DIRECTORIO DE PROFESORES DEL CURSO: EL METODO DEL ELEMENTO FINITO 1985.

1. DR. CARLOS SANTIAGO LOPEZ CAJUN
PROFESOR ASOCIADO
DEPFI
UNAM
MEXICO, D.F.
550 52 15 Ext. 4470

2. DR. VICTOR HUGO MUCIÑO QUINTERO (COORDINADOR)
PROFESOR
DEPFI
UNAM
MEXICO, D.F.
550 52 15 Ext. 4470

3. DR. PORFIRIO BALLESTEROS BAROCIO
PROFESOR
DEPFI
UNAM
MEXICO, D.F.
550 52 15 Ext. 4498

4. ING. OMAR JOSE MARIN ALVAREZ
PROFESOR
DIVISION DE INGENIERIA
MECANICA DE POSGRADO
UNAM

5. DR. MIHIR SEN
PROFESOR
DIVISION DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA
FACULTAD DE INGENIERIA
U N A M
MEXICO, D.F.

6. ING. ERNESTO MARTIN DEL CAMPO VAZQUEZ
INVESTIGADOR
DIVISION DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA
FACULTAD DE ING.
UNAM
MEXICO, D.F.

'edcs.

[illegible]

[illegible]

3

[illegible]

"EL METODO DEL ELEMENTO FINITO EN LA INGENIERIA
DEL 4 AL 9 DE FEBRERO DE 1985

HORARIO	LUNES	MIERCOLES	JUEVES	VIERNES	SABADO
9.00 - 10.00	V. MUCIÑO	P. BALLESTEROS O. MARIN	V. MUCIÑO G. URRIOLA	M. SEN	V. MUCIÑO
10.00 - 11.00	C. LOPEZ	P. BALLESTEROS O. MARIN	V. MUCIÑO G. URRIOLA	M. SEN	V. MUCIÑO E. MARTIN
11.00 - 11.15	DESCANSO	DESCANSO	DESCANSO	DESCANSO	DESCANSO
11.15 - 12.15	C. LOPEZ	P. BALLESTEROS O. MARIN	V. MUCIÑO	M. SEN	V. MUCIÑO E. MARTIN
12.15 - 13.15	C. LOPEZ	P. BALLESTEROS O. MARIN	V. MUCIÑO	M. SEN	V. MUCIÑO E. MARTIN
13.15 - 15.00	COMIDA	COMIDA	COMIDA	COMIDA	COMIDA
15.00 - 16.00	P. BALLESTEROS O. MARIN	V. MUCIÑO	V. MUCIÑO	E. MARTIN M. SEN	
16.00 - 17.00	P. BALLESTEROS O. MARIN	V. MUCIÑO	V. MUCIÑO	E. MARTIN M. SEN	
17.00 - 17.15	DESCANSO	DESCANSO	DESCANSO	DESCANSO	
17.15 - 18.15	P. BALLESTEROS O. MARIN	V. MUCIÑO	V. MUCIÑO	E. MARTIN M. SEN	
18.15 - 19.15	P. BALLESTEROS O. MARIN	V. MUCIÑO	V. MUCIÑO	E. MARTIN M. SEN	

mica...

"EL METODO DEL ELEMENTO FINITO EN LA INGENIERIA"
DEL 4 AL 9 DE FEBRERO DE 1985

PROGRAMA DESGLOSADO

I INTRODUCCION

I.1 Descripción del curso
I.2 Conceptos fundamentales del método del elemento finito.
I.3 Algebra de matrices y sistemas lineales

II ECUACIONES DE EQUILIBRIO

II.1 Formulación de las ecuaciones de equilibrio, constitutivas y compatibilidad en el método elástico

III METODOS MATRICIALES EN LA MECANICA ESTRUCTURAL

III.1 Método de las rigideces
III.2 Método de las flexibilidades

IV MODELACION MATEMATICA DE SISTEMAS

IV.1 Introducción al cálculo de las variaciones
IV.2 Formulación variacional del elemento finito
IV.3 Formulación de residuos pesados (Galerkin)

V BIBLIOTECA DE ELEMENTOS Y APLICACIONES

V.1 Desarrollo de matrices elementales
V.2 Familias de elementos
V.3 Estructura general de paquetes computacionales de elementos finitos

VI APLICACIONES ANALISIS ESTATICO Y DINAMICO

VI.1 Ejemplos de aplicación; análisis elastostático
VI.2 Ejemplo para el caso dinámico

VII APLICACIONES AVANZADAS, PROBLEMAS NO LINEALES

VII.1 Aplicación a flujo comprensible
VII.2 Aplicación a flujo viscoso

VIII TALLER DE APLICACIONES

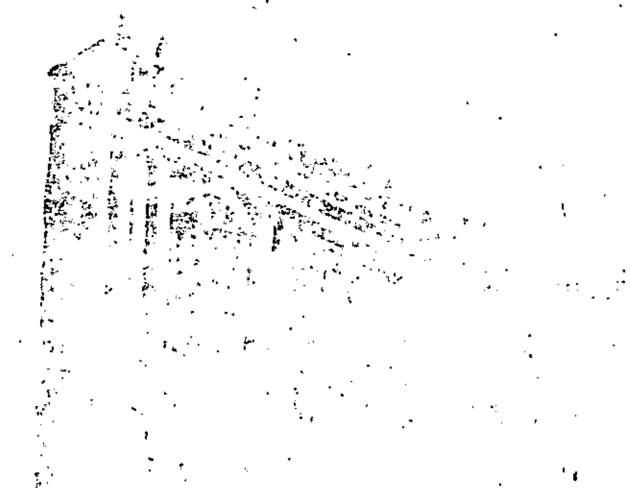
VIII.1 Introducción al paquete "SAPIV" y descripción de opciones de análisis
VIII.2 Utilización del paquete "SAPIV" para la solución de problemas varios

IX SOLUCION DE PROBLEMAS PROPUESTOS

mica...

DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.

EL METODO DEL ELEMENTO FINITO EN LA INGENIERIA



INTRODUCCION Y CONCEPTOS FUNDAMENTALES

DR. JORGE ANGELES ALVAREZ

FEBRERO, 1985

$$\lambda^{0}(x) = \lambda_{(0-\ldots)}(x)$$

$$\vdots$$

$$\lambda^{i}(x) = \lambda_{(T-i)}(x)$$

$$\vdots$$

$$\lambda^{S}(x) = \lambda_{(\ldots)}$$

$$\lambda^{T}(x) = \lambda(x)$$

1.1 Introducción

En terminos generales, el método del elemento finito (MEF) es un medio para obtener una aproximación a la solución de un problema que requiere la integración de un sistema de ecuaciones diferenciales provisto de ciertas condiciones que definen completamente el problema y, de ahí, su solución. En el más sencillo de los casos, la ecuación diferencial es ordinaria y lineal ; pero puede contener derivadas de orden arbitrario y condiciones de frontera dadas, que involucren combinaciones arbitrarias de la función buscada y sus derivadas. Si se denota como y la función buscada, que constituye la solución al problema en cuestión, y como x, la variable independiente, este problema adopta la forma : "Resolver la ecuación diferencial ordinaria

$$f\,(x,\, y,\, y',\, y'',\, \ldots,\, y^{(i)},\, \ldots,\, y^{(n)}) = 0 \qquad (1.1)$$

sujeta a las condiciones de frontera

$$\begin{aligned} &g_1(y_{10},\, y_{11},\, \ldots,\, y_{1n}) = 0 \\ &\vdots \\ &g_m(y_{m0},\, y_{m1},\, \ldots,\, y_{mn}) = 0\text{"} \end{aligned} \qquad (1.2)$$

donde y_{ij} es el valor que adquiere la derivada de orden j de y con respecto a x, en la i$^{\underline{a}}$ ecuación del conjunto (1.2). Al introducir un cambio de variables se puede transformar la ec (1.1) en un sistema de n ecuaciones de primer orden. En efecto, sean

$$\begin{aligned} y_1(x) &= y(x) \\ y_2(x) &= y'(x) \\ &\vdots \\ y_i(x) &= y^{(i-1)}(x) \\ &\vdots \\ y_n(x) &= y^{(n-1)}(x) \end{aligned} \qquad (1.3)$$

La ec (1.1) toma entonces la forma

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= y_2(x) \\ y_2'(x) &= y_3(x) \\ &\vdots \\ y_{n-1}'(x) &= y_n(x) \\ f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_n') &= 0 \end{aligned} \tag{1.4}$$

En general, las variables y_i tienen un significado físico inmediato, por lo que permiten visualizar mejor el problema.

<u>Ejemplo 1.1.1</u> Análisis estático de una viga en voladizo (Fig 1)

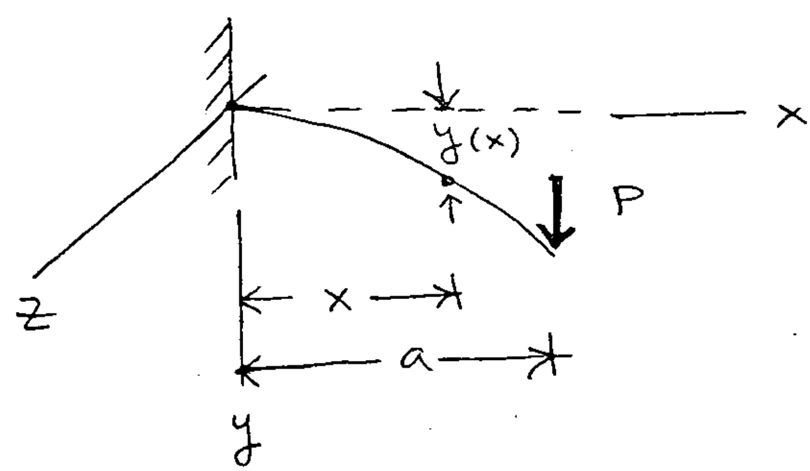


Fig 1 Viga en voladizo

La deflexión y(x) se obtiene integrando la ecuación [1]:

$$E\,I\,y''(x) = M(x) \tag{1.5}$$

donde E es el módulo elástico del material de la viga, I es el momento de inercia de la sección transversal de la viga con respecto al eje Z (constante) y M(x) es el momento flexionante en el punto

de abscisa x. Este es igual a

$$M(x) = P(a-x) \tag{1.6}$$

Sustituyendo la ec (1.6) en la ec (1.5) se tiene

$$y''(x) - \frac{P}{EI}(a-x) = 0 \tag{1.7}$$

que es una ecuación diferencial ordinaria de 2º orden, de la forma (1.1).

Defínase

$$y'(x) = p(x) \tag{1.8}$$

como la pendiente de la curva $y = y(x)$ en el punto x ; así, la ec (1.7) se transforma en el sistema

$$y'(x) = p(x) \tag{1.9 a}$$

$$p'(x) = \frac{P}{EI}(a-x) \tag{1.9 b}$$

que es un sistema de 2 ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, de la forma (1.4). Para integrar este sistema se requiere, desde luego, contar con 2 constantes de integración, que se obtienen de las condiciones de frontera

$$y(0) = 0, \quad p(0) = 0 \tag{1.10}$$

Intégrese la ec (1.9 b) con la segunda condición de frontera (1.10). Se obtiene

$$p(x) = \frac{P}{EI}\left(ax - \frac{x^2}{2}\right) + C_1 \tag{1.11}$$

$$p(0) = C_1 = 0 \tag{1.12}$$

Por lo tanto,

$$p(x) = \frac{P}{EI}\left(ax - \frac{x^2}{2}\right) \qquad (1.13)$$

Sustitúyase la ec (1.13) en la ec (1.9 a). Se obtiene

$$y'(x) = \frac{P}{EI}\left(ax - \frac{x^2}{2}\right) \qquad (1.14)$$

Intégrese la ec (1.14) con la primera condición de frontera (1.10). Se obtiene

$$y(x) = \frac{P}{EI}\left(a\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) + C_2 \qquad (1.15)$$

$$y(0) = C_2 = 0 \qquad (1.16)$$

Por lo tanto,

$$y(x) = \frac{P}{EI}\left(a\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) \qquad \underline{\text{Solución}} \qquad (1.17)$$

El problema anterior se escogió muy simple a propósito. Sin embargo, es representativo de una clase más amplia de problemas que surgen del análisis estático de ganchos, columnas, etc. Se puede complicar si se incluyen otras variables espaciales, como en el caso del análisis estático de placas y cascarones, o bien si se le introduce la variable tiempo, como es el caso del análisis dinámico de vigas, placas y cascarones.

En problemas de mayor complejidad no es posible obtener la solución por simple integración de funciones sencillas, como en el Ejemplo 1.1.1En efecto, las ecuaciones de equilibrio de una placa circular de radio a empotrada, sujeta a una carga transversal q

(Fig 2) son [2] :

$$\Delta \Delta w = \frac{q}{D} \qquad (1.18)$$

sujeta a las condiciones de frontera

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial r} = 0, \quad \text{en } r = a \qquad (1.19)$$

donde Δ es el operador laplaciano definido en coordenadas cilíndricas como

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \qquad (1.20)$$

por lo que

$$\Delta\Delta = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right) \qquad (1.21)$$

$q = q(r, \theta)$ es la carga que actúa sobre la placa y D es la rigidez a la flexión de la placa, definida como [2, p. 20]:

$$D = \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)} \qquad (1.22)$$

En la ec (1.22), E es el módulo elástico del material, h es el espesor de la placa y ν es el módulo de Poisson [3] del material.

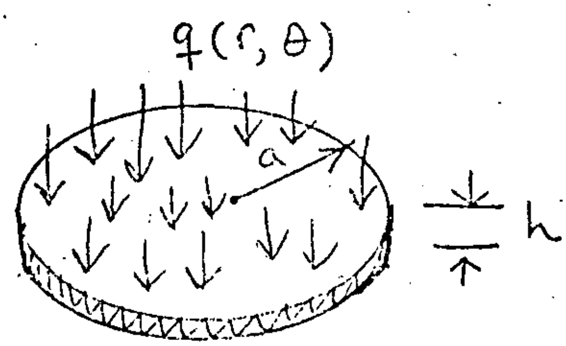


Fig 2 Placa circular cargada lateralmente

El problema representado por la ec (1.18) y las condiciones de frontera (1.19) es mucho más complicado de resolver que el del Ejemplo 1.1.1, como salta a la vista. Sin embargo, ambos problemas se refieren al análisis estático de un elemento estructural de comportamiento lineal (sus ecuaciones diferenciales correspondientes son lineales, es decir, tanto la función buscada como sus derivadas aparecen en esa ecuación elevadas a la primera potencia), sujeto a una carga dada, con condiciones de apoyo bien definidas (condiciones de frontera).

Nótese que los modelos matemáticos (ecuaciones diferenciales y condiciones de frontera) del Ejemplo 1.1.1.y de la Fig 2 involucran una ecuación diferencial, que en el primer caso es ordinaria y en segundo, parcial. En situaciones más complejas, en vez de una ecuación pueden tenerse varias y, además, acopladas. Un conjunto de ecuaciones se dice que es acoplado cuando en cada una de las ecuaciones aparece no una sola incógnita, sino varias. El hecho de haber obtenido ecuaciones diferenciales (espaciales) en los modelos matemáticos anteriores se debe a que se trata del análisis de elementos estructurales que son continuos. Por contraposición, un sistema que contenga elementos concentrados da lugar a modelos matemáticos provistos de ecuaciones algebraicas, esto es, que son de la forma

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \\ f_2(x_i, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \end{aligned} \qquad (1.23)$$

En general, el sistema de ecuaciones algebraicas (1.23) es no lineal ; pero con frecuencia los sistemas físicos analizados presentan un comportamiento lineal y, en este caso, dan lugar a modelos matemáticos del tipo lineal. Un modelo matemático de esta naturaleza contiene un sistema de ecuaciones algebraicas lineales del tipo

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}\,x_2 \quad \cdots \quad a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \quad \cdots \quad a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 \quad \cdots \quad a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}
\tag{1.24}
$$

En forma compacta el sistema (1.23) se puede escribir como

$$\underset{\sim}{f}\,(\underset{\sim}{x}) = \underset{\sim}{0} \tag{1.25}$$

donde

$$\underset{\sim}{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n \end{bmatrix}, \quad \underset{\sim}{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \underset{\sim}{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1.26}$$

son vectores de <u>dimensión</u> n, o sea de n componentes. Por su parte, el sistema (1.24) se puede escribir en forma compacta como

$$\underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b} \tag{1.27}$$

donde

$$\underset{\sim}{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \\ \cdot & \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \underset{\sim}{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \underset{\sim}{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{bmatrix}$$

son una matriz de n x n y dos vectores de dimensión n.

En la mayor parte de este curso se tratará con sistemas lineales por lo que, en general, se llegará a modelos lineales de la forma (1.27).

A continuación se presenta el análisis de un sistema de parámetros concentrados, cuyo análisis estático da lugar a un modelo de la forma de la ec (1.27), donde la matriz $\underset{\sim}{A}$ y los vectores involucrados adquieren un significado físico palpable.

Considérese ahora el sistema compuesto por los tres resortes concentrados de rigideces k_1, k_2 y k_3, cuyos extremos se encuentran fijos (Fig 3). Este puede constituir un modelo muy simplificado de un tramo de una tubería sujeta a cargas axiales que pueden ser producidas por cambios en la temperatura del fluido que transporte. El extremo fijo puede representar un anclaje de la tubería. Si se dispone de instrumentos que midan los desplazamientos en los nodos, se puede calcular las cargas que actúan en éstos, suponiendo que se conozcan los valores de la rigidez de los resortes.

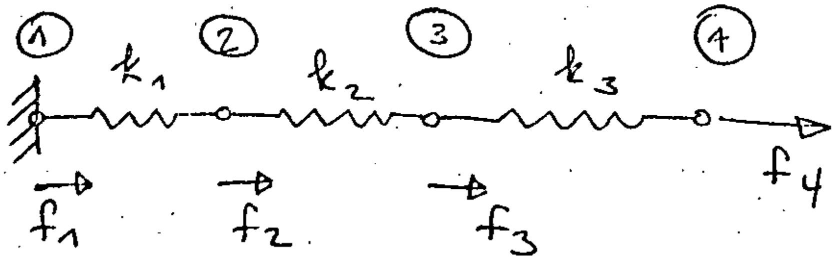


Fig 3 Sistema elástico de doble grado de libertad

El análisis estático del sistema de la Fig 3 se realizará considerando que cada resorte es lineal, esto es, que su comportamiento obedece a la siguiente ecuación constitutiva

$$F = k\,\Delta u$$

donde F es la fuerza que actúa en cada uno de sus extremos, como lo indica la Fig 4, mientras que k es su rigidez (constante) y Δu, el incremento en su desplazamiento desde una configuración en la que la fuerza en sus extremos es nula y que, por esto, recibe el nombre de configuración "descargada".

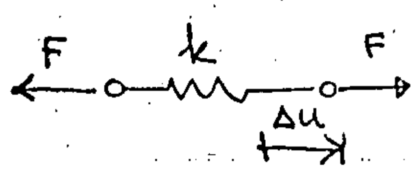


Fig 4 Resorte lineal

En un sistema como el de la Fig 3 se supone que las cargas actúan únicamente en los nodos. Más aún, la carga externa que actúa en el nodo i se representará por f_i, y estará en equilibrio con la carga interna F_i que actúa en el resorte i y con la F_i', que actúa en el resorte i+1, como se muestra en la Fig 5

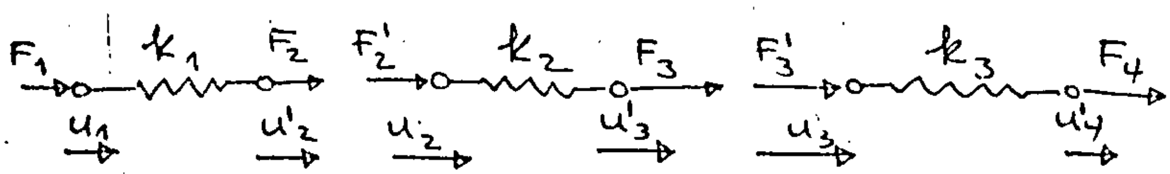


Fig 5 Cargas internas en el sistema elástico de la Fig 3

Además, llámese u_i al desplazamiento del nodo i asociado al resorte i, mientras que u_i' al del nodo i asociado al resorte i + 1. Por compatibilidad, es claro que

$$u_i' = u_i \tag{1.29}$$

Por equilibrio en cada nodo se tiene

$$f_1 = F_1, \; f_2 = F_2 + F_2', \; f_3 = F_3 + F_3', \; f_4 = F_4 \tag{1.30}$$

Un resorte típico, entonces, está sujeto al estado de cargas de la Fig 6

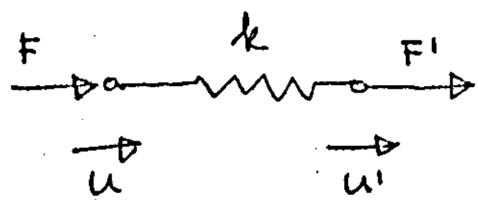


Fig 6 Estado de carga en un resorte lineal

En la Fig 6 se supone que cuando $u = u' = 0$, el resorte se encuentra descargado.

Si se supone que el estado de carga es equivalente a la superposición de dos estados, cada uno de ellos en equilibrio, se tiene la disposición de la Fig 7

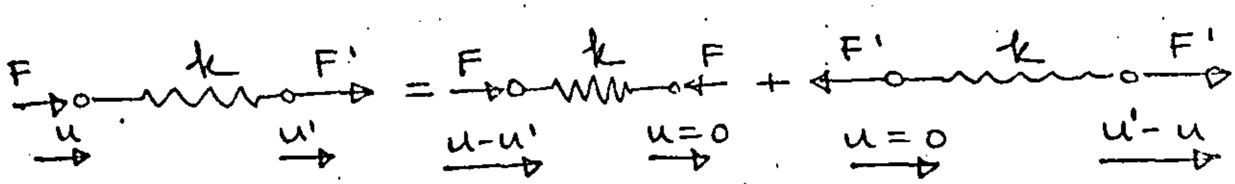


Fig 7 Estado de carga equivalente al de la Fig 6

Para el primer estado de carga del miembro derecho de la ecuación de la Fig 7 se tiene

$$F = k(u - u') \tag{1.31}$$

mientras que para el segundo

$$F' = k(u' - u) \tag{1.32}$$

Las ecs (1.31) y (1.32) se pueden poner en forma matricial como

$$\begin{bmatrix} F \\ F' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ u' \end{bmatrix} \tag{1.33}$$

que es una relación de la forma

$$\underset{\sim}{F} = \underset{\sim}{K}\,\underset{\sim}{u} \tag{1.34}$$

donde $\underset{\sim}{F}$ y $\underset{\sim}{u}$ son los vectores de fuerza y de desplazamiento, respectivamente, mientras que $\underset{\sim}{K}$ es la matriz de rigidez de cada resorte. Esta también se llama matriz elemental de rigidez para distinguirla de la matriz global de rigidez, que aún está por definirse. Nótese que $\underset{\sim}{K}$ es una matriz simétrica, esto es, que su elemento (1, 2) es igual a su elemento (2, 1). Además, es positiva semidefinida. En la sección de Algebra de Matrices se estudia con más detalle este último concepto ; pero aquí baste con decir que una matriz es positiva semidefinida si la forma cuadrática

$$\phi = \underset{\sim}{u}^T\,\underset{\sim}{K}\,\underset{\sim}{u} \tag{1.35}$$

asociada a ella nunca es negativa, lo cual es el caso de la matriz $\underset{\sim}{K}$ de la ec (1.33). En efecto, desarróllese la forma (1.35). Se tiene

$$\underset{\sim}{u}^T\,\underset{\sim}{K}\,\underset{\sim}{u} = [u,\ u'] \begin{bmatrix} k(u - u') \\ -k(u - u') \end{bmatrix} = k(u - u')^2 \tag{1.36}$$

que, como se ve de inmediato, nunca es negativa, pues $k > 0$. La forma cuadrática (1.35) es en realidad el doble de la energía elástica de deformación del resorte o energía potencial elástica. Esta energía, en vista de la expresión (1.36), se ha considerado como nula en el estado descargado, o sea, cuando $u = u' = 0$. Nótese, sin embargo, que también se anula esa energía cuando $u = u'$, lo cual corresponde a un desplazamiento de cuerpo rígido del resorte, que claramente, no produce incremento alguno en la energía elástica de deformación del resorte. Fuera de estos casos de energía elástica nula, se observa que ésta es siempre positiva, lo cual establece una correspondencia entre el carácter positivo semidefinido de $\underset{\sim}{K}$ y el carácter físico de la energía elástica de deformación.

Si se representa la energía elástica de deformación del resorte por V, se tiene que

$$V = \frac{1}{2} \underset{\sim}{u}^T \underset{\sim}{K} \underset{\sim}{u} \qquad (1.37)$$

que es una expresión semejante a

$$V = \frac{1}{2} k u^2 \qquad (1.38)$$

como en el caso de un resorte con un extremo fijo, que sufre un desplazamiento $\underset{\sim}{u}$ a partir de su estado descargado. De la ec (1.38) se obtiene

$$\frac{dV}{du} = k u \qquad (1.39)$$

Por analogía, para el caso de la ec (1.37) se tiene

$$\frac{\partial V}{\partial \underset{\sim}{u}} = \underset{\sim}{K} \underset{\sim}{u} \qquad (1.40)$$

que es un vector de dimensión 2. De hecho, es el gradiente de la energía V con respecto a u. En la sección de Operaciones con Matrices se estudia con más detalle el concepto de gradiente, o sea, de derivada con respecto a un vector. De la ec (1.39) se tiene en seguida que

$$\frac{d^2 V}{d u^2} = k \tag{1.41}$$

esto es, la rigidez del resorte es la segunda derivada de la energía potencial elástica con respecto al desplazamiento medido desde el estado descargado. Por analogía, se tiene de la ec (1.40),

$$\frac{\partial^2 V}{\partial u^2} = \underset{\sim}{K} \tag{1.42}$$

esto es, la matriz de rigidez se puede obtener como la <u>matriz Hessiana</u> o sea, de segundas derivadas, de la energía potencial elástica con respecto al desplazamiento medido desde el estado descargado. En realidad, como se verá a continuación, es más fácil obtener esa matriz calculándola como la matriz de segundas derivadas de la energía potencial elástica.

<u>Ejemplo 1.1.2</u> Análisis estático de un sistema elástico de doble grado de libertad.

Dado un conjunto de desplazamientos u_1, u_2, u_3 y u_4, medidos en los modos 1 a 4 correspondientes, del sistema elástico de la Fig 3, determinar las cargas que actúan en esos nodos.

De las expresiones (1.33) para las fuerzas que actúan en los extremos de cada resorte, y de las ecs (1.30), se tiene

$$\begin{aligned}
f_1 &= k_1(u_1 - u_2) \\
f_2 &= k_1(-u_1 + u_2) + k_2(u_2 - u_3) = -k_1u_1 + (k_1+k_2)u_2 - k_2u_3 \\
f_3 &= k_2(-u_2 + u_3) + k_3(u_3 - u_4) = -k_2u_2 + (k_2+k_3)u_3 - k_3u_4 \\
f_4 &= k_3(-u_3 + u_4)
\end{aligned} \tag{1.43}$$

Escribiendo las ecs (1.43) en forma matricial se tiene

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} \tag{1.44}$$

que es una relación de la forma

$$\underset{\sim}{f} = \underset{\sim}{K}\,\underset{\sim}{u} \tag{1.45}$$

entre la fuerza externa $\underset{\sim}{f}$ que actúa en cada modo y el desplazamiento del nodo. En esa relación,

$$\underset{\sim}{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix}, \quad \underset{\sim}{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}, \quad \underset{\sim}{K} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \tag{1.46}$$

donde $\underset{\sim}{K}$ es la <u>matriz global de rigidez</u>. Nótese que esta matriz es simétrica, al igual que la matriz de rigidez de cada resorte. Puede demostrarse, además, que es igualmente <u>positiva semi-definida</u>. La energía potencial elástica del sistema es, por su parte

$$V = \frac{1}{2}\,\underset{\sim}{u}^T \underset{\sim}{K}\,\underset{\sim}{u} \tag{1.47}$$

De la ec (1.44), nótese que, si $u_1 = u_2 = u_3 = u_4$, esto es, si los resortes sufren un desplazamiento de cuerpo rígido, $\underset{\sim}{f} = \underset{\sim}{0}$ y, consecuentemente, $V = 0$, lo cual es acorde con el hecho de que el sistema es insensible a movimientos de cuerpo rígido, esto es, este tipo de movimientos no induce sobre él incremento alguno en su energía potencial elástica. Por otra parte, de la ec (1.44) se observa además, que la matriz global de rigidez resulta de una superposición de las matrices elementales de rigidez. Finalmente, esta matriz es "bandeada", esto es, sus elementos no nulos se encuentran alojados sobre una "banda" de ancho 3 centrada en su diagonal.

Para efectuar el análisis del sistema de la Fig 3 debe incluirse la condición de frontera $u_1 = 0$. Si se introduce ésta en las expresiones (1.43) se llega a

$$\begin{aligned} f_1 &= -k_1u_2 \\ f_2 &= (k_1 + k_2)u_2 - k_2u_3 \\ f_3 &= -k_2u_2 + (k_2 + k_3)u_3 \\ f_4 &= k_3(-u_3 + u_4) \end{aligned} \qquad (1.48)$$

con lo que se obtiene el valor deseado de las cargas en los nodos.

Por otra parte, la ec (1.44) se pudo haber obtenido imponiendo una condición de minimalidad sobre un funcional. Un funcional no es sino un número real definido sobre un espacio vectorial. En otras palabras, es una función escalar de variable vectorial. Sea

$$U(\underset{\sim}{u}) = V - \underset{\sim}{f}^T \underset{\sim}{u} \qquad (1.49)$$

un funcional que depende del vector de desplazamiento $\underset{\sim}{u}$, cuyo valor no es sino la diferencia entre la energía potencial elástica del sistema, V, y el trabajo desarrollado por las cargas, $\underset{\sim}{f}$. Este funcional alcanza un mínimo en los valores de $\underset{\sim}{u}$ para los cuales se tiene un valor estacionario de U. Del cálculo de funciones de varias variables se sabe que U alcanza un valor estacionario en los puntos en los que su gradiente con respecto a $\underset{\sim}{u}$ se anula, esto es,

donde

$$\frac{\partial U}{\partial \underset{\sim}{u}} = \frac{\partial V}{\partial \underset{\sim}{u}} - \frac{\partial}{\partial \underset{\sim}{u}} \underset{\sim}{f}^T \underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{0} \tag{1.50}$$

Pero

$$\frac{\partial V}{\partial \underset{\sim}{u}} = \underset{\sim}{K} \underset{\sim}{u} \tag{1.51}$$

de la ec (1.40). Además, como $\underset{\sim}{f}$ no depende explícitamente de $\underset{\sim}{u}$,

$$\frac{\partial}{\partial \underset{\sim}{u}} \underset{\sim}{f}^T \underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{f} \tag{1.52}$$

como se muestra en la Sección de Operaciones con Matrices. Sustituyendo (1.51) y (1.52) en (1.50), se obtiene la ec (1.45) o bien, la (1.44), como se deseaba demostrar. El resultado anterior constituye lo que se llama un "Principio de mínimo" en Mecánica. En realidad, la condición (1.50) es necesaria y suficiente para que U alcance un valor estacionario, que puede ser máximo, mínimo o punto silla. Para que el punto estacionario en cuestión sea mínimo es suficiente que la matriz Hessiana de U con respecto a $\underset{\sim}{u}$ sea positiva semidfinida ; pero, de (1.50),

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \underset{\sim}{u}^2} = \underset{\sim}{K} \tag{1.53}$$

que es efectivamente positiva semidefinida. Sin embargo, en esta parte no se presenta la demostración de la positividad semidefinida de culaquier matriz de rigidez. Baste con decir que ésta proviene del hecho de que la forma cuadrática (1.47) asociada a K representa un incremento en la energía potencial elástica del sistema elástico en cuestión, desde su posición descargada, el cual no puede ser negativo, independientemente de los valores de los desplazamientos de los nodos, medidos desde esa configuración descargada.

Hasta aquí se han introducido ideas generales asociadas a sistemas físicos compuestos ya sea de elementos de parámetros distribuidos (vigas, placas, cascarones, fluidos), cuyos modelos dan lugar a sistemas de ecuaciones diferenciales, o bien de elementos con parámetros concentrados (resortes, por ejemplo), cuyos modelos dan lugar a ecuaciones algebraicas. Sin embargo, todavía no se ha hablado en concreto del MEF. De hecho, es este método el que establece esta relación, pues permite formular problemas asociados a sistemas continuos o de parámetros distribuidos en forma discreta, esto es, como si se tratara de sistemas con parámetros concentrados. Esto lo consigue el MEF mediante un proceso de <u>discretización</u>, que consiste en hacer depender la solución al problema original continuo de un conjunto <u>discreto</u> de valores. Mediante este proceso se obtiene una <u>aproximación</u> a la solución al problema original, y no un valor exacto de ella. Para ilustrar las ideas anteriores, considérese el mismo problema de determinar las cargas sobre el tramo de tubería de la Fig 3 ; pero ahora supóngase que cada sección i (porción entre nodos) se trata como una barra continua (y no como un resorte concentrado) de longitud a_i, de sección de área A_i y de módulo de elasticidad E_i. Esta consideración puede ser una aproximación a una barra (tubería) de diametro variable, ya sea continuamente o "por saltos", de material heterogéneo, esto es, de un material cuyas propiedades no fueran constantes. Se tendría entonces el sistema de la Fig 8

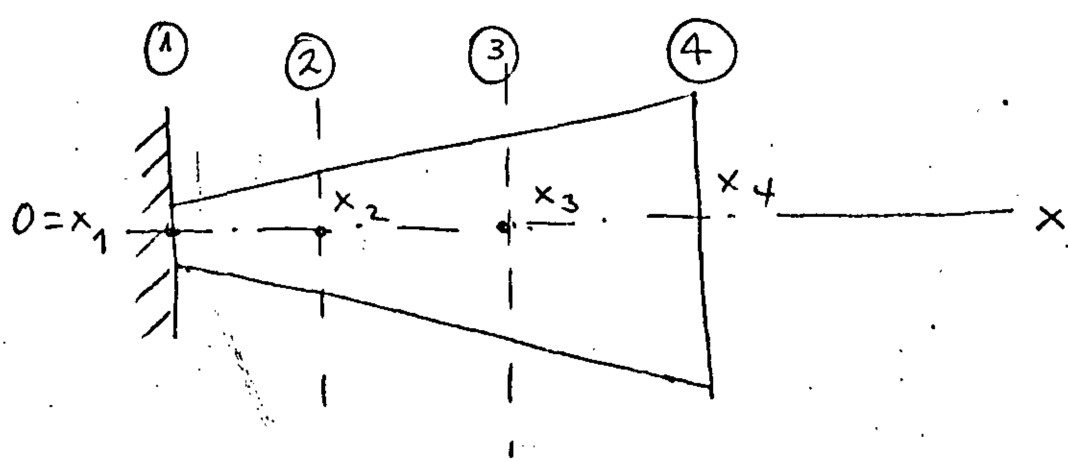


Fig 8 Sistema elástico continuo

Para el análisis de este sistema considérese que cada tramo, entre el nodo i y el i + 1, se puede tratar como una barra de sección de área constante A_i, de longitud a_i y de módulo elástico constante E_i. Más aún, condisérese que el desplazamiento a lo largo de esta barra elemental tiene una distribución lineal, esto es, es de la forma

$$u\,(x) = a_{0i} + a_{1i}\,(x - x_i),\ x_i \leq x \leq x_{i+1} \tag{1.54}$$

Llamando u_i al desplazamiento en el nodo i, la expresión (1.54) debe cumplir con las condiciones de frontera

$$u\,(x_i) = u_i,\ u\,(x_{i+1}) = u_{i+1} \tag{1.55}$$

por lo que se obtiene, como valores de a_{0i} y de a_{1i},

$$a_{0i} = u_i,\ a_{1i}\ \frac{\Delta\, u_i}{\Delta\, x_i} \tag{1.56}$$

donde

$$\Delta\, x_i \equiv x_{i+1} - x_i,\ \Delta\, u_i \equiv u_{i+1} - u_i \tag{1.57}$$

Entonces, $u\,(x)$ en $x_i \leq x \leq x_{i+1}$ se puede escribir como un producto escalar (Ver la Sección <u>Algebra de matrices</u>) de dos vectores, en la forma

$$u\,(x) = \left[\, 1 - \frac{x - x_i}{\Delta\, x_i},\ \frac{x - x_i}{\Delta\, x_i} \right] \begin{bmatrix} u_i \\ u_{i+1} \end{bmatrix} \tag{1.58}$$

La expresión anterior se puede simplificar si se introduce la notación

$$\xi_i \equiv x - x_i$$

La ec (1.58) se transforma, entonces, en

$$u\ (x) = \left[1 - \frac{\xi_i}{\Delta x_i},\ \frac{\xi_i}{\Delta x_i}\right]\left[\begin{array}{c} u_i \\ u_{i+1} \end{array}\right] \qquad (1.59)$$

La deformación en un punto x de la barra, ε, que es la derivada de u con respecto a x [1, p.37], se puede obtener derivando con respecto a x la expresión (1.54) :

$$\varepsilon \equiv u'\ (x) = a_{1i} = \frac{\Delta u_i}{\Delta x_i} = \left[-\frac{1}{\Delta x_i},\ \frac{1}{\Delta x_i}\right]\left[\begin{array}{c} u_i \\ u_{i+1} \end{array}\right] \qquad (1.60)$$

El esfuerzo queda expresado, entonces, como [1, p. 69]

$$\sigma = E_i \varepsilon = E_i \left[-\frac{1}{\Delta x_i},\ \frac{1}{\Delta x_i}\right]\left[\begin{array}{c} u_i \\ u_{i+1} \end{array}\right] \qquad (1.61)$$

La energía potencial elástica V_i almacenada en el tramo comprendido entre los nodos i e i + 1 es, entonces [1, p. 92]:

$$V_i = \frac{1}{2}\int_{x_i}^{x_{i+1}} \sigma \varepsilon A_i d\ x = \frac{1}{2}\int_{x_i}^{x_{i+1}} E_i \varepsilon^2 A_i\ d\ x \qquad (1.62)$$

Pero, de las ecs (1.60) y (1.61), en $x_i \leq x \leq x_{i+1}$,

$$\sigma \varepsilon = E_i \left(-\frac{u_i}{\Delta x_i} \quad \frac{u_{i+1}}{\Delta x_i}\right)^2$$

que es independiente de x, al igual que E_i y A_i, por lo que se pueden sacar de la integral, y la expresión para V_i se reduce a

$$V_i = \frac{1}{2} E_i A_i \left(-\frac{u_i}{\Delta x_i} + \frac{u_{i+1}}{\Delta x_i}\right)^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} d\ x =$$

$$= \frac{1}{2} E_i A_i \left(-\frac{u_i}{\Delta x_i} + \frac{u_{i+1}}{\Delta x_i}\right)^2 \Delta x_i \qquad (1.63)$$

La energía potencial elástica total del sistema es, entonces, simplificando V_i,

$$V = \frac{1}{2}\sum_{1}^{3} V_i = \frac{1}{2}\sum_{1}^{3} \frac{E_i A_i}{\Delta x_i} (- u_i + u_{i+1})^2 \qquad (1.64)$$

Llamando

$$k_i = \frac{E_i A_i}{\Delta x_i} \qquad (1.65)$$

y desarrollando la expresión (1.64), se tiene

$$2 V = k_1 (u_2 - u_1)^2 + k_2 (u_3 - u_2)^2 + k_3 (u_4 - u_3)^2 =$$

$$= k_1 u_1^2 - 2 k_1 u_1 u_2 + (k_1 + k_2) u_2^2 - 2 k_2 u_2 u_3 + (k_2 + k_3) u_3^2$$

$$2 k_3 u_3 u_4 + k_3 u_4^2 \qquad (1.66)$$

La matriz de rigidez de cada elemento, es decir, de cada tramo comprendido entre x_i y x_{i+1} se obtiene como

$$\underset{\sim}{K}_i = \frac{\partial^2 V_i}{\partial \underset{\sim}{u}_i^2} \qquad (1.67)$$

donde $\underset{\sim}{u}_i$ es el vector $[u_i, u_{i+1}]^T$. Así, de (1.63),

$$\frac{\partial V_i}{\partial \underset{\sim}{u}_i} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial V_i}{\partial u_i} \\[2ex] \dfrac{\partial V_i}{\partial u_{i+1}} \end{bmatrix} = k_i \begin{bmatrix} -(- u_i + u_{i+1}) \\[2ex] (- u_i + u_{i+1}) \end{bmatrix} \qquad (1.68)$$

por lo que

$$\underset{\sim}{K}_i = \frac{\partial^2 V_i}{\partial \underset{\sim}{u}_i^2} = \begin{bmatrix} k_i & -k_i \\ -k_i & k_i \end{bmatrix} \tag{1.69}$$

y la matriz de rigidez global $\underset{\sim}{K}$ se obtiene como

$$K = \frac{\partial^2 V}{\partial \underset{\sim}{u}^2}$$

donde $\underset{\sim}{u} = [u_1, u_2, u_3, u_4]^T$. Tomando la primera derivada,

$$\frac{\partial V}{\partial \underset{\sim}{u}} = \begin{bmatrix} \partial V/\partial u_1 \\ \partial V/\partial u_2 \\ \partial V/\partial u_3 \\ \partial V/\partial u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 (u_1 - u_2) \\ -k_1 u_1 + (k_1 + k_2) u_2 - k_2 u_3 \\ -k_2 u_2 + (k_2 + k_3) u_3 - k_3 u_4 \\ k_3 (-u_3 + u_4) \end{bmatrix}$$

Tomando las derivadas con respecto a $\underset{\sim}{u}$ de la expresión anterior se tiene

$$\underset{\sim}{K} = \frac{\partial^2 V}{\partial \underset{\sim}{u}^2} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_3 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \tag{1.70}$$

Se observa de la expresión (1.69) que la matriz elemental de rigidez del sistema continuo es idéntica a la del sistema discreto, (1.33). Asimismo, de la expresión (1.70) se observa que la matriz global de rigidez del sistema continuo es idéntica a la del sistema discreto, (1.46). Por otra parte, el comportamiento estático del sistema continuo de la Fig 7 está gobernado por una ecuación diferencial ordinaria provista de condictiones de frontera dadas. Esta se obtiene a continuación. Sea $u = u(x)$ el campo (continuo) de desplazamiento. La deformación unitaria, o gradiente de desplazamiento $\mathcal{E}(x)$, se obtiene como $\mathcal{E}(x) = u'(x)$. De la "Ley de Hooke" se obtiene el esfuerzo como $\sigma(x) = E(x)\,\mathcal{E}(x) = E(x)\,u'(x)$. Por equilibrio estático, $\sigma(x)$ debe ser igual a la carga aplicada en el punto x, q (x), dividida entre el área de la sección en el punto x, A (x), esto es :

$$E(x)\,u'(x) = \frac{q(x)}{A(x)} \qquad (1.71)$$

o bien

$$u'(x) = \frac{q(x)}{E(x)\,A(x)} \qquad (1.72)$$

con la condición de frontera $u(0) = 0$. La obtención de u (x) para el problema formulado en la forma de la ec (1.72) requiere la integración de una función, mientras que, con el método del elemento finito, requiere la solución de un sistema de ecuaciones de la forma

$$\underset{\sim}{K}\,\underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{f} \qquad (1.73)$$

donde, si se supone $\underset{\sim}{f}$ conocida, $\underset{\sim}{u}$ se puede calcular por simple inversión de la matriz $\underset{\sim}{K}$, esto es, como

$$\underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{K}^{-1}\,\underset{\sim}{f} \qquad (1.74)$$

En la Sección de Métodos Númericos se verá que en realidad nunca es necesario invertir la matriz $\underset{\sim}{K}$ tal como aparece en (1.74).

Por otra parte, de la expresión (1.70) se puede observar que la matriz $\underset{\sim}{K}$ es singular, pues si $u_1 = u_2 = u_3 = u_4$, $\underset{\sim}{f}$ resulta ser nula. Para que $\underset{\sim}{K}$ tenga una inversa debe introducirse en el problema la condición de frontera $u_1 = 0$.

En suma, el MEF permite llevar la solución de un problema que, en principio requiere la integración de un sistema de ecuaciones diferenciales, a la forma de un problema algebraico, esto es, de un problema que requiere la solución de un sistema de ecuaciones algebraicas. Este sistema, en general, puede ser no lineal. Sin embargo, en una gran clase de problemas el sistema es lineal. El interés por llevar un problema continuo a una forma algebraica estriba en que los sistemas algebraicos, especialmente los lineales, de la forma (1.73), están plenamente estudiados desde el siglo pasado. Más aún, con el advenimiento de las computadoras electrónicas de los años cincuenta, se desarrollaron métodos muy eficaces para resolver estos sistemas, como se verá en la Sección de Métodos Numéricos.

1.2 GENERALIDADES SOBRE MATRICES

Una matriz es una tabla rectangular de números o de símbolos dispuestos en renglones y en columnas. Frecuentemente se le representa limitándola con corchetes. A continuación se representa una matriz de m renglones y n columnas :

$$\underset{(m \times n)}{\underset{\sim}{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1j} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2j} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{ij} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{in} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{mj} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Es necesario señalar que siempre se menciona el número de renglones (m) primero. Por consiguiente, $\underset{\sim}{A}$ es una matriz (m x n).

En los siguientes párrafos se hará frecuente mención de matrices o vectores renglón o columna. Suponiendo que m = 1, se tiene

<u>una matriz renglón o un vector renglón</u>

$$\underset{\sim}{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{ij} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \end{bmatrix}$$

Sin embargo, si se supone que $n = 1$, se obtiene

una matriz columna o un vector columna

$$\underset{\sim}{A} = [a_{11} \quad a_{21} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad a_{j1} \quad \cdot \quad \cdot \quad a_{m1}]^T = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{j1} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m1} \end{bmatrix}$$

Existen matrices especiales que es necesario mencionar.

Matriz diagonal

$$\underset{(4 \times 4)}{\underset{\sim}{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ & a_{22} & 0 & 0 \\ & & a_{33} & 0 \\ \text{simétrica} & & & a_{44} \end{bmatrix} \qquad a_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j$$

Otra notación sería

$$\underset{\sim}{A} = \text{diag } (a_{11}, \ a_{22}, \ a_{33}, \ a_{44})$$

Matriz identidad

Dicha matriz es un caso especial del de arriba. En el caso de una matrix 3 x 3, por ejemplo, se tiene

$$\underset{\sim}{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 \\ \text{sim} & & 1 \end{bmatrix} = \text{diag } (1, 1, 1)$$

Matriz bandeada

Se aplica la denominación "matriz bandeada" cuando todos elementos de una matriz que no son iguales a 0 están colocados alrededor de la diagonal principal. Por ejemplo :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} & . & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & a_{n-1,\, n-1} & a_{n-1,\, n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & a_{n,\, n-1} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Matriz triangular

Se dice de una matriz que es triangular superior (S) o inferior (I) cuando la totalidad de sus elementos situados ya sea arriba o abajo de la diagonal principal es igual a cero.

$$\underset{(n \times n)}{\underset{\sim}{L}} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & . & . & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Matriz simétrica

En una matriz simétrica, a_{ij} es siempre igual a a_{ji}. En mecánica estructural lineal por ejemplo, todas las matrices de rigidez son simétricas.

Matriz transpuesta

Se obtiene una matriz transpuesta cuando se cambian renglones por columnas, como por ejemplo

$$\underset{(2 \times 3)}{\underset{\sim}{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

Así, la matriz transpuesta de $\underset{\sim}{A}$, es

$$\underset{(3 \times 2)}{\underset{\sim}{A}^T} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{bmatrix}$$

Además,

$$(\underset{\sim}{A}^T)^T = \underset{\sim}{A}$$

y, en el caso de matrices simétricas,

$$\underset{\sim}{A}^T = \underset{\sim}{A}$$

Subdivisión de matrices

Las matrices muy grandes de, por ejemplo, 5 000 x 5 000 que contienen 25 millones de elementos, tienen necesariamente que subdividirse en matrices más pequeñas, como

$$\left[\begin{array}{cc:c} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \hdashline a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{A}_{11} & \underset{\sim}{A}_{12} \\ \underset{\sim}{A}_{21} & \underset{\sim}{A}_{22} \end{bmatrix}$$

donde

$$\underset{(2\times 2)}{\underset{\sim}{A}_{11}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad \underset{(2\times 1)}{\underset{\sim}{A}_{12}} = \begin{bmatrix} a_{13} & a_{23} \end{bmatrix}$$

$$\underset{(1\times 2)}{\underset{\sim}{A}_{21}} = \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \qquad \underset{(1\times 1)}{\underset{\sim}{A}_{22}} = \begin{bmatrix} a_{35} \end{bmatrix}$$

Operaciones con matrices

En el cálculo, es posible procesar matrices de la misma manera en que se procesan normalmente los datos numéricos. Se indican más abajo las definiciones necesarias.

Igualdad de matrices

$$\underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{B}$$

significa que, para toda i y toda j, $a_{ij} = b_{ij}$.

Adición y substracción

Si

$$\underset{\sim}{A} + \underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{C}$$

entonces
$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.
Por consiguiente, en el caso de substracción, se obtiene
$c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$.

Multiplicación de matrices

Si se debe multiplicar una matriz por un factor c, cada elemento debe multiplicarse por c, por ejemplo

$$\left[c\underset{\sim}{A} \right] = \left[ca_{ij} \right]$$

Cuando se multiplican dos matrices es condición sine qua non que sus dimensiones sean compatibles. Si, por ejemplo, la matriz $\underset{\sim}{A}$ de m x n debe multiplicarse por la matriz $\underset{\sim}{B}$ de p x q, es necesario que n = p, esto es, el número de renglones n contenido en $\underset{\sim}{A}$ debe ser igual al número de columnas p contenidas en $\underset{\sim}{B}$. Así,

$$\underset{(m \times n)}{\underset{\sim}{A}} \quad \underset{(p \times q)}{\underset{\sim}{B}} = \underset{(m \times q)}{\underset{\sim}{C}}$$

y

$$c_{ij} = a_{ir}b_{rj} \qquad \begin{array}{l} i = 1,\ 2 \ldots m\ ;\ j = 1,\ 2 \ldots q \\ r = 1,\ 2,\ \ldots,\ n = p \end{array}$$

Otro ejemplo sería

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} \\ a_{21}b_{11} \quad a_{22}b_{21} \quad a_{23}b_{31} \end{bmatrix}$$

Valores característicos

Dada una matriz cuadrada $\underset{\sim}{A}$ de n x n y un vector $\underset{\sim}{u}$ de dimensión n sobre el que opera $\underset{\sim}{A}$, el producto

$$\underset{\sim}{v} = \underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{u}$$

es un vector también de dimensión n. En general, $\underset{\sim}{v}$ es muy diferente de $\underset{\sim}{u}$. Si, por ejemplo, $\underset{\sim}{v}$ resulta nulo para valores particulares de $\underset{\sim}{u} \neq \underset{\sim}{0}$, se dice que $\underset{\sim}{v}$ es un vector del espacio nulo de A. Por ejemplo, sea

$$\underset{\sim}{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Un vector del espacio nulo de A es, claramente,

$$\underset{\sim}{u} = [\,x,\ 0]^T = x\,[1,\ 0]^T$$

Se observa que si se multiplica el vector $\underset{\sim}{w} = [1,\ 0]^T$ por el escalar x, se obtiene una infinidad de vectores del espacio nulo de $\underset{\sim}{A}$, uno para cada valor que pueda adquirir x. Sin embargo, $\underset{\sim}{w}$ es el único vector de magnitud unitaria que pertenece al espacio nulo de $\underset{\sim}{A}$. Por esto se puede decir que $\underset{\sim}{w}$ es una base normal de este espacio. En general, el espacio nulo de una matriz de n x n tiene una base compuesta por $m \leq n$ vectores. Si estos vectores se seleccionan de magnitud unitaria y mutuamente ortogonales, se dice que la base es ortonormal. Las matrices no singulares tienen un espacio nulo de de dimensión cero, esto es, no existe ningún vector no nulo que sea transformado por ellas en $\underset{\sim}{0}$.

Por otra parte, puede darse el caso que el vector $\underset{\sim}{v} = \underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{u}$ sea linealmente dependiente con $\underset{\sim}{u}$, esto es, que uno resulte de multiplica el otro por una constante. En esta discusión se deja fuera el vector $\underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{0}$. En estas condiciones, se tiene

$$\underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{u} = \lambda\,\underset{\sim}{u} \qquad (*)$$

donde λ es un escalar, en general, complejo. Nótese que la ecuación anterior se puede escribir en la forma

$$(\underset{\sim}{A} - \lambda\underset{\sim}{I})\underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{0}$$

donde $\underset{\sim}{I}$ es la matriz identidad de n x n. Para que $\underset{\sim}{u} \neq \underset{\sim}{0}$ satisfaga la ecuación anterior, debe pertenecer al espacio nulo de $\underset{\sim}{A} - \lambda\underset{\sim}{I}$. Ahora bien, para que $\underset{\sim}{A} - \lambda\underset{\sim}{I}$ tenga un espacio nulo no vacío, esto es, para que existan vectores $\underset{\sim}{u} \neq \underset{\sim}{0}$ tales que $(\underset{\sim}{A} - \lambda\underset{\sim}{I})\underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{0}$, $\underset{\sim}{A} - \lambda\underset{\sim}{I}$ debe ser singular. Para que sea singular, su determinante debe anularse, esto es, debe tenerse

$$\det(\underset{\sim}{A} - \lambda\underset{\sim}{I}) = 0$$

Pero el determinante en cuestión, esto es, el miembro izquierdo de la ecuación anterior, es un polinomio de orden n en λ, si $\underset{\sim}{A}$ es de n x n. Llamando $P_n(\lambda)$ a este polinomio, la ecuación anterior es

$$P_n(\lambda) = 0$$

Si $\underset{\sim}{A}$ es una matriz de elementos reales, $P_n(\lambda)$ es un polinomio de coeficientes reales y, por el Teorema Fundamental del Algebra [4], posee n raíces complejas, de las cuales algunas pueden aparecer repetidas. Las n raíces del polinomio $P_n(\lambda)$, llamado <u>polinomio característico de A</u>, reciben el nombre de valores característicos de $\underset{\sim}{A}$. Si cada valor característico de $\underset{\sim}{A}$ se sustituye en la ec (*), se obtiene un conjunto de vectores $\underset{\sim}{u}_i$ correspondientes que se llaman <u>vectores característicos</u> de $\underset{\sim}{A}$. Nótese que si se conoce un vector característico $\underset{\sim}{e}_i$, esto es, si

$$\underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{e}_i = \lambda_i\,\underset{\sim}{e}_i$$

entonces el producto de éste por un escalar (en general, complejo) es otro vector característico de $\underset{\sim}{A}$, lo cual puede comprobarse por sustitución delnuevo vector en la ecuación anterior. Entonces, a cada valor característico λ_i de $\underset{\sim}{A}$ corresponde una infinidad de vectores característicos. Sin embargo, no todos éstos interesan, sino sólo aquéllos que son linealmente independientes. Un conjunto de vectores $\{ \underset{\sim}{v}_1, \underset{\sim}{v}_2, \ldots, \underset{\sim}{v}_m \}$ es linealmente independiente si la combinación lineal

$$\underset{\sim}{l} = c_1 \underset{\sim}{v}_1 + c_2 \underset{\sim}{v}_2 + \ldots + c_m \underset{\sim}{v}_m$$

se anula si, y sólo si, todos y cada uno de los escalares c_i se anulan. De lo contrario, el conjunto es linealmente dependiente.

Ejemplo 1.2.1. Sea la matriz

$$\underset{\sim}{A} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Su polinomio característico es

$$P_3(\lambda) = (1 - \lambda)(\lambda^2 - \quad 1)$$

cuyas raíces son

$$\lambda_1 = 1, \; \lambda_{2,3} = \frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2} = e^{\pm i\pi/3}$$

donde i es la unidad imaginaria $i = \sqrt{-1}$.

El Ejemplo 1.2.1 mostró que la matriz en cuestión tiene dos valores característicos complejos que, como consecuencia del Teorema Fundamental del Algebra, son conjugados. Si la matriz aludida es simétrica, se puede demostrar [5] que sus valores característicos son reales y sus vectores característicos son mutuamente ortogonales. En consecuencia, una matriz simétrica de n x n siempre puede expresarse con respecto a una base (esto es, un conjunto de n vectores linealmente independientes), que resulta ser su conjunto de vectores característicos, en la que adquiere la forma diagonal.

Ejemplo 1.2.2. Sea la matriz

$$\underset{\sim}{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Esta matriz es simétrica y por lo tanto tiene valores característicos reales y vectores característicos ortogonales. En efecto, su polinomio característico es

$$P_2(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{bmatrix}$$

$$= -\lambda(3-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 3\lambda - 4$$

cuyas raíces son

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 4$$

Denótense sus vectores característicos correspondientes por

$$\underset{\sim}{e}_1 = \begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{21} \end{bmatrix}, \quad \underset{\sim}{e}_2 = \begin{bmatrix} e_{12} \\ e_{22} \end{bmatrix}$$

Estos se calculan de las relaciones

$$(\underset{\sim}{A} - \lambda_i \underset{\sim}{I})\underset{\sim}{e}_i = \underset{\sim}{0}$$

De ahí

$$(\underset{\sim}{A} - \lambda_1 \underset{\sim}{I})\underset{\sim}{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

por lo que

$$e_{11} + 2e_{21} = 0$$

y

$$e_{21} = -\frac{1}{2} e_{11}$$

Imponiendo la condición

$$e_{11}^2 + e_{21}^2 = 1$$

se tiene

$$e_{11}^2 + \frac{1}{4} e_{11}^2 = 1 \Rightarrow e_{11} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \Rightarrow e_{21} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

Análogamente se obtiene

$$e_{12} = \frac{\sqrt{5}}{5}, \quad e_{22} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

El problema de valores característicos reviste particular importancia en Mecánica. En efecto, la determinación de las frecuencias y los modos maturales de vibración de sistemas mecánicos (Ver, p. ej. [6]). La determinación de tales modos y frecuencias para sistemas mecánicos de parámetros distribuidos, mediante el MEF conduce a un problema de valores característicos, como se verá posteriormente en este curso.

<u>Formas cuadráticas</u>

El escalar definido por la expresión

$$\underset{\sim}{f} = \underset{\sim}{u}^T \underset{\sim}{A} \underset{\sim}{u}$$

donde $\underset{\sim}{A}$ es una matriz de n x n y $\underset{\sim}{u}$, un vector de dimensión n, recibe el nombre de forma cuadrática. Esta forma es equivalente a la forma escalar au^2. De esta última expresión se puede concluir una propiedad interesante de la forma cuadrática f antes definida. Nótese que, si a y u son reales, au^2 es una expresión cuyo signo depende enteramente de a, y no de u. Análogamente, el signo de la forma cuadrática f depende enteramente de $\underset{\sim}{A}$ y no de $\underset{\sim}{u}$, si ambos tienen elementos reales (o bien, si, aunque $\underset{\sim}{A}$ tenga elementos complejos, es idéntica a la matriz obtenida de transponerla y luego tomar el conjugado de cada uno de sus elementos).

Se dice que $\underset{\sim}{A}$ es

- positiva definida, si $f > 0, \forall\ \underset{\sim}{u} \neq \underset{\sim}{0}$ (D 1)
- positiva semidefinida, si $f \geqslant 0, \forall\ \underset{\sim}{u} \neq \underset{\sim}{0}$ (D 2)
- negativa definida, si $f < 0, \forall\ \underset{\sim}{u} \neq \underset{\sim}{0}$ (D 3)
- negativa semidefinida, si $f \leqslant 0, \forall\ \underset{\sim}{u} \neq \underset{\sim}{0}$ (D 4)

De otra forma, $\underset{\sim}{A}$ es de signo indefinido. Las matrices positivas definidas y semidefinidas juegan un papel importante en la Mecánica, pues están asociadas o bien a cantidades intrínsecamente positivas, como la energía cinética de un vehículo en movimiento, o bien a cantidades intrínsecamente no negativas, como la energía potencial almacenada en la suspensión de un vehículo, medida desde su estado descargado.

Nótese que las definiciones (D 1) a (D 4) no proporcionan un medio práctico para determinar si una matriz es positiva definida, por ejemplo, pues según ellas, sería necesario probar el signo de f para todos y cada uno de los valores posibles de $\underset{\sim}{u} \neq \underset{\sim}{0}$. Sin embargo, la caracterización del signo de una matriz se puede conseguir a través de sus valores característicos, según lo siguiente :

Una matriz $\underset{\sim}{A}$ es

- positiva definida, si todos sus valores característicos son positivos,
- positiva semidefinida, si ninguno de sus valores característicos es negativo
- negativa definida, si todos sus valores característicos son negativos
- negativa semidefinida, si ninguno de sus valores característicos es positivo.

Derivadas de funciones de varias variables

Dada la función $g = g(u_1, u_2, \ldots, u_n)$, escrita en forma compacta como $g = g(\underset{\sim}{u})$, se dice que g es una función escalar de variable vectorial. El gradiente de g, representado por ∇g o por $\partial g/\partial \underset{\sim}{u}$, es el vector de dimensión n definido por

$$\nabla g = \frac{\partial g}{\partial \underset{\sim}{u}} = \begin{bmatrix} \partial g/\partial u_1 \\ \partial g/\partial u_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \partial g/\partial u_n \end{bmatrix}$$

Sea el conjunto de funciones

$$\begin{aligned} h_1 &= h_1(u_1, u_2, \ldots, u_n) \\ h_2 &= h_2(u_1, u_2, \ldots, u_n) \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ h_m &= h_m(u_1, u_2, \ldots, u_n) \end{aligned}$$

Este se representa en forma compacta como $\underset{\sim}{h} = \underset{\sim}{h}(\underset{\sim}{u})$, donde, obviamente, $\underset{\sim}{h}$ y $\underset{\sim}{u}$ son vectores de dimenciones m y n, respectivamente. Se dice, entonces, que $\underset{\sim}{h}$ es una función vectorial de argumento vectorial. El gradiente de $\underset{\sim}{h}$, representado por $\nabla \underset{\sim}{h}$ o $\partial \underset{\sim}{h}/\partial \underset{\sim}{u}$, es la matriz de m x n definida por

$$\nabla \underset{\sim}{h} = \frac{\partial \underset{\sim}{h}}{\partial \underset{\sim}{u}} = \begin{bmatrix} h_1/\ u_1 & h_1/\ u_2 & \cdots & h_1/\ u_n \\ h_2/\ u_1 & h_2/\ u_2 & \cdots & h_2/\ u_n \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ h_m/\ u_1 & h_m/\ u_2 & & h_m/\ u_n \end{bmatrix}$$

Si resulta que

$$\underset{\sim}{h} = \nabla g$$

entonces $\underset{\sim}{h}$ es de dimensión $m = n$, donde n es la dimensión de $\underset{\sim}{u}$. Entonces, $\nabla \underset{\sim}{h} = \nabla\nabla g$, es la matriz Hessiana de g y es de $n \times n$.

Volviendo a la función $g = g(\underset{\sim}{u})$, ésta alcanza un valor estacionario en un "punto" $\underset{\sim}{u}_0$ en el que su gradiente se anula. Este valor puede ser un extremo local o un punto silla. Es un extremo local si la matriz Hessiana de g, $\nabla\nabla g$, es de signo semidefinido. De hecho, es un máximo local si $\nabla\nabla g$ es negativa semidefinida, mientras que es un mínimo local si $\nabla\nabla g$ es positiva semidefinida. Si esa matriz Hessiana es de signo indefinido, el punto estacionario en cuestión es un punto silla. El resultado anterior no es más que el resultado ampliamente conocido del cálculo elemental, que se ilustra en la Fig 1.2.1

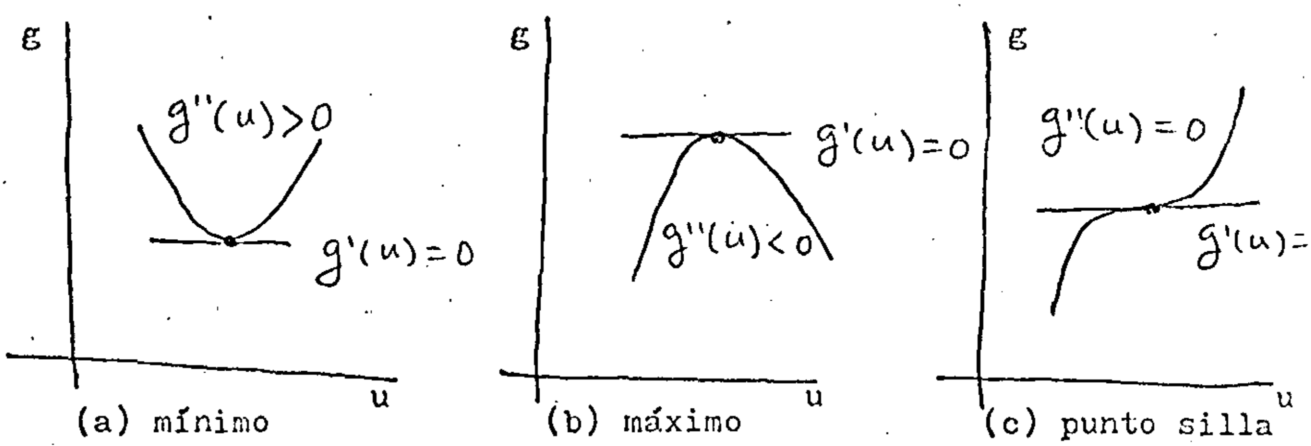


Fig 1.2.1 Puntos estacionarios de una función escalar de argumento escalar.

1.3 METODOS NUMERICOS

A continuación se presenta un esbozo de los métodos numéricos aplicables al problema

$$\underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{b} \tag{1.3.1}$$

donde $\underset{\sim}{A}$ es de n x n. Otro problema frecuente en cálculos de elemento finito es él de valores característicos

$$\underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{u} = \lambda\,\underset{\sim}{u} \tag{1.3.2}$$

Sin embargo, dadas las limitaciones de tiempo de este curso, el segundo problema no será tratado.

Para resolver el problema (1.3.1) existen dos amplias clases de métodos :

- métodos directos
- métodos iterativos.

Estas dos clases de métodos resuelven el sistema (1.3.1), esto es, calculan el valor que deban tener todos los componentes de $\underset{\sim}{u}$, para valores dados de $\underset{\sim}{A}$ y de $\underset{\sim}{b}$, de manera tal que se satisfagan todas las ecuaciones del sistema (1.3.1). Los métodos directos resuelven el problema en cuestión mediante una secuencia de operaciones bien definidas que se aplican una sola vez. Los métodos iterativos resuelven este mismo problema aplicando un ciclo de operaciones reiteradamente, hasta aproximar la solución de manera satisfactoria. Cada ciclo recibe el nombre de iteración.

En este punto es necesario hacer la siguiente observación : en teoría es posible resolver el sistema 1.3.1 mediante un tercer método, llamado "regla de Cramer", en la forma

$$u_i = \frac{\det \underset{\sim}{A}_i}{\det \underset{\sim}{A}},\ i = 1,\ \ldots,\ n \tag{1.3.3}$$

En la expresión anterior, $\underset{\sim}{A}_i$ es la matriz que se obtiene sustituyendo la $i^{\underline{a}}$ columna de $\underset{\sim}{A}$ por el vector $\underset{\sim}{b}$. Este método requiere, entonces, el cálculo de $n + 1$ determinantes. En seguida se determina el número de multiplicaciones requerido para calcular un determinante de $n \times n$ y, de ahí, el tiempo de ejecución requerido por la "regla de Cramer". En una computadora digital de alta velocidad una multiplicación consume un tiempo del orden de 10^{-4} segundos, mientras que una suma o una resta, un tiempo de un orden mucho menor ; por esta razón, en lo que sigue se considera como "operación", una multiplicación, quedando las sumas y restas sin contabilizarse.

Existen varias formas de calcular un determinante. Aquí se empleará la conocida como expansión por cofactores. Dada una matriz $\underset{\sim}{A}$ de $n \times n$, cuyo elemento (i, j) se representa por a_{ij}, el cofactor de a_{ij} es el producto de $(-1)^{i+j}$ por el determinante de la matriz de $(n-1) \times (n-1)$, obtenida al eliminar de $\underset{\sim}{A}^T$ el $i^{\underline{o}}$ renglón y la $j^{\underline{a}}$ columna. Llámese c_{ij} al cofactor de a_{ij}. Se tiene, entonces,

$$\det \underset{\sim}{A} = a_{i1}c_{i1} + a_{i2}c_{i2} + \cdots + a_{in}c_{in} =$$
$$= a_{1j}c_{1j} + a_{2j}c_{2j} + \cdots + a_{2n}c_{2n}$$

El cálculo del determinante de una matriz de 2×2 se realiza, desde luego, sencillamente como

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

que requiere 2 operaciones.

Ahora, para una matriz de 3×3, expandiendo su determinante por cofactores de su primer renglón, se tiene

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}c_{11} + a_{12}c_{12} + a_{13}c_{13}$$

que requiere 3 operaciones. Cada cofactor c_{1i}, que es un determinante de 2 x 2, requiere a su vez 2 operaciones, como se acaba de ver, por lo que el cálculo de este determinante requiere 3 x 2 operaciones. No es difícil demostrar, siguiendo este camino, que el cálculo de un determinante de n x n requiere $n!$ operaciones. En suma, la solución del sistema (1.3.1) mediante la "regla de Cramer" requiere $n!(n+1) = (n+1)!$ operaciones. Suponiendo que el sistema en cuestión contuviera 25 ecuaciones con 25 incógnitas, su solución mediante este método requeriría $26!$ operaciones, que es un número muy grande, del orden de 10^{27}. Si cada operación requiere 10^{-4} segundos, el total de operaciones requiere, entonces, un tiempo de ejecución de 10^{23} segundos. Para tener una idea de la magnitud de este tiempo, baste decir que, si se admite que el universo tiene una vida de 10^{17} segundos [7], el tiempo requerido para resolver el sistema (1.3.1) con 25 incógnitas utilizando una computadora rápida, es ¡ un millón de veces la vida del universo! Sobra decir que, hasta el momento, ningún ser humano ha resuelto jamás un sistema lineal de 25 ecuaciones con 25 incógnitas utilizando la regla de Cramer. Sin embargo, tratándose de resolver problemas elásticos mediante el MEF, es común llegar a sistemas de ecuaciones de la forma (1.3.1) con mil incógnitas. En lo que sigue se presentan métodos numéricos prácticos utilizados en la solución de tales sistemas.

El método directo empleado actualmente para resolver sistemas como el (1.3.1) es el de eliminación de Gauss. Este método es equivalente al método llamado LU por los angloparlantes (L, de "lower", que quiere decir inferior ; U, de "upper", que quiere decir superior). Este método se ilustra con un ejemplo de 3 ecuaciones con 3 incógnitas :

$$\begin{aligned} a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + a_{13}u_3 &= b_1 \\ a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + a_{23}u_3 &= b_2 \\ a_{31}u_1 + a_{32}u_2 + a_{33}u_3 &= b_3 \end{aligned} \qquad (1.3.4)$$

Divídase ambos miembros de la segunda ecuación entre a_{21} y multiplíqueseles por a_{11}. Procédase, en seguida, con la 3a. ecuación en forma semejante, excepto que, en vez de dividírseles entre a_{21}, divídaseles entre a_{31}. Se tiene, entonces

$$
\begin{aligned}
a_{11}u_1 + a_{11}\frac{a_{22}}{a_{21}}u_2 + a_{11}\frac{a_{23}}{a_{21}}u_3 &= a_{11}\frac{b_2}{a_{21}} \\
a_{11}u_1 + a_{11}\frac{a_{32}}{a_{31}}u_2 + a_{11}\frac{a_{33}}{a_{31}}u_3 &= a_{11}\frac{b_3}{a_{31}}
\end{aligned}
\qquad (1.3.5)
$$

A continuación, réstese la 1a ecuación de (1.3.4) de cada una de las ecs (1.3.5). Se tiene

$$
\begin{aligned}
(a_{11}\frac{a_{22}}{a_{21}} - a_{12})u_2 + (a_{11}\frac{a_{23}}{a_{21}} - a_{13})u_3 &= a_{11}\frac{b_2}{a_{21}} - b_1 \\
(a_{11}\frac{a_{32}}{a_{31}} - a_{12})u_2 + (a_{11}\frac{a_{33}}{a_{31}} - a_{13})u_3 &= a_{11}\frac{b_3}{a_{31}} - b_2
\end{aligned}
$$

Por sencillez, escríbase el sistema anterior en la forma

$$
\begin{aligned}
a'_{22}u_2 + a'_{23}u_3 &= b'_2 \\
a'_{32}u_2 + a'_{33}u_3 &= b'_3
\end{aligned}
\qquad (1.3.6)
$$

Ahora procédase como con el sistema (1.3.4), esto es, divídase la 2a. ecuación de (1.3.6) entre a'_{32} y multiplíquese por a'_{22}. Se tiene

$$
a'_{22}u_2 + a'_{22}\frac{a'_{33}}{a'_{32}}u_3 = a'_{22}\frac{b'_3}{a'_{32}} \qquad (1.3.7)
$$

Réstese a continuación la 1a. ecuación de (1.3.6) de la última ecuación, obteniéndose

$$
(a'_{22}\frac{a'_{33}}{a'_{32}} - a'_{23})u_3 = a'_{22}\frac{b'_3}{a'_{32}} - b_2
$$

que se puede escribir en forma simplificada como

$$a''_{33}u_3 = b''_3$$

de donde

$$u_3 = \frac{b''_3}{a''_{33}}$$

es el valor de la 3a. incógnita. La segunda se obtiene sustituyendo este valor en la ec (1.3.7), que contiene ahora una sola incógnita, u_2. Esta se obtiene despejándola en la forma

$$u_2 = \frac{1}{a'_{22}} \left(a'_{22}\frac{b'_3}{a'_{32}} - a'_{22}\frac{a'_{33}}{a'_{32}} u_3\right)$$

Finalmente, sustitúyanse los valores obtenidos de u_2 y u_3 en la la ecuación de (1.3.4). Se obtiene u_1 como

$$u_1 = \frac{1}{a_{11}} (b_1 - a_{12}u_2 - a_{13}u_3)$$

quedando así totalmente resuelto el problema.

El esquema anterior es básicamente el método de eliminación de Gauss. Sin embargo, aplicado tal y como se presentó, puede causar dificultades si alguno de los dividendos es cero, o un número muy pequeño. Para eliminar esta posibilidad, se escogen como dividendos los números más grandes de cada columna de la matriz $\underset{\sim}{A}$, lo cual equivale a reordenarlas. Este proceso es conocido como <u>pivoteo parcial</u>, para distinguirlo del <u>pivoteo total</u>, que consiste en buscar el número más grande no sólo en cada columna, sino también en cada renglón. Si en el proceso resulta que el número más grande es cero, o un número tan pequeño que la máquina lo tome como cero, el método no se puede aplicar, lo cual indica no otra cosa sino que el sistema es singular, esto es, que det $\underset{\sim}{A} = 0$. En este caso es imposible resolver el sistema, independientemente del método empleado.

Este método se realiza en computadora utilizando el concepto de descomposición LU, que se basa en el Teorema de Descomposición que establece que toda matriz $\underset{\sim}{A}$ de n x n se puede factorizar en el product de una matriz triangular inferior $\underset{\sim}{L}$ y una triangular superior $\underset{\sim}{U}$. La matriz $\underset{\sim}{L}$ contiene unos en su diagonal y ceros arriba de ella, mientras que la $\underset{\sim}{U}$ contiene en su diagonal los <u>valores singulares</u> de $\underset{\sim}{A}$, que son las raíces positivas de los valores característicos (positivos todos ellos) de la matriz $\underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{A}^T$ y ceros abajo de su diagonal. $\underset{\sim}{L}$ y $\underset{\sim}{U}$ son, entonces, matrices de la forma

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ l_{21} & 1 & & & \\ . & . & . & & \\ . & . & & . & \\ . & . & & & . \\ l_{n1} & l_{n2} & . & . & . & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & . & . & . & u_{1n} \\ & 2 & & & & 2n \\ & & . & & & . \\ & & & . & & . \\ & & & & . & . \\ & & & & & n \end{bmatrix}$$

El Teorema de Descomposición en cuestión establece, entonces, que

$$\underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{L}\,\underset{\sim}{U}$$

El sistema (1.3.1) de esta manera adopta la forma

$$\underset{\sim}{L}\,\underset{\sim}{U}\,\underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{b} \qquad (1.3.8)$$

Llámese

$$\underset{\sim}{U}\,\underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{v} \qquad (1.3.9)$$

Sustituyendo este valor en la ec (1.3.8) se tiène

$$\underset{\sim}{L}\,\underset{\sim}{v} = \underset{\sim}{b} \qquad (1.3.9)$$

que, en forma de componentes, adopta la forma

$$
\begin{aligned}
v_1 &= b_1 \\
l_{21}v_1 + v_2 &= b_2 \\
&\vdots \\
l_{n1}v_1 + l_{n2}v_2 + \dots + v_n &= b_n
\end{aligned}
\qquad (1.3.10)
$$

de donde la primera incógnita, v_1, ya está despejada en la primera ecuación. La segunda incógnita se despeja de la 2a. ecuación, en donde se ha sustituido previamente el valor calculado de v_1. Procediendo en forma semejante con el resto de las ecuaciones de (1.3.10) se obtienen todos los componentes del vector $\underset{\sim}{v}$ de (1.3.9). Sustituyendo ahora este vector, ya conocido, en la ec (1.3.9) se tiene el sistema

$$
\begin{aligned}
\sigma_1 u_1 + u_{12}u_2 + \dots + u_{1n}u_n &= v_1 \\
\sigma_2 u_2 + \dots \sigma u_{2n}u_n &= v_2 \\
&\vdots \\
\sigma_{n-1}u_{n-1} + u_{n-1,n}u_n &= v_{n-1} \\
\sigma_n u_n &= v_n
\end{aligned}
\qquad (1.3.11)
$$

De la última ecuación de (1.3.11) se tiene

$$u_n = \frac{\sigma_n}{\sigma_n}$$

Sustituyendo este valor en la penúltima ecuación de (1.3.11) se tiene

$$u_{n-1} = \frac{1}{\sigma_{n-1}} (\sigma_{n-1} - u_{n-1,n}u_n)$$

Procediendo en este orden regresivo con las restantes $n - 2$ ecuaciones se calculan todos los componentes de $\underset{\sim}{u}$, con lo que queda resuelto el problema.

Este método ha sido realizado en diversos subprogramas de computadora. Los más eficientes son los llamados DECOMP y SOLVE [8]. DECOMP produce la descomposición LU de $\underset{\sim}{A}$, mientras que SOLVE, la solución regresiva de los sistemas triangulares (1.3.10) y (1.3.11).

Una ventaja de estos programas es que, una vez descompuesta la matriz $\underset{\sim}{A}$, se puede resolver una serie de sistemas de la forma

$$\underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{u}_1 = \underset{\sim}{b}_1,\ \underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{u}_2 = \underset{\sim}{b}_2,\ \ldots,\ \underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{u}_m = \underset{\sim}{b}_m \qquad (1.3.12)$$

sin tener que volver a descomponer $\underset{\sim}{A}$, cuya descomposición no depende del miembro derecho de las ecs (1.3.12). Todo lo que tiene que hacerse es aplicar m veces la subrutina SOLVE, la que consume la menor parte del tiempo total. La mayor parte del tiempo se utiliza en la descomposición de $\underset{\sim}{A}$. Este método requiere un número de operaciones del orden de n^3. Así, para resolver el sistema anteriormente presentado de 25 ecuaciones, con este método se requiere ejecutar $25^3 = 15\ 625$ operaciones, lo cual consume en una computadora rápida algo así como 1.6 segundos, que es una cantidad sustancialmente por abajo de la anterior.

El problema de resolver m sistemas de ecuaciones de la forma (1.3.12) en relación con el MEF se presenta en aplicaciones de diseño se ingeniería cuando se desea conocer la distribución del esfuerzo en una misma estructura o en una misma máquina sujeta a diferentes condiciones de carga que se puedan presentar en operación.

Volviendo a las aplicaciones del MEF, la matriz $\underset{\sim}{A}$ viene a ser la matriz global de rigidez que, como ya se vio, tiene propiedades particulares como simetría y positividad definida. Para este tipo de matrices, el método de Gauss, o LU, se simplifica sustancialmente. La versión simplificada recibe el nombre de método de Cholesky. Ya que la matriz de rigidez es positiva definida, se puede descomponer en la forma

$$\underset{\sim}{K} = \underset{\sim}{G}^T \underset{\sim}{G}$$

donde $\underset{\sim}{G}$ es una matriz triangular superior. Por otra parte, la estructura bandeada de esta matriz aporta ventajas adicionales que redundan en una solución más económica. En efecto, el tiempo de solución de una matriz bandeada de ancho de banda d, es del orden de n^2d. Como normalmente el ancho de banda de una matriz es algunos órdenes de magnitud inferior a su número de renglones y columnas, esto es, $d \ll n$, la economía de ejecución es evidente. Así, por ejemplo, una matriz de rigidez típica de 5 000 x 5 000 puede tener un ancho de banda de 100. Si se utilizara el método de descomposición LU directamente, se realizarían algo así como 6.25×10^{11} operaciones, muchas de ellas inútiles, pues involucrarían multiplicaciones por cero. Explotando la naturaleza bandeada de la matriz, el número de operaciones requerido sería del orden de 2.5×10^8, es decir, 3 órdenes de magnitud inferior al anterior. Más aún, el orden de numeración de los nodos de una malla de elemento finito afecta enormemente el ancho de banda, d, de la matriz de rigidez. Existe, entonces, un orden de numeración (que no es único) óptimo que proporciona un ancho de banda mínimo. En el mercado se pueden obtener diferentes preprocesadoras que se encargan de proporcionar el ancho de banda mínimo, como el programa BAMIN, desarrollado en la Universidad de Manchester.

Por su parte, los métodos iterativos se basan en el esquema siguiente : descómpóngase la matriz $\underset{\sim}{A}$ en la forma

$$\underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{D} - \underset{\sim}{E} - \underset{\sim}{F} \qquad (1.3.13)$$

donde $\underset{\sim}{D}$ es diagonal, mientras que $\underset{\sim}{E}$ y $\underset{\sim}{F}$ son matrices <u>estrictamente</u> triangular inferior y superior, respectivamente, esto es, tienen ceros en su diagonal. De esta manera, el sistema (1.3.1) se puede escribir como

$$\underset{\sim}{D}\,\underset{\sim}{u} = (\underset{\sim}{E} + \underset{\sim}{F})\underset{\sim}{u} + b \tag{1.3.14}$$

Dado un valor inicial arbitrario $\underset{\sim}{u}^{o}$, genérese la secuencia

$$\underset{\sim}{D}\,\underset{\sim}{u}^{k+1} = (\underset{\sim}{E} + \underset{\sim}{F})\underset{\sim}{u}^{k} + \underset{\sim}{b} \tag{1.3.15}$$

o bien

$$\underset{\sim}{u}^{k+1} = \underset{\sim}{D}^{-1}(\underset{\sim}{E} + \underset{\sim}{F})\underset{\sim}{u}^{k} + \underset{\sim}{D}^{-1}\underset{\sim}{b} \tag{1.3.16}$$

donde $\underset{\sim}{D}$ es invertible si $\underset{\sim}{A}$ lo es. El <u>esquema iterativo</u> (1.3.16) constituye el <u>método de Jacobi</u>, llamándose $\underset{\sim}{D}^{-1}(\underset{\sim}{E} + \underset{\sim}{F})$ matriz de Jacobi. Este esquema tiene la desventaja de que requiere almacenar el valor anterior de $\underset{\sim}{u}^{k}$ y el actual $\underset{\sim}{u}^{k+1}$. Lo lógico sería utilizar, para el cálculo de la i^{a} componente de $\underset{\sim}{u}^{k+1}$, u_i^{k+1}, todos los valores actualizados de las componentes anteriores u_1^{k+1}, u_2^{k+1}, ..., u_{i-1}^{k+1}, destruyendo las componentes viejas u_1^{k}, u_2^{k}, ..., u_{i-1}^{k}. De esta suerte, el esquema iterativo (1.3.16) se sustituye por

$$\underset{\sim}{u}^{k+1} = (\underset{\sim}{D} - \underset{\sim}{E})^{-1}\,\underset{\sim}{F}\,\underset{\sim}{u}^{k} + (\underset{\sim}{D} - \underset{\sim}{E})^{-1}\,\underset{\sim}{b} \tag{1.3.17}$$

El esquema iterativo (1.3.17) recibe el nombre de <u>método de Gauss-Seidel</u>, mientras que la matriz $(\underset{\sim}{D} - \underset{\sim}{E})^{-1}\,\underset{\sim}{F}$, el de <u>matriz de Gauss-Seidel</u>. Este método posee, además, la ventaja de que con él se aproxima la solución más rapidamente, esto es, <u>converge</u> más rápidamente a la solución. Escríbase los esquemas (1.3.16) y (1.3.17) en la forma

$$\underset{\sim}{u}^{k+1} = \underset{\sim}{J}\,\underset{\sim}{u}^{k} + \underset{\sim}{D}^{-1}\,\underset{\sim}{b} \tag{1.3.18}$$

y

$$\underset{\sim}{u}^{k+1} = \underset{\sim}{G}\,\underset{\sim}{u}^{k} + (\underset{\sim}{D} - \underset{\sim}{E})^{-1}\,\underset{\sim}{b} \tag{1.3.19}$$

Ahora se determina la evolución del error para cada esquema. Para el de Jacobi, si $\underset{\sim}{u}^*$ es la solución, entonces satisface (1.3.18) con $\underset{\sim}{u}^{k+1} = \underset{\sim}{u}^k = \underset{\sim}{u}^*$, esto es

$$\underset{\sim}{u}^* = \underset{\sim}{J}\,\underset{\sim}{u}^* + \underset{\sim}{D}^{-1}\,\underset{\sim}{b} \qquad (1.3.20)$$

Llámese $\underset{\sim}{e}^k$ al error $\underset{\sim}{u}^k - \underset{\sim}{u}^*$ en la k a. iteración. Restando (1.3.20) de (1.3.18) se tiene

$$\underset{\sim}{e}^{k+1} = \underset{\sim}{J}\,\underset{\sim}{e}^k \qquad (1.3.21)$$

Del hecho que

$$\underset{\sim}{e}^1 = \underset{\sim}{J}\,\underset{\sim}{e}^0$$
$$\underset{\sim}{e}^2 = \underset{\sim}{J}\,\underset{\sim}{e}^1 = \underset{\sim}{J}^2\,\underset{\sim}{e}^0$$
$$\vdots$$

etc.

se concluye que **

$$\underset{\sim}{e}^k = \underset{\sim}{J}^k\,\underset{\sim}{e}^0 \qquad (1.3.22)$$

cuya evolución sólo depende de $\underset{\sim}{J}$. Se dice que $\underset{\sim}{J}$ es <u>convergente</u> si $\lim_{k \to \infty} \underset{\sim}{J}^k = \underset{\sim}{0}$. Así, para $\underset{\sim}{J}$ convergente, $\lim_{k \to \infty} \underset{\sim}{e}^k = \underset{\sim}{0}$. Se observa que $\underset{\sim}{J}$ es convergente cuando se va haciendo más y más pequeña a medida que se le eleva a potencias más altas. Así como un número real de valor absoluto menor que 1 se va haciendo cada vez más pequeño a medida que se le eleva a potencias más altas, una matriz es

---

** En e^k, k es superíndice, mientras que J^k, exponente convergente si los valores absolutos de todos sus valores característicos son estrictamente menores que 1. Al máximo valor absoluto de los valores característicos de una matriz A se le llama "radio espectral" y se representa por ρ. Así

$$\rho(\underset{\sim}{A}) = \max_{i} \{|\lambda_i|\} \tag{1.3.23}$$

Entonces, el esquema iterativo de Jacobi converge si

$$\rho(\underset{\sim}{J}) < 1 \tag{1.3.24}$$

Análogamente, el error del esquema iterativo de Gauss-Seidel (1.3.19) adopta la forma

$$\underset{\sim}{e}^{k+1} = \underset{\sim}{G}^{k}\, \underset{\sim}{e}^{o} \tag{1.3.25}$$

por lo que este esquema converge si

$$\rho(\underset{\sim}{G}) < 1 \tag{1.3.26}$$

Es claro que mientras menor sea el radio espectral de un esquema iterativo su rapidez de convergencia será mayor. Una forma de lograr un radio espectral menor es modificando el esquema iterativo de Gauss-Seidel, introduciendo un factor de <u>sobrerrelajación</u>, ω, mayor que 1. Se obtiene, entonces, el método iterativo de sobrerrelajación sucesiva, cuyo esquema es el siguiente :

$$(\underset{\sim}{D} - \omega \underset{\sim}{E})\underset{\sim}{u}^{k+1} = \left[(1-\omega)\underset{\sim}{D} + \omega \underset{\sim}{F}\right] u^{k} + \omega \underset{\sim}{b} \tag{1.3.27}$$

o bien

$$u^{k+1} = (\underset{\sim}{I} - \omega \underset{\sim}{L})^{-1} \left[(1-\omega)\underset{\sim}{I} + \omega \underset{\sim}{U}\right] u^{k} + \omega\, (\underset{\sim}{I} - \omega \underset{\sim}{L})^{-1} \underset{\sim}{D}^{-1} \underset{\sim}{b} \tag{1.3.28}$$

donde

$$\underset{\sim}{L} \equiv \underset{\sim}{D}^{-1} \underset{\sim}{E}, \quad \underset{\sim}{U} \equiv \underset{\sim}{D}^{-1} \underset{\sim}{F}$$

La rapidez de convergencia del esquema (1.3.28) depende, entonces sólo del factor de sobrerrelajación ω. Para cada problema particular existe un valor óptimo de sobrerrelajación que maximiza esa rapidez. Sin embargo, no existe en general, un método para hallar ese factor y normalmente tiene que determinarse experimentando con varios valores.

En toda la discusión anterior se ha considerado que tanto $\underset{\sim}{A}$ como $\underset{\sim}{b}$ se conocen a la perfección. Sin embargo, en la práctica esto no sucede. En efecto, si $\underset{\sim}{A}$ o $\underset{\sim}{b}$ proceden de mediciones, éstas introducen siempre "ruido", esto es, imprecisiones debidas a la imposibilidad de calibrar perfectamente los instrumentos de medición, o bien a errores de apreciación de parte de quienes toman las lecturas. En cálculos relacionados con el MEF, tanto la matriz $\underset{\sim}{A}$ como el vector $\underset{\sim}{b}$ se calculan dentro de la máquina, lo cual introduce errores llamados "de redondeo", esto es, debidos a que cualquier computadora no dispone más que de un conjunto finito de números, que se llaman "de punto flotante". Operaciones entre números de punto flotante, en general, no producen otro número de punto flotante, por lo que el resultado deberá aproximarse a uno de los dos números de punto flotante más próximos al resultado real. Algunas máquinas aproximan por defecto y otras, por exceso ; pero no necesariamente al número de punto flotante más próximo. En seguida se presenta una discusión somera de los errores de redondeo presentes al resolver el problema (1.3.1).

Antes de continuar con la presente discusión se introduce el concepto de <u>norma</u> de vectores y de matrices.

La norma de un vector $\underset{\sim}{v}$ de dimensión n es una generalización del concepto de magnitud. En efecto, la magnitud de un vector da una idea sobre el tamaño de sus componentes considerados globalmente. Esta se define como

$$\| \underset{\sim}{v} \| = (v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2)^{1/2} \tag{1.3.29}$$

Se observa que esta magnitud nunca es negativa y se anula si, y sólo si $\underset{\sim}{v} = \underset{\sim}{0}$, esto es, si todos y cada uno de los números v_i se anulan. Por otro lado, si cada componente v_i se multiplica por el mismo escalar c, se tiene

$$\| c \underset{\sim}{v} \| = |c| \, \| \underset{\sim}{v} \| \tag{1.3.30}$$

y, finalmente, para todo par de vectores $\underset{\sim}{v}$ y $\underset{\sim}{w}$,

$$\| \underset{\sim}{v} + \underset{\sim}{w} \| \leq \| \underset{\sim}{v} \| + \| \underset{\sim}{w} \| \tag{1.3.31}$$

que no es otra cosa que una condición de existencia del triángulo de lados $\underset{\sim}{v}$, $\underset{\sim}{w}$ y $\underset{\sim}{v} + \underset{\sim}{w}$. Por esto, la última relación, (1.3.31), se llama "desigualdad del triángulo". Generalizando el concepto anterior se tendrá : una norma para un espacio vectorial es un número real que, si $\underset{\sim}{v}$, $\underset{\sim}{w}$ son vectores del espacio,

i) La norma es <u>positiva definida</u>, esto es

$$\| \underset{\sim}{v} \| > \underset{\sim}{0}$$

y se anula <u>si y sólo si</u> $\underset{\sim}{v}$ se anula igualmente.

ii) Es linealmente homogénea ; esto es

$$\| c \underset{\sim}{v} \| = |c| \, \| \underset{\sim}{v} \|$$

iii) Satisface la desigualdad del triángulo, esto es

$$\| \underset{\sim}{v} + \underset{\sim}{w} \| = \| \underset{\sim}{v} \| + \| \underset{\sim}{w} \|$$

Nótese que en la definición anterior no se ha impuesto forma alguna para calcular la norma, como es el caso en la definición (1.3.29). Así, cualquier número real asociado a cada vector del espacio en consideración, que satisfaga las propiedades i) a iii) anteriores es una norma. Ejemplos de normas son los siguientes ;

$$\| \underset{\sim}{v} \| = \max_{i} \left\{ | v_i | \right\} \tag{1.3.32 a}$$

$$\| \underset{\sim}{v} \| = \sum_{i} | v_i | \tag{1.3.32 b}$$

De éstas dos, la primera es la más fácil y económica de calcular, y por eso se emplea mucho en análisis numérico para cálculo de errores.

Por otra parte, ya que la definición anterior de norma no se limita a vectores definidos como arreglos unidimensionales, se puede aplicar a matrices. Una norma de un espacio de matrices, entonces, es una medida del tamaño de las componentes de cada matriz del espacio, consideradas globalmente, de manera que mientras más pequeña sea la norma de una matriz, más próxima estará de la matriz nula. Ejemplos de normas de matrices son

$$\| \underset{\sim}{A} \| = \sqrt{\operatorname{Tr} \underset{\sim}{A} \underset{\sim}{A}^{T}} \tag{1.3.33 a}$$

$$\| \underset{\sim}{A} \| = \operatorname*{Máx}_{j} \sum_{i} | a_{ij} | \tag{1.3.33 b}$$

$$\| \underset{\sim}{A} \| = \operatorname*{Máx}_{i,j} | a_{ij} | \tag{1.3.33 c}$$

Un concepto primordial en el análisis de error de redondeo en cálculos con matrices es el de <u>condición</u> de una matriz. Dada una matriz $\underset{\sim}{A}$ de n x n, invertible, su condición se define como

$$\operatorname{cond} (\underset{\sim}{A}) = \| \underset{\sim}{A} \| \; \| \underset{\sim}{A}^{-1} \| \tag{1.3.34}$$

Se observa de inmediato que la condición es un número adimensional, y se demostrará que es una medida de la amplificación del error de redondeo. Así, un número de condición bajo está próximo a 1, aunque nunca es inferior a la unidad, mientras que uno alto puede ser del orden de 1 000 o mayor aún. Mientras más alta sea la condición de una matriz, más imprecisos serán los resultados de las operaciones en que interviene esta matriz.

Supóngase que se conoce $\underset{\sim}{A}$ a la perfección ; pero que $\underset{\sim}{b}$ está contaminado con un error de redondeo $\delta\,\underset{\sim}{b}$. Así, la ec (1.3.1) es, en realidad

$$\underset{\sim}{A}(\underset{\sim}{u} + \delta\,\underset{\sim}{u}) = \underset{\sim}{b} + \delta\,\underset{\sim}{b} \qquad (1.3.35)$$

donde $\delta\underset{\sim}{u}$ es el error de redondeo producido por $\delta\,\underset{\sim}{b}$. Interesará calcular el error de redondeo en el cálculo de $\underset{\sim}{u}$, en términos del de $\underset{\sim}{b}$, esto es, interesa calcular el cociente $\|\delta\,\underset{\sim}{u}\| / \|\underset{\sim}{u}\|$ en términos de $\|\delta\,\underset{\sim}{b}\| / \|\underset{\sim}{b}\|$. Ya que la ec (1.3.1) se satisface teóricamente, restándola de la ec (1.3.35) se tiene

$$\underset{\sim}{A} \quad u = \underset{\sim}{b}$$

o bien

$$u = \underset{\sim}{A}^{-1} \; \underset{\sim}{b} \qquad (1.3.36)$$

De una propiedad de las normas se tiene

$$\|\underset{\sim}{A}^{-1}\,\delta\,\underset{\sim}{b}\| \leq \|\underset{\sim}{A}^{-1}\| \; \|\delta\,\underset{\sim}{b}\| \qquad (1.3.37)$$

que aquí no se demostrará. Baste con decir que esta desigualdad está asociada al producto interno de vectores. En efecto, si $\underset{\sim}{v}$ y $\underset{\sim}{w}$ son dos vectores del mismo espacio (para el cual previamente se ha definido un producto interno como $\underset{\sim}{v}\cdot\underset{\sim}{w} = v_1w_1 + v_2w_2 + \ldots + v_nw_n$),

$$|\underset{\sim}{v}\cdot\underset{\sim}{w}| = \|\underset{\sim}{v}\| \, \|\underset{\sim}{w}\| \, |\cos(\underset{\sim}{v}, \underset{\sim}{w})|$$

donde $\cos(\underset{\sim}{v}, \underset{\sim}{w})$ es el coseno del ángulo que forman los vectores $\underset{\sim}{v}$ y $\underset{\sim}{w}$. Del hecho de que $|\cos(\underset{\sim}{v}, \underset{\sim}{w})| \leq 1$, la igualdad anterior se tranforma en la desigualdad

$$\|\underset{\sim}{v}\cdot\underset{\sim}{w}\| \leq \|\underset{\sim}{v}\| \, \|\underset{\sim}{w}\|$$

que es una desigualdad conocida como de Schwarz.

Volviendo al sistema (1.3.1), ya que

$$\underset{\sim}{A} \, \underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{b}$$

se tiene

$$\|\underset{\sim}{b}\| \leq \|\underset{\sim}{A}\| \, \|\underset{\sim}{u}\| \qquad (1.3.38)$$

Aplicando la desigualdad (1.3.37) a la ec (1.3.36), se tiene

$$\|\delta\underset{\sim}{u}\| \leq \|\underset{\sim}{A}^{-1}\| \, \|\delta\underset{\sim}{b}\| \qquad (1.3.39)$$

Multiplicando miembro a miembro las desigualdades (1.3.38) y (1.3.39), se tiene

$$\|\delta\underset{\sim}{u}\| \, \|\underset{\sim}{b}\| \leq \|\underset{\sim}{A}\| \, \|\underset{\sim}{A}^{-1}\| \, \|\underset{\sim}{u}\| \, \|\delta\underset{\sim}{b}\|$$

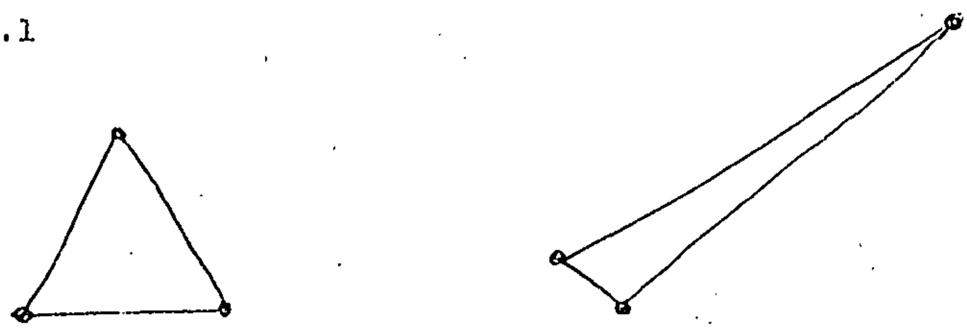
Si $\underset{\sim}{b} \neq \underset{\sim}{0}$, se pueden dividir ambos miembros de la última desigualdad entre $\|\underset{\sim}{u}\| \, \|\underset{\sim}{b}\|$, con lo que se obtiene

$$\frac{\|\delta\underset{\sim}{u}\|}{\|\underset{\sim}{u}\|} \leq \|\underset{\sim}{A}\| \, \|\underset{\sim}{A}^{-1}\| \, \frac{\|\delta\underset{\sim}{b}\|}{\|\delta\underset{\sim}{b}\|} = \mathrm{cond}(\underset{\sim}{A}) \, \frac{\|\delta\underset{\sim}{b}\|}{\|\underset{\sim}{b}\|} \qquad (1.3.40)$$

con lo que se demuestra que la condición de una matriz es el factor de amplificación del error de redondeo.

Un resultado semejante se habría obtenido si se hubiera supuesto imprecisión en $\underset{\sim}{A}$, en lugar de $\underset{\sim}{b}$; pero en aras de la brevedad, este análisis ya no se continúa.

Por la importancia que tiene la condición de una matriz, la mayor parte de los programas de elemento finito proporcionan una estimación de este número, ya que un cálculo exacto sería demasiado costoso ; pero también, innecesario. En aplicaciones del MEF a problemas en medios elásticos planos se genera una malla de elementos. Si la malla es triangular, se tendrán elementos de las formas de la Fig 1.3.1



(a) (b)

Fig 1.3.1 Elementos finitos

El elemento de la Fig 1.3.1 (a) es casi equilátero, mientras que él de la Fig 1.3.1 (b) es "muy escaleno", esto es, sus lados son de longitudes muy desiguales. Una malla con elementos equiláteros produce una matriz de rigidez de condición baja, mientras que una con elementos muy desbalanceados, como él de la Fig 1.3.1 (b), produce una matriz de rigidez de condición muy alta. Existen preprocesadores que balancean una malla desbalanceada.

Referencias :

1. Byars E.F. y Snyder R.D., Mecánica de Cuerpos Deformables, Tercera Edición, Representaciones y Servicios de Ingeniería, S.A., C. de México, 1978, pp. 274-284

2. Timoshenko S. y Woinowsky-Krieger S., Teoría de Placas y Láminas, Ediciones Urmo, Bilbao, 1970, p. 310

3. Byars E.F. y Snyder R.D., op. cit., pp. 73 y 74

4. Herstein I.N., Algebra Moderna, Editorial Trillas, C. de México, 1974, pp. 210-218

5. Mostow G.D. y Sampson J.H., Algebra Lineal, Mc Graw-Hill de México, S A de C V, 1972

6. Angeles J., "Modelo dinámico de una suspensión para vehículos de transporte masivo", INGENIERIA, Vol. L, No. 2, 1980, pp. 48-51

7. Gamow G., One, Two, Three ... Infinity, Bantam Books, Inc., Nueva York, 1967, p. 14

8. Forsythe G.E., Malcom M.A. y Moler C.B., Computer Methods for Mathematical Computations, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1977

DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.

EL METODO DEL ELEMENTO FINITO EN LA INGENIERIA

CONCEPTOS DE ELASTICIDAD

FEBRERO, 1985

Palacio de Minería Calle de Tacuba 5 primer piso Deleg. Cuauhtémoc 06000 México, D.F. Tel.: 521-40-20 Apdo. Postal M-2285

1.- **Introducción.**- La naturaleza de las fuerzas que actuan dentro de un cuerpo para equilibrar el efecto de las fuerzas de cuerpo y externas o de superficie, es una de las partes principales del estudio de la mecánica de sólidos. Se aplicará el método de secciones para aislar un elemento diferencial y definir el concepto de esfuerzo.

