los planos yz, zx y xy, respectivamente y los signos de las integrales de la derecha de (4.31) están determinados por los signos de $(\mathbf{n}\cdot\mathbf{i})$, $(\mathbf{n}\cdot\mathbf{j})$ y $(\mathbf{n}\cdot\mathbf{k})$, respectivamente.

Solución: Si α, β y γ son los ángulos entre los ejes coordenados rectangulares y el vector unitario $\mathbf{n}$, entonces, por el resultado del problema 2.18,

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{i} = \cos\alpha, \quad \mathbf{n}\cdot\mathbf{j} = \cos\beta, \quad \mathbf{n}\cdot\mathbf{k} = \cos\gamma. \qquad [2.50]$$

Por consiguiente, por (2.65), $\mathbf{n}$ puede escribirse como

$$\begin{aligned}\mathbf{n} &= (\mathbf{n}\cdot\mathbf{i})\,\mathbf{i} + (\mathbf{n}\cdot\mathbf{j})\,\mathbf{j} + (\mathbf{n}\cdot\mathbf{k})\,\mathbf{k}\\ &= (\cos\alpha)\,\mathbf{i} + (\cos\beta)\,\mathbf{j} + (\cos\gamma)\,\mathbf{k},\end{aligned} \qquad (4.32)$$

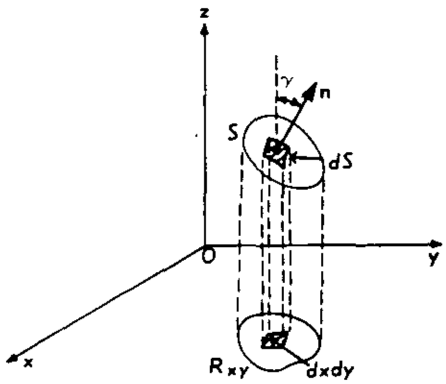


Figura 4.3 Solución al problema 4.15.

y por consiguiente,

$$d\mathbf{S} = \mathbf{n}\,dS = (\cos\alpha)\,dS\,\mathbf{i} + (\cos\beta)\,dS\,\mathbf{j} + (\cos\gamma)\,dS\,\mathbf{k}. \qquad (4.33)$$

Ahora podemos escribir (véase figura 4.3),

$$\begin{aligned}dS(\mathbf{n}\cdot\mathbf{i}) &= dS(\cos\alpha) = \pm\, dydz,\\ dS(\mathbf{n}\cdot\mathbf{j}) &= dS(\cos\beta) = \pm\, dzdx,\\ dS(\mathbf{n}\cdot\mathbf{k}) &= dS(\cos\gamma) = \pm\, dxdy,\end{aligned}$$

donde los signos están determinados por los de $(\mathbf{n}\cdot\mathbf{i}) = \cos\alpha$ $(\mathbf{n}\cdot\mathbf{j}) = \cos\beta$, $(\mathbf{n}\cdot\mathbf{k}) = \cos\gamma$, respectivamente. Entonces,

$$d\mathbf{S} = \mathbf{n}\,dS = (\pm\, dydz)\,\mathbf{i} + (\pm\, dzdx)\,\mathbf{j} + (\pm\, dxdy)\,\mathbf{k}. \qquad (4.34)$$

Así, si $\mathbf{f} = f_1\mathbf{i} + f_2\mathbf{j} + f_3\mathbf{k}$,

$$\iint_S \mathbf{f}\cdot d\mathbf{S} = \pm\iint_{R_{yz}} f_1\, dydz \pm \iint_{R_{zx}} f_2\, dzdx \pm \iint_{R_{xy}} f_3\, dxdy,$$

donde R_{yz}, R_{zx} y R_{xy} son las proyecciones de S sobre los planos yz, zx y xy, respectivamente, y los signos están determinados como en (4.31).

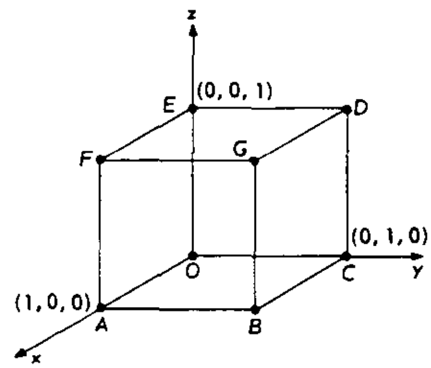


Figura 4.4 El cubo del problema 4.16.

PROBLEMA 4.16 Calcular $\iint_S r\cdot d\mathbf{S}$, donde S es la superficie del cubo limitado por $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$, $z = 1$ como se muestra en la figura 4.4. El vector normal exterior unitario $\mathbf{n}$ y el vector de posición $\mathbf{r}$ de los puntos de la superficie del cubo están dirigidos hacia el lado opuesto del origen.

Solución: Dividimos el cubo en las áreas $S_1 - S_6$.

Sobre S_1 para $AOCB$, $z = 0$, $\mathbf{n} = -\mathbf{k}$; por consiguiente,

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{n} = (x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k})\cdot(-\mathbf{k}) = -z = 0.$$

Sobre S_2 para $AFEO$, $y = 0$, $\mathbf{n} = -\mathbf{j}$; por consiguiente,

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{n} = (x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k})\cdot(-\mathbf{j}) = -y = 0.$$

Sobre S_3 para $OEDC$, $z = 0$, $\mathbf{n} = -\mathbf{i}$; así que,

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{n} = (x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k})\cdot(-\mathbf{i}) = -x = 0.$$

Sobre S_4 para $AFGB$, $x = 1$, $\mathbf{n} = \mathbf{i}$; por consiguiente,

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{n} = (x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k})\cdot(\mathbf{i}) = x = 1.$$

Sobre S_5 para $BGDC$, $y = 1$, $\mathbf{n} = \mathbf{j}$; por consiguiente,

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{n} = (x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k})\cdot(\mathbf{j}) = y = 1.$$

Sobre S_6 para $FEDG$, $z = 1$, $\mathbf{n} = \mathbf{k}$; así que,

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{n} = (x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k})\cdot(\mathbf{k}) = z = 1.$$

Entonces, como las integrales sobre $S_1 - S_3$ son cero y sobre $S_4 - S_6$ son uno,

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{r}\cdot d\mathbf{S} &= \iint_{S_1} \mathbf{r}\cdot\mathbf{n}\,dS + \iint_{S_2} \mathbf{r}\cdot\mathbf{n}\,dS + \iint_{S_3} \mathbf{r}\cdot\mathbf{n}\,dS \\ &\quad + \iint_{S_4} \mathbf{r}\cdot\mathbf{n}\,dS + \iint_{S_5} \mathbf{r}\cdot\mathbf{n}\,dS + \iint_{S_6} \mathbf{r}\cdot\mathbf{n}\,dS \\ &= \iint_{S_4} dS + \iint_{S_5} dS + \iint_{S_6} dS \\ &= 1 + 1 + 1 \\ &= 3.\end{aligned}$$

PROBLEMA 4.17 Si $\mathbf{f} = z\mathbf{i} + y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$, calcular $\iint_S \mathbf{f}\cdot d\mathbf{S}$, donde S es la parte de la superficie del paraboloide $x^2 + y_2 = 1 - z$ para el cual $z > 0$. (Véase figura 4.5.)

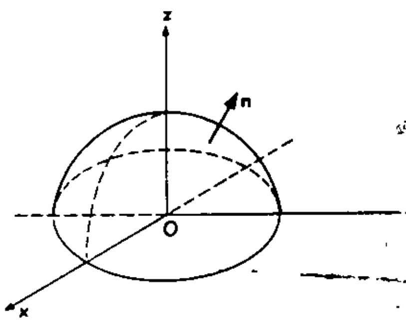


Figura 4.5 **Una parte de la superficie del paraboloide del problema 4.17.**

Solución: En el problema 3.31, un vector unitario $\mathbf{n}$ normal a la superficie $\phi(x, y, z) = 0$ es

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}, \qquad [3.117]$$

donde $\nabla\phi$ es el gradiente de ϕ. Por consiguiente, si $\phi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z - 1 = 0$, entonces por la definición de gradiente (3.105),

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k} = 2x\,\mathbf{i} + 2y\,\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

Por consiguiente, (3.117) viene a ser

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|} = \frac{2x\,\mathbf{i} + 2y\,\mathbf{j} + \mathbf{k}}{(4x^2 + 4y^2 + 1)^{1/2}}.$$

Los productos punto de n con i, j, k son

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{i} = \frac{2x}{(4x^2 + 4y^2 + 1)^{1/2}},$$

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{j} = \frac{2y}{(4x^2 + 4y^2 + 1)^{1/2}},$$

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{k} = \frac{1}{(4x^2 + 4y^2 + 1)^{1/2}}.$$

Así que $\mathbf{n}\cdot\mathbf{i}$ y $\mathbf{n}\cdot\mathbf{j}$ son positivos o negativos *dependiendo* de si x e y son positivos o negativos, mientras que $\mathbf{n}\cdot\mathbf{k}$ es positivo para todos los valores de x e y. Por consiguiente, si se usa

$$\iint_S \mathbf{f}\cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{f}\cdot\mathbf{n}\,dS = \pm\iint_{R_{yz}} f_1\,dydz \pm \iint_{R_{zx}} f_2\,dzdx \pm \iint_{R_{xy}} f_3\,dxdy \qquad [4.31]$$

para calcular la integral, S debe subdividirse en dos superficies. Para calcular el primer término, debe haber una superficie para $x > 0$ y otra para $x < 0$.

De modo similar, para calcular el segundo término, debe haber una superficie para $y > 0$ y otra para $y < 0$.

El primer término $\iint_{R_{yz}} f_1\, dydz$ de (4.31) se calcula como sigue. Para $x > 0$, $x = (1 - y^2 - z)^{1/2}$ sobre S; por consiguiente,

$$\begin{aligned}\iint_{R_{yz}} f_1\, dydz &= \iint_{R_{yz}} x\, dydz \\ &= \int_{y=-1}^{1} \int_{z=0}^{1-y^2} (1 - y^2 - z)^{1/2}\, dzdy \\ &= \frac{2}{3}\int_{-1}^{1} (1 - y^2)^{3/2}\, dy \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{8}\pi \\ &= \frac{1}{4}\pi.\end{aligned}$$

Para $x < 0$, $x = -(1 - y^2 - z)^{1/2}$ sobre S; escogiendo el signo negativo,

$$\begin{aligned}-\iint_{R_{yz}} f_1\, dydz &= -\iint_{R_{yz}} x\, dydz \\ &= \int_{y=-1}^{1} \int_{z=0}^{1-y^2} (1 - y^2 - z)^{1/2}\, dzdy \\ &= \frac{1}{4}\pi.\end{aligned}$$

El segundo término $\iint_{R_{zx}} f_2\, dzdx$ de (4.31) se calcula como sigue. Para $y > 0$, $y = (1 - x^2 - z)^{1/2}$ sobre S; por consiguiente,

$$\begin{aligned}\iint_{R_{zx}} f_2\, dzdx &= \iint_{R_{zx}} y\, dzdx \\ &= \int_{x=-1}^{1} \int_{z=0}^{1-x^2} (1 - x^2 - z)^{1/2}\, dzdx \\ &= \frac{1}{4}\pi\end{aligned}$$

pues la integral es la misma que para el caso R_{yz}. Para $y < 0$, $y = -(1-x^2 - z)^{1/2}$ sobre S; escogiendo el signo negativo,

$$\begin{aligned}-\iint_{R_{zx}} f_2\, dzdx &= -\iint_{R_{zx}} y\, dzdx \\ &= \int_{x=-1}^{1} \int_{z=0}^{1-x^2} (1 - x^2 - z)^{1/2}\, dzdx \\ &= \frac{1}{4}\pi.\end{aligned}$$

Para el tercer término de (4.31), como $\mathbf{n}\cdot\mathbf{k} > 0$,

$$\iint_{R_{xy}} f_3\, dxdy = \iint_{R_{xy}} 2z\, dxdy = 2\int_{x=-1}^{1}\int_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (1 - x^2 - y^2)\, dydx$$

$$= 2\cdot\frac{4}{3}\int_{-1}^{1}(1 - x^2)^{3/2}\, dx$$

$$= \frac{8}{3}\cdot\frac{3}{8}\pi$$

$$= \pi.$$

Sumando los resultados anteriores para los tres términos de (4.31) se obtiene

$$\iint_S \mathbf{f}\cdot d\mathbf{S} = \left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{4}\pi\right) + \left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{4}\pi\right) + \pi = 2\pi.$$

PROBLEMA 4.18 Si S se representa por $z = z(x, y)$ mostrar que el flujo de $\mathbf{f}$ a través de S es

$$\iint_S \mathbf{f}\cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{f}\cdot\mathbf{n}\, dS$$

$$= \iint_{R_{xy}} \mathbf{f}\cdot\mathbf{n}\sec\gamma\, dxdy$$

$$= \iint_{R_{xy}} \mathbf{f}\cdot\frac{\mathbf{n}}{\mathbf{n}\cdot\mathbf{k}}\, dxdy, \tag{4.35}$$

donde $\sec\gamma = \dfrac{1}{\mathbf{n}\cdot\mathbf{k}} = \left[\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1\right]^{1/2}$.

Solución: Si S se representa por $z = z(x, y)$, entonces por el prob. 3.24, el vector normal unitario es

$$\mathbf{n} = \frac{-\dfrac{\partial z}{\partial x}\mathbf{i} - \dfrac{\partial z}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\left[\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1\right]^{1/2}}. \tag{3.89}$$

Por consiguiente, si γ es el ángulo entre $\mathbf{n}$ y $\mathbf{k}$,

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{k} = \cos\gamma = \frac{1}{\sec\gamma} = \frac{1}{\left[\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1\right]^{1/2}}. \tag{4.36}$$

Luego, por (3.103), el elemento diferencial del area S, dS, es

$$dS = \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1\right]^{1/2} dxdy$$

$$= \sec\gamma\, dxdy$$

$$= \frac{1}{(\mathbf{n}\cdot\mathbf{k})}\, dxdy. \tag{4.37}$$

Entonces el flujo de $\mathbf{f}$ a través de S es

$$\iint_S \mathbf{f}\cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{f}\cdot\mathbf{n}\, dS$$

$$= \iint_{R_{xy}} \mathbf{f}\cdot\mathbf{n}\sec\gamma\, dxdy$$

$$= \iint_{R_{xy}} \mathbf{f}\cdot\frac{\mathbf{n}}{\mathbf{n}\cdot\mathbf{k}}\, dxdy.$$

PROBLEMA 4.19 Si $\mathbf{f} = z\mathbf{i} + y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$, usar (4.35) para calcular $\iint_S \mathbf{f}\cdot d\mathbf{S}$, donde S es la parte de la superficie del paraboloide $x^2 + y^2 = 1 - z$ para la cual $z > 0$. (Cf., problema 4.17 y figura 4.5).

Solución: Como S se representa por $z = 1 - x^2 - y^2$ con $z > 0$, el vector unitario normal de (3.89) es

$$\mathbf{n} = \frac{-\dfrac{\partial z}{\partial x}\mathbf{i} - \dfrac{\partial z}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\left[\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1\right]^{1/2}}$$

$$= \frac{2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + \mathbf{k}}{(4x^2 + 4y^2 + 1)^{1/2}}.$$

Ahora,

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{k} = \frac{1}{(4x^2 + 4y^2 + 1)^{1/2}},$$

y

$$\mathbf{f}\cdot\mathbf{n} = \frac{1}{(4x^2 + 4y^2 + 1)^{1/2}}[(x)(2x) + (y)(2y) + (2z)1] = \frac{2x^2 + 2y^2 + 2z}{(4x^2 + 4y^2 + 1)^{1/2}}.$$

Así que, de acuerdo con (4.35),

$$\iint_S \mathbf{f}\cdot d\mathbf{S} = \iint_{R_{xy}} \frac{2x^2 + 2y^2 + 2z}{(2x^2 + 4y^2 + 1)^{1/2}}(4x^2 + 4y^2 + 1)^{1/2}\, dxdy$$

$$= \iint_{R_{xy}} [2x^2 + 2y^2 + 2(1 - x^2 - y^2)]\, dxdy$$

$$= 2\int_{x=-1}^{1}\int_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dxdy$$

$$= 4\int_{-1}^{1}(1 - x^2)^{1/2}\, dx$$

$$= 4\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$= 2\pi.$$

PROBLEMA 4.20 Calcular $\iint_S \mathbf{r}\times d\mathbf{S}$, donde S es la superficie del cubo limitado por $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1, z = 0, z = 1$, $\mathbf{r}$ es el vector de posición y $\mathbf{n}$ es el vector normal unitario dirigido hacia afuera. (Cf., problema 4.16 y figura 4.4.)

Solución: Con referencia a la figura 4.4, tenemos sobre S_1 para $AOCB$, $\mathbf{n} = -\mathbf{k}$, $d\mathbf{S} = \mathbf{n}\,dxdy = -\,dxdy\,\mathbf{k}$; por consiguiente,

$$\mathbf{r} \times \mathbf{n} = (x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}) \times (-\mathbf{k}) = -y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}.$$

Así que,

$$\iint_{S_1} \mathbf{r} \times d\mathbf{S} = \int_0^1 \int_0^1 (-y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j})\,dxdy$$

$$= -\mathbf{i} \int_0^1 \int_0^1 y\;dydx + \mathbf{j} \int_0^1 \int_0^1 x\;dxdy$$

$$= -\frac{1}{2}\,\mathbf{i} + \frac{1}{2}\,\mathbf{j}.$$

Sobre S_2 para $AFEO$, $\mathbf{n} = -\mathbf{j}$, $d\mathbf{S} = \mathbf{n}\,dzdx = -dzdx\,\mathbf{j}$; por consiguiente,

$$\mathbf{r} \times \mathbf{n} = (x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}) \times (-\mathbf{j}) = z\,\mathbf{i} - x\,\mathbf{k}.$$

Entonces,

$$\iint_{S_2} \mathbf{r} \times d\mathbf{S} = \int_0^1 \int_0^1 (z\,\mathbf{i} - x\,\mathbf{k})\,dzdx$$

$$= \mathbf{i} \int_0^1 \int_0^1 z\;dzdx - \mathbf{k} \int_0^1 \int_0^1 x\;dxdz$$

$$= \frac{1}{2}\,\mathbf{i} - \frac{1}{2}\,\mathbf{k}.$$

Sobre S_3 para $OEDC$, $\mathbf{n} = -\mathbf{i}$, $d\mathbf{S} = \mathbf{n}\,dydz = -dydz\,\mathbf{i}$; así,

$$\mathbf{r} \times \mathbf{n} = (x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}) \times (-\mathbf{i}) = -z\mathbf{j} + y\,\mathbf{k}.$$

Por lo tanto,

$$\iint_{S_3} \mathbf{r} \times d\mathbf{S} = \int_0^1 \int_0^1 (-z\,\mathbf{j} + y\mathbf{k})\;dydz$$

$$= -\mathbf{j} \int_0^1 \int_0^1 z\;dzdy + \mathbf{k} \int_0^1 \int_0^1 y\;dydz$$

$$= -\frac{1}{2}\,\mathbf{j} + \frac{1}{2}\,\mathbf{k}.$$

Sobre S_4 para $AFGB$, $\mathbf{n} = \mathbf{i}$, $d\mathbf{S} = \mathbf{n}\;dydz = dydz\;\mathbf{i}$; por lo tanto,

$$\mathbf{r} \times \mathbf{n} = (x\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}) \times \mathbf{i} = z\,\mathbf{j} - y\,\mathbf{k}.$$

Así que

$$\iint_{S_4} \mathbf{r} \times d\mathbf{S} = \int_0^1 \int_0^1 (z\,\mathbf{i} - y\mathbf{k})\;dydz = \frac{1}{2}\,\mathbf{j} - \frac{1}{2}\,\mathbf{k}.$$

Sobre S_5 para $BGDC$, $\mathbf{n} = \mathbf{j}$, $d\mathbf{S} = \mathbf{n}\;dzdx = dzdz\;\mathbf{j}$; así que,

$$\mathbf{r} \times \mathbf{n} = (x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}) \times \mathbf{j} = -z\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{k}.$$

Por tanto,

$$\iint_{S_5} \mathbf{r} \times d\mathbf{S} = \int_0^1 \int_0^1 (-z\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{k})\, dz dx = -\frac{1}{2}\,\mathbf{i} + \frac{1}{2}\,\mathbf{k}.$$

Sobre S_6 para *FEDG*, $\mathbf{n} = \mathbf{k}$, $d\mathbf{S} = \mathbf{n}\, dxdy = dxdy\, \mathbf{k}$; por consiguiente,

$$\mathbf{r} \times \mathbf{n} = (x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}) \times \mathbf{k} = y\,\mathbf{i} - x\,\mathbf{j}.$$

Entonces,

$$\iint_{S_6} \mathbf{r} \times d\mathbf{S} = \int_0^1 \int_0^1 (y\,\mathbf{i} - x\,\mathbf{j})\, dxdy = \frac{1}{2}\,\mathbf{i} - \frac{1}{2}\,\mathbf{j}.$$

Sumando todos los resultados anteriores se obtiene

$$\iint_S \mathbf{r} \times d\mathbf{S} = \mathbf{0}. \tag{4.38}$$

PROBLEMA 4.21 Calcular $\iint_S \mathbf{r} \times d\mathbf{S}$ donde S es la superficie esférica cerrada representada por $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Solución: Por el problema 4.14, el vector unitario exterior $\mathbf{n}$ normal en S es

$$\mathbf{n} = \mathbf{e}_r = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} = \frac{\mathbf{r}}{a}.$$

Así que, por (1.58) $\mathbf{r} \times \mathbf{n} = (1/a)\, \mathbf{r} \times \mathbf{r} = 0$. Por consiguiente,

$$\iint_S \mathbf{r} \times d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{r} \times \mathbf{n}\, dS = \mathbf{0}. \tag{4.39}$$

4.3 Integrales de volumen

Como el *elemento de volumen* dV es un escalar, consideremos dos *integrales de volumen* sobre una región R:

$$\iiint_R \phi\, dV, \tag{4.40}$$

$$\iiint_R \mathbf{F}\, dV. \tag{4.41}$$

En el sistema coordenado rectangular

$$dV = dxdydz, \tag{4.42}$$

y (4.40) puede expresarse también como

$$\iiint_R \phi(x, y, z)\, dxdydz, \tag{4.43}$$

que es la integral triple de $\phi(x, y, z)$ sobre la región R. Haciendo $\phi(x, y, z) = 1$, el volumen V de la región R es

$$V = \iiint_R dV = \iiint_R dxdydz. \tag{4.44}$$

Si $\mathbf{f} = f_1\mathbf{i} + f_2\mathbf{j} + f_3\mathbf{k}$, entonces (4.41) [illegible]

$$\iiint_R \mathbf{f}\,dV = \mathbf{i}\iiint_R f_1\,dV + \mathbf{j}\iiint_R f_2\,dV + \mathbf{k}\iiint_R \text{[illegible]}$$

PROBLEMA 4.22 Calcular $\iiint_R \nabla\cdot\mathbf{r}\,dV$, donde R es cualquier región con volumen V y $\mathbf{r}$ es el vector de posición.

Solución: Por (3.129), $\nabla\cdot\mathbf{r} = 3$. Por consiguiente, usando (4.44),

$$\iiint_R \nabla\cdot\mathbf{r}\,dV = \iiint_R 3\,dV = 3\iiint_R dV = 3V. \tag{4.46}$$

PROBLEMA 4.23 Calcular $\iiint_R \nabla\times\mathbf{f}\,dV$ si $\mathbf{f} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$ y R es cualquier región del espacio con volumen V.

Solución: Por (3.138), el rotacional de $\mathbf{f}$ es

$$\nabla\times\mathbf{f} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y & -x & 0 \end{vmatrix} = -2\mathbf{k}.$$

Por consiguiente,

$$\iiint_R \nabla\times\mathbf{f}\,dV = -2\mathbf{k}\iiint_R dV = -2V\mathbf{k}.$$

4.4 Definiciones alternas de gradiente, divergencia y rotacional

El *gradiente* de una función escalar ϕ, escrito grad ϕ ó $\nabla\phi$, se define

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k}. \tag{3.105}$$

La *divergencia* de $\mathbf{f}$, escrito div $\mathbf{f}$ ó $\nabla\cdot\mathbf{f}$, se define como

$$\nabla\cdot\mathbf{f} = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{1}{\Delta V}\oiint_S \mathbf{f}\cdot d\mathbf{S}, \tag{4.47}$$

donde ΔV es el volumen de la región R limitada por una superficie cerrada S. El volumen ΔV contiene siempre el punto en el cual se va a evaluar la divergencia $\nabla\cdot\mathbf{f}$ cuando ΔV tiende a cero.

El *rotacional* de $\mathbf{f}$, escrito rot $\mathbf{f}$ ó $\Delta\times\mathbf{f}$, se define como

$$\text{ó}\ \nabla\times\mathbf{f} = \mathbf{n}_{max}\lim_{\Delta S\to 0}\frac{1}{\Delta S}\oint_C \mathbf{f}\cdot d\mathbf{r}, \tag{4.48}$$

donde ΔS es la superficie limitada por una curva cerrada simple C y $\mathbf{n}_{max}$ es el vector normal unitario asociado con ΔS tal que la orientación del plano de ΔS dé un valor máximo de

[illegible] (4.49)

El rotacional $\Delta \times \mathbf{f}$ de $\mathbf{f}$ se define también por su componente en una dirección particular; i.e., la componente de $\Delta \times \mathbf{f}$ en la dirección de $\mathbf{n}$ es

$$\mathbf{n}\cdot(\nabla \times \mathbf{f}) = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{1}{\Delta S} \oint_C \mathbf{f}\cdot d\mathbf{r}, \tag{4.50}$$

donde ΔS es una superficie limitada por una curva cerrada simple C y $\mathbf{n}$ es el vector normal unitario asociado con ΔS, esto es, $\Delta \mathbf{S} = \mathbf{n}\Delta S$.

Como en la definición (4.47) de $\nabla\cdot\mathbf{f}$, ΔS contiene el punto en el cual se va a evaluar el rotacional $\nabla \times \mathbf{f}$ cuando ΔS tiende a cero.

PROBLEMA 4.24 Dar la interpretación física de $\Delta\cdot\mathbf{f}$ definido en (4.47).

Solución: En (4.27), la integral de superficie $\iint_S \mathbf{f}\cdot d\mathbf{S}$ se define como el flujo de $\mathbf{f}$ que pasa por la superficie S. Entonces $\oint\!\!\oint_S \mathbf{f}\cdot d\mathbf{S}$ es el flujo total de salida de $\mathbf{f}$ a través de la superficie cerrada S. Por tanto, (4.47) muestra que la divergencia de $\mathbf{f}$ en el punto P es el límite del flujo de salida en la red por unidad de volumen mientras S se reduce al punto P.

Si el pequeño volumen que rodea a P contiene una *fuente* o un *sumidero* de un campo vectorial $\mathbf{f}$, entonces el flujo de $\mathbf{f}$ divergirá de P ó convergerá a P, según que $\nabla\cdot\mathbf{f}$ sea positivo o negativo. Por tanto $\nabla\cdot\mathbf{f}$ puede considerarse como una medida de la intensidad del vector *fuente* o *sumidero* en P.

PROBLEMA 4.25 Usando (4.47), deducir la fórmula para $\nabla\cdot\mathbf{f}$ dada en (3.127).

Solución: Si el punto (x, y, z) en el centro de un pequeño paralepípedo rectángulo tiene aristas Δx, Δy, Δz, como se mustra en la figura 4.6, entonces $\Delta V = \Delta x\Delta y\Delta z$. Si $\mathbf{f} = f_1\mathbf{i} + f_2\mathbf{j} + f_3\mathbf{k}$, entonces

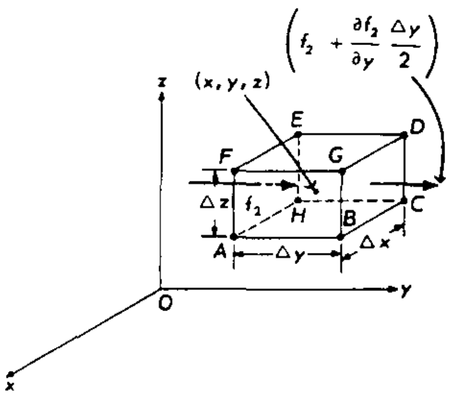


Figura 4.6 Solución al problema 4.25.

$$\begin{aligned}
&\text{sobre } S_1 \text{ para } AFGB, \quad \mathbf{n} = \mathbf{i}, \quad d\mathbf{S} = dydz\ \mathbf{i},\\
&\text{sobre } S_2 \text{ para } FEDG, \quad \mathbf{n} = -\mathbf{i}, \quad d\mathbf{S} = -dydz\ \mathbf{i},\\
&\text{sobre } S_3 \text{ para } BGDC, \quad \mathbf{n} = \mathbf{j}, \quad d\mathbf{S} = dzdx\ \mathbf{j},\\
&\text{sobre } S_4 \text{ para } AFEH, \quad \mathbf{n} = -\mathbf{j}, \quad d\mathbf{S} = -dzdx\ \mathbf{j},\\
&\text{sobre } S_5 \text{ para } FEDG, \quad \mathbf{n} = \mathbf{k}, \quad d\mathbf{S} = dxdy\ \mathbf{k},\\
&\text{sobre } S_6 \text{ para } AHGB, \quad \mathbf{n} = -\mathbf{k}, \quad d\mathbf{S} = -dxdy\ \mathbf{k}.
\end{aligned}$$

Por consiguiente, ignorando las contribuciones diferenciales de orden superior,

$$\iint_{S_1} \mathbf{f}\cdot d\mathbf{S} = \left(f_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\Delta x}{2}\right)\Delta y\Delta z,$$

$$\iint_{S_2} \mathbf{f}\cdot d\mathbf{S} = -\left(f_1 - \frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\Delta x}{2}\right)\Delta y\Delta z,$$

$$\iint_{S_3} \mathbf{f}\cdot d\mathbf{S} = \left(f_2 + \frac{\partial f_2}{\partial y}\frac{\Delta y}{2}\right)\Delta z\Delta x,$$

$$\iint_{S_4} \mathbf{f}\cdot d\mathbf{S} = -\left(f_2 - \frac{\partial f_2}{\partial y}\frac{\Delta y}{2}\right)\Delta z\Delta x,$$

$$\iint_{S_5} \mathbf{f}\cdot d\mathbf{S} = \left(f_3 + \frac{\partial f_3}{\partial z}\frac{\Delta z}{2}\right)\Delta x\Delta y,$$

$$\iint_{S_6} \mathbf{f}\cdot d\mathbf{S} = -\left(f_3 - \frac{\partial f_3}{\partial z}\frac{\Delta z}{2}\right)\Delta x\Delta y.$$

Sumando todos los resultados anteriores se obtiene

$$\oiint_S \mathbf{f}\cdot d\mathbf{S} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}\right)\Delta x\Delta y\Delta z = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}\right)\Delta V.$$

Por lo tanto, por (4.47),

$$\nabla\cdot\mathbf{f} = \lim_{\Delta V\to 0} \oiint_S \mathbf{f}\cdot d\mathbf{S} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}. \qquad [3.127]$$

PROBLEMA 4.26 Dar la interpretación física de $\nabla \times \mathbf{f}$ como se define en (4.48).

Solución: La integral de la derecha de (4.48) o (4.49), i.e., $\oint_C \mathbf{f}\cdot\mathbf{r}$ es la *circulación* de $\mathbf{f}$ alrededor de C definida en (4.9). Por consiguiente, (4.48) muestra que la magnitud de $\nabla \times \mathbf{f}$ en un punto P es el límite de la circulación por unidad de área mientras la curva C se reduce al punto P, i.e., la intensidad de circulación en P. En general, la circulación de $\mathbf{f}$ alrededor de C depende de la orientación del plano de C. La dirección de $\nabla \times \mathbf{f}$ es la dirección en la cual ocurre la circulación máxima.

PROBLEMA 4.27 Usando (4.50) deducir la definición de rotacional de $\mathbf{f}$ como el producto cruz de ∇ y $\mathbf{f}$ como se da en (3.138). No se tengan en cuenta los términos de orden superior.

Solución: Si un rectángulo $EFGH$ con respecto al punto (x, y, z) tiene lados Δy y Δz, como se muestra en la figura 4.7, entonces $\Delta\mathbf{S} = \mathbf{i}\Delta S = \mathbf{i}\Delta y\Delta z$. Si $\mathbf{f} = f_1\mathbf{i} + f_2\mathbf{j} + f_3\mathbf{k}$, entonces

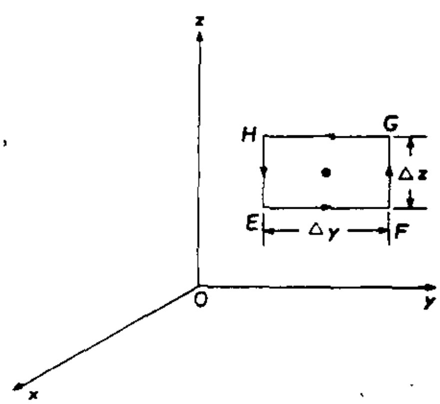


Figura 4.7 Solución al problema 4.27.

para el lado EF, $d\mathbf{r} = dy\,\mathbf{j}$, $\displaystyle\int_{EF} \mathbf{f}\cdot d\mathbf{r} = \left(f_2 - \frac{\partial f_2}{\partial z}\frac{\Delta z}{2}\right)\Delta y,$

para el lado FG, $d\mathbf{r} = dz\,\mathbf{k}$, $\displaystyle\int_{FG} \mathbf{f}\cdot d\mathbf{r} = \left(f_3 + \frac{\partial f_3}{\partial y}\frac{\Delta y}{2}\right)\Delta z,$

para el lado GH, $d\mathbf{r} = -dy\,\mathbf{j}$, $\displaystyle\int_{GH} \mathbf{f}\cdot d\mathbf{r} = -\left(f_2 + \frac{\partial f_2}{\partial z}\frac{\Delta z}{2}\right)\Delta y,$

para el lado HE, $d\mathbf{r} = -dz\,\mathbf{k}$, $\displaystyle\int_{HE} \mathbf{f}\cdot d\mathbf{r} = -\left(f_3 - \frac{\partial f_3}{\partial y}\frac{\Delta y}{2}\right)\Delta z.$

Sumando todos los resultados anteriores se obtiene

$$\oint_C \mathbf{f}\cdot d\mathbf{r} = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}\right)\Delta y\Delta z = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}\right)\Delta S.$$

Por lo tanto, por (4.50),

$$\mathbf{i}\cdot(\nabla\times\mathbf{f}) = \lim_{\Delta S\to 0}\frac{1}{\Delta S}\int_C \mathbf{f}\cdot d\mathbf{r} = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y}-\frac{\partial f_2}{\partial z}\right). \tag{4.51}$$

Mediante integración semejante alrededor de rectángulos en los planos zx, xy ó por simple permutación cíclica de x, y, z y 1, 2, 3,

$$\mathbf{j}\cdot(\nabla\times\mathbf{f}) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial z}-\frac{\partial f_3}{\partial x}\right), \tag{4.52}$$

$$\mathbf{k}\cdot(\nabla\times\mathbf{f}) = \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}-\frac{\partial f_1}{\partial y}\right). \tag{4.53}$$

Como para un vector arbitrario **A**, por (2.65), $\mathbf{A}=(\mathbf{A}\cdot\mathbf{i})\mathbf{i}+(\mathbf{A}\cdot\mathbf{j})\mathbf{j}+(\mathbf{A}\cdot\mathbf{k})\mathbf{k}$, obtenemos (3.138):

$$\nabla\times\mathbf{f} = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y}-\frac{\partial f_2}{\partial z}\right)\mathbf{i}+\left(\frac{\partial f_1}{\partial z}-\frac{\partial f_3}{\partial x}\right)\mathbf{j}+\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}-\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix}. \tag{4.54}$$

Son definiciones alternas de $\nabla\phi$, $\nabla\cdot\mathbf{f}$ y $\nabla\times\mathbf{f}$, las siguientes:

$$\nabla\phi = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{1}{\Delta V}\oiint_S d\mathbf{S}\,\phi, \tag{4.55}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{f} = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{1}{\Delta V}\oiint_S d\mathbf{S}\cdot\mathbf{f}, \tag{4.47}$$

$$\nabla\times\mathbf{f} = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{1}{\Delta V}\oiint_S d\mathbf{S}\times\mathbf{f}, \tag{4.56}$$

donde ΔV es el volumen de la región R limitada por una superficie cerrada S.

PROBLEMA 4.28 Mostrar que (4.55) es consistente con la definición $\nabla\phi$ dada por (3.105). No se tengan en cuenta los términos de orden superior.

Solución: Se sigue el procedimiento del problema 4.25 y se usan las mismas notaciones. (Cf., figura 4.6). Así,

$$\iint_{S_1} d\mathbf{S}\,\phi = \mathbf{i}\left(\phi+\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\Delta x}{2}\right)\Delta y\Delta z,$$

$$\iint_{S_2} d\mathbf{S}\,\phi = -\mathbf{i}\left(\phi-\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\Delta x}{2}\right)\Delta y\Delta z,$$

$$\iint_{S_3} d\mathbf{S}\,\phi = \mathbf{j}\left(\phi+\frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\Delta y}{2}\right)\Delta z\Delta x,$$

$$\iint_{S_4} d\mathbf{S}\,\phi = -\mathbf{j}\left(\phi-\frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\Delta y}{2}\right)\Delta z\Delta x,$$

$$\iint_{S_5} d\mathbf{S}\,\phi = \mathbf{k}\left(\phi + \frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{\Delta z}{2}\right)\Delta x\Delta y,$$

$$\iint_{S_6} d\mathbf{S}\,\phi = -\mathbf{k}\left(\phi - \frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{\Delta z}{2}\right)\Delta x\Delta y.$$

Sumando todos los resultados anteriores se obtiene

$$\oint\!\!\oint_S d\mathbf{S}\,\phi = \left[\mathbf{i}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right) + \mathbf{j}\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right) + \mathbf{k}\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)\right]\Delta x\Delta y\Delta z$$

$$= \left[\mathbf{i}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right) + \mathbf{j}\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right) + \mathbf{k}\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)\right]\Delta V.$$

Por consiguiente, por (4.55), obtenemos (3.105):

$$\nabla\phi = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{1}{\Delta V}\oint\!\!\oint d\mathbf{S}\,\phi = \mathbf{i}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial\phi}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial\phi}{\partial z}.$$

PROBLEMA 4.29 Mostrar que 4.56 es consistente con la definición de $\nabla\times\mathbf{f}$ dada por (3.138). No se tengan en cuenta los términos de orden superior.

Solución: Se sigue el procedimiento del problema 4.25 y se usan las mismas notaciones. (Cf.. figura 4.6). Tenemos para la superficie S_1,

$$\iint_{S_1} d\mathbf{S}\times\mathbf{f} = \iint_{S_1}\mathbf{i}\times(f_1\mathbf{i} + f_2\mathbf{j} + f_3\mathbf{k})\,dydz$$

$$= \iint_{S_1}(\mathbf{k}f_2 - \mathbf{j}f_3)\,dydz$$

$$= \mathbf{k}\left(f_2 + \frac{\partial f_2}{\partial x}\frac{\Delta x}{2}\right)\Delta y\Delta z - \mathbf{j}\left(f_3 + \frac{\partial f_3}{\partial x}\frac{\Delta x}{2}\right)\Delta y\Delta z.$$

De modo similar, para las otras cinco superficies,

$$\iint_{S_2} d\mathbf{S}\times\mathbf{f} = -\mathbf{k}\left(f_2 - \frac{\partial f_2}{\partial x}\frac{\Delta x}{2}\right)\Delta y\Delta z + \mathbf{j}\left(f_3 - \frac{\partial f_3}{\partial x}\frac{\Delta x}{2}\right)\Delta y\Delta z,$$

$$\iint_{S_3} d\mathbf{S}\times\mathbf{f} = -\mathbf{k}\left(f_1 + \frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{\Delta y}{2}\right)\Delta z\Delta x + \mathbf{i}\left(f_3 + \frac{\partial f_3}{\partial y}\frac{\Delta y}{2}\right)\Delta z\Delta x,$$

$$\iint_{S_4} d\mathbf{S}\times\mathbf{f} = \mathbf{k}\left(f_1 - \frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{\Delta y}{2}\right)\Delta z\Delta x - \mathbf{i}\left(f_3 - \frac{\partial f_3}{\partial y}\frac{\Delta y}{2}\right)\Delta z\Delta x,$$

$$\iint_{S_5} d\mathbf{S}\times\mathbf{f} = \mathbf{j}\left(f_1 + \frac{\partial f_1}{\partial z}\frac{\Delta z}{2}\right)\Delta x\Delta y - \mathbf{i}\left(f_2 + \frac{\partial f_2}{\partial z}\frac{\Delta z}{2}\right)\Delta x\Delta y,$$

$$\iint_{S_6} d\mathbf{S}\times\mathbf{f} = -\mathbf{j}\left(f_1 - \frac{\partial f_1}{\partial z}\frac{\Delta z}{2}\right)\Delta x\Delta y + \mathbf{i}\left(f_2 - \frac{\partial f_2}{\partial z}\frac{\Delta z}{2}\right)\Delta x\Delta y.$$

Sumando todos los resultados anteriores se obtiene

$$\oiint_S d\mathbf{S}\times\mathbf{f} = \left[\mathbf{i}\left(\frac{\partial f_3}{\partial y}-\frac{\partial f_2}{\partial z}\right)+\mathbf{j}\left(\frac{\partial f_1}{\partial z}-\frac{\partial f_3}{\partial x}\right)+\mathbf{k}\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}-\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)\right]\Delta x\Delta y\Delta z$$

$$= \left[\mathbf{i}\left(\frac{\partial f_3}{\partial y}-\frac{\partial f_2}{\partial z}\right)+\mathbf{j}\left(\frac{\partial f_1}{\partial z}-\frac{\partial f_3}{\partial x}\right)+\mathbf{k}\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}-\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)\right]\Delta V.$$

Por tanto, por (4.56) obtenemos (3.138):

$$\nabla\times\mathbf{f} = \lim_{\Delta V\to 0}\oiint_S d\mathbf{S}\times\mathbf{f} = \mathbf{i}\left(\frac{\partial f_3}{\partial y}-\frac{\partial f_2}{\partial z}\right)+\mathbf{j}\left(\frac{\partial f_1}{\partial z}-\frac{\partial f_3}{\partial x}\right)+\mathbf{k}\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}-\frac{\partial f_1}{\partial y}\right).$$

PROBLEMA 4.30 Hallar una representación integral equivalente del operador ∇.

Solución: Por (4.55-6), ∇ se representa por

$$\nabla = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{1}{\Delta V}\oiint_S d\mathbf{S}. \tag{4.57}$$

4.5 Teorema de divergencia o de Gauss

La definición de divergencia,

$$\operatorname{div}\mathbf{f} = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{1}{\Delta V}\oiint_S \mathbf{f}\cdot d\mathbf{S}, \tag{4.47}$$

da el valor de div **f** en un punto.

El *teorema de divergencia* o *teorema de Gauss* se obtiene ampliando (4.47) a una región finita. Si **f** es una función vectorial continua en una región R con volumen V y limitada por una superficie cerrada S, entonces

$$\iiint_R \nabla\cdot\mathbf{f}\,dV = \oiint_S \mathbf{f}\cdot d\mathbf{S}. \tag{4.58}$$

Este teorema tiene una consecuencia especial, llamada el teorema de Green. Este teorema se llama también teorema de Green para el espacio porque en dos dimensiones es el teorema de Green para un plano. [Véase sección 4.6 y (4.112).]

PROBLEMA 4.31 Verificar el teorema de divergencia (4.58).

Solución: Considérese una superficie finita cerrada S que encierra una región R con volumen V. Se divide R en N subregiones con volúmenes $\Delta V_1, \Delta V_2, \cdots, \Delta V_N$. En el punto (x_i, y_i, z_i) dentro de ΔV_i, donde $i = 1, 2, \cdots, N$, la definición de divergencia

(4.47) da $\nabla\cdot\mathbf{f} = \dfrac{1}{\nabla V_i}\displaystyle\oiint_{\Delta S_i}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{S} + \epsilon_i$, donde $\epsilon_i \to 0$ cuando $\Delta V_i \to 0$. Así que

$$\nabla\cdot\mathbf{f}\,\Delta V_i = \oiint_{\Delta S_i}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{S} + \varepsilon_i\,\Delta V_i. \tag{4.59}$$

La suma del volumen total V es

$$\sum_{i=1}^{N}\nabla\cdot\mathbf{f}\,\Delta V_i = \sum_{i=1}^{N}\oiint_{\Delta S_i}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{S} + \sum_{i=1}^{N}\varepsilon_i\,\Delta V_i.$$

Ahora consideremos el límite de esta expresión cuando $N \to \infty$. La frontera de la superficie ΔS_i de cada ΔV_i consiste en numerosos segmentos que son o parte de la frontera S o frontera de dos subregiones adyacentes. Las integrales de superficie de las superficies adjacentes con frontera común se cancelan pues las normales externas tienen direcciones opuestas sobre la superficie frontera común. Así que sólo queda la integral de superficie sobre S. Además por la definición de integral múltiple,

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \nabla \cdot \mathbf{f}\, \Delta V_i = \iiint_R \nabla \cdot \mathbf{f}\, dV.$$

Debido a que

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \oiint_{\Delta S_i} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \oiint_S \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S},$$

tenemos

$$\iiint_R \nabla \cdot \mathbf{f}\, dV = \oiint_S \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} + \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i \Delta V_i. \tag{4.60}$$

Para el segundo término de la derecha de (4.60),

$$\left| \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i \Delta V_i \right| \leq \sum_{i=1}^{N} |\varepsilon_i| \Delta V_i \leq |\varepsilon_m| \sum_{i=1}^{N} \Delta V_i = |\varepsilon_m| V,$$

donde $\epsilon_m = \max \epsilon_i$. Sin embargo, $\epsilon_m \to 0$ cuando $N \to \infty$ y $\Delta V_i \to 0$. Por consiguiente,

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i \Delta V_i \longrightarrow 0.$$

Así que tomando límites,

$$\iiint_R \nabla \cdot \mathbf{f}\, dV = \oiint_S \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S}.$$

PROBLEMA 4.32 Dar la interpretación física del teorema de divergencia (4.58).

Solución: Como se muestra en el problema 4.24, la divergencia de un campo vectorial $\mathbf{f}$ en un punto dado es la densidad del flujo de salida desde ese punto. La divergencia, o teorema de Gauss (4.58) establece que el flujo total hacia afuera desde una superficie cerrada S es igual a la integral de la divergencia a través de la región R limitada por S.

PROBLEMA 4.33 Mostrar que si $\mathbf{r}$ es el vector de posición, entonces

$$\oiint_S \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S} = 3V, \tag{4.61}$$

donde V es el volumen de la región R limitada por la superficie cerrada S.

Solución: La divergencia $\nabla \cdot \mathbf{r}$ es

$$\nabla \cdot \mathbf{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3. \qquad [3.129]$$

Así que aplicando el teorema de Gauss (4.58),

$$\oiint_S \mathbf{r}\cdot d\mathbf{S} = \iiint_R \nabla\cdot\mathbf{r}\,dV = 3\iiint_R dV = 3V.$$

PROBLEMA 4.34 Usando 4.61, hallar $\iint_S \mathbf{r}\cdot d\mathbf{S}$ para la superficie S de una esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. (Cf. problema 4.14).

Solución: El volumen V de una esfera con radio a es $V = (4/3)\pi a^3$. Por consiguiente, por (4.61),

$$\oiint_S \mathbf{r}\cdot d\mathbf{S} = 3\cdot\frac{4}{3}\pi a^3 = 4\pi a^3.$$

PROBLEMA 4.35 Usando (4.61), calcular $\iint_S \mathbf{r}\cdot d\mathbf{S}$, donde S es la superficie de un cubo limitado por $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1, z = 0, z = 1$, como se muestra en la figura 4.4. El vector exterior unitario normal $\mathbf{n}$ y el vector de posición $\mathbf{r}$ de los puntos situados sobre la superficie del cubo están dirigidos hacia el lado opuesto del origen. (Cf., problema 4.16).

Solución: Como el volumen del cubo es 1, entonces por (4.61),

$$\oiint_S \mathbf{r}\cdot d\mathbf{S} = 3V = 3\cdot 1 = 3.$$

PROBLEMA 4.36 Mostrar que

$$\iiint_R \frac{1}{r^2}\,dV = \oiint_S \frac{\mathbf{r}\cdot d\mathbf{S}}{r^2}, \tag{4.62}$$

donde S encierra la región R, $\mathbf{r}$ es el vector de posición y $|\mathbf{r}| = r$.

Solución: Por (3.167),

$$\nabla\cdot[r^{n-1}\,\mathbf{r}] = (n+2)\,r^{n-1}.$$

Si $n = -1$,

$$\nabla\cdot\left(\frac{\mathbf{r}}{r^2}\right) = (-1+2)\,r^{-2} = \frac{1}{r^2}. \tag{4.63}$$

Por consiguiente, aplicando el teorema de divergencia (4.58),

$$\iiint_R \nabla\cdot\left(\frac{\mathbf{r}}{r^2}\right)dV = \iiint_R \frac{1}{r^2}\,dV = \oiint_S \frac{\mathbf{r}\cdot d\mathbf{S}}{r^2}.$$

PROBLEMA 4.37 Mostrar que, para cualquier superficie cerrada S,

$$\oiint_S \nabla\times\mathbf{f}\cdot d\mathbf{S} = 0. \tag{4.64}$$

Solución: Por (4.58),

$$\oiint_S \nabla\times\mathbf{f}\cdot d\mathbf{S} = \iiint_R \nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{f})\,dV. \qquad \text{(4.6}$$

Pero por (3.143), $\nabla(\nabla\times\mathbf{f}) = 0$; por lo tanto,

$$\oiint_S \nabla \times \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = 0.$$

PROBLEMA 4.38 Si $\mathbf{f} = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$ y R es la región limitada por una superficie cerrada S, mostrar que el teorema de divergencia (4.58) expresado en coordenadas rectangulares es

$$\iiint_R \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz = \oiint_S (P\ dydz + Q\ dzdx + R\ dxdy). \quad (4.66)$$

Solución: Si escribimos

$$\mathbf{f} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\mathbf{k},$$

$$\mathbf{n} = \cos\alpha\ \mathbf{i} + \cos\beta\ \mathbf{j} + \cos\gamma\ \mathbf{k},$$

entonces, en general, para cualquier superficie S,

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{i}\ dS = \cos\alpha\ dS = dydz,$$

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{j}\ dS = \cos\beta\ dS = dzdx,$$

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{k}\ dS = \cos\gamma\ dS = dxdy.$$

(Cf., problema 4.15). Como la divergencia de $\mathbf{f}$ es

$$\nabla\cdot\mathbf{f} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z},$$

$$\iiint_R \nabla\cdot\mathbf{f}\ dV = \iiint_R \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz.$$

Como antes,

$$\oiint_S \mathbf{f}\cdot d\mathbf{S} = \oiint_S (P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k})\cdot\mathbf{n}\ dS$$

$$= \oiint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\ dS$$

$$= \oiint_S (P\ dydz + Q\ dzdx + R\ dxdy)$$

Por tanto, (4.58) se reduce a

$$\iiint_R \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz = \oiint_S (P\ dydz + Q\ dzdx + R\ dxdy).$$

PROBLEMA 4.39 Usando el teorema de divergencia (4.66) calcular

$$I = \iint_S x\ dydz + y\ dzdx + 2z\ dxdy,$$

donde S es una superficie que consiste en la superficie del paraboloide $x^2 + y^2 = 1 - z$, $0 < z < 1$, y el disco $x^2 + y^2 \leqslant 1$, $z = 0$, como se muestra en la figura 4.8 (Cf., problema 4.17).

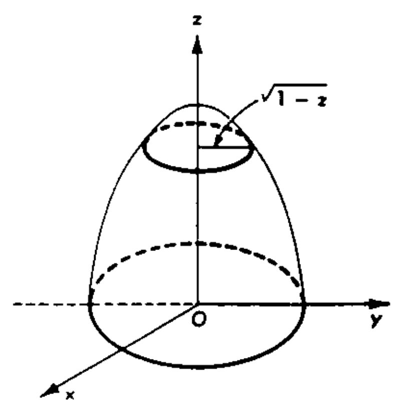


Figura 4.8 La superficie de problema 4.39.

Solución: Por el teorema de divergencia expresado en coordenadas rectangulares (4.66),

$$I = \iiint\limits_R \left[\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial(2z)}{\partial z}\right] dxdydz = \iiint 4\, dxdydz$$

$$= 4 \iiint\limits_R dV$$

$$= 4 \int_0^1 \pi(1-z)\, dz$$

$$= 4\left(\pi - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= 2\pi,$$

que es el mismo resultado obtenido en el problema 4.17. Obsérvese que la contribución del disco $x^2 + y^2 \leqslant 1, z = 0$ es cero, pues sobre este disco $\mathbf{n} = -\mathbf{k}$ y $\mathbf{f} \cdot \mathbf{n}\,|_{z=0} = -2z\,|_{z=0} = 0$.

PROBLEMA 4.40 Usando el teorema de divergencia (4.66), calcular

$$I = \iint\limits_S (x^3\, dydz + x^2y\, dzdx + x^2z\, dxdy),$$

donde S es la superficie cerrada que consiste en el cilindro $x^2 + y^2 = a^2$, $0 \leqslant z \leqslant b$, y los discos circulares $x^2 + y^2 \leqslant a^2$, $z = 0$ y $x^2 + y^2 \leqslant a^2$, $z = b$, como se muestra en la figura 4.9.

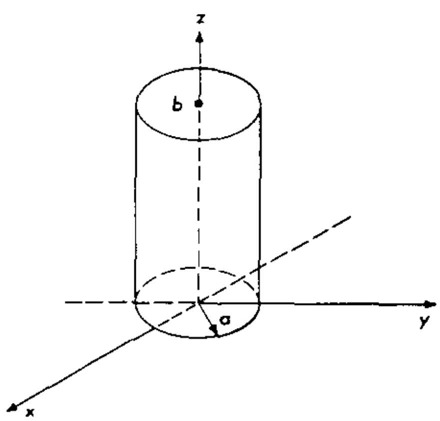


Figura 4.9 La superficie del problema 4.40.

Solución: Por el teorema de divergencia (4.66),

$$I = \iiint\limits_R \left(\frac{\partial x^3}{\partial x} + \frac{\partial x^2y}{\partial y} + \frac{\partial x^2z}{\partial z}\right) dxdydz$$

$$= 5 \iiint\limits_R x^2\, dxdydz$$

$$= 5 \int_0^b \int_{-a}^{a} \int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} x^2\, dxdydz$$

$$= 5 \cdot 4 \int_0^b \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} x^2\, dxdydz$$

$$= 20 \int_0^b \int_0^a \frac{1}{3} (a^2 - y^2)^{3/2}\, dydz$$

$$= \frac{20b}{3} \int_0^a (a^2 - y^2)^{3/2}\, dy$$

$$= \frac{20b}{3} \cdot \frac{3}{16} \pi a^4$$

$$= \frac{5}{4} \pi a^4 b.$$

PROBLEMA 4.41 Mostrar que el teorema de divergencia (4.58) puede extenderse al volumen infinito exterior a una superficie cerrada con tal que

$$\lim_{r\to\infty} r^2 \,|\mathbf{f}| = 0, \tag{4.67}$$

donde r es la distancia desde el origen a cualquier punto del espacio.

Solución: Sea S una superficie cerrada limitada por una esfera S_r de radio r con su centro en el origen. Si $\mathbf{f}$ es un campo vectorial en una región R limitada por S y S_r, entonces, aplicando el teorema de divergencia (4.58),

$$\iiint\limits_R \nabla\cdot\mathbf{f}\,dV = \oiint\limits_S \mathbf{f}\cdot d\mathbf{S} + \oiint\limits_{S_r} \mathbf{f}\cdot d\mathbf{S}. \tag{4.68}$$

(Véase figura 4.10). Por la desigualdad de Cauchy-Schwartz (1.45), $|\mathbf{f}\cdot\mathbf{n}| \leqslant |\mathbf{f}|$; entonces,

$$\left|\iint\limits_S \mathbf{f}\cdot d\mathbf{S}\right| = \left|\iint\limits_S \mathbf{f}\cdot\mathbf{n}\,dS\right| \le \iint\limits_S |\mathbf{f}\cdot\mathbf{n}|\,dS \le \iint\limits_S |\mathbf{f}|\,dS.$$

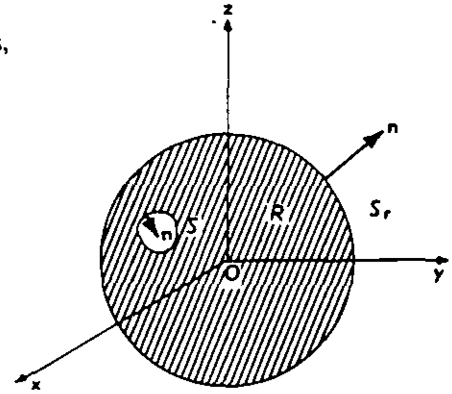


Figura 4.10 La superficie cerrada del problema 4.41.

Por lo tanto, si $|\mathbf{f}| \leqslant \epsilon/r^2$ en todos los puntos de S_r,

$$\left|\oiint\limits_{S_r} \mathbf{f}\cdot d\mathbf{S}\right| \le \oiint\limits_{S_r} |\mathbf{f}|\,dS \le \frac{\varepsilon}{r^2}\oiint\limits_{S_r} dS = 4\pi\varepsilon$$

pues $\oiint\limits_{S_r} dS = 4\pi r^2$. Así, si $\lim\limits_{r\to\infty} r^2\,|\mathbf{f}| = 0$,

$$\lim_{r\to\infty}\oiint\limits_{S_r} \mathbf{f}\cdot d\mathbf{S} = 0,$$

de lo cual se obtiene

$$\iiint\limits_R \nabla\cdot\mathbf{f}\,dV = \oiint\limits_S \mathbf{f}\cdot d\mathbf{S}.$$

Obsérvese que en esta integral de superficie, la normal apunta hacia adentro.

En la figura 4.11, r es el vector de posición que representa un punto P sobre la superficie S. El *ángulo sólido* $d\Omega$ subtendido en el origen O por un elemento $d\mathbf{S}$ de la superficie S se define como

$$d\Omega = \frac{\mathbf{r}\cdot d\mathbf{S}}{r^3}. \tag{4.69}$$

El ángulo sólido total Ω subtendido por S es

$$\Omega = \iint\limits_S \frac{\mathbf{r}\cdot d\mathbf{S}}{r^3}. \tag{4.70}$$

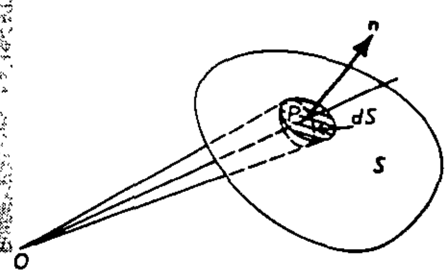


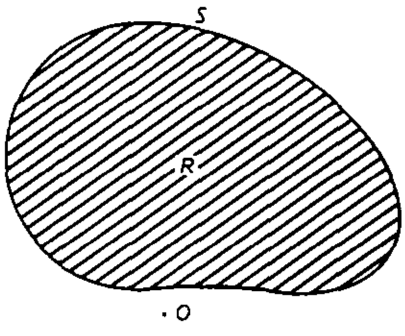
Figura 4.11 Angulo sólido.

PROBLEMA 4.42 Mostrar que el ángulo sólido total subtendido por una superficie cerrada S en el origen O es cero si O está fuera de la región R limitada por S, y que es 4π si O está dentro de R.

Solución: Por el teorema de divergencia (4.58),

$$\oiint\limits_S \frac{\mathbf{r}\cdot d\mathbf{S}}{r^3} = \iiint\limits_R \nabla\cdot\left(\frac{\mathbf{r}}{r^3}\right) dV.$$

Sin embargo, por (3.168), $\nabla\cdot(\mathbf{r}/r^3) = 0$ dentro de R si $r \neq 0$. Por otra parte, si O está fuera de R,



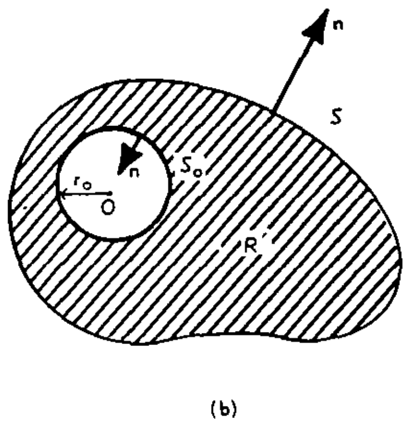


Figura 4.12 Solución al problema 4.42.

entonces $r \neq 0$, como se muestra en la figura 4.12 (a). Por tanto, cuando O está fuera de R, el ángulo total subtendido por S es

$$\Omega = \oiint_S \frac{\mathbf{r} \cdot d\mathbf{S}}{r^3} = 0. \tag{4.71}$$

Si O está dentro de R, construimos una pequeña esfera S_o de radio r_o y consideramos la región R' limitada por S y S_0, como se muestra en la figura 4.12 (b). Si aplicamos el teorema de divergencia (4.58),

$$\oiint_{S+S_O} \frac{\mathbf{r} \cdot d\mathbf{S}}{r^3} = \iint_S \frac{\mathbf{r} \cdot d\mathbf{S}}{r^3} + \iint_{S_O} \frac{\mathbf{r} \cdot d\mathbf{S}}{r^3} = \iiint_{R'} \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3}\right) dV = 0$$

pues $r \neq 0$ dentro de R'. Así que

$$\oiint_S \frac{\mathbf{r} \cdot d\mathbf{S}}{r^3} = -\oiint_{S_O} \frac{\mathbf{r} \cdot d\mathbf{S}}{r^3}.$$

En los puntos de S_o, $r = r_o$ y la normal positiva o exterior está dirigida hacia O, o sea que $\mathbf{n} = -\mathbf{r}/r_o$; por consiguiente,

$$\begin{aligned}\oiint_{S_O} \frac{\mathbf{r} \cdot d\mathbf{S}}{r^3} &= \iint_{S_O} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}\, dS}{r^3} \\ &= -\oiint_{S_O} \frac{dS}{r_O^2} \\ &= -\frac{1}{r_O^2} \oiint_{S_O} dS \\ &= -\frac{1}{r_O^2}\, 4\pi r_O^2 \\ &= -4\pi;\end{aligned}$$

y cuando O está dentro de R, el ángulo total subtendido por S es

$$\Omega = \oiint_S \frac{\mathbf{r} \cdot d\mathbf{S}}{r^3} = -\oiint_{S_O} \frac{\mathbf{r} \cdot d\mathbf{S}}{r^3} = -(-4\pi) = 4\pi. \tag{4.72}$$

4.6 Teoremas de Green

El *primer teorema o identidad de Green* establece que si ϕ y ψ son funciones escalares que tienen segundas derivadas continuas en una región R limitada por una superficie cerrada S, entonces

$$\iiint_R (\phi \nabla^2 \psi + \nabla\phi \cdot \nabla\psi)\, dV = \oiint_S \phi \nabla\psi \cdot d\mathbf{S}. \tag{4.73}$$

El *segundo teorema o identidad de Green* establece que si ϕ y ψ son funciones escalares que tienen segundas derivadas continuas en una región R limitada por una superficie cerrada S, entonces

$$\iiint_R (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi)\, dV = \oiint_S (\phi \nabla\psi - \psi \nabla\phi) \cdot d\mathbf{S}. \tag{4.74}$$

Estos teoremas o identidades se obtienen del teorema de divergencia (4.58) usando una función vectorial apropiada.

El *tercer teorema o identidad de Green* expresa que si $\mathbf{f}(\nabla\cdot\mathbf{g})$ y $\mathbf{f}\times(\nabla\times\mathbf{g})$ son funciones vectoriales que tienen segundas derivadas continuas en una región R limitada por una superficie cerrada S, entonces

$$\iiint_R [\mathbf{f}\cdot\nabla^2\mathbf{g} - \mathbf{g}\cdot\nabla^2\mathbf{f}]\, dV$$
$$= \oiint_S [\mathbf{f}\times(\nabla\times\mathbf{g}) + \mathbf{f}(\nabla\cdot\mathbf{g}) - \mathbf{g}\times(\nabla\times\mathbf{f}) - \mathbf{g}(\nabla\cdot\mathbf{f})]\cdot d\mathbf{S}, \quad (4.75)$$

donde $\nabla^2\mathbf{f} = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{f}) - \nabla\times(\nabla\times\mathbf{f})$ por (3.164).

Este teorema es equivalente al segundo teorema de Green (4.74) que relaciona dos escalares.

PROBLEMA 4.43 Verificar el primer teorema de Green (4.73).

Solución: Usando el vector identidad, $\nabla\cdot(\phi\mathbf{f}) = \phi\nabla\cdot\mathbf{f} + \mathbf{f}\cdot\nabla\phi$, donde $\mathbf{f} = \nabla\psi$,

$$\nabla\cdot(\phi\nabla\psi) = \phi\nabla\cdot\nabla\psi + \nabla\psi\cdot\nabla\phi = \phi\nabla^2\psi + \nabla\phi\cdot\nabla\psi. \quad (4.76)$$

Integrando sobre la región R,

$$\iiint_R \nabla\cdot(\phi\nabla\psi)\, dV = \iiint_R (\phi\nabla^2\psi + \nabla\phi\cdot\nabla\psi)\, dV. \quad (4.77)$$

Aplicando el teorema de divergencia (4.58),

$$\iiint_R \nabla\cdot(\phi\nabla\psi)\, dV = \oiint_S \phi\nabla\psi\cdot d\mathbf{S}. \quad (4.78)$$

Así que,

$$\iiint_R (\phi\nabla^2\psi + \nabla\phi\cdot\nabla\psi)\, dV = \oiint_S \phi\nabla\psi\cdot d\mathbf{S}.$$

Por la definición de derivada direccional (3.98), i.e., $\partial\phi/\partial s = \operatorname{grad}\phi\cdot\mathbf{T}$,

$$\phi\nabla\psi\cdot d\mathbf{S} = \phi\nabla\psi\cdot\mathbf{n}\, dS = \phi\,\frac{\partial\psi}{\partial n}\, dS, \quad (4.79)$$

donde $\partial\psi/\partial n$ es la *derivada normal*. Por consiguiente, (4.73) puede escribirse como

$$\iiint_R (\phi\nabla^2\psi + \nabla\phi\cdot\nabla\psi)\, dV = \oiint_S \phi\,\frac{\partial\psi}{\partial n}\, dS. \quad (4.80)$$

PROBLEMA 4.44 Verificar el segundo teorema de Green (4.74).

Solución: Intercambiando ϕ y ψ en (4.73),

$$\iiint_R (\psi\nabla^2\phi + \nabla\psi\cdot\nabla\phi)\, dV = \oiint_S \psi\nabla\phi\cdot d\mathbf{S}. \quad (4.81)$$

Entonces, sustrayendo (4.81) de (4.73),

$$\iiint\limits_R (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi) dV = \oiint\limits_S (\phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi) \cdot d\mathbf{S}. \qquad [4.74]$$

Por (4.79),

$$\nabla\psi \cdot d\mathbf{S} = \frac{\partial \psi}{\partial n} dS, \qquad \nabla\phi \cdot d\mathbf{S} = \frac{\partial \phi}{\partial n} dS;$$

Por consiguiente, (4.74) se puede expresar como

$$\iiint\limits_R (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi) dV = \oiint\limits_S \left(\phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n}\right) dS. \qquad (4.82)$$

PROBLEMA 4.45 Si ψ es armónica en una región R encerrada por S, entonces demostrar que

$$\oiint\limits_S \nabla\psi \cdot d\mathbf{S} = \oiint\limits_S \frac{\partial \psi}{\partial n} dS = 0. \qquad (4.83)$$

Solución: Si hacemos $\phi = 1$ en el primer teorema de Green (4.73),

$$\oiint\limits_S \nabla\psi \cdot d\mathbf{S} = \iiint\limits_R \nabla^2 \psi \, dV \qquad (4.84)$$

pues $\nabla(1) = 0$. Como ψ es armónica, entonces por la ecuación de Laplace (3.133), $\nabla^2 \psi = 0$. Por consiguiente, (4.84) se reduce a

$$\oiint\limits_S \nabla\psi \cdot d\mathbf{S} = \oiint\limits_S \nabla\psi \cdot \mathbf{n} \, dS = \oiint\limits_S \frac{\partial \psi}{\partial n} dS = 0.$$

PROBLEMA 4.46 Si ϕ y ψ son armónicas en una región R encerrada por S, entonces demostrar que

$$\oiint\limits_S (\phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi) \cdot d\mathbf{S} = \oiint\limits_S \left(\phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n}\right) dS = 0. \qquad (4.85)$$

Solución: Si ϕ y ψ son armónicas, entonces por la ecuación de Laplace (3.133) tenemos, $\nabla^2 \phi = \nabla^2 \psi = 0$. Así que por el segundo teorema de Green (4.74),

$$\oiint\limits_S (\phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi) \cdot d\mathbf{S} = \iiint\limits_R (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi) dV = 0.$$

PROBLEMA 4.47 Deducir el tercer teorema de Green (4.75).

Solución: Aplicando el teorema de divergencia (4.58) a los vectores $\mathbf{f}(\nabla \cdot \mathbf{g})$ y $\mathbf{f} \times (\nabla \times \mathbf{g})$,

$$\iiint\limits_R \nabla \cdot [\mathbf{f}(\nabla \cdot \mathbf{g})] dV = \oiint\limits_S \mathbf{f}(\nabla \cdot \mathbf{g}) \cdot d\mathbf{S}, \qquad (4.86)$$

$$\iiint\limits_R \nabla \cdot [\mathbf{f} \times (\nabla \times \mathbf{g})] dV = \oiint\limits_S \mathbf{f} \times (\nabla \times \mathbf{g}) \cdot d\mathbf{S}. \qquad (4.87)$$

Por las identidades vectoriales (3.155) y (3.157),

$$\nabla \cdot [\mathbf{f}(\nabla \cdot \mathbf{g})] = (\nabla \cdot \mathbf{g})(\nabla \cdot \mathbf{f}) + \mathbf{f} \cdot \nabla(\nabla \cdot \mathbf{g}), \qquad (4.88)$$

$$\nabla \cdot [\mathbf{f} \times (\nabla \times \mathbf{g})] = (\nabla \times \mathbf{g}) \cdot (\nabla \times \mathbf{f}) - \mathbf{f} \cdot \nabla \times (\nabla \times \mathbf{g}). \qquad (4.89)$$

Por consiguiente,

$$\iiint_R \nabla\cdot[\mathbf{f}(\nabla\cdot\mathbf{g})]\,dV = \iiint_R [(\nabla\cdot\mathbf{g})(\nabla\cdot\mathbf{f}) + \mathbf{f}\cdot\nabla(\nabla\cdot\mathbf{g})]\,dV, \qquad (4.90)$$

$$\iiint_R \nabla\cdot[\mathbf{f}\times(\nabla\times\mathbf{g})]\,dV = \iiint_R [(\nabla\times\mathbf{g})\cdot(\nabla\times\mathbf{f}) - \mathbf{f}\cdot\nabla\times(\nabla\times\mathbf{g})]\,dV. \qquad (4.91)$$

Intercambiando los papeles de f y g y restando,

$$\iiint_R [\mathbf{f}\cdot\nabla(\nabla\cdot\mathbf{g}) - \mathbf{g}\cdot\nabla(\nabla\cdot\mathbf{f})]\,dV = \oiint_S [\mathbf{f}(\nabla\cdot\mathbf{g}) - \mathbf{g}(\nabla\cdot\mathbf{f})]\cdot d\mathbf{S}, \qquad (4.92)$$

$$\iiint_R [\mathbf{f}\cdot\nabla\times(\nabla\times\mathbf{g}) - \mathbf{g}\cdot\nabla\times(\nabla\times\mathbf{f})]\,dV$$

$$= -\oiint_S [\mathbf{f}\times(\nabla\times\mathbf{g}) - \mathbf{g}\times(\nabla\times\mathbf{f})]\cdot d\mathbf{S}. \qquad (4.93)$$

Sumando (4.92) y (4.93) y usando

$$\nabla^2\mathbf{f} = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{f}) - \nabla\times(\nabla\times\mathbf{f}), \qquad [3.164]$$

obtenemos

$$\iiint_R (\mathbf{f}\cdot\nabla^2\mathbf{g} - \mathbf{g}\cdot\nabla^2\mathbf{f})\,dV =$$

$$\oiint_S [\mathbf{f}\times(\nabla\times\mathbf{g}) + \mathbf{f}(\nabla\cdot\mathbf{g}) - \mathbf{g}\times(\nabla\times\mathbf{f}) - \mathbf{g}(\nabla\cdot\mathbf{f})]\cdot d\mathbf{S}. \qquad [4.75]$$

4.7 Transformaciones de integrales de volumen a integrales de superficie

El *teorema de divergencia* (4.58) representa una transformación de integral de volumen a integral de superficie en donde interviene la divergencia de un vector; i.e.,

$$\iiint_R \nabla\cdot\mathbf{f}\,dV = \oiint_S d\mathbf{S}\cdot\mathbf{f}. \qquad [4.58]$$

Extendiendo las definiciones de gradiente y rotacional de un vector a volúmenes finitos, obtenemos los siguientes teoremas:

El *teorema de gradiente* expresa que si ϕ es una función escalar continua en una región R limitada por una superficie cerrada S, entonces

$$\iiint_R \nabla\phi\,dV = \oiint_S d\mathbf{S}\,\phi. \qquad (4.94)$$

El *teorema de rotacional* expresa que si f es una función vectorial continua en una región R limitada por una superficie cerrada S, entonces

$$\iiint_R \nabla\times\mathbf{f}\,dV = \oiint_S d\mathbf{S}\times\mathbf{f}. \qquad (4.95)$$

Obsérvese que los teoremas (4.58) y (4.94-5) se pueden expresar como

$$\iiint_R \nabla * \alpha \, dV = \oiint_S d\mathbf{S} * \alpha, \tag{4.96}$$

donde α es un escalar o cantidad vectorial y la estrella (*) representa una forma aceptable de multiplicación, i.e., producto punto o cruz, o producto simple.

PROBLEMA 4.48 Demostrar el teorema del gradiente (4.94).

Solución: Sea $\mathbf{f} = \phi\mathbf{a}$, donde $\mathbf{a}$ es cualquier vector constante. Aplicando el teorema de divergencia (4.58),

$$\iiint_R \nabla \cdot (\phi \, \mathbf{a}) \, dV = \oiint_S \phi \, \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S}. \tag{4.97}$$

Pero por (3.155),

$$\nabla \cdot (\phi \, \mathbf{a}) = \phi \nabla \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \nabla \phi.$$

Como $\mathbf{a}$ es una constante, $\nabla \cdot \mathbf{a} = 0$; por consiguiente,

$$\nabla \cdot (\phi \, \mathbf{a}) = \mathbf{a} \cdot \nabla \phi.$$

Así que (4.97) puede escribirse como

$$\mathbf{a} \cdot \left(\iiint_R \nabla \phi \, dV - \oiint_S \phi \, d\mathbf{S} \right) = 0. \tag{4.98}$$

Como $\mathbf{a}$ es cualquier vector constante, la expresión del paréntesis se anula y queda demostrado (4.94).

PROBLEMA 4.49 Demostrar el teorema de rotacional (4.95).

Solución: Si $\mathbf{a}$ es cualquier vector constante y sustituimos $\mathbf{f}$ en (4.58) por $\mathbf{f} \times \mathbf{a}$, entonces

$$\iiint_R \nabla \cdot (\mathbf{f} \times \mathbf{a}) \, dV = \oiint_S (\mathbf{f} \times \mathbf{a}) \cdot d\mathbf{S}. \tag{4.99}$$

Pero por (3.157),

$$\nabla \cdot (\mathbf{f} \times \mathbf{a}) = \mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{f}) - \mathbf{f} \cdot (\nabla \times \mathbf{a}).$$

Como $\mathbf{a}$ es constante, $\nabla \times \mathbf{a} = 0$; por consiguiente,

$$\nabla \cdot (\mathbf{f} \times \mathbf{a}) = \mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{f}).$$

Por la regla de permutación del triple producto escalar (1.77) o (2.53),

$$\mathbf{f} \times \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S} = \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S} \times \mathbf{f}.$$

Así que (4.99) se puede expresar como

$$\mathbf{a} \cdot \left(\iiint_R \nabla \times \mathbf{F} \, dV - \oiint_S d\mathbf{S} \times \mathbf{f} \right) = 0. \tag{4.100}$$

Otra vez, puesto que $\mathbf{a}$ es cualquier vector constante, la expresión del paréntesis se anula y queda demostrado (4.95).

PROBLEMA 4.50 Mostrar que para una superficie cerrada S,

$$\oiint_S d\mathbf{S} = \mathbf{0}. \tag{4.101}$$

Solución: Por el teorema del gradiente (4.94),

$$\oiint_S \phi \, d\mathbf{S} = \iiint_R \nabla\phi \, dV.$$

Si $\phi = 1$, entonces $\nabla\phi = 0$; por consiguiente,

$$\oiint_S d\mathbf{S} = \mathbf{0}.$$

PROBLEMA 4.51 Usando la representación integral de ∇(4.57) i.e.,

$\nabla = \lim_{\Delta V \to 0} \dfrac{1}{\Delta V} \oiint_S d\mathbf{S}$, mostrar que

$$\nabla \cdot (\phi \mathbf{f}) = \phi \nabla \cdot \mathbf{f} + \mathbf{f} \cdot \nabla\phi. \qquad [3.155]$$

Solución: Sean ϕ_0 y $\mathbf{f}_0$ los valores de ϕ y $\mathbf{f}$ en algún punto P_0, y sea ΔV una región pequeña que rodea a P_0. Sobre la superficie S que limita a ΔV los valores de ϕ y $\mathbf{f}$ son $\phi = \phi_0 + \Delta\phi$, $\mathbf{f} = \mathbf{f}_0 + \Delta\mathbf{f}$. Usando (4.57),

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot (\phi \mathbf{f}) &= \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \oiint_S d\mathbf{S} \cdot (\phi \mathbf{f}) \\
&= \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \oiint_S d\mathbf{S} \cdot (\phi_0 + \Delta\phi) \mathbf{f} \\
&= \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \left[\phi_0 \oiint_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{f} + \oiint_S d\mathbf{S} \cdot (\Delta\phi) \mathbf{f} \right] \\
&= \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \left[\phi_0 \oiint_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{f} + \oiint_S d\mathbf{S} \cdot (\phi - \phi_0)(\mathbf{f}_0 + \Delta\mathbf{f}) \right] \\
&= \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \left(\phi_0 \oiint_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{f} + \mathbf{f}_0 \cdot \oiint_S d\mathbf{S}\, \phi - \phi_0 \mathbf{f}_0 \cdot \oiint_S d\mathbf{S} \right. \\
&\qquad \left. + \oiint_S d\mathbf{S} \cdot \Delta\phi \Delta \mathbf{f} \right). \qquad (4.102)
\end{aligned}$$

Pero por el resultado del problema 4.50,

$$\oiint_S d\mathbf{S} = \mathbf{0}. \qquad [4.101]$$

Como la última integral $\oiint_S d\mathbf{S} \cdot \Delta\phi \Delta\mathbf{f}$ es un término de orden superior, puede descartarse en el límite. Entonces, en el punto P_0,

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot (\phi \mathbf{f}) &= \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \left(\phi_0 \oiint_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{f} + \mathbf{f}_0 \cdot \oiint_S d\mathbf{S}\, \phi \right) \\
&= \phi_0 \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \oiint_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{f} + \mathbf{f} \cdot \left(\lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \oiint_S d\mathbf{S}\, \phi \right) \\
&= \phi \nabla \cdot \mathbf{f} + \mathbf{f} \cdot \nabla\phi,
\end{aligned}$$

donde todas las expresiones están calculadas en el punto P_0. Como P_0 es arbitrario, queda demostrado (3.155).

PROBLEMA 4.52 Si $\mathbf{r}$ es un vector de posición, mostrar que para una superficie cerrada S,

$$\oint\!\!\!\oint_S \mathbf{r} \times d\mathbf{S} = \mathbf{0}. \tag{4.103}$$

Solución: Por el teorema del rotacional (4.95),

$$\oint\!\!\!\oint_S d\mathbf{S} \times \mathbf{r} = \iiint_R \nabla \times \mathbf{r}\, dV.$$

Pero por (3.141), $\nabla \times \mathbf{r} = 0$; por consiguiente,

$$\oint\!\!\!\oint_S \mathbf{r} \times d\mathbf{S} = -\oint\!\!\!\oint_S d\mathbf{S} \times \mathbf{r} = \mathbf{0}.$$

4.8 Teorema de Stokes

El *teorema de Stokes* establece que si S es una superficie limitada por una curva cerrada simple C y $\mathbf{f}$ es una función vectorial que tiene primeras derivadas parciales continuas sobre S y C, entonces

$$\iint_S \nabla \times \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}. \tag{4.104}$$

PROBLEMA 4.53 Demostrar el teorema de Stokes (4.104).

Solución: Considérese una superficie S limitada por una curva cerrada simple C. Se divide S en N subregiones tan pequeñas que puedan considerarse planas con áreas ΔS_1, $\Delta S_2, \cdots, \Delta S_N$. En los puntos (x_i, y_i, z_i) de ΔS_i, la definición (4.50) del rotacional da

$$\mathbf{n} \cdot \nabla \times \mathbf{f}\, \Delta S_i = \oint_{C_i} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} + \varepsilon_i\, \Delta S_i, \tag{4.105}$$

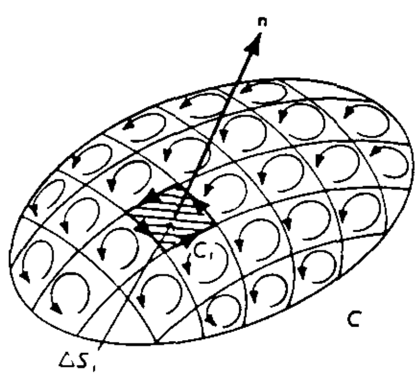


Figura 4.13 Demostración del teorema de Stokes.

donde $\epsilon_i \to 0$, cuando $\Delta S_i \to 0$, y $\mathbf{n}$ es el vector unitario normal asociado con ΔS_i. (Véase figura 4.13.) La suma sobre la superficie total S da

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbf{n} \cdot \nabla \times \mathbf{f}\, \Delta S_i = \sum_{i=1}^{N} \oint_{C_i} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} + \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i\, \Delta S_i.$$

Ahora consideremos el límite de esta expresión cuando $N \to \infty$. La frontera C_i de cada ΔS_i consiste en pedazos que son o parte de la frontera C o parte de las fronteras de las dos subregiones adyacentes. Las integrales de línea a lo largo de curvas fronteras adyacentes se cancelan, pues los vectores $d\mathbf{r}$ tienen direcciones opuestas; así que queda sólo la integral de línea a lo largo de C. Por consiguiente,

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \mathbf{n} \cdot \nabla \times \mathbf{f}\, \Delta S_i = \iint_S \mathbf{n} \cdot \nabla \times \mathbf{f}\, dS = \iint_S \nabla \times \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S},$$

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \oint_{C_i} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}.$$

Así que cuando $N \to \infty$,

$$\iint_S \nabla \times \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} + \lim_{N \to \infty} \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i \, \Delta S_i. \tag{4.106}$$

Para el término restante,,

$$\left| \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i \, \Delta S_i \right| \le \sum_{i=1}^{N} |\, \varepsilon_i \,| \, \Delta S_i \le |\, \varepsilon_m \,| \sum_{i=1}^{N} \Delta S_i = |\, \varepsilon_m \,| \, S,$$

donde $\epsilon_m = \max \epsilon_i$. Pero $\epsilon_m \to 0$ cuando $N \to \infty$, $\nabla S_i \to 0$. Entonces,

$$\lim_{N \to \infty} \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i \, \Delta S_i \longrightarrow 0.$$

Así, en el límite,

$$\iint_S \nabla \times \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}.$$

PROBLEMA 4.54 Dar la interpretación física del teorema de Stokes.

Solución: El rotacional de un campo vectorial $\mathbf{f}$ es la intensidad de circulación en un punto para $\mathbf{f}$ (véase problema 4.26). El teorema de Stokes (4.104) establece que la circulación total alrededor de una curva cerrada C es igual al flujo del rotacional $\mathbf{f}$ a través de una superficie S encerrada por C.

PROBLEMA 4.55 Mostrar que si $\mathbf{r}$ es el vector de posición, entonces

$$\oint_C \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = 0. \tag{4.107}$$

Solución: Por (3.141), $\nabla \times \mathbf{r} = \mathbf{0}$. Por consiguiente, por el teorema de Stokes (4.104),

$$\oint_C \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla \times \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S} = 0.$$

PROBLEMA 4.56 Usando el teorema de Stokes (4.104), mostrar que, para cualquier superficie cerrada S,

$$\oiint_S \nabla \times \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = 0.$$

Solución: Sean S_1 y S_2 dos regiones en las cuales una curva cerrada C divide a una superficie cerrada S, como se muestra en la figura 4.14. Aplicando el teorema de Stokes (4.104) a S_1 y a S_2,

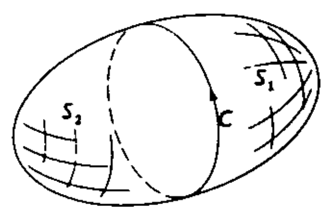


Figura 4.14 Solución al problema 4.56.

$$\iint_{S_1} \nabla \times \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r},$$

$$\iint_{S_2} \nabla \times \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \oint_{C} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = -\oint_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}.$$

Por consiguiente, para la superficie cerrada S,

$$\oiint_S \nabla \times \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_1} \nabla \times \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_2} \nabla \times \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S}$$

$$= \oint_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} + \oint_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}$$

$$= 0.$$

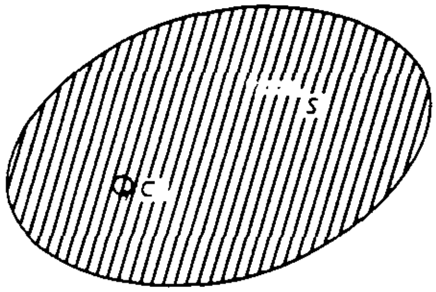


Figura 4.15 Solución alterna al problema 4.56.

Solución alterna: Considérese una superficie S casi cerrada con una pequeña abertura limitada por una curva cerrada simple C como se muestra en la figura 4.15. Aplicando el teorema de Stokes (4.104),

$$\iint_S \nabla \times \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}.$$

Ahora redúzcase más y más la pequeña abertura de modo que en el límite sea un punto. Entonces la superficie se vuelve cerrada y la integral de línea tiende hacia cero. Por consiguiente,

$$\oiint_S \nabla \times \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = 0.$$

PROBLEMA 4.57 Si C es una curva cerrada, mostrar que

$$\oint_C \nabla\phi \cdot d\mathbf{r} = 0. \tag{4.108}$$

Solución: Por el teorema de Stokes,

$$\oint_C \nabla\phi \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla \times (\nabla\phi) \cdot d\mathbf{S}, \qquad [4.104]$$

donde S es la superficie encerrada por C. Pero por (3.142), $\nabla \times \nabla\phi = 0$; por consiguiente, queda demostrado (4.108).

PROBLEMA 4.58 Demostrar que $\nabla \times \mathbf{f} = \mathbf{0}$ es una condición necesaria y suficiente para $\oint_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = 0$ alrededor de cualquier curva cerrada C.

Solución: Para la suficiencia, $\nabla \times \mathbf{f} = \mathbf{0}$; entonces por el teorema de Stokes (4.104),

$$\oint_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{f}) \cdot d\mathbf{S} = 0.$$

Para la necesidad, supóngase que $\oint_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = 0$ para cualquier curva cerrada C y que $\nabla \times \mathbf{f} \neq \mathbf{0}$ en algún punto P. Entonces si $\nabla \times \mathbf{f}$ es continua, hay alguna región que rodea a P donde $\nabla \times \mathbf{f} \neq \mathbf{0}$. Se escoge una pequeña superficie plana S en esta región y un vector unitario normal a S paralelo a $\nabla \times \mathbf{f}$, esto es, $\nabla \times \mathbf{f} \cong a\mathbf{n}$, donde $a > 0$. Si C es la frontera de S entonces por el teorema de Stokes, (4.104),

$$\oint_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla \times \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} \cong \iint_S a\,\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}\, dS = a \iint_S dS = aS > 0,$$

lo que contradice la hipótesis de que $\oint_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = 0$.

El *teorema de Stokes* para coordenadas rectangulares establece que si $\mathbf{f} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$, entonces

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dzdx$$

$$+ \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy. \tag{4.109}$$

PROBLEMA 4.59 Verificar (4.109).

Solución: Si $\mathbf{f} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$, entonces $\mathbf{f}\cdot d\mathbf{r} = P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ y

$$\nabla \times \mathbf{f} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}.$$

Ahora, como en el problema 4.38,

$$\iint_S \nabla \times \mathbf{f}\cdot d\mathbf{S} = \iint_S \nabla \times \mathbf{f}\cdot\mathbf{n}\,dS$$

$$= \iint_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}\right]\cdot\mathbf{n}\,dS$$

$$= \iint_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right] dS$$

$$= \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy.$$

Por consiguiente, el teorema de Stokes (4.104) se reduce a

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dzdx$$

$$+ \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy. \qquad [4.109]$$

PROBLEMA 4.60 Si $\mathbf{f} = 4y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$, calcular $I = \iint_S \nabla \times \mathbf{f}\cdot d\mathbf{S}$ sobre el hemisferio $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \geqslant 0$.

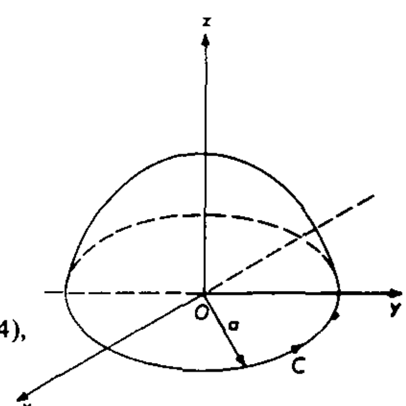


Figura 4.16 El hemisferio del problema 4.60.

Solución: Como I está en forma de integral de superficie en el teorema de Stokes (4.104),

$$I = \oint_C \mathbf{f}\cdot d\mathbf{r} = \oint_C 4y\,dx + x\,dy + 2z\,dz,$$

donde C es el círculo $x^2 + y^2 = a^2$, $z \geqslant 0$, dirigido como se muestra en la figura 4.16.

La representación paramétrica de C (problema 3.13) es $x = a\cos t$, $y = a\,\text{sen}\,t$, $z = 0$, donde $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. Entonces $dx = -a\,\text{sen}\,t\,dt$, $dy = a\cos t\,dt$, $dz = 0$. Por consiguiente,

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{2\pi} 4(a \operatorname{sen} t)(-a \operatorname{sen} t\, dt) + (a \cos t)(a \cos t\, dt) \\
&= a^2 \int_0^{2\pi} (-4 \operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t)\, dt \\
&= a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 5 \operatorname{sen}^2 t)\, dt \\
&= a^2 \int_0^{2\pi} \left[1 - 5 \cdot \frac{1}{2}(1 - \cos 2t)\right] dt \\
&= a^2 \int_0^{2\pi} \left(-\frac{3}{2} + \frac{5}{2} \cos 2t\right) dt \\
&= -3a^2 \pi.
\end{aligned}
$$

El *teorema de Green para un plano* establece que si P, Q, $\partial P/\partial y$, y $\partial Q/\partial x$ son continuas en una región R del plano xy limitado por una curva cerrada C, entonces

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy. \tag{4.110}$$

La ecuación (4.110) se puede expresar también en forma vectorial; i.e., si $\mathbf{f} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$, entonces

$$\oint_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \iint_R \nabla \times \mathbf{f} \cdot \mathbf{k}\, dxdy. \tag{4.111}$$

PROBLEMA 4.61 Verificar el teorema de Green (4.110) para un plano.

Solución: Si $\mathbf{f} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ y $d\mathbf{S} = \mathbf{k}\, dxdy$, entonces (4.110) se sigue directamente del teorema de Stokes (4.104).

Alternativamente, (4.110) es un caso especial de (4.109) con $R = 0$. Ahora, si $\mathbf{f} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$, entonces

$$\nabla \times \mathbf{f} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial Q}{\partial z}\mathbf{i} + \frac{\partial P}{\partial z}\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k},$$

$$\mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = P\,dx + Q\,dy,$$

$$\nabla \times \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \nabla \times \mathbf{f} \cdot \mathbf{k}\, dxdy = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy.$$

Por consiguiente, por el teorema de Stokes (4.104),

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy.$$

PROBLEMA 4.62 Mostrar que el teorema de Green (4.110) para un plano puede expresarse también como

$$\oint_C \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}\, ds = \iint_R \nabla \cdot \mathbf{f}\, dxdy, \tag{4.112}$$

donde $\mathbf{f} = Q\mathbf{i} - P\mathbf{j}$, $\mathbf{n}$ es el vector normal unitario hacia afuera de C, como se muestra en la figura 4.17 y s es la longitud del arco.

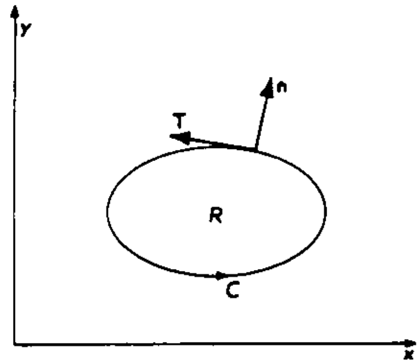


Figura 4.17 Teorema de Green en un plano.

Solución: Por (3.107), el vector unitario $\mathbf{T}$ tangente a C es

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{dx}{ds}\mathbf{i} + \frac{dy}{ds}\mathbf{j}.$$

Ahora, por la figura 4.17,

$$\mathbf{n} = \mathbf{T} \times \mathbf{k} = \left(\frac{dx}{ds}\mathbf{i} + \frac{dy}{ds}\mathbf{j}\right) \times \mathbf{k} = \frac{dy}{ds}\mathbf{i} - \frac{dx}{ds}\mathbf{j}.$$

De acuerdo con esto,

$$\mathbf{f} \cdot \mathbf{n} = (Q\,\mathbf{i} - P\,\mathbf{j}) \cdot \left(\frac{dy}{ds}\mathbf{i} - \frac{dx}{ds}\mathbf{j}\right) = Q\,\frac{dy}{ds} + P\,\frac{dx}{ds}.$$

Así que,

$$\oint_C \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}\, ds = \oint_C \left(Q\,\frac{dy}{ds} + P\,\frac{dx}{ds}\right) ds = \oint_C P\,dx + Q\,dy.$$

Luego

$$\nabla \cdot \mathbf{f} = \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial(-P)}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Por consiguiente, el teorema de Green (4.110) para un plano puede expresarse como

$$\oint_C \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}\, ds = \iint_R \nabla \cdot \mathbf{f}\, dxdy.$$

PROBLEMA 4.63 Mostrar que el área A de una región R del plano xy limitada por una curva cerrada simple C es

$$A = \oint_C x\,dy = \oint_C -y\,dx = \frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx. \tag{4.113}$$

Solución: Si $P(x, y) = 0$ y $Q(x, y) = x$ en (4.110), entonces

$$\oint_C x\,dy = \iint_R dxdy = A.$$

Si hacemos $P = -y$ y $Q = 0$ en (4.110), entonces

$$\oint_C -y\,dx = \iint_R dxdy = A.$$

Sumando los resultados anteriores, obtenemos $A = \frac{1}{2}\oint x\,dy - y\,dx$. Si hacemos $P = -y$, y $Q = x$ en (4.110),

$$\oint_C (-y)\,dx + x\,dy = \oint_C x\,dy - y\,dx = \iint_R \left[\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial(-y)}{\partial y}\right] dxdy$$

$$= 2\iint_R dxdy$$

$$= 2A.$$

Por consiguiente,

$$A = \frac{1}{2}\oint x\,dy - y\,dx.$$

PROBLEMA 4.64 Determinar el área A de una región R limitada por una elipse C cuyos ejes mayor y menor son $2a$ y $2b$, respectivamente.

Solución: La ecuación de una elipse C con eje mayor $2a$ y eje menor $2b$ es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad z = 0.$$

Por consiguiente, C puede representarse paramétricamente por

$$x = a\cos t, \qquad y = b \operatorname{sen} t, \qquad z = 0, \qquad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Entonces $dx = -a \operatorname{sen} t\,dt$, $dy = b\cos t\,dt$. Por consiguiente, por (4.112),

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\oint x\,dy - y\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (a\cos t)(b\cos t\,dt) - (b \operatorname{sen} t)(-a \operatorname{sen} t\,dt) \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ab(\cos^2 t + \sin^2 t)\,dt \\ &= \frac{1}{2}ab\int_0^{2\pi} dt \\ &= \pi ab. \end{aligned}$$

4.9 Transformaciones de integrales de superficie a integrales de línea

El teorema de Stokes (4.104) representa una transformación de integral de superficie a integral de línea en la cual interviene el rotacional de un vector.

$$\iint_S \nabla \times \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}.$$

Como

$$\iint_S \nabla \times \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S d\mathbf{S} \cdot \nabla \times \mathbf{f} = \iint_S (d\mathbf{S} \times \nabla) \cdot \mathbf{f},$$

El teorema de Stokes puede expresarse como

$$\iint_S (d\mathbf{S} \times \nabla) \cdot \mathbf{f} = \oint d\mathbf{r} \cdot \mathbf{f}. \tag{4.114}$$

Extendiendo las definiciones del rotacional, el gradiente y el rotacional del rotacional a superficies finitas, obtenemos los siguientes teoremas:

Si S es una superficie finita limitada por una curva cerrada simple C y ϕ es una función escalar con derivadas continuas, entonces

$$\iint_S d\mathbf{S} \times \nabla\phi = \oint_C \phi\,d\mathbf{r}. \tag{4.115}$$

Si S es una superficie finita limitada por una curva cerrada C y f es una función vectorial con derivadas continuas, entonces

$$\iint_S (d\mathbf{S} \times \nabla) \times \mathbf{f} = \oint_C d\mathbf{r} \times \mathbf{f}. \qquad (4.116)$$

Obsérvese que los teoremas (4.104) y (4.115-6) pueden expresarse como

$$\iint_S (d\mathbf{S} \times \nabla) * a = \oint_C d\mathbf{r} * a, \qquad (4.117)$$

donde a es cualquier cantidad escalar o vectorial y la estrella (*) representa cualquier forma aceptable de multiplicación, i.e., punto, cruz o producto simple.

PROBLEMA 4.65 Verificar (4.115).

Solución: Sea f = ϕa, donde a es cualquier vector constante. Aplicando el teorema de Stokes (4.104),

$$\iint_S \nabla \times (\phi\, \mathbf{a}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \phi\, \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r}. \qquad (4.118)$$

Por (3.156),

$$\nabla \times (\phi\, \mathbf{a}) = \phi \nabla \times \mathbf{a} - \mathbf{a} \times \nabla\phi.$$

Como a es un vector constante, $\nabla \times$ a = **0**; por consiguiente,

$$\nabla \times (\phi\, \mathbf{a}) = \nabla\phi \times \mathbf{a}.$$

Por la regla de permutación del triple producto escalar (1.77),

$$\iint_S (\nabla\phi \times \mathbf{a}) \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S} \times \nabla\phi.$$

Por consiguiente, (4.118) se reduce a

$$\mathbf{a} \cdot \iint_S d\mathbf{S} \times \nabla\phi = \mathbf{a} \cdot \oint_C \phi\, d\mathbf{r},$$

ó

$$\mathbf{a} \cdot \left(\iint_S d\mathbf{S} \times \nabla\phi - \oint_C \phi\, d\mathbf{r} \right) = 0. \qquad (4.119)$$

Como a es cualquier vector constante, la expresión del paréntesis se anula y queda demostrado (4.115).

PROBLEMA 4.66 Verificar (4.116).

Solución: Si a es cualquier vector constante y reemplazamos f en (4.104) por **f** $\times$ **a**,

$$\iint_S \nabla \times (\mathbf{f} \times \mathbf{a}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_C (\mathbf{f} \times \mathbf{a}) \cdot d\mathbf{r}. \qquad (4.120)$$

Por (3.158),

$$\nabla \times (\mathbf{f} \times \mathbf{a}) = \mathbf{f}(\nabla \cdot \mathbf{a}) - \mathbf{a}(\nabla \cdot \mathbf{f}) + (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{f} - (\mathbf{f} \cdot \nabla)\mathbf{a}.$$

Como a es un vector constante, $\nabla \cdot$ a = 0 y (f $\cdot \nabla$) a = **0**; por consiguiente,

$$\nabla \times (\mathbf{f} \times \mathbf{a}) = (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{f} - \mathbf{a}(\nabla \cdot \mathbf{f}). \tag{4.121}$$

Así que

$$\iint_S \nabla \times (\mathbf{f} \times \mathbf{a}) \cdot d\mathbf{S} = \iint_S [(\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} - \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S}(\nabla \cdot \mathbf{f})]$$

$$= \mathbf{a} \cdot \iint_S [\nabla_f(\mathbf{f} \cdot d\mathbf{S}) - d\mathbf{S}(\nabla \cdot \mathbf{f})],$$

donde ∇_f indica que ∇ opera solamente sobre $\mathbf{f}$.

Aplicando la regla del término medio para el triple producto vectorial (1.98) a $(d\mathbf{S} \times \nabla) \times \mathbf{f}$,

$$(d\mathbf{S} \times \nabla) \times \mathbf{f} = \nabla_f(\mathbf{f} \cdot d\mathbf{S}) - d\mathbf{S}(\nabla \cdot \mathbf{f}), \tag{4.122}$$

y podemos escribir

$$\iint_S \nabla \times (\mathbf{f} \times \mathbf{a}) \cdot d\mathbf{S} = \mathbf{a} \cdot \iint_S (d\mathbf{S} \times \nabla) \times \mathbf{f}.$$

Por la regla de permutación del triple producto escalar (1.77),

$$\oint_C (\mathbf{f} \times \mathbf{a}) \cdot d\mathbf{r} = \oint_C \mathbf{a} \cdot (d\mathbf{r} \times \mathbf{f}) = \mathbf{a} \cdot \oint_C d\mathbf{r} \times \mathbf{f}.$$

Por consiguiente, (4.120) se reduce a

$$\mathbf{a} \cdot \iint_S (d\mathbf{S} \times \nabla) \times \mathbf{f} = \mathbf{a} \cdot \oint_C d\mathbf{r} \times \mathbf{f},$$

o sea

$$\mathbf{a} \cdot \left(\iint_S (d\mathbf{S} \times \nabla) \times \mathbf{f} - \oint_C d\mathbf{r} \times \mathbf{f} \right) = 0. \tag{4.123}$$

Como **a** es cualquier vector constante, la expresión del paréntesis se anula y queda demostrado (4.116).

PROBLEMA 4.67 Demostrar que si **r** es un vector de posición, entonces

$$\oint_C d\mathbf{r} = \mathbf{0}. \tag{4.124}$$

Solución: Por (4.115),

$$\oint_C \phi \, d\mathbf{r} = \iint_S d\mathbf{S} \times \nabla\phi.$$

Si $\phi = 1$, entonces $\nabla\phi = \mathbf{0}$; por consiguiente,

$$\oint_C d\mathbf{r} = \mathbf{0}.$$

PROBLEMA 4.68 Mostrar que, integrando alrededor de una curva cerrada C del plano xy,

$$\left| \oint_C \mathbf{r} \times d\mathbf{r} \right| = 2A, \tag{4.12:}$$

donde **r** es el vector de posición y A es el área encerrada por la curva C.

Solución: Si $\mathbf{f} = \mathbf{r}$ y $d\mathbf{S} = \mathbf{k}\, dxdy$ en (4.116),

$$\oint_C d\mathbf{r} \times \mathbf{r} = \iint_S (\mathbf{k} \times \nabla) \times \mathbf{r}\, dxdy.$$

Como $\nabla \cdot \mathbf{r} = 3$ por (3.129), usando (4.122),

$$(\mathbf{k} \times \nabla) \times \mathbf{r} = \nabla(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{k}(\nabla \cdot \mathbf{r}) = \nabla(z) - 3\mathbf{k} = \mathbf{k} - 3\mathbf{k} = -2\mathbf{k}.$$

Por consiguiente,

$$\oint_C \mathbf{r} \times d\mathbf{r} = -\oint_C d\mathbf{r} \times \mathbf{r} = 2\mathbf{k} \iint_S dxdy = 2A\mathbf{k}, \tag{4.126}$$

y $$\left| \oint_C \mathbf{r} \times d\mathbf{r} \right| = 2A.$$

PROBLEMA 4.69 Si S es una superficie abierta limitada por una curva cerrada simple C, mostrar que

$$\oint_C \mathbf{r} \times d\mathbf{r} = 2 \iint_S d\mathbf{S}. \tag{4.127}$$

Solución: Si en el teorema de Stokes (4.104) $\mathbf{f} = \mathbf{r} \times \mathbf{a}$, donde $\mathbf{a}$ es un vector constante, entonces

$$\oint_C (\mathbf{r} \times \mathbf{a}) \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla \times (\mathbf{r} \times \mathbf{a}) \cdot d\mathbf{S}. \tag{4.128}$$

Como $\mathbf{a}$ es un vector constante, tenemos por (4.121),

$$\nabla \times (\mathbf{r} \times \mathbf{a}) = (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{r} - \mathbf{a}(\nabla \cdot \mathbf{r}).$$

Además por (3.141) y (3.121), como

$$(\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{r} = \mathbf{a},$$
$$\nabla \cdot \mathbf{r} = 3,$$

tenemos

$$\nabla \times (\mathbf{r} \times \mathbf{a}) = \mathbf{a} - 3\mathbf{a} = -2\mathbf{a}.$$

Por la regla de permutación del triple producto escalar (1.77), $(\mathbf{r} \times \mathbf{a}) \cdot d\mathbf{r} = -\mathbf{a} \cdot (\mathbf{r} \times d\mathbf{r})$. Por consiguiente, (4.128) se puede expresar como

$$\mathbf{a} \cdot \oint_C \mathbf{r} \times d\mathbf{r} = 2\mathbf{a} \cdot \iint_S d\mathbf{S}.$$

Como $\mathbf{a}$ es cualquier vector constante,

$$\oint_C \mathbf{r} \times d\mathbf{r} = 2 \iint_S d\mathbf{S}.$$

Obsérvese que (4.18), i.e.,

$$\oint_C \mathbf{r} \times d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \mathbf{k}\, a^2\, dt = \mathbf{k}\, a^2 \int_0^{2\pi} dt = 2\pi a^2 \mathbf{k},$$

y (4.125) son los casos especiales de (4.127). Son importantes para (4.127) porque el doble de la integral de $d\mathbf{S}$ sobre la superficie S es igual a la integral de línea de

$\mathbf{r} \times d\mathbf{r}$ alrededor de la frontera de S, que es independiente del punto escogido como origen del vector de posición $\mathbf{r}$ y de la superficie S limitada por C.

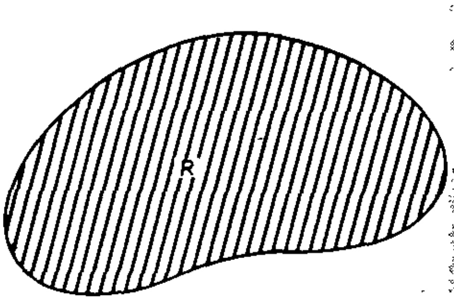
4.10 Campos irrotacionales y solenoidales

Se dice que una región R es *conexa* si dos puntos cualesquiera de R se pueden unir por un arco y cada punto del arco pertenece a R.

Una región R se dice *simplemente conexa* si toda curva cerrada de R se puede deformar continuamente hasta un punto de R. La región R de la figura 4.18 (a) es simplemente conexa. Sin embargo, la región R de la figura 4.18 (b) no es simplemente conexa porque la curva cerrada C que rodea uno de los "huecos" no puede ser deformada continuamente hasta un punto sin salirse de R.

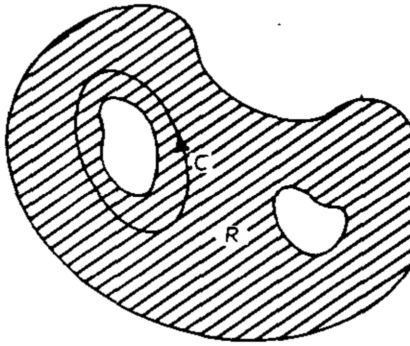
Una función escalar de potencial ϕ es una función uniforme para la cual un campo vectorial continuo $\mathbf{f}$ de una región simplemente conexa satisface

$$\mathbf{f} = \nabla\phi. \tag{4.129}$$



(a)

Figura 4.18a Una región simplemente conexa.



(b)

Figura 4.18b Una región que no es simplemente conexa.

PROBLEMA 4.70 Mostrar que la condición necesaria y suficiente para que la integral de línea $\int_P^Q \mathbf{f}\cdot d\mathbf{r}$ sea independiente de la trayectoria de integración desde el punto P hasta el punto Q es que el campo vectorial continuo $\mathbf{f}$ satisfaga (4.129).

Solución: Para demostrar la suficiencia, supóngase que $\mathbf{f}\cdot d\mathbf{r} = \nabla\phi\cdot d\mathbf{r} = d\phi$. Entonces por (3.120),

y por consiguiente,
$$\int_P^Q \mathbf{f}\cdot d\mathbf{r} = \int_P^Q d\phi = \phi(Q) - \phi(P). \tag{4.130}$$

Si ϕ es uniforme, el lado derecho de(4.130) tiene un valor definido que depende solamente de los puntos extremos P y Q y no de la trayectoria.

Para demostrar la necesidad, supóngase que $\int_P^Q \mathbf{f}\cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria de integración. Sea

$$\phi(Q) = \int_P^Q \mathbf{f}\cdot d\mathbf{r},$$

donde P es un punto fijo y Q es un punto variable de R. Como la integral de línea es independiente de la trayectoria, Q se mueve a lo largo de una curva que pasa por P sobre la cual es continuo el vector unitario tangente $\mathbf{T}$. (Véase figura 4.19). A lo largo de esta curva,

$$\phi = \int_P^Q \mathbf{f}\cdot d\mathbf{r} = \int_P^Q \mathbf{f}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{ds}\,ds = \int_P^Q \mathbf{f}\cdot\mathbf{T}\,ds$$

es una función de la longitud de arco s. Así que,

$$\frac{\partial\phi}{\partial s} = \mathbf{f}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{f}\cdot\mathbf{T}. \tag{4.131}$$

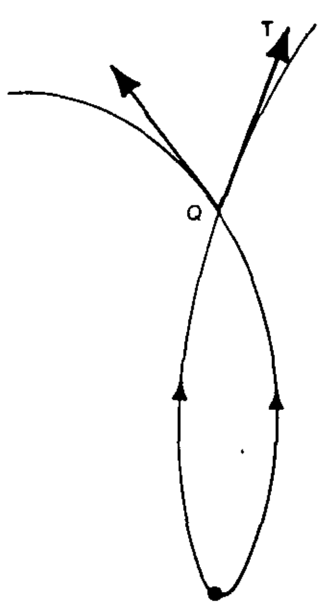


Figura 4.19 Solución al problema 4.70.

La curva PQ podría escogerse de modo que tenga una dirección dada en Q. Por consiguiente, (4.131) muestra que ϕ tiene una derivada direccional continua en cualquier dirección. Pero

$$\frac{\partial\phi}{\partial s} = \nabla\phi\cdot\mathbf{T}. \qquad (3.10$$

Ahora, comparando (4.131) y (3.106),

$$(\mathbf{f} - \nabla\phi)\cdot\mathbf{T} = 0. \tag{4.132}$$

Como (4.132) se cumple para cualquier dirección de $\mathbf{T}$,

$$\mathbf{f} - \nabla\phi = \mathbf{0}, \quad \text{o} \quad \mathbf{f} = \nabla\phi. \qquad [4.129]$$

PROBLEMA 4.71 Si $\mathbf{f} = \nabla\phi$ en todas partes de una región simplemente conexa R y C es cualquier curva cerrada de R, mostrar que

$$\oint_C \mathbf{f}\cdot d\mathbf{r} = 0. \tag{4.133}$$

Solución: Si $\mathbf{f} = \nabla\phi$ en todas partes de R, entonces por el problema 4.70, la integral de línea $\int_C \mathbf{f}\cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria de integración. Si la trayectoria de integración es cerrada, entonces $P = Q$ en (4.130). Así que,

$$\oint_C \mathbf{f}\cdot d\mathbf{r} = \oint_C \nabla\phi\cdot d\mathbf{r} = \int_P^P d\phi = \phi(P) - \phi(P) = 0.$$

Este problema se resolvió en el problema 4.57 aplicando el teorema de Stokes (4.104). Obsérvese que (4.133) es válido solamente cuando ϕ es una función uniforme y R es simplemente conexo. Si R no es simplemente conexo, entonces es posible tener $\mathbf{f} = \nabla\phi$ y la circulación de $\mathbf{f}$ alrededor de una trayectoria cerrada C en una región R puede no ser cero; i.e., podemos tener $\oint_C \mathbf{f}\cdot d\mathbf{r} \neq 0$. El problema 4.72 ilustra este punto.

PROBLEMA 4.72 Sea $\mathbf{f} = -\dfrac{y}{x^2+y^2}\,\mathbf{i} + \dfrac{x}{x^2+y^2}\,\mathbf{j}$. (a) Mostrar que $\mathbf{f}$ se puede expresar como $\nabla\phi$, donde $\phi = \tan^{-1}(y/x)$. (b) Calcular

$$I = \oint_C \mathbf{f}\cdot d\mathbf{r}$$

si C es un círculo de radio a sobre el plano xy cuando su centro está en el origen y cuando está en $(\alpha, \beta, 0)$ con $\alpha^2 + \beta^2 > a^2$.

Solución: (a) Como $\phi = \tan^{-1}(y/x)$,

$$\begin{aligned}
\nabla\phi &= \frac{\partial}{\partial x}\left[\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)\right]\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\left[\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)\right]\mathbf{i} \\
&= \frac{1}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}\left(\frac{-y}{x^2}\right)\mathbf{i} + \frac{1}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}\left(\frac{1}{x}\right)\mathbf{j} \\
&= \frac{-y}{x^2+y^2}\,\mathbf{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\,\mathbf{j} \\
&= \mathbf{f}.
\end{aligned}$$

(b) Cuando el centro de C está en el origen,

$$I = \oint_C \mathbf{f}\cdot d\mathbf{r} = \oint_C \nabla\phi\cdot d\mathbf{r} = \oint_C d\phi = \oint_C d\left[\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)\right].$$

La representación paramétrica de C es

$$x = a\cos t, \quad y = a \operatorname{sen} t, \quad z = 0.$$

Así que,

$$I = \int_0^{2\pi} d\left[\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)\right] = \int_0^{2\pi} d[\tan^{-1}(\tan t)] = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \neq 0.$$

El resultado no es cero porque la región definida para la cual $\mathbf{f} = \nabla\phi$ no es una región simplemente conexa, pues $\phi = \tan^{-1}(y/x)$ no está definido en el origen y la región está perforada en el origen.

Cuando el centro de C está en $(\alpha, \beta, 0)$ su representación paramétrica es

$$x = \alpha + a\cos t, \quad y = \beta + a \operatorname{sen} t, \quad z = 0.$$

Por consiguiente,

$$I = \int_0^{2\pi} d\left[\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)\right] = \tan^{-1}\left(\frac{\beta + a\operatorname{sen} t}{\alpha + a\cos t}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 0.$$

PROBLEMA 4.73 Si R es una región simplemente conexa, mostrar que la condición necesaria y suficiente para que $\nabla \times \mathbf{f} = \mathbf{0}$ es que $\mathbf{f} = \nabla\phi$ cuando $\mathbf{f}$ tiene derivadas continuas.

Solución: Si $\mathbf{f} = \nabla\phi$,

$$\nabla \times \mathbf{f} = \nabla \times \nabla\phi = \mathbf{0}. \qquad [3.142]$$

Por otra parte, si $\nabla \times \mathbf{f} = \mathbf{0}$, entonces por la solución del problema 4.58, o por el teorema de Stokes (4.104),

$$\oint_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

para cada curva cerrada simple C de R. Por la solución del problema 4.71, esto indica que la integral de línea de $\mathbf{f}$ es independiente de la trayectoria de integración y que $\mathbf{f}$ puede expresarse como $\mathbf{f} = \nabla\phi$.

El problema 4.73 proporciona una manera simple de verificar si un campo vectorial $\mathbf{f}$ es el gradiente de un campo escalar ϕ. Esto se ilustra en el siguiente problema.

PROBLEMA 4.74 Dos campos vectoriales están dados por $\mathbf{f} = 3y^2\mathbf{i} + z\mathbf{j} + 2y\mathbf{k}$ y $\mathbf{g} = yz\mathbf{i} + xz\,\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$. Determinar si estos campos vectoriales son los gradientes de campos escalares.

Solución: Como $\mathbf{f} = 3y^2\mathbf{i} + z\mathbf{j} + 2y\mathbf{k}$,

$$\nabla \times \mathbf{f} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 3y^2 & z & 2y \end{vmatrix} = \mathbf{i} - 6y\,\mathbf{j} \neq \mathbf{0}.$$

Por consiguiente, $\mathbf{f}$ no es el gradiente de un campo escalar.

Como $\mathbf{g} = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$,

$$\nabla \times \mathbf{g} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ yz & xz & xy \end{vmatrix} = (x - x)\mathbf{i} + (y - y)\mathbf{j} + (z - z)\mathbf{k} = \mathbf{0}.$$

Por consiguiente, **g** es el gradiente de un campo escalar. Obsérvese que $\mathbf{g} = \nabla(xyz + \text{constante})$.

PROBLEMA 4.75 Si en una región simplemente conexa R, $\nabla \times \mathbf{f} = \nabla \times \mathbf{g}$, demostrar que

$$\mathbf{f} = \mathbf{g} + \nabla\phi.$$

Solución: Como $\nabla \times \mathbf{f} = \nabla \times \mathbf{g}$,

$$\nabla \times (\mathbf{f} - \mathbf{g}) = \mathbf{0}.$$

Entonces, por el resultado del problema 4.73,

$$\mathbf{f} - \mathbf{g} = \nabla\phi,$$

y por consiguiente,

$$\mathbf{f} = \mathbf{g} + \nabla\phi. \tag{4.134}$$

Un campo vectorial f se llama *irrotacional* en una región R si

$$\nabla \times \mathbf{f} = \mathbf{0} \tag{4.135}$$

en todas partes de R. Por los resultados de los problemas 4.70-2, concluimos que para que un campo vectorial f sea irrotacional en una región simplemente conexa, cualquiera de las tres condiciones siguientes es necesaria y suficiente:

(1) $\nabla \times \mathbf{f} = \mathbf{0}$;
(2) f es el gradiente de un campo escalar, i.e., $\mathbf{f} = \nabla\phi$;
(3) para toda curva cerrada C de R, $\oint_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = 0$.

PROBLEMA 4.76 Demostrar que si existe un escalar $\lambda \neq 0$ tal que $\lambda\mathbf{f}$ sea irrotacional, entonces

$$\mathbf{f} \cdot \nabla \times \mathbf{f} = 0. \tag{4.136}$$

Solución: Si $\lambda\mathbf{f}$ es irrotacional, existe una función escalar ϕ tal que

$$\lambda\mathbf{f} = \nabla\phi.$$

Tomando el rotacional en ambos lados,

$$\nabla \times (\lambda\mathbf{f}) = \nabla \times (\nabla\phi) = \mathbf{0}.$$

Pero por (3.156),

$$\nabla \times (\lambda\mathbf{f}) = \lambda\nabla \times \mathbf{f} + \nabla\lambda \times \mathbf{f} = \mathbf{0}$$

o sea

$$\lambda\nabla \times \mathbf{f} = -\nabla\lambda \times \mathbf{f} = \mathbf{f} \times \nabla\lambda.$$

Si efectuamos el producto punto en ambos lados con **f**, obtenemos (por el problema 2.21).

$$\lambda\mathbf{f} \cdot \nabla \times \mathbf{f} = \mathbf{f} \cdot \mathbf{f} \times \nabla\lambda = 0.$$

Como λ no es cero,

$$\mathbf{f} \cdot \nabla \times \mathbf{f} = 0.$$

Obsérvese que el recíproco es cierto también.

