



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

---

**FACULTAD DE INGENIERÍA**

**IMPLEMENTACIÓN DE ALGORITMOS CONTINUOS DE  
MODOS DESLIZANTES EN UN SISTEMA PROTOTIPO  
DE FRENOS ABS Y ANÁLISIS COMPARATIVO CON UN  
CONTROLADOR PID**

**TESIS**

Que para obtener el título de

**INGENIERO ELÉCTRICO ELECTRÓNICO**

**P R E S E N T A**

FERNANDO DANIEL MONTES HERNÁNDEZ

**DIRECTOR DE TESIS**

DR. RAFAEL IRIARTE VIVAR BALDERRAMA



Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2018

---

JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dr. Leonid Fridman

Vocal: Dr. Rafael Iriarte Vivar Balderrama

Secretario: Dr. Marcos Angel Gonzalez Olvera

Primer suplente: Dr. Hoover Mújica Ortega

Segundo suplente: MI. Ulises Arturo Pérez Ventura

Esta tesis se realizó en el Laboratorio de Modos Deslizantes perteneciente a la División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería en la UNAM.

Director de Tesis:

---

D Dr. Rafael Iriarte V. Balderrama.

*Este trabajo va dedicado a mi familia  
Irma, Francisco y Laura.*



# Reconocimientos

---

Quiero agradecer a mi familia por todo el apoyo que me han dado para que me pueda superar como persona y por todos sus esfuerzos para ayudarme a cumplir mis metas.

Al Dr. Fridman y Dr. Rafael por todo su apoyo, desde el servicio social hasta el fin de este trabajo, muchas gracias por la confianza, compromiso y tiempo invertido a pesar de todos los contratiempos.

Al jurado por la confianza y tiempo que me regalaron a pesar de las circunstancias.

Muchas gracias a Ulises, Luis, Jesus y Carlos, que resolvieron cualquier duda que tenía y por siempre apoyarme.

A mis amigos, que me apoyaron y preguntaban siempre por mis avances.

A la Facultad de Ingeniería por ofrecerme tantos conocimientos y prepararme como ingeniero.

Finalmente a la UNAM por permitirme aspirar a una carrera universitaria para desarrollarme como profesionista y ser humano.

# Índice general

---

<b>Índice de figuras</b>	<b>VIII</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Motivación . . . . .	1
1.2. Estado del arte . . . . .	2
1.3. Formulación del problema . . . . .	3
1.4. Objetivo de la tesis . . . . .	4
1.5. Contribuciones . . . . .	4
1.6. Estructura de la tesis . . . . .	4
<b>2. Conceptos preliminares</b>	<b>5</b>
2.1. Control por modos deslizantes . . . . .	5
2.1.1. Introducción . . . . .	5
2.1.2. Conceptos principales de modos deslizantes . . . . .	6
2.1.2.1. Chattering . . . . .	13
2.1.2.2. Perturbaciones . . . . .	14
2.2. Algoritmos de control por modos deslizantes . . . . .	15
2.2.1. Primera generación . . . . .	15
2.2.2. Segunda generación . . . . .	16
2.2.3. Tercera generación . . . . .	16
2.2.4. Cuarta generación . . . . .	17
2.2.5. Quinta generación . . . . .	17
2.3. Diferenciadores y Observadores . . . . .	18
2.3.1. Diferenciadores robustos de orden arbitrario . . . . .	18
<b>3. Plataforma experimental</b>	<b>20</b>
3.1. Descripción de la planta . . . . .	20
3.1.1. Unidad ABS . . . . .	21
3.1.2. Unidad de potencia . . . . .	23
3.1.3. Botón de paro . . . . .	23
3.1.4. Tarjeta de adquisición de datos . . . . .	23
3.1.5. Software . . . . .	24
3.1.6. Puesta en marcha . . . . .	25

3.2. Dinámica del vehículo . . . . .	26
3.2.1. Fuerzas que actúan en un vehículo . . . . .	26
3.2.2. Fricción . . . . .	27
3.2.3. Deslizamiento . . . . .	29
<b>4. Modelo matemático</b>	<b>32</b>
4.1. Modelado del sistema de frenos ABS . . . . .	32
4.2. Simulaciones . . . . .	37
4.2.1. Respuesta libre . . . . .	37
4.2.2. Respuesta forzada . . . . .	38
4.3. Tiempo de muestreo . . . . .	40
<b>5. Esquema de control</b>	<b>43</b>
5.1. Esquema de control . . . . .	43
5.1.1. Implementación . . . . .	44
5.1.2. Saturación del controlador . . . . .	45
5.2. Diferenciadores por modos deslizantes. . . . .	46
5.2.1. Algoritmo diferenciador recursivo de Levant . . . . .	47
5.2.2. Algoritmo diferenciador no recursivo de Levant . . . . .	49
5.3. Algoritmos PI y PID . . . . .	51
5.3.1. Control PI . . . . .	51
5.3.2. Control PID . . . . .	51
5.4. Algoritmo Super-Twisting . . . . .	52
5.4.1. Sintonización . . . . .	52
5.4.1.1. Método 1 . . . . .	53
5.4.1.2. Método 2 . . . . .	54
5.5. Algoritmo Super-Twisting Extendido . . . . .	56
5.6. Algoritmo Twisting a través de integrador . . . . .	57
5.6.1. Sintonización . . . . .	57
5.6.1.1. Sintonización de la ganancia proporcional . . . . .	57
5.6.1.2. Sintonización de ganancias integrales . . . . .	58
<b>6. Resultados Experimentales</b>	<b>61</b>
6.0.1. Algoritmo de control PID . . . . .	62
6.1. Algoritmo Super-Twisting . . . . .	63
6.2. Algoritmo Super-Twisting Extendido . . . . .	64
6.2.1. Algoritmo con $r=2$ . . . . .	64
6.2.2. Algoritmo con $r=3$ . . . . .	65
6.2.3. Algoritmo con $r=4$ . . . . .	67
6.2.4. Algoritmo con $r=5$ . . . . .	68
6.3. Algoritmo Twisting a través de integrador . . . . .	69
6.4. Discusión de resultados . . . . .	70
6.4.1. Control en superficies húmedas . . . . .	72
6.4.2. Comparación de acciones de control . . . . .	73

6.4.3. Comparación de respuestas de control . . . . .	74
<b>7. Conclusiones</b>	<b>75</b>
7.1. Trabajo futuro . . . . .	76
<b>Bibliografía</b>	<b>77</b>



## Índice de figuras

---

2.1. Trayectorias en el plano de fase para un sistema de segundo orden [7] . . . . .	5
2.2. Convergencia asintótica para $f(x_1, x_2, t) = 0$ . . . . .	7
2.3. Convergencia a la vecindad $\Omega$ para $f(x_1, x_2, t) = \sin(2t)$ . . . . .	7
2.4. Variable de deslizamiento . . . . .	10
2.5. Convergencia asintótica para $f(x_1, x_2, t) = \sin(2t)$ . . . . .	11
2.6. Retrato de fase . . . . .	11
2.7. Amplificación al retrato de fase . . . . .	12
2.8. Control por modos deslizantes y amplificación . . . . .	12
2.9. Función signoide . . . . .	13
2.10. Clasificación de las perturbaciones . . . . .	14
3.1. Sistema de frenos ABS de Inteco . . . . .	20
3.2. Unidad ABS . . . . .	21
3.3. Unidad de potencia . . . . .	23
3.4. Software de control en simulink . . . . .	24
3.5. Bloque de control . . . . .	25
3.6. Fuerzas que actúan en un vehículo[9] . . . . .	26
3.7. Curva típica de deslizamiento contra coeficiente de fricción [10] . . . . .	29
3.8. Curvas de deslizamiento de frenado y deslizamiento lateral contra coeficiente de fricción y coeficiente de fuerza lateral[9] . . . . .	30
3.9. Curvas de deslizamiento de frenado contra coeficiente de fricción[9] . . . . .	31
4.1. Diagrama del sistema de frenos ABS . . . . .	34
4.2. Diagrama alternativo del sistema de frenos ABS . . . . .	35
4.3. Programa de simulación . . . . .	37
4.4. Respuesta libre . . . . .	38
4.5. Respuestas forzadas . . . . .	39
4.6. Respuestas con un tiempo de muestreo 100[ms] . . . . .	41
4.7. Respuestas con un tiempo de muestreo 1[ms] . . . . .	41
4.8. Respuestas con un tiempo de muestreo 100[μs] . . . . .	42
5.1. Esquema de control simplificado . . . . .	43
5.2. Implementación final . . . . .	44

5.3. Deslizamiento obtenido con el diferenciador de inteco . . . . .	46
5.4. Deslizamiento obtenido con el diferenciador de modos deslizantes . . . . .	46
5.5. Curvas para diferenciador recursivo . . . . .	48
5.6. Curvas para diferenciador no recursivo . . . . .	50
5.7. Curvas de sintonización de control STA, varios pesos de $\Delta$ . . . . .	53
5.8. Curvas para sintonización de control STA, ganancia proporcional $k_1$ . . . . .	54
5.9. Curvas para sintonización de control STA, ganancia integral $k_2$ . . . . .	55
5.10. Ganancias superior en inferior para $C_1$ . . . . .	57
5.11. Efectos de la ganancia $C_2$ . . . . .	58
5.12. Efectos de la ganancia $k_1$ . . . . .	59
5.13. Efectos de la ganancia $k_2$ . . . . .	59
5.14. Ganancias integrales mínimas . . . . .	60
5.15. Ganancias integrales adecuadas . . . . .	60
6.1. Curvas para control PID, seguimiento . . . . .	62
6.2. Curvas para control PID, deslizamiento de 0.2 . . . . .	62
6.3. Respuestas para $k_1 = 0.25, k_2 = 0.5$ con STA . . . . .	63
6.4. Respuestas para un deslizamiento de 0.2 . . . . .	63
6.5. Respuestas para $k_1 = 0.25, k_2 = 0.5$ con ESTA . . . . .	64
6.6. Respuestas para un deslizamiento de 0.2 . . . . .	65
6.7. Respuestas para $k_1 = 0.25, k_2 = 0.5$ con ESTA . . . . .	65
6.8. Respuestas para un deslizamiento de 0.2 . . . . .	66
6.9. Respuestas para $k_1 = 0.25, k_2 = 0.5$ con ESTA . . . . .	67
6.10. Respuestas para un deslizamiento de 0.2 . . . . .	67
6.11. Respuestas para $k_1 = 0.25, k_2 = 0.5$ con ESTA . . . . .	68
6.12. Respuestas para un deslizamiento de 0.2 . . . . .	68
6.13. Respuestas para un deslizamiento de 0.1 . . . . .	69
6.14. Respuestas para un deslizamiento de 0.2 . . . . .	69
6.15. Curvas comparativas . . . . .	72
6.16. Curvas comparativas de acción de frenado . . . . .	73
6.17. Curvas comparativas de respuesta de control . . . . .	74
6.18. Curvas comparativas de respuesta de control . . . . .	74

# Introducción

---

## 1.1. Motivación

La capacidad de moverse ha jugado un rol muy importante en el desarrollo de la humanidad. El ser humano busca un medio de transporte que le permita viajar grandes distancias a alta velocidad. El desarrollo de los vehículos de combustión interna ha hecho esto posible y fue lo que dio nacimiento al automóvil. El mundo del automovilismo ha progresado considerablemente desde los primeros modelos. El incremento de velocidad ha hecho que sea un gran reto el desarrollo de sistemas de seguridad. Dichos sistemas se encargan de proteger a los ocupantes del vehículo en situaciones peligrosas. El más importante es el sistema de frenos, el cual en principio debe detener el vehículo. El vehículo se debe detener con la mayor rapidez posible, reduciendo la distancia de frenado y manteniendo el control del auto.

En condiciones peligrosas de manejo, es posible que las llantas de un vehículo se bloqueen durante el frenado. Se dice que una llanta está bloqueada cuando su velocidad es mucho menor a la velocidad del vehículo. Las causas más comunes son:

- Superficies de camino mojadas o resbaladizas.
- Reacción de frenado abrupta por parte del conductor.

Cuando las llantas se bloquean, el vehículo resulta incontrolable. El sistema de frenado anti-bloqueo (ABS) detecta si alguna llanta está cerca de bloquearse y mantiene o reduce la presión del freno. Esto con el fin de mantener el control del vehículo.

Los dos objetivos principales del sistema de frenos ABS es prevenir que las llantas se bloqueen y disminuir la distancia de frenado maximizando la fuerza de frenado.

Dada la naturaleza no lineal de la fricción seca y debido a que las perturbaciones a las que se ve sometido el sistema de frenos ABS son desconocidas y/o difíciles de medir, tales como el terreno, condiciones climáticas, el estado de las llantas, la velocidad y la masa del auto. Por ello es necesaria la implementación de algoritmos de control que sean robustos ante estas incertidumbres. Los algoritmos de control por modos deslizantes (SMC) ofrecen una alternativa de control robusto.

## 1.2. Estado del arte

INTECO (Intelligent Technology for Control) Ltd. es una compañía dedicada al desarrollo de maquetas experimentales para el área académica. Las maquetas experimentales sirven para emular un sistema dinámico a los cuales se les diseña un algoritmo de control y así estudiar las características de los mismos.

El sistema ABS INTECO, es una maqueta experimental diseñada para emular los efectos dinámicos de la llanta de un automóvil al momento de frenar. Se han realizado varias pruebas con algoritmos por modos deslizantes. Sin embargo la mayoría de estos algoritmos son de primera generación, lo cual implica señales de control discontinuas y el problema de *chattering* asociado a ellas. Para atenuar los efectos del *chattering* se utilizaron aproximaciones de la función signo, llamadas signoides.

En la referencia [1] se prueban algoritmos por modos deslizantes, pero para reducir el efecto del *chattering*, se ocupan una aproximación a la función signo. Se obtuvieron resultados aceptables en simulación y de manera experimental.

En la referencia [2] se propone un control por modos deslizantes con predictores Grey-Verhulst, en el cual al probar en la simulación digital de fábrica se obtienen los resultados deseados pero con presencia de *chattering* en la señal de control, el cual disminuye con un cuasi relé.

En la referencia [8] se utiliza un control por modos deslizantes con un predictor Gray, el cual se prueba en simulación digital y experimental, obteniendo resultados esperados puesto que el control por modos deslizantes es robusto ante incertidumbres del sistema.

### 1.3. Formulación del problema

La teoría de control por modos deslizantes (SMC) resulta interesante desde el punto de vista de robustificación, debido a su insensibilidad ante perturbaciones externas, además de su capacidad para lograr la convergencia de los estados en tiempo finito. Sin embargo, dada la naturaleza discontinua de las señales de control, los algoritmos SMC presentan como inconveniente el fenómeno llamado *chattering*.

El *chattering* consiste de oscilaciones de frecuencia y magnitud finita. Este fenómeno resulta perjudicial debido a que provoca un alto desgaste en piezas mecánicas, reduce la precisión del controlador y provoca pérdidas de potencia. Es por ello que los SMC han estado en constante desarrollo para eliminar o atenuar los efectos del *chattering*. Una alternativa para aliviar este problema es el uso de señales continuas. Sin embargo el uso de señales continuas implica cierta pérdida de robustez ante cierta clase de perturbaciones.

Otro inconveniente es que la convergencia solo está asegurada para sistemas de grado relativo 1 o 2. Para sistemas de orden superior es necesario el diseño de una superficie, de la cual se puede asegurar la convergencia en tiempo finito, pero los estados convergerán asintóticamente al punto de operación.

Recientemente se han desarrollado los llamados algoritmos de orden superior continuos por modos deslizantes, basados en la estructura del algoritmo super twisting (STA). En teoría deben lograr la convergencia de estados en tiempo finito y disminuir los efectos del *chattering*. En la presente tesis se pretenden evaluar los algoritmos continuos por modos deslizantes y conocer sus efectos en un sistema de frenos ABS.

## 1.4. Objetivo de la tesis

- Evaluar el desempeño de algoritmos continuos de control por modos deslizantes en el sistema mecánico de frenos ABS de Inteco.
- Hacer medidas de desempeño de los algoritmos continuos, tomando como referencia de comparación los resultados obtenidos con el algoritmo Super-Twisting y el controlador PID.

## 1.5. Contribuciones

La contribución de esta tesis es la puesta en marcha, diseño y comparación de algoritmos continuos de control por modos deslizantes en el sistema mecánico de frenos ABS de Inteco.

## 1.6. Estructura de la tesis

Esta Tesis está organizada de la siguiente manera:

- En el capítulo 1 se explica el propósito de la tesis.
- En el capítulo 2 se da una introducción al control por modos deslizantes y se explican los algoritmos por modos deslizantes y los diferenciadores que se usaran en la tesis.
- En el capítulo 3 se explica el funcionamiento de la planta de Inteco y se incluyen algunos conceptos previos al modelado.
- En el capítulo 4 se desarrolla el modelo matemático de la planta, los resultados de la identificación paramétrica y las simulaciones.
- En el capítulo 5 se explica el esquema de control, los algoritmos que se probaran y se muestra la sintonización de los diferenciadores y controladores.
- En el capítulo 6 se muestran resultados para controladores PI, PID y los algoritmos por modos deslizantes. Además se hace un análisis comparativo entre los algoritmos PID y los de modos deslizantes.

# Conceptos preliminares

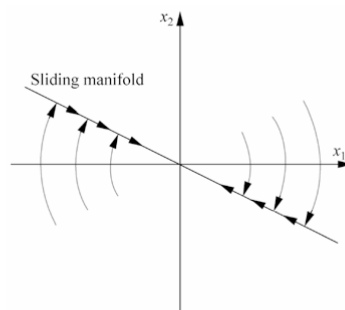
---

## 2.1. Control por modos deslizantes

### 2.1.1. Introducción

Todos los sistemas dinámicos presentan discrepancias con su modelo matemático, debido principalmente a la presencia de perturbaciones externas, variaciones paramétricas y dinámicas no modeladas. El diseño de sistemas de control que provean el comportamiento deseado en lazo cerrado del sistema, en presencia de estas perturbaciones es una tarea complicada. Con el fin de lidiar con este problema, se han desarrollado los métodos de control robusto, uno de los enfoques es la técnica por SMC.

Los controles por modos deslizantes pertenecen a la familia de controles de estructura variable. Se les llama así porque conmutan entre dos fases en las que la dinámica de la planta cambia totalmente. Estas fases son la fase de llegada y la fase de deslizamiento. En la fase de llegada los estados convergen a una superficie de deslizamiento, en la fase de deslizamiento, los estados deslizan (de ahí el nombre de modo deslizante) al origen. En la Figura 2.1) se muestra retrato de fase para un sistema de segundo orden, en donde se ve como se comportan las trayectorias en las fases de llegada y de deslizamiento.



**Figura 2.1:** Trayectorias en el plano de fase para un sistema de segundo orden [7]

El control por modos deslizantes es una técnica que puede ser aplicada en cualquier tipo de sistema: sistemas no lineales, sistemas MIMO (múltiple entrada, múltiple salida), sistemas de dimensión infinita y sistemas estocásticos. Una de las características más importantes de un SMC es su insensibilidad ante incertidumbres en los parámetros y perturbaciones externas (siempre y cuando estén acotadas y se conozca la cota) durante la fase de deslizamiento.

El SMC usa leyes de control basadas en una conmutación de alta velocidad, para alcanzar dos objetivos: primero llevar las trayectorias de los estados sobre una superficie en el espacio de estados llamada superficie de deslizamiento y segundo mantener las trayectorias estados del sistema en la superficie para todo tiempo subsecuente, logrando así que los estados “deslicen” a cero.

### 2.1.2. Conceptos principales de modos deslizantes

Considerando por ejemplo el sistema de segundo grado:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, & x_1(0) &= x_{10} \\ \dot{x}_2 &= u + f(x_1, x_2, t) & x_2(0) &= x_{20}\end{aligned}\tag{2.1}$$

Donde  $x_1$  y  $x_2$  representan los estados del sistema,  $u$  es la señal de control y el término  $f(x_1, x_2, t)$  la perturbación del sistema. Se asume que la perturbación está acotada de por  $f(x_1, x_2, t) \leq L > 0$ . Donde  $L$  se asume conocida.

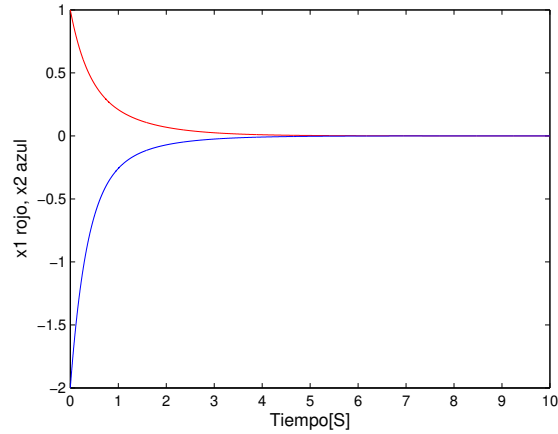
El objetivo principal es diseñar una ley de control  $u = u(x_1, x_2)$  que logre llevar los estados a cero, aún en presencia de la perturbación desconocida, pero acotada.

**Ejemplo 1** Usando como ley de control por retroalimentación de estados:

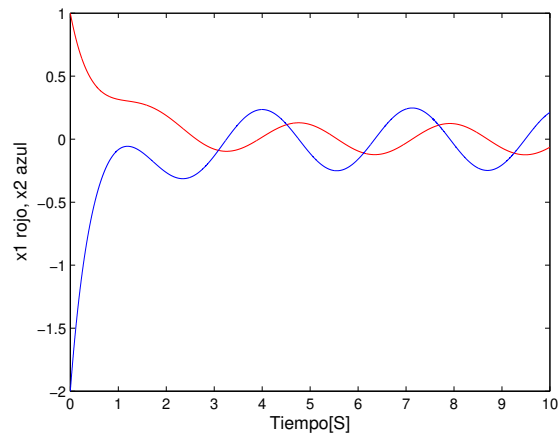
$$u = -k_1x_1 - k_2x_2, \quad k_1 > 0, k_2 > 0\tag{2.2}$$

La cual solo puede asegurar convergencia a cero cuando  $f(x_1, x_2, t) \equiv 0$  o el traslado de los estados a una vecindad acotado  $\Omega(k_1, k_2, L)$  del origen cuando  $f(x_1, x_2, t) \leq L > 0$ . Realizando la simulación para las condiciones iniciales  $x_1(0) = 1$ ,  $x_2(0) = -2$  y las ganancias  $k_1 = 3$ ,  $k_2 = 4$ , se obtienen que los estados convergen tal como muestra las figuras, para las perturbaciones  $f(x_1, x_2, t) = 0$  (2.2) y  $f(x_1, x_2, t) = \sin(2t)$  (2.3) respectivamente.