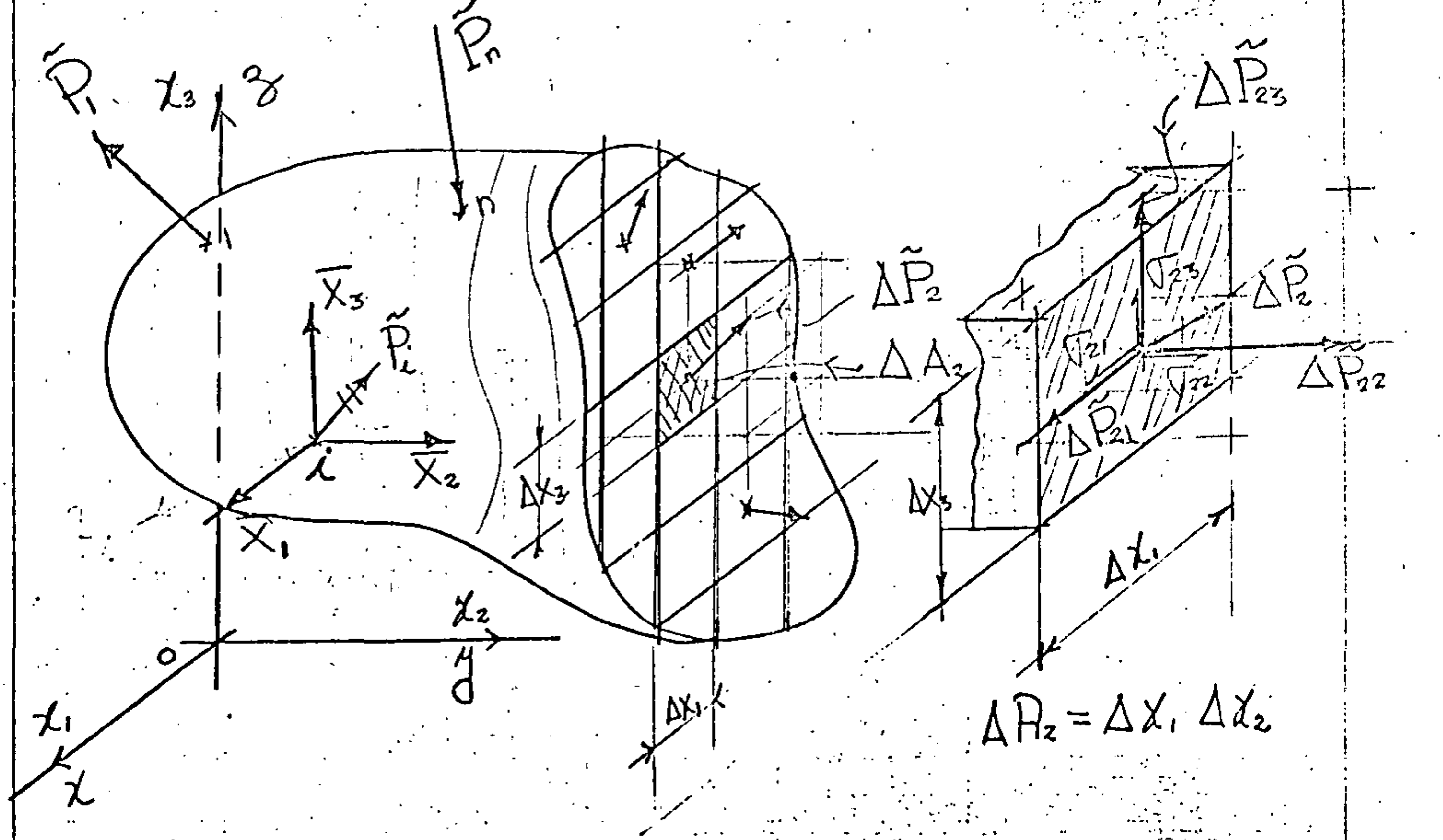


Fig. 1 Cuerpo seccionado paralelo al plano x_1, x_3

2.- **Definición de esfuerzo.**

En general, las fuerzas internas actuando sobre las areas infinitesimales $\Delta x_i \Delta x_j$ del corte, son de magnitudes y direcciones variables. Fuerzas de naturaleza vectorial y mantienen el equilibrio. En mecánica de sólidos es particularmente significante determinar la intensidad y dirección en distintos puntos a travez del corte. En general varían de punto a punto en intensidad y dirección. Es usual resolver sus intensidades perpendicular y paralelas a la sección en consideración. En particular el corte de la Fig. 1 es perpendicular al eje X_1, $\Delta\tilde{P}_2$ es la fuerza resultante que actua sobre $\Delta A_2 = \Delta X_1 \Delta X_2$, cuyas componentes son: $\lfloor \Delta\tilde{P}_{21}\ \Delta\tilde{P}_{22}\ \Delta\tilde{P}_{23} \rfloor$, el primer subindice significa que el plano en que actuan es perpedicular al eje X_2 y el segundo respecto al eje que son paralelos, Puesto que las componentes de fuerza por unidad de area, son correctas solo en el punto, la definición matématica de esfuerzo es*

$$\sigma_{21} = \lim_{\Delta A_2 \to 0} \frac{\Delta\tilde{P}_{21}}{\Delta A_2}, \quad \sigma_{22} = \lim_{\Delta A_2 \to 0} \frac{\Delta\tilde{P}_{22}}{\Delta A_2}, \quad \sigma_{23} = \lim_{\Delta A_1 \to 0} \frac{\Delta\tilde{P}_{23}}{\Delta A_2}$$

similarmente los esfuerzos actuando en un plano perpendicular a X_1 son

$$\sigma_{11} = \lim_{\Delta A_1 \to 0} \frac{\Delta\bar{P}_{11}}{\Delta A_1}, \quad \sigma_{12} = \lim_{\Delta A_1 \to 0} \frac{\Delta\bar{P}_{12}}{\Delta A_1}, \quad \sigma_{13} = \lim_{\Delta A_1 \to 0} \frac{\Delta\bar{P}_{13}}{\Delta A_1},$$

y los esfuerzos actuando sobre un plano perpendicular a X_3 son

$$\sigma_{31} = \lim_{\Delta A_3 \to 0} \frac{\Delta\bar{P}_{31}}{\Delta A_3}, \quad \sigma_{32} = \lim_{\Delta A_3 \to 0} \frac{\Delta P_{32}}{\Delta A_3}, \quad \sigma_{33} = \lim_{\Delta A_3 \to 0} \frac{\Delta\bar{P}_{33}}{\Delta A_3}$$

---

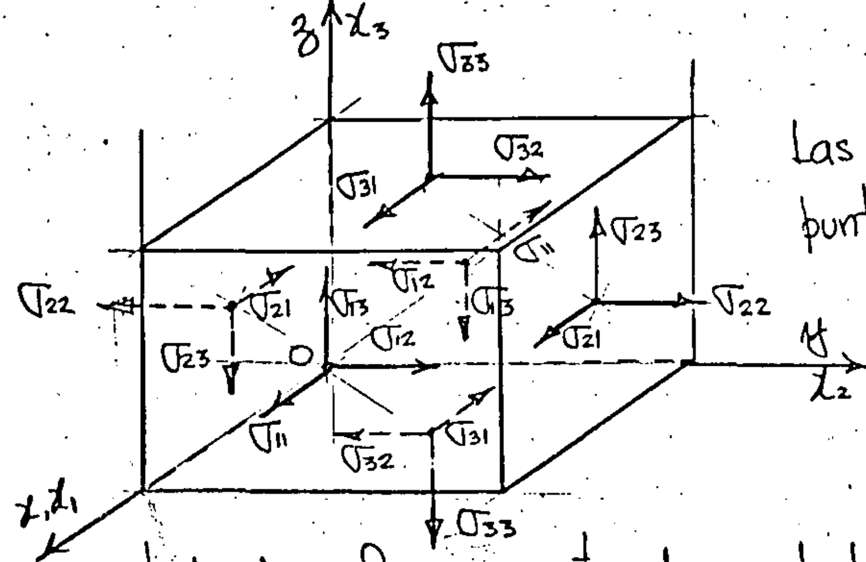
* Cuando $\Delta A_i \to 0$, existen preguntas desde el punto de vista atómico en definir esfuerzo en esta forma. Sin embargo, un modelo homogeneo para materia molecular no homogenea trabaja bien en problemas de Ingeniería

Se observa que las definiciones de esfuerzo normal y cortante representan la intensidad de una fuerza sobre una area, y sus unidades son de $\left[\frac{F}{L^2}\right]$; en el sistema métrico kg/cm² o ton/cm² y en el Ingles lbs/pul² o Kips/pul².

Debe notarse que los esfuerzos multiplicados multiplicados por las areas sobre las cuales actuan nos dan fuerzas, y es la suma de estas fuerzas, y es la suma de estas fuerzas sobre cualquier corte imaginario lo que conserva el equilibrio de un cuerpo

3. Tensor de esfuerzos.

Sí, además del diagrama de cuerpo libre de la Fig. 1.1 e hacen pasar tres pares de planos paralelos y separados por distancias infinitesimales, un cubo de dimensiónes infinitesimales sera aislado del cuerpo con el origen del sistema local coordenado en el punto de coordenadas $x_i(x_1, x_2, x_3)$. Tal cubo se muestra en la Fig. 3.1



Las coordenadas del punto O son (x_1, x_2, x_3)

Fig. 3.1 Estado de esfuerzos actuando en el elemento dx_i. El sentido indicado es convencionalmente el positivo.

Examinando la Fig. 3.1, se observa que hay tres esfuerzos normales $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$, y seis esfuerzos cortantes $\sigma_{12}, \sigma_{21}, \sigma_{23}, \sigma_{32}, \sigma_{31}, \sigma_{13}$. El arreglo matricial

$$\underline{\sigma} \equiv [\sigma_{ij}] \equiv [\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \qquad (3.1)$$

es la representación del tensor de esfuerzos. Es un tensor de segundo orden referido al espacio Euclidiano tridimensional. Un vector es un tensor de primer orden y un escalar es un tensor de cero orden

4.- Fuerzas de cuerpo y fuerzas de superficie

En el mismo elemento diferencial consideremos el vector de fuerzas de cuerpo por unidad de volumen $\{X_i\}^T = \lfloor X_1\ X_2\ X_3 \rfloor$, y en consideraciones no polares el vector de momentos de cuerpo por unidad de volumen $\{m_i\}^T = \lfloor m_1\ m_2\ m_3 \rfloor$ actuando en el centroide del elemento diferencial como se indica en la Fig. 4.1

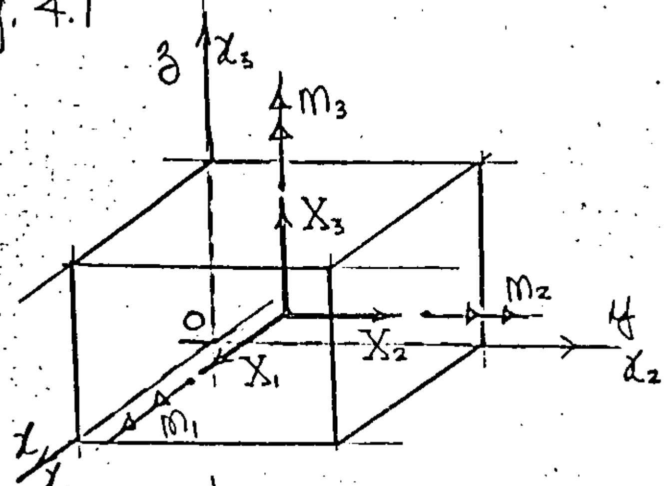


Fig. 4.1 Fuerzas y momentos de cuerpo por unidad de volumen $\{X_i\}$ y $\{m_i\}$ actuando en el centro de gravedad de dx_i.

en donde $X_i = \rho(f_i - a_i)$ (4.1)

onde ρ es la densidad o masa específica, f_i es la fuerga por unidad de masa en la dirección x_i y a_i es la aceleración del elemento dx_i en la dirección de x_i

--Las fuergas de superficie actuan en la frontera del cuerpo y las tres componentes de $\tilde{P}_i$ Fig 1.1 las designaremos por $\{\overline{X}_i\}^T = \lfloor \overline{X}_1\ \overline{X}_2\ \overline{X}_3 \rfloor_i$ sus unidades son fuerza por unidad de area $\left[\frac{F}{L^2}\right]$, Kg/cm^2 en el sistema métrico, y lbs/pul^2 en el ingles, y en el internacional $Newtons/cm^2$. Las unidades de las fuergas de cuerpo serán $\left[\frac{F}{L^3}\right]$. Las fuergas de superficie deben satisfacer las condiciones en la frontera [Fig. 5.1] que para el punto i [Fig. 1.1] son

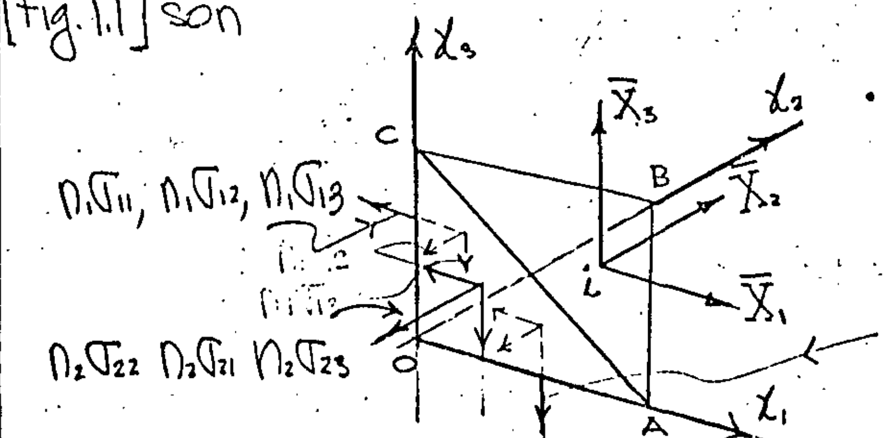


Fig. 5.1 Equilibrio del punto i [Fig. 1.1] en la superficie.

Si ABC = unidad, OBC = $\cos\alpha = n_1$, OAC = $\cos\beta = n_2$, y OAB = $\cos\gamma = n_3$, donde $\{n_i\}^T = \lfloor n_1\ n_2\ n_3 \rfloor$ son los cosenos directores de la normal al plano ABC, y del equilibrio de OABC se obtiene

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \overline{X}_1 \\ \overline{X}_2 \\ \overline{X}_3 \end{Bmatrix} \quad \text{ó} \quad [\sigma_{ij}]^T \{n_i\} = \{\overline{X}_i\} \quad (4.1)$$

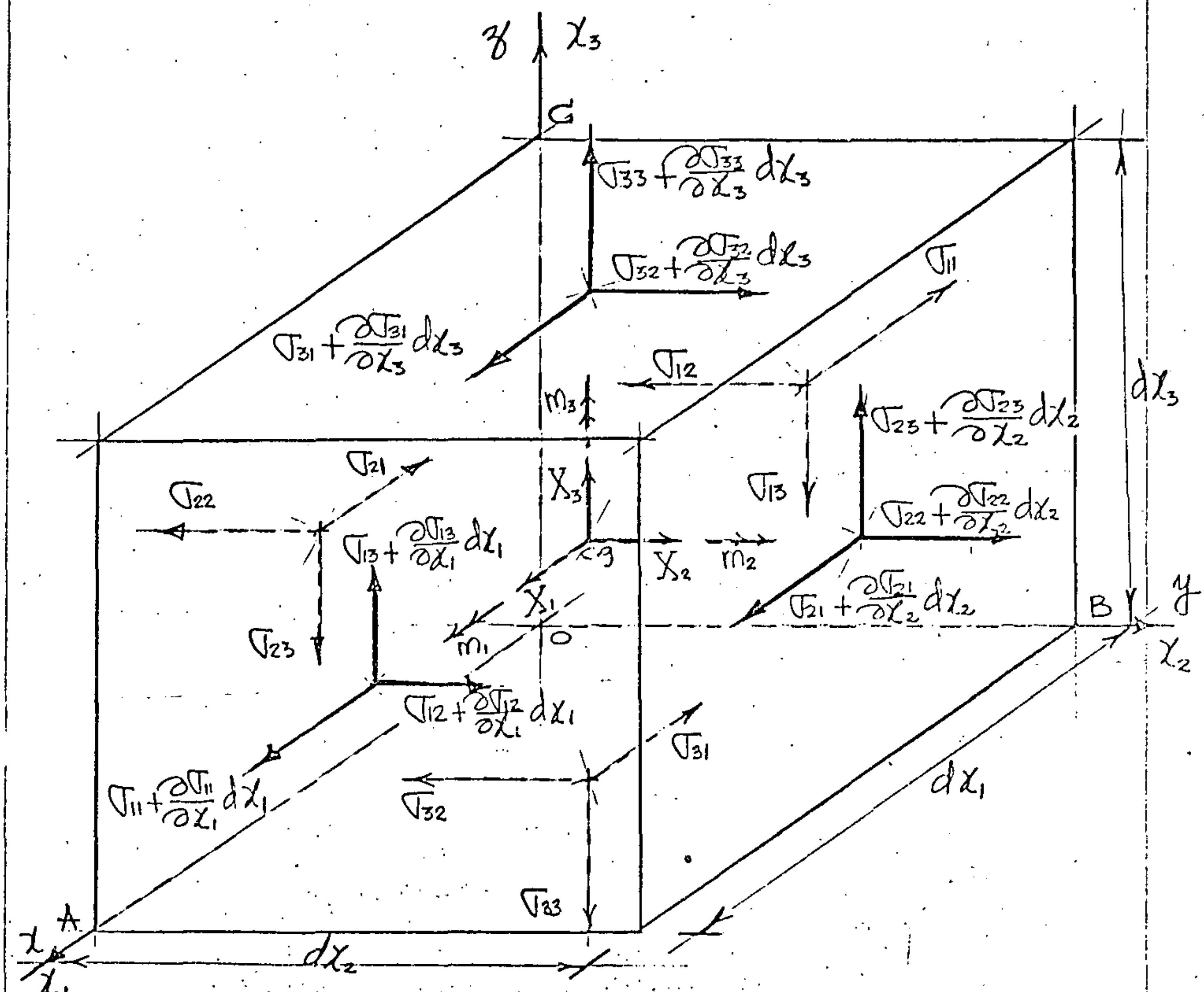


Fig. 5.1. Equilibrio de esfuerzos $[\sigma]$, fuerzas de cuerpo $\{X\}$ y momentos de cuerpo $\{m\}$, en el elemento dx_i

(4.1) es la representación matricial de las condiciones de equilibrio del punto i en la frontera x_i.

5.- Equilibrio del elemento dx_i.

Las seis ecuaciones de equilibrio del elemento de la Fig. 5.1 son

$$\sum F_{x_1}=\sum F_{x_2}=\sum F_{x_3}=\sum M_{x_1}=\sum M_{x_2}=\sum M_{x_3}=0 \quad (5.1)$$

de $\sum F_{x_1}=0$, en el límite cuando $dx_i \to 0$ se obtiene

$$\left(\sigma_{11}+\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1}dx_1\right)dx_2\,dx_3-\sigma_{11}\,dx_2\,dx_3+\left(\sigma_{21}+\frac{\partial\sigma_{21}}{\partial x_2}dx_2\right)dx_1\,dx_3$$

$$-\sigma_{21}\,dx_1\,dx_3+\left(\sigma_{31}+\frac{\partial\sigma_{31}}{\partial x_3}\right)dx_1\,dx_2-\sigma_{31}\,dx_1\,dx_2+\bar{X}_1\,dx_1\,dx_2\,dx_3=0$$

efectuando operaciones algebráicas se obtiene

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{21}}{\partial x_2}+\frac{\partial\sigma_{31}}{\partial x_3}+\bar{X}_1=0$$

Similarmente de $\sum F_{x_2}=0$,

$$\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2}+\frac{\partial\sigma_{32}}{\partial x_3}+\bar{X}_2=0 \qquad (5.2)$$

de $\sum F_{x_3}=0$,

$$\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{23}}{\partial x_2}+\frac{\partial\sigma_{33}}{\partial x_3}+\bar{X}_3=0$$

De $\sum M_{x_1}=0$, en el límite cuando $dx_i \to 0$, y considerando el eje de momentos paralelo a ox_1 y a traves del centroide del elemento dx_i, y despreciando los diferenciales de segundo orden dx_i^2, se obtiene bajo la convención de signos de la Fig. 5.1 lo siguiente

$$\left(\sigma_{23}+\frac{\partial\sigma_{23}}{\partial x_2}dx_2\right)dx_1\,dx_3\,\frac{dx_2}{2}+\sigma_{23}\,dx_1\,dx_3\,\frac{dx_2}{2}$$

$$-\left(\sigma_{32}+\frac{\partial\sigma_{32}}{\partial x_3}dx_3\right)dx_1\,dx_2\,\frac{dx_3}{2}-\sigma_{32}\,dx_1\,dx_2\,\frac{dx_3}{2}+m_1\,dx_1\,dx_2\,dx_3=0$$

efectuando operaciones algebraicas se obtiene

$$\sigma_{23}-\sigma_{32}+m_1=0$$

Similarmente de $\sum M_{x_2}=0$, $\quad \sigma_{31}-\sigma_{13}+m_2=0 \qquad (5.3)$

y de $\sum M_{x_3}=0$, $\quad \sigma_{12}-\sigma_{21}+m_3=0$

Las ecuaciones (5.2) y (5.3) son las seis ecuaciones de equilibrio en coordenadas rectangulares y en su forma polar, generalmente los momentos de cuerpo $m_i=0$

Expresando (5.2) matricialmente se tiene

$$\left\lfloor \frac{\partial}{\partial x_1} \; \frac{\partial}{\partial x_2} \; \frac{\partial}{\partial x_3} \right\rfloor \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} + \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = 0 \qquad (5.4)$$

o

$$\left\lfloor \frac{\partial}{\partial x_i} \right\rfloor [\sigma_{ij}] + \{X_i\} = 0 \qquad (5.5)$$

Con notación índice (5.2) se representa

$$\sigma_{ij,i} + X_j = 0 \qquad (5.6)$$

en donde $\sigma_{ij,i} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i}$. Y las ecuaciones (5.3)

$$\sigma_{ij} - \sigma_{ji} + m_k = 0 \qquad (5.7)$$

6. Diferentes notaciones del tensor de esfuerzos.

A continuación gráficamente mostraremos las diferentes notaciones que han sido utilizadas para representar las componentes del tensor de esfuerzos.

6.1 Cauchy inicialmente.

$$\begin{bmatrix} A & F & E \\ F & B & D \\ E & D & C \end{bmatrix} \qquad (m_k = 0)$$

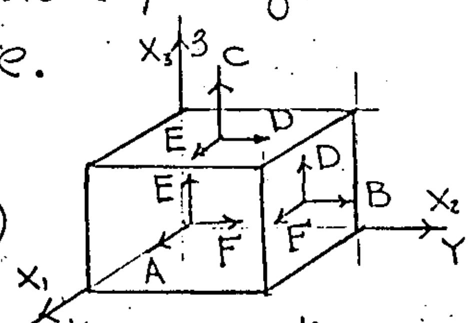


Fig. 6.1.1

6.2 Kelvin.

$$\begin{bmatrix} P & V & T \\ V & Q & S \\ T & S & R \end{bmatrix} \qquad (m_k = 0)$$

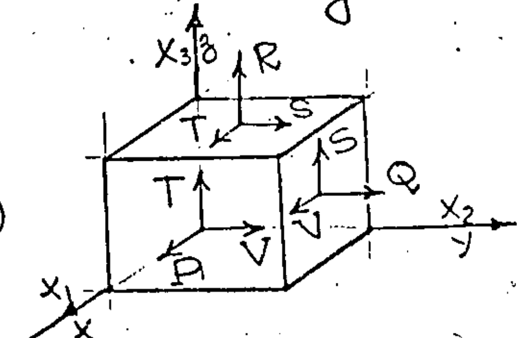


Fig. 6.1.2

6.2 Cauchy posteriormente, Saint-Venant ó Maxwel, introducen por primera vez la notación cartesiana, y

$$\begin{bmatrix} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{yx} & p_{yy} & p_{yz} \\ p_{zx} & p_{zy} & p_{zz} \end{bmatrix} \qquad (m_k \neq 0)$$

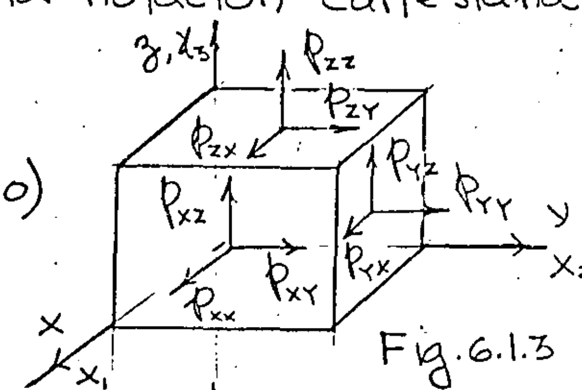


Fig. 6.1.3

condiciones polares.

6.3 Newman, Kirchhof y Love.

$$\begin{bmatrix} X_x & X_y & X_z \\ Y_x & Y_y & Y_z \\ Z_x & Z_y & Z_z \end{bmatrix} \qquad (m_k \neq 0)$$

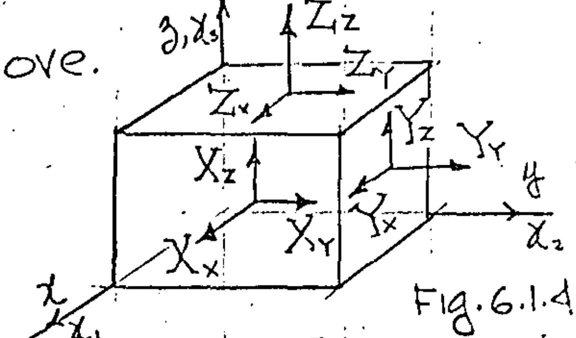


Fig. 6.1.4

6.4 K. Pearson.

$$\begin{bmatrix} \widehat{xx} & \widehat{xy} & \widehat{xz} \\ \widehat{yx} & \widehat{yy} & \widehat{yz} \\ \widehat{zx} & \widehat{zy} & \widehat{zz} \end{bmatrix} \qquad (m_k \neq 0)$$

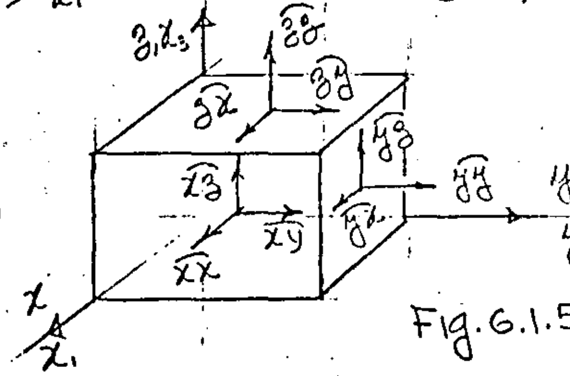


Fig. 6.1.5

6.5 S. Timoshenko y T. Von Karmán introducen la notación de Ingeniería, simplificando la notación cartesiana utilizando solo un subindice en los esfuerzos normales denominándolos por σ, y los tangenciales por τ.

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \qquad (m_k \neq 0)$$

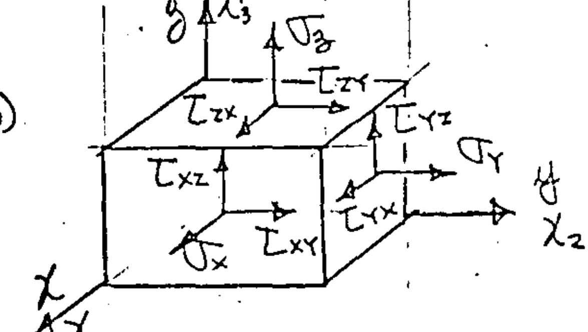


Fig. 6.1.6

6.6 Green, Ierna y autores Rusos introducen la notación índice similar a la utilizada previamente

$$[\sigma_{ij}] \equiv [\tau_{ij}]$$

6.7 Clebsch, C. Truesdell y A.C. Eringen, también utilizan la notación índice representando el tensor de esfuerzos

$$[t_{ij}]$$

6.8 D.C. Leigh, y L. Malvern, también utilizan notación índice representando el tensor de esfuerzos como

$$[T_{ij}]$$

Es importante observar que en la derivación de las ecuaciones de equilibrio (5.6) y (5.7) las propiedades mecánicas del material no han sido usadas. Lo cual significa que son aplicables a materiales elásticos, plásticos, o viscoelasticos. También es muy importante observar que no hay suficientes ecuaciones de equilibrio para determinar las incógnitas esfuerzo, el problema es estáticamente indeterminado.

7. Desplazamiento, deformación.

El analisis de la deformación de un sólido es de importancia paralela al analisis de esfuerzos. Requiere la definición precisa de deformación, la cual significa la intensidad del desplazamiento. Un cuerpo sólido sujeto a un cambio de temperatura o a cargas externas.

Por ejemplo, si una muestra es sujeta a una fuerza P como se muestra en la Fig. 7.1, Un cambio de longitud ocurre entre los dos puntos de calibración A y B. Si l_o es la longitud inicial y l la longitud observada bajo la carga P, y el alargamiento $\Delta l = l - l_o$. El

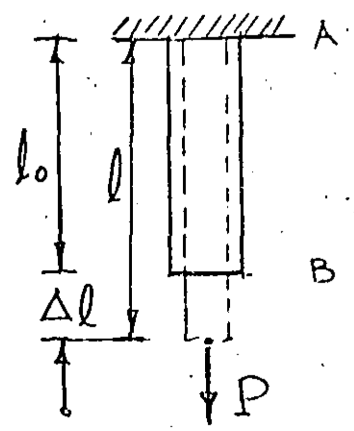


Fig. 7.1 Muestra a tensión.

alargamiento por unidad de longitud ε (epsilon) es

$$\varepsilon = \int_{l_o}^{l} \frac{dl}{l_o} = \frac{l - l_o}{l_o} = \frac{\Delta l}{l_o} \qquad (7.1)$$

el cual es llamado deformación lineal. Es una cantidad adimensional, pero generalmente se mide o se refiere en $\frac{cm}{cm}$ ó $\frac{pulg}{pulg}$. Algunas veces se expresa en porciento. La cantidad ε es generalmente muy pequeño. En la mayoría de las aplicaciones de ingeniería tiene un orden máximo de magnitud de 0.001. Cuando las deformaciones son grandes, por ejemplo, en formado de metales, se introduce el la deformación natural que implica una lo variable, dada por

$$\bar{\varepsilon} = \int_{l_o}^{l} \frac{dl}{l} = \ln \frac{l}{l_o} = \ln(1+\varepsilon) \qquad (7.2)$$

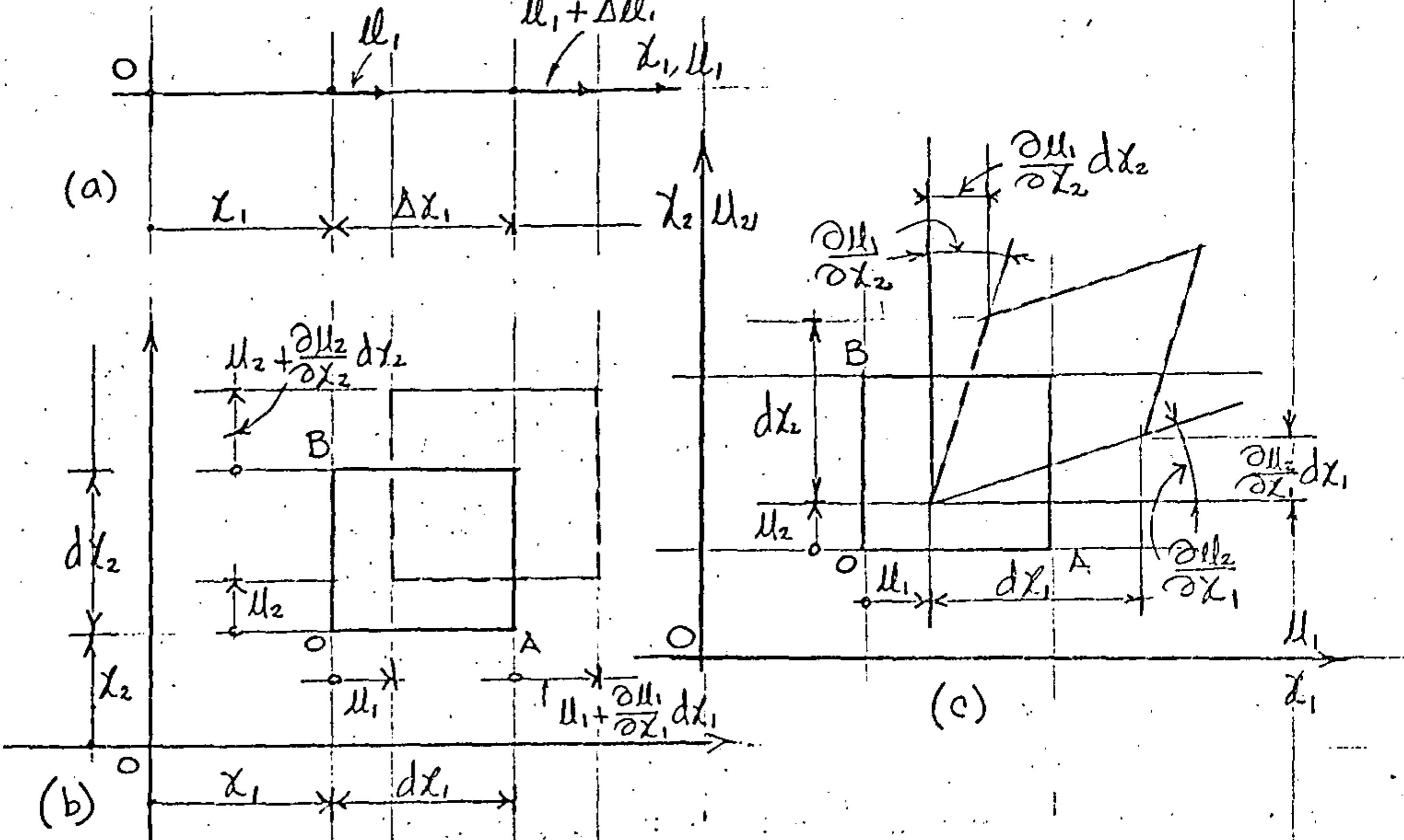


Fig. 7.2 Elementos deformados en posisiones inicial y final

Sea el vector de desplazamientos $\{u_i\}^T = \lfloor u_1\ u_2\ u_3 \rfloor$ en las direcciones x_1 x_2 y x_3 respectivamente, en base a los desplazamientos mostrados en la Fig. 7.2a, la definición de deformación lineal es

$$\varepsilon_{11} = \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{u_1 + \Delta u_1 - u_1}{\Delta x_1} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \equiv u_{1,1} \qquad (7.2)$$

Similarmente

$$\varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \equiv u_{2,2}\,, \quad \varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \equiv u_{3,3} \qquad (7.3)$$

el signo positivo significa alargamientos. El elemento también experimenta deformaciones de cortante como se muestra en la Fig. 7.2c el ángulo recto AOB es reducido por la cantidad $\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}$. Por lo tanto, para pequeños cambios del ángulo, la definición de deformación de cortante asociada con el plano $x_1 x_2$ es

$$\gamma_{12}=\gamma_{21}=\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\equiv u_{1,2}+u_{2,1}$$, analogamente con

los otros planos, $$\gamma_{23}=\gamma_{32}=\frac{\partial u_2}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\equiv u_{2,3}+u_{3,2} \qquad (7.4)$$

$$\gamma_{31}=\gamma_{13}=\frac{\partial u_3}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\equiv u_{3,1}+u_{1,3}$$

en el caso que las deformaciones no sean pequeñas, se demuestra facilmente que

$$\varepsilon_{11}=\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)^2\right]$$

$$\varepsilon_{22}=\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right)^2\right]$$

$$\varepsilon_{33}=\frac{\partial u_3}{\partial x_3}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right)^2+\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right)^2+\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)^2\right] \qquad (7.5)$$

$$\gamma_{12}=\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial u_3}{\partial x_2}$$

$$\gamma_{23}=\frac{\partial u_2}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_2}+\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial x_3}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial u_2}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\frac{\partial u_3}{\partial x_3}$$

$$\gamma_{31}=\frac{\partial u_3}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial x_3}+\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial x_3}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\frac{\partial u_2}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\frac{\partial u_3}{\partial x_3}$$

En las ecuaciones (7.5) aplicables a deformaciones grandes ya se observa la no linearidad en geometría. (7.4) es un caso particular de (7.5) cuando los términos de segundo grado son despreciables respecto a los de primer grado o sea pequeñas deformaciones. (7.5) en notación compacta queda

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= u_{1,1} + \tfrac{1}{2}\left(u_{1,1}^2 + u_{2,1}^2 + u_{3,1}^2\right)\\
\varepsilon_{22} &= u_{2,2} + \tfrac{1}{2}\left(u_{1,2}^2 + u_{2,2}^2 + u_{3,2}^2\right)\\
\varepsilon_{33} &= u_{3,3} + \tfrac{1}{2}\left(u_{1,3}^2 + u_{2,3}^2 + u_{3,3}^2\right)
\end{aligned}
\tag{7.6}
$$

$$
\begin{aligned}
\gamma_{12} = \gamma_{21} &= u_{1,2} + u_{2,1} + u_{1,1}u_{1,2} + u_{2,1}u_{3,2} + u_{3,1}u_{3,2}\\
\gamma_{23} = \gamma_{32} &= u_{2,3} + u_{3,2} + u_{1,2}u_{1,3} + u_{2,2}u_{2,3} + u_{3,2}u_{3,3}\\
\gamma_{31} = \gamma_{13} &= u_{3,1} + u_{1,3} + u_{1,1}u_{1,3} + u_{2,1}u_{2,3} + u_{3,1}u_{3,3}
\end{aligned}
$$

Exáminando las ecuaciones deformación-desplazamiento para pequeñas deformaciones (7.2), (7.3) y (7.4), se observa que son seis ecuaciones que dependen solamente de tres desplazamientos u_1, u_2 y u_3. Por lo tanto las ecuaciones no pueden ser independientes. Por lo tanto seis ecuaciones independientes pueden desarollarse relacionando a ε_{11}, ε_{22}, ε_{33}, γ_{12}, γ_{23} y γ_{31}, ecuaciones conocidas como ecuaciones de compatibilidad.

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2\gamma_{12}}{\partial x_1\partial x_2} \;;\quad 2\frac{\partial^2\varepsilon_{11}}{\partial x_2\partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(-\frac{\partial\gamma_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial\gamma_{13}}{\partial x_2} + \frac{\partial\gamma_{12}}{\partial x_3}\right)\\
&\frac{\partial^2\varepsilon_{11}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2\varepsilon_{33}}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2\gamma_{13}}{\partial x_1\partial x_3} \;;\quad 2\frac{\partial^2\varepsilon_{22}}{\partial x_1\partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial\gamma_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial\gamma_{13}}{\partial x_2} + \frac{\partial\gamma_{12}}{\partial x_3}\right)\\
&\frac{\partial^2\varepsilon_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2\varepsilon_{33}}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^2\gamma_{23}}{\partial x_2\partial x_3} \;;\quad 2\frac{\partial^2\varepsilon_{33}}{\partial x_1\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial\gamma_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial\gamma_{13}}{\partial x_2} - \frac{\partial\gamma_{12}}{\partial x_3}\right)
\end{aligned}
\tag{7.7}
$$

substituyendo (7.2), (7.3) y (7.4) en (7.7) se verifican las ecuaciones de compatibilidad de pequeñas deformaciones.

Similarmente a las componentes del Tensor de esfuerzos en las notaciones indice, cartesiana y de ingeniería, se representan las componentes del tensor de deformaciones como

$$[\varepsilon_{ij}] \equiv \underline{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \varepsilon_{XX} & \varepsilon_{XY} & \varepsilon_{XZ} \\ \varepsilon_{YX} & \varepsilon_{YY} & \varepsilon_{YZ} \\ \varepsilon_{ZX} & \varepsilon_{ZY} & \varepsilon_{ZZ} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \varepsilon_{X} & \frac{\gamma_{XY}}{2} & \frac{\gamma_{XZ}}{2} \\ \frac{\gamma_{YX}}{2} & \varepsilon_{Y} & \frac{\gamma_{YZ}}{2} \\ \frac{\gamma_{ZX}}{2} & \frac{\gamma_{ZY}}{2} & \varepsilon_{Z} \end{bmatrix} \qquad (7.8)$$

(indice) (cartesiana) (ingeniería)

en (7.8) fué necesario fué necesario modificar las relaciones de deformación por cortante con el objeto de someter al tensor $\underline{\varepsilon}$ enteramente obedecer ciertas leyes de transformación, por lo que $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\gamma_{ij}$ para toda $i \neq j$. Analogamente al tensor de esfuerzos $[\varepsilon_{ij}]$ puede diagonalizarse quedando

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix} \qquad (7.9)$$

8. Ley de Hooke en un estado uniaxial de esfuerzos,

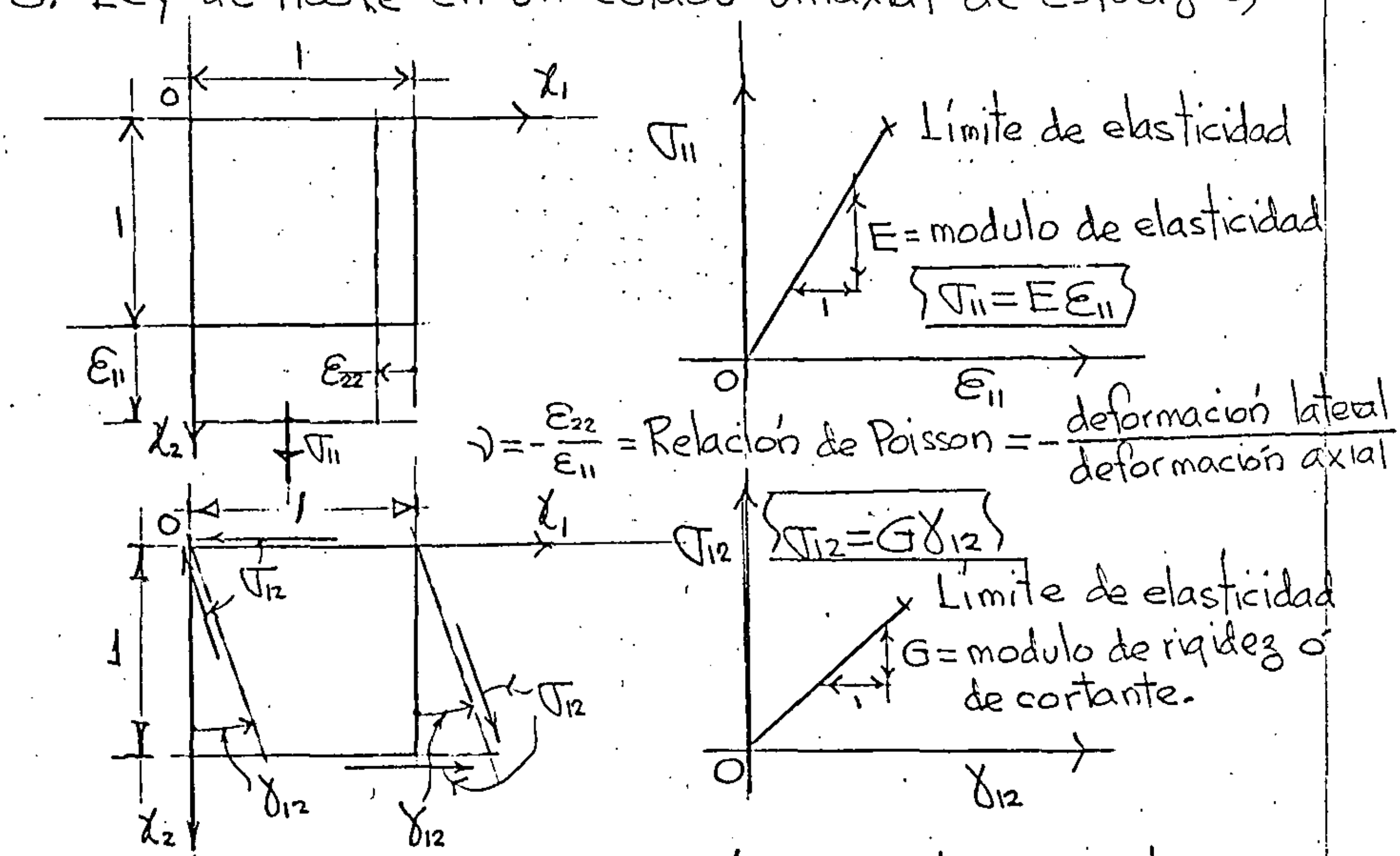


Fig. 8.1 Ley de Hooke en tensión uniaxial σ_{11} y corte puro σ_{12}.

puesto que el sistema es elástico lineal rige el principio de superposición de causas y efectos, por lo tanto en la Fig. 8.2 se considera un estado triaxial llegando a él en tres etapas de carga, etapa 1: actuando σ_{11}, etapa 2: actuando σ_{11} y σ_{22} y etapa 3: actuando σ_{11}, σ_{22} y σ_{33}. Se llega a las siguientes ecuaciones constitutivas

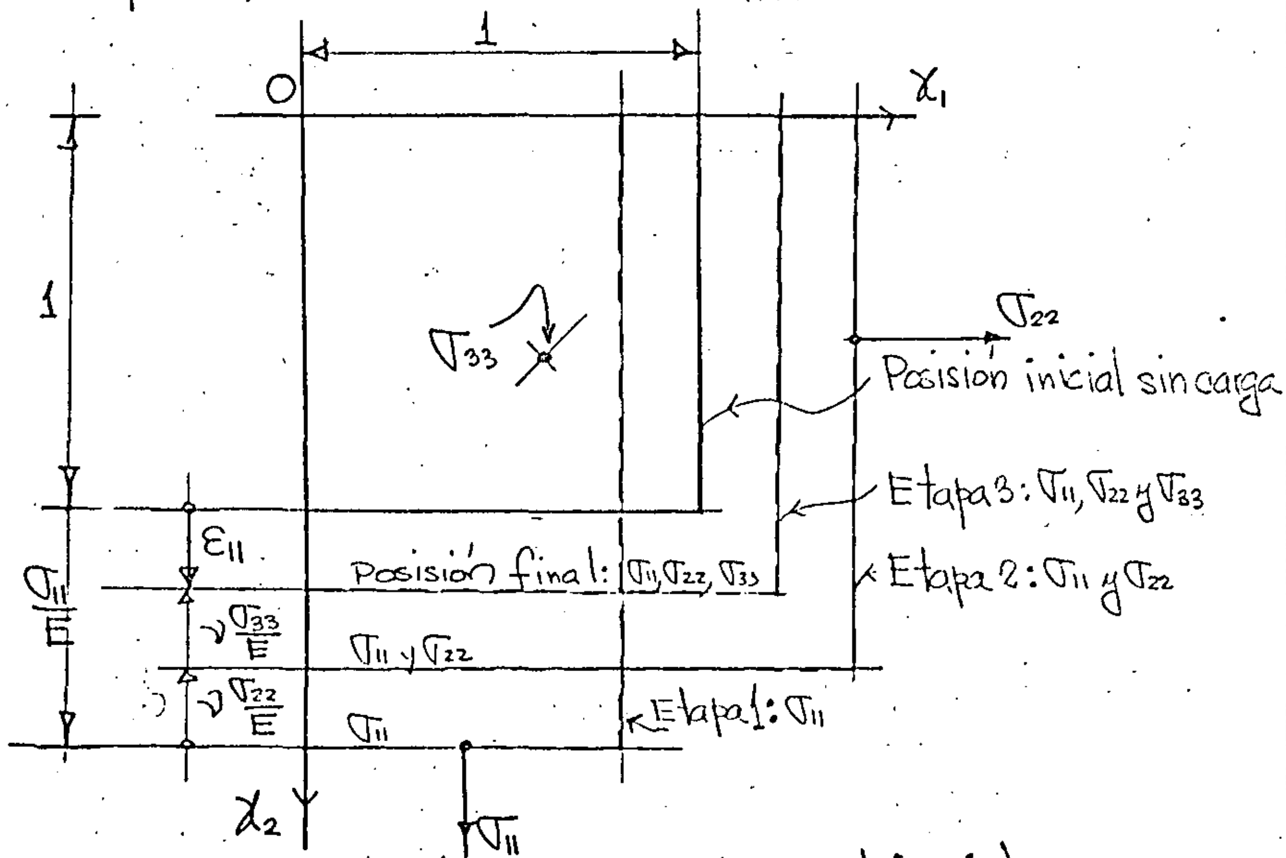


Fig. 8.2 Ley de Hooke en condiciones triaxiales

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= \frac{1}{E}\sigma_{11} - \frac{\nu}{E}\sigma_{22} - \frac{\nu}{E}\sigma_{33} \\
\varepsilon_{22} &= -\frac{\nu}{E}\sigma_{11} + \frac{1}{E}\sigma_{22} - \frac{\nu}{E}\sigma_{33} \\
\varepsilon_{33} &= -\frac{\nu}{E}\sigma_{11} - \frac{\nu}{E}\sigma_{22} + \frac{1}{E}\sigma_{33} \\
\gamma_{12} &= \frac{1}{G}\sigma_{12} \\
\gamma_{23} &= \frac{1}{G}\sigma_{23} \\
\gamma_{31} &= \frac{1}{G}\sigma_{31}
\end{aligned}
\qquad (8.1)
$$

(8.1) representa la ley de Hooke en condiciones triaxiales ó más correctamente las ecuaciones constitutivas para un sólido elástico homogeneo e isotrópico. Las constantes E, G y ν son experimentales y estan relacionadas por

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{8.2}$$

substituyendo (8.2) en (8.1) y expresando el resultado matricialmente se obtiene (considerando $\varepsilon_{ij} = \frac{\gamma_{ij}}{2}$ para $i \neq j$)

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{Bmatrix} \tag{8.3}$$

o

$$\{\varepsilon\} = [C]\{\sigma\} \tag{8.4}$$

despejando $\{\sigma\}$ de (8.4) se obtiene

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \end{Bmatrix} \tag{8.5}$$

o sea

$$\{\sigma\} = [C]^{-1}\{\varepsilon\} \tag{8.6}$$

Se observa en las ecuaciones anteriores que solo interviene E y ν.

En un medio elástico lineal anisotrópico en las ecuaciones (8.3), aceptando el principio de superposición se expresan

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{Bmatrix} \qquad (8.7)$$

Las ecuaciones constitutivas (8.7) tienen 36 constantes. Sin embargo a través de consideraciones energéticas* se demuestra que el número de constantes es 21 y que $C_{ij} = C_{ji}$ para $i \neq j$, son simétricas respecto a la diagonal principal de (8.7). Todas las constantes C_{ij} deben determinarse experimentalmente. Se supone el material homogéneo, Ejemplos de estos materiales son: concreto, concreto reforzado, madera, plástico reforzado con filamentos, fierro fundido, etc.. Cuando se tienen tres direcciones ortogonales anisotrópicas el material se dice que es ortotrópico, y para estos materiales el número de constantes se reduce solo a nueve constantes independientes.

Haciendo $\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ y considerando (8.2) las

---

* Sokolnikoff, I.S., "Mathematical Theory of Elasticity", McGraw-Hill, 1956, p.61.

ecuaciones constitutivas (8.3) con notación índice se escriben*

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2G\varepsilon_{ij} \quad (i,j,k = 1,2,3) \tag{8.8}$$

donde, $\delta_{ij} = 1$ para $i=j$, y $\delta_{ij}=0$ para $i \neq j$, y $\varepsilon_{kk} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} \equiv e$. Desarrollando (8.8) se tiene

$$\begin{aligned}
\text{para } i=1, j=1, \quad & \sigma_{11} = \lambda e + 2G\varepsilon_{11} \equiv \lambda e + 2G\varepsilon_x = \sigma_x \\
i=2, j=2, \quad & \sigma_{22} = \lambda e + 2G\varepsilon_{22} \equiv \lambda e + 2G\varepsilon_y = \sigma_y \\
i=3, j=3, \quad & \sigma_{33} = \lambda e + 2G\varepsilon_{33} \equiv \lambda e + 2G\varepsilon_z = \sigma_z \\
i=1, j=2, \quad & \sigma_{12} = 2G\varepsilon_{12} \equiv 2G\varepsilon_{xy} = G\gamma_{xy} = \tau_{xy} \\
i=2, j=3, \quad & \sigma_{23} = 2G\varepsilon_{23} \equiv 2G\varepsilon_{yz} = G\gamma_{yz} = \tau_{yz} \\
i=3, j=1, \quad & \sigma_{31} = 2G\varepsilon_{31} \equiv 2G\varepsilon_{zx} = G\gamma_{zx} = \tau_{zx}
\end{aligned} \tag{8.9}$$

Si en el sólido existe un incremento de temperatura ΔT, siendo α el coeficiente de expansión térmica las ecuaciones (8.3) quedan

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{Bmatrix} + \alpha \Delta T \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{8.10}$$

---

*Green, A.E., and W. Zerna: "Theoretical Elasticity", Oxford University Press, Fair Lawn, N.J. . 1970.

9. Elasticidad bidimensional.

Utilizando la notación de Timoshenko y Von Karmán ó la notación de ingeniería las ecuaciones de equilibrio en un elemento dx dy se reducen a

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0 \qquad (9.1)$$
$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0$$

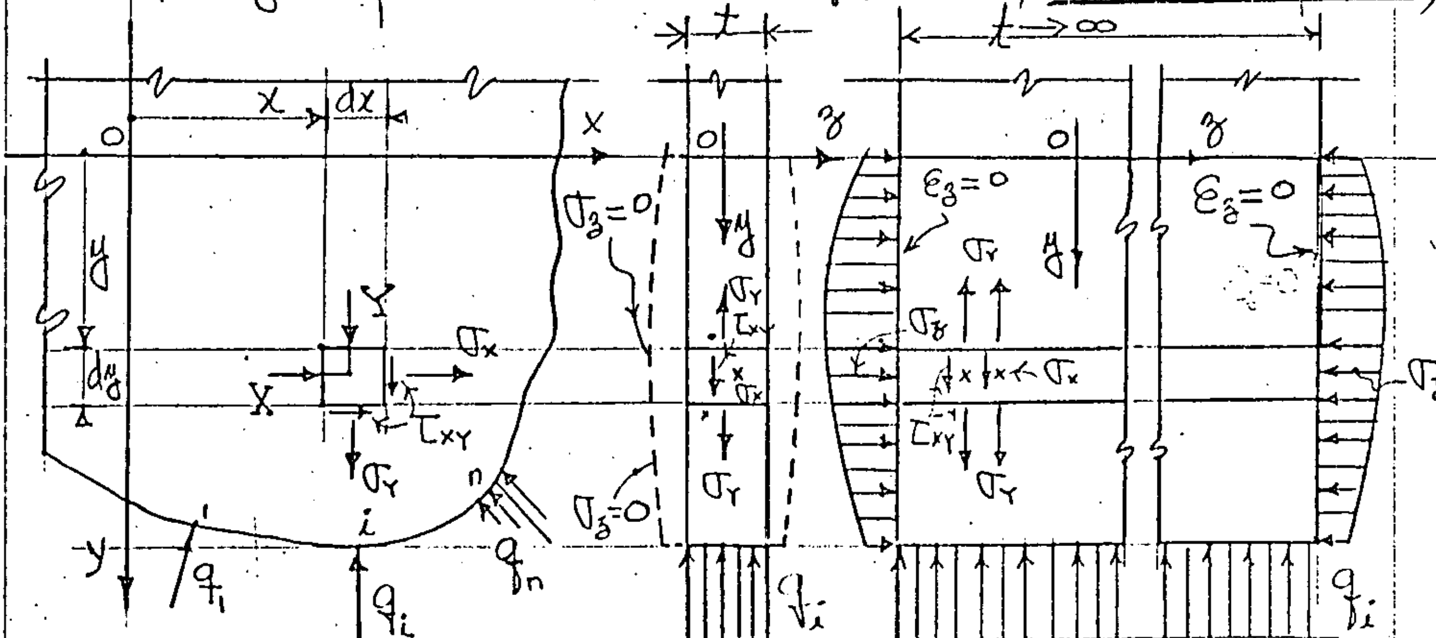
(9.1) matricialmente queda

$$\left\lfloor \frac{\partial}{\partial x} \; \frac{\partial}{\partial y} \right\rfloor \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix} + \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} = 0 \qquad (9.2)$$

Y las ecuaciones de compatibilidad (7.7) se reducen a

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \qquad (9.3)$$

En la Fig. 6.1 se muestran los dos estados o condiciones de esfuerzos que en este caso se tienen, esfuerzos planos;



a) Esfuerzos {σ}, fuerzas de cuerpo {X} y de superficie {q_i} b) Esfuerzos Planos c) Deformación Plana

$\boxed{\sigma_z = 0,\ \varepsilon_z \neq 0}$ $\boxed{\sigma_z \neq 0,\ \varepsilon_z = 0}$

Fig. 6.1. Estados o condiciones de esfuerzos bidimensionales.

caso de una placa de espesor finito t, sin problemas de pandeo que se deforma bajo la acción de $\{X\}$ y $\{q\}$ según la línea punteada indicada en la Fig. 6.1 b, las ecuaciones (8.3), bajo la condición de $\sigma_{33} \equiv \sigma_z = 0$ se reducen a

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_Y \\ \tau_{xY} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_Y \\ \gamma_{xY} \end{Bmatrix} \qquad (9.4)$$

σ_x, σ_Y y τ_{xY} son el promedio sobre el espesor pequeño t y son independientes de z. Las componentes γ_{Yz} y γ_{zx} se anulan en las superficies, mientras que la componente ε_z es dada por

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_Y) = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_Y) \qquad (9.5)$$

Problemas de cuerpos largos en la dirección longitudinal z cuya geometría y cargas no varían en z se consideran problemas de <u>deformación plana</u> en la Fig. 6.2 se muestran como ejemplos un muro de presa, y una zapata corrida larga,

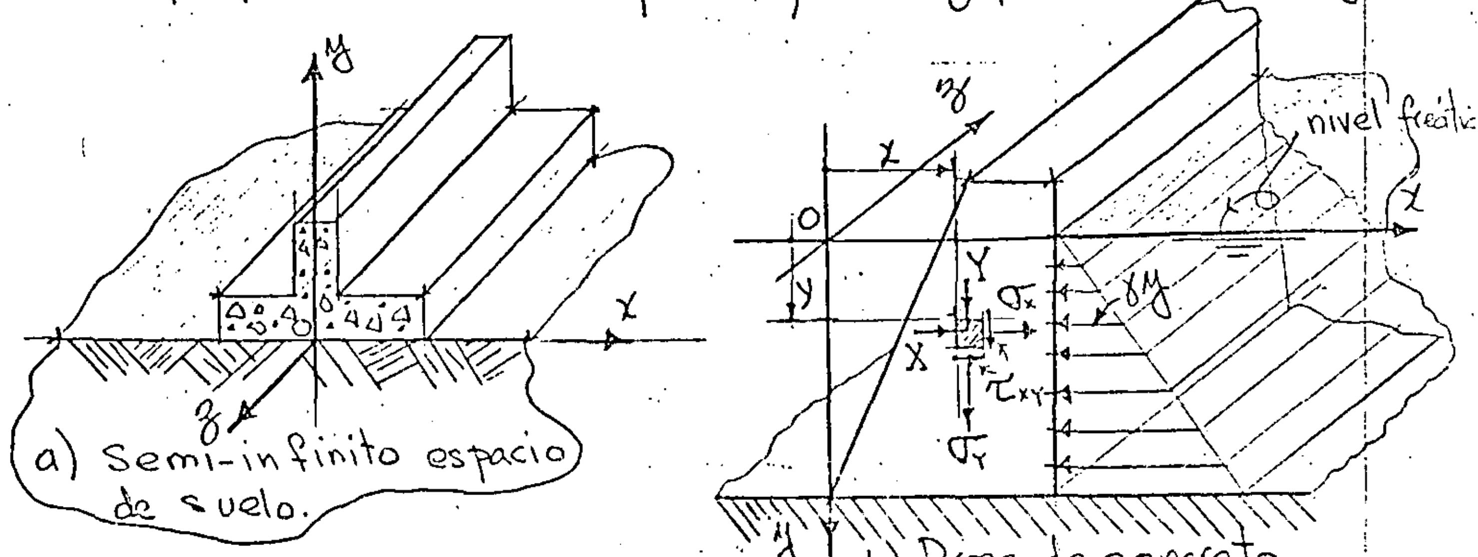


Fig. 6.2. Ejemplos de problemas de deformación plana.

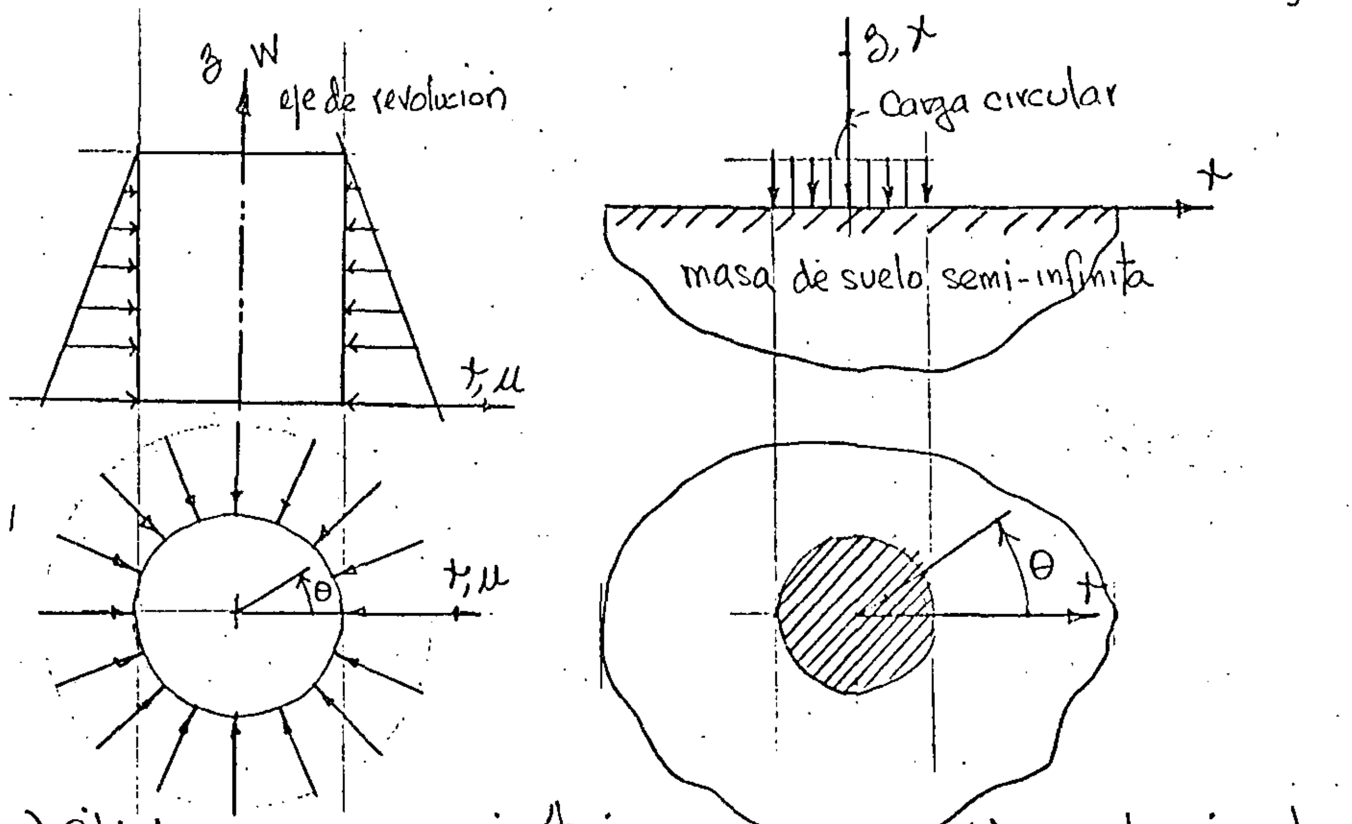
en estos casos el desplazamiento $u_3 \equiv W = 0$ por lo tanto $\varepsilon_{33} \equiv \varepsilon_z = 0$, $\gamma_{yz} = 2\varepsilon_{23} = 0$, y $\gamma_{zx} = 2\varepsilon_{31} = 0$. Las ecuaciones (8.3) se reducen a

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \qquad (9.6)$$

y el esfuerzo σ_z se expresa en términos de σ_x y σ_y como

$$\sigma_z = -\nu(\sigma_x + \sigma_y) \qquad (9.7)$$

Muchos problemas de ingeniería involucran sólidos de revolución (sólidos axisimétricos) sujetos a carga de revolución ó axialmente simétrica, por ejemplo un cilindro circular bajo presión externa uniforme, zapata circular en una masa de suelo semi-infinita como se muestran en la Fig. 6.3



a) Cilindro con carga axisimétrica b) Zapata circular

Fig. 6.3 Problemas axisimétricos.

Debido al eje axisimétrico respecto a geometría y cargas, las componentes del esfuerzo son independiente del ángulo θ; por lo tanto todas las derivadas respecto a θ se anulan y las componentes v, $\gamma_{r\theta}$, $\gamma_{\theta z}$, $\tau_{r\theta}$, y $\tau_{\theta z}$ son cero. Las componentes de esfuerzo diferente de cero son σ_r, σ_θ, σ_z y τ_{rz}. Las relaciones deformación desplazamiento son, para las deformaciones diferente de cero

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \tag{9.8}$$

y la relación constitutiva es

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_z \\ \sigma_\theta \\ \tau_{rz} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 \\ & 1-\nu & \nu & 0 \\ (\text{simétrica}) & & 1-\nu & 0 \\ & & & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{rz} \end{Bmatrix} \tag{9.9}$$

despejando de (9.4) $\{\varepsilon\}$, substituyéndolo en la ecuación de compatibilidad (9.3), y eliminando por medio de (9.1) a $\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y}$ se obtiene

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x + \sigma_y) = -(1+\nu)\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right) \tag{9.10}$$

La ecuación (9.10) junto con las de equilibrio (9.1) son suficientes para la solución del <u>problema de esfuerzos planos $\sigma_z = 0$</u>, de ellas se obtiene $\{\sigma\}^T = \lfloor \sigma_x \; \sigma_y \; \tau_{xy} \rfloor$.

Similarmente despejando $\{\varepsilon\}$ de (9.6) y substituyéndolo en la ecuación de compatibilidad (9.3), y eliminando por medio de las ecuaciones de equilibrio (9.1) a $\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y}$ se obtiene

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x+\sigma_y)=-\frac{1}{1-\nu}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right) \qquad (9.11)$$

La ecuación (9.11) junto con las de equilibrio (9.1) son suficientes para la solución del problema de <u>deformación plana</u> ($\varepsilon_z=0$), con fuerzas de cuerpo diferente de cero, de ellas se obtiene $\{\sigma\}^T=\lfloor \sigma_x \; \sigma_y \; \tau_{xy}\rfloor$.

Cuando las fuerzas de cuerpo X es solo función de y, constante ó cero, y cuando la fuerza de cuerpo Y es solo función de x, constante ó cero, las ecuaciones (9.10) y (9.11) para esfuerzos y deformación plana respectivamente, se reducen a una sola que es

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x+\sigma_y)=0 \qquad (9.12)$$

Es importante observar que en este caso, en las ecuaciones de equilibrio (9.1), y la de compatibilidad (9.12), modificada por las ecuaciones constitutivas, no intervienen las constantes elásticas del sólido E y ν. Conclusión de fundamental importancia para el uso de modelos transparentes en Fotoelasticidad. También se concluye en este caso que en ambos estados; de efuerzos y deformación plano los esfuerzos $\{\sigma\}$ son iguales, solamente las deformaciones $\{\varepsilon\}$ y los desplazamientos $\{u\}$ son diferentes. F

Para la solución del problema anterior cuando $\{X\}=0$ Airy, G. B. (Brit. Assoc. Advan. Sci. Rept., 1862) introduce una función $\phi(x,y)$, llamada función de esfuerzos, en forma tal que

$$\sigma_x=\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2},\ \sigma_Y=\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2},\ \tau_{xY}=-\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} \qquad (9.13)$$

(9.13) satisface las ecuaciones de equilibrio (9.1) cuando las fuerzas de cuerpo $\{X\}$ son cero, y substituyéndolas en (9.12) se obtiene

$$\nabla^2\nabla^2\phi=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right)=0 \qquad (9.14)$$

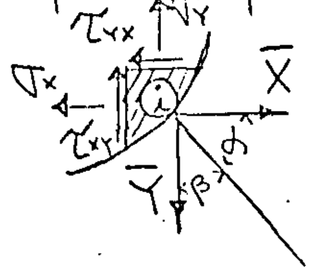
desarrollando el operador bi-laplaciano se obtiene

$$\nabla^4\phi=\frac{\partial^4\phi}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4\phi}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4\phi}{\partial y^4}=0 \qquad (9.15)$$

La ecuación (9.14) se llama bi-armónica o bi-laplaciana y la forma (9.15) gradiente cuarto de ϕ.

Por lo demostado anteriormente el problema de solución de esfuerzos en medios elásticos lineales homogeneos e isotrópicos bidimensionales se reduce a una solución de (9.15) que satisfaga las condiciones en la frontera bidimensionales que para el punto i son

$$\bar{X}_i=\sigma_x n_x+\tau_{xY}n_Y$$
$$\bar{Y}_i=\tau_{xY}n_x+\sigma_Y n_Y$$



$n_x=\cos\alpha$
$n_Y=\cos\beta$

matricial mente:

$$\begin{bmatrix}\sigma_x & \tau_{xY}\\ \tau_{Yx} & \sigma_Y\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}n_x\\ n_Y\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\bar{X}\\ \bar{Y}\end{Bmatrix} \qquad (9.10)$$

Del Teorema de la unicidad* la solución mencionada es única.

* Timoshenko, S. and J.N. Goodier, "Theory of Elasticity", McGraw Hill, 1966.

Si las fuerzas de cuerpo existen, generalmente es posible relacionarlas mediante una función potencial $V(x,y)$ en forma tal que

$$X=\frac{\partial V}{\partial x}\quad,\quad Y=\frac{\partial V}{\partial y} \tag{9.11}$$

substituyendo (9.11) en las ecuaciones de equilibrio (9.1) se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}(\sigma_x - V) + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0\\ \frac{\partial}{\partial y}(\sigma_y - V) + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} &= 0\end{aligned} \tag{9.12}$$

en este caso la función de esfuerzos es

$$\sigma_x - V = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}\quad,\quad \sigma_y - V = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\quad,\quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2\phi}{\partial x \partial y} \tag{9.13}$$

por supuesto (9.13) satisface las ecuaciones de equilibrio (9.1), y substituitoyéndola en la ecuación (9.10) la reduce a

$$\nabla^4\phi = -(1+\nu)\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right) \equiv -(1+\nu)\nabla^2 V \tag{9.14}$$

(9.14) nos resuelve el problema de esfuerzos planos con fuerzas de cuerpo relacionadas por (9.11).

Substituyéndo (9.13) en (9.11) se obtiene

$$\nabla^4\phi = -\frac{1}{1+\nu}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right) \equiv -\frac{1}{1+\nu}\nabla^2 V \tag{9.15}$$

10. Ecuaciones de equilibrio en términos de los desplazamientos $\{u\}^T = \lfloor u_1\ u_2\ u_3 \rfloor \equiv \lfloor u\ v\ w \rfloor$.

Uno de los métodos de solución en problemas de elasticidad lineal, homogenea e isotrópica consiste en eliminar las componentes de esfuerzos $\{\sigma\}$ de las ecuaciones de equilibrio (5.2) expresando las ecuaciones constitutivas (8.5) en términos de los desplazamientos (7.2), (7.3) y (7.4). Por lo tanto substituyendo (7.2), (7.3) y (7.4) en (8.9) se obtiene

$$
\begin{aligned}
\sigma_x \equiv \sigma_{11} &= \lambda e + 2G\frac{\partial u}{\partial x} \\
\sigma_y \equiv \sigma_{22} &= \lambda e + 2G\frac{\partial v}{\partial y} \\
\sigma_z \equiv \sigma_{33} &= \lambda e + 2G\frac{\partial w}{\partial z} \\
\tau_{xy} \equiv \sigma_{12} &= G\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \\
\tau_{yz} \equiv \sigma_{23} &= G\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\
\tau_{zx} = \sigma_{31} &= G\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)
\end{aligned}
\tag{10.1}
$$

donde $e = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} \equiv \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$ (10.2)

Substituyendo (10.1) en las ecuaciones de equilibrio (5.2) se obtiene

$$
(\lambda+G)\begin{Bmatrix} \frac{\partial e}{\partial x} \\ \frac{\partial e}{\partial y} \\ \frac{\partial e}{\partial z} \end{Bmatrix} + G\nabla^2 \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} = 0 \tag{10.3}
$$

donde en este caso el operador diferencial $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

En (10.3) cuando las fuerzas de cuerpo $\{X\}$ son cero (10.3) queda

$$
(\lambda+G)\begin{Bmatrix} \frac{\partial e}{\partial x} \\ \frac{\partial e}{\partial y} \\ \frac{\partial e}{\partial z} \end{Bmatrix} + G\nabla^2 \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = 0 \tag{10.4}
$$

En las ecuaciones (10.4), diferenciando la primera respecto a x, la segunda respecto a y, y la tercera respecto a z, y después sumándolas se obtiene

$$(\lambda + 2G)\nabla^2 e = 0 \qquad (10.5)$$

(10.5) significa que la expansión volumétrica unitaria $e = e_x + e_y + e_z$ satisface la ecuación diferencial

$$\nabla^2 e = \frac{\partial^2 e}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e}{\partial z^2} = 0 \qquad (10.6)$$

En la ecuación (10.3) las fuerzas de cuerpo son

$$\begin{aligned} X &= \rho(f_x - a_x) \\ Y &= \rho(f_y - a_y) \\ Z &= \rho(f_z - a_z) \end{aligned} \qquad (10.7)$$

donde f_x, f_y y f_z son las fuerzas por unidad de masa, a_x, a_y y a_z las componentes de la aceleración, y ρ es la densidad ó masa específica. Si en las ecuaciones (10.3) la primera la multiplicamos por el vector unitario $\bar{i}$, la segunda por el vector unitario $\bar{j}$, y la tercera por el vector unitario $\bar{k}$, y las sumamos entre sí se obtiene la expresión vectorial de las ecuaciones (10.5) como

$$(\lambda + G)\,\text{grad div}\,\bar{s} + G\nabla^2\bar{s} + \rho(\bar{f} - \bar{a}) = 0 \qquad (10.8)$$

en donde

$$\begin{aligned} \bar{a} &= \bar{i}a_x + \bar{j}a_y + \bar{k}a_z \\ \bar{f} &= \bar{i}f_x + \bar{j}f_y + \bar{k}f_z \\ \bar{s} &= \bar{i}u + \bar{j}v + \bar{k}w \\ \text{div}\, s &= e = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \\ \text{grad div}\,\bar{s} &= \bar{i}\frac{\partial e}{\partial x} + \bar{j}\frac{\partial e}{\partial y} + \bar{k}\frac{\partial e}{\partial z} \end{aligned} \qquad (10.9)$$

En la Fig. 2 se tiene lo siguiente
o'n es normal al plano ABC, formando angulos α, β y γ con respecto a los ejes coordenados x_1, x_2, y x_3 respectivamente, la distancia oo' es igual a r las coordenadas de o' son x_1, x_2, x_3 por lo tanto

$$n_1 = \cos\alpha = \frac{x_1}{r},\ n_2 = \cos\beta = \frac{x_2}{r},\ n_3 = \cos\gamma = \frac{x_3}{r} \quad (2)$$

donde $\{n_i\} = [n_1\ n_2\ n_3]^T$ es el vector columna de cosenos directores de la normal al plano ABC (o'n y oo'). Si el area ABC es considerada como la unidad, las proyecciones

$$\begin{aligned} n_1 &= \text{area OBC} \\ n_2 &= \text{area OAC} \\ n_3 &= \text{area OAB} \end{aligned} \quad (2)$$

$\bar{S}$ = Esfuerzo resultante actuando sobre el plano ABC
$\{\tilde{X}_i\} = [\tilde{X}_1\ \tilde{X}_2\ \tilde{X}_3]^T$; proyecciones de $\bar{S}$ sobre x_i

$\tilde{\sigma}_n$ = Proyección de $\bar{S}$ sobre la normal al plano ABC
$\tilde{\tau}_n$ = Proyección de $\bar{S}$ sobre el plano ABC.
Del equilibrio del elemento OABC se obtiene

$$X_1 = \sigma_{11} n_1 + \sigma_{21} n_2 + \sigma_{31} n_3$$
$$X_2 = \sigma_{12} n_1 + \sigma_{22} n_2 + \sigma_{32} n_3 \qquad (3)$$
$$X_3 = \sigma_{13} n_1 + \sigma_{23} n_2 + \sigma_{33} n_3$$

expresando (3) matricialmente se obtiene

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} \qquad (4)$$

Si no existen momentos de cuerpo, $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ para $i \neq j$ y $[\sigma_{ij}] = [\sigma_{ij}]^T$ por lo que (4) puede escribirse

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} \qquad (5)$$

ó
$$\{X_i\} = [\sigma_{ij}]\{n_i\} \qquad (6)$$

El esfuerzo normal al plano ABC es

$$\sigma_n = X_1 n_1 + X_2 n_2 + X_3 n_3 \qquad (7)$$

ó
$$\sigma_n = \{X_i\}^T \{n_i\} \qquad (8)$$

Substituyendo (5) en (7) se obtiene

$$\sigma_n = \sigma_{11} n_1^2 + \sigma_{22} n_2^2 + \sigma_{33} n_3^2 + 2(\sigma_{12} n_1 n_2 + \sigma_{23} n_2 n_3 + \sigma_{31} n_3 n_1) \qquad (9)$$

ó matricialmente de (6) y (8)

$$\sigma_n = \lfloor n_i \rfloor [\sigma_{ij}] \{n_i\} \qquad (10)$$

$$S^2 = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 \tag{11}$$

$$\sigma_n^2 + \tau_n^2 = S^2 \tag{12}$$

Esfuerzos principales. Esfuerzo principal es un valor particular del esfuerzo normal tal que $\tau_n = 0$ por lo tanto

$$\begin{aligned} X_1 &= \sigma_n n_1 \\ X_2 &= \sigma_n n_2 \\ X_3 &= \sigma_n n_3 \end{aligned} \tag{13}$$

De (5) y (13) se obtiene

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{n_1} n_1 \\ \sigma_{n_2} n_2 \\ \sigma_{n_3} n_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} \tag{14}$$

De donde

$$\begin{bmatrix} (\sigma_n - \sigma_{11}) & -\sigma_{12} & -\sigma_{13} \\ -\sigma_{21} & (\sigma_n - \sigma_{22}) & -\sigma_{23} \\ -\sigma_{31} & -\sigma_{32} & (\sigma_n - \sigma_{33}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} = 0 \tag{15}$$

puesto que $\{n_i\} \neq 0$, entonces el determinante

$$\begin{vmatrix} (\sigma_n - \sigma_{11}) & -\sigma_{12} & -\sigma_{13} \\ -\sigma_{21} & (\sigma_n - \sigma_{22}) & -\sigma_{23} \\ -\sigma_{31} & -\sigma_{32} & \sigma_n - \sigma_{33} \end{vmatrix} = 0 \tag{16}$$

De (16) se obtiene

$$\sigma_n^3-(\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33})\sigma_n^2+(\sigma_{11}\sigma_{22}+\sigma_{22}\sigma_{33}+\sigma_{33}\sigma_{11}-\sigma_{12}^2-\sigma_{23}^2-\sigma_{31}^2)\sigma_n$$

$$-(\sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33}+2\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{31}-\sigma_{11}\sigma_{23}^2-\sigma_{22}\sigma_{31}^2-\sigma_{33}\sigma_{12}^2)=0 \quad (17)$$

las tres raices de la ecuación (17) nos determinan los valores de los esfuerzos principales σ_1, σ_2 y σ_3 cuyos coeficientes nos representan los invariantes de esfuerzos, dependen de σ_1, σ_2 y σ_3 independientes del sistema de ejes coordenados

$$I_1=\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}\equiv\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3$$
$$I_2=\sigma_{11}\sigma_{22}+\sigma_{22}\sigma_{33}+\sigma_{33}\sigma_{11}-\sigma_{12}^2-\sigma_{23}^2-\sigma_{31}^2\equiv\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1 \quad (18)$$
$$I_3=\sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33}+2\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{31}-\sigma_{11}\sigma_{23}^2-\sigma_{22}\sigma_{13}^2-\sigma_{33}\sigma_{12}^2\equiv\sigma_1\sigma_2\sigma_3$$

donde I_1, I_2 e I_3 son los invariantes de esfuerzos, otras expresiones de invariantes pueden formarse de (18) por ejemplo (19)

$$2I_1-6I_2=(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2+(\sigma_{22}-\sigma_{33})^2+(\sigma_{33}-\sigma_{11})^2+6(\sigma_{12}^2+\sigma_{23}^2+\sigma_{31}^2)$$

(19) se usa en la expresión de la energía de deformación, su uso se discutirá posteriormente

Despues de diagonalizar el tensor de esfuerzo $[\sigma_{ij}]$, el elemento de la Fig. 2 se muestra en la Fig. 3, y las ecuaciones de equilibrio (5) quedan:

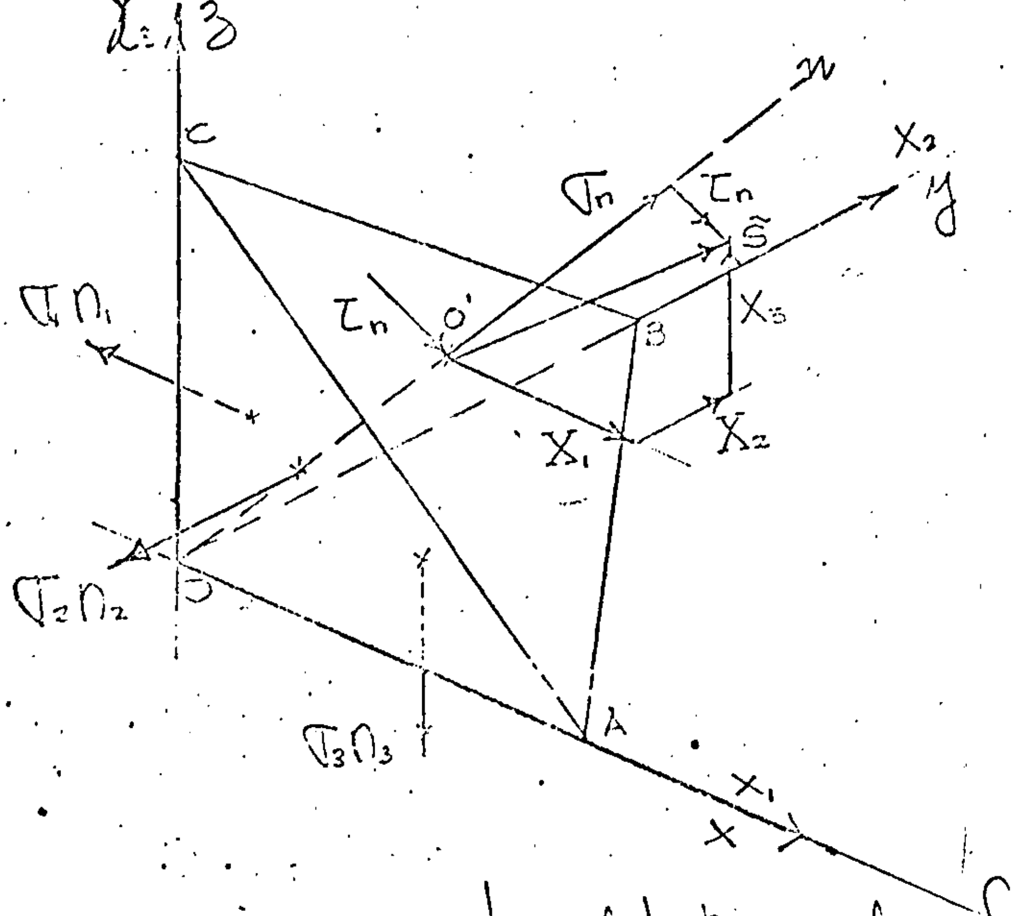


Fig. 3 Componentes del tensor de esfuerzo diagonalizado

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} \tag{20}$$

En (20) las componentes $\{X_i\}$, $\{n_i\}$, $\tilde{S}$, $\tilde{\sigma}_n$, $\bar{\tau}_n$ son diferentes a las (5) que se muestran en Fig. 2.
De geometría se conoce que

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \tag{21}$$

Substituyendo (20) en (21) se obtiene la ecuación

$$\frac{X_1^2}{\sigma_1^2}+\frac{X_2^2}{\sigma_2^2}+\frac{X_3^2}{\sigma_3^2}=1 \qquad (22)$$

la cual representa una superficie elipsoidal en el espacio de esfuerzos σ_i, algunos autores lo denominan elipsoide de Lamé, en la Fig. 4 se muestra su perspectiva isométrica. Para el conjunto

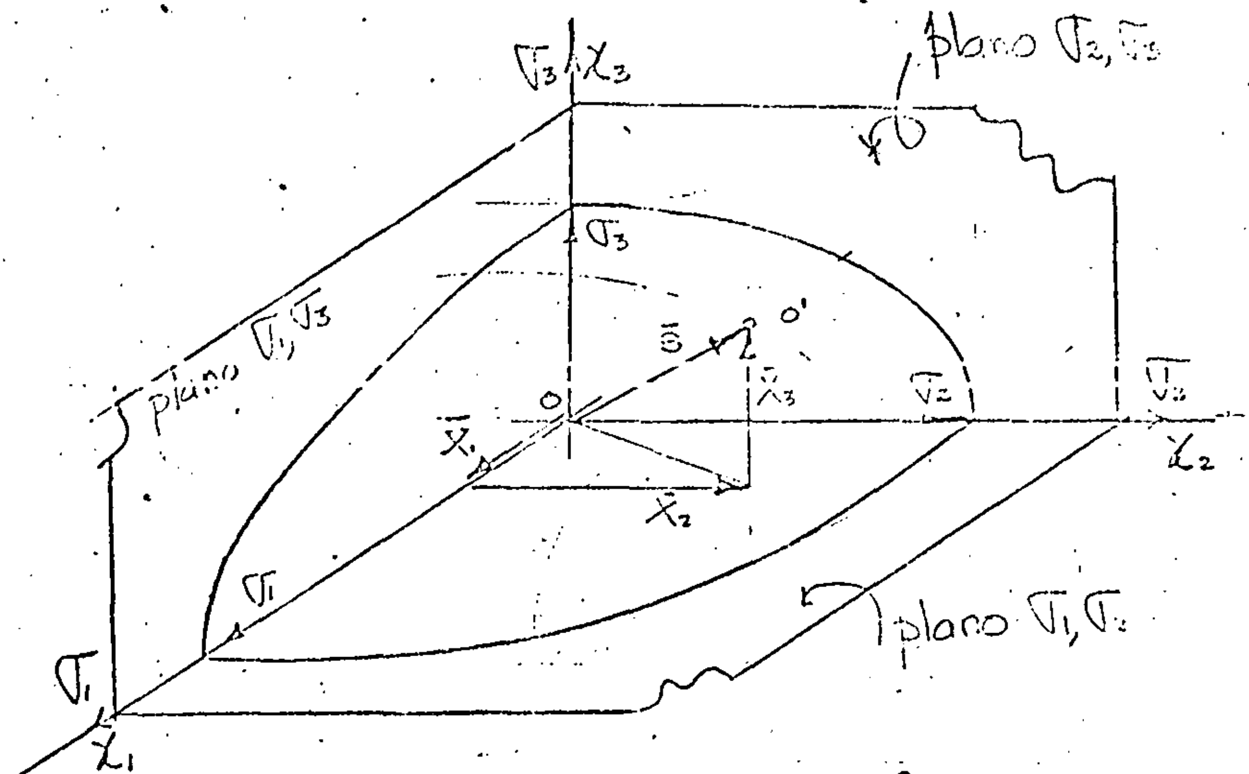


Fig. 4 Elipsoide de Lamé referido al espacio de esfuerzos σ_i, (un octagono).

de planos con cosenos directores $\{n_i\}$ a través de o Fig. 2, le corresponde el conjunto de componentes $\{X_i\}$ los cuales junto con los esfuerzos principales σ_1, σ_2 y σ_3 forman la superficie elipsoidal de la Fig. 4.

De (20), si $\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3=\sigma$, la superficie es esférica. Si $\sigma_1\neq 0$, $\sigma_2\neq 0$ y $\sigma_3=0$ la superficie es cilíndrica de sección elíptica con eje contenido en el eje σ_3. Si $\sigma_1=\sigma_2$ y $\sigma_3=0$ la superficie es cilíndrica de sección circular con eje contenido en el eje σ_3, Si $\sigma_1\neq 0$ y $\sigma_2=\sigma_3=0$ la superficie son dos planos paralelos al plano σ_2,σ_3 a continuación se indican los casos particulares mencionados

$$[\sigma_{ij}]=\begin{bmatrix}\sigma & 0 & 0\\ 0 & \sigma & 0\\ 0 & 0 & \sigma\end{bmatrix} \quad (23)$$

$$X_1^2+X_2^2+X_3^2=\sigma^2 \quad (24)$$

$\sigma\equiv S$

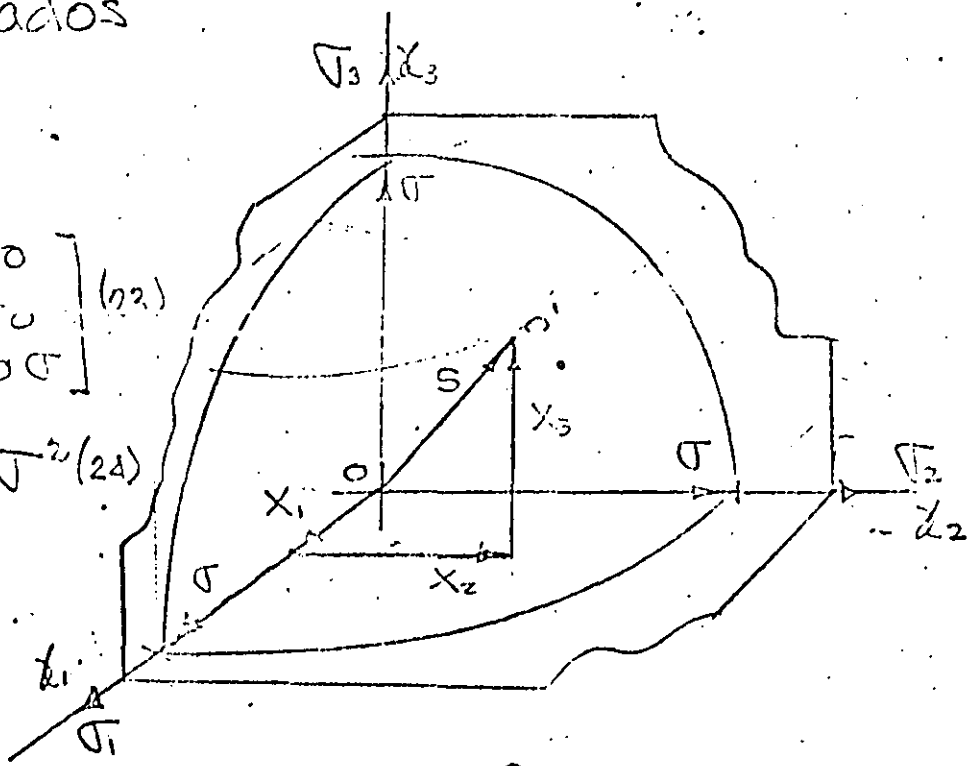


Fig. 5 Superficie esférica, equivalente a una Tensión o compresión uniforme o hidrostática

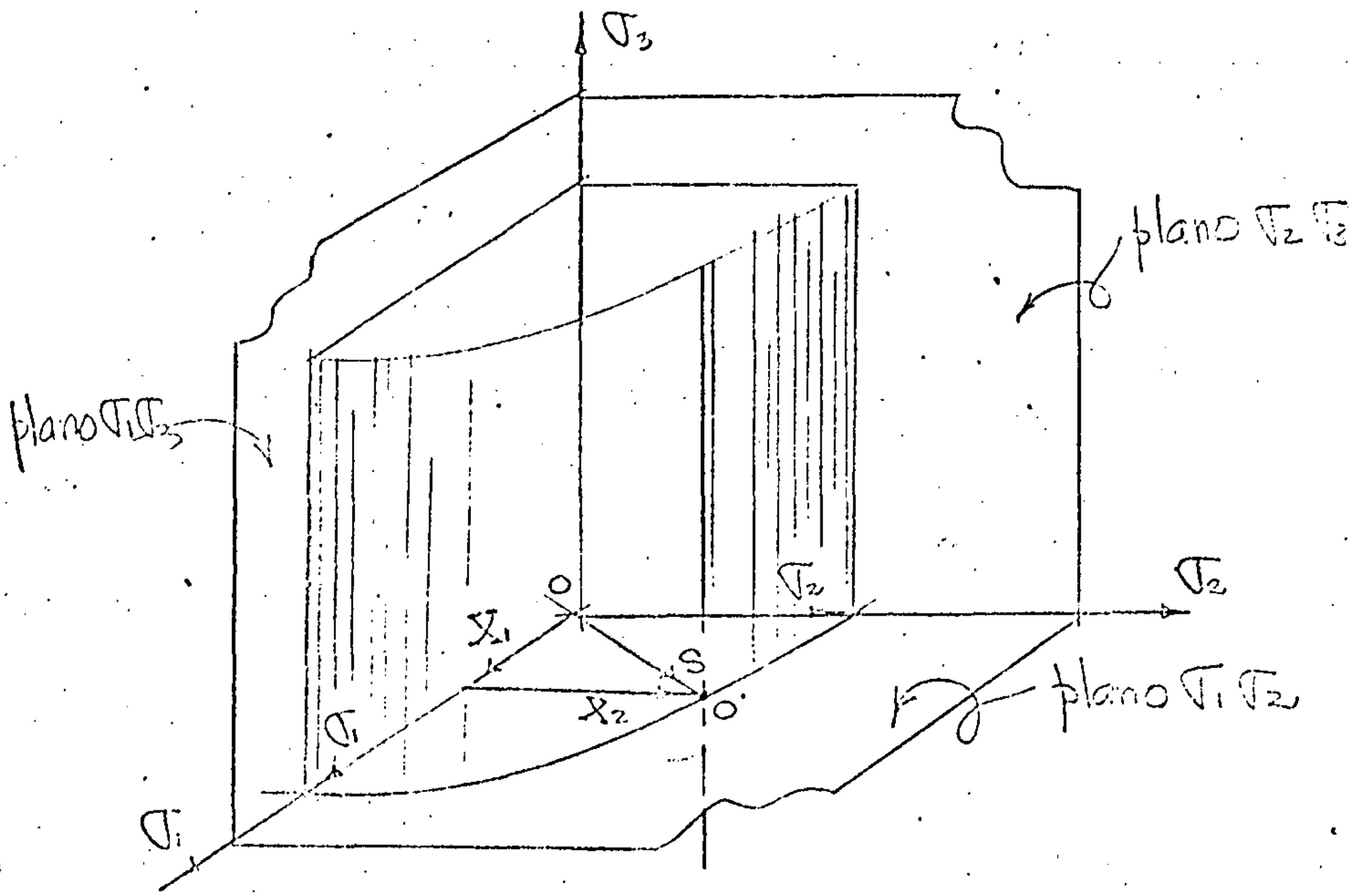


Fig. 6 Superficie cilíndrica de sección elíptica directrices paralelas al eje $O\sigma_3$.

