UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

Apuntes de Investigación de Operaciones I

MATERIAL DIDÁCTICO

Que para obtener el título de

Ingeniera Industrial

P R E S E N T A (N)

Morales Juárez Cecilia G.

ASESOR(A) DE MATERIAL DIDÁCTICO

Dra. Esther Segura Pérez

Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2018

Índice

1.Introducción ... 3

1.1 Objetivo ... 3

1.2 Material didáctico ... 3

1.3 Funciones de que desempeña el material didáctico. ... 4

1.4 Tipos de material didáctico ... 5

1.5 Características generales de materiales escritos. ... 5

1.6 Ubicación del material didáctico en el proceso de enseñanza aprendizaje. ... 6

1.7 Notas de apoyo docente. ... 8

1.8 Proceso enseñanza aprendizaje ... 8

1.9 Estilos de aprendizaje. ... 10

1.9.1 Características de los distintos grupos de estilos de aprendizaje ... 11

1.10 Elementos del proceso enseñanza aprendizaje ... 12

1.11 Función del docente ... 12

1.12 Función del estudiante ... 12

1.13 Datos de identificación del curso ... 13

1.14 Programa de la materia ... 14

1.15 Objetivos del curso ... 14

1.16 Contenido temático ... 16

1.16 Bibliografía básica y temas para los que se recomienda (De acuerdo con el plan de estudios) ... 18

1.17 Perfil del estudiante de séptimo semestre de Ingeniería Industrial ... 19

1.19 Perfil del estudiante de ingeniería ... 20

1.20 Perfil del egresado ... 21

1.21 Perfil profesional ... 23

1.21 Perfil profesiográfico del docente que imparte la asignatura de Investigación de Operaciones ... 24

2. Apuntes de Investigación de Operaciones ... 25

2.1. Introducción a la Investigación de Operaciones ... 25

2.2 Fundamentos de Sistemas ... 35

2.3 Modelado. ... 41

2.4 Programación Lineal ... 50

2.5 Algoritmos Especiales ... 104

2.5.1 Modelo de asignación ... 104

2.5.2 Modelo de transporte 111
2.6 Modelos de Redes 175
2.7 Programación Entera 188
3.Solución de problemas propuestos 191
3.1 Modelado Matemático 191

1. Introducción

1.1 Objetivo

1.2 Material didáctico

Según la UNESCO (1969) los materiales didácticos son instrumentos tangibles que utilizan medios impresos, orales o visuales para servir de apoyo al logro de los objetivos educativos y al desarrollo de los contenidos curriculares. Además de presentar el contenido, éstos interactúan con quien los utiliza para apoyar el aprendizaje de nuevos conceptos, ejercicio y desarrollo de habilidades. Su intención es hacer el aprendizaje más activo y propician el trabajo productivo mediante el planteamiento de problemas y la inducción de observaciones y de experimentos.

El uso de materiales didácticos son elementos que sirven de apoyo en el proceso educativo, además de que facilitan el proceso de enseñanza- aprendizaje.

Un material didáctico no puede ser rígido debido al ambiente cambiante en que se desarrolla el proceso de enseñanza-aprendizaje. Sin embargo, existen una serie de aspectos para tipificarlos.

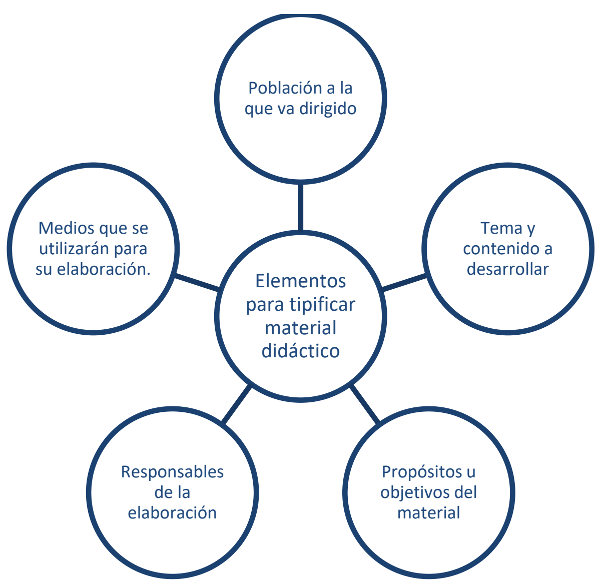


Ilustración 1 Elementos para tipificar material didáctico. Fuente: Elaboración propia

1.3 Funciones de que desempeña el material didáctico.

Según Morales M. (2012) , un material didáctico deben ser diseñado de tal forma que se cumpla con las siguientes funciones:

1. Proporciona información: La función principal del material didáctico es ofrecer información relevante al público al que va dirigido para que éste pueda comprender con mayor facilidad el tema que se aborda en el material.

2. Cumple con un objetivo: Antes de realizar el material, se debe plantear y tener claro el objetivo de éste. Esto con el fin de desarrollar el material que cumpla con las características deseadas.

3. Ayuda en el proceso de enseñanza aprendizaje: Para que cumpla esta función, es necesario no perder de vista el objetivo, delimitando los contenidos.

4. Contextualizar a los estudiantes: En los materiales didácticos es indispensable incluir imágenes, objetos, ejemplos, que favorezcan al estudiante, la oportunidad de relacionar lo que se quiere transmitir, con su conocimiento previo o con alguna aplicación en específico.

5. Involucrar los sentidos en el proceso de enseñanza: Los materiales didácticos son tan diversos, que pueden ser percibidos por más de un sentido, lo cual acerca el conocimiento de manera más personal al grado de relacionarlo con experiencias y así lograr aprendizajes significativos.

6. Facilitar la comunicación entre el estudiante y el docente: Los materiales didácticos deben ser diseñados de tal forma que sea entendible por cualquier persona del grupo al que va dirigido.

7. Motivar a los estudiantes: Los materiales didácticos tienen como objetivo promover entre los estudiantes la curiosidad, la creatividad, entre otras habilidades. Esto para permitir a los estudiantes prestar mayor atención en los contenidos que se abordan.

1.4 Tipos de material didáctico

Tabla 1 Tipos de material didáctico. Fuente: Elaboración propia

TIPOS DE MATERIAL DIDÁCTICO	
ESCRITOS	Utilizan la palabra escrita para cumplir sus funciones en el proceso de enseñanza-aprendizaje.
VISUALES	Su elemento básico son las imágenes, a través de las cuales, se comunica conceptos, información, conocimiento, etc.
ORALES	El elemento fundamental de estos materiales es la palabra hablada, la cual comunica ideas, conceptos, etc.
AUDIOVISUALES	En Estos materiales se mezcla la palabra hablada, la escrita y la imagen para transmitir ideas.
TECNOLÓGICOS	Integran elementos tecnológicos como programas de cómputo, instrumentos especializados, etc.

1.5 Características generales de materiales escritos.

-**Presentación del tema de acuerdo con los objetivos** que persigue.

-Deben desarrollarse de forma **clara, sencilla, útil y objetiva**.

-La presentación del tema de interés deberá **presentarse adecuando los contenidos y el lenguaje.**

- Los ***contenidos*** presentados deben cumplir con ciertas características como:

-**Ser interesantes para los lectores**: El contenido debe estar relacionado con los intereses y necesidades del público al que va dirigido.

-**Ser novedosos y originales**: Deben contener elementos nuevos que inviten al público a consultar el material, ya que de no hacerlo, es probable que se convierta en material fuera de uso y pierde su carácter de lectura útil.

-**Deben tener aplicabilidad**: Debe presentar contenido que sea útil y significativo que favorezca el aprendizaje para ser aplicados en la realidad.

-**Breves y concretos**: No debe perder de vista el objetivo central, al cual debe prestar su atención para que el público no pierda el interés.

-**Contener un mensaje definido**: El material debe dejar ideas claras y concretas al lector .

-**Fomentar el autoaprendizaje**: El contenido debe involucrar al lector para la adquisición de nuevo conocimiento y habilidades.

-**Adecuarse al contexto cultural del individuo y su madurez**: No se debe perder de vista elementos culturales, valores, costumbres en la elaboración del contenido,

-**Promover el análisis y la crítica**: Es importante que el material permita al lector llegar a un nivel de comprensión tal, que sea capaz de analizar el tema y que promueva el juicio crítico para reflexionar no solo en el contenido teórico, sino en su aplicabilidad en el mundo real.

1.6 Ubicación del material didáctico en el proceso de enseñanza aprendizaje.

Según Morales M. (2012) cualquier material didáctico está estrechamente relacionado con el proceso Enseñanza-Aprendizaje, ya que es un medio por el cual el profesor puede transmitir los contenidos y los alumnos reciben la información, además les será más fácil relacionarla con experiencias o conocimientos previos para que el aprendizaje sea significativo.

El material didáctico apoya el contenido de alguna asignatura permitiendo que los receptores formen un criterio propio de lo aprendido, interactuando con los materiales y con un papel importante en su formación.

- Producción de material didáctico.

Según la UNESCO las actividades que deben realizarse para la producción de material didáctico se dividen en seis etapas, integradas por: planeación, investigación, elaboración, validación, producción y difusión.

Las primeras etapas se enfocan en la planeación e investigación.

-Planeación: Se desarrolla identificando las características esenciales del material, el objetivo u objetivos, el tipo de material que se elaborará, la función que desempeñará, a quién va dirigido, los recursos materiales y humanos que participarán en la elaboración del material.

-Investigación: Consiste en un estudio de las características, necesidades e intereses del público al que va dirigido, esto con el fin de orientar de una forma adecuada el contenido. En esta etapa también se recopila información necesaria sobre el tema o temas que abordará el material.

Existen factores que deben ser considerados en la planificación incluyen:

-Objetivos de la institución: El material no debe perder de vista los objetivos que orientan las funciones de la institución.

-Contenido curricular: Corresponde al plan de estudios organizado que describe las necesidades, en cuanto a contenido, de la institución.

-Público al que va destinado: Es importante conocer las características del grupo al que va dirigido el material, con el fin de proporcionarles una solución a sus necesidades e intereses.

-Objetivo del material: El material didáctico debe tener un objetivo particular. Éste objetivo debe ser congruente con los objetivos y plan curricular.

-Tipo de material: Con base en el objetivo y alcance del material, se definen mejor las características del proceso de producción.

En la investigación debe enfocarse hacia la exploración de las necesidades e intereses del público al que irá dirigido el material, esto con el fin de aumentar la probabilidad de aceptación del material.

También se pueden incluir datos provenientes de los estudiantes directamente, esta puede ser usada como una importante fuente de información para quien desarrolle el material.

Etapas de elaboración y redacción en el proceso de producción de material didáctico:

-Presentación del tema: En la presentación del tema es importante que se considera una dosificación de los temas que se abordarán, esto de acuerdo con las necesidades, intereses, capacidades y aptitudes de público. Existen elementos que generan reflexión, que promuevan a la acción, a la construcción, etc.

El contenido debe presentarse con un lenguaje dinámico que permita distinguir entre los conceptos y procedimientos que se abordan. Los conocimientos o conceptos indican lo que el público debe saber sobre el tema, los procedimientos indican la parte práctica, es decir, lo que se debe saber hacer.

Después de identificar los puntos anteriores, el siguiente paso en la elaboración del material didáctico es identificar la secuencia en la que se presentará. Para después proseguir con la examinación del producto, para determinar si reúne los requisitos que debe cumplir un buen material didáctico, tales como:

-Tener objetivos claros.

-Tener información libre de errores técnicos

-Dosificación de contenidos

-Organización explícita del contexto al que pertenece cada unidad.

-Ejemplos significativos y secuenciados adecuadamente.

-Uso de elementos visuales como cuadros sinópticos, diagramas de flujo, etc.

1.7 Notas de apoyo docente.

Según Morales Muñoz (2012) "La nota de apoyo es una herramienta muy útil en el desempeño de los deberes de un docente. Se elabora con base en las necesidades de información que se requieran y acorde con los objetivos o competencias que se persigan en la lección, tema, unidad o contenidos. Se toman en cuenta las palabras, imágenes, expresiones clave o porciones de información escrita o grabada que comuniquen al docente estímulos que le permitan explicar de modo preciso lo que se quiere enseñar."

Morales Muñoz (2012) menciona algunas de las ventajas del uso de notas de apoyo:

"Mejoran la claridad, se deja poco espacio a la improvisación, complementa lo que se está visualizando u oyendo, ahorra tiempo, permite dar crédito a las fuentes, fortalece la lógica de quien explica y quien aprende, organiza la información, agiliza las clases, sirve de modelo al estudiante."

-Docencia

1.8 Proceso enseñanza aprendizaje

El propósito principal de la enseñanza es transmitir conocimientos, para lograr un cambio en el individuo que le permita enfrentarse a nuevas situaciones con mayores herramientas. El proceso de enseñanza produce transformaciones sistemáticas en los individuos que se producen de forma gradual, es decir, es un proceso progresivo, transformador y dinámico

En un proceso tradicional, existe un elemento indispensable para lograr el proceso de enseñanza, el profesor o docente, quien dirige la actividad hacia el dominio de los conocimientos, formación de habilidades.

La enseñanza existe para que se logre el aprendizaje, es decir, estimula el aprendizaje. El aprendizaje es un proceso muy complejo cuya característica principal, es la adquisición de nuevo conocimiento, habilidad o capacidad. Para que sea considerado como aprendizaje, el nuevo conocimiento debe manifestarse en un tiempo futuro, y contribuir a la solución de problemas.

Existen teorías relacionadas con el proceso enseñanza aprendizaje que consideran solo los estímulos que recibe el individuo, mismos que causan una respuesta. Desde esta perspectiva, se omiten algunos elementos importantes del proceso enseñanza- aprendizaje, ya que el ser humano no está dotado únicamente de habilidades lógicas, sino también de habilidades emocionales, sociales, morales, físicas provenientes del cerebro.

En el cerebro humano se desarrolla el proceso de transformación que permite lograr el aprendizaje. Es por ello, que, en los últimos años, se han realizado estudios al cerebro con el fin de entender mejor el proceso enseñanza-aprendizaje.

La Neurociencias (ciencias que estudian el sistema nervioso y el cerebro) desde hace dos décadas han facilitado la comprensión del proceso de aprendizaje, han permitido ver que, durante el proceso de aprendizaje, se involucra todo el cerebro y el cuerpo. El cerebro actúa como un receptor de estímulos que se encarga de seleccionar, priorizar, procesar información, emitir respuestas, etc.

Las neurociencias han llegado, a través del estudio del cerebro humano, a las siguientes conclusiones:

- El cerebro es el órgano encargado de aprender además de enseñarse a sí mismo, esto gracias a la experiencia que registra el cerebro, pues desde la etapa prenatal, el cerebro humano crea conexiones neuronales únicas a través de la experiencia, estas conexiones permiten que el cerebro aprenda constantemente.

- El cerebro aprende a través de patrones. El cerebro humano detecta, aprende y da sentido a los patrones para utilizarlos cuando tenga la necesidad de hacerlo. Según Campos (2010) "Para procesar información y emitir respuestas, el cerebro utiliza mecanismos consientes e inconscientes." Por esta razón, el ejemplo juega un rol importante en el aprendizaje por patrones y de forma no consciente.

- Las emociones matizan el funcionamiento del cerebro: los estímulos emocionales y las habilidades cognitivas interactúan, por ello, los estados de ánimo, pueden afectar el razonamiento, la toma de decisiones, etc. Estudios han demostrado que el alto grado de estrés produce impactos negativos en el aprendizaje.

- El cerebro aprende con el cuerpo: Tanto el cerebro necesita al cuerpo como el cuerpo al cerebro, ambos aprenden de forma integradora. Se ha comprobado que el movimiento y la expresión corporal estimulan diferentes regiones en el cerebro, mejoran las habilidades cognitivas.

- El cerebro además aprende desde distintas vías: El cerebro no cuenta solo con un tipo de inteligencia, sino que existen distintos tipos de inteligencias que se encuentran interconectadas entre sí pero que además pueden trabajar de forma independiente.

- El cerebro aprende con diferentes estilos: El cerebro humano tiene la capacidad de aprender a través de diferentes estilos: visual, auditivo, lingüístico,.,,,,,

Además, tiene la capacidad de aprender de forma reflexiva, impulsiva, analítica, global, conceptual, perceptiva, motora, emocional, interpersonal e interpersonal.

Esto brinda una gran posibilidad para desarrollar diferentes formas de enseñanza, en los que se exploren distintos estilos de aprendizaje.

- El cerebro se desarrolla por medio de influencias genéticas y ambientales.

- El cerebro aprende de forma gradual: Poe ello, las propuestas de enseñanza deben ir de lo más simple a lo más complejo.

1.9 Estilos de aprendizaje.

Cada persona tiene un estilo distinto en su forma de vivir, que constituyen modos particulares de personalidad. Cuando estos modos afectan el aprendizaje, se llaman estilos de aprendizaje. Cuando se reflejan en la enseñanza, se llaman estilos de enseñanza.

El enfoque de los estilos de aprendizaje, se relaciona con la organización y el control del aprendizaje y la adquisición de nuevo conocimiento.

De acuerdo con la manera en que las personas actúan, se puede deducir el estilo de aprendizaje. El estilo de aprendizaje engloba la forma en que una persona aprende, el efecto y la conducta que causa. Cada persona tiene su propio estilo de percibir, conocer, sentir, actuar, reaccionar, etc. Esto puede ser producto de herencia genética o de la historia personal; sin importar el origen, estos rasgos de la personalidad acaban por consolidar la forma de acercarse cognitivamente a la realidad, cómo se percibe, cómo se procesa y cómo se reacciona a ella.

La cognición inicia con la percepción, implica recibir u obtener información, ideas, conceptos, etc. Cada individuo tiene diferentes formas de percibir la realidad. Otro aspecto importante de la cognición es la forma en que se adquieren los conocimientos, cada persona obtiene información nueva de formas distintas. Algunas personas pueden guiarse más por abstraer la realidad y otros se orientan hacia las fuetes concretas y directas.

Las personas concretas dependen en mayor medida de los sentidos para obtener información, en cambio, las personas abstractas dependen mayormente de fuentes indirectas.

La importancia de detectar las diferencias en los estilos de aprendizajes, es que el éxito del aprendizaje depende en gran manera de la motivación (positiva) del estudiante que lo lleve a un nivel de compromiso que permita integrar la nueva información a la memoria a largo plazo.

Estas diferencias entre los individuos han resultado en distintas teorías sobre el estilo de aprendizaje. Cada una de las teorías propuestas por distintos autores, enfocan el aprendizaje desde ángulos distintos.

1.9.1 Características de los distintos grupos de estilos de aprendizaje

1. Según se atiene la información

    a) Aprendizaje visual: En este estilo de aprendizaje, el aprendizaje se realiza mayormente a través del contacto visual con el material educativo. Se piensa en imágenes. Ayuda a a relacionar distintas ideas y conceptos.

Los materiales visuales mejoran el proceso de aprendizaje.

    b) Aprendizaje auditivo: Este estilo de aprendizaje aprende preferentemente escuchando el material educativo. Piensa y recuerda de manera secuencial.

    c) Aprendizaje kinestésico: En este estilo de aprendizaje, se aprende al interactuar físicamente con la materia educativa. Para aprender se necesita asociar la información con movimientos o sensaciones corporales. Recuerdan mejor lo que hacen que lo que ven o escuchan.

2. Según la actividad de los hemisferios cerebrales

    a) Hemisferio lógico: visualiza símbolos y conceptos abstractos, verbaliza sus ideas, analiza la información paso a paso, identifica rápidamente los detalles, hechos y reglas, es organizado y estructurado, presta especial interés al resultado final.

    b) Hemisferio holístico: Visualiza imágenes de objetos concretos, piensa en imágenes, sonidos, sensaciones, pero no los verbaliza, sintetiza la información, atienden el proceso más que el resultado.

3. Según el análisis de la información:

    a) Activos: Son de mente abierta, crecen con los desafíos y se aburren con los largos plazos,

b) Reflexivos: Consideran todas las alternativas antes de actuar, buscan datos y los analizan antes de concluir. Escuchan y no intervienen hasta que están seguros.

c) Teóricos: Integran las observaciones a teorías coherentes, se enfocan en los problemas de forma escalonada, por etapas lógicas. Analizan y sintetizan. Son profundos en su sistema de pensamiento. Buscan la racionalidad y la objetividad.

d) Pragmáticos: Son hábiles en la aplicación práctica de las ideas, actúan rápidamente, buscan aquello que es funcional.

1.10 Elementos del proceso enseñanza aprendizaje

El proceso de enseñanza aprendizaje en la educación superior, involucra tres elementos principales: la institución de educación, el profesor universitario y el estudiante.

La institución tiene distintas funciones, las cuales no se limitan a desarrollar solo el proceso de enseñanza aprendizaje, además, debe preparar para el ejercicio de actividades profesionales que exijan la aplicación de conocimientos. Así, por un lado, la institución tiene dos funciones principales: transmitir conocimientos y formar profesionales.

1.11 Función del docente

El docente universitario es el agente está en contacto directo con el estudiante. Su labor es transmitir los conocimientos al estudiante para que se realice el proceso de aprendizaje adecuadamente. En modelos tradicionales de educación, el docente era el único responsable de que se cumpliera el proceso enseñanza aprendizaje. Sin embargo, como se ha mencionado anteriormente, en los nuevos modelos, el docente juega un papel importante de forma activo mas no el único.

1.12 Función del estudiante

En sentido tradicional, el estudiante dentro de una institución de educación superior, es un agente receptor de la acción educativa. Este sentido tradicional, deja al estudiante un papel meramente pasivo que se limita a aumentar sus conocimientos.

Sin embargo, la tendencia global, indica que este modelo está en cambio, en el cual, los estudiantes dejan su papel pasivo de aumentar sus conocimientos, para adoptar un papel activo en la consecución de los fines de la institución educativa. La finalidad del cambio que ha tenido la forma tradicional de enseñanza aprendizaje, es involucrar a los estudiantes en su formación logrando así que la experiencia universitaria no se limite a la inclusión de nuevo conocimiento, sino que también faculte para ejercer una profesión.

1.13 Datos de identificación del curso

La asignatura de Investigación de Operaciones en el plan de estudio que actualmente se encuentra vigente, se imparte en el séptimo semestre de la licenciatura en Ingeniería Industrial, siendo ésta de carácter obligatorio, cubre un total de ocho créditos. El curso consta de 64 horas, las cuales imparten en clases con duración de dos horas cada una, dos veces a la semana durante dieciséis semanas.

Ubicación del curso de Investigación de Operaciones dentro del plan de estudios:

Ilustración 2 Ubicación de la materia en el plan de estudios. Fuente: Página de DIMEI, FI UNAM.

No se encuentra con seriación obligatoria antecedente ni consecuente, sin embargo, el alumno al llegar al séptimo semestre cuenta con conocimiento de materias como: Álgebra, Geometría Analítica, Álgebra Lineal, Probabilidad; Estadística. Siendo estas materias antecedentes importantes para obtener una mejor comprensión de los temas que comprende la materia de Investigación de Operaciones.

Nombre de la asignatura: Investigación de Operaciones I
Carrera en que se imparte: Ingeniería Industrial.
Semestre en el que se imparte: 7° semestre dentro del plan 2016
Características del curso
Carácter: obligatorio
No. De créditos: 8
No. De horas teoría por semana: 3
No. De horas prácticas por semana: 0
No. Total de horas del curso: 64

Antecedentes (no obligatoritos dentro del plan de estudios): Álgebra, Álgebra Lineal, Geometría Analítica, Estadística; Probabilidad.

1.14 Programa de la materia

El programa de la materia de Investigación de Operaciones I, comprende seis temas principales, los cuales están integrados su vez por subtemas específicos, algunos de los cuales se fundamentan matemáticamente en ciencias como el álgebra, álgebra lineal, geometría analítica, probabilidad y estadística.

1. Fundamentos de Sistemas
2. Modelado
3. Programación lineal (álgebra, álgebra lineal, geometría analítica, estadística, probabilidad)
4. Algoritmos especiales (álgebra, álgebra lineal, geometría analítica, estadística, probabilidad)
5. Redes (Álgebra)
6. Programación Entera (Álgebra, Álgebra lineal)

1.15 Objetivos del curso

El Objetivo general del curso de acuerdo con el plan de estudios de la asignatura es :

"El alumno formulará y resolverá modelos de sistemas de producción, de almacenes, de logística y cadena de suministro y financieros, utilizando el enfoque sistémico, diferentes algoritmos de programación y programas de cómputo; y explicará los resultados de las soluciones obtenidas con la finalidad de soportar una toma de decisiones."

El plan de estudio de la asignatura de Investigación de Operaciones I también plantea objetivos específicos para cada uno de los temas que contiene, mismos que se presentan a continuación.

1 Fundamentos de sistemas

Objetivo: "El alumno clasificará los diferentes sistemas y aplicará el enfoque sistémico para el estudio y formulación de la solución a problemas relacionados con los sistemas productivos y de servicios."

2 Modelado

Objetivo:*" El alumno diseñará modelos de sistemas productivos y de servicios a partir de las reglas para la clasificación, formulación y validación de un modelo. "*

3 Programación lineal

Objetivo: "*El alumno formulará y resolverá modelos, para la solución de problemas lineales; determinará y analizará la solución de los mismos mediante la aplicación de los conceptos fundamentales de la programación lineal.***"**

4 Algoritmos especiales

Objetivo: "*El alumno formulará modelos para resolver problemas de transporte, transbordo y asignación y analizará la solución para una toma de decisiones."*

5 Redes

Objetivo: "*El alumno formulará y resolverá modelos de programación lineal en redes aplicados a diferentes problemas en los sistemas productivos y de servicios, y analizará la solución para una toma de decisiones.* "

6 Programación entera

Objetivo: *"El alumno formulará modelos de programación entera para resolver problemas relacionados con los sistemas productivos y de servicios, analizará la solución para una toma de decisiones."*

El plan de estudios recomienda utilizar distintos medios para lograr los objetivos en esta asignatura, ubicándolos en los siguientes rubros:

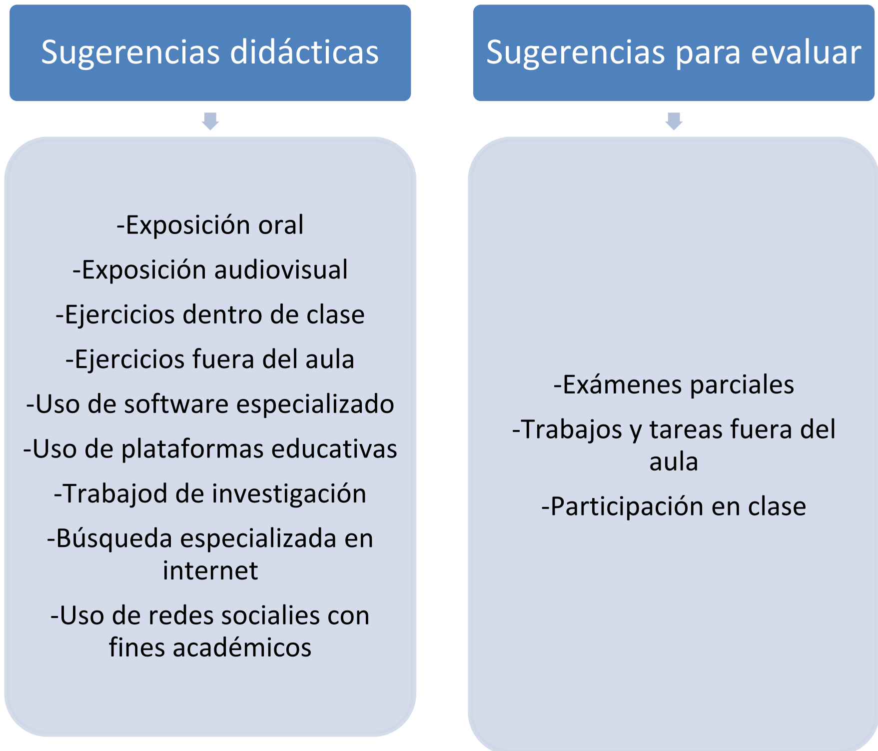


Ilustración 3 Sugerencias didácticas y sugerencias para evaluar. Fuente:Elaboración propoa

1.16 Contenido temático

1.Fundamentos de sistemas

Contenido:

1.1 Definición y clasificación de sistemas.

1.2 Enfoque de sistemas y el método científico.

1.3 Modelo conceptual y su aplicación en la solución de problemas.

1.4 Metodología de los sistemas y sus diferentes enfoques en la solución de problemas.

2. Modelado

Contenido:

2.1 Modelos en la empresa.

2.2 Proceso de construcción de modelos.

2.3 Tipos de modelos. Modelos físicos. Modelo análogo. Modelo simbólico.

2.4 Modelos determinísticos y probabilísticos.

2.5 Construcción de modelos.

3 .Programación lineal

Contenido:

3.1 Teoría de programación lineal.

3.2 Método gráfico.

3.3 Método simplex.

3.4 Teoría de la dualidad.

3.5 Análisis de sensibilidad.

4 . Algoritmos especiales

Contenido:

4.1 Problema de transporte.

4.2 Problema de transbordo.

4.3 Problema de asignación.

4.4 Solución mediante programación lineal.

5 . Redes

Contenido:

5.1 Descripción y características de las redes.

5.2 Redes dirigidas.

5.3 Árbol de mínima expansión.

5.4 Problemas de flujo máximo.

5.5 Ruta más corta.

5.6 Planeación, programación y control de proyectos.

6 .Programación entera

Contenido:

6.1 Programación entera y sus aplicaciones.

6.2 Métodos de solución de programación entera.

6.3 Algoritmo de ramificar y acotar.

6.4 Algoritmo de planos de corte.

1.16 Bibliografía básica y temas para los que se recomienda (De acuerdo con el plan de estudios)

ACKOFF, Rusell Planificación de la empresa del futuro México Limusa, 2006. Temas: 1.

HILLIER, Frederick, LIEBERMAN, Gerald Introducción a la investigación de operaciones 5a. edición México Mc Graw Hill, 2010. Temas :1, 2, 3, 4, 5, 6

MARIN PINILLOS, Benito Técnicas de optimización México Facultad de Ingeniería, UNAM 1994. Temas: 1, 2, 3, 4, 5, 6

TAHA, Hamdy A. Investigación de operaciones 9a. edición México Pearson, 2012. Temas:1, 2, 3, 4, 5, 6

WAYNE, Winston L. Investigación de operaciones: aplicaciones y algoritmos 4a. edición México Thomson, 2005. Temas: 1, 2, 3, 4, 5, 6

Bibliografía complementaria Temas para los que se recomienda:

ANDERSON, David, SWEENEY, Dennis, et al.

Métodos cuantitativos para los negocios 9a. edición México Internacional Thomson, 2004. Temas: 1, 2, 3, 4, 5, 6

BAZARAA, Mokhtar, JARVIS, John Programación lineal y flujo en redes 2a. edición México Limusa, 2005. Temas: 3

CÁRDENAS, Miguel Angel El enfoque de sistemas: estrategias para su implementación 2a. edición México Limusa, 1999. Temas: 1

DAELLENBACH, Hans, MCNICKLE, Donald, et al. Introducción a las técnicas de investigación de operaciones 2a. edición México CECSA, 1987. Temas: 1, 2, 3, 4, 5, 6

FUENTES ZENÓN, Arturo Cuadernos de planeación y sistemas. Núms. 3 y 4 México DEPFI, UNAM, 1999. Temas: 1

OCHOA ROSSO, Felipe El método de los sistemas. Vol. 10 de cuadernos de planeación y sistemas 2a. edición México DEPFI, UNAM ,19996.5 Problemas entero cero-uno. Temas: 1.

1.17 Perfil del estudiante de séptimo semestre de Ingeniería Industrial

La materia de Investigación de Operaciones I se encuentra ubicada en el séptimo semestre de la carrera de Ingeniería Industrial, habiendo cursado ya las siguientes materias:

Ilustración 4 Materias antecedentes. Fuente: Página DIMEI.

Dentro del mapa curricular de la licenciatura en Ingeniería Industrial , durante los primeros seis semestres se cursan materias del área de ciencias básicas, ciencias de la Ingeniería , Ingeniería aplicada ; ciencias sociales y humanidades y otras asignaturas convenientes, distribuyéndose de la siguiente forma:

Tabla 2 Materias antecedentes. Fuente: Elaboración propia.

Ciencias básicas	***Ciencias de la Ingeniería***	***Ingeniería aplicada***	***Ciencias sociales y humanidades***	***Otras asignaturas convenientes***
Álgebra	Mecánica de sólidos	Manufactura I	Redacción y exposición de temas de ingeniería	Ingeniería Industrial y Productividad
Cálculo y Geometría Analítica	Ingeniería de materiales	Metodología para la planeación	Cultura y comunicación	Fundamentos de programación
Álgebra Lineal	Estudio del Trabajo	Diseño de Sistemas Productivos	Optativa de ciencias sociales	Creatividad e innovación
Estática	Termofluidos	Ingeniería de Manufactura	Introducción a la Economía	Dibujo mecánico e industrial
Química	Estadística Aplicada		Optativa de ciencias sociales	Contabilidad financiera y costos
Cálculo integral	Análisis de circuitos			
Cinemática y dinámica				
Ecuaciones Diferenciales				
Cálculo Vectorial				
Probabilidad				
Análisis Numérico				
Termodinámica				
Estadística				
Electricidad y magnetismo				

Para el curso de Investigación de Operaciones es importante haber cursado previamente materias como: Álgebra, Geometría Analítica, Álgebra lineal, Probabilidad y Estadística; ya que dentro del programa de la asignatura se incluyen temas que para su comprensión y análisis requiere de conocimientos de éstas asignaturas.

1.19 Perfil del estudiante de ingeniería

De acuerdo con la información que se encuentra en la página oficial de la carrera de Ingeniería Industrial, el perfil de ingreso a esta carrera:

"El estudiante interesado en ingresar a esta licenciatura en la Facultad de Ingeniería de la UNAM, debe ser egresado de la Escuela Nacional Preparatoria, del Colegio de Ciencias y Humanidades o de otros programas de Educación Media Superior. Es conveniente que haya cursado el área de las Ciencias Físico-Matemáticas o el conjunto de asignaturas relacionadas con estos campos de conocimiento en el Colegio de Ciencias y Humanidades, o en otros planes de estudio de Educación Media Superior. Para todos los casos, el perfil deseable incluye los siguientes conocimientos, habilidades y actitudes.

Requiere poseer conocimientos de matemáticas en álgebra, geometría analítica y cálculo diferencial e integral de funciones de una variable; también debe contar con conocimientos de física, particularmente en lo que respecta a temas relacionados con mecánica clásica, así como conocimientos generales de química y de computación. Es también conveniente que posea conocimientos de inglés, por lo menos a nivel de comprensión de textos. Por lo que respecta a las habilidades, es importante que tenga disposición para el trabajo en equipo, capacidad de análisis y síntesis, y de adaptación a situaciones nuevas, así como espíritu creativo.

Además de lo anterior, el aspirante a estudiar la licenciatura en Ingeniería Industrial debe poseer conocimientos en comprensión de textos y técnicas de redacción. Tener capacidad de abstracción, previsión y solución de problemas. Contar con alto sentido de responsabilidad, disciplina, interés por el estudio, criterio de decisión y habilidad para las relaciones humanas."

1

1.20 Perfil del egresado

"***General***

Los egresados de la Facultad de Ingeniería deberán poseer capacidades para la innovación, potencial para aportar a la creación de tecnologías y actitud emprendedora, con sensibilidad social y ética profesional; y con vocación para constituirse en factor de cambio.

Tendrán ideas claras sobre modelado matemático de fenómenos físicos y optimización, estarán abiertos tanto al aprendizaje continuo como a la interdisciplinariedad. Deberán contar con conocimientos sólidos de su idioma y de otra lengua, preferentemente inglés con capacidad de comunicación oral y escrita, en su idioma.

[1] Consultado en : http://www.ingenieria.unam.mx/programas_academicos/licenciatura/industrial.php. El 21 de junio de 2017 (21:14 hrs).

Específico

“Al finalizar su formación el egresado de la licenciatura en Ingeniería Industrial será un profesional:

• Capaz de trabajar en las fronteras tecnológicas y del desarrollo de las disciplinas: producción, logística, calidad, administración, finanzas y desarrollo empresarial, principalmente. Identificando y usando la combinación correcta de métodos y procedimientos para el desarrollo de bienes y servicios, en sus procesos y en sistemas, integrados por recursos humanos, materiales, equipos e información.
• Preparado académicamente para la realización de estudios de posgrado en los campos disciplinarios descritos en el punto anterior.
• Capaz de planear, investigar, diseñar, producir, construir, evaluar e integrar sistemas de generación de bienes y servicios, con el fin de incrementar la productividad, la calidad y la seguridad, con visión emprendedora y empresarial.
• Con aptitudes y habilidades necesarias para un desempeño ético con vocación de servicio para contribuir al mejoramiento de la calidad de vida de la sociedad, con respeto y cuidado al medio ambiente y actuando con responsabilidad social.
• Los egresados tendrán una formación con amplio espectro teórico-práctico, que les permitirá participar con éxito en las distintas ramas que integran a la ingeniería industrial y adaptarse a los cambios dinámicos de las tecnologías aplicadas en su campo de actividades y, en su caso, generar nuevos conocimientos para su aplicación.”

El egresado de la licenciatura en Ingeniería Industrial deberá demostrar:

- ***Comunicación efectiva: verbal, escrita y corporal.***
- ***Saber trabajar en equipo.***
- ***Identificar, analizar y solucionar problemas.***
- ***Analizar prioridades con criterio lógico y sentido común.***
- ***Iniciativa, autonomía y autoaprendizaje.***
- ***Negociación.***
- ***Visión prospectiva.***
- ***Capacitar y adiestrar.***

Las actitudes del egresado de la licenciatura en Ingeniería Industrial desde el punto de vista profesional:

- ***Tener confianza en sí mismo y en su preparación académica.***
- ***Poseer deseos de actualización, superación y competencia en su profesión.***

• Creatividad e innovación.

***• Mente* abierta orientada hacia la solución de problemas y al cambio.**

• Gusto por la investigación.

• Liderazgo.

• Disciplina y dinamismo.

• Honesto, responsable y crítico.

En cuanto a la responsabilidad social: **• Tener conciencia de la problemática nacional, basada en el conocimiento de la realidad del país. *• Consciente de la necesidad de promover la competitividad del país.***

***• Tener una actitud humanista y de servicio hacia la* sociedad.”**[2]

1.21 Perfil profesional

“*La licenciatura en Ingeniería Industrial proporcionará al egresado una base sólida de conocimientos en las ciencias físicas y matemáticas; las técnicas y tecnologías de la ingeniería; así como de los sistemas industriales; sobre la cual se apoyará para desempeñar su actividad profesional, principalmente en áreas tales como:* **logística, producción, manufactura, calidad, administración, finanzas y gerencia de negocios**; *identificando y usando la combinación correcta de métodos y procedimientos para el desarrollo de bienes y servicios con el fin de incrementar la* **productividad, la calidad y la seguridad**, *cuidado del medio ambiente y actuando con responsabilidad social. Su formación le permitirá comunicarse e interactuar con otros profesionales de áreas afines y adaptarse con facilidad a los cambios del entorno tecnológico y social con visión emprendedora y empresarial, desempeño ético y vocación de servicio, respondiendo así a las necesidades que se presentan en el sector productivo y de servicios, contribuyendo al mejoramiento de la calidad de vida de la sociedad a la cual se debe. Estas características le facilitarán su incorporación al mercado de trabajo, el cual se ubica tanto en el sector productivo como de servicios o bien, colaborando en actividades de asesoría, consultoría e investigación, generando nuevos conocimientos para su aplicación.”*

[3]

[2] Consultado en : http://www.ingenieria.unam.mx/programas_academicos/licenciatura/industrial.php. El 21 de junio de 2017 (21:21 hrs).

[3] Consultado en : http://www.ingenieria.unam.mx/programas_academicos/licenciatura/industrial.php. El 21 de junio de 2017 (21:35 hrs).

1.21 Perfil profesiográfico del docente que imparte la asignatura de Investigación de Operaciones

En general, el profesor que imparte la materia, según el plan de estudios actual de la carrera de Ingeniería Industrial, debe contar con estudios universitarios, cono licenciatura en Ingeniería Industrial o afín, preferentemente con posgrado. Deberá tener conocimientos teóricos y prácticos con gran experiencia en el área de estadística e Investigación de Operaciones, así como experiencia docente con preparación en programas de formación decente.

2. Apuntes de Investigación de Operaciones

2.1. Introducción a la Investigación de Operaciones

Objetivo del tema

El desarrollo del presente tema, tiene como objetivo principal presentar al alumno de la Facultad de Ingeniería de la UNAM que curse el séptimo semestre de Ingeniería Industria, un panorama general sobre la *Investigación de Operaciones*, donde se muestre de forma clara y precisa las ramas de la Investigación de Operaciones, las herramientas propias de esta disciplina, así mismo se pretende presentar un marco histórico de la Investigación de Operaciones, destacando los antecedentes más importantes que han contribuido al desarrollo y consolidación de esta área de conocimiento.

Introducción a la investigación de operaciones.

La Investigación de Operaciones es un área de conocimiento que sirve como una herramienta en el proceso de toma de decisiones, haciendo uso del método científico con el fin de encontrar soluciones encaminadas a la optimización o mejora de organizaciones o sistemas.

Para aplicar los conocimientos propios de esta área del conocimiento, es necesario tener una visión global de cualquier organización que se pretenda estudiar, para lo cual, es importante visualizar de forma sistémica, es decir, que incluya un trabajo en equipo entre diversas disciplinas (multidisciplinario). En el capítulo dos se profundizará en el tema.

De acuerdo al tipo de problemas que estudia la Investigación de Operaciones, se pueden dividir en:

-Modelos estocásticos: Dependientes de probabilidad.

-Modelos determinísticos: No dependen de la probabilidad.

Cada uno de estos modelos, a su vez, tienen herramientas particulares para ser resueltos. Entre ellas se encuentran las siguientes.

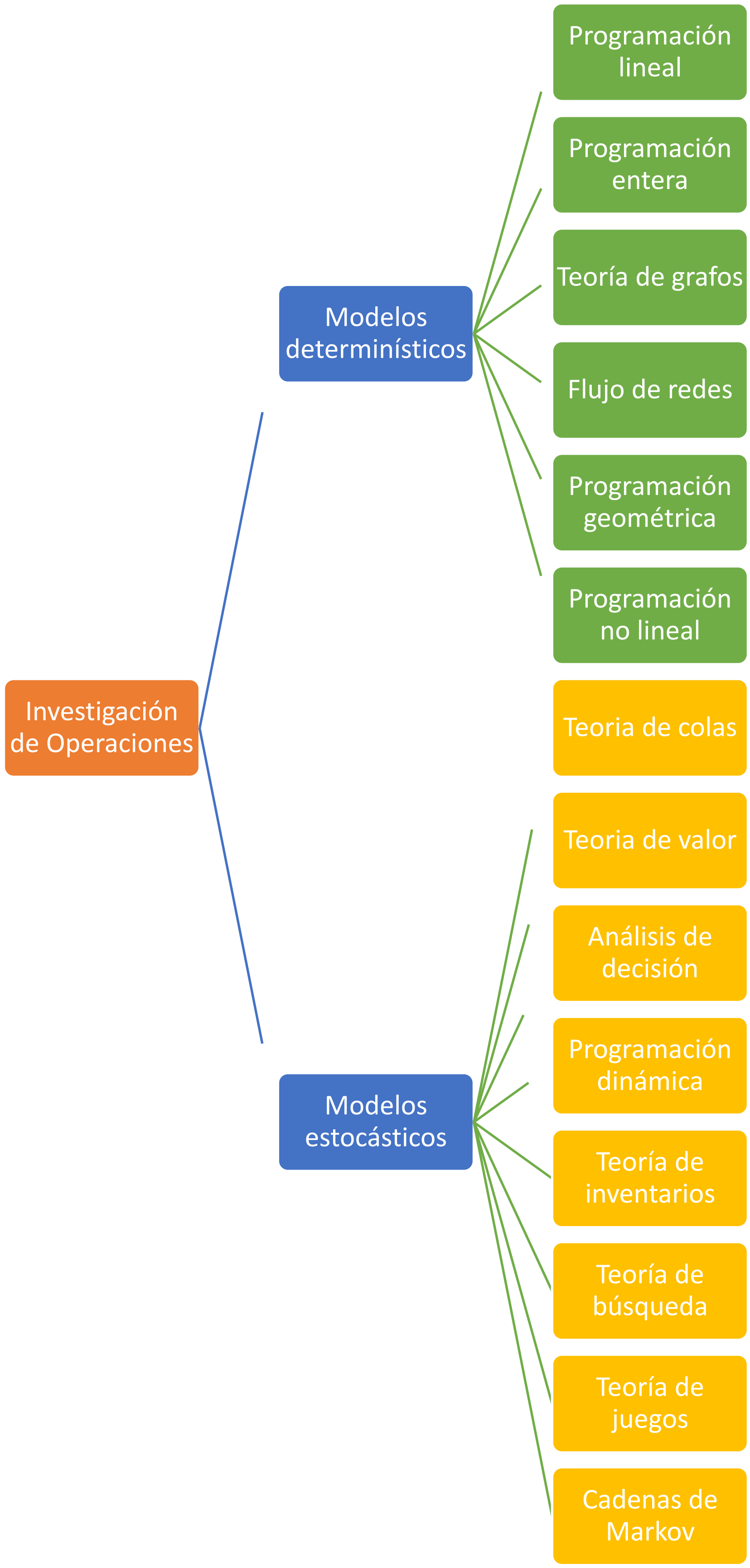


Ilustración 5. Ramas de la Investigación de Operaciones. Fuente: Elaboración propia.