Un campo vectorial f se dice *solenoidal* si en toda la región R,

$$\nabla \cdot \mathbf{f} = 0 \tag{4.137}$$

PROBLEMA 4.77 Mostrar que un vector f que sea el rotacional de otro vector A, es solenoidal.

Solución: Si $\mathbf{f} = \nabla \times \mathbf{A}$, entonces por (3.143),

$$\nabla \cdot \mathbf{f} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0;$$

por consiguiente, f es solenoidal.

Una *función vectorial de potencial* **A** en una región especifica R^* es un campo vectorial para el cual un campo vectorial solenoidal **f** satisface

$$\mathbf{f} = \nabla \times \mathbf{A}. \tag{4.138}$$

No hay un **A** único para el cual valga (4.138) porque

$$\nabla \times (\mathbf{A} + \nabla\psi) = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \nabla\psi = \nabla \times \mathbf{A}.$$

(Cf., problema 3.50). La región R^* es una *generalización* de una región simplemente conexa, i.e., una región en la cual toda superficie cerrada S en R debe limitar un volumen V que esté también en R.

Por consiguiente, si un campo solenoidal **f** está en la región R^*, entonces por el resultado del problema 4.77 y el teorema de divergencia (4.58), **f** tiene las siguientes propiedades:

(a) $\nabla \cdot \mathbf{f} = 0$;

(b) **f** es el rotacional de un vector; i.e., $\mathbf{f} = \nabla \times \mathbf{A}$;

(c) para toda superficie cerrada S en R, $\oiint_S \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = 0$.

PROBLEMA 4.78 Si f es un campo vectorial solenoidal, mostrar que existe una función vectorial de potencial A tal que

$$\mathbf{f} = \nabla \times \mathbf{A}. \tag{4.138}$$

Solución: La existencia de A se demuestra calculándolo. Sea $\mathbf{f} = f_1\mathbf{i} + f_2\mathbf{j} + f_3\mathbf{k}$ y $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$. Ahora necesitamos mostrar que existen funciones escalares A_1, A_2 y A_3 tales que

$$\mathbf{f} = \nabla \times \mathbf{A},$$

o sea

$$f_1 = \frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}, \tag{4.139a}$$

$$f_2 = \frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}, \tag{4.139b}$$

$$f_3 = \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}. \tag{4.139c}$$

Para hallar cualquier A, supongamos que $A_1 = 0$; entonces,

$$f_1 = \frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}, \tag{4.140a}$$

$$f_2 = -\frac{\partial A_3}{\partial x}, \tag{4.140b}$$

$$f_3 = \frac{\partial A_2}{\partial x}. \tag{4.140c}$$

Integrando se obtiene

$$A_2 = \int_{x_0}^{x} f_3\,dx + g_2(y, z),$$

$$A_3 = -\int_{x_0}^{x} f_2\,dx + g_3(y, z),$$

donde g_2 y g_3 son funciones arbitrarias de y y z pero no de x. La diferencia de las derivadas parciales de A_3 y A_2 es

$$\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} = -\int_{x_0}^{x} \left(\frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}\right) dx + \frac{\partial g_3}{\partial y} - \frac{\partial g_2}{\partial z}.$$

Como f es solenoidal, $\nabla \cdot \mathbf{f} = 0$, o sea

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = -\left(\frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}\right).$$

Por consiguiente,

$$\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial f_1}{\partial x}\,dx + \frac{\partial g_3}{\partial z} - \frac{\partial g_2}{\partial z}$$

$$= f_1(x, y, z) - f_1(x_0, y, z) + \frac{\partial g_3}{\partial z} - \frac{\partial g_2}{\partial z}.$$

Para satisfacer (4.140a),

$$f_1 = f_1(x, y, z) - f_1(x_0, y, z) + \frac{\partial g_3}{\partial y} - \frac{\partial g_2}{\partial z}. \tag{4.141}$$

Como por hipótesis, g_2 y g_3 son funciones arbitrarias de y y z, (4.141) se satisface si

$$g_2 = 0, \tag{4.142}$$

$$g_3 = \int_{y_0}^{y} f_1(x_0, y, z)\,dy, \tag{4.143}$$

donde y_0 es una constante. Por tanto, si g_2 y g_3 están dadas por (4.142) y (4.143) podemos construir A como

$$\mathbf{A} = \mathbf{j}\int_{x_0}^{x} f_3(x, y, z)\,dx + \mathbf{k}\left[\int_{y_0}^{y} f_1(x_0, y, z)\,dy - \int_{x_0}^{x} f_2(x, y, z)\,dx\right]. \tag{4.144}$$

En esta demostración, se han hecho varias selecciones arbitrarias; obsérvese también que la región R^* en la cual se construyó **A** se ha supuesto que es un paralelepípedo rectángulo.

PROBLEMA 4.79 Si ϕ y ψ son escalares con segundas derivadas parciales continuas en una región R, mostrar que

$$\mathbf{f} = \nabla\phi \times \nabla\psi \tag{4.145}$$

es solenoidal en R.

Solución: Por (3.157) y (3.142),

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{f} &= \nabla \cdot (\nabla \phi \times \nabla \psi) \\ &= \nabla \psi \cdot [\nabla \times (\nabla \phi)] - \nabla \phi \cdot [\nabla \times (\nabla \psi)] \\ &= 0.\end{aligned}$$

Por consiguiente, $\mathbf{f}$ es solenoidal.

El *teorema de unicidad* establece que un vector $\mathbf{f}$ está determinado unívocamente en una región R encerrada por una superficie S si la componente normal de $\mathbf{f}$ se especifica sobre S y si $\nabla \cdot \mathbf{f}$ y $\nabla \times \mathbf{f}$ están especificadas a través de R.

PROBLEMA 4.80 Demostrar el teorema de unicidad.

Solución: Demostramos este teorema por contradicción. Supongamos que $\mathbf{f}$ y $\mathbf{g}$ son dos vectores que satisfacen las condiciones dadas; i.e., si $\mathbf{n}$ es el vector unitario normal a S,

$$\nabla \cdot \mathbf{f} = \nabla \cdot \mathbf{g}, \quad \nabla \times \mathbf{f} = \nabla \times \mathbf{g} \qquad \text{en } R$$

$$\mathbf{f} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} \qquad \text{sobre } S.$$

Entonces haciendo $\mathbf{h} = \mathbf{f} - \mathbf{g}$,

$$\left.\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{h} &= \nabla \cdot \mathbf{f} - \nabla \cdot \mathbf{g} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{h} &= \nabla \times \mathbf{f} - \nabla \times \mathbf{g} = \mathbf{0}\end{aligned}\right\} \quad \text{en } R \tag{4.146}$$

$$\mathbf{h} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} - \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} = 0 \qquad \text{sobre } S \tag{4.147}$$

Como $\nabla \times \mathbf{h} = \mathbf{0}$, el vector $\mathbf{h}$ es irrotacional; i.e., si ϕ es una función escalar,

$$\mathbf{h} = \nabla \phi. \tag{4.148}$$

Ahora,

$$\nabla \cdot \mathbf{h} = \nabla \cdot (\nabla \phi) = \nabla^2 \phi = 0 \qquad \text{en } R \tag{4.149}$$

$$\mathbf{h} \cdot \mathbf{n} = \nabla \phi \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \qquad \text{sobre } S \tag{4.150}$$

Luego, haciendo $\psi = \phi$ en (4.80),

$$\iiint_R (\phi \nabla^2 \phi + \nabla \phi \cdot \nabla \phi)\, dV = \oiint_S \phi \frac{\partial \phi}{\partial n}\, dS \tag{4.151}$$

o sea

$$\iiint_R \phi \nabla^2 \phi\, dV + \iiint_R |\nabla \phi|^2\, dV = \oiint_S \phi \frac{\partial \phi}{\partial n}\, dS. \tag{4.152}$$

De acuerdo con las condiciones (4.149-50), (4.152) se reduce a

$$\iiint_R |\nabla \phi|^2\, dV = 0. \tag{4.153}$$

Pero como el integrando $|\nabla \phi|^2$ no es negativo, $|\nabla \phi|^2 = 0$; i.e.,

$$\mathbf{h} = \nabla \phi = \mathbf{0}. \qquad (4.1$$

Por consiguiente, $\mathbf{f} = \mathbf{g}$, lo que contradice nuestra hipótesis original de que $\mathbf{f}$ y $\mathbf{g}$ fueran distintas. Por consiguiente queda demostrado el teorema.

4.11 Problemas suplementarios

PROBLEMA 4.81 Calcular $\int_C \phi\, d\mathbf{r}$ para $\phi = x^3y + 2y$, de $(1, 1, 0)$ a $(2, 4, 0)$ a lo largo de (a) la parábola $y = x^2$, $z = 0$, y (b) la recta que une $(1, 1, 0)$ y $(2, 4, 0)$.

Respuesta: (a) $[91/6, 359/7, 0]$, (b) $[143/10, 429/10, 0]$.

PROBLEMA 4.82 Calcular $\int_C \mathbf{f}\cdot d\mathbf{r}$ para $\mathbf{f} = y\mathbf{i} + (x+z)^2\mathbf{j} + (x-z)^2\mathbf{k}$ desde $(0, 0, 0)$ hasta $(2, 4, 0)$ a lo largo de (a) la parábola $y = x^2$, $z = 0$, y (b) la recta $y = 2x$.

Respuesta: (a) $32/3$, (b) $28/3$.

PROBLEMA 4.83 Calcular $\int_C \mathbf{f}\cdot d\mathbf{r}$ para $\mathbf{f} = 2xy^2\mathbf{i} + 2(x^2y + y)\mathbf{j}$ desde $(0, 0, 0)$ hasta $(2, 4, 0)$ a lo largo de (a) la parábola $y = x^2$, $z = 0$, y (b) la recta $y = 2x$.

Respuesta: (a) 80, (b) 80.

PROBLEMA 4.84 Calcular $\int_C \mathbf{f}\cdot d\mathbf{r}$ para $\mathbf{f} = 3x\mathbf{i} + (2xz - y)\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ desde $(0, 0, 0)$ hasta $(2, 1, 3)$ a lo largo de (a) la curva de $x = 2t^2$, $y = t$, $z = 4t^2 - t$, donde $0 \leqslant t \leqslant 1$, y (b) la recta desde $(0, 0, 0)$ hasta $(2, 1, 3)$.

Respuesta: (a) $71/5$, (b) 16.

PROBLEMA 4.85 Calcular $\int_C \mathbf{f}\times d\mathbf{r}$ para $\mathbf{f} = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ desde $(0, 0, 0)$ hasta $(3, 9, 0)$ a lo largo de la curva dada por $y = x^3/3$, $z = 0$.

Respuesta: $[0, 0, 36]$.

PROBLEMA 4.86 Si $\mathbf{a}$ es un vector constante, mostrar que $\oint \mathbf{a}\cdot d\mathbf{r} = 0$, y $\oint \mathbf{a}\times d\mathbf{r} = 0$.

PROBLEMA 4.87 Si $\mathbf{f} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, calcular $\iint_S \mathbf{f}\cdot d\mathbf{S}$, donde S es la superficie cilíndrica representada por $\mathbf{r} = \cos u\mathbf{i} + \operatorname{sen} u\mathbf{j} + v\mathbf{k}$, $0 \leqslant u \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant v \leqslant 1$, $d\mathbf{S} = \mathbf{n}\,dS$, y $\mathbf{n}$ es el vector unitario normal exterior.

Respuesta: 2π.

PROBLEMA 4.88 Si $\mathbf{f} = 4xz\mathbf{i} + xyz^2\mathbf{j} + 3z\mathbf{k}$, calcular $\iint_S \mathbf{f}\cdot d\mathbf{S}$, donde S es la superficie limitada por $z^2 = x^2 + y^2$, $z = 0$, $z = 4$, $d\mathbf{S} = \mathbf{n}\,dS$, y $\mathbf{n}$ es el vector unitario normal exterior.

Respuesta: 320.

PROBLEMA 4.89 Si $\mathbf{f} = (y+z)\mathbf{i} + (z+x)\mathbf{j} + (x+y)\mathbf{k}$ y S es la superficie del cubo limitado por $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$, calcular (a) $\iint_S \mathbf{f}\, dS$,

(b) $\iint_S \mathbf{f}\cdot d\mathbf{S}$, y (c) $\iint_S \mathbf{f}\times d\mathbf{S}$.

Respuesta. (a) $[6, 6, 6]$, (b) 0, (c) $\mathbf{0}$.

PROBLEMA 4.90 Calcular $\iiint_R \mathbf{r}\, dV$, donde $\mathbf{r}$ es el vector de posición y R es la región limitada por las superficies $x = 0$, $y = 0$, $y = 6$, $z = 4$ y $z = x^2$.
Respuesta: $[24, 96, 384/5]$.

PROBLEMA 4.91 Usando la representación integral equivalente de ∇ (4.57), verificar que $\nabla \times (\phi\mathbf{f}) = \phi\, \nabla \times \mathbf{f} + (\nabla\phi) \times \mathbf{f}$.

PROBLEMA 4.92 Demostrar que si $\mathbf{f} = \nabla\phi$ y $\nabla \cdot \mathbf{f} = 0$ para una región R limitada por S, entonces

$$\iiint_R |\mathbf{f}|^2\, dV = \oiint_S \phi \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S}.$$

PROBLEMA 4.93 Calcular $\oiint_S (a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2)^{-1/2}\, d\mathbf{S}$ sobre la superficie del elipsoide $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$.
Respuesta: $4\pi/\sqrt{abc}$.

PROBLEMA 4.94 Si $\mathbf{f} = ax\mathbf{i} + by\mathbf{j} + cz\mathbf{k}$, calcular $\oiint_S \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S}$ sobre cualquier superficie cerrada S que encierre una región de volumen V.
Respuesta: $(a + b + c)b$.

PROBLEMA 4.95 Si $\mathbf{f} = y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$, calcular $\iiint_R \nabla \cdot \mathbf{f}\, dV$, donde R es la región limitada por $z = (1 - x^2 - y^2)^{1/2}$, y $z = 0$.
Respuesta: $\pi/2$.

PROBLEMA 4.96 Si $\mathbf{f} = u(x, y)\mathbf{i} + v(x, y)\mathbf{j}$, demostrar que

$$\oint_C \mathbf{f} \times d\mathbf{r} = \mathbf{k} \iint_S \nabla \cdot \mathbf{f}\, dxdy,$$

donde C es una curva cerrada en el plano xy que limita una región S.
[*Sugerencia:* Aplicar el teorema de divergencia (4.58) a $\mathbf{f}$ sobre un cilindro de base S con $z = 1$.]

PROBLEMA 4.97 Demostrar que el volumen encerrado por cualquier superficie cerrada S es

$$V = \frac{1}{6} \oiint_S \nabla(r^2) \cdot d\mathbf{S}.$$

PROBLEMA 4.98 Usando el teorema de divergencia (4.66), calcular

$$\iint_S x\, dydz + y\, dzdx + z\, dxdy,$$

donde S es la superficie de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, y $\mathbf{n}$ es el vector unitario normal exterior.
Respuesta: 4π.

PROBLEMA 4.99 Sea S la superficie frontera de una región R cuyo volumen en el espacio es V y sea $\mathbf{n}$ su vector unitario normal exterior. Demostrar que

$$V = \iint_S x\, dydz = \iint_S y\, dzdx = \iint_S z\, dxdy$$

$$= \frac{1}{3} \iint_S x\, dydz + y\, dzdx + z\, dxdy$$

$$= \frac{1}{3} \oiint_S \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S}.$$

PROBLEMA 4.100 Si existe $h(x, y, z)$ tal que $\nabla^2\phi = h\phi$ y $\nabla^2\psi = h\psi$ en una región R limitada por S, demostrar que

$$\oiint_S (\phi\nabla\psi - \psi\nabla\phi) \cdot d\mathbf{S} = 0.$$

PROBLEMA 4.101 Si ϕ es armónica en una región R limitada por S, demostrar que

$$\oiint_S \phi\nabla\phi \cdot d\mathbf{S} = \iiint_R |\nabla\phi|^2\, dV.$$

PROBLEMA 4.102 Demostrar que

$$\iiint_R \mathbf{f} \cdot \nabla\phi\, dV = \oiint_S \phi\mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} - \iiint_R \phi\nabla \cdot \mathbf{f}\, dV.$$

PROBLEMA 4.103 Demostrar que

$$5 \iiint_R r^4\mathbf{r}\, dV = \oiint_S r^5\, d\mathbf{S}.$$

PROBLEMA 4.104 Si $\mathbf{a}$ es un vector constante arbitrario y V es el volumen de una región R limitada por S, demostrar que

$$\oiint_S \mathbf{n} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{r})\, dS = 2V\mathbf{a}.$$

PROBLEMA 4.105 Si $\mathbf{f} = (x^2 + y^2)y\mathbf{i} - (x^2 + y^2)x\mathbf{j} + (a^3 + z^3)\mathbf{k}$, calcular $\oint_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}$

donde C es el círculo $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$.
Respuesta $-2\pi a^4$.

PROBLEMA 4.106 Si $\mathbf{f} = (x^2 + y^2 - 4)\mathbf{i} + 3xy\mathbf{j} + (2xz + z^2)\mathbf{k}$, calcular $\iint_S \nabla \times \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S}$,

donde S es la superficie definida por $z = 4 - (x^2 + y^2)$, y $\mathbf{n}$ es el vector unitario normal exterior.
Respuesta: -4π.

PROBLEMA 4.107 La esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ intersecta los ejes positivos x, y, z en A, B y C respectivamente. La curva cerrada C consiste en tres arcos circulares AB, BC y CA. Si $\mathbf{f} = (y + z)\mathbf{i} + (z + x)\mathbf{j} + (x + z)\mathbf{k}$, calcular directamente

$$\oint_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}.$$

[*Sugerencia:* Usar el teorema de Stokes (4.104) para verificar esta integral de línea calculando una integral de superficie sobre (a) la superficie ABC del octante de la esfera en el cuadrante positivo, y (b) en los tres cuadrantes de los arcos circulares de los planos coordenados.]

Respuesta: $-\frac{1}{4}\pi a^2$.

PROBLEMA 4.108 Por el teorema de Stokes (4.104) demostrar que $\Delta \times (\Delta\phi) = \mathbf{0}$.

PROBLEMA 4.109 Demostrar que

$$\oint_C \phi \nabla \psi \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla\phi \times \nabla\psi \cdot d\mathbf{S}.$$

PROBLEMA 4.110 Usando el teorema de Green (4.110) para un plano, calcular

$$I = \oint_C (3x + 4y)\,dx + (2x - 3y)\,dy,$$

donde C es el círculo $x^2 + y^2 = 4$.

Respuesta: -8π.

PROBLEMA 4.111 Usando el teorema de Green para un plano (4.110), calcular

$$I = \oint_C ay\,dx + bx\,dy,$$

donde a y b son constantes arbitrarias y C es una curva regular arbitraria cerrada.

Respuesta: $(b - a)A$, donde A es el área de la región limitada por C.

PROBLEMA 4.112 Cambiando variables de (x, y) a (u, v) de acuerdo con la transformación $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, mostrar que el área A de una región simplemente conexa R limitada por una curva cerrada regular C es

$$A = \iint_R \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\,dudv = \iint_R J\left[\frac{(x, y)}{(u, v)}\right] dudv,$$

donde el jacobiano de la transformación es

$$J\left[\frac{(x, y)}{(u, v)}\right] = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} \\[2ex] \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

PROBLEMA 4.113 Demostrar que

$$\iint_S d\mathbf{S} \times \mathbf{r} = \frac{1}{2}\oint_C r^2\,d\mathbf{r}.$$

PROBLEMA 4.114 Demostrar que

$$\iint_S \frac{\mathbf{r}}{r^3} \times d\mathbf{S} = \oint_C \frac{d\mathbf{r}}{r}.$$

PROBLEMA 4.115 Establecer la independencia de la trayectoria de integración y calcular

(a) $\displaystyle\int_{(1,-1)}^{(4,2)} \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2}$,

(b) $\displaystyle\int_{(0,1,0)}^{(\pi,0,1)} \operatorname{sen} x\,dx + y^2\,dy + e^z\,dz.$

Respuesta: (a) $-3/2$, (b) $e + 2/3$.

PROBLEMA 4.116 Si C es la curva $x^2 + y^2 = a^2$, demostrar que

$$\oint_C (\cos x \operatorname{senh} y - xy^2)\,dx + (\operatorname{sen} x \cosh y + x^2 y)\,dy = 0.$$

PROBLEMA 4.117 Hallar una función escalar de potencial para el campo vectorial

$$\mathbf{f} = (y + z\cos xz)\mathbf{i} + x\mathbf{j} + (x\cos xz)\mathbf{k}.$$

Respuesta: $\phi = yx + \operatorname{sen} xz + k$, donde k es una constante arbitraria.

PROBLEMA 4.118 Mostrar que un vector constante $\mathbf{a}$ tiene un potencial escalar $\phi = \mathbf{a}\cdot\mathbf{r}$ y un vector de potencial $\mathbf{A} = (\mathbf{a} \times \mathbf{r})/2$.

PROBLEMA 4.119 Considérese cualquier campo vectorial $\mathbf{f}$ tal que $\nabla\cdot\mathbf{f} = \rho$ y $\nabla \times \mathbf{f} = \mathbf{c}$. El escalar ρ y el vector $\mathbf{c}$ son funciones dadas de x, y, z; ρ puede interpretarse como una densidad de fuente y $\mathbf{c}$ como densidad de circulación. Mostrar que si ambas densidades se anulan en el infinito, el campo vectorial $\mathbf{f}$ se puede expresar como la suma de dos partes, una irrotacional y la otra solenoidal. (Este se llama *teorema de Helmholtz.*)

PROBLEMA 4.120 Demostrar que si ϕ es armónica en una región simplemente conexa cuya frontera es la curva cerrada C, entonces

$$\oint_C \nabla\phi \cdot \mathbf{n}\,ds = 0,$$

donde $\mathbf{n}$ es el vector unitario normal exterior con respecto a C.
[*Sugerencia:* Usar (4.112).]

PROBLEMA 4.121 Si $\mathbf{h} = \frac{1}{2}\nabla \times \mathbf{g}$, y $\mathbf{g} = \nabla \times \mathbf{f}$, mostrar que

$$\frac{1}{2}\iiint_R \mathbf{g}^2\,dV = \frac{1}{2}\oiint_S (\mathbf{f}\times\mathbf{g})\cdot d\mathbf{S} + \iiint_R \mathbf{f}\cdot\mathbf{h}\,dV,$$

donde R es la región limitada por una superficie cerrada S.

5 CAPITULO COORDENADAS CURVILINEAS ORTOGONALES

Hasta ahora en nuestro análisis vectorial, nos hemos restringido casi completamente a un sistema coordenado rectangular (o cartesiano), que ofrece como única ventaja que los vectores base **i**, **j**, **k** son constantes. Sin embargo, es frecuentemente útil emplear otros sistemas coordenados. En este capítulo desarrollamos expresiones para el gradiente, divergencia y rotacional en estos otros sistemas coordenados.

5.1 Coordenadas curvilíneas

La *transformación* entre las coordenadas de un punto (x, y, z) en el sistema coordenado cartesiano y las de un punto (u, v, w) en el espacio se define por medio de

$$x = x(u, v, w), \quad y = y(u, v, w), \quad z = z(u, v, w). \tag{5.1}$$

La transformación (5.1) es *uniforme* y su *jacobiano* es

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{5.2}$$

Por cálculo, (5.1) puede resolverse localmente con valor único para u, v, w en términos de x, y, z; esto es,

$$u = u(x, y, z), \quad v = v(x, y, z), \quad w = w(x, y, z). \tag{5.3}$$

Por consiguiente, cualquier punto (x, y, z) del espacio tiene coordenadas correspondientes únicas (u, v, w).

Las *superficies coordenadas* son familias de superficies que se obtienen igualando las coordenadas a una constante; v.g., si c_1, c_2, c_3 son constantes, entonces tres familias de superficies son

$$u(x, y, z) = c_1, \quad v(x, y, z) = c_2, \quad w(x, y, z) = c_3.$$

Así si v, w son constantes, (5.1) representa la curva u; de manera similar, tenemos *curvas* v y *curvas* w; estas tres curvas se llaman *curvas coordenadas*. Como las tres curvas coordenadas no son en general líneas rectas, como en el sistema coordenado rectangular, tales sistemas coordenados se llaman *coordenadas curvilíneas*.

En el sistema coordenado rectangular, un conjunto de vectores base mutuamente ortogonales es **i**, **j**, **k** como se muestra en el Cap. 2. De manera similar, podemos introducir un conjunto de *vectores base* apropiado para sistemas coordenados curvilíneos. En el caso

más general, en cada punto P del espacio hay dos conjuntos de vectores base (cf., figura 5.1). El primer conjunto es el de los vectores unitarios $\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_v, \mathbf{e}_w$ tangentes en P a las curvas coordenadas que pasan por P. El segundo es el conjunto de vectores normales unitarios $\mathbf{e}_U, \mathbf{e}_V, \mathbf{e}_W$, en P, a las superficies coordenadas que pasan por P.

Los vectores unitarios $\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_v, \mathbf{e}_w$ (ó $\mathbf{e}_U, \mathbf{e}_V, \mathbf{e}_W$) generalmente varían en orientación de punto a punto.

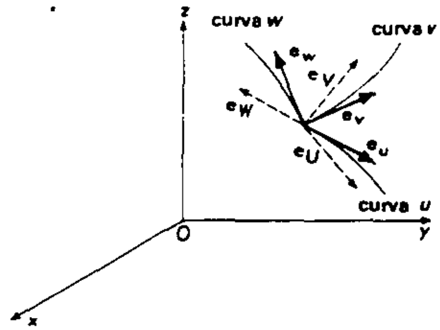


Figura 5.1 Vectores base para coordenadas curvilíneas en general.

PROBLEMA 5.1 Mostrar que si $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, los tres vectores unitarios $\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_v, \mathbf{e}_w$, en P tangentes a las curvas coordenadas u, v, w se pueden expresar como

$$\mathbf{e}_u = \frac{1}{h_u}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \quad \mathbf{e}_v = \frac{1}{h_v}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}, \quad \mathbf{e}_w = \frac{1}{h_w}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w}, \tag{5.4}$$

donde

$$h_u = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\right|, \quad h_v = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right|, \quad h_w = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w}\right|. \tag{5.5}$$

Solución: Si $\mathbf{r}$ es el vector de posición desde el origen de un sistema coordenado rectangular hasta el punto $P(x, y, z)$, entonces $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = \mathbf{r}(x, y, z)$. Usando (5.1), $\mathbf{r}$ puede expresarse también como una función de u, v, w; i.e.,

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v, w),$$

donde (u, v, w) son coordenadas curvilíneas de P. Si v, w son constantes, entonces (5.1) es la ecuación paramétrica de la curva u con parámetro u. Por consiguiente, de acuerdo con (3.40), un vector tangente en P a la curva u es $\partial\mathbf{r}/\partial u$. De manera similar, $\partial\mathbf{r}/\partial v$ y $\partial\mathbf{r}/\partial w$ son tangentes en P a las curvas v, w respectivamente.

En general, $\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\right|$, $\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right|$, y $\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w}\right|$ no son iguales a la unidad. Por consiguiente si $h_u = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\right|$, $h_v = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right|$, $h_w = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w}\right|$,

$$\mathbf{e}_u = \frac{1}{h_u}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \quad \mathbf{e}_v = \frac{1}{h_v}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}, \quad \mathbf{e}_w = \frac{1}{h_w}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w}.$$

Obsérvese que h_u, h_v, y h_w son en general, funciones de u, v, w y $h_u \neq 0$, $h_v \neq 0$, y $h_w \neq 0$; por consiguiente, $\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_v, \mathbf{e}_w$ son también funciones de u, v, w.

PROBLEMA 5.2 Mostrar que los tres vectores unitarios $\mathbf{e}_U, \mathbf{e}_V, \mathbf{e}_W$ normales en P a las superficies coordenadas u, v, w respectivamente, se pueden expresar como

$$\mathbf{e}_u = \frac{1}{H_u}\nabla u, \quad \mathbf{e}_v = \frac{1}{H_v}\nabla v, \quad \mathbf{e}_w = \frac{1}{H_w}\nabla w, \tag{5.6}$$

donde

$$H_u = |\nabla u|, \quad H_v = |\nabla v|, \quad H_w = |\nabla w|. \tag{5.7}$$

Solución: Por el resultado del problema 3.31, vemos que el vector ∇u es perpendicular a la superficie $u(x, y, z) = c_1$ en P. De manera similar, ∇v y ∇w son normales a las superficies v y w respectivamente. Por consiguiente, si

$$H_u = |\nabla u|, \quad H_v = |\nabla v|, \quad H_w = |\nabla w|,$$

obtenemos

$$\mathbf{e}_u = \frac{1}{H_u}\nabla u, \quad \mathbf{e}_v = \frac{1}{H_v}\nabla v, \quad \mathbf{e}_w = \frac{1}{H_w}\nabla w.$$

Los conjuntos de vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ y $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ son recíprocos si

$$\mathbf{a}_m \cdot \mathbf{b}_n = \delta_{mn}, \tag{1.10}$$

donde δ_{mn} es la delta de Kronecker. De la sección 1.8, para conjuntos recíprocos de vectores,

$$\mathbf{b}_1 = \frac{\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3}{[\mathbf{a}_1\, \mathbf{a}_2\, \mathbf{a}_3]}, \quad \mathbf{b}_2 = \frac{\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1}{[\mathbf{a}_1\, \mathbf{a}_2\, \mathbf{a}_3]}, \quad \mathbf{b}_3 = \frac{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2}{[\mathbf{a}_1\, \mathbf{a}_2\, \mathbf{a}_3]}, \tag{1.114}$$

$$\mathbf{a}_1 = \frac{\mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_3}{[\mathbf{b}_1\, \mathbf{b}_2\, \mathbf{b}_3]}, \quad \mathbf{a}_2 = \frac{\mathbf{b}_3 \times \mathbf{b}_1}{[\mathbf{b}_1\, \mathbf{b}_2\, \mathbf{b}_3]}, \quad \mathbf{a}_3 = \frac{\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2}{[\mathbf{b}_1\, \mathbf{b}_2\, \mathbf{b}_3]}, \tag{1.115}$$

$$[\mathbf{a}_1\, \mathbf{a}_2\, \mathbf{a}_3] = \frac{1}{[\mathbf{b}_1\, \mathbf{b}_2\, \mathbf{b}_3]}. \tag{1.122}$$

PROBLEMA 5.3 Mostrar que $\partial \mathbf{r}/\partial u$, $\partial \mathbf{r}/\partial v$, $\partial \mathbf{r}/\partial$ y ∇u, ∇v, ∇w son conjuntos recíprocos de vectores.

Solución: Como

$$\begin{aligned} u &= u(x, y, z) \\ &= u[x(u, v, w),\ y(u, v, w),\ z(u, v, w)], \end{aligned} \tag{5.8}$$

diferenciando con respecto a u se obtiene

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u} = 1. \tag{5.9}$$

Como $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \dfrac{\partial x}{\partial u}\mathbf{i} + \dfrac{\partial y}{\partial u}\mathbf{j} + \dfrac{\partial z}{\partial u}\mathbf{k}$ y $\nabla u = \dfrac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j} + \dfrac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k}$, podemos escri (5.9) como

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \cdot \nabla u = 1. \tag{5.10}$$

De modo similar

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \cdot \nabla v = 1, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} \cdot \nabla w = 1. \tag{5.11}$$

Ahora, diferenciando (5.8) con respecto a v,

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v} = 0,$$

o sea

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \cdot \nabla u = 0. \tag{5.12}$$

De modo similar,

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} \cdot \nabla u = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \cdot \nabla v = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} \cdot \nabla v = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \cdot \nabla w = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \cdot \nabla w = 0. \tag{5.13}$$

Si $u = q_1$, $v = q_2$, $w = q_3$, entonces (5.10–3) puede resumirse como

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_m} \cdot (\nabla q_n) = \delta_{mn}, \tag{5.14}$$

donde δ_{mn} es la delta de Kronecker. Entonces, por la definición (1.109) de conjuntos recíprocos de vectores concluimos que $\partial \mathbf{r}/\partial u$, $\partial \mathbf{r}/\partial v$, $\partial \mathbf{r}/\partial w$ y ∇u, ∇v, son conjuntos recíprocos de vectores.

PROBLEMA 5.4 Mostrar que

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \frac{1}{\alpha}\,\nabla v \times \nabla w, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \frac{1}{\alpha}\,\nabla w \times \nabla u, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} = \frac{1}{\alpha}\,\nabla u \times \nabla v, \tag{5.15}$$

$$\nabla u = \frac{1}{\beta}\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w}\right), \quad \nabla v = \frac{1}{\beta}\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\right), \quad \nabla w = \frac{1}{\beta}\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right), \tag{5.16}$$

donde

$$\alpha = [\nabla u\, \nabla v\, \nabla w] = \nabla u \cdot \nabla v \times \nabla w, \tag{5.17}$$

$$\beta = \left[\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w}\right] = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} = \frac{1}{\alpha}. \tag{5.18}$$

Solución: Como los vectores $\partial \mathbf{r}/\partial u$, $\partial \mathbf{r}/\partial v$, $\partial \mathbf{r}/\partial w$ y $\nabla u, \nabla v, \nabla w$ forman conjuntos recíprocos de vectores, los resultados de la sección 1.9 se pueden aplicar. Por consiguiente (5.15–6) se siguen directamente de (1.114–5). La relación (5.18) se sigue de (1.122).

5.2 Coordenadas curvilíneas ortogonales

Un sistema coordenado curvilíneo se llama *ortogonal* si las curvas coordenadas son ortogonales en todas partes. En este caso, los tres vectores $\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_v, \mathbf{e}_w$ son mutuamente ortogonales en cada punto; i.e.,

$$\mathbf{e}_u \cdot \mathbf{e}_v = \mathbf{e}_v \cdot \mathbf{e}_w = \mathbf{e}_w \cdot \mathbf{e}_u = 0. \tag{5.19}$$

Supondremos también que $\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_v, \mathbf{e}_w$ forman un sistema derecho; i.e.,

$$[\mathbf{e}_u\, \mathbf{e}_v\, \mathbf{e}_w] = 1. \tag{5.20}$$

PROBLEMA 5.5 Si un sistema de coordenadas curvilíneas es ortogonal, mostrar que

$$\mathbf{e}_u = \mathbf{e}_U, \quad \mathbf{e}_v = \mathbf{e}_V, \quad \mathbf{e}_w = \mathbf{e}_W. \tag{5.21}$$

Solución: Por el problema 5.3 sabemos que $\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_v, \mathbf{e}_w$ y $\mathbf{e}_U, \mathbf{e}_V, \mathbf{e}_W$ son conjuntos recíprocos de vectores. Ahora, el sistema ortonormal $\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_v, \mathbf{e}_w$ satisface

$$\mathbf{e}_u = \mathbf{e}_v \times \mathbf{e}_w, \quad \mathbf{e}_v = \mathbf{e}_w \times \mathbf{e}_u, \quad \mathbf{e}_w = \mathbf{e}_u \times \mathbf{e}_v. \tag{5.22}$$

Por consiguiente, por los problemas 5.2 y 5.4, tenemos el resultado (5.21).

PROBLEMA 5.6 En un sistema coordenado ortogonal curvilíneo, mostrar que

(a)
$$h_u = \frac{1}{H_u}, \quad h_v = \frac{1}{H_v}, \quad h_w = \frac{1}{H_w}, \tag{5.23}$$

(b)
$$\mathbf{e}_u = h_u \nabla u, \quad \mathbf{e}_v = h_v \nabla v, \quad \mathbf{e}_w = h_w \nabla w, \tag{5.24}$$

(c)
$$[\nabla u\, \nabla v\, \nabla w] = \nabla u \cdot \nabla v \times \nabla w = \frac{1}{h_u h_v h_w}. \tag{5.25}$$

Solución: (a) Por (5.4) y (5.6) y puesto que (5.10) se cumple,

$$\mathbf{e}_u \cdot \mathbf{e}_U = \left(\frac{1}{h_u}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\right) \cdot \left(\frac{1}{H_u}\nabla u\right) = \frac{1}{h_u H_u}\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \cdot \nabla u\right) = \frac{1}{h_u H_u}. \tag{5.26}$$

En un sistema ortogonal, por (5.21),

$$\frac{1}{h_u H_u} = \mathbf{e}_u \cdot \mathbf{e}_U = \mathbf{e}_u \cdot \mathbf{e}_u = 1.$$

Por consiguiente, $h_u = 1/H_u$. De manera similar podemos obtener $h_v = 1/H_v$, $h_w = 1/H_w$.

(b) Por (5.21), (5.6) y (5.23),

$$\mathbf{e}_u = \mathbf{e}_U = \frac{1}{H_u}\nabla u = h_u \nabla u,$$

$$\mathbf{e}_v = \mathbf{e}_V = \frac{1}{H_v}\nabla v = h_v \nabla v,$$

$$\mathbf{e}_w = \mathbf{e}_W = \frac{1}{H_w}\nabla w = h_w \nabla w.$$

(c) Por (5.24),

$$\nabla u = \frac{1}{h_u}\mathbf{e}_u, \quad \nabla v = \frac{1}{h_v}\mathbf{e}_v, \quad \nabla w = \frac{1}{h_w}\mathbf{e}_w. \tag{5.27}$$

Por consiguiente, por (5.20),

$$\begin{aligned}[\nabla u\, \nabla v\, \nabla w] &= \nabla u \cdot \nabla v \times \nabla w \\ &= \frac{1}{h_u h_v h_w}\mathbf{e}_u \cdot \mathbf{e}_v \times \mathbf{e}_w \\ &= \frac{1}{h_u h_v h_w}.\end{aligned}$$

Los *factores de escala o coeficientes métricos* son las cantidades h_u, h_v, h_w pues los coeficientes diferenciales *du, dv, dw* deben multiplicarse por ellos para obtener longitudes de arco. Los factores de escala dependen de las coordenadas y tienen dimensión. Pero su producto con las coordenadas diferenciales tiene la dimensión de la longitud.

PROBLEMA 5.7 En un sistema coordenado curvilíneo ortogonal, si s_u, s_v, s_w representan longitudes de arco a lo largo de las curvas u, v, w demostrar que

(a) $$ds_u = h_u\, du, \quad ds_v = h_v\, dv, \quad ds_w = h_w\, dw, \tag{5.28}$$

(b) $$(ds)^2 = (h_u\, du)^2 + (h_v\, dv)^2 + (h_w\, dw)^2, \tag{5.29}$$

(c) $$dV = h_u h_v h_w\, du dv dw, \tag{5.30}$$

donde ds representa la longitud de arco infinitesimal entre los puntos (u, v, w) y $(u + du, v + dv, w + dw)$ y dV es el elemento de volumen.

Solución: Usando las longitudes de arco s_u, s_v, s_w,

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s_u}\frac{ds_u}{du}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s_v}\frac{ds_v}{dv}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s_w}\frac{ds_w}{ds}. \tag{5.31}$$

El vector unitario tangente a la curva C de longitud de arco s en cualquier punto P es la derivada del vector radio $\mathbf{r}$ a P con respecto a s. Así que,

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s_u} = \mathbf{e}_u, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s_v} = \mathbf{e}_v, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s_w} = \mathbf{e}_w. \tag{5.32}$$

Por consiguiente, de (5.31) y (5.4) se sigue,

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \frac{ds_u}{du}\mathbf{e}_u = h_u \mathbf{e}_u, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \frac{ds_v}{dv}\mathbf{e}_v = h_v \mathbf{e}_v, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} = \frac{ds_w}{dw}\mathbf{e}_w = h_w \mathbf{e}_w. \tag{5.33}$$

De modo que

$$h_u = \frac{ds_u}{du}, \quad h_v = \frac{ds_v}{dv}, \quad h_w = \frac{ds_w}{dw}, \tag{5.34}$$

o sea

$$ds_u = h_u\, du, \quad ds_v = h_v\, dv, \quad ds_w = h_w\, dw.$$

Así que las coordenadas diferenciales du, dv, dw deben multiplicarse por h_u, h_v, h_w para obtener longitudes de arco.

(b) Puesto que (5.33) se cumple,

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\, du + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\, dv + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w}\, dw = h_u\, du\, \mathbf{e}_u + h_v\, dv\, \mathbf{e}_v + h_w\, dw\, \mathbf{e}_w. \tag{5.35}$$

Por consiguiente, la longitud de arco ds entre los puntos (u, v, w) y $(u + du, v + dv, w + dw)$ es

$$ds^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = (h_u\, du)^2 + (h_v\, dv)^2 + (h_w\, dw)^2$$

ya que $\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_v, \mathbf{e}_w$ forman una base ortonormal.

(c) El elemento diferencial de volumen es un paralelepípedo, tres lados del cual son los vectores

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\, du = h_u\, du\, \mathbf{e}_u, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\, dv = h_v\, dv\, \mathbf{e}_v, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w}\, dw = h_w\, dw\, \mathbf{e}_w.$$

Por lo tanto el elemento de volumen dV es

$$\begin{aligned} dV &= (h_u\, du\, \mathbf{e}_u) \cdot [(h_v\, dv\, \mathbf{e}_v) \times (h_w\, dw\, \mathbf{e}_w)] \\ &= [\mathbf{e}_u\, \mathbf{e}_v\, \mathbf{e}_w]\, h_u h_v h_w\, du dv dw \\ &= h_u h_v h_w\, du dv dw. \end{aligned}$$

En el sistema coordenado cilíndrico, las variables u, v, w se designan usualmente con ρ, ϕ, z. Esta notación más conocida se usa en la sección 5.4. Por ahora, sin embargo, se usan las coordenadas neutras u, v, w para ilustrar la teoría general que precede.

PROBLEMA 5.8 El sistema de coordenadas cilíndricas se define por la transformación

$$x = u \cos v, \quad y = u \operatorname{sen} v, \quad z = w. \tag{5.36}$$

Los recorridos de u, v, w están dados por $u \geq 0$, $0 \leq v < 2\pi$ y $-\infty < w < \infty$.

(a) Determinar h_u, h_v, h_w y los vectores $\mathbf{e}_u$, $\mathbf{e}_v$, $\mathbf{e}_w$. (b) Hallar $\mathbf{H}_u$, $\mathbf{H}_v$, $\mathbf{H}_w$ y los vectores $\mathbf{e}_u$, $\mathbf{e}_v$, $\mathbf{e}_w$. (c) Demostrar que el sistema coordenado cilíndrico es ortoganal.

Solución: Por (5.2), el jacobiano de la transformación es

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \cos v & -u \operatorname{sen} v & 0 \\ \operatorname{sen} v & u \cos v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = u(\cos^2 v + sen^2\, v) = u, \tag{5.37}$$

que no es cero, excepto sobre el eje z. La transformación inversa es

$$u = (x^2 + y^2)^{1/2}, \quad v = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right), \quad w = z. \tag{5.38}$$

(a) Como el vector de posición es

$$\mathbf{r} = u \cos v\, \mathbf{i} + u \operatorname{sen} v\, \mathbf{j} + w\, \mathbf{k},$$

sus derivadas parciales son

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \cos v\, \mathbf{i} + \operatorname{sen} v\, \mathbf{j}, \qquad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = -u \operatorname{sen} v\, \mathbf{i} + u \cos v\, \mathbf{j}, \qquad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} = \mathbf{k}.$$

Por consiguiente, los factores de escala son

$$h_u = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\right| = (\cos^2 v + \operatorname{sen}^2 v)^{1/2} = 1,$$

$$h_v = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right| = [(-u \operatorname{sen} v)^2 + (u \cos v)^2]^{1/2} = u,$$

$$h_w = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w}\right| = 1,$$

y los vectores base son

$$\mathbf{e}_u = \frac{1}{h_u}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \cos v\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} v\,\mathbf{j},$$

$$\mathbf{e}_v = \frac{1}{h_v}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = -\operatorname{sen} v\,\mathbf{i} + \cos v\,\mathbf{j},$$

$$\mathbf{e}_w = \frac{1}{h_w}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} = \mathbf{k}.$$

(b) Por la transformación inversa (5.38),

$$\nabla u = \frac{1}{(x^2 + y^2)^{1/2}}(x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}), \qquad \nabla v = \frac{1}{(x^2 + y^2)}(-y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}), \qquad \nabla w = \mathbf{k}.$$

Por consiguiente, los factores de escala son

$$H_u = |\nabla u| = 1 = \frac{1}{h_u},$$

$$H_v = |\nabla v| = \frac{1}{(x^2 + y^2)^{1/2}} = \frac{1}{u} = \frac{1}{h_v},$$

$$H_w = |\nabla w| = 1 = \frac{1}{h_w},$$

y los vectores base son

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_U = \frac{1}{H_u}\nabla u &= \frac{1}{(x^2 + y^2)^{1/2}}(x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}) \\
&= \frac{1}{u}(u\cos v\,\mathbf{i} + u\operatorname{sen} v\,\mathbf{j}) \\
&= \cos v\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} v\,\mathbf{j} \\
&= \mathbf{e}_u,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_V = \frac{1}{H_v}\nabla v &= (x^2 + y^2)^{1/2}\frac{1}{(x^2 + y^2)}(-y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}) \\
&= \frac{1}{(x^2 + y^2)^{1/2}}(-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}) \\
&= \frac{1}{u}(-u\operatorname{sen} v\,\mathbf{i} + u\cos v\,\mathbf{j}) \\
&= -\operatorname{sen} v\,\mathbf{i} + \cos v\,\mathbf{j} \\
&= \mathbf{e}_v,
\end{aligned}$$

$$\mathbf{e}_W = \frac{1}{H_w}\nabla w = \mathbf{k} = \mathbf{e}_w.$$

(c) Efectuando el producto punto $\mathbf{e}_u$, $\mathbf{e}_v$ y $\mathbf{e}_w$ entre ellos,

$$\mathbf{e}_u \cdot \mathbf{e}_v = (\cos v)(-\operatorname{sen} v) + (\operatorname{sen} v)(\cos v) = 0,$$

$$\mathbf{e}_v \cdot \mathbf{e}_w = (-\operatorname{sen} v)(0) + (\cos v)(0) + (0)(1) = 0,$$

$$\mathbf{e}_w \cdot \mathbf{e}_u = (0)(\cos v) + (0)(\operatorname{sen} v) + (1)(0) = 0.$$

Por consiguiente, $\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_v, \mathbf{e}_w$ son mutuamente ortogonales.

En el sistema coordenado esférico, las variables u, v, w, se designan usualmente con r, θ, y ϕ. Esta notación se usa en la sección 5.4. Por ahora, sin embargo, se usan las coordenadas neutras u, v, w para ilustrar la teoría precedente.

PROBLEMA 5.9 El sistema coordenado esférico se define por la transformación

$$x = u \operatorname{sen} v \cos w, \quad y = u \operatorname{sen} v \operatorname{sen} w, \quad z = u \cos v, \tag{5.39}$$

donde $u \geqslant 0$, $0 \leqslant v < \pi$, $0 \leqslant w < 2\pi$.

(a) Hallar h_u, h_v, h_w y $\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_v, \mathbf{e}_w$. (b) Determinar H_u, H_v, H_w y $\mathbf{e}_U, \mathbf{e}_V, \mathbf{e}_W$.
(c) Demostrar que el sistema coordenado esférico es ortogonal.

Solución: Por (5.2) el jacobiano de la transformación es

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \operatorname{sen} v \cos w & u \cos v \cos w & -u \operatorname{sen} v \operatorname{sen} w \\ \operatorname{sen} v \operatorname{sen} w & u \cos v \operatorname{sen} w & u \operatorname{sen} v \cos w \\ \cos v & -u \operatorname{sen} v & 0 \end{vmatrix}$$

$$= u^2 \operatorname{sen} v, \tag{5.40}$$

que es diferente de cero en todas partes, excepto en el eje z. La transformación inversa es

$$u = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}, \quad v = \tan^{-1}\left[\frac{(x^2 + y^2)^{1/2}}{z}\right], \quad w = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right). \tag{5.41}$$

(a) Como el vector de posición es

$$\mathbf{r} = u \operatorname{sen} v \cos w \,\mathbf{i} + u \operatorname{sen} v \operatorname{sen} w \,\mathbf{j} + u \cos v \,\mathbf{k},$$

sus derivadas parciales son

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \operatorname{sen} v \cos w \,\mathbf{i} + \operatorname{sen} v \operatorname{sen} w \,\mathbf{j} + \cos v \,\mathbf{k},$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = u \cos v \cos w \,\mathbf{i} + u \cos v \operatorname{sen} w \,\mathbf{j} - u \operatorname{sen} v \,\mathbf{k},$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} = -u \operatorname{sen} v \operatorname{sen} w \,\mathbf{i} + u \operatorname{sen} v \cos w \,\mathbf{j}.$$

Por consiguiente, los factores de escala son

$$h_u = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\right| = [(\operatorname{sen} v \cos w)^2 + (\operatorname{sen} v \operatorname{sen} w)^2 + (\cos v)^2]^{1/2} = 1,$$

$$h_v = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right| = u\,[(\cos v \cos w)^2 + (\cos v \operatorname{sen} w)^2 + (-\operatorname{sen} v)^2]^{1/2} = u,$$

$$h_w = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w}\right| = u\,[(-\operatorname{sen} v \operatorname{sen} w)^2 + (\operatorname{sen} v \cos w)^2]^{1/2} = u \operatorname{sen} v,$$

y los vectores base son

$$\mathbf{e}_u = \frac{1}{h_u}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \operatorname{sen} v \cos w\, \mathbf{i} + \operatorname{sen} v \operatorname{sen} w\, \mathbf{j} + \cos v\, \mathbf{k},$$

$$\mathbf{e}_v = \frac{1}{h_v}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \cos v \cos w\, \mathbf{i} + \cos v \operatorname{sen} w\, \mathbf{j} - \operatorname{sen} v\, \mathbf{k},$$

$$\mathbf{e}_w = \frac{1}{h_w}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} = -\operatorname{sen} w\, \mathbf{i} + \cos w\, \mathbf{j}.$$

(b) Por (5.41),

$$\nabla u = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}(x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}),$$

$$\nabla v = \frac{1}{(x^2+y^2)^{1/2}(x^2+y^2+z^2)}[zx\,\mathbf{i} + zy\,\mathbf{j} - (x^2+y^2)\mathbf{k}],$$

$$\nabla w = \frac{1}{(x^2+y^2)}(-y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}).$$

Por consiguiente, los factores de escala son

$$H_u = |\nabla u| = 1 = \frac{1}{h_u},$$

$$H_u = |\nabla v| = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}} = \frac{1}{u} = \frac{1}{h_v},$$

$$H_w = |\nabla w| = \frac{1}{(x^2+y^2)^{1/2}} = \frac{1}{u \operatorname{sen} v} = \frac{1}{h_w},$$

y los vectores base son

$$\mathbf{e}_U = \frac{1}{H_u}\nabla u = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}(x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k})$$

$$= \operatorname{sen} v \cos w\, \mathbf{i} + \operatorname{sen} v \operatorname{sen} w\, \mathbf{j} + \cos v\, \mathbf{k}$$

$$= \mathbf{e}_u,$$

$$\mathbf{e}_V = \frac{1}{H_v}\nabla v = \frac{1}{(x^2+y^2)^{1/2}(x^2-y^2+z^2)^{1/2}}[zx\,\mathbf{i} + zy\,\mathbf{j} - (x^2-y^2)\mathbf{k}]$$

$$= \cos v \cos w\, \mathbf{i} + \cos v \operatorname{sen} w\, \mathbf{j} - \operatorname{sen} v\, \mathbf{k}$$

$$= \mathbf{e}_v,$$

$$\mathbf{e}_W = \frac{1}{H_w}\nabla w = \frac{1}{(x^2+y^2)^{1/2}}(-y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j})$$

$$= -\operatorname{sen} w\, \mathbf{i} + \cos w\, \mathbf{j}$$

$$= \mathbf{e}_w.$$

(c) Efectuando el producto punto de $\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_v, \mathbf{e}_w$ entre ellos,

$$\mathbf{e}_u \cdot \mathbf{e}_v = \operatorname{sen} v \cos v \cos^2 w + \operatorname{sen} v \cos v \operatorname{sen}^2 w - \cos v \operatorname{sen} v = 0,$$

$$\mathbf{e}_v \cdot \mathbf{e}_w = -\cos v \cos w \operatorname{sen} w + \cos v \operatorname{sen} w \cos w = 0,$$

$$\mathbf{e}_w \cdot \mathbf{e}_u = -\operatorname{sen} w \operatorname{sen} v \cos w + \cos w \operatorname{sen} v \operatorname{sen} w = 0.$$

Por consiguiente, $\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_v, \mathbf{e}_w$ son mutuamente ortogonales.

PROBLEMA 5.10 Usando la relación

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 = (h_u\,du)^2 + (h_v\,dv)^2 + (h_w\,dw)^2, \tag{5.42}$$

hallar los factores de escala h_u, h_v, h_w en coordenadas (a) cilíndricas, (b) esféricas.

Solución: (a) Por (5.36)

$$dx = \cos v\, du - u \operatorname{sen} v\, dv,$$

$$dy = \operatorname{sen} v\, du + u \cos v\, dv,$$

$$dz = dw.$$

Así que

$$\begin{aligned}(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 &= \cos^2 v\, (du)^2 + u^2 \operatorname{sen}^2 v (dv)^2 - 2u \operatorname{sen} v \cos v\, du dv \\ &\quad + \operatorname{sen}^2 v (du)^2 + u^2 \cos^2 v (dv)^2 + 2u \operatorname{sen} v \cos v\, du dv \\ &\quad + (dw)^2 \\ &= (\operatorname{sen}^2 v + \cos^2 v)(du)^2 + u^2 (\operatorname{sen}^2 v + \cos^2 v)(dv)^2 + (dw)^2 \\ &= (du)^2 + (u\, dv)^2 + (dw)^2 \\ &= (h_u\, du)^2 + (h_v\, dv)^2 + (h_w\, dw)^2.\end{aligned}$$

Por consiguiente, $h_u = 1$, $h_v = u$, $h_w = 1$.

(b) Por (5.39),

$$dx = \operatorname{sen} v \cos w\, du + u \cos v \cos w\, dv - u \operatorname{sen} v \operatorname{sen} w\, dw,$$

$$dy = \operatorname{sen} v \operatorname{sen} w\, du + u \cos v \operatorname{sen} w\, dv + u \operatorname{sen} v \cos w\, dw,$$

$$dz = \cos v\, du - u \operatorname{sen} v\, dv.$$

Así que,

$$\begin{aligned}&(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 \\ &\quad = \operatorname{sen}^2 v \cos^2 w (du)^2 + u^2 \cos^2 v \cos^2 w (dv)^2 + u^2 \operatorname{sen}^2 v \operatorname{sen}^2 w (dw)^2 \\ &\qquad + 2u \operatorname{sen} v \cos v \cos^2 w\, du dv - 2u^2 \operatorname{sen} v \cos v \operatorname{sen} w \cos w\, dv dw \\ &\qquad - 2u \operatorname{sen}^2 v \operatorname{sen} w \cos w\, dw du \\ &\qquad + \operatorname{sen}^2 v \operatorname{sen}^2 w (du)^2 + u^2 \cos^2 v \operatorname{sen}^2 w (dv)^2 + u^2 \operatorname{sen}^2 v \cos^2 w (dw)^2 \\ &\qquad + 2u \operatorname{sen} v \cos v \operatorname{sen}^2 w\, du dv + 2u^2 \operatorname{sen} v \cos v \operatorname{sen} w \cos w\, dv dw \\ &\qquad + 2u \operatorname{sen}^2 v \operatorname{sen} w \cos w\, dw du \\ &\qquad + \cos^2 v (du)^2 + u^2 \operatorname{sen}^2 v (dv)^2 - 2u \operatorname{sen} v \cos v\, du dv \\ &\quad = [\operatorname{sen}^2 v (\cos^2 w + \operatorname{sen}^2 w) + \cos^2 v] (du)^2 \\ &\qquad + u^2 [\cos^2 v (\cos^2 w + \operatorname{sen}^2 w) + \operatorname{sen}^2 v] (dv)^2 \\ &\qquad + u^2 \operatorname{sen}^2 v (\operatorname{sen}^2 w + \cos^2 w)(dw)^2 \\ &\quad = (du)^2 + (u\, dv)^2 + (u \operatorname{sen} v\, dw)^2 \\ &\quad = (h_u\, du)^2 + (h_v\, dv)^2 + (h_w\, dw)^2.\end{aligned}$$

Por consiguiente, $h_u = 1$, $h_v = u$, $h_w = u \operatorname{sen} v$. Obsérvese que (5.42) es cierto solamente para coordenadas ortogonales.

5.3 Gradiente, divergencia y rotacional en coordenadas curvilíneas ortogonales

Si $\psi = \psi(u, v, w)$ es una función escalar, el *gradiente* en coordenadas curvilíneas ortogonales es

$$\nabla\psi = \frac{\partial\psi}{\partial u}\nabla u + \frac{\partial\psi}{\partial v}\nabla v + \frac{\partial\psi}{\partial w}\nabla w, \tag{5.43}$$

$$\nabla\psi = \frac{1}{h_u}\frac{\partial\psi}{\partial u}\mathbf{e}_u + \frac{1}{h_v}\frac{\partial\psi}{\partial v}\mathbf{e}_v + \frac{1}{h_w}\frac{\partial\psi}{\partial w}\mathbf{e}_w. \tag{5.44}$$

Si $\mathbf{f} = f_u\mathbf{e}_u + f_v\mathbf{e}_v + f_w\mathbf{e}_w$ es un vector en la base $\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_v, \mathbf{e}_w$, entonces la divergencia en coordenadas ortogonales curvilíneas es

$$\nabla\cdot\mathbf{f} = \frac{1}{h_u h_v h_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}(h_v h_w f_u) + \frac{\partial}{\partial v}(h_w h_u f_v) + \frac{\partial}{\partial w}(h_u h_v f_w)\right]. \tag{5.45}$$

El *laplaciano* de la función escalar ψ es

$$\nabla^2\psi = \nabla\cdot(\nabla\psi) = \frac{1}{h_u h_v h_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{h_v h_w}{h_u}\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)\right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{h_w h_u}{h_v}\frac{\partial\psi}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{h_u h_v}{h_w}\frac{\partial\psi}{\partial w}\right)\right]. \tag{5.46}$$

El *rotacional* de la función vectorial $\mathbf{f}$ es

$$\nabla\times\mathbf{f} = \frac{1}{h_v h_w}\left[\frac{\partial}{\partial v}(h_w f_w) - \frac{\partial}{\partial w}(h_v f_v)\right]\mathbf{e}_u$$

$$+ \frac{1}{h_w h_u}\left[\frac{\partial}{\partial w}(h_u f_u) - \frac{\partial}{\partial u}(h_w f_w)\right]\mathbf{e}_v$$

$$+ \frac{1}{h_u h_v}\left[\frac{\partial}{\partial u}(h_v f_v) - \frac{\partial}{\partial v}(h_u f_u)\right]\mathbf{e}_w. \tag{5.47}$$

PROBLEMA 5.11 Verificar (5.43).

Solución: El gradiente en las coordenadas rectangulares es

$$\nabla\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\psi}{\partial z}\mathbf{k}. \tag{3.110}$$

Si $\psi = \psi(u, v, w) = \psi[u(x, y, z),\ v(x, y, z),\ w(x, y, z)]$, entonces

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x},$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y},$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial z} = \frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial\psi}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial z}.$$

Por lo tanto,

$$\nabla\psi = \frac{\partial\psi}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k}\right) + \frac{\partial\psi}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial v}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial v}{\partial z}\mathbf{k}\right)$$

$$+ \frac{\partial\psi}{\partial w}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial w}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial w}{\partial z}\mathbf{k}\right)$$

$$= \frac{\partial\psi}{\partial u}\nabla u + \frac{\partial\psi}{\partial v}\nabla v + \frac{\partial\psi}{\partial w}\nabla w. \tag{5.43}$$

PROBLEMA 5.12 Verificar (5.44)

Solución: Sustituyendo

$$\nabla u = \frac{1}{h_u}\mathbf{e}_u, \quad \nabla v = \frac{1}{h_v}\mathbf{e}_v, \quad \nabla w = \frac{1}{h_w}\mathbf{e}_w \qquad [5.27]$$

en (5.43),

$$\nabla \psi = \frac{1}{h_u}\frac{\partial \psi}{\partial u}\mathbf{e}_u + \frac{1}{h_v}\frac{\partial \psi}{\partial v}\mathbf{e}_v + \frac{1}{h_w}\frac{\partial \psi}{\partial w}\mathbf{e}_w.$$

PROBLEMA 5.13 Verificar (5.45)

Solución: Sabemos que $\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_v, \mathbf{e}_w$ forman una base ortogonal derecha. Usando (5.24),

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{e}_u &= \mathbf{e}_v \times \mathbf{e}_w = h_v h_w \nabla v \times \nabla w, \\ \mathbf{e}_v &= \mathbf{e}_w \times \mathbf{e}_u = h_w h_u \nabla w \times \nabla u, \\ \mathbf{e}_w &= \mathbf{e}_u \times \mathbf{e}_v = h_u h_v \nabla u \times \nabla v. \end{aligned}\right\} \qquad (5.48)$$

Así que,

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= f_u \mathbf{e}_u + f_v \mathbf{e}_v + f_w \mathbf{e}_w \\ &= h_v h_w f_u \nabla v \times \nabla w + h_w h_u f_v \nabla w \times \nabla u + h_u h_v f_w \nabla u \times \nabla v. \end{aligned} \qquad (5.49)$$

Como

$$\nabla \cdot (\phi \mathbf{f}) = \phi \nabla \cdot \mathbf{f} + \mathbf{f} \cdot \nabla \phi, \qquad [3.155]$$

tenemos

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (f_u \mathbf{e}_u) &= \nabla \cdot (h_v h_w f_u \nabla v \times \nabla w) \\ &= h_v h_w f_u \nabla \cdot (\nabla v \times \nabla w) + (\nabla v \times \nabla w) \cdot \nabla (h_v h_w f_u). \end{aligned} \qquad (5.50)$$

Otra vez, puesto que

$$\nabla \cdot (\mathbf{f} \times \mathbf{g}) = \mathbf{g} \cdot (\nabla \times \mathbf{f}) - \mathbf{f} \cdot (\nabla \times \mathbf{g}), \qquad [3.157]$$

y usando $\nabla \times (\nabla \phi) = \mathbf{0}$ por (3.142),

$$\nabla \cdot (\nabla v \times \nabla w) = \nabla w \cdot (\nabla \times \nabla v) - \nabla v \cdot (\nabla \times \nabla w) = 0.$$

Luego, por (5.44) y (5.48),

$$\nabla (h_v h_w f_u) = \frac{1}{h_u}\frac{\partial}{\partial u}(h_v h_w f_u)\mathbf{e}_u + \frac{1}{h_v}\frac{\partial}{\partial v}(h_v h_w f_u)\mathbf{e}_v + \frac{1}{h_w}\frac{\partial}{\partial w}(h_v h_w f_u)\mathbf{e}_w,$$

$$\nabla v \times \nabla w = \frac{1}{h_v h_w}\mathbf{e}_u.$$

Como $\mathbf{e}_u \cdot \mathbf{e}_u = 1$ y $\mathbf{e}_u \cdot \mathbf{e}_v = \mathbf{e}_u \cdot \mathbf{e}_w = 0$, tomando el producto punto se obtiene

$$(\nabla v \times \nabla w) \cdot \nabla (h_v h_w f_u) = \frac{1}{h_u h_v h_w}\frac{\partial}{\partial u}(h_v h_w f_u).$$

Así que

$$\nabla \cdot (f_u \mathbf{e}_u) = \frac{1}{h_u h_v h_w}\frac{\partial}{\partial u}(h_v h_w f_u). \qquad (5.51)$$

De modo similar (o por cambios cíclicos de índices),

$$\nabla \cdot (f_v \mathbf{e}_v) = \frac{1}{h_u h_v h_w}\frac{\partial}{\partial v}(h_w h_u f_v), \qquad (5.52)$$

$$\nabla \cdot (f_w \mathbf{e}_w) = \frac{1}{h_u h_v h_w} \frac{\partial}{\partial w} (h_u h_v h_w). \tag{5.53}$$

Sumando (5.51–3), obtenemos (5.45).

PROBLEMA 5.14 Verificar (5.46).

Solución: Aplicando (5.45) al vector $\nabla \psi$, dado por (5.44), i.e., sustituyendo

$$f_u = \frac{1}{h_u} \frac{\partial \psi}{\partial u}, \quad f_v = \frac{1}{h_v} \frac{\partial \psi}{\partial v}, \quad f_w = \frac{1}{h_w} \frac{\partial \psi}{\partial w}$$

en (5.45), obtenemos (5.46).

PROBLEMA 5.15 Verificar (5.47).

Solución: Usando (5.24),

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= f_u \mathbf{e}_u + f_v \mathbf{e}_v + f_w \mathbf{e}_w \\ &= h_u f_u \nabla u + h_v f_v \nabla v + h_w f_w \nabla w. \end{aligned} \tag{5.54}$$

Como

$$\nabla \times (\phi \mathbf{f}) = \phi \nabla \times \mathbf{f} + (\nabla \phi) \times \mathbf{f} \qquad [3.156]$$

y $\nabla \times \nabla u = \mathbf{0}$,

$$\begin{aligned} \nabla \times (f_u \mathbf{e}_u) &= \nabla \times (h_u f_u \nabla u) \\ &= (h_u f_u) \nabla \times \nabla u + \nabla (h_u f_u) \times \nabla u \\ &= \nabla (h_u f_u) \times \nabla u. \end{aligned} \tag{5.55}$$

Ahora, usando (5.44) y (5.27),

$$\begin{aligned} \nabla (h_u f_u) \times \nabla u &= \frac{1}{h_u^2} \frac{\partial}{\partial u} (h_u f_u) \mathbf{e}_u \times \mathbf{e}_u + \frac{1}{h_u h_v} \frac{\partial}{\partial v} (h_u f_u) \mathbf{e}_v \times \mathbf{e}_u \\ &+ \frac{1}{h_w h_u} \frac{\partial}{\partial w} (h_u f_u) \mathbf{e}_w \times \mathbf{e}_u. \end{aligned}$$

Como $\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_v, \mathbf{e}_w$ forman una base ortonormal derecha,

$$\mathbf{e}_u \times \mathbf{e}_u = \mathbf{0}, \quad \mathbf{e}_v \times \mathbf{e}_u = -\mathbf{e}_w, \quad \mathbf{e}_w \times \mathbf{e}_u = \mathbf{e}_v,$$

y por tanto

$$\begin{aligned} \nabla \times (f_u \mathbf{e}_u) &= \nabla (h_u f_u) \times \nabla u \\ &= \frac{1}{h_w h_u} \frac{\partial}{\partial w} (h_u f_u) \mathbf{e}_v - \frac{1}{h_u h_v} \frac{\partial}{\partial v} (h_u f_u) \mathbf{e}_w. \end{aligned} \tag{5.56}$$

De modo similar, o por cambio cíclico de índices,

$$\nabla \times (f_v \mathbf{e}_v) = \frac{1}{h_u h_v} \frac{\partial}{\partial u} (h_v f_v) \mathbf{e}_w - \frac{1}{h_v h_w} \frac{\partial}{\partial w} (h_v f_v) \mathbf{e}_u, \tag{5.57}$$

$$\nabla \times (f_w \mathbf{e}_w) = \frac{1}{h_v h_w} \frac{\partial}{\partial v} (h_w f_w) \mathbf{e}_u - \frac{1}{h_w h_u} \frac{\partial}{\partial u} (h_w f_w) \mathbf{e}_v. \tag{5.58}$$

Sumando (5.56–8), obtenemos (5.47).

Obsérvese que (5.47) se puede escribir también como

$$\nabla \times \mathbf{f} = \frac{1}{h_u h_v h_w} \begin{vmatrix} h_u \mathbf{e}_u & h_v \mathbf{e}_v & h_w \mathbf{e}_w \\ \dfrac{\partial}{\partial u} & \dfrac{\partial}{\partial v} & \dfrac{\partial}{\partial w} \\ h_u f_u & h_v f_v & h_w f_w \end{vmatrix} \quad [5.47]$$

PROBLEMA 5.16 Usando la definición de divergencia dada por

$$\nabla \cdot \mathbf{f} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \oiint_S \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S}, \qquad [4.47]$$

deducir (5.45).

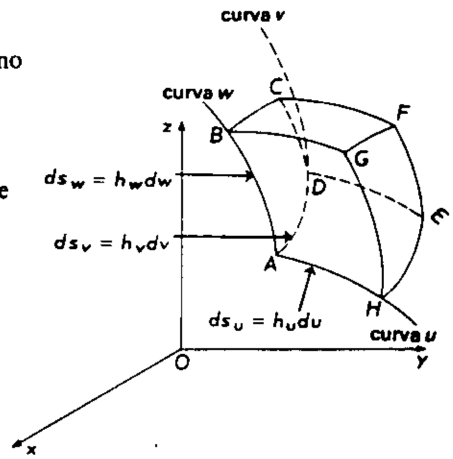


Figura 5.2 Elemento de volumen curvilíneo.

Solución: Sea $P(u, v, w)$ el punto central del elemento de volumen curvilíneo dV, como se muestra en la figura 5.2, y sea

$$dV = h_u h_v h_w \; du dv dw. \qquad [5.30]$$

Si $\mathbf{f} = f_u \mathbf{e}_u + f_v \mathbf{e}_v + f_w \mathbf{e}_w$, entonces el flujo para la normal externa a través de la superficie $ABCD$ para u constante es

$$-f_u h_v h_w \, dv dw + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u} (f_u h_v h_w) \, du dv dw, \qquad (5.60)$$

y a través de la superficie $EFGH$ es

$$f_u h_v h_w \, dv dw + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u} (f_u h_v h_w) \, du dv dw. \qquad (5.61)$$

(Desechamos los infinitésimos de orden superior.) Sumando (5.60) y (5.61), el flujo de salida a través de las dos superficies para u constante, es

$$\frac{\partial}{\partial u} (f_u h_v h_w) \, du dv dw. \qquad (5.62)$$

Sumando los resultados semejantes para las otras dos parejas de superficies,

$$\oiint_S \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \left[\frac{\partial}{\partial u} (f_u h_v h_w) + \frac{\partial}{\partial v} (f_v h_w h_u) + \frac{\partial}{\partial w} (f_w h_u h_v) \right] du dv dw. \qquad (5.63)$$

Dividiendo (5.63) por dV, dado en (5.30), se obtiene

$$\nabla \cdot \mathbf{f} = \frac{1}{h_u h_v h_w} \left[\frac{\partial}{\partial u} (f_u h_v h_w) + \frac{\partial}{\partial v} (f_v h_w h_u) + \frac{\partial}{\partial w} (f_w h_u h_v) \right]. \qquad [5.45]$$

PROBLEMA 5.17 Usando la definición de rotacional dada por

$$\mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{f}) = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{1}{\Delta S} \oint_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}, \qquad [4.50]$$

deducir (5.47).

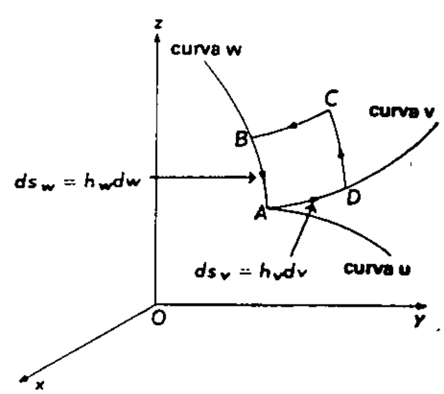


Figura 5.3 Elemento curvilíneo de superficie.

Solución: Sea $\mathbf{f} = f_u \mathbf{e}_u + f_v \mathbf{e}_v + f_w \mathbf{e}_w$; se calcula primero $\mathbf{e}_u \cdot (\nabla \times \mathbf{f})$. Considérese una curva cerrada C_u $(ADCB)$ de la superficie u = constante, como se muestra en la figura 5.3. El elemento de superficie dS encerrado por C_u es

$$dS = h_v h_w \, dv dw. \qquad (5.64)$$

La circulación alrededor de la curva cerrada C_u es

$$\oint_{C_u} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \int_A^D \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} + \int_D^C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} + \int_C^B \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} + \int_B^A \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}.$$

Descartando los infinitésimos de orden superior,

$$\int_A^D \mathbf{f}\cdot d\mathbf{r} = f_v h_v\, dv,$$

$$\int_D^C \mathbf{f}\cdot d\mathbf{r} = \left[f_w h_w + \frac{\partial}{\partial v}(f_w h_w)\, dv\right] dw,$$

$$\int_C^B \mathbf{f}\cdot d\mathbf{r} = -\left[f_v h_v + \frac{\partial}{\partial w}(f_v h_v)\, dw\right] dv,$$

$$\int_B^A \mathbf{f}\cdot d\mathbf{r} = -f_w h_w\, dw.$$

Sumando estos resultados se obtiene

$$\oint_{C_u} \mathbf{f}\cdot d\mathbf{r} = \left[\frac{\partial}{\partial v}(f_w h_w) - \frac{\partial}{\partial w}(f_v h_v)\right] dv dw. \tag{5.65}$$

Dividiendo (5.65) por dS, dado por (5.64),

$$\mathbf{e}_u \cdot (\nabla \times \mathbf{f}) = \frac{1}{h_v h_w}\left[\frac{\partial}{\partial v}(f_w h_w) - \frac{\partial}{\partial w}(f_v h_v)\right]. \tag{5.66}$$

Por la permutación cíclica de los índices se obtienen las dos componentes restantes de $\nabla \times$ f. En consecuencia,

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{f} = {} & \frac{1}{h_v h_w}\left[\frac{\partial}{\partial v}(f_w h_w) - \frac{\partial}{\partial w}(f_v h_v)\right]\mathbf{e}_u \\ & + \frac{1}{h_w h_u}\left[\frac{\partial}{\partial w}(f_u h_u) - \frac{\partial}{\partial u}(f_w h_w)\right]\mathbf{e}_v \\ & + \frac{1}{h_u h_v}\left[\frac{\partial}{\partial u}(f_v h_v) - \frac{\partial}{\partial v}(f_u h_u)\right]\mathbf{e}_w. \qquad [5.47]\end{aligned}$$

5.4 Sistemas coordenados especiales

5.4a Coordenadas cartesianas rectangulares (x, y, z)

Como $u = x, v = y, w = z$ para las coordenadas [illegible] factores de escala son

$$h_u = h_x = 1, \quad h_v = h_y = 1, \quad h_w = h_z = 1.$$

Las superficies coordenadas para este sistema son

$$x = \text{const}, \; y = \text{const}, \; z = \text{const}.$$

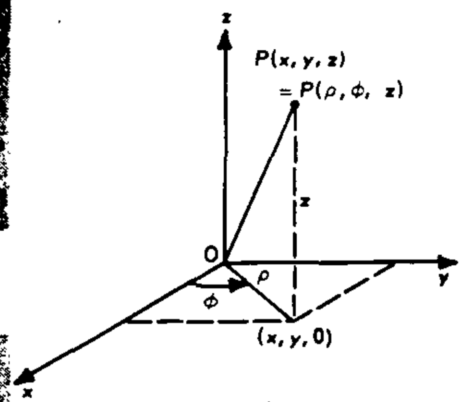
Sea $\psi = \psi(x, y, z)$ y $\mathbf{f} = f_1\mathbf{i} + f_2\mathbf{j} + f_3\mathbf{k}$. Entonces por (3.110), (3.127), [illegible] el gradiente de ϕ, la divergencia y rotacional de f y el laplaciano de ψ son [illegible]

$$\nabla\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\psi}{\partial z}\mathbf{k},$$

$$\nabla\cdot\mathbf{f} = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z},$$

$$\nabla \times \mathbf{f} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} \tag{5.70}$$

$$\nabla^2\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} \tag{5.71}$$



(a)

5.4b Coordenadas cilíndricas circulares (ρ, ϕ, z)

Como $u = \rho$, $v = \phi$, $w = z$ con $0 \leq \rho < \infty$, $0 \leq \phi < 2\pi$, $-\infty < z < \infty$ para las coordenadas cilíndricas circulares, por la figura 5.4, la transformación de coordenadas rectangulares a cilíndricas es

$$x = \rho\cos\phi, \quad y = \rho \operatorname{sen}\phi, \quad z = z. \tag{5.72}$$

La superficie coordenada para los cilindros circulares que tengan a z como eje común es

$$\rho = (x^2 + y^2)^{1/2} = \text{const.},$$

para el semiplano que pasa por el eje z,

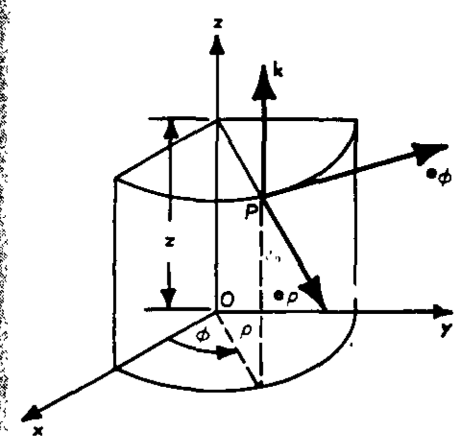
$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \text{const.},$$

y para el plano paralelo al plano xy,

$$z = \text{const.}$$

Por los resultados del problema 5.8, los factores de escala son

$$h_u = h_\rho = 1, \quad h_v = h_\phi = \rho, \quad h_w = h_z = 1. \tag{5.73}$$



(b)

Figura 5.4 Coordenadas cilíndricas circulares.

PROBLEMA 5.18 Para coordenadas cilíndricas circulares (ρ, ϕ, z), si $\psi = \psi(\rho, \phi, z)$, $\mathbf{f} = f_\rho \mathbf{e}_\rho + f_\phi \mathbf{e}_\phi + f_3 \mathbf{k}$, calcular (a) $(ds)^2$, (b) dV, (c) $\nabla\psi$, (d) $\nabla \cdot \mathbf{f}$, (e) $\nabla \times \mathbf{f}$, (f) $\nabla^2\psi$.

Solución: Por (5.29), (5.30), (5.44), (5.45), (5.59) y (5.46),

(a) $$(ds)^2 = (d\rho)^2 + (\rho\, d\phi)^2 + (dz)^2; \tag{5.74}$$

(b) $$dV = \rho\, d\rho d\phi dz; \tag{5.75}$$

(c) $$\nabla\psi = \frac{\partial\psi}{\partial\rho}\mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\mathbf{e}_\phi + \frac{\partial\psi}{\partial z}\mathbf{k}; \tag{5.76}$$

(d) $$\nabla \cdot \mathbf{f} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho f_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f_\phi}{\partial\phi} + \frac{\partial f_3}{\partial z}; \tag{5.77}$$

(e) $$\nabla \times \mathbf{f} = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \mathbf{e}_\rho & \rho\mathbf{e}_\phi & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial\rho} & \dfrac{\partial}{\partial\phi} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ f_\rho & f_\phi & f_3 \end{vmatrix} \tag{5.78}$$

$$= \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial f_3}{\partial\phi} - \frac{\partial f_\phi}{\partial z}\right)\mathbf{e}_\rho + \left(\frac{\partial f_\rho}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial\rho}\right)\mathbf{e}_\phi + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial f_\phi}{\partial\rho} - \frac{\partial f_\rho}{\partial\phi}\right)\mathbf{k}; \tag{5.79}$$

(f) $$\nabla^2\psi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}. \tag{5.80}$$

PROBLEMA 5.19 Hallar las relaciones entre $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ del sistema de coordenadas cartesianas rectangulares y $\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\phi, \mathbf{k}$ del sistema coordenado cilíndrico circular.

Solución: Por los resultados del problema 5.8,

$$\mathbf{e}_\rho = \cos\phi\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\phi\,\mathbf{j}, \tag{5.81a}$$

$$\mathbf{e}_\phi = -\operatorname{sen}\phi\,\mathbf{i} + \cos\phi\,\mathbf{j}, \tag{5.81b}$$

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}. \tag{5.81c}$$

Por (2.70),

$$\mathbf{e}_\rho = (\mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{i})\mathbf{i} + (\mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{j})\mathbf{j} + (\mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{k})\mathbf{k}, \tag{5.82a}$$

$$\mathbf{e}_\phi = (\mathbf{e}_\phi \cdot \mathbf{i})\mathbf{i} + (\mathbf{e}_\phi \cdot \mathbf{j})\mathbf{j} + (\mathbf{e}_\phi \cdot \mathbf{k})\mathbf{k}. \tag{5.82b}$$

Comparando (5.81) y (5.82),

$$\begin{array}{lll} \mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{i} = \cos\phi, & \mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{j} = \operatorname{sen}\phi, & \mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{k} = 0, \\ \mathbf{e}_\phi \cdot \mathbf{i} = -\operatorname{sen}\phi, & \mathbf{e}_\phi \cdot \mathbf{j} = \cos\phi, & \mathbf{e}_\phi \cdot \mathbf{k} = 0. \end{array} \tag{5.83}$$

La tabla 5.1 muestra los resultados de (5.83) en forma tabular.

TABLA 5.1 Relación entre vectores base rectangulares y cilíndricos.

$\cdot$	$\mathbf{i}$	$\mathbf{j}$	$\mathbf{k}$
$\mathbf{e}_\rho$	$\cos\phi$	$\operatorname{sen}\phi$	0
$\mathbf{e}_\phi$	$-\operatorname{sen}\phi$	$\cos\phi$	0
$\mathbf{k}$	0	0	1

Obsérvese que (5.83) puede obtenerse también de la figura 5.4 aplicando la definición de producto punto (1.25).

Usando (5.83), $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ en términos de $\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\phi, \mathbf{k}$ son

$$\begin{aligned} \mathbf{i} &= (\mathbf{i} \cdot \mathbf{e}_\rho)\mathbf{e}_\rho + (\mathbf{i} \cdot \mathbf{e}_\phi)\mathbf{e}_\phi + (\mathbf{i} \cdot \mathbf{k})\mathbf{k} \\ &= \cos\phi\,\mathbf{e}_\rho - \operatorname{sen}\phi\,\mathbf{e}_\phi, \end{aligned} \tag{5.84a}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{j} &= (\mathbf{j} \cdot \mathbf{e}_\rho)\mathbf{e}_\rho + (\mathbf{j} \cdot \mathbf{e}_\phi)\mathbf{e}_\phi + (\mathbf{j} \cdot \mathbf{k})\mathbf{k} \\ &= \operatorname{sen}\phi\,\mathbf{e}_\rho + \cos\phi\,\mathbf{e}_\phi, \end{aligned} \tag{5.84b}$$

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}. \tag{5.84c}$$

Usando notación matricial, las transformaciones entre $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ y $\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\phi, \mathbf{k}$, (5.81) y (5.84) pueden escribirse respectivamente como

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_\rho \\ \mathbf{e}_\phi \\ \mathbf{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \operatorname{sen}\phi & 0 \\ -\operatorname{sen}\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{bmatrix}, \tag{5.85}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\operatorname{sen}\phi & 0 \\ \operatorname{sen}\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_\rho \\ \mathbf{e}_\phi \\ \mathbf{k} \end{bmatrix}. \tag{5.86}$$

Debe recalcarse que los vectores unitarios $\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\phi$ varían en dirección de punto a puntc

PROBLEMA 5.20 Si

$$\mathbf{f} = f_1\mathbf{i} + f_2\mathbf{j} + f_3\mathbf{k} = f_\rho\mathbf{e}_\rho + f_\phi\mathbf{e}_\phi + f_3\mathbf{k}, \tag{5.87}$$

hallar la relación entre f_1, f_2, f_3 y f_ρ, f_ϕ, f_3.

Solución: Usando (5.84),

$$\begin{aligned}
\mathbf{f} &= f_1\mathbf{i} + f_2\mathbf{j} + f_3\mathbf{k}\\
&= f_1(\cos\phi\,\mathbf{e}_\rho - \operatorname{sen}\phi\,\mathbf{e}_\phi) + f_2(\operatorname{sen}\phi\,\mathbf{e}_\rho + \cos\phi\,\mathbf{e}_\phi) + f_3\mathbf{k}\\
&= (f_1\cos\phi + f_2\operatorname{sen}\phi)\mathbf{e}_\rho + (-f_1\operatorname{sen}\phi + f_2\cos\phi)\mathbf{e}_\phi + f_3\mathbf{k}.
\end{aligned}\tag{5.88}$$

Como $\mathbf{f} = f_\rho\mathbf{e}_\rho + f_\phi\mathbf{e}_\phi + f_3\mathbf{k}$, comparando coeficientes se obtiene

$$f_\rho = f_1\cos\phi + f_2\operatorname{sen}\phi, \tag{5.89a}$$

$$f_\phi = -f_1\operatorname{sen}\phi + f_2\cos\phi, \tag{5.89b}$$

$$f_3 = f_3. \tag{5.89c}$$

De modo similar, usando (5.81),

$$\begin{aligned}
\mathbf{f} &= f_\rho\mathbf{e}_\rho + f_\phi\mathbf{e}_\phi + f_3\mathbf{k}\\
&= f_\rho(\cos\phi\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\phi\,\mathbf{j}) + f_\phi(-\operatorname{sen}\phi\,\mathbf{i} + \cos\phi\,\mathbf{j}) + f_3\mathbf{k}\\
&= (f_\rho\cos\phi - f_\phi\operatorname{sen}\phi)\mathbf{i} + (f_\rho\operatorname{sen}\phi + f_\phi\cos\phi)\mathbf{j} + f_3\mathbf{k}.
\end{aligned}$$

Otra vez, puesto que $\mathbf{f} = f_1\mathbf{i} + f_2\mathbf{j} + f_3\mathbf{k}$, comparando coeficientes se obtiene

$$f_1 = f_\rho\cos\phi - f_\phi\operatorname{sen}\phi, \tag{5.90a}$$

$$f_2 = f_\rho\operatorname{sen}\phi + f_\phi\cos\phi, \tag{5.90b}$$

$$f_3 = f_3. \tag{5.90c}$$

En notación matricial, (5.89) y (5.90) pueden expresarse respectivamente como

$$\begin{bmatrix} f_\rho \\ f_\phi \\ f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \operatorname{sen}\phi & 0 \\ -\operatorname{sen}\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}, \tag{5.91}$$

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\operatorname{sen}\phi & 0 \\ \operatorname{sen}\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_\rho \\ f_\phi \\ f_3 \end{bmatrix}. \tag{5.92}$$

Comparando (5.85) y (5.91), (5.86) y (5.92) observamos que las transformaciones de los vectores base y las componentes de un vector tienen la misma matriz.

PROBLEMA 5.21 Transformar $\mathbf{f} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ en coordenadas cilíndricas circulares.

Solución: Como $f_1 = x$, $f_2 = y$ y $f_3 = z$, por (5.89),

$$\begin{aligned}
f_\rho &= f_1\cos\phi + f_2\operatorname{sen}\phi = x\cos\phi + y\operatorname{sen}\phi,\\
f_\phi &= -f_1\operatorname{sen}\phi + f_2\cos\phi = -x\operatorname{sen}\phi + y\cos\phi,\\
f_3 &= f_3 = z.
\end{aligned}$$

Sustituyendo $x = \rho\cos\phi$ y $y = \rho\operatorname{sen}\phi$,

$$\begin{aligned}
f_\rho &= \rho\cos^2\phi + \rho\operatorname{sen}^2\phi = \rho(\cos^2\phi + \operatorname{sen}^2\phi) = \rho,\\
f_\phi &= -\rho\cos\phi\operatorname{sen}\phi + \rho\operatorname{sen}\phi\cos\phi = 0,\\
f_3 &= z.
\end{aligned}$$

Por consiguiente, $\mathbf{f} = \rho\,\mathbf{e}_\rho + z\mathbf{k}$.

Solución alterna: Usando (5.84),

$$\begin{aligned}\mathbf{f} &= x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}\\ &= x(\cos\phi\,\mathbf{e}_\rho - \operatorname{sen}\phi\,\mathbf{e}_\phi) + y(\operatorname{sen}\phi\,\mathbf{e}_\rho + \cos\phi\,\mathbf{e}_\phi) + z\,\mathbf{k}\\ &= (x\cos\phi + y\operatorname{sen}\phi)\mathbf{e}_\rho + (-x\operatorname{sen}\phi + y\cos\phi)\mathbf{e}_\phi + z\mathbf{k}.\end{aligned}$$

Sustituyendo $x = \rho\cos\phi$ e $y = \rho\operatorname{sen}\phi$,

$$\begin{aligned}f &= \rho(\cos^2\phi + \operatorname{sen}^2\phi)\mathbf{e}_\rho + (-\rho\cos\phi\operatorname{sen}\phi + \rho\operatorname{sen}\phi\cos\phi)\mathbf{e}_\phi + z\mathbf{k}\\ &= \rho\mathbf{e}_\rho + z\mathbf{k}.\end{aligned}$$

PROBLEMA 5.22 Transformar $\mathbf{f} = \dfrac{1}{\rho}\,\mathbf{e}_\rho$ en coordenadas cartesianas rectangulares.

Solución: Como $f_\rho = 1/\rho$, $f_\phi = 0$, y $f_3 = 0$, por (5.90),

$$f_1 = f_\rho\cos\phi - f_\phi\operatorname{sen}\phi = \frac{1}{\rho}\cos\phi,$$

$$f_2 = f_\rho\operatorname{sen}\phi + f_\phi\cos\phi = \frac{1}{\rho}\operatorname{sen}\phi,$$

$$f_3 = f_3 = 0.$$

Sustituyendo $\rho = (x^2 + y^2)^{1/2}$, $\cos\phi = \dfrac{x}{\rho} = \dfrac{x}{(x^2+y^2)^{1/2}}$, y seno n $\phi = \dfrac{y}{\rho} = \dfrac{y}{(x^2+y^2)^{1/2}}$,

$$f_1 = \frac{x}{\rho^2} = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad f_2 = \frac{y}{\rho^2} = \frac{y}{x^2+y^2}.$$

Por consiguiente,

$$\mathbf{f} = \frac{x}{(x^2+y^2)}\,\mathbf{i} + \frac{y}{(x^2+y^2)}\,\mathbf{j}.$$

Solución alterna: Usando (5.81),

$$\mathbf{f} = \frac{1}{\rho}\,\mathbf{e}_\rho = \frac{1}{\rho}(\cos\phi\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\phi\,\mathbf{j}) = \frac{\cos\phi}{\rho}\,\mathbf{i} + \frac{\operatorname{sen}\phi}{\rho}\,\mathbf{j}.$$

Por consiguiente, sustituyendo $\cos\phi = x/\rho$, $\operatorname{sen}\phi = y/\rho$, y $\rho^2 = x^2 + y^2$,

$$f = \frac{x}{\rho^2}\,\mathbf{i} + \frac{y}{\rho^2}\,\mathbf{j} = \frac{x}{x^2+y^2}\,\mathbf{i} + \frac{y}{x^2+y^2}\,\mathbf{j}.$$

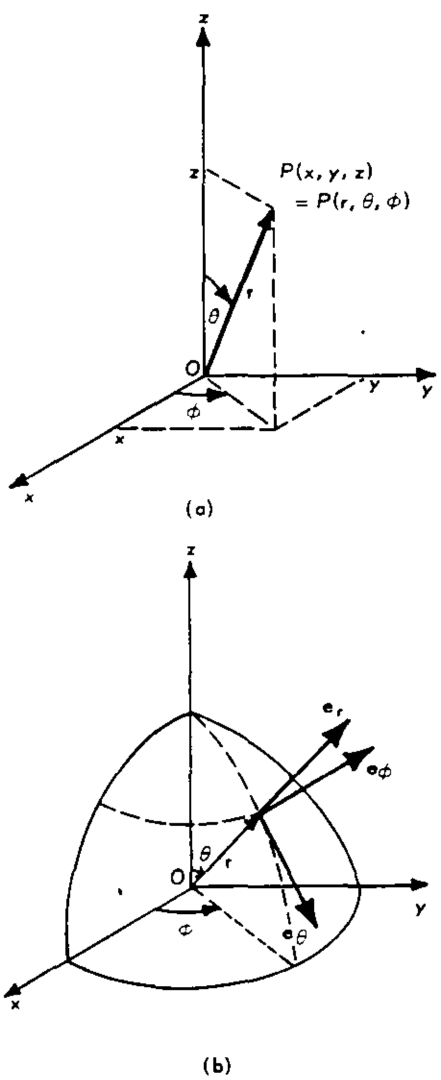


Figura 5.5 Coordenadas esféricas.

5.4c Coordenadas esféricas (r, θ, ϕ)

Como $u = r$, $v = \theta$, $w = \phi$ con $0 \leq r < \infty$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \phi < 2\pi$ por la figura 5.5, la *transformación* de las coordenadas rectangulares a las esféricas es

$$x = r\operatorname{sen}\theta\cos\phi, \quad y = r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi, \quad z = r\cos\theta. \qquad [illegible]$$

La *superficie coordenada* para las esferas concéntricas centradas en el origen es,

$$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} = \text{const},$$

para conos circulares centrados en el eje z y con vértices en el origen es,

$$\theta = \cos^{-1}\left[\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}\right] = \text{const},$$

y para el semiplano que pasa por el eje z es

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \text{const.}$$

Por los resultados del problema 5.9, los factores de escala son

$$h_u = h_r = 1, \quad h_v = h_\theta = r, \quad h_w = h_\phi = r \operatorname{sen}\theta. \qquad (5.94)$$

PROBLEMA 5.23 Para las coordenadas esféricas $(\mathbf{r}, \theta, \phi)$, si $\psi = \psi(r, \theta, \phi)$ y $\mathbf{f} = f_r \mathbf{e}_r + f_\theta \mathbf{e}_\theta + f_\phi \mathbf{e}_\phi$, calcular (a) $(ds)^2$, (b) dV, (c) $\nabla\psi$, (d) $\nabla \cdot \mathbf{f}$, (e) $\nabla \times \mathbf{f}$, (f) $\nabla^2\psi$.

Solución: Por (5.29), (5.30), (5.44), (5.45), (5.46), y (5.59),

(a)
$$(ds)^2 = (dr)^2 + (r\, d\theta)^2 + (r \operatorname{sen}\theta\, d\phi)^2; \qquad (5.95)$$

(b)
$$dV = r^2 \operatorname{sen}\theta\, dr d\theta d\phi;$$

(c)
$$\nabla\psi = \frac{\partial\psi}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\mathbf{e}_\phi; \qquad (5.96)$$

(d)
$$\nabla\cdot\mathbf{f} = \frac{1}{r^2\operatorname{sen}\theta}\left[\operatorname{sen}\theta\frac{\partial}{\partial r}(r^2 f_r) + r\frac{\partial}{\partial\theta}(\operatorname{sen}\theta\, f_\theta) + r\frac{\partial f_\phi}{\partial\phi}\right]$$

$$= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 f_r) + \frac{1}{r\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\operatorname{sen}\theta\, f_\theta) + \frac{1}{r\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial f_\phi}{\partial\phi}; \qquad (5.97)$$

(e)
$$\nabla\times\mathbf{f} = \frac{1}{r^2\operatorname{sen}\theta}\begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & r\mathbf{e}_\theta & r\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{e}_\phi \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial\theta} & \dfrac{\partial}{\partial\phi} \\ f_r & rf_\theta & r\operatorname{sen}\theta\, f_\phi \end{vmatrix}, \qquad (5.98)$$

por tanto

$$\nabla\times\mathbf{f} = \frac{1}{r\operatorname{sen}\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\operatorname{sen}\theta\, f_\phi) - \frac{\partial f_\theta}{\partial\phi}\right]\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial f_r}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial r}(rf_\phi)\right]\mathbf{e}_\theta$$

$$+ \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rf_\theta) - \frac{\partial f_r}{\partial\theta}\right]\mathbf{e}_\phi; \qquad (5.99)$$

(f)
$$\nabla^2\psi = \frac{1}{r^2\operatorname{sen}\theta}\left[\operatorname{sen}\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}\right]$$

$$= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}. \qquad (5.100)$$

PROBLEMA 5.24 Usando (5.96–100), deducir

(a)
$$\nabla f(r) = f'(r)\mathbf{e}_r, \qquad [3.165]$$

(b)
$$\nabla\cdot[f(r)\mathbf{r}] = 3f(r) + rf'(r), \qquad [3.166]$$

(c)
$$\nabla\times[f(r)\mathbf{r}] = \mathbf{0}, \qquad [3.169]$$

(d)
$$\nabla^2 f(r) = \frac{2}{r}f'(r) + f''(r). \qquad [3.170]$$

Solución: (a) Por (5.96),

$$\nabla f(r) = \frac{\partial f(r)}{\partial r}\mathbf{e}_r = f'(r)\mathbf{e}_r.$$

(b) Como $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$ y $f(r)\mathbf{r} = rf(r)\mathbf{e}_r$, entonces por (5.97),

$$
\begin{aligned}
\nabla\cdot[f(r)\mathbf{r}] &= \nabla\cdot[rf(r)\mathbf{e}_r] \\
&= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}[r^3 f(r)] \\
&= \frac{1}{r^2}[3r^2 f(r) + r^3 f'(r)] \\
&= 3f(r) + rf'(r).
\end{aligned}
$$

(c) Por (5.98),

$$
\begin{aligned}
\nabla\times[f(r)\mathbf{r}] &= \nabla\times[rf(r)\mathbf{e}_r] \\
&= \frac{1}{r^2\,\mathrm{sen}\,\theta}\begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & r\mathbf{e}_\theta & r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathbf{e}_\phi \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \theta} & \dfrac{\partial}{\partial \phi} \\ rf(r) & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
&= \mathbf{0}.
\end{aligned}
$$

(d) Por (5.100),

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 f(r) &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f(r)}{\partial r}\right) \\
&= \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}[r^2 f'(r)] \\
&= \frac{1}{r^2}[2rf'(r) + r^2 f''(r)] \\
&= \frac{2}{r}f'(r) + f''(r).
\end{aligned}
$$

PROBLEMA 5.25 Hallar las relaciones entre **i**, **j**, **k** del sistema coordenado cartesiano rectangular y $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{e}_\phi$ del sistema coordenado esférico.

Solución: Por los resultados del problema 5.9,

$$\mathbf{e}_r = \mathrm{sen}\,\theta\cos\phi\,\mathbf{i} + \mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi\,\mathbf{j} + \cos\theta\,\mathbf{k}, \tag{5.101a}$$

$$\mathbf{e}_\theta = \cos\theta\cos\phi\,\mathbf{i} + \cos\theta\,\mathrm{sen}\,\phi\,\mathbf{j} - \mathrm{sen}\,\theta\,\mathbf{k}, \tag{5.101b}$$

$$\mathbf{e}_\phi = -\,\mathrm{sen}\,\phi\,\mathbf{i} + \cos\phi\,\mathbf{j}. \tag{5.101c}$$

Por (2.70),

$$\mathbf{e}_r = (\mathbf{e}_r\cdot\mathbf{i})\mathbf{i} + (\mathbf{e}_r\cdot\mathbf{j})\mathbf{j} + (\mathbf{e}_r\cdot\mathbf{k})\mathbf{k}, \tag{5.102a}$$

$$\mathbf{e}_\theta = (\mathbf{e}_\theta\cdot\mathbf{i})\mathbf{i} + (\mathbf{e}_\theta\cdot\mathbf{j})\mathbf{j} + (\mathbf{e}_\theta\cdot\mathbf{k})\mathbf{k}, \tag{5.102b}$$

$$\mathbf{e}_\phi = (\mathbf{e}_\phi\cdot\mathbf{i})\mathbf{i} + (\mathbf{e}_\phi\cdot\mathbf{j})\mathbf{j} + (\mathbf{e}_\phi\cdot\mathbf{k})\mathbf{k}. \tag{5.102c}$$

Comparando (5.101) y (5.102),

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{e}_r\cdot\mathbf{i} = \mathrm{sen}\,\theta\cos\phi, \quad \mathbf{e}_r\cdot\mathbf{j} = \mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi, \quad \mathbf{e}_r\cdot\mathbf{k} = \cos\theta, \\
&\mathbf{e}_\theta\cdot\mathbf{i} = \cos\theta\cos\phi, \quad \mathbf{e}_\theta\cdot\mathbf{j} = \cos\theta\sin\phi, \quad \mathbf{e}_\theta\cdot\mathbf{k} = -\,\mathrm{sen}\,\theta, \\
&\mathbf{e}_\phi\cdot\mathbf{i} = -\,\mathrm{sen}\,\phi, \quad \mathbf{e}_\phi\cdot\mathbf{j} = \cos\phi, \quad \mathbf{e}_\phi\cdot\mathbf{k} = 0.
\end{aligned}
\tag{5.103}
$$

Los resultados de (5.103) están tabulados en la tabla 5.2. Las relaciones (5.103) se pueden obtener también de la figura 5.5 aplicando la definición del producto punto (1.25).

TABLA 5.2 Relación entre vectores base rectangulares y esféricos.

·	$\mathbf{i}$	$\mathbf{j}$	$\mathbf{k}$
$\mathbf{e}_r$	$\text{sen}\ \theta \cos\phi$	$\text{sen}\ \theta\ \text{sen}\ \phi$	$\cos\theta$
$\mathbf{e}_\theta$	$\cos\theta\cos\phi$	$\cos\theta\ \text{sen}\ \phi$	$-\text{sen}\ \theta$
$\mathbf{e}_\phi$	$-\text{sen}\ \phi$	$\cos\phi$	0

Usando (5.103) podemos expresar ahora $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ en términos de $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi$, i.e.,

$$\begin{aligned} \mathbf{i} &= (\mathbf{i}\cdot\mathbf{e}_r)\mathbf{e}_r + (\mathbf{i}\cdot\mathbf{e}_\theta)\mathbf{e}_\theta + (\mathbf{i}\cdot\mathbf{e}_\phi)\mathbf{e}_\phi \\ &= \text{sen}\ \theta\cos\phi\ \mathbf{e}_r + \cos\theta\cos\phi\ \mathbf{e}_\theta - \text{sen}\ \phi\ \mathbf{e}_\phi, \end{aligned} \tag{5.104a}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{j} &= (\mathbf{j}\cdot\mathbf{e}_r)\mathbf{e}_r + (\mathbf{j}\cdot\mathbf{e}_\theta)\mathbf{e}_\theta + (\mathbf{j}\cdot\mathbf{e}_\phi)\mathbf{e}_\phi \\ &= \text{sen}\ \theta\ \text{sen}\ \phi\ \mathbf{e}_r + \cos\theta\ \text{sen}\ \phi\ \mathbf{e}_\theta + \cos\phi\ \mathbf{e}_\phi, \end{aligned} \tag{5.104b}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{k} &= (\mathbf{k}\cdot\mathbf{e}_r)\mathbf{e}_r + (\mathbf{k}\cdot\mathbf{e}_\theta)\mathbf{e}_\theta + (\mathbf{k}\cdot\mathbf{e}_\phi)\mathbf{e}_\phi \\ &= \cos\theta\ \mathbf{e}_r - \text{sen}\ \theta\ \mathbf{e}_\theta. \end{aligned} \tag{5.104c}$$

Obsérvese que los vectores unitarios $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi$ varían en dirección de punto a punto mientras que los vectores unitarios $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ mantienen sus direcciones fijas.

En notación matricial, las transformaciones entre $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ y $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi$, (5.101) y (5.104) pueden escribirse, respectivamente, como

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_r \\ \mathbf{e}_\theta \\ \mathbf{e}_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{sen}\ \theta\cos\phi & \text{sen}\ \theta\ \text{sen}\ \phi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\phi & \cos\theta\ \text{sen}\ \phi & -\text{sen}\ \theta \\ -\text{sen}\ \phi & \cos\phi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{bmatrix}, \tag{5.105}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{sen}\ \theta\cos\phi & \cos\theta\cos\phi & -\text{sen}\ \phi \\ \text{sen}\ \theta\ \text{sen}\ \phi & \cos\theta\ \text{sen}\ \phi & \cos\phi \\ \cos\theta & -\text{sen}\ \theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_r \\ \mathbf{e}_\theta \\ \mathbf{e}_\phi \end{bmatrix}. \tag{5.106}$$

PROBLEMA 5.26 Hallar las relaciones entre $f_1\ f_2, f_3$ y f_r, f_θ, f_ϕ, si

$$\mathbf{f} = f_1\mathbf{i} + f_2\mathbf{j} + f_3\mathbf{k} = f_r\mathbf{e}_r + f_\theta\mathbf{e}_\theta + f_\phi\mathbf{e}_\phi. \tag{5.107}$$

Solución: Usando (5.104),

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= f_1\mathbf{i} + f_2\mathbf{j} + f_3\mathbf{k} \\ &= f_1(\text{sen}\ \theta\cos\phi\ \mathbf{e}_r + \cos\theta\cos\phi\ \mathbf{e}_\theta - \text{sen}\ \phi\ \mathbf{e}_\phi) \\ &\quad + f_2(\text{sen}\ \theta\ \text{sen}\ \phi\ \mathbf{e}_r + \cos\theta\ \text{sen}\ \phi\ \mathbf{e}_\theta + \cos\phi\ \mathbf{e}_\phi) \\ &\quad + f_3(\cos\theta\ \mathbf{e}_r - \text{sen}\ \theta\ \mathbf{e}_\theta) \\ &= (f_1\ \text{sen}\ \theta\cos\phi + f_2\ \text{sen}\ \theta\ \text{sen}\ \phi + f_3\cos\theta)\mathbf{e}_r \\ &\quad + (f_1\cos\theta\cos\phi + f_2\cos\theta\ \text{sen}\ \phi - f_3\ \text{sen}\ \theta)\mathbf{e}_\theta \\ &\quad + (-f_1\ \text{sen}\ \phi + f_2\cos\phi)\mathbf{e}_\phi. \end{aligned} \tag{5.108}$$

Como $\mathbf{f} = f_r\mathbf{e}_r + f_\theta\mathbf{e}_\theta + f_\phi\mathbf{e}_\phi$, comparando coeficientes se obtiene

$$f_r = f_1\ \text{sen}\ \theta\cos\phi + f_2\ \text{sen}\ \theta\ \text{sen}\ \phi + f_3\cos\theta, \tag{5.109a}$$

$$f_\theta = f_1\cos\theta\cos\phi + f_2\cos\theta\ \text{sen}\ \phi - f_3\ \text{sen}\ \theta, \tag{5.109b}$$

$$f_\phi = -f_1\ \text{sen}\ \phi + f_2\cos\phi. \tag{5.109c}$$

De manera similar, usando (5.101),

$$
\begin{aligned}
\mathbf{f} &= f_r \mathbf{e}_r + f_\theta \mathbf{e}_\theta + f_\phi \mathbf{e}_\phi \\
&= f_r(\operatorname{sen}\theta \cos\phi\, \mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi\, \mathbf{j} + \cos\theta\, \mathbf{k}) \\
&\quad + f_\theta(\cos\theta\cos\phi\, \mathbf{i} + \cos\theta \operatorname{sen}\phi\, \mathbf{j} - \operatorname{sen}\theta\, \mathbf{k}) \\
&\quad + f_\phi(-\operatorname{sen}\phi\, \mathbf{i} + \cos\phi\, \mathbf{j}) \\
&= (f_r \operatorname{sen}\theta\cos\phi + f_\theta\cos\theta\cos\phi - f_\phi \operatorname{sen}\phi)\mathbf{i} \\
&\quad + (f_r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi + f_\theta \cos\theta \operatorname{sen}\phi + f_\phi\cos\phi)\mathbf{j} \\
&\quad + (f_r\cos\theta - f_\theta \operatorname{sen}\theta)\mathbf{k}.
\end{aligned}
$$

Otra vez, puesto que $\mathbf{f} = f_1\mathbf{i} + f_2\mathbf{j} + f_3\mathbf{k}$, la comparación de coeficientes da

$$f_1 = f_r \operatorname{sen}\theta\cos\phi + f_\theta\cos\theta\cos\phi - f_\phi \operatorname{sen}\phi, \tag{5.110a}$$

$$f_2 = f_r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi + f_\theta\cos\theta \operatorname{sen}\phi + f_\phi\cos\phi, \tag{5.110b}$$

$$f_3 = f_r\cos\theta - f_\theta \operatorname{sen}\theta. \tag{5.110c}$$

En notación matricial, las transformaciones (5.109) y (5.110) se pueden expresar respectivamente como

$$\begin{bmatrix} f_r \\ f_\theta \\ f_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{sen}\theta\cos\phi & \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\phi & \cos\theta \operatorname{sen}\phi & -\operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\phi & \cos\phi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}, \tag{5.111}$$

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{sen}\theta\cos\phi & \cos\theta\cos\phi & -\operatorname{sen}\phi \\ \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi & \cos\theta \operatorname{sen}\phi & \cos\phi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_r \\ f_\theta \\ f_\phi \end{bmatrix}. \tag{5.112}$$

Obsérvese de nuevo que las transformaciones de los vectores base y los componentes de un vector tienen la misma matriz.

PROBLEMA 5.27 Transformar $\mathbf{f} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ a coordenadas esféricas.

Solución: Como $f_1 = x$, $f_2 = y$, $f_3 = z$, por (5.109) ó (5.111),

$$
\begin{aligned}
f_r &= x \operatorname{sen}\theta\cos\phi + y \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi + z\cos\theta, \\
f_\theta &= x\cos\theta\cos\phi + y\cos\theta \operatorname{sen}\phi - z \operatorname{sen}\theta, \\
f_\phi &= -x \operatorname{sen}\phi + y\cos\phi.
\end{aligned}
$$

Sustituyendo $x = r \operatorname{sen}\theta\cos\phi$, $y = r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi$, y $z = r\cos\theta$,

$$
\begin{aligned}
f_r &= r \operatorname{sen}^2\theta\cos^2\phi + r \operatorname{sen}^2\theta \operatorname{sen}^2\phi + r\cos^2\theta \\
&= r \operatorname{sen}^2\theta(\cos^2\phi + \operatorname{sen}^2\phi) + r\cos^2\theta = r(\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta) \\
&= r, \\
f_\theta &= r \operatorname{sen}\theta\cos\theta\cos^2\phi + r \operatorname{sen}\theta\cos\theta \operatorname{sen}^2\phi - r\cos\theta \operatorname{sen}\theta \\
&= r \operatorname{sen}\theta\cos\theta(\cos^2\phi + \operatorname{sen}^2\phi - 1) \\
&= 0, \\
f_\phi &= -r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi\cos\phi + r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi\cos\phi \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Por consiguiente, $\mathbf{f} = f_r\mathbf{e}_r = r\mathbf{e}_r$.

PROBLEMA 5.28 Transformar $\mathbf{f} = \dfrac{1}{r \operatorname{sen}\theta}\mathbf{e}_\phi$ a coordenadas rectangulares.

Solución: Usando (5.101c),

$$\mathbf{f} = \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \mathbf{e}_\phi = \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} (-\operatorname{sen} \phi \, \mathbf{i} + \cos \phi \, \mathbf{j}) = -\frac{\operatorname{sen} \phi}{r \operatorname{sen} \theta} \mathbf{i} + \frac{\cos \phi}{r \sin \theta} \mathbf{j}.$$

Ahora por $x = r \operatorname{sen} \theta \cos \phi$, $y = r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi$, $z = r \cos \theta$

$$\operatorname{sen} \phi = \frac{y}{r \operatorname{sen} \theta}, \quad \cos \phi = \frac{x}{r \operatorname{sen} \theta}, \quad x^2 + y^2 = r^2 \operatorname{sen}^2 \theta.$$

Por consiguiente,

$$\mathbf{f} = -\frac{y}{r^2 \operatorname{sen}^2 \theta} \mathbf{i} + \frac{x}{r^2 \operatorname{sen}^2 \theta} \mathbf{j} = -\frac{y}{x^2 + y^2} \mathbf{i} + \frac{x}{x^2 + y^2} \mathbf{j}.$$

PROBLEMA 5.29 Hallar las relaciones entre $\mathbf{e}_\rho$, $\mathbf{e}_\phi$, $\mathbf{k}$ del sistema de coordenadas cilíndricas circulares y $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{e}_\phi$ del sistema coordenado esférico.

Solución: Sustituyendo (5.84) en (5.101)

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r &= \operatorname{sen} \theta \cos \phi (\cos \phi \, \mathbf{e}_\rho - \operatorname{sen} \phi \, \mathbf{e}_\phi) + \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi (\operatorname{sen} \phi \, \mathbf{e}_\rho + \cos \phi \, \mathbf{e}_\phi) \\ &\quad + \cos \theta \mathbf{k} \\ &= \operatorname{sen} \theta (\cos^2 \phi + \operatorname{sen}^2 \phi) \mathbf{e}_\rho + (-\operatorname{sen} \theta \cos \phi \operatorname{sen} \phi + \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi \cos \phi) \mathbf{e}_\phi \\ &\quad + \cos \theta \mathbf{k} \\ &= \operatorname{sen} \theta \, \mathbf{e}_\rho + \cos \theta \mathbf{k}, \end{aligned} \tag{5.113a}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_\theta &= \cos \theta \cos \phi (\cos \phi \, \mathbf{e}_\rho - \operatorname{sen} \phi \, \mathbf{e}_\phi) \\ &\quad + \cos \theta \operatorname{sen} \phi (\operatorname{sen} \phi \, \mathbf{e}_\rho + \cos \phi \, \mathbf{e}_\phi) - \operatorname{sen} \theta \mathbf{k} \\ &= \cos \theta (\cos^2 \phi + \operatorname{sen}^2 \phi) \mathbf{e}_\rho + (-\cos \theta \cos \phi \operatorname{sen} \phi + \cos \theta \operatorname{sen} \phi \cos \phi) \mathbf{e}_\phi \\ &\quad - \operatorname{sen} \theta \mathbf{k} \\ &= \cos \theta \, \mathbf{e}_\rho - \operatorname{sen} \theta \mathbf{k}, \end{aligned} \tag{5.113b}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_\phi &= -\operatorname{sen} \phi (\cos \phi \, \mathbf{e}_\rho - \operatorname{sen} \phi \, \mathbf{e}_\phi) + \cos \phi (\operatorname{sen} \phi \, \mathbf{e}_\rho + \cos \phi \, \mathbf{e}_\phi) \\ &= (-\operatorname{sen} \phi \cos \phi + \cos \phi \operatorname{sen} \phi) \mathbf{e}_\rho + (\operatorname{sen}^2 \phi + \cos^2 \phi) \mathbf{e}_\phi \\ &= \mathbf{e}_\phi. \end{aligned} \tag{5.113c}$$

De manera similar, sustituyendo (5.104) en (5.81),

$$\mathbf{e}_\rho = \operatorname{sen} \theta \, \mathbf{e}_r + \cos \theta \, \mathbf{e}_\theta, \tag{5.114a}$$

$$\mathbf{e}_\phi = \mathbf{e}_\phi, \tag{5.114b}$$

$$\mathbf{k} = \cos \theta \, \mathbf{e}_r - \operatorname{sen} \theta \, \mathbf{e}_\theta. \tag{5.114c}$$

Usando notación matricial, (5.113) y (5.114) pueden expresarse respectivamente como

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_r \\ \mathbf{e}_\theta \\ \mathbf{e}_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{sen} \theta & 0 & \cos \theta \\ \cos \theta & 0 & -\operatorname{sen} \theta \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_\rho \\ \mathbf{e}_\phi \\ \mathbf{k} \end{bmatrix}, \tag{5.115}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_\rho \\ \mathbf{e}_\phi \\ \mathbf{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{sen} \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_r \\ \mathbf{e}_\theta \\ \mathbf{e}_\phi \end{bmatrix}. \tag{5.116}$$

Las ecuaciones (5.115–6) se pueden obtener también fácilmente por simples operaciones de producto matricial usando (5.105), (5.86) y (5.85), (5.106) respectivamente.

5.5 Problemas suplementarios

PROBLEMA 5.30 Mostrar que el jacobiano

$$J\left(\frac{x, y, z}{u, v, w}\right) = h_u h_v h_w,$$

así que el elemento de volumen dV dado por

$$dV = J\left(\frac{x, y, z}{u, v, w}\right) du dv dw$$

es $h_u h_v h_w du dv dw$, de acuerdo con (5.30).

PROBLEMA 5.31 Usando coordenadas curvilíneas y la identidad vectorial

$$\nabla \cdot \nabla \mathbf{f} = \nabla^2 \mathbf{f} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{f}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{f}), \qquad [3.164]$$

obtener la forma curvilínea del vector laplaciano $\nabla^2 \mathbf{f}$.

PROBLEMA 5.32 Mostrar que la definición del *integral de volumen* del operador ∇ dada por

$$\nabla \{\quad\} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \oiint_S \mathbf{n} \{\quad\} dS \qquad [4.57]$$

lleva a la expresión

$$\nabla \{\quad\} = \frac{1}{h_u h_v h_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}(h_v h_w \mathbf{e}_u \{\quad\}) + \frac{\partial}{\partial v}(h_w h_u \mathbf{e}_v \{\quad\}) + \frac{\partial}{\partial w}(h_u h_v \mathbf{e}_w \{\quad\})\right].$$

PROBLEMA 5.33 Usando la forma del operador ∇ dada en el problema 5.32, hallar $\nabla \psi$, $\nabla \cdot \mathbf{f}$, y $\nabla \times \mathbf{f}$; mostrar también que se reducen a (5.44), (5.45) y (5.47) respectivamente.

PROBLEMA 5.34 En coordenadas cilíndricas circulares (ρ, ϕ, z), si el campo vectorial $\mathbf{f}$ es

$$\mathbf{f}(\rho, \phi) = f_\rho(\rho, \phi)\mathbf{e}_\rho + f_\phi(\rho, \phi)\mathbf{e}_\phi,$$

mostrar que $\nabla \times \mathbf{f}$ tiene solamente una componente z.

PROBLEMA 5.35 Transformar $\mathbf{f} = \dfrac{x}{y}\mathbf{i}$ a coordenadas cilíndricas circulares.
Respuesta: $\cos\phi \cot\phi\, \mathbf{e}_\rho - \cos\phi\, \mathbf{e}_\phi$.

PROBLEMA 5.36 Transformar $\mathbf{f} = \rho\mathbf{e}_\rho + \rho\mathbf{e}_\phi$ a coordenadas rectangulares.
Respuesta: $(x - y)\mathbf{i} + (x + y)\mathbf{j}$.

PROBLEMA 5.37 Mostrar que las siguientes tres formas, en coordenadas esféricas, de $\nabla^2 \psi(r)$ son equivalentes:

(a) $$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left[r^2 \frac{d\psi(r)}{dr}\right],$$

(b) $$\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}[r\psi(r)],$$

(c) $$\frac{d^2\psi(r)}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\psi(r)}{dr}.$$

PROBLEMA 5.38 Transformar $\mathbf{f} = \dfrac{1}{r}\,\mathbf{e}_r$ a coordenadas rectangulares.

Respuesta: $\dfrac{x}{x^2+y^2+z^2}\,\mathbf{i} + \dfrac{y}{x^2+y^2+z^2}\,\mathbf{j} + \dfrac{z}{x^2+y^2+z^2}\,\mathbf{k}$.

PROBLEMA 5.39 Para las *coordenadas cilíndricas elípticas* (u, v, z) la transformación entre las coordenadas (x, y, z) y (u, v, z) está dada por $x = a \cosh u \cos v$, $y = a \operatorname{senh} u \operatorname{sen} v$, $z = z$, donde a es una constante.

(a) Mostrar que las familias de superficies coordenadas son:

(1) cilindros elípticos, $u = \text{const}$, $0 \leqslant u < \infty$;

(2) cilindros hiperbólicos, $v = \text{const}$, $0 \leqslant v < 2\pi$;

(3) planos paralelos al plano xy, $z = \text{const}$, $-\infty < z < \infty$.

(b) ¿Es ortogonal este sistema?

(c) Hallar los factores de escala.

Respuesta: (b) Si. (c) $h_u = a(\operatorname{senh}^2 u + \operatorname{sen}^2 v)^{1/2}$, $h_v = a(\operatorname{senh}^2 u + \operatorname{sen}^2 v)^{1/2}$, $h_z = 1$.

PROBLEMA 5.40 Para las *coordenadas cilíndricas parabólicas* (ξ, η, z), la transformación entre las coordenadas (x, y, z) y (ξ, η, z) está dada por $x = \xi\eta$, $y = \frac{1}{2}(\eta^2 - \xi^2)$, $z = z$.

(a) Mostrar que las familias de superficies coordenadas son:

(1) cilindros parabólicos, $\xi = \text{const}$, $-\infty < \xi < \infty$;

(2) cilindros parabólicos, $\eta = \text{const}$, $0 \leqslant \eta < \infty$;

(3) planos paralelos al plano xy, $z = \text{const}$, $-\infty < z < \infty$.

(b) Hallar los factores de escala.