Componentes del tensor de esfuerzos: $[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (65)

∴ Ecuación de la superficie: $\dfrac{X_1^2}{\sigma_1^2} + \dfrac{X_2^2}{\sigma_2^2} = 1$ (66)

Como caso particular de de (25) si $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ se tiene un cilindro con componentes del tensor de esfuerzos $[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (67)

y ecuación de la superficie (68)

$$X_1^2 + X_2^2 = \sigma^2$$

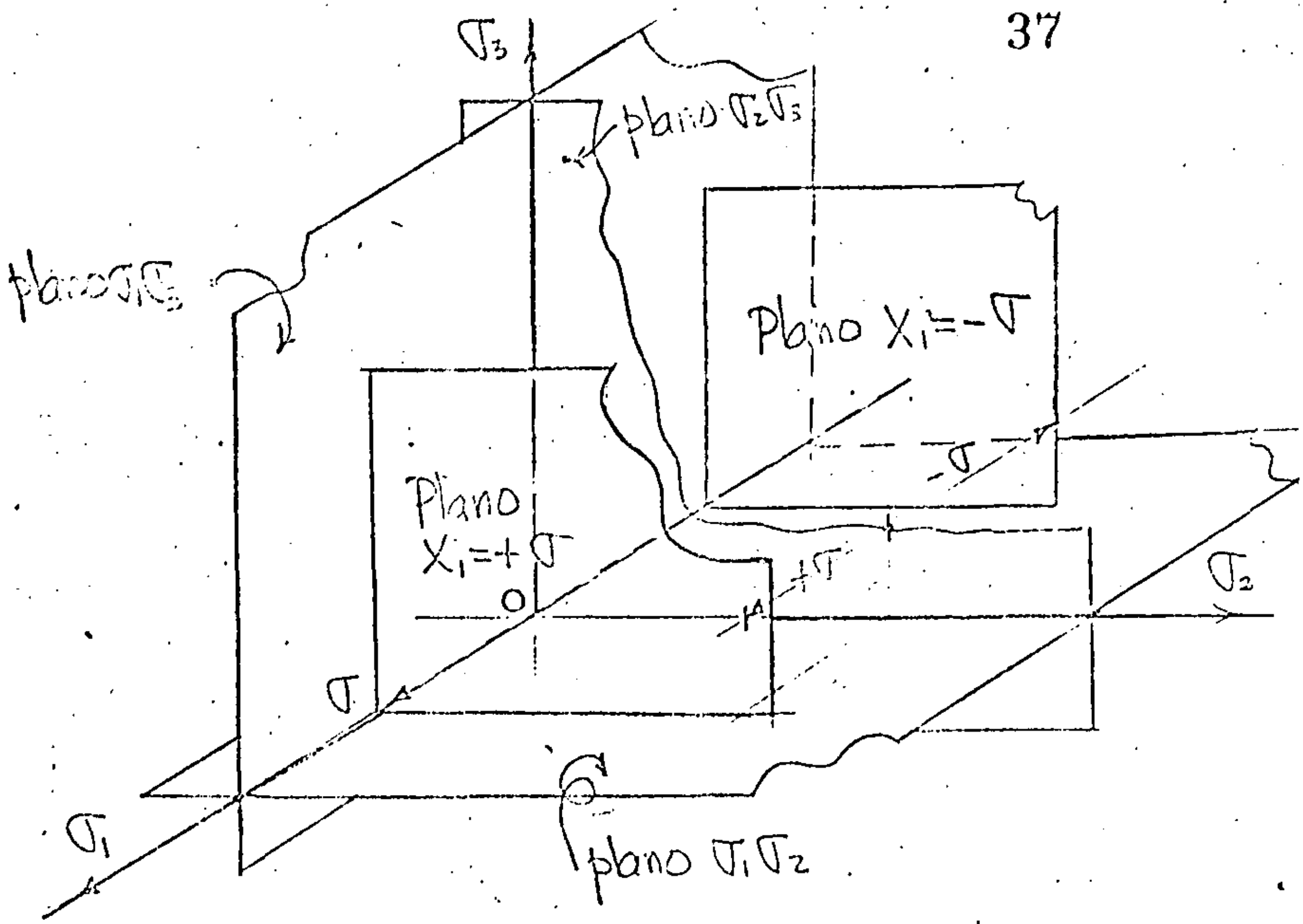


Fig. 6 Superficies planas paralelas al plano $\sigma_2\sigma_3$

Componentes del tensor de esfuerzos:

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (29)$$

Ecuación de la Superficie:

$$X_1 = \pm \sigma \qquad (30)$$

La ecuación (21) en el espacio de cosenos directores nos representa una esfera de radio unitario como se muestra en la Fig. 7

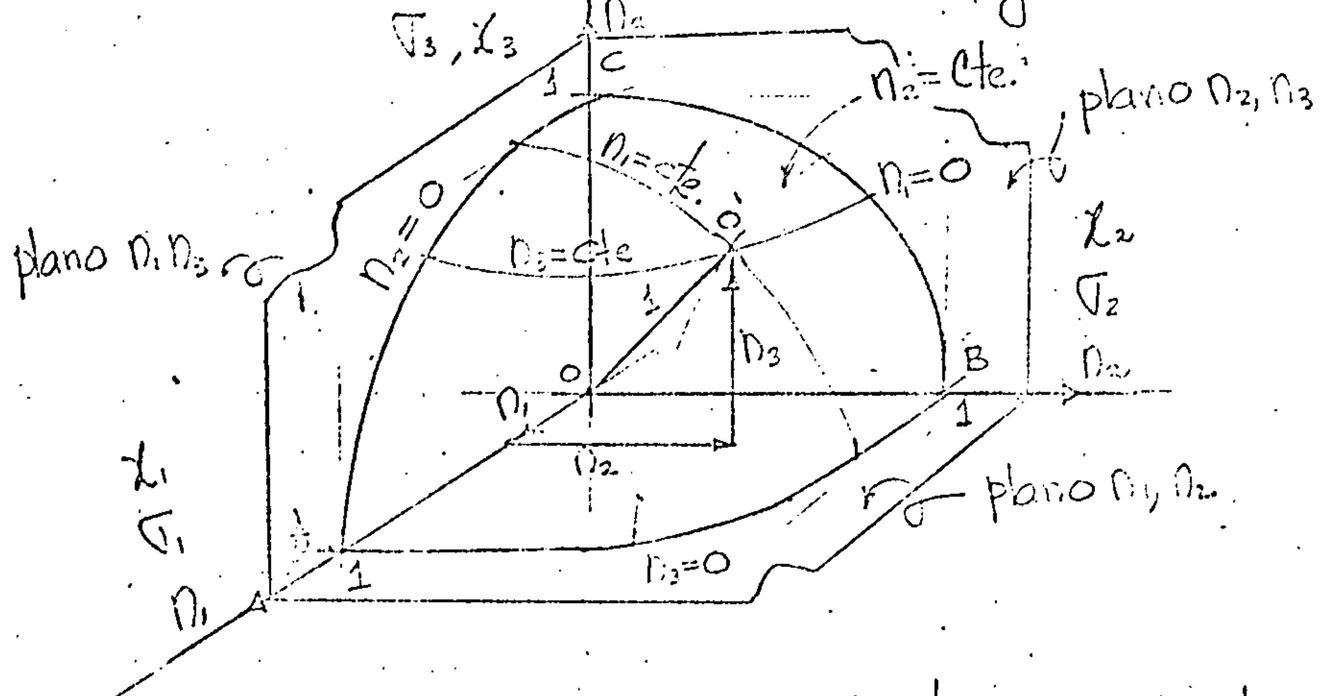


Fig. 7 Espacio de cosenos directores. un octagono de la esfera de Mohor.

$$\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = \overline{OO'} = 1$$

De la Fig. 3 se observa que substituyendo (20) en (7) se obtiene

$$\sigma_n = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2 \tag{31}$$

Substituyendo (20) y (31) en (11) y (12) se obtiene

$$\tau_n^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 - \left(\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2\right)^2 \tag{32}$$

de las ecuaciones (31), (32) y (21) se obtiene el siguiente sistema de 3 ecuaciones con 3 incognitas no lineal en n_1, n_2 y n_3

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \\ f(\sigma_1 n_1^2) & f(\sigma_2 n_2^2) & f(\sigma_3 n_3^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1^2 \\ n_2^2 \\ n_3^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ \sigma_n \\ \tau_n^2 \end{Bmatrix} \qquad (33)$$

de (33) se obtiene

$$n_1^2 = \frac{(\sigma_2-\sigma_n)(\sigma_3-\sigma_n)+\tau_n^2}{(\sigma_2-\sigma_1)(\sigma_3-\sigma_1)} \qquad (34)$$

$$n_2^2 = \frac{(\sigma_3-\sigma_n)(\sigma_1-\sigma_n)+\tau_n^2}{(\sigma_3-\sigma_2)(\sigma_1-\sigma_2)} \qquad (35)$$

$$n_3^2 = \frac{(\sigma_1-\sigma_n)(\sigma_2-\sigma_n)+\tau_n^2}{(\sigma_1-\sigma_3)(\sigma_2-\sigma_3)} \qquad (36)$$

De la Fig. 7 considerando n_1 = constante de la ecuación (34) se obtiene

$$n_1^2(\sigma_2-\sigma_1)(\sigma_3-\sigma_1) = (\sigma_2-\sigma_n)(\sigma_3-\sigma_n)+\tau_n^2 \qquad (37)$$

efectuando operaciones algebraicas en (37) se obtiene

$$n_1^2(\sigma_2-\sigma_1)(\sigma_3-\sigma_1)+\left(\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2}\right)^2 = \left[\sigma_n-\frac{\sigma_2+\sigma_3}{2}\right]^2+\tau_n^2 = \text{Constante}$$

de donde: $r_1^2 = \left[\sigma_n-\frac{\sigma_2+\sigma_3}{2}\right]^2+\tau_n^2 \equiv (x-a)^2+y^2$ que es la ecuación de un circulo a una distancia $\frac{\sigma_2+\sigma_3}{2}$ del origen por lo tanto el radio r_1 que haciendo centro en $\frac{\sigma_2+\sigma_3}{2}$ localiza el punto de coordenadas $\sigma_n \tau_n$ en el diagrama de Mohr es

$$\tau_1 = \sqrt{n_1^2(\sigma_2-\sigma_1)(\sigma_3-\sigma_1)+\left(\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2}\right)^2} \qquad (38)$$

Similarmente suponiendo $n_2 =$ constante de (35) se obtiene

$$\tau_2 = \sqrt{n_2^2(\sigma_3-\sigma_2)(\sigma_1-\sigma_2)+\left(\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}\right)^2} \qquad (39)$$

Similarmente suponiendo $n_3 =$ constante de (36) se obtiene

$$\tau_3 = \sqrt{n_3^2(\sigma_1-\sigma_3)(\sigma_2-\sigma_3)+\left(\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\right)^2} \qquad (40)$$

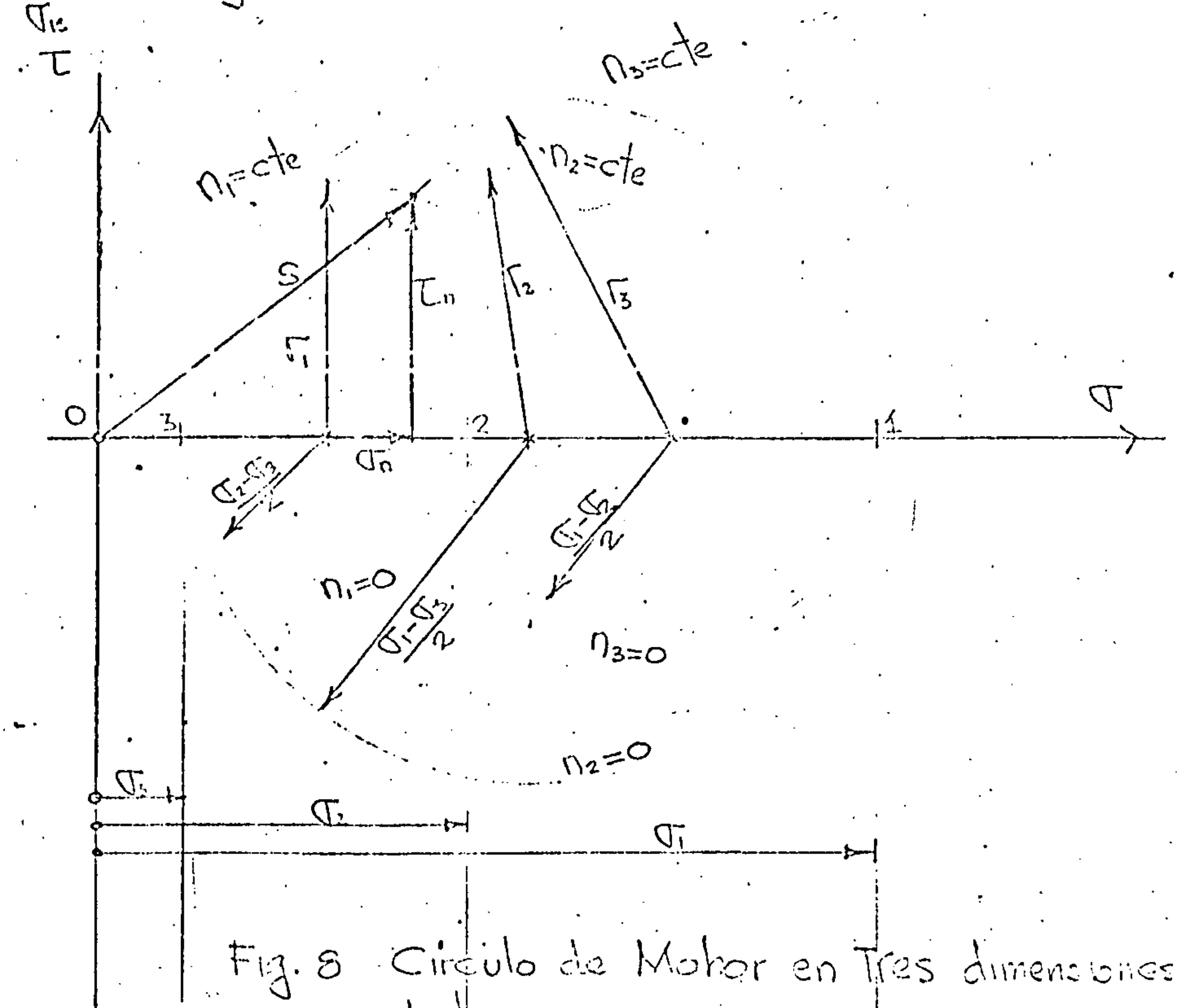


Fig. 8 Círculo de Mohr en Tres dimensiones determinar σ_n, τ_n, conociendo $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ y n_1, n_2 y n_3

2- Esfuerzos cortantes máximos, esfuerzo esférico, esfuerzo octaedral

Sean x_1, x_2, x_3 las direcciones principales (Fig. 3) y n_1, n_2, n_3 los cosenos directores de cierto plano ABC, se tiene que

$$\tau_n^2 = S^2 - \sigma_n^2 \tag{41}$$

$$S^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 \tag{42}$$

$$\sigma_n^2 = \left(\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2\right)^2 \tag{43}$$

substituyendo (43) y (42) en (41) se obtiene

$$\tau_n^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 - \left(\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2\right)^2 \tag{44}$$

Para determinar las direcciones máximas de corte de $n_3^2 = 1 - n_1^2 - n_2^2$ se elimina n_3 de (44) y se determinan

$$\frac{\partial}{\partial n_1}(\tau_n^2) = 0; \quad n_1\left[(\sigma_1 - \sigma_3)n_1^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)n_2^2 - \tfrac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)\right] = 0 \tag{45}$$

$$\frac{\partial}{\partial n_2}(\tau_n^2) = 0; \quad n_2\left[(\sigma_1 - \sigma_3)n_1^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)n_2^2 - \tfrac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3)\right] = 0 \tag{46}$$

las soluciones de (45) y (46) que hacen τ_n máximo

Si $n_2 = 0$ $\quad n_1 = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$ $\quad n_3 = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$

" $n_1 = 0$ $\quad n_2 = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$ $\quad n_3 = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$ y similarmente

" $n_3 = 0$ $\quad n_1 = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$ $\quad n_2 = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$

se repiten los cálculos en (44) se elimina n_1 y después n_2. Conviene observar que en (45) y (46) no hay soluciones de n_1 y n_2 que sean ambos diferentes de cero, porque las expresiones dentro del paréntesis no pueden anularse.

	n_1	n_2	n_3	n_1	n_2	n_3
n_1	0	0	± 1	0	$\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$
n_2	0	± 1	0	$\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$	0	$\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$
n_3	± 1	0	0	$\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$	0
	Esf. Principales $\tau_n = 0$			Cortantes máximos		

Tabla 1 Cosenos directores

Repitiendo los calculos en (44), eliminado n_1 y determinando n_2 y n_3 tal que τ_n sea máximo y después n_2 y determinando n_1 y n_3 tal que τ_n sea máximo se obtienen los valores

$$(\tau_{max})_1 = \tau_1 = \pm \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3)$$
$$(\tau_{max})_2 = \tau_2 = \pm \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) \tag{47}$$
$$(\tau_{max})_3 = \tau_3 = \pm \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)$$

de (47) y (32) se puede expresar τ_n en la siguiente forma

$$\tau_n^2 = 4(n_1^2 n_2^2 \tau_3^2 + n_2^2 n_3^2 \tau_1^2 + n_1^2 n_3^2 \tau_2^2) \tag{48}$$

Las 3 primeras columnas de la Tabla 1 dan las direcciones de los planos ecordenados de las direcciones principales para ellos $\tau_n = 0$ y (32) es un minimo, las tres columnas restantes dan planos a través de un eje principal bisectando los otros dos direcciones de esfuerzos principales, substituyendo los valores de Tabla 1 en (32) se obtienen los valores de los esfuerzos cortantes máximos (47), los lados del octaedro mostrado en la Fig. 9 son las direcciones principales de cortante, y las direcciones x_1 x_2 y x_3 son la direcciones

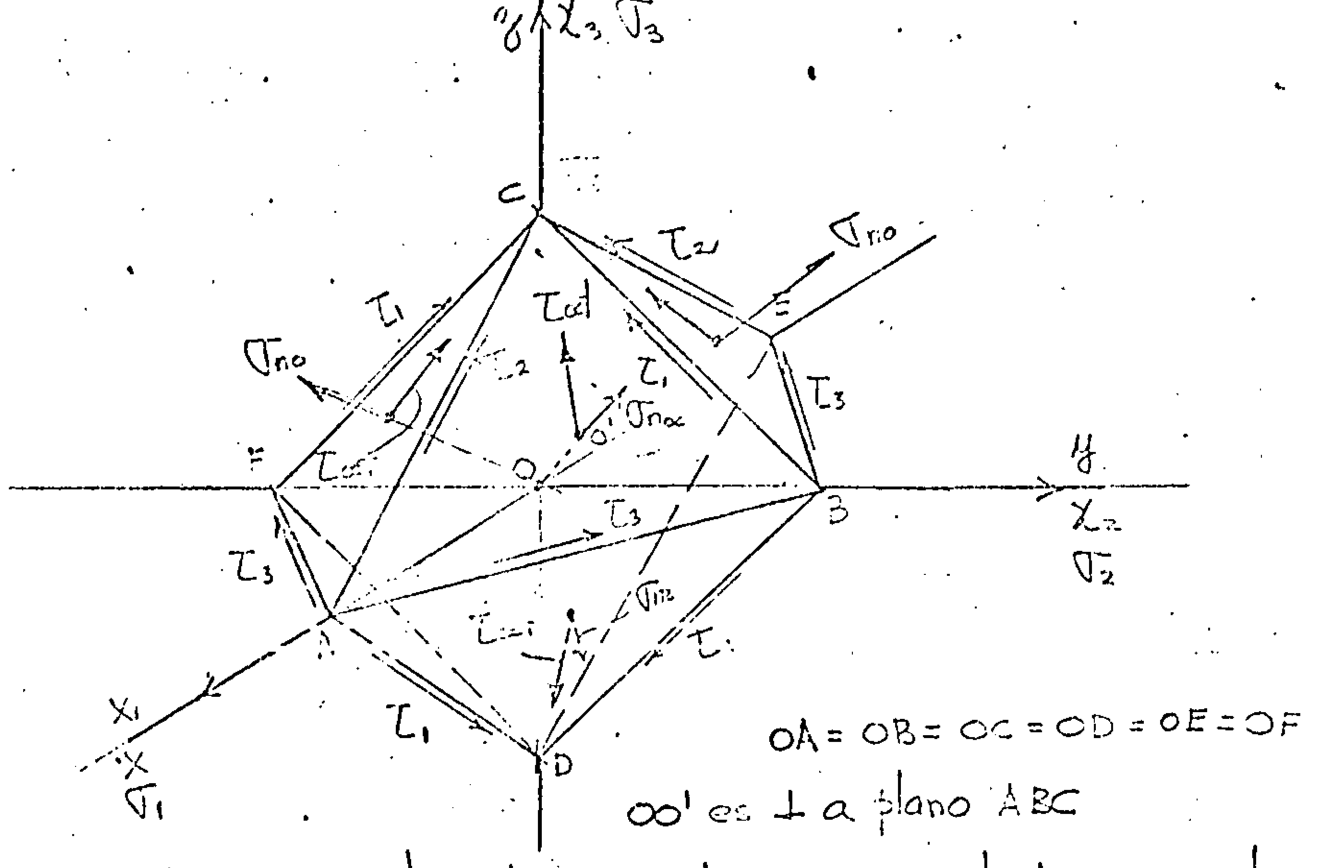


Fig. 9 octaedro regular cuyos lados son las direcciones de esfuerzo cortante máximo.

principales σ_1, σ_2 y σ_3, la normal al tetaedro OABC tiene cosenos directores $n_1 = n_2 = n_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ $(\alpha = \beta = \gamma = 54.76°)$
de (31) el esfuerzo normal es igual a

$$\sigma_{no} = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \qquad (48)$$

se denomina esfuerzo medio, esférico o hidrostático, esfuerzo de corte correspondiente de (44) es

$$\tau_{oct}^2 = \frac{1}{3}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{1}{9}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 = \frac{1}{9}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right] \qquad (49)$$

ó

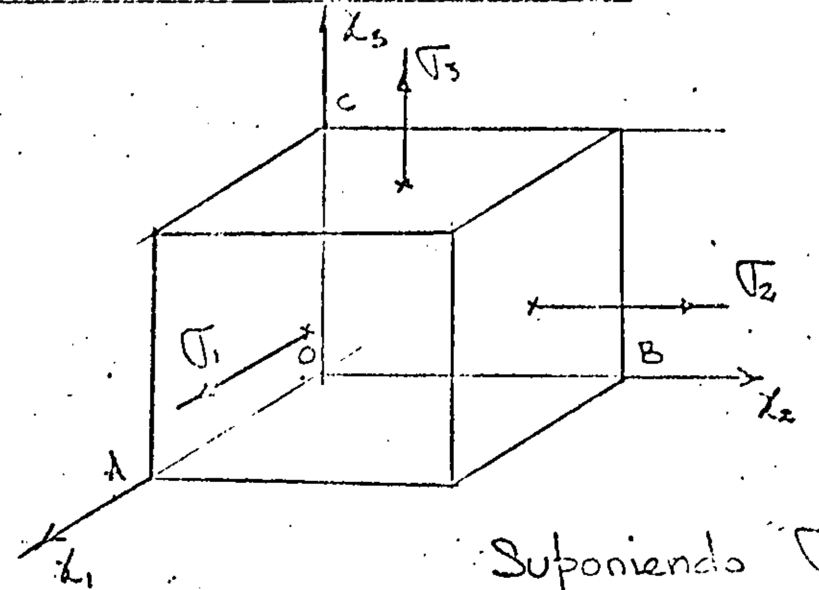
$$\tau_{oct} = \frac{1}{3}\sqrt{\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2\right]} \qquad (49)$$

de (48) y (49) se obtiene

$$\tau_{oct} = \sqrt{\frac{1}{3}\left[(\sigma_1-\sigma_n)^2+(\sigma_2-\sigma_n)^2+(\sigma_3-\sigma_n)^2\right]} \qquad (50)$$

al esfuerzo de corte dado por (49) y (50) es llamado esfuerzo octaedral de corte, porque la cara donde actua es la cara ABC del octaedro regular de la Fig. 9 que tiene vertices en los ejes coordenados, se usa frecuentemente en Teoría de Plasticidad

TEORIAS DE FALLA



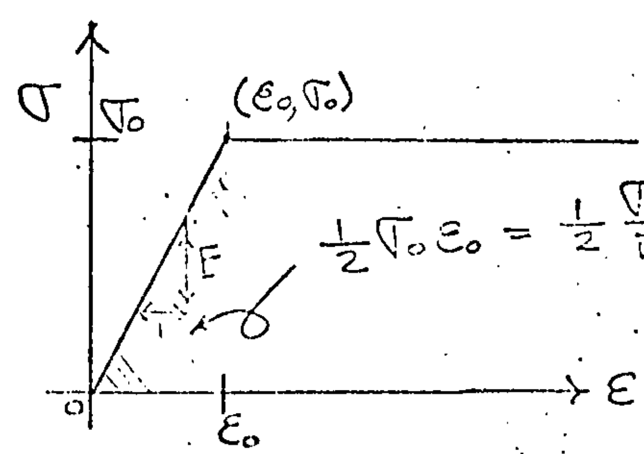
Suponiendo $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$

Fig. 10

En la Fig. 1, después de diagonalizar las componentes del tensor de esfuerzo, se tiene

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \qquad (51)$$

se trata de obtener la superficie $f(\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3) = 0$ en la cual el medio entra a falla plástica, a continuación se presenta el diagrama idealizado esfuerzo deformación en condiciones uniaxiales



$\frac{1}{2}\sigma_0 \varepsilon_0 = \frac{1}{2}\frac{\sigma_0^2}{E}$ = densidad energía elástica.

Fig. 11

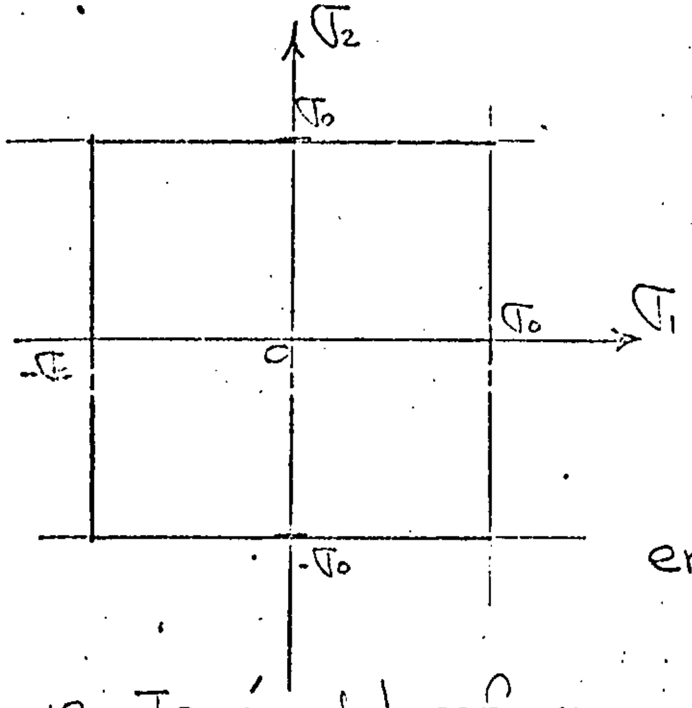
a) Teoría del Máximo esfuerzo (Rankine)

Se supone que $\sigma_1 = \sigma_0'$ o $\sigma_3 = \sigma_0'$

σ_0' esfuerzo de fluencia en tensión

σ_0'' " " " " compresión

ó σ_0' y σ_0'' pueden ser dos esfuerzos de fluencia en dos direcciones perpendiculares, suponiendo un estado plano de esfuerzos $\sigma_3 = 0$ y que $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_0$ se obtiene el diagrama de esfuerzos de la Fig. 12



Planos de falla

$\sigma_1 = \pm \sigma_0$

$\sigma_2 = \pm \sigma_0$

$\sigma_3 = \pm \sigma_0$

Superficie cubica en el espacio de esfuerzos

Fig. 12 Teoría del esfuerzo máximo en esfuerzos planos

b) Teoría de la deformación maxima (Saint-Verant)

Condición triaxial de esfuerzos que alcanza la deformación de fluencia ε_0.

$$\varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{E} = \frac{1}{E}\left[\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)\right] \qquad (52)$$

de (52) la superficie de esfuerzo referida al espacio de esfuerzos $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ es

$$f(\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3) = (\sigma_1 - \sigma_0) - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) = 0 \qquad (53)$$

en (53) suponiendo $\sigma_3 = 0$ y para $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ (esfuerzos planos) se obtiene para $\nu = 0.3$

$$\sigma_0 = (1-\nu)\sigma$$

$$\sigma = \frac{1}{1-\nu}\sigma_0 = \frac{1}{1-0.3}\sigma_0 = 1.43\,\sigma_0 \qquad (54)$$

Si $\sigma_1 = -\sigma_2 = \sigma_0$

$$\sigma_0 = (1+\nu)\sigma_0$$

$$\sigma = \frac{1}{1+\nu}\sigma_0 = \frac{1}{1+0.3}\sigma_0 = 0.77\,\sigma_0 \qquad (55)$$

llevando los valores (54) y (55) al plano σ_1, σ_2 del espacio de esfuerzos se obtiene las rectas de falla de la Fig. 13

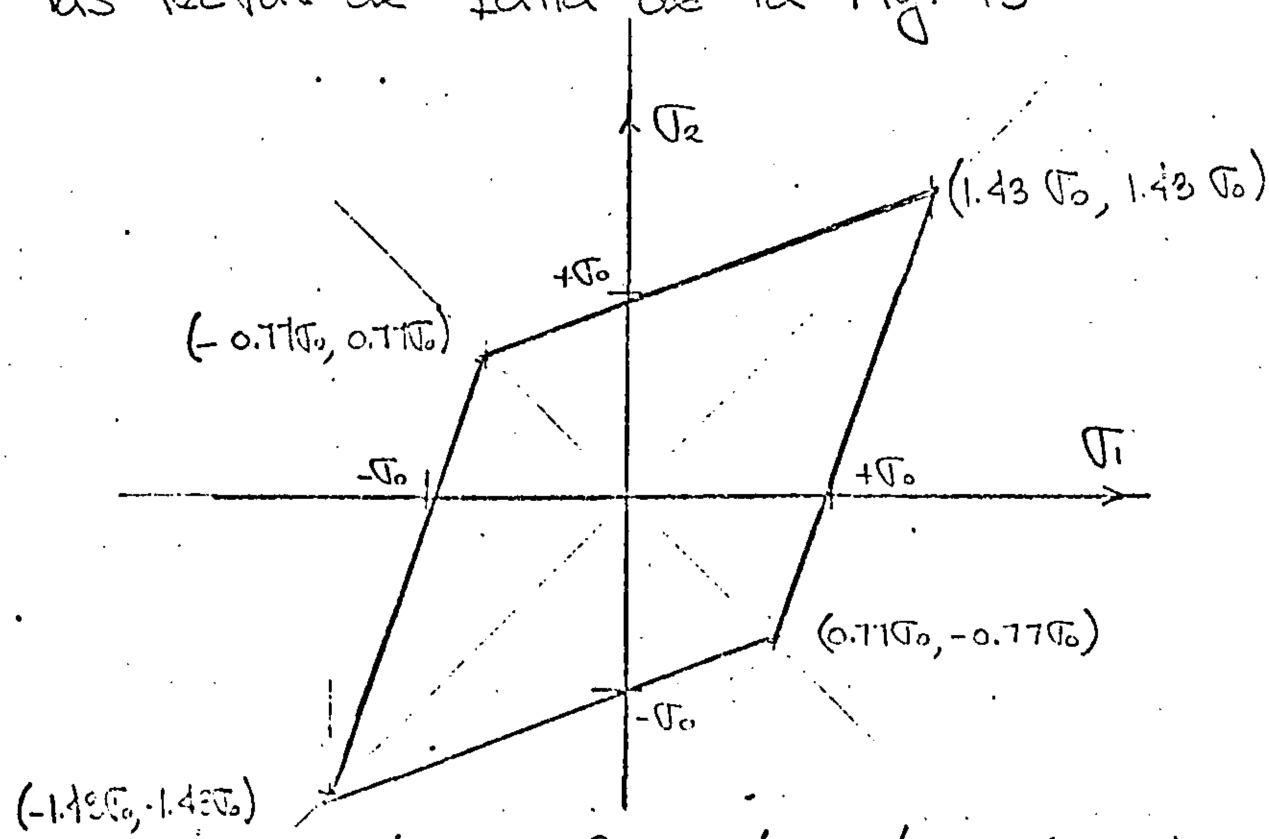


Fig. 13 Teoría de deformación máxima (Saint-Verant)

c) Teoría del Esfuerzo Cortante Máximo (Coulomb)

Si $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ Coulomb establece que la falla se alcanza cuando

$$(\tau_2)_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \pm \frac{1}{2}\sigma_0 \quad (56)$$

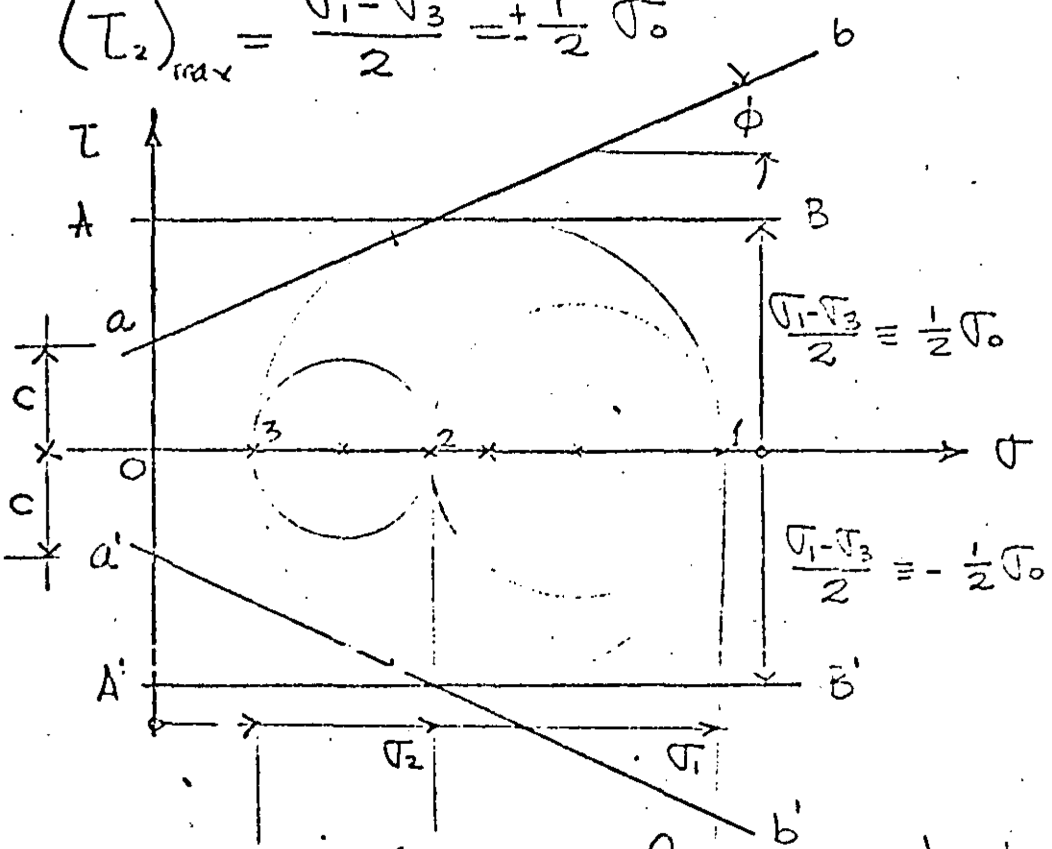


Fig. 13 Teoría del esfuerzo cortante máximo

(56) en el diagrama de Mohr establece como rectas de falla a AB y A'B' en Fig. 13 cuando el angulo de fricción interna $\phi = 0$, y cuando $\phi > 0$ las rectas de falla son las ab y a'b' cuya ecuación es igual a

$$\tau_{max} = c + \sigma \tan\phi \quad (57)$$

c = cohesión o resistencia al esfuerzo cortante puro
ϕ = angulo de fricción interna
σ = esfuerzo de falla.

c y ϕ son constantes constitutivas experimentales que se pueden obtener mediante una prueba triaxial de ruptura. La ecuación 56 en el plano de esfuerzos $\sigma_1\ \sigma_3$ se muestra en la Fig. 14

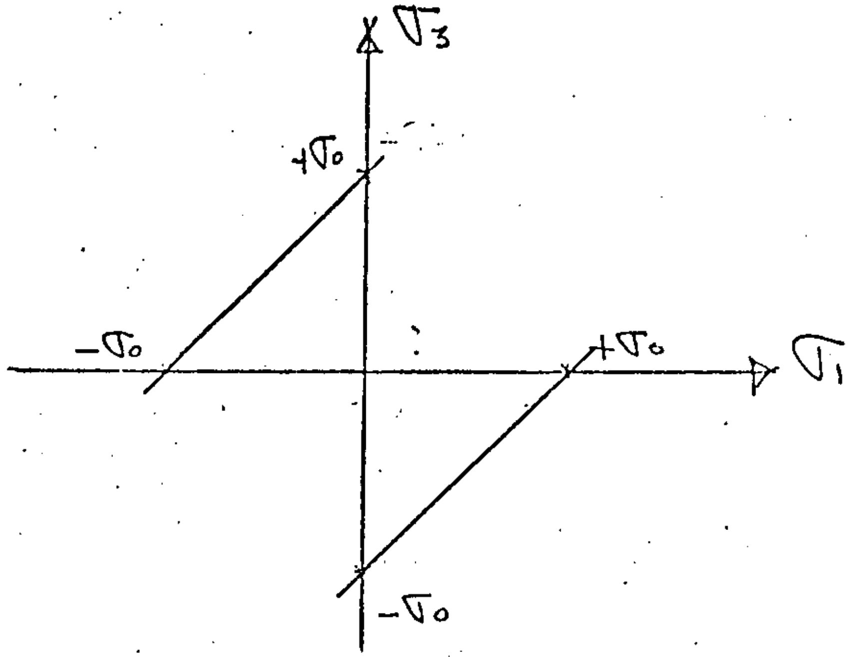


Fig. 14 Teoría del esfuerzo cortante máximo

d) Teoría de la máxima energía de deformación (Beltramí, Haig)

La densidad de energía en un medio elástico lineal viene dada por

$$U_0 = \frac{1}{2E}\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2\right) - \frac{\nu}{E}\left(\sigma_1\sigma_2+\sigma_1\sigma_3+\sigma_2\sigma_3\right) \quad (58)$$

de la Fig. 11 la densidad de energía hasta el límite elástico σ_0 es

$$U_0 = \frac{1}{2}\frac{\sigma_0^2}{E} \quad (59)$$

de (58) y (59) se obtiene la superficie de falla

$$f(\sigma_i) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) - \sigma_0^2 = 0 \quad (60)$$

En esfuergos planos $\sigma_3 = 0$ se obtiene

$$\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{2} - \nu\sigma_1\sigma_2 = \frac{\sigma_0^2}{2} \quad (61)$$

(61) es la ecuación de una elipse la cual en el plano de esfuerzos $\sigma_1\sigma_2$ se muestra en la Fig. 15 para el acero con $\nu = 0.3$, y las

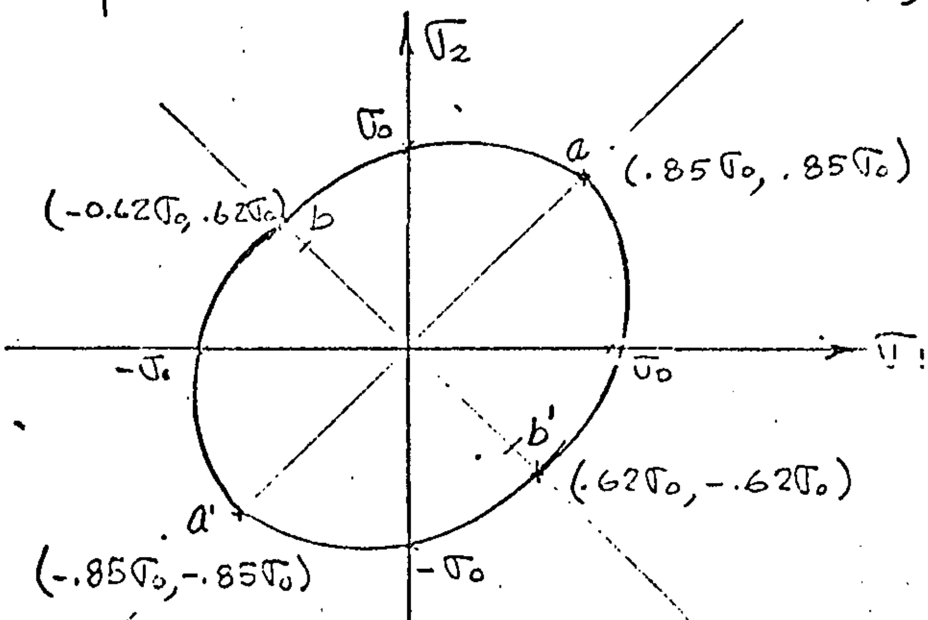


Fig. 15 Teoría de la máxima energía de deformación en el plano $\sigma_1\sigma_2$ para $\nu = 0.3$

coordenadas de los puntos a, a', b, y b'.

e) <u>Teoría de energía maxima distorsional</u>

(1856, J.C. Maxwell, M.T. Huber, R.V. Mises, H. Hencky).

Los esfuerzos cortantes máximos actuan sobre el plano octaedral cuyos cosenos directores son

$\lfloor n_i \rfloor = \left[\frac{1}{\sqrt{3}}\ \frac{1}{\sqrt{3}}\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$, y el esfuerzo normal correspondiente llamado, medio, esférico o hidrostático es

$$p = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \qquad (62)$$

la expansión volumétrica por unidad de volumen correspondiente se expresa por

$$e = e_1 + e_2 + e_3 = \frac{2(1-2\nu)}{E}\,p \qquad (63)$$

la energía por cambio unitario de volumen será

$$U_1 = \frac{1}{2}\,p\,e \qquad (64)$$

Substituyendo (62) y (63) en (64) se obtiene

$$U_1 = \frac{1-2\nu}{6E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 \qquad (65)$$

en un medio elástico lineal homogeneo e isotrópico la energía de deformación por unidad de volumen es

$$U_0 = \frac{1}{2E}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{\nu}{E}(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) \qquad (66)$$

La densidad de energía desviatorica maxima es

$$\Delta U = U_0 - U_1 \qquad (67)$$

substituyendo (65) y (66) en (67) se obtiene

$$\Delta U = \frac{1+\nu}{6E}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_1-\sigma_3)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2\right] \quad 52 \quad (62)$$

el valor máximo en (68) sería si $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ y (68) se transforma para $\sigma_1 = \sigma_0$ en

$$\Delta U_{max} = \frac{1+\nu}{3E}\sigma_0^2 \qquad (69)$$

por lo tanto de (68) y (69) se obtiene cuando $\Delta U = \Delta U_{max}$

$$f(\sigma_i) = (\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_1-\sigma_3)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2-2\sigma_0^2 = 0 \qquad (70)$$

(70) es la ecuación de de un cilindro circular cuyo eje y directrices en el espacio de esfuerzo forma iguales angulos con los ejes σ_i, la intersección de (70) con el plano $\sigma_1\sigma_2$ se obtiene de (70) para $\sigma_3 = 0$

$$(\sigma_1-\sigma_2)^2+\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\sigma_0 = 0 \qquad (71)$$

(71) y (61) deben ser iguales para $\nu = 0.5$ material incompresible (71) representa también una elipse como en la Fig. 15 solo que las coordenadas de a, a', b y b' son para $\nu = 0.3$

$a(\sigma_0, \sigma_0)$ $\quad$ $b(-0.577\sigma_0, 0.577\sigma_0)$

$a'(-\sigma_0, -\sigma_0)$ $\quad$ $b'(0.577\sigma_0, -0.577\sigma_0)$

ABCD: Teoría del esfuerzo máximo. (Rankine)
EFGH: " deformación máxima. (Saint-Venant)
——— " de máxima energía de deformación. (Beltrami)
- - - - " " " " distorcionante. (Von-Misses)

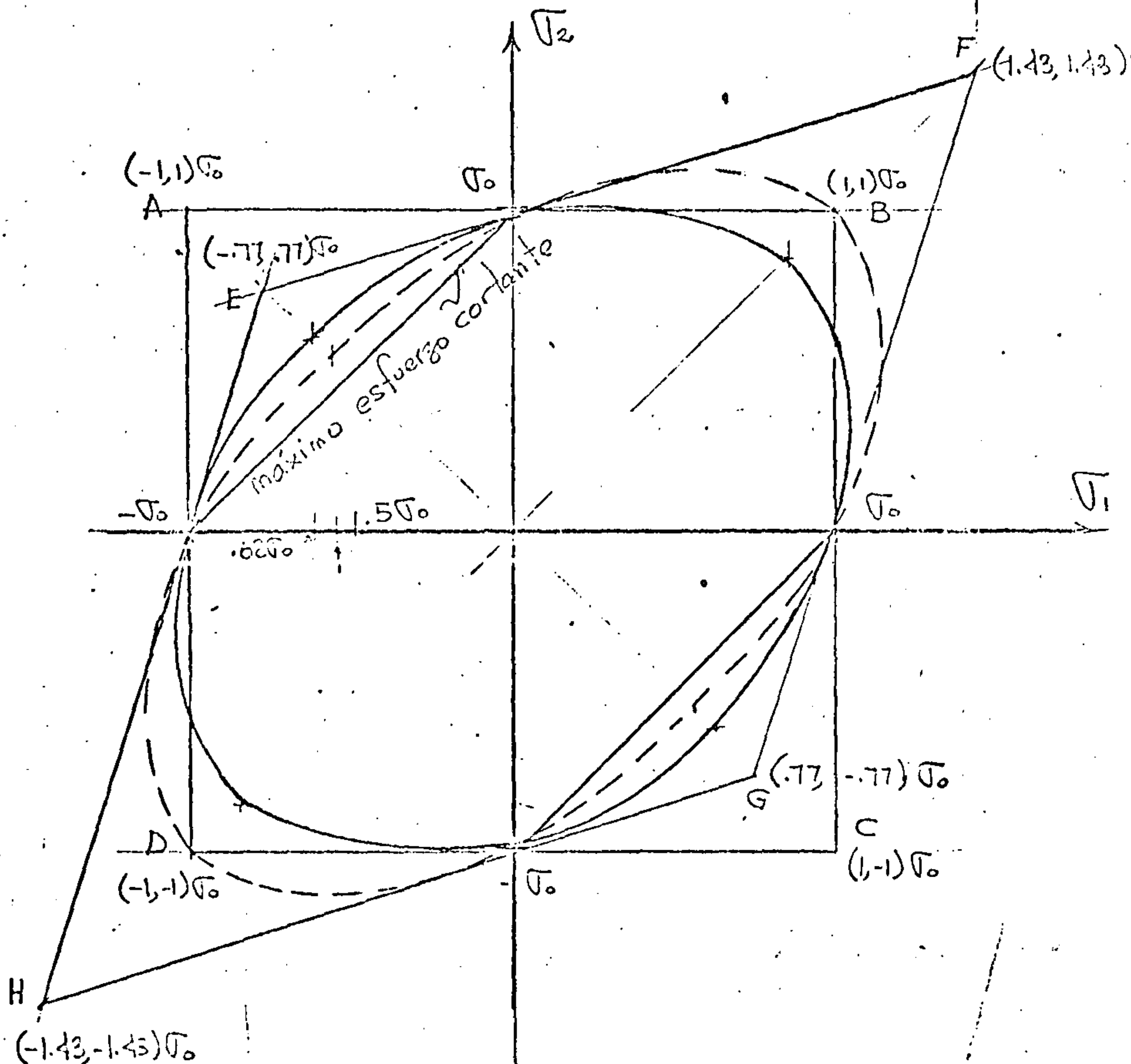


Fig. 16 Comparación entre las distintas Teorías de falla para $\nu=0.3$, $\phi=0$

DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.

EL METODO DEL ELEMENTO FINITO EN LA INGENIERIA

METODO DE LAS RIGIDECES PARA ANALIZAR ESTRUCTURAS ORTOGONALES PLANAS

DR. PORFIRIO BALLESTEROS B.

FEBRERO, 1985

Palacio de Minería Calle de Tacuba 5 primer piso Deleg. Cuauhtémoc 06000 México, D.F. Tel.: 521-40-20 Apdo. Postal M-2285

1 METODO DE LAS RIGIDECES PARA ANALIZAR ESTRUCTURAS ORTOGONALES PLANAS

1.1 Convención de signos.

La siguiente convención de signos será utilizada en el desarrollo del método de las rigideces y sus aplicaciones en marcos ortogonales planos.

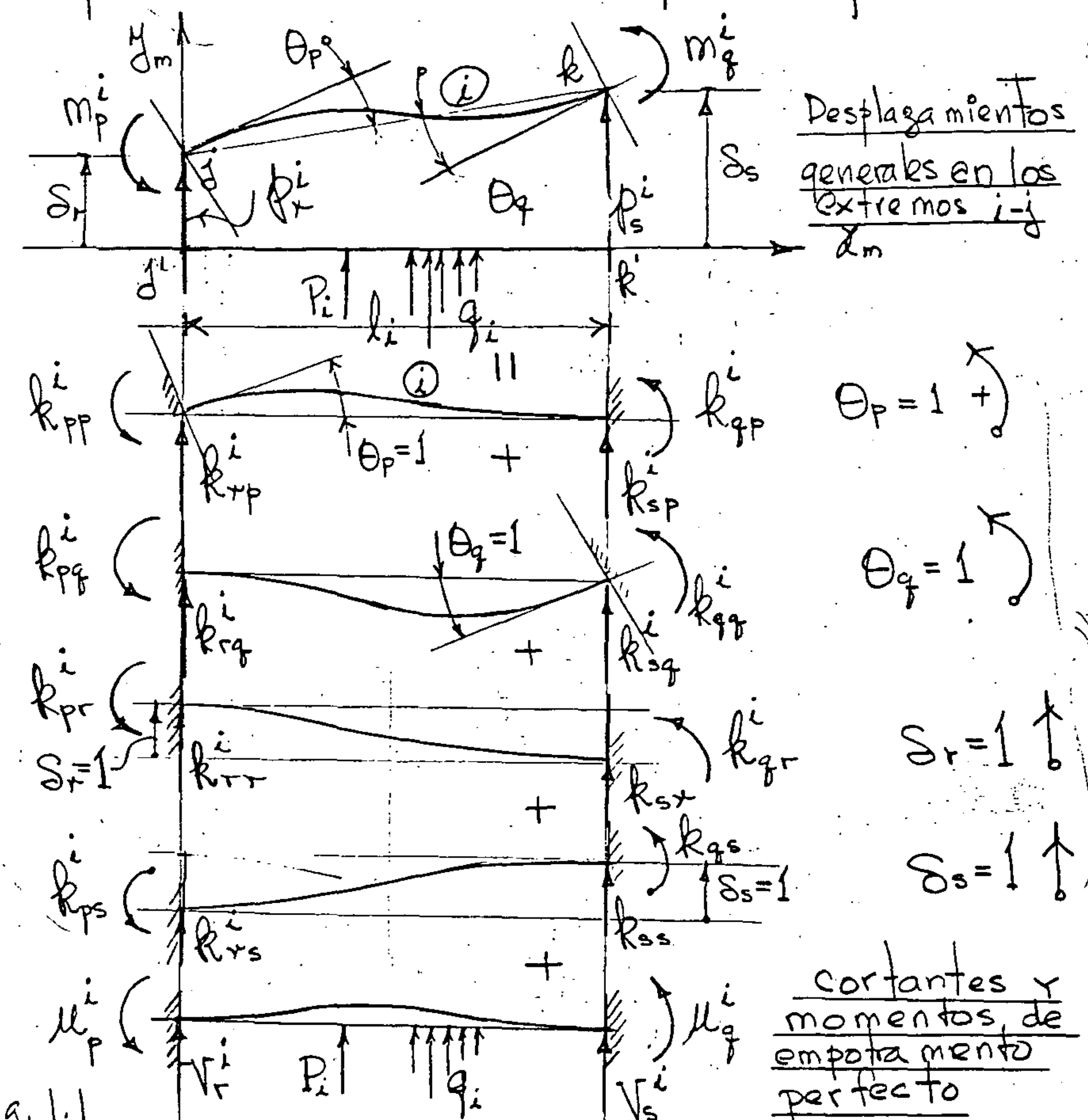


Fig. 1.1

De la Fig. 1.1 aceptando el principio de superposición se tiene:

$$
\begin{aligned}
m_p^i &= k_{pp}^i \theta_p + k_{pq}^i \theta_q + k_{pr}^i \delta_r + k_{ps}^i \delta_s + \mu_p^i \\
m_q^i &= k_{qp}^i \theta_p + k_{qq}^i \theta_q + k_{qr}^i \delta_r + k_{qs}^i \delta_s + \mu_q^i \\
p_r^i &= k_{rp}^i \theta_p + k_{rq}^i \theta_q + k_{rr}^i \delta_r + k_{rs}^i \delta_s + V_r^i \\
p_s^i &= k_{sp}^i \theta_p + k_{sq}^i \theta_q + k_{sr}^i \delta_r + k_{ss}^i \delta_s + V_s^i
\end{aligned}
\qquad (1.1)
$$

en (1.1) se desprecia el efecto de la carga normal expresando (1.1) matricialmente se tiene

$$\{m\}_i = [k]_i \{\delta\}_i + \{\mu\}_i \qquad (1.2)$$

donde:

$$\{m\}_i = \begin{Bmatrix} m_p \\ m_q \\ p_r \\ p_s \end{Bmatrix}_i \; ; \; \{\delta\}_i = \begin{Bmatrix} \theta_p \\ \theta_q \\ \delta_r \\ \delta_s \end{Bmatrix}_i \; ; \; \{\mu\}_i = \begin{Bmatrix} \mu_p \\ \mu_q \\ V_r \\ V_s \end{Bmatrix}_i \qquad (1.3)$$

$\{m\}_i$; componentes de acciones sobre barra para mantener equil.

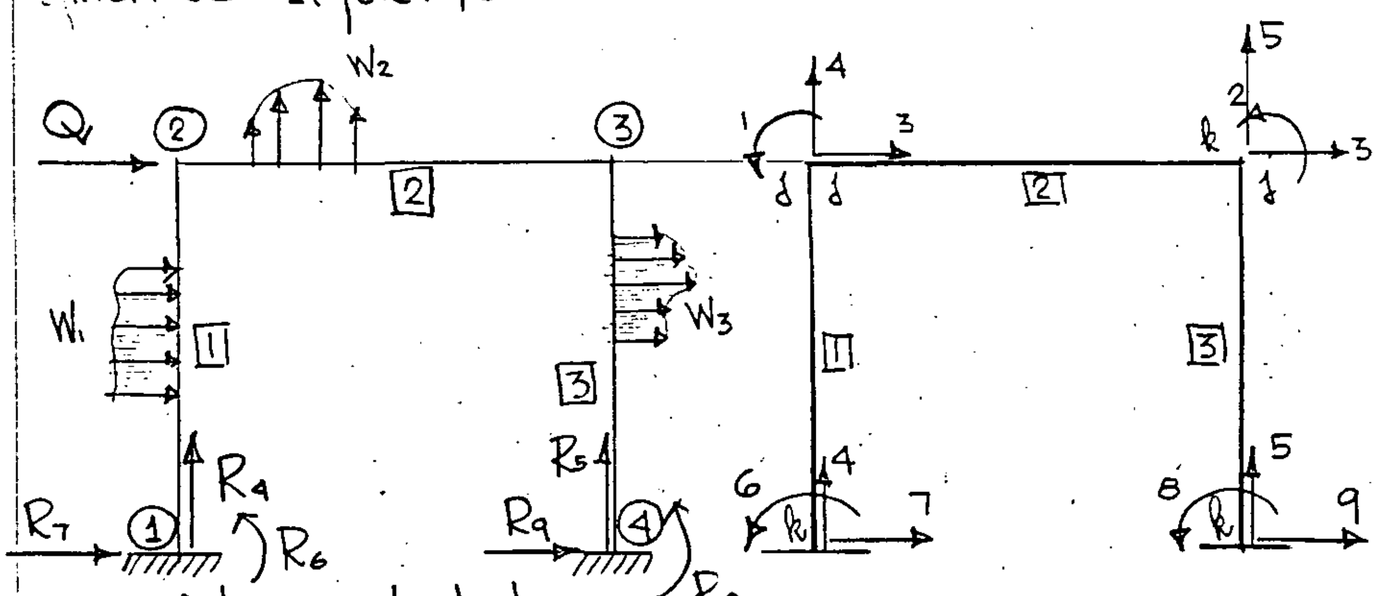
$\{\delta\}_i$; Desplazamientos en los extremos del miembro i

$\{\mu\}_i$; Momentos y cortantes de empotramiento perfecto en i

$[k]_i$; Matriz de rigidez del miembro i, la cual despreciando el efecto de cortante y carga normal, para un miembro de sección constante es:

$$
[k]_i = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc}
\frac{4EI}{l} & \frac{2EI}{l} & \frac{6EI}{l^2} & -\frac{6EI}{l^2} \\
\frac{2EI}{l} & \frac{4EI}{l} & \frac{6EI}{l^2} & -\frac{6EI}{l^2} \\
\frac{6EI}{l^2} & \frac{6EI}{l^2} & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{12EI}{l^3} \\
-\frac{6EI}{l^2} & -\frac{6EI}{l^2} & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{12EI}{l^3}
\end{array}\right] \\
\begin{array}{cccc} p & q & r & s \end{array}
\end{array}
\begin{array}{c} p \\ q \\ r \\ s \end{array}
\qquad (1.4)
$$

La filosofía básica del método de las rigideces ha sido presentada, antes de aplicarlo a diversos sistemas estructurales su procedimiento conviene organizarlo en un programa sistemático y las ecuaciones básicas del analisis presentarlas en términos generales. Como ejemplo consideraremos el marco siguiente.



Sistema estructural Indeterminado

Posibles desplazamientos de los extremos j y k.

Fig. 1.2

El pórtico de la Fig. 1.2 es <u>indeterminado de tercer grado</u> con θ_1, θ_2 y δ_3, porque las condiciones de apoyo anulan a δ_4, δ_5, θ_6, δ_7, θ_8, δ_9. Como primera etapa consideramos la estructura con los nudos fijos determinando la suma de momentos y cortantes correspondientes S_{mo}.

Aplicando las ecuaciones (1.1) al marco de la Fig. 1.2

Miembro 1

$$\begin{cases} m_1^1 = k_{11}^1\theta_1 + k_{16}^1(0) + k_{13}^1\delta_3 + k_{17}^1(0) + \mu_1^1 \\ m_6^1 = k_{61}^1\theta_1 + k_{66}^1(0) + k_{63}^1\delta_3 + k_{67}^1(0) + \mu_6^1 \\ p_3^1 = k_{31}^1\theta_1 + k_{36}^1(0) + k_{33}^1\delta_3 + k_{37}^1(0) + V_3^1 \\ p_7^1 = k_{71}^1\theta_1 + k_{76}^1(0) + k_{73}^1\delta_3 + k_{77}^1(0) + V_7^1 \end{cases} \qquad (1.5)$$

Miembro 2

$$\begin{cases} m_1^2 = k_{11}^2\theta_1 + k_{12}^2\theta_2 + k_{14}^2(0) + k_{15}^2(0) + \mu_1^2 \\ m_2^2 = k_{21}^2\theta_1 + k_{22}^2\theta_2 + k_{24}^2(0) + k_{25}^2(0) + \mu_2^2 \\ p_4^2 = k_{41}^2\theta_1 + k_{42}^2\theta_2 + k_{44}^2(0) + k_{45}^2(0) + V_4^2 \\ p_5^2 = k_{51}^2\theta_1 + k_{52}^2\theta_2 + k_{54}^2(0) + k_{55}^2(0) + V_5^2 \end{cases} \qquad (1.6)$$

Miembro 3

$$\begin{cases} m_2^3 = k_{22}^3\theta_2 + k_{28}^3(0) + k_{23}^3\delta_3 + k_{29}^3(0) + \mu_2^3 \\ m_8^3 = k_{82}^3\theta_2 + k_{88}^3(0) + k_{83}^3\delta_3 + k_{8}^3(0) + \mu_8^3 \\ p_3^3 = k_{32}^3\theta_2 + k_{38}^3(0) + k_{33}^3\delta_3 + k_{39}^3(0) + V_3^3 \\ p_9^3 = k_{92}^3\theta_2 + k_{98}^3(0) + k_{93}^3\delta_3 + k_{99}^3(0) + V_9^3 \end{cases} \qquad (1.7)$$

Como se demostró previamente el análisis de la estructura indeterminada de la Fig. 1.2 puede ser evaluado de

$$[S_{ij}]\{\delta_i\} = \{Q_i\} \qquad (1.8)$$

en el caso de la Fig 1.2, (1.8) es igual a

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{41} & S_{51} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \delta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M^1_{21} + M^2_{23} \\ M^2_{32} + M^3_{34} \\ V^1_{21} + V^3_{21} - Q \end{Bmatrix} \qquad (1.9)$$

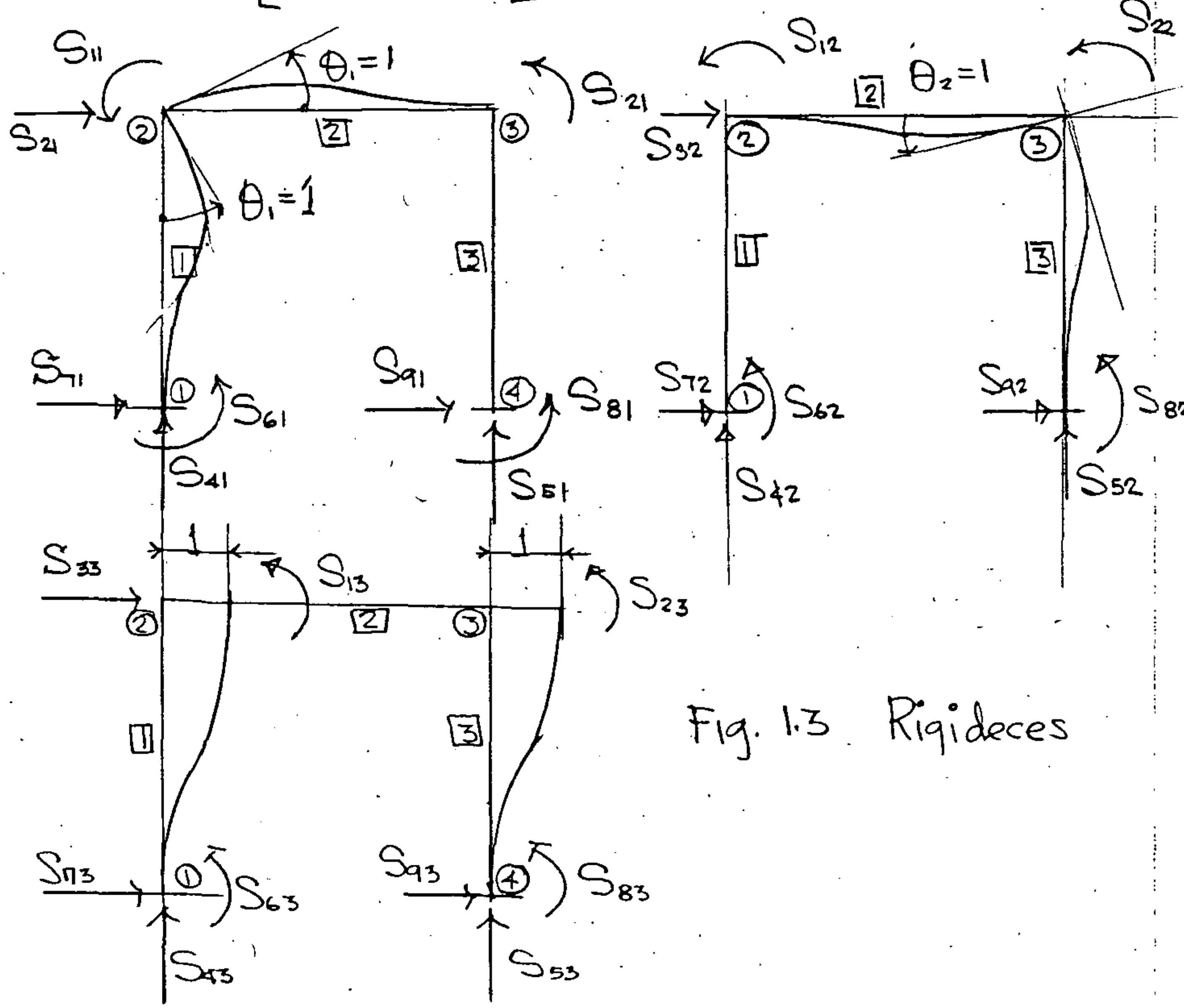


Fig. 1.3 Rigideces

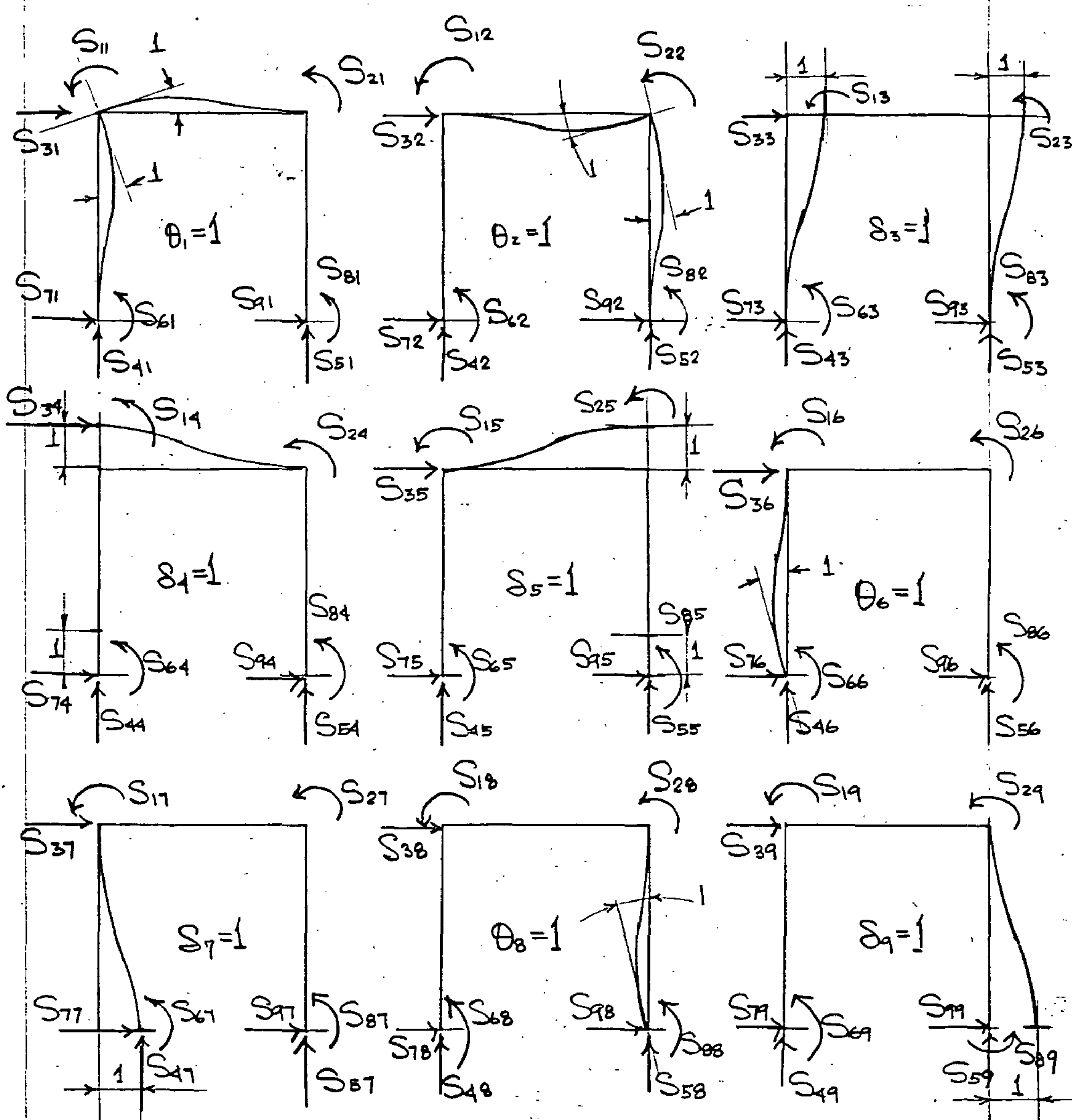


Fig. 1.4 Rigideces considerando todos los posibles grados de libertad despreciando deformaciones axiales (se suponen direcciones positivas)

De la Fig. 1.4 el desarrollo completo de las ecuaciones de superposición incluyendo reacciones es

$$
\begin{aligned}
&S_{11}\theta_1+S_{12}\theta_2+S_{13}\delta_3+S_{14}\delta_4+S_{15}\delta_5+S_{16}\theta_6+S_{17}\delta_7+S_{18}\theta_8\\
&\qquad+S_{19}\delta_9+\mu^1_{21}+\mu^2_{23}=0\\
&S_{21}\theta_1+S_{22}\theta_2+S_{23}\delta_3+S_{24}\delta_4+S_{25}\delta_5+S_{26}\theta_6+S_{27}\delta_7+S_{28}\theta_8\\
&\qquad+S_{29}\delta_9+\mu^2_{32}+\mu^3_{34}=0\\
&S_{31}\theta_1+S_{32}\theta_2+S_{33}\delta_3+S_{34}\delta_4+S_{35}\delta_5+S_{36}\theta_6+S_{37}\delta_7+S_{38}\theta_8\\
&\qquad+S_{39}\delta_9+V^1_{21}+V^3_{21}=Q\\
&S_{41}\theta_1+S_{42}\theta_2+S_{43}\delta_3+S_{44}\delta_4+S_{45}\delta_5+S_{46}\theta_6+S_{47}\delta_7+S_{48}\theta_8\\
&\qquad+S_{49}\delta_9+V^2_{23}=R_4\\
&S_{51}\theta_1+S_{52}\theta_2+S_{53}\delta_3+S_{54}\delta_4+S_{55}\delta_5+S_{56}\theta_6+S_{57}\delta_7+S_{58}\theta_8\\
&\qquad+S_{59}\delta_9+V^2_{32}=R_5\\
&S_{61}\theta_1+S_{62}\theta_2+S_{63}\delta_3+S_{64}\delta_4+S_{65}\delta_5+S_{66}\theta_6+S_{67}\delta_7+S_{68}\theta_8\\
&\qquad+S_{69}\delta_9+\mu^1_{12}=R_6\\
&S_{71}\theta_1+S_{72}\theta_2+S_{73}\delta_3+S_{74}\delta_4+S_{75}\delta_5+S_{76}\theta_6+S_{77}\delta_7+S_{78}\theta_8\\
&\qquad+S_{79}\delta_9+V^1_{12}=R_7\\
&S_{81}\theta_1+S_{82}\theta_2+S_{83}\delta_3+S_{84}\delta_4+S_{85}\delta_5+S_{86}\theta_6+S_{87}\delta_7+S_{88}\theta_8\\
&\qquad+S_{89}\delta_9+\mu^3_{43}=R_8\\
&S_{91}\theta_1+S_{92}\theta_2+S_{93}\delta_3+S_{94}\delta_4+S_{95}\delta_5+S_{96}\theta_6+S_{97}\delta_7+S_{98}\theta_8\\
&\qquad+S_{99}\delta_9+V^3_{43}=R_9
\end{aligned}
\tag{1.10}
$$

expresando (1.10) matricialmente se obtiene:

$$\underbrace{\left[\begin{array}{ccc|cccccc} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} & S_{17} & S_{18} & S_{19} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} & S_{27} & S_{28} & S_{29} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} & S_{37} & S_{38} & S_{39} \\ \hline S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} & S_{45} & S_{46} & S_{47} & S_{48} & S_{49} \\ S_{51} & S_{52} & S_{53} & S_{54} & S_{55} & S_{56} & S_{57} & S_{58} & S_{59} \\ S_{61} & S_{62} & S_{63} & S_{64} & S_{65} & S_{66} & S_{67} & S_{68} & S_{69} \\ S_{71} & S_{72} & S_{73} & S_{74} & S_{75} & S_{76} & S_{77} & S_{78} & S_{79} \\ S_{81} & S_{82} & S_{83} & S_{84} & S_{85} & S_{86} & S_{87} & S_{88} & S_{89} \\ S_{91} & S_{92} & S_{93} & S_{94} & S_{95} & S_{96} & S_{97} & S_{98} & S_{99} \end{array}\right]}_{[S_{kl}]} \underbrace{\left\{\begin{array}{c} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \delta_3 \\ \hline \delta_4 \\ \delta_5 \\ \theta_6 \\ \delta_7 \\ \theta_8 \\ \delta_9 \end{array}\right\}}_{\{\delta\}} + \underbrace{\left\{\begin{array}{c} \mu^1_{21}+\mu^2_{23} \\ \mu^2_{32}+\mu^3_{34} \\ V^1_{21}+V^3_{21} \\ \hline V^2_{23} \\ V^2_{32} \\ \mu^1_{12} \\ V^1_{12} \\ \mu^3_{43} \\ V^3_{43} \end{array}\right\}}_{\{\mu\}} = \underbrace{\left\{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ Q \\ \hline R_4 \\ R_5 \\ R_6 \\ R_7 \\ R_8 \\ R_9 \end{array}\right\}}_{\{R\}} \qquad (1.11)$$

Expresando (1.11) matricialmente con la notación indicada

$$[S_{kl}]\{\delta_i\} + \{\mu\}_k = \{R\} \qquad (1.12)$$

El analisis por el método de las rigideces se reduce a evaluar de (1.8) $\{\delta_i\}$ o sea

$$\{\delta_i\} = [S_{ij}]^{-1}\{Q_i\} \qquad (1.13)$$

y substituyendo (1.13) en (1.2) se obtiene para cada barra

$$\{M_i\} = [k]_i\,[S_{ij}]^{-1}\{Q_i\} + \{\mu\}_i \qquad (1.14)$$

y las reacciones se obtienen substituyendo (1.13) en (1.12)

$$\{R\} = [S_{kl}]\,[S_{ij}]^{-1}\{Q_i\} + \{\mu\}_k \qquad (1.15)$$

2 METODO DE LAS RIGIDECES DE ANALISIS DE ESTRUCTURAS TRIDIMENCIONALES

2.1 ELEMENTO VIGA.

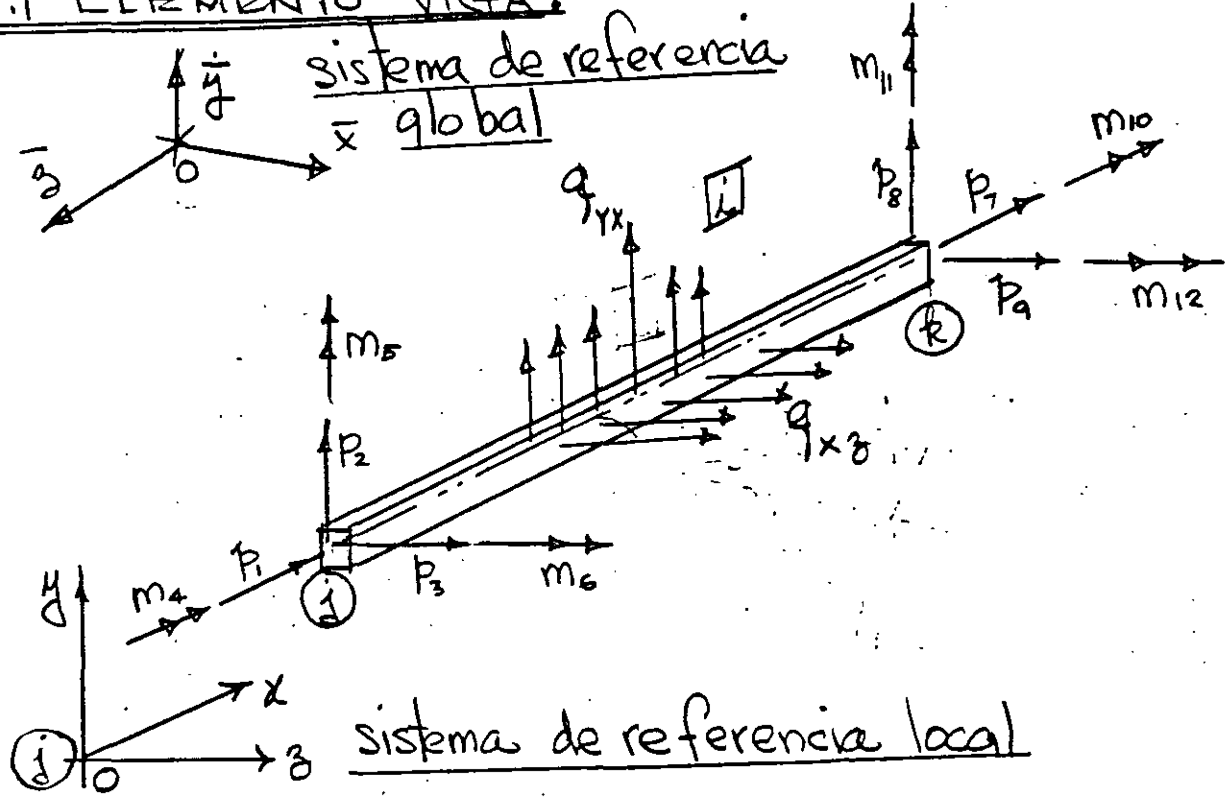


Fig. 2.1 Elemento viga; ejes y, z son centroidales y principales ($Q_Y = Q_Z = I_{YZ} = 0$)

El elemento estructural $j \cdot k$, se supone una barra capaz de resistir fuerzas axiales, momentos flectores respecto a dos ejes principales en el plano de la sección transversal, y momentos de torsión respecto a su eje centroidal. Las siguientes fuerzas actuan en la viga jk: Fuerzas axiales p_1 y p_7; Fuerzas cortantes p_2, p_3, p_8 y p_9; Momentos flectores m_5, m_6, m_{11} y m_{12}; y Momentos de torsión m_4 y m_{10}. la localización y dirección positiva se muestra en Fig. 2.1

Los desplazamientos correspondientes serán $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_{12}$ serán positivos en la dirección positiva de las fuerzas. La posisión del elemento viga jk será especificado por las coordenadas del extremo j y los cosenos directores del eje x (dirección jk) y del eje y con respecto al sistema global $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$.

La matriz de rigidez del elemento viga será de 12×12 pero siempre es posible integrarla con submatrices de 2×2 y 4×4. De la teoría de flexión y torsión de vigas las fuerzas p_1 y p_7 dependen solo de sus desplazamientos correspondientes; lo mismo es cierto para los momentos torsionantes m_4 y m_{10}. Sin embargo, para una selección arbitraria de los planos de flexión, los momentos flectores y fuerzaz de corte en el plano xy dependerán no solo de sus dezplazamiento correspondientes pero también en los desplazamiento correspondientes a las fuerzas en los planos xy. Solamente si los xy y xz coinciden con los ejes principales de la sección transversal puede considerarse la flexión y corte sobre dichos planos independiente una de la otra.

$$
\underbrace{\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ m_4 \\ m_5 \\ m_6 \\ p_7 \\ p_8 \\ p_9 \\ m_{10} \\ m_{11} \\ m_{12} \end{Bmatrix}}_{\{p\}_i}
=
\underbrace{\left[\begin{array}{cccccccccccc}
k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} & k_{17} & k_{18} & k_{19} & k_{1,10} & k_{1,11} & k_{1,12} \\
k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} & k_{27} & k_{28} & k_{29} & k_{2,10} & k_{2,11} & k_{2,12} \\
k_{31} & \cdot & k_{33} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & k_{3,12} \\
k_{41} & \cdot & \cdot & k_{44} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & k_{4,12} \\
k_{51} & \cdot & \cdot & \cdot & k_{55} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & k_{5,12} \\
k_{61} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & k_{66} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & k_{6,12} \\
k_{71} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & k_{77} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & k_{7,12} \\
k_{81} & \cdot & \multicolumn{5}{c}{\text{(simétrica)}} & k_{88} & \cdot & \cdot & \cdot & k_{8,12} \\
k_{91} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & k_{99} & \cdot & \cdot & k_{9,12} \\
k_{10,1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & k_{10,10} & \cdot & k_{10,12} \\
k_{11,1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & k_{11,11} & k_{11,12} \\
k_{12,1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & k_{12,12}
\end{array}\right]}_{[k_{ij}]}
\underbrace{\begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \\ \theta_6 \\ \delta_7 \\ \delta_8 \\ \delta_9 \\ \theta_{10} \\ \theta_{11} \\ \theta_{12} \end{Bmatrix}}_{\{\delta\}_i}
+
\underbrace{\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ \mu_4 \\ \mu_5 \\ \mu_6 \\ P_7 \\ P_8 \\ P_9 \\ \mu_{10} \\ \mu_{11} \\ \mu_{12} \end{Bmatrix}}_{\{\mu\}_r}
\qquad (2.1)
$$

Donde:

$\{p\}$; vector de cargas actuando sobre jk

$[k_{ij}]$; matriz de rigidez de la barra jk

$\{\delta\}$; vector de desplazamientos nodales

$\{\mu\}$; vector de reacciones de empotramiento perfecto

2.2 Elementos de la matriz de rigidez $[k_{ij}]$.

En el cálculo de las rigideces k_{ij} se utilizan los principios energéticos expuestos considerándose la energía elástica de deformación por flexión corte y carga normal.

2.2.1 Fuerzas axiales p_1 y p_7.

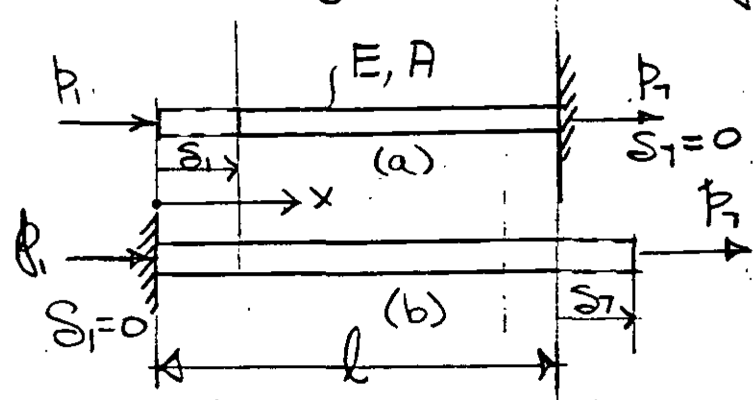


Fig. 2.2.1.1

De la ley de Hooke y la Fig. 2.2.1.2 se obtiene

$$k_{11}=\frac{p_1}{\delta_1}=\frac{EA}{l} \quad ; \quad k_{71}=-\frac{EA}{l} \qquad (a)$$

$$k_{77}=\frac{p_7}{\delta_7}=\frac{EA}{l} \quad ; \quad k_{17}=-\frac{EA}{l} \qquad (b)$$

2.2.2 Momentos de torsión m_4 y m_{10}.

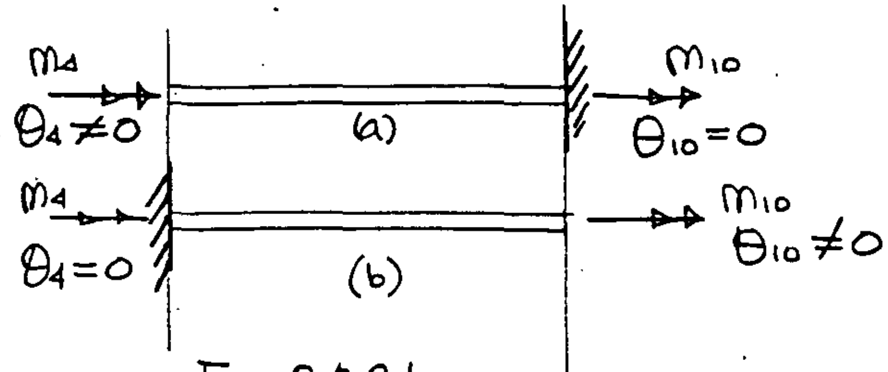


Fig. 2.2.2.1

De la teoría de torsión de barras y la fig. 2.2.2.1 se obtiene

$$k_{44} = \frac{m_4}{\theta_4} = \frac{GJ}{l} \quad ; \quad k_{10,4} = -\frac{GJ}{l} \qquad (a)$$

$$k_{10,10} = \frac{m_{10}}{\theta_{10}} = \frac{GJ}{l} \quad ; \quad k_{4,10} = -\frac{GJ}{l} \qquad (b)$$

2.2.3 Fuerzas de corte p_2 y p_8.

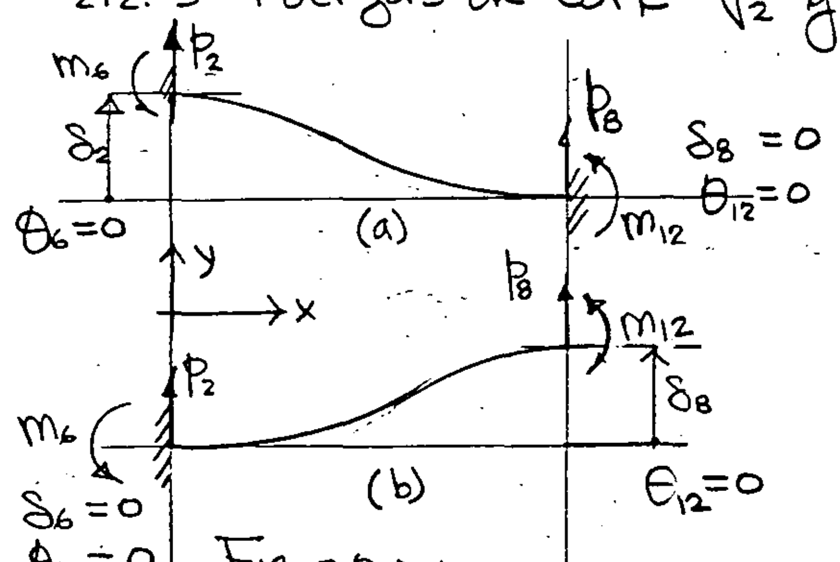


Fig. 2.2.3.1

De la Fig. 2.2.3.1 y los principios energéticos previamente expuestos, coniderando la energía de deformación por flexión y cortante se obtiene

$$k_{22}=\frac{p_2}{\delta_2}=\frac{12EI_z}{(1+\phi_Y)l^3} \qquad a$$

$$k_{62}=\frac{m_6}{\delta_2}=\frac{6EI_z}{(1+\phi_Y)l^2}\ ;\ k_{26}=\frac{p_2}{\theta_6}=\frac{6EI_z}{(1+\phi_Y)l^2} \qquad b$$

$$k_{82}=\frac{p_8}{\delta_2}=\frac{-12EI_z}{(1+\phi_Y)l^3}\ ;\ k_{28}=\frac{p_2}{\delta_8}=\frac{-12EI_z}{(1+\phi_Y)l^3} \qquad c$$

$$k_{12,2}=\frac{m_{12}}{\delta_2}=\frac{6EI_z}{(1+\phi_Y)l^2}\ ;\ k_{2,12}=\frac{p_2}{\theta_{12}}=\frac{6EI_z}{(1+\phi_Y)l^2} \qquad d$$

$$k_{88}=\frac{p_8}{\delta_8}=\frac{p_2}{\delta_2}=\frac{12EI_z}{(1+\phi_Y)l^3} \quad (\text{si } EI \text{ es constante}) \qquad e$$

$$k_{12,8}=\frac{m_{12}}{\delta_8}=\frac{-6EI_z}{(1+\phi_Y)l^2}=-\frac{p_2}{\theta_6}=-k_{62} \qquad (f)$$

$$k_{8,12}=\frac{p_8}{\theta_{12}}=\frac{-6EI}{(1+\phi_Y)l^2} \qquad (g)$$

2.2.4 Momentos Flectores

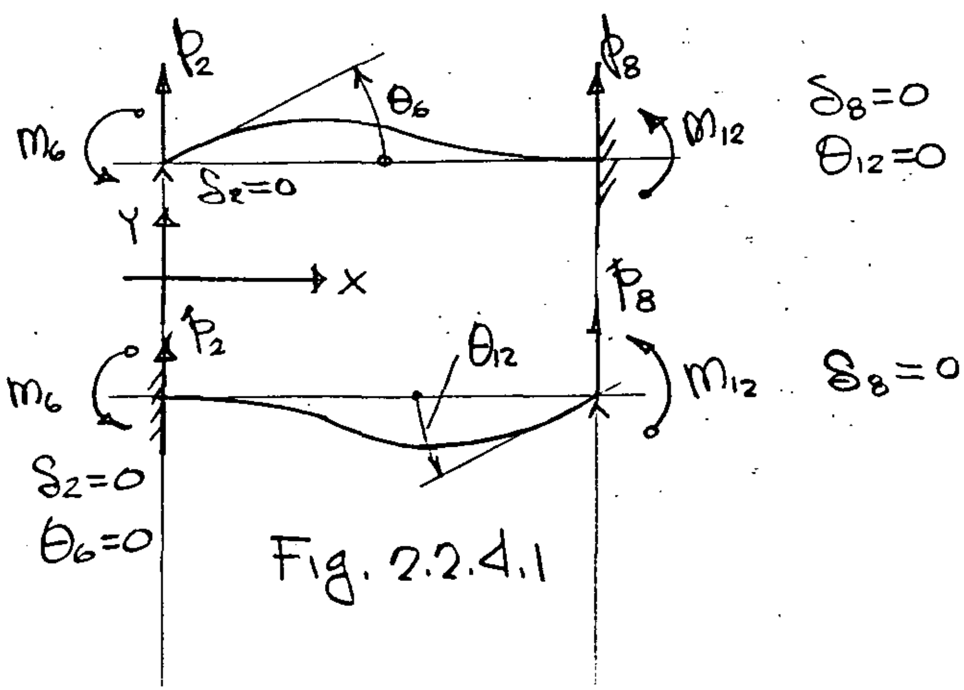


Fig. 2.2.4.1

De la Fig. 2.2.4.1 y los principios energéticos previamente expuestos, considerando la energía de deformación por flexión y corte se obtiene

$$k_{66} = \frac{m_6}{\theta_6} = \frac{(4+\phi_y)EI_z}{(1+\phi_y)\,l} \qquad a$$

$$k_{86} = \frac{p_8}{\theta_6} = -\frac{6EI_z}{(1+\phi_y)\,l^2}\;;\quad k_{68} = \frac{m_6}{\delta_8} = -\frac{6EI_z}{(1+\phi_y)\,l^2} \qquad b$$

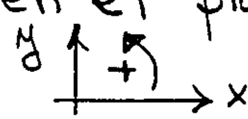
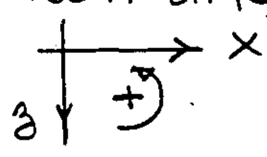
$$k_{12,6} = \frac{m_{12}}{\theta_6} = \frac{(2-\phi_y)EI_z}{(1+\phi_y)\,l}\;;\quad k_{6,12} = \frac{m_6}{\theta_{12}} = \frac{(2-\phi_y)EI_z}{(1+\phi_y)\,l} \qquad c$$

$$k_{12,12} = \frac{m_{12}}{\theta_{12}} = \frac{(4+\phi_y)EI_z}{(1+\phi_y)\,l} \qquad d$$

$$k_{8,12} = \frac{p_8}{\theta_{12}} = -\frac{6EI_z}{(1+\phi_y)\,l^2}\;;\quad k_{12,8} = \frac{m_{12}}{\delta_8} = k_{8,12} \qquad e$$

$$k_{6,12} = \frac{m_6}{\theta_{12}} = \frac{(2-\phi_y)EI_z}{(1+\phi_y)\,l}\;;\quad k_{12,6} = \frac{m_{12}}{\theta_6} = k_{6,12} \qquad f$$

2.2.5 Fuerzas de corte p_3 y p_9.

Los coeficientes de rigidez relacionados con los desplazamientos δ_3 y δ_9 se obtienen de los resultados previos. Debe observarse, que con la convención de signos adoptada en la Fig 2.1 las direcciones de los momentos flectores positivos en el plano xy son diferentes al plano xz :   , la convención

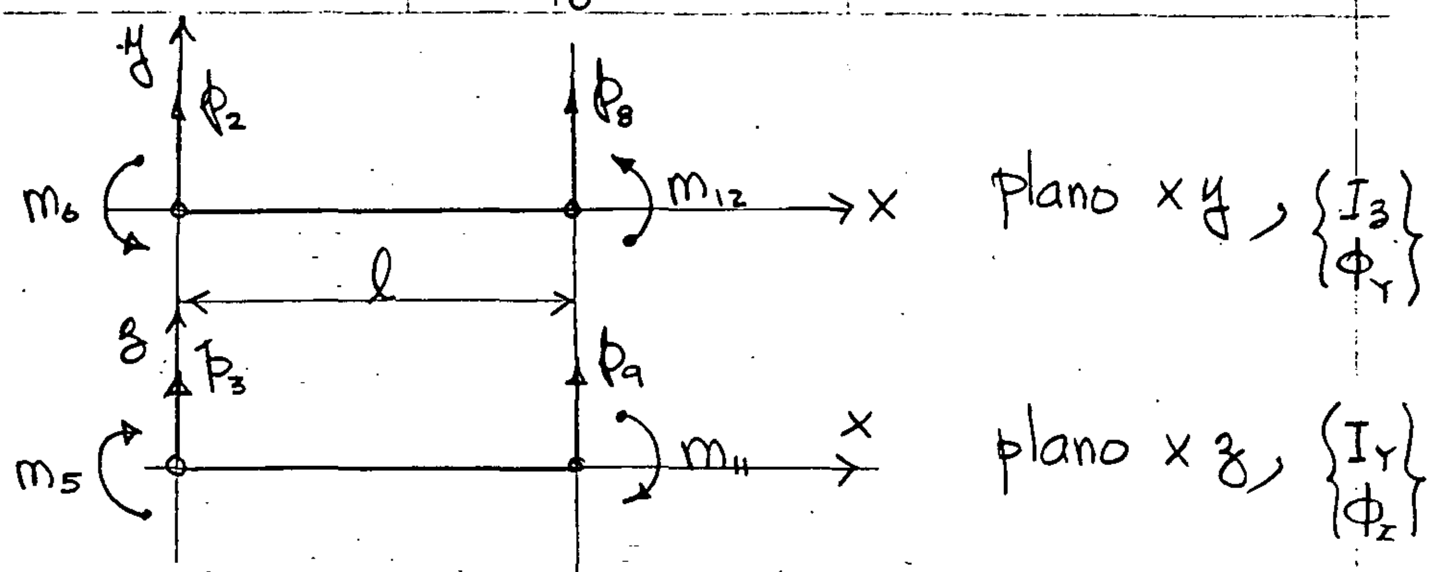


Fig. 2.2.5 Convención de signos para fuerzas de corte y momentos flectores;

de signos se muestra en la Fig. 2.2.5, basado en lo anterior es evidente que

$$k_{33} = \frac{p_3}{\delta_3} \equiv -k_{22} = -\frac{p_2}{\delta_2} \qquad a$$

$$k_{53} = \frac{m_5}{\delta_3} \equiv -k_{62} = -\frac{m_6}{\delta_2} \qquad b$$

$$k_{93} = \frac{p_9}{\delta_3} \equiv -k_{82} = -\frac{p_8}{\delta_2} \qquad c$$

$$k_{11,3} = \frac{m_{11}}{\delta_3} \equiv -k_{12,2} = -\frac{m_{12}}{\delta_2} \qquad d$$

$$k_{99} = \frac{p_9}{\delta_9} \equiv -k_{88} = -\frac{p_8}{\delta_8} \qquad e$$

$$k_{11,9} = \frac{m_{11}}{\delta_9} \equiv -k_{12,8} = -\frac{m_{12}}{\delta_8} \qquad f$$

Debe considerarse en el plano xz a I_y y ϕ_z como momento de inercia y parámetro de cortante.

17

2.2.6 Momentos Flectores m_5 y m_{11}

Aplicando las mismas observaciones de la sección anterior, se obtiene

$$k_{55} = \frac{m_5}{\theta_5} \equiv k_{66} = \frac{m_6}{\theta_6} = \frac{(4+\phi_z)}{1+\phi_z}\frac{EI_Y}{l} \quad a$$

$$k_{95} = \frac{P_9}{\theta_5} \equiv -k_{86} = -\frac{P_8}{\theta_6} = +\frac{6EI_Y}{(1+\phi_z)l} = k_{59} \quad b$$

$$k_{11,5} = \frac{m_{11}}{\theta_5} \equiv k_{12,6} = \frac{m_{12}}{\theta_6} = \frac{(2-\phi_z)EI_Y}{(1+\phi_z)l} = k_{5,11} \quad c$$

substituyendo los valores k_{ij} obtenidos en las subsecciones anteriores se obtiene la matriz de rigidez de la barra jk de la Fig. 2.1 ecuación 2.5. en donde

$$\phi_Y = \frac{12EI_z}{GA_{sY}l^2} = 24(1+\nu)\frac{A}{A_{sY}}\left(\frac{r_z}{l}\right)^2 = \frac{12f_YEI_z}{GAl^2}$$

$$\phi_z = \frac{12EI_Y}{GA_{sz}l^2} = 24(1+\nu)\frac{A}{A_{sz}}\left(\frac{r_Y}{l}\right)^2 = \frac{12f_zEI_Y}{GAl^2} \quad (2.3)$$

ν = relación de Poisson, A=area total de la sección, A_{sY} y A_{sz} = areas efectivas en cortante en direcciones y y z resp. r_Y y r_z = radios de giro respecto a y y resp. a x. ϕ_Y y ϕ_z = Parámetros de deformación de corte. Sí r_z/l y r_Y/l son pequeños comparados con la unidad, como son en elementos flexibles, ambos ϕ_Y y ϕ_z se pueden considerar cero. Los factores de forma son

$$f_Y = \frac{A}{I_z^2}\int_A\left(\frac{Q_z}{b_z}\right)^2 dA\,, \quad f_z = \frac{A}{I_Y^2}\int_A\left(\frac{Q_Y}{b_Y}\right)^2 dA \quad (2.4)$$

18 DESFI-UNAM | Marzo-1983 | P. Ballesteros

18

(2.5)

$$
[k_{ij}] =
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccccc}
\delta_i & \delta_2 & \delta_3 & \theta_4 & \theta_5 & \theta_6 & \delta_7 & \delta_8 & \delta_9 & \theta_{10} & \theta_{11} & \theta_{12}
\end{array}
\\
\left[\begin{array}{cccccccccccc}
\frac{EA}{\ell} & & & & & & & & & & & \\
0 & \frac{12EI_z}{\ell^3(1+\Phi_Y)} & & & & & & & & & & \\
0 & 0 & \frac{12EI_Y}{\ell^3(1+\Phi_z)} & & & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{\ell} & & & & & & & & \\
0 & 0 & \frac{-6EI_Y}{\ell^2(1+\Phi_z)} & 0 & \frac{(4+\Phi_z)EI_Y}{\ell(1+\Phi_z)} & & & & & & & \\
0 & \frac{6EI_z}{\ell^2(1+\Phi_Y)} & 0 & 0 & 0 & \frac{(4+\Phi_Y)EI_z}{\ell(1+\Phi_Y)} & & & & & & \\
\frac{-EA}{\ell} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{AE}{\ell} & & & & & \\
0 & \frac{-12EI_z}{\ell^3(1+\Phi_Y)} & 0 & 0 & 0 & \frac{-6EI_z}{\ell^2(1+\Phi_Y)} & 0 & \frac{12EI_z}{\ell^3(1+\Phi_Y)} & & & & \\
0 & 0 & \frac{-12EI_Y}{\ell^3(1+\Phi_z)} & 0 & \frac{6EI_Y}{\ell^2(1+\Phi_z)} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_Y}{\ell^3(1+\Phi_z)} & & & \\
0 & 0 & 0 & \frac{-GJ}{\ell} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{\ell} & & \\
0 & 0 & \frac{-6EI_Y}{\ell^2(1+\Phi_z)} & 0 & \frac{(2-\Phi_z)EI_Y}{\ell(1+\Phi_z)} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_Y}{\ell^2(1+\Phi_z)} & 0 & \frac{(4+\Phi_z)EI_Y}{\ell(1+\Phi_z)} & \\
0 & \frac{6EI_z}{\ell^2(1+\Phi_Y)} & 0 & 0 & 0 & \frac{(2-\Phi_Y)EI_z}{\ell(1+\Phi_Y)} & 0 & \frac{-6EI_z}{\ell^2(1+\Phi_Y)} & 0 & 0 & 0 & \frac{(4+\Phi_Y)EI_z}{\ell(1+\Phi_Y)}
\end{array}\right]
\end{array}
\begin{array}{c}
\\ \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \\ \theta_6 \\ \delta_7 \\ \delta_8 \\ \delta_9 \\ \theta_{10} \\ \theta_{11} \\ \theta_{12}
\end{array}
$$

(simétrica)

Para problemas Bi-dimensionales, el elemento viga jk se reduce a seis fuerzas y momentos nodales y seis desplazamientos y rotaciones nodales. Utilizando

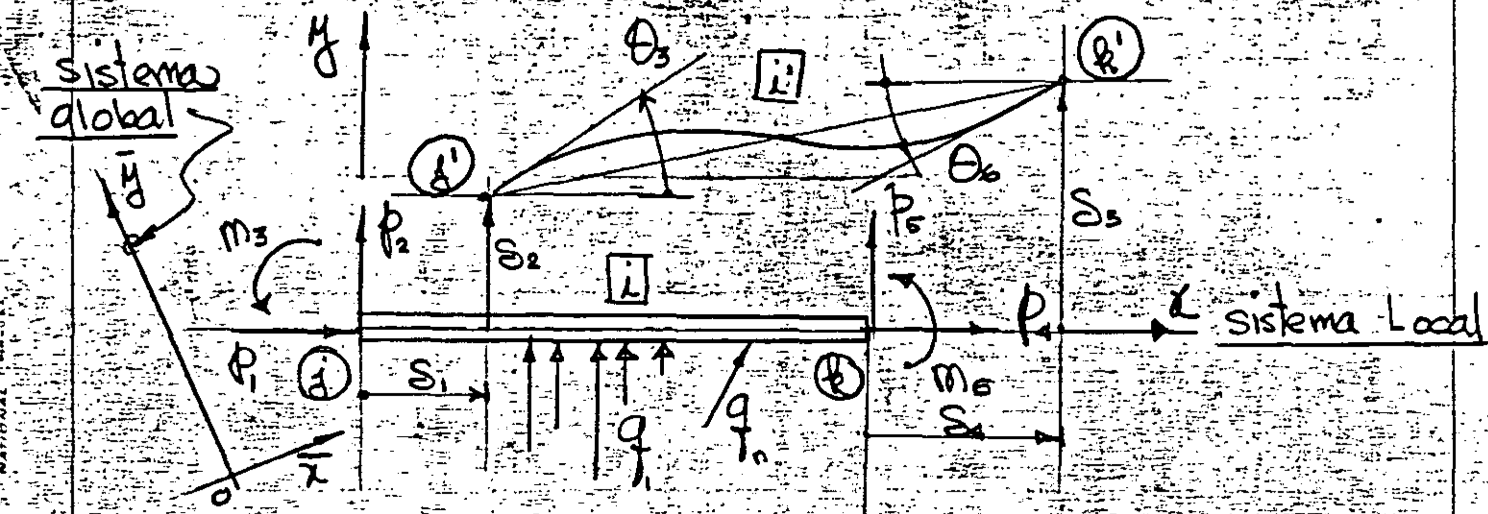


Fig. 2.2 Elemento viga para estructuras bidimensionales

la nomenclatura de la Fig. 2.2 (2.1) queda en

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ M_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ M_6 \end{Bmatrix}_i = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & k_{26} \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ k_{61} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & k_{66} \end{bmatrix}_i \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \theta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \theta_6 \end{Bmatrix}_i + \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \mu_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ \mu_6 \end{Bmatrix}_i \qquad (2.6)$$

o sea:

$$\{P\}_i = [k_{ij}]_i \{\delta\}_i + \{\mu\}_i \qquad (2.7)$$

De los resultados discutidos previamente la matriz de rigidez de la barra i figura 2.2 queda

$$
\begin{array}{c} \\ [k_{ij}]_i = \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} \delta_1 & \delta_2 & \theta_3 & \delta_4 & \delta_5 & \theta_6 \end{array} \\
\left[\begin{array}{cccccc}
\frac{EA}{l} & & & & & \\
0 & \frac{12EI_z}{l^3(1+\phi_y)} & & & & \\
0 & \frac{6EI_z}{l^2(1+\phi_y)} & \frac{(4+\phi_y)EI_z}{l(1+\phi_y)} & & & \\
-\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & & \\
0 & \frac{-12EI_z}{l^3(1+\phi_y)} & \frac{-6EI_z}{l^2(1+\phi_y)} & 0 & \frac{12EI_z}{l^3(1+\phi_y)} & \\
0 & \frac{6EI_z}{l^2(1+\phi_y)} & \frac{(2-\phi_y)EI_z}{l(1+\phi_y)} & 0 & \frac{-6EI_z}{l^2(1+\phi_y)} & \frac{(4+\phi_y)EI_z}{l(1+\phi_y)}
\end{array}\right]
\end{array}
\begin{array}{c} \\ \delta_1 \\ \delta_2 \\ \theta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \theta_6 \end{array}
\qquad (2.8)
$$

Si las deformaciones por cortante son despreciables esto es, $\phi_y = 0$, la matriz de rigidez (2.8) se simplifica a

$$
[k_{ij}] = \frac{EI_z}{l^3}
\left[\begin{array}{cccccc}
\frac{Al^2}{I_z} & & & & & \\
0 & 12 & & & & \\
0 & 6l & 4l^2 & & & \\
-\frac{Al^2}{I_z} & 0 & 0 & \frac{Al^2}{I_z} & & \\
0 & -12 & -6l & 0 & 12 & \\
0 & 6l & 2l^2 & 0 & -6l & 4l^2
\end{array}\right]
\qquad (2.9)
$$

La ecuación matricial relacionando los desplazamientos entre el sistema coordenado local y el global. Puede facilmente demostrarse para el elemento viga mostado en Fig. 2.1 es de la forma

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \\ \theta_6 \\ \delta_7 \\ \delta_8 \\ \delta_9 \\ \theta_{10} \\ \theta_{11} \\ \theta_{12} \end{Bmatrix}}_{\{\delta\}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{\lambda}_{ox} & & & \\ \bar{\lambda}_{oy} & 0 & 0 & 0 \\ \bar{\lambda}_{oz} & & & \\ & \bar{\lambda}_{ox} & & \\ 0 & \bar{\lambda}_{oy} & 0 & 0 \\ & \bar{\lambda}_{oz} & & \\ & & \bar{\lambda}_{ox} & \\ 0 & 0 & \bar{\lambda}_{oy} & 0 \\ & & \bar{\lambda}_{oz} & \\ & & & \bar{\lambda}_{ox} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{\lambda}_{oy} \\ & & & \bar{\lambda}_{oz} \end{bmatrix}}_{[\lambda]} \underbrace{\begin{Bmatrix} \bar{\delta}_1 \\ \bar{\delta}_2 \\ \bar{\delta}_3 \\ \bar{\theta}_4 \\ \bar{\theta}_5 \\ \bar{\theta}_6 \\ \bar{\delta}_7 \\ \bar{\delta}_8 \\ \bar{\delta}_9 \\ \bar{\theta}_{10} \\ \bar{\theta}_{11} \\ \bar{\theta}_{12} \end{Bmatrix}}_{\{\bar{\delta}\}} \qquad (2.10)$$

o sea $\{\delta\} = [\lambda]\{\bar{\delta}\}$ (2.11)

COSENOS DIRECTORES

donde

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_{ox} &= [\, l_{ox} \ \ m_{ox} \ \ n_{ox} \,] \\ \bar{\lambda}_{oy} &= [\, l_{oy} \ \ m_{oy} \ \ n_{oy} \,] \\ \bar{\lambda}_{oz} &= [\, l_{oz} \ \ m_{oz} \ \ n_{oz} \,] \end{aligned} \qquad (2.12)$$

representa las matrices de los cosenos directores para las direcciones ox, oy y oz, respectivamente, referidas al sistema global $\bar{x}$, $\bar{y}$ y $\bar{z}$, y $\{\bar{\delta}\}$ representa los desplazamientos de la barra $\boxed{i}$ respecto al sistema global.

Para problemas bidimensionales la matriz de transformacion $[\lambda]$ se reduce a

$$[\lambda] = \begin{bmatrix} l_{ox} & m_{ox} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_{oy} & m_{oy} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_{ox} & m_{ox} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_{oy} & m_{oy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (2.13)$$

El analisis de marcos tridimensionales se puede describir por las mismas ecuaciones básicas usadas en la descripción del analisis de estructuras planas. Considerando el sistema total, el equilibrio estático nodal es definido por la ecuación matricial

$$[S_c]\{\delta_c\} + \{\mu_c\} = \{R_c\} \qquad (2.14)$$

donde:

$[S_c]$ = Matriz de rigidez completa de la estructura.

$[\delta_c]$ = vector de desplazamientos nodales completo.

$\{\mu_c\}$ = Vector de cargas nodales completo.

$\{R\}$ vector de reacciones de la estructura

y de (2.14) se obtiene la ecuación

$$[S_{uu}]\{\delta_u\} + \{\mu_u\} = 0 \qquad (2.15)$$

de donde se obtiene $\{\delta_i\}$ y $\{\delta_c\}$, el que substituyéndolo en (2.14) y (2.1) se obtiene $\{R_c\}$ y $\{P\}_i$ como

$$\{R_c\} = -[S_c][S_{uu}]^{-1}\{\mu_u\} \qquad (2.16)$$

$$\{P\}_i = [k_{ij}]_i [S_{uu}]^{-1}\{\mu_u\} + \{\mu\}_i \quad (i = 1, 2 \ldots, n) \qquad (2.17)$$

Ejemplo: En el sistema estructural de la Fig. 2.3, determine las reacciones nodales $\{P\}_i$ en los extremos de cada miembro y las reacciones originadas por las cargas indicadas.

La estructura tiene miembros prismáticos con las siguientes propiedades:

$$EI_Y = EI_z = EI$$
$$GI_x = \frac{EI}{4} \qquad (2.18)$$
$$EA_x = \frac{EI}{4}$$

la estructura es flexible y se puede considerar la ($\phi_Y = \phi_z$) deformación por cortante despreciable

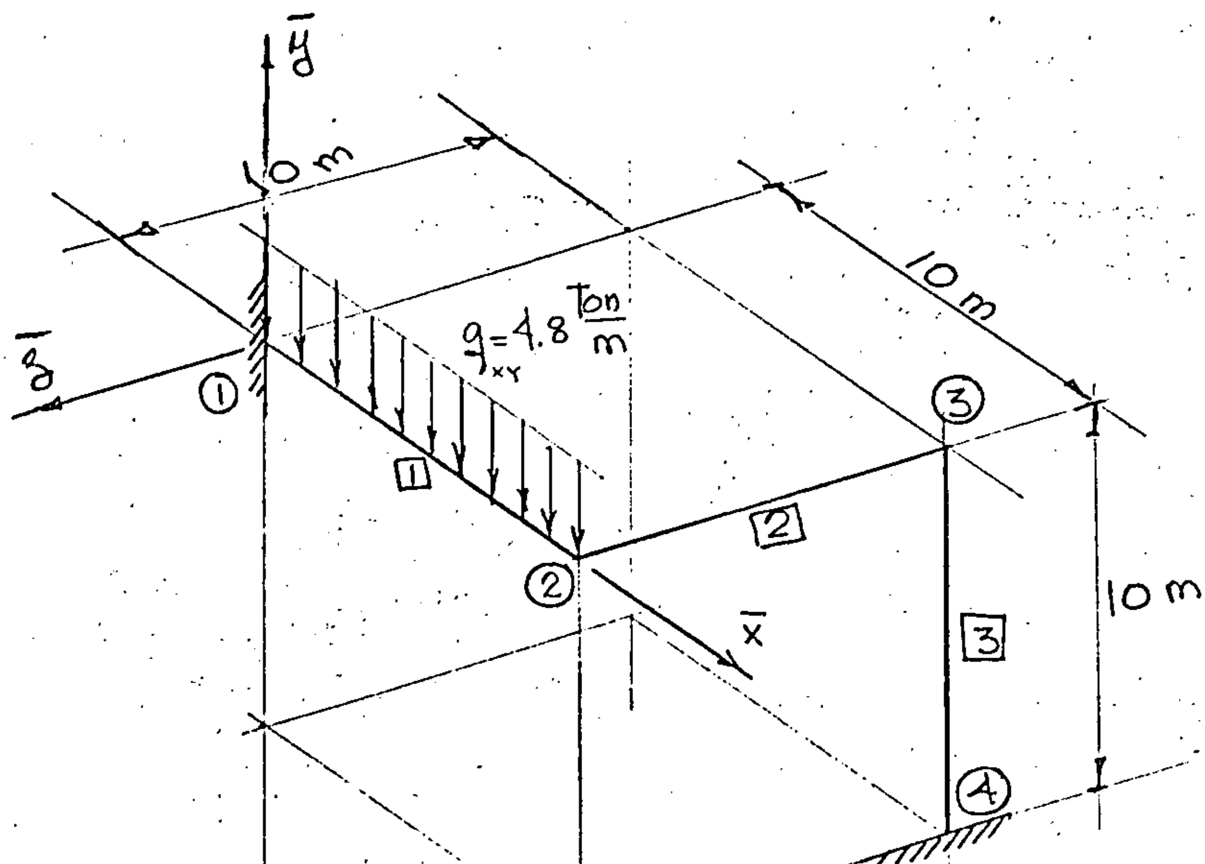


Fig. 2.3 Estructura espacial rígida

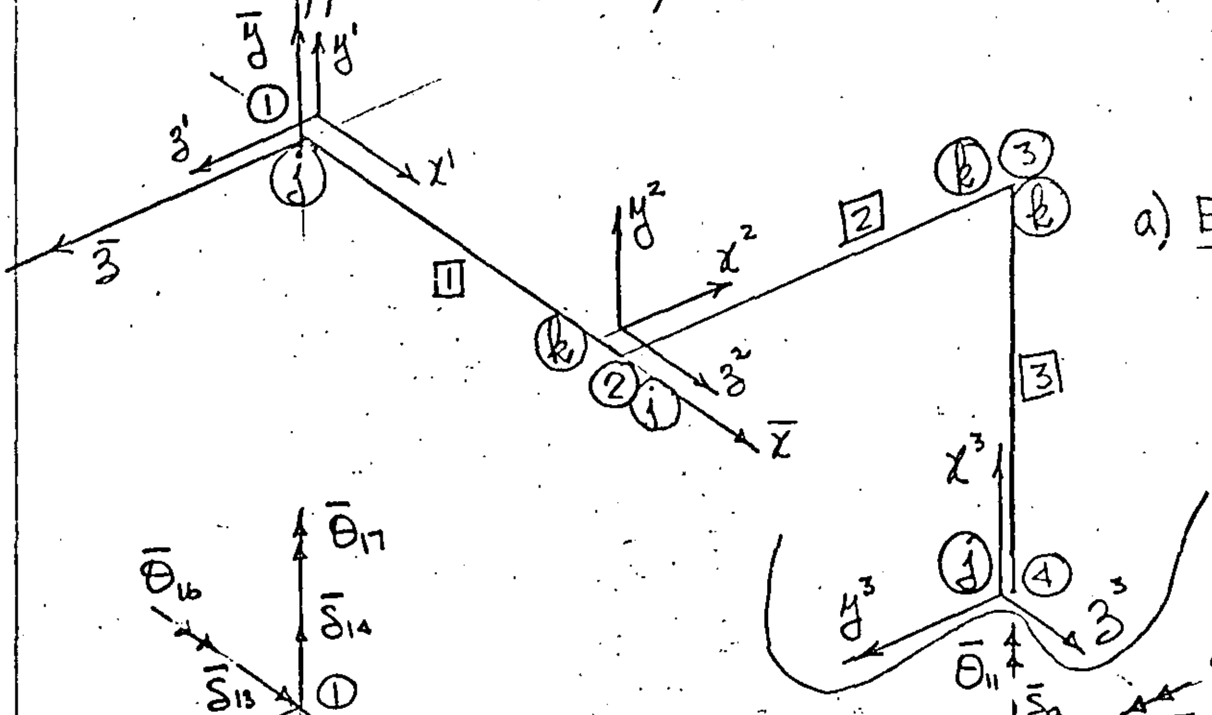
Las tablas 2.1 y 2.2 dan la información requerida para cada nodo y miembro

Nodo	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{z}$
1	0	0	0
2	10.0	0	0
3	10.0	0	-10.00
4	10.0	-10.00	-10.00

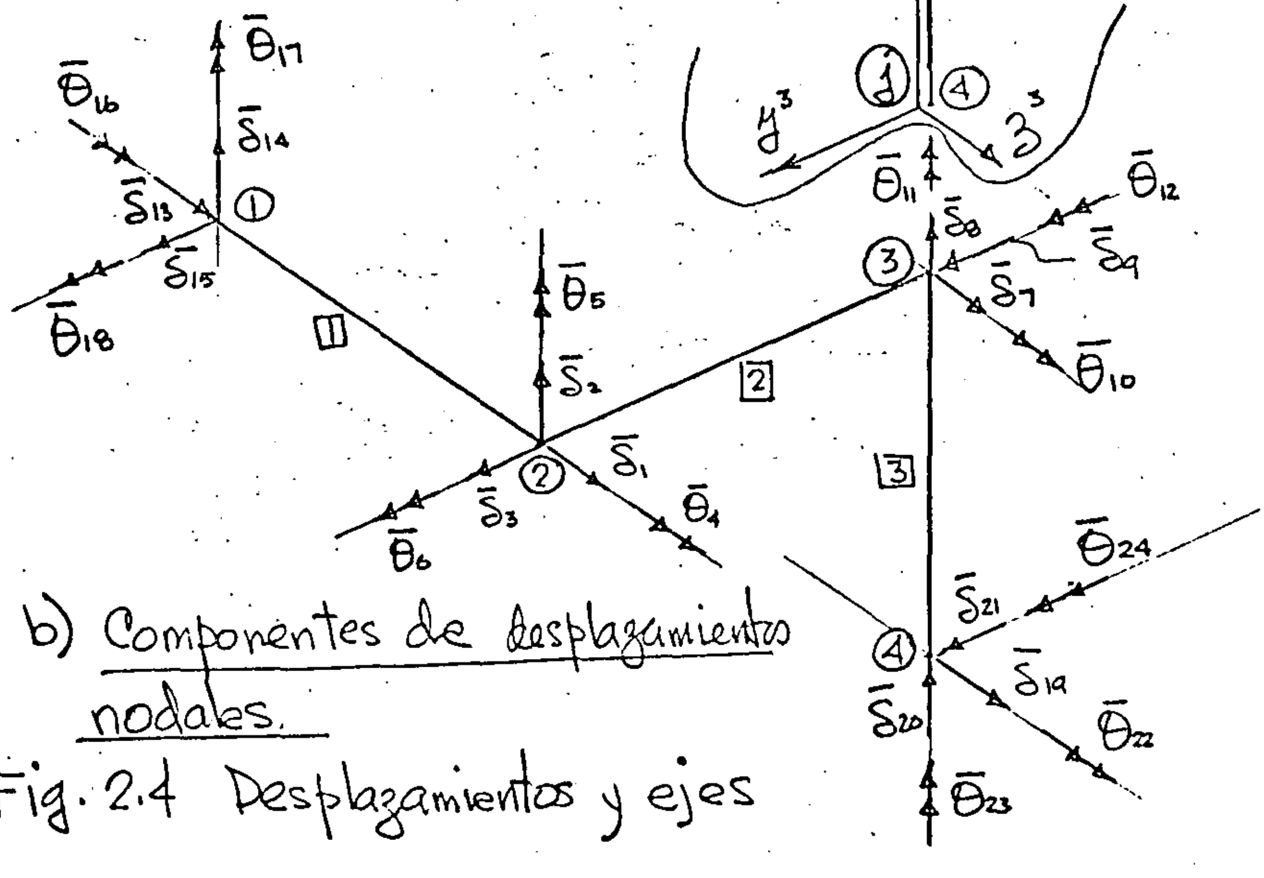
Tabla 2.1 coordenadas nodales en metros.