Origen y evolución de la Investigación de Operaciones.

El término ***Investigación de Operaciones*** fue acuñado por primera vez durante la Segunda Guerra Mundial cuando líderes del ejército británico, solicitaron a científicos e ingenieros analizar varios problemas militares, tales como el despliegue de radares, la gestión de vehículos militares, bombardeo, antisubmarinos, y minería.

Bajo este contexto, se puede afirmar que la Segunda Guerra Mundial tan solo fue el detonador que permitió integrar todo el conocimiento útil para el desarrollo de nuevas estrategias militares que posteriormente, y debido a su éxito, se retomaron como herramientas que muchas organizaciones hasta el día de hoy utilizan como apoyo en el proceso de toma de decisiones.

De esta manera, la Investigación de Operaciones comenzó a obtener mayor relevancia al identificar una infinidad de aplicaciones en áreas diferentes a la militar principalmente en manufactura, transporte y logística, economía, finanzas.

Aunque el origen de la Investigación de Operaciones se detona con la Segunda Guerra Mundial, mucho tiempo antes en diferentes partes del mundo, ya se habían venido presentando gran cantidad aportaciones que se pueden considerar como los antecedentes de esta ciencia. Estas aportaciones son de importancia para comprender la razón de ser de esta disciplina.

Para ilustrar los acontecimientos más importantes en seguida se presenta una línea del tiempo que también presenta eventos posteriores a la guerra y que están ligados al crecimiento y consolidación de esta ciencia.

Ilustración 6 Historia de la Investigación de Operaciones I. Fuente: Elaboración propia con easel.

Ilustración 7 Historia de la Investigación de Operaciones II. Fuente: Elaboración propia con easel.

,

Ilustración 8 Historia de la Investigación de Operaciones III. Fuente: Elaboración propia.

Ilustración 9 Historia de la Investigación de Operaciones IV. Fuente: Elaboración propia.

Aplicaciones y las perspectivas de la Investigación de Operaciones

Tendencias

Las nuevas tendencias mundiales de orden tecnológico, económico, ambiental y social requieren técnicas y herramientas flexibles que permitan tomar decisiones estratégicas, tácticas y operativas en las organizaciones, por lo cual el uso de herramientas cuantitativas para la toma de decisiones ha sufrido cambios que permiten mejorar el proceso matemático, dando origen a nuevas tendencias y desarrollo de técnicas para resolver problemas particulares, que van más allá de la toma de decisiones en entornos complejos y de incertidumbre.

De lo anterior se puede concluir que las nuevas tendencias globales, han potenciado el valor de las técnicas clásicas de la Investigación de operaciones que, desde su origen, han servido como herramienta para la toma de decisiones, contribuyendo en la optimización de recursos, y considerando la difusión que ha tenido la IO en los últimos años como una técnica para resolver problemas de forma cuantitativa, se han desarrollado nuevas técnicas de aplicación de esta rama del conocimiento.

El desarrollo tecnológico y computacional ha permitido que la Investigación de Operaciones incluya de manera integral estos avances, de tal forma que nuevos algoritmos son diseñados teniendo en cuenta el uso de estas herramientas, considerando la capacidad de almacenamiento y procesamiento. Herramientas informáticas son empleadas para reducir el tiempo de cálculo y facilitar su aplicación. Esta tendencia crece vigorosamente, convirtiendo a la Investigación de Operaciones en un punto que permite resolver problemas cada vez más complejos.

Los algoritmos están siendo mucho mejores cada día pues permiten un mayor manejo de variables y restricciones. Ejemplo de ello es CPLEX Optimizer el cual es un solucionador mediante programación matemática de alto rendimiento para problemas de programación lineal, programación entera mixta y programación cuadrática. Permite modelar problemas empresariales de forma matemática y solucionarlos con algoritmos de IBM ILOG CPLEX Optimizer que permiten obtener decisiones lógicas y precisas.

En el pasado solo las grandes compañías podían tener grandes proyectos, pero actualmente en cualquier lugar se pueden llevar a cabo puesto que hay mucho mayor accesibilidad a software especializado (por ejemplo Solver en Excel).

Entre las tendencias actuales de la Investigación de Operaciones como herramienta para la solución de problemas y toma de decisiones se encuentran:

-Herramientas Heurísticas

La palabra "heurística" proviene de la palabra griega " heuriskein" que significa "descubrir" . Este concepto representa procedimientos simples basados en el sentido común, para obtener una buena solución, aunque no necesariamente la mejor de un problema planteado, cuya solución por medio de métodos exactos resulta compleja. Una característica de las técnicas heurísticas es que encuentra soluciones factibles a problemas complejos de una forma sencilla y rápida.

En la Investigación de Operaciones, las técnicas heurísticas están conformadas por una o un conjunto de reglas que brindan soluciones factibles del problema de estudio.

Estas técnicas se pueden utilizar cuando:

1. Cuando no se conoce un método exacto para resolver el problema de estudio.
2. Cuando, aunque exista un método exacto de solución, éste resulta muy costoso.
3. Cuando existen condiciones cuya modelación resulta muy compleja.
4. Cuando se tiene que resolver un mismo problema varias veces con distintos valores en las variables.
5. Cuando se desea aumentar la eficiencia de un procedimiento exacto, ya que pueden proporcionar una solución inicial previo a aplicar un método exacto.

-Técnicas Metaheurísticas

Los métodos metaheurísticos son técnicas inteligentes que sirven para mejorar o diseñar métodos heurísticos. Una definición de metaheurísticos descrita por Osman y Kelly es la siguiente:

> *"Los procedimientos metaheurísticos son una clase de métodos aproximados que están diseñados para resolver problemas de mayor complejidad, en los que los heurísticos clásicos no son efectivos. Los metaheurísticos proporcionan un marco general para crear nuevos algoritmos híbridos combinando diferentes conceptos derivados de los heurísticos clásicos, la inteligencia artificial, la evolución biológica, sistemas neuronales y mecánica estadística*."

- Programación lineal difusa

La toma de decisiones difusas incorpora la subjetividad y la imprecisión en la formulación de modelos (y no solo medidas de distribución de probabilidad) y procesos de solución. Sirve como una herramienta a la investigación en ingeniería industrial cuando los comportamientos de las decisiones están limitados por imprecisiones en los modelos formulados.

Actualmente se pueden considerar variables que anteriormente no se tomaban en cuenta, debido a que el avance y desarrollo de nuevo software y hardware han permitido el uso no solo de variables lógicas sino también de variables ambiguas o difusas.

-Simulación

La simulación es un proceso numérico diseñado para experimentar el comportamiento de cualquier sistema, por medio de una computadora digital. Estos experimentos involucran ciertos tipos de modelos matemáticos y lógicos que describen el comportamiento de sistemas de negocios, económicos, sociales, biológicos, físicos, químicos, etc. a través de periodos de tiempo.

Aplicaciones

Hoy en día existen nuevas áreas de aplicación para la IO. Anteriormente el enfoque tradicional de la IO estaba basado solo en manufactura y en cuanto a los servicios se limitaba únicamente a transporte y logística. Sin embargo ahora la IO puede aplicarse prácticamente a cualquier cosa. Ahora los servicios representan enormes áreas de oportunidad, algunas de los cuales se mencionan a continuación:

a) Salud: Planeación de tratamiento de cáncer, planeación del personal médico, composición de los medicamento y vacunas, planeación del cuidado de la salud en el hogar. Una de las áreas en las que los hospitales tienen importantes oportunidades de mejora es en la gestión de toda la cadena de suministro, planificación y programación.
b) Servicios Financieros: Optimización de cartera con restricciones de presupuesto y costos, estimación de las puntuaciones de crédito, etc.
c) Energía: Estrategias de inventarios, redes inteligentes, fijación de precios.
d) Medios de comunicación: Estrategias para propagación de publicidad, estrategias para comercialización de productos, etc.

Las técnicas de la IO se pueden utilizar como soporte tanto para decisiones estratégicas como para decisiones tácticas. En el caso de las decisiones estratégicas se puede prever la demanda para satisfacer los requisitos de capacidad, se deciden ubicaciones para servir al mayor número de personas, se evalúan las necesidades de departamentos por medio de simulación o por medio de la teoría de colas.

A nivel táctico se pueden establecer niveles de existencias de fármacos, asignar presupuestos a un conjunto de recursos, asignar equipo y maquinaria.

Para las decisiones de corto plazo en el ámbito de la vigilancia y control se permite la programación de recursos pacientes, operaciones.

Impacto y retos

La IO tiene un futuro brillante en cuanto a oportunidades de trabajo por causa de las nuevas áreas de aplicación tanto en el área práctica como en el área de la investigación. Además, gracias al desarrollo diario de nuevas tecnologías, se pueden implementar modelos y herramientas cada vez más complejas que representen de forma más fiel la realidad con el fin de obtener resultados que tengan un mejor impacto en los resultados totales y parciales de cualquier compañía en eficiencia, calidad, competitividad, lo cual permitiría como resultado final mayores utilidades.

Se concluye que la Investigación de Operaciones, tiene un sinfín de aplicaciones, y sigue desarrollando nuevas herramientas que permitan analizar problemas cada vez de mayor complejidad.

2.2 Fundamentos de Sistemas

Objetivo

Presentar un panorama general de los fundamentos de sistemas, incluyendo: clasificación de sistemas, el enfoque sistémico y el concepto de modelos conceptual.

Definición y clasificación de sistemas

En el estudio de las operaciones, es necesario hacer uso de distintos conceptos que sirvan como herramientas para interpretar y describir las organizaciones reales ; una de ellas es el término *sistema.*

El objetivo general de un sistema es conceptualizar la realidad describiendo los elementos que intervienen en interactúan entre sí en una organización.

Se pasa de una organización general al estudio de los elementos y sus interacciones, sin olvidar que son parte de una organización general.

Este término se puede conceptualizar de tres formas distintas dependiendo del sentido con el que se requiera visualizar.

Conceptualizaciones del término ***Sistema***		
Conceptualización estructural	**Conceptualización de caja negra**	**Conceptualización funcional**
Sistema**: Conjunto de elementos interconectados que buscan lograr un objetivo común**.	***Sistema:*** **Proceso en el que intervienen entradas (recursos, materi prima, etc.) para obtener salidas (productos).**	***Sistema:*** **Conjunto de actividades que se encuentran interrelacionadas que buscan cumplir un objetivo deteminado.**
Objetivo de la conceptualicación estructural:Identificar los componentes del sistema, las características de los componentes, identificar el patron de relación entre los componentes, seleccionar la información relevante.	**Objetivos de la conceptualización de la caja negra:** definir e identificar los objetivos del sistema y el rol que desempeña éste en su entorno.	**Objetivo de la conceptualización funcional**: Describir las dependencias lógicas de las actividades.
Responde a la pregunta: ¿Por qué ?	**Responde a la pregunta:** ¿Para qué?	**Responde a la pregunta:** ¿Cómo ?

Tabla 3 Conceptualización del término "sistema". Fuente : Elaboración propia.

Clasificación de sistemas

Los sistemas pueden clasificarse conforme a su entitividad, en relación con su origen, conforme al grado de aislamiento. A continuación, se explica cada aspecto.

1. Según su entitividad los sistemas se pueden clasificar en:

Reales: Su existencia es independiente de observador que lo describe, se forman por partes organizadas que interactúan entre sí. Ejemplos de estos sistemas pueden ser: una sociedad, una célula, etc.

Ideales: Son construcciones simbólicas, por ejemplo, la lógica, las matemáticas.

Modelos: son abstracciones de la realidad, en donde se combina lo conceptual con las características de los objetos.

2. Según su origen los sistemas se clasifican en:

Naturales: Conjunto de elementos físicos, que se encuentran organizados. Ejemplo: Cuerpo humano, una célula, sistema digestivo, etc.

Artificiales o humanos: Son hechos o construidos por los hombres. Ejemplo: la sociedad, una fábrica, etc.

3. Según el grado de aislamiento:

Cerrados: No tienen interacciones con elementos fuera de la frontera.

Abiertos: Pueden tener interacciones con elementos fuera de la frontera.

4. En cuanto a su grado de complejidad:

Simples: Existen pocos elementos, pocas interacciones entre ellos.

Complejos: Tienen gran cantidad de elementos, numerosas interacciones.

5. En cuando al cambio de los atributos en un periodo de tiempo en:

Estáticos (sin memoria): La salida en determinado instante está en función de la entrada en ese instante.

Dinámicos: Su salida en un instante está en función de la entrada en ese instante y de las entradas y salidas en instantes anteriores.

6. En cuanto a su finalidad económica en:

Sociales: Diseñado por el hombre y que proporciona algún bien o servicio a la sociedad, sin ser su finalidad generar riqueza.

Productivos: Llevan a cabo un proceso de transformación con un objetivo determinado, el cual por lo general es producir riqueza.

7. En cuanto a su evolución y estado con relación al tiempo en:

Continuos: Su evolución y estado están definidos en todo instante de tiempo.

Discretos: Su evolución y estado están definidos solamente en instantes particulares de tiempo e incluso en intervalos de tiempo.

8. En cuanto a su predictibilidad :

Determinísticos: Los estados futuros dependen de la entrada inicial, se pueden predecir con certidumbre.

Estocásticos: El azar está involucrado en su evolución a través del tiempo, los estados futuros no están determinados por una entrada inicial.

9. En cuanto al tipo de causa de la salida:

Causales: La salida no se adelanta a la entrada. Esto implica que la salida en un instante de tiempo depende de la entrada que se aplica en ese instante o en instantes anteriores.

No causales: Su salida se adelanta a la aplicación de cualquier entrada.

El enfoque de sistemas y el método científico.

De forma natural, cualquier situación problemática puede mejorarse, ahí es donde interviene la Investigación de Operaciones como una herramienta en la toma de decisiones para encontrar opciones que brinden mejores resultados. En la mayoría de las situaciones problemáticas intervienen un gran número de elementos, lo cual hace que su estudio tenga grados de complejidad elevados.

Para facilitar el estudio de las operaciones, se hace uso del enfoque sistémico, cuyo objetivo principal es, precisamente, estudiar problemas complejos.

El enfoque sistémico considera:

1. Visualizar el problema u objeto de estudio como **un todo** (Sistema)**.**

2. El comportamiento de las **partes del todo** (elementos) influyen en el comportamiento del **todo** (sistema).

3. El comportamiento o características de cada elemento del todo, depende del comportamiento o características de al menos uno de los elementos.

4. Cada **grupo de elementos** (subsistemas) cumple los puntos 2 y 3.

Es importante mencionar que la Investigación de Operaciones posee una perspectiva científica y no conoce limitaciones en cuanto a su aplicación, pues puede ser utilizada tanto en fenómenos humanos, sociales, culturales aun cuando sus raíces provienes de los fenómenos naturales.

Debido a su e perspectiva científica, hace uso del método científico para analizar, estudiar y resolver problemas.

El método científico aplicado a la Investigación de Operaciones consta de varios pasos, los cuales se pueden resumir en:

Ilustración 10 Pasos del método científico aplicado en la Investigación de Operaciones. Fuente: Elaboración propia.

El objetivo de introducir el enfoque de sistemas a la Investigación de Operaciones es obtener un modelo conceptual, que facilite la construcción del modelo matemático.

Sobre este modelo matemático, pueden trabajar los algoritmos y métodos de la Investigación de operaciones, brindando soluciones lógicas y coherentes que sirvan como herramienta en la toma de decisiones para mejorar u optimizar una situación problemática.

El modelo conceptual y su aplicación en la solución de problemas.

Un modelo conceptual es una representación gráfica, mental o escrita orientada a describir y ordenar el conocimiento. Este modelo lo construye los analistas que estudian la situación problemática.

Características del modelo conceptual:

1. Es elaborado por los analistas.
2. Está orientado a describir con claridad las características del problema de estudio.
3. Sirve para ordenar las percepciones del analista
4. En el modelo conceptual se fija la estructura del problema
5. Delimita las áreas de interés
6. Identifica y selecciona los elementos y aspectos relevantes del problema
7. El nivel de detalle depende del tipo de problema a resolver.

Para conceptualizar un problema se siguen tres fases distintas, las cuales están íntimamente relacionadas con las distintas formas de conceptualizar un sistema.

Como de mencionó anteriormente, las formas de conceptualizar un sistema son: conceptualización estructural, conceptualización por medio de la caja negra y la conceptualización funcional.

También se mencionaron tres preguntas distintas que representan la intención de cada una de las formas de conceptualizar un sistema. El modelo conceptual se desarrolla mediante un proceso que sintetiza estas tres conceptualizaciones, es decir, relaciona el ¿cómo?, ¿Por qué? y el ¿Para qué?

Metodología de los sistemas y sus diferentes enfoques en la solución de problemas.

El proceso para construir un modelo conceptual se basa en las tres formas de conceptualizar un sistema, cada una de éstas, representa una fase del proceso.

Proceso para construir un modelo conceptual:

1.Descripción del problema general (conceptualización por medio de caja negra)

Objetivo de la fase: responder la pregunta ¿Para qué?

En esta fase, se identifica al problema de forma general con relación a su entorno. También se describe el objetivo principal del sistema y la función que cumple éste en su medio ambiente.

2. Funcionamiento del problema (Conceptualización funcional)

Objetivo de la fase: Responder la pregunta ¿cómo funciona?

En la fase dos, se deben identificar las actividades requeridas para que el sistema cumpla su objetivo. También establece conexiones entre las actividades y desarrolla subsistemas (los necesarios de acuerdo con la complejidad del problema).

3. Descripción de los elementos y propiedades del problema (conceptualización estructural)

Objetivo de la fase: responder la pregunta: ¿Por qué?

En la última fase, se definen las actividades y/0 elementos a estudiar, así como sus características y propiedades.

Después de construir un modelo conceptual del problema, éste puede utilizar como herramienta para la construcción de un modelo simbólico, es decir, un modelo matemático, con el cual se puedan trabajar alguna de las herramientas de la Investigación de Operaciones (algoritmos o distintos tipos de métodos).

2.3 Modelado.

Objetivo: *Presentar los conceptos y herramientas teóricas y prácticas necesarias para diseñar modelos de sistemas productivos y de servicios a partir de las reglas para la clasificación, formulación y validación de un modelo.*

Modelos en la empresa.

El tipo de modelos que se utilizan en Investigación de Operaciones son modelos matemáticos, ya que permiten calcular valores exactos (o aproximados) de las componentes de las variables controlables de un sistema (Prawda, 1994) de tal forma que se optimice o mejore el comportamiento de este, sin dejar de considerar sus criterios ya establecidos (restricciones). Cabe aclarar que para todo modelo siempre se hacen supuestos, en este caso se supone que se conocen las variables no controlables del sistema.

La importancia de modelar situaciones o problemas existentes en empresas u organizaciones es el poder representar de una forma objetiva y precisa la realidad con el fin de hacer usos de técnicas matemáticas, que brinden soluciones objetivas que puedan mejorar la situación o resolver el problema.

Definiciones.

Un modelo es una representación (ideal) de la realidad de un sistema que permite generar soluciones analíticas. El objetivo de formular un modelo es conceptualizar el problema de una forma menos compleja.

Ventajas del modelo.

Un modelo permite:

1. Usar de diferentes técnicas para encontrar la mejor solución al problema.
2. Hacer modificaciones de las alternativas de solución.
3. Analizar las diferentes soluciones posibles para seleccionar la mejor.

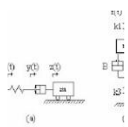
Tipos de modelos. Modelos físicos. Modelo análogo. Modelo simbólico.

Clasificación de los modelos.

En general y de acuerdo con sus características estructurales, los modelos se pueden clasificar en:

Modelos icónicos

- Representa de forma gráfica el sistema cuyo problema se desea resolver.
- Ejemplos:
  - Planos
  - Maquetas
  - Fotografías



Modelos analógicos

- Representan las propiedades del sistema haciendo uso de otro , el cual tenga las mismas propiedades.
- Ejemplos:
  - Analogía entre sistema hidráulico-sistema eléctrico
  - Analogía entre sistema mecánico - eléctrico.

Modelos matemáticos o simbólicos

- Se representan los sistemas a través de conceptualizaciónes abstractas haciendo uso de letras, símbolos, ecuaciones, desigualdades.

Ilustración 11 Tipos de modelos. Fuente: Elaboración propia.

Modelos determinísticos y probabilísticos.

La Investigación de Operaciones solo trabaja con modelos simbólicos, éstos se pueden subdividirse en modelos determinísticos y modelos probabilísticos.

Modelos determinísticos: El comportamiento de un modelo determinístico representa fenómenos caracterizados por factores controlables cuyos resultados se pueden predecir, por lo que, para este tipo de modelos se pueden encontrar soluciones óptimas.

Modelos probabilísticos: Describen el comportamiento de fenómenos caracterizados por factores no controlables y cuyos resultados no se pueden predecir, por lo que no se pueden encontrar soluciones óptimas.

De acuerdo con esta clasificación de modelos, la Investigación de Operaciones puede tratar problemas de optimización (modelos determinísticos) o de análisis (modelos probabilísticos).

Los problemas de optimización se representan a través de modelos de programación matemática, que de acuerdo con las características de sus funciones pueden ser lineales o no lineales.

Este cuaderno de ejercicios abarca solo los modelos cuyas funciones son lineales, es decir, a modelos de Programación Lineal.

Construcción de modelos.

Proceso de construcción de modelos.

Selección del modelo.

De acuerdo a las características de los sistemas, al comportamiento de los elementos que los integran, se pueden ajustar a modelos matemáticos que pueden ser de Programación Lineal, para el cual se puede emplear diferentes algoritmos de resolución. En el caso de que las relaciones matemáticas del modelo sean demasiado complejas y que no permitan la obtención de una solución analítica, se pueden emplear métodos heurísticos, simulación o una combinación de éstos para resolver el problema.

Construir un modelo requiere de identificar y decidir los elementos del sistema real que se tomará en cuenta para su representación a través de un modelo para su análisis.

Para construir un modelo matemático se siguen dos pasos:

1. ***Formular el problema*.**

En este paso, es esencial observar el sistema del cual se quiere resolver el problema, el objetivo es tener un panorama general del estado actual y del estado deseado, así como identificar las limitaciones del sistema. Incluye aspectos como:

-Definir objetivos.

-Identificar limitaciones sobre lo que se puede hacer.

-Registrar datos relevantes del sistema.

2. Formulación del modelo matemático.

Un modelo matemático es la representación simbólica de un sistema del cual se quiere resolver un problema. Está conformado por un sistema de ecuaciones y expresiones matemáticas relacionadas que describan el problema.

Elementos de un modelo matemático de Programación Lineal

Función Objetivo

- Es la medida de desempeño que se quiere optimizar (minimizar o maximizar) se expresa en términos de las variables de decisión.

Variables de decisión

- Representan el número de decisiones que se deben tomar; son los valores que se requiere encontrar para que el sistema llegue a su nivel óptimo de desempeño.

Constantes del sistema

- Son los parámetros conocidos del problema. Para determinarlos se requiere de la recolección de datos relevantes durante el proceso de definir el problema, estos se relacionan a las variables de decisión en la función objetivo y en las restricciones.

Restricciones

- Son las limitaciones del sistema, matemáticamente limitan a las variables de decisión y delimitan la solución del problema . Se representan a través de ecuaciones o desigualdades.
- Dentro de las restricciones de un modelo matemático de Programación Lineal existe una de forma implícita que debe cumplirse siempre : Condición de no negatividad . Ésta restricción limita a la solución haciendo que las variables de decisión solo puedan tomar valores positivos o cero; nunca números negativos.

Ilustración 12Elementos de un modelo matemático de programación Lineal. Fuente: Elaboración propia.

Ejemplo:

Un repartidor de periódicos vende dos tipos de periódicos: Periódicos A y Periódicos B. La ganancia que obtiene por cada periódico A vendido es de 5 pesos, y la ganancia por cada periódico vendido B, es de 7 pesos. El repartidor lleva dos bolsas: una para periódicos A en la que caben 120 periódicos y otra para periódicos B en la que caben 150 periódicos. Ha estimado que cada día vende

en total 200 periódicos como máximo. Lo que quiere saber el repartidor es: ¿Cuántos periódicos de cada tipo deberá comprar para que su ganancia sea máxima?

Variables de decisión: Son las decisiones que el repartidor quiere tomar:

Número de periódicos a vender de tipo A para que la ganancia sea máxima: X_A

Número de periódicos a vender de tipo B para que la ganancia sea máxima: X_B

Constantes del problema:

Parámetros conocidos del problema:

-Ganancia por periódico vendido del tipo A: 5

-Ganancia por periódico vendido del tipo B: 7

-Capacidad de la bolsa para periódicos tipo A: 120

-Capacidad de la bolsa para periódicos tipo B: 150

Restricciones:

-La capacidad de cada bolsa, ya que limita la cantidad de periódicos tipo A y B que puede cargar el repartidor lo cual debe ser menor o igual a la cantidad máxima de periódicos que caben en cada bolsa:

$X_A \leq 120$

$X_B \leq 150$

-Si el vendedor conoce que cada día vende máximo 200 periódicos, entonces él no comprará más periódicos de los que sabe que no venderá, por lo que la suma del número de periódicos tipo A y del número de periódicos tipo B no debe exceder esa cantidad:

$X_A + X_B \leq 200$

Además de esta restricción, existe otra limitación para el cálculo de la cantidad de periódicos que debería vender el repartidor, que limita el rango de valores que pueden tomar las variables de decisión. Éstas solo pueden asumir valores positivos o cero. Dicha restricción es conocida como *condición de no negatividad*:

$$X_A,\ X_B \geq 0$$

Función Objetivo:

Es el beneficio total por la venta de periódicos A y B. Esta cantidad depende de la ganancia por cada tipo de periódico (5 y 7 pesos) y de la cantidad de periódicos que vende de cada tipo; lo cual se puede representar a través de una función que depende de las variables de decisión X_A y X_B:

F.O. $Máx\ Z = 5X_A + 7X_B$

En general el problema queda representado por un modelo de programación lineal que cuya estructura sería:

(Nota: La solución de estos modelos se estudiará en el siguiente capítulo, que está dedicado a la Programación Lineal)

F.O. $\boldsymbol{Máx\ Z = 5X_A + 7X_B}$

S.A. (Sujeto a):

$\boldsymbol{X_A \leq 120}$ (Restricción de capacidad de la bolsa A)

$\boldsymbol{X_B \leq 150}$ (Restricción de capacidad de la bolsa A)

$\boldsymbol{X_A + X_B \leq 200}$ (Restricción de capacidad).

$\boldsymbol{X_A, X_B \geq 0}$ (Condición de no negatividad).

Validación del modelo.

La validación del modelo consiste en comprobar que éste represente de forma adecuada el comportamiento del sistema del cual se quiere resolver el problema. Esta validación debe realizarse antes de aplicar cualquier método de resolución con el objetivo de detectar y eliminar errores en el momento de formular el problema.

Una forma de validar cualquier modelo, es analizarlo considerando datos históricos conocidos. Al manipular un modelo en condiciones conocidas, se deberá obtener los resultados históricos conocidos.

Cuando este caso se cumpla, los datos futuros se podrán representar a través de modelos determinísticos, en casos contrarios se podrá hacer uso de modelos probabilísticos que permitan encontrar la mejor solución para la toma de decisiones.

Ejercicios Propuestos

Ejercicio 1.

Una empresa fabrica dos tipos de mesas Tipo 1 Y mesas Tipo 2. Se dispone de 120 horas al mes de trabajo de mano de obra y se estima que para fabricar una mesa de Tipo 1 se requiere de 60 minutos y para fabricar una tipo 2 se requiere 40 minutos de mano de obra. El beneficio por unidad es de 1.5 y 3 pesos para mesas Tipo 2 y Tipo 2 respectivamente. El objetivo es planificar la producción de tal forma que se obtenga el máximo beneficio económico.

Ejercicio 2

Una familia planea una boda, uno de los miembros de ésta, será el encargado de comprar los bocadillos para la fiesta. Para preparar los bocadillos decidieron comprar los siguientes ingredientes:

-Ingrediente A **-Ingrediente D**

-Ingrediente B **-Ingrediente E**

-Ingrediente C **-Ingrediente F**

Se planea preparar cinco tipos distintos de bocadillos con estos ingredientes.

-Bocadillo 1 **-Bocadillo 4**

-Bocadillo 2 **-Bocadillo 5**

-Bocadillo 3 **-Bocadillo 6**

Las cantidades de cada ingrediente necesario para preparar los bocadillos son las siguientes:

-Para el bocadillo 1 : 2 unidades del ingrediente A y 4 de ingrediente E

-Para el bocadillo 2: 9 unidades del ingrediente D y 1 del ingrediente F

-Para el bocadillo 3: 1 unidad del ingrediente C y 6 del ingrediente E y 3 del ingrediente B

-Para el bocadillo 4: 8 unidades del ingrediente D y 4 unidades del ingrediente B

-Para el bocadillo 5: 3 unidades del ingrediente A

Por experiencia, la familia sabe que en general, se consume el doble de bocadillos 4 en comparación con cualquier otro tipo de bocadillo.

Resumiendo la información, y mostrando la cantidad disponible de cada ingrediente considerando del presupuesto establecido para bocadillos, se tiene la siguiente tabla:

Tabla 4 Ejercicio 2. Fuente: Elaboración propia.

						Cantidad disponible
	Bocadillo 1	Bocadillo 2	Bocadillo 3	Bocadillo 4	Bocadillo 5	
Ingrediente A	2	0	0	0	3	36
Ingrediente B	0	9	0	8	0	216
Ingrediente C	0	0	3	4	0	192
Ingrediente D	4	0	6	0	0	216
Ingrediente E	0	0	1	0	0	24
Ingrediente F	0	1	0	0	0	18

Con la información anterior, la familia quiere saber cuántos bocadillos de cada tipo debe preparar para que el total de bocadillos sea máximo considerando las cantidades de ingredientes disponibles.

Ejercicio 3

Un banco abre de lunes a viernes de 8 a.m. a 4 p.m. Por experiencia se sabe que necesitará la cantidad de cajeros indicada en siguiente tabla:

Tabla 5 Ejercicio 3. Fuente: Elaboración propia

horario	8-9 a.m.	9-10 a.m.	10-11 a.m.	11-12 a.m.	12-1p.m	1- 2p.m	2- 3p.m	3-4 pm
Cajeros requeridos	4	3	4	6	5	6	8	8

Hay dos tipos de cajeros: los que trabajan de tiempo completo de 8 a.m. a 4p.m., los cinco días, excepto la hora que utilizan para almorzar. El banco determina cuándo debe almorzar cada cajero, pero debe ser entre las 12 a.m. y la 1 p.m. o entre 1p.m. y 2 p.m.. A los empleados a tiempo completo se les paga a 180 pesos la hora (incluida la hora de almorzar). También hay trabajadores a tiempo parcial que deben trabajar exactamente 3 horas consecutivas cada día y se paga a 110 pesos por hora, sin ningún otro pago. A fin de mantener la calidad de servicio, el banco desea tener un

máximo de 5 cajeros contratados a tiempo parcial. Se desea minimizar los costos de empleados contratados.

Los empleados a tiempo parcial que comienzan a trabajar a la 1 pm trabajarán hasta que cierre y por lo tanto no se necesitan empleados a tiempo parcial que empiecen a la 2 p.m. o a las 3 p.m.

2.4 Programación Lineal

Objetivo: Exponer los conceptos y fundamentos de la Programación lineal para formular, analizar y resolver modelos matemáticos de programación lineal.

Teoría de Programación Lineal

La programación lineal (PL) usa un modelo matemático para la descripción de un problema. El adjetivo lineal indica que todas las funciones matemáticas del modelo deben ser lineales y la palabra programación se refiere a la planeación, por lo que, se puede decir, que la PL involucra la planeación para obtener resultados óptimos.

En la realidad un gran número de problemas pueden ser descritos de la forma de PL. La comprensión de estos problemas es esencial para entender otros modelos mucho más sofisticados. Por ello es esencial comprender cómo se desarrolla un modelo conceptual con base en un enfoque sistémico, que describa un problema para después trasladar los datos relevantes a un modelo de PL siguiendo los pasos descritos en el apartado de modelado matemático.

Cualquier modelo de programación lineal consta de dos elementos principales: una función objetivo y restricciones.

Tabla 6 Terminología Programación Lineal. Fuente: Elaboración propia.

Ítem	Descripción	Representación simbólica
Función objetivo	Es aquella función que se desea maximizar o minimizar. Donde n es la cantidad total de variables.	Max o min z= $c_1x_1 + \cdots + c_nx_n$
Restricciones	Representan las limitaciones del problema. En total, el modelo tiene m limitaciones.	$a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$

En general los modelos de PL se pueden escribir de tres maneras distintas tal como están especificadas en la Tabla N°6 y su terminología es explicada en la Tabla N°7.

Tabla 7 Maneras de escribir los modelos de Programación Lineal. Elaboración propia

Distintas maneras de escribir un programa lineal	*Representación simbólica*
Genérica	$\begin{array}{lccccccc} \max z & c_1 x_1 & + & \dots & + & c_n x_n & & \\ & a_{11} x_1 & + & \dots & + & a_{1n} x_n & \leq b_1 \\ & \vdots & & & \vdots & & & \\ & a_{m1} x_1 & + & \dots & + & a_{mn} x_n & \leq b_n \end{array}$
Compacta	$max\, z \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m$
Matricial	$max\, z\, c^T x$ $Ax \leq b,$ $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

Para exponer las maneras de escribir de la PL se tomará el ejemplo a continuación y se explicaran en las Tabla N°8, Tabla N°9 y Tabla N°10.

Un tráiler que transporta salmones desde la ciudad de Puerto Montt a Santiago de Chile tiene espacio para llevar salmones atlántico y salmones pacifico. Por llevar un lote de salmón atlántico recibe un pago de $10,000 y por un lote de salmón pacifico recibe un pago de $6,000. Los lotes de salmón pacifico tienen un peso de 50 kg y los de salmón atlántico tienen un peso de 30 kg. Si el tráiler tiene una capacidad para llevar hasta 12,000 kg. ¿Cuál ha de ser la mejor oferta del tráiler para cada tipo de producto que desea transportar con el objetivo de maximizar su beneficio?

Tabla 8 Manera genérica de la Programación lineal. Fuente: Elaboración Propia

	Manera genérica
Variables	x_1: *cantidad de lotes de salmón atlántico a transportar* x_2: *cantidad de lotes de salmón pacífico a transportar*
Función Objetivo	$Max\ z = 10{,}000x_1 + 6{,}000x_2$

Restricción de capacidad	$50x_1 + 30x_2 \leq 12{,}000$
No negatividad	$x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0$

Tabla 9 Manera compacta de la Programación lineal. Fuente: Elaboración propia.

	Manera compacta
Índices	$i: tipo\ de\ salmón\ a\ transportar$ $\forall\ i = 1,2,$ $1: salmón\ atlántico; 2; salmón\ pacífico$ $j: número\ de\ restricción$
Coeficientes	$c_i: precio\ de\ pago\ por\ salmón\ tipo\ i$ $c_1: \$10{,}000; c_2: 6{,}000$ $a_{ij}: peso\ por\ lote\ de\ salmón\ (kg)$ $a_1: 50\ kg; a_2: 30\ kg$ $b_j = capadidad\ en\ kg\ del\ tráiler$ $b_1: 12{,}000\ kg$
Variables	$x_1: cantidad\ de\ lotes\ de\ salmón\ atlántico\ a\ transportar$ $x_2: cantidad\ de\ lotes\ de\ salmón\ pacifico\ a\ transportar$
Función Objetivo	$max\ z \sum_{i=1}^{2} c_i x_i$
Restricción de capacidad	$\sum_{i=1}^{2} a_{ij} x_i \leq b_j, \quad i = 1$
No negatividad	$x_i \geq 0\ \forall\ i = 1,2$

Tabla 10 Manera matricial de la Programación Lineal. Fuente: Elaboración Propia.

	Manera matricial
Índices	$i: tipo\ de\ salmon\ a\ transportar$ $\forall\ i = 1,2,$ $1: salmón\ atlántico; 2; salmón\ pacífico$ $j: número\ de\ restricción$
Coeficientes	$c_i: precio\ de\ pago\ por\ salmón\ tipo\ i$ $c_1: \$10{,}000; c_2: 6{,}000$ $a_{ij}: peso\ por\ lote\ de\ salmón\ (kg)$ $a_1: 50\ kg; a_2: 30\ kg$ $b_j = capadidad\ en\ kg\ del\ tráiler$ $b_1: 12{,}000\ kg$
Variables	$x_1: cantidad\ de\ lotes\ de\ salmón\ atlántico\ a\ transportar$

	x_2: *cantidad de lotes de salmón pacifico a transportar* $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 10{,}000 \\ 6{,}000 \end{pmatrix}, b = (12{,}000)$ $A = (50 \quad 30)$
Función Objetivo	$max\, z \begin{pmatrix} 10{,}000 \\ 6{,}000 \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$
Restricción de capacidad	$(50 \quad 30) * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq\ b = (12{,}000)$
No negatividad	$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \geq\ 0$

Un modelo de programación lineal se puede clasificar de acuerdo con la forma en que se expresen las restricciones. Atendiendo a este criterio, un modelo de Programación Lineal es posible representarse de forma canónica o en forma estándar.

Forma canónica

Las formas canónicas de un Programa lineal se expresan todas las restricciones como desigualdades con el mismo signo.

$$Máx\ Z = cX$$
$$AX \leq b$$
$$X \geq 0$$

Forma estándar

En esta forma de representar un Programa Lineal se expresan todas las restricciones en forma de igualdades, excepto la condición de no negatividad.

$$Máx\ o\ Mín\ Z = cX$$
$$AX = b$$
$$X \geq 0 \text{ (condición de no negatividad)}$$

Cualquier forma de representar un Programa Lineal, tiene una equivalencia en forma canónica que se puede lograr por medio de las siguientes <u>reglas de equivalencia</u>:

1.

Maximizar cX es equivalente a minimizar $-cX$

Minimizar cX es equivalente a maximizar $-cX$

2.

La desigualdad $AX \leq b$ es equivalente a la desigualdad $-AX \geq -b$

La desigualdad $AX \geq b$ es equivalente a la desigualdad $-AX \leq -b$

3.

Toda igualdad de la forma $AX = b$ puede descomponerse como la intersección de dos desigualdades: $AX \leq b \quad y \quad AX \geq b$.

4.

Toda desigualdad $AX \leq b$ puede convertirse en igualdad adicionando un vector Y llamado *vector de holgura*.
El vector columna Y tiene m componentes las cuales son no-negativas .

$$Y = \begin{bmatrix} y1 \\ y2 \\ . \\ . \\ . \\ ym \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{bmatrix}$$

Toda desigualdad $AX \geq b$ puede convertirse en igualdad mediante la resta de un vector Z llamado *vector de superfluo*.
El vector columna Z tiene m componentes las cuales son no-negativas .

$$Z = \begin{bmatrix} z1 \\ z2 \\ . \\ . \\ . \\ zm \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{bmatrix}$$

5.

Una variable no restringida, es decir, que logra tomar cualquier clase valores, positivos, negativos o cero; se puede escribir como la diferencia de dos variables no-negativas.

Suposiciones de la programación lineal

La PL consta de siete supuestos principales: *linealidad, determinismo, función objetiva única, proporcionalidad, aditividad, divisibilidad y certidumbre.*

La *condición de linealidad* establece que los modelos deben tener la función objetivo y restricciones lineales

El *determinismo* estable que los modelos lineales solo se pueden resolver utilizando métodos y técnicas determinísticas.

El modelo de PL *sólo* se limita a tener *una función objetivo,* en caso de ser un problema multiobjetivo es necesario establecer jerarquías entre ellos y traducir a los de nivel menor como restricciones.

La *proporcionalidad* consiste en que la contribución de cada actividad al valor de la función objetivo es proporcional al nivel de actividad x_i. De la misma manara la contribución al lado izquierdo de cada restricción es proporcional al nivel de actividad x_i

La *aditividad* indica que cada función en un modelo de Programación Lineal, sea que se trate de la función objetivo o las restricciones es la suma de las contribuciones individuales de las actividades respectivas.

El supuesto de *divisibilidad en los modelos* de Programación Lineal indica que las variables decisión pueden tomar cualquier valor, inclusive no enteros.

Finalmente, el *supuesto de certidumbre* indica que cada parámetro asignado en un modelo de PL corresponde a constantes conocidas.

Método gráfico

El método gráfico es un método para solucionar programas lineales con dos variables de decisión. Es un método visual en el que es posible observar las regiones donde se encuentran las posibles soluciones. Este método es limitado y complejo en su uso para programas de más de dos variables de decisión. Sin embargo, es la base para comprender el diseño y la formulación del método Simplex.

Para resolver los problemas con el método gráfico es necesario seguir una serie de pasos, los cuales se pueden resumir de la siguiente manera:

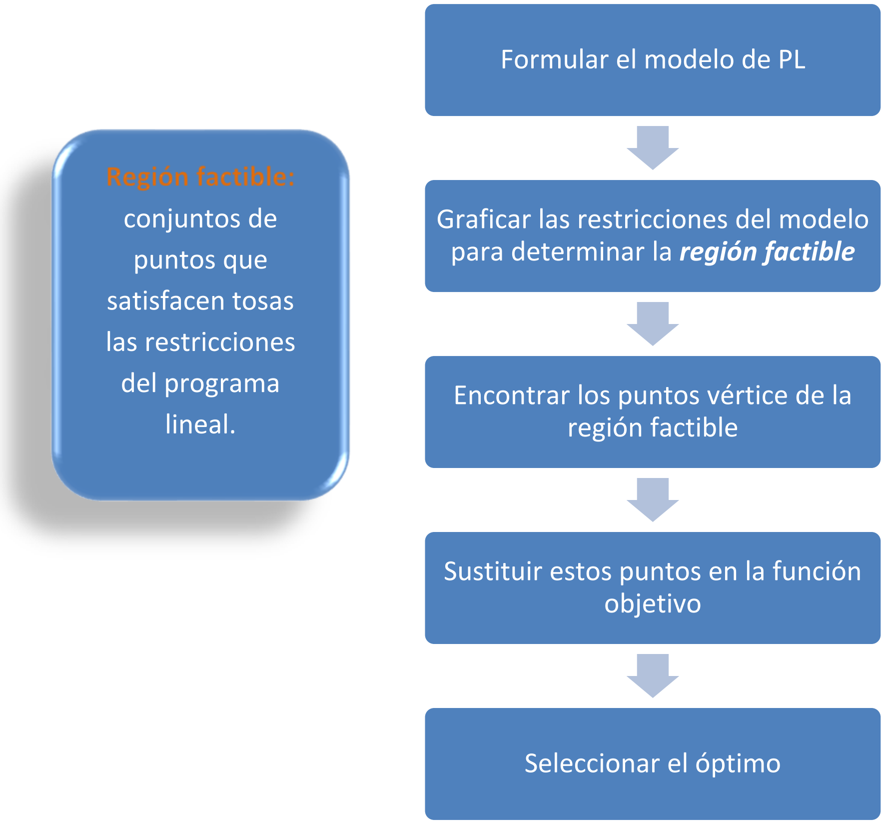


Ilustración 13 Pasos del Método Gráfico. Fuente: Estrada J.M., Programación Lineal

Los problemas de Programación Lineal se pueden representar fácilmente en una gráfica en $\mathbb{R}2$, muchos autores frecuentemente llaman a los ejes x1 y x2. Por ejemplo, se pueden representar el conjunto de puntos que satisfacen las ecuaciones (1) y (2).

$$3x_1 + 2x_2 \leq 8 \qquad (1)$$

$$3x_1 + 2x_2 \geq 8 \qquad (2)$$

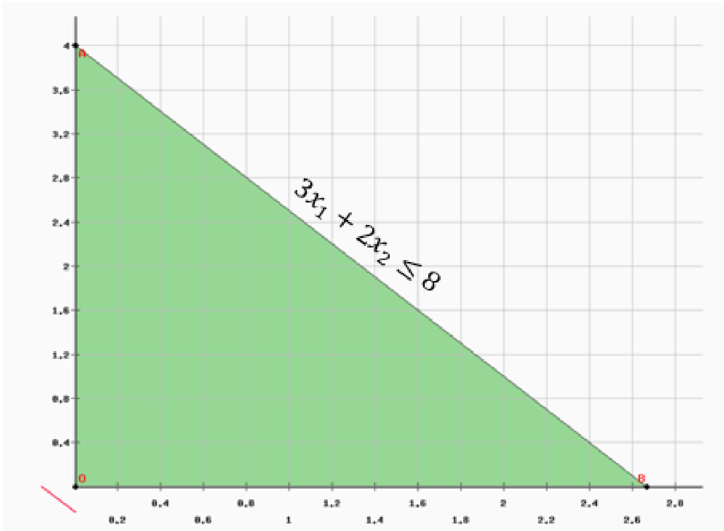


Ilustración 14Inecuación , Fuente:Elaborado con PHPSimplex

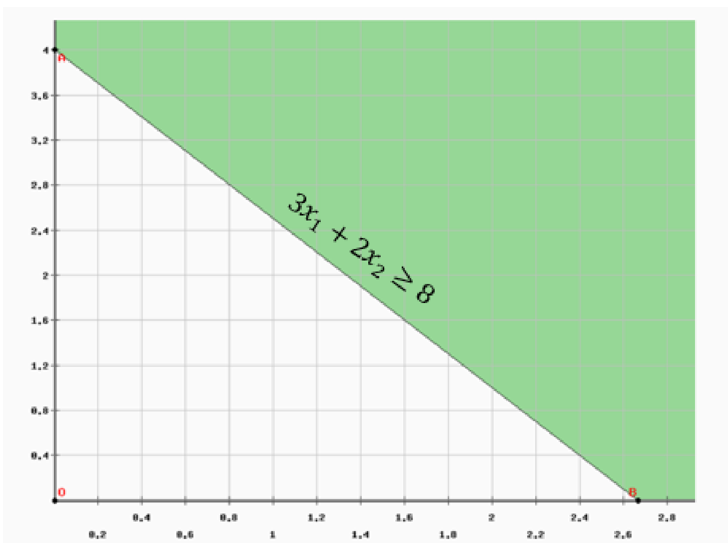


Ilustración 15Inecuación. Fuente: Elaborado con PHPSimplex

Ahora bien, para determinar la región factible se analizará el caso de la compañía Alerce S.A., que se detalla a continuación:

La compañía Alerce S.A. ubicada al sur de Chile, produce sillas y mesas. La utilidad unitaria de estos dos productos es de $15 y $20 respectivamente. En el departamento de producción se utilizan dos procesos para la fabricación del producto, carpintería y barnizado. Para la fabricación de una silla se requiere 2 horas de carpintería y 1 hora de barnizado, mientras que para la elaboración de una mesa se utiliza 2 horas en cada proceso. La compañía tiene destinado para trabajar 90 horas de la carpintería y 100 horas para barnizado. La demanda de sillas no supera las 50 unidades semanales, mientras que las mesas tienen una demanda ilimitada.