Respuesta: (b) $h_\xi = (\xi^2 + \eta^2)^{1/2}$, $h_\eta = (\xi^2 + \eta^2)^{1/2}$, $h_z = 1$.

PROBLEMA 5.41 Para las *coordenadas esferoidales alargadas* (u, v, ϕ), la transformación entre las coordenadas (x, y, z) y (u, v, ϕ) es $x = a \operatorname{senh} u \operatorname{sen} v \cos\phi$, $y = a \operatorname{senh} u \operatorname{sen} v \operatorname{sen}\phi$, $z = a \cosh u \cos v$, donde a es una constante.

(a) Mostrar que las familias de superficies coordenadas son:

(1) esferoides alargadas, $u = \text{const}$, $0 \leqslant u < \infty$;

(2) hiperboloides de dos hojas $v = \text{const}$, $0 \leqslant v \leqslant \pi$;

(3) semiplanos por el eje z, $\phi = \text{const}$, $0 \leqslant \phi < 2\pi$.

(b) Hallar los factores de escala.

Respuesta: (b) $h_u = a(\operatorname{senh}^2 u + \operatorname{sen}^2 v)^{1/2} = a(\cosh^2 u - \cos^2 v)^{1/2}$,

$h_v = a(\operatorname{senh}^2 u + \operatorname{sen}^2 v)^{1/2}$,

$h_\phi = a \operatorname{senh} u \operatorname{sen} v$.

PROBLEMA 5.42 Para las *coordenadas esferoidales achatadas* (u, v, ϕ), la transformación entre las coordenadas (x, y, z) y (u, v, ϕ) es $x = a \cosh u \cos v \cos\phi$, $y = a \cosh u \cos v \operatorname{sen}\phi$, $z = a \operatorname{senh} u \operatorname{sen} v$, donde a es una constante.

(a) Mostrar que las familias de superficies coordenadas son:

(1) esferoides achatadas, $u = \text{const}$, $0 \leqslant u < \infty$;

(2) hiperboloides de una hoja, $v = \text{const}$, $-\dfrac{\pi}{2} \leq v \leq \dfrac{\pi}{2}$;

(3) semiplanos por el eje z, $\phi = \text{const}$, $0 \leqslant \phi < 2\pi$.

(b) Hallar los factores de escala.

Respuesta: (b) $h_u = a(\operatorname{senh}^2 u + \operatorname{sen}^2 v)^{1/2} = a(\cosh^2 u - \cos^2 v)^{1/2}$,

$h_v = a(\operatorname{senh}^2 u + \operatorname{sen}^2 v)^{1/2}$,

$h_\phi = a \cosh u \cos v$.

PROBLEMA 5.43 Para las *coordenadas parabólicas* (ξ, η, ϕ), las ecuaciones están dadas por $x = \xi\eta \cos\phi$, $y = \xi\eta \operatorname{sen}\phi$, $z = \frac{1}{2}(\eta^2 - \xi^2)$.

(a) Mostrar que las familias de superficies coordenadas son:

(1) paraboloides alrededor del eje positivo z, $\xi = \text{const}$, $0 \leq \xi < \infty$;

(2) paraboloides alrededor del eje negativo z, $\eta = \text{const}$, $0 \leq \eta < \infty$;

(3) semiplanos por el eje z, $\phi = \text{const}$, $0 \leq \phi < 2\pi$.

(b) Hallar los factores de escala.

(c) Mostrar que $\mathbf{e}_\xi \times \mathbf{e}_\eta = -\mathbf{e}_\phi$

Respuesta: (b) $h_\xi = (\xi^2 + \eta^2)^{1/2}$, $h_\eta = (\xi^2 + \eta^2)^{1/2}$, $h_\phi = \xi\eta$.

PROBLEMA 5.44 Verificar que en coordenadas cilíndricas.

$$\nabla \ln \rho = \nabla \times (\mathbf{k}\phi).$$

PROBLEMA 5.45 Verificar las siguientes relaciones en coordenadas esféricas:

(a) $\nabla \dfrac{1}{r} = \nabla \times (\cos\theta \, \nabla\phi)$; (b) $\nabla\phi = \nabla \times (r\nabla\theta/\operatorname{sen}\theta)$.

PROBLEMA 5.46 Usando el método de multiplicación matricial, deducir (5.115–6) a partir de (5.85–6) y (5.105–6).

PROBLEMA 5.47 Expresar $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$, $\partial/\partial z$ en coordenadas esféricas.

Respuesta: $$\frac{\partial}{\partial x} = \operatorname{sen}\theta \cos\phi \frac{\partial}{\partial r} + \cos\theta \cos\phi \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\operatorname{sen}\phi}{r \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\phi},$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi \frac{\partial}{\partial r} + \cos\theta \operatorname{sen}\phi \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\cos\phi}{r \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\phi},$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \cos\theta \frac{\partial}{\partial r} - \operatorname{sen}\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}.$$

PROBLEMA 5.48 En la sección 3.5

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v) \tag{3.78}$$

se interpretan como ecuaciones paramétricas de una superficie S en el espacio. Pueden considerarse como un caso especial de (5.1) en la cual w es una constante; la superficie S corresponde entonces a una superficie $w(x, y, z) = \text{const}$. Las coordenadas curvilíneas sobre S son u y v. Sea $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

(a) Demostrar que las curvas $u = \text{const}$, $v = \text{const}$, se intersectan en ángulos rectos, de modo que las coordenadas son ortogonales si y sólo si

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} = 0.$$

(b) Mostrar que el elemento de un arco sobre una curva $u = u(t)$, $v = v(t)$ sobre S es

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du dv + G\,dv^2,$$

$$E = |\partial\mathbf{r}/\partial u|^2, \quad F = (\partial\mathbf{r}/\partial u) \cdot (\partial\mathbf{r}/\partial v), \quad G = |\partial\mathbf{r}/\partial v|^2.$$

(c) Mostrar que las coordenadas son ortogonales cuando

$$ds^2 = E\,du^2 + G\,dv^2.$$

(d) Mostrar que el área de la superficie S es

$$S = \iint_{R_{uv}} \sqrt{EG - F^2}\, du dv.$$

Respuesta: $gz + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}v^2 = c$, donde c es una constante.

PROBLEMA 8.30 Mostrar que, sin pérdida de generalidad, la función $c(t)$ de (8.39) se puede igualar a cero.

[*Sugerencia:* Como $\mathbf{v} = \nabla\phi$ podemos agregar a ϕ cualquier función de tiempo. Se sustituye ϕ por $\phi + \int c(t)dt$.]

PROBLEMA 8.31 Si el flúido es incompresible y su movimiento es 2-dimensional, mostrar que existe una *función de flujo* $\psi(x, y)$ tal que

$$v_1 = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v_2 = -\frac{\partial\psi}{\partial x},$$

donde $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j}$ es la velocidad del flúido.

PROBLEMA 8.32 Si el movimiento del flúido es 2-dimensional, incompresible e irrotacional, mostrar que la función de flujo $\psi(x, y)$ del problema 8.31 satisface la ecuación de Laplace.

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = 0.$$

PROBLEMA 8.33 Si un flúido es incompresible y tiene una vorticidad constante Ω, mostrar que

$$\nabla^2\mathbf{v} = \mathbf{0},$$

donde $\mathbf{v}$ es la velocidad del flúido.

[*Sugerencia:* $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}) = \nabla \times \boldsymbol{\Omega} = \mathbf{0}$.]

PROBLEMA 8.34 Si el campo de fuerza externa que actúa sobre un flúido es conservativo y la densidad del flúido depende sólo de la presión del flúido, entonces demostrar la ecuación de Helmholtz

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\Omega}{\rho}\right) = \left(\frac{\Omega}{\rho} \cdot \nabla\right)\mathbf{v}.$$

[*Sugerencia:* Véase problema 8.19 y úsese la ecuación general de continuidad (8.4).]

PROBLEMA 8.35 Mostrar que las líneas de vórtice o tubos de vórtice no se pueden iniciar o interrumpir dentro del flúido; así que o son cerradas o llegan a la frontera.

PROBLEMA 8.36 Para el flujo irrotacional de un flúido incompresible en la región R limitada por S y un campo conservativo de fuerza externa, i.e., $\mathbf{f} = -\nabla V$, mostrar que

$$\frac{dT}{dt} = \oiint \rho V\mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} + \oiint p\mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}.$$

En otras palabras, la razón de crecimiento de la energía cinética de un cuerpo flúido es igual a la suma del trabajo de las fuerzas externas y las presiones que actúan sobre su superficie.

9 CAPITULO APLICACIONES A LA TEORIA ELECTROMAGNETICA

9.1 Ecuación de continuidad

La *densidad de carga* ρ es la densidad de carga por unidad de volumen.

Una *corriente* I se produce por el movimiento de la carga y se determina por la densidad ρ y la velocidad $\mathbf{v}$ de la carga.

La *densidad de corriente* $\mathbf{J}$ es el producto de la densidad de carga ρ y la velocidad $\mathbf{v}$ de la carga; i.e.,

$$\mathbf{J} = \rho \mathbf{v}. \tag{9.1}$$

Así la corriente I a través de una superficie S es la razón a la cual la carga pasa por S, i.e.,

$$I = \iint_S \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}\, dS, \tag{9.2}$$

donde $\mathbf{n}$ es un vector unitario normal a S. Obsérvese que el signo de I depende de la elección de $\mathbf{n}$. Si S es una superficie cerrada, $\mathbf{n}$ se toma como vector normal hacia afuera.

Un *campo electromagnético* se produce por una distribución de corriente eléctrica y carga.

El *principio de conservación de carga* establece que en una región R limitada por una superficie S, la razón a la cual decrece la carga es igual a la razón a la cual la carga sale de R a través de S.

La *ecuación de continuidad* establece que para cualquier región R limitada por una superficie S,

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \tag{9.3}$$

o, de modo equivalente, sustituyendo (9.1),

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \tag{9.4}$$

PROBLEMA 9.1 Usando el principio de conservación de carga, deducir la ecuación de continuidad.

Solución: Si $\rho(\mathbf{r}, t)$ es la densidad de carga, entonces la carga total Q dentro de una región R encerrada por S es

$$Q = \iiint_R \rho \, dV. \tag{9.5}$$

Ahora, por (9.2),

$$\oiint_S \mathbf{J}\cdot d\mathbf{S} = \oiint_S \mathbf{J}\cdot\mathbf{n}\, dS \tag{9.6}$$

es una medida de la razón a la cual la carga sale de R a través S, pues $\mathbf{n}$ es el normal hacia afuera de S.

Sin embargo, la razón a la cual decrece la carga en R es

$$-\frac{dQ}{dt} = -\frac{d}{dt}\iiint_R \rho\, dV = -\iiint_R \frac{\partial\rho}{\partial t}\, dV. \tag{9.7}$$

En (9.7), debemos usar $\partial\rho/\partial t$ dentro de la integral, pues $\rho(\mathbf{r}, t)$ es una función de $\mathbf{r}$ y t.

Igualando (9.6) y (9.7),

$$\oiint_S \mathbf{J}\cdot d\mathbf{S} = -\iiint_R \frac{\partial\rho}{\partial t}\, dV. \tag{9.8}$$

Por el teorema de divergencia (4.58),

$$\oiint_S \mathbf{J}\cdot d\mathbf{S} = \iiint_R \nabla\cdot\mathbf{J}\, dV; \tag{9.9}$$

así, (9.8) se puede escribir como

$$\iiint_R \left(\nabla\cdot\mathbf{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t}\right) dV = 0. \tag{9.10}$$

Como (9.10) vale para cualquier región R, el integrando debe ser cero; i.e.,

$$\nabla\cdot\mathbf{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0. \qquad [9.3]$$

Usando (9.1), (9.3) se puede expresar como

$$\nabla\cdot(\rho\mathbf{v}) + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0. \qquad [9.4]$$

Por analogía con la ecuación correspondiente de continuidad de dinámica de los flúidos (8 4), (9.3) ó (9.4) se denomina usualmente la ecuación de continuidad.

9.2 El campo electromagnético

El campo electromagnético producido por distribuciones de carga y su movimiento (distribución de corriente) se describe por los vectores $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ y $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$.

Una *fuerza de Lorentz* es la fuerza $\mathbf{f}$ experimentada por una carga q que se mueve con una velocidad $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ en el campo electromagnético y es

$$\mathbf{f} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B}). \tag{9.11}$$

La ecuación (9.11) es la que define los vectores $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$, donde $\mathbf{E}$ es la *intensidad de campo eléctrico* y $\mathbf{B}$ es la *densidad de inducción magnética* o *de flujo magnético*. Una implicación importante de (9.11) es la hipótesis de que las propiedades de campo o espacio descritas por $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ existen pongamos o no a q en el campo para observar la fuerza. Así cuando se introduce una carga de prueba en un campo eléctrico real para efectos de medida, debe ser tan pequeña que no afecte los campos originales. En este caso, (9.11) se puede expresar como

$$\lim_{q \to 0} \frac{\mathbf{F}}{q} = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}. \tag{9.12}$$

El campo electromagnético se especifica también por medio de los vectores **D**, *densidad de flujo eléctrico o desplazamiento eléctrico* y **H** *intensidad de campo magnético.* En un medio dado, **D** y **H** están relacionados con **E** y **B** por relaciones funcionales características del medio. Para medios lineales, homogéneos e isotrópicos, las relaciones apropiadas son:

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \tag{9.13}$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \tag{9.14}$$

donde ϵ y μ son constantes llamadas *permitividad* y *permeabilidad* del medio, respectivamente.

La densidad de corriente **J** y la intensidad de campo eléctrico **E** están relacionadas por

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}, \tag{9.15}$$

donde σ es la conductividad del medio.

Las ecuaciones (9.13-5) se conocen con frecuencia como *relaciones constituyentes.*

Los valores de ϵ, μ y σ dependen del sistema de unidades. En el sistema mks racionalizado de unidades que se usan en este capítulo, la fuerza se mide en newtons, la velocidad en m/seg, y la carga en coulombs (C). El coulomb es la unidad eléctrica básica que con el metro, el kilogramo y el segundo, permite la definición de todas las otras unidades electromagnéticas.

9.3 Ecuaciones de Maxwell

Las *ecuaciones de Maxwell* se pueden escribir como

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{0}, \tag{9.16}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{J}, \tag{9.17}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \tag{9.18}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho. \tag{9.19}$$

PROBLEMA 9.2 Mostrar que (9.18) se puede deducir de (9.16).

Solución: Tomando la divergencia de (9.16),

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) + \nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right) = 0$$

como $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) = 0$ por (3.143),

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) = -\nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right) = 0. \tag{9.20}$$

Si todas las derivadas de **B** se suponen continuas, intercambiando la diferenciación con respecto al espacio y al tiempo se obtiene

$$\nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{B}) = 0,$$

por tanto, en el tiempo,

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = c,$$

donde c es una constante. Si en cualquier ocasión pasada $\mathbf{B} = \mathbf{0}$, esta constante debe ser cero. Porque puede suponerse que el campo originado en algún tiempo anterior,

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0.$$

PROBLEMA 9.3 Mostrar que (9.19) se puede deducir de (9.17) con la ecuación de continuidad (9.3).

Solución: Tomando la divergencia de (9.17),

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) - \nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right) = \nabla \cdot \mathbf{J},$$

o, puesto que $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = 0$ por (3.143) y

$$\nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{D}) \tag{9.21}$$

si suponemos que todas las derivadas de $\mathbf{D}$ son continuas,

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{D}) = 0. \tag{9.22}$$

Ahora, usando la ecuación de continuidad (9.3),

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{D} - \rho) = 0,$$

o sea que en el tiempo, si c es una constante, entonces

$$\nabla \cdot \mathbf{D} - \rho = c.$$

Como antes, si el campo originado en algún tiempo pasado y como todas las cargas pueden removerse de cualquier región finita del espacio, esta constante debe ser cero; entonces,

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho.$$

Obsérvese que, por el argumento de la anulación de los campos y la densidad de carga en algún tiempo dentro de una región finita del espacio, las dos ecuaciones de divergencia (9.18-9) no son relaciones independientes si se supone la conservación de carga. Este argumento no es necesario desde luego, pues las ecuaciones de Maxwell (9.16-9) están sujetas a verificación experimental independiente.

La *ley de inducción de Faraday* establece que la fuerza electromagnética alrededor de cualquier contorno cerrado es igual al negativo de la razón de cambio respecto del tiempo del flujo magnético del contorno; i.e.,

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{\partial}{\partial t}\iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}. \tag{9.23}$$

PROBLEMA 9.4 Usando la ecuación de Maxwell (9.16), demostrar la ley de inducción de Faraday.

Solución: Integrando (9.16) sobre una superficie S limitada por una curva cerrada C se obtiene

$$\iint_S \nabla \times \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = 0. \tag{9.24}$$

Aplicando el teorema de Stokes (4.104) al primer término de (9.24),

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} + \iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = 0.$$

Si C está fija, $\partial/\partial t$ puede sacarse del signo de integración; i.e.,

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}. \qquad [9.23]$$

El flujo magnético, i.e., el flujo de $\mathbf{B}$ por $\mathbf{S}$ es

$$\Phi = \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}. \qquad (9.25)$$

Así que la circulación de $\mathbf{E}$ alrededor de C o fuerza electromotriz alrededor de C es

$$\text{fem} = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}. \qquad (9.26)$$

Obsérvese que (9.16) ó (9.23) verifican el hecho experimental de que un *campo magnético variable induce un campo eléctrico.*

Los experimentos de Faraday mostraron que la razón de cambio de Φ puede resultar del movimiento de C en el cual la fuerza electromotriz (fem) se induce por medio de una variación de tiempo de B o a partir de ella. Por tanto, la ley de Faraday se escribe generalmente como

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \qquad (9.27)$$

o sea que la fuerza electromotriz es

$$\text{fem} = -\frac{d}{dt} \Phi. \qquad (9.28)$$

PROBLEMA 9.5 **Expresar la ecuación de Maxwell (9.17) en una forma integral equivalente y dar una interpretación física.**

Solución: **Integrando (9.17) sobre una superficie S limitada por una curva cerrada C, se obtiene:**

$$\iint_S \nabla \times \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} - \iint_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}. \qquad (9.29)$$

Aplicando el teorema de Stokes (4.104) al primer término de la izquierda de (9.29), se obtiene

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = I + \iint_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}, \qquad (9.30)$$

donde I es la corriente total que circunda la curva C, como se definió en (9.3). La ecuación (9.30) es la forma integral equivalente de (9.17) e indica que la fuerza magnetomotriz (fmm) es igual a la suma de la corriente I que circunda la curva C y la razón de cambio del flujo eléctrico que circunda C. La ecuación (9.17) o la (9.30) verifican el hecho experimental de que un *campo magnético se puede producir no sólo por una corriente, sino por un campo eléctrico variable en el tiempo.*

Maxwell llamó el término $\partial \mathbf{D}/\partial t$ *corriente de desplazamiento* aunque nada se desplaza realmente en el campo. **D** se llama por consiguiente *desplazamiento eléctrico* y debe considerarse como paralelo al término correspondiente de (9.16); i.e., la fmm se asocia con un flujo de **D** que varía con el tiempo, del mismo modo que la fem se asocia con un flujo de **B** que varía con el tiempo.

El *flujo eléctrico* Φ_e a través de la superficie S es

$$\Phi_e = \iint_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S}. \tag{9.31}$$

Por (9.31), **D** se llama también *densidad de flujo eléctrico*.

La *ley de Gauss para el campo eléctrico* establece que el flujo neto eléctrico hacia afuera de una superficie cerrada S es proporcional a la carga eléctrica contenida en la superficie; i.e.,

$$\oiint_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S} = Q. \tag{9.32}$$

PROBLEMA 9.6 Usando (9.19), deducir la ley de Gauss para el campo eléctrico.

Solución: Como $\nabla\cdot\mathbf{D} = \rho$, aplicando el teorema de divergencia de Gauss (4.58) da

$$\oiint_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S} = \iiint_R \nabla\cdot\mathbf{D}\, dV = \iiint_R \rho\, dV = Q,$$

donde Q es la carga total contenida en S. Así,

$$\oiint_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S} = Q.$$

La *ley de Gauss para el campo magnético* establece que el flujo magnético neto hacia afuera de una superficie cerrada S es idénticamente cero; i.e.,

$$\oiint_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} = 0. \tag{9.33}$$

PROBLEMA 9.7 Deducir la ley de Gauss para el campo magnético.

Solución: Como $\nabla\cdot\mathbf{B} = 0$ por (9.18), aplicando el teorema de divergencia de Gauss se obtiene

$$\oiint_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} = \iiint_R \nabla\cdot\mathbf{B}\, dV = 0.$$

PROBLEMA 9.8 Mostrar que no puede haber distribución permanente de carga libre en un medio homogéneo cuya conductividad no sea nula.

Solución: En un medio de conductividad no nula σ (9.19) y (9.13) muestran que

$$\nabla\cdot\mathbf{D} = \nabla\cdot(\varepsilon\mathbf{E}) = \rho, \tag{9.34}$$

mientras que las ecuaciones de continuidad (9.3) y (9.15) dan

$$\nabla\cdot\mathbf{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = \nabla\cdot(\sigma\mathbf{E}) + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0. \tag{9.35}$$

Ahora, usando (3.155),

$$\nabla \cdot (\varepsilon \mathbf{E}) = \varepsilon \nabla \cdot \mathbf{E} + \mathbf{E} \cdot \nabla \varepsilon = \rho, \tag{9.36}$$

$$\nabla \cdot (\sigma \mathbf{E}) = \sigma \nabla \cdot \mathbf{E} + \mathbf{E} \cdot \nabla \sigma = -\frac{\partial \rho}{\partial t}. \tag{9.37}$$

Eliminando $\nabla \cdot \mathbf{E}$ entre (9.36) y (9.37),

$$\rho + \frac{\varepsilon}{\sigma}\frac{\partial \rho}{\partial t} = \sigma \mathbf{E} \cdot \left(\frac{\sigma \nabla \varepsilon - \varepsilon \nabla \sigma}{\sigma^2}\right) = \mathbf{J} \cdot \nabla\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right). \tag{9.38}$$

Este resultado se obtuvo usando la identidad vectorial del problema 3.89 (b). Si el medio es homogéneo, $\nabla(\epsilon/\sigma) = \mathbf{0}$ y (9.38) se reduce a

$$\rho + \tau \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \tag{9.39}$$

donde

$$\tau = \frac{\varepsilon}{\sigma} \tag{9.40}$$

es el llamado *tiempo de relajamiento*. La solución de (9.39) es

$$\rho(t) = \rho_0 e^{-t/\tau} = \rho_0 e^{-\sigma t/\varepsilon}, \tag{9.41}$$

donde ρ_0 es el valor de ρ en $t = 0$. Así que la densidad de carga decae exponencialmente y es independiente del E aplicado. Por consiguiente, concluimos que no puede haber distribución permanente de carga libre en un medio homogéneo con conductividad no nula. El tiempo de relajamiento τ es igual al tiempo requerido para que ρ decaiga a $1/e$ de su valor original y varíe inversamente con la conductividad. Así que la carga desaparecerá casi instantáneamente del interior de un buen conductor tal como cobre, pero permanecerá por un largo tiempo dentro de un buen aislador tal como cuarzo fundido.

9.4 Funciones potenciales del campo electromagnético

El *vector potencial* $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ es una función vectorial para el cual los campos electromagnéticos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ están relacionados por

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \tag{9.42}$$

y el *potencial escalar* $\phi(\mathbf{r}, t)$ es una función escalar para la cual

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi. \tag{9.43}$$

La existencia de $\mathbf{A}$ determina completamente a $\mathbf{B}$ por (9.42) pero el recíproco no es cierto pues el rotacional del gradiente de cualquier escalar se anula idénticamente. Obsérvese que el gradiente de cualquier función escalar ψ puede agregarse a $\mathbf{A}$ sin afectar a $\mathbf{B}$. (Cf. problema 3.47.)

PROBLEMA 9.9 Verificar (9.42-3).

Solución: Como B satisface (9.18), esto es, $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, entonces por el problema 4.78 existe una función vectorial A tal que

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \tag{9.42}$$

Por consiguiente la primera ecuación de Maxwell (9.16) se transforma en

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) = \mathbf{0}. \tag{9.44}$$

Así, según el resultado del problema 4.73, si ϕ es alguna función escalar,

$\mathrm{E} + \dfrac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla\phi$, o, por consiguiente,

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\phi. \qquad [9.43]$$

PROBLEMA 9.10 Si A se reemplaza por

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\psi, \tag{9.45}$$

mostrar que ϕ debe reemplazarse por

$$\phi' = \phi - \frac{\partial\psi}{\partial t} \tag{9.46}$$

para que (9.43) permanezca inalterado.

Solución: Si se reemplaza A por $\mathrm{A}' = \mathrm{A} + \nabla\psi$, (9.43) se transforma en

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{A}' - \nabla\psi) - \nabla\phi = -\frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t} - \nabla\left(\phi - \frac{\partial\psi}{\partial t}\right). \tag{9.47}$$

Por consiguiente, si hacemos $\phi' = \phi - \partial\psi/\partial t$, (9.47) se vuelve

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t} - \nabla\psi', \tag{9.48}$$

que es idéntico a (9.43)

Las transformaciones (9.45-6) se llaman *transformaciones indicadoras*. Así que (9.42-3) no se alteran por (9.45-6). Por consiguiente decimos que los vectores de campo son *invariantes* con respecto a las *transformaciones indicadoras*.

PROBLEMA 9.11 Mostrar que en un medio isotrópico homogéneo lineal en el cual ϵ, μ son constantes y $\sigma = 0$, el potencial escalar ϕ y el vector potencial A satisfacen.

$$\nabla^2\mathbf{A} - \mu\varepsilon\,\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla\left(\nabla\cdot\mathbf{A} + \mu\varepsilon\,\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) = -\mu\mathbf{J}, \tag{9.49}$$

$$\nabla^2\phi + \frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\mathbf{A} = -\frac{\rho}{\varepsilon}. \tag{9.50}$$

Solución: Usando (9.13) y (9.14), la segunda ecuación de Maxwell (9.17) puede escribirse como

$$\nabla \times \mathbf{B} - \mu\varepsilon\,\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} = \mu\mathbf{J}. \tag{9.51}$$

Sustituyendo a **B** y E según (9.42-3),

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \mu\varepsilon\,\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} + \mu\varepsilon\,\nabla\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) = \mu\mathbf{J}. \tag{9.52}$$

Sustituyendo la identidad vectorial,

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A}, \qquad [3.163]$$

en (9.52),

$$\nabla^2\mathbf{A} - \mu\varepsilon\,\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla\left(\nabla\cdot\mathbf{A} + \mu\varepsilon\,\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) = -\mu\mathbf{J}. \qquad [9.4'$$

Luego, usando (9.13), (9.19) puede escribirse como

$$\nabla\cdot\mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}. \qquad (9.53)$$

Sustituyendo a E según (9.43)

$$\nabla\cdot\left[-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\phi\right] = \frac{\rho}{\varepsilon}, \qquad (9.54)$$

por consiguiente,

$$\nabla^2\phi + \frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\mathbf{A} = -\frac{\rho}{\varepsilon}. \qquad [9.50]$$

La *condición de Lorentz para potenciales* A y ϕ es

$$\nabla\cdot\mathbf{A} + \mu\varepsilon\,\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0. \qquad (9.55)$$

PROBLEMA 9.12 Si los potenciales A y ϕ satisfacen (9.55) entonces mostrar que A y ϕ satisfacen las *ecuaciones no homogéneas de onda*

$$\nabla^2\mathbf{A} - \mu\varepsilon\,\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu\mathbf{J}, \qquad (9.56)$$

$$\nabla^2\phi - \mu\varepsilon\,\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon}. \qquad (9.57)$$

Solución: Si los potenciales A y ϕ satisfacen (9.55), entonces

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = -\mu\varepsilon\,\frac{\partial\phi}{\partial t}. \qquad (9.58)$$

Por consiguiente, (9.49) se reduce a (9.56). Sustituyendo (9.58) en (9.50), obtenemos (9.57).

PROBLEMA 9.13 Mostrar que existen potenciales escalares y vectoriales que satisfacen la condición de Lorentz (9.55).

Solución: Supóngase que los potenciales A y ϕ no satisfacen (9.55); i.e.,

$$\nabla\cdot\mathbf{A} + \mu\varepsilon\,\frac{\partial\phi}{\partial t} \neq 0. \qquad (9.59)$$

Haciendo una transformación indicadora a $\mathbf{A}'$ y ϕ', i.e.;

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\psi, \qquad \phi' = \phi - \frac{\partial\psi}{\partial t},$$

obtenemos

$$\nabla\cdot\mathbf{A}' + \mu\varepsilon\,\frac{\partial\phi'}{\partial t} = \nabla\cdot\mathbf{A} + \mu\varepsilon\,\frac{\partial\phi}{\partial t} + \nabla^2\psi - \mu\varepsilon\,\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}. \qquad (9.60)$$

Por lo tanto es suficiente hallar una función indicadora ψ que satisfaga

$$\nabla^2\psi - \mu\varepsilon\,\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -\left(\nabla\cdot\mathbf{A} + \mu\varepsilon\,\frac{\partial\phi}{\partial t}\right). \qquad (9.61)$$

Entonces los nuevos potenciales $\mathbf{A}'$ y ϕ' satisfarán la condición de Lorentz (9.55).

Como los potenciales $\mathbf{A}$ y ϕ pueden relacionarse por la condición de Lorentz (9.55), el campo electromagnético puede representarse en términos de una función vectorial única. Esto se muestra en el problema 9.14.

El *vector Hertz* $\mathbf{\Pi}$ es una función vectorial uniforme, cuya razón de cambio en el tiempo es proporcional al potencial $\mathbf{A}$. Así, en un medio con constantes μ y ε, el vector Hertz satisface

$$\mathbf{A} = \mu\varepsilon \frac{\partial \mathbf{\Pi}}{\partial t}. \tag{9.62}$$

PROBLEMA 9.14 Mostrar que en un medio con constantes μ y ϵ, los vectores de campo E y B se pueden representar en términos del vector Hertz Π como

$$\mathbf{E} = -\mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{\Pi}}{\partial t^2} + \nabla(\nabla\cdot\mathbf{\Pi}), \tag{9.63}$$

$$\mathbf{B} = \mu\varepsilon\, \nabla\times\frac{\partial \mathbf{\Pi}}{\partial t}. \tag{9.64}$$

También se encuentra la ecuación Π que debe satisfacer

Solución: Sustituyendo (9.62) en (9.42-3) se obtiene

$$\mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A} = \nabla\times\left(\mu\varepsilon\frac{\partial \mathbf{\Pi}}{\partial t}\right) = \mu\varepsilon\,\nabla\times\frac{\partial \mathbf{\Pi}}{\partial t}, \qquad [9.64]$$

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\phi = -\mu\varepsilon\frac{\partial^2 \mathbf{\Pi}}{\partial t^2} - \nabla\phi. \tag{9.65}$$

Ahora se puede escribir la segunda ecuación de Maxwell (9.17) como

$$\nabla\times\mathbf{B} = \mu\mathbf{J} + \mu\varepsilon\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \tag{9.66}$$

Sustituyendo (9.64-5) en (9.66),

$$\mu\,\varepsilon\,\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times\nabla\times\mathbf{\Pi} = \mu\mathbf{J} + \mu\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\left(-\mu\varepsilon\frac{\partial^2 \mathbf{\Pi}}{\partial t^2} - \nabla\phi\right),$$

o, simplificando,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\nabla\times(\nabla\times\mathbf{\Pi}) + \mu\varepsilon\frac{\partial^2 \mathbf{\Pi}}{\partial t^2} + \nabla\phi\right] = \frac{\mathbf{J}}{\varepsilon}. \tag{9.67}$$

Integrando (9.67) con respecto al tiempo t,

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{\Pi}) + \mu\varepsilon\frac{\partial^2 \mathbf{\Pi}}{\partial t^2} + \nabla\phi = \int\frac{\mathbf{J}}{\varepsilon}\,dt, \tag{9.68}$$

donde la constante arbitraria se hace igual a cero pues no afecta la determinación del campo.

Usando la identidad vectorial (3.163), (9.68) puede expresarse como

$$\nabla^2\mathbf{\Pi} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2 \mathbf{\Pi}}{\partial t^2} - [\nabla(\nabla\cdot\mathbf{\Pi}) + \nabla\phi] = -\int\frac{\mathbf{J}}{\varepsilon}dt. \tag{9.69}$$

Por tanto, si la condición

$$\nabla(\nabla\cdot\mathbf{\Pi}) + \nabla\phi = \mathbf{0}, \tag{9.70}$$

o sea

$$\nabla\phi = -\nabla(\nabla\cdot\mathbf{\Pi}) \tag{9.71}$$

se impone sobre ϕ y Π, entonces Π satisface la ecuación de onda no homogénea

$$\nabla^2\mathbf{\Pi} - \mu\varepsilon\,\frac{\partial^2\mathbf{\Pi}}{\partial t^2} = -\int \frac{\mathbf{J}}{\varepsilon}\,dt. \tag{9.72}$$

Sustituyendo (9.71) en (9.65) se obtiene

$$\mathbf{E} = -\mu\varepsilon\,\frac{\partial^2\mathbf{\Pi}}{\partial t^2} + \nabla(\nabla\cdot\mathbf{\Pi}). \qquad [9.63]$$

Obsérvese que (9.70) es equivalente a la condición de Lorentz (9.55).

9.5 Energía en el campo electromagnético y en el vector de Poynting

El *vector de Poynting* $\mathbf{P}$ es

$$\mathbf{P} = \mathbf{E}\times\mathbf{H}. \tag{9.73}$$

La *densidad de energía* W *del campo electromagnético* es

$$W = \frac{1}{2}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D} + \mathbf{H}\cdot\mathbf{B}). \tag{9.74}$$

PROBLEMA 9.15 En un medio isotrópico homogéneo con constantes ϵ y μ, mostrar que

$$\nabla\cdot\mathbf{P} + \frac{\partial W}{\partial t} = -\mathbf{J}\cdot\mathbf{E}. \tag{9.75}$$

Solución: Usando la identidad vectorial (3.157),

$$\nabla\cdot\mathbf{P} = \nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H}) = \mathbf{H}\cdot\nabla\times\mathbf{E} - \mathbf{E}\cdot\nabla\times\mathbf{H}. \tag{9.76}$$

Sustituyendo las ecuaciones de Maxwell (9.16-7) en (9.76),

$$\nabla\cdot\mathbf{P} = \mathbf{H}\cdot\left(-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\right) - \mathbf{E}\cdot\left(\mathbf{J} + \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\right),$$

por consiguiente,

$$\nabla\cdot\mathbf{P} + \mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} = -\mathbf{E}\cdot\mathbf{J}. \tag{9.77}$$

Ahora, por (9.13-4)

$$\mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} = \varepsilon\mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{2}\,\varepsilon\,\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}) = \frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E}\cdot\varepsilon\mathbf{E}) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\,\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}\right), \tag{9.78}$$

$$\mathbf{H}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} = \mu\mathbf{H}\cdot\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} = \frac{1}{2}\,\mu\,\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{H}\cdot\mathbf{H}) = \frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{H}\cdot\mu\mathbf{H}) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\,\mathbf{H}\cdot\mathbf{B}\right). \tag{9.79}$$

Así que (9.77) se reduce a

$$\nabla\cdot\mathbf{P} + \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D} + \mathbf{H}\cdot\mathbf{B})\right] = -\mathbf{E}\cdot\mathbf{J}, \tag{9.80}$$

por consiguiente,

$$\nabla \cdot \mathbf{P} + \frac{\partial W}{\partial t} = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}. \qquad [9.75]$$

Obsérvese que si la conductividad del medio es cero, $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E} = \mathbf{0}$ y (9.75) se reduce a

$$\nabla \cdot \mathbf{P} + \frac{\partial W}{\partial t} = 0, \qquad (9.81)$$

que es exactamente la misma forma de la ecuación de continuidad (9.8). La "densidad de corriente $\mathbf{J}$" es ahora $\mathbf{P}$ y la "densidad de carga ρ" es ahora W. Así podemos asociar el vector $\mathbf{P}$ de Poynting con el flujo de densidad de energía.

El *teorema de Poynting* establece que en un espacio isotrópico homogéneo, si R es la región limitada por una superficie cerrada S, entonces

$$-\frac{\partial}{\partial t}\iiint_R W\,dV = \oint\!\!\oint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} + \iiint_R \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}\,dV, \qquad (9.82)$$

donde $\mathbf{P}$ es el vector de Poynting y W es la densidad de energía del campo electromagnético.

PROBLEMA 9.16 Demostrar el teorema de Poynting e interpretarlo físicamente.

Solución: Como (9.75) puede escribirse

$$-\frac{\partial W}{\partial t} = \nabla \cdot \mathbf{P} + \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}, \qquad (9.83)$$

integrando (9.83) sobre R y usando el teorema de divergencia (4.58),

$$-\frac{\partial}{\partial t}\iiint_R W\,dV = \iiint_R \nabla \cdot \mathbf{P}\,dV + \iiint_R \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}\,dV$$

$$= \oint\!\!\oint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} + \iiint_R \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}\,dV. \qquad [9.82]$$

Si W es la densidad de energía del campo electromagnético,

$$\iiint_R W\,dV \qquad (9.84)$$

es la energía total del campo electromagnético almacenado en la región R. Por consiguiente, el lado izquierdo de (9.82) representa la razón de decrecimiento de la energía total del campo electromagnético almacenado en R. La pérdida de energía almacenada y disponible debe evaluarse por medio de los términos de la derecha de (9.82). Si la conductividad del medio es σ, entonces, por (9.15) el segundo término de la derecha de (9.82) se transforma en

$$\iiint_R \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}\,dV = \iiint_R \sigma E^2\,dV = \iiint_R \frac{J^2}{\sigma}\,dV, \qquad (9.85)$$

que es la pérdida ohmica o pérdida de calor en joules.

El primer término de la derecha de (9.82) es el flujo de la energía que fluye de la región R por la superficie S. Así que el decrecimiento de energía del campo electromagnético almacenado en R se contabiliza parcialmente por la pérdida de calor en joules y el resto fluye de R a través de la superficie limitante S.

Según la interpretación anterior, el vector **P** de Poynting definido por

$$\mathbf{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}, \qquad [9.73]$$

puede interpretarse como el flujo de energía del campo electromagnético y da la cantidad de energía de campo que pasa a través de la unidad de área de la superficie por unidad de tiempo.

9.6 Condiciones de frontera

Aunque las ecuaciones de Maxwell (9.16–7) son de importancia primordial, no definen por sí mismas un campo único. Hay una infinidad de soluciones para esas ecuaciones. Estableciendo condiciones de frontera se obtiene una única solución. A continuación se deducen las condiciones de frontera que deben satisfacerse por los vectores de campo.

PROBLEMA 9.17 Mostrar que las componentes normales de **B** a través de una superficie que separa dos medios son continuas.

Solución: Para dos medios limitados por una superficie común S, como se muestra en la figura 9.1, se construye un cilindro recto infinitesimal cuyas caras terminales tienen área ΔS en los medios adyacentes. Las superficies terminales son paralelas a la frontera común y están separadas por una distancia Δh.

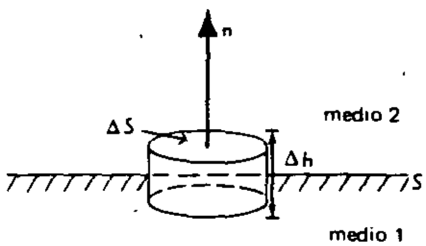


Figura 9.1 Medios limitados por una superficie común.

Aplicando la ley de Gauss para el campo magnético (9.33) a la región encerrada por el cilindro,

$$\oiint \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}\, dS = 0 \qquad (9.86)$$

cuando se integra sobre las paredes y superficies terminales del cilindro. El vector unitario **n** normal a S se traza del medio 1 al 2. Si $\mathbf{B}_1$ y $\mathbf{B}_2$ denotan el valor de **B** en un punto de S en los medios 1 y 2, respectivamente, entonces

$$\lim_{\Delta h \to 0} \oiint \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}\, dS = (\mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{n} - \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{n})\Delta S = 0. \qquad (9.87)$$

El límite $\Delta h \longrightarrow 0$ se toma para asegurar que no hay contribución de las paredes del cilindro. Así,

$$(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \cdot \mathbf{n} = 0 \qquad (9.88)$$

por consiguiente,

$$\mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{n} = \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{n}, \qquad (9.89)$$

lo que expresa que las componentes normales de **B** a través de una superficie que separa dos medios son continuas.

PROBLEMA 9.18 Mostrar que las componentes normales de **D** a través de una superficie que separa dos medios satisfacen

$$(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \mathbf{n} = \rho_s, \qquad (9.90)$$

donde ρ_s es la densidad de carga superficial.

Solución: Este caso puede tratarse de manera similar al problema 9.17, pero en este caso, la ley de Gauss para el campo eléctrico (9.32) es

$$\oiint \mathbf{D}\cdot\mathbf{n}\, dS = Q, \tag{9.91}$$

donde Q es la carga total contenida en el cilindro; i.e.,

$$Q = \rho\, \Delta h \Delta S.$$

En el límite cuando $\Delta h \longrightarrow 0$, la densidad de carga de volumen ρ se hace infinita ya que la carga total Q permanece constante. Como una densidad de carga de superficie ρ_s es la carga por unidad de área,

$$Q = \rho\, \Delta h \Delta S = \rho_s\, \Delta S. \tag{9.92}$$

Entonces por (9.91),

$$(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1)\cdot\mathbf{n} = \rho_s.$$

Concluimos que las componentes normales de **D** son continuas a menos que haya una carga superficial sobre la superficie frontera de los dos medios.

PROBLEMA 9.19 Mostrar que las componentes tangenciales de **E** a través de una superficie que separa dos medios con continuas.

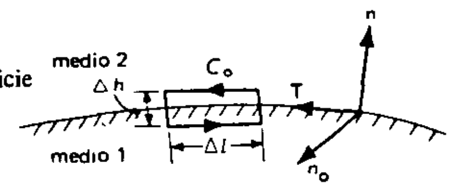


Figura 9.2 Trayectoria rectangular a través de una superficie que separa los medios.

Solución: Para una trayectoria rectangular C_o, como se muestra en la figura 9.2, se integra la primera ecuación de Maxwell

$$\nabla\times\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{0} \tag{9.16}$$

sobre la superficie S_o limitada por un marco rectangular C_o da

$$\iint_{S_0} \nabla\times\mathbf{E}\cdot\mathbf{n}_0\, dS = -\iint_{S_0} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\cdot\mathbf{n}_0\, dS, \tag{9.93}$$

donde $\mathbf{n}_0$ es la normal positiva a S_0, como se muestra en la figura 9.2. Aplicando el teorema de Stokes (4.104) al miembro de la izquierda de (9.93) se obtiene

$$\oint_{C_0} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} = -\iint_{S_0} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\cdot\mathbf{n}_0\, dS. \tag{9.94}$$

Como se muestra en la figura 9.2, si el vector unitario tangente **T** es

$$\mathbf{T} = \mathbf{n}_0\times\mathbf{n}, \tag{9.95}$$

entonces el límite cuando $\Delta h \longrightarrow 0$, (9.94) puede aproximarse por

$$\mathbf{T}\cdot(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1)\,\Delta l = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\cdot\mathbf{n}_0\,\Delta h\Delta l,$$

por consiguiente,

$$\mathbf{n}_0\times\mathbf{n}\cdot(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) + \mathbf{n}_0\cdot\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\Delta h = 0. \tag{9.96}$$

Pues $\mathbf{n}_o \times \mathbf{n}\cdot\mathbf{E} = \mathbf{n}_o\cdot\mathbf{n}\times\mathbf{E}$ según (1.72) y en el límite cuando $\Delta h \longrightarrow 0$, $\Delta l \longrightarrow 0$,

$$\mathbf{n}_0\cdot\left[\mathbf{n}\times(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) + \lim_{\Delta h\to 0}\left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\Delta h\right)\right] = 0. \tag{9.97}$$

Como la orientación del rectángulo y por tanto también de $\mathbf{n}_o$ es arbitraria,

$$\mathbf{n}\times(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = -\lim_{\Delta h\to 0}\left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\Delta h\right) = 0, \tag{9.98}$$

con tal de que $\partial\mathbf{B}/\partial t$ sea acotada. Así que,

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E}_2 = \mathbf{n} \times \mathbf{E}_1, \tag{9.99}$$

lo que expresa que las componentes tangenciales de **E** a través de una superficie que separa dos medios son continuas.

PROBLEMA 9.20 Mostrar que las componentes tangenciales de **H** a través de una superficie que separa dos medios satisfacen

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{J}_s, \tag{9.100}$$

donde $\mathbf{J}_s$ es la densidad de corriente superficial.

Solución: Este caso puede tratarse similarmente al problema 9.19. Integrando la segunda ecuación de Maxwell (9.17),

$$\oint_{C_0} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{S_0} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}_0 \, dS + \iint_{S_0} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot \mathbf{n}_0 \, dS. \tag{9.101}$$

Por consiguiente, procediendo de una manera similar a la que se usó para obtener (9.98),

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \lim_{\Delta h \to 0} \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \Delta h. \tag{9.102}$$

El segundo término de la derecha de (9.102) se anula cuando $\Delta h \longrightarrow 0$, pues $\partial \mathbf{D}/\partial t$ es acotada. Si la densidad de corriente **J** es finita, i.e., σ es finito, el primer término también se anula. Pero si la corriente $I = \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \, \Delta h \, \Delta 1$ a través del rectángulo permanece finita aún en el límite $\Delta h \longrightarrow 0$, definimos una densidad de corriente en la superficie $\mathbf{J}_s$ como corriente por unidad de longitud,

$$I = \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}_0 \, \Delta h \Delta l = \mathbf{J}_s \cdot \mathbf{n}_0 \, \Delta l. \tag{9.103}$$

Entonces (9.102) se reduce a

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{J}_s.$$

9.7 Campos estáticos

Los *campos estáticos* son aquellos para los cuales las derivadas con respecto al tiempo son cero; i.e., no hay variación de tiempo en los campos.

PROBLEMA 9.21 Deducir las ecuaciones de Maxwell para campos estáticos.

Solución: Con la restricción $\partial/\partial t = 0$, (9.16-7) se transforma en

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}, \tag{9.104}$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{J}(\mathbf{r}). \tag{9.105}$$

Las ecuaciones (9.18) y (9.19) quedan las mismas; i.e.,

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0, \tag{9.106}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r}). \tag{9.107}$$

Para campos estáticos, los campos eléctrico y magnético están completamente desacoplados uno de otro. El examen de las relaciones

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}, \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho,$$

y las consecuencias de ello, constituyen el estudio de los *campos electrostáticos*. De modo similar, examinando la relación

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0,$$

y las consecuencias de ello, forman el estudio de *campos magnetostáticos*.

PROBLEMA 9.22 Mostrar que el campo electrostático **E** es irrotacional y por consiguiente, conservativo; esto es, puede representarse como el gradiente de la función ϕ de potencial escalar; i.e.,

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi. \tag{9.108}$$

Solución: Como para un campo electrostático

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}, \qquad [9.104]$$

E es irrotacional y por el problema 4.73, puede expresarse como

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi.$$

Con (9.104) o (9.108) y por los problemas 4.71 y 7.15 la integral de línea de **E** alrededor de cualquier trayectoria es cero y el campo es conservativo.

Obsérvese que (9.108) es también el caso especial de (9.43) con $\partial\mathbf{A}/\partial t = 0$.

La *ecuación de Poisson* para una función ϕ de potencial escalar del campo electrostático es

$$\nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon}, \tag{9.109}$$

donde ρ es la densidad de carga y ε es una constante.

La *ecuación de Laplace* para campos electrostáticos se obtiene de la ecuación de Poisson haciendo $\rho = 0$; i.e.,

$$\nabla^2\phi = 0. \tag{9.110}$$

PROBLEMA 9.23 Deducir la ecuación de Poisson para la función ϕ de potencial escalar del campo electrostático.

Solución: Como

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi, \qquad [9.108]$$

por (9.107) y (9.13),

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \nabla \cdot (\varepsilon\mathbf{E}) = \rho. \tag{9.111}$$

Si ϵ es constante, $\nabla \cdot (\epsilon\mathbf{E}) = \epsilon\ \nabla \cdot \mathbf{E}$ y (9.111) se transforma en

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}. \tag{9.112}$$

Sustituyendo **E** en (9.112) por (9.108), obtenemos $\nabla^2\phi = -\rho/\epsilon$.

PROBLEMA 9.24 Mostrar que para un campo estático, el potencial escalar $\phi(\mathbf{r})$ es el negativo del trabajo realizado por el campo sobre una unidad de carga positiva para traer la carga desde el infinito hasta el punto **r**.

Solución: Con $q = 1$, el trabajo realizado por la fuerza de Lorentz (9.11) sobre una carga positiva unitaria es

$$\begin{aligned} W &= \int_\infty^{\mathbf{r}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \int_\infty^{\mathbf{r}} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_\infty^{\mathbf{r}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} - \int_\infty^{\mathbf{r}} \mathbf{B} \cdot \mathbf{v} \times d\mathbf{r}, \end{aligned} \tag{9.113}$$

donde la última expresión se obtiene con el uso del (1.77).

Como el movimiento producido por v es a lo largo de $d\mathbf{r}$, $\mathbf{v} \times d\mathbf{r} = \mathbf{0}$ y el campo magnético no contribuye al trabajo realizado sobre la carga. Así que como $\phi(\infty) \equiv 0$, usando (3.120),

$$W = \int_{\infty}^{\mathbf{r}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\infty}^{\mathbf{r}} (-\nabla\phi) \cdot d\mathbf{r} = -\int_{\infty}^{\mathbf{r}} d\phi = \phi(\infty) - \phi(\mathbf{r}) = -\phi(\mathbf{r}). \quad (9.114)$$

Según (9.114), el potencial escalar de un campo electrostático puede interpretarse también como el trabajo requerido para traer una unidad de carga positiva desde el infinito hasta un punto dentro del campo; i.e.,

$$\phi(\mathbf{r}) = -\int_{\infty}^{\mathbf{r}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}. \quad (9.115)$$

PROBLEMA 9.25 Hallar el campo eléctrico $\mathbf{E}$ y el potencial ϕ de una carga puntual de magnitud q.

Solución: Si una carga puntual q se localiza en el origen, la ley de Gauss para el campo eléctrico (9.32) se transforma en

$$\oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \oiint_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n}\, dS = q. \quad (9.116)$$

Si S es una superficie esférica de radio r con centro en el origen, entonces $\mathbf{n} = \mathbf{e}_r$ y $\mathbf{D} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{e}_r = D_r$ donde D_r es la componente radial de $\mathbf{D}$. Así que (9.116) se transforma en

$$\oiint_S D_r\, dS = q. \quad (9.117)$$

Por la simetría de la configuración, $\mathbf{D} = D_r \mathbf{e}_r$ y sobre la superficie de radio constante D_r es una constante. Como el área superficial de una esfera de radio r es $4\pi r^2$,

$$\oiint_S D_r\, dS = D_r(r) 4\pi r^2 = q.$$

Por consiguiente, $D_r(r) = q/(4\pi r^2)$ y

$$\mathbf{D} = D_r \mathbf{e}_r = \frac{q}{4\pi r^2} \mathbf{e}_r. \quad (9.118)$$

Como $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$,

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi \varepsilon r^2} \mathbf{e}_r. \quad (9.119)$$

Ahora, puesto que $\mathbf{E}$ tiene solamente una componente radial, usando coordenadas esféricas la expresión (5.96) de $\Delta\phi$, $\mathbf{E} = -\Delta\phi$ se reduce a $E_r = -d\phi(\mathbf{r})/dr$, o por lo tanto, $d\phi(\mathbf{r})/dr = -q/4\pi\epsilon r^2$. Integrando a ambos lados,

$$\int_a^b \frac{d\phi(\mathbf{r})}{dr} dr = -\int_a^b \frac{q\, dr}{4\pi \varepsilon r^2} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon} \int_a^b \frac{dr}{r^2},$$

y por consiguiente,

$$\phi(b) - \phi(a) = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right). \quad (9.120)$$

Si $a = \infty$, $b = r$ y $\phi(\infty) \equiv 0$,

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi \varepsilon r}. \tag{9.121}$$

La *ley de Coulomb para campos electrostáticos* establece que la fuerza **f** entre dos cargas q_1 y q_2 es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia r_{12} entre ellas; i.e., si $\mathbf{e}_r$ es el vector unitario desde q_1 a q_2, entonces,

$$\mathbf{f} = \frac{q_1 q_2}{4\pi \varepsilon r_{12}^2} \mathbf{e}_r. \tag{9.122}$$

PROBLEMA 9.26 Demostrar la ley de Coulomb para campos electrostáticos.

Solución: Según la definición de fuerza de Lorentz (9.11), la fuerza **f** experimentada por una carga puntual q_2 en el campo electrostático es

$$\mathbf{f} = q_2 \mathbf{E}. \tag{9.123}$$

Si el campo **E** es producido por una carga puntual q_1, entonces sustituyendo (9.119) por **E** en (9.123), obtenemos la ley de Coulomb para campos electrostáticos (9.122).

Un *dipolo eléctrico* se forma por dos cargas iguales y opuestas separadas por una distancia arbitrariamente pequeña **l**, donde el vector **l** comienza en la carga negativa y termina en la carga positiva.

El *momento de dipolo eléctrico* **p** es el producto de la carga q y el vector distancia **l**; i.e.,

$$\mathbf{p} = q\mathbf{l}. \tag{9.124}$$

Se forma un *dipolo puntual* cuando $\mathbf{l} \longrightarrow 0$ y $q \longrightarrow \infty$ de modo que el momento de dipolo eléctrico **p** permanece constante.

PROBLEMA 9.27 Si el dipolo eléctrico está localizado en el origen y el momento de dipolo eléctrico está en la dirección positiva de z, mostrar que el potencial y el campo eléctrico del dipolo en un vacío cuya permitividad es ϵ_0, son

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\mathbf{p}\cdot\nabla\left(\frac{1}{r}\right), \tag{9.125}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{3(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r} - r^2\mathbf{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^5}, \tag{9.126}$$

donde $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$ es el vector del origen al punto de observación y $r >> |\mathbf{l}|$.

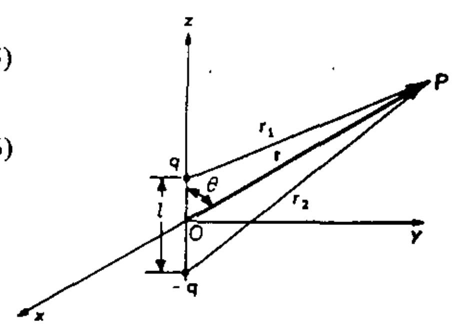


Figura 9.3 **Un dipolo en el origen y el punto de observación en r.**

Solución: En la figura 9.3, el potencial en un punto P debido a **p** es, según (9.121),

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_1} + \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 r_2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

Si $l << r$, entonces

$$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \simeq \frac{1}{r - (l/2)\cos\theta} - \frac{1}{r + (l/2)\cos\theta}$$

$$= \frac{l\cos\theta}{r^2}\,\frac{1}{1 - (l\cos\theta/2r)^2}$$

$$\simeq \frac{l\cos\theta}{r^2}.$$

Sustituyendo esto en el valor de $\phi(\mathbf{r})$,

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{ql\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}. \tag{9.127}$$

Como la dirección del momento de dipolo eléctrico **p** es a lo largo del eje z, se ve en la figura 9.3 que

$$\mathbf{p}\cdot\mathbf{r} = ql\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} = qlr\cos\theta.$$

Por consiguiente, según (9.127),

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}. \tag{9.128}$$

También

$$\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^3}\mathbf{r} = -\frac{1}{r^2}\mathbf{e}_r. \qquad [3.126]$$

Por consiguiente,

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\mathbf{p}\cdot\nabla\left(\frac{1}{r}\right).$$

Usando (3.113), el campo eléctrico **E** es

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= -\nabla\phi = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\nabla\left(\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{r^3}\right)\\ &= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\nabla(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}) - \frac{(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})}{4\pi\varepsilon_0}\nabla\left(\frac{1}{r^3}\right).\end{aligned} \tag{9.129}$$

Ahora, por (3.119),

$$\nabla(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}) = \mathbf{p}, \tag{9.130}$$

y por (3.125),

$$\nabla\left(\frac{1}{r^3}\right) = -3\frac{\mathbf{r}}{r^5}. \tag{9.131}$$

Sustituyendo (9.130–1) en (9.129),

$$\mathbf{E} = \frac{3(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r} - r^2\mathbf{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^5}.$$

PROBLEMA 9.28 Mostrar que en un campo estático producido por una corriente estacionaria,

$$\nabla\cdot\mathbf{J} = 0. \tag{9.132}$$

Solución: Las ecuaciones básicas para los campos magnetostáticos son

$$\nabla\times\mathbf{H} = \mathbf{J}, \qquad [9.105]$$

$$\nabla\cdot\mathbf{B} = 0. \qquad [9.106]$$

Como $\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{H}) = 0$ según (3.143), tomando la divergencia a ambos lados de (9.105),

$$\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{H}) = \nabla\cdot\mathbf{J} = 0.$$

Obsérvese que (9.132) se puede obtener también de la ecuación de continuidad (9.3) haciendo $\partial\rho/\partial t = 0$.

La *ley de circuitos de Ampere en magnetostática* establece que en un campo magnetostático, si *I* es la corriente estacionaria total por una superficie *S* limitada por una

curva cerrada C, entonces

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = I. \tag{9.133}$$

Esta ley corresponde a la ley de Gauss en electrostática.

PROBLEMA 9.29 Demonstrar la ley de circuitos de Ampere en magnetostática.

Solución: Integrando (9.105) sobre una superficie S limitada por una curva cerrada C, tenemos por (9.2) para la corriente estacionaria total I a través de S,

$$\iint_S \nabla \times \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = I. \tag{9.134}$$

Aplicando el teorema de Stokes (4.104) a (9.134) se obtiene

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = I.$$

Obsérvese que (9.133) puede obtenerse directamente de (9.30) haciendo $\partial \mathrm{D}/\partial t = 0$.

La ley de circuitos de Ampere (9.133) puede usarse para calcular los vectores de campo magnético para casos en que exista un alto grado de simetría.

PROBLEMA 9.30 Hallar el campo magnético **H** de un alambre recto infinito que lleve una corriente estacionaria I.

Solución: Considérese un alambre recto extendido sobre el eje z de $-\infty$ a ∞. Como hay simetría cilíndrica, se escoge un camino circular con un punto del eje z como centro con radio a, como se muestra en la figura 9.4. Por la simetría, el vector **H** es no solamente azimutal sino también tiene la misma dirección de $d\mathbf{r}$ y su magnitud es constante alrededor del contorno. Por consiguiente, por (9.133),

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = H_\Phi (2\pi a) = I.$$

Así que

$$\mathbf{H} = H_\Phi \, \mathbf{e}_\Phi = \frac{I}{2\pi a} \mathbf{e}_\Phi. \tag{9.135}$$

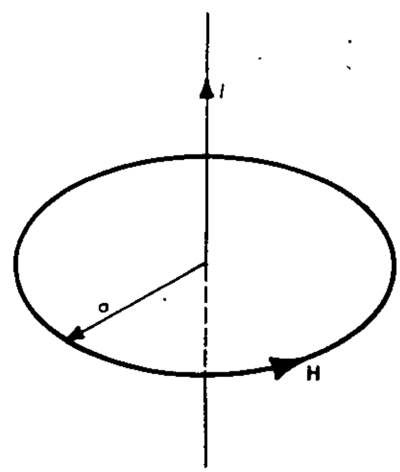


Figura 9.4 **Un alambre infinito que lleva una corriente I y su campo magnético H.**

PROBLEMA 9.31 Mostrar que en el campo magnetostático, el vector potencial $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ satisface

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}, \tag{9.136}$$

con la condición $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, donde μ_o es la permeabilidad del vacío.

Solución: Como $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ y $\mathbf{B} = \mu_o \mathbf{H}$, por (9.105),

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \mu_0 \mathbf{J}, \tag{9.137}$$

que se reduce a

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J}.$$

Así, si imponemos la condición de Lorentz (9.55) bajo estado estacionario, i.e.,

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0, \tag{9.138}$$

obtenemos

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}.$$

Obsérvese que (9.136) puede obtenerse también de la ecuación de onda no homogénea (9.56) con $\partial^2 \mathbf{A}/\partial t^2 = 0$.

9.8 Campos con variación de tiempo armónicos o sinusoidales

Los campos producidos por cargas y corrientes cuya variación con el tiempo es simplemente armónica, o sinusoidal, se llaman *campos armónicos* o *monocromáticos*.

Supongamos que la fuente varía en el tiempo como

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{J}(\mathbf{r}) \cos(\omega t + \alpha). \tag{9.139}$$

Entonces $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ se representa por

$$\begin{aligned} \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) &= Re[\mathbf{J}(\mathbf{r}) e^{j(\omega t + \alpha)}] \\ &= Re[\mathbf{J}(\mathbf{r}) e^{j\alpha} e^{j\omega t}] \\ &= Re[\overline{\mathbf{J}}(\mathbf{r}) e^{j\omega t}], \end{aligned} \tag{9.140}$$

donde $j = \sqrt{-1}$, $Re(z)$ = parte real de z y $\overline{\mathbf{J}}(\mathbf{r}) = \mathbf{J}(\mathbf{r})e^{j\alpha}$ es un vector complejo en el espacio y una función de coordenadas del espacio solamente.

La *fase* del vector complejo $\overline{\mathbf{J}}(\mathbf{r})$ es α.

Como el factor de tiempo $e^{j\omega t}$ es un multiplicador común, todas las derivadas respecto al tiempo $\partial/\partial t$ se pueden reemplazar por $j\omega$. Así, las ecuaciones de Maxwell (9.16–7) se reducen a

$$\nabla \times \overline{\mathbf{E}} + j\omega \overline{\mathbf{B}} = \mathbf{0}, \tag{9.141}$$

$$\nabla \times \overline{\mathbf{H}} - j\omega \overline{\mathbf{D}} = \overline{\mathbf{J}}. \tag{9.142}$$

La ecuación de *continuidad* (9.3) se transforma ahora en

$$\nabla \cdot \overline{\mathbf{J}} + j\omega \overline{\rho} = 0. \tag{9.143}$$

Para campos armónicos en medios lineales, isotrópicos y homogéneos, la forma armónica de las ecuaciones de Maxwell (9.141–2) se reduce a

$$\nabla \times \overline{\mathbf{E}} + j\omega \mu \overline{\mathbf{H}} = \mathbf{0}, \tag{9.144}$$

$$\nabla \times \overline{\mathbf{H}} - j\omega \varepsilon \overline{\mathbf{E}} = \overline{\mathbf{J}}. \tag{9.145}$$

PROBLEMA 9.32 Mostrar que las ecuaciones de Maxwell (9.144–5) en regiones sin corriente son invariantes para la transformación

$$\overline{\mathbf{E}}' = \pm \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\, \overline{\mathbf{H}}, \qquad \overline{\mathbf{H}}' = \mp \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\, \overline{\mathbf{E}}. \tag{9.146}$$

Solución: Si $\overline{\mathbf{J}} = \mathbf{0}$, entonces (9.144–5) se transforma en

$$\nabla \times \overline{\mathbf{E}} + j\omega\mu \overline{\mathbf{H}} = \mathbf{0}, \tag{9.147}$$

$$\nabla \times \overline{\mathbf{H}} - j\omega\varepsilon \overline{\mathbf{E}} = \mathbf{0}. \tag{9.148}$$

Según (9.146)

$$\overline{\mathbf{E}} = \mp \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\, \overline{\mathbf{H}}', \quad \overline{\mathbf{H}} = \pm \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\, \overline{\mathbf{E}}'. \tag{9.149}$$

Sustituyendo (9.149) en (9.147–8),

$$\nabla \times \overline{\mathbf{H}}' - j\omega\varepsilon \overline{\mathbf{E}}' = \mathbf{0}, \tag{9.150}$$

$$\nabla \times \overline{\mathbf{E}}' + j\omega\mu \overline{\mathbf{H}}' = \mathbf{0}, \tag{9.151}$$

lo que expresa que los nuevos vectores $\overline{\mathbf{E}}'$ y $\overline{\mathbf{H}}'$ satisfacen también las ecuaciones de Maxwell.

Obsérvese que la transformación (9.146) es, en esencia, un intercambio de $\overline{\mathbf{E}}$ y $\overline{\mathbf{H}}$, excepto para factores de escala.

El *lema de Lorentz* establece que si $\overline{\mathbf{E}}_a$, $\overline{\mathbf{H}}_a$ y $\overline{\mathbf{E}}_b$, $\overline{\mathbf{H}}_b$ representan soluciones a las ecuaciones de Maxwell (9.147–8) en una región sin fuentes, partiendo de fuentes diferentes que operan a la misma frecuencia fuera de la región considerada, entonces

$$\nabla \cdot (\overline{\mathbf{E}}_a \times \overline{\mathbf{H}}_b - \overline{\mathbf{E}}_b \times \overline{\mathbf{H}}_a) = 0. \tag{9.152}$$

PROBLEMA 9.33 Demostrar el lema de Lorentz.

Solución: Usando la identidad vectorial (3.157),

$$\nabla \cdot (\overline{\mathbf{E}}_a \times \overline{\mathbf{H}}_b) = \overline{\mathbf{H}}_b \cdot \nabla \times \overline{\mathbf{E}}_a - \overline{\mathbf{E}}_a \cdot \nabla \times \overline{\mathbf{H}}_b. \tag{9.153}$$

Como $\overline{\mathbf{E}}_a$, $\overline{\mathbf{H}}_b$ satisfacen (9.147–8),

$$\nabla \times \overline{\mathbf{E}}_a = -j\omega\mu \overline{\mathbf{H}}_a, \quad \nabla \times \overline{\mathbf{H}}_b = j\omega\varepsilon \overline{\mathbf{E}}_b.$$

Sustituyendo estas en (9.153),

$$\nabla \cdot (\overline{\mathbf{E}}_a \times \overline{\mathbf{H}}_b) = -j\omega\mu \overline{\mathbf{H}}_a \cdot \overline{\mathbf{H}}_b - j\omega\varepsilon \overline{\mathbf{E}}_a \cdot \overline{\mathbf{E}}_b. \tag{9.154}$$

Intercambiando subíndices a y b,

$$\nabla \cdot (\overline{\mathbf{E}}_b \times \overline{\mathbf{H}}_a) = -j\omega\mu \overline{\mathbf{H}}_a \cdot \overline{\mathbf{H}}_b - j\omega\varepsilon \overline{\mathbf{E}}_a \cdot \overline{\mathbf{E}}_b \tag{9.155}$$

pues el producto punto es conmutativo. Por consiguiente, sustrayendo (9.155) de (9.154),

$$\nabla \cdot (\overline{\mathbf{E}}_a \times \overline{\mathbf{H}}_b - \overline{\mathbf{E}}_b \times \overline{\mathbf{H}}_a) = 0. \qquad [9.152]$$

El *teorema de reciprocidad de Lorentz* establece que si $\overline{\mathbf{E}}_a$, $\overline{\mathbf{H}}_a$ y $\overline{\mathbf{E}}_b$, $\overline{\mathbf{H}}_b$ son soluciones a las ecuaciones de Maxwell (9.147–8) en una región sin fuentes, entonces

$$\oint\!\!\!\oint_S (\overline{\mathbf{E}}_a \times \overline{\mathbf{H}}_b - \overline{\mathbf{E}}_b \times \overline{\mathbf{H}}_a) \cdot d\mathbf{S} = 0. \tag{9.156}$$

Este resultado se obtiene aplicando el teorema de divergencia de Gauss al lema de Lorentz (9.152).

PROBLEMA 9.34 Mostrar que en el campo armónico, la condición de Lorentz se reduce a

$$\nabla \cdot \overline{\mathbf{A}} + j\omega\mu\varepsilon\overline{\phi} = 0, \tag{9.157}$$

y los vectores del campo complejo $\overline{\mathbf{E}}(\mathbf{r})$ y $\overline{\mathbf{B}}(\mathbf{r})$ se pueden expresar como

$$\overline{\mathbf{B}} = \nabla \times \overline{\mathbf{A}}, \tag{9.158}$$

$$\overline{\mathbf{E}} = -j\omega\overline{\mathbf{A}} + \frac{1}{j\omega\mu\varepsilon}\nabla(\nabla \cdot \overline{\mathbf{A}}). \tag{9.159}$$

Solución: Como en el campo armónico, todas las derivadas con respecto al tiempo $\partial/\partial t$ pueden reemplazarse por $j\omega$, (9.157) se deduce de la condición de Lorentz (9.55). De modo similar (9.158) y (9.159) se obtienen respectivamente de (9.42) y (9.43) sustituyendo

$$\overline{\phi} = -\frac{1}{j\omega\mu\varepsilon}\nabla \cdot \overline{\mathbf{A}}, \tag{9.160}$$

que se obtiene de (9.157).

PROBLEMA 9.35 Mostrar que, en una región sin fuentes, todos los vectores de campo armónico, lo mismo que los potenciales armónicos, satisfacen las ecuaciones de Helmholtz

$$\nabla^2\overline{\mathbf{E}} + K^2\overline{\mathbf{E}} = \mathbf{0}, \tag{9.161}$$

$$\nabla^2\overline{\mathbf{H}} + K^2\overline{\mathbf{H}} = \mathbf{0}, \tag{9.162}$$

$$\nabla^2\overline{\mathbf{A}} + K^2\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{0}, \tag{9.163}$$

$$\nabla^2\overline{\phi} + K^2\overline{\phi} = 0, \tag{9.164}$$

donde

$$K = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}. \tag{9.165}$$

Solución: El rotacional de (9.147) es

$$\nabla \times (\nabla \times \overline{\mathbf{E}}) = -j\omega\mu\nabla \times \overline{\mathbf{H}}. \tag{9.166}$$

Por (9.148), $\nabla \times \overline{\mathbf{H}} = j\omega\epsilon\mathbf{E}$; por consiguiente, sustituyendo por $\nabla \times \overline{\mathbf{H}}$ en (9.166),

$$\nabla \times (\nabla \times \overline{\mathbf{E}}) = -j\omega\mu(j\omega\varepsilon)\overline{\mathbf{E}} = \omega^2\mu\varepsilon\overline{\mathbf{E}} = K^2\overline{\mathbf{E}}. \tag{9.167}$$

Según (3.163),

$$\nabla \times (\nabla \times \overline{\mathbf{E}}) = \nabla(\nabla\cdot\overline{\mathbf{E}}) - \nabla^2\overline{\mathbf{E}} = -\nabla^2\overline{\mathbf{E}}$$

pues $\nabla \cdot \overline{\mathbf{E}} = 0$ en una región sin fuentes. Por tanto, (9.167) puede volver a escribirse como

$$\nabla^2\overline{\mathbf{E}} + K^2\overline{\mathbf{E}} = \mathbf{0}.$$

De modo similar por (9.147) y (9.148),

$$\nabla^2\overline{\mathbf{H}} + K^2\overline{\mathbf{E}} = \mathbf{0}.$$

Obsérvese que (9.163–4) puede deducirse también de (9.56–7) haciendo $\overline{\mathbf{J}} = \mathbf{0}, \overline{\rho} = 0$, y reemplazando $\partial^2/\partial t^2$ por $(j\omega)(j\omega) = -\omega^2$.

9.9 Ondas planas

El *vector de onda o propagación* es un vector cuya magnitud es igual a $\omega\sqrt{\mu\epsilon}$; i.e.,

$$\mathbf{K} = K_x\mathbf{i} + K_y\mathbf{j} + K_z\mathbf{k}, \tag{9.168}$$

donde $|\mathbf{K}| = K = (K_x^2 + K_y^2 + K_z^2)^{1/2} = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$. La magnitud K se llama un *número de onda*.

PROBLEMA 9.36 Si r es el vector de posición, $\mathbf{E}_o$ es un vector complejo constante y

$$\overline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \overline{\mathbf{E}}_0 e^{\pm j\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}}, \tag{9.169}$$

mostrar que

$$\nabla\cdot\overline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \pm j\mathbf{K}\cdot\overline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}), \tag{9.170}$$

$$\nabla \times \overline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \pm j\mathbf{K} \times \overline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}). \tag{9.171}$$

Solución: Si $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0^{\pm jK\cdot r}$, entonces según (3.155–6),

$$\nabla\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \nabla\cdot(\overline{\mathbf{E}}_0 e^{\pm j\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}}) = e^{\pm j\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}}\nabla\cdot\overline{\mathbf{E}}_0 + \nabla(e^{\pm j\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}})\cdot\overline{\mathbf{E}}_0, \tag{9.172}$$

$$\nabla \times \overline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \nabla \times (\overline{\mathbf{E}}_0 e^{\pm j\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}}) = e^{\pm j\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}}\nabla \times \overline{\mathbf{E}}_0 + \nabla(e^{\pm j\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}}) \times \overline{\mathbf{E}}_0. \tag{9.173}$$

Como $\mathbf{E}_0$ es un vector complejo constante, $\nabla\cdot\overline{\mathbf{E}}_0 = 0$, $\nabla \times \overline{\mathbf{E}}_0 = \mathbf{0}$. Por lo tanto, (9.172–3) se reduce a

$$\nabla \cdot \overline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \nabla(e^{\pm j\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}}) \cdot \overline{\mathbf{E}}_0, \tag{9.174}$$

$$\nabla \times \overline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \nabla(e^{\pm j\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}}) \times \overline{\mathbf{E}}_0. \tag{9.175}$$

Como $\mathbf{K}\cdot\mathbf{r} = K_x x + K_y y + K_z z$,

$$\frac{\partial}{\partial x}(e^{\pm j\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}}) = \pm jK_x e^{\pm j\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}}$$

y expresiones similares con respecto a y y z. Por consiguiente, en virtud de (3.102),

$$\nabla(e^{\pm j\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}}) = \pm je^{\pm j\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}}(K_x\mathbf{i} + K_y\mathbf{j} + K_z\mathbf{k}) = \pm j\mathbf{K}(e^{\pm j\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}}). \tag{9.176}$$

Sustituyendo (9.176) en (9.174–5),

$$\nabla\cdot\overline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \pm je^{\pm j\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}}\mathbf{K}\cdot\overline{\mathbf{E}}_0 = \pm j\mathbf{K}\cdot(\overline{\mathbf{E}}_0 e^{\pm j\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}}) = \pm j\mathbf{K}\cdot\overline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}),$$

$$\nabla\times\overline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \pm je^{\pm j\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}}\mathbf{K}\times\overline{\mathbf{E}}_0 = \pm j\mathbf{K}\times(\overline{\mathbf{E}}_0 e^{\pm j\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}}) = \pm j\mathbf{K}\times\overline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}).$$

Observando (9.176) y (9.170–1), obsérvese que suponiendo (9.169), i.e., si la variación espacial es de la forma $e^{\pm j\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}}$, entonces el operador ∇ se puede sustituír por el vector $\pm j\mathbf{K}$.

PROBLEMA 9.37 Mostrar que el vector de campo (9.169) satisface la ecuación de Helmholtz (9.161).

Solución: Por la identidad vectorial (3.163),

$$\nabla^2\overline{\mathbf{E}} = \nabla(\nabla\cdot\overline{\mathbf{E}}) - \nabla\times(\nabla\times\overline{\mathbf{E}}). \tag{9.177}$$

Si $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{\pm jK\cdot r}$, donde $\mathbf{E}_0$ es un vector complejo constante, podemos reemplazar ∇ por el vector $\pm j\mathbf{K}$. Así por (9.177), con el uso de la identidad vectorial (1.83) y $j^2 = -1$,

$$\begin{aligned}\nabla^2\overline{\mathbf{E}} &= \pm j\mathbf{K}(\pm j\mathbf{K}\cdot\overline{\mathbf{E}}) - (\pm j\mathbf{K})\times(\pm j\mathbf{K}\times\overline{\mathbf{E}})\\ &= -(\mathbf{K}\cdot\overline{\mathbf{E}})\mathbf{K} + \mathbf{K}\times(\mathbf{K}\times\overline{\mathbf{E}})\\ &= -(\mathbf{K}\cdot\overline{\mathbf{E}})\mathbf{K} + (\mathbf{K}\cdot\overline{\mathbf{E}})\mathbf{K} - (\mathbf{K}\cdot\mathbf{K})\overline{\mathbf{E}}\\ &= -K^2\overline{\mathbf{E}}.\end{aligned} \tag{9.178}$$

Por consiguiente,

$$\nabla^2\overline{\mathbf{E}} + K^2\overline{\mathbf{E}} = (-K^2 + K^2)\overline{\mathbf{E}} = \mathbf{0}. \qquad [9.161]$$

Una *onda plana (monocromática)* que se propaga en la dirección del vector de onda $\mathbf{K}$ es un campo armónico representado por

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathrm{Re}[\overline{\mathbf{E}}(\mathbf{r})e^{j\omega t}] = \mathrm{Re}[\overline{\mathbf{E}}_0 e^{j(\omega t - \mathbf{K}\cdot\mathbf{r})}]. \tag{9.179}$$

La *superficie de fase constante* se define

$$\omega t - \mathbf{K}\cdot\mathbf{r} = \text{const.} \tag{9.180}$$

La *velocidad de propagación* $\mathbf{v}_p$ se define como la velocidad a la cual se mueven los planos de fase constante.

Una *onda transversa* es una onda para la cual los vectores de campo magnético y eléctrico $\mathbf{E}$ y $\mathbf{H}$ son perpendiculares a la direción de propagación $\mathbf{K}$.

La *impedancia característica* η de un medio con constantes ϵ y μ es la razón de la magnitud del vector de campo eléctrico $\mathbf{E}$ a la del vector de campo magnético $\mathbf{H}$; i.e.,

$$\eta = \frac{|\mathbf{E}|}{|\mathbf{H}|}.$$

PROBLEMA 9.38 Mostrar que (a) una superficie de fase constante es un plano normal a $\mathbf{K}$, (b) la velocidad de propagación de una onda plana $\mathbf{v}_p$ es

$$v_p = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}, \tag{9.181}$$

(c) el vector del campo eléctrico $\overline{\mathbf{E}}$ es normal a la dirección de propagación $\mathbf{K}$, (d) el vector de campo magnético $\overline{\mathbf{H}}$ es perpendicular a $\mathbf{K}$ y a $\overline{\mathbf{E}}$ y es

$$\overline{\mathbf{H}} = \frac{\mathbf{K}\times\overline{\mathbf{E}}}{\omega\mu}, \tag{9.182}$$

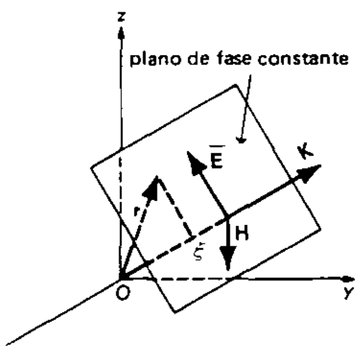
y (e) la impedancia característica η es

$$\eta = \frac{|\overline{\mathbf{E}}|}{|\overline{\mathbf{H}}|} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}. \tag{9.183}$$

Solución: (a) Si se halla una superficie de fase constante haciendo t = const en (9.180), obtenemos la condición de fase constante

$$\mathbf{K}\cdot\mathbf{r} = \text{const}, \tag{9.184}$$

que es la ecuación de un plano normal a $\mathbf{K}$. (Cf., problema 6.16.)



5 Una onda plana propagándose a lo largo de K.

(b) Si ξ es el componente de $\mathbf{r}$ en la dirección $\mathbf{K}$ (véase figura 9.5), entonces por (1.30) podemos escribir $\mathbf{K}\cdot\mathbf{r} = K\xi$ y (9.180) se transforma en $\omega t - K\xi$ = const. Diferenciando con respecto al tiempo t se obtiene

$$v_p = \frac{d\xi}{dt} = \frac{\omega}{K} = \frac{\omega}{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}.$$

(c) por (9.148), en una región sin fuentes,

$$\overline{\mathbf{E}} = \frac{1}{j\omega\varepsilon}\nabla\times\overline{\mathbf{H}}. \tag{9.185}$$

Así que

$$\nabla\cdot\overline{\mathbf{E}} = \frac{1}{j\omega\varepsilon}\nabla\cdot(\nabla\times\overline{\mathbf{H}}) = 0. \tag{9.186}$$

Reemplazando ∇ por $-j\mathbf{K}$.

$$-j\mathbf{K}\cdot\overline{\mathbf{E}} = 0, \tag{9.187}$$

lo que implica que $\overline{\mathbf{E}}(\mathbf{r})$ es normal a la dirección de propagación $\mathbf{K}$.

(d) En una región sin fuentes, por (9.147),

$$\overline{\mathbf{H}} = -\frac{1}{j\omega\mu}\nabla\times\overline{\mathbf{E}}. \tag{9.188}$$

Reemplazando ∇ por $-j\mathbf{K}$,

$$\overline{\mathbf{H}} = -\frac{1}{j\omega\mu}(-j\mathbf{K}\times\overline{\mathbf{E}}) = \frac{\mathbf{K}\times\overline{\mathbf{E}}}{\omega\mu}, \qquad [9.182]$$

lo que muestra que $\overline{\mathbf{H}}$ es perpendicular a $\mathbf{K}$ y a $\overline{\mathbf{E}}$.

Por el requisito $\nabla\cdot\overline{\mathbf{H}} = 0$ podemos obtener también la relación

$$-j\mathbf{K}\cdot\overline{\mathbf{H}} = 0, \tag{9.189}$$

lo que muestra que $\overline{\mathbf{H}}$ es también normal a $\mathbf{K}$.

Reemplazando ∇ por $-j\mathbf{K}$ en (9.185),

$$\overline{\mathbf{E}} = -\frac{\mathbf{K}\times\overline{\mathbf{H}}}{\omega\varepsilon} = \frac{\overline{\mathbf{H}}\times\mathbf{K}}{\omega\varepsilon}. \tag{9.190}$$

Así que (9.182) y (9.190) muestran que ($\overline{\mathbf{E}}, \overline{\mathbf{H}}, \mathbf{K}$) forman un conjunto derecho de vectores ortogonales. (Véase figura 9.5.)

(e) Por (9.182) y como $\overline{\mathbf{E}}$, $\mathbf{K}$ son ortogonales,

$$|\overline{\mathbf{H}}| = \frac{1}{\omega\mu}\,|\mathbf{K}\times\overline{\mathbf{E}}| = \frac{K}{\omega\mu}\,|\overline{\mathbf{E}}|.$$

Así que la impedancia es

$$\eta = \frac{|\overline{\mathbf{E}}|}{|\overline{\mathbf{H}}|} = \frac{\omega\mu}{K} = \frac{\omega\mu}{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}.$$

9.10 Problemas suplementarios

PROBLEMA 9.39 Mostrar que en medios isotrópicos homogéneos, $\mathbf{E}$ y $\mathbf{H}$ satisfacen las ecuaciones de onda no homogéneas,

$$\nabla^2\mathbf{E} - \mu\varepsilon\,\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} = \mu\,\frac{\partial\mathbf{J}}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon}\,\nabla\rho,$$

$$\nabla^2\mathbf{H} - \mu\varepsilon\,\frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial t^2} = -\nabla\times\mathbf{J}.$$

PROBLEMA 9.40 Mostrar que en medios isotrópicos homogéneos y una región sin fuentes, $\mathbf{E}$ y $\mathbf{H}$ satisfacen

$$\nabla^2\mathbf{E} - \mu\varepsilon\,\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} - \mu\sigma\,\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{0},$$

$$\nabla^2\mathbf{H} - \mu\varepsilon\,\frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial t^2} - \mu\sigma\,\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} = \mathbf{0}.$$

PROBLEMA 9.41 Un indicador útil para el campo electromagnético en el caso en que no hay cargas es el *indicador de Coulomb*, donde $\nabla\cdot\mathbf{A} = 0$. Mostrar que en este caso los potenciales $\mathbf{A}$ y ϕ satisfacen

$$\nabla^2\mathbf{A} - \mu\varepsilon\,\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu\mathbf{J} + \mu\varepsilon\,\nabla\,\frac{\partial\phi}{\partial t},$$

$$\nabla^2\phi = -\,\frac{\rho}{\varepsilon}.$$

Mostrar también que para que los nuevos potenciales satisfagan la condición del indicador de Coulomb, la función indicadora ψ debe satisfacer la ecuación de Laplace $\nabla^2\psi = 0$.

PROBLEMA 9.42 Mostrar que los potenciales en el punto definido por el vector de posición $\mathbf{r}$ en campos eléctricos y magnéticos uniformes son

$$\phi = -\mathbf{E}\cdot\mathbf{r}, \qquad \mathbf{A} = \frac{1}{2}\,(\mathbf{B}\cdot\mathbf{r}).$$

PROBLEMA 9.43 Mostrar que el flujo magnético Φ y el vector de potencial $\mathbf{A}$ están relacionados por

$$\Phi = \oint_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r},$$

y por consiguiente, que la fem en un circuito fijo C es

$$\text{fem} = \frac{d}{dt}\oint_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}.$$

PROBLEMA 9.44 Mostrar que la fuerza por unidad de volumen fv. llamada a veces la densidad de *fuerza de Lorentz,* sobre una región de espacio libre (vacío) que contiene cargas y corrientes debidas a un campo electromagnético se puede expresar como

$$\mathbf{f}_V = \rho\mathbf{E} + \mathbf{J}\times\mathbf{B}.$$

PROBLEMA 9.45 Usando las ecuaciones de Maxwell, mostrar que

$$\mathbf{f}_V = -\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E}\times\mathbf{B}) + \varepsilon_0\mathbf{E}(\nabla\cdot\mathbf{E}) - \frac{1}{2}\varepsilon_0\nabla(E^2) - \varepsilon_0(\mathbf{E}\cdot\nabla)\mathbf{E}$$

$$+\frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}(\nabla\cdot\mathbf{B}) - \frac{1}{2\mu_0}\nabla(B^2) + \frac{1}{\mu_0}(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{B}.$$

La cantidad $\epsilon_0\,\mathbf{E}\times\mathbf{B} = \mathbf{D}\times\mathbf{B}$ se llama a veces *densidad de momentum* del campo electromagnético.

[*Sugerencia:* Usar la identidad vectorial $\mathbf{g}\times(\nabla\times\mathbf{g}) = \frac{1}{2}\nabla(g^2) - (\mathbf{g}\cdot\nabla)\mathbf{g}$, que puede deducirse de (3.159) tomando $\mathbf{f} = \mathbf{g}$]

PROBLEMA 9.46 Hallar el campo eléctrico **E** y el potencial ϕ debido a una línea de carga infinita con densidad de carga por unidad de longitud ρ_l

Respuesta: $\mathbf{E} = \dfrac{\rho_l}{2\pi\varepsilon\rho}\mathbf{e}_\rho,\quad \phi(\rho_1) - \phi(\rho_2) = \dfrac{\rho_l}{2\pi\varepsilon}\ln\left(\dfrac{\rho_2}{\rho_1}\right).$

PROBLEMA 9.47 Un volumen esférico de radio a centrado en el origen contiene una carga eléctrica de densidad uniforme ρ_0. Hallar el campo eléctrico $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ y el potencial $\phi(\mathbf{r})$ debido a esta distribución de carga.

Respuesta: Para $0 \le r \le a$, $\quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \dfrac{\rho_0}{3\varepsilon_0}r\,\mathbf{e}_r,\quad \phi(\mathbf{r}) = \dfrac{\rho_0}{3\varepsilon_0}a^2 + \dfrac{\rho_0}{6\varepsilon}(r^2 - a^2);$

Para $r > a$, $\quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \dfrac{a^3\rho_0}{3\varepsilon_0 r^2}\mathbf{e}_r,\quad \phi(\mathbf{r}) = \dfrac{a^3\rho_0}{3\varepsilon_0 r}.$

PROBLEMA 9.48 Un cable coaxial consiste en un conductor sólido interno de sección transversal circular de radio a rodeado por un cilindro hueco conductor de radio interior b y radio exterior c. Una corriente total I fluye en el conductor interno y regresa por el conductor externo con distribución uniforme. Suponiendo que el eje del cable coincide con el eje z y su longitud es infinita, hallar el campo magnético **H** dentro de y entre los dos conductores.

Respuesta: For $\rho \le a$, $\quad \mathbf{H} = \dfrac{I}{2\pi a^2}\rho\,\mathbf{e}_\phi;\quad a \le \rho \le b,\quad \mathbf{H} = \dfrac{I}{2\pi\rho}\mathbf{e}_\phi.$

For $b \le \rho \le c$, $\quad \mathbf{H} = \dfrac{I}{2\pi\rho}\dfrac{c^2 - \rho^2}{c^2 - b^2}\mathbf{e}_\phi.$

PROBLEMA 9.49 Mostrar que la fuerza sobre un dipolo eléctrico en un campo eléctrico **E** es

$$\mathbf{f} = (\mathbf{p}\cdot\nabla)\mathbf{E}.$$

PROBLEMA 9.50 Mostrar que el momento sobre un dipolo eléctrico colocado en un campo eléctrico uniforme **E** es

$$\boldsymbol{\tau}_e = \mathbf{p}\times\mathbf{E}.$$

PROBLEMA 9.51 Hallar la expresión para la fuerza ejercida sobre un alambre que lleva una corriente I cuando el alambre se sumerge en un campo magnético **B**.

Respuesta: $\mathbf{f} = I \oint_C d\mathbf{r} \times \mathbf{B}$.

PROBLEMA 9.52 En un campo armónico, si el vector complejo de Poynting se define como

$$\overline{\mathbf{P}} = \frac{1}{2} (\overline{\mathbf{E}} \times \overline{\mathbf{H}}^*),$$

mostrar que

$$\nabla \cdot \mathbf{P} + 2j\omega \left(\frac{1}{4} \mu \, |\overline{\mathbf{H}}|^2 - \frac{1}{4} \varepsilon \, |\overline{\mathbf{E}}|^2 \right) = -\frac{1}{2} (\overline{\mathbf{E}} \cdot \overline{\mathbf{J}}^*),$$

donde $\overline{\mathbf{H}}^*$ y $\overline{\mathbf{J}}^*$ son vectores complejos conjugados de $\overline{\mathbf{H}}$ y $\overline{\mathbf{J}}$, respectivamente y

$$|\overline{\mathbf{H}}|^2 = \overline{\mathbf{H}} \cdot \overline{\mathbf{H}}^*, \quad |\overline{\mathbf{E}}|^2 = \overline{\mathbf{E}} \cdot \overline{\mathbf{E}}^*;$$

dar una interpretación física de esta ecuación.

PROBLEMA 9.53 Hallar el campo eléctrico a una distancia a de una línea de carga de longitud infinita y fuerza ρ_l coulombs/m.
[*Sugerencia:* Usar la ley de Gauss (9.32).]

Respuesta: $\mathbf{E} = E_\rho \mathbf{e}_\rho = \rho_l / 2\pi \varepsilon_0 a \, \mathbf{e}_\rho$.

PROBLEMA 9.54 Mostrar que el campo eléctrico del dipolo eléctrico de la figura 9.3 puede expresarse como

$$\mathbf{E} = \frac{p}{4\pi \varepsilon_0 r^3} (2 \cos \theta \, \mathbf{e}_r + \operatorname{sen} \theta \, \mathbf{e}_\theta).$$

PROBLEMA 9.55 Mostrar que la energía almacenada en un campo electrostático se puede expresar como

$$\frac{1}{2} \iiint \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} \, dV = \frac{1}{2} \iiint \rho \phi \, dV,$$

donde ρ es la densidad de carga y ϕ es el potencial escalar del campo electrostático.

PROBLEMA 9.56 Mostrar que la energía almacenada en un campo magnetostático se puede expresar como

$$\frac{1}{2} \iiint \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \, dV = \frac{1}{2} \iiint \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} \, dV,$$

donde **J** es la densidad de corriente y **A** es el vector potencial del campo magnetostático.

10 CAPITULO

FORMAS DIFERENCIALES

10.1 Formas diferenciales

Una *forma diferencial exterior* del espacio 3-dimensional con coordenadas x, y, z es una expresión obtenida sumando y multiplicando funciones de valor real y los diferenciales dx, dy, dz de las coordenadas. Estas operaciones de adición y multiplicación obedecen a las leyes usuales *asociativa* y *distributiva*; sin embargo, la multiplicación *no* es *conmutativa*, sino que obedece a la *ley anticonmutativa*: si reemplazamos x, y, z por x_1, x_2, x_3, respectivamente, entonces

$$dx_i dx_j = -dx_j dx_i \text{ para } 1 \leq i, j \leq 3. \tag{10.1}$$

Por la regla anticonmutativa, denotamos esta multiplicación de formas por medio de una *cuña* Λ.

Si cada sumando de una forma diferencial contiene expresiones $p\ dx_i$ donde $p = 0, 1, 2, 3$, la forma se llama *forma diferencial* de *grado p* o simplemente, una *forma p*. Así,

una *forma 0* es simplemente una función diferenciable $f(x, y, z)$;
una *forma 1* es una expresión $f\,dx + g\,dy + h\,dz$;
una *forma 2* es una expresión $f\,dx \wedge dy + g\,dy \wedge dz + h\,dz \wedge dx$;
una *forma 3* es una expresión $f\,dx \wedge dy \wedge dz$.

Los coeficientes f, g, h se suponen funciones escalares de las coordenadas, infinitamente diferenciables.

Una forma exterior diferencial es idénticamente cero si y sólo si todos los coeficientes de su definición son idénticamente cero.

Como extensión natural de las definiciones anteriores, sobre un espacio n-dimensional con coordenadas $x_1, \ldots, x_n$, una forma diferencial de grado p (o forma p) es una expresión de la forma

$$\sum a_{i_1 \ldots i_p}(x_1, \ldots, x_n)\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p},$$

donde la suma se toma sobre todas las combinaciones posibles de los índices p y los coeficientes $a_{i_1 \ldots i_p}(x_1, \ldots, x_n)$ se suponen funciones infinitamente diferenciables de las coordenadas (o n variables).

10.2 Suma y producto externo de formas

Las formas diferenciales de la misma clase se *suman* combinando coeficientes de formas semejantes. Así, en notación de índices para formas 1,

$$\sum f_i\, dx_i + \sum g_i\, dx_i = \sum (f_i + g_i)\, dx_i. \tag{10.2}$$

La regla correspondiente vale para formas 2 ó 3. Sin embargo, cuando dos términos

RESUMEN DE RELACIONES VECTORIALES

C APENDICE

C1. Ecuaciones de álgebra vectorial

Ecuación No.	Ecuación
(1.31)	$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$
(1.32)	$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} + \mathbf{A}\cdot\mathbf{C}$
(1.55)	$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = -\mathbf{B}\times\mathbf{A}$
(1.56)	$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{A}\times\mathbf{B} + \mathbf{A}\times\mathbf{C}$
(1.58)	$\mathbf{A}\times\mathbf{A} = \mathbf{0}$
(1.72)	$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C} = \mathbf{A}\times\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}$
(1.76)	$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C} = [\mathbf{ABC}]$
(1.77)	$[\mathbf{ABC}] = [\mathbf{BCA}] = [\mathbf{CAB}] = -[\mathbf{ACB}] = -[\mathbf{BAC}] = -[\mathbf{CBA}]$
(1.83)	$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\mathbf{C}$
(1.98)	$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{C} = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})\mathbf{A}$
(3.112)	$\nabla(\phi+\psi) = \nabla\phi + \nabla\psi$
(3.113)	$\nabla(\phi\psi) = \phi\nabla\psi + \psi\nabla\phi$
(3.124)	$\nabla\phi = \nabla\phi(u) = \phi'(u)\nabla u$
(3.128)	$\nabla\cdot(\mathbf{f}+\mathbf{g}) = \nabla\cdot\mathbf{f} + \nabla\cdot\mathbf{g}$
(3.131)	$\text{div}\,(\text{grad}\,\phi) = \nabla\cdot(\nabla\phi) = \nabla^2\phi$
(3.140)	$\nabla\times(\mathbf{f}+\mathbf{g}) = \nabla\times\mathbf{f} + \nabla\times\mathbf{g}$
(3.142)	$\nabla\times(\nabla\phi) = \mathbf{0}$
(3.143)	$\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{f}) = 0$
(3.154)	$(\mathbf{f}\times\nabla)\cdot\mathbf{g} = \mathbf{f}\cdot(\nabla\times\mathbf{g})$
(3.155)	$\nabla\cdot(\phi\mathbf{f}) = \phi\nabla\cdot\mathbf{f} + \mathbf{f}\cdot(\nabla\phi)$
(3.156)	$\nabla\times(\phi\mathbf{f}) = \phi\nabla\times\mathbf{f} + (\nabla\phi)\times\mathbf{f} = \phi\nabla\times\mathbf{f} - \mathbf{f}\times\nabla\phi$
(3.157)	$\nabla\cdot(\mathbf{f}\times\mathbf{g}) = \mathbf{g}\cdot(\nabla\times\mathbf{f}) - \mathbf{f}\cdot(\nabla\times\mathbf{g})$
(3.158)	$\nabla\times(\mathbf{f}\times\mathbf{g}) = \mathbf{f}(\nabla\cdot\mathbf{g}) - \mathbf{g}(\nabla\cdot\mathbf{f}) + (\mathbf{g}\cdot\nabla)\mathbf{f} - (\mathbf{f}\cdot\nabla)\mathbf{g}$
(3.159)	$\nabla(\mathbf{f}\cdot\mathbf{g}) = \mathbf{f}\times(\nabla\times\mathbf{g}) + \mathbf{g}\times(\nabla\times\mathbf{f}) + (\mathbf{f}\cdot\nabla)\mathbf{g} + (\mathbf{g}\cdot\nabla)\mathbf{f}$
(3.163)	$\text{rot}\quad(\text{rot}\,\mathbf{f}) = \nabla\times(\nabla\times\mathbf{f}) = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{f}) - \nabla^2\mathbf{f}$
(3.164)	$\nabla^2\mathbf{f} = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{f}) - \nabla\times(\nabla\times\mathbf{f})$
[Prob. 3.89(b)]	$\nabla\left(\dfrac{\phi}{\psi}\right) = \dfrac{\psi\nabla\phi - \phi\nabla\psi}{\psi^2}$

C2. Ecuaciones de cálculo vectorial

Ecuación No.	Ecuación
(4.58)	$\iiint_R \nabla \cdot \mathbf{f}\, dV = \oiint_S \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S}$
(4.94)	$\iiint_R \nabla\phi\, dV = \oiint_S d\mathbf{S}\, \phi$
(4.95)	$\iiint_R \nabla \times \mathbf{f}\, dV = \oiint_S d\mathbf{S} \times \mathbf{f}$
(4.104)	$\iint_S \nabla \times \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}$
(4.115)	$\iint_S d\mathbf{S} \times \nabla\phi = \oint_C \phi\, d\mathbf{r}$
(4.116)	$\iint_S (d\mathbf{S} \times \nabla) \times \mathbf{f} = \oint_C d\mathbf{r} \times \mathbf{f}$

FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA

CURSOS INSTITUCIONALES

DIPLOMADO EN
DISEÑO Y ADAPTACIÓN DE ANTENAS

MOD. I. PROPEDEUTICO
ANTECEDENTES DE GEOMETRÍA Y TRIGONOMETRÍA

DEL 23 AL 28 DE ABRIL DEL 2003

APUNTES GENERALES

CI - 059

Instructores: Ing. Juan Manuel Castillo Miranda
Ing. Joel Gómez
SECRETARÍA DE MARINA
ABRIL DEL 2003

PRÓLOGO

La **geometría** y la **trigonometría** son antecedentes primordiales para las carreras del área fisicomatemática en el nivel de licenciatura. Estas importantes ramas de las matemáticas son una base esencial para el estudio de otras que, como el cálculo diferencial e integral, constituyen los fundamentos teóricos necesarios para el desarrollo de las diversas disciplinas que se estudian en las carreras de la mencionada área.

El presente material es un compendio de los conceptos básicos de la geometría y la trigonometría, y puede utilizarse como apoyo didáctico en los cursos de matemáticas que se imparten en los niveles medio superior y superior.

El contenido está estructurado en **unidades temáticas** que a su vez se dividen en partes llamadas **módulos**. En éstos se dosifican los temas a partir de un orden lógico y didáctico, a fin de lograr una mejor comprensión de los mismos.

Por otra parte, la obra cuenta con **elementos didácticos** que constituyen una metodología de aprendizaje; tienen por objeto facilitar el estudio y permitir un mayor aprovechamiento del contenido. Por lo tanto, se recomienda al lector que, desde el inicio, comprenda su función y los utilice adecuadamente. A continuación se describen dichos elementos.

Al principio de cada unidad aparecen:

- **Objetivo general.** Es una guía para el aprendizaje del contenido; indica la conducta que debe obtenerse al finalizar el estudio de la unidad.
- **Introducción.** Muestra al lector un panorama general del contenido; destaca los temas principales y su importancia.

Los elementos didácticos de que constan los módulos son:

- **Objetivos específicos.** Se derivan del objetivo general de la unidad. Describen y delimitan la conducta específica que debe adquirirse en relación con un tema determinado; precisan las condiciones, el nivel y el criterio de ejecución aceptable como deberá manifestarse dicha conducta.

ÍNDICE DE CONTENIDO

UNIDAD 1. GEOMETRÍA

Objetivo general

Al finalizar el estudio de esta unidad, el alumno:

- *Aplicará los conceptos fundamentales de ángulos, triángulos y circunferencia en la resolución de problemas geométricos.*

Introducción

En esta unidad se estudian los conceptos, teoremas y principios básicos de la geometría plana, con el objeto de que estos fundamentos se apliquen en la resolución de problemas geométricos.

MÓDULO 1. EL ÁNGULO, MEDIDAS ANGULARES Y TIPOS DE ÁNGULOS

Objetivos específicos

Al terminar el estudio de este módulo, el alumno:

- *Definirá los conceptos de ángulo, grado sexagesimal y radián.*
- *Convertirá a radianes el valor de un ángulo dado en grados sexagesimales y viceversa.*
- *Definirá cuándo dos ángulos son adyacentes, complementarios o conjugados.*

Cuadro sinóptico

Ángulo es la abertura entre dos rectas que se intersecan en un punto llamado vértice.

- *Medidas de un ángulo*
  - Grados sexagesimales
  - Radianes
- *Equivalencia*
  - 1 rad $= \frac{180}{\pi}$ grados → 1 rad = 57.2958 grados
  - 1 grado $= \frac{\pi}{180}$ radianes → 1 grado = 0.01745 rad
- *Tipos de ángulos*
  - *Adyacentes*: Tienen el mismo vértice, un lado común y son exteriores uno del otro.

Cuadro sinóptico

Continuación

• *Tipos de ángulos*	° *Rectos*: Aquel que mide 90° o $\frac{\pi}{2}$ rad
	° *Agudos*: Mide menos de 90°
	° *Obtusos*: Mide más de 90°
	° *Complementarios*: Cuando la suma de dos ángulos es igual a 90°
	° *Suplementarios:* Cuando la suma de dos ángulos es igual a 180°
	° *Conjugados*: Cuando la suma de dos ángulos es igual a 360°

1.1. Concepto de ángulo

Considérese que una línea recta OA, gira alrededor de su extremo O a una posición OB, permaneciendo en el mismo plano, como se muestra en la figura 1.1. Con este giro se dice que se genera un ángulo plano $AOB = \alpha$.

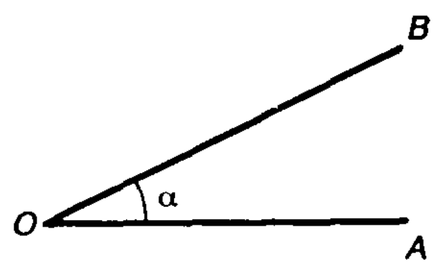


Figura 1.1

Al lado OA, se le llama *lado inicial* del ángulo y al lado OB, *lado terminal* del ángulo α.

El punto O se conoce como el *vértice* del ángulo α.

1.2. Medidas de ángulos

Las principales unidades para expresar la medida de un ángulo son el *grado sexagesimal* y el *radián*, que también se conoce como *unidad cíclica*.

1.2.1. El grado sexagesimal

Esta unidad, que pertenece al sistema sexagesimal, tiene como base el número 60.

La circunferencia se divide en 360 partes iguales, cada una de las cuales corresponde a un grado sexagesimal. El grado sexagesimal se subdivide a su vez en 60 minutos, y cada minuto en 60 segundos. Los grados, minutos y segundos se representan respectivamente por $a°\ b'\ c''$.

1.2.2. El radián

> *Definición*: Un radián es el ángulo tal que, si su vértice está colocado en el centro de un círculo, interseca sobre la circunferencia un arco de longitud igual al radio del círculo.

Así, si en la figura 1.2 se toma sobre la circunferencia un arco AB de longitud igual al radio y se trazan las rectas OA y OB, el ángulo $AOB = \alpha$ mide un radián.

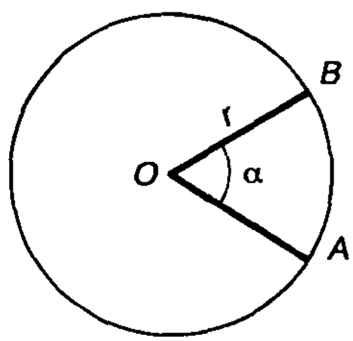


Figura 1.2

Para medir cualquier ángulo θ en radianes, se coloca su vértice en el centro de un círculo de radio r (*véase* la figura 1.3); si L es la longitud del arco intersecado en el círculo por el ángulo θ, entonces se tiene:

El valor de θ en radianes $= \dfrac{L}{r}$

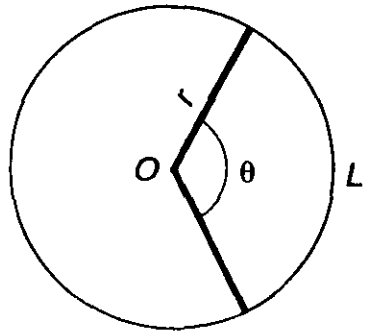


Figura 1.3

1.2.3. Conversión de medidas angulares

Cuando θ es igual a 180°, entonces el arco L, que interseca sobre un círculo de radio r, es una semicircunferencia tal que $L = \pi\, r$, donde π es aproximadamente igual a 3.1416. De acuerdo con lo anterior, si se aplica la ecuación para obtener la medida de un ángulo en radianes, se tiene:

$$180° = \frac{L}{r}\text{ rad} = \frac{\pi\, r}{r}\text{ rad} = \pi \text{ rad}$$

$$180° = \pi\; rad$$

Esta última igualdad se utiliza como base para convertir el valor de un ángulo de grados a radianes y viceversa. Así, de esta igualdad se obtiene:

$1° = \dfrac{\pi}{180}$ rad, donde $\dfrac{\pi}{180}$ equivale aproximadamente a 0.017453

así que: $\quad 1° = 0.017453$ rad

y también $\;1 \text{ rad} = \dfrac{180°}{p}$, donde $\dfrac{180°}{p}$ equivale aproximadamente a 57.296°

así que: $\quad 1 \text{ rad} = 57.296°$

Ejemplo 1

Expresar cada uno de los siguientes ángulos en radianes.

a) 45°

Solución

Dado que $1° = 0.017453$ rad
$45° = 45\,(0.017453) = 0.785$ rad

Expresado en términos de π; como $1^\circ = \frac{\pi}{180}$ rad

$$45^\circ = 45\,\frac{\pi}{180}\text{ rad} = \frac{1}{4}\,\pi\text{ rad}$$

b) 385°

Solución

Se procede igual que en el ejemplo anterior:

$$385^\circ = 385\,(0.017453) = 6.719\text{ rad}$$

Expresado en términos de π:

$$385^\circ = 385\,\frac{\pi}{180}\text{ rad} = 2.1388\,\pi\text{ rad}$$

Ejemplo 2

Expresar cada uno de los siguientes ángulos en grados.

a) $\frac{\pi}{2}$ rad

Solución

Dado que $1\text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi}$

$$\frac{\pi}{2}\text{ rad} = \frac{\pi}{2}\;\frac{180^\circ}{\pi} = 90^\circ$$

b) 2 rad

Solución

En forma análoga:

$$2\text{ rad} = 2\,\frac{180^\circ}{\pi} = 114.59^\circ$$

1.3. Tipos de ángulos

1.3.1. Ángulos adyacentes

Se dice que dos ángulos son *adyacentes* cuando tienen el mismo vértice, un lado común y son exteriores el uno del otro.

Por ejemplo los ángulos α y β de la figura 1.4, son adyacentes.

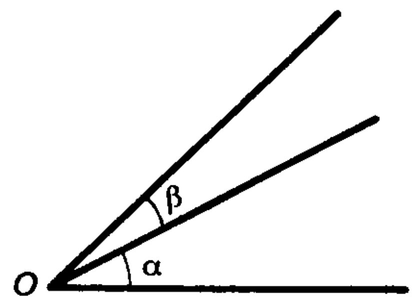


Figura 1.4

1.3.2. El ángulo recto

> *Definición*: Un ángulo *recto* es aquel que mide exactamente 90°, lo que en radianes equivale a $\pi/2$ rad. (*Véase* la figura 1.5.)

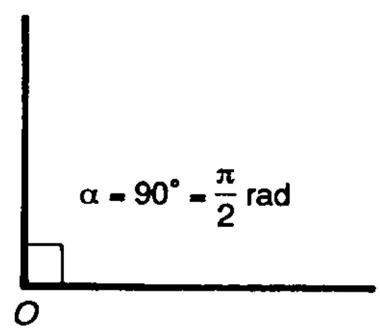


Figura 1.5

1.3.3. El ángulo agudo

> *Definición*: Un ángulo *agudo* es aquel que tiene una magnitud menor de 90° ($\pi/2$ rad). (*Véase* la figura 1.6.)

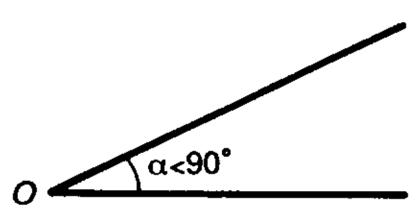


Figura 1.6

1.3.4. El ángulo obtuso

Definición: Un ángulo *obtuso* es aquel que tiene una magnitud mayor de 90° ($\pi/2$ rad). (*Véase* la figura 1.7.)

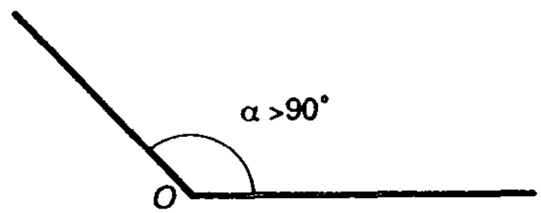


Figura 1.7

1.3.5. Ángulos complementarios

Definición: Si la suma de las medidas de dos ángulos es de 90°, los ángulos se llaman *complementarios* y cada uno de ellos se llama el *complemento* del otro.

En la figura 1.8, los ángulos α y β son complementarios.

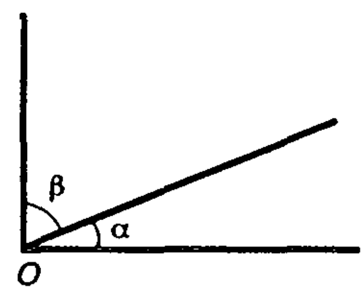


Figura 1.8

Se puede observar que si dos ángulos son complementarios, entonces ambos son agudos.

1.3.6. Ángulos suplementarios

> *Definición*: Si la suma de las medidas de dos ángulos es 180°, se dice que los ángulos son *suplementarios* y cada uno de ellos se llama el *suplemento* del otro.

Los ángulos α y β de la figura 1.9, son suplementarios.

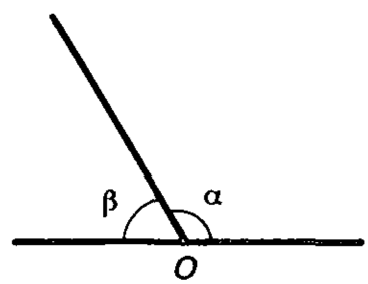


Figura 1.9

1.3.7. Ángulos conjugados

> *Definición*: Si la suma de las medidas de dos ángulos es 360°, se podrá decir que los ángulos son *conjugados*, y que cada uno es el *conjugado* del otro.

En la figura 1.10 los ángulos α y β son conjugados.

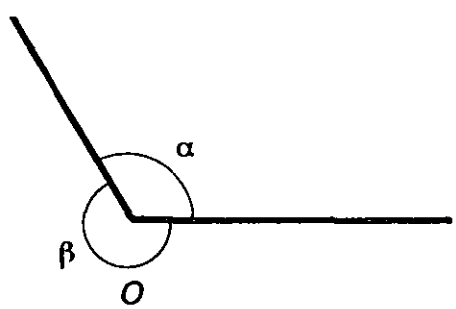


Figura 1.10

Ejemplo 3

Si la medida de un ángulo α es dos veces la medida de su complemento β, ¿cuánto miden α y β?

Solución

Del enunciado, $\alpha = 2\,\beta$, y como α y β son complementarios:

$$\alpha + \beta = 90^\circ\,; \quad 2\,\beta + \beta = 90^\circ\,; \quad 3\,\beta = 90^\circ$$

de donde $\beta = \dfrac{90^\circ}{3} = 30^\circ$

por lo tanto:

$$\beta = 30^\circ,\ \ \alpha = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$$

Ejemplo 4

Determinar la medida del suplemento del ángulo α, cuya magnitud es 135°.

Solución

Se tiene: α + suplemento de $\alpha = 180^\circ$
Suplemento de $\alpha = 180^\circ - \alpha = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$

Ejemplo 5

Si la medida de un ángulo α es cinco veces la medida de su conjugado β, ¿cuánto miden α y β?

Solución

Del enunciado, $\alpha = 5\,\beta$, y como α y β son conjugados:

$$\alpha + \beta = 360^\circ; \quad 5\,\beta + \beta = 360^\circ$$

$$6\,\beta = 360^\circ; \quad \beta = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$$

por lo tanto:

$$\beta = 60^\circ,\ \ \alpha = 360^\circ - 60^\circ = 300^\circ$$

Ejercicios

Medidas angulares

Expresar cada uno de los siguientes ángulos en radianes:

1. 800°

2. 210°

3. 150°

Expresar cada uno de los siguientes ángulos en grados:

4. $\frac{2\pi}{3}$ rad

5. 9.4 rad

6. $\frac{\pi}{6}$ rad

Tipos de ángulos

7. Determinar la medida del complemento del ángulo α, cuya magnitud es 23°.

8. Si la medida de un ángulo α es tres veces la medida de su suplementario β, ¿cuánto miden α y β ?

9. Si la medida de un ángulo α es once veces la medida de su conjugado β, ¿cuánto miden α y β?

MÓDULO 2. EL TRIÁNGULO, SUS TEOREMAS PRINCIPALES Y SEMEJANZA ENTRE TRIÁNGULOS

Objetivos específicos

Al terminar el estudio de este módulo, el alumno:

- *Enunciará los principales teoremas sobre triángulos.*
- *Aplicará la semejanza de triángulos en la resolución de problemas.*
- *Resolverá triángulos rectángulos aplicando el Teorema de Pitágoras.*

Cuadro sinóptico

Triángulo es el espacio limitado por tres rectas que se cortan.

• *Clasificación de los triángulos según sus lados*	• *Equilátero*: Cuando sus tres lados son iguales. • *Isósceles*: Cuando dos de sus lados son iguales. • *Escaleno*: Cuando sus tres lados son diferentes.

Cuadro sinóptico

Continuación

- *Teoremas*

1. La suma de los tres ángulos interiores de todo triángulo es igual a 180°.
2. En todo triángulo isósceles los ángulos opuestos a los lados iguales son iguales.
3. La suma de dos lados cualesquiera de un triángulo es mayor que el tercer lado; y la diferencia, menor.

Dos triángulos son semejantes si sus ángulos correspondientes son iguales o sus lados correspondientes son proporcionales.

- *Teoremas sobre triángulos semejantes*

1. Si dos triángulos son mutuamente equiángulos, son semejantes.
2. Si dos triángulos tienen un ángulo igual, comprendido entre lados proporcionales, los dos triángulos son semejantes.
3. Si los tres lados de un triángulo son respectivamente proporcionales a los de otro triángulo, ambos son semejantes.
4. Dos triángulos que tienen sus lados respectivamente paralelos o perpendiculares, son semejantes.

Teorema de Pitágoras. En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

2.1. El triángulo

Se llama triángulo al espacio limitado por tres rectas que se cortan. Los puntos de corte se llaman *vértices*, y los segmentos comprendidos entre los vértices, *lados* del triángulo.

En la figura 2.1 se presenta un triángulo de vértices A, B y C y de lados a, b y c. Los triángulos comúnmente se designan por sus vértices.

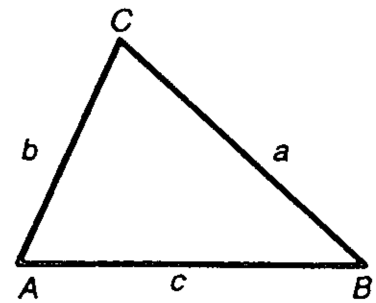


Figura 2.1

Con respecto a la magnitud de sus lados, los triángulos se clasifican en: equiláteros, isósceles y escalenos.

2.1.1. El triángulo equilátero

Definición: Un triángulo es *equilátero* si sus tres lados tienen la misma magnitud.

El triángulo *ABC* de la figura 2.2 es equilátero ya que $a = b = c$.

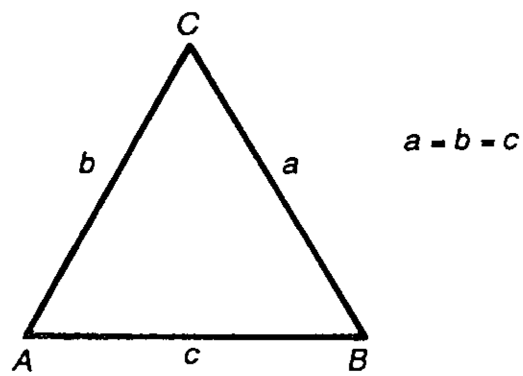


Figura 2.2

2.1.2. El triángulo isósceles

Definición: Un triángulo es *isósceles* si las magnitudes de dos de sus lados son iguales.

Los lados iguales se llaman *laterales* y el tercer lado se llama *base* del triángulo. El triángulo ABC de la figura 2.3 es isósceles, ya que sus lados a y b son iguales.

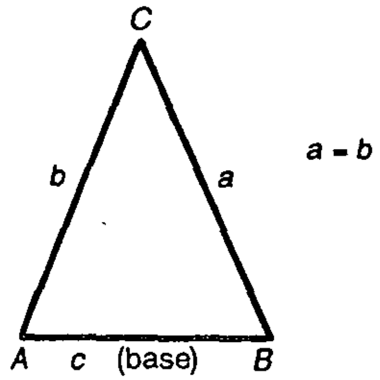


Figura 2.3

2.1.3. El triángulo escaleno

> *Definición*: Un triángulo es *escaleno* si las magnitudes de sus tres lados son diferentes.

El triángulo ABC de la figura 2.4 es escaleno, ya que $a \neq b \neq c$.

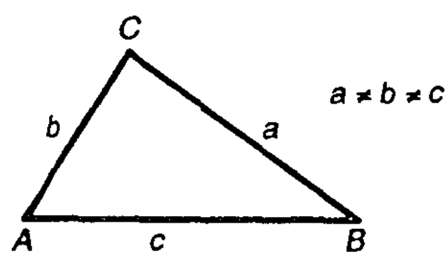


Figura 2.4

2.2. Principales teoremas sobre triángulos

A continuación se enuncian algunos teoremas importantes sobre triángulos, por ser de utilidad para el desarrollo de conceptos trigonométricos, así como para comprender algunos otros tópicos matemáticos.

Teorema 1. La suma de los tres ángulos interiores de todo triángulo es igual a 180°, o bien, a π rad.

En la figura 2.5, se tiene que: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

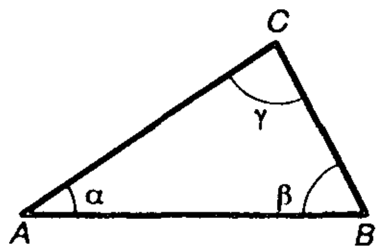


Figura 2.5

Teorema 2. En todo triángulo isósceles los ángulos opuestos a los lados iguales son iguales.

En la figura 2.6, como ABC es un triángulo isósceles, $a = b$, por lo tanto $\alpha = \beta$.

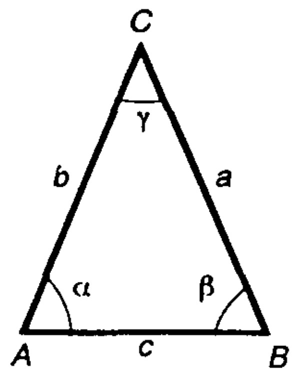


Figura 2.6

Teorema 3. La suma de dos lados cualesquiera de un triángulo es mayor que el tercer lado; y la diferencia, menor.