Barra	Longitud (m)	Nodo j	Nodo k	Cosenos directores l_{ok}	M_{bk}	N_{ok}	TIPO DE TRANSFORMACION	Angulo ψ
1	10.0	1	2	+1	0	0	y-z-x	0
2	10.0	2	3	0	0	-1	y-z-x	0
3	10.0	4	3	0	+1	0	z-y-x	90°

Tabla 2.2 longitudes, cosenos directores y Tipos de Transformación.



a) Ejes locales



b) Componentes de desplazamientos nodales.

Fig. 2.4 Desplazamientos y ejes

vector columna de desplazamientos nodales $\{\delta_c\}$

$$\{\delta_c\} = \left\{\begin{array}{c} \bar{\delta}_1 \\ \bar{\delta}_2 \\ \bar{\delta}_3 \\ \bar{\theta}_4 \\ \bar{\theta}_5 \\ \bar{\theta}_6 \\ \bar{\delta}_7 \\ \bar{\delta}_8 \\ \bar{\delta}_9 \\ \bar{\theta}_{10} \\ \bar{\theta}_{11} \\ \bar{\theta}_{12} \\ \hdashline \bar{\delta}_{13} \\ \bar{\delta}_{14} \\ \bar{\delta}_{15} \\ \bar{\theta}_{16} \\ \bar{\theta}_{17} \\ \bar{\theta}_{18} \\ \bar{\delta}_{19} \\ \bar{\delta}_{20} \\ \bar{\delta}_{21} \\ \bar{\theta}_{22} \\ \bar{\theta}_{23} \\ \bar{\theta}_{24} \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} \{\delta_u\} \\ \hdashline \{\delta_r\} \end{array}\right\} \qquad (2.19)$$

Matriz de rigidez de cada miembro

Para cada elemento viga, la matriz de rigidez se establece por medio de (2.1) con respecto a los ejes locales; la matriz de transformación se puede establecer por medio de la expresión (2.10); y la matriz de rigidez de miembro transformada, $[\bar{k}_{ij}]_i$ respecto al sistema global se obtiene de

$$[\bar{k}_{ij}]_i = [\lambda]_i^T \, [k_{ij}]_i \underbrace{[\lambda]_i}_{\text{Matriz Transformación}} \tag{2.20}$$

Miembro $\boxed{\text{I}}$

$$[\lambda]_1 = \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix} \equiv [I] \; ; \; [\bar{k}_{ij}]_1 = [I]^T [k_{ij}]_1 [I] \equiv [k_{ij}]_1 \tag{2.21}$$

$$[\bar{k}_{ij}]_1 \quad EI \; \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccc} 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} .025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & .012 & 0 & 0 & 0 & .060 & 0 & -.012 & 0 & 0 & 0 & .060 \\ 0 & 0 & .012 & 0 & -.060 & 0 & 0 & 0 & -.012 & 0 & -.060 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & .025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.025 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -.06 & 0 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & .06 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & .06 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0 & -.06 & 0 & 0 & 0 & 0.2 \\ -.025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -.012 & 0 & 0 & 0 & -.06 & 0 & .012 & 0 & 0 & 0 & -.06 \\ 0 & 0 & -.012 & 0 & .06 & 0 & 0 & 0 & .012 & 0 & .06 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -.025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .025 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -.06 & 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & .06 & 0 & .4 & 0 \\ 0 & .06 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0 & -.06 & 0 & 0 & 0 & .4 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 13 \\ 14 \\ 15 \\ 16 \\ 17 \\ 18 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \tag{2.22}$$

Miembro $\boxed{2}$ De (2.5) se obtiene:

$$[k_{ij}]_2 = EI \begin{bmatrix}
.025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & .012 & 0 & 0 & 0 & .06 & 0 & -.012 & 0 & 0 & 0 & .06 \\
0 & 0 & .012 & 0 & -.06 & 0 & 0 & 0 & -.012 & 0 & -.06 & 0 \\
0 & 0 & 0 & .025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.025 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -.06 & 0 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & .06 & 0 & 0.2 & 0 \\
0 & .06 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0 & -.06 & 0 & 0 & 0 & 0.2 \\
-.025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -.012 & 0 & 0 & 0 & -.06 & 0 & .012 & 0 & 0 & 0 & -.06 \\
0 & 0 & -.012 & 0 & .06 & 0 & 0 & 0 & .012 & 0 & .06 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -.025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .025 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -.06 & 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & .06 & 0 & .4 & 0 \\
0 & .06 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0 & -.06 & 0 & 0 & 0 & .4
\end{bmatrix} \qquad (2.23)$$

De (2.12); $\bar{\lambda}_{ox_2} = [0\ 0\ -1]_2$, $\bar{\lambda}_{oy_2} = [0\ 1\ 0]_2$, $\bar{\lambda}_{oz_2} = [1\ 0\ 0]_2$ (2.12)a

Subst. (2.12)a en (2.10) se obtiene

$$[\lambda]_2 = \begin{bmatrix}
\begin{matrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix} & & & \\
& \begin{matrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix} & & 0 \\
0 & & \begin{matrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix} & \\
& & & \begin{matrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix}
\end{bmatrix} \qquad (2.24)$$

Subst (2.24) y (2.23) en (2.20) se obtiene

$$[\bar{k}_{ij}]_2 = EI \begin{array}{c}
\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \end{matrix} \\
\begin{bmatrix}
.012 & 0 & 0 & 0 & -.06 & 0 & -.012 & 0 & 0 & 0 & -.06 & 0 \\
0 & .012 & 0 & .06 & 0 & 0 & 0 & -.012 & 0 & .06 & 0 & 0 \\
0 & 0 & .025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.025 & 0 & 0 & 0 \\
0 & .06 & 0 & .4 & 0 & 0 & 0 & -.06 & 0 & 0.2 & 0 & 0 \\
-.06 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0 & .06 & 0 & 0 & 0 & .2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.025 \\
-.012 & 0 & 0 & 0 & .06 & 0 & .012 & 0 & 0 & 0 & .06 & 0 \\
0 & -.012 & 0 & -.06 & 0 & 0 & 0 & .012 & 0 & -.06 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -.025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .025 & 0 & 0 & 0 \\
0 & .06 & 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & -.06 & 0 & .4 & 0 & 0 \\
-.06 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0 & .06 & 0 & 0 & 0 & .4 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .025
\end{bmatrix}
\end{array}
\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{matrix} \qquad (2.25)$$

Miembro $\boxed{3}$, De (2.5) se obtiene la matriz de rigidez la cual resulta igual a la de los miembro $\boxed{1}$ y $\boxed{2}$

$$[k_{ij}]_3 = [k_{ij}]_2 = [k_{ij}]_1 \qquad (2.26)$$

De (2.12) se obtiene

$$\bar{\lambda}_{ox_3} = [0\ 1\ 0]_3,\quad \bar{\lambda}_{oy_3} = [0\ 0\ 1]_3,\quad \bar{\lambda}_{oz_3} = [1\ 0\ 0]_3 \qquad (2.27)$$

De (2.27) y (2.10) se obtiene

$$[\lambda]_3 = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc} 0&1&0&&&&&&&&& \\ 0&0&1&&&&&&&&& \\ 1&0&0&&&&&&&&& \\ \hline &&&0&1&0&&&&&& \\ &&&0&0&1&&&&&0& \\ &&&1&0&0&&&&&& \\ \hline &&&&&&0&1&0&&& \\ &0&&&&&0&0&1&&& \\ &&&&&&1&0&0&&& \\ \hline &&&&&&&&&0&1&0 \\ &&&&&&&&&0&0&1 \\ &&&&&&&&&1&0&0 \end{array}\right] \qquad [k_{ij}]_3 = [\lambda]^t_3 [K_{ij}]_3 [\lambda]_3 \quad (2.28)$$

De (2.20) (2.26) y (2.28) se obtiene

$$[k_{ij}]_3 = EI \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccc} 19 & 20 & 21 & 22 & 23 & 24 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccccccccc} .012 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.06 & -.012 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.06 \\ 0 & .025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.025 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & .012 & .06 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.012 & .06 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & .06 & .4 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.06 & .2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & .025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.025 & 0 \\ -.06 & 0 & 0 & 0 & 0 & .4 & .06 & 0 & 0 & 0 & 0 & .2 \\ -.012 & 0 & 0 & 0 & 0 & .06 & .012 & 0 & 0 & 0 & 0 & .06 \\ 0 & -.025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .025 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -.012 & -.06 & 0 & 0 & 0 & 0 & .012 & -.06 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & .06 & .2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.06 & .4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -.025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .025 & 0 \\ -.06 & 0 & 0 & 0 & 0 & .2 & .06 & 0 & 0 & 0 & 0 & .4 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} \\ 19 \\ 20 \\ 21 \\ 22 \\ 23 \\ 24 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{array} \qquad (2.29)$$

Matriz de rigidez de la estructura.

La matriz completa de la estructura $[S_c]$ se obtiene sumando los coeficientes de rigidez de miembro dados en las expresiones (2.22), (2.25) y (2.29) con respecto a la identificación de subíndices de los elementos se obtiene

$$
[S_c] = EI \begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \end{array} \\
\left[\begin{array}{cccccccccccc}
.037 & 0 & 0 & 0 & -.06 & 0 & -.012 & 0 & 0 & 0 & -.06 & 0 \\
0 & .024 & 0 & .06 & 0 & -.06 & 0 & -.012 & 0 & .06 & 0 & 0 \\
0 & 0 & .037 & 0 & .06 & 0 & 0 & 0 & -.025 & 0 & 0 & 0 \\
0 & .06 & 0 & .425 & 0 & 0 & 0 & -.06 & 0 & 0.2 & 0 & 0 \\
-.06 & 0 & .06 & 0 & 0.8 & 0 & .06 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0 \\
0 & -.06 & 0 & 0 & 0 & .425 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.025 \\
-.012 & 0 & 0 & 0 & .06 & 0 & .024 & 0 & 0 & 0 & .06 & .06 \\
0 & -.012 & 0 & -.06 & 0 & 0 & 0 & .037 & 0 & -.06 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -.025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .037 & -.06 & 0 & 0 \\
0 & .06 & 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & -.06 & -.06 & .8 & 0 & 0 \\
-.06 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0 & .06 & 0 & 0 & 0 & .425 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.025 & .06 & 0 & 0 & 0 & 0 & .425 \\
\hdashline
-.025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -.012 & 0 & 0 & 0 & .06 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -.012 & 0 & -.06 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -.025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & .06 & 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -.06 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.012 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.06 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.025 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.012 & .06 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.06 & .2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.025 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .06 & 0 & 0 & 0 & 0 & .2
\end{array}\right]
\begin{array}{c} 1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8\\9\\10\\11\\12\\13\\14\\15\\16\\17\\18\\19\\20\\21\\22\\23\\24 \end{array}
\end{array}
= \left[\begin{array}{c} [S_{uu}] \\ \hdashline [S_{ru}] \end{array}\right] \qquad (2.30)
$$

De (2.30) se obtiene $[S_{uu}]^{-1}$

31

(2.31)

DESFI-UNAM Margo-1983 P. Ballesteros

$$[S_{\mu\mu}]^{-1} = \frac{1}{EJ}$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
	38.396	1.266	-6.236	0.001	1.750	0.085	11.279	-0.403	-5.028	-0.503	3.005	-1.578	1
	1.266	210.745	-43.160	-21.908	5.487	30.182	-39.151	11.279	-50.707	-13.286	3.124	7.303	2
	-6.236	-43.160	102.028	2.421	-11.235	-6.537	50.707	5.028	84.038	9.312	-2.752	-7.543	3
	0.001	-21.908	2.421	5.546	-0.346	-3.130	3.124	3.005	2.752	0.688	-0.278	-0.625	4
	1.750	5.487	-11.235	-0.346	3.048	0.888	-13.286	-0.503	-9.312	-1.061	0.688	1.928	5
	0.085	30.182	-6.537	-3.130	0.888	6.698	-7.303	1.587	-7.543	-1.928	0.625	1.425	6
	11.279	-39.151	50.707	3.124	-13.286	-7.303	210.745	1.266	43.160	5.487	-21.908	-30.182	7
	-0.403	11.279	5.028	3.005	-0.503	1.587	1.266	38.396	6.236	1.757	0.001	-0.085	8
	-5.028	-50.707	84.038	2.752	-9.312	-7.543	43.160	6.236	102.028	11.235	-2.421	-6.537	9
	-0.503	-13.286	9.312	0.688	-1.061	-1.928	5.487	1.750	11.235	3.048	-0.346	-0.888	10
	3.005	3.124	-2.752	-0.278	0.688	0.625	-21.908	0.001	-2.421	-0.346	5.546	3.130	11
	-1.587	7.303	-7.543	-0.625	1.928	1.425	-30.182	-0.085	-6.537	-0.888	3.130	6.698	12

Vector de momentos y reacciones fijas miembro $\boxed{1}$

$$\{\mu\}_1 = \begin{Bmatrix} P_{13} \\ P_{14} \\ P_{15} \\ \mu_{16} \\ \mu_{17} \\ \mu_{18} \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ \mu_4 \\ \mu_5 \\ \mu_6 \end{Bmatrix}_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 24 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 40 \\ 0 \\ 24 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -40 \end{Bmatrix}_1 = \{\bar{\mu}\}_1 \tag{2.32}$$

$$\{\bar{\mu}\}_1 = [\lambda]_1^T \{\mu\}_1 \tag{2.33}$$

$$\{\mu\}_2 = 0 \quad ; \{\bar{\mu}\}_2 = 0$$

$$\{\mu\}_3 = 0 \quad ; \{\bar{\mu}\}_3 = 0$$

Habiendo definido las cargas nodales en términos de las acciones fijas en los extremos con respecto a los ejes de referencia, se deduce el vector de cargas nodales completo $\{\mu_c\}$, como.

$$\{\mu_c\} = \left\{ \begin{array}{c} \{\mu_l\} \\ \hline \{\mu_r\} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ -24 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 40.0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hdashline 0 \\ -24 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -40.0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \\ 15 \\ 16 \\ 17 \\ 18 \\ 19 \\ 20 \\ 21 \\ 22 \\ 23 \\ 24 \end{array} \qquad (2.34)$$

Etiqueta de grados de libertad

Substituyendo (2.21) y (2.34) en (2.15) se obtiene

$$\{\bar{\delta}_u\} = [S_{uu}]^{-1}\{\mathcal{U}_u\} \qquad (2.35)$$

$$\{\bar{\delta}_u\} = \begin{Bmatrix} \bar{\delta}_1 \\ \bar{\delta}_2 \\ \bar{\delta}_3 \\ \bar{\theta}_4 \\ \bar{\theta}_5 \\ \bar{\theta}_6 \\ \bar{\delta}_7 \\ \bar{\delta}_8 \\ \bar{\delta}_9 \\ \bar{\theta}_{10} \\ \bar{\theta}_{11} \\ \bar{\theta}_{12} \end{Bmatrix} = \frac{1}{EI}\begin{Bmatrix} -26.984 \\ -3850.6 \\ 774.36 \\ 400.592 \\ -96.168 \\ -456.448 \\ 647.504 \\ -207.216 \\ 915.248 \\ 241.744 \\ -49.976 \\ -118.272 \end{Bmatrix} \qquad (2.36)$$

Los valores de los desplazamientos dados por (2.36) con respecto al sistema global son valores relativos, para obtener los valores se substituye E en ton/m² e I en m⁴ en (2.36) y se obtiene δ_i en metros y θ en radianes.

Acciones Finales en los extremos.

Habiendo evaluado las componentes de los desplazamiento nodales con respecto al sistema global de referencia por medio de (2.10) se evaluan con respecto a las coordenadas locales de cada barra y las acciones finales para cada miembro de la estructura se calculan de (2.1)

$$\{p\}_i = [k_{ij}][\lambda]_i\{\bar{S}\}_i + \{\mu\}_i \qquad (2.37)$$

De la Fig. 2.4 se tiene para el miembro $\boxed{I}$

$$\{\bar{\delta}\}_1 = \begin{Bmatrix} \bar{\delta}_{13} \\ \bar{\delta}_{14} \\ \bar{\delta}_{15} \\ \bar{\theta}_{16} \\ \bar{\theta}_{17} \\ \bar{\theta}_{18} \\ \bar{\delta}_1 \\ \bar{\delta}_2 \\ \bar{\delta}_3 \\ \bar{\theta}_4 \\ \bar{\theta}_5 \\ \bar{\theta}_6 \end{Bmatrix}_1 = \frac{1}{EI}\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -26.984 \\ -3850.6 \\ 774.36 \\ 400.592 \\ -96.168 \\ -456.448 \end{Bmatrix}_1 \qquad (2.38)$$

De (2.21), (2.38), (2.1) y (2.5) se obtiene

$$\{P\}_1 = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ m_4 \\ m_5 \\ m_6 \\ P_7 \\ P_8 \\ P_9 \\ m_{10} \\ m_{11} \\ m_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.7 \text{ Ton} \\ 42.8 \text{ Ton} \\ -3.5 \text{ Ton} \\ -10.0 \text{ Ton-m} \\ 27.2 \text{ Ton-m} \\ 179.7 \text{ Ton-m} \\ -0.7 \text{ Ton} \\ 5.2 \text{ Ton} \\ 3.5 \text{ Ton} \\ 10.0 \text{ Ton-m} \\ 8.0 \text{ Ton-m} \\ 8.5 \text{ Ton-m} \end{Bmatrix} \qquad (2.39)$$

(índices según convención Fig. 2.4)

Miembro $\boxed{2}$. $\{\bar{\delta}\}_2 = \{\delta_\mu\} = [\lambda]_2\{\bar{\delta}_\mu\}$ y $\{\mu\}_2 = \{0\}$

De , (2.24) (2.25), (2.1) y (2.5) se obtiene

$$\{P\}_2 = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ m_4 \\ m_5 \\ m_6 \\ P_7 \\ P_8 \\ P_9 \\ m_{10} \\ m_{11} \\ m_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3.5 \text{ Ton} \\ -5.2 \text{ "} \\ 0.7 \text{ "} \\ 8.5 \text{ Ton-m} \\ -8.0 \text{ "} \\ -10.0 \text{ "} \\ -3.5 \text{ Ton} \\ 5.2 \text{ "} \\ -0.7 \text{ "} \\ -8.5 \text{ Ton-m} \\ 1.2 \text{ "} \\ -41.8 \text{ "} \end{Bmatrix} \qquad (2.40)$$

(índices según convención Fig. 2.4)

Miembro $\boxed{3}$

$$\left\{\bar{\delta}\right\}_3 = \begin{Bmatrix} \bar{\delta}_{19} \\ \bar{\delta}_{20} \\ \bar{\delta}_{21} \\ \bar{\theta}_{22} \\ \bar{\theta}_{23} \\ \bar{\theta}_{24} \\ \bar{\delta}_{7} \\ \bar{\delta}_{8} \\ \bar{\delta}_{9} \\ \bar{\theta}_{10} \\ \bar{\theta}_{11} \\ \bar{\theta}_{12} \end{Bmatrix}_3 = \frac{1}{EI}\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 647.504 \\ -207.216 \\ 915.248 \\ 241.744 \\ -49.976 \\ -118.272 \end{Bmatrix}_3 \qquad (2.41)$$

en $\boxed{3}$ También $\{\mathcal{U}\}_3 = 0$, De (2.28), (2.29), (2.1) y (2.5) se obtiene

$$\{p\}_3 = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ M_4 \\ M_5 \\ M_6 \\ P_7 \\ P_8 \\ P_9 \\ M_{10} \\ M_{11} \\ M_{12} \end{Bmatrix}_3 = \begin{Bmatrix} 5.2 \text{ Ton} \\ 3.5 \text{ ''} \\ -0.7 \text{ -} \\ 1.2 \text{ Ton-m} \\ 15.2 \text{ ''} \\ -6.6 \text{ ''} \\ -5.2 \text{ Ton} \\ -3.5 \text{ ''} \\ 0.7 \text{ ''} \\ -1.2 \text{ Ton-m} \\ -8.5 \text{ ''} \\ 41.8 \text{ ''} \end{Bmatrix}_3 \qquad (2.42)$$

Reacciones.

Substituyendo las matrices apropiadas en

$$\{R\} = [S_{ru}]\{\delta_u\} - \{\mathcal{M}_r\}$$

se obtiene

$$\{R\} = \begin{Bmatrix} R_{13} \\ R_{14} \\ R_{15} \\ R_{16} \\ R_{17} \\ R_{18} \\ R_{19} \\ R_{20} \\ R_{21} \\ R_{22} \\ R_{23} \\ R_{24} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.7 \text{ Ton} \\ 42.8 \text{ "} \\ -3.5 \text{ "} \\ -10.0 \text{ Ton-m} \\ 27.2 \text{ Ton-m} \\ 179.7 \text{ "} \\ -0.7 \text{ Ton} \\ 5.2 \text{ "} \\ 3.5 \text{ "} \\ -6.6 \text{ Ton-m} \\ 1.2 \text{ "} \\ 15.2 \text{ "} \end{Bmatrix} \qquad 2.43$$

DESFI- UNAM | Marzo-1983 | P. Ballesteros

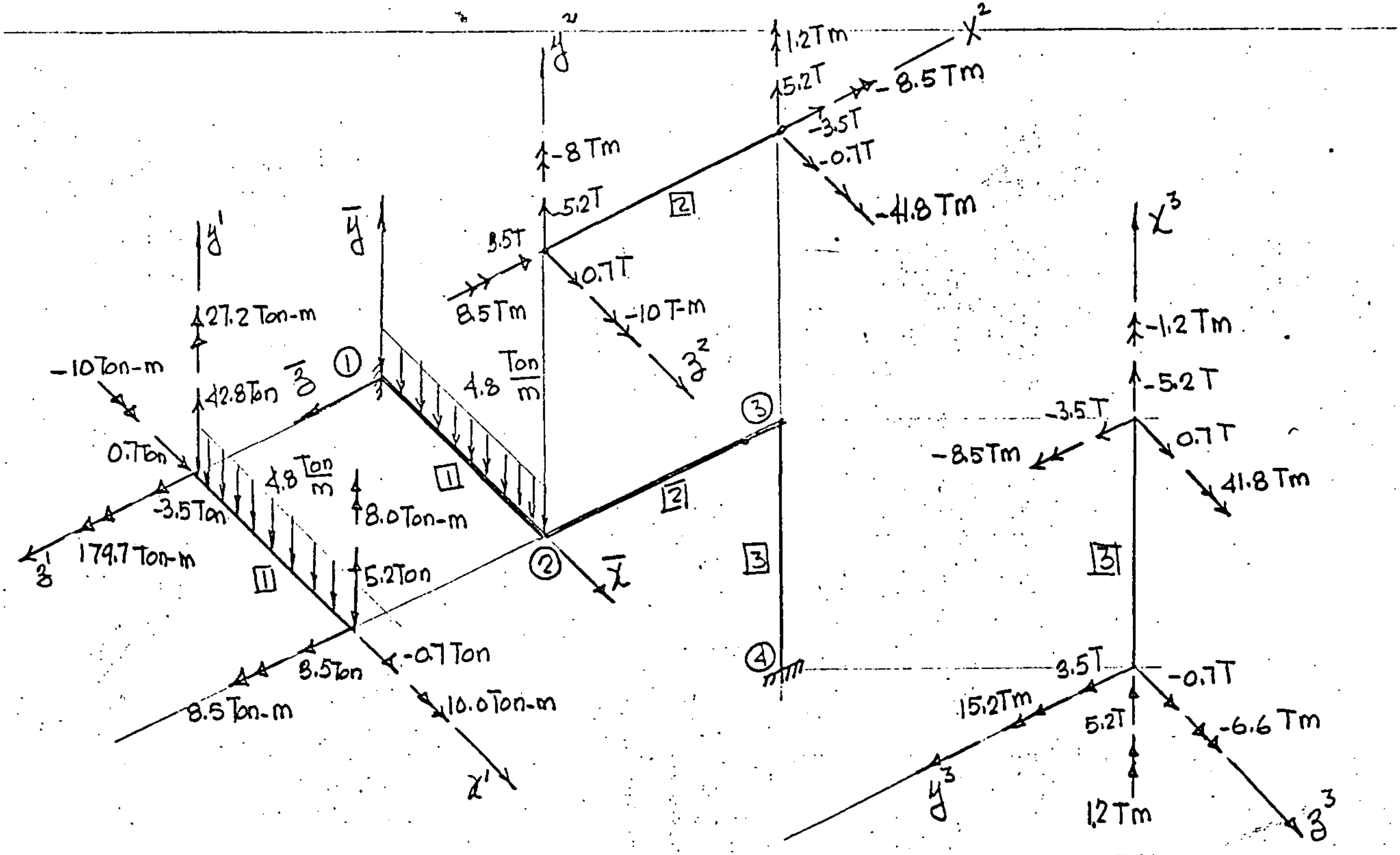


Fig. 2.5 Componentes de acciones finales $\{P_c\}$ en los extremos j k

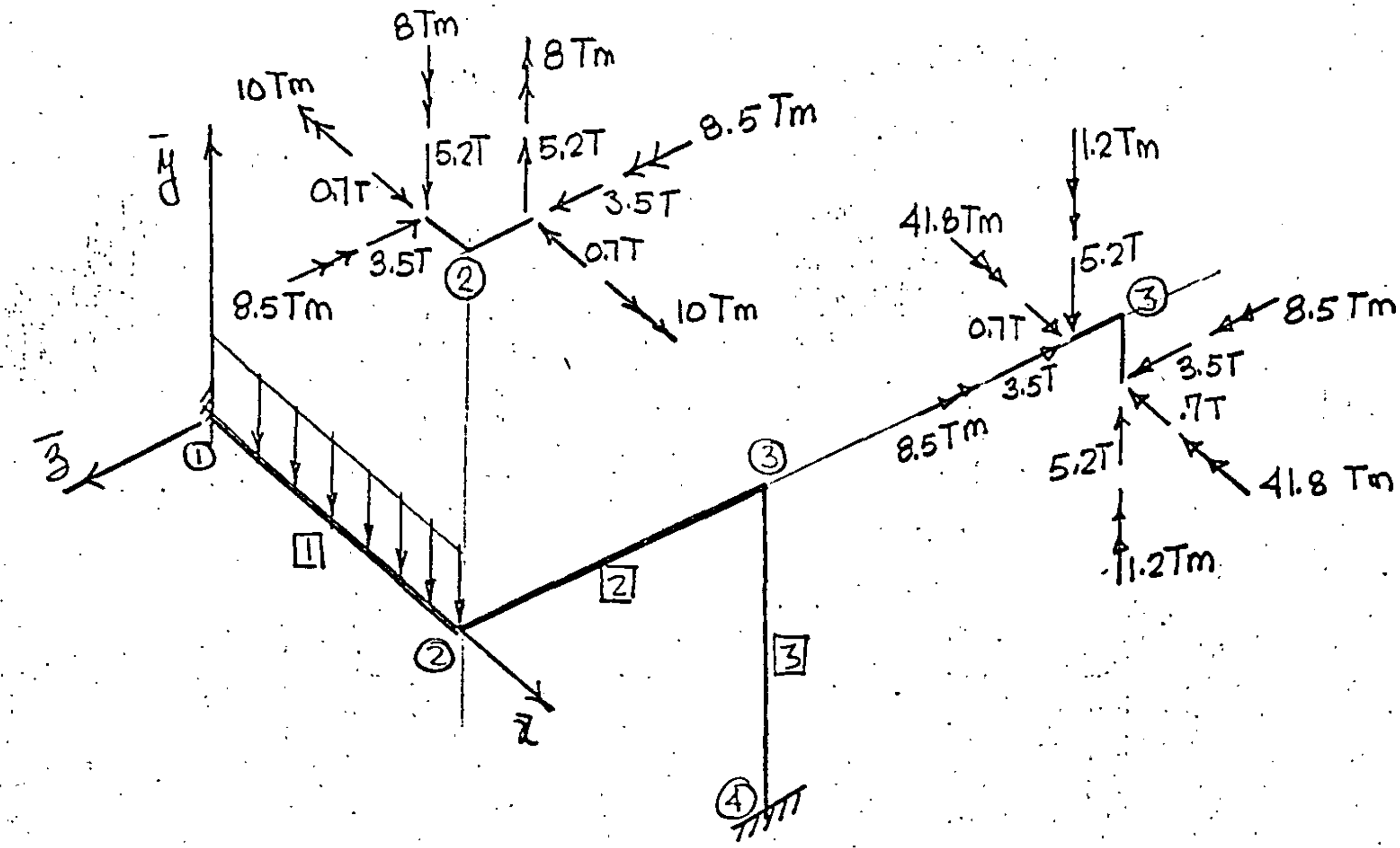


Fig. 2.6 Diagrama de cuerpo libre de los nodos ② y ③

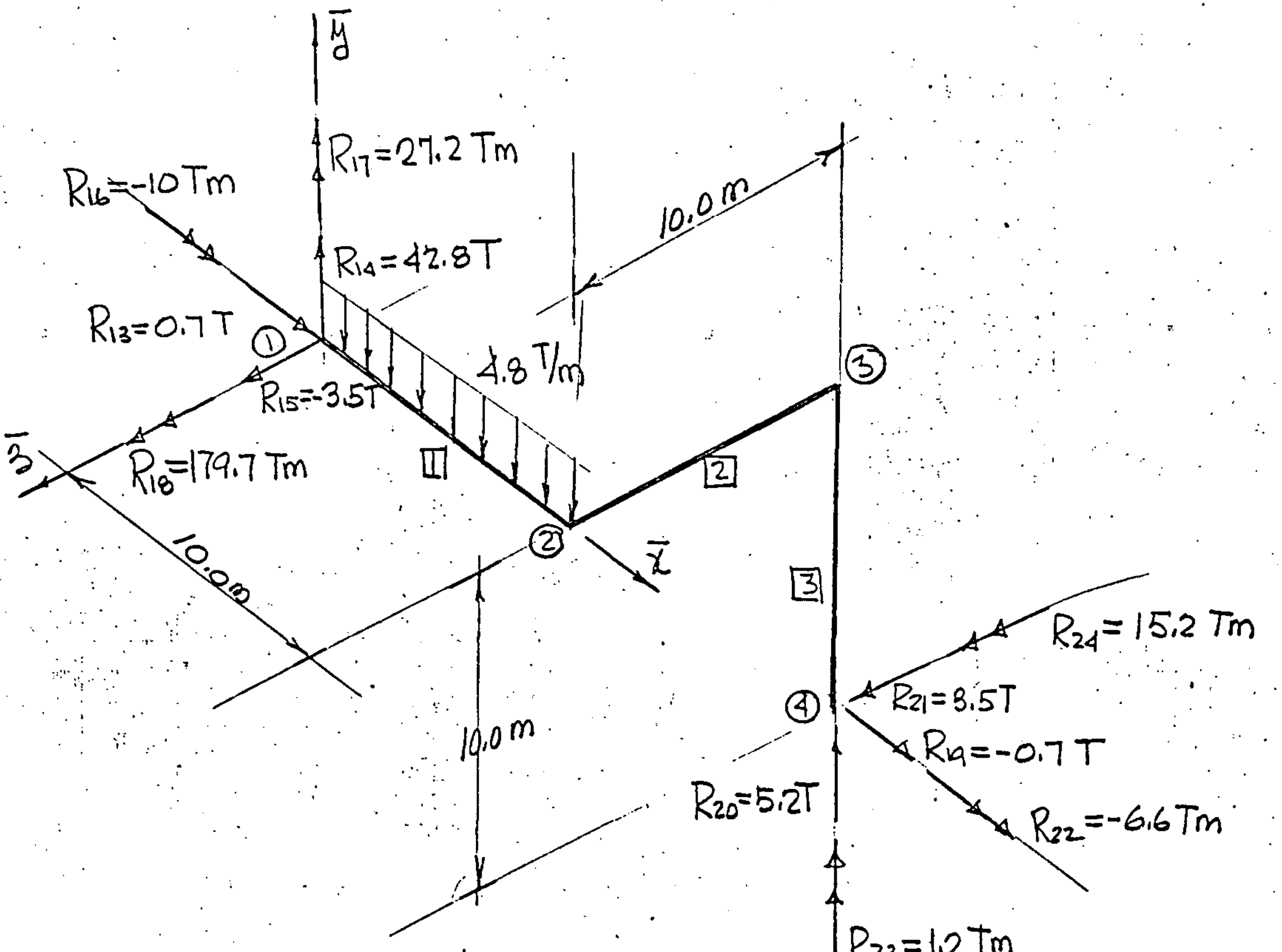


Fig. 2.7 Componentes de las reacciones en los apoyos ① y ④

DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.

EL METODO DEL ELEMENTO FINITO EN LA INGENIERIA

MODELACION MATEMATICA DE SISTEMAS

DR. PORFIRIO BALLESTEROS B.

FEBRERO, 1985

4. MODELACION MATEMATICA DE SISTEMAS

4.1. Introducción al Cálculo de Variaciones

Existe una gran variedad de sistemas físicos que pueden ser descritos desde un punto de vista variacional y en este contexto, el manejo de cálculo de variaciones se considera como una herramienta matemática que permite la formulación de un sistema mediante conceptos matemáticos que pueden relacionarse directamente con aspectos físicos del mismo.

El problema clásico de cálculo de variaciones consiste en encontrar los valores estacionarios de un funcional el cual se define como una integral definida cuyo valor numérico depende de la función integrada y para encontrar los valores estacionarios de dicha integral es necesario encontrar la función que sustituida en el integrando correspondiente ceda un valor extremo, es decir mínimo o máximo.

Sea el funcional I definido por:

$$I = \int_a^b F(x)\,dx \qquad (4.1.1)$$

Cada función F(x) que sea sustituida en esta ecuación resulta en un valor numérico de I diferente y aquella función F*(x) que resulte en un valor mínimo o máximo, hace el funcional I estacionario.

Es conveniente pensar en el paralelismo que existe entre el concepto de encontrar los valores estacionarios de un funcional y de una función algebráica. Cuando se busca el mínimo o máximo de una función definida como

$$y = f(x) \qquad (4.1.2)$$

Ciertas condiciones deben ser satisfechas, como lo son que la función sea continua en el rango de interés, que sea deribable dos veces en dicho rango y que además la primera derivada de la función con respecto a la variable sea cero es decir

$$y' = \frac{dy}{dx} = 0 \tag{4.1.3}$$

El resultado es un valor de la variable independiente para el cual la función f(x) es estacionario.

Entonces, cuando se extremiza una función se encuentra un valor de la variable independeinte, más cuando se extremiza un funcional se encuentra uan función. La condición suficiente y necesaria para extremizar dicho funcional consiste en que su primera variación sea cero; es decir:

$$\delta I = \delta \int_a^b F(x)\,dx \tag{4.1.4}$$

Esta condición es análoga a la condición de la ecuación (4.1.3). Un ejemplo de aplicación del concepto variacional es el problema de encontrar la trayectoria que debe seguir una partícula de masa m para moverse desde el punto A al punto B en un plano, bajo la acción de la gravedad de tal forma que el tiempo de recorrido sea mínimo. Figura (4.1.1).

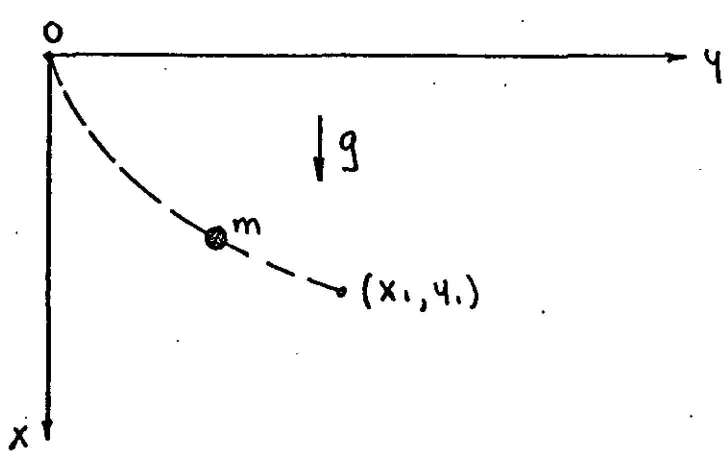


Figura 4.1.1 Problema de brachistochrone

El funcional que se puede proponer para este problema es:

$$t = \int_0^{s_1} \frac{ds}{v} \tag{4.1.5}$$

en donde:

$$ds = \pm\sqrt{1+y'^2}\, dx \tag{4.1.6}$$

y de consideraciones energéticas

$$\frac{1}{2} m v^2 = m g x \tag{4.1.7}$$

entonces combinando las tres últimas ecuaciones se tiene que

$$t = \int_0^{x_1} \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gx}}\, dx \tag{4.1.8}$$

El problema consiste en encontrar una función $y=f(x)$ tal que el funcional t sea mínimo.

Antes de proceder a formular la solución es necesario describir la forma general del problema clásico de cálculo de variaciones.

Sea el funcional π definido por

$$\Pi = \int_a^b F(x, y, y')\, dx \tag{4.1.9}$$

en donde $y' \equiv \frac{dy}{dx}$. El problema consiste en encontrar funciones $y=y(x)$ para las cuales pequeñas variaciones arbitrarias $\delta y(x)$, no cambien el valor de π.

La condición suficiente y necesaria para encontrar un valor estacionario de π es de acuerdo con la ecuación (4.1.4)

$$\delta\Pi = \int_a^b \delta F(x, y, y')\, dx = 0 \tag{4.1.10}$$

Tomando la variación de F resulta

$$\delta \Pi = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right) dx = 0 \tag{4.1.11}$$

en donde $\delta y' = \frac{d}{dx}(\delta y)$ (4.1.12)

Sustituyendo (4.1.12) en (4.1.11) e integrando por partes el resultado es:

$$\delta \Pi = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] \delta y \, dx + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \Big|_a^b = 0 \tag{4.1.13}$$

Entonces para que $\delta\pi$ sea cero es necesario que:

$$y(a) = y(b) = \text{constante} \tag{4.1.14}$$

y por lo tanto

$$\delta y(a) = \delta y(b) = 0 \tag{4.1.15}$$

o en su defecto que los dos términos de la integral en la ecuación (4.1.12) sean cero, es decir

$$\frac{\partial F(a)}{\partial y'} = \frac{\partial F(b)}{\partial y'} = 0 \tag{4.1.16}$$

y

$$\int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] \delta y \, dx = 0 \tag{4.1.17}$$

dado que δY es arbitraria entre los límites a y b y no necesariamente cero entonces

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0 \tag{4.1.18}$$

Esta es la ecuación conocida como la ecuación Euler-Lagrange y aquella función $Y(x)$ que satisfaga la ecuación (4.18) hace el funcional π estacionario.

Regresando al problema de brachistochrone podemos identificar el integrando de las ecuaciones (4.1.8) y (4.1.9) es decir

$$F(x,y,y') = \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gx}} \tag{4.1.19}$$

y dado que y no aparece explícitamente en (4.1.19) entonces

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0 \tag{4.1.20}$$

que implica que el paréntesis es igual a una constante

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{2gx(1+y'^2}} = C \tag{4.1.21}$$

despejando Y' de (4.1.21) queda

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{2gc^2x}{1-2gc^2x}} \tag{4.1.22}$$

de donde

$$y = \int\left(\frac{2gc^2x}{1-2gc^2x}\right)^{1/2} dx \tag{4.1.23}$$

La solución de esta integral a través de tablas de integración y algunas manipulaciones cede la siguiente solción.

$$y = \frac{1}{4gc^2}(\theta - \operatorname{sen}\theta) \tag{4.1.24}$$

en donde

$$\theta = \cos^{-1}(1-4gc^2x) \tag{4.1.25}$$

Entonces sustituyendo la ecuación (4.1.22) es (4.1.8) se puede comprobar que el tiempo de recorrido es mínimo en comparación con cualquier otra trayectoría que pase por los puntos extremos de la curva.

Otro problema clásico que el lector puede realizar como ejercicio consiste en encontrar la trayectoria que debe seguir la partícula que haga la distancia de recorrido mínima. El resultado es obviamente una línea recta que une los puntos extremos. El funcional correspondiente para este otro problema es:

$$S = \int_0^{x_1} \sqrt{1+y'^2}\, dx \tag{4.1.26}$$

Un funcional en general puede tener varias variables independientes, por ejemplo:

$$\Pi = \int_V F(x, y, z, \varphi, \varphi_x \varphi_y \varphi_z)\, dV \tag{4.1.27}$$

en donde ψx, ψy, ψz son las parciales de ψ con respecto a las tres variables independientes. Una variación de π ocasionada por un pequeño cambio en F es:

$$\delta\Pi = \int_V \left(\frac{\partial F}{\partial \varphi}\delta\varphi + \frac{\partial F}{\partial \varphi_x}\delta\varphi_x + \frac{\partial F}{\partial \varphi_y}\delta\varphi_y + \frac{\partial F}{\partial \varphi_z}\delta\varphi_z \right) dV \tag{4.1.28}$$

y aplicando la ecuación (4.1.11) resulta

$$\delta\Pi = \int_V \left[\frac{\partial F}{\partial \varphi}\delta\varphi + \frac{\partial F}{\partial \varphi_x}\frac{\partial}{\partial x}(\delta\varphi) + \frac{\partial F}{\partial \varphi_y}\frac{\partial}{\partial y}(\delta\varphi) + \frac{\partial F}{\partial \varphi_z}\frac{\partial}{\partial z}(\delta\varphi) \right] dV \tag{4.1.29}$$

en esta ecuación los últimos términos satisfacen por el teorema de divergencia de Gauss lo siguiente:

$$\int_V \frac{\partial F}{\partial \varphi_x}\frac{\partial}{\partial x}(\delta\varphi)\, dV = \int_S l_x \frac{\partial F}{\partial \varphi_x}\delta\varphi\, ds - \int_V \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial \varphi_x}\right)\delta\varphi\, dV \tag{4.1.30}$$

en donde lx es el coseno direccional de la normal a la superficie con respecto al eje x. La ecuación (4.1.29) queda como sigue:

$$\delta\Pi = \int_V \left[\frac{\partial F}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial \varphi_x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial \varphi_y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F}{\partial \varphi_z}\right)\right] \delta\varphi \, dV$$

$$+ \int_S \left[l_x \frac{\partial F}{\partial \varphi_x} + l_y \frac{\partial F}{\partial \varphi_y} + l_z \frac{\partial F}{\partial \varphi_z} \right] \delta\varphi \, ds \qquad (4.1.31)$$

Ahora, un valor estacionaro de Π ocurre solamente cuando los términos de los paréntesis son cero. Esto da como resultado la ecuación diferencial que gobierna el sistema y sus condiciones de frontera.

El funcional de la ecuación (4.1.31) es aplicable a problemas de campo y un ejemplo es el siguiente; sea el funcional

$$\Pi = \int_V \frac{1}{2}\left[K_{xx}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + K_{yy}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + K_{zz}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2 - 2Q\varphi \right] dv \qquad (4.1.32)$$

aplicando la forma de la ecuación (4.1.31) el resultado es el siguiente

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial \varphi_x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial \varphi_y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F}{\partial \varphi_z}\right) = 0 \qquad (4.1.33)$$

y considerando los términos individuales resulta

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi} = -2Q$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial \varphi_x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(2K_{xx}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) = 2K_{xx}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial \varphi_y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(2K_{yy}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) = 2K_{yy}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \qquad (4.1.34)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F}{\partial \varphi_z}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(2K_{zz}\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) = 2K_{zz}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$$

Las ecuaciones combinadas ceden la ecuación diferencial que aplica para problemas de campo;

$$Q + K_{xx}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + K_{yy}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + K_{zz}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0 \tag{4.1.35}$$

y como conclusión tenemos que el funcional π de la ecuación (4.1.32) es estacionario cuando la ecuación diferencial (4.1.35) se satisface.

4.2 Formulación Variacional del Elemento Finito

4.2.1 Introducción

El concepto fundamental del método del elemento finito (MEF) consiste en que cualquier función continua en un dominio dado, puede aproximarse mediante una sucesión de funciones que se definen en una serie de subdominios dentro de los cuales estas funciones son continuas y las cuales se interconectan para aproximar así la función dada (Fig.4.2.1)

Desde un punto de vista físico, el concepto fundamental del método del elemento finito consiste en que para resolver un sistema que representa una estructura física sujeta a ciertas condiciones físicas, se puede utilizar un modelo aproximado compuesto de una serie de elementos que se interconectan en una serie de puntos llamados nodos (Fig.4.2.2)y cuyo comportamiento es conocido a través de ciertas ecuaciones preestablecidas y que corresponden a los tipos de elementos usados y al número de nodos en cada uno de ellos.

La solución de las ecuaciones del modelo pueden ser exactas, pero el modelo en si es una aproximación discreta al sistema físico y la solución de dicho modelo se aproxima a la solución del sistema real. Los antecedentes del método del elemento finito datan de los años 50's cuando surgió del análisis de estructuras aereonáuticas, y ha evolucionado rápidamente hasta expander sus aplicaciones a varios campos de la ingeniería como son la transmisión de calor, la elasticidad, mecánica de fluidos, estructuras, lubricación y otros muchos.

4.2.2 Formulación de un Problema de Ingeniería

La formulación matemática en problemas de ingeniería generalmente se puede efectuar en dos formas diferentes,

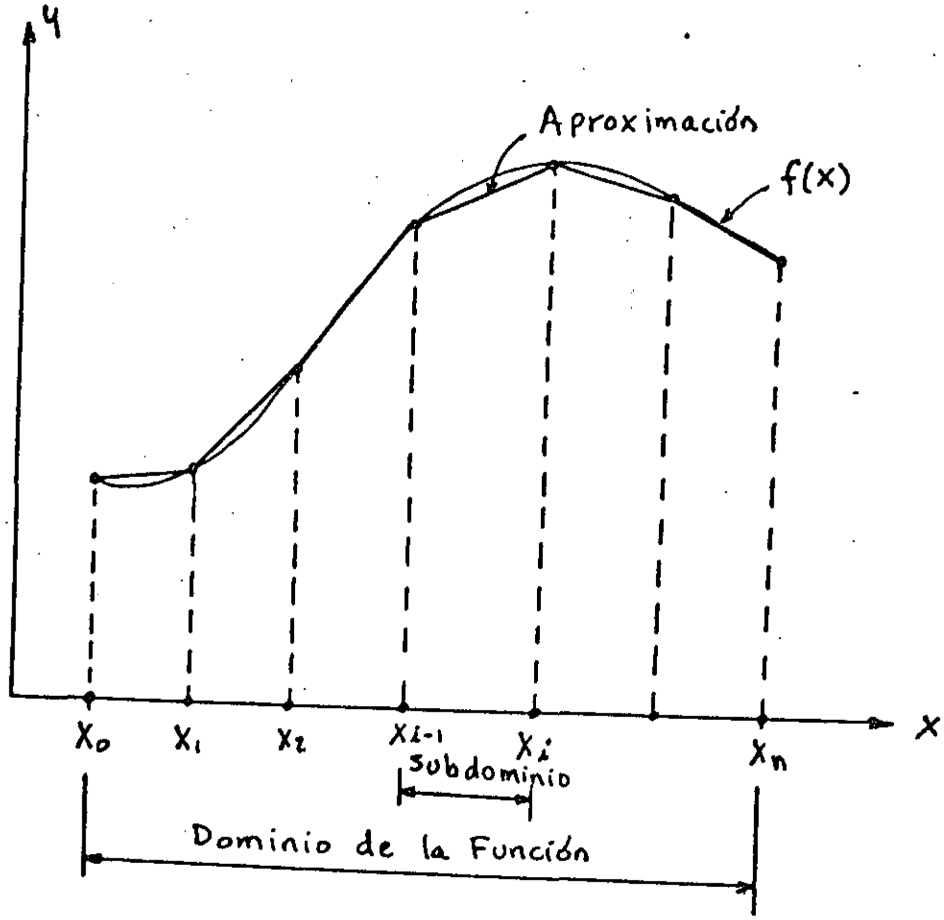


Fig 4.2.1 Aproximación de una función continua a traves de una serie de funciones lineales conectadas

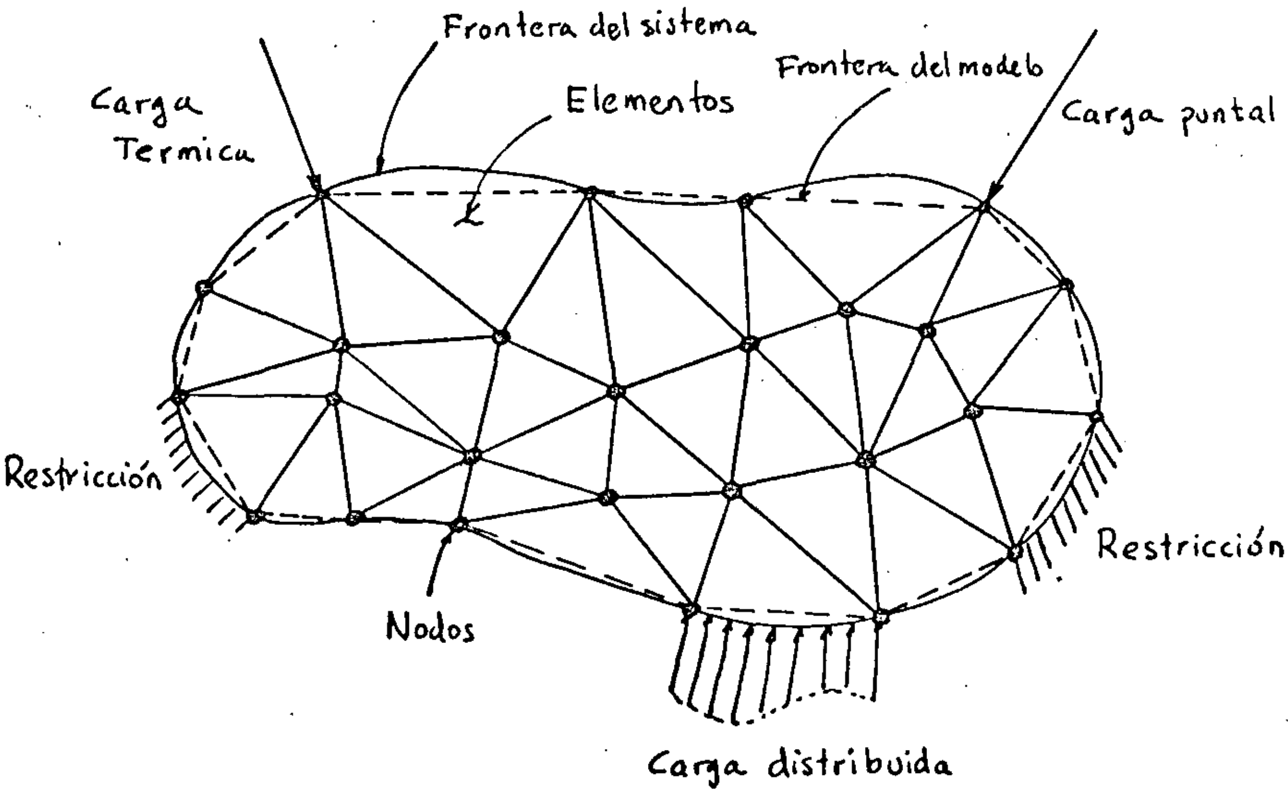


Fig. 4.2.2 Sistema de un cuerpo deformable sujeto a cargas y restricciones y discretizado con elementos finitos

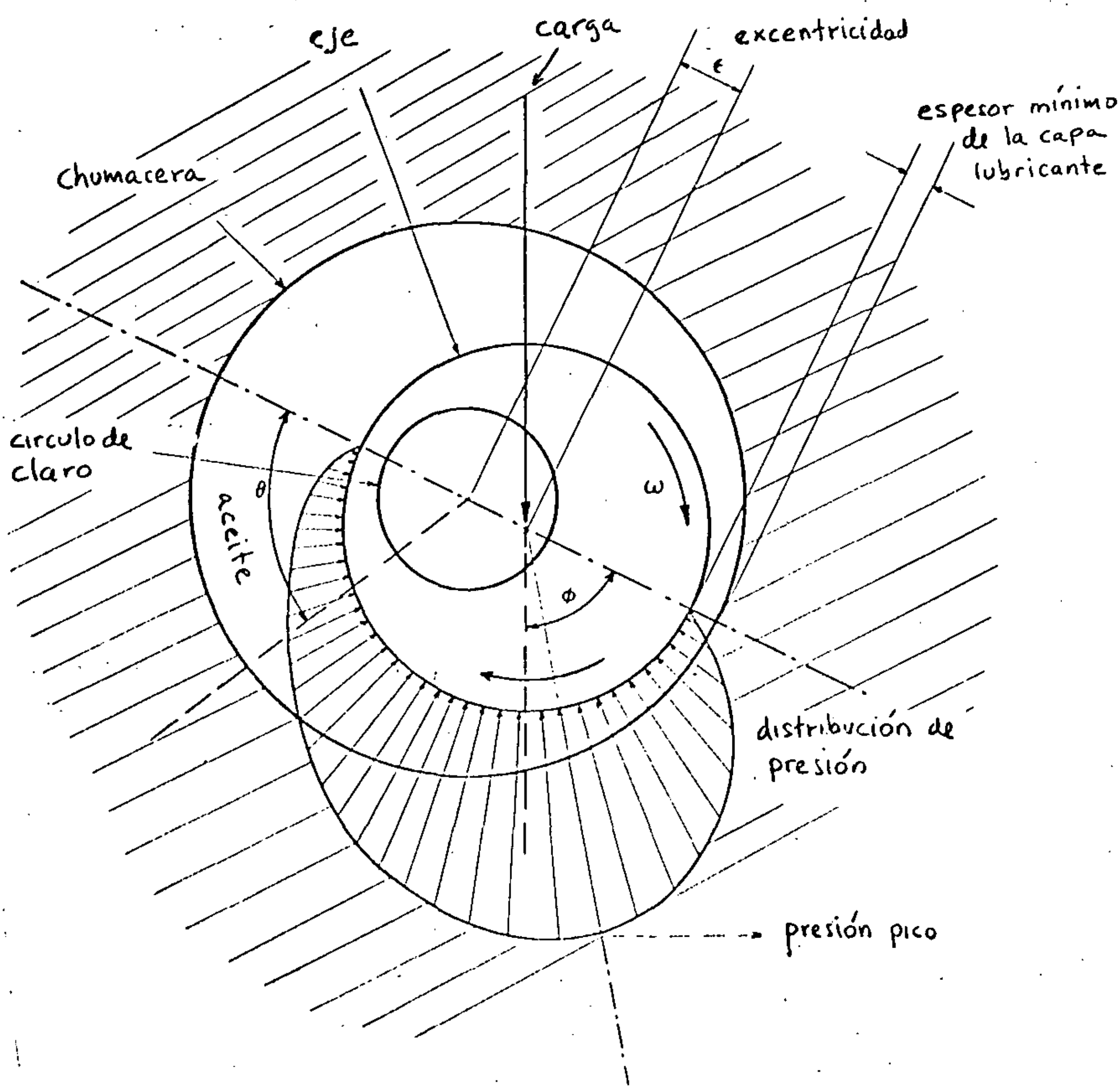


Fig. 4.2.3 Sistema Chumacera - Eje lubricado hidrodinámicamente

Resumiendo lo anterior, el procedimiento para desarrollar el análisis de una estructura deformable consiste en establecer un funcional, el cual es el valor de una integral y que tiene la forma

$$\Pi = \int_{x_a}^{x_b} F(x, y, y')\, dx \tag{4.2.2}$$

en donde

$$y = y(x) \quad , \quad y' = \frac{dy(x)}{dx} \tag{4.2.3}$$

Una vez establecido este funcional se procede a encontrar sus valores extremos, lo cual requiere que su primera variación sea igual a cero, es decir que cumpla con la condición de estacionaridad de una integral mediante:

$$\delta \Pi = 0 \tag{4.2.4}$$

Cabe mencionar que encontrar el valor estacionario de una integral es similar a encontrar los valores mínimos o máximos de una función en cálculo diferenical, excepto que al minimizar una función se obtiene un valor de la variable independiente que nos da un mínimo en la función, mientras que al minimizar un funcional se obtiene una función que al integrarse hace el valor de dicha integral mínimo.

Para llevar a cabo lo anterior se puede proceder a discretizar la integral mediante la siguiente ecuación

$$\Pi = \int_{x_a}^{x_b} F(x,y,y')\,dx = \int_{x_a}^{x_1} F(x,y,y')\,dx + \int_{x_1}^{x_2} F(x,y,y')\,dx + \dots + \int_{x_n}^{x_b} F(x,y,y')\,dx \tag{4.2.5}$$

O bien:

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 + \cdots + \Pi_n \qquad (4.2.6)$$

La integral total π ahora consiste en varias integrales parciales π_i, cada una extendiéndose en los subdominios $(x_i - 1, x_i)$.

El concepto de discretizar la integral de la ecuación puede tener una interpretación física al dividir el dominio de la función en una serie de elementos a los cuales se asigna cada una de las integrales. La ventaja es que ahora es posible usar alguna aproximación polinomial (lineal, parabólica etc.) para la función $Y(x)$ en cada integral, es decir en cada elemento. Esto permite que el valor de cada función integral sea una función de los coeficientes utilizados en el polinomio de dicho elemento. Entonces la integral total π es también una función de los coeficientes polinomiales usados en cada uno de los elementos y la condición de la ecuación se satisface si

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots n) \qquad (4.2.7)$$

donde las a_i's son el juego completo de coeficientes polinomiales usados en cada elemento.

Al substituir la función $Y(x)$ por una aproximación polinomial $y(x) \approx a_1 x + a_2 x^2 \ldots$ el problema se reduce a encontrar los coeficientes de los polinomios usados en la aproximación.

Es decir, la solución directa de la ecuación (4.2.2) sujeta a las condiciones (4.2.3) puede ser bastante complicada y es necesario aplicar los conceptos de cálculo variacional, sin embargo el problema se puede formular mediante la ecuación (4.2.5) y al substituir la aproximación polinomial el problema se puede resolver algebráicamente

4.2.3 Energía Potencial

En la introducción de conceptos fundamentales del método del elemento finito se derivaron unas ecuaciones algebráicas de equilibrio que en forma matricial se pueden expresar como:

$$[K]\{D\} = \{P\} \tag{4.2.8}$$

Este sistema de ecuaciones representa un modelo matemático cuya interpretación física está directamente relacionada con la definición de un sistema físico el cual consiste de un cuerpo deformable caracterizado por la matriz de propiedades elásticas $[k]$, y por las cargas que actuan sobre el sistema $\{P\}$ que ocasionan ciertos desplazamientos en dicho cuerpo $\{D\}$.

En general, un cuerpo elástico es la composición de una infinidad de partículas las cuales interactuan entre si y producen ciertas respuestas a ciertos perturbaciones y dado a que existe un número infinito de partículas en cada cuerpo no es conveniente describir la respuesta de un sistema elástico en términos de los desplazamientos de cada partícula, más bien se toma un número finito de puntos que puedan caracterizar el comportamiento del sistema.

En ciertos casos es posible formular las ecuaciones de equilibrio en base a relaciones directas de carga y desplazamiento, como es en el caso de resortes lineales, o vigas, pero en otros casos no es tan evidente la relación de carga y deformación y por lo tanto es conveniente usar métodos alternativos para la formulación de las ecuaciones de equilibrio. Uno de estos métodos se basa en la expresión de la energía potencial la cual se define como sigue:

La energía potencial de un cuerpo deformable sujeto a cargas estáticas es igual a la energía interna o de deformación almacenada en el cuerpo deformado menos el trabajo realizado por las cargas que actuan en el a lo largo de los desplazamientos de los puntos de aplicación de dichas cargas. Esto se puede expresar como sigue

$$V = U - W \tag{4.2.9}$$

en donde V=Energía potencial

U=Energía de deformación o interna

W=Trabajo de las cargas aplicadas

Como ejemplo podemos considerar el caso simple de un resorte lineal mostrado en la Fig. 4.2.4 .El desplazamiento D del extremo libre del resorte es ocasionado por la carga P aplicada en ese extremo en tonces la energía potencial se puede expresar como:

$$V = \int_0^D K x \, dx - \int_0^D P \, dx \tag{4.2.10}$$

En esta expresión, la primera integral representa la energía de deformación y la segunda el trabajo realizado por la carga sobre el resorte de constante K. Al integrar se obtiene:

$$V = \frac{1}{2}(K x^2)\Big|_0^D - P x\Big|_0^D = \frac{1}{2} K D^2 - P D \tag{4.2.11}$$

Es decir la expresión de la energía potencial es el valor de una integral y por lo tanto V es un funcional el cual puede ser minimizado, de acuerdo al principio de la energía potencial mínima. Entonces de la ecuación(4.2.4) se tiene que:

$$\delta V = (KD - P)\,\delta D \tag{4.2.12}$$

La cual es consistente con el principio de trabajo virtual y dado que δD es diferente de cero entonces

$$KD - P = 0 \tag{4.2.12a}$$

Es decir que el desplazamiento D que resulte en el equilibrio del sistema es tal que:

$$D_e = \frac{P}{K} \tag{4.2.12b}$$

Gráficamente la ecuación(4.2.11) se puede representar por medio de la suma de dos funciones tal como se muestra en la Fig(4.2.5) de tal forma para un potencial mínimo se tiene que el desplazamiento D es aquel que produce el equilibrio.

4.2.4. Sistemas con Varios Grados de Libertad

Por definición los grados de libertad son aquellas variables que definen completamente y en forma única el estado o configuración de un sistema dado, por ejemplo, el sistema de resorte lineal que se acaba de ver es un sistema con un solo grado de libertad ya que una sola cantidad define el estado del sistema, esa variable es el desplazamiento lineal del extremo del resorte. Si en ese extremo se anexa otro resorte,entonces existen dos grados de libertad y así sucesivamente. Sin embargo la naturaleza de los grados de libertad no es necesariamente la misma, ya que éstos se pueden referir a desplazamientos, rotaciones, temperaturas o también coeficientes de un polinomio que aproximan una función.

Si consideramos un sistema elástico con n grados de libertad el cual está sujeto a ciertas perturbaciones. Entonces la energía potencial total se puede expresar como un función de estos n grados de libertad o sea

$$\Pi_T = \Pi_T(D_1, D_2, D_3 \ldots D_n) \tag{4.2.13}$$

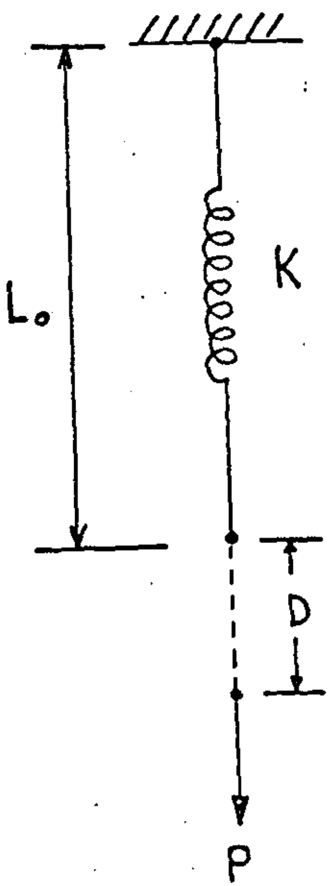


Fig 4.2.4
Sistema de resorte lineal con un extremo fijo y otro extremo libre y cargado (1 grado de libertad)

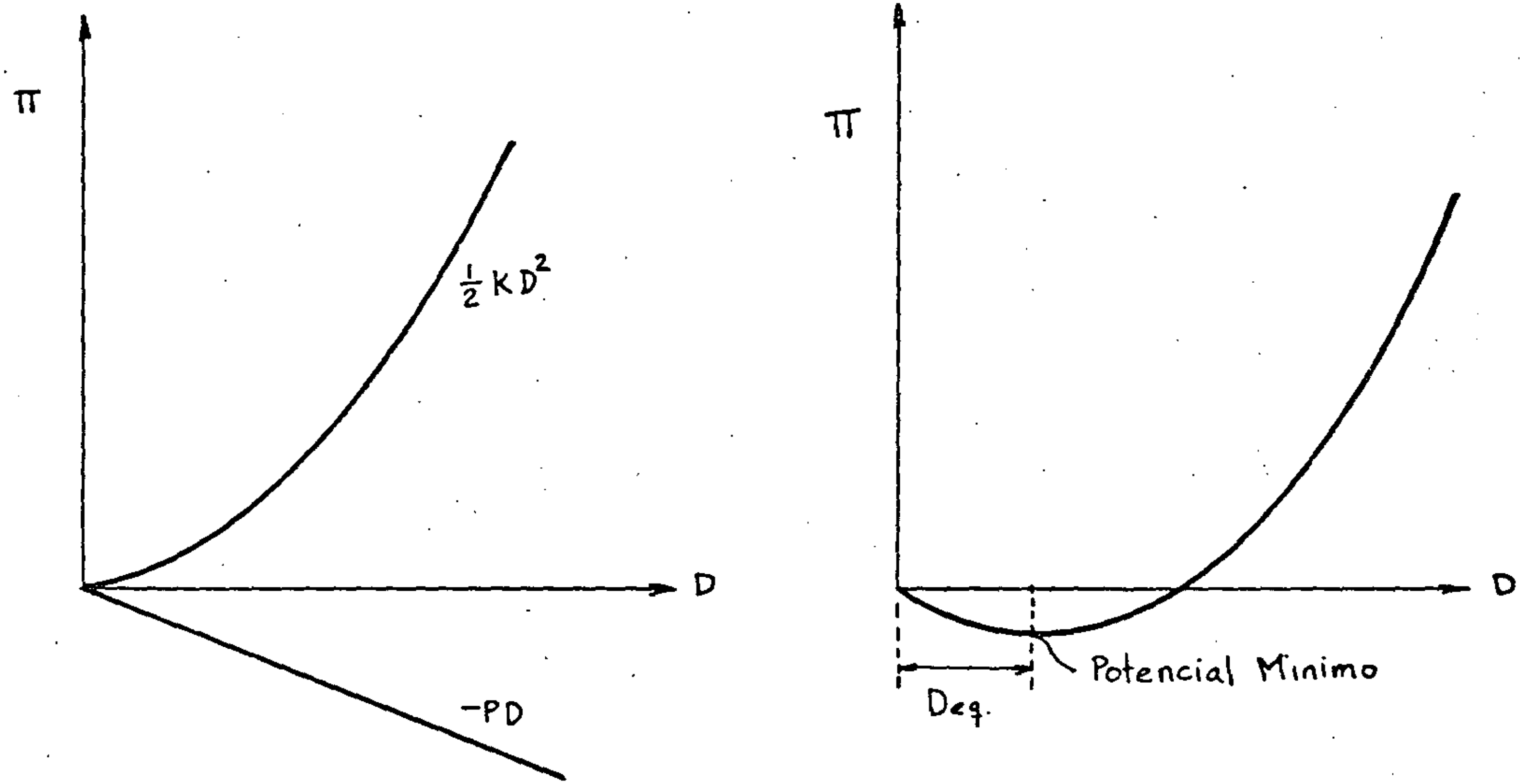


Fig. 4.2.5 Energía potencial como función del desplazamiento en el extremo libre de un resorte con constante K y carga P dadas.

entonces la primera variación del potencial con respecto a los grados de libertad se expresa como

$$\delta \Pi_T = \frac{\partial \Pi_T}{\partial D_1}\delta D_1 + \frac{\partial \Pi_T}{\partial D_2}\delta D_2 + \frac{\partial \Pi_T}{\partial D_3}\delta D_3 \ldots + \frac{\partial \Pi}{\partial D_n}\delta D_n \qquad (4.2.14)$$

la cual debe cumplir con la condición de estacionaridad de la ecuación (4.2.4), es decir $\delta\pi=0$ y por lo tanto:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial D_1} = \frac{\partial \Pi}{\partial D_2} = \ldots = \frac{\partial \Pi}{\partial D_n} = 0 \qquad (4.2.15)$$

De acuerdo con el principio de energía potencial mínima. la ecuación (4.2.15) define la configuración de equilibrio del sistema.

Un ejmplo de un sistema con dos grado de libertad es el que se muestra en la Fig. 4.2.6 el cual consta de dos resortes lineales empotrados, y una barra rígida ligada los dos resortes con una carga puntal como se muestra. La expresión para la energía, potencial se puede escribir ya integrada como:

$$V = \frac{1}{2} K_1 D^2 + \frac{1}{2} K_2 (D + \theta L)^2 - P(D + \theta a) \qquad (4.2.16)$$

Al substituir v por π en la ecuación (4.2.5) el resultado es:

$$\frac{\partial V}{\partial D} = K_1 D + K_2 D + K_2 \theta L - P = 0 \qquad (4.2.17)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = K_2 L D + K_2 L^2 \theta - a P = 0 \qquad (4.2.18)$$

que en forma matricial adquiere la siguiente fomra

$$\begin{bmatrix} (k_1+k_2) & k_2 L \\ k_2 L & k_2 L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D \\ \Theta \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} P \\ aP \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad (4.2.19)$$

que se puede reducir a la forma común de las ecuaciones de equilibrio

$$\left[K \right] \left\{ X \right\} = \left\{ F \right\} \qquad (4.2.20)$$

En la ecuación 4.2.19, (P) y (aP) son llamadas las fuerzas generalizadas correspondientes a las coordenadas generalizadas (D) y (θ).

De este ejemplo se puede concluir entonces que la matriz de rigidez $[k]$ es una matriz simétrica es decir $k_{ij}=k_{ji}$ y también que el producto de una fuerza generalizada por su correspondiente coordenada siempre tiene unidades de trabajo.

Si un tercer resorte es anexado al sistema digamos en el punto intermedio de la barra, el sistema se convierte en un sistema estaticamente inditerminado. Sin embargo las coordenadas D y θ son aun suficientes para determinar la configuración del sistema y dos ecuaciones de equlibrio son generadas, es decir la indeterminación estática no afecta el procedimiento general basado en la minimización del potencial.

4.2.5 Formulación General Usando Campos de Desplazamiento

Antes de desarrollar una expresión general para la energía potencial de cuerpos elásticos es conveniente describir el concepto de campo de desplazamiento y aproximaciones.

En muchos sistemas mecánicos la configuración del mismo en un instante dado puede ser expresada en términos de los desplazamientos de ciertos puntos de referencia, los cuales represen-

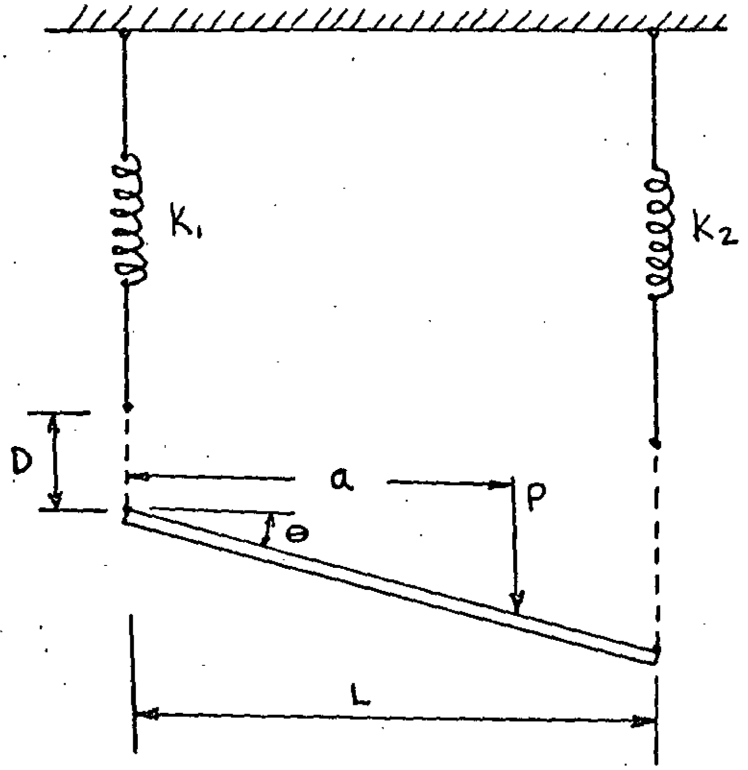


Fig 4.2.6 Sistema de dos resortes y una barra rigida con carga intermedia (dos grados de libertad)

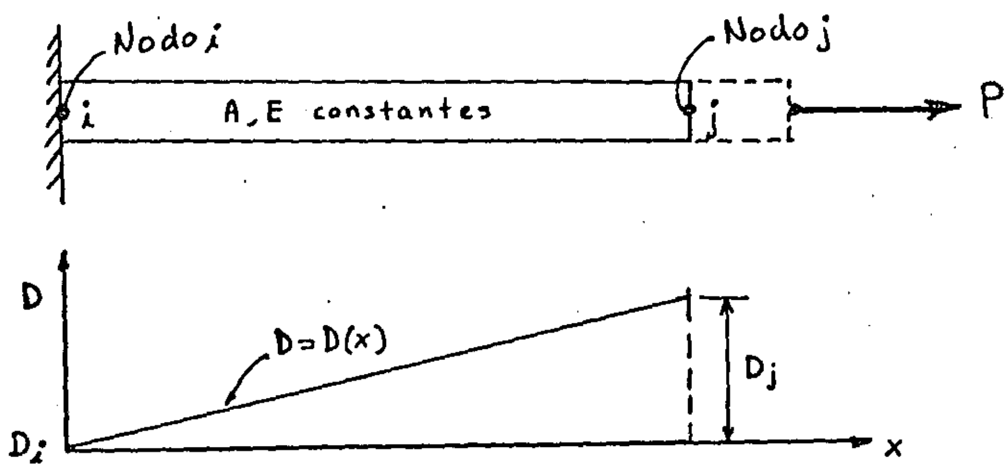


Fig. 4.2.7 Campo de desplazamientos en una barra de sección uniforme en terminos de los desplazamientos nodales.

tan un campo de desplazamientos con respecto a un marco de referencia. Por ejemplo el campo de desplazamiento de una barra elastica de sección uniforme con una carga axial Fig.4.2.7 se puede describir en términos de los desplazamientos en los extremos de la misma en una forma lineal. Es decir el desplazamiento en cualquier punto intermedio de una barra se puede expresar como una función del desplazamiento de los puntos extremos de la misma con una relación de la forma

$$D_x = D_i + \frac{x}{L}\left(D_j - D_i\right) \tag{4.2.21}$$

Donde Dx es el desplazamienot de un punto en la coordenada x de la barra, L es la longitud original de la barra y D(i,j) es el desplazamiento del extremo (i,j) de la barra.

La ecuación (4.2.21) puede escribirse en forma matricial como sigue:

$$D_x = \left[\left(1-\frac{x}{L}\right) \quad \left(\frac{x}{L}\right)\right] \begin{Bmatrix} D_i \\ D_j \end{Bmatrix} \tag{4.2.22}$$

Si consideramos que la barra representa un elemento con el nodo i en el extremo i y el nodo j en el extremo j y que f es el desplazamiento de un punto cualquiera del elemento entonces la ecuación(4.2.22) se puede expresar en forma matricial como sigue:

$$\{f\} = [N]\{d\} \tag{4.2.23}$$

En el caso de un elemento en dos dimensiones como el mostrado en la Fig.4.2.8 el vector {d}los desplazamientos en dos dimensiones de los nodos del elemento, entonces la ecuación (4.2.23) tendría la forma:

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} \tag{4.2.24}$$

en donde:

$$N_1 = \frac{(b-x)(c-y)}{4bc} \quad , \quad N_2 = \frac{(b+x)(c+y)}{4bc}$$

$$N_2 = \frac{(b+x)(c-y)}{4bc} \quad , \quad N_4 = \frac{(b-x)(c+y)}{4bc} \tag{4.2.25}$$

$N_{1,2,3,4}$ son llamadas las funciones de"forma" o de interpolación. La descripción del campo de desplazamiento para otros elementos también es posible en base de los desplazamientos nodales, es decir que es posible conocer el desplazamiento obsoluto de cualquier punto en un elemento o estructura conociendo el vector de desplazamientos nodales. Por lo tanto la formulación general usando elementos finitos está orientada a obtener la solución de un sistema con un número finito de grados de libertad, en donde los grados de libertad son los desplazamientos independientes de cada nodo y donde dichos desplazamientos pueden ser de traslación o de rotación.

La aproximación a un campo de desplazamiento también se puede hacer en base a un polinomio cuyo grado de libertad sea el mismo que el correspondiente al elemento en cuestión, por ejmplo en el caso de la barra uniforme se puede utilizar un polinomio del tipo:

$$\{f\} = \{u\} = \{a_1 + a_2 x\} \tag{4.2.26}$$

o

$$\{f\} = [\,1 \quad x\,] \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} \tag{4.2.27}$$

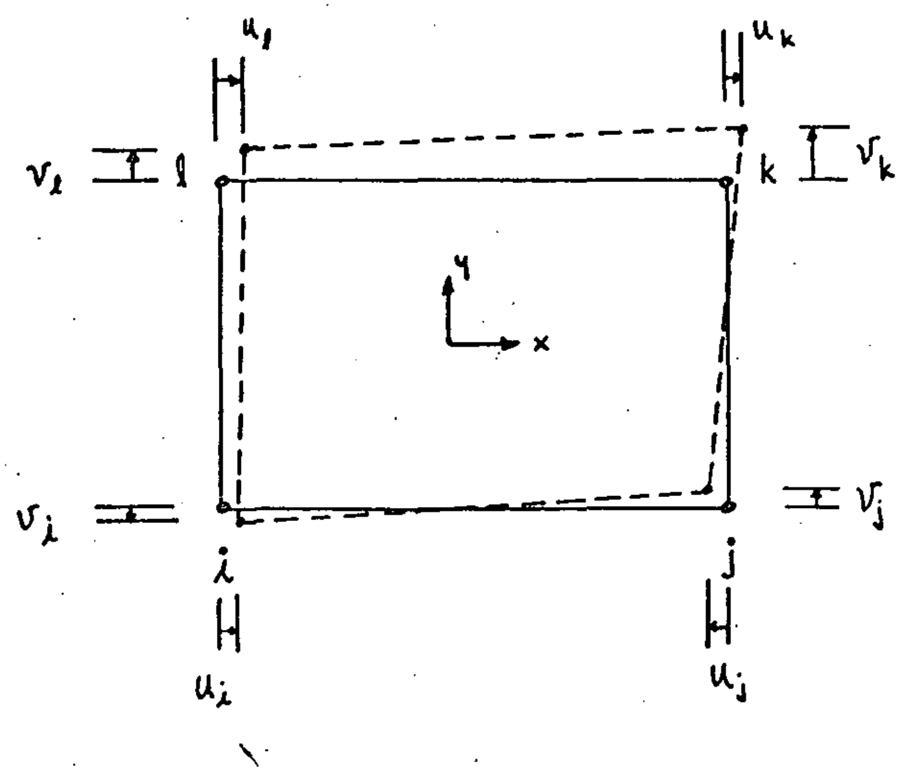


Fig. 4.2.8 Elemento cuadrilatero bidimensional, 2 grados de libertad por nodo, 4 nodos osea 8 g.d.l.

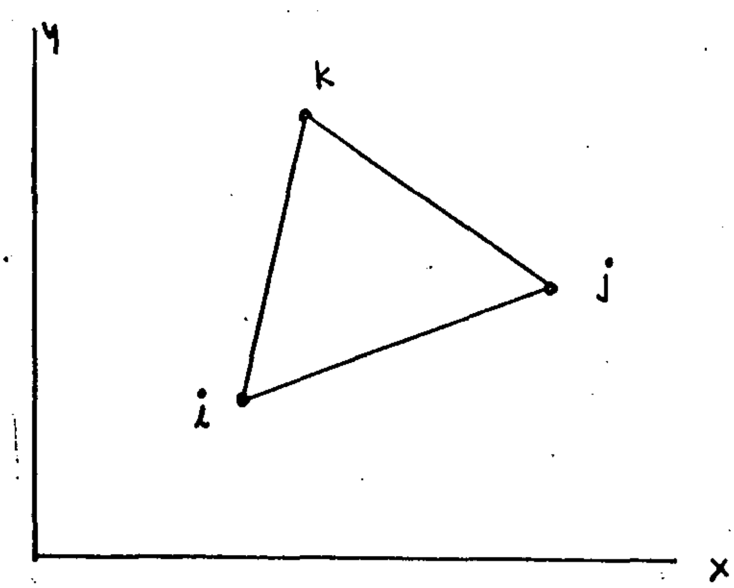


Fig 4.2.9 Elemento triangular plano, 2 grados de libertad por nodo, 3 nodos, 6 g.d.l.

en donde a_1 y a_2 son los coeficientes del polinomio de grado 1, entonces hay dos coeficientes para un elemento que tiene dos grados de libertad.

Los desplazamientos nodales $\{d\}$ se pueden expresar en función de estos coeficientes substituyendo las condiciones de frontera

$$\begin{aligned} u_{x=0} &= u_i \\ u_{x=L} &= u_j \end{aligned} \tag{4.2.28}$$

Entonces substituyendo en (4.2.26) resulta el siguiente sistema:

$$\{d\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = [\Lambda]\{a\} \tag{4.2.29}$$

Despejando $\{a\}$ de (4.2.29) y substituyendo en (4.2.27) se tiene

$$\{f\} = [1 \quad x][\Lambda]^{-1}\{d\} \tag{4.2.30}$$

Invirtiendo la matriz $[\Lambda]$ y desarrollando el producto en la ecuación 4.2.30 se obtiene la ecuación 4.2.22 o sea:

$$\{f\} = \left[\left(1-\frac{x}{L}\right) \quad \left(\frac{x}{L}\right)\right]\{d\} = [N]\{d\} \tag{4.2.31}$$

En el caso de un elemento plano triangular como el mostrado en la fig. 4.2.9, la aproximación se puede hacer en base a las siguientes polinomios:

$$\begin{aligned} u &= a_1 + a_2 x + a_3 y \\ v &= a_4 + a_5 x + a_6 y \end{aligned} \tag{4.2.32}$$

Que en forma matricial quedan expresados como

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix} \tag{4.2.33}$$

Tomando las condiciones de frontera se obtiene que para la dirección x

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} \tag{4.2.34}$$

y para la dirección y

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix} \tag{4.2.35}$$

de donde

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = [\Lambda]^{-1} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \tag{4.2.36}$$

y

$$\begin{Bmatrix} a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix} = [\Lambda]^{-1} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} \tag{4.2.37}$$

Substituyendo (4.2.36) y (4.2.37) en la ecuación (4.2.33) se obtiene

$$u = [1 \quad x \quad y]\,[\Lambda]^{-1} \{u_1 \; u_2 \; u_3\}^T \tag{4.2.38}$$

$$v = [1 \quad x \quad y]\,[\Lambda]^{-1} \{v_1 \; v_2 \; v_3\}^T \tag{4.2.39}$$

y donde

$$[\Lambda]^{-1} = \begin{bmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 & x_3 y_1 - x_1 y_3 & x_1 y_2 - x_2 y_1 \\ y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \end{bmatrix} \tag{4.2.40}$$

Substituyendo (4.2.40) en (4.2.38) y(4.2.39) y reduciendo el sistema resultante es

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}_{Triangulo} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \tag{4.2.41}$$

en donde

$$N_1 = \frac{1}{2A}\left[\frac{2A}{3} + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y\right] \tag{4.2.42}$$

$$N_2 = \frac{1}{2A}\left[\frac{2A}{3} + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y\right] \tag{4.2.43}$$

$$N_3 = \frac{1}{2A}\left[\frac{2A}{3} + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y\right] \tag{4.2.44}$$

De la misma manera se puede aproximar el campo de desplazamiento para un elemento cuadrilatero plano de la Fig.4.2.8 usando polinomios del tipo:

$$u = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 xy \tag{4.2.45}$$

$$v = a_5 + a_6 x + a_7 y + a_8 xy \tag{4.2.46}$$

Los cuales conducen a un sistema equivalente al dado en las ecuaciónes(4.2.24) y (4.2.25).

4.2.6 Exprsión General de la Energía Potencial

Podemos considerar ahora el caso general de un cuerpo elástico en el espacio el cual está sujeto a cargas que producen un campo de desplazamientos, deformaciones y esfuerzos tal que en un punto dado de dicho cuerpo y con respecto a un marco de referencia, los vectores de esfuerzos y de deformaciones son:

$$\{\sigma\} = \{\sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_z \ \tau_{xy} \ \tau_{yz} \ \tau_{zx}\}^T \tag{4.2.47}$$

y
$$\{\epsilon\} = \{\epsilon_x \ \epsilon_y \ \epsilon_z \ \gamma_{xy} \ \gamma_{yz} \ \gamma_{zx}\}^T \tag{4.2.48}$$

La realción esfuerzo-deformación puede escribirse como:
$$\{\sigma\} = [E]\{\epsilon\} + \{\sigma_o\} \tag{4.2.49}$$
en donde $[E]$ es la matriz de propiedades elâsticas del material y el vecotor $\{\sigma_o\}$es el vector de esfuerzos iniciales (dichos esfuerzos iniciales pueden referirse a los esfuerzos presentes sin la aplicación de las cargas externas, como podrían ser esfuerzos residuales, esfuerzos de ensamble etc.).

La definición de energîa interna o de deformación se puede escribir como

$$U_o = \frac{1}{2}\{\epsilon\}^T[E]\{\epsilon\} - \frac{1}{2}\{\epsilon_o\}^T[E]\{\epsilon_o\} \tag{4.2.50}$$

Esta energîa de deformación es originada por ciertas cargas que actuan en el cuerpo las cuales desarrolan un cierto trabajo. Estas fuerzas se pueden clasificar en fuerzas internas o de cuerpo, que en un punto cualquiera tiene la forma:

$$\{\Phi\} = \{\varphi_x \ \varphi_y \ \varphi_z\}^T \tag{4.2.51}$$

y el vector de fuerzas de superficie expresado por:

$$\{F\} = \{F_x \ F_y \ F_z\}^T \tag{4.2.52}$$

Entonces usando las expresiones (4.2.41) a la (4.2.52) y la expresión general de la energía potencial de la siguiente forma

$$\Pi = \int_{Vol}\left(\frac{1}{2}\{\epsilon\}^T[E]\{\epsilon\} + \{\epsilon\}^T\{\sigma_o\}\right)dV - \int_{Vol}\{f\}^T\{F\}\,dV - \int_{Sup}\{f\}^T\{\Phi\}\,dS \tag{4.2.53}$$

en donde la primera integral representa la energía interna o de deformación, la segunda integral representa el trabajo desarrollado por las fuerzas de cuerpo sobre la estructura y la tercera integral representa el trabajo desarrollado por las fuerzas de superficie sobre el cuerpo. La ecuación (4.2.53) es una forma más general de la ecuación (4.2.9)

4.2.6 Formulación Elemental en Base a la Energía Potnecial

El objetivo ahora es formular las ecuaciones que caracterizan un elemento en base a la minimización de la energía potencial usando la expresión general (4.2.53) y la expresión del campo de desplazamiento $\{f\}=\{u\ v\ w\}$.

Primeramente las deformaciones en un elemento se pueden expresar en terminos de los desplazamientos nodales a través de la siguiente expresión

$$\{\varepsilon\} = [B]\{d\} \tag{4.2.54}$$

en donde $[B]$ es la matriz esfuerzo-deformación que en el caso general de un material elástico isotropico es de la forma

$$[B] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \tag{4.2.55}$$

Substituyendo las ecuaciones (4.2,23) y (4.2,54) en (4.2,53) la energía potencial puede expresarse como:

$$\Pi_e = \frac{1}{2}\{d\}^T\left(\int_{Vol}[B]^T[E][B]\,dV\right)\{d\} + \{d\}^T\int_{Vol}[B]^T\{\sigma_0\}\,dV$$

$$-\{d\}^T\int_{Vol}[N]^T\{F\}\,dV - \{d\}^T\int_{Sup}[N]^T\{\Phi\}\,dS \qquad (4.2.56)$$

En esta ecuación el subíndice en πe indica que la energía potencial es de un elemento y por lo tanto el vector $\{d\}$ es el vector de desplazamientos nodales de un elemento solamente, y para una estructura compuesta de varios elementos se tiene que la energía potencial total se expresa como la sumatoria de las energías potenciales de cada uno de los elementos y la energía potencial total queda expresada como:

$$\Pi_T = \frac{1}{2}\{D\}^T\left(\sum_1^m\int_{Vol}[B]^T[E][B]\,dV\right)\{D\} + \{D\}^T\sum_1^m\left(\int_{Vol}[B]^T\{\sigma_0\}\,dV\right.$$

$$\left.-\int_{Vol}[N]^T\{F\}\,dV - \int_{Sup}[N]^T\{\Phi\}\,dS\right) - \{D\}^T\{P\} \qquad (4.2.57)$$

Una vez encontrada la expresión general de la energía potencial se procede a encontrar el valor extremo del funcional π_T substituyendo en la ecuación (4.2.4) lo cual resulta en el sistema de ecuaciones dado por la ecuación (4.2.7) o

$$\left\{\frac{\partial \Pi_T}{\partial D}\right\} = 0 \qquad (4.2.58)$$

Entonces al substituir π_P dada por la ecuación (4.2.57) en la ecuación (4.2.58) se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones de equilibrio.

$$\left(\sum_{1}^{m}\int_{Vol}[B]^T[E][B]\,dV\right)\{D\} = \sum_{1}^{m}\left(-\int_{Vol}[B]^T\{\sigma_0\}\,dV + \int_{Vol}[N]^T\{F\}\,dV\right.$$

$$\left. + \int_{Sup}[N]^T\{\Phi\}\,ds\right) + \{P\} \qquad (4.2.59)$$

La ecuación (4.2.59) se puede abreviar en tal forma que la sumatoria de las integrales del lado izquierdo de la misma sea identificada como la "Matriz de Rigidez" y la sumatoria de integrales del lado derecho de la ecuación como vector de cargas generalizadas, entonces la ecuación (4.2.59) queda

$$[K]\{D\} = \{R\} \qquad (4.2.60)$$

Ejemplo. Podemos considerar un caso simple en forma general mediante el cual podremos establecer la siguiente secuencia de operaciones

$$\{f\} = \{u\} = [1 \quad x]\{a\} \qquad (4.2.61)$$

$$\{d\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & L \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = [\Lambda]\{a\} \qquad (4.2.62)$$

$$\{f\} = [1 \quad x][\Lambda]^{-1}\{d\} = \left[\left(1-\tfrac{x}{L}\right) \quad \left(\tfrac{x}{L}\right)\right]\{d\} = [N]\{d\} \qquad (4.2.63)$$

$$U = \int_0^L \frac{1}{2} E\,\varepsilon_x^2 A\,dx = \frac{1}{2}\int_0^L \varepsilon_x^T E\,\varepsilon_x A\,dx \qquad (4.2.64)$$

$$U = \frac{1}{2}\{d\}^T \int_0^L [B]^T E\,[B]\,A\,dx\,\{d\} \qquad (4.2.65)$$

$$k_e = \int_0^L [B]^T E [B] \, A dx = \int_0^L \begin{Bmatrix} -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} \end{Bmatrix} E \left[-\frac{1}{L} \quad \frac{1}{L} \right] A dx \qquad (4.2.66)$$

$$k_e = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \equiv \text{Matriz elemental de rigidez} \qquad (4.2.67)$$

4.2.8 El Método Rayleigh-Ritz

Podemos considerar un ejemplo unidimensional para describir el método Rayleigh-Rith como el mostrado en la Fig.4.2.10 en donde el área (S) y el módulo elástico (E) son constantes y la carga distribuida (q) son tales que

$$A = E = L = 1 \quad y \quad q = x \qquad (4.2.68)$$

Las condiciones de frontera son:

$$\begin{aligned} u &= 0 \quad @ \quad x = 0 \\ u_{,x} &= 0 \quad @ \quad x = L \end{aligned} \qquad (4.2.69)$$

La energía potencial se puede expresar como:

$$\Pi = \int_0^L \frac{AE}{2} u_{,x}^2 \, dx - \int_0^L u (q \, dx) \qquad (4.2.70)$$

Substituyendo los valores dados en(4.2.68) y asumiendo que los desplazamientos u son de la forma $u = a_1 x$ entonces

$$\Pi = \frac{1}{2} a_1^2 - \frac{a_1}{3} \qquad (4.2.71)$$

y

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_1} = 0 = a_1 - \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad a_1 = \frac{1}{3} \qquad (4.2.72)$$

Si se asume ahora que $u=a_1x+a_2x^2$, entonces la energía potencial queda como sigue:

$$\Pi = \int_0^1 \tfrac{1}{2}(a_1 + 2a_2x)^2 dx - \int_0^1 (a_1x + a_2x^2)\,x\,dx \tag{4.2.73}$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_1} = \frac{\partial \Pi}{\partial a_2} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4/3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1/3 \\ 1/4 \end{Bmatrix} \tag{4.2.74}$$

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 7/12 \\ -1/4 \end{Bmatrix} \tag{4.2.75}$$

Sumarizando Resultados:

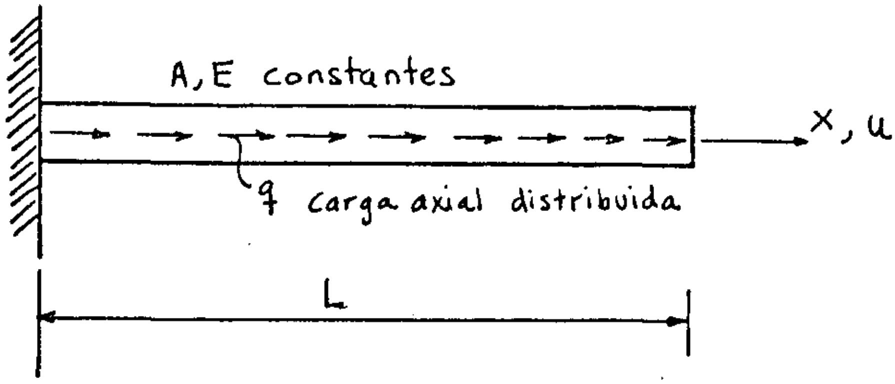
	$u(x=1/4)$	$u(x=1/2)$	$u(x=3/4)$	$u(x=1)$	$\sigma(x=0)$	$\sigma(x=1)$
1 Termino	.0833	.1667	.2500	.333	.333	.333
2 Terminos	.1302	.2292	.2969	.333	.5833	.0833
Exacto	.1224	.2292	.3047	.333	.5000	.0

Si asumimos un polinomio de 3er grado para u(tres términos) obtendríamos la solución exacta porque la solución exacta es cúbica de la forma $u=(3x-x^3)/6$ o sea que el método Rayleigh-Ritz basada en

$$u = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \tag{4.2.76}$$

daría como resultado

$$\begin{aligned} a_1 &= 1/2 \\ a_2 &= 0 \\ a_3 &= -1/6 \end{aligned} \tag{4.2.77}$$

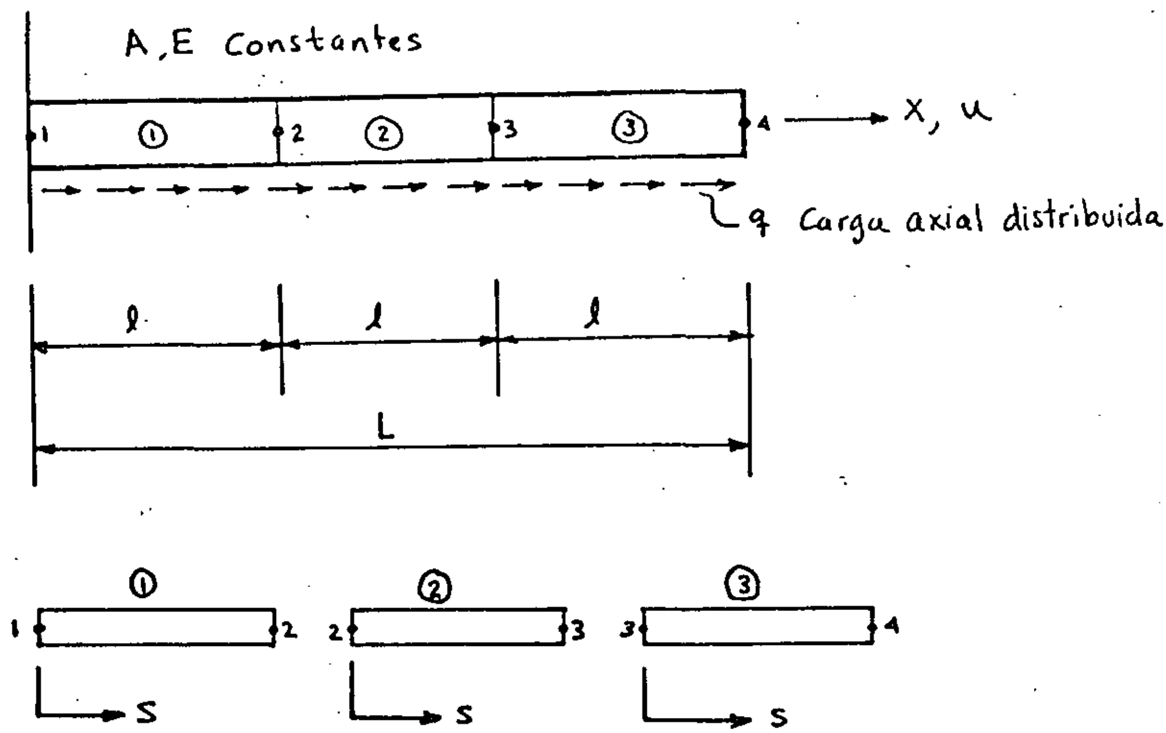


Condiciones de frontera:

Forzada $u=0$ @ $x=0$

Natural $u_{,x}=0$ @ $x=L$

Fig. 4.2.10 Barra con carga axial distribuida y sección constante



$u=[N]\begin{Bmatrix}u_1\\u_2\end{Bmatrix}$ $\quad u=[N]\begin{Bmatrix}u_2\\u_3\end{Bmatrix}$ $\quad u=[N]\begin{Bmatrix}u_3\\u_4\end{Bmatrix}$

Fig 4.2.11 Barra con carga axial distribuida dividida en tres elementos.

y si se incluyeran más términos como por ejemplo

$$u = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \dots + a_n x^n \qquad (4.2.78)$$

la solución sería:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1/2 \\ a_2 &= 0 \\ a_3 &= -1/6 \\ a_4 &= a_5 = \dots = a_n = 0 \end{aligned} \qquad (4.2.79)$$

El Método del Elemento Finito y su relación con R.R

Podemos considerar ahora la barra del ejemplo anterior pero dividida en tres elementos como se muestra en la Fig 4.2.11 Para cada elemento existe una matriz de forma tal que el campo de desplazamientos en cada elemento se puede expresar como:

$$u_i = [N]_i \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}_i \qquad (4.2.80)$$

y donde $$[N]_i = \left[\frac{l_i - s}{l_i} \quad \frac{s}{l_i} \right] \qquad (4.2.81)$$

Las deformaciones son dadas por:

$$\varepsilon_x = u_{,x} \quad y \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial s} \qquad (4.2.82)$$

Usando la ecuación(4.2.82) en la ecuación(4.2.80)

$$\varepsilon_x = \frac{\partial}{\partial s}[N]\{d\} = [B]\{d\} \qquad (4.2.83)$$

en donde $$[B] = \frac{\partial}{\partial s}[N] \quad y \quad \{d\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} \qquad (4.2.84)$$

y donde que εx es escalar entonces;

$$\varepsilon_x^2 = \varepsilon_x^T \varepsilon_x = \{d\}^T [B]^T [B] \{d\} \tag{4.2.85}$$

Substituyendo la ecuación (4.2.85) en la expresión para la energía de un elemento se obtiene que

$$U_i = \int_0^l \frac{AE}{2} \varepsilon_x^2 dx = \frac{1}{2} \{d\}_i^T \int_0^l AE \begin{bmatrix} -1/l \\ 1/l \end{bmatrix} [-1/l \quad 1/l] ds \{d\} \tag{4.2.86}$$

lo cual se puede expresar en forma compacta como:

$$U_i = \frac{1}{2} \{d\}_i^T [K]_i \{d\}_i \tag{4.2.87}$$

en donde

$$[K]_i = \int_0^l AE \begin{bmatrix} -1/l \\ 1/l \end{bmatrix} [-1/l \quad 1/l] ds = \frac{AE}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.2.88}$$

Por otra parte el trabajo realizado por la carga es

$$W = \int_0^l q\, u\, ds = \{d\}_i^T \int_0^L [N]^T q\, ds \tag{4.2.89}$$

y el potencial total de la estructura es

$$\Pi_T = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 \tag{4.2.90}$$

Suponiendo que para cada elemento las propiedades cumplen con las propiedades de las ecuaciones (4.2.68) y además

$$\begin{aligned} & l = 1/3 \\ & q = x \quad \text{para el elemento 1} \\ & q = \tfrac{1}{3} + s \quad \text{para el elemento 2} \\ & q = \tfrac{2}{3} + s \quad \text{para el elemento 3} \end{aligned} \tag{4.2.91}$$

Expandiendo los vectores al rango de la estructura se tiene que el vector global es

$$\{D\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} \tag{4.2.92}$$

Substituyendo las condiciones(4.2.91) en(4.2.90) y expandiendo al rango de la estructura, la energía potencial es:

$$\Pi_T = \frac{1}{2}\{D\}^T\left(\begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix}\right)\{D\}$$

$$-\{D\}^T\left(\frac{1}{54}\begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \frac{1}{54}\begin{Bmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \\ 0 \end{Bmatrix} + \frac{1}{54}\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \\ 8 \end{Bmatrix}\right) \tag{4.2.93}$$

Minimizando la energía potencial se obtiene que

$$\left\{\frac{\partial \Pi_T}{\partial D}\right\} = 0 \tag{4.2.94}$$

la cual resulta en el siguiente sistema de ecuaciones de equilibrio

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & 6 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1/54 \\ 6/54 \\ 12/54 \\ 8/54 \end{Bmatrix} \tag{4.2.95}$$

La Matriz cuadrada del lado izquierdo de esta ecuación es singular debido a que no se han impuesto las condiciones de frontera de la estructura, ésta condición es

$$u_1 = 0 \tag{4.2.96}$$

Al imponer la condición (3.96) en la ecuación (4.2.95) se obtiene

$$\begin{bmatrix} 6 & -3 & 0 \\ -3 & 6 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \frac{1}{54} \begin{Bmatrix} 6 \\ 12 \\ 8 \end{Bmatrix} \tag{4.2.97}$$

de donde se obtiene que u_2=.1605, u_3=.2840 y u_4=.333 los cuales son exactos sin embargo son aproximados en cualquier otro punto, por ejemplo en x=L/2 se tiene

$$u = [N]\{d\}_2 = \left[\frac{l - l/2}{l} \quad \frac{l/2}{l} \right] \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \tag{4.2.98}$$

$$u = [\,1/2 \quad 1/2\,] \begin{Bmatrix} .1605 \\ .2840 \end{Bmatrix} = .222 \tag{4.2.99}$$

El valor exacto de u en x=L/2 es de 0.2292. El esfuerzo en el elemento i es $\sigma_i = (E\,u_{,x})_i$ o también

$$\sigma_i = E\,[B] \begin{Bmatrix} u_i \\ u_{i+1} \end{Bmatrix} \tag{4.2.100}$$

Substituyendo las condiciones (4.2.91) en (4.2.100) se obtienen los siguientes resultados:

$$\sigma_1 = .4815 \qquad \text{exacto en } x = \frac{L}{6}$$

$$\sigma_2 = .3704 \qquad \text{exacto en } x = \frac{L}{2}$$

$$\sigma_3 = .1481 \qquad \text{exacto en } x = \frac{5L}{6}$$

Es decir los esfuerzos no son continuos en el modelo y los desplazamientos son más exactos que los esfuerzos como se puede apreciar en la Fig. 4.2.12

De estos dos ejemplos se puede concluir que el método clásico de Rayleigh-Ritz (R-R) es aproximado pero más exacto si se utilizan más términos en el polinomio. En el caso de cargas destribuidas el método de R-R puede ser exacto si se usan suficientes términos en el polinomio y la inclusión de más términos no cambia la solución.

