

416  
CLAVE  
~



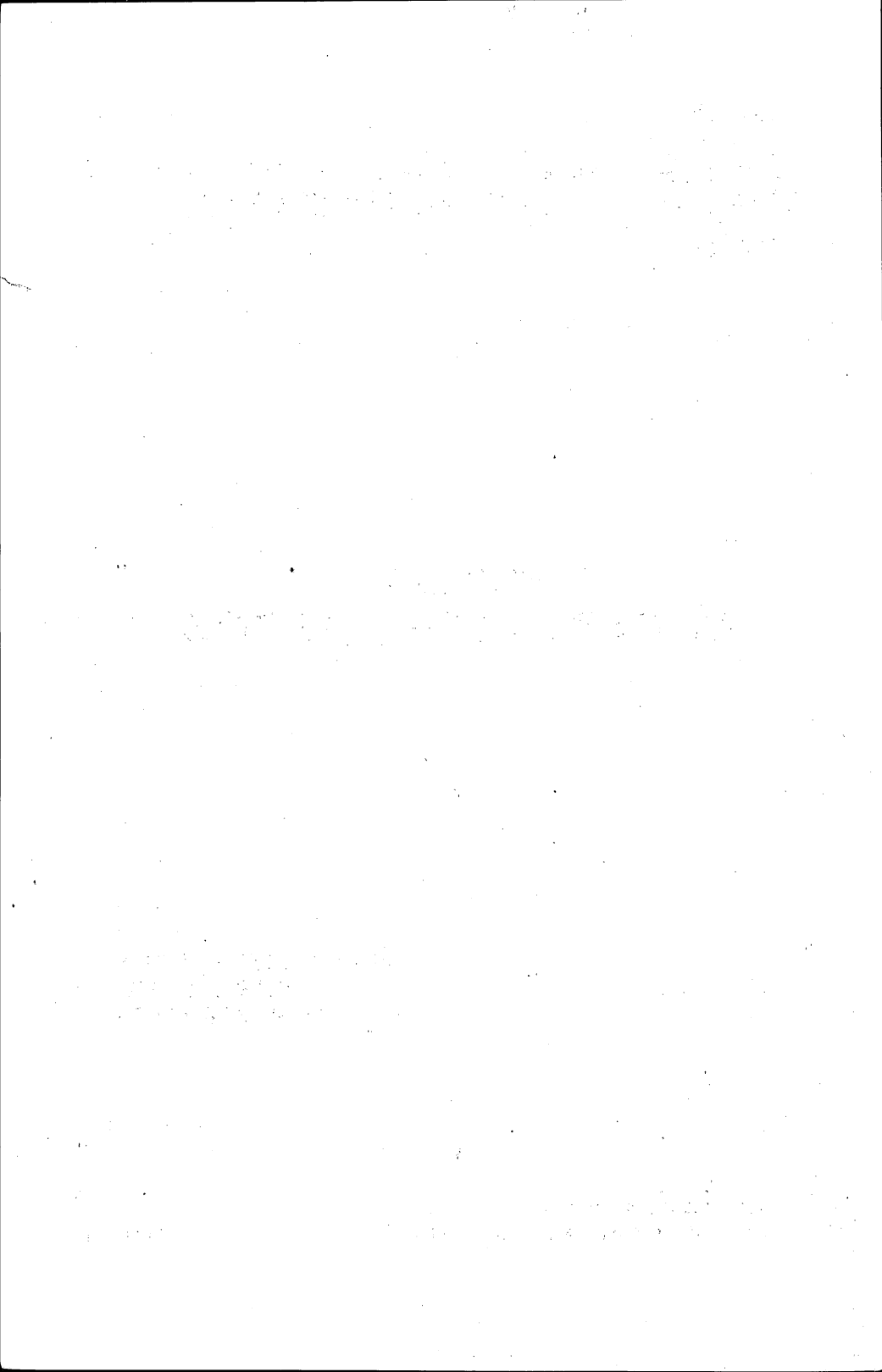
**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO  
FACULTAD DE INGENIERIA**

**APUNTES DE  
MECANICA DE FLUIDOS**

**ROBERTO A. CASTRO FLORES  
RAUL LEON VENTURA  
RAFAEL RODRIGUEZ NIETO**

**DIVISION DE INGENIERIA EN CIENCIAS DE LA TIERRA  
DEPARTAMENTO DE EXPLOTACION DEL PETROLEO**

FI/DICT/85-023



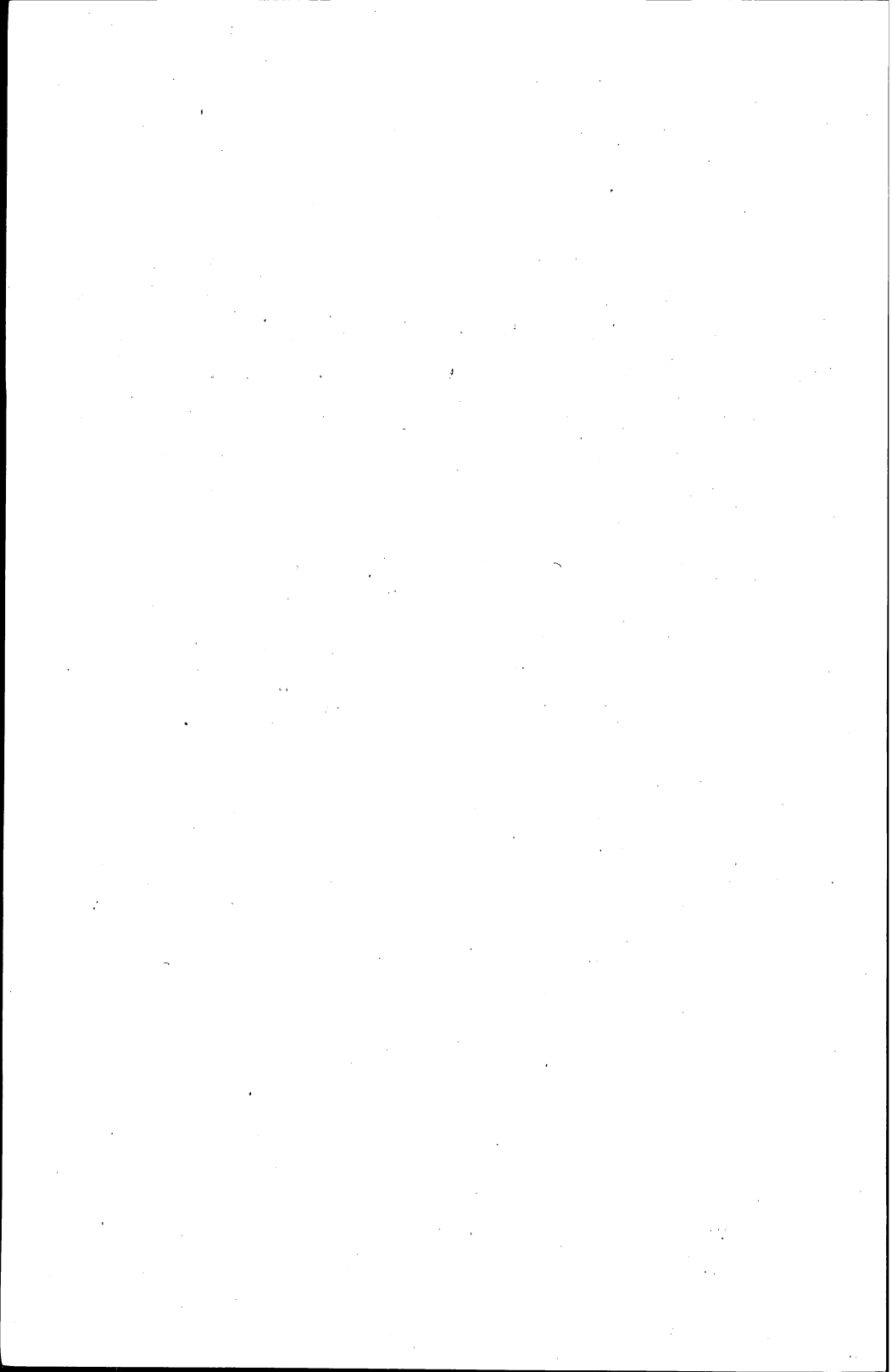
## P R E F A C I O

En febrero de 1979 se firmó un convenio de colaboración entre la UNAM, PEMEX, IMP y el CIPM (Colegio de Ingenieros Petroleros de México). El objeto del convenio ha sido elevar el nivel académico de los alumnos del área de Ingeniería Petrolera en la Facultad -- de Ingeniería, tanto de licenciatura como de posgrado, así como -- crear el Doctorado, y promover la superación de un mayor número -- de profesionales que laboran en la industria petrolera, por medio de cursos de actualización y especialización.

Uno de los programas que se están llevando a cabo a nivel de -- licenciatura, dentro del marco del Convenio, es la elaboración y -- actualización de apuntes de las materias de la carrera de Inge--- niero Petrolero. Con esto se pretende dotar al alumno de más y -- mejores medios para elevar su nivel académico, a la vez que pro-- porcionar al profesor material didáctico que lo auxilie en el -- proceso enseñanza-aprendizaje.

Estos apuntes fueron elaborados por Roberto Angel Castro Flores, -- como Trabajo Escrito para cumplir con uno de los requisitos de la carrera, bajo la orientación y supervisión de los profesores M. -- en I. Raúl León Ventura y M. en C. Rafael Rodríguez Nieto.

DEPARTAMENTO DE EXPLOTACION DEL PETROLEO



## C O N T E N I D O

### CAPITULO I. PROPIEDADES DE LOS FLUIDOS

I.1.	Generalidades . . . . .	1
I.2.	Densidad. . . . .	4
I.3.	Peso Específico . . . . .	5
I.4.	Volumen Específico. . . . .	6
I.5.	Densidad Relativa . . . . .	7
I.6.	Ley de Newton de la Viscosidad. . . . .	8
I.7.	Viscosidad Cinemática . . . . .	11
I.8.	Flúidos no Newtonianos. . . . .	14
I.9.	Presión de Vapor. . . . .	15
I.10.	Tensión Superficial . . . . .	16
I.11.	Compresibilidad de los Flúidos. . . . .	19
I.12.	Ejemplos. . . . .	23

### CAPITULO II. ESTATICA DE LOS FLUIDOS

II.1.	Presión en un punto . . . . .	26
II.2.	Variación de la presión en un fluido en reposo. . . . .	28
II.3.	Presión Absoluta y Manométrica. . . . .	33
II.4.	Unidades de Presión . . . . .	34
II.5.	Medidores de Presión. . . . .	35
II.6.	Fuerzas sobre superficies planas. . . . .	41
II.7.	Fuerzas sobre superficies curvas. . . . .	46
II.8.	Fuerza de Flotación y estabilidad de los cuerpos. . . . .	48
II.9.	Equilibrio Relativo . . . . .	53
II.10.	Ejemplos. . . . .	59

### CAPITULO III. TEORIA DE LOS MODELOS Y ANALISIS DIMENSIONAL.

III.1.	Definición y Usos de la Similitud . . . . .	70
III.2.	Grupos Adimensionales . . . . .	74
III.3.	Análisis Dimensional. . . . .	79
III.4.	Ejemplos. . . . .	89

### CAPITULO IV. CONCEPTOS Y ECUACIONES FUNDAMENTALES.

IV.1.	Características del movimiento de los fluidos . . . . .	98
IV.2.	Conceptos de Sistema y de Volumen de Control. . . . .	103
IV.3.	Ecuaciones de Continuidad, de la Energía y de la Cantidad de Movimiento para un Volumen de Control . . . . .	105
IV.4.	Ejemplos . . . . .	132

### CAPITULO V. FLUJO EN CANALES ABIERTOS.

V.1.	Perímetro Mojado y Radio Hidráulico . . . . .	137
V.2.	Ecuación para Flujo Uniforme. . . . .	139
V.3.	Fórmula de Chezy. . . . .	140
V.4.	Fórmula de Manning. . . . .	141
V.5.	Ejemplos. . . . .	143

### CAPITULO VI. FLUJO EN TUBERIAS.

VI.1.	Flujo Laminar y Turbulento. . . . .	145
VI.2.	Ecuación General de Fricción. . . . .	147
VI.3.	Tuberías de Sección Circular. . . . .	149
VI.4.	Flujo Laminar en Tuberías Circulares. . . . .	150
VI.5.	Pérdidas de Carga por Fricción. . . . .	152
VI.6.	Diagrama de Moody . . . . .	154
VI.7.	Pérdidas Menores. . . . .	157
VI.8.	Problemas Simples de Tuberías . . . . .	160
VI.9.	Ejemplos. . . . .	163

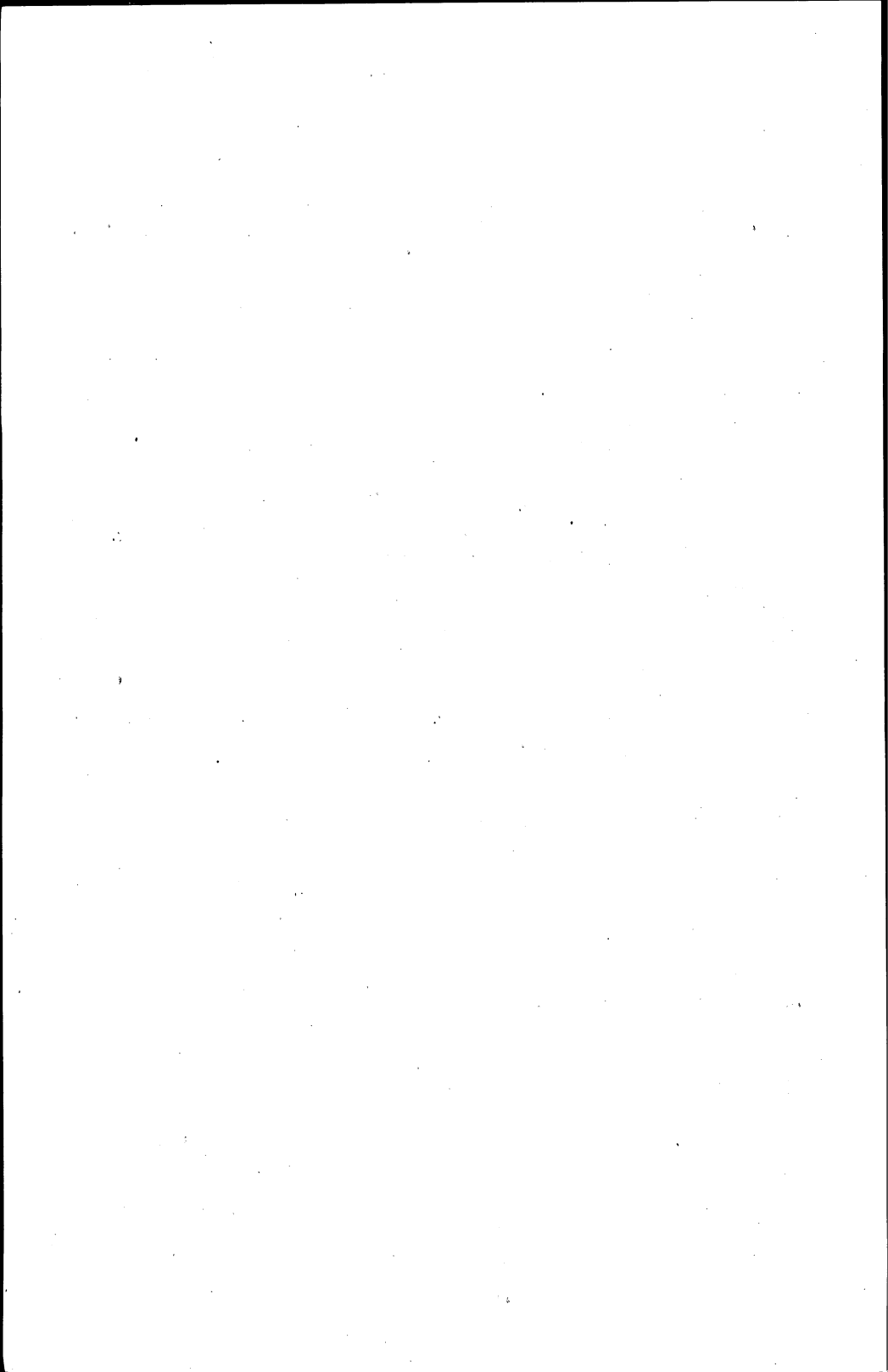
CAPITULO VII. MEDIDORES DE PRESION.

VII .1.	Presión Estática y Presión de Estancamiento. . .	.168
VII .2.	Medidores de Presión . . . . .	.170
VII .3.	Medidores de Velocidad . . . . .	.172
VII .4.	Medidores de Gasto . . . . .	.176
VII .5.	Ejemplo. . . . .	.185

CAPITULO VIII. FLUJO DE FLUIDOS COMPRESIBLES.

VIII.1.	Consideraciones Termodinámicas . . . . .	.187
VIII.2.	Ecuaciones Fundamentales Aplicables al Flujo de fluidos Compresibles. . . . .	.189
VIII.3.	Flujo Adiabático (con o sin fricción). . . . .	.190
VIII.4.	Flujo Isotérmico . . . . .	.191
VIII.5.	Efecto de la Variación del Area en un Flujo Compresible Unidimensional . . . . .	.191
VIII.6.	Onda de Choque En Una Dimensión. . . . .	.194
VIII.7.	Ejemplo. . . . .	.195

APENDICE A.	Propiedades Físicas . . . . .	.197
APENDICE B.	Factores de Conversión . . . . .	.212
APENDICE C.	Nomenclatura y referencias Bibliográficas . . . . .	.218





# CAPITULO I

## PROPIEDADES DE LOS FLUIDOS

### I.1. GENERALIDADES.

Un fluido es una sustancia (líquido o gas) que se deforma continuamente cuando se le sujeta a un esfuerzo constante.

La Mecánica de Fluidos es la ciencia de la mecánica de los líquidos y gases y se basa en los mismos principios fundamentales que se emplean en la Mecánica de Sólidos. La Mecánica de Fluidos es una materia más complicada, ya que con sólidos se trata con elementos tangibles y separados, mientras que con fluidos, no hay elementos separados que se distingan.

La Mecánica de Fluidos se ha dividido en tres ramas: - Estática de fluidos que estudia la mecánica de fluidos en reposo; Cinemática de fluidos que trata la velocidad y trayectoria de estos sin considerar la fuerza o energía que la provoca; e Hidrodinámica que se encarga de la relación entre la velocidad y aceleración y las fuerzas ejercidas por o sobre los fluidos en movimiento.

La hidrodinámica clásica se puede considerar como un tema matemático, ya que al tratar con fluidos no toma en cuenta todas las pérdidas por fricción, o sea, considera fluidos ideales imaginarios. Al realizar un estudio en el que no se tomen en cuenta todas las propiedades de los fluidos reales, se obtiene como resultado un valor meramente práctico. Por tanto, en el pasado los ingenieros se dedicaron a experimentar, -

desarrollando fórmulas empíricas que proporcionaban respues -  
tas a problemas determinados. A esta materia se le da el nom-  
bre de Hidráulica.

La Hidráulica empírica enfocó su estudio al agua, limi-  
tando su alcance a ésta únicamente, pero con los avances en -  
aeronáutica, la ingeniería química y la industria petrolera,-  
surgió la necesidad de ampliar su tratamiento, y de la combi-  
nación de la hidrodinámica clásica y del estudio de los flui-  
dos reales nació la Mecánica de Fluidos. En ésta última, los-  
principios básicos de la hidrodinámica se combinaron con las-  
técnicas experimentales de la hidráulica.

Los resultados experimentales se pueden usar para ve--  
rificar la teoría, proporcionando información adicional a los  
análisis matemáticos.

El producto final es una serie unificada de principios  
básicos de la Mecánica de Fluidos que se pueden aplicar a la-  
solución de problemas de flujo de fluidos, de trascendencia -  
ingenieril.

Por otro lado, dado que la mayoría de los aparatos de-  
medición y control de fluidos tienen especificaciones y esca-  
las en el Sistema Inglés de unidades, es necesario dar mayor-  
importancia a este sistema y relacionarlo con el Sistema In -  
ternacional (SI), que es el de uso común.

Las unidades básicas en el Sistema Inglés son: la li -  
bra ( $lb$ ), el slug, el pie ( $ft$ ) y el segundo, para la fuerza,-  
la masa, la longitud y el tiempo respectivamente. En el Sis-  
tema Internacional, las unidades correspondientes son: el New-  
ton ( $N$ ), el kilogramo ( $kg$ ), el metro ( $m$ ) y el segundo. La li-  
bra masa ( $lb_m$ ) se emplea en algunas tablas de propiedades y -  
se relaciona con el slug mediante la conversión  $32.174 lb_m = 1-$   
 $slug$ . De manera similar, el kilogramo fuerza ( $kg_f$ ) es equiva-  
lente a  $9.806N$ . Los múltiplos y submúltiplos en potencias de  
diez, se indican mediante prefijos, los cuales se abrevian,-  
como por ejemplo para centímetro  $= 1cm = 10^{-2}m$ .

En el Apéndice B, se pueden encontrar conversiones a -  
diferentes sistemas de unidades y equivalencias entre los mis-  
mos.

### I.1.1 DISTINCION ENTRE UN SOLIDO Y UN FLUIDO.

Las moléculas de un sólido tienen entre sí mayor cohesión que las de un fluido. En un sólido las fuerzas de atracción entre sus moléculas, son tan grandes que éste tiende a mantener su forma, mientras que en un fluido las fuerzas de atracción molecular son más pequeñas, por lo cual no tienen forma propia, sino que adoptan la del recipiente que los contiene. Existen sólidos plásticos que fluyen bajo ciertas condiciones particulares y algunos metales que escurren al estar sometidos a altas presiones. Por otro lado, existen fluidos muy viscosos que por no fluir fácilmente es común confundirlos con un sólido plástico. La distinción entre éstos es que las sustancias viscosas fluyen con el tiempo cuando se les aplica un ligero esfuerzo, mientras que una sustancia plástica requiere de un esfuerzo de cierta magnitud para empezar a fluir.

Así, cuando la forma de un sólido es modificada por fuerzas externas, los esfuerzos tangenciales entre las partículas adyacentes tienden a devolver al cuerpo su forma original. Cuando un fluido está en equilibrio no puede soportar fuerzas tangenciales o cortantes; ofrecen poca resistencia a los cambios de forma; además, el esfuerzo tangencial depende de la velocidad y desaparece conforme la velocidad tiende a cero.

### I.1.2 DISTINCION ENTRE UN GAS, UN VAPOR Y UN LIQUIDO.

Se considera fluido a un gas o un líquido indistintamente. En un gas, sus moléculas se encuentran muy separadas entre sí, por tanto, es un fluido muy compresible y además, cuando la presión externa desaparece tiende a expandirse indefinidamente. Así pues, un gas está en equilibrio sólo cuando se encuentra confinado. Un líquido es relativamente incompresible

y si la presión externa desaparece-excepto su presión de vapor-, la cohesión existente entre sus moléculas lo mantiene unido, de forma tal que el líquido no se expanda indefinidamente; por esta razón los líquidos pueden presentar una superficie libre, sin necesidad de que esté actuando una presión sobre ella, excepto su presión de vapor.

Un vapor es un gas cuyas condiciones de presión y temperatura son tales que se encuentra cercano a la fase líquida.

Dado que el volumen de un gas-o vapor- es más afectado por las variaciones en la presión y la temperatura, al tratar con un gas, es necesario tomar en cuenta estos factores.

En resumen, las diferencias esenciales entre un líquido y un gas son: los líquidos son prácticamente incompresibles en tanto que los gases son compresibles y, un líquido ocupa un volumen definido y tiene superficie libre, mientras que una masa dada de gas se expande hasta ocupar todas las partes del recipiente que lo contiene.

## I.2. DENSIDAD ( $\rho$ )

La densidad de una sustancia se define como su masa por unidad de volumen:

$$\rho = \frac{\text{masa}}{\text{volumen}} = \frac{m}{V} \quad (\text{I.1}).$$

Tomando límite cuando el volumen tiende a cero:

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} \quad (\text{I.2}),$$

se puede definir la densidad de la sustancia en un punto por

$$\rho = \frac{dm}{dV} \quad (\text{I.3}).$$

Las dimensiones de la densidad son:

$$[\rho] = [M^1 L^3 T^0] = [F^1 L^4 T^2]$$

### I.3. PESO ESPECIFICO ( $\gamma$ )

El peso específico de una sustancia se define como la relación entre su peso por unidad de volumen, y representa la fuerza que ejerce la aceleración de la gravedad por unidad de volumen de fluido, ésto es:

$$\gamma = \frac{\text{fuerza de gravedad}}{\text{volumen}} = \frac{\text{peso}}{\text{volumen}} = \frac{W}{V} \quad (\text{I.4}),$$

y sus dimensiones son:

$$[\gamma] = [M^1 L^2 T^{-2}] = [F^1 L^{-3} T^0].$$

La densidad y el peso específico, de acuerdo a la segunda ley de Newton, se relacionan de la siguiente manera:

$$W = mg$$

dividiendo entre el volumen;

$$\frac{W}{V} = \frac{m}{V} g, \quad (\text{I.5}),$$

entonces se tiene:

$$\gamma = \rho g \quad (\text{I.6}).$$

En el Apéndice A, se pueden encontrar propiedades para diferentes fluidos.

En la Fig. I.1 se puede observar la variación del peso específico del agua con la temperatura bajo condiciones normales, donde  $g=32.2 \text{ ft}/\text{seg}^2$ .

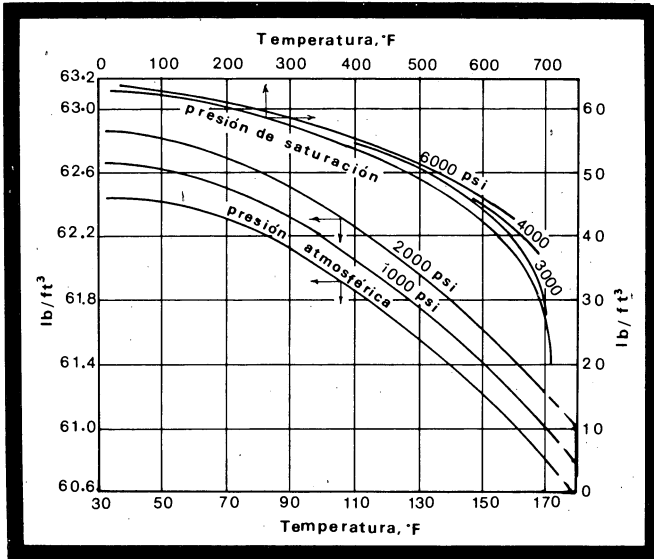


FIG. I.1. PESO ESPECIFICO DEL AGUA PURA CUANDO  $g=32.2 \text{ ft/seg}^2$ .

#### I.4. VOLUMEN ESPECIFICO ( $V_s$ ).

El volumen específico de una sustancia, es el volumen ocupado por unidad de peso del fluido:

$$V_s = \frac{\text{volumen}}{\text{peso}} = \frac{V}{W} \quad (\text{I.7}),$$

entonces, el volumen específico de una sustancia es el inverso de su peso específico y generalmente se aplica a los gases:

$$V_s = \frac{1}{\gamma} \quad (\text{I.8}),$$

y sus dimensiones son:

$$[V_s] = [M^{-1} L^2 T^2] = [F^{-1} L^3 T^0].$$

## I.5. DENSIDAD RELATIVA ( $\rho_r$ )

La densidad relativa de un cuerpo (sólido o líquido), es un número adimensional que está dado por la relación del peso del cuerpo al peso de un volumen igual de una sustancia que se toma como referencia; en este caso se hace con el agua pura a  $4^\circ\text{C}$  y  $1.0 \text{ atm}$  de presión.

Es equivalente tomar la relación entre la densidad o el peso específico de la sustancia con su correspondiente al agua pura.

$$\rho_r = \frac{\text{peso del cuerpo}}{\text{peso del agua pura}} = \frac{\gamma}{\gamma_w} = \frac{\rho}{\rho_w} \quad (\text{I.9}).$$

De lo anterior se deduce que la densidad relativa de una sustancia viene dada por el mismo número en cualquier sistema de unidades.

Cuando se trata de un gas se utiliza el concepto de gravedad específica (SG): la cual se define como la relación entre la densidad de un gas y la de otro, que puede ser aire, libre de bióxido de carbono, o el hidrógeno, medidos a una presión y temperatura determinadas, por lo que es necesario especificar con respecto a cual se toma y las condiciones de medición:

$$SG = \frac{\rho_{\text{gas}}}{\rho_{\text{aire}}} = \frac{\gamma_{\text{gas}}}{\gamma_{\text{aire}}} \quad (\text{I.10}).$$

Es común obtener la gravedad específica de un gas, haciendo la relación del peso molecular ( $\bar{M}$ ) con respecto al del aire.

$$SG = \frac{\text{peso molecular del gas}}{\text{peso molecular del aire}} = \frac{\bar{M}_{\text{gas}}}{\bar{M}_{\text{aire}}} \quad (\text{I.11}),$$

donde:  $\bar{M}_{\text{aire}} = 28.971 \frac{\text{lb}}{\text{mole-lb}}$ .

## I.6. LEY DE NEWTON DE LA VISCOSIDAD

Se puede definir un fluido ideal como aquel en el cual no existe fricción entre sus partículas, o sea sin viscosidad ( $\mu=0$ ). Un fluido como éste solamente es una idealización, puesto que todos los fluidos, de una forma u otra, son viscosos y compresibles.

En un fluido real, siempre actúan fuerzas tangenciales o cortantes cuando existe movimiento, dando lugar a las fuerzas de fricción y que se deben a la propiedad de los fluidos llamada viscosidad.

Considerando un fluido (líquido o gas) alojado entre dos grandes placas planas y paralelas, de área  $A$ , separadas por una distancia muy pequeña  $y$ , Fig. I.2. Suponiendo que el sistema está inicialmente en reposo, (a); en el tiempo  $t=0$ , la lámina inferior se pone en movimiento en la dirección del eje  $x$ , con una velocidad constante  $v$ , (b). Conforme transcurre el tiempo, (c), el fluido gana cantidad de movimiento y, finalmente se establece el perfil de velocidad en régimen estacionario, (d). Una vez que se alcanza este estado estacionario de movimiento, es preciso aplicar una fuerza constante  $F$  para conservar el movimiento de la placa inferior. Esta fuerza está dada por la siguiente expresión, si se supone flujo laminar:

$$F \sim \frac{A\mu v}{y}$$
$$F = \mu \frac{A v}{y} \quad (I.12),$$

donde  $\mu$  es la constante de proporcionalidad, llamada viscosidad del fluido.

El esfuerzo cortante que se ejerce en la dirección  $x$ , sobre la superficie del fluido-fuerza por unidad de área-situada a una distancia constante  $y$ , por el fluido existente en



la región donde  $y$  es menor, se designa por  $\tau_{xy}$  :

$$\tau_{xy} = \frac{F}{A} \quad (I.13),$$

entonces:

$$\tau_{xy} = \mu \frac{dv}{dy} \quad (I.14).$$

Esta es la ley de Newton de la viscosidad y los fluidos que la cumplen, se denominan newtonianos. Todos los gases y la mayoría de los líquidos sencillos se comportan de acuerdo a esta ecuación.

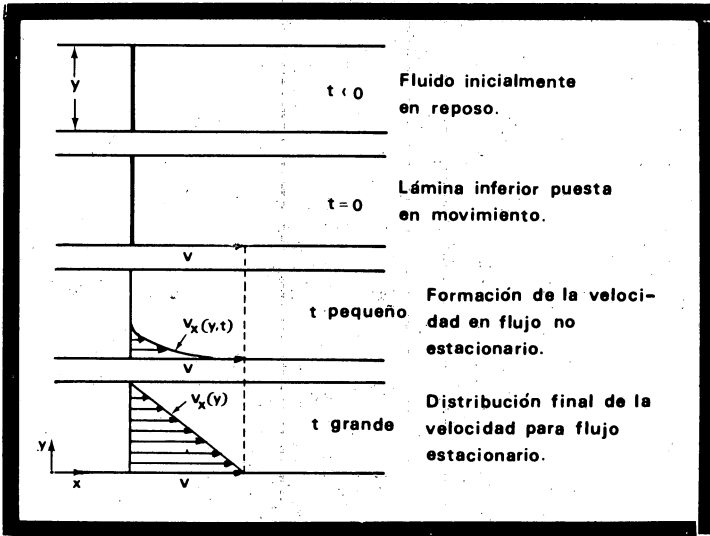


FIG. I.2. FORMACION DEL PERFIL DE VELOCIDAD EN ESTADO ESTACIONARIO PARA UN FLUIDO CONTENIDO ENTRE DOS LAMINAS.

La resistencia a la deformación de un fluido, es decir, la viscosidad ( $\mu$ ), se le llama viscosidad absoluta o simplemente viscosidad, y tomando en cuenta sus unidades, se le dá el nombre de viscosidad dinámica - tiene un doble origen: por un lado, las moléculas se atraen entre sí mediante las fuerzas de cohesión que dificultan un desplazamiento relativo entre ellas, y por otro, la agitación térmica produce una transferencia de cantidad de movimiento entre capas que no se mueven con la misma velocidad.

Como resultado de este doble efecto, la viscosidad resulta depender de la presión y la temperatura:

$$\mu = \mu(T, P).$$

En los líquidos, las fuerzas cohesivas son preponderantes y disminuyen al aumentar la temperatura. En los gases la transferencia de cantidad de movimiento origina, principalmente, la viscosidad, por esto, en un gas hay aumento de viscosidad al haber aumento en la temperatura.

Cuando se tiene una mezcla de gas y líquido, como es el caso de los hidrocarburos en un yacimiento, si existe una alta variación de la viscosidad al variar la presión y la temperatura, simultánea o individualmente.

Las dimensiones de la viscosidad absoluta son, si:

$$F \quad [F^1 L^0 T^0] \quad ; \quad V \quad [F^0 L^1 T^{-1}]$$

$$A \quad [F^0 L^2 T^0] \quad ; \quad y \quad [F^0 L^1 T^0]$$

entonces:

$$\mu = \tau_{xy} \frac{dy}{dv} = \frac{F}{A} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta v} \quad [F^1] \cdot [L^{-2}] \cdot [L^1] \cdot [L^1 T^{-1}]$$

Por tanto:

$$\mu \quad [F^1 \quad L^{-2} \quad T^1] = \mu \quad [M^1 \quad L^{-1} \quad T^{-1}]$$

En el sistema cgs:

$$\mu \quad [M^1 \quad L^{-1} \quad T^{-1}] = \mu \quad [g_m/cm \text{ seg}].$$

La unidad ( $g_m/cm \text{ seg}$ ) en el sistema cgs se denomina poise, pero

generalmente se usa el centipoise ( $1 \text{cp} = 0.01 \text{poise}$ ).

En el sistema MKS:

$$\mu \text{ [M}^1 \text{ L}^{-1} \text{ T}^{-1}] = \mu \text{ [kg}_m\text{/m}\cdot\text{seg]}.$$

En el sistema FPS:

$$\mu \text{ [M}^1 \text{ L}^{-1} \text{ T}^{-1}] = \mu \text{ [lb}_m\text{/ft}\cdot\text{seg]}.$$

En la Fig. 1.3 se pueden encontrar valores de viscosidad absoluta en función de la temperatura, para diferentes fluidos.

### I.7. VISCOSIDAD CINEMATICA ( $\nu$ )

En muchos problemas en los que interviene la viscosidad absoluta, frecuentemente aparece la viscosidad dividida por la densidad; este cociente se define como viscosidad cinemática, cuyo nombre proviene de que sus dimensiones son únicamente de tipo cinemático, esto es:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \tag{I.15},$$

$$\nu = \frac{[\text{M}^1 \text{ L}^{-1} \text{ T}^{-1}][\text{M}^{-1} \text{ L}^3]}{[\text{M}^0 \text{ L}^2 \text{ T}^{-1}]} = [\text{L}^2 \text{ T}^{-1}]$$

En el sistema cgs:

$$\nu = \nu \text{ [cm}^2\text{/seg]}.$$

La unidad  $1 \text{ cm}^2/\text{seg}$  recibe el nombre de stoke, aunque es más común usar el centistoke.

En el sistema MKS:

$$\nu = \nu \text{ [m}^2\text{/seg]}.$$

En el FPS:

$$\nu = \nu \text{ [ft}^2\text{/seg]}.$$

En la Fig. 1.4 se pueden encontrar los valores de viscosidad cinemática para diferentes fluidos.

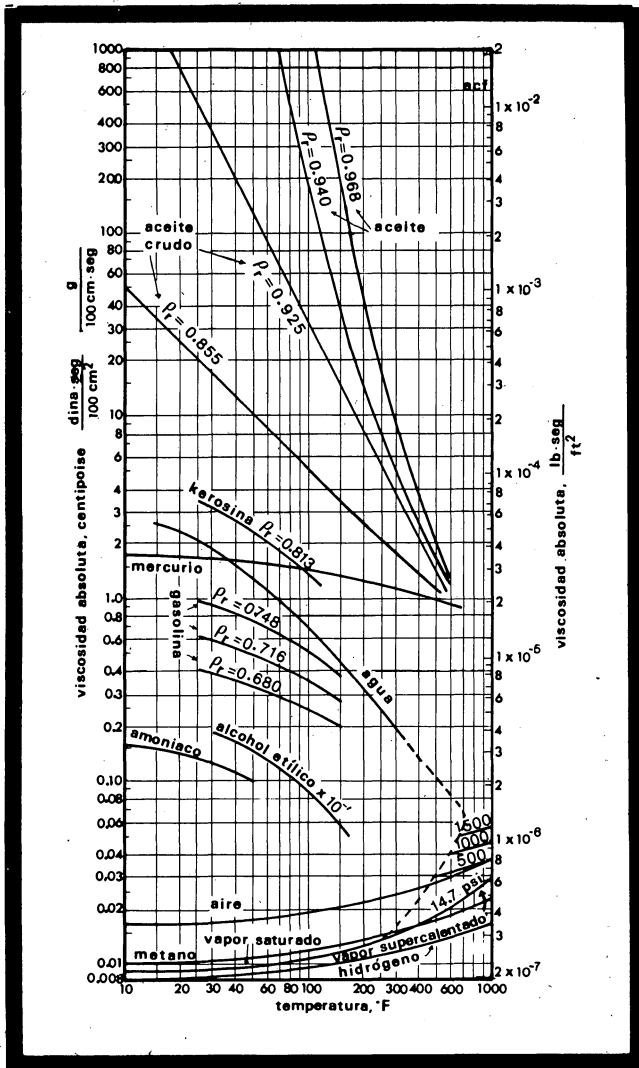


FIG. I. 3. VISCOSIDAD ABSOLUTA DE FLUIDOS DIVERSOS EN FUNCION DE LA TEMPERATURA.

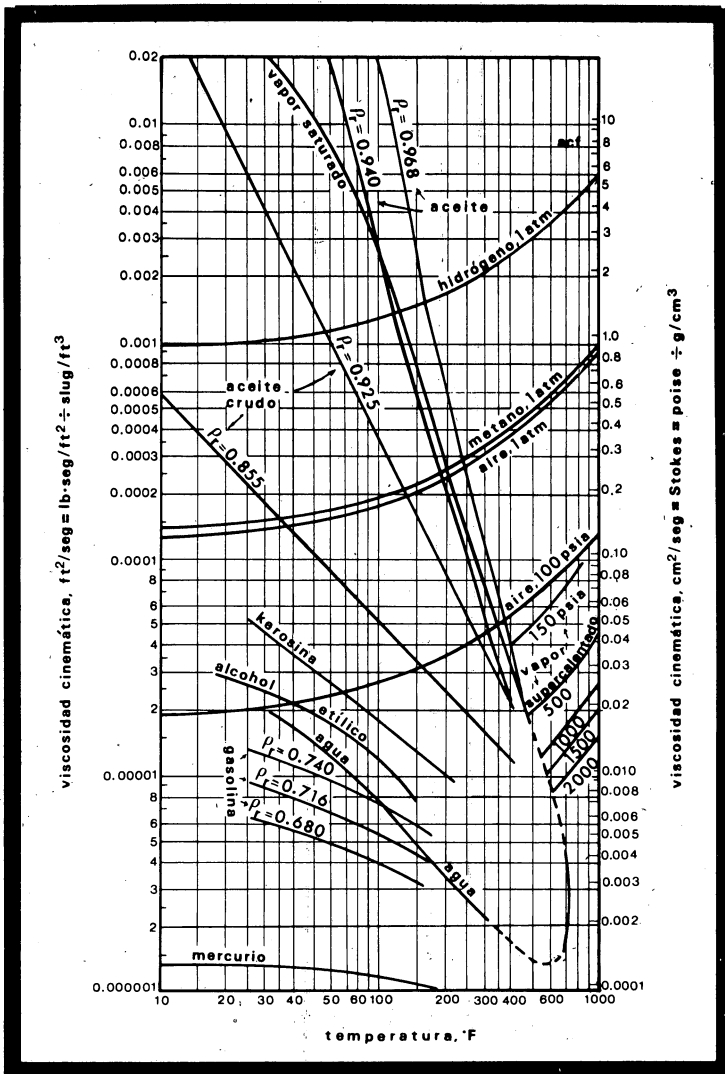


FIG. I.4. VISCOSIDAD CINEMATICA DE FLUIDOS EN FUNCION DE LA TEMPERATURA.

## I.8. FLUIDOS NO NEWTONIANOS

De acuerdo con la ley de la viscosidad de Newton, - ecuación (I.14), al representar gráficamente  $\tau$  contra  $dv/dy$  - para un fluido determinado, debe obtenerse una línea recta - que pasa por el origen de coordenadas, y cuya pendiente es la viscosidad del fluido, a una cierta presión y temperatura, Fig. I.5. Este comportamiento lo tienen todos los gases y líquidos homogéneos no polymerizados. Las sustancias que no siguen esta ley se les conoce como fluidos no newtonianos.

El tema de flujo no newtoniano es parte de otra ciencia, la reología, es decir, la ciencia del flujo y la deformación, que estudia las propiedades mecánicas de los gases, líquidos, plásticos, sustancias asfálticas y materiales cristalinos.

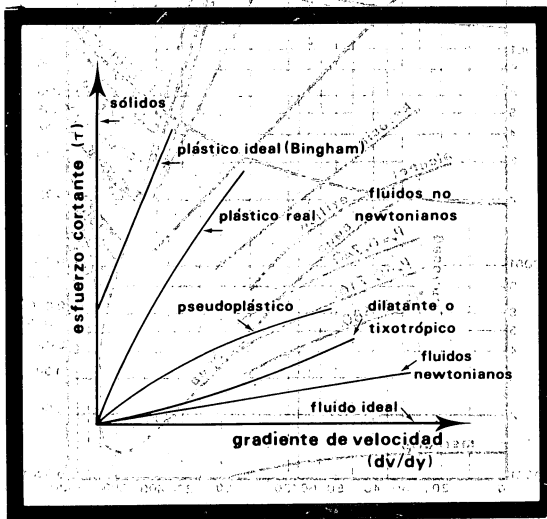


FIG. I.5. COMPORTAMIENTO DE LA VISCOSIDAD DE ALGUNOS TIPOS DE SUSTANCIAS.

El comportamiento reológico, en estado estacionario, de la mayor parte de los fluidos mostrados en la Fig. I.5 puede establecerse mediante una forma generalizada de la ecuación (I.14):

$$\tau_{xy} = n \frac{dv}{dy} \quad (I.16),$$

en la que  $n$  puede expresarse a su vez en función de  $\tau$  o de  $dv/dy$ , indistintamente.

Cuando  $n$  disminuye al aumentar el gradiente de velocidad, el comportamiento se denomina pseudoplástico, por ejemplo soluciones coloidales; es dilatante cuando  $n$  aumenta con dicho gradiente, como son las suspensiones de arcilla o arena en agua.

Si  $n$  resulta independiente del gradiente de velocidades, el fluido se comporta como newtoniano, y entonces  $n = \mu$ ; es el caso del agua, alcohol, etc.

Si  $n = 0$  o  $\mu = 0$ , el fluido es ideal, es decir sin viscosidad. Si  $n = \infty$ , corresponde a un sólido.

Un plástico de Bingham es una sustancia que permanece rígida mientras el esfuerzo cortante es menor que un determinado valor de  $\tau_0$ , llamado punto de cedencia, por encima del cual, el fluido se comporta en forma semejante a uno newtoniano, y es el caso de las pinturas de aceite.

## I.9. PRESION DE VAPOR,

La presión de vapor se define como la menor presión a la que un líquido se evapora.

Todos los líquidos tienden a evaporarse o volatilizarse, efecto que se lleva a cabo por la expulsión de sus moléculas hacia el espacio sobre su superficie. Si es un espacio confinado, la presión parcial ejercida por sus moléculas aumenta hasta que la proporción de moléculas que salen del líquido es igual a las que vuelven a entrar. Para esta condición de equilibrio, la presión de vapor se conoce como presión de saturación.

La actividad molecular aumenta con la temperatura y por tanto, la presión de saturación aumenta también con la misma. A una temperatura dada, la presión en la superficie de un líquido puede ser mayor o igual que este valor, pero no puede ser menor, ya que, con una pequeña disminución en la presión se crea una rápida evaporación, conocida como ebullición. Por esto, la presión de saturación se conoce también como presión de ebullición o de burbujeo para una temperatura dada.

Ya que el mercurio tiene una baja presión de saturación, se hace adecuado su uso en barómetros.

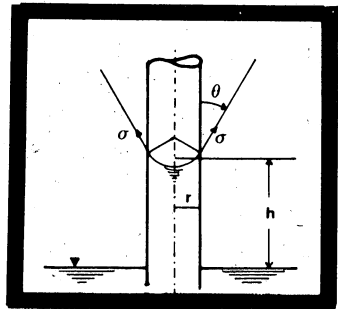
#### I.10. TENSION SUPERFICIAL ( $\sigma$ )

La tensión superficial es la tendencia de un líquido a ofrecer la mínima superficie libre, es decir, la superficie líquida en contacto con un gas tiende a contraerse.

Los líquidos tienen dos formas de atracción molecular: la cohesión que permite a un líquido resistir los esfuerzos cortantes y, la adhesión que le permite "adherirse" a otros cuerpos.

La combinación de las dos formas de atracción molecular dá origen a la capilaridad. Cuando la adhesión tiene un mayor efecto que la cohesión, se dice que el líquido es capaz de mojar a la superficie sólida con la que está en contacto, sufriendo una elevación en el punto de contacto.

FIG. I.6. NOMENCLATURA PARA LA TENSION SUPERFICIAL.





Considerese un tubo capilar circular, de radio  $r$ , mojado por un líquido, de densidad  $\rho$ . Si se sumerge en un recipiente que esté lleno con el mismo líquido, Fig. I.6. éste último asciende inmediatamente a una altura  $h$ , arriba de la superficie del líquido en el recipiente.

Sea  $\sigma$  la tensión superficial del líquido con respecto al aire (es igual a la fuerza ejercida por la tendencia a contraerse de la superficie líquida). La columna de líquido en el capilar es levantada por una fuerza que actúa en contra de la atracción de la gravedad. La magnitud del levantamiento capilar es función del tamaño del tubo, el ángulo  $\theta$  formado entre la fase mojante y el tubo, y de la tensión superficial que existe en la superficie de la fase mojante. La longitud sobre la cual la fuerza-tensión superficial es aplicada en un capilar, es igual a  $2\pi r$ . Así, la fuerza capilar total es  $2\pi r\sigma$  y la fuerza vertical se puede expresar como  $2\pi r\rho c\cos\theta$ . La presión ejercida por la columna de líquido ( $\rho gh$ ) sobre el área transversal del tubo ( $\pi r^2$ ), es igual a la atracción de la gravedad:  $\rho gh\pi r^2$ . Igualando las fuerzas:

fuerza capilar = fuerza de atracción de la gravedad.

$$2\pi r\sigma\cos\theta = \rho\pi r^2 h \quad (I.17),$$

donde;

$\theta$  - ángulo de contacto entre el líquido y la pared del tubo,

$\rho$  - densidad del líquido,

$g$  - aceleración de la gravedad,

$h$  - levantamiento capilar,

$r$  - radio del tubo y,

$\sigma$  - tensión superficial.

El valor de la tensión superficial se puede calcular:

$$\sigma = \frac{g \rho h r}{2 \cos \theta} = \frac{\gamma h r}{2 \cos \theta} \quad (I.18).$$

El valor de  $(\rho gh = \gamma h)$  es también, la presión hidrostática ( $\Delta p$ ), ejercida por la columna de líquido en el capilar. De esta manera,  $\Delta p = \rho gh = 2\sigma \cos \theta / r$ .

$$\sigma = \frac{r \Delta p}{2 \cos \theta} \quad (I.19).$$

Considerando la variación de la presión a lo largo del levantamiento capilar ( $h$ ), se puede ver que una fuerte discontinuidad en el valor de la presión  $\Delta p = \rho gh = 2\sigma \cos \theta / r$ , existe en la interfase del menisco, ésta es la presión capilar del tubo, la que también se puede interpretar como la resistencia capilar a la penetración hacia el tubo, saturado con un fluido mojante, por un líquido que no moja el material del tubo.

La presión capilar se puede obtener despejando de la ecuación (I.19):

$$\Delta p = p_c = \frac{2\sigma \cos \theta}{r} \quad (I.20).$$

Si el tubo está limpio,  $\theta = 0^\circ$  para el agua y, aproximadamente,  $140^\circ$  para el mercurio. Para tubos con diámetros mayores de 12 mm, los efectos capilares son despreciables. En la Fig. I.7, se muestra la variación del levantamiento capilar en función del diámetro del tubo, para el agua, a diferentes temperaturas; si el mercurio se encuentra en contacto con el agua, los efectos de la tensión superficial, son ligeramente menores que cuando está en contacto con el aire.

La tensión superficial disminuye ligeramente con el aumento de la temperatura, como se puede ver en la Fig. I.7. Los efectos de la tensión superficial son despreciables en la mayoría de los trabajos de ingeniería; sin embargo, son muy importantes en problemas que involucran el flujo de fluidos en medios porosos.