**Figura 2.2:** Convergencia asintótica para  $f(x_1, x_2, t) = 0$



**Figura 2.3:** Convergencia a la vecindad  $\Omega$  para  $f(x_1, x_2, t) = \sin(2t)$

Ahora el objetivo es lograr convergencia asintótica en presencia de perturbaciones desconocidas, pero acotadas. Para lograrlo se introduce una dinámica compensadora del sistema descrito por (2.1). Una elección es una ecuación diferencial lineal homogénea invariante en el tiempo:

$$x_2 + cx_1 = 0, c > 0 \quad (2.3)$$

Dada  $x_2(t) = \dot{x}_1(t)$ , una solución general para la ecuación (2.3) y su derivada están dadas por:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_1(0)e^{-ct} \\ x_2(t) &= \dot{x}_1(t) = -cx_1(0)e^{-ct} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Donde  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$  convergen a cero exponencialmente y no existe efecto de la perturbación  $f(x_1, x_2, t)$  en la dinámica de orden reducido dada por (2.4). Para obtener esta

compensación, se introduce una variable en el espacio de estados del sistema (2.1).

$$\sigma = \sigma(x_1, x_2) = x_2 + cx_1, c > 0 \quad (2.5)$$

Para llevar a cero a  $x_1$  y a  $x_2$  de manera asintótica, con un tasa de convergencia dada por (2.4), en presencia de la perturbación acotada  $f(x_1, x_2, t)$ , se debe llevar la variable  $\sigma$  a cero en tiempo finito, por acción del control  $u$ . Para lograr esto, se recurren a las técnicas basadas en rediseño de Lyapunov a las dinámicas de  $\sigma$  y su derivada usando las ecuaciones (2.1) y (2.5):

$$\dot{\sigma} = c\dot{x}_1 + \dot{x}_2 = cx_2 + f(x_1, x_2, t) + u, \quad \sigma(0) = \sigma_0 \quad (2.6)$$

Una función candidata de Lyapunov para la dinámica de  $\sigma$  tiene la forma:

$$V = \frac{1}{2}\sigma^2 \quad (2.7)$$

Para lograr convergencia global asintótica de la ecuación (2.6) al punto de equilibrio  $\sigma = 0$ , se debe satisfacer las siguientes condiciones:

- (a)  $\dot{V} < 0$  para  $\sigma \neq 0$   $\sigma = 0$  y
- (b)  $\lim_{|\sigma| \rightarrow \infty} V = \infty$ ,

La condición (b) se satisface para  $V$  en (2.7). Con el fin de lograr convergencia en tiempo finito (estabilidad global), se modifica la condición (a) de la siguiente forma:

$$\dot{V} \leq -\alpha V^{\frac{1}{2}}, \alpha > 0 \quad (2.8)$$

En efecto, separando variables e integrando la desigualdad (2.8) sobre el intervalo de tiempo  $0 \leq \tau \leq t$  obtenemos:

$$V^{\frac{1}{2}}(t) \leq -\frac{1}{2}\alpha t + V^{\frac{1}{2}}(0) \quad (2.9)$$

Como consecuencia,  $V(t)$  alcanza cero en el tiempo finito  $t_r$ , que esta acotado por:

$$t_r \leq \frac{2V^{\frac{1}{2}}(0)}{\alpha} \quad (2.10)$$

Por lo tanto, se calcula el control  $u$  que satisface la ecuación (2.8) llevando la variable  $\sigma$  a cero en tiempo finito y manteniendola ahí para tiempos subsecuentes. La derivada de  $V$  es calculada como:

$$\dot{V} = \sigma\dot{\sigma} = \sigma(cx_2 + f(x_1, x_2, t) + u) \quad (2.11)$$

Asumiendo  $u = -cx_2 + v$  y sustituyendo en (2.11) se obtiene:

$$\dot{V} = \sigma(f(x_1, x_2, t) + v) = \sigma f(x_1, x_2, t) + \sigma v \leq |\sigma|L + \sigma v \quad (2.12)$$

Seleccionando  $v = -\rho \text{sign}(\sigma)$  donde:

$$\text{sign} = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad (2.13)$$

y:

$$\text{sign}(0) \in [-1, 1] \quad (2.14)$$

Con  $\rho > 0$ , sustituyendo en (2.12) llegamos a:

$$\dot{V} \leq |\sigma|L - |\sigma|\rho = -|\sigma|(\rho - L) \quad (2.15)$$

Tomando en consideración la ecuación (2.7), la condición (2.8) puede ser reescrita:

$$\dot{V} \leq -\alpha V^{\frac{1}{2}} = -\frac{\alpha}{\sqrt{2}}|\sigma|, \quad \alpha > 0 \quad (2.16)$$

Combinando las ecuaciones ((2.15)) con (2.16) se obtiene:

$$\dot{V} \leq -|\sigma|(\rho - L) = -\frac{\alpha}{\sqrt{2}}|\sigma| \quad (2.17)$$

Finalmente, la ganancia del control  $\rho$  es seleccionada como:

$$\rho = L + \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \quad (2.18)$$

Por consecuencia, la ley de control que lleva a  $\sigma$  a cero en tiempo finito (2.10) es:

$$u = -cx_2 - \rho \text{sign}(\sigma) \quad (2.19)$$

**Observación 1** Es obvio que  $\dot{\sigma}$  debe ser una función del control  $u$  con el fin de diseñar satisfactoriamente en las ecuaciones (2.18) o (2.19). Esta observación debe ser tomada en cuenta mientras se diseña la variable dada en (2.5).

**Observación 2** El primer componente de la ganancia de control (2.18) se diseña para compensar la perturbación acotada  $f(x_1, x_2, t)$  mientras el segundo término  $\frac{\alpha}{\sqrt{2}}$  es responsable para determinar el tiempo (finito) de convergencia de la superficie de deslizamiento dada por (2.10). Un valor grande  $\alpha$ , implica un tiempo de convergencia pequeño.

Ahora es tiempo de hacer definiciones que interpreten la variable (2.5), la dinámica reducida deseada (2.3), y la función de control (2.19) en un nuevo paradigma.

**Definición 1** La variable (2.5) es llamada variable de deslizamiento.

**Definición 2** Las ecuaciones (2.3) y (2.5) se reescriben:

$$\sigma = x_2 + cx_1 = 0, \quad c > 0 \quad (2.20)$$

Corresponde a una línea recta en el espacio de estados del sistema (2.1) y hace referencia a la superficie de deslizamiento.

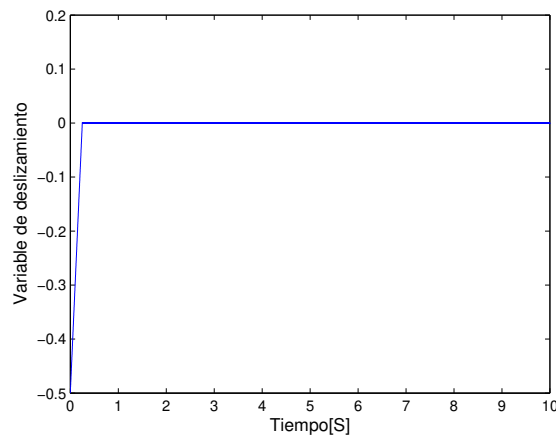
La condición (2.8) es equivalente:

$$\sigma \dot{\sigma} \leq -\frac{\alpha}{\sqrt{2}} |\sigma| \quad (2.21)$$

y es usualmente es llamado como la condición de llegada. Conociendo la condición de llegada (2.21) o sabiendo que existe, las trayectorias del sistema (2.1) son llevadas hacia la superficie de deslizamiento (2.20) y permanecer ahí para todo tiempo futuro.

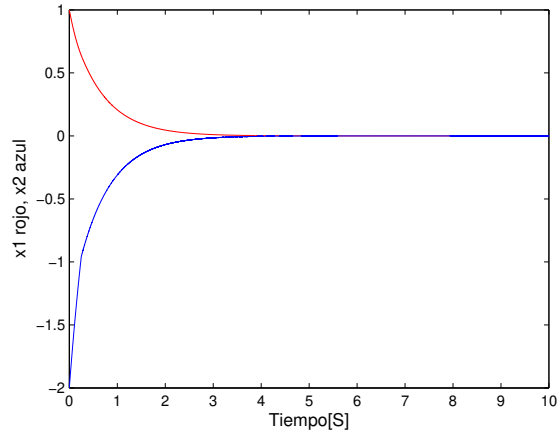
**Definición 3** El control  $u = u(x_1, x_2)$  en (2.19) que lleva las variables de estado  $x_1, x_2$  a la superficie de deslizamiento (2.20) en tiempo finito  $t_r$ , y la mantiene en presencia de la perturbación acotada  $f(x_1, x_2, t)$ , es llamado controlador por modos deslizantes y el modo de deslizamiento ideal toma lugar en el sistema (2.1) para todo  $t > t_r$ .

**Ejemplo 2** Los resultados de la simulación del sistema (2.1) con la ley de control por modos deslizantes (2.5), (2.19), con las condiciones iniciales  $x_1(0) = 1, x_2(0) = -2$ , la ganancia de controlador  $\rho = 2$ , la tasa de  $c = 1.5$  y la perturbación  $f(x_1, x_2, t) = \sin(2t)$  se pueden ver en las imágenes (2.4) a (2.8).



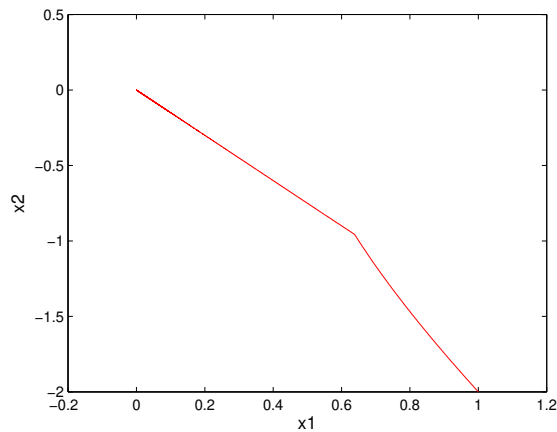
**Figura 2.4:** Variable de deslizamiento

La imagen (2.4) muestra la convergencia en tiempo finito de la variable de deslizamiento converge a cero.



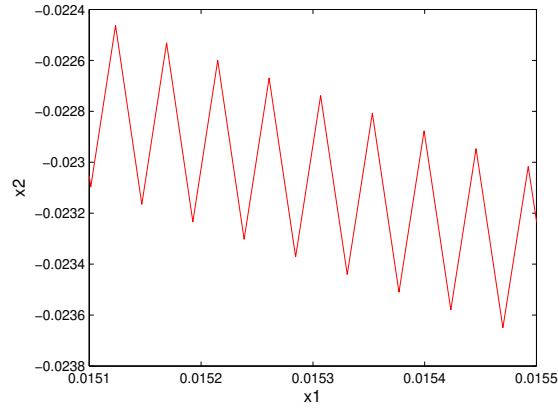
**Figura 2.5:** Convergencia asintótica para  $f(x_1, x_2, t) = \sin(2t)$

En la imagen (2.5) se puede ver la convergencia asintótica de las variables de estado  $x_1, x_2$  a cero, en presencia de la perturbación acotada  $f(x_1, x_2, t) = 2 \sin(2t)$ .



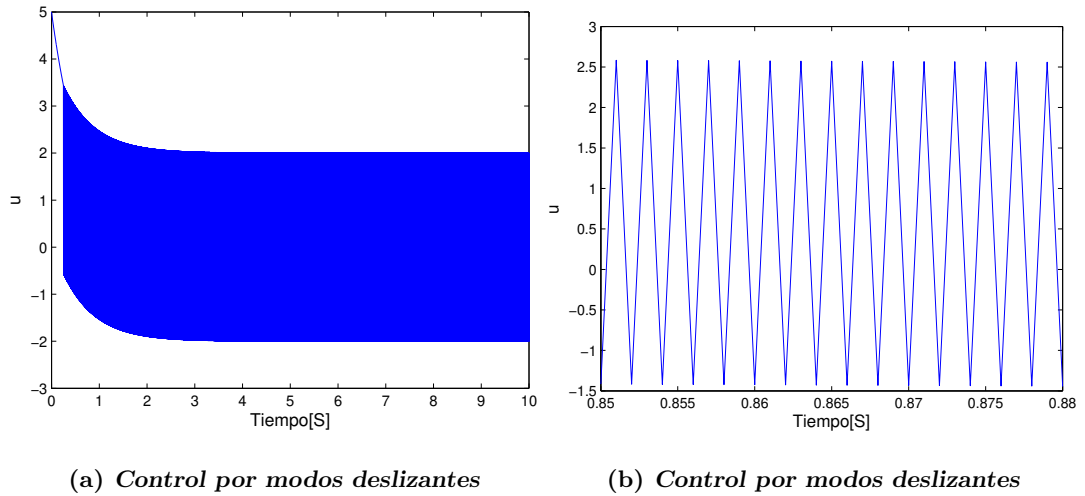
**Figura 2.6:** Retrato de fase

El retrato de fase se muestra en (2.6), ejemplificando el fenómeno de fase de llegada (cuando las trayectorias de los estados son llevadas a la superficie de deslizamiento) y la fase de deslizamiento (cuando las trayectorias de los estados se mueven hacia el origen a lo largo de la superficie de deslizamiento).



**Figura 2.7:** Amplificación al retrato de fase

Amplificando una porción del retrato de fase (2.7) se ilustra el movimiento de baja amplitud y alta frecuencia, que las variables de estado exhiben mientras están en la fase de deslizamiento.



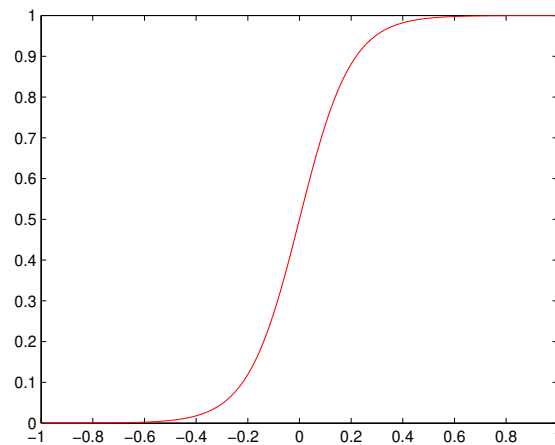
**Figura 2.8:** Control por modos deslizantes y amplificación

El control por modos deslizantes presentado en las imágenes (2.8), es un control que conmuta a una alta frecuencia. [12]

### 2.1.2.1. Chattering

El uso de funciones que conmutan de alta velocidad en el controlador conlleva un problema llamado *chattering*, el cual se produce por que las funciones signo son discontinuas, por la naturaleza discreta de los equipos de cómputo y otras imperfecciones en el lazo de control. El chattering suele producir vibraciones y desgaste en las partes mecánicas y en los actuadores.

Para reducir los efectos del chattering se pueden implementar aproximaciones a la función signo, llamadas signoide, ver figura (2.9). Otra opción es la introducción de integradores a las señales de control discontinuo e incrementar el orden del algoritmos de control por modos deslizantes. También se pueden utilizar modos deslizantes de ganancia adaptable y los llamados modos deslizantes de orden superior.



**Figura 2.9:** Función signoide

Uno de los controladores mejores citados es el algoritmo Super-Twisting (STA por sus siglas en inglés). El cual es un algoritmo de segundo orden continuo, siendo esto último lo que permite atenuar los efectos del *chattering* mientras hace que los estados del sistema (2.1) converjan a cero asintóticamente.

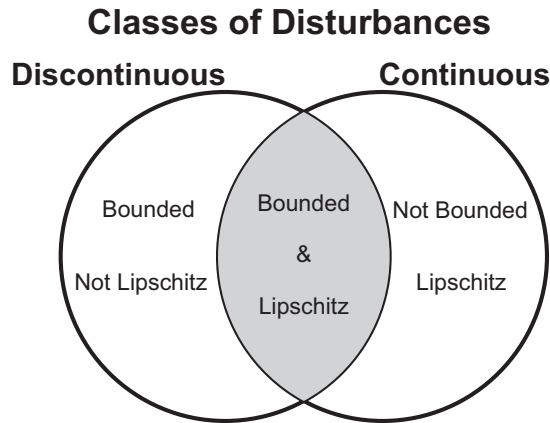
### 2.1.2.2. Perturbaciones

Las perturbaciones se pueden dividir en 2 tipos principales. La primera clasificación se refiere a si son acotadas o no acotadas. La segunda clasificación se refiere a si son continuas o no continuas.

Se entiende por funciones acotadas aquellas para las que existe un valor  $k$  para el que cualquier valor de la función  $f(x, t) \leq k$ .

Ahora una función continua es aquella que para dos puntos cercanos del dominio se producen pequeñas variaciones en la función. En otras palabras cumplen la condición Lipschitz[5], por el que una función  $f(t, x)$  satisface la desigualdad:

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\| \quad (2.22)$$



**Figura 2.10:** Clasificación de las perturbaciones

Los algoritmos de control por modos deslizantes permiten rechazar perturbaciones de cierta naturaleza, por ejemplo, los controladores discontinuos por modos deslizantes son insensibles ante perturbaciones acotadas (inclusive discontinuas) mientras que los controladores continuos compensan en forma exacta perturbaciones Lipschitz (inclusive no acotadas). La Figura 2.10 muestra las clases de perturbaciones que permiten rechazar los algoritmos de SMC a partir de la naturaleza de su señal de control, haciendo énfasis en la intersección (perturbaciones acotadas y Lipschitz) como el subconjunto de perturbaciones admisibles para nuestro sistema de control.



## 2.2. Algoritmos de control por modos deslizantes

Un algoritmo o ley de control es una ecuación matemática que compensa las desviaciones que tenga un sistema de un estado deseado. En esta sección se hará una revisión histórica de los algoritmos de control por modos deslizantes que se han desarrollado a lo largo de los años, así como sus características. Para efectos de esta tesis, se utilizarán las siguientes notaciones:

$$[\cdot]^p = |\cdot|^p \text{sign}(\cdot) \quad (2.23)$$

Donde  $\cdot \in \mathbb{R}$  y  $p \in \mathbb{R}$ . para el caso de  $p = 0$ , se tiene:

$$[\cdot]^0 = \text{sign}(\cdot) \quad (2.24)$$

### 2.2.1. Primera generación

La primera generación de controles por modos deslizantes fue introducida por el profesor Utkin en 1980, creando un procedimiento de 2 pasos para el diseño de controladores [13]. Este controlador tiene las siguientes características:

- Es un control discontinuo.
- Requiere el diseño de una variable de deslizamiento de grado relativo uno.
- La convergencia de los estados a la superficie de deslizamiento es exponencial para el sistema (2.1).
- El controlador solo puede rechazar perturbaciones acopladas y acotadas.
- También reduce el orden de las ecuaciones de deslizamiento.

Su ley de control es:

$$u = k_1 [x]^0 = k_1 \text{sign}(x) \quad (2.25)$$

Las desventajas de estos controladores es que dado que usan leyes de control discontinuas, provocando chattering. Otra desventaja es que se requiere diseño de la variable de deslizamiento para sistemas de orden mayor que 1.

### 2.2.2. Segunda generación

Los algoritmos de SMC de segundo orden (SOSMC por sus siglas en inglés), fueron introducidos por A. Levant[3]. Sea el sistema de segundo de la ecuacion (2.1). El objetivo de los SOSM fue diseñar un controlador  $u$  tal que el origen del sistema es estable en tiempo finito, a pesar de las perturbaciones  $f(x, t)$ , si  $|f(x, t)| < \Delta$  (perturbaciones acotadas).

El algoritmo de control más simple de segunda generación es el “Twisting algorithm” (TA) [3], el cual para un sistema de segundo orden toma la forma :

$$u = -k_1|x_1|^0 - k_2|x_2|^0 = -k_1\text{sign}(x_1) - k_2\text{sign}(x_2), \quad k_2 > k_1 + \Delta, k_2 > \Delta \quad (2.26)$$

Este controlador no requiere el diseño de una variable de deslizamiento y provee convergencia en tiempo finito de los estados siempre y cuando se conozca la cota de la perturbación  $\Delta$  y escogiendo los parámetros  $k_1$  y  $k_2$  apropiados. La señal de control es discontinua y puede rechazar perturbaciones acotadas.

### 2.2.3. Tercera generación

El “super twisting algorithm” (STA), es un algoritmo de segundo orden (SOSM). Su principal ventaja es que la señal de control es continua y permite compensar las perturbaciones Lipschitz. Sin embargo requiere el diseño de una variable de deslizamiento con grado relativo uno (por ejemplo 2.20) y como es de esperarse, la convergencia de los estados es asintóticamente. Para el sistema (2.1) con la superficie de deslizamiento (2.20), se define el algoritmo STA como:

$$\begin{aligned} u &= -k_1|\sigma|^{1/2}\text{sign}(\sigma) + v, \\ \dot{v} &= -k_2\text{sign}(\sigma) \end{aligned} \quad (2.27)$$

Donde  $\sigma$  es una función de los estados  $x_1$  y  $x_2$ . Normalmente las ganancias son escogidas según:  $k_1 > \sqrt{k_2 + \Delta}, k_2 > \Delta$  [12].

#### 2.2.4. Cuarta generación

Los controles por modos deslizantes de orden arbitrario fueron desarrollados en el año 2001, combinan el control relé con modos deslizantes terminal jerárquico[3]. Estos controladores resuelven el problema de estabilización en tiempo finito para salidas de grado relativo arbitrario, en presencia de ciertas perturbaciones. Si el grado del controlador es igual o menor que el del sistema, la señal de control será discontinua y solo podrá compensar perturbaciones que cumplan la condición de Lipschitz. Si el grado del control es mayor, entonces podrá compensar perturbaciones no acotadas. Dado el grado relativo  $r$  de la salida, los controladores HOSM (High Order Sliding Mode) se construyen utilizando una recursión, generalizando algoritmo singular terminal.

$$\begin{aligned} u &= -\alpha\Psi_{r-1,r}(\sigma, \dot{\sigma}, \dots, \sigma^{r-1}) \\ \Psi_{i,r} &= \text{sign}(\sigma^i + \beta_i N_{i,r} \Psi_{i-1,r}) \\ N_{i,r} &= (|\sigma|^{q/r} + |\dot{\sigma}|^{q/(r-1)} + \dots + |\sigma^{i-1}|^{q/(r-i+1)}) \end{aligned} \quad (2.28)$$

Para el sistema (2.1), un algoritmo discontinuo de esta naturaleza se puede escribir como:

$$u = -\alpha\text{sign}(x_2) + |\sigma|^{1/2}\text{sign}(x_1) \quad (2.29)$$

Donde  $\alpha$  es la ganancia del controlador.

#### 2.2.5. Quinta generación

Son los algoritmos continuos de orden superior. Para el sistema (2.1) el algoritmo Twisting continuo se puede escribir como

$$\begin{aligned} u &= -k_1[x_1]^{1/3} - k_2[x_2]^{1/2} + v, \\ \dot{v} &= -k_3[x_1]^0 - k_4[x_2]^0, \end{aligned} \quad (2.30)$$

el cual genera una señal de control es continua y permite rechazar perturbaciones Lipschitz. Además de que los estados del sistema convergen a cero en tiempo finito.

## 2.3. Diferenciadores y Observadores

Como se ha visto, los controladores de segundo orden por modos deslizantes son capaces de hacer que la variable de deslizamiento tienda a cero en tiempo finito, para sistemas de segundo orden y provee señales de control continuas.

Los llamados HOSM resuelven este problema para cualquier grado relativo, pero necesitan más información. Usualmente requieren las derivadas de las variables de deslizamiento.

Una propiedad de la estructura del STA es que permite construir diferenciadores robustos y exactos de orden arbitrario.

### 2.3.1. Diferenciadores robustos de orden arbitrario

Sea la señal de entrada  $f(t)$  una función definida en  $[0, \infty)$  conformada por ruido Lebesgue acotado y medible con características desconocidas, y de una señal base  $f_0(t)$  desconocida cuya  $k$ -ésima derivada es conocida y acotada por la constante Lipschitz  $L > 0$  [12]. El problema de encontrar una estimación robusta en tiempo real de  $f_0(t), \dot{f}_0(t), \dots, f_0^k(t)$  puede ser resuelta por el diferenciador:

$$\begin{aligned}
 \dot{Z}_0 &= v_0, v_0 = -\lambda_k L^{\frac{1}{k+1}} |Z_0 - f(t)|^{\frac{k}{k+1}} \text{sign}(Z_0 - f(t)) + Z_1 \\
 \dot{Z}_1 &= v_1, v_1 = -\lambda_{k-1} L^{\frac{1}{k}} |Z_1 - v_0|^{\frac{k-1}{k}} \text{sign}(Z_1 - v_0) + Z_2 \\
 &\vdots \\
 \dot{Z}_{k-1} &= v_{k-1}, v_{k-1} = -\lambda_1 L^{\frac{1}{2}} |Z_{k-1} - v_{k-2}|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(Z_{k-1} - v_{k-2}) + Z_k \\
 \dot{Z}_k &= -\lambda_0 L \text{sign}(Z_k - v_{k-1})
 \end{aligned} \tag{2.31}$$

Si los parámetros  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k > 0$  son escogidos correctamente, se cumplirán las siguientes igualdades en ausencia de ruido en la entrada, después de un tiempo finito transitorio:

$$Z_0 = f_0(t), \dots, Z_i = v_{i-1} = f_0^{i-1}(t), i = 1, 2, \dots, k$$

La estructura de este diferenciador es recursiva. Una posible elección para los parámetros del diferenciador, siempre que  $K < 5$  es  $\lambda_0 = 1.1, \lambda_1 = 1.5, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 5, \lambda_4 = 8, \lambda_5 = 12$ . Otra posibilidad es  $\lambda_0 = 1.1, \lambda_1 = 1.5, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 5, \lambda_4 = 8, \lambda_5 = 12$ .