Por otra lado usando elementos finitos se llega a resultados exactos si las cargas se localizan en los nodos y es aproximado para el caso de cargas distribuidas pero puede ser bastante cercano al exacto si se usan más elementos.

El método clásico de R-R utiliza un polinomio que se aplica a todo el dominio de la estructura, mientras que el método del elemento finito utiliza un polinomio apra cada elemento.

4.2.10 Modelación de Sistemas con Elementos Finitos

Existe una variedad muy grande de sistemas mecánicos y estructurales los cuales requieren de una solución la cual no es siempre trivial ni simple de obtener, en tales casos es práctica común hacer una clasificación de efectos significantes y otros que por su naturaleza pueden considerarse insignificantes o ignorables, de tal manera que en general siempre se habla en términos de una solución aproximada a la solución real del sistema o de una solución exacta o aproximada de un modelo aproxi-

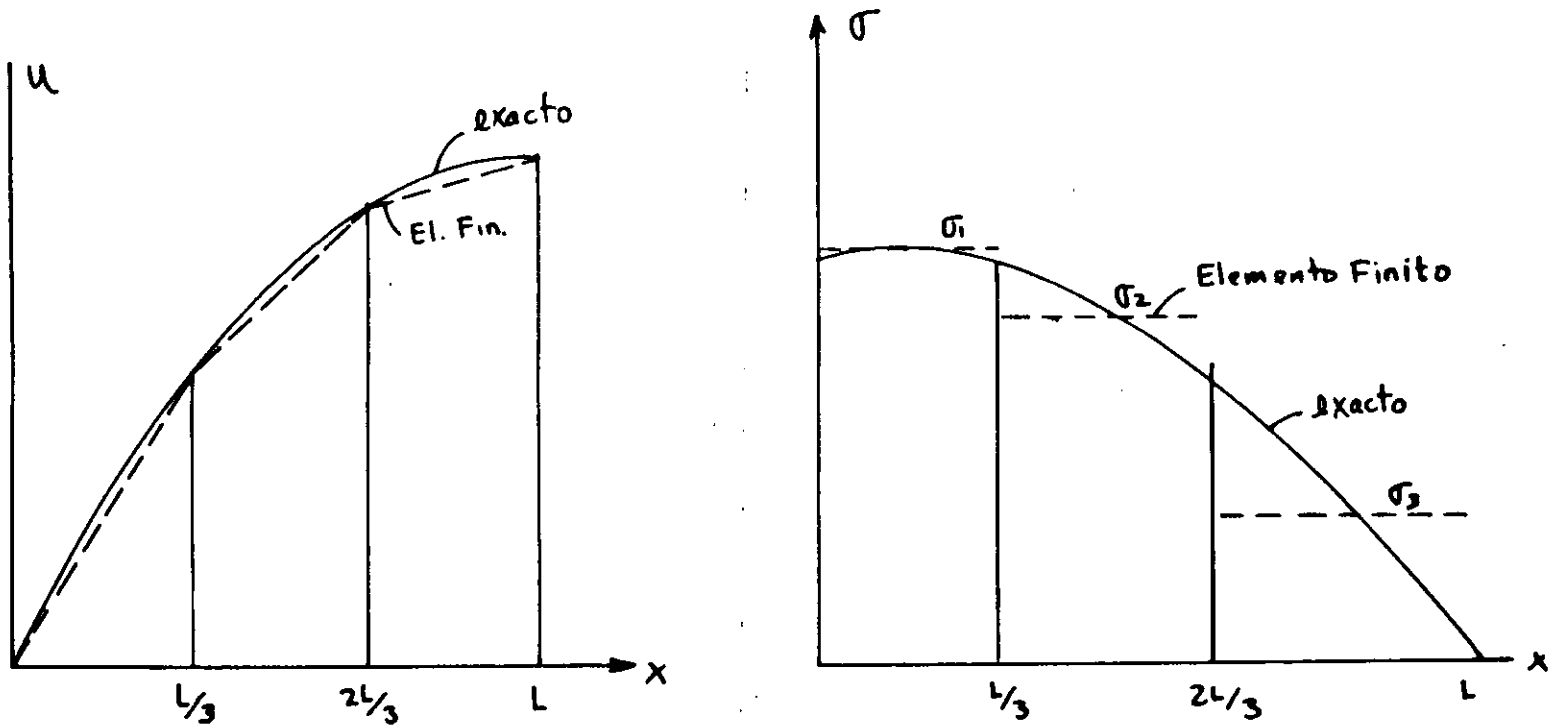


Fig 4.2.12 Comparación del metodo del elemento finito y la solución exacta para el problema de la barra con carga distribuida

mado al sistema real,

En la formulación analítica de un sistema, las suposiciones de que algunos efectos son ignorables tienen como objetivo simplificar los procedimientos de cálculo, sin embargo a través del desarrollo de técnicas digitales se han podido mejorar dichos procedimientos, aunque en general siempre es necesario hacer algunas suposiciones respecto a aquellos efectos que pueden ser ignorables o simplemente no dominantes.

La formulación con elementos finitos también requiere de suposiciones lógicas en base a la naturaleza del sistema en cuestión y para tal efecto se han desarrollado una variedad de elemntos cuyas propiedades son represntativas de algunos casos específicos de sistemas y así se tienen por ejemplo elementos planos para la simulación de problemas bidimensionales de esfuerzo plano o deformación plana, elementos viga en dos y tres dimensiones, elementos sólidos o de volumen, elementos cascaron y otros varios que tienen propósitos específicos.

En general, el análisis y modelación de un sistema es un proceso que se desarrolla en varias etapas que son:

1. Definición del sistema físico
2. Definición de condiciones de frontera
3. Definición de agentes de perturbación
4. Definición de variables de respuesta
5. Definición de efectos despreciables
6. Desarrollo del modelo analítico o modelo matemático
7. Aplicación sistemática de procedimientos de Cálculo
8. Interpretación de Resultados

Cabe mencionar que un entendimiento general del sistema en cuestión es siempre básico e importante pues la definición del sistema físico, de las condiciones iniciales y de frontera y la definición de agentes perturbadores puede depender de un entendimiento bastante completo del problema que se está analizando ya que una formulación erronea conceptualmente genera resultados que no corresponden al verdadero problema.

En el área de aplicaciones del método del elemento finito se parte de la suposición que el análisis conoce y entiende el problema en cuestión, de tal forma que los puntos del 1 al 5 del porceso de análisis queden satisfactoriamente establecidos.

En el punto 6, referente al desarrollo del modelo matemático es necesario que las características de los elementos empleados sean compatibles con el comportamiento general del sistema y por compatibilidad se entiende que el conjunto de elementos que componen el sistema sean capaces de reproducir en forma aproximada la respuesta del sistema a las perturbaciones y condiciones a que está sujeto.

Son varios los aspectos que se deben tomar en cuenta para la selección de los elementos apropiados para cada caso, por ejemplo:

- -El número de nodos del elemento
- -El número de grados de libertad
- -Condiciones naturales de frontera del elemento
- -Tipo de cargas admisibles por el elemento
- -Tipo de geometría permitido por el elemento
- -Sistemas de coordenadas permisibles del elemento
- -Limitaciones del tipo de elemento

En la Fig. 4.2.13 se muestran algunos elementos que en general pueden ser aplicados a la modelación de varios tipos de sistemas y a continuación se presentan algunos casos específicos de aplicaciones a sistemas reales.

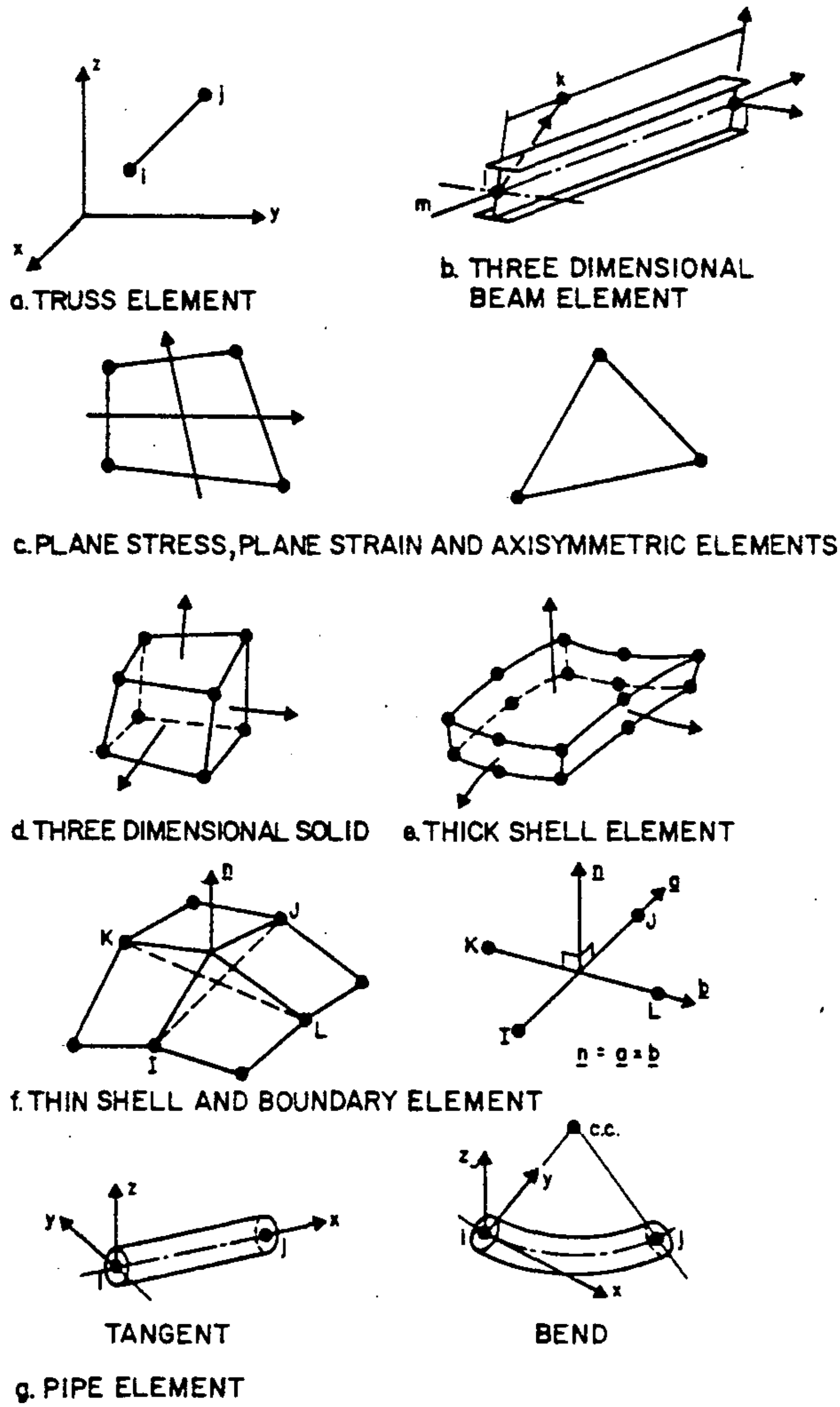


Fig 4.2.13 Biblioteca de elementos del programa SAP

4.3. Formulación de Residuos Pesados (Método de Galerkin)

Una formulación alternativa a la variacional es la denominada de residuos pesados. Esta formulación no requiere de un postulado variacional que aplique al sistema de interés y parte de una manipulación directa sobre la ecuación diferencial que gobierna la física del mismo.

Una formulación diferencial resulta en una ecuación del tipo

$$L(\varphi) = 0 \qquad (4.3.1)$$

en donde L es un operador diferencial, con las condiciones de frontera

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= 0 \\ \varphi'(0) &= b \end{aligned} \qquad (4.3.2)$$

Una función de campo que puede satisfacer las condiciones anteriores se puede definir como:

$$\{\varphi\}_a = [N]\{\varphi_i\} \qquad (4.3.3)$$

en donde $[N]$ es una función de las coordenadas
$\{\varphi_i\}$ es el vector de valores nodales de
$\{\varphi\}_a$ es una función a "preuba"

entonces, si $\{\varphi\}_a$ es la verdadera función, al sustituirla en la ecuación (4.3.1) el resultado es:

$$L(\{\varphi\}_a) = 0 \qquad (4.3.4)$$

la verdadera función pero es una buena aproximación de la misam, entonces al sustituir en 4.3.1. el resultado es:

$$L(\{\varphi\}_a) = R \approxeq 0 \qquad (4.3.5)$$

en donde R es un residuo de error dado por a es solamente una buena aproximación de la verdadera función . Por lo tanto R se puede evaluar en puntos discretos (nodos) e igualar la suma a cero para minimizar el error, o sea

$$\int_V R\,dV = 0 \tag{4.3.6}$$

Pero una mejor solución sería la de distribuir R sobre una región de acuerdo a alguna función de peso w de las coordenadas (nodales) antes de la integración, es decir

$$\int_V W\,R\,dV = 0 \tag{4.3.7}$$

o sustituyendo la ecuación (4.3.3.) en (4.3.5) y esta en (4.3.7) se tiene:

$$\int_V W\,L([N]\{\varphi_i\})\,dV = 0 \tag{4.3.8}$$

La función de peso w puede ser de cualquier forma en general pero cuando se selecciona igual a las funciones de forma o de interpolación se tiene que w es igual a N y por lo tanto

$$\int_V [N]\,L([N]\{\varphi_i\})\,dV = 0 \tag{4.3.9}$$

La ecuación (4.3.9) es la formulación de "Galerkin" de elemento finito y si se aplica a cada elemento en la región, se obtienen n ecuaciones simultáneas para n parámetros nodales en .

La solución del sistema de ecuaciones que resulta se desarrolla de igual manera que para otros casos, aunque una desvetaja es que la ecuación (4.3.9) contiene derivadas de orden más alto que las de formulación variacional.

Considerar la ecuación diferencial:

$$Lu - f = 0 \tag{4.3.10}$$

en donde L es un operador diferencial, y la aproximación

$$\bar{u} = \sum N_i u_i \tag{4.3.11}$$

entonces

$$L\bar{u} - f = \varepsilon \tag{4.3.12}$$

en donde ε=error residual.La condición es entonces:

$$\int_R N_i \varepsilon \, dR = 0 \tag{4.3.13}$$

Es decir que el error ε entre la solución aproximada y la solución real es ortogonal a las funciones usadas en la aproximación Ni. Este es el método de Galerkin cuya ecuación estable:

$$\int_R N_\beta L(\varphi) \, dR = 0 \qquad \beta = i, j, k \ldots \tag{4.3.14}$$

donde

$$\varphi = [N_i, N_j, N_k \ldots] \{\Phi\} \tag{4.3.15}$$

Un ejemplo es el siguiente, sea la ecuación

$$L(\varphi) = \frac{d^2\varphi}{\partial x^2} + 3\frac{d\varphi}{dx} + 4 = 0 \tag{4.3.16}$$

con condiciones iniciales

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= 1 \\ \varphi'(0) &= 0 \end{aligned} \tag{4.3.17}$$

Usando la ecución (4.3.14) resulta

$$\int_0^l N_\beta \left(\frac{d^2\varphi}{\partial x^2} + 3\frac{d\varphi}{dx} + 4 \right) dx = 0 \tag{4.3.18}$$

l es el límite de x

Aplicación del Método de Galerkin a Vigas.

La ecuación fundamental

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} \tag{4.3.19}$$

Usando la ecuación (4.3.14)

$$\int_0^l [N]^T \left(\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{M}{EI} \right) dx = 0 \tag{4.3.20}$$

La función de forma óde interplación se define sobre cada elemento, entonces para todo el sistema se tiene:

$$\sum_{e=1}^{R} \int_{l(e)} [N^{(e)}]^T \left(\frac{d^2y^{(e)}}{dx^2} - \frac{M^{(e)}}{EI} \right) dx = 0 \tag{4.3.21}$$

Las funciones de interpolación son tales que:

$$y = N_i Y_i + N_j Y_j = \left[\left(1 - \frac{x}{L}\right) , \frac{x}{L} \right] \begin{Bmatrix} Y_i \\ Y_j \end{Bmatrix} = [N^{(e)}]\{Y\} \tag{4.3.22}$$

Entonces el Momento M se puede aproximar:

$$\frac{M}{EI} = [N^{(e)}] \begin{Bmatrix} M_i/EI \\ M_j/EI \end{Bmatrix} \tag{4.3.23}$$

Para reducir el orden de la integral en la ecuación(4.3.21) se puede integrar por partes entonces:

$$\int_{l^{(e)}} [N^{(e)}]^T \frac{d^2y}{dx^2} = [N^{(e)}]^T \frac{dy}{dx} \Big]_{x_i}^{x_j} - \int_{l^{(e)}} \frac{d[N^{(e)}]^T}{dx} \frac{dy}{dx} \, dx \tag{4.3.24}$$

Substituyendo en (4.3.21) se tiene:

$$[N^{(e)}]^T \frac{dy}{dx} \Big]_{x_i}^{x_j} - \int_{l^{(e)}} \left(\frac{d[N^{(e)}]^T}{dx} \frac{dy}{dx} + [N^{(e)}]^T \frac{M}{EI} \right) dx = 0 \tag{4.3.25}$$

La primera integral nos da la matriz elemental de coeficientes $[k^{(e)}]$ en la ecuación

$$[K^{(e)}]\{Y\} = \{f^{(e)}\} \tag{4.3.26}$$

A través de la suma sobre todos los elementos, la segunda integral produce el vector $\{F\}$.

El primer término de la ecuación (4.3.25) contribuye al vector $\{F\}$ si dy/dx se define en cualquier extremo del elemento, si no se desprecia.

Las integrales de la ecuación (4.3.25) se evaluan como sigue:

$$\frac{d}{dx}[N]^T = \frac{d}{dx}\begin{Bmatrix} (1-\frac{x}{\ell}) \\ \frac{x}{\ell} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\ell}\begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{4.3.27}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}[N]\{Y\} = \frac{1}{\ell}\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} y_i \\ y_j \end{Bmatrix} \tag{4.3.28}$$

Entonces:

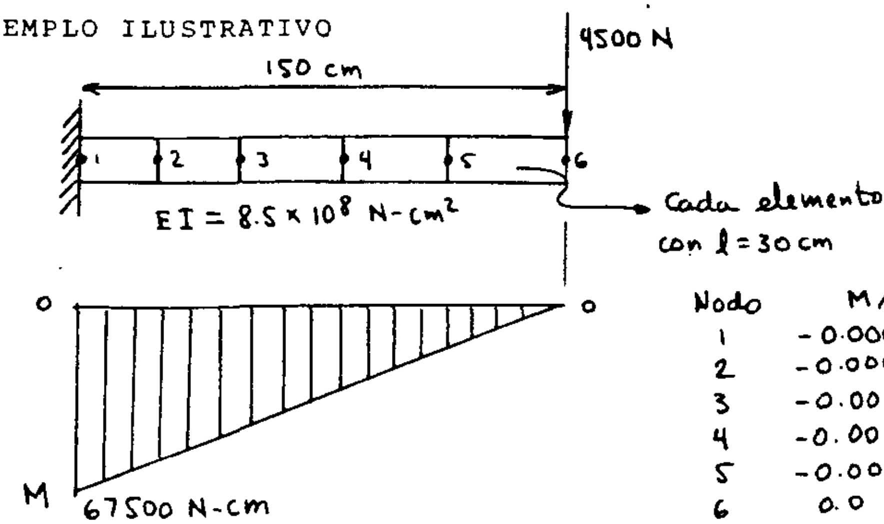
$$\int_0^\ell \frac{d}{dx}[N]^T \frac{dy}{dx}\,dx = \int_0^\ell \frac{1}{\ell^2}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} y_i \\ y_j \end{Bmatrix} dx = \frac{1}{\ell}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} y_i \\ y_j \end{Bmatrix} \tag{4.3.29}$$

y para la segunda integral:

$$\int_0^\ell [N]^T \frac{M}{EI}\,dx = \int_0^\ell [N]^T[N]\begin{Bmatrix} M_i/EI \\ M_j/EI \end{Bmatrix} dx = \tag{4.3.30}$$

$$\frac{\ell}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} M_i/EI \\ M_j/EI \end{Bmatrix}$$

EJEMPLO ILUSTRATIVO



Nodo	M/EI
1	-0.000794
2	-0.000635
3	-0.000476
4	-0.000318
5	-0.000159
6	0.0

Las ecuaciones para el primer elemento son:

$$-\frac{1}{30}\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}y_i\\y_j\end{Bmatrix}-\frac{30}{6}\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}M_i/EI\\M_j/EI\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}1-\frac{x}{L}\\\frac{x}{L}\end{Bmatrix}\frac{dy}{dx}\Big|_{x=0}=\begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix}\qquad(4.3.31)$$

$\therefore \frac{dy}{dx}=0\Big|_{x=0}$, el último término desaparece. Entonces, una vez ensamblado el sistema queda:

$$\begin{bmatrix}1&-1&&&&\\-1&2&-1&&0&\\&-1&2&-1&&\\&&-1&2&-1&\\&0&&-1&2&-1\\&&&&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\\y_5\\y_6\end{bmatrix}+150\begin{bmatrix}2&1&&&&\\1&4&1&&0&\\&1&4&1&&\\&&1&4&1&\\&0&&1&4&1\\&&&&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-0.000794\\-0.000655\\-0.000476\\-0.000318\\-0.000159\\-0.0\end{bmatrix}=\{0\}\qquad(4.3.32)$$

que se puede reducir a:

$$\begin{bmatrix}1&-1&&&&\\-1&2&-1&&&\\&-1&2&-1&&\\&&-1&2&-1&\\&&&-1&2&-1\\&&&&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\\y_5\\y_6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}.333\\.571\\.428\\.286\\.143\\.023\end{bmatrix}\quad\therefore y_1=0\qquad(4.3.33)$$

Resultados

Nodo	E.F.	Teoría
1	0	0
2	-.3334	-.3335
3	-1.2385	-1.2388
4	-1.5719	-2.5729
5	-4.1929	-4.1929
6	-5.9559	-5.9559

Conclusión: Sin comentarios.

Ecuación de campo en dos dimensiones:

$$L(\varphi) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + Q = 0 \qquad (4.3.34)$$

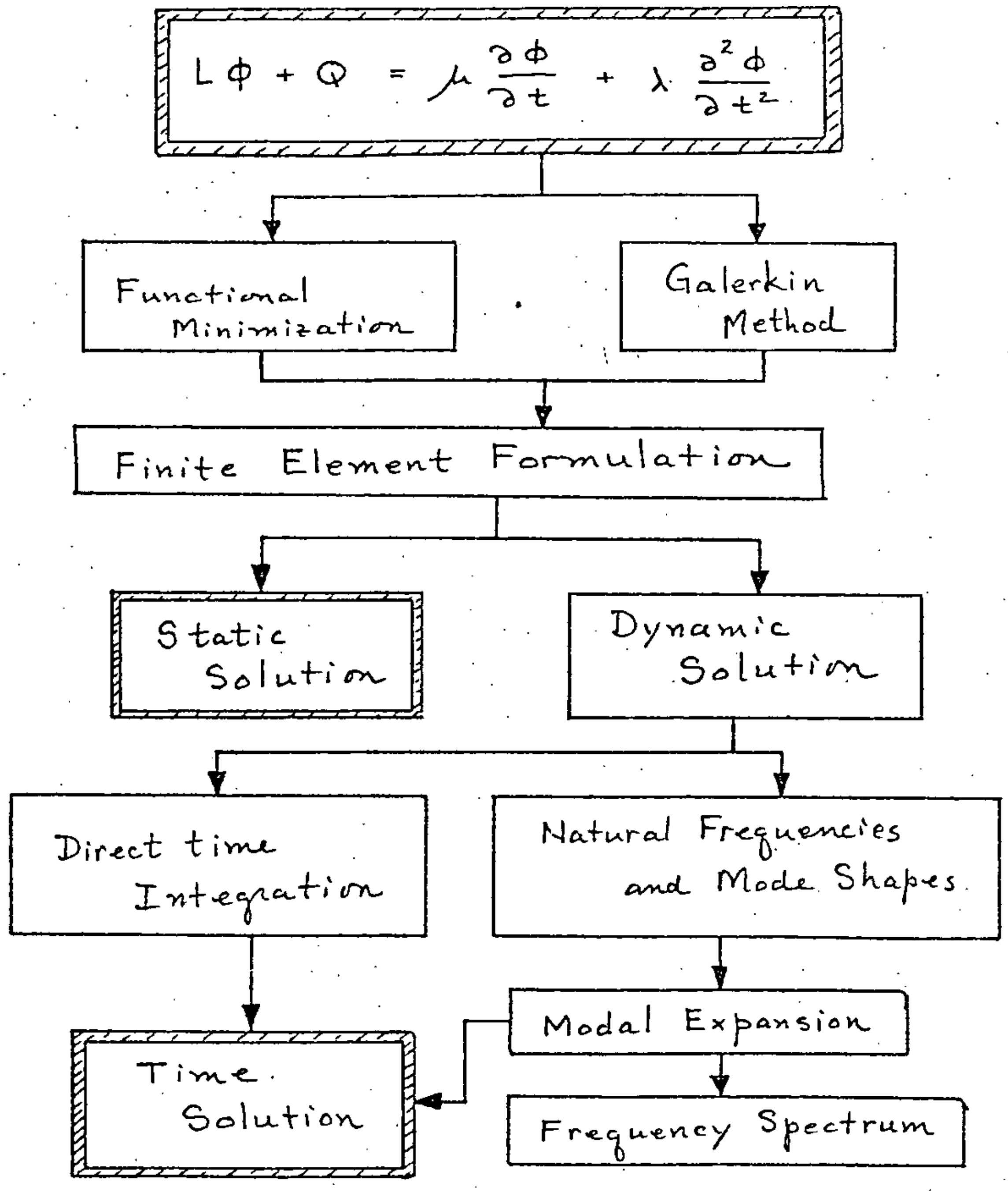
Aplicable a problemas de:

- -Torsión
- -Transmisión de Calor
- -Mecánica de Fluidos

La integral de Galerkin para el caso de la ecuación (4.3.34)es:

$$\int_V [N]^T \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + Q \right) dV = 0 \qquad (4.3.35)$$

1



Flow Chart of Finite Element Solution Procedures

N.J. SALAM...

DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.

EL METODO DEL ELEMENTO FINITO EN LA INGENIERIA

BIBLIOTECA DE ELEMENTOS Y APLICACIONES

FEBRERO, 1985

Palacio de Minería Calle de Tacuba 5 primer piso Deleg. Cuauhtémoc 06000 México, D.F. Tel.: 521-40-20 Apdo. Postal M-2285

5. BIBLIOTECA DE ELEMENTOS Y APLICACIONES

5.1 Desarrollo de Matrices Elementales

Cada elemento está asociado a un número determinado de nodos y estos a su vez a un número especifico de grados de libertad (gdl). En general, dependiendo de la variable de campo (desplazamiento, temperatura, etc) se puede definir el tipo de grados de libertad que se requieren para la representación física del comportamiento del sistema; por ejemplo, si se trata del desplazamiento de una partícula en una linea, se tiene entonces un (gdl), si se trata de desplazamientos en un plano de la misma entonces se tienen dos (gdl) y se tienen tres (gdl) para el caso de desplazamientos en el espacio.

Los elementos comunmente usados en la práctica de elementos finitos pueden clasificarse de varias formas y en varias categorías, algunas de estas pueden ser las que se indican en la tabla 5.1.1. Algunas de las características indicadas en esta tabla pueden ser fisicamente interpretadas, por ejemplo el número de nodos necesarios para describir la topología del elemento, forma relativa (rectangular, trapezoidal etc), pero otras no son tan obvias como por ejemplo el orden de la integración explicita, el tipo de las fun-

Característica Categórica	Tipos de Elementos	Ejemplos
Espacial Geometrica	Lineales (unidimensionales)	barra, viga
	Planos (bidimensionales) < Triangulares / cuadriláteros	esfuerzo plano, deformación plana, axisimetricos
	Espaciales (Tridimensionales)	solidos, placas gruesas
Forma Relativa	Naturales (regulares)	Triangulares, rectangulares
	Isoparametricos (irregulares) 1, 2 y 3 puntos de integración	de geometría irregular
Orden de los polinómios de interpolación	Lineales (nodos esquinales)	lados rectos.
	Cuadraticos (nodos esq. y 1 intermedio)	lados parabolicos
	Cubicos (nodos esq. y 2 intermedios)	lados cubicos
Tipo de grados de libertad	Traslacionales	barra, planos, solidos
	Rotacionales	vigas, cascarones, placas.

TABLA 5.1.1 Algunas Clasificaciones de Elementos Finitos

ciones de interpolación de la variable de campo etc. En un programa general de elementos finitos, cada elemento está debidamente formulado a través de ciertas ecuaciones que toman en cuenta las siguientes características:

- Número de nodos
- Numero de grados de libertad por nodo
- coordenadas nodales
- conectividad del elemento
- Numero de puntos de integración (isoparamétricos)
- propiedades del material

y para cada elemento en un sistema, se formulan las matrices elementales que caracterizan sus propiedades y que se ensamblan en matrices globales que caracterizan la estructura total del sistema. Por ejemplo la estructura mostrada en la figura 5.1.1 tiene 8 elementos cuyos nodos tienen un solo grado de libertad (temperatura por ejemplo). El resoltado de ensamblar las matices elementales en la matriz global es una matriz cuyos terminos diferentes de cero se indican con una "x" como se muestra en las siguientes ecuaciones indicadas.

Sea $[K_i]$ la matriz del elemento i cuyo orden $\underline{n}$ es igual al numero de nodos (dado que cada nodo tiene un solo gdl) entonces se obtienen las siguientes matrices elementales

$$[K_1]_{3\times3},\ [K_2]_{4\times4},\ [K_3]_{3\times3},\ [K_4]_{4\times4},\ [K_5]_{3\times3}$$
$$[K_6]_{2\times2},\ [K_7]_{2\times2},\ [K_8]_{2\times2} \qquad (5.1.1)$$

El vector global de grados de libertad se ordena de acuerdo al esquema de numeración nodal tal que

$$\{D\}^T = \{d_1, d_2 \ldots\ldots d_9\} \qquad (5.1.2)$$

y los vectores elementales se ordenan de acuerdo a los nodos que definen el elemento, entonces se tienen los siguientes vectores elementales:

$$\begin{aligned}
\{D_1\}^T &= \{d_1\ d_4\ d_5\}\\
\{D_2\}^T &= \{d_1\ d_2\ d_5\ d_6\}\\
\{D_3\}^T &= \{d_4\ d_5\ d_8\}\\
\{D_4\}^T &= \{d_5\ d_6\ d_8\ d_9\}\\
\{D_5\}^T &= \{d_2\ d_3\ d_6\}\\
\{D_6\}^T &= \{d_3\ d_7\}\\
\{D_7\}^T &= \{d_6\ d_7\}\\
\{D_8\}^T &= \{d_7\ d_9\}
\end{aligned} \qquad (5.1.3)$$

Al expander las matrices (5.1.1) al tamaño de la matriz global se pueden sumar término a termino y el resultado sería una matriz $[K]$ cuyos términos diferentes de cero se indican en la siguiente ecuación:

$$
[K] = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
X & X & O & X & X & X & O & O & O \\
X & X & X & O & X & X & O & O & O \\
O & X & X & O & O & X & X & O & O \\
X & O & O & X & X & O & O & X & O \\
X & X & O & X & X & X & O & X & X \\
X & X & X & O & X & X & X & X & X \\
O & O & X & O & O & X & X & O & X \\
O & O & O & X & X & X & O & X & X \\
O & O & O & O & X & X & X & X & X
\end{bmatrix}
\end{array}
\qquad (5 \cdot 1 \cdot 4)
$$

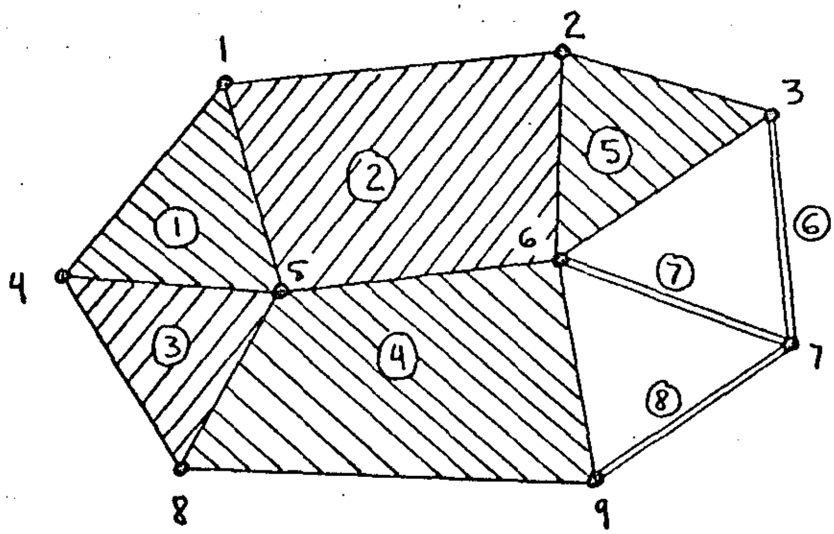
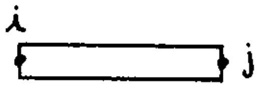
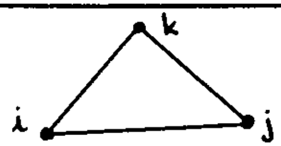
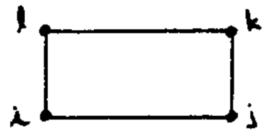
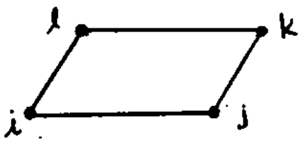
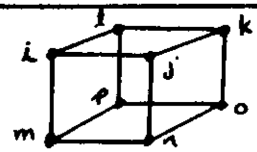
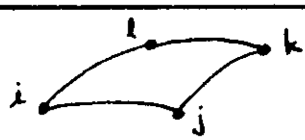
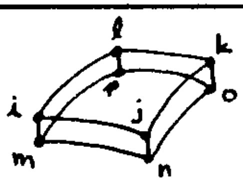
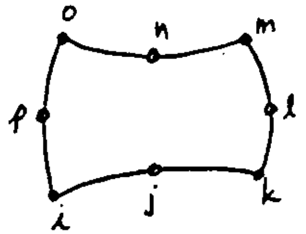
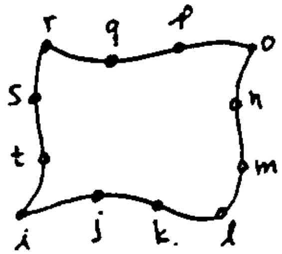
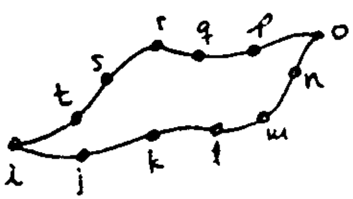
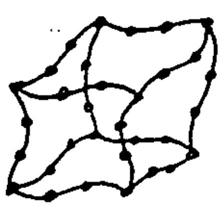


Figura 5·1·1 Sistema con 5 elementos planos (tres triangulares y dos cuadriláteros) y tres elementos barra, con un grado de libertad por nodo

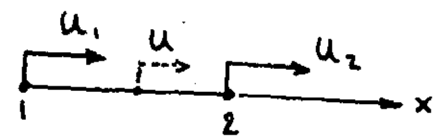
ELEMENTO	TIPO	Nº NODOS	Nº (g d l)	TIPO DE CARGAS
	BARRA	2	1 Linea 2 Plano 3 espacio	axiales
	VIGA	2	2 3 } plano 6 espacio	Concentradas, distribuidas cortantes, momentos, axiales
	TRIANGULAR PLANO	3	2	concentradas en el plano
	RECTANGULAR PLANO	4	2	concentradas en el plano
	RECTANGULAR PLACA	4	3	concentradas en el plano y fuera del plano y distribuidas en la cara
	SOLIDO	8	3	Concentradas en los nodos en cualquier dirección y en las caras distribuida
	CASCARON	4	6	concentradas y distribuidas en cualquier dirección
	PLACA GRUESA	8	6	concentradas y distribuidas en cualquier dirección

ELEMENTO	TIPO	Nº NODOS	Nº (g d l)	TIPO DE CARGAS
	PLANO ISOPARA-METRICO PARABO-LICO	8	2	concentradas en el plano
	PLANO ISOPARA-METRICO CUBICO	12	2	mismas
	CASCARON ISOPA-RAMETRICO CUBICO	12	6	concontradas, cortantes y momentos y de super-ficie
	SOLIDO ISOPARA-METRICO CUBICO	32	3	concentradas, sin momentos, de super-ficie.

A continuación se presenta el desarrollo de las matrices elementales para algunos elementos basados en una formulación variacional que resulta en matrices del tipo

$$[K_e] = \int_{Vol.} [B]^T [E] [B] \, dV \qquad (5.1.5)$$

<u>Caso 1</u> Elemento tipo barra



Sea la función de campo $\{u\}$ expresada en términos de un campo

$$\{u\} = [1 \quad x] \{a\} \qquad (5.1.6)$$

$\therefore$ $\{u\}$ es el desplazamiento de cualquier punto del elemento
$\{a\}$ es el vector de coeficientes de un polinomio que aproxima el desplazamiento en el elemento
x es la coordenada dentro del elemento para la cual se calcula el desplazamiento $\{u\}$

$$\{d\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = [\Lambda]\{a\} \qquad (5.1.7)$$

combinando (5.1.7) y (5.1.6)

$$\{u\} = [1 \quad x][\Lambda]^{-1}\{d\} = \left[\left(1 - \frac{x}{L}\right) \quad \frac{x}{L}\right]\{d\} \qquad (5.1.8)$$

$$\{u\} = [N]\{d\} \qquad (5.1.9)$$

Por otro lado se tiene que

$$\{\varepsilon\} = [B]\{d\} = \left(-\frac{1}{L} \quad \frac{1}{L}\right) \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} = \frac{d_2 - d_1}{L} \qquad (5.1.10)$$

De las ecuaciones (5.1.9) y (5.1.10) se tiene que

$$[B] = \frac{\partial}{\partial x}[N] \qquad (5.1.11)$$

De la expresión de la energía de deformación se tiene:

$$U = \frac{1}{2}\int_0^L \{\varepsilon\}^T [E] \{\varepsilon\} A\, dx \qquad (5.1.12)$$

Sustituyendo (5.1.10) en (5.1.12) se tiene

$$U = \frac{1}{2}\{d\}^T \left[\int_0^L [B]^T E [B] A\, dx\right] \{d\} \qquad (5.1.13)$$

la cual se puede escribir como

$$U = \frac{1}{2}\{d\}^T [K_e] \{d\} \qquad (5.1.14)$$

Entonces para obtener $[Ke]$ se tiene

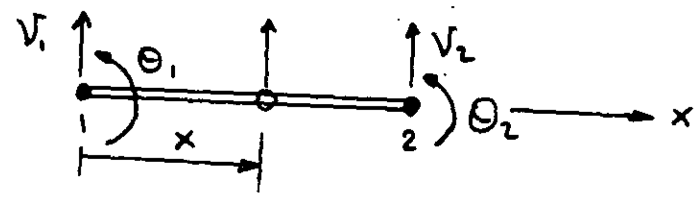
$$[Ke] = \int_0^L [B]^T E [B] A\, dx = \int_0^L \begin{Bmatrix} -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} \end{Bmatrix} E \begin{Bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{Bmatrix} A\, dx \qquad (5.1.15)$$

y el resultado es

$$[Ke] = \frac{AE}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad (5.1.16)$$

que es la matriz que caracteriza a un elemento barra en coordenadas naturales, es decir cuando el eje x coincide con el eje longitudinal del elemento.

Caso 2 Elemento Viga



Un desplazamiento cortante v en cualquier punto del elemento localizado en una coordenada x del mismo se puede aproximar mediante:

$$V_x = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} \qquad (5.1.17)$$

Segun la teoría de vigas, el desplazamiento angular θ de un punto en la viga es igual a la derivada del desplazamiento cortante con respecto a la coordenada longitudinal, entonces:

$$\theta_x = \frac{dV_x}{dx} = \frac{d}{dx}\begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} \qquad (5.1.18)$$

$$\theta_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2x & 3x^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} \qquad (5.1.19)$$

tomando las condiciones de frontera para el elemento se tiene que:

$$\begin{aligned} V_x &= V_1 \quad @ \quad x = 0 \\ V_x &= V_2 \quad @ \quad x = L \\ \theta_x &= \theta_1 \quad @ \quad x = 0 \\ \theta_x &= \theta_2 \quad @ \quad x = L \end{aligned} \qquad (5.1.20)$$

entonces

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} = [\Lambda]\{a\} \qquad (5.1.21)$$

esta ecuación tiene la forma dela ecuación (5.1.7), de (5.1.17) y (5.1.18) se tiene lo siguiente:

$$\begin{Bmatrix} v_x \\ \theta_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 1 & 2x & 3x^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} \qquad (5.1.22)$$

entonces despejando el vector $\{a\}$ de (5.1.21) y sustituyendolo en la última ecuación se obtiene

$$\begin{Bmatrix} v_x \\ \theta_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 1 & 2x & 3x^2 \end{bmatrix} [\Lambda]^{-1} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \qquad (5.1.23)$$

en donde el producto de las matrices en (5.1.23) se define como:

$$[N] = [1 \quad x \quad x^2 \quad x^3][\Lambda]^{-1} \qquad (5.1.23)$$

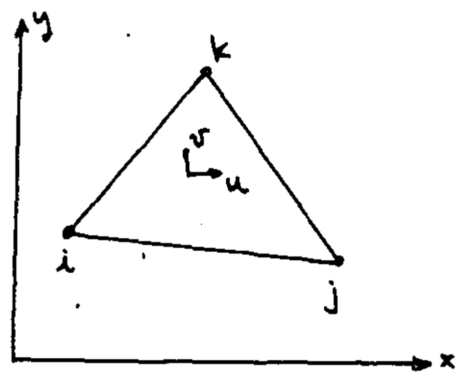
tomando de la ecuación (5.1.23) la derivada con respecto a x se obtiene la matriz [B]

$$[B] = \frac{d}{dx}[N] \qquad (5.1.24)$$

sustituyendo la matriz [B] en la ecuación (5.1.5) con la matriz $[E]=[EI]=EI$, el resultado es el siguiente después de desarrollar la integración:

$$[k_e]=\frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix}12 & 6L & -12 & 6L\\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2\\ -12 & -6L & 12 & -6L\\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2\end{bmatrix} \qquad (5.1.25)$$

Caso 3 · Elemento Triangular Plano



$$u = a_1 + a_2 x + a_3 y$$
$$v = a_4 + a_5 x + a_6 y \qquad (5.1.26)$$

expresando la aproximación de campo (5.1.26) en forma matricial se tiene:

$$\begin{Bmatrix}u\\ v\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & x & y & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\\ a_4\\ a_5\\ a_6\end{Bmatrix} \qquad (5.1.27)$$

Tomando las condiciones de frontera para $i=1$, $j=2$ y $k=3$ se tiene que:

$$\begin{Bmatrix}u_1\\ u_2\\ u_3\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & x_1 & y_1\\ 1 & x_2 & y_2\\ 1 & x_3 & y_3\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\end{Bmatrix} \; ; \; \begin{Bmatrix}v_1\\ v_2\\ v_3\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & x_1 & y_1\\ 1 & x_2 & y_2\\ 1 & x_3 & y_3\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}a_4\\ a_5\\ a_6\end{Bmatrix} \qquad (5.1.28)$$

despejando los vectores $\{a_1\ a_2\ a_3\}^T$ y $\{a_4\ a_5\ a_6\}^T$ se tiene

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = [\Lambda]^{-1}\{u\} \qquad (5.1.29)$$

y

$$\begin{Bmatrix} a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} = [\Lambda]^{-1}\{v\} \qquad (5.1.30)$$

sustituyendo estas expresiones en la ecuación (5.1.27) debidamente ordenadas se obtiene

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \qquad (5.1.31)$$

en donde:

$$N_1 = \frac{1}{2A}\left[\frac{2A}{3} + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y\right]$$

$$N_2 = \frac{1}{2A}\left[\frac{2A}{3} + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y\right] \qquad (5.1.32)$$

$$N_3 = \frac{1}{2A}\left[\frac{2A}{3} + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y\right]$$

la matriz $[B]$ se obtiene tomando las parciales de $[N]$ es decir:

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \qquad (5.1.33)$$

Para obtener la matriz de rigidez del elemento, solamente es necesario sustituir la expresión de [B] de la ecuación (5.1.33) en la ecuación (5.1.5), pero la matriz de propiedades de material depende del caso que se trate, en el caso de esfuerzo plano se tiene:

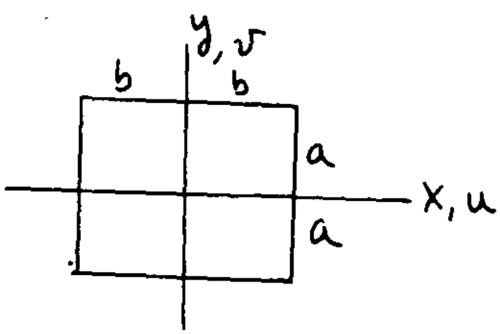
$$[E] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \qquad (5.1.34)$$

en el caso de deformación plana se tiene:

$$[E] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \nu/(1-\nu) & 0 \\ \nu/(1-\nu) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\nu)/2(1-\nu) \end{bmatrix} \qquad (5.1.35)$$

La matriz final se puede obtener de las ecuaciones (5.1.5), (5.1.33) y segun sea el caso de ecuaciones (5.1.34) y/o (5.1.35).

<u>Caso 4</u> Elemento cuadrilátero plano



$$\begin{aligned} u &= a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 xy \\ v &= a_5 + a_6 x + a_7 y + a_8 xy \end{aligned} \qquad (5.1.36)$$

las ecuaciones (5.1.36) representan la aproximación de desplazamiento a traves de un polinomio. Desarrollando los mismos pasos que en el caso anterior se obtienen las siguientes matrices:

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \qquad (5.1.37)$$

en donde

$$N_1 = \frac{(b-x)(a-y)}{4ba}$$

$$N_2 = \frac{(b+x)(a-y)}{4ba}$$

$$N_3 = \frac{(b+x)(a+y)}{4ba} \qquad (5.1.38)$$

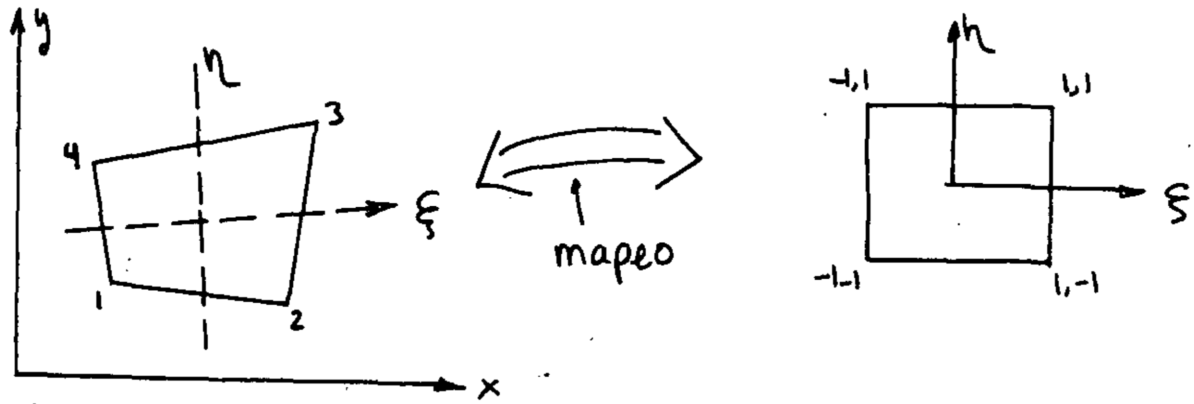
$$N_4 = \frac{(b-x)(a+y)}{4ba}$$

La matriz [B] se obtiene mediante:

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \qquad (5.1.39)$$

la matriz elemental de rigidez se obtiene sustituyendo la matriz [B] de la ecuación (5.1.39) en la ecuación (5.1.5) y donde la matriz [E] tiene la misma forma que para el caso del elemento triangular.

caso 5 Elemento rectangular isoparamétrico



Para este caso, podemos considerar la función de mapeo

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_4 \end{Bmatrix} \qquad (5.1.40)$$

en donde

$$N_1 = \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4}$$

$$N_2 = \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4}$$

$$N_3 = \frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4} \qquad (5.1.41)$$

$$N_4 = \frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4}$$

Este "mapeo" relaciona un punto de coordenadas (x,y) en el elemento irregular con un punto de coordendadas (ξ,η) del elemento regular. El polinomio correspondiente es:

$$x = a_1 + a_2\xi + a_3\eta + a_4\xi\eta$$

$$y = a_5 + a_6\xi + a_7\eta + a_8\xi\eta \qquad (5.1.42)$$

las condiciones de frontera nodales son:

$$
\begin{aligned}
y &= y_1 , & x &= x_1 & @ \quad & \xi = \eta = -1 \\
y &= y_2 , & x &= x_2 & @ \quad & \xi = 1 , \eta = -1 \\
y &= y_3 , & x &= x_3 & @ \quad & \xi = \eta = 1 \\
y &= y_4 , & x &= x_4 & @ \quad & \xi = -1 , \eta = 1
\end{aligned}
\qquad (5 \cdot 1 \cdot 43)
$$

El campo de desplazamientos queda:

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = [N]\{d\} \qquad (5 \cdot 1 \cdot 44)$$

y las funciones de interpolación son tales que:

$$x = \sum_1^4 N_i x_i \qquad y = \sum_1^4 N_i y_i \qquad (5 \cdot 1 \cdot 45)$$

y por lo tanto los desplazamientos son:

$$u = \sum_1^4 N_i u_i \qquad v_i = \sum_1^4 N_i v_i \qquad (5 \cdot 1 \cdot 46)$$

Usando la regla de la cadena para la derivación en dos sistemas de coordenadas se tiene que:

$$\begin{Bmatrix} (\ )_{,\xi} \\ (\ )_{,\eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} (\ )_{,x} \\ (\ )_{,y} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} (\ )_{,x} \\ (\ )_{,y} \end{Bmatrix} \qquad (5 \cdot 1 \cdot 47)$$

entonces para este caso se tiene que el jacobiano queda

$$[J] = \begin{bmatrix} N_{1,\xi} & N_{2,\xi} & N_{3,\xi} & N_{4,\xi} \\ N_{1,\eta} & N_{2,\eta} & N_{3,\eta} & N_{4,\eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix} \qquad (5 \cdot 1 \cdot 48)$$

definimos $[J^*]=[J]^{-1}$ entonces usando la ecuación (5.1.47)

$$\begin{Bmatrix} u_{,x} \\ u_{,y} \\ v_{,x} \\ v_{,y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11}^* & J_{12}^* & 0 & 0 \\ J_{21}^* & J_{22}^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_{11}^* & J_{12}^* \\ 0 & 0 & J_{21}^* & J_{22}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{,\xi} \\ u_{,\eta} \\ v_{,\xi} \\ v_{,\eta} \end{Bmatrix} \qquad (5.1.49)$$

de la definición de deformaciones en el plano se tiene que

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{,x} \\ u_{,y} \\ v_{,x} \\ v_{,y} \end{Bmatrix} \qquad (5.1.50)$$

de las expresiones (5.1.45) y (5.1.46)

$$\begin{Bmatrix} u_{,\xi} \\ u_{,\eta} \\ v_{,\xi} \\ v_{,\eta} \end{Bmatrix} = \begin{array}{c} \left[\begin{bmatrix} N_{i,\xi} & 0 \\ N_{i,\eta} & 0 \\ 0 & N_{i,\xi} \\ 0 & N_{i,\eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix} \right] \\ \quad i=1 \qquad i=2 \quad i=3 \quad i=4 \end{array} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_4 \end{Bmatrix} \qquad (5.1.51)$$

combinando las ultimas tres ecuaciones y de la ecuación

$$\{\varepsilon\} = [B]\{d\} \qquad (5.1.52)$$

se obtiene que

$$[B] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_{11}^* & J_{12}^* & 0 & 0 \\ J_{21}^* & J_{22}^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_{11}^* & J_{12}^* \\ 0 & 0 & J_{21}^* & J_{22}^* \end{bmatrix} \begin{array}{c} \left[\begin{bmatrix} N_{i,\xi} & 0 \\ N_{i,\eta} & 0 \\ 0 & N_{i,\xi} \\ 0 & N_{i,\eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix} \right] \\ i=1 \quad i=2 \quad i=3 \quad i=4 \end{array} \qquad (5.1.52)$$

El siguiente paso es integrar el producto $[B]^T[E][B]$ en donde $[E]$ tiene la misma forma que en casos anteriores al integrar se tiene que.

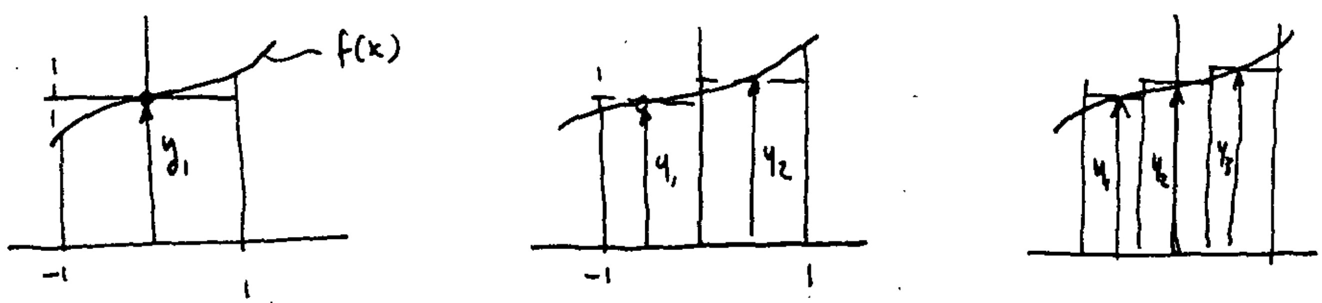
$$I = \int_x \int_y (\quad)\, dx\, dy = \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} (\quad) \det[J]\, d\xi\, d\eta \qquad (5.1.53)$$

pero debido a la complejidad del integrando se requiere de una aproximación mediante una integración numérica la cual se describe brevemente a continuación

sea la integral

$$I = \int_{-1}^{1} y\, dx \qquad (5.1.54)$$

se puede aproximar deacuerdo a las siguientes aproximaciones



$I = 2y_1$ (a)

$I = W_1 y_1 + W_2 y_2$ (b)

$I = W_1 y_1 + W_2 y_2 + W_3 y_3$ (c)

Entonces la integral se puede expresar como

$$I = \int_{-1}^{1} y\, dx \approx \sum_i w_i y_i \qquad (5.1.54)$$

La integral de la ecuación (5.1.53) se puede aproximar mediante:

$$I = \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} f(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta \simeq \int_{-1}^{+1}\left[\sum_i w_i f(\xi_i,\eta)\right] d\eta \qquad (5.1.55)$$

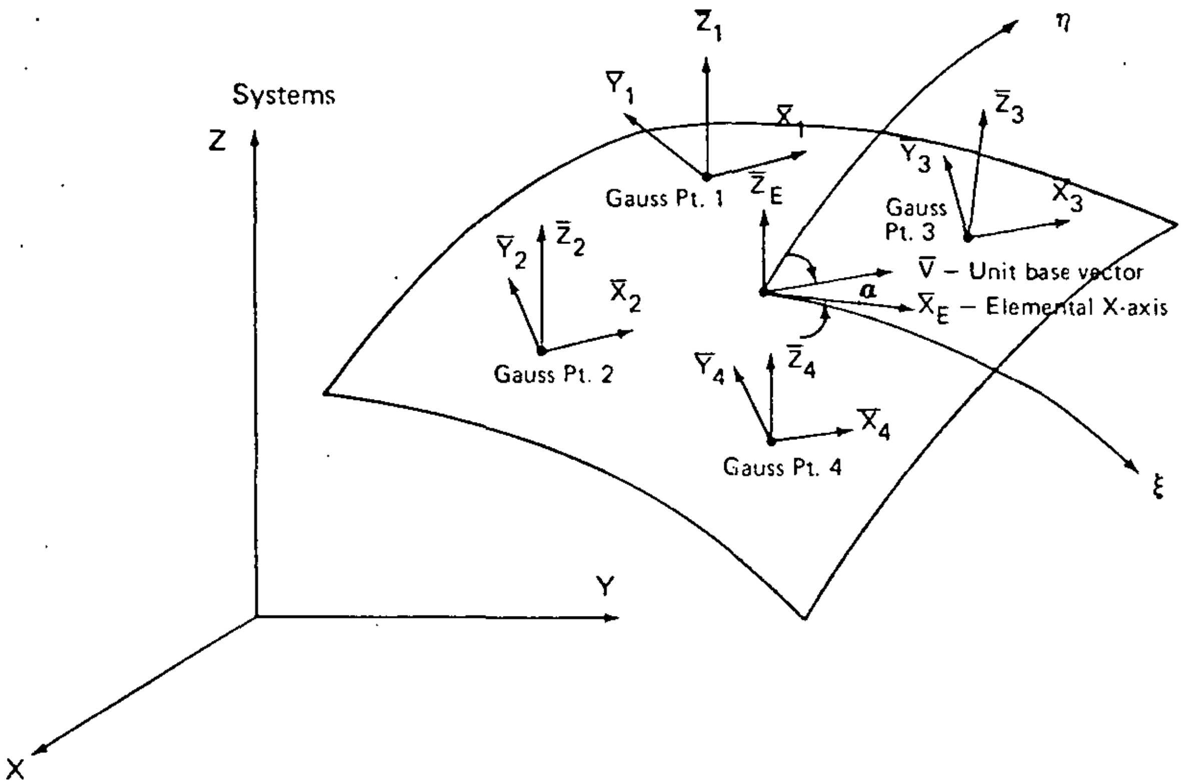
y finalmente

$$I = \sum_i w_i \left[\sum_j w_j f(\xi_i,\eta_j)\right] = \sum_i \sum_j w_i w_j f(\xi_i,\eta_j) \qquad (5.1.56)$$

la localización de los puntos i,j de integración y sus pesos asociados se dan a través de la cuadratura de Gauss dada en la siguiente tabla para 1, 2 y 3 puntos.

Nº de Puntos	Localización	Peso asociado
1	$x = 0.0$	2
2	$x_1, x_2 = \pm 0.57735$	1
3	$x_1, x_3 = \pm 0.77459$ $x_2 = 0.0$	5/9 8/9

Tabla 5.1.3 Cuadratura de Gauss para integración con 1, 2 y 3 puntos.



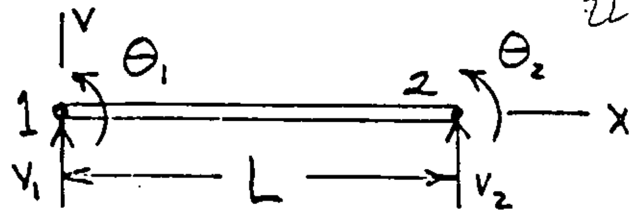
III.38

1. $\bar{X}_i, \bar{Y}_i, \bar{Z}_i$ = unit vectors defining directions of local coordinate axes at Gauss point (i).
2. $\bar{X}_E$ = elemental X-axis tangent to middle surface at $\xi = \eta = \zeta = 0.0$ and parallel to local ξ direction.
3. $\bar{V}$ = unit base vector defined by rotation angle a with respect to vector $\bar{X}_E$.
4. $\bar{Z}_i$ is normal to middle surface at Gauss point (i)
5. $\bar{Y}_i = \bar{V} \times \bar{Z}_i$
6. $\bar{X}_i = \bar{Y}_i \times \bar{Z}_i$

Figure III.5.3
Definition of Elemental Gauss Point Coordinate Axes for Shell Elements

5.2 FAMILIAS DE ELEMENTOS

Elemento Viga



$$v = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad , \qquad \text{donde}$$

$$N_1 = 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} \qquad N_2 = x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}$$

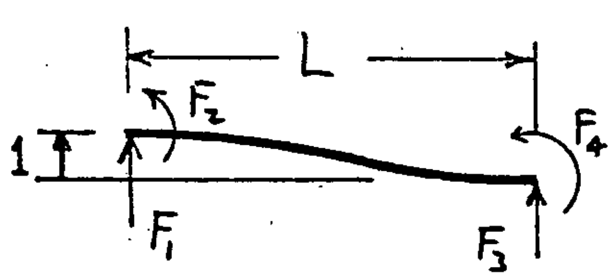
$$N_3 = \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} \qquad N_4 = -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}$$

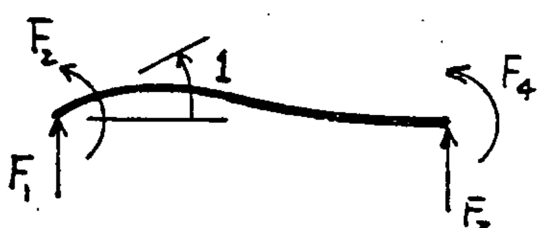
$$v_{,xx} = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad , \qquad \text{donde}$$

$$B_1 = -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} \qquad B_2 = -\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2}$$

$$B_3 = \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \qquad B_4 = -\frac{2}{L} + \frac{6x}{L^2}$$

$$[k] = \int_0^L [B]^T EI [B]\, dx = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$





$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 12EI/L^3 \\ 6EI/L^2 \\ -12EI/L^3 \\ 6EI/L^2 \end{Bmatrix} \qquad \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 6EI/L^2 \\ 4EI/L \\ -6EI/L^2 \\ 2EI/L \end{Bmatrix}$$

Matriz de Rigidez de un elemento cuadrilatero

Ref. Fig. 8

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} [N]$$

$$\underset{3\times 8}{[B]} = \frac{1}{4bc} \begin{bmatrix} -(c-y) & 0 & (c-y) & 0 & - - - - \\ 0 & -(b-x) & 0 & -(b+x) & - — - \\ -(b-x) & -(c-y) & -(b+x) & (c-y) & - — - \end{bmatrix}$$

$$\underset{8\times 8}{[k]} = \int_{-c}^{c}\int_{-b}^{b} \underset{8\times 3}{[B]^T} \underset{3\times 3}{[E]} \underset{3\times 8}{[B]} \, t \, dx\, dy \qquad (a)$$

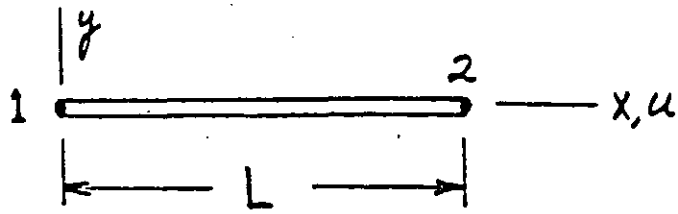
En donde:

$$[E] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

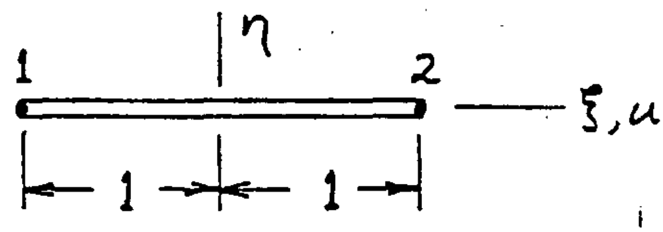
5.2 FAMILIAS DE ELEMENTOS

ELEMENTOS ISOPARAMETRICOS

Barra en coordenadas rectangulares



Barra en coordenadas Isoparam.



Relaciones: $x = \frac{L}{2}(1+\xi)$ $\qquad dx = \frac{L}{2} d\xi = J\, d\xi$

$$\frac{d\xi}{dx} = \frac{2}{L}$$

$$u = \begin{bmatrix} \frac{L-x}{L} & \frac{x}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

$$\epsilon_x = u_{,x} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = [B] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

$$[k] = \int_0^L AE\,[B]^T[B]\,dx$$

$$[k] = AE \begin{bmatrix} \frac{1}{L^2} & -\frac{1}{L^2} \\ -\frac{1}{L^2} & \frac{1}{L^2} \end{bmatrix} L$$

$$[k] = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$u = \begin{bmatrix} \frac{1-\xi}{2} & \frac{1+\xi}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

$$\epsilon_x = u_{,\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{2}{L} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = [B] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

$$[k] = \int_{-1}^{1} AE\,[B]^T[B]\,J\,d\xi$$

$$[k] = AE \begin{bmatrix} \frac{1}{L^2} & -\frac{1}{L^2} \\ -\frac{1}{L^2} & \frac{1}{L^2} \end{bmatrix} \frac{L}{2}\, 2$$

$$[k] = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Podemos continuar con este ejemplo un paso mas, esto es aumentar un nodo en la barra a la mitad del segmento, entonces:

$$u = \left[\frac{2x^2}{2} - \frac{3x}{L} + 1 \,,\; \frac{2x^2}{L^2} - \frac{x}{L} \,,\; -\frac{4x^2}{L^2} + \frac{4x}{L} \right] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \qquad \text{(Rectangular)}$$

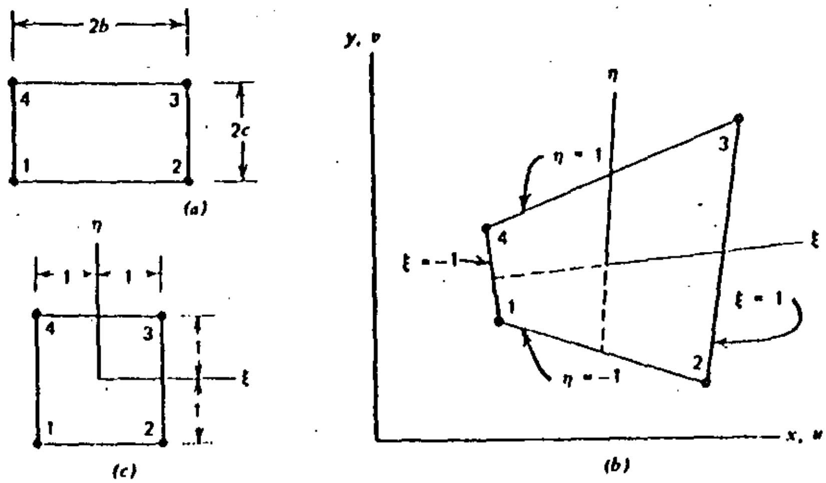
$$u = \left[\frac{-\xi + \xi^2}{2} \quad \frac{\xi + \xi^2}{2} \quad 1 - \xi^2 \right] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

$$\epsilon_x = \underbrace{\frac{2}{L} \left[\frac{-1 + 2\xi}{2} \quad \frac{1 + 2\xi}{2} \quad -2\xi \right]}_{[B]} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

Entonces en general [B] es una función de las coordenadas naturales, De la misma manera J dependería de ξ si el nodo 3 no estuviera colocado en el centro.

26

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_4 \end{Bmatrix}$$



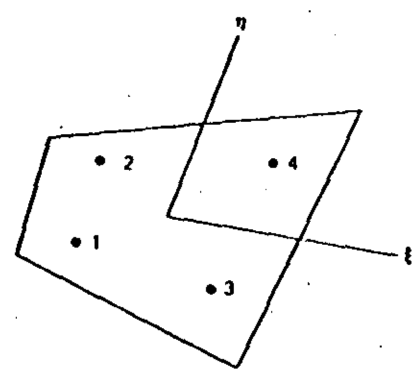
$$x = a_1 + a_2\xi + a_3\eta + a_4\xi\eta$$

$$N_1 = \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4}, \qquad N_2 = \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4}$$

$$N_3 = \frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4}, \qquad N_4 = \frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4}$$

$$x = \sum_1^4 N_i x_i \qquad y = \sum_1^4 N_i y_i$$

$$u = \sum_1^4 N_i u_i \qquad v = \sum_1^4 N_i v_i$$

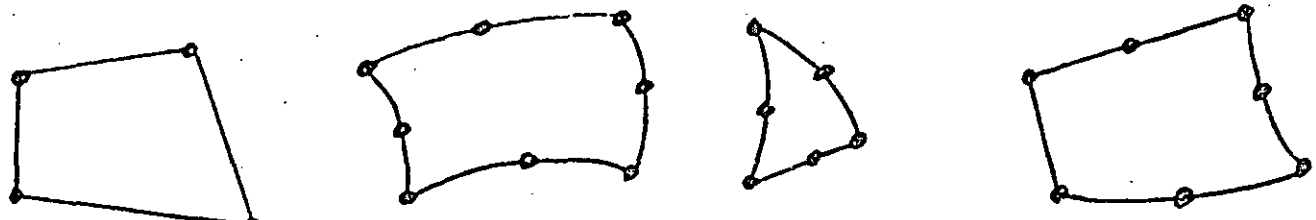


$$I = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(\xi,\eta,\zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta = \sum_i \sum_j \sum_k W_i W_j W_k f(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) \quad (5.3.5)$$

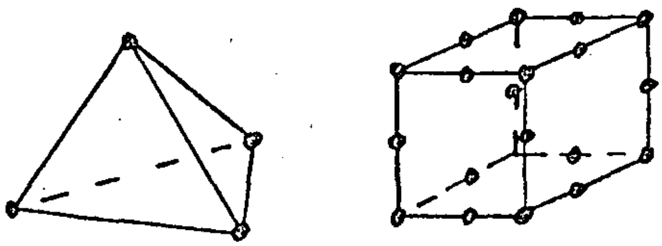
Gauss Quadrature Coefficients

No. of Points	Locations	Associated Weights W_i
1	$x_1 = 0.000000000000000000000000$	2.
2	$x_1, x_2 = \pm 0.577350269189625764509148$	1.
3	$x_1, x_3 = \pm 0.774596669241483377035853$	$\frac{5}{9}$ (= 0.555 ...)
	$x_2 = 0.000000000000000000000000$	$\frac{8}{9}$ (= 0.888 ...)

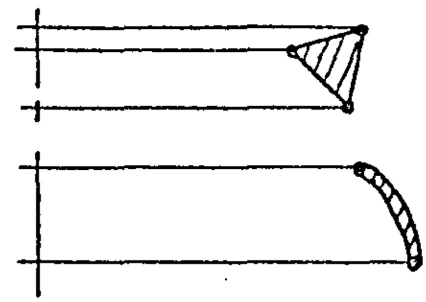
SOME ELEMENT TYPES



linear — quadratic — quadratic — linear - quadratic



linear — quadratic



elements for axisymmetric solids & thin shells

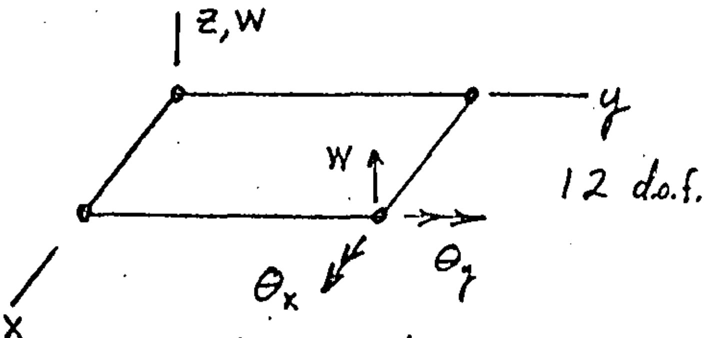
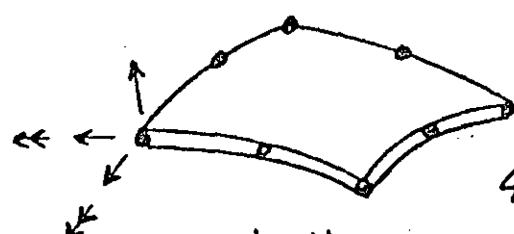
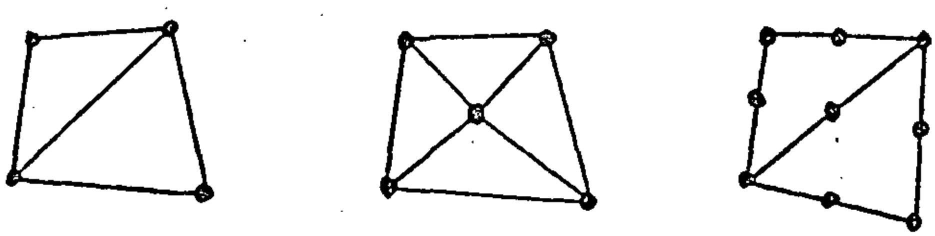


plate bending

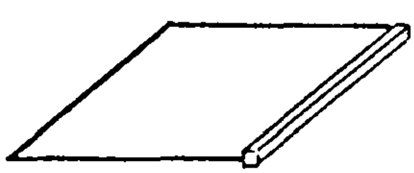


shell

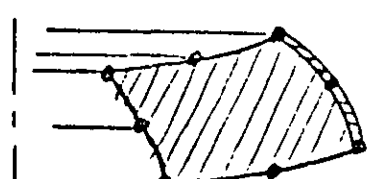
SOME ASSEMBLAGES



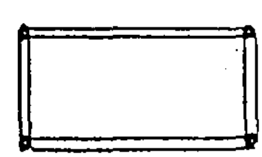
5 tetrahedra combine into a hexahedron



edge beam on a plate



solid propellant in rocket case



four stringers on shear panel

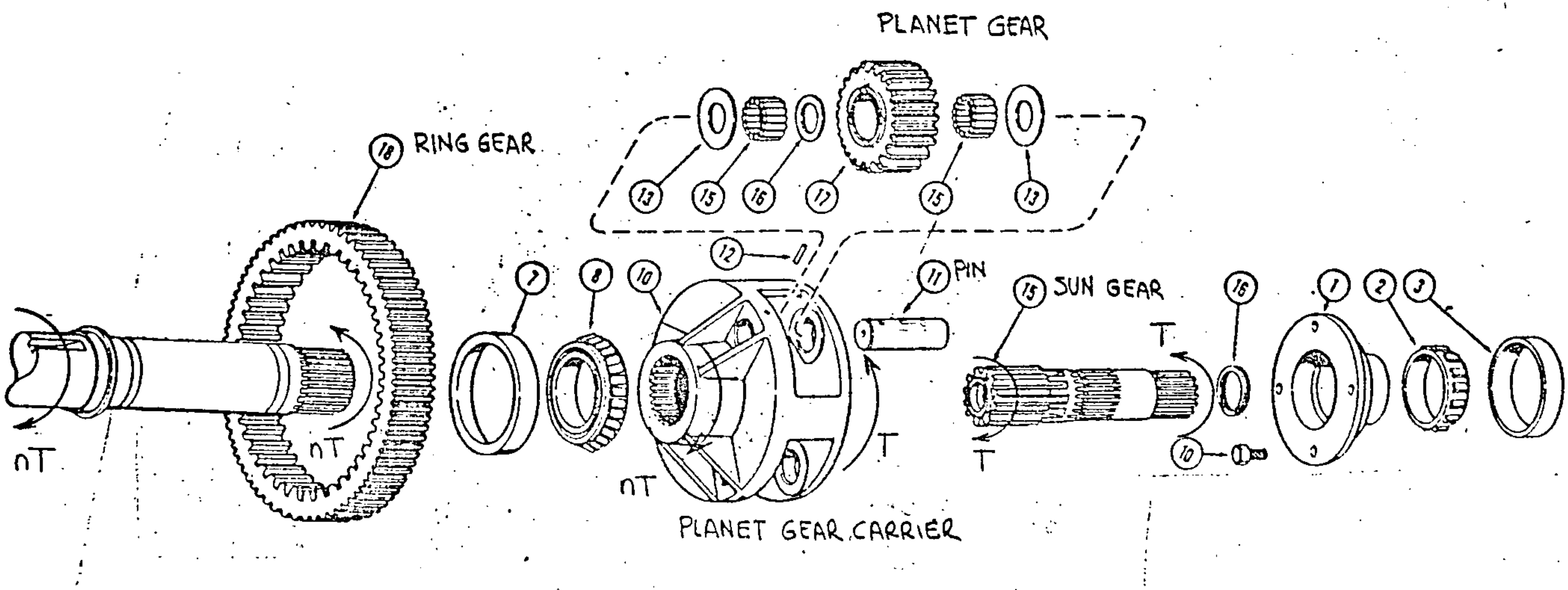
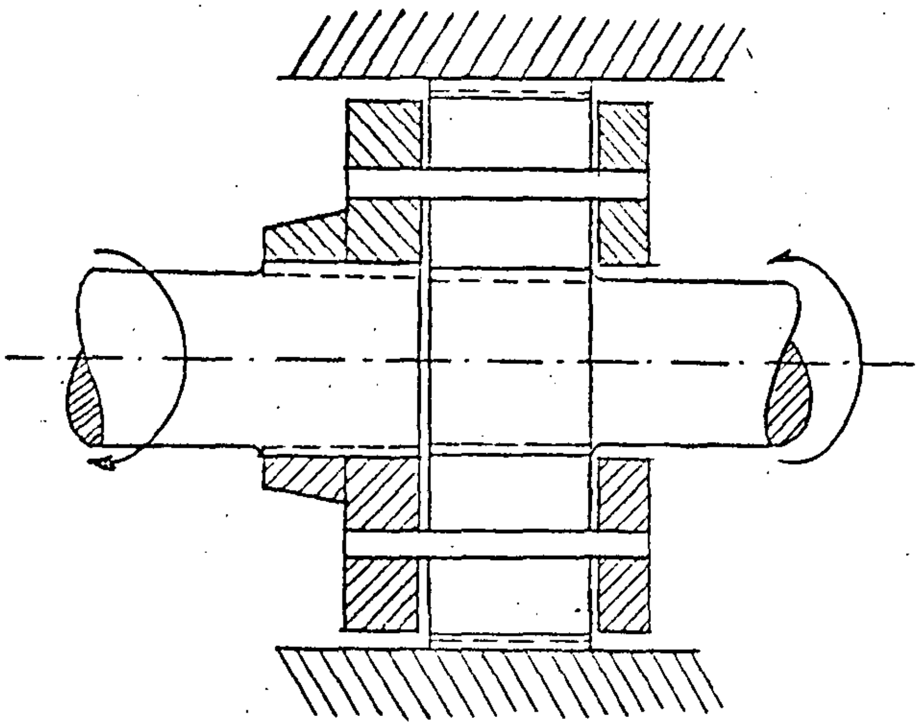
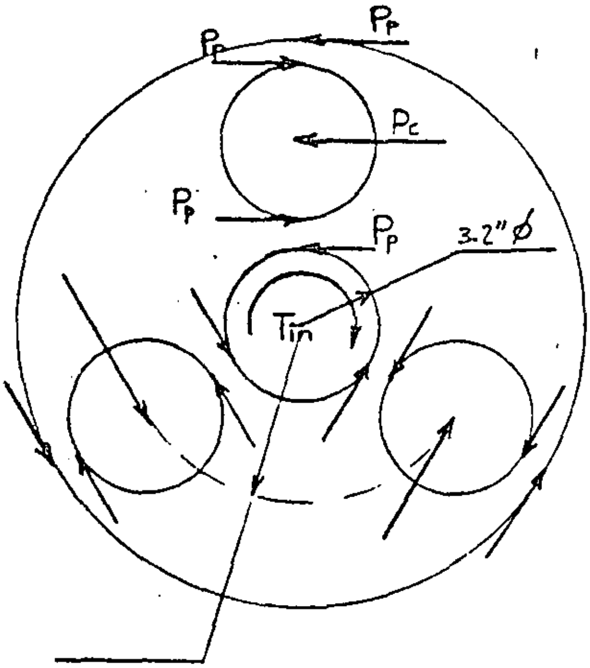


FIG 2

PLANETARY GEAR TRAIN
SYSTEM





$T_{in} = 41\,022$ lb-in

$F_p = 41022/3 \times 1.6 = 8546.25$ lb

P_p — Reaction @ planet

P_c — Load @ Carrier

$F_c = 2F_p = 17\,092.5$ lb

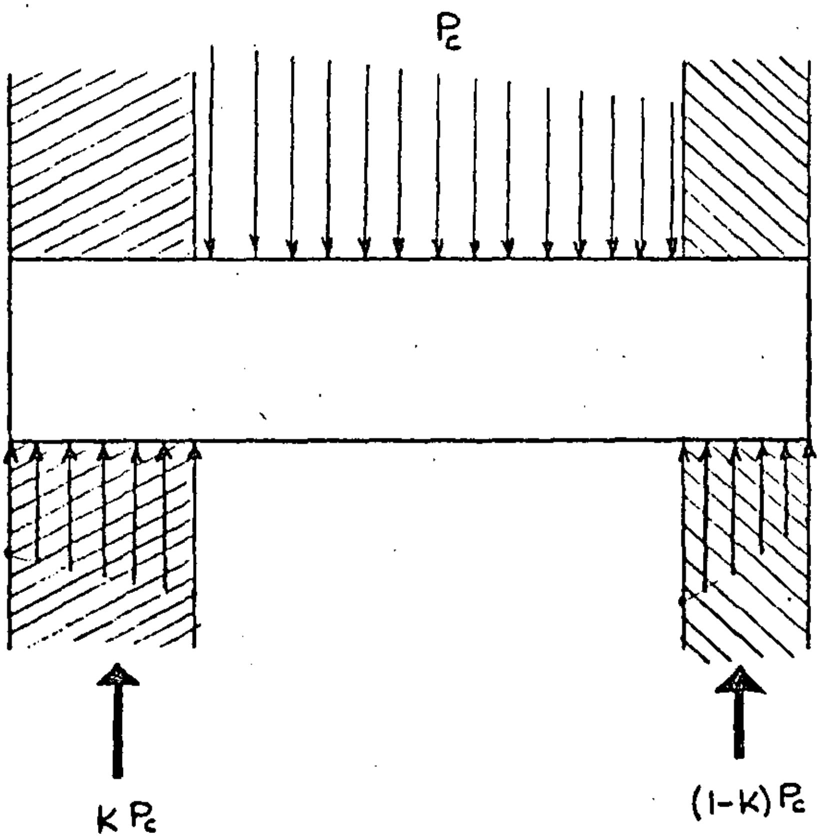


FIG 3

FREE BODY DIAGRAM AND REACTIONS

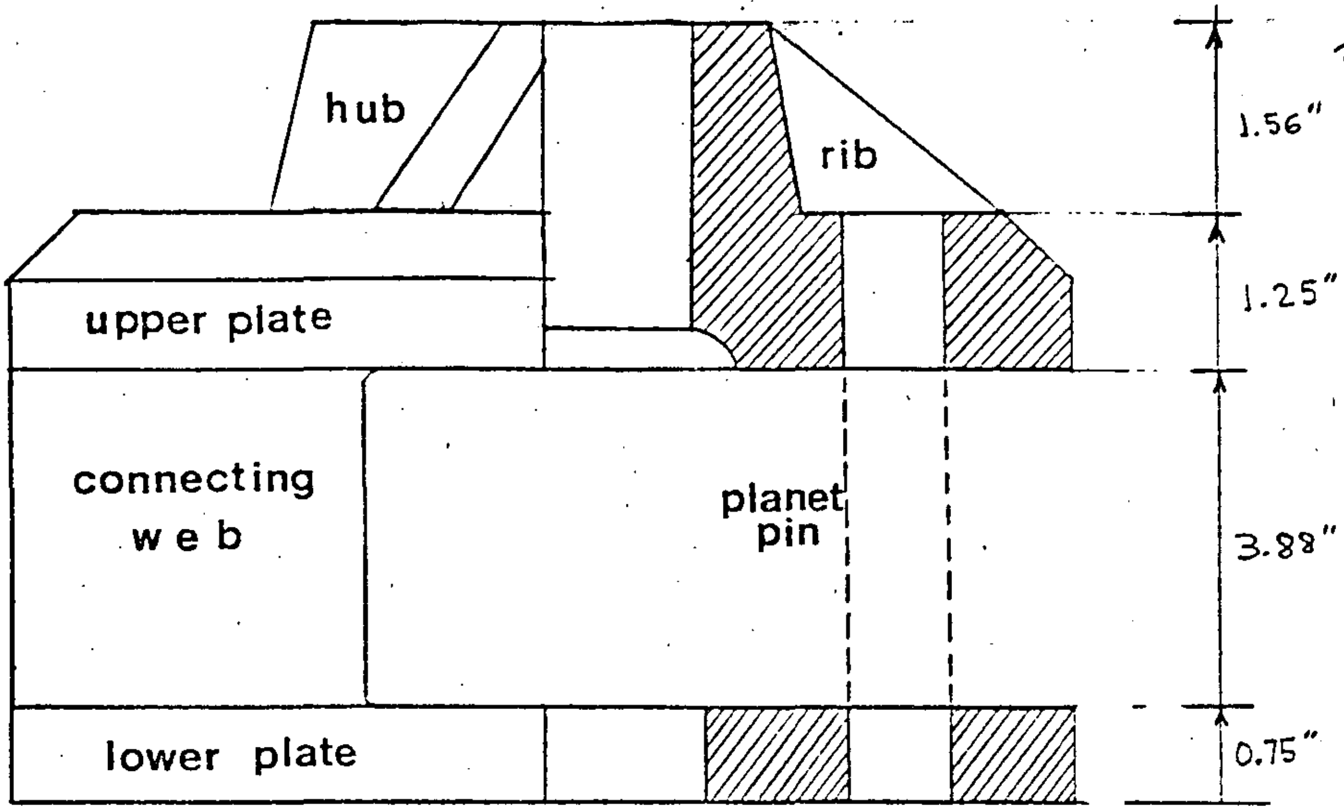

hub
rib
1.56"
upper plate
1.25"
connecting
web
planet
pin
3.88"
lower plate
0.75"

FIG 4

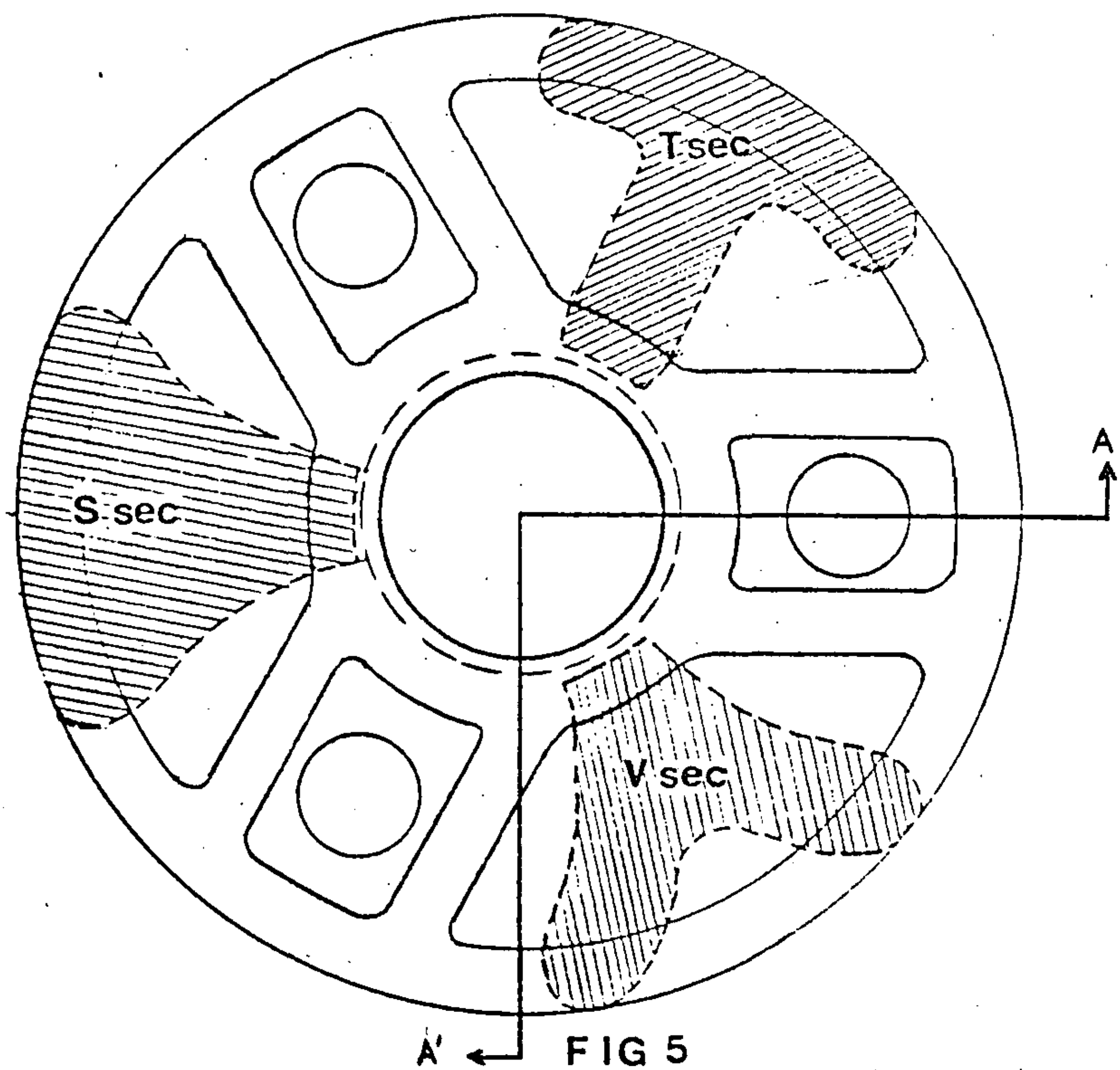
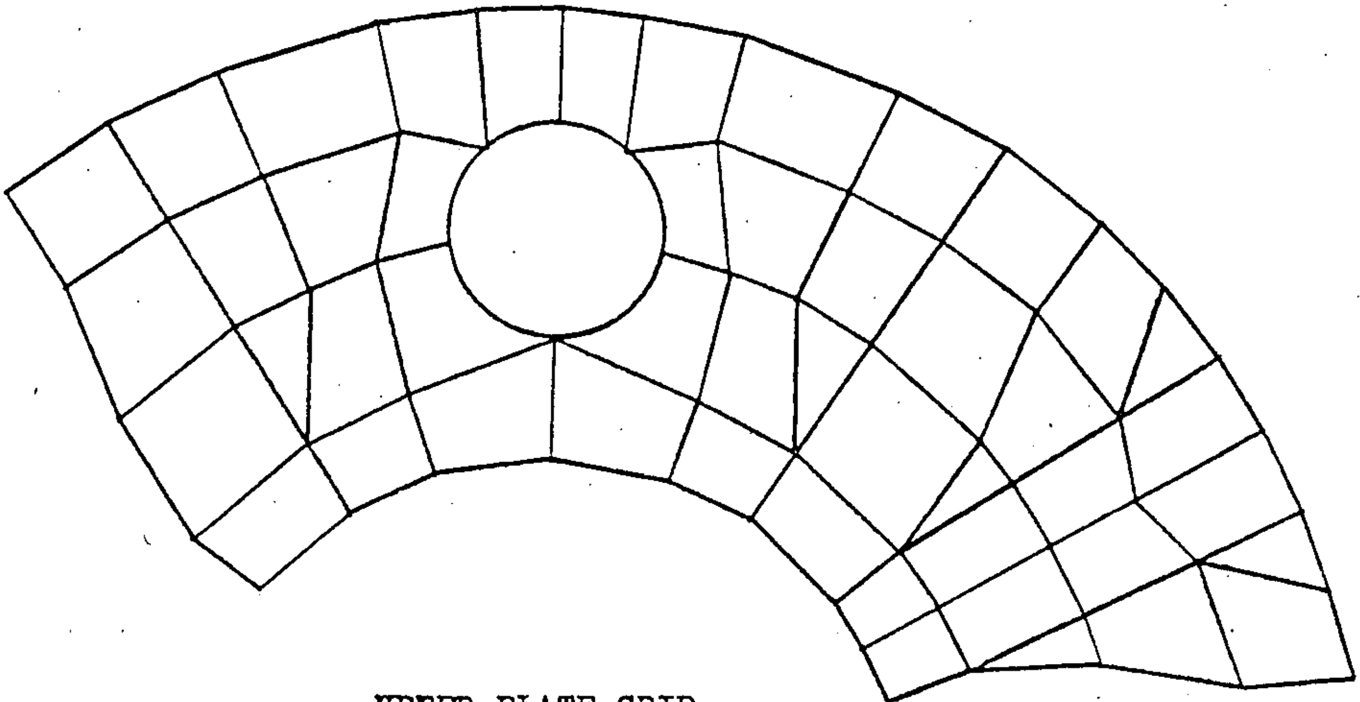
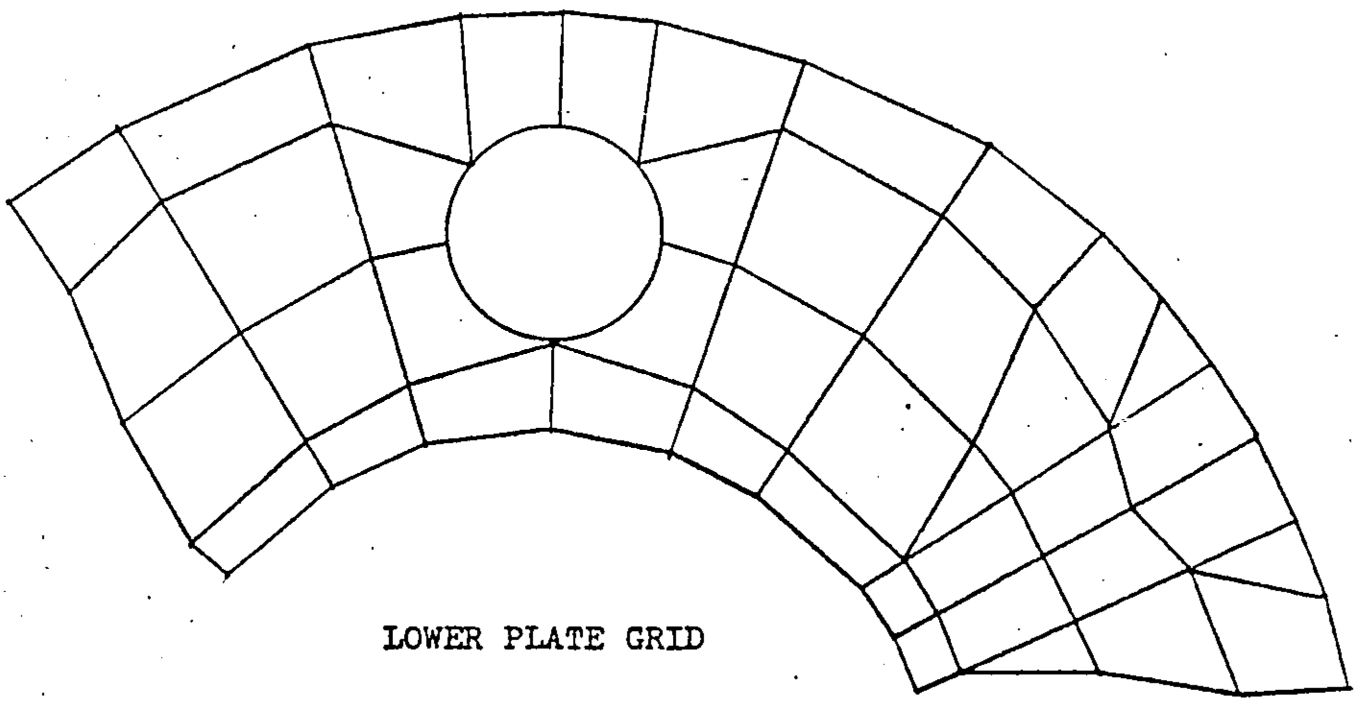

T sec
S sec
A
V sec
A'

FIG 5

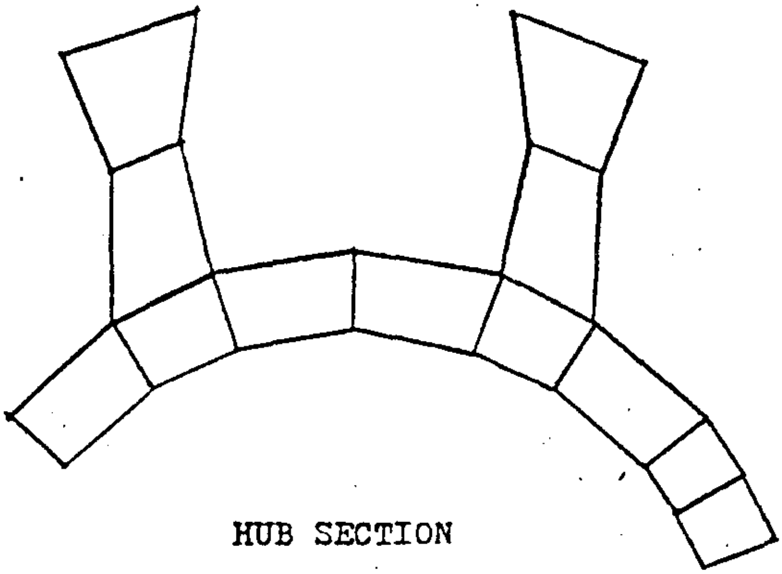


UPPER PLATE GRID

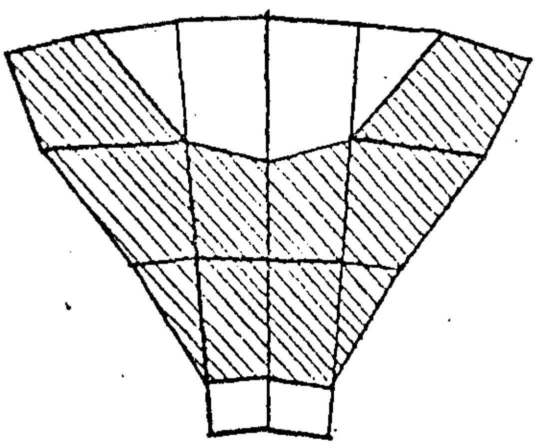


LOWER PLATE GRID

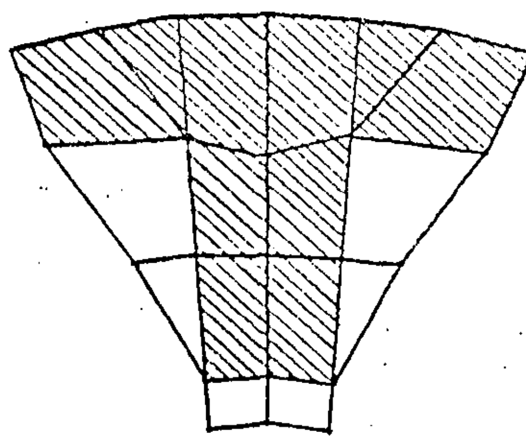
FIG 7 .- GEAR CARRIER FEM MODEL



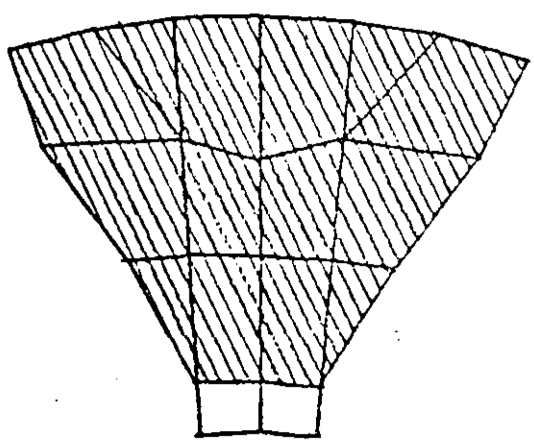
HUB SECTION



"V"-SECTION
CONNECTING WEB



"T"- SECTION
CONNECTING WEB



"S"-SOLID SECTION
CONNECTING WEB

FIG. 8

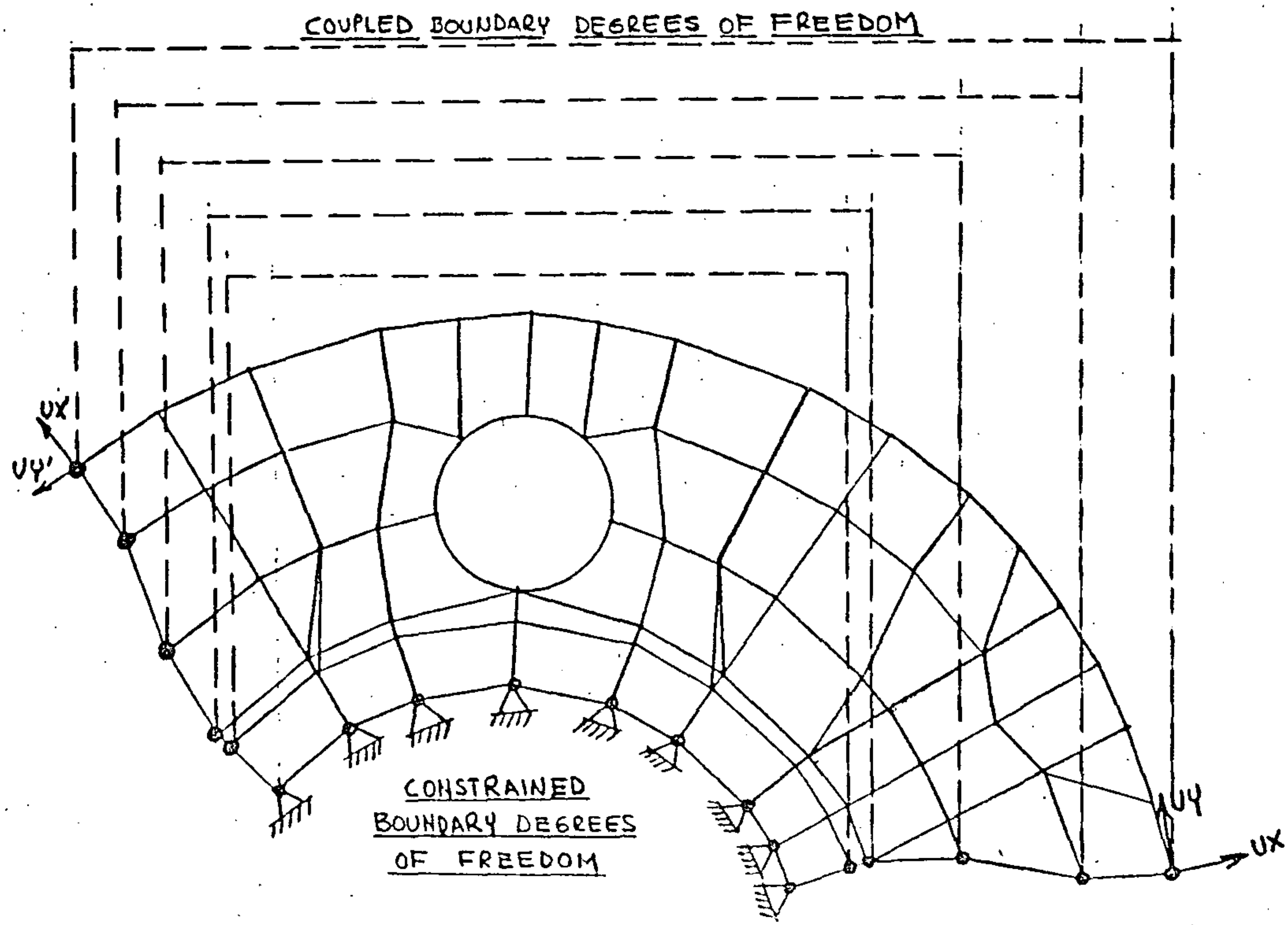
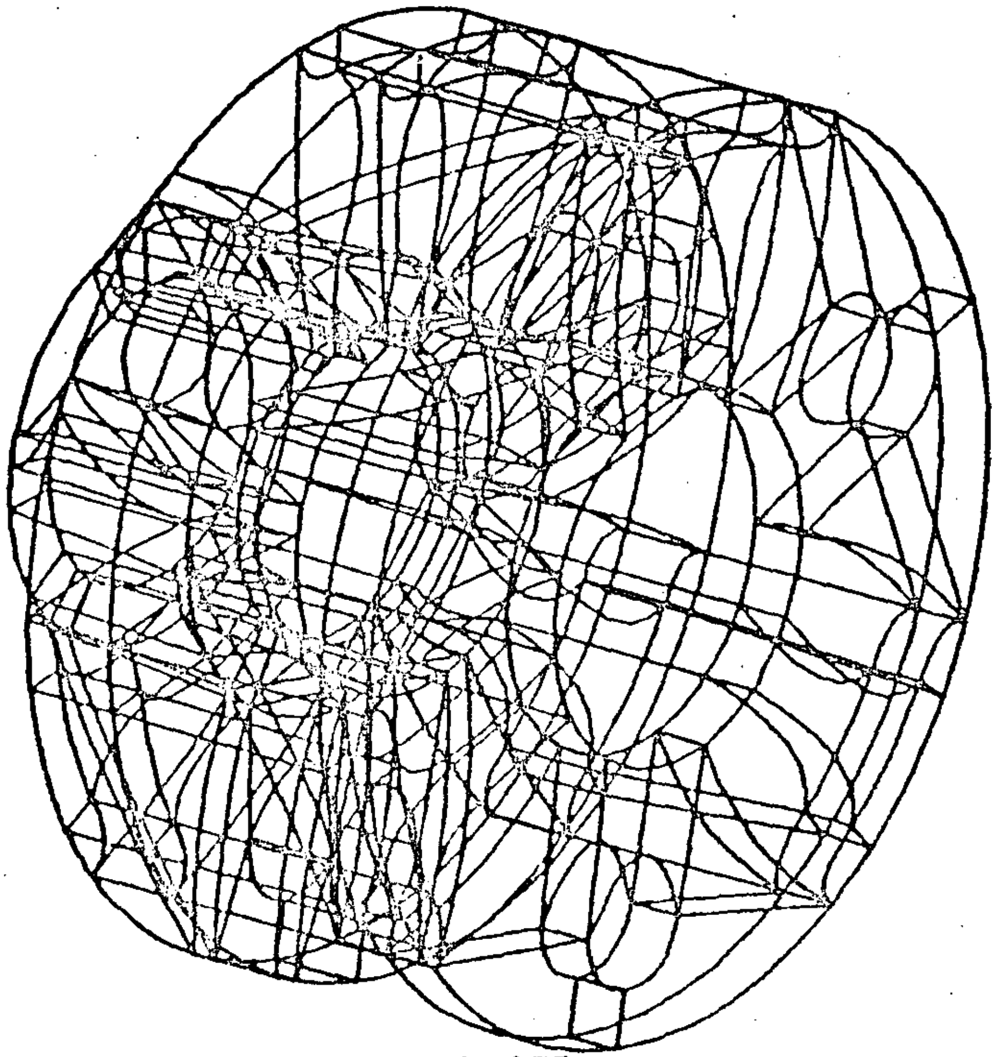