Las variables de decisión se describen a continuación:

x_1: número de sillas fabricadas a la semana.
x_2: número de mesas fabricados a la semana.
Modelo matemático

Maximizar $z = 3x_1 + 2x_2$ (3)

$x_1 + x_2 \leq 90$ (4)

$x_1 + 2x_2 \leq 80$ (5)

$x_1 \leq 40$ (6)

$x_1, x_2 \geq 0$ (7)

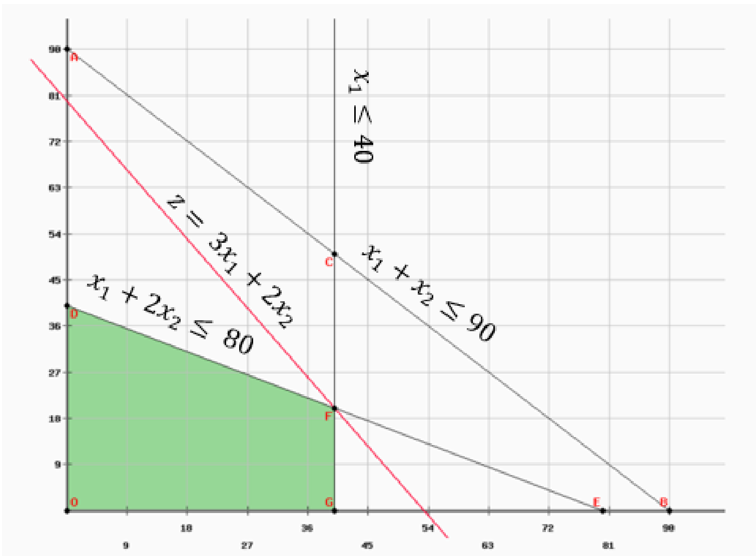


Ilustración 16. Solución gráfica. Fuente: Elaborado con PHPSimplex

1. La ecuación 1 indica la maximización por utilidades de las sillas y mesas respectivamente.
2. Las inecuaciones 2 y 3 indican la capacidad máxima de horas que se tienen para los procesos de carpintería y barnizado.
3. La inecuación 16 indica que la fabricación de sillas semanalmente debe como máximo 50 semanales.
4. La inecuación 5 indica la no negatividad de las variables.

Por ejemplo, la región factible que satisface todos estos puntos:

Para que un par ordenado (x_1, x_2) este dentro de la región factible, (x_1, x_2) debe satisfacer todas las inecuaciones del 4 al 7. Cumpliendo el requerimiento de la no negatividad (7), indican que los puntos se encuentran dentro del primer cuadrante.

Para determinar el conjunto de puntos que satisface esta desigualdad lineal, identificaran que se cumple de 4 a 6. En la Figura 16:

1. Todos los puntos que se encuentran bajo la recta AB (x_1+x_2=90).
2. Todos los puntos que están bajo la recta DE o sobre ella (x_1+2x_2=80).
3. Todos los puntos que se encuentran a la izquierda de la recta CG o sobre ella (x_1=40).

En la Ilustración N°16 se aprecia el conjunto de puntos que cumple con las inecuaciones de 4 a 7, está limitado por el polígono de cinco lados DFGO, cualquier punto de este polígono o en su interior es lo que se conoce como región factible.

Un método para encontrar la región factible es determinara el conjunto de puntos no factibles, por ejemplo, en la Ilustración N° 16:

1. Todos los puntos que están arriba de la recta AB son no factibles por no cumplir con (4).
2. Los puntos que están por arriba de la recta DE son no factibles por no cumplir con (5).
3. Todos los puntos a la derecha de la vertical CG son no factibles por no cumplir con (6).

Así, excluyendo todos estos puntos, queda la región factible.

Para determinar la solución óptima y al tratarse de un problema de maximización es necesario buscar el valor más alto de la ecuación 3: $z\, max = 3x_1 + 2x_2$, para lo cual se gráfica la recta en la que todos los puntos tengan el mismo valor de z.

Para problemas de maximización y de minimización, la recta recibe distintos nombres:

- ✓ Recta en problemas de maximización: recta de isoutilidad
- ✓ Recta en problemas de minimización: recta de isocostos

En este caso, al ser un problema de maximización, se trata de una recta de isoutilidad. Al trazar la recta de isoutlidad, se elige un punto de la región factible y se calcula el valor de z.

Una vez ya trazada una recta de isoutilidad, es posible generar otras rectas de isoutilidad desplazándose en forma paralela a la recta z en dirección a que esta aumente su valor (disminuya para la minimización).

Por ejemplo, para el punto (20,10) el valor de $z = 3 \cdot 20 + 2 \cdot 10 = 80$, y para el punto (25,15), el valor de $z = 3 \cdot 25 + 2 \cdot 15 = 105$. Para este problema se observa que aumenta el valor de z, a medida que la recta es desplazada a la derecha.

En general se recomienda obtener el valor de z en los puntos del polígono *DFGO*.

En resumen, este método consiste en determinar el espacio de soluciones factibles y encontrar la solución óptima entre todos los puntos localizados en el espacio de soluciones.

Soluciones básicas factibles y no factibles

El problema visto anteriormente es un ejemplo de programación lineal de solución única.

Existen distintos tipos de soluciones en un problema lineal, tales como: soluciones factibles, soluciones básicas factibles, soluciones factibles degeneradas y soluciones factibles no degeneradas.

- *Solución factible:* una solución de este tipo satisface las restricciones del PL y las condiciones de no negatividad.
- *Solución básica factible:* Es aquella solución con no más de m componentes positivos, es decir, todas las variables son mayores o iguales que cero.
- *Solución básica factible no degenerada:* Es una solución básica factible con exactamente m componentes positivos del vector X. Es decir, todas las variables son estrictamente positivas.
- *Solución básica factible degenerada:* Es una solución básica factible con menos de m componentes positivos del vector X, es decir, alguna variable básica toma un valor nulo.

Soluciones óptimas múltiples o alternativas.

Un problema de programación lineal puede tener una cantidad infinita de óptimos alternativos. Esta situación se presenta cuando la función objetivo es paralela a una restricción obligatoria no redundante (la restricción que se satisface como una ecuación en la solución óptima). El siguiente ejemplo muestra esta situación:

Maximizar $z = 2x_1 + 4x_2$

Sujeto a

$$x_1 + 2x_2 \leq 6$$
$$x_1 + x_2 \leq 4$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

La ilustración 17 muestra cómo pueden surgir óptimos alternativos en el modelo de programación lineal cuando la función objetiva es paralela cualquier punto en el segmento AC representa el mismo valor objetivo z=12.

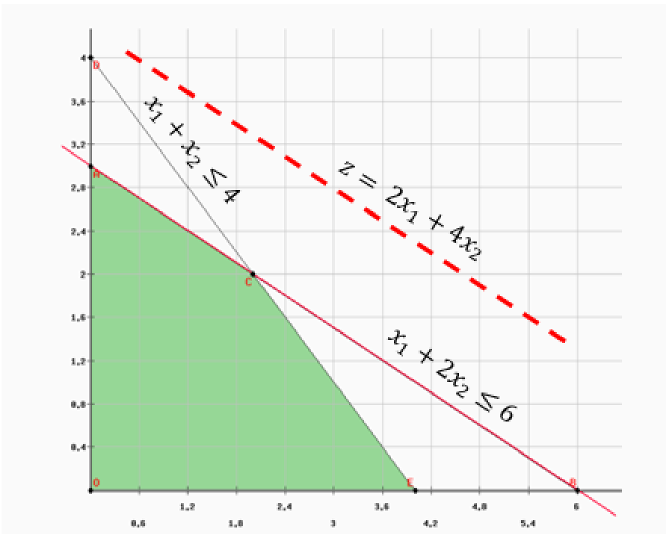


Ilustración 17Múltiples soluciones. Fuente: Elaborado con PHPSimplex.

Los óptimos alternativos son prácticos porque da la opción de elegir muchas soluciones sin que se deteriore el valor objetivo. En el caso anterior la solución del punto A y la solución C están en un nivel positivo, por ejemplo, si representa una combinación de productos, puede ser una ventaja comercializar dos productos en vez de uno.

Solución no acotada

En algunos problemas de programación lineal, el espacio de soluciones es no acotado en al menos una variable, por lo que éstas pueden incrementarse de forma indefinida cumpliendo todas las restricciones. También el valor objetivo puede ser no acotado.

El espacio de soluciones no acotado es un indicador de que el modelo está mal construido. Lo más probable que haya ocurrido es que no se hayan tomado en cuenta algunas restricciones importantes. Otra posibilidad es que los coeficientes de las restricciones no sean precisos. El siguiente ejemplo muestra este caso:

Maximizar $z = 2x_1 + 2x_2$
Sujeto a

$$x_1 - x_2 \leq 12$$
$$2x_1 \leq 40$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

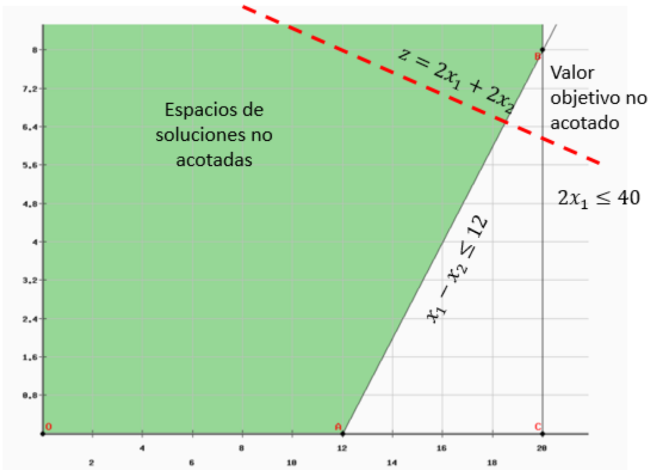


Ilustración 18 Solución no acotada. Fuente: Elaborado con PHPSimplex

El resultado es que z se incrementa indefinidamente. La Ilustración 18 muestra el espacio de soluciones no acotado y también x_2 y z pueden aumentar indefinidamente.

Solución no factible

Los modelos de programación lineal con restricciones inconsistentes no tienen una solución factible. Esto ocurre si todas las restricciones son ≤ con lados derechos no negativos porque las holguras proporcionan una solución factible. Desde el punto de vista práctico, un espacio no factible indica que posiblemente el modelo de formuló de manera incorrecta. Por ejemplo, el siguiente modelo muestra este caso:

Maximizar $z = 3x_1 + 2x_2$
Sujeto a

$$2x_1 + x_2 \leq 1$$
$$3x_1 + 4x_2 \geq 12$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

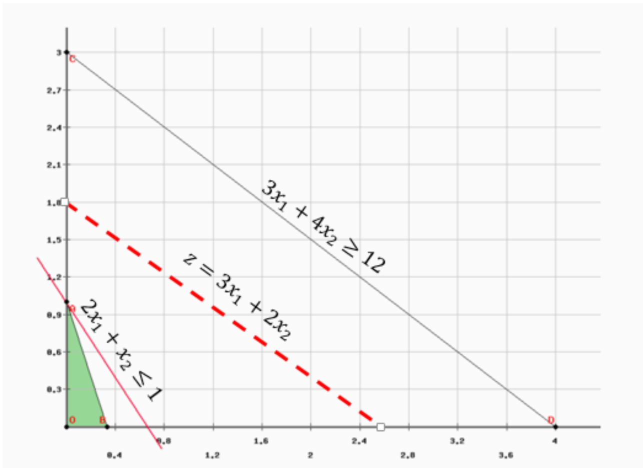


Ilustración 19 Solución no factible. Fuente: Elaborado con PHPSimplex

La Ilustración 19 representa el espacio de soluciones no factibles.

Degeneración

Existen casos en los que los programas lineales presentan soluciones degeneradas.

La degeneración puede hacer que las iteraciones en el método simplex ocurran indefinidamente en ciclos y que el algoritmo nunca termine. La condición revela que el modelo al menos tiene una restricción redundante, el siguiente ejemplo muestra esta situación.

Maximizar $z = 3x_1 + 9x_2$

Sujeto a

$$x_1 + 4x_2 \leq 12$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 6$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

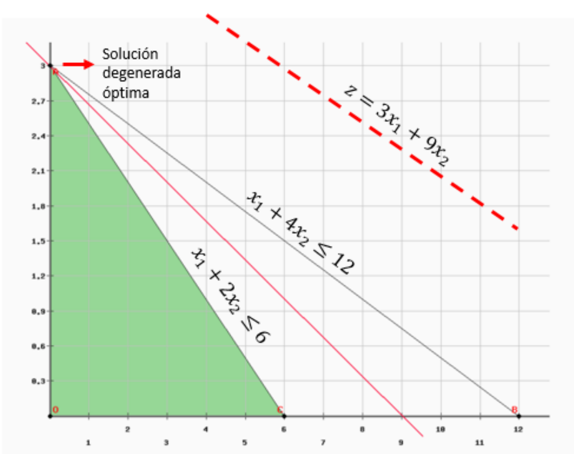


Ilustración 20 Degeneración. Fuente: Elaborado con PHPSimplex

Al observar las implicaciones gráficas en la Ilustración 20, se ve que pasan tres líneas por el punto óptimo (x_1=0, x_2=3). Este punto este sobredeterminado, y una de las restricciones es redundante.

Método Simplex

El modelo de programación lineal fue propuesto por George Dantzig en 1947. El y un grupo de científicos trabajaron en la búsqueda de soluciones a problemas de optimización sobre todo en el campo militar. Dantzig planteó la forma clásica de un problema de programación lineal el cual consta básicamente de una función objetivo lineal y un conjunto de restricciones lineales que pueden tener la forma de igualdad o desigualdad. Este sistema fue resuelto por un método numérico que Dantzig llamó Método Simplex.

El método Simplex es un método numérico que utiliza conceptos de álgebra lineal para resolver problemas de programación lineal, es decir, es un procedimiento algebraico pero sus conceptos son fundamentalmente geométricos ya que usa como base el método gráfico. Para entender la forma en la que se aplica el método se presentan algunas definiciones básicas.

Se entiende por programa lineal aquel que optimiza (es decir, maximiza o minimiza) la función objetivo descrita por:

$$Z = cX$$

Sujeto a las restricciones (desigualdades):

$$AX \leq b$$

Ó:

$$AX \geq b$$

Y a las condiciones de no negatividad:

$$X \geq 0$$

Cada uno de los elementos en negritas representa una matriz, para entender qué significan a continuación se detalla sobre cada elemento y posteriormente se ilustra su significado con un ejemplo.

X Se denomina vector de actividades, es un vector columna con n componentes y cada uno de sus componentes son variables de decisión. Por lo que en su forma ampliada

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}$$

c Se denomina vector de precios o costos unitarios, es un vector renglón con n componentes y cada uno de los componentes son el costo o precio unitario de cada variable de decisión. La forma ampliada del vector c es:

$$c = [c_1 \quad c_2 \quad \cdots \quad c_n]$$

b Se denomina vector de disponibilidad de recursos, es un vector columna con m componentes y cada componente representa el límite en la cantidad total disponible de cada uno de los recursos disponibles b_i. Su forma ampliada es:

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

A Se denomina matriz de coeficientes tecnológicos, es una matriz con m renglones y n columnas, por lo que tiene m x n elementos a_{ij} con $i = 1,2,\dots,m$ y $j = 1,2,\dots,n$ y cada uno de ellos representa la cantidad de recursos j que se necesita por unidad de la actividad i. Su forma ampliada es:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

0 Se denomina vector cero, es un vector columna con n componentes y cada uno de ellos son ceros que representan el hecho de que las variables de decisión debe ser no negativos. En su forma ampliada:

$$0 = \begin{bmatrix} O \\ O \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Con lo anterior en mente el programa lineal en su forma matricial puede reescribirse como:

$$Z = [c_1 \quad c_2 \quad \cdots \quad c_n] \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}$$

Sujeto a:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

O bien:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Y sujeto también a las condiciones de no negatividad:

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} O \\ O \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Antes de desarrollar el método simplex es necesario abordar dos teoremas que no se demostrarán pero que en el método gráfico se puede observar su cumplimiento:
Teorema 1: "*El conjunto de todas las soluciones factibles de un programa lineal es un conjunto convexo.*"
Este teorema indica que el conjunto de soluciones factible de cualquier problema de PL se puede representar mediante un poliedro convexo.
Teorema 2: "*La función objetivo de un programa lineal obtiene su valor máximo (o mínimo) en un punto extremo del conjunto convexo de soluciones factibles.*"
Este teorema hace referencia a que si un Programa Lineal tiene una solución óptima y finita, dicha solución se encontrará en un vértice del poliedro convexo que representa al programa lineal.
Dicho lo anterior, es fácil deducir que el número de vértices de cualquier poliedro factible es finito, así que el número de posibles soluciones de un PL también es finito. Para obtener la mejor solución a un PL sería muy adecuado el calcular el valor de la función objetivo con cada uno de los vértices del conjunto factible y escoger el mejor. Sin embargo pese a que el número de soluciones de un PL es finito, en la práctica resultaría demasiado costoso comprobar cada una de las soluciones para encontrar el óptimo.
El método Simplex no recorre todos los vértices del conjunto factible, más bien, en cada iteración comprueba si existe un cambio de vértice que mejore la solución actual. Si no existe un vértice mejor que el actual el proceso se detiene puesto que considera haber llegado al óptimo, por ello este método ha resultado en más de 70 años el más práctico y el preferido por excelencia a pesar del desarrollo de otras técnicas para la resolución de programas lineales.
Como el concepto *vértice* es de naturaleza geométrica, resulta inconveniente construir a partir de dicho concepto un algoritmo utilizable por computadora, así que el método simplex utiliza el concepto algebraico de *solución básica factible SBF*.

La solución básica factible es aquella que tiene al menos n-m componentes nulos o variables no básicas a las que se llamanX_N. Las m variables restantes se denominan variables básicas y se denomina como X_B. A partir del sistema:

$$AX = b$$

Se dice que X_B es una solución básica del mismo si puede realizarse la partición de la matriz A en dos matrices: B con m vectores linealmente independientes y N con n-m vectores linealmente independientes. La matriz B se llamará la matriz base y cualquier vector a_j en A que no está en B, puede escribirse como una combinación de los vectores de B:

$$A = [B|N]$$

$$X = [X_B|X_N]$$

$$AX = b \quad \Longrightarrow \quad [B|N]\left[\frac{X_B}{X_N}\right] = BX_B + NX_N = b$$

Si $X_N = 0$ se tiene:

$$B^{-1}BX_B = B^{-1}b$$

$$X_B = B^{-1}b$$

Que es una solución básica de $AX = b$.

Ejemplo (Método Simplex)

Un repartidor de periódicos vende dos tipos de periódicos: Periódicos A y Periódicos B. La ganancia que obtiene por cada periódico A vendido es de 5 pesos, y la ganancia por cada periódico vendido B, es de 7 pesos. El repartidor lleva dos bolsas: una para periódicos A en la que caben 120 periódicos y otra para periódicos B en la que caben 150 periódicos. Ha estimado que cada día vende en total 200 periódicos como máximo. Lo que quiere saber el repartidor es: ¿Cuántos periódicos de cada tipo deberá comprar para que su ganancia sea máxima?

Variables de decisión:

Número de periódicos a vender de tipo A para que la ganancia sea máxima: X1

Número de periódicos a vender de tipo B para que la ganancia sea máxima: X2

Constantes del problema:

-Ganancia por periódico vendido del tipo A: 5

-Ganancia por periódico vendido del tipo B: 7

-Capacidad de la bolsa para periódicos tipo A: 120

-Capacidad de la bolsa para periódicos tipo B: 150

Restricciones:

-La capacidad de cada bolsa, ya que limita la cantidad de periódicos tipo A y B que puede cargar el repartidor lo cual debe ser menor o igual a la cantidad máxima de periódicos que caben en cada bolsa:

$X1 \leq 120$

$X2 \leq 150$

-Si el vendedor conoce que cada día vende máximo 200 periódicos, entonces él no comprará más periódicos de los que sabe que no venderá, por lo que la suma del número de periódicos tipo A y del número de periódicos tipo B no debe exceder esa cantidad:

$X1 + X2 \leq 200$

condición de no negatividad:

$$X_A,\ X_B \geq 0$$

Función Objetivo:

F.O. $Máx\ Z = 5X_A + 7X_B$

Programa Lineal

F.O. $\boldsymbol{Máx\ Z = 5X_A + 7X_B}$

S.A.

$\boldsymbol{X_A \leq 120}$ (Restricción de capacidad de la bolsa A)

$\boldsymbol{X_B \leq 150}$ (Restricción de capacidad de la bolsa A)

$\boldsymbol{X_A + X_B \leq 200}$ (Restricción de capacidad).

X_A, X_B≥0 (Condición de no negatividad).

1. Escribir el programa lineal de forma canónica:
   F.O. $\boldsymbol{Máx\ Z = 5X1 + 7X2}$
   S.A.
   $\boldsymbol{X1 \leq 120}$
   $\boldsymbol{X2 \leq 150}$
   $\boldsymbol{X1 + X2 \leq 200}$
   X1, X2≥0
2. Re-escribir la función objetivo.
   Z-5X1-7X2=0
3. **Convertir las restricciones en igualdades.**
   $\boldsymbol{X1 + X3 = 120}$
   $\boldsymbol{X2 + X4 = 150}$
   $\boldsymbol{X1 + X2 + X5 = 200}$
4. **Construir la tabla matriz para resolver el problema por medio del método Simplex**

Tabla 11 Método simplex. Fuente: Elaboración Propia.

	Z	X1	X2	X3	X4	X5	Z0
	1	-5	-7	0	0	0	0
A3	0	1	0	1	0	0	120
A4	0	0	1	0	1	0	150
A5	0	1	1	0	0	1	200

5. Seleccionar el vector que entrará a la base, éste será el más negativo.

Tabla 12Método Simplex. Fuente: Elaboración propia.

	Z	X1	X2	X3	X4	X5	Z0
	1	-5	**-7**	0	0	0	0
A3	0	1	0	1	0	0	120
A4	0	0	1	0	1	0	150
A5	0	1	1	0	0	1	200

6. Se seleccionará ahora el vector que saldrá de la base, éste será aquel que sea:

$$mín\left\{\frac{150}{1},\frac{200}{1}\right\} = 150$$

Este será el elemento pivote.

Tabla 13Método Simplex. Fuente: Elaboración propia.

	Z	X1	X2	X3	X4	X5	Z0
	1	-5	**-7**	0	0	0	0
A3	0	1	0	1	0	0	120
A4	0	0	1	0	1	0	150
A5	0	1	1	0	0	1	200

Se realizan operaciones elementales para que A4 salga de la base y entre A2, esto es, hacer que todos los elementos de la columna de X2 sean iguales a cero con excepción del elemento pivote, el cual se debe hacer igual a 1. En este caso, el elemento ya es igual a 1, por lo que no hay necesidad de hacer operaciones para hacerlo 1. El elemento -7 y 1 de A5 se deben hacer iguales a cero.

Para lograr que -7 y 1 sean iguales a cero, se realizaron las siguientes operaciones:

- Multiplicar el renglón 3 por 7 y sumarlo al renglón 1
- Multiplicar el renglón 3 por -1 y sumarlo al renglón 4

Con las operaciones anteriores, la tabla queda de la siguiente manera:

Tabla 14 Método Simplex. Fuente: Elaboración propia.

	Z	X1	X2	X3	X4	X5	Z0
A0	1	-5	0	0	7	0	1050
A3	0	1	0	1	0	0	120
A2	0	0	1	0	1	0	150
A5	0	1	0	0	-1	1	50

Ahora A2 está en la base.

7. Si aún hay elementos negativos en el primer renglón, se vuelve a seleccionar el más negativo, en este caso es -5.
   Y se selecciona el elemento que debe salir de la base :
   $$m\acute{\imath}n\left\{\frac{120}{1},\frac{50}{1}\right\}=50$$
   Quien saldrá de la base es A5 Y entrará A1

Tabla 15 Método Simplex. Fuente: Elaboración propia.

	Z	X1	X2	X3	X4	X5	Z0
	1	-5	0	0	7	0	1050
A3	0	1	0	1	0	0	120
A4	0	0	1	0	1	0	150
A5	0	1	0	0	-1	1	50

Realizando las siguientes operaciones elementales:

-Renglón 4 se multiplica por 5 y el resultado se suma al renglón 1.

- Renglón 4 se multiplica por -1 y el resultado se suma al renglón 2.

Con lo cual, queda la siguiente tabla.

Tabla 16Método Simplex. Fuente: Elaboración propia.

	Z	X1	X2	X3	X4	X5	Z0
	1	0	0	0	2	5	1300
A3	0	0	0	1	1	-1	70
A4	0	0	1	0	1	0	150
A1	0	1	0	0	-1	1	50

Ahora los elementos que están en la base son: X1, X2 Y X3. Ya no hay elementos negativos en el primer renglón ni en la columna Z0, lo cual significa que se ha llegado a la solución.

La solución es igual a:

X1= 50 X4=0

X2=150

X3=70

La ganancia máxima es:

Z= (5*50)+(7*150)=1052.50

Método de la gran M

El método de la gran M se utiliza en los casos en los que el programa lineal tiene restricciones "≥" o "=", una solución básica factible de inicio puede no ser tan fácil de conseguir, esto puede ocurrir cuando la solución inicial no ser básica y factible (cuando alguna de las variables tome valores negativos, violando la condición de no negatividad). Por lo que, no sería posible comenzar aplicando el Método Simplex. Para resolver este tipo de modelos, se diseñaron los Métodos de Dos fases y el de la Gran M.

El Método de la Gran M es un método de penalización que consiste en modificar el programa lineal original generando uno nuevo donde la solución inicial sea una solución básica factible.

Para modificar el programa lineal, de tal forma que se consiga una solución básica factible, se añade un vector W, "vector de variables artificiales". Además, se penaliza la función objetivo sumando o restando un costo penal "MW", en el caso de un programa lineal de maximización, se resta el costo penal y en el caso de minimización se suma el costo penal.

M es un vector de valores positivos arbitrarios muy grandes, de modo que, en un programa lineal de minimización y cuando el vector artificial tenga alguna componente positiva, el valor de la función objetivo se incrementa.

Debido a que el Método Simplex, en cada iteración trata de mejorar la solución, en algún momento W saldrá de la base, haciéndola igual a cero. Así se regresa a trabajar con el problema original, siempre que las restricciones no sean inconsistentes, se llegará a la solución óptima.

Nota:

Si al resolver el problema por este método:

- W>0, el problema no tiene solución. (W no sale de la base)
- W=0, el problema sí tiene solución.

Un programa lineal de minimización como el siguiente:

$$Min\ z = Max - z = Max\ h$$

S.A.

$$Ax - \bar{x} + W = b$$
$$x, \bar{x}, W \geq 0$$

Después de restar el vector MW, quedaría como:

$$Max\ h = cX - MW$$

S.A.

$$Ax - \bar{x} + W = b$$
$$x, \bar{x}, W \geq 0$$

EJEMPLO:

$$Min\ z = -3x1 + 5x2$$

S.A.

$$x1 \leq 4$$
$$x2 \leq 6$$

$$3x1 + 2x2 \geq 18$$

$$x1, x2 \geq 0$$

Siguiendo los pasos del método Simplex, se reescribe la función objetivo como:

$$Min\ z = Max\ h = -z = 3x1 - 5x2$$

S.A.

$$x1 \leq 4$$
$$x2 \leq 6$$

$$-3x1 - 2x2 \geq -18$$

$$x1, x2 \geq 0$$

Y reescribiendo las restricciones añadiendo las variables de holgura respectivas, se tiene:

$$x1 + x3 = 4$$
$$x2 + x4 = 6$$

$$-3x1 - 2x2 + x5 = -18$$

$$x1, x2 \geq 0$$

Por lo que, la primera tabla del método Simplex queda:

Tabla 17Método de la gran M. Fuente: Elaboración Propia

	h	X1	X2	X3	X4	X5	
Z	1	-3	5	0	0	0	0
a3	0	1	0	1	0	0	4
a4	0	0	1	0	1	0	6
a5	0	-3	-2	0	0	1	-18

La solución básica que se tiene no es factible pues x5=-18, lo cual viola la restricción de no negatividad. Para estos casos, el Método Simplex no es aplicable. Por los que se hará uso del Método de penalización o de la gran M para resolverlo.

Primero que nada, se debe reescribir el programa lineal de la siguiente manera, penalizando a la función objetivo con el vector M y añadiendo el vector w de variables artificiales:

$$Max\ h = cX - MW$$

S.A.

$$Ax - \bar{x} + W = b$$
$$x, \bar{x}, W \geq 0$$

$Min\ z = Max\ h = -z = 3x1 - 5x2$-MW

S.A.

$$x1 + x3 = 4$$
$$x2 + x4 = 6$$

$$3x1 + 2x2 - x5 + w1 = 18$$

$$x1, x2, x3, x4, x5, W1 \geq 0$$

Con lo que la tabla para iniciar el Método Simplex queda de la siguiente manera:

Tabla 18 Método de la gran M. Fuente: Elaboración propia.

	h	X1	X2	X3	X4	X5	W1	
Z	1	-3	5	0	0	0	M	0
a3	0	1	0	1	0	0	0	4
a4	0	0	1	0	1	0	0	6
a5	0	3	2	0	0	-1	1	18

*-M

En principio, lo que se quiere es que el vector W entre a la base, por lo que multiplica el último renglón por -M y se suma a la fila Z.

Tabla 19Método de la gran M. Fuente: Elaboración propia.

	h	X1	X2	X3	X4	X5	W1	
Z	1	-3	5	0	0	0	M	0
a3	0	1	0	1	0	0	0	4
a4	0	0	1	0	1	0	0	6
a5	0	3	2	0	0	-1	1	18

Multiplicando el último renglón:

Tabla 20Método de la gran M. Fuente: Elaboración propia.

a5	0	-3M	-2M	0	0	M	-M	-18M

Sumándolo al renglón z:

Tabla 21Método de la gran M. Fuente: Elaboración propia.

	h	X1	X2	X3	X4	X5	W1	
Z	1	-3-3M	5-2M	0	0	0	0	-18M
a3	0	1	0	1	0	0	0	4
a4	0	0	1	0	1	0	0	6
a5	0	3	2	0	0	-1	1	18

Ahora el vector W está en la base, ahora se hará entrar a la base, al vector más negativo, esto es, x1, con -3-3M

Tabla 22Método de la gran M. Fuente: Elaboración propia.

	h	X1	X2	X3	X4	X5	W1	
Z	1	-3-3M	5-2M	0	0	0	0	-18M
a3	0	1	0	1	0	0	0	4
a4	0	0	1	0	1	0	0	6
a5	0	3	2	0	0	-1	1	18

Para lo cual, se multiplicará el renglón a3 por 3+3M, quedando:

Tabla 23 Método de la gran M. Fuente: Elaboración propia.

a3	0	3+3M	0	3+3M	0	0	0	12+12M

Sumándolo al renglón z, la tabla queda de la siguiente manera:

Tabla 24 Método de la gran M. Fuente: Elaboración propia.

	h	X1	X2	X3	X4	X5	W1	
Z	1	0	5-2M	3+3M	0	0	0	12-6M
a3	0	1	0	1	0	0	0	4
a4	0	0	1	0	1	0	0	6
a5	0	0	2	-3	0	-1	1	6

De la tabla obtenida, deberá ser x2 quien entre a la base:

Tabla 25 Método de la gran M. Fuente: Elaboración propia.

	h	X1	X2	X3	X4	X5	W1	
Z	1	0	5-2M	3+3M	0	0	0	12-6M
a3	0	1	0	1	0	0	0	4
a4	0	0	1	0	1	0	0	6
a5	0	0	2	-3	0	-1	1	6

Por lo que, se puede elegir entre el renglón a4 o a5 para hacer que x2 entre a la base.

Tabla 26 Método de la gran M. Fuente: Elaboración propia.

	h	X1	X2	X3	X4	X5	W1	
Z	1	0	5-2M	3+3M	0	0	0	12-6M
a3	0	1	0	1	0	0	0	4
a4	0	0	1	0	1	0	0	6
a5	0	0	2	-3	0	-1	1	6

Seleccionando a a5, se tiene que :

Tabla 27Método de la gran M. Fuente: Elaboración propia.

a5	0	0	2	-3	0	-1	1	6

Deberá multiplicarse por ½, con lo que queda:

Tabla 28Método de la gran M. Fuente: Elaboración propia.

a5	0	0	1	-3/2	0	-1/2	1/2	6/2

Para hacer que x2 entre a la base, a5 se debe multiplicar por -1:

Tabla 29Método de la gran M. Fuente: Elaboración propia.

a5	0	0	-1	3/2	0	1/2	-1/2	-3

Este renglón se suma al renglón a4, quedando la tabla de la siguiente manera:

Tabla 30 Método de la gran M. Fuente: Elaboración propia.

Tabla 31 Método de la gran M. Fuente: Elaboración propia.

	h	X1	X2	X3	X4	X5	W1	
Z	1	0	5-2M	3+3M	0	0	0	12-6M
a3	0	1	0	1	0	0	0	4

a4	0	0	0	3/2	1	1/2	-1/2	3
a5	0	0	1	-3/2	0	-1/2	1/2	6/2

Siguiendo con el objetivo de hacer que X2 entre a la base, se debe multiplicar a5 por -5+2M, es decir:

Tabla 32 Método de la gran M. Fuente: Elaboración propia.

a5	0	0	-5+2M	15/2-3M	0	5/2-M	-5/2+M	-15+6M

Sumándolo a z:

Tabla 33Método de la gran M. Fuente: Elaboración propia.

	h	X1	X2	X3	X4	X5	W1	
Z	1	0	0	21	0	5/2-M	-5/2+M	-3
a3	0	1	0	1	0	0	0	4
a4	0	0	0	3/2	1	1/2	-1/2	3
a5	0	0	1	-3/2	0	-1/2	1/2	3

Esta tabla es óptima, además, w1 se encuentra fuera de la base, es decir, W1=0, lo que significa esta solución es óptima para el programa lineal original.
Entonces, la solución es:

X1=4 X3=0
X2=3 X5=0
X4=3 W1=0 Con la función óptima h=-Z=-3, por lo que, Z=3

Método de dos fases

El otro método que resuelve este tipo de problemas, es el método de dos fases, el cual consiste en:
-Considerando el programa lineal:

$$Min\ Z = cX$$

S.A.

$$AX \geq b$$
$$X \geq 0$$

-Incluir las variables artificiales al problema original (al igual que en el Método de la gran M):

$$Min\ Z = cX$$

S.A.

$$AX - Y + W = b$$
$$X \geq 0$$
$$Y \geq 0$$
$$W \geq 0$$

Donde W es un vector de variables artificiales

-En la primera fase se soluciona el modelo lineal:

$$Min \sum_{i=1}^{a} Wi$$
$$AX - Y + W = b$$
$$X \geq 0$$

Antes de iniciar la segunda fase, se debe comprobar que W=0, pues si W>0, el problema original no tiene solución.

-Cuando después de la primera fase W=0, se procede a iniciar la segunda fase, en la que se aplica el Método Simplex para resolver el programa lineal:

$$Min\ cX$$

S.A.

$$B^{-1}AX - B^{-1}Y = B^{-1}b$$
$$X \geq 0$$
$$Y \geq 0$$

-La solución óptima obtenida durante la segunda fase del método, es la solución óptima del programa lineal original.

Ejemplo:

$$Min\ z = -3x1 + 5x2$$

S.A.

$$x1 \leq 4$$
$$x2 \leq 6$$

$$3x1 + 2x2 \geq 18$$

$$x1, x2 \geq 0$$

Reescribiendo el programa lineal

$$Min\ z = -3x1 + 5x2$$

S.A.

$$x1 + x3 = 4$$
$$x2 + x4 = 6$$

$$3x1 + 2x2 - x5 + w1 = 18$$

$$x1, x2, x3, x4, x5, W1 \geq 0$$

Primera fase:

Resolver el programa lineal:

$$Min\ w1$$

S.A.

$$x1 + x3 = 4$$
$$x2 + x4 = 6$$

$$3x1 + 2x2 - x5 + w1 = 18$$

$$x1, x2, x3, x4, x5, W1 \geq 0$$

La función objetivo queda como:

$$Max - w1$$

Con lo que se tiene la siguiente tabla:

Tabla 34 Método de dos fases. Fuente: Elaboración propia

	W1	X1	X2	X3	X4	X5	
	1	0	0	0	0	0	0
a3	0	1	0	1	0	0	4
a4	0	0	1	0	1	0	6
aw1	1	3	2	0	0	-1	18

Para que aw1 entre a la base, se multiplica aw1 por -1 y se suma, quedando:

Tabla 35 Método de dos fases. Fuente: Elaboración propia

	W1	X1	X2	X3	X4	X5	
	0	-3	-2	0	0	0	-18
a3	0	1	0	1	0	0	4
a4	0	0	1	0	1	0	6
aw1	1	3	2	0	0	-1	18

Ahora x1 entrará a la base por ser el más negativo, por lo que:

Tabla 36 Método de dos fases. Fuente: Elaboración propia

	W1	X1	X2	X3	X4	X5	
	0	0	-2	3	0	0	-6
a3	0	1	0	1	0	0	4
a4	0	0	1	0	1	0	6
aw1	1	0	2	-3	0	-1	6

Ahora, x2 debe entrar a la base:

Tabla 37 Método de dos fases. Fuente: Elaboración propia

	W1	X1	X2	X3	X4	X5	
	0	0	-2	3	0	0	-6
a3	0	1	0	1	0	0	4
a4	0	0	1	0	1	0	6
aw1	1	0	2	-3	0	-1	6

Tabla 38 Método de dos fases. Fuente: Elaboración propia

	W1	X1	X2	X3	X4	X5	
	0	0	-2	3	0	0	-6
a3	0	1	0	1	0	0	4
a4	0	0	1	0	1	0	6
aw1	1/2	0	1	-3/2	0	-1/2	3

Tabla 39 Método de dos fases. Fuente: Elaboración propia

	W1	X1	X2	X3	X4	X5	
	1	0	0	0	0	0	0
a3	0	1	0	1	0	0	4
a4	-1/2	0	0	3/2	1	1/2	3
aw1	1/2	0	1	-3/2	0	-1/2	3

Esta es la solución óptima de la fase uno, donde se ve que w=0, por lo que , el problema sí tiene solución.

Segunda fase:

En la fase dos, se tomará la tabla anterior omitiendo la columna aw1, y sustituyendo el primer renglón por la función objetivo original:

Tabla 40 Método de dos fases. Fuente: Elaboración propia

	h	X1	X2	X3	X4	X5	
	1	-3	5	0	0	0	0
a1	0	1	0	1	0	0	4
a4	0	0	0	3/2	1	1/2	3
a2	0	0	1	-3/2	0	-1/2	3

Tabla 41 Método de dos fases. Fuente: Elaboración propia

	h	X1	X2	X3	X4	X5	
	1	0	5	3	0	0	12
a1	0	1	0	1	0	0	4
a4	0	0	0	3/2	1	1/2	3
a2	0	0	1	-3/2	0	-1/2	3

Tabla 42 Método de dos fases. Fuente: Elaboración propia

	h	X1	X2	X3	X4	X5	
	1	0	5	3	0	0	12
a1	0	1	0	1	0	0	4
a4	0	0	0	3/2	1	1/2	3

a2	0	0	1	-3/2	0	-1/2	3

Tabla 43 Método de dos fases. Fuente: Elaboración propia

	h	X1	X2	X3	X4	X5	
	1	0	0	-21/2	0	5/2	-3
a1	0	1	0	1	0	0	4
a4	0	0	0	3/2	1	1/2	3
a2	0	0	1	-3/2	0	-1/2	3

Esta es la solución del problema original:

X1=4 x1=0

X2=3 x2=0 h=-z=-3

X4=3 x3=0 z=3

Teoría de dualidad

Definición de Problema dual

Asociado cualquier modelo lineal existe otro problema llamado *problema dual*, el cual se define de forma directa y sistemática a partir del modelo original (o problema primal).

Existe una relación estrecha entre el problema Primal y el Dual, de tal manera que la solución óptima de uno de ellos produce de forma automática (con algunos cálculos adicionales) la solución óptima del otro.

Para definir el problema dual se requiere expresar el problema primal en forma de ecuaciones; todas las restricciones son ecuaciones con el lado derecho no negativo y todas las variables son no negativas.

Problema primal:

$$MáxZ = cX$$
$$AX \leq b$$
$$X \geq 0$$

Problema dual:

$$MínG = b^T Y$$
$$A^T X \geq c^T$$
$$Y \geq 0$$

En la tabla 44 se describe cada uno de los elementos del problema primal, así como del problema dual.

Tabla 44 Elementos de los Problemas dual y primal. Fuente: Elaboración propia.

Problema	Elemento	Dimensión	Característica
Primal	X	Vector columna con n componentes	Vector de variables Primarias.
	c	Vector renglón con n componentes	Vector de coeficientes de la F.O. primaria.
	b	Vector columna con m componentes	Vector de disponibilidad de recursos primarios (lado derecho de las restricciones)
	A	Matriz m por n	Matriz de coeficientes de restricción primaria.
	Z	Escalar	Función objetivo primaria
	0	Vector columna con n ceros	Condición de no negatividad.
Dual	Y	Vector columna con n componentes	Vector de variables duales.
	c^T	Vector columna con n componentes (Transpuesta del vector c)	Vector de disponibilidad de recursos duales (lado derecho de las restricciones)
	b^T	Vector renglón con m componentes (transpuesta del vector b)	Vector de coeficientes de la F.O. dual.
	A^T	Matriz de n por m (transpuesta de A)	Matriz de coeficientes de restricción dual

	G *0*	Escalar Vector columna con m ceros.	Función objetivo dual Condición de no negatividad.

Transformación del problema primal a su problema asociado dual.