Del triángulo ABC de la figura 2.7, se tiene que:

$$a+b>c,\quad a+c>b,\quad b+c>a$$
$$a-b<c,\quad a-c<b,\quad b-a<c$$
$$b-c<a,\quad c-a<b,\quad c-b<a$$

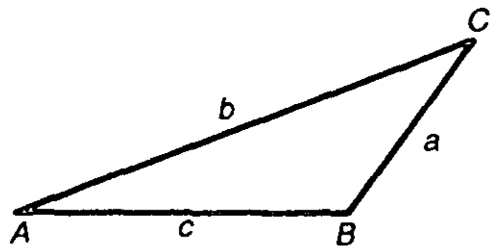


Figura 2.7

Ejemplo 1

Para el triángulo rectángulo ABC de la figura 2.8, si $\alpha = 40°$, determinar la magnitud de β y γ.

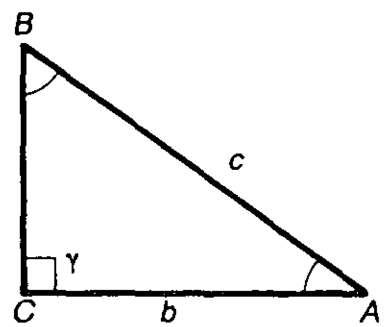


Figura 2.8

Solución

Como el triángulo es rectángulo, $\gamma = 90°$. La suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°, entonces:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°;\quad 40° + \beta + 90° = 180°$$

De donde:

$$\beta = 180° - 90° - 40° = 50°$$

2.3. Triángulos semejantes

Definición: Dos triángulos son *semejantes* si sus ángulos correspondientes son iguales, o si sus lados correspondientes son proporcionales.

En la figura 2.9 los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes, ya que:

$$\alpha_1 = \alpha_2;\ \beta_1 = \beta_2 \quad \text{y} \quad \gamma_1 = \gamma_2, \quad \text{y} \quad \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

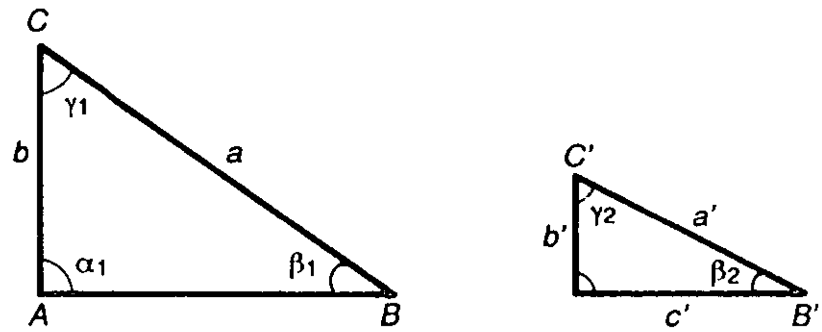


Figura 2.9

Los siguientes teoremas determinan la semejanza entre triángulos:

Teorema 1. Si dos triángulos son mutuamente equiángulos son semejantes.

De este teorema se desprenden los siguientes corolarios:

Corolario 1. Dos triángulos son semejantes si ambos tienen dos ángulos respectivamente iguales.

Corolario 2. Dos triángulos rectángulos son semejantes si tienen un ángulo agudo igual.

Teorema 2. Si dos triángulos tienen un ángulo igual comprendido entre lados proporcionales, los dos triángulos son semejantes.

Con base en la figura 2.10, este teorema dice que: si $\alpha_1 = \alpha_2$ y $\frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ entonces los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes.

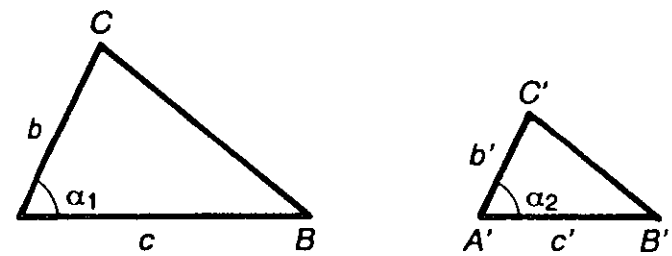


Figura 2.10

Teorema 3. Si los tres lados de un triángulo son respectivamente proporcionales a los de otro, los dos triángulos son semejantes.

Con base en la figura 2.11, este teorema dice que:

$$\text{si} \quad \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

entonces los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes.

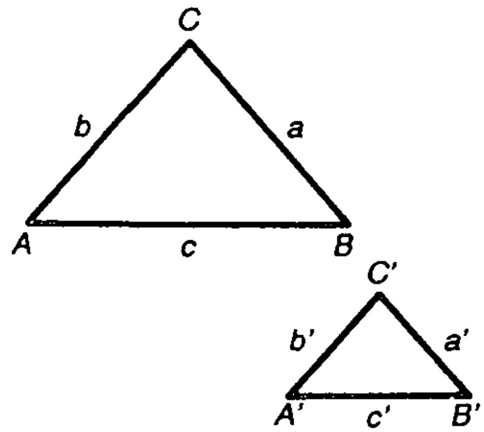


Figura 2.11

Teorema 4. Dos triángulos que tienen sus lados respectivamente paralelos o perpendiculares son semejantes.

Ejemplo 2

Si en la figura 2.12, $\overline{BC}$ es paralelo a $\overline{DE}$ y $\overline{BC} = 50$ m, $\overline{DE} = 25$ m y $\overline{AD} = 30$ m ¿Cuánto mide $\overline{AB}$?

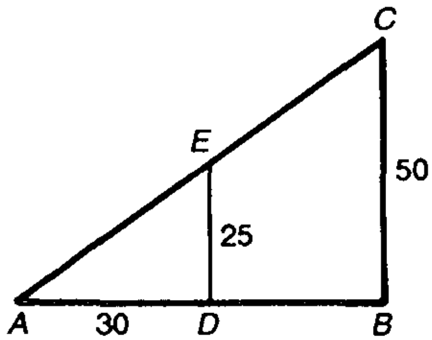


Figura 2.12

Solución

Como los lados de los triángulos *ABC* y *ADE* son paralelos, entonces son semejantes, por lo tanto:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{DE}} \quad ; \quad \frac{\overline{AB}}{30} = \frac{50}{25}$$

De donde:

$$\overline{AB} = \frac{50 \times 30}{25} = 60 \text{ m}$$

2.4. El teorema de Pitágoras. Aplicaciones

El teorema de Pitágoras, que relaciona los catetos y la hipotenusa de todo triángulo rectángulo, se enuncia como sigue:

> En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

De acuerdo con el teorema, para el triángulo rectángulo de la figura 2.13, se tiene que:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

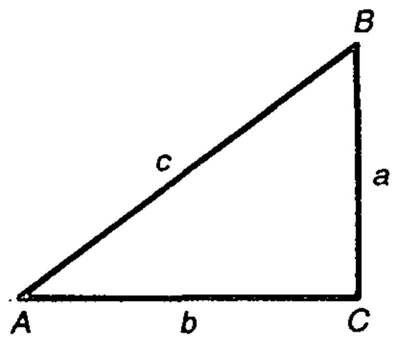


Figura 2.13

Ejemplo 3

En un triángulo rectángulo *ABC*, c es la longitud de la hipotenusa y a y b son las longitudes de los catetos.

a) Si $a = 12$ y $b = 16$, ¿ cuánto mide c ?

Solución

Del teorema de Pitágoras:

$$c^2 = a^2 + b^2 = (12)^2 + (16)^2 = 400$$

por lo tanto:

$$c^2 = \sqrt{400} = 20$$

b) Si $a = 24$ y $c = 25$, ¿cuánto mide b ?

Solución

Del teorema de Pitágoras:

$$c^2 = a^2 + b^2; \qquad b^2 = c^2 - a^2 = (25)^2 - (24)^2 = 49$$

por lo tanto:

$$b = \sqrt{49} = 7$$

Ejemplo 4

Una persona camina 7 kilómetros hacia el norte, 3 kilómetros hacia el este y 3 kilómetros hacia el sur. ¿A qué distancia está del punto de partida?

Solución

Se traza una figura que representa las longitudes recorridas.

$$\overline{AB} = 7, \overline{BC} = 3 \quad \text{y} \quad \overline{CD} = 3$$

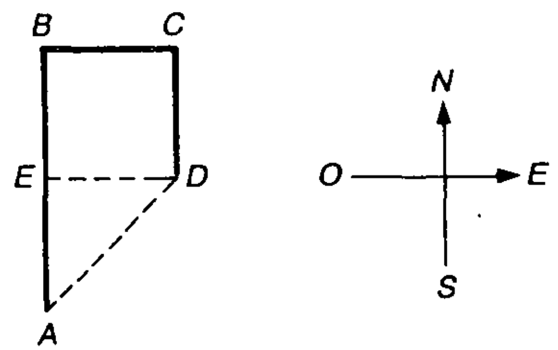


Figura 2.14

De la figura 2.14 se observa que AED es un triángulo rectángulo y que:

$$\overline{ED} = \overline{BC} = 3, \overline{EB} = \overline{CD} = 3,$$

$$\overline{AE} = \overline{AB} - \overline{EB} = 7 - 3 = 4$$

Como la longitud buscada es AD, se aplica el teorema de Pitágoras al triángulo AED:

$$(\overline{AD})^2 = (\overline{AE})^2 + (\overline{ED})^2 = (4)^2 + (3)^2 = 25$$

por lo tanto:

$$\overline{AD} = \sqrt{25} = 5$$

Ejercicios

Teoremas sobre triángulos

1. Si un ángulo interior de un triángulo rectángulo mide 65°, determinar la magnitud de sus otros ángulos interiores.

Triángulos semejantes

2. Si en la figura 2.15, $\overline{BC}$ es paralelo a $\overline{DE}$ y $\overline{AB} = 10$ m, $\overline{AD} = 3$ m y $\overline{AC} = 20$ m. ¿Cuánto mide $\overline{AE}$?

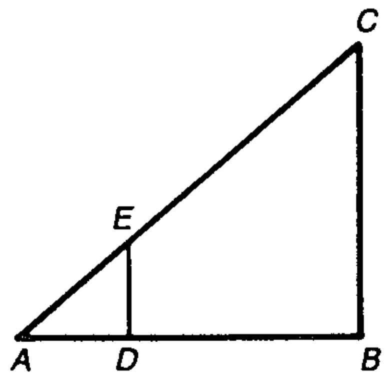


Figura 2.15

El teorema de Pitágoras. Aplicaciones

3. En un triángulo ABC, c es la longitud de la hipotenusa y a y b son las longitudes de los catetos.

   a) Si $a = 1$ y $b = 2$, ¿cuánto mide c?

   b) Si $b = 18$ y $c = 20$, ¿cuánto mide a?

4. Una persona camina 1 milla hacia el norte, 2 millas hacia el este, 3 millas hacia el norte y 4 millas hacia el este. ¿A qué distancia está del punto de partida?

MÓDULO 3. LA CIRCUNFERENCIA

Objetivos específicos

Al terminar el estudio de este módulo, el alumno:

- *Enunciará la definición de circunferencia.*
- *Explicará los conceptos de cuerda, diámetro, secante y tangente de una circunferencia.*

Cuadro sinóptico

Sea P *un punto de un plano y sea* r *un número positivo. La circunferencia con centro* P *y radio* r *es el conjunto de todos los puntos del plano que están a una distancia* r *del punto* P.

• *Elementos de la circunferencia*	• *Cuerda*: Es todo segmento rectilíneo que une dos puntos de la circunferencia. • *Diámetro*: Es toda cuerda que pasa por el centro de la circunferencia. • *Secante*: Es toda recta que corta a la circunferencia en dos puntos cualesquiera. • *Tangente*: Es toda recta, en el mismo plano, que toca a la circunferencia en un solo punto, llamado punto de tangencia.

3.1. La circunferencia

Sea P un punto de un plano dado y sea r un número positivo.

Definición: La *circunferencia* con centro P y radio r es el conjunto de todos los puntos del plano que están a una distancia r del punto P.

La figura 3.1 muestra una circunferencia.

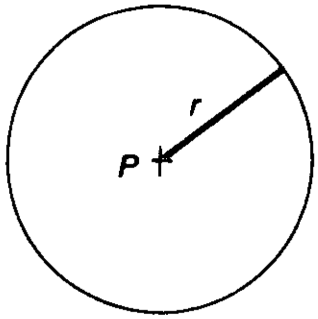


Figura 3.1

3.2. Conceptos de: cuerda, diámetro, secante y tangente de la circunferencia

3.2.1. Cuerda

Definición: Se llama *cuerda* a todo segmento rectilíneo que une dos puntos de una circunferencia y cuya magnitud es igual a la mínima distancia entre dichos puntos.

En la figura 3.2 el segmento $\overline{AA'}$ es una cuerda.

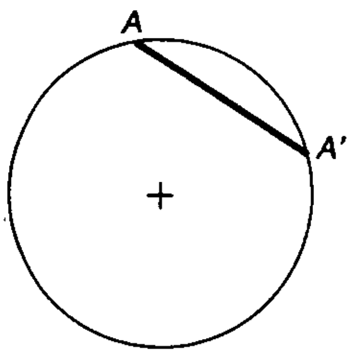


Figura 3.2

3.2.2. Diámetro

Definición: Se llama *diámetro* a toda cuerda que pasa por el centro de la circunferencia.

3.2.3. Secante

Definición: Una *secante* a una circunferencia es una recta que la corta en dos puntos cualesquiera.

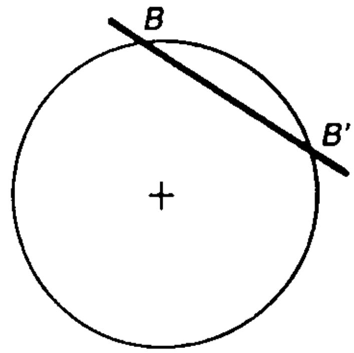


Figura 3.3

3.2.4. Tangente

Definición: Una *tangente* a una circunferencia es una recta, en el mismo plano, que toca a la circunferencia en un solo punto.

El punto anterior se llama *punto de tangencia* o *punto de contacto*, y se dice que la recta y la circunferencia son tangentes en el punto de contacto.

En la figura 3.4, el punto A es el punto de tangencia.

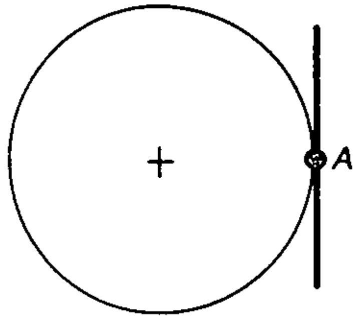


Figura 3.4

3.3. Teorema para trazar la tangente a una circunferencia

Un teorema importante porque se utiliza para trazar la tangente a una circunferencia es:

> Toda tangente a una circunferencia es perpendicular al radio trazado por el punto de contacto.

UNIDAD 2. TRIGONOMETRÍA

Objetivo general

Al finalizar el estudio de esta unidad, el alumno:

- *Aplicará los conceptos fundamentales de la trigonometría plana en la resolución de problemas.*

Introducción

El propósito fundamental de esta unidad, es el estudio de las funciones trigonométricas y sus propiedades, así como su aplicación en la resolución de problemas trigonométricos.

MÓDULO 4. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS AGUDOS

Objetivos específicos

Al terminar el estudio de este módulo, el alumno:

- *Definirá las razones seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante de un ángulo agudo.*
- *Calculará, sin el uso de tablas, el valor de todas las razones trigonométricas de los ángulos de 30°, 45° y 60°.*

Cuadro sinóptico

Razones trigonométricas de los ángulos de 30°, 45° y 60°

		Ángulo		
		30°	**45°**	**60°**
Razón	**sen**	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
	cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$
	tan	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$
	cot	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
	sec	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2
	csc	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$

4.1. Definición de las razones trigonométricas de un ángulo agudo

Considérese un triángulo rectángulo con un ángulo $\gamma = 90°$, como se muestra en la figura 4.1.

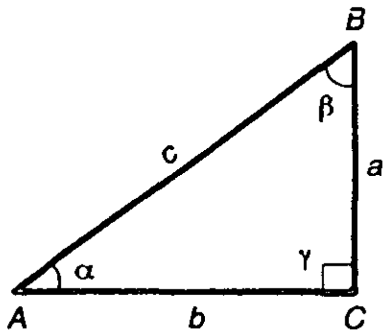


Figura 4.1

Se pueden establecer 6 razones diferentes de un lado del triángulo a otro. Estas razones que se conocen como razones trigonométricas, son aplicables a cualquiera de los ángulos agudos α o β.

Razones trigonométricas del ángulo α. Con relación a la figura 4.1:

c es la hipotenusa del triángulo
a es el cateto opuesto al ángulo α
b es el cateto adyacente al ángulo α

Las 6 razones trigonométricas para el ángulo α son:

$$\text{seno } \alpha\,;\ \text{sen } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{c}$$

$$\text{coseno } \alpha\,;\ \cos \alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{c}$$

$$\text{tangente } \alpha\,;\ \tan \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{a}{b}$$

$$\text{cotangente } \alpha\,;\ \cot \alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{b}{a}$$

$$\text{secante } \alpha\,;\ \sec \alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{c}{b}$$

$$\text{cosecante } \alpha\,;\ \csc \alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{c}{a}$$

Es conveniente observar que la cosecante, la secante y la cotangente son respectivamente recíprocas del seno, coseno y tangente. Con esta observación se pueden memorizar fácilmente las 6 razones trigonométricas.

Ejemplo 1

Encontrar los valores de las razones trigonométricas para el ángulo agudo α, del triángulo *ABC* que se muestra en la figura 4.2.

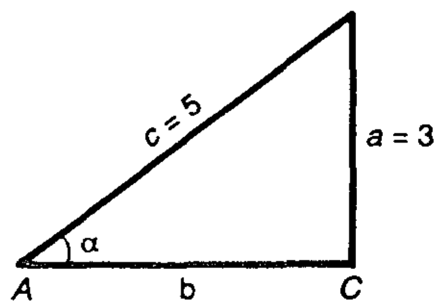


Figura 4.2

Solución

Datos: $a = 3 \quad c = 5$

Por medio del teorema de Pitágoras se encuentra el valor del cateto adyacente b:

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{16} = 4$$

Entonces:

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{3}{5} \qquad \csc\alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{5}{3}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{4}{5} \qquad \sec\alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{5}{4}$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{3}{4} \qquad \cot\alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{4}{3}$$

Ejemplo 2

Encontrar los valores de las razones trigonométricas de un ángulo agudo α, cuyo seno es igual a 1/2.

Solución

Como se sabe: $\text{sen}\,\alpha = \dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \dfrac{1}{2}$

Se puede representar un triángulo rectángulo con un ángulo agudo α, cuyo cateto opuesto sea igual a 1 y con una hipotenusa igual a 2 (*véase* la figura 4.3). El valor del cateto adyacente b se encuentra aplicando el teorema de Pitágoras.

$$b = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$$

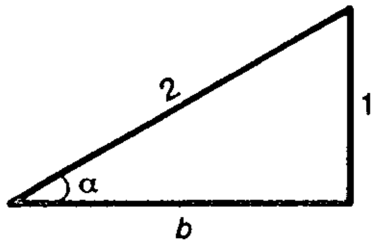


Figura 4.3

Al aplicar las fórmulas de las razones trigonométricas se tiene:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{2} \qquad \csc \alpha = 2$$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \sec \alpha = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \cot \alpha = \sqrt{3}$$

4.2. Razones trigonométricas de los ángulos de 30°, 45° y 60°

4.2.1. Razones trigonométricas de los ángulos de 30° y 60°

Para determinar las razones trigonométricas de los ángulos de 30° y 60°, se traza un triángulo equilátero *ABD* de 2 unidades por lado, con una unidad de longitud adecuada; por ejemplo, centímetros (*veáse* la figura 4.4). Enseguida se traza una perpendicular a la base $\overline{AD}$ del triángulo desde el vértice *B*.

Como se muestra en la figura 4.4, *ABC* es un triángulo con:

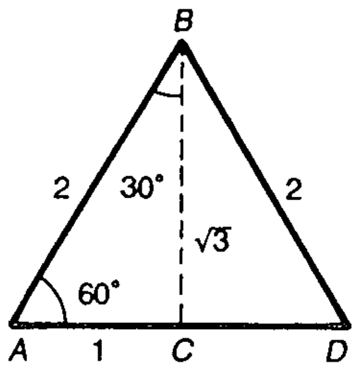


Figura 4.4

$$B\hat{A}C = 60°, A\hat{B}C = 30°, A\hat{C}B = 90°$$

$$\overline{AB} = 2, \overline{AC} = 1,$$

y por el teorema de Pitágoras:

$$\overline{BC} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{AC}^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$$

De la definición de las razones trigonométricas para un ángulo agudo, se tiene:

$$\text{sen } 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30°$$

$$\cos 60° = \frac{1}{2} = \text{sen } 30°$$

$$\tan 60° = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} = \cot 30°$$

$$\cot 60° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan 30°$$

$$\sec 60° = \frac{2}{1} = 2 = \csc 30°$$

$$\csc 60° = \frac{2}{\sqrt{3}} = \sec 30°$$

4.2.2. Razones trigonométricas del ángulo de 45°

Para determinar las razones trigonométricas de un ángulo de 45° se construye un triángulo rectángulo con ambos catetos iguales a la unidad (*véase* la figura 4.5), y el ángulo en C igual a 90°. Por lo tanto, los ángulos α y β son iguales a 45°.

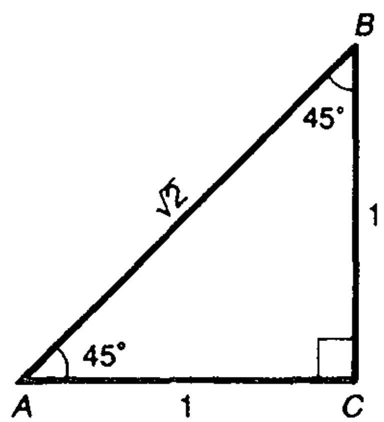


Figura 4.5

Del teorema de Pitágoras, la longitud de la hipotenusa del triángulo es:

$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{CB}^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

De la definición de las razones trigonométricas para un ángulo agudo, se tiene:

$$\text{sen } 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 45° = \frac{1}{1} = 1$$

$$\cot 45° = \frac{1}{1} = 1$$

$$\sec 45° = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

$$\csc 45° = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

Ejemplo 3

Encontrar el valor de las siguientes expresiones:

$a)$ $$\frac{(\sec 30°)(\text{sen } 60°) + \tan 45°}{2 \cos 60°} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}\,\frac{\sqrt{3}}{2} = 1}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$$

$b)$ $$\frac{(\cot 30°)^2 + \tan 45°}{2 \cos 60°} = \frac{(\sqrt{3})^2 + 1}{2(½)} = \frac{3+1}{1} = 4$$

Ejercicios

Razones trigonométricas de un ángulo agudo

1. Encontrar los valores de las razones trigonométricas para el ángulo agudo β del triángulo ABC que se muestra en la figura 4.6, si $a = 2$ y $b = 3$.

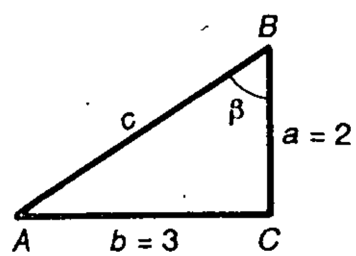


Figura 4.6

2. Encontrar el valor de las razones trigonométricas de un ángulo agudo α, cuya cotangente es igual a 1/3.

Razones trigonométricas de los ángulos de 30°, 45° y 60°

Encontrar el valor de las siguientes expresiones:

3. $\dfrac{2 \tan 45° - 4 \cos 60°}{\csc 60° \tan 60°}$

4. $\dfrac{(\sec 45° \csc 45°)^2}{\tan 45° + \sec 60°}$

5. $\dfrac{(\cot 30° \tan 60° + \tan 45°)^2}{\csc 30°}$

MÓDULO 5. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO EN GENERAL

Objetivos específicos

Al terminar el estudio de este módulo, el alumno:

- *Calculará el valor de todas las razones trigonométricas, sin el uso de tablas, de los ángulos de 120°, 135°, 150°, 210°, 225°, 240°, 300°, 315° y 330°.*
- *Determinará, con el uso de tablas, el valor de una razón trigonométrica de un ángulo cualquiera dado y viceversa.*

Cuadro sinóptico

Signos de las razones trigonométricas

		Cuadrantes			
		Primer cuadrante	Segundo cuadrante	Tercer cuadrante	Cuarto cuadrante
Razones	seno y cosecante	+	+	−	−
	coseno y secante	+	−	−	+
	tangente y cotangente	+	−	+	−

Cuadro sinóptico

Continuación

Razones trigonométricas de los ángulos de:	150°, 210°, 330°	Son iguales en valor absoluto a las del ángulo de:	30°
	120°, 240°, 300°		60°
	135°, 225°, 315°		45°

Razones trigonométricas de un ángulo en general

$\text{seno} = \dfrac{\text{ordenada}}{\text{distancia}} = \dfrac{y}{d}$	$\text{coseno} = \dfrac{\text{abscisa}}{\text{distancia}} = \dfrac{x}{d}$
$\text{tangente} = \dfrac{\text{ordenada}}{\text{abscisa}} = \dfrac{y}{x}$	$\text{cotangente} = \dfrac{\text{abscisa}}{\text{ordenada}} = \dfrac{x}{y}$
$\text{secante} = \dfrac{\text{distancia}}{\text{abscisa}} = \dfrac{d}{x}$	$\text{cosecante} = \dfrac{\text{distancia}}{\text{ordenada}} = \dfrac{d}{y}$

5.1. Definición de las razones trigonométricas de un ángulo en general

Sea θ un ángulo en posición común (*véanse* las figuras 5.1 a 5.4), y sea P un punto de coordenadas rectangulares (x, y) perteneciente al lado terminal del ángulo θ.

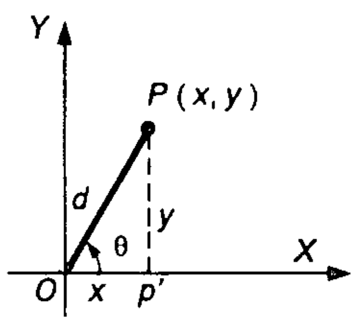


Figura 5.1

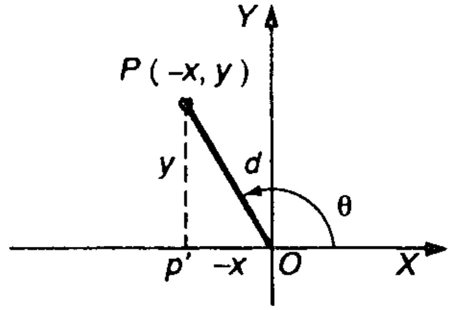


Figura 5.2

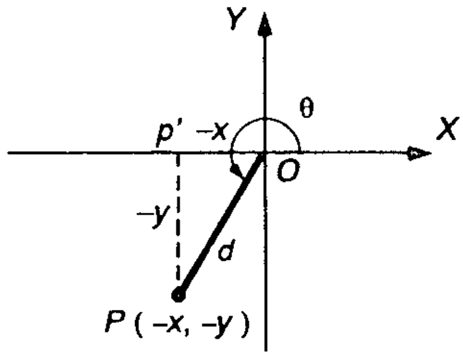


Figura 5.3

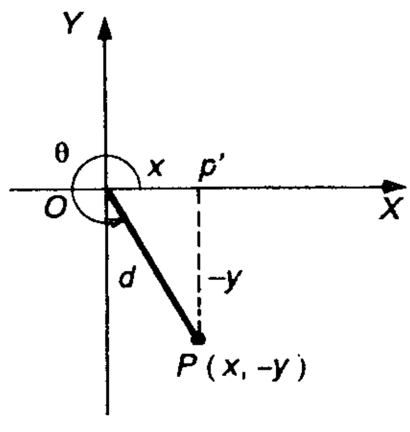


Figura 5.4

Si en cada una de las cuatro figuras se traza una perpendicular desde el punto P al eje X, se tendrá un triángulo rectángulo OPP', de lados x, y, y d como se muestra en las figuras. Si se considera que d, distancia de P al origen, es positiva y que los valores de x y y dependen de la posición de P, las razones trigonométricas para cualquiera de los ángulos θ se definen como sigue:

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{\text{ordenada}}{\text{distancia}} = \frac{y}{d}$$

$$\cos \theta = \frac{\text{abscisa}}{\text{distancia}} = \frac{x}{d}$$

$$\tan \theta = \frac{\text{ordenada}}{\text{abscisa}} = \frac{y}{x}$$

$$\cot \theta = \frac{\text{abscisa}}{\text{ordenada}} = \frac{x}{y}$$

$$\sec \theta = \frac{\text{distancia}}{\text{abscisa}} = \frac{d}{x}$$

$$\csc \theta = \frac{\text{distancia}}{\text{ordenada}} = \frac{d}{y}$$

Estas definiciones también son aplicables para los ángulos negativos o mayores de 360°.

Se entiende como ángulos *coterminales* aquellos cuya diferencia es igual a 360°. Así por ejemplo, el ángulo de 390° es coterminal del ángulo de 30° y viceversa.

De las definiciones se puede concluir que, para dos ángulos que son coterminales, sus respectivas razones trigonométricas son idénticas. Entonces, para encontrar las relaciones trigonométricas de ángulos negativos o mayores de 360°, se determina su respectivo coterminal entre 0° y 360° y enseguida se aplican las definiciones.

Lo anterior también se puede expresar de la siguiente forma: Los valores de las razones trigonométricas de un ángulo θ son los mismos que para cualquiera de los ángulos $\theta \pm n\ 360°$; donde $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

Ejemplo 1

Si el punto P (-6, 8) está sobre el lado terminal del ángulo θ, encontrar las 6 razones trigonométricas de θ.

Solución

Se ubica el punto P de coordenadas (-6, 8) en un sistema coordenado rectangular: $x = -6$, $y = 8$ (*véase* la figura 5.5).

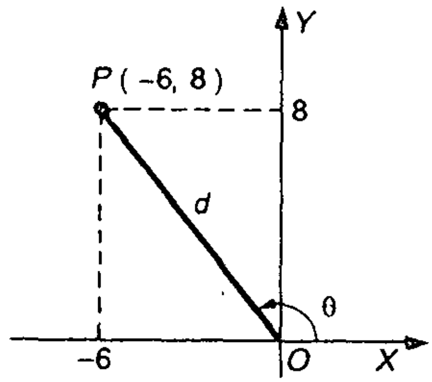


Figura 5.5

Por el teorema de Pitágoras se tiene:

$$d = \sqrt{(-6)^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$$

$$d = 10$$

Por aplicación de las definiciones de las razones trigonométricas:

$$\text{sen } \theta = \frac{y}{d} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} \qquad \cot \theta = \frac{x}{y} = \frac{-6}{8} = -\frac{3}{4}$$

$$\cos \theta = \frac{x}{d} = \frac{-6}{10} = -\frac{3}{5} \qquad \sec \theta = \frac{d}{x} = \frac{10}{-6} = -\frac{5}{3}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{8}{-6} = -\frac{4}{3} \qquad \csc \theta = \frac{d}{y} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$$

Ejemplo 2

Encontrar el valor de sen 405°

Solución

Se determina el coterminal de 405° entre 0° y 360°

$$405° - 360° = 45°$$

de donde:

$$\text{sen } 405° = \text{sen } 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ejemplo 3

Encontrar el valor de tan (–300°).

Solución

Se encuentra el coterminal de $-300°$ entre $0°$ y $360°$

$$-300° + 360° = 60°$$

de donde:

$$\tan(-300°) = \tan 60° = \sqrt{3}$$

5.2. Signos de las razones trigonométricas en los cuatro cuadrantes

Puesto que d siempre es positiva y sen θ es igual a y/d, entonces sen θ tiene el mismo signo que y. Así, sen θ es positivo cuando θ termina en el primer o segundo cuadrantes (y es positiva) y negativo cuando termina en el tercer o cuarto cuadrantes (y es negativa). Haciendo consideraciones similares para las otras 5 razones, se obtienen los resultados que se muestran en la figura 5.6.

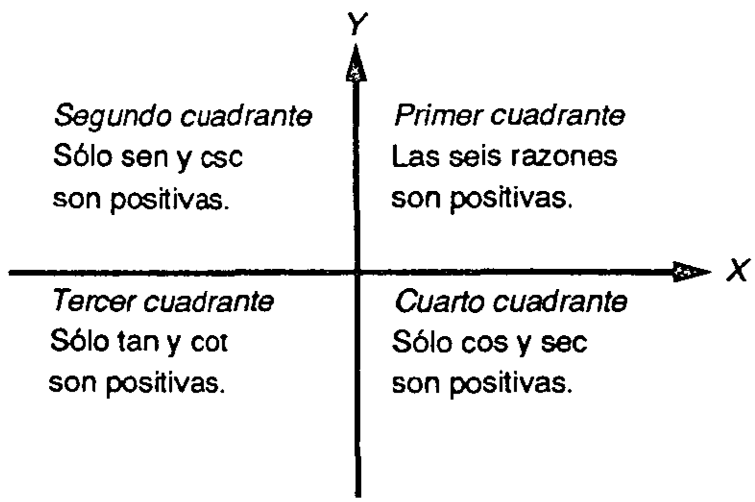


Figura 5.6

Ejemplo 4

Decir en qué cuadrante termina cada ángulo y establecer el signo del seno, coseno y tangente.

a) $320°$

Solución

Como $270° < 320° < 360°$, $320°$ termina en el cuarto cuadrante.

$\operatorname{sen} 320° = \dfrac{y}{d}$; y es negativa, entonces sen 320° es negativo.

$\cos 320° = \dfrac{x}{d}$; como x es positiva, entonces cos 320° es positivo.

$\tan 320° = \dfrac{y}{x}$; y es negativa y x positiva, entonces tan 320° es negativa.

b) 480°

Solución

Se encuentra su coterminal entre 0° y 360°
480° - 360° = 120° ; 480° y 120° son coterminales.
Como 90° < 120° < 180°, 120° termina en el segundo cuadrante.

$\operatorname{sen} 120° = \dfrac{y}{d}$; como y es positiva, entonces sen 120° es positivo.

$\cos 120° = \dfrac{x}{d}$; como x es negativa, entonces cos 120° es negativo.

$\tan 120° = \dfrac{y}{x}$, y positiva y x negativa, entonces tan 120° es negativa.

5.3. Razones trigonométricas de los ángulos de 120°, 135°, 150°, 210°, 225°, 240°, 300°, 315° y 330°

5.3.1. Razones trigonométricas de los ángulos de 150°, 210° y 330°

Las razones trigonométricas de los ángulos de 150°, 210° y 330° son iguales en valor absoluto a las razones trigonométricas del ángulo de 30°; o sea que, cuando más, difieren en el signo, dependiendo de la razón y del cuadrante donde esté el lado terminal de dichos ángulos.

En la figura 5.7, se muestra el ángulo de 150° en posición normal. A partir de esta figura se pueden calcular las razones trigonométricas de 150° trazando el triángulo rectángulo *OPP'*.

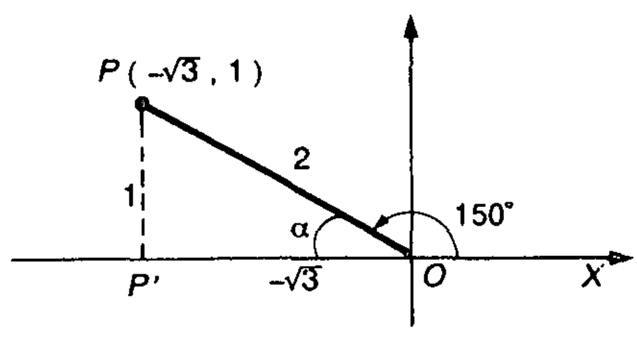


Figura 5.7

En la figura anterior puede verse que:

- $\alpha = 180° - 150° = 30°$
- el triángulo rectángulo *OPP'* es semejante al triángulo *ABC* de la figura 4.4 del apartado 4.2.

En virtud de lo anterior, los valores de los lados del triángulo *OPP'* se pueden hacer iguales respectivamente a los valores de los lados del triángulo *ABC* de la figura 4.4; es decir:

$$OP' = BC = \sqrt{3}\ ,\ PP' = AC = 1 \text{ y } OP = AB = 2\ .$$

Entonces, como el punto P se encuentra en el segundo cuadrante, tendrá por coordenadas $P(-\sqrt{3}, 1)$ y la distancia de este punto al origen será: $d = 2$.

Al aplicar la definición de las razones trigonométricas para un ángulo en general se tiene:

$$\operatorname{sen} 150° = \frac{y}{d} = \frac{1}{2} \qquad \cot 150° = \frac{x}{y} = \frac{-\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3}$$

$$\cos 150° = \frac{x}{d} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \sec 150° = \frac{d}{x} = -\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\tan 150° = \frac{y}{x} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \csc 150° = \frac{d}{y} = \frac{2}{1} = 2$$

Para calcular las razones trigonométricas del ángulo de 210° se procede de igual forma que para el caso de 150°, sólo que ahora las coordenadas del punto P son $(-\sqrt{3}, -1)$ (*véase* la figura 5.8).

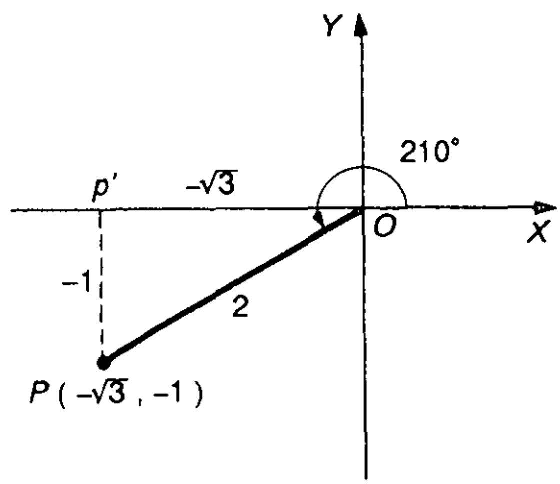


Figura 5.8

Entonces, se tiene:

$$\text{sen } 210° = \frac{y}{d} = -\frac{1}{2}$$

$$\cos 210° = \frac{x}{d} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 210° = \frac{y}{x} = \frac{-1}{-\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cot 210° = \frac{x}{y} = \frac{-\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3}$$

$$\sec 210° = \frac{d}{x} = -\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\csc 210° = \frac{d}{y} = \frac{2}{-1} = -2$$

Para el caso de las razones trigonométricas del ángulo de 330° también se procede de la misma manera, sólo que en este caso las coordenadas del punto P son $(\sqrt{3}, -1)$, (*véase* la figura 5.9).

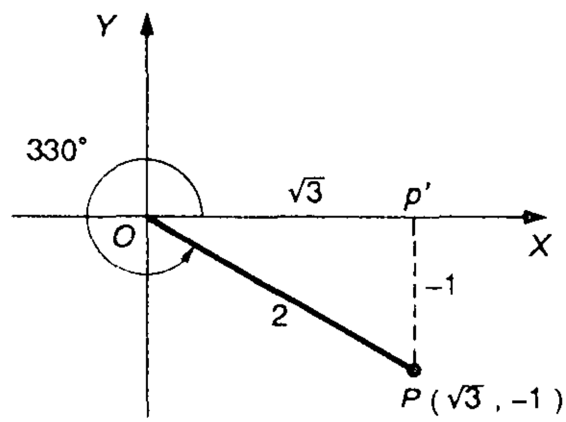


Figura 5.9

Entonces se tiene:

$$\text{sen } 330° = \frac{y}{d} = -\frac{1}{2}$$

$$\cos 330° = \frac{x}{d} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 330° = \frac{y}{x} - \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cot 330° = \frac{x}{y} = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}$$

$$\sec 330° = \frac{d}{x} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\csc 330° = \frac{d}{y} = \frac{2}{-1} = -2$$

Ejemplo 5

Calcular el valor de las siguientes expresiones:

a) $3 \csc 150° + \operatorname{sen} 210° - \cot 330° =$

$$3\,(2) - \frac{1}{2} + \sqrt{3} = 6 - \frac{1}{2} + \sqrt{3} = \frac{11}{2} + \sqrt{3}$$

b) $\dfrac{(\tan 330°)\,(\cot 210°) + 1}{\csc 150°} = \dfrac{(-1/\sqrt{3})\,(\sqrt{3}) + 1}{2} = \dfrac{-1 + 1}{2} = 0$

5.3.2. Razones trigonométricas de los ángulos de 120°, 240° y 300°

Los valores de las razones trigonométricas de los ángulos de 120°, 240° y 300° son iguales en valor absoluto a los del ángulo de 60°.

En la figura 5.10, se muestra el ángulo de 120° en posición normal. Al trazar el triángulo rectángulo *OPP'* en la figura, se puede ver que:

- $\alpha = 180° - 120° = 60°$
- el triángulo *OPP'* es semejante al triángulo *ABC* de la figura 4.4 del apartado 4.2.

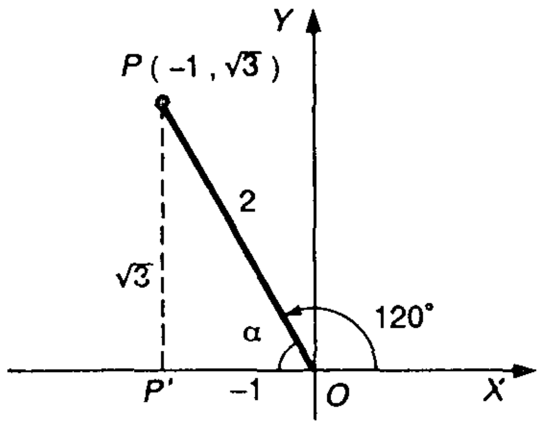


Figura 5.10

Entonces $OP' = 1$, $PP' = \sqrt{3}$ y $OP = 2$. En este caso el punto P tendrá por coordenadas a $(-1, \sqrt{3})$ y la distancia de este punto al origen será: $d = 2$.

Al aplicar las razones trigonométricas de un ángulo en general se tiene:

$$\text{sen } 120^\circ = \frac{y}{d} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 120^\circ = \frac{x}{d} = -\frac{1}{2}$$

$$\tan 120^\circ = \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}$$

$$\cot 120^\circ = \frac{x}{y} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sec 120^\circ = \frac{d}{x} = \frac{2}{-1} = -2$$

$$\csc 120^\circ = \frac{d}{y} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Para calcular la razones trigonométricas del ángulo de 240° se procede en igual forma que para el caso de 120°, sólo que ahora las coordenadas del punto P son $(-1, -\sqrt{3})$ (*véase* la figura 5.11).

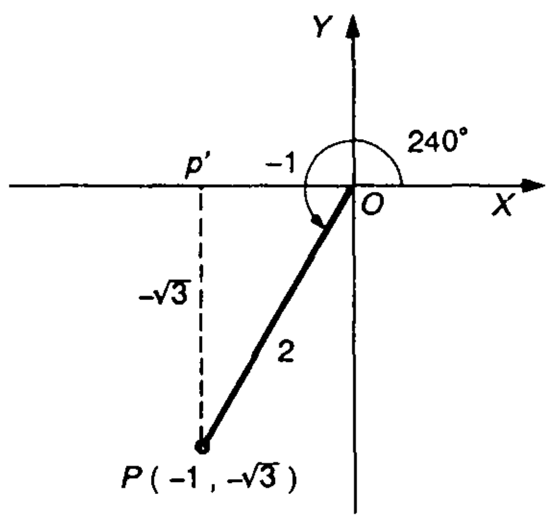


Figura 5.11

Entonces se tiene:

$$\text{sen } 240^\circ = \frac{y}{d} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 240° = \frac{x}{d} = -\frac{1}{2}$$

$$\tan 240° = \frac{y}{x} = \frac{-\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3}$$

$$\cot 240° = \frac{x}{y} = \frac{-1}{-\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sec 240° = \frac{d}{x} = \frac{2}{-1} = -2$$

$$\csc 240° = \frac{d}{y} = -\frac{2}{\sqrt{3}}$$

Para el caso de las razones trigonométricas del ángulo de 300° también se procede de la misma manera, sólo que en este caso las coordenadas del punto P son $(1, -\sqrt{3})$ (*véase* la figura 5.12).

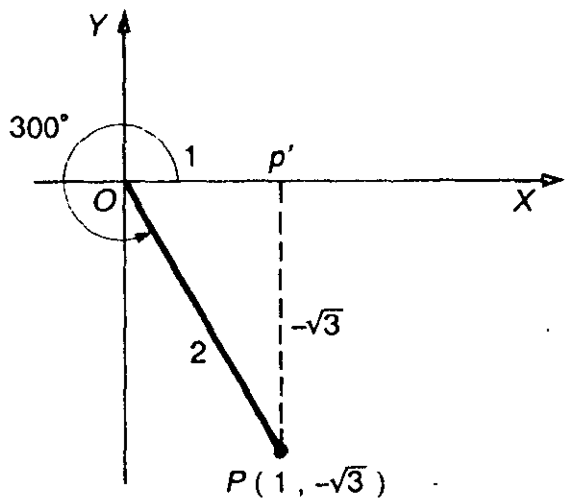


Figura 5.12

Por lo tanto, se tiene:

$$\operatorname{sen} 300° = \frac{y}{d} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 300° = \frac{x}{d} = \frac{1}{2}$$

$$\tan 300° = \frac{y}{x} = \frac{-\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3}$$

$$\cot 300° = \frac{x}{y} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sec 300° = \frac{d}{x} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\csc 300° = \frac{d}{y} = -\frac{2}{\sqrt{3}}$$

Ejemplo 6

Calcular el valor de las siguientes expresiones:

a) $-4\cos 240° + \sec 300° - \sec 120° =$

$$-4\left(-\frac{1}{2}\right) + 2 - (-2) = 2 + 2 + 2 = 6$$

b) $\dfrac{(\tan 300°)(\csc 240°) + 1}{\sec 120°} =$

$$\frac{-\sqrt{3}(-2/\sqrt{3}) + 1}{-2} = \frac{2+1}{-2} = -\frac{3}{2}$$

5.3.3. Razones trigonométricas de los ángulos de 135°, 225° y 315°

Los valores de las razones trigonométricas de los ángulos de 135°, 225° y 315°, son iguales en valor absoluto a las razones trigonométricas del ángulo de 45°.

En la figura 5.13 se muestra el ángulo de 135° en posición normal. A partir de esta figura se pueden calcular las razones trigonométricas de 135°, trazando el triángulo rectángulo *OPP'*.

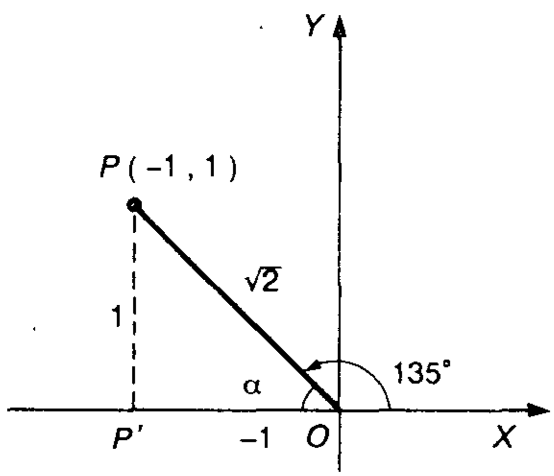


Figura 5.13

En la figura puede verse que:

- $\alpha = 180° - 135° = 45°$
- el triángulo rectángulo *OPP'*, es semejante al triángulo *ABC* de la figura 4.5, del apartado 4.2.

En virtud de lo anterior, los valores de los lados del triángulo *OPP'* se pueden hacer iguales respectivamente a los valores de los lados del triángulo *ABC* de la figura 4.5 del apartado 4.2; es decir:

$OP' = AC = 1\,,\quad PP' = BC = 1\,,\quad OP = AB = \sqrt{2}$

Entonces, como el punto P se encuentra en el segundo cuadrante, tendrá por coordenadas (-1, 1) y la distancia de este punto al origen será: $d = \sqrt{2}$.

Al aplicar la definición de las razones trigonométricas para un ángulo en general se tiene:

$$\text{sen } 135^\circ = \frac{y}{d} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos 135^\circ = \frac{x}{d} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan 135^\circ = \frac{y}{x} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$\cot 135^\circ = \frac{x}{y} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$\sec 135^\circ = \frac{d}{x} = \frac{\sqrt{2}}{-1} = -\sqrt{2}$$

$$\csc 135^\circ = \frac{d}{y} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

Para calcular las razones trigonométricas del ángulo de 225° se procede de igual forma que para el caso de 135°, sólo que ahora las coordenadas del punto P son (–1, –1), figura 5.14.

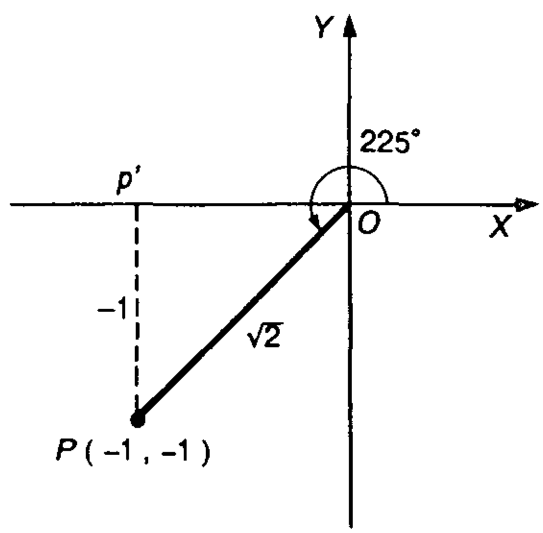


Figura 5.14

Entonces se tiene:

$$\operatorname{sen} 225^\circ = \frac{y}{d} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \cot 225^\circ = \frac{x}{y} = \frac{-1}{-1} = 1$$

$$\cos 225^\circ = \frac{x}{d} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \sec 225^\circ = \frac{d}{x} = \frac{\sqrt{2}}{-1} = -\sqrt{2}$$

$$\tan 225^\circ = \frac{y}{x} = \frac{-1}{-1} = 1 \qquad \csc 225^\circ = \frac{d}{y} = \frac{\sqrt{2}}{-1} = -\sqrt{2}$$

Para el caso de las razones trigonométricas del ángulo de 315° también se procede de la misma manera, sólo que en este caso las coordenadas del punto P son (1, –1), (*véase* figura 5.15).

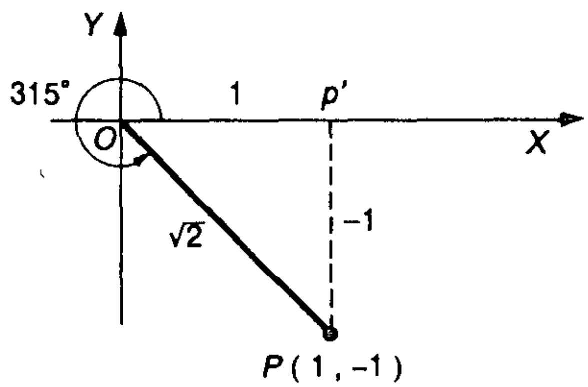


Figura 5.15

Entonces se tiene:

$$\operatorname{sen} 315^\circ = \frac{y}{d} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos 315^\circ = \frac{x}{d} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan 315^\circ = \frac{y}{x} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$\cot 315^\circ = \frac{x}{y} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$\sec 315^\circ = \frac{d}{x} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

$$\csc 315^\circ = \frac{d}{y} = \frac{\sqrt{2}}{-1} = -\sqrt{2}$$

Ejemplo 7

Calcular el valor de las siguientes expresiones:

a) $4 \tan 135° + 2 \sec 315° + 2 \csc 225° =$

$$4(-1) + 2(\sqrt{2}) + 2(-\sqrt{2}) = -4$$

b) $\dfrac{(\csc 135°)^2 - \cot 315°}{\tan 225°} =$

$$= \frac{(\sqrt{2})^2 - (-1)}{1} = \frac{2+1}{1} = 3$$

5.4. Determinación con el uso de tablas del valor de una razón trigonométrica de un ángulo agudo

Los valores de las razones trigonométricas de los ángulos se pueden encontrar, en forma aproximada, mediante el empleo de tablas trigonométricas. Éstas se presentan en diferentes textos con 3, 4 o 5 cifras decimales.

En algunas de estas tablas, los valores de las razones trigonométricas se presentan en intervalos de 10', y en caso de que el ángulo cuya razón trigonométrica se desea encontrar tenga un número de minutos que no sea múltiplo de 10, se utilizan las partes proporcionales. Es recomendable, para los ejemplos que a continuación se presentan, que se disponga de un ejemplar de estas tablas.

Ejemplo 8

Hallar el valor de cos 44° 52'.

En la tabla del coseno natural se localiza, en la columna cuyo encabezado es N, el número 44 y se sigue por ese mismo renglón hasta la columna cuyo encabezado es 50', encontrándose el valor de 0.7092. Se sigue por el mismo renglón hasta la columna de partes proporcionales de encabezado 2' donde se encuentra el número 4, que equivale a 0.0004. Como se especifica en las columnas de partes proporcionales que éstas se restan, se tendrá:

$$0.7092 - 0.0004 = 0.7088$$

de donde:

$$\cos 44° 52' = 0.7088$$

5.4.1. Determinación del ángulo agudo, dada una de sus razones trigonométricas

Considérese el mismo tipo de tablas del apartado 5.4. La determinación del ángulo, dada una de sus razones, se muestra en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 9

Dado sen $\alpha = 0.5040$, encontrar el ángulo α.

En la tabla del seno natural, se busca en las columnas el valor de 0.5040. Se encuentra que el valor inferior más cercano al dado es 0.5025, y corresponde a: 30° 10'.

Se calcula la diferencia entre el valor dado, 0.5040, y el hallado en las tablas, 0.5025. La diferencia 0.0015, que equivale a 15 partes proporcionales, se busca en el mismo renglón en las columnas de partes proporcionales, y se localiza en la columna cuyo encabezado es 6'.

Como el seno de un ángulo agudo es mayor conforme aumenta el ángulo, entonces se suma 6' a 30° 10' y se tiene:

$$30° 10' + 6' = 30° 16'$$

de donde:

$$\alpha = 30° 16'$$

Ejercicios

Razones trigonométricas de un ángulo en general

1. Si el punto $P(-3, -4)$ está sobre el lado terminal del ángulo θ, encontrar el valor de las 6 razones trigonométricas de θ.

Encontrar el valor de las siguientes expresiones:

2. $\csc 750° =$

3. sen $(-315°) =$

4. $\tan 420° =$

Signos de las razones trigonométricas en los cuatro cuadrantes

Decir en qué cuadrante termina cada ángulo y establecer el signo del seno, coseno y tangente.

5. 125°

6. 750°

7. $-120°$

Razones trigonométricas de los ángulos de 150°, 210° y 330°

Calcular el valor de las siguientes expresiones:

8. $3 \cot 150° + 4 \operatorname{sen} 210° - 2 \csc 330° =$

9. $2 \operatorname{sen} 150° - \frac{1}{2} \csc 150° - 2 \operatorname{sen} 330° =$

10. $\frac{(\csc 210°)(\csc 150°) + 8}{\csc 330°} =$

11. $\frac{(\sec 150°)(\cot 210°) + \csc 330°}{2} =$

Razones trigonométricas de los ángulos de 120°, 240° y 300°

Calcular el valor de las siguientes expresiones:

12. $\operatorname{sen} 120° - \cos 300° - \cos 240° =$

13. $3 \tan 240° + 2 \sec 120° - \sec 300° =$

14. $\frac{(\csc 120°)(\tan 300°) + 1}{\sec 240°} =$

15. $\frac{-6 \cos 120° + (\tan 240°)^2}{\sec 300°} =$

Razones trigonométricas de los ángulos de 135°, 225° y 315°

Calcular el valor de las siguientes expresiones:

16. $\cot 315° + 10 \tan 225° - \operatorname{sen} 135° =$

17. $-4 \tan 135° + \cot 225° + \tan 315° =$

18. $\frac{(\sec 315°)^2 - \tan 225°}{\csc 315°} =$

19. $\frac{(\tan 315°)(\tan 135°) - (\cos 225°)(\csc 315°)}{\operatorname{sen} 135°} =$

Determinación con el uso de tablas del valor de una razón trigonométrica de un ángulo agudo

Hallar el valor de:

20. $\operatorname{sen} 29° 20' =$

21. cos 60° 34' =

22. tan 42° 09' =

Determinación del ángulo agudo dada una de sus razones trigonométricas

Dado el valor de una razón trigonométrica, encontrar el ángulo:

23. sen α = 0.9407

24. cos β = 0.7671

25. tan γ = 1.198

MÓDULO 6. IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

Objetivos específicos

Al terminar el estudio de este módulo, el alumno:

- *Enunciará las identidades trigonométricas fundamentales.*
- *Reducirá expresiones trigonométricas utilizando las identidades trigonométricas.*

Cuadro sinóptico

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

- *Pitagóricas*
  - $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$
  - $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$
  - $1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$

- *Inversas*
  - $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{1}{\csc\theta}$ o $\csc\theta = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta}$
  - $\cos\theta = \dfrac{1}{\sec\theta}$ o $\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$
  - $\tan\theta = \dfrac{1}{\cot\theta}$ o $\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}$

Cuadro sinóptico

Continuación

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

- *Por cociente*
  - $\tan\theta = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$
  - $\cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$

6.1. Identidades trigonométricas fundamentales

Las identidades trigonométricas fundamentales se clasifican en tres grupos que son:

Identidades pitagóricas:

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \tag{1}$$

$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta \tag{2}$$

$$1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta \tag{3}$$

Identidades inversas:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{\csc\theta} \text{ o } \csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \tag{4}$$

$$\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta} \text{ o } \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \tag{5}$$

$$\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta} \text{ o } \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} \tag{6}$$

Identidades por cociente:

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} \text{ o } \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} \tag{7}$$

6.2. Aplicaciones

En la ingeniería, frecuentemente es necesario simplificar expresiones que contienen razones trigonométricas, o bien, transformarlas en una forma particular. Las identidades trigonométricas fundamentales son útiles en tales situaciones, como se verá en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1

Simplificar cada una de las siguientes expresiones:

a) $\sec\theta - \sec\theta\,\mathrm{sen}^2\theta = \sec\theta\,(1 - \mathrm{sen}^2\theta)$

Solución

De la identidad (1):

$$\mathrm{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1, \quad 1 - \mathrm{sen}^2\theta = \cos^2\theta$$

entonces:

$$\sec\theta - \sec\theta\,\mathrm{sen}^2\theta = \sec\theta\cos^2\theta$$

De la identidad (5):

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$

entonces:

$$\sec\theta - \sec\theta\,\mathrm{sen}^2\theta = \frac{1}{\cos\theta}\cos^2\theta = \cos\theta$$

b) $\tan^2\theta\cos^2\theta + \cot^2\theta\,\mathrm{sen}^2\theta$

Solución

De la identidad (7):

$$\tan\theta = \frac{\mathrm{sen}\,\theta}{\cos\theta}, \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\mathrm{sen}\,\theta}$$

entonces:

$$\tan^2\theta = \frac{\mathrm{sen}^2\theta}{\cos^2\theta}, \cot^2\theta = \frac{\cos^2\theta}{\mathrm{sen}^2\theta}$$

por lo tanto:

$$\tan^2\theta\cos^2\theta + \cot^2\theta\,\mathrm{sen}^2\theta = \frac{\mathrm{sen}^2\theta}{\cos^2\theta}\cos^2\theta +$$

$$+\frac{\cos^2\theta}{\mathrm{sen}^2\theta}\mathrm{sen}^2\theta = \mathrm{sen}^2\theta + \cos^2\theta$$

De la identidad (1):

$$\mathrm{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

entonces:

$$\tan^2\theta\cos^2\theta + \cot^2\theta\,\mathrm{sen}^2\theta = 1$$

Ejercicios

Identidades trigonométricas fundamentales

Simplificar cada una de las siguientes expresiones:

1. $\dfrac{\tan\theta}{\sec^2\theta - 1} =$

2. $\mathrm{sen}^2\theta\,(1 + \cot^2\theta) =$

3. $\mathrm{sen}\,\theta\sec\theta\cot\theta =$

4. $\mathrm{sen}^2\theta\sec^2\theta - \sec^2\theta =$

MÓDULO 7. FÓRMULAS DE REDUCCIÓN

Objetivos específicos

Al terminar el estudio de este módulo, el alumno:

- *Aplicará las fórmulas para reducir razones trigonométricas de ángulos entre 90° y 360°, a razones de ángulos agudos.*

Cuadro sinóptico

Fórmulas para reducir razones trigonométricas de ángulos entre 90° y 360°

$\operatorname{sen}(90° + \theta) = \cos\theta$	$\csc(90° + \theta) = \sec\theta$
$\cos(90° + \theta) = -\operatorname{sen}\theta$	$\sec(90° + \theta) = -\csc\theta$
$\tan(90° + \theta) = -\cot\theta$	$\cot(90° + \theta) = -\tan\theta$

7.1. Método de reducción a ángulos agudos

Cualquier razón trigonométrica de un ángulo entre 90° y 360° se puede reducir a una razón trigonométrica de un ángulo águdo, aplicando una o varias de las siguientes fórmulas:

$$\operatorname{sen}(90° + \theta) = \cos\theta \qquad \cos(90° + \theta) = -\operatorname{sen}\theta$$
$$\sec(90° + \theta) = -\csc\theta \qquad \csc(90° + \theta) = -\sec\theta$$
$$\tan(90° + \theta) = -\cot\theta \qquad \cot(90° + \theta) = -\tan\theta$$

Cuando θ resulta ser 0°, 90°, 180° o 270°, dos de las fórmulas anteriores no se aplican, ya que dos de las razones trigonométricas para cada uno de estos ángulos no están definidas.

Cuando se van a reducir razones trigonométricas de ángulos mayores de 360° o negativos, primero se encuentra su respectivo coterminal entre 0° y 360° y luego se aplican las fórmulas de reducción:

Ejemplo 1

Reducir cada una de las siguientes expresiones a una razón trigonométrica de un ángulo agudo positivo.

a) sen 200°

Solución

$\operatorname{sen} 200^\circ = \operatorname{sen}(90^\circ + 110^\circ) = \cos 110^\circ = \cos(90^\circ + 20^\circ) = -\operatorname{sen} 20^\circ$

b) cot 930°

Solución

Se calcula su coterminal entre 0° y 360°:

$930^\circ - 360^\circ = 570^\circ\ ;\ 570^\circ - 360^\circ = 210^\circ$

Entonces:

$\cot 930^\circ = \cot 210^\circ = \cot(90^\circ + 120^\circ) = -\tan 120^\circ =$

$= -\tan(90^\circ + 30^\circ) = \cot 30^\circ$

c) sen (–100°)

Solución

Se calcula su coterminal entre 0° y 360°:

$-100^\circ + 360^\circ = 260^\circ$

Entonces:

$\operatorname{sen}(-100^\circ) = \operatorname{sen} 260^\circ = \operatorname{sen}(90^\circ + 170^\circ) =$

$= \cos 170^\circ = \cos(90^\circ + 80^\circ) = -\operatorname{sen} 80^\circ$

Ejercicios

Método de reducción a ángulos agudos

Reducir cada una de las siguientes expresiones a una razón trigonométrica de un ángulo agudo positivo.

1. $\cos 160° =$

2. $\tan 220° =$

3. $\sec 2910° =$

4. $\operatorname{sen} (-30°) =$

5. $\tan (-500°) =$

MÓDULO 8. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE LA SUMA Y DIFERENCIA DE DOS ÁNGULOS, DEL ÁNGULO DOBLE Y DEL ÁNGULO MITAD

Objetivos específicos

Al terminar el estudio de este módulo, el alumno:

- *Aplicará las fórmulas para calcular el seno, coseno y tangente de la suma y diferencia de dos ángulos.*
- *Aplicará las fórmulas para calcular el seno, coseno y tangente del ángulo doble y del ángulo mitad.*

Cuadro sinóptico

FÓRMULAS PARA LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE LA SUMA Y DIFERENCIA DE DOS ÁNGULOS, DEL ÁNGULO DOBLE Y DEL ÁNGULO MITAD

- *Suma de dos ángulos*
  - $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cos\beta + \cos\alpha \operatorname{sen}\beta$
  - $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta$
  - $\tan(\alpha + \beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \tan\beta}$
- *Diferencia de dos ángulos*
  - $\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cos\beta - \cos\alpha \operatorname{sen}\beta$
  - $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta$
  - $\tan(\alpha - \beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha \tan\beta}$

Cuadro sinóptico

Continuación

FÓRMULAS PARA LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE LA SUMA Y DIFERENCIA DE DOS ÁNGULOS, DEL ÁNGULO DOBLE Y DEL ÁNGULO MITAD

- *Ángulo doble*
  - $\operatorname{sen} 2\alpha = 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha$
  - $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha$
  - $\tan 2\alpha = \dfrac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$
- *Ángulo mitad*
  - $\operatorname{sen} \dfrac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\dfrac{1 - \cos \alpha}{2}}$
  - $\cos \dfrac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\dfrac{1 + \cos \alpha}{2}}$
  - $\tan \dfrac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\dfrac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$

8.1. Razones trigonométricas de la suma y diferencia de dos ángulos

8.1.1. Fórmulas para la suma

Sin entrar en la demostración, se presentan a continuación las fórmulas para calcular $\operatorname{sen}(\alpha + \beta)$, $\cos(\alpha + \beta)$ y $\tan(\alpha + \beta)$:

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \cos \alpha \operatorname{sen} \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

Para las fórmulas $\operatorname{sen}(\alpha + \beta)$ y $\cos(\alpha + \beta)$, α y β pueden tener cualquier valor; mientras que para la fórmula $\tan(\alpha + \beta)$, α o β no deben ser múltiplos impares de 90°, ya que en tal situación $\tan \alpha$ o $\tan \beta$ no están definidas.

8.1.2. Fórmulas para la diferencia

A partir de las fórmulas para la suma se deducen fácilmente las fórmulas para la diferencia:

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cos\beta - \cos\alpha \operatorname{sen}\beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha \tan\beta}$$

También en este caso, para $\tan(\alpha - \beta)$, α o β no deben ser múltiplos impares de 90°.

Ejemplo 1

Por medio de las fórmulas de suma o diferencia de dos ángulos, calcular el valor de las siguientes expresiones:

a) sen 105°

Solución

Sea $\alpha = 45°$, $\beta = 60°$

$$\operatorname{sen} 105° = \operatorname{sen}(45° + 60°) = \operatorname{sen} 45° \cos 60° + \cos 45° \operatorname{sen} 60° =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

b) tan 15°

Solución

Sea $\alpha = 60°$, $\beta = 45°$

$$\tan 15° = \tan(60° - 45°) = \frac{\tan 60° - \tan 45°}{1 + \tan 60° \tan 45°} =$$

$$= \frac{\sqrt{3} - 1}{1 + (\sqrt{3})(1)} = \frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3}}$$

8.2. Razones trigonométricas del ángulo doble y del ángulo mitad

8.2.1. Fórmulas para calcular el seno, el coseno y la tangente del ángulo doble

Por medio de las fórmulas para la suma de dos ángulos y haciendo $\beta = \alpha$, se puede demostrar que:

$$\operatorname{sen} 2\alpha = 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

8.2.2. Fórmulas para calcular el seno, el coseno y la tangente del ángulo mitad

A partir de la fórmula para $\cos 2\alpha$, se pueden establecer las siguientes expresiones para el ángulo mitad:

$$\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$$

Para la tangente del ángulo mitad se tienen las siguientes expresiones:

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{1 + \cos \alpha} \quad \text{o} \quad \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha}$$

Ejemplo 2

Calcular el valor de $\cos 60°$ mediante $\cos 30°$ y $\operatorname{sen} 30°$ utilizando la fórmula para el coseno del ángulo doble.

Solución

$$\cos 60° = \cos^2 30° - \operatorname{sen}^2 30° = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

Ejemplo 3

Calcular el valor de $\operatorname{sen} 22.5°$ mediante $\cos 45°$.

Solución

Como $22.5°$ termina en el primer cuadrante, sólo se toma la raíz positiva de la fórmula para $\operatorname{sen} \alpha/2$.

$$\operatorname{sen} 22.5^\circ = \operatorname{sen}\frac{45^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos 45^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} =$$
$$= \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

Ejercicios

Razones trigonométricas de la suma y diferencia de dos ángulos

Calcular el valor de las siguientes expresiones:

1. sen 75°, haciendo $\alpha = 45^\circ$ y $\beta = 30^\circ$
2. tan 105°, haciendo $\alpha = 45^\circ$ y $\beta = 60^\circ$
3. cos 15°, haciendo $\alpha = 60^\circ$ y $\beta = 45^\circ$
4. sen 15°, haciendo $\alpha = 60^\circ$ y $\beta = 45^\circ$

Razones trigonométricas del ángulo doble y del ángulo mitad

5. Calcular el valor de sen 60° mediante sen 30° y cos 30°
6. Calcular el valor de tan 240° mediante tan 120°
7. Calcular el valor de sen 105°, si $\cos 210^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
8. Calcular el valor de tan 22.5° mediante sen 45° y cos 45°

MÓDULO 9. LEY DE LOS SENOS Y LEY DE LOS COSENOS

Objetivos específicos

Al terminar el estudio de este módulo, el alumno:

- *Aplicará la ley de los senos en la resolución de un triángulo.*
- *Aplicará la ley de los cosenos en la resolución de un triángulo.*

Cuadro sinóptico

Ley de los senos. En todo triángulo, los lados son proporcionales a los senos de sus ángulos opuestos.

La ley de los senos se puede expresar como:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha}=\frac{b}{\operatorname{sen}\beta}=\frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}$$

En donde:

$$\frac{a}{b}=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta},\ \frac{b}{c}=\frac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\gamma},\ \frac{c}{a}=\frac{\operatorname{sen}\gamma}{\operatorname{sen}\alpha}$$

Cuadro sinóptico

Continuación

Ley de los cosenos. En todo triángulo, el cuadrado de un lado cualquiera es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, menos el doble producto de estos lados por el coseno del ángulo comprendido entre ellos.

La ley de los cosenos se puede expresar como:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

9.1. Ley de los senos. Aplicaciones

La ley de los senos, que se aplica en la solución de algunos triángulos oblicuángulos, se enuncia de la siguiente manera:

Ley de los senos. En todo triángulo los lados son proporcionales a los senos de sus ángulos opuestos.

Con referencia a la figura 9.1, la ley de los senos se puede expresar como:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}$$

de donde son inmediatas las siguientes razones:

$$\frac{a}{b} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta}, \quad \frac{b}{c} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\gamma}, \quad \frac{c}{a} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{\operatorname{sen}\alpha}$$

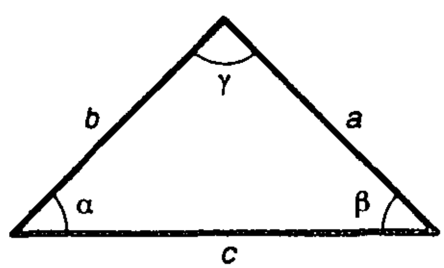


Figura 9.1

Ejemplo 1

Resolver el triángulo *ABC*, dados:
$a = 62.5$, $\alpha = 112°\ 20'$ y $\gamma = 42°\ 10'$ (*véase* la figura 9.2).

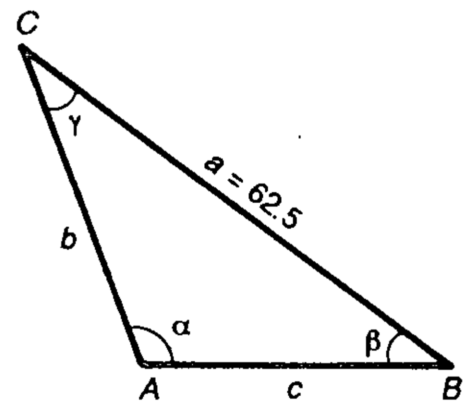


Figura 9.2

Solución

Este problema se puede resolver por medio de la ley de los senos.
Incógnitas: β, b, c.
Como la suma de los 3 ángulos interiores de un triángulo es 180°, se tiene:

$$\beta = 180° - (\alpha + \gamma) = 180° - (112°\ 20' + 42°\ 10') = 25°\ 30'$$

Se aplica la ley de los senos para b:

$$\frac{a}{b} = \frac{\text{sen}\ \alpha}{\text{sen}\ \beta}; \quad b = \frac{a\ \text{sen}\ \beta}{\text{sen}\ \alpha}$$

$$b = \frac{a\ \text{sen}\ \beta}{\text{sen}\ \alpha} = \frac{62.5\ \text{sen}\ 25°\ 30'}{\text{sen}\ 112°\ 20'} = \frac{62.5\ (0.4305)}{0.9250} = 29.1$$

Se aplica la ley de los senos para c:

$$\frac{c}{a} = \frac{\text{sen}\ \gamma}{\text{sen}\ \alpha}; \quad c = \frac{a\ \text{sen}\ \gamma}{\text{sen}\ \alpha}$$

$$c = \frac{a\ \text{sen}\ \gamma}{\text{sen}\ \alpha} = \frac{62.5\ \text{sen}\ 42°\ 10'}{\text{sen}\ 112°\ 20'} = \frac{62.5\ (0.6713)}{0.9250} = 45.4$$

Por lo tanto:

$$\beta = 25°\ 30', \quad b = 29.1, \quad c = 45.4$$

Ejemplo 2

Resolver el triángulo ABC dados $b = 480$, $c = 628$ y $\gamma = 55°\ 10'$ (*Véase* la figura 9.3).

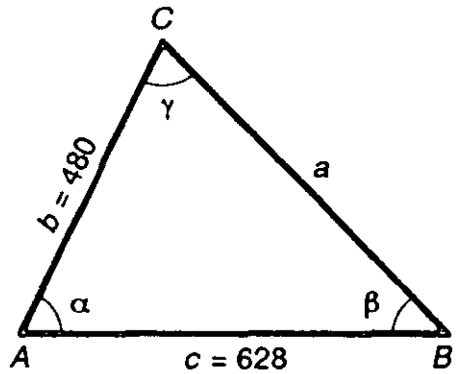


Figura 9.3

Solución

Como γ es agudo y $c > b$, el problema tiene solución única. Se aplica la ley de los senos.

Incógnitas: β, α y a.

Se aplica la ley de los senos para β:

$$\frac{b}{c} = \frac{\text{sen}\ \beta}{\text{sen}\ \gamma}; \quad \text{sen}\ \beta = \frac{b\ \text{sen}\ \gamma}{c}$$

$$\text{sen}\ \beta = \frac{b\ \text{sen}\ \gamma}{c} = \frac{480\ \text{sen}\ 55°\ 10'}{628} = \frac{480\ (0.8208)}{628} = 0.6271$$

$$\text{sen}\ \beta = 0.6271$$

Por lo tanto:

$$\beta = 38°\ 50'$$

Para α :

$$\alpha = 180° - (\beta + \gamma) = 180° - (38°\ 50' + 55°\ 10') = 86°$$

Ahora se aplica la ley de los senos para a:

$$\frac{a}{b} = \frac{\text{sen}\ \alpha}{\text{sen}\ \beta}; \quad a = \frac{b\ \text{sen}\ \alpha}{\text{sen}\ \beta}$$

$$a = \frac{480\ (\text{sen } 86°)}{\text{sen } 38°\ 50'} = \frac{480\ (0.9976)}{0.6271} = 764$$

Por lo tanto:

$\alpha = 86°$, $\beta = 38°\ 50'$, $a = 764$

9.2. Ley de los cosenos. Aplicaciones

Para la solución de problemas de triángulos, también se utiliza la ley de los cosenos que dice:

> *Ley de los cosenos*. En todo triángulo, el cuadrado de un lado cualquiera es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, menos el doble producto de estos lados por el coseno del ángulo comprendido entre ellos.

Con referencia a la figura 9.4, la ley de los cosenos se puede expresar como:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2\,ac \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab \cos \gamma$$

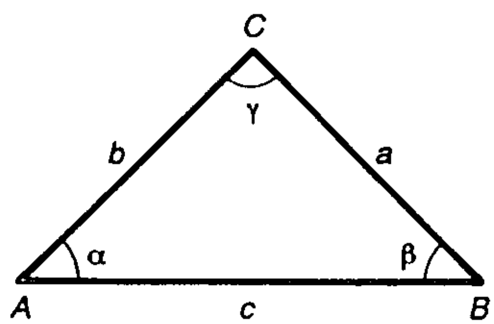


Figura 9.4

Ejemplo 3

Resolver el triángulo *ABC*, dados $a = 132$, $b = 224$ y $\gamma = 28°\ 40'$. (*Véase* la figura 9.5.)

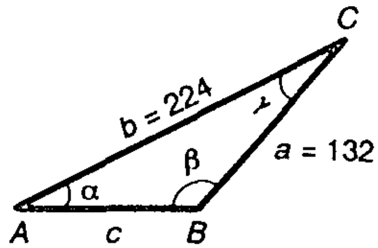


Figura 9.5

Solución

Incógnitas: c, α , β.
Se aplica la ley de los cosenos para c:

$$c^2 = a^2 + c^2 - 2ab \cos \gamma = (132)^2 + (224)^2 -$$

$$- 2(132)(224) \cos 28° 40'$$

$$c^2 = 15714; \quad c = 125.36$$

Se aplica la ley de los senos para α :

$$\frac{a}{c} = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } \gamma}; \quad \text{sen } \alpha = \frac{a \text{ sen } \gamma}{c}$$

$$\text{sen } \alpha = \frac{a \text{ sen } \gamma}{c} = \frac{132 \text{ sen } 28° 40'}{125.36} = \frac{132\ (0.4797)}{125.36} = 0.5051$$

$$\text{sen } \alpha = 0.5051$$

Por lo tanto:

$$\alpha = 30° 20' 17''$$

Para β :

$$\beta = 180° - (\alpha + \gamma) = 180° - (30° 20' 17'' + 28° 40') = 120° 59' 43''$$

Por lo tanto:

$$c = 125.36, \quad \alpha = 30° 20' 17'', \quad \beta = 120° 59' 43''$$

Ejemplo 4

Resolver el triángulo *ABC* dados $a = 25.2$, $b = 37.8$ y $c = 43.4$.
(*Véase* figura 9.6)

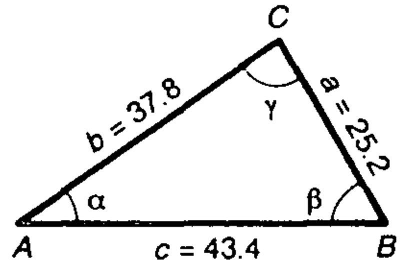


Figura 9.6

Solución

Incógnitas: α , β, γ.
Se aplica la ley de los cosenos para α :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \; ; \quad \cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(37.8)^2 + (43.4)^2 - (25.2)^2}{2\,(37.8)\,(43.4)} = 0.816$$

$\cos \alpha = 0.816$

Por lo tanto:

$\alpha = 35°\ 18'\ 49''$

Se aplica la ley de los cosenos para β :

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta \; ; \quad \cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{(25.2)^2 + (43.4)^2 - (37.8)^2}{2\,(25.2)\,(43.4)} = 0.4982$$

$\cos \beta = 0.4982$

Por lo tanto:

$\beta = 60°\ 07'\ 08''$

Para γ :

$$\gamma = 180° - (\alpha + \beta) = 180° - (35°\ 18'\ 49'' + 60°\ 07'\ 08'') = 84°\ 34'\ 03''$$

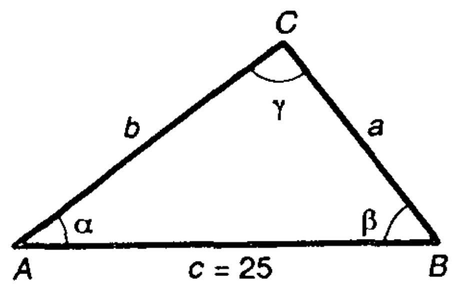
Por lo tanto:

$\alpha = 35° \; 18' \; 49''$, $\beta = 60° \; 07' \; 08''$, $\gamma = 84° \; 34' \; 03''$

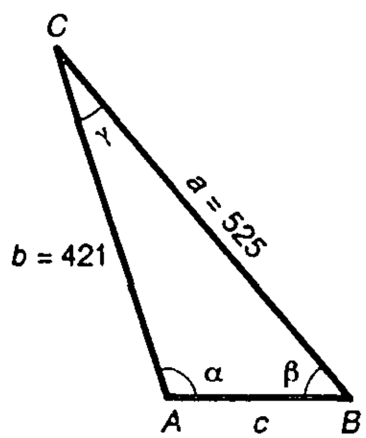
Ejercicios

Ley de los senos

1. Resolver el triángulo *ABC* dados $c = 25$, $\alpha = 35°$ y $\beta = 68°$

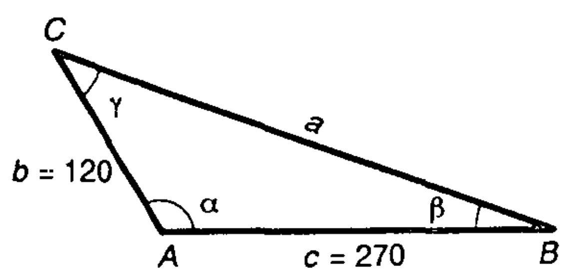


2. Resolver el triángulo *ABC* dados $a = 525$, $b = 421$ y $\alpha = 130° \; 50'$.

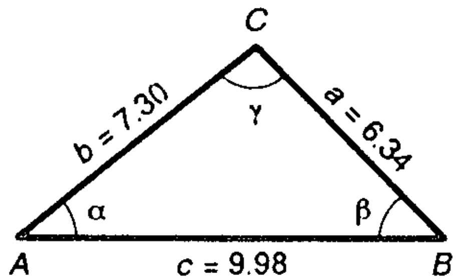


Ley de los cosenos

3. Resolver el triángulo *ABC* dados $b = 120$, $c = 270$ y α $118° \; 40'$.



4. Resolver el triángulo ABC dados $a = 6.34$, $b = 7.30$ y $c = 9.98$.



EXAMEN DE AUTOEVALUACIÓN

1. *Seleccione en cada uno de los casos la opción correcta.*

a) $45° =$ ( )

A. π rad B. 2π rad C. $\frac{\pi}{4}$ rad D. $\frac{\pi}{6}$ rad

b) $55° \, 48' \, 7'' =$ ( )

A. 0.9739 rad B. π rad C. $\frac{\pi}{5}$ rad D. $\frac{\pi}{6}$ rad

2. *Relacione la columna de la izquierda con la respuesta correcta de la columna de la derecha.*

A. Dos ángulos son adyacentes cuando:	( ) su suma es igual a 90°
B. Dos ángulos son complementarios si:	( ) su suma es igual a 180°
C. Dos ángulos son suplementarios si:	( ) su suma es igual a 270°
D. Dos ángulos son conjugados si:	( ) tienen un mismo vértice, un lado común y son exteriores el uno del otro.
	( ) su suma es igual a 360°; o sea, cuando su suma es igual a un perígono.

3. *Para cada una de las siguientes aseveraciones, indique si son falsas o verdaderas.*

a) La suma de los 3 ángulos interiores de todo triángulo es igual a π radianes.

( ) verdadero ( ) falso

b) Todo triángulo equilátero es equiángulo.

( ) verdadero ( ) falso

c) La suma de los ángulos interiores de un triángulo acutángulo no es igual a 180°

( ) verdadero ( ) falso

d) Si los tres lados de un triángulo son respectivamente proporcionales a los del otro, los dos triángulos son semejantes.

( ) verdadero ( ) falso

e) Dos triángulos son semejantes si la suma de sus ángulos es igual a 180°

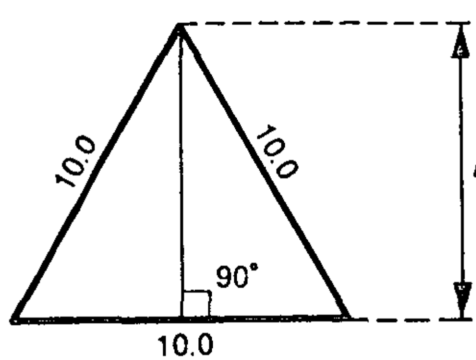
( ) verdadero ( ) falso

f) Dos triángulos que tienen sus lados respectivamente paralelos o perpendiculares son semejantes.

( ) verdadero ( ) falso

4. *Seleccione en cada uno de los siguientes casos la opción correcta.*

a) Considérese la figura:



El valor de h es: ( )

A. 10.00 B. 14.1421 C. 7.5548 D. 8.6603

b) Un hombre se encuentra parado a una cierta distancia de un farol. Si la sombra que proyecta el hombre sobre el suelo mide 2.40 m y la distancia lineal entre su cabeza y el extremo de su sombra es de 3.00 m, ¿cuánto mide el hombre? ( )

A. 1.60 m B. 1.80 m C. 1.50 m D. 2.00 m

5. *Seleccione la opción correcta.*

Una circunferencia es: ( )

A. Una curva totalmente cerrada.

B. Un conjunto de puntos del plano.

C. Un conjunto de puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado centro.

D. Un conjunto de puntos del plano cuya distancia a un punto fijo llamado centro es menor o igual a una longitud llamada radio.

6. *Anote en cada paréntesis la letra que corresponda a la descripción correcta de cada elemento.*

A. Recta que corta a la circunferencia en dos puntos.	Radio	( )
B. Distancia entre dos puntos de la circunferencia.	Diámetro	( )
C. Recta que toca a la circunferencia en un solo punto.	Cuerda	( )
D. Segmento rectilíneo determinado por dos puntos de la circunferencia.	Secante	( )
E. Distancia del centro a un punto cualquiera de la circunferencia.	Tangente	( )
F. Segmento determinado por dos puntos de la circunferencia, que pasa por el centro.		

7. *Anote la opción correcta en cada caso.*

En un triángulo rectángulo se definen las razones trigonométricas para un ángulo agudo α como sigue:

A. $\dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$	$\operatorname{sen} \alpha =$ ( )
B. $\dfrac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}}$	$\cos \alpha =$ ( )
C. $\dfrac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$	$\tan \alpha =$ ( )
D. $\dfrac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}}$	$\cot \alpha =$ ( )
E. $\dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$	$\sec \alpha =$ ( )
F. $\dfrac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}}$	$\csc \alpha =$ ( )

8. *Sin recurrir al uso de tablas trigonométricas, relacione correctamente la columna de la izquierda con la columna de la derecha.*

A. ... 0	sen 0° = ( )
B. ... 1	tan 45° = ( )
C. ... $\frac{2}{\sqrt{3}}$	sec 30° = ( )
D. ... $\frac{-1}{\sqrt{3}}$	cos 90° = ( )
E. ... $\sqrt{2}$	cot 120° = ( )
F. ... $\sqrt{3}$	csc 135° = ( )

9. *Determine en cada caso la opción correcta.*

1. Si $\text{sen } 30° = \frac{1}{2}$ sen 35° = ( )

   A. 0.32

   B. 0.57

   C. 0.82

2. Si tan 45° = 1 tan 39° = ( )

   A. 0.81

   B. 1.22

   C. 0.3

3. Si $\text{sen } \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \alpha = 60°$, $\text{sen } \alpha = 0.9 \rightarrow \alpha =$ ( )

   A. 54°

   B. 118°

   C. 64°

10. *Indique si es falsa* (F) *o verdadera* (V) *cada una de las siguientes expresiones.*

a) $\sqrt{\text{sen}^2 A + \cos^2 A} = \text{sen } A + \cos A$ ( )

b) $\tan^2 A - \sec^2 A = -1$ ( )

c) $1 - \cos^2 A = \text{sen}^2 A$ ( )

d) $\dfrac{1}{\cot^2 A} + \dfrac{1}{\cos^2 A} = 1$ ( )

e) $1 + \cot^2 A = \csc^2 A$ ( )

f) $\sqrt{\csc^2 A - \cot^2 A} = 1$ ( )

g) $\text{sen } A = \sqrt{1 + \cos A}$ ( )

h) $\text{sen } A \csc A = 1$ ( )

i) $\tan A = \dfrac{1}{\csc A}$ ( )

j) $\cos A = \text{sen } A \cot A$ ( )

k) $\tan^2 A + \sec^2 A = 1$ ( )

11. *Seleccione la opción correcta en cada caso.*

A. $(1 + \tan \alpha)^2$

B. 0

C. $1 - 2 \text{ sen } A$

D. $\sec^2 A \csc A$

E. $\cot^2 A + \csc^2 A + 2 \cot A \csc A$

F. $(\csc A - \cot A)^2$

G. $2(1 + \tan \alpha)$

1) $\dfrac{1 + \tan^2 A}{\text{sen } A} =$ ( )

2) $\dfrac{1 + \cos A}{1 - \cos A} =$ ( )

3) $\dfrac{1 - \text{sen } A}{\cos A} - \dfrac{\cos A}{1 + \text{sen } A} =$ ( )

4) $1 + \dfrac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} + \dfrac{\tan \alpha}{\cot \alpha} + \dfrac{\sec \alpha}{\csc \alpha} =$ ( )

12. *Indique si son falsas o verdaderas las siguientes expresiones.*

a) $\text{sen } (-A) = -\text{sen } A$ ( )

b) $\cos (-A) = -\cos A$ ( )

c) $\sec (-A) = \sec A$ ( )

d) $\text{sen } (90^\circ + A) = \cos A$ ( )

e) $\cos(90° + A) = \operatorname{sen} A$ ( )

f) $\cos 225° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ( )

g) $\operatorname{sen} 315° = \frac{-\sqrt{2}}{2}$ ( )

h) $\tan 330° = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ( )

i) $\operatorname{sen} 120° = -\frac{1}{2}$ ( )

13. *Relacione correctamente la columna de la izquierda con la columna de la derecha.*

A. $\operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \cos \alpha \operatorname{sen} \beta$

B. $\cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$

C. $-2 - \sqrt{3}$

D. $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

E. $\frac{2 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}}$

F. $\frac{2\sqrt{2}}{4}$

1) $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) =$ ( )

2) $\tan(45° + 60°) =$ ( )

3) $\operatorname{sen}(75°) =$ ( )

4) $\cos(\alpha + \beta) =$ ( )

14. *Seleccione la opción correcta*:

a) La fórmula para calcular sen 2 α es:

( ) $\frac{1}{2} \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha$ ( ) $2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha$ ( ) $2 \operatorname{sen}^2 \alpha \cos^2 \alpha$

b) La fórmula para calcular cos 2A es:

( ) $\cos^2 A - \operatorname{sen}^2 A$ ( ) $\cos^2 A + \operatorname{sen}^2 A$ ( ) $\operatorname{sen}^2 A - \cos^2 A$

c) La fórmula para calcular tan 2α es:

( ) $\frac{1 - \tan^2 \alpha}{2 \tan \alpha}$ ( ) $\frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$ ( ) $\frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$

d) $\dfrac{1}{\cot^2 A} + \dfrac{1}{\cos^2 A} = 1$ ( )

e) $1 + \cot^2 A = \csc^2 A$ ( )

f) $\sqrt{\csc^2 A - \cot^2 A} = 1$ ( )

g) $\operatorname{sen} A = \sqrt{1 + \cos A}$ ( )

h) $\operatorname{sen} A \csc A = 1$ ( )

i) $\tan A = \dfrac{1}{\csc A}$ ( )

j) $\cos A = \operatorname{sen} A \cot A$ ( )

k) $\tan^2 A + \sec^2 A = 1$ ( )

11. *Seleccione la opción correcta en cada caso.*

A. $(1 + \tan \alpha)^2$

B. 0

C. $1 - 2 \operatorname{sen} A$

D. $\sec^2 A \csc A$

E. $\cot^2 A + \csc^2 A + 2 \cot A \csc A$

F. $(\csc A - \cot A)^2$

G. $2(1 + \tan \alpha)$

1) $\dfrac{1 + \tan^2 A}{\operatorname{sen} A} =$ ( )

2) $\dfrac{1 + \cos A}{1 - \cos A} =$ ( )

3) $\dfrac{1 - \operatorname{sen} A}{\cos A} - \dfrac{\cos A}{1 + \operatorname{sen} A} =$ ( )

4) $1 + \dfrac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} + \dfrac{\tan \alpha}{\cot \alpha} + \dfrac{\sec \alpha}{\csc \alpha} =$ ( )

12. *Indique si son falsas o verdaderas las siguientes expresiones.*

a) $\operatorname{sen}(-A) = -\operatorname{sen} A$ ( )

b) $\cos(-A) = -\cos A$ ( )

c) $\sec(-A) = \sec A$ ( )

d) $\operatorname{sen}(90^\circ + A) = \cos A$ ( )

d) El valor de sen 60° es:

( ) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ ( ) $\sqrt{3}$ ( ) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

e) El valor de cos 120° es:

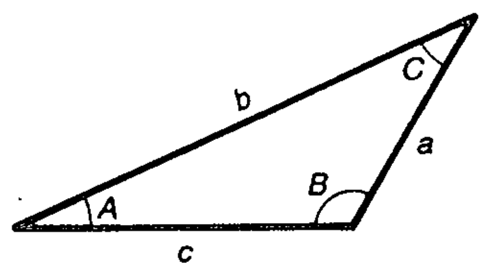
( ) $-\frac{1}{2}$ ( ) 2 ( ) $\frac{1}{2}$

f) El valor de tan 30° es:

( ) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ( ) 3 ( ) $\sqrt{3}$

15. *En lo que sigue, seleccione la opción correcta.*

Considérese la figura:



a) Si: $A = 33°$ $B = 72° 30'$ y $a = 10$

entonces $b =$ ( )

A. 71.511

B. 17.511

C. 51.171

b) Si: $A = 104° 30.3'$ $B = 25°$ y $b = 347.85$

entonces $C =$ ( )

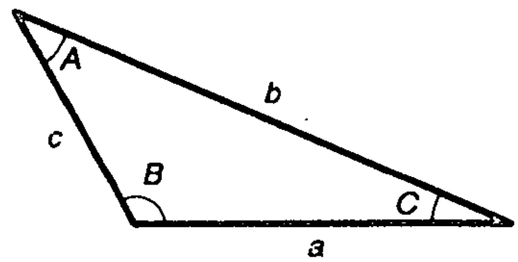
A. 50° 29.7'

B. 29° 50.7'

C. 79° 25.7'

16. *En lo que sigue, seleccione la opción correcta.*

Considérese la figura:



a) Si: $a = 2500$ $b = 3500$ y $c = 4500$

entonces $B =$ ( )

A. 46° 80'

B. 50° 42'

C. 86° 40'

b) Si: $a = 0.0035$ $b = 0.0029$ y $c = 0.0038$

entonces $A =$ ( )

A. 61° 15'

B. 59° 35'

C. 1° 45'

FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA

CURSOS INSTITUCIONALES

DIPLOMADO EN
DISEÑO Y ADAPTACIÓN DE ANTENAS

MOD. I. PROPEDEUTICO
ANTECEDENTES DE GEOMETRÍA ANALÍTICA

DEL 23 AL 28 DE ABRIL DEL 2003

APUNTES GENERALES

CI - 059

Instructores: Ing. Juan Manuel Castillo Miranda
Ing. Joel Gómez
SECRETARÍA DE MARINA
ABRIL DEL 2003

Palacio de Minería   Calle de Tacuba 5   Primer piso   Deleg. Cuauhtémoc 06000   México, D.F.   APDO Postal M-2285
Teléfonos 5512-8955   5512-5121   5521-7335   5521-1987   Fax 5510-0573   5521-4021 AL 25

PRÓLOGO

La **geometría analítica plana** es uno de los antecedentes primordiales para las carreras del área físico-matemática en el nivel de licenciatura. Esta importante rama de las matemáticas es una base esencial para el estudio de otras que, como el cálculo diferencial e integral, constituyen los fundamentos teóricos necesarios para el desarrollo de las diversas disciplinas que se estudian en las carreras de la mencionada área.

El presente material es un compendio de los conceptos básicos de la geometría analítica plana, y puede utilizarse como apoyo didáctico en los cursos de matemáticas que se imparten en los niveles medio superior y superior.

El contenido está estructurado en **unidades temáticas** que a su vez se dividen en partes llamadas módulos. En éstos se dosifican los temas a partir de un orden lógico y didáctico, a fin de lograr una mejor comprensión de los mismos.

Por otra parte, la obra cuenta con **elementos didácticos** que constituyen una metodología de aprendizaje; tienen por objeto facilitar el estudio y permitir un mayor aprovechamiento del contenido. Por lo tanto, se recomienda al lector que, desde el inicio, comprenda su función y los utilice adecuadamente. A continuación se describen dichos elementos.

Al principio de cada unidad aparecen:

- **Objetivo general.** Es una guía para el aprendizaje del contenido; indica la conducta que debe obtenerse al finalizar el estudio de la unidad.

- **Introducción.** Muestra al lector un panorama general del contenido; destaca los temas principales y su importancia.

Los elementos didácticos de que constan los módulos son:

- **Objetivos específicos.** Se derivan del objetivo general de la unidad. Describen y delimitan la conducta específica que debe adquirirse en relación con un tema determinado; precisan las condiciones, el nivel y el criterio de ejecución aceptable como deberá manifestarse dicha conducta.

- **Cuadro sinóptico.** Presenta la síntesis del contenido en forma esquemática.

- **Ejemplos.** Elementos que explican o ilustran las características de un concepto o de un procedimiento; facilitan la comprensión y la generalización del contenido.

- **Ejercicios.** Actividades de aprendizaje, cuyo propósito es la aplicación de los elementos teóricos. Asimismo, permiten comprobar si se ha logrado la conducta indicada en los objetivos específicos.

  Al final se encuentran:

- **Examen de autoevaluación.** Tiene como finalidad que el lector, por sí mismo, pueda valorar objetivamente en qué medida ha alcanzado un dominio aceptable de los conocimientos y habilidades considerados en los objetivos de aprendizaje.

- **Soluciones.** (De los ejercicios y del examen de autoevaluación.) Permiten la verificación de las respuestas.

- **Bibliografía básica.** Proporciona las fuentes de información a las que se puede recurrir para aclarar alguna duda o bien profundizar en ciertos temas.

- **Índice analítico.** Facilita la localización de los conceptos y términos técnicos definidos, y de los nombres propios citados.

Por último, es de justicia agradecer a todas las personas que de alguna manera colaboraron con los autores en la elaboración de este material, muy especialmente a las licenciadas Irma Hinojosa Félix y María Cuairán Ruidíaz quienes realizaron la estructuración didáctica.

RODOLFO SOLÍS UBALDO
ARNULFO ANDRADE DELGADO
FELIPE OREGEL SÁNCHEZ

ÍNDICE DE CONTENIDO

UNIDAD 1.
GEOMETRÍA ANALÍTICA

Objetivo general

Al finalizar el estudio de esta unidad, el alumno:

- *Obtendrá los elementos necesarios para el manejo de representaciones geométricas de un conjunto de puntos en el plano cartesiano, así como el manejo de las ecuaciones que lo definen.*

Introducción

En el contenido de esta unidad están los elementos básicos de la geometría analítica plana. Se presentan desde el principio cartesiano y el sistema de coordenadas rectangulares, hasta los principales conceptos y características de la línea recta y las curvas cónicas.

La geometría analítica plana constituye una herramienta de suma importancia y utilidad en la solución de problemas de la ingeniería.

MÓDULO 1. CONCEPTOS GENERALES

Objetivos específicos

Al terminar el estudio de este módulo, el alumno:

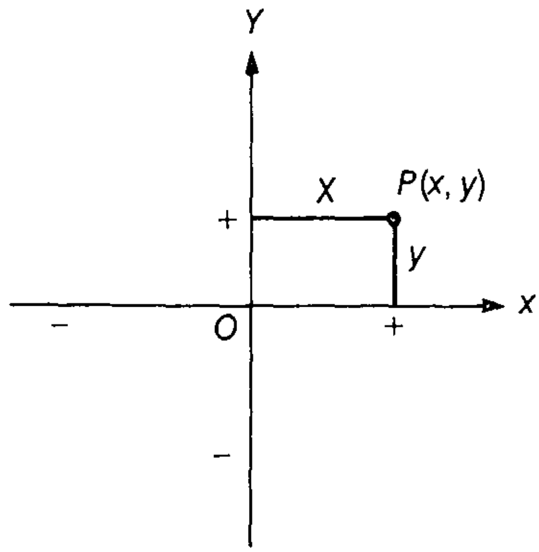
- *Trazará puntos en un sistema rectangular cartesiano a partir de sus coordenadas.*
- *Determinará las coordenadas de un punto, cuando se conoce la localización de éste en el sistema.*
- *Calculará la distancia entre dos puntos de coordenadas conocidas.*
- *Calculará las coordenadas del punto que divide a un segmento dado en una razón dada.*

Cuadro sinóptico

Condición geométrica	**Representación analítica**
Un punto se define en el sistema de coordenadas rectangulares por medio de su localización con respecto a dicho sistema, la cual está dada por una pareja ordenada de números reales.	x, y; $P(x, y)$

Cuadro sinóptico

Continuación

Condición geométrica	Representación analítica
Localización de un punto en el sistema de coordenadas rectangulares mediante sus distancias a los ejes X y Y.	
Distancia (d) entre dos puntos dados $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$.	$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
Un segmento es la porción de recta limitada por dos de sus puntos; P_1 y P_2.	$\overline{P_1P_2}$
Coordenadas del punto $P(x, y)$ que divide al segmento $\overline{P_1P_2}$ en una razón dada $r = \frac{\overline{P_1P}}{\overline{P_1P_2}}$	$x = x_1 + r(x_2 - x_1)$ $y = y_1 + r(y_2 - y_1)$

1.1. Principio cartesiano

> Un sistema coordenado rectangular en el plano establece una correspondencia uno a uno entre cada punto del plano y una pareja ordenada de números reales.

Este principio implica que a cada punto en el plano le corresponde una y sólo una pareja ordenada de números reales y, recíprocamente, a cada pareja ordenada de números reales le corresponde uno y sólo un punto del plano.

1.2. Sistema de coordenadas rectangulares en el plano

Un sistema de coordenadas rectangulares en el plano está constituido por dos rectas perpendiculares que se intersecan en un punto O al que se le llama *origen* . Se acostumbra representar una de las rectas en posición horizontal y se la denomina *eje* X o *eje de las abscisas* ; la otra recta, vertical, se denomina *eje* Y o *eje de las ordenadas*, y ambas constituyen los dos ejes de coordenadas rectangulares, los cuales dividen el plano en cuatro partes llamadas *cuadrantes* (*véase* la figura 1.1).

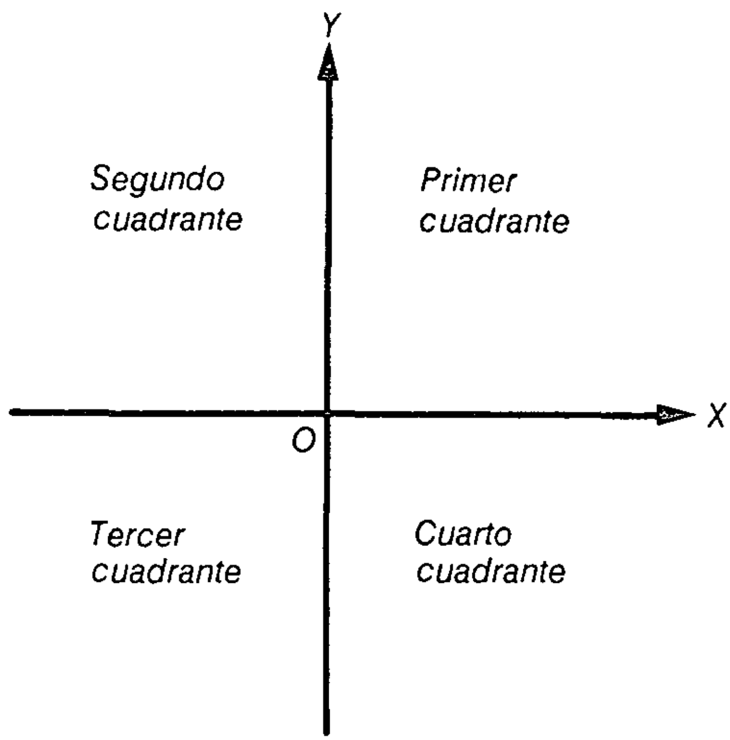


Figura 1.1

Al sistema anterior se le llama también *sistema cartesiano*, en honor del filósofo francés René Descartes (1596-1650), ya que fue él quien planteó formalmente la idea de resolver problemas geométricos por medio del álgebra, a partir de un sistema de coordenadas rectangulares.

La posición de un punto P en el plano queda definida por una pareja ordenada de números reales (x, y) de los cuales el primero (x) representa la distancia del punto al eje coordenado Y, y el segundo (y) representa la distancia del punto al eje X; esto lo expresamos como:

$$\boxed{P(x, y)}$$

La distancia de un punto al eje Y se llama *abscisa* del mismo; la distancia de un punto al eje X es la *ordenada*, y ambas constituyen las *coordenadas* del punto.

Las abscisas son positivas para los puntos situados a la derecha del origen y negativas para los que están situados a la izquierda.

Las ordenadas son positivas cuando los puntos están situados arriba del origen y negativas cuando están situados abajo.

Las abscisas y las ordenadas nulas corresponden a puntos contenidos en el eje Y o en eje X respectivamente.

Para representar puntos de coordenadas conocidas, hay que trazar los ejes coordenados y establecer una escala adecuada sobre cada uno de ellos. Ambas escalas pueden ser iguales o distintas.

Ejemplo 1

Localizar en un sistema de coordenadas rectangulares los siguientes puntos:

$A\ (2, 1), B\ (-2, 3), C\ (-3, -6), D\ (7, -3)$

Solución

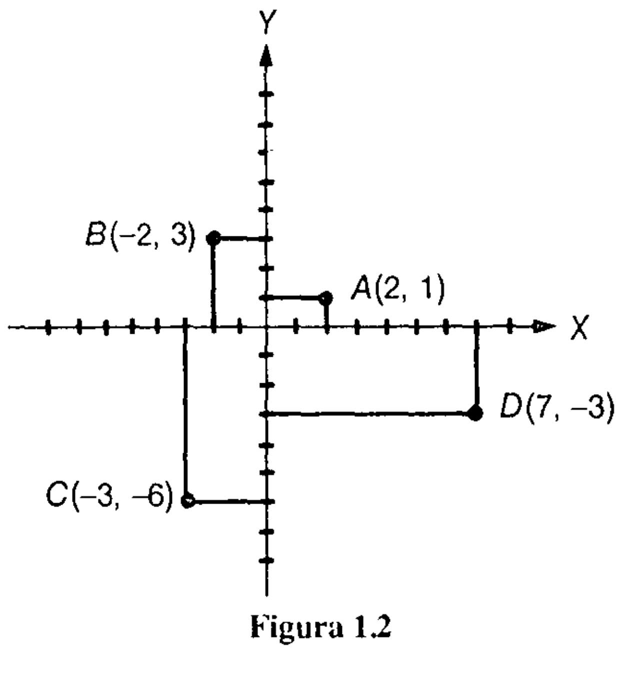


Figura 1.2

1.3. Distancia entre dos puntos

Sean dos puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ (*véase* la figura 1.3).

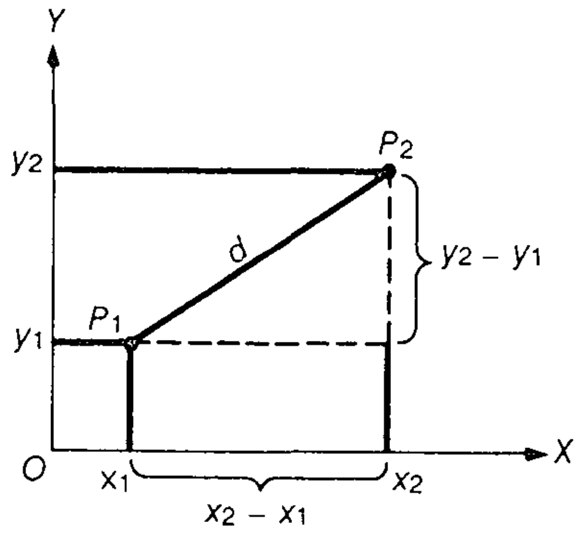


Figura 1.3

La distancia d entre los puntos P_1 y P_2 está dada por:

$$\boxed{d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

Ejemplo 2

Calcular la distancia entre los puntos $P_1(4,-1)$ y $P_2(7,3)$.

Solución

Por la fórmula (1) se sabe que:
$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$; al sustituir se tiene:
$d = \sqrt{(7-4)^2 + (3-(-(1))^2} = \sqrt{(3)^2 + (4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25}$
Así la distancia entre P_1 y P_2 es:

$$d = 5 \text{ unidades}$$

Ejemplo 3

Calcular el perímetro del polígono cuyos vértices son los puntos $P_1(-3,-1)$, $P_2(0,3)$, $P_3(3,4)$ y $P_4(4,1)$.

Solución

Para determinar el perímetro del polígono, se encuentran primero las distancias entre los vértices y posteriormente se efectúa la suma de estas distancias.

$$\overline{P_1P_2} = \sqrt{(0-(-3))^2+(3-(-1))^2} = \sqrt{25} = 5$$
$$\overline{P_2P_3} = \sqrt{(3-0)^2+(4-3)^2} = \sqrt{10} = 3.16$$
$$\overline{P_3P_4} = \sqrt{(4-3)^2+(1-4)^2} = \sqrt{10} = 3.16$$
$$\overline{P_4P_1} = \sqrt{(-3-4)^2+(-1-1)^2} = \sqrt{53} = 7.28$$

Por lo tanto el perímetro es:

$$P=\overline{P_1P_2}+\overline{P_2P_3}+\overline{P_3P_4}+\overline{P_4P_1}$$
$$P = 5 + 3.16 + 3.16 + 7.28$$
$$\text{Perímetro} = 18.6 \text{ unidades}$$

1.4. División de un segmento en una razón dada

Sea un segmento $\overline{P_1P_2}$ limitado por los puntos $\overline{P_1P_2}$ limitado por los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ (*véase* la figura 1.4).

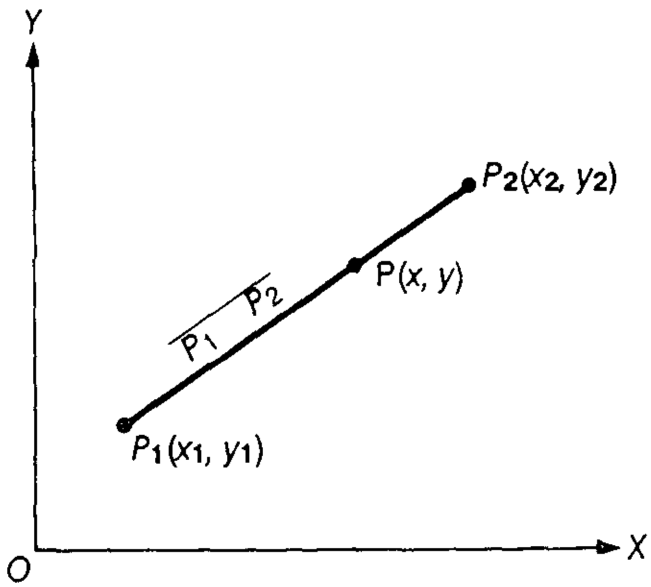


Figura 1.4

Las coordenadas del punto $P(x, y)$ que divide al segmento $\overline{P_1P_2}$ en una razón dada r, tal que:

$$r = \frac{\overline{P_1P}}{\overline{P_1P_2}}$$

están dadas por:

$$\boxed{\begin{array}{l} x = x_1 + r(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + r(y_2 - y_1) \end{array}}$$

En particular las coordenadas del punto medio del segmento $\overline{P_1P_2}$ son:

$$\boxed{\begin{array}{l} x_m = \dfrac{x_1 + x_2}{2} \\ y_m = \dfrac{y_1 + y_2}{2} \end{array}}$$

Ejemplo 4

Sean $P_1(1,1)$ y $P_2(6,6)$ los puntos extremos de un segmento. Determinar las coordenadas del punto $P(x, y)$ que divide al segmento en la razón $r = 2/3$.

Solución

Por las expresiones $x = x_1 + r(x_2 - x_1)$; $y = y_1 + r(y_2 - y_1)$ se tiene:

$$x = 1 + \left(\frac{2}{3}\right)(6 - 1) = 1 + \left(\frac{2}{3}\right)(5) = 1 + \frac{10}{3} = \frac{13}{3}$$

$$y = 1 + \left(\frac{2}{3}\right)(6 - 1) = 1 + \left(\frac{2}{3}\right)(5) = 1 + \frac{10}{3} = \frac{13}{3}$$

$$\therefore P\left(\frac{13}{3}, \frac{13}{3}\right)$$

Ejemplo 5

Uno de los puntos extremos de un segmento es $P_1(7, 8)$ y el punto que lo divide en la razón $r = \dfrac{1}{5}$ es $P(15, 10)$. Determinar las coordenadas del otro extremo.

Solución

De las expresiones conocidas se obtiene:

$$x_2 = \frac{x - x_1}{r} + x_1 \quad \text{y} \quad y_2 = \frac{y - y_1}{r} + y_1$$

$$\therefore x_2 = \frac{15-7}{\frac{1}{5}} + 7 = 47 \quad \text{y} \quad y_2 = \frac{10-8}{\frac{1}{5}} + 8 = 18$$

Ejercicios

Distancia entre dos puntos

1. Demostrar que los puntos $P_1(3, 3)$, $P_2(-3, -3)$ y $P_3(-3\sqrt{3}, 3\sqrt{3})$ son vértices de un triángulo equilátero.
2. Demostrar que los tres puntos siguientes son colineales: $A(-3, -2)$, $B(5, 2)$, $C(9, 4)$

División de un segmento en una razón dada

3. Uno de los extremos de un segmento rectilíneo de longitud 5, es el punto (3, -2). Si la abscisa del otro extremo es 6, hallar su ordenada.
4. Los puntos medios de los lados de un triángulo son:
   (2, 5), (4, 2) y (1, 1)
   Determinar las coordenadas de los tres vértices.

MÓDULO 2. GRÁFICA DE UNA ECUACIÓN Y LUGARES GEOMÉTRICOS

Objetivos específicos

Al terminar el estudio de este módulo, el alumno:
Dada la ecuación de una curva, determinará:

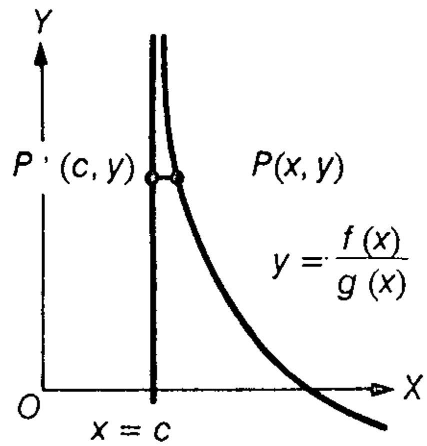
- *Simetría con los ejes coordenados y con el origen del sistema.*
- *Intersecciones con los ejes coordenados.*
- *Extensión de la curva.*
- *Ecuaciones de las asíntotas de la curva.*
- *Puntos de la curva.*
- *Gráfica de la ecuación.*

Cuadro sinóptico

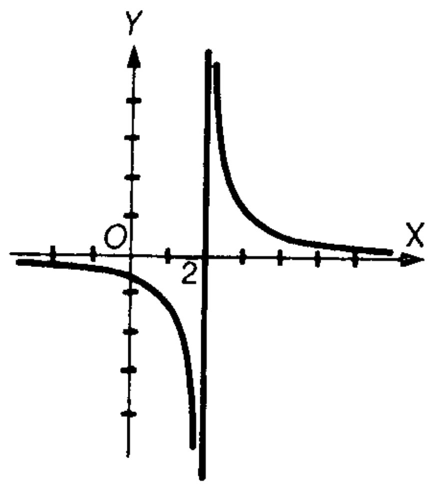
Concepto	Condición geométrica	Representación analítica
• Simetría	° Simetría con el eje X.	$f(x, y) = f(x, -y)$
	° Simetría con el eje Y.	$f(x, y) = f(-x, y)$
	° Simetría con respecto al origen	$f(x, y) = f(-x, -y)$
	° Simetría con respecto a la recta $y = x$.	$f(x, y) = f(y, x)$

Cuadro sinóptico

Continuación

Concepto	Condición geométrica	Representación analítica
• Simetría	° Se obtienen intersecciones con el eje X.	$y = 0$
• Intersecciones	° Se obtienen intersecciones con el eje Y.	$x = 0$
• Extensión	° Se consideran sólo valores reales de x y y para determinar puntos que satisfagan la ecuación.	Ecuación dada $f(x)$
• Asíntotas	° Al tomar un punto de la curva cada vez más alejado del origen, la distancia entre este punto y la asíntota es cada vez menor y tiende a cero.	
• Obtención de algunos puntos que definen la curva	° Se dan valores a una de las variables y se calculan los valores correspondientes de la otra variable.	

y	– 0.2	– 0.33	– 1	– 2	– 5	5	2	1	0.33	0.2
x	– 3	– 1	1	1.5	1.8	2.2	2.5	3	5	7



• Trazado de la gráfica	° Se utiliza la información de los puntos anteriores para trazar la gráfica.	

2.1. Gráfica de una ecuación (primer problema fundamental de la geometría analítica)

En la geometría analítica plana se plantean dos problemas fundamentales:

1. A partir de una ecuación dada, determinar las características de la curva que es la gráfica de la ecuación.
   Las coordenadas de todos los puntos que pertenecen a la curva satisfacen la ecuación; y recíprocamente, cualquier punto cuyas coordenadas satisfacen la ecuación, pertenece a la curva. A ésta se le llama lugar geométrico de la ecuación.
2. Dada una curva que es la gráfica de una ecuación, determinar dicha ecuación.

Para resolver el primer problema fundamental es necesario analizar las siguientes características del lugar geométrico.

2.1.1. Simetría

Si la ecuación de una curva no se altera cuando se reemplaza x por $-x$, esto es, si $f(x, y) = f(-x, y)$, entonces la curva es simétrica con respecto al eje Y. Si la ecuación de una curva no se altera cuando se reemplaza y por $-y$, esto es, si $f(x, y) = f(x, -y)$, entonces la curva es simétrica respecto al eje X. Si al reemplazar x por $-x$ y y por $-y$ en una ecuación, se tiene que $f(x, y) = f(-x, -y)$, entonces la curva es simétrica con respecto al origen.

2.1.2. Intersecciones

El punto o los puntos donde una curva cruza al eje X pueden ser encontrados haciendo $y = 0$ en la ecuación y resolviendo para x. Estos puntos son llamados puntos de intersección. Las intersecciones con el eje Y se obtienen de manera análoga; se hace $x = 0$ en la ecuación y se resuelve para y.

2.1.3. Extensión

El *lugar geométrico* es el conjunto de todos los puntos cuyas coordenadas (x, y) satisfacen la ecuación dada. Por definición, (x, y) es una pareja ordenada de números reales.

Analizar la extensión de una curva consiste precisamente en determinar para qué valores de cada una de las variables, la otra variable toma valores reales, lo cual nos indica los intervalos de valores de x y y para los cuales la curva está definida.

La extensión la podemos determinar despejando cada variable (cuando es posible) en función de la otra y determinando los valores reales de la variable no despejada, que originan valores reales en la variable despejada.

Cuando en una ecuación aparecen potencias pares de una variable, el despejarla puede involucrar raíces cuadradas u otras raíces pares. La extensión de la curva podrá entonces estar restringida por la condición de que números negativos no tienen raíces pares reales.

2.1.4. Asíntotas

Si para una curva existe una recta tal que, al tomar un punto de la curva cada vez más alejado del origen, la distancia entre este punto y la recta es cada vez menor y tiende a cero, dicha recta se llama asíntota de la curva.

Si la ecuación de la curva es del tipo

$$y = \frac{f(x)}{g(x)} \qquad (1)$$

donde $f(x)$ y $g(x)$ son polinomios sin factores comunes, y si $x = c$ es una raíz de la ecuación $g(x) = 0$, entonces la coordenada x de la trayectoria del punto $P(x; y)$ se acerca al valor c, y suceden dos cosas:

1) $y \to \infty$, dado que la distancia $OP \to \infty$, y
2) $(x - c) \to 0$, esto es, la distancia horizontal $P'P$ entre la curva y la línea vertical $x = c$ tiende a cero (*véase* la figura 2.1).