Existe una forma no recursiva de este diferenciador. Este se obtiene sustituyendo el valor de  $v_0$  de la primera línea de la ecuación (2.31) en la segunda línea, luego valor  $v_1$  de tercera en la cuarta, y así sucesivamente. Con lo que se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \dot{Z}_0 &= -\lambda'_k L^{\frac{1}{k+1}} |Z_0 - f(t)|^{\frac{k}{k+1}} \text{sign}(Z_0 - f(t)) + Z_1 \\
 \dot{Z}_1 &= -\lambda'_{k-1} L^{\frac{2}{k+1}} |Z_0 - f(t)|^{\frac{k-1}{k+1}} \text{sign}(Z_0 - f(t)) + Z_2 \\
 &\vdots \\
 \dot{Z}_{k-1} &= -\lambda'_1 L^{\frac{1}{k+1}} |Z_0 - f(t)|^{\frac{k}{k+1}} \text{sign}(Z_0 - f(t)) + Z_k \\
 \dot{Z}_k &= -\lambda'_0 L \text{sign}(Z_0 - f(t))
 \end{aligned} \tag{2.32}$$

Donde las ganancias quedan:

$$\begin{aligned}
 \lambda'_k &= \lambda_k \\
 \lambda'_i &= \lambda_i \lambda_i^{\prime \frac{i}{i+1}} \\
 i &= k-1, k-2, \dots, 0
 \end{aligned}$$

## Plataforma experimental

---

### 3.1. Descripción de la planta

La planta en la que se realizaran las pruebas es el simulador de sistema de frenos anti-bloqueo INTECO. Este simulador está compuesto por las siguientes partes:

- Unidad ABS.
- Unidad de potencia.
- Botón de paro de emergencia.
- Tarjeta de adquisición de datos.



**Figura 3.1:** Sistema de frenos ABS de Inteco

### 3.1.1. Unidad ABS

Es la parte principal del simulador. Está formado por las siguientes partes:

1. Carcasa de metal
2. Motor plano de la rueda inferior
3. Rueda inferior “*car*”
4. Brazo de la rueda superior
5. Disco del freno, *caliper* y *mangueta de suspensión*
6. Motor plano de la palanca de freno
7. Rueda superior “*wheel*”
8. Codificadores rotatorios de la rueda superior e inferior, también llamados codificadores incrementales.

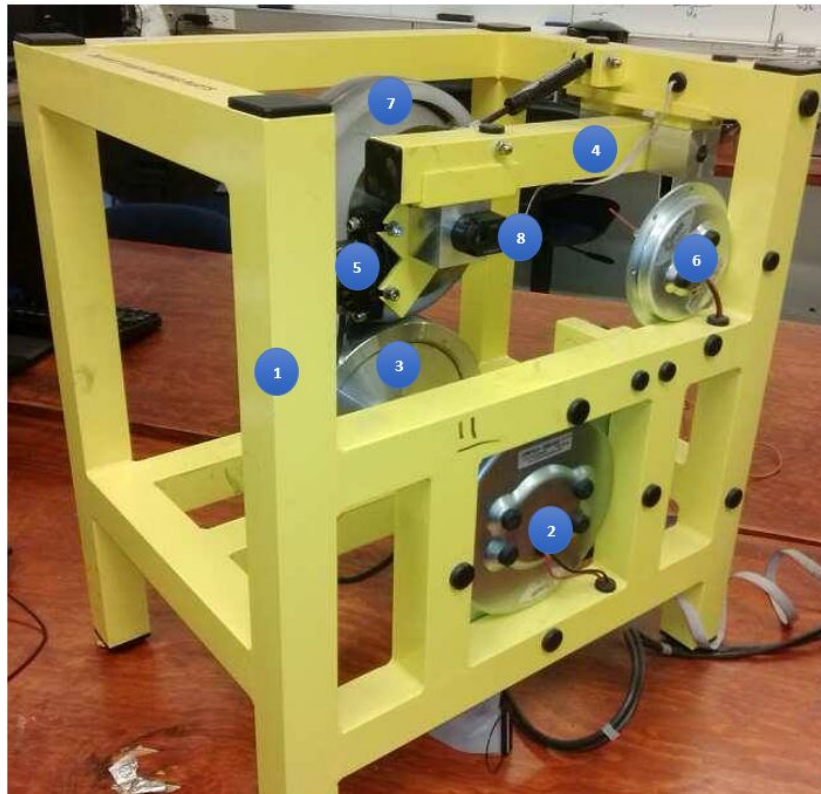


Figura 3.2: Unidad ABS

**La carcasa de metal**, su fin es mantener y dar estructura para albergar el simulador, así como proteger al usuario de las partes móviles.

**El motor plano de la llanta inferior**, es un motor plano DC GPM16LR, de baja inercia con capacidad de velocidad de 1 a 3600 RPM a 28V, aunque para efectos de simulación, la velocidad máxima será de 1800RPM. Este motor lleva al sistema a las condiciones iniciales deseadas para la simulación. Acelera la llanta inferior hasta la velocidad deseada y después se apaga.

**La rueda inferior**, es un volante de inercia de aluminio. Emula el terreno que va a recorrer el vehículo, así como su velocidad y la inercia de la masa suspendida del vehículo.

**El brazo de la rueda superior** simula la suspensión de un vehículo, cuenta con un amortiguador que absorbe los movimientos bruscos que sucedan en el proceso de frenado.

**El disco de freno, caliper y mangueta de suspensión** son parte del sistema de frenos.

**El motor plano de la palanca de freno** es un motor plano DC GPN9 de 5V con un par máximo de 0.3Nm. Simula el cilindro maestro, ya que transmite la fuerza del operador y los actuadores del ECU al *caliper*.

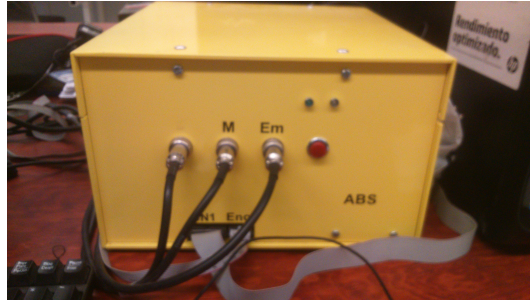
**La rueda superior** es una rueda de caucho. Su función es emular la llanta de vehículo.

**Los codificadores rotatorios de la rueda superior e inferior** son 2 codificadores HEDM-5505 J06, de 1024 conteos por revolución pero una resolución de 4096 pulsos por revolución. El codificador rotatorio de la rueda superior mide el desplazamiento angular de la llanta del vehículo. El codificador rotatorio de la rueda inferior mide el desplazamiento del vehículo a partir del desplazamiento angular multiplicado por el radio de la rueda inferior.



### 3.1.2. Unidad de potencia

La principal función de la unidad de potencia es conectar la tarjeta de adquisición de datos con la unidad ABS, acondicionando la señal entre los dispositivos.



**Figura 3.3:** Unidad de potencia

### 3.1.3. Botón de paro

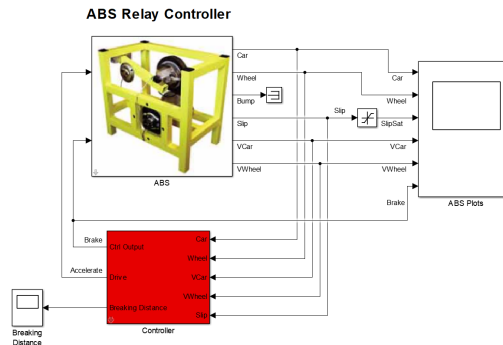
Es un botón de tipo normalmente no cerrado. Corta la energía de la unidad de potencia y detiene el sistema en caso de alguna emergencia.

### 3.1.4. Tarjeta de adquisición de datos

La tarjeta de adquisición de datos en tiempo real es una RTDACC4/PCI con chip FPGA XILINX Spartan-II. Cuenta con 200 000 compuertas lógicas.

### 3.1.5. Software

El software para el control de la maqueta y la adquisición de datos es un programa en simulink, proporcionado por el fabricante, como el que se muestra en la figura:



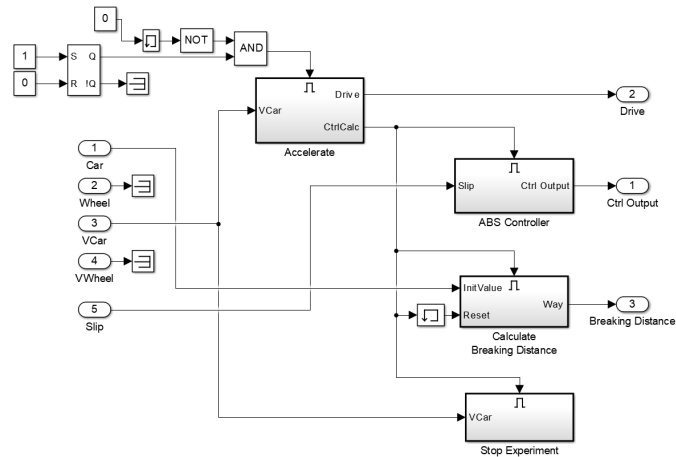
**Figura 3.4:** Software de control en simulink

Es en este programa en el que se realizara la implementación de los controladores. Esta conformado por dos bloques. El primero se encarga de la comunicación con la plataforma experimental (bloque amarillo de la imagen (3.4)). Permite la adquisición de las señales:

- *Car*: esta señal corresponde a la posición de la rueda inferior, la cual es equivalente a la distancia que recorre el auto, esta dada en [m].
- *Wheel*: esta señal corresponde a la posición de la rueda superior, la cual es equivalente a la distancia que recorre la llanta, esta dada en [m].
- *VCar*: esta señal corresponde a la velocidad angular de la rueda inferior, esta dada en [RPM].
- *VWheel*: esta señal corresponde a la velocidad angular de la rueda superior, esta dada en [RPM].
- *Slip*: es la diferencia de velocidades entre las dos ruedas.

El segundo bloque se encarga de el control de la rueda (bloque rojo de la imagen (3.4)). De este bloque se calculan y envian las señales:

- *Ctrl Output*: Esta es la señal de control calculada, corresponde a un voltaje normalizado de 0 a 1. Este se aplica al motor de la palanca de freno.
- *Drive*: Es la señal para controlar el motor de la rueda inferior. Permite acelerar la rueda hasta la condición inicial. Esta normalizada de 0 a 1.
- *Brake Distance*: Corresponde a la distancia de frenado vehículo.



**Figura 3.5:** Bloque de control

El bloque de control está compuesto por sub-bloques lógicos. El primero de estos sub-bloques es “accelerate” (3.5), el cual acelera la rueda a la condición inicial dada. Cuando la alcanza, deja de acelerar la rueda y se ejecuta el sub-bloque de “ABS controller” (3.5), en donde se colocará el algoritmo de control que se desea probar. Finalmente se tiene 2 sub-bloques más, uno de los cuales se encarga de calcular la distancia de frenado y otro que para el experimento cuando la velocidad de las ruedas llega a cero.

### 3.1.6. Puesta en marcha

Para poner en funcionamiento el sistema de frenos ABS requirió hacer adaptaciones, una de ellas se debió a que los equipos de cómputo con los que se contaba no soportan el puerto PCI de la tarjeta de adquisición de datos FPGA XILINX SPARTAN-II. Debido a ello se compró un adaptador PCI a PCI-express y un adaptador de conector molex a SATA, con el cual ya se pudo conectar la tarjeta de adquisición de datos a la PC.

#### Lubricación de llantas

Un problema presente en el sistema frenos ABS de Inteco es el alto desgaste de las llantas, debido al alto coeficiente de fricción entre ellas. El tener un coeficiente alto implica que la transmisión de fuerzas es más eficiente, reduciendo considerablemente el tiempo en el que el control puede actuar. Por lo tanto se tomó la decisión de agregar lubricante entre las llantas, con el objetivo de disminuir el coeficiente de fricción, suavizando el contacto entre las llantas, aumentando el tiempo de frenado y ofreciendo un objetivo de control más difícil al humedecer el terreno. Sin embargo al cambiar la naturaleza del terreno, se invalida la concordancia que hay entre las simulaciones y las pruebas experimentales. Este método fue ocupado en [11].

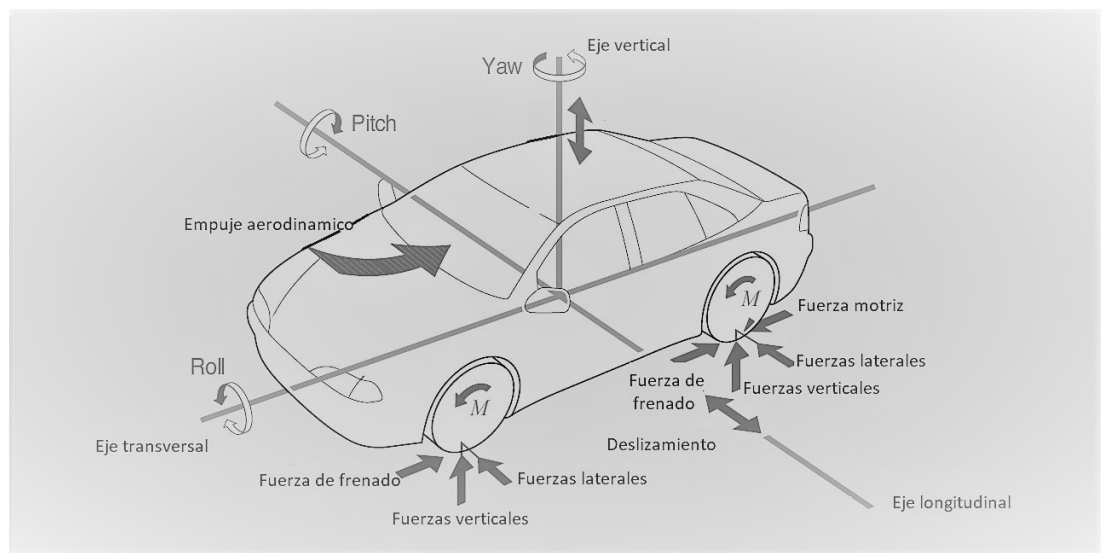
## 3.2. Dinámica del vehículo

Conocer la dinámica de un vehículo nos permite obtener el modelo matemático que se usará en el diseño de los controladores y a su vez nos permite comprender el comportamiento del vehículo en distintas situaciones

### 3.2.1. Fuerzas que actúan en un vehículo

Las fuerzas que actúan sobre un vehículo se pueden dividir de la siguiente manera:

- Fuerzas gravitacionales (peso).
- Fuerzas en el eje longitudinal (movimiento, arrastre aerodinámico, fricción por rodamiento).
- Fuerzas laterales (fuerza de dirección, fuerza centrífuga, vientos de costado).



**Figura 3.6:** Fuerzas que actúan en un vehículo[9]

### 3.2.2. Fricción

La fuerza de fricción es la encargada de transmitir las fuerzas de frenado y de aceleración, se produce por las interacciones moleculares que se forman y se rompen entre la rueda y el terreno. La fuerza de frenado es proporcional a la fuerza vertical sobre la llanta:

$$F_r = \mu_{HF} F_n \quad (3.1)$$

Donde:

$F_r$  es la fuerza de fricción.

$F_n$  es la fuerza normal.

$\mu_{HF}$  es el coeficiente de fricción.

El coeficiente de fricción está definido por las propiedades de los materiales que entran en contacto, tales como:

- La naturaleza de la superficie del camino.
- El estado de las ruedas.
- La velocidad
- Las condiciones climáticas.

El coeficiente de fricción es una medida de la fuerza de fricción que puede ser transmitida de las llantas al suelo. Su valor es grande en superficies limpias y secas, y es chico en líquidos fríos y superficies sucias. Puede ser estática, si no hay movimiento relativo entre las dos superficies, o cinética, si existe movimiento relativo entre ambas superficies. El coeficiente de fricción estática se representa como  $\mu_s$ . El coeficiente de fricción cinética se representa como  $\mu_k$ . En mayoría de los casos se cumple que:  $\mu_s > \mu_k$ .

El coeficiente de fricción se puede obtener como una función del deslizamiento. Existen varios modelos utilizados para obtener la ecuación que relaciona el deslizamiento con el coeficiente [6]. Entre algunos que se pueden mencionar están:

El **modelo lineal por partes** (Piecewise Linear Model) es un modelo simple el cual se aproxima mediante un conjunto de funciones lineales.

El **modelo Burckhardt**, usado para sistemas llanta-terreno, se rige por la ecuación:

$$\mu_x = (C_1(1 - e^{C_2|\lambda|}) - C_3|\lambda|)e^{-C_4v_x} \quad (3.2)$$

Donde:

$\mu_x$  es el coeficiente de fricción.

Los valores de  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ ,  $C_4$  se obtienen experimentalmente.

$e^{-C_4v_x}$  es un escalar que es función de la velocidad  $v_x$

$\lambda$  es el deslizamiento.

La **fórmula mágica** fue desarrollada por Volvo junto con Pacejka, a partir de la fórmula empírica:

$$\mu_x = C_1 \sin(C_2 \tan^{-1}(C_3 \lambda - C_4(C_3 \lambda - \tan^{-1}(C_3 \lambda)))) \quad (3.3)$$

Donde los valores de  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  y  $C_4$  son determinados experimentalmente.

**Inteco** provee de un modelo experimental para el sistema de frenos ABS, el cual se rige por la ecuación:

$$\mu_x = \frac{w_4 \lambda^p}{a + \lambda^p} + w_3 \lambda^3 + w_2 \lambda^2 + w_1 \lambda \quad (3.4)$$

Donde los valores propuestos para los coeficientes son:  $p = 2.009945271667129$

$$w_4 = 0.40662691102315$$

$$w_3 = 0.03508217905067$$

$$w_2 = 0.00000000029375$$

$$w_1 = -0.04240011450454$$

$$a = 0.00025724985785$$

Este modelo es el que se ocupará para las simulaciones, debido a que ya se tienen los valores de los coeficientes.

### 3.2.3. Deslizamiento

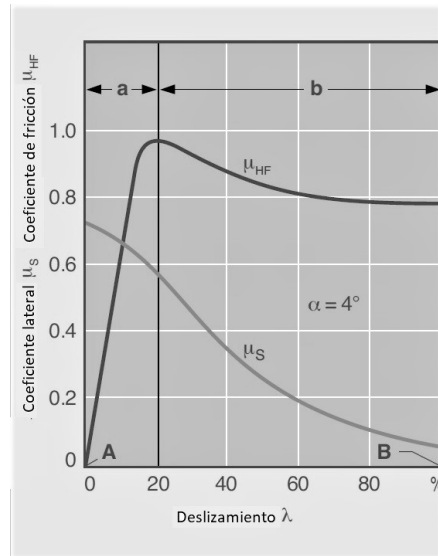
El incremento de la presión del freno encima del límite máximo de adhesión en un carro sin ABS produce un sobre-frenado. Cuando este sucede, incrementa el deslizamiento del área de contacto entre la llanta y el suelo, de tal forma que la fricción estática disminuye y la fricción cinética aumenta. El deslizamiento de frenado  $\lambda$  es una medida de la proporción de la fricción cinética. Por lo tanto si  $\lambda = 100\%$ , significa que las llantas están bloqueadas y hay únicamente fricción cinética. El porcentaje de deslizamiento puede obtenerse a partir de la fórmula (3.5):

$$Slip = \lambda = \frac{V_c - V_r}{V_c} \quad (3.5)$$

Donde:

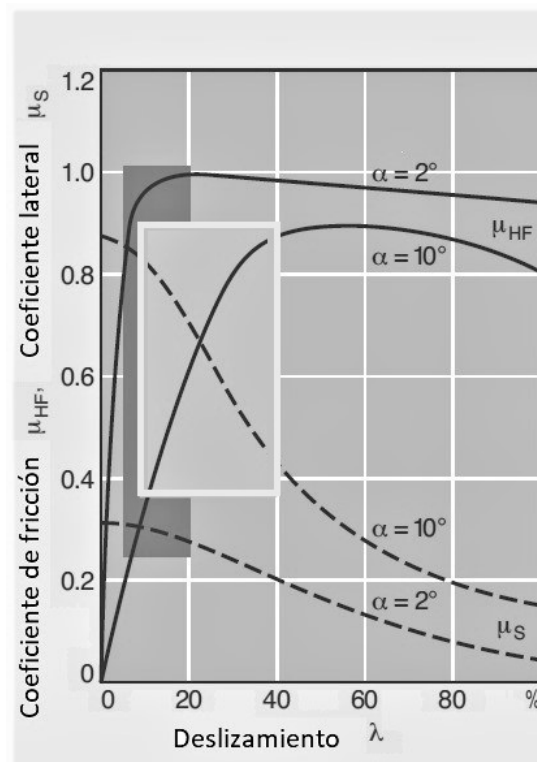
- $V_c$  es la velocidad del carro
- $V_r$  es la velocidad de la rueda

La curva de la Figura (3.7) muestra la relación que hay entre el coeficiente de fricción  $\mu_{HF}$  y el deslizamiento  $\lambda$ . La curva se divide en dos zonas, la que es estable (a) y la zona inestable (b). En la zona estable es la zona donde hay mayor trasmisión de fuerzas de frenado, además de fuerzas laterales. Esta es la zona donde trabaja el ABS. La curva  $\mu_s$  representa la relación que hay entre el coeficiente lateral y el deslizamiento. Nótese que su valor es mayor cuando el deslizamiento es menor.



**Figura 3.7:** Curva típica de deslizamiento contra coeficiente de fricción [10]

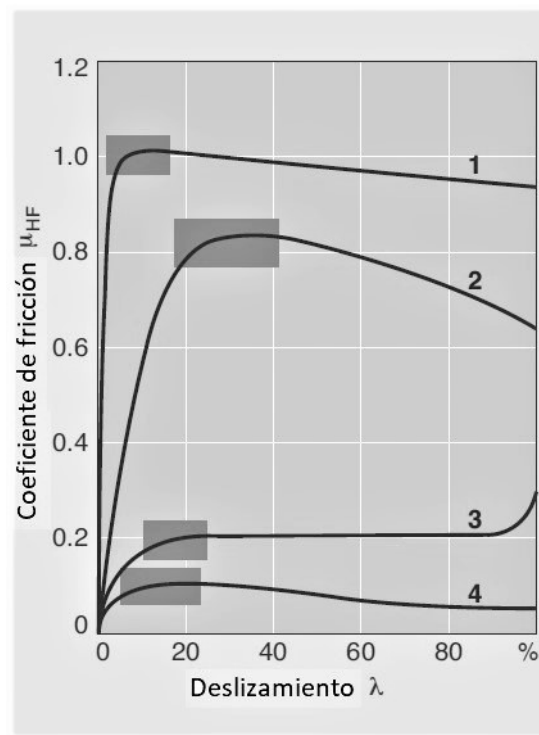
La relación entre la velocidad lateral y la velocidad longitudinal es llamada deslizamiento lateral  $\mu_s$ . Esta es una medida de la fuerza que se puede transmitir lateralmente. Estas fuerzas son importantes debido a que son las que permiten dar vuelta al vehículo. En otras palabras, son las que permiten mantener la maniobrabilidad del mismo. Como se puede ver en la imagen (3.8), las curvas de coeficientes de fricción  $\mu_{HF}$  y lateral  $\mu_s$  cambian conforme el ángulo de giro de las llantas  $\alpha$  incrementa. Con ello también cambia la zona de trabajo del ABS (marcada con un recuadro gris).



**Figura 3.8:** Curvas de deslizamiento de frenado y deslizamiento lateral contra coeficiente de fricción y coeficiente de fuerza lateral[9]



El coeficiente de fricción puede variar según el tipo de terreno. En superficies secas hay la mayor transmisión de fuerzas (3.9-1). En superficies mojadas se pierde adherencia entre las llantas y el suelo, debido a que la fuerza entre los enlaces inter-moleculares de las llantas, el agua y el suelo es menor que la que se genera entre el suelo y las llantas. Por la tanto para maximizar la transmisión de fuerza, se debe aumentar la cantidad de deslizamiento (3.9-2). Si la superficie es nieve, la adherencia es mínima, sin embargo bloquear las llantas puede ser de ayuda debido a un fenómeno llamado efecto retro-excavadora, en el cual las llantas se comportan como palas que acumulan el terreno debajo de ellas, aumentando la fricción (3.9-3). Cuando la superficie pasa de estar mojada a ser hielo, la fuerza que se puede transmitir es nula y las llantas se pueden bloquear más fácilmente (3.9-4).



**Figura 3.9:** Curvas de deslizamiento de frenado contra coeficiente de fricción[9]

El sistema de ABS por lo tanto tiene como objetivo mantener el deslizamiento dentro de la zona donde se da la mayor transmisión de fuerzas, es decir, donde la fricción es estática. Y esto lo debe lograr sin importar el tipo terreno, o si esta girando en alguna curva. La razón de ser del ABS es que al maximizar la transmisión de fuerzas, el frenado es más rápido. Además lleva como ventaja añadida que un deslizamiento pequeño maximiza la transmisión de fuerza laterales, y con ello se puede maniobrar el auto, aún en situación de frenado.

# Modelo matemático

---

## 4.1. Modelado del sistema de frenos ABS

En esta sección se muestra como se obtuvieron las ecuaciones matemáticas que describen al sistema de frenos. Estas ecuaciones se ocuparán para las posteriores simulaciones de la planta y en el diseño del sistema de control. En la tabla (4.1) se definen los parámetros del sistema, que se ocuparán en las definiciones posteriores.