La construcción del problema dual se realiza a partir del problema primal, los pasos a seguir para construir el problema dual son los siguientes:

1. Se define una variable dual por cada restricción del problema primal.
2. Se define una restricción por cada variable primal.
3. Los coeficientes de la restricción de una variable primal definen los coeficientes en el lado izquierdo de la restricción dual y su coeficiente objetivo define el lado derecho.
4. Los coeficientes objetivos del dual son iguales al lado derecho de las ecuaciones de restricción del primal.

Las reglas para definir el problema dual a partir de un primal se resumen en la *Tabla 45* que a continuación se muestra.

Tabla 45 Reglas para definir el problema dual a partir del primal. Fuente: Elaboración propia

Modelo primal	*Modelo dual*
Maximizar	Minimizar
Minimizar	Maximizar
Restricción $i \leq b_i$	Variable $i \geq 0$
Restricción $i = b_i$	Variable i sin restricción de signo
Restricción $i \geq b_i$	Variable $i \leq 0$
Variable $i \geq 0$	Restricción $i \geq c_i$
Variable i sin restricciones de signo	Restricción $i = c_i$
Variable $i \geq c_i$	Restricción $i \leq c_i$

Relaciones Primal-Dual.

Las relaciones posibles que pueden existir entre un problema primal y uno dual son las siguientes:

- Si el problema primal tiene soluciones factibles y una solución óptima (la función objetivo es acotada) entonces ocurre lo mismo en el problema dual.

- Si uno de los problemas tiene soluciones factibles y no tiene solución óptima acotada (o la función objetivo es no acotada), entonces el otro problema no tiene soluciones factibles.

- Si uno de los problemas (primal o dual) no tiene soluciones factibles, entonces el otro problema no tiene soluciones factibles o la función objetivo es no acotada.

Importancia de las relaciones Primal-Dual

La teoría de dualidad es un concepto importante de la programación lineal pues proporciona una herramienta de post-optimalidad .

Tabla 46 Importancia de la teoría de dualidad. Fuente: Elaboración pripia

Importancia Teórica	Importancia Práctica
Permite resolver problemas lineales que tienen más restricciones que actividades	Se puede utilizar para aplicar el método simplex a problemas con solución inicial primal infectable.
Facilita el estudio del impacto sobre la solución óptima por cambios en los coeficientes del problema. Sirve como herramienta para realizar un análisis post-optimalidad , “análisis de sensibilidad”	Puede resultar más sencillo el encontrar una solución del problema dual que del primal, en términos de iteraciones necesarias.
Permite generar nuevos algoritmos para la programación de redes de optimización	Los valores óptimos de las variables duales proporcionan una interpretación e información económica importante para la toma de decisiones.

Interpretación económica del dual.

En general, se puede considerar que un problema lineal tiene como finalidad optimizar determinados recursos económicos. En un problema primal, se puede maximizar la función objetivo, la cual está limitada por ciertas restricciones, representadas a través de desigualdades o inecuaciones. La interpretación económica de un programa lineal es:

1. Las variables x representan términos desconocidos de los productos a fabricar, a vender, etc.

2. El lado derecho de las restricciones, es decir, el vector b, representa las cantidades disponibles de recursos o limitaciones de recursos.
3. Las constantes de las restricciones, es decir, el vector a , representa las cantidades necesarias de un recurso determinado i para producir el producto j.
4. Las restricciones representan las limitaciones de recursos disponibles para producir.
5. El objetivo del programa lineal es obtener el máximo beneficio con lo cual cj serán los beneficios por unidad producida del producto j.

De acuerdo con la relación que existe entre el programa lineal primal y el dual, se pueden hacer las siguientes interpretaciones económicas del problema dual:

1. Yi es la contribución a la ganancia por cada unidad del recurso i (Precio sombra)
2. $yi \geq 0$ es la ganancia por cada unidad del recurso i .Ésta debe ser no negativa para, para que sea viable usarla.
3. La función objetivo representa minimizar el valor implícito de la cantidad de recursos utilizados.

Concepto de precio sombra (precio y costo marginal).

El precio sombra de la restricción i, es la cantidad que mejora el valor óptimo del programa lineal (en un incremento en problemas de maximización o en un decremento en problemas de minimización). Esta mejora se ve reflejado en un incremento unitario del lado derecho de la restricción . Y está limitado, es decir, solo es posible el incremento de z óptimo si la base actual sigue siendo la misma.

Análisis de Sensibilidad

Un análisis de sensibilidad es un proceso de post-optimalidad, es decir, que se realiza posteriormente de haber encontrado la solución óptima de un Programa Lineal. Consiste en realizar cambios en los parámetros del Programa Lineal con el fin de identificar la forma en la que cambia la solución óptima obtenida previamente.

Este análisis es esencial ya que la solución óptima encontrada del programa lineal se basa únicamente en las condiciones de forma instantánea que describen el estado del sistema en el momento de formular y resolver el programa lineal, sin embargo, de forma natural los sistemas no tienden a permanecer estáticos a través del tiempo; es ahí donde radica la importancia de realizar un análisis de sensibilidad.

En un análisis de sensibilidad se examinan los efectos por cambios en tres aspectos de un modelo lineal, las cuales pueden ser :

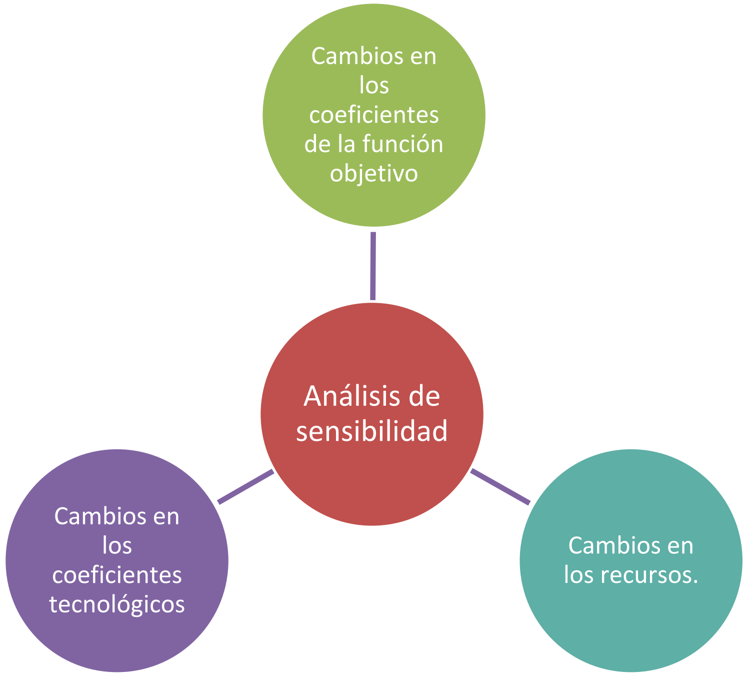


Ilustración 21 Áreas en las que se pueden realizar cambios para un análisis de sensibilidad. Fuente:Elaboración propia.

Los efectos que genera el cambio en estas tres áreas de un modelo lineal, cambian de acuerdo al cambio que se realice como se muestra en la siguiente figura.

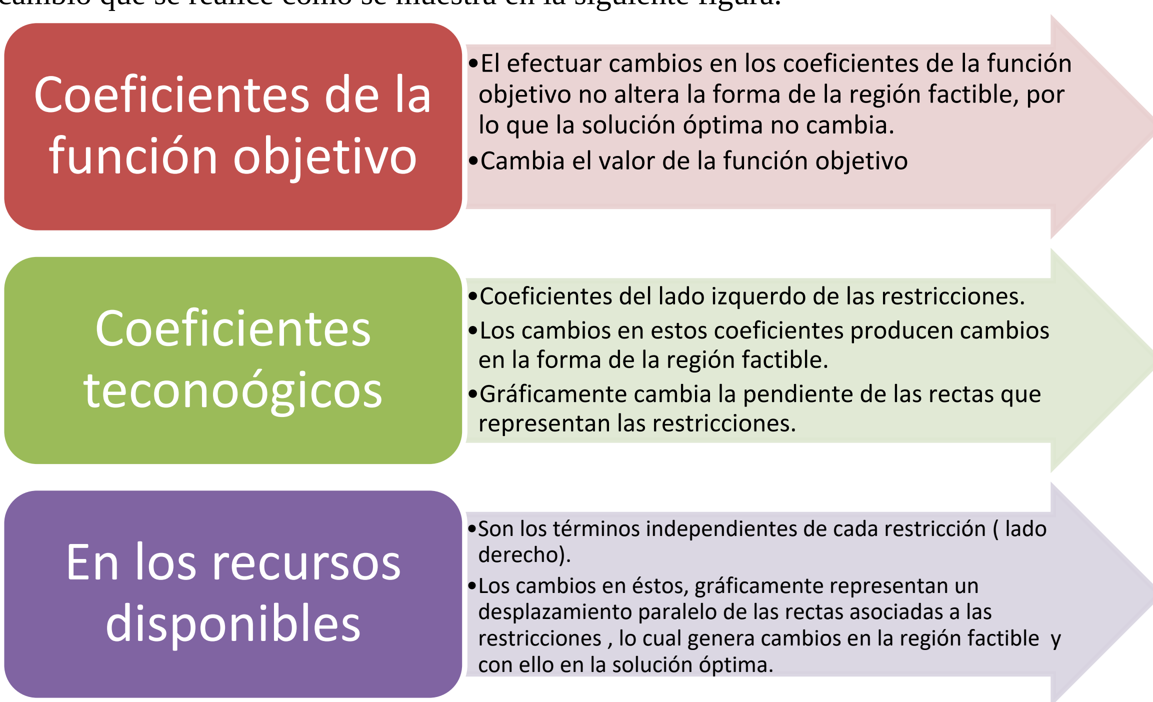


Ilustración 22 Efectos de los cambios en los coeficientes. Elaboración propia.

Análisis de sensibilidad para los coeficientes de la Función Objetivo

$$Fo: z = 3X1 + 2x2$$

S.A.

$2x1 + x2 \leq 100$ …(1)

$x1 + x2 \leq 80$…(2)

$x1, x2 \geq 0$ (Condición de no negatividad)

Resolviendo gráficamente, se tiene:

Para graficar la restricción (1)

Con $x1 = 0,$ y sustituyendo este valor en la restricción 1, e igualando: $0 + x2 = 100$, por lo que, el primer punto que se tiene para graficar la restricción es: $x1 = 0, x2 = 100.$

Para encontrar otro punto de la recta que representa la restricción 1, se considerará a $x2 = 0,$ con lo que sustituyendo en la restricción 1, se tiene: $2x1 + 0 = 100$, de ahí, $x1 = 50$ y el segundo punto para graficar la restricción 1 es $x1 = 50, x2 = 0.$

Realizando el mismo procedimiento para la restricción dos, se tiene.

Con x1=0, $x2 = 80$ y con x2=0 , x1=80. Graficando, se tiene:

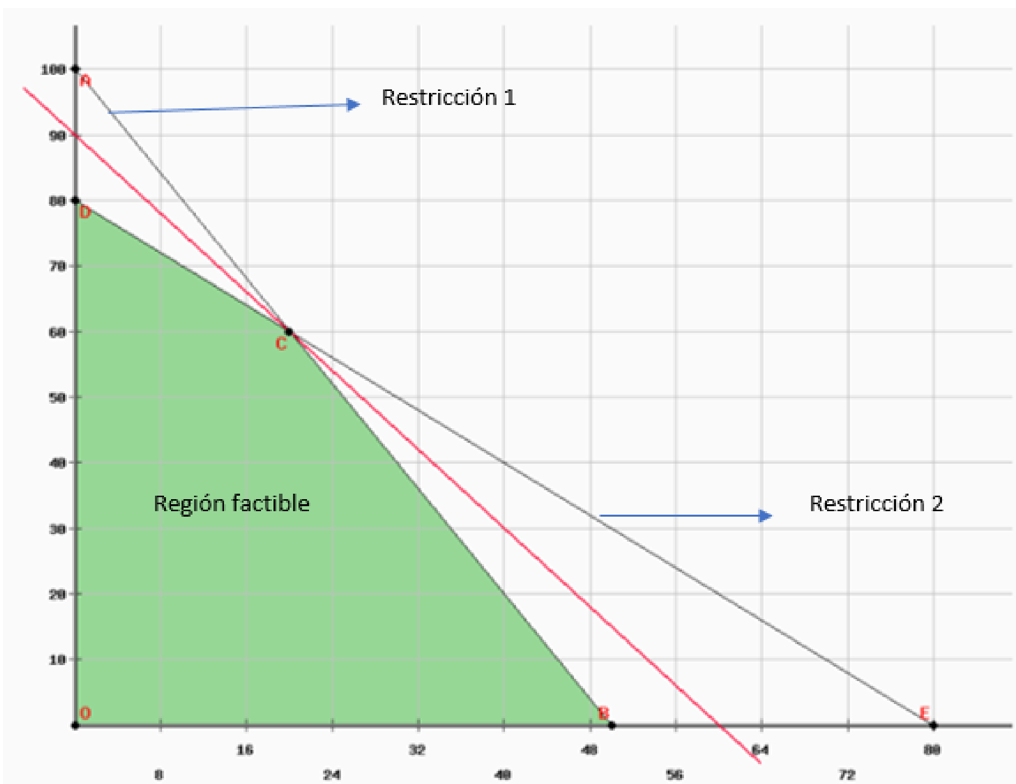


Ilustración 23 Solución gráfica. Fuente: Elaborado con PHPSimplex

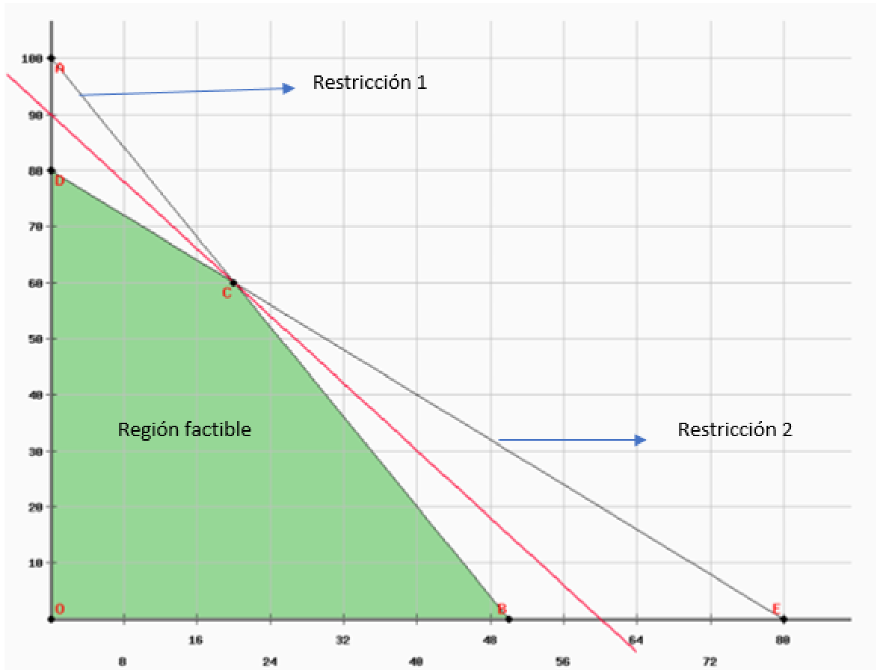


Ilustración 24 Solución gráfica. Elaborado con PHPSimplex

Donde AB representa la restricción 1 y DE representa la restricción 2. La solución óptima, solo puede ser uno de los puntos extremos del polígono OBCD, para hallar la solución, se evaluará la F.O. en estos cuatro puntos.

Tabla 47Análisis de sensibilidad. Fuente: Elaboración propia.

PUNTO	COORDENADA X1	COORDENADA X2	VALOR DE LA F.O (Z)
O	0	0	0
B	50	0	150
C	20	60	180
D	0	80	160

El valor más alto de Z se encuentra en el punto C, donde es igual a 180. Es entonces ese el valor óptimo de la F.O.

Cambio en los coeficientes de la función objetivo.

En el primer análisis de sensibilidad, se harán cambios en los coeficientes de la Función Objetivo:

$$Fo: z = 3X1 + 2x2$$

El primer cambio será, alterar el valor del primer coeficiente de la F.O., es decir, 3. Se sustituirá el 3 por C1.

Tanto las dos restricciones como la función objetivo se pueden representar a través de rectas, y el punto óptimo al que se llegó, corresponde a la intersección de las restricciones 1 y 2.

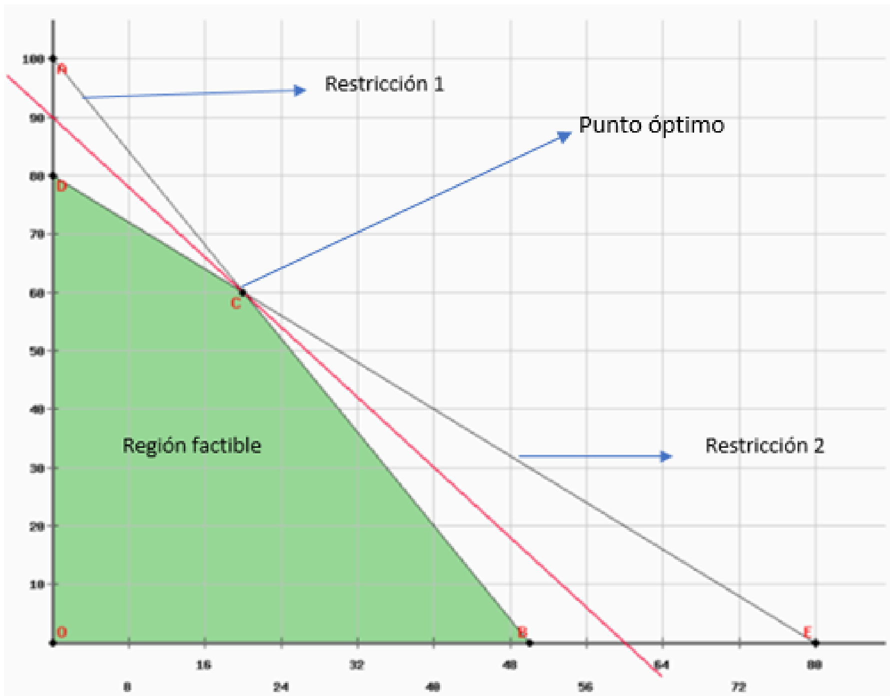


Ilustración 25Análisis de sensibilidad. Fuente: Elaborado con PHPSimplex

La recta en rojo, representa la recta de la función objetivo considerando la solución óptima encontrada.

Para que se siga cumpliendo con las restricciones al hacer cambios en c1, la recta de la función objetivo deberá estar en el área ABC Y CBE, es decir, debe encontrarse en el área sombreada en azul:

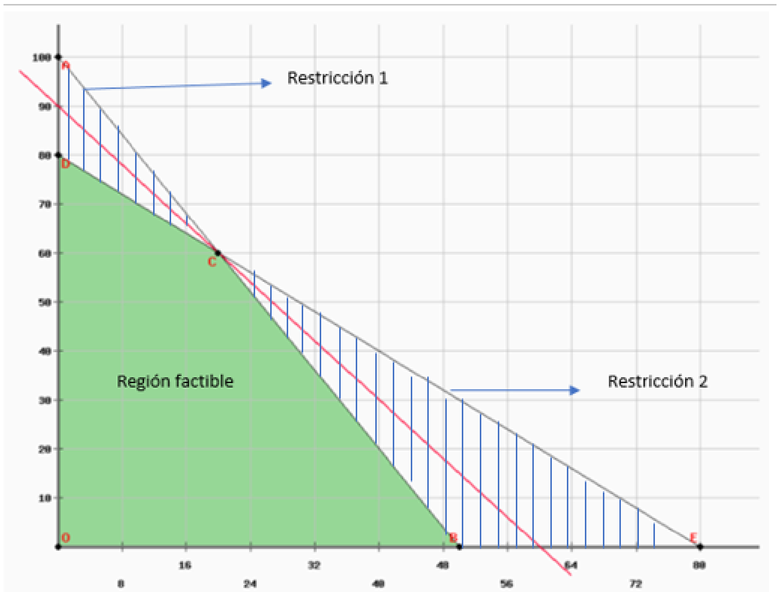


Ilustración 26 Análisis de sensibilidad. Fuente: Elaborado con PHPSimplex

De esta forma, la FO podría ser representada por cualquier recta se encuentre dentro de esa área:

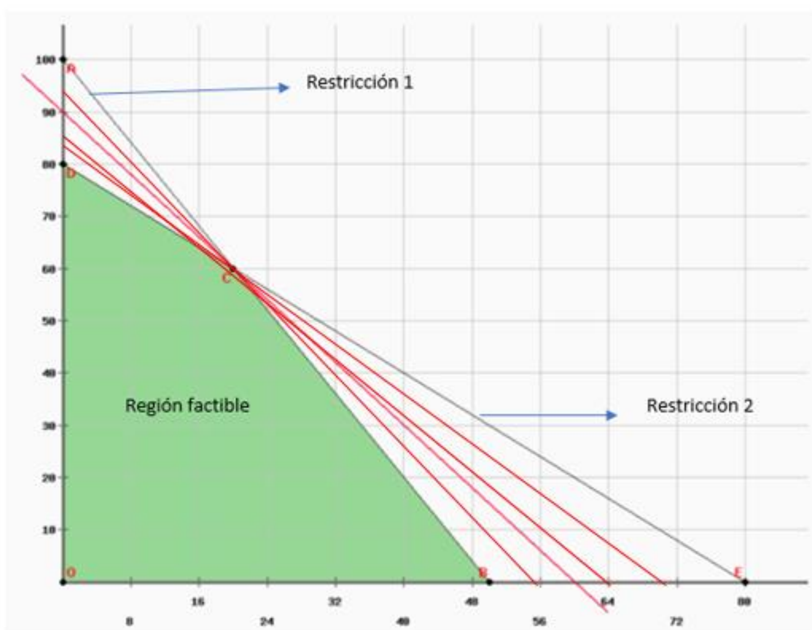


Ilustración 27Análisis de sensibilidad. Fuente: Elaborado con PHPSimplex

Para encontrar el rango de valores que puede tomar la constante c1, se considera la pendiente de las rectas que representan las restricciones que forman el área que puede tomar la función objetivo. Entonces, se procederá a calcular la pendiente de la restricción 1 y de la restricción 2.
Para la restricción 1:

$$m1 = -\frac{c_{x1}}{c_{x2}} = -\frac{2}{1} = -2$$

Para la restricción 2:

$$m2 = -\frac{c_{x1}}{c_{x2}} = -\frac{1}{1} = -1$$

Para la Función Objetivo (considerando el cambio del coeficiente c1):

$$m2 = -\frac{c_{x1}}{c_{x2}} = -\frac{c1}{2}$$

Esta pendiente debe estar entre la pendiente de la restricción 1 y la pendiente de la restricción 2:

$$-2 \leq -\frac{c1}{2} \leq -1$$

Resolviendo esta desigualdad, se tiene:

$$1 \leq \frac{c1}{2} \leq 2$$

Para saber el rango de valores que puede tomar c1:

$$2 \leq c2 \leq 4$$

Con este rango de valores, la solución actual puede seguir siendo óptima, lo que cambiaría en este caso, es el valor de z.
Con c1=2 :

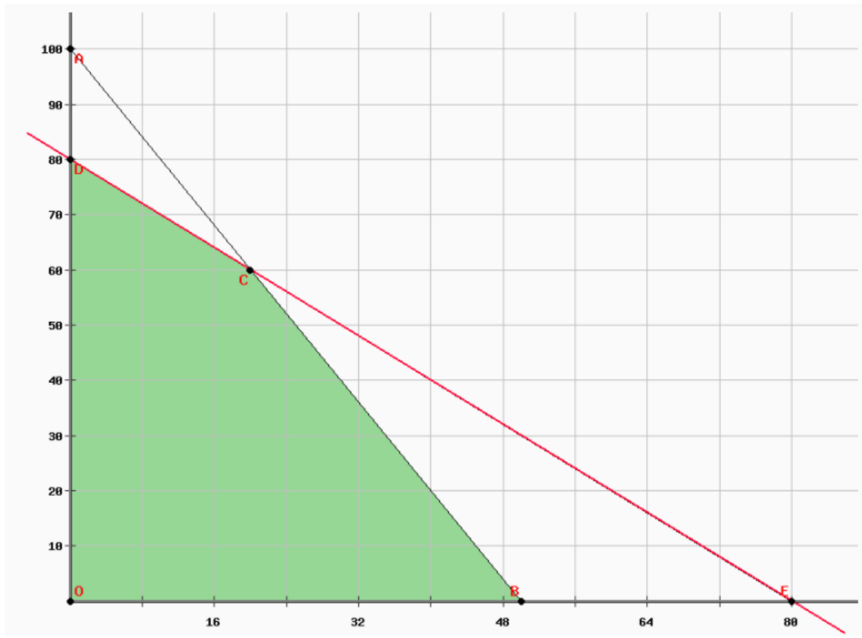


Ilustración 28 Análisis de sensibilidad. Fuente: Elaborado con PHPSimplex

Z*= 160
Con c1=2.2:

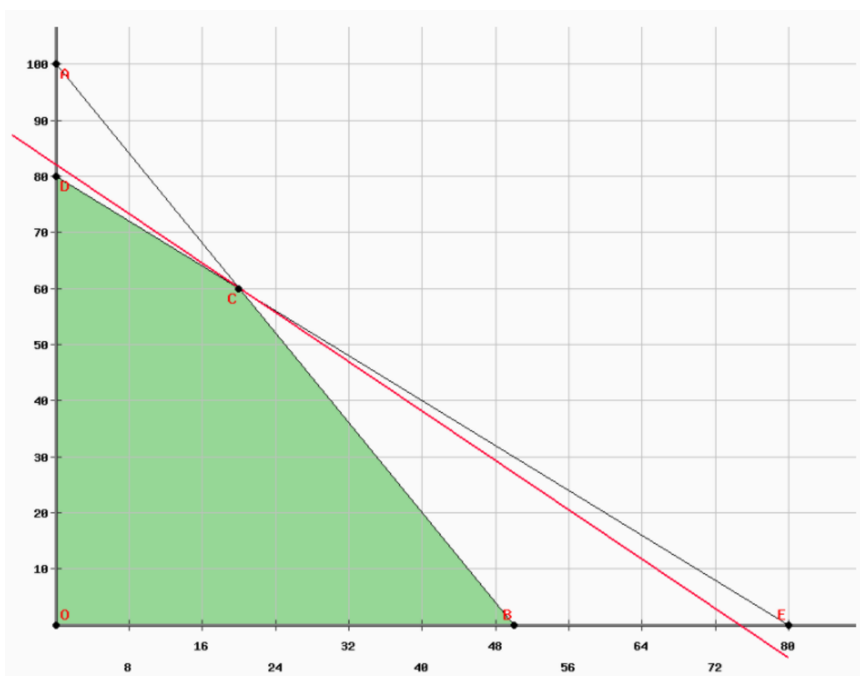


Ilustración 29Análisis de sensibilidad. Fuente: Elaborado con PHPSimplex

Z*=164
Con c1= 2.3:

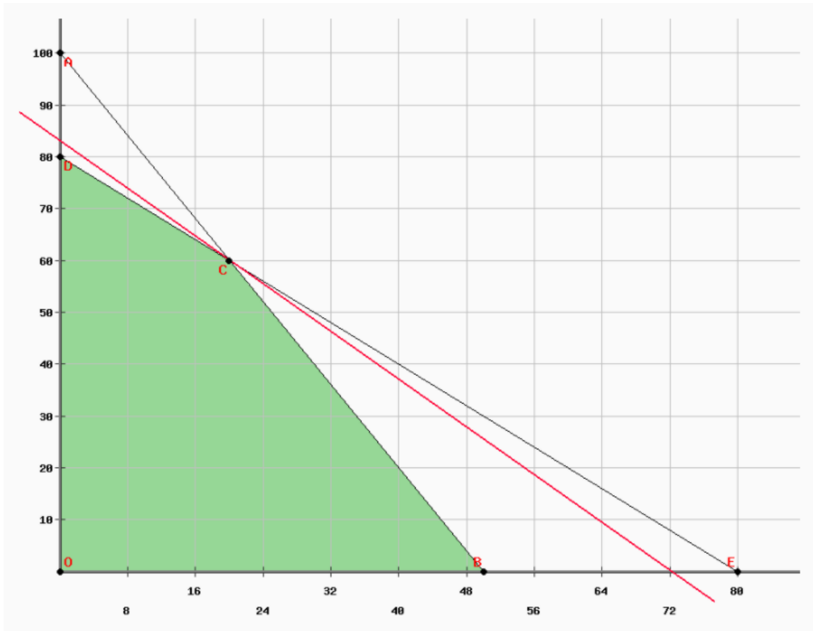


Ilustración 30 Análisis de sensibilidad. Fuente: Elaborado con PHPSimplex

Z*=166

Con c1=2.4:

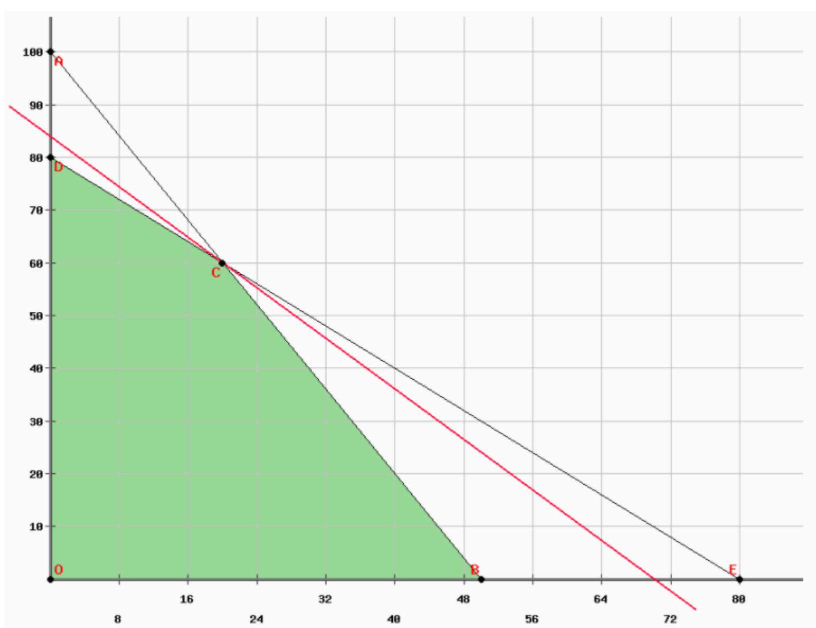


Ilustración 31Análisis de sensibilidad. Fuente: Elaborado con PHPSimplex

Z*=168

Con c1= 2.5 :

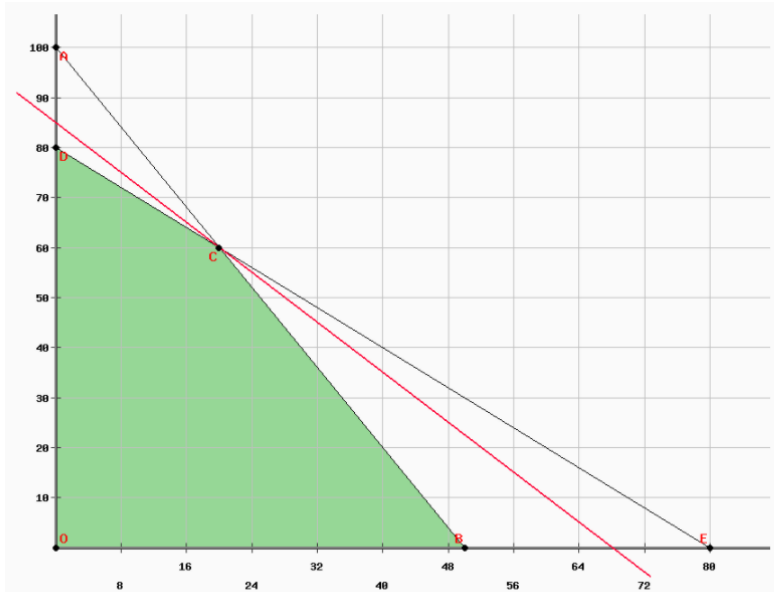


Ilustración 32Análisis de sensibilidad. Fuente: Elaborado con PHPSimplex

z*= 170
c1= 2.6

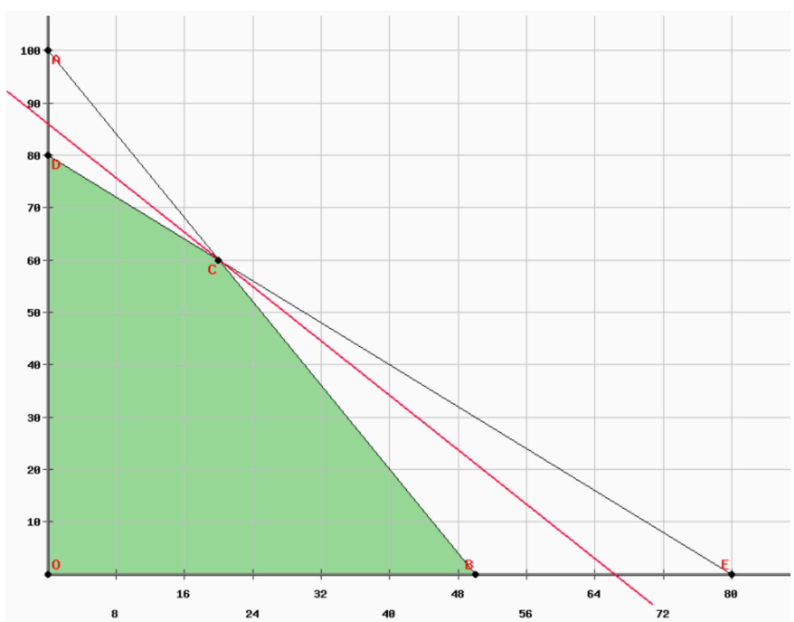


Ilustración 33Análisis de sensibilidad. Fuente: Elaborado con PHPSimplex

Z*=172
Con c1=2.7

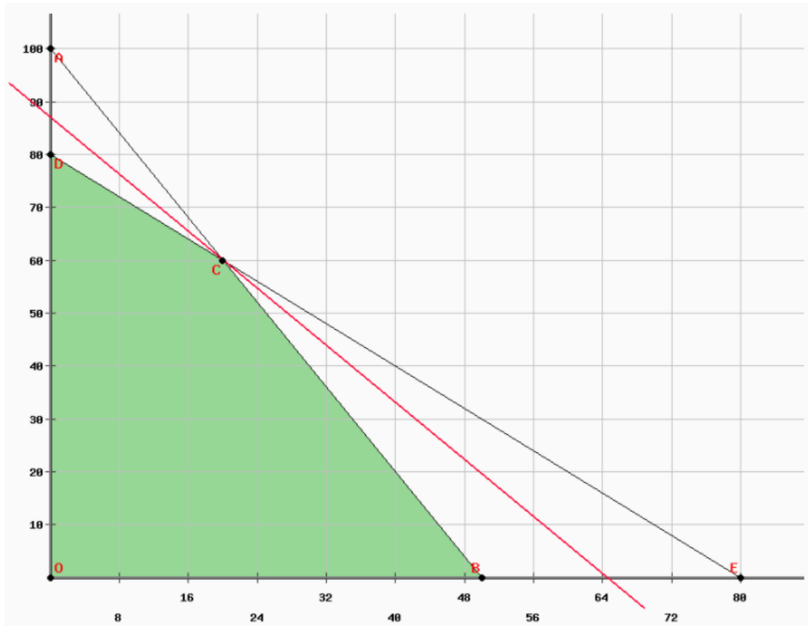


Ilustración 34Análisis de sensibilidad. Fuente: Elaborado con PHPSimplex

Z*=174
Con c1= 2.8

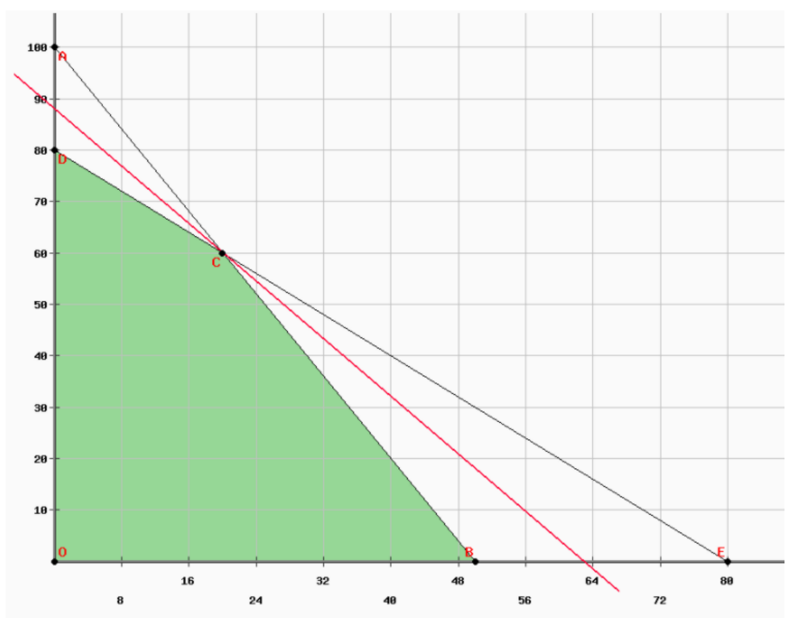


Ilustración 35 Análisis de sensibilidad. Fuente: Elaborado con PHPSimplex

Z*=176
Con c1= 2.9:

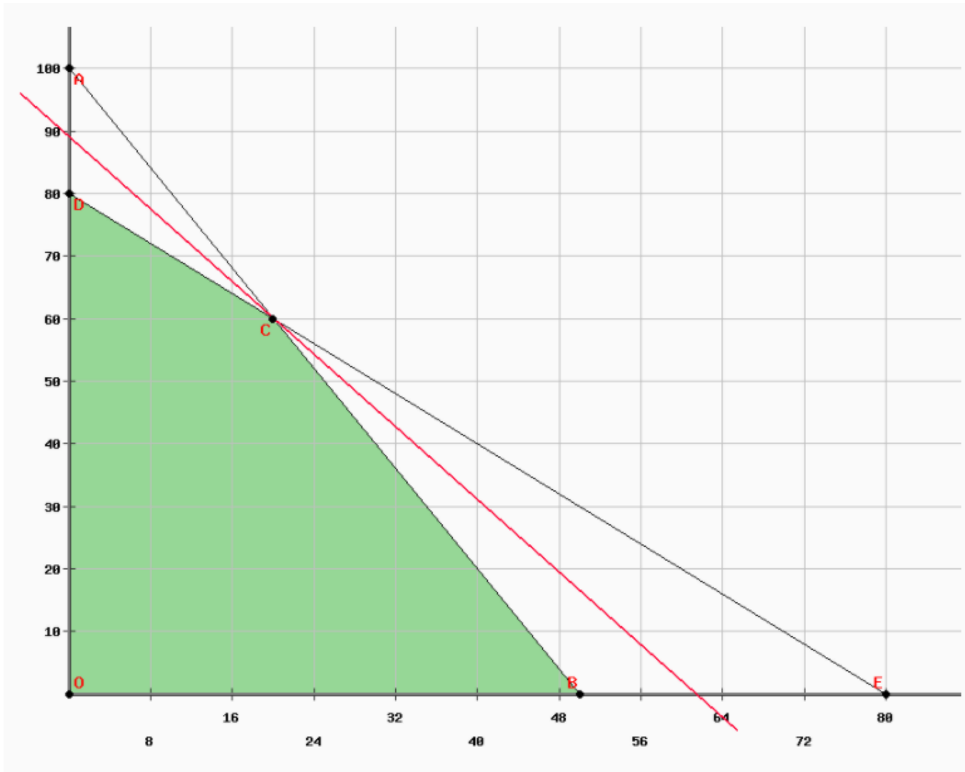


Ilustración 36Análisis de sensibilidad. Fuente: Elaborado con PHPSimplex

Z*=178

Las gráficas anteriores muestran que la base de la primera solución, sigue siendo la misma para el rango de valores que tomó el coeficiente c1 y sin hacer cambios en los demás valores del programa lineal. El óptimo de la función, como ya se mencionó, sí cambió.

Cambiando ahora el valor de la segunda constante de la función objetivo, se sustituirá 2 por c2:

$$Fo: z = 3X1 + 2x2$$

$$Fo: z = 3X1 + c2x2$$

Para encontrar el rango de valores que puede tomar la constante c2, se considera la pendiente de las rectas que representan las restricciones que forman el área que puede tomar la función objetivo. Entonces, se procederá a considerar las pendientes identificadas de las rectas que representan las restricciones 1 y 2.