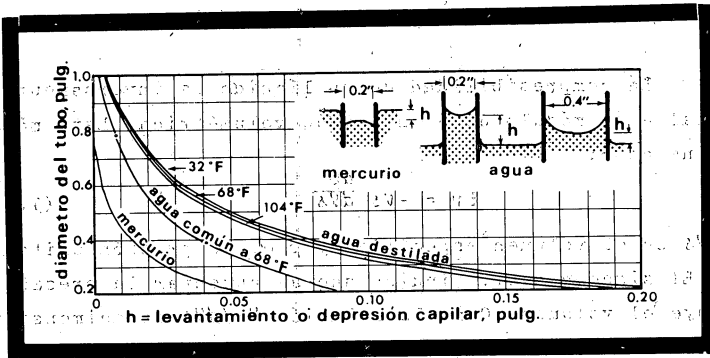


FIG. I. 7. CAPILARIDAD EN TUBOS CIRCULARES DE VIDRIO.

### I. 11. COMPRESIBILIDAD DE LOS FLUIDOS.

La mecánica de fluidos trata con fluidos compresibles e incompresibles, esto es, con fluidos de densidad variable o constante, respectivamente. En realidad no existe un fluido completamente incompresible, pero se aplica este término cuando el cambio de la densidad con la presión es tan pequeño que se puede despreciar. Esta consideración es muy común en los líquidos. Los gases también se pueden considerar incompresibles, cuando la variación en la presión es pequeña comparada con la presión absoluta que se ejerce sobre ellos.

El flujo de aire en un sistema de ventilación es el caso en donde un gas se puede tomar como incompresible, ya que el cambio en la presión es tan pequeño que la variación en la densidad carece de importancia. Para un gas que fluye en una tubería de gran longitud, existe una gran caída de presión y por tanto, no se puede ignorar el cambio en la densidad.

### I.11.1. COMPRESIBILIDAD DE LOS LIQUIDOS (c).

La compresibilidad de un líquido es inversamente proporcional a su módulo de elasticidad volumétrica. Este módulo se define como;

$$E_v = -V_s \frac{dp}{dV_s} \quad (I.21),$$

donde  $V_s$  es el volumen específico y  $p$  es la presión unitaria.

El signo negativo indica que al aumentar la presión, disminuye el volumen. Como la relación  $V_s/dV_s$  es adimensional, el módulo volumétrico tiene las mismas dimensiones que la presión.

Por lo expuesto anteriormente, la compresibilidad isotérmica es;

$$c = \frac{1}{E_v} = \frac{-1}{V_s} \left( \frac{dV_s}{dp} \right)_T \quad (I.22),$$

y sus unidades son las inversas de la presión.

El módulo volumétrico de elasticidad (también la compresibilidad), es una propiedad de los fluidos y está en función de la presión y la temperatura, cubriendo un amplio rango.

Si se tiene un volumen de líquido a temperatura constante:

$$V_s = \frac{m}{\rho} \quad (I.23).$$

Sustituyendo en la ecuación (I.22) se tiene:

$$c = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dp} \quad (I.24),$$

que representa la variación de la densidad de los líquidos en función de la presión.

### I.11.2. COMPRESIBILIDAD DE LOS GASES (cg).

Un gas perfecto se define como la substancia que satisface la ley o ecuación de estado de los gases perfectos, - es decir:

$$\frac{p}{\gamma} = pV_s = RT \quad (I.25),$$

donde

$p$  = presión absoluta en  $psia$  o  $kg/cm^2$ ,

$\gamma$  = peso específico,

$V_s$  = volumen específico,  $(1/\gamma)$ ,

$R$  = constante del gas, su valor depende de cada gas en particular.

$T$  = temperatura absoluta en grados Rankine o Kelvin.

Dado que  $\gamma = \rho g$ , la ecuación anterior se puede escribir - como:

$$p = \frac{\rho}{gRt} \quad (I.26),$$

por medio de la cual se puede calcular la densidad de un gas, a una temperatura y presión dadas, si se conocen  $R$  y  $g$ .

Las unidades de  $R$  se pueden determinar a partir de la ecuación (I.25), si de antemano se conocen las demás variables. Si  $\gamma$  está dada en  $lb/ft^3$ ,  $p$  en  $lb/ft^2$  y  $T$  en  $^{\circ}R$ , se tiene;

$$R = \frac{p(lb/ft^2)}{\gamma(lb/ft^3) T(^{\circ}R)} = R(lb/ft^{\circ}R).$$

La ley de Avogadro establece que todos los gases a la misma temperatura y presión, bajo la acción de un valor dado de  $g$ , tienen el mismo número de moléculas por unidad de volumen; de donde se infiere que el peso específico de un gas es proporcional a su peso molecular,  $\gamma_2/\gamma_1 = \bar{M}_2/\bar{M}_1$ , y de la ecuación (I.24);  $\gamma_2/\gamma_1 = R_1/R_2$ , para la misma temperatura, presión y valor de  $g$ . Por esto:

$$\bar{M}_1 R_1 = \bar{M}_2 R_2 = \text{constante},$$

lo cual es cierto únicamente para los gases perfectos. La ecuación exacta para cualquier gas real es más complicada que la ecuación (I.25) y por esto,  $\bar{MR}$  no es una constante.

La ley de los gases que relaciona la presión, temperatura y volumen para un gas con moléculas de tamaño infinitesimal y sin fuerzas intermoleculares, es conocida como la ley de los gases perfectos o ideales, y se expresa así:

$$p V = n R T \quad (\text{I.27}),$$

donde  $n$  es el número de moles. Cuando un gas se encuentra cercano a la presión atmosférica, sigue la ley de los gases ideales, de tal forma que la presión, o el volumen, se pueden determinar a partir de su temperatura y masa con un  $\pm 5\%$  de error. Si es necesaria una predicción más precisa o si el gas está a una presión elevada, la ecuación de los gases ideales resulta inadecuada.

Una ecuación para un gas perfecto es;

$$p V_s^m = p_1 V_{s1}^m = \text{constante} \quad (\text{I.28}),$$

donde  $p$  es presión absoluta,  $V_s$  es el volumen específico y  $m$  puede tener valores desde cero hasta infinito, dependiendo del proceso termodinámico al que esté sujeto el gas. Si el proceso es a temperatura constante (isotérmico),  $m=1$ ; Si no hay transferencia de calor de o hacia el gas, el proceso es adiabático,  $m=k$ . Si es un proceso adiabático con pérdidas por fricción, es un proceso isentrópico y  $m$  se denota por  $k$ , donde  $k=c_p/c_v$  (relación del calor específico a presión constante). Para expansión con fricción  $m < k$ , y para compresión con fricción,  $m > k$ .

Cuando  $m=0$ , se tiene un proceso isobárico y, cuando  $m=\infty$ , un proceso isométrico.

Combinando las ecuaciones (I.25) y (I.28), se obtiene otra relación usual;

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_{s1}}{V_{s2}}\right)^{m-1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{(m-1)/m} \quad (\text{I.29}).$$

Diferenciando la ecuación (I.28), tenemos:

$$mpV^m dV + V^m dp = 0 \quad (I.30)$$

sustituyendo el valor de  $dp$  en la ecuación (I.22):

$$c_g = \frac{1}{p} \quad (I.31)$$

Si el proceso es isotérmico,  $c_g = \frac{1}{p}$  y si es un proceso isentrópico,  $c_g = -1/kp$ .

Para obtener el comportamiento de los gases reales se le agrega a la ecuación (I.27) un factor de corrección, conocido como el factor de compresibilidad ( $Z$ ), es decir:

$$pV = ZnRT \quad (I.32)$$

esta es la Ley General de los Gases Reales y  $Z$  puede obtenerse por métodos gráficos o matemáticos en función de la temperatura, de la presión y de la composición del gas.

Con esta expresión y el concepto de compresibilidad definido por la ecuación (I.22) se obtiene:

$$c_g = \frac{1}{p} - \frac{1}{Z} \frac{dZ}{dp} \quad (I.33)$$

que es la compresibilidad de los gases reales. Cuando  $Z=1$ , es decir, que se trata de un gas ideal, entonces se obtiene  $c_g = 1/p$ .

## I.12. EJEMPLOS

I.12.1. (a) El peso específico del agua a presión y temperatura ordinarias es  $62.4 \text{ lb/ft}^3$ , ( $9.81 \text{ kN/m}^3$ ), calcular su densidad; (b) la densidad relativa del mercurio es  $13.55$ , calcular su peso específico y densidad.

Solución: (a)  $\rho_w = \frac{\gamma_w}{g} = \frac{62.4 \text{ lb/ft}^3}{32.2 \text{ ft/seg}^2} = 1.94 \text{ slug/ft}^3$

$$= \frac{9.81 \text{ kN/m}^3}{9.81 \text{ m/seg}^2} = 1000 \text{ kg/m}^3 = 1 \text{ g/cm}^3$$

(b)

$$\begin{aligned} \gamma_m &= \rho_m \gamma_w = 13.55 \times 62.4 = 846 \text{ lb/ft}^3 \\ &= 13.55 \times 9.81 = 133 \text{ kN/m}^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho_m &= \rho_m \rho = 13.55 \times 1.94 = 26.3 \text{ slug/ft}^3 \\ &= 13.55 \times 1.00 = 13.55 \text{ g/cm}^3 \end{aligned}$$

I.12.2. ¿Cuál es la viscosidad cinemática de una gasolina de densidad relativa 0.680 a 60°F.

De la figura I.4., se tiene:

$$\begin{aligned} \nu_{\text{gasolina}} &= 0.000 \ 0048 \text{ ft}^2/\text{seg.} \\ &= 0.000 \ 00045 \text{ m}^2/\text{seg.} \end{aligned}$$

I.12.3. Comparar la relación de viscosidad absoluta y cinemática del aire y agua a 70°F y 14.7 psia.

Solución

De la Tabla A.5b se tiene:

$$\frac{\mu_{\text{aire}}}{\nu_{\text{aire}}} = \frac{3.82 \times 10^{-7}}{1.64 \times 10^{-4}} = 2.33 \times 10^{-3}$$

y de la Tabla A.4b;

$$\frac{\mu_{\text{agua}}}{\nu_{\text{agua}}} = \frac{2.050 \times 10^{-5}}{1.059 \times 10^{-5}} = 1.935$$

por tanto, la relación de viscosidades del agua es mayor que la del aire.

I.12.4. (a) Calcular la densidad, peso específico y volumen específico del oxígeno a 100°F y 15 psia: (b) ¿Cuál es la temperatura y presión de este gas, si se comprime isentrópicamente al 40% de su volumen original; (c) Si el proceso descrito en (b) es isotérmico, ¿Cuál es la temperatura y presión?



Solución

(a) De la ecuación (I.24) y de la Tabla A.8b se tiene:

$$\rho = \frac{(15)(144)}{(32.2)(48.3)(560)} =$$

$$\rho = 0.00248 \text{ slugs/ft}^3$$

De la ecuación (I.6):

$$\gamma = \rho g = (0.00248)(32.2)$$

$$\gamma = 0.08 \text{ lb/ft}^3$$

De la ecuación (I.8):

$$V_s = \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{0.08} =$$

$$V_s = 12.5 \text{ ft}^3/\text{lb}$$

$$(b) pV_s^k = (15 \times 144)(12.5)^{1.4} = (p_2 \times 144)(0.4 \times 12.5)^{1.4}$$

$$p_2 = 54.0 \text{ psia}$$

$$p_2 = \rho g R T_2 =$$

$$54 \times 144 = \frac{0.00248(48.3)(460 + T_2)(32.2)}{0.4}$$

$$7776 = 9.642612(460 + T_2)$$

$$T_2 = 346.4^\circ\text{F}$$

(c)

$$T_2 = T_1 = 100^\circ\text{F};$$

$$pV_s = \text{cte}$$

$$(15 \times 144)(12.5) = (p_2 \times 144)(0.4 \times 12.5)$$

$$p_2 = 37.5 \text{ psia}$$

# CAPITULO II

## ESTATICA DE LOS FLUIDOS

La Estática de los fluidos es el estudio de la mecánica de fluidos en reposo. En ésta no es necesario hacer una distinción entre fluidos viscosos y no viscosos, ya que no existe movimiento relativo entre capas adyacentes de fluido y por tanto, ya sea que se encuentre en reposo o que se mueva como si fuera un sólido, no se generan esfuerzos cortantes dentro del mismo. Al considerar los diagramas de cuerpo libre sólo se requiere tomar en cuenta las fuerzas de presión normales a las superficies en que actúan.

### II.1. PRESION EN UN PUNTO.

La intensidad de la presión media se define como la fuerza normal que actúa sobre una superficie, en otras palabras, es la fuerza ejercida por unidad de área.

Si  $F$  representa la fuerza total en un área finita  $A$ , entonces,  $dF$  representa la fuerza sobre un área infinitesimal  $dA$  y por lo anterior, la presión en ese punto es:

$$p = \frac{dF}{dA} \quad (\text{II.1}),$$

si la presión está uniformemente distribuida sobre el área total, se tiene:

$$p = \frac{F}{A} \quad (\text{II.2}).$$

Debido a la posibilidad de que existan esfuerzos tangenciales entre las partículas adyacentes en un sólido, el esfuerzo en un punto dado puede ser diferente en diferentes direcciones; pero en un fluido en reposo no existe el esfuerzo tangencial y las únicas fuerzas, entre superficies adyacentes, son fuerzas de presión normales a las superficies. Por consiguiente, la presión en un fluido en reposo es la misma en todas direcciones.

Lo anterior se demuestra suponiendo un fluido en reposo, de peso específico  $\gamma$ , y tomando un elemento de volumen en un punto A cualquiera. Este elemento de volumen está definido por cuatro planos, tres de ellos paralelos a los ejes de coordenadas y el otro arbitrario, con área  $dA$ . (Fig. II.1). En los planos paralelos de coordenadas que pasan por A, las áreas de las caras son las proyecciones de  $dA$  sobre ellos:

$$\begin{aligned} dA \cos \alpha &= \frac{1}{2} dydz \\ dA \cos \beta &= \frac{1}{2} dx dz \\ dA \cos \gamma &= \frac{1}{2} dy dx \end{aligned} \quad (\text{II.3}),$$

donde  $\alpha, \beta, \gamma$ , son los cosenos directores de la normal al área  $dA$ .

De esta manera, como se trata de un fluido en reposo y conforme a la ley de Newton, las ecuaciones de equilibrio en las direcciones  $x, y, z$ , son respectivamente:

$$\Sigma F_x = \frac{1}{2} p_x dydz - p dA \cos \alpha = 0 \quad (\text{II.4}),$$

$$\Sigma F_y = \frac{1}{2} p_y dx dz - p dA \cos \beta = 0 \quad (\text{II.5}),$$

$$\Sigma F_z = \frac{1}{2} p_z dx dy - p dA \cos \gamma - \frac{1}{2} \gamma dx dy dz = 0 \quad (\text{II.6}).$$

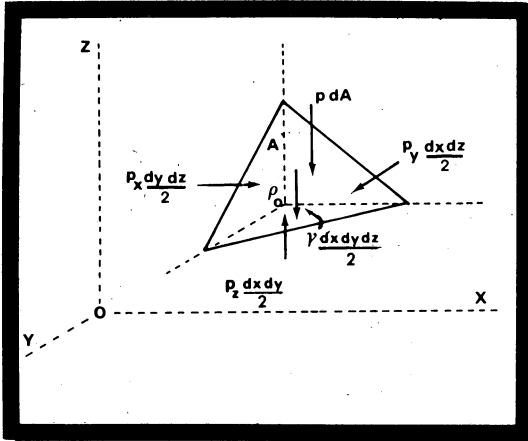


FIG. II.1. ELEMENTO DE VOLUMEN DE UN FLUIDO EN REPOSO.

En la ecuación (II.6) se puede despreciar  $dx dy dz$  y sustituyendo las ecuaciones (II.3) se tiene:

$$p_x = p ; p_y = p ; p_z = p$$

y por tanto:

$$p = p_x = p_y = p_z \quad (II.7).$$

Como se ve, el valor de la presión sobre un elemento de volumen de fluido en reposo no depende de su orientación, sino que es la misma en cualquier dirección.

## II.2. VARIACION DE LA PRESION EN UN FLUIDO EN REPOSO.

Considerando un elemento de volumen de fluido con densidad constante, Fig. II.2.

sea:

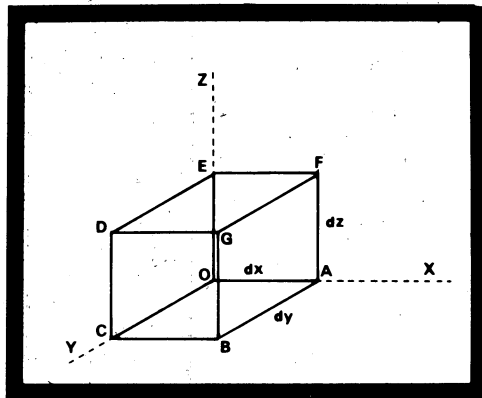
$$p = \text{presión en el punto } 0.$$

En el punto A se tiene:

$$p_A = p + \frac{\partial p}{\partial x} dx$$

$$(II.8).$$

FIG. II.2. VOLUMEN  
DE FLUIDO



De la misma manera:

$$\begin{aligned}
 p_B &= p + \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy \\
 \dots \\
 p_G &= p + \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \quad (\text{II.9}).
 \end{aligned}$$

En general, para cualquier punto se tiene:

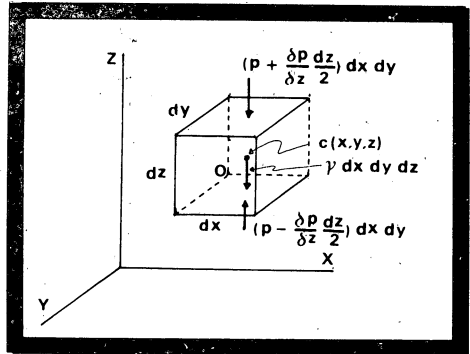
$$p_A = p + dp \quad (\text{II.10}).$$

Las fuerzas que actúan sobre un elemento de fluido que se encuentra en reposo, Fig. II.3., se pueden dividir en fuerzas de superficie y fuerzas másicas. Si consideramos que la acción de la gravedad es la única fuerza másica que actúa sobre el elemento, la podemos expresar como  $-\gamma dx dy dz$ .

Dado que este elemento es muy pequeño, suponemos que la densidad del fluido es constante. Si la presión en el centro  $c(x, y, z)$  del elemento es  $p$ , la fuerza de superficie en la cara superior es:

$$\left( p + \frac{\partial p}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) dx dy,$$

FIG. II. 3. FUERZAS ACTUANDO SOBRE UN ELEMENTO DE VOLUMEN



y en la cara inferior:

$$\left(p - \frac{\partial p}{\partial z} \frac{dz}{2}\right) dx dy,$$

donde  $dz/2$  es la distancia desde el centro  $c$ , a cualquiera de las dos caras perpendiculares al eje  $Z$ .

Dado que el fluido está en reposo, el elemento está en equilibrio y la sumatoria de fuerzas que actúan en cualquier dirección debe ser igual a cero. En la horizontal, esto es, en  $X$  y  $Y$ , las únicas fuerzas que actúan son las de presión en las caras verticales del elemento, siendo iguales en caras opuestas pero de direcciones contrarias, por tanto:  $\Sigma F_x = 0, \Sigma F_y = 0$  donde;

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (II.11),$$

De forma similar para las fuerzas verticales:

$$\Sigma F_z = \left(p - \frac{\partial p}{\partial z} \frac{dz}{2}\right) dx dy - \left(p + \frac{\partial p}{\partial z} \frac{dz}{2}\right) dx dy - \gamma dx dy dz = 0 \quad (II.12),$$

$$\Sigma F_z = -\frac{\partial p}{\partial z} dz dx dy - \gamma dx dy dz = 0,$$

dividiendo por  $dx dy dz$ :

$$\Sigma F_z = - \frac{\partial p}{\partial z} - \gamma = 0 \quad (\text{II.13}),$$

dado que  $p$  es sólo función de  $z$ , se puede escribir:

$$\frac{dp}{dz} = -\gamma \quad (\text{II.14}).$$

Esta es la expresión general que relaciona la variación de la presión en un fluido en reposo con su posición vertical y es válida tanto para fluidos compresibles como para incompresibles.

### II.2.1. FLUIDOS INCOMPRESIBLES.

En este caso la densidad permanece constante y por tanto, también el peso específico. Integrando la ecuación (II.14):

$$\int_{p_0}^p dp = -\gamma \int_{z_0}^{z_1} dz \quad (\text{II.15}),$$

$$p - p_0 = -\gamma(z_1 - z_0) \quad (\text{II.16}).$$

La ley de variación de la presión frecuentemente se escribe de la forma;

$$p = \gamma h = \gamma(z_0 - z_1) \quad (\text{II.17}),$$

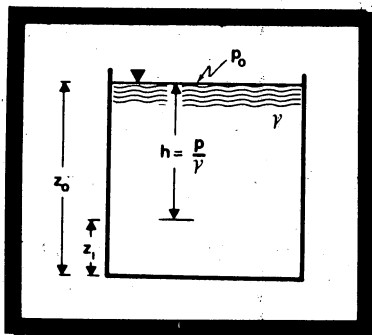
en la cual  $h$  se mide verticalmente hacia abajo ( $h = z_0 - z_1$ ), a partir de la superficie libre del líquido, y  $p$  es el correspondiente aumento de la presión sobre el valor que toma en dicha superficie. Fig. II.4.

En este caso  $p_0 = 0$ .

Es común expresar a la presión como una altura de columna de fluido y se le conoce como "carga de presión". De la ecuación (II.17) resulta:

$$h = \frac{p}{\gamma} \quad (\text{II.18}).$$

FIG. II.4. CARGA DE PRESION.



Si el peso específico de un líquido se expresa como el producto de su densidad relativa ( $\rho_r$ ) y el peso específico del agua, la ecuación (II.17) resulta:

$$p = \rho_r \gamma_w h \quad (\text{II.19}).$$

### II.2.2. FLUIDOS COMPRESIBLES

Cuando el fluido en reposo es un gas perfecto a temperatura constante, se tiene, de la ecuación (I.9):

$$\frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho_0} \quad (\text{II.20}).$$

Al sustituir  $\gamma$  por  $\rho g$  en la ecuación (II.14):

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g$$

$$\rho = -\frac{dp}{g dz} \quad (\text{II.21}),$$

sustituyendo (II.21) en la ecuación (II.20):

$$-\frac{\rho g dz}{dp} = \frac{\rho_0}{p_0}$$



$$dz = -\frac{p}{g\rho_0} \frac{dp}{p} \quad (\text{II.22}),$$

Si  $p=p_0$  para  $z=z_0$ , integrando la ecuación anterior:

$$\int_{z_0}^z dz = -\frac{p_0}{g\rho_0} \int_{p_0}^p \frac{dp}{p}$$

$$z-z_0 = -\frac{p_0}{g\rho_0} \ln \frac{p}{p_0} \quad (\text{II.23}),$$

despejando  $p$ :

$$p = p_0 e^{-\frac{(z-z_0)}{g\rho_0}} = p_0 e^{-\left[\frac{\gamma}{p_0}\right](z-z_0)} \quad (\text{II.24}).$$

Esta es la ecuación que describe la variación de la presión con la elevación, cuando se tiene un gas a temperatura constante.

### II.3. PRESION ABSOLUTA Y MANOMETRICA.

Cuando la presión se expresa como una diferencia entre su valor real y el vacío completo, se le llama presión absoluta, esto es, si se mide con respecto al cero absoluto de presión. Cuando se mide tomando como base la presión atmosférica local, se le llama presión manométrica. Lo anterior se debe a que prácticamente todos los medidores de presión marcan cero cuando están abiertos a la atmósfera; y al medir la presión en un fluido, lo que hacen es registrar la diferencia que tiene la presión en un punto, por encima de la atmosférica.

Si la presión está por debajo de la atmosférica se le designa como un vacío y su valor manométrico es a partir de la atmosférica. Un vacío perfecto corresponde al cero absoluto de presión.

La presión manométrica es positiva cuando está por encima de la atmosférica y negativa si es un vacío, Fig. II.5.

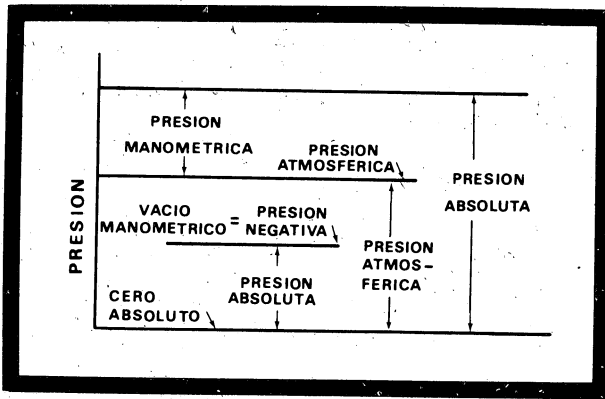


FIG. II.5. RELACION ENTRE PRESIONES

Regresando a la Fig. II.4, suponiendo que  $p_0$  es la presión atmosférica, esto es, si el recipiente está abierto al aire circundante, la presión manométrica es:

$$p_{man} = p - p_0 \quad (II.25),$$

en cuyo caso la ecuación (II.16) puede escribirse:

$$p_{man} = \gamma h \quad (II.26),$$

y de la Fig. II.5 se puede ver que;

$$p_{abs} = p_{man} + p_{atm} \quad (II.27).$$

A la presión atmosférica también se le da el nombre de barométrica y varía con la altitud del lugar y también de tiempo en tiempo, debido a los cambios meteorológicos.

#### II.4. UNIDADES DE PRESION

De la ecuación (II.17) se obtienen las dimensiones de la presión:

$$\begin{aligned} [p] &= [\gamma] [h] = [F^1 L^3 T^0] [L] = [F^1 L^2 T^0], \\ [p] &= [\gamma] [h] = [M^1 L^2 T^{-2}] [L] = [M^1 L^1 T^{-2}]. \end{aligned}$$

En el sistema técnico, la unidad normal sería el  $kg_f/m^2$ , pero por ser una unidad muy pequeña se usa el  $kg_f/cm^2$ , donde:

$$1 kg_f/cm^2 = 10^4 kg_f/m^2$$

En el sistema internacional MKS, se define:

$$1 bar = 10^5 N/m^2.$$

En el sistema inglés, la unidad de presión usual es:

$$1 lb_f/pg^2 = 144 lb_f/ft^2.$$

La presión atmosférica, en condiciones normales, puede expresarse aproximadamente:

$$\begin{aligned} P_{atm} &= 1.013 bar = 1.033 kg_f/cm^2 = 14.7 lb_f/pg^2 = \\ &1.013 \times 10^5 Pa = 760 mm \text{ de Hg } (@0^\circ C) = 10.33 m \text{ de } \\ &H_2O (@4^\circ C). \end{aligned}$$

## II.5. MEDIDORES DE PRESION.

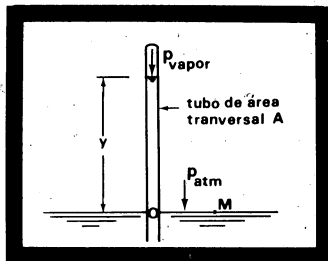
A continuación se describen algunos de los instrumentos más usuales en la medición de la presión, así como también las fórmulas que se emplean en cada caso.

### II.5.1. BAROMETRO.

Este sirve para medir la presión absoluta de la atmósfera y consiste esencialmente de un tubo cerrado en uno de sus extremos, Fig. II.6, el cual se sumerge en un líquido expuesto a la presión atmosférica; al desalojar el aire del tubo, el líquido subirá en su interior. Si el aire es desalojado completamente, la única presión en la superficie libre, dentro del tubo, es la presión de vapor del líquido y, este último alcanza su máxima altura dentro del tubo.

La presión en  $\theta$  dentro del tubo debe ser la misma que fuera de él, es decir, que  $p_\theta = p_M$ .

FIG. II.6. BAROMETRO.



El líquido que se encuentra sobre **O** está en equilibrio estático y, considerando las fuerzas que actúan en el área transversal del tubo, podemos sumarlas e igualarlas a cero, - esto es:

$$(p_{atm})A - (p_{vapor})A - \gamma Ay = 0 \quad (II.28),$$

entonces

$$p_{atm} = \gamma y + p_{vapor} \quad (II.29).$$

Si la presión de vapor dentro del tubo es despreciable, entonces se tiene:

$$p_{atm} = \gamma y \quad (II.30).$$

El líquido que generalmente se usa en los barómetros es el mercurio, debido a que su densidad es suficientemente grande para permitir el uso de un tubo razonablemente corto y, también porque su presión de vapor es muy pequeña y despreciable a temperaturas ordinarias.

Al usar un barómetro de mercurio, para obtener una medida de la presión atmosférica lo más precisa posible, se deben hacer correcciones por capilaridad y presión de vapor al valor de la lectura obtenida.

#### II.5.2. MANOMETRO DE BOURDON.

Este manómetro consta de un tubo de sección transversal elíptica, y curvado, Fig. II.7. por lo que al haber algún cambio en la presión dentro del tubo, éste varía su curvatura. Conectado a un juego de eslabones, al moverse el tubo de Bourdon mueve una aguja sobre una carátula graduada, en donde se -

puede leer directamente la presión. Un manómetro combinado, - conocido como manómetro compuesto, tiene la particularidad de medir presiones y vacíos.

La presión que indica el manómetro es la que existe en el centro del tubo elíptico; si el tubo está lleno completa - mente con líquido de la misma densidad que en A, (Fig. II.7), y se gradúa para leerlo en  $lb/pg^2$ , como generalmente ocurre, - entonces:

$$p \text{ (psi)} = \text{lect. man. (psi)} + \gamma Z / 1.44 \quad (\text{II.31}),$$

donde  $\gamma$  se expresa en  $lb/ft^3$  y  $Z$  en pies.

La corrección por elevación puede ser positiva o nega - tiva, dependiendo de que el manómetro esté arriba ( $Z$ ) o abajo ( $-Z$ ) del punto en el cual se desea hacer la medición de la - presión. En el caso de gases, el término de corrección por - elevación generalmente es despreciable.

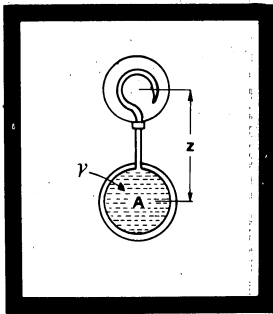


FIG. II.7. MANOMETRO BOURDON

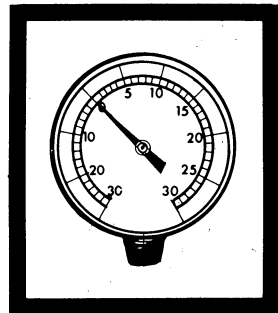


FIG. II.7.a. MANOMETRO COMBI - NADO. PRESIONES EN psi, VACIOS EN PULGADAS DE MERCURIO.

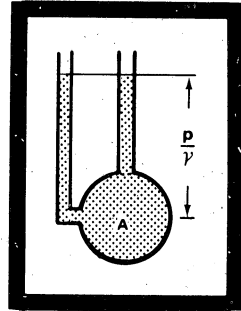
### II.5.3. PIEZOMETRO.

Este es un sencillo instrumento que se utiliza para determinar presiones moderadas de líquidos y consiste en un tubo, Fig. II.8., en el cual el líquido puede subir libremente.

La altura del líquido en el tubo dá directamente el valor de la carga de presión. Para reducir los efectos capilares, el diámetro del tubo debe ser mayor de 12 mm.

FIG. II.8. PIEZOMETRO PARA MEDIR  $p$  EN LIQUIDOS.

Y



### II.5.4. MANOMETRO SIMPLE.

Dado que el piezómetro es un tubo abierto, es inadecuado usarlo para medir presiones relativamente altas en líquidos y no puede emplearse con gases, en tanto que el manómetro simple o tubo en U de mercurio, Fig. II.9, es un instrumento conveniente para medir estas presiones. Para determinar la presión en A, se puede escribir una ecuación basada en la relación fundamental de las presiones hidrostáticas, ecuación (II.16). Así, si S se define como la relación de pesos específicos,  $\gamma_m/\gamma$ , del fluido manométrico y la del líquido al cual se le mide la presión, la carga de presión en el punto C es  $Sy$ . Esta es también la carga en B, mientras, la carga en A es mayor que ésta y es debida a Z, por tanto:

$$0 + Sy + Z = \frac{p_A}{\gamma} \quad (II.32).$$

Si se desea obtener la presión absoluta en A, entonces hay que sustituir el cero de la ecuación (II.32) por el valor de la presión atmosférica expresado como columna del fluido al que se le hace la medición.

A causa de la baja densidad de los gases, cuando el fluido es uno de estos, se puede despreciar el valor de Z.

Los términos de la ecuación (II.32) se pueden expresar también en unidades de presión en vez de cargas de presión.

Al medir un vacío, como se muestra en la Fig. II.10, se obtiene:

$$0 - Sy + Z = p_A / \gamma \quad (\text{II.33.})$$

El arreglo de la Fig. II.11 es más ventajoso porque evita que queden atrapados vapores o gases, y en este caso:

$$p_A / \gamma = -(Z + Sy) \quad (\text{II.34.})$$

Aunque generalmente se usa mercurio en un manómetro simple, también se pueden emplear otros líquidos.

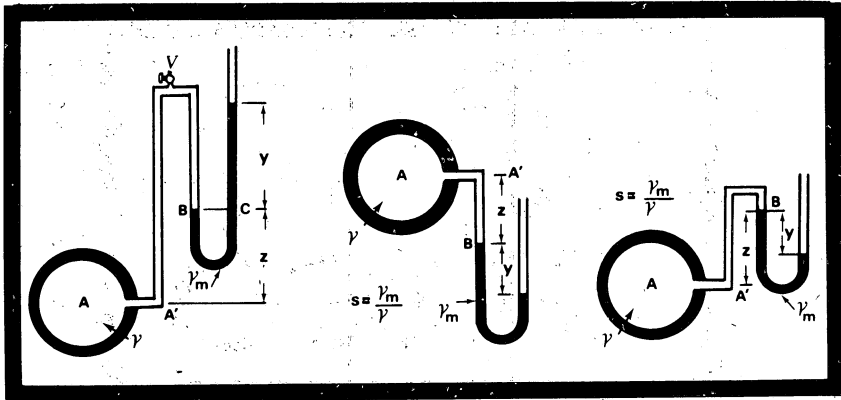


FIG. II.9. MANOMETRO SIMPLE PARA MEDIR  $p/\gamma$  EN LÍQUIDOS O GASES.

FIG. II.10. MANOMETRO SIMPLE QUE MIDE UNA PRESION DE VACIO.

FIG. II.11. MANOMETRO DE PRESION NEGATIVA.

## II.5.5. MANOMETROS DIFERENCIALES

En ocasiones sólo se desea conocer la diferencia de presión que existe entre dos puntos de un líquido o entre dos líquidos; en estos casos se usa un manómetro diferencial, como el que se muestra en la Fig. II.12. En la Fig. II.12a, el líquido manométrico es de mayor densidad que los otros.

Si los fluidos en A y B, son de la misma densidad:

$$\frac{p_A}{\gamma} - z_A - Sy + z_B = \frac{p_B}{\gamma}$$

$$\frac{p_A}{\gamma} - \frac{p_B}{\gamma} = z_A - z_B + Sy,$$

entonces

$$\frac{p_A - p_B}{\gamma} = -y + Sy = (S-1)y \quad (II.35).$$

La ecuación (II.35) es aplicable sólo si A y B están al mismo nivel, en caso contrario se debe agregar un término que represente esa diferencia.

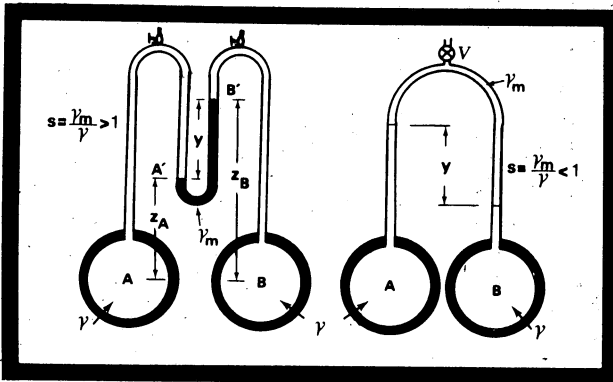


FIG.II.12. MANOMETROS DIFERENCIALES. (a) PARA MEDIR  $\Delta p$  EN LIQUIDOS Y GASES. (b) PARA MEDIR  $\Delta p$  EN LIQUIDOS.



El manómetro diferencial, cuando se usa con un líquido pesado, como el mercurio, es adecuado para medir grandes diferencias de presión. Para diferencias pequeñas se puede usar un fluido ligero, como el aceite o el aire, y en este caso el manómetro tiene la forma de la Fig. II.12b. Naturalmente el fluido debe ser tal que no se mezcle con el de A o B. Haciendo un análisis similar al anterior, esto es, los líquidos en A y B son los mismos y están al mismo nivel;

$$\frac{p_A - p_B}{\gamma} = (1-S)y \quad (II.36)$$

Si la densidad del fluido manométrico es parecida a la del fluido en estudio,  $(1-S)$  es cercano a cero y se obtienen grandes valores de  $y$  para pequeñas diferencias de presión, lo que incrementa la sensibilidad del aparato. Nuevamente, la ecuación se debe modificar si A y B no se encuentran a la misma elevación.

## II.6. FUERZAS SOBRE SUPERFICIES PLANAS.

Como se mencionó anteriormente, cuando un fluido está en reposo no existen esfuerzos tangenciales dentro del mismo; entonces, las fuerzas son normales a la superficie en cuestión. Si la presión está uniformemente distribuida sobre un área, la fuerza es igual a la presión por el área y su punto de aplicación es el centroide de la superficie, esto es:

$$F = \int p \, dA = p \int dA = pA \quad (II.37)$$

Se considera la presión constante en el caso de un gas, donde la variación de la presión con la distancia vertical es muy pequeña, debido al bajo peso específico del gas; y también cuando se tiene una superficie sumergida horizontalmente en un líquido.

En el caso de los líquidos, la distribución de la presión no es uniforme. La Fig. II.13 muestra una superficie  $MN$ , inclinada un ángulo  $\theta$  respecto a la superficie libre del líquido en que está sumergida, (a la derecha está la proyección de esta superficie):  $h$  es la profundidad variable a un punto y  $y$  es la distancia desde la superficie libre, sobre el plano de la superficie inclinada.

Considerando un elemento de área rectangular (faja), donde la presión es uniforme, si  $x$  representa el ancho del área a una profundidad  $h$ , entonces:

$$dA = x dy \quad (II.38).$$

Como  $p = \gamma h$  y  $h = y \text{ sen } \theta$ , entonces la fuerza  $dF$  sobre la faja es:

$$dF = p dA = \gamma h dA = \gamma y \text{ sen } \theta dA \quad (II.39).$$

La distribución de la presión sobre el área, forma un prisma de presiones, cuyo volumen es igual a la fuerza total que actúa sobre el área.

Integrando la ecuación anterior

$$F = \gamma \text{ sen } \theta \int y dA = \gamma \text{ sen } \theta y_c A \quad (II.40),$$

donde  $y_c$  es la distancia inclinada al centroide de la superficie  $MN$ .

Denotando la profundidad del centroide por  $h_c$ , se tiene:

$$h_c = y_c \text{ sen } \theta \quad (II.41),$$

y por tanto, la ecuación (II.40) queda:

$$F = \gamma h_c A \quad (II.42).$$

Esto es, la fuerza total sobre un área plana sumergida en un líquido se encuentra multiplicando el peso específico por el producto del área y de la profundidad del centroide.

El valor de  $F$  es independiente del ángulo de inclinación del plano, mientras la profundidad del centroide no cambie.

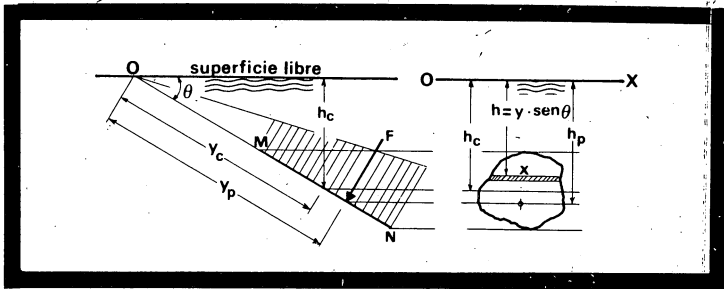


FIG. II.13. SUPERFICIE PLANA SUJETA A LA FUERZA EJERCIDA POR UN FLUIDO EN REPOSO.

### II.6.1. CENTRO DE PRESION

La línea de acción de la fuerza resultante que un fluido ejerce sobre una superficie plana, cruza a la superficie a través de un punto llamado centro de presión y sus coordenadas son  $(x_p, y_p)$ , Fig. II.13. A diferencia de una superficie horizontal, el centro de presión para una superficie inclinada no coincide con el centroide.

Tomando  $OX$  en la figura como eje de momentos, el momento de una fuerza elemental  $\gamma y \text{ sen } \theta \, dA$  es:  $y dF = \gamma y^2 \text{ sen } \theta \, dA$ , y si la distancia al centro de presión es  $y_p$ ;

$$y_p \, dF = \gamma \text{ sen } \theta \int y^2 \, dA = \gamma \text{ sen } \theta I_o \quad (\text{II.43}),$$

donde  $I_o$  es el momento de inercia del área alrededor del eje que pasa por  $O$ . Ahora, sustituyendo el valor de  $F$  de la ecuación (II.42) y despejando  $y$ :

$$y_p = \frac{\gamma \text{ sen } \theta}{\gamma \text{ sen } \theta} \frac{I_o}{y_c A} = \frac{I_o}{y_c A} \quad (\text{II.44}).$$

Esto es, la distancia del centro de presión desde la intersección del plano con la superficie libre del líquido, se obtiene dividiendo el momento de inercia del área  $A$  respecto al eje de la superficie por su momento estático respecto al mismo eje.

También se puede expresar de otra forma:

$$I = y_c^2 A + I_c,$$

donde  $I_c$  es el momento de inercia de un área respecto al eje centroidal.

De tal manera que:

$$y_p = y_c + \frac{I_c}{y_c A} \quad (\text{II.45}).$$

De esta ecuación se puede ver que la localización del centro de presión no depende del ángulo  $\theta$ , o sea, el cuerpo puede ser rotado alrededor de un eje sin que esto afecte la localización del centro de presión. También se puede ver que el centro de presión está siempre abajo del centroide y que mientras más se sumerja el cuerpo, el centro de presión se aproxima al centroide.

La localización lateral del centro de presión se puede determinar considerando al área formada por una serie de elementos horizontales, entonces, el centro de presión cae en el punto medio de la misma. Dado que el momento de la resultante  $F$  es igual al momento del sistema de fuerzas alrededor de un eje, digamos el eje  $y$ , se tiene

$$x_p F = \int x_o p dA, \quad (\text{II.46})$$

donde  $x_p$  es la distancia lateral desde el eje  $y$  al centro de presión donde se aplica la resultante  $F$ , y  $x_o$  es la distancia lateral al centro de cualquier faja horizontal de área  $dA$ , sobre la que actúa la presión.

### II.6.2. PRISMA DE PRESIONES.

Otra forma de determinar la fuerza sobre un área plana es usando el concepto del prisma de presiones. La base de este prisma está constituida por la superficie misma y su altura en cada punto determinada por la presión  $\gamma h$ . La magnitud de la fuerza resultante la da el volumen del prisma y la línea de acción pasa por el centroide de éste. De acuerdo a la Fig.

II.14, la presión crece linealmente con la distancia desde la superficie libre del líquido, entonces, la cara superior del prisma se encuentra en el plano cuya traza es la línea  $OM$ , la fuerza que actúa sobre un área elemental  $dA$  es:

$$dF = \gamma h dA = dV \quad (\text{II.47})$$

Integrando se obtiene  $F=V$ , es decir, el volumen del prisma es igual a la magnitud de la fuerza resultante que actúa sobre una cara de la superficie.

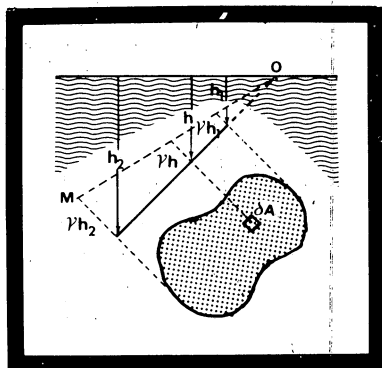


FIG. II.14. PRISMA DE PRESIONES.

Utilizando la ecuación (II.47) y la correspondiente para  $y_p$ , se puede demostrar que  $x_p$  y  $y_p$  son también las coordenadas del centroide:

$$x_p = \frac{1}{V} \int_V x dV \quad ; \quad y_p = \frac{1}{V} \int_V y dV \quad (\text{II.48}).$$

Por tanto, la línea de acción de la resultante pasa por el centroide del prisma de presiones. Para superficies de geometría sencilla, es más conveniente emplear el prisma de presiones que integrar o aplicar las fórmulas anteriormente presentadas. Tablas A.9 y A.10.

## II.7. FUERZAS SOBRE SUPERFICIES CURVAS.

Para determinar las fuerzas que actúan sobre una superficie curva sumergida en un líquido, Fig. II.15, es necesario tomar en cuenta el carácter vectorial de una diferencial de fuerza de presión, o sea:

$$d\vec{F} = -pd\vec{A} = -p\vec{n}dA,$$

donde  $\vec{n}$  es el vector normal a la superficie en el punto considerado, y sus componentes son;

$$\vec{n} = \cos \alpha \vec{i} + \cos \beta \vec{j} + \cos \gamma \vec{k},$$

con un sistema de ejes como el indicado, y el plano  $OXY$  en la superficie del líquido. Entonces los componentes de la fuerza en cada dirección:

$$\begin{aligned} dF_x &= d\vec{F} \cdot \vec{i} = p \cos \alpha dA \\ dF_y &= d\vec{F} \cdot \vec{j} = p \cos \beta dA \\ dF_z &= d\vec{F} \cdot \vec{k} = p \cos \gamma dA \end{aligned} \quad (II.49),$$

donde:

$$dA \cos \alpha = dA_x; \quad dA \cos \beta = dA_y \quad \text{y} \quad dA \cos \gamma = dA_z \quad (II.50).$$

Además,  $dA_x$ ,  $dA_y$ , y  $dA_z$  son las proyecciones del elemento  $dA$  sobre cada plano de referencia. Se tiene entonces:

$$dF_x = p dA_x; \quad dF_y = p dA_y; \quad dF_z = p dA_z \quad (II.51).$$

Integrando cada una de estas ecuaciones y sustituyendo el valor de  $p = \gamma z$ :

$$F_x = \gamma \int_A z dA_x = \gamma \bar{z}_x A \quad (II.52),$$

$$F_y = \gamma \int_A z dA_y = \gamma \bar{z}_y A \quad (II.53),$$

$$F_z = \gamma \int_A z dA_z \quad (II.54).$$

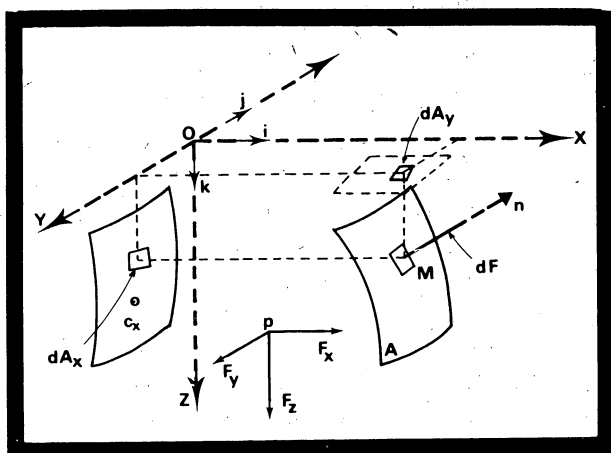


FIG. II.15. FUERZAS SOBRE SUPERFICIES CURVAS.

Las ecuaciones (II.52) y (II.53) dan las componentes horizontales de la fuerza  $F$ . Esto es, la componente horizontal de las fuerzas de presión que actúan sobre una superficie dada, es igual al área de la proyección de la superficie sobre un plano perpendicular a esa dirección, por la presión existente en el centroide de dicha proyección.

La componente vertical  $F_z$  está dada por la ecuación (II.54). La integral que aparece en esta ecuación representa el volumen del fluido comprendido entre la superficie libre y la superficie en cuestión, por tanto: la componente vertical de las fuerzas de presión es igual al peso del volumen del prisma de líquido encerrado entre la superficie libre y la superficie dada. Esto es:

$$F_z = \gamma V \quad (II.55).$$

En cuanto a las líneas de acción, para las componentes horizontales bastará determinar el centro de presión de la proyección de la superficie dada sobre el plano normal correspondiente, y para la componente vertical se buscará la línea de acción de la resultante de las fuerzas del peso del volumen encerrado entre las superficies antes mencionadas.

## II.8. FUERZA DE FLOTACION Y ESTABILIDAD DE LOS CUERPOS.

La fuerza que un fluido en reposo ejerce sobre un cuerpo sumergido total o parcialmente en él se conoce como "fuerza de flotación". Esta fuerza actúa verticalmente hacia arriba y, en un cuerpo sumergido, es igual a la fuerza de presión que actúa verticalmente sobre su lado inferior y la fuerza vertical sobre su lado superior.

El cuerpo ABCD sumergido en un fluido, Fig. II.16, está sujeto a la gravedad y a la presión del fluido circundante. En la superficie superior la componente vertical de la fuerza es  $F_z$  y es igual al peso del volumen del fluido contenido en el prisma ABCEFA. De forma similar, la componente vertical en la superficie inferior es  $F'_z$  y es igual al peso del volumen del fluido contenido en ADCFEA. La diferencia entre estos dos volúmenes es el volumen del cuerpo ABCD.

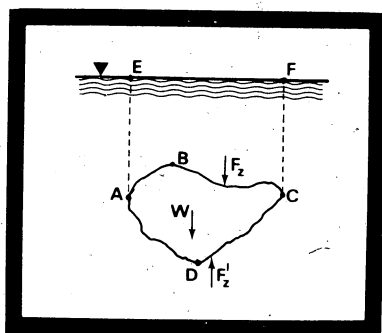


FIG. II.16. CUERPO SUMERGIDO EN UN FLUIDO EN REPOSO.