**Tabla 4.1:** Parámetros del sistema[11]

Variable	Símbolo	Valor	Unidades
Velocidad angular de la rueda superior	$x_1$	$x_1$	$\frac{rad}{s}$
Velocidad angular de la rueda inferior	$x_2$	$x_2$	$\frac{rad}{s}$
Torque de frenado	$M_B$	$x_3$	$Nm$
Fricción estática de la rueda superior	$M_{10}$	0.0437	$Nm$
Fricción estática de la rueda inferior	$M_{20}$	0.1288	$Nm$
Torque gravitacional	$M_g$	7.501867	$Nm$
Radio de la rueda superior	$r_1$	$9.765 * 10^{-2}$	$m$
Radio de la rueda inferior	$r_2$	$9.9 * 10^{-2}$	$m$
Momento de la inercia de la rueda superior	$J_1$	$7.5281 * 10^{-3}$	$Kgm^2$
Momento de la inercia de la rueda inferior	$J_2$	$25.603 * 10^{-3}$	$kgm^2$
Coefficiente de fricción viscosa de la rueda superior	$d_1$	$1.396 * 10^{-4}$	$\frac{kgm^2}{s}$
Coefficiente de fricción viscosa de la rueda inferior	$d_2$	$5.388 * 10^{-4}$	$\frac{kgm^2}{s}$
Fuerza normal	$F_n$	Ecuación 4.12	$N$
Deslizamiento	$\lambda$	Ecuación 4.5	
Coefficiente de fricción entre las ruedas	$\mu(\lambda)$	Ecuación 3.4	$N$
Distancia entre eje y punto de contacto de las ruedas	$L$	0.256	$m$
Angulo entre L y fuerza normal	$\phi$	57.705	$grados$

1. Se definen las siguientes variables auxiliares:

$$S = \text{sign}(r_2x_2 - r_1x_1) \quad (4.1)$$

$$S_1 = \text{sign}(x_1) \quad (4.2)$$

$$S_2 = \text{sign}(x_2) \quad (4.3)$$

2. Deslizamiento.

Se entiende como deslizamiento a la diferencia de entre las velocidades de las dos ruedas, tal como se definió en la ecuación (3.5). Reescribiendo esta ecuación en función de los radios y las velocidades angulares de las ruedas:

$$\lambda_t = 1 - \frac{r_2x_2}{r_1x_1} \quad (4.4)$$

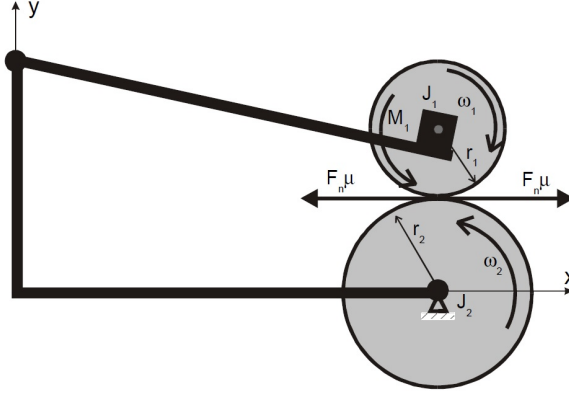
Para describir el deslizamiento en la tracción y:

$$\lambda_f = 1 - \frac{r_1x_1}{r_2x_2} \quad (4.5)$$

Para describir el deslizamiento cuando se está frenando. En la tabla (4.2) se puede ver la interpretación que tienen el deslizamiento, dependiendo de los valores de las ecuaciones (4.1) a (4.5) y el significado físico que cada situación tiene.

**Tabla 4.2:** Deslizamiento

Caso	Suposición1	Suposición2	$\lambda$	S	S1	s2
$1 - \frac{r_1x_1}{r_2x_2}$	$r_2x_2 \gg r_1x_1$	$x_1 \gg 0, x_2 \gg 0$	1(Rueda bloqueada)	+	+	+
	$r_2x_2 = r_1x_1$		0(Rueda libre)	+	+	+
$1 - \frac{r_1x_1}{r_2x_2}$	$r_2x_2 \ll r_1x_1$	$x_1 < 0, x_2 < 0$	1(Rueda bloqueada)	-	-	-
	$r_2x_2 = r_1x_1$		0(Rueda libre)	-	-	-
$1 - \frac{r_2x_2}{r_1x_1}$	$r_2x_2 \ll r_1x_1$	$x_1 \gg 0, x_2 \gg 0$	1(Rueda deslizando)	-	+	+
	$r_2x_2 = r_1x_1$		0(Rueda libre)	-	+	+
$1 - \frac{r_2x_2}{r_1x_1}$	$r_2x_2 \gg r_1x_1$	$x_1 < 0, x_2 < 0$	1(Rueda deslizando)	+	-	-
	$r_2x_2 = r_1x_1$		0(Rueda libre)	+	-	-
1		$x_1 < 0, x_2 > 0$	1(Rueda deslizando)	+	-	+
1		$x_1 > 0, x_2 < 0$	1(Rueda deslizando)	-	+	-


**Figura 4.1:** Diagrama del sistema de frenos ABS

3. Las ecuaciones de movimiento que describen a este sistema son:

Para la rueda superior:

$$J_1 \dot{x}_1 = M_{\lambda D} - M_{d1} - M_{10} - M_B \quad (4.6)$$

Donde:

$M_{d1} = d_1 x_1$  Par debido a fuerza de fricción entre el eje de la rueda superior y la rueda superior.

$M_{\lambda D} = F_n r_1 \mu(\lambda)$  Par debido a fuerza de fricción con rueda inferior.

Para la rueda inferior:

$$J_2 \dot{x}_2 = M_{\lambda E} - M_{d2} - M_{20} \quad (4.7)$$

Donde:

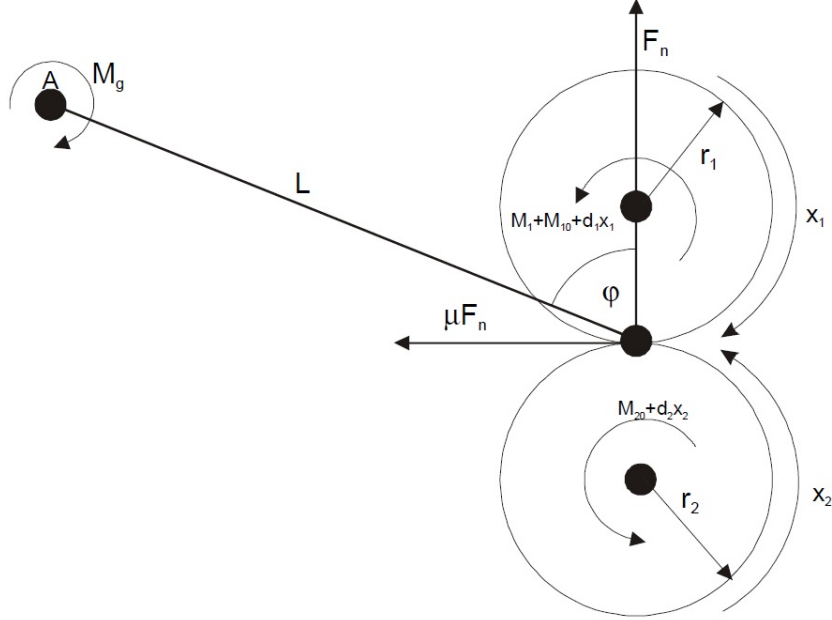
$M_{d2} = d_2 x_2$  es el par debido a la fuerza de fricción entre el eje de la rueda inferior y la rueda inferior.

$M_{\lambda E} = F_n r_2 \mu(\lambda)$  Par debido a fuerza de fricción con rueda superior

Finalmente, las ecuaciones de movimiento quedan:

$$J_1 \dot{x}_1 = F_n r_1 \mu(\lambda) - d_1 x_1 - S_1 M_{10} - S_1 M_B \quad (4.8)$$

$$J_2 \dot{x}_2 = F_n r_2 \mu(\lambda) - d_2 x_2 - M_{20} \quad (4.9)$$



**Figura 4.2:** Diagrama alternativo del sistema de frenos ABS

4 Fuerza Normal. Para obtenerla, se define un traslado de coordenadas al punto A y se hace sumatoria de momentos con respecto a este nuevo punto, tal como se ve en la imagen (4.2).

$$M_{bumb} = M_g + S_1 M_B + S_1 M_{10} + M_{d1} \quad (4.10)$$

$$M_{bumb} = L(F_n \sin(\phi) - F_n \mu(\lambda) \cos(\phi)) \quad (4.11)$$

$$F_n = \frac{M_g + S_1 M_B + S_1 M_{10} + M_{d1}}{L(\sin(\phi) - S\mu(\lambda) \cos(\phi))} \quad (4.12)$$

5 Ecuaciones dinámicas

Sustituyendo la fuerza normal (4.12) en las ecuaciones de movimiento (4.8) y (4.9):

$$J_1 \dot{x}_1 = \left( \frac{M_g + S_1 M_B + S_1 M_{10} + M_{d1}}{L(\sin(\phi) - S\mu(\lambda) \cos(\phi))} \right) r_1 \mu(\lambda) - d_1 x_1 - S_1 M_{10} - S_1 M_B \quad (4.13)$$

$$J_2 \dot{x}_2 = \left( \frac{M_g + S_1 M_B + S_1 M_{10} + M_{d1}}{L(\sin(\phi) - S\mu(\lambda) \cos(\phi))} \right) r_2 \mu(\lambda) - d_2 x_2 - M_{20} \quad (4.14)$$

Definimos a:

$$S(\lambda) = \frac{S\mu(\lambda)}{L(\sin(\phi) - S\mu(\lambda)\cos(\phi))} \quad (4.15)$$

Finalmente, las ecuaciones dinámicas del sistema quedan:

$$\dot{x}_1 = S(\lambda)(C_{11}x_1 + C_{12}) + C_{13}x_1 + C_{14} + M_B(S(\lambda)S_1C_{15} + S_1C_{16}) \quad (4.16)$$

$$\dot{x}_2 = S(\lambda)(C_{21}x_1 + C_{22}) + C_{23}x_2 + C_{24} + M_B S(\lambda)S_1C_{25} \quad (4.17)$$

Donde:

$$C_{11} = \frac{r_1 d_1}{j_1}, \quad C_{12} = \frac{M_g r_1 + S_1 M_{10} r_1}{j_1}, \quad C_{13} = \frac{-d_1}{j_1}, \quad C_{14} = \frac{-S_1 M_{10}}{j_1}, \quad C_{15} = \frac{r_1}{j_1},$$

$$C_{16} = \frac{-1}{j_1}, \quad C_{21} = \frac{-r_2 d_1}{j_2}, \quad C_{22} = \frac{r_1 d_1}{j_2}, \quad C_{23} = \frac{r_1 d_1}{j_2}, \quad C_{24} = \frac{r_1 d_1}{j_2}, \quad C_{25} = \frac{r_1 d_1}{j_2}$$

6 Dinámica del motor. Sea la función que describe la dinámica del motor:

$$B(u) = \begin{cases} b_1 u + b_2 & u > u_0 \\ 0 & u < u_0 \end{cases}$$

Donde  $u_0$  corresponde a la distancia que hay entre el caliper y el disco de freno. La Dinámica de la acción de frenado queda:

$$\dot{M}_B = C_{31}[b(u) - M_B] \quad (4.18)$$

Haciendo el cambio de variable  $M_B = x_3$ .

7 Modelo matemático

Finalmente, el modelo matemático queda:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S(\lambda)(C_{11}x_1 + C_{12}) + C_{13}x_1 + C_{14} + M_B(S(\lambda)S_1C_{15} + S_1C_{16}) \\ S(\lambda)(C_{21}x_1 + C_{22}) + C_{23}x_2 + C_{24} + M_B S(\lambda)S_1C_{25} \\ C_{31}[b(u) - x_3] \end{bmatrix}$$

Donde los estados del sistema  $x_1$  es la velocidad angular de la rueda superior,  $x_2$  es la velocidad angular de la rueda inferior y  $x_3$  es el torque de frenado. Este modelo fue proporcionado por Inteco.

## 4.2. Simulaciones

El sistema de frenos ABS de INTECO ofrece junto con el software para control, un programa en simulink que permite la simulación de sistemas de control, basado en las ecuaciones diferenciales obtenidas en la sección anterior.

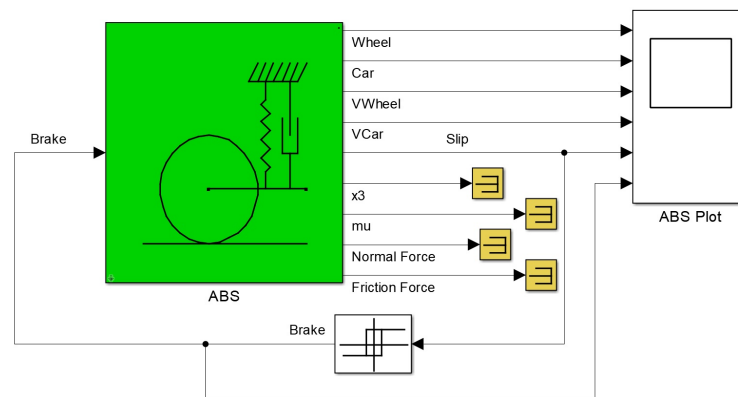


Figura 4.3: Programa de simulación

Este programa permite modificar los parámetros del sistema en caso de que estos no sean acertados. El objetivo de esta sección es determinar que tan acertada es la descripción que hace el modelo matemático obtenido en la sección anterior. Para ello, se hace una comparación entre las pruebas obtenidas en las simulaciones y las obtenidas en la planta física.

### 4.2.1. Respuesta libre

**Condiciones:** La primera prueba que se realizara será la respuesta del sistema en ausencia de entrada de control. La rueda será acelerada hasta  $2000[RPM]$ , posteriormente se dejara libre para observar su respuesta. El tiempo de muestreo es de  $500 [\mu s]$ , tanto para la prueba en simulador como para la prueba en la planta.

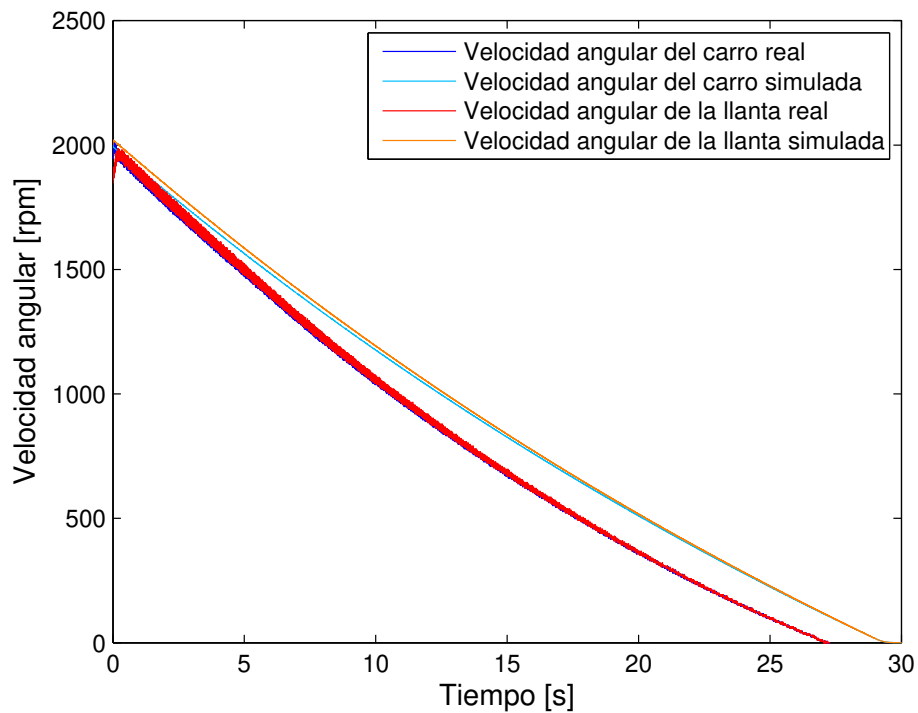


Figura 4.4: Respuesta libre

### Observaciones

- La curva de posición real comienza desde que la rueda es acelerada, la curva de posición simulada desde que termina de ser acelerada.
- Para hacer una correcta comparación, se debe cortar la señal real desde que inicia hasta el punto en el que termina de ser acelerada.

### 4.2.2. Respuesta forzada

Ahora se obtendrá la respuesta de la planta ante la entrada escalón, para valores de 0.2 y 1 (La acción de control se encuentra normalizada de 0 a 1). Para realizar el experimento, se acelera la rueda hasta las 2000[RPM], con un tiempo de muestreo de 1[ms].



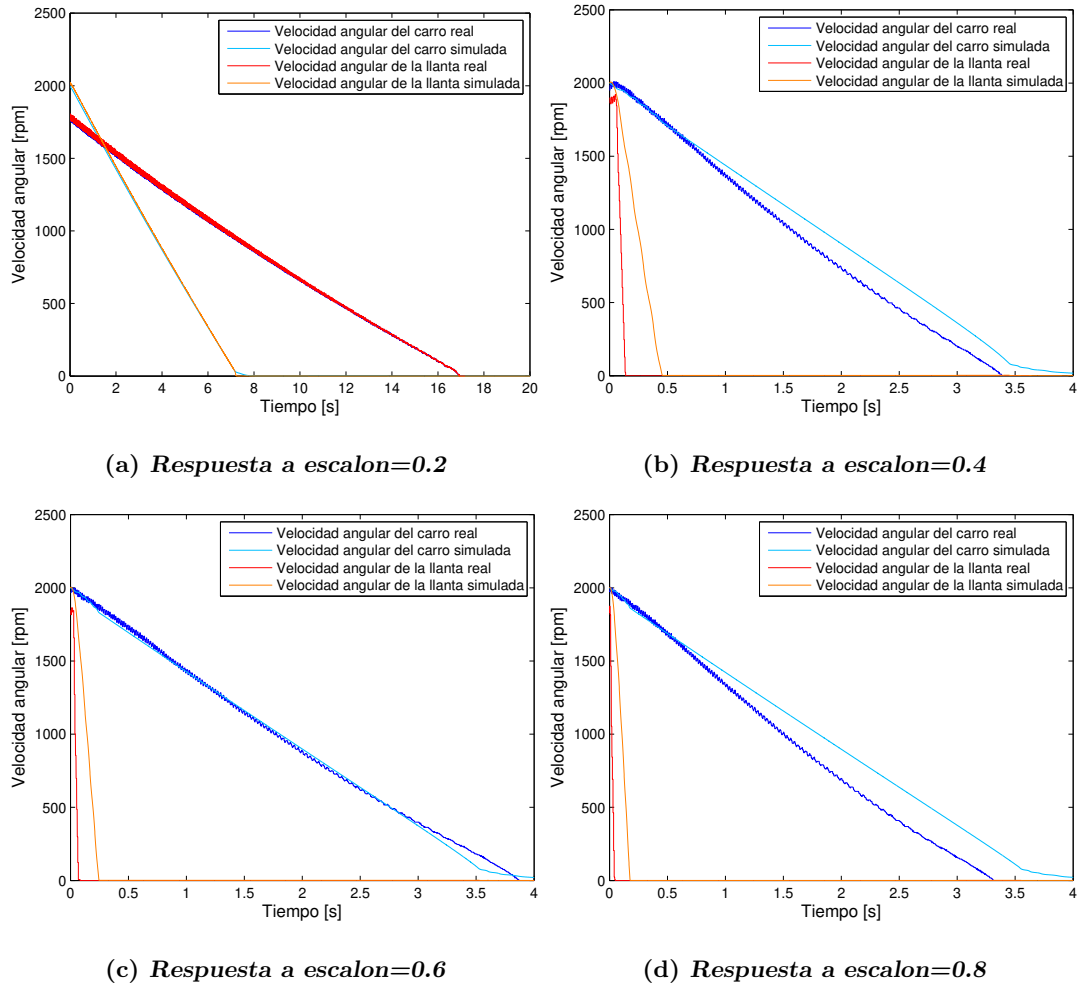


Figura 4.5: Respuestas forzadas

Como se puede observar en las imágenes (4.5) y (4.5), las respuestas nos son similares para las respuestas de la planta y la simulación. Esto es cierto para cualquier entrada  $u > 0.2$ . Por lo tanto para tener una simulación fiable se debe recurrir a la identificación paramétrica, con el fin de determinar los valores del sistema.

En conclusión, las simulaciones no se pueden usar para el diseño del control, sin hacer la identificación paramétrica. Sin embargo, no es necesario hacerla, ya que los controladores que se ocuparan en esta tesis:

- Se pueden sintonizar sin necesidad de modelo.
- Son inmunes ante ciertas incertidumbres paramétricas, en este caso el no conocer el modelo del sistema.

### 4.3. Tiempo de muestreo

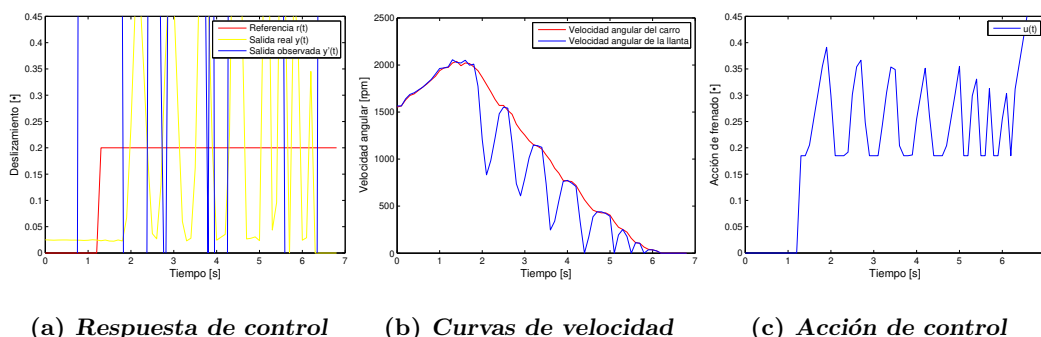
Cuando se trabaja con sistemas de computo y adquisición de datos, un tema crucial es la elección del tiempo de muestreo. Las señales físicas son continuas y están conformadas por un número infinito de datos. En cambio los sistema de adquisición de datos trabajan con datos discretos y estan limitadas en cuanto a capacidad de almacenamiento. Para lidiar con este problema se suele tomar una muestra o valor de la señal que se desea medir cada cierto intervalo tiempo, a este intervalo de tiempo se le llama tiempo de muestreo. En la elección de este tiempo de muestreo, se debe asegurar que:

- La señal adquirida sea lo más parecida a la señal física
- Que el tiempo de muestreo se corresponda con el de los sensores.
- Que la cantidad de datos adquiridos puedan ser procesados y almacenados

Los codificadores rotatorios utilizados por el sistema de frenos ABS pueden hacer hasta 1024 conteos por revolución, con una resolución 4096 pulsos por revolución. Si se trabaja a la máxima velocidad recomendada por el fabricante, de 2000[RPM], se necesita un tiempo de muestreo de alrededor de 8[ $\mu$ s]. Sin embargo, la capacidad de almacenamiento de datos de MatLab está limitado ().

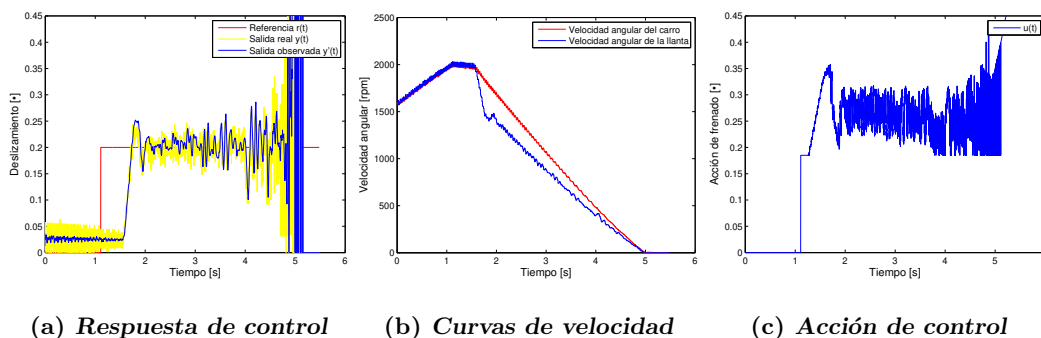
Para lograr un tiempo de muestreo más corto, se puede optar por disminuir la velocidad de las ruedas. Sin embargo una reducción en la velocidad disminuye el tiempo en que el controlador estará trabajando, por lo que podrían no observarse de manera adecuada las respuestas. Además de que los sistemas ABS tienen un rango de trabajo, siendo inútiles a velocidades menores a 25[km/hr], la cual corresponde 330[RPM], para el sistema de frenos ABS de Inteco. El rango de velocidades de manejo en carretera varía desde 60[km/hr](1000[RPM]) hasta 150[km/hr] (2000[RPM]).