Para la restricción 1:

$$m1 = -\frac{c_{x1}}{c_{x2}} = -\frac{2}{1} = -2$$

Para la restricción 2:

$$m2 = -\frac{c_{x1}}{c_{x2}} = -\frac{1}{1} = -1$$

Para la Función Objetivo (considerando el cambio del coeficiente c2):

$$m2 = -\frac{c_{x1}}{c_{x2}} = -\frac{3}{c2}$$

Esta pendiente debe estar entre la pendiente de la restricción 1 y la pendiente de la restricción 2:
Pendiente de la restricción 1:

$$m1 = -\frac{c_{x1}}{c_{x2}} = -\frac{2}{1} = -2$$

Para la restricción 2:

$$m2 = -\frac{c_{x1}}{c_{x2}} = -\frac{1}{1} = -1$$

$$-2 \leq \frac{-3}{c2} \leq -1$$

$$1 \leq \frac{3}{c2} \leq 2$$

$$\frac{1}{2} \leq \frac{c2}{3} \leq 1$$

$$\frac{3}{2} \leq c2 \leq 3$$

Si $\frac{3}{2} \leq c2 \leq 3$, entonces, la base de la solución actual sigue siendo óptima, cambiando el valor de la función objetivo z.
Con c2= 1.5 se tiene:

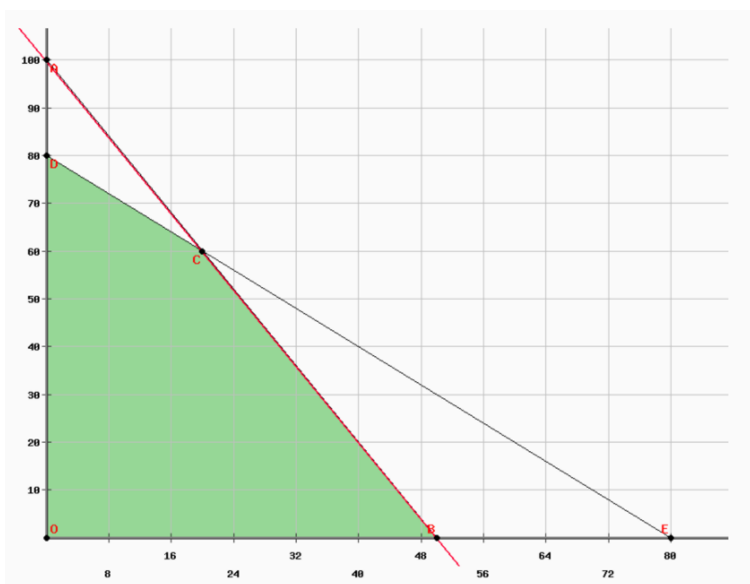


Ilustración 37Análisis de sensibilidad. Fuente: Elaborado con PHPSimplex

Z*=150
Con c2=1.6

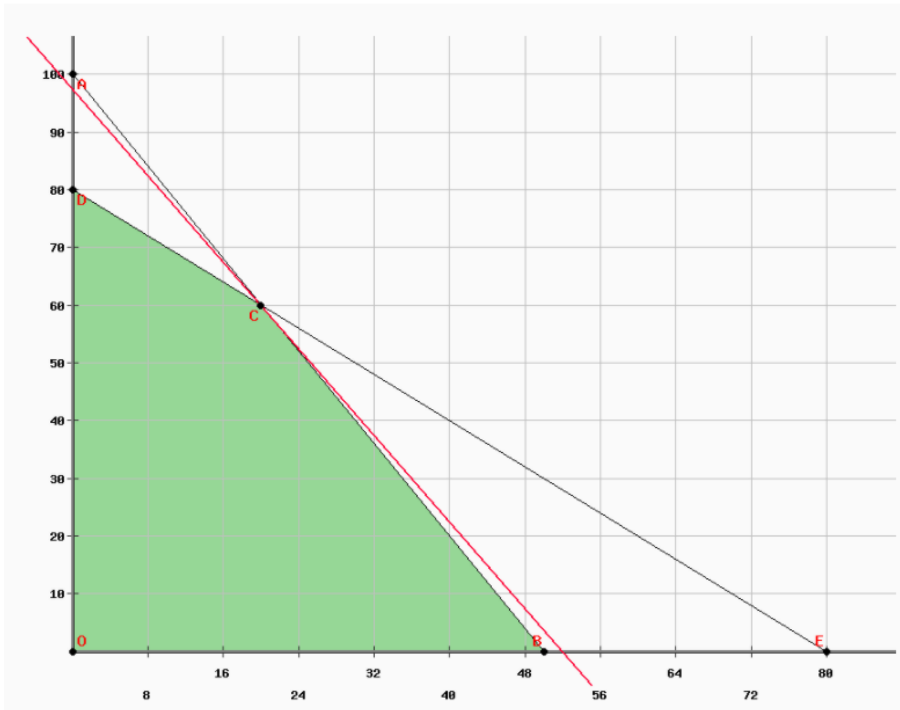


Ilustración 38Análisis de sensibilidad. Fuente: Elaborado con PHPSimplex

Z*=156
Con c2=1.7

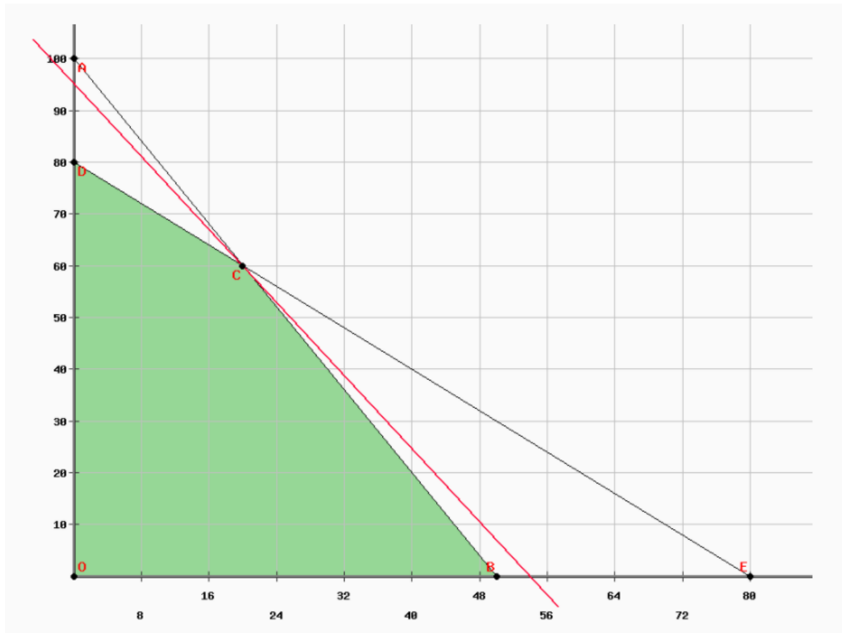


Ilustración 39Análisis de sensibilidad. Fuente: Elaborado con PHPSimplex

Z*=162
Con c2 = 1.8

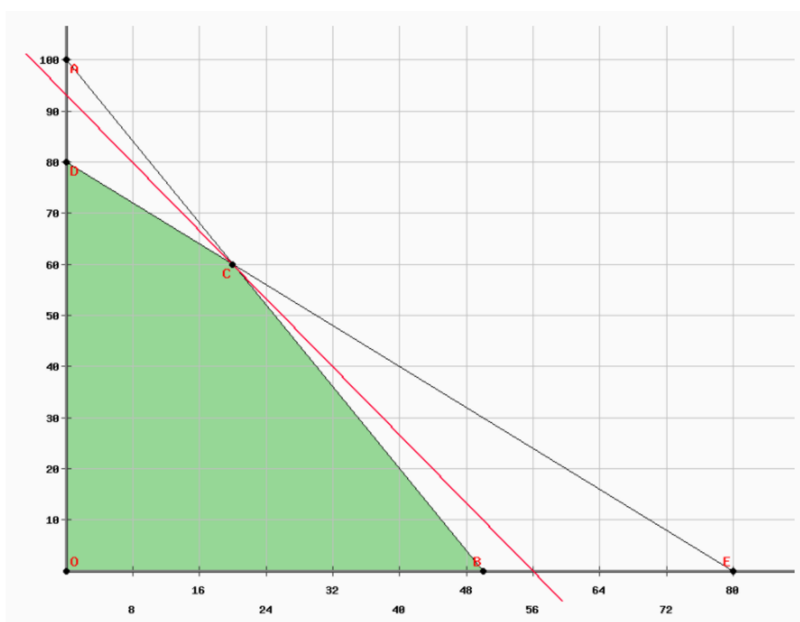


Ilustración 40 Análisis de sensibilidad. Fuente: Elaborado con PHPSimplex

Z*=168
Con c2=1.9

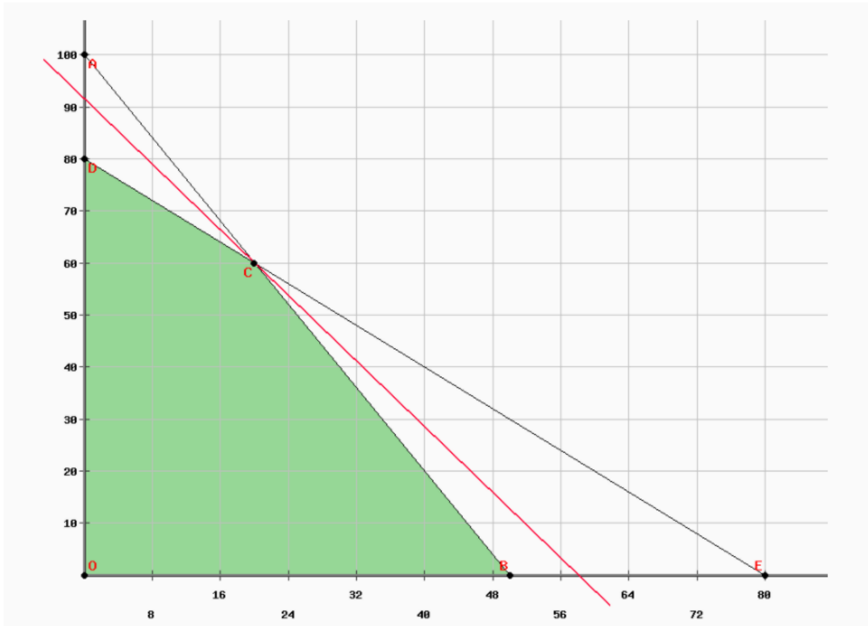


Ilustración 41Análisis de sensibilidad. Fuente: Elaborado con PHPSimplex

Z*=174

Con c2=2

Ilustración 42Análisis de sensibilidad. Fuente: Elaborado con PHPSimplex

Z*=180

Cambio en el lado derecho de las restricciones

Ahora se buscará determinar si el cambio en los valores del lado derecho de las restricciones causa que la base inicial ya no sea óptima.

Considerando la restricción 1 :

$2x1 + x2 \leq 100 \ldots(1)$

El elemento que se cambiará será 100, es decir, b1, quedando de la siguiente forma:

$2x1 + x2 \leq b1 \ldots(1)$

Se quiere determinar el rango de valores de b1 para los cuales la base actual sigue siendo óptima. En la solución actual, se encuentra en la intersección de las rectas que representan las restricciones 1 y 2, a estas restricciones se les llama restricciones activas, por ser aquellas que en su cruce se encuentra la solución óptima.

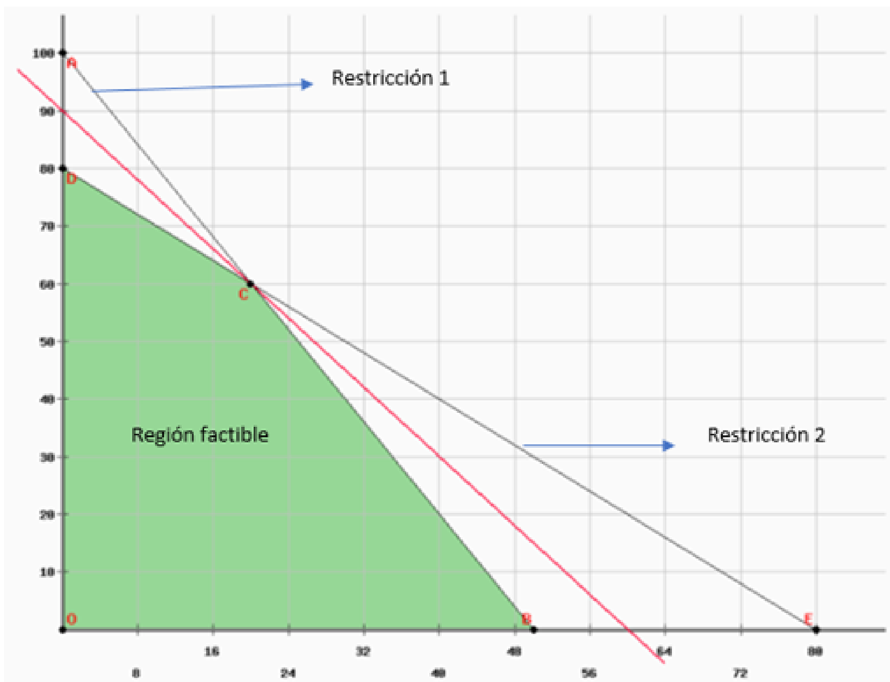


Ilustración 43Análisis de sensibilidad. Fuente: Elaborado con PHPSimplex

Para que el programa lineal siga teniendo una solución factible, al cambiar el valor de b1, se pueden desplazar las rectas que representan las restricciones activas, encontrando sus límites, esto es, los puntos hasta los cuales las dos restricciones se seguirán cruzando.

En este caso, al desplazar la restricción 1, se puede desplazar hasta abajo, hasta el punto donde se cruza con la otra restricción activa, es decir, hasta el punto D (0,60) y hacia arriba, la restricción se desplazará hasta el punto E (80,0)

$2x1 + x2 \leq 100 \ldots(1)$

Entonces, el valor de b2 está entre :

$$(2*0) + (60) \leq b1 \leq (2*80) + (0*1)$$

$$60 \leq b1 \leq 160$$

Si $60 \leq b1 \leq 160$, tanto el valor de z como el punto óptimo cambiarán.

Con b1=60

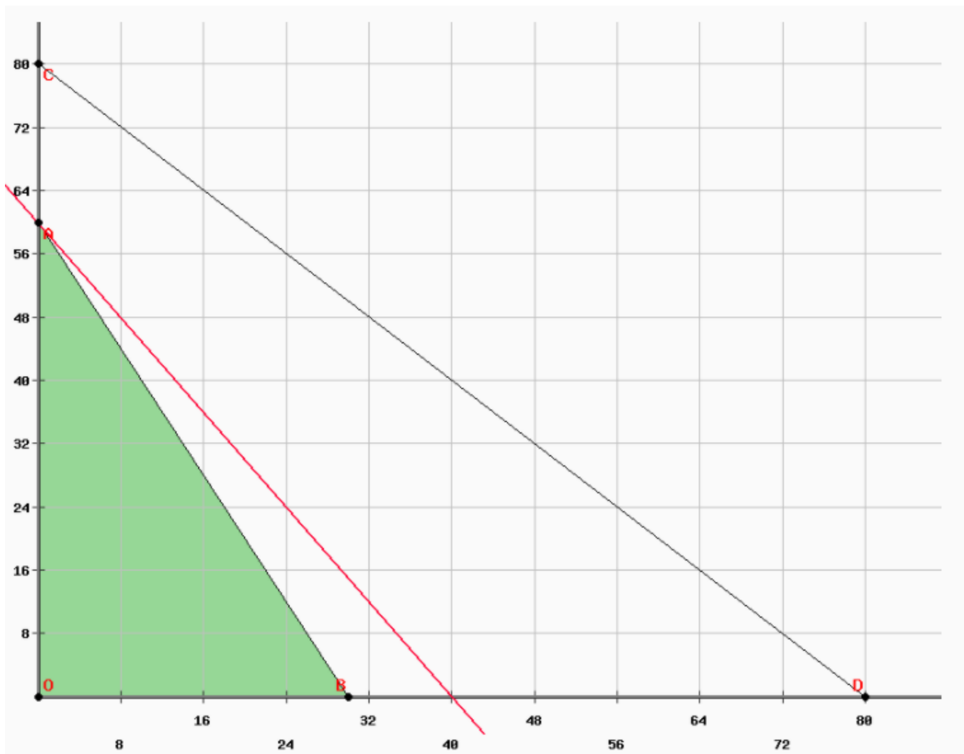


Ilustración 44Análisis de sensibilidad. Fuente: Elaborado con PHPSimplex

Con b1= 70

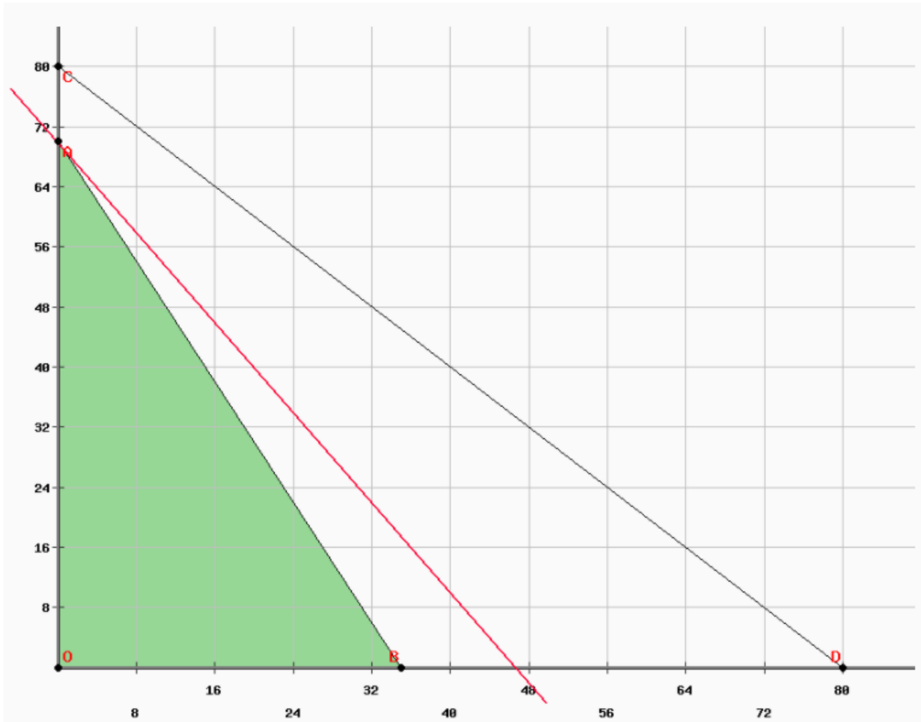


Ilustración 45 Análisis de sensibilidad. Fuente: Elaborado con PHPSimplex

Con b1=80

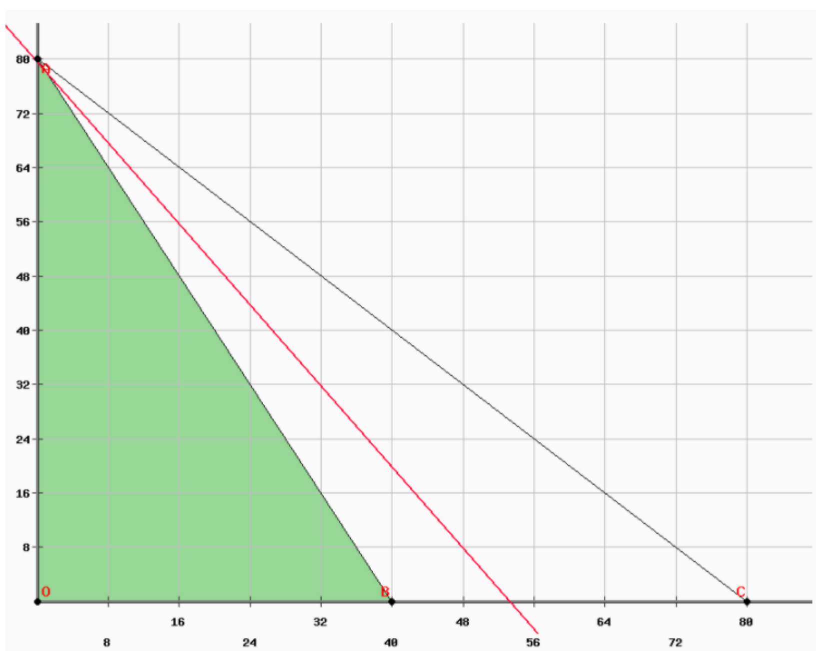


Ilustración 46 Análisis de sensibilidad. Fuente: Elaborado con PHPSimplex

Con b= 90

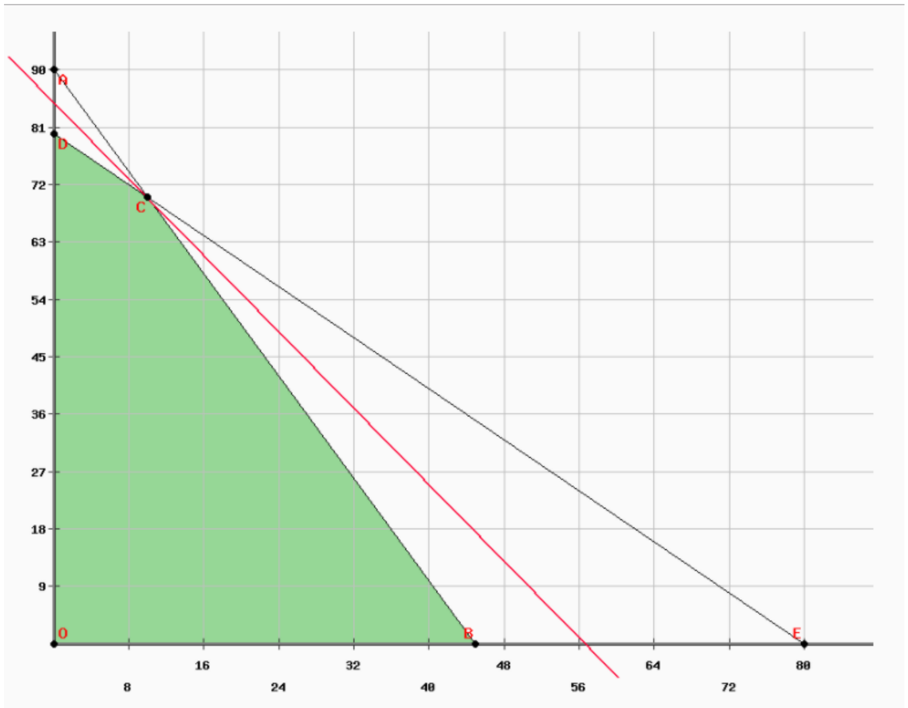


Ilustración 47Análisis de sensibilidad. Fuente: Elaborado con PHPSimplex

Con b1= 100

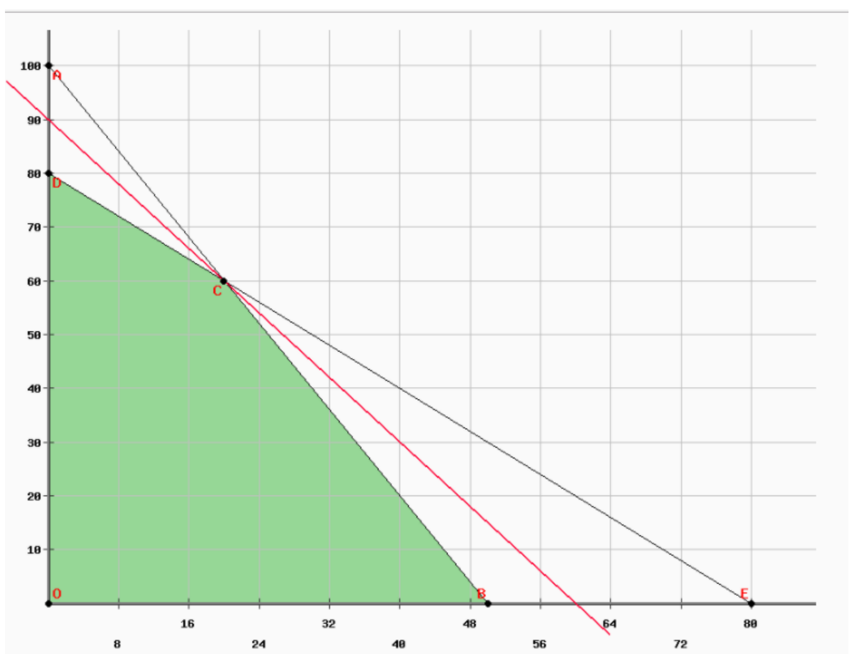


Ilustración 48Análisis de sensibilidad. Fuente: Elaborado con PHPSimplex

Con b1= 120

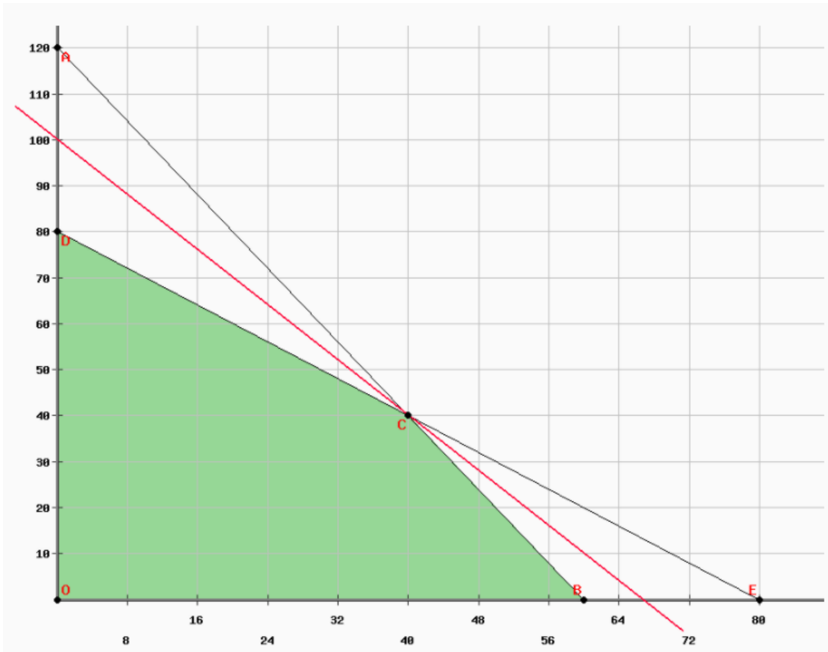


Ilustración 49Análisis de sensibilidad. Fuente: Elaborado con PHPSimplex

Con b1=140

Ilustración 50Análisis de sensibilidad. Fuente: Elaborado con PHPSimplex

Con b1= 160

Ilustración 51Análisis de sensibilidad. Fuente: Elaborado con PHPSimplex

2.5 Algoritmos Especiales

2.5.1 Modelo de asignación

Objetivo general

Formular y resolver modelos, para la solución de problemas lineales especiales, así como analizar la solución para una toma de decisiones.

Definición del problema de asignación

El problema de asignación es un caso especial de programación lineal que consiste en destinar recursos a la realización de tareas. Este se puede aplicar en casos de asignación de personal, maquinaria, vehículos, plantas, tareas, etc.

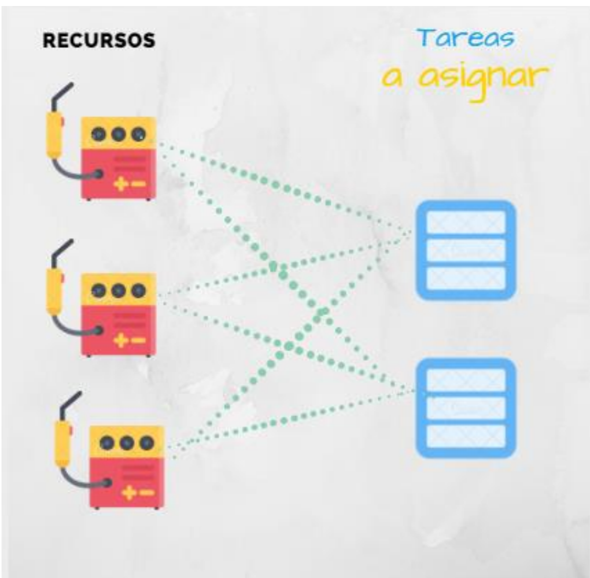


Ilustración 52Problema de asignación. Elaboración propia con Canva.

Características del problema de asignación

1. El objetivo es minimizar el costo de asignar recursos a la realización de determinadas tareas, de acuerdo con los costos asociados a la asignación de cada recurso a cada tarea.
2. La cantidad de recursos y de tareas a asignar no necesariamente deben ser iguales.
3. Cualquier recurso puede ser asignado para desarrollar cualquiera de las tareas a asignar.
4. El costo sufre variaciones de acuerdo con el recurso y la tarea a asignar.
5. Se debe asignar solo un agente a cada una de las tareas de modo que el costo de la asignación sea mínimo.

Origen del problema de asignación

El problema de asignación fue descrito por primera vez por F.L. Hitchcook en 1941, cuando publicó una solución analítica a este problema. Posteriormente Harold W, Kuhn planteó formalmente el método húngaro para resolver problemas de asignación, su aportación está basada en los trabajos de dos matemáticos húngaros llamados Dénes Koning y Jeno Egervary.

Modelo del problema de asignación

El modelo de asignación se puede considerar como una variación del modelo de transporte en la cual, las variables de decisión solo pueden tomar valores 0 y 1 en la solución óptima.

En Este caso, la oferta y la demanda toman el mismo valor, el cual es igual a 1.

Para este modelo, a diferencia de modelo de transporte, no es necesario que el número de fuentes (recursos) sea igual al número de destinos (tareas).

Matemáticamente el modelo de asignación se representa de la siguiente manera:

$$MinZ = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} X_{ij}$$

Sujeto a :

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = 1 \ , \quad i = 1,2, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = 1 \ , \quad j = 1,2, \dots, n$$

$$X_{ij} \geq 0 \qquad i = 1, \dots, m \quad y \quad j = 1, \dots, n$$

En este caso, como ya se había mencionado, las variables X_{ij} solo pueden tomar valores de 0 ó 1. Cuando el origen i se asigna al destino j; la variable de decisión toma el valor de 1, en caso contrario, toma el valore de cero.

Forma de resolver el problema de asignación

Dadas las características del modelo de asignación, no sería tan eficiente el uso de métodos de transporte o método simplex. Para resolver el modelo de asignación existen métodos llamados de asignación, tales como, el método húngaro.

Para que el problema de asignación se pueda resolver por medio del método húngaro, se debe considerar:

1. Que el número de recursos es igual al número de tareas, en caso de que esto no se cumpla, se puede equilibrar el modelo de la misma forma que un modelo de transporte.
2. A cada recurso se le asigna exactamente una tarea.
3. A cada tarea se le realizar solo por un recurso.
4. Existe un costo asociado cij, que representa el costo del recurso i al ser asignado a la tarea j.

Método Húngaro

Para poder desarrollar el método húngaro, es necesario representar el problema de asignación a través de una matriz de costos, donde se represente el costo asociado de asignar el recurso i a la tarea j.

Tabla 48 Método Húngaro. Elaboración propia.

	Tareas					
Recursos	1	,	.	.	.	n
1	C11	C12	.	.	.	C1n
,	C21	C22	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.
m	Cm1	.	.	.	.	Cmn

Pasos del método Húngaro.

1. En la matriz de costo, se debe identificar el costo mínimo de cada renglón y restarlo a todos los elementos del renglón.
2. En la matriz resultante del paso 1, se debe identificar el costo mínimo de cada columna para posteriormente, restarlo a todos los elementos de la columna.
3. Se deja de realizar los pasos anteriores cuando haya al menos un cero en cada columna y en cada renglón.
4. La asignación se realiza asignando recursos a las tareas, donde el valor de la columna o renglón sea igual a cero.
5. La solución óptima se identifica como la solución factible asociada después de realizar los pasos anteriores.

Es necesario tener en cuenta que, después de realizar los pasos 1 y 2, en algunos casos, no se produce una solución factible en la primera iteración, por lo que se deberán repetir hasta hallar una solución factible, la cual será la solución óptima, en ese caso, se procedo de la siguiente forma:

6. Se traza una cantidad mínima de líneas verticales y horizontales en la última matriz obtenida, que cubran todos los elementos cero.

7. Se selecciona el elemento no cubierto que sea mínimo, y se resta a todos los elementos no cubiertos.

8. El mismo elemento que en el paso anterior se restó a todos los elementos no cubiertos, ahora se sumará a todos los elementos que se encuentren en casillas donde dos líneas se intersequen.

9. Cuando después de realizar estos pasos, no se encuentre una solución factible, se deberán repetir los pasos 1 y 2. Cuando se haya encontrado una solución factible, se realiza la asignación descrita en el paso 4.

Ejemplo resuelto por medio del método Húngaro

Un hospital debe asignar a su personal de asistencia médica a atender los departamentos de gastroenterología, pediatría y cardiología. Se cuenta con tres asistentes médicos, Maximiliano, Davide y Rosario. Cada asistente tiene un nivel de experiencia distinto, por lo que, dependiendo de ella, se le pagará un sueldo determinado. Los costos en por asignar a Max en Gastroenterología es de $ 110 por día, en Pediatría $ 90 y en cardiología $70, por asignar a Dave los costos son $ 90; $60; $120 (gastroenterología, pediatría y cardiología) y por asignar a Ros, en estos departamentos, los costos son $80, $120, $60 (gastroenterología, pediatría y cardiología).

Las tareas por realizar en los distintos departamentos pueden ser realizadas por los tres asistentes de forma indistinta. El administrador del hospital, Israel, quiere asignar a los

asistentes médicos de tal forma que el costo por asignar sea mínimo. Para ello utilizó el método húngaro para resolver problemas de asignación. Siguió los siguientes pasos:

1. Construir una matriz de costos:

Tabla 49 Método Húngaro. Fuente: Elaboración propia.

	Tareas		
Asistente	*Gastroenterología*	*Pediatría*	*Cardiología*
Max	110	90	70
Dave	90	60	120
Ros	80	120	60

Se Identificó el costo mínimo de cada renglón y restarlo a los elementos del renglón:

Tabla 50 Método Húngaro. Fuente: Elaboración propia.

	TAREAS		
ASISTENTE	*Gastroenterología*	*Pediatría*	*Cardiología*
MAX	110	90	70
DAVE	90	60	120
ROS	80	120	60

Matriz de costos restando el valor mínimo:

Tabla 51 Método Húngaro. Fuente: Elaboración propia.

	TAREAS		
ASISTENTE	*Gastroenterología*	*Pediatría*	*Cardiología*
MAX	40	20	0
DAVE	30	0	60
ROS	20	60	0

2. Se identificó en la matriz resultante, el costo mínimo por columna:

Tabla 52 Método Húngaro. Fuente: Elaboración propia.

	TAREAS		
ASISTENTE	*Gastroenterología*	*Pediatría*	*Cardiología*
MAX	40	20	0
DAVE	30	0	60
ROS	20	60	0

El valor mínimo de cada columna, se debe restar a todos los valores de la columna, con lo que, se tiene:

Tabla 53 Método Húngaro. Fuente: Elaboración propia.

	TAREAS		
ASISTENTE	*Gastroenterología*	*Pediatría*	*Cardiología*
MAX	20	20	0
DAVE	10	0	60
ROS	0	60	0

3. En la última matriz, ya existe al menos un cero en cada columna y en cada renglón.

4. La asignación se realiza asignando recursos a las tareas, donde el valor de la columna o renglón sea igual a cero.

Tabla 54 Método Húngaro. Fuente: Elaboración propia.

	TAREAS		
ASISTENTE	*Gastroenterología*	*Pediatría*	*Cardiología*
MAX	20	20	0
DAVE	10	0	60
ROS	0	60	0

A Davide se le asignará el departamento de Pediatría, a Maximiliano el de Cardiología y a Rosario en el de Gastroenterología.

En el caso de Rosario, pudo haber sido asignada tanto para el departamento de Gastroenterología como en el de cardiología, sin embargo, para que el costo sea mínimo, fue necesario asignar a Maximiliano en el departamento de cardiología.

5. La solución óptima queda de la siguiente manera:

Tabla 55 Método Húngaro. Fuente: Elaboración propia.

ASISTENTE MÉDICO	***DEPARTAMENTO***
MAXIMILIANO	cardiología
DAVIDE	Pediatría
ROSARIO	Gastroenterología

Aplicaciones del modelo de asignación

En la Ingeniería Industrial, se pueden presentar múltiples casos en los que se puede hacer uso del modelo de asignación, entre ellos se pueden mencionar algunos como: asignación de personal a equipos, máquinas, horarios, vendedores, asignación de mesas en restaurantes, asignación de citas, de habitaciones, asignación de recursos económicos a diversos departamentos en una empresa, asignación de vehículos a determinadas rutas, etc.

Ejercicios propuestos

Ejercicio 1

Una junta directiva de un grupo formado por cuatro empresas: Maqui S.A., Solver Austral S.A. , The JT S.A. y PH S. A. desea asignar a cada una de ellas una estrategia de marketing dentro de cuatro posibles: A, B, C, D. Para realizar esta asignación, los ejecutivos de la junta calificaron el riesgo de implementar cada estrategia a cada una de las empresas. Consideraron una escala de 0 a 10 puntos, en la que, 10 representa el mayor riesgo. Las calificaciones se muestran en la tabla siguiente:

Tabla 56 Método Húngaro. Fuente: Elaboración propia.

	Estrategia			
Empresa	***A***	***B***	***C***	***D***
Maqui	**3**	**4**	**6**	**5**
Solver austral	**5**	**3**	**4**	**7**
The JT	**4**	**7**	**2**	**4**
PH	**7**	**6**	**8**	**3**

La empresa junta directiva quiere asignar a cada una de las empresas una estrategia de marketing, de tal forma que se incurra en el menor riesgo general posible.

Ejercicio 2

José, reciente mente fue asignado como líder del área de alimentos y bebidas de un parque de diversiones ha estado asignando distintas tareas a cada miembro de su equipo. Esto con el fin de detectar la habilidad de cada miembro en las distintas áreas. Durante un mes, ha registrado el número de incidentes en cada área y que han sido responsabilidad de los miembros del equipo.

Registró el número de fallas que cometieron los miembros del equipo en cada una de las áreas. Con lo cual construyó la siguiente tabla.

Los datos con los que cuenta se muestran a continuación:

Tabla 57 Método Húngaro. Fuente: Elaboración propia.

TAREAS/EMPLEADO	Carlos	Alondra	Javier	Levi
LIMPIEZA	**5**	**9**	**2**	**5**
PRODUCCIÓN DE ALIMENTOS	**3**	**1**	**8**	**2**
ATENCIÓN A CLIENTE EN CAJA	**1**	**1**	**6**	**2**
ORDEN DE BODEGAS	**4**	**6**	**4**	**6**

De acuerdo con los datos obtenidos, el líder considera que, a mayor número de errores cometidos por los miembros de su equipo, mayor será el riesgo de ocurrencia de un nuevo incidente en cada área.

Ahora pretende cambiar su estrategia, quiere asignar a cada empleado de forma permanente en un área específica, esto usando el método húngaro.

2.5.2 Modelo de transporte

Objetivo general

Formular y resolver modelos, para la solución de problemas lineales especiales, así como analizar la solución para una toma de decisiones.

Definición del problema de transporte

El modelo de transporte es una estructura especial de programación lineal, que consiste en minimizar el costo total de transportar unidades de un bien específico, de puntos *origen o fuente* hacia puntos de recepción o *destino*.

El siguiente gráfico muestra, a través de un diagrama, la naturaleza de un problema de transporte común, en el cual se encuentran distintos puntos destino y distintos puntos origen así como todas las rutas posibles para transportar unidades de los puntos orígen a los distintos destinos.

Cada punto origen y cada punto destino representan *nodos*, y las rutas que se pueden tomar (representadas con líneas discontinuas azules) representan *arcos.*

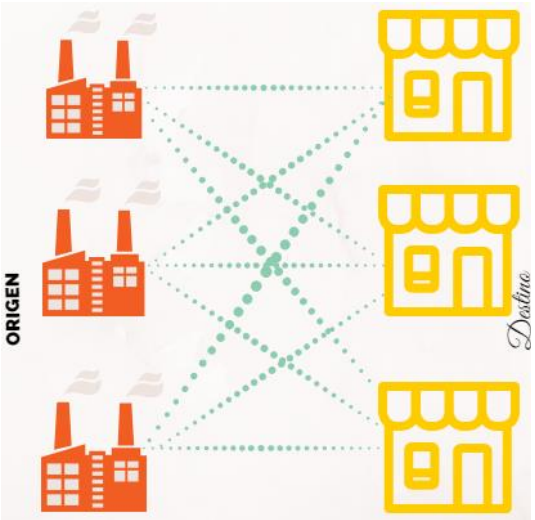


Ilustración 53 Problema de transporte. Fuente: Elaboración propia con Canva

Características del problema de transporte

1. Cada punto destino tiene una demanda específica que se debe satisfacer.
2. Cada punto origen solo puede proveer cierta cantidad de unidades que se desean transportar, es decir, tiene una oferta determinada.
3. El objetivo es minimizar el costo total de transporte, de acuerdo con los costos relacionados con el plan de rutas seleccionadas.
4. El costo de distribución es directamente proporcional a la cantidad de artículos que distribuye o transporta.
5. El problema tiene solución factible solo si la cantidad total disponible de todos los orígenes es igual a la demanda total de los destinos.

Origen del problema de transporte

El primer esbozo conocido del problema de transporte es de 1784. *Monge* describió un método geométrico para resolver un problema en el que se consideraba la posibilidad de una línea tangente a dos áreas hasta que todo haya sido transportado del origen al destino.

En 1930 N. Tolstoi realizó un estudio sobre el tema de transporte, mostrándolo en el artículo titulado " Métodos para encontrar el mínimo kilometraje en la planificación de carga en el espacio" el cual fue publicado en el libro sobre transporte editado por la Comisaría Nacional de Transporte de la Unión Soviética.

El primer estudio del *problema tradicional de transporte* fue realizado en 1941 por *Frank L. Hitchcock* en un artículo en el que también presentó un procedimiento de solución.

Durante la Segunda Guerra Mundial el economista *Tjalling C. Koopmans* , trabajando de forma independiente a Hitchcock, investigó y trató de resolver el mismo problema.

En 1950 se adaptó el algoritmo Simplex a la solución del problema de transporte.

Modelo del problema de transporte

El modelo consiste de m orígenes que deben satisfacer las necesidades de n destinos con determinado producto.

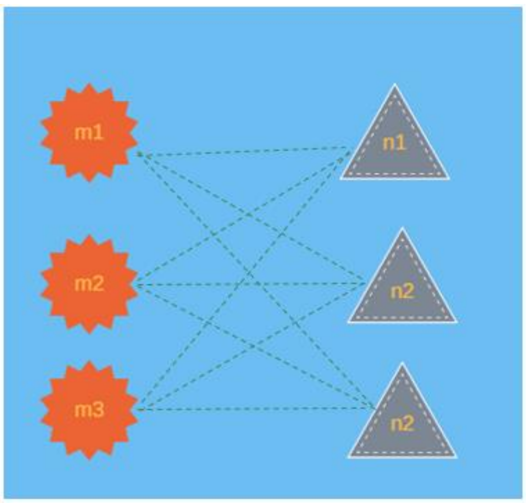


Ilustración 54Problema de transporte. Fuente: Elaboración propia con Canva

La capacidad de oferta del origen *i* , es a_i y la demanda de los puntos destino *j*, es b_j .

El costo de enviar una unidad del producto del origen *i* al destino *j* , se representa como : c_{ij}.

El objetivo del modelo es determinar la cantidad de unidades del producto deben enviarse del origen *i* al destino *j*, de tal forma que el costo total de transporte sea mínimo además de que se satisfaga la demanda de los puntos destinos j *y* que no se exceda la oferta disponible en los puntos origen *i*.

Considerando a X_{ij} como las variables de decisión, el modelo matemático de programación lineal del problema de transporte, se puede representar como :

$$MinZ = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} X_{ij}$$

Sujeto a :

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} \leq a_i \,, \quad i = 1,2, \dots, m \qquad\qquad (Restricción\ de\ oferta)$$

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} \geq b_j \,, \quad j = 1,2, \dots, n \qquad\qquad (Restricción\ de\ demanda)$$

$$X_{ij} \geq 0 \qquad i = 1, \dots, m \quad y \quad j = 1, \dots, n$$

El modelo se puede visualizar fácilmente a través de dos matrices, una de costos y otra de flujos:

Tabla 58 Problema de transporte. Fuente: Elaboración propia .

	Destinos	1	2		.	.	.	n	Oferta
Orígenes	1	C_{11}	C_{12}		.	.	.	C_{1n}	a_1
	2	C_{21}	C_{22}		.	.	.	C_{2n}	a_2
	.	.	.		.	.	.	.	.
	.	.	.		.	.	.	.	.
	.	.	.		.	.	.	.	.
	m	C_{m1}	C_{m2}		.	.	.	C_{mn}	a_m
	Demanda	b_1	b_2		.	.	.	b_n	

El modelo simplificado matricial del problema de transporte se representa como:

$$MinZ \; = \; Cx$$

Sujeto a:

$$AX = d$$

$X \geq 0$

Ilustración 55 Teorema 1. Fuente: Elaboración propia con Canva.

Modelos de transporte no equilibrados y cómo equilibrarlos

Un modelo de transporte no equilibrado es aquel en el que no se cumple la igualdad:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Al no cumplir el teorema de la ilustración 3, el problema no tendría una solución factible. Dado que, en la práctica este tipo de problemas pueden presentarse, es necesario implementar algunas técnicas que permitan resolver el problema.

Cuando no se cumple la igualdad, pueden presentarse dos casos:

-Que la oferta total sea mayor que la demanda total.

-Que la demanda total sea mayor que la oferta total.

Forma de equilibrar un modelo de transporte cuando la oferta total excede a la demanda total

Cuando la oferta total es mayor que la demanda total, se debe analizar si los destinos están dispuestos a recibir la oferta que se tiene como excedente. Después de este análisis, se puede estar ante tres casos distintos:

1. En caso de que los destinos estén dispuestos a aceptar la oferta excedente, el caso se representa matemáticamente como:

$$\sum x_{ij} \; = \; a_i \; i = 1, \ldots, m$$

$$\sum x_{ij} \geq \; b_j \; j = 1, \ldots, n$$

En este caso, es posible balancear la demanda agregando un destino ficticio a donde se enviará la demanda de exceso. El nuevo destino será el destino n+1 y su demanda será igual a :

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Y el costo para este destino será:

$$C_{n+1j} = \; min\{Cij\} \; para \; todo \; i, i = 1, \ldots\ldots m$$

El destino ficticio es en realidad uno de los destinos reales del problema real, por lo que se deberá asignar el costo del destino ficticio, igual al costo del destino que pueda generar mayor beneficio económico, es decir, $min\{Cij\}$.

2. Al analizar el problema no equilibrado, se puede dar otra situación en la que los destinos no están dispuestos a recibir la oferta excedente, es decir:

$$\sum x_{ij} \leq \; a_i \; i = 1, \ldots\ldots\ldots\ldots, m$$

$$\sum x_{ij} = \; b_j \; j = 1, \ldots\ldots\ldots\ldots, n$$

En este caso, se coloca un destino ficticio en el que:

$$C_{n+1i} = \; 0$$

Ya que realmente no se enviarán las unidades excedentes.

Y la demanda del destino ficticio será igual a:

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$$

3. El último caso que se puede presentar cuando la demanda es mayor que la oferta, de da cuando el excedente se puede almacenar en los orígenes o se pueden enviar a los puntos destino, considerando que la decisión se toma considerando el criterio de costo mínimo entre el envío y el costo de almacenaje Ai. Matemáticamente este caso se representa como:

$$\sum x_{ij} \leq \; a_i \; i = 1, \ldots\ldots\ldots\ldots, m$$

$$\sum x_{ij} \geq \; b_j \; j = 1, \ldots\ldots\ldots\ldots, n$$

En este caso se agrega un destino ficticio con demanda igual a :

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Y el costo de este destino será igual a:

$$C_{n+1i} = min\{Ai, Ei\} \; para \; todo \; i \; donde \; Ei = min\,\{C_{ij}\}$$

Forma de equilibrar un modelo de transporte cuando la demanda total excede a la oferta total.

Cuando la demanda total es mayor que la oferta total, se tiene que:

$$\sum x_{ij} = a_i \; i = 1, \ldots, m$$

$$\sum x_{ij} \leq b_j \; j = 1, \ldots, n$$

En este caso, se agrega un origen ficticio $m + 1$ que suministrará la demanda faltante, el costo que se asignará, corresponde a un costo de penalidad por demanda insatisfecha del destino j.

La oferta del origen ficticio será igual a:

$$a_m + 1 = \sum b_j - \sum a_i$$

Y el costo:

$$C_{m+1\,j} = Pj \; para \; todo \; j$$

Forma de resolver el problema de transporte

1. El modelo de transporte se puede resolver por medio de método Simplex Transporte, el cual entrega la solución óptima del modelo.
2. Otra forma de resolver modelos de transporte es a través de métodos heurísticos, los cuales brindan soluciones básicas factibles, no necesariamente arrojan la solución óptima del modelo.