COUPLED BOUNDARY DEGREES OF FREEDOM
UX'
UY'
CONSTRAINED BOUNDARY DEGREES OF FREEDOM
UY
UX

FIG 9

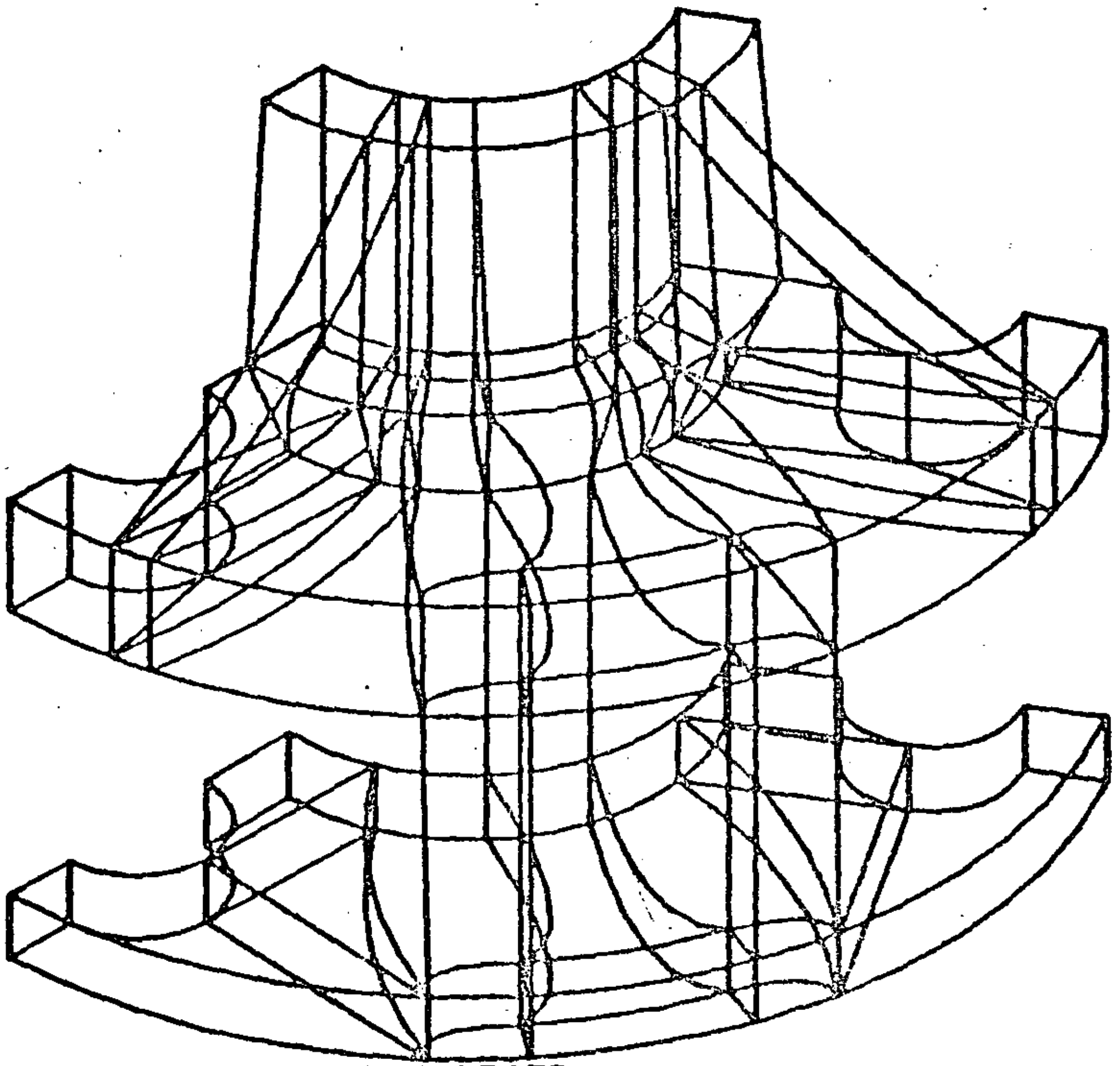
Table 1 - Coupled Node Displacements

Node 1	Node 2	Directions
1	1001	UX, UY, UZ
27	1027	UX, UY, UZ
40	1040	UX, UY, UZ
55	1055	UX, UY, UZ
70	1070	UX, UY, UZ
85	1085	UX, UY, UZ
102	1002	UX, UY, UZ
119	1119	UX, UY, UZ
215	1215	UX, UY, UZ
651	1651	UX, UY, UZ
664	1664	UX, UY, UZ
667	1667	UX, UY, UZ
709	1709	UX, UY, UZ
728	1728	UX, UY, UZ
747	1747	UX, UY, UZ
764	1764	UX, UY, UZ
781	1781	UX, UY, UZ



PLANETARY GEAR CARRIER

PLOT NO. 1 FIG 10



PLANETARY GEAR CARRIER

PLOT NO. 1

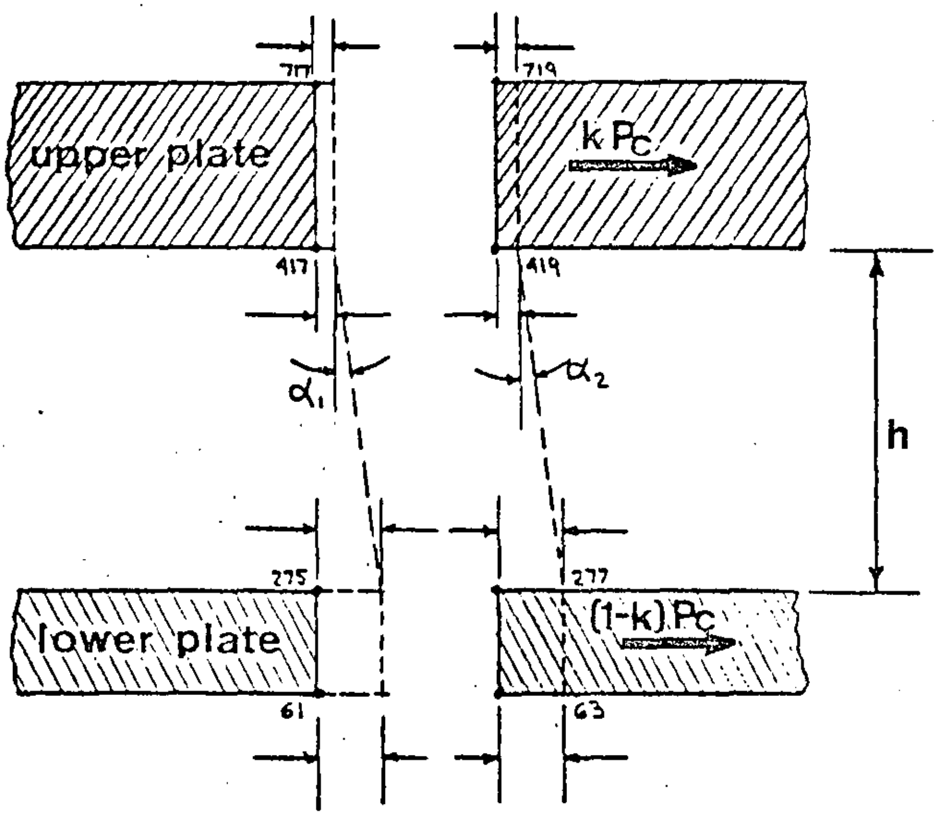
FIG 11

	V section	Tsection	S section	Ssec/pin
U_{61} *	0.005308	0.004900	0.004031	0.00372
U_{63}	0.005324	0.004914	0.004049	0.00375
U_{275}	0.005630	0.005221	0.004260	0.004175
U_{277}	0.006351	0.005945	0.004967	0.004149
U_{417}	0.001577	0.001614	0.001645	0.002155
U_{419}	0.002169	0.002208	0.002235	0.002148
U_{717}	0.001788	0.001817	0.001798	0.001773
U_{719}	0.002117	0.002145	0.002127	0.001766
α_1 **	0.001044	0.000929	0.000679	0.000520
α_2	0.001077	0.000963	0.000704	0.000515

TABLE 3

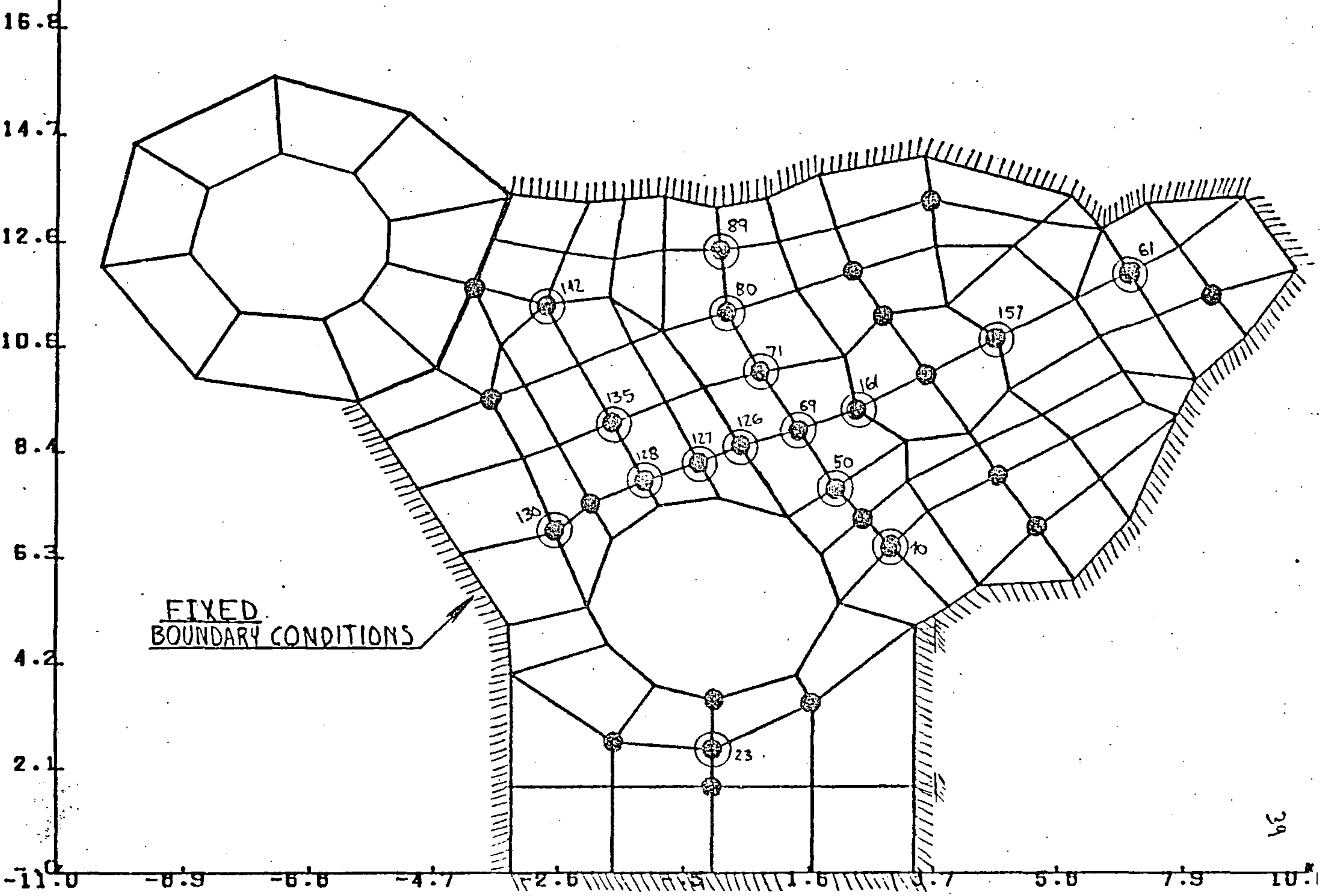
$U^{*}_{(i)}$ - Tangential displacement node i

$\alpha^{**}_{(j)}$ - Slope of pin side j

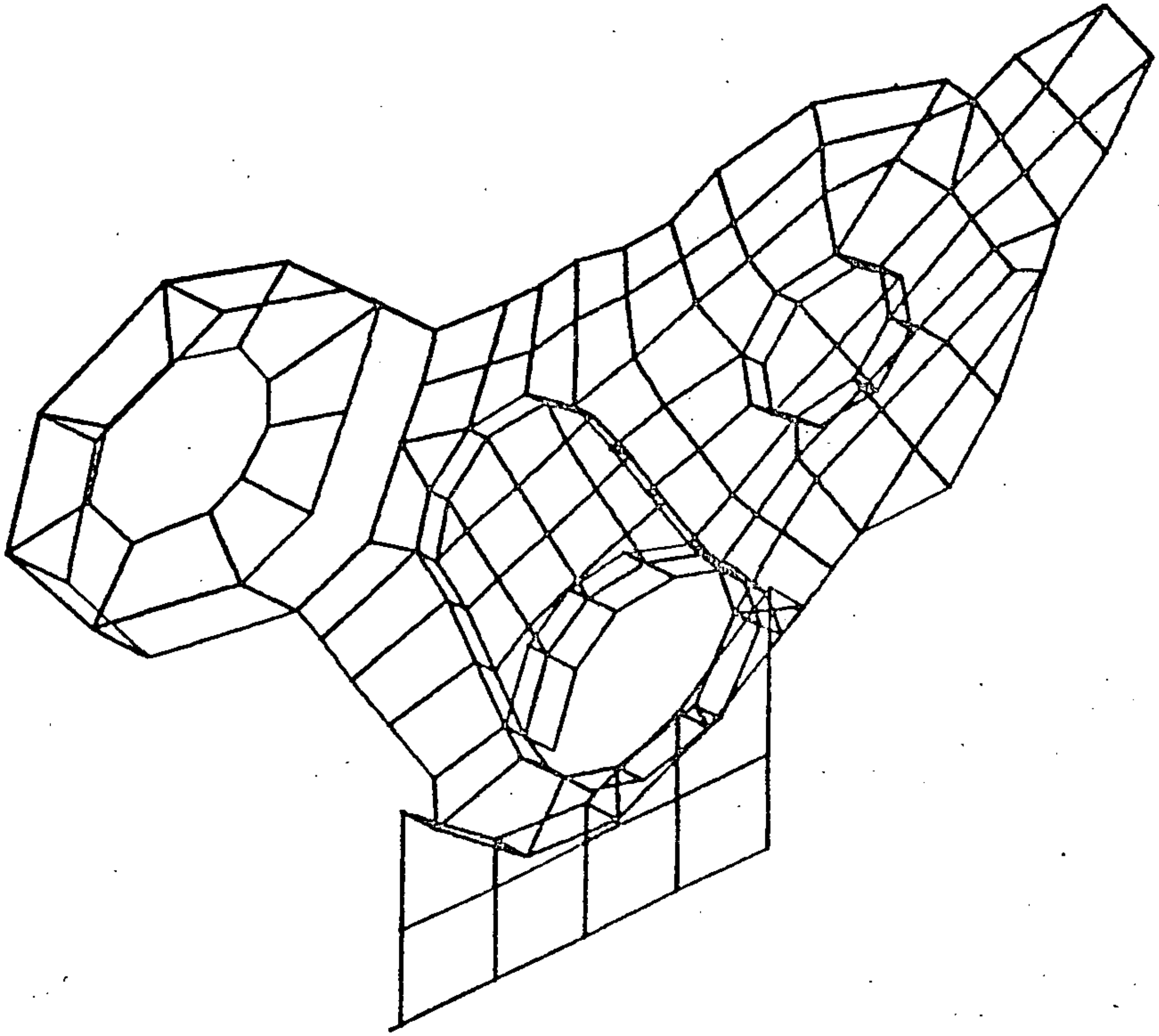

717
719
upper plate
k Pc
417
419
α_1
α_2
h
275
277
lower plate
(1-k) Pc
61
63

F I G 14

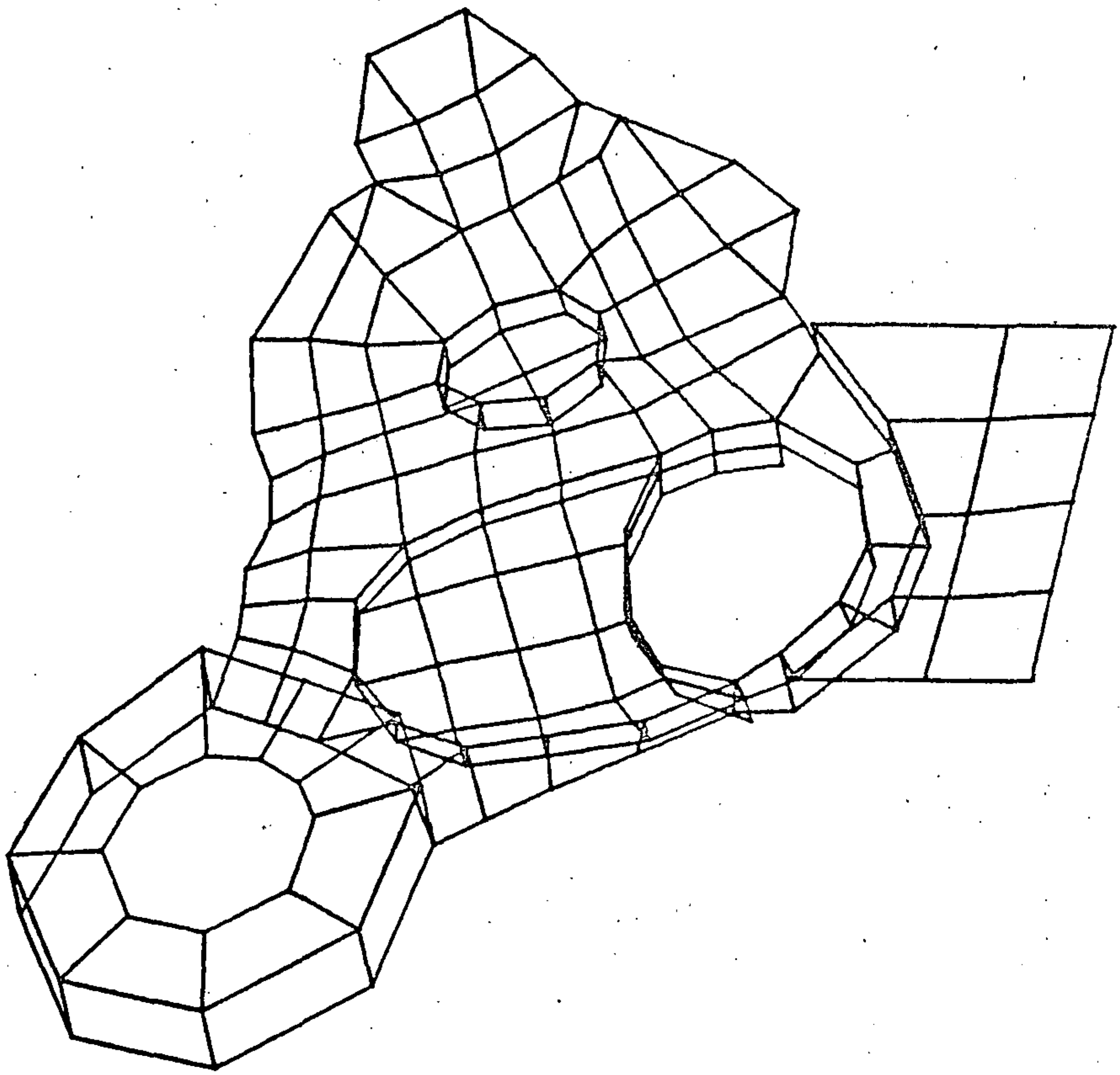
◎ .= INDICATES DYNAM[illegible] DEGREES OF FREEDOM INCLUDED FOR THE MOI
AND FREQUENCY R[illegible]ONSE ANALYSES.
● .- INDICATES DYNAM[illegible] DEGREES OF FREEDOM INCLUDED ONLY IN T.
SECOND MODAL ANALYSIS.

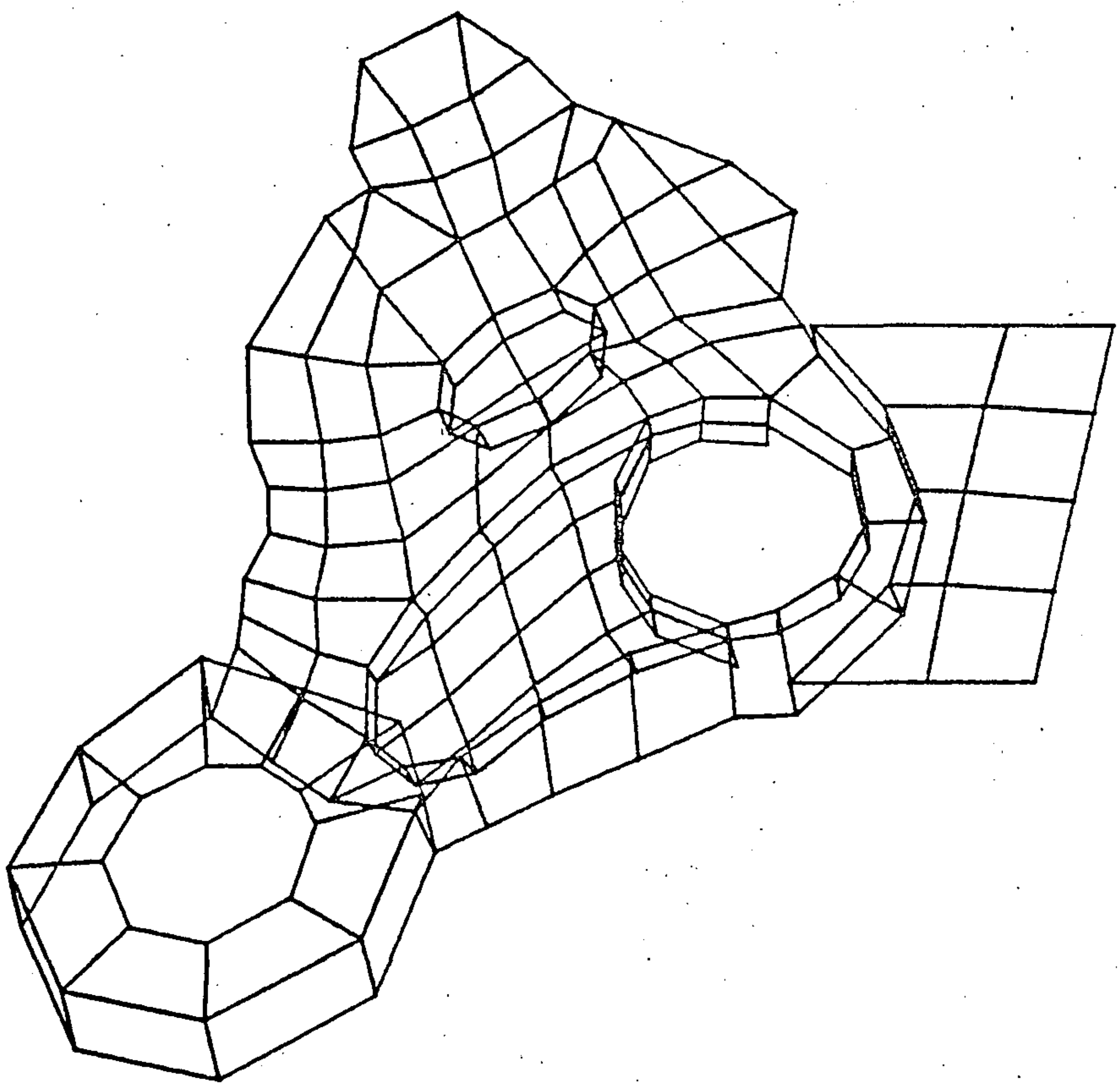


ND GEAR COVER"

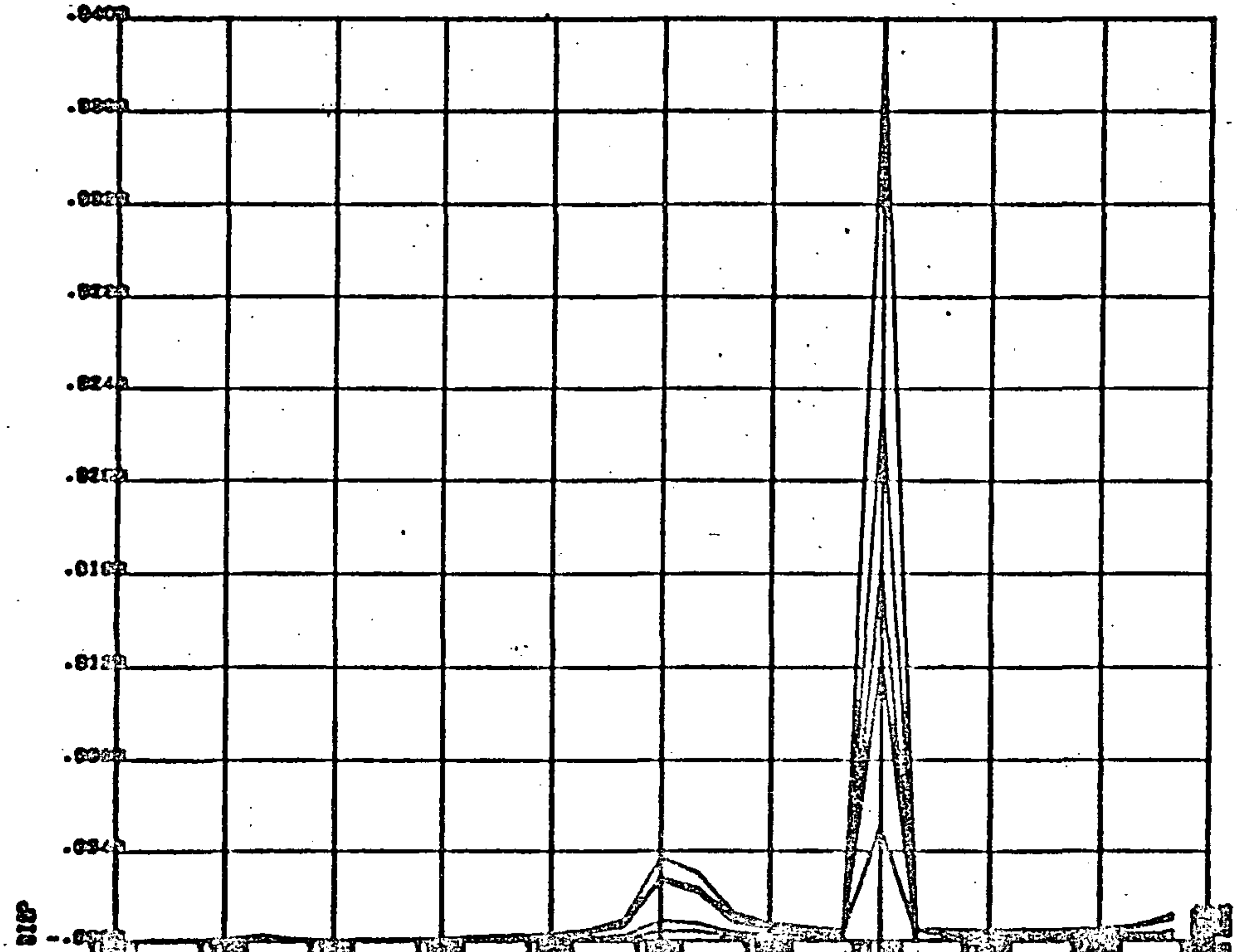


"TIMING GEAR COVER"





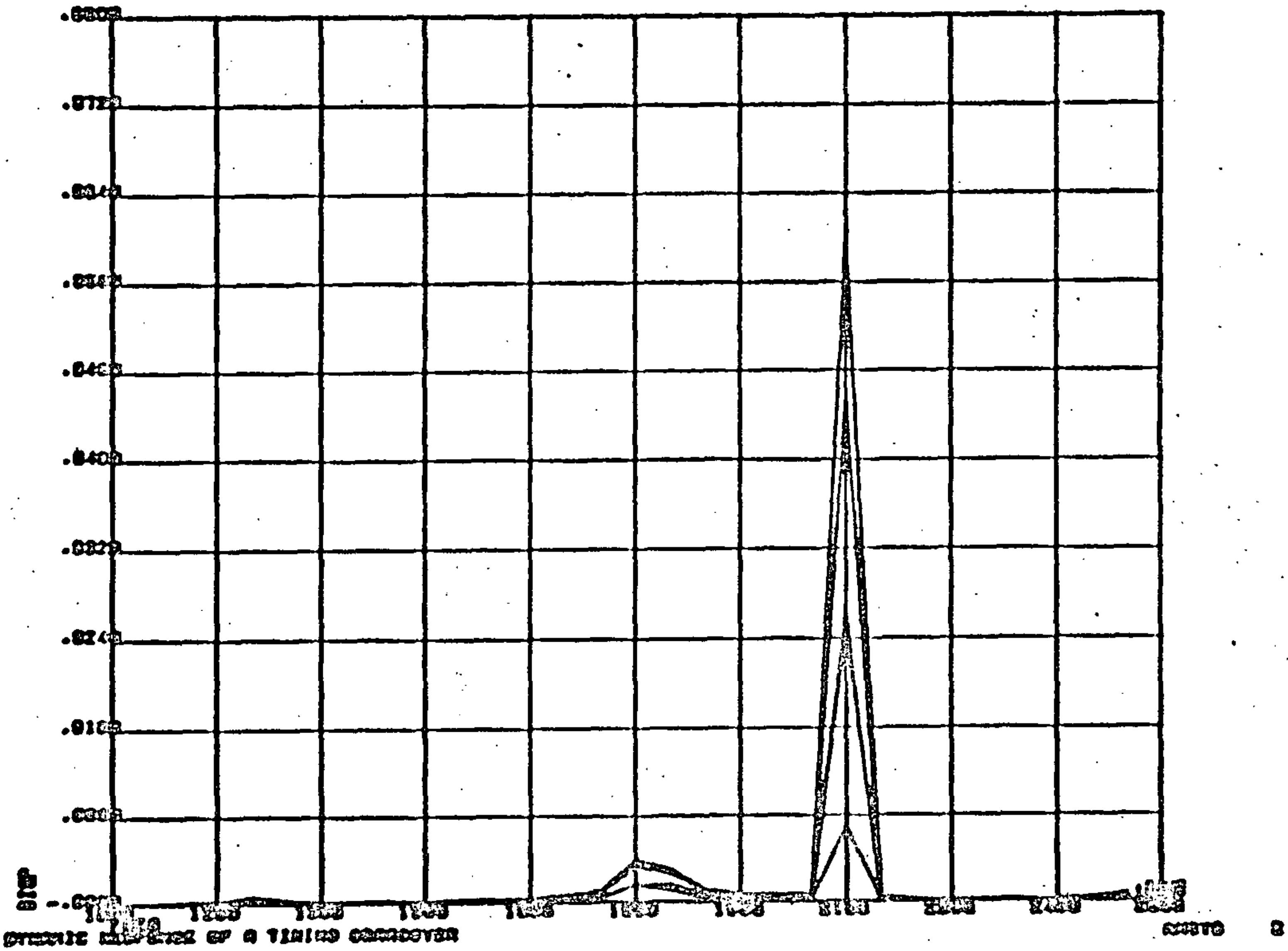
?



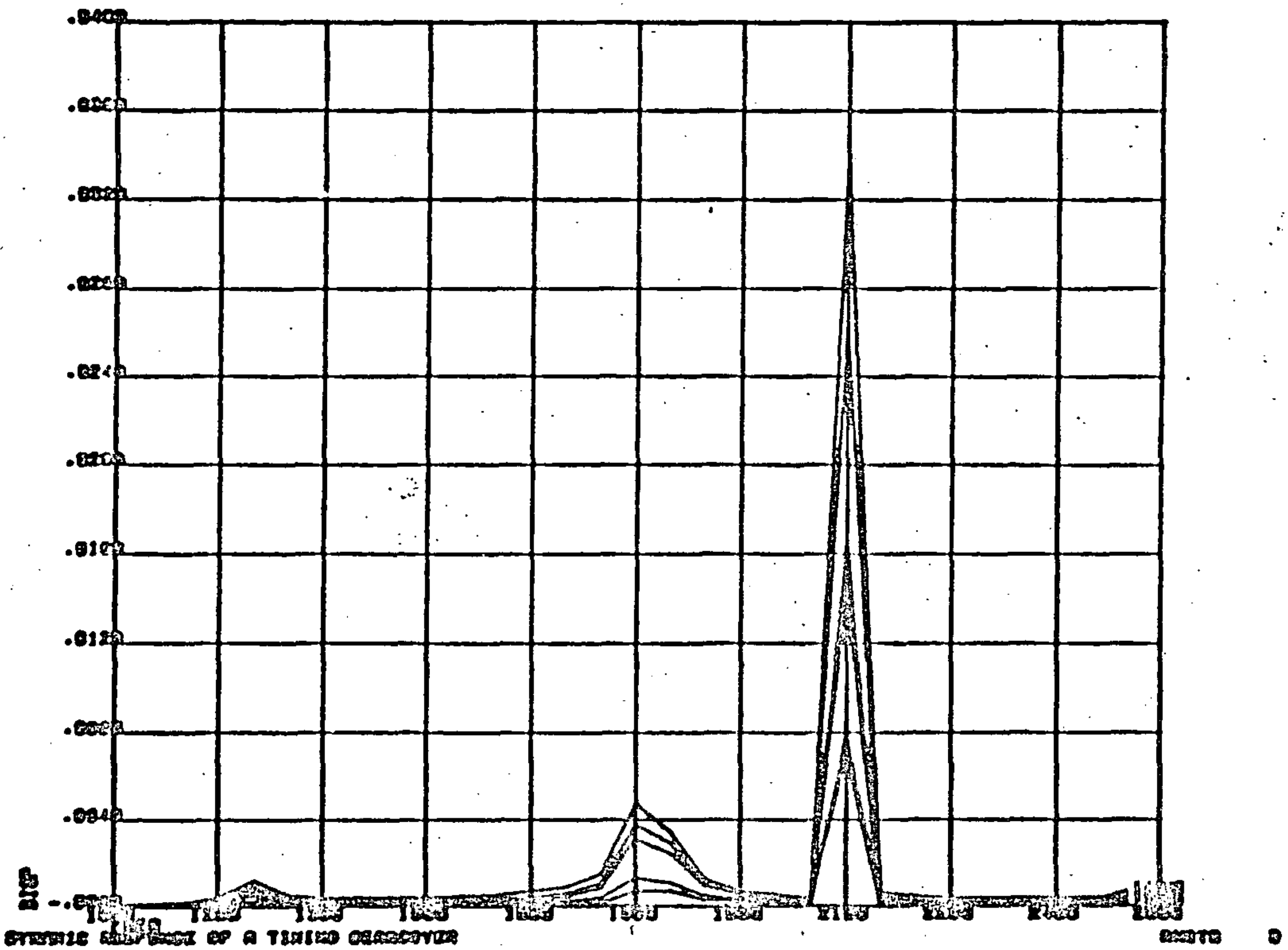
[illegible] OF A TI[illegible] [illegible]   [illegible]   2

43

?



?



DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.

EL METODO DEL ELEMENTO FINITO EN LA INGENIERIA

METODO DE ANALISIS POR ELEMENTOS FINITOS

FEBRERO, 1985

Palacio de Minería Calle de Tacuba 5 primer piso Deleg. Cuauhtémoc 06000 México, D.F. Tel.: 521-40-20 Apdo. Postal M-2285

VI.1 Estructura General de Paquetes Computacionales

METODO DE ANALISIS POR ELEMENTOS FINITOS.

INTRODUCCION. I

El ingeniero en la busca de los valores numéricos adecuados para describir su proceso de diseño, se encontraba generalmente con formulaciones matemáticas difíciles. Por ejemplo, considerando el simple caso de teoría de flexión de placas, bajo las hipótesis de pequeñas deformaciones y que las secciones planas permanecen planas después de la deformación, la ecuación diferencial que gobierna el análisis para un material elástico lineal homogeneo e isotrópico es

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = \frac{q}{D} \tag{1}$$

donde W es la deflexión en el punto (x, y), q es la intensidad de la carga en el punto (x, y), y $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ es la rigidez flexionante de la placa la cual depende del modulo de elasticidad E, el espesor de la placa h y la relación de Poisson ν. En la Fig. 1 se presenta un elemento diferencial de la placa y las acciones y reacciones sobre él. Combinando la flexión simple en dos direcciones se obtiene para los momentos y cortantes por unidad de longitud de placa lo siguiente:

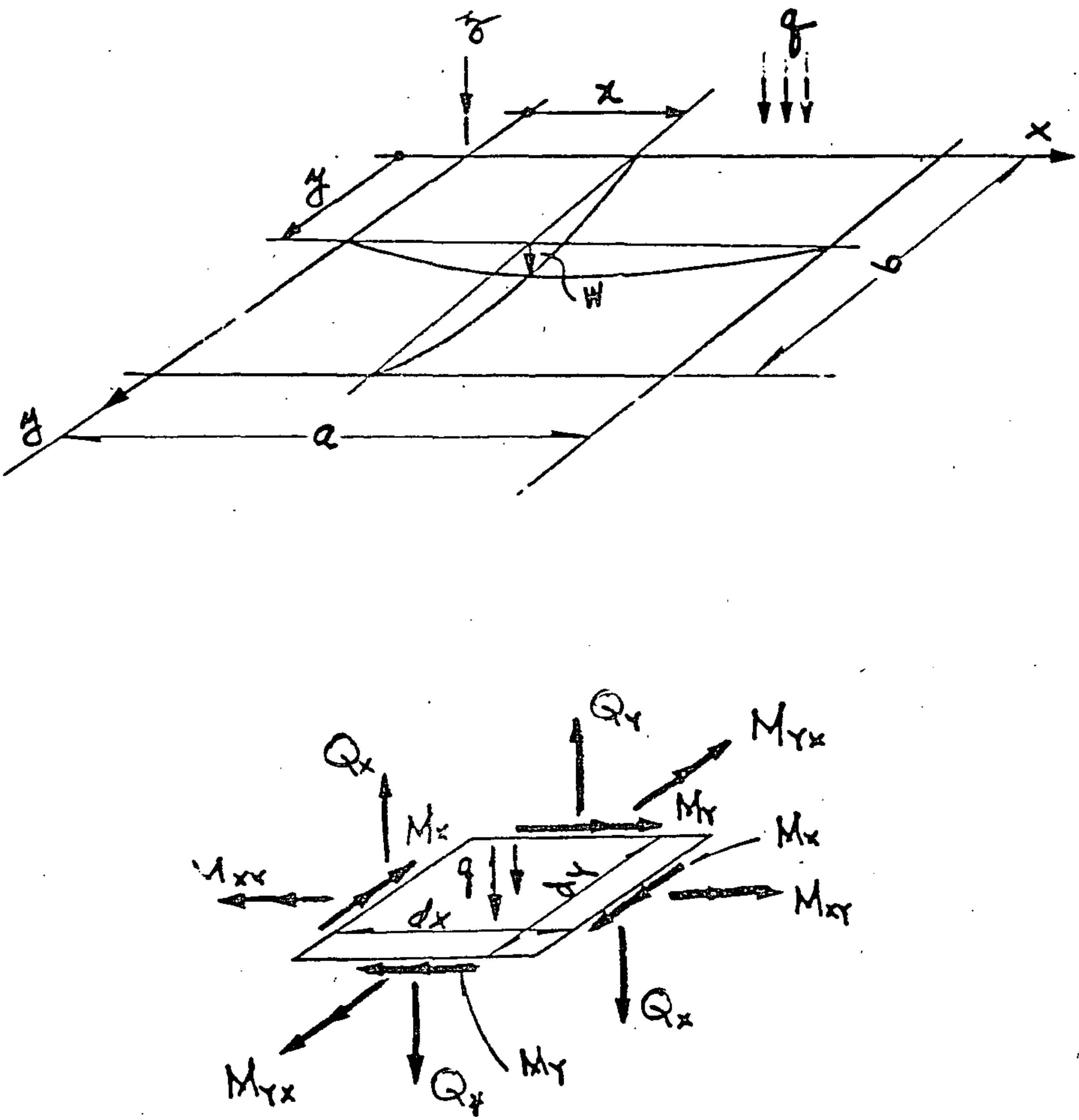


Fig. 1 Superficie media de una placa, y un elemento diferencial dx, dy.

$$M_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$

$$M_y = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)$$

$$M_{xy} = D(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \qquad (2)$$

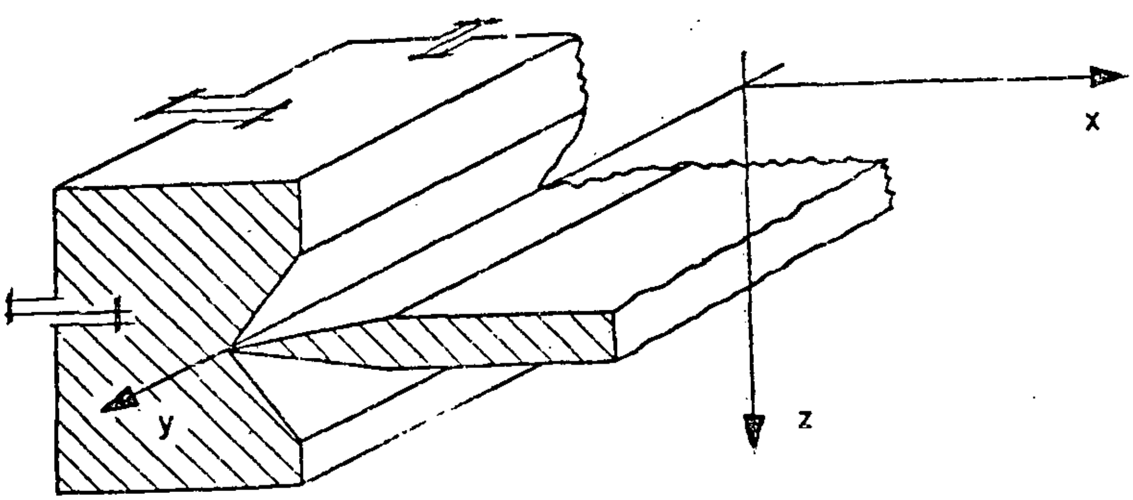
$$Q_x = -D\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 w$$

$$Q_y = -D\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2 w$$

donde
$$\nabla^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

Para el caso particular de la placa libremente apoyada, y rectangular, - cuyas condiciones en la frontera (Fig. 2) son:

$$W(0,y) = 0$$
$$W_{xx}(0,y) + \nu W_{yy}(0,y) = 0 \qquad (3)$$



Navier en 1820 presentó a la Academia Francesa de Ciencias, la solución representando la carga q (x, y), por medio de una serie trigonométrica doble

$$q(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \operatorname{sen} \frac{m\pi}{a} x \operatorname{sen} \frac{n\pi}{b} y \tag{4}$$

substituye (4) en (1) y considerando las propiedades de ortogonalidad de las series trigonométricas obtiene la solución de la ecuación diferencial bi-armónica (1) como

$$W = \frac{1}{\pi^4 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{mn}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \operatorname{sen} \frac{m\pi}{a} x \operatorname{sen} \frac{n\pi}{b} y \tag{5}$$

en donde el coeficiente Amn viene expresado por

$$a_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x,y) \operatorname{sen} \frac{m\pi}{a} x \operatorname{sen} \frac{n\pi}{b} y \, dx \, dy \tag{6}$$

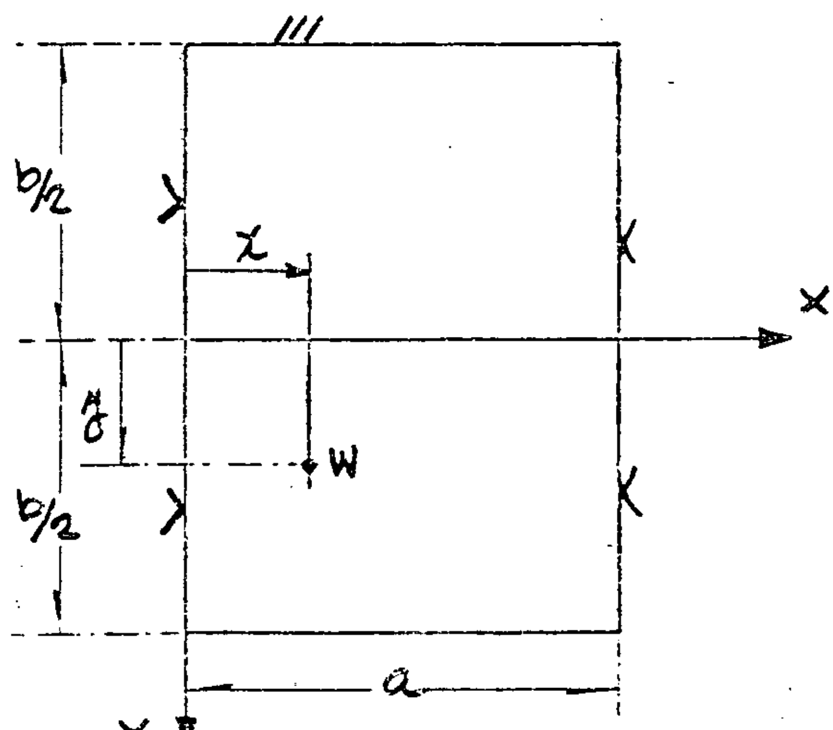
El procedimiento de Navier consiste en lo siguiente: Conocida la función de carga q (x,y), se substituye en (6) y se obtiene el coeficiente Amn el cual - nuevamente se substituye en (5) y se obtiene la deflexión W (x,y), y por medio las ecuaciones (2) se obtienen los momentos y cortantes $\{M\}$ y $\{Q\}$
Es importante observar que las limitaciones de Navier se refieren a una placa - rectangular libremente apoyada y con una función de carga q (x,y) impar con - respecto a x, y con respecto a Y, es decir, $f(x) = -f(-x)$ y

Si la función fuese par, la representación de - q (x,y) sería mediante una serie de cosenos, y si q (x, y) fuese una función cual_ quiera, se representaría mediante una serie trigonométrica doble completa de senos y cosenos, y se tendrían problemas en satisfacer las condiciones en la frontera. Generalmente la convergencia de la serie (5) es lenta, y en algunos casos es necesario considerar más de 500 términos para asegurar la solución correcta.

Posteriormente en 1900 M. Levy cambia de posición los ejes coordenados (Fig. 3) e utiliza una serie trigonométrica simple

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} f_m(y) \, \mathrm{sen} \, \frac{m\pi}{a} x \qquad (7)$$

El procedimiento de Levy consiste en substituir (7) en (1) obteniendo una ecuación diferencial lineal de cuarto orden en fm(y) con coeficientes constantes no homogenea con la cual ya es posible satisfacer diferentes condiciones en la frontera $y = \pm \frac{b}{2}$ pero continua limitado a una placa rectangular libremente apoyada en las fronteras x = o y x = a.



Las limitaciones de análisis tan restringidas, como los ejemplos anteriores, aparecían en innumerables problemas de ingeniería, lo cual originó el principio de los métodos numéricos, el cual presenta dos etapas de desarrollo. Antes de la época de las computadoras, donde representa un importante papel el Prof. Southwell del Colegio Imperial de Inglaterra, desarrollando y aplicando los métodos numéricos de relajación y diferencias finitas, superando las limitaciones restringidas de los métodos analíticos de solución.

Durante la era de las computadoras digitales, el método de análisis por elementos finitos ha obtenido gran popularidad, puesto que en este procedimiento como resultado de la discretización del medio por analizar, se obtienen sistemas grandes de ecuaciones algebraicas lineales simultáneas, lo cual actualmente su solución no representa ningún problema. Por ejemplo, en el caso de análisis elástico lineal de placas, podemos tener cualquier condición de apoyo, de geometría y de cargas, prácticamente se eliminan la mayoría de las restricciones de las soluciones analíticas mencionadas, el problema más importante es verificar adecuadamente su convergencia.

El primer trabajo referente al método se debe a Hrenikoff Ref. 1 publicado en 1941, y el segundo a McHenry publicado en 1943 en ambos trabajos (Fig. 4) se verifican soluciones de problemas de elasticidad bidemensional en estado plano de esfuerzos, discretizando el medio y buscando la analogía con la solución estructural.

Posteriormente en 1949 Newmark, en su libro de Métodos Numéricos - Ref. 3 , presenta los métodos de Hrenikoff y McHenry. Sin embargo, el

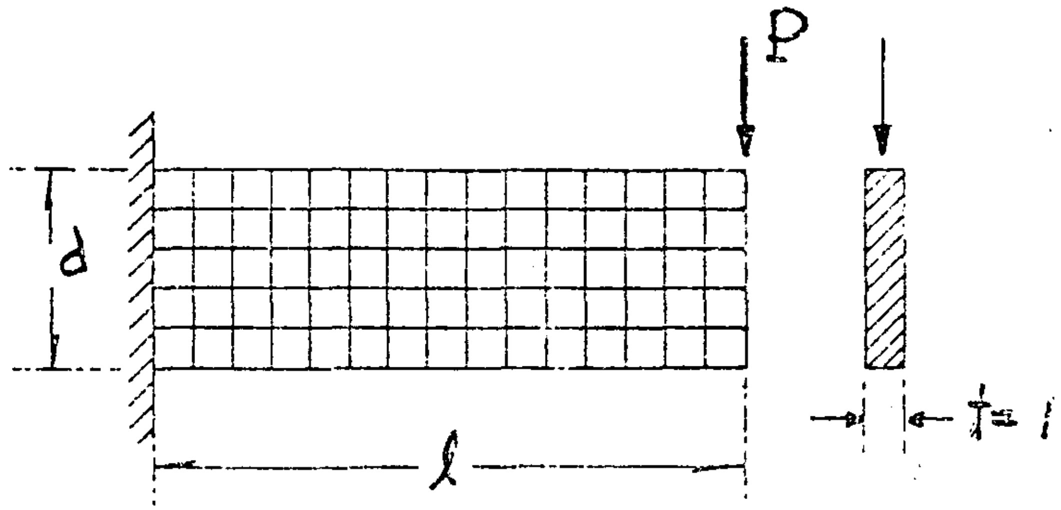


Fig. 4 Primera solución presentada por Hrenikoff en 1941.

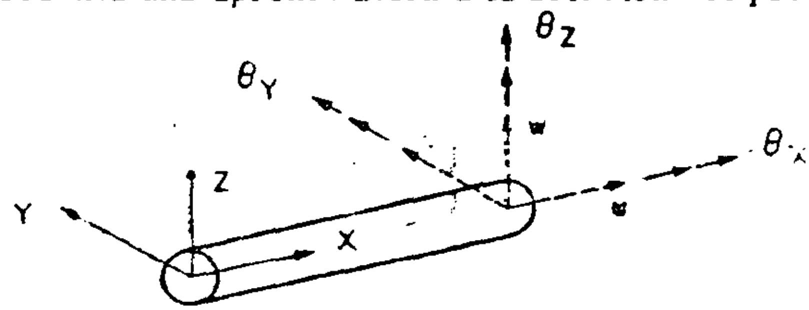
crédito de aplicarlo a medios continuos es de Turner, Clough, Martin y Topp Ref. 5 , y no es, sino hasta 1960 con Clough, Ref. 6 nace por primera vez el nombre mágico de "Elemento Finito" , derivando más correctamente las propiedades básicas del elemento triangular y el rectangular, y el hecho de que en el mismo tiempo la computadora comienza a ser una herramienta muy efectiva, conduce rápidamente a la solución numérica de problemas elástico lineales complejos, en los cuales una solución analítica no era posible.

Se inician la derivación de las propiedades de rigidez de los elementos finitos, el campo de desplazamientos en el medio se expresa en función de los desplazamientos nodales del elemento, satisfaciendo continuidad, las fuerzas internas se definen aplicando el principio del trabajo virtual, la identidad de este proceso con el de minimizar la energía potencial total, o sea, el proceso de Rayleigh-Ritz Ref. 7 es obvia. El desarrollo anterior se acentúa en el campo de la Mecánica de Sólidos y posteriormente Zienkiewicz Ref. 13 y Wilson Ref. 14 lo aplican en Mecánica de fluídos y en problemas de análisis de conducción de calor.

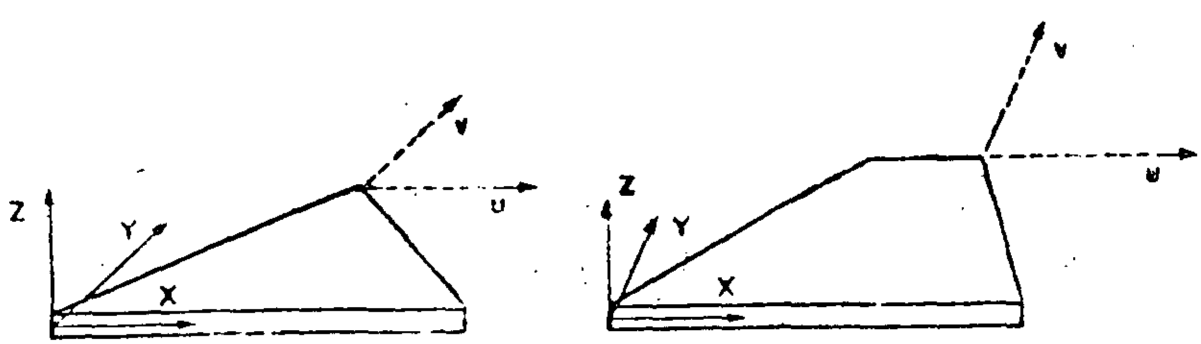
Se presenta al final una lista de referencias de importancia del método del elemento finito

Al iniciar la determinación de esfuerzos y desplazamientos en cierto problema de diseño, las ecuaciones que gobiernan el problema en cualquier forma deben satisfacer equilibrio y continuidad.

El Método del Elemento Finito es un procedimiento analítico, y cuando se aplica a un medio continuo, éste se modela analíticamente subdividiéndolo en sub-regiones (los elementos finitos) en los que el comportamiento de cada uno es definido por grupos separados de funciones que supuestamente definen esfuerzos y desplazamientos en esa región, las funciones se seleccionan en forma tal que se satisfaga la condición de continuidad a través de todo el medio, por lo tanto, el método del elemento finito en común con las soluciones por series y diferencias finitas representa una aproximación a la solución del problema

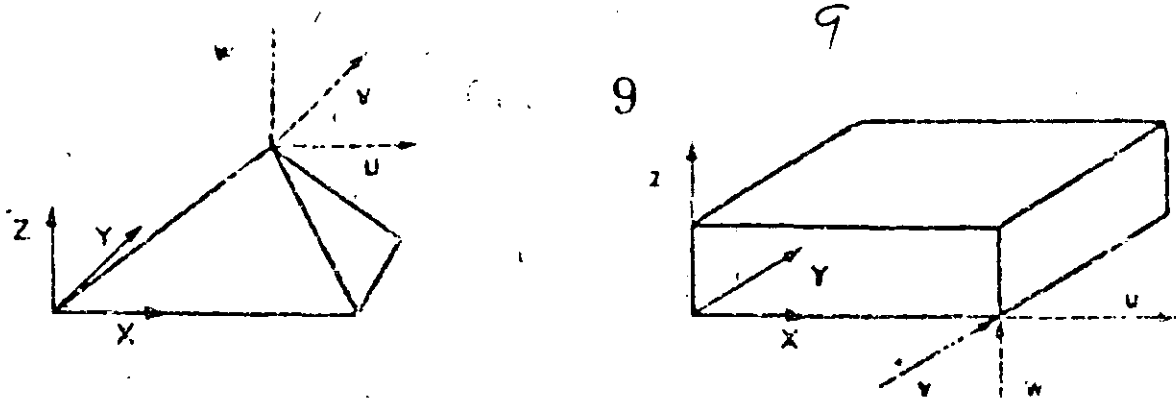


a) Elemento estructural

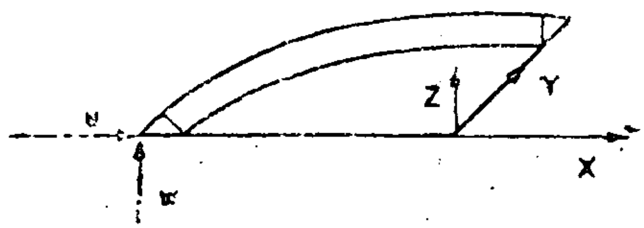


$$\gamma_{XY} = \frac{\partial u}{\partial Y} + \frac{\partial v}{\partial X}$$

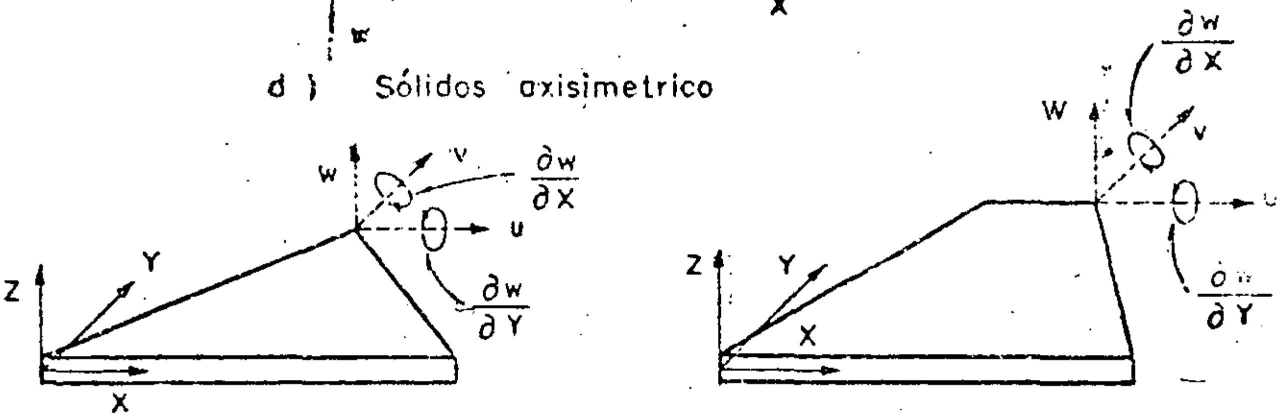
b) Esfuerzos planos



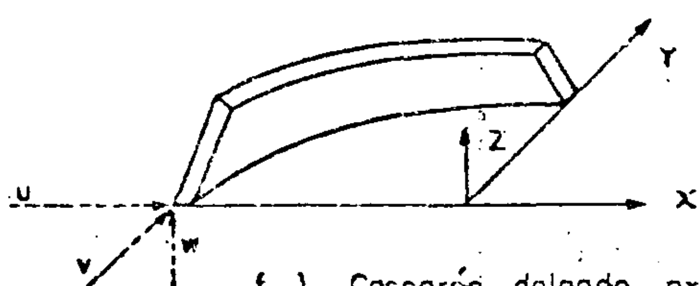
c) Elementos sólidos



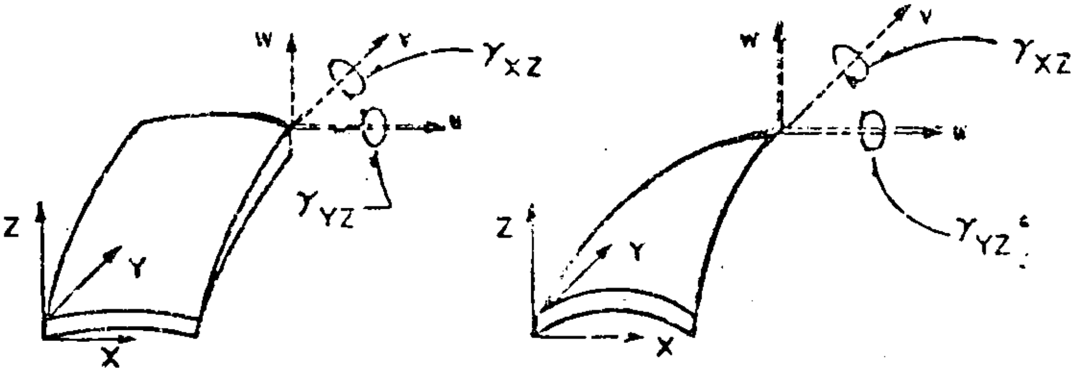
d) Sólidos axisimetrico



e) Flexión de placas



f) Cascarón delgado axisimétrico



g) Cascarones delgados curvos

Fig 5 Tipos de elementos finitos

TIPOS DE ELEMENTOS.

Elementos que son usados comunmente en la práctica son ilustrados en la Fig. 5.

El elemento estructural simple, Fig. 5 (a), es un miembro de la familia - total de elementos finitos. Cuando se usa con elementos del mismo tipo descri be armaduras y estructuras espaciales. Cuando se combina con elementos de tipo diferente, especialmente con elementos de placa generalmente se describen miembros de rigidez.

Los elementos básicos en análisis por elementos finitos son placas delgadas con cargas contenidas en su plano (condición de esfuerzos planos), triangulares y cuadriláteros se ilustran en la Fib 5b. Se denominan básicos porque los primeros desarrollos concernientes con el método se refieren a ellos.

Los elementos sólidos, Fig. 5 (c), son la generalización tridimensional de los elementos de esfuerzos planos. El tetrahedro y el hexaedro son las formas más comunes y son esenciales para modelar analíticamente problemas de mecá nica de suelos, rocas y estructuras nucleares. Es conveniente mencionar que la única forma práctica de resolver problemas tridimensionales prácticos, es el método de elementos finitos.

Uno de los campos más importantes de aplicación del método de elementos finitos es en el análisis de "sólidos axisimétricos", Fig. 5 (d). Una gran varie - dad de problemas de ingeniería caen en esta categoría, incluyendo concreto, tan ques, recipientes nucleares, rotores, pistones, flechas de motores, y la cabeza de los roquets. Generalmente son medios de carga y geometría axisimétrica.

En la Fig. 5 (d) se muestra el elemento triangular, también se usan secciones cuadriláteras.

Elemento de placa plana en flexión es empleado no solo en conección con el comportamiento de placas planas, sino también en cascarones y miembros de pared delgada. Fig. 5 (e).

Estructuras de cascarón delgado axisimétricas, Fig. 5 (f), tienen el mismo rango de significado en la aplicación práctica que los sólidos axisimétricos. Sin embargo, las relaciones gobernantes se derivan de la teoría de cascarones delgados.

Cuando una estructura de cascarón delgado que de hecho es curva, es preferible emplear elementos de cascarón curvos delgados para el modelo analítico, tienen la ventaja de describir más aproximadamente la superficie curva del cascarón, y la apropiada representación del acoplamiento de deformación y equilibrio entre cada elemento. Elementos típicos de cascarones de doble curvatura se muestran en Fig. 5 (g). Gran número de formulaciones para este elemento existen.

ALGUNAS APLICACIONES DE ELEMENTOS FINITOS.

Examinaremos algunas aplicaciones delmétodo de elementos finitos en diseño estructural con el objeto de ilustrar la forma en la cual se usan los elementos de la Fig. 5, y la escala y complejidad de los problemas.

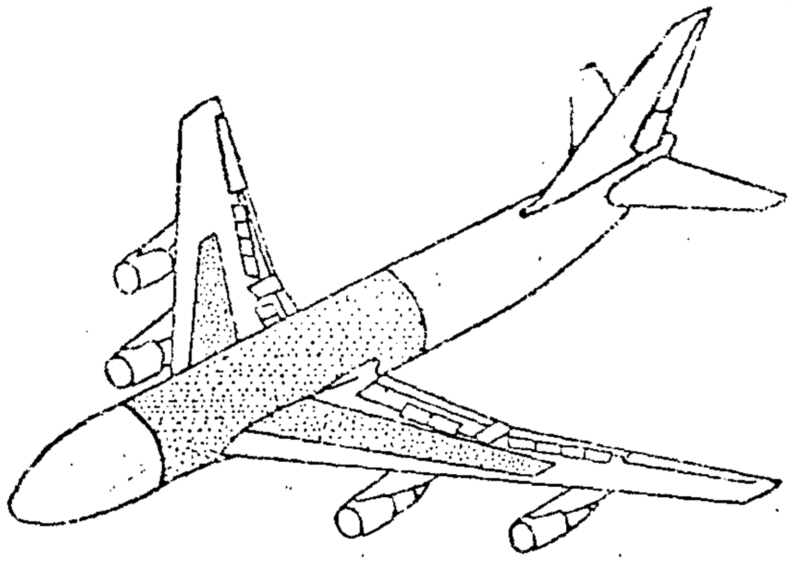
El desarrollo del método del elemento finito se debe a los investigadores relacionados con la industria aeronáutica. La Figura 6 muestra la forma en que -

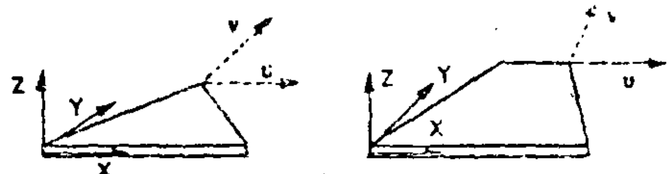
se aplicó el análisis por elementos finitos de una porción del avión Boeing 747. La estructura del fuselaje de un avión consiste de laminas de aluminio ligadas a una estructura interna formada por armaduras y atiezadores. La experiencia ha mostrado que los efectos locales de flexión en el cascarón son despreciables, por lo tanto, se supone que consiste de elementos en condición plana de esfuerzos Fig. 5(b). El análisis de elementos finitos del Boeing 747, de la parte achurada, región que conecta el cuerpo o Cascarón Monocoque con las alas, área achurada en Fig. 6, consiste de 7000 incógnitas. Por lo tanto, es común en la práctica dividir la estructura en regiones, o subestructuras, y analizar cada una por elementos finitos con el objeto de producir un superelemento. Los superelementos se ligan entre sí por medio de un procedimiento convencional que determina la fase final del análisis.

El esquema de subestructuración del Boeing 747 es mostrado en la Fig. 6 y los detalles son listados en la Tabla 1.

Sub-Estructura	Descripción	Nodos	Condición Carga	Elemento Viga	Elemento Placa	Grados libertad interacción elementos.	Grado de libertad total.
1	Ala	262	14	355	363	104	796
2	Centro ala	267	8	414	295	198	880
3	Cascarón Monocoque	291	7	502	223	91	1,026
4	Cascarón M.	213	5	377	185	145	820
5	Cascarón M	292	7	415	241	200	936
6	Caja Tren Aterrizaje	170	10	221	103	126	686
7	Cascarón M	285	6	392	249	233	909
8	Caja Tren Aterrizaje	129	10	201	93	148	503
9	Cascarón M	286	7	497	227	92	1,038
TOTAL		2,195	63	3,374	1,979	555	7,594

Tabla 1 Subestructuación dal Boeing 747





$$\gamma_{XY} = \frac{\partial u}{\partial Y} + \frac{\partial v}{\partial X}$$

Esfuerzos planos

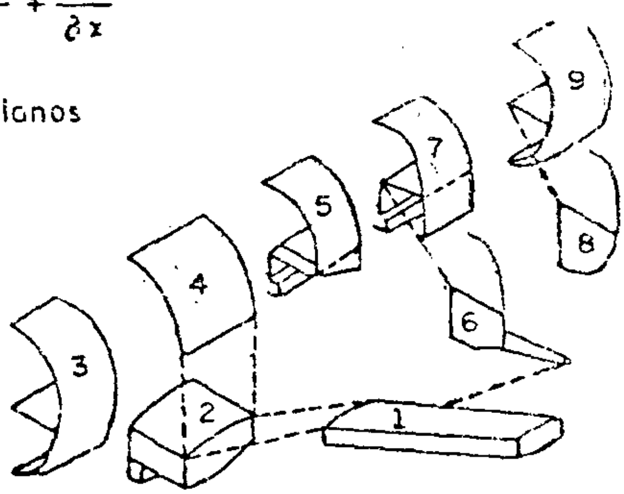


Fig 6 Boeing 747

Como es usual en el diseño de aviones, se hicieron pruebas en el prototipo y los resultados se compararon con la solución por elementos finitos, coincidiendo como se muestra en la Fig. 7

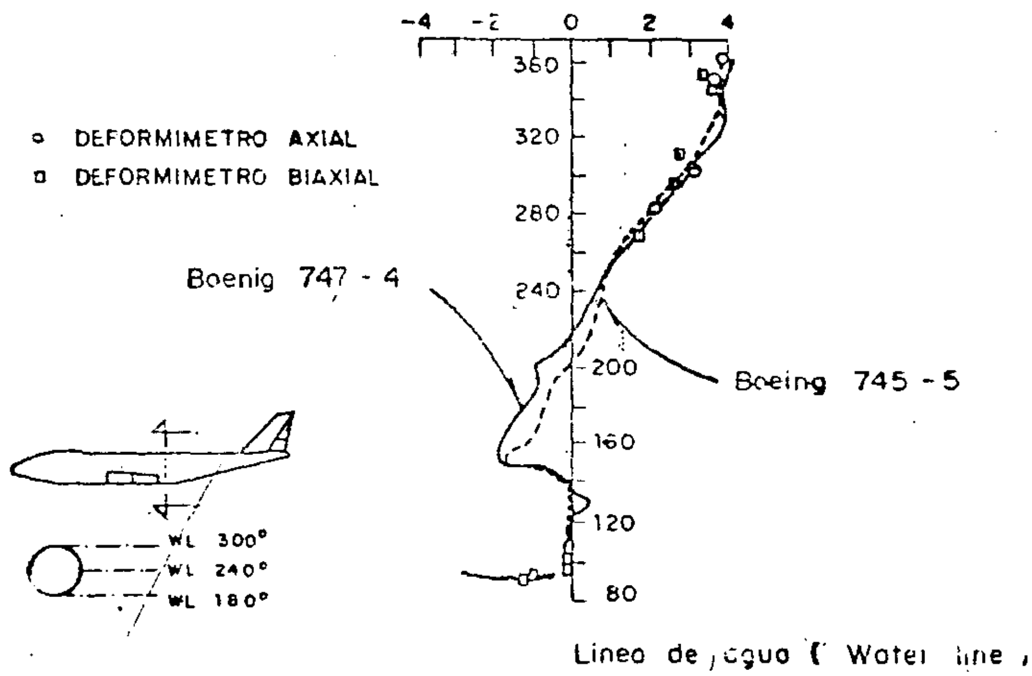
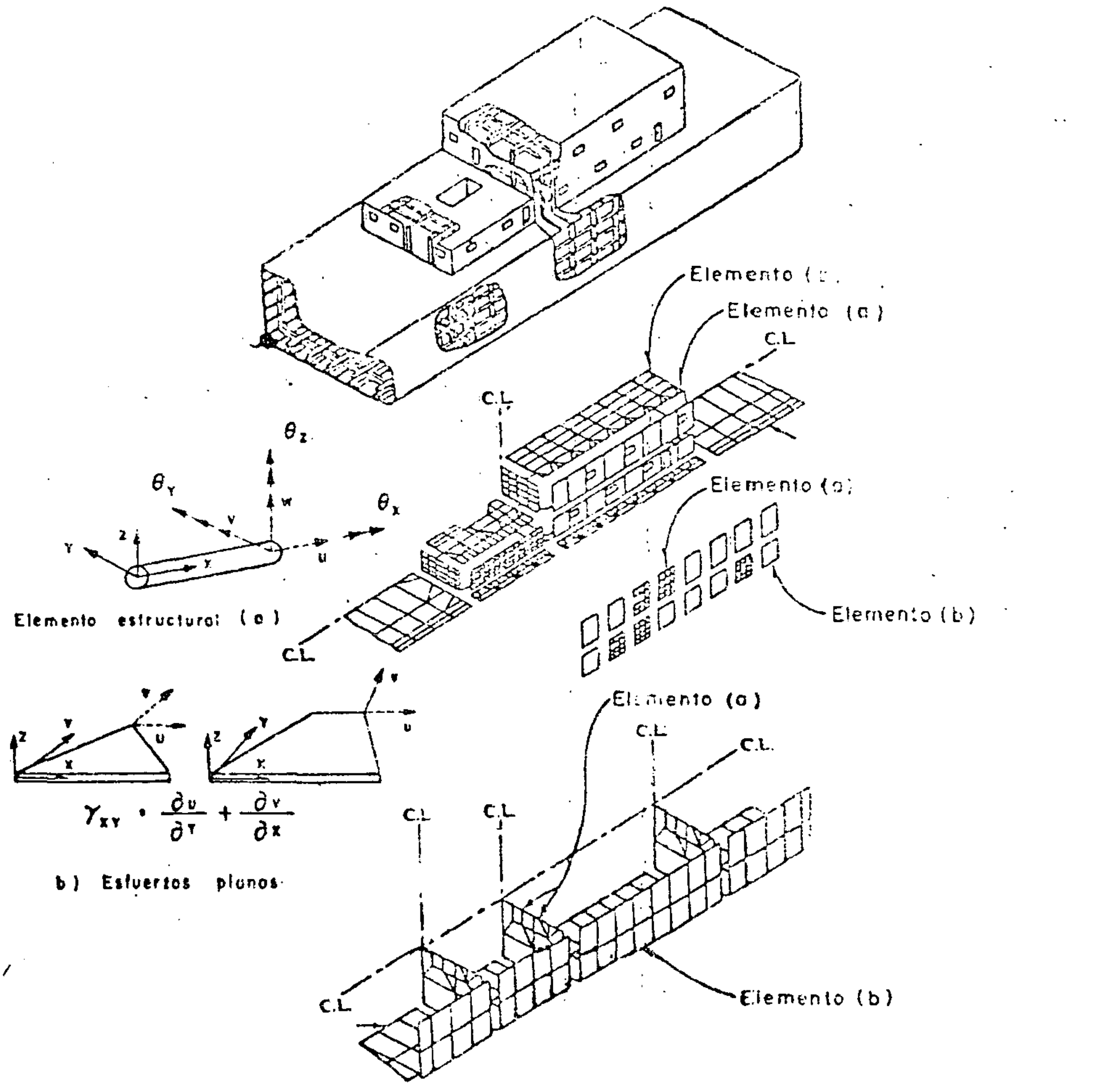


Fig. 7 Comparación entre análisis y experimentación del Boing 747

Es importante agregar que la respuesta dinámica de un avión es muy importante, así como su inestabilidad elástica es una forma importante de falla. Ninguno de estos fenómenos puede tratarse por los métodos simplificados, pero su análisis usando el método de elementos finitos ha probado ser muy aceptable.

Problemas similares se encuentran en Arquitectura Naval. Figura 8 una porción de una estructura de un transbordador. La parte plana es representada por elementos en estado plano de esfuerzos, Fig. 5 (b). Elementos estructurales, Fig. 5 (a), son empleados en la representación de la estructura interna.

El número total de incógnitas para definir las partes importantes de un barco es del orden de 50,000, y de nuevo se subdivide el problema en subestructuras obteniendo menos incógnitas.



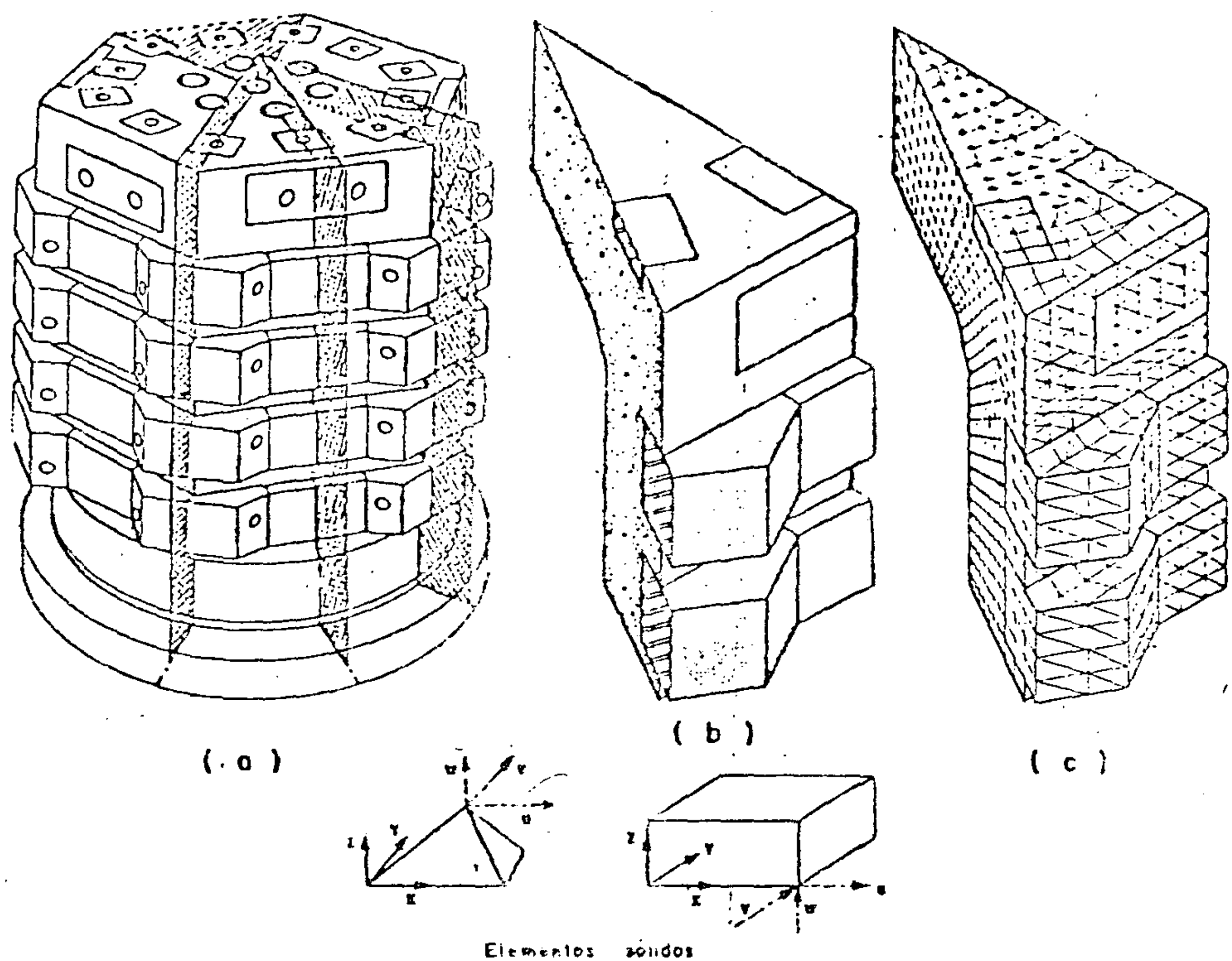


Fig 9 Analisis por elementos finitos de un recipiente reactor de concreto presforzado

Requerimientos de seguridad en el diseño estructural de los reactores nucleares han causado que la industria use ampliamente el análisis por elementos finitos. Figura 9 (a) un recipiente reactor de concreto presforzado. Debido a la simetría es posible analizar solamente un doceavo de la estructura total, - - Fig. 9 (b). Su volumen se modela analíticamente en un ensamble de elementos tetaedrales y hexaedrales, Fig. 5 (c). En problemas de este tipo, el número de incógnitas es del orden de 20,000, y muy común hacer el análisis en condiciones no lineales en material y geometría.

No todos los problemas de aplicación del método de elementos finitos son de proporciones monumentales. Las figuras 10 y 11 muestran aplicaciones básicas a ciertos problemas de ingeniería civil. Una forma de incrementar la eficiencia de diseño en secciones roladas de acero estructural es cortando el alma en la forma dentada mostrada en la Fig. 10 (a), colocando una sección sobre la otra y soldándolas, Fig. 10 (b). Y se obtiene una viga más aperaltada reduciendo el acero en el alma, y por supuesto que en este problema rutinario de diseño, no es necesario el uso del método de elementos finitos.

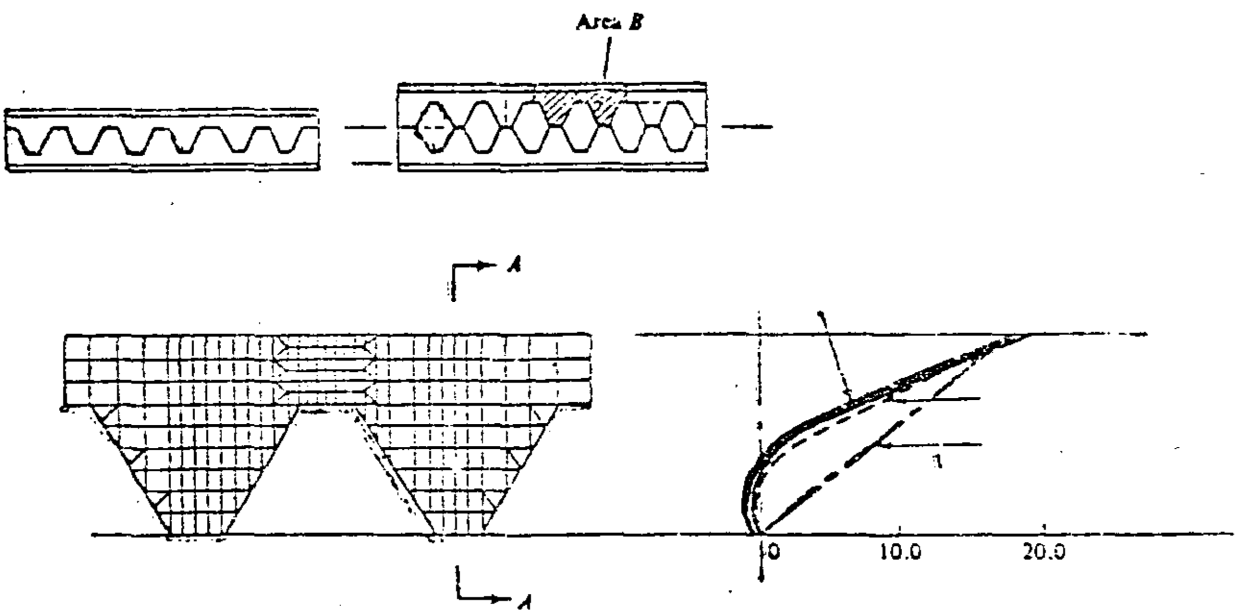


Fig. 10 Análisis de elementos finitos de una viga aperaltada en celosía.

Un problema todavía más común es el de una viga de concreto reforzado, Fig. 11, para el cual se conoce muy poco respecto a la adherencia entre el acero de refuerzo y el concreto, y la formación y crecimiento de las grietas al aumentar la carga. La Figura 11 (a) muestra el modelo analítico de elementos finitos y la descripción de las trayectorias de grietas y las gráficas de esfuerzos se muestran en la Fig. 11 (b).

Los pocos ejemplos mostrados muestran que el método de elementos finitos puede ser usado ventajosamente en cualquier situación que se requiera la predicción de esfuerzos y deformaciones internas, desplazamientos, vibraciones, inestabilidad elástica, mecánica de fluídos, transferencia de calor. Situaciones que se levantan de diversos campos que tradicionalmente han sido considerados como disciplinas ingenieriles separadas. Ejem., Ingeniería Civil, Mecánica, Aeroespacial, Arquitectura Naval. El método del elemento finito proporciona una tecnología unificada de análisis en casi todos los campos.

Es nuestro intento en este curso desarrollar los conceptos teóricos básicos y estudiar problemas específicos de carácter práctico. Un compendio de tales problemas llenaría muchos volumenes, por lo tanto es recomendable consultar las memorias de congresos y publicaciones periódicas correspondientes.

PROGRAMAS DE PROPOSITOS GENERALES.

Se ha indicado que las ecuaciones del método de elementos finitos son de una forma tal que su carácter general permite teóricamente escribir un solo programa de computadora que resuelva la mayoría de los problemas que se presentan en la Mecánica de Medio Continuos. Programas de computadora con este objetivo, aún en escala restringida, son llamados programas "de propósitos generales". La ventaja de programas de propósitos generales no es sólo su capacidad,

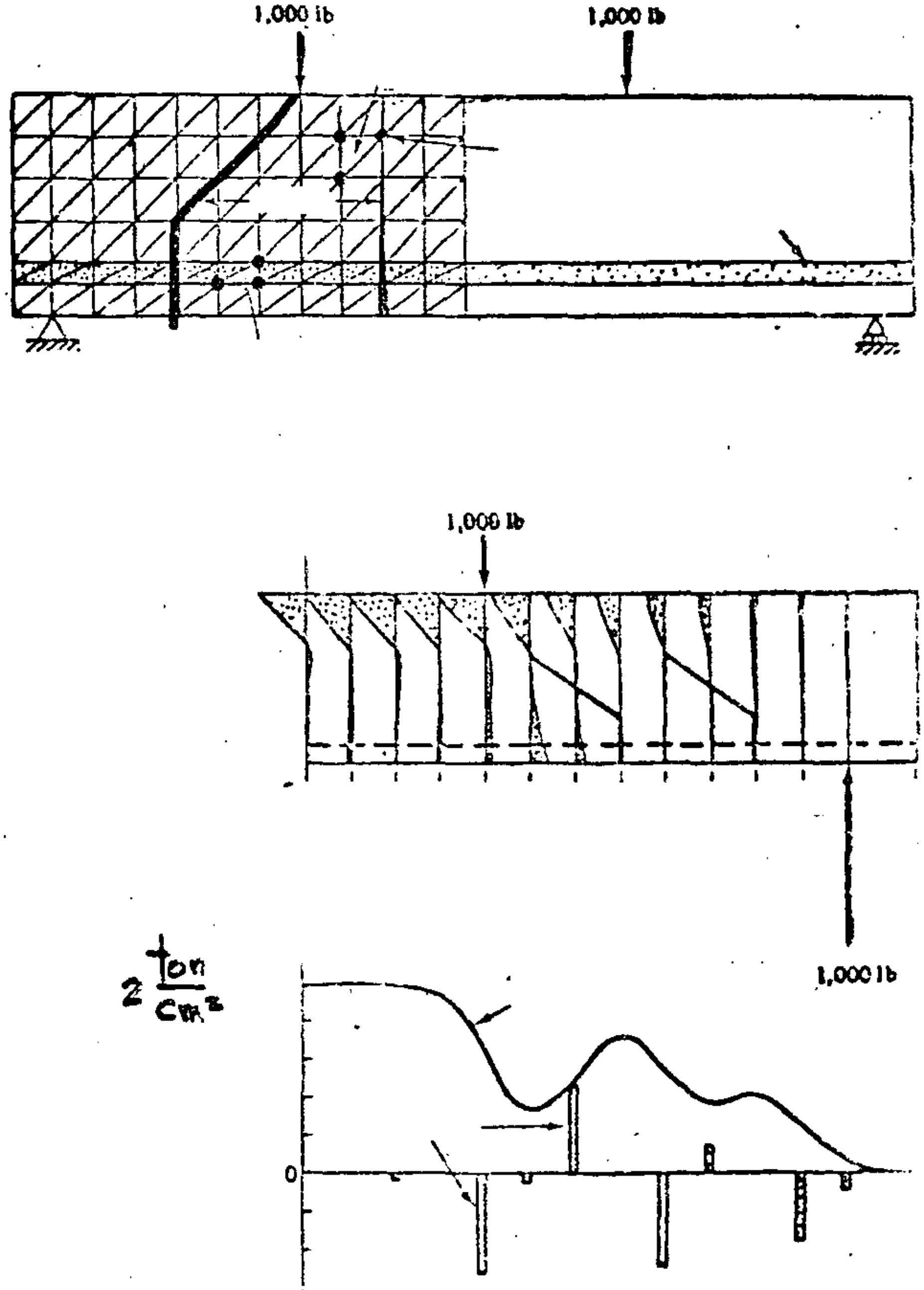


Fig. 11 Análisis por elementos finitos de una viga de concreto reforzado

sino también en la instrucción de los probables usuarios respecto a la interpretación de la documentación, los datos y procedimientos de entrada y salida de resultados.

El costo de desarrollo de un programa de propósitos generales es usualmente muy alto por lo que la amortización de la inversión es esencial. Ciertos programas de propósitos generales son codificados en un lenguaje computacional que permite operar el programa a muchas organizaciones diferentes localizadas en grandes separaciones geográficas. Otros programas de propósitos especiales de limitada capacidad se usan en organizaciones industriales y gubernamentales con un costo menor en su desarrollo y operación.

Las cuatro componentes mostradas en el diagrama de flujo de la Fig. 12, son comunes en el desarrollo de programas de propósitos generales, fase de datos de entrada, requiere del usuario información del medio o materal, descripción geométrica de la representación por elementos finitos y las condiciones de carga y de frontera. Los programas de propósitos generales más sofisticados facilitan el proceso de entrada como propiedades constitutivas del material, almacenados previamente, esquemas de modelar analíticamente el medio, trazar esterográficamente la idealización por elementos finitos en forma tal que los errores pueden detectarse antes de efectuar los cálculos.

La fase de biblioteca de elementos finitos es de interés primordial en el curso. En ella se tienen los procesos de codificación formulativos para los elementos individualmente. La mayoría de los programas de propósitos generales contienen todos los elementos de la Fig. 5, así como ciertas otras alternativas de formulación para un tipo dado de elemento, por ejemplo el trián-

1. Entrada de datos

Definición del material, geometría, cargas y condiciones en la frontera del modelo físico del medio.

↓

2. Elementos de bilbioteca.

Generación de los modelos matemáticos para los elementos estructurales y las cargas aplicadas.

↓

3. Solución

Construcción y solución del modelo matemático para el sistema estructural

↓

4. Salida de resultados

Obtención de esfuerzos y desplazamientos.

Fig. 12 Diagrama de flujo computacional en Análisis Estructural.

gulo en flexión. Teóricamente el elemento biblioteca es de extremos abiertos y capaz de acomodar cualquier nuevo elemento de cualquier grado de complejidad.

La fase elemento de biblioteca recibe los datos almacenados y establece las relaciones algebráicas del elemento por medio de la aplicación de los procesos formulativos relevantes de codificación. Esta fase del programa de propósitos generales también incluye todas las relaciones algebráicas para interconectar los elementos vecinos y la conección del proceso en sí. Las operaciones posteriores producen un conjunto de ecuaciones algebráicas lineales simultáneas para representar la estructura completa por elementos finitos.

La fase solución del programa de propósitos generales opera sobre las ecuaciones del problema formadas en la fase anterior. En el caso de un problema de análisis estructural solo significa la solución de un conjunto de ecuaciones lineales algebráicas. Soluciones para respuesta dinámica requerirán computaciones más extensas sobre la historia-tiempo de las cargas aplicadas. En algunos casos hay que operar en regiones subdivididas como en el caso del análisis del Boeing 747, o efectuar operaciones especiales en las ecuaciones construídas originalmente. Incluídas en esta fase están las operaciones necesarias de substitución para obtener todos los aspectos deseados de la solución.

La fase salida de resultados presenta el análisis con un registro de la solución sobre la cual se pueden tomar decisiones respecto al dimensionamiento estructural o diseño. El registro comunmente es presentado mediante una lista impresa de esfuerzos y desplazamientos de los respectivos elementos. Así como en la fase de entrada existe una fuerte tendencia a la representación gráfica de datos,

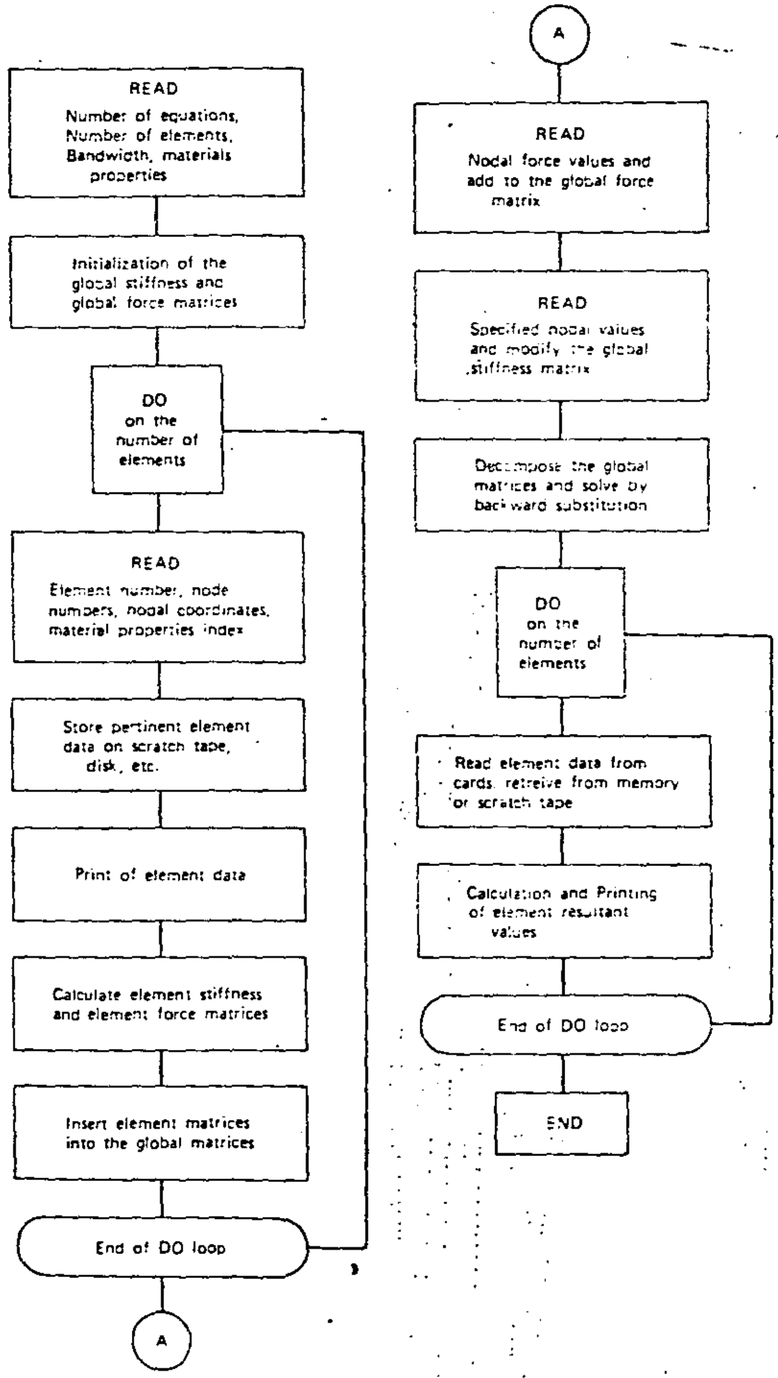


Fig. 7.3 General computer flow diagram for a finite element program.

tales como gráficas de trayectorias principales de esfuerzos o modos de pandeo y vibración.

ALGUNOS PROGRAMAS DE PROPOSITOS GENERALES.

ICES-STRUDL II, Integrated Civil Engineering System, (ICES), MIT, Maneja problemas de deformación y esfuerzos planos, cascarones rebajados, sólidos tri dimensionales, flexión de placas con y sin deformación axial. Su uso en problemas muy especializados resulta caro. ASKA, Automatic System for Kinematic Analysis. Desarrollado por J. H. Argyris, H. A. Kamel y otros en la Universidad de Stuttgar. Sistema general muy potente el cual incluye una biblioteca de 42 elementos diferentes. Puede ser costoso para un usuario especializado. SAP, A General Structural Analysis Program, elaborado por E. L. Wilson de la Universidad de California. Incluye análisis lineal estático y dinámico de estructuras elásticas, estructuras tridimensionales, sólidos axisimétricos, sólidos tridimensionales, esfuerzos y deformación plana, placas y cascarones.

Zienkiewcz, O.C., programa desarrollando en la Universidad de Wales, - Swansea. Incluye lo de los programas anteriores y problemas de Mecánica de Fluídos y transferencia de calor.

NASTRAN, NAsa STRuctural ANalysis. Desarrollado por U. S. National - Aeronautical and Space Administration para análisis elástico de varias estructuras incluye, análisis de expansión térmica, respuesta dinámica a cargas transitorias - y exitaciones random, cálculo de valores característicos reales y complejos, esta

25

SAMIS, Structural Analysis and Matrix Interpretarive System. Desarrollado por Jet Propulsion Laboratory, y Manned Spacecraft Center. Contiene un ele - mento unidimensional general y elementos triangulares para deformaciones por flexión y membrana.

ELAS y ELAS 8, Equilibrium Problems of Linear Structures. Desarrollado por el Jet Propulsion Laboratory. Incluye una biblioteca de elementos unidimen sionales triangulares, cuadriláteros, tetaedros, hexaedros, cónicos, sólidos - axisimétricos de secciones cuadriláteros y triangulares.

MARC, elaborado por P. V. Marcal, incluye análisis lineal y no lineal de pro blemas de Mecánica de Medios Continuos.

ANSYS

Capability: Static and dynamic linear and nonlinear structural analysis and heat transfer analysis. Program has plasticity, creep, and large displacement and rotation capability.

Method: Finite element displacement method. Program uses the incremental method of solution accounting for plasticity with isotropic and kinematic hardening. Program uses the wave-front method coupled with an explicit time integration scheme for the solution of the nonlinear equations of motion. Eigenvalues are extracted via Jacobi iteration with Guyan reduction.

Language: FORTRAN

Hardware: Program runs on CDC, IBM, and UNIVAC machines.

Usage: Program has been extensively used in the nuclear industry and indications of its reliability are available.

Developer: John A. Swanson
Swanson Analysis Systems, Inc.
870 Pine View Drive
Elizabeth, PA 15037

Table 15-1. General Purpose Finite Element Programs.

Features	Program[a]				
	ANSYS	MARC	NASTRAN	SAP	STARDYNE
Straight beam, straight pipe, solid and flat plate elements	X	X	X	X	X
Axisymmetric elements	X	X	X	X	O
Curved beam/curved pipe elements	O/X	X/X	O/O	O/X	O/X
Curved shell elements	O	X	O	O	O
Inviscid fluid element	O	O	X	O	O
Buckling analysis	O	X	X	O	O
Shock spectra	X	O	O	X	X
Mesh generation	Yes	Yes	Yes	Some	Some
Nonlinear analysis	Extensive	Extensive	Limited	Limited[b]	None
Pages in manual describing elements, input and output (approximate)	830	820	980	130	560
Proprietary/public	Prop.	Prop.	Public	Public	Prop.
Availability[c]	CDC, W, D	CDC, D	CDC, W	CDC, D	CDC

[a]X = program has this capability; O = program lacks this capability.
[b]Nonlinear capability in MODSAP version.
[c]CDC = Control Data Corporation Cybernet; W = Westinghouse Telecomputer Center, Pittsburgh, PA; D = developer (see text).

LISTA DE REFERENCIAS EN ORDEN CRONOLOGICO DEL METODO DE ELEMENTOS FINITOS

(1) Hrenikoff, A., "Solution of problems in elasticity by the framework method, J. Appl. Mech. 8, A 169-175, 1941.

(2) McHenry, D., " A lattice analogy for the solution of plane stress problems," J. Inst. Civ. Eng 21, 59-82, 1943.

(3) Newmark, N. M., "Numerical methods of analysis in bars plates and elastic bodies," "Numerical Methods of Analysis in Engineering," edited by L. E. Grinter, MacMillan (1949).

(4) Turner, M. J., Clough, R. W., Martin, H. C., and Topp, L. J. ., Stiffness and deflection analysis of complex structures," J. Aero Sci. 23, 805-823, 1956; AMR 10 (1957), Rev. 1776.

(5) Clough, R. W., "The finite element in plane stress analysis," Proc. 2nd. ASCE Conf. on Electronic Computation, Pittsburgh, Pa., Sept. 1960.

(6) Argyris, J. H., "Energy Theorems and structural analysis," Butterworth, London (1960). (Reprinted from Aircraft Eng. 1954-55); AMR 15 (1962), Rev. 2705.

(7) Clough, R. W., "The finite element method in structural mechanics," (Ch. 7 "Stress Analysis", O. C. Zienkiewicz and G. S. Holister, edited by, J. Wiley & Son (1965); chapter in AMR 20 (1967), Rev. 3942.

(8) Courant, R., "Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibration," Bull. Am. Math. Soc. 49, 1-23, 1943.

(9) Prager, W., and Synge, J. L., "Approximation in elasticity based on the concept of function space," Quart. Appl. Math. 5, 241-69, 1947.

(10) Synge, J. L., "The hypercircle in mathematical physics, Cambridge Univ. Press (1957); AMR 11 (1958), Rev. 733.

(11) Schmelter, J., "The energy method of networks of arbitrary shape in problems of theory of elasticity," Proc. IUTAM Symp. on Non-homogeneity in Elasticity and Plasticity, W. Olszak, edited by, Pergamon Press (1959).

(12) Zienkiewicz, O. C., and Cheung, Y. K., "Finite elements in the solution of field problems," Engineer, 200, 507-510, Sept. 1965.

(13) Wilson, E. L., and Nickell, R. E., "Application of finite element method to heat conduction analysis," Nuclear Eng. and Design 3, 1-11, 1966.

(95) Arlett, P. L., Bahrani, A. K., and Zienkiewicz, O. C., "Application of finite elements to the solution of Helmholtz's equation (wave guides)," Proc. Inst. El. Eng. 115, 1762-1964, 1968.

(96) Zienkiewicz, O. C., and Newton, R. E., "Coupled vibrations of a structure submerged in a compressible fluid," Int. Symp. on finite element techniques in shipbuilding, Stuttgart, 1969.

(97) Taylor, C., Patil, B. S., and Zienkiewicz, O. C., "Harbour oscillation in a numerical treatment for undampted modes," Proc. Inst. Civ. Eng. 43, 1941-153, 1969.

(98) Archer, J. S., and Rubin, C. P., "Improved linear axisymmetric-shell - fluid model for launch vehicle longitudinal response analysis," Proc. Conf. Mat. Meth. in Struct. Mech., Wright-Patterson AFB, Ohio, 1965.

(99) Zienkiewicz, O. C., Irons, B., and Nath P., "Natural frequencies of complex free or submerged structures by the finite element method," Symp. on Vibration in Civ. Eng., Inst. Civ. Eng., (Butterworth), London, 1965.

(100) Sandhu, R. S., and Wilson, E. L., "Finite element analysis of seepage in elastic media," J. of Engnr. Mech. Div., Proc. ASCE 95, 641-651, 1969.

(101) Rashid, Y. R., "Three-dimensional analysis of elastic solids," Int. J. Solids Struct., "Part I: Analysis procedure," 5, 1311-33, 1969; Part II: "The computational problem," 6, 195-207, 1970.

(102) Irons, B. M., "A frontal solution program for finite element analysis," Int. J. Num. Meth. in Eng. 2, 5-32, 1970.

(103) Johnson, W. M., and Mclay, R. W., "Convergence of the finite element method in the theory of elasticity," J. Appl. Mech. Trans. ASME, 274-278, June 1968.

(104) Przemieniecki, J. S., "Theory of matrix structural analysis," McGraw-Hill, 1968.