Después de realizar pruebas con el sistema de frenos ABS de Inteco, se encontró que el tiempo de muestreo máximo que permite MatLab para una velocidad de 2000[RPM/min] es de 200[ $\mu$ s]. Cualquier tiempo más corto que este implica pérdida de datos. También se encontró que con un tiempo de muestreo de 1[ms] la señal adquirida es lo suficientemente parecida a la señal física. Cualquier tiempo más grande a este implica pérdida de controlabilidad, ya que el controlador recibe datos erróneos y ejecuta las acciones de control que no se corresponden con lo que realmente pasa en la planta.



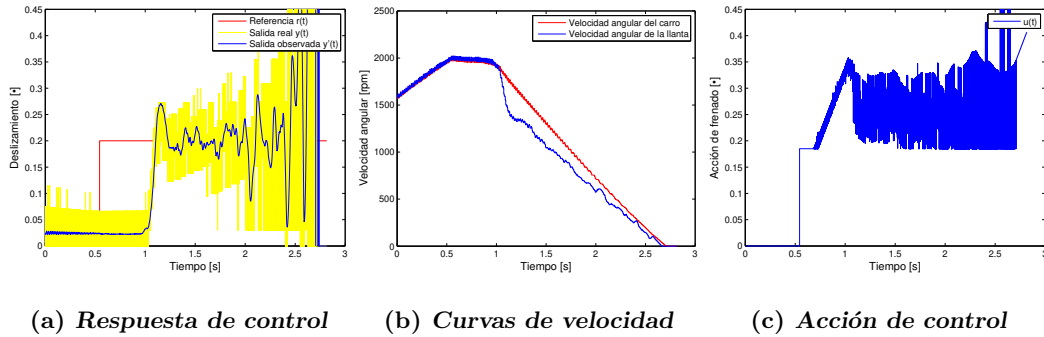
**Figura 4.6:** Respuestas con un tiempo de muestreo  $100[ms]$

En la Figura (4.6) se muestran las respuestas para un tiempo de muestreo de  $100[ms]$ . Como se ve en la Figura (4.6-b) que las curvas de velocidades tardan en mostrar algún cambio, por lo que la acción de control que se aplica cambia de manera discontinua (4.6-c). Esto hace que se pierda controlabilidad totalmente (4.6-a), ya que la salida real (azul claro) oscila en torno a la referencia (rojo) y la salida obtenida por diferenciador no muestra una señal coherente. Tiempos mayores a este mejoran la controlabilidad de la planta a altas velocidades ( $2000[RPM] - 1000[RPM]$ ), pero solo tiempos de muestreo menores a  $1[ms]$  aseguran el control a velocidades menores a las mencionadas.



**Figura 4.7:** Respuestas con un tiempo de muestreo  $1[ms]$

Los tiempos de muestreo óptimo se encuentran en el rango de  $1[ms]$  hasta  $200[\mu s]$ . Como se observa en la imagen (4.7-a), con un muestreo óptimo se puede mantener el control a cualquier velocidad, sin presentarse oscilaciones. Esto se refleja en las curvas de velocidad (4.7-b), que descienden de manera continua, sin mostrar cambios abruptos debidos a tiempos de muestreo grandes y en la acción de control (4.7-c) se observa que es una banda continua, en lugar de golpes agresivos de correcciones



**Figura 4.8:** Respuestas con un tiempo de muestreo  $100[\mu s]$

Las curvas obtenidas con tiempos de muestreo que están en el rango de  $1[ms]$  hasta  $200[\mu s]$  muestran similitud entre ellas. Cuando se ocupan tiempos de muestreo de  $100[\mu s]$ , las curvas que se obtienen, si bien son similares a las primeras, el tiempo que dura el experimento es de la mitad de lo que realmente dura. Esto se debe a que MatLab tiene un límite de datos que puede almacenar, por lo que cuando se acerca a este límite omite datos acortando las gráficas.

# Esquema de control

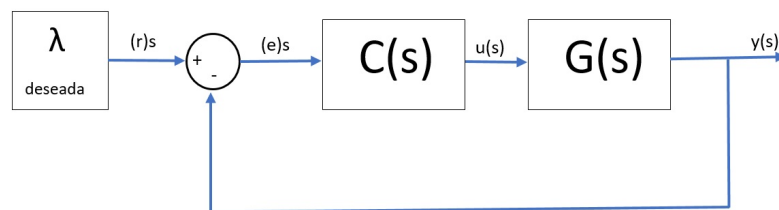
---

En este capítulo se presentaran los algoritmos que se implementaron en el sistema de frenos. Primero se probará el algoritmo PID. En segundo lugar se probaran los algoritmos por modos deslizantes STA (Super Twisting Algoritm) y ESTA (Extended Super Twisting Algoritm) y Twisting a través de integrador.

## 5.1. Esquema de control

El lazo de control de un ABS consta de las siguientes partes:

- 1.- El sistema controlado  $G(s)$ : se entiende a la planta, revisada en el capítulo 4.
- 2.- Variables externas que afectan el lazo de control (perturbaciones).
- 3.- El controlador  $C(s)$ .
- 4.- La referencia  $r(s)$ .
- 5.- Variable de corrección  $e(s)$ .
- 6.- La acción de control  $u(s)$ .
- 7.- La salida de control  $y(s)$ .



**Figura 5.1:** Esquema de control simplificado

Por sistema controlado se entiende a la planta, revisada en el capítulo 4. El controlador se refiere a los algoritmos que se implementaran en esta tesis, cuyas ecuaciones se presentarán en su sección correspondiente.

La salida de control se refiere al deslizamiento entre las llantas, el cual está definido por la ecuacion (3.5). La variable de corrección o error es la diferencia que hay entre el deslizamiento deseado o referencia y el deslizamiento medido o salida de control. La acción de control es la presión que aplicará el freno en la rueda y resulta de aplicar algoritmo de control al error.

En cuanto a las referencias, primero se probará la capacidad de controlador para llevar la salida a una referencia fija. Los valores que se utilizarán son 0.1 y 0.2, los cuales son valores comunes de deslizamiento en sistemas de frenos. En segundo lugar se utilizaran señales para medir la capacidad de los controladores para hacer seguimiento de trayectorias.

### 5.1.1. Implementación

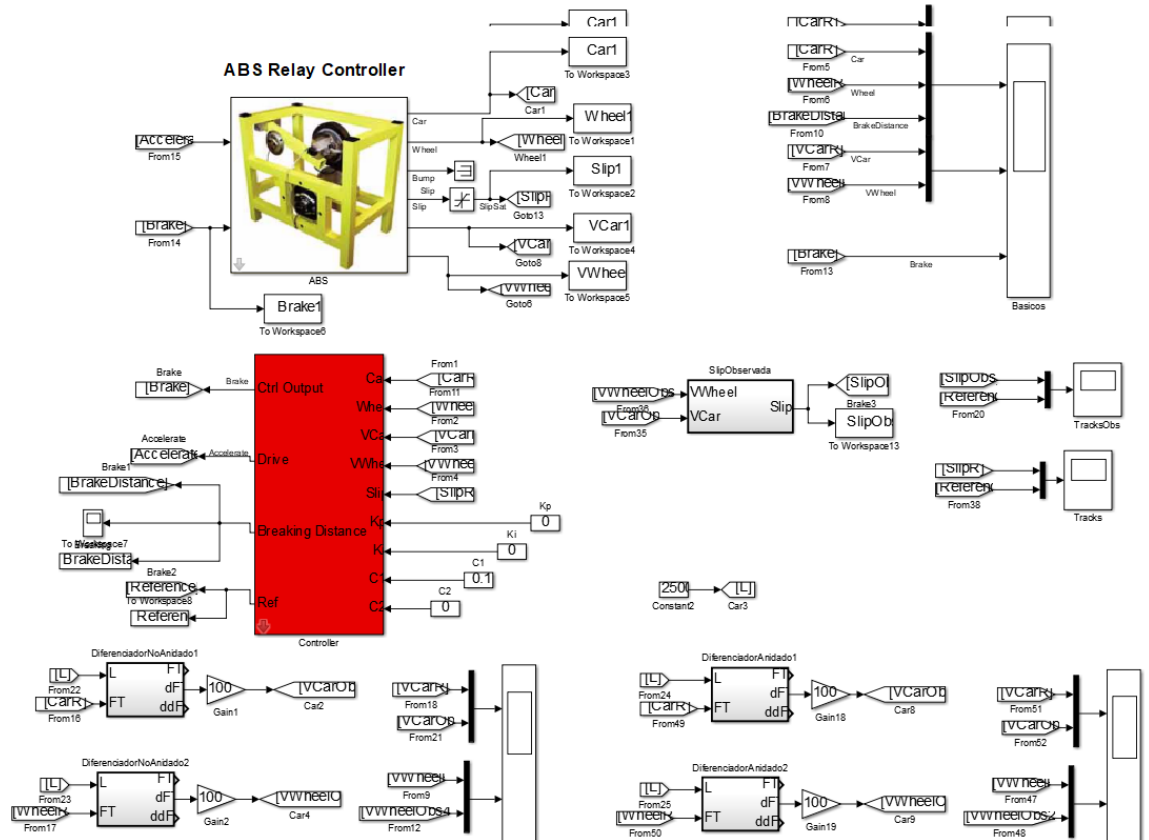


Figura 5.2: Implementación final

Para la implementación final de los algoritmos de control, es necesario agregar varios subbloques y elementos al modelo de simulink de la Figura (3.4). En primera instancia se agragaron dos bloques para el cálculo de velocidad y deslizamiento. También se agregaron entradas al bloque de control para poder modificar las ganancias de los controladores sin tener que estar accediendo a el. Se agregaron bloques “To Workspace” que permiten enviar los datos adquiridos a MatLab para su guardado y posterior procesamiento. finalmente se adicionaron bloques de “scope”, que permitan la visualización de las señales.

### 5.1.2. Saturación del controlador

El sistema de frenos ABS es un sistema no lineal con incertidumbres paramétricas, debido principalmente a:

- La naturaleza no lineal de la fricción seca.
- El retardo en el actuador.

La naturaleza de la fricción seca se explicó en el capítulo 3. En cuanto al retardo del actuador, se refiere al tiempo que le toma al caliper llegar al disco de freno. Esta no linealidad resta eficacia a los algoritmos de control.

Si la capacidad del controlador para hacer control se ve muy afectada por esta no linealidad, se puede optar por saturar la acción de control por abajo. Esto elimina el retardo del actuador ya que coloca caliper lo más cerca posible del disco de freno. Para ello es necesario conocer el punto en el cual la acción del controlador es mínima. De manera experimental, se determinó que el valor de saturación por abajo está en el valor normalizado de  $u_{min} = 0.185$ .

También es necesario saturar el controlador por arriba. Esto se hace debido a que el motor está limitado físicamente a un voltaje máximo. De las especificaciones del fabricante, se sabe que el voltaje máximo que soporta el actuador es de 5[V]. Sin embargo, para efectos del programa de control, este voltaje está normalizado, por lo que el valor de saturación queda en  $u_{max} = 1$ .

## 5.2. Diferenciadores por modos deslizantes.

La necesidad de implementar un diferenciador se debe al ruido presente en las señales de velocidades de la rueda superior ( $V_{Wheel}$ ) e inferior ( $V_{Car}$ ). Dado que las velocidades sirven para obtener del deslizamiento  $\lambda$ , es importante tener una medición fiable, ya que se ocupa como señal salida. Si su valor presenta demasiado ruido se podría perder controlabilidad. Otro problema que se presenta, como se puede observar en las Figura (5.3), es difícil de ver si se ha alcanzado el objetivo de control.

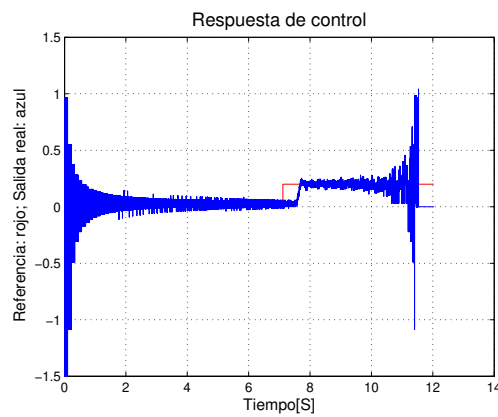


Figura 5.3: Deslizamiento obtenido con el diferenciador de inteco

Este ruido se debe principalmente a que un diferenciador, por su naturaleza incrementa el ruido. Sin embargo existen diferenciadores que lo incrementan más que otros. Es por ello que se implementarán algoritmos diferenciadores por modos deslizantes, los cuales presentan una amplificación menor del ruido, tal como se puede observar en la Figura (5.4).

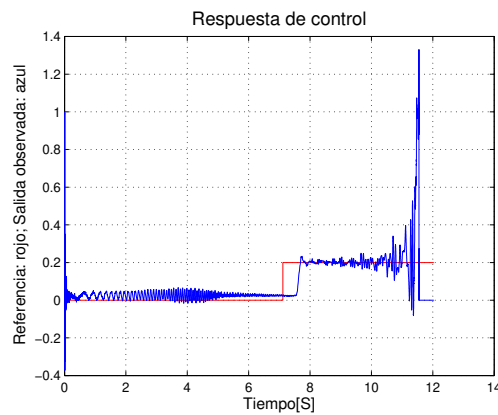


Figura 5.4: Deslizamiento obtenido con el diferenciador de modos deslizantes



### 5.2.1. Algoritmo diferenciador recursivo de Levant

#### Desarrollo

Este algoritmo diferenciador tiene la siguiente estructura mostrada en la ecuación (2.31). Desarrollando para obtener las 2 primeras derivadas (velocidad y aceleración), se tiene:

$$\begin{aligned}\dot{Z}_0 &= v_0, v_0 = -\lambda_2 * L^{\frac{1}{3}} |Z_0 - f(t)|^{\frac{2}{3}} \text{sign}(Z_0 - f(t)) + Z_1 \\ \dot{Z}_1 &= v_1, v_1 = -\lambda_1 * L^{\frac{1}{2}} |Z_1 - v_0|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(Z_1 - v_0) + Z_2 \\ \dot{Z}_2 &= -\lambda_0 * L * \text{sign}(Z_2 - v_1)\end{aligned}\quad (5.1)$$

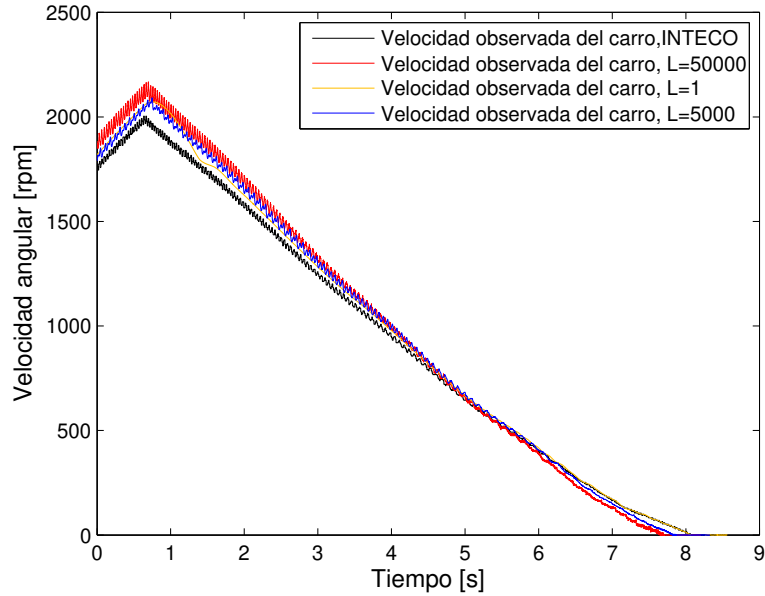
Donde  $\lambda_2, \lambda_1, \lambda_0$  son constantes positivas y el valor que se utiliza para sintonizar el diferenciador es la constante de  $L > 0$ .

#### Resultados

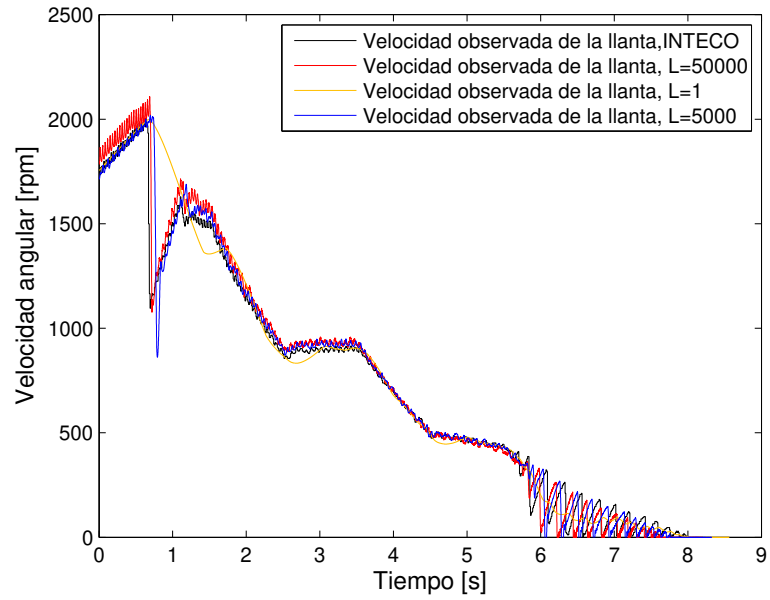
A continuación se muestran las pruebas realizadas con el diferenciador recursivo por modos deslizantes. Las condiciones del experimento son:

- El tiempo de muestreo es de  $500[\mu s]$ .
- El valor de la ganancia  $L \in (1, 50000)$ .

El objetivo es encontrar el valor de L que nos da una derivada que se aproxime a la real, sin que se amplifique notablemente el ruido. Para ello se compararán las gráficas de velocidad del algoritmo proporcionado por Inteco y la obtenida mediante el diferenciador de modos deslizantes.



(a) Curvas de velocidad angular real y observada del carro



(b) *Curvas de velocidad angular real y observada de la llanta*

**Figura 5.5:** Curvas para diferenciador recursivo

Se puede observar que el valor de L adecuado esta en torno a  $L \in [1000 - 2500]$

### 5.2.2. Algoritmo diferenciador no recursivo de Levant

#### Desarrollo

Este algoritmo diferenciador tiene la siguiente estructura mostrada en la ecuación (2.32). Desarrollando para obtener las 2 primeras derivadas (velocidad y aceleración), se tiene:

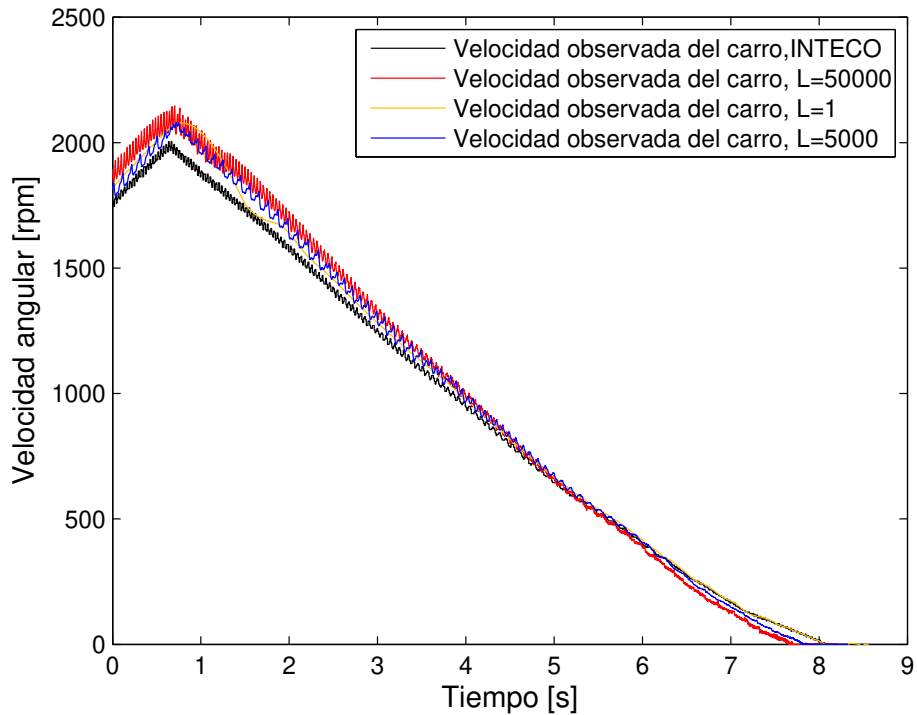
$$\begin{aligned} \dot{Z}_0 &= v_0, v_0 = -\lambda_2 * L^{\frac{1}{3}} |Z_0 - f(t)|^{\frac{2}{3}} \text{sign}(Z_0 - f(t)) + Z_1 \\ \dot{Z}_1 &= v_1, v_1 = -\lambda_1 * L^{\frac{1}{2}} |Z_0 - f(t)|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(Z_0 - f(t)) + Z_2 \\ \dot{Z}_2 &= -\lambda_0 * L * \text{sign}(Z_0 - f(t)) \end{aligned} \quad (5.2)$$

Donde  $\lambda_2, \lambda_1, \lambda_0$  son constantes positivas y el valor que se utiliza para sintonizar el diferenciador es la constante de L.

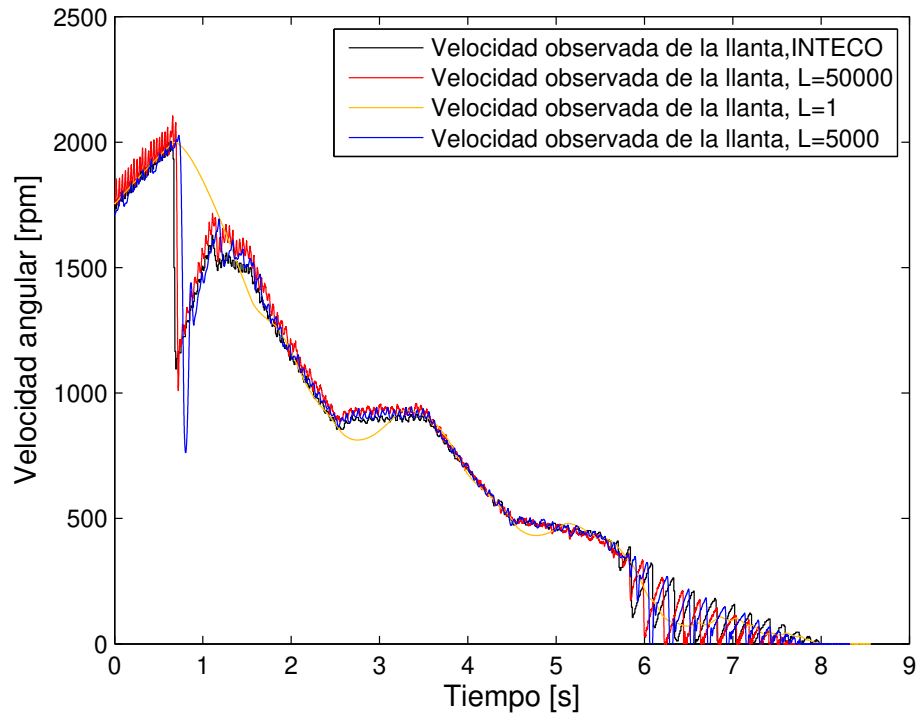
#### Resultados

A continuación se muestran las pruebas realizadas con el diferenciador recursivo por modos deslizantes. Las condiciones del experimento son:

- El tiempo de muestreo es de  $500[\mu s]$ .
- El valor de la ganancia  $L \in (1, 10000)$ .



(a) Curvas de velocidad angular real y observada del carro



(b) *Curvas de velocidad angular real y observada de la llanta*

**Figura 5.6:** Curvas para diferenciador no recursivo

Se puede observar que el valor de  $L$  adecuado esta en torno a  $L \in [2500 - 5000]$

## 5.3. Algoritmos PI y PID

El algoritmo proporcional, integral y derivativo (PID), es de los más conocidos. Se probará el PID con el fin de tener un punto de comparación para los algoritmos de control por modos deslizantes.