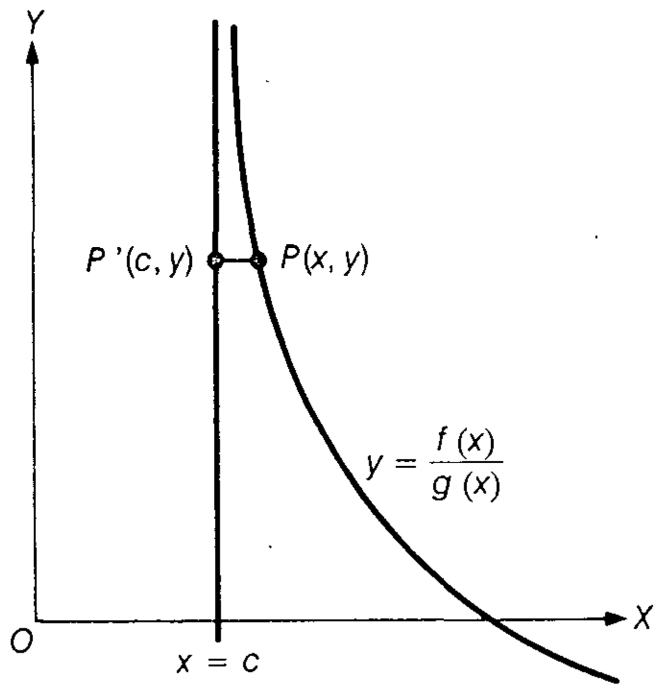


Figura 2.1

En otras palabras, la línea $x = c$ es una asíntota de la curva dada por la ecuación (1), si $x = c$ hace que el denominador $g(x)$ sea nulo. Tales asíntotas son obtenidas o determinadas haciendo la ecuación explícita para y en términos de x; si el resultado es una fracción, se iguala el denominador de la fracción a cero y se determina la solución numérica de x.

En forma similar, despejando x en función de y, el denominador de la expresión resultante muestra los valores de y que hacen al denominador nulo en la expresión

$$x = \frac{f(y)}{g(y)} \tag{2}$$

Esos valores determinarán las asíntotas horizontales de la curva. Una alternativa para determinarlas es hacer que $x \to \pm \infty$ (previendo que la extensión de la curva permita esto) en la ecuación (1) y encontrar los valores límite para y.

2.1.5. Obtención de algunos puntos de la curva

Se pueden obtener algunos puntos de la curva dando valores a una de las variables y calculando los valores correspondientes de la otra; es decir, obteniendo parejas ordenadas de números reales que satisfagan la ecuación de la curva.

2.1.6. Trazado de la gráfica

Con la información obtenida en los apartados anteriores se procede a trazar la gráfica del lugar geométrico correspondiente a la ecuación dada.

Analizar las características del lugar geométrico de una ecuación, como se ha descrito en los apartados 2.1.1 al 2.1.5, se conoce como la *discusión de la ecuación de una curva.*

Ejemplo 1

Hacer la discusión de la siguiente ecuación y trazar su gráfica.

$$y = \frac{1}{x - 2}$$

Solución

Se analizan los puntos anteriormente mencionados para el caso de la ecuación dada:

- Simetría

Respecto al eje Y, se reemplaza x por $-x$:

$$y = \frac{1}{-x-2}$$

Como puede observar, un cambio de signo en x altera la ecuación, por lo que la gráfica no es simétrica respecto al eje Y.

Respecto al eje X se reemplaza y por $-y$:

$$-y = \frac{1}{x-2}$$

Como se observa, un cambio de signo en y altera la ecuación; por lo tanto la gráfica no es simétrica respecto al eje X.

Respecto al origen, se reemplaza x por $-x$ y y por $-y$:

$$-y = \frac{1}{-x-2} \quad \therefore \quad y = \frac{-1}{x+2}$$

Al cambiar el signo a ambas variables la ecuación se altera, por lo que la gráfica no es simétrica respecto al origen.

- Intersecciones

Con el eje X: $y = 0$; $\frac{1}{x-2} = 0$

Obviamente, no existe ningún valor real que satisfaga esta última expresión; por lo tanto no hay intersección con el eje X.

Con el eje Y: $x = 0$; $y = \frac{1}{-2}$

por lo tanto, la curva interseca al eje Y en el punto $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$.

- Extensión

Dado que cualquier valor real de x determina un valor real de y, y todo valor real de y está definido por un valor real de x, a excepción de los valores $x = 2$ y $y = 0$, la curva es abierta y se extiende en ambos sentidos de los ejes coordenados.

- Asíntotas

Se tiene:

$$y = \frac{1}{x-2}$$

Se iguala el denominador a cero y se obtiene la ecuación de la asíntota vertical; esto es:

$$x - 2 = 0; \quad x = 2$$

Para la segunda asíntota, se despeja x en función de y y se iguala a cero el denominador de la expresión resultante.

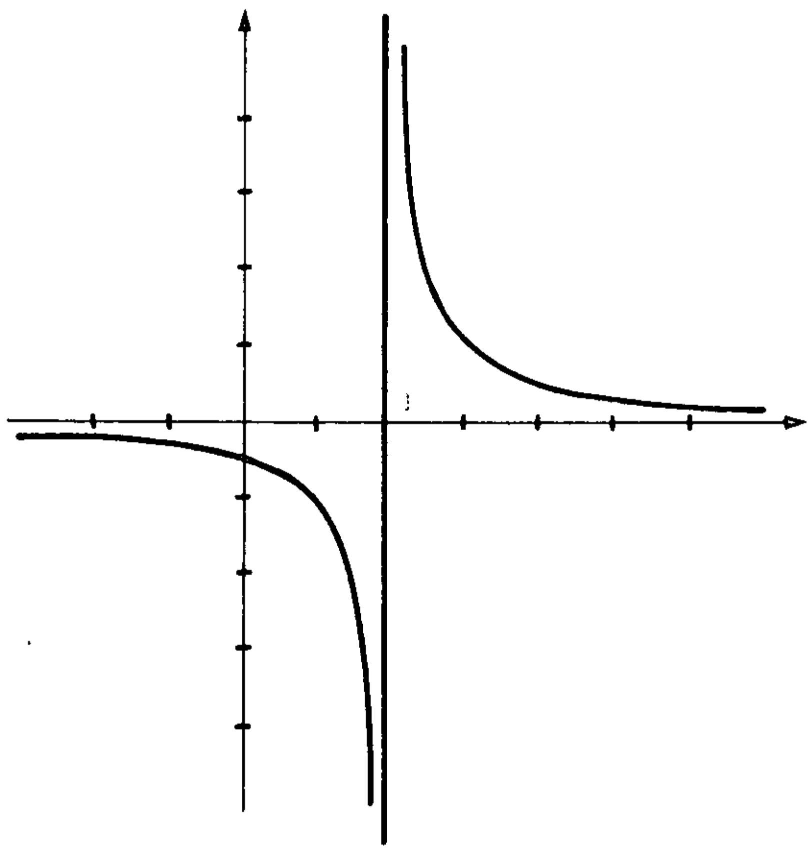
$$(x-2)\ y = 1; \quad x - 2 = \frac{1}{y}; \quad x = \frac{1}{y} - 2$$

por lo tanto, la ecuación de la asíntota horizontal es:

$$y = 0$$

- Obtención de algunos puntos

x	y
–3	–0.2
–1	–0.33
1	–1
1.5	–2
1.8	–5
2.2	5
2.5	2
3	1
5	0.33
7	0.2



Ejemplo 2

Hacer la *discusión* de la ecuación:

$$x^2y - 4y + x = 0$$

Solución

- Simetría

Respecto al eje Y:

$$(-x)^2y - 4y - x = 0$$

$$x^2y - 4y - x = 0$$

Como se observa, un cambio de signo en x altera la ecuación; por lo tanto la gráfica no es simétrica respecto al eje Y.

Respecto al eje X:

$$x^2(-y) - 4(-y) + x = 0 \rightarrow -x^2y + 4y + x = 0$$

Como se observa, un cambio de signo y altera la ecuación; por lo tanto la gráfica no es simétrica respecto al eje X.

Respecto al origen:

$$(-x)^2(-y) - 4(-y) + (-x) = 0 \rightarrow -x^2 + 4y - x = 0$$

$$x^2y - 4y + x = 0$$

Como se observa, se obtuvo la ecuación original; por lo tanto, la curva es simétrica respecto al origen.

- Intersecciones

Con el eje X:

$$y = 0 \rightarrow x^2(0) - 4(0) + x = 0 \rightarrow x = 0$$

Con el eje Y:

$$x = 0 \rightarrow (0)^2y - 4y + (0) = 0 \rightarrow y = 0$$

Por lo que la curva interseca a los ejes coordenados en el origen.

- Extensión

Ninguna de las variables toma valores imaginarios para valores reales de la otra, por lo que la curva es abierta y se extiende a ambos sentidos de los ejes coordenados. La curva no está definida para $x = \pm 2$.

- Asíntotas

Se despeja y para obtener las ecuaciones de las asíntotas verticales:

$$x^2y - 4y + x = 0; \quad y(x^2 - 4) = -x; \quad y = -\frac{x}{x^2 - 4}; \quad y = \frac{x}{4 - x^2}$$

$$y = \frac{x}{(2 - x)(2 + x)} \qquad \begin{array}{ll} 2 - x = 0; & x = 2 \\ 2 + x = 0; & x = -2 \end{array}$$

por lo que la curva tiene dos asíntotas verticales que son:

$$x = -2 \text{ y } x = 2$$

Se despeja x para obtener las ecuaciones de las asíntotas horizontales; resulta una ecuación de segundo grado en x que se resuelve aplicando la fórmula:

$$yx^2 + x - 4y = 0 \rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{(1)^2 - 4(y)\ (-4y)}}{2y}$$

Así se obtiene:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 16y^2}}{2y}$$

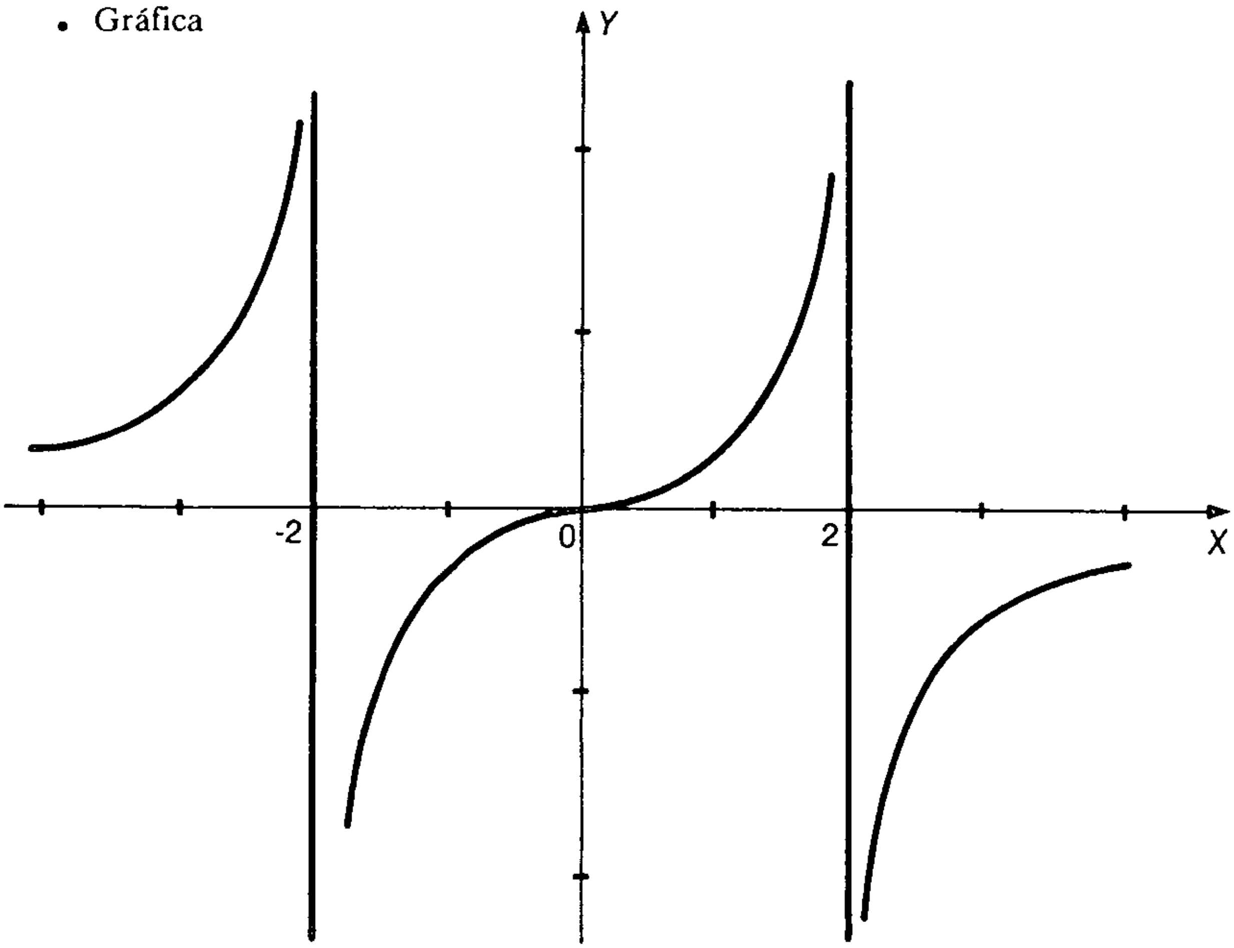
por lo que la ecuación de la asíntota horizontal es:

$$y = 0$$

- Obtención de algunos puntos

x	-3	− 1	1	1.5	1.8	2.2	2.5	3	5	7
y	− 0.2	− 0.33	− 1	− 2	− 5	5	2	1	0.33	0.2

- Gráfica



Ejemplo 3

Hacer la *discusión* de la siguiente ecuación:

$$x^2y - x^2 - y = 0$$

Solución

- Simetría

Respecto al eje Y:

$$(-x)^2y - (-x)^2 - y = 0 \rightarrow x^2y - x^2 - y = 0$$

El cambio de signo en x no altera la ecuación; por lo tanto la curva es simétrica respecto al eje Y.

Respecto al eje X:

$$x^2(-y) - x^2 - (-y) = 0 \rightarrow -x^2y - x^2 + y = 0$$

El cambio de signo en y altera la ecuación; por lo tanto la curva no es simétrica con respecto al eje X.

Respecto al origen :

$$(-x)^2(-y) - (-x)^2 - (-y) = 0 \rightarrow -x^2y - x^2 + y = 0$$

Según lo anterior, no se obtuvo la ecuación original, por tanto la curva no es simétrica respecto al origen.

- Intersecciones

Con el eje X:

$$y = 0 \rightarrow -x^2 0 \rightarrow x = 0$$

Con el eje Y:

$$x = 0 \rightarrow -y = 0 \rightarrow y = 0$$

Por lo que la curva interseca a los ejes coordenados en el origen.

- Extensión

De la ecuación original, se despeja y en función de x :

$$y = \frac{x^2}{x^2 - 1} \qquad (1)$$

y no está definida para $x = \pm 1$

Ahora, se despeja x en función de y:

$$x = \pm \frac{y}{y-1} \tag{2}$$

Como se observa, x no está definida para $y = 1$ y $0 < y < 1$.

De lo anterior se deduce que, a excepción de los valores anteriores, y es real para cualquier valor x y viceversa, por lo que la curva es abierta y se extiende a ambos sentidos de los ejes coordenados.

- Asíntotas

De la ecuación (1), se iguala a cero el denominador y se obtienen las ecuaciones de las asíntotas verticales:

$$x^2 - 1 = 0; \quad (x-1)\,(x+1) = 0 \qquad \therefore \quad x = \pm 1$$

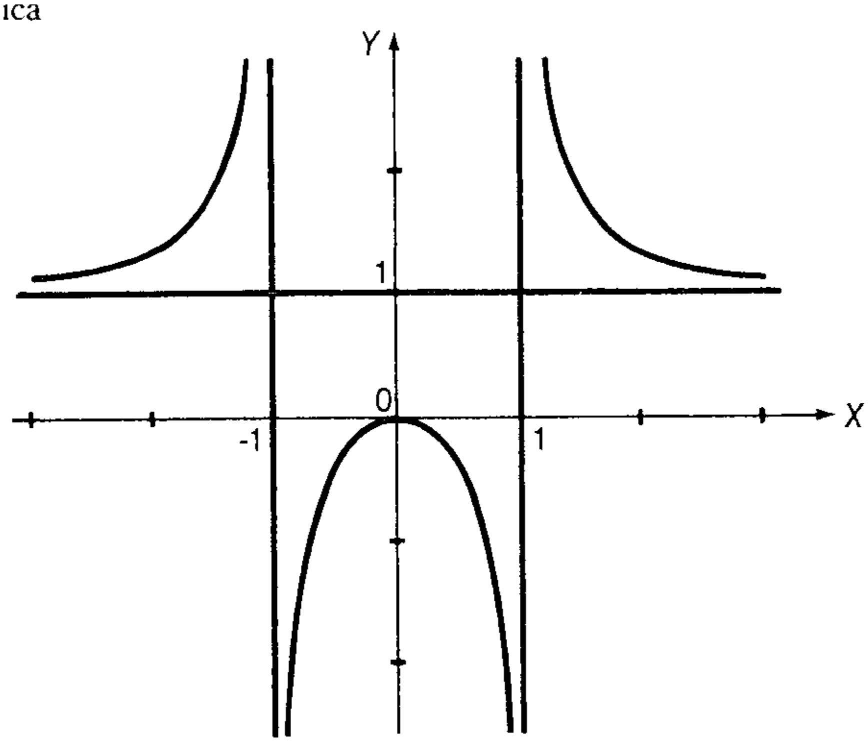
De la ecuación (2), se iguala a cero el denominador y se obtiene la ecuación de la asíntota horizontal:

$$y - 1 = 0 \rightarrow y = 1$$

- Obtención de algunos puntos

x	0	±0.5	±0.75	±1.5	±1.75	±2	±2.25
y	0	–0.33	–1.3	1.8	1.5	1.33	1.25

- Gráfica



Ejercicios

Gráfica de una ecuación y lugares geométricos

1. Para las siguientes ecuaciones, hacer la *discusión* y trazar la gráfica.

a) $x^2 + 2x - y + 3 = 0$
b) $xy - 2y - x = 0$
c) $x^2y + 4y - 8 = 0$
d) $xy^2 - 9x - y - 1 = 0$

MÓDULO 3. LÍNEA RECTA

Objetivos específicos

Al terminar el estudio de este módulo, el alumno:

- *Calculará la pendiente de una recta dada.*
- *Calculará el ángulo de inclinación de una recta dada.*
- *Determinará la ecuación de una recta, dados:*
  - *un punto y su pendiente*
  - *su pendiente y su ordenada al origen*
  - *dos de sus puntos*
- *Calculará la distancia de un punto a una recta, dadas las coordenadas del punto y la ecuación de la recta.*
- *Determinará si dos rectas son paralelas o perpendiculares.*
  Dadas las ecuaciones de dos rectas, calculará el ángulo en*tre ellas.*

Cuadro sinóptico

Condición geométrica	**Representación analítica**
Entre dos puntos cualesquiera P_1 y P_2 la pendiente m es constante.	$m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \text{cte.}$
El ángulo de inclinación de una recta es el ángulo θ que forma la parte positiva del eje X y la recta, medido en sentido contrario a las manecillas del reloj.	$\theta = \text{ang tan } = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ o $\tan\theta = m$

Cuadro sinóptico

Continuación

Condición geométrica	Representación analítica
FORMAS DE LA ECUACIÓN DE LA RECTA Punto – pendiente:	$y - y_1 = m(x - x_1)$
Pendiente – ordenada al origen:	$y = mx + b$
Dos puntos:	$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$
Ecuación general:	$Ax + By + C = 0$
Distancia entre un punto P_1 y una recta $Ax + By + C = 0$:	$d = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$
Condición para que dos rectas sean perpendiculares:	$(m_1)(m_2) = -1$ o $m_1 = -\frac{1}{m_2}$
Condición para que dos rectas sean paralelas:	$m_1 = m_2$
Ángulo α formado por dos rectas dadas con pendientes m_1 y m_2:	$\alpha = \text{ang tan}\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$

3.1. Generalidades

Definición: Se llama línea recta al lugar geométrico de todos los puntos del plano tales que, tomados dos puntos diferentes cualesquiera $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ del lugar, el valor de la pendiente m resulta siempre constante.

En donde:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad x_1 \neq x_2$$

3.2. Ángulo de inclinación de una recta

El ángulo de inclinación de una recta es el ángulo que forma la recta con la parte positiva del eje coordenado X, y se mide desde el eje X a la recta en el sentido contrario al de las manecillas del reloj (*véase* la figura 3.1).

En esta figura, θ representa al ángulo de inclinación de la recta, el cual está dado por la expresión:

$$\boxed{\theta = \text{ang tan}\left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)}$$

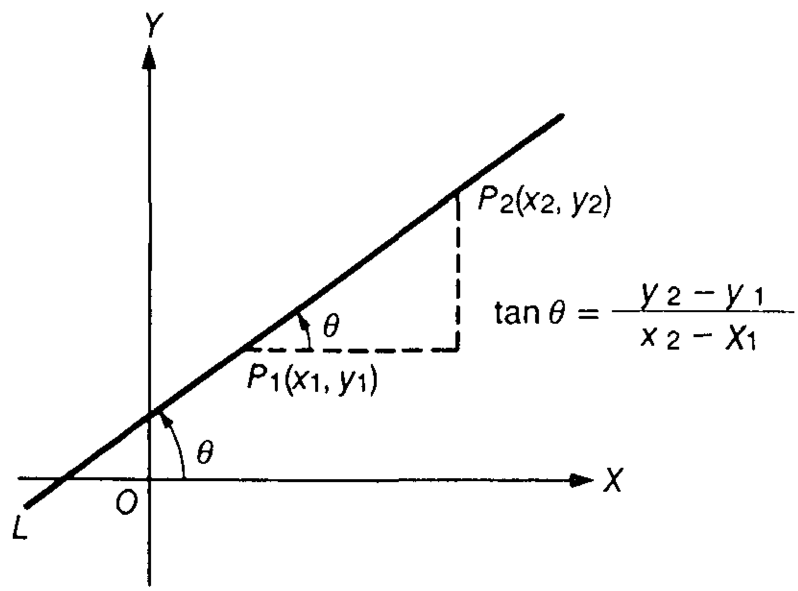


Figura 3.1

de donde:

$$\boxed{\tan\theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

De acuerdo a la definición de línea recta dada anteriormente, tenemos que la pendiente de la recta es igual a:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

es decir:

$$\boxed{m = \tan \theta}$$

La pendiente de una recta es igual a la tangente del ángulo de inclinación.

$$\boxed{m = \tan \theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

Obsérvese que el ángulo de inclinación está restringido para

$$0 \leq \theta \leq 180°$$

Si el ángulo está entre $0 < \theta < 90°$ la pendiente es positiva y si está entre $90° < \theta < 180°$ la pendiente es negativa.

Ejemplo 1

Calcular la pendiente y el ángulo de inclinación de la recta que contiene a los puntos (1,6), (5, -2) (*véase* la figura 3.2).

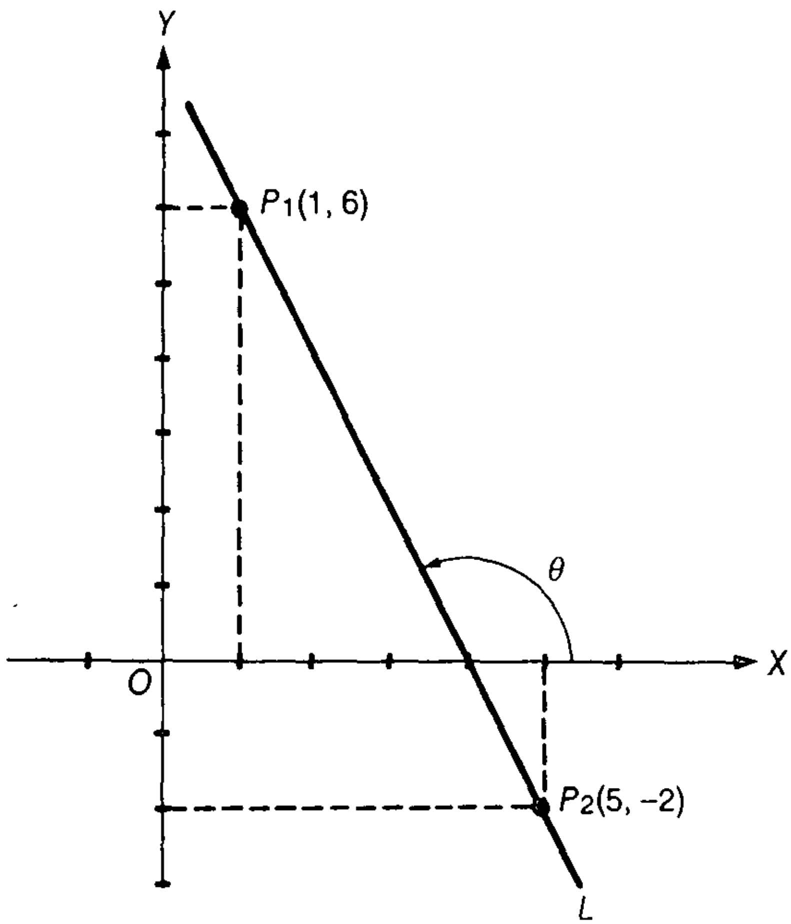


Figura 3.2

Solución

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-2 - 6}{5 - 1} = \frac{-8}{4} = -2$$

$$\theta = \text{ang}\tan(-2) = 116°\,34'$$

Ejemplo 2

Demostrar que los puntos $A(-3, 4)$, $B(3, 2)$ y $C(6, 1)$ son colineales

Solución

$$\textit{Pendiente de } \overline{AB} = \frac{2 - 4}{3 + 3} = -\frac{1}{3}$$

$$\textit{Pendiente de } \overline{AC} = \frac{1 - 4}{6 + 3} = -\frac{1}{3}$$

Como las pendientes de $\overline{AB}$ y de $\overline{AC}$ son las mismas, los tres puntos están situados sobre la misma recta.

Analíticamente, una recta tiene una ecuación lineal o de primer grado en dos variables. Recíprocamente, la representación gráfica del lugar geométrico cuya ecuación sea de primer grado en dos variables es una línea recta.

Una línea recta está completamente definida si se conocen dos de sus características; por ejemplo, dos puntos; un punto y su pendiente, etcétera.

3.3. Ecuación punto-pendiente

La ecuación de la recta que contiene al punto $P_1(x_1, y_1)$ y cuya pendiente es m, es:

$$\boxed{y - y_1 = m(x - x_1)}$$

Ejemplo 3

Determinar la ecuación de la recta cuya pendiente es -2/3 y que contiene al $P(5, 7)$ (*véase* la figura 3.3).

Solución

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

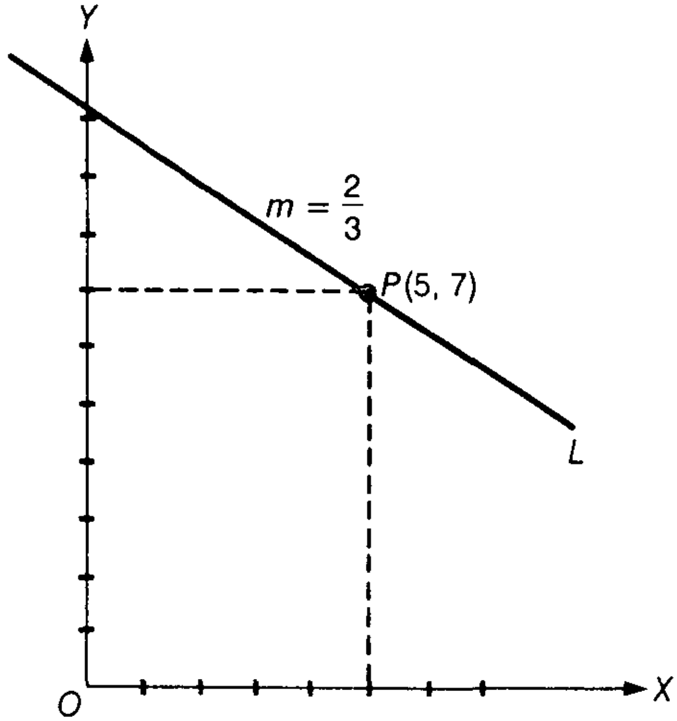


Figura 3.3

Al sustituir valores se tiene:

$$y - 7 = -\frac{2}{3}(x - 5)$$

$$3(y - 7) = -2x + 10$$

$$3y - 21 = -2x + 10$$

$$3y + 2x = 31$$

Por último, se ordena la ecuación:

$$2x + 3y - 31 = 0$$

Ejemplo 4

Determinar la ecuación de la recta que contiene al punto(4,–1) y tiene un ángulo de inclinación de 135° (*véase* la figura 3.4).

Solución

La pendiente de esta recta es $m = \tan 135°$

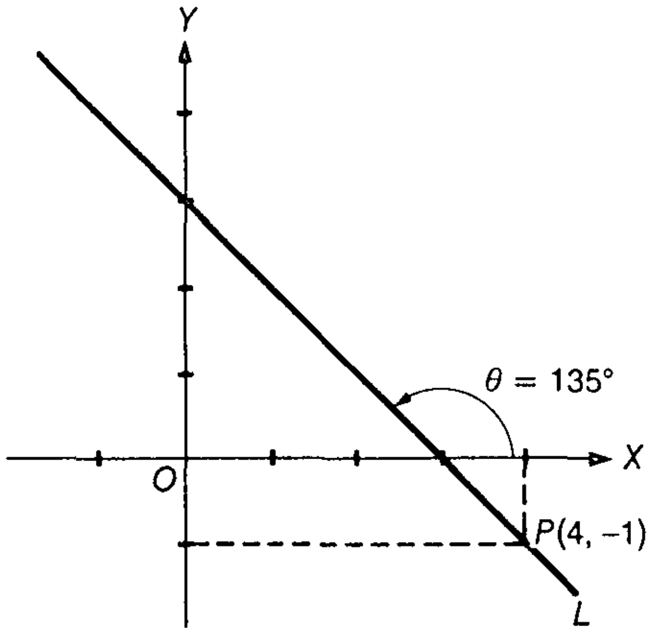


Figura 3.4

$$m = -1$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Se sustituye y se obtiene:

$$y - (-1) = -1(x - 4)$$

$$y + 1 = -x + 4$$

$$\therefore x + y - 3 = 0$$

Ejemplo 5

Determinar la ecuación de la recta que contiene al punto (2, –5/2) y tiene pendiente cero.

Solución

$$(y - y_1) = m(x - x_1)$$

$$y - \left(-\frac{5}{2}\right) = 0\,(x - 2)$$

$$\therefore \quad y + \frac{5}{2} = 0$$

3.4. Ecuación pendiente-ordenada al origen

La ecuación de la recta de pendiente m y que corta al eje coordenado Y en el punto $(0, b)$, siendo b la ordenada al origen, es:

$$\boxed{y = mx + b}$$

Una recta paralela al eje Y no tiene ordenada al origen y su ecuación será de la forma:

$$\boxed{x - k = 0 \quad k = \text{constante}}$$

Ejemplo 6

Determinar la pendiente m y la ordenada al origen (b) de la recta:

$$2y + 3x = 7$$

Solución

Se escribe la ecuación en la forma $y = mx + b$:

$$2y = -3x + 7; \quad y = -\frac{3}{2}x + \frac{7}{2}$$

Luego:

$$m = -\frac{3}{2} \text{ es la pendiente.}$$

$$b = \frac{7}{2} \text{ es la ordenada al origen.}$$

Ejemplo 7

Determinar la ecuación de la recta de pendiente –3 y cuya intersección con el eje Y es $\frac{1}{4}$.

Solución

Intersección con el eje Y = ordenada al origen $= \frac{1}{4}$.

$$y = mx + b; \quad y = -3x + \frac{1}{4}; \quad m = -3$$

3.5. Ecuación de la recta que contiene dos puntos conocidos

La ecuación de la recta que contiene los puntos $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ está dada por:

$$\boxed{y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)} \qquad x_1 \neq x_2$$

Cuando $x_1 = x_2$, la recta es paralela al eje Y, y su ecuación está dada por:

$$\boxed{x = x_1}$$

Ejemplo 8

Determinar la ecuación de la recta que contiene los puntos (–2, –3) y (4, 2).

Solución

Se aplica la forma:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

y se tiene que:

$$(y + 3) = \frac{2 + 3}{4 + 2}(x + 2)$$

Se realizan operaciones:

$$(y + 3) = \frac{5}{6}(x + 2)$$

$$6y + 18 = 5x + 10$$

$$\therefore \quad 5x - 6y - 8 = 0$$

Ejemplo 9

Determinar la ecuación de la recta que contiene al punto (–3, 1) y es paralela a la recta determinada por los puntos (0, –2) y (5, 2) (*véase* la figura 3.5).

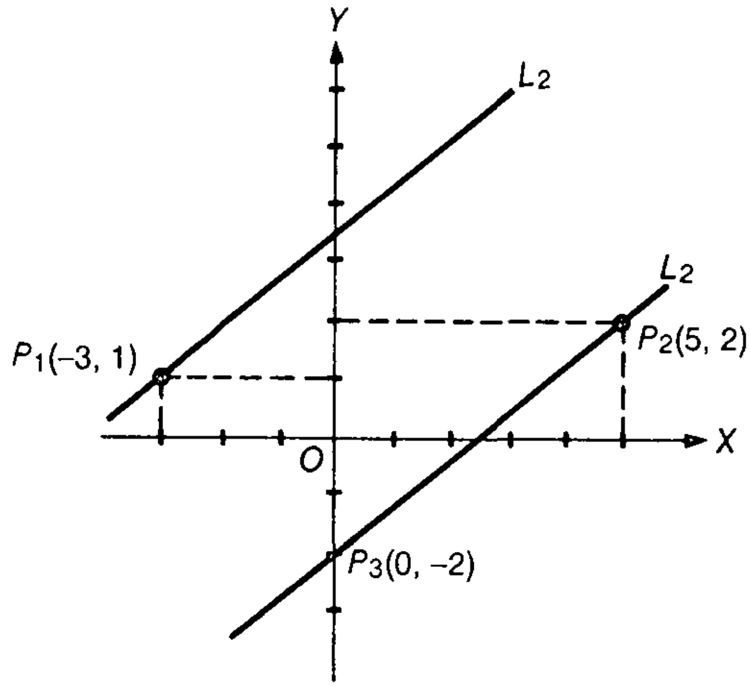


Figura 3.5

Solución

Como se conoce un punto de la recta pedida (L_1), solamente es necesario obtener su pendiente, la cual es la misma que la de la recta paralela (L_2).

La pendiente de L_2 es:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Se sustituye:

$$m = \frac{2 - (-2)}{5 - 0} = \frac{4}{5}$$

Se aplica la expresión:

$$(y - y_1) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$y - 1 = \frac{4}{5}(x + 3)$$

$$5y - 5 = 4x + 12$$

$$\therefore \quad 4x - 5y + 17 = 0$$

3.6. Ecuación general de la recta

Sea una ecuación lineal o de primer grado en x, y, de la forma:

$$\boxed{Ax + By + C = 0}$$

Esta ecuación representa una recta cuando $A \neq 0$ y/o $B \neq 0$. En la cual la pendiente de la recta y su ordenada al origen están dadas respectivamente por:

$$\boxed{m = -\frac{A}{B}} \qquad \boxed{b = -\frac{C}{B}}$$

Si en la ecuación general C = 0, entonces la recta contiene al origen.

Ejemplo 10

Hallar la pendiente m y la ordenada al origen de la recta $2y + 3x = 7$

Solución

Se escribe la ecuación en la forma:

$$Ax + By + C = 0$$

y se obtiene:

$$3x + 2y - 7 = 0$$

La pendiente m es:

$$m = -\frac{A}{B} = -\frac{3}{2}$$

y la ordenada al origen:

$$b = -\frac{C}{B} = -\left(\frac{-7}{2}\right) = \frac{7}{2}$$

$$\therefore \quad b = \frac{7}{2}$$

3.7. Distancia de un punto a una recta

La distancia d del punto $P_1(x_1, y_1)$ a la recta $Ax + By + C = 0$ se obtiene como:

$$\boxed{d = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}}$$

en donde el signo del radical debe ser opuesto al signo de C.

En el caso de que el punto P_1 y el origen estén localizados a uno y otro lado de la recta, la distancia d se considera positiva; si se localizan en un mismo lado, d se considera negativa (*véase* la figura 3.6)

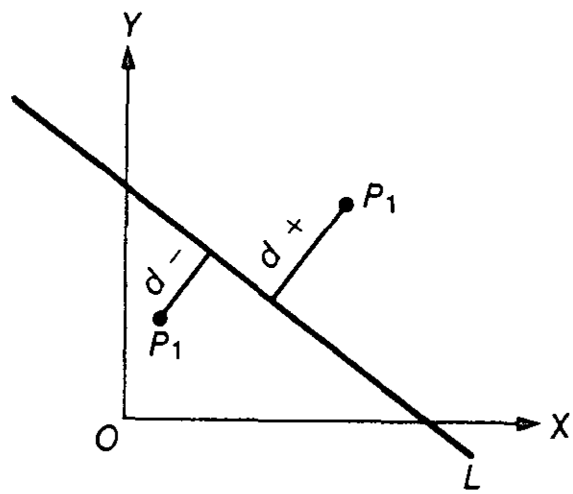


Figura 3.6

Si $C = 0$, entonces se puede escoger arbitrariamente el signo positivo o el negativo en el radical y no considerar interpretación geométrica al signo de la distancia.

Ejemplo 11

a) Calcular la distancia d del punto $P(-2, -3)$ a la recta

$$8x + 15y - 24 = 0$$

Solución

La expresión que nos permite obtener d es:

$$d = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Se sustituyen los valores indicados:

$$A = 8; \quad B = 15; \quad C = -24$$

$$P(x_1, y_1) = P(-2, -3)$$

$$d = \frac{8(-2) + 15(-3) - 24}{+\sqrt{(8)^2 + (15)^2}} = \frac{-85}{17} = -5$$

$$\therefore \; d = -5$$

Como d es negativa, el punto $(-2, -3)$ y el origen están del mismo lado de la recta.

b) Calcular la distancia del punto $P\,(-1, 7)$ a la recta $6x - 8x + 5 = 0$

Solución

$$d = \frac{6(-1) - 8(7) + 5}{-\sqrt{(6)^2 + (-8)^2}} = \frac{-57}{-10} = 5.7$$

$$\therefore \; d = 5.7$$

Como d es positiva, el punto $(-1, 7)$ y el origen están en distintos lados de la recta.

Ejemplo 12

Determinar el valor de k para el cual la distancia d del punto $(2, 3)$ a la recta

$$8x + 15y + k = 0$$

es igual a 5 unidades

Solución

$$d = \frac{8(2) + 15(3) + k}{\pm\sqrt{(8)^2 + (15)^2}} = \pm 5$$

$$= \frac{16 + 45 + k}{\pm 17} = \pm 5$$

$$= \frac{61 + k}{\pm 17} = \pm 5$$

$$\therefore\ k = -(5)(17) - 61$$

$$\therefore k = -146$$

3.8. Rectas paralelas. Rectas perpendiculares

Sean dos rectas L_1 y L_2 cuyas pendientes son m_1 y m_2 respectivamente.

Las rectas L_1 y L_2 son paralelas si y sólo si sus pendientes son iguales; o sea:

$$m_1 = m_2$$

Las rectas L_1 y L_2 son perpendiculares si y sólo si sus pendientes son recíprocas y de signo contrario; es decir:

$$m_1 = -\frac{1}{m_2} \quad \text{o bien} \quad m_1 m_2 = -1$$

Ejemplo 13

Demostrar, aplicando el concepto de pendiente, que los puntos $A(8, 6)$, $B(4, 8)$ y $C(2, 4)$ son los vértices de un triángulo rectángulo.

Solución

$$\text{Pendiente de } \overline{AB} = \frac{8 - 6}{4 - 8} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Pendiente de } \overline{BC} = \frac{4-8}{2-4} = 2$$

Como la pendiente de $\overline{AB}$ es el recíproco con signo contrario de la pendiente de $\overline{BC}$, estos dos lados del triángulo son perpendiculares.

Ejemplo 14

Determinar la ecuación de la recta que contiene al punto (–2, 3) y es perpendicular a la recta $2x - 3y + 6 = 0$.

Solución

Si las rectas son perpendiculares, la pendiente de una de ellas es el recíproco con signo contrario de la pendiente de la otra.

La pendiente de $2x - 3y + 6 = 0$ que está escrita en la forma general $Ax + By + C = 0$ es:

$$m = -\frac{A}{B} = \frac{2}{3}$$

$\therefore$ la pendiente de la recta pedida es $= -\dfrac{3}{2}$

Por otro lado, sea (x, y) otro punto cualquiera de la recta que pasa por (–2, 3) y tiene de pendiente $-\dfrac{3}{2}$

Entonces, se sustituye en la ecuación de la forma:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

y se tiene:

$$y - 3 = \left(-\frac{3}{2}\right)(x + 2); \quad 2(y - 3) = -3(x + 2)$$

$$2y - 6 = -3x - 6; \quad 2y + 3x = 0$$

Al ordenar:

$$3x + 2y = 0$$

3.9. Ángulo entre dos rectas

Sean las rectas L_1 y L_2 con pendientes m_1 y m_2 respectivamente. Sea el ángulo α medido en el sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj, desde la recta L_1 hasta la recta L_2 (*véase* la figura 3.7).

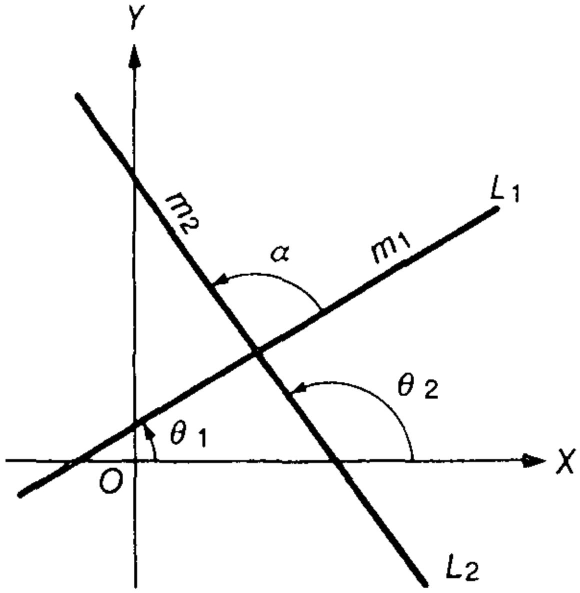


Figura 3.7

El ángulo α está dado por:

$$\boxed{\alpha = \text{ang tan } \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}} \quad \text{o bien} \quad \boxed{\tan \alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}}$$

Ejemplo 15

Si el ángulo formado por las rectas L_1 y L_2 es de 45°, y la pendiente m_1 de L_1 es 2/3, calcular la pendiente m_2 de L_2 (*véase* la figura 3.8)

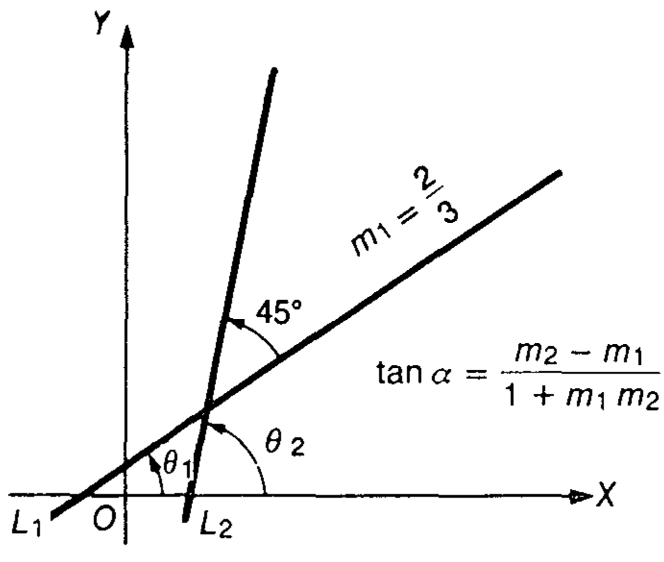


Figura 3.8

Solución

Se sustituye:

$$\tan 45° = 1 = \frac{m_2 - \frac{2}{3}}{1 + \left(\frac{2}{3}\right) m_2}$$

$$1 + \frac{2}{3} m_2 = -\frac{2}{3} + m_2$$

$$\frac{2}{3} m_2 - m_2 = -\frac{2}{3} - 1$$

$$m_2 \left(\frac{2}{3} - 1\right) = -\frac{5}{3}$$

$$m_2 = \frac{-\frac{5}{3}}{-\frac{1}{3}} = 5$$

$$\therefore \quad m_2 = 5$$

Ejemplo 16

Calcular los ángulos interiores del triángulo cuyos vértices son $A(-3, -2)$, $B(2, 5)$ y $C(4, 2)$ (*véase* la figura 3.9).

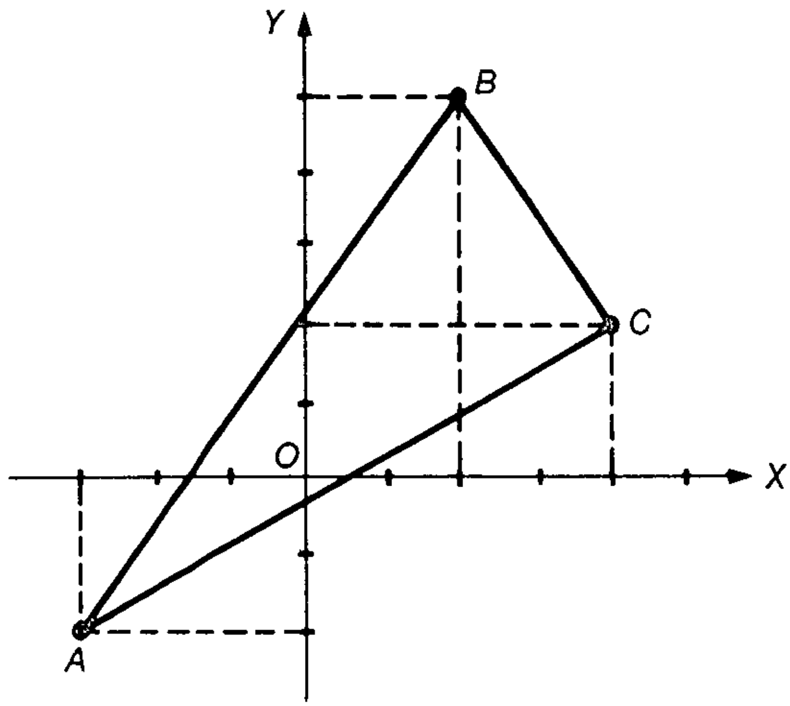


Figura 3.9

Solución

$$m_{AB} = \frac{5+2}{2+3} = \frac{7}{5}$$

$$m_{BC} = \frac{2-5}{4-2} = -\frac{3}{2}$$

$$m_{CA} = \frac{-2-2}{-3-4} = \frac{4}{7}$$

$$\tan A = \frac{m_{AB} - m_{CA}}{1 + m_{AB}\, m_{CA}} = \frac{\frac{7}{5} - \frac{4}{7}}{1 + \frac{7}{5}\left(\frac{4}{7}\right)} = \frac{29}{63}$$

$$A = \text{ang}\tan\frac{29}{63}$$

$$A = 24^\circ\, 43.1'$$

$$\tan B = \frac{m_{BC} - m_{AB}}{1 + m_{BC}\, m_{AB}} = \frac{-\frac{3}{2} - \frac{7}{5}}{1 + \left(-\frac{3}{2}\right)\left(\frac{7}{5}\right)} = \frac{29}{11}$$

$$B = \text{ang}\tan\frac{29}{11}$$

$$B = 69^\circ\, 13.6'$$

$$\tan C = \frac{m_{CA} - m_{BC}}{1 + m_{CA}\, m_{BC}} = \frac{\frac{4}{7} - \left(-\frac{3}{2}\right)}{1 + \left(\frac{4}{7}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)} = \frac{29}{2}$$

$$C = \text{ang}\tan\frac{29}{2}$$

$$C = 86^\circ\, 3.3'$$

Comprobación:

$$A + B + C = 180^\circ$$

$$24^\circ\, 43.1' + 69^\circ\, 13.6' + 86^\circ\, 3.3' = 180^\circ$$

$$180° = 180°$$

Ejemplo 17

Obtener la representación gráfica de las siguientes rectas:

a) $3x - 2y + 2 = 0$

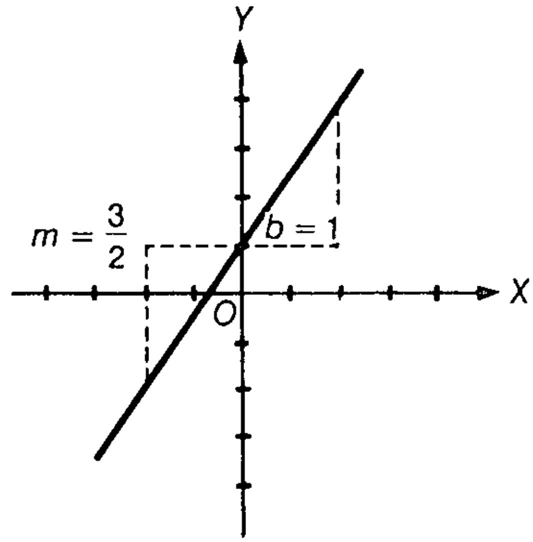
Solución

$2y = 3x + 2$

$y = \frac{3}{2}x + 1$

De donde

$$m = \frac{3}{2}\ ;\ b = 1$$



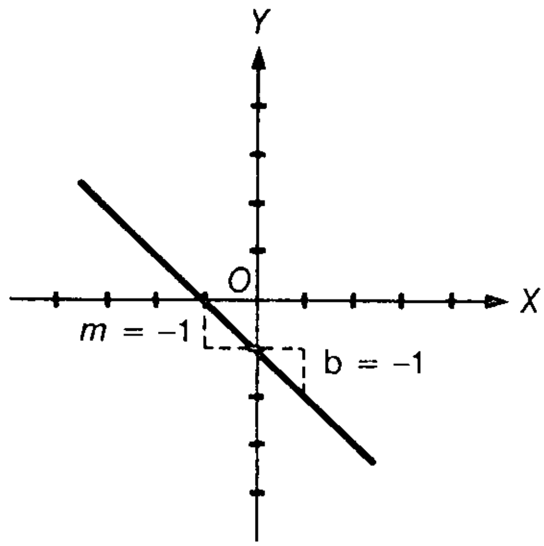
b) $x + y + 1 = 0$

Solución

Ahora se utiliza la ecuación general:

$$m = -\frac{A}{B};\quad m = -\frac{1}{1} = -1$$

$$b = -\frac{C}{B};\quad b = -\frac{1}{1} = -1$$

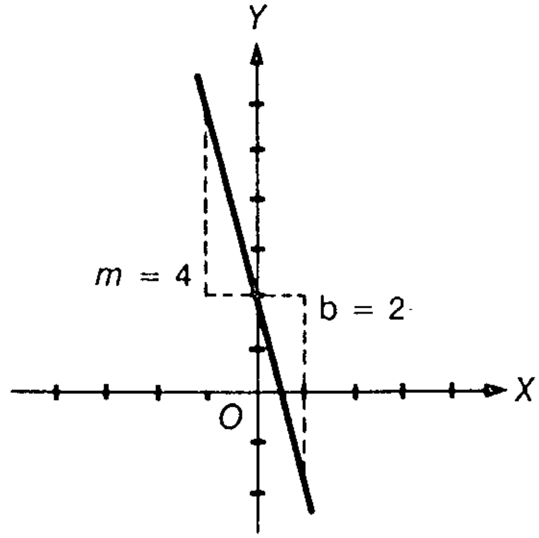


c) $y = 2 - 4x$

Solución

Directamente de la ecuación:

$$m = -4; \quad b = 2$$



d) $\dfrac{x}{3} - 2y = 1;$

Solución

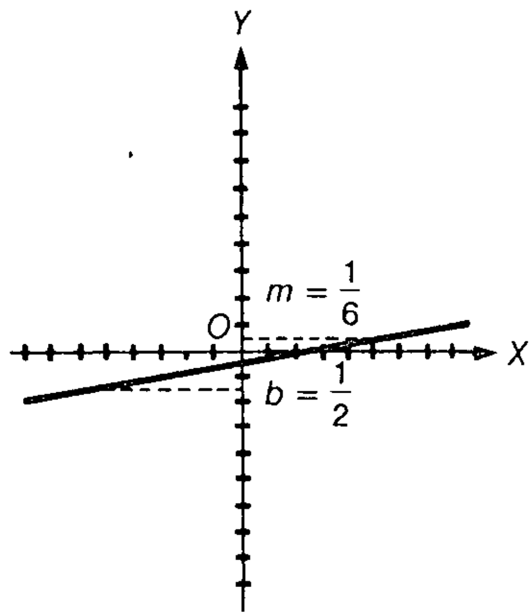
$$x - 6y = 3$$

$$6y = x - 3$$

$$y = \frac{x}{6} - \frac{1}{2}$$

De donde

$$m = \frac{1}{6}\ ; \ b = -\frac{1}{2}$$



Ejercicios

Inclinación y pendiente de una recta

1. Calcular la pendiente m y el ángulo de inclinación θ de las rectas que contienen a los siguientes pares de puntos:
   a) $(-8, -4), (5, 9)$
   b) $(-11, 4), (-11, 10)$
   c) $(8, 6), (14, 6)$

Ecuación punto-pendiente

2. Determinar la ecuación de la recta que contiene al punto $S(1/3, 2/3)$ y tiene una pendiente infinita.

3. Determinar la ecuación de la recta que contiene al punto $A(-6, -3)$ y tiene un ángulo de inclinación de 45°.

Ecuación pendiente-ordenada al origen

4. Determinar las ecuaciones de las rectas que satisfacen las condiciones siguientes:
   a) Pasa por $(0, -1)$, $m = 0$
   b) Pasa por $(0, 3)$, $m = -4/3$

Ecuación de la recta que contiene dos puntos conocidos

5. Los vértices de un cuadrilátero son : $A(0, 0)$, $B(2, 4)$, $C(6, 7)$, $D(8, 0)$. Determinar las ecuaciones de las rectas que contienen a sus lados.

6. Determinar la ecuación de la recta que contiene al punto $R(5, 3)$ y es perpendicular a la recta cuya ecuación es $7x + 9y + 1 = 0$.

Ecuación general de la recta

7. Determinar la ecuación de la mediatriz del segmento determinado por los puntos $(7, 4)$ y $(-1, -2)$.

8. Determinar el valor de k de forma que la recta $4x - ky - 7 = 0$ tenga pendiente 3.

Distancia de un punto a una recta

9. Calcular la distancia del punto $(4, -1)$ a la recta $3x - 4y + 12 = 0$ e interpretar el signo de la distancia.

10. Calcular la distancia del punto $(7, -4)$ a la recta $2x + 3y + 8 = 0$.

Rectas paralelas y perpendiculares

11. Demostrar que los puntos $P_1(9, 2)$, $P_2(11, 6)$, $P_3(3, 5)$, $P_4(1, 1)$ son vértices de un paralelogramo.

Ángulo entre dos rectas

12. Calcular el ángulo agudo del paralelogramo cuyos vértices son: $A\,(-2, 1)$, $B\,(1, 5)$, $C\,(10, 7)$ y $D\,(7, 3)$.
El primer paso en este problema será indicar la dirección positiva del ángulo que se busca, o sea, el ángulo C; entonces el lado BC de pendiente inicial m_1 y el lado CD de pendiente final m_2 forman el ángulo buscado.

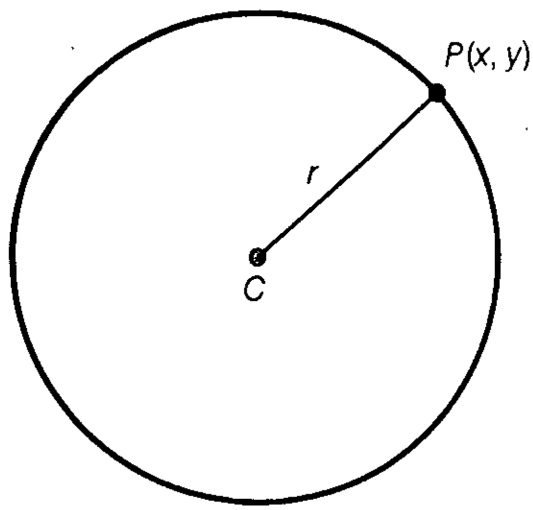
MÓDULO 4. CIRCUNFERENCIA

Objetivos específicos

Al terminar el estudio de este módulo, el alumno:

- *Obtendrá la ecuación de una circunferencia, dados el centro y el radio.*
- *Identificará la ecuación general de la circunferencia, obteniendo de ésta el radio, el centro y su gráfica.*

Cuadro sinóptico

Condición geométrica	Representación analítica
Todos los puntos de una circunferencia equidistan de un punto fijo C (centro).	

Cuadro sinóptico

Continuación

Condición geométrica	Representación analítica
Centro en el origen (0, 0):	$x^2 + y^2 = r^2$
Centro en (h, k):	$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$
Ecuación general:	$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$
Circunferencia real:	si $D^2 + E^2 - 4F > 0$
Un punto:	si $D^2 + E^2 - 4F = 0$
Ningún lugar geométrico:	si $D^2 + E^2 - 4F < 0$

4.1. Generalidades

Definición: Una circunferencia es el lugar geométrico de todos los puntos del plano que equidistan de un punto fijo C llamado *centro*.

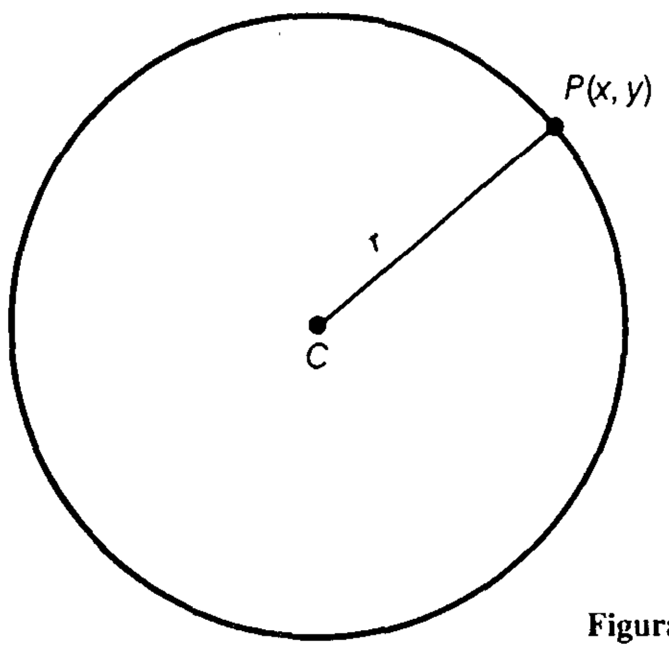


Figura 4.1

La distancia constante r entre el centro C y cualquier punto de la circunferencia se llama *radio* de la circunferencia.

4.2. Ecuación de la circunferencia con centro en el origen

Sea una circunferencia con centro en el origen y radio r. La ecuación de esta circunferencia es:

$$\boxed{x^2 + y^2 = r^2}$$

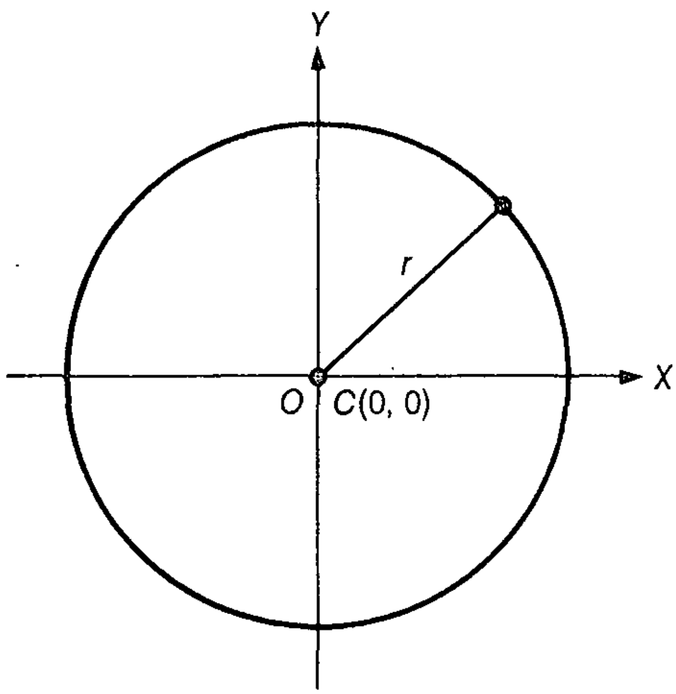


Figura 4.2

Ejemplo 1

Determinar la ecuación de la circunferencia de radio 3 y con centro en el origen.

Solución

La ecuación es de la forma:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Entonces:

$$x^2 + y^2 = 9$$

Ejemplo 2

Determinar la ecuación de la circunferencia con centro en el origen y que contiene el punto (4, 3).

Solución

Las coordenadas del punto deben satisfacer la ecuación de la circunferencia:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Se sustituye:

$$(4)^2 + (3)^2 = r^2$$
$$16 + 9 = r^2$$

De donde:

$$r^2 = 25 \qquad r = 5$$
$$\therefore \quad x^2 + y^2 = 25$$

4.3. Ecuación de la circunferencia con centro no coincidente con el origen

Sea una circunferencia con centro en el punto (h, k) y de radio r, tal que $h \neq 0$ y/o $k \neq 0$. La ecuación de esta circunferencia es:

$$\boxed{(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2}$$

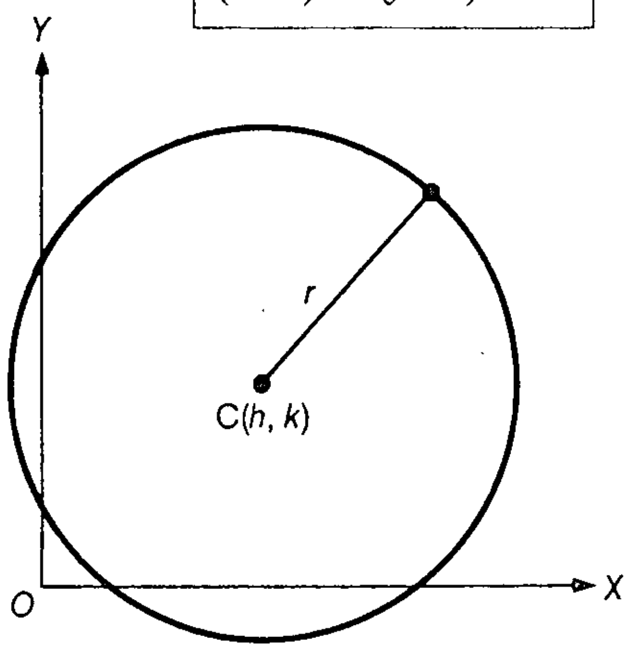


Figura 4.3

Ejemplo 3

Determinar la ecuación de la circunferencia para los siguientes casos:

a) Centro en el punto (0, 3) y radio 1

b) Centro en el punto (–5, –3) y radio 4

c) Centro en el punto (4, 0) y radio 2

Solución

Se sustituyen en cada caso los valores en la ecuación de la circunferencia

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

y se obtiene:

$$a)\; x^2 + (y - 3)^2 = 1$$

$$b)\; (x + 5)^2 + (y + 3)^2 = 16$$

$$c)\; (x - 4)^2 + y^2 = 4$$

Ejemplo 4

Determinar la ecuación de la circunferencia de centro (5, –2) y que contiene el punto (–1, 5).

Solución

Se procede a encontrar el radio de la circunferencia, que es el dato faltante.

El radio es la distancia del centro a un punto cualquiera de la circunferencia.

$$\therefore\; r = \sqrt{(5 + 2)^2 + (-1 - 5)^2} = \sqrt{85}$$

Así, la ecuación de la circunferencia es:

$$(x - 5)^2 + (y + 2)^2 = 85$$

Ejemplo 5

Determinar la ecuación de la circunferencia para la cual uno de sus diámetros es el segmento que une los puntos (5, –1) y (–3, 7).

Solución

El centro de la circunferencia está en el punto medio del segmento que une los puntos dados; por lo tanto las coordenadas del centro son:

$$x_m = \frac{5-3}{2} = 1 \quad y_m = \frac{-1+7}{2} = 3$$

$$\therefore\ C = (1,3)$$

El radio se obtiene como sigue:

$$r^2 = (x-h)^2 + (y-k)^2; \quad r^2 = (5-1)^2 + (-1-3)^2; \quad r^2 = 16 + 16$$

$$r = \sqrt{32}; \quad r = 4\sqrt{2}$$

O también con el otro punto dado:

$$r^2 = (-3-1)^2 + (7-3)^2; \quad r^2 = 16 + 16$$

$$r = 4\sqrt{2}$$

Con los elementos obtenidos, la ecuación de la circunferencia es:

$$(x-1)^2 + (y-3)^2 = 32$$

4.4. Ecuación general de la circunferencia

Sea una ecuación de segundo grado en x, y, del tipo:

$$\boxed{x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0}$$

Sea $N = D^2 + E^2 - 4F$

- Si $N > 0$, la ecuación representa una circunferencia cuyo centro es el punto

$$C\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$$

y radio:

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$$

- Si $N = 0$, la ecuación representa un punto cuyas coordenadas son:

$$\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$$

- Si $N < 0$, la ecuación no representa ningún lugar geométrico.

Ejemplo 6

Dada la ecuación general de la circunferencia

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$$

expresarla en la forma ordinaria

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

y determinar las coordenadas del centro y el radio.

Solución

Se agrupan términos y se completan cuadrados:

$$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 4y + 4) - 4 - 1 - 4 = 0$$

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$$

Por lo tanto, las coordenadas del centro son:

$$C(1, -2)$$

y el radio es:

$$r = 3$$

Se comprueba, aplicando las expresiones que se derivan de la ecuación general para la obtención del centro y el radio.

$$C\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right); \quad C\left(-\frac{-2}{2}, -\frac{4}{2}\right); \quad C(1, -2)$$

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2 + (4)^2 - 4(-4)} = \frac{1}{2}\sqrt{4 + 16 + 16} = \frac{1}{2}\sqrt{36} =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right) 6 = 3$$

$$\therefore \quad r = 3$$

Ejemplo 7

Dadas las siguientes ecuaciones generales de la circunferencia, decir si representan o no una circunferencia, y obtener su centro y su radio, de ser posible.

a) $2x^2 + 2y^2 - 6x + 10y + 8 = 0$

b) $16x^2 + 16y^2 - 64x + 8y + 177 = 0$

Solución

a) $2x^2 + 2y^2 - 6x + 10y + 8 = 0$

Se divide toda la ecuación entre 2:

$$x^2 + y^2 + 3x + 5y + 4 = 0$$

Se puede observar que:

$$D = -3, \quad E = 5\,y \quad F = 4$$

Se analiza el término $D^2 + E^2 - 4F$ para determinar a cuál de los tres casos pertenece:

$$(-3)^2 + (5)^2 - 4(4) = 9 + 25 - 16 = 18 > 0$$

Por lo que la circunferencia es real con centro en el punto:

$$C\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right); \quad C\left(-\frac{-3}{2}, -\frac{5}{2}\right); \quad C\left(\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\right)$$

y radio:

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$$

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{18}$$

$$r = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

b) $16x^2 + 16y^2 - 64x + 8y + 177 = 0$

Se divide toda la ecuación entre 16:

$$x^2 + y^2 - 4x + \frac{y}{2} + \frac{177}{16} = 0$$

En este caso:

$$D = -4;$$

$$E = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad F = \frac{177}{16}$$

Se analiza el término $D^2 + E^2 - 4F$:

$$16 + \frac{1}{4} - 4\left(\frac{177}{16}\right) = 16 + \frac{1}{4} - \frac{177}{4} = \frac{64 + 1 - 177}{4} = 28 < 0$$

Por lo tanto la ecuación no representa ningún lugar geométrico.

Ejemplo 8

Determinar la ecuación de la circunferencia que contiene los puntos (5, 3), (6, 2) y (3, –1).

Solución

La ecuación general de la circunferencia es:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Esta ecuación contiene tres constantes indeterminadas, por lo que serán necesarias tres condiciones para determinarlas. Como la circunferencia debe contener a los tres puntos dados, se pueden hallar los coeficientes sustituyendo las coordenadas de los puntos en lugar de las variables x y y, resolviendo a continuación las tres ecuaciones lineales en D, E y F.

$$25 + 9 + 5D + 3E + F = 0$$

$$36 + 4 + 6D + 2E + F = 0$$

$$9 + 1 + 3D - E + F = 0$$

Se simplifica:

$$5D + 3E + F + 34 = 0$$

$$6D + 2E + F + 40 = 0$$

$$3D - E + F + 10 = 0$$

Se resuelve el sistema y se obtiene:

$$D = -8, \quad E = -2 \quad \text{y} \quad F = 12$$

Por lo que la ecuación general de la circunferencia es:

$$x^2 + y^2 - 8x - 2y + 12 = 0$$

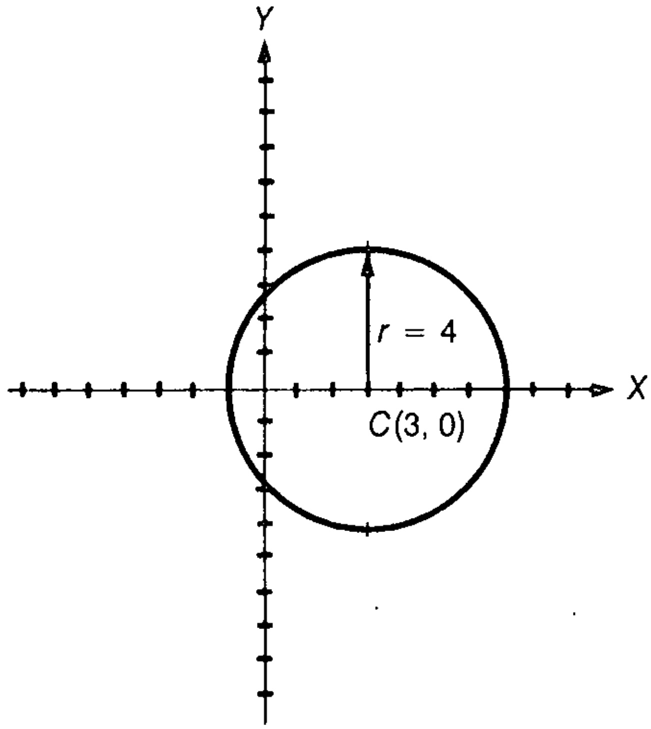
Ejemplo 9

Obtener la representación gráfica de las siguientes circunferencias:

a) $(x-3)^2+y^2=16$

b) $y=\pm\sqrt{25-(x+2)^2}+1$

c) $x^2+y^2-2x+4y-4=0$



Solución

a) Según la ecuación de la circunferencia:

$$C(3, 0) \qquad r=4$$

Por lo tanto su gráfica es como se muestra a la derecha.

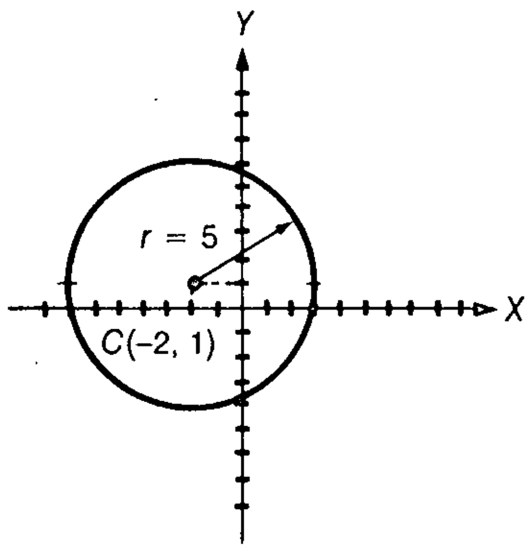
b) $y=\pm\sqrt{25-(x+2)^2}+1$

Nótese que la ecuación dada puede escribirse en la siguiente forma:

$$y-1=\pm\sqrt{25-(x+2)^2}$$

$$(y-1)^2=25-(x+2)^2$$

$$(x+2)^2+(y-1)^2=25$$



Por lo que se deduce que su centro está en $C(-2, 1)$ y su radio es $r=5$.

La gráfica se muestra a la derecha.

c) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$

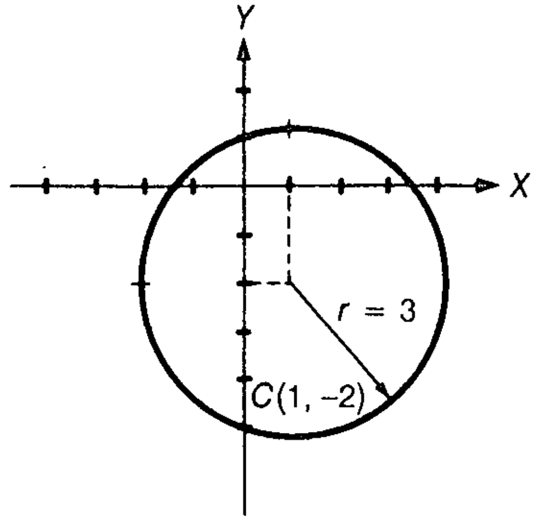
Según la transformación efectuada en el ejemplo 6, se llega a la ecuación:

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$$

De la cual se obtiene:

$$C(1, -2) \quad r = 3$$

La gráfica se muestra a la derecha.



Ejercicios

Ecuación de la circunferencia (centro, radio)

1. Determinar la ecuación de la circunferencia en cada caso:

   a) Centro en (0, 0) y radio 1

   b) Centro en (3, −1) y radio 5

   c) Centro en (0, − 4) y radio 9

   d) Centro en (1, 0) y radio 3

2. Determinar la ecuación de la circunferencia de centro (4, −1) y que contiene el punto (−1, 3).

3. Determinar la ecuación de la circunferencia para la cual uno de sus diámetros es el segmento que une los puntos (−3, 5) y (7, −3).

Ecuación general de la circunferencia

4. Dadas las siguientes ecuaciones, decir si representan o no una circunferencia, y obtener su centro y su radio, de ser posible. Aplicar las fórmulas y comprobar completando cuadrados.

   a) $x^2 + y^2 = 0$

   b) $x^2 + y^2 - 8x + 10y - 12 = 0$

   c) $x^2 + y^2 - 8x - 7y = 0$

   d) $3x^2 + 3y^2 - 4x + 2y + 6 = 0$

5. Determinar la ecuación de la circunferencia que contiene los puntos: (4, 5), (3, −2) y (1, −4).

MÓDULO 5. PARÁBOLA

Objetivos específicos

Al terminar el estudio de este módulo, el alumno:

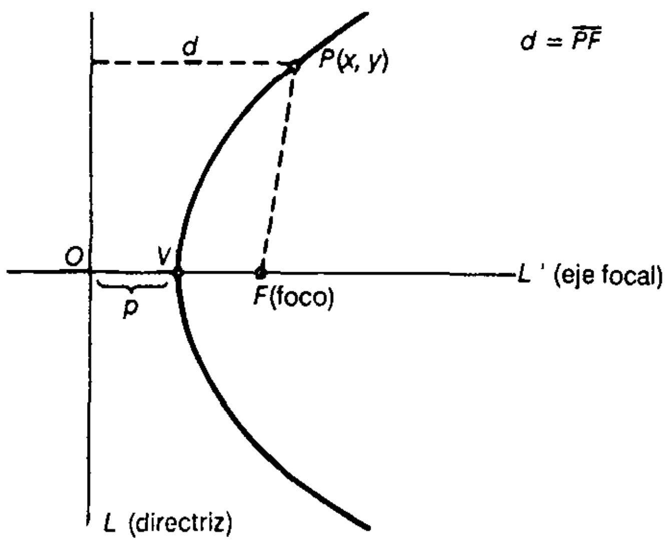
- *Obtendrá la ecuación de una parábola a partir de datos tales como: vértice, foco, directriz y valor del lado recto.*
- *Dada la ecuación de una parábola, obtendrá su gráfica y sus elementos tales como: vértice, foco, valor del lado recto y directriz.*

Cuadro sinóptico

Condición geométrica

- Todos los puntos de una parábola equidistan de un punto fijo F(foco) y una recta fija L (directriz).

Representación analítica



$d = \overline{PF}$

Cuadro sinóptico

Continuación

Condición geométrica		Representación analítica	
• Vértice en el origen (0, 0)	° Eje focal en el eje X	$y^2 = 4px$	¤ $p > 0$ abre hacia la derecha. ¤ $p < 0$ abre hacia la izquierda.
	° *Eje focal en el eje Y*	$x^2 = 4py$	¤ $p > 0$ abre hacia arriba. ¤ $p < 0$ abre hacia abajo.
• Vértice en (h, k)	° Eje focal paralelo al eje X	$(y-k)^2 = 4p\,(x-h)$	¤ $p > 0$ abre hacia la derecha. ¤ $p < 0$ abre hacia la izquierda.
	° *Eje focal paralelo al eje Y*	$(x-h)^2 = 4p\,(y-k)$	¤ $p > 0$ abre hacia arriba. ¤ $p < 0$ abre hacia abajo.
• Longitud del lado recto:		$\lvert 4p \rvert$	
• *Ecuación general*		$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$	
• Representa una parábola cuyo eje es paralelo o coincidente con el eje X:		Si $A = 0,\ C \neq 0,\ D \neq 0$	

Cuadro sinóptico

Continuación

Condición geométrica	Representación analítica
• Representa una parábola cuyo eje es paralelo o coincidente con el eje Y:	Si $A \neq 0,\ C = 0,\ E \neq 0$
• Representa dos rectas o ningún lugar geométrico:	Si $A = 0,\ C \neq 0,\ D \neq 0$ o Si $A \neq 0,\ C = 0,\ E = 0$

5.1. Generalidades

> *Definición*: Una parábola es el lugar geométrico de todos los puntos del plano que equidistan de un punto fijo F llamado *foco* y una recta fija L llamada *directriz*.

El punto F no está contenido en L.

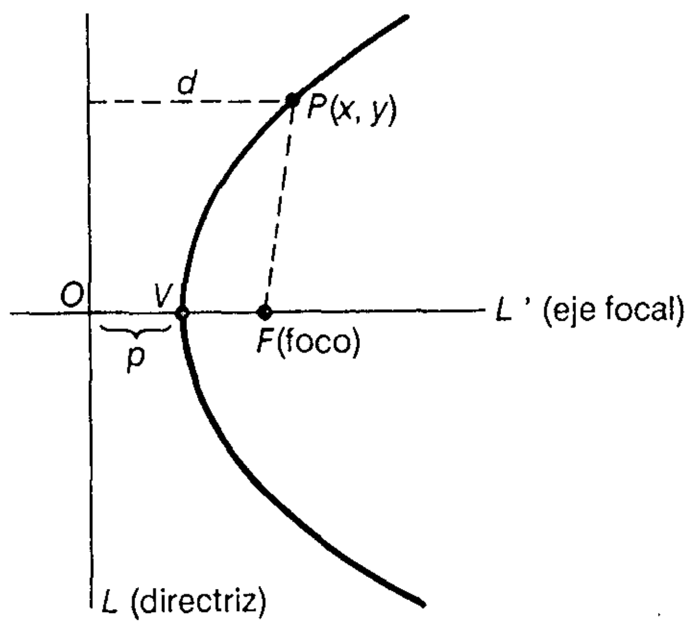


Figura 5.1

La recta L' perpendicular a L y que contiene a F se llama *eje focal* de la parábola.

Si Q es la intersección de L y L' entonces el punto medio V del segmento QF está en la parábola, ya que equidista de L y de F; a este punto V se le llama *vértice* de la parábola (*véase* la figura 5.1).

5.2. Ecuación de la parábola con vértice en el origen y eje focal coincidente con un eje coordenado

Sea p la distancia dirigida $\overline{VF} = \overline{QV}$

Sea una parábola cuyo vértice coincide con el origen y cuyo eje focal coincide con el eje coordenado X. La ecuación de esta parábola es:

$$\boxed{y^2 = 4px}$$

El foco tiene por coordenadas $(p, 0)$ y la directriz L es una recta de ecuación:

$$\boxed{x = -p}$$

p puede ser positiva o negativa, lo cual nos plantea dos casos:
si p es positiva, la parábola se abre hacia la derecha (*véase* la figura 5.2).
si p es negativa, la parábola se abre hacia la izquierda (*véase* la figura 5.3).

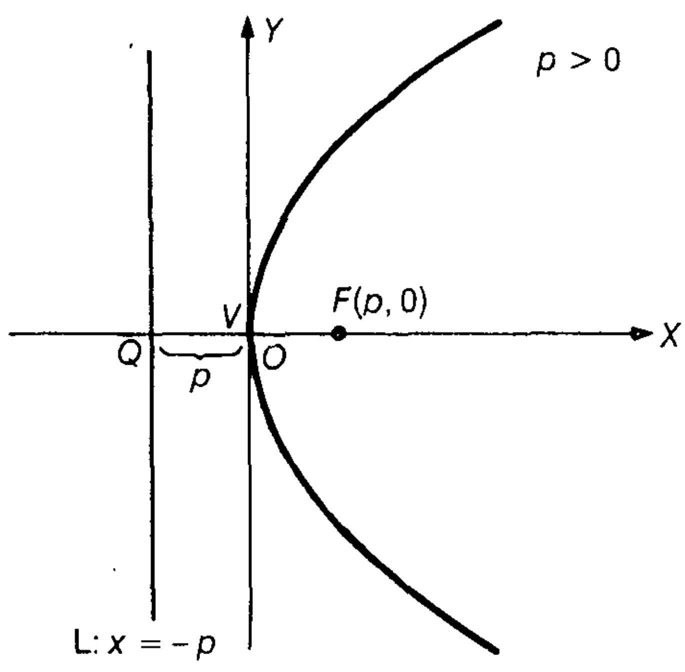


Figura 5.2

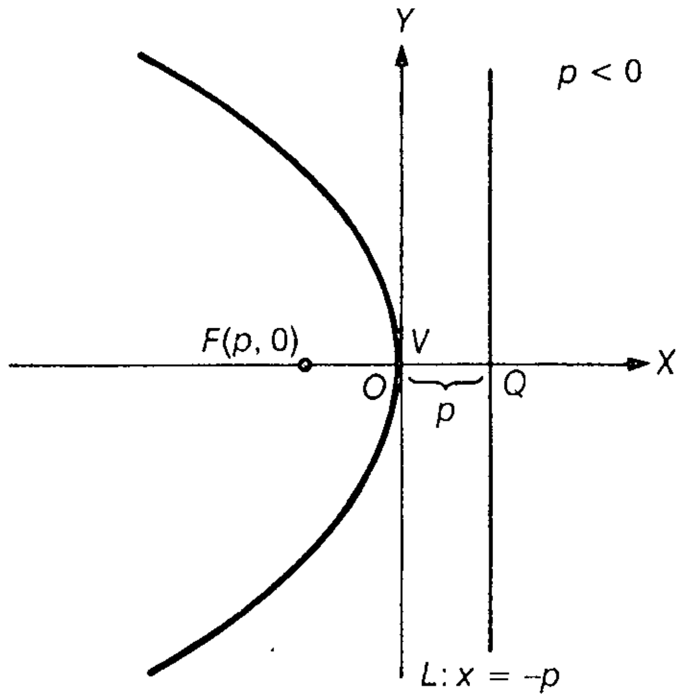


Figura 5.3

Consideremos ahora una parábola con vértice en el origen y eje focal coincidente con el eje Y; su ecuación es:

$$\boxed{x^2 = 4py}$$

El foco tiene por coordenadas $(0, p)$ y la ecuación de la directriz es:

$$\boxed{y = -p}$$

Si p es positiva, la parábola se abre hacia arriba (*véase* la figura 5.4).

Si p es negativa, la parábola se abre hacia abajo (*véase* la figura 5.5).

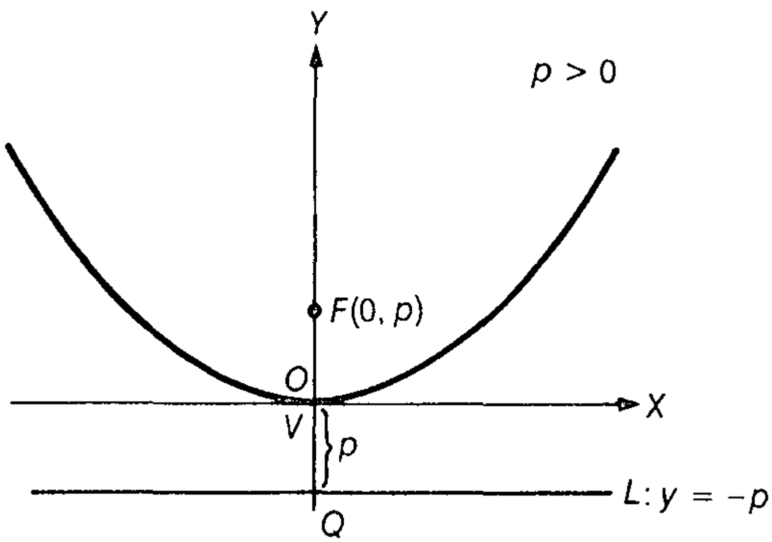


Figura 5.4

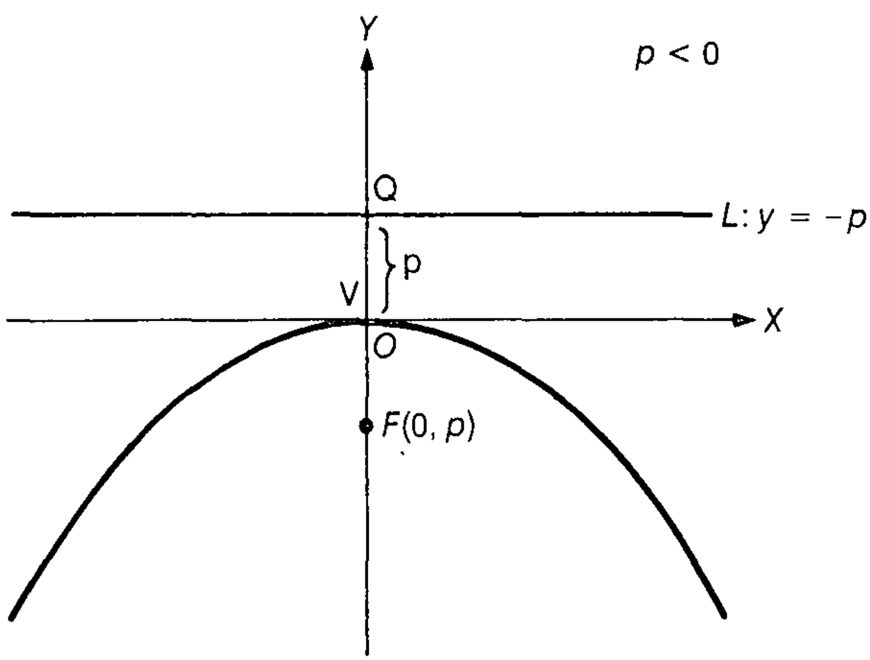


Figura 5.5

5.3. Lado recto de una parábola

Sea la siguiente gráfica de una parábola:

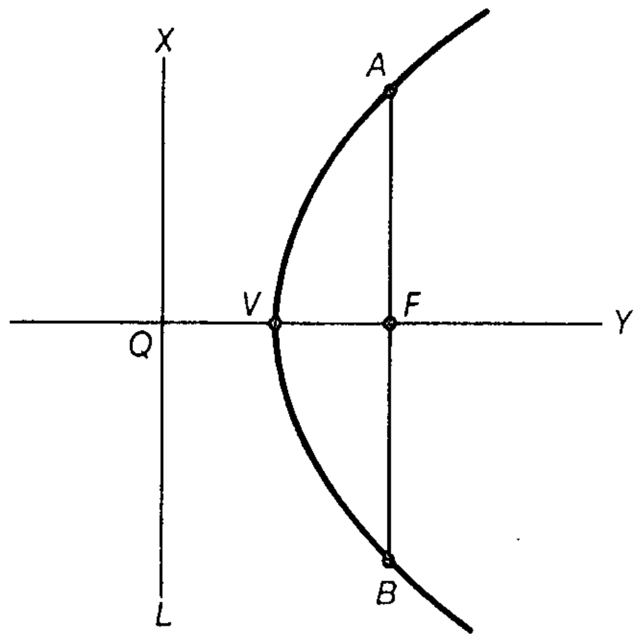


Figura 5.6

En esta gráfica se ha representado el segmento AB que es una cuerda perpendicular al eje focal y que contiene el foco; a esta cuerda se le llama *lado recto* (L. R.) de la parábola.

La principal característica del lado recto de una parábola es que su longitud es igual al valor absoluto de $4p$, esto es:

$$\boxed{\text{L.R.} = |4p|}$$

Ejemplo 1

Sea una parábola cuyo vértice está en el origen, su eje focal coincide con el eje Y, y contiene el punto $(4, -2)$.

a) Determinar la ecuación de la parábola, las coordenadas de su foco, la ecuación de su directriz y la longitud de su lado recto.

b) Trazar la gráfica correspondiente.

Solución

a) La ecuación de la parábola es de la forma:

$$x^2 = 4py$$

Como la parábola contiene el punto (4, –2), las coordenadas de este punto deben satisfacer la ecuación $x^2 = 4py$.

Por lo tanto se tiene:

$$16 = 4p(-2); \qquad \frac{16}{-2} = 4p; \qquad p = -\frac{8}{4}; \quad \therefore \quad p = -2$$

y la ecuación buscada será:

$$x^2 = -8y$$

El foco es el punto $(0, p)$, o $(0, -2)$. La ecuación de la directriz es:

$$y = -p \qquad \text{o sea} \qquad y = 2$$

La longitud del lado recto es:

$$\text{L.R.} = 8$$

b) Con los datos obtenidos procedemos a trazar la gráfica correspondiente (*véase* la figura 5.7).

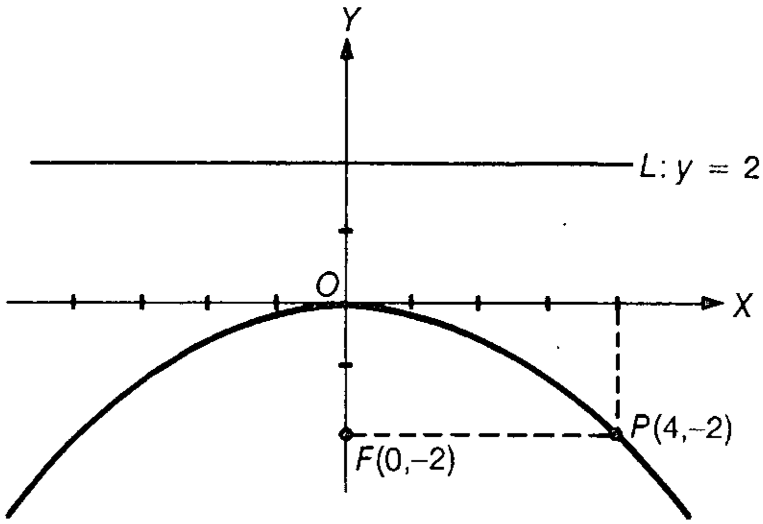


Figura 5.7

Ejemplo 2

Determinar el foco, la ecuación de la directriz y la longitud del lado recto de la parábola $3y^2 = 8x$

Solución

Se sabe que $y^2 = 4px$, de donde se deduce que $y^2 = \frac{8x}{3}$, por lo que:

$$4p = \frac{8}{3} \quad p = \frac{2}{3}$$

El foco es el punto de coordenadas:

$$F\left(\frac{2}{3}, 0\right)$$

La ecuación de la directriz es:

$$x = -\frac{2}{3} \quad \text{ya que} \quad x = -p$$

La longitud del lado recto se calcula así:

$$|4p| = \left|4\frac{2}{3}\right|$$

$$\text{L.R.} = \frac{8}{3}$$

Ejemplo 3

Determinar la ecuación de la parábola cuyo foco es el punto $F\left(0, -\frac{4}{3}\right)$ y directriz la recta $y - \frac{4}{3} = 0$. Calcular además la longitud del lado recto.

Solución

Sea $P(x, y)$ un punto cualquiera de la parábola; de la fórmula para calcular la distancia entre dos puntos, se tiene:

Distancia del foco al punto:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Se sustituye:

$$d = \sqrt{(x - 0)^2 + \left(y + \frac{4}{3}\right)^2}$$

Como esta distancia debe ser igual a la comprendida entre el punto $P(x, y)$ y la directriz de ecuación $y - \frac{4}{3}$, entonces:

$$\sqrt{(x-0)^2+\left(y+\frac{4}{3}\right)^2} = \frac{0x+y-\frac{4}{3}}{0^2+1^2}$$

(*Véase* el apartado 3.7)
De donde:

$$\sqrt{(x-0)^2+\left(y+\frac{4}{3}\right)^2} = y-\frac{4}{3}$$

Se eleva al cuadrado y se simplifica:

$$x^2+y^2+\frac{8y}{3}+\frac{16}{9}=y^2-8\frac{y}{3}+\frac{16}{9}$$

O sea:

$$x^2+\frac{8y}{3}+\frac{8y}{3}=0$$

$$x^2+\frac{16y}{3}=0 \quad \therefore \quad x^2=-\frac{16y}{3}$$

La longitud del lado recto es: $|\,4p\,| = \left|-\frac{16}{3}\right|$

$$\therefore \quad \text{L.R.} = \frac{16}{3}$$

5.4. Ecuación de la parábola con vértice no coincidente con el origen y eje focal paralelo a un eje coordenado

Sea una parábola cuyo vértice tenga por coordenadas (h, k) y eje focal paralelo al eje X, tal que $h \neq 0$ y/o $k \neq 0$. La ecuación de esta parábola es:

$$\boxed{(y-k)^2 = 4p\,(x-h)}$$

El foco tiene por coordenada $(h+p, k)$ y la directriz L es una recta de la ecuación:

$$\boxed{x = h - p}$$

Si p es positiva la parábola se abre a la derecha; si p es negativa la parábola se abre a la izquierda (*véase* la figura 5.8).

Consideremos ahora los casos de una parábola cuyo vértice tiene por coordenadas (h, k) y eje focal paralelo al eje Y, tal que $h \neq 0$ y/o $k \neq 0$.

La ecuación de esta parábola es:

$$\boxed{(x - h)^2 = 4p\,(y - k)}$$

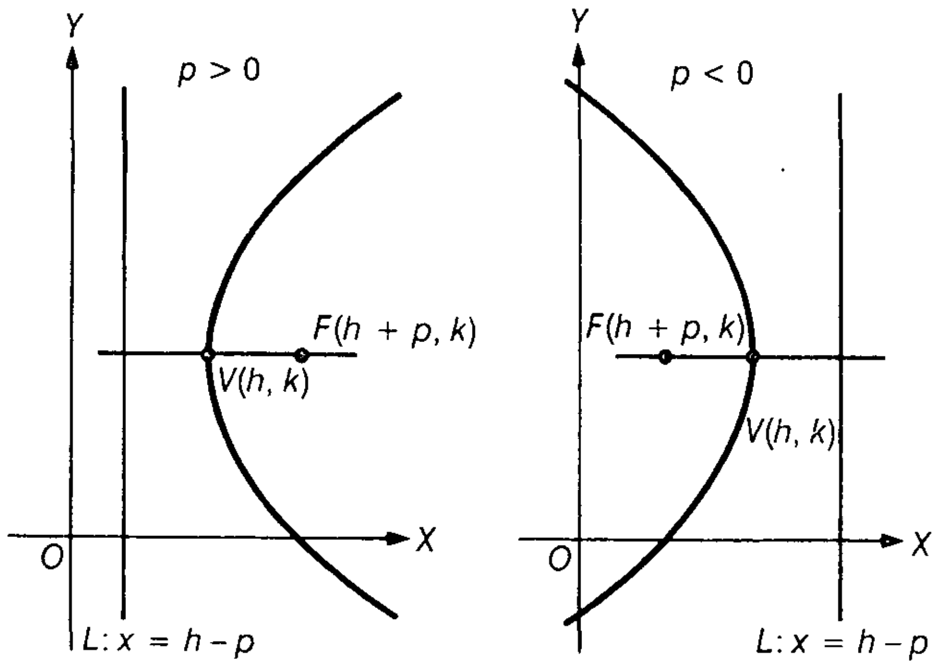


Figura 5.8

El foco tiene por coordenadas $(h,\ k + p)$ y la directriz L es una recta de ecuación:

$$\boxed{y = k - p}$$

Si p es positiva la parábola se abre hacia arriba; si p es negativa la parábola se abre hacia abajo (*véase* la figura 5.9). En estos casos la longitud del lado recto también es igual a $|4p|$.

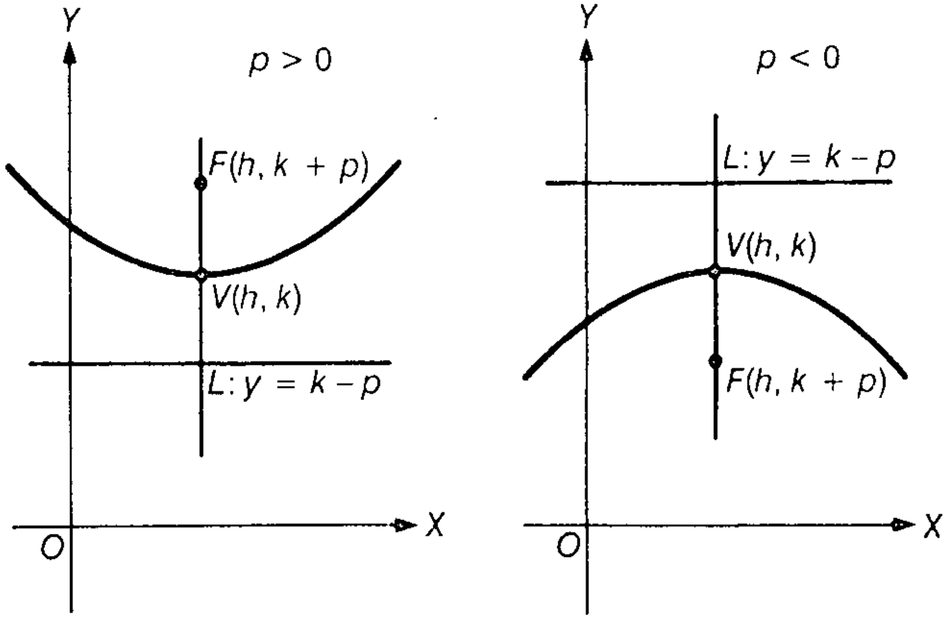


Figura 5.9

Ejemplo 4

Determinar la ecuación de la parábola con vértice $V(3, 4)$ y foco $F(3, 2)$. Determinar también la ecuación de su directriz y la longitud de su lado recto.

Solución

Como el vértice y el foco de una parábola están sobre su eje, y como cada uno de estos puntos, en este caso tiene la misma abscisa 3, se concluye que el eje de la parábola es paralelo al eje Y. Por lo tanto, la ecuación de esta parábola es de la forma:

$$(x - h)^2 = 4p\,(y - k)$$

Se sustituyen los valores de $V(3, 4)$ y se tiene:

$$(x - 3)^2 = 4p\,(y - 4)$$

Ahora bien:

$$|p| = |\overline{FV}|; \quad F = \text{foco}, \quad V = \text{vértice}$$

$$|p| = |4 - 2| = 2$$

Como el foco está abajo del vértice, la parábola se abre hacia abajo y p es negativa:

$$p = -2$$

Así, la ecuación de la parábola es:

$$(x - 3)^2 = -8\,(y - 4)$$

La longitud del lado recto es 8. Como el vértice $V(3, 4)$, es el punto medio del segmento comprendido entre el foco y la directriz, las coordenadas del punto A sobre la directriz (*véase* la figura 5.10) es (3, 6) y por lo tanto la ecuación de la directriz es $y = 6$.

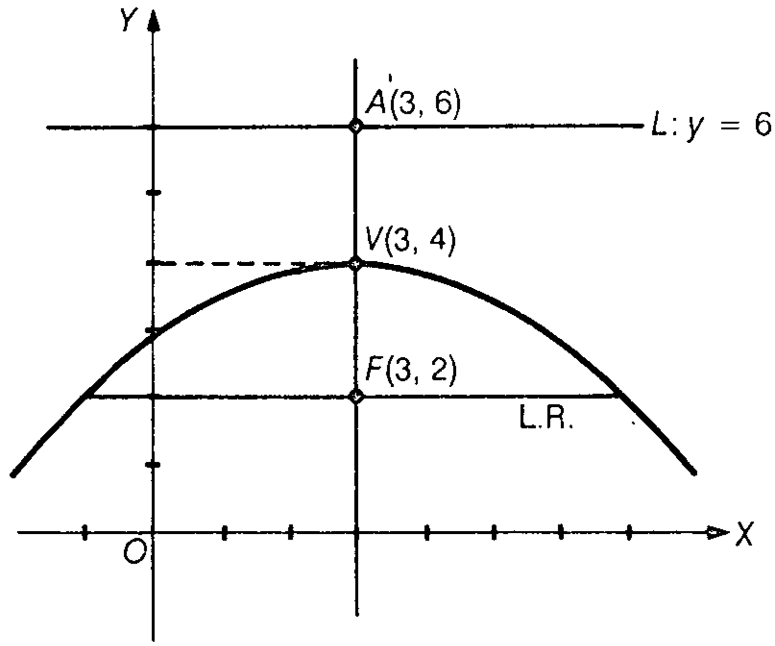


Figura 5.10

Ejemplo 5

Determinar la ecuación de la parábola de vértice $V(3, 2)$ y foco $F(5, 2)$.

Solución

Como el vértice es $V(3, 2)$ y el foco $F(5, 2)$, se tiene que $p = 2$ y la ecuación adquiere la forma:

$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$

o sea

$$(y - 2)^2 = 8(x - 3)$$

Al desarrollar y simplificar:

$$y^2 - 4y - 8y + 28 = 0$$

Ejemplo 6

Hallar la ecuación de la parábola de vértice $V(2, 3)$, de eje paralelo al eje coordenado Y, y que contiene el punto $A(4, 5)$.

Solución

La ecuación que se ha de aplicar es:

$$(x - h)^2 = 4p\,(y - k)$$

es decir:

$$(x - 2)^2 = 4p\,(y - 3)$$

Como el punto $A(4, 5)$ pertenece a la curva, se tiene:

$$(4 - 2)^2 = 4p\,(5 - 3)$$

Al desarrollar y simplificar:

$$4 = 8p$$

$$p = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto la ecuación pedida es:

$$(x - 2)^2 = 2\,(y - 3)$$

o bien:

$$x^2 - 4x - 2y + 10 = 0$$

5.5. Ecuación general de la parábola

Sea una ecuación de segundo grado en x, y, del tipo:

$$\boxed{Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0}$$

Esta ecuación representará una parábola cuando cumpla con las siguientes condiciones:

- Si $A = 0$, $C \neq 0$ y $D \neq 0$, la ecuación representa una parábola cuyo eje es paralelo o coincidente con el eje X.

- Si $A \neq 0$, $C = 0$ y $E \neq 0$, representa una parábola cuyo eje es paralelo o coincidente con el eje Y.
  En los casos anteriores, cuando D o E valen cero respectivamente, la ecuación de segundo grado deberá analizarse de la siguiente manera:

  Sea $M = Cy^2 + Ey + F = 0$

- Si $A = 0$, $C \neq 0$ y $D = 0$, cuando las raíces de M son reales y diferentes, la ecuación representa dos rectas no coincidentes paralelas al eje X; si las raíces de M son reales e iguales, la ecuación representa dos rectas coincidentes paralelas al eje X; si las raíces de M son complejas, la ecuación no corresponde a ningún lugar geométrico.

  Sea $M = Ax^2 + Dx + F = 0$

- Si $A \neq 0$, $C = 0$ y $E = 0$, cuando las raíces de M son reales y diferentes, la ecuación representa dos rectas no coincidentes paralelas al eje Y; si las raíces de M son reales e iguales, la ecuación representa dos rectas coincidentes paralelas al eje Y; si las raíces de M son complejas, la ecuación no corresponde a ningún lugar geométrico.

Ejemplo 7

Demostrar que la ecuación $4x^2 - 20x - 24y + 97 = 0$ representa una parábola. Determinar las coordenadas del vértice y del foco, la ecuación de su directriz y la longitud de su lado recto.

Solución

La ecuación general es:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

En este caso:

$$4x^2 - 20x - 24y + 97 = 0$$

$$A \neq 0, C = 0, E \neq 0$$

Por lo tanto, la ecuación representa una parábola cuyo eje es paralelo al eje Y.

Se reduce la ecuación:

$$4x^2 - 20x - 24y + 97 = 0\,; \quad x^2 - 5x - 6y + \frac{97}{4} = 0$$

Se completan cuadrados:

$$\left(x-\frac{5}{2}\right)^2=6y-\frac{97}{4}+\frac{25}{4}; \qquad \left(x-\frac{5}{2}\right)^2=6y-18$$

y se obtiene:

$$\left(x-\frac{5}{2}\right)^2=6(y-3)$$

En esta ecuación se observa que las coordenadas del vértice son:

$$\left(\frac{5}{2},3\right)$$

Como $4p = 6, p = 3/2$ y la parábola se abre hacia la parte positiva del eje Y, entonces el foco está sobre un eje paralelo al eje Y, por lo que sus coordenadas son:

$$\left(\frac{5}{2},3+\frac{3}{2}\right)$$

o sea:

$$F\left(\frac{5}{2},\frac{9}{2}\right)$$

La ecuación de la directriz es:

$$y=3-\frac{3}{2}$$

o sea:

$$y=\frac{3}{2}$$

La longitud del lado recto es:

$$|4p|=\left|4\left(\frac{3}{2}\right)\right|=6$$

$$\therefore \quad \text{L.R.}=6$$

Ejemplo 8

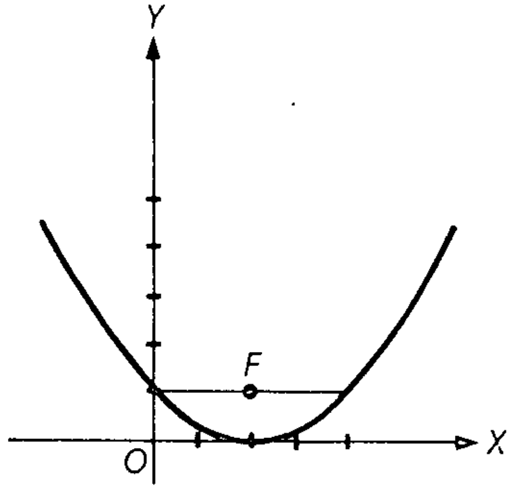
Obtener la representación gráfica de las siguientes parábolas:

a) $y = \frac{1}{4}x^2 - x + 1$

Solución

Multiplíquese la ecuación por 4 :

$4y = x^2 - 4x + 4$; la cual se puede escribir como: $4y = (x-2)^2$ o bien: $(x-2)^2 = 4y$; de lo cual se obtiene: eje focal paralelo al eje Y, $V(2, 0)$, $F(2, 1)$ y longitud del lado recto $= 4$. Como $p > 0$, se abre hacia arriba.



b) $y = -2x^2 + 8x - 4$

Solución

Factorizando -2:

$$y = -2\,(x^2 - 4x + 2)$$

completando un trinomio cuadrado perfecto dentro del paréntesis:

$$y = -2\,(x^2 - 4x + 4 - 2)$$

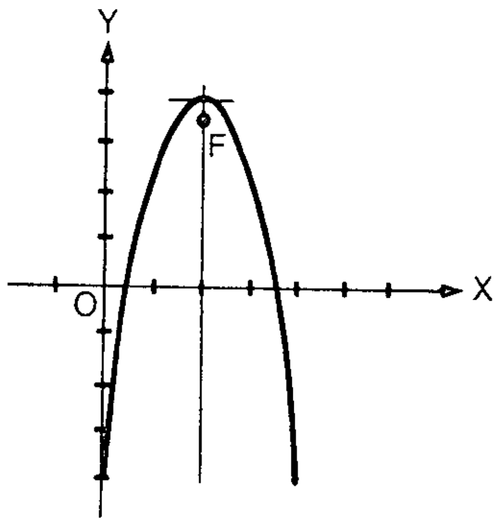
$$y = -2\,(x-2)^2 + 4$$

$$y - 4 = -2\,(x-2)^2$$

$$\text{o bien } (x-2)^2 = -\frac{1}{2}(y-4)$$

por lo que se obtiene: eje focal paralelo al eje Y, $V\,(2, 4)$, $F\,(2, 3.875)$.

Longitud del lado recto $= 1/2$. Como $p < 0$, se abre hacia abajo.



c) $y = \pm\sqrt{8x - 8} - 2$

Solución

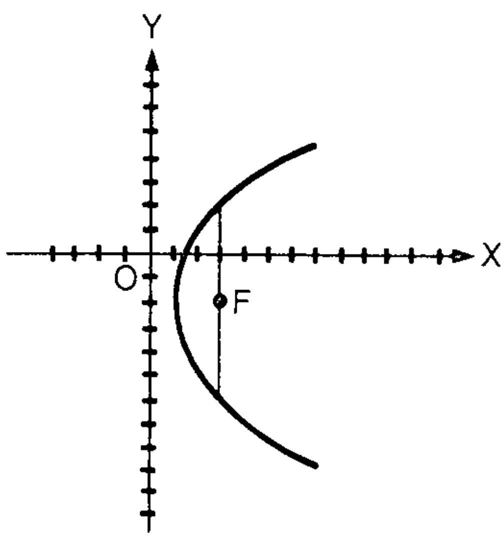
La ecuación dada se puede expresar como:

$y + 2 = \pm\sqrt{8x - 8}$

$(y + 2)^2 = 8(x - 1)$; de donde se obtiene: eje focal paralelo al eje X,

$V(1,-2)$, $F(3,-2)$.

Longitud del lado recto $= |4p| = 8$. Como $p > 0$, se abre hacia la derecha.



Ejercicios

Ecuación de la parábola de vértice en el origen y eje focal sobre un eje coordenado

1. Determinar las coordenadas del foco, la longitud del lado recto y la ecuación de la directriz de las siguientes parábolas:

   a) $y^2 = 6x$

   b) $x^2 = 8y = 0$

2. Determinar la ecuación de la parábola con foco $F(3, 0)$ y directriz $x + 3 = 0$

Ecuación de la parábola con vértice en (h, k) y eje focal paralelo a un eje coordenado

3. Determinar la ecuación de la parábola de vértice $V(-2, 3)$ y foco $F(1, 3)$.

4. Determinar la ecuación de la parábola con foco en el punto $F(-2, -1)$ y cuyo lado recto es el segmento entre los puntos $A(-2, 2)$ y $B(-2, -4)$.

Ecuación general de la parábola

5. Demostrar que la ecuación $y^2 + y - 3x + 1 = 0$ representa una parábola. Determinar las coordenadas del vértice y del foco y la ecuación de la directriz.

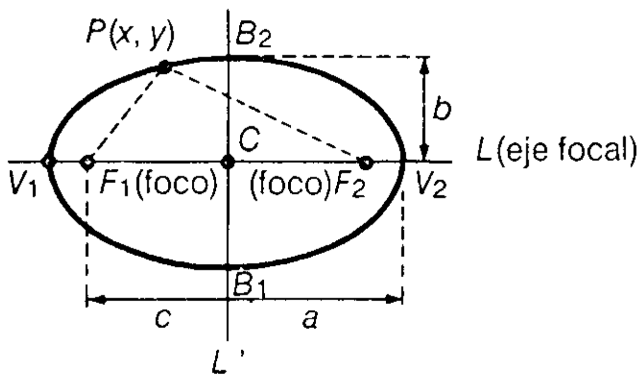
MÓDULO 6. ELIPSE

Objetivos específicos

Al terminar el estudio de este módulo, el alumno:

- *Obtendrá la ecuación de la elipse a partir de datos tales como: focos, centro, eje mayor, eje menor, lado recto.*
- *Dada una ecuación identificará si se trata de una elipse y obtendrá características tales como: focos, centro, eje mayor, eje menor, lado recto y la gráfica respectiva.*

Cuadro sinóptico

Condición geométrica	Representación analítica
• En una elipse, la suma de las distancias de cualesquiera de sus puntos a dos puntos fijos F_1 y F_2 (focos) es constante.	
• Centro en el origen (0, 0)	° Eje focal en el eje X $\qquad \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ ;\ a>b$

Cuadro sinóptico

Continuación

Condición geométrica	Representación analítica	
	° Eje focal en el eje Y	$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1\,;\ a>b$
• Centro en (h, k)	° Eje focal paralelo o coincidente al eje X	$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1;\quad a>b$
	° Eje focal paralelo o coincidente al eje Y	$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1;\quad a>b$
• Longitud del lado recto:		$\frac{2b^2}{a}$
• Longitud del eje mayor:		$2a$
• Longitud del eje menor:		$2b$
• Distancia entre los focos:		$2c;\ c^2=a^2-b^2;\ \ c=\sqrt{a^2-b^2}$
• Ecuación general:		$Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$
• Indicador:		$N=CD^2+AE^2-4ACF$
• Elipse cuyo eje es paralelo al eje X o al eje Y:		$A\neq 0,\ C\neq 0,\ A, C$ del mismo signo y $N>0$
• Un punto:		$N=0$
• Ningún lugar geométrico:		$N<0$

6.1. Generalidades

> *Definición*: Una elipse es el lugar geométrico de todos los puntos del plano tales que la suma de las distancias de cada uno de ellos a dos puntos fijos F_1 y F_2, llamados *focos*, es constante.

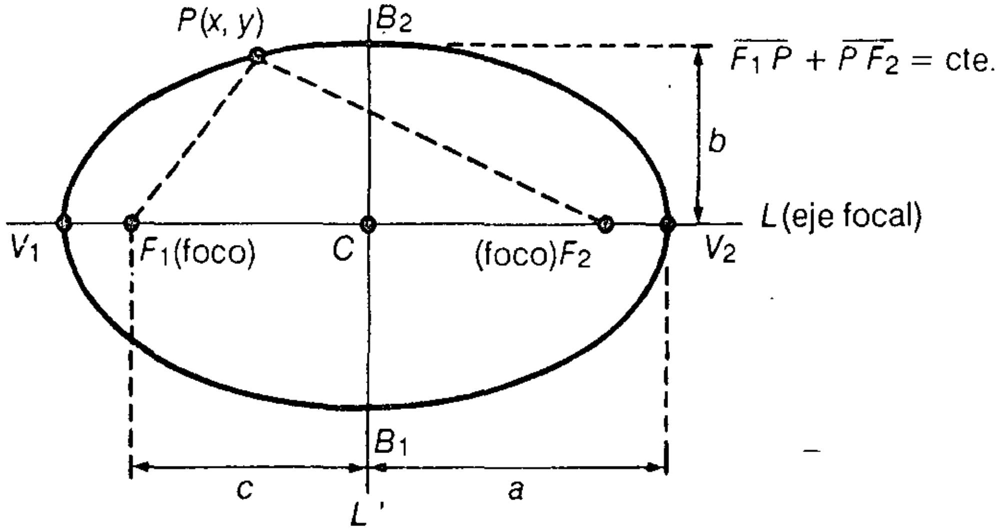


Figura 6.1

La recta L que contiene los focos de la elipse se llama *eje focal*.

Los puntos V_1 y V_2 en los cuales se interseca la elipse con su eje focal se llaman *vértices*.

El punto C está en el eje focal y es el punto medio del segmento $F_1 F_2$; este punto es el *centro* de la elipse.

La recta L' que contiene el centro de la elipse y es perpendicular al eje focal, se llama *eje transversal*.

Al segmento del eje focal comprendido entre los vértices V_1 y V_2 se le llama *eje mayor* y su longitud es igual a $2a$, en donde a es llamada *semieje mayor*.

Al segmento del eje transversal comprendido entre los puntos B_1 y B_2 (intersecciones de la elipse con su eje transversal) se le llama *eje menor* y su longitud es igual a $2b$, en donde b es llamada *semieje menor*.

La distancia c que hay entre el centro de la elipse y cualquiera de sus dos focos se llama *distancia focal* y es igual a:

$$\sqrt{a^2 - b^2}$$

o sea que:

$$\boxed{c = \sqrt{a^2 - b^2}}$$

6.2. Ecuación de la elipse con centro en el origen y eje focal coincidente con un eje coordenado

Sea una elipse con centro en el origen y eje focal coincidente con el eje coordenado X. La ecuación de esta elipse es:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1} \quad a > b$$

Los focos tienen por coordenadas $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$ y los vértices $V_1(-a, 0)$ y $V_2(a, 0)$ (*véase* la figura 6.2).

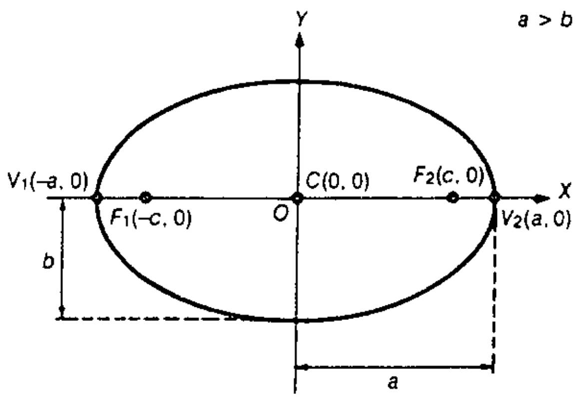


Figura 6.2

Ahora consideremos una elipse con centro en el origen y eje focal coincidente con el eje Y. Su ecuación es:

$$\boxed{\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1} \quad a > b$$

Los focos tienen por coordenadas $F_1(0, -c)$, $F_2(0, c)$ y los vértices $V_1(0, -a)$ y $V_2(0, a)$ (*véase* la figura 6.3).

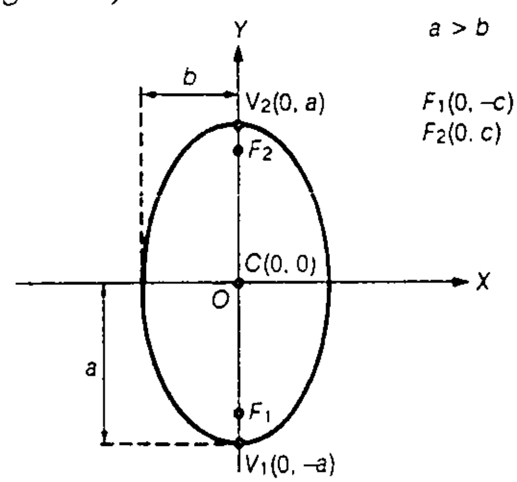


Figura 6.3

6.3. Lado recto de la elipse

Considérese la siguiente gráfica de una elipse.

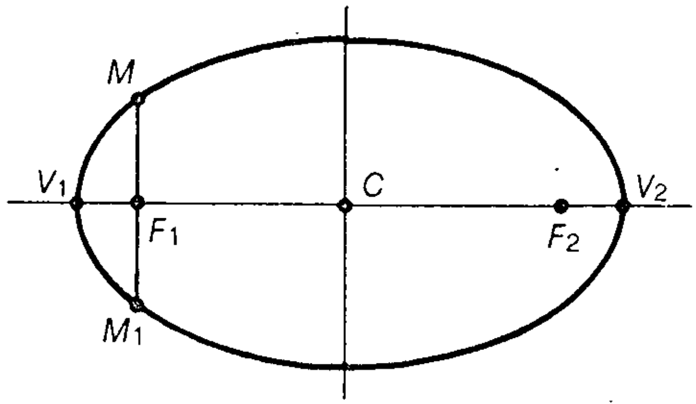


Figura 6.4

En la gráfica se ha representado el segmento MM_1, que es una cuerda perpendicular al eje focal y que contiene un foco de la elipse; a esta cuerda se le llama *lado recto* de la elipse y su longitud es igual a $2b^2/a$ o sea:

$$\boxed{L.R. = \frac{2b^2}{a}}$$

Ejemplo 1

Dada la elipse $9x^2 + 16y^2 = 576$, calcular las longitudes del semieje mayor y semieje menor, las coordenadas de los focos y la longitud del lado recto.

Solución

La ecuación $9x^2 + 16y^2 = 576$ también se puede escribir como:

$$\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} = 1$$

Por lo tanto:

$$\text{Semieje mayor } a = 8$$

$$\text{Semieje menor } b = 6$$

Como $c = \sqrt{a^2 - b^2} = 2\sqrt{7}$ y el eje focal está en el eje X, las coordenadas de los focos son:

$$F_1(-2\sqrt{7}, 0) \quad \text{y} \quad F_2(2\sqrt{7}, 0)$$

La longitud del lado recto es:

$$L.R. = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(6)^2}{8} = \frac{72}{8} = 9$$

$$\therefore \quad L.R. = 9$$

Ejemplo 2

Determinar la ecuación de la elipse con centro en el origen, uno de sus focos el punto (0, 3) y semieje mayor igual a 5.