La fuerza de flotación de un fluido se denota por  $F_B$ , y es la fuerza vertical hacia arriba que ejerce el mismo, y es igual a  $F'_z - F_z$ , lo que también es igual al peso del volumen del fluido contenido en ABCDA. Esto es, la fuerza de flotación sobre un cuerpo dado es igual a el peso del fluido desplazado por él mismo (Principio de Arquímedes), y puede expresarse así:

$$F_B = \gamma V \quad (II.56).$$



Si el cuerpo de la figura está en equilibrio  $W=F_B$ , lo que significa que la densidad del cuerpo y la del fluido son iguales. Si  $W$  es mayor que  $F_B$ , el cuerpo se sumerge, y si  $W$  es menor que  $F_B$ , el cuerpo asciende hasta que el peso del fluido desplazado es igual al peso del cuerpo. Si el cuerpo es menos-compresible que el fluido, hay un nivel definitivo en el cual se alcanza el equilibrio, y si éste es más compresible que el fluido, asciende indefinidamente, mientras no haya un límite definitivo en la altura del fluido, como es el caso de la atmósfera terrestre.

Para un cuerpo en un líquido con una superficie libre, si su peso  $W$  es menor que el mismo volumen de líquido, entonces se levanta hacia la superficie hasta que  $W=F_B$ . Por tanto, un cuerpo que flota desplaza un volumen de líquido equivalente a su peso.

La ecuación (II.56) es válida para cuerpos parcial y totalmente sumergidos, siempre que se represente con  $V$  al volumen efectivo de líquido desplazado. En la Fig. II.17(a) la fuerza vertical ejercida sobre un elemento del cuerpo sumergido en forma de prisma con sección transversal  $dA$  es:

$$dF_B = (p_2 - p_1) dA = \gamma h dA = \gamma dV \tag{II.57},$$

donde  $dV$  es el volumen del prisma.

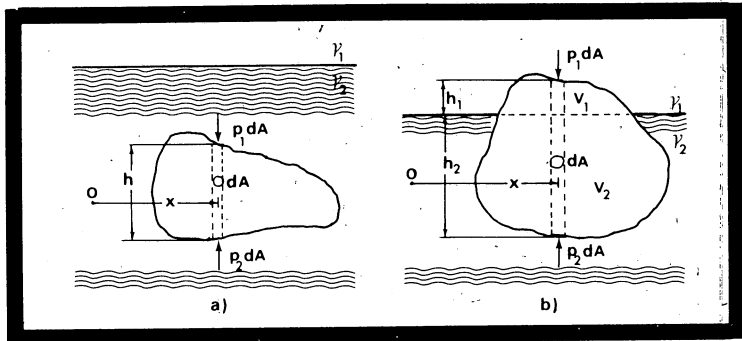


FIG.II.17. FUERZA VERTICAL SOBRE UN ELEMENTO DE UN CUERPO SUMERGIDO.

Integrando la ecuación (II.57) se obtiene:

$$F_B = \gamma \int_V dV = \gamma V \quad (\text{II.58}),$$

Para determinar la línea de acción de la fuerza de flotación, se toman momentos con respecto a un eje conveniente  $O$  y se igualan al momento resultante:

$$\gamma \int x dV = \gamma V \bar{x} \quad \delta \quad \bar{x} = \frac{1}{V} \int x dV \quad (\text{II.59}),$$

donde  $\bar{x}$  es la distancia desde el eje vertical hasta la línea de acción. Esta distancia es igual a la coordenada del centro del volumen, llamado también "centro de flotación"; entonces la fuerza de flotación actúa a través del centro del volumen de fluido desplazado.

En el caso de un cuerpo que flota, Fig. II.17(b), la fuerza de flotación que actúa sobre un volumen elemental es:

$$\begin{aligned} p_2 &= p_1 + \gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 \\ dF_B &= (p_2 - p_1) dA = (\gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2) dA \\ dF_B &= (\gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2) dA \end{aligned} \quad (\text{II.60}).$$

Integrando ésta ecuación se obtiene:

$$F_B = \gamma_2 \int h_2 dA + \gamma_1 \int h_1 dA = \gamma_2 V_2 + \gamma_1 V_1 \quad (\text{II.61}),$$

donde  $V_1$  y  $V_2$  son los volúmenes de fluidos desplazados. La línea de acción de la fuerza de flotación se determina a través de momentos:

$$\bar{x} = \frac{\gamma_1 \bar{x}_1 V_1 + \gamma_2 \bar{x}_2 V_2}{\gamma_1 V_1 + \gamma_2 V_2} \quad (\text{II.62}).$$

Midiendo el peso de un objeto (puede ser irregular) que está suspendido dentro de dos fluidos diferentes, de pesos específicos conocidos, es posible determinar el peso específico y la densidad relativa.

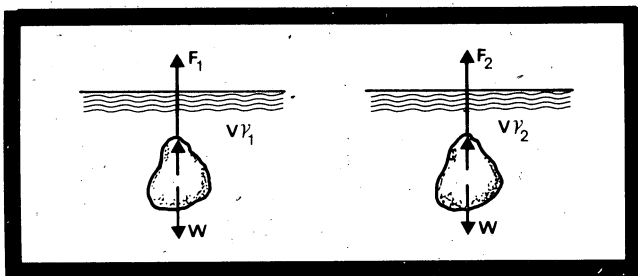


FIG. II.18 DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE PARA UN CUERPO SUSPENDIDO DENTRO DE UN FLUIDO.

En la Fig. II.18, el peso del cuerpo, una vez sumergido en cada fluido de pesos específicos  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  es  $F_1$  y  $F_2$  respectivamente. Como el cuerpo se encuentra en equilibrio, se puede escribir:

$$F_1 + \gamma_1 V = W$$

$$F_2 + \gamma_2 V = W$$

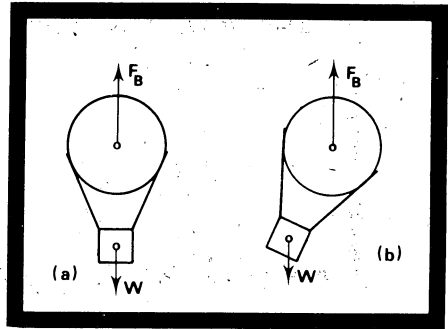
y se tiene

$$V = \frac{F_1 - F_2}{\gamma_2 - \gamma_1} \quad \text{y} \quad W = \frac{F_1 \gamma_2 - F_2 \gamma_1}{\gamma_2 - \gamma_1}$$

El peso específico de líquidos se puede medir utilizando un dispositivo llamado "hidrómetro" o "densímetro", y funciona de acuerdo con los principios de flotación.

Cuando un cuerpo en equilibrio sufre un ligero desplazamiento, si las fuerzas que lo originan tienden a restaurar el cuerpo a su posición original, se dice que el cuerpo está en equilibrio estable. La estabilidad de cuerpos sumergidos o flotantes depende de la posición relativa de la fuerza de flotación y del peso del cuerpo. La fuerza de flotación que actúa a través del centro de flotación coincide con el centro de gravedad del fluido desplazado. El criterio para la estabilidad de un cuerpo sumergido es que el centro de flotación deba estar arriba del centro de gravedad del cuerpo, según se observa en la Fig. II.19.(a).

FIG. II.19. CUERPO SUMERGIDO (GLOBO).



Para que un cuerpo flotante sea estable, Fig.II.19(b) - el centro de flotación puede estar arriba o abajo del centro de gravedad. Un cuerpo puede flotar en equilibrio estable, inestable o neutral. En la Fig.II.20 se observan estos casos: a) - una ligera pieza de madera con un peso de metal en su extremo inferior, se encuentra en equilibrio estable: b) si el peso metálico se coloca en el extremo superior, el cuerpo se encuentra en equilibrio, pero con cualquier desplazamiento angular, el cuerpo pasa a la posición anterior; c) una esfera homogénea o un cilindro circular recto se encuentran en equilibrio neutral, es decir, al existir un desplazamiento angular no se presentan fuerzas restauradoras.

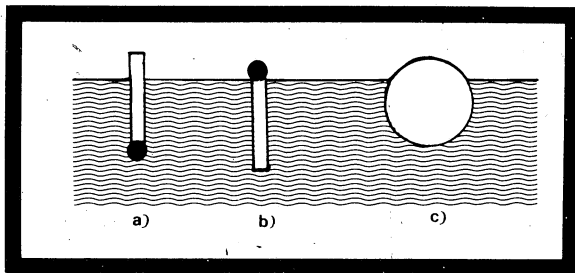


FIG. II.20. EJEMPLOS DE EQUILIBRIO: (a) ESTABLE; (b) INESTABLE; (c) NEUTRAL.

## II.9. EQUILIBRIO RELATIVO.

En la estática de fluidos, la variación de la presión se calcula fácilmente, gracias a la ausencia de esfuerzos cortantes. Para movimientos de fluidos en que no se tenga movimiento relativo entre capas adyacentes de fluido, los esfuerzos cortantes también resultan nulos. Así, un fluido que se mueve con velocidad uniforme sigue las líneas de la variación estática de presión. De la misma manera, cuando un fluido es sometido a una aceleración tal que no exista movimiento relativo entre capas adyacentes, es decir, cuando se acelera como si fuera un sólido, no se desarrollan esfuerzos cortantes. Pueden tenerse dos casos: la aceleración lineal uniforme y la rotación uniforme respecto a un eje vertical, entonces se dice que se encuentra en equilibrio relativo.

### II.9.1. ACELERACION LINEAL UNIFORME.

Si a un líquido en un recipiente abierto se le da una aceleración lineal uniforme  $a$ , Fig. II.21, el líquido, después de cierto tiempo, se ajusta a la aceleración moviéndose como si fuera un sólido, es decir, la distancia entre sus partículas permanece fija y por tanto no existen esfuerzos cortantes.

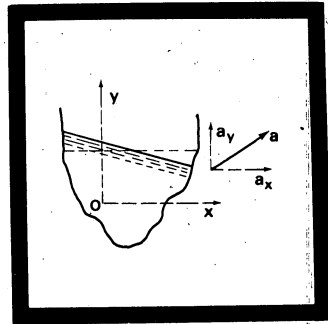


FIG. II.21. ACELERACION DE UN LIQUIDO CON SUPERFICIE LIBRE.

Considerando un elemento diferencial de fluido, cuyos lados son  $dx, dy, dz$ , respectivamente paralelos a los ejes coordenados, Fig. II.22.

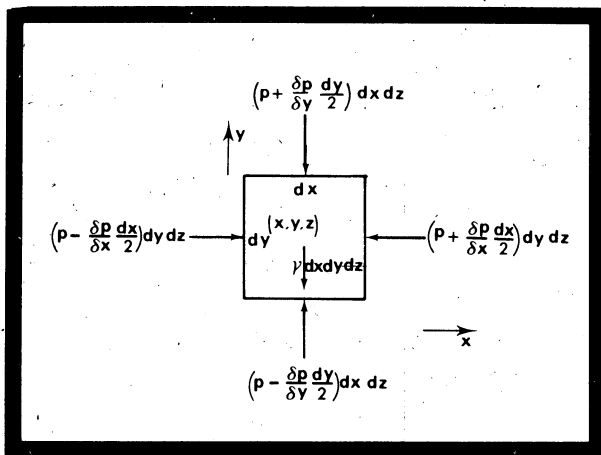


FIG. II.22. ACELERACION LINEAL UNIFORME DE UN FLUIDO.

Si el vector aceleración  $a$  se encuentra en el plano  $xy$ , el eje  $z$  resulta normal a  $a$  y por tanto, no hay componente de la aceleración en la dirección  $z$ . El centro del elemento se encuentra en el punto  $(x, y, z)$ , donde la presión vale  $p$ . Considerando la ecuación de movimiento en la dirección  $x$ :

$$\Sigma F_x = ma_x \quad (II.65)$$

$$(p - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2}) dydz - (p + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2}) dydz = \gamma \frac{dx dy dz a_x}{g} \quad (II.66)$$

la que se reduce a:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\gamma}{g} a_x \quad (II.67)$$

cuando  $dx, dy$  y  $dz$  tienden a cero. Siguiendo el mismo procedimiento para la dirección  $z$  y recordando que  $a_z = 0$ :

$$\frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad (II.68)$$

Para la dirección vertical y tomando en cuenta el peso del elemento, ( $\gamma dx dy dz$ ):

$$(p - \frac{\partial p}{\partial y} \frac{dy}{2}) dx dz - (p + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{dy}{2}) dx dz - \gamma dx dy dz = \gamma dx dy dz a_y \quad (II.69)$$

simplificando;

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\gamma \frac{(1 + a_y)}{g} \quad (II.70)$$

Por otro lado, como  $p$  es función de su posición ( $x, y, z$ ), su diferencial total es:

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \quad (II.71)$$

Sustituyendo las ecuaciones (II.67), (II.68) y (II.70) en (II.71), se tiene:

$$dp = -\frac{\gamma a_x}{g} dx - \gamma \frac{(1 + a_y)}{g} dy \quad (II.72)$$

Luego, integrando para un fluido incompresible:

$$p = -\frac{\gamma a_x}{g} x - \gamma \frac{(1 + a_y)}{g} y + c \quad (II.73)$$

Si  $p = p_0$  para  $x=0, y=0$ , entonces  $c = p_0$  y ;

$$p = p_0 - \frac{\gamma a_x}{g} x - \gamma \frac{(1 + a_y)}{g} y \quad (II.74)$$

Cuando el fluido incompresible que se acelera presenta una superficie libre, la ecuación de esta superficie queda dada al escribir  $p=0$  en la ecuación (II.74). De donde, despejando  $y$ , se tiene:

$$y = \frac{-a_x x}{a_y + g} + \frac{p_0 - p}{\gamma(1 + a_y/g)} \quad (\text{II.75}).$$

Las líneas de presión constante,  $p=cte$ , tienen como pendiente:

$$\frac{-a_x}{a_y + g}$$

y son paralelas a la superficie libre. La intersección de  $y$  con la superficie libre es;

$$\frac{p_0}{\gamma(1 + a_y/g)}$$

Para un gas a temperatura constante  $p/\gamma = p_0/\gamma_0$  donde  $p$  y  $p_0$  están expresadas en unidades absolutas. Integrando la ecuación (II.72), con  $p=p_0$ ,  $\gamma=\gamma_0$ , para  $x=y=0$ , se obtiene:

$$\frac{p_0}{\gamma} \ln \frac{p}{p_0} = \frac{-a_x}{g} x - \frac{(1 - a_y)}{g} y,$$

y arreglando:

$$p = p_0 e^{\frac{-(x a_x/g) + (1 - a_y/g)y}{p_0/\gamma_0}} \quad (\text{II.76}).$$

Las ecuaciones para fluidos compresibles son aplicables sólo en el caso de recipientes cerrados.

### II.9.2. ROTACION UNIFORME RESPECTO A UN EJE VERTICAL.

Se llama movimiento de vórtice forzado a la rotación de un fluido respecto a un eje, de tal manera que todas sus partículas tengan la misma velocidad angular, es decir, como si fuera un sólido.

Si un líquido dentro de un recipiente se hace girar con velocidad angular constante,  $\omega$ , y alrededor de un eje vertical, después de un cierto tiempo, es igual al de un sólido, y debido a las características del movimiento, no se presenta ningún esfuerzo cortante dentro del líquido y la única accele-



ración que se tiene está dirigida radialmente hacia el eje de rotación.

La ecuación de movimiento en la dirección vertical para un elemento de fluido en las condiciones anteriores, indica que prevalece la ley hidrostática a lo largo de cualquier línea vertical; por tanto, la presión en cualquier punto del líquido está dada por el producto del peso específico y la distancia vertical desde la superficie libre hasta el punto, esto es:  $\frac{\partial p}{\partial y} = -\gamma$

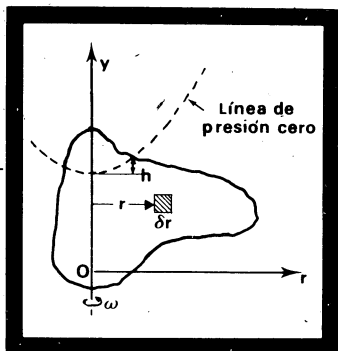


FIG. II.23. ROTACION DE UN FLUIDO RESPECTO A UN EJE VERTICAL.

Considerando ahora la ecuación de movimiento en la dirección radial (horizontal), con un elemento diferencial de longitud  $dr$  y sección transversal  $dA$ , Fig. II.23; si la presión en  $r$  es  $p$ , en la otra cara será  $p + \frac{\partial p}{\partial r} dr$ . Dado que la aceleración es  $-\omega^2 r$ , se tiene:

$$pdA - (p + \frac{\partial p}{\partial r} dr)dA = \frac{dAdr\gamma}{g} (-\omega^2 r),$$

dividiendo entre el volumen  $dAdr$  y simplificando,

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\gamma}{g} \omega^2 r \quad (\text{II.77}).$$

Por otro lado, como  $p$  es función sólo de  $y$  y  $r$ , su diferencial total es:

$$dp = \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial r} dr \quad (\text{II.78}).$$

Al sustituir las derivadas parciales por los valores obtenidos anteriormente se tiene:

$$dp = -\gamma dy + \frac{\gamma}{g} \omega^2 r dr$$

Para un líquido ( $\gamma = \text{cte}$ ), se tiene:

$$p = \frac{\gamma}{g} \omega^2 \frac{r^2}{2} - \gamma y + c \quad (\text{II.79}).$$

Si la presión es igual a  $p_0$ , en el origen ( $r=0, y=0$ ), entonces  $c = p_0$ , y, por tanto:

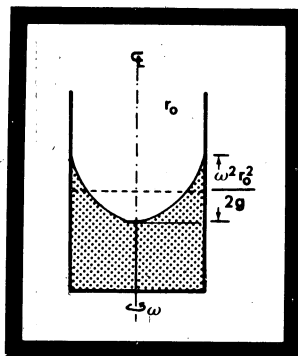
$$p = p_0 + \frac{\gamma \omega^2}{2g} r^2 - \gamma y \quad (\text{II.80}).$$

Seleccionando un plano horizontal  $y=0$  para  $p=0$  y dividiendo - la ecuación (II.80) entre  $\gamma$ ,

$$h = \frac{p}{\gamma} = \frac{\omega^2}{2g} r^2 \quad (\text{II.81}),$$

es decir, la carga de presión varía con el cuadrado del radio, resultando así que las superficies de igual presión son paraboloides de revolución. La forma (concavidad) del paraboloide depende únicamente de la velocidad angular.

FIG. II.24. ROTACION DE UN CILINDRO RESPECTO A SU EJE.



Para un cilindro circular que contiene un líquido y - que gira alrededor de su eje, Fig. II.24, la diferencia de nivel entre el vértice del paraboloide y el máximo ascenso del líquido en la pared del recipiente es  $\omega^2 r_0^2 / 2g$ , según la ecuación (II.81). Dado que un paraboloide de revolución tiene un volumen igual a la mitad del volumen del cilindro que lo circunscribe, el volumen del líquido que se encuentra por encima del vértice es:

$$\left(\pi r_0^2\right) \left(\frac{1}{2} \frac{\omega^2 r_0^2}{2g}\right),$$

donde  $\frac{1}{2} \frac{\omega^2 r_0^2}{2g}$  es la altura uniforme de líquido que se encuentra por encima del plano que pasa por el vértice cuando todo el sistema está en reposo. Resulta entonces que el líquido asciende por la pared del cilindro la misma distancia que el centro se deprime, pudiendo localizarse el vértice una vez conocidos  $\omega, r_0$  y el nivel original del líquido.

Para un gas a temperatura constante  $\gamma = p\gamma_0 / p$ , y la ecuación (II.79) se reduce a;

$$\frac{p_0}{\gamma_0} \frac{dp}{p} = -dy + \frac{\omega^2 r}{g} dr \quad (\text{II.82}).$$

Al integrar con  $p=p_0$  para  $y=0, r=0$ , se obtiene:

$$\frac{p_0}{\gamma_0} \ln \frac{p}{p_0} = -y + \frac{\omega^2 r^2}{2g},$$

donde  $p$  y  $p_0$  están en unidades de presión absoluta para el caso de un fluido compresible.

## II.10. EJEMPLOS

II.10.1. Calcular la presión atmosférica (en *psia*) a una elevación de 20,000 pies, considerando la atmósfera como un fluido estático. Suponer la atmósfera estándar al nivel del mar. Efectuando el cálculo para las condiciones:

- (a) Aire de densidad constante.
- (b) Temperatura constante, entre el nivel del mar y los 20,000 pies.
- (c) Condiciones isentrópicas.
- (d) Cuando la temperatura del aire disminuye linealmente con la elevación, a razón de  $0.00356^\circ\text{F}/\text{ft}$ .

Solución.

De la Tabla A.2b, las condiciones de la atmósfera estándar al nivel del mar son:

$$T=59^\circ\text{F} ; p=14.7 \text{ psia} ; \gamma=0.076 \text{ lb/ft}^3$$

- (a) Densidad Constante:

$$\frac{dp}{dz} = -\gamma$$

$$dp = -\gamma dz$$

$$\int_{p_1}^p dp = -\gamma \int_{z_1}^z dz$$

$$p - p_1 = -\gamma (z - z_1)$$

$$p = (14.7 \times 144) - (0.076 \times 20,000) = 596.8 \text{ lb/ft}^3 \text{ abs}$$

$$p = 4.145 \text{ psia.}$$

- (b) Isotérmico:

$pV = \text{constante}$ , por tanto:

$$\frac{p}{\gamma} = \frac{p_1}{\gamma_1} \text{ si } g \text{ es constante, entonces:}$$

$$\frac{dp}{dz} = -\gamma ; \text{ donde } \gamma = \frac{p\gamma_1}{p_1}$$

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\gamma_1}{p_1} dz$$

$$\int_{p_1}^p \frac{dp}{p} = \ln \frac{p}{p_1} = -\frac{\gamma_1}{p_1} \int_{z_1}^z dz = -\frac{\gamma_1}{p_1} (z - z_1)$$

$$\frac{p}{p_1} = e^{\left(\frac{-\gamma}{p} (z-z_1)\right)}$$

$$p = 14.7 e^{0.7180}$$

$$p = 7.169 \text{ psia}$$

(c) Isentrópico:

$$pV^{1.4} = \frac{p}{\rho^{1.4}} = \text{constante, por tanto } \frac{p}{\gamma} = \text{constante} = \frac{p_1}{\gamma_1^{1.4}}$$

$$\frac{dp}{dz} = -\gamma; \text{ donde } \gamma = \gamma \frac{p}{p}$$

$$\int_{p_1}^p p^{0.715} dp = -\gamma_1 p_1^{-0.715} \int_{z_1}^z dz$$

$$p^{0.285} - p_1^{0.285} = -0.285 \gamma_1 p_1^{0.715} (z - z_1)$$

$$p^{0.285} = (14.7 \times 144)^{0.285} - 0.285 (0.076) (14.7 \times 144)^{0.715} (20,000)$$

$$p = 947.90 \text{ lb/ft}^2 \text{ abs}$$

$$p = 6.582 \text{ psia}$$

(d) Temperatura disminuyendo linealmente con la elevación:

$$T = (460+59) + Kz \text{ donde } K = -0.00356^\circ\text{F/ft}$$

$$dT = Kdz; \text{ por tanto } dz = \frac{dT}{K}$$

$$\frac{pV}{T} = R = \frac{p}{\rho T} = \frac{p_1}{\rho_1 T_1}$$

$$\frac{dp}{dz} = -\gamma \text{ donde } \gamma = \frac{\gamma_1 T_1 p}{T p_1} \text{ si } g \text{ es constante.}$$

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\gamma_1 T_1}{p_1 T} dz = -\frac{\gamma_1 T_1}{p_1 K T} dT$$

$$\int_{p_1}^p \frac{dp}{p} = -\frac{\gamma_1 T_1}{p_1 K} \int_{T_1}^T \frac{dT}{T}$$

$$\ln \frac{p}{p_1} = -\frac{\gamma_1}{p_1 K} \ln \frac{T}{T_1} = \ln \left( \frac{T_1}{T} \right)^{\gamma_1 T_1 / p_1 K}$$

$$p = p_1 \left( \frac{T_1}{T_1 + KZ} \right)^{\gamma_1 T_1 / p_1 K}$$

$$p = 14.7 \left( \frac{519}{447.8} \right)^{\frac{(0.076)(519)}{(14.7)(14.4)(-0.00356)}}$$

$$p = 6.790 \text{ psia}$$

II.10.2. En la Fig. II.25, el líquido A pesa  $0.833 \text{ g/cm}^3$  y el líquido B pesa  $1.215 \text{ g/cm}^3$ . El líquido manométrico es mercurio. Si la presión en B es  $2 \text{ kg/cm}^2$ , encontrar la presión en A.

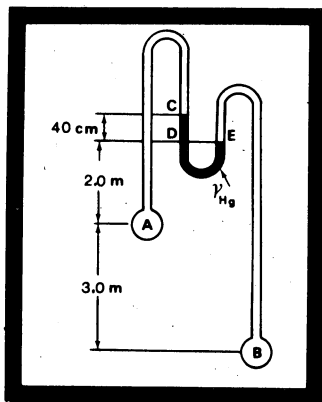


FIG. II. 25. MANOMETRO  
DIFERENCIAL

Solución

$$p_B = p_E + (300)(\gamma_B)$$

$$p_E = p_D$$

$$p_C = p_D - (40)(\gamma_{Hg})$$

$$p_A = p_C + (240)(\gamma_A)$$

$$p_A = p_D - (40)(\gamma_{Hg}) + (240)(\gamma_A)$$

$$p_A = p_B - (300)(\gamma_B) - (40)(\gamma_{Hg}) + (240)(\gamma_A)$$

$$p_A = (2) - (300) \left( \frac{1.215}{1000} \right) - (40)(13.6) \left( \frac{10^3}{10^6} \right) + (240) \left( \frac{0.833}{1000} \right)$$

$$p_A = 1.291 \text{ kg/cm}^2$$

II.10.3. Encontrar la fuerza ejercida por los fluidos sobre el fondo del tanque cilíndrico, Fig.II.26, ésta fuerza expresada en columna de agua, y determinar la posición del centro de presión.

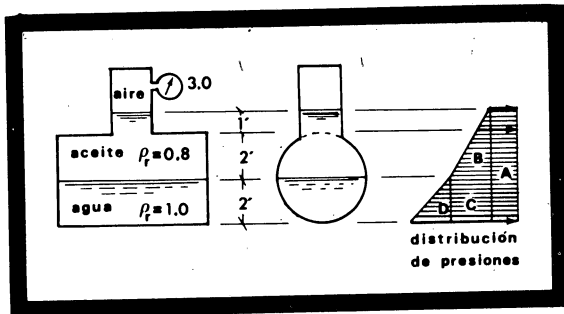


FIG.II.26. EJEMPLO ILUSTRATIVO

Solución.

El gas confinado ejerce una presión de 3.0 psi y se transmite hasta el fondo del tanque a través de los demás fluidos;

$$F_A = pA = (3.0 \times 144) (\pi 2^2) =$$

$$F_A = 5428.67 \text{ lb}$$

La fuerza  $F_B$  en la mitad superior del tanque, debida a la presencia del aceite es:

$$F_B = \gamma h_c A = (0.8 \times 62.4) \left( 3 - \frac{4 \times 2}{3\pi} \right) \left( \frac{1\pi 2^2}{2} \right)$$

$$F_B = 674.7298 \text{ lb}$$

La fuerza  $F_C$  en la mitad inferior del tanque, debida a la presencia del aceite es:

$$F_C = pA = (0.8 \times 62.4) (3) \left( \frac{1\pi 2^2}{2} \right) =$$

$$F_C = 940.9698 \text{ lb}$$

La fuerza  $F_D$  en la parte inferior del tanque, debida al agua es:

$$F_D = \gamma h_c A = 62.4 \left( \frac{4 \times 2}{3\pi} \right) \left( \frac{1}{2} \times 2^2 \right)$$

$$F_D = 332.8$$

Por lo tanto, la fuerza total en el fondo del tanque es:

$$F_T = F_A + F_B + F_C + F_D =$$

$$F_T = 7377.17 \text{ lb}$$

La presión, expresada en columna de agua se puede determinar por medio de la siguiente ecuación (en el sistema Inglés);

$$p_{\text{psia}} = 0.433 \rho_w h_{\text{ft}} \quad (\text{II.83})$$

Expresando las fuerzas en columnas equivalentes de agua:

a) Del aire;

$$h_w = \frac{p}{0.433 \rho_w} = \frac{3}{(0.433)(11)} = 6.9284 \text{ ft}_w$$

b) Del aceite

$$p = (0.433)(3)(0.8) =$$

$$p = 1.0392 \text{ psia}$$

$$h_w = \frac{p}{0.433(11)} = 2.40 \text{ ft}_w$$

c) Del agua son 2 ft,

La columna total de agua es:

$$h_{T_w} = 6.9284 + 2.40 + 2 =$$

$$h_{T_w} = 11.3284 \text{ ft}_w$$

La posición de los centros de presión de las fuerzas son:

$$(y_p)_A = 3.0 \text{ ft} \quad (\text{en el centro del área circular})$$

$$(y_p)_B = y_c + \frac{I_c}{y_c A}$$



donde:

$$(y_c)_B = 3 - \frac{4}{3\pi} \cdot 2 = 3 - 0.85 = 2.15 \text{ ft}$$

y de la Tabla A.9:

$$(I_c)_B = 1 - A(0.85)^2 = \frac{\pi 4^2}{128} - \frac{1\pi 2^2}{2} (0.85)^2 =$$

$$(I_c)_B = 1.76 \text{ ft}^4$$

Entonces

$$(y_p)_B = \frac{2.15 + 1.76}{\frac{2.15}{2} + \frac{1\pi 2^2}{2}} = 2.28 \text{ ft}$$

$$(y_p)_C = \frac{3 + 4 \times 2^2}{3\pi} = 3.85 \quad (\text{sobre el centroide de la mitad inferior del círculo}).$$

Nótese que

$$(I_c)_D = (I_c)_B = 1.76 \text{ ft}^4$$

$$(y_p)_D = 3 + y_c + \frac{I_c}{y_c A} =$$

$$(y_p)_D = 3 + 0.85 + \frac{1.76}{0.85 \frac{1\pi 2^2}{2}} = 4.18 \text{ ft}$$

Finalmente

$$F(y_p) = F_A(y_p)_A + F_B(y_p)_B + F_C(y_p)_C + F_D(y_p)_D$$

$$\begin{aligned} 7377.17(y_p) &= (5428.67 \times 3.0) + (674.7298 \times 2.28) + (940.9698 \times \\ &\quad \times 3.85) + (332.8 \times 4.18) = \\ &= 16286.01 + 1538.3839 + 3622.7337 + 1391.104 \end{aligned}$$

$$y_p = 3.096 \text{ ft}$$

II.10.4. Un cilindro sólido de 4 pulg. de diámetro y 3.75 pulg. de altura, pesa 0.85 lb y se sumerge en un líquido ( $\gamma = 52 \text{ lb/ft}^2$ ) contenido en un tanque; el cilindro metálico exterior tiene un diámetro de 5 pulg. Antes de sumergirlo, el líquido tiene 3 pulg. de profundidad. ¿A que nivel el cilindro sólido flotará?

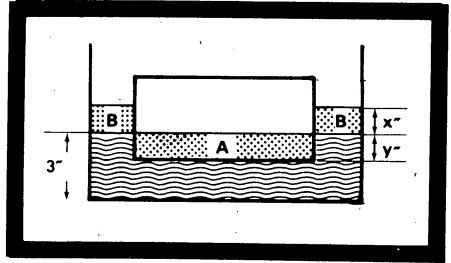


FIG. II.27. TANQUE

Solución:

$x$  = distancia que el cilindro se hunde a partir de la superficie original.

$y$  = distancia que el líquido se eleva a partir de la superficie original.

$x+y$  = distancia total que se hunde el cilindro.

Volumen A = Volumen B

$$\pi 2^2 x = \pi (2.5^2 - 2.0^2) y$$

$$4x = 2.25y ; x = 0.56y$$

$$F_B = W = 0.85 = 52 \times \pi \left( \frac{2}{12} \right)^2 \frac{x+y}{12}$$

$$x+y = 2.24 \text{ pulg} ; x=0.81 \text{ pulg} ; y = 1.43 \text{ pulg.}$$

La superficie inferior del cilindro está a  $3-0.81 = 2.19$  pulg arriba del fondo del cilindro exterior.

II.10.5. Una caja en forma de cubo de 2 ft por lado, contiene aceite ( $\rho_r = 0.9$ ), hasta la mitad, se acelera sobre un plano inclinado  $30^\circ$  respecto a la horizontal, como se muestra en la Fig. II.28. Determinar la pendiente de la superficie libre y la presión a lo largo del fondo de la caja.

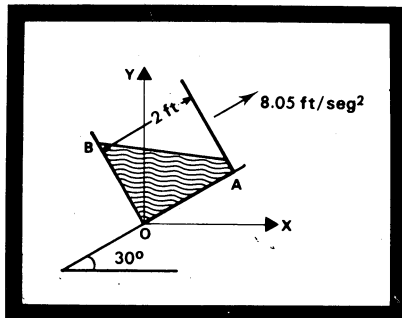


FIG. II.28. CUBO

Solución:

Utilizando el sistema de coordenadas  $xy$  mostrado,

$$a_x = 8.05 \cos 30^\circ = 6.98 \text{ ft/seg}^2$$

$$a_y = 8.05 \sin 30^\circ = 4.02 \text{ ft/seg}^2$$

De la ecuación (II.75), la pendiente de la superficie libre es:

$$\frac{-a_x}{a_y + g} = \frac{-6.98}{4.02 + 32.2} = 0.192$$

$$\tan^{-1} 0.192 = 10^\circ 52'$$

La superficie libre se encuentra inclinada  $40^\circ 52'$  respecto al fondo de la caja. El nivel de aceite paralelamente a los lados es menor del lado derecho en:

$$2 \tan 40^\circ 52' = 1.73 \text{ ft}$$

Si  $S$  es la distancia entre el punto  $A$  y el plano inclinado, entonces el volumen de líquido conocido se puede expresar como:

$$4 \left( \frac{1.73+S}{2} \right) = 4 \text{ ft}^3$$

$$S = 0.135$$

Las coordenadas  $xy$  de  $A$  son:

$$x = 2 \cos 30^\circ - 0.135 \text{ sen } 30^\circ = 1.665 \text{ ft}$$

$$y = 2 \text{ sen } 30^\circ + 0.135 \cos 30^\circ = 1.117 \text{ ft}$$

La presión  $p_0$  en el origen se puede obtener al sustituir valores en la ecuación (II.74),

$$0 = p_0 - (0.9 \times 62.4 \times 6.98 \times \frac{1.665}{32.2}) - (0.9 \times 62.4 \times \left( \frac{1+4.02}{32.2} \right) \times 1.117)$$

$$p_0 = 90.73 \text{ lb/ft}^3$$

Finalmente, si  $t$  es la distancia desde el origen a lo largo del fondo de la caja, entonces, para dicho fondo se tiene

$$x = 0.866 t$$

$$y = 0.5 t$$

Empleando nuevamente la ecuación (II.74), la presión  $t$  a lo largo del fondo  $0$  resulta.

$$p = 90.73 - 42.07 t$$

o sea, la presión a lo largo del fondo varía con la distancia  $t$  a partir de  $0$ .

II.10.6. Un tubo recto de  $4 \text{ ft}$  de longitud, cerrado en su extremo inferior y lleno de agua, se encuentra inclinado  $30^\circ$  respecto a la vertical y gira con una velocidad angular de  $8.02 \text{ rad/seg}$  alrededor de un eje vertical que pasa por su punto --

medio. Dibujar el paraboloides correspondiente a la presión cero y determinar la presión en el extremo inferior y en el punto medio del tubo.

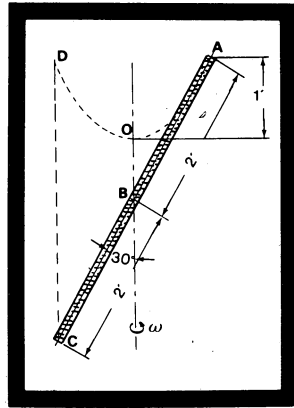


FIG.II.29. ROTACION RESPECTO A UN EJE VERTICAL DE UN TUBO INCLINADO QUE CONTIENE UN LIQUIDO.

Solución:

En la Fig.II.29, el paraboloides que corresponde a la presión cero se hace pasar por el punto A. Tomando el vértice como origen, es decir  $p_0 = 0$ , la ecuación (II.81) se reduce a

$$h = \frac{\omega^2 r^2}{2g} = \frac{8.02^2 (2 \text{ sen } 30^\circ)^2}{64.4} = 1.0 \text{ ft}$$

valor que permite localizar el vértice O a 1.0 ft abajo de A. La presión en el extremo inferior del tubo es igual a  $\gamma \cdot \overline{CD}$ , - es decir:

$$4 \cos 30^\circ 62.4 = 216 \text{ lb/ft}^2$$

y para el punto medio  $\overline{OB} = 0.732 \text{ ft}$ , resultando  $p = 0.732 \times 62.4 = 45.6 \text{ lb/ft}^2$ .

# CAPITULO III

## TEORIA DE LOS MODELOS Y ANALISIS DIMENSIONAL

### III.1. DEFINICION Y USOS DE LA SIMILITUD.

Comúnmente no es posible determinar, con la teoría básica, todos los factores que intervienen en el flujo de un fluido dado y por tanto, es necesario determinarlos por investigaciones experimentales. El número de pruebas a realizar se puede reducir considerablemente por medio de un programa sistemático basado en análisis dimensional y, específicamente, en las leyes de la similitud, las cuales permiten la aplicación de ciertas relaciones en las que los resultados de un ensayo se pueden aplicar a otros casos.

Así, las leyes de la similitud permiten realizar experimentos con un fluido conveniente, tal como agua o aire, y aplicar los resultados a otro fluido menos manejable, por ejemplo, gas, vapor ó aceite. Igualmente, en la hidráulica y aeronáutica se pueden obtener resultados a un mínimo costo con pruebas hechas en pequeños modelos a escala y trasladarlos al modelo real. Las leyes de la similitud hacen posible determinar el comportamiento del prototipo a partir de pruebas hechas con el modelo, sin que sea necesario que se use el mismo fluido en el modelo y en el prototipo.

La teoría de los modelos puede usarse en el estudio de aviones, túneles de viento, turbinas hidráulicas, bombas centrífugas, la acción de olas y mares en las playas, la erosión de suelos, el transporte de sedimentos, etc.

### III.1.1. SIMILITUD GEOMETRICA.

Una de las características esenciales en el estudio de los modelos, es que debe existir similitud geométrica, esto es, que el modelo y el prototipo tengan la misma forma y difieran únicamente en tamaño. La consideración importante es que los patrones de flujo sean similares geoméricamente. Existe similitud geométrica cuando la relación de dimensiones del prototipo a las del modelo es constante, es decir que se tiene una relación de escala:  $L_r = L_p / L_m$  (la relación de escalas es la relación del tamaño del prototipo al del modelo).

El recíproco de la relación de escalas  $\lambda = L_m / L_p$ , es la relación del modelo o escala del modelo. Así, una relación de modelo de 1:20 corresponde a una relación de escalas de 20:1.

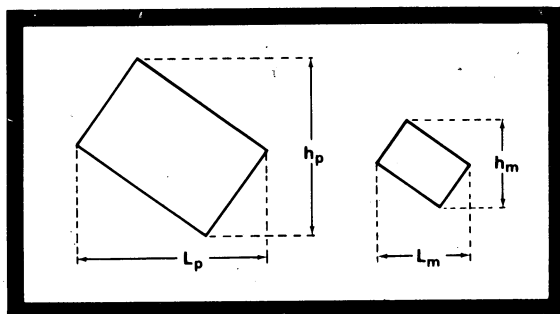


FIG. III.1. REPRESENTACION DE LA SIMILITUD GEOMETRICA ENTRE MODELO Y PROTOTIPO.

Para que exista similitud geométrica entre un modelo y su prototipo:

$$\frac{L_p}{h_p} = \frac{L_m}{h_m}$$

o bien:

$$\frac{L_p}{L_m} = \frac{h_p}{h_m} = L_r, \text{ escala de longitudes. (III.1).}$$

De igual manera se obtiene:

$$A_r = L_r^2, \text{ escala de \u00e1reas} \quad (\text{III.2}),$$

$$V_r = L_r^3, \text{ escala de vol\u00fames} \quad (\text{III.3}).$$

### III.1.2. SIMILITUD CINEMATICA

La similitud cinem\u00e1tica implica necesariamente que se tenga similitud geom\u00e9trica y adem\u00e1s, que en todos los puntos de flujo correspondientes existe la misma relaci\u00f3n de velocidades. Si los sub\u00edndices  $p$  y  $m$  denotan prototipo y modelo respectivamente, entonces la relaci\u00f3n de velocidades,  $v_r$ , es:

$$v_r = \frac{v_p}{v_m} = \frac{L_r}{T_r} \quad (\text{III.4}).$$

Dimensionalmente, el tiempo  $T$  es  $L/v$ , entonces la escala de tiempo es:

$$T_r = \frac{L_r}{v_r} \quad (\text{III.5}),$$

en forma similar, la relaci\u00f3n de aceleraciones es:

$$a_r = \frac{L_r}{T_r^2} \quad (\text{III.6}).$$

Si dos flujos son cinem\u00e1ticamente similares, entonces las velocidades en puntos correspondientes del modelo y del prototipo est\u00e1n en la misma direcci\u00f3n y est\u00e1n relacionadas por un factor constante de escala:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{v_p}{v_m} = v_r \quad (\text{III.7}).$$



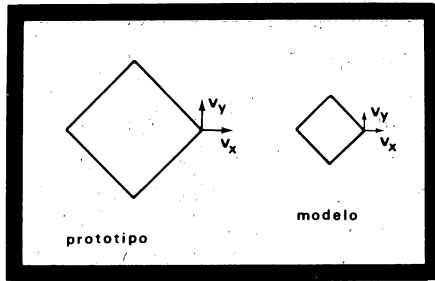


FIG.III.2. REPRESENTACION DE LA SIMILITUD CINEMATICA.

### III.1.3. SIMILITUD DINAMICA.

Si dos sistemas son dinámicamente similares, las fuerzas correspondientes deben tener la misma relación en ambos. Para que exista la relación dinámica debe cumplirse la existencia de similitud geométrica y similitud cinemática. Las fuerzas que pueden actuar en un elemento de fluido son las debidas a la gravedad ( $F_G$ ), a la presión ( $F_P$ ), viscosidad ( $F_V$ ), y elasticidad ( $F_E$ ). También, si el elemento de fluido está en la interfase de un gas-líquido, existen las fuerzas debidas a la tensión superficial ( $F_T$ ). Si la suma de fuerzas que actúan en un elemento de fluido no es igual a cero, el elemento se acelera de acuerdo a la ley de Newton. Cuando se tiene un sistema de fuerzas no balanceado, se puede balancear agregándole la fuerza de inercia ( $F_I$ ), que es igual pero de sentido contrario a la resultante de las fuerzas, ( $R$ ). Así,

$$\Sigma F = F_G + F_P + F_V + F_E + F_T = R,$$

$$F_I = R,$$

entonces:

$$F_G + F_P + F_V + F_E + F_T + F_I = 0 \quad (III.8).$$

Estas fuerzas se pueden expresar, en términos simplificados, de la siguiente manera:

a) Gravedad:	$F_G = \rho L^3 g$	
b) Presión:	$F_P = (\Delta p) L^2$	
c) Viscosidad:	$F_V = \mu v L$	
d) Elasticidad:	$F_E = E_V L^2$	
e) Tensión superficial	$F_T = \sigma L$	
f) Inercia	$F_I = \rho v^2 L^2$	(III.9).

En muchos problemas de flujo, algunas de estas fuerzas no se presentan o son insignificantes. En la Fig. III.3. se muestran dos sistemas de flujo geoméricamente iguales. Suponiendo que también existe similitud cinemática y las fuerzas que actúan son  $F_G$ ,  $F_P$ ,  $F_V$  y  $F_I$ . Entonces la similitud dinámica se logra si:

$$\frac{F_{Gp}}{F_{Gm}} = \frac{F_{Pp}}{F_{Pm}} = \frac{F_{Vp}}{F_{Vm}} = \frac{F_{Ip}}{F_{Im}} \quad (III.10).$$

Donde los subíndices  $p$  y  $m$  denotan al prototipo y modelo, respectivamente. Estas relaciones se pueden expresar como

$$\left(\frac{F_I}{F_G}\right)_p = \left(\frac{F_I}{F_G}\right)_m ; \left(\frac{F_I}{F_P}\right)_p = \left(\frac{F_I}{F_P}\right)_m ; \left(\frac{F_I}{F_V}\right)_p = \left(\frac{F_I}{F_V}\right)_m \quad (III.11).$$

Cada término es adimensional. Con las cuatro fuerzas actuando, hay tres expresiones independientes que se deben satisfacer; para tres fuerzas existen dos relaciones independientes y así sucesivamente.

### III.2. GRUPOS ADIMENSIONALES.

A continuación se describe la importancia de algunos grupos adimensionales.

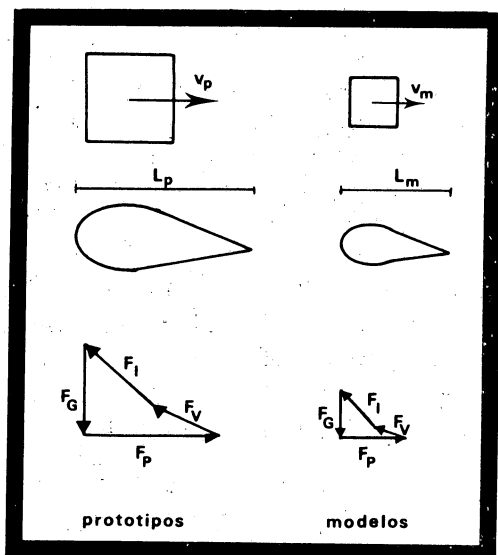


FIG.III.3. REPRESENTACION DE DOS SISTEMAS DINAMICAMENTE SIMILARES.

### III.2.1. NUMERO DE REYNOLDS.

En el flujo de un fluido a través de un conducto - completamente lleno, la gravedad no afecta al patrón de flujo. También es evidente que la capilaridad carece de importancia - y por tanto, las fuerzas significativas son las de inercia y las de fricción del fluido debidas a la viscosidad. Lo anterior también es válido para un aeroplano viajando a velocidades bajo las cuales se debe tomar en cuenta la compresibilidad del aire.

Considerando la relación de las fuerzas de inercia a las viscosas se obtiene el parámetro llamado número de Reynolds o  $N_R$ , en honor de Osborne Reynolds. La relación de estas dos - fuerzas es;

$$N_R = \frac{F_I}{F_V} = \frac{\rho v^2 L^2}{\mu v L} = \frac{\rho v L}{\mu} = \frac{v L}{\nu} \quad (\text{III.12}).$$

Para un sistema consistente de unidades, el número de Reynolds es adimensional. La dimensión lineal  $L$  puede ser cualquier longitud significativa en el patrón de flujo. Así, para una tubería completamente llena,  $L$  puede ser el diámetro o el radio y por consiguiente, el valor numérico de  $N_R$  varía en forma con -- cordante. Generalmente se usa el diámetro de la tubería al valor  $L$ .

Considerando dos sistemas, tales como un modelo y su - prototipo o dos tuberías con diferentes fluidos, se dice que - son dinámicamente equivalentes siempre y cuando ambos tengan - el mismo valor de  $N_R$ .

Si el número de Reynolds en el modelo y en el prototipo es el mismo:

$$N_R = \frac{(L_m v_m)}{v_m} = \frac{(L_p v_p)}{v_p} \quad (\text{III.13}),$$

la relación de velocidades es:

$$v_r = \frac{v_p}{v_m} = \frac{(L_m v_p)}{(L_p v_m)} = \left(\frac{v}{L}\right)_r \quad (\text{III.14}).$$

De la ecuación (III.5), la relación de tiempo es:

$$T_r = \left(\frac{L}{v}\right)_r = \left(\frac{L^2}{v^2}\right)_r \quad (\text{III.15}),$$

y de la ecuación (III.6), la relación de aceleración es:

$$a_r = \frac{v_r}{L_r T_r} = \left(\frac{v^2}{L^3}\right)_r \quad (\text{III.16}).$$

### III.2.2. NUMERO DE FROUDE.

Considerando únicamente las fuerzas de inercia y de gravedad, se obtiene la relación llamada número de Froude o -  $N_F$ , en honor de William Froude, esta relación es:

$$N_F = \frac{F_I}{F_G} = \frac{\rho v^2 L^2}{\rho g L^3} = \frac{v^2}{gL} \quad (\text{III.17}).$$

Aunque algunas veces se define de la forma anterior, el número de Froude se expresa más comúnmente:

$$N_F = \frac{v}{\sqrt{gL}} \quad (\text{III.18}).$$

Los sistemas que involucran las fuerzas de inercia y de gravedad son por ejemplo: la acción de las olas sobre un barco, el flujo de agua en canales abiertos, el flujo de un vapor por un orificio y otros casos donde la gravedad es un factor predominante.

Para el cálculo de  $N_F$ , la longitud  $L$  debe ser alguna dimensión lineal significativa en el patrón de flujo. Para un barco, la longitud se toma generalmente en la línea de agua, para un canal abierto se toma como la profundidad de flujo.

De la ecuación (III.18),  $v$  varía conforme a  $\sqrt{gL}$ , y si  $g$  se considera constante, entonces de la ecuación (III.4);

$$v_r = \sqrt{L_r/1.0} \quad (\text{III.19}),$$

para el mismo  $N_F$ . Y de la ecuación (III.5), la relación de tiempos para el prototipo y modelo es:

$$T_r = \sqrt{L_r/1.0} \quad (\text{III.20}).$$

mientras que  $a_r = 1.0$ .

El conocimiento de la escala de tiempos es de gran utilidad en el estudio de fenómenos cíclicos tales como las olas y las mareas.