Pasos generales para resolver el problema de transporte

Para resolver los modelos de transporte, y encontrar la solución óptima del problema, se pueden seguir los siguientes pasos:

1. Construcción del modelo
2. Obtener una solución básica factible por medio de algún método heurístico.
3. Probar si la solución básica factible es óptima
4. Cuando la solución encontrada por medio de los métodos heurísticos no sea óptima, se puede utilizar el método Simplex Transporte para encontrar la solución óptima del modelo.

Métodos heurísticos para resolver el problema de transporte (Para obtener soluciones básicas factibles)

El término heurístico deriva del griego *heuriskein* que significa “descubrir o encontrar algo”, en el área de optimización se utiliza para nombrar una clase de algoritmos de solución de problemas. Dichos algoritmos son reglas empíricas que permiten encontrar soluciones factibles, no necesariamente óptimas.

Para la solución del modelo de transporte, existen varios métodos heurísticos tales como:

- Método de esquina noroeste
- Método de Vogel
- Método de Russell

Método de esquina noroeste

El Método de esquina noroeste es un método heurístico que permite encontrar una solución al problema de transporte, en la cual , se cumplan todas las restricciones, no obstante , como ya se mencionó, al ser un método heurístico, no necesariamente brinda una solución óptima.

Este método tiene como ventaja la rapidez y facilita el trabajo cuando se cuenta con un gran número de orígenes y destinos.

El nombre de este algoritmo es tal, debido a que la resolución del problema inicia en la celda de la esquina noroeste de la matriz de costos, esta es:

Tabla 59 Método de Esquina noroeste. Fuente: Elaboración propia.

	Destinos	1	2		.	.	.	n	Oferta
Orígenes	1	C_{11}	C_{12}		.	.	.	C_{1n}	a_1
	2	C_{21}	C_{22}		.	.	.	C_{2n}	a_2
	.	.	.		.	.	.	.	.
	.	.	.		.	.	.	.	.
	.	.	.		.	.	.	.	.
	m	C_{m1}	C_{m2}		.	.	.	C_{mn}	a_m
	Demanda	b_1	b_2		.	.	.	b_n	

Pasos del algoritmo

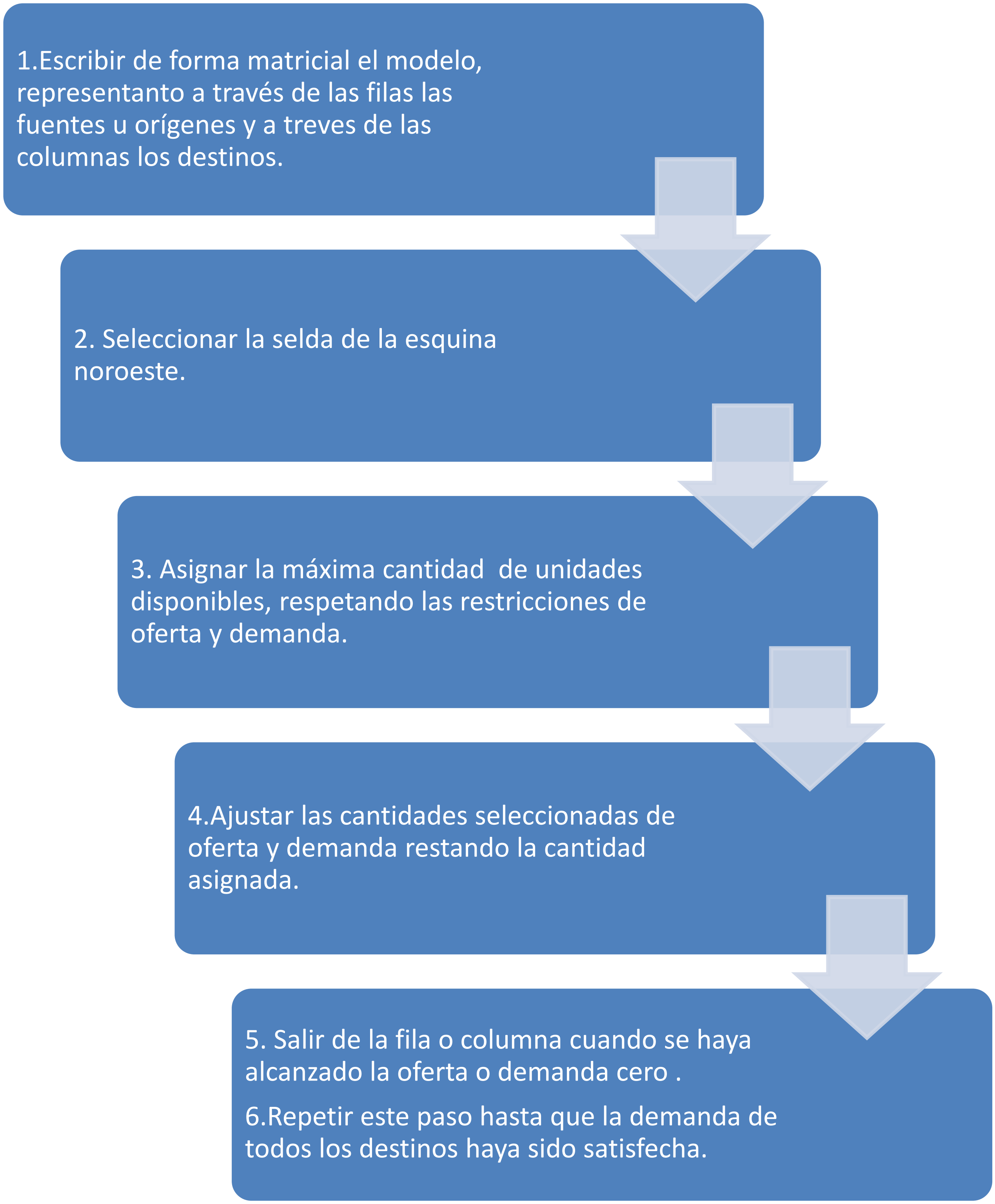


Ilustración 56 Algoritmo del Método de Esquina Noroeste. Fuente: Elaboración propia.

Ejemplo resuelto con método de esquina Noroeste:

En México, la tuna es mayormente producida y consumida en el centro del país, en las zonas norte, sur, sureste y noreste el consumo de este fruto es bajo debido al alto costo de transporte a estas zonas geográficas. En un estudio realizado, se observó que cinco de son autosuficientes en la producción de tuna con respecto a la demanda y además tienen la capacidad para ofrecer sus excedentes a los estados demandantes.

Los estados del centro del país abastecen a las zonas consumidoras, siendo estos: Zacatecas , México, Puebla, Hidalgo. Siendo los mejores orígenes locales: Ojo caliente (Zacatecas) ,Zumpango (México), Acatzingo (Puebla),Pachuca (Hidalgo).

Los estados demandantes son el resto de los estados, sin embargo, la empresa EMM solo abastece a los siguientes estados: Distrito Federal, Nuevo León, Guerrero y Baja California. Para determinar los destinos específicos, la empresa tomo como principal criterio, la cantidad de población y la ubicación específica de los centros de abasto. Las localidades destino seleccionadas fueron: Delegación Iztapalapa (Distrito Federal), Monterrey (Nuevo León), Acapulco (Guerrero) Y La paz (Baja California).

Los costos de transporte son proporcionales a la distancia recorrida. Un flete local cuesta 2600 pesos de forma fija, a este costo se le debe sumar un costo adicional por salir de la localidad, por cada kilómetro recorrido, el precio se incrementa en 18 pesos.

Un camión tiene una capacidad máxima de 28 toneladas, por lo que, para conocer el costo por tonelada, se divide el costo total entre 28.

Las distancias totales recorrida de los distintos orígenes a los destinos se muestran a continuación:

-De Ojo caliente a Iztapalapa: 590 Km

-De ojo caliente a Monterrey: 501 Km

-De ojo caliente a Acapulco: 953 Km

-De ojo caliente a La paz: 1240 Km

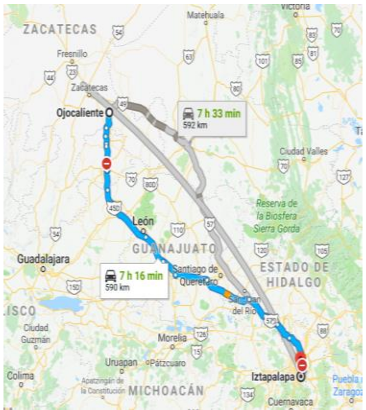


Ilustración 57Distancia Ojo caliente a Iztapalapa. Fuente: Google maps

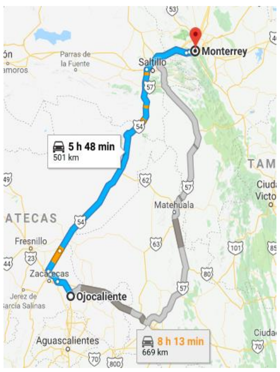


Ilustración 58Distancia Ojo caliente a Monterrey. Fuente: Google maps

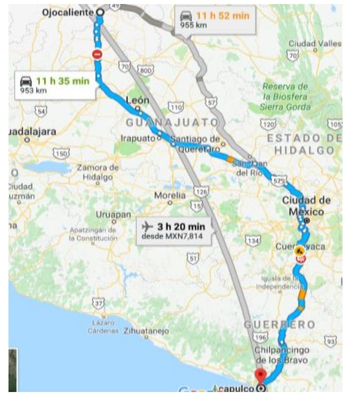


Ilustración 59Distancia Ojo caliente a Acapulco. Fuente: Google maps

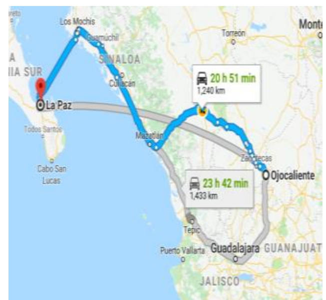


Ilustración 60 Distancia Ojo caliente a La Paz. Fuente: Google maps

-De Zumpango a Iztapalapa: 65 Km

-De Zumpango a Monterrey: 875 Km

-De Zumpango a Acapulco: 446 Km

-De Zumpango a La paz:1646 Km

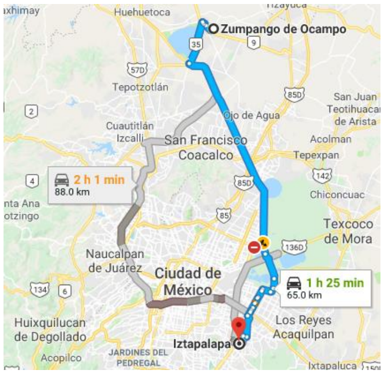


Ilustración 61 Distancia de Zumpango a Iztapalapa. Fuente: Google maps

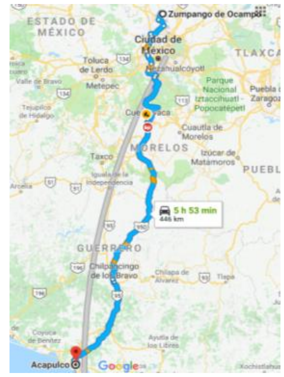


Ilustración 63 Ilustración 61 Distancia de Zumpango a Acapulco. Fuente: Google maps

Ilustración 62Ilustración 61 Distancia de Zumpango a Monterrey. Fuente: Google maps

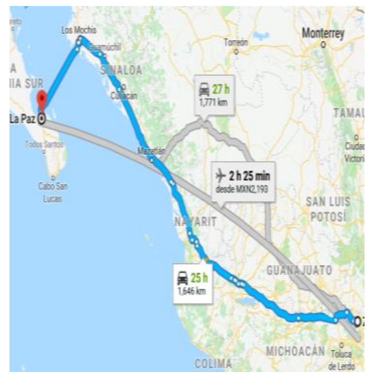


Ilustración 64 Ilustración 61 Distancia de Zumpango a La Paz. Fuente: Google maps

- De Acatzingo a Iztapalapa:149 Km

-De Acatzingo a Monterrey: 1064 Km

-De Acatzingo a Acapulco: 501 Km

-De Acatzingo a La Paz: 1834 Km

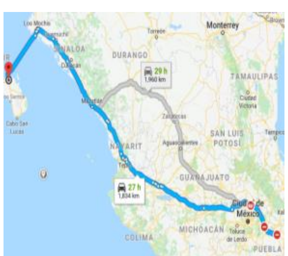


Ilustración 65Distancia de Pachuca a La Paz. Fuente: Google maps

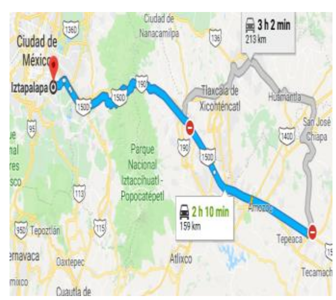


Ilustración 66 Distancia de Pachuca a Iztapalapa. Fuente: Google maps

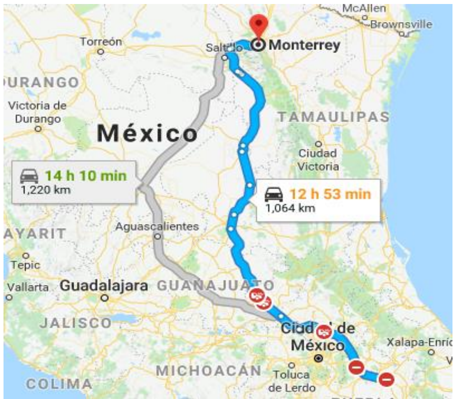


Ilustración 67 Distancia de Pachuca a Monterrey. Fuente: Google maps

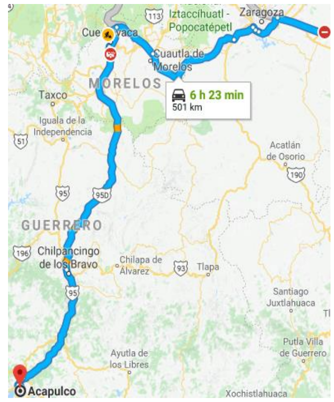


Ilustración 68 Distancia de Pachuca a Acapulco. Fuente: Google maps

-De Pachuca a Iztapalapa: 106 Km

-De Pachuca a Monterrey: 919

-De Pachuca a Acapulco: 473 Km

-De Pachuca a La Paz: 1689 Km

Tabla resumen de distancias:

Tabla 60 Resumen de distancias . Fuente: Elaboración propia

Origen /Destino	Iztapalapa	Monterrey	Acapulco	La Paz
Ojo caliente	590 (Km)	501	953	1240
Zumpango	65	875	446	1646
Acatzingo	149	1064	501	1834
Pachuca	106	919	473	1689

Para obtener el costo por tonelada de tansportar las tunas, se tiene que:

$$C = \frac{2600 + 18D}{28}$$

Donde :

2600: Costo fijo por transportar

18: costo adicional por Km recorrido

D: Distancia recorrida

28: Capacidad del camión, para obtener el precio por tonelada, se desea conocer el costo unitario, es decir, el costo por tonelada transportada.

Considerando estas operación, queda la siguiente matriz de costos unitarios:

Tabla 61 Matriz de costos. Fuente: Elaboración propia

Origen /Destino	***Iztapalapa***	***Monterrey***	***Acapulco***	***La Paz***
Ojo caliente	**472.14**	**414.93**	**705.50**	**890.00**
Zumpango	**134.64**	**655.36**	**379.57**	**1151.00**
Acatzingo	**188.64**	**776.86**	**414.93**	**1271.86**
Pachuca	**161.00**	**683.64**	**396.93**	**1178.64**

La oferta de cada punto de origen y la demanda se muestran a continuación:

Tabla 62 Tabla con oferta y demanda. Fuente: Elaboración propia.

Origen /Destino	***Iztapalapa***	***Monterrey***	***Acapulco***	***La Paz***	***OFERTA***
Ojo caliente	**472.14**	**414.93**	**705.50**	**890.00**	**600**
Zumpango	**134.64**	**655.36**	**379.57**	**1151.00**	**700**
Acatzingo	**188.64**	**776.86**	**414.93**	**1271.86**	**800**
Pachuca	**161.00**	**683.64**	**396.93**	**1178.64**	**500**
DEMANDA	**1000**	**700**	**400**	**500**	**2600/2600**

Con esta matriz de costos, es posible resolver el problema por medio del método de esquina noroeste:

1. El problema está balanceado, es decir, la oferta y la demanda son iguales.

2. Se selecciona la el dato que se encuentre en la esquina noroeste. Ahí se asigna el mayor número de unidades posibles, en este caso 500, dado que la oferta de ojo caliente restringe un valor mayor.

Origen /Destino	*Iztapalapa*	*Monterrey*	*Acapulco*	*La Paz*	*OFERTA*
Ojo caliente	600|472.14	|414.93	|705.50	|890.00	600
Zumpango	|134.64	|655.36	|379.57	|1151.00	700
Acatzingo	|188.64	|776.86	|414.93	|1271.86	800
Pachuca	|161.00	|683.64	|396.93	|1178.64	500
DEMANDA	1000	700	400	500	2600/2600

Ahora la cantidad asignada a la esquina noroeste se resta a la demanda total de Iztapalapa y a la oferta de Ojo caliente.

Tabla 63 Método esquina noroeste. Fuente: Elaboración propia.

Origen /Destino	*Iztapalapa*	*Monterrey*	*Acapulco*	*La Paz*	*OFERTA*
Ojo caliente	600|472.14	|414.93	|705.50	|890.00	600-600=0
Zumpango	|134.64	|655.36	|379.57	|1151.00	700
Acatzingo	|188.64	|776.86	|414.93	|1271.86	800
Pachuca	|161.00	|683.64	|396.93	|1178.64	500
DEMANDA	100-600=400	700	400	500	2600/2600

En la siguiente iteración, se cubrirá la demanda de Iztapalapa con la oferta de Zumpango.

Tabla 64 Método esquina noroeste. Fuente: Elaboración propia.

Origen /Destino	*Iztapalapa*	*Monterrey*	*Acapulco*	*La Paz*	*OFERTA*
Ojo caliente	600|472.14	|414.93	|705.50	|890.00	600-600=0
Zumpango	400|134.64	|655.36	|379.57	|1151.00	700
Acatzingo	|188.64	|776.86	|414.93	|1271.86	800
Pachuca	|161.00	|683.64	|396.93	|1178.64	500
DEMANDA	400	700	400	500	2600/2600

Actualizando tanto la oferta y la demanda después de esta asignación, se tiene:

Tabla 65 Método esquina noroeste. Fuente: Elaboración propia.

Origen /Destino	*Iztapalapa*	*Monterrey*	*Acapulco*	*La Paz*	*OFERTA*
Ojo caliente	600|472.14	|414.93	|705.50	|890.00	0
Zumpango	400|134.64	|655.36	|379.57	|1151.00	700-400=300
Acatzingo	|188.64	|776.86	|414.93	|1271.86	800
Pachuca	|161.00	|683.64	|396.93	|1178.64	500
DEMANDA	400-400=0	700	400	500	2600/2600

En este punto, la demanda de Iztapalapa ha sido cubierta por completo. Por esta razón, se pasará a satisfacer la demanda de Monterrey:

Tabla 66 Método esquina noroeste. Fuente: Elaboración propia.

Origen /Destino	*Iztapalapa*	*Monterrey*	*Acapulco*	*La Paz*	*OFERTA*
Ojo caliente	600|472.14	|414.93	|705.50	|890.00	0
Zumpango	400|134.64	300|655.36	|379.57	|1151.00	300
Acatzingo	|188.64	|776.86	|414.93	|1271.86	800
Pachuca	|161.00	|683.64	|396.93	|1178.64	500
DEMANDA	0	700	400	500	2600/2600

Y actualizando la oferta y la demanda, se tiene:

Tabla 67 Método esquina noroeste. Fuente: Elaboración propia.

Origen /Destino	*Iztapalapa*	*Monterrey*	*Acapulco*	*La Paz*	*OFERTA*
Ojo caliente	600|472.14	|414.93	|705.50	|890.00	0
Zumpango	400|134.64	300|655.36	|379.57	|1151.00	300-300=0
Acatzingo	|188.64	|776.86	|414.93	|1271.86	800
Pachuca	|161.00	|683.64	|396.93	|1178.64	500
DEMANDA	0	700-300=400	400	500	2600/2600

En este punto, el origen Zumpango, ya no tiene oferta de tuna. En la siguiente iteración, se intentará cubrir la demanda de Monterrey con la oferta de Acatzingo:

Tabla 68Método esquina noroeste. Fuente: Elaboración propia.

Origen /Destino	*Iztapalapa*	*Monterrey*	*Acapulco*	*La Paz*	*OFERTA*
Ojo caliente	600|472.14	|414.93	|705.50	|890.00	0
Zumpango	400|134.64	300|655.36	|379.57	|1151.00	0
Acatzingo	|188.64	400|776.86	|414.93	|1271.86	800
Pachuca	|161.00	|683.64	|396.93	|1178.64	500
DEMANDA	0	400	400	500	2600/2600

Actualizando la oferta y la demanda:

Tabla 69 Método esquina noroeste. Fuente: Elaboración propia.

Origen /Destino	*Iztapalapa*	*Monterrey*	*Acapulco*	*La Paz*	*OFERTA*
Ojo caliente	600|472.14	|414.93	|705.50	|890.00	0
Zumpango	400|134.64	300|655.36	|379.57	|1151.00	0
Acatzingo	|188.64	400|776.86	|414.93	|1271.86	800-400=400
Pachuca	|161.00	|683.64	|396.93	|1178.64	500
DEMANDA	0	400-400=0	400	500	2600/2600

La demanda de Monterrey ha sido cubierta, continuando:

Tabla 70 Método esquina noroeste. Fuente: Elaboración propia.

Origen /Destino	*Iztapalapa*	*Monterrey*	*Acapulco*	*La Paz*	*OFERTA*
Ojo caliente	600|472.14	|414.93	|705.50	|890.00	0
Zumpango	400|134.64	300|655.36	|379.57	|1151.00	0
Acatzingo	|188.64	400|776.86	400|414.93	|1271.86	400
Pachuca	|161.00	|683.64	|396.93	|1178.64	500
DEMANDA	0	0	400	500	2600/2600

Actualizando la oferta y la demanda:

Tabla 71 Método esquina noroeste. Fuente: Elaboración propia.

Origen /Destino	*Iztapalapa*	*Monterrey*	*Acapulco*	*La Paz*	*OFERTA*
Ojo caliente	600|472.14	|414.93	|705.50	|890.00	0
Zumpango	400|134.64	300|655.36	|379.57	|1151.00	0
Acatzingo	|188.64	400|776.86	400|414.93	|1271.86	400-400=0
Pachuca	|161.00	|683.64	|396.93	|1178.64	500
DEMANDA	0	0	400-400=0	500	2600/2600

La demanda de Acapulco ha sido cubierta, continuando:

Tabla 72 Método esquina noroeste. Fuente: Elaboración propia.

Origen /Destino	*Iztapalapa*	*Monterrey*	*Acapulco*	*La Paz*	*OFERTA*
Ojo caliente	600|472.14	|414.93	|705.50	|890.00	0
Zumpango	400|134.64	300|655.36	|379.57	|1151.00	0
Acatzingo	|188.64	400|776.86	400|414.93	|1271.86	0
Pachuca	|161.00	|683.64	|396.93	500|1178.64	500
DEMANDA	0	0	0	500	2600/2600

Actualizando la oferta y la demanda:

Tabla 73Método esquina noroeste. Fuente: Elaboración propia.

Origen /Destino	*Iztapalapa*	*Monterrey*	*Acapulco*	*La Paz*	*OFERTA*
Ojo caliente	600|472.14	|414.93	|705.50	|890.00	0
Zumpango	400|134.64	300|655.36	|379.57	|1151.00	0
Acatzingo	|188.64	400|776.86	400|414.93	|1271.86	0
Pachuca	|161.00	|683.64	|396.93	500|1178.64	500-500=0
DEMANDA	0	0	0	500-500=0	2600/2600

La demanda de todos los destinos ha sido cubierta, por lo que el algoritmo se detiene y la solución por medio del método de esquina noroeste, es la siguiente:

Tabla 74 Método esquina noroeste. Fuente: Elaboración propia.

Origen /Destino	*Iztapalapa*	*Monterrey*	*Acapulco*	*La Paz*	*OFERTA*
Ojo caliente	600|472.14	|414.93	|705.50	|890.00	0
Zumpango	400|134.64	300|655.36	|379.57	|1151.00	0
Acatzingo	|188.64	400|776.86	400|414.93	|1271.86	0
Pachuca	|161.00	|683.64	|396.93	500|1178.64	0
DEMANDA	0	0	0	0	2600/2600

Para calcular el costo asociado a esta solución es:

C= (600 *472.14)+ (400* 134.64)+(300*655.36)+(400*776.86)+(400*414.93)+(500*1178.64)= 1599784 pesos

C=1599784 pesos

Método de Vogel

El Método de Vogel es un método de aproximación capaz de alcanzar una solución básica factible que requiere, por lo general, de la realización de un mayor número de iteraciones que el Método de Esquina Noroeste, sin embargo , al considerar los costos., generalmente produce mejores resultados iniciales.

El método consta de tres pasos esenciales y uno paso extra con el cual se asegura el término del algoritmo. Los pasos de este método son los siguientes:

1. Determinar para cada fila y para cada columna una medida de penalización, la cual se logra restando los dos costos más bajos en las filas y en las columnas.
2. Seleccionar la fila o la columna con la mayor penalización. En caso de existir más de una celda con el mismo valor de penalización y que además sea el mayor, se debe elegir arbitrariamente.
3. De la fila o columna con el mayor valor de penalización, se debe elegir la celda con menor costo, en esta se debe asignar la mayor cantidad posible de unidades. Después de este paso, una oferta o demanda quedará satisfecha, por lo que se eliminará una fila o una columna, según sea el caso.
4. El algoritmo se detiene cuando una fila o una columna queda con cero ofertas o demanda. En caso contrario, se debe regresar al paso 1 hasta que todas las ofertas y las demandas se hayan satisfecho.

Ejemplo resuelto con método de Vogel

Considerando el ejemplo anterior, se tiene la siguiente matriz de costos:

Tabla 75 Matriz de costos. Fuente: Elaboración propia.

Origen /Destino	*Iztapalapa*	*Monterrey*	*Acapulco*	*La Paz*	*OFERTA*
Ojo caliente	472.14	414.93	705.50	890.00	600
Zumpango	134.64	655.36	379.57	1151.00	700
Acatzingo	188.64	776.86	414.93	1271.86	800
Pachuca	161.00	683.64	396.93	1178.64	500
DEMANDA	1000	700	400	500	2600/2600

El primer paso es determinar las medidas de penalización y consignarlas en el tabulado de costos, tal como se muestra a continuación:

-Se restan los dos menores valores de la columna :

Tabla 76 Método de Vogel . Fuente: Elaboración propia.

Origen /Destino	*Iztapalapa*	*Monterrey*	*Acapulco*	*La Paz*
Ojo caliente	472.14	414.93	705.50	890.00
Zumpango	134.64	655.36	379.57	1151.00
Acatzingo	188.64	776.86	414.93	1271.86
Pachuca	161.00	683.64	396.93	1178.64

Calculando los valores de penalización para las columnas:

Tabla 77Método de Vogel . Fuente: Elaboración propia

Origen /Destino	Iztapalapa	Monterrey	Acapulco	La Paz
Ojo caliente	472.14	414.93	705.50	890.00
Zumpango	134.64	655.36	379.57	1151.00
Acatzingo	188.64	776.86	414.93	1271.86
Pachuca	161.00	683.64	396.93	1178.64
Penalización	161- 134.64	655.36- 414.93	396.93- 379.57	1178.64 -890

Tabla 78 Método de Vogel . Fuente: Elaboración propia

Origen /Destino	Iztapalapa	Monterrey	Acapulco	La Paz
Ojo caliente	472.14	414.93	705.5	890
Zumpango	134.64	655.36	379.57	1151
Acatzingo	188.64	776.86	414.93	1271.86
Pachuca	161	683.64	396.93	1178.64
Penalización	26.36	240.43	17.36	288.64

Calculando la penalización de los renglones:

Tabla 79 Método de Vogel . Fuente: Elaboración propia

Origen /Destino	*Iztapalapa*	*Monterrey*	*Acapulco*	*La Paz*	*Penalización*
Ojo caliente	472.14	414.93	705.50	890.00	=472.14-414.93
Zumpango	134.64	655.36	379.57	1151.00	=379.57-134.64
Acatzingo	188.64	776.86	414.93	1271.86	=414.93-188.64
Pachuca	161.00	683.64	396.93	1178.64	=396.93-161

Tabla 80 Método de Vogel . Fuente: Elaboración propia

Origen /Destino	*Iztapalapa*	*Monterrey*	*Acapulco*	*La Paz*	*Penalización*
Ojo caliente	472.14	414.93	705.5	890	57.21
Zumpango	134.64	655.36	379.57	1151	244.93
Acatzingo	188.64	776.86	414.93	1271.86	226.29
Pachuca	161	683.64	396.93	1178.64	235.93

Los valores de penalización quedan:

Tabla 81Método de Vogel . Fuente: Elaboración propia

Origen /Destino	*Iztapalapa*	*Monterrey*	*Acapulco*	*La Paz*	*Penalización*
Ojo caliente	472.14	414.93	705.5	890	57.21
Zumpango	134.64	655.36	379.57	1151	244.93
Acatzingo	188.64	776.86	414.93	1271.86	226.29
Pachuca	161	683.64	396.93	1178.64	235.93
Penalización	26.36	240.43	17.36	288.64	

El mayor valor de penalización es: 288.64

Se selecciona esa el menor valor del costo, en el renglón seleccionado, esto es : 890, como se muestra a continuación:

Tabla 82 Método de Vogel . Fuente: Elaboración propia

Origen /Destino	*Iztapalapa*	*Monterrey*	*Acapulco*	*La Paz*	*Penalización*
Ojo caliente	472.14	414.93	705.5	890	57.21
Zumpango	134.64	655.36	379.57	1151	244.93
Acatzingo	188.64	776.86	414.93	1271.86	226.29
Pachuca	161	683.64	396.93	1178.64	235.93
Penalización	26.36	240.43	17.36	288.64	

En una tabla paralela a la anterior, se hará la asignación de toneladas de tunas, de origen a destino, en esta iteración , se asignará la mayor cantidad de toneladas de tunas a la casilla correspondiente a transportar tunas de Ojo caliente a La Paz:

Tabla 83 Método de Vogel . Fuente: Elaboración propia

Origen /Destino	*Iztapalapa*	*Monterrey*	*Acapulco*	*La Paz*	*OFERTA*
Ojo caliente				500	600
Zumpango					700
Acatzingo					800
Pachuca					500
DEMANDA	1000	700	400	500	2600/2600

En la misma tabla, se actualiza tanto la oferta como la demanda del Ojo caliente y La Paz.

Tabla 84 Método de Vogel . Fuente: Elaboración propia

Origen /Destino	*Iztapalapa*	*Monterrey*	*Acapulco*	*La Paz*	*OFERTA*
Ojo caliente				500	600-500=100
Zumpango					700
Acatzingo					800
Pachuca					500
DEMANDA	1000	700	400	500-500=0	2600/2600

La demanda de La Paz, ha sido cubierta, por lo que esta columna no se considerará para las siguientes iteraciones.

Tabla 85 Método de Vogel . Fuente: Elaboración propia

Origen /Destino	*Iztapalapa*	*Monterrey*	*Acapulco*	*La Paz*	*OFERTA*
Ojo caliente				500	600
Zumpango					700
Acatzingo					800
Pachuca					500
DEMANDA	1000	700	400	500	2600/2600

Aquí termina la primera iteración, comenzando con la siguiente iteración, se calculan los valores de penalización, tanto de las columnas como de los renglones:

- Valores de penalización de las columnas:

Tabla 86 Método de Vogel . Fuente: Elaboración propia

Origen /Destino	*Iztapalapa*	*Monterrey*	*Acapulco*	*La Paz*
Ojo caliente	472.14	414.93	705.50	890.00
Zumpango	134.64	655.36	379.57	1151.00
Acatzingo	188.64	776.86	414.93	1271.86
Pachuca	161.00	683.64	396.93	1178.64

Tabla 87 Método de Vogel . Fuente: Elaboración propia

Origen /Destino	*Iztapalapa*	*Monterrey*	*Acapulco*	*La Paz*
Ojo caliente	472.14	414.93	705.50	
Zumpango	134.64	655.36	379.57	
Acatzingo	188.64	776.86	414.93	
Pachuca	161.00	683.64	396.93	
Penalización	=161-134.64	=655.36-414.93	=396.93-379.57	

Tabla 88 Método de Vogel . Fuente: Elaboración propia

Origen /Destino	*Iztapalapa*	*Monterrey*	*Acapulco*	*La Paz*
Ojo caliente	472.14	414.93	705.5	
Zumpango	134.64	655.36	379.57	
Acatzingo	188.64	776.86	414.93	
Pachuca	161	683.64	396.93	
Penalización	26.36	240.43	17.36	

-Valor de penalización de los renglones:

Tabla 89 Método de Vogel . Fuente: Elaboración propia

Origen /Destino	*Iztapalapa*	*Monterrey*	*Acapulco*	*La Paz*	*Penalización*
Ojo caliente	472.14	414.93	705.50		=472.14-414.93
Zumpango	134.64	655.36	379.57		=379.57-134.64
Acatzingo	188.64	776.86	414.93		=414.93-188.64
Pachuca	161.00	683.64	396.93		=396.93-161.00

Tabla 90 Método de Vogel . Fuente: Elaboración propia

Origen /Destino	*Iztapalapa*	*Monterrey*	*Acapulco*	*La Paz*	*Penalización*
Ojo caliente	472.14	414.93	705.5		57.21
Zumpango	134.64	655.36	379.57		244.93
Acatzingo	188.64	776.86	414.93		226.29
Pachuca	161	683.64	396.93		235.93

Tabla de valores de penalización completa es :

Tabla 91 Método de Vogel . Fuente: Elaboración propia

Origen /Destino	*Iztapalapa*	*Monterrey*	*Acapulco*	*La Paz*	*Penalización*
Ojo caliente	472.14	414.93	705.5		57.21
Zumpango	134.64	655.36	379.57		244.93
Acatzingo	188.64	776.86	414.93		226.29
Pachuca	161	683.64	396.93		235.93
Penalización	26.36	240.43	17.36		

La mayor penalización es: 244.93 y el menor costo de ese renglón es: 134.64

Tabla 92 Método de Vogel . Fuente: Elaboración propia

Origen /Destino	*Iztapalapa*	*Monterrey*	*Acapulco*	*La Paz*	*Penalización*
Ojo caliente	472.14	414.93	705.5		57.21
Zumpango	134.64	655.36	379.57		244.93
Acatzingo	188.64	776.86	414.93		226.29
Pachuca	161	683.64	396.93		235.93
Penalización	26.36	240.43	17.36		

Asignando:

Tabla 93 Método de Vogel . Fuente: Elaboración propia

Origen /Destino	*Iztapalapa*	*Monterrey*	*Acapulco*	*La Paz*	*OFERTA*
Ojo caliente				500	100
Zumpango	700				700
Acatzingo					800
Pachuca					500
DEMANDA	1000	700	400	0	2600/2600

Actualizando la oferta y la demanda:

Tabla 94 Método de Vogel . Fuente: Elaboración propia

Origen /Destino	*Iztapalapa*	*Monterrey*	*Acapulco*	*La Paz*	*OFERTA*
Ojo caliente				500	100
Zumpango	700				700-700=0
Acatzingo					800
Pachuca					500
DEMANDA	1000-700=300	700	400	0	2600/2600

En este punto, la oferta de Zumpango es igual a cero, por lo que este renglón no se volverá a considerar para las siguientes iteraciones:

En la siguiente iteración, se calculan los valores de penalización nuevamente:

Tabla 95 Método de Vogel . Fuente: Elaboración propia

Origen /Destino	*Iztapalapa*	*Monterrey*	*Acapulco*	*La Paz*
Ojo caliente	472.14	414.93	705.50	
Zumpango				
Acatzingo	188.64	776.86	414.93	
Pachuca	161.00	683.64	396.93	
Penalización	=188.64-161	=683.64-414.93	=414.93-396.93	

Tabla 96 Método de Vogel . Fuente: Elaboración propia

Origen /Destino	*Iztapalapa*	*Monterrey*	*Acapulco*	*La Paz*	*Penalización*
Ojo caliente	472.14	414.93	705.50		=472.14-414.93
Zumpango					
Acatzingo	188.64	776.86	414.93		=414.93-188.64
Pachuca	161.00	683.64	396.93		=396.93-161.00

La penalización más alta es: 268.71

Tabla 97 Método de Vogel . Fuente: Elaboración propia

Origen /Destino	Iztapalapa	Monterrey	Acapulco	La Paz	Penalización
Ojo caliente	472.14	414.93	705.5		57.21
Zumpango					
Acatzingo	188.64	776.86	414.93		226.29
Pachuca	161	683.64	396.93		235.93
Penalización	27.64	268.71	18		

Y el menor costo de esta columna es: 414.93

Tabla 98 Método de Vogel . Fuente: Elaboración propia

Origen /Destino	Iztapalapa	Monterrey	Acapulco	La Paz	Penalización
Ojo caliente	472.14	414.93	705.5		57.21
Zumpango					
Acatzingo	188.64	776.86	414.93		226.29
Pachuca	161	683.64	396.93		235.93
Penalización	27.64	268.71	18		

En la tabla de asignación, se tendrá:

Tabla 99Método de Vogel . Fuente: Elaboración propia

Origen /Destino	*Iztapalapa*	*Monterrey*	*Acapulco*	*La Paz*	*OFERTA*
Ojo caliente		100		500	100-100=0
Zumpango	700				700-700=0
Acatzingo					800
Pachuca					500
DEMANDA	1000-700=300	700-100=600	400	0	2600/2600

Actualizando la oferta y la demanda, se tiene que, el origen Ojo caliente, tiene ahora una oferta de cero.

Se inicia una nueva iteración:

Tabla 100 Método de Vogel . Fuente: Elaboración propia

Origen /Destino	*Iztapalapa*	*Monterrey*	*Acapulco*	*La Paz*
Ojo caliente				
Zumpango				
Acatzingo	188.64	776.86	414.93	
Pachuca	161	683.64	396.93	
Penalización	27.64	93.22	18	

Tabla 101 Método de Vogel . Fuente: Elaboración propia

Origen /Destino	*Iztapalapa*	*Monterrey*	*Acapulco*	*La Paz*	*Penalización*
Ojo caliente					
Zumpango					
Acatzingo	188.64	776.86	414.93		=414.93-188.64
Pachuca	161	683.64	396.93		=396.93-161
Penalización	27.64	93.22	18		

Los valores de penalización quedan de la siguiente manera:

Tabla 102 Método de Vogel . Fuente: Elaboración propia

Origen /Destino	*Iztapalapa*	*Monterrey*	*Acapulco*	*La Paz*	*Penalización*
Ojo caliente					
Zumpango					
Acatzingo	188.64	776.86	414.93		226.29
Pachuca	161	683.64	396.93		235.93
Penalización	27.64	93.22	18		

Donde el valor más alto de penalización es: 235.93 y el costo más bajo en ese renglón es de: 161

Asignando:

Tabla 103 Método de Vogel . Fuente: Elaboración propia

Origen /Destino	*Iztapalapa*	*Monterrey*	*Acapulco*	*La Paz*	*OFERTA*
Ojo caliente		100		500	100-100=0
Zumpango	700				700-700=0
Acatzingo					800
Pachuca	300				500-300=200
DEMANDA	300-300=0	700-100=600	400	0	2600/2600

Para la siguiente iteración, se tiene:

Tabla 104 Método de Vogel . Fuente: Elaboración propia

Origen /Destino	*Iztapalapa*	*Monterrey*	*Acapulco*	*La Paz*	*Penalización*
Ojo caliente					
Zumpango					
Acatzingo		776.86	414.93		=776.86-414.93
Pachuca		683.64	396.93		=683.64-396.93
Penalización		=776.86-683.64	=414.93-396.93		

Tabla 105 Método de Vogel . Fuente: Elaboración propia

Origen /Destino	*Iztapalapa*	*Monterrey*	*Acapulco*	*La Paz*	*Penalización*
Ojo caliente					
Zumpango					
Acatzingo		776.86	414.93		361.93
Pachuca		683.64	396.93		286.71
Penalización		93.22	18		

El mayor valor de penalización en este caso es: 361.93, y el menor costo de ese renglón es: 414.93

Asignando se tiene:

Tabla 106 Método de Vogel . Fuente: Elaboración propia

Origen /Destino	*Iztapalapa*	*Monterrey*	*Acapulco*	*La Paz*	*OFERTA*
Ojo caliente		100		500	0
Zumpango	700				0
Acatzingo			400		800-400=400
Pachuca	300				200
DEMANDA	0	600	400-400=0	0	2600/2600

La única demanda que no ha sido satisfecha es la de Monterrey, por lo que, se abastecerá con las ofertas de Acatzingo y Pachuca.

La tabla final queda como sigue:

Tabla 107 Método de Vogel . Fuente: Elaboración propia

Origen /Destino	*Iztapalapa*	*Monterrey*	*Acapulco*	*La Paz*	*OFERTA*
Ojo caliente		100		500	0
Zumpango	700				0
Acatzingo		400	400		0
Pachuca	300	200			0
DEMANDA	100	700	400	500	2600/2600

Y el costo asociado a esta solución es:

C= (700*134.64)+(300*161)+(100*414.93)+(400*776.86)+(200*683.64)+(400*414.93)+(500*890)

C=1, 242485 Pesos.

Método de Russell

Para encontrar una solución factible básica por medio del método de Russell, se siguen los siguientes pasos:

1. Para cada fila de la matriz de costos se determina un valor de penalización llamado Ai, considerando a i= 1, 2,…,m. Donde Ai representa el valor máximo que toma los costos en la fila.
2. Para cada una de las columnas de la matriz, se determina un valor Bj, considerando a j=1, 2,…,n. Donde Bj representa costo máximo de cada columna.
3. Para cada celda de la matriz de costos, se calcula el siguiente índice:

$$IC_{ij} = A_i + B_j - C_{ij}$$

Este índice permite reconocer el grado en que es conveniente hacer una asignación en cada celda de la matriz de costos.

4. El siguiente paso es seleccionar la celda con el mayor valor de C_{ij} . A la celda seleccionada, se le asigna el mayor valor de oferta o demanda disponible, con lo que un destino u origen será satisfecho.

Después de realizar esta asignación, puede calcularse la demanda insatisfecha o la oferta que queda en el origen (cuando la demanda es menor que la oferta).

5. Si ya se tienen asignadas m+n-1 celdas, se para el procedimiento, ya que se ha encontrado una solución básica factible. En caso contrario, es decir, cuando aún no se han asignado m+m-1 celdas, se repite el paso 1, sin considerar las filas o columnas que ya han satisfecho la demanda o la oferta.

Ejemplo resuelto con método de Russell

Considerando el mismo ejemplo, se tiene la siguiente matriz de costos:

Tabla 108 Matriz de costos. Fuente: Elaboración propia.

Origen /Destino	*Iztapalapa*	*Monterrey*	*Acapulco*	*La Paz*	*OFERTA*
Ojo caliente	472.14	414.93	705.50	890.00	600
Zumpango	134.64	655.36	379.57	1151.00	700
Acatzingo	188.64	776.86	414.93	1271.86	800
Pachuca	161.00	683.64	396.93	1178.64	500
DEMANDA	1000	700	400	500	2600/2600

Cálculo de los valores A_I para los renglones:

Tabla 109 Cálculo de valores de Ai para los renglones. Fuente: Elaboración propia.

Renglón	Cálculo de A_i =Máx C_i	A_i
Ojo caliente	A_1 = Máx (472.14,414.93,705.50,890)	A_1 =890
Zumpango	A_2 = Máx (134.64,655.36,379.57,1151)	A_2=1151
Acatzingo	A_3 = Máx (188.64,776.86,414.93,1271.86)	A_3=1271.86
Pachuca	A_4 = Máx (161,683.64,396.93,1178.64)	A_4=1178.64

Cálculo de los valores B_j para las columnas:

Tabla 110 Cálculo de valores de BJ para las columnas. Fuente: Elaboración propia.

Columna	Cálculo de B_J =Máx C_i	B_J
Iztapalapa	B_1 = Máx (472.14,134.64,188.64,161)	B_1 =472.14
Monterrey	B_2 = Máx (414.93,655.36,776.86,683.64)	B_2=776.86
Acapulco	B_3 = Máx (705.5,379.57,414.93,396.93)	B_3=705.5
La paz	B_4 = Máx (890,1151,1271.86,1178.64)	B_4=1271.86

Se proseguirá a realizar el cálculo de los indicadores de bondad IC_{ij} para las celdas, esto es:

Tabla 111 Indicadores de bondad. Fuente: Elaboración propia.