Solución

Datos:

$$a = 5 \quad c = 3$$

Ahora bien:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} \qquad b = \sqrt{a^2 - c^2}$$

Por lo tanto:

$$b = \sqrt{25 - 9} = 4 \quad b = 4$$

Como el eje focal se encuentra en el eje Y, la ecuación de la elipse es:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$$

6.4. Ecuación de la elipse con centro no coincidente con el origen y eje focal paralelo a un eje coordenado

Sea una elipse cuyo centro tiene por coordenadas (h, k) y eje focal paralelo al eje coordenado X, tal que $h \neq 0$ y/o $k \neq 0$. La ecuación de esta elipse es:

$$\boxed{\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \qquad a > b}$$

Los focos tienen por coordenadas $F_1(h - c, k)$, $F_2(h + c, k)$ y los vértices $V_1(h - a, k)$ y $V_2(h + a, k)$ (*véase* la figura 6.5).

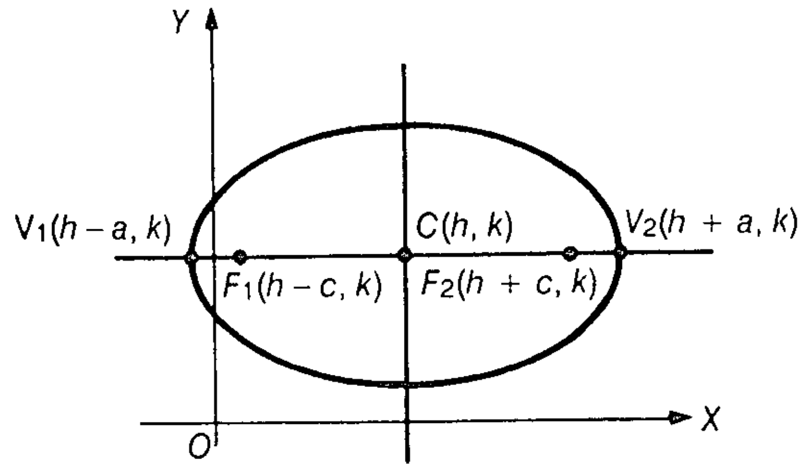


Figura 6.5

Si consideramos que la elipse tiene su centro con coordenadas (h, k) y que su eje focal es paralelo al eje coordenado Y, su ecuación es:

$$\boxed{\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1} \quad a>b$$

Los focos tienen por coordenadas $F_1(h, k-c)$, $F_2(h, k+c)$ y los vértices $V_1(h, k-a)$ y $V_2(h, k+a)$ (*véase* la figura 6.6).

En estos casos la longitud del lado recto es también igual a $2b^2/a$

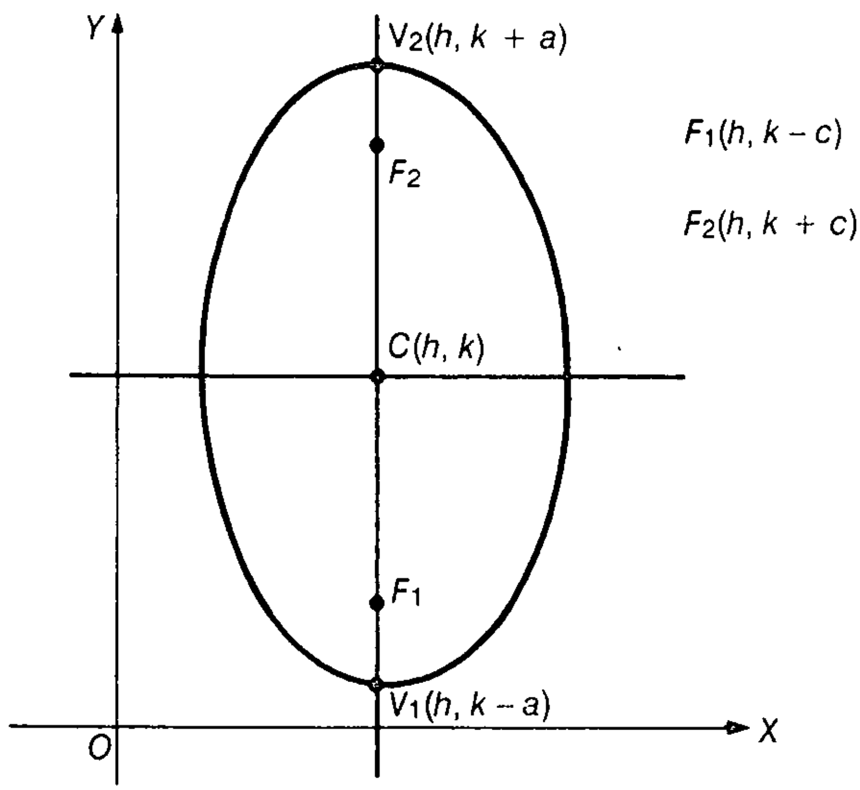


Figura 6.6

Ejemplo 3

Determinar la ecuación de la elipse con centro $C(2, -3)$, un foco $F(-1, -3)$ y semieje menor igual a 4.

Solución

$$b = 4 \qquad c = 2 - (-1) = 3$$

si

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}, \quad a = \sqrt{c^2 + b^2}$$

o sea que:

$$a = \sqrt{9+16} = 5$$

El eje focal es paralelo al eje X, por lo que la ecuación de la elipse es:

$$\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y+3)^2}{16} = 1$$

Ejemplo 4

Dada la ecuación de la elipse:

$$\frac{(x-1)^2}{45} + \frac{(y-2)^2}{20} = 1$$

Calcular las longitudes del semieje mayor y el semieje menor, las coordenadas del centro y de los focos y la longitud del lado recto.

Solución

De la ecuación:

$$a = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

$$b = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

Las coordenadas del centro son:

$$C(1, 2)$$

Se encuentra el valor de c para obtener las coordenadas de los focos:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{45 - 20} = \sqrt{25} = 5 \quad \therefore \quad c = 5$$

Como el eje mayor es paralelo al eje X, las coordenadas de los focos son:

$$F_1(6, 2), \quad F_2(-4, 2)$$

Lado recto:

$$L.R. = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(20)}{3\sqrt{5}} = \frac{8\sqrt{5}}{3}$$

$$L.R. = \frac{8\sqrt{5}}{3}$$

6.5. Ecuación general de la elipse

Sea una ecuación de segundo grado en x, y, del tipo:

$$\boxed{Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0}$$

Sea: $N = CD^2 + AE^2 - 4ACF$

- Si $A \neq 0, C \neq 0, A < C, N > 0$ y A y C tienen el mismo signo, la ecuación representa una elipse con eje focal paralelo o coincidente con el eje X.
- Si $A \neq 0, C \neq 0, A > C, N > 0$ y A y C tienen el mismo signo, la ecuación representa una elipse con eje focal paralelo o coincidente con el eje Y.
- Si $N = 0$, la ecuación representa un punto único comúnmente llamado punto elipse.
- Si $N < 0$, la ecuación no representa ningún lugar geométrico.

Ejemplo 5

Dada la ecuación general:

$$x^2 + 4y^2 - 6x + 16y + 21 = 0$$

a) Determinar si representa una elipse.
b) Deducir su ecuación en la forma ordinaria.
c) Obtener las coordenadas de su centro.
d) Obtener la longitud de los semiejes mayor y menor.
e) Obtener las coordenadas de los focos.
f) Obtener la longitud del lado recto.

Solución

a) De la ecuación general se obtiene:

$$A = 1, \ C = 4, \ D = -6, \ E = 16 \text{ y } F = 21$$

$$N = CD^2 + AE^2 - 4ACF = 4(-6)^2 + (1)(16)^2 - 4(1)4(21)$$

$$N = 64 > 0$$

por lo cual la ecuación está definida para valores reales de x y y, o sea que sí representa una elipse.

b) $x^2 + 4y^2 - 6x + 16y + 21 = 0$

Se agrupan términos y se completan cuadrados:

$$x^2 - 6x + 9 + 4(y^2 + 4y + 4) + 21 - 9 - 16 = 0$$

$$(x - 3)^2 + 4(y + 2)^2 = 4$$

O bien:

$$\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{1} = 1$$

De la ecuación anterior se deducen los incisos *c*) y *d*):
c) Centro:

$$C(3, -2)$$

d) Semieje mayor:

$$a = 2$$

Semieje menor:

$$b = 1$$

e) Las coordenadas de los focos se obtienen por medio de la expresión:

$$F(h \pm c, k)$$

Se calcula el valor de c:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3}$$

$$\therefore \quad F_1(3 - \sqrt{3}, -2) \quad F_2(3 + \sqrt{3}, -2)$$

f) Lado recto:

$$\frac{2b^2}{a} = \frac{2}{2} \quad \therefore \quad L.R. = 1$$

Ejercicios

Ecuación de la elipse con centro en el origen y eje focal sobre un eje coordenado

1. En cada una de las elipses siguientes, calcular la longitud del semieje mayor, la longitud del semieje menor, las coordenadas de los focos y la longitud del lado recto.

a) $\dfrac{x^2}{169} + \dfrac{y^2}{144} = 1$

b) $\dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{12} = 1$

2. Determinar la ecuación de cada una de las siguientes elipses, de manera que satisfagan las condiciones que se indican.

a) Focos $(\pm 4, 0)$, vértices $(\pm 5, 0)$
b) $L.R. = 5$, vértices $(\pm 10, 0)$

Ecuación de la elipse con centro en cualquier punto (h, k) y eje focal paralelo a un eje coordenado

3. Determinar la ecuación de la elipse de centro $C(4, -1)$, uno de los focos $F(1, -1)$ y que contiene el punto $A(8, 0)$.

4. Dada la ecuación de la elipse:

$$\frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y+3)^2}{9} = 1$$

determinar las coordenadas del centro, el semieje mayor, el semieje menor, las coordenadas de los focos y la longitud del lado recto.

Ecuación general de la elipse

5. Dada la ecuación:

$$4x^2 + 9y^2 - 48x + 72y + 144 = 0$$

a) Decir si la ecuación define una elipse.
b) Deducir su ecuación en la forma ordinaria.
c) Obtener las coordenadas de su centro.
d) Obtener las longitudes de los semiejes mayor y menor.
e) Obtener las coordenadas de los focos.
f) Obtener la longitud del lado recto.

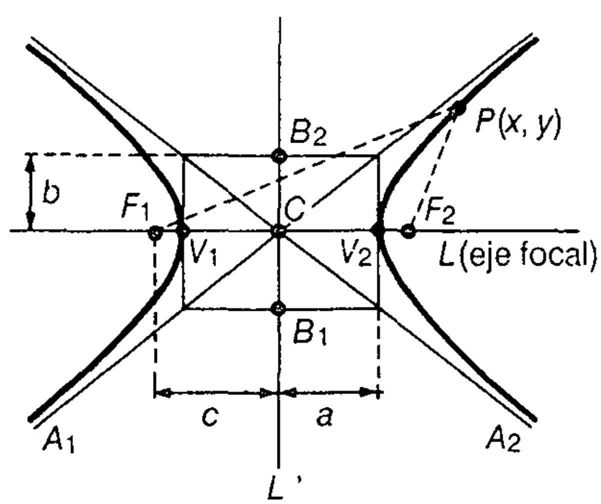
MÓDULO 7. HIPÉRBOLA

Objetivos específicos

Al terminar el estudio de este módulo, el alumno:

- *Obtendrá la ecuación y la gráfica de la hipérbola a partir de sus características, tales como: focos, centro, eje transverso, eje conjugado y lado recto.*
- *Dada una ecuación identificará si se trata de una hipérbola y determinará sus características, tales como: focos, centro, eje transverso, eje conjugado, lado recto y gráfica.*

Cuadro sinóptico

Condición geométrica	Representación analítica
• En una hipérbola, la diferencia en valor absoluto de las distancias de cualesquiera de sus puntos a dos puntos fijos F_1 y F_2 (focos) es constante.	

Cuadro sinóptico

Continuación

Condición geométrica		Representación analítica
• Centro en el origen (0, 0)	° Eje focal en el eje X	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
	° Eje focal en el eje Y	$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$
• Centro en (h, k)	° Eje focal paralelo o coincidente al eje X	$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$
	° Eje focal paralelo o coincidente al eje Y	$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$
Equilátera		
• *Centro en el origen* (0, 0)	° Eje focal en el eje X	$x^2 - y^2 = a^2;\ a = b$
	° Eje focal en el eje Y	$y^2 - x^2 = a^2;\ a = b$
	° Eje focal girado a 45° con respecto a los ejes coordenados	$xy = K;\ K = \text{cte.} \neq 0$
Conjugada		
• *Centro en el origen* (0, 0)	° Eje focal en el eje X	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ conjugada: $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$
	° Eje focal en el eje Y	$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

Cuadro sinóptico

Continuación

Condición geométrica	Representación analítica
• Centro en el origen (0, 0) ° Eje focal en el eje Y	conjugada: $$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$
• Longitud del lado recto:	$\frac{2b^2}{a}$
• Longitud del eje transverso:	$2a$
• Longitud del eje conjugado:	$2b$
• Longitud entre los focos:	$2c;\quad c=\sqrt{a^2-b^2}$
• *Ecuación general*:	$Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$
• Indicador:	$N=CD^2+AE^2-4ACF$
• Hipérbola con eje focal paralelo o coincidente con el eje X o con el eje Y:	$A\neq 0,\ C\neq 0,\ N\neq 0,$ A y C, de signo contrario.
• Dos rectas que se intersecan en un punto:	$A\neq 0,\ C\neq 0,\ N=0,$ A y C, de signo contrario.

7.1. Generalidades

> *Definición*: Una hipérbola es el lugar geométrico de todos los puntos del plano tales que la diferencia en valor absoluto de las distancias de cada uno de ellos a dos puntos fijos F_1 y F_2 llamados *focos*, es igual a una constante.

$$|\overline{F_1P} - \overline{PF_2}| = \text{cte.}$$

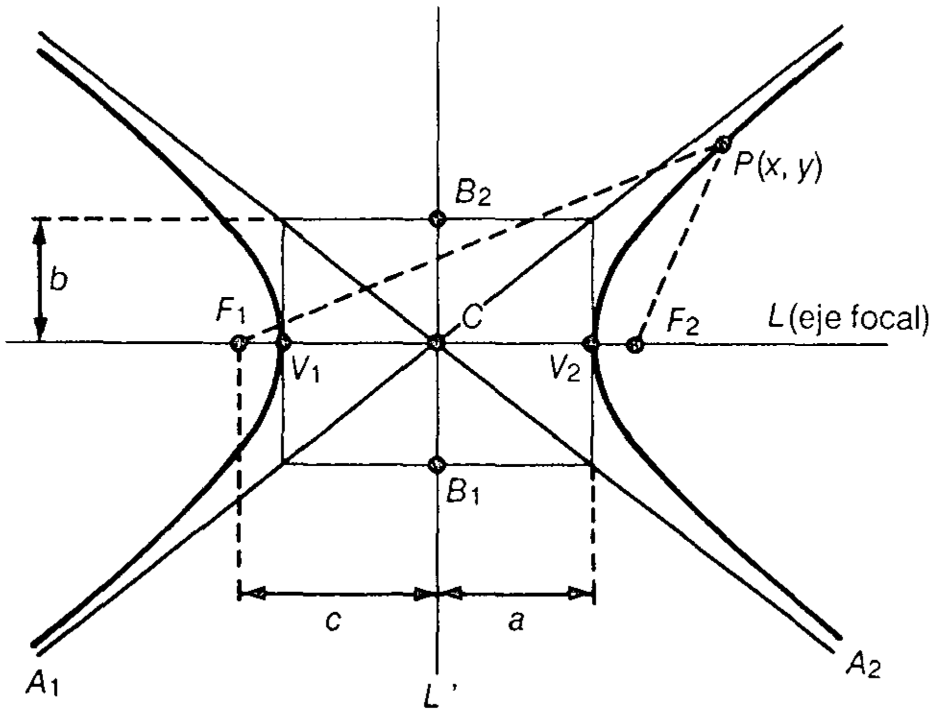


Figura 7.1

La recta L que contiene los focos de la hipérbola se llama *eje focal*.

Los puntos V_1 y V_2 en los cuales se interseca la hipérbola con su eje focal, se llaman *vértices*.

El punto C está en el eje focal y es el punto medio del segmento F_1F_2; este punto es el *centro* de la hipérbola.

La recta L' que contiene el centro de la hipérbola y es perpendicular al eje focal se llama *eje normal*.

Al segmento del eje focal comprendido entre los vértices V_1 y V_2 se le llama eje transverso y su longitud es igual a $2a$, en donde a es llamada *semieje transverso*.

Las rectas A_1 y A_2 son las asíntotas de la hipérbola.

Al segmento del eje normal comprendido entre los puntos B_1 y B_2, los cuales se relacionan con las asíntotas y los focos, como se muestra en la figura

7.1, se le llama *eje conjugado* y su longitud es igual a $2b$, en donde b es el *semi-eje conjugado*.

La distancia que hay entre el centro de la hipérbola y cualquiera de sus dos focos se llama *distancia focal* y es igual a:

$$\sqrt{a^2 + b^2}$$

o sea:

$$\boxed{c = \sqrt{a^2 + b^2}}$$

7.2. Ecuación de la hipérbola con centro en el origen y eje focal coincidente con un eje coordenado

Sea una hipérbola con centro en el origen y eje focal coincidente con el eje coordenado X. Su ecuación es:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Los focos tienen por coordenadas $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$ y los vértices $V_1(-a, 0)$ y $V_2(a, 0)$ (*véase* la figura 7.2).

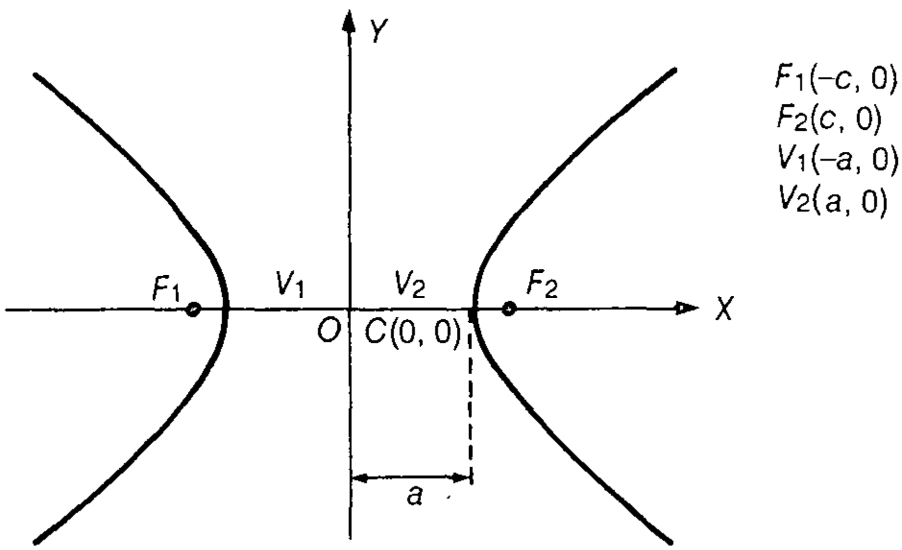


Figura 7.2

Si se tiene una hipérbola con centro en el origen y eje focal coincidente con el eje Y, su ecuación es:

$$\boxed{\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1}$$

Los focos tienen por coordenadas $F_1(0, c)$, $F_2(0, c)$ y los vértices $V_1(0, -a)$, $V_2(0, a)$ (*véase* la figura 7.3).

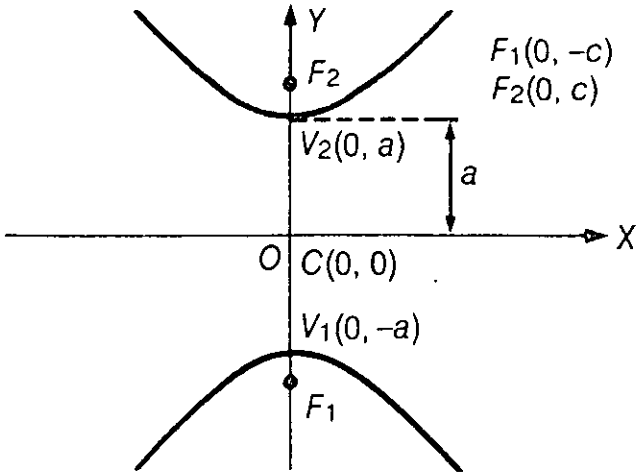


Figura 7.3

7.3. Lado recto de una hipérbola

Considérese la siguiente gráfica de una hipérbola.

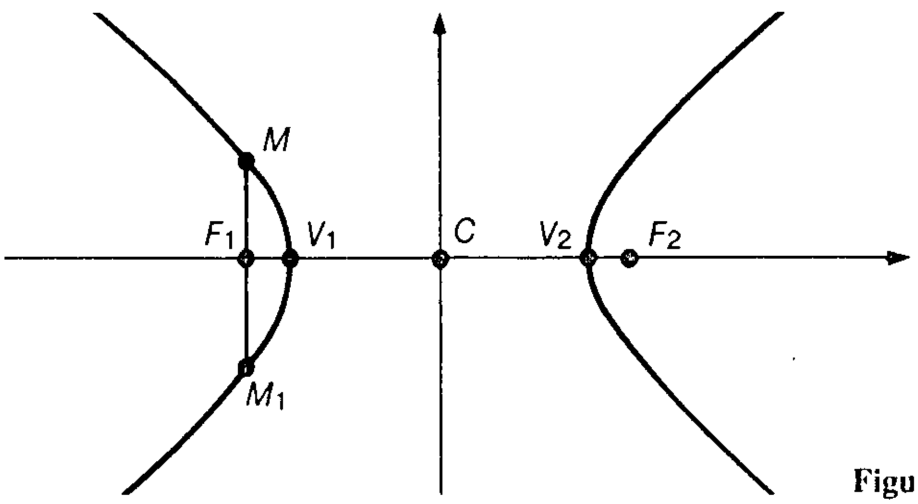


Figura 7.4

El segmento $M\,M_1$ representado en la gráfica corresponde a una cuerda perpendicular al eje focal y que contiene a un foco de la hipérbola; a esta cuerda se le llama *lado recto* de la hipérbola y su longitud es igual a $2\,b^2/a$

$$\boxed{L.R. = \frac{2b^2}{a}}$$

Ejemplo 1

Los vértices de una hipérbola son los puntos $V_1(0, 3)$ y $V_2(0, -3)$ y sus focos los puntos $F_1(0, 5)$ y $F_2(0, -5)$. Determinar la ecuación de la hipérbola, las longitudes de sus ejes transverso y conjugado, y la longitud de cada lado recto.

Solución

Como los vértices y los focos están sobre el eje Y, el eje focal coincide con el eje Y. Además, el punto medio del eje transverso está evidentemente en el origen. La ecuación de la hipérbola será de la forma:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

La distancia entre los vértices es: $2a = 2(3) = 6$ que es la longitud del eje transverso.

La distancia entre los focos es: $2c = 2(5) = 10$

Por lo tanto:

$$a = 3; \quad c = 5$$

Ahora se aplica la relación:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

y se despeja b:

$$b^2 = c^2 - a^2 = 25 - 9 = 16$$

$$\therefore \quad b = \sqrt{16} = 4$$

La longitud del eje conjugado es:

$$2b = 8$$

La ecuación de la hipérbola es entonces:

$$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$$

La longitud de cada lado recto es:

$$\frac{2b^2}{a} = \frac{2(4)^2}{3} \quad \therefore \quad L.R. = \frac{32}{3}$$

Ejemplo 2

Determinar la ecuación de la hipérbola con centro en el origen, eje focal en el eje Y y que contiene los puntos A (4, 6) y B (1, −3).

Solución

Se sustituyen x y y por las coordenadas de los puntos dados en la ecuación

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

y resultan dos ecuaciones en a y b:

$$\frac{(6)^2}{a^2} - \frac{(4)^2}{b^2} = 1; \quad \frac{(-3)^2}{a^2} - \frac{1}{b^2} = 1$$

$$\frac{36}{a^2} - \frac{16}{b^2} = 1 \qquad (1)$$

$$\frac{9}{a^2} - \frac{1}{b^2} = 1 \qquad (2)$$

Para resolver el sistema de ecuaciones formado por las expresiones (1) y (2), se multiplica la expresión (2) por − 4 y se efectúa la suma.

$$\begin{array}{r} \dfrac{36}{a^2} - \dfrac{16}{b^2} = 1 \\ -\dfrac{36}{a^2} + \dfrac{4}{b^2} = -4 \\ \hline \dfrac{-12}{b^2} = -3 \end{array}$$

$$\frac{-12}{-3} = b^2 \quad \therefore \quad b^2 = 4$$

Para obtener el valor de a^2 se sustituye $b^2 = 4$ en la expresión (2):

$$\frac{9}{a^2} - \frac{1}{4} = 1$$

$$\frac{9}{a^2} = \frac{5}{4} \quad \therefore \quad a^2 = \frac{36}{5}$$

Se sustituyen los valores de a^2 y b^2 en la ecuación original y se simplifica:

$$\frac{5y^2}{36} - \frac{x^2}{4} = 1$$

7.4. Ecuación de la hipérbola con centro no coincidente en el origen y eje focal paralelo a un eje coordenado

Sea una hipérbola cuyo centro tiene por coordenadas (h, k) y eje focal paralelo al eje coordenado X, tal que $h \neq 0$ y/o $k \neq 0$. Su ecuación es:

$$\boxed{\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2}}$$

Sus focos tienen por coordenadas $F_1(h - c, k)$, $F_2(h + c, k)$ y sus vértices son $V_1(h - a, k)$ y $V_2(h + a, k)$ (*véase* la figura 7.5).

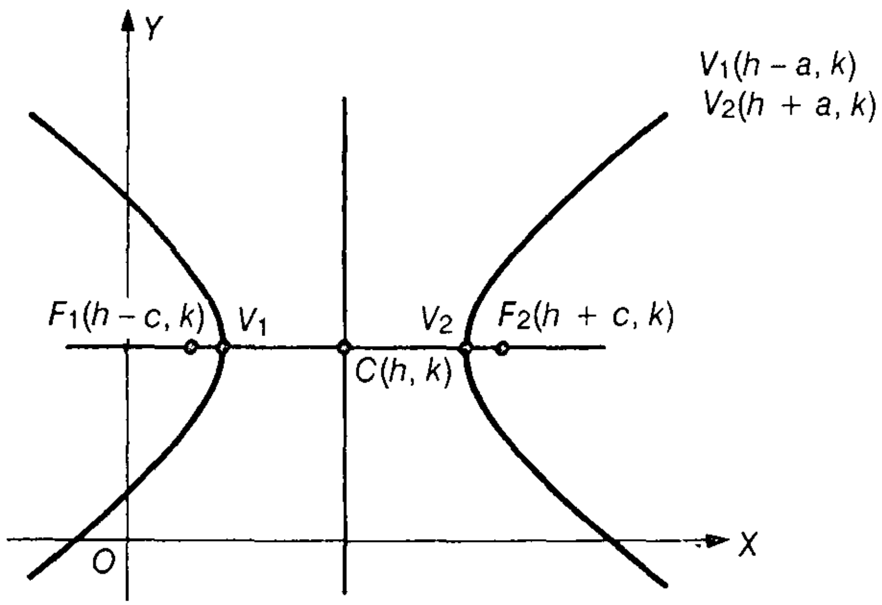


Figura 7.5

Si el centro de la hipérbola es $C(h, k)$ y su eje focal es paralelo al eje Y, entonces su ecuación es:

$$\boxed{\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1}$$

Los focos tienen por coordenadas:

$$F_1(h, k-c), \quad F_2(h, k+c)$$

y los vértices:

$$V_1(h, k-a), \quad V_2(h, k+a)$$

En estos casos la longitud del lado recto es también igual a $\dfrac{2b^2}{a}$

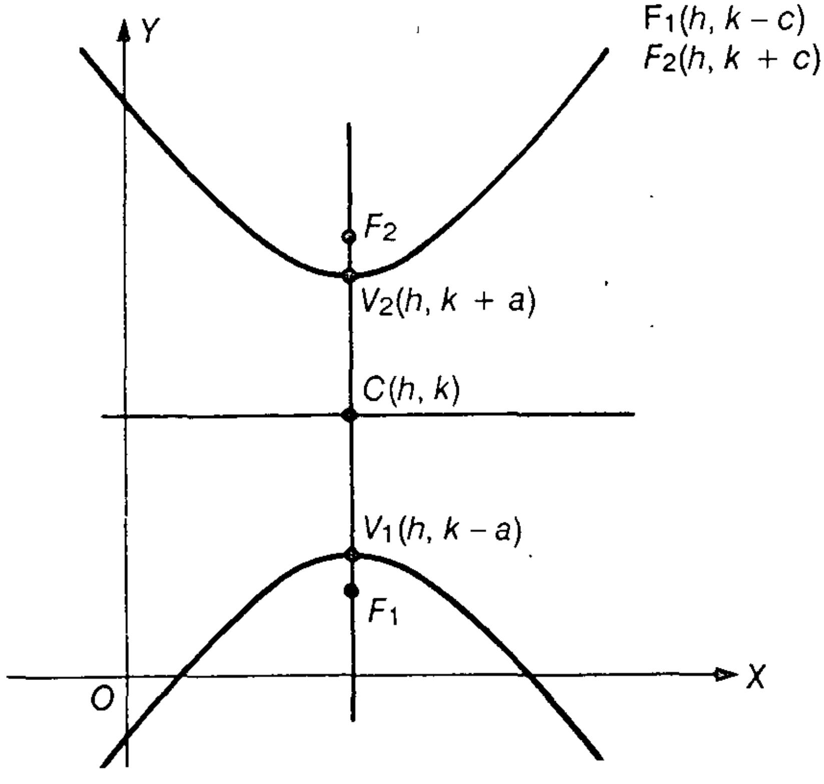


Figura 7.6

Ejemplo 3

Determinar la ecuación de la hipérbola con centro en $C(-4, 1)$, un vértice en $V(2, 1)$ y semieje conjugado igual a 4.

Solución

La distancia entre el centro y el vértice es 6; luego $a = 6$
El semieje conjugado es 4; luego $b = 4$
Se sustituye en:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

y se tiene:

$$\frac{(x+4)^2}{36} - \frac{(y-1)^2}{16} = 1$$

Ejemplo 4

Dada la hipérbola $9(x-1)^2 - 16(y+2)^2 = 144$, determinar su centro, vértices, focos y trazar su gráfica.

Solución

Se escribe la ecuación en la forma:

$$\frac{(x-1)^2}{16} - \frac{(y+2)^2}{9} = 1$$

De donde el centro es:

$$C(1,-2)$$

y los vértices son:

$$V_1(-3,-2)$$

$$V_2(5,-2)$$

Se calcula c:

$$c = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

Por lo que los focos son:

$$F_1(-4,-2)\ ,\ F_2(6,-2)$$

La gráfica es:

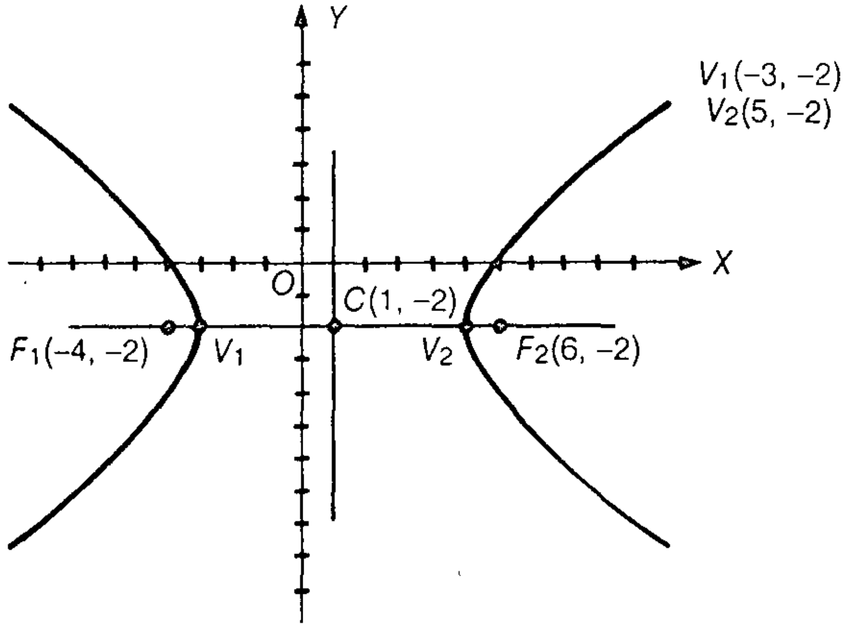


Figura 7.7

7.5. Asíntotas de la hipérbola

En el apartado 2.1.4 se definió qué es una asíntota. La hipérbola tiene dos asíntotas, como se muestra en la siguiente figura.

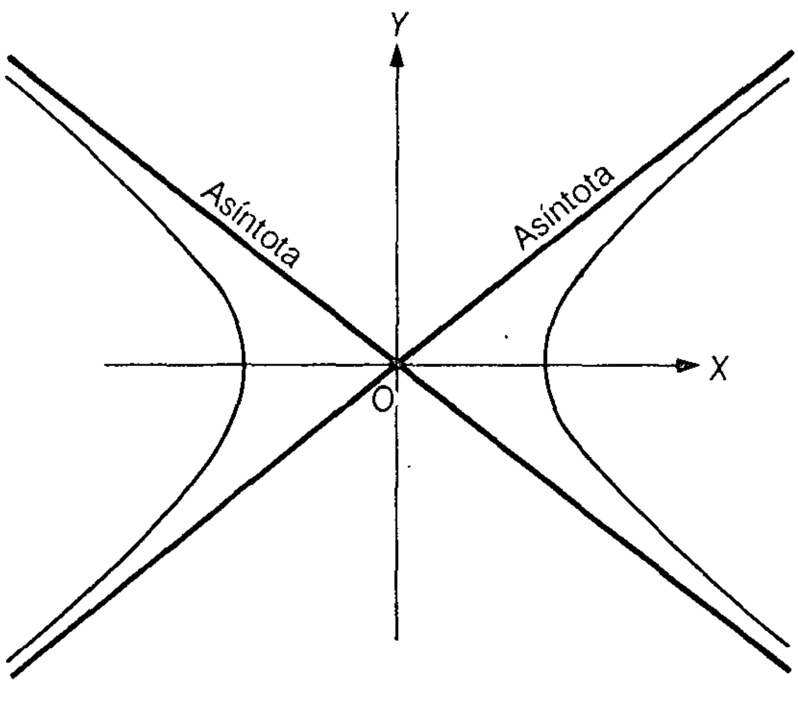


Figura 7.8

Para una hipérbola de ecuación $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ sus asíntotas tienen por ecuaciones:

$$\boxed{y = \frac{b}{a}x} \quad \boxed{y = -\frac{b}{a}x}$$

Si una hipérbola tiene ecuación $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$, las asíntotas tienen por ecuaciones:

$$\boxed{y = \frac{a}{b}x} \quad \boxed{y = -\frac{a}{b}x}$$

Si la ecuación de una hipérbola está en la forma $Ax^2 + By^2 + F = 0$, las ecuaciones de las asíntotas pueden obtenerse haciendo $F = 0$ y factorizando la expresión resultante; con cada uno de los factores igualado a cero obtenemos la ecuación de una asíntota.

Ejemplo 5

Determinar las ecuaciones de las asíntotas a la hipérbola de la ecuación:

$$\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{4} = 1$$

Solución

Dado que el eje transverso coincide con el eje Y, las asíntotas tendrán por ecuaciones:

$$y = \frac{a}{b}x \quad y = -\frac{a}{b}x$$

$$a = 4 \quad b = 2$$

$$y = 2x \quad y = -2x$$

Ejemplo 6

Determinar las ecuaciones de las asíntotas a la hipérbola:

$$9x^2 - 4y^2 - 36 = 0$$

Solución

Se hace $F = 0$:

$$9x^2 - 4y^2 = 0$$

Se factoriza la expresión anterior:

$$(3x + 2y)\,(3x + 2y) = 0$$

De donde:

$$3x + 2y = 0 \quad 3x - 2y = 0$$

Ejemplo 7

Determinar la ecuación de la hipérbola que contiene el punto $A(6, 2)$, tiene su centro en el origen, su eje transverso está sobre el eje X y una de sus asíntotas es la recta $2x - 5y = 0$.

Solución

De acuerdo con las ecuaciones de las asíntotas, la otra asíntota es la recta $2x + 5y = 0$.

Las ecuaciones de ambas asíntotas pueden obtenerse haciendo $k = 0$ en la ecuación $(2x - 5y)\,(2x + 5y) = k$. O sea:

$$4x^2 - 25y^2 = k$$

Como la hipérbola buscada debe contener el punto $A(6, 2)$, las coordenadas de este punto deben satisfacer la ecuación de la hipérbola. Por lo tanto:

Se sustituyen $x = 6$ y $y = 2$ en la ecuación anterior y se tiene que:

$$k = 44$$

La ecuación de la hipérbola que se busca es:

$$4x^2 - 25y^2 = 44$$

Ejemplo 8

Determinar los puntos de intersección de la recta $2x - 9y + 12 = 0$ con las asíntotas de la hipérbola:

$$4x^2 - 9y^2 = 11$$

Solución

Se iguala a cero:

$$4x^2 - 9y^2 = 0$$

Se factoriza:

$$(2x + 3y)(2x - 3y) = 0$$

De donde:

$$(2x + 3y) = 0 \quad \text{y} \quad (2x - 3y) = 0$$

O también:

$$y = -\frac{2}{3}x; \quad y = \frac{2}{3}x$$

Al sustituir estos valores de y en la ecuación de la recta se tiene:

- Para $y = \frac{2}{3}x$

$$2x - 9\left(\frac{2}{3}x\right) + 12 = 0$$

$$2x - \frac{18}{3}x + 12 = 0$$

$$x\left(\frac{6 - 18}{3}\right) + 12 = 0$$

$$x = \frac{-12}{-12}(3) = 3$$

$$\therefore \quad x = 3; \; y = 2$$

- Para $y = -\frac{2}{3}x$

$$2x - 9\left(-\frac{2}{3}x\right) + 12 = 0$$

$$2x + \frac{18}{3}x + 12 = 0$$

$$x = -\frac{12(3)}{24} = -\frac{3}{2}$$

$$\therefore \quad x = -\frac{3}{2}; \; y = 1$$

Así, los puntos son:

$$P_1(3, 2) \quad \text{y} \quad P_2\left(-\frac{3}{2}, 1\right)$$

7.6. Hipérbola equilátera o rectangular

Un caso particular de la hipérbola se presenta cuando sus ejes conjugado y transverso son de igual longitud. A una hipérbola con esta característica se le llama *equilátera* o *rectangular*.

Si la hipérbola es del tipo $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ y es equilátera, entonces $a = b$, por lo que su ecuación se puede expresar como $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$; o sea:

$$\boxed{x^2 - y^2 = a^2}$$

que es la ecuación de una hipérbola equilátera con centro en el origen y eje focal coincidente con el eje coordenado X.

Si la hipérbola tiene centro en el origen y su eje focal coincide con el eje Y, su ecuación es:

$$\boxed{y^2 - x^2 = a^2}$$

Cuando el centro tiene coordenadas (h, k) y el eje focal es paralelo al eje X o al eje Y, las ecuaciones respectivas son:

$$\boxed{(x - h)^2 - (y - k)^2 = a^2}$$

$$\boxed{(y - k)^2 - (x - h)^2 = a^2}$$

Una forma particularmente simple y útil de la ecuación de la hipérbola equilátera es:

$$xy = K \qquad K = \text{constante, diferente de cero}$$

En este caso la hipérbola equilátera tiene su centro en el origen, pero sus ejes están girados 45° con respecto a los ejes coordenados, por lo que las asíntotas de la hipérbola resultan ser estos últimos (*véase* la figura 7.9).

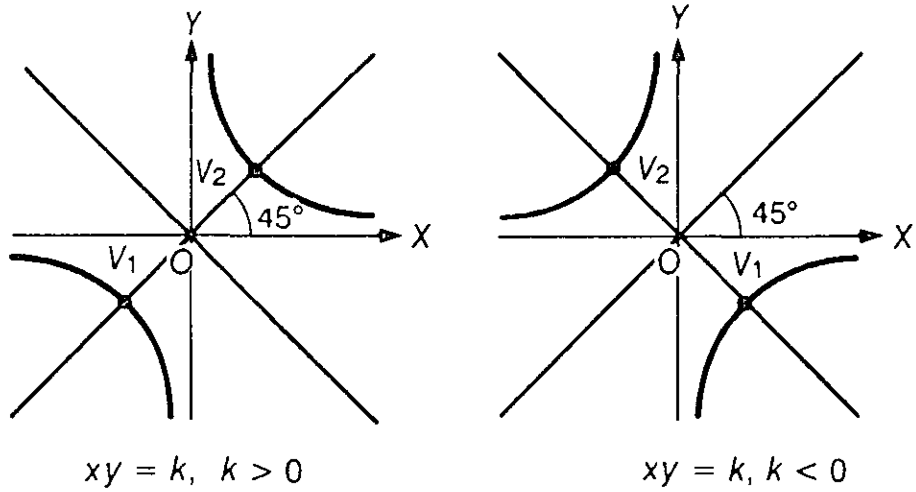


Figura 7.9

Cuando una hipérbola equilátera de este tipo tiene su centro en un punto de coordenadas (h, k), su ecuación queda expresada como:

$$\boxed{(x-h)(y-k)=K} \quad K = \text{constante, diferente de cero}$$

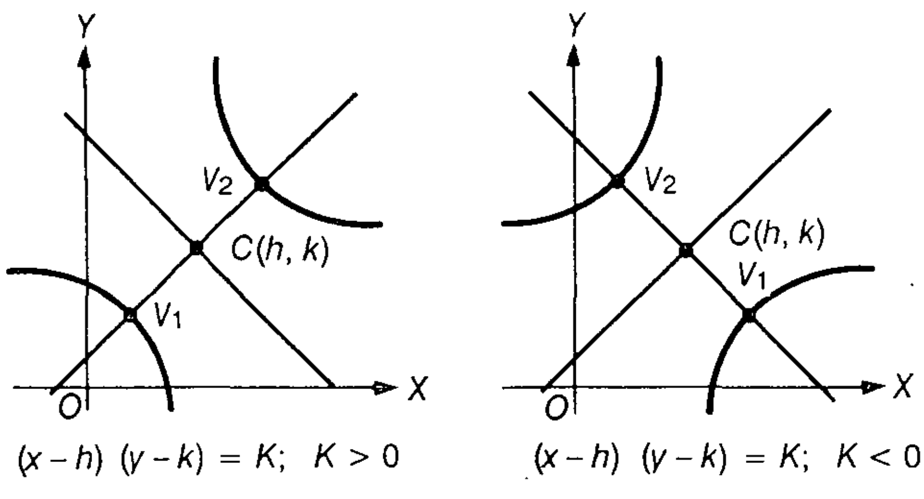


Figura 7.10

Las asíntotas están dadas por las ecuaciones:

$$\boxed{x - h = 0} \quad \boxed{y - k = 0}$$

Ejemplo 9

Determinar la ecuación de la hipérbola equilátera que contiene el punto $B(-1, -5)$, tiene por asíntotas los ejes coordenados y centro en el origen.

Solución

$xy = k$; al sustituir en esta ecuación las coordenadas del punto

$$B(-1, -5)$$

se tiene:

$$(-1)(-5) = K$$

$$(-1)(-5) = 5$$

$\therefore$ el valor de K es igual a 5

Y la ecuación de la hipérbola equilátera será:

$$xy = 5$$

Ejemplo 10

Obtener las ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola de ecuación:

$$xy - 4y = 5$$

Solución

Al factorizar se tiene:

$$(x - 4)y = 5$$

de donde las ecuaciones de las asíntotas son:

$$x - 4 = 0; \ y = 0$$

7.7. Hipérbolas conjugadas

Sea la hipérbola de ecuación $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ como se muestra con línea gruesa en la figura 7.11.

Las asíntotas de esta hipérbola son también asíntotas de la hipérbola dibujada con línea delgada y cuya ecuación es:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

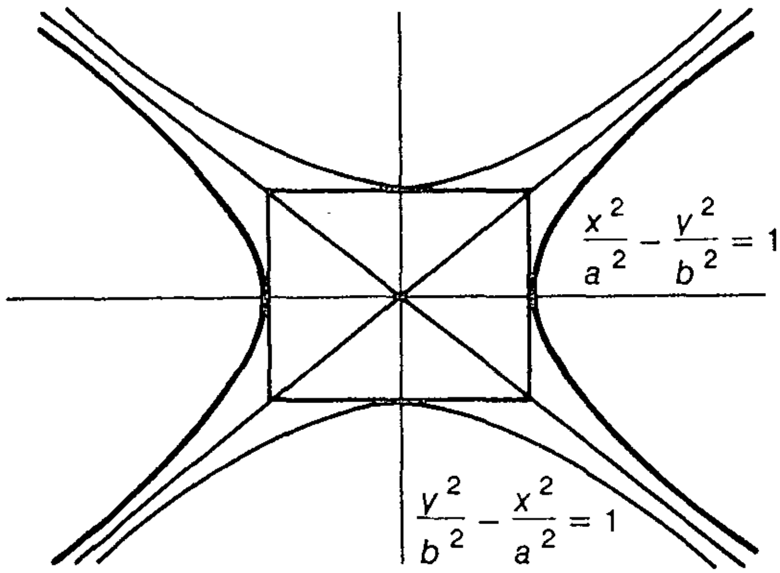


Figura 7.11

Además de tener las mismas asíntotas, entre estas dos hipérbolas se tiene que el eje transverso de cada una es idéntico al eje conjugado de la otra. En este caso decimos que las hipérbolas son *conjugadas* o que cada hipérbola es la *conjugada* de la otra.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1; \quad \text{su conjugada es: } \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1; \quad \text{su conjugada es: } \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

Ejemplo 11

Escribir la ecuación de la hipérbola conjugada de la hipérbola:

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

Determinar además, las ecuaciones de las asíntotas y las coordenadas de los focos de ambas hipérbolas.

Solución

La ecuación de la hipérbola conjugada es:

$$\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$$

En las dos hipérbolas:

$$c = \sqrt{9 + 16} = 5$$

Las coordenadas de los focos de la hipérbola dada son:

$$\boxed{(\pm 5, 0)}$$

y los de la conjugada:

$$\boxed{(0, \pm 5)}$$

Las ecuaciones de las asíntotas son las mismas para las dos hipérbolas:

$$y = \pm \frac{4}{3}x$$

7.8. Ecuación general de la hipérbola

Sea una ecuación de segundo grado en x, y, del tipo:

$$\boxed{Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0}$$

Sea: $N = CD^2 + AE^2 - 4ACF$.

- Si $A \neq 0$, $C \neq 0$, $N \neq 0$, A y C son de signo contrario, la ecuación representa una hipérbola con eje focal paralelo o coincidente con el eje X o con el eje Y.
- Si $A \neq 0$, $C \neq 0$, $N = 0$, A y C son de signo contrario, la ecuación representa dos rectas que se intersecan.

- Si A y C son de signo contrario y $N = 0$, la ecuación representa un par de rectas que se intersecan en un punto.

Ejemplo 12

Dada la ecuación general:

$$9x^2 - 16y^2 - 18x - 64y - 199 = 0$$

a) Determinar si representa una hipérbola.
b) Obtener su ecuación en la forma ordinaria.
c) Determinar las coordenadas de su centro, de sus focos y sus vértices.
d) Calcular la longitud de su lado recto.
e) Determinar las ecuaciones de sus asíntotas y su hipérbola conjugada.

Solución

a) De la ecuación general tenemos:

$$A = 9,\quad C = -16,\quad D = -18,\quad E = -64,\quad F = -199$$

$$N = CD^2 + AE^2 - 4ACF = 82\,944 \neq 0$$

$\therefore$ La ecuación representa una hipérbola.

b) Se completan cuadrados y se agrupan términos:

$$9(x^2 - 2x + 1) - 16(y^2 + 4y + 4) = 199 - 64 + 9$$

$$9(x - 1)^2 - 16(y + 2)^2 = 144$$

$$\therefore \quad \frac{(x-1)^2}{16} - \frac{(y+2)^2}{9} = 1$$

c) $C(1, -2)$, $F_1(-4, -2)$, $F_2(6, -2)$, $V_1(-3, -2)$, $V_1(5, -2)$

d) Lado recto $= \dfrac{2b^2}{a}$; L.R. $= \dfrac{9}{2}$

e) $y + 2 = \dfrac{3}{4}(x - 1)$; $\quad y + 2 = -\dfrac{3}{4}(x - 1)$

(asíntota) (asíntota)

Conjugada: $\dfrac{(y+2)^2}{9} - \dfrac{(x-1)^2}{16} = 1$

Ejemplo 13

Obtener la representación gráfica de las siguientes hipérbolas:

a) $y = \pm\sqrt{x^2 - 4}$ $\qquad$ *b*) $y = \pm\sqrt{(9/4)(x-2)^2 + 9 - 1}$

c) $9x^2 - 16y^2 - 18x - 64y - 199 = 0$

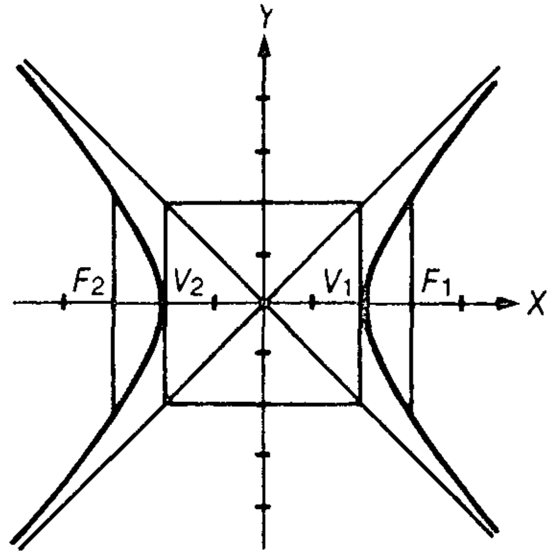
Solución

a) Se elevan al cuadrado ambos miembros de la ecuación:

$$y^2 = x^2 - 4$$

Por lo que la ecuación se puede escribir como:

$$x^2 - y^2 = 4$$



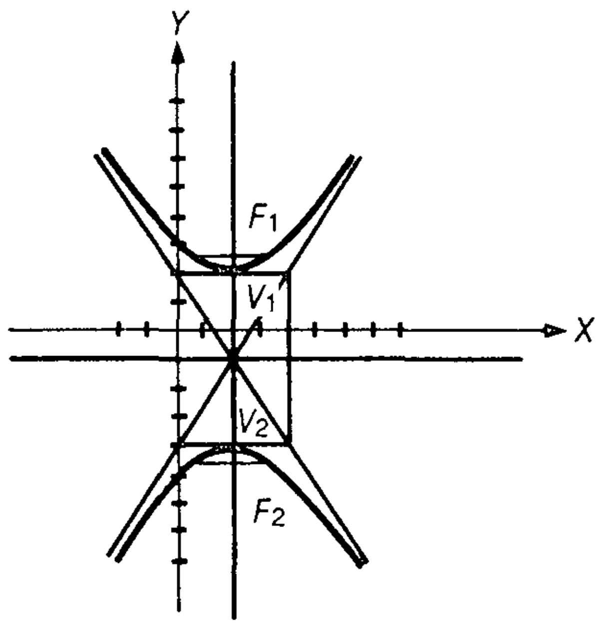
Lo cual resulta ser una hipérbola equilátera cuyos lados miden 2, con centro en el origen y eje focal el eje X, $V_1(2,0)$, $V_2(-2,0)$, $F_1(+\sqrt{8},0)$ $F_2(-\sqrt{8},0)$ y L.R. $= 4$.

Ecuaciones de las asíntotas:

$$y = \pm x$$

b) La ecuación se puede escribir como

$$y + 1 = \pm\sqrt{(9/4)(x-2)^2 + 9}$$



Se elevan al cuadrado ambos miembros de la ecuación:

$$(y+1)^2 = (9/4)(x-2)^2 + 9$$

Se multiplica toda la ecuación por 4:

$$4(y+1)^2 = 9(x-2)^2 + 36$$

por lo que

$$4(y+1)^2 - 9(x-2)^2 = 36$$

Se divide toda la ecuación entre 36:

$$\frac{4(y+1)^2}{36} - \frac{9(x-2)^2}{36} = 1$$

por lo que

$$\frac{(4+1)^2}{9} - \frac{(x-2)^2}{4} = 1$$

de donde se obtiene:
Eje focal paralelo al eje Y
$V_1(2, 2), V_2(2, -4), F_1(2, -1 + \sqrt{13}),$

$$F_2(2, -1 - \sqrt{3}), \text{ L.R.} = \frac{8}{3}$$

Ecuaciones de las asíntotas:

$$y = \frac{3}{2}x - 4; \quad y = -\frac{3}{2}x + 2$$

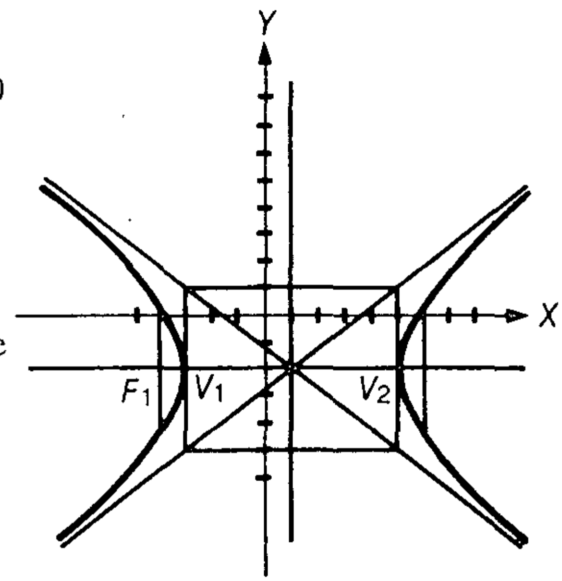
c) En el ejemplo 12, la hipérbola

$$9x^2 - 16y^2 - 18x - 64y - 199 = 0$$

se transformó en la ecuación:

$$\frac{(x-1)^2}{16} - \frac{(y+2)}{9} = 1$$

Con los datos anteriores se puede obtener la gráfica de la derecha.



Ejercicios

Ecuación de la hipérbola con centro en el origen y eje focal sobre un eje coordenado.

1.Determinar la ecuación de la hipérbola de ejes coincidentes con los coordenados, de centro en el origen, si la longitud del lado recto es 18 y la distancia entre los focos es 12.

2. Determinar la ecuación de la hipérbola de centro en el origen, ejes coincidentes con los ejes coordenados y que contiene los puntos $A(3, 1)$ y $B(9, 5)$.

Ecuación de la hipérbola con centro en (h, k)

3. Dada la hipérbola $(x - 2)^2 - 9(y - 2)^2 = 9$

a) Encontrar las coordenadas de su centro.
b) Encontrar las coordenadas de sus focos.
c) Encontrar las coordenadas de sus vértices.
d) Calcular la longitud de su lado recto.
e) Trazar su gráfica.

4. Determinar la ecuación del lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de distancias a los puntos fijos $F_1(-6, -4)$ y $F_2(2, -4)$ es igual a 6.

Asíntotas de la hipérbola

5. Determinar las coordenadas de los vértices y de los focos, las ecuaciones de las asíntotas, la longitud del lado recto y la representación gráfica de la hipérbola:

$$9x^2 - 16y^2 = 144$$

6. Dada la hipérbola $(x - 2)^2 - 9(y - 2)^2 = 9$, obtener las ecuaciones de sus asíntotas.

7. Obtener la ecuación de la hipérbola que contiene el punto $A(4, 6)$ y cuyas asíntotas son:

$$y = \pm\sqrt{3}\,x$$

Hipérbola equilátera o rectangular

8. Obtener la ecuación de la hipérbola equilátera que contiene el punto $S(3, 1)$ y tiene por asíntotas la recta $x - 1 = 0$ y el eje de las X.

9. Obtener las ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola de ecuación $xy = 1$.

Hipérbolas conjugadas

10. Determinar las coordenadas de los vértices y de los focos de la hipérbola conjugada a la hipérbola de ecuación:

$$9x^2 - 4y^2 = 36$$

Ecuación general de la hipérbola

11. Dada la ecuación general de la hipérbola:

$$9x^2 - 4y^2 - 54x - 8y + 113 = 0$$

Determinar:

a) Su ecuación en la forma ordinaria.
b) Las coordenadas de su centro, vértices y focos.
c) La longitud de su lado recto.
d) Las ecuaciones de sus asíntotas.
e) La ecuación de la hipérbola conjugada.

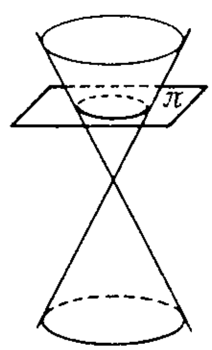
MÓDULO 8. SECCIONES PLANAS

Objetivos específicos

Al terminar el estudio de este módulo, el alumno:

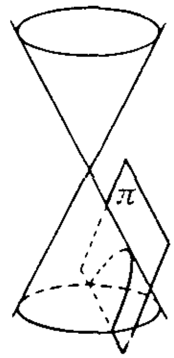
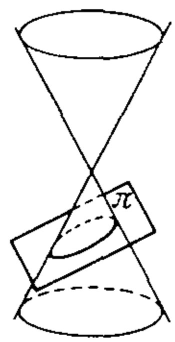
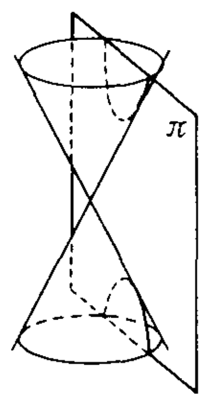
- *A partir de la ecuación general de segundo grado, identificará el tipo de cónica.*
- *Graficará el tipo de cónica a partir de la ecuación dada.*

Cuadro sinóptico

Condición geométrica	**Representación analítica**
• *Circunferencia*: Plano π perpendicular al eje del cono.	

Cuadro sinóptico

Continuación

Condición geométrica	Representación analítica
• *Parábola*: Plano π paralelo a una posición de la generatriz.	
• *Elipse*: Plano π forma un ángulo α con la horizontal y no paralelo a la generatriz.	
• *Hipérbola*: Plano π paralelo al eje del cono.	

Cuadro sinóptico

Continuación

Condición geométrica	Representación analítica
• Ecuación general de segundo grado:	$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$
° Indicador:	$I = B^2 - 4AC$
• Si $B = 0$	
° Circunferencia, un punto o ningún lugar geométrico.	$A = C$
° Parábola, dos rectas o ningún lugar geométrico.	$A = 0$ o $C = 0$
° Elipse, un punto o ningún lugar geométrico.	$A \neq 0$, $C \neq 0$, $A \neq C$ y de signos iguales.
° Hipérbola, o dos rectas que se intersecan en un punto.	$A \neq 0$, $C \neq 0$ y de signos contrarios.
• Si $B \neq 0$	
° Parábola, dos rectas o ningún lugar geométrico.	$I = 0$
° Elipse, un punto o ningún lugar geométrico.	$I < 0$
° Hipérbola o dos rectas que se intersecan en un punto.	$I > 0$

8.1. Secciones planas de un cono circular recto

El nombre de *secciones cónicas*, o de *cónicas* simplemente, con que se designan la circunferencia, parábola, elipse e hipérbola, tiene su origen en el hecho de que estas curvas se obtienen como secciones planas de un cono circular recto cortado por un plano.

Considérese un cono circular recto de vértice V, cortado por un plano π que no pase por el vértice. Las secciones cónicas se obtienen dependiendo de la posición que tome el plano π al cortar el cono.

Si el plano π es perpendicular al eje del cono, o sea, toma una posición horizontal, la sección obtenida será la circunferencia, como se puede observar en la figura 8.1.

Si el plano π forma un ángulo α con la horizontal, de tal manera que corte la base del cono, o sea que el plano sea paralelo a una posición de la generatriz del cono, la sección obtenida es la parábola, como se muestra en la figura 8.2.

Si el plano π forma un ángulo α con la horizontal de tal manera que éste no sea paralelo a una sola posición de la generatriz del cono, la sección que se obtiene es la elipse, como se observa en la figura 8.3.

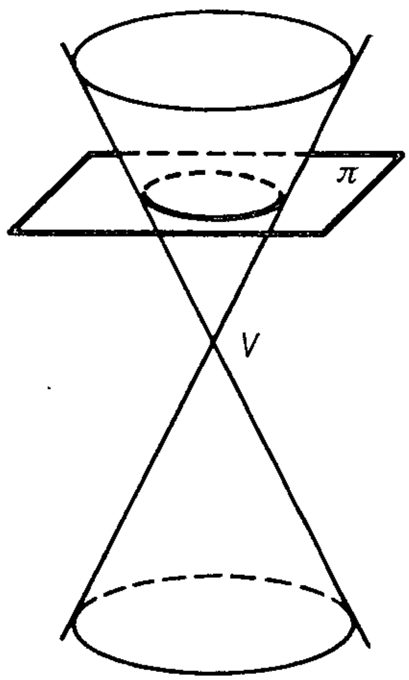


Figura 8.1

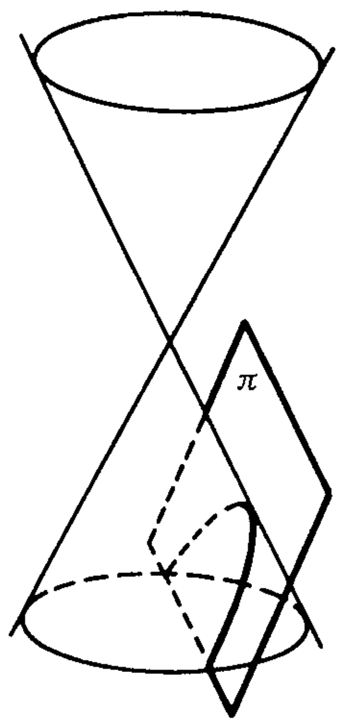


Figura 8.2

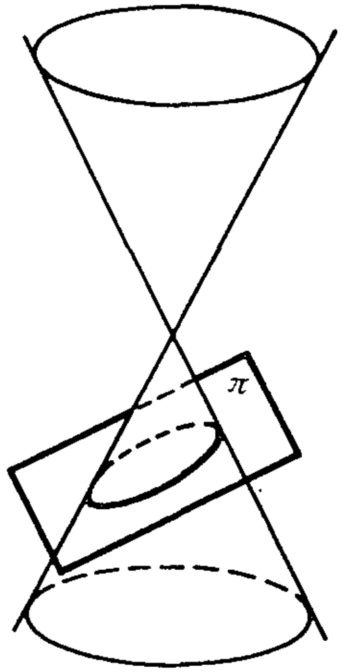


Figura 8.3

Si el plano π es perpendicular a la horizontal, o sea, es paralelo al eje del cono, la sección que se obtiene es la hipérbola, como se muestra en la figura 8.4.

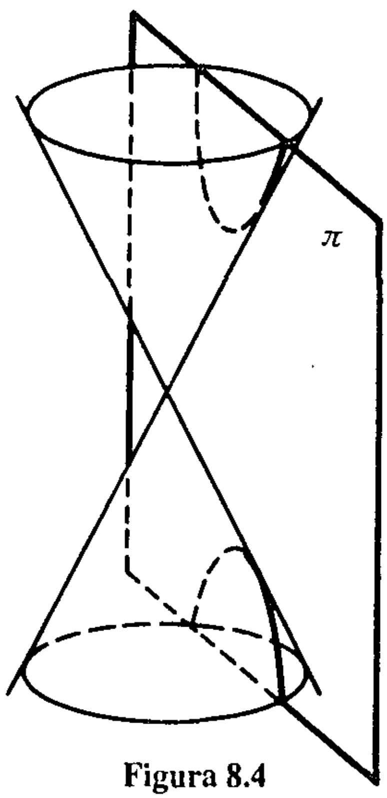


Figura 8.4

8.2. Ecuación general de segundo grado

A una ecuación de la forma:

$$\boxed{Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0}$$

se le llama ecuación general de segundo grado. Para el estudio de esta ecuación podemos considerar dos casos básicos:

1. No existe término en xy, es decir, $B = 0$. Para este caso la ecuación puede representar una cónica cuyos ejes son paralelos o coincidentes con los ejes coordenados, de acuerdo con las siguientes condiciones:

- Si $A = C$ la ecuación representa una circunferencia, un punto o ningún lugar geométrico.
- Si $A = 0$ o $C = 0$, representa una parábola, dos rectas coincidentes, dos rectas paralelas o ningún lugar geométrico.
- Si $A \neq 0$, $C \neq 0$, $A \neq C$ y tienen el mismo signo, representa una elipse, un punto o ningún lugar geométrico.
- Si $A \neq 0$, $C \neq 0$ y tienen signo contrario, representa una hipérbola o dos rectas que se intersecan.

2. Si existe el término xy, es decir, $B \neq 0$, la ecuación puede representar una cónica cuyos ejes no son paralelos ni coincidentes con los ejes coordenados, conforme a las siguientes condiciones:

Sea $I = B^2 - 4AC$, llamado indicador o *discriminante*.

- Si $I = 0$ la ecuación representa una parábola, dos rectas paralelas, dos rectas coincidentes o ningún lugar geométrico.
- Si $I < 0$, representa una elipse, un punto o ningún lugar geométrico.
- Si $I > 0$, representa una hipérbola o dos rectas que se intersecan en un punto.

Ejemplo 1

Cada una de las siguientes ecuaciones representa una cónica; determinar de qué cónica se trata.

Solución

a) $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 3 = 0$
$A = 1, \ C = 1, \quad \therefore \quad A = C$
La ecuación representa una circunferencia.
b) $x^2 + 9y^2 - 4x + 36y - 41 = 0$
$A = 1, \ C = -9, \quad \therefore \quad A \neq C$ (con signos contrarios)
La ecuación representa una hipérbola.
c) $y^2 + 4x + 2y + 9 = 0$

$A = 0, \quad C = 1$

Por lo tanto, al ser cero el coeficiente de x^2, la ecuación representa una parábola.

d) $x^2 - 2\sqrt{3}\,xy + 3y^2 - \sqrt{3}\,x + y = 0$

$A = 1, \quad B = -2\sqrt{3}, \quad C = 3$

Se calcula I:

$I = 12 - (4)(1)(3) = 0$

La ecuación representa una parábola.

e) $4x^2 - 2xy + 3y^2 = 18$

$A = 4, \quad B = -2, \quad C = 3$

$I = B^2 - 4AC; \quad I = 4 - (4)(4)(3) = -44 < 0$

Por lo tanto la ecuación representa una elipse.

Ejercicios

Forma de la ecuación general de segundo grado

1. Dadas las siguientes ecuaciones, decir qué cónica representan:

a) $4x^2 + 2y^2 - 7x + y - 5 = 0$
b) $3x^2 - y^2 + 30x + 78 = 0$
c) $x^2 - 6x + 5y - 11 = 0$
d) $8x^2 - 25xy + 18y^2 - 104x + 52y + 162 = 0$

EXAMEN DE AUTOEVALUACIÓN

A. *En cada inciso, escriba una* V *o una* F *dentro del paréntesis según la afirmación sea verdadera o falsa respectivamente.*

a) Dos rectas son paralelas si sus pendientes son iguales. ( )

b) Una recta queda determinada completamente si se conoce cuando menos una de sus condiciones. ( )

c) Dada la ecuación general de una circunferencia, su radio se puede conocer mediante la expresión: ( )

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$$

d) La ecuación de una parábola puede ser de la forma: ( )

$$y^2 = 4px$$

e) La ecuación general de una parábola puede ser de la forma: ( )

$$Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$$

f) Una elipse queda completamente definida si se conocen al menos dos de sus condiciones. ( )

g) Hipérbola es el lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a dos puntos fijos es constante. ( )

h) La ecuación general de segundo grado es de la forma: ( )

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

B. *Seleccione la respuesta correcta marcando una* × *en el paréntesis respectivo.*

1. El ángulo entre dos rectas está dado por la expresión:

   a) $\tan\alpha = \dfrac{m_2 - m_1}{m_1 m_2 - m_2}$ ( )

   b) $\tan\alpha = \dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$ ( )

   c) $\tan\alpha = \dfrac{(m_2 - m_1)^2}{1 + \sqrt{m_1 m_2}}$ ( )

2. La forma pendiente-ordenada al origen de la recta es:

   a) $y = mx + b$ ( )

   b) $y - y_1 = m(x - x_1)$ ( )

   c) $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ ( )

3. La ecuación de la recta que contiene dos puntos conocidos es:

   a) $y = mx + b$ ( )

   b) $y - y_1 = m(x - x_1)$ ( )

   c) $y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ ( )

4. La ecuación de la circunferencia de centro (h, k) y radio r es:

   a) $(x^2 - h) + (y^2 - k) = r^2$ ( )

   b) $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ ( )

   c) $\dfrac{(x - h)^2}{a^2} + \dfrac{(y - k)^2}{b^2} = r^2$ ( )

5. Dada la ecuación general de la circunferencia:

   $$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

   la coordenadas de su centro son:

   a) $\left(-\dfrac{D}{2}, -\dfrac{E}{2}\right)$ ( )

   b) $\left(-\dfrac{F}{2}, -\dfrac{E}{2}\right)$ ( )

   c) $\left(-\dfrac{A}{2}, -\dfrac{C}{2}\right)$ ( )

6. La ecuación de una parábola puede ser:
   a) $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ ( )
   b) $(x - h)^2 = 4p(y - k)$ ( )
   c) $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ ( )

7. Para determinar todas las características de una elipse al menos se deben conocer:
   a) Las coordenadas de dos puntos. ( )
   b) Las coordenadas de dos de sus puntos y de su centro. ( )
   c) Las coordenadas de un punto y de uno de los focos. ( )

8. La ecuación general $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ representa una hipérbola o dos rectas que se intersecan si:
   a) $A = C$ tienen el mismo signo. ( )
   b) A y C tienen signos contrarios y $A \neq 0$, $C \neq 0$ ( )
   c) $A = 0$, $C \neq 0$ ( )

9. Las ecuaciones de las asíntotas de una hipérbola con centro en el origen y eje transverso el X, son:
   a) $y = \pm \frac{b}{a} x$ ( )
   b) $y = \pm \frac{a}{b} x$ ( )
   c) $y = \pm bx$ ( )

C. *Resuelva los siguientes problemas.*

1. Si el punto (9, 2) divide el segmento que determinan los puntos $P_1(6, 8)$ y $P_2(x, y)$ en la relación $r = 3/7$, determinar las coordenadas de P_2.

2. Dada la ecuación $x^2y^2 + 4x^2 - 9y^2 = 0$, trazar su gráfica.

3. Determinar la ecuación de la recta que contiene el punto $A(2, 3)$ y cuya abscisa al origen es el doble de la ordenada al origen.

4. Determinar la ecuación de la circunferencia con centro en el eje X y que contiene los puntos $A(-2, 3)$ y $B(4, 5)$.

5. Dada la ecuación de la parábola $y^2 - 4y - 6x + 13 = 0$, determinar:

   a) Las coordenadas del vértice.

   b) Las coordenadas del foco.

   c) La longitud del lado recto.

6. Determinar la ecuación del lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$ cuya suma de distancias a los puntos fijos $(2, -3)$ y $(2, 7)$ es igual a 12.

7. Dada la hipérbola $9x^2 - 16y^2 - 18x - 64y - 199 = 0$, determinar:

   a) Su centro.

   b) Las coordenadas de sus vértices.

   c) Las coordenadas de los focos.

   d) Las ecuaciones de las asíntotas.

   e) Su gráfica.

8. *a*) Determinar la ecuación de la hipérbola con centro en $(0, 0)$, un vértice en $(3, 0)$ y ecuación de una asíntota $2x - 3y = 0$.

   b) Determinar además la ecuación de la hipérbola conjugada del inciso *a*).

9. Dadas las siguientes ecuaciones, decir qué cónicas representan:

   a) $x^2 + 2y^2 + 4x + 4y + 4 = 0$

   b) $3x^2 - 4y^2 + 3x + 16y - 18 = 0$

   c) $7x^2 + 7y^2 - 10x - 10y - 12 = 0$

   d) $3x^2 + 12xy + 12y^2 = 27$

10. Determinar la ecuación de la circunferencia que contiene los puntos $A(2, 3)$ y $B(-1, 1)$ y cuyo centro está situado en la recta $x - 3y - 11 = 0$.

FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA

CURSOS INSTITUCIONALES

DIPLOMADO EN DISEÑO Y ADAPTACIÓN DE ANTENAS

MOD. I. PROPEDEUTICO

DEL 23 AL 28 DE ABRIL DEL 2003

ANEXOS PRIMERA PARTE

CI - 059

Instructores: Ing. Juan Manuel Castillo Miranda
Ing. Jesús Antonio Patiño Ramírez
Ing. Joel Gómez
SECRETARÍA DE MARINA
ABRIL DEL 2003

SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS. Está formado por dos o más ecuaciones (ordinarias) que contienen las derivadas de dos o más funciones, respecto de una sola variable independiente.

Ejemplos:
$$\begin{cases} 4\dfrac{d^2x}{dt^2} = 8x + 2y \\ 3\dfrac{d^2y}{dt^2} = \dfrac{dx}{dt} + 8t \end{cases} \qquad \begin{cases} x' - 3x + y' + z' = t + 8 \\ x' \quad - y' + z' = t^2 \\ \quad x + y' - 6z' = t^2 + 8t - 2 \end{cases}$$

Donde: $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ son las funciones y "t" la variable independiente

SOLUCION DE UN SISTEMA DE ECUACIONES DIFERENCIALES. Es un conjunto de funciones diferenciables que satisfacen a cada ecuación del sistema, en algún intervalo I.

SOLUCIÓN DE UN SISTEMA UTILIZANDO EL OPERADOR DIFERENCIAL; $D = \frac{d}{dt}$: Este método consiste en expresar cada ecuación del sistema en términos de D y luego eliminar $n-1$ funciones por cualquiera de los métodos conocidos "Reducción suma o resta". "igualacion" "Sustitución" o "Cramer", etc.

Ejemplo. Resolver:
$$x' - 4x + 3y = e^t \qquad (1)$$
$$-6x + y' + 7y = 0 \qquad (2)$$

En términos de D:
$$(D-4)x + 3y = e^t \qquad (I)$$
$$-6x + (D+7)y = 0 \qquad (II)$$

Determinemos a $x(t)$: usando el m. de cramer:
$$x(t) = \frac{\begin{vmatrix} e^t & 3 \\ 0 & D+7 \end{vmatrix}}{\Delta = \begin{vmatrix} D-4 & 3 \\ -6 & D+7 \end{vmatrix}} = \frac{(D+7)e^t}{D^2+3D-10} = \frac{8e^t}{D^2+3D-10} \qquad (III)$$

Observaciones: Δ — Determinante operacional, el orden de Δ nos indica el nº de constantes en toda la solución del sistema.
En este caso los operadores actúan sobre las funciones y no al revés: $(D+7)e^t$

La ecuacion (III) puede escribirse como:
$$(D^2 + 3D - 10)x(t) = 8e^t \quad \text{E.D.O.L. de 2º orden}$$
c/coeficientes constantes no homogénea cuya solución es:
$$x(t) = C_1 e^{-5t} + C_2 e^{2t} - \frac{4}{3}e^t$$
De la ecuacion (1):
$$y(t) = \frac{e^t - x' + 4x}{3} = 3C_1 e^{-5t} + \frac{2}{3}C_2 e^{2t} - e^t$$

FORMA LINEAL NORMAL o CANONICA DE UN SISTEMA DE ECUACIONES: Esta forma tiene la siguiente presentacion:

$$
(I)\begin{cases}
\dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \dots + a_{1n}(t)x_n + b_1(t) \\
\dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \dots + a_{2n}(t)x_n + b_2(t) \\
\quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\
\dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \dots + a_{nn}(t)x_n + b_n(t)
\end{cases}
$$

si todos los a_{ij}; $(i,j = 1\ 2\ 3 \dots n)$ son constantes el sistema es de coeficientes constantes.
Si por lo menos un a_{ij} es variable, será de coeficientes variables.
Si los terminos independientes $b_i(t)$; $(i = 1\ 2\ 3 \dots n)$ son todos nulos el sistema es HOMOGENEO; si al menos uno de ellos es diferente de cero el SISTEMA es NO HOMOGENE.
El sistema (I) anterior puede abreviarse del siguiente modo:

$$\bar{x}'(t) = A(t)\bar{x}(t) + \bar{b}(t) \qquad (II)$$

La mayoria de los sistemas y ecuaciones lineales pueden reducirse a la forma (I).

CALCULO DE VALORES Y VECTORES CARACTERISTICOS DE MATRICES. Ejemplos:

a) Valores propios reales y diferentes:
obtener los valores y vectores propios de la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Solucion: Valores caracteristicos:

Ec. caracteristica de: $A = \begin{vmatrix} 6-\lambda & -3 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$\lambda^2 - 7\lambda + 12 = 0 \begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = 4 \end{cases}$

Vector propio asociado al valor propio $\lambda_1 = 3$:

$$\begin{vmatrix} 6-3 & -3 \\ 2 & 1-3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} \therefore u_1 = u_2 \text{ y } \bar{u} = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

Vector propio asociado al valor propio $\lambda_2 = 4$:

$$\begin{vmatrix} 6-4 & -3 \\ 2 & 1-4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} \therefore 2v_1 = 3v_2$$

si $v_2 = 2$ entonces $v_1 = 3$

$$\therefore \bar{V} = \begin{vmatrix} 3 \\ 2 \end{vmatrix}$$

b) Valores propios reales repetidos: sea: $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

Ec. caracteristica de $A = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$$\lambda(\lambda+3)^2 = 0 \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = -3\ ✓ \\ \lambda_3 = -3\ ✓ \end{cases}$$

Vector propio asociado a $\lambda_1 = 0$

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \therefore \quad \begin{matrix} u_1 = u_3 \\ u_2 = u_3 \end{matrix} \quad \therefore \quad \bar{u} = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

Vector propio asociado al valor propio de multiplicidad 2 : $\lambda_{1,2} = -3$

$$\begin{vmatrix} -2+3 & 1 & 1 \\ 1 & -2+3 & 1 \\ 1 & 1 & -2+3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \therefore \quad \begin{matrix} v_1 + v_2 + v_3 = 0 \\ v_1 = -v_2 - v_3 \end{matrix}$$

Si v_2 y v_3 se toman arbitrariamente, entonces. $\bar{V} = \begin{vmatrix} -v_2 - v_3 \\ v_2 \\ v_3 \end{vmatrix} = v_2 \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} + v_3 \begin{vmatrix} - \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$

Luego los tres vectores propios son:

$\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$ dos vectores propios (L. independientes) correspondienta al mismo valor propio.

c) <u>Valores propios reales repetidos con degeneración (DEL V. PROPIO):</u>

sea:
$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}; \text{ Ec. característica: } \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 2 \end{cases}$$

Vector propio correspondiente al valor propio de multiplicidad dos.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} \therefore u_1 = u_2 \quad \bar{u} = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

m _ multiplicidad del V. propio

r _ nº de vectores propios obtenidos

m - r = la degeneración del valor propio $\lambda = 2$

Cálculo del 2º vector propio:

$$\begin{matrix} (A - \lambda A)\bar{u} = \bar{0} \\ (A - \lambda A)\bar{V} = \bar{u} \end{matrix} \quad \therefore \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

$v_1 - v_2 = 1 \quad$ si $v_2 = 0 \quad v_1 = 1$ siendo: $\bar{V} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

d) <u>Valores propios complejos:</u>

sea
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{cases} \lambda_1 = 1 + i \\ \lambda_2 = 1 - i \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1-1-i & -1 \\ 1 & 1-1-i \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} u_1 - i u_2 = 0 \\ \therefore \text{si } u_1 = i \quad u_2 = 1 \end{matrix}$$

$$\bar{u} = \begin{vmatrix} i \\ 1 \end{vmatrix} \quad \bar{v} = \begin{vmatrix} -i \\ 1 \end{vmatrix}$$

SOLUCION DE UN SISTEMA HOMOGENEO: $\bar{x}'(t) = A(t)\bar{x}(t)$

En este curso veremos sistemas de ecuaciones con coeficientes constantes: $\bar{x}'(t) = A\,\bar{x}(t)$

a) Método operacional.

b) " de los vectores propios

c) " de la matriz exponencial

Solución de un sistema homogéneo mediante vectores propios (Principio de superposición):

Sea $\bar{x}'(t) = A\bar{x}(t)$ (1) un sistema homogéneo c/coeficientes constantes.

Siendo un sistema de ecuaciones un conjunto de ecuaciones lineales. es lógico suponer que en lugar de un conjunto de funciones solución, se tenga un conjunto de vectores solución del sistema de la forma:

$\bar{x}(t) = \bar{K}_i e^{\lambda_i t}$ (2) donde $\bar{K}_i$ será cada vector propio asociado a cada valor propio λ_i de la ecuación característica de la matriz A del sistema de ecuaciones.

Sustituyendo (2) en (1) se tiene:

$(A - \lambda I)\bar{K} = \bar{0}$, Este es un sistema de ecuaciones algebraica, donde las incognitas son los elementos del vector $\bar{K}$, que serán diferentes de cero si se cumple que:

$\det|A - \lambda I| = 0$ Ec. característica de A

Resumiendo:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \begin{cases} \lambda_1 \Rightarrow (A - \lambda_1 I)\bar{K}_1 = \bar{0} \therefore \bar{x}_1(t) = \bar{K}_1 e^{\lambda_1 t} \\ \lambda_2 \Rightarrow (A - \lambda_2 I)\bar{K}_2 = \bar{0} \therefore \bar{x}_2(t) = \bar{K}_2 e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ \lambda_n \Rightarrow (A - \lambda_n I)\bar{K}_n = \bar{0} \therefore \bar{x}_n(t) = \bar{K}_n e^{\lambda_n t} \end{cases}$$

Entonces: $\{\bar{x}_1(t), \bar{x}_2(t), \ldots, \bar{x}_n(t)\}$ —(3) Conjunto de vectores solución del sistema (1).- La combinación lineal de éste conjunto: $\bar{x}(t) = C_1\bar{x}_1(t) + C_2\bar{x}_2(t) + \cdots + C_n\bar{x}_n(t)$. (4) donde $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Son constantes arbitrarias, es tambien una solución del sistema (1), en algún intervalo I.

Para que el conjunto de vectores solución (3), constituya un conjunto fundamel, su WRONSKIANO deberá ser diferente de cero., en cuyo caso la combinación (4) será la solucion general del sistema (1)

Ejemplo: Resolver el siguiente sistema: $x_1' = 6x_1 - 3x_2$ (1)

$x_2' = 2x_1 + x_2$ (

$\bar{x}'(t) = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\bar{x}(t)$ vimos anteriormente que:

$\lambda_1 = 3 \Rightarrow \bar{u} = \begin{vmatrix}1\\1\end{vmatrix} \therefore \left\{ \begin{vmatrix}1\\1\end{vmatrix} e^{3t}, \begin{vmatrix}3\\2\end{vmatrix} e^{4t} \right\}$ conjunto fundamental de vectores solucion del sistema

$\lambda_2 = 4 \Rightarrow \bar{V} = \begin{vmatrix}3\\2\end{vmatrix}$ $\bar{x}(t) = C_1\begin{vmatrix}1\\1\end{vmatrix}e^{3t} + C_2\begin{vmatrix}3\\2\end{vmatrix}e^{4t} = \begin{bmatrix} C_1e^{3t} + 3C_2e^{4t} \\ C_1e^{3t} + 2C_2e^{4t} \end{bmatrix}$

SERIES INFINITAS DE POTENCIAS DE x:

sea: $\{x^0, x^1, x^2, x^3, \ldots, x^n\}$ un conjunto de funciones (potencias de x) L. I.

$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ serie de Maclaurin, donde $f(x)$ es infinitamente derivable en $x=0$

$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ serie de Taylor, donde $f(x)$ es infinitamente derivable en $x=a$.

DESARROLLO EN SERIES DE MACLAURIN DE LAS FUNCIONES: Seno, coseno y la exponencial:

$$\operatorname{sen}(at)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(at)^{2n+1}}{(2n+1)!}=\frac{at}{1!}-\frac{(at)^3}{3!}+\frac{(at)^5}{5!}-\cdots \quad \text{—(1)}$$

$$\cos(at)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(at)^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{(at)^2}{2!}+\frac{(at)^4}{4!}-\cdots \quad \text{—(2)}$$

$$e^{at}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(at)^n}{n!}=1+at+\frac{(at)^2}{2!}+\frac{(at)^3}{3!}+\cdots \quad \text{—(3)}$$

FORMA DE LA SOLUCION DE UN SISTEMA DE ECUACIONES DIFERENCIALES HOMOGENEO CON COEFICIENTES CONSTANTES:

$$\text{Sea}\quad \underbrace{\begin{bmatrix} x_1'(t)\\ x_2'(t)\\ \vdots\\ x_n'(t)\end{bmatrix}}_{\bar{x}'(t)}=\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t)\\ x_2(t)\\ \vdots\\ x_n(t)\end{bmatrix}}_{\bar{x}(t)}$$

Este sistema puede estar sujeto a las condiciones en $t=0$ $\bar{x}(0)=\begin{vmatrix} x_1(0)\\ x_2(0)\\ \vdots\\ x_n(0)\end{vmatrix}$

o, las condiciones en $t=t_0\neq 0$. $\begin{vmatrix} x_1(t_0)\\ x_2(t_0)\\ \vdots\\ x_n(t_0)\end{vmatrix}$ en ambos casos estos vectores se denominan: "VECTOR DE CONDICIONES INICIALES"

En el primer caso las funciones soluciones del sistema serán desarrolladas alrededor de $x=0$ o series de MACLAURIN.

En el 2º caso seran desarrolladas alrededor de $t_0\neq 0$, o series de Taylor.

sea $\bar{x}'(t)=A\bar{x}(t)$ --(I) sujeto a: $\bar{x}(0)=\bar{P}_0$ (cte)

Supongamos como vector solución a:

$$\bar{x}(t)=\bar{P}_0+\bar{P}_1t+\bar{P}_2t^2+\bar{P}_3t^3+\cdots+\bar{P}_nt^n \quad \text{---(II)}$$

donde los $\bar{P}_i$, $i=0,1,2,3,\ldots,n$ son vectores constantes:

De acuerdo con las condiciones iniciales si hacemos $t=0$ en la ecuación (II) se obtiene: $\bar{x}(0)=\bar{P}_0$

Si (II) es solución de (I), la debe verificar, es decir:

$$\bar{P}_1+2\bar{P}_2t+3\bar{P}_3t^2+4\bar{P}_4t^3+\cdots+n\bar{P}t^n=A[\bar{P}_0+\bar{P}_1t+\bar{P}_2t^2+\bar{P}_3t^3+\cdots+\bar{P}_nt^n]$$

Igualando coeficientes de terminos iguales en "t", se obtiene:

$$\left.\begin{aligned}\bar{P}_1&=A\bar{P}_0\\ \bar{P}_2&=\frac{A^2}{2!}\bar{P}_0\\ \bar{P}_3&=\frac{A^3}{3!}\bar{P}_0\\ &\ \vdots\\ \bar{P}_n&=\frac{A^n}{n!}\bar{P}_0\end{aligned}\right\}\text{(III)}$$

Sustituyendo (III) en (II) se obtiene la solución del sistema (I) sujeto a las condiciones $\bar{x}(0)$:

$$\bar{x}(t)=\underbrace{\left[I+At+\frac{(At)^2}{2!}+\frac{(At)^3}{3!}+\cdots+\frac{(At)^n}{n!}\right]}_{e^{At}}\bar{x}(0)$$

$\bar{x}(t)=e^{At}\bar{x}(0)$, donde e^{At} matriz exponencial de A

PROPIEDADES DE LA MATRIZ EXPONENCIAL

a) $e^{At} = I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3} + \dots + \frac{(At)^n}{n!}$ (IV)

Si $t=0$ $e^{A(0)} = I \therefore e^{\bar{0}} = I$

b) Derivando la ecuacion (IV) respecto a t:

$$\frac{d}{dt}e^{At} = A\left[I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{At}{3!} + \dots + \frac{(At)^{n-1}}{(n-1)!}\right] = Ae^{At}$$

Como A puede factorizarse por la izquierda o por la derecha se tiene:

$$\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At} = e^{At}A$$

Si en esta expresion hacemos $t=0$: $\left.\frac{de^{At}}{dt}\right|_{t=0} = A$

c) $e^{At}\cdot e^{-At} = e^{At-At} = e^{(A-A)t} = e^{\bar{0}t} = e^{\bar{0}} = I$

TEOREMA DE KAYLEY HAMILTON: "TODA MATRIZ CUADRADA VERIFICA A SU ECUACION CARACTERISTICA".

Sea A una matriz cuadrada de orden n, cuya ecuación caracteristica es: $\det(A - \lambda I) = f(\lambda) = 0$

Luego: $f(A) = \bar{0}$

Dada:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Verificar el T. de K-H:

ecuación característica: $f(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 3 & 6-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 8\lambda + 15 = 0$

Luego: $f(A) = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} - 8\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} + 15\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & -8 \\ 24 & 33 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -16 & 8 \\ -24 & -48 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 15 & 0 \\ 0 & 15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1-16+15 & -8+8+0 \\ 24-24+0 & 33-48+15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

C) **VALORES PROPIOS COMPLEJOS:**

obtener: e^{At} de $A = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$

1) E. característica: $\begin{vmatrix} 6-\lambda & -1 \\ 5 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 10\lambda + 29 = 0 \begin{cases} \lambda_1 = 5+2i \\ \lambda_2 = 5-2i \end{cases}$

2) $\beta_0 + \beta_1 \lambda_i = e^{\lambda_i t}$ --- (I)

Para $\lambda_1 = 5+2i \Rightarrow \beta_0 + (5+2i)\beta_1 = e^{5t}(\cos 2t + i \operatorname{sen} 2t)$

" $\lambda_2 = 5-2i \Rightarrow \beta_0 + (5-2i)\beta_1 = e^{5t}(\cos 2t - i \operatorname{sen} 2t)$

Resolviendo el sistema anterior:

$$\beta_0 = \frac{2e^{5t}\cos 2t - 5e^{5t}\operatorname{sen} 2t}{2} \qquad \text{--- (3)}$$

$$\beta_1 = \frac{e^{5t}\operatorname{sen} 2t}{2} \qquad \text{--- (4)}$$

Sustituyendo λ_i por A en (I) se tiene:

$$e^{At} = \beta_0 I + \beta_1 A = \begin{bmatrix} \beta_0 + 6\beta_1 & -\beta_1 \\ 5\beta_1 & \beta_0 + 4\beta_1 \end{bmatrix}$$

Finalmente sustituyendo (3) y (4) en esta última expresión

$$e^{At} = \begin{bmatrix} \dfrac{2e^{5t}\cos 2t + e^{5t}\operatorname{sen} 2t}{2} & \dfrac{-e^{5t}\operatorname{sen} 2t}{2} \\ \dfrac{5e^{5t}\operatorname{sen} 2t}{2} & \dfrac{2e^{5t}\cos 2t - e^{5t}\operatorname{sen} 2t}{2} \end{bmatrix}$$

Resolver el sistema $\bar{x}'(t) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \bar{x}(t)$; sujeto a: $\bar{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

Del primer ejemplo de cálculo de la matriz exponencial se se tiene:

$$e^{At} = \begin{bmatrix} \dfrac{2e^{5t} + 4e^{-t}}{6} & \dfrac{e^{5t} - e^{-t}}{6} \\ \dfrac{4e^{5t} - 4e^{-t}}{6} & \dfrac{4e^{5t} + 2e^{-t}}{6} \end{bmatrix}$$

de la matriz de éste sistema.

Luego la solución del sistema es

$$\bar{x}(t) = e^{At}\bar{x}(0) = \begin{bmatrix} \dfrac{2e^{5t} + 4e^{-t}}{6} & \dfrac{e^{5t} - e^{-t}}{6} \\ \dfrac{4e^{5t} - 4e^{-t}}{6} & \dfrac{4e^{5t} + 2e^{-t}}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{x}(t) = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}e^{5t} + \frac{1}{3}e^{-t} \\ 2e^{5t} \end{bmatrix}$$

Si éste mismo sistema se quiere resolver bajo las condiciones $\bar{x}(2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ entonces $\bar{x}(t) = e^{A(t-2)}\bar{x}(2) = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}e^{5(t-2)} + \frac{1}{3}e^{-(t-2)} \\ 2e^{5(t-2)} \end{bmatrix}$

la matriz exponencial sufre un desplazamiento $(t-2)$ del mismo modo que los términos de la serie de Taylor en relación a los términos de la serie de Maclaurin.

SOLUCION DE UN SISTEMA DE ECUACIONES DIFERENCIALES NO HOMOGENEO LINEAL CON COEFICIENTES CONSTANTES.

SISTEMA:

$$\bar{x}' = A\bar{x} + \bar{b}(t)$$
$$\bar{x}_G' = A\bar{x}_G + \bar{b}(t)$$
$$\bar{x}_H' = A\bar{x}_H$$
$$\therefore \bar{x}_G' - \bar{x}_H' = A(\bar{x}_G - \bar{x}_H) + \bar{b}(t)$$
$$\bar{x}_P = A\bar{x}_P + \bar{b}(t)$$

- SOLUCION DEL SISTEMA HOMOGENEO ASOCIADO AL NO HOMOGENEO: $\bar{x}_H$
  - a) M. DEL OPERADOR DIFERENCIAL
  - b) M. DE LOS VECTORES PROPIOS
  - c) M. DE LA MATRIZ EXPONENCIAL
- SOLUCION PARTICULAR DEL SISTEMA: $\bar{x}_P$
  - d) M. DEL OPERADOR DIFERENCIAL
  - e) M. DE LOS COEFICIETES INDETERMINADOS.
  - f) M. DE VARIACION DE PARAMETROS
  - g) M. DE LA MATRIZ EXPONENCIAL

sea el sistema: $\bar{x}'(t) = A\bar{x}(t) + \bar{b}(t)$ (1)

sujeto a: $\bar{x}(t_0) = \begin{bmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \\ \vdots \\ x_n(t_0) \end{bmatrix}$, donde $t_0 \neq 0$

restemos $A\bar{x}(t)$ a ambos miembros de (1):

$$\bar{x}'(t) - A\bar{x}(t) = \bar{b}(t) \quad \text{—(2)}$$

premultipliquemos ambos miembros de (2) por e^{-At}:

$$\underbrace{e^{-At}[\bar{x}'(t) - A\bar{x}(t)]}_{\frac{d}{dt} e^{-At}\bar{x}(t)} = e^{-At}\bar{b}(t) \quad (3)$$

$$\frac{d}{dt} e^{-At}\bar{x}(t) = e^{-At}\bar{b}(t)$$

En esta última ecuación sustituyamos a t por τ para evitar confusión al integrar de t_0 a t, es decir:

$$\int_{t_0}^{t} d\, e^{-A\tau}\bar{x}(\tau) = \int_{t_0}^{t} e^{-A\tau}\bar{b}(\tau)\, d\tau$$

$$e^{-At}\bar{x}(t) - e^{-At_0}\bar{x}(t_0) = \int_{t_0}^{t} e^{-A\tau} b(\tau)\, d\tau$$

Premultiplicando por e^{At}:

$$\bar{x}(t) = e^{A(t-t_0)}\bar{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}\bar{b}(\tau)\, d\tau$$

$$x(t) = \quad \bar{x}_H \quad + \quad \bar{x}_P$$

Ejemplo: Resolver el sistema: $\bar{x}'(t) = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\bar{x}(t) + \begin{bmatrix} -4\cos t \\ -\operatorname{sen} t \end{bmatrix}$

Este sistema tiene:

$$\lambda_1 = 0 \quad \bar{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \lambda_2 = 4 \quad \bar{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad e^{At} = \begin{bmatrix} \frac{2e^{4t}+2}{4} & \frac{2e^{4t}-2}{4} \\ \frac{2e^{4t}-2}{4} & \frac{2e^{4t}+2}{4} \end{bmatrix}$$

Calculo de la y_p:

a) Por el metodo de los coeficientes indeterminados:

$$\bar{b}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} -4 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\bar{f}}\cos t + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}}_{\bar{g}}\operatorname{sen} t$$

$\bar{x}_P = \bar{u}\cos t + \bar{v}\operatorname{sen} t$ donde $\bar{u}$ y $\bar{v}$ son vectores constantes por determinar:

$\bar{x}_P$ verifica a $\bar{x}' = A\bar{x} + \bar{b}(t)$ es decir:

$$-\bar{u}\operatorname{sen} t + \bar{v}\cos t = A[\bar{u}\cos t + \bar{v}\operatorname{sen} t] + \bar{f}\cos t + \bar{g}\operatorname{sen} t$$

$$A\bar{u}\cos t - \bar{v}\cos t + \bar{f}\cos t + A\bar{v}\operatorname{sen} t + \bar{u}\operatorname{sen} t + \bar{g}\operatorname{sen} t = \bar{0}$$

Igualando coeficientes:

$$A\bar{u} - \bar{v} + \bar{f} = \bar{0} \quad (1) \times A \Rightarrow A^2\bar{u} - A\bar{v} + A\bar{f} = \bar{0} \quad (3)$$

$$A\bar{v} + \bar{u} + \bar{g} = \bar{0} \quad (2) \qquad \bar{u} + A\bar{v} + \bar{g} = \bar{0} \quad (4)$$

De (3) y (4):

$$[A^2 + I]\bar{u} = -A\bar{f} - \bar{g} \qquad (5)$$

De (5) $\bar{u} = [A^2+I]^{-1}[-A\bar{f} - \bar{g}]$ $\quad [A^2+I] = \begin{bmatrix} 9 & 8 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$;

$$[A^2+I]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{9}{17} & \frac{-8}{17} \\ \frac{-8}{17} & \frac{9}{17} \end{bmatrix} \qquad [A\bar{f} + \bar{g}] = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}\begin{bmatrix} -4 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ -9 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \bar{u} = \begin{bmatrix} \frac{9}{17} & \frac{-8}{17} \\ \frac{-8}{17} & \frac{9}{17} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

De (1)

$$\bar{v} = A\bar{u} + \bar{f} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \bar{x}_P = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\cos t + \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}\operatorname{sen} t = \begin{bmatrix} -2\operatorname{sen} t \\ 2\operatorname{sen} t + \cos t \end{bmatrix}$$

Resolver: $\bar{x}' = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \bar{x} + \begin{bmatrix} e^{2t} \\ 1 \end{bmatrix}$

Determinación de la $\bar{x}_P$ por el m. de Variación de parámetros.

$$A = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \bar{u} = \begin{vmatrix} 3 \\ 1 \end{vmatrix} \\ \bar{v} = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix} \end{matrix}$$

$$\bar{X}_H = \begin{bmatrix} 3e^{t} & e^{-t} \\ e^{t} & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \therefore \bar{X}_P = \begin{bmatrix} 3e^{t} & e^{-t} \\ e^{t} & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix} \quad \text{— (I)}$$

El Vector $\begin{vmatrix} u(t) \\ v(t) \end{vmatrix}$ satisface al sistema:

$$\begin{vmatrix} 3e^{t} & e^{-t} \\ e^{t} & e^{-t} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u' \\ v' \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2t} \\ 1 \end{bmatrix} \therefore \begin{vmatrix} u' \\ v' \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{e^{-t}}{2} & -\frac{e^{-t}}{2} \\ -\frac{e^{t}}{2} & \frac{3}{2}e^{t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2t} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{vmatrix} u \\ v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}e^{t} + \frac{1}{2}e^{-t} \\ -\frac{1}{6}e^{3t} + \frac{3}{2}e^{t} \end{vmatrix} \quad \text{sustituyendo en (I):}$$

$$\bar{X}_P = \begin{vmatrix} 3e^{t} & e^{-t} \\ e^{t} & e^{-t} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{1}{2}e^{t} + \frac{1}{2}e^{-t} \\ -\frac{1}{6}e^{3t} + \frac{3}{2}e^{t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{4}{3}e^{2t} + 3 \\ \frac{1}{3}e^{2t} + 2 \end{vmatrix}$$

Finalmente:

$$\bar{x}(t) = \bar{X}_H + \bar{X}_P$$

$$\bar{x}(t) = \begin{bmatrix} 3e^{t} & e^{-t} \\ e^{t} & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{vmatrix} c_1 \\ c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{4}{3}e^{2t} + 3 \\ \frac{1}{3}e^{2t} + 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3c_1e^{t} + c_2e^{-t} + \frac{4}{3}e^{2t} + 3 \\ c_1e^{t} + c_2e^{-t} + \frac{1}{3}e^{2t} + 2 \end{vmatrix}$$

Obtener la solución sujeta a $\bar{x}(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3c_1 + c_2 + \frac{13}{3} \\ c_1 + c_2 + \frac{7}{3} \end{bmatrix} \therefore \begin{matrix} c_1 = \frac{3}{2} \\ c_2 = \frac{5}{6} \end{matrix}$$

$$x(t) = \begin{pmatrix} \frac{9}{2}e^{t} + \frac{5}{6}e^{-t} + \frac{4}{3}e^{2t} + 3 \\ \frac{3}{2}e^{t} + \frac{5}{6}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{2t} + 2 \end{pmatrix} \checkmark$$

Resolver mediante el m. de la matriz exponencial el siguiente sistema:

$$\bar{x}' = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \bar{x}(t) + \begin{bmatrix} 2e^{-t} \\ e^{-t} \end{bmatrix} \text{ sujeto a } \bar{x}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

sabiendo que:

$$e^{At} = \begin{vmatrix} e^{t}+2te^{t} & 2te^{t} \\ -2te^{t} & e^{t}-2te^{t} \end{vmatrix}$$

$$x(t) = e^{At}\bar{x}(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} \bar{b}(\tau) d\tau$$

$$\bar{x}_H = \begin{vmatrix} e^{t}+2te^{t} & 2te^{t} \\ -2te^{t} & e^{t}-2te^{t} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 \\ 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2e^{t}+12te^{t} \\ 4e^{t}-12te^{t} \end{vmatrix}$$

$$\bar{x}_P = \int_0^t \begin{vmatrix} e^{t-\tau}+2(t-\tau)e^{t-\tau} & 2(t-\tau)e^{t-\tau} \\ -2(t-\tau)e^{t-\tau} & e^{t-\tau}-2(t-\tau)e^{t-\tau} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2e^{-\tau} \\ e^{-\tau} \end{vmatrix} d\tau$$

$$= \int_0^t \begin{vmatrix} 2e^{t-2\tau} + 6(t-\tau)e^{t-2\tau} \\ e^{t-2\tau} - 6(t-\tau)e^{t-2\tau} \end{vmatrix} d\tau = \begin{vmatrix} \dfrac{6te^{t}+e^{-t}-e^{t}}{2} \\ \dfrac{-6te^{t}-2e^{-t}+2e^{t}}{2} \end{vmatrix}$$

Finalmente:

$$\bar{x} = \bar{x}_H + \bar{x}_P = \begin{vmatrix} 15te^{t}+\frac{1}{2}e^{-t}+\frac{3}{2}e^{t} \\ -15te^{t}-2e^{-t}+6e^{t} \end{vmatrix}$$

TRANSFORMADA DE LAPLACE.

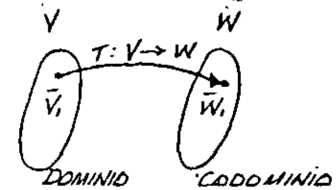
ESPACIOS VECTORIALES: Los conjuntos con elementos de muy diversa naturaleza donde se emplea el concepto de combinación lineal, tienen en común gran número de propiedades algebraicas que constituyen una estructura común llamada: "ESPACIO VECTORIAL".-

TRANSFORMADA. si V y W son dos espacios vectoriales; entonces una transformación de V en W ($T: V \to W$) con dominio en un subconjunto D de V será lineal si se cumplen las sigtes propiedades:

a) $T(\bar{V}_1 + \bar{V}_2) = T(\bar{V}_1) + T(\bar{V}_2) \quad \forall\ \bar{V}_1 \text{ y } \bar{V}_2 \in D$

b) $T(C\bar{V}) = CT(\bar{V}) \quad \forall\ \bar{V} \in D$

En general una transformación es una función entre espacios vectoriales definidos sobre un mismo campo; que asigna mediante una cierta regla de correspondencia a cada elemento de V uno y solamente un elemento de W, es decir: $T(\bar{V}) = \bar{W}$

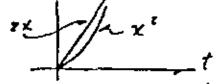


EJEMPLOS DE TRANSFORMACIONES:

Sea $\bar{V}_1 = x^2$ donde $\bar{V}_1 \in \bar{V}$ y $T(*) = \frac{d}{dx}$ es una transformación

Entonces: $\bar{W}_1 = T(x^2) = \frac{d}{dx}x^2 = 2x$

Se observa que al aplicarse la transformación anterior sobre una función real de variable real (x), se obtiene como imagen otra función real de la misma variable real.

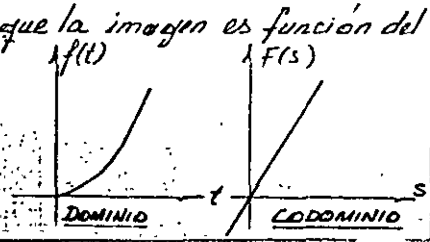


EJEMPLO DE TRANSFORMACION INTEGRAL:

Sea $\bar{V}_1 = t^2$ y $T(*) = \int_a^b st(*)dt$; a y b ctes, s parámetro

Entonces: $\bar{W}_1 = T(\bar{V}_1) = \int_a^b st(t^2)dt = \left(\frac{b^4 - a^4}{4}\right)s$

En éste caso se observa que la imagen es función del parámetro "s" y no de t



TRANSFORMACION INTEGRAL: Dados: $K(s,t)$ y $f(t)$ se llama transformación integral de $f(t)$ sobre $K(s,t)$ y en $[a,b]$, a la siguiente integral: $\int_a^b K(s,t)f(t)dt$ dónde $K(s,t)$ es el kernel ó núcleo de la transformación.-

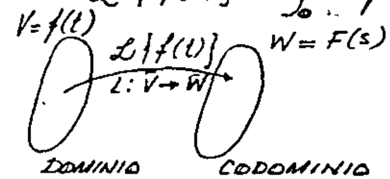
La transformación anterior puede existir o no, dependiendo del kernel seleccionado y de que con dicho kernel la integral converja en el intervalo dado $[a, b]$

TRANSFORMACION DE LAPLACE: Sea V un espacio vectorial de funciones $f(t)$ definidas para $t \geq 0$, la transformación integral que aplica a cada $f(t)$ de V en su imagen $F(s)$ de W, se llama transformación de Laplace y se define como:

$$\mathcal{L}\{*\} = \int_0^\infty e^{-st}(*)\,dt$$

Entonces para una $f(t)$ se tiene:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt = F(s)$$



Donde V es el conjunto de todas las funciones $f(t)$, para toda $t \geq 0$ y W es el conjunto de las funciones transformadas $F(s)$ bajo $\mathcal{L}$ es decir: $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$

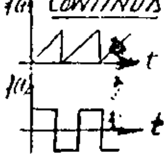
NOTA: En la mayoría de los problemas $t \geq 0$, luego la $\mathcal{L}$ que estudiaremos en éste curso es la lateral ó unilateral.

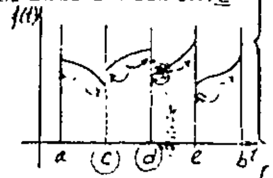
ING. JOEL GÓMEZ

DICIONES SUFICIENTES PERO NO NECESARIAS PARA STENCIA DE $\mathcal{L}$:

FUNCION CLASE "A"

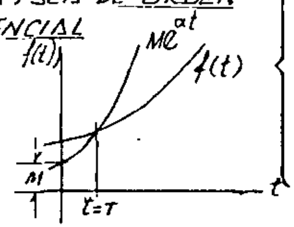
a) QUE $f(t)$ SEA SECCIONALMENTE CONTINUA





□ una $f(t)$ es seccionalm. continua en un intervalo $a \le t \le b$, si dicho intervalo puede dividirse en un nº finito de subintervalos en cada uno de los cuales se cumple: □ $f(t)$ es CONTINUA, 'N C/U SUBINTERVALO □ $\lim_{t\to c^+} f(t)$ y $\lim_{t\to d^-} f(t)$ EXISTEN

b) QUE $f(t)$ SEA DE ORDEN EXPONENCIAL



□ se dice que $f(t)$ es de ORDEN EXPONENCIAL α cuando $t\to\infty$, si existen M, α y $T>0$ constantes, tal que:

$$|f(t)| < Me^{\alpha t} \;\; \forall\; t > T$$

o bien:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{e^{\alpha t}} \text{ EXISTE } (\neq \pm\infty)$$

CONCLUSION: Si $f(t)$ es "CLASE A" es ACOTADA, LUEGO $\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$ EXISTE $\forall\; s > \alpha$ (α abscisa de convergencia) sin embargo puesto que ésta condición es SUFICIENTE una función puede NO SER CLASE "A" y tener $\mathcal{L}$ ó viceversa.

EJPLOS: $f(t) = K$ es seccionalmente continua y de orden exponencial

$f(t) = t^n$ ✓ ✓ ✓ ✓

$f(t) = e^{mt}$ ✓ ✓ ✓ ✓

sen at y Cos at Son ✓ ✓ ✓ ✓

$f(t) = t^n e^{mt} \cos at \quad n > 0$

Hagamos: $M = 1 \quad \alpha = 2m$

$$\Rightarrow |t^n e^{mt} \cos at| < e^{2mt} \qquad (I)$$

$$\left|\frac{t^n \cos at}{e^{mt}}\right| < 1$$

Para toda a y t: $-1 \le \cos at \le 1$ ∴ $\cos at$ es ACOTADA.

Además: $\lim_{t\to\infty} \frac{t^n}{e^{mt}} = \lim_{t\to\infty} \frac{n!}{m^n e^{mt}} = 0$ (L'HOPITAL)

Luego (I) se cumple:

EJPLO: $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$ NO ES CLASE "A" sin embargo

$$\mathcal{L}\left\{\frac{1}{\sqrt{t}}\right\} = \sqrt{\frac{\pi}{s}}$$

CALCULO DE $\mathcal{L}$ DE ALGUNAS FUNCIONES:

$\mathcal{L}\{K\} = \frac{K}{s} \Rightarrow \mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}$

$\mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2} \Rightarrow \mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n}{s}\mathcal{L}\{t^{n-1}\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$ $\quad \left\{ \begin{array}{ll} u = t^n & dv = e^{-st} \\ du = nt^{n-1}dt & v = -\frac{e^{-st}}{s} \end{array} \right.$

$\mathcal{L}\{e^{\pm at}\} = \frac{1}{s \mp a}$

$\mathcal{L}\{\operatorname{sen} at\} = \frac{a}{s^2 + a^2}$

$\mathcal{L}\{\cos at\} = \frac{s}{s^2 + a^2}$

$\mathcal{L}\{\operatorname{senh} at\} = \frac{a}{s^2 - a^2}$

$\mathcal{L}\{\cosh at\} = \frac{s}{s^2 - a^2}$

METODOS PARA CALCULAR $\mathcal{L}$:

✓1) Método directo (Fórmula de $\mathcal{L}$)
2) Método de las series (cuando $f(t)$ se desarrolla en serie)
3) Método de las ecuaciones diferenciales
4) Derivación con respecto a un parámetro
✓5) Diversos métodos (Comprende el uso de artificios y teoremas de $\mathcal{L}$.)
✓6) Mediante el uso de tablas.

TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE ($\mathcal{L}^{-1}$): El problema de obtener $f(t)$ dada su imagen $F(s)$ Corresponde al concepto de transformación inversa.- Sea W el espacio vectorial de todas las $F(s)$ definidas para $s > \alpha$, la transformación que aplica a cada $F(s)$ de W en la función $f(t)$ de V y de la cual es imagen se llama transformación inversa de Laplace, es decir:

Si: $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$

La $\mathcal{L}^{-1}$ se define realmente como: $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi j}\int_{\alpha - j\infty}^{\alpha + j\infty} e^{st} F(s)\,ds$

Como usar (I) NO ES FACIL ENTONCES:

METODOS PARA CALCULAR $\mathcal{L}^{-1}$:

✓1) Mediante el conocimiento de $\mathcal{L}$ de ciertas funciones
✓2) Método de las fracciones parciales
3) " de las series
4) " de las ecuaciones diferenciales
5) Derivación respecto a un parámetro
✓6) Diversos métodos (comprende el uso de artificios y teoremas de $\mathcal{L}^{-1}$
✓7) uso de tablas
8) Mediante el uso de la fórmula de inversión compleja (I)

TEOREMA DE EXISTENCIA Y UNICIDAD DE $\mathcal{L}^{-1}$ (TAREA):

1. Propiedad de linealidad de $\mathcal{L}$:

Sean $f_1(t)\ f_2(t) \dots f_n(t)$ y

$C_1,\ C_2, \dots, C_n$. Constantes o escalares.

entonces: $\mathcal{L}\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) + \dots + c_n f_n(t)\}$

$$\mathcal{L}\{C_1 f_1(t)\} + \mathcal{L}\{C_2 f_2(t)\} + \dots + \mathcal{L}\{C_n f_n(t)\}$$
$$= C_1 \mathcal{L}\{f_1(t)\} + C_2 \mathcal{L}\{f_2(t)\} + \dots + C_n \mathcal{L}\{f_n(t)\}$$
$$= C_1\ F_1(s) + C_2\ F_2(s) + \dots + C_n\ F_n(s)$$

Demostracion.

$$\mathcal{L}\{c_1 f_1(t)\} + \mathcal{L}\{c_2 f_2(t)\} + \dots + \mathcal{L}\{c_n f_n(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} c_1 f_1(t)\,dt + \int_0^\infty e^{-st} c_2 f_2(t)\,dt + \dots + \int_0^\infty e^{-st} f_n(t)\,dt$$

$c_1 \mathcal{L}\{f_1(t)\}$

$$= c_1 \underbrace{\int_0^\infty e^{-st} f_1(t)\,dt}_{\mathcal{L}\{f_1(t)\}} + c_2 \overbrace{\int_0^\infty e^{-st} f_2(t)\,dt}^{\mathcal{L}\{f_2(t)\}} + \dots + c_n \underbrace{\int_0^\infty e^{-st} f_n(t)\,dt}_{\mathcal{L}\{f_n(t)\}}$$

$$\therefore \mathcal{L}\{C_1 f_1(t)\} + \mathcal{L}\{C_2 f_2(t)\} + \dots + \mathcal{L}\{C_n f_n(t)\} = C_1 F_1(s) + C_2 F_2(s) + \dots + C_n F_n(s)$$

Emplos.

$$\mathcal{L}\{4t^2 - 3\cos 2t + 5e^{-t}\}$$
$$= 4\mathcal{L}\{t^2\} - 3\mathcal{L}\{\cos 2t\} + 5\mathcal{L}\{e^{-t}\}$$
$$4\left[\frac{2!}{s^3}\right] - 3\left[\frac{s}{s^2+4}\right] + 5\left[\frac{1}{s+1}\right]$$

Algunos valores de la F. Gamma

$\Gamma(0) = +\infty$	
$\Gamma(-\frac{1}{2}) = -2\sqrt{\pi}$	$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$
$\Gamma(-1) = -\infty$	$\Gamma(1) = 1$
$\Gamma(-\frac{3}{2}) = \frac{4}{3}\sqrt{\pi}$	$\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$
$\Gamma(-2) = +\infty$	$\Gamma(2) = 1$
$\Gamma(-\frac{5}{2}) = -\frac{8}{15}\sqrt{\pi}$	$\Gamma(\frac{5}{2}) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}$
$\Gamma(-3) = -\infty$	$\Gamma(3) = 2$
$\Gamma(-\frac{7}{2}) = \frac{16}{105}\sqrt{\pi}$	$\Gamma(\frac{7}{2}) = \frac{15}{8}\sqrt{\pi}$
$\Gamma(-4) = +\infty$	$\Gamma(4) = 6$

1. Propiedad de linealidad de $\mathcal{L}^{-1}$:

Sean $F_1(s), F_2(s), \dots F_n(s)$ funciones de "s"

y $C_1\ C_2 \dots C_n$ Constantes o escalares

Entonces: $\mathcal{L}^{-1}\{C_1 F_1(s) + C_2 F_2(s) + \dots + C_n F_n(s)\}$

$$\mathcal{L}^{-1}\{C_1 F_1(s)\} + \mathcal{L}^{-1}\{C_2 F_2(s)\} + \dots + \mathcal{L}^{-1}\{C_n F_n(s)\} =$$
$$C_1 \mathcal{L}^{-1}\{F_1(s)\} + C_2 \mathcal{L}^{-1}\{F_2(s)\} + \dots + C_n \mathcal{L}^{-1}\{F_n(s)\}$$
$$= C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t) + \dots + C_n f_n(t)$$

Demostracion:

Si. $\mathcal{L}\{C_1 f_1(t)\} + \mathcal{L}\{C_2 f_2(t)\} + \dots + \mathcal{L}\{C_n f_n(t)\} = C_1 F_1(s) + C_2 F_2(s) + \dots + C_n F_n(s)$

entonces aplicando $\mathcal{L}^{-1}$ a ambos miembros de la ecuación anterior se tendrá:

$$\mathcal{L}^{-1}\mathcal{L}\{C_1 f_1(t)\} + \mathcal{L}^{-1}\mathcal{L}\{C_2 f_2(t)\} + \dots + \mathcal{L}^{-1}\mathcal{L}\{C_n f_n(t)\} = \mathcal{L}^{-1}\{C_1 F_1(s)\} + \mathcal{L}^{-1}\{C_2 F_2(s)\} + \dots$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{C_1 F_1(s)\} + \mathcal{L}^{-1}\{C_2 F_2(s)\} + \mathcal{L}^{-1}\{C_n F_n(s)\} = C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t) + \dots + C_n f_n(t)$$

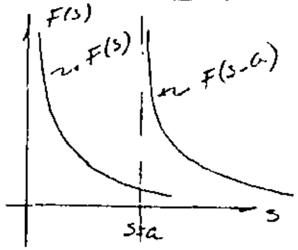
Emplos

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{8}{s^3} - \frac{3s}{s^2+4} - \frac{5}{s+1}\right\}$$
$$8\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\} - 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\} - 5\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}$$
$$= 4t^2 - 3\cos 2t - 5e^{-t}$$

2ª. PROPIEDAD DE TRASLACION EN EL DOMINIO DE "S" DE

Si $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$

$\Rightarrow \mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$



Demostración.

$$\text{si } \mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt = F(s)$$

Entonces:

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}e^{at}f(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}f(t)\,dt = F(s-a)$$

Esta integral será convergente siempre que: $s-a \geq 0$, $s \geq a$

Ejemplos:

$$\mathcal{L}\{e^{3t}t^2\} = \mathcal{L}\{t^2\}_{s=s-3} = \frac{2}{s^3}\Big|_{s=s-3} = \frac{2}{(s-3)^3}$$

$$\mathcal{L}\{e^{-2t}\sin 4t\} = \mathcal{L}\{\sin 4t\}_{s=s+2} = \frac{4}{s^2+16}\Big|_{s=s+2} = \frac{4}{(s+2)^2+16}$$

$$\mathcal{L}\{e^{2t}\cos 3t\} = \mathcal{L}\{\cos 3t\}_{s=s-2} = \frac{s}{s^2+9}\Big|_{s=s-2} = \frac{s-2}{(s-2)^2+9}$$

2)- 1ª PROPIEDAD DE TRASLACION EN EL DOM. DE "S" DE $\mathcal{L}^{-1}$

Si $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$

$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\{F(s-a)\} = e^{at}f(t)$

Demostración:

$$\text{Si } \mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a) \qquad (I)$$

Entonces aplicando $\mathcal{L}^{-1}$ a (I):

$$\mathcal{L}^{-1}\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = \mathcal{L}^{-1}\{F(s-a)\}$$

$$\therefore \mathcal{L}^{-1}\{F(s-a)\} = e^{at}f(t).$$

Ejemplos:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s-3)^3}\right\} = e^{3t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^3}\right\} = t^2e^{3t}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\overset{6s-12+8}{6s-4}}{\underset{(s-2)^2+16}{s^2-4s+20}}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6(s-2)+8}{(s-2)^2+16}\right\}$$

$$= 6\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-2}{(s-2)^2+16}\right\} + 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{(s-2)^2+16}\right\}$$

$$= 6e^{2t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+16}\right\} + 2e^{2t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s^2+16}\right\}$$

$$= 6e^{2t}\cos 4t + 2e^{2t}\sin 4t$$

NOTA: Si $F(s)$ presenta un desplazamiento sin estar totalmente desplazada se puede aplicar:

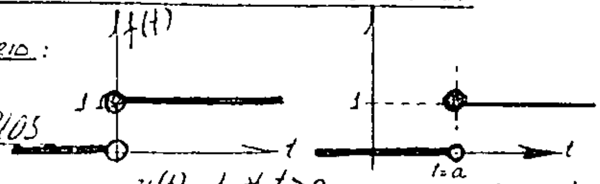
$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = e^{at}\mathcal{L}^{-1}\{F(s+a)\}$$

Ejemplo $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+2}{(s-4)^2+16}\right\} = e^{4t}\mathcal{L}^{-1}\{F(s+4)\} = e^{4t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\overset{(s+6)}{s+4+2}}{s^2+16}\right\}$

3). 2ª Propiedad de traslación en el dominio de "t" de $\mathcal{L}$:

Función escalón unitario:

HACER MUCHOS EJMPLOS



$u(t) = 1 \ \forall \ t \geq 0$

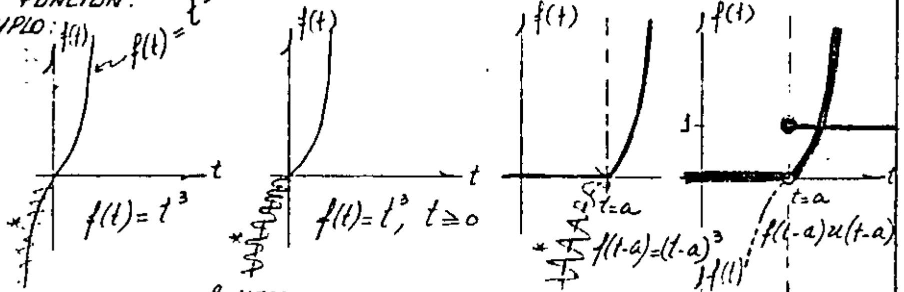
$u(t) = 0 \ \forall \ t < 0$

$u(t-a) = \begin{cases} 0, & t < a \\ 1, & t \geq a \end{cases}$

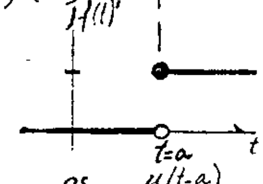
NOTA.