### 5.3.1. Control PI

Un controlador PI tiene la siguiente estructura:

$$u = -k_p e - k_i \int e d\tau$$

El método utilizado para la sintonización fue empírico, el cual fue probado en [Ille] y consta de 2 pasos:

1. Se ajusta la ganancia proporcional hasta que casi toca la referencia, sin producir sobre-pasos ni oscilaciones.
2. Se ajusta la ganancia integral hasta donde reduce el error en estado estacionario a cero, sin producir sobre-pasos ni oscilaciones.

La razón de utilizar este método es que la planta es no lineal y no admite un método analítico. Los valores de ganancias obtenidos fueron:

$$\begin{aligned}k_p &= 2 \\k_i &= 14\end{aligned}$$

### 5.3.2. Control PID

Un controlador PID tiene la siguiente estructura:

$$u = -k_p e - k_i \int e d\tau - k_d \frac{d}{d\tau} e$$

El método utilizado para la sintonización fue gráfico, similar al utilizado en el control PI, pero agregando un paso más: 1. Se ajusta la ganancia proporcional hasta que casi toca la referencia, sin producir sobre-pasos ni oscilaciones.

2. Se ajusta la ganancia integral hasta donde reduce el error en estado estacionario a cero, sin producir sobre-pasos ni oscilaciones.

3. Para ajustar la ganancia derivativa se cambia la referencia constante por una dinámica, se busca el valor que logre seguir la referencia, sin producir sobre-pasos ni oscilaciones.

Los valores de ganancias obtenidos fueron:

$$\begin{aligned}k_p &= 1.6 \\k_i &= 7 \\k_d &= 0.65\end{aligned}$$

## 5.4. Algoritmo Super-Twisting

Recordando la ecuación del algoritmo STA:

$$\begin{aligned}u &= -k_1|x|^{1/2}\text{sign}(x) + v, \\ \dot{v} &= -k_2\text{sign}(x)\end{aligned}\tag{5.3}$$

Donde las dos ganancias a sintonizar son  $k_1$  y  $k_2$  y  $x$  es la variable que se desea controlar, en este caso es el deslizamiento  $\lambda$ , que es función de los estados  $x_1$  (velocidad angular de la rueda superior) y  $x_2$  (velocidad angular de la rueda inferior).

### 5.4.1. Sintonización

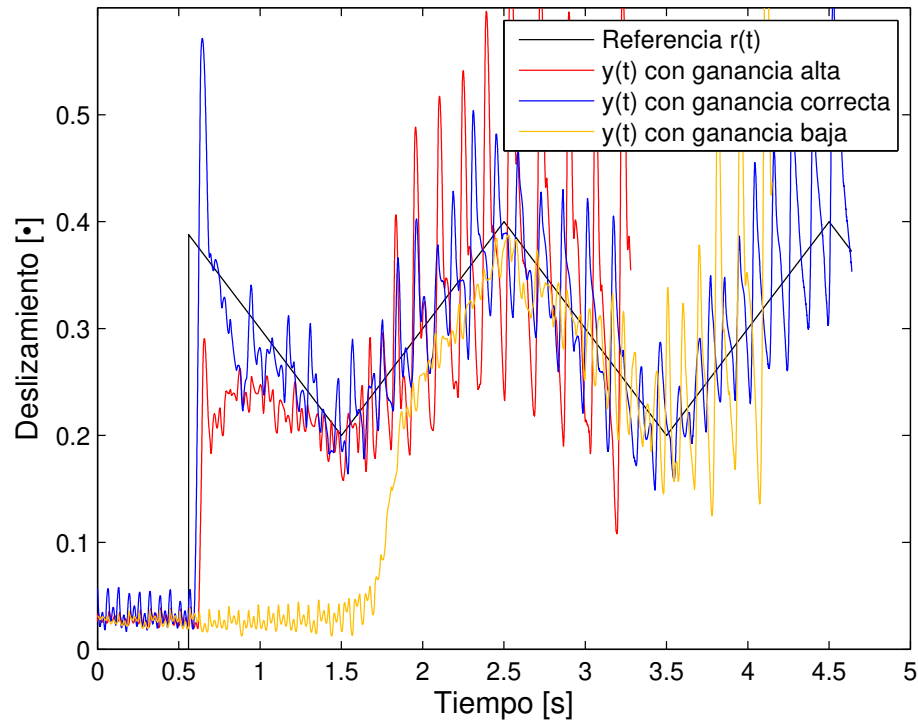
Existen 2 formas de sintonizar el algoritmo STA. La primera está basada en reglas obtenidas por Levant[12], en las cuales es necesario conocer la constante Lipschitz de la perturbación  $\Delta$  (el valor máximo que esta puede tomar). Las ganancias quedan parametrizadas de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}k_1 &= 1.5\sqrt{\Delta} \\ k_2 &= 1.1\Delta\end{aligned}\tag{5.4}$$

La segunda forma se basa en que un STA tiene estructura similar a un PI, por lo tanto se puede utilizar el método de sintonización utilizado en la sección (5.3). Este método se basa en encontrar los valores límites superior e inferior de las ganancias proporcional e integral. Para el algoritmo STA,  $k_1$  actúa como una ganancia proporcional no lineal y  $k_2$  como una ganancia integral no lineal.

### 5.4.1.1. Método 1

Dado que se desconoce la cota de la perturbación, se varió esta hasta encontrar la zona donde se obtuvo la mejor desempeño del controlador.

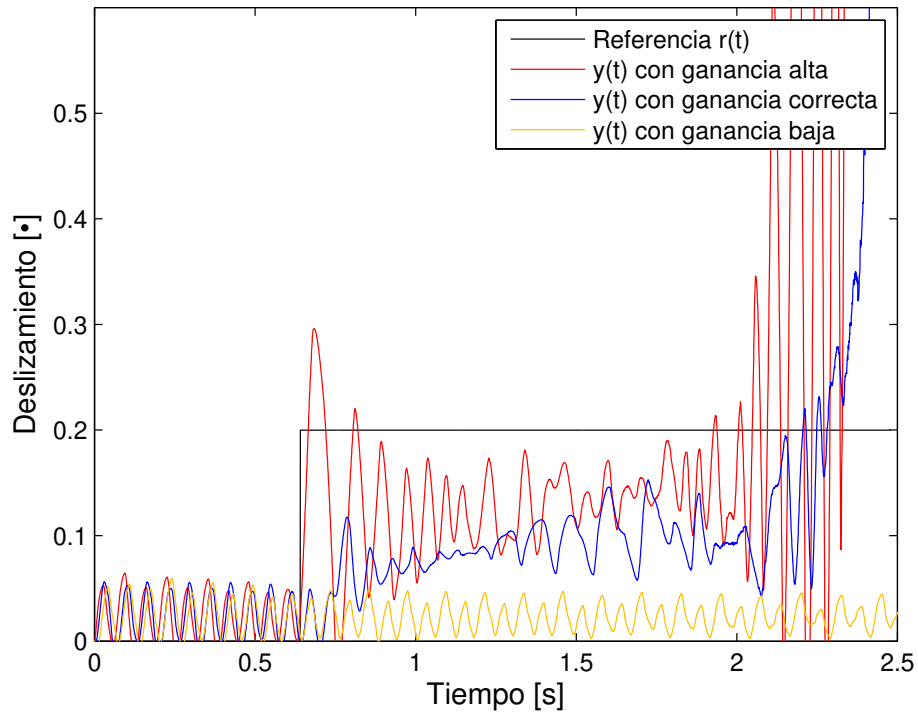


**Figura 5.7:** Curvas de sintonización de control STA, varios pesos de  $\Delta$

Se observa que un para un valor chico de la cota de la perturbación,  $\Delta = 0.1$ , la convergencia tarda 1[s] más. Para una cota de perturbación  $\Delta = 0.3$  se tiene la mejor respuesta en cuanto a tiempo de convergencia y tamaño de las oscilaciones (dominio de convergencia alrededor del 20%). En cambio para  $\Delta = 0.5$  se presentan oscilaciones grandes, haciendo que el dominio de convergencia sea grande (mayor al 50%).

## 5.4.1.2. Método 2

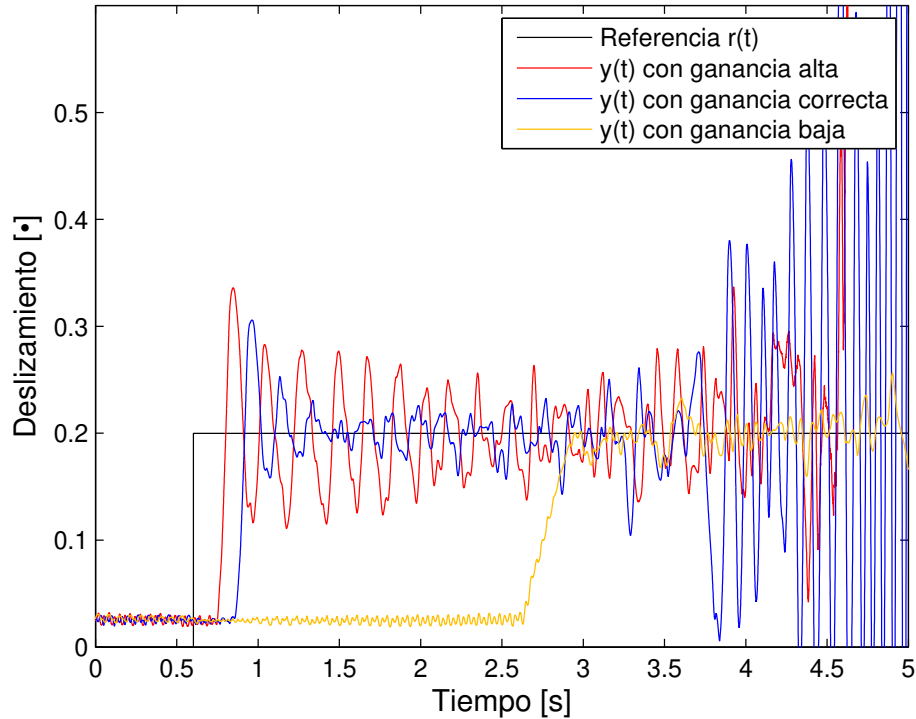
Variando la ganancia proporcional no lineal  $k_1$ :



**Figura 5.8:** Curvas para sintonización de control STA, ganancia proporcional  $k_1$

De la Figura (5.8) que si la ganancia  $k_1$  es chica ( $k_1 < 0.2$ ), el controlador no produce cambios en la salida. En cambio una ganancia muy grande ( $k_1 > 0.75$ ), se provocan oscilaciones. De estas pruebas se concluye que el valor adecuado de la ganancia  $k_1$  esta en torno a los valores  $[0.25 - 0.5]$ , que es donde la respuesta se acerca a la referencia, sin producir oscilaciones. Una vez obtenido el rango para la ganancia  $k_1$ , se procede a sintonizar la ganancia integral no lineal  $k_2$ , variando su valor:





**Figura 5.9:** Curvas para sintonización de control STA, ganancia integral  $k_2$

La ganancia  $k_2$  tiene dos funciones principales, la primera es reducir el error en estado estacionario y la segunda disminuir el tiempo de levantamiento. Valores pequeños de esta ganancia ( $k_2 < 0.3$ ) pueden hacer que error de seguimiento tienda a cero, sin embargo el tiempo de convergencia es mayor en 2[s]. En cambio si la ganancia  $k_2$  se hace muy grande ( $k_2 > 1$ ), la respuesta empieza a mostrar oscilaciones, tal como se puede ver en la Figura 5.9. Una manera de disminuir el tiempo de convergencia, sin aumentar las oscilaciones, es ocupando la ganancia más chica de  $k_1$  (0.25), y la ganancia más grande de  $k_2$  (0.5).

**Observaciones:**

- Valores muy grandes de  $k_1$  ( $> 0.5$ ) y  $k_2$  ( $> 1$ ) provocan oscilaciones.
- $k_1$  se encarga de acercar la salida a la referencia y  $k_2$  reduce el error de seguimiento.
- La ganancia  $k_2$  reduce el tiempo de levantamiento (ver Figura 5.9), sin embargo valores grandes provoca oscilaciones de poca amplitud y media frecuencia.
- Valores grandes de la ganancia  $k_1$  provocan oscilaciones de alta frecuencia (Figura 5.8).

## 5.5. Algoritmo Super-Twisting Extendido

El algoritmo super-twisting extendido (ESTA, por sus siglas en inglés) para un sistema de la forma:

$$\dot{x} = f(x, t) + g(x, t)u, \quad (5.5)$$

Se tienen las siguientes ecuaciones del algoritmo de control:

$$\begin{aligned} u &= -k_1 [x]^{\frac{r-1}{r}} + [v]^{r-1}, \\ \dot{v} &= -k_2 [x]^0 \end{aligned} \quad (5.6)$$

El algoritmo es una extensión del algoritmo STA, por lo tanto se puede sintonizar de la misma manera que se sintonizó el algoritmo STA. Cuenta con dos ganancias  $k_1$ , que se comporta como una ganancia proporcional no lineal y  $k_2$  como una ganancia integral. Se probaron los valores de  $r=2, \dots, 5$ . De las pruebas de sintonización se obtuvieron las siguientes ganancias:

- Para  $r=2$   
 $k_1 = 0.25$   
 $k_2 = 0.5$
- Para  $r=3$   
 $k_1 = 0.5$   
 $k_2 = 1$
- Para  $r=4$   
 $k_1 = 0.75$   
 $k_2 = 0.9$
- Para  $r=5$   
 $k_1 = 0.9$   
 $k_2 = 1$

### Observaciones

- La ganancia  $k_1$  permite por si solo realizar seguimiento, si su valor es lo suficientemente alta.
- La ganancia  $k_2$  reduce el error en estado estacionario y disminuye el tiempo de levantamiento.
- Ganancias muy altas de  $k_1$  y  $k_2$  provocan oscilaciones.
- Todos los algoritmos ESTA necesitaron de saturación en la acción de control, para no perder controlabilidad cuando la velocidad de las ruedas tiende a cero.

## 5.6. Algoritmo Twisting a través de integrador

Las ecuaciones que describe a este algoritmo son:

$$\dot{x} = f(x, t) + g(x, t)u, \quad (5.7)$$

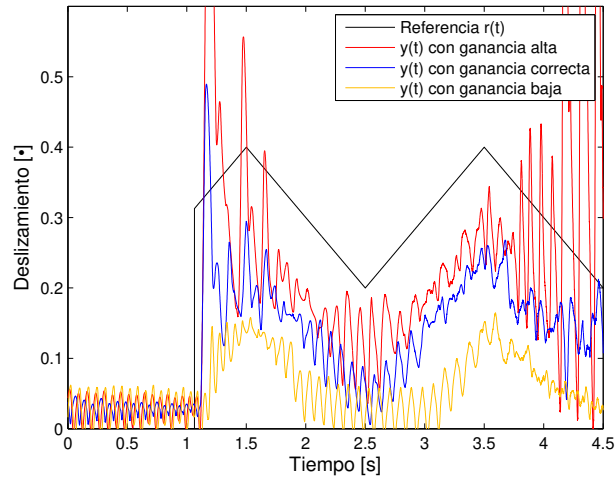
$$\begin{aligned} u &= -C_1x - v, \\ \dot{v} &= -k_1[x]^0 - k_2[\dot{x}]^0 + C_2x \end{aligned} \quad (5.8)$$

### 5.6.1. Sintonización

Este algoritmo cuenta con 4 ganancias a sintonizar. Tres de ellas son de tipo integral y la otra es de tipo proporcional. Por lo tanto se puede sintonizar primero las ganancias proporcionales y luego las integrales. También se puede notar que se pueden separar como un control PID y un control por modos deslizantes.

#### 5.6.1.1. Sintonización de la ganancia proporcional

Primero sintonizaremos la ganancia  $C_1$ . Esta ganancia tiene similaridad con la ganancia proporcional del control PID. por lo tanto, buscamos los valores limites, en los cuales la respuesta no oscile y se acerque un poco a la referencia.



**Figura 5.10:** Ganancias superior en inferior para  $C_1$

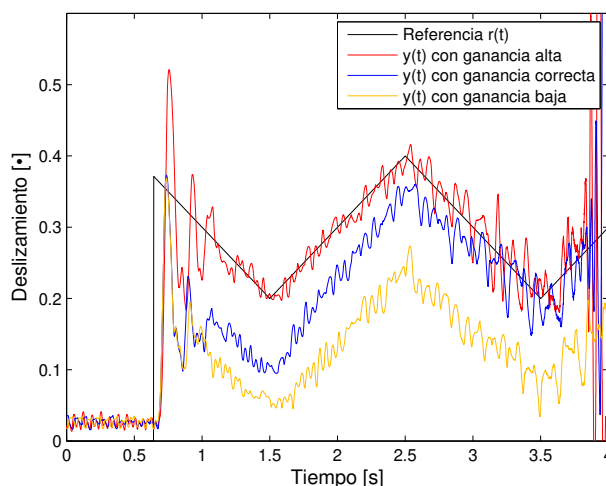
En la Figura 5.10 se puede ver como la respuesta apenas y presenta cambios para la ganancia de  $C_1 = 1$  (curva en naranja). En cambio para una ganancia de  $C_1 = 2$  la respuesta comienza a presentar oscilaciones (curva en rojo). Se concluye que los mejores valores de la ganancia  $C_1$  están alrededor de 1.5 (curva en azul).

### 5.6.1.2. Sintonización de ganancias integrales

Ahora sintonizaremos las ganancias de tipo integral. En el primer par de pruebas veremos el efecto de cada ganancia integral por separado. Esto con el fin de conocer los efectos de cada ganancia. Dado la naturaleza integral de estas ganancias, se ocupará la ganancia  $C_1$ , dado que si no se pone, el controlador solo oscilará sin lograr el objetivo de control.

En el segundo par de pruebas se buscaran los valores de sintonización de las ganancias integrales. Para ello primero se incrementaran las ganancias integrales en cantidades iguales hasta encontrar el valor donde la respuesta empieza a presentar oscilaciones grandes. A estos valores los llamaremos valores mínimos de sintonización y serán el punto de partida para sintonización de cada ganancia. Posteriormente se incrementaran cada ganancia en particular hasta que la respuesta presente oscilaciones grandes, con el fin encontrar el valor máximo de sintonización de cada ganancia.

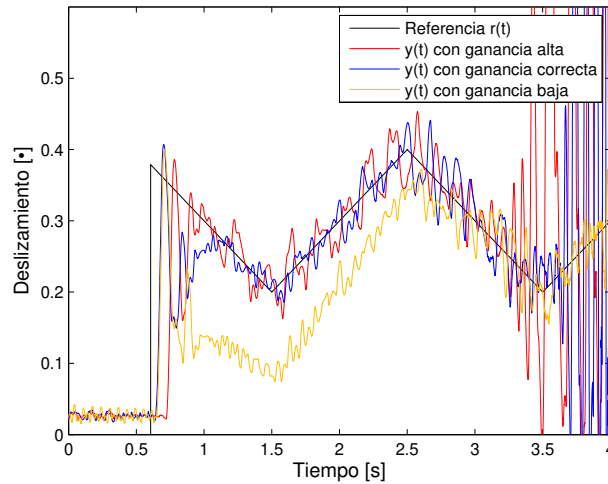
#### Efectos de la ganancia $C_2$



**Figura 5.11:** Efectos de la ganancia  $C_2$

Esta ganancia puede reducir el error en estado estacionario, aunque afecta principalmente el tiempo de levantamiento, como se puede ver en la Figura 5.11, donde para valores de  $C_2 < 1$  la salida converge más lentamente hacia la referencia (curvas en naranja y azul). En cambio, al aumentar el valor de  $C_2$  hasta 10 se observa que la señal converge mucho más rápido (curva en rojo). Además de que las oscilaciones en la parte final del control disminuyen, conforme su valor incrementa.

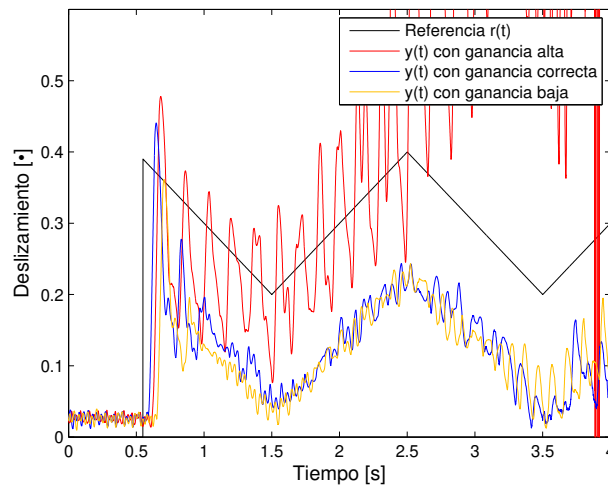
### Efectos de la ganancia $K_1$



**Figura 5.12:** Efectos de la ganancia  $k_1$

Esta ganancia afecta el tiempo de convergencia y disminuye el error a cero. Sin embargo produce notables oscilaciones y dificulta el control a bajas velocidades. En cambio para valores chicos, se obtiene que solo reduce el error, como se ve en la Figura 5.12.

### Efectos de la ganancia $K_2$



**Figura 5.13:** Efectos de la ganancia  $k_2$

Esta ganancia reduce el error en estado estacionario, sin embargo afecta el control a bajas velocidades, incrementando las oscilaciones conforme aumenta su valor, como se ve en el intervalo de tiempo que del segundo 5 al 6, en la Figura 5.13.

## Sintonización de las ganancias integrales

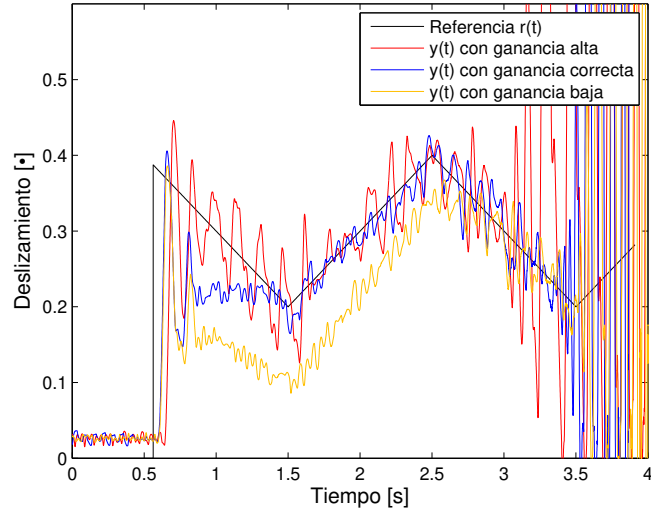


Figura 5.14: Ganancias integrales mínimas

En la Figura 5.14 se muestran las curvas de sintonización, donde se incrementaron poco a poco las ganancias integrales, con el fin de encontrar los valores donde se empiezan a presentar oscilaciones (curva en rojo). Los valores mínimos de sintonización, es decir antes de que se presenten oscilaciones (curva azul), obtenidos son:

$$C_1 = 1.5 \quad C_2 = 0.25 \quad K_1 = 0.25 \quad K_2 = 0.25$$

Posteriormente se incrementaron individualmente las ganancias, obteniéndose las siguientes mejores respuestas:

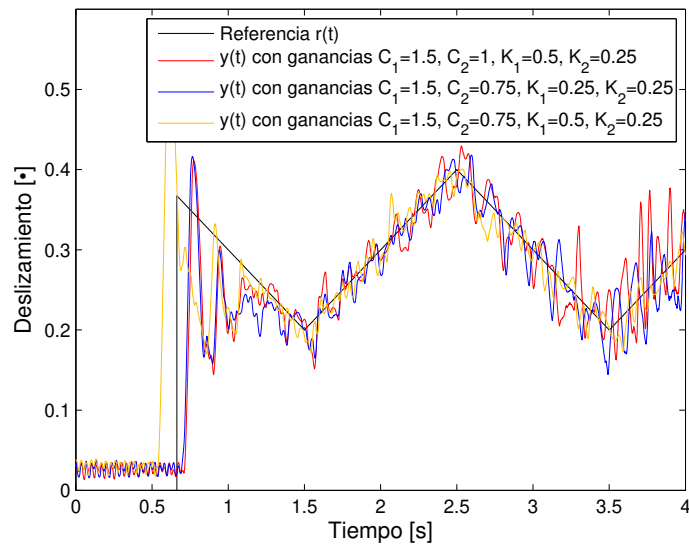


Figura 5.15: Ganancias integrales adecuadas

## Resultados Experimentales

---

En esta sección se presentarán los resultados obtenidos para los algoritmos de control PI, PID, STA, ESTA y twinstig a través de integrador. Los resultados que se mostraran serán los mejores para regulación y seguimiento.

Los experimentos fueron realizados a una velocidad de 2000[RPM] y 1000[RPM]. Sin embargo solo se presentarán las de 2000[RPM], ya que permiten apreciar por más tiempo el trabajo de los algoritmos de control.