Celda	$IC_{ij}=A_i+B_j-C_{ij}$	
(1,1)	890	
(1,2)	1251.93	
(1,3)	890	
(1,4)	1271.86	
(2,1)	1488.5	
(2,2)	1272.5	
(2,3)	1476.93	
(2,4)	1271.86	
(3,1)	1555.36	
(3,2)	1271.86	
(3,3)	1562.43	
(3,4)	1271.86	
(4,1)	1489.78	
(4,2)	1271.86	
(4,3)	1487.21	
(4,4)		1271.86

Se selecciona la celda con el mayor valor de IC_{IJ}, que es igual a: 1562.43, que corresponde a la celda (3,3). En esta celda se realizará la asignación.

La máxima cantidad de toneladas de tunas que se pueden transportar de Acatzingo a Acapulco es la siguiente:

$$X_{33} = Mín(\ 800{,}400) = 400$$

Se ve que la demanda de Acapulco es menor que la Oferta de Acatzingo, por lo que, se debe actualizar tanto la oferta como la demanda:

Tabla 112 Método de Russell. Fuente: Elaboración propia.

Origen /Destino	*Iztapalapa*	*Monterrey*	*Acapulco*	*La Paz*	*OFERTA*
Ojo caliente					600
Zumpango					700
Acatzingo			400		800-400=400
Pachuca					500
DEMANDA	1000	700	400-400=0	500	2600/2600

La demanda de Acapulco ha sido satisfecha, por lo que no se considerará esta columna para las siguientes iteraciones.

Se seguirá iterando hasta que el número de casillas asignadas sea igual a: $m + n - 1 = 4 + 4 - 1 = 7$

Se volverá a calcular los valores de A_i y de B_j :

Tabla 113 Método de Russell. Fuente: Elaboración propia.

Origen /Destino	*Iztapalapa*	*Monterrey*	*Acapulco*	*La Paz*	*OFERTA*
Ojo caliente	472.14	414.93		890.00	600
Zumpango	134.64	655.36		1151.00	700
Acatzingo	188.64	776.86		1271.86	800
Pachuca	161.00	683.64		1178.64	500
DEMANDA	1000	700		500	2600/2600

Tabla 114 Método de Russell. Fuente: Elaboración propia.

Renglón	Cálculo de A_i =Máx C_i	A_i
Ojo caliente	A_1 = Máx (472.14,414.93,890)	A_1 =890
Zumpango	A_2 = Máx (134.64,655.36, 1151)	A_2=1151
Acatzingo	A_3 = Máx (188.64,776.86,1271.86)	A_3=1271.86
Pachuca	A_4 = Máx (161,683.64,1178.64)	A_4=1178.64

Tabla 115 Método de Russell. Fuente: Elaboración propia.

Columna	Cálculo de B_J =Máx C_i	B_J
Iztapalapa	B_1 = Máx (472.14,134.64,188.64,161)	B_1 =472.14
Monterrey	B_2 = Máx (414.93,655.36,776.86,683.64)	B_2=776.86
La paz	B_4 = Máx (890,1151,1271.86,1178.64)	B_4=1271.86

Tabla 116 Método de Russell. Fuente: Elaboración propia.

Celda	$IC_{ij}=A_i+B_j-C_{ij}$
(1,1)	890
(1,2)	1251.93
(1,3)	
(1,4)	1271.86
(2,1)	1488.5
(2,2)	1272.5
(2,3)	
(2,4)	1271.86
(3,1)	1555.36

(3,2)	1271.86
(3,3)	
(3,4)	1271.86
(4,1)	1489.78
(4,2)	1271.86
(4,3)	
(4,4)	1271.86

El mayor valor IC_{ij}= 1555.36, correspondiente a la casilla (3,1). Se realizará la asignación en esta casilla:

Tabla 117 Método de Russell. Fuente: Elaboración propia.

Origen /Destino	*Iztapalapa*	*Monterrey*	*Acapulco*	*La Paz*	*OFERTA*
Ojo caliente					600
Zumpango					700
Acatzingo	400		400		400-400=0
Pachuca					500
DEMANDA	1000-400=600	700	0	500	2600/2600

La oferta de Acatzingo ahora es igual a cero, por lo que este renglón no se considerará en las siguientes iteraciones.

Tabla 118 Método de Russell. Fuente: Elaboración propia.

Origen /Destino	*Iztapalapa*	*Monterrey*	*Acapulco*	*La Paz*	*OFERTA*
Ojo caliente	472.14	414.93		890.00	600
Zumpango	134.64	655.36		1151.00	700
Acatzingo					
Pachuca	161.00	683.64		1178.64	500
DEMANDA	600	700		500	2600/2600

Comenzando la siguiente iteración:

Tabla 119 Método de Russell. Fuente: Elaboración propia.

Renglón	Cálculo de A_i =Máx C_i	A_i
Ojo caliente	A_1 = Máx (472.14,414.93,890)	A_1 =890
Zumpango	A_2 = Máx (134.64,655.36, 1151)	A_2=1151
Pachuca	A_4 = Máx (161,683.64,1178.64)	A_4=1178.64

Tabla 120 Método de Russell. Fuente: Elaboración propia.

Columna	Cálculo de B_J =Máx C_i	B_J
Iztapalapa	B_1 = Máx (472.14,134.64,161)	B_1 =472.14
Monterrey	B_2 = Máx (414.93,655.36,683.64)	B_2=683.64
La paz	B_4 = Máx (890,1151,1178.64)	B_4=1176.64

Los valores de IC_{ij} son:

Tabla 121 Método de Russell. Fuente: Elaboración propia.

Celda	$IC_{ij}=A_i+B_j-C_{ij}$	*Icij*

(1,1)	890	890
(1,2)	1158.71	1158.71
(1,3)		0
(1,4)	1176.64	1176.64
(2,1)	1488.5	1488.5
(2,2)	1179.28	1179.28
(2,3)		0
(2,4)	1176.64	1176.64
(3,1)		0
(3,2)		0
(3,3)		0
(3,4)		0
(4,1)	1489.78	1489.78
(4,2)	1178.64	1178.64
(4,3)		0
(4,4)	1176.64	1176.64

El valor más alto de IC_{ij} = 1489.78 , que corresponde a la celda (4,1)

Asignando y actualizando la oferta y la demanda, se tiene:

Tabla 122 Método de Russell. Fuente: Elaboración propia.

Origen /Destino	*Iztapalapa*	*Monterrey*	*Acapulco*	*La Paz*	*OFERTA*
Ojo caliente					600
Zumpango					700
Acatzingo	400		400		0
Pachuca	500				500-500=0
DEMANDA	600-500=100	700	0	500	2600/2600

Solo se han asignado tres casillas, por lo que, se continúa con la siguiente iteración:

Tabla 123 Método de Russell. Fuente: Elaboración propia.

Origen /Destino	*Iztapalapa*	*Monterrey*	*Acapulco*	*La Paz*	*OFERTA*
Ojo caliente	472.14	414.93		890.00	600
Zumpango	134.64	655.36		1151.00	700
Acatzingo					
Pachuca					
DEMANDA	600	700		500	2600/2600

Tabla 124 Método de Russell. Fuente: Elaboración propia.

Renglón	Cálculo de A_i =Máx C_i	A_i
Ojo caliente	A_1 = Máx (472.14,414.93,890)	A_1 =890
Zumpango	A_2 = Máx (134.64,655.36, 1151)	A_2=1151

Tabla 125 Método de Russell. Fuente: Elaboración propia.

Columna	Cálculo de B_J =Máx C_i	B_J
Iztapalapa	B_1 = Máx (472.14,134.64)	B_1 =472.14
Monterrey	B_2 = Máx (414.93,655.36)	B_2=655.36
La paz	B_4 = Máx (890,1151)	B_4=1151

Tabla 126 Método de Russell. Fuente: Elaboración propia.

Celda	$IC_{ij}=A_i+B_j-C_{ij}$
(1,1)	890
(1,2)	1130.43
(1,3)	
(1,4)	1151
(2,1)	1488.5
(2,2)	1151
(2,3)	
(2,4)	1151
(3,1)	
(3,2)	
(3,3)	
(3,4)	

(4,1)	
(4,2)	
(4,3)	
(4,4)	

El valor más alto de IC_{ij} es : 1488.5, correspondiente a la casilla (2,1) , esto es, de Zumpango a Iztapalapa. Asignando y actualizando la oferta y la demanda, queda:

Tabla 127 Método de Russell. Fuente: Elaboración propia.

Origen /Destino	*Iztapalapa*	*Monterrey*	*Acapulco*	*La Paz*	*OFERTA*
Ojo caliente					600
Zumpango	100				700-100=600
Acatzingo	400		400		0
Pachuca	500				0
DEMANDA	100-100=0	700	0	500	2600/2600

La demanda de Iztapalapa ha sido cubierta totalmente, por lo que esa columna no se volverá a considerar en las siguientes iteraciones.

Tabla 128 Método de Russell. Fuente: Elaboración propia.

Origen /Destino	*Iztapalapa*	*Monterrey*	*Acapulco*	*La Paz*	*OFERTA*
Ojo caliente		414.93		890.00	600
Zumpango		655.36		1151.00	600

Acatzingo					
Pachuca					
DEMANDA		700		500	2600/2600

Tabla 129 Método de Russell. Fuente: Elaboración propia.

Renglón	Cálculo de A_i =Máx C_i	A_i
Ojo caliente	A_1 = Máx (414.93,890)	A_1 =890
Zumpango	A_2 = Máx (655.36, 1151)	A_2=1151

Tabla 130 Método de Russell. Fuente: Elaboración propia.

Columna	Cálculo de B_J =Máx C_i	B_J
Monterrey	B_2 = Máx (414.93,655.36)	B_2=655.36
La paz	B_4 = Máx (890,1151)	B_4=1151

Tabla 131 Método de Russell. Fuente: Elaboración propia.

Celda	$IC_{ij}=A_i+B_j-C_{ij}$	*Icij*
(1,1)		
(1,2)	1130.43	1130.43
(1,3)		
(1,4)	1151	1151
(2,1)		
(2,2)	1151	1151
(2,3)		
(2,4)	1151	1151
(3,1)		

(3,2)		
(3,3)		
(3,4)		
(4,1)		
(4,2)		
(4,3)		
(4,4)		

El valor más alto de IC_{ij} es igual a 1151, y existe un triple empate entre las casillas (1,4), (2,2), (2,4). Por lo que, es posible asignar a cualquiera de esas tres casillas.

Tabla 132 Método de Russell. Fuente: Elaboración propia.

Origen /Destino	*Iztapalapa*	*Monterrey*	*Acapulco*	*La Paz*	*OFERTA*
Ojo caliente				500	600-500=100
Zumpango	100				600
Acatzingo	400		400		0
Pachuca	500				0
DEMANDA	0	700	0	500-500=0	2600/2600

La demanda de La Paz ha sido satisfecha con tunas del origen Ojo caliente.

Para la siguiente iteración solo se cuenta con dos casillas disponibles para asignar.

Tabla 133 Método de Russell. Fuente: Elaboración propia.

Origen /Destino	*Iztapalapa*	*Monterrey*	*Acapulco*	*La Paz*	*OFERTA*
Ojo caliente		414.93			100
Zumpango		655.36			600
Acatzingo					
Pachuca					
DEMANDA		700		0	2600/2600

Tabla 134Método de Russell. Fuente: Elaboración propia.

Renglón	Cálculo de A_i =Máx C_i	A_i
Ojo caliente	A_1 = Máx (414.93)	A_1 =414.93
Zumpango	A_2 = Máx (655.36)	A_2=655.36

Tabla 135Método de Russell. Fuente: Elaboración propia.

Columna	Cálculo de B_J =Máx C_i	B_J
Monterrey	B_2 = Máx (414.93,655.36)	B_2=655.36

Tabla 136 Método de Russell. Fuente: Elaboración propia.

Celda	$IC_{ij}=A_i+B_j-C_{ij}$	*Icij*
(1,1)		
(1,2)	655.36	655.36
(1,3)		
(1,4)		
(2,1)		
(2,2)	655.36	655.36

(2,3)		
(2,4)		
(3,1)		
(3,2)		
(3,3)		
(3,4)		
(4,1)		
(4,2)		
(4,3)		
(4,4)		

Al calcular IC_{ij}, se vuelve a encontrar un empate los valores, pues ya no existen más opciones, que asignar 100 toneladas de tunas del origen Ojo caliente a Monterrey y 600 toneladas de tuna de Zumpango a Monterrey.

Tabla 137 Método de Russell. Fuente: Elaboración propia.

Origen /Destino	*Iztapalapa*	*Monterrey*	*Acapulco*	*La Paz*	*OFERTA*
Ojo caliente		100		500	100-100=0
Zumpango	100	600			600-600=0
Acatzingo	400		400		0
Pachuca	500				0
DEMANDA	0	700-100-600=0	0	500-500=0	2600/2600

La asignación final queda:

Tabla 138 Solución con método de Russell. Fuente: Elaboración propia.

Origen /Destino	*Iztapalapa*	*Monterrey*	*Acapulco*	*La Paz*
Ojo caliente		100		500
Zumpango	100	600		
Acatzingo	400		400	
Pachuca	500			

Con un costo asociado de :

C=(100*134.64)+(400*188.64)+(500*161)+(100*414.93)+(600*655.36)+(400*414.93)+(500*890)

C=1,215101

Al resolver este ejemplo con los tres métodos, se puede observar que el costo más bajo se obtuvo con el método de Russell. A través de estos métodos, se puede encontrar soluciones factibles, no necesariamente la solución óptima. Para encontrar la solución óptima, se puede utilizar el método Simplex transporte, para el cual, es necesario contar con una solución factible básica inicial, la cual se puede obtener por cualquiera de los tres métodos anteriores: esquina noroeste, Vogel o Russell.

Prueba de optimalidad

Para que una solución básica factible sea óptima se debe cumplir que:

$$c_{ij} - \bar{u}_i - \bar{v}_j \geq 0$$

para toda i, j tal que xij es no básica. De esta forma, lo único que se requiere para saber si una solución actual es óptima, es obtener los valores ui y vj y el cálculo de los valores $c_{ij} - u_i - v_j$.

En principio, es necesario establecer un valor cera a un ui o $vj,$ que posea la mayor cantidad de variables básicas. Si $c_{ij} - u_i - v_j \geq 0$ para toda i, j , de tal forma que x_{ij} es no básica ; entonces la solución actual es óptima, por lo que el proceso se detiene. En caso de que$c_{ij} - u_i - v_j \leq 0$, la solución actual no es óptima.

Método Simplex Transporte (para obtener soluciones óptimas al problema de transporte)

El Modelo de transporte se puede resolver utilizando el método Simplex común, sin embargo, dada la estructura especial del modelo, se puede presentar el algoritmo de la forma que a continuación se presentará.

1. Si el problema está desequilibrado, se debe proceder a equilibrarlo.
2. El siguiente paso consiste en utilizar alguno de los métodos heurísticos para encontrar una solución básica factible.
3. Considerando que $u_1 = 0 \; y \; u_i + v_j = c_{ij}$ e para todas las variables básicas, para determinar [$u_1, u_2, \ldots u_m \quad v_1, v_2, \ldots, v_n$] para la solución básica obtenida a través de el método heurístico seleccionado en el paso anterior.
4. Si $u_i + v_j - c_{ij} \geq 0$ para las variables no básicas, la solución básica factible actual es óptima. En caso contrario, se debe introducir a la base la variable con el valor negativo más grande de $u_i + v_j - c_{ij}$ a través de los pasos descritos con anterioridad.

Ejemplo resuelto con método Simplex Transporte

La atoleria "Maqui" tiene cuatro puntos de producción de sus productos. Cada mañana y por la tarde, debe repartir sus productos a sus clientes. Sus clientes se encuentran en la Ciudad de México en cuatro puntos: Tlalpan, Coyoacán, Lindavista y Vallejo. Los puntos de producción se encuentran en : Iztacalco, Iztapalapa, Tlalpan y Tlatelolco.

Los costos asociados de transporte se encuentran en la siguiente matriz de costos. La administradora de la atoleria, quiere reducir los costos de transporte, de tal forma que estos sean mínimos.

En la matriz se muestra el costo de transportar un pedido de atole de 10 litros (única presentación que maneja la empresa). La demanda y la capacidad de producción también se muestran en la matriz siguiente.

Tabla 139 Matriz de costos. Fuente: Elaboración propia

Origen /Destino	***Tlalpan***	***Coyoacán***	***Lindavista***	***Vallejo***	***OFERTA***
Iztacalco	**|5**	**|5**	**|5**	**|6**	**6**
Iztapalapa	**|4**	**|3**	**|5**	**|7**	**7**
Tlalpan	**|2**	**|4**	**|8**	**|9**	**8**
Tlatelolco	**|8**	**|7**	**|5**	**|6**	**5**
DEMANDA	**10**	**7**	**4**	**5**	**26/26**

Este ejemplo está balanceado, por lo que se puede comenzar a aplicar el método simplex transporte.

1. Obtener una solución factible por medio de alguno de los métodos heurístico.

Para calcular el costo asociado a esta solución es:

Tabla 140 Método simplex transporte. Fuente: Elaboración propia.

Origen /Destino	***Tlalpan***	***Coyoacán***	***Lindavista***	***Vallejo***	***OFERTA***
Iztacalco	**6|5**	**|5**	**|5**	**|6**	**6**
Iztapalapa	**4|4**	**3|3**	**|5**	**|7**	**7**
Tlalpan	**|2**	**4|4**	**4|8**	**|9**	**8**
Tlatelolco	**|8**	**|7**	**|5**	**5|6**	**5**
DEMANDA	**10**	**7**	**4**	**5**	**26/26**

C= (6 *5)+ (4* 4)+(3*3)+(4*4)+(4*8)+(5*6)= 133pesos

C= 133pesos

Esta solución, es una solución factible, mas no se sabe si es óptima.

2. De esta matriz, se considera una variable de entrada. Se asignarán valores a cada renglón y columna U y V, cuya suma será igual al costo de la celda de intersección (solo para las celdas básicas). Esto es:

$$\boldsymbol{u_i + v_j = C_{ij}}$$

Tabla 141Método simplex transporte. Fuente: Elaboración propia.

Origen /Destino	***V1=5***	***V2=4***	***V3=8***	***V4=6***
U1=0	**|5**	**|5**	**|5**	**|6**
U2=-1	**|4**	**|3**	**|5**	**|7**
U3=0	**|2**	**|4**	**|8**	**|9**
U4=0	**|8**	**|7**	**|5**	**|6**

3. Una vez asignadas, se calcula: $\overline{C_{ij}} = u_i + v_j - c_{ij}$ para cada variable no básica.

$$u_i = número\ entero\ asignado\ a\ renglón$$

$$v_j = número\ entero\ asignado\ a\ columna$$

$$c_{ij} = Costo\ unitario\ de\ la\ celda$$

$$\boldsymbol{\overline{C_{12}} = u_1 + v_2 - c_{12} = 0 + 4 - 5 = -1}$$

$$\boldsymbol{\overline{C_{13}} = u_1 + v_3 - c_{13} = 0 + 8 - 5 = 3}$$

$$\boldsymbol{\overline{C_{14}} = u_1 + v_4 - c_{14} = 0 + 6 - 6 = 0}$$

$$\boldsymbol{\overline{C_{23}} = u_2 + v_3 - c_{23} = -1 + 8 - 5 = 2}$$

$$\boldsymbol{\overline{C_{24}} = u_2 + v_4 - c_{24} = -1 + 6 - 7 = -2}$$

$$\boldsymbol{\overline{C_{31}} = u_3 + v_1 - c_{31} = 0 + 5 - 2 = 3}$$

$$\boldsymbol{\overline{C_{34}} = u_3 + v_4 - c_{34} = 0 + 6 - 9 = -3}$$

$$\boldsymbol{\overline{C_{41}} = u_4 + v_1 - c_{41} = 0 + 5 - 8 = -3}$$

$$\overline{C_{42}} = u_4 + v_2 - c_{42} = 0 + 4 - 8 = -4$$

$$\overline{C_{43}} = u_4 + v_3 - c_{43} = 0 + 8 - 5 = 3$$

Si todos los valores obtenidos son negativos, la solución es óptima. En este caso, existen más de un valor no negativo, con lo que se puede decir que la solución no es óptima.

Ahora se selecciona el valore más positivo, para reasignar la oferta y la demanda. Con los resultados obtenidos, el valore más grande en sentido positivo es el 3, el cual se encuentra en dos casillas: C_{13}, C_{31} y C_{43}.

Como se muestra en la siguiente matriz, se asigna se forma un circuito cerrado con celdas básicas y la seleccionada después de calcular los valores de C_{ij}. Al circuito, se le asigna a cada celda un signo, comenzando por signo positivo en la celda que hasta ahora no es básica (variable de entrada) El circuito comienza y termina en la variable de entrada. En este ejemplo, se comenzará con la celda C_{13}.

Tabla 142 Método simplex transporte. Fuente: Elaboración propia.

Origen /Destino	V1=5	V2=4	V3=8	V4=6
U1=0	|5	|5	|5	|6
U2=-1	-|4	+|3	|5	|7
U3=0	+|2	-|4	|8	|9
U4=0	|8	|7	|5	|6

Después de asignar los signos al circuito, se consideran los costos con signo negativo. Para este problema, son las celdas C_{21} y la celda C_{32} .

Tabla 143 Método simplex transporte. Fuente: Elaboración propia.

Origen /Destino	***Tlalpan***	***Coyoacán***	***Lindavista***	***Vallejo***	***OFERTA***
Iztacalco	**6|5**	**|5**	**|5**	**|6**	**6**
Iztapalapa	**4|4**	**3|3**	**|5**	**|7**	**7**
Tlalpan	**|2**	**4|4**	**4|8**	**|9**	**8**
Tlatelolco	**|8**	**|7**	**|5**	**5|6**	**5**
DEMANDA	**10**	**7**	**4**	**5**	**26/26**

Se selecciona al mínimo valor para reasignar la oferta y la demanda. En este caso: min(4, 4).

Existe un empate, por lo que se puede seleccionar cualquiera de las dos celdas. Se suma y se resta este valor al valor que se había asignado en la primera solución factible, esto de acuerdo con el signo que se le asignó a cada celda del circuito.

Tabla 144 Método simplex transporte. Fuente: Elaboración propia.

Origen /Destino	***Tlalpan***	***Coyoacán***	***Lindavista***	***Vallejo***	***OFERTA***
Iztacalco	**6|5**	**|5**	**|5**	**|6**	**6**
Iztapalapa	**4-4=0|4**	**3+4=7|3**	**|5**	**|7**	**7**
Tlalpan	**0+4=4|2**	**4-4=0|4**	**4|8**	**|9**	**8**
Tlatelolco	**|8**	**|7**	**|5**	**5|6**	**5**
DEMANDA	**10**	**7**	**4**	**5**	**26/26**

Ahora, las celdas asignadas son:

Tabla 145 Método simplex transporte. Fuente: Elaboración propia.

Origen /Destino	***Tlalpan***	***Coyoacán***	***Lindavista***	***Vallejo***	***OFERTA***
Iztacalco	**6|5**	**|5**	**|5**	**|6**	**6**
Iztapalapa	**|4**	**7|3**	**|5**	**|7**	**7**
Tlalpan	**4|2**	**|4**	**4|8**	**|9**	**8**
Tlatelolco	**|8**	**|7**	**|5**	**5|6**	**5**
DEMANDA	**10**	**7**	**4**	**5**	**26/26**

Con esta celda el costo es= 30+8+21+32+30=121. El costo se redujo.

4. Nuevamente se busca una nueva variable de entrada. Se calculan los valores de ui, vj; así como Cij.

Tabla 146 Método simplex transporte. Fuente: Elaboración propia.

Origen /Destino	***V1=5***	***V2=4***	***V3=11***	***V4=6***
U1=0	**|5**	**|5**	**|5**	**|6**
U2=-1	**|4**	**|3**	**|5**	**|7**
U3=-3	**|2**	**|4**	**|8**	**|9**
U4=0	**|8**	**|7**	**|5**	**|6**

$$\overline{C_{12}} = u_1 + v_2 - c_{12} = 0 + 4 - 5 = -1$$

$$\overline{C_{13}} = u_1 + v_3 - c_{13} = 0 + 11 - 5 = 6$$

$$\overline{C_{14}} = u_1 + v_4 - c_{14} = 0 + 6 - 6 = 0$$

$$\overline{C_{21}} = u_2 + v_1 - c_{21} = -1 + 5 - 4 = 0$$

$$\overline{C_{23}} = u_2 + v_3 - c_{23} = -1 + 11 - 5 = 5$$

$$\overline{C_{24}} = u_2 + v_4 - c_{24} = -1 + 6 - 7 = -2$$

$$\overline{C_{32}} = u_3 + v_2 - c_{32} = -3 + 4 - 4 = -3$$

$$\overline{C_{34}} = u_3 + v_4 - c_{34} = -3 + 6 - 9 = -6$$

$$\overline{C_{41}} = u_4 + v_1 - c_{41} = 0 + 5 - 8 = -3$$

$$\overline{C_{42}} = u_4 + v_2 - c_{42} = 0 + 4 - 7 = -3$$

$$\overline{C_{43}} = u_4 + v_3 - c_{43} = 0 + 11 - 5 = 6$$

En esta iteración, los valores más positivo: $C_{43}\ y\ C_{13}$. Seleccionando una de estas casillas, para comenzar el circuito cerrado nuevamente.

Tabla 147 Método simplex transporte. Fuente: Elaboración propia.

Origen /Destino	V1=5	V2=4	V3=8	V4=6
U1=0	- |5	|5	+ |5	|6
U2=-1	|4	|3	|5	|7
U3=0	+ |2	|4	- |8	|9
U4=0	|8	|7	|5	|6

En este circuito, los valores asignados, para satisfacer la demanda son:

Tabla 148 Método simplex transporte. Fuente: Elaboración propia.

Origen /Destino	***Tlalpan***	***Coyoacán***	***Lindavista***	***Vallejo***	***OFERTA***
Iztacalco	**6|5**	**|5**	**|5**	**|6**	**6**
Iztapalapa	**|4**	**7|3**	**|5**	**|7**	**7**
Tlalpan	**4|2**	**|4**	**4|8**	**|9**	**8**

Tlatelolco	**|8**	**|7**	**|5**	**5|6**	**5**
DEMANDA	**10**	**7**	**4**	**5**	**26/26**

Se selecciona el mínimo de las asignaciones con signo negativo : min (4, 4) existe nuevamente un empate, por lo que se asigna a cualquiera de las dos celdas.

Tabla 149 Método simplex transporte. Fuente: Elaboración propia.

Origen /Destino	***V1=5***	***V2=4***	***V3=8***	***V4=6***
U1=0	**6-4=2|5**	**|5**	**0+4=4|5**	**|6**
U2=-1	**|4**	**7|3**	**|5**	**|7**
U3=0	**4+4=8|2**	**|4**	**4-4=0|8**	**|9**
U4=0	**|8**	**|7**	**|5**	**5|6**

La nueva asignación es:

Tabla 150 Método simplex transporte. Fuente: Elaboración propia.

Origen /Destino	***Tlalpan***	***Coyoacán***	***Lindavista***	***Vallejo***	***OFERTA***
Iztacalco	**2|5**	**|5**	**4|5**	**|6**	**6**
Iztapalapa	**|4**	**7|3**	**|5**	**|7**	**7**
Tlalpan	**8|2**	**|4**	**0|8**	**|9**	**8**
Tlatelolco	**|8**	**|7**	**|5**	**5|6**	**5**
DEMANDA	**10**	**7**	**4**	**5**	**26/26**

Con esta celda el costo es= 10+16+21+20+30=97. El costo nuevamente se redujo.

5. Nuevamente se busca una nueva variable de entrada. Se calculan los valores de U_i, V_j y C_{ij}

Tabla 151 Método simplex transporte. Fuente: Elaboración propia.

Origen /Destino	***V1=5***	***V2=4***	***V3=5***	***V4=6***
U1=0	**|5**	**|5**	**|5**	**|6**
U2=-1	**|4**	**|3**	**|5**	**|7**
U3=-3	**|2**	**|4**	**|8**	**|9**
U4=0	**|8**	**|7**	**|5**	**|6**

$$\overline{C_{12}} = u_1 + v_2 - c_{12} = 0 + 4 - 5 = -1$$

$$\overline{C_{14}} = u_1 + v_4 - c_{14} = 0 + 6 - 6 = 0$$

$$\overline{C_{21}} = u_2 + v_1 - c_{21} = -1 + 5 - 4 = 0$$

$$\overline{C_{23}} = u_2 + v_3 - c_{23} = -1 + 5 - 5 = -1$$

$$\overline{C_{24}} = u_2 + v_4 - c_{24} = -1 + 6 - 7 = -2$$

$$\overline{C_{32}} = u_3 + v_2 - c_{32} = -3 + 4 - 4 = -3$$

$$\overline{C_{33}} = u_3 + v_3 - c_{33} = -3 + 5 - 8 = -6$$

$$\overline{C_{34}} = u_3 + v_4 - c_{34} = -3 + 6 - 9 = -6$$

$$\overline{C_{41}} = u_4 + v_1 - c_{41} = 0 + 5 - 8 = -3$$

$$\overline{C_{42}} = u_4 + v_2 - c_{42} = 0 + 4 - 7 = -3$$

$$\overline{C_{43}} = u_4 + v_3 - c_{43} = 0 + 5 - 5 = 0$$

Ahora todos los valores de C_{ij} son negativos o cero, por lo que se puede concluir que se ha llegado a la solución óptima.

Modelo dual de transporte

Recordando que el modelo original de transporte tiene la siguiente estructura:

$$MinZ = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}X_{ij}$$

Sujeto a :

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} \leq a_i\,, \quad i = 1,2,\dots,m \qquad\qquad (Restricción\ de\ oferta)$$

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} \geq b_j\,, \quad j = 1,2,\dots,n \qquad\qquad (Restricción\ de\ demanda)$$

$$X_{ij} \geq 0 \qquad i = 1,\dots,m \quad y \quad j = 1,\dots,n$$

Ahora se puede plantear el problema dual de transporte, de tal forma que se asigne a cada restricción de oferta la variable dual ui con el signo contrario, y a cada restricción de demanda se asigna la variable dual vj. Por lo que el modelo dual del problema de transporte quedaría:

$$maz\ w = -\sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j$$

Sujeto a :

$$-u_i + v_j \le c_{ij} \quad Para\ todo\ i, j$$

$$u, v\ no\ restringidas$$

$$Con\ u = (u_{1,\ldots,}u_m) \quad y \quad v = (v_1, \ldots, v_n)$$

Donde:

$$u_{i,} = Precio\ en\ el\ origen\ i\ del\ \ producto\ (Precio\ sombra)$$

$$v_j = Valor\ del\ producto\ puesto\ en\ el\ destino\ j\ (Precio\ sombra)$$

La restricción

$$-u_i + v_j \le c_{ij} \quad Para\ todo\ i, j$$

Significa que el precio en el destino v_j del producto menos el precio en el origen $u_{i,}$ puede ser cuando más, igual al costo de transporte del origen i al destino j.

Aplicaciones del modelo de transporte

La aplicación del modelo de transporte no se limita a transportar artículos entre fuentes y destinos geográficos, también se puede aplicar a problemas de control de la producción y mantenimiento de equipos.

2.6 Modelos de Redes

Objetivo general

Formular y resolver modelos de programación lineal en redes aplicados a diferentes problemas en los sistemas productivos y de servicios, y analizar la solución para la toma de decisiones.

Descripción y características de las redes

Definición de Red.

Una red es un conjunto de puntos o elementos llamados nodos que interactúan entre sí, la representación de su interacción se realiza a través de líneas un conjunto de líneas o ramas llamados arcos.

Los nodos pueden representar cosas físicas o no físicas tales como; lugares, personas, puntos de trabajo, aeropuertos, puertos marítimos, etc. De esta forma, los arcos representarían: carreteras, rutas, el vínculo que une a dos persona, etc.

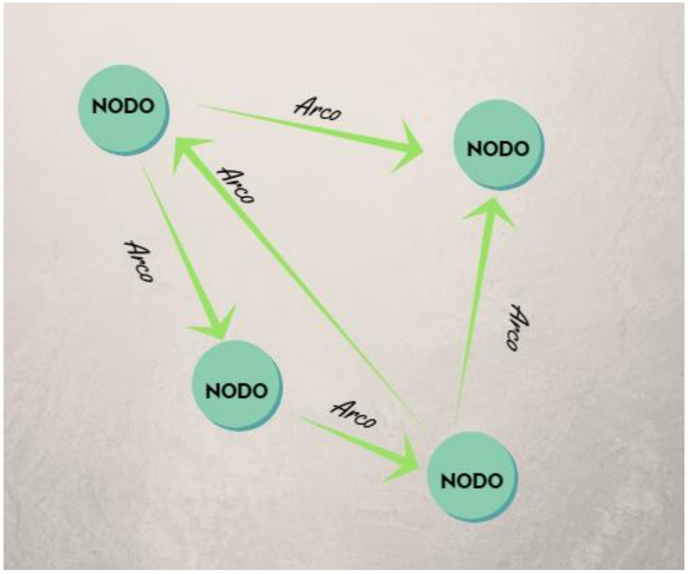


Ilustración 69 Red. Fuente: Elaboración propia con Canva

.

Las redes se representan a través de (N,A) , donde N es el conjunto de nodos y A es el conjunto de arcos.

Cada red tiene asociado un flujo, que representa la cantidad de unidades que pueden pasar de un nodo a otro nodo; éste puede ser finito o infinito según la capacidad delos arcos.

En cualquier red, se pueden distinguir dos nodos, uno es el nodo fuente por donde entra el flujo de la red, y otro llamado nodo destino, a través de éste, sale el flujo de la red.

Al flujo que sale por un nodo, se le llama eflujo y al flujo que llega a un nodo se le llama influjo. Por convención, al eflujo se le denota matemáticamente cono un flujo negativo y al influjo, por el contrario, se representa cono un flujo positivo.

En cualquier red, el flujo siempre debe cumplir determinadas condiciones, las cuales son:

1. El flujo debe entrar a la red solo por el nodo llamado *fuente,* esto se representa matemáticamente con:

$$\sum_{i} x_{ij} - \sum_{j} x_{jk} = -v \quad si\ j = s$$

Donde $v \geq 0$ representa el flujo total que entra a la red, s es el nodo fuente, x_{ij} es el flujo que va de un nodo Ni a otro Nj, de la misma forma, x_{jk} es ek flujo que va del nodo Nj al nodo Nk.

2. El flujo que entra en un nodo, debe ser igual al flujo que sale del mismo nodo, esto quiere decir, que el flujo se conserva y matemáticamente se representa como:

$$\sum_{i} x_{ij} - \sum_{j} x_{jk} = 0 \quad para\ cuelquier\ \ j \neq s, t.$$

$Donde\ t\ es\ el\ nodo\ destino.$

3. El flujo de la red solo sale por el nodo destino. Matemáticamente esto se representa como:

$$\sum_{i} x_{ij} - \sum_{j} x_{jk} = 0 \quad para\ cuelquier\ \ j \neq s, t.$$

Tipos de arcos:

- Arcos dirigidos: Son aquellos que tienen dirección de un nodo a otro, es decir, permiten un flujo positivo solo en una dirección.

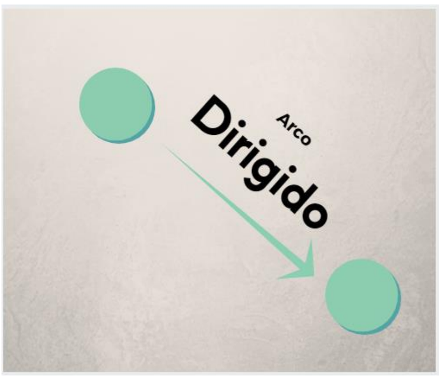


Ilustración 70 Arco dirigido. Fuente: Elaboración Propia con Canva

- Arcos sin dirección: Son arcos que no tienen dirección, se pueden representar por medio de segmentos de recta sin punta o por medio de flechas de doble sentido (Ilustración 71). En este caso, el flujo puede ser positivo en las dos direcciones del arco.

Ilustración 71 Arco sin dirección. Fuente: Elaboración propia con Canva

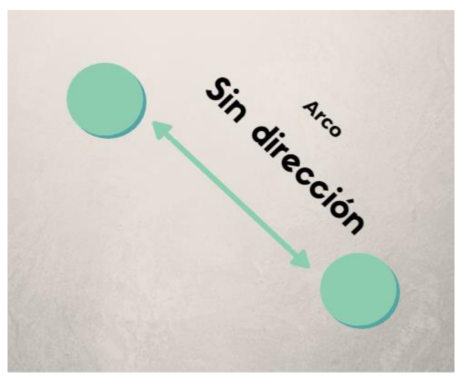


Ilustración 72 Arco sin dirección. Fuente: Elaboración propia con Canva

Conceptos elementales

Ruta

Al conjunto de arcos que unen dos nodos diferentes y que además pasa a través de otros nodos de la res, de le llama ruta .

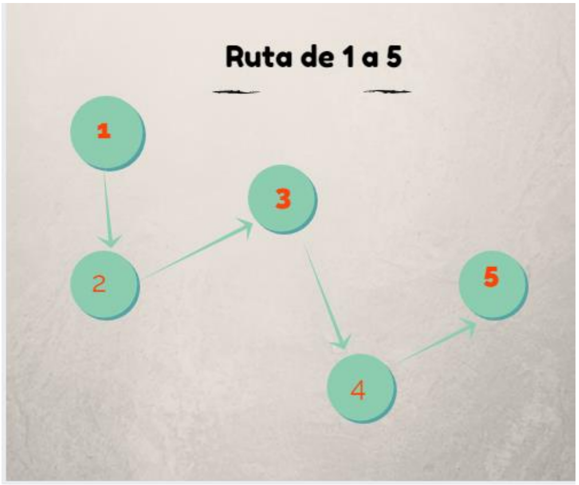


Ilustración 73 Ruta. Fuente: Elaboración propia con Canva.

Ciclo o bucle

Un ciclo o bucle es formado por una ruta si existe el caso en el que un nodo vuelve a sí mismo a través de otros nodos, esto es:

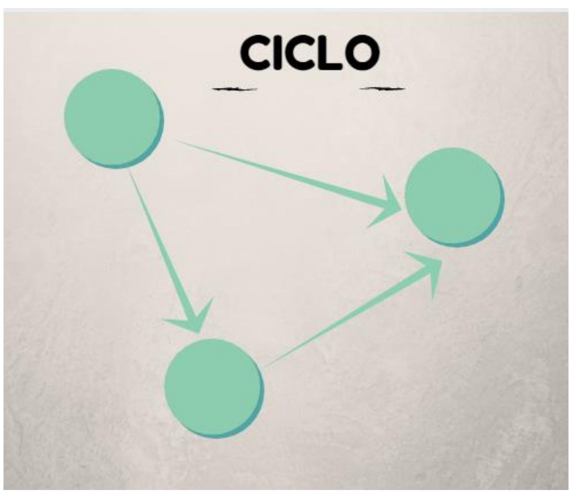


Ilustración 74 Ciclo. Fuente: Elaboración propia con Canva.

Una ruta que no contiene ningún ciclo se le llama *ruta simple*.

Árbol

Un árbol es una red en la que no hay ciclos y que se compone por todos los nodos.

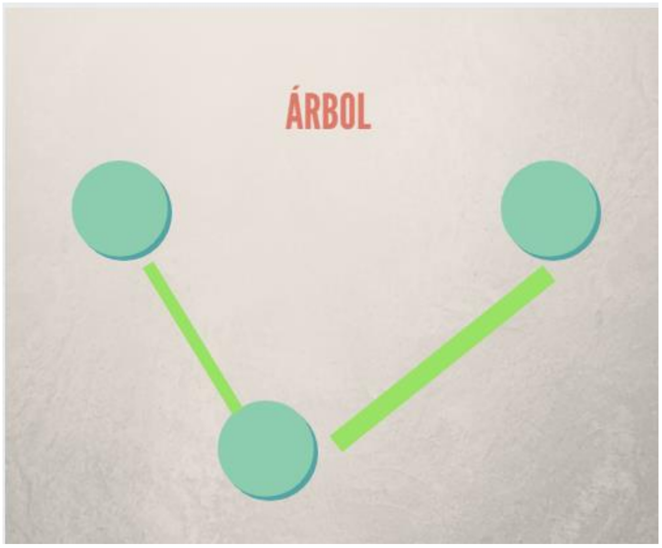


Ilustración 75Árbol. Fuente: Elaboración propia con Canva.

Red convexa

Se llama red convexa a aquella en la que existe al menos una ruta que conecta a cada nodo con el resto de los nodos de la red. En una red convexa todos los nodos están conectados, no existen nodos o conjunto de nodos que no estén unidos.

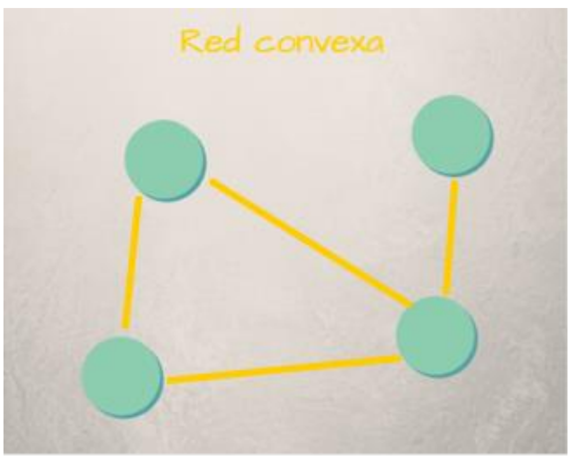


Ilustración 76 Red convexa. Fuente: Elaboración propia con Canva.

Red inconvexa

Una red inconvexa, a diferencia de la red convexa, no tiene rutas que conecten a cada nodo con el resto de los nodos, es decir, es una red que no está conectada.

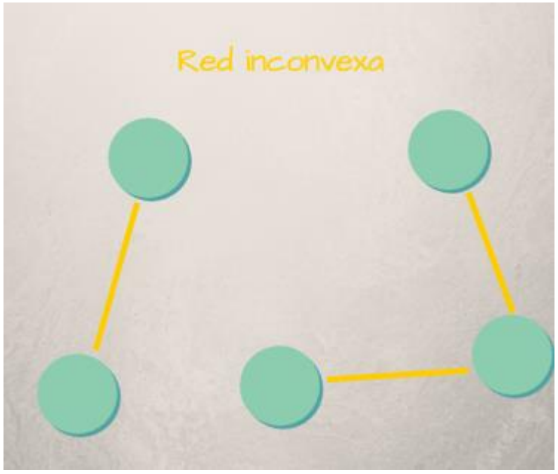


Ilustración 77Red invonvexa. Fuente: Elaboración propia con Canva.

Redes dirigidas

En general, se pueden identificar dos tipos distintos de redes: las redes dirigidas y las redes no dirigidas. La diferencia entre estos dos tipos de redes es que las redes no dirigidas contienen arcos que no tienen sentido, es decir que al estudiarlas, solo es necesario conocer si los nodos están conectados y las redes dirigidas, en cambio, tiene nodos que están unidos a través de arcos con dirección, por lo que, al estudiarlas, se debe conocer no solo si los nodos están conectados o no, además es preciso tener conocimiento de la forma en que se relacionan .

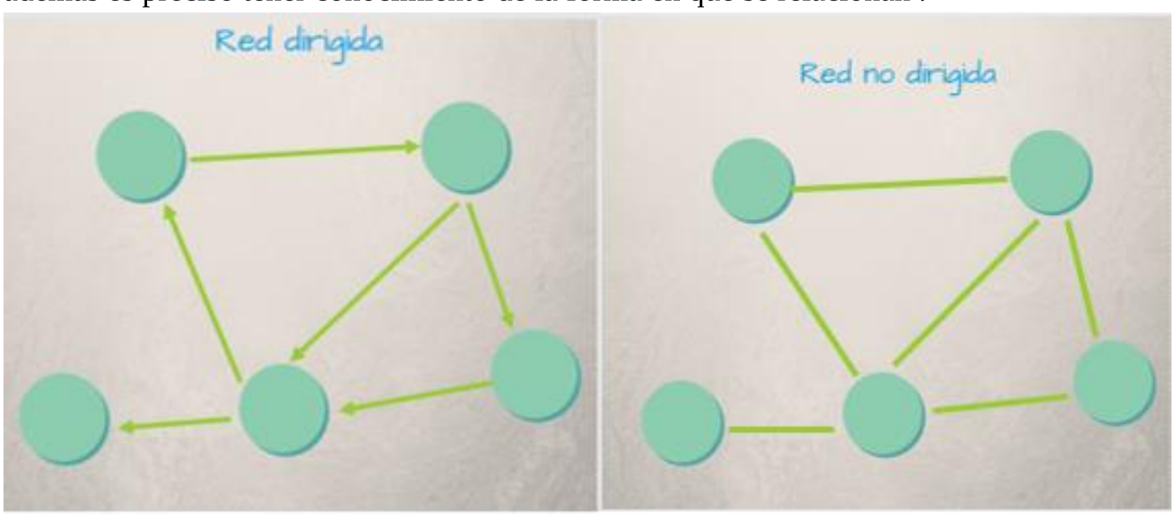


Ilustración 78 Red dirigida/ red no dirigida.Fuente: Elaboración propia con Canva.