LA FUNCION ESCALON UNITARIO AL APLICARSELE (MULTIPLICAR) A OTRA FUNCION $f(t)$ DEFINIDA $\forall \ t \geq 0$ TRUNCA PARTE DE LA GRAFICA DE LA FUNCION.

EJMPLO:



* NO SE INCLUYE $\mathcal{L}$ LATERAL



HACER VARIOS EJMPLOS:

Si $a \geq 0$ y si $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\} = e^{-as}\mathcal{L}\{f(t)\} = e^{-as}F(s)$$

Demostración:

$$\mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\} = \int_0^a e^{-st} f(t-a)\underbrace{u(t-a)}_{0}dt + \int_a^\infty e^{-st} f(t-a)\underbrace{u(t-a)}_{1}dt$$

$u(t-a) = 0, \ 0 < t < a$

$u(t-a) = 1, \ t \geq a$

$$\mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\} = \int_a^\infty e^{-st} f(t-a)dt$$

Realicemos un cambio de variable: $\begin{cases} t - a = v & dt = dv \\ \text{si } t = a & v = 0 \\ t = v + a \end{cases}$

$$\mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\} = \int_0^\infty e^{-s(v+a)} f(v)dv = e^{-as}\underbrace{\int_0^\infty e^{-sv} f(v)dv}_{\mathcal{L}\{f(t)\}}$$

Corolario:

si $f(t) = 1 \Rightarrow \mathcal{L}\{u(t-a)\} = e^{-as}\mathcal{L}\{1\} = \frac{e^{-as}}{s}$

OTRA FORMULA MUY UTIL:

$$\boxed{\mathcal{L}\{f(t)u(t-a)\} = e^{-as}\mathcal{L}\{f(t+a)\}}$$

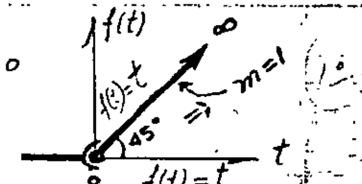
3) 2ª Propiedad de traslación en el dominio de "t" de $\mathcal{L}^{-1}$:

Si $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = f(t-a)\,u(t-a)$$

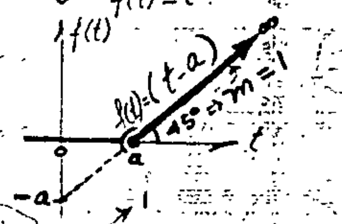
Función Rampa

$$r(t) = [t u(t)] = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ t, & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$



$$\mathcal{L}\{r(t)\} = \mathcal{L}\{tu(t)\} = \frac{e^{0s}}{s^2} = \frac{1}{s^2}$$

$$r(t-a) = [(t-a)u(t-a)] = \begin{cases} 0, & \text{si } t < a \\ t-a, & \text{si } t \geq a \end{cases}$$



$$= e^{-as}\mathcal{L}\{t\} = \frac{e^{-as}}{s^2}$$

$$\mathcal{L}\{r(t)\} = \mathcal{L}\{tu(t)\} = \mathcal{L}\{(t-0)u(t-0)\} = e^{-0s}\mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2}$$

$$\mathcal{L}\{r(t-a)\} = \mathcal{L}\{(t-a)u(t-a)\} = e^{-as}\mathcal{L}\{t\} = \frac{e^{-as}}{s^2}$$

4 PROPIEDAD DE CAMBIO DE ESCALA DE $\mathcal{L}$:

si $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$$

DEMOSTRACION:

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(at)\, dt$$

Hagamos
$$\begin{cases} at = u \;\therefore\; t = \frac{u}{a} \\ dt = \frac{du}{a} \\ \text{si } t=0 \quad u=0 \end{cases}$$

Sustituyendo:

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \int_0^\infty e^{-s\left(\frac{u}{a}\right)} f(u)\, \frac{du}{a} = \frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-\frac{s}{a}u} f(u)\, du$$

$$\therefore \mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$$

EJEMPLOS 1: si $\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{e^{-s}}{s} = F(s)$

obtener $\mathcal{L}\{e^{-t} f(2t)\}$

Solución:

$$\mathcal{L}\{f(2t)\} = \frac{1}{2}\,\frac{e^{-\frac{s}{2}}}{\frac{s}{2}} = \frac{e^{-\frac{s}{2}}}{s}$$

$$\mathcal{L}\{e^{-t} f(2t)\} = \frac{1}{2}\,\frac{e^{-\frac{s+1}{2}}}{\frac{s+1}{2}} = \frac{e^{-\frac{s+1}{2}}}{s+1}$$

EJEMPLO 2:

si $\mathcal{L}\{\operatorname{sen} t\} = \frac{1}{s^2+1}$

obtener $\mathcal{L}\{\operatorname{sen} 4t\} = \frac{1}{4}\,\frac{1}{\left(\frac{s}{4}\right)^2+1} = \frac{4}{s^2+16}$

4 PROPIEDAD DE CAMBIO DE ESCALA DE $\mathcal{L}^{-1}$

si $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\{F(ks)\} = \frac{1}{k} f\left(\frac{t}{k}\right)$$

Demostración:

Sabemos que $\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$ (I)

Hagamos $a = \frac{1}{k}$ y sustituyamos en (I)

$\mathcal{L}\{f\left(\frac{t}{k}\right)\} = k F(ks)$ (II)

apliquemos $\mathcal{L}^{-1}$ a (II)

$$k\,\mathcal{L}^{-1}\{F(ks)\} = f\left(\frac{t}{k}\right)$$

$$\therefore \mathcal{L}^{-1}\{F(ks)\} = \frac{1}{k} f\left(\frac{t}{k}\right)$$

EJEMPLOS 1: si $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = 8t^2 e^{2t}$

obtener: $\mathcal{L}^{-1}\{e^{-s} F(2s)\}$

Solucion:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(2s)\} = \frac{1}{2}(8)\left(\frac{t}{2}\right)^2 e^{2\left(\frac{t}{2}\right)} = t^2 e^t$$

$$\therefore \mathcal{L}^{-1}\{e^{-s} F(2s)\} = (t-1)^2 e^{(t-1)} u(t-1)$$

EJEMPLO 2: si $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = 4t \operatorname{sen} 2t$

obtener: $\mathcal{L}^{-1}\{e^{-2s} F(2s)\}$

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(2s)\} = \frac{1}{2}\, 4\left(\frac{t}{2}\right) \operatorname{sen} 2\left(\frac{t}{2}\right)$$

$$= t \operatorname{sen} t$$

$$\therefore \mathcal{L}^{-1}\{e^{-2s} F(2s)\} = (t-2)\operatorname{sen}(t-2)\, u(t-2)$$

5)- TRASFORMADA DIRECTA DE LAS DERIVADAS DE UNA $f(t)$:

Si $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$$

1° $f(t)$ es continua
2° $f(t)$ es de o. exponencial
3° $f'(t)$ es seccionalmente continua
4° Las derivadas son respecto a "t"

DEMOSTRACION:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f'(t)\,dt$$

INTEGRANDO POR PARTES:

$u = e^{-st}$ $\quad dv = f'(t)\,dt$

$du = -s e^{-st} dt$ $\quad v = f(t)$

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \left[e^{-st} f(t)\right]_0^\infty + s\underbrace{\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt}_{F(s)}$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt} f(t)\right\} = 0 - f(0) + sF(s) = sF(s) - f(0)$$

PARA LA 2ª DERIVADA:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt} f'(t)\right\} = s\mathcal{L}\{f'(t)\} - f'(0)$$
$$= s\left[sF(s) - f(0)\right] - f'(0)$$
$$\therefore \mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2F(s) - s f(0) - f'(0)$$

En general para la $\frac{d^n}{dt^n} f(t)$

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

EJEMPLOS DE APLICACION DE ESTA PROPIEDAD:

1) Calcular: $\mathcal{L}\{1\}$; $f(t) = 1$ $\quad f(0) = 1$ $\quad f'(t) = 0$
$\therefore \mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$
$\mathcal{L}\{0\} = s\mathcal{L}\{1\} - 1 = 0$ $\quad \therefore \mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}$

2) Calcular $\mathcal{L}\{t\}$, $f(t) = t$ $\quad f(0) = 0$ $\quad f'(t) = 1$
$\therefore \mathcal{L}\{1\} = s\mathcal{L}\{t\} - 0$ $\quad \therefore \mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2}$

3) Calcular $\mathcal{L}\{e^{at}\}$, $f(t) = e^{at}$ $\quad f(0) = 1$ $\quad f'(t) = ae^{at}$
$\mathcal{L}\{ae^{at}\} = s\mathcal{L}\{e^{at}\} - 1$ $\quad \therefore \mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}$

NOTAS

1- Si $f(t)$ NO ES CONTINUA EN $t=0$ pero $\lim_{t\to 0^+} f(t) = f(0_+)$ existe, aunque no sea $= f(0)$, el cuál puede o no existir; entonces $\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0_+)$.

2- Si $f(t)$ NO ES CONTINUA EN $t=a$, entonces:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0) - e^{-as}\left[f(a_+) - f(a_-)\right]$$

3- $$F(s) = \frac{\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt} f(t)\right\} + f(0)}{s}$$

5- TRANSFORMADA INVERSA DE LAS DERIVADAS DE UNA $F(s)$:

Si $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{d}{ds} F(s)\right\} = -t f(t)$$

REGLA DE LEIBNIZ PARA DERIVAR INTEGRALES.

Si $F(t) = \int_u^v G(t,x)\,dx$ $\quad u = u(t)$, $v = v(t)$, x Variable muda

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} F(t) = \int_u^v \frac{\partial}{\partial t} G(t,x)\,dx + G(t,v)\frac{\partial v}{\partial t} - G(t,u)\frac{\partial u}{\partial t}$$

DEMOSTRACION:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt \qquad (I)$$

$\frac{d}{ds}(I)$

$$\frac{d}{ds} F(s) = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s} e^{-st} f(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-st}(-t f(t))\,dt$$

$$\therefore \frac{d}{ds} F(s) = \mathcal{L}\{-t f(t)\} \qquad (II)$$

APLICANDO $\mathcal{L}^{-1}$ A (II)

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{d}{ds} F(s)\right\} = -t f(t) \qquad (III)$$

DESPEJANDO $f(t)$ DE (III):

$$\boxed{f(t) = -\frac{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{d}{ds} F(s)\right\}}{t}} \;*$$

EJEMPLO: $\mathcal{L}^{-1}\left\{\ln \frac{s^2+1}{s^2-1}\right\}$, $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{s}{\beta}\right\}$

EN GENERAL:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{d^n}{ds^n} F(s)\right\} = (-t)^n f(t)$$

$F(s)$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\beta}{s^2+\beta^2}\right\} = \operatorname{sen}\beta t$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{d}{ds}\left(\frac{\beta}{s^2+\beta^2}\right)\right\} = -t\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\beta}{s^2+\beta^2}\right\} = -t \operatorname{sen}\beta t$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-2\beta s}{(s^2+\beta^2)^2}\right\} = -t\operatorname{sen}\beta t \qquad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+\beta^2)^2}\right\} = \frac{t \operatorname{sen}\beta t}{2\beta}$$

6) LA TRANSFORMADA DE UNA FUNCION $f(t)$ MULTIPLICADA POR t ó POTENCIAS DE t (t^n):

Si $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\{t f(t)\} = -\frac{d}{ds} F(s)$$

EN GENERAL.

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$$

Ejemplos

a) $\mathcal{L}\{t e^{3t}\} = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{e^{3t}\} = -\frac{d}{ds}\frac{1}{s-3}$

b) $\mathcal{L}\{t \cos 2t\} = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{\cos 2t\} = -\frac{d}{ds}\frac{s}{s^2+4}$

c) $\mathcal{L}\{t e^{2t} \cos 3t\}$

$$-dF(s) = \mathcal{L}\{t f(t)\}\, ds$$

$$F(s) = -\int_{\infty}^{s} \mathcal{L}\{t f(t)\}\, ds$$

$$\boxed{F(s) = \int_{s}^{\infty} \mathcal{L}\{t f(t)\}\, ds}$$

Ejemplo obtener:

$$\mathcal{L}\{\underbrace{\frac{\operatorname{sen} t}{t}}_{f(t)}\} = \int_{s}^{\infty} \mathcal{L}\{t\left(\frac{\operatorname{sen} t}{t}\right)\} ds = \int_{s}^{\infty} \mathcal{L}\{\operatorname{sen} t\}\, ds = \int_{s}^{\infty} \frac{ds}{s^2+1} = \operatorname{arc\,tan} s \Big]_{s}^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tan} s$$

6) TRANSFORMADA INVERSA DE UNA FUNCIÓN $F(s)$ MULTIPLICADA POS s ó POTENCIAS DE s (s^n)

Si $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$ y $f(0) = 0$

Entonces: $\mathcal{L}^{-1}\{sF(s)\} = \frac{d}{dt} f(t)$ si $f(0) = 0$

DEMOSTRACION

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - \cancel{f(0)}^{\,0} \qquad (I)$$

APLICANDO $\mathcal{L}^{-1}$ A (I) se obtiene:

$$\therefore \mathcal{L}^{-1}\{s\underbrace{F(s)}_{f(t)}\} = f'(t) \quad \text{si } f(0) = 0$$

Si $f(0) \neq 0 \Rightarrow \mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$ luego:

ENTONCES: $\mathcal{L}^{-1}\{sF(s)\} = f'(t) + f(0)\delta_0(t)$

DONDE: $\delta_0(t)$ ES LA FUNCION δ DE DIRAC ó FUNCION PULSO.

Ejemplo: $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+16}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{s\,\frac{1}{s^2+16}\right\}$

Como $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) = \frac{1}{4}\operatorname{sen} 4t$ y $f(0) = 0$ entonces:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+16}\right\} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{4}\operatorname{sen} 4t\right) = \cos 4t$$

NOTA si $f(0) \neq 0$ entonces:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$$

aplicando $\mathcal{L}^{-1}$ se obtiene.

$$\mathcal{L}^{-1}\{sF(s)\} = f'(t) + \mathcal{L}^{-1}\{f(0)\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{sF(s)\} = f'(t) + f(0)\,\mathcal{L}^{-1}\{1\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{sF(s)\} = f'(t) + f(0)\,\delta_0(t)$$

TEOREMA DEL VALOR INICIAL:

Si: $f(t)$ es Continua en $t=0$ y

$f'(t)$ es seccionalmente continua y de orden exponencial,

entonces:

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$$

Demostración:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f'(t)\,dt = sF(s) - f(0) \qquad (I)$$

Tomando límite cuando $s\to\infty$ en (I) se tiene:

$$\lim_{s\to\infty}\int_0^\infty e^{-st} f'(t)\,dt = \lim_{s\to\infty}[sF(s) - f(0)]$$

$$\int_0^\infty \lim_{s\to\infty} \overset{\nearrow 0}{e^{-st}} \cdot \lim_{s\to\infty} f'(t)\,dt = \lim_{s\to\infty} sF(s) - f(0) = 0$$

$$\therefore \lim_{s\to\infty} sF(s) = f(0)$$

pero: $\lim_{t\to 0} f(t) = f(0)$ siempre que $f(t)$ sea Continua en $t=0$

$$\therefore \boxed{\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s)}$$

Esto significa que: El Valor inicial de t es 0

El Valor inicial de s es ∞

EJMPLOS: Verificar el T. del V. inicial para las sigtes funciones:

a) $f(t) = 3 - 2\cos t$

b) $f(t) = (2t+3)^2$

c) $f(t) = t + \operatorname{sen} 3t$

Solución a a): $\quad s\left[\frac{3}{s} - \frac{2s}{s^2+1}\right] = 3 - 2 = 1$

$$\lim_{t\to 0}(3 - 2\cos t) = \lim_{s\to\infty} s\,\mathcal{L}\{3 - 2\cos t\} = 1$$

TEOREMA DEL VALOR FINAL.

Tomando límite cuando $s\to 0$ en (I)

$$\int_0^\infty \lim_{s\to 0} e^{-st} \cdot \lim_{s\to 0} f'(t)\,dt = \lim_{s\to 0}[sF(s) - f(0)]$$

$$\int_0^\infty f'(t)\,dt = [f(t)]_0^\infty = \lim_{s\to 0} sF(s) - f(0)$$

$$f(\infty) - \cancel{f(0)} = \lim_{s\to 0} sF(s) - \cancel{f(0)}$$

$$\therefore f(\infty) = \boxed{\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)}$$

Esto significa que:

El Valor final de t es ∞

El Valor final de s es 0

$$\int_0^t \Longleftrightarrow \int_\infty^s$$

EJMPLOS: Verificar el T. del V final para las sigtes funciones:

a) $1 + e^{-t}(\operatorname{sen} t + \cos t)$

b) $t^3 e^{-2t}$

Demostrar que: c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-3t} - e^{-6t}}{t}\,dt = \ln 2$

d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos 6t - \cos 4t}{t}\,dt = \ln\frac{2}{3}$

Solución a d):

$$\int_0^\infty \frac{e^{-3t} - e^{-6t}}{t}\,dt = \lim_{t\to\infty}\int_0^t \frac{e^{-3t} - e^{-6t}}{t}\,dt = \lim_{s\to 0} s\left[\mathcal{L}\left\{\int_0^t \frac{e^{-3t} - e^{-6t}}{t}\,dt\right\}\right]$$

$$= \lim_{s\to 0} \cancel{s}\left[\frac{\mathcal{L}\left\{\frac{e^{-3t} - e^{-6t}}{t}\right\}}{\cancel{s}}\right] = \lim_{s\to 0}\int_s^\infty \mathcal{L}\{e^{-3t} - e^{-6t}\}_{s=u}\,du$$

$$= \lim_{s\to 0}\int_s^\infty \left(\frac{1}{u+3} - \frac{1}{u+6}\right)du = \lim_{s\to 0}\left[\ln\frac{u+3}{u+6}\right]_s^\infty$$

$$= \lim_{s\to 0}\left[\ln 1 - \ln\frac{s+3}{s+6}\right] = 0 - \ln\frac{3}{6} = \underline{\underline{\ln 2}}$$

e) Probar que: $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}$

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt = \lim_{s\to 0} s\,\mathcal{L}\left\{\int_0^t \frac{\operatorname{sen} t}{t}\right\} = \lim_{s\to 0} s\left[\frac{\mathcal{L}\left\{\frac{\operatorname{sen} t}{t}\right\}}{s}\right]$$

7. TRANSFORMADA DE UNA FUNCION $f(t)$ DIVIDIDA "t" O POTENCIAS DE "t" (t^n):

Si $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ — $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ — según el T. del valor inicial:

Entonces: $\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^{\infty} F(u)\,du$; $\boxed{si\ \lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{t} = \exists}$

DEMOSTRACION:

Sea: $g(t) = \frac{f(t)}{t}$ $\quad f(t) = t\,g(t)$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{t\,g(t)\}$$

$$F(s) = -\frac{dG(s)}{ds}$$

$$\therefore \quad dG(s) = -F(s)\,ds$$

INTEGRANDO DE (∞) A $\underline{S}$; SE OBTIENE:

$$G(s) = -\int_{\infty}^{s} F(u)\,du$$

$$\therefore \quad G(s) = \int_s^{\infty} F(u)\,du$$

PERO

$$G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}$$

$$\therefore \quad \mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^{\infty} F(u)\,du$$

$$\boxed{f(t) = t\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\int_s^{\infty} F(u)\,du\right\}}$$

$$\boxed{\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{t} = \lim_{s\to\infty} F(s) \Rightarrow F(s) = \mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}}$$

NOTA: Si $\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}$ EXISTE, entonces por el T. del V. inicial su transformada también $\exists$

Si $f(t)$ ES CONTINUA EN $t=0$ y $f(0)=0$; AUNQUE NO SE GARANTIZA SU EXISTENCIA:

EJEMPLO: $\mathcal{L}\left\{\frac{\operatorname{sen} t}{t}\right\} = \int_s^{\infty}\frac{1}{u^2+1}\,du = \operatorname{arc\,tan} u\Big|_s^{\infty}$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\operatorname{sen} t}{t}\right\} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tan} s$$

7. LA TRANSFORMADA INVERSA DE UNA FUNCION $F(S)$ DIVIDIDA POR "S" O POTENCIAS DE S (S^n).

Si $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$ — $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)\big|_{t=u}$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\} = \int_0^t f(u)\,du$$

DEMOSTRACION:

Sea $g(t) = \int_0^t f(u)\,du \quad (I)$

$\frac{d}{dt}$: $g'(t) = f(t)$ además $g(0) = \int_0^0 f(u)\,du = 0$

Ahora: $\mathcal{L}\{g'(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}$

$$s\,\mathcal{L}\{g(t)\} - \cancel{g(0)} = F(s)$$

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = \frac{F(s)}{s} \quad \therefore \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\} = g(t) = \int_0^t f(u)$$

De (I):

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = \mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)\,du\right\} = \frac{F(s)}{s} \qquad (II)$$

Luego aplicando $\mathcal{L}^{-1}$ a (II) e invirtiendo los miembros se obtiene:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\} = \int_0^t f(u)\,du$$

EJEMPLO

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+4)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{s^2+4}}{s}\right\} = \int_0^t \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2z$$

$$= -\frac{1}{4}\cos 2z\Big]_0^t = -\frac{1}{4}\cos 2t + \frac{1}{4}$$

$$\boxed{F(s) = s\,\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)\,du\right\}}$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = s\,\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right\}$$

8.- TRASFORMADA DE LAS INTEGRALES:

Si $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(t)dt\right\} = \frac{F(s)}{s}} \quad \frac{\left[\int_0^t f(t)dt\right]_{t=0}}{s} \quad (0)$$

DEMOSTRACION:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(t)dt\right\} = \int_0^\infty e^{-st}\left(\int_0^t f(t)\,dt\right)dt$$

INTEGRANDO POR PARTES:

$$u = \int_0^t f(t)dt \qquad dv = e^{-st}dt$$

$$du = f(t)\,dt \xleftarrow{(-)} v = -\frac{e^{-st}}{s}$$

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(t)dt\right\} = \left[-\frac{e^{-st}}{s}\int_0^t f(t)dt\right]_0^\infty + \frac{1}{s}\overbrace{\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt}^{F(s)}$$

$$\therefore \mathcal{L}\left\{\int_0^t f(t)dt\right\} = \frac{F(s)}{s} + \frac{\left[\int_0^t f(t)dt\right]_{t=0}}{s}$$

$$\boxed{F(s) = s\,\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(t)dt\right\}}$$

Ejemplos: a) $\mathcal{L}\left\{\int_0^t e^{2z}\cos z\,dz\right\} =$

b) $\mathcal{L}\left\{\int_0^t z \operatorname{sen} 2z\,dz\right\} =$

Corolario $\mathcal{L}\left\{\int_a^t f(t)dt\right\}$, $\underbrace{\int_0^a f(t)dt}_{K} + \int_a^t f(t)dt = \int_0^t f(t)dt$

$$\mathcal{L}\left\{\int_a^t f(t)dt\right\} = \mathcal{L}\left\{\int_0^t f(t)dt\right\} - \mathcal{L}\left\{\int_0^a f(t)dt\right\}$$

$$\therefore \mathcal{L}\left\{\int_a^t f(t)dt\right\} = \frac{F(s)}{s} - \frac{K}{s}$$

[redacted]

8.- TRANSFORMADA INVERSA DE LAS INTEGRALES:

Si $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{L}^{-1}\left\{\int_s^\infty F(u)du\right\} = \frac{f(t)}{t}} \quad (I) \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\int_\infty^s F(u)du\right\} = -$$

PARA LA DEMOSTRACION VER PROPIEDAD DIRECTA No 7.

DE (I):

$\mathcal{L}\{F(s)\}$ [redacted]

EJEMPLO: Hallar: $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+4)^2}\right\}$

* Para la aplicación de esta fórmula se debe realizar la $\int_s^\infty F(u)du$ y luego al obtener $\mathcal{L}^{-1}$ de lo contrario nos conduce a la $F(s)$ original.

SOLUCION.

$$f(t) = t\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\int_s^\infty \frac{u\,du}{(u^2+4)^2}\right\}$$

PERO:

$$\int_s^\infty \frac{u\,du}{(u^2+4)^2} = \left[-\frac{1}{2(u^2+4)}\right]_s^\infty = \frac{1}{2(s^2+4)}$$

$$\therefore f(t) = t\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2(s^2+4)}\right\} = t\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2(s^2+4)}\right\} = \frac{t}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\} = \frac{t}{4}\operatorname{sen} 2t$$

$$\therefore \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+4)^2}\right\} = f(t) = \frac{1}{4}\,t \operatorname{sen} 2t$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\int_\infty^s \frac{2\,du}{s^2+4}\right\} = -\frac{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\}}{t} = -\frac{\operatorname{sen} 2t}{t}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\left[\arctan\frac{u}{2}\right]_\infty^s\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\arctan\frac{s}{2} - \frac{\pi}{2}\right\}$$

$$= \frac{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{d}{ds}\left(\arctan\frac{s}{2} - \frac{\pi}{2}\right)\right\}}{-t} = \frac{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\}}{-t} = -\frac{\operatorname{sen} 2t}{t}$$

TEOREMA DE CONVOLUCION: (VER ⊛)

LA CONVOLUCION DE 2 FUNCIONES $f(t)$ y $g(t)$ CONTINUAS EN $[0,\infty)$ SE DEFINE COMO:

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(t-\tau)\,g(\tau)\,d\tau = \int_0^t f(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau \quad \text{VER}$$

$$\mathcal{L}\{f(t)*g(t)\} = \mathcal{L}\left\{\int_0^t f(t-\tau)\,g(\tau)\,d\tau\right\} = \underbrace{\mathcal{L}\{f(t)\}}_{F(s)} \cdot \underbrace{\mathcal{L}\{g(t)\}}_{G(s)}$$

EJEMPLOS: $f(t) = e^{2t}$, $g(t) = e^{t}$

Hallar: $\mathcal{L}\{f(t) * g(t)\}$

$\mathcal{L}\{t * t * t^2\} =$

$\mathcal{L}\{e^{t} * e^{t}\cos t\} =$

⊛ La convolución tiene muchas de las propiedades de la multiplicación ordinaria:

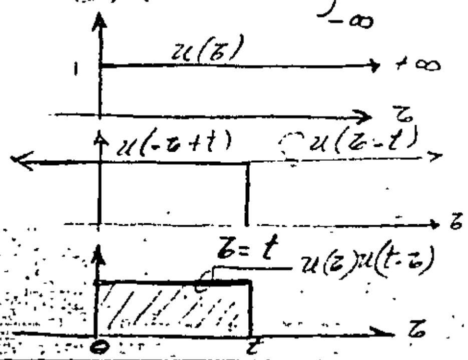
$f * g = g * f$; Ley conmutativa

$f*(g_1+g_2) = f*g_1 + f*g_2$; L. distributiva

$(f*g)*h = f*(g*h)$; L. asociativa

$f*0 = 0*f = 0$

$$e^{t}u(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\tau}u(\tau)\,u(t-\tau)\,d\tau = \int_0^t e^{\tau}\,d\tau = e^{t}-1$$



$$u(\tau)\,u(t-\tau) = \begin{cases} 0, & 0 > \tau > t \\ 1, & 0 < \tau < t \end{cases}$$

9. TEOREMA DE CONVOLUCION:

Si: $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$ y $\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = g(t)$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\cdot G(s)\} = \int_0^t f(t-\tau)\,g(\tau)\,d\tau$$

EJEMPLOS. Hallar:

a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s-1)(s-2)}\right\}$

b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{\beta^2}{[s^2+\beta^2]^2}\right\}$

c) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{\beta^3}{(s^2+\beta^2)^3}\right\}$

d) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{(s^2-4)^2}\right\}$

b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{\beta^2}{(s^2+\beta^2)^2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\underbrace{\dfrac{\beta}{s^2+\beta^2}}_{\operatorname{sen}\beta t}\cdot\underbrace{\dfrac{\beta}{s^2+\beta^2}}_{\operatorname{sen}\beta t}\right\} = \int_0^t \operatorname{sen}\beta(t-\tau)\operatorname{sen}\beta\tau\,d\tau$

$\operatorname{sen}\beta(t-\tau)\operatorname{sen}\beta\tau = \frac{1}{2}\left[\cos\beta(t-2\tau) - \cos\beta t\right]$

$= \frac{1}{2}\int_0^t \cos\beta(t-2\tau)\,d\tau - \frac{1}{2}\int_0^t \cos\beta t\,d\tau$

$= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2\beta}\operatorname{sen}\beta(t-2\tau)\right]_0^t - \frac{1}{2}\cos\beta t\,[\tau]_0^t$

$= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2\beta}\operatorname{sen}\beta(-t) + \frac{1}{2\beta}\operatorname{sen}\beta t\right] - \frac{1}{2}t\cos\beta t$

$= \frac{1}{4\beta}\operatorname{sen}\beta t + \frac{1}{4\beta}\operatorname{sen}\beta t - \frac{1}{2}t\cos\beta t$

$\frac{1}{2\beta}\operatorname{sen}\beta t - \frac{1}{2}t\cos\beta t$

$\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{\beta^3}{(s^2+\beta^2)^3}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{\beta^2}{(s^2+\beta^2)^2}\cdot\dfrac{\beta}{s^2+\beta^2}\right\} = \int_0^t \operatorname{sen}\beta(t-\tau)\left[\frac{3}{4\beta}\operatorname{sen}\beta\tau - \frac{1}{2}\tau\cos\beta\tau\right]$

$= \int_0^t \frac{3}{4\beta}\operatorname{sen}\beta(t-\tau)\operatorname{sen}\beta\tau\,d\tau - \frac{1}{2}\int_0^t \tau\operatorname{sen}\beta(t-\tau)\cos\beta\tau\,d\tau$

ECUACIONES DIFERENCIALES EN DERIVADAS PARCIALES (E. D. P.)- Es toda ecuación que contiene derivadas (parciales) de una o más variables dependientes o funciones, respecto de dos o más variables independientes

(1) - $f(x, y, \ldots, u, u_x, u_y, \ldots, u_{xx}, u_{yy}, \ldots) = 0$; (definida en un dominio $D \subset R^n$ donde n, es el nº de variables independientes)

donde: $u(x, y, \ldots)$ - Función (incógnita) de dos o más variables independientes.

$u_x = \dfrac{\partial u(x, y, \ldots)}{\partial x}$; $u_y = \dfrac{\partial u(x,y,\ldots)}{\partial y}$; $u_{xy} = \dfrac{\partial u(x,y,\ldots)}{\partial x y}$; etc.

Las funciones $u(x, y, \ldots)$ que verifiquen idénticamente en D a la ecuación (1), si existen, serán sus soluciones.

Las (E. D. P.), además de aceptar las misma clasificación que las ordinarias se les designa también como:

CUASILINEALES: Se dice que una E. D. P es cuasilineal; si la derivada de mayor orden es LINEAL, aunque no lo sean las otras derivadas y la misma función.

De aquí en adelante nos concentraremos en el estudio de las E. D. P_s lineales de 2º orden, con coeficientes constantes, grupo al que pertenecen las llamadas ecuaciones de la FÍSICA-MATEMÁTICA.

Estas ecuaciones en dos variables independientes, su expresión más general es:

(2) - $A_1 u_{xx} + A_2 u_{xy} + A_3 u_{yy} + A_4 u_x + A_5 u_y + A_6 u = g(x, y)$

donde $u = u(x, y)$ y $g(x, y)$ es el término independiente.

y A_i, $i = 1, 2, \ldots, 6$ son constantes

Si: $g(x,y) \equiv 0$, entonces la E.D.P es HOMOGÉNEA y si $g(x,y) \neq 0$ " " " " NO HOMOGÉNEA o completa.-

La solución general de una ecuación diferencial ordinaria contiene tantas constantes arbitrarias como el orden de la ecuación, mismas que pueden valuarse conforme a ciertas condiciones del problema para obtener una solución particular

En el caso de las E. D. P_s la solución general contiene tantas funciones arbitrarias como el orden de la E. D. P. La determinación en forma explícita de éstas funciones arbitrarias sujetas a ciertas condiciones adicionales del problema para obtener una solución particular, resulta inclusive más difícil que la obtención de la misma solución general.

Más aún, la solución general de una ecuación diferencial ordinaria, lineal, homogénea, lo constituye un conjunto finito de funciones (subespacio de dimensión "n", orden de la ecuación diferencial)-

Esto no es cierto para las E. D. Ps lineales homogéneas, cuyo conjunto de soluciones tiene tambien estructura de espacio vectorial (puesto que la ecuación es lineal) pero su dimension es infinita.
Al igual que en las ecuaciones ordinarias lineales homogéneas se verifica el pricipio de superposicion, tambien en las E. D. Ps lineales homogéneas al considerar una suma infinita de soluciones (combinación lineal) que deberá converger en un cierto intervalo para ser la solución general de la E. D. P.-

CLASIFICACION DE LAS E. D. Ps. DE SEGUNDO ORDEN.

$$A_1 U_{xx} + A_2 U_{xy} + A_3 U_{yy} + A_4 U_x + A_5 U_y + A_6 U = g(x,y) \quad (1)$$

La clasificación de las E. D. Ps surge por su analogía con la ecuación de las cónicas en el plano; y tiene su utilidad esencial en la posibilidad de reducir la ecuacion (1), en cada uno de los siguientes casos, a una forma canónica mediante un adecuado cambio de variables independientes: CLASIFICACION

Realicemos de manera genérica el siguiente cambio de variables:

$$(2) \quad \begin{cases} r = r(x,y) \\ s = s(x,y) \end{cases}$$ con tal de que r y s sean dos veces derivables y que:

$$J = \begin{vmatrix} r_x & r_y \\ s_x & s_y \end{vmatrix} \neq 0 \text{: Jacobiano de la transformación.}$$

En estas condiciones:

$$(3) \quad \begin{cases} U_x = U_r r_x + U_s s_x \\ U_y = U_r r_y + U_s s_y \\ U_{xx} = U_{rr} r_x^2 + 2U_{rs} r_x s_x + U_{ss} s_x^2 + U_r r_{xx} + U_s s_{xx} \\ U_{xy} = U_{rr} r_x r_y + U_{rs}(r_x s_y + r_y s_x) + U_{ss} s_x s_y + U_r r_{xy} + U_s s_{xy} \\ U_{yy} = U_{rr} r_y^2 + 2U_{rs} r_y s_y + U_{ss} s_y^2 + U_r r_{yy} + U_s s_{yy} \end{cases}$$

Sustituyendo (3) en (1) y agrupando términos:

$$B_1 U_{rr} + B_2 U_{rs} + B_3 U_{ss} + B_4 U_r + B_5 U_s + B_6 U = g(r,s) \quad (4)$$

donde:

$$(5) \quad \begin{cases} B_1 = A_1 r_x^2 + A_2 r_x r_y + A_3 r_y^2 \\ B_2 = 2A_1 r_x s_x + A_2 (r_x s_y + r_y s_x) + 2A_3 r_y s_y \\ B_3 = A_1 s_x^2 + A_2 s_x s_y + A_3 s_y^2 \\ B_5 = A_1 s_{xx} + A_2 s_{xy} + A_3 s_{yy} + A_4 s_x + A_5 s_y \\ B_6 = A_6 \end{cases}$$

En general la ecuacion (4) transformada contiene coeficientes variables, como puede verse de (5) sin embargo mantiene la misma estructura que (1) y, ademas su naturaleza permanece invariante ante la transformación efectuada, es decir:

$$B_2^2 - 4B_1B_3 = J_1^2(A_2^2 - 4A_1A_3)$$

Sea $A_1 \neq 0$ y en estas condiciones determinemos a las funciones $r(x,y)$ y $S(x,y)$ de modo que en la ecuación transformada (4), B_1 y B_3 sean nulas, es decir:

$$B_1 = A_1 r_x^2 + A_2 r_x r_y + A_3 r_y^2 = 0$$
$$B_3 = A S_x^2 + A_2 S_x S_y + A_3 S_y^2 = 0$$

Podemos observar que ambas expresiones tienen la misma estructura, luego podemos estudiarlas como si se tratara de una sola, representándola por:

$$A_1 f_x^2 + A_2 f_x f_y + A_3 f_y^2 = 0 \qquad (6)$$

si dividimos (6) por f_y^2 obtenemos:

$$A_1\left(\frac{f_x}{f_y}\right)^2 + A_2\left(\frac{f_x}{f_y}\right) + A_3 = 0 \qquad (7)$$

sea: $f(x.y) = c$, una familia de curvas y donde c es una constante; su diferencial total será: $df = f_x dx + f_y dy = 0$

$$\therefore \quad y'(x) = \frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y} \qquad (8)$$

Sustituyendo (8) en (7):

$$A_1(y'(x))^2 - A_2(y'(x)) + A_3 = 0 \qquad (9)$$

Resolviendo esta ecuacion:

$$y'(x) = \frac{A_2 \pm \sqrt{A_2^2 - 4A_1A_3}}{2A_1} \quad \begin{cases} A_2^2 - 4A_1A_3 > 0 & \text{HIPERBOL.} \\ A_2^2 - 4A_1A_3 = 0 & \text{PARABOLICA} \\ A_2^2 - 4A_1A_3 < 0 & \text{ELIPTICA} \end{cases}$$

Ecuaciones hiperbólicas:

$$\underbrace{\begin{matrix} y'(x) = \lambda_1 \\ y'(x) = \lambda_2 \end{matrix}}_{\text{ECUACS CARACTERISTICAS DE LA E.D.P}} \Rightarrow \underbrace{\begin{matrix} y(x) = \lambda_1 x + c_1 \\ y(x) = \lambda_2 x + c_2 \end{matrix}}_{\text{CURVAS CARACTERISTICAS DE LA E.D.P.}} \quad \begin{matrix} \therefore r(x,y) = y - \lambda_1 x \\ \therefore S(x,y) = y - \lambda_2 x \end{matrix} \Bigg\} (10)$$

Con el cambio de variable (10) los coeficientes: B_i; $i=1,\cdots 6$. de la ecuación (4) son constantes, reduciendose a:

$$U_{rs} = -B_4 U_r - B_5 U_s - B_6 U + g(r.s) \qquad (11)$$

llamada primera forma canónica de las E.D.Ps hiperbólicas. Si en esta última ecuación se introduce el siguiente cambio de variable: $\alpha = r + s$, $\beta = r - s$ obtenemos:

$$U_{\alpha\alpha} - U_{\beta\beta} = C_4 U_\alpha + C_5 U_\beta + C_6 U + g(\alpha,\beta) \qquad (12)$$

llamada 2ª forma canónica de las E.D.Ps hiperbólicas, donde las C_s son contantes.-

A éste tipo de ecuaciones pertenece la llamada ecuación de ondas - La forma (12) será la usada en el método de separación de variables.

Si: $A_1 = 0$ entonces hágase: $\begin{cases} \frac{dx}{dy} \Rightarrow x = C_1 \quad \therefore r = x \\ -A_2 + A_3\frac{dx}{dy} \Rightarrow x = \frac{A_2}{A_3}y + C_2 \end{cases}$

$$-A_2\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + A_3\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = 0$$

$\therefore S = x - \frac{A_2}{A_3}y$

Sustituyendo en (1):

$r = x$

$s = x - \frac{A_2}{A_3}y$ se obtiene la 1ª F. canónica, de la que podemos obtener la 2ª forma mediante el mismo cambio anterior.

<u>ECUACIONES PARABOLICAS</u>: $A_2^2 - 4A_1A_3 = 0$. Por lo tanto: $y'(x) = \frac{A_2}{2A_1}$ y $y = \frac{A_2}{2A_1}x + C_1$

Como en éste caso $\lambda_1 = \lambda_2$, podemos elegir:

$$r(x,y) = y - \frac{A_2}{2A_1}x \quad y$$

$s(x,y) = k_1x + k_2y$; dónde k_1 y k_2 pueden ser constantes cualesquiera, condicionadas a que el Jacobiano sea $\neq 0$.

Con la elección adecuada de k_1 y k_2 éste cambio de variables reduce a la ecuación (1) en:

$$U_{ss} = B_4U_r - B_5U_s - B_6U + g(r,s)$$

Esta es la forma canónica de las E.D.Ps del tipo <u>PARABOLICO</u> dónde las B_i, $i = 4\ 5\ 6$ son constantes

Si $A_1 = 0$ tambien $A_2 = 0$ y la ecuación ya está en forma canónica.

A este tipo pertenece la llamada ecuación de <u>DIFUSION</u>:

$$U_t(x,t) = KU_{xx}(x,t) + A(x,t)$$

<u>ECUACIONES ELIPTICAS</u>: En éste caso: $A_2^2 - 4A_1A_3 < 0$

Entonces: $y = \lambda_1 x + C_1 \quad r(x\,y) = y - \lambda_1 x$

$y = \lambda_2 x + C_2 \quad s(x\,y) = y - \lambda_2 x$

dónde $\lambda_1 = \frac{A_2}{2A_1} + \frac{\sqrt{A^2 - 4A_1A_3}}{2A_1}i$
$\lambda_2 = \quad " \quad - \quad " \quad i$ números complejos conjugados

Realizando un 2º cambio de variable:

$$\alpha = \frac{1}{2}(r+s)$$

$$\beta = \frac{1}{2i}(r-s) \text{ se obtiene:}$$

$$U_{\alpha\alpha} + U_{\beta\beta} = -B_4U_\alpha - B_5U_\beta - B_6U + g(\alpha,\beta)$$

Forma Canónica de las ecuaciones <u>HIPERBOLICAS</u> y dónde: B_4, B_5 y B_6 son ctes.

A este tipo pertenecen las ecuaries de Laplace $\nabla^2 u = 0$

FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA

CURSOS INSTITUCIONALES

DIPLOMADO EN DISEÑO Y ADAPTACIÓN DE ANTENAS

MOD. I. PROPEDEUTICO

DEL 23 AL 28 DE ABRIL DEL 2003

ANEXOS SEGUNDA PARTE

CI - 059

Instructores: Ing. Juan Manuel Castillo Miranda
Ing. Jesús Antonio Patiño Ramírez
Ing. Joel Gómez
SECRETARÍA DE MARINA
ABRIL DEL 2003

ECUACIÓN DIFERENCIAL. Una ecuación diferencial es una igualdad que contiene derivadas o diferenciales.

NOTA: Deberá contener diferenciales de por lo menos dos variables.

a) TIPO: El tipo se refiere a la clase de derivadas que contiene la ecuación diferencial.

- a.1) ORDINARIA. La ecuación contiene derivadas de una o más variables dependientes o funciones, respecto de una sola variable independiente.

  Ejemplos: $xy'' + 4y' - 36y = 16 \operatorname{sen} 3x$

  $2y = (y')^2 + 4xy'$

- a-2) EN DERIVADAS PARCIALES. La ecuación contiene derivadas (parciales) de una o más variables dependientes respecto de dos mas variables independientes.

  Ejemplos: $\frac{\partial U(x,y,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial x^2} + u(x,y,t)$

  $u_t(x,t) = k u_{xx}(x,t)$

b) ORDEN: Esta determinado por la derivada mas alta en la ecuación diferencial.

- b-1) Primer orden: $F(x, y, y') = 0$
- b-2) Segundo Orden: $F(x, y, y', y'') = 0$
- b-n) n-ésima orden: $F(x, y, y, \ldots, y^{n}) = 0$

c) GRADO: Esta definido por la potencia o exponente de la derivada mas alta en la ecuación.
NOTA: Una ecuación diferencial es de grado K si está expresada como polinomio de grado K en su derivada de mayor orden.

- c-1) LINEALES: Una ecuación diferencial es lineal si:
  - ✓ La función y sus derivadas son de primer grado.
  - ✓ Los coeficientes o términos que multiplican a la función y sus derivadas son constantes o funciones de la variable independiente.
  - ✓ La ecuación no debe contener términos como: $yy', y'y'', e^{y}$
- c-2) NO LINEAL: Si no se cumple cualquiera de las condiciones anteriores.

d) POR SUS COEFICIENTES.

- d-1) COEFICIENTES CONSTANTES: Cuando todos son escalares o constantes.
- d-2) COEFICIENTES VARIABLES: Cuando por lo menos uno de ellos es variable.
- d-3) HOMOGÉNEOS O NO HOMOGÉNEOS EN xy

e) POR SU TERMINO INDEPENDIENTE: Es aquel que no contiene ni a la función ni a sus derivadas y puede ser una constante ó una función de la variable independiente.

- e-1) HOMOGÉNEAS: Si el término independiente es nulo; es decir $Q(X) = 0$
- e-2) NO HOMOGÉNEAS O COMPLETAS: El término independiente es diferente de cero; es decir: $Q(X) \neq 0$

J.G.

SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL: Es una función derivable en un intervalo I, tantas veces como el orden de ecuación diferencial a la cual verifica.

a) <u>SOLUCIÓN GENERAL</u>: Es una función que contiene tantas constantes arbitrarias como el orden de la ecuación diferencial y es derivable en un intervalo I, por lo menos, tantas veces como el orden de la ecuación diferencial a la cual debe verificar.
El intervalo I , es el que define al modelo matemático que la ecuación diferencial representa.
La solución general representa una familia de curvas.

<u>PROBLEMAS DE CONDICIONES INICIALES:</u> Este problema generalmente se tiene cuando la variable independiente es el tiempo y las condiciones del problema se dan en $t = 0$

<u>PROBLEMA DE CONDICIONES DE FRONTERA:</u> En éste tipo de problemas las condiciones son dadas en las variables de espacio o posición (x, y).

b) <u>SOLUCIÓN PARTICULAR:</u> Es una función que se obtiene de la solución general al valuar las constantes arbitrarias conforme a las condiciones del problema y la gráfica correspondiente será una de la familia de la solución general.

c) <u>SOLUCIÓN SINGULAR:</u> La solución singular es una función que no se obtiene ni de la general ni de la particular pero verifica a la ecuación diferencial.
La gráfica de la solución singular (envolvente) es tangente (en un punto) a cada gráfica de la familia de graficas de la solución general.- Este tipo de solución es propia de ecuaciones diferenciales no lineales.

<u>MÉTODO PARA OBTENER LA SOLUCIÓN SINGULAR (SI ES QUE TIENE) DE UNA ECUACIÓN DE PRIMER ORDEN:</u>

Sea : $F(x, y, y') = 0$ (1) E.D. de primer orden.
y $G(x, y, c) = 0$ (2) solución general

La ecuación (2) representa una familia de curvas uniparamétrica, donde c es el parámetro.

Del cálculo diferencial sabemos que la curva envolvente de una familia uniparamétrica de curvas; se obtiene eliminando el parámetro c en el siguiente sistema de ecuaciones:

$$G(x, y, C) = 0 \qquad (1)$$
$$\frac{\partial G(x, y, C)}{\partial C} = 0 \qquad (2)$$

Si la función en x, y que resulte, verifica a la ecuación diferencial, entonces será una solución singular de dicha ecuación.

J.G.

Ejemplos:

Nº	ECUACIÓN DIFERENCIAL	TIPO	ORDEN	GRADO	LINEALIDAD	HOMOGENEA	DE COFTES
1	$x(y'')^2+(y')^4=y$	ORDINARIA	2°	2	NO LINEAL	HOMOGÉNEA	VARIABLES
2	$Z_{xx}+Z_y=8z$	PARCIAL	2°	1	LINEAL	HOMOGÉNEA	CONSTANTES
3	$y'''+xy'=\frac{x}{y}$	ORDINARIA	3^er.	1	NO LINEAL	NO HOMOGENEA	VARIABLES.

- Verificar si $y = cx^2$ es solución de $xy' = 2y$

  SOLUCIÓN: $y' = 2cx \quad \therefore \quad x(2cx) \equiv 2cx^2$. sí es solución de la ecuación.

- Dada la función $y = C_1e^{-x}+C_2e^{2x}+2\operatorname{sen}x$; obtener la ecuación diferencial a la cual verifica.

  SOLUCIÓN: Teniendo la función dos constantes arbitrarias, debe verificar a una ecuación de 2° orden:

$$y = C_1e^{-x}+C_2e^{2x}+2\operatorname{sen}x$$
$$y' = -C_1e^{-x}+2C_2e^{2x}+2\cos x$$
$$y'' = C_1e^{-x}+4C_2e^{2x}-2\operatorname{sen}x$$

Eliminando C_1 y C_2 entre las tres ecuaciones anteriores se obtiene la ecuación diferencial:

$$3y''-3y'-6y+2\operatorname{sen}x+6\cos x = 0$$

- Dada la ecuación: $4x(y')^2+2xy'-y=0$ su solución: $(y-c)^2 = cx$ obtener, si existe una solución singular:

  SOLUCIÓN: $(y-c)^2 - cx = 0 \qquad (1)$

  $\frac{\partial}{\partial c}: \; -2(y-c)-x = 0 \qquad (2)$

  Eliminando "c" entre (1) y (2) se obtiene: $x = 0$ NO ES SOLUCION SINGULAR

  $x+4y=0$ SI " " "

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE PRIMER ORDEN "n" (E.D.O.P.O.)

Estas ecuaciones tienen la siguiente forma:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \qquad (1)$$

a) DE VARIABLES SEPARABLES: Si las funciones $M(x,y)$ y $N(x,y)$ de la ecuación (1) pueden expresarse como el producto de dos funciones exclusivamente en términos de una sóla variable, se dice que la ecuación es de variables separables; es decir:

$$M(x,y) = f_1(x)g_1(y)$$

$$N(x,y) = f_2(x)g_2(y)$$ de modo que:

$$f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0$$

En ésta última expresión las variables puden separarse e integrarse para obtener la solución de la ecuación diferencial; es decir:

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy = 0$$

Integrando: $$\int\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \int\frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy = C$$

Ejemplo: Resolver: $(y^2-1)dx - (2y + xy)dy = 0$

Separando variables: $$\frac{dx}{x+2} - \frac{ydy}{y^2-1}$$

Integrando: $$\ln|x+2| - \frac{1}{2}\ln|y^2-1|$$

b) DE COEFICIENTES HOMOGÉNEOS: Si los coeficientes de las diferenciales en la ecuación (1) son tales que los exponentes de sus términos en x, y, suman un valor constante en todos, se dice que la ecuación es de coeficientes homogéneos.

Ejemplo: Resolver: $(2x^2-y^2)dx + 3xydy = 0$; Esta ecuación es de coeficientes homogéneos de grado 2.

SOLUCIÓN: Escribamos la ecuación de la siguiente forma: $$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x^2+y^2}{3xy} \qquad (2)$$

Sustituyamos: $\frac{y}{x} = u$ ó $y = ux \quad --(3) \quad \therefore \quad \frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx} \quad --(4)$

Sustituyendo (3) y (4) en (2): $$u + x\frac{du}{dx} = \frac{-2x^2+u^2x^2}{3ux^2} = \frac{u^2-2}{3u}$$

Simplificando: $$x\frac{du}{dx} = \frac{-2u^2-2}{3u}$$

Separando variables e integrando: $$\ln|x| = -\frac{3}{4}\ln|u^2+1| + C$$

Sustituyendo $u = \frac{y}{x}$ se tiene finalmente: $$\ln|x| = -\frac{3}{4}\ln\left|\left(\frac{y}{x}\right)^2+1\right| + C$$

J.G.

6) ECUACIONES DIFERENCIALES EXACTAS: Sea $F(x,y) = c$;donde c es una constante.

La diferencial total de esta función es: $dF(x\,y) = \dfrac{\partial F(x,y)}{\partial x}dx + \dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y}dy = 0$

Ésta última expresión es una ecuación diferencial si hacemos:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y)$$
$$\frac{\partial F(x\cdot y)}{\partial y} = N(x,y)$$

Por otra parte sabemos que si F, F_x, F_y, F_{xy}, F_{yx} son contínuas en una región ℜ del plano xy, entonces: $F_{xy} = F_{yx}$

Por lo que: $M_y(x,y) = N_x(x,y)$

, siendo esta la condición necesaria y suficiente para que la ecuación diferencial sea EXACTA.

Ejemplo: Resolver: $(2x + 3x^2y)dx + (x^3 - 1)dy = 0$

Solución: Primero veamos si es exacta: $M(x\cdot y) = 2x + 3x^2y \qquad M_y(x\cdot y) = 3x^2$ ✓
$N(x,y) = x^3 - 1 \qquad N_x(x,y) = 3x^2$ ✓

Luego:

$$\int_{y=cte}(2x+3x^2y)dx + \int(-1)dy = c$$
$$\underline{x^2 + x^3y - y = c}$$

d) ECUACIONES DE FACTOR INTEGRANTE: Algunas ecuaciones diferenciales de este tipo no son exáctas, pero que al ser multiplicadas por una función (factor integrante) se transforman en exáctas.

$$\text{sea: } M(x\ y)dx + N(x\ y)dy = 0 \quad \text{que no}$$

Es exácta; entonces:

$$\mu(x) = e^{\int\left(\frac{M_y - N_x}{N}\right)dx}$$

$$\mu(y) = e^{\int\left(\frac{N_x - M_y}{M}\right)dy}$$

Pueden ser factores integrantes:

Resolver: $(x^2 + y^2 + x)dx + xydy = 0$

Veamos si es exácta:

$$M_y = 2y$$
$$N_x = y$$

No es exacta.

De las fórmulas de factores integrantes se observa que el denominador mas sencillo es $N = xy$ por lo que:

$$\mu(x) = e^{\int\left(\frac{2y-y}{xy}\right)dx} = e^{\int\frac{dx}{x}} = e^{\ln x} = x$$

La nueva ecuación será: $(x^3 + xy^2 + x^2)dx + x^2ydy = 0$

Veamos si ahora ya es exácta:

$$M_y = 2xy \checkmark$$

$$N_x = 2xy \checkmark \quad \text{es exácta luego su solución es:} \quad \int_{y=cte}(x^3 + xy^2 + x^2)dx = C$$

e) ECUACIÓN DIFERENCIAL LINEAL: Si la ecuación (1) toma las formas:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

$$\text{ó} \quad \frac{dx}{dy} + P(y)x = Q(y)$$

se dice que es lineal en y o en x respectivamente.

Mediante el método del factor integrante pueden resolverse estos tipos de ecuaciones; donde:

$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx} \Rightarrow y\mu(x) = \int \mu(x)Q(x)dx + C$$
$$\mu(y) = e^{\int P(y)dy} \Rightarrow y\mu(y) = \int \mu(y)Q(y)dy + C$$

Ejemplo: Resolver: $x\frac{dy}{dx} + 2y = x^4$

Dividiendo por x:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y = x^3 \quad \text{ecuación normalizada}$$

$$\mu(x) = e^{\int\frac{2dx}{x}} = e^{\ln x^2} = x^2$$

$$yx^2 = \int x^2(x^3)dx = \frac{x^6}{6} + C$$

$$\therefore \quad y = \frac{x^4}{6} + Cx^{-2}$$

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS LINEALES DE ORDEN "n"
(E.D.O.L. DE O. "n")

Estas ecuaciones tienen la forma:

$$b_n(x)\frac{d^n y(x)}{dx^n}+b_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y(x)}{dx^{n-1}}+b_{n-2}(x)\frac{d^{n-2}y(x)}{dx^{n-2}}+...+b_1(x)\frac{dy(x)}{dx}+b_0(x)y(x)=R(x)....(1)$$

Esta ecuación se clasifica en:

- De coeficientes constantes: si todos los bn (x); n=0,1,2.....n; son escalares o constantes.
- De coeficientes variables: si por lo menos uno de sus coeficientes es variable
- Homogénea: Si el término independiente es cero; R(x)=0
- No Homogénea o completa: si $R(x)\neq 0$;

Normalización de la ecuación (1): Se dice que una ecuación está normalizada si el coeficiente de su término en la mayor derivada es la unidad.

Así la ecuación (1) se puede escribir como:

$$\frac{d^n y}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+a_{n-2}(x)\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+...+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=Q(x).....(2)$$

Donde:

$$a_{n-1}(x)=\frac{b_{n-1}(x)}{b_0(x)};a_{n-2}(x)=\frac{b_{n-2}(x)}{b_0(x)};...;Q(x)=\frac{R(x)}{b_0(x)}$$

SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL ORDINARIA LINEAL DE ORDEN "n" HOMOGÉNEA (PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN):

Sea la ecuación:

$$a_n(x)\, y^n+a_{n-1}(x)y^{n-1}+...+a_1(x)y'+a_0(x)y=0 \ ...(3)$$

Una ecuación homogénea.

Siendo la ecuación diferencial de orden "n" y si fuera posible integrarla directamente como la ecuación y'''(x)=0; es lógico que integraríamos (integrales indefinidas) n veces, lo que implicaría que y (x), solución de la ecaución diferencial, tendrá n constantes (arbitrarias) y en consecuencia n funciones de x (variable independiente) que multiplican a cada constante arbitraria; es decir:

Conjunto de constantes arbitrarias: $\{c_1, c_2, c_3, ...c_n\}$ .....(4)

Conjunto de funciones de x: $\{y_1(x), y_2(x), y_3(x),...,y_n(x)\}$ ...(5)

De modo que la solución de la ecuación homogénea (1) será:

$$Y(x)=c_1y_1+c_2y_2+c_3y_3+......+c_ny_n(x) \ ......(6)$$

Una combinación lineal del conjunto de funciones (5) (principio de superposición, propio de ecuaciones lineales.

Debe hacerse notar que cada una de las funciones del conjunto(5), verifica por sí sola a la ecuación (3). Igualmente debe recalcarse que toda ecuación diferencial lineal es verificada por la solución trivial y(x)=0

Para que cada una de las funciones del conjunto (5) constituyan un término fundamental en la combinación lineal (6) solución de (3), es necesario que dicho conjunto (5) sea linealmente independiente y esto sucede si su Wronskiano es diferente de cero en algún intervalo I que define a la ecuación (3), es decir:

$$W(y_1\, y_2\, y_3, \ldots y_n) \neq 0, \text{ en } I.$$

Cuando el conjunto (5) es linealmente independiente se dice que constituye un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación (3), (subespacio de dimensión "n").
En estas condiciones se dice que la combinación lineal (6), es una solución general de la ecuación diferencial (3).

EL OPERADOR DERIVADA (DIFERENCIAL) D:

Si x es la variable independiente, entonces D se define como: $D=\frac{d}{dx}$; si fuera t, en vez de x,

entonces: $$D=\frac{d}{dt}$$

En éstas condiciones:

$$\frac{dy}{dx} = Dy$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = D^2y$$

$$\vdots$$

$$\frac{d^ny}{dx^n} = D^ny$$

utilizando éste operador, la ecuación (2) puede escribirse como:

$$[D^n+a_{n-1}(x)D^{n-1}+a_{n-2}(x)D^{n-2}+....+a_1(x)D+a_0(x)]y=Q(x) \;.......(7)$$

POLINOMIO DIFERENCIAL: El polinomio diferencial P(D), será un operador lineal de orden "n" en un intervalo I, si puede escribirse como aparece entre llave, en la ecuación (7), donde los coeficientes de los términos en D son funciones continuas en I.

SOLUCIÓN DE UNA E.D.O.L. HOMOGÉNEA DE ORDEN "n" CON COEFICIENTES CONSTANTES.

Resolvamos una ecuación sencilla de éste tipo:

$$\frac{dy}{dx}+ay=0\text{; donde a es una constante}$$

Resolviendo por F. Integrante: $\mu(x)=e^{\int adx}=e^{ax}$

$$\therefore ye^{ax}=\int(0)e^{ax}dx+c=c$$

$$\therefore y=ce^{-ax}\begin{Bmatrix}\{c\}\\ \{e^{-ax}\}\end{Bmatrix}$$

Esto nos hace suponer que éste tipo de ecuaciones tiene como funciones solución: $y=e^{\lambda x}$, donde λ es un escalar que podemos determinar de la siguiente manera:

Sea: $[a_nD^n+a_{n-1}D^{n-1}+a_{n-2}D^{n-2}+....+a_1D+a_0]y=0 \;.......(8)$

Una ecuación homogénea con coeficientes constantes, cuyas soluciones tienen la forma: $y=e^{\lambda x}\neq 0$; luego:

$$\left.\begin{array}{l}De^{\lambda x}=\lambda e^{\lambda x}\\ D^2e^{\lambda x}=\lambda^2e^{\lambda x}\\ \vdots\\ D^ne^{\lambda x}=\lambda^ne^{\lambda}\end{array}\right\}\quad(9)$$

Sustituyendo (9) en (8) se tiene:

$$[a\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+a_{n-2}\lambda^{n-2}+...+a_1\lambda+a_0]e^{\lambda x}=0$$

Dividiendo por $e^{\lambda x}\neq 0$, se obtiene.

$$a\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+a_{n-2}\lambda^{n-2}+...+a_1\lambda+a_0=0.....(10)$$

Ecuación característica de la ecuación diferencial (8).
Al resolver (10) se obtendrán n raíces características, cada una de las cuales genera una función solución; es decir:

$$\begin{array}{l}\lambda_1\Rightarrow y_1=e^{\lambda 1x}\\ \lambda_2\Rightarrow y_2=e^{\lambda 2x}\\ \vdots\\ \lambda_n\Rightarrow y_n=e^{\lambda nx}\end{array}\qquad\left\{\; e^{\lambda 1x}, e^{\lambda 2x}, \dots e^{\lambda nx}\;\right\}$$

Siendo por lo tanto, la solución de (8):

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + c_n e^{\lambda_n x}$$

Podemos concluir que la solución de éste tipo de ecuaciones depende de las raices de la ecuación característica de la ecuación diferencial, por lo que se tienen los siguientes casos:

$$P(\lambda)=0 \quad \begin{cases} \text{*Raices reales diferentes} \\ \text{*Raices reales repetidas} \\ \text{*Raices complejas} \\ \text{*Raices complejas repetidas} \end{cases}$$

Ejemplos, resolver:

a) $$\frac{d^2 y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

Ecuación en términos de D:

$$(D^2-3D+2)\,y=0$$

Ecuación característica: $\lambda^2-3\lambda+2=0$; $\lambda_1=1$, $y_1=e^x$; $\lambda 2=2$, $y_2=e^{2x}$ $\{ e^x, e^{2x} \}$

$$\therefore\ y(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x}$$

b) $$\frac{d^2 y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

$[D^2-4D+4]y=0$

Ecuación característica: $\lambda^2-4\lambda+4=0$; $\lambda_1=2$, $y_1=e^{2x}$; $\lambda 2=2$, $y_2=xe^{2x}$ $\{ e^{2x}, xe^{2x} \}$

$$\therefore\ y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$$

c) $$\frac{d^2 y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 13 = 0$$

$[D^2-4D+13]y=0$

Ecuación característica: $\lambda^2-4\lambda+13=0$; $D_{1,2}=2\pm 3i$., $\{ e^{2x}\cos 3x, \quad e^{2x}\operatorname{sen} 3x \}$

$\therefore\ y(x)=C_1e^{2x}\cos x+C_2e^{x}\operatorname{sen}3x$

SOLUCIÓN DE UNA E.D.O.L. DE ORDEN "n" NO HOMOGÉNEA:

$P(D)y=Q(x)$
Solución:
$y_G=y_H+y_P$
$P(D)y_G=Q(x)$
$P(D)y_H=0$
Restando
$P(D)[y_G-y_H]=Q(x)$
y_P
$\therefore P(D)y_P=Q(x)$

a) Solución de la Ecuación Homogénea asociada a la no Homogénea

E. Característica $\quad P(D)y=0 \quad (1)$

$P(\lambda)=0$

$$\left\{\begin{array}{l}\lambda 1\\ \lambda 2\\ \vdots\\ \lambda n\end{array}\right. \left\{e^{\lambda 1x}, e^{\lambda 2x}, \ldots e^{\lambda nx}\right\} \quad (2)$$

$y_H=c_1e^{\lambda 1x}+c_2e^{\lambda 2x}+\ldots+c_ne^{\lambda nx}$

Recordemos que tanto y_H como cada una de las funciones del conjunto (2) verifica a la ecuación (1)

Solución Particular y_P:

- Método de los coeficientes indeterminados: Este método se aplica si:
  - La ecuación diferencial es de coeficientes constantes
  - Los términos de Q(x) son aniquilables.
- Método de variación de parámetros o método general; este método se aplica en cualquier caso.

MÉTODO DE COEFICIENTES INDETERMINADOS PARA OBTENER LA y_P:

a) Dada $\quad P(D)\,y=Q(x) \quad (I)$

E.H.A.: $\quad P(D)\,y=0$

E. Característica $\quad P(l)=0$

$$\begin{array}{l}\lambda 1\\ \lambda 2\\ \vdots\\ \lambda n\end{array} \left\{e^{\lambda 1x}, e^{\lambda 2x}, \ldots e^{\lambda nx}\right\} \quad (2)$$

b) Se determina un polinomio en D, Q(D) que al aplicarlo a los términos de Q(x) los anula; es decir

$$Q(D)\,Q(x)=0$$

Aplicando Q(D) a la ecuación (I) se obtiene otra ecuación homogénea (AMPLIADA) cuya solución corresponderá a la y_G; es decir:

$Q(D)\,P(D)y=0$

Las soluciones fundamentales de ésta ecuación comprenderán las correspondientes a la y_H y a la y_P, por lo que comparándolas con las del conjunto (II) se obtiene por eliminación los términos de la y_P (FORMA DE LA y_P).

Los coeficientes de la y_P (indeterminados) son determinados al comparar los coeficientes de términos semejantes en la ecuación:

$$P(D)\,y_P=Q(x)$$

Ejemplo : Resolver $y''-2y'+5y=e^x\cos 3x$ (1)

a) E.H.A.: $[D^2-2D+5]y=e^x\cos 3x$

E.C.: $\lambda 2-2\lambda+5=0$; $D_{1,2}=\pm 2i$; $\{e^x\cos 2x,\ e^x\text{sen}2x\}$

$y_H = C_1e^x\cos 2x + C_2e^x\text{sen}2x$

b) $Q(x) = e^x\cos 3x$

$Q(D) = (D-1)^2+9$

Luego : $[(D-1)^2+9](D^2-2D+5]y=0$ Ecuación Homogénea ampliada

E.C. $[(\lambda-1)^2+9](\lambda^2-2\lambda+5]y=0$, $D_{1,2}=1\pm 2i$ $D_{3,4}=1\pm 3i$ $\left\{e^x\cos 2x,\ e^x\text{sen}2x,\ e^x\cos 3x,\ e^x\text{sen}3x\right\}$

$\therefore y_P=Ae^x\cos 3x+Be^x\text{sen}3x$ donde A y B son constantes

y_P Verifica a la ecuación (1):

$y''_P-2y'_P+5y_P=e^x\cos 3x$

sustituyendo yP en esta ecuación se obtiene:

$-5Ae^x\cos 3x-5Be^x\text{sen}3x = e^x\cos 3x$

Igualando coeficientes de términos semejantes se obtiene:

$$-5A=1 \ \therefore\ A = -1/5$$
$$-5B=0 \ \therefore\ B = 0$$

$$y_P=-1/5\ e^x\cos 3x$$

y finalmente:

$$y_G\,(x)=y_H+y_P=C_1e^x\cos 2x+C_2e^x\text{sen}2x-1/5e^x\cos 3x$$

MÉTODO DE VARIACIÓN DE PARÁMETROS.- Este método consiste en formar la y_P a partir de y_H al cambiar cada constante arbitraria por una función de x; es decir:

$y_H=C_1y_1+C_2y_2+\ldots+C_ny_n$

Solución de la homogénea asociada, entonces la y_P tendrá la forma:

$y_P=u_1(x)y_1+u_2(x)y_2+\ldots+u_n(x)y_n$

donde hemos sustituido:

$C_1= u_1(x)$
$C_2= u_2(x)$
.
.
.
$C_n=u_n(x)$

Estas funciones u1(x), u2(x), ..., un(x) verifican al siguiente sistema:

$$y_1u'_1(x)+y_2u'_2(x)+\ldots+y_nu'_n(x) = 0$$
$$y'_1u'_1(x)+y'_2u'_2(x)+\ldots+y'_nu'_n(x) = 0$$
$$\vdots$$
$$y^{n-1}{}_1u'_1(x)+y^{n-1}{}_2u'_2(x)+\ldots+y^{n-1}{}_nu'_n(x) = Q(x)$$

donde Q(x) es el término independiente de la ecuación normalizada.
El sistema anterior puede escribirse en forma matricial como:

$$\underbrace{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdot & y_n \\ y'_1 & y'_2 & \cdot & y'_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y^{n-1}{}_1 & y^{n-1}{}_2 & \cdot & y^{n-1}{}_n \end{vmatrix}}_{W(y_1,y_2,\ldots y_n)} \begin{vmatrix} u'_1 \\ u'_2 \\ \cdot \\ u'_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ Q(x) \end{vmatrix}$$

Ejemplo:

Resolver $\quad y''+3y'+2y = \dfrac{1}{1+e^x}$

E.H.A. $\quad (D^2+3D+2)y=0$

E.C.: $\quad \lambda 2+3\lambda+2 = 0 \qquad D_1 = -1\ \{e^{-x}, e^{-2x}\}$
$D_2 = -2$

$$y_H = C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}$$
$$y_P = ue^{-x}+ve^{-2x}$$

$$\underbrace{\begin{vmatrix} e^{-x} & e^{-2x} \\ -e^{-x} & -2e^{-2x} \end{vmatrix}}_{-e^{-3x}} \begin{vmatrix} u' \\ v' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{1+e^x} \end{vmatrix}$$

$$u' = \frac{du}{dx} = \frac{e^x}{1+e^x}$$

$$v' = \frac{dv}{dx} = -\frac{e^{2x}}{1+e^x}$$

Integrando:

$$u = \ln(1+e^x)$$
$$v = \ln(1+e^x)-e^x$$

$$y_P = e^{-x}\ln(1+e^x)+e^{-2x}[\ln(1+e^x)-e^x]$$
$$= e^{-x}\ln(1+e^x)+e^{-2x}\ln(1+e^x)-e^{-x}$$

$$\therefore\ y_G(x) = C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}+\ln(1+e^x)(e^{-x}+e^{-2x})$$

SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS:

Un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias simultáneas comprende dos ó más ecuaciones que contienen las derivadas de dos ó más funciones respecto de una sola variable independiente

Ejemplos: si: x, y y z son funciones de la variable "t" entonces:

$$\begin{cases} 4\dfrac{d^2x}{dt^2} = 5x - y \\ 3\dfrac{d^2y}{dt^2} = 3x - 4y \end{cases} \qquad \begin{cases} x' - 3x + y' + z' = 5 \\ x' - y' + 2z' = t^2 \\ x + y' - 6z' = t - 1 \end{cases}$$

SOLUCION DE UN SISTEMA DE ECUACIONES DIFERENCIALES:

Una solución de un sistema de ecuaciones diferenciales es un conjunto de funciones diferenciables: $x = f(t)$, $y = g(t)$, $z = h(t)$, etc que satisfacen a cada ecuación del sistema en algún intervalo I.

SOLUCION DE UN SISTEMA DE ECUACIONES DIFERENCIALES POR ELIMINACION SISTEMATICA.- Esta técnica se basa en el principio fundamental de eliminación algebráica sistemática de las variables. En éste caso lo análogo de multiplicar una ecuación algebráica por una constante es operar sobre una ecuación diferencial con alguna combinación de derivadas.

EJEMPLO: EXPRESAR EL SIGUIENTE SISTEMA DE ECUACIONES DIFERENCIALES USANDO EL OPERADOR $D = \dfrac{d}{dt}$:

$$(\mathrm{I})\begin{cases} x'' + 2x' + y'' = x + 3y + \operatorname{sen} t \quad (1) \\ x' + y' = -4x + 2y + e^{-t} \quad (2) \end{cases}$$

Primeramente agrúpense los términos de x, y y sus derivadas ($x^{(n)}, x^{n-1}, \ldots, x'', x', x$) ($y^{(n)}, y^{n-1}, \ldots, y'', y', y$) en el primer miembro, dejando los demas términos en el 2º miembro, es decir:

$$\begin{cases} \overbrace{x'' + 2x' - x} + \overbrace{y'' - 3y} = \operatorname{sen} t \quad (1') \\ x' + 4x + y' - 2y = e^{-t} \quad (2) \end{cases}$$

a continuación exprésese cada ecuación mediante $\underline{D}$:

$$\begin{cases} (D^2 + 2D - 1)x + (D^2 - 3)y = \operatorname{sen} t \quad (1'') \\ (D + 4)x + (D - 2)y = e^{-t} \quad (2'') \end{cases}$$

En ésta forma el sistema se puede resolver para x ó y en función de D usando cualquier método conocido para resolver un sistema de ecuaciones simultáneas:

a) Método de reducción (suma ó resta)
b) " de sustitución
c) " de igualación
d) " por determinantes (Crámmer)

Usaremos éste último por ser más rápido.

$$\underbrace{\begin{vmatrix} (D^2+2D-1) & (D^2-3) \\ (D+4) & (D-2) \end{vmatrix}}_{\Delta} \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} sent \\ e^{-t} \end{vmatrix}$$

RESOLVIENDO:

$$\begin{aligned} \Delta &= (D^2+2D-1)(D-2) - (D+4)(D^2-3) = \\ &= D^3+2D^2-D-2D^2-4D+2-(D^3-3D+4D^2-12) \\ &= D^3-5D+2-D^3-4D^2+3D+12 \\ &= -4D^2-2D+14 \end{aligned}$$

Luego:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} sent & (D^2-3) \\ e^{-t} & (D-2) \end{vmatrix}}{-4D^2-2D+14} = \frac{(D-2)sent-(D^2-3)e^{-t}}{-4D^2-2D+14} =$$

Las operaciones del numerador serán:

$$(D-2)sent = \left(\frac{d}{dt}-2\right)sent = \frac{d}{dt}(sent) - 2sent = cost - 2sent$$

$$(D^2-3)e^{-t} = \frac{d^2}{dt^2}e^{-t} - 3e^{-3t} = \frac{d}{dt}(-e^{-t}) - 3e^{-t} = e^{-t}-3e^{-t} = -2e^{-t}$$

$$\therefore\ x = \frac{cost-2sent+2e^{-t}}{-4D^2-2D+14}$$

$$\therefore (-4D^2-2D+14)x = cost-2sent+2e^{-t}$$

Si cambiamos de signo toda la ecuación:

$$(4D^2+2D-14)x = 2sent-cost-2e^{-t}$$

Esta es una ecuación diferencial lineal no homogénea de coeficientes constantes que puede resolverse para x en función de t por el método de coeficientes indeterminados.

Podemos concluir que este método reduce un sistema de ecuaciones diferenciales a una ecuación diferencial lineal.

EJEMPLO: Resolver: $\begin{cases} x'-3x+y=-1 & (1) \\ -x+y'-y=4e^{t} & (2) \end{cases}$ $\rightarrow y = 3x-x'-1 \quad (1')$

En función de $\underline{D}$: $\begin{cases} (D-3)x+y=-1 \\ -x+(D-1)y=4e^{t} \end{cases}$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4e^t & (D-1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (D-3) & 1 \\ -1 & (D-1) \end{vmatrix}} = \frac{\overbrace{(D-1)[-1]}^{0+1} - 4e^t}{D^2-4D+4} = \frac{1-4e^t}{D^2-4D+4}$$

$$(D^2-4D+4)x = 1-4e^t \qquad (1)$$

Resolviendo:

a) EC. HOMOGENEA ASOCIADA: $(D^2-4D+4)x=0$

b) EC CARACTERISTICA Y SUS RAICES:

$$m^2-4m+4=0$$
$$(m-2)^2=0$$
$$\begin{matrix} m-2=0 \\ m-2=0 \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} m_1=2 \\ m_2=2 \end{matrix} \right.$$

c) Solución de la ec. homogénea asociada:

$$x_c(t) = C_1 e^{2t} + C_2 t e^{2t}$$

d) Cálculo de $x_p(t)$:

$$Q(t) = 1 - 4e^t$$
$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$
$$Q(D) = D \ (D-1) = D(D-1)$$

Multiplicando (1) por $Q(D) = D(D-1)$:

$$(D-2)^2 D(D-1) = 0$$

EC. característica: $(m-2)^2 m(m-1)=0$

$$\begin{matrix} m-2=0 \\ m-2=0 \\ m=0 \\ m-1=0 \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} m_1=2 \\ m_2=2 \\ m_3=0 \\ m_4=1 \end{matrix} \right.$$

Solución general de la ecuacion (1)

$$x_G(t) = x_c(t) + x_p(t) = \underbrace{C_1 e^{2t} + C_2 t e^{2t}}_{x_c(t)} + \underbrace{C_3 + C_4 e^t}_{x_p(t)}$$

Como $x_p(t) = A + Be^t$ debe verificar a (1); es decir:

$$x_p'(t) = Be^t$$
$$x_p''(t) = Be^t$$

$$\begin{matrix} Be^t - 4(Be^t) + 4(A + Be^t) = 1 - 4e^t \\ Be^t - 4Be^t + 4Be^t + 4A = 1 - 4e^t \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} 4A = 1 \quad A = \frac{1}{4} \\ B = -4 \\ x_p(t) = \frac{1}{4} - 4e^t \end{matrix} \right.$$

Luego:

$$x(t)=x_G(t)=x_c(t)+x_p(t)= C_1e^{2t}+C_2te^{2t}+\frac{1}{4}-4e^{t}$$

De la ecuación (1'):

$$y(t)=3x-x'-1$$

$$y(t)=3\left[C_1e^{2t}+C_2te^{2t}+\frac{1}{4}-4e^{t}\right]-\frac{d}{dt}\left[C_1e^{2t}+C_2te^{2t}+\frac{1}{4}-4e^{t}\right]-1$$

$$y(t)=$$

EJERCICIOS: RESOLVER:

(1) $\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2}=4y+e^{t} \\ \dfrac{d^2y}{dt^2}=4x-e^{t} \end{cases}$

(2) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}+\dfrac{dy}{dt}=e^{t} \\ -\dfrac{d^2x}{dt^2}+\dfrac{dx}{dt}+x+y=0 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} Dx+D^2y=e^{3t} \\ (D+1)x+(D-1)y=4e^{3t} \end{cases}$

(4) $\begin{cases} (D^2-1)x+(D+3)y=0 \\ (D-1)x+Dy=0 \end{cases}$

(5) $\begin{cases} Dx=y \\ Dy=z \\ Dz=x \end{cases}$

(6) $\begin{cases} (D+1)x+(D-1)y=2 \\ 3x+(D+2)y=-1 \end{cases}$

FORMA LINEAL NORMAL DE UN SISTEMA DE ECUACIONES DIFERENCIALES:

LOS SISTEMAS LINEALES VISTOS ANTERIORMENTE SON DE LA FORMA:

$$(I)\begin{cases} P_{11}(D)X_1 + P_{12}(D)X_2 + \dots + P_{1n}(D)X_n = b_1(t) \\ P_{21}(D)X_1 + P_{22}(D)X_2 + \dots + P_{2n}(D)X_n = b_2(t) \\ \vdots \\ P_{n1}(D)X_1 + P_{n2}(D)X_2 + \dots + P_{nn}(D)X_n = b_n(t) \end{cases}$$

Donde los P_{ij} son polinomios en $\underline{D}$

Sin embargo toda ecuación diferencial de orden "n" y la mayoría de los sistemas de ecuaciones diferenciales pueden reducirse a:

$$(II)\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = g_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = g_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = g_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}$$

- Sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden.
- Esta forma es muy útil en matemática superior
- Su forma facilita su solución por computadora al usar métodos numéricos

POR SUPUESTO UN SISTEMA COMO (II) PUEDE SER LINEAL O NO LINEAL, DE COEFICIENTES CONSTANTES Ó VARIABLES.- EN CONSECUENCIA PUEDE SER NO FACIL DE RESOLVER, SI ES QUE ES POSIBLE RESOLVERLO.

En éste curso únicamente nos ocuparemos de un caso particular de (II) llamado: Sistemas de ecuaciones en forma lineal "NORMAL O CANONICA" que presenta la forma:

"FORMA LINEAL NORMAL"

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \dots + a_{1n}(t)x_n + b_1(t) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \dots + a_{2n}(t)x_n + b_2(t) \\ \vdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \dots + a_{nn}(t)x_n + b_n(t) \end{cases}$$

Donde:

$a_{ij}(t)$: son continuas en un intervalo I

$b_i(t)$: " " " " " I

además, si:

$$\begin{cases} a_{ij}(t) \text{ son constantes, el sistema es de coeficientes constantes} \\ b_i(t) = 0, \text{ el "sistema es homogéneo"} \\ b_i(t) \neq 0 \text{ " " " No homogéneo} \end{cases}$$

REDUCCION DE UNA ECUACION LINEAL DE ORDEN "n" A UN SISTEMA DE "n" ECUACIONES:

Sea: $a_0 \overset{(n)}{y}(t) + a_1 \overset{(n-1)}{y}(t) + \cdots + a_{n-1} y'(t) + a_n y(t) + b(t) = 0$

una ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes no homogénea de orden "n".

PARA REDUCIR ESTA ECUACION (1) A UN SISTEMA DE "n" ECUACIONES SE PROCEDE DE LA FORMA SIGUIENTE:

a)- Dada la ecuación se despeja (dejando en el 1er miembro) el término que contenga la derivada de mayor orden y en el 2º miembro se ordenan los términos comenzando por la función, continuando con la derivada de menor orden y finalizando con el término independiente ($b(t)$)

b)- Se divide toda la ecuacion entre a_0 si esta es $\neq 1$, es decir:

$$a_0 y^n(t) = -a_n y(t) - a_{n-1} y'(t) - a_{n-2} y''(t) - \cdots - a_1 \overset{(n-1)}{y}(t) - b(t)$$

Dividiendo por a_0 toda la ecuacion:

$$y^n(t) = -\frac{a_n y(t)}{a_0} - \frac{a_{n-1} y'(t)}{a_0} - \frac{a_{n-2} y''(t)}{a_0} - \cdots - \frac{a_1 \overset{n-1}{y}(t)}{a_0} - \frac{b(t)}{a_0}$$

c) Una vez que se tiene la ecuación en la forma anterior se realizan las sustituciones siguientes:

$$y = x_1$$
$$y' = x_2$$
$$y'' = x_3$$
$$\vdots$$
$$\overset{(n-1)}{y}(t) = x_n$$

EJEMPLO: REDUCIR: $\frac{d^4x}{dt^4} + x = t$ A UN SISTEMA DE ECUACIONES

$$x' = x_1' \qquad x'' = x_2' \qquad x''' = x_3'$$

$$\frac{d^4x}{dt^4} = -\underset{x_1}{x} + 0\underset{x_2}{\frac{dx}{dt}} + 0\underset{x_3}{\frac{d^2x}{dt^2}} + 0\underset{x_4}{\frac{d^3x}{dt^3}} + t = -x + t$$

$$x = x_1$$
$$x' = \boxed{x_1' = x_2}$$
$$x'' = \boxed{x_2' = x_3}$$
$$x''' = \boxed{x_3' = x_4}$$
$$x^{IV} = \boxed{x_4' = -x + t}$$

$$\begin{cases} x_1' = 0x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0 \\ x_2' = 0x_1 + 0x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 0 \\ x_3' = 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 1x_4 + 0 \\ x_4' = -1x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + t \end{cases}$$

EJEMPLO: Reducir $2y''' - 6y'' + 4y' + y = \operatorname{sen} t$ a un sistema de ecuaciones:

SOLUCION: Despejamos la derivada de mayor orden (y'''):

$$2y''' = -y - 4y' + 6y'' + \operatorname{sen} t \qquad (2)$$

Dividiendo toda la ecuación (2) entre 2:

$$y''' = -\frac{1}{2}\underset{x_1}{\underset{\downarrow}{y}} - 2\underset{x_2}{\underset{\downarrow}{y'}} + 3\underset{x_3}{\underset{\downarrow}{y''}} + \frac{1}{2}\operatorname{sen} t$$

$$y = x_1$$
$$y' = \boxed{x_1' = x_2}$$
$$y'' = \boxed{x_2' = x_3}$$
$$y''' = \boxed{x_3' = -\frac{1}{2}y - 2y' + 3y'' + \frac{1}{2}\operatorname{sen} t}$$

El sistema será:

$$\begin{aligned} x_1' &= 0x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 0 \\ x_2' &= 0x_1 + 0x_2 + 1x_3 + 0 \\ x_3' &= -\frac{1}{2}x_1 - 2x_2 + 3x_3 + \frac{1}{2}\operatorname{sen} t \end{aligned}$$

EJEMPLO DE UN SISTEMA CUALESQUIERA (QUE NO ESTA EN FORMA NORMAL) A LA FORMA NORMAL:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} - \dfrac{dx}{dt} + 5x + 2\dfrac{d^2y}{dt^2} = e^t & (1) \\ 2y - 2x + \dfrac{d^2y}{dt^2} = 3t^2 & (2) \end{cases}$$

De (2)

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 3t^2 + 2x - 2y \qquad (2')$$

ENTRE (1) y (2) ELIMINEMOS $\dfrac{d^2y}{dt^2}$ y OBTENGAMOS $\dfrac{d^2x}{dt^2}$ ES DECIR:

MULTIPLIQUÉMOS (2) POR DOS Y RESTÉMOSLA DE (1); PARA OBTENER:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = e^t - 6t^2 - 9x + 4y + \frac{dx}{dt} \qquad (1')$$, REALICEMOS LAS SIGTES SUSTITUCIONES: $\dfrac{dx}{dt} = u$ y $\dfrac{dy}{dt} = v$ en (2') y (1'):

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{du}{dt} \quad y \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dv}{dt}$$, obteniéndose:

SISTEMA EN FORMA NORMAL

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = u \\ \dfrac{dy}{dt} = v \\ \dfrac{du}{dt} = -9x + 4y + u + e^t - 6t^2 \\ \dfrac{dv}{dt} = 2x - 2y + 3t^2 \end{cases}$$

MATRIZ Una matriz A es un ordenamiento rectangular de números ó funciones dispuestos en renglones y columnas que verifican ciertas reglas, tal como:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

elementos de la matriz

a una matriz usualmente se le designa como: matriz A de $m \times n$ (matriz A de orden $m \times n$)

donde:

m - nº de renglones (filas)
n - nº de columnas

Si $m = n$ la matriz es "cuadrada" de orden "n"

a_{ij} - Elemento ubicado en el renglón i y columna j de una matriz A de $m \times n$. $[A = (a_{ij})_{m \times n}]$

DOS MATRICES A y B de $m \times n$ son iguales si: $a_{ij} = b_{ij}$ para cada i y cada j

Una matriz que tiene n renglones y una columna se denomina <u>MATRIZ COLUMNA</u> o <u>VECTOR COLUMNA</u> ó simplemente <u>VECTOR</u>

<u>MULTIPLO DE UNA MATRIZ</u> - Multiplicar una matriz por una constante ó una función K equivale a multiplicar cada elemento de la matriz por K; es decir:

$$KA = \begin{pmatrix} Ka_{11} & Ka_{12} \dots & Ka_{1n} \\ Ka_{21} & Ka_{22} \dots & Ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ K_{m1} & Ka_{m2} \dots & Ka_{mn} \end{pmatrix}$$

<u>SUMA O DIFERENCIA DE MATRICES</u>: Si A y B ambas de orden $m \times n$, se suman; se tendrá:

$$A \pm B = (a_{ij} \pm b_{ij})_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} \dots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} \dots & a_{2n} \pm b_{2n} \\ & & \\ a_{m1} \pm b_{m1} & a_{m2} \pm b_{m2} \dots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{pmatrix}$$

<u>NOTA</u> · DOS MATRICES DEL MISMO ORDEN SE LLAMAN CONFORMES RESPECTO DE LA SUMA ALGEBRAICA.

PRODUCTO DE DOS MATRICES: SEAN: A DE $m \times n$ y B DE $n \times p$ DOS MATRICES CUYO PRODUCTO SE DEFINE: (A es conforme con B respecto de la multip. cuando el nº de columnas de A = nº de renglones de B)

$$C = AB = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{\text{No DE COLUMNAS } (n)} \underbrace{\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{pmatrix}}_{\text{No DE RENGLONES } (n)}$$

No DE COLUMNAS (n) = No DE RENGLONES (n)

La matriz producto será de orden: $m \times p$

MATRIZ UNITARIA o IDENTIDAD MULTIPLICATIVA:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots 1 \end{pmatrix}$$

TAL QUE PARA UNA MATRIZ CUADRADA "A" DE $n \times n$ SE TIENE:

$$AI = A$$

PARA CADA MATRIZ CUADRADA EXISTE UN NÚMERO LLAMADO DETERMINANTE DE LA MATRIZ Y QUE SE DENOTA POR $\det A$ o $|A|$

TRANSPUESTA DE UNA MATRIZ DE $m \times n$ ES LA MATRIZ (A^T) DE $n \times m$ QUE SE FORMA AL INTERCAMBIAR EN LA MATRIZ ORIGINAL RENGLONES POR COLUMNAS

SEA A UNA MATRIZ $n \times n$ $\begin{cases} \text{SI } \det A \neq 0 \text{ LA MATRIZ ES "NO SINGULAR"} \\ \text{SI } \det A = 0 \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{SINGULAR} \end{cases}$

TODA MATRIZ CUADRADA A DE $n \times n$ TIENE UNA INVERSA MULTIPLICATIVA, SÍ Y SÓLO SI: A ES NO SINGULAR; QUE SE OBTIENE COMO:

$$A^{-1} = \frac{A_{Adj}}{\det A}$$

A_{Adj} - Matriz adjunta - Es la formada al sustituir en la transpuesta cada elemento por su cofactor correspondiente.

DERIVADA DE UNA MATRIZ DE FUNCIONES:

$$\frac{d}{dt} A(t) = \begin{pmatrix} \frac{df_{11}(t)}{dt} & \frac{df_{12}(t)}{dt} & \dots & \frac{df_{1n}(t)}{dt} \\ \frac{df_{21}(t)}{dt} & \frac{df_{22}(t)}{dt} & \dots & \frac{df_{2n}(t)}{dt} \\ \vdots & & & \\ \frac{df_{m1}(t)}{dt} & \frac{df_{m2}(t)}{dt} & \dots & \frac{df_{mn}(t)}{dt} \end{pmatrix}$$

PROPIEDADES DE LAS DERIVADAS E INTEGRALES DE MATRICES:

a) $\frac{d}{dt}(A+B) = \frac{dA}{dt} + \frac{dB}{dt}$

b) $\frac{d}{dt} AB = A\frac{dB}{dt} + \frac{dA}{dt}B$

c) $\frac{d}{dt}(\alpha A + \beta B) = \alpha \frac{dA}{dt} + \beta \frac{dB}{dt}$

d) $\int_{t_1}^{t_2} \alpha A\,dt = \alpha \int_{t_1}^{t_2} A\,dt$

e) $\int_{t_1}^{t_2} (A+B)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} A\,dt + \int_{t_1}^{t_2} B\,dt$

f) $\int_{t_1}^{t_2} (\alpha A + \beta B)\,dt = \alpha \int_{t_1}^{t_2} A\,dt + \beta \int_{t_1}^{t_2} B\,dt$

Donde A y B son matrices de funciones conformables con la suma ó la multiplicación según el caso.– α y β son escalares

EJEMPLOS:

Si $A(t) = \begin{pmatrix} t^2 & t \\ 3t & -t \end{pmatrix}$

Hallar su derivada respecto a t y su integral de o a t:

$$\frac{dA(t)}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt}(t^2) & \frac{d}{dt}(t) \\ \frac{d}{dt}(3t) & \frac{d}{dt}(-t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\int_0^t A\,dt = \begin{pmatrix} \int_0^t t^2 dt & \int_0^t t\,dt \\ \int_0^t 3t\,dt & \int_0^t -t\,dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{t^3}{3} & \frac{t^2}{2} \\ \frac{3t^2}{2} & -\frac{t^2}{2} \end{pmatrix}$$

SERIES DE MATRICES Y CONVERGENCIA El concepto de serie de matrices se define a partir de la noción de sucesión de matrices de la forma siguiente:

DEFINICION: sea una sucesión $\{A_K\}$ de matrices de orden $m \times n$ cuyos elementos son números, entonces la serie de matrices se expresa como:

$$\sum_{K=1}^{\infty} A_K$$

Si en la serie de matrices $\sum_{K=1}^{\infty} A_K$, se designa al elemento ij de A_K por (a_{ij}) y todas las series correspondientes a cada elemento son convergentes, entonces la serie $\sum_{K=1}^{\infty} A_K$ es convergente.

Si A es una matriz cuadrada cuyos elementos son números, entonces la serie $\sum_{K=1}^{\infty} \frac{A^K}{K!}$ converge; siendo la matriz identidad (I) el término de esta serie que corresponde a $K=0$

Por similitud con el desarrollo de la función e^x en serie de Maclaurin

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^K}{K!} + \cdots$$

podemos escribir para la función matricial (matriz exponencial) e^A el desarrollo siguiente:

$$e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \cdots + \frac{A^K}{K!} + \cdots = \sum_{K=0}^{\infty} \frac{A^K}{K!}$$

Del mismo modo podemos escribir:

$$e^{At} = I + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \frac{A^3t^3}{3!} + \cdots + \frac{A^Kt^K}{K!} = \sum_{K=0}^{\infty} \frac{A^Kt^K}{K!}$$

SISTEMA DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE 1ER ORDEN Y COEFICIENTES CONSTANTES

FORMA NORMAL DEL SISTEMA.

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + b_1(t) \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + b_2(t) \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + b_n(t) \end{cases}$$

EN FORMA MATRICIAL:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$$

$$\dot{\vec{x}}(t) = A\,\vec{x}(t) + \vec{b}(t)$$ — REPRESENTACION MATRICIAL DEL SISTEMA.

Si en un sistema de ecuaciones como (1) anterior; $\vec{b}(t)=0$, el sistema se llama HOMOGENEO, en caso contrario NO HOMOGENEO

SOLUCION DE UN SISTEMA HOMOGENEO:

Sea: $\dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}(t)$ (1) Un sistema de ecuacs. diferenciales homogéneas de 1er orden con coeficientes constantes.-

y: $\vec{x}(0)=\begin{bmatrix} x_1(0)\\ x_2(0)\\ \vdots \\ x_n(0)\end{bmatrix}$ ← "El vector de condiciones iniciales" en torno al cuál se desarrolla la solucion; utilizando la serie de Maclaurin.

Esto significa que cuando $t=0$ $x_1(t)=x_1(0)$, $x_2(t)=x_2(0)$, $\dots x_n(t)=x_n(0)$; etc

Siendo:

$\vec{x}(t)=\begin{bmatrix} x_1(t)\\ x_2(t)\\ \vdots \\ x_n(t)\end{bmatrix}$ ← El vector solución del sistema; donde cada componente es una función diferenciable y por lo tanto continua para cualquier valor de la variable independiente t, en algun intervalo que contenga a $t=0$.

Supongamos como solución del sistema (1) a:

$$\vec{x}(t) = \vec{P}_0 + \vec{P}_1 t + \vec{P}_2 t^2 + \dots + \vec{P}_k t^k. \qquad (2)$$

Donde $\vec{P}_0, \vec{P}_1, \dots \vec{P}_k$. son vectores constantes por determinar

Derivemos (2) respecto a t:

$$\dot{\vec{x}}(t) = \vec{P}_1 + 2\vec{P}_2 t + 3\vec{P}_3 t^2 + \dots + k\vec{P}_k t^{k-1} \qquad (3)$$

Sustituyendo (2) y (3) en (1):

$$\vec{P}_1 + 2\vec{P}_2 t + 3\vec{P}_3 t^2 + \dots + k\vec{P}_k t^{k-1} = A(\vec{P}_0 + \vec{P}_1 t + \vec{P}_2 t^2 + \dots + \vec{P}_k t^k) \qquad (4)$$

Igualando coeficientes en (4):

$$= A\vec{P}_0 + A\vec{P}_1 t + A\vec{P}_2 t^2 + \dots + A\vec{P}_k t^k$$

$$(5)\begin{cases} \vec{P}_1 = A\vec{P}_0 \\ \vec{P}_2 = \frac{1}{2}A\vec{P}_1 = \frac{1}{2!}A^2\vec{P}_0 \\ \vec{P}_3 = \frac{1}{3}A\vec{P}_2 = \frac{1}{6}A^3\vec{P}_0 = \frac{1}{3!}A^3\vec{P}_0 \\ \vdots \\ \vec{P}_k = \frac{1}{k}A\vec{P}_{k-1} = \frac{A^k}{k!}\vec{P}_0 \end{cases}$$

Sustituyendo $t=0$ en (2) $\boxed{\vec{x}(0) = \vec{P}_0}$ (6)

Sustituyendo los valores de (5) en (2):

$$\vec{x}(t) = \vec{P}_0 + A\vec{P}_0 t + \frac{A^2}{2!}\vec{P}_0 t^2 + \frac{A^3}{3!}\vec{P}_0 t^3 + \dots + \frac{A^k}{k!}\vec{P}_0 t^k.$$

Factorizando: $\vec{P}_0 = \vec{x}(0)$

$$\vec{x}(t) = \underbrace{\left(I + \frac{At}{1!} + \frac{A^2t^2}{2!} + \frac{A^3t^3}{3!} + \dots + \frac{A^kt^k}{k!}\right)}_{e^{At}}\vec{x}(0)$$

Se Concluye pués, que la solución de un sistema homogéneo es:

$$\boxed{\vec{x}(t) = e^{At}\vec{x}(0)} \qquad (7)$$

Se observa de la ecuación (7) que la solución del sistema (1), depende de e^{At}; la cuál calcularémos más adelante.

PROPIEDADES DE LA MATRIZ EXPONENCIAL e^{At}

a) Como: $e^{At} = I + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \frac{A^3t^3}{3!} + \cdots + \frac{A^kt^k}{k!}$ (8)

si $t=0$
entonces

$$\boxed{e^{(0)} = I}$$

b) Derivando (8) respecto a t

$$\frac{de^{At}}{dt} = A + A^2t + \frac{A^3t^2}{2!} + \frac{A^4t^3}{3!} + \cdots + \frac{A^nt^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$= A\left[I + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \frac{A^3t^3}{3!} + \cdots + \frac{A^{n-1}t^{n-1}}{(n-1)!}\right] = A \cdot e^{At}$$

$$= \left[I + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \frac{A^3t^3}{3!} + \cdots + \frac{A^{n-1}t^{n-1}}{(n-1)!}\right]A = e^{At} \cdot A$$

$$\therefore \boxed{\frac{de^{At}}{dt} = A \cdot e^{At} = e^{At} \cdot A}$$

c)

$$e^{At} \cdot e^{-At} = \left[I + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \frac{A^3t^3}{3!} + \frac{A^4t^4}{4!} + \cdots\right]\left[I - At + \frac{A^2t^2}{2!} - \frac{A^3t^3}{3!} + \frac{A^4t^4}{4!} + \cdots\right]$$

$$e^{(0)} = I$$

SOLUCION DE UN SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES DE PRIMER ORDEN DE COEFICIENTES CONSTANTES NO HOMOGENEA:

Sea:

$$\dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}(t) + \vec{b}(t) \qquad (1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{\vec{x}}(t), \vec{x}(t) \text{ y } \vec{b}(t) \text{ son vectores de } n \text{ renglones} \end{array} \right.$$

RESTANDO $A\vec{x}(t)$ a ambos miembros de (1):

$$\dot{\vec{x}}(t) - A\vec{x}(t) = \vec{b}(t) \qquad (2)$$

Premultiplicando (2) por e^{-At}:

$$\underbrace{e^{-At}\left[\dot{\vec{x}}(t) - A\vec{x}(t)\right]} = e^{-At}\vec{b}(t) \qquad (3)$$

$$\frac{d}{dt}\left[e^{-At}\vec{x}(t)\right] = e^{-At}\vec{b}(t)$$

$$d\left[e^{-At}\vec{x}(t)\right] = e^{-At}\vec{b}(t)\,dt \qquad (4)$$

PARA INTEGRAR (4) DE t_0 a t CAMBIEMOS t POR τ PARA EVITAR CONFUSION.-

$$\int_{t_0}^{t} d\left[e^{-A\tau}\vec{x}(\tau)\right] = \int_{t_0}^{t} e^{-A\tau}\vec{b}(\tau)\,d\tau$$

$$\left[e^{-A\tau}\vec{x}(\tau)\right]_{t_0}^{t} = \int_{t_0}^{t} e^{-A\tau}\vec{b}(\tau)\,d\tau$$

$$e^{-At}\vec{x}(t) - e^{-At_0}\vec{x}(t_0) = \int_{t_0}^{t} e^{-A\tau}\vec{b}(\tau)\,d\tau$$

Sumando a ambos miembros $e^{-At_0}\vec{x}(t_0)$:

$$e^{-At}\vec{x}(t) = e^{-At_0}\vec{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{-A\tau}\vec{b}(\tau)\,d\tau$$

Multiplicando por e^{At} ambos miembros:

$$\vec{x}(t) = e^{A(t-t_0)}\vec{x}(t_0) + e^{At}\int_{t_0}^{t} e^{-A\tau}\vec{b}(\tau)\,d\tau \qquad (5)$$

Para el 2º término del 2º miembro, t es constante y e^{At} puede introducirse a la integral es decir:

$$\boxed{\vec{x}(t) = e^{A(t-t_0)}\vec{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}\vec{b}(\tau)\,d\tau} \qquad (6)$$

Si: $t_0 = 0$ entonces $\vec{x}(t_0) = \vec{x}(0)$ y (6) se transforma en:

$$\boxed{\vec{x}(t) = e^{At}\vec{x}(0) + \int_{0}^{t} e^{A(t-\tau)}\vec{b}(\tau)\,d\tau} \qquad (7)$$

POR EL TEOREMA DE CONVOLUCION $\int_0^t e^{A(t-\tau)}\vec{b}(\tau)\,d\tau = \int_0^t e^{A\tau}\,\vec{b}(t-\tau)\,d\tau$

<u>CALCULO DE LA MATRIZ EXPONENCIAL e^{At} EMPLEANDO EL TEOREMA DE HAMILTON-CAYLEY:</u>

<u>TEOREMA DE HAMILTON-CAYLEY</u>: Todo matriz cuadrada satisface a su ecuación característica $[\det(A-\lambda I)=0]$:

Si: $\det(A-\lambda I) = b_n\lambda^n + b_{n-1}\lambda^{n-1} + b_{n-2}\lambda^{n-2} + \dots b_1\lambda + b_0 = 0$ (8)
es la ecuación característica de la matriz A, entonces:

$$b_nA^n + b_{n-1}A^{n-1} + b_{n-2}A^{n-2} + \dots + b_1A + b_0I = \vec{0}$$

EJMPLO: Sea LA MATRIZ:

$$A = \begin{vmatrix} 2 & -7 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}$$

MOSTRAR QUE VERIFICA A SU ECUACION CARACTERISTICA:

EC. CARACTERISTICA $\det(A - \lambda I) = 0$

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2 & -7 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -7 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2-\lambda & -7 \\ 3 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -7 \\ 3 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$= 12 - 8\lambda + \lambda^2 + 21 = 0$$

$$\lambda^2 - 8\lambda + 33 = 0$$

SUSTITUYAMOS λ por A y 1 por I; y 0 POR LA MATRIZ <u>NULA</u>:

$$A^2 - 8A + 33I = \bar{0}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -7 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 2 & -7 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} - 8\begin{vmatrix} 2 & -7 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} + 33\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 4-21 & -14-42 \\ 6+18 & -21+36 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -16 & 56 \\ -24 & -48 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 33 & 0 \\ 0 & 33 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -17 & -56 \\ 24 & 15 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -16 & 56 \\ -24 & -48 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 33 & 0 \\ 0 & 33 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -17-16+33 & -56+56+0 \\ 24-24+0 & 15-48+33 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

obq.

Si dividimos la ecuación (8) del Teoréma de H CAYLEY entre b_n:

$$\lambda^n + \frac{b_{n-1}}{b_n}\lambda^{n-1} + \frac{b_{n-2}}{b_n}\lambda^{n-2} + \frac{b^{n-3}}{b_n}\lambda^{n-3} + \dots + \frac{b_1}{b_n}\lambda + \frac{b_0}{b_n} = 0 \qquad (9)$$

y denominamos a los coeficientes como:

$$\frac{b_{n-1}}{b_n} = \alpha_1$$

$$\frac{b_{n-2}}{b_n} = \alpha_2$$

$$\vdots$$

$$\frac{b_0}{b_n} = \alpha_n$$

La ecuación característica (9) se transforma en:

$$\lambda^n + \alpha_1\lambda^{n-1} + \alpha_2\lambda^{n-2} + \alpha_3\lambda^{n-3} + \dots + \alpha_{n-1}\lambda + \alpha_n = 0 \qquad (10)$$

Como cada matriz cuadrada de $n \times n$ tiene n valores característicos (λ), designaremos a todos y a cada valor característico como λ_i: entonces (10) se reduce a:

$$\lambda_i^n + \alpha_1\lambda_i^{n-1} + \alpha_2\lambda_i^{n-2} + \alpha_3\lambda_i^{n-3} + \dots + \alpha_{n-1}\lambda_i + \alpha_n = 0 \qquad (11)$$

Por series de Maclaurin podemos escribir:

$$e^{\lambda_i t} = 1 + \lambda_i t + \frac{t^2}{2!}\lambda_i^2 + \frac{t^3}{3!}\lambda_i^3 + \dots + \frac{t^n}{n!}\lambda_i^n \qquad (12)$$

Despejando λ_i^n de (11):

$$\lambda_i^n = -\alpha_1\lambda_i^{n-1} - \alpha_2\lambda_i^{n-2} - \alpha_3\lambda_i^{n-3} - \dots - \alpha_{n-1}\lambda_i - \alpha_n \qquad (13)$$

Consideremos matrices cuadradas de $n=2$, $n=3$, $n=4$ ... hasta n y sustituyamos en (13):

$$\left.\begin{array}{ll}
\text{Para } n=2 & \lambda_i^2 = -\alpha_1\lambda_i - \alpha_2 \\
\text{Para } n=3 & \lambda_i^3 = -\alpha_1\lambda_i^2 - \alpha_2\lambda_i - \alpha_3 \\
\text{para } n=4 & \lambda_i^4 = -\alpha_1\lambda_i^3 - \alpha_2\lambda_i^2 - \alpha_3\lambda_i - \alpha_4 \\
\vdots \quad \vdots & \vdots \\
\text{Para } n=n & \lambda_i^n = -\alpha_1\lambda_i^{n-1} - \alpha_2\lambda_i^{n-2} - \alpha_3\lambda_i^{n-3} - \dots - \alpha_{n-1}\lambda_i - \alpha_n
\end{array}\right\} \quad (14)$$

Sustituyendo cada valor de (14) en (12) y factorizando: $\lambda_i, \lambda_i^2, \lambda_i^3, \dots, \lambda_i^n$:

$$e^{\lambda_i t} = \underbrace{\left[1 - \frac{\alpha_2 t^2}{2!} - \frac{\alpha_3 t^3}{3!} - \dots - \frac{\alpha_n t^n}{n!}\right]}_{\beta_0} + \underbrace{\left[t - \frac{\alpha_1 t^2}{2!} - \frac{\alpha_2 t^3}{3!} - \dots - \frac{\alpha_{n-1} t^n}{n!}\right]}_{\beta_1}\lambda_i +$$

$$+ \underbrace{\left[-\frac{\alpha_1 t^3}{3!} - \frac{\alpha_2 t^4}{4!} - \dots - \frac{\alpha_{n-2} t^n}{n!}\right]}_{\beta_2}\lambda_i^2 + \underbrace{\left[-\frac{\alpha_1 t^4}{4!} - \frac{\alpha_2 t^5}{5!} - \dots - \frac{\alpha_{n-3} t^n}{n!}\right]}_{\beta_3}\lambda_i^3 +$$

$$+ \dots + \underbrace{\left[-\frac{\alpha_1 t^{n+1}}{(n+1)!}\right]}_{\beta_n}\lambda_i^n \qquad (15)$$

En éstas condiciones se tendrá:

$$e^{\lambda_i t} = \beta_0 + \beta_1 \lambda_i + \beta_2 \lambda_i^2 + \cdots + \beta_n \lambda_i^n \qquad (16)$$

NOTA: obsérvese que:

$$\beta_0 = f_0(t)$$
$$\beta_1 = f_1(t)$$
$$\vdots$$
$$\beta_n = f_n(t).$$

Siguiendo un procedimiento similar, se puede obtener e^{At} o bien considerando el teorema de H-CAYLEY, es decir sustituyendo:

$\lambda_i = A$ y considerando la matriz identidad, la ecuación (16) se transforma en:

$$e^{At} = \beta_0 I + \beta_1 A + \beta_2 \lambda_i^2 + \cdots + \beta_n \lambda_i^n \qquad (17)$$

La ecuación (16) constituye realmente un sistema de ecuaciones formado por n ecuaciones (matriz de $n \times n$) en donde las $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$. Son las incógnitas y cada ecuación está determinada por cada λ_i (Valor característico) permaneciendo el tiempo (t) constante.

a) EJEMPLO DE CALCULO DE e^{At}; Raíces reales y diferentes:

Sea: $A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$ Calcular e^{At}

SOLUCION: Como la matriz es cuadrada de orden 2×2 ($n=2$) se tendrán, dos ecuaciones en β_0 y β_1 únicamente:

a) Se calculan sus dos valores característicos:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \; ; \quad \begin{matrix} 3 - 4\lambda + \lambda^2 - 8 = 0 \\ \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0 \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} \lambda_1 = 5 \\ \lambda_2 = -1 \end{matrix} \right.$$

b) Cálculo de β_0 y β_1; según (16):

$\underline{\lambda_1 = 5}$: $\quad e^{5t} = \beta_0 + 5\beta_1 \qquad$ (a)

$\underline{\lambda_2 = -1}$: $\quad e^{-t} = \beta_0 - \beta_1 \qquad$ (b)

Resolviendo (a) y (b):

$$\beta_1 = \frac{e^{5t} - e^{-t}}{6} \; ; \quad \beta_0 = \frac{e^{5t} + 5e^{-t}}{6}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \beta_0 + \beta_1 &= \frac{e^{5t} + 2e^{-t}}{3} \\ \beta_0 + 3\beta_1 &= \frac{2e^{5t} + e^{-t}}{3} \\ 4\beta_1 &= \frac{2e^{5t} - 2e^{-t}}{3} \\ 2\beta_1 &= \frac{e^{5t} - e^{-t}}{3} \end{aligned} \right.$$

Sustituyendo éstos valores en (17): $\quad e^{At} = \beta_0 I + \beta_1 A$, es decir

$$e^{At} = \beta_0 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \beta_1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta_0 + \beta_1 & 2\beta_1 \\ 4\beta_1 & \beta_0 + 3\beta_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{e^{5t} + 2e^{-t}}{3} & \dfrac{e^{5t} - e^{-t}}{3} \\ \dfrac{2e^{5t} - 2e^{-t}}{3} & \dfrac{2e^{5t} + e^{-t}}{3} \end{vmatrix}$$

b) EJEMPLO EN QUE LAS RAICES DE LA ECUACION CARACTERISTICA SON REALES Y REPETIDAS; CALCULAR e^{At} DE:

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 7 \end{vmatrix}$$

SOLUCION:

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 \\ -1 & 7-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 10\lambda + 25 = 0 \begin{cases} \lambda_1 = 5 \\ \lambda_2 = 5 \end{cases}$$

a) La 1ª raiz repetida se sustituye en (16): $e^{\lambda t} = \beta_0 + \lambda\beta_1$ (16') es decir:

$$e^{5t} = \beta_0 + 5\beta_1 \qquad (a)$$

b) Para la 2ª raiz repetida se deriva (16') respecto a λ, permaneciendo "t" constante, es decir; (tambien $\beta_0, \beta_1, \ldots \beta_n$ permanecen constantes):

$$\frac{d}{d\lambda}(e^{\lambda t}) = \frac{d}{d\lambda}(\beta_0 + \lambda\beta_1)$$

$$te^{\lambda t} = \beta_1 \qquad (16'')$$

Sustituyendo el 2º valor repetido en la 1ª derivada de (16'), es decir en (16''):

$$te^{5t} = \beta_1 \qquad (b)$$

Resolviendo el sistema (a) y (b) se obtiene:

$$\beta_0 = e^{5t} - 5te^{5t}$$
$$\beta_1 = te^{5t}$$

Luego e^{At} será:

$$e^{At} = \begin{vmatrix} \beta_0 + 3\beta_1 & 4\beta_1 \\ -\beta_1 & \beta_0 + 7\beta_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{5t} - 2te^{5t} & 4te^{5t} \\ -te^{5t} & e^{5t} + 2te^{5t} \end{vmatrix}$$

NOTA: La ecuación (16) se derivará respecto a λ, tantas veces como raices repetidas se tengan menos 1.

c) EJEMPLO DE CALCULO DE e^{At} DE UNA MATRIZ A EN LA QUE LAS RAICES DE SU ECUACION CARACTERISTICA SON CANTIDADES COMPLEJAS:

Sea:

$$A = \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$$

SOLUCION:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 6-\lambda & -1 \\ 5 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 10\lambda + 29 = 0 \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = 5+2i \\ \lambda_2 = 5-2i \end{array} \right.$$

Sustituyendo estos valores de λ en la ecuación (16), procurando expresar el 1er miembro de ésta ecuación (16) según las fórmulas de Euler:

Para $\lambda_1 = 5+2i \rightarrow \quad e^{(5+2i)t} = \beta_0 + (5+2i)\beta_1$

ó bien:

$$e^{5t}(\cos 2t + i \operatorname{sen} 2t) = \beta_0 + (5+2i)\beta_1 \qquad (a)$$

Para $\lambda_2 = 5-2i \quad e^{(5-2i)t} = \beta_0 + (5-2i)\beta_1$

ó bien:

$$e^{5t}(\cos 2t - i \operatorname{sen} 2t) = \beta_0 + (5-2i)\beta_1 \qquad (b)$$

Resolviendo el sistema (a) y (b) se tendrá; restando (b) de (a):

$$\begin{array}{r} \cancel{e^{5t}\cos 2t} + i e^{5t}\operatorname{sen} 2t = \cancel{\beta_0} + \cancel{5\beta_1} + 2i\beta_1 \\ -\cancel{e^{5t}\cos 2t} + i e^{5t}\operatorname{sen} 2t = -\cancel{\beta_0} - \cancel{5\beta_1} + 2i\beta_1 \\ \hline 2i\, e^{5t}\operatorname{sen} 2t = 4i\beta_1 \end{array}$$

Sumando:

$$\therefore \quad \beta_1 = \frac{e^{5t}\operatorname{sen} 2t}{2}$$

Sustituyendo éste valor en (a):

$$\beta_0 = e^{5t}(\cos 2t + i \operatorname{sen} 2t) - (5+2i)\frac{e^{5t}\operatorname{sen} 2t}{2} = \frac{e^{5t}(2\cos 2t - 5\operatorname{sen} 2t)}{2}$$

Luego e^{At} será igual a:

$$e^{At} = \begin{vmatrix} \beta_0 + 6\beta_1 & -\beta_1 \\ 5\beta_1 & \beta_0 + 4\beta_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{2e^{5t}\cos 2t + e^{5t}\operatorname{sen} 2t}{2} & -\dfrac{e^{5t}\operatorname{sen} 2t}{2} \\ \dfrac{5e^{5t}\operatorname{sen} 2t}{2} & \dfrac{2e^{5t}\cos 2t - e^{5t}\operatorname{sen} 2t}{2} \end{vmatrix}$$

CÁLCULO DE LA MATRIZ EXPONENCIAL (e^{At}) UTILIZANDO EL TEOREMA DE CAYLEY-HAMILTON:

Sea la matriz cuadrada $A=[a_{ij}]$ de orden n, cuyo polinomio o ecuación característica puede expresarse como:

$$\lambda^n+\alpha_1\lambda^{n-1}+\alpha_2\lambda^{n-2}+\alpha_3\lambda^{n-3}+\alpha_4\lambda^{n-4}+\ldots+\alpha_{n-2}\lambda^2+\alpha_{n-1}\lambda+\alpha_n=0 \qquad \text{(I)}$$

Despejando: λ^n; se obtiene:

$$\lambda^n=-\alpha_1\lambda^{n-1}-\alpha_2\lambda^{n-2}-\alpha_3\lambda^{n-3}-\alpha_4\lambda^{n-4}-\ldots-\alpha_{n-2}\lambda^2-\alpha_{n-1}\lambda-\alpha_n \qquad \text{(II)}$$

Por otro lado desarrollando $e^{\lambda t}$, en series de Maclaurin:

$$e^{\lambda t}=1+\lambda t+\lambda^2\frac{t^2}{2!}+\lambda^3\frac{t^3}{3!}+\lambda^4\frac{t^4}{4!}+\ldots+\lambda^{n-1}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}+\lambda^n\frac{t^n}{n!} \qquad \text{(III)}$$

Sustituyendo ahora (II) en (III) y factorizando $\lambda^0, \lambda, \lambda^2, \ldots, \lambda^{n-1}$ se obtiene:

$$e^{\lambda t}=(1-\alpha_n\frac{t^n}{n!})\lambda^0+(t-\alpha_{n-1}\frac{t^n}{n!})\lambda+(\frac{t^2}{2!}-\alpha_{n-2}\frac{t^n}{n!})\lambda^2+(\frac{t^3}{3!}-\alpha_{n-3}\frac{t^n}{n!})\lambda^3+\ldots+(\frac{t^{n-2}}{(n-2)!}-\alpha_2\frac{t^n}{n!})\lambda^{n-2}$$
$$+(\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}-\alpha_1\frac{t^n}{n!})\lambda^{n-1} \qquad \text{(IV)}$$

Si en esta ecuación se sustituye cada coeficiente de $\lambda^0, \lambda, \lambda^2, \ldots, \lambda^{n-1}$ por $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1}$ respectivamente; (IV) se reduce a:

$$e^{\lambda t}=\beta_0\lambda^0+\beta_1\lambda^1+\beta_2\lambda^2+\beta_3\lambda^3+\ldots+\beta_{n-1}\lambda^{n-1} \qquad \text{(V)}$$

Esta ecuación corresponde a la forma exponencial del polinomio característico de la matriz A; por lo que aplicando el Teorema de Cayley-Hamilton se obtiene la forma de la matriz exponencial, es decir:

$$e^{At}=\beta_0 I+\beta_1 A+\beta_2 A^2+\beta_3 A^3+\ldots+\beta_{n-1}A^{n-1} \qquad \text{(VI)}$$

En esta expresión de la matriz exponencial de A, los coeficientes: $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1}$ todos son funciones de t y pueden obtenerse directamente de la ecuación (IV).

Ejemplo: Dada A= $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ obtener su matriz exponencial.