Dado que la velocidad varía linealmente conforme a  $\sqrt{L}$ , y el área de sección transversal según  $L^2$ , se deduce que el gasto es:

$$Q_r = \frac{Q_p}{Q_m} = \frac{L_r^{5/2}}{1.0} \quad (\text{III.21}).$$

En los modelos de ríos, la velocidad varía según  $L$  y entonces:

$$\frac{Q_p}{Q_m} = L_r L_r^{3/2} \quad (\text{III.22}).$$

### III.2.3. NUMERO DE MACH.

Donde la compresibilidad es importante es necesario considerar la relación de la velocidad del fluido (o la velocidad de un cuerpo a través de un fluido estacionario) a aquella de una onda sonora en el mismo medio. Esta relación se llama número de Mach:

$$N_M = \sqrt{\frac{\rho v^2 L^2}{E_v L^2}} = \frac{v}{\sqrt{E_v / \rho}} \quad (\text{III.23}),$$

donde  $\sqrt{E_v / \rho}$  es la velocidad acústica (o celeridad) en el medio en cuestión. Si  $N_M$  es menor que 1.0, el flujo es llamado subsónico, si es igual a 1.0, el flujo es sónico y si es mayor que 1.0, es supersónico y para valores extremadamente grandes de  $N_M$ , se llama flujo hipersónico.

La relación de las fuerzas de inercia con las elásticas  $\rho v^2 L^2 / E_v L^2 = \rho v^2 / E_v$  es llamada número de Cauchy. Por tanto, el número de Cauchy es la raíz cuadrada del número de Mach.

### III.2.4. NUMERO DE WEBER

En algunos casos de flujo la tensión superficial puede ser importante, pero generalmente es despreciable. La relación de las fuerzas de inercia con las de tensión superficial es  $\rho v^2 L^2 / \sigma L$ , y la raíz cuadrada de esto es conocida como el número de Weber:

$$N_w = \frac{v}{\sqrt{\sigma/\rho L}}$$

(III.24).

### III.2.5. NUMERO DE EULER

Una cantidad adimensional referida a la relación de la fuerza de inercia a la de presión, se conoce como el número de Euler, la cual puede expresarse de muchas formas, entre ellas:

$$N_E = \frac{v}{\sqrt{2(\Delta p/\rho)}} = \frac{v}{\sqrt{2g(\Delta p/\rho)}} \quad (\text{III.25}).$$

Si sólo la inercia y la presión tienen influencia en el flujo, el número de Euler para cualquier límite permanece constante. Si otros parámetros (viscosidad, gravedad, etc.,) causan que el patrón de flujo cambie, entonces el  $N_E$  también cambia.

Los grupos adimensionales constituidos por los números de Reynolds ( $N_R$ ), de Froude ( $N_F$ ) y de Mach ( $N_M$ ), son los más frecuentemente encontrados en la Mecánica de Fluidos. Cuando existen sistemas dinámicamente similares, es decir que el grupo adimensional sea el mismo en el modelo y en el prototipo, es posible determinar la relación de escala para cualquier cantidad deseada y para los distintos grupos adimensionales, como se muestra en la Tabla III.1.

### III.3. ANALISIS DIMENSIONAL

Los problemas de Mecánica de Fluidos se pueden tratar por medio del análisis dimensional, técnica matemática que hace uso del estudio de las dimensiones. El análisis dimensional está relacionado con las leyes de similitud; sin embargo el método es diferente. En el análisis dimensional, a -

TABLA III.1. CARACTERISTICAS DE FLUJO Y SIMILITUD DE LA RELACION DE ESCALAS (RELACION DE LA CANTIDAD DEL PROTOTIPO A LA DEL MODELO).

SIMILITUD	CARACTERISTICAS	DIMENSION	RELACION DE ESCALAS PARA LOS GRUPOS ADIMENSIONALES.		
			REYNOLDS	FROUDE	MACH
GEOMETRICA	LONGITUD	L	$L_r$	$L_r$	$L_r$
	AREA	$L^2$	$L_r^2$	$L_r^2$	$L_r^2$
	VOLUMEN	$L^3$	$L_r^3$	$L_r^3$	$L_r^3$
CINEMATICA	TIEMPO	$T$	$(L^2 \rho / \mu)_r$	$(L^{1/2} g^{-1/2})_r$	$(L \rho^{1/2} / E_v^2)_r$
	VELOCIDAD	$L T^{-1}$	$(\mu / L \rho)_r$	$(L^{1/2} g^{1/2})_r$	$(E_v^{1/2} / \rho^{1/2})_r$
	ACELERACION	$L T^{-2}$	$(\mu^2 / \rho^3 L^3)_r$	$g_r$	$(E_v / L \rho)_r$
	GASTO	$L^3 T^{-1}$	$(L \mu / \rho)_r$	$(L^{5/2} g^{1/2})_r$	$(L^2 E_v / \rho^{1/2})_r$
DINAMICA	MASA	M	$(L^3 \rho)_r$	$(L^3 \rho)_r$	$(L^3 \rho)_r$
	FUERZA	M L T <sup>-2</sup>	$(\mu^2 / \rho)_r$	$(L^3 \rho g)_r$	$(L^3 E_v)_r$
	PRESION	M L <sup>-1</sup> T <sup>-2</sup>	$(\mu^2 / L^2 \rho)_r$	$(L \rho g)_r$	$(E_v)_r$
	IMPULSO Y MOMENTO	M L T <sup>-1</sup>	$(L^2 \mu)_r$	$(L^{7/2} \rho g^{1/2})_r$	$(L^3 \rho^{1/2} E_v^{1/2})_r$
	TRABAJO Y ENERGIA	M L <sup>2</sup> T <sup>-2</sup>	$(L \mu^2 / \rho)_r$	$(L^4 \rho g)_r$	$(L^3 E_v)_r$
	POTENCIA	M L <sup>2</sup> T <sup>-3</sup>	$(\mu^3 / L \rho^2)_r$	$(L^{7/2} \rho g^{3/2})_r$	$(L^2 E_v^{3/2} \rho^{1/2})_r$

NOTA Generalmente g es la misma en el modelo y el prototipo.



partir de una comprensión general del fenómeno del fluido, primero se definen los parámetros físicos que tienen influencia en el flujo y después, agrupando estos parámetros en combinaciones adimensionales, se llega a un mejor entendimiento del fenómeno. Esta técnica es de gran ayuda en los trabajos experimentales, ya que proporciona una guía de aquellas cosas que influyen significativamente en el fenómeno, indicando de esta forma el camino que debe seguirse para efectuar el trabajo experimental.

Las cantidades físicas se pueden expresar, ya sean en el sistema fuerza-longitud-tiempo  $[FLT]$  o en el sistema masa-longitud-tiempo  $[MLT]$ . Estos dos sistemas se interrelacionan por medio de la ley de Newton,  $F=ma$ , o:

$$[F] = [MLT^{-2}] \quad (III.26).$$

A través de esta relación, se puede transformar de un sistema a otro y las dimensiones pueden estar en el sistema inglés o métrico.

La Tabla III.2, contiene algunas de las cantidades empleadas en el análisis dimensional.

### III.3.1. HOMOGENEIDAD DIMENSIONAL

Una de las características más importantes del análisis dimensional es la de determinar grupos adimensionales apropiados que describen un experimento en particular o sirven como funciones de correlación de datos. Se puede llegar a definir una ecuación funcional, en la cual las cantidades fundamentales en cada lado de la ecuación son las mismas; es decir, que la ecuación tenga homogeneidad dimensional. Una ecuación funcional es válida en cualquier sistema de unidades, siempre que éstas sean consistentes.

Por ejemplo, sea la ecuación de la caída libre de un cuerpo:

$$S = \frac{1}{2} g t^2 \quad (III.27).$$

TABLA III.2, CANTIDADES FISICAS UTILIZADAS  
EN EL ANALISIS DIMENSIONAL.

VARIABLE	SIMBOLO	DIMENSIONES					
		M	L	T	F	L	T
Longitud . . . . .	$l$		L			L	
tiempo . . . . .	$t$			T			T
Masa . . . . .	$m$	M			F	$L^{-1}$	$T^2$
Fuerza . . . . .	$F$	M	L	$T^{-2}$	F		
Velocidad. . . . .	$v$		L	$T^{-1}$		L	$T^{-1}$
Aceleración. . . . .	$a$		L	$T^{-2}$		L	$T^{-2}$
Area . . . . .	$A$		$L^2$			$L^2$	
Gasto. . . . .	$Q$		$L^3$	$T^{-1}$		$L^3$	$T^{-1}$
presión. . . . .	$p$	M	$L^{-1}$	$T^{-2}$	F	$L^{-2}$	
Aceleración de la gravedad .	$g$		L	$T^{-2}$		L	$T^{-2}$
Densidad . . . . .	$\rho$	M	$L^{-3}$		F	$L^{-4}$	$T^2$
Peso específico. . . . .	$\gamma$	M	$L^{-2}$	$T^{-2}$	F	$L^{-3}$	
Viscosidad dinámica. . . . .	$\mu$	M	$L^{-1}$	$T^{-1}$	F	$L^{-2}$	T
Viscosidad cinemática. . . . .	$\nu$		$L^2$	$T^{-1}$		L	$T^{-1}$
Tensión superficial. . . . .	$\sigma$	M		$T^{-2}$	F	$L^{-1}$	
Módulo de elasticidad volumétrica	$E_v$	M	$L^{-1}$	$T^{-2}$	F	$L^{-2}$	
Compresibilidad. . . . .	$c$	$M^{-1}$	L	$T^2$	$F^{-1}$	$L^2$	

Reemplazando los símbolos con sus dimensiones apropiadas se tiene:

$$L = (LT^{-2}) (T^2),$$
$$L = L,$$

es decir que las unidades fundamentales son las mismas en ambos lados de la ecuación (III.27) y por tanto, es dimensionalmente homogénea.

Para ilustrar la solución de problemas utilizando las técnicas de análisis dimensional, se considera la fuerza de arrastre ( $F_D$ ) ejercida sobre una esfera que se mueve a través de un líquido viscoso. Es necesario visualizar el problema físico para considerar qué factores físicos afectan a la fuerza de arrastre. En este problema son importantes: el tamaño ( $D$ ) y la velocidad ( $v$ ) de la esfera, así como la densidad ( $\rho$ ) y la viscosidad ( $\mu$ ) del fluido.

### III.3.2. METODO DE RAYLEIGH

En este procedimiento para derivar ecuaciones se usa el principio de homogeneidad dimensional y es preferido cuando se tienen cuatro o menos variables. Para ilustrar este método de análisis dimensional, se describe el procedimiento para resolver el problema de la fuerza de arrastre indicado arriba:

1. Determinar las variables que intervienen en el problema.

Se sugiere elegir una longitud característica, una velocidad característica y las propiedades del fluido;

- diámetro de la esfera,
- velocidad de la esfera,
- densidad del fluido,
- viscosidad del fluido.

2. Preparar una lista de las variables con sus dimensiones;

Fuerza	( $F_0$ )	$[MLT^{-2}]$ ,
Longitud	( $D$ )	$[L]$ ,
Velocidad	( $v$ )	$[LT^{-1}]$ ,
Densidad	( $\rho$ )	$[ML^{-3}]$ ,
Viscosidad	( $\mu$ )	$[ML^{-1}T^{-1}]$ .

3. Se define una relación funcional de las variables; es decir, una ecuación en términos de la variable deseada y de las unidades en un sistema, en este caso el sistema  $MLT$ :

$$F_0 = f(D, v, \rho, \mu) \quad (III.28),$$

y como debe existir homogeneidad dimensional:

$$F_0 = CD^a v^b \rho^c \mu^d \quad (III.29),$$

donde  $C$  es una constante adimensional. Luego, sustituyendo las dimensiones:

$$\begin{aligned} [MLT^{-2}] &= [L]^a [LT^{-1}]^b [ML^{-3}]^c [ML^{-1} T^{-1}]^d \\ [MLT^{-2}] &= M^{(c+d)} L^{(a+b-3c-d)} T^{(-b-d)} \end{aligned} \quad (III.30).$$

4. Para satisfacer la homogeneidad dimensional, los exponentes de cada dimensión ( $M, L$  y  $T$ ) deben ser idénticos en ambos lados de la ecuación (III.30). Por tanto:

$$\text{Para } M: \quad 1 = c + d$$

$$\text{Para } L: \quad 1 = a + b - 3c - d$$

$$\text{Para } T: \quad -2 = -b - d$$

Dado que se tienen 3 ecuaciones y 4 incógnitas, se deben expresar tres de ellas en función de la cuarta; en este caso, resolviendo  $a, b$  y  $c$  en términos de  $d$  se tiene:

$$a = 1 - d \quad (III.31),$$

$$b = 2 - d \quad (III.32),$$

$$c = 2 - d \quad (III.33).$$

5. Se escribe la expresión en la forma final, o sea, sustituyendo las ecuaciones (III.31), (III.32) y (III.33) en la ecuación (III.29):

$$F_D = C D^{2-d} v^{2-d} \rho^{1-d} \mu^d,$$

y agrupando las variables de acuerdo a sus exponentes:

$$F_D = C (\rho v^2 D^2) \left( \frac{\rho v D}{\mu} \right)^{-d} \quad (\text{III.34}).$$

Se puede ver que la relación  $\rho v D / \mu$  es el número de Reynolds. Entonces la ecuación original puede expresarse como:

$$F_D = C (N_R^{-d}) \rho v^2 D^2 \quad (\text{III.35}).$$

Si  $C_D$  se define como el coeficiente de arrastre:

$$C_D = C (N_R^{-d}),$$

el cual es función del número de Reynolds exclusivamente. Entonces

$$F_D = C_D \rho v^2 D^2 \quad (\text{III.36}).$$

El resultado indica que la fuerza de arrastre sobre una esfera es igual a un coeficiente por  $\rho v^2 D$ . El valor de  $C_D$  debe determinarse experimentalmente, sin olvidar que es función de  $N_D$ .

### III.3.3. TEOREMA II DE BUCKINGHAM

Este es un método más generalizado para efectuar el análisis dimensional; consiste en un teorema que ha sido usado ampliamente en la solución de problemas de flujo de fluidos y una de sus ventajas principales es que se obtienen grupos adimensionales numérica y dimensionalmente independientes del sistema de unidades empleado.

El teorema establece que: "si una ecuación es dimensionalmente homogénea, puede reducirse a una relación entre un conjunto de productos adimensionales". Se considera que un --

conjunto de productos adimensionales de variables dadas es completo si cada producto es independiente de los otros. En general se establece que si hay  $n$  variables dimensionales en una ecuación dimensionalmente homogénea, descrita por  $m$  dimensiones fundamentales (p.ej.  $MLT$ ), se puede obtener:

$$i = n - r \quad (III.37).$$

donde:

$i$  = número de productos adimensionales independientes,

$n$  = número de variables dimensionales,

$r$  = rango de la matriz dimensional de  $m$  renglones y  $n$  columnas;  $r \leq m$ .

Procedimiento:

1. Determinar el número de variables involucradas en el problema:

(Igual al paso 1 del método de Rayleigh).

2. Preparar una lista de variables con sus dimensiones:

(Igual al paso 2 del método de Rayleigh).

3. Formar una matriz dimensional y obtener su rango:

	F	$\rho$	v	D	$\mu$
M	1	1	0	0	1
L	1	-3	1	1	-1
T	-2	0	-1	0	-1

Esta matriz contiene al menos un determinante de tercer orden y diferente de cero:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

Por tanto, el rango de la matriz dimensional es  $r=3$ . El orden del determinante diferente de cero indica el rango de la matriz.

4. De acuerdo con el teorema II de Buckingham:

$$\lambda = n - k = 5 - 3 = 2.$$

Lo que indica que se tendrán 2 grupos adimensionales ó términos independientes entre sí.

5. Formar un núcleo de variables formado por un número de variables igual al rango  $k$  de la matriz (o equivalente a  $m$ ). Se recomienda que las variables incluidas en el núcleo contengan todas las dimensiones requeridas. También se sugiere elegir una longitud característica, una velocidad característica, una propiedad del fluido y no incluir variables cuyo efecto se desea encontrar, para formar el núcleo de  $n$  variables:

$$(D, v, \rho).$$

6. Expresar productos adimensionales ( $\Pi_\lambda$ ), repitiendo las mismas variables del núcleo en cada uno de los grupos y además, se incluye una de las variables que no están incluidas en el núcleo al final de cada término  $\Pi$ .

$$\Pi_1 = D^{a_1} v^{b_1} \rho^{c_1} F_D,$$

$$\Pi_2 = D^{a_2} v^{b_2} \rho^{c_2} \mu.$$

7. Escribir las ecuaciones dimensionales para cada término, tomando en cuenta que cada grupo  $\Pi_\lambda$  es adimensional y se puede reemplazar por  $M^0 L^0 T^0$ ;

$$\text{Para } \Pi_1: \begin{aligned} [M^0 L^0 T^0] &= [L]^{a_1} [L T^{-1}]^{b_1} [M L^{-3}]^{c_1} [M L T^{-2}] \\ M^0 L^0 T^0 &= M^{c_1+1} L^{a_1+b_1-3c_1+1} T^{-b_1-2} \end{aligned}$$

$$\text{Para } \Pi_2: \begin{aligned} [M^0 L^0 T^0] &= [L]^{a_2} [L T^{-1}]^{b_2} [M L^{-3}]^{c_2} [M L T^{-1}] \\ M^0 L^0 T^0 &= M^{c_2+1} L^{a_2+b_2-3c_2-1} T^{-b_2-1} \end{aligned}$$

8. Evaluar cada uno de los exponentes para satisfacer la homogeneidad dimensional. En el término  $\Pi_1$  se tiene:

$$\text{Para } M: \quad 0 = c_1 + 1 \quad \therefore c_1 = -1 \quad (1),$$

$$\text{Para } L: \quad 0 = a_1 + b_1 - 3c_1 + 1 \quad (2),$$

$$\text{Para } T: \quad 0 = -b_1 - 2 \quad \therefore b_1 = -2 \quad (3),$$

y de (1) y (3) en (2) se tiene:

$$a_1 = -2.$$

En el término  $\Pi_2$  se tiene

$$\text{Para } M: \quad 0 = c_2 + 1 \quad \therefore c_2 = -1 \quad (1),$$

$$\text{Para } L: \quad 0 = a_2 + b_2 - 3c_2 - 1 \quad (2),$$

$$\text{Para } T: \quad 0 = -b_2 - 1 \quad \therefore b_2 = -1 \quad (3),$$

de (1) y (3) en (2):

$$a_2 = -1$$

9. Sustituir cada uno de los exponentes en los términos  $\Pi_i$  correspondientes:

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= D^{-2} v^{-2} \rho^{-1} F \\ \text{y: } \Pi_2 &= D^{-1} v^{-1} \rho^{-1} \mu \end{aligned}$$

de donde:

$$\Pi_1 = \frac{F}{\rho v^2 D^2}$$

$$\Pi_2 = \frac{\mu}{\rho v D} = \frac{1}{N_R}$$

10. Expresar un grupo en función del otro y encontrar la relación funcional:

$$\Pi_1 = f(\Pi_2)$$

$$\frac{F}{\rho v^2 D^2} = c \left( \frac{\mu}{\rho v D} \right) = \frac{c}{N_R} = C_0$$



$$F_D = C_D \rho v^2 D^2,$$

donde  $C_D$  es el coeficiente de arrastre. Se demuestra entonces que se llega al mismo resultado encontrado con el método de Rayleigh.

### III.4. EJEMPLOS.

III.4.1. Un cierto cuerpo sumergido se mueve horizontalmente en aceite ( $\gamma = 52 \text{ lb/ft}^3$ ,  $\mu = 0.0006 \text{ lb seg/ft}^2$ ), a una velocidad de  $45 \text{ ft/seg}$ . Para estudiar las características del movimiento se hace un experimento en un modelo sumergido en agua a  $60^\circ\text{F}$ . La relación del modelo es  $8:1$ . Determinar la velocidad a la que el modelo debe ser empujado a través del agua para alcanzar la similitud dinámica. Si la fuerza de arrastre en el modelo es  $0.80 \text{ lb}$ , determinar la fuerza en el prototipo.

Dado que el cuerpo está sumergido no sufre la acción de las olas y el criterio de Reynolds se debe satisfacer:

$$\left(\frac{Dv}{\nu}\right)_p = \left(\frac{Dv}{\nu}\right)_m \quad (\text{III.38}),$$

donde;

$$\frac{D_p}{D_m} = \frac{1}{8}.$$

De la tabla A.1,  $\nu = 1.22 \times 10^{-5}$ ,

$$v_p = \frac{\mu}{\rho} = \frac{0.0006}{(52/32.2)} = 0.000372 \frac{\text{ft}^2}{\text{seg}}.$$

Sustituyendo en la ecuación (III.38);

$$\frac{D_p (45)}{0.000372} = \frac{(8D_p) v_m}{1.22 \cdot 10^{-5}},$$

$$v_m = 0.185 \text{ ft/seg}.$$

como  $F = \rho v^2 D^2$ ;  $\frac{F_p}{F_m} = \frac{\rho_p v_p^2 D_p^2}{\rho_m v_m^2 D_m^2}$

$$\frac{F_p}{F_m} = \frac{(52/32.2) (45)^2 (1)^2}{(1.94) (0.185) (8)} = 769.57,$$

$$F_p = 769.57 F_m,$$

$$F_p = (769.57) (0.8) = 615.66 \text{ lb.}$$

III.4.2. Se desea determinar los coeficientes  $K = \Delta p / (\rho v^2 / 2)$  de una válvula de 60 cm de diámetro, efectuando pruebas en un modelo geoméricamente similar de 30 cm de diámetro, con aire atmosférico a 80°F. ¿Qué rangos de gasto de aire deben cubrirse en los experimentos con el modelo, de tal manera que incluyan velocidades de agua a 70°F desde 1.0 hasta 2.5 m/seg en el prototipo.

El rango de los números de Reynolds en la válvula prototipo es:

$$\frac{vD}{\nu_{\min}} = \frac{(1) (0.6)}{(1.059 \times 10^{-5}) (0.3048)^2} = 609853.28,$$

$$\frac{vD}{\nu_{\max}} = 1524633.2.$$

Para el aire a 80°F, se tiene:

$$\nu = (1.8 \times 10^{-4}) (0.3048)^2 = 1.672 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{seg.}$$

El rango de velocidades a cubrir en el modelo con aire resulta ser:

$$\frac{(v_{\min}) (0.3)}{(1.672 \times 10^{-5})} = 609853.28; \text{ por tanto;}$$

$$v_{\min} = 33.98 \text{ m/seg.}$$

$$\frac{(v_{\max}) (0.3)}{(1.672 \times 10^{-5})} = 1524633.20; \text{ de donde:}$$

$$v_{\max} = 84.97 \text{ m/seg,}$$

entonces, el rango de gastos es:

$$Q_{\min} : \frac{\pi}{4} (0.3)^2 (33.98) = 3.06 \text{ m}^3/\text{seg.}$$

$$Q_{\max} : \frac{\pi}{4} (0.6)^2 (84.97) = 7.65 \text{ m}^3/\text{seg.}$$

III.4.3. El escurrimiento de un fluido depende de la velocidad ( $v$ ), de la densidad ( $\rho$ ), de varias longitudes características ( $L$ ), ( $L_i$ ), ( $L_{ii}$ ), de la caída de presión ( $\Delta p$ ), de la aceleración de la gravedad ( $g$ ); de la viscosidad ( $\mu$ ), de la tensión superficial ( $\sigma$ ) y del módulo de elasticidad volumétrica ( $E_v$ ). Determinar un conjunto de parámetros adimensionales- $\Pi$ , aplicando el análisis dimensional a las variables anteriores.

Siguiendo el método del teorema  $\Pi$  de Buckingham:

1. Se determinan las variables que intervienen en el problema;

- velocidad ( $v$ ),
- densidad ( $\rho$ ),
- longitud característica ( $L$ ),
- longitud característica ( $L_i$ ),
- longitud característica ( $L_{ii}$ ),
- caída de presión ( $\Delta p$ ),
- aceleración de la gravedad ( $g$ ),
- viscosidad ( $\mu$ ),
- tensión superficial ( $\sigma$ ),
- módulo de elasticidad volumétrica ( $E_v$ ).

2. Se prepara una lista de las variables con sus dimensiones;

$v$	$LT^{-1}$
$\rho$	$ML^{-3}$
$L$	$L$
$L_i$	$L$
$L_{ii}$	$L$
$\Delta p$	$ML^{-1}T^{-2}$
$g$	$L T^{-2}$
$\mu$	$ML^{-1}T^{-1}$
$\sigma$	$M T^{-2}$
$E_v$	$ML^{-1}T^{-2}$

3. Se forma la matriz dimensional y se obtiene su rango

	$v$	$\rho$	$L$	$Li$	$Lii$	$\Delta p$	$g$	$\mu$	$\sigma$	$Ev$
M	0	1	0	0	0	1	0	1	1	1
L	1	-3	1	1	1	-1	1	-1	0	-1
T	-1	0	0	0	0	-2	-2	-1	-2	-2

tomando y resolviendo un determinante,

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 - (0+1) + 0 = -1 \neq 0$$

y el rango es 3.

4. Resolviendo el teorema II de Buckingham, ecuación (III.37);

$$\lambda = n - r = 10 - 3 = 7$$

esto indica que se tienen 7 grupos adimensionales o términos-independientes entre sí.

5. Formando el núcleo de variables, igual al rango  $r$ . En este caso resultan útiles  $v, \rho$  y  $L$ , o sea:

$$(v, \rho, L).$$

6. Se expresan los productos adimensionales  $\Pi_i$ , donde  $i$  varía de 1 a 7; ésto es:

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= v^{a_1} \rho^{b_1} L^{c_1} \Delta p, \\ \Pi_2 &= v^{a_2} \rho^{b_2} L^{c_2} g, \\ \Pi_3 &= v^{a_3} \rho^{b_3} L^{c_3} \mu, \\ \Pi_4 &= v^{a_4} \rho^{b_4} L^{c_4} \sigma, \\ \Pi_5 &= v^{a_5} \rho^{b_5} L^{c_5} Ev, \\ \Pi_6 &= v^{a_6} \rho^{b_6} L^{c_6} Li, \\ \Pi_7 &= v^{a_7} \rho^{b_7} L^{c_7} Lii. \end{aligned}$$

7. Escribiendo las ecuaciones dimensionales para cada término;

$$\begin{aligned} \Pi_1 \quad [M^\circ L^\circ T^\circ] &= [LT^{-1}]^{a_1} [ML^{-3}]^{b_1} [L]^{c_1} [ML^{-1} T^{-2}] \\ M^\circ L^\circ T^\circ &= M^{b_1+1} L^{a_1-3b_1+c_1-1} T^{-a_1-2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pi_2 \quad [M^\circ L^\circ T^\circ] &= [LT^{-1}]^{a_2} [ML^{-3}]^{b_2} [L]^{c_2} [LT^{-2}] \\ M^\circ L^\circ T^\circ &= M^{b_2} L^{a_2-3b_2+c_2+1} T^{-a_2-2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pi_3 \quad [M^\circ L^\circ T^\circ] &= [LT^{-1}]^{a_3} [ML^{-3}]^{b_3} [L]^{c_3} [ML^{-1} T^{-1}] \\ M^\circ L^\circ T^\circ &= M^{b_3+1} L^{a_3-3b_3+c_3-1} T^{-a_3-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pi_4 \quad [M^\circ L^\circ T^\circ] &= [LT^{-1}]^{a_4} [ML^{-3}]^{b_4} [L]^{c_4} [MT^{-2}] \\ M^\circ L^\circ T^\circ &= M^{b_4+1} L^{a_4-3b_4+c_4} T^{-a_4-2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pi_5 \quad [M^\circ L^\circ T^\circ] &= [LT^{-1}]^{a_5} [ML^{-3}]^{b_5} [L]^{c_5} [ML^{-1} T^{-2}] \\ M^\circ L^\circ T^\circ &= M^{b_5+1} L^{a_5-3b_5+c_5-1} T^{-a_5-2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pi_6 \quad [M^\circ L^\circ T^\circ] &= [LT^{-1}]^{a_6} [ML^{-3}]^{b_6} [L]^{c_6} [L] \\ M^\circ L^\circ T^\circ &= M^{b_6} L^{a_6-3b_6+c_6+1} T^{-a_6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pi_7 \quad [M^\circ L^\circ T^\circ] &= [LT^{-1}]^{a_7} [ML^{-3}]^{b_7} [L]^{c_7} [L] \\ M^\circ L^\circ T^\circ &= M^{b_7} L^{a_7-3b_7+c_7+1} T^{-a_7} \end{aligned}$$

8. Se evalúan cada uno de los exponentes para satisfacer la homogeneidad dimensional. Así;

En  $\Pi_1$ ;

$$\text{Para } M: 0 = b_1 + 1 \rightarrow b_1 = -1$$

$$\text{Para } L: 0 = a_1 - 3b_1 + c_1 - 1$$

$$\text{Para } T: 0 = -a_1 - 2 \rightarrow a_1 = -2$$

$$\therefore c_1 = 0$$

En  $\Pi_2$ ,

$$\text{Para } M: 0 = b_2 \rightarrow b_2 = 0$$

$$\text{Para } L: 0 = a_2 - 3b_2 + c_2 + 1$$

$$\text{Para } T: 0 = -a_2 - 2 \rightarrow a_2 = -2$$

$$\therefore c_2 = 1.$$

En  $\Pi_3$ ,

$$\text{Para } M: 0 = b_3 + 1 \rightarrow b_3 = -1$$

$$\text{Para } L: 0 = a_3 - 3b_3 + c_3 - 1$$

$$\text{Para } T: 0 = -a_3 - 1 \rightarrow a_3 = -1$$

$$\therefore c_3 = -1$$

En  $\Pi_4$ ,

$$\text{Para } M: 0 = b_4 + 1 \rightarrow b_4 = -1$$

$$\text{Para } L: a_4 - 3b_4 + c_4$$

$$\text{Para } T: 0 = -a_4 - 2 \rightarrow a_4 = -2$$

$$\therefore c_4 = -1$$

En  $\Pi_5$ ,

$$\text{Para } M: 0 = b_5 + 1 \rightarrow b_5 = -1$$

$$\text{Para } L: 0 = a_5 - 3b_5 + c_5 - 1$$

$$\text{Para } T: 0 = -a_5 - 2 \rightarrow a_5 = -2$$

$$\therefore c_5 = 0$$

En  $\Pi_6$ ,

$$\text{Para } M: 0 = b_6 \rightarrow b_6 = 0$$

$$\text{Para } L: 0 = a_6 - 3b_6 + c_6 + 1$$

$$\text{Para } T: 0 = -a_6 \rightarrow a_6 = 0$$

$$\therefore c_6 = -1$$

En  $\Pi_7$ ,

$$\text{Para } M: \quad 0 = b_7 \quad \rightarrow \quad b_7 = 0$$

$$\text{Para } L: \quad 0 = a_7 - 3b_7 + c_7 + 1$$

$$\text{Para } T: \quad 0 = -a_7 \quad \rightarrow \quad a_7 = 0$$

$$\therefore c_7 = -1$$

9. Se sustituye el valor de cada uno de los exponentes en los términos  $\Pi_i$  correspondientes:

$$\Pi_1 = v^{-2} \rho^{-1} L^0 \Delta p,$$

$$\Pi_2 = v^{-2} \rho^0 L^1 g,$$

$$\Pi_3 = v^{-1} \rho^{-1} L^{-1} \mu,$$

$$\Pi_4 = v^{-2} \rho^{-1} L^{-1} \sigma,$$

$$\Pi_5 = v^{-2} \rho^{-1} L^0 Ev,$$

$$\Pi_6 = v^0 \rho^0 L^{-1} Li,$$

$$\Pi_7 = v^0 \rho^0 L^{-1} Lii,$$

de donde:

$$\Pi_1 = \frac{\Delta p}{\rho v^2}$$

$$\Pi_2 = \frac{gL}{v^2}$$

$$\Pi_3 = \frac{\mu}{\rho v L}$$

$$\Pi_4 = \frac{\sigma}{\rho L v^2}$$

$$\Pi_5 = \frac{Ev}{\rho v^2}$$

$$\Pi_6 = \frac{Li}{L}$$

$$\Pi_7 = \frac{Lii}{L}$$

10. Planteando una relación funcional

$$\phi\left(\frac{\Delta p}{\rho v^2}, \frac{gL}{v^2}, \frac{\mu}{\rho v L}, \frac{\sigma}{\rho L v^2}, \frac{Ev}{\rho v^2}, \frac{Li}{L}, \frac{Lii}{L}\right) = 0$$

(III.39).

Conviene invertir algunos de los parámetros y tomar raíz cuadrada de  $\Pi_5$ :

$$\phi_1 \left( \frac{\Delta p}{\rho v^2}, \frac{v^2}{gL}, \frac{vL\rho}{\mu}, \frac{v^2 L\rho}{\sigma}, \frac{v}{\sqrt{Ev/\rho}}, \frac{L}{L\lambda}, \frac{L}{L\lambda\lambda} \right) = 0 \quad (\text{III.46}).$$

El primer parámetro, generalmente escrito como  $\Delta p/(\rho v^2/2)$ , es el coeficiente de presión; el segundo es el número de Froude ( $N_F$ ); el tercero el número de Reynolds ( $N_R$ ); el cuarto es el número de Weber ( $N_W$ ); el quinto es el número de Mach ( $N_M$ ). Por tanto, se tiene:

$$\phi_1 \left( \frac{\Delta p}{\rho v^2}, N_F, N_R, N_W, N_M, \frac{L}{L\lambda}, \frac{L}{L\lambda\lambda} \right) = 0 \quad (\text{III.41}),$$

al despejar la caída de presión se tiene:

$$\Delta p = \left( \rho v^2 \phi_2, N_F, N_R, N_W, N_M, \frac{L}{L\lambda}, \frac{L}{L\lambda\lambda} \right) \quad (\text{III.42}),$$

en donde  $\phi_1$  y  $\phi_2$  deben determinarse analítica o experimentalmente. Se puede obtener un conjunto diferente de parámetros  $\Pi$  seleccionando un núcleo diferente de variables.

En el capítulo VI se describe una representación de una relación funcional del tipo examinado (Fig. VI.4), y se aplica al flujo en tuberías. En este caso los términos  $N_F$ ,  $N_M$  y  $N_W$  no resultan importantes y, por tanto, se despreciaron;  $L$  corresponde al diámetro  $D$  de la tubería,  $L\lambda$  es la longitud  $L$  de la tubería y,  $L\lambda\lambda$  corresponde a una longitud representativa de la altura efectiva de la rugosidad superficial del tubo, dada por  $\epsilon$ . Resulta entonces;

$$\frac{\Delta p}{\rho v^2} = \phi_3 \left( N, \frac{L}{D}, \frac{\epsilon}{D} \right) \quad (\text{III.43}).$$

Es razonable suponer que la caída de presión en la tubería varía linealmente con la longitud (es decir, duplicando la longitud se duplica la pérdida de presión), de manera que -



se tiene:

$$\frac{\Delta p}{\rho V^2} = \frac{L}{D} \phi_4 \left( N_R, \frac{\epsilon}{D} \right)$$

$\delta$

$$\frac{\Delta p}{\rho V^2 (L/D)} = \phi_4 \left( N_R, \frac{\epsilon}{D} \right)$$

(fII.44).

El término del lado izquierdo comúnmente se representa con  $\frac{f}{2}$  (Capítulo VI).

# CAPITULO IV

## CONCEPTOS Y ECUACIONES FUNDAMENTALES

### IV.1. CARACTERISTICAS DEL MOVIMIENTO DE LOS FLUIDOS

Cuando se habla de flujo de fluidos, generalmente se está hablando del flujo de un fluido ideal, es decir, un fluido carente de viscosidad. Esta es una situación idealizada, - sin embargo, hay situaciones en los problemas de ingeniería - donde es útil la suposición de un fluido ideal.

Al referirse al flujo de un fluido real, los efectos de la viscosidad se introducen al problema. Esto resulta del desarrollo del esfuerzo cortante entre las partículas de fluido - cuando se mueven a diferentes velocidades. En el caso de un - fluido ideal que fluye a través de un conducto recto, todas - las partículas se mueven en líneas paralelas con igual velocidad (Fig. IV. 1a). En el flujo de un fluido real, las partículas adyacentes a la pared del conducto tienen una velocidad - igual a cero y ésta se incrementa rápidamente conforme aumenta la distancia a la pared, produciéndose un perfil de velocidad - des como el mostrado en la Fig. IV. 1b.

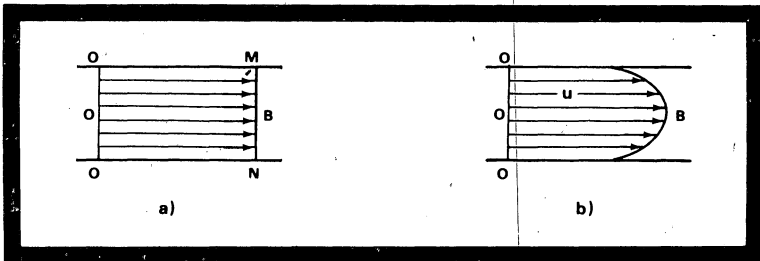


FIG. IV.1. PERFILES TÍPICOS DE LA VELOCIDAD. (a) FLUIDO IDEAL, (b) FLUIDO REAL.

El flujo se puede clasificar para fluidos incompresibles o compresibles. Puesto que los líquidos son prácticamente incompresibles, generalmente se tratan como si fueran totalmente incompresibles. Bajo condiciones particulares, donde existen ligeras variaciones en la presión, el flujo de gases también puede tratarse como incompresible, aunque generalmente los efectos de la compresibilidad del gas suelen considerarse.

En suma, los diferentes tipos de fluidos, sea: real, ideal, compresible o incompresible, tienen varias clasificaciones de flujo. El flujo puede ser permanente o no permanente (transitorio), turbulento o laminar, uniforme o no uniforme y rotacional o no rotacional.

#### IV.1.1. FLUJO LAMINAR Y TURBULENTO

Osborne Reynolds demostró en 1883 que existen dos diferentes tipos de flujo. Inyectó finas hebras de líquido coloreado con la misma densidad del agua, a la entrada de un tubo de vidrio conectado a un tanque con agua. Al final del tubo colocó una válvula que le permitía variar el flujo. Cuando la velocidad en el tubo es pequeña, el líquido coloreado se ve como una línea recta a lo largo de todo el tubo, mostrando que las partículas de agua se mueven en líneas paralelas rectas. Aumentando la velocidad del agua gradualmente, esto se logra abriendo la válvula, existe un punto en el cual el flujo cambia. La línea empieza a ondularse y a corta distancia de la entrada se rompe en numerosos vórtices, entonces el colorante queda distribuido uniformemente sin que se distingan las líneas del flujo.

Observaciones posteriores han demostrado que en el último tipo de flujo las velocidades están sujetas a fluctuaciones irregulares continuas.

El primer tipo se conoce como flujo laminar o viscoso. El significado de estos términos es porque pareciera que el fluido se mueve por el deslizamiento de laminaciones de espesor infinitesimal con relación a las capas adyacentes; o sea, las-

partículas se mueven en trayectorias definidas y observables, como se ve en la Fig. IV.2; y también, este flujo es característico de los fluidos viscosos o en los que la viscosidad tiene una importancia significativa.

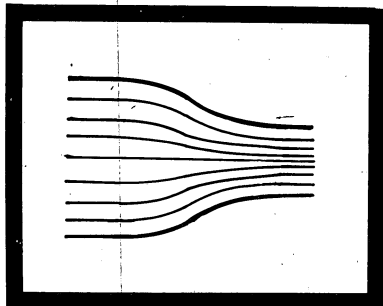


FIG. IV.2. FLUJO LAMINAR  
O VISCOSO.

El segundo tipo se conoce como flujo turbulento, y se ilustra en la Fig. IV.3, donde (a) representa el movimiento irregular de un gran número de partículas durante un intervalo pequeño de tiempo, y (b) muestra la trayectoria irregular de una sola partícula durante un intervalo considerable de tiempo. Una característica distintiva de la turbulencia es que ésta es irregular, o sea no existe una frecuencia definida, como podría ser el oleaje, además de no regirse por ningún patrón, como en el caso de los remolinos.

Considerando la Fig. IV.3b, en cierto instante, la partícula en  $O$  se puede mover con la velocidad  $OD$ , pero en flujo turbulento  $OD$  varía continuamente en dirección y magnitud. Las fluctuaciones de la velocidad se acompañan de fluctuaciones en la presión y tal es el motivo de porque los manómetros y medidores de presión conectados a una tubería en la que fluye un fluido, generalmente muestran pulsaciones. En este tipo de flujo, una partícula sigue trayectorias muy irregulares y erráticas, sin que dos partículas puedan tener movimientos idénticos o semejantes. Por lo anterior, no se puede tener un tratamiento matemático y rígido para el flujo turbulento, y se debe recurrir a medios estadísticos de evaluación.

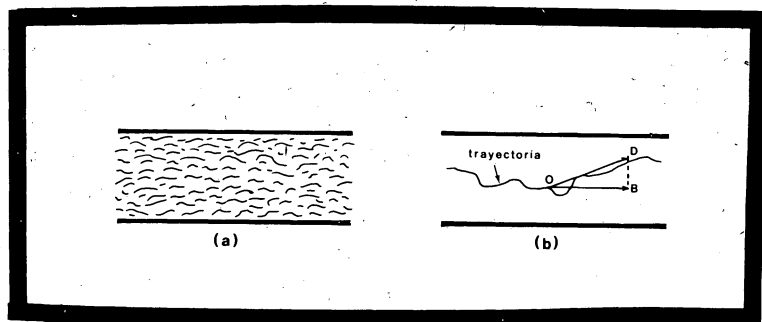


FIGURA IV.3. FLUJO TURBULENTO

#### IV.1.2. FLUJO PERMANENTE Y FLUJO UNIFORME

Flujo permanente es aquel en el que todas las condiciones en cualquier punto del flujo permanecen constantes respecto al tiempo, pero las condiciones pueden ser a diferentes tiempos. Un verdadero flujo uniforme es en el que la velocidad es la misma en dirección y magnitud a un instante dado, en todos los puntos del fluido. Ambas definiciones deben modificarse en parte, ya que el flujo permanente real sólo se encuentra en flujo laminar. En el flujo turbulento existen fluctuaciones continuas en presión y velocidad en todos los puntos, como se explicó anteriormente. Pero si estos valores varían indistintamente a ambos lados de un valor medio constante, el flujo se llama flujo permanente. Sin embargo, una definición más exacta para este caso es flujo permanente medio.

De la misma manera, la definición estricta de flujo uniforme puede tener poco significado para el flujo de un fluido real, donde la velocidad varía a través de una sección, como en la Fig. IV.1b. Pero cuando el tamaño y forma de una sección transversal es constante a lo largo de la trayectoria en consideración, el flujo se llama uniforme.

El flujo permanente (o no permanente) y uniforme (o no uniforme) pueden existir independientemente uno de otro, de tal manera que es posible tener cualquiera de las cuatro combinaciones. De esta manera, el flujo de un líquido a gasto constante en una tubería recta y de diámetro constante es flujo

permanente uniforme; el flujo de un líquido a gasto constante a través de una tubería cónica es flujo permanente no uniforme; mientras que con un gasto variable estos dos casos son flujo no uniforme no permanente y flujo no permanente no uniforme, respectivamente.

El flujo no permanente puede ser un fenómeno transitorio en el cual se puede tener flujo permanente o no haber flujo. Un ejemplo se puede ver en la Fig. IV.4., donde (a) es la superficie de un caudal que acaba de entrar al lecho de un arroyo por la abertura repentina de una compuerta. Pasado un tiempo, la superficie del agua está en (b), luego en (c), y finalmente alcanza su equilibrio en (d). El flujo no permanente se ha convertido en flujo permanente. Otro ejemplo del fenómeno transitorio se presenta cuando se cierra una válvula en la descarga de una tubería, provocando que la velocidad dentro de la tubería se decremente hasta cero, en este intervalo existen fluctuaciones en velocidad y presión en el interior de la tubería.

El flujo no permanente también puede incluir un movimiento periódico como el oleaje en una playa, el movimiento de las corrientes en estuarios, y otras oscilaciones. La diferencia entre tales casos y los de flujo permanente medio es que las desviaciones de la media son mucho mayores y la escala de tiempo es también más grande.

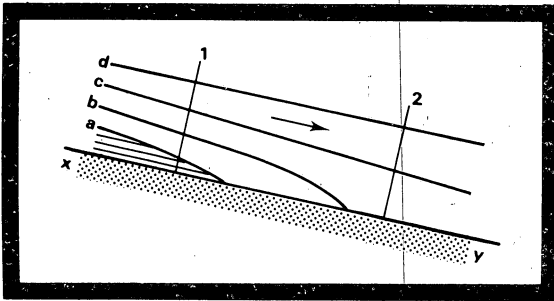


FIG. IV.4. FLUJO NO PERMANENTE EN UN CANAL.

#### IV.2. CONCEPTOS DE SISTEMA Y DE VOLUMEN DE CONTROL.

El diagrama de un cuerpo libre constituye un caso especial del concepto de sistema. Un sistema es una masa bien definida de algún cuerpo o material que se puede distinguir claramente de sus alrededores, nombre que se da al resto del material. Las fronteras de un sistema forman una superficie cerrada, la cual puede cambiar con el tiempo con tal de que siempre contenga la misma masa.

La ley de la conservación de la masa establece que la masa, dentro de un sistema permanece constante con el tiempo. Expresado matemáticamente:

$$\frac{dm}{dt} = 0 \quad (\text{IV.1}),$$

donde  $m$  es la masa total

La segunda ley de Newton para un sistema generalmente se expresa en la forma:

$$\Sigma F = \frac{d(mv)}{dt} \quad (\text{IV.2}),$$

donde  $m$  es la masa constante del sistema,  $\Sigma F$  es la resultante de todas las fuerzas externas que actúan sobre el sistema, incluyendo las fuerzas másicas y  $v$  es la velocidad del centro de masa del sistema.

El volumen de control, conocido también como sistema abierto, se refiere a una región de interés en el espacio a través de cuyas fronteras entra y sale continuamente un fluido. La frontera del volumen de control se llama superficie de control. La forma y tamaño de un volumen de control son enteramente arbitrarios.

El concepto de volumen de control se emplea en la deducción de las ecuaciones de continuidad, de la cantidad de movimiento y de la energía, al igual que en la solución de diversos tipos de problemas.

Todas las posibles situaciones, sin importar la naturaleza del flujo, están sujetas a las siguientes leyes y condiciones, las cuales se pueden expresar en forma analítica:

1. Las leyes de Newton del movimiento, las cuales deben valer para toda partícula en todo instante.
2. La ecuación de continuidad, es decir, la ley de la conservación de la masa.
3. La primera y segunda leyes de la termodinámica.
4. Las condiciones de frontera del problema, las cuales consisten, esencialmente, en declaraciones analíticas de que un fluido tiene velocidad cero respecto a una frontera en la frontera misma o de que un fluido sin fricción no puede penetrar en una frontera.

Existen otras relaciones y ecuaciones que también pueden desempeñar un papel importante, como la ecuación de estado de una sustancia o la ley de Newton de la viscosidad.

A continuación se presenta la relación entre el concepto de volumen de control y el de sistema para una propiedad general de éste, misma que se utiliza posteriormente para obtener las ecuaciones de continuidad, de la energía y de la cantidad de movimiento lineal. Esta relación es la siguiente:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{vc} \eta \rho dV + \int_{sc} \eta \rho v dA \quad (IV.3),$$

donde  $N$  es la cantidad total de alguna propiedad (masa, energía y cantidad de movimiento) dentro del sistema en el instante  $t$ ,  $\eta$  es la distribución por unidad de masa de esta propiedad en el fluido;  $dV$  es un elemento de volumen;  $\rho$  es la densidad del fluido;  $v$  es el vector velocidad y  $dA$  es el vector que representa un elemento de la superficie de control a través de la cual el fluido fluye hacia afuera.

La ecuación IV.3 establece que la rapidez de crecimiento de  $N$  dentro de un sistema es exactamente igual a la rapidez de cre-



cimiento de la propiedad  $N$  dentro del volumen de control (fijo respecto a  $xyz$ ) más el flujo neto de  $N$  a través de la frontera del volumen de control.

IV.3. ECUACIONES DE CONTINUIDAD, DE LA ENERGIA Y DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO PARA UN VOLUMEN DE CONTROL.

IV.3.1. ECUACION DE CONTINUIDAD.

La ecuación de continuidad es consecuencia del principio de conservación de la masa, ecuación (IV.1), el cual establece que la masa dentro de un sistema permanece constante con el tiempo.

Si en la ecuación (IV.3),  $N$  es la masa  $m$  del sistema, entonces  $\eta$  es la masa por unidad de masa, o sea  $\eta=1$ ; por tanto:

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \int_{v.c.} \rho dV + \int_{s.c.} \rho v dA \quad (IV.4).$$

Expresada en palabras, la ecuación de continuidad para un volumen de control establece que la rapidez de crecimiento de la masa dentro del volumen de control es exactamente igual al flujo neto de masa hacia el mismo volumen de control.

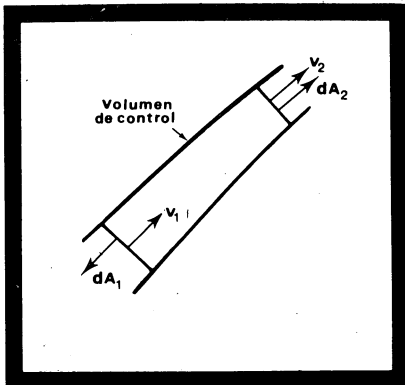


FIG.IV.5. FLUJO PERMANENTE A TRAVES DE UN TUBO DE CORRIENTE.

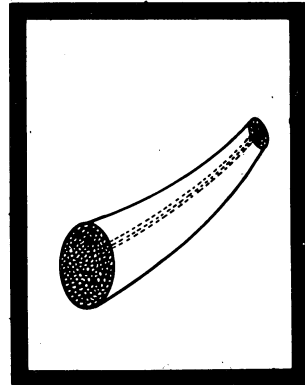


FIG.IV.6. CONJUNTO DE TUBOS DE CORRIENTE ENTRE FRONTERAS FIJAS.