(105) Jenkins, W. M., "Matrix and digital computer methods in structural analysis," McGraw-Hill, 1969.

(106) Pope, G. G., "The application of the matrix displacement method in plane elastoplastic stress problems," Proc. Conf. Matrix Meth. in Struct. Mech., Wright-Patterson AFB, Ohio, 1965.

(107) Miller, R. E. and S. D. Hansen, "Large Scale Analysis of Current Aircraft," On General Purpose Finite Element Computer Programs, P. V. Marcal (ed), ASME Special Publication, New York, N. Y., 1970.

(108) Smith, C. S. and G. Mitchell, "Practical Considerations in the Application of Finite Element Techniques to Ship Structures," Proc. of Symposium on Finite Element Techniques, U. of Stuttgart, Stuttgart, Germany, June, 1969.

(109) Corum, J. M. and J. E. Smith, "Use of Small Models in Design and Analysis of Prestressed-Concrete Reactor Vessels," Report ORNL-4346. Oak Ridge Nat. Lab., Oak Ridge, Tenn., May, 1970.

(110) Cheng, W. K., M. U. Hossain, and V. V. Neis, "Analysis of Castellated Beams by the Finite Element Method," Proc. of Conf. on Finite Element Method in Civil Eng., McGill U., Montreal, Canada, 1972, pp. 1105-1140.

(111) Gallagher, R. H., "Large-Scale Computer Programs for Structural Analysis" in On General Purpose Finite Element Computer Programs, P. V. Marcal (ed.), ASME Special Publication, 1970, pp. 3-34.

(112) Marcal, P. V., "Survey of General Purpose Programs for Finite Element Analysis," in Advances in Computational Methods in Structural Mechanics and Design, J. T. Oden, et al. (ed.), U. of Alabama Press, University, Ala., 1972.

(113) Gallagher, R. H. and O. C. Zienkiewicz, Optimum Structural Design John Wiley & Sons, Inc., New York, N. Y., 1973.

FINITE ELEMENT METHOD THEORY AND APPLICATION

1. INTRODUCTION

1.1 HISTORICAL BACKGROUND

The finite element method (FEM) has become a powerful numerical technique for solving complex problems in science and engineering, mainly due to the advances made earlier in the numerical methods particularly in matrix methods as well as due to the rapid introduction of high speed computers in the market. However, the introduction of concepts and applications of FEM dates back to the era of mathematicians who tried to calculate the perimeter and area of a circle by idealizing it as a regular polygon. It is also interesting to note that the bound solutions which are often discussed in FEM can be traced back to the solution of the area of a circle. If the circle is modelled with an inscribed polygon, a lower bound solution is obtained whereas an upper bound solution is obtained by replacing the circle by a circumscribed polygon. Even though the basic concepts of FEM existed for over two thousand years, for all practical purposes, one can only say that these concepts were actually used for solving physical problems in 1950s by the aeronautical engineers.

In 1956, Turner et al (Ref 1) presented the stiffness analysis for the complex structures, which is the starting point in the rediscovery of FEM. Nevertheless, Clough (Ref 2) was the one who actually used the term FEM in 1960. Since then, a tremendous amount of research has been done in this field and quite a large number of papers have been published in almost all the journals related to all fields of engineering as well as some in the fields of mathematics and science. In addition, several conferences have been held all over the world and hundreds of papers have been presented in each. The theory and application of FEM have also been presented in numerous text books (Ref 3-22) In order to help the research workers in tracing the references required for their particular work several bibliographics have either been published or under preparation, among them notably Ref (23) is a good source of information.

1.2 APPLICATIONS OF FEM.

The FEM is applicable to a variety of boundary value and initial value problems in engineering as well as applied science. Some of these applications are:

1. Stress Analysis of Structures, Stability of Structures, Dynamic response of structures, Thermal Stress Analysis, Torsion of prismatic members
2. Stress Analysis of Geomechanics problems, Soil-Structure Interaction, Slope Stability problems, Soil Dynamics and Earthquake Engineering, Seepage in soils and rocks, Consolidation settlement
3. Solutions in Fluid Mechanics, Harbour oscillations, Pollution Studies, Sedimentation
4. Analysis of Nuclear Reactor Structures
5. Stress Analysis and Flow Problems in Biomechanics
6. Characteristic Study of Composites in Fibre Technology
7. Wave Propagation in Geophysics
8. Field Problems in Electrical Engineering

Apart from the above mentioned areas, the FEM is also applicable to any other problem as long as the analyst makes certain that the problem is amenable to solution based on the assumptions introduced in the formulation of FEM and appropriate material properties can be provided in a realistic manner.

1.3 METHODS OF ANALYSIS

In general, there are four basic methods of analysis in FEM- displacement method, equilibrium method, mixed method and hybrid method. The field variables or unknown quantities in each of these methods are as follows:

Displacement method - displacements and their derivatives
Equilibrium method - stress components
Mixed method - some displacements and some stress components
Hybrid method - displacements or boundary forces

In the displacement method, smooth displacement distribution is assumed within an element, interelement compatibility of displacement is generally assured and minimum potential energy criterion is used in the formulation.

In the equilibrium method, the interior stress distribution is assumed to be smooth, the equilibrium of boundary tractions is maintained and the minimum complimentary energy is the basis for the formulation.

In the mixed method which is generally used for plate and shell problems, both displacements and stresses are assumed smooth in the interior, the displacement components and the equivalent stress components are considered to be continuous at the inter-element boundaries and the formulation is based on Reissner's principle.

In the hybrid method, depending on whether the model is displacement type or equilibrium type, the distribution of displacements or stresses within the element is considered to be smooth and along the interelement boundary either assumed compatible displacements or assumed equilibrating boundary tractions are ensured and either modified complementary energy or modified potential energy principle is adopted for the formulation.

Among these four methods, the displacement method is the most widely used approach. However, for plate bending problems either the equilibrium or mixed method is preferred and for some field problems hybrid method is more suitable.

1.4 DESCRIPTION OF FEM

A structure, continuum or a domain is divided into a number of arbitrary shaped parts or regions known as *elements*. These elements are interconnected at joints known as *nodes*. The principal unknown is termed as the *field variable*. This field variable can be displacement, temperature, pore-pressure or stress. The distribution of the field variable within an element is approximated by the use of certain polynomial functions. Variational methods or residual methods are employed to develop the finite element equations which relate the field variables at the nodes to the corresponding action vector at the nodes of the element. This relationship is provided by the so called property matrix which is based on the material and the geometric properties of the element. Finally these finite element equations are assembled to form a system of algebraic equations for the entire domain. The unknown field variable is obtained by solving this system of algebraic equations.

1.5 BASIC STEPS IN FE ANALYSIS

The basic steps in the finite element analysis of general problems are as follows.

1. The continuum is divided into finite elements of any arbitrary shape.
2. A suitable polynomial is chosen to represent the distribution of the field variable within an element in terms of its nodal values. Thus, the field variables at the nodes become the primary unknowns.
3. Using variational methods or residual methods, the finite element equations are formulated.
4. The individual finite element equations obtained in step 3 are assembled to form a set of algebraic equations for the overall continuum.
5. The solution of the algebraic equations obtained in step 4 yields the values of the field variables at the nodes.
6. From the field variables at the nodes, the secondary variables such as stress, strain for an element can be obtained.

REFERENCES

1. TURNER, M. J., CLOUGH, R. W., MARTIN, H. C., and TOPP, L. J., "Stiffness and deflection analysis of complex structures", J. Aero, Sci., Vol. 23, No. 9, 1956, pp 805-823

2. CLOUGH, R. W., "The finite element method in plane stress analysis", Proc. 2nd ASCE Conf. on Electronic Computation, Pittsburgh, 1960, pp 345-378

3. ZIENKIEWICZ, O. C. and CHEUNG, Y. K., The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics, McGraw-Hill, London, 1967

4. ZIENKIEWICZ, O. C., The Finite Element Method in Engineering Science, McGraw-Hill, London, 1971

5. SMITH, G. N., An Introduction to Matrix and Finite Element Methods in Civil Engineering, Applied Science, London, 1971

6. DESAI, C. S. and ABEL, J. F., Introduction to the Finite Element Method, Van Nostrand and Reinhold, New York, 1972

7. ODEN, J. T., Finite Elements of Nonlinear Continua, McGraw-Hill, New York,1972

8. URAL OKTAY, Finite Element Method, Intext Educational Publishers, New York, 1973

9. MARTIN, H. C. and CAREY, G. F., Introduction to Finite Element Analysis, McGraw-Hill, New York, 1973

10. STRANG, G. and FIX, G. J., An Analysis of the Finite Element Method, Prentice Hall, N. J., 1973

11. BREBBIA, C. A. and CONNOR, J. J., Fundamentals of Finite Element Technique, Butterworths, London, 1973

12. NORRIS, D. H. and de VRIES, G., The Finite Element Method-Fundamentals and Applications, Academic Press, New York, 1973

13. COOK, R. D., Concepts and Applications of Finite Element Analysis, John Wiley, New York, 1974

14. WACHPRESS, E. L., A Rational Finite Element Basis, Academic Press, New York, 1975

15. FENNER, R. T., Finite Element Method for Engineers, MacMillan Press, London, 1975

16. GALLAGHER, R. H., Finite Element Analysis-Fundamentals, Prentice-Hall, N. J., 1975

17. HUEBNER, K. H., The Finite Element Method For Engineers, John Wiley, New York, 1975

18 ROCKEY, K. C., et al, The Finite Element Method, Crosby, Lockwood, Staples, London, 1975

19. CONNOR, J. J. and BREBBIA, C. A., Finite Element Techniques for Fluid Flow, Butterworths, London, 1976

20. ODEN, J. J. and REDDY, J. N., An Introduction to Mathematical Theory of Finite Elements, John Wiley, New York, 1976

21. SEGERLIND, L. J., Applied Finite Element Analysis, John Wiley, New York, 1976

22. BATHE, K. J. and WILSON, E. L., Numerical Methods in Finite Element Analysis, Prentice-Hall, N. J., 1976

23. NORRIE, D. H. and de VRIES, G., "A Finite Element Bibliography (3 Parts), Report No. 57, Mechanical Engineering Department The University of Calgary, Canada, 1974

VI.2 Programas de Proposito General y Opciones de Análisis

ELEMENTS AND SOME POPULAR (?) COMPUTER CODES

PROGRAM	AUTHORS
SUPERB	STRUCTURAL DYNAMICS RESEARCH CORPORATION {SDRC}
EASE2	ENGINEERING ANALYSIS CORPORATION {EAC}
STARDYNE	MECHANICS RESEARCH INC. {MRI}
NASTRAN	MCNEAL-SCHWENDLER CORP. {MSC}
ANSYS	SWANSON ANALYSIS SYSTEMS {SAS}
MARC-CDC	MARC ANALYSIS CORP.

1978

38

TYPES OF ANALYSIS

ANALYTICAL CAPABILITY		EASE2	STARDYNE	NASTRAN	ANSYS	MARC	SUPERB
LINEAR STATICS	MECHANICAL LOADS	●	●	●	●	●	●
	TEMPERATURE LOADS	●	●	●	●	●	●
	EULER BUCKLING			●		●	
	INERTIA RELIEF			●			
DYNAMICS	MODE/FREQUENCY	●	●	●	●	●	
	FREQUENCY RESPONSE		●	●	●		
	TRANSIENT RESPONSE	●	●	●	●	●	
	SHOCK SPECTRA	●	●		●		
	RANDOM RESPONSE		●	●			
	NONLINEAR TRANSIENT			●	○	●	
NONLINEAR STATICS	NONLINEAR BUCKLING					○	
	LARGE DISPLACEMENT				○	○	
	PLASTICITY			○	●	●	
	CREEP				○	○	
	VISCOELASTICITY			●		●	
	LARGE STRAINS					○	
HEAT TRANSFER	STEADY STATE			○	○	●	○
	TRANSIENT			○	○	○	
SUBSTRUCTURES (SUPER-ELEMENTS)	STATIC		○	●	○		
	DYNAMIC		○	○	○		
	CYCLIC SYMMETRY			○			
MISCELLANEOUS	FRACTURE MECHANICS				○	○	
	FLUIDS			●	○	○	
	ELECTRIC CIRCUITS				○		
	OPTIMIZATION			○			
	ACOUSTIC CAVITIES			●			
	FATIGUE DAMAGE				○		

5

p. 3 of 10

STRUCTURAL ANALYSIS ELEMENT/MATRIX LIBRARY 39

ELEMENT			PROGRAM: EASE2	STARDYNE	NASTRAN	ANSYS	MARC	SUPERB
LINE ELEMENTS	ROD				•	•	•	
	BEAM		•	•	•	•	•	•
	TAPERED BEAM					•	•	
	OFFSET BEAM			•	•	CAN HANDLE BEAM OFFSET		•
	PINNED END BEAM		•	•	•			•
	CURVED BEAM						•	
FLAT MEMBRANES AND PLATES	3 NODE TRIANGLE		•	•	•	•	M	
	6 NODE TRIANGLE				M		M	C
	SHEAR PANEL				•			
	4 NODE QUAD		•	•	•	•	M	•
	8 NODE QUAD					S	M	S,
CURVED SHELLS	3 NODE TRIANGLE						•	
	6 NODE TRIANGLE							C
	4 NODE QUAD						•	•
	8 NODE QUAD						•	S,
	REDUCED THICK SHELL						•	

NOTES:
- M Membrane and/or plane strain only (no plate bending)
- S Includes sub-parametric forms with fewer nodes
- C Also includes cubic isoparametric element with two midside nodes

STRUCTURAL ANALYSIS ELEMENT/MATRIX LIBRARY (continued)

ELEMENT				PROGRAM: EASE2	STARDYNE	NASTRAN	ANSYS	MARC	SUPERB
AXI-SYMMETRIC ELEMENTS	SHELLS	CONICAL				•	•	D	
		CURVED				•		•	
	TRIANGULAR RINGS	3 NODE				•	•	•	D
		6 NODE				•		D	C
	QUAD RINGS	4 NODE				•	•	•	•
		8 NODE					S	•	S,
SOLID ELEMENTS	TETRA-HEDRON	4 NODE			•	•	•	D	
	WEDGES	6 NODE		•	•	•	•	D	D
		15 NODE						•	C
	HEXA-HEDRONS	8 NODE		•	•	•	•	•	•
		20 NODE				S		•	S,
PIPE ELEMENTS		STRAIGHT		•	•	•	•	•	
		ELBOW		•	•		•	•	
		TEE			•				

NOTES:

- S Includes subparametric forms with fewer nodes
- C Also includes cubic isoparametric element with two midside nodes
- D Degenerate case

⊘ p.5 of 10

STRUCTURAL ANALYSIS ELEMENT/MATRIX LIBRARY (continued)

ELEMENT				EASE2	STARDYNE	NASTRAN	ANSYS	MARC	SUPERB
				PROGRAM					
GENERAL STIFFNESS ELEMENTS		SPRING	K	1	•		•	•	•
		SCALAR SPRING				•			
		6 x 6 or 12 x 12 MATRIX			•	•	•		•
		GENERAL MATRIX				•			
MASSES	ELEMENT	LUMPED (DIAGONAL)		2	2	2	2		
		CONSISTENT				2	2	2	
	NON-STRUCTURAL	SCALAR (DOF)				•		•	
		NODAL		•	•	•	•		
		DISTRIBUTED				•			
		GUYAN REDUCTION			•	•	•		
		GENERAL MATRIX				•	•		
DAMPING		SCALAR				•			
		DASHPOT				•	•		
		DISCRETE VISCOUS $[C] = \alpha[K] + \beta[M]$		•		•	•	•	
		STRUCTURAL $(1 + ig)[K]$				•			
		MODAL VISCOUS		•	•	•		•	
		GENERAL MATRIX				•	•		
OTHER ELEMENTS		GAP					•	•	
		FRICTION					•	•	
		RIGID		3	•	•			
		REBAR SOLID						•	
		ELASTIC FOUNDATION						•	
		CRACK TIP					•	•	
		LAMINATED SHELL					•	•	
		PLOT ONLY				•			

NOTES:
1 See restraints
2 Generated from density
3 See constraints

HEAT TRANSFER—CONDUCTING ELEMENTS

ELEMENT		EASE2	STARDYNE	NASTRAN	ANSYS	MARC	[illegible]
		PROGRAM					
LINEAR				•	•	•	
PLANAR	3 NODE TRIANGLE			•	•	•	P
	4 NODE QUAD			•	•	•	
	8 NODE QUAD				S	•	S
	TRANSVERSE CONDUCTING SHELL				•		
AXISYMMETRIC	TRIANGULAR RING			•	•	•	P
	4 NODE QUAD RING			•	•	•	
	8 NODE QUAD RING				S	•	[illegible]
SOLID	TETRAHEDRON			•	•		
	WEDGE			•	•	D	
	8 NODE BRICK			•	•	•	
	15 NODE WEDGE					D	
	20 NODE BRICK					•	[illegible]
GENERAL MATRIX INPUT				•			

NOTES:
- S Contains subparametric forms with fewer number of nodes
- P Also contains parabolic isoparametric element with one midside node
- C Also contains cubic isoparametric element with two midside nodes
- D Degenerate case

COORDINATE SYSTEMS AND MATERIAL PROPERTIES

FEATURE			EASE2	STARDYNE	NASTRAN	ANSYS	MARC
COORDINATE SYSTEMS	BASIC (GLOBAL)	CARTESIAN	●	●	●	●	●
		CYLINDRICAL	●	●	●	●	
		SPHERICAL			●	●	
		GENERAL					1
	SKEWED (LOCAL)	CARTESIAN	●	●	●	●	●
		CYLINDRICAL	●	●	●	●	
		SPHERICAL			●	●	
		GENERAL					1
		MIXED	●	●	●	●	●
MATERIAL PROPERTIES		ISOTROPIC	●	●	●	●	●
		2-D ORTHOTROPIC		●	●	●	1
		3-D ORTHOTROPIC				●	1
		TEMPERATURE DEPENDENT	●		●	●	●
		STRESS DEPENDENT			●	●	●
		TIME DEPENDENT				●	●
		NONLINEAR ELASTIC					●
	WORK HARDENING	ISOTROPIC				●	●
		KINEMATIC				●	●
		COMBINED					●
		ORNL 10 CYCLE					●
		GENERAL					1

NOTES:

1 Performed by user subroutine

(10) p. 8 of 10

BOUNDARY CONDITIONS

FEATURE				EASE2	STARDYNE	NASTRAN	ANSYS	MARC
LOADING	STATIC	CONCENTRATED		•	•	•	•	•
		DISTRIBUTED (BEAM)		•	•	•	•	•
		PRESSURE	PLATES/SHELLS	•	•	•	•	•
			AXISYMMETRIC ELEMENTS			•	•	•
			SOLIDS	•	•	•	•	•
		TEMPERATURE		•	•	•	•	•
		ACCELERATION		•	•	•	•	•
		ROTATIONAL VELOCITY		•	•	•	•	1
		COMBINATION		•	•	•	•	
		AXI-SYMMETRIC	AXISYMMETRIC SHELLS			•	•	
			AXISYMMETRIC RINGS				•	
	DYNAMIC	TIME DEPENDENT		•	•	•	•	•
		FREQUENCY DEPENDENT			•	•		
		PSD RANDOM			•	•		
		SHOCK SPECTRUM		•	•		•	
DISPLACEMENT CONSTRAINTS		SINGLE POINT*		•	•	•	•	•
		MULTI POINT*		2		•	•	•
		SPECIFIED NONZERO DISPLACEMENT		•	•	•	•	•
HEAT TRANSFER		HEAT SOURCE/SINK				•	•	•
		CONVENTION				•	•	•
		RADIATION				•	•	•
		SPECIFIED TEMPERATURE				•	•	•

TES: *Single point constraint ≡ enforced zero translation(s) and/or rotation(s) in coordinate(s) associated with a node point
Multi-point constraint ≡ enforced linear constraint relationships between translation(s) and/or rotation(s) which may b
associated with different node points

1 Applies to some elements
2 Specialized forms of rigid and interface coupling
3 Displacement components set equal on different nodes
\+ Stand alone program

PRE- AND POST-PROCESSING

FEATURE			EASE2	STARDYNE	NASTRAN	ANSYS	MARC	SUPERB
			PROGRAM					
PLOTTING	INPUT	UNDEFORMED GEOMETRY	+	•	•	•	•	•
		NODE LABELS	+	+	•	•	•	•
		ELEMENT LABELS	+		•	•	•	•
		PROPERTY LABELS			•	•		•
		2-D SECTIONS				•	•	
		BOUNDARY CONDITION LABELS	+		•			
		HIDDEN LINES REMOVED					+	
	OUTPUT	DEFORMED GEOMETRY	+	•	•	•	•	•
		CONTOURS 2D STRUCTURE		+	•	•	•	•
		CONTOURS SOLID STRUCTURE				•	•	•
		TIME HISTORY	4	•	•	•	+	
		FREQUENCY RESPONSE		•	•,4			
		POWER SPECTRAL DENSITY		•	•,4			
		ARBITRARY X VS. Y				•	+	
DATA GENERATION		NODES	1	1,2	1,2,3	1,2	2,3	1,2
		ELEMENTS	1	1	1,2,3	1,2	2,3	1,2
		RESTRAINTS	1	1	1,2	1	2,3	1
		LOADS	1	1	2	1	2,3	1
OUTPUT SORTING		BY LOAD CASES		•	•	•	•	•
		BY ELEMENT	•		•			
		MAX/MIN SUMMARY	•	•	•			•
		SELECTED NODES AND/OR ELEMENTS		•	•	•	•	
BANDWIDTH MINIMIZATION			•	•	•	W	•,W	+,W

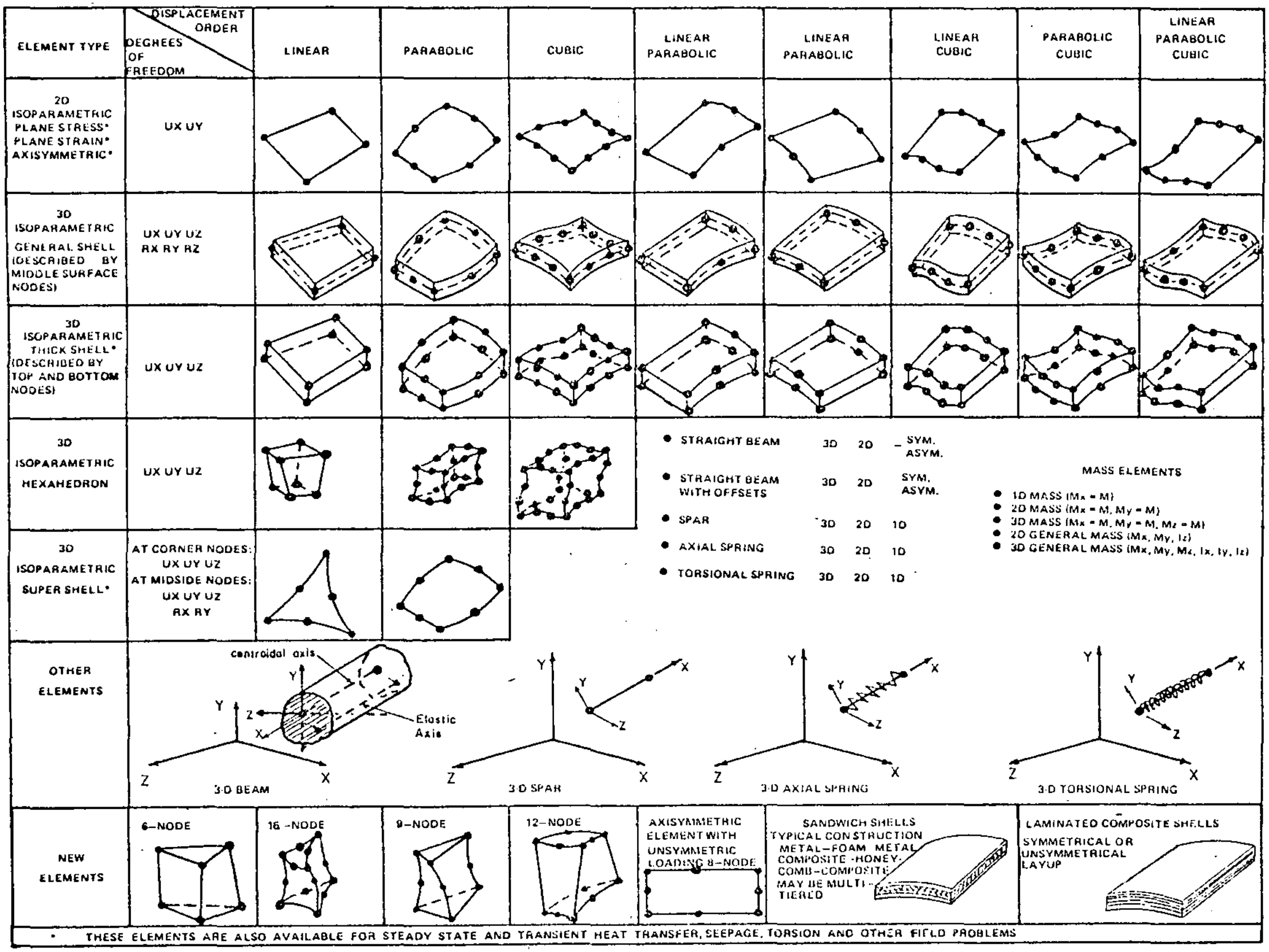
NOTES:

1 Generates data in 1 "dimension"
2 Generates data in 2 "dimensions"
3 Generates data in 3 "dimensions"
4 Printer plots
+ Stand alone program
W Wavefront solution

p.10 of 10

(12)

NISA ELEMENT LIBRARY



46

Applications Software

47

The user (designer, draftsman, engineer or technician) interacts with a CAD system through applications software. The programs "talk" the user's language as opposed to the computer implementation language which is, hopefully, isolated from the user in lower levels of utilities and system software. The usefulness of applications software is related to the human engineering of its interface with the user (command language, user I/O hardware devices, software design, etc.) as much as the technical content and features of the program.

Applications software can be divided into two categories: standalone and turnkey. The standalone software is available from a software vendor and frequently runs on several different manufacturer's computers. The turnkey software is available as part of a packaged hardware/software system from a turnkey vendor. The turnkey vendor typically buys computer equipment from a computer manufacturer and combines this with his own software, hardware packaging, and workstation design. A few turnkey vendors offer modified software from another software vendor. A few also produce their own hardware components, particularly microprocessors for speeding up interactive graphics response.

Standalone applications software has the primary advantage of flexibility. It often can be implemented on computers over a broad size/speed range in organizations having diverse computing machinery. Standalone software dominates engineering analysis, where turnkey systems either don't offer capabilities or are very weak. Turnkey systems, on the other hand, have the primary advantage of being available from one source, avoiding the potential problems of multi-vendor scenarios. They have achieved a dominance in the area of geometric modeling and drafting (particularly 2D).

This section reviews the standalone applications software used in CAD. Turnkey systems are discussed in Section VII. The big news in standalone CAD software is the migration to smaller computers.

AD Software Vendors/Distributors

1. Professor K. J. Bathe
Massachusetts Institute of Technology
Room 3-365
Cambridge, MA 02139

2. Swanson Analysis Systems, Inc.
Box 65
Houston, PA 15342

3. Merlin Technologies, Inc.
977 Town and Country Village
San Jose, CA 95128

4. Atkins Research and Development
Woodcoge Grove, Ashley Road
Epson, Surrey, U.K.

5. IKOSS GmbH
Vaihinger Str. 49
D-7000 Stuttgart 80
West Germany

6. C.E.G.B.
Berkeley Nuclear Labs.
Gloucestershire, England

7. Engineering Information Systems, Inc.
5120 Campbell Ave.
Suite 240
San Jose, CA 95130

8. COSMIC
112 Barrow Hall
University of Georgia
Athens, GA 30602

9. MacNeal-Schwendler Corp.
7442 North Figueroa Street
Los Angeles, CA 90041

10. Marc Analysis Research Corp.
260 Sheridan, Suite 200
Palo Alto, CA 94036

11. Universal Analytics, Inc.
7740 W. Manchester Bldg.
Playa del Ray, CA 90291

12. Engineering Mechanics Res. Corp.
P.O. Box 696
Troy, MI 48099

13. PAFEC, Ltd.
Strelley Hall
Main Street, Strelley
Nottingham, NG8 6PE
England

14. SAP Users Group
Denney Research Bldg., USC
University Park
Los Angeles, CA

15. A. S. Computas
Veritasveien 1
P.O. Box 310
N-1322 Hovik, Norway

16. GTICES Systems Laboratory
School of Civil Engineering
Georgia Institute of Tech.
Atlanta, GA 30332

17. Structural Dynamics Research Corporation
2000 Eastman Drive
Milford, OH 45150

18. T-Programm GMBH
Gustav-Werner-Str. 3
D-7410 Reutlingen
West Germany

19. MCAUTO
Dept. K161/270A
P.O. Box 515
St. Louis, MO 63166

20. SIA Ltd.
23 Lower Belgrave Street
London, SW 1
England

21. Jordan, Apostal, Ritter Assoc. Inc.
Administration Bldg. 7
Davisville, RI 02854

p.376 (3)

22. Interactive Graphics
Engineering Lab
University of Arizona
College of Engineering
AME Bldg. 16, Room 210A
Tucson, AZ 85721
(602) 626-1650

23. PDA Engineering
1740 Garry Ave., Suite 201
Santa Ana, CA 92705
USA

24. Manufacturing & Consulting
Services
3195A Airport Loop Drive
Costa Mesa, CA 92626

25. Lockheed, Burbank
Building 67, Plant A-1
Department 8034
Burbank, CA 91501

26. Evans and Sutherland
Computer Corp.
580 Arapeen Drive
Salt Lake City, Utah 84108

27. Production Automation
Project
College of Engineering and
Applied Science
University of Rochester
Rochester, NY 14627

28. MAGI
3 Westchester Plaza
Elmsford, NY 10523

29. MATRA-Datavision UK, Ltd.
Systems Engineering
Laboratories
Rafferty House
2-4 Sutton Court Road
Sutton, Surrey SM1 4SY
England

30. MCAUTO
Dept. K507
P.O. Box 516
St. Louis, MO 63166

31. Technishe Datenverarbeitung
A-8010, Graz
Luthergasse 4, Austria

32. Washington University
Technology Associates
8049 Littinger Road
St. Louis, MO 63144

33. SCIA
Attenrodestraat 6
3385 Meensel-Kiezegam
Belgium

34. Advanced Engineering
Consultants AB
Box 3044
S-580 03 Linkoping
Sweden

35. Engineering Computer
Services, Ltd.
Piccadilly, Tamworth, Staffs
B78 2ER, England

36. Computational Mechanics
125 High Street
Southhampton, Hampshire
S01 OAA, England

37. SOCOTEC
"Les Quadrants"
3 Avenue du Centre
78182 St Quentin en Yuelines
Cedex, France

38. Dr. Edward L. Wilson
1050 Leneve Place
El Cerrito, CA 94530

39. IMSL, Inc.
5th Floor NBC Building
7500 Bellaire Blvd.
Houston, TX 77036

40. A. D. Little, Inc.
20 Acorn Park
Cambridge, MA 02140

41. Quadrex Corporation
1700 Dell Avenue
Campbell, CA 95008

p.4 of 6 ④

22. Interactive Graphics
Engineering Lab
University of Arizona
College of Engineering
AME Bldg. 16, Room 210A
Tucson, AZ 85721
(602) 626-1650

23. PDA Engineering
1740 Garry Ave., Suite 201
Santa Ana, CA 92705
USA

24. Manufacturing & Consulting
Services
3195A Airport Loop Drive
Costa Mesa, CA 92626

25. Lockheed, Burbank
Building 67, Plant A-1
Department 8034
Burbank, CA 91501

26. Evans and Sutherland
Computer Corp.
580 Arapeen Drive
Salt Lake City, Utah 84108

27. Production Automation
Project
College of Engineering and
Applied Science
University of Rochester
Rochester, NY 14627

28. MAGI
3 Westchester Plaza
Elmsford, NY 10523

29. MATRA-Datavision UK, Ltd.
Systems Engineering
Laboratories
Rafferty House
2-4 Sutton Court Road
Sutton, Surrey SM1 4SY
England

30. MCAUTO
Dept. K507
P.O. Box 516
St. Louis, MO 63166

31. Technishe Datenverarbeitung
A-8010, Graz
Luthergasse 4, Austria

32. Washington University
Technology Associates
8049 Litzinger Road
St. Louis, MO 63144

33. SCIA
Attenrodestraat 6
3385 Meensel-Kiezegam
Belgium

34. Advanced Engineering
Consultants AB
Box 3044
S-580 03 Linkoping
Sweden

35. Engineering Computer
Services, Ltd.
Piccadilly, Tamworth, Staffs
B78 2ER, England

36. Computational Mechanics
125 High Street
Southhampton, Hampshire
S01 OAA, England

37. SOCOTEC
"Les Quadrants"
3 Avenue du Centre
78182 St Quentin en Yuelines
Cedex, France

38. Dr. Edward L. Wilson
1050 Leneve Place
El Cerrito, CA 94530

39. IMSL, Inc.
5th Floor NBC Building
7500 Bellaire Blvd.
Houston, TX 77036

40. A. D. Little, Inc.
20 Acorn Park
Cambridge, MA 02140

41. Quadrex Corporation
1700 Dell Avenue
Campbell, CA 95008

p. 5 of 6 ⑤

12. Structural Software
Development
1930 Shattuck Avenue
Berkeley, CA 94704

43. MCAUTO
Dept. K246
P.O. Box 516
St. Louis, MO 63166

44. AAA Technology and
Specialities Co., Inc.
P.O. Box 37189
Houston, TX 77036

45. Fitech, Ltd.
Mississippi State Univ.
Drawer KJ
Mississippi State, MS 39762

46. Mr. Ronald T. Bradshaw
85 Central Street
Waltham, MA 02154

47. Gulley Computer Associates
2300 E. 14th
Tulsa, OK 74104

48. Structural Members Users
Group, Ltd.
P.O. Box 3958
Univ. of Virginia Station
Charlottesville, VA 22903

49. Genesys Limited
Lisle Street
Loughborough, LE11OAY
England

50. ECOM Associates
5678 W. Brown Deer
Milwaukee, WI 53223

51. Synercom Technology
P.O. Box 27
Sugerland, TX 77478

52. CONCAP Computing Systems
7700 Edgewater Drive
Suite 700
Oakland, CA 94621

53. Structural Programming, Inc.
83 Boston Post Road
Subury, MA 01776

54. Shanler Associates
1959 Chalice Way
Toledo, OH 43613

55. SysComp Corporation
2042 Broadway
Santa Monica, CA 90404

56. Holguin and Associates, Inc.
5822 Cromo Drive
P.O. Box 12990
El Paso, TX 79912

57. Zeiler-Pennock, Inc.
2727 Bryant Street
Denver, CO 80211

58. Stress Analysis Associates
4529 Angeles Crest Highway
Suite 104
La Canada, CA 91011

59. Computer Mart
560 West 14 Mile Road
Clawson, MI 48017

60. Northern Research and
Engineering Corp.
39 Olympia Avenue
Woburn, MA 01801

p. 6 of 6 6

Software Referral Catalogs

1. HP 1000 Guide to OEMs and Software Suppliers
   OEM Market Development
   Hewlett-Packard Data Systems Division
   11000 Wolfe Road
   Cupertino, CA 95014

2. Engineering System Software Referral Catalog
   Digital Equipment Corp.
   Engineering Systems Group
   200 Forest Street
   Marlboro, MA 01752

Distribution Agencies for Software

1. ASIAC (Aerospace Structures Information and Analysis Center)
   AFFDL/FBR
   Wright Patterson Air Force Base
   Dayton, OH 45433

2. CEPA (Society for Computer Applications in Engineering, Planning and Architecture, Inc.)
   358 Hungerford Drive
   Rockville, MD 20850

3. COSMIC
   Suite 112, Barrow Hall
   The University of Georgia
   Athens, GA 30602

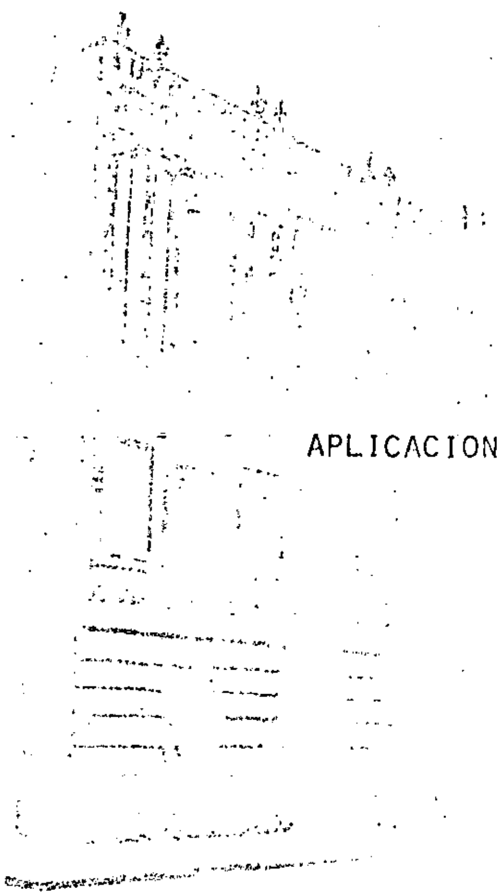
4. National Information Service-Earthquake Engineering Computer Applications
   519 Davis Hall
   The University of California, Berkeley
   Berkeley, CA 94720

5. National Technical Information Center
   5285 Port Royal Road
   Springfield, VA 22161

6. NESC (National Energy Software Center)
   9700 South Cass Avenue
   Argonne, IL 60439

DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.

EL METODO DEL ELEMENTO FINITO EN LA INGENIERIA



APLICACIONES: ANALISIS ESTATICOS

DR. JORGE ANGELES ALVAREZ

FEBRERO, 1985

Palacio de Minería Calle de Tacuba 5 primer piso Deleg. Cuauhtémoc 06000 México, D.F. Tel.: 521-40-20 Apdo. Postal M-2285

El MEF es particularmente útil en el proceso de diseño para localizar puntos en los que pueda presentarse falla por un esfuerzo excesivo. Esto requiere el uso de un programa de elemento finito. El programa, a su vez, requiere que el usario le suministre información respecto a la geometría y a la constitución material del elemento de máquina que va a analizarse, así como respecto a los apoyos y las cargas aplicadas. Estos dos últimos conceptos constituyen lo que se cónoce como condiciones de frontera. Una vez realizado el análisis mediante el programa utilizado, los resultados son arrojados en forma numérica mediante un listado, o bien en forma gráfica. El suministro de datos al programa constituye lo que se conoce como preprocesamiento, mientras que el suministro de resultados, posprocesamiento. Tanto para el pre- como para el posprocesamiento se requiere contar con sistemas de cómputo (programas y subprogramas) que constituyen lo que se llama software, además de equipo (graficadores, digitalizadores, tubos de rayos catódicos, interfaces), que constituye lo que se llama hardware. En la Fig 6.1 se muestra el equipo básico requerido por el MEF.

El análisis estático de elementos de máquina se presenta mediante un ejemplo de diseño de máquinas. En la Fig 6.2 se muestra el eslabón de una cadena de transmisión que en operación ha fallado en el punto F. El fabricante supone que se trata de un problema de concentración de esfuerzo, por lo que ha pedido un análisis mediante elemento finito. Se conoce el material de que está compuesto el eslabón, por lo que se conoce su módulo de elasticidad, E, y se supondrá que presenta un comportamiento linelamente elástico. Dada la doble simetría del eslabón con respecto a los ejes y-y' y z-z', y de las cargas aplicadas, bastará con analizar un cuarto de él, según se muestra en la Fig 6.2 (c La malla de esta figura consiste de elementos triangulares constantes, esto es, que se supone tienen una distribución uniforme de esfuerzo. Esta malla se genera automáticamente de la siguiente forma :

i) Con ayuda del digitalizador se proporcionan las coordenadas de los puntos P_1, P_2, P_3,... etc. de la Fig 6.3, seleccionados con un espaciamiento adecuado sobre un dibujo constructivo.

ii) El generador automático de mallas (software) produce el contorno de la Fig 6.3 mediante interpolación lineal entre los puntos dados. Este generador requiere una partición de toda la pieza en las partes señaladas en esa figura como 1, 2, 3 y 4, que contienen aproximadamente la misma área.

iii) Mediante una instrucción, el generador automático de mallas produce una malla bien de elementos triangulares, como la de la Fig 6.4, o bien una de elementos cuadriláteros, como la de la Fig 6.5.

iv) Mediante un minimizador de banda, se numeran los nodos en forma tal que se produzca una matriz de rigidez de banda mínima. En la Fig 6.6 se muestran diferentes formas de numeración de elementos en una viga rectangular, que producen diferentes anchos de banda.

v) Mediante un balanceador de mallas se eliminan los elementos de lados muy desiguales. En el ejemplo del eslabón de la cadena de transmisión (Figs 6.4 y 6.5), los elementos están bastante balanceados ; pero en una pieza de geometría más complicada, como una carcaza de bomba, los elementos de la malla generada automáticamente pueden ser muy desbalanceados. En la Fig 6.7 se muestra la malla de una carcaza de bomba con elementos triangulares muy desbalanceados, mientras que en la Fig 6.8 se muestra esa misma malla una vez que ha sido balanceada.

i) Una vez que se ha minimizado la banda de la matriz de rigidez y que se ha disminuido su condición mediante el balanceo de su malla, se procede al cálculo propiamente dicho de elemento finito. Este produce valores de desplazamiento, de deformación y de esfuerzo en los nodos de la malla. La distribución del esfuerzo normalmente presenta discontinuidades "de salto" en los bordes de cada elemento, como se muestra en la Fig 6.9(a). Mediante un procedimiento de posprocesamiento se puede "suavizar" esa distribución, obteniéndose la de la Fig 6.9(b).

vii) Una vez "suavizada" la distribución de esfuerzo se procede a representarla bien sea en forma bidimensional como se muestra en la Fig 6.10, o bien en forma tridimensional como en las Figs 6.11(a) y (b).

El programa utilizado para obtener los resultados de la Fig 6.11 es el llamado ELAN, desarrollado en el Laboratorio de Máquinas Herramienta del Instituto Tecnológico Renano-Westfálico de Aquisgrán, R.F.A. El cálculo corresponde a la malla de la Fig 6.5, de elementos cuadriláteros isoparamétricos. En ese mismo Laboratorio se ha desarrollado otro programa, el llamado FINEL, que cuenta con elementos de esfuerzo constante, que, sin embargo, produce resultados satisfactorios. Con este programa se obtuvo la distribución del esfuerzo en una placa infinita sujeta a cargas σ_1 y σ_2 en dos direcciones perpendiculares, con una perforación elíptica, como se muestra en la Fig 6.12. Los resultados se muestran en la Fig 6.13.

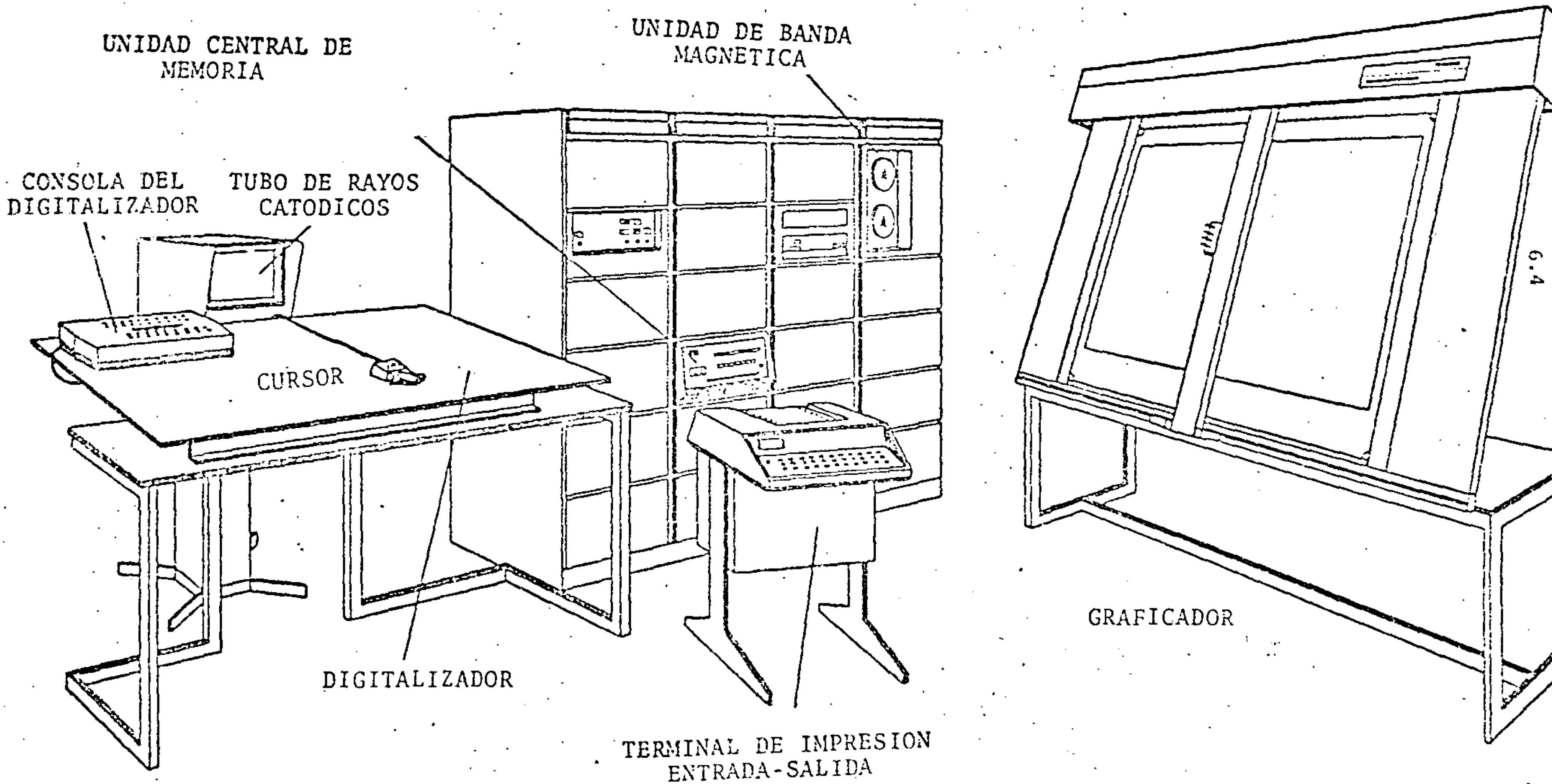
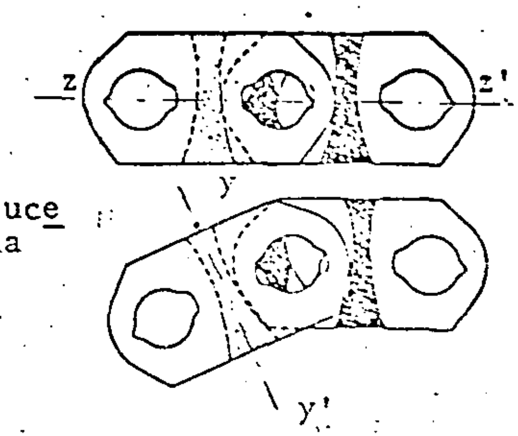


Fig. 6.1 Equipo básico requerido para el MEF (Laboratorio de Máquinas Herramienta de Aquisgrán, RFA)

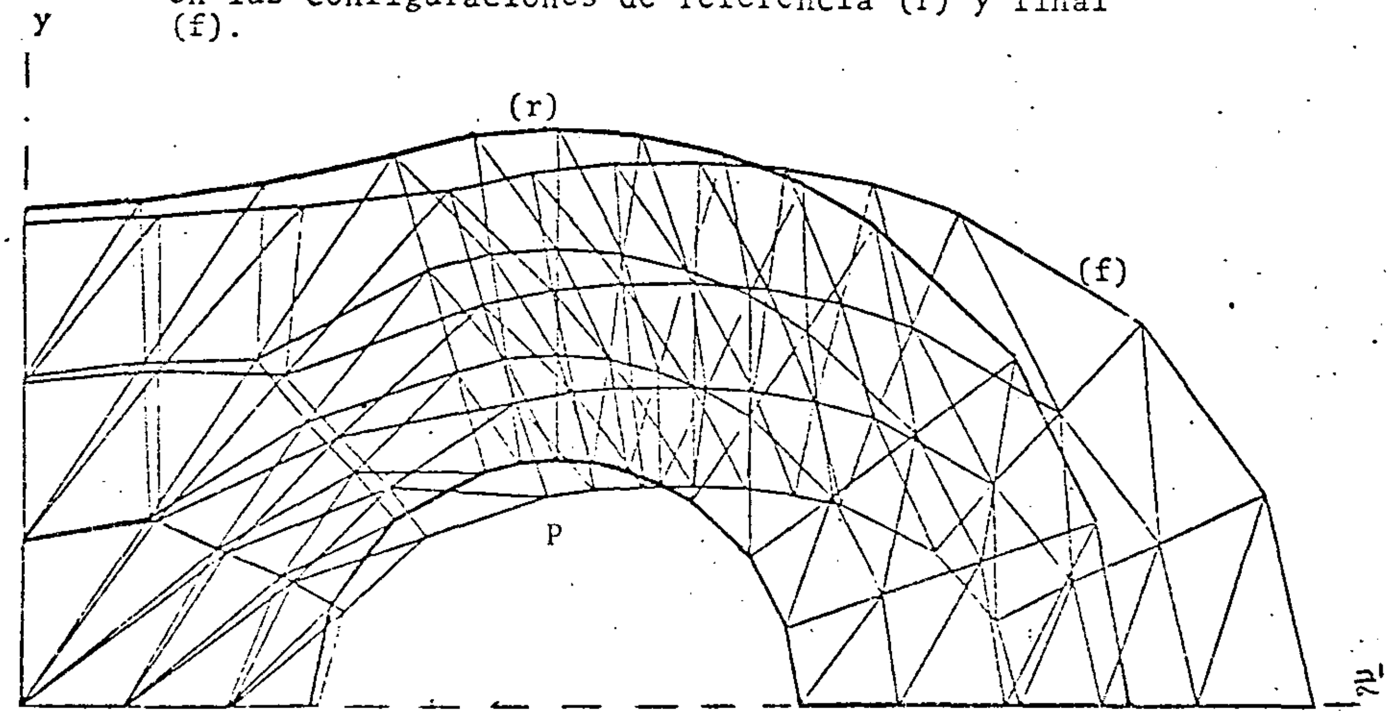


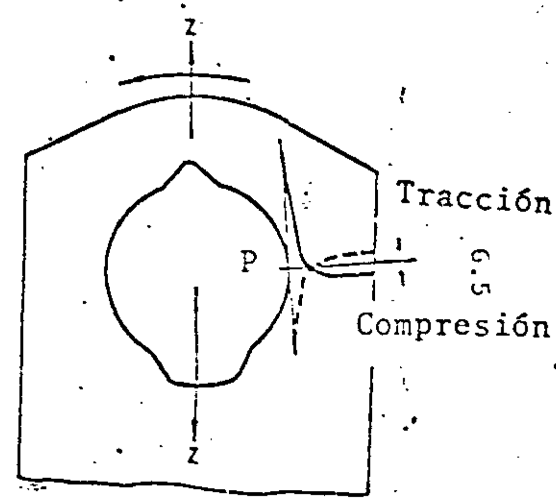
(a)

Eslabones sucesivos de una cadena de transmisión

(c)

Malla de elemento finito de un cuarto del eslabón, en las configuraciones de referencia (r) y final (f).





(b)

Distribución del esfuerzo en el borde del eslabón de una cadena de transmisión.

Fig. 6.2 Eslabón de una cadena de transmisión, que presenta concentración de esfuerzos en el punto P, y su modelo de elemento finito.

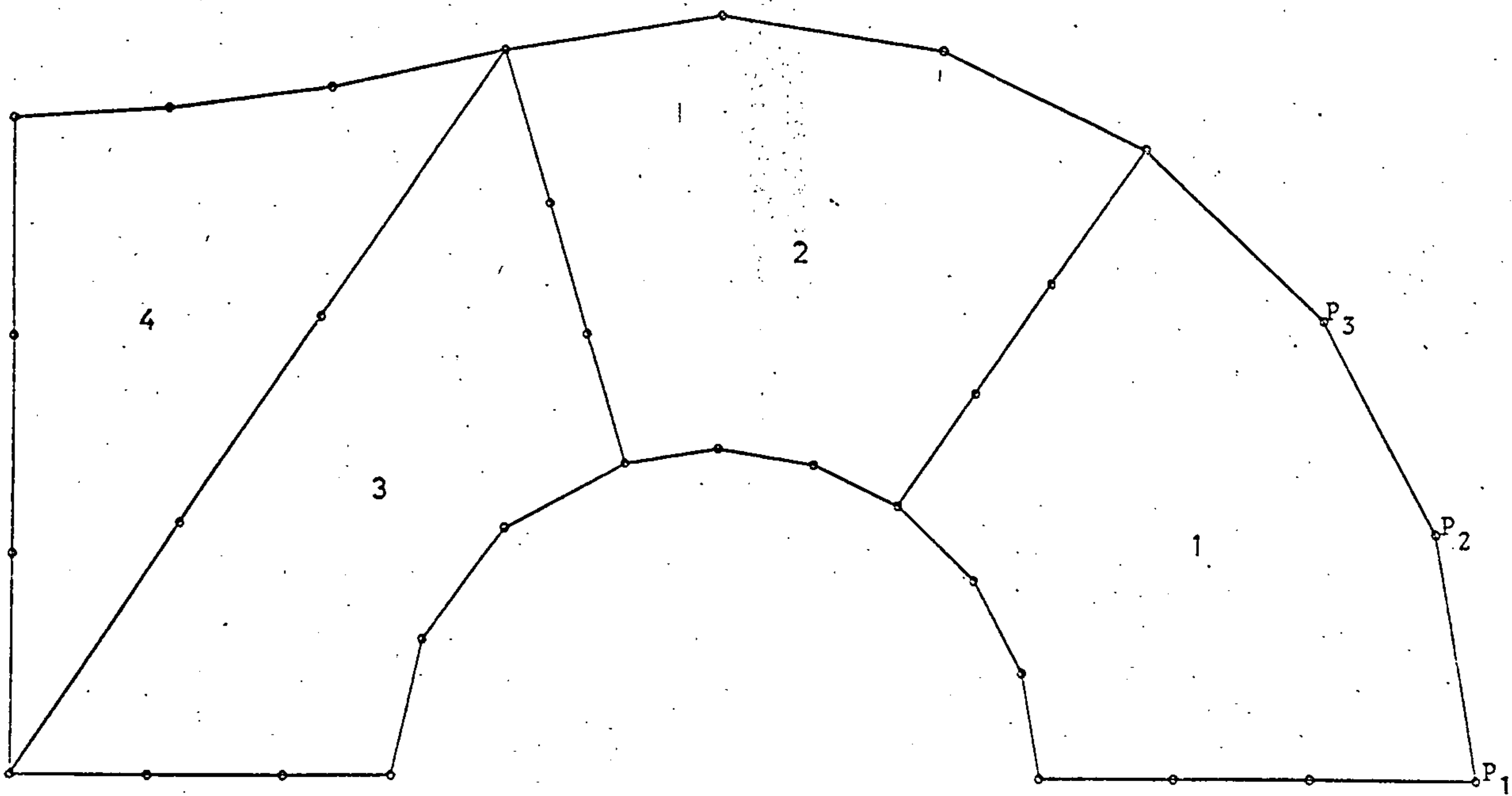


Fig. 6.3 Reproducción automática del contorno de la pieza de máquina y partición para la malla de elemento finito.

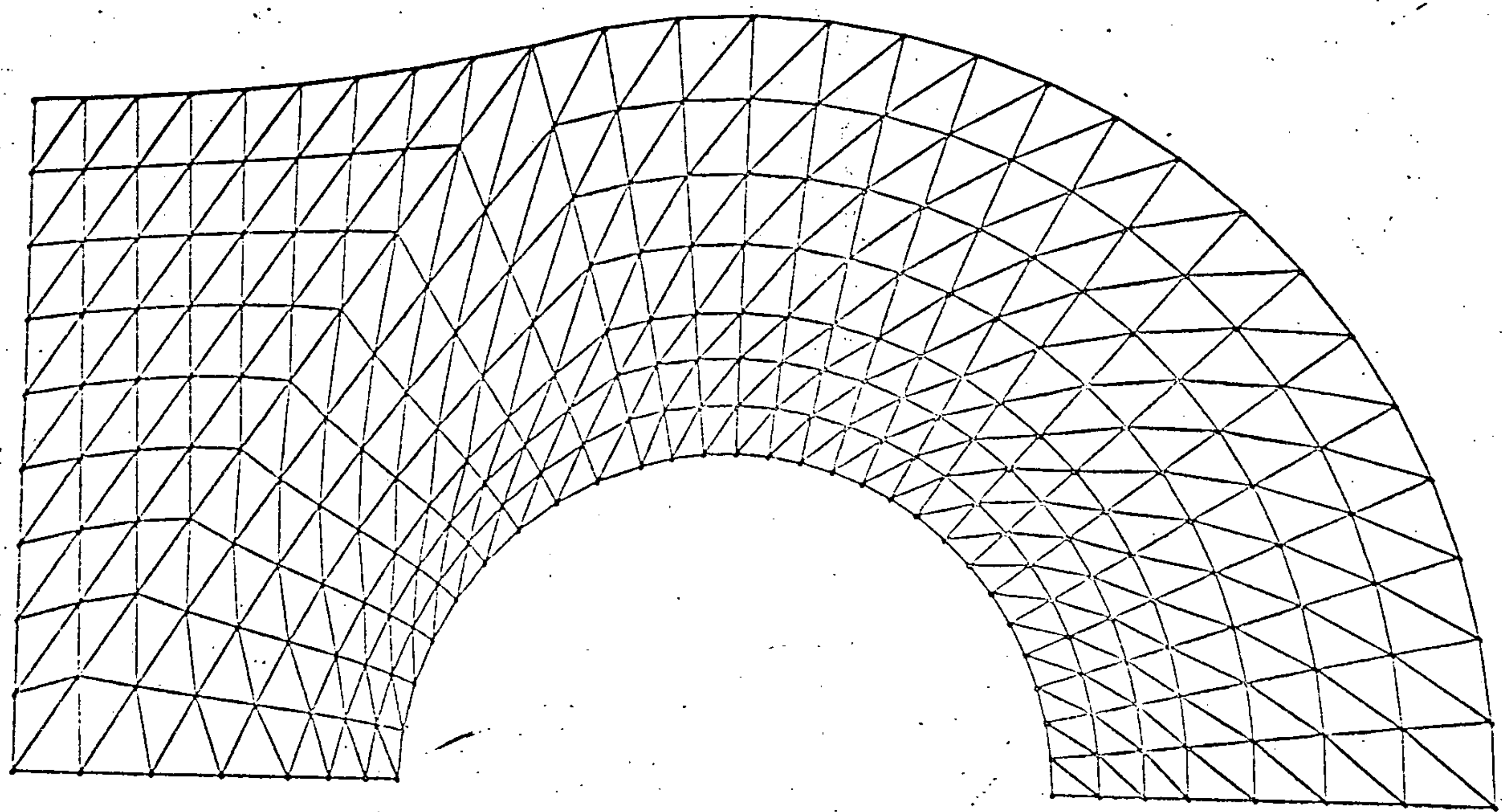


Fig. 6.4 Malla de elementos finitos triangulares, generada automáticamente, con distribución uniforme del esfuerzo en cada elemento.

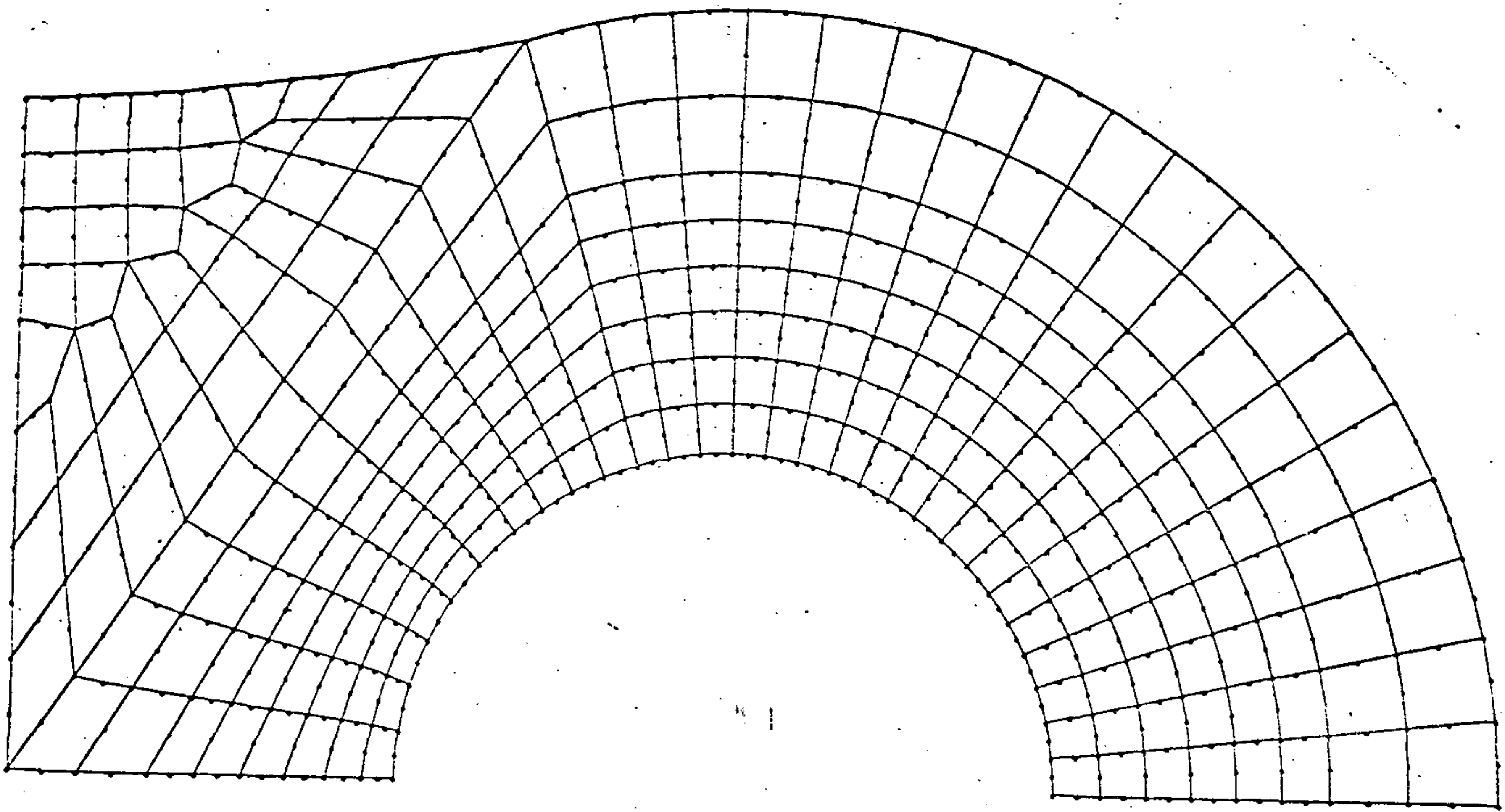


Fig. 6.5 Malla de elementos finitos (isoparamétricos) cuadriláteros, generada automáticamente.

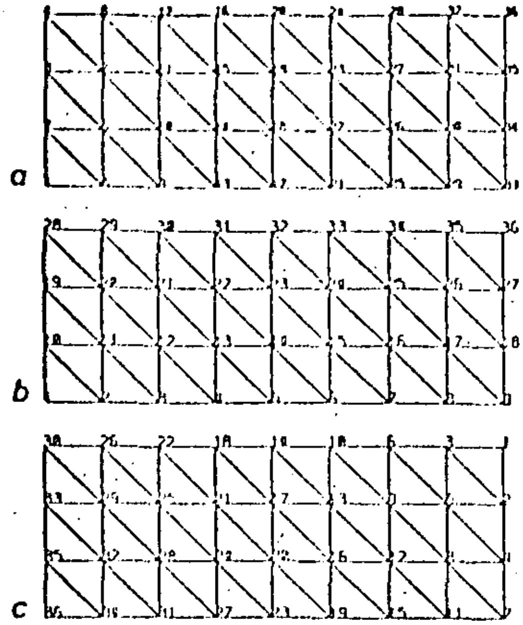


Fig. 6.6 Minimización del ancho de banda de la matriz de rigidez de una viga, con diferente numeración de nodos. Los anchos de banda, d, obtenidos son: a) d=5; b) d=11; c) d=5.

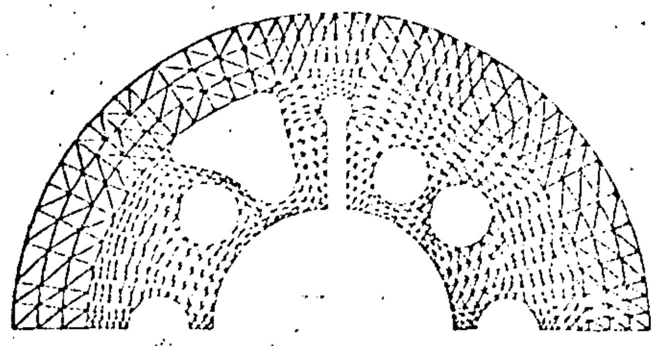
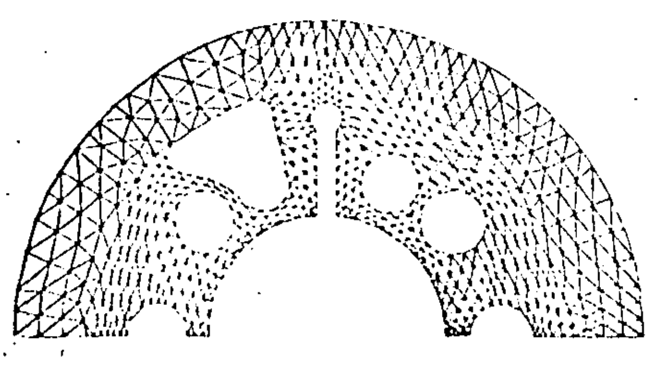
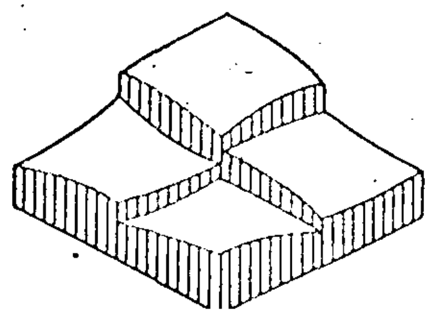


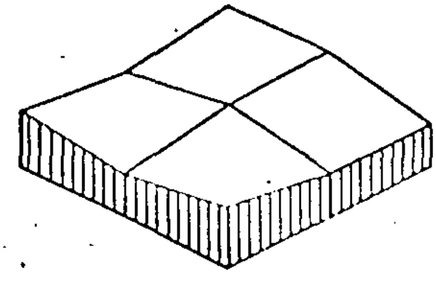
Fig. 6.7 Malla de elementos triangulares, generada automáticamente, de la carcaza de una bomba, que muestra elementos muy desbalanceados.



ig. 6.8 Malla de elementos triangulares de la Fig. 6.7 con elementos balanceados

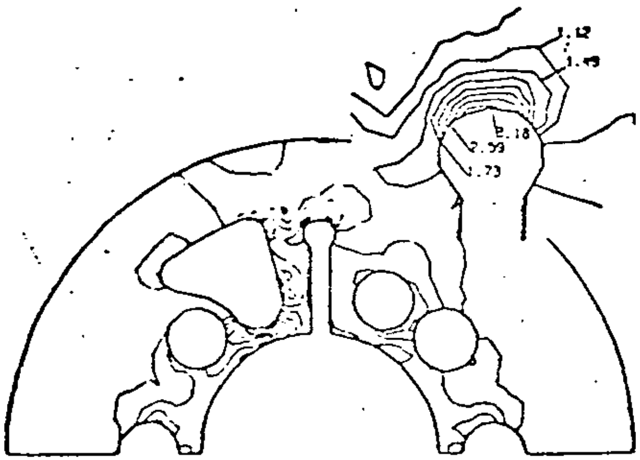


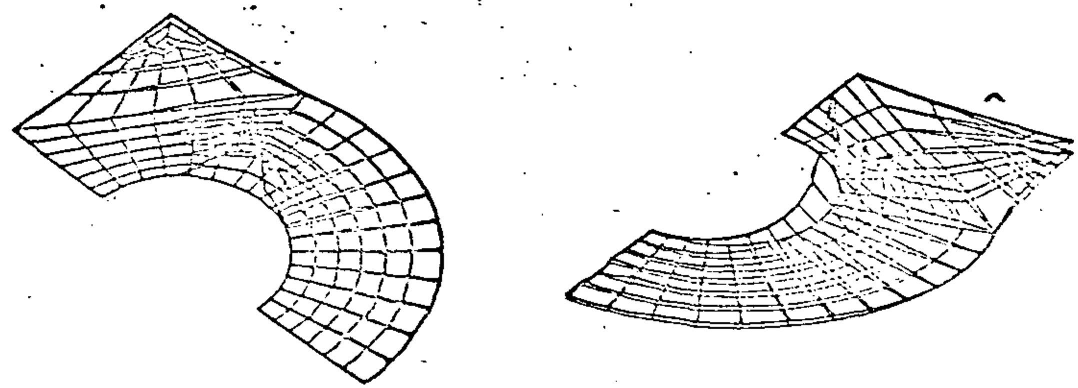
(a)



(b)

Fig. 6.9 Distribución del esfuerzo en elementos vecinos. (a) discontinua; (b) "suavizada".





(a) (b)

Fig. 6.10 Representación bidimensional de la distribución del esfuerzo en la carcaza de bomba de la Fig. 6.7

Fig. 6.11 Representación tridimensional de la distribución del esfuerzo en el eslabón de una cadena de transmisión, de la Fig. 6.2.

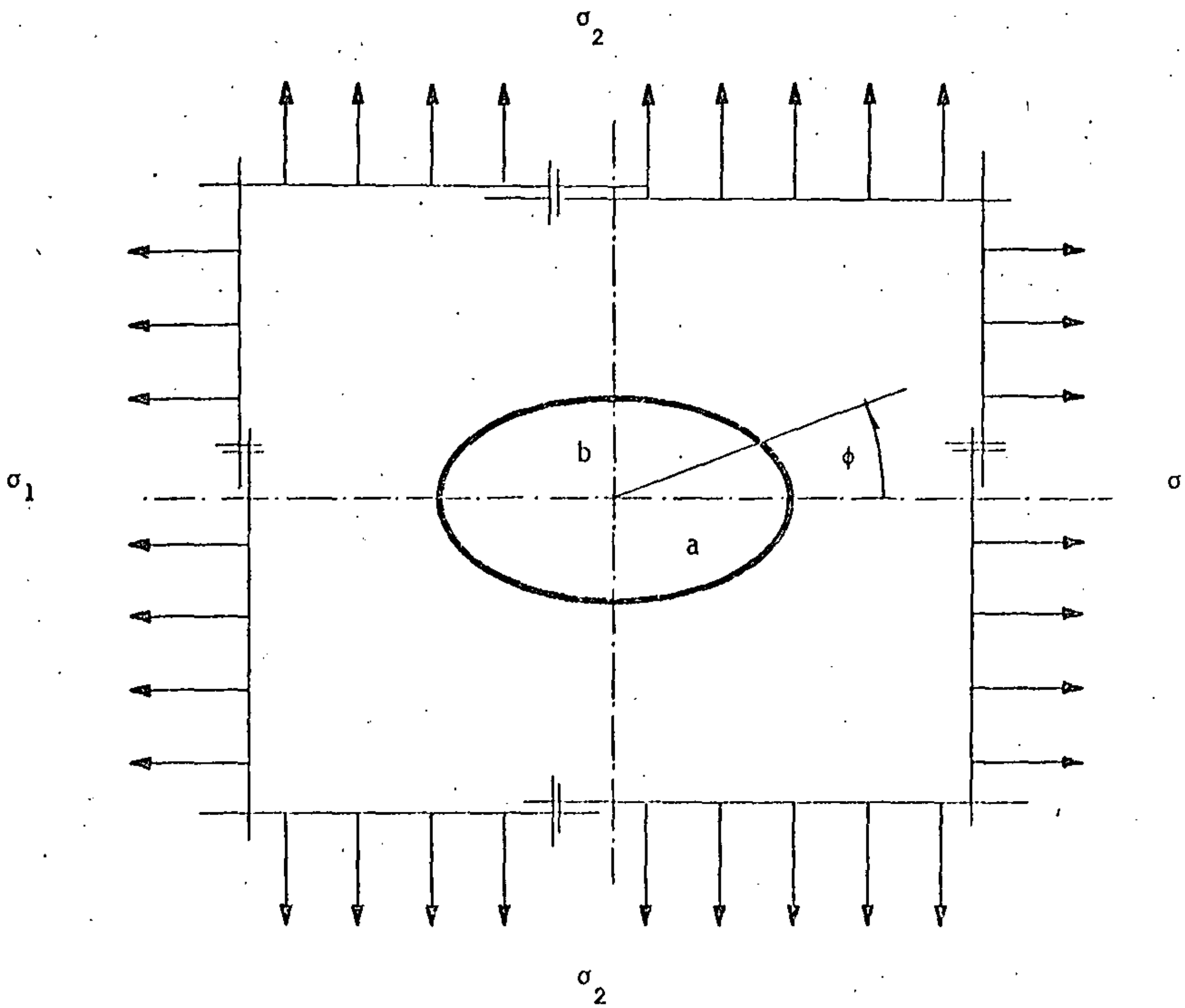


Fig 6.12 Placa cargada en dos direcciones con una perforación

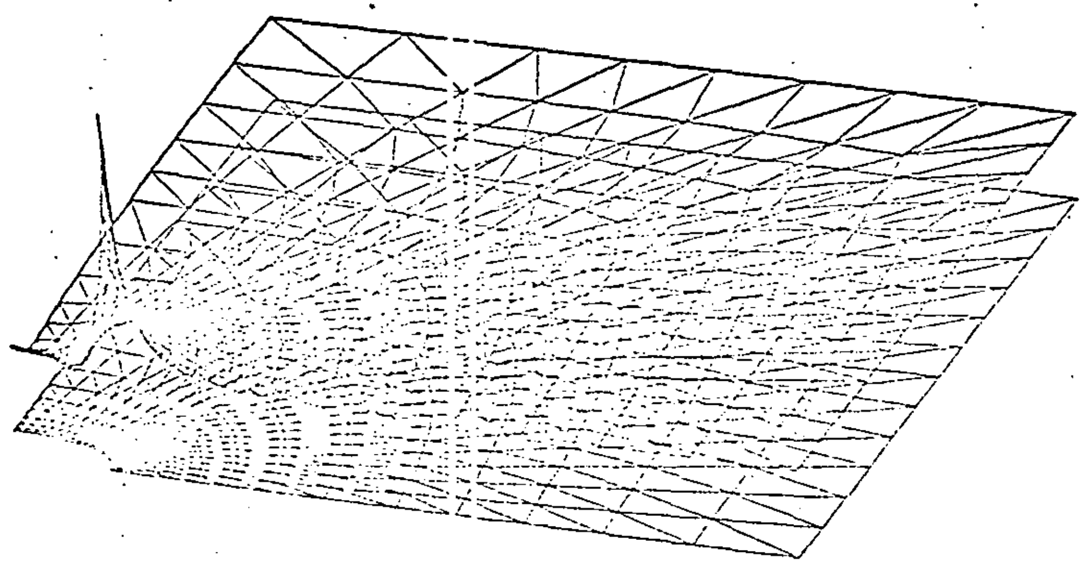


Fig. 6.1 3 Representación tridimensional de la distribución del esfuerzo en la placa de la Fig. 6.12.

DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.

EL METODO DEL ELEMENTO FINITO EN LA INGENIERIA

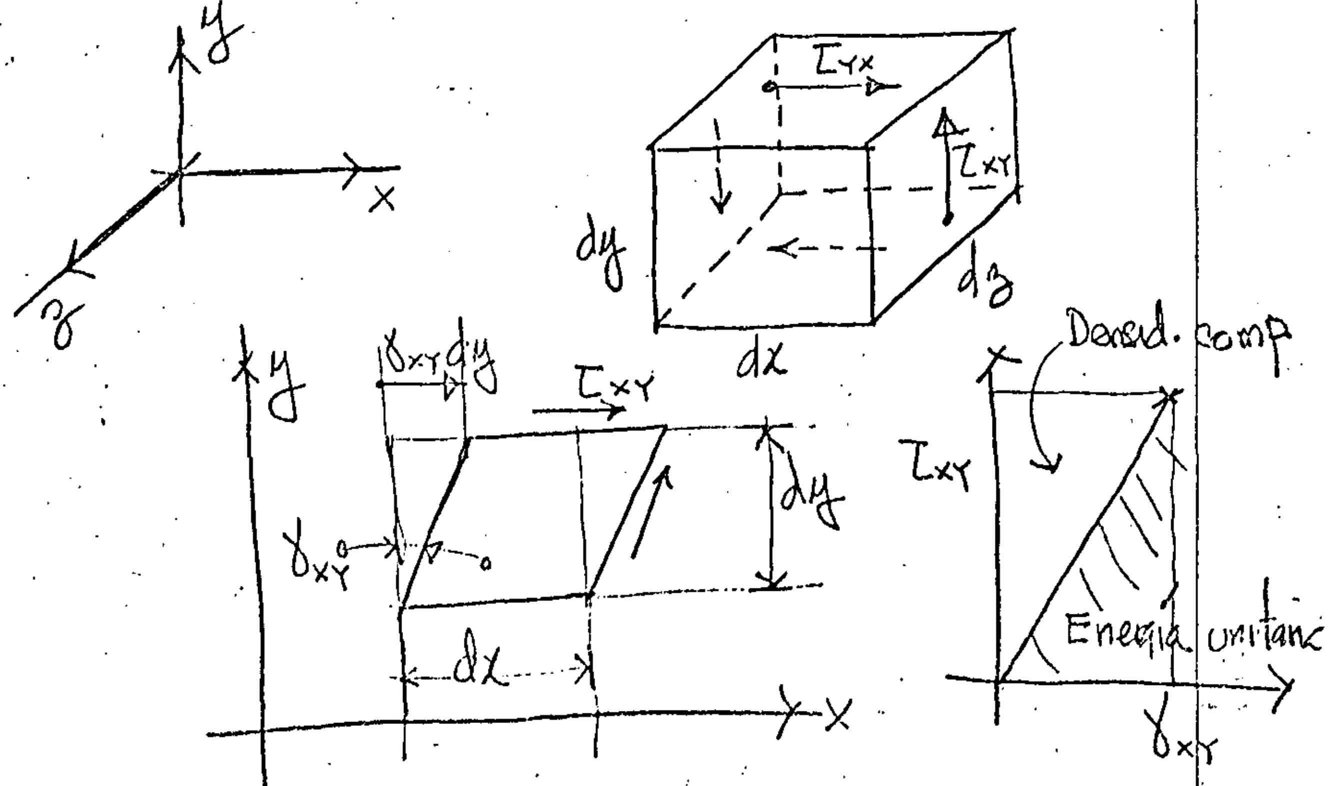
ENERGIA ELASTICA DE DEFORMACION POR ESFUERZO

DR. PORFIRIO BALLESTEROS B.

FEBRERO, 1985

Palacio de Minería Calle de Tacuba 5 primer piso Deleg. Cuauhtémoc 06000 México, D.F. Tel.: 521-40-20 Apdo. Postal M-2285

Energía elástica de deformación por esfuerzo cortante

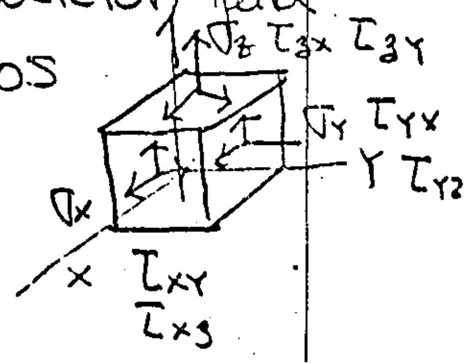


$$dU_{corte} = \underbrace{\underbrace{\frac{1}{2}\tau_{XY}\,dx\,dz}_{\text{Fuerza promedio}} \times \underbrace{\gamma_{XY}\,dy}_{\text{distancia}}}_{\text{Trabajo}} = \frac{1}{2}\tau_{XY}\gamma_{XY}\,dx\,dy\,dz \quad (3)$$

la densidad de energía por esfuerzo de corte es

$$\left(\frac{dU}{dV}\right)_{corte} = \frac{1}{2}\tau_{XY}\gamma_{XY} \qquad (4)$$

Aceptando el principio de superposición para un estado multiaxial de esfuerzos



la densidad de energía de deformación es

$[\sigma_{ij}]$

$$\frac{dU}{dV} = U_0 = \frac{1}{2}\sigma_x \varepsilon_x + \frac{1}{2}\sigma_y \varepsilon_y + \frac{1}{2}\sigma_z \varepsilon_z + \frac{1}{2}\tau_{xy}\gamma_{xy} + \frac{1}{2}\tau_{yz}\gamma_{yz} + \frac{1}{2}\tau_{zx}\gamma_{zx} \quad (5)$$

Expresando (5) matricialmente se obtiene

$$U_0 = \frac{1}{2}\left[\sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_z \ \tau_{xy} \ \tau_{yz} \ \tau_{zx}\right] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\lfloor\sigma\rfloor\{\varepsilon\} \quad (6)$$

Substituyendo en (5) la ley generalizada de Hooke (7)

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \nu\frac{\sigma_y}{E} - \nu\frac{\sigma_z}{E} & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \\ \varepsilon_y &= -\nu\frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \nu\frac{\sigma_z}{E} & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G} \\ \varepsilon_z &= -\nu\frac{\sigma_x}{E} - \nu\frac{\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E} & \gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G} \end{aligned} \quad (7)$$

se obtiene

$$U_0 = \frac{1}{2E}\left(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2\right) - \frac{\nu}{E}\left(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x\right) + \frac{1}{2G}\left(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2\right) \quad (8)$$

Para materiales elásticos lineales homogenoos e isotrópicos se puede obtener una expresión similar a 8) en términos de las deformaciones en lugar de los esfuerzos, la energía total se obtiene de

$$U = \iiint_V U_0 \, dx\, dy\, dz \quad (9)$$

la ecuación (5) es importante al establecer las leyes de Plasticidad y (8) es importante en análisis de esfuerzos por métodos energéticos. Substituyendo (6) en (9) se obtiene

$$U = \frac{1}{2}\iiint_V (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{zx}\gamma_{zx})\,dV \tag{10}$$

$$= \frac{1}{2}\iiint_V \lfloor \sigma \rfloor \{\varepsilon\}\, dx\,dy\,dz$$

Para barras axialmente cargadas, con flexión y cortante (10) queda

$$U = \frac{1}{2}\iiint_V (\sigma_x \varepsilon_x + \tau_{xy}\gamma_{xy})\,dx\,dy\,dz \tag{11}$$

Para materiales elásticos lineales

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad y \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \tag{12}$$

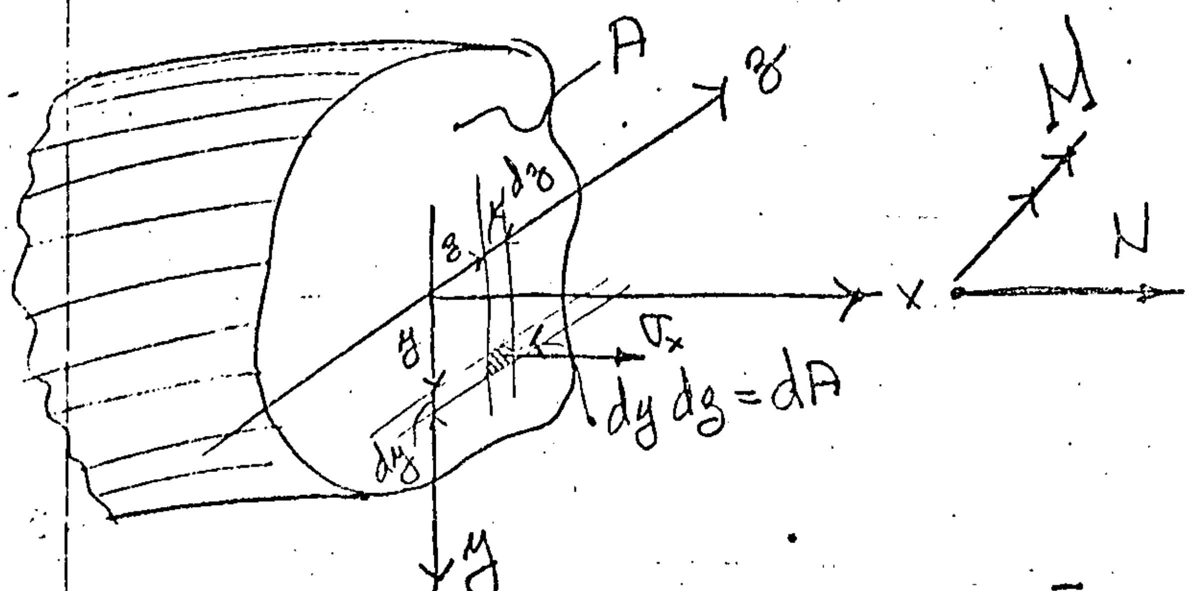
De (12) y (11) se obtiene

$$U = \underbrace{\iiint_V \frac{\sigma_x^2}{2E}\,dx\,dy\,dz}_{\text{Para carga axial y Flexión de vigas}} + \underbrace{\iiint_V \frac{\tau_{xy}^2}{2G}\,dx\,dy\,dz}_{\text{Para Corte en Vigas}} \tag{13}$$

Energía de deformación para barras cargadas axialmente

$$\sigma_x = \frac{N}{A} = \frac{\text{carga axial}}{\text{sección transversal}} \, , \quad A = \iint_A dy\,dz \qquad 14$$

N y A son funciones de x solamente



Por lo tanto (13) se reduce a [de (14) y (13)]

$$U_N = \iiint_V \frac{\sigma_x^2}{2E}\,dV = \iiint \frac{N^2}{2A^2E}\,dx\,dy\,dz$$

$$= \int_L \frac{N^2}{2A^2E}\underbrace{\left[\iint_A dy\,dz\right]}_{A} dx = \int_L \frac{N^2}{2EA}\,dx$$

$$\boxed{U_N = \int_L \frac{N^2}{2EA}\,dx} \qquad (15)$$

Energía de deformación en Flexión. en este caso

$$\sigma_x = \frac{M}{I} y \qquad (16)$$

De (16) y (13) se obtiene

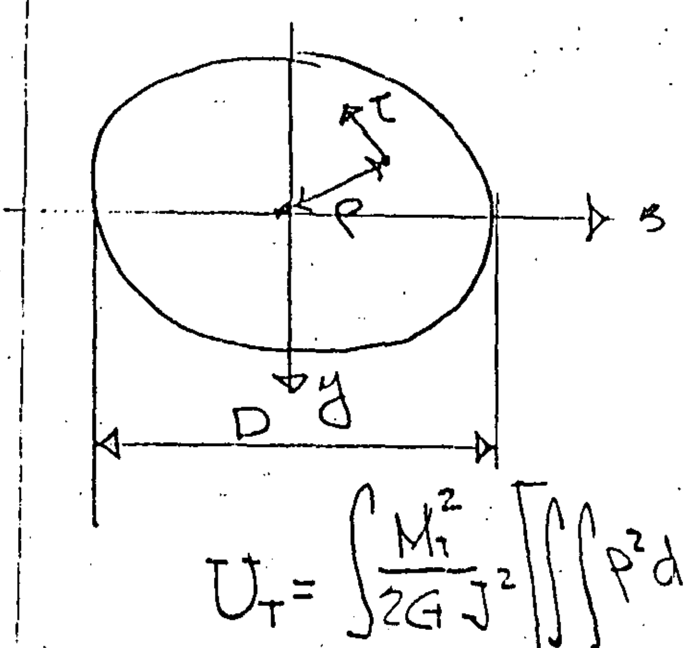
$$U_M = \iiint_V \frac{\sigma_x^2}{2E} dV = \iiint \frac{1}{2E}\left(-\frac{My}{I}\right)^2 dx\, dy\, dz$$

$$= \int_L \frac{M^2}{2EI^2}\left[\iint_A y^2 dy\, dz\right] dx = \int_L \frac{M^2}{2EI}\, dx$$

$$\boxed{U_M = \int_L \frac{M^2}{2EI}\, dx} \qquad (17)$$

Energía de Deformación para secciones circulares en Torsión

en este caso $\tau = \frac{M_T}{J} \rho \qquad (18)$



Subst. (18) en (13)

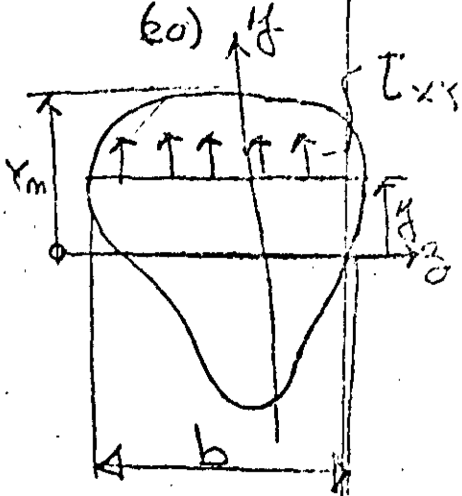
$$U_T = \iiint_V \frac{\tau_{xy}^2}{2G}\, dx\, dy\, dz$$

$$= \iiint \frac{1}{2G}\left(\frac{M_T}{J}\rho\right)^2 dx\, dy\, dz$$

$$U_T = \int_L \frac{M_T^2}{2GJ^2}\left[\iint \rho^2 dy\, dz\right] dx = \boxed{\int_L \frac{M_T^2}{2GJ} dx} \qquad (19)$$

Energía de Deformación por Cortante

En este caso $\tau_{xy} = \dfrac{V Q_Y^{Y_m}}{b\, I}$ (20)



V = Cortante en la sección

$Q_Y^{Y_m} = \int_y^{Y_m} y\, dA$ = momento estático de y a y_m.

b = ancho a la altura y de los ejes centroidales x y

I = Momento de Inercia de la sección

Subst (20) en (13)

$$U_V = \iiint \frac{1}{2G}\left(\frac{V Q_Y^{Y_m}}{b\, I}\right) dx\,dy\,dz = \int_L \frac{V^2}{2GI^2}\left[\iint \left(\frac{Q_Y^{Y_m}}{b}\right)^2 dy\,dz\right] dx$$

$$U_V = \int_L \frac{V^2}{2GI^2}\left[\iint \left(\frac{Q_Y^{Y_m}}{b}\right)^2 dy\,dz\right] dx \qquad (21)$$

La expresión total de la energía de deformación sera: $U = U_N + U_M + U_T + U_V$ o sea

$$\boxed{U = \int_L \left\{ \frac{N^2}{2EA} + \frac{M^2}{2EI} + \frac{M_T^2}{2GJ} + \frac{V^2}{2GI^2}\left[\iint \left(\frac{Q_Y^{Y_m}}{b}\right)^2 dy\,dz\right] \right\} dx} \qquad (22)$$

Desplazamientos

El principio de conservación de energía (La energía no puede ser creada o destruida), puede adoptarse para calcular deformaciones en sistemas elásticos debidos a las cargas aplicadas. La primera Ley de la Termodinámica expresa este principio como

TRABAJO REALIZADO = Cambio en Energía

Para un proceso adiabático (No se agrega o substrae calor al sistema) y cuando no se genera calor en el sistema, y cuando las fuerzas aplicadas se aplican en forma estática (Las fuerzas se aplican tan lentamente que se desprecia la energía cinética $\frac{1}{2} m v^2$), el caso especial de esta ley para sistemas conservativos se reduce a

$$W_e = U \qquad (23)$$

Donde We = Trabajo hecho por las fuerzas externas durante el proceso de carga.

U = Energía total de deformación almacenada en el Sistema.

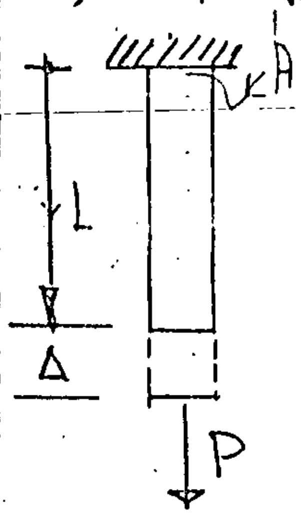
Similar a decir que la suma del Trabajo externo We y el interno Wi deben ser cero

$$W_e + W_i = 0 \qquad (24)$$

$U = -W_i$ las deformaciones siempre se oponen a las fuerzas internas. Es importante considerar la aplicación gradual de las cargas de cero a su valor total por lo tanto W_e será ½ Fuerza total por el desplazamiento

Ejemplos

a) Determine la deflexión de la viga mostrada



$W_e = \frac{1}{2} P \Delta$ y de (22)

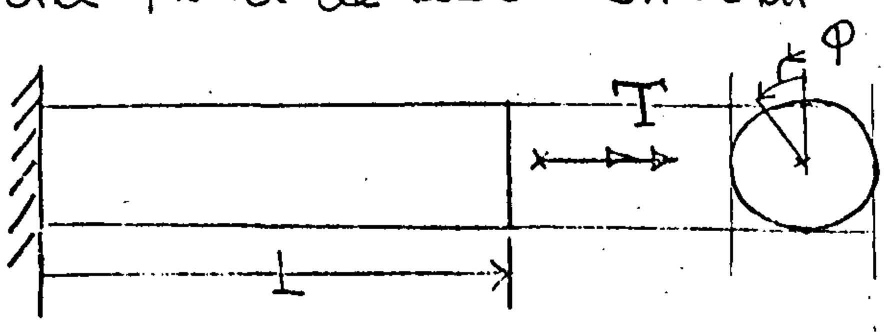
$$U = \frac{1}{2EA}\int_0^L N^2\,dx$$

$$= \frac{P^2}{2EA}\int_0^L dx = \frac{P^2 L}{2EA}$$

De (23) $\frac{1}{2} P\Delta = \frac{P^2 L}{2EA}$

$$\Delta = \frac{PL}{AE} \quad \text{Ley de Hooke}$$

b) Determine la rotación en el extremo de una flecha de sección circular



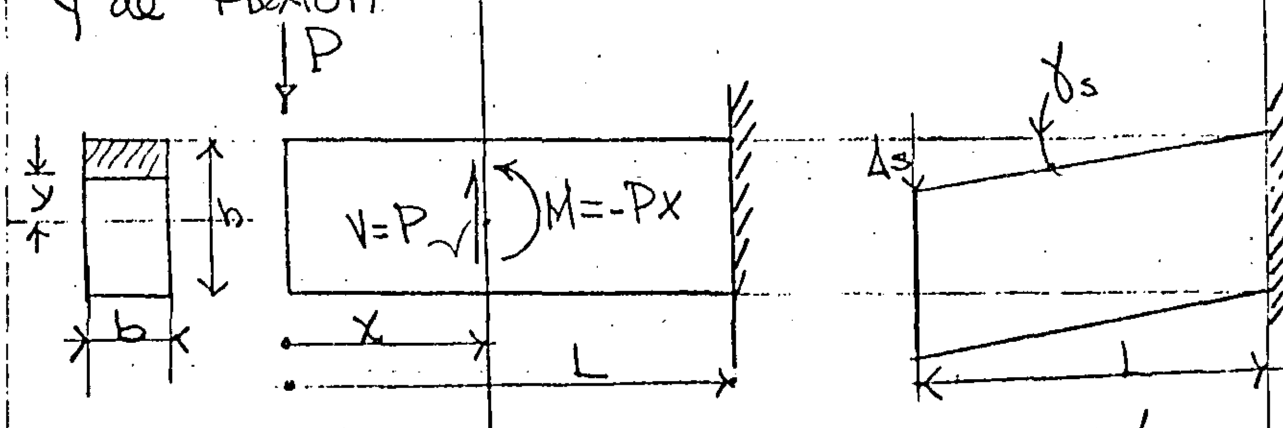
El Trabajo externo $W_e = \frac{1}{2} T\varphi$ y el interno de (22)

$$U = \frac{T^2}{2GJ}\int_0^L dx = \frac{T^2 L}{2GJ} \quad \text{de (23)}$$

$$\frac{1}{2}T\varphi = \frac{T^2 L}{2GJ} \quad \text{de donde} \quad \varphi = \frac{TL}{GJ}$$ que

coincide con los valores de los texto de Mecánica de Materiales.

c) Determinar la deflexión máxima en la viga mostada considerando el efecto del cortante y de Flexión



Trabajo externo $W_e = \frac{1}{2} P\Delta$, la energía interna consta de dos partes una debida a los esfuergos de flexión y otra a los esfuerzos de corte de (17) y (13)

$$U_{Flexion} = \frac{1}{2EI}\int_0^L M^2 dx = \frac{1}{2EI}\int_0^L (-Px)^2 dx = \frac{P^2 L^3}{6EI}$$

El esfuerzo de corte: $\tau = \frac{V Q_y^{y_m}}{bI} = \frac{P}{2I}\left[\left(\frac{h}{2}\right)^2 - y^2\right]$

que substituido en la segunda parte de (13) se obtiene

$$U_{corte} = \iiint_V \frac{\tau^2}{2G}\, dx\, dy\, dz = \frac{1}{2G}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left\{\frac{P}{2I}\left[\left(\frac{h}{2}\right)^2 - y^2\right]\right\}^2 L\, b\, dy$$

$$= \frac{P^2 L b}{8GI^2} \times \frac{h^5}{30} = \frac{P^2 L b h^5}{240G}\left(\frac{12}{bh^3}\right)^2 = \frac{3P^2L}{5AG}$$

donde $A = bh$ sección transversal. Entonces

$$W_e = U = U_{FLEXION} + U_{CORTE}$$

$$\frac{P\Delta}{2} = \frac{P^2L^3}{6EI} + \frac{3P^2L}{5AG} \quad \text{de donde}$$

$$\Delta = \underbrace{\frac{PL^3}{3EI}}_{\text{Flexión}} + \underbrace{\frac{6PL}{5AG}}_{\text{Corte}} \qquad (24)$$

El termino debido al cortante se puede interpretar

$$\tau_{av} = \frac{P}{A} = \frac{V}{A} \quad \text{corte promedio}$$

puesto que τ varía parabólicamente $\frac{6}{5}$ representa un factor de corrección numérico por lo tanto

$$\Delta_{corte} = \gamma_s L = \alpha \frac{\tau_{av}}{G} L = \alpha \frac{VL}{AG} = \frac{6}{5}\frac{PL}{AG}$$

el valor α depende de la forma de la sección en general V puede variar con x. De (24)

$$\Delta = \frac{PL^3}{3EI}\left(1 + \frac{3E}{10G}\frac{h^2}{L^2}\right) \qquad (25)$$

suponiendo acero estructural

$$\frac{E}{G} = 2(1+\nu) \doteq 2.5 \quad \text{Y (25) queda}$$

$$\Delta = \left(1 + 0.75\frac{h^2}{L^2}\right)\Delta_{FLEXIÓN} \quad (26)$$

De (26) se observa que para una viga corta sea $h = L$ La deflexión total es $\Delta = 1.75\,\Delta_{FLEXION}$ por lo cual la deformación de corte es muy importante para una viga Flexible se $L = 10\,h$

$$\Delta = \left(1 + 0.75\frac{h^2}{(10h)^2}\right)\Delta_{FLEXION}$$

$$\Delta = 1.0075\,\Delta_{FLEXIÓN}$$

La deflexión debida al corte se puede despreciar no siempre es posible considerar lo anterior

Comparando las expresiones (1.1.6.1c) (1.1.6.2c) y (1.1.6.2c) para un claro $l = 5.00$ m y un peralte $h = 30$ cm se obtiene:

$$\boxed{\begin{aligned} U_V &= 0.00286\, U_M \\ U_N &= 0.0009\, U_M \end{aligned}} \quad (a)$$

En la mayoría de los problemas estructurales elásticos lineales la energía de deformación debida a la carga normal N y cortante V es despreciable respecto a la energía de deformación debida al momento flexionante M.

Cuando existe momento torsionante M_T (vigas en balcón, etc.), su energía de deformación es considerable y debe tomarse en cuenta su valor.

1.2 Principio de Superposición

1.2.1.- Introducción

En los sistemas de cargas en los que las deflexiones son funciones lineales de las cargas, se puede obtener la deflexión en un punto cualquiera, mediante la suma de las deflexiones producidas individualmente en dicho punto por cada una de las cargas.

1.2.2.- Casos en que no rige el principio.

Considerando el ejemplo mostrado en la figura 1.2.2a, la viga AB está sujeta a la

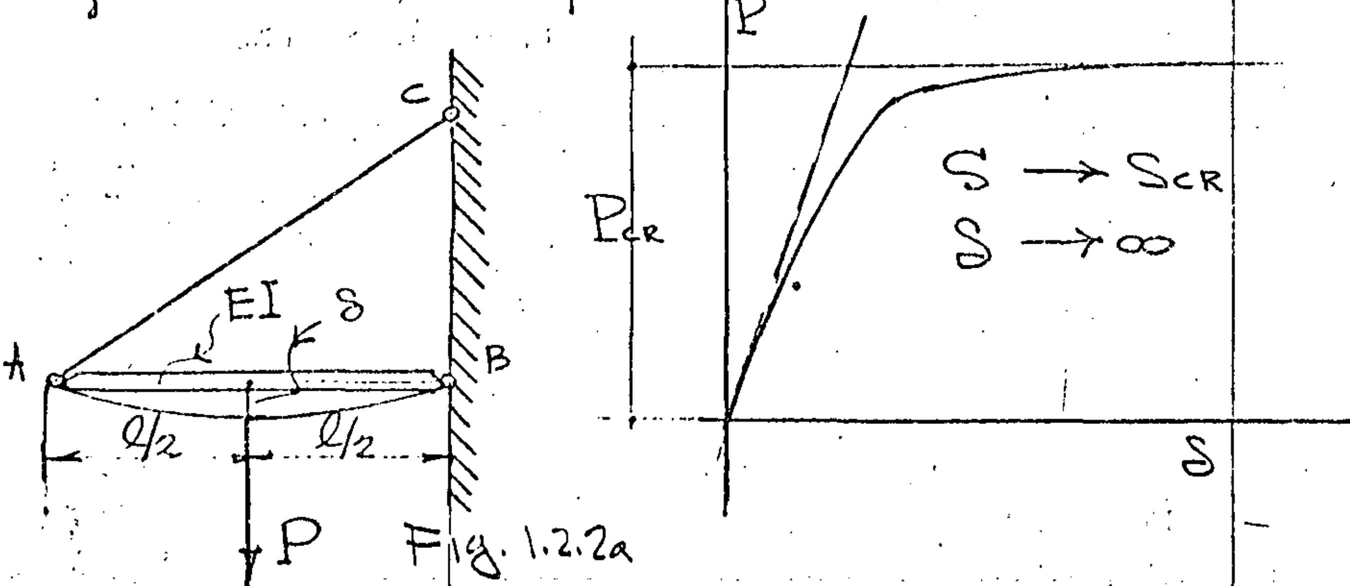


Fig. 1.2.2a

acción simultánea de fuerzas axiales y laterales, se concluye que δ no es función lineal de P y puede ser representada por la fórmula

$$\delta \doteq \frac{Pl^3}{48EI}\,\frac{1}{1-S/S_{CR}} \qquad (1.22.a)$$

donde, $S_{CR} = \dfrac{\pi^2 EI}{l^2}$, S carga axial en AB debida a P.