Árboles de expansión mínima

Como se ha visto anteriormente, un árbol es una red que no tiene ciclos y que además se compone por todos los nodos, esto también se puede entender como una red compuesta por un subconjunto de todos los nodos, y un árbol de expansión es aquel que cumple las características anteriores y que además une todos los nodos de una red.

Un árbol de expansión siempre tendrá $n - 1$ arcos , donde n es el número de nodos que tiene la red. Este es el número necesario para que se conecten todos los arcos, es decir, para que sea una red convexa; y además es el número máximo de posible para que no haya ciclos.
Para construir un árbol de expansión, se puede tomar cualquier nodo n como inicio, posteriormente debe seleccionarse un nodo para relacionarlo con el nodo de inicio después, se debe seleccionar un nodo de los que han sido conectados para conectarlo con un nodo que no haya sido relacionado con ningún nodo. Este proceso se puede continuar hasta que todos los nodos hayan sido unidos. Este procedimiento evita que se formen ciclos, además asegura que se cumpla la condición del número de arcos que debe tener un árbol de expansión: $n - 1$ arcos.

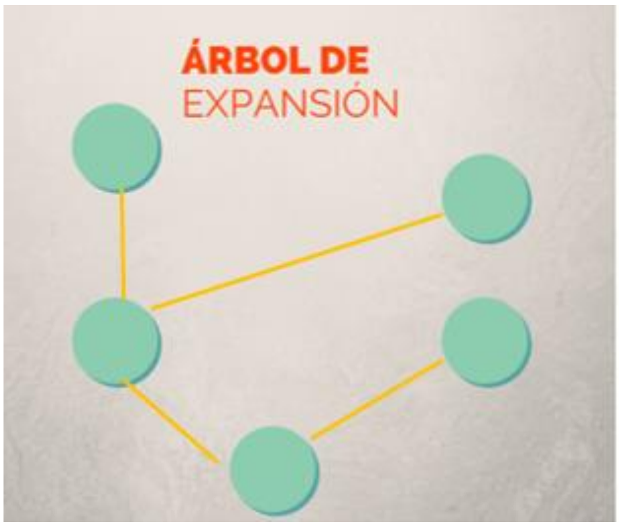


Ilustración 79 Árbol de expansión. Fuente: Elaboración propia con Canva.

El problema de árbol de expansión mínima conste en formar un árbol de tal forma que las conexiones entre los arcos sea mínima. Para tales efectos deben considerarse algunas características específicas del modelo:

1. En este caso, se pueden identificar los nodos, pero los arcos no están definidos.
2. Se conoce los posibles arcos que se pueden seleccionar para formar un árbol, así como la longitud asociada estos arcos. La longitud puede representar distancias, costos, tiempos, etc.
3. La longitud total de un árbol es igual a la suma de cada una de las longitudes de sus arcos.
4. El objetivo es formar un árbol a una longitud mínima.
5. Los arcos seleccionados deben cumplir las condiciones para formar un árbol de expansión.
6. Para este problema puede existir más de una solución óptima que cumpla con las restricciones del problema.

Aplicaciones del problema de Árbol de expansión mínima

El problema de árbol de expansión mínima se puede aplicar en diferentes situaciones tales como diseñar redes de transporte para minimizar costos, diseñar redes de telecomunicación, diseño de cableado de equipos de cómputo, diseño de redes de tuberías, diseño de redes de ductos, diseño de portafolios de inversiones, etc.

Para resolver este problema, se pueden utilizar diferentes algoritmos, entre ellos están: Algoritmo de Kruskal y el algoritmo de Prim.

Algoritmo de Kruskal.

El algoritmo de Kruskal consiste en elegir los arcos a mínima longitud de forma sucesiva. Este algoritmo se puede describir a través de los siguientes pasos:

1. El primer paso es ordenar los arcos según su peso, para seleccionar aquel cuyo peso (longitud) sea mínimo.
2. Los arcos restantes se seleccionan considerando uno a uno aquellos con menor peso, sin que se formen ciclos. En este caso, los arcos se seleccionan de menor a mayor, teniendo cuidado de que no se formen ciclos.
3. El paso anterior se repite iterativamente hasta lograr conectar todos los arcos.

Algoritmo de Prim

El algoritmo de Prim consta de los siguientes pasos:

1. Se marca un nodo cualquiera como el nodo de inicio.
2. Se selecciona un arco conectado con el nodo de inicio que tenga un peso (longitud) mínima.
3. Se repite el paso anterior siempre que el arco seleccionado enlace a un nodo ya enlazado, con otro que no lo esté.
4. El algoritmo se detiene en el momento en el que todos los nodos estén conectados sin formar ciclos.

Problemas de flujo máximo

El problema de flujo máximo consiste en una red, con distintas capacidades en los arcos, el objetivo es encontrar la configuración de la red de tal forma que el flujo total sea máximo.

Matemáticamente esto se representa como un modelo de programación lineal de la siguiente forma:

$$Max\ v = \sum_j x_{sj}$$

Sujeto a :

$$\sum_i x_{ij} - \sum_k x_{jk} = \begin{cases} -v, & si\ j = s \\ 0, & si\ j \neq s, t. \\ v, & si\ j = t \end{cases}$$

$$0 \leq l_{ij} \leq x_{ij} \leq u_{ij}$$

s representa al nodo de inicio y t al nodo final, v es el flujo.

Este modelo se puede resolver por medio del método Simplex, sin embargo, existen otros algoritmos que resultan más fáciles y ahorran tiempo al resolver este tipo de problemas.

Aplicaciones del problema de flujo máximo.

Este problema se puede aplicar para optimizar la distribución de productos, maximizar el flujo a través de una red de distribución, de una red de montaje, de una red de corriente eléctrica, de una red de paquetes de información, de una red de transporte, de una red de suministros, de una red de agua, etc.

Características del problema de flujo máximo.

El problema de flujo máximo se caracteriza por:

1. En la red existe un nodo origen y un nodo destino, el flujo se origina en el nodo origen y termina en el nodo destino.
2. Al resto de los nodos se les denomina nodos de transbordo.
3. El flujo a través de un arco solo se permite en la dirección marcada por el arco (marcada por una flecha)
4. El objetico es encontrar la cantidad máxima de flujo que pase del nodo origen al nodo destino.
5. El flujo de un arco siempre debe se menor o igual a la capacidad del arco.
6. El flujo que entra en un nodo siempre debe ser igual al flujo que sale de él.

Algoritmo para resolver el problema de flujo máximo.

El problema de flujo máximo es posible de resolver por medio del algoritmo Ford Fulkerson, el cual fue desarrollado en 1962 por L.R. Ford y D.R. Fulkerson. Éste algoritmo propone buscar rutas en las que se puedan aumentar el flujo, hasta alcanzar el flujo máximo de la red.

Este algoritmo sigue los siguientes pasos:

1. Se elige la capacidad máxima de flujo del nodo origen.
2. Seleccionar la capacidad máxima de flujo del nodo actual.
3. Se repite el paso anterior hasta llegar al nodo destino.
4. La capacidad de la trayectoria será el mínimo de la capacidad de arco de todos los nodos conectados, de tal forma que se cumpla que el flujo que entra sea igual al flujo que sale.

Ruta más corta

El problema de ruta más corta consiste en una red la cual tiene n nodos, y cuyos arcos tienen solo un sentido y una longitud o costo asociado. Existe en la red un nodo origen y un nodo destino, el objetivo es, encontrar la ruta más corta, es decir, aquella cuya suma de longitudes o costos sea mínima.

Este problema se puede aplicar en aspectos físicos o no físicos tales como: minimizar tiempos en una secuencia de actividades, minimizar costos, minimizar distancias, minimizar rutas de transporte, etc.

Existen diferentes formas de resolver problemas de ruta más corta:

-Algoritmo de Dijkstra

-Algoritmo de Floyd

Algoritmo de Dijkstra

El algoritmo de Dijkstra consiste en agregar etiquetas a los diferentes nodos de una red. Para este algoritmo se considera que:

a) ui es la distancia más corte del nodo origen hasta el nodo i.

b) $ui + dij$ es la distancia hasta el nodo j desde el nodo anterior

c) i es el nodo anterior al nodo j.

d) Se colocan etiquetas que pueden ser temporales o permanentes. Se denotan con: $[\, uj, i] = [ui + dij, i]$

1. Se etiqueta el nodo origen con la etiqueta permanente [0,-1].

2. Se calculan etiquetas temporales para cada nodo. Si el nodo j ya tiene una etiqueta temporal existente$[uj, k]$ hasta otro nodo k, pero si existe $ui + dij < uj$, se remplaza $[uj, k]$ com $[ui + dij, i]$
3. Se detiene el proceso cuando todos los nodos cuentan con etiquetas permanentes. En caso contrario:
4. Se selecciona la etiqueta $[ur, s]$ que tenga la distancia más corta (ur) entre todas las distancias temporales.

CPM Y PERT

Ruta crítica (CPM)

El método de ruta citica suele abreviarse como CPM por sus siglas en inglés (Critical Path Method) es utilizado frecuentemente en el desarrollo, programación y control de proyectos, se basa en la teoría de redes y su objetivo principal es programar actividades.

Un proyecto se integra por un conjunto de actividades que están conectadas entre sí, cada una de las actividades absorbe tiempo determinado y recursos.

Para realizar este método, lo primero que se define son las actividades del proyecto y sus relaciones de precedencia entre las actividades, y el tiempo que consume cada actividad. Posteriormente se modelan las precedencias de las actividades con una red.

Características del método:

1. Cada actividad se representa por medio de un arco con dirección (representa el proceso avance del proyecto).
2. Los nodos de la red representan eventos (punto en el tiempo en el que se termina una actividad y se inicia una actividad subsecuente a la primera).
3. Cada actividad está representada por solo un arco.

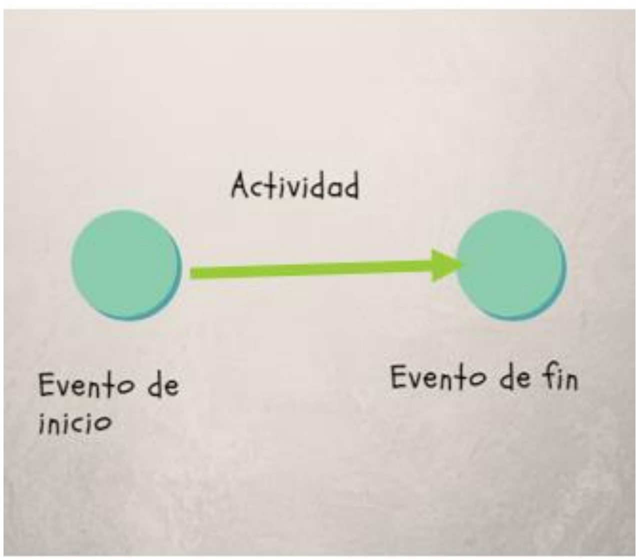


Ilustración 80 Representación de actividades. Fuente: Elaboración propia con Canva.

.

4. Cada actividad debe estar ligada a dos nodos diferentes, es decir, que ningún par de actividades deberán tener los mismos nodos de inicio. Cuando esto no se cumple, se pueden agregar actividades ficticias (representados por líneas discontinuas) que no absorben tiempo ni recursos.

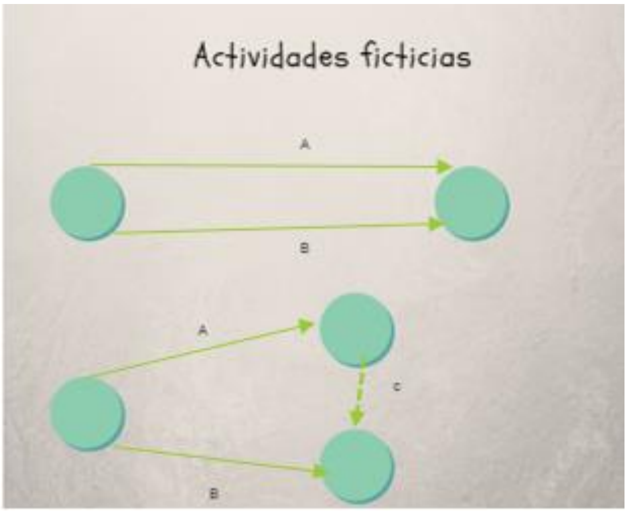


Ilustración 81 Actividades ficticias. Fuente: Elaboración propia con Canva.

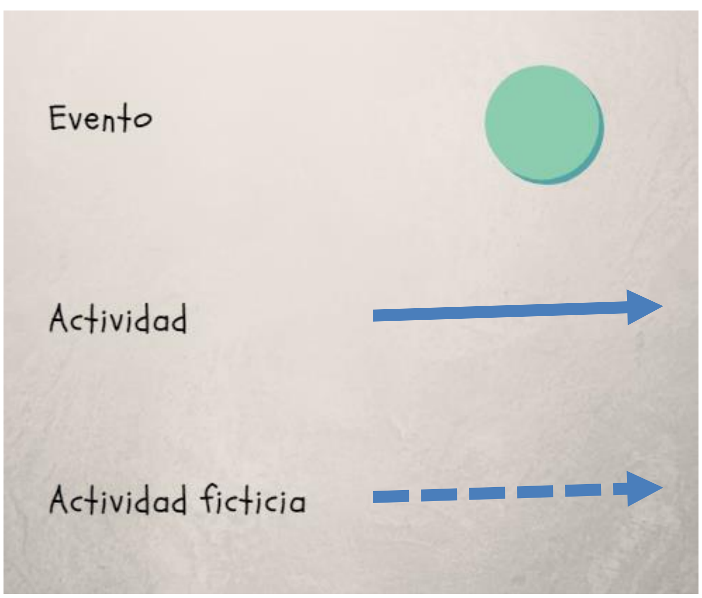


Ilustración 82 Elementos de un diagrama. Fuente: Elaboración propia con Canva.

Este método tiene como finalidad brindar un cronograma de las actividades del proyecto, para lo cual es necesario conocer información específica que está conformada por: el tiempo que se requiere para realizar cada una de las actividades, las precedencias en las actividades.

Los resultados que se obtienen a través de este método son: cronograma de actividades, el tiempo total necesario para completar el proyecto y la clasificación de las actividades.

En cualquier proyecto, de acuerdo con este método, se pueden identificar dos tipos de actividades: Actividades críticas y actividades no críticas.

- *Actividad Crítica*: Una activad critica es aquella cuyos tiempos son fijos, por lo que, si existe un retraso en la realización de estas actividades, el proyecto no se terminará en el plazo fijado para su realización.
- *Actividad no Crítica:* Una actividad crítica se caracteriza por tener tipos de inicio y fin que pueden variar, por lo que se puede programar en un periodo de tiempo mayor a la duración estricta de la actividad.

Una ruta crítica representa la trayectoria más larga de actividades, en términos de tiempo. Las actividades de la ruta crítica son actividades críticas, lo cual quiere decir, que si alguna de ellas se atrasa, el proyecto completo también lo hará. En diagrama de actividades, se pueden llegar a identificar más de una ruta crítica.

Pasos del método de ruta crítica

1.El primer paso es identificar las actividades que intervienen en el proyecto, así como la forma en que se relacionan, las subsecuentica, precedencias y el tiempo asociado a cada actividad.

2. El siguiente paso consiste en realizar el diagrama correspondiente a la información que se obtuvo en el paso anterior.

3. Se calculan tres indicadores para cada evento: T1, T2 Y H. Donde T1= tiempo más temprano de realización de un evento, T2 es el tiempo mayor de realización de un evento y H es tiempo de holgura (T2-T1).

Para calcular T1, se recorre el diagrama de izquierda a derecha, siendo T1= Máx (ESi+Dij). Donde ESi corresponde al tiempo de inicio de la actividad j, Dij es la duración de la actividad. Para el primer evento, se considera T1=0.

T2 se calcula recorriendo red de derecha a izquierda, y representa el mayor tiempo de realización de un evento: T2= Min (Lij-Dij). Y H se calcula restando T2 a T1: H= T1-T2.

4.Derterminar la ruta crítica, la cual se identifica como la ruta más larga del proyecto, esto implica que la suma del tiempo de las actividades que constituyen la ruta crítica representa el tiempo total del proyecto. Las actividades que constituyen la ruta crítica son aquellos cuyos tiempos de holgura sean igual a cero, esto es, H=0.

5. El último paso consiste en generar el cronograma del proyecto. Este cronograma se conoce como diagrama de Gantt.

PERT (Técnica de evaluación y revisión de programas)

PERT (Project Evaluation and Review Techniques) es una herramienta analítica que permite programar actividades. Tiene como objetivo determinar la probabilidad de que el proyecto se cumpla en un tiempo determinado Sj. Este algoritmo se desarrolla mediante intervalos porbabilísticos considerando tiempos pesimistas, más probables y optimistas.

-Tiempo optimista (a) : Ocurre cuando la ejecución transcurre de la forma deseada.
-Tiempo más probable (m): Ocurre cuando la ejecución se realiza en condiciones normales.Este tiempo queda en el intervalo (a,b).
El tiempo promedio de duración (D) y la varianza se calculan de la forma siguiente:

$$\overline{D} = \frac{a + 4m + b}{6}$$

$$v = \left(\frac{b - a}{6}\right)^2$$

- Tiempo pesimista (b): Ocurre cuando la ejecución ocurre de una forma muy distinta a la deseada.
Programa Lineal
Para visualiza el problema como un modelo de programación lineal, es necesario definir la variable xj que representa el tiempo acumilado hasta el nodo j, con lo que el modelo queda :

$$Min\ z = xf - x1$$
$$xj \geq xi + tij$$

Para calcular la probabilidad de que la actividad j ocurra en un tiempo Sj se puede calcular siguiendo las siguientes reglas:
1.Calcular la media $E\{ej\}$ y la varianza $var\{ej\}$.
-Si solo hay una ruta del nodo de inicio al nodo j, la media es igual a la suma de todas las duraciones esperadas. $\overline{D}$, de todas las actividades que se incluyen en esta ruta. La varianza se calcula como la suma de las varianzas v de las actividades de la ruta.
-Cuando hay más de una ruta para llegar del nodo de inicio al nodo j, entonces se selecciona la ruta que tiene una duración promedio más larga.
-Cuando hay más de una ruta para llegar del nodo de inicio al nodo j, y además tienen la misma media, la selección se realiza considerando la varianza más alta, ya que esto implica que hay mayor incertidumbre y se puede generar una estimación más conservadora de las probabilidades.
Debido a que ej es la suma de variables aleatorias independientes y considerando la media y la varianza de la ruta al nodo j, la probabilidad de que el evento j ocurra en el tiempo Sj se puede aproximar por medio de una distribución normal estándar Z.

$$P\{ej \leq Sj\} = P\left\{\frac{ej - E\{ej\}}{\sqrt{var\{ej\}}} \leq \frac{Sj - E\{ej\}}{\sqrt{var\{ej\}}}\right\} = P\{z \leq Kj\}$$

$$Kj = \frac{Sj - E\{ej\}}{\sqrt{var\{ej\}}}$$

2.7 Programación Entera

Objetivo general

Formular modelos de programación entera para resolver problemas relacionados con los sistemas productivos y de servicios, analizar soluciones para la toma de decisiones.

Programación entera y sus aplicaciones

La Programación entera se ocupa de resolver problemas de optimización en los que las variables de decisión no pueden tomar valores fraccionarios, es decir, que solo se les pueden asignarse valores enteros

De acuerdo con su estructura, existen tres tipos de estructuras de programación entera: Problema entero, problema entero-mixto; problema binario o entero cero-uno.

$$Opt\ Z = cX$$
Sujeto a:
$$AX \leq b$$
$$X \geq 0, entero$$

- **Problema entero**

$$Opt\ Z = cX + dY$$
Sujeto a:
$$AX + BY \lesseqgtr b$$
$$X \geq 0$$
$$Y \geq 0, entero.$$

- **Problema entero**

$$Opt\ Z = cX$$
Sujeto a:
$$A \lesseqgtr b$$
$$X = 0,1$$

- **Problema entero**

Ilustración 83 Programación entera. Fuente: Elaboración propia.

El tipo de problema depende de los valores que pueden tomar las variables de decisión, existen cuatro casos distintos de tipos de problemas con forma a los valores que toman las variables de decisión. Estos son:

Entero puro

- Todas las variables X≥O, Enteras.

Binario

- Todas las variales X= 0 ó 1.

Entero mixto

- Hay variables continuas y variables enteras.

X≥0 continua
Y≥0 entera.

Mixto binario

- Hay variables continuas y variables binarias

X≥0 continua
Y= 0 ó 1.

Ilustración 84 Tipos de problemas de programación entera. Fuente: Elaboración propia

El tipo de problemas cuyas variables de decisión deben ser números enteros, se puede encontrar en un sinfín de situaciones, entre ellas: asignación de recursos, problemas de transporte, asignación, problemas de redes de optimización, problemas de ruteo, optimización de viajes, problema de selección de recursos, problemas de inversión, balance de líneas de producción,

Métodos de solución de programación entera

Este tipo de modelos requiere de herramientas específicas para resolverse, ya que el uso del Método Simplex arroja números fraccionarios, y al hacer un ajuste por redondeo en el resultado, no se asegura que la solución obtenida sea factible.

Dentro de los métodos que existen para resolver modelos de programación entera, se encuentran:

-Algoritmo de planos de corte
-Enumeración implícita
-Ramificación y acotamiento
-Teoría de grupos

Algoritmo de ramificar y cortar

Los algoritmos de ramificar y cortar sirven para encontrar la solución de problemas cuyas variables de decisión son valores enteros, esto mediante un proceso en el que se divide un conjunto de soluciones factibles en subconjuntos más pequeños.

Este algoritmo consta de tres acciones necesarias para su desarrollo, las cuales son:

- ✓ Ramificación: Dividir el conjunto completo de soluciones factibles en subconjuntos más pequeños.
- ✓ Acotamiento: Obtener una rama que muestre el grado de precisión de la solución factible, para cada subproblema.
- ✓ Sondeo: Seleccionar la mejor solución en el subconjunto, así como descartar los subconjuntos que tengan cotas indicando que no es posible que contenga una solución óptima para el problema original.

  Los pasos que incluye este algoritmo son los siguientes:

1. Resolver el problema por medio del método Simplex. Si la solución solo contiene números enteros para las variables de decisión, la solución obtenida es óptima.
2. Cuando los valores de las variables de decisión arrojados por el método Simplex no son números enteros, se elige una variable de decisión que, en la solución por el método Simplex, haya resultado un número fraccionario.
3. Se generan dos nuevos problemas similares al problema original, pero:

-Uno de ellos tendrá una nueva restricción: $Xj \leq XBj$.

-El segundo problema tendrá también una restricción adicional: $Xj \leq XBj + 1$

4. Se resuelven los dos problemas lineales desarrollados en el paso anterior.

Se selecciona el programa lineal con mejores resultados, ya sea con valores fraccionarios o enteros, que cualquiera de las soluciones enteras encontradas.

5. Se selecciona el programa lineal que contenga el mejor valor de la función objetivo. Si las variables tienen valores enteros, entonces la solución encontrada es óptima.
6. En caso de que no se cumpla con la condición de que las variables sean enteros, es necesario volver al paso 2 considerando la estructura del programa lineal que se ha resuelto en el paso 5.

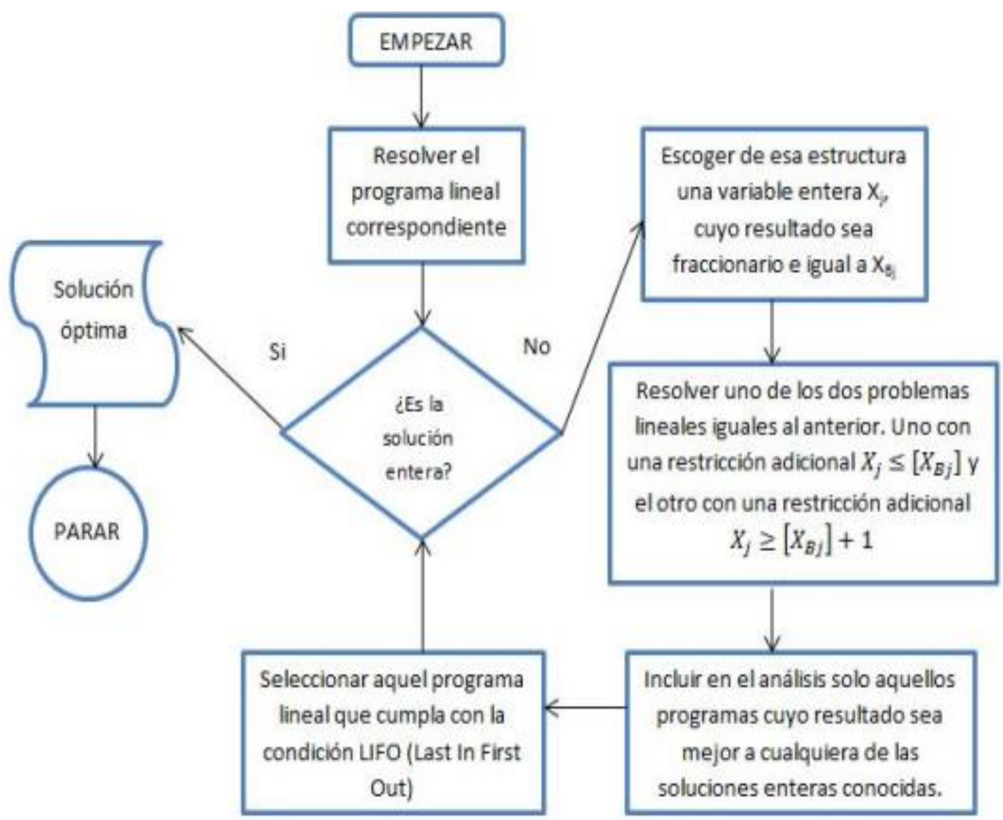


Ilustración 85 Pasos del algoritmo de ramificación y acotamiento. Fuente: Prawda, Juan (1992). Métodos y modelos de investigación de Operaciones

Algoritmo de planos de corte

Este tipo de algoritmos fue el primero en implementarse para resolver problemas de programación entera, y se basan en una restricción que conforma el corte.

En cada iteración, el algoritmo añade una variable de decisión y una nueva restricción. Los pasos generales para resolver un problema de programación entera por medio del algoritmo de planos de corte son los siguientes:

1. Resolver el problema como un problema de programación lineal ordinario.
2. En caso de que los valores obtenidos para las variables de decisión en el paso 1, sean números enteros, ya no es necesario seguir con el paso 3, pues se ha encontrado la solución óptima del problema.
3. Se realiza un corte. Añadiendo una restricción adicional y una variable artificial.

4. Resolver el problema como un programa de Programación Lineal por medio del método Simplex.

5. Volver al paso 2.

3.Solución de problemas propuestos.

3.1 Modelado Matemático

Ejercicio 1

SOLUCIÓN

Variables de decisión: Son las decisiones que el repartidor quiere tomar:

Número de mesas tipo 1 a fabricar para que la ganancia sea máxima: X_A

Número de mesas tipo 2 a fabricar para que la ganancia sea máxima: X_B

Constantes del problema:

Parámetros conocidos del problema:

-Ganancia por mesa vendida del tipo 1 : 1.5 pesos

-Ganancia por mesa vendida del tipo 2: 3 pesos

-Horas de mano de obra necesarias para fabricar mesas tipo 1: 60 minutos

-Horas de mano de obra necesarias para fabricar mesas tipo2: 40 minutos.

Restricciones:

-En este problema la restricción la establece el número de horas de mano de obra disponible al mes, y considerando el requerimiento de horas para fabricar cada tipo de mesa, la restricción se representa:

$$60X_A + 40X_B \leq 7200$$

Ya que: 120 horas = 7200 minutos .

-En este caso el número de mesas a fabricar deberá tomar solo valores positivos o iguales a cero, por lo que se establece la condición de no negatividad.

$$X_A,\ X_B \geq 0$$

Función Objetivo: Lo que se quiere optimizar es el beneficio total de por venta de mesas tipo 2 y tipo 2 considerando que todas las mesas producidas durante un mes son vendidas ; esto se representa a través de una función que depende de las variables de decisión X_A y X_B :

F.O. $Máx\ Z = 1.5XA + 3XB$

En general el problema queda representado por un modelo de programación lineal que cuya estructura sería:

F.O. $\boldsymbol{Máx\ Z = 1.5X_A + 3X_B}$

S.A. (Sujeto a):

$\boldsymbol{60X_A + 40X_B \leq 7200}$ (Restricción de capacidad).

$\boldsymbol{X_A, X_B \geq 0}$ (Condición de no negatividad).

Ejercicio 2

SOLUCIÓN

Variables de decisión:

Número de bocadillos de tipo 1 a preparar para que haya el máximo número de bocadillos: X_1

Número de bocadillos de tipo 2 a preparar para que haya el máximo número de bocadillos: X_2

Número de bocadillos de tipo 3 a preparar para que haya el máximo número de bocadillos: X_3

Número de bocadillos de tipo 4 a preparar para que haya el máximo número de bocadillos: X_4

Número de bocadillos de tipo 5 a preparar para que haya el máximo número de bocadillos: X_5

Constantes del problema:

Parámetros conocidos del problema:

	Bocadillo 1	Bocadillo 2	Bocadillo 3	Bocadillo 4	Bocadillo 5	Cantidad disponible
Ingrediente A	2	0	0	0	3	36
Ingrediente B	0	9	0	8	0	216
Ingrediente C	0	0	3	4	0	192
Ingrediente D	4	0	6	0	0	216
Ingrediente E	0	0	1	0	0	24
Ingrediente F	0	1	0	0	0	18

Restricciones:

-En este problema la restricción la establece la cantidad disponible de cada ingrediente

$$2X_1 + 3X_5 \leq 36$$

$$9X_2 + 8X_4 \leq 216$$

$$3X_3 + 4X_4 \leq 192$$

$$4X_1 + 6X_3 \leq 216$$

$$X_3 \leq 24$$

-En este caso, es lógico, que el número de bocadillos preparados, debe ser positivo o iguales a cero, por lo que se establece la condición de no negatividad.

$$X_1, \dots, X_5 \geq 0$$

Función Objetivo: Lo que se quiere optimizar es la cantidad de bocadillos a preparar esto se representa a través de una función que depende de las variables de decisión X_1 ,.., X_5 y considerando que el bocadillo 4 se consume el doble que cualquier otro bocadillo, se tiene:

F.O. $Máx\ Z = \boldsymbol{X_1 + X_2 + X_3 + 2X_4 + X_5}$

En general el problema queda representado por un modelo de programación lineal que cuya estructura sería:

$$Máx\ Z = \boldsymbol{X_1 + X_2 + X_3 + 2X_4 + X_5}$$

S.A.

(Sujeto a):

$2X_1 + 3X_5 \leq 36$ Restricción de ingrediente A

$9X_2 + 8X_4 \leq 216$ Restricción de ingrediente B

$3X_3 + 4X_4 \leq 192$ Restricción de ingrediente C

$4X_1 + 6X_3 \leq 216$ Restricción de ingrediente D

$X_3 \leq 24$ Restricción de ingrediente E

$\boldsymbol{X_A, X_B \geq 0}$ (Condición de no negatividad).

Ejercicio 3

SOLUCIÓN

Variables de decisión:

Empleados a tiempo completo que almuerzan de 12-1 p.m. : X_1

Empleados a tiempo completo que almuerzan de 1-2 p.m.: X_2

Empleados a tiempo parcial que comienzan a trabajar a las 8 a.m..: X_3

Empleados a tiempo parcial que comienzan a trabajar a las 9 a.m.: X_4

Empleados a tiempo parcial que comienzan a trabajar a las 10 a.m.: X_5

Empleados a tiempo parcial que comienzan a trabajar a las 11 a.m.: X_6

Empleados a tiempo parcial que comienzan a trabajar a las 12 p.m.: X_7

Empleados a tiempo parcial que comienzan a trabajar a las 1 p.m.: X_8

Constantes del problema:

Parámetros conocidos del problema:

horario	8-9 a.m.	9-10 a.m.	10-11 a.m.	11-12 a.m.	12-1p.m	1- 2p.m	2- 3p.m	3-4 pm
Cajeros requeridos	4	3	4	6	5	6	8	8

Costo por cajero:

cajeros a tiempo completo : 180

Cajeros a medio tiempo: 110

Restricciones:

-En este problema la restricción la establece la cantidad disponible de cada ingrediente

$X_1 + X_2 + X_3 \geq 4$ Restricción de empleados de 8-9 a.m.

$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 \geq 3$ Restricción de empleados de 9-10a.m.

$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 \geq 4$ Restricción de empleados de 10-11 a.m.

$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 \geq 6$ Restricción de empleados de 11-12 a.m.

$X_2 + X_5 + X_6 + X_7 \geq 5$ Restricción de empleados de 12-1 p.m.

$X_1 + X_6 + X_7 + X_8 \geq 6$ Restricción de empleados de 1-2 p.m.

$X_1 + X_2 + X_7 + X_8 \geq 8$ Restricción de empleados de 2-3 p.m.

$X_1 + X_2 + X_8 \geq 8$ Restricción de empleados de 3-4 p.m.

$X_3 + X_4 + X_5 + X_6 + X_7 + X_8 \leq 5$ Restricción de cantidad máxima de cajeros a tiempo parcial.

-En este caso, es lógico, que el número de empleados, debe ser positivo o iguales a cero, por lo que se establece la condición de no negatividad.

$$X_1, \ldots, X_8 \geq 0$$

Función Objetivo: Lo que se quiere optimizar el costo por cajeros, esto se representa a través de una función que depende de las variables de decisión X_1 ,.., X_8. Además, se considera que los cajeros a tiempo completo deben trabajar ocho horas, y cada hora se paga a 180 pesos, por lo que:

180*(8)= 1440 pesos por día

Y los cajeros a tiempo completo deben trabajar 3 horas con un pago de 110 pesos por hora:

110*3= 330 pesos por día

F.O. $Min\ Z = 1440\boldsymbol{X_1} + \mathbf{1400}\boldsymbol{X_2} + \mathbf{330}\boldsymbol{X_3} + \mathbf{330}\boldsymbol{X_4} + \mathbf{330}\boldsymbol{X_5} + \mathbf{330}\boldsymbol{X_6} + \mathbf{330}\boldsymbol{X_7} + \mathbf{330}\boldsymbol{X_8}$

En general el problema queda representado por un modelo de programación lineal que cuya estructura sería:

F.O. $Min\ Z = 1440\boldsymbol{X_1} + \mathbf{1400}\boldsymbol{X_2} + \mathbf{330}\boldsymbol{X_3} + \mathbf{330}\boldsymbol{X_4} + \mathbf{330}\boldsymbol{X_5} + \mathbf{330}\boldsymbol{X_6} + \mathbf{330}\boldsymbol{X_7} + \mathbf{330}\boldsymbol{X_8}$

S.A. (Sujeto a):

$X_1 + X_2 + X_3 \geq 4$ Restricción de empleados de 8-9 a.m.

$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 \geq 3$ Restricción de empleados de 9-10a.m.

$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 \geq 4$ Restricción de empleados de 10-11 a.m.

$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 \geq 6$ Restricción de empleados de 11-12 a.m.

$X_2 + X_5 + X_6 + X_7 \geq 5$ Restricción de empleados de 12-1 p.m.

$X_1 + X_6 + X_7 + X_8 \geq 6$ Restricción de empleados de 1-2 p.m.

$X_1 + X_2 + X_7 + X_8 \geq 8$ Restricción de empleados de 2-3 p.m.

$X_1 + X_2 + X_8 \geq 8$ Restricción de empleados de 3-4 p.m.

$X_3 + X_4 + X_5 + X_6 + X_7 + X_8 \leq 5$ Restricción de cantidad máxima de cajeros a tiempo parcial.

$\boldsymbol{X_A}, \boldsymbol{X_B} \geq \mathbf{0}$ (Condición de no negatividad).

2.4 Modelo de asignación

Ejercicio 1

Solución

1. Construir la matriz de costos, identificar el valor menor de cada renglón y restarlo a todos los elementos del renglón:

	Estrategia			
Empresa	*A*	*B*	*C*	*D*
Maqui	3	4	6	5
Solver austral	5	3	4	7
The JT	4	7	2	4
PH	7	6	8	3

Al restar, la matriz queda de la siguiente manera:

	Estrategia			
Empresa	*A*	*B*	*C*	*D*
Maqui	0	1	3	2
Solver austral	2	0	1	4
The JT	2	5	0	2
PH	4	3	5	0

2. De la matriz resultante, se identifica el valor menor por columna y se resta a los elementos de ésta.

	Estrategia			
Empresa	*A*	*B*	*C*	*D*
Maqui	0	1	3	2
Solver austral	2	0	1	4
The JT	2	5	0	2
PH	4	3	5	0

En este caso, cada renglón tiene un cero, que es el valor mínimo. Y en este punto, el método húngaro se detiene.

La asignación queda de la siguiente manera:

Empresa	*Estrategia*
Maqui	A
Solver austral	B
The JT	C
PH	D

Ejercicio 2

Solución:

1. Construir la matriz de costos, identificar el valor menor de cada renglón y restarlo a todos los elementos del renglón:

Tareas/Empleado				
	Carlos	Alondra	Javier	Levi
Limpieza	5	9	2	5
Producción de alimentos	3	1	8	2
Atención a clientes	1	1	6	3
Orden de bodegas	4	6	7	8

Tareas/Empleado				
	Carlos	Alondra	Javier	Levi
Limpieza	3	7	0	3
Producción de alimentos	2	0	7	1
Atención a clientes	0	0	5	2
Orden de bodegas	0	2	3	4

2. De la matriz resultante, se identifica el valor menor por columna y se resta a los elementos de ésta.

Tareas/Empleado				
	Carlos	Alondra	Javier	Levi
Limpieza	3	7	0	3
Producción de alimentos	2	0	7	1
Atención a clientes	0	0	5	2
Orden de bodegas	0	2	3	4

Se obtiene la matriz:

Tareas/Empleado				
	Carlos	Alondra	Javier	Levi
Limpieza	3	7	0	2
Producción de alimentos	2	0	7	0
Atención a clientes	0	0	5	1

Orden de bodegas	0	2	3	3

En este punto, ya existe al menos un cero en cada columna y en cada renglón.

La asignación queda de la siguiente manera:

Tareas/Empleado	
Limpieza	Javier
Producción de alimentos	Levi
Atención a cliente en caja	Alondra
Orden de bodegas	Carlos

Con esto se asegura que el riesgo de fallas será mínimo considerando al equipo con el que cuenta el líder José.

Referencias

MORALES M. P. (2012) Elaboración de material didáctico, Red tercer milenio.

CAMPOS, A.L. (2010) Neuroeducación: Uniendo las ciencias y la educación en la búsqueda del desarrollo humano. Organización de los estados americanos.

SALAS, R. E. (2008) Estilos de aprendizaje a la luz de la neurociencia. Cooperativa editorial Magistral.

NAVARRO J., M. (2008) Cómo diagnosticar y mejorar los estilos de aprendizaje. Procompal publicaciones.

-Libros

HILLIER, F. & LIEBERMAN G. (2015). *Investigación de Operaciones*. 10ª ed. McGraw Hill, México.

TAHA, H. (2012). *Investigación de Operaciones.* 9ª ed. PEARSON EDUCACIÓN, México.

WINSTON, W. (2004). *Operations Research: Applications and Algorithms.* 4ª ed. CENGAGE Learning, Canadá.

-Revistas

LANSITI, M. (2015). The History and Future of Operations. *Harvard Business Revie.* Consulta 27 de julio de 2016 18:00 hrs. Disponible en https://hbr.org/2015/06/the-history-and-future-of-operations#

VAN HOEVE, W. (s.f.) *Operations Research: Opportunities and Challenges.* Carnegie Mellon Tepper. School of Business. https://www.andrew.cmu.edu/user/vanhoeve/papers/u_pitt_2014_OR.pdf

Some Trends and Applications of Operational Research/Management Science to Operations Management

(Gallego Rendón, Ramón Alfonso;Escobar Zuluaga, Antonio; Toro Campo Eliana Mirledy)

CATHALIFAUD, A. y OSORIO, F. *Introducción a los conceptos básicos de la Teoria General de Sistemas.* Cinta de Moebio, núm. 3. Universidad de Chile, Santiago, Chile, 1998. Consulta 14 de mayo 2016 12:00 hrs en: http://www.redalyc.org/pdf/101/10100306.pdf

TOPETE, R. *Método sistémico para la resolución de problemas.* Caleidoscopio. UNAM Consulta 14 de mayo 2016 12:30 hrs en http://www.posgrado.unam.mx/publicaciones/ant_omnia/08/08.pdf

FUENTES ZENON, A.. *El enfoque de sistemas en la solución de problemas la eleboración del mpdelo conceptual*. UNAM.

PRAWDA, J. (1992). Métodos y modelos de Investigación de Operaciones. 12ed edición. Grupo Noriega Editores. México D.F.

TAHA, H. (2012). Investigación de Operaciones. 9ed Pearson Education. México.

WINSTON, W., (2004). Operation Research: Application and Algorithms. 4ed Thomsom Learning. Belmont, CA.

HILLER, S.FREDERICK; LIBERMAN, GERALD J.. (2010). Introducción a la Investigación de Operaciones. 9ª Edición México,D.F.: Mc Graw Hill.

OMAÑA G. Zoraida. Manual de Investigación de Operaciones.

PRAWDA, JUAN. (1996). *Métodos y Modelos de Investigación de Operaciones. Vol. 1*. Limusa, S. A. de C.V.,México.

WINSTON, W. (2004). *Operations Research: Applications and Algorithms.* 4ª ed. CENGAGE Learning, Canadá.

CASTILLO, E., CONEJO, A., PEDREGAL, P., GARCÍA, R., & Alguacil, N. (2002). Formulación y Resolución de Modelos de Programación Matemática en Ingeniería y Ciencia.

BASTIN, F. (2010). Modèles de Recherche Opérationnelle. Département d´Informatique et de Recherche Opérationnelle. Université de Montreal.

ESTRADA, J (sin fecha). Programación lineal. División de Ingeniería Mecánica e Industrial. Departamento de Sistemas, Sección de Investigación de Operaciones. Universidad Nacional Autónoma de México.

HILLIER, F., LIEBERMAN (2010). Introducción a la Investigación de Operaciones. 9ª edición McGraw-Hill. México.

PHPSIMPLEX. Sitio web de PHPSimplex <http://www.phpsimplex.com/>

PRAWDA, J. (1992). Métodos y modelos de Investigación de Operaciones. 12ed edición. Grupo Noriega Editores. México D.F.

SMOCH, L. (2013). Recherche Opérationnelle. Université du Littoral. Côte d´Opale, Pôle Lamartine.

TAHA, H. (2012). Investigación de Operaciones. 9ed Pearson Education. México.

WINSTON, W., (2004). Operation Research: Application and Algorithms. 4ed Thomsom Learning. Belmont, CA.

Lee J. Krajewski, Larry P. Ritzman (2000) *Administración de Operaciones. Estrategia y análisis*, 5 ta. Edición, PEARSON EDUCACIÓN, México.

Prawda, Juan. (1996). *Métodos y Modelos de Investigación de Operaciones. Vol. 1*. Limusa, S. A. de C.V.,México.

Francisco J. Jauffred M.; Alberto Moreno Bonett, J. Jesús Acosta F.. (1974). *Métodos de optimización*. Representaciones y servicios de Ingeniería . México.

Wayne L. Winston *() Investigación de Operaciones Aplicaciones y Algoritmos 4ta edición*. México.

Francisco J. Jauffred M.; Alberto Moreno Bonett, J. Jesús Acosta F.. (1974). *Métodos de optimización*. México, D.F.: Representaciones y servicios de Ingeniería .

Alonso R. Juana M., 2008 Flujo en redes y gestión de proyectos. Teoría y ejercicios resueltos España, Netbiblo, S.L.

Fuentes de Imágenes

http://www.kabytes.com/diseno/imagenes-de-maquetas-y-proyectos-en-alta-resolucion/

exordio.qfb.umich.mx

http://www.mastcibinium.ro/list.php?d=1