Considerando un flujo permanente a través de un tubo de corriente, Fig. IV.5; el volumen de control está limitado por la pared del tubo y las dos secciones transversales en los extremos 1 y 2. Debido a que se trata de un flujo permanente, el primer término de la ecuación (IV.4) resulta cero; por tanto:

$$\int_{s.c.} \rho v dA = 0 \quad (IV.5),$$

es decir, el flujo de masa neto hacia afuera del volumen de control debe ser cero. Este flujo neto en la sección 1 está dado por  $\rho_1 v_1 dA_1 = -\rho_1 v_1 dA_1$ , mientras que en la sección 2 se tiene  $\rho_2 v_2 dA_2 = \rho_2 v_2 dA_2$ . No existiendo flujo a través de la pared del tubo de corriente, resulta:

$$\rho_1 v_1 dA_1 = \rho_2 v_2 dA_2 \quad (IV.6),$$

expresión que constituye la ecuación de continuidad aplicada a dos secciones de un tubo de corriente con flujo permanente.

Para un conjunto de tubos de corriente, (Fig. IV.6), si  $\rho_1$  es la densidad media en la sección 1 y  $\rho_2$  es la densidad media en la sección 2, se tiene;

$$\rho_1 v_1 A_1 = \rho_2 v_2 A_2 \quad (IV.7),$$

donde  $v$  y  $v$  representan las velocidades medias en cada sección, respectivamente. El valor medio de la velocidad en una sección transversal está dado por:

$$v = \frac{1}{A} \int v dA$$

Si el gasto volumétrico  $Q$  se define como:

$$Q = A \cdot v \quad (IV.8),$$

la ecuación de continuidad toma la forma:

$$\rho_1 Q_1 = \rho_2 Q_2 \quad (IV.9).$$

Para un flujo incompresible y permanente se tiene:

$$Q = A_1 v_1 = A_2 v_2 \quad (IV.10),$$

resulta una forma útil de la ecuación de continuidad.

Para un flujo de densidad constante, permanente o no, la ecuación (IV.5) se reduce a:

$$\int_{sc.} v dA = 0 \quad (IV.11),$$

la cual establece que el volumen neto que se derrama del volumen de control es cero -esto implica que el volumen de control está lleno de líquido todo el tiempo.

Para flujos en dos y tres dimensiones, se deben utilizar expresiones diferenciales de la ecuación de continuidad. Considérese el volumen de control elemental  $dx dy dz$  de la Fig. IV.7, cuyos lados son perpendiculares a los ejes de coordenadas cartesianas en tres dimensiones. La velocidad en el centro del elemento de coordenadas  $(x, y, z)$  tiene como componentes en las tres direcciones,  $u$ ,  $v$  y  $w$ , respectivamente, y la densidad es  $\rho$ . El flujo a través de la cara derecha perpendicular al eje  $x$  se puede expresar como:

$$\left[ \rho u + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) \frac{dx}{2} \right] dy dz$$

ya que tanto  $\rho$  como  $u$  varían en forma continua a través del fluido. En esta expresión  $\rho u dy dz$  representa el flujo de masa a través de la cara central perpendicular al eje  $x$ ; el segundo término  $(\partial(\rho u)/\partial x) (dx/2)$  es la rapidez de crecimiento del flujo de masa con respecto a  $x$ , multiplicado por la distancia  $dx/2$  desde la cara central hasta la cara derecha. En forma similar, el flujo a través de la cara izquierda del elemento es-

$$\left[ \rho u + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) \frac{dx}{2} \right] dy dz,$$

donde  $(-dx/2)$  es la distancia desde el centro hacia la cara izquierda. El flujo neto que sale del elemento en la dirección  $x$  es la diferencia entre las dos cantidades mencionadas, o sea:

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho u) dx dy dz.$$

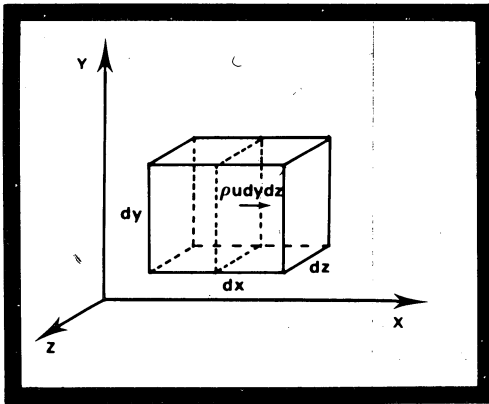


FIG. IV.7. VOLUMEN DE CONTROL PARA ESTABLECER LA ECUACION DE CONTINUIDAD EN COORDENADAS CARTESIANAS.

Se obtienen expresiones similares para las otras dos direcciones, y para el flujo neto total que sale del elemento resulta:

$$\left[ \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w) \right] dx dy dz.$$

Esta suma corresponde al lado derecho de la ecuación (IV.4). Para el lado izquierdo, se obtiene simplemente:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz.$$

Sustituyendo en la ecuación (IV.4):

$$\left[ \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w) \right] dx dy dz = - \frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz,$$

dividiendo entre el volumen del elemento haciendo tender  $dx dy dz$  a cero, en el límite la ecuación de continuidad en un punto será:

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w) = - \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (\text{IV.12}),$$

ecuación válida para todo punto del flujo, sea permanente o no, compresible o incompresible; sin embargo para flujo incompresible, la ecuación se simplifica a

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (\text{IV.13}).$$

Empleando los vectores unitarios  $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$  en las direcciones  $x, y, z$  respectivamente, el operador nabla  $\bar{\nabla}$  queda definido como:

$$\bar{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial}{\partial z} \bar{k} \quad (\text{IV.14}),$$

y el vector velocidad  $\bar{q}$  como:

$$\bar{q} = u\bar{i} + v\bar{j} + w\bar{k} \quad (\text{IV.15}).$$

Por tanto;

$$\begin{aligned} \bar{\nabla} \cdot \bar{q} &= \left( \frac{\partial}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial}{\partial z} \bar{k} \right) \cdot (\rho u \bar{i} + \rho v \bar{j} + \rho w \bar{k}) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w), \end{aligned}$$

ya que  $\bar{i} \cdot \bar{i} = 1, \bar{i} \cdot \bar{j} = 0$ . La ecuación (IV.12) resulta:

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{q} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (\text{IV.16}),$$

y la ecuación (IV.13):

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{q} = 0.$$

El producto  $\bar{\nabla} \cdot \bar{q}$  es la divergencia del vector velocidad  $\bar{q}$ , y se puede interpretar como el flujo neto que sale, por unidad de volumen en un punto y debe ser igual a cero para un flujo incompresible.

Para flujos bidimensionales, mismos que generalmente se suponen en planos paralelos al plano  $xy$ , la componente  $w$  es cero, además de que no existe cambio con respecto a  $z$ , es decir  $\partial/\partial z = 0$ , simplificándose así las diferentes formas examinadas de la ecuación de continuidad.

#### IV.3.2. ECUACION DE ENERGIA.

La primera ley de la termodinámica dice que la energía ni se crea ni se destruye, es más, que todas las formas de energía son equivalentes. En los siguientes incisos se presentan brevemente las diferentes formas de energía presentes en el flujo de un fluido.

##### IV.3.2.1. ENERGIA CINETICA DE UN FLUIDO FLUYENTE

Cuando un cuerpo de masa  $m$  se mueve a una velocidad  $v$  posee una energía cinética  $EC = \frac{1}{2}mv^2$ . De esta forma si todas las partículas de un fluido se mueven a la misma velocidad, su energía cinética también es  $\frac{1}{2}mV$ ; ésta se puede escribir como:

$$\frac{EC}{\text{peso}} = \frac{\frac{1}{2}mv^2}{(\gamma)(V)} = \frac{\frac{1}{2}\rho(V)v^2}{(\gamma)(V)} = \frac{v^2}{2g} \quad (\text{IV.17}).$$

En unidades inglesas  $v/2g$  se expresa en  $ft.lb/lb = ft$  y en el SI como  $N.m/N = m$ .

En el flujo de un fluido real la velocidad de las diferentes partículas generalmente no es la misma, entonces es necesario integrar todas las porciones del flujo para obtener el valor real de la energía cinética. Es conveniente expresar el valor real en términos de la velocidad media  $v$  y un factor  $\alpha$ . Entonces:

$$\frac{EC \text{ real}}{\text{peso}} = \alpha \frac{v^2}{2g} \quad (\text{IV.18}).$$

Considerando el caso donde las componentes axiales de la velocidad varían a través de una sección, Fig. IV.1; si  $u$  es la componente axial de la velocidad en un punto, la masa que fluye a través de un elemento de área  $dA$  es  $\rho dQ = \rho u dA$ . Así el flujo real de energía cinética por unidad de tiempo a través de la sección  $dA$  es  $(\rho u dA)(u^2/2) = (\gamma/2g)u^3 dA$ . El peso del gasto ( $G$ ) que pasa por  $dA$  es  $\gamma Q = \gamma u dA$ . Para toda la sección:

$$\frac{EC_{real}/tiempo}{peso/tiempo} = \frac{EC_{real}}{peso} = \frac{\gamma/2g \int u^3 dA}{\gamma \int u dA} = \frac{\int u^3 dA}{2g \int u dA} \quad (IV.19).$$

Comparando las ecuaciones (IV.18) y (IV.19) se llega a :

$$\alpha = \frac{1}{v^2} \frac{\int u^3 dA}{\int u dA} = \frac{1}{Av^3} \int u^3 dA \quad (IV.20).$$

Dado que  $u$  es mayor que  $v$ , el valor de  $\alpha$  siempre es mayor que 1. Para flujo laminar  $\alpha=2$ ; para flujo turbulento en tuberías,  $\alpha$  varía entre 1.01 y 1.15, pero generalmente se toma entre 1.03 y 1.06.

En ocasiones se desea usar un valor apropiado de  $\alpha$ , pero la mayoría de los casos, la divergencia de 1 es despreciable. Dado que los valores precisos de  $\alpha$  rara vez se conocen, se acostumbra suponer que la energía cinética es  $v^2/2g$  por unidad de peso de fluido, por ejemplo:  $\int t \cdot lb/lb = \int t \delta N \cdot m/N = m$ .

#### IV.3.2.2. ENERGIA POTENCIAL.

La energía potencial de una partícula de fluido depende de su elevación a partir de un nivel de referencia. Dado que generalmente interesan las diferencias de elevación, el nivel de referencia se localiza únicamente por condiciones de conveniencia.

Una partícula de fluido de peso  $W$  situada a una altura  $z$  posee una energía potencial  $Wz$ . Así, la energía potencial por unidad de peso es  $z$ , por ejemplo:  $\int t \cdot lb/lb = \int t \delta m \cdot N/N = m$ .

#### IV.3.2.3. ENERGIA INTERNA.

La energía interna se presenta con más detalle en los textos de termodinámica ya que ésta es la energía térmica, pero brevemente, esta energía se debe al movimiento de las moléculas y las fuerzas de atracción entre ellas. La energía interna está en función de la temperatura; se puede expresar en términos de energía por unidad de masa  $i$  o en términos de ener

gía por unidad de peso  $I$ . Nótese que  $\dot{i} = gI$ .

El cero de la energía interna se puede tomar a una temperatura arbitraria, dado que generalmente se trata con diferencias. Para una masa unitaria,  $\Delta i = c_v \Delta T$ , donde  $c_v$  es el calor específico a volumen constante y sus unidades son  $(ft \cdot lb) / (slug \cdot ^\circ R)$  - en SI:  $(N \cdot m) / (g \cdot K)$  -. También  $\Delta i$  se puede expresar en  $(ft \cdot lb) / (slug)$ , - en SI:  $(N \cdot m / kg)$  -. La energía interna  $I$  por unidad de peso, se expresa en  $ft \cdot lb / lb$  ó  $N \cdot m / N = m$ .

#### IV.3.2.4. ECUACION GENERAL PARA FLUJO PERMANENTE DE UN FLUIDO.

La primera ley de la termodinámica establece que para flujo permanente el trabajo externo realizado sobre un sistema más la energía térmica transferida, ya sea que entre o salga, es igual al cambio de energía del sistema.

Así, para flujo permanente,

$$\text{trabajo} + \text{calor} = \Delta \text{energía.}$$

Ya que trabajo, calor y energía tienen las mismas unidades, éstas son intercambiables bajo ciertas condiciones.

Aplicando la primera ley de la termodinámica al sistema de fluido definido por la masa de fluido contenida en el volumen de control al tiempo  $t$ , entre las secciones 1 y 2 del tubo de corriente de la Fig. IV.8.

El volumen de control está fijo y no se mueve ni cambia de forma. Se trata únicamente con el sistema de fluido contenido

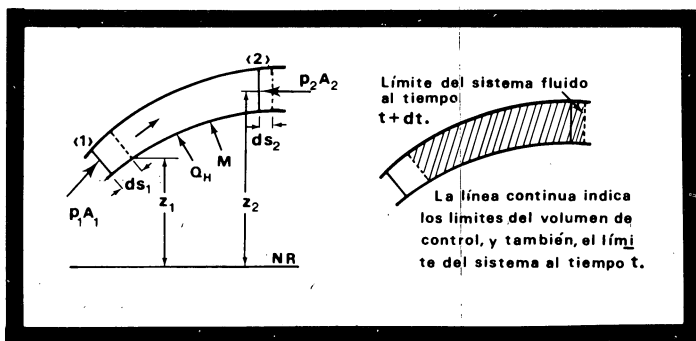


FIG. IV.8. SISTEMA DE CONTROL.



entre las secciones 1 y 2 en el tiempo  $t$ . Este sistema pasa a una nueva posición durante el intervalo de tiempo  $dt$ , como se indica en la Fig. IV.8. Durante el intervalo  $dt$ , se supone que el fluido recorre una distancia  $ds_1$  y  $ds_2$  en las secciones 1 y 2 respectivamente. Como se supone también flujo permanente, la masa que entra es igual a la que sale, esto es  $\gamma_1 A_1 ds_1 = \gamma_2 A_2 ds_2$ . Al moverse el sistema las distancias  $ds_1$  y  $ds_2$ , el trabajo es provocado por las fuerzas de presión  $p_1 A_1$  y  $p_2 A_2$ . Este trabajo se conoce como trabajo de flujo y se puede expresar como:

$$\text{trabajo de flujo} = p_1 A_1 ds_1 - p_2 A_2 ds_2.$$

El signo negativo del segundo término indica que la fuerza y el desplazamiento están en direcciones opuestas.

Si además del trabajo de flujo, se tiene una máquina entre las secciones 1 y 2, existirá el trabajo de flecha. Durante el intervalo  $dt$ , se tiene:

$$\begin{aligned} W_s = \text{trabajo de flecha} &= \frac{\text{peso}}{\text{tiempo}} \times \frac{\text{energía}}{\text{peso}} \times \text{tiempo} = \\ &= \gamma_1 A_1 \frac{ds_1}{dt} h_M dt = \gamma_1 A_1 ds_1 h_M, \end{aligned}$$

donde  $h_M$  es la energía agregada por la máquina al flujo por unidad de peso del fluido. Si la máquina es una bomba,  $h_M$  es positiva; si es una turbina,  $h_M$  es negativa. Nótese que el esfuerzo cortante por fricción en los límites del sistema fluido trabajan sobre el fluido contenido en el sistema. El esfuerzo cortante no es externo al sistema y el trabajo provocado se convierte en calor, mismo que tiende a incrementar la temperatura del fluido en el sistema.

El calor transferido desde una fuente externa al sistema en el intervalo de tiempo  $dt$  es:

$$\text{calor} = \left( \gamma_1 A_1 \frac{ds_1}{dt} \right) Q_H dt = \gamma_1 A_1 ds_1 Q_H,$$

donde  $Q_H$  es la energía agregada al flujo por la fuente externa por unidad de peso de fluido fluyente. Si el flujo de calor sale del fluido, el valor de  $Q_H$  es negativo.

Usando el concepto de volumen de control, considérese sistema de fluido definido por la masa de fluido contenido en el volumen de control al tiempo  $t$ . Al tiempo  $t+dt$  ésta misma masa de fluido se mueve a una nueva posición, como se muestra en la Fig. IV.8b. En ese instante la energía  $E_2$  del sistema, (área sombreada de la Fig. IV.8) se iguala a la energía  $E_1$  que poseía la masa de fluido cuando éste coincide con el volumen de control en el tiempo  $t$  más la energía que sale,  $\Delta E_s$ , del volumen de control durante el intervalo  $dt$  menos la energía que entra  $\Delta E_e$  al volumen de control durante  $dt$ . Entonces:

$$E_2 = E_1 + \Delta E_s - \Delta E_e.$$

Así, el cambio en energía  $\Delta E$  del sistema en consideración durante el intervalo de tiempo  $dt$  es:

$$\Delta E = E_2 - E_1 = \Delta E_s - \Delta E_e.$$

Durante  $dt$  el peso de fluido que entra por 1 es  $\gamma_1 A_1 ds_1$ , y para flujo permanente un peso similar debe salir por la sección 2 al mismo tiempo. Por lo tanto la energía que entra por la sección 1,  $\Delta E_e$ , durante  $dt$  es  $\gamma_1 A_1 ds_1 (z_1 + \alpha v_1^2 / 2g + I_1)$ , y la que sale por 2,  $\Delta E_s$ , se representa por una expresión similar. Entonces

$$\Delta \text{Energía} = \Delta E = \gamma_2 A_2 ds_2 (z_2 + \alpha v_2^2 / 2g + I_2) - \gamma_1 A_1 ds_1 (z_1 + \alpha v_1^2 / 2g + I_1).$$

Aplicando la primera ley de la termodinámica (trabajo+calor =  $\Delta$  energía) y haciendo  $\gamma A ds = \gamma_2 A_2 ds_2$  para flujo permanente y acomodando los términos, se obtiene:

$$\frac{p_1}{\gamma_1} - \frac{p_2}{\gamma_2} + h + Q = \left( z_2 + \alpha_2 \frac{v_2^2}{2g} + I_2 \right) - \left( z_1 + \alpha_1 \frac{v_1^2}{2g} + I_1 \right),$$

o también:

$$\left( z_1 + \frac{p_1}{\gamma_1} + \alpha_1 \frac{v_1^2}{2g} + I_1 \right) + h + Q = \left( z_2 + \frac{p_2}{\gamma_2} + \alpha_2 \frac{v_2^2}{2g} + I_2 \right) \quad (\text{IV.21}).$$

Esta ecuación se aplica a líquidos, gases y vapores, - así como también a fluidos ideales o a fluidos reales con fricción. La única restricción es que es exclusivamente para flujo permanente. Los términos  $p/\gamma$  representan la energía que posee el fluido por unidad de peso del mismo, en virtud de la presión bajo la que existe el fluido. En circunstancias apropiadas esta presión es liberada y transformada en otros tipos de energía, ya sea cinética, potencial o interna. Asimismo, es posible que estos tipos de energía se transformen en energía de presión.

En flujo turbulento existen otras formas de energía cinética además de la de traslación, descrita en la sección IV. 3.2.1. Existe la energía cinética de rotación, como la de los remolinos, iniciada por la fricción del fluido y las fluctuaciones turbulentas en la energía cinética de la velocidad. Esta no se representa por ningún término en la ecuación (IV.21) debido a que su efecto aparece indirectamente. La energía cinética rotacional se puede convertir en incrementos en  $p/\gamma$  ó en  $z$ , pero esta energía no se puede convertir en otra que no sea energía térmica. También puede aparecer como un incremento en el valor numérico de  $I_2$ .

La ecuación general de la energía (IV.21) y la ecuación de continuidad son dos medios importantes para solucionar muchos problemas de la mecánica de fluidos. Para fluidos compresibles es necesario tener una tercera ecuación, ésta es la -- ecuación de estado que proporciona la relación entre la densidad (o volumen específico) y los valores absolutos de presión y temperatura.

En muchas ocasiones la ecuación (IV.21) se puede reducir considerablemente, debido a que ciertas cantidades son iguales y se pueden cancelar una a otra, o son cero. Así, si dos puntos tienen la misma elevación,  $z_1 - z_2 = 0$ . Si el conducto está perfectamente aislado o si la temperatura del fluido y sus alrededores es prácticamente la misma,  $Q_H$  puede tomarse como cero. Por otro lado,  $Q_H$  puede ser muy grande, como en el caso de

un flujo de agua a través de un tubo de caldera. Si no existe máquina alguna entre las secciones 1 y 2, entonces, el término  $h_M$  se anula. Si se tiene máquina, el trabajo hecho por o sobre ésta puede determinarse resolviendo la ecuación (IV.21) para  $h_M$ .

#### IV.3.2.5. ECUACION DE ENERGIA PARA FLUJO PERMANENTE DE FLUIDOS INCOMPRESIBLES.

Para líquidos al igual que para vapores y gases, en los que la variación en la presión sea muy pequeña, el fluido puede considerarse como incompresible con fines prácticos, y de esta manera se puede tomar  $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma = \text{constante}$ . En flujo turbulento el valor de  $\alpha$  es sólo un poco mayor que la unidad, y para simplificar la suposición se puede considerar igual a 1.0. Si el flujo es laminar,  $v^2/2g$  generalmente es más pequeño que los demás términos de la ecuación (IV.21), por lo tanto el error que se tiene al establecer  $\alpha=1$  en lugar de un valor de 2 no es de consideración. Así, para un fluido incompresible la ecuación (IV.21) resulta:

$$\left( \frac{P_1}{\gamma} + z_1 + \frac{v_1^2}{2g} \right) + h_M + Q_H = \left( \frac{P_2}{\gamma} + z_2 + \frac{v_2^2}{2g} \right) + (I_2 - I_1) \quad (\text{IV.22}).$$

La fricción del fluido provoca remolinos y turbulencias, esta forma de energía cinética eventualmente se transforma en energía térmica. Si no existe transferencia de calor, el efecto de la fricción resulta en un aumento en la temperatura de modo que  $I_2$  es mayor que  $I_1$ .

Suponiendo que existe pérdida de calor  $Q_H$  en un gasto que se mantiene a temperatura constante de modo que  $I_1 = I_2$ ; en este caso existe una pérdida de energía del sistema igual a la energía mecánica y que ha sido transformada en energía térmica por la fricción.

Entonces:

$$\frac{\Delta \text{energía interna}}{\text{unidad de masa}} = \Delta i = i_2 - i_1 = c(I_2 - I_1),$$

$$\frac{\Delta \text{energía interna}}{\text{unidad de peso}} = \Delta I = \frac{\Delta \dot{E}}{g} = I_2 - I_1 = \frac{c}{g} (T_2 - T_1)$$

$$= Q_H + h_L \quad (\text{IV.23}),$$

donde  $c$  es el calor específico\* del fluido incompresible y  $h_L$  es la pérdida de energía debida a la fricción del fluido - por unidad de peso del fluido. Lo anterior se puede expresar como:

$$h_L = (I_2 - I_1) - Q_H = \frac{c}{g} (T_2 - T_1) - Q_H \quad (\text{IV.24}).$$

Si la pérdida de calor ( $Q_H$  negativa) es mayor que  $h_L$ , entonces  $T_2 < T_1$ . Si existe absorción de calor ( $Q_H$  positiva),  $T_2$  es mayor que el valor que resulta por efecto de la fricción. Un valor muy alto de  $h_L$  provoca únicamente un pequeño levantamiento en la temperatura si no hay transferencia de calor o, - por otro lado, sólo se requiere una pequeña transferencia de calor para mantener el flujo isotérmico.

Si no existe máquina alguna entre los puntos 1 y 2 y no se pierde o gana calor, sustituyendo la ecuación (IV.24) - en la (IV.22), la ecuación de energía para un fluido incompresible resulta:

$$\frac{p_1}{\gamma} + z_1 + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + \frac{v_2^2}{2g} + h_L \quad (\text{IV.25}),$$

---

\* Para el agua,  $c=1 \text{ Btu}/(\text{lb}_m)(^\circ\text{R})$ . En unidades SI,  $c$  para el agua  $=1 \text{ cal}/\text{g}_m(\text{K})$ . También se puede expresar como  $25000 \text{ ft}\cdot\text{lb}/(\text{slug})(^\circ\text{R})$  ó  $4187 \text{ N}\cdot\text{m}/(\text{kg})(\text{K})$ , y son equivalentes a  $25000 \text{ ft}^2/\text{s}^2 \text{ }^\circ\text{R}$  y  $4187 \text{ m}^2/\text{s}^2 \text{ K}$ , respectivamente. Ver el Apéndice A.

donde  $h_L$  (generalmente conocida como pérdida de carga) representa la pérdida de energía por unidad de peso del fluido. En ocasiones, el valor de  $h_L$  puede ser muy grande y por tanto, para un fluido real nunca puede ser cero; hay casos en que  $h_L$  es tan bajo que se puede despreciar y el error que se comete es muy pequeño, en este caso especial, se tiene:

$$\frac{p_1}{\gamma} + z_1 + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + \frac{v_2^2}{2g} \quad (\text{IV.26}),$$

y por tanto

$$\frac{p}{\gamma} + z + \frac{v^2}{2g} = \text{constante} \quad (\text{IV.27}).$$

Esta ecuación en cualquiera de las dos formas, se conoce como el Teorema de Bernoulli. Nótese que este teorema es para un fluido incompresible sin pérdidas de fricción, sin embargo, se puede aplicar a fluidos reales incompresibles, obteniéndose buenos resultados en situaciones donde los efectos de la presión son muy pequeños.

#### IV.3.2.6. CARGA.

En la ecuación (IV.26) cada término tiene dimensiones de longitud. Así,  $p/\gamma$  llamada carga de presión, representa la energía por unidad de peso contenida en un fluido bajo la presión en que se encuentra el fluido;  $z$ , llamada carga de altura, representa la energía potencial por unidad de peso de fluido; y  $v^2/2g$ , llamada carga de velocidad representa la energía cinética por unidad de peso del fluido. La suma de estos tres términos se conoce como carga total y se denota por  $H$ , donde:

$$H = \frac{p}{\gamma} + z + \frac{v^2}{2g} \quad (\text{IV.28}).$$

Cada término en esta ecuación, aunque generalmente se expresa en metros (o pies), representa Newton metro por Newton de fluido (5 pie-libra/libra).

Para un fluido incompresible, sin pérdidas por fricción y sin una máquina entre los puntos 1 y 2, ( $H_1 = H_2$ ), pero para un fluido real:

$$H_1 = H_2 + h_L \quad (\text{IV.29}),$$

misma que es una manera simplificada de escribir la ecuación (IV.26). Para un fluido real, si no existe entrada de carga de energía  $h_M$ , por una fuente externa, la carga total debe disminuir en la dirección del flujo.

Si existe una máquina entre los puntos 1 y 2, entonces:

$$H_1 + h_M = H_2 + h_L.$$

Si la máquina es una bomba,  $h_M = h_b$ , donde  $h$  es la energía que la bomba añade al flujo. Si es una turbina,  $h_M = -h_t$ , donde  $h_t$  es la carga de energía que la turbina toma del flujo.

#### IV.3.2.7. POTENCIA.

En el desarrollo de la ecuación (IV.21), el término  $\gamma A ds$  representa el peso del fluido que sale; así, todos los términos de la ecuación representan energía por unidad de peso, es decir, carga de energía. Si la carga de energía se multiplica por el peso del gasto ( $G$ ), el producto resultante representa potencia, entonces:

$$\text{Potencia} = \frac{\text{energía}}{\text{tiempo}} = \frac{\text{energía}}{\text{peso}} \times \frac{\text{peso}}{\text{tiempo}} = H G = H \gamma Q \quad (\text{IV.30}).$$

En unidades inglesas,

$$H.P. = \frac{\gamma Q H}{550} \quad (\text{IV.31}),$$

y en unidades métricas

$$kW = \frac{\gamma Q H}{1000} \quad (\text{IV.32}),$$

donde:

$\gamma$  = peso unitario de fluido, en  $\{lb/ft^3\}$  ó  $\{N/m^3\}$ ,

$Q$  = gasto, en  $\{ft^3/seg\}$  ó  $\{m^3/seg\}$ ,

$H$  = carga de energía, en  $\{ft\}$  ó  $\{m\}$ ,

Nota:  $1 \text{ HP} = 550 \text{ ft}\cdot\text{lb}/\text{seg} = 0.746 \text{ kW}$ .

En estas ecuaciones  $H$  puede ser cualquier carga para la cual se desea conocer su potencia. Por ejemplo, para encontrar la pérdida de potencia debida a la fricción del fluido, se sustituye  $h_1$  por  $H$ , para encontrar la potencia que una turbina extrae del flujo, se sustituye  $h_1$  por  $H$ .

Con respecto a la potencia, se sabe que la potencia se origina cuando una fuerza  $F$  actúa en un cuerpo en movimiento, o cuando un torque actúa sobre un cuerpo en rotación, y está dada por:

$$\text{Potencia} = Fv = T\omega$$

donde  $v$  es la velocidad lineal, en  $ft/seg$  ó  $m/seg$ , y  $\omega$  es la velocidad angular, en  $rad/seg$ . La fuerza  $F$  representa la componente en la dirección de  $v$ .

#### IV.3.3. ECUACIONES DE MOVIMIENTO.

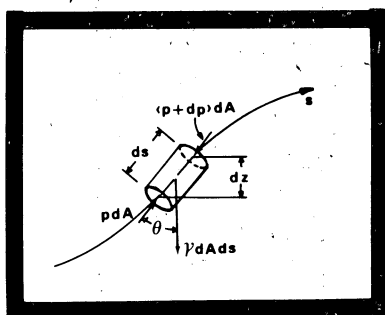
##### IV.3.3.1. ECUACION DE MOVIMIENTO CONTINUO A LO LARGO DE UNA LINEA DE CORRIENTE PARA UN FLUIDO IDEAL.

Considérese un fluido en flujo permanente sin pérdidas por fricción a lo largo de una línea de corriente, Fig. - IV.9. Considerando que las fuerzas actúan sobre pequeños cilindros elementales de fluido en la dirección de la línea de corriente y aplicando la segunda ley de Newton,  $F=ma$ . Las fuerzas que tienden a acelerar la masa de fluido son fuerzas de presión a ambos lados del elemento;

$$pdA - (p+dp)dA = -dpdA,$$



FIG. IV.9. ELEMENTO EN UN TUBO DE CORRIENTE.



donde  $dA$  es la sección transversal del elemento, y la componente del peso en la dirección del movimiento

$$-\rho g ds dA (dz/ds) = -\rho g dA dz.$$

La masa del elemento es  $\rho dA$ , entonces la aceleración para flujo permanente se puede expresar como  $v(dv/ds)$ , de donde:

$$-dp dA - \rho g dA dz = \rho ds dA v \frac{dv}{ds},$$

dividiendo por  $-\rho dA$

$$\frac{dp}{\rho} + v dv + g dz = 0. \quad (IV.34).$$

Esta ecuación se conoce generalmente como la ecuación unidimensional de Euler, y se aplica ya sea en flujos compresibles o incompresibles, ya que la variación de  $\rho$  respecto a la longitud elemental  $ds$  es pequeña. La ecuación (IV.34) también se puede expresar como:

$$\frac{dp}{\gamma} + \frac{dv^2}{2g} + dz = 0 \quad (IV.35).$$

Para el caso de un fluido compresible; dado que  $\gamma$  no permanece constante, se debe introducir una ecuación de estado que relacione  $\gamma$  con  $p$  y  $T$  antes de integrar la ecuación (IV.35).

Para el caso de un fluido incompresible ( $\gamma = \text{constante}$ ), la ecuación (IV.35) se puede integrar directamente, esto es:

$$\int \frac{dp}{\gamma} + \int \frac{dv^2}{2g} + \int dz = \text{constante},$$

entonces;

$$\frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} + z = \text{constante} = \text{carga total} = H \quad (\text{IV.36}).$$

Esta es la ecuación de Bernoulli, ecuación (IV.27), para flujo permanente de un fluido incompresible y sin pérdidas por fricción, a lo largo de una línea de corriente. Entonces se ha desarrollado esta misma ecuación a partir de dos puntos de vista diferentes, primero desde la consideración de la energía y ahora a partir de la segunda ley de Newton.

Si no existe flujo:

$$z + \frac{p}{\gamma} = \text{constante} \quad (\text{IV.37}).$$

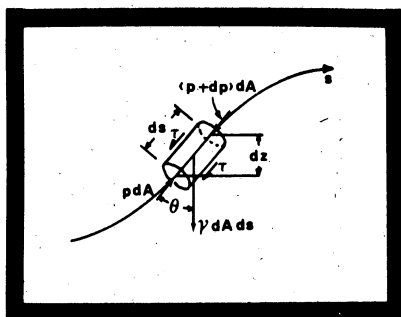
Se puede notar, que para un fluido incompresible en reposo, la suma de la elevación  $z$  en cualquier punto del fluido más la carga de presión en ese punto es igual a la suma de esas dos cantidades en cualquier otro punto.

#### IV.3.3.2. ECUACION DE MOVIMIENTO CONTINUO A LO LARGO DE UNA LINEA DE CORRIENTE PARA UN FLUIDO REAL.

Haciendo una consideración similar a la de la sección anterior, pero con un fluido real, el elemento de fluido (Fig. IV.10) es similar, excepto que hay una fuerza adicional debida a la fricción del fluido, esto es,  $\tau(2\pi r)ds$ , donde  $\tau$  es el esfuerzo cortante en las paredes del elemento y  $2\pi rds$  es el área sobre la que actúa el esfuerzo cortante,  $r$  denota el radio del cilindro elemental bajo consideración. Escribiendo  $F=ma$ , se obtiene, para flujo permanente:

$$-dpdA - \rho g dA dz - \tau(2\pi r) ds = \rho ds dA v \frac{dv}{ds}$$

FIG. IV.10. ELEMENTO EN UN TUBO DE CORRIENTE (FLUIDO REAL).



En este caso  $dA = \pi r^2$ . Sustituyendo  $dA$  por su valor y dividiendo por  $-\pi r^2$  obtenemos:

$$\frac{dp}{\rho} + v dv + g dz = \frac{-2\tau ds}{\rho r} \quad (IV.38).$$

Esta ecuación es similar a la ecuación (IV.34), excepto que tiene un término extra, que es el término que representa la fricción del fluido  $-(2\tau ds)/\rho r$ .

La ecuación (IV.38) también se puede expresar como;

$$\frac{dp}{\gamma} + \frac{dv^2}{2g} + dz = \frac{-2\tau ds}{\gamma r} \quad (IV.39).$$

Esta ecuación se aplica al flujo permanente ya sea de fluidos reales compresibles o incompresibles. Sin embargo, como ya se mencionó, para fluidos compresibles se requiere una ecuación de estado que relacione  $\gamma, p$  y  $T$  antes de integrar la ecuación (IV.39). Para un fluido incompresible ( $\gamma = \text{constanté}$ ) se puede integrar directamente. Integrando de la sección 1 a la 2, donde la distancia entre estos es  $L$ , se obtiene:

$$\frac{p_2}{\gamma} - \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g} + z_2 - z_1 = \frac{-2\tau L}{\gamma r},$$

$$\left( \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 \right) - \frac{2\tau L}{\gamma h} = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2 \quad (\text{IV.40}).$$

Comparando la ecuación (IV.40) con la ecuación (IV.25), se puede ver que las pérdidas por fricción son:

$$h_f = \frac{2\tau L}{\gamma h} \quad (\text{IV.41}).$$

#### IV.3.4. LINEA DE GRADIENTE HIDRAULICO Y LINEA DE ENERGIA.

El término  $z+p/\gamma$  se conoce como la carga estática o carga piezométrica, debido a que representa el nivel que alcanza un líquido en un tubo piezómetro. La línea de carga piezométrica o línea de gradiente hidráulico (LGH), es una línea dibujada a través de las partes altas de las columnas piezométricas. Un tubo de pitot, esto es, un tubo pequeño con su extremo abierto corriente arriba, intercepta la energía cinética del flujo y por tanto, indica la carga total de energía,  $z+p/\gamma+u^2/2g$ . En relación a la Fig. IV.11, que describe el flujo de un fluido ideal, la distancia vertical desde el punto A en el tubo de corriente al nivel de la carga piezométrica en ese punto, representa la carga de presión del flujo en el punto A. La distancia vertical desde el nivel del tubo piezómetro al nivel en el tubo de pitot es  $v^2/2g$ . La línea horizontal dibujada entre los niveles de líquido en los tubos de pitot es conocida como línea de energía (LE). Para el flujo de un fluido ideal, la línea de energía es horizontal debido a que no hay pérdidas de carga.

Un tubo de pitot intercepta la energía total en el campo de flujo en el punto en que se encuentra localizado (Fig. IV.12). Por esto, el nivel al cual el líquido se eleva en un tubo de pitot es  $z+p/\gamma+u^2/2g$  donde  $u$  es la velocidad local.

Para que un tubo de pitot indique el nivel real de la línea de energía, se debe localizar dentro del flujo en el punto donde  $(u^2/2g) = \alpha(v^2/2g)$ , o donde  $u = \sqrt{\alpha}v$ . Si se supone que  $\alpha$  vale 1.0, para indicar la línea de energía, el tubo se debe colocar en el punto donde  $u=v$ .

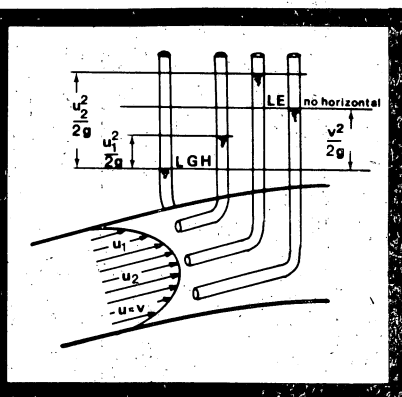
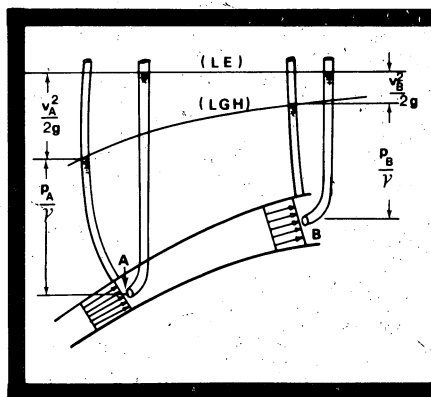


FIG. IV.11. FLUIDO IDEAL

FIG. IV.12. FLUIDO REAL.

Los conceptos de línea de energía y gradiente hidráulico son de utilidad en la solución de problemas de flujo que consideran fluidos incompresibles. Si un fluido se coloca en B en la Fig. IV.13, el líquido asciende por éste hasta una altura  $BB'$  igual a la carga de presión existente en ese punto. Si se cierra el tubo en  $E$ , entonces no existe flujo, y la altura de esa columna es  $BM$ . La diferencia de  $M$  a  $B'$ , cuando el flujo ocurre, se debe a dos factores, uno es la fracción de la carga de presión que se ha convertido en carga de velocidad que el líquido tiene en  $B$ , y el otro es, la pérdida de carga debida a la fricción del líquido entre  $A$  y  $B$ .

Si se coloca una serie de piezómetros a lo largo de la tubería, el líquido asciende dentro de ellos a varios niveles. La línea dibujada a través de las cimas de cada una de las columnas de líquido se llama gradiente hidráulico. Se puede observar que el gradiente hidráulico sería la superficie libre

si pudieran existir y mantenerse las mismas condiciones de flujo.

La línea de gradiente hidráulico indica la presión a lo largo del tubo, y también en cada punto; la distancia vertical desde el tubo al gradiente, es la carga de presión en ese punto, suponiendo que el perfil está dibujado a escala. En C, esta distancia es cero, lo que indica que la presión absoluta dentro del tubo es igual a la presión atmosférica. En D, el tubo está por debajo del gradiente y, por tanto, la carga de presión es  $-DN$ , o una columna de vacío de líquido.

Si el perfil de una tubería se dibuja a escala, entonces no sólo se facilita la medición del gradiente hidráulico sobre el diagrama, sino también se puede observar, únicamente por inspección, la variación de la presión a lo largo de la tubería. El gradiente hidráulico es una línea recta sólo si la tubería es recta y de diámetro uniforme, pero para curvaturas graduales, las que frecuentemente se encuentran en tuberías largas, la desviación de una línea recta es muy pequeña. Por supuesto, si existen pérdidas de carga locales, además de las pérdidas normales de fricción, puede haber abatimientos bruscos en la línea de gradiente hidráulico. Los cambios de diámetro, con cambios resultantes de velocidad, provocan cambios bruscos en el gradiente.

Si la carga de velocidad es constante, como en la Fig. IV.13, el abatimiento en el gradiente hidráulico, entre dos puntos cualesquiera, es el valor de la pérdida de carga entre esos dos puntos, y la pendiente de la línea de gradiente hidráulico es, entonces una medida de la velocidad de las pérdidas. Así, en la Fig. IV.14, la velocidad de las pérdidas es mucho menor que en el tubo más pequeño. Si la velocidad cambia, el gradiente hidráulico asciende en la dirección del flujo, como se muestra en las Figs. IV.14 y IV.15.

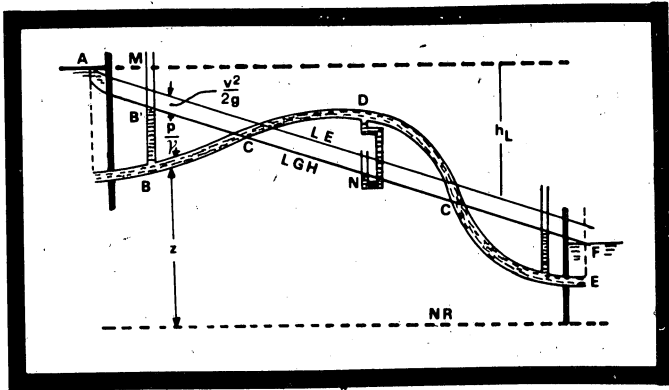


FIG. IV. 13. LINEAS DE ENERGIA Y DE GRADIENTE HIDRAULICO.

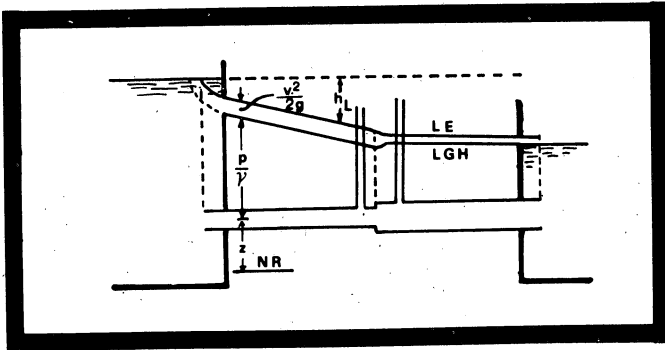


FIG. IV. 14. PERDIDAS EN LAS TUBERIAS.

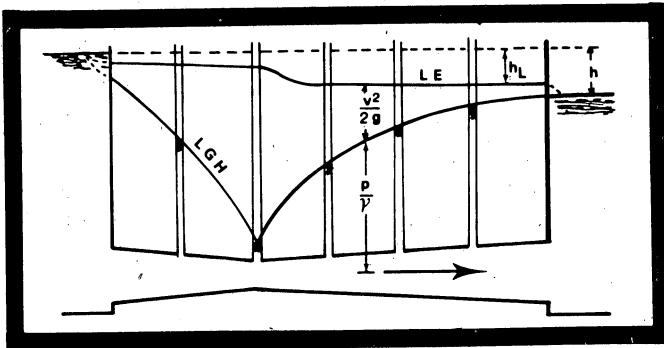


FIG. IV. 15. PERDIDAS EN LAS TUBERIAS.

#### IV.3.5. ECUACION DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO LINEAL.

Para establecer la ecuación de la cantidad de movimiento lineal para un volumen de control, se utiliza la ecuación (IV.3) en la segunda ley de Newton, ecuación (IV.2). Si  $N$  es la cantidad de movimiento lineal  $mv$  del sistema y,  $n$  es la cantidad de movimiento por unidad de masa  $\rho v/\rho$ , se puede escribir, mediante las ecuaciones (IV.2) y (IV.3):

$$\Sigma F = \frac{d(m\bar{v})}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{v.c.} \rho \bar{v} dv + \int_{s.c.} \rho \bar{v} dA \quad (IV.42).$$

Esta ecuación indica que la fuerza resultante que actúa en un volumen de control es igual a la rapidez con que aumenta la cantidad de movimiento dentro del volumen de control más el flujo neto de cantidad de movimiento que sale del volumen de control.

La ecuación vectorial (IV.42) se puede descomponer en tres ecuaciones escalares, correspondiendo a cada una de tres direcciones mutuamente perpendiculares; por ejemplo, en la dirección  $x$  se tiene:

$$\Sigma F_x = \frac{\partial}{\partial t} \int_{v.c.} \rho v_x dv + \int_{s.c.} \rho v_x \bar{v} dA \quad (IV.43)$$

Al hacer la selección del volumen de control, suele ser ventajoso tomar las superficies por donde cruza el flujo perpendicularmente a la dirección de la velocidad. Si además, la velocidad es constante en dichas superficies, el cálculo de las integrales correspondientes se simplifica notablemente; por ejemplo el volumen de control de la Fig. IV.5, donde se tiene un flujo permanente, la fuerza  $F_x$  que actúa sobre el volumen de control queda dada por la ecuación (IV.43) como:

$$F_x = \rho_2 A_2 v_2 v_{x2} - \rho_1 A_1 v_1 v_{x1} \quad (IV.44),$$



es decir

$$F_x = \rho Q (V_{x_2} - V_{x_1}) \quad (\text{IV.45}),$$

donde la masa por unidad de tiempo que entra y sale del volumen de control es:

$$\rho Q = \rho Q_1 = \rho_2 Q_2 \quad (\text{IV.46}).$$

Cuando la velocidad varía sobre una sección transversal plana, que forma parte de la superficie de control, la velocidad promedio puede emplearse si se introduce un factor de corrección  $\beta$ , (Fig. IV.16).

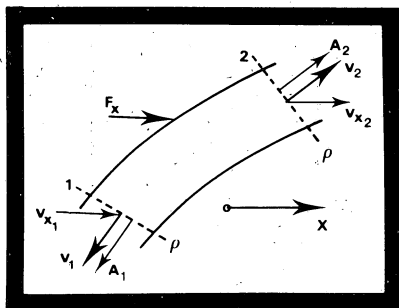
$$\rho v^2 dA = \beta \rho \bar{v}^2 A \quad (\text{IV.47}),$$

donde  $\beta$  es adimensional. Despejando  $\beta$ , obtenemos:

$$\beta = \frac{1}{A} \int_A \left(\frac{v}{\bar{v}}\right)^2 dA \quad (\text{IV.48}).$$

Para flujo laminar en un tubo circular recto  $\beta$  vale  $4/3$ . Este factor de corrección toma un valor de 1.0 para flujo uniforme y nunca es menor que 1.0.

FIG. IV.16. VOLUMEN DE CONTROL CON FLUJO UNIFORME, PERPENDICULAR A LAS SUPERFICIES 1 Y 2.



Al aplicar la ecuación (IV.42) o la de alguna de sus componentes como la ecuación (IV.48), se debe tener cuidado en definir claramente el volumen de control y las fuerzas que en él actúan. El signo del término que representa el flujo que entra o sale del volumen de control, también deberá determinarse con cuidado.

#### IV.3.6. ECUACION DEL MOMENTO DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO.

La ecuación general para cantidad de movimiento lineal aplicada a un volúmen de control, ecuación (IV.42), es

$$\mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{v.c.} \rho \bar{u} dV + \int_{s.c.} \rho \bar{u} \bar{u} dA \quad (IV.42).$$

El momento de una fuerza respecto a un punto  $O$  (Fig.IV.17) está dado por;

$$\bar{r} \times \bar{F}$$

el cual es un producto vectorial de  $\bar{F}$  y el vector de posición  $\bar{r}$  de un punto sobre la línea de acción de la fuerza, desde el punto  $O$ . El producto vectorial tiene por magnitud:

$$|\bar{r} \times \bar{F}| = Fr \text{ sen } \theta$$

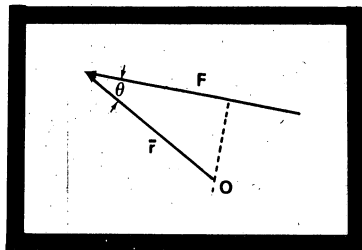


FIG.IV.17. MOMENTO DE UN VECTOR.

En la Fig.IV.17, la fuerza tiende a ocasionar una rotación alrededor de  $O$  en el sentido contrario al de las manecillas del reloj.

Al tomar  $\bar{r} \times \bar{F}$  en la ecuación (IV.42),

$$\bar{r} \times \bar{F} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{v.c.} \rho \bar{r} \times \bar{u} dV + \int_{s.c.} (\rho \bar{r} \times \bar{u}) (\bar{u} \cdot dA) \quad (IV.49).$$

El lado izquierdo de la ecuación es el par ejercido por la resultante de las fuerzas que actúan sobre el volúmen de control, y los términos del lado derecho representan la rapidez de cambio del momento de la cantidad de movimiento dentro del

volúmen de control, más el flujo neto del momento de la cantidad de movimiento que sale del volúmen de control. Esta es la ecuación general del momento de la cantidad de movimiento para un volúmen de control y resulta de gran utilidad en el análisis de ciertos problemas; por ejemplo, en turbomaquinaria, donde es más significativo hablar de pares que de fuerzas.