Su polinomio característico es: $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ -1 & -1-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$ $=\lambda^3-\lambda^2+0\lambda+0=0$; de donde se obtienen:

$$\begin{cases} \alpha_1 = -1 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \\ n = 3 \end{cases}$$

De la ecuación (IV):

$$\beta_0 = \left(1-\alpha_3 \frac{t^3}{3!}\right) = \left(1-0\frac{t^3}{3!}\right) = 1$$

$$\beta_1 = \left(t-\alpha_2 \frac{t^3}{3!}\right) = \left(t-0\frac{t^3}{3!}\right) = t$$

$$\beta_2 = \left(\frac{t^2}{2!}-\alpha_1 \frac{t^3}{3!}\right) = \left(\frac{t^2}{2!}+1\frac{t^3}{3!}\right) = \frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!} = \left(\sum_{n=0}^{3}\frac{t^n}{n!}\right)-t-1 = \left(1+t+\frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!}\right)-t-1 = \frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!}$$

pero $\sum_{n=0}^{3}\frac{t^n}{n!} = e^t$ $\therefore \beta_2=e^t-t-1$, sustituyendo β_0, β_1 y β_2, en (VI) y considerando n=3;

$e^{At}=\beta_0 I+\beta_1 A+\beta_2 A^2$; siendo $A^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

$$e^{At} = \beta_0\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta_1\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \beta_2\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_0+\beta_1 & \beta_1 & 0 \\ -\beta_1 & \beta_0-\beta_1 & 0 \\ \beta_1+\beta_2 & \beta_1+\beta_2 & \beta_0+\beta_1+\beta_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} t+1 & t & 0 \\ -t & 1-t & 0 \\ e^t-1 & e^t-1 & e^t \end{pmatrix}$$

Siendo la forma de obtener $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{n-1}$ de la ecuación (IV) no siempre fácil y considerando que del polinomio característico de la matriz A ecuación (I) se obtienen n raíces características que al sustituirlas (cada una de ellas) en la ecuación (V) generan un sistema de n ecuaciones lineales no homogéneas con n incógnitas ($\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{n-1}$), resulta más sencillo resolver este sistema y sustituir estos valores ($\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{n-1}$) en la ecuación (VI) para obtener finalmente la matriz exponencial de A.

EJEMPLO:

Determinar la matriz exponencial de la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 \\ 2 & 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \begin{cases} \lambda_1 = -2 \\ \lambda_2 = 1 \\ \lambda_3 = 3 \end{cases}$$

$e^{\lambda t} = \beta_0 + \beta_1\lambda + \beta_2\lambda^2$

Si $\lambda=-2 \Rightarrow \beta_0-2\beta_1+4\beta_2=e^{-2t}$ (1)

Si $\lambda=1 \Rightarrow \beta_0+\beta_1+\beta_2=e^{t}$ (2)

Si $\lambda=3 \Rightarrow \beta_0+3\beta_1+9\beta_2=e^{3t}$ (3)

Resolviendo el sistema:

$$\beta_0 = \frac{6e^{-2t} - 6e^{3t} + 30e^{t}}{30}$$

$$\beta_1 = \frac{-8e^{-2t} + 3e^{3t} + 5e^{t}}{30}$$

$$\beta_2 = \frac{2e^{-2t} + 3e^{3t} - 5e^{t}}{30}$$

$A^2=\begin{pmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \therefore e^{At}=\beta_0 I+\beta_1 A+\beta_2 A^2$

$$e^{At}=\begin{pmatrix} \beta_0+\beta_1+6\beta_2 & 2\beta_1+3\beta_2 & -\beta_1+\beta_2 \\ 2\beta_1+3\beta_2 & \beta_0+\beta_1+6\beta_2 & \beta_1-\beta_2 \\ -\beta_1+\beta_2 & \beta_1-\beta_2 & \beta_0+2\beta_2 \end{pmatrix}$$

$$e^{At}=\begin{pmatrix} \dfrac{10e^{-2t}+15e^{3t}+5e^{t}}{30} & \dfrac{-10e^{-2t}+15e^{3t}-5e^{t}}{30} & \dfrac{10e^{-2t}-10e^{t}}{30} \\ \dfrac{-10e^{-2t}+15e^{3t}-5e^{t}}{30} & \dfrac{10e^{-2t}+15e^{3t}+5e^{t}}{30} & \dfrac{-10e^{-2t}+10e^{t}}{30} \\ \dfrac{10e^{-2t}-10e^{t}}{30} & \dfrac{-10e^{-2t}+10e^{t}}{30} & \dfrac{10e^{-2t}+20e^{t}}{30} \end{pmatrix}$$

Comprobación en $t=0$

$$e^{A(0)} = e^{\bar{0}} = I = \begin{pmatrix} \dfrac{10+15+5}{30} & \dfrac{-10+15-5}{30} & \dfrac{10-10}{30} \\ \dfrac{-10+15-5}{30} & \dfrac{10+15+5}{30} & \dfrac{-10+10}{30} \\ \dfrac{10-10}{30} & \dfrac{-10+10}{30} & \dfrac{10+20}{30} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

"TODA FUNCION PERIODICA CONTINUA PUEDE SER REPRESENTADA POR UNA SUPERPOSICION DE FUNCIONES SENOIDALES Y COSENOIDALES

SERIES DE FOURIER:

Sea la serie : $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi}{L}x + b_n \operatorname{Sen}\frac{n\pi}{L}x\right)$ (1)

Para el conjunto de puntos donde la serie (1) converge, se define una funcion $f(x)$, cuyo valor en cada punto es la suma de la serie para ese valor de x. En este caso se dice que la serie (1) es la serie de Fourier para $f(x)$.-

El problema ahora consiste en determinar qué funciones pueden representarse mediante la serie (1) y cómo calcular los coeficientes: a_0, a_n y b_n.

Las Series de Fourier son útiles en:

- Método de separacion de variables en la solución de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales.
- En el análisis de sistemas mecánicos o eléctricos sobre los que actúan fuerzas periódicas externas.-

PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS: $\operatorname{Sen}\frac{n\pi}{L}x$ y $\cos\frac{n\pi}{L}x$.

1.— Funciones periódicas: Son funciones periódicas, aquéllas que contienen en su dominio a x y $x+T$, donde T es el periódo de la función, tal que:

$$f(x+T)=f(x)\begin{cases}\operatorname{Sen}(x+T) = \operatorname{Sen} x\\ \cos(x+T) = \cos x\end{cases}$$

Cualquier múltiplo de T es tambien periódo de la función, siendo el menor (T) el periódo fundamental de la función.-

Si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones periodicas con periódo común T, entonces la suma $f(x)+g(x)$ es tambien periódica con periódo T.

TEOREMA- Las funciones $\operatorname{Sen}\frac{n\pi}{L}x$ y $\cos\frac{n\pi}{L}x$, $(n = 1\ 2\ 3 \ldots n)$

Son periódicas con periódo fundamental $T=\frac{2L}{n}$ y $nT=2L$ es decir, tambien $T=2L$ es periódo de las funciones

DEMOSTRACION:

$$\operatorname{Sen}\left(\frac{n\pi x}{L} + \frac{n\pi T}{L}\right) = \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}$$

desarrollando:

$$\operatorname{Sen}\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{n\pi T}{L} + \cos\frac{n\pi x}{L}\operatorname{sen}\frac{n\pi T}{L} = \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}$$

Esto se cumple para toda x si:

$$\cos\frac{n\pi T}{L} = 1$$

y ésto se cumple para:

$$\operatorname{Sen}\frac{n\pi T}{L} = 0$$

$$\frac{n\pi T}{L} = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi,$$

Luego:

$$\frac{n\pi T}{L} = 2\pi \quad \therefore \boxed{T = \frac{2L}{n}}$$

2 _ <u>CONCEPTO DE ORTOGONALIDAD DE VECTORES</u>: El producto interno estándar (u, v) de dos funciones reales u y v Sobre el intervalo $\alpha \leq x \leq \beta$ se define por:

$$(u, v) = \int_{\alpha}^{\beta} u(x)\, v(x)\, dx$$

entonces se dice que las funciones u y v son <u>ortogonales</u> Sobre $\alpha \leq x \leq \beta$ si su producto interno es NULO., es decir:

$$\int_{\alpha}^{\beta} u(x) v(x) dx = 0$$

Se dice pués que un conjunto de funciones es <u>MUTUAMENTE ORTOGONAL</u> si cada pareja de funciones en el conjunto es <u>ORTOGONAL</u>.

TEOREMA: Las funciones $\operatorname{Sen} \frac{n\pi}{L} x$ y $\operatorname{Cos} \frac{n\pi}{L} x$ $\quad n = 1, 2, 3, \dots n.$ forman un conjunto mutuamente ortogonal, sobre el intervalo $-L \leq x \leq L$, es decir satisfacen las siguientes ecuaciones, conocidas como relaciones de ORTOGONALIDAD

$$\int_{-L}^{L} \cos \frac{m\pi}{L} x \cos \frac{n\pi}{L} x\, dx = \begin{cases} 0, & m \neq n. \\ L, & m = n \end{cases}$$

$$\int_{-L}^{L} \cos \frac{m\pi}{L} x \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x\, dx = 0; \text{ para toda } m, n$$

$$\int_{-L}^{L} \operatorname{sen} \frac{m\pi}{L} x \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x\, dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ L & m = n \end{cases}$$

Estos resultados pueden obtenerse por integración directa, por ejemplo:

$$\int_{-L}^{L} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}\, dx \qquad \text{Como: } \operatorname{Sen} x \operatorname{sen} y = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y) - \cos(x+y)\right]$$

entonces:

$$\int_{-L}^{L} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}\, dx = \frac{1}{2} \int_{-L}^{L} \left[\cos \frac{(m-n)\pi x}{L} - \cos \frac{(m+n)\pi x}{L}\right] dx$$

$$= \frac{L}{2\pi} \left\{ \frac{\operatorname{sen}[(m-n)\pi x/L]}{m-n} - \frac{\operatorname{sen}[(m+n)\pi x/L]}{m+n} \right\}_{-L}^{L} = 0$$

Si $m = n$ entonces:

$$\int_{-L}^{L} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}\, dx = \int_{-L}^{L} \left(\operatorname{sen} \frac{m\pi x}{L}\right)^2 dx$$

$$\frac{1}{2} \int_{-L}^{L} \left[1 - \cos \frac{2m\pi x}{L}\right] dx = \frac{1}{2} \left[x - \frac{L}{2m\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{2m\pi}{L}\right) x \right]_{-L}^{L} = L$$

CALCULO DE LOS COEFICIENTES a_0, a_n y b_n; FORMULAS DE EULER:

Supongamos que la serie de FOURIER (1) converge y llamemos a su suma $f(x)$, es decir:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (2)$$

1) CALCULO DE $\frac{a_0}{2}$: Multipliquemos (2) por dx e integremos de $-L$ a L:

$$\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = \frac{a_0}{2}\int_{-L}^{L} dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cancel{\int_{-L}^{L}\cos\frac{n\pi x}{L}dx}^{(0)} + b_n \cancel{\int_{-L}^{L}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}dx}^{(0)}\right]$$

$$\therefore \boxed{\frac{a_0}{2} = \frac{\int_{-L}^{L} f(x)\,dx}{2L}} = \frac{\int \text{en el intervalo}}{\text{magnitud del intervalo}} = \text{Valor medio de la función.-}$$

2)- CALCULO DE a_n: Multiplicando (2) por $\cos\frac{n\pi x}{L}$ e integrando entre $-L$ y L

$$\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{a_0}{2}\underbrace{\int_{-L}^{L}\cos\frac{n\pi x}{L}dx}_{0} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\underbrace{\int_{-L}^{L}\cos^2\frac{n\pi x}{L}dx}_{L} + b_n\underbrace{\int_{-L}^{L}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}dx}_{0}\right]$$

$$\therefore \boxed{a_n = \frac{\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx}{L}} = \frac{\int \text{en el intervalo}}{\text{Semi-intervalo}}, \quad n = 1, 2, 3 \ldots, n$$

3) CALCULO DE b_n: Multiplicando (2) por $\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}$ e integrando entre $-L$ y L

$$\int_{-L}^{L} f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{a_0}{2}\underbrace{\int_{-L}^{L}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}dx}_{0} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\underbrace{\int_{-L}^{L}\cos\frac{n\pi x}{L}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}dx}_{0} + b_n\underbrace{\int_{-L}^{L}\operatorname{sen}^2\frac{n\pi x}{L}dx}_{L}\right]$$

$$\therefore \boxed{b_n = \frac{\int_{-L}^{L} f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\,dx}{L}} = \frac{\int \text{en el intervalo}}{\text{Semi-intervalo}}$$

TEOREMA QUE ESTABLECE LAS CONDICIONES SUFICIENTES (PERO NO NECESARIAS) PARA GARANTIZAR LA CONVERGENCIA DE UNA SERIE DE FOURIER HACIA LA FUNCION A PARTIR DE LA CUAL SE CALCULARON SUS COEFICIENTES:

TEOREMA: Si $f(x)$ y $f'(x)$ son seccionalmente continuas en el intervalo $-L \le x \le L$ y $f(x)$ está definida fuera del intervalo $-L \le x \le L$ de modo que es periódica de período $2L$. Entonces $f(x)$ tiene una serie de Fourier:

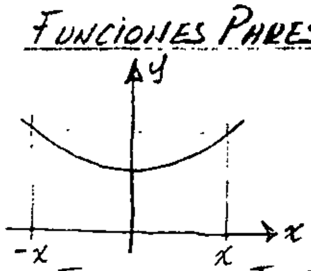
$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\right)$$

La serie converge a $f(x)$ en todos los puntos donde $f(x)$ es continua y a:

$$\frac{[f(x_+) + f(x_-)]}{2}$$

en todos los puntos donde $f(x)$ es discontinua

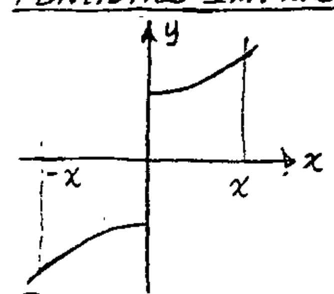
FUNCIONES PARES: Son funciones simétricas respecto al eje "y", es decir su dominio contiene a los puntos x y $-x$ tal que:



$$f(x) = f(-x)$$

La función periódica representativa de éste tipo es la función Coseno.

FUNCIONES IMPARES: Son funciones simétricas respecto al origen, es decir su dominio contiene a $-x$ siempre que contenga a x y se cumpla:



$$f(-x) = -f(x) \quad \text{para cada } x \text{ en el dominio de } f(x)$$

La función periódica representativa de éste tipo es la función Seno.

PROPIEDADES ELEMENTALES DE LAS FUNCIONES PARES E IMPARES:

1) La suma (diferencia) y producto (cociente) de dos funciones pares son PARES
2) La suma (diferencia) de dos funciones impares es IMPAR, el producto (cociente) de dos funciones impares es PAR
3) La suma (diferencia) de una funcion impar y una función par no es ni par ni impar; en cambio el producto (cociente) de una función impar y una función par es IMPAR

4) Si $f(x)$ es función par, entonces:

$$\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{L} f(x)\,dx$$

5) $f(x)$ es una función impar, entonces:

$$\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = 0$$

SERIES COSENOS: Si $f(x)$ y $f'(x)$ son seccionalmente continuas en $-L \leq x \leq L$ y $f(x)$ es una funcion periódica par con período $2L$ entonces:

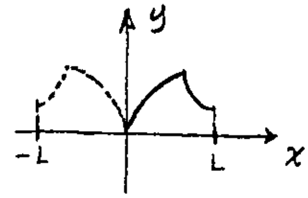
$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L}$$

SERIES SENOS: Si $f(x)$ bajo las mismas condiciones anteriores, es IMPAR entonces:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}$$

DESARROLLO DE FUNCIONES DEFINIDAS EN MEDIO INTERVALO: En muchos casos es necesario representar, mediante serie de Fourier una función que está definida en $0 < x < L$. Esto puede lograrse mediante tres formas, extendiendo la función para el intervalo $-L < x < 0$ según se indica a continuación:

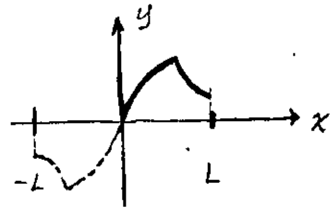
a) Reflejando la gráfica de la función respecto a y (haciéndola simétrica respecto al eje y) para $-L < x < 0$, resultando una función par en el intervalo $-L < x < L$



$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,dx \qquad (1)$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx \qquad (2)$$

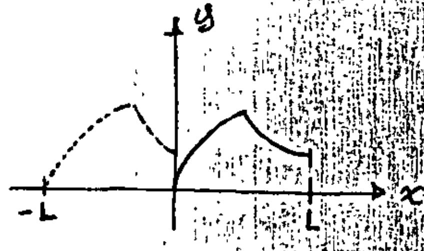
b) Reflejando la gráfica de la función respecto al origen (haciéndola simétrica respecto al origen) para $-L < x < 0$, resultando una función impar en el intervalo $-L < x < L$



$$a_0 = a_n = 0 \qquad (3)$$

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{L}\,dx \qquad (4)$$

c) Reflejando idénticamente la gráfica de la función en el intervalo $-L < x < 0$ resulta una función ni par ni impar



$$a_0 = \text{al caso (a)} \qquad (5)$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{2n\pi x}{L}\,dx \qquad (6)$$

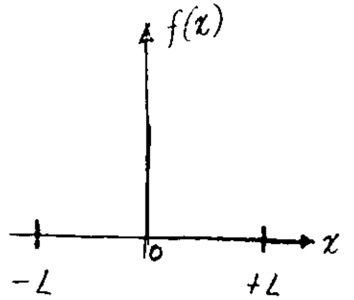
$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,\mathrm{sen}\,\frac{2n\pi x}{L}\,dx \qquad (7)$$

En este caso:

a_n se obtiene también haciendo $n = 2n$ en el valor de a_n calculado en (2) y:

b_n se obtiene haciendo $n = 2n$ en el valor de b_n calculado en (4)

DESARROLLO DE UNA FUNCION EN SERIES TRIGONOMETRICAS DE FOURIER.



INTERVALO SIMETRICO

a) FUNCION NI PAR, NI IMPAR.
Contiene términos: Cosenos y Senos

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi}{L}x + b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi}{L}x\right); \text{ donde}$$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx, \quad a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

b) FUNCION: PAR: [f(x) es par]
Contiene: únicamente términos Cosenos.

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,dx$$

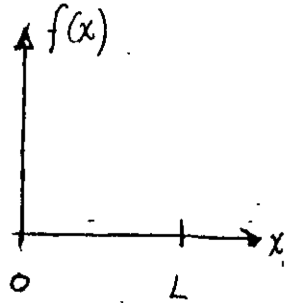
$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx =$$

$$b_n = 0$$

c) FUNCION: IMPAR [f(x) es Impar]
Contiene: únicamente términos Senos:

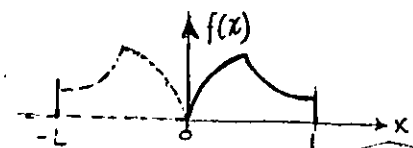
$$a_0 = 0 \qquad a_n = 0$$

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi}{L}x\,dx$$



INTERVALO ASIMETRICO
(DESARROLLO EN MEDIO INTERVALO)

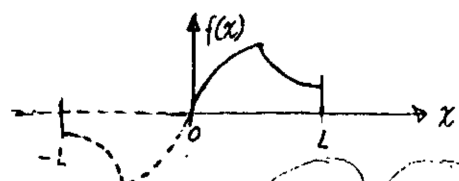
a) Desarrollo en serie de Cosenos (par)



* $\frac{a_0}{2} = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,dx \qquad b_n = 0$

** $a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx$ —(1)

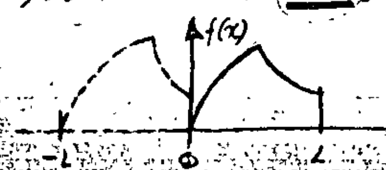
b) Desarrollo en serie Senos (impar)



$a_0 = 0 \qquad a_n = 0$

** $b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi}{L}x\,dx$ —(2)

c) Desarrollo en serie Senos y Cosenos (ni par, ni impar)

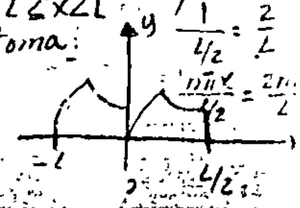


$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{2n\pi}{L}x\,dx$$

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\operatorname{sen}\frac{2n\pi}{L}x\,dx$$

Por ser la onda repetida en $-L < x < L$ se toma: $\frac{1}{L/2} = \frac{2}{L}$, $\frac{n\pi x}{L/2} = \frac{2n\pi x}{L}$



... SIMETRICA RESPECTO AL EJE "Y". ... también haciendo $n = 2n$

$\frac{\partial}{\partial \tau}$		$\int e^{-2\tau} d\tau$		$\Big]_0^t$
$(t-\tau)^3$	+	$-\frac{1}{2} e^{-2\tau}$	$-\frac{(t-\tau)^3}{2} e^{-2\tau}$	$\frac{1}{2} t^3$
$-3(t-\tau)^2$	-	$\frac{1}{4} e^{-2\tau}$	$\frac{3(t-\tau)^2}{4} e^{-2\tau}$	$-\frac{3}{4} t^2$
$6(t-\tau)$	+	$-\frac{1}{8} e^{-2\tau}$	$\frac{-3(t-\tau)}{4} e^{-2\tau}$	$\frac{3}{4} t$
-6	-	$\frac{1}{16} e^{-2\tau}$	$\frac{3}{8} e^{-4\tau}$	$\frac{3}{8} e^{-2t} - \frac{3}{8}$

Entonces el resultado es

$$\int_0^t (t-\tau)^3 e^{-2\tau} d\tau = \frac{1}{2} t^3 - \frac{3}{4} t^2 + \frac{3}{4} t + \frac{3}{8} e^{-2t} - \frac{3}{8}$$

Lo anterior es una muestra de unas tablas que ha desarrollado el Ing. Joel Gómez, profesor de la Facultad de Ingeniería, y a los lectores que se interesen por ellas, se les invita a que se pongan en contacto con él ~~profesor~~.

Correo electrónico: erik2306@servidor.unam.mx

MATEMÁTICAS Y CULTURA

BOLETÍN

25.05.1998 No. 171

DEPARTAMENTOS DE ÁLGEBRA
Y GEOMETRÍA ANALÍTICA Y DE CÁLCULO

EDITORIAL *EDITORIAL*

Hace 17 años, la División de Ciencias Básicas vio nacer de su Departamento de Matemáticas al Boletín Matemáticas y Cultura. En él se ha dejadó constancia, entre otras cosas, de la formalidad con la que se debe tratar a las Matemáticas, de otros tópicos que complementan y enriquecen la formación curricular de nuestros alumnos y la actualización de los docentes, de la utilidad que ellas tienen, y de la recreación que se percibe cuando se tratan éstas con enfoques frescos y diferentes.

Es claro que las matemáticas son cultura, por ello, desde el nacimiento del Boletín, en él se decidió vincular a las matemáticas con un rico y hermoso abanico de temáticas sobre poesía, música y demás bellas artes; proverbios, felicitaciones, manifestaciones de júbilo, valores, reflexiones acerca de la ética profesional, de las ciencias sociales y de las humanidades; puesto que todas ellas constituyen expresiones culturales.

El Boletín es un espacio en el que se manifiesta con gran nitidez que la comunidad de ésta y demás Divisiones de nuestra Facultad; ingenieros, profesores y alumnos tienen en muy alto aprecio a los valores humanos, que debemos seguir aquilatando y fomentando para desterrar la falsa visión que algunos tienen sobre el ingeniero: que no le interesa más que la parcela de la cultura que trata de lo racional; dejando al olvido o al desinterés, lo que tenga que ver con la faceta humana y sentimental de su propio ser.

También es claro que los académicos y alumnos que han contribuido durante una año más a darle vida al Boletín, ya en plena juventud, merecen nuestras felicitaciones; cuantos han contribuido y particularmente los profesores Érik Castañeda, Pablo García y Octavio Estrada; quienes desde hace 17 años y en diferentes etapas, han sido responsables de la aparición puntual y del ameno contenido de cada número.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

EXAMEN: ______

PROFESOR: ______

MATERIA: ______

NOMBRE DEL ALUMNO: ______

APLICACION DE LA FUNCION ESCALON Y SU TRANSFORMADA DE LAPLACE EN LA SOLUCION DE UN PROBLEMA DE CINEMATICA.

Problema: A la rapidez de cambio de la aceleración se le conoce como "SACUDIDA". Cambios bruscos de la aceleración, producen malestares a los pasajeros en los ascensores..

Si la sacudida de un ascensor se limita a ± 1.6 pies/s²/s, determinar:

a) El tiempo mínimo necesario para que el asensor, partiendo del reposo se eleve 50. pies y se pare.

b) La Velocidad máxima alcanzada

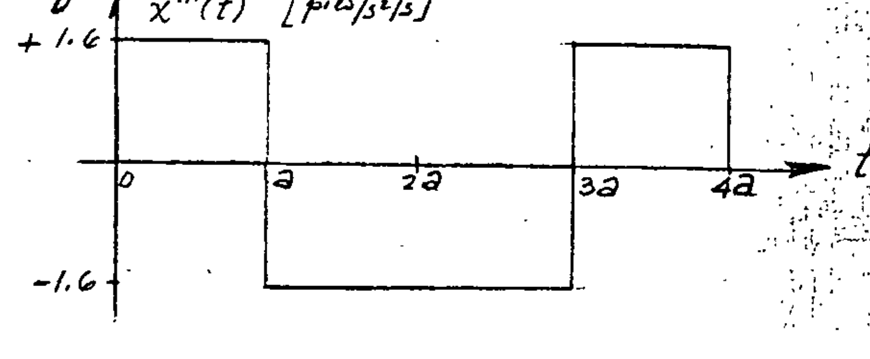
c) La " promedio "

d) Trazar las gráficas de la aceleración, Velocidad y posición del ascensor en función del tiempo.

SOLUCION: Consideremos que el tiempo total es igual a $4a$, de modo que las condiciones del problema son:

$$a(0) = 0 \text{ pies/s}^2 \qquad a(4a) = 0 \text{ pies/s}^2$$
$$v(0) = 0 \text{ pies/s} \qquad v(4a) = 0 \text{ pies/s}$$
$$x(0) = 0 \text{ pies} \qquad x(4a) = 50 \text{ pies}$$

De acuerdo al planteamiento del problema, la gráfica de la sacudida es:



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

EXAMEN: ______

PROFESOR: ______

MATERIA: ______

NOMBRE DEL ALUMNO: ______

$$a(t)=\begin{cases} 1.6t & 0<t<a \\ 1.6t-3.2(t-a) & a<t<3a \\ 1.6t-3.2(t-a)+3.2(t-3a) & 3a<t<4a \end{cases}$$

$$\underset{\text{(sacudida)}}{x'''(t)}\begin{cases} 1.6 & 0<t<a \\ -1.6 & a<t<3a \\ 1.6 & 3a<t<4a \end{cases}$$

La Velocidad es máxima cuando $a(t)=0$, luego igualando a cero la 2ª relación funcional de $a(t)$ se tiene:

$$1.6t-3.2(t-a)=0 \quad \therefore \quad t=2a=2(2.5)=5\,[s]$$

lo cual es lógico:

El Valor máximo se obtiene sustituyendo en la 2ª relación funcional de $v(t)$ es decir:

$$v(t)\Big|_{\substack{t=5\\a=2.5}}=\frac{1.6}{2}(5)^2-\frac{3.2}{2}(5-2.5)^2=10\;[\text{pies}/s]$$

$$x(a)=x(2.5)=\frac{1.6}{6}(2.5)^3=2.63\text{ pies}$$

$$x(2a)=x(5)=\frac{1.6}{6}(5)^3-\frac{3.2}{6}(2.5)^3=25\text{ pies}$$

$$x(3a)=x(7.5)=\frac{1.6}{6}(7.5)^3-\frac{3.2}{6}(5)^3=45.83\text{ pies}$$

$$x(4a)=\frac{1.6}{6}(10)^3-\frac{3.2}{6}(7.5)^3+\frac{3.2}{6}(2.5)^3=50\text{ pies}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

EXAMEN: ____________________

PROFESOR: ____________________

MATERIA: ____________________

NOMBRE DEL ALUMNO: ____________________

Esta función de la sacudida del elevador, puede expresarse como:

$$\frac{d^3x(t)}{dt^3} = 1.6u(t) - 3.2u(t-a) + 3.2u(t-3a) - 1.6u(t-4a)$$

Considerando las condiciones iniciales del problema, la transformada de Laplace de ésta función es:

$$s^3X(s) = \frac{1.6}{s} - \frac{3.2e^{-as}}{s} + \frac{3.2e^{-3as}}{s} - \frac{1.6e^{-4as}}{s}$$

$$\therefore \quad X(s) = \frac{1.6}{s^4} - \frac{3.2e^{-as}}{s^4} + \frac{3.2e^{-3as}}{s^4} - \frac{1.6e^{-4as}}{s^4}$$

Regresando al dominio del tiempo, es decir, aplicando la transformada inversa de Laplace a la función anterior, se obtiene:

$$x(t) = \frac{1.6}{6}t^3 - \frac{3.2}{6}(t-a)^3u(t-a) + \frac{3.2}{6}(t-3a)^3u(t-3a) - \frac{1.6}{6}(t-4a)^3u(t-4a) \qquad (I)$$

Considerando la condición: $x(4a) = 50$ pies, en la ecuación anterior resulta:

$$x(4a) = 50 = \frac{1.6}{6}(4a)^3 - \frac{3.2}{6}(3a)^3 + \frac{3.2}{6}a^3$$

Simplificando: $19.2a^3 = 300 \quad \therefore \quad \underline{a = 2.5 \text{ segundos}}$

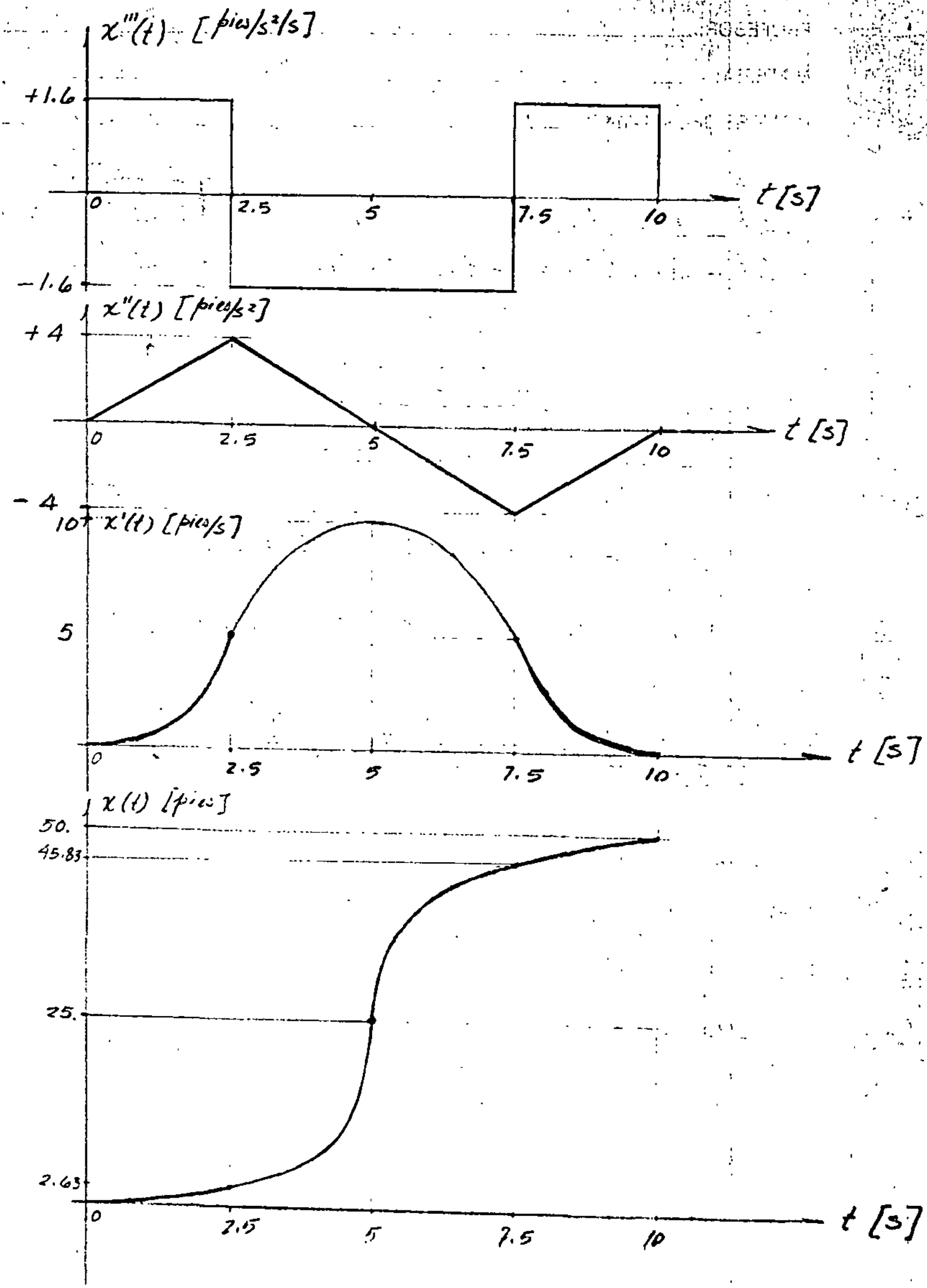
Siendo el tiempo total igual a: $4a = \underline{10 \text{ segundos}}$

La velocidad promedio será: $v_p = \frac{50 \text{ pies}}{10 s} = 5. \left[\text{pies/s}\right]$

La expresión (I) puede expresarse también como:

$$x(t) = \begin{cases} \frac{1.6}{6}t^3 & 0 < t < a \\ \frac{1.6}{6}t^3 - \frac{3.2}{6}(t-a)^3 & a < t < 3a \\ \frac{1.6}{6}t^3 - \frac{3.2}{6}(t-a)^3 + \frac{3.2}{6}(t-3a)^3, & 3a < t < 4a \\ 50. & t \geq 4a \end{cases}$$

Derivando respecto al tiempo esta función, se determinan $v(t)$, $a(t)$ y $x'''(t)$ (sacudida), como se indica a continuación:


x'''(t) [piω/s²/s]
+1.6
-1.6
0
2.5
5
7.5
10
t [s]
x''(t) [piω/s²]
+4
-4
x'(t) [piω/s]
10
5
x(t) [piω]
50.
45.83
25.
2.63

FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA

CURSOS INSTITUCIONALES

DIPLOMADO EN DISEÑO Y ADAPTACIÓN DE ANTENAS

MOD. I. PROPEDEUTICO

DEL 23 AL 28 DE ABRIL DEL 2003

ANEXOS TERCERA PARTE

CI - 059

Instructores: Ing. Juan Manuel Castillo Miranda
Ing. Jesús Antonio Patiño Ramírez
Ing. Joel Gómez
SECRETARÍA DE MARINA
ABRIL DEL 2003

PROBLEMAS CON VALORES EN LA FRONTERA Y PROBLEMAS DE VALOR INICIAL

Como ya se ha comentado en la introducción de este capítulo, no estamos interesados en la búsqueda de la solución general de las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales que aquí tratamos. Más bien pretendemos encontrar las soluciones particulares que verifiquen la ecuación diferencial en derivadas parciales, junto con ciertas condiciones auxiliares.

El tipo de condiciones auxiliares que consideraremos asociadas a cada ecuación diferencial en derivadas parciales concreta, va a depender, esencialmente, de que ésta contenga o no el tiempo como variable independiente. Así, distinguiremos entre las ecuaciones de evolución (ecuaciones de ondas y de difusión) que describen procesos que cambian con el tiempo y que, por tanto, contienen a éste como variable independiente, y las ecuaciones estacionarias (ecuación de Laplace) que describen procesos estáticos y, en consecuencia, no dependen del tiempo.

Para las primeras aparecen de forma natural en las aplicaciones dos tipos de condiciones auxiliares:

• *Condiciones iniciales:* Al igual que en el caso de las ecuaciones ordinarias, prescriben el valor de la función y/o sus derivadas en cierto instante t_0. Supondremos siempre que $t_0 = 0$, lo que no restará generalidad a los resultados que se obtengan. El número de condiciones iniciales a considerar depende del orden de la derivada parcial con respecto al tiempo que contenga la ecuación y coincide con éste. Así, para la de ondas ($u_{tt} = C^2 u_{xx} + A(x, t)$) se considerarán dos condiciones iniciales:

$$u(x, 0) = f_1(x) \quad ; \quad u_t(x, 0) = \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = f_2(x)$$

mientras que para la de difusión ($u_t = ku_{xx} + A(x, t)$), solamente una:

$$u(x, 0) = g(x)$$

• *Condiciones de frontera (o de contorno):* Están asociadas a variables que representan alguna dimensión espacial y que, por tanto, se hallan restringidas a una cierta región Ω finita o semi-infinita del espacio. Si la ecuación diferencial en derivadas parciales es de segundo orden, va a ser necesario conocer el valor de la solución, de su derivada o de una combinación lineal de ellas, en la frontera $\partial\Omega$ de la región considerada. Así pues, trataremos tres tipos de condiciones de frontera:

i) *Condiciones de Dirichlet:* Consisten en prescribir el valor de la solución en la frontera y pueden representarse por

$$u(x, t)|_{\partial\Omega} = g(t).$$

ii) *Condiciones de Neumann:* Consisten en prescribir el valor de la derivada según la dirección normal de la solución en la frontera y pueden representarse por:

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x, t)|_{\partial\Omega} = g(t)$$

iii) *Condiciones de Robin:* Son de carácter mixto, pues prescriben el valor de una combinación lineal de la solución y su derivada según la dirección normal en la frontera. Se pueden representar por:

$$u(x, t)|_{\partial\Omega} + k\frac{\partial u}{\partial n}(x, t)|_{\partial\Omega} = g(t) \quad (k \in \mathbb{R})$$

donde x representa el conjunto de variables que definen la región Ω del espacio.

En resumen, para las ecuaciones de evolución nos ocuparemos de resolver problemas de valores iniciales con condiciones de frontera de uno de los tres tipos anteriores. Damos a continuación algunos ejemplos de este tipo de problemas cuando se considera una región unidimensional acotada, que representaremos por la variable x:

i) Problema de Dirichlet para la ecuación de ondas:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + A(x, t) \quad ; \quad 0 < x < l \quad ; \quad t \in \mathbb{R}^+$$

$$u(0, t) = g_1(t) \quad ; \quad u(l, t) = g_2(t) \quad \text{(condiciones de frontera)}$$

$$u(x, 0) = f_1(x) \quad ; \quad u_t(x, 0) = f_2(x) \quad \text{(condiciones iniciales)}$$

ii) Problema de Neumann para la ecuación de difusión:

$$u_t = k u_{xx} + A(x, t) \quad ; \quad 0 < x < l \quad ; \quad t \in \mathbb{R}^+$$

$$u_x(0, t) = g_1(t) \quad ; \quad u_x(l, t) = g_2(t) \quad \text{(condiciones de frontera)}$$

$$u(x, 0) = f(x) \quad \text{(condición inicial)}$$

iii) Problema de Robin para la ecuación de ondas:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + A(x, t) \quad ; \quad 0 < x < l \quad ; \quad t \in \mathbb{R}^+$$

$$\left.\begin{array}{l} u(0, t) + h_1 u_x(0, t) = f_1(t) \\ u(l, t) + h_2 u_x(l, t) = f_2(t) \end{array}\right\} \text{(condiciones de frontera)}$$

$$u(x, 0) = g_1(x) \quad ; \quad u_t(x, 0) = g_2(x) \quad \text{(condiciones iniciales)}$$

En cuanto a las ecuaciones estacionarias (ecuación de Laplace), sólo consideraremos problemas de frontera, puesto que son independientes del tiempo. Abordaremos, por tanto, los problemas de Dirichlet, Neumann y Robin para este tipo de ecuaciones. Ejemplos de este tipo de problemas, formulados en coordenadas cartesianas para un rectángulo de longitud a y anchura b, son:

i) Problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad ; \quad 0 < x < a \quad ; \quad 0 < y < b$$

$$u(0, y) = f_1(y) \quad ; \quad u(a, y) = f_2(y) \quad \text{(c. de frontera en } x\text{)}$$

$$u(x, 0) = g_1(x) \quad ; \quad u(x, b) = g_2(x) \quad \text{(c. de frontera en } y\text{)}$$

ii) Problema de Neumann para la ecuación de Poisson:

$$u_{xx} + u_{yy} = A(x, y) \quad ; \quad 0 < x < a \quad ; \quad 0 < y < b$$

$$u_x(0, y) = f_1(y) \quad ; \quad u_x(a, y) = f_2(y) \quad \text{(c. de frontera en } x\text{)}$$

$$u_y(x, 0) = g_1(x) \quad ; \quad u_y(x, b) = g_2(x) \quad \text{(c. de frontera en } y\text{)}$$

iii) Problema de Robin para la ecuación de Laplace:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad ; \quad 0 < x < a \quad ; \quad 0 < y < b$$

$$\left.\begin{array}{l} u(0, y) + h_1 u_x(0, y) = f_1(y) \\ u(a, y) + h_2 u_x(a, y) = f_2(y) \end{array}\right\} \text{(c. de frontera en } x\text{)}$$

...y condiciones de frontera análogas en y

Cuando se trata de dominios no acotados, se suelen dar ciertas condiciones de regularidad para la solución. Como ejemplos de este tipo de problemas podemos considerar:

i) Para la ecuación de ondas:

$$u_{tt} = C^2 u_{xx} + A(x, t) \; ; \; x \in \mathbb{R}^+ \; ; \; t \in \mathbb{R}^+$$

$$u(x, 0) = f_1(x); \; u_t(x, 0) = f_2(x) \text{ (condiciones iniciales)}$$

$$u(0, t) = g_1(t) \; ; \; \lim_{x \to \infty} u(x, t) < +\infty \text{ (condiciones de frontera)}$$

ii) Para la ecuación de difusión:

$$u_t = k u_{xx} + A(x, t) \; ; \; x \in \mathbb{R}^+ \; ; \; t \in \mathbb{R}^+$$

$$u(x, 0) = f(x) \text{ (condición inicial)}$$

$$u(0, t) = g_1(t) \; ; \; \lim_{x \to \infty} u(x, t) < +\infty \text{ (condiciones de fronteras)}$$

iii) Para la ecuación de Laplace:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \; ; \; r > a \; ; \; 0 < \theta < 2\pi$$

$$u(r, 0) = u(r, 2\pi) \; ; \; u_\theta(r, 0) = u_\theta(r, 2\pi) \text{ (c. de frontera en } \theta)$$

$$u(0, \theta) = f(\theta) \; ; \; \lim_{r \to \infty} u(r, \theta) < +\infty \text{ (c. de frontera en } r)$$

donde r y θ representan las coordenadas polares en el plano.

En general, el problema de decidir qué tipo de condiciones iniciales y/o de frontera son apropiadas para una ecuación diferencial en derivadas parciales dada es bastante complicado. Hadamard sugirió tres condiciones que deben cumplirse cuando se formula un problema de valor inicial y/o de frontera asociado a una ecuación diferencial en derivadas parciales, para que esté bien definido. Estas son

i) La solución debe existir.
ii) La solución debe ser única.
iii) La solución debe depender de forma continua de los datos iniciales y de los datos de frontera.

Las dos primeras condiciones exigen que el problema formado por la ecuación diferencial en derivadas parciales y las condiciones auxiliares tenga una única solución. La tercera establece que, pequeñas variaciones de las condiciones auxiliares deben provocar pequeñas variaciones de la solución; es decir, exige la estabilidad de la solución con respecto a las condiciones auxiliares.

OBTENCION DE SOLUCIONES PARTICULARES

Describiremos a continuación los dos tipos de métodos que utilizaremos para la resolución de los problemas de valor inicial y/o de frontera propuestos en el apartado anterior. El primero de ellos se conoce con el nombre de método de separación de variables, y se fundamenta en la construcción de un adecuado problema de Sturm-Liouville, del que se obtiene un conjunto de autofunciones en términos de las cuales se construye la solución. En el segundo utilizaremos la transformada de Laplace. Existen otros métodos, que no contemplaremos en este texto, y que son tambien de gran utilidad, como, por ejemplo, el que hace uso de las funciones de Green o de las transformadas de Fourier. En general, todos estos métodos se complementan en el sentido de que, cada uno de ellos es apropiado para cierto tipo de problemas.

Método de separación de variables

Presentamos aquí el método de separación de variables aplicado a la resolución de los problemas de valor inicial y/o de frontera definidos en el apartado anterior, para ecuaciones diferenciales en derivadas parciales en dominios acotados, situación en la que este método resulta más apropiado. Consideremos ecuaciones diferenciales en derivadas parciales homogéneas en dos variables independientes y condiciones de frontera también homogéneas. En los capitulos siguientes veremos cómo este procedimiento se puede utilizar para obtener la solución en problemas no homogéneos y, también, cómo se puede extender al caso de tres variables independientes.

La descripción del método se hará simultáneamente para las tres formas canónicas de ecuación diferencial en derivadas parciales establecidas y elegiremos ciertas condiciones de contorno concretas. La forma en que este método se aplica a problemas con otro tipo de condiciones de frontera se puede deducir fácilmente de la que exponemos aquí, y se propondrá como ejercicio posteriormente.

Consideremos los problemas:

i) Para las ecuaciones hiperbólicas ($0 < x < l$; $t \in \mathbb{R}^+$

$$\begin{array}{c} u_{tt} = c^2 u_{xx} \\ c \in \mathbb{R} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} u(0, t) + h_1 u_x(0, t) = 0 \\ u(l, t) + h_2 u_x(l, t) = 0 \end{array} \right\} \text{(c. de frontera)} \\ u(x, 0) = f_1(x);\ u_t(x, 0) = f_2(x) \quad \text{(c. iniciales)} \end{array} \right.$$

ii) Para las ecuaciones parabólicas ($0 < x < l$; $t \in \mathbb{R}^+$

$$\begin{array}{c} u_t = k u_{xx} \\ k \in \mathbb{R} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} u(0, t) + h_1 u_x(0, t) = 0 \\ u(l, t) + h_2 u_x(l, t) = 0 \end{array} \right\} \text{(c. de frontera)} \\ u(x, 0) = f_3(x) \quad \text{(c. inicial)} \end{array} \right.$$

iii) Para las ecuaciones elípticas ($0 < x < l$; $0 < y < b$)

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad \begin{cases} \left.\begin{aligned} u(0, y) + h_1 u_x(0, y) = 0 \\ u(l, y) + h_2 u_x(l, y) = 0 \end{aligned}\right\} & \text{(c. de frontera en } x\text{)} \\ u(x, 0) = f_4(x);\ u(x, b) = f_5(x) & \text{(c. de frontera en } y\text{)} \end{cases}$$

El método de separación de variables consiste en buscar la solución como un producto de dos funciones, dependientes cada una de ellas de una de las variables. Es decir, supondremos

$$u(x, t) = M(x) \cdot N(t)$$

para los casos hiperbólico y parabólico, y

$$u(x, y) = M(x) \cdot N(y)$$

para el caso elíptico. Sustituyendo u por esta expresión en la correspondiente ecuación diferencial en derivadas parciales y dividiendo a continuación por la propia función, se obtiene:

$$\frac{1}{c^2}\,\frac{N''(t)}{N(t)} = \frac{M''(x)}{M(x)} \quad \text{(caso hiperbólico)}$$

$$\frac{1}{k}\,\frac{N'(t)}{N(t)} = \frac{M''(x)}{M(x)} \quad \text{(caso parabólico)}$$

$$-\frac{N''(y)}{N(y)} = \frac{M''(x)}{M(x)} \quad \text{(caso elíptico)}$$

Puesto que los dos miembros de estas expresiones dependen de variables distintas, ambos deben ser iguales a una constante. Denotando por $-\lambda$ esta constante de separación, se obtienen las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias para M y N:

$$M''(x) = -\lambda M(x) \quad \text{(en los tres casos)}$$

y

$$\begin{cases} N''(t) + c^2\lambda N(t) = 0 & \text{(caso hiperbólico)} \\ N'(t) + k\lambda N(t) = 0 & \text{(caso parabólico)} \\ N''(y) - \lambda N(y) = 0 & \text{(caso elíptico)} \end{cases}$$

Así pues, se ha pasado de una ecuación diferencial en derivadas parciales en dos variables independientes a dos ecuaciones diferenciales ordinarias separadas para cada una de ellas.

La teoría de Sturm-Liouville y los problemas con valores en la frontera

En esta sección estudiaremos una clase de problemas llamados problemas de Sturm-Liouville. Un típico problema de Sturm-Liouville involucra a una ecuación diferencial definida en un intervalo junto con condiciones que debe satisfacer la solución y/o su derivada en los extremos del intervalo. Como veremos, la ecuación diferencial tendrá a una función p como uno de sus coeficientes, y surgirán funciones $f_0, f_1, \ldots$ ortogonales con la función de peso p, como soluciones de la ecuación diferencial.

Para empezar consideremos la ecuación diferencial

$$y'' + R(x)y' + [Q(x) + \lambda P(x)]y = 0. \tag{7.38}$$

Buscamos valores para las constantes λ para las cuales existan soluciones no triviales en un intervalo dado $[a, b]$. También queremos que estas soluciones y sus primeras derivadas satisfagan ciertas condiciones, llamadas *condiciones en la frontera*, en a y b. La ecuación diferencial (7.38) y las condiciones en la frontera constituyen un *problema con valores en la frontera.*

Especificar condiciones para una solución y sus derivadas en los extremos de un intervalo (problema con valores en la frontera) es muy distinto a especificar los valores de una solución y su derivada en un punto dado (problema con valor inicial). Los problemas con valores en la frontera usualmente no tienen solución única, y es exactamente esta falta de unicidad lo que hace que ciertos problemas con valores en la frontera sean importantes al resolver ecuaciones en derivadas parciales en la física y la ingeniería.

Es más fácil hacer la discusión sobre la ecuación (7.38) si la escribimos de manera diferente. Multiplicamos la ecuación (7.38) por $e^{\int R(x)\,dx}$ para obtener

$$y''e^{\int R(x)\,dx} + R(x)e^{\int R(x)\,dx}y' + [Q(x) + \lambda P(x)]ye^{\int R(x)\,dx} = 0. \tag{7.39}$$

Como $e^{\int R(x)\,dx} > 0$, esta ecuación diferencial tiene las mismas soluciones que la ecuación (7.38). Nos damos cuenta de que

$$y''e^{\int R(x)\,dx} + R(x)e^{\int R(x)\,dx}y' = [y'e^{\int R(x)\,dx}]'.$$

Sean

$$r(x) = e^{\int R(x)\,dx}, \qquad q(x) = Q(x)e^{\int R(x)\,dx}, \qquad y \qquad p(x) = P(x)e^{\int R(x)\,dx}.$$

Ahora la ecuación (7.39) puede escribirse como

$$[ry']' + (q + \lambda p)y = 0.$$

Esta ecuación diferencial se llama *ecuación diferencial de Sturm-Liouville* y también es *la forma de Sturm-Liouville* de la ecuación diferencial (7.38).

EJEMPLO 7.6

Consideremos la ecuación diferencial

$$y'' + \frac{2}{x}y' + (x^2 - \lambda x)y = 0$$

en cualquier intervalo que no contenga a cero. Ésta es de la forma de la ecuación (7.38) con $R(x) = 2/x$, $Q(x) = x^2$ y $P(x) = -x$.

Para obtener la forma de Sturm-Liouville de esta ecuación, la multiplicamos por $e^{\int (2/x)dx}$. Calculamos

$$e^{\int (2/x)\,dx} = e^{2\ln(x)} = e^{\ln(x^2)} = x^2.$$

Para obtener

$$x^2y'' + 2xy' + (x^4 - \lambda x^3)y = 0.$$

Escribimos ésta como

$$[x^2y']' + (x^4 - \lambda x^3)y = 0,$$

que es la forma de Sturm-Liouville de la ecuación diferencial con la que empezamos. Ésta tiene las mismas soluciones que la ecuación original en cualquier intervalo que no contenga a cero. ◻

Consideraremos tres clases de problemas que involucran a ecuaciones diferenciales de Sturm-Liouville. Supongamos que p y q son funciones continuas en $[a, b]$.

Caso 1: El problema regular de Sturm-Liouville en $[a, b]$ Supongamos que $r(x) > 0$ y $p(x) > 0$ para $a \leq x \leq b$. Buscamos números λ y soluciones no triviales de

$$[ry']' + (q + \lambda p)y = 0$$

que satisfagan las condiciones en la frontera de la forma

$$A_1y(a) + A_2y'(a) = 0, \qquad B_1y(b) + B_2y'(b) = 0,$$

en donde A_1 y A_2 están dados y, al menos, uno es distinto de cero, y B_1 y B_2 están dados y, al menos, uno es distinto de cero.

Caso 2: El problema periódico de Sturm-Liouville en $[a, b]$ Supongamos que $r(x) > 0$ y $p(x) > 0$ para $a \leq x \leq b$. Buscamos números λ y soluciones no triviales de

$$[ry']' + (q + \lambda p)y = 0$$

que satisfagan las condiciones en la frontera

$$y(a) = y(b), \qquad y'(a) = y'(b).$$

$$y'' + \lambda y = 0; \qquad y(0) = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

El intervalo es $[0, \pi/2]$ y en la notación anterior

$$r(x) = p(x) = 1 \quad \text{y} \quad q(x) = 0.$$

Éste es un problema regular de Sturm-Liouville en $[0, \pi/2]$ con $A_1 = B_1 = 1$ y $A_2 = B_2 = 0$ en la definición. Encontraremos los valores propios y las funciones propias para este problema. La ecuación característica de $y'' + \lambda y = 0$ es

$$r^2 + \lambda = 0,$$

con raíces $r = \pm\sqrt{-\lambda}$. Esto nos lleva a considerar tres casos.

mos que $r(x) > 0$ y $p(x) > 0$ para $a < x < b$. Buscamos números λ y soluciones no triviales de

$$[ry']' + (q + \lambda p)y = 0$$

que satisfagan *uno* de los tres tipos de condiciones en la frontera:

a. Si $r(a) = 0$, entonces

$$B_1 y(b) + B_2 y'(b) = 0,$$

con B_1 y B_2 dados y al menos uno distinto de cero; las soluciones deben ser acotadas en a.

b. Si $r(b) = 0$ entonces

$$A_1 y(a) + A_2 y'(a) = 0,$$

con A_1 y A_2 dados y al menos uno distinto de cero; las soluciones deben ser acotadas en b.

c. Si $r(a) = r(b) = 0$ no tenemos condiciones especificadas en la frontera en a o en b pero se requiere que esas soluciones sean acotadas en $[a, b]$.

En cada uno de estos problemas, un número λ para el cual existe una solución no trivial se llama un *valor propio* o un valor característico del problema; la solución no trivial correspondiente se llama *función propia asociada al valor propio* λ. Por definición la función cero nunca puede ser una función propia (a pesar de que el cero puede ser un valor propio).

En muchos de los problemas de Sturm-Liouville que aparecen en física e ingeniería, los valores propios tienen un significado físico relacionado con el problema. Por ejemplo, en el comportamiento de la propagación de las ondas los valores propios representan modos fundamentales de la vibración.

EJEMPLO 7.6 Un problema regular de Sturm-Liouville

Consideremos el problema con valores en la frontera

Caso 1: $\lambda = 0$ Ahora la ecuación diferencial es $y'' = 0$ con la solución general

$$y = ax + b.$$

Entonces

$$y(0) = b = 0$$

y

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{a\pi}{2} = 0 \quad \text{implica} \quad a = 0.$$

La única solución en el caso en que $\lambda = 0$ es la solución trivial. Por lo tanto, el valor cero no es un valor propio de este problema (ya que no existen funciones propias que, por definición, son soluciones no triviales, asociadas con $\lambda = 0$).

Caso 2: $\lambda > 0$ Escribimos $\lambda = k^2$ con $k > 0$. La solución general de $y'' + k^2y = 0$ es

$$y(x) = a\cos(kx) + b\,\mathrm{sen}(kx).$$

Ahora

$$y(0) = a = 0,$$

entonces $y(x) = b\,\mathrm{sen}(kx)$.

En seguida, requerimos que

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = b\,\mathrm{sen}\left(\frac{k\pi}{2}\right) = 0.$$

Si hacemos $b = 0$ tenemos la solución trivial. Si $b \neq 0$, se puede satisfacer $y(\pi/2) = 0$ escogiendo k tal que $\mathrm{sen}(k\pi/2) = 0$. Por lo tanto $k\pi/2$ debe ser un múltiplo entero y positivo de π o

$$k = 2n \quad \text{para} \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Los números

$$\lambda = k^2 = 4n^2$$

son valores propios de este problema para $n = 1, 2, 3, \ldots$ Al valor propio $2n$ le corresponde una función propia $\varphi_n(x) = b_n \operatorname{sen}(2nx)$, con b_n cualquier constante *distinta de cero.*

Caso 3: $\lambda < 0$ Escribimos $\lambda = -k^2$ con $k > 0$. La solución general de $y'' - k^2y = 0$ es

$$y(x) = ae^{kx} + be^{-kx}.$$

Ahora

$$y(0) = 0 = a + b,$$

de donde $b = -a$ y $y(x) = a(e^{kx} - e^{-kx}) = 2a \operatorname{senh}(kx)$. Pero entonces

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2a \operatorname{senh}\left(\frac{k\pi}{2}\right) = 0$$

requiere que $a = 0$ ya que $k > 0$ implica que $\operatorname{senh}(k\pi/2) > 0$. Por lo tanto, el caso $\lambda < 0$ nos lleva sólo a la solución trivial y este problema no tiene valores propios negativos.

En resumen, el problema regular de Sturm-Liouville

tiene valores propios $\lambda = 4n^2$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, y a los valores propios $4n^2$ les corresponden funciones propias $\varphi_n(x) = b_n \operatorname{sen}(2nx)$, con b_n distinto de cero pero arbitrario. □

EJEMPLO 7.7 Un problema periódico de Sturm-Liouville

Consideremos el problema periódico de Sturm-Liouville en $[-\pi, \pi]$

$$y'' + \lambda y = 0; \qquad y(-\pi) = y(\pi), \qquad y'(-\pi) = y'(\pi).$$

Como en el ejemplo 7.6, tenemos los siguientes casos para λ.

Caso 1: $\lambda = 0$ Entonces $y = ax + b$. Ahora

$$y(-\pi) = -a\pi + b = y(\pi) = a\pi + b$$

implica que $a = 0$, por lo tanto $y = b$. Esta función constante satisface ambas condiciones en la frontera ya que

$$y'(-\pi) = y'(\pi) = 0$$

en este caso. Así que, cero es un valor propio de este problema con las correspondientes funciones propias $y = b$, para cualquier constante distinta de cero.

Caso 2: $\lambda > 0$ Escribimos $\lambda = k^2$ con $k > 0$, para obtener la solución general

$$y = a\cos(kx) + b\,\mathrm{sen}(kx)$$

de la ecuación diferencial. Ahora, $y(-\pi) = y(\pi)$ da

$$a\cos(k\pi) - b\,\mathrm{sen}(k\pi) = a\cos(k\pi) + b\,\mathrm{sen}(k\pi).$$

Entonces

$$2b\,\mathrm{sen}(k\pi) = 0. \tag{7.40}$$

La condición $y'(-\pi) = y'(\pi)$ nos da

$$ak\,\mathrm{sen}(k\pi) + bk\cos(k\pi) = -ak\,\mathrm{sen}(k\pi) + bk\cos(k\pi),$$

o

$$2ak\,\mathrm{sen}(k\pi) = 0. \tag{7.41}$$

Como $k > 0$, las ecuaciones (7.40) y (7.41) nos dicen que

$$b\,\mathrm{sen}(k\pi) = a\,\mathrm{sen}(k\pi) = 0.$$

Si sen $(k\pi) \neq 0$, entonces $a = b = 0$, y tenemos la solución trivial. Si $\mathrm{sen}(k\pi) = 0$ entonces k debe ser un entero positivo y a y b pueden ser distintas de cero. Por lo tanto, $\lambda = n^2$ es un valor propio para $n = 1, 2, 3, \ldots$, y las funciones propias correspondientes son

$$\varphi_n(x) = a_n\cos(nx) + b_n\mathrm{sen}(nx),$$

en donde a_n y b_n son constantes al menos una distinta de cero y arbitrarias.

Caso 3: $\lambda < 0$ Escribimos $\lambda = -k^2$ con $k > 0$ para obtener la solución general de la ecuación diferencial

$$y(x) = ae^{kx} + be^{-kx}.$$

ahora, $y(-\pi) = y(\pi)$ implica que

$$ae^{-k\pi} + be^{k\pi} = ae^{k\pi} + be^{-k\pi}. \tag{7.42}$$

Y $y'(-\pi) = y'(\pi)$ nos da

$$kae^{-k\pi} - kbe^{k\pi} = kae^{k\pi} - kbe^{-k\pi}. \tag{7.43}$$

Podemos escribir la ecuación (7.42) como

$$a(e^{k\pi} - e^{-k\pi}) = b(e^{k\pi} - e^{-k\pi})$$

y concluimos que $a = b$. Usando esto, la ecuación (7.43) se reduce a

$$2kae^{-k\pi} = 2kae^{k\pi}.$$

Ya que $k > 0$ entonces $ae^{-k\pi} = ae^{k\pi}$, que puede ser cierta solamente si $a = 0$. Pero entonces también tendríamos que $b = 0$, obteniendo solamente la solución trivial. Por lo tanto, este problema periódico de Sturm-Liouville no tiene valores propios negativos.

En resumen, el problema periódico de Sturm-Liouville

$$y'' + \lambda y = 0; \qquad y(-\pi) = y(\pi), \qquad y'(-\pi) = y'(\pi)$$

tiene valor propio $\lambda = 0$ con funciones propias $\varphi_0(x) = b \neq 0$ y para $n = 1, 2, 3, \ldots$, tiene valores propios $\lambda = n^2$ y funciones propias $\varphi_n(x) = a_n\cos(nx) + b_n sen(nx)$, no con a_n o b_n, ambos nulos. □

Consideremos la ecuación diferencial de Legendre que puede escribirse en la forma de Sturm-Liouville como

$$[(1 - x^2)y']' + \lambda y = 0$$

para $-1 \leq x \leq 1$. Ahora, $r(x) = 1 - x^2$ y $r(-1) = r(1) = 0$. Esto nos coloca en el caso c) del problema singular de Sturm-Liouville.

En la sección 7.4 vimos que si $\lambda = n(n + 1)$, con $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, existe una solución polinomial de Legendre $P_n(x)$. Por lo tanto este problema tiene valores propios $n(n + 1)$ para cualquier entero no negativo n y las funciones propias correspondientes son $P_n(x)$ o cualesquiera múltiplos constantes, distintos de cero, de estos polinomios. Puede probarse que éstas son las únicas soluciones de la ecuación de Legendre que están acotadas en $[-1, 1]$ y que los únicos valores propios de este problema son los números $\lambda = n(n + 1)$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$ ◻

Hasta este momento hemos discutido el tipo de problemas que queremos resolver y vimos algunos ejemplos. Ahora examinaremos el teorema fundamental sobre los problemas de Sturm-Liouville.

TEOREMA 7.10 Teorema de Sturm-Liouville

1. Para los problemas regular y periódico de Sturm-Liouville, existen una infinidad de valores propios. Además, los valores propios se pueden enumerar $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ de manera que

$$\lambda_n < \lambda_m \quad \text{si} \quad n < m$$

$$\lim_{n \to \infty} \lambda_n = \infty.$$

2. Si λ_n y λ_m son valores propios distintos de cualquiera de los tres tipos de problemas de Sturm-Liouville, con las funciones propias correspondientes φ_n y φ_m, entonces φ_n y φ_m son ortogonales en $[a, b]$ con la función de peso p. Esto es,

$$\int_a^b p(x)\varphi_n(x)\varphi_m(x)\, dx = 0 \quad \text{si} \quad n \neq m.$$

3. Para los tres problemas de Sturm-Liouville, todos los valores propios son reales.
4. Para un problema regular de Sturm-Liouville, cualquier par de funciones propias correspondientes a un valor propio dado son linealmente dependientes. ◻

La conclusión (1) del teorema nos garantiza la existencia de soluciones no triviales de los problemas regular y periódico de Sturm-Liouville, ya que cada valor propio tiene asociada una función propia no trivial. La conclusión (1) también implica que los valores propios están "diseminados" y no se acumulan en ningún punto finito (como por ejemplo, los números $1/n$ se acumulan alrededor del cero). La función de peso p que aparece en la conclusión (2) es el coeficiente de λ en la ecuación diferencial de Sturm-Liouville.

Observe cómo surgieron las conclusiones (1) y (2) en los ejemplos que vimos. En el ejemplo 7.6, los valores propios eran $\lambda = 4n^2$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$, con funciones propias $\varphi_n(x) = b_n \operatorname{sen}(2nx)$. Si tomamos $\lambda_n = 4n^2$ ciertamente $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$. Además, la ecuación diferencial del ejemplo era $y'' + \lambda y = 0$, por lo tanto $p(x) = 1$, y tenemos

$$\int_0^{\pi/2} p(x)\varphi_n(x)\varphi_m(x)\, dx = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}(2nx)\operatorname{sen}(2mx)\, dx$$
$$= \left[\frac{\operatorname{sen}[(2n - 2m)x]}{2(n - m)} - \frac{\operatorname{sen}[(2n + 3m)x]}{2(n + m)}\right]_0^{\pi/2} = 0$$

si $n \neq$ m.

Como otro ejemplo, los polinomios de Legendre son ortogonales en $[-1, 1]$ con la función de peso 1. Estos polinomios son funciones propias de un problema singular de Sturm-Liouville.

La conclusión (4) afirma que, en el caso de un problema regular de Sturm-Liouville, cualesquiera dos funciones propias correspondientes al mismo valor en los problemas no regulares de Sturm-Liouville. En el ejemplo 7.7, $\cos(x)$ y $\operatorname{sen}(x)$ son funciones propias linealmente independientes asociadas con el mismo valor propio 1.

En los ejemplos que hemos visto hasta ahora, siempre hemos sido capaces de encontrar los valores propios explícitamente. Muchas veces, lo mejor que podemos hacer es escribir una ecuación que satisfaga los valores propios y aproximar sus valores numéricos. El siguiente ejemplo ilustra esto.

EJEMPLO 7.9

Considerar el problema regular de Sturm-Liouville en $[0, 1]$

$$y'' + \lambda y = 0, \qquad y(0) = 0, \qquad 3y(1) + y'(1) = 0.$$

Consideremos los casos posibles para λ.

Caso 1: $\lambda = 0$ Entonces $y = ax + b$. Como $y(0) = 0$, $b = 0$. Entonces

$$3y(1) + y'(1) = 3a + a = 4a = 0.$$

De donde $a = 0$, así que en este caso, sólo obtuvimos la solución trivial. Por lo tanto el valor cero no es un valor propio.

Caso 2: $\lambda < 0$ Escribimos $\lambda = -\alpha^2$, con $\alpha > 0$. La solución general de la ecuación diferencial es

$$y(x) = ae^{\alpha x} + be^{-\alpha x}.$$

Como $y(0) = a + b = 0$, $b = -a$ y

$$y(x) = 2a\operatorname{senh}(\alpha x).$$

Se sigue que

$$3y(1) + y'(1) = 6a\operatorname{senh}(\alpha) + 2a\alpha\cosh(\alpha) = 0.$$

Si $a \neq 0$ esta ecuación implica que

$$\tanh(\alpha) = -\tfrac{1}{3}\alpha.$$

Esto es imposible porque, para $\alpha > 0$, $\tanh(\alpha) > 0$ y $-\frac{1}{3}\alpha < 0$. Por lo tanto, no existe ninguna solución no trivial con $\lambda < 0$, y este problema no tiene valores propios negativos.

Caso 3: $\lambda > 0$ Escribimos $\lambda = \alpha^2$, con $\alpha > 0$. La solución general de $y'' + \alpha^2 y = 0$ es

$$y(x) = a\cos(\alpha x) + b\operatorname{sen}(\alpha x).$$

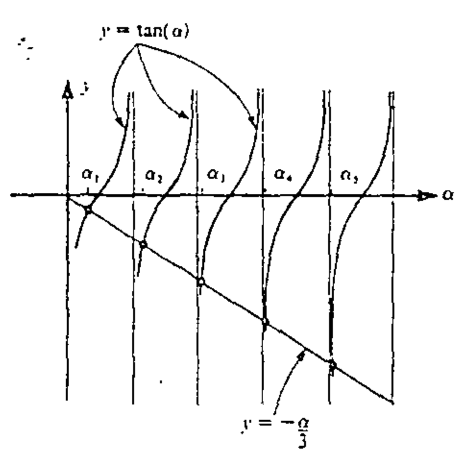


Figura 7.8

Como $y(0) = a = 0$, $y(x) = b\,\mathrm{sen}(\alpha x)$. Además,

$$3y(1) + y'(1) = 3b\,\mathrm{sen}(\alpha) + \alpha b\cos(\alpha) = 0.$$

Suponiendo que $b \neq 0$, esto implica que

$$\tan(\alpha) = -\tfrac{1}{3}\alpha.$$

Esta ecuación no puede resolverse algebraicamente. Sin embargo, la figura 7.8 sugiere que las gráficas de $y = \tan(\alpha)$ y $y = -\alpha/3$ tienen una infinidad de puntos en común en el semiplano $\alpha > 0$. Las primeras coordenadas de estos puntos de intersección son valores propios de este problema. Si usamos el método de Newton, encontramos que las primeras cinco soluciones positivas de $\tan(\alpha) = -\alpha/3$ son aproximadamente 2.4556, 5.2239, 8.2045, 11.2560 y 14.3434. Los primeros cinco valores propios son aproximadamente los cuadrados de estos números, dándonos

$$\lambda_1 \approx 6.0300, \qquad \lambda_2 \approx 27.3822, \qquad \lambda_3 \approx 67.3138.$$
$$\lambda_4 \approx 126.6975, \quad \text{y} \quad \lambda_5 \approx 205.7331.$$

Para cada número positivo α que satisfaga $\tan(\alpha) = -\alpha/3$, obtenemos un valor propio $\lambda = \alpha^2$ y su correspondiente función propia $\varphi(x) = b\,\mathrm{sen}(\alpha x)$, en la cual b es una constante distinta de cero. Por la conclusión (2) del teorema 7.10, si λ_1 y λ_2 son valores propios distintos,

$$\int_0^1 \mathrm{sen}(\sqrt{\lambda_1}\,x)\mathrm{sen}(\sqrt{\lambda_2}\,x)\,dx = 0.$$

Este resultado puede demostrarse mediante la integración, pero no es muy sencillo, debido a la ecuación que determina a los valores propios. □

Concluiremos esta sección con las demostraciones de algunas partes del teorema de Sturm-Liouville. La conclusión (1) es un resultado de existencia que no intentaremos probar aquí.

Demostración de la conclusión (2) del teorema 7.10 A partir de la ecuación diferencial tenemos que

$$[r\varphi_n']' + (q + \lambda_n p)\varphi_n = 0$$
$$[r\varphi_m']' + (q + \lambda_m p)\varphi_m = 0.$$

Multiplicando la primera ecuación por φ_m y la segunda por φ_n y restándolas obtenemos

$$[r\varphi_n']'\varphi_m - [r\varphi_m']'\varphi_n + (\lambda_n - \lambda_m)p\varphi_n\varphi_m = 0.$$

Esta ecuación puede escribirse como

$$[r(\varphi_m\varphi_n' - \varphi_n\varphi_m')]' = (\lambda_m - \lambda_n)p\varphi_n\varphi_m.$$

Integramos ambos lados de la ecuación de a a b para obtener

$$\left[r(\varphi_m\varphi_n' - \varphi_n\varphi_m') \right]_a^b = (\lambda_m - \lambda_n)\int_a^b p(x)\varphi_n(x)\varphi_m(x)\,dx.$$

Supongamos que $\lambda_n \neq \lambda_m$. La última ecuación va a implicar la conclusión (2) si podemos probar que el lado izquierdo es igual a cero. Para hacer esto, debemos usar individualmente cada tipo de condición en la frontera, dando lugar a tres casos.

En el problema regular de Sturm-Liouville, las condiciones en la frontera son

$$A_1 y(a) + A_2 y'(a) = 0$$
$$B_1 y(b) + B_2 y'(b) = 0,$$

en las que A_1 y A_2 no son simultáneamente iguales a cero y B_1 y B_2 tampoco son ambas cero. Estas condiciones en la frontera deben ser satisfechas tanto por φ_n como por φ_m. Primero aplicamos sólo la condición $A_1 y(a) + A_2 y'(a) = 0$ a ambas funciones propias. Obtenemos

$$A_1\varphi_n(a) + A_2\varphi_n'(a) = 0$$
$$A_1\varphi_m(a) + A_2\varphi_m'(a) = 0.$$

Como A_1 y A_2 no son ambas cero, el sistema de ecuaciones

$$\varphi_n(a)X + \varphi_n'(a)Y = 0$$
$$\varphi_m(a)X + \varphi_m'(a)Y = 0$$

tiene una solución no trivial (a saber, $X = A_1$, $Y = A_2$). Por lo tanto

$$\begin{vmatrix} \varphi_n(a) & \varphi_n'(a) \\ \varphi_m(a) & \varphi_m'(a) \end{vmatrix} = \varphi_n(a)\varphi_m'(a) - \varphi_m(a)\varphi_n'(a) = 0. \tag{7.44}$$

Ahora aplicamos el mismo razonamiento utilizando la condición $B_1 y(b) + B_2 y'(b) = 0$, para obtener

$$\varphi_n(b)\varphi_m'(b) - \varphi_m(b)\varphi_n'(b) = 0. \tag{7.45}$$

Las ecuaciones (7.44) y (7.45) nos dan

$$r(x)[\varphi_m(x)\varphi_n'(x) - \varphi_m(x)\varphi_n'(x)]\Big]_a^b = 0,$$

y esto es lo que necesitamos para concluir que $\int_a^b p(x)\varphi_n(x)\varphi_m(x)\,dx = 0$.

Para los problemas periódico y singular de Sturm-Liouville, el razonamiento es similar, utilizando las condiciones en la frontera para probar que

$$r(x)[\varphi_n(x)\varphi_n'(x) - \varphi_m(x)\varphi_n'(x)]\Big]_a^b = 0. \quad \square$$

Demostración de la conclusión (3) del teorema 7.10 Supongamos que un problema de Sturm-Liouville tiene un valor propio complejo

$$\lambda = \alpha + i\beta.$$

Sea φ la función propia correspondiente; escribimos

$$\varphi(x) = u(x) + iv(x).$$

Sustituyéndola en el problema de Sturm-Liouville, encontramos que $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$ también es un valor propio con la función propia correspondiente $\overline{\varphi}(x) = u(x) - iv(x)$. Si $\beta \neq 0$ entonces λ y $\overline{\lambda}$ son valores propios distintos y por la conclusión (2)

$$\int_a^b p(x)\varphi(x)\bar{\varphi}(x)\,dx = 0.$$

Pero

$$\varphi(x)\bar{\varphi}(x) = [u(x) + iv(x)][u(x) - iv(x)] = u(x)^2 + v(x)^2.$$

Por lo tanto

$$\int_a^b p(x)[u(x)^2 + v(x)^2]\,dx = 0.$$

Ahora, por hipótesis $p(x) > 0$ en (a, b). Además, como φ es no trivial, $u(x)^2 + v(x)^2$ no puede ser idénticamente cero en $[a, b]$. Entonces $p(x)[u(x)^2 + v(x)^2]$ es positiva en algún subintervalo de $[a, b]$; por lo tanto $\int_a^b p(x)[u(x)^2 + v(x)^2]dx > 0$, que es una contradicción. Concluimos que $\beta = 0$ y que cada valor propio debe ser real. $\square$

Demostración de la conclusión (4) del teorema 7.10 Supongamos que λ es un valor propio del problema regular de Sturm-Liouville

$$[ry']' + (q + \lambda p)y = 0; \qquad A_1 y(a) + A_2 y'(a) = 0, \qquad B_1 y(b) + B_2 y'(b) = 0$$

en $[a, b]$. Sean φ y ψ funciones propias asociadas a λ. Queremos probar que φ y ψ son linealmente dependientes. Por la condición de frontera en a, sabemos que

$$A_1\varphi(a) + A_2\varphi'(a) = 0$$
$$A_1\psi(a) + A_2\psi'(a) = 0,$$

con A_1 y A_2 constantes no ambas cero. Por lo tanto el sistema de ecuaciones

$$\varphi(a)X + \varphi'(a)Y = 0$$
$$\psi(a)X + \psi'(a)Y = 0$$

tiene una solución no trivial. Luego

$$\begin{vmatrix} \varphi(a) & \varphi'(a) \\ \psi(a) & \psi'(a) \end{vmatrix} = 0.$$

Pero este valor es $W[\varphi, \psi](a)$. Como φ y ψ satisfacen una ecuación diferencial li- neal homogénea de segundo orden, φ y ψ son linealmente dependientes en $[a, b]$. ■

FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA

CURSOS INSTITUCIONALES

DIPLOMADO EN DISEÑO Y ADAPTACIÓN DE ANTENAS

MOD. I. PROPEDEUTICO

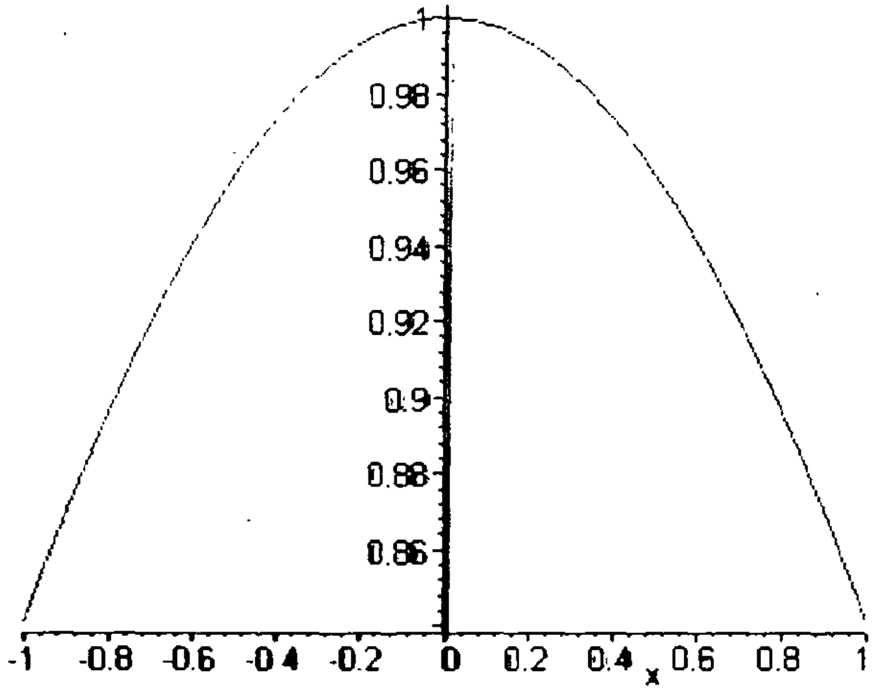
DEL 23 AL 28 DE ABRIL DEL 2003

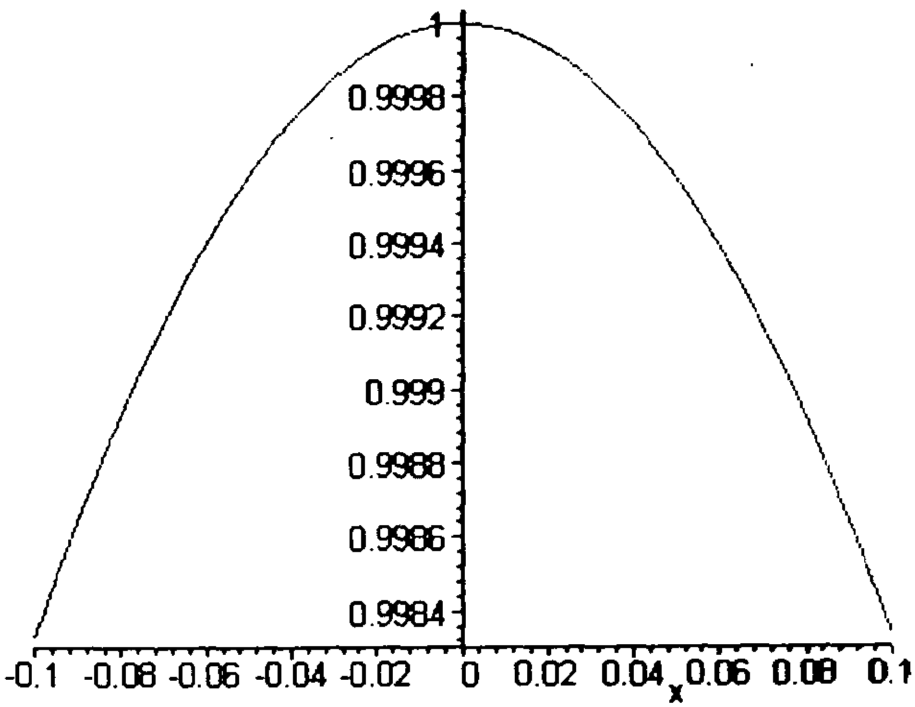
ANEXOS CUARTA PARTE

CI - 059

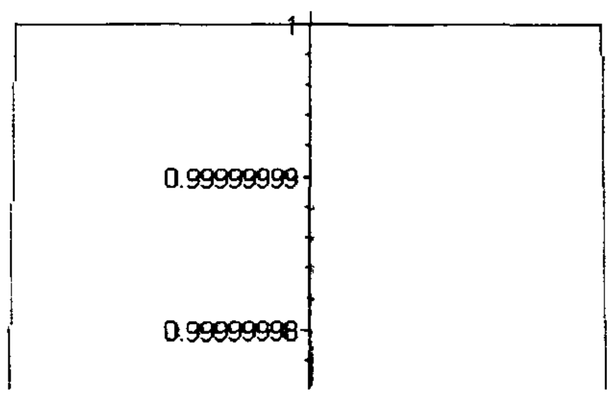
Instructores: Ing. Juan Manuel Castillo Miranda
Ing. Jesús Antonio Patiño Ramírez
Ing. Joel Gómez
SECRETARÍA DE MARINA
ABRIL DEL 2003

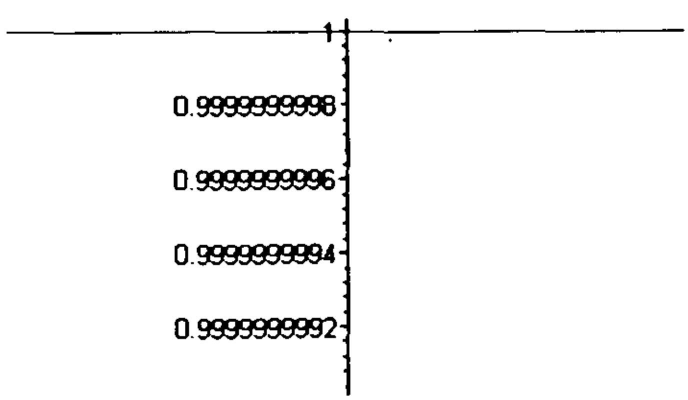
```
f:= sin(x)/x;
limit(f, x=0);
```



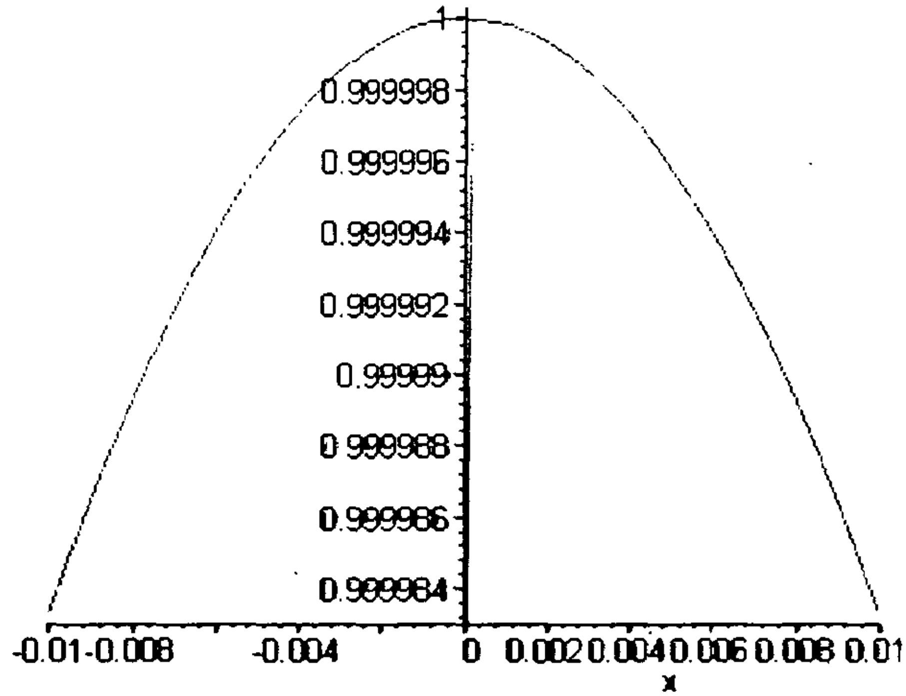


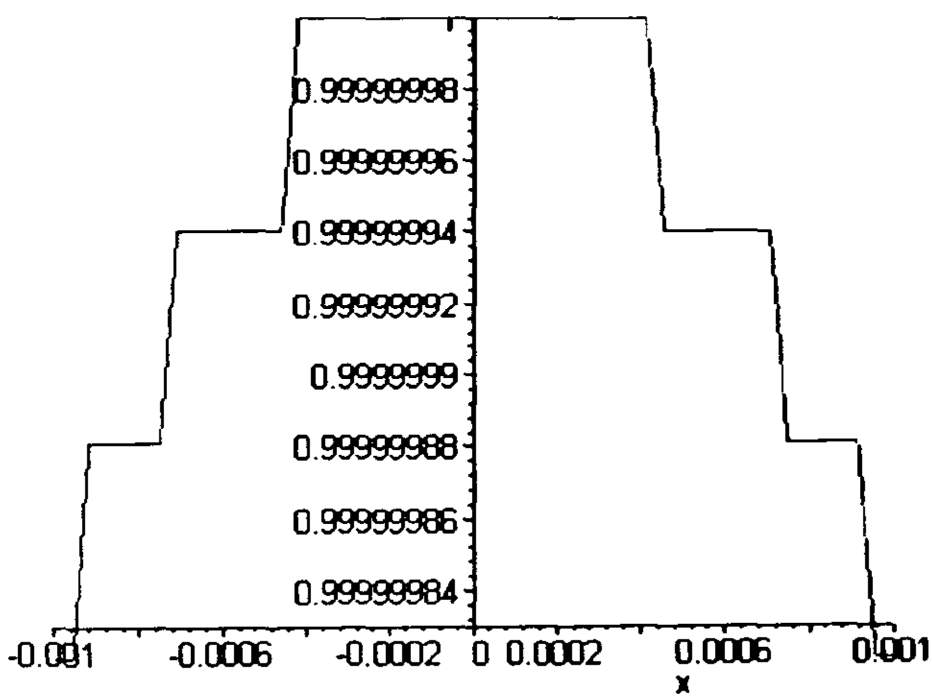
100 f:= sin(x)/x;
limit(f, x=0);





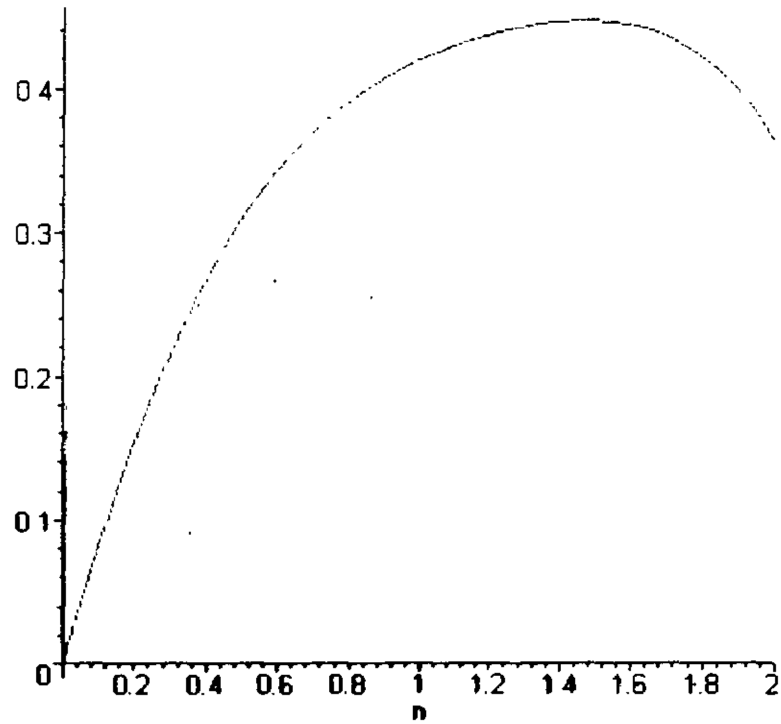
```
f:= sin(x)/x;
limit(f, x=0);
```





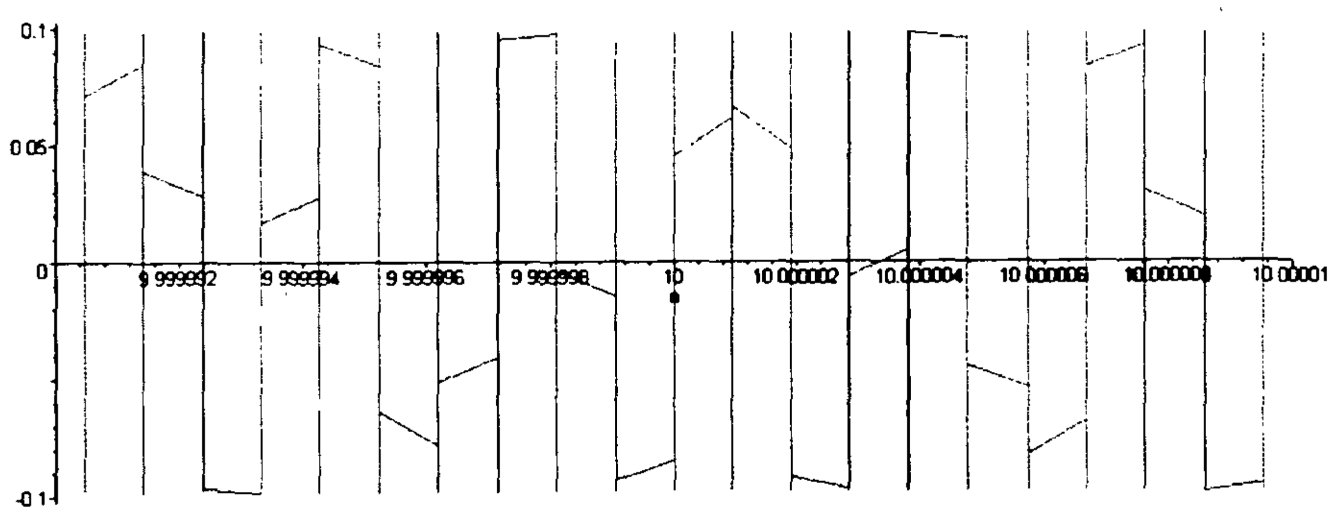
f:= n*sin(n!)/(n^2+1);

limit(f, n=1);

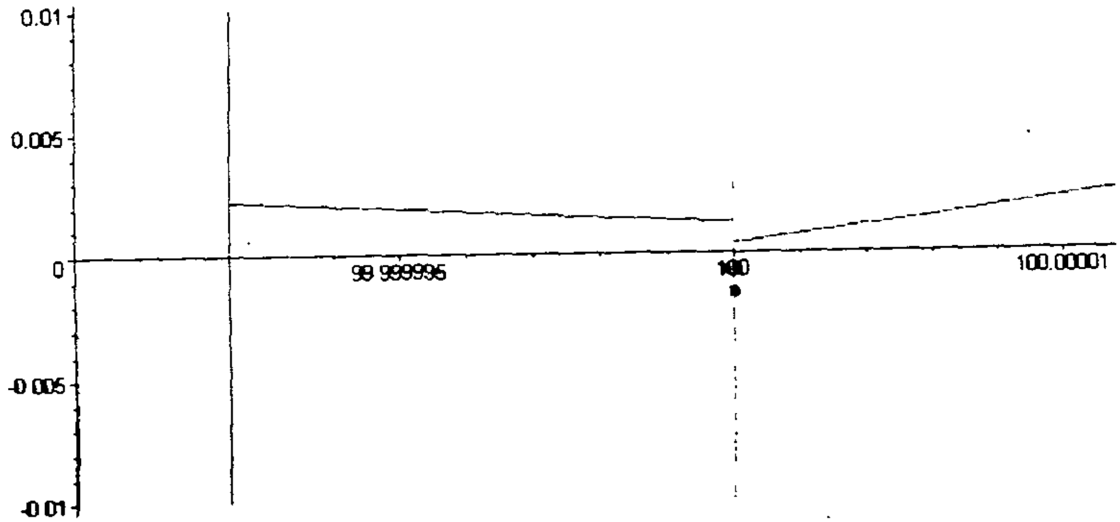


f:= n*sin(n!)/(n^2+1);

limit(f, n=10);



```
f:= n*sin(n!)/(n^2+1);
limit(f, n=100);
```




```
f:= n*sin(n!)/(n^2+1);
limit(f, n=500);
```

$$\frac{500}{250001}\sin(\Gamma(501))$$

Plotting error, non-numeric vertex definition

```
> restart;
> f:= x/abs(x);
```

$$f := \frac{x}{|x|}$$

```
> limit(f, x=0);
```

undefined

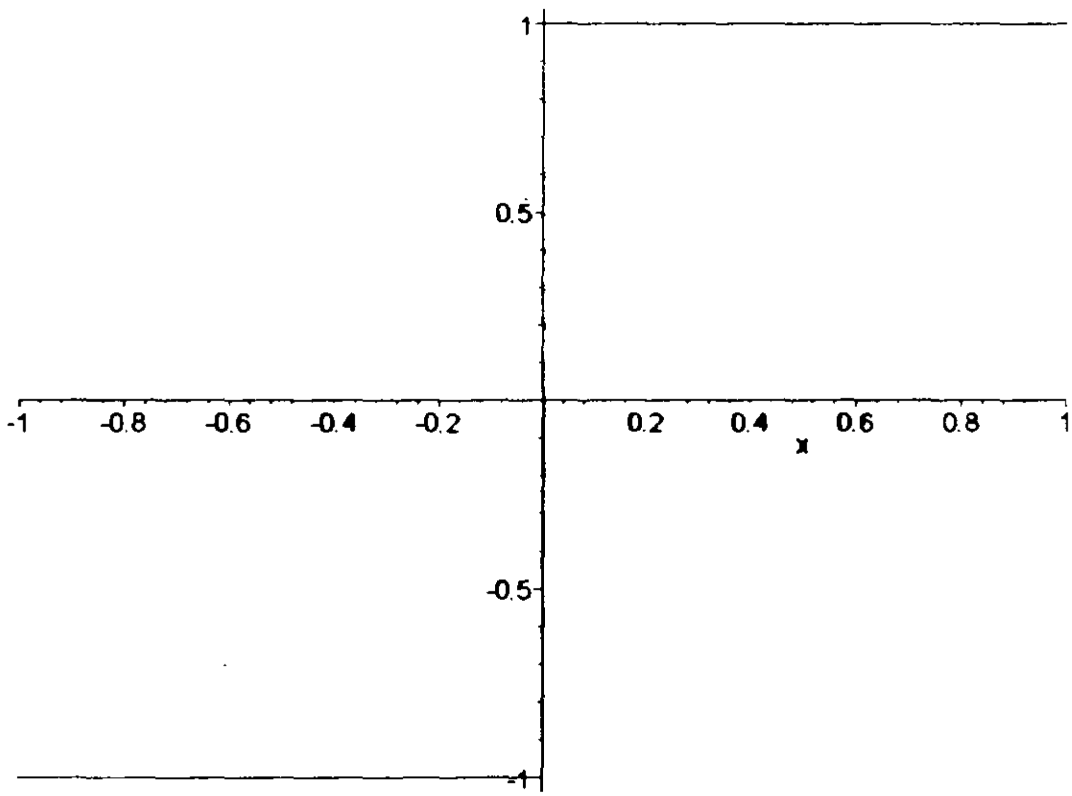
```
> limit(f, x=0, left);
```

$$-1$$

```
> limit(f, x=0, right);
```

$$1$$

```
> plot(f, x=-1..1);
```




```
>
```

```
> restart;
> f:= ((7+x)^(1/2)-3)/(x^2-4);
```

$$f := \frac{\sqrt{7+x}-3}{x^2-4}$$

```
> limit(f, x=2);
```

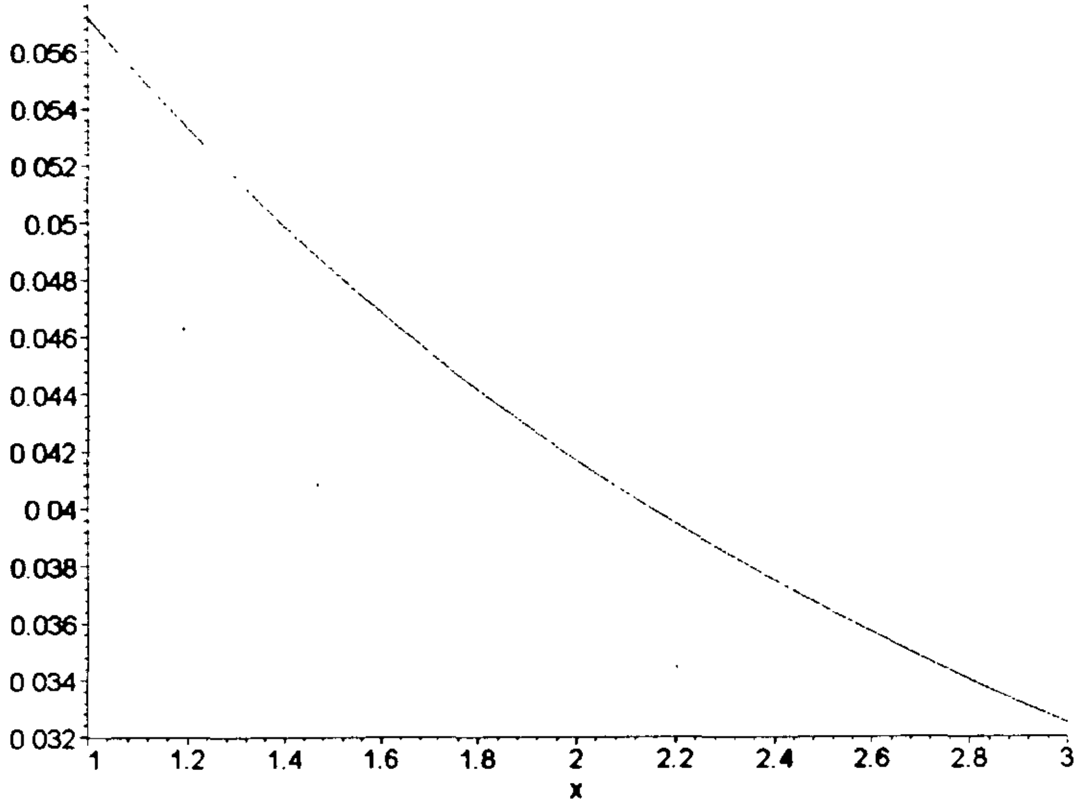
$$\frac{1}{24}$$

```
> limit(f, x=2, left);
> limit(f, x=2, right);
```

$$\frac{1}{24}$$

$$\frac{1}{24}$$

```
> plot(f, x=1..3);
```




```
>
>
>
>
>
>
>
>
```

```
> limit(f,x=-2);
```

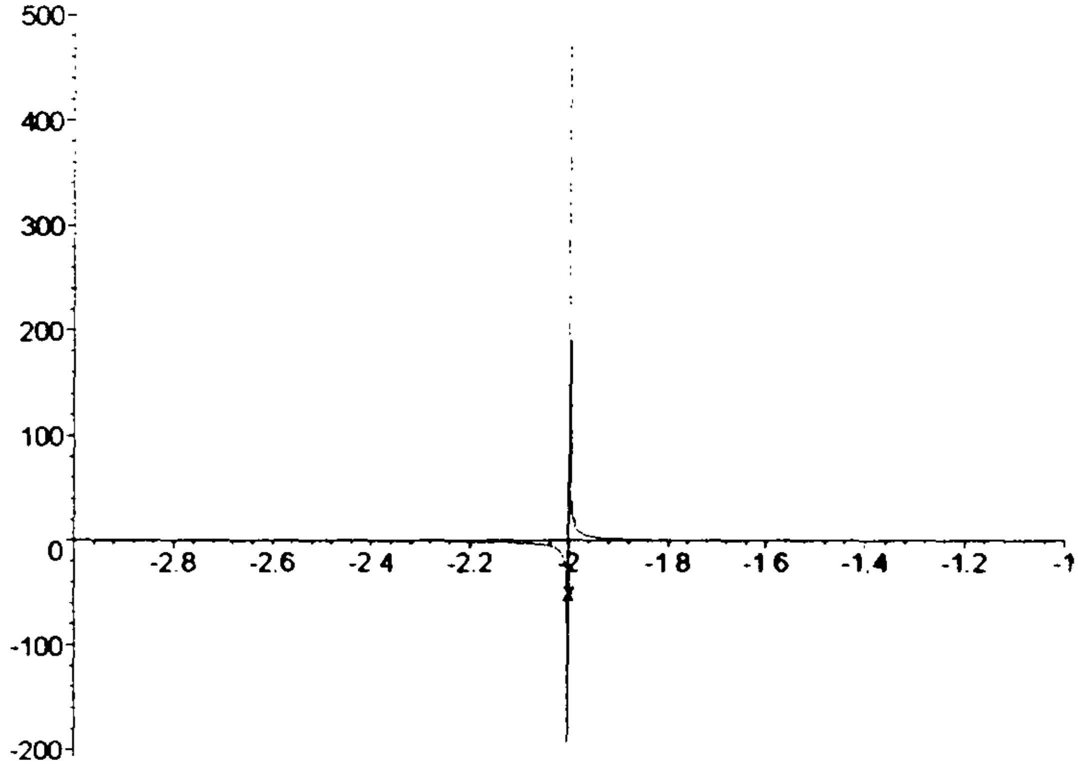
$$undefined$$

```
> limit(f, x=-2, left);
> limit(f, x=-2, right);
```

$$-\infty$$

$$\infty$$

```
> plot(f, x=-3..-1);
```




```
>
```

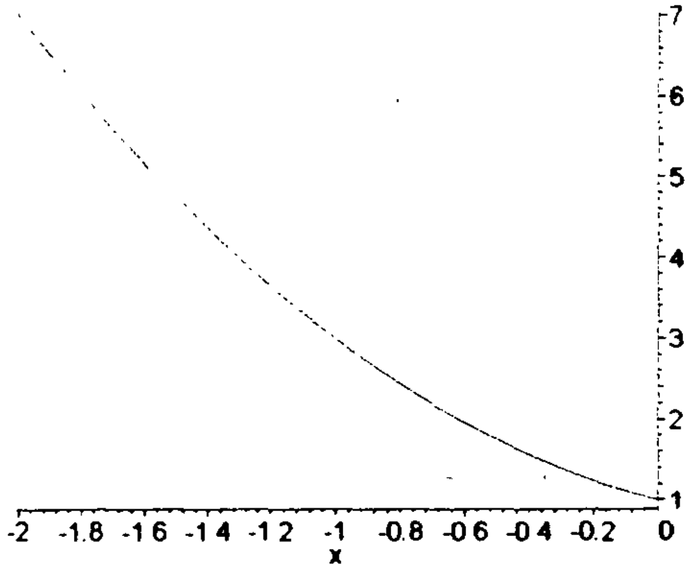
```
> restart;
> readlib(fdiscont):
  Digits := 3:

> f:= (1+x^3)/(1+x);
> fdiscont(f,x=-3..3,0.02);
```

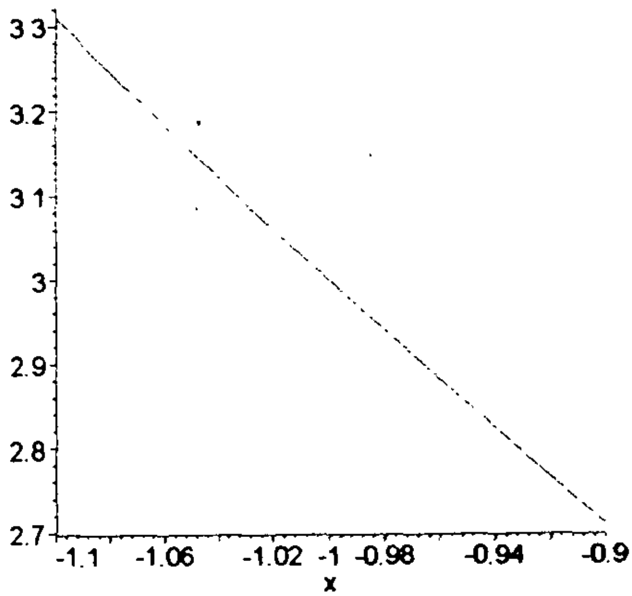
$$f := \frac{1+x^3}{1+x}$$

[ ]

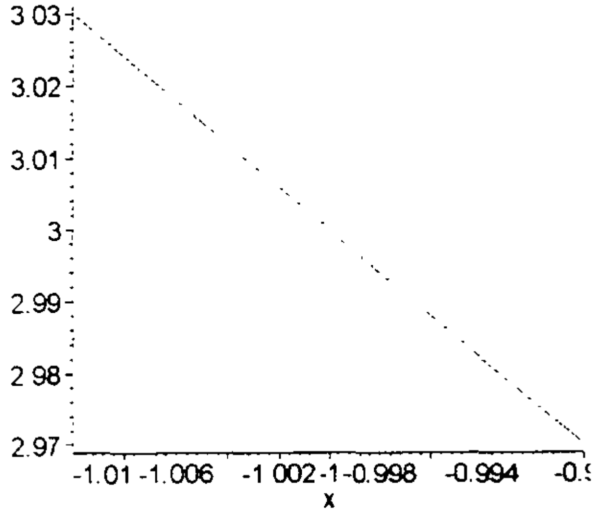
```
> plot(f, x=-2..0);
```



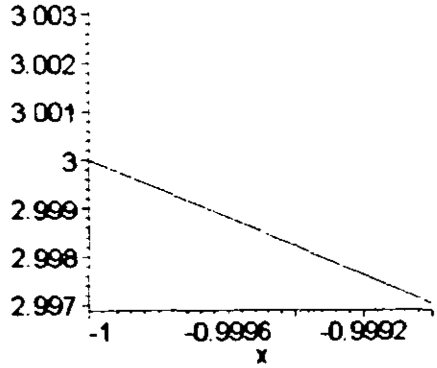
```
> plot(f, x=-1.1..-0.9);
```



```
> plot(f, x=-1.01..-0.99);
```




```
> plot(f, x=-1.001..-0.999);
```




```
> plot(f, x=-1.0001..-0.9999);
```

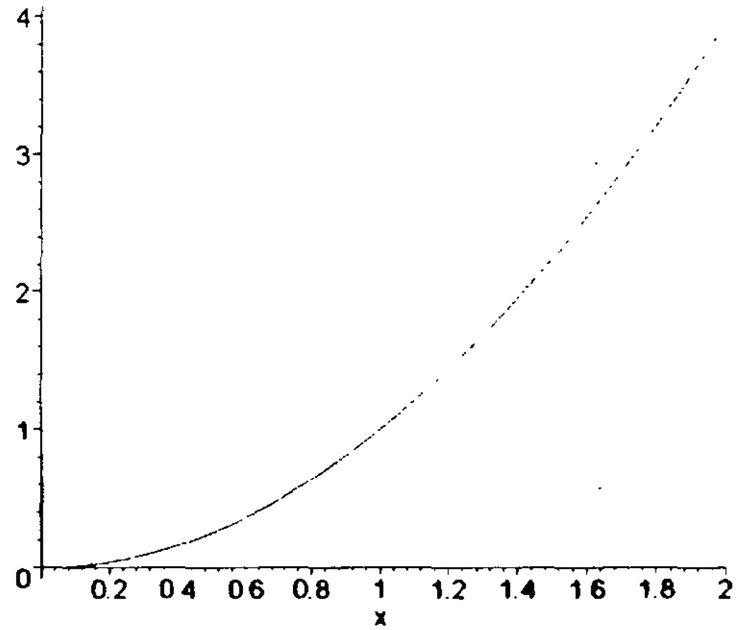
Floating Point Overflow. Please shorten axes

```
>
```

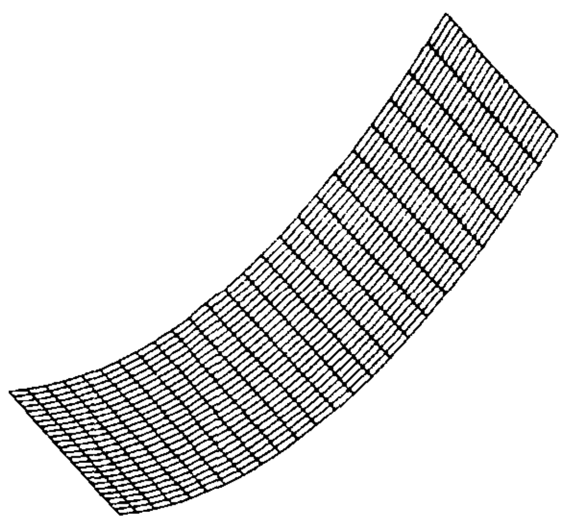
```
> restart;
>
> f:= x^2;
```

$$f := x^2$$

```
> plot(f, x=0..2);
```



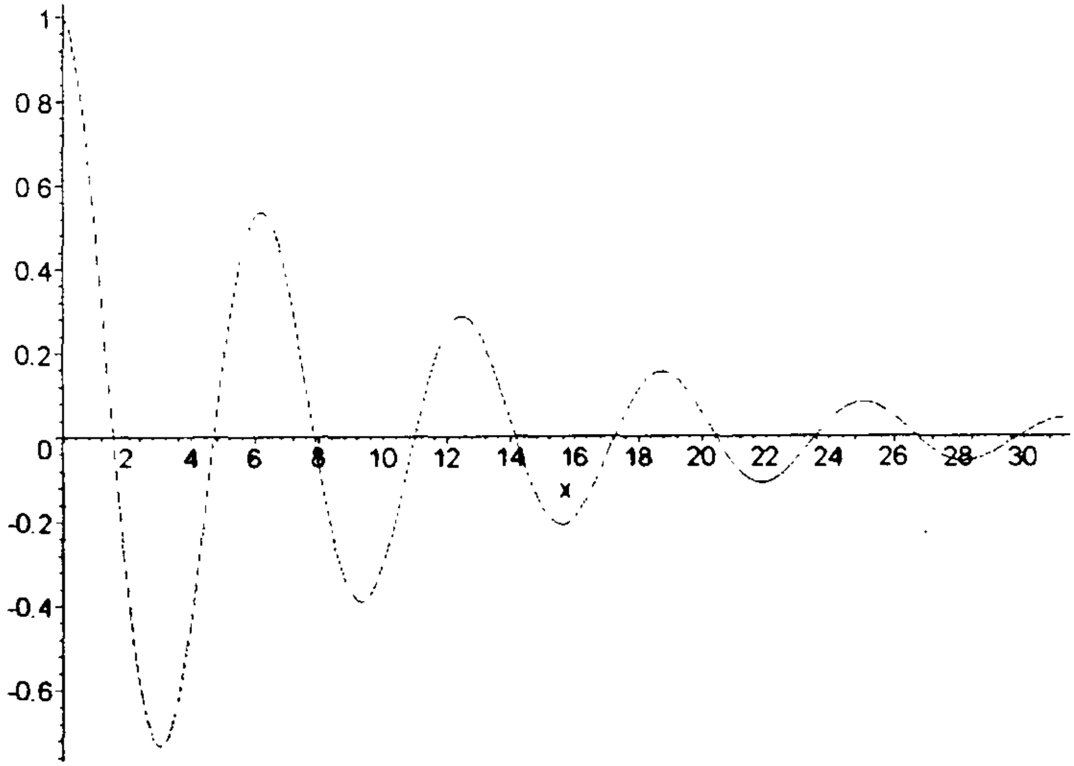

```
> plot3d(f, x=0..2,y=0..2);
```



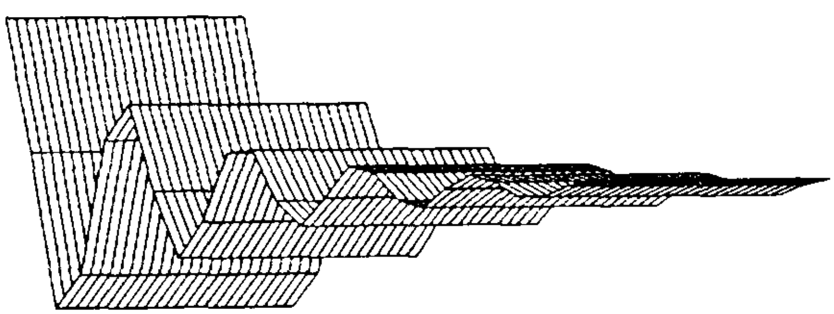
```
> restart;
> f:= exp(-0.1*x)*cos(x);
```

$$f = e^{(-.1\,x)} \cos(x)$$

```
> plot(f, x=0..10*Pi);
```




```
> plot3d(f, x=0..10*Pi, y=0..10);
```



```
>
```

```
> restart;
> f:= u+v=x+y;
> g:= x*u+y*v=1;
```

$$f := u + v = x + y$$

$$g := x\,u + y\,v = 1$$

```
> implicitdiff({f,g},{u(x,y),v(x,y)},{u,v},x,notation=Diff);
```

$$\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x}u\right)_y = -\frac{u+y}{x-y}, \left(\frac{\partial}{\partial x}v\right)_y = \frac{u+x}{x-y}\right\}$$

```
> implicitdiff({f,g},{u(x,y),v(x,y)},{u,v},y,notation=Diff);
```

$$\left\{\left(\frac{\partial}{\partial y}v\right)_x = \frac{v+x}{x-y}, \left(\frac{\partial}{\partial y}u\right)_x = -\frac{v+y}{x-y}\right\}$$

```
> implicitdiff({f,g},{x(u,v),y(u,v)},{x,y},u,notation=Diff);
```

$$\left\{\left(\frac{\partial}{\partial u}y\right)_v = -\frac{u+x}{-u+v}, \left(\frac{\partial}{\partial u}x\right)_v = \frac{v+x}{-u+v}\right\}$$

```
> implicitdiff({f,g},{x(u,v),y(u,v)},{x,y},v,notation=Diff);
```

$$\left\{\left(\frac{\partial}{\partial v}x\right)_u = \frac{v+y}{-u+v}, \left(\frac{\partial}{\partial v}y\right)_u = -\frac{u+y}{-u+v}\right\}$$

```
> implicitdiff({f,g},{u(x,y),v(x,y)},{u,v},u,notation=Diff);
Error, (in implicitdiff) 2nd argument, {u(x,y), v(x,y)}, must be functions of, u
>
```

```
> restart;
> f:= u*cos(v)-x;
> g:= u*sin(v)-y;
```

$$f := u\cos(v) - x$$

$$g := u\sin(v) - y$$

```
>
> implicitdiff({f,g},{x(u,v),y(u,v)},{x,y},u,notation=Diff);
```

$$\left\{\left(\frac{\partial}{\partial u}y\right)_v = \sin(v), \left(\frac{\partial}{\partial u}x\right)_v = \cos(v)\right\}$$

```
>
> implicitdiff({f,g},{x(u,v),y(u,v)},{x,y},v,notation=Diff);
```

$$\left\{\left(\frac{\partial}{\partial v}x\right)_u = -u\sin(v), \left(\frac{\partial}{\partial v}y\right)_u = u\cos(v)\right\}$$

```
>
> implicitdiff({f,g},{u(x,y),v(x,y)},{u,v},x,notation=Diff);
```

$$\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x}u\right)_y = \cos(v), \left(\frac{\partial}{\partial x}v\right)_y = -\frac{\sin(v)}{u}\right\}$$

```
>
> implicitdiff({f,g},{u(x,y),v(x,y)},{u,v},y,notation=Diff);
```

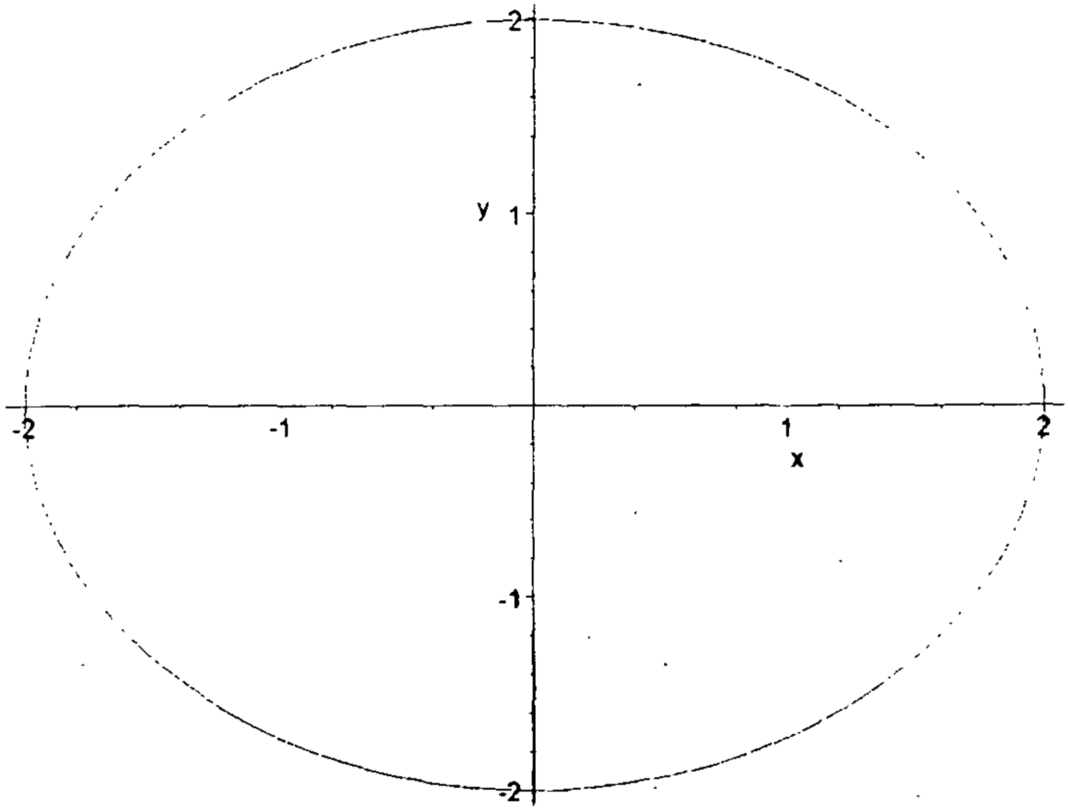
$$\left\{\left(\frac{\partial}{\partial y}u\right)_x = \sin(v), \left(\frac{\partial}{\partial y}v\right)_x = \frac{\cos(v)}{u}\right\}$$

```
> restart;
> with(plots);
>
```

[*animate, animate3d, animatecurve, changecoords, complexplot, complexplot3d, conformal, contourplot, contourplot3d, coordplot, coordplot3d, cylinderplot, densityplot, display, display3d, fieldplot, fieldplot3d, gradplot, gradplot3d, implicitplot, implicitplot3d, inequal, listcontplot, listcontplot3d, listdensityplot, listplot, listplot3d, loglogplot, logplot, matrixplot, odeplot, pareto, pointplot, pointplot3d, polarplot, polygonplot, polygonplot3d, polyhedra_supported, polyhedraplot, replot, rootlocus, semilogplot, setoptions, setoptions3d, spacecurve, sparsematrixplot, sphereplot, surfdata, textplot, textplot3d, tubeplot*]

```
>
>
>
>
> f:= x^2+y^2=4;
> implicitplot(f, x=-2..2, y=-2..2);
```

$$f := x^2 + y^2 = 4$$




```
> f:= (u*cos(v))^2+(u*sin(v))^2=4;
> implicitplot(f, u=0..2, v=0..2*Pi);
```

$$f := u^2 \cos(v)^2 + u^2 \sin(v)^2 = 4$$