En las pruebas de seguimiento se utilizó como señal de referencia una señal triangular cuyos valores oscilan entre 0.2 y 0.4. Esta prueba no tiene una aplicación práctica, ya que en el mundo automotor, se suelen utilizar valores constantes como referencias. Es sabido que el cambio en condiciones de terreno puede cambiar el deslizamiento óptimo, por el ende el valor de referencia. Pero los sistema de frenos ABS que tienen la capacidad de percibir este cambio, solo ajustan la referencia. Es por esto que las pruebas de seguimiento solo sirven para obtener información de la capacidad de los algoritmos de control, por lo que no se mostrarán las curvas de velocidad.

Posteriormente se hará un análisis comparativo entre los SMC y el PID. Se compararan las acciones de control, las respuestas de control y la capacidad de hace control, así como un resumen comparativo entre las distintas pruebas realizadas.

### 6.0.1. Algoritmo de control PID

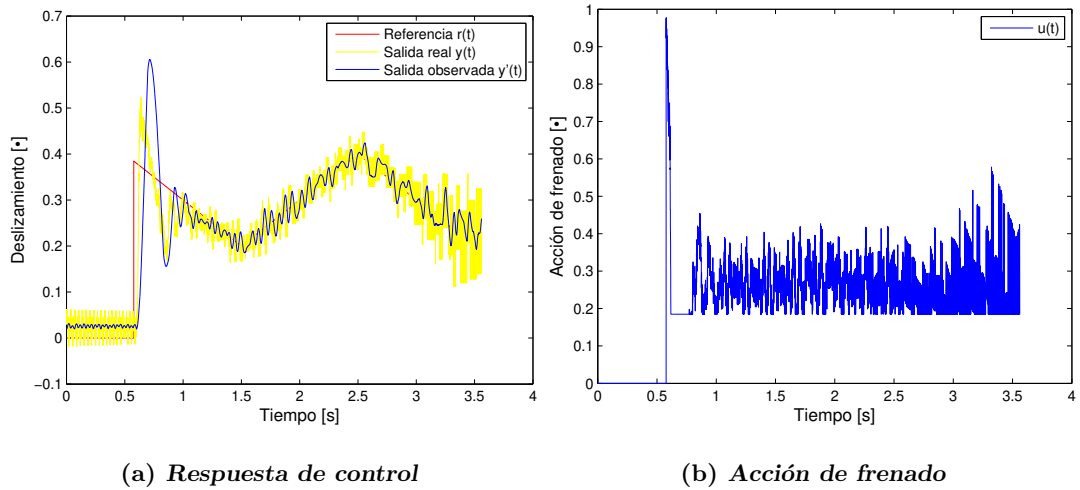


Figura 6.1: Curvas para control PID, seguimiento

La gráfica de seguimiento, Figura 6.1, muestra una región de convergencia del 15 % y alcanza a la referencia en 0.6 segundos, presentando un sobrepaso del 50 %.

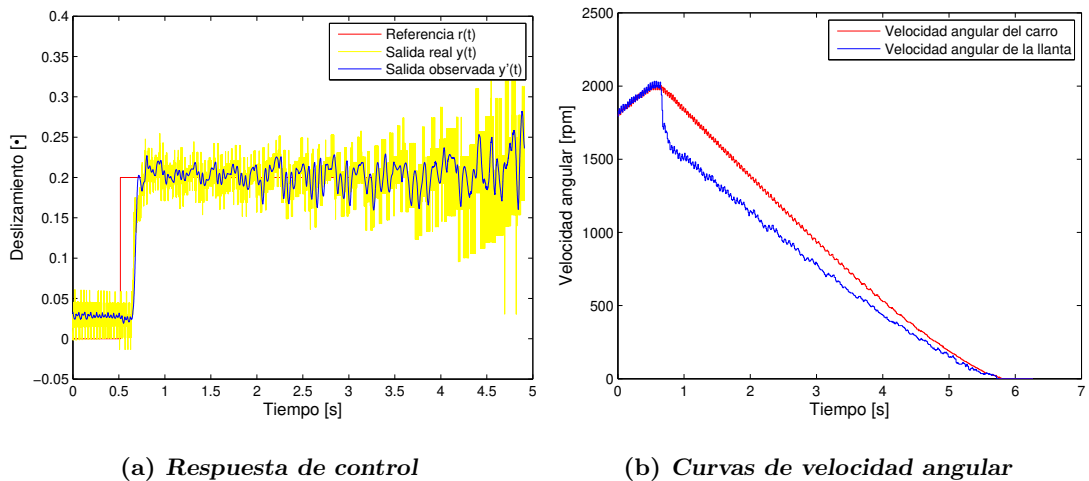
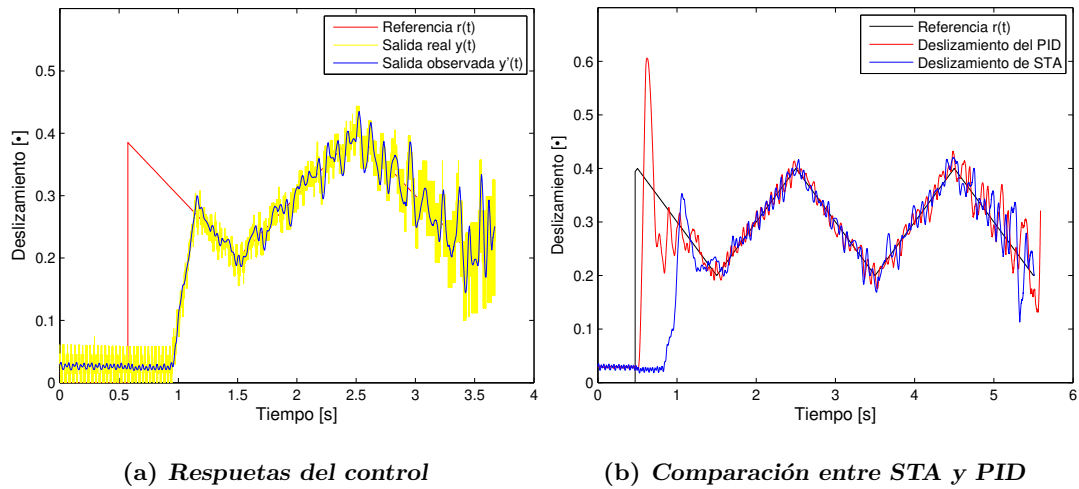


Figura 6.2: Curvas para control PID, deslizamiento de 0.2

En la Figura 6.2-a se observa que la convergencia de la señal de salida a la referencia en 0.432 segundos. La salida se mantiene en un dominio del 20 % en torno a la referencia.

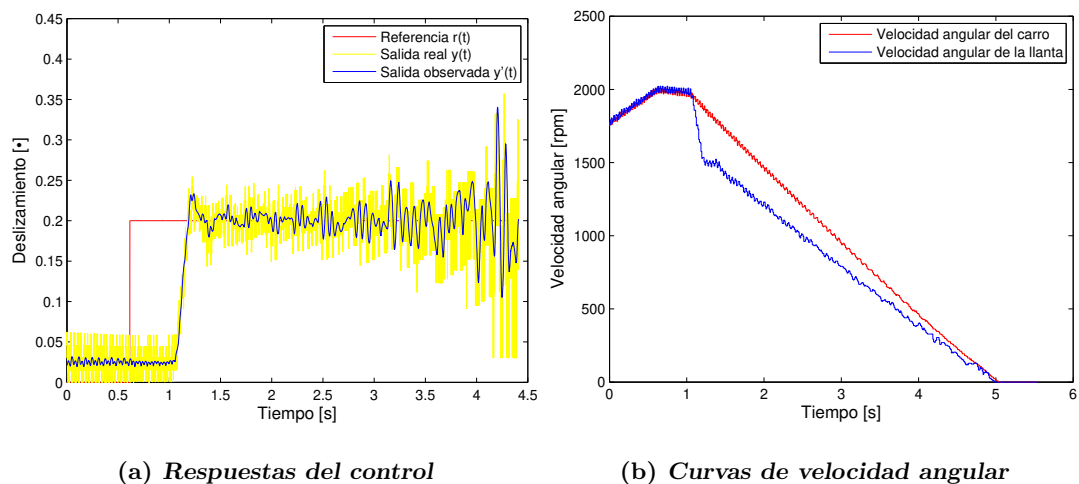


## 6.1. Algoritmo Super-Twisting



**Figura 6.3:** Respuestas para  $k_1 = 0.25, k_2 = 0.5$  con STA

La Figura 6.3-a muestra que la respuesta converge en un tiempo de 0.661 segundos, manteniéndose en un dominio de 20% alrededor de la referencia. En la Figura 6.3-b se muestra una comparación entre las respuestas del algoritmo STA y el PID, siendo a destacar que tienen comportamientos similares en cuanto a dominio de convergencia y tiempo de convergencia.

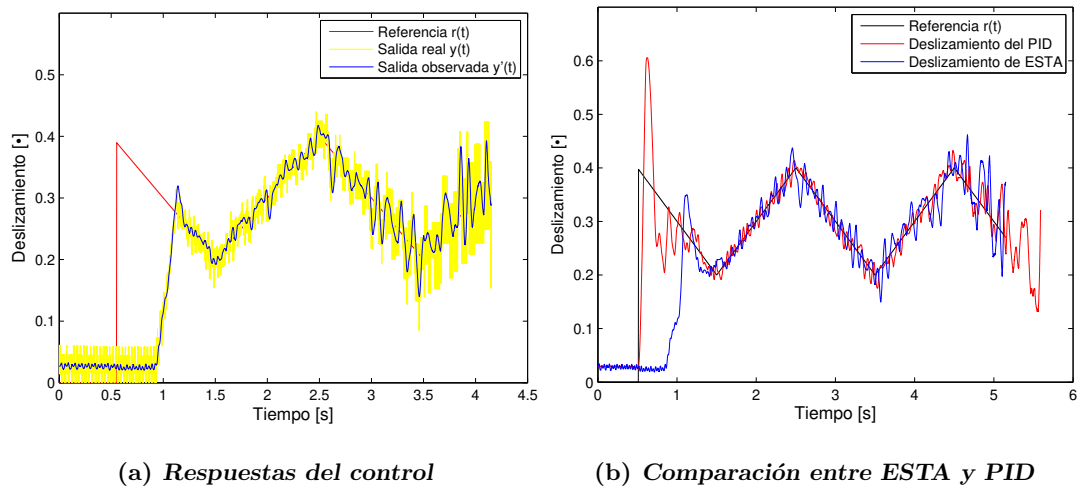


**Figura 6.4:** Respuestas para un deslizamiento de 0.2

En la Figura 6.4-a se observa que la respuesta converge a la referencia en aproximadamente 0.705 segundos, 0.275 segundos mas que el algoritmo PID. El dominio de convergencia es del 15% en torno a la referencia. En las curvas de velocidad (Figura 6.4-b) se puede observar que las velocidades no presentan oscilaciones y se mantiene constante en su tendencia a cero.

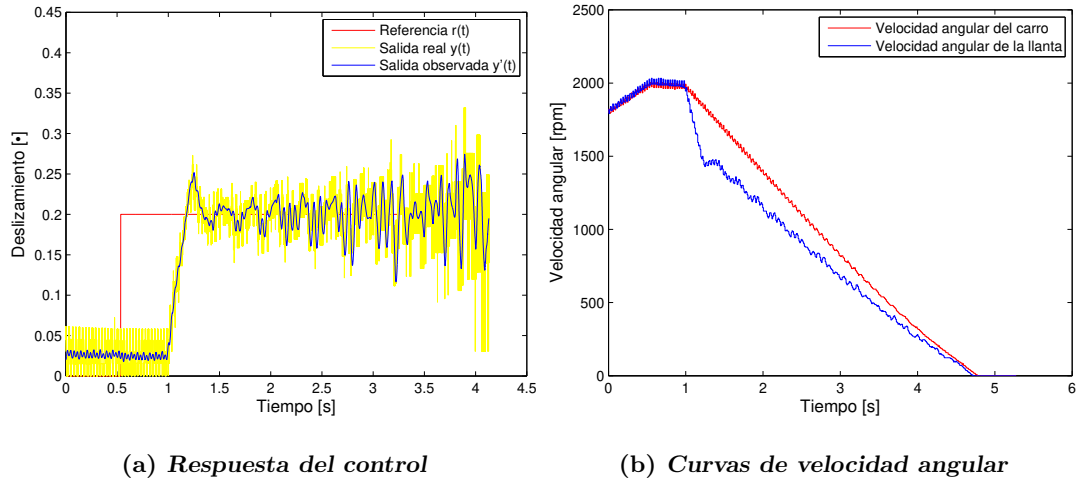
## 6.2. Algoritmo Super-Twisting Extendido

### 6.2.1. Algoritmo con $r=2$



**Figura 6.5:** Respuestas para  $k_1 = 0.25, k_2 = 0.5$  con ESTA

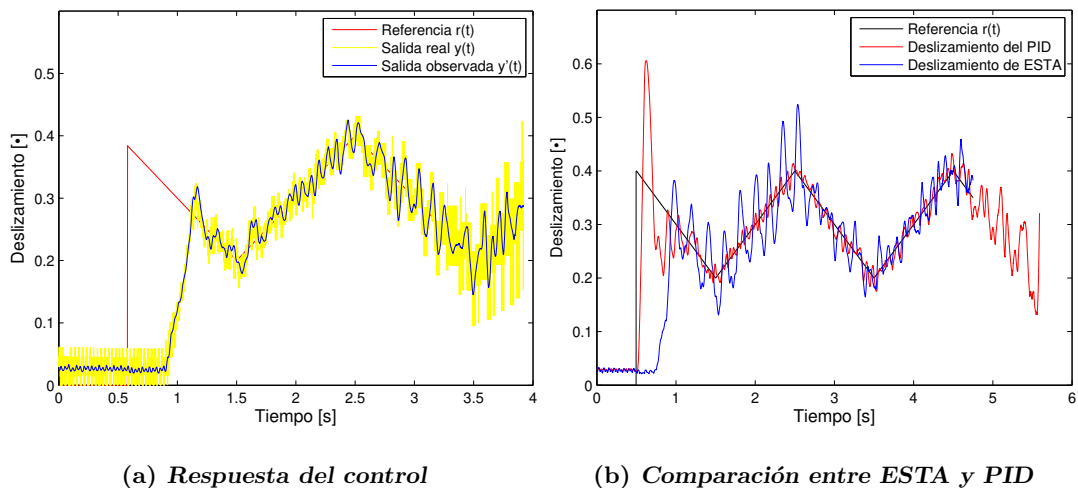
En la Figura 6.5-a se muestra que la salida converge en 0.63 segundos y se mantiene en un dominio del 15% en torno a la referencia. En la Figura 6.5-b se comparan las respuestas del algoritmo ESTA con la del PID, observándose que tienen un comportamiento similar. El algoritmo ESTA con  $r = 2$  tiene un comportamiento similar al STA, dado que son el mismo algoritmo.



**Figura 6.6:** Respuestas para un deslizamiento de 0.2

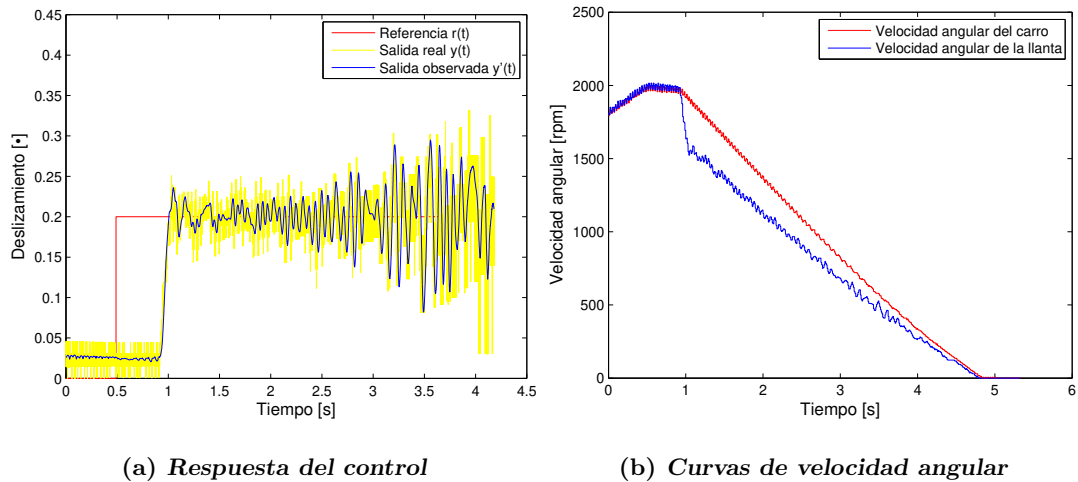
En la gráfica de seguimiento (Figura 6.6-a) se observa que la convergencia sucede en 1 segundo, y se mantiene en una vecindad del 19% en torno a la referencia. En las gráficas de velocidad (Figura 6.6-b) se observa que las curvas descienden sin presentar oscilaciones, pero hay un sobrepaso del 20%.

### 6.2.2. Algoritmo con $r=3$



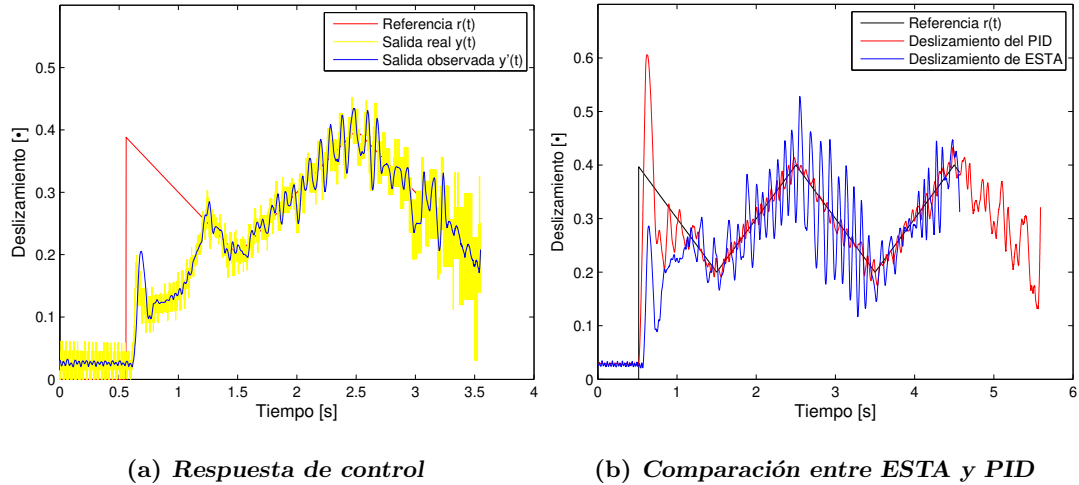
**Figura 6.7:** Respuestas para  $k_1 = 0.25$ ,  $k_2 = 0.5$  con ESTA

En la Figura 6.7-a se observa que salida converge a una región del 17% en torno a la referencia en un tiempo de 0.687 segundos. Al comparar las respuestas del control ESTA y el PID (Figura 6.7-b), se observa que este algoritmo converge 0.1[s] antes que el PID, sin embargo presenta un dominio de convergencia mayor (alrededor del 30%).



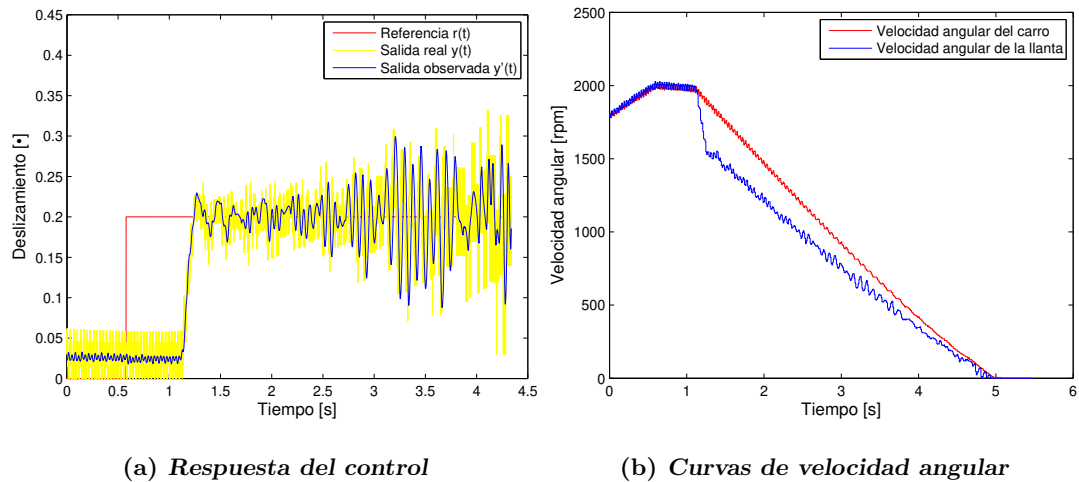
**Figura 6.8:** Respuestas para un deslizamiento de 0.2

La respuesta de control (Figura 6.8-a) muestra que la salida converge a una región del 20% en torno a la referencia, en un tiempo de 0.396 segundos. La curva de velocidad (Figura 6.8-b) ilustra constantes oscilaciones debidas a la región de convergencia grande.

6.2.3. Algoritmo con  $r=4$ 

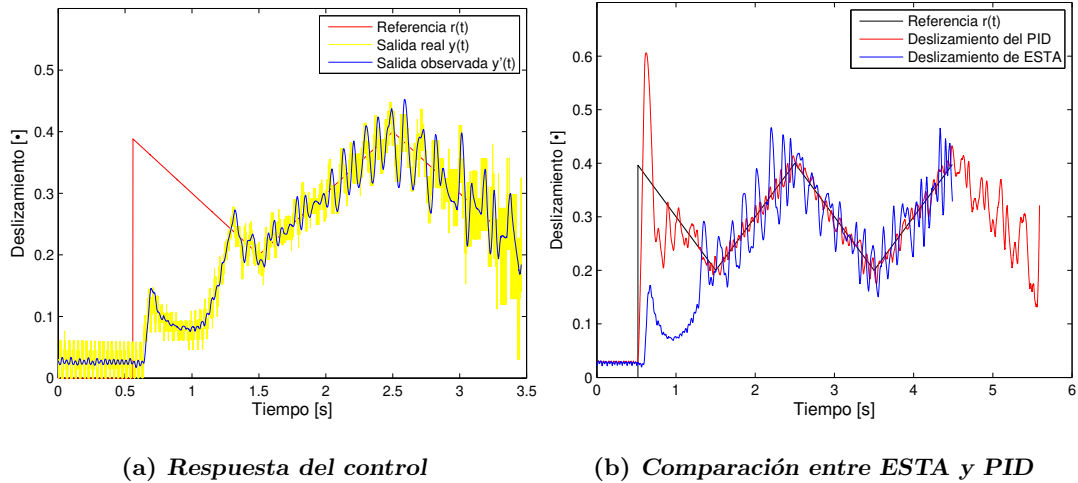
**Figura 6.9:** Respuestas para  $k_1 = 0.25, k_2 = 0.5$  con ESTA

La respuesta de control (Figura 6.9-a) muestra que la salida converge en 0.716 segundos a una región del 25 % en torno de la referencia. Al comparar con el algoritmo PID (Figura 6.9-b) se observa que la región de convergencia es mucho mayor (35 %).



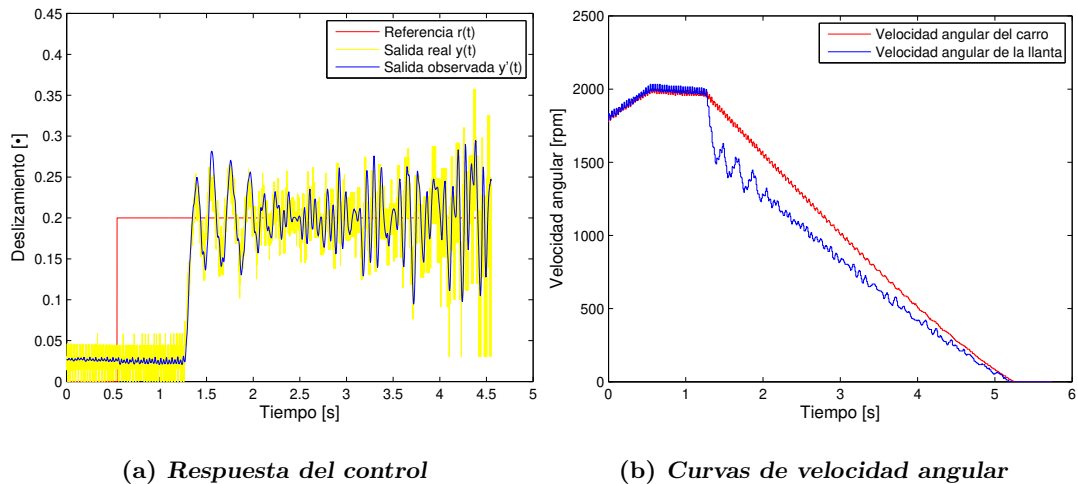
**Figura 6.10:** Respuestas para un deslizamiento de 0.2

En la Figura 6.10-a se observa que la salida converge a un dominio del 10 %, en 0.653 segundos. Las gráficas de velocidad (Figura 6.10-b) muestran como las velocidades descienden de manera continua y sin oscilaciones.