Cuando se aplica la ecuación (IV.26) al caso de un escuadrado en el plano  $xy$ , con  $r$  como la distancia más corta a la componente tangencial  $v_t$  de la velocidad y  $v_n$  como la componente normal de la velocidad, (Fig.IV.18), se tiene:

$$F_t r = T_z = \int_{s,c} \rho r v_t v_n dA + \frac{\partial}{\partial t} \int_{v,c} \rho v v_t dV \quad (IV.50),$$

donde  $T_z$  es el par. Una fórmula muy útil de la ecuación (IV.50) aplicada a un volúmen de control de forma anular, en estado permanente (Fig.IV.19) es:

$$T_z = \int_{A_2} \rho_2 r_2 v_{t_2} v_{n_2} dA_2 - \int_{A_1} \rho_1 r_1 v_{t_1} v_{n_1} dA_1 \quad (IV.51).$$

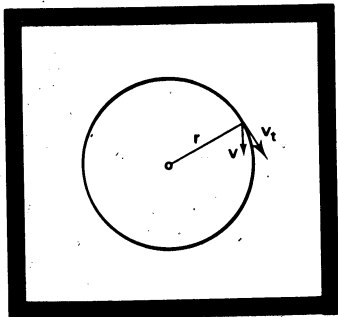


FIG.IV.18. FLUJO EN DOS DIMENSIONES

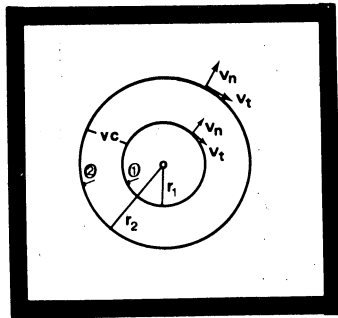


FIG.IV.19. FLUJO A TRAVES DE UN VOLUMEN DE CONTROL ANULAR.

Para simetría circular completa, donde  $\rho, v_t$  y  $v_n$  son constantes sobre las superficies de control de entrada y salida, la forma resulta aún más simple;

$$T_z = \rho Q [(rv_t)_2 - (rv_t)_1] \quad (\text{IV.52}),$$

ya que  $\int \rho v_n dA = \rho Q$ , tanto en la entrada como en la salida.

#### IV.4. EJEMPLOS.

IV.4.1. La distribución de velocidades para un flujo incompresible en dos dimensiones está dado por:

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad v = \frac{-y}{x^2 + y^2}$$

Demstrar que el flujo satisface la ecuación de continuidad.

Solución.

La ecuación (IV.13) se reduce a:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

por tanto

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-1}{x^2 + y^2} + \frac{2x^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{-1}{x^2 + y^2} + \frac{2y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

sumando estas dos expresiones;

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= -(x^2 + y^2)^{-2} + 2x^2(x^2 + y^2)^{-3} - (x^2 + y^2)^{-2} + 2y^2(x^2 + y^2)^{-3} \\ &= 2x^2 + 2y^2 - 2x^2 - 2y^2 = 0 \end{aligned}$$

lo que satisface la ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

IV.4.2. Un líquido con densidad relativa de 1.26 fluye en una tubería a razón de  $25 \text{ ft}^3/\text{seg}$ . En un punto donde el diámetro del tubo es de  $24 \text{ pg}$ , la presión es de  $45 \text{ psi}$ . Encontrar la presión en un segundo punto donde el diámetro del tubo es de  $12 \text{ pg}$ , si este segundo punto está  $3 \text{ ft}$  por debajo del primero. Despreciar las pérdidas de carga.

Solución.

$$v_1 = \frac{Q}{A_1}; \quad v_2 = \frac{Q}{A_2};$$

$$v_1 = \frac{25}{\pi(24/2)^2/4} = \frac{25}{\pi} = 7.9577$$

$$v_2 = \frac{25}{\pi(12/2)^2/4} = \frac{25}{\pi/4} = 31.8310$$

de la ecuación (IV.36);

$$0 + \frac{45(144)}{1.26(62.4)} + \frac{(7.9577)^2}{64.4} = -3 + \frac{p_2(144)}{1.26(62.4)} + \frac{(31.831)^2}{64.4}$$

$$82.4176 + 0.9833 = -3 + 1.8315p_2 + 15.7331$$

$$p_2 = 38.5847 \text{ psi.}$$

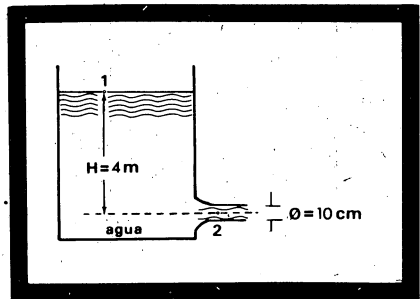


FIG. IV.20. DESCARGA DE UN DEPOSITO A TRAVES DE UN ORIFICIO.

IV.4.3. a) Determinar la velocidad de salida del agua a través de la boquilla del depósito mostrado en la Fig. IV.20.

b) Encontrar el gasto a través del orificio.

Solución.

a) El chorro de descarga toma una forma cilíndrica con la presión atmosférica que actúa en su periferia; para los efectos prácticos, la presión a lo largo de su línea de acción se puede considerar como si fuera la atmosférica. Si se aplica la ecuación de Bernoulli entre un punto en la superficie libre del agua y un punto aguas abajo de la boquilla, se tiene:

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2$$

Si la presión de referencia es la presión atmosférica local,  $p_1 = p_2 = 0$ . Por otro lado, si se toma como nivel de referencia el correspondiente al punto 2, se obtiene  $z_2 = 0$ ,  $z_1 = H$ . Finalmente, la velocidad en la superficie libre del depósito es prácticamente cero. Por tanto, resulta:

$$0 + 0 + H = \frac{v_2^2}{2g} + 0 + 0$$

es decir:

$$v_2 = \sqrt{2gH} = \sqrt{(2)(9.806)(4)} = 8.86 \text{ m/s}$$

fórmula que establece que la velocidad de salida del líquido es igual a la velocidad de caída libre desde una altura correspondiente al nivel de la superficie libre del depósito. Este resultado se conoce como teorema de Torricelli.

b) El gasto  $Q$  es igual al producto de la velocidad de salida y el área transversal del chorro, es decir:

$$Q = A_2 v_2^2 = \pi r^2 v_2 = (0.05)^2 (\pi) (8.86) = 0.07 \text{ m}^3/\text{seg.}$$

IV.4.4. Un líquido con densidad relativa de 1,26 es bombeado a través de una tubería del punto A al punto B. El diámetro en A es de 24pg y la presión de 45psi y en B, el diámetro de la tubería es de 12pg y la presión correspondiente es de 50 psi. El punto B está 3ft por debajo de A. Encontrar el gasto, si la bomba añade 22 H.P. al flujo. Despreciar las pérdidas de carga.

Solución.

$$H.P. = \frac{\gamma Q H}{550}$$

$$HP = 22 = \frac{(1.26 \times 62.4) Q h_b}{550}$$

$$h_b = \frac{153.897}{Q}$$

Usando la ecuación (IV.25)

$$0 + \frac{45 \times 144}{1.26 \times 62.4} + \frac{(Q/\pi)^2}{64.4} + \frac{153.897}{Q} = -3 + \frac{50 \times 144}{1.26 \times 62.4} + \frac{(Q/\pi/4)^2}{64.4}$$

$$82.4176 + \frac{Q^2}{635.6025} + \frac{153.897}{Q} = 88.5751 + \frac{Q^2}{39.7252}$$

resolviendo:

$$Q = 14.5 \text{ ft}^3/\text{seg.}$$

## CAPITULO V

### FLUJO EN CANALES ABIERTOS

Un canal abierto es aquel en el cual el flujo de un fluido no se encuentra completamente confinado por un sólido, y por tanto, posee una superficie libre sujeta únicamente a la presión atmosférica; el flujo no solamente lo causa una carga externa, sino que también está afectado principalmente por la componente de la gravedad a lo largo de toda la pendiente del canal.

Los principales tipos de canales abiertos son los arroyos naturales y ríos, canales artificiales, drenajes, túneles y tuberías que no estén completamente llenas. Los canales artificiales se pueden construir para transportar agua con fines de irrigación, abastecimiento de agua a las ciudades, control de inundaciones, drenajes, etc.

La solución de los problemas de flujo en canales abiertos es mucho más complicada que para tuberías de presión. Prácticamente todas las tuberías son redondas, pero las secciones transversales de los canales son de muy diversas formas, desde circulares hasta las formas más caprichosas creadas por la naturaleza.

El flujo uniforme se establece eventualmente en un canal lo suficientemente largo, con una pendiente y sección transversal constante. Para un canal con una rugosidad, sección y pendientes dadas, existe, para un flujo dado, "una y sólo una profundidad" llamada  $y_0$ , en la cual el flujo es uniforme. Así,



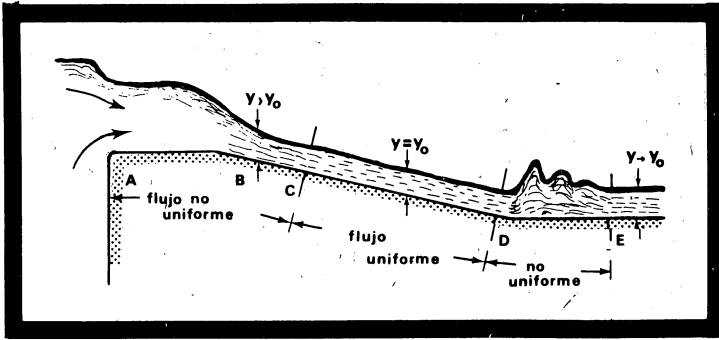


FIG.V.1. FLUJO ESTACIONARIO EN UN CANAL

en la Fig. V.1, el flujo se acelera en la dirección de A a C, estableciéndose el flujo uniforme desde C a D, con una profundidad  $y_0$ ; después sufre una desaceleración debida al cambio de pendiente entre D y E; y finalmente, alcanza una nueva profundidad  $y_0$  en cierto punto más allá de E.

El flujo en un canal abierto generalmente es totalmente rugoso, esto es, ocurre para un número de Reynolds muy alto.

#### V.1. PERIMETRO MOJADO Y RADIO HIDRAULICO.

Para conductos con secciones transversales no circulares, se debe tomar otro valor equivalente al diámetro para introducir la dimensión lineal en el número de Reynolds, y éste es el radio hidráulico, que se define como:

$$R_h = \frac{A}{P} \quad (V.1),$$

donde A es el área de la sección transversal del fluido; P es el "perímetro mojado", o sea la porción del perímetro de la sección donde hay contacto entre fluido y sólido. Para un flujo que fluye en un tubo circular completamente lleno se tiene:

$$R_h = \frac{\pi r^2}{2\pi r} = \frac{r}{2} = \frac{D}{4} \quad (V.2).$$

Así  $R_h$  no es el radio del tubo y, entonces, el término "radio" puede confundirnos. Si un tubo circular tiene líquido hasta la mitad de él, el  $R_h$  y el perímetro mojado son exactamente la mitad de los valores anteriores; así,  $R_h$  es  $r/2$ , o sea, el mismo valor que si el tubo estuviera completamente lleno. Pero si por ejemplo, la profundidad de flujo es  $0.8D$ , entonces  $A=0.674D^2$  y  $P=2.21D$ , por tanto:  $R_h=0.303D$  ó  $0.608r$ .

El radio hidráulico es una manera conveniente para expresar la forma y el tamaño del conducto, dado que para la misma área transversal el valor del  $R_h$  varía con la forma.

Para evaluar el número de Reynolds para un conducto circular es conveniente sustituir  $4R_h$  por  $L$  en la ecuación (III.12):

$$N_R = \frac{4\rho v R_h}{\mu} = \frac{4v R_h}{\nu} \quad (V.3).$$

Por tanto, el valor crítico del número de Reynolds al cual ocurre el cambio de flujo laminar a turbulento en canales abiertos es 500, mientras que en un conducto completamente lleno, el valor crítico de  $N_R$  es 2000.

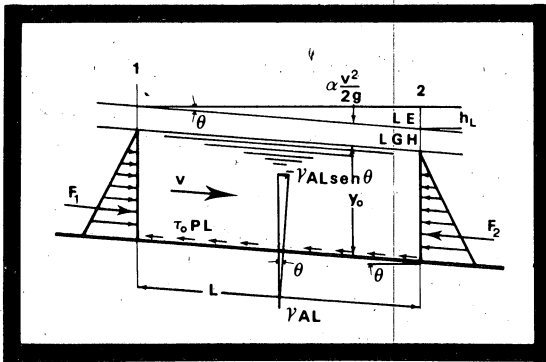


FIG.V.2. RESISTENCIA AL FLUJO UNIFORME.

## V.2. ECUACION PARA FLUJO UNIFORME

Considerando una pequeña extensión de longitud  $L$  entre las secciones 1 y 2 de un canal con flujo uniforme y área  $A$ , Fig. V.2. Como el flujo no se acelera ni se desacelera, se puede considerar el cuerpo de agua contenido en la extensión en equilibrio estático. Sumando las fuerzas a lo largo del canal, la fuerza de presión hidrostática  $F_1$  balancea a la otra,  $F_2$ , y viceversa, dado que no hay variación en la profundidad  $y$  entre las estaciones. La única fuerza en la dirección del movimiento es la componente de la gravedad y la debida al esfuerzo cortante  $\tau_0$  actuando sobre el área  $PL$ , donde  $P$  es el perímetro mojado de la sección. Así:

$$\gamma AL \text{ sen } \theta = \tau_0 PL, \quad (\text{V.4}),$$

pero la pendiente hidráulica  $S$  se define como  $S = h_L/L = \text{sen } \theta$ . Resolviendo para  $\tau_0$ , tenemos:

$$\tau_0 = \frac{\gamma A}{P} S = \gamma R_h S \quad (\text{V.5}).$$

Por otro lado, suponiendo que el esfuerzo cortante es función de  $\rho, \nu, \mu$  y una longitud característica, se tiene:

$$\tau_0 = K R_h^a \rho^b \mu^c \nu^d \quad (\text{V.6}),$$

donde  $K$  es una constante de proporcionalidad. Sustituyendo en la ecuación (V.6) las dimensiones de cada término,  $[F, L, T]$ , se tiene:

$$FL^{-2} = KL^a (F L^{-4} T^2)^b (F L^{-2} T)^c (L T^{-1})^d$$

Dado que las dimensiones de los dos lados de la ecuación deben ser iguales;

Para $F$ ;	$1 = b + c$
$L$ ;	$-2 = a - 4b - 2c + d$
$T$ ;	$0 = 2b + c - d$

La solución de estas tres ecuaciones, en términos de  $d$  son:

$$a=d-2 ; \quad b=d-1; \quad c=2-d ;$$

Sustituyendo estos valores por los exponentes de la ecuación (V.6),

$$\tau_o = KR_h^{d-2} \rho^{d-1} \mu^{2-d} v^d \quad (V.7).$$

Se puede arreglar como:

$$\tau_o = K \left( \frac{R_h v}{\mu} \right)^{d-2} \rho v^2 = 2KN_R^{d-2} \rho \frac{v^2}{2} \quad (V.8),$$

donde se puede ver que  $R_h v / \mu$  es un número de Reynolds, con  $R_h$  como la longitud. Agrupando los términos adimensionales en el lado derecho de la ecuación (V.8) y representándolos por el término  $c_f$  obtenemos:

$$c_f = 2KN_R^{d-2} \quad (V.9),$$

por tanto;

$$\tau_o = c_f \rho \frac{v^2}{2} \quad (V.10).$$

Sustituyendo el valor de  $\tau_o$  en la ecuación (V.5):

$$\tau_o = c_f \rho \frac{v}{2} = \gamma R_h S. \quad (V.11).$$

Esta ecuación se puede resolver para  $v$  en términos del coeficiente de fricción  $c_f$ , y se obtiene:

$$v = \sqrt{\frac{2g}{c_f} R_h S} \quad (V.12).$$

### V.3. FORMULA DE CHEZY.

En 1775, Chezy propuso que la velocidad de un fluido en un canal abierto varía proporcionalmente a  $\sqrt{R_h S}$ , o sea:

$$v = c \sqrt{R_h S} \quad (V.13),$$

la cual se conoce como fórmula de Chezy. Esta ecuación ha sido ampliamente usada en canales abiertos y tuberías. Comparando las ecuaciones (V.12) y (V.13), se tiene que  $c = \sqrt{2g/C_f}$ . A pesar de la simplicidad de la ecuación (V.13),  $c$  no es un número puro, sino que tiene las dimensiones  $[L^{0.5} T^{-1}]$ , y es necesario que los valores de  $c$  en unidades métricas se conviertan a unidades inglesas antes, para usarse en la fórmula.

Dado que  $c$  y  $C_f$  se relacionan, para un canal pequeño con lados lisos, el problema de determinar estos parámetros es el mismo que en el caso de una tubería, pero la mayoría de los canales tienen mayores diámetros que las tuberías, obteniéndose números de Reynolds mucho mayores en los canales.

#### V.4. FORMULA DE MANNING.

Una de las mejores y también una de las fórmulas más ampliamente usadas para los problemas de flujo en canales abiertos, es la establecida por Robert Manning en 1890; él encontró, a partir de numerosas pruebas, que el valor de  $c$  varía aproximadamente como  $R_h^{1/6}$ , y otros observaron que el factor de proporcionalidad es más cercano al recíproco de  $n$  (coeficiente de rugosidad en la fórmula de Kutter\*). La fórmula de Manning, en unidades métricas es:

$$v \left[ \frac{m}{seg} \right] = \frac{1}{n} R_h^{2/3} s^{1/2} \quad (V.14),$$

Se puede ver que las dimensiones de  $n$  son  $T L^{1/3}$ . En unidades inglesas;

$$v \left[ \frac{ft}{seg} \right] = \frac{1.49}{n} R_h^{2/3} s^{1/2} \quad (V.15).$$

---

\* Consultar: Ganguillet-Kutter, "Flows of Waters in Rivers & Other Channels". Jhon Wiley & Sons, Inc., New York, 1869.

donde 1.49 es la raíz cúbica de 3.28, número de pies contenidos en un metro. A pesar de las dificultades dimensionales que presenta la fórmula de Manning, ésta sigue siendo popular debido a su razonable aproximación y simplicidad. Valores representativos de  $n$  para varias superficies están dados en la Tabla V.1.

TABLA V.1. VALORES DE  $n$  EN LA FÓRMULA DE MANNING.

MATERIAL	FACTOR $n$
Madera Cepillada	0.012
Madera sin cepillar	0.013
Concreto acabado	0.012
Concreto sin acabado	0.014
Fierro fundido	0.015
Ladrillo	0.016
Acero para remaches	0.018
Metal corrugado	0.022
Piedra de cantera	0.025
Tierra	0.025
Tierra con piedras o yerbas	0.035
Grava	0.029

En términos de gasto, las ecuaciones (V.14) y (V.15), se pueden expresar:

en unidades métricas:  $Q [m^3 / seg] = \frac{1}{n} AR_h^{2/3} S^{1/2}$  (V.16a),

en unidades inglesas:  $Q [ft^3 / seg] = \frac{1.49}{n} AR_h^{2/3} S^{1/2}$  (V.16b),

Combinando la ecuación (V.12) con las ecuaciones (V.14) y (V.15), se obtiene:

en Unidades métricas:  $n = R_h^{1/6} \sqrt{c_f / 2g}$ ,

en Unidades inglesas:  $n = 1.49 R_h^{1/6} \sqrt{c_f / 2g}$

Sustituyendo el valor de  $g$  se obtiene:

en Unidades métricas:  $n = 0.2258 c_f^{1/2} R_h^{1/6}$  (V.17a),

en Unidades inglesas:  $n = 0.12466 c_f^{1/2} R_h^{1/6}$  (V.17b).

Así se ve que  $n$  se relaciona con el coeficiente de fricción, donde el radio hidráulico indica el tamaño del canal.

### V.5. EJEMPLOS.

V.5.1. Dado el canal de la Fig. V.3., encontrar la profundidad, para flujo uniforme, cuando el gasto  $Q=225 \text{ ft}^3/\text{seg}$ , si  $S_0=0.0006$  y  $n=0.016$ . Calcular el valor correspondiente de  $c_f$ .  
Solución.

$$A = (10 + 2y)y,$$

$y$

$$R_h = \frac{A}{P} = \frac{(10+2y)y}{10+2\sqrt{5}y}$$

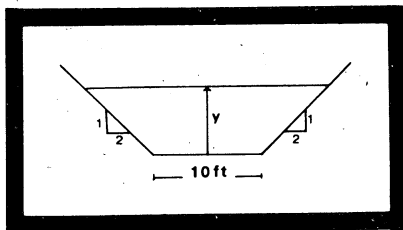


FIG.V.3. CANAL.

entonces, utilizando la ecuación (V.16b):

$$Q = 225 = \frac{1.49}{0.016} (10+2y)y \left[ \frac{(10+2y)y}{10+2\sqrt{5}y} \right]^{2/3} (0.0006)^{1/2}$$

por ensayos,  $y_0 = 3.4 \text{ ft}$ , que es la profundidad del flujo uniforme.

$$\begin{aligned} A &= [10+2(3.4)] 3.4 = 57.12 \text{ ft}^2 \\ P &= [10+2\sqrt{5}(3.4)] = 25.20 \text{ ft} \\ R_h &= \frac{A}{P} = \frac{57.12}{25.20} = 2.267 \text{ ft} \end{aligned}$$

Rearreglando la ecuación (V.17b):

$$c_f = \left[ \frac{n}{0.12466 R_h^{1/6}} \right]^2 = \left[ \frac{0.016}{0.12466} \times \frac{1}{2.267^{1/6}} \right]^2$$

Resolviendo:

$$c_f = 0.01254$$

V.5.2. Determinar el gasto a través de un canal de sección trapezoidal (Fig.V.4), cuya sección tiene un ancho  $b=8\text{m}$  y cuyos lados tienen pendiente uno a uno. El tirante es de  $6\text{m}$  y la pendiente de la sección es de  $0.0009$ . La superficie del canal tiene un acabado de concreto revestido.

Solución.

De la Tabla V.1,  $n=0.012$

El área de la sección transversal es:

$$A = (8 \times 6) + (6 \times 6) = 84 \text{ m}^2,$$

y el perímetro mojado es:

$$P = 8 + 2(6\sqrt{2}) = 24.97.$$

Sustituyendo en la ecuación (V.16a), se tiene:

$$Q = \left( \frac{1}{0.012} \right) (84) \left( \frac{84}{24.97} \right)^{2/3} (0.0009)^{1/2}$$

$$Q = (7000) (3.36404)^{2/3} (0.0009)^{1/2}$$

$$Q = 471.59832 \text{ m}^3/\text{seg.}$$

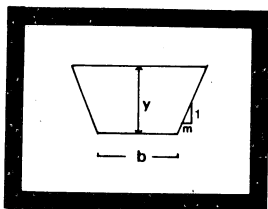


FIG.V.4. CANAL.

Cuando no se conoce el área de la sección transversal del canal, es necesario proceder por ensayos, como en el ejemplo V.5.1. Las expresiones para el radio hidráulico y el área transversal incluyen al tirante en forma tal que no se pueden resolver explícitamente.



# CAPITULO VI

## FLUJO EN TUBERIAS

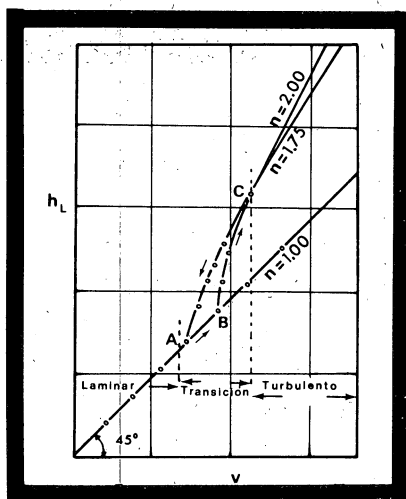
En este capítulo se discuten algunos aspectos de flujo estacionario en conductos a presión, y se limita a los fluidos incompresibles, ésto es, aquellos para los que  $\rho = \text{constante}$ . Estos incluyen a todos los líquidos y a gases que fluyan con pequeños cambios de presión y se puedan considerar como incompresibles.

### VI.1. FLUJO LAMINAR Y TURBULENTO.

Si la pérdida de carga a lo largo de una tubería unforme dada, se mide a diferentes velocidades, se encuentra que, si la longitud y la velocidad son lo suficientemente bajas para asegurar flujo laminar, la pérdida de carga, debida a la fricción es directamente proporcional a la velocidad, como se muestra en la Fig. VI.1. Pero cuando se incrementa la velocidad hasta un punto B, y observando el flujo en un tubo transparente, se nota el cambio de flujo laminar a turbulento y además existe un cambio súbito en el gasto en el cual varía la pérdida de carga. Graficando las dos variables en un papel logarítmico, se ve que, después de una cierta región de transición, el rango de la pendiente varía entre 1.75 y 2.00.

También se puede ver que para flujo laminar, el cambio de energía debido a la fricción varía conforme a una función  $\phi$ , mientras que para flujo turbulento, la fricción varía conforme

FIG.VI.1. GRAFICA LOG-LOG  
PARA EL FLUJO EN  
UN TUBO UNIFORME



a  $\phi^n$ , donde el rango de  $n$  va de 1.75 a 2.00. El valor mínimo - (1.75), para flujo turbulento se encuentra en tuberías con paredes lisas y cuando la rugosidad de la pared se incrementa, - también el valor de  $n$  aumenta hasta su máximo valor (2.00).

Los puntos en la Fig. VI.1., se obtuvieron directamente de las mediciones de Reynolds y muestran curvas determinadas - en la zona de transición, donde los valores de  $n$  son algunas - veces mayores que 2. Si la velocidad se reduce gradualmente, - desde un valor alto, la línea BC no sigue el mismo camino, si - no que caen sobre la curva CA. El punto B se conoce como el - punto crítico superior y, A como el punto crítico inferior.

Por tanto, la velocidad no es el único valor que deter - mina si el flujo es laminar o turbulento. El criterio a seguir es, usar el número de Reynolds, mismo que se discutió en la - Sección III.2.1. Para una tubería circular, la dimensión lineal  $L$  se puede tomar como el diámetro  $D$ , entonces:

$$N_R = \frac{Dv\rho}{\mu} = \frac{Dv}{\nu} \quad (\text{VI.1}),$$

donde, si se usa un sistema de unidades que sea consistente, - se obtiene  $N_R$  como un número adimensional.

### VI.1.1. NUMERO DE REYNOLDS CRITICO.

El número de Reynolds crítico superior, correspondiente al punto B en la Fig.VI.1., en realidad es indeterminado y depende del cuidado que se tenga para prevenir la perturbación inicial que afecta al flujo. Este valor generalmente es aproximadamente igual a 4000, pero en tuberías circulares, se ha logrado mantener el flujo laminar, para valores del número de Reynolds tan altos como 50,000. Por otro lado, el flujo turbulento en una tubería recta, no es posible mantenerlo para valores inferiores a 2,000, ya que la turbulencia se amortigua debido a la fricción viscosa. Este valor inferior, está mejor definido que el superior y es realmente el punto que identifica a los dos tipos de flujo. Por tanto, este valor inferior de 2,000, se define como el verdadero número de Reynolds crítico y está sujeto a pequeñas variaciones. Este valor es menor para tuberías curvas que para rectas y, sin embargo para una tubería recta uniforme puede llegar a ser tan bajo como 1,000, cuando se tenga un grado excesivo de rugosidad. Pero para casos normales de flujo en tuberías rectas con diámetro uniforme y rugosidad normal, el valor crítico se toma como  $N_R = 2,000$ .

Para fluidos como agua y aire, prácticamente todos los casos de importancia desde el punto de vista de la ingeniería están en la región de flujo turbulento. Pero si el fluido es un aceite viscoso, frecuentemente se encuentra flujo laminar.

### VI.2. ECUACION GENERAL DE FRICCIÓN.

La siguiente discusión se aplica tanto para el flujo laminar como para flujo turbulento y para cualquier forma de la sección transversal del conducto.

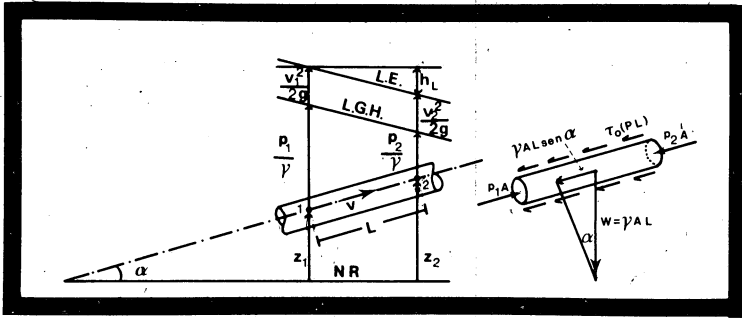


FIG.VI.2. FLUJO ESTACIONARIO CON FRICCION EN UNA TUBERIA.

Considerando flujo estacionario en un conducto de sección transversal uniforme  $A$ , Fig.VI.2. La presión en las secciones 1 y 2 son  $p_1$  y  $p_2$  respectivamente y la distancia entre las dos secciones es  $L$ . Para equilibrio en flujo estacionario, la suma de fuerzas que actúan en un elemento de fluido deben ser igual a cero, o sea,  $\Sigma F=ma=0$ . Así, en la dirección del flujo:

$$p_1 A - p_2 A - \gamma LA \text{ sen } \alpha - \tau_0(PL) = 0 \quad (\text{VI.2}),$$

donde  $\tau_0$  es el esfuerzo cortante (por unidad de área) en la pared del tubo. Nótese que  $\text{sen } \alpha = (z_2 - z_1)/L$  y dividiendo cada término entre  $\gamma A$ , tenemos:

$$\frac{p_1}{\gamma} - \frac{p_2}{\gamma} - z_2 + z_1 = \tau_0 \frac{PL}{\gamma A} \quad (\text{VI.3}).$$

De la Fig. VI.2. se puede ver que:

$$h_L = (z_1 + p_1/\gamma) - (z_2 + p_2/\gamma) \quad (\text{VI.4}),$$

sustituyendo la ecuación (V.1):

$$h_L = \tau_0 \frac{L}{R_h \gamma} \quad (\text{VI.5}).$$

Para un conducto liso, donde la rugosidad de la pared se puede despreciar, Sección V.2, se tiene que el esfuerzo cor

tante del fluido en la pared está expresado por la ecuación (V.10). Sustituyendo este valor de  $\tau_0$  en la ecuación (VI.5) y recordando que  $\gamma = \rho g$ , se tiene

$$h_L = c_f \frac{L}{R_h} \frac{v^2}{2g} \quad (\text{VI.6}),$$

la cual se puede aplicar a cualquier forma de la sección transversal de las tuberías.

### VI.3. TUBERIAS DE SECCION CIRCULAR.

En la Sección V.1 se demostró que para tuberías completamente llenas,  $R_h = D/4$ , al sustituir este valor en la ecuación (VI.6) resulta que:

$$h_L = 4 c_f \frac{L}{D} \frac{v^2}{2g} \quad (\text{VI.7}).$$

Definiendo  $f = 4c_f$  como el factor de fricción, se tiene:

$$h_L = f \frac{L}{D} \frac{v^2}{2g} \quad (\text{VI.8}).$$

La ecuación (VI.8) se conoce como la ecuación de fricción en tuberías y más comúnmente como la ecuación de Darcy-Fanning-Weisbach. Al igual que el coeficiente  $c_f$ , el factor de fricción  $f$  también es adimensional y es función del número de Reynolds. Como  $L/D$  es la relación de dimensiones lineales, también es un número adimensional. La ecuación de fricción expresa el hecho de que la pérdida de carga en una tubería dada, se puede expresar en términos de la carga de velocidad. La ecuación es dimensionalmente homogénea y puede usarse con cualquier sistema de unidades, mientras sean consistentes.

Aplicando la ecuación (VI.5) a una tubería circular,  $h_L = \tau_0 2L/\gamma$ , donde  $r_0$  es el radio a la pared de la tubería. Así mismo, para cualquier cuerpo cilíndrico de fluido, de diámetro

menor que el del tubo y concéntrico a él,  $h_1 = \tau 2L / \lambda \gamma$ , donde  $\lambda$  es el radio a cualquier punto. De esto se deduce que el esfuerzo cortante en el flujo dentro de un tubo circular en cualquier punto es:

$$\tau = \tau_0 \frac{h}{\lambda_0} \quad (\text{VI.9})$$

en otras palabras, el esfuerzo cortante en el centro del tubo es cero y aumenta linealmente con el radio hasta un valor máximo de  $\tau_0$  en la pared del tubo, como se muestra en la Fig. VI.3.

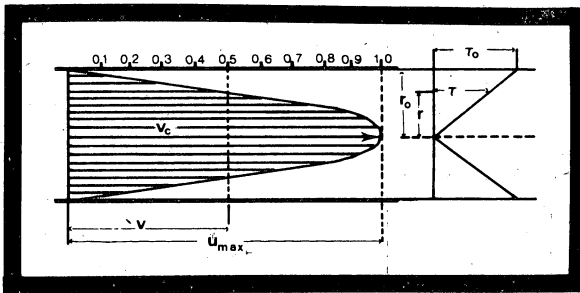


FIG. VI.3. PERFIL DE VELOCIDADES EN UN FLUJO LAMINAR Y DISTRIBUCION DEL ESFUERZO CORTANTE.

De las ecuaciones (V.5), (VI.5) y (VI.8) se tiene:

$$\tau_0 = \frac{4}{3} \rho \frac{v^2}{2} = \frac{4}{3} \gamma \frac{v^2}{2g} \quad (\text{VI.10}),$$

y  $\tau_0$  se puede calcular a partir de un valor experimental de  $\theta$ .

#### VI.4. FLUJO LAMINAR EN TUBERIAS CIRCULARES.

En la Sección I.6. se hizo notar que para flujo laminar,  $\tau = \mu dv/dy$  donde  $v$  es el valor de la velocidad a una distancia  $y$  a partir de la pared. Como en tuberías circulares,  $y = \lambda_0 - \lambda$ , también se puede ver que  $\tau = -\mu dv/d\lambda$ ; en otras palabras, el signo negativo indica que  $v$  disminuye conforme  $\lambda$  aumenta. El coeficiente de viscosidad  $\mu$  es una constante para cada fluido en particular a una temperatura dada, y por tanto, el es --

fuerzo cortante varía desde cero en el centro del tubo hasta un valor máximo en la pared.

Para determinar el perfil de velocidades para un flujo laminar en una tubería circular, la expresión para  $\tau$  en flujo laminar se debe sustituir en la relación general, ecuación (VI.5):

$$h_L = -\mu \frac{dv}{dr} \frac{2L}{r\gamma} \quad (\text{VI.11}),$$

donde  $R_h = r/2$ . Despejando de la ecuación (VI.11):

$$\frac{dv}{dr} = - \frac{h_L r\gamma}{2\mu L} \quad (\text{VI.12}).$$

Integrando esta ecuación y considerando que la velocidad en la pared de la tubería es  $v=0$  cuando  $r=r_0$ , se tiene:

$$v = \frac{h_L \gamma}{4\mu L} (r_0^2 - r^2) \quad (\text{VI.13}),$$

la cual representa el perfil de velocidades de un flujo laminar en una tubería de sección circular.

Por otro lado, se ha definido que el gasto de descargas es:  $Q = \int v dA$ , por tanto:

$$Q = \int_{r=0}^{r=r_0} \frac{h_L \gamma}{4\mu L} (r_0^2 - r^2) dA \quad (\text{VI.14}).$$

Como se trata de una tubería circular, entonces  $dA = 2\pi r dr$  e integrando la ecuación (VI.14):

$$Q = \frac{\pi h_L \gamma r_0^4}{8\mu L} \quad (\text{VI.15}).$$

Además, si se conoce la velocidad media del fluido a través de la tubería, se tiene:

$$Q = vA \quad (\text{VI.16}).$$

Igualando las ecuaciones (VI.15) y (VI.16) se obtiene:

$$v = \frac{h_L \gamma h_o^2}{8 \mu L} \quad (\text{VI.17}),$$

y despejando se obtiene finalmente:

$$h_L = \frac{32 \mu v L}{\gamma D^2} = \frac{32 v \nu L}{D^2} \quad (\text{VI.18}),$$

misma que se conoce como la ecuación de Hagen-Poiseuille para flujo laminar en tuberías circulares.

El análisis dimensional demuestra que la pérdida por fricción puede expresarse también por medio de la ecuación (VI.8). De tal manera que igualando las ecuaciones (VI.8) y (VI.18), y despejando el factor de fricción  $f$ , se obtiene para flujo laminar bajo presión, en una tubería circular:

$$f = \frac{64 v}{D v} = \frac{64}{N_R} \quad (\text{VI.19}).$$

Entonces, si  $N_R \leq 2000$ , se puede usar la ecuación (VI.18) para determinar la pérdida de carga debida a la fricción, o bien, usar la ecuación (VI.8) con el valor de  $f$  obtenido por medio de la ecuación (VI.19).

#### VI.5. PERDIDAS DE CARGA POR FRICCIÓN.

Los experimentos indican que para flujo turbulento, las pérdidas de carga:

- a) varían directamente con la longitud de la tubería;
- b) varían aproximadamente con el cuadrado de la velocidad;
- c) varían aproximadamente con el inverso del diámetro;
- d) dependen de la rugosidad de la superficie interior de la tubería;
- e) dependen de las propiedades de densidad y viscosidad del fluido;
- f) son independientes de la presión.



El factor de fricción  $f$  debe seleccionarse de tal modo que la ecuación (VI.8) dé el valor correcto para las pérdidas de carga; por tanto,  $f$  no puede ser una constante, sino que debe depender de la velocidad  $v$ , del diámetro  $D$ , de la densidad  $\rho$ , de la viscosidad  $\mu$  y de ciertas características de la rugosidad de la pared representada por  $\epsilon$ ,  $\epsilon'$  y  $m$ , donde  $\epsilon$  es una medida del tamaño de las proyecciones de la rugosidad y tiene dimensiones de longitud,  $\epsilon'$  es una medida de la distribución o espaciamiento de las rugosidades y tiene también dimensiones de longitud, y  $m$  es un factor de forma que depende del aspecto o forma de los elementos individuales de rugosidad y es adimensional:

$$f = f(v, D, \rho, \mu, \epsilon, \epsilon', m) \quad (\text{VI.20}).$$

Por otro lado, como  $f$  es un factor adimensional, debe depender de las cantidades anteriores, pero agrupadas en parámetros adimensionales. Para tubos lisos,  $\epsilon = \epsilon' = m = 0$ . Con los otros parámetros independientes de la expresión (VI.20) sólo se puede formar un grupo, que es el número de Reynolds:  $vD\rho/\mu$ . Para tubos rugosos, los términos  $\epsilon$  y  $\epsilon'$  se pueden hacer adimensionales al dividirlos entre  $D$ :

$$f = f\left(\frac{vD\rho}{\mu}, \frac{\epsilon}{D}, \frac{\epsilon'}{D}, m\right) \quad (\text{VI.21}).$$

Para comprobar esta relación se necesita proceder a la experimentación. Para tubos lisos, la representación gráfica de los resultados experimentales comprueba la relación funcional como una dispersión de  $\pm 5\%$ .

Para tubos rugosos, el término  $\epsilon/D$  se llama rugosidad relativa. Nikuradse comprobó la validez de este concepto mediante sus experimentos con tubos de rugosidad artificial. Los experimentos indicaron que para cierto valor de  $\epsilon/D$ , los valores correspondientes a  $f$  contra  $N_R$  quedan incluidos en una sola, sin importar el diámetro real del tubo. No se pudieron comprobar los parámetros  $\epsilon'/D$  y  $m$  en estos experimentos, pero si la validez de la relación:

$$f = f(N_R, \frac{\epsilon}{D}) \quad (\text{VI.22}),$$

para cierto tipo de rugosidad.

#### VI.6. DIAGRAMA DE MOODY.

Dada la extrema complejidad de las superficies con rugosidad natural, la mayoría de las veces que se han podido entender las relaciones básicas ha sido gracias a los experimentos con tubos de rugosidad artificial. Moody construyó una de las cartas más útiles para determinar factores de fricción en tubos comerciales limpios. Esta gráfica, que aparece en la Fig. VI.4., constituye la base para los diseños de tuberías. La carta es un diagrama que expresa el factor de fricción como función de la rugosidad relativa y del número de Reynolds. Los valores de la rugosidad absoluta para tubos comerciales se determinan mediante la fórmula de Colebrook, que es:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -0.86 \ln \left( \frac{\epsilon/D}{3.7} + \frac{2.51}{N_R \sqrt{f}} \right) \quad (\text{VI.23}),$$

y es una fórmula empírica para la transición entre el flujo en tubos lisos y la zona de completa turbulencia en tubos comerciales y es la base para el diagrama de Moody, una vez que se han determinado  $f$  y  $N_R$ , en forma experimental, y de la forma de las curvas  $\epsilon/D$  en la región de transición.

Las rugosidades absolutas se enlistan en la Tabla VI.1.

La línea recta con pendiente -1 en escalas logarítmicas representa el flujo laminar y corresponde a la ecuación (VI.19), donde el flujo es función exclusivamente del número de Reynolds  $f = f(N_R)$ .

La ecuación (VI.19) se puede transformar en:

$$v = \frac{\Delta p \pi^2}{8 \mu L} \quad (\text{VI.24}),$$

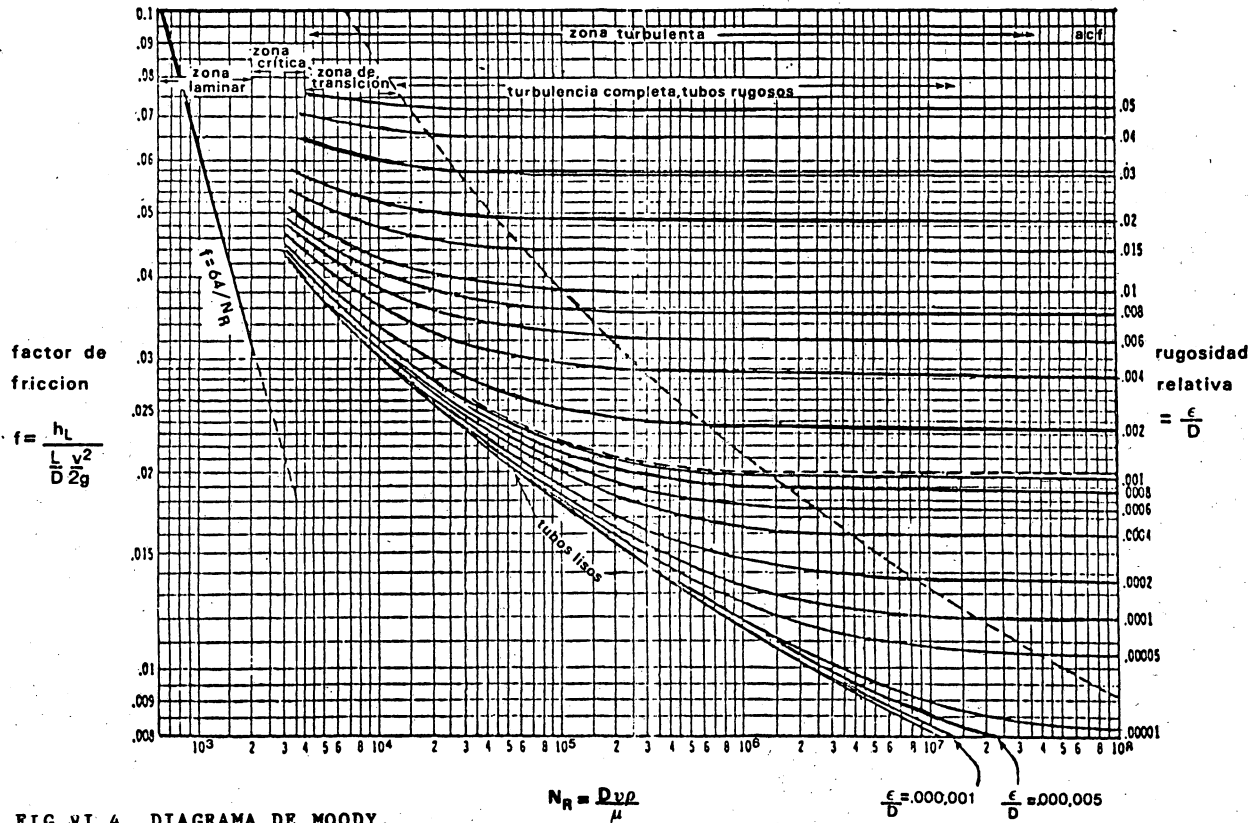


FIG. VI. 4. DIAGRAMA DE MOODY.

al hacer;  $\Delta p \propto h_L$  y  $D \propto h_o$ . Se aplica para todas las rugosidades, ya que la pérdida de carga para flujo laminar es independiente de la rugosidad de la tubería. El número crítico de Reynolds es aproximadamente 2,000 y en la zona crítica el flujo puede ser laminar o turbulento, donde  $2,000 \leq N_R \leq 4,000$ .

TABLA VI.1. RUGOSIDADES ABSOLUTAS PARA TUBERIAS COMERCIALES.

MATERIAL	$\epsilon$ (ft)	$\epsilon$ (mm)
Acero para remaches	0.003-0.03	0.9-9.
Concreto	0.001-0.01	0.3-3.
Madera cepillada	0.0006-0.003	0.13-0.9
Hierro fundido	0.00085	0.25
Hierro galvanizado	0.0005	0.15
Hierro fundido asfaltado	0.0004	0.12
Acero comercial o		
Hierro forjado	0.00015	0.046
Tubería estirada	0.000005	0.0015

Se puede observar que las curvas correspondientes a rugosidades relativas menores a  $\epsilon/D=0.001$  tienden a caer sobre la curva de tubos lisos al disminuir el número de Reynolds. Esto se puede explicar por la presencia de una película laminar en la pared del tubo cuyo espesor disminuye conforme crece el número de Reynolds. Para ciertos rangos del número de Reynolds en la zona de transición, la película cubre completamente las proyecciones de las rugosidades pequeñas y el tubo posee un factor de fricción igual al de un tubo liso. Para números de Reynolds mayores, algunas de las rugosidades sobresalen a través de la película laminar, ocasionando turbulencia adicional que aumenta la pérdida de carga. En la zona llamada de completa turbulencia, el espesor de la película es despreciable con la altura de las rugosidades y cada una de estas rugosidades contribuye de lleno a la turbulencia. La viscosidad no interviene en la pérdida de carga correspondiente a esta zona, como resulta claro, al no cambiar el factor de fricción con el número de Reynolds. En esta zona, las pérdidas de carga varían directamente con el cuadrado de la velocidad.

## VI.7. PERDIDAS MENORES.

Aquellas pérdidas que ocurren en tuberías debido a la presencia de codos, juntas, válvulas, etc., se llaman pérdidas menores. En casi todos los casos, las pérdidas menores se determinan experimentalmente. La ecuación que representa las pérdidas menores es:

$$h_e = \frac{k v_1^2}{2g} = \left[ 1 - \left( \frac{D_1}{D_2} \right)^2 \right] \frac{v_1^2}{2g} \quad (\text{VI.25}),$$

donde;

$$k = \left[ 1 - \left( \frac{D_1}{D_2} \right)^2 \right]^2 \quad (\text{VI.26}).$$

De la ecuación (VI.25) resulta obvio que la pérdida de la carga varía con el cuadrado de la velocidad. Este resultado es esencialmente cierto para todas las pérdidas menores en un flujo turbulento. Un método conveniente para expresar las pérdidas menores en un flujo es por medio de un coeficiente de pérdida  $k$ , generalmente determinado en forma experimental.

Si la expansión brusca se refiere a la conexión de un tubo a un depósito  $D_1/D_2=0$  y la pérdida resulta  $v_1^2/2g$ , es decir, la energía cinética total del flujo se transforma en energía térmica, Fig.VI.5.

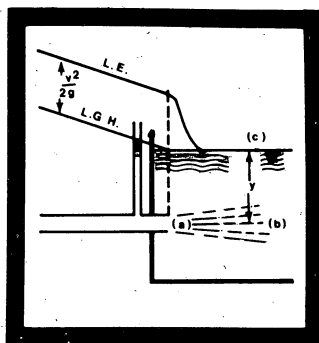
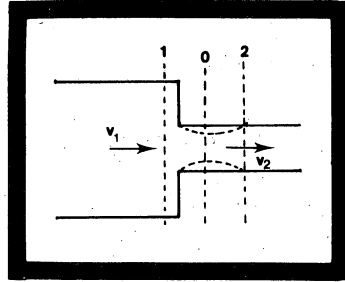


FIG.VI.5. PERDIDAS POR DESCARGA.

FIG.VI.6. CONTRACCION BRUSCA EN UNA TUBERIA.



La pérdida de carga  $h_c$  debida a la contracción brusca - en la sección transversal de una tubería, ilustrada en la Fig. VI.6., se puede analizar de la siguiente forma; la pérdida de carga de la sección 1, a la sección 0, vena contracta (sección de mayor contracción), es pequeña comparada con la pérdida de la sección 0 a la 2, donde la carga de velocidad se vuelve a - convertir en carga de presión. Lo anterior se puede expresar-- como:

$$h_c = \frac{(v_0 - v_2)^2}{2a} \quad (VI.27).$$

Con la ecuación de continuidad, donde  $C_c$  es el coeficiente de contracción, es decir, el área del chorro de la sección 0 dividida entre el área de la Sección 2, la pérdida de carga resulta:

$$h_c = \left( \frac{1}{C_c} - 1 \right)^2 \frac{v_2^2}{2g} \quad (VI.28).$$

En la siguiente tabla, se anota el coeficiente  $C_c$  para agua, como lo determinó Weisbach:

A / A <sub>2</sub>	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$C_c$	0.624	0.632	0.643	0.659	0.681	0.712	0.755	0.813	0.892	1.0

La pérdida de carga ocasionada por la entrada a una tubería desde un depósito suele tomarse como  $0.5v^2/2g$  si la orilla de la entrada es de forma cuadrada, Fig.VI.7(a). Para entradas bien redondeadas, la pérdida se encuentra entre  $0.01v^2/2g$

$0.05v^2/2g$ , Fig.VI.7(b), y generalmente se puede despreciar. Para entradas que van más allá de la pared del depósito, Fig.VI.7(c), la pérdida se puede tomar como  $1.0v^2/2g$  si el tubo es de paredes delgadas.

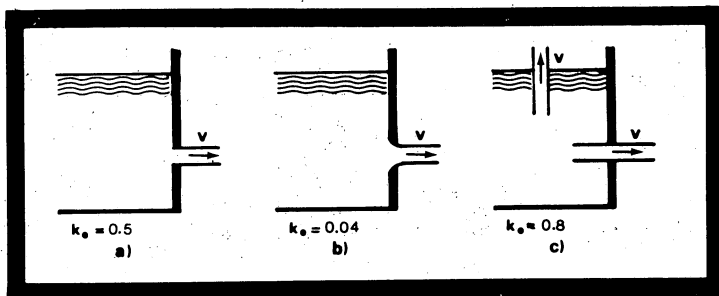


FIG.VI.7. PERDIDA A LA ENTRADA

Un resumen de los coeficientes  $k$  para las pérdidas de carga causadas por accesorios típicos en tuberías, publicado por Crane Co., aparece en la Tabla VI.2.

TABLA VI.2. COEFICIENTES DE PERDIDA DE CARGA EN VARIOS ACCESORIOS DE TUBERIAS.

ACCESORIO	$k$
Válvula de globo (CA)*	10.0
Válvula de ángulo (CA)	5.0
Válvula de retención (CA)	2.5
Válvula de compuerta (CA)	0.19
Codo en U	2.2
Conexión T estándar	1.8
Codo a 90° estándar	0.9
Codo a 90° de radio medio	0.75
Codo a 90° de radio largo	0.60

\*CA=Completamente abierta.

Las pérdidas menores se pueden expresar en términos de una longitud equivalente ( $L_e$ ) de tubería que tenga la misma pérdida de carga en  $N \cdot m/N$  ( $lb \cdot ft/lb$ ), para el mismo gasto:

$$\frac{f L_e v^2}{D \cdot 2g} = \frac{k v^2}{2g} \quad (\text{VI.29}),$$

donde  $k$  se puede referir a una pérdida menor de carga o a la suma de varias pérdidas. Al despejar a  $L_e$  de la última expresión, se obtiene:

$$L_e = \frac{kD}{f} \quad (\text{VI.30}).$$

Por ejemplo, si las pérdidas menores en una tubería de 12 pgs. de diámetro suman  $k=20$  y si  $f=0.020$  para la tubería, entonces a la longitud real de la línea se pueden agregar --  $20 \times 1/0.02 = 1000 \text{ ft}$ ; esta longitud adicional o equivalente, ocasiona la misma resistencia al flujo que las pérdidas menores.

#### VI.8. PROBLEMAS SIMPLES DE TUBERÍAS

Los casos de flujo simple en tuberías que son básicos para la solución de problemas más complejos son:

- a) Dados  $Q, L, D, v, \epsilon$ , obtener  $h_L$ .
- b) Dados  $h_L, L, D, v, \epsilon$ , obtener  $Q$ .
- c) Dados  $h_L, Q, L, v, \epsilon$ , obtener  $D$ .

En cada uno de estos casos se utiliza la ecuación de Darcy-Weisbach, la de continuidad y el diagrama de Moody para determinar la incógnita correspondiente.

##### VI.8.1. PRIMER CASO.

Con los datos del problema se puede determinar de inmediato el número de Reynolds y la rugosidad relativa. Se puede calcular  $h_L$  a partir de los resultados anteriores al encontrar



$f$  en el diagrama de Moody y sustituir en la ecuación de Darcy-Weisbach. Ejemplo VI.9.1.

### VI.8.2. SEGUNDO CASO.

Aquí,  $v$  y  $f$  son incógnitas y para encontrar sus valores se deben emplear simultáneamente la ecuación de Darcy-Weisbach y el diagrama de Moody. Como se conoce  $\epsilon/D$ , se puede suponer un valor para  $f$  por una mera inspección del diagrama de Moody. Al sustituir este valor tentativo en la ecuación de Darcy-Weisbach, se obtiene un valor también tentativo para  $v$  con el cual se puede calcular el correspondiente número de Reynolds, también tentativo. Con este número de Reynolds se puede obtener un segundo factor de fricción  $f$  tentativo más aproximado. Procediendo de esta manera hasta determinar un valor de  $f$  correcto hasta en dos cifras significativas, se busca el correspondiente valor de  $v$  y se calcula  $Q$  multiplicándola por el área. Ejemplo VI.9.2.

### VI.8.3. TERCER CASO.

Con  $D$  como incógnita, se tienen tres incógnitas en la ecuación (VI.8):  $f, v$  y  $D$ ; dos incógnitas en la ecuación de continuidad:  $v$  y  $D$ ; y tres en la definición del número de Reynolds;  $v, D$  y  $N_R$ . La rugosidad relativa también resulta una incógnita. Mediante la ecuación de continuidad se puede eliminar la velocidad en la ecuación (VI.8) y en la ecuación para  $N_R$ . Simplificando así el problema. La ecuación (VI.8) se transforma en:

$$h_L = fL \frac{Q^2}{D \cdot 2g(D^2 \pi/4)^2}$$

es decir:

$$D^5 = \frac{8LQ^2}{h_L g \pi^2} f = c_1 f \quad (\text{VI.31}),$$

donde  $c_1$  es la cantidad conocida  $8LQ^2/h_L g \pi$ . Dado que  $vD^2 = 4Q/\pi$  de la ecuación de continuidad, se tiene:

$$N_R = \frac{vD}{v} = \frac{4Q}{\pi v} \frac{1}{D} = \frac{c_2}{D} \quad (\text{VI.32}),$$

donde  $c_2$  es otra cantidad conocida:  $4Q/\pi v$ . Se puede obtener la solución al problema procediendo de la siguiente forma:

1. Suponer un valor de  $f$ .
2. Resolver la ecuación (VI.31) para  $D$ .
3. Resolver la ecuación (VI.32) para  $N_R$ .
4. Encontrar la rugosidad relativa,  $\epsilon/D$ .
5. Con  $N_R$  y  $\epsilon/D$ , determinar un nuevo valor de  $f$  en la Fig.VI.4.
6. Con el nuevo valor de  $f$ , repetir el procedimiento.
7. Cuando el valor de  $f$  no cambie en las dos primeras cifras significativas, todas las ecuaciones quedan satisfechas y el problema está resuelto. Ejemplo VI.9.3.

En general, sólo se necesitan uno o dos intentos. Como normalmente se seleccionan los diámetros estándar de tuberías, lo que se hace es tomar el mayor tamaño estándar siguiente al calculado. Los tamaños estándar nominales son: 1/8, 1/4, 3/8, 1/2, 3/4, 1.0, 1.25, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0, 3.5, 4.0, 5.0, 6.0, 8.0, 10.0, 12.0, 14.0, 16.0, 18.0, 24 y 30 pulgadas. Los diámetros interiores son mayores que el nominal, hasta el de 12-pg. Para tamaños mayores que el de 12 pg, el diámetro real depende de la "cédula" del tubo y se deben consultar las tablas del fabricante.

En cada caso considerado, la pérdida se expresa en pies de carga o en libras por pie sobre libra. En tuberías horizontales, la pérdida se manifiesta como una reducción gradual en la presión a lo largo de la línea. Para casos no horizontales, se aplica la ecuación (IV.25) de la energía entre dos secciones extremas de la tubería y se incluye en el

término de pérdidas:

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + h_f \quad (\text{VI.33}),$$

donde los factores de corrección de energía cinética se toman iguales a la unidad. A la sección aguas arriba se le dá el subíndice 1, en tanto que a la sección aguas abajo se le otorga el subíndice 2. La carga total en la sección 1 es igual a la suma de la carga total en la sección 2 más las pérdidas de carga entre ambas.

## VI.9. EJEMPLOS

VI.9.1. Determinar la pérdida de carga debida al flujo de 2000 gal/min de un aceite con  $\nu = 0.0001 \text{ ft}^2/\text{seg}$ , a través de una tubería de fierro fundido de 8 pg de diámetro y 1000 ft de longitud.

Solución:

$$Q = 2000 \text{ gal/min} = 33.333 \text{ gal/seg} = 4.456 \text{ ft}^3/\text{seg}$$

$$\epsilon = 0.00085 \text{ ft}$$

$$D = 8 \text{ pg} = 0.6667 \text{ ft}$$

$$v = \frac{Q}{A} = \frac{4.456 \text{ ft}^3/\text{seg}}{\frac{\pi (0.6667 \text{ ft})^2}{4}} = 12.7655 \text{ ft/seg},$$

el número de Reynolds:

$$N_R = \frac{vd}{\nu} = \frac{(12.7655)(0.6667)}{0.0001} = 85103,$$

la rugosidad relativa:

$$\frac{\epsilon}{D} = \frac{0.00085}{0.6667} = 0.001275$$

de la Fig.VI.4:

$$f = 0.024$$

Por tanto, la pérdida de carga es:

$$h_L = f \frac{L}{D} \frac{v^2}{2g} = \frac{(0.024)(1000)}{(0.6667)} \frac{(12.7655)^2}{2(32.2)}$$

$$h_L = 91.095 \text{ ft lb/lb}$$

VI.9.2. Al escurrir agua a  $15^\circ\text{C}$  a través de un tubo de 30 cm. de diámetro, hecho con acero para remaches ( $e=3\text{mm}$ ), tiene lugar una pérdida de carga de 6m en un tramo de 300m. Calcular el gasto.

Solución.

La rugosidad relativa es:

$$\frac{\epsilon}{D} = \frac{0.3}{30} = 0.01,$$

de la Fig.VI.4, un valor tentativo para  $f$  puede ser  $f=0.04$ ; - sustituyendo en la ecuación (VI.8)

$$6 = 0.04 \frac{(300) \cdot (v^2)}{0.30 (19.612)}$$

$$v = \sqrt{\frac{6 \times 0.30 \times 19.612}{0.04 \times 300}} =$$

$$v = 1.715 \text{ m/seg.}$$

De la tabla A.4a,  $\nu = 1.139 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{seg}$ , por lo que;

$$N_R = \frac{vD}{\nu} = \frac{(1.715)(0.3)}{1.139 \times 10^{-6}} = 451712.0,$$

entrando de nuevo al Diagrama de Moody, se tiene:  $f=0.04$  nuevamente, por tanto, la velocidad es 1.715 m/seg' resultando finalmente:

$$Q = A v = \pi r^2 v = \pi (0.15)^2 (1.715) =$$

$$Q = 0.1212 \text{ m}^3/\text{seg} = 121.2 \text{ lt/seg.}$$

VI.9.3. Determinar el diámetro de un tubo limpio de fierro forjado, necesario para conducir 400 gal/min de un aceite con  $\nu = 0.0001 \text{ ft}^2/\text{seg}$ , a lo largo de 10000 ft, con una pérdida de carga de 75 ft·lb/lb.

Solución.

$$Q = 4000 \text{ gal/min} = 66.6667 \text{ gal/seg} = 8.912 \text{ ft}^3/\text{seg}$$

$\epsilon = 0.00015$ , de la Tabla VI.1.

De la ecuación (VI.31):

$$D^5 = \frac{(8) (10\ 000) (8.912^2)}{(75) (32.2) (\pi^2)} f =$$

$$D^5 = 266.577 f \quad \dots (a)$$

y de la ecuación (VI.32):

$$N_R = \frac{(4) (8.913)}{(\pi) (0.0001) (D)} = \frac{113471}{D} \quad \dots (b)$$

Si se supone un valor de  $f = 0.02$ , se tiene:

de (a);  $D = 1.397560 \text{ ft}$

de (b);  $N_R = 81192$ , tal que:

$$\frac{\epsilon}{D} = \frac{0.00015}{1.39756} = 0.000107,$$

por tanto, de la Fig. VI.4,  $f = 0.019$

Con este nuevo valor de  $f$  se tiene:

de (a);  $D = 1.383296 \text{ ft}$

de (b);  $N_R = 82029$ , tal que:

$$\frac{\epsilon}{D} = \frac{0.00015}{1.383296} = 0.000108.$$

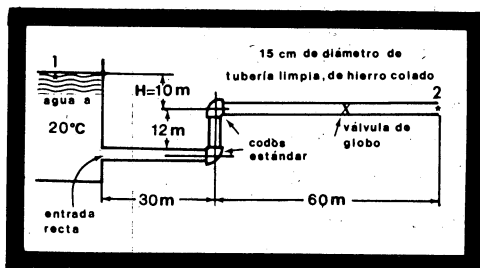
Luego, del Diagrama de Moody:  $f = 0.019$ .

Por tanto:

$$D = 1.383 \text{ ft} = 16.587 \text{ pg.}$$

VI.9.4. Determinar el gasto para la tubería de la Fig.VI.8, si  $H=10\text{m}$  y, la pérdida de carga  $H$  para un gasto  $Q=60\text{lt/seg}$ .

FIG.VI.8. TUBERIA CON PERDIDAS MENORES.



Solución.

La ecuación de energía aplicada entre los puntos 1 y 2, incluyendo las pérdidas, se puede escribir de la siguiente manera:

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2 + h_e + h_f + 2h_c + h_v$$

$$0 + 0 + H = 0 + \frac{v_2^2}{2g} + 0 + \frac{0.5v_2^2}{2g} + \frac{fL}{D} \frac{v_2^2}{2g} + 2(0.9)\frac{v_2^2}{2g} + \frac{10v_2^2}{2g}$$

$$10 = (1 + 0.5 + \frac{10.2}{0.15} f + 1.8 + 10) \frac{v_2^2}{2g}$$

de donde:

$$10 = \frac{v_2^2}{2g} (13.3 + 680 f)$$

El problema se resuelve como en el segundo caso de los problemas simples de tuberías indicados anteriormente:

$$\text{si } f = 0.022$$

$$10 = \frac{v_2^2}{2g} (13.3 + 680 \times 0.022)$$

de donde:

$$v_2 = 2.634 \text{ m/seg.}$$

De la Tabla A.4a,  $\nu = 1.01 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{seg}$ , y  
 $\epsilon/D = 0.0017$ ,  $N_R = 391000$ . Entonces, del Diagrama de Moody,

$$f = 0.023.$$

Repitiendo el procedimiento se obtiene:

$$v_2 = 2.6 \text{ m/seg}, N_R = 380000 \quad f = 0.023$$

De tal manera que el gasto resultante es:

$$Q = v_2 A_2 = [2.6] [\pi/4] [0.15]^2 =$$
$$Q = 46 \text{ lt/seg.}$$

Para la segunda parte, si se conoce el gasto  $Q$ , la solución es directa.

$$v_2 = \frac{Q}{A} = \frac{0.06 \text{ m}^3/\text{seg}}{(\pi/4) (0.15 \text{ m})^2} = 3.40 \frac{\text{m}}{\text{seg}}$$

Entonces:  $N_R = 505000$ , y de la Fig. VI.4;  $f = 0.023$ , y se obtiene:

$$H_1 = \frac{(3.4) (13.3 + 680 \times 0.023)}{(2) (9.806)}$$

$$H_1 = 17.06 \text{ m}$$

## CAPÍTULO VII

### MEDIDORES DE PRESION

Entre las mediciones que se pueden llevar a cabo en un escurrimiento, se pueden mencionar la determinación de la presión, la velocidad y el gasto. Existen muchos modos de efectuar esas mediciones, a saber: métodos directos, indirectos, volumétricos, electrónicos, etc. Por ejemplo, un método directo para medir el gasto en un flujo dado consiste en determinar el volumen o el peso del fluido que pasa por una sección en un intervalo de tiempo específico. Los métodos indirectos para medir el gasto suelen requerir la determinación de una carga manométrica, una diferencia de presiones o la velocidad en varios puntos de una sección transversal, para después, con base en estos datos, se calcula el gasto buscado. Los métodos más precisos son los gravimétricos o volumétricos, en los cuales el peso o el volumen del fluido se miden mediante balanzas apropiadas o por medio de un tanque aforado de acuerdo con un intervalo de tiempo, mismo que se mide con un cronómetro.

#### VII.1. PRESION ESTATICA Y PRESION DE ESTANCAMIENTO.

En el flujo de un fluido la presión medida perpendicularmente al flujo se llama presión estática, Fig.VII.1. Este es el valor dado por tubos piezómetros, como se explicó en la Sección IV.3.4.



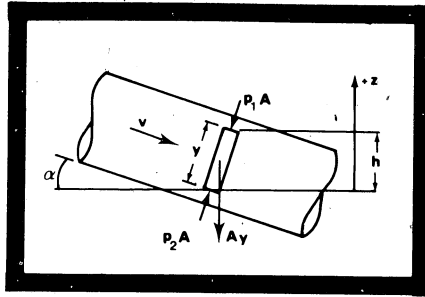


FIG.VII.1. MEDICION DE LA PRESION ESTATICA

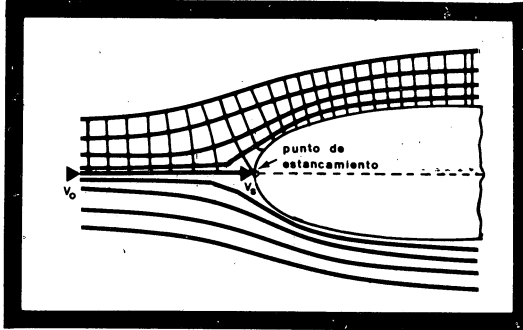


FIG.VII.2. PUNTO DE ESTANCAMIENTO

La línea de corriente central de la Fig.VII.2, muestra que la velocidad es cero en el punto de estancamiento. Si  $p_o/\gamma$  denota la carga de presión estática donde la velocidad es  $v_o$ , mientras que  $p_s/\gamma$  denota la carga de presión en el punto de estancamiento, entonces, aplicando la ecuación (IV.26) a estos dos puntos, se tiene:

$$\frac{p_o}{\gamma} + \frac{v_o^2}{2g} + z_o = \frac{p_s}{\gamma} + \frac{v_s^2}{2g} + z_s$$

la presión de estancamiento es:

$$p_s = p_o + \gamma \frac{v_o^2}{2g} = p_o + \frac{\rho v_o^2}{2} \quad (VII.1).$$

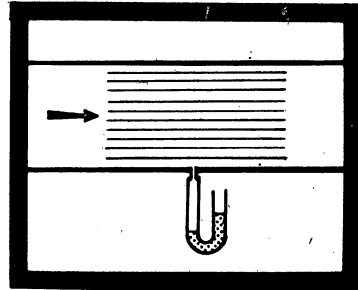
La cantidad  $\gamma v_0^2 / 2g = \rho v_0^2 / 2$  es llamada la presión dinámica. La ecuación (VII.1) se aplica a fluidos donde se puede despreciar la compresibilidad.

## VII.2 MEDIDORES DE PRESION

En muchos instrumentos empleados para determinar la velocidad de una corriente o el gasto transportado por ella, - es necesario medir la presión, debido a la relación que existe entre la presión y la velocidad expresada en la ecuación de la energía. La presión estática medida en un fluido en movimiento es igual a su presión, siempre que la velocidad no quede afectada por la medición misma. La Fig.VII.3 ilustra un método empleado para medir la presión estática: la abertura piezométrica. Cuando el flujo es paralelo, como se indica en la figura, la variación de la presión normal a las líneas de corriente es hidrostática; por tanto, al medir la presión en la pared se puede determinar la presión en cualquier otro punto de la misma sección transversal. La abertura piezométrica debe ser pequeña, con su longitud igual a por lo menos el doble del diámetro y debe ser perpendicular a la superficie, sin rebabas en la orilla del orificio, pues de otra manera se podrían producir pequeños remolinos y alterar la medición. Es posible que dicha orilla sea ligeramente redondeada. Cualquier pequeño error de alineación del orificio o rugosidad en la superficie puede ocasionar un considerable error en la medición; por esta razón, - se aconseja utilizar varias aberturas piezométricas alrededor del conducto y conectarlas todas a un mismo anillo piezométrico. Cuando la superficie del conducto en las cercanías de la abertura es muy rugosa, las lecturas que se hagan con el piezómetro no resultan confiables. En tales casos, a veces es posible limar las asperezas alrededor de la abertura.

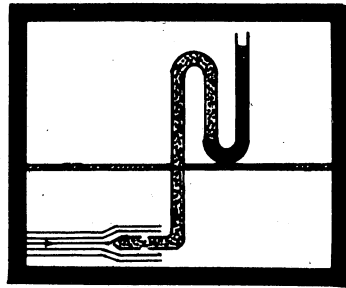
Quando la superficie del conducto es muy rugosa, se puede emplear el tubo estático (Fig.VII.4). Este dispositivo consiste en un tubo cerrado en su extremo y dirigido contra la corriente; sin embargo, posee pequeños agujeros en la parte --

FIG.VII.3. ABERTURA PIEZOMETRICA  
PARA MEDIR LA PRESION  
ESTATICA.



cilíndrica abajo de la punta. Se supone que el flujo cercano a las pequeñas aberturas no sufre alteración alguna; de cualquier manera, existen disturbios debido a la presencia tanto de la punta del tubo como de la rama en forma de ángulo recto perpendicular al flujo.

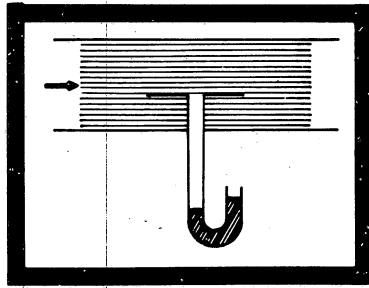
FIG.VII.4. TUBO ESTATICO.



Los tubos estáticos son relativamente insensibles al número de Reynolds o al de Mach, si éste es menor que uno. La alineación del tubo con el flujo no es crítica, de manera que un error de muy bajo porcentaje resulta para desalineamientos de hasta  $15^\circ$ .

Otra manera de medir la presión estática de un fluido que fluye a través de un conducto rugoso, es utilizar el disco de Ser, que consiste en una placa circular y sensible que se coloca alineado a las líneas de corriente, Fig.VII.5. El disco de Ser simula una pared artificial para evitar las perturbaciones ocasionadas por la pared de la tubería.

FIG.VII.5. DISCO DE SER.



### VII.3. MEDIDORES DE VELOCIDAD

Dado que el conocer la velocidad en un conveniente número de puntos de una sección transversal permite calcular el gasto que circula a través de la sección, la medición de la velocidad es un aspecto importante en la caracterización de un flujo. La velocidad se puede encontrar si se mide el tiempo que transcurre cuando una partícula identificable del fluido recorre una distancia conocida. Este procedimiento se puede efectuar siempre que sea conveniente o necesario.

#### VII.3.1. TUBO DE PITOT.

Un dispositivo de uso muy difundido, el cual no mide la velocidad directamente, pero permite obtener una cantidad relacionada con la velocidad con bastante precisión, es el tubo de Pitot. La Fig.VII.6 muestra este instrumento para medir la velocidad  $v$  en un canal abierto; un tubo delgado de vidrio o una aguja hipodérmica con un doblez en ángulo recto se coloca de tal manera que ofrezca la abertura del tubo contra la corriente; el fluido se introduce a través de la abertura hasta que la presión desarrollada en el interior del tubo sea la

suficiente para resistir el impacto de la velocidad del flujo. El fluido directamente en frente del tubo se encuentra en reposo (punto 2, de estancamiento) y la línea de corriente que une el punto 1 con el 2 se divide después de este último y prosigue alrededor del tubo. La presión en 2 se conoce una vez que se mide la columna de líquido dentro del tubo, y la ecuación de Bernoulli, aplicada entre 1 y 2, da como resultado:

$$\frac{v^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} = \frac{p_2}{\gamma} = h_0 + \Delta h \quad (\text{VII.2}),$$

ya que los dos puntos se encuentran al mismo nivel, dado que  $p_1/\gamma = h_0$ , la expresión anterior se reduce a:

$$\frac{v^2}{2g} = \Delta h \quad (\text{VII.3}),$$

es decir:

$$v = \sqrt{2g\Delta h} \quad (\text{VII.4}).$$

En la práctica, es muy difícil leer directamente la altura  $\Delta h$  sobre la superficie libre.

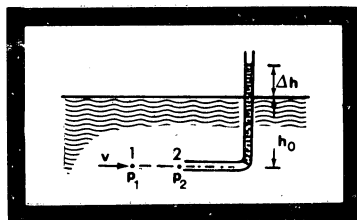


FIG.VII.6. TUBO DE PITOT SIMPLE.

El tubo de Pitot sirve para medir la presión de estancamiento, llamada muchas veces presión total. Esta se compone de dos partes: la presión estática  $h_0$  y la presión dinámica  $\Delta h$ , expresada como la longitud de una columna del mismo fluido -- (Fig.VII.6).

La presión dinámica se relaciona con la carga de velocidad mediante la ecuación (VII.3).

Si se combinan las mediciones de presión estática y de presión total, es decir, si se mide cada una mediante su respectivo instrumento y se conectan éstos, uno a cada extremo de un manómetro diferencial, se puede medir directamente la presión dinámica. La Fig.VII.7 muestra una posible combinación; la ecuación de Bernoulli aplicada entre los puntos 1 y 2 es:

$$\frac{v^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} = \frac{p_2}{\gamma} \quad (\text{VII.5}).$$

Por otro lado, la ecuación para presión en el manómetro, expresada en pies de agua, se puede escribir como:

$$\frac{p_1}{\gamma} \rho_r + k\rho_r + R' \rho_{r_0} - (k+R') \rho_r = \frac{p_2}{\gamma} \rho_r \quad (\text{VII.6}).$$

simplificando:

$$\frac{p_2 - p_1}{\gamma} = R' \left( \frac{\rho_{r_0}}{\rho_r} - 1 \right)$$

Sustituyendo  $(p_2 - p_1)/\gamma$  en la ecuación (VII.5) y al despejar la  $v$ , resulta:

$$v = 2gR' \left( \frac{\rho_{r_0}}{\rho_r} - 1 \right) \quad (\text{VII.7}).$$

Al igual que el tubo estático, el tubo de Pitot es insensible a desalineamientos con respecto a la dirección del flujo, y el error en que se incurre es relativamente pequeño si aquel es menor de  $15^\circ$ .

El tubo estático y el tubo de Pitot se pueden combinar en un mismo instrumento, llamado tubo de Pitot estático (combinación de Prandtl), Fig.VII.8. Si se analiza este sistema de manera semejante a como se hizo con el de la Fig.VII.7, se comprueba que son válidas las mismas relaciones. Así, la ecuación (VII.7) expresa la velocidad, pero la incertidumbre para medir la presión estática hace necesario emplear un coeficiente de corrección  $C$ ;

$$v = C \sqrt{2gR' \left( \frac{\rho_{r_0}}{\rho_r} - 1 \right)} \quad (\text{VII.8}).$$

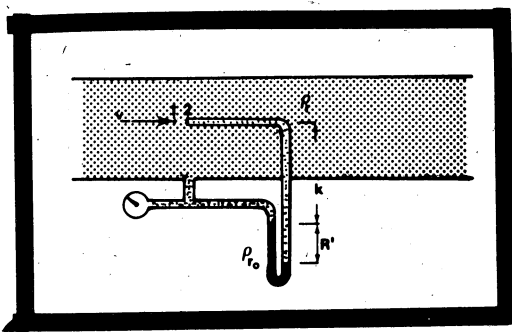


FIG.VII.7. TUBO DE PITOT Y ABERTURA PIEZOMETRICA COMBINADOS PARA MEDIR LA VELOCIDAD.

Con objeto de que los efectos debidos á la nariz y a la rama vertical del tubo se cancelen entre sí, se ha diseñado una forma particular de tubo de Pitot estático, el cual con su nariz despuntada, permite que  $C=1$  en la ecuación (VII.8). La constante  $C$  debe determinarse mediante calibración, para cualquier otro tubo de Pitot estático.

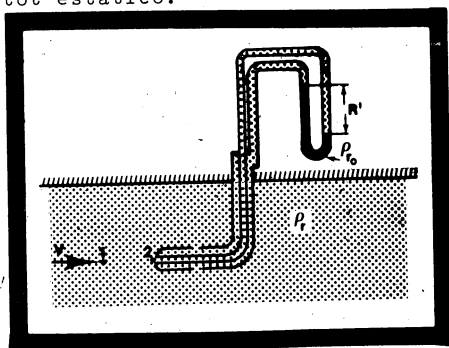


FIG.VII.8. TUBO DE PITOT ESTATICO.

#### VII.4. MEDIDORES DE GASTO.

Un medidor de gasto es un dispositivo que permite obtener, generalmente por medio de una s3la medici3n, el peso o el volumen que por unidad de tiempo pasa a trav3s de determinada secci3n transversal. En este tipo de medidores se pueden incluir: orificios, tubo de Venturi, boquillas, rot3metros y vertedores.

##### VII.4.1. ORIFICIO EN UN DEPOSITO.

Para medir el gasto descargado por un dep3sito o que fluye a trav3s de una tuber3a, se puede emplear un orificio. En el primer caso, el orificio puede situarse en una de las paredes o en el fondo del tanque y generalmente es circular; la arista del orificio puede ser afiliada, como se muestra en la Fig.VII.9, o redondeada. El 3rea del orificio es, por definici3n, el 3rea de la abertura. En el caso de orificios con arista afiliada, el chorro de fluido descargado desde el tanque se contrae a corta distancia, del orden de la mitad del di3metro, abajo de la abertura. Lo anterior se debe a que parte del fluido se acerca al orificio a lo largo de la pared del tanque y no puede efectuar un cambio de direcci3n en 3ngulo recto, conservando as3 una componente radial de la velocidad mediante la cual se reduce el 3rea del chorro. La secci3n transversal donde 3sta contracci3n es mayor recibe el nombre de chorro contra3do o secci3n contra3da (vena contracta). Las l3neas de corriente en el chorro resultan paralelas en esta secci3n y la presi3n es igual a la atmosf3rica.

La carga  $H$  sobre el orificio se mide desde el centro del orificio hasta la superficie libre. Si se supone que 3sta carga es constante, entonces la ecuaci3n de Bernoulli aplicada entre el punto 1 en la superficie libre y el punto 2 en el centro de la secci3n contra3da, considerando a la presi3n atmos -



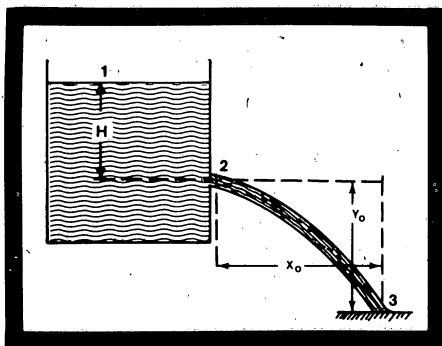


FIG.VII.9. ORIFICIO EN UN DEPOSITO.

férica local como referencia y al punto 2 como base de comparación para la elevación y despreciando las pérdidas, dá como resultado:

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2$$

es decir;

$$0 + 0 + H = \frac{v_2^2}{2g} + 0 + 0$$

o bien:

$$v_2 = \sqrt{2gH} \quad (\text{VII.9}).$$

Este resultado es teórico, pues no se consideraron las pérdidas. El cociente de la velocidad real  $v_r$ , entre la velocidad teórica  $v_t$ , se llama coeficiente de velocidad  $C_v$ .

$$C_v = \frac{v_r}{v_t} \quad (\text{VII.10}),$$

por tanto, de la ecuación (VII.9):

$$v_{2r} = C_v \sqrt{2gh} \quad (\text{VII.11}).$$

El gasto real  $Q_r$  que descarga a través del orificio es igual al producto de la velocidad real en la sección contraída y el área del chorro correspondiente. El cociente del área  $A_2$  del chorro en la sección contraída entre el área  $A_0$  del orificio se representa mediante otro coeficiente, llamado coeficiente de contracción,  $C_c$ .

$$C_c = \frac{A_2}{A_0} \quad (\text{VII.12}).$$

El área de la sección contraída es  $C_c A_0$ ; por tanto, el gasto real es;

$$Q_r = C_v C_c A_0 \sqrt{2gH} \quad (\text{VII.13}).$$

Se acostumbra combinar los dos coeficientes en uno sólo, conocido como coeficiente de descarga,  $C_d$ :

$$C_d = C_v C_c \quad (\text{VII.14}),$$

resultando finalmente:

$$Q_r = C_d A_0 \sqrt{2gH} \quad (\text{VII.15}).$$

No existe forma de calcular las pérdidas entre 1 y 2, - por lo cual  $C_v$  debe determinarse experimentalmente; su valor - varía entre 0.95 y 0.99 para el orificio de arista afiliada o - redondeada. Para la mayoría de los orificios, como el de arista - afilada, no se puede calcular la contracción del chorro y - es necesario emplear resultados experimentales. Existen varios - métodos para obtener uno o más de los coeficientes: midiendo - el área  $A_0$ , la carga  $H$  y el gasto  $Q_r$  (gravimétrica o volumétri - camente), se puede obtener  $C_d$  de acuerdo con la ecuación (VII. - 15); determinado  $C_v$  o  $C_c$ , mediante cualquiera de los procedi - mientos que a continuación se describen, y utilizando la ecuación (VII.14) es posible conocer los tres coeficientes.

1.- Método de la trayectoria. Al medir la posición de un punto - abajo de la sección contraída en la trayectoria del chorro li - bre (Fig.VII.9), se puede determinar la velocidad real,  $v_r$ , si - se desprecia la resistencia del aire. La componente en la di - rección  $x$  de la velocidad no cambia, por lo que  $v_r t = x_0$ , donde -  $t$  es el tiempo que tarda una partícula en viajar desde la sec - ción contraída hasta el punto 3. La partícula de fluido emplea - este mismo tiempo en recorrer una distancia vertical  $y_0$  bajo - la acción de la gravedad, si su velocidad inicial en esa direc - ción es cero; en este caso se tiene  $y_0 = g t^2 / 2$ , y al eliminar a -

de las dos ecuaciones, resulta:

$$v_r = \frac{x_o}{\sqrt{2y_o/g}} \quad (\text{VII.16}).$$

Una vez que se ha determinado  $v_{2t}$  mediante la ecuación (VII.9), se puede conocer el cociente  $v_r / v_t = C_v$ .

2.- Medición directa de  $v_r$ . Con un tubo de Pitot colocado en la sección contraída se puede medir la velocidad  $v_r$ .

3.- Medición directa del diámetro del chorro. Con un compás de puntas se puede obtener aproximadamente el diámetro del chorro en la sección contraída. El método no es muy preciso y suele ser menos satisfactorio que los anteriores.

4.- Empleo de la ecuación de cantidad de movimiento. Cuando el depósito es lo suficiente pequeño para suspenderse en soportes de cuña como se indica en la Fig.VII.10, es posible medir la fuerza  $F$  que origina la cantidad de movimiento del chorro. En efecto, estando cerrado el orificio, se nivela el tanque quitando o poniendo pesos; una vez que el orificio descarga, una fuerza  $F'$  actúa sobre el tanque, la cual es opuesta a la fuerza creadora de la cantidad de movimiento del chorro. Para volver a nivelar el tanque, se agrega un número de pesos  $W$  suficiente. En la figura se puede observar que  $F' = Wx_o / y_o$ , al aplicar la ecuación de la cantidad de movimiento,

$$\Sigma F_x = \frac{Q_Y}{g} (v_{x_{salida}} - v_{x_{entrada}})$$

es decir:

$$\frac{Wx_o}{y_o} = \frac{Q_Y v_r}{g} \quad (\text{VII.17}),$$

donde  $v_{x_{ent}}$  es igual a cero, y  $v_r$  es la velocidad final. Como el gasto que descarga se mide durante la operación,  $v_r$  es la única incógnita en la última ecuación.

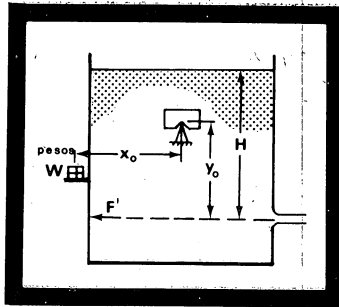


FIG.VII.10. METODO DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO  
PARA DETERMINAR  $C_v$  Y  $C_c$ .

La pérdida de carga en el flujo a través de un orificio se determina incluyendo un término de pérdidas en la ecuación de la energía aplicada entre los puntos 1 y 2, (Fig.VII.9):

$$\frac{v_r^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + \text{pérdidas.}$$

Al sustituir el valor de cada término, se obtiene:

$$\text{pérdidas} = H - \frac{v_r^2}{2g} = H(1 - C_v^2) = \frac{v_r^2}{2g} \left( \frac{1}{C_c^2} - 1 \right)$$

donde se empleó la ecuación (VII.12) para obtener las pérdidas en función de  $H$  y  $C_v$  ó de  $v_r$  y  $C_v$ .

#### VII.4.2. TUBO DE VENTURI

Este dispositivo se utiliza para medir el gasto a través de una tubería. Generalmente se hace de una sola pieza fundida Fig.VII.11, y consta de los siguientes elementos: una sección aguas arriba, de igual diámetro que la tubería y provista de un anillo de bronce con una serie de aberturas piezométricas para medir la presión estática en esa sección; una sección cónica convergente; una garganta cilíndrica provista también de un anillo piezométrico de bronce; y una sección cónica con una divergencia gradual hasta alcanzar el diámetro original de la tubería. Los anillos piezométricos se conectan a uno y otro extremo, respectivamente, de un manómetro diferen

cial. El tamaño del tubo de Venturi se especifica mediante el diámetro de la tubería en la cual se va a utilizar y el diámetro de la garganta; por ejemplo, un tubo de Venturi de  $6 \times 4$  pg se ajusta a una tubería de  $6$  pg, y tiene una garganta de  $4$  pg de diámetro. Para que se obtengan resultados precisos, el tubo de Venturi debe estar precedido por una longitud de al menos diez veces el diámetro de la tubería. Al escurrir el fluido de la tubería a la garganta, la velocidad aumenta notablemente y, en consecuencia, la presión disminuye; el gasto transportado por la tubería y en el caso de un flujo incompresible, está en función de la lectura en el manómetro.

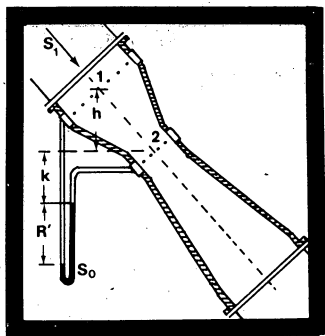


FIG.VII.11. TUBO DE VENTURI.

Las presiones en la sección aguas arriba y en la garganta son presiones reales, en tanto que las velocidades correspondientes obtenidas de la ecuación de Bernoulli sin un término de pérdidas son velocidades teóricas. Si se consideran las pérdidas en la ecuación de la energía, entonces se trata de velocidades reales.

#### VII.4.3. ORIFICIO EN UNA TUBERIA.

El orificio de arista afilada en la tubería de la Fig.VII.12, ocasiona que el chorro se contraiga aguas abajo del orificio. Para el caso de un flujo incompresible, al aplicar la ecuación de Bernoulli entre la sección 1 y la sección contraída 2, se obtiene:

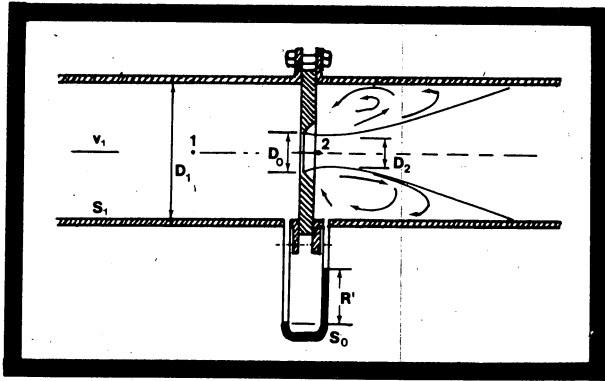


FIG.VII.12. ORIFICIO EN UNA TUBERIA.

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma}$$

La ecuación de continuidad relaciona  $v_1$  y  $v_2$  con el coeficiente de contracción  $C_c = A_2/A_0$ ,

$$\frac{v_1 \pi D_1^2}{4} = \frac{v_2 C_c \pi D_0^2}{4} \quad (\text{VII.19}),$$

eliminando  $v_1$ ,

$$\frac{v_2^2}{2g} \left[ 1 - C_c^2 \left( \frac{D_0}{D_1} \right)^4 \right] = \frac{p_1 - p_2}{\gamma} \quad (\text{VII.20}),$$

despejando a  $v_2$ :

$$v_2 = \sqrt{\frac{2g(p_1 - p_2)/\gamma}{1 - C_c^2 (D_0/D_1)^4}} \quad (\text{VII.21}).$$

Multiplicando por  $C_v$ , se obtiene la velocidad real en la sección contraída:

$$v_r = C_v \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)/\rho}{1 - C_c^2 (D_0/D_1)^4}} \quad (\text{VII.22}),$$

y finalmente, al multiplicar por el área del chorro,  $C_c A_0$ , resulta el gasto real:

$$Q_r = C_d A_0 \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)/\rho}{1 - C_c^2 (D_0/D_1)^4}} \quad (\text{VII.23}),$$

donde  $C_d = C_v C_c$ . Al expresar la ecuación (VII.23) en función de la diferencia manométrica  $R'$ :

$$Q_r = C_d A_o \sqrt{\frac{2gR' (\rho_o / \rho_r - 1)}{1 - C_c^2 (D_o / D_1)^4}} \quad (\text{VII.24}).$$

Debido a lo difícil que es determinar los dos coeficientes por separado, generalmente se utiliza una fórmula más simplificada, la ecuación

$$Q_r = CA_o \sqrt{2\Delta p / \rho} \quad (\text{VII.25}),$$

o su equivalente:

$$Q = CA_o \sqrt{2gR' \left( \frac{\rho_o}{\rho_r} - 1 \right)} \quad (\text{VII.26}).$$

Los valores de  $C$  se pueden obtener de la Fig.VII.13, para el orificio VDI (Verein-Deutscher-Ingenieure).

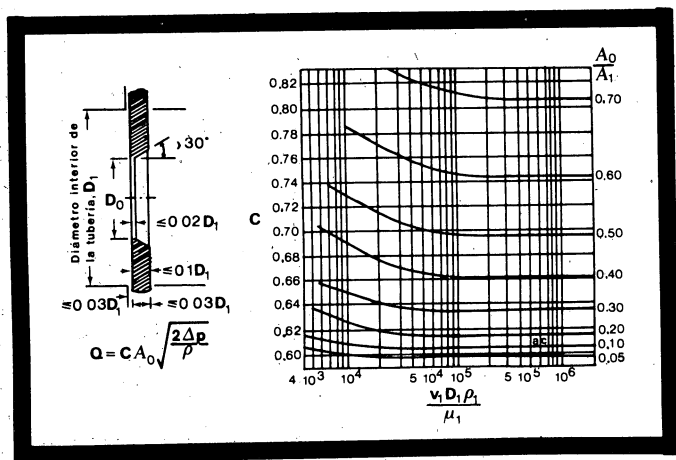


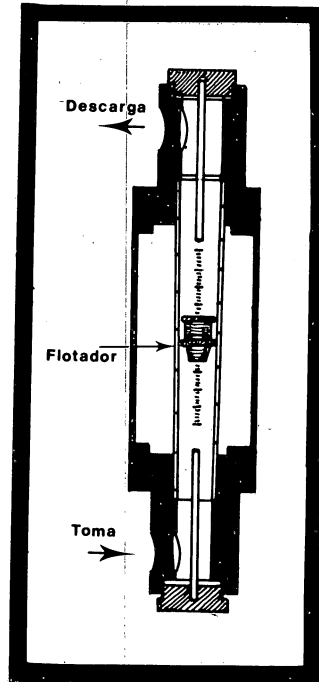
FIG.VII.13. ORIFICIO VDI Y COEFICIENTES DE DESCARGA.

#### VII.4.4. ROTAMETRO.

El rotámetro, Fig.VII.14, es un medidor de sección transversal variable, que consiste en un conducto transparente y un "flotador" (en realidad es más pesado que el líquido), el

cual se desplaza hacia arriba debido al flujo, también en sentido ascendente del fluido a través del conducto. El tubo se gradúa para leer el gasto directamente. Varias ranuras hechas en el flotador ocasionan que éste gire, manteniendo así una posición central en el tubo. Cuanto mayor es el gasto, más arriba se encuentra el flotador.

FIG.VII.14. ROTAMETRO.





VII.5. EJEMPLO.

VII.5.1. Un orificio de 3 pg de diámetro desaloja 2000 lb de agua en 32.6 seg, operando bajo una carga de 16.0 ft. La trayectoria se determinó al medir  $x_0 = 15.62$  ft para una caída de 4 ft. Encontrar;  $C_v, C_c, C_d$ , la pérdida de carga por unidad de peso y la pérdida de potencia.

Solución.

La velocidad teórica  $v_{2t}$  está dada por:

$$v_{2t} = \sqrt{2gH} = \sqrt{64.4 \times 16} = 32.099 \text{ ft/seg.}$$

La velocidad real se puede determinar a partir de los datos referentes a la trayectoria. El tiempo empleado en la caída de 4 ft es:

$$t = \sqrt{\frac{2y_0}{g}} = \sqrt{\frac{2 \times 4}{32.2}} = 0.498 \text{ seg.}$$

y la velocidad se puede expresar como:

$$x_0 = v_{2r} t ; v_{2r} = \frac{15.62}{0.498} = 31.365 \text{ ft/seg}$$

por tanto,

$$C_v = \frac{v_{2r}}{v_{2t}} = 0.977$$

el gasto real,  $Q_r$ , resultante es:

$$Q_r = \frac{2000}{62.4 \times 32.6} = 0.983 \text{ ft}^3/\text{seg}$$

empleando la ecuación (VII.15) para obtener  $C_d$ ;

$$C_d = \frac{0.983}{\left(\frac{\pi}{4}\right) \left(\frac{3}{12}\right)^2 \sqrt{(64.4)(16)}} = 0.624$$

Por tanto, de la ecuación (VII.14),

$$C_c = \frac{C_d}{C_v} = \frac{0.624}{0.977} = 0.639$$

De la ecuación (VII.18), la pérdida de carga es:

$$\text{pérdida} = H(1 - C_v^2) = 16(1 - 0.977^2) = 0.728 \text{ ft. lb/lb}$$

Finalmente, usando la ecuación (IV.31), la pérdida de carga es:

$$\text{pérdida} = \frac{(62.2)(0.983)(0.728)}{550} = 0.081 \text{ HP}$$

## CAPITULO VIII

### FLUJO DE FLUIDOS COMPRESIBLES

Cuando se trata con un fluido compresible, si el cambio en la densidad es gradual y no mayor que un pequeño porcentaje, el fluido puede ser tratado como incompresible, si se usa una densidad promedio. Sin embargo, si  $\Delta\rho/\rho > 0.05$ , los efectos de la compresibilidad deben ser incluidos. Los problemas de fluidos compresibles son más complejos que los de fluidos incompresibles debido a que se deben hacer consideraciones termodinámicas.

#### VIII.1. CONSIDERACIONES TERMODINAMICAS.

Para entender el flujo de fluidos compresibles, es conveniente revisar brevemente algunos de los principios termodinámicos. Las propiedades termodinámicas de un gas (Tabla A.8) incluyen la constante  $R$  del gas, el calor específico  $c_p$  a presión constante, el calor específico  $c_v$  a volumen constante, y el exponente isentrópico  $k=c_p/c_v$ . La densidad (o volumen específico) de un gas, depende de la presión y temperatura absolutas bajo las cuales existe; para los gases reales, la relación entre estos está perfectamente definida por la ley de los gases perfectos  $p/\rho = pV = RT$ , discutida en la sección I.11. Ahí se define la ecuación de estado de un gas, y donde:

Para condiciones isotérmicas  $pV = cte,$

para condiciones isentrópicas  $pV^k = cte,$

para condiciones adiabáticas  $pV^n = cte,$

(expansión con fricción  $n < k$ ),

(compresión con fricción  $n > k$ ).

Por otro lado, la entalpía  $h$  por unidad de masa de un gas, está definida como:

$$h = i + p/\rho = i + RT \quad (\text{VIII.1}),$$

donde  $i$  es la energía interna por unidad de masa debida a la energía cinética del movimiento molecular y las fuerzas entre las moléculas. Entonces, la entalpía representa la energía que posee un gas en virtud de la temperatura absoluta bajo la que existe.

El calor específico a presión constante,  $c_p$ , se define como el incremento en la entalpía por unidad de masa cuando la temperatura del gas se incrementa un grado manteniendo la presión constante. Así;

$$c_p = \left( \frac{\partial h}{\partial T} \right)_p \quad (\text{VIII.2}),$$

donde  $h$  es la entalpía por unidad de masa.

El calor específico a volumen constante,  $c_v$ , se define como el incremento en la energía interna por unidad de masa cuando la temperatura se incrementa un grado y manteniendo su volumen constante, o sea:

$$c_v = \left( \frac{\partial i}{\partial T} \right)_v \quad (\text{VIII.3}),$$

donde  $i$  es la energía interna por unidad de masa.

Para los gases perfectos, estas ecuaciones se pueden escribir como  $dh = c_p dT$  y  $di = c_v dT$ .

Como  $h = i + p/\rho = i + RT$ , entonces,  $dh = di + RdT$ .

Combinando estas relaciones, se obtiene:

$$c_p = c_v + RT \quad (\text{VIII.4}),$$

Introduciendo la relación de calores específicos,  $k=c_p/c_v$  y combinándolo con la ecuación (VIII.4), obtenemos:

$$c_p = \frac{k}{k-1} R \quad \text{y} \quad c_v = \frac{R}{k-1} \quad (\text{VIII.5}).$$

## VIII.2. ECUACIONES FUNDAMENTALES APLICABLES AL FLUJO DE FLUIDOS COMPRESIBLES.

### VIII.2.1. CONTINUIDAD.

La ecuación de continuidad para el flujo en una dimensión de un fluido compresible es:

$$G = \gamma Av = \text{constante} \quad (\text{VIII.6.a}),$$

$$M = \rho Av = \text{constante} \quad (\text{VIII.6.b}),$$

donde  $G$  es el gasto en peso y  $M$  el gasto en masa.

### VIII.2.2. ECUACION DE LA ENERGIA

Para el flujo en una dimensión de un fluido compresible, sin que exista máquina entre las secciones 1 y 2, la ecuación de la energía se expresa como:

$$\hat{h}_1 + \frac{v_1^2}{2g} + Q_H = \hat{h}_2 + \frac{v_2^2}{2g} \quad (\text{VIII.7}),$$

donde la entalpía por unidad de peso  $\hat{h} = I + p/\gamma$

### VIII.2.3. ECUACION DE IMPULSO Y MOMENTO.

La ecuación de impulso-momento para un flujo unidimensional de un fluido compresible es:

$$F = \rho_2 Q_2 \bar{v}_2 - \rho_1 Q_1 \bar{v}_1 \quad (\text{VIII.8}).$$

#### VIII.2.4. ECUACION DE EULER

Para un flujo compresible en una dimensión, la ecuación de Euler se puede expresar como:

$$\frac{dp}{\rho} + v dv = -\frac{2\tau ds}{\rho h} \quad (\text{VIII.9}).$$

En las ecuaciones (VIII.7) y (VIII.9) se omitió el término  $Z$ , ya que en flujo compresible su valor es despreciable - comparado con los otros términos de la ecuación de la energía.