6.2.4. Algoritmo con  $r=5$ 

**Figura 6.11:** Respuestas para  $k_1 = 0.25, k_2 = 0.5$  con ESTA

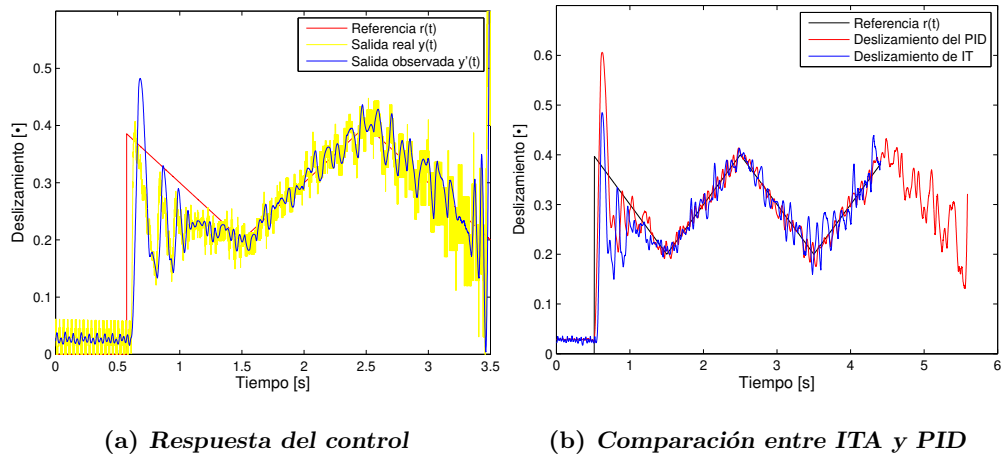
La salida converge en 0.76 segundos y se mantiene en una vecindad del 34% de la referencia, tal como se ve en la Figura 6.11-a. En la Figura 6.11-b se observa que el ESTA converge a un dominio del 20% en 0.3[s].



**Figura 6.12:** Respuestas para un deslizamiento de 0.2

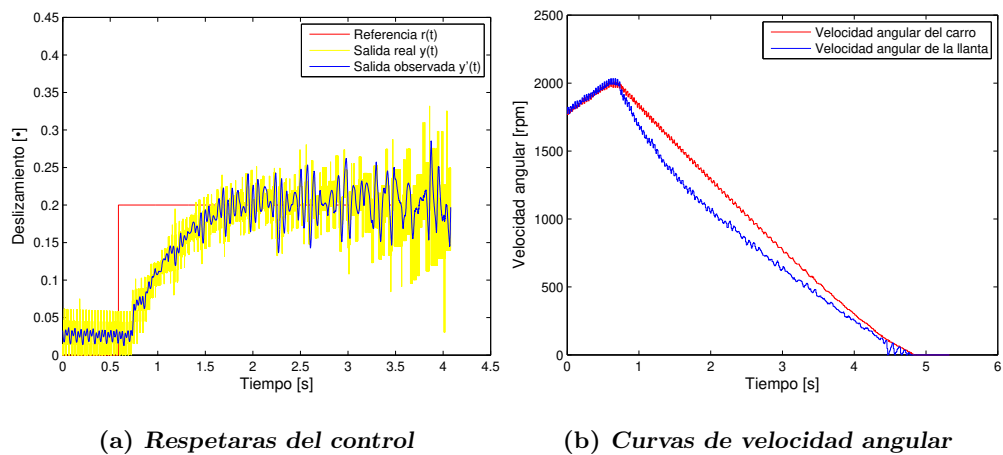
En la Figura 6.12-a se puede ver que la señal de control tiende a la referencia en 0.797 segundos y se mantiene en una vecindad del 15% alrededor de la referencia. Las gráficas de velocidades (Figura 6.12-b) no muestran oscilaciones.

### 6.3. Algoritmo Twisting a través de integrador



**Figura 6.13:** Respuestas para un deslizamiento de 0.1

En la Figura 6.13 se observa que la salida converge en 0.78 segundos a un dominio del 21 % entorno a la referencia. En las gráficas de comparación entre el PID y el ITA se observa que ambas respuestas tienen comportamientos similares, convergiendo en 0.2[s] a un dominio del 20 %.



**Figura 6.14:** Respuestas para un deslizamiento de 0.2

En la Figura 6.14-a se observa que la salida converge a un dominio alrededor del 15 % en 0.798 segundos. Las curvas de velocidad (Figura 6.14-b) muestra que se presentan oscilaciones, siendo mayores a velocidades menores a 500[RPM].

## 6.4. Discusión de resultados

Después de haberse presentado las mejores respuestas de cada controlador, es necesario conocer el desempeño de los mismos. Se consideran como indicadores de buen desempeño lo siguiente:

- Que la distancia de frenado sea lo más chica posible.
- Que las ruedas sean frenadas en el menor tiempo.
- Que la acción de control presente el menor chattering.
- Que la salida alcance la señal de referencia en el menor tiempo posible (tiempo de convergencia).
- Que la salida se mantenga lo más cerca de la señal de referencia (Error de seguimiento).

Para el cálculo de la distancia de frenado, se debe calcular la distancia que avanza la rueda *car* a partir de que se aplica la acción de control. Esta corresponde al máximo de la variable *Brake Distance*. Para el cálculo del tiempo de frenado, solo se debe buscar el tiempo en el que se alcanza por primera vez el máximo de la variable *Brake Distance*. Una forma de conocer el efecto del chattering, es conocer el máximo de la señal de error, tal como se explica en [14]. El tiempo de convergencia es el tiempo se calculó de manera gráfica, se corresponde con la primera vez que la salida  $y(t)$  toca la señal de referencia  $r(t)$ . El error promedio seguimiento resulta de la diferencia entre la señal de referencia y de la señal de salida. Sin embargo es una señal continua con un número bastante grande de datos, por lo que se hace un promedio de todos los datos.

Los resultados de estos cálculos se presentarán en la Tabla 6.1, donde se podrán comparar con los resultados de los demás controladores. Dado que se realizaron varias pruebas, se hará un promedio de cada indicador de desempeño. Sin embargo se debe aclarar que para que los datos sean representativos, en cada tipo de experimento se deben realizar las pruebas de cada algoritmos de manera consecutiva, dando tiempos cortos para que el disco de freno se enfríe. Esto es así debido a dos razones, la primera es que al calentarse el disco de freno disminuye su efectividad; la segunda se debe a que al realizar varias pruebas las superficies cambian sus propiedades por el calentamiento de aceite, haciendo que el sistema a controlar sea diferente.

Las pruebas realizadas para regulación fueron utilizando distintos valores de referencia, que van desde 0.1 a 0.2. En las pruebas de seguimiento se agregó aceite automotriz , en cantidades que aumentan progresivamente.



**Tabla 6.1:** Tabla comparativa del desempeño de los controladores en regulación

Controlador	PID	STA	ESTA r=2	ESTA r=3	ESTA r=4	ESTA r=5	ITA
Distancia de frenado	50.2795[m]	48.9786[m]	48.7759[m]	42.7787[m]	51.4057[m]	55.3583[m]	43.9018[m]
Tiempo de frenado	5.5028[S]	4.863[S]	4.8737[S]	4.4412[S]	5.0467[S]	5.2697[S]	4.6845[S]
Chattering	0.0883	0.1202	0.0954	0.1118	0.0980	0.1337	0.0884
Tiempo de convergencia	0.682[S]	0.8255[S]	0.7875[S]	1.1275[S]	1.046[S]	0.8117[S]	0.9295[S]
Error promedio de seguimiento	0.0146	0.0159	0.0160	0.0222	0.066	0.0203	0.0195

La tabla (6.1) se muestran los resultados para regulación. De manera general se puede observar que los algoritmos SMC muestran menor distancia de frenado que el PID, salvo el algoritmo ESTA con  $r = 5$ . Sin embargo los efectos del *chattering* es mayor y el tiempo de convergencia es al menos 30 % mayor. El error promedio también es mayor, justificando así que las distancias de frenado sean menores.

**Tabla 6.2:** Tabla comparativa del desempeño de los controladores en seguimiento

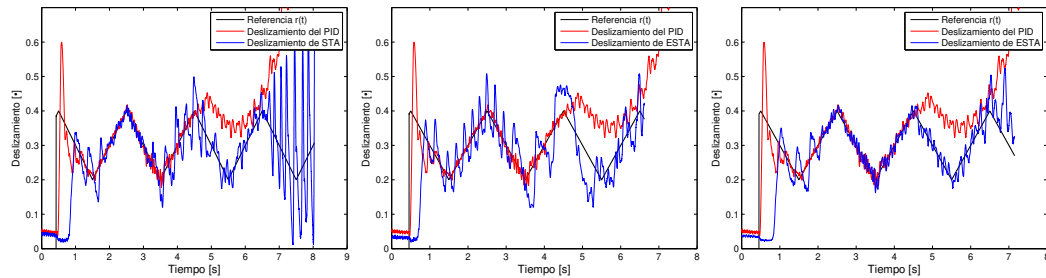
Controlador	PID	STA	ESTA r=2	ESTA r=3	ESTA r=4	ESTA r=5	ITA
Distancia de frenado	53.1105[m]	56.1389[m]	52.5239[m]	48.5311[m]	43.3640[m]	43.5099[m]	41.6565[m]
Tiempo de frenado	5.8839 [S]	6.1726[S]	5.5183[S]	5.2410 [S]	4.9290[S]	4.7704[S]	4.8446[S]
Chattering	0.3702	0.3219	0.2144	0.1858	0.1994	0.1932	0.1347
Tiempo de convergencia	0.6029[S]	1.0762[S]	1.0838[S]	1.0145 [S]	1.1705[S]	1.2868[S]	0.7127[S]
Error promedio de seguimiento	0.0370	0.0245	0.0212	0.0301	0.0244	0.0270	0.0266

En la tabla (6.2) se observa que los algoritmos por modos deslizantes muestran distancias y tiempos de frenado menores que el algoritmo PID, salvo el algoritmo STA. También el error de seguimiento como el efecto del *chattering* es menor. Sin embargo el tiempo de convergencia sigue siendo mayor en la menos un 40 %. De las pruebas anteriores se puede concluir que para tareas de control sencillo, el algoritmo PID es lo suficientemente capaz; pero cuando estas tareas se complican, por ejemplo perturbando el sistema y exigiendo más a los algoritmos de control, los algoritmos robustos muestran mejor comportamiento.

### 6.4.1. Control en superficies húmedas

En superficies húmedas, la adherencia entre el asfalto y la rueda es menor. Esto implica que las ruedas deslizan con mayor facilidad, requiriendo un mayor trabajo por parte del controlador. El aumento de humedad se puede tomar como una perturbación desconocida, ya que no hay un método para medir su efecto. Por lo tanto se hicieron pruebas con el fin de medir la capacidad de los controladores para mantener el control aún en presencia de estas perturbaciones.

Para realizar este experimento, se agregó aceite de manera gradual. Esto se hará hasta que los algoritmos de control pierdan la capacidad de mantener el control de la planta.



(a) *Respuesta del control, algoritmo STA y PID*      (b) *Respuesta del control, algoritmo ESTA y PID*      (c) *Respuesta del control, algoritmo TTA y PID*

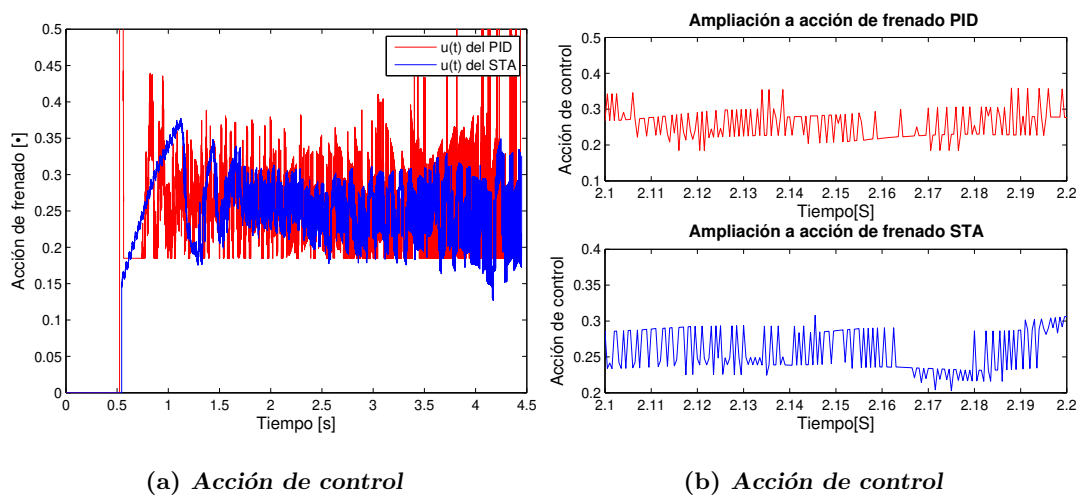
**Figura 6.15:** Curvas comparativas

En la Figura 6.15 se muestran algunos de los resultados obtenidos de este experimento. Las curvas de color rojo corresponden al algoritmo PID. Las curvas en color azul son de tres algoritmos SMC: STA, ESTA con  $r=4$  e ITA. Como se puede observar, en presencia de perturbaciones, los algoritmos por modos deslizantes pueden mantener el control de la planta por más tiempo. Incluso en las imágenes (6.15-b) y (6.15-c) se puede observar que reducen el tiempo de frenado. Esto se debe a que los SMC son controles robustos ante perturbaciones.

### 6.4.2. Comparación de acciones de control

Los algoritmos por modos deslizantes han tenido como mayor inconveniente el *chattering*. Las causas de este se explicaron en el capítulo 2. Es por ello que se han desarrollado algoritmos que generen señales continuas. Una idea es sustituir la función discontinua del signo, por señales sigmoides. La principal desventaja de esto es que se pierde el poder en el origen. Los algoritmos continuos por modos deslizantes mantienen el poder de la función signo cerca del origen, pero se suavizan lejos de el, por lo que el efecto del chattering se atenúa.

El objetivo de esta sección es comparar las acciones de control del algoritmo PID y el algoritmo STA y observar si las señales obtenidas son continuas:



**Figura 6.16:** Curvas comparativas de acción de frenado

La Figura 6.16-a muestra la comparación entre las acciones de control debidas al algoritmo STA (azul) y el PID (rojo); observándose que la banda de la acción de control debida al STA es menor que la del algoritmo PID. En la Figura 6.16-b se observa una amplificación de ambas acciones de frenado. Se ve que ambas señales oscilan a frecuencias similares, siendo de amplitud menor la correspondiente al algoritmo STA.

### 6.4.3. Comparación de respuestas de control

En esta sección se compararan los resultados de las respuestas de control y los estados de los sistemas entre dos algoritmos SMC y el algoritmo PID.

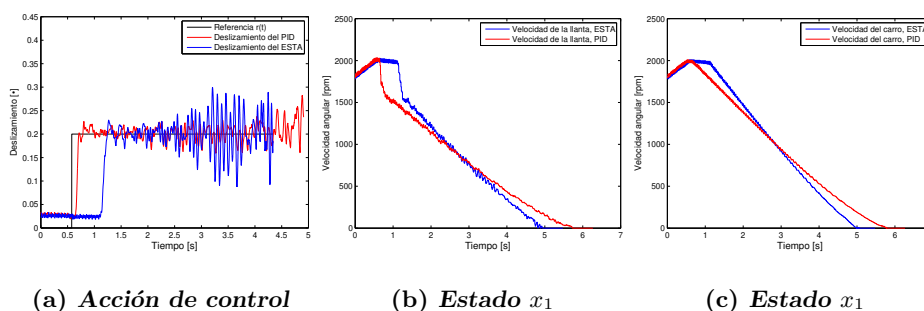


Figura 6.17: Curvas comparativas de respuesta de control

Las curvas de la figura (6.17) corresponde a los algoritmos ESTA con  $r = 4$  (azul) y al algoritmo PID (rojo). En la imagen (6.17-a) se observa que la señal del STA converge en un tiempo mayor y se mantiene en una región ligeramente mayor a la del control PID. En las curvas de velocidad (6.17-b) y (6.17-c) se observa que las curvas del STA convergen a cero en un tiempo menor que las del PID, en ambos casos muestra que las curvas descienden sin presentar oscilaciones.

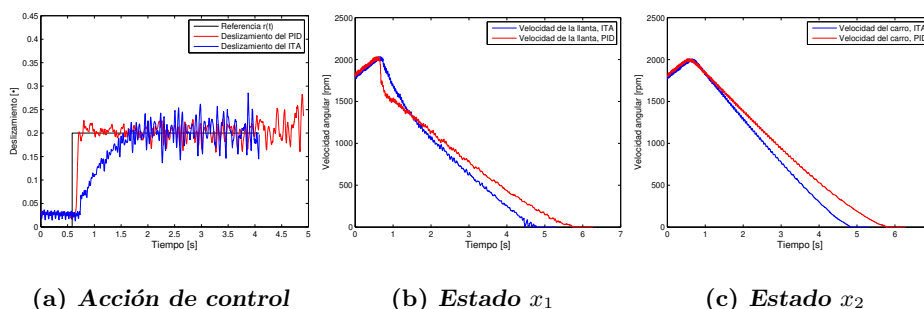


Figura 6.18: Curvas comparativas de respuesta de control

Las gráficas de la figura (6.18) corresponden a los algoritmos PID (rojo) y twisting a través de integrador (azul). En la respuesta de control (6.18-a) se observa que la señal del algoritmo por modos deslizantes converge mas lentamente y se mantiene en un dominio mayor que la señal del algoritmo PID. En las curvas de velocidades (6.18-b) y (6.18-c) se observa que la que corresponde al algoritmo por SMC desciende mas rápido que la del PID, pero presenta mas oscilaciones en las velocidad de la llanta.

## Conclusiones

---

La teoría de control por modos deslizantes busca obtener controladores robustos sin las desventajas que conlleva utilizar funciones discontinuas en sistemas mecánicos. Los algoritmos continuos por modos deslizantes ofrecen una alternativa a este problema. Sin embargo estos algoritmos son de reciente desarrollo [3], por lo que se desconoce su efectividad de manera empírica. El objetivo principal de esta tesis es probar estos algoritmos en un sistema de frenos ABS.

Debido a que se desconocen con exactitud los parámetros de las ecuaciones diferenciales que rigen el sistema de frenos ABS y al reciente desarrollo de algunos algoritmos probados, un método de sintonización analítico no fue factible. Sin embargo se pudo aprovechar la naturaleza de los algoritmos probados, ya que son similares a un algoritmo PI no lineal, por lo que se pudo utilizar un método de sintonización heurístico probado en otros trabajos. Los resultados obtenidos de la sintonización fueron satisfactorios, mostrando que no es necesario tener un método de sintonización complejo para obtener buenos resultados.

En cuanto a las pruebas realizadas, se encontró que cuando el objetivo de control es poco exigente, refiriéndonos a regulación, tanto los algoritmos PID y los algoritmos por modos deslizantes son lo suficientemente robustos para acometer esta tarea. En estos casos se encontró que la diferencia entre ambos no es mayor al 20% a favor de los algoritmos robustos. En tareas de control más exigentes, tales como seguimiento, se mantiene esta tendencia, mejorándose un poco el error de seguimiento. Sin embargo los algoritmos por modos deslizantes adolecieron en todos los casos del mismo problema: tiempo de convergencia al menos un 30% mayor. Si bien este tiempo se puede disminuir aumentando las ganancias de tipo integral, esto incrementa la región o dominio de convergencia. Por lo tanto hay un compromiso entre el tiempo de convergencia y el dominio en el que se mantiene la salida de control.

Una de las características más apreciadas de los controles robustos es su capacidad de mantener el control de plantas sometidas a perturbaciones desconocidas. En este caso se logró apreciar dicha capacidad al someter a la planta a una perturbación. La perturbación elegida fue cambiar la naturaleza de las superficies en contacto agregando aceite. Ante tales condiciones, se aprecia que solo los algoritmos por modos deslizantes

pueden mantener el control durante todo el experimento. Conforme la perturbación se va haciendo más grande agregando más aceite, ambos controles pierden la capacidad de hacer control, sin embargo los últimos en hacerlo son los algoritmos robustos.

Al realizar una comparación entre acciones de control, se encontró que la banda de trabajo de los algoritmos por modos deslizantes es menor que la de los algoritmos PID, mostrando que son más eficientes en cuanto al uso del actuador. Al realizar una aplicación a las señales de control se observó que ambas acciones trabajan en un rango de frecuencias similares, dando como resultado que los algoritmos continuos por modos deslizantes producen señales de control continuas.

De manera general se puede decir que los algoritmos continuos por modos deslizantes realizan un trabajo eficiente, sobre todo en sistemas sometidos a perturbaciones.

## 7.1. Trabajo futuro

Si bien se lograron los objetivos planteados en esta tesis, aún quedan trabajos por realizar en este sistema. En primer lugar obtener los parámetros de las ecuaciones diferenciales que rigen el sistema de frenos. Esto con el fin de tener simulaciones fiables que se puedan ocupar en el diseño de otros controladores. Otro objetivo a futuro es realizar pruebas con oscilaciones en el sistema de frenos ABS. Un tercer objetivo es obtener un modelo experimental de coeficiente de fricción u obtener coeficientes que adecuen los modelos que ya se tienen al comportamiento real de la planta.

# Bibliografía

---

- [1] Antic, D., Nikolic, V., and Mitic, D. (2010). Sliding mode control of anti-lock braking system: An overview. [2](#)
- [2] Boopathi, A. M. and Abudhahir, A. (2016). Design of grey-verhulst sliding mode controller for antilock braking system. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 14(3):763–772. [2](#)
- [3] Fridman, L., Moreno, J. A., Bandyopadhyay, B., Kamal, S., and Chalanga, A. (2015). Continuous nested algorithms: The fifth generation of sliding mode controllers. In *Recent Advances in Sliding Modes: From Control to Intelligent Mechatronics*, pages 5–35. Springer. [16](#), [17](#), [75](#)
- [Ille] Ille, O. Abs system control. [51](#)
- [5] Khalil, H. K. (1996). Nonlinear systems. *Prentice-Hall, New Jersey*, 2(5):5–1. [14](#)
- [6] Li, L. and Wang, F.-Y. (2007). *Advanced motion control and sensing for intelligent vehicles*. Springer Science & Business Media. [27](#)
- [7] Liu, J. and Wang, X. (2011). Advanced sliding mode control. In *Advanced Sliding Mode Control for Mechanical Systems*, pages 81–96. Springer. [VIII](#), [5](#)
- [8] Oniz, Y., Kayacan, E., and Kaynak, O. (2007). Simulated and experimental study of antilock braking system using grey sliding mode control. In *Systems, Man and Cybernetics, 2007. ISIC. IEEE International Conference on*, pages 90–95. IEEE. [2](#)
- [9] Reif, K. (2014a). *Brakes, Brake control and driver assistance systems*, volume 1. Springer. [VIII](#), [VIII](#), [VIII](#), [26](#), [30](#), [31](#)
- [10] Reif, K. (2014b). Fundamentals of automotive and engine technology. [VIII](#), [29](#)
- [11] Rodriguez Leyva, L. F. (2016). Análisis del efecto de sintonización del control pi en sistemas de freno abs-inteco. [25](#), [32](#)
- [12] Shtessel, Y., Edwards, C., Fridman, L., and Levant, A. (2014). *Sliding mode control and observation*, volume 10. Springer. [12](#), [16](#), [18](#), [52](#)

- [13] Torres-González, V., Sanchez, T., Fridman, L. M., and Moreno, J. A. (2017). Design of continuous twisting algorithm. *Automatica*, 80:119–126. [15](#)
- [14] Ventura, U. P. and Fridman, L. (2016). Chattering measurement in smc and hosmc. In *Variable Structure Systems (VSS), 2016 14th International Workshop on*, pages 108–113. IEEE. [70](#)