#### VIII.3. FLUJO ADIABATICO (CON O SIN FRICCIÓN).

Si la transferencia de calor,  $Q_H$ , es cero, el flujo es adiabático. Entonces la ecuación (VIII.7) se puede escribir como:

$$\hat{h}_1 + \frac{v_1^2}{2g} = \hat{h}_2 + \frac{v_2^2}{2g} \quad (\text{VIII.10}),$$

ya que,  $\Delta\hat{h} = (c_p/g)\Delta T$ , se tiene para flujo adiabático:

$$v_2^2 - v_1^2 = 2g(\hat{h}_1 - \hat{h}_2) = 2c_p(T_1 - T_2) \quad (\text{VIII.11}).$$

De la ecuación (VIII.5),  $c_p = kR/(k-1)$  y para un gas perfecto -  $pV = RT$ . Sustituyendo estas expresiones en la ecuación (VIII.11) se obtiene:

$$v_2^2 - v_1^2 = \frac{2k}{k-1} (p_1 v_1 - p_2 v_2) = \frac{2k}{k-1} RT_1 \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) \quad (\text{VIII.12}).$$

Las ecuaciones anteriores son válidas para flujo ya sea con o sin fricción.

La ecuación (VIII.10) se puede escribir como:

$$\frac{c_p}{g} T_1 + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{c_p}{g} T_2 + \frac{v_2^2}{2g} = \frac{c_p}{g} T_s \quad (\text{VIII.13}),$$

donde  $T_s$  es la temperatura de estancamiento (donde  $v=0$ ). Así, en flujo adiabático, la temperatura de estancamiento es constante a lo largo de la trayectoria ya sea que el flujo tenga o no pérdidas por fricción.

#### VII.4. FLUJO ISOTERMICO

En un flujo isotérmico la temperatura permanece constante, por tanto, la relación  $pV=cste$  y además, la energía térmica interna por unidad de peso es igual en ambos lados, --- ( $I_1=I_2$ ), de tal manera que  $\hat{h}_1=\hat{h}_2$ , por tanto, la ecuación (VIII.7) se reduce a:

$$\frac{v_1^2}{2g} + Q_H = \frac{v_2^2}{2g} \quad \text{(VIII.14).}$$

Esta ecuación es aplicable a fluidos ideales y a fluidos reales.

#### VIII.5. EFECTO DE LA VARIACION DEL AREA EN UN FLUJO COMPRESIBLE UNIDIMENSIONAL.

En flujo permanente, la velocidad de un fluido incompresible varía inversamente con el área. Este no es el caso con un fluido compresible, debido a que las variaciones en la densidad también tienen influencia sobre la velocidad. Por otra parte, el comportamiento de un fluido compresible, cuando existe un cambio en el área transversal, depende de si el flujo es subsónico ( $N_M < 1$ ) o supersónico ( $N_M > 1$ ). A continuación se examina este fenómeno, concretamente para flujo ideal.

La ecuación de continuidad (VIII.6.b) se puede escribir en forma diferencial como:

$$\frac{dA}{A} + \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dv}{v} \quad \text{(VIII.15).}$$

Definiendo el cuadrado de la celeridad\* como  $c^2 = dp/d\rho$ , la ecuación de Euler (VIII.9) para un fluido ideal se puede expresar como:

$$\frac{dp}{d\rho} \frac{d\rho}{\rho} + vdv = c^2 \frac{d\rho}{\rho} + vdv = 0 \quad (\text{VIII.16}).$$

Combinando las ecuaciones (VIII.15) y (VIII.16), sustituyendo  $v/c$  por el número de Mach ( $N_M$ ) y reorganizando se obtiene:

$$\frac{dA}{A} = -(N_M^2 - 1) \frac{dv}{v} \quad (\text{VIII.17}).$$

De esta ecuación se puede llegar a conclusiones significativas, tales como:

1. Para flujo subsónico ( $N_M < 1$ ):

Si  $dv/v > 0$ ,  $dA/A < 0$ ; el área debe disminuirse para incrementar la velocidad.

Si  $dv/v < 0$ ,  $dA/A > 0$ ; el área debe incrementarse para disminuir la velocidad.

2. Para flujo supersónico ( $N_M > 1$ ):

Si  $dv/v > 0$ ,  $dA/A < 0$ ; el área debe incrementarse si la velocidad se incrementará.

Si  $dv/v < 0$ ,  $dA/A > 0$ ; el área debe disminuirse si la velocidad se disminuirá.

3. Para flujo sónico ( $N_M = 1$ )

$$\frac{dA}{A} = 0$$

---

\*Ver el Número de Mach, Sección III.2.3.



Se puede ver que los flujos subsónico y supersónico se comportan opuestamente. Para acelerar un flujo a velocidad subsónica, se necesita un pasaje convergente como en el caso de un flujo incompresible. Para acelerar un flujo a velocidad supersónica, por tanto, se requiere de un pasaje divergente. Lo anterior se debe a que el decremento en la densidad del fluido excede al incremento en la velocidad de flujo; por tanto, para satisfacer la continuidad, el pasaje debe ser divergente.

Nótese que para velocidad sónica  $dA/A=0$ . Esta condición ocurre en la garganta de un pasaje convergente (orificio convergente). La ocurrencia de la velocidad sónica en el orificio necesita una alta presión diferencial para acelerar el flujo - la cantidad necesaria para alcanzar la velocidad sónica. Si la velocidad sónica se alcanza en la garganta, el flujo es supersónico si el orificio convergente está seguido de uno divergente. Por otro lado, si el flujo en la garganta no es sónico - existe una disminución en la velocidad en el siguiente pasaje divergente.

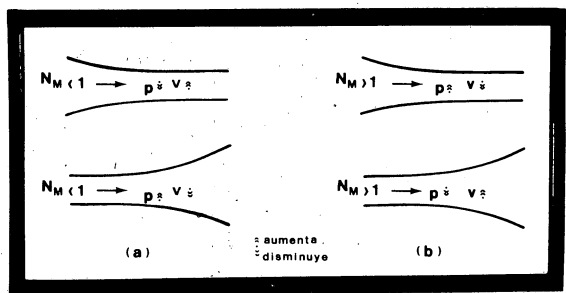


FIG. VIII.1. EFECTOS DE LA VARIACION DEL AREA EN UN FLUJO COMPRESIBLE (a) FLUJO SUBSONICO, (b) FLUJO SUPERSONICO.

En la Fig. VIII.1. se muestra el comportamiento de flujos subsónico y supersónico a través de orificios convergente y divergente.

### VIII.6. ONDA DE CHOQUE EN UNA DIMENSION

En la Fig.VIII.2. se muestra una onda de choque en una dimensión donde el acercamiento del flujo supersónico - cambia a flujo subsónico. Este fenómeno se acompaña de un le vantamiento repentino en la presión, densidad y temperatura. Aplicando el principio de impulso-momento al fluido en la on da de choque, se obtiene:

$$\Sigma F_x = p_1 A_1 - p_2 A_2 = \frac{G}{g} (v_2 - v_1) \quad (\text{VIII.18}).$$

Sustituyendo las condiciones de continuidad ( $G = \gamma_1 A_1 v_1 = \gamma_2 A_2 v_2$ ) y como  $A_1 = A_2$ , se tiene:

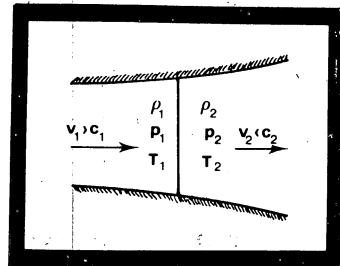
$$p_2 - p_1 = \frac{1}{g} (\gamma_1 v_1^2 - \gamma_2 v_2^2) \quad (\text{VIII.19}),$$

que representa el salto en la presión a través de la onda.

El fluido a través de la onda de choque se puede consi derar adiabático y se puede expresar:

$$v_2^2 - v_1^2 = \frac{2k}{k-1} (p_1 v_1 - p_2 v_2) \quad (\text{VIII.20})$$

FIG.VIII.2. ONDA DE CHOQUE  
EN UNA DIMENSION.



Esta ecuación es idéntica a la ecuación (VIII.12). Las ecuaciones (VIII.19) y (VIII.20) se pueden resolver simultáneamente y reorganizándola algebraicamente se obtienen relaciones significativas. Algunas de estas relaciones son las siguientes:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2kN_{M_1}^2 - (k-1)}{k+1} \quad (\text{VIII.21}),$$

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{(k-1)N_{M_1}^2 + 2}{(k+1)N_{M_1}^2} \quad (\text{VIII.22}),$$

$$N_{M_2}^2 = \frac{2 + (k-1)N_{M_1}^2}{2kN_{M_1}^2 - (k-1)} \quad (\text{VIII.23}).$$

Estas ecuaciones permiten encontrar las propiedades físicas del flujo a ambos lados de la onda de choque en una dimensión. Estas ecuaciones son aplicables sólo si  $N_M > 1$ ; esto es que el flujo de entrada sea supersónico.

#### VIII.7. EJEMPLO.

VIII.7.1. Una onda de choque normal ocurre en un flujo de aire, donde  $p_1 = 10$  psia,  $T_1 = 40^\circ\text{F}$  y  $v_1 = 1400$  ft/pg. Encontrar  $p_2$ ,  $v_2$  y  $T_2$ .

Solución:

$$\rho_1 = \frac{p_1}{RT_1} = \frac{(10)(144)}{(1715)(460+40)} = 0.001679 \text{ slug/ft}^3$$

$$c_1 = \sqrt{kRT} = \sqrt{(1.4)(1715)(500)} = 1095.673 \text{ ft/seg}$$

$$N_M = \frac{v_1}{c_1} = \frac{1400}{1095.673} = 1.277$$

De la ecuación (VIII.21)

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2(1.4)(1.28)^2 - (1.4-1)}{1.4+1} = 1.7358$$

$$p_2 = 1.7358 p_1 = 17.358 \text{ psia.}$$

De la ecuación (VIII.22):

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{(1.4-1)(1.28)^2 + (2)}{2(1.4)(1.28)^2 - (1.4-1)} = 0.6341$$

$$v_2 = 0.6341 v_1 = 887.758 \text{ ft/pg}$$

Dado que  $\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2$ , entonces

$$\rho_2 = \frac{(0.001679)(1400)}{(887.758)} = 0.0026478 \text{ slug/ft}^3$$

como:

$$pV = \frac{p}{\rho} = RT$$

$$T_2 = \frac{p_2}{\rho_2 R} = \frac{(17.358)(144)}{(0.0026478)(1715)} = 550.44^\circ R$$

$$T_2 = 550.44^\circ R = 90.44^\circ F$$

# APENDICE A

## PROPIEDADES FISICAS DE LOS FLUIDOS

**TABLA A.1. PESOS ESPECIFICOS, (lb/ft<sup>3</sup>), DE FLUIDOS COMUNES A 68 °F,  
14.7 psi Y g=32.2 ft/seg<sup>2</sup>.**

GASES		LIQUIDOS	
Aire	0.076	Aceite	54.0
Bióxido carbónico	0.115	Agua	62.2
Hidrógeno	0.0052	Alcohol	49.3
Metano	0.0415	Gasolina	42.0
Nitrógeno	0.073	Glicerina	78.7
Oxígeno	0.083	Tetraclorhidrocarbónico	99.4

**TABLA A.2. MODULO VOLUMETRICO  $\times 10^{-3}$  DEL AGUA, (psi).**

PRESION	TEMPERATURA, (°F).				
	32°	68°	120°	200°	300°
psi					
15	292	320	332	308	
1500	300	330	342	319	248
4500	317	348	362	338	271
15000	380	410	420	405	350

**TABLA A.3. PRESION DE SATURACION Y TENSION SUPERFICIAL DEL AGUA.**

Temperatura °F	Presión de Saturación psia	Tension Superficial lb/ft
32	0.089	0.00518
40	0.122	0.00514
50	0.178	0.00509
60	0.256	0.00504
70	0.363	0.00498
80	0.507	0.00492
90	0.698	0.00486
100	0.949	0.00480
120	1.692	0.00467
140	2.887	0.00454
160	4.739	0.00440
180	7.510	0.00427
200	11.525	0.00413
212	14.676	0.00404

TABLA A.4a. PROPIEDADES FISICAS DEL AGUA, EN UNIDADES SI.

Temperatura	Peso específico	Densidad	Viscosidad	Viscosidad cinemática	Tensión superficial	Presión de vapor	Carga de la presión de vapor	Módulo de elasticidad volumétrico
°C	$\gamma$ kN/m <sup>3</sup>	$\rho$ kg/m <sup>3</sup>	$\mu \times 10^3$ N·seg/m <sup>2</sup>	$\nu \times 10^6$ m <sup>2</sup> /seg	$\sigma$ N/m	$P_v$ kN/m <sup>2</sup> abs	$P_v / \rho$ m	$E_v \times 10^{-6}$ kN/m <sup>2</sup>
0	9.805	999.8	1.781	1.785	0.0756	0.61	0.06	2.02
5	9.807	1000.0	1.518	1.519	0.0749	0.87	0.09	2.06
10	9.804	999.7	1.307	1.306	0.0742	1.23	0.12	2.10
15	9.798	999.1	1.139	1.139	0.0735	1.70	0.17	2.15
20	9.789	998.2	1.002	1.003	0.0728	2.34	0.25	2.18
25	9.777	997.0	0.890	0.893	0.0720	3.17	0.33	2.22
30	9.764	995.7	0.798	0.800	0.0712	4.24	0.44	2.25
40	9.730	992.2	0.653	0.658	0.0696	7.38	0.76	2.28
50	9.689	988.0	0.547	0.553	0.0679	12.33	1.26	2.29
60	9.642	983.2	0.466	0.474	0.0662	19.92	2.03	2.28
70	9.589	977.8	0.404	0.413	0.0644	31.16	3.20	2.25
80	9.530	971.8	0.354	0.364	0.0626	47.34	4.96	2.20
90	9.466	965.3	0.315	0.326	0.0608	70.10	7.18	2.14
100	9.399	958.4	0.282	0.294	0.0589	101.33	10.33	2.07



TABLA A.4b. PROPIEDADES FISICAS DEL AGUA, EN UNIDADES INGLESAS.

Temperatura °F	Peso específico $\gamma$ lb/ft <sup>3</sup>	Densidad $\rho$ slug/ft <sup>3</sup>	Viscosidad $\mu \times 10^5$ lb·seg/ft <sup>2</sup>	Viscosidad cinemática $\nu \times 10^5$ ft <sup>2</sup> /seg	Tensión superficial $\sigma \times 10^2$ lb/ft	Presión de vapor $p_v$ psia	Carga de la presión de vapor $p_v/\gamma$ ft	Módulo de elasticidad volumétrico $E_v \times 10^{-3}$
32	62.42	1.940	3.746	1.931	0.518	0.09	0.20	293
40	62.43	1.940	3.229	1.664	0.514	0.12	0.28	294
50	62.41	1.940	2.735	1.410	0.509	0.18	0.41	305
60	62.37	1.938	2.359	1.217	0.504	0.26	0.59	311
70	62.30	1.936	2.050	1.059	0.500	0.36	0.84	320
80	62.22	1.934	1.799	0.930	0.492	0.51	1.17	322
90	62.11	1.931	1.595	0.826	0.486	0.70	1.61	323
100	62.00	1.927	1.424	0.739	0.480	0.95	2.19	327
110	61.86	1.923	1.284	0.667	0.473	1.27	2.95	331
120	61.71	1.918	1.168	0.609	0.465	1.69	3.91	333
130	61.55	1.913	1.069	0.558	0.460	2.22	5.13	334
140	61.38	1.908	0.981	0.514	0.454	2.89	6.67	330
150	61.20	1.902	0.905	0.476	0.447	3.72	8.58	328
160	61.00	1.896	0.838	0.442	0.441	4.74	10.95	326
170	60.80	1.890	0.780	0.413	0.433	5.99	13.83	322
180	60.58	1.883	0.726	0.385	0.426	7.51	17.33	318
190	60.36	1.876	0.678	0.362	0.419	9.34	21.55	313
200	60.12	1.868	0.637	0.341	0.412	11.52	26.59	308
212	59.83	1.860	0.593	0.319	0.404	14.70	33.90	300

TABLA A.5a. PROPIEDADES FISICAS DEL AIRE A PRESION ATMOSFERICA ESTANDAR, EN UNIDADES SI.

Temperatura		Densidad	Peso específico	Viscosidad	Viscosidad cinemática
T	T	$\rho$	$\gamma$	$\mu \times 10^5$	$\nu \times 10^5$
°C	°F	kg/m <sup>3</sup>	N/m <sup>3</sup>	N·seg/m <sup>2</sup>	m <sup>2</sup> /seg
-40	-40	1.515	14.86	1.49	0.98
-20	-4	1.395	13.68	1.61	1.15
0	32	1.293	12.68	1.71	1.32
10	50	1.248	12.24	1.76	1.41
20	68	1.205	11.82	1.81	1.50
30	86	1.165	11.43	1.86	1.60
40	104	1.128	11.06	1.90	1.68
60	140	1.060	10.40	2.00	1.87
80	176	1.000	9.81	2.09	2.09
100	212	0.946	9.28	2.18	2.31
200	392	0.747	7.33	2.58	3.45

**TABLA A.5b. PROPIEDADES FISICAS DEL AIRE A PRESION ATMOSFERICA ESTANDAR, EN UNIDADES INGLESAS.**

Temperatura	Densidad	Peso específico	Viscosidad	Viscosidad cinemática
T	$\rho \times 10^3$	$\gamma \times 10^2$	$\mu \times 10^7$	$\nu \times 10^4$
°F	slug/ft <sup>3</sup>	lb/ft <sup>3</sup>	lb·seg/ft <sup>2</sup>	ft <sup>2</sup> /seg
-40	2.94	9.46	3.12	1.06
-20	2.80	9.03	3.25	1.16
0	2.68	8.62	3.38	1.26
10	2.63	8.46	3.45	1.31
20	2.57	8.27	3.50	1.36
30	2.52	8.11	3.58	1.42
40	2.47	7.94	3.62	1.46
50	2.42	7.79	3.68	1.52
60	2.37	7.63	3.74	1.58
70	2.33	7.50	3.82	1.64
80	2.28	7.35	3.85	1.69
90	2.24	7.23	3.90	1.74
100	2.20	7.09	3.96	1.80
120	2.15	6.84	4.07	1.89
140	2.06	6.63	4.14	2.01
160	1.99	6.41	4.22	2.12
180	1.93	6.21	4.34	2.25
200	1.87	6.02	4.49	2.40
250	1.74	5.60	4.87	2.80

**TABLA A.6a. PROPIEDADES FISICAS DE LA ATMOSFERA ESTANDAR, EN UNIDADES SI.**

Altitud	Temperatura	Presión	Peso específico	Densidad	Viscosidad
km	T °C	kN/m <sup>2</sup> , abs	$\gamma$ N/m <sup>3</sup>	$\rho$ kg/m <sup>3</sup>	$\mu \times 10^5$ N·seg/m <sup>2</sup>
0	15.0	101.33	12.01	1.225	1.79
2	2.0	79.50	9.86	1.007	1.73
4	-4.5	60.12	8.02	0.909	1.66
6	-24.0	47.22	6.46	0.660	1.60
8	-36.9	35.65	5.14	0.526	1.53
10	-49.9	26.50	4.04	0.414	1.46
12	-56.5	19.40	3.05	0.312	1.42
14	-56.5	14.20	2.22	0.228	1.42
16	-56.5	10.35	1.62	0.166	1.42
18	-56.5	7.57	1.19	0.122	1.42
20	-56.5	5.53	0.87	0.089	1.42
25	-51.6	2.64	0.41	0.042	1.45
30	-40.2	1.20	0.18	0.018	1.51

TABLA A. 6b. PROPIEDADES FISICAS DE LA ATMOSFERA ESTANDAR, EN UNIDADES INGLESAS.

Altitud	Temperatura	Presión	Peso específico	Densidad	Viscosidad
$h \times 10^3$	T	p	$\gamma \times 10^5$	$\rho \times 10^6$	$\mu \times 10^7$
ft	°F	psia	lb/ft <sup>3</sup>	slug/ft <sup>3</sup>	lb·seg/ft <sup>2</sup>
0	59.0	14.70	7648	2377	3.737
5	41.2	12.24	6587	2048	3.637
10	23.4	10.11	5643	1756	3.534
15	5.6	8.30	4807	1496	3.430
20	-12.3	6.76	4070	1267	3.325
25	-30.1	5.46	3422	1066	3.217
30	-47.8	4.37	2858	891	3.107
35	-65.6	3.47	2367	738	2.969
40	-69.7	2.73	1882	587	2.969
45	-69.7	2.15	1481	462	2.969
50	-69.7	1.69	1165	364	2.969
60	-69.7	1.05	722	226	2.969
70	-69.7	0.65	447	140	2.969
80	-69.7	0.40	277	87	2.969
90	-57.2	0.25	168	53	3.048
100	-40.9	0.16	102	32	3.150

TABLA A.7a. PROPIEDADES FISICAS DE LIQUIDOS COMUNES, A PRESION ATMOSFERICA ESTANDAR, EN UNIDADES SI,

Líquido	Temperatura T °C	Densidad $\rho$ kg/m <sup>3</sup>	Densidad relativa $\rho_r$	Viscosidad $\mu \times 10^4$ N·seg/m <sup>2</sup>	Tensión superficial $\sigma$ N/m	Presion de vapor $p_v$ kN/m <sup>2</sup> , abs	Módulo de elasticidad volumetrico $E_v$ N/m <sup>2</sup>
Aceíte crudo	20	856	0.86	72.0	0.03	---	--
Agua	20	998	1.00	10.1	0.073	2.34	2070
Benzeno	20	895	0.90	6.5	0.029	10.0	1030
Gasolina	20	678	0.68	2.9	---	55.0	---
Glicerina	20	1258	1.26	14900.0	0.063	0.000014	4330
Hidrógeno	-257	72	0.072	0.21	0.003	21.4	---
Kerosina	20	808	0.81	19.2	0.025	3.2	---
Mercurio	20	13550	13.56	15.6	0.51	0.00017	26200
Oxígeno	-195	1206	1.21	2.8	0.015	21.4	---
Tetraclorhídrido carbónico	20	1558	1.59	9.7	0.026	12.1	1100

TABLA A.7b. PROPIEDADES FISICAS DE LIQUIDOS COMUNES, A PRESION ATMOSFERICA ESTANDAR, EN UNIDADES INGLESAS.

Líquido	Temperatura T °F	Densidad $\rho$ slug/ft <sup>3</sup>	Densidad relativa $\rho_r$	Viscosidad $\mu \times 10^3$ lb·seg/ft <sup>2</sup>	Tensión superficial $\sigma \times 10^2$ lb/ft	Presión de vapor $p_v$ psia	Módulo de elasticidad volumétrico $E_v$ psi
Aceite crudo	68	1.66	0.86	15.0	0.2	---	--
Agua	68	1.936	1.00	2.1	0.5	0.34	300000
Benzeno	68	1.74	0.90	1.4	0.2	1.48	150000
Gasolina	68	1.32	0.68	0.62	---	8.0	--
Glicerina	68	2.44	1.26	3100.0	0.4	0.000002	630000
Hidrógeno	-430	0.114	0.072	0.043	0.02	3.1	--
Kerosina	68	1.57	0.81	4.0	0.17	0.46	--
Mercurio	68	26.30	13.56	3.3	3.2	0.000025	--
Oxígeno	-320	2.34	1.21	0.58	0.1	3.1	--
Tetraclorhidro carbónico	68	3.08	1.59	2.0	0.18	1.76	160000

**TABLA A.8a. PROPIEDADES FISICAS DE GASES COMUNES, AL NIVEL DEL MAR Y A 18.8 °C,  
EN UNIDADES SI.**

Gas	Fórmula química	Peso molecular $\bar{M}$	Densidad	Viscosidad	Constante del gas R	Calor específico		Relación de calores específicos $k=c_p/c_v$
			$\rho$ kg/m <sup>3</sup>	$\mu \times 10^5$ N·m/seg <sup>2</sup>		$c_p$	$c_v$	
						m <sup>2</sup> /seg <sup>2</sup> ·K		
Aire		29.	1.205	1.80	29.2678	1003	716	1.4
Bióxido de carbono	CO <sub>2</sub>	44.	1.84	1.48	19.1720	858	670	1.28
Helio	He	4.	0.166	1.97	211.8091	5220	3143	1.66
Hidrógeno	H	2.02	0.0839	0.90	420.1510	14450	10330	1.4
Metano	CH <sub>4</sub>	16.	0.668	1.34	53.0288	2250	730	1.3
Monóxido de carbono	CO	28.	1.16	1.82	30.2876	1040	743	1.4
Nitrógeno	N <sub>2</sub>	28.	1.16	1.76	30.2876	1040	743	1.4
Oxígeno	O <sub>2</sub>	32.	1.33	2.00	26.5144	909	649	1.4
Vapor de agua	H <sub>2</sub> O	18.	0.747	1.01	47.1141	1862	14	1.33



**TABLA A.8b. PROPIEDADES FISICAS DE GASES COMUNES, AL NIVEL DEL MAR Y A 68°F,  
EN UNIDADES INGLESAS.**

Gas	Fórmula química	Peso molecular	Peso específico	Viscosidad	Constante del gas	Calor específico		Relación de calores específicos $k = c_p / c_v$
		$\bar{M}$	$\gamma$ lb/ft <sup>3</sup>	$\mu \times 10^{-4}$ lb·seg/ft <sup>2</sup>	R ft/°R	$c_p$	$c_v$	
Aire		29.0	0.0753	3.76	53.3039	6000	4285	1.40
Bióxido de carbono	CO <sub>2</sub>	44.0	0.114	3.10	34.904	5132	4009	1.28
Helio	He	4.0	0.0104	4.11	386.026	31230	18810	1.66
Hidrógeno	H	2.02	0.00522	1.89	767.079	86390	61710	1.40
Metano	CH <sub>4</sub>	16.0	0.0416	2.80	96.3511	13400	10300	1.30
Monóxido de carbono	CO	28.0	0.0726	3.80	55.2621	6218	4440	1.40
Nitrógeno	N <sub>2</sub>	28.0	0.0728	3.68	55.1066	6210	4437	1.40
Oxígeno	O <sub>2</sub>	32.0	0.083	4.18	48.2999	5437	3883	1.40
Vapor	H <sub>2</sub> O	18.0	0.0467	2.12	85.7836	11110	8350	1.33

TABLA A.9. PROPIEDADES DE LAS AREAS.

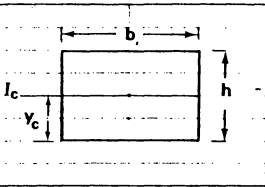
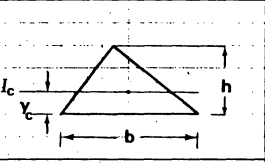
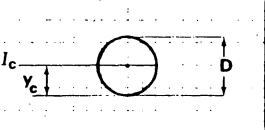
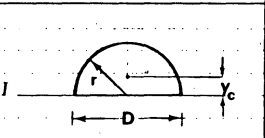
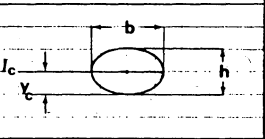
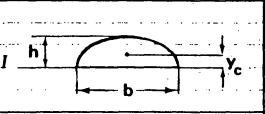
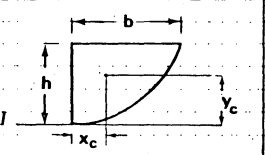
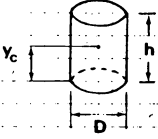
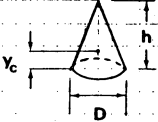
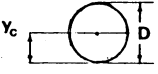
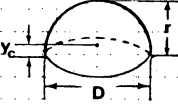
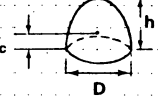
Figura	Area	Localizacion del centroide	$I_c$ o $I_c$
Rectángulo 	$bh$	$y_c = \frac{h}{2}$	$I_c = \frac{bh^3}{12}$
Triángulo 	$\frac{bh}{2}$	$y_c = \frac{h}{3}$	$I_c = \frac{bh^3}{36}$
Círculo 	$\frac{\pi D^2}{4}$	$y_c = \frac{D}{2}$	$I_c = \frac{\pi D^4}{64}$
Semicírculo 	$\frac{\pi D^2}{8}$	$y_c = \frac{4r}{3\pi}$	$I_c = \frac{\pi D^4}{128}$
Elipse 	$\frac{\pi bh}{4}$	$y_c = \frac{h}{2}$	$I_c = \frac{\pi bh^3}{64}$
Semi-elipse 	$\frac{\pi bh}{4}$	$y_c = \frac{4h}{3\pi}$	$I_c = \frac{\pi bh^3}{16}$
Parábola 	$\frac{2bh}{3}$	$x_c = \frac{3b}{8}$ $y_c = \frac{3b}{5}$	$I_c = \frac{2bh^3}{7}$

TABLA A.10. PROPIEDADES DE LOS SOLIDOS.

Figura	Volumen	Localización del centro de masa
<p>Cilindro</p> 	$\frac{\pi D^2 h}{4}$	$y_c = \frac{h}{2}$
<p>Cono</p> 	$\frac{1}{3} \left( \frac{\pi D^2 h}{4} \right)$	$y_c = \frac{h}{4}$
<p>Esfera</p> 	$\frac{\pi D^3}{6}$	$y_c = \frac{D}{2}$
<p>Hemisferio</p> 	$\frac{\pi D^3}{12}$	$y_c = \frac{3r}{8}$
<p>Paraboloide</p> 	$\frac{1}{2} \left( \frac{\pi D^2 h}{4} \right)$	$y_c = \frac{h}{3}$

# APENDICE B

## FACTORES DE CONVERSION

**TABLA B.1. PREFIJOS EN EL SISTEMA INTERNACIONAL.**

<b>FACTOR</b>	<b>PREFIJO</b>	<b>SIMBOLO*</b>
$10^{12}$	tera	T
$10^9$	giga	G
$10^6$	mega	M
$10^3$	kilo	k
$10^2$	hecta	h
10	deca	da
$10^{-1}$	deci	d
$10^{-2}$	centi	c
$10^{-3}$	mili	m
$10^{-6}$	micro	$\mu$
$10^{-9}$	nano	n
$10^{-12}$	pico	p
$10^{-15}$	femto	f

\* Únicamente los símbolos T(tera), G(giga) y M(mega) se escriben con mayúsculas.

TABLA B.2. VALORES Y CONSTANTES FISICAS.

CANTIDAD	MAGNITUD	UNIDAD
Aceleración		
Gravitacional	9.806650	m/seg <sup>2</sup>
g	980.665	cm/seg <sup>2</sup>
	32.17405	ft/seg <sup>2</sup>
Atmósfera	101325.0	Pa
Estandar	1013250.0	dina/cm <sup>2</sup>
	14,6959	psi
Constante de los gases		
R	8.3143	J/mol·K
	8.3143x10 <sup>7</sup>	erg/g·mole·K
	10.732	psi·ft <sup>3</sup> /lb·mole·°R
Cero absoluto	-459.67	°F
	0.0	°R
	-273.15	°C
	0.0	K
e	2.718282	
π	3.141593	
ln <sub>(10)</sub>	2.302585	
°API	$\frac{141.5}{\gamma_{(60°F)}} - 131.5$	

TABLA B.3. FACTORES DE CONVERSION.

Para convertir:

DE	A	MULTIPLICAR		INVERSO	
<b>AREA</b>					
acre	m <sup>2</sup>	4.046856	E 3	2.471054	E -4
	ft <sup>2</sup>	4.3560	E 4	2.295684	E -5
darcy	m <sup>2</sup>	9.869230	E 13	1.013250	E 12
	cm <sup>2</sup>	9.869230	E 9	1.013250	E 8
	milidarcy	1.00	E 3	1.00	E -3
	cm <sup>2</sup> ·cp·seg <sup>-1</sup> ·atm <sup>-1</sup>	1.00	E 0	1.00	E 0
ft <sup>2</sup>	m <sup>2</sup>	9.290304	E 2	1.076391	E 1
	cm <sup>2</sup>	9.290304	E 2	1.076391	E -3
hectárea	m <sup>2</sup>	1.44	E 2	6.944444	E -3
	m <sup>2</sup>	1.00	E 4	1.00	E -4
milla <sup>2</sup>	acre	2.471054	E 0	4.046856	E -1
	m <sup>2</sup>	2.589988	E 6	3.861022	E -7
	acre	6.40	E 2	1.5625	E -3
<b>DENSIDAD</b>					
g·cm <sup>-3</sup>	kg·m <sup>-3</sup>	1.00	E 3	1.00	E -3
	lbm·ft <sup>-3</sup>	6.242797	E 1	1.601846	E -2
lbm·ft <sup>-3</sup>	kg·m <sup>-3</sup>	1.601846	E 1	6.242797	E -2
	lbm·gal <sup>-1</sup>	1.336805	E 1	7.480520	E 0
	lbm·barril <sup>-1</sup>	5.614583	E 0	1.781076	E -1
<b>FUERZA</b>					
dina	N	1.00	E -5	1.00	E 5
	lb <sub>f</sub>	2.248089	E 6	4.448222	E 5
kg <sub>f</sub>	N	9.806650	E 0	1.019716	E -1
	lb <sub>f</sub>	2.204622	E 0	4.535924	E -1
lb <sub>f</sub>	N	4.448222	E 0	2.248089	E -1
<b>GASTO</b>					
barril·di <sup>-1</sup>	m <sup>3</sup> ·seg <sup>-1</sup>	1.840131	E -6	5.434396	E 5
	m <sup>3</sup> ·hora <sup>-1</sup>	6.624472	E -3	1.509554	E 0
	m <sup>3</sup> ·dia <sup>-1</sup>	1.589873	E -1	6.289810	E 0
	cm <sup>3</sup> ·seg <sup>-1</sup>	1.840131	E 0	5.434396	E -1
	ft <sup>3</sup> ·min <sup>-1</sup>	3.899016	E -3	2.564750	E 2
	gal·min <sup>-1</sup>	2.916667	E -2	3.428571	E 1
ft <sup>3</sup> ·min <sup>-1</sup>	m <sup>3</sup> ·seg <sup>-1</sup>	4.719474	E -4	2.118880	E 3
ft <sup>3</sup> ·seg <sup>-1</sup>	m <sup>3</sup> ·seg <sup>-1</sup>	6.831685	E -2	3.531466	E 1
gal·min <sup>-1</sup>	m <sup>3</sup> ·seg <sup>-1</sup>	2.309020	E -5	1.585032	E 4
<b>LONGITUD</b>					
angstrom	m	1.00	E -10	1.00	E 10
cm	m	1.00	E -2	1.00	E 2
ft	m	3.048	E 1	3.28084	E 0
	cm	3.048	E 1	3.28084	E -2
pg	m	2.540	E -2	3.937008	E -1
	cm	2.540	E 0	3.937008	E -1
milla (US)	m	1.609344	E 3	6.213712	E -2
	ft	5.280	E 3	1.893939	E -2
<b>MASA</b>					
gm	kg	1.00	E -3	1.00	E 3
lbm	kg	4.535923	E -1	2.204623	E 0
slug	kg	1.459390	E 1	6.852178	E -2
	lbm	3.217405	E 1	3.108095	E -2
ton (US corta)	kg	9.071847	E 3	1.102311	E -4
	lbm	2.00	E 3	5.00	E -4
ton (US larga)	kg	1.016047	E 3	9.842064	E -4
	lbm	2.240	E 3	4.464286	E -4
ton (métrica)	kg	1.00	E 3	1.00	E -3

TABLA B.3. CONTINUACION.

DE	A	MULTIPLICAR	INVERSO
<b>PRESION</b>			
atm (normal; 760 mm de Hg.)	Pa	1.01325 E 5	9.86923 E -6
	mm de Hg (0°C) ft de agua (4°C)	7.600 E 1	1.315789 E -3
bar	psi	3.38939 E 1	2.94990 E -2
	bar	1.01325 E 0	9.86923 E -1
cm de Hg (0°C)	Pa	1.450377 E 1	6.894757 E -2
	psi	1.33322 E -1	7.50064 E -4
dina·cm <sup>-2</sup>	Pa	1.93367 E -3	5.17151 E -4
	psi	1.00 E -5	6.894757 E -4
ft de agua	Pa	2.98898 E -3	3.34562 E -4
	psi	4.33515 E -1	2.30 3 E 0
kg <sub>f</sub> ·cm <sup>-2</sup>	Pa	9.80665 E -4	1.019716 E -5
	bar	9.80665 E -1	1.019716 E 0
	psi	1.422334 E 1	7.030695 E -2
<b>TIEMPO</b>			
dia	seg	8.64 E 4	1.157407 E -5
	minuto	1.44 E 3	6.944444 E -4
hora	hora	2.40 E 1	4.166667 E -2
	seg	3.60 E 3	2.777778 E -4
min	minuto	6.00 E 1	1.666667 E -2
	seg	6.00 E 1	1.666667 E -2
<b>VISCOSIDAD</b>			
centipoise	Pa·seg	1.00 E -3	1.00 E 3
	dina·seg·cm <sup>-2</sup>	1.00 E -2	1.00 E 2
	lbm	6.719689 E -4	1.488164 E -4
	lb <sub>m</sub> ·seg·ft <sup>-1</sup>	2.088543 E -5	4.738026 E -1
centistoke	lbm·ft <sup>-1</sup> ·seg <sup>-1</sup>	2.419088 E 0	4.133789 E 1
	m <sup>2</sup> ·seg <sup>-1</sup>	1.00 E -6	1.00 E 6
	centipoise·(g·cm <sup>-2</sup> ) <sup>-1</sup>	1.00 E 0	1.00 E 0
<b>VOLUMEN</b>			
acre·ft	m <sup>3</sup>	1.233482 E 3	8.107131 E -4
	ft <sup>3</sup>	4.3560 E 3	2.295684 E -5
barril	barril	7.758368 E 3	1.288931 E -4
	m <sup>3</sup>	1.589873 E 1	6.289811 E 0
ft <sup>3</sup>	ft <sup>3</sup>	5.614583 E 0	1.781076 E -1
	gal	4.20 E 1	2.380952 E -1
gal	m <sup>3</sup>	2.831685 E -1	3.531466 E 1
	pg <sup>3</sup>	1.7280 E -9	5.787037 E -4
litro	gal	7.480520 E 0	1.336805 E -1
	m <sup>3</sup>	3.785412 E -3	2.641720 E -2
	pg <sup>3</sup>	2.310001 E -2	4.329003 E 2
	m <sup>3</sup>	1.00 E -3	1.00 E 3



TABLA B.4. CONVERSION DE ESCALAS DE TEMPERATURA.

Para convertir:

DE	A	RESOLVER
°Fahrenheit	kelvin	$T_K = (T_F + 459.67) / 1.8$
°Rankine	kelvin	$T_K = T_R / 1.8$
°Fahrenheit	Rankine	$T_R = T_F + 459.67$
°Fahrenheit	°Celsius	$T_C = (T_F - 32) / 1.8$
°Celsius	kelvin	$T_K = T_C + 273.15$

# APENDICE C

## NOMENCLATURA Y REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

TABLA C.1. NOMENCLATURA.

SIMBOLO	CANTIDAD	DIMENSIONES	
		M L T	F L T
A	área	$L^2$	$L^2$
a	aceleración	$L T^{-2}$	$L T^{-2}$
a	ancho	L	L
C	coeficiente, coeficiente de chezy		
$C_c$	coeficiente de contracción		
$C_d$	coeficiente de descarga		
$C_f$	coeficiente de fricción		
$C_v$	coeficiente de velocidad		
c	centro de presión	L	L
c	compresibilidad	$M^{-1} L T^2$	$F^{-1} L^2$
c	velocidad del sonido, celeridad	$L T^{-1}$	$L T^{-1}$
$c_p$	calor específico a presión constante		
$c_v$	calor específico a volumen constante		
D	diámetro	L	L
E	energía	$M L^2 T^{-2}$	$F L^1$
$E_v$	módulo de elasticidad volumétrica	$M L^{-1} T^{-2}$	$F L^{-2}$
F	fuerza	$M L T^{-2}$	F
$F_B$	fuerza de flotación	$M L T^{-2}$	F
$F_E$	fuerza de elasticidad	$M L T^{-2}$	F
$F_G$	fuerza de gravedad	$M L T^{-2}$	F
$F_I$	fuerza de inercia	$M L T^{-2}$	F
$F_P$	fuerza de presión	$M L T^{-2}$	F
$F_T$	fuerza de tensión superficial	$M L T^{-2}$	F
$F_v$	fuerza de viscosidad	$M L T^{-2}$	F
f	factor de fricción		
G	gasto en peso	$M L^{-2} T$	$F L^{-3} T^3$
g	aceleración de la gravedad	$L T^{-2}$	$L T^{-2}$
H	carga total	L	L
h	altura, profundidad, carga	L	L
h	entalpía por unidad de masa		
$h_b$	carga producida por una bomba	L	L
$h_c$	pérdidas por contracción	L	L

TABLA C.1. CONTINUACION.

$h_c$	profundidad del centroide	L	L
$h_L$	pérdida de carga por fricción	L	L
$h_M$	carga producida por una máquina	L	L
$h_t$	carga producida por una turbina	L	L
$\hat{h}$	entalpía por unidad de peso		
$I$	energía térmica interna por unidad de peso	M L <sup>2</sup> T <sup>-2</sup>	F L <sup>1</sup>
$I$	momento de inercia	L <sup>4</sup>	L <sup>4</sup>
$i$	energía térmica interna por unidad de masa	L <sup>2</sup> T <sup>-2</sup>	L <sup>2</sup> T <sup>-2</sup>
$\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$	vectores unitarios		
$K$	constante, coeficiente de pérdidas		
$k$	relación de calores específicos		
$L$	longitud	L	L
$\ell$	litros	L <sup>3</sup>	L <sup>3</sup>
$\ell$	longitud	L	L
$M$	masa	M	F L <sup>-1</sup> T <sup>2</sup>
$M$	gasto en masa	M L <sup>0</sup> T <sup>-1</sup>	F L <sup>-1</sup> T
$\bar{M}$	peso molecular		
$m$	masa	M	F L <sup>-1</sup> T <sup>2</sup>
$m$	exponente		
$N$	cantidad		
$N_E$	número de Euler		
$N_F$	número de Froude		
$N_M$	número de Mach		
$N_R$	número de Reynolds		
$N_W$	número de Weber		
$n$	coeficiente de rugosidad de-Manning		
$n$	constante, exponente, número		
$n$	número de moles		
$\bar{n}$	vector en la dirección normal		
$P$	perímetro mojado	L	L
$P$	potencia	M L <sup>2</sup> T <sup>-3</sup>	F L T <sup>-1</sup>

TABLA C.1. CONTINUACION

$p$	presión	$M L^{-1} T^{-2}$	$F L^{-2}$
$p_a$	presión atmosférica	$M L^{-1} T^{-2}$	$F L^{-2}$
$p_o$	presión estática	$M L^{-1} T^{-2}$	$F L^{-2}$
$p_s$	presión de estancamiento	$M L^{-1} T^{-2}$	$F L^{-2}$
$p_v$	presión de vapor	$M L^{-1} T^{-2}$	$F L^{-2}$
$Q$	gasto volumétrico	$L^3 T^{-1}$	$L^3 T^{-1}$
$Q_H$	transferencia de energía por unidad de peso		
$Q_M$	energía transmitida por una máquina		
$\vec{q}$	vector velocidad de flujo		
$R$	constante de los gases		
$R$	resultante de fuerzas	$M L T^{-2}$	$F$
$R_h$	radio hidráulico	$L$	$L$
$R'$	diferencia manométrica	$L$	$L$
$r$	radio	$L$	$L$
$r$	radio de una tubería	$L$	$L$
$S$	pendiente hidráulica		
$S$	relación de pesos específicos		
$s$	desplazamiento, distancia	$L$	$L$
$T$	temperatura absoluta		
$\bar{T}$	tiempo	$T$	$T$
$T_s$	temperatura de estancamiento		
$T_z$	par motor	$M L^2 T^{-2}$	$F L$
$t$	espesor	$L$	$L$
$t$	tiempo	$T$	$T$
$u$	componente de la velocidad en el eje x		
$V$	volumen	$L^3$	$L^3$
$V_s$	volumen específico		
$v$	velocidad	$L T^{-1}$	$L T^{-1}$
$v$	componente de la velocidad en el eje y		
$\vec{v}$	vector velocidad		
$\omega$	peso	$M L T^{-2}$	$F$
$\omega$	trabajo por unidad de tiempo	$M L^2 T^{-3}$	$F L T^{-1}$

TABLA C.1. CONTINUACION

$W_s$	trabajo de flecha (par)	M	$L^2 T^{-2}$	F	L
w	componente de la velocidad en el eje Z				
x	longitud, abscisas	L		L	
$x_p$	abscisa del centro de presión	L		L	
y	longitud, ordenadas	L		L	
$y_c$	distancia inclinada al centro de la superficie	L		L	
$y_p$	ordenada al centro de presión	L		L	
Z	factor de compresibilidad				
z	altura o elevación	L		L	
$\alpha$	factor de corrección de la energía cinética				
$\alpha$ $\beta$ $\gamma$	cosenos directores				
$\beta$	factor adimensional				
$\gamma$	peso específico	M	$L^{-2} T^{-2}$	F	$L^{-3}$
$\epsilon$	altura de la rugosidad	L		L	
$\eta$	cantidad de movimiento por unidad de masa				
$\eta$	viscosidad absoluta en general	M	$L^{-1} T^{-1}$	F	$L^{-2} T$
$\theta$	ángulo				
$\lambda$	recíproco de la relación de escalas				
$\mu$	viscosidad dinámica o absoluta	M	$L^{-1} T^{-1}$	F	$L^{-2} T$
$\nu$	viscosidad cinemática	$L^2$	$T^{-1}$	$L^2$	$T^{-1}$
$\Pi$	producto adimensional				
$\pi$	constante				
$\rho$	densidad	M	$L^{-3}$	F	$L^{-4} T^2$
$\rho_r$	densidad relativa				
$\sigma$	tensión superficial	M	$T^{-2}$	F	$L^{-1}$
$\tau$	esfuerzo cortante	M	$L^{-1} T^{-2}$	F	$L^{-2}$
$\tau_0$	punto de cedencia	M	$L^{-1} T^{-2}$	F	$L^{-2}$
$\omega$	velocidad angular				

TABLA C.2. SUBINDICES.

---

SIMBOLO CANTIDAD

a	atmosférica
e	entrada
f	fuerza
g	gas
m	masa
m	mercurio
m	modelo
o	aceite
o	base, origen
p	presión
p	prototipo
r	real
r	relación
s	salida
t	teórica
t	total
v	volumen
v	vapor
w	agua

TABLA C.3. ABREVIATURAS.

---

<i>abs</i>	absoluta
<i>atm</i>	atmosférica
<i>BTU</i>	unidad térmica británica
<i>cal</i>	caloría
<i>cte</i>	constante
<i>EC</i>	energía cinética
<i>Fig</i>	figura
<i>ft</i>	pie
<i>g</i>	gramo
<i>gal</i>	galón
<i>gpm</i>	galones por minuto
<i>HP</i>	caballo de potencia
<i>J</i>	Joule
<i>kg</i>	kilogramo
<i>kw</i>	kilowatt
<i>lb</i>	libra
<i>LE</i>	Línea de energía
<i>LGH</i>	línea de gradiente hidráulico
<i>lím</i>	Límite
<i>ln</i>	logaritmo base e
<i>log</i>	logaritmo base 10
<i>m</i>	metro
<i>man</i>	manométrico
<i>máx</i>	máximo
<i>mín</i>	mínimo
<i>N</i>	Newton
<i>Pa</i>	Pascal
<i>pg</i>	pulgada
<i>psi</i>	Libra sobre pulgada cuadrada
<i>psia</i>	libra sobre pulgada cuadrada absoluta
<i>rpm</i>	revoluciones por minuto
<i>seg</i>	segundo



TABLA C.3. ABREVIATURAS.

---

S.C.	sistema de control
S.G.	gravedad específica
S.I.	Sistema Internacional
ton	tonelada
V.C.	volumen de control

TABLA C.4. REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS.

---

- BIRD, R. Byron, Warren E. Stewart, y Edwin N. Lightfoot. — *Fenómenos de transporte : un estudio sistemático de los fundamentos del transporte de materia, energía y cantidad de movimiento.* — Barcelona : Reverté, c1978 : pp. 1.1-1.25.
- CRAFT, B. C., y M. F. Hawkins. — *Applied petroleum reservoir engineering.* — Englewood, N. J. : Prentice-Hall, c1959. — pp. 12-22. — (Chemical Engineering Series)
- DAUGHERTY, Robert L., y Joseph B. Franzini. — *Fluid mechanics with engineering applications.* — 7. ed. — Tokyo : McGraw-Hill Kogakusha, c1977. — 565 p.
- EARLOUGHER, Robert C., Jr. — *Advances in well test analysis.* — New York ; Dallas, Tx : Society of Petroleum Engineers of AIME, c1977. — pp. 180-185. — (SPE monograph series)
- GILES, Ronald V. — *Teoría y problemas de la mecánica de fluidos e hidráulica.* — 2. ed. — México : McGraw-Hill, c1979. — 273 p. — (Serie de compendios Schaum)
- PIRSON, Sylvain J. — *Oil reservoir engineering.* — 2. ed. — New York : McGraw-Hill, c1958. — pp. 363-365.
- ROCA VILA, R. — *Introducción a la mecánica de los fluidos.* — México : Limusa, c1978. — 497 p.

SLIDER, H. C. — *Practical petroleum reservoir engineering methods : an energy conservation science.* — Tulsa, Ok : Petroleum Publishing Company, c1976. — pp. 265-274.

STREETER, V. L., y E. B. Wylie. — *Mecánica de los fluidos.* — 6. ed. — México : McGraw-Hill, c1979. — 775 p.