Otro ejemplo en el cual el principio de superposición no rige, sería el sistema mostrado en la figura 1.2.2.b, formado por dos barras articuladas, bajo la acción de pequeñas deformaciones ($\tan\alpha \doteq \alpha$)

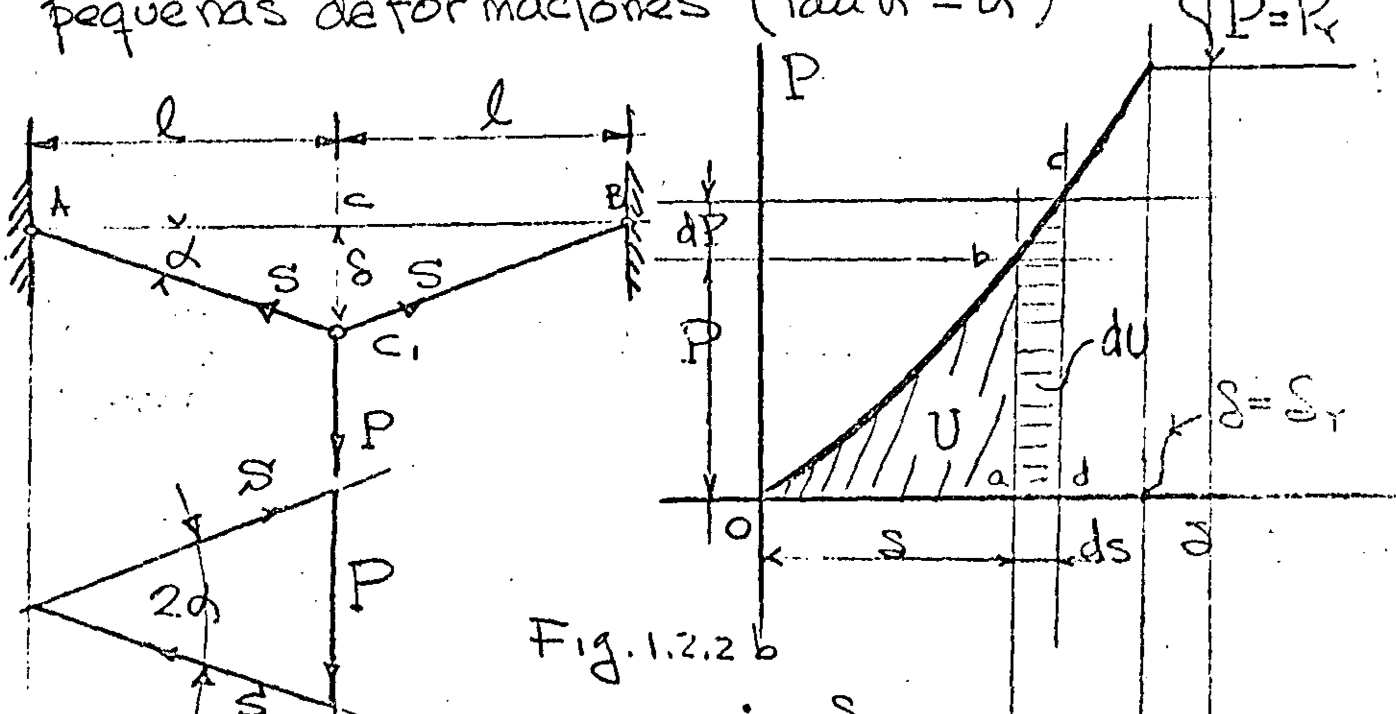


Fig. 1.2.2 b

pequeñas deformaciones: $\alpha \doteq \dfrac{\delta}{l}$ 1.2.2b

Equilibrio: $$S = \frac{P}{2\alpha}$$ 1.2.2c

Compatibilidad geométrica: la deformación axial unitaria es

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{l^2+\delta^2}-l}{l} \doteq \frac{1}{2}\frac{\delta^2}{l^2}$$ 1.2.2d

Ley de Hooke: $$\varepsilon = \frac{S}{AE}$$ 1.2.2e

de 1.2.2 c, d y e se obtiene

$$\left\{ \delta = l\sqrt[3]{\frac{P}{AE}} \;,\; P = \frac{\delta^3 AE}{l^3} \right\}$$ 1.2.2.f

De nuevo se observa que la deflexión δ no es función lineal de P, aunque el material cumple internamente con la ley de Hooke y la relación entre δ y P es representada por la curva de la figura 1.2.2b. El area oab representa el trabajo efectuado por P durante la deflexión δ y es igual a la energía de deformación almacenada en las barras AC y CB., la cual es igual a

$$U = \int_0^{\delta} P\,d\delta = \frac{AE}{l^3}\int_0^{\delta} \delta^3 d\delta = \frac{AE\delta^4}{4l^3} \qquad 1.2.2g$$

ó

$$U = \frac{l P^{4/3}}{4\sqrt[3]{AE}} \qquad 1.2.2h$$

Es muy importante observar que en los ejemplos anteriores U no es función de segundo grado de δ ó P, como se obtiene en los casos que el principio de superposición rige.

En los ejemplos anteriores, se observa que la acción de las fuergas externas es considerablemente afectada por las pequeñas deformaciones del sistema, en el primer ejemplo hay una flexión adicional $S\delta$ a la compresión S y la barra trabaja en flexo compresión.

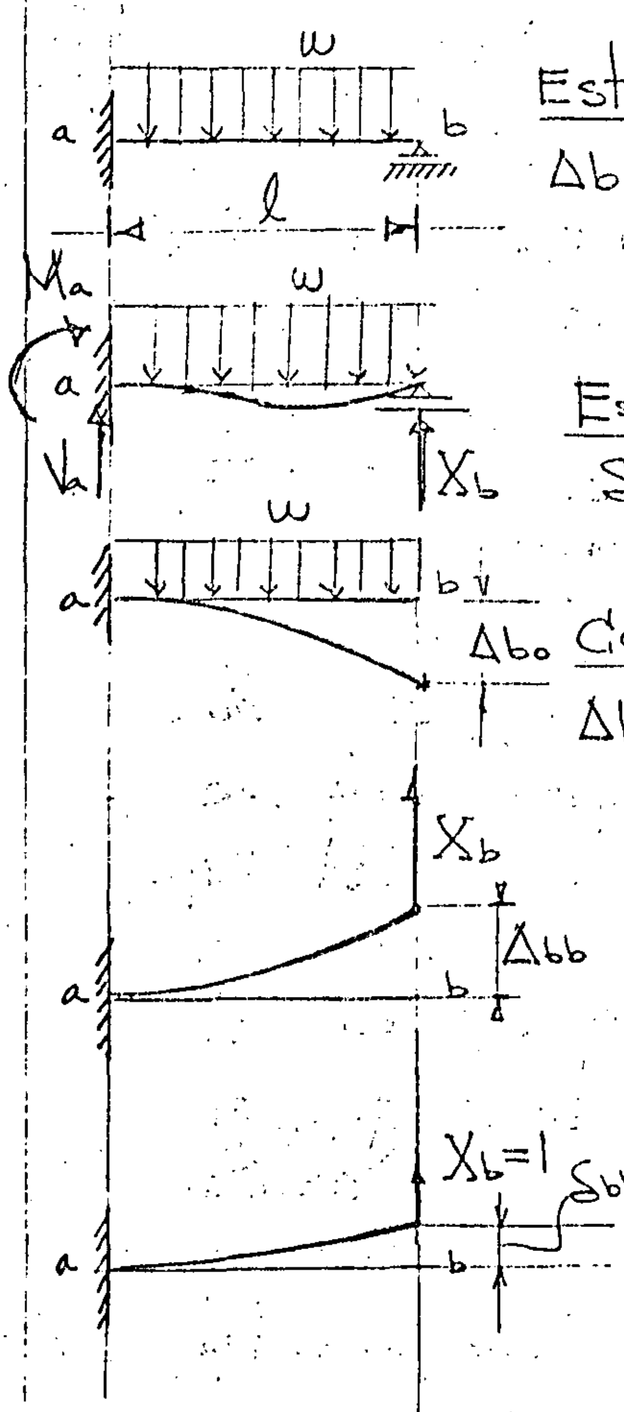
1.2.3 Ecuaciones generales de superposición *

1.2.3.1. Introducción

En el analisis de esfuerzos en estructuras estáticamente indeterminadas no solamente hay que considerar la geometría y estática, si no también las propiedades elásticas tales como modulo de elasticidad momento de inercia, etc., Generalmente para llegar al dimensionamiento final de la estructura, se suponen dimensiones preliminares de los miembros y se efectua su analisis correspondiente, ciclo que puede repetirse en algunos casos hasta llegar al diseño final. En general los esfuerzos desarrollados en estructuras hiperestáticas son debidos no solo a las cargas, si no también a cambios de temperatura, asentamiento de apoyos, errores de fabricación, etc.- Es importante observar que la estructura este en condiciones de equilibrio estable. Con el propósito de ilustrar el uso de las ecuaciones generales de superposición de causas y efectos, consideraremos el siguiente ejemplo, viga con carga uniforme w

* En ambos métodos de rigidez y flexibilidad debe regir el principio de superposición.

empotrada en a y libremente apoyada en b.



Estructura actual.

Δb = Deflexión de el punto b en la estructura debida a todas las causas.

Estructura primaria.

Selección de redundante, X_b

Condición de equilibrio $X_b = 0$

Δb_o = Deflexión en dirección de la redundante con $X_b = 0$

Δbb = Deflexión en dirección de la redundante debida a X_b con $w=0$

δbb = Deflexión en dirección de la redundante debido a una fuerza unitaria $X_b=1$

La ecuación de superposición si el principio es válido:

$$\Delta_b = \Delta b_o + \Delta bb = \Delta b_o + X_b \delta_{bb} = 0 \quad (a)$$

de donde:
$$X_b = -\frac{\Delta b_o}{\delta bb} \quad (b)$$

(δ_{bb} o d_{bb} es llamado coeficiente de flexibilidad)

1.2.3.2 Ecuaciones generales de superposición en analisis de estructuras estáticamente indeterminadas de grado n.

Suponiendo que la estructura es hiperestática de grado n, se seleccionan las redundantes $X_1, X_2, \ldots, X_n$, en una forma tal que la estructura primaria en condición de equilibrio $X_i = 0$ sea estable e isostática, aceptando la siguiente notación:

Δ_i = Deflexión total del punto i debida a todas las cargas y efectos.

Δ_{i0} = Deflexión del punto i en dirección de la redundante X_i en condiciones de equilibrio estable isostático $X_i = 0$.

Δ_{iT} = Deflexión del punto i debida a un cambio de temperatura ΔT.

Δ_{iA} = Deflexión del punto i debida a asentamientos de apoyo.

Δ_{iE} = Deflexion en el punto i debida a errores de fabricación.

δ_{i1} = Deflexión en el punto i debida a la condición $X_1 = 1$

δ_{i2} = " " " " " " " " " $X_2 = 1$

$\vdots$

δ_{in} " " " " " " " " " $X_n = 1$

Cualquier redundante puede suponerse que actua arbitrariamente en cierto sentido. Cualquier deflexión del punto de aplicación de la redundante deberá ser medida a lo largo de su linea de acción y será positiva cuando el sentido es el mismo que el supuesto para la redundante.

Por lo tanto usando la notación y convención de signos mencionada, las ecuaciones generales de superposición en sistemas estructurales coplanares y espaciales son:

$$\left.\begin{aligned}\Delta_1 &= \Delta_{10}+\Delta_{1T}+\Delta_{1A}+\Delta_{1E}+X_1\delta_{11}+X_2\delta_{12}+\cdots+X_n\delta_{1n}\\ \Delta_2 &= \Delta_{20}+\Delta_{2T}+\Delta_{2A}+\Delta_{2E}+X_1\delta_{21}+X_2\delta_{22}+\cdots+X_n\delta_{2n}\\ &\vdots\\ \Delta_n &= \Delta_{n0}+\Delta_{nT}+\Delta_{nA}+\Delta_{nE}+X_1\delta_{n1}+X_2\delta_{n2}+\cdots+X_n\delta_{nn}\end{aligned}\right\}\text{(a)}$$

Expresando (a) matricialmente se tiene

$$\underbrace{\begin{bmatrix}\delta_{11} & \delta_{12} & \cdots & \delta_{1n}\\ \delta_{21} & \delta_{22} & \cdots & \delta_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \cdots & \delta_{nn}\end{bmatrix}}_{[\delta_{ij}]}\underbrace{\begin{bmatrix}X_1\\ X_2\\ \vdots\\ X_n\end{bmatrix}}_{\{X\}}=\underbrace{\begin{bmatrix}(\Delta_1-\Delta_{10}-\Delta_{1T}-\Delta_{1A}-\Delta_{1E})\\ (\Delta_2-\Delta_{20}-\Delta_{2T}-\Delta_{2A}-\Delta_{2E})\\ \vdots\\ (\Delta_n-\Delta_{n0}-\Delta_{nT}-\Delta_{nA}-\Delta_{nE})\end{bmatrix}}_{\{g\}}\qquad\text{(b)}$$

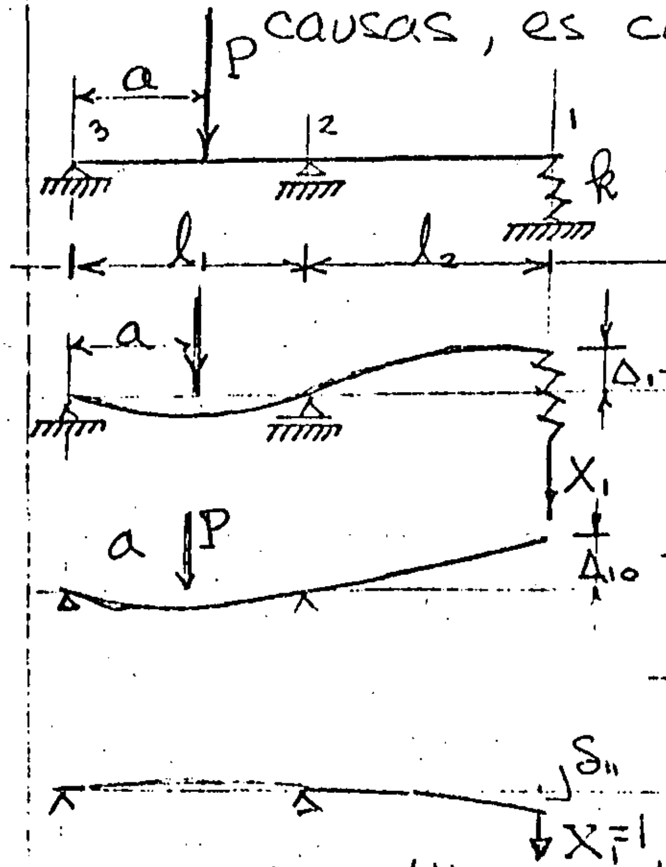
1.2.3.3.- Ejemplos que ilustran el uso de las ecuaciones de superposición.

Antes de estudiar los ejemplos es conveniente observar lo siguiente:

1- Nunca seleccionar como redundante una reacción estáticamente determinada, ello conducirá a una estructura primaria en equilibrio inestable en condición $X_i = 0$

2- El sentido positivo de la redundante se puede seleccionar arbitrariamente, y su deflexión será positiva si tiene el mismo sentido.

3- Debe observarse que Δ_i, deflexión total del punto de aplicación de la redundante X_i debida a todas las causas, es casi siempre cero.



Estructura actual

k^{-1} constante elástica resorte $\left[\frac{L}{F}\right]$

Estructura primaria

$$\Delta_1 = X_1 k^{-1} \qquad (c)$$

Condición $X_1 = 0$

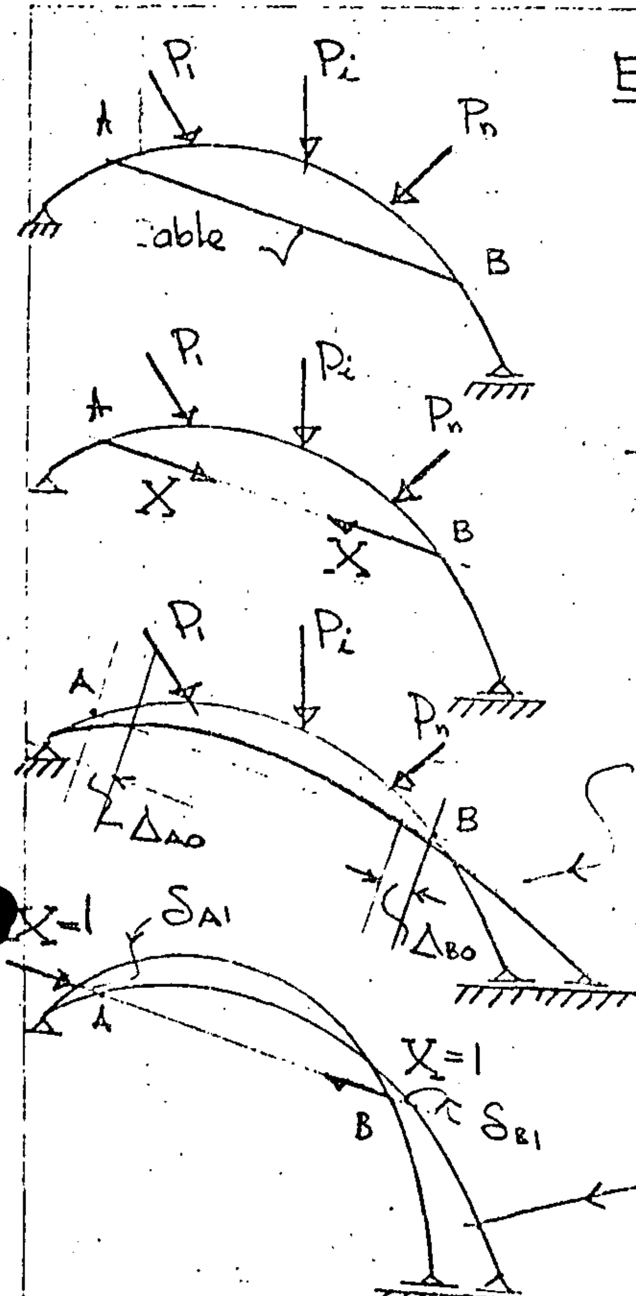
Condición $X_1 = 1$

De Ec. (a) se tiene

$$\Delta_1 = \Delta_{10} - X_1 S_{11} \qquad (d)$$

de (c) y (d) se obtiene

$$\boxed{X_1 = \frac{\Delta_{10}}{S_{11} + k^{-1}}} \qquad (e)$$



<u>Estructura actual:</u>

Arco coplanar con un tirante AB bajo un sistema de cargas P_n

<u>Estructura primaria</u>

Selección como redundante la tensión en el cable, X.

<u>Condición X=0</u>

<u>Condición X=1</u>

$$\Delta_{AB} = \Delta_{A0} + \Delta_{B0} \quad (f)$$

$$\Delta_A = \Delta_{A0} + X\delta_{A1} \quad (g)$$

$$\Delta_B = \Delta_{B0} + X\delta_{B1} \quad (h)$$

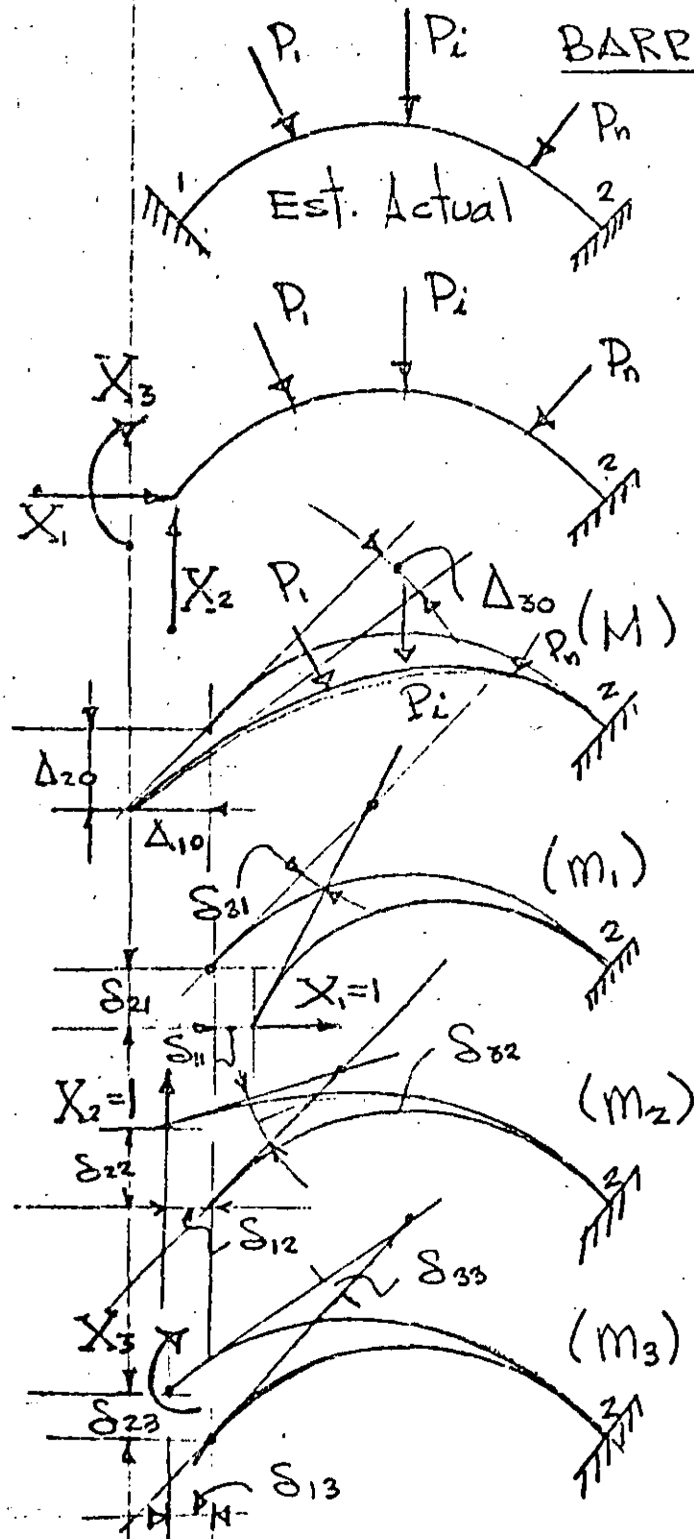
Sumando (g) y (h)

$$\Delta_A + \Delta_B = \Delta_{A0} + \Delta_{B0} + X(\delta_{A1} + \delta_{A2}) = 0$$

de donde despejando la redundante X se tiene

$$\boxed{X = -\frac{\Delta_{A0} + \Delta_{B0}}{\delta_{A1} + \delta_{B1}}} \quad (i)$$

BARRA PLANA EMPOTRADA



Problema hiperestático de orden 3

Estructura Primaria

Selección de redundantes X_1, X_2, X_3 y condición de empotramiento $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$

Condición $X = 0$

Condición $X_1 = 1$

Condición $X_2 = 1$

Condición $X_3 = 1$

Las ecuaciones aplicando el principio de superposición son

$$
\begin{aligned}
\Delta_1 &= \Delta_{10} + X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} + X_3 \delta_{13} \\
\Delta_2 &= \Delta_{20} + X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22} + X_3 \delta_{23} \\
\Delta_3 &= \Delta_{30} + X_1 \delta_{31} + X_2 \delta_{32} + X_3 \delta_{33}
\end{aligned} \qquad (j)
$$

expresando (j) en forma matricial se tiene

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \Delta_{10} \\ \Delta_{20} \\ \Delta_{30} \end{Bmatrix} \qquad (k)$$

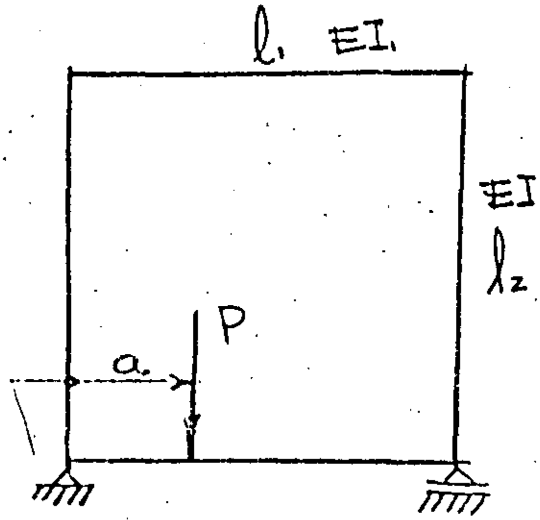
Aplicando el Teorema de Castigliano y la expresión de la energía de deformación por flexión, los coeficientes de flexibilidad δ_{ij} son igual a

$$\Delta_{10} = \int \frac{M m_1}{EI} ds, \quad \Delta_{20} = \int \frac{M m_2}{EI} ds, \quad \Delta_{30} = \int \frac{M m_3}{EI} ds$$

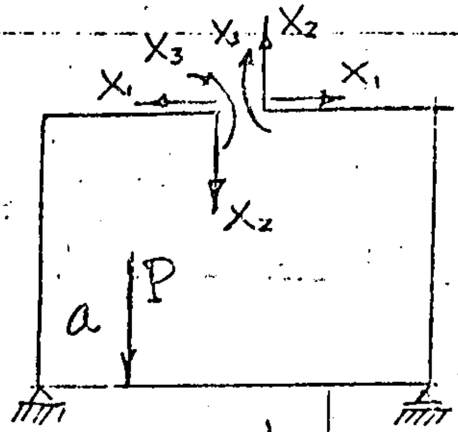
$$\delta_{11} = \int \frac{m_1^2 ds}{EI}, \quad \delta_{22} = \int \frac{m_2^2 ds}{EI}, \quad \delta_{33} = \int \frac{m_3^2 ds}{EI}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \int \frac{m_1 m_2}{EI} ds, \quad \delta_{13} = \delta_{31} = \int \frac{m_1 m_3}{EI} ds, \quad \delta_{23} = \delta_{32} = \int \frac{m_2 m_3}{EI}$$

MARCO CONTINUO RECTANGULAR BAJO LA ACCION DE UNA CARGA P



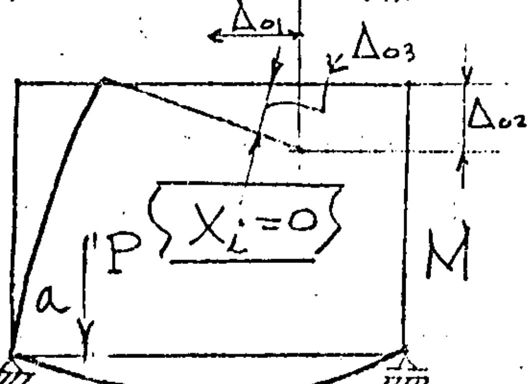
Estructura actual



Estructura primaria:

Selección de redundantes.

En este caso las ecuaciones de superposición son:



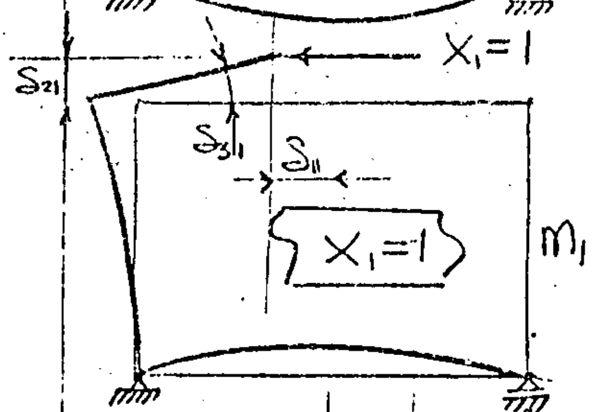
$$\Delta_1 = \Delta_{10} + X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12} + X_3\delta_{13} = 0$$

$$\Delta_2 = \Delta_{20} + X_1\delta_{21} + X_2\delta_{22} + X_3\delta_{23} = 0 \quad (m)$$

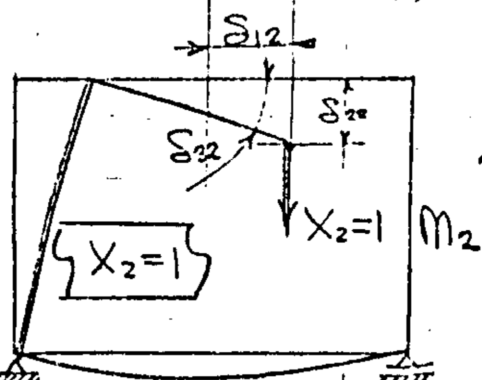
$$\Delta_3 = \Delta_{30} + X_1\delta_{31} + X_2\delta_{32} + X_3\delta_{33} = 0$$

ó

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \Delta_{10} \\ \Delta_{20} \\ \Delta_{30} \end{Bmatrix} \quad (n)$$



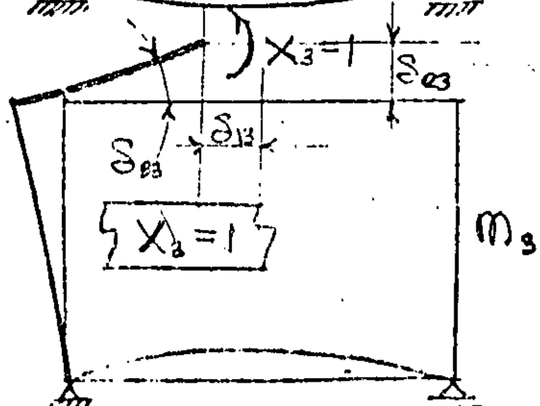
Del Teorema de Castigliano y la energía elástica de deformación se obtienen los coeficientes de flexibilidad δ_{ij} y Δ_{oi}.



$$\Delta_{01} = \int \frac{M m_1}{EI} ds, \quad \Delta_{02} = \int \frac{M m_2}{EI} ds, \quad \Delta_{03} = \int \frac{M m_3}{EI} ds$$

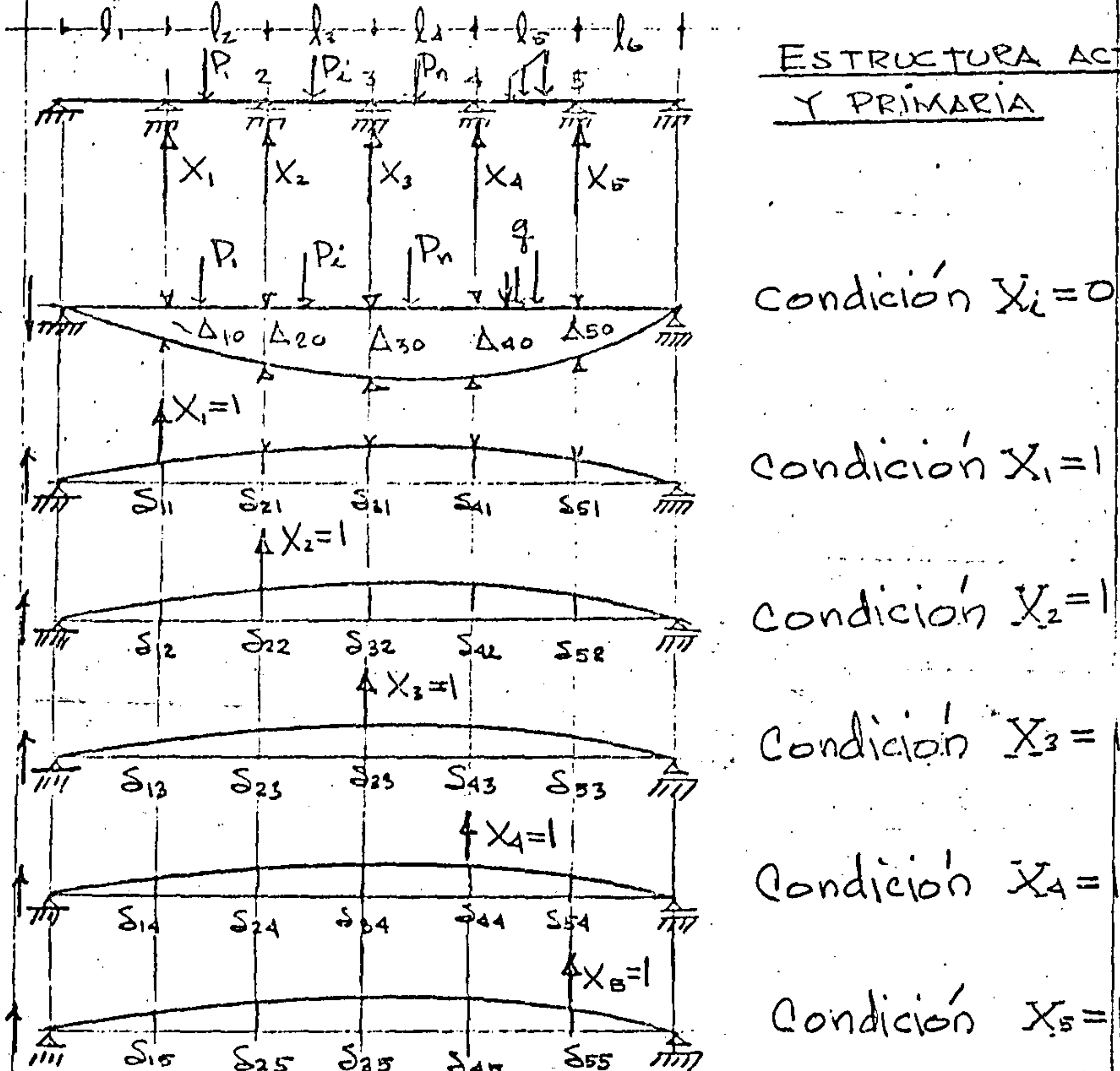
$$\delta_{11} = \int \frac{m_1^2 ds}{EI}, \quad \delta_{22} = \int \frac{m_2^2 ds}{EI}, \quad \delta_{33} = \int \frac{m_3^2 ds}{EI}$$

$$\delta_{12} = \int \frac{m_1 m_2}{EI} ds, \quad \delta_{13} = \int \frac{m_1 m_3}{EI} ds, \quad \delta_{23} = \int \frac{m_2 m_3}{EI} ds$$



$$\delta_{12} = \delta_{21}, \quad \delta_{13} = \delta_{31}, \quad \delta_{23} = \delta_{32}$$

Viga continua de 7 apoyos



1ª 2ª 3ª 4ª 5ª Ecuación

$$\Delta_1=\Delta_{10}+X_1\delta_{11}+X_2\delta_{12}+X_3\delta_{13}+X_4\delta_{14}+X_5\delta_{15}=0 \quad 1^{a}\ \text{Ec}$$

$$\Delta_2=\Delta_{20}+X_1\delta_{21}+X_2\delta_{22}+X_3\delta_{23}+X_4\delta_{24}+X_5\delta_{25}=0 \quad 2^{a}\ ''$$

$$\Delta_3=\Delta_{30}+X_1\delta_{31}+X_2\delta_{32}+X_3\delta_{33}+X_4\delta_{34}+X_5\delta_{35}=0 \quad 3^{a}\ ''$$

$$\Delta_4=\Delta_{40}+X_1\delta_{41}+X_2\delta_{42}+X_3\delta_{43}+X_4\delta_{44}+X_5\delta_{45}=0 \quad 4^{a}\ ''$$

$$\Delta_5=\Delta_{50}+X_1\delta_{51}+X_2\delta_{52}+X_3\delta_{53}+X_4\delta_{54}+X_5\delta_{55}=0 \quad 5^{a}\ ''$$

$$[\delta_{ij}]\{X_j\}+\{\Delta_{j0}\}=0$$

1.3 Generalización de la energía de deformación

La energía de deformación de una barra elástica puede representarse como una función de segundo grado de la carga o la deformación. La misma conclusión es válida para cualquier estructura dentro del régimen elástico, siempre y cuando el principio de superposición pueda aplicarse, en la Fig. 1.3.1 suponiendo que las fuerzas se aplican simultaneamente e incrementan gradualmente hasta su valor final. Si

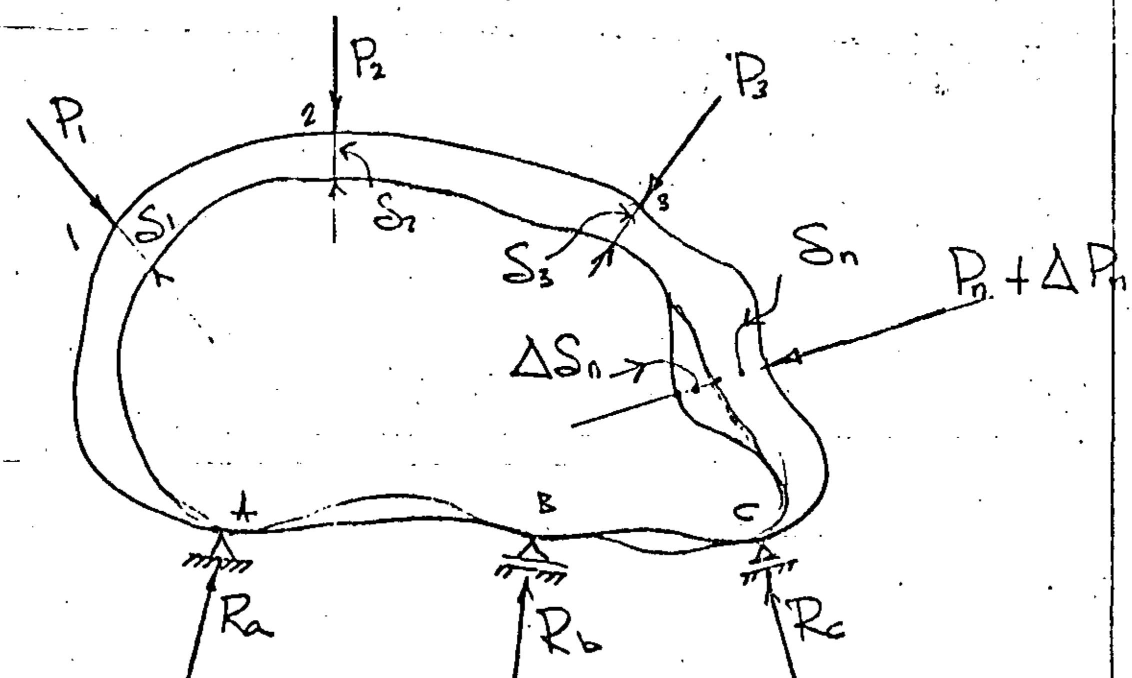


Fig. 1.3.1.

el principio de superposición rige, los desplazamientos serán funciones lineales de las cargas. El trabajo elástico de todas

las fuerzas externas es igual a la energía interna de deformación almacenada en el cuerpo elástico de la figura 1.3.1 y será

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} P_i \delta_i = \frac{1}{2}\left(P_1\delta_1 + P_2\delta_2 + \cdots + P_n\delta_n\right) \qquad (1.3.1)$$

1.3.1.- Ejemplo, viga libremente apoyada cargada como se indica en la Fig. 1.3.1a

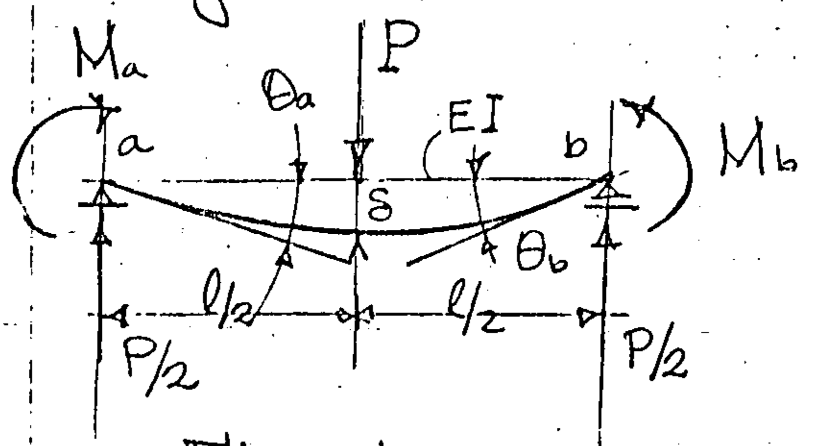


Fig. 1.3.1a

La energía de deformación es

$$U = \frac{1}{2}\left(P\delta + M_a\theta_a + M_b\theta_b\right) \qquad (a)$$

De la curva elástica de la viga se demuestra que:

$$\left.\begin{aligned} \delta &= \frac{Pl^3}{48EI} + \frac{M_a l^2}{16EI} + \frac{M_b l^2}{16EI} \\ \theta_a &= \frac{Pl^2}{16EI} + \frac{M_a l}{3EI} + \frac{M_b l}{6EI} \\ \theta_b &= \frac{Pl^2}{16EI} + \frac{M_a l}{6EI} + \frac{M_b l}{3EI} \end{aligned}\right\} \qquad (b)$$

Substituyendo (b) en (a) se obtiene

$$U=\frac{l^3}{96EI}\left(P^2+\frac{6}{l}PM_a+\frac{6}{l}PM_b+\frac{16}{l^2}M_a^2+\frac{16}{l^2}M_b^2+\frac{16}{l^2}M_aM_b\right) \qquad (c)$$

en (c) se observa que U es una función de segundo grado de las fuerzas y momentos P, Ma y Mb.

Tarea

En el ejemplo de la viga de la Fig 1.3.1a

Demostrar:

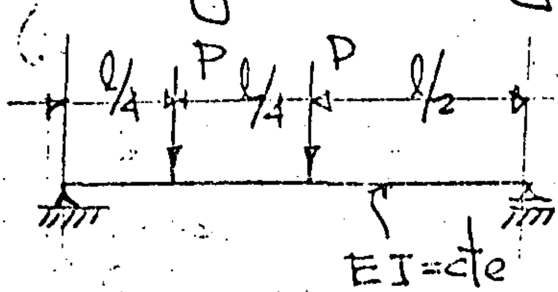
a) $\frac{\partial U}{\partial P}=\delta$, $\frac{\partial U}{\partial M_a}=\theta_a$, $\frac{\partial U}{\partial M_b}=\theta_b$

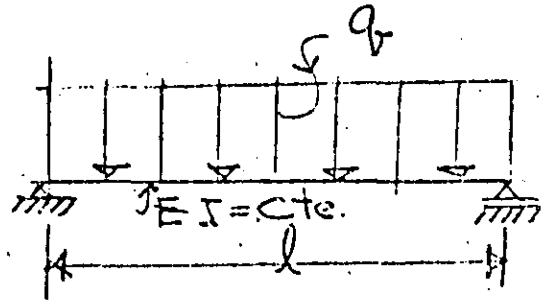
b) De (a) y (b) obtener U en función de los desplazamientos δ, θ_a, θ_b.

c) Demostrar que.

$$\frac{\partial U}{\partial \delta}=P,\quad \frac{\partial U}{\partial \theta_a}=M_a,\quad \frac{\partial U}{\partial \theta_b}=M_b$$

Calcular la energía de deformación de las siguientes vigas de sección transversal bh





1.4 Teorema de Castigliano.

Suponiendo que el principio de superposición rige, y que U se expresa en función de las fuerzas externas se tiene que: LA DERIVADA DE LA ENERGIA DE DEFORMACION CON RESPECTO A UNA DE LAS FUERZAS O MOMENTOS EXTERNOS NOS DA EL DESPLAZAMIENTO O EL GIRO DE LA FUERZA O MOMENTO CORRESPONDIENTE.

$$\frac{\partial U}{\partial P_n} = \delta_n \qquad (1.4.1)$$

Considerando el cuerpo elástico bajo la aplicación de $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Durante la aplicación de P_i se producen deformaciones δ_i y se almacena cierta energía de deformación dentro del cuerpo (Fig. 1.3.1)

Si subsecuentemente a P_n se aplica un incremento ΔP_n, la energía U incrementará

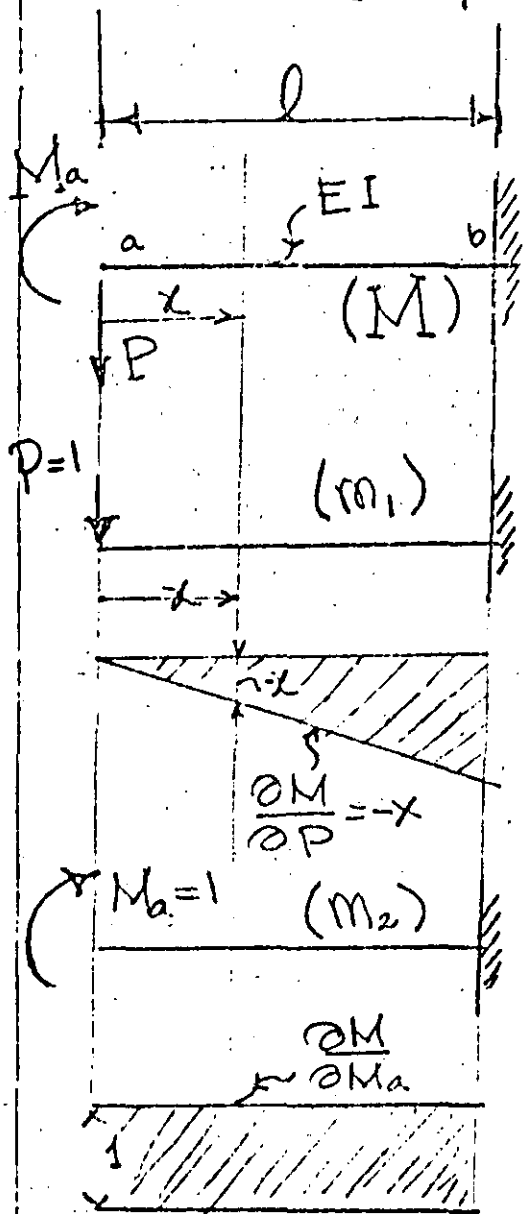
$$U + \Delta U = U + \frac{\partial U}{\partial P_n}\Delta P_n \qquad (1.4.2)$$

si en vez de aplicar ΔP_n después de las cargas se aplica antes se tiene

$$U + \Delta U = U + \Delta P_n(\delta_n + \Delta \delta_n) = U + \Delta P_n\,\delta_n \qquad (1.4.3)$$

igualando (1.4.2) con (1.4.3) se demuestra (1.4.1)

1.4.1 Ejemplos de aplicación



La variación de $M(x)$ es

$$M = M_a - Px \qquad (a)$$

La energía de deformación por flexión.

$$U = \int_0^l \frac{M^2 dx}{2EI} \qquad (b)$$

Del Teorema de Castigliano

$$\frac{\partial U}{\partial P} = \delta_a = \int \frac{M \frac{\partial M}{\partial P}}{EI} ds$$

$$\delta_a = \int_0^l \frac{M\, m_1}{EI} ds \qquad (c)$$

Substituyendo (a) en (c)

$$\delta_a = \frac{1}{EI}\int_0^l (M_a - Px)(-x)\,dx$$

$$\delta_a = \frac{Pl^3}{EI} - \frac{M_a l^2}{2EI} \qquad (d)$$

De nuevo del Teorema de Castigliano

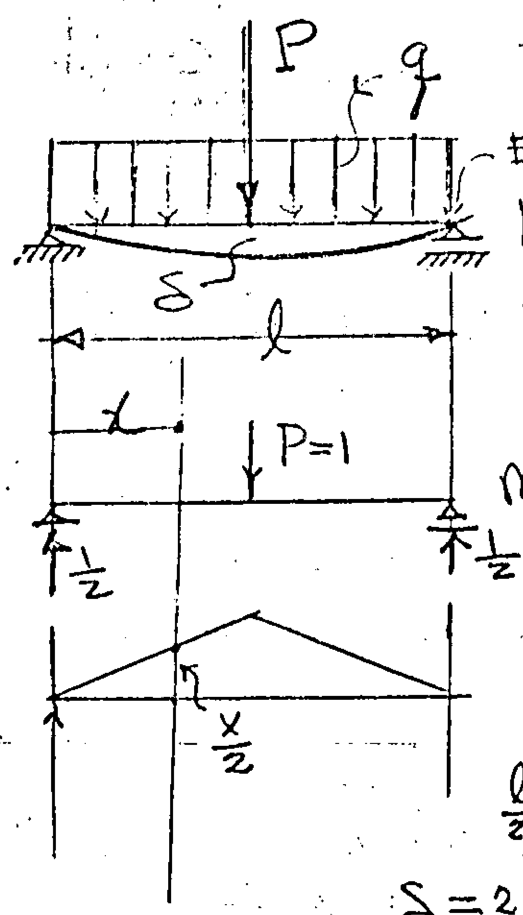
$$\frac{\partial U}{\partial M_a} = \theta_a = \int_0^l \frac{M \frac{\partial M}{\partial M_a}}{EI} dx = \int_0^l \frac{M\, m_2}{EI} dx \qquad (e)$$

Substituyendo (a) en (e) se obtiene

$$\theta_a = \frac{1}{EI}\int_0^l (M_a - Px)(1)\,dx = \frac{M_a l}{EI} - \frac{Pl^2}{2EI}$$

En el ejemplo anterior no se calculó U en función de las fuerzas externas, sino se utilizó la energía de deformación por flexión y se derivó bajo el signo integral.

Es importante observar que las derivadas corresponden a la variación de momento flector debido a causas unitarias P y M_a.



$$M = \frac{P}{2}x + \frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2} \qquad (f)$$

$$m = \frac{x}{2} \qquad (g)$$

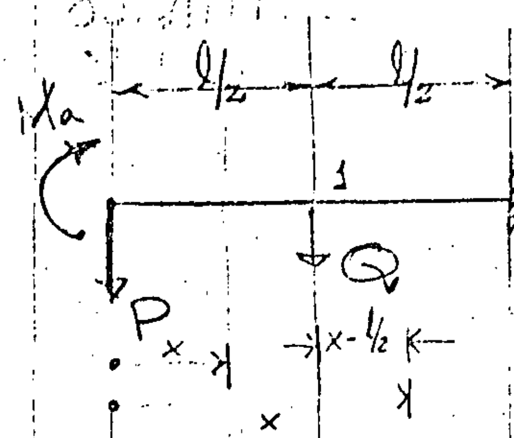
De la energía de deformación por flexión y el Teorema de Castigliano.

$$\delta = 2\int_0^{l/2} \frac{Mm}{EI}\,dx \qquad (h)$$

Substituyendo (f) y (g) en (h) se obtiene

$$\delta = 2/EI\int_0^{l/2}\left(\frac{P}{2}x + \frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2}\right)\left(\frac{x}{2}\right)dx = \frac{Pl^3}{48EI} + \frac{5}{384}\frac{ql^4}{EI} \quad (h)$$

En los casos en los cuales es necesario determinar los desplazamientos en un lugar donde no hay fuerzas o momentos, se agrega al sistema actual de fuerzas una fuerza ficticia de magnitud infinitesimal, tal que no afecta al sistema actual de fuerzas y se obtiene el desplazamiento derivando con respecto a ella.



$$M = M_a - Px \qquad 0 \leq x \leq \frac{l}{2} \qquad (i)$$

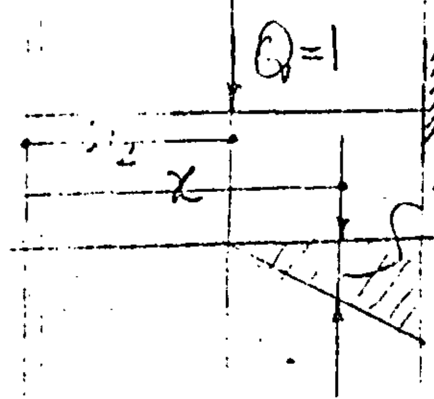
$$M = M_a - Px - Q\left(x - \frac{l}{2}\right) \quad \text{para } \frac{l}{2} \leq x \leq l \qquad (j)$$

$$\frac{\partial M}{\partial Q} = m = -\left(x - \frac{l}{2}\right) \qquad (k)$$

$$U = \int \frac{M^2 dx}{2EI} = (\text{energía de def. por flexión})$$

$$\frac{\partial U}{\partial Q} = \delta_1 = \int \frac{M \frac{\partial M}{\partial Q}}{EI} dx = -\int_{l/2}^{l} \frac{1}{EI}(M_a - Px)\left(x - \frac{l}{2}\right) dx$$

$$\delta_1 = \frac{5Pl^3}{48EI} - \frac{M_a l^2}{8EI} \qquad (l)$$



$$\delta = \int_0^l \frac{Mm}{EI} dx \qquad (m)$$

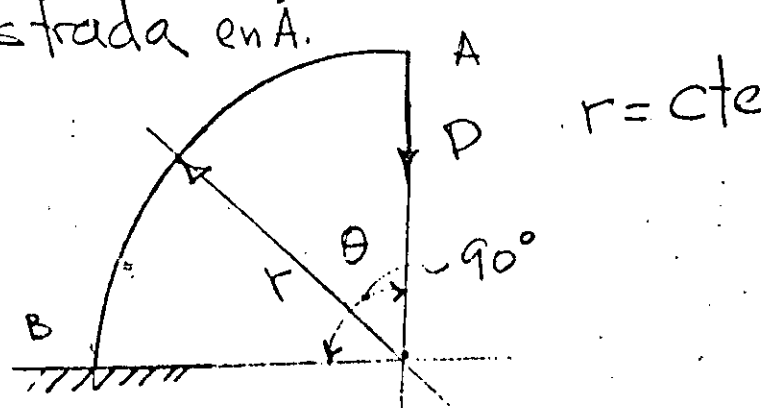
$$\left\{ \text{en este caso } \frac{\partial U}{\partial Q} = 0 \quad 0 \leq x \leq l/2 \right\}$$

En conclusión se observa que la derivación del Teorema de Castigliano, fué basada en el principio de superposisión. De allí que la energía de deformación U debe ser una función de segundo grado de las fuerzas actuantes. Sí el principio de superposisión no rige y U no es función de segundo grado de las fuerzas, el Teorema de Castigliano no es aplicable, lo anterior se ilustró mediante ejemplos.

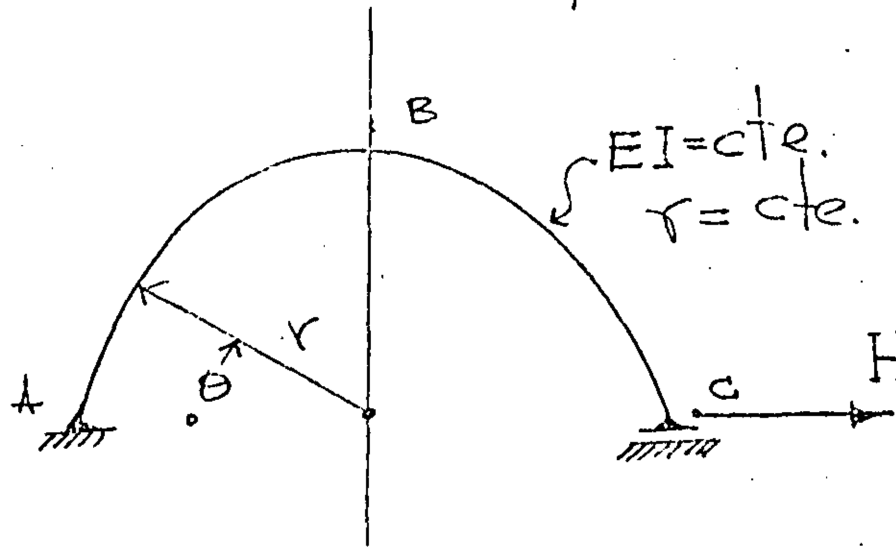
Ejemplos de Tarea

a) Utilizando el Teorema de Castigliano determinar los ángulos en los extremos de una viga libremente apoyada con carga uniforme q, claro l, y rigidez flexionante EI = constante.

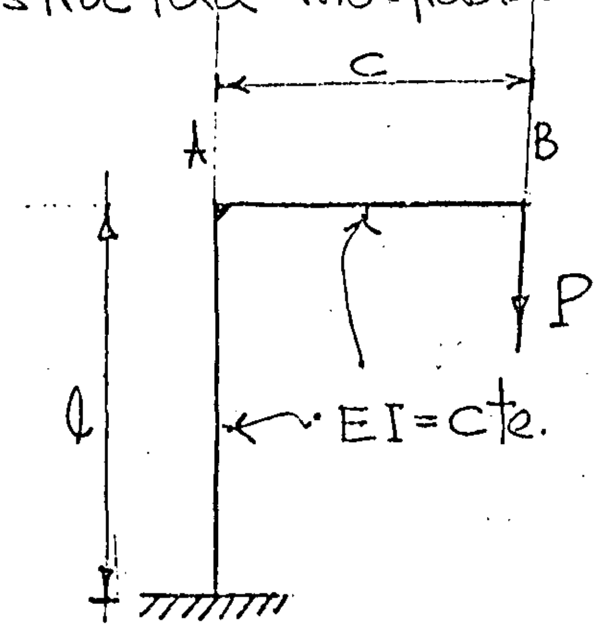
b) Determinar los desplazamientos horizontal y vertical de la viga curva mostrada en A.



c) Determinar el desplazamiento horizontal en c y el vertical en B en la estructura mostrada.



d) Determinar los desplazamientos horizontal y vertical de A y B en la estructura mostrada.



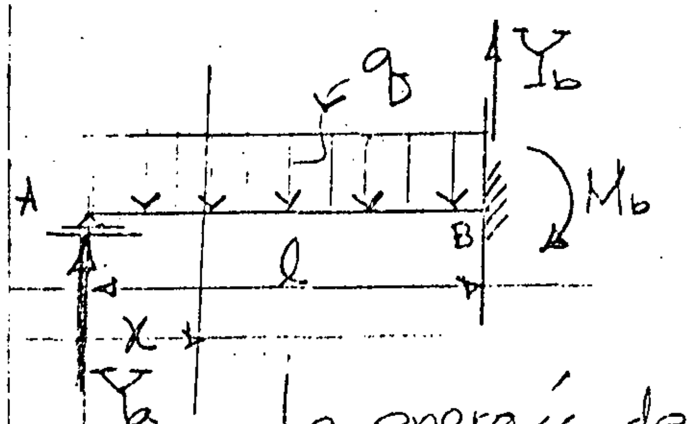
1.5 Teorema del Trabajo mínimo

Se han considerado aplicaciones del teorema de Castigliano a sistemas de fuerzas estáticamente determinados. Aplicándolo a sistemas estáticamente indeterminados se concluye que la derivada de la energía de deformación con respecto a cualquier redundante deberá ser cero si su acción es la de prevenir desplazamientos en su punto de aplicación, de allí que las magnitudes de las reacciones redundantes en sistemas hiperestáticos serán tal que la energía de deformación del sistema en dicho punto sea máxima o mínima, lo anterior es el método del Trabajo mínimo para calcular redundantes. En una estructura hiperestática de grado "n" se tiene

$$\frac{\partial U}{\partial X_1}=0,\ \frac{\partial U}{\partial X_2}=0,\ \dots,\ \frac{\partial U}{\partial X_n}=0 \qquad (1.5.1)$$

1.5.1 Ejemplos

a) Viga empotrada en un extremo con carga uniforme. (grado $n=1$).



La energía de deformación del sistema por flexión es,

$$U = \int \frac{M^2 dx}{2EI} \qquad (a)$$

Del teorema del trabajo mínimo

$$\frac{\partial U}{\partial Y_a} = 0 = \frac{\partial}{\partial Y_a}\left[\int \frac{M^2 dx}{2EI}\right] = \frac{1}{EI}\int_0^l M \frac{\partial M}{\partial Y_a} dx \qquad (b)$$

$$M = Y_a x - \frac{q x^2}{2} \qquad (c)$$

$$\frac{\partial M}{\partial Y_a} = x \qquad (d)$$

Substituyendo (c) y (d) en (b) se obtiene

$$\int_0^l \left(Y_a x - \frac{q x^2}{2}\right) x\,dx = \frac{l^3}{3} Y_a - \frac{q l^4}{8} = 0$$

de donde $\quad Y_a = 3/8\, q l \qquad (e)$

En el sistema se tienen 3 reacciones Y_a, Y_b, M_b y 3 ecuaciones dos de estática y una del teorema de Castigliano.

en el ejemplo anterior,
si se considera como redundante M_b
se tiene.

$$\frac{\partial U}{\partial M_b}=\frac{\partial}{\partial M_b}\left[\int_0^l \frac{M^2 dx}{2EI}\right]=\frac{1}{EI}\int_0^l M\frac{\partial M}{\partial M_b}dx=0 \quad (f)$$

el momento flector es

$$M=\left(\frac{ql}{2}-\frac{M_b}{l}\right)x-\frac{qx^2}{2} \quad (g)$$

$$\frac{\partial M}{\partial M_b}=-\frac{x}{l} \quad (h)$$

substituyendo (g) y (h) en (f) se obtiene

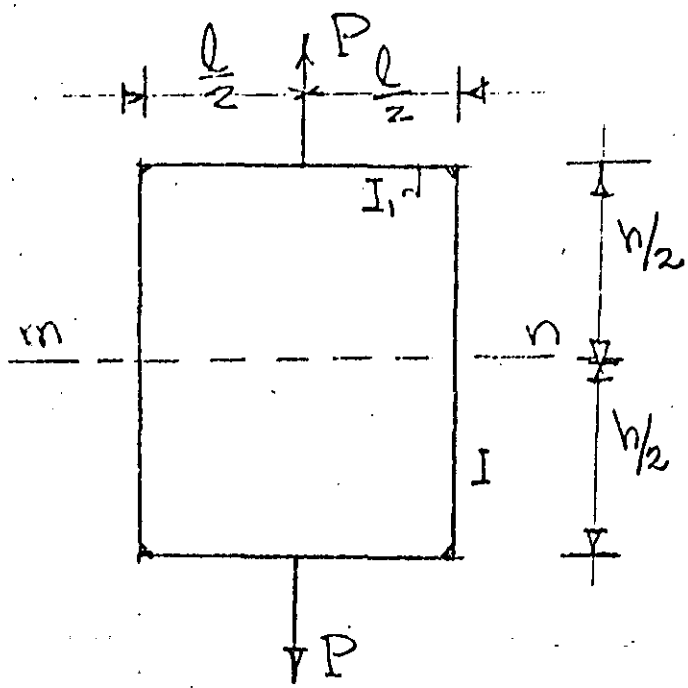
$$\int_0^l\left[\left(\frac{ql}{2}-\frac{M_b}{l}\right)x-\frac{qx^2}{2}\right]\cdot\frac{x}{l}dx=0 \quad (i)$$

integrando (i) y despejando M_b se obtiene

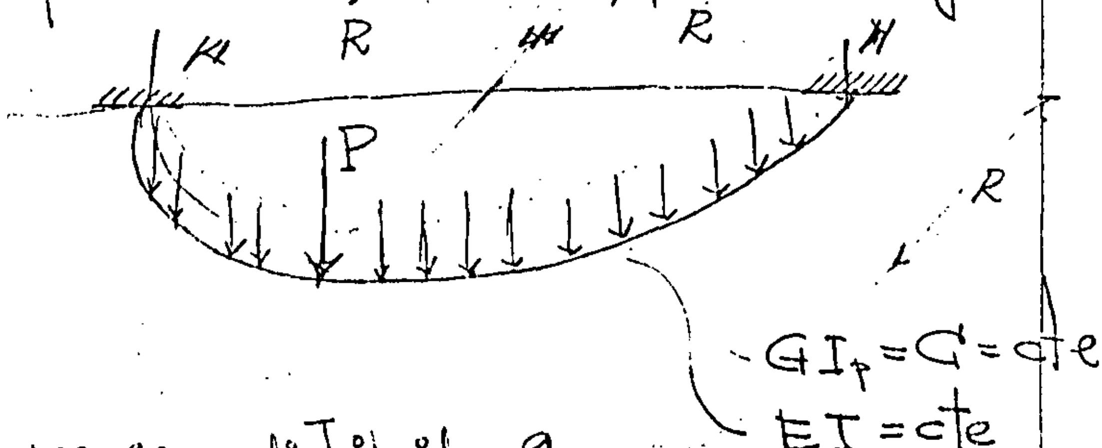
$$M_b=\frac{ql^2}{8} \quad (j)$$

Ejemplos de tarea

1- Determinar los momentos en la sección m-n en la estructura mostrada



2- En la viga en balcón mostrada, determinar las reacciones en los apoyos, considere el trabajo elástico por flexión y torsión, para una carga P



y para una carga distribuida q

2.- METODOS MATRICIALES DE ANALISIS ESTRUCTURAL

2.1 Métodos de Fuerzas y Deformación

En los métodos de analisis de sistemas estáticamente indeterminados, primero se seleccionaban las redundantes, y sus magnitudes se determinan mediante el Teorema del Trabajo minimo, considerando la energía de deformación del sistema. Este procedimiento general es llamado el método de las fuerzas.

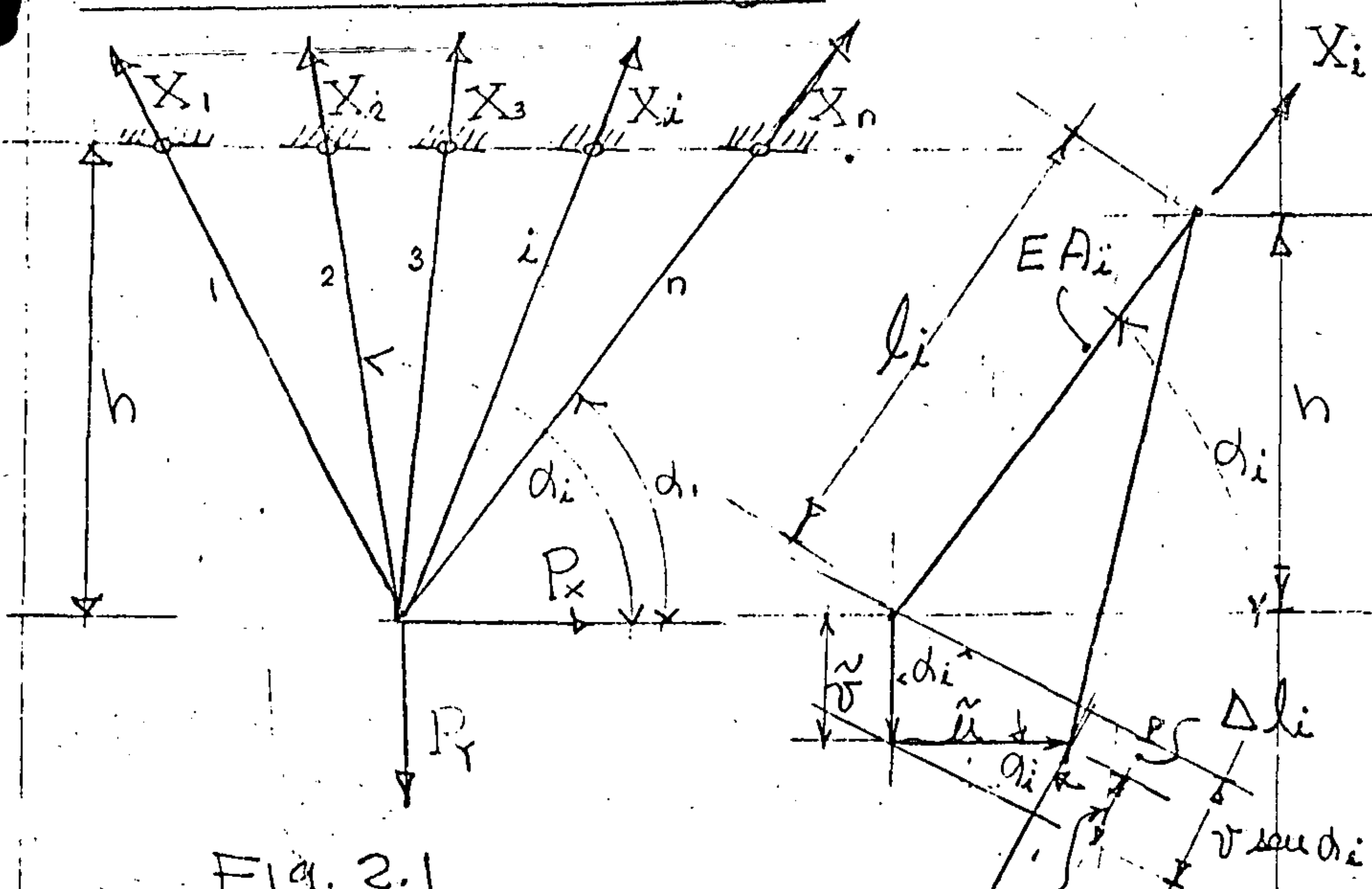


Fig. 2.1

Para ilustrar en un mismo ejemplo

la distinción entre los dos métodos, consideremos la estructura estáticamente indeterminada coplanar mostrada en la figura 2.1 bajo la acción de dos fuerzas aplicadas P_x y P_y con n barras, el número de redundantes sea n-2. Entonces para determinar las redundantes $X_1, X_2, \ldots X_{n-2}$, se determina la energía de deformación del sistema en función de las fuerzas y usando el Teorema del trabajo mínimo se obtienen las ecuaciones necesarias

$$\frac{\partial U}{\partial X_1}=0, \frac{\partial U}{\partial X_2}=0, \ldots, \frac{\partial U}{\partial X_{n-2}}=0 \qquad (a)$$

lo anterior es el método de las fuerzas. Para resolver el mismo problema, Navier[1] sugirió el método de desplazamientos. La deformación del sistema de la figura 2.1 estará completamente determinado si conocemos las componentes horizontal y vertical u y v respectivamente. Suponiendo que los desplazamientos son pequeños

[1] Navier, "Résumé des leçons", 2 ed., p. 345, Paris, 1833

la deformación axial de cualquier barra i será

$$\Delta l_i = v \operatorname{sen} \alpha_i - u \cos \alpha_i \qquad (b)$$

, de la ley de Hooke su fuerza axial correspondiente será

$$X_i = \frac{EA_i}{l_i}(v \operatorname{sen} \alpha_i - u \cos \alpha_i) \qquad (c)$$

de la figura 2.1

$$l_i = \frac{h}{\operatorname{sen} \alpha_i} \qquad (d)$$

substituyendo (d) en (c) se obtiene

$$X_i = \frac{EA_i}{h}(v \operatorname{sen} \alpha_i - u \cos \alpha_i) \operatorname{sen} \alpha_i \qquad (e)$$

De las condiciones de equilibrio se obtiene

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \cos \alpha_i = P_x \qquad (f)$$

$$\sum_{1}^{n} X_i \operatorname{sen} \alpha_i = P_Y \qquad (g)$$

substituyendo (e) en (f) y (g) se obtiene

$$v \sum_{i=1}^{n} A_i \operatorname{sen}^2 \alpha_i \cos \alpha_i - u \sum_{i=1}^{n} A_i \cos^2 \alpha_i \operatorname{sen} \alpha_i = \frac{P_x h}{E} \qquad (i)$$

$$v \sum_{i=1}^{n} A_i \operatorname{sen}^3 \alpha_i - u \sum_{i=1}^{n} A_i \operatorname{sen}^2 \alpha_i \cos \alpha_i = \frac{P_Y h}{E} \qquad (j)$$

de (i) y (j) se determinan u y v los cuales substituidas en (e) obtenemos la fuerza X_i en cualquier barra del sistema. Se observa en este caso que la consideración de las deformaciones directas del sistema resulta en una simplificación substancial, especialmente si el número de barras n es grande, puesto que solo tenemos que resolver dos ecuaciones con dos incógnitas que son las deformaciones u y v. En el caso del método de las fuerzas tendremos que resolver $n-2$ ecuaciones con $n-2$ incógnitas. Es conveniente observar que el método de las deformaciones involucró 3 etapas básicas que son

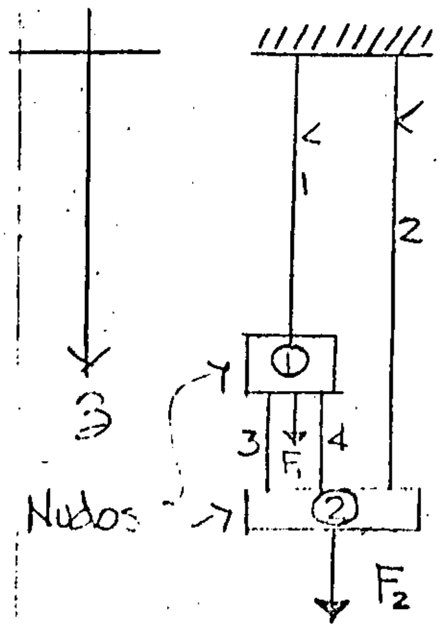
ecuación (b): Compatibilidad geométrica de deformaciones, u, v y Δl

ecuación (e): Ley de Hooke.

ecuaciones (f) y (g): Equilibrio

Notación: Livsley

S. J. Fenves 1965



barras

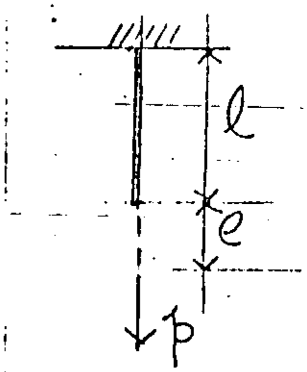
n_B = número de barras = 4

n_N = " " nudos = 2

p = fuerzas axiales (P)

e = alargamiento (δ)

Rigidez de barra $k_i = \dfrac{p}{e} = \dfrac{\text{fuerza axial}}{\text{alargamiento}} \equiv \dfrac{EA_i}{l_i}$



A) Continuidad:

$$\{e\} = \begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{Bmatrix} \equiv \left\{ \begin{matrix}\text{Def. o alarg. de las} \\ \text{cuatro barras}\end{matrix} \right. \begin{Bmatrix} + \text{Alarg.} \\ - \text{Acort.} \end{Bmatrix}$$

$$\{d\} = \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} \equiv \{\text{desplazamientos nodales} \quad \begin{Bmatrix} + \downarrow \\ - \uparrow \end{Bmatrix}$$

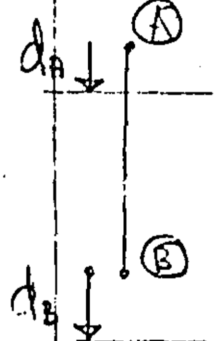
De la figura

$$e_1 = d_1$$
$$e_2 = \quad + d_2$$
$$e_3 = -d_1 + d_2$$
$$e_4 = -d_1 + d_2$$

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{Bmatrix}}_{\{e\}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}_{[a]} \underbrace{\begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix}}_{\{d\}} \quad ; \text{ ó } \quad \boxed{\{e\} = [a]\{d\}} \quad (1)$$

donde $\quad [a] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$; matriz de continuidad

observar que para una barra i cualquiera



$e_i = d_B - d_A$

d_A = desplazamiento del nudo superior

d_B = " " " inferior

B) Ley de Hooke

Sea $\{p\} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{Bmatrix}$ fuerzas axiales en las barras

+ Tensión, − compresión

$$p_1 = k_1 e_1 \qquad k_i = \frac{EA_i}{l_i} \text{ rigidez de barra } i$$

$$p_2 = k_2 e_2$$

$$p_3 = k_3 e_3$$

$$p_4 = k_4 e_4$$

ó

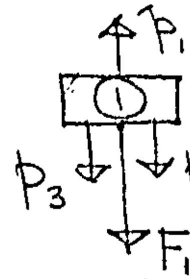
$$\underbrace{\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{Bmatrix}}_{\{p\}} = \underbrace{\begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_4 \end{bmatrix}}_{[k]} \underbrace{\begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{Bmatrix}}_{\{e\}} \; ; \text{ ó } \; \boxed{\{p\} = [k]\{e\}} \quad (2)$$

$[k]$ matriz de rigidez de las barras

c) Equilibrio $\sum F_z = 0$ en cada nudo

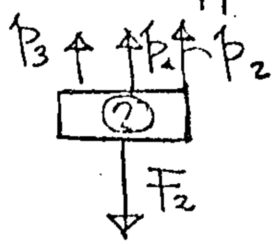
Sea: $\{F\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$

Nudo ①



$$F_1 = p_1 + 0 - p_3 - p_4$$

Nudo ②



$$F_2 = 0 + p_2 + p_3 + p_4$$

ó $$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{Bmatrix}$$ ó $$\boxed{\{F\} = [a]^T \{p\}} \quad (3)$$

donde: $[a]^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ matriz de equilibrio.

observar: matriz de equilibrio es la transpuesta de la matriz de continuidad

Solución del problema anterior por el método de desplazamientos (rigideces).

- Incógnitas: $\{e\}$, $\{d\}$, $\{p\}$

Datos: $[a]$, $[a]^T$, $[k]$, $\{F\}$

Subst. (1) en (2)

$$\{p\} = [k][a]\{d\} \quad (4)$$

Subst. (4) en (3)

$$\{F\} = [a]^T [k][a]\{d\} \quad (5)$$

ó $$\{F\} = [K]\{d\} \quad (5a)$$

La matriz $[a]^T[k][a]$ es cuadrada

Ejemplo; Suponiendo

$k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 1 \text{ Ton/cm}$, $F_1 = 10 \text{ Ton}$
$F_2 = 5 \text{ Ton}$.

$$[K] = [a]^T[k][a]$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

efectuando operaciones:

$$[K] = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

observar que $[K]$ es simétrica

de (5_a)

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} 10 \\ 5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix}$$

despejando $\{d\} = \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 8 \text{ cm} \\ 7 \text{ cm} \end{Bmatrix}$ subst. en (1)

$$\begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 8 \\ 7 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 8 \text{ cm} \\ 7 \text{ "} \\ -1 \text{ "} \\ -1 \text{ "} \end{Bmatrix}$$ Subst. en (2)

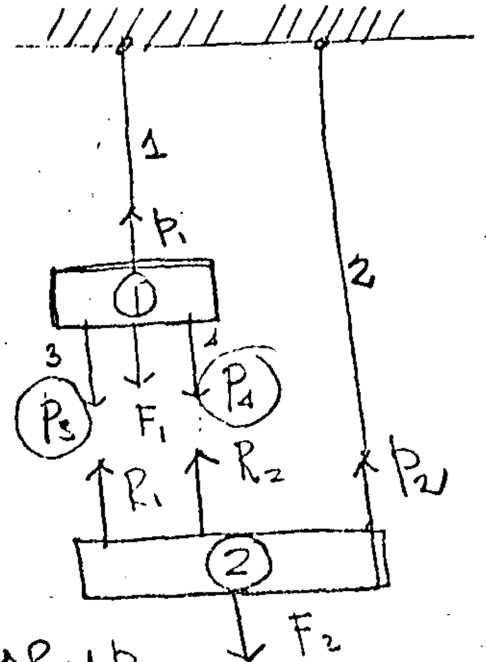
$$\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 8 \\ 7 \\ -1 \\ -1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 8 \text{ Ton} \\ 7 \text{ "} \\ -1 \text{ "} \\ -1 \text{ "} \end{Bmatrix}$$

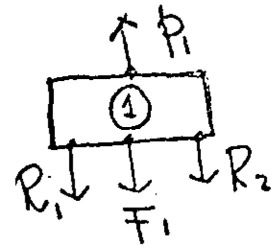
comprobación de equilibrio: de (3)

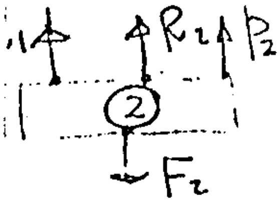
$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 8 \\ 7 \\ -1 \\ -1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10 \text{ ton} \\ 5 \text{ "} \end{Bmatrix}$$ ✓✓✓

Metodo de las fuerzas (Flexibilidad)

Usando los tres principios fundamentales en el orden inverso <u>Equilibrio</u>, <u>Ley de Hooke</u>, <u>Continuidad</u>.







a) Equilibrio

$$F_1 = p_1 - R_1 - R_2$$

$$F_2 = p_2 + R_1 + R_2$$

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}}_{a_0^T} & \underbrace{\begin{matrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{matrix}}_{a_R^T} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix} \begin{matrix} [p_0] \\ \\ [R] \end{matrix}$$

$$\{F\} = \left[a_0^T \cdot a_R^T \right] \begin{Bmatrix} p_0 \\ R \end{Bmatrix}$$

$$= a_0^T p_0 + a_R^T R$$

despejando a p_0

$$\{p_0\} = [a_0^T]^{-1}\{F\} - [a_0^T]^{-1}[a_R^T][R]$$

en nuestro ejemplo

$$[a_0^T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad [a_0^T]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\{p_0\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}[F] - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}[R]$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}[F] - \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} R$$

o bien

P. Ballesteros

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix}$$

además se tiene

$$P_3 = R_1$$
$$P_4 = R_2$$

Por consiguiente

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{b_0} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{b_R} \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix} \quad (a)$$

$$\begin{Bmatrix} P_1 = F_1 + R_1 + R_2 \\ P_2 = F_2 - R_1 - R_2 \\ P_3 = R_1 \\ P_4 = R_2 \end{Bmatrix}$$

(a) se puede escribir

$$\{P\} = [b_0]\{F\} + [b_R]\{R\} \quad (b)$$

$$b_0 = \begin{bmatrix} (a_0^T)^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} \qquad b_R = \begin{bmatrix} (-a_0^T)^{-1} a_R^T \\ I \end{bmatrix}$$

P. Ballesteros

Ley de Hooke

$$\{p\} = [k]\{e\}$$

$$\boxed{\{e\} = [k]^{-1}\{p\}} \quad (c) \qquad [f] = [k]^{-1} \text{ Flex.}$$

subst (b) en (c)

$$\{e\} = [f][b_0]\{F\} + [f][b_R]\{R\} \quad (d)$$

CONTINUIDAD.- Considerando los desplazamientos relativos de R_1 y R_2 llamandolos u_1, u_2. $\quad \{u\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$

$$d_1 = e_1$$
$$d_2 = e_2$$
$$u_1 = e_1 - e_2 + e_3$$
$$u_2 = e_1 - e_2 + e_4$$

$$\begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{Bmatrix}$$

pero $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [b_0]^T$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [b_R]^T$$

P. Ballesteros

Por lo tanto

$$\{p\} = [b_o^T]\{e\} \quad (e)$$

$$\{u\} = [b_R^T]\{e\} \quad (f)$$

{los valores de {u} deben anularse}

subst (d) en (f)

$$\{u\} = [b_R^T][f][b_o]\{F\} + [b_R^T][f][b_R]\{R\} \quad (g)$$

como $\{u\}=0$ se despeja $\{R\}$

$$\{R\} = -[b_R^T f b_R]^{-1}[b_R^T f b_o]\{F\} \quad (h)$$

(h) nos da las redundante {R}

subst (h) en (b) se obtiene {p}

$$\{p\} = b_o F - b_R (b^T f b_R)^{-1}(b_R^T f b_o) F$$

$$= [b_o - b_R(b_R^T f b_R)^{-1} b_R^T f b_o]\{F\} \quad (i)$$

$$= [b]\{F\}$$

subst (i) en (c) se obtiene {e}

$$\{e\} = [f][b]\{F\} \quad (j)$$

subst (j) en (e) se obtien.

2.3 Aplicaciones de métodos matriciales a armaduras planas. 61

Para ilustrar el uso de métodos matriciales en el analisis de armaduras articuladas en los nudos, comensaremos considerando un problema de deflexiones. En la Fig. 2.3.1 se tiene una armadura con m miembros sujeta de un sistema externo de cargas P_i, y se requiere determinar la deflexión vertical del nudo j debida al sistema de cargas P_i. Si X_i representa las fuerzas axiales en la estructura real y x_{ij} las fuerzas axiales en la extructura bajo la condición de carga unitaria en j

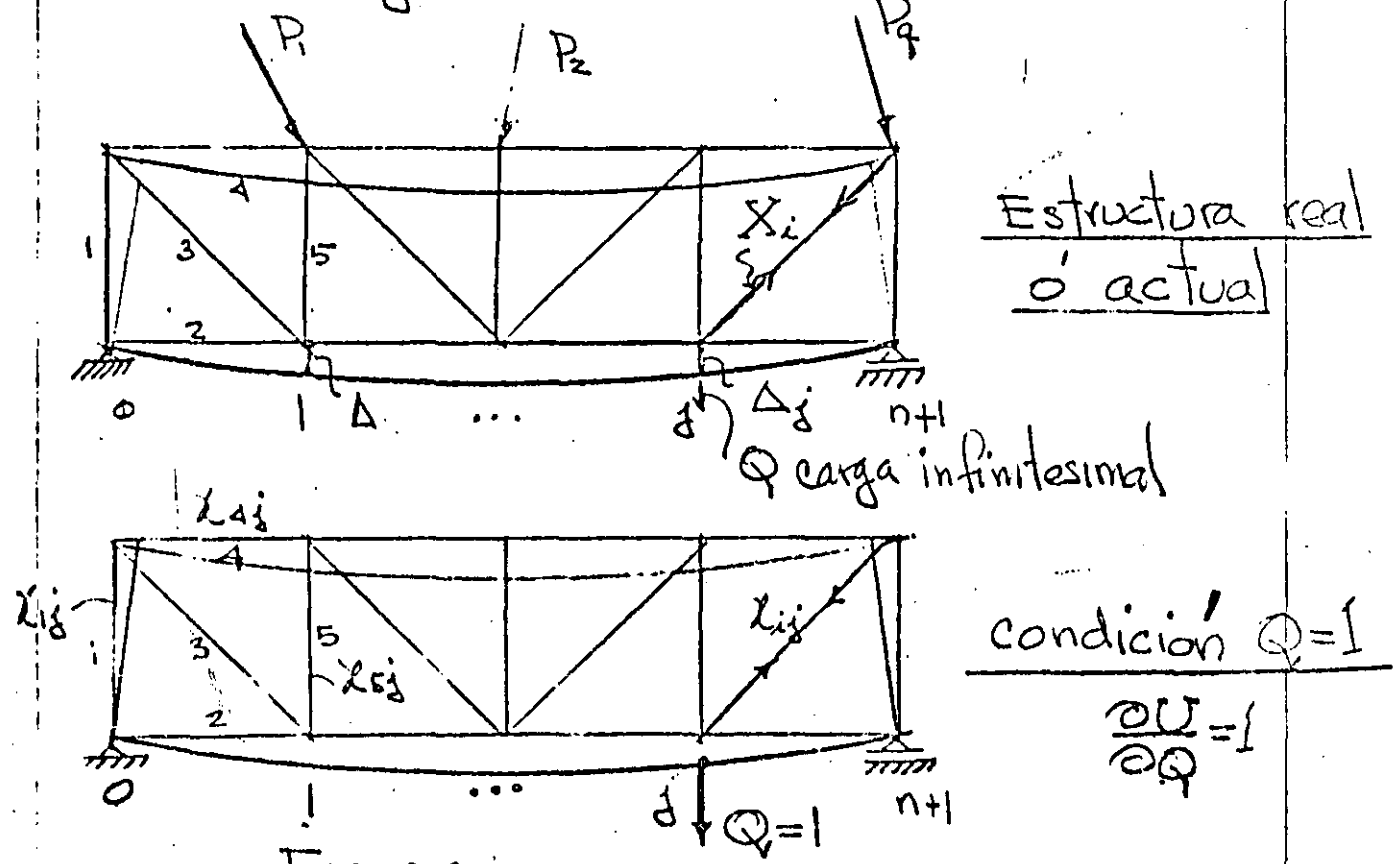


Fig. 2.3.1

Del Teorema de Castigliano y la energía de deformación por carga normal se tiene

$$U = \sum_{i=1}^{m} \frac{X_i^2 l_i}{2AE} \qquad (a)$$

$$\frac{\partial U}{\partial Q} = \Delta_i = \sum_{i=1}^{m} \frac{X_i x_{ij} l_i}{EA_i} = \sum_{i=1}^{m} X_i x_{ij} \rho_i \qquad (b)$$

donde $\rho_i = \frac{l_i}{EA_i}$ es el factor de flexibilidad de la barra i.

Si se desean calcular las n deflexiones verticales de nudos seleccionados debemos calcular los valores x_{ij} para una fuerza vertical unitaria aplicada en cada uno de los nudos. Supongamos que han sido calculados y que acomodamos los numeros de influencia en la forma de una matris de orden $m \times n$ como sigue:

$$[x_{ij}] = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix} \qquad (c)$$

(c) se denomina matris de geometría de la armadura.

Acomodando los factores de flexibilidad ρ_i en forma de una matris diagonal de orden $m \times m$

$$[P_i] = \begin{bmatrix} p_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & p_{mm} \end{bmatrix} \qquad (d)$$

la cual es llamada matris de flexibilidad de la armadura.

Finalmente, suponiendo que las fuerzas axiales X_i producidas por el sistema de cargas P_i han sido calculadas, y son arreglados en la forma de una matris vector columna

$$[X_i] = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_m \end{bmatrix} \qquad (e)$$

la cual es llamada matris de carga. Ahora de acuerdo con las reglas de multiplicación de matrices las m ecuaciones (b) pueden expresarse matricialmente

$$\begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{m1} \\ x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{m2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{1n} & x_{2n} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & p_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_m \end{bmatrix} \qquad (f)$$

o sea con notación indicial

$$[\Delta_j] = [x_{ij}] [P_i] [X_i] \qquad (g)$$

Como un ejemplo numérico, se considera la armadura mostrada en la Fig. 2.3.2 la cual tiene m = 9 miembros. Supóngase que se requiere determinar la deflexión vertical de los nudos superiores a y b, bajo la acción de dos condiciones separadas de carga como se indica. La numeración de los miembros se muestra en la figura, así como sus dimensiones. Cada barra tiene una sección transversal $A_i = 1$ $pulg^2$ y un módulo de elasticidad $E = 30 \times 10^3$ $Kips/pul^2$

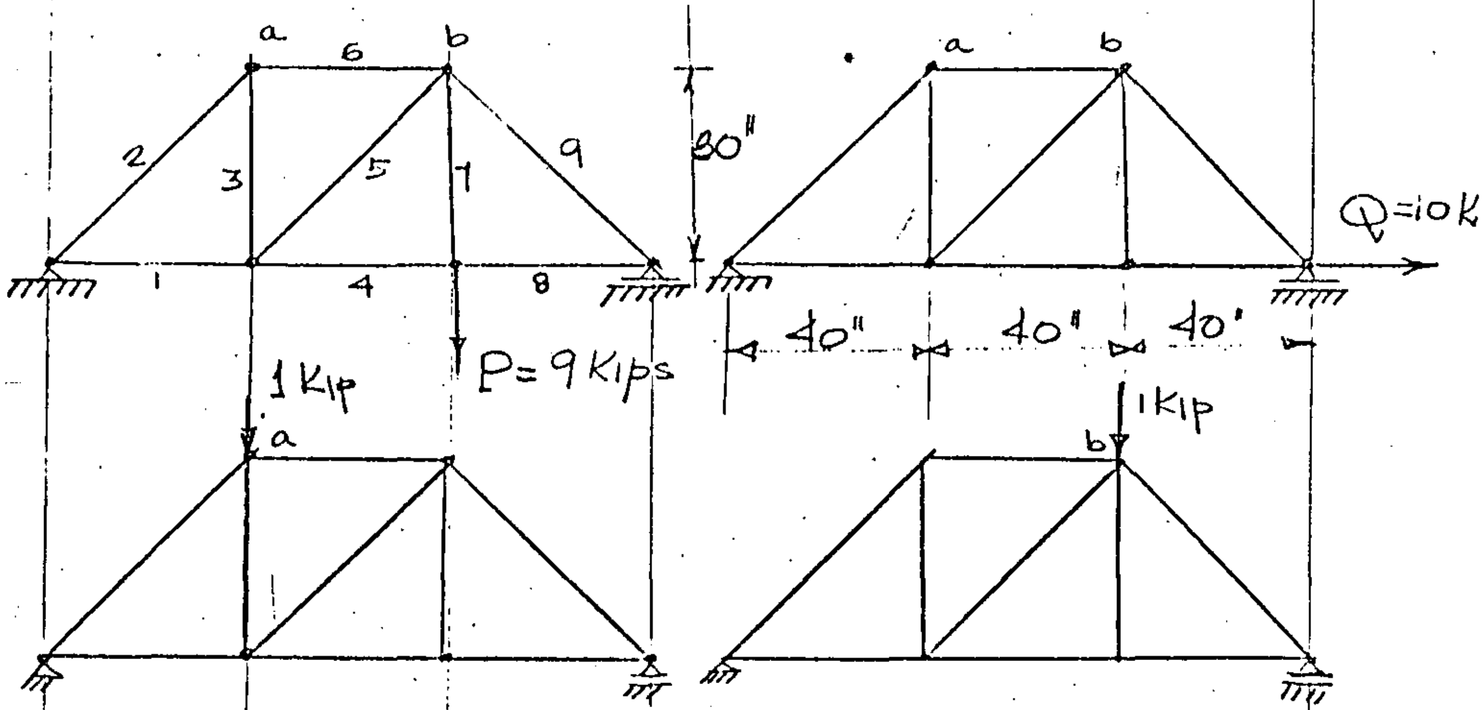


Fig. 2.3.2

El procedimiento a seguir es el siguiente:

a) Se calculan las fuerzas axiales en los nueve miembros bajo las dos condiciones de carga obteniendo la matris de fuerzas

$$[X_i] = \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ -5 & 0 \\ 3 & 0 \\ 8 & 10 \\ -5 & 0 \\ -4 & 0 \\ 9 & 0 \\ 8 & 10 \\ -10 & 0 \end{bmatrix} \qquad (h)$$

b) Similarmente se calculan las fuerzas axiales debido a las condiciones de fuerzas unitarias verticales en los puntos a y b respectivamente obteniendo la matris

$$[x_{ij}] = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ -10 & -5 \\ -3 & 3 \\ 4 & 8 \\ 5 & -5 \\ -8 & -4 \\ 0 & 0 \\ 4 & 8 \\ -5 & -10 \end{bmatrix} \qquad (i)$$

c) Se calculan los coeficientes de flexibilidad $\rho_i = \frac{l_i}{A_i E}$ obteniendo la matris de flexibilidad escrita diagonalmente

$$[\rho_i] = \frac{10}{E} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \qquad (j)$$

Substituyendo (h), (i) y (j) en (g) se obtiene

$$[\Delta_i] = [\lambda_{ij}]'[P_i][X_i] \qquad (g)$$

$$[\Delta_i] = \frac{10}{9E}\begin{bmatrix} 8 & -10 & -3 & 4 & 5 & -8 & 0 & 4 & -5 \\ 4 & -5 & 3 & 8 & -5 & -4 & 0 & 8 & -10 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 4 & & & & & & & & \\ & 5 & & & & & & & \\ & & 3 & & & & & & \\ & & & 4 & & & & & \\ & & & & 5 & & & & \\ & & & & & 4 & & & \\ & & & & & & 3 & & \\ & & & & & & & 4 & \\ & & & & & & & & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ -5 & 0 \\ 3 & 0 \\ 8 & 10 \\ -5 & 0 \\ -4 & 0 \\ 9 & 0 \\ 8 & 10 \\ -10 & 0 \end{bmatrix} \qquad (k)$$

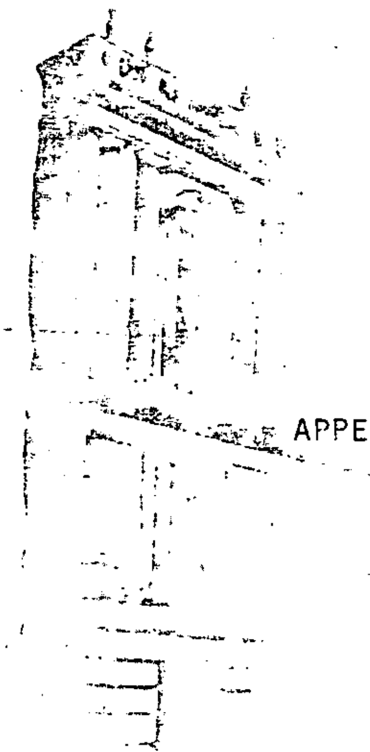
$$= \frac{10}{9E}\begin{bmatrix} 32 & -50 & -9 & 16 & 25 & -32 & 0 & 16 & -25 \\ 16 & -25 & 9 & 32 & -25 & -16 & 0 & 32 & -50 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ -5 & 0 \\ 3 & 0 \\ 8 & 10 \\ -5 & 0 \\ -4 & 0 \\ 9 & 0 \\ 8 & 10 \\ -10 & 0 \end{bmatrix} \qquad (l)$$

$$= \frac{10}{9E}\begin{bmatrix} 860 & 640 \\ 1417 & 800 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0318'' & 0.0525'' \\ 0.0237'' & 0.0296'' \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta_{ap} & \Delta_{bp} \\ \Delta_{aq} & \Delta_{bq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0318 & 0.0525 \\ 0.0237 & 0.0296 \end{bmatrix} \qquad (m)$$

DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.

EL METODO DEL ELEMENTO FINITO EN LA INGENIERIA



APPENDIX - DATA INPUT TO SAP IV

FEBRERO, 1985

Palacio de Minería Calle de Tacuba 5 primer piso Deleg. Cuauhtémoc 06000 México, D.F. Tel.: 521-40-20 Apdo. Postal M-2285

APPENDIX - DATA INPUT TO SAP IV

I. HEADING CARD (12A6)

notes	columns	variable	entry
(1)	1 - 72	HED(12)	Enter the heading information to be printed with the output

NOTES/

(1) Begin each new data case with a new heading card.

II. MASTER CONTROL CARD (8I5)

notes	columns	variable	entry
(1)	1 - 5	NUMNP	Total number of nodal points (joints) in the model
(2)	6 - 10	NELTYP	Number of element groups
(3)	11 - 15	LL	Number of structure load cases; GE.1; static analysis EQ.0; dynamic analysis
(4)	16 - 20	NF	Number of frequencies to be found in the eigenvalue solution; EQ.0; static analysis GE.1; dynamic analysis
(5)	21 - 25	NDYN	Analysis type code: EQ.0; static analysis EQ.1; eigenvalue/vector solution EQ.2; forced dynamic response by mode superposition EQ.3; response spectrum analysis EQ.4; direct step-by-step integration
(6)	26 - 30	MODEX	Program execution mode: EQ.0; problem solution EQ.1; data check only
(7)	31 - 35	NAD	Total number of vectors to be used in a SUBSPACE INTERATION solution for eigenvalues/vectors: EQ.0; default set to: MIN{2*NF,NF+8}
(8)	36 - 40	KEQB	Number of degrees of freedom (equations) per block of storage: EQ.0; calculated automatically by the program

NOTES

(1) Nodes are labeled with integers ranging from "1" to the total number of nodes in the system, "NUMNP". The program exits with no diagnostic message if NUMNP is zero (0). Thus, two blank cards are used to end the last data case in a run; i.e., one blank heading card (Section 1) and one blank card for this section.

(2) For each different element type (TRUSS, BEAM, etc.) a new element group need be defined. Elements within groups are assigned integer labels ranging from "1" to the total number of elements in the group. Element groups are input in Section IV, below.

Element numbering must begin with one (1) in each different group. It is possible to use more than one group for an element type. For example, all columns (vertical beams) of a building may be considered one group and the girders (horizontal beams) may be considered another group.

(3) At least one (1) load condition must be specified for a static (NDYN.EQ.0) analysis. If the data case calls for one of the dynamic analysis options (NDYN.EQ.1, 2, 3, or 4), no load cases can be requested (i.e., LL is input as "0"). The program always processes Sections V (Concentrated Load/Mass Data) and VI (Element Load Multipliers) and expects to read some data. For the case of a dynamic analysis (NDYN.GE.1) only mass coefficients can be input in Section V, and one (1) blank element load multiplier card is expected in Section VI.

(4) For a static analysis, NF.EQ.0. If NDYN.EQ.1, 2 or 3, the lowest NF eigenvalues are determined by the program. Note that a dynamic solution may be re-started after eigenvalue extraction (providing a previous eigenvalue solution for the model was saved on tape as described in Appendix A). NF for the original and re-start runs must be the same.

(5) If NDYN.EQ.2 or NDYN.EQ.3 the program first solves for NF eigenvalues/vectors and then performs the forced response solution (or the response spectrum analysis). Thus, the program expects to read the control card governing the eigensolution (Section VII.A) before reading data in either Sections VII.B or VII.C. For the case NDYN.EQ.1, the program solves for NF eigenvalues/vectors, prints the results and proceeds to the next data case. The results for the eigenvalue solution phase (NDYN.EQ.1) may be saved for later use in automatic re-start (Appendix A lists the control cards that are required to affect this save operation), i.e. a dynamic solution may be restarted without repeating the solution for modes and frequencies. If this data case is a re-start job, set NDYN.EQ.-2 for a forced response solution, or set NDYN.EQ.-3 for a response spectrum analysis. Note that the solution may be re-started a multiple of times (to run different ground spectra or different time-dependent forcing functions) because the program does not destroy the contents of the re-start tape.

If NDYN.EQ.4 the program performs the response solution by direct step-by-step integration and no eigenvalue solution control card should be provided.

II. MASTER CONTROL CARD (continued)

(6) In the data-check-only mode (MODEX.EQ.1), the program writes only one file, "TAPE8", and this file may be saved for use as input to special purpose programs such as mesh plotters, etc. TAPE8 contains all data input in its completely generated form. If MODEX.EQ.1, most of the expensive calculations required during normal (MODEX.EQ.0) execution are passed. TAPE8, however, is not written during normal problem solution.

Note that a negative value for NDYN ("-2" or "-3"), when executing in the data-check-only mode, does not cause the program to read the re-start tape which contains the eigensolution information; instead, the program jumps directly from this card to Section VII.B (or Section VII.C) and continues reading and checking data cards without performing the solution.

(7) If the program is to solve for eigenvalues using the SUBSPACE ITERATION algorithm, the entry in cc 31-35 can be used to change the total number of iteration vectors to be used from the default minimum of 2*NF or NF+8 (whichever is smaller) to the value "NAD". The effect of increasing NAD over the default value is to accelerate convergence in the calculations for the lowest NF eigenvalues. NAD is principally a program testing parameter and should normally be left blank.

(8) KEQB is a program testing parameter which allows the user to test multiple equation block solutions using small data cases which would otherwise be one block problems. KEQB is normally left blank.

III. NODAL POINT DATA (A1,I4,6I5,3F10.0,I5,F10.0)

notes	columns	variable	entry
(1)	1	CT	Symbol describing coordinate system for this node; EQ. ; (blank) cartesian (X,Y,Z) EQ.C; cylindrical (R,Y,θ)
(2)	2 - 5	N	Node number
(3)	6 - 10	IX(N,1)	X-translation boundary condition code
	11 - 15	IX(N,2)	Y-translation boundary condition code
	16 - 20	IX(N,3)	Z-translation boundary condition code
	21 - 25	IX(N,4)	X-rotation boundary condition code
	26 - 30	IX(N,5)	Y-rotation boundary condition code
	31 - 35	IX(N,6)	Z-rotation boundary condition code EQ.0; free (loads allowed) EQ.1; fixed (no load allowed) GT.1; master node number (beam nodes only)
(4)	36 - 45	X(N)	X (or R) -ordinate
	46 - 55	Y(N)	Y -ordinate
	56 - 65	Z(N)	Z (or θ) -ordinate (degrees)
(5)	66 - 70	KN	Node number increment
(6)	71 - 80	T(N)	Nodal temperature

NOTES/

(1) A special cylindrical coordinate system is allowed for the global description of nodal point locations. If a "C" is entered in card column one (1), then the entries given in cc 36-65 are taken to be references to a global (R,Y,θ) system rather than to the standard (X,Y,Z) system. The program converts cylindrical coordinate references to cartesian coordinates using the formulae:

$$X = R \sin\theta$$
$$Y = Y$$
$$Z = R \cos\theta$$

Cylindrical coordinate input is merely a user convenience for locating nodes in the standard (X,Y,Z) system, and no other references to the cylindrical system are implied; i.e., boundary condition specifications, output displacement components, etc. are referenced to the (X,Y,Z) system.

(2) Nodal point data must be defined for all (NUMNP) nodes. Node data may be input directly (i.e., each node on its own individual card) or the generation option may be used if applicable (see note 5, below).

ELEMENT TYPE	DEGREES OF FREEDOM WITH DEFINED STIFFNESS δX	δY	δZ	$\delta\theta_X$	$\delta\theta_Y$	$\delta\theta_Z$
8. THICK SHELL	x	x	x			
9. 3D/PIPE	x	x	x	x	x	x

Hence, for an all 3D/BRICK model, only the X,Y,Z translations are defined at the node, and the number of equations can be cut in half by deleting the three (3) rotational components at every node. If a node is common to two or more different element types, then the non-trivial degrees of freedom are found by combination. For example, all six (6) components are possible at a node common to both BEAM and TRUSS elements; i.e., the BEAM governs.

A "master/slave" option is allowed to model rigid links in the system. For this case, IX(N,M) = K means that the Mth degree of freedom at node "N" is "slave" to (dependent on) the same (Mth) degree of freedom at node "K"; node "K" is said to be the master node to which node N is slave. Note that no actual beam need to run from node K to node N, however the following restrictions hold:

(a) Node one (1) cannot be a master node; i.e., $K \neq 1$.
(b) Nodes "N" and "K" must be beam-only nodes; i.e., no other element type may be connected to either node N or K.
(c) A node "N" can be slave to only one master node, "K"; multiple nodes, however, can be slave to the same master.
(d) If the beam from "N" to "K" is to be a rigid link arbitrarily oriented in the X,Y,Z space, then all six (6) degrees of freedom at node "N" must be made slaves to node "K"

Displacement/rotation components for slave degrees of freedom at node "N" are not recovered for printing; i.e., zeroes appear as output for slave degrees of freedom.

(4) When CT (Col. 1) is equal to the character "C", the values input in CC 36-65 are interpreted as the cylindrical (R, Y, θ) coordinates of node "N". Y is the axis of symmetry. R is the distance of a point from the Y-axis. The angle θ is measured clockwise from the positive Z-axis when looking in the positive Y direction. The cylindrical coordinate values are printed as entered on the card, but immediately after printing the

global cartesian values are computed from the input entries. Note that boundary condition codes always refer to the the (X,Y,Z) system even if the node happens to be located with cylindrical coordinates.

(5) Nodal point cards need not be input in node-order sequence; eventually, however, all nodes in the integer set {1, NUMNP} must be defined. Joint data for a series of nodes

$$\{N_1,\ N_1+1\times KN_2,\ N_1+2\times KN_2,\ldots,N_2\}$$

may be generated from information given on two (2) cards in sequence:

CARD 1 / N_1,IX(N_1,1),...,IX(N_1,6),X(N_1),...,KN_1,T(N_1)/

CARD 2 / N_2,IX(N_2,1),...,IX(N_2,6),X(N_2),...,KN_2,T(N_2)/

KN_2 is the mesh generation parameter given on the second card of a sequence. The first generated node is $N_1+1\times KN_2$; the second generated node is $N_1+2\times KN_2$, etc. Generation continues until node number $N_2 - KN_2$ is established. Note that the node difference $N_2 - N_1$ must be evenly divisible by KN_2. Intermediate nodes between N_1 and N_2 are located at equal intervals along the straight line between the two points. Boundary condition codes for the generated data are set equal to the values given on the first card. Node temperatures are found by linear interpolation between T(N_1) and T(N_2). Coordinate generation is always performed in the (X,Y,Z) system, and no generation is performed if KN_2 is zero (blank).

(6) Nodal temperatures describe the actual (physical) temperature distribution in the structure. Average element temperatures established from the nodal values are used to select material properties and to compute thermal strains in the model (static analysis only).

IV. ELEMENT DATA

TYPE 1 - THREE-DIMENSIONAL TRUSS ELEMENTS

Truss elements are identified by the number 1. Axial forces and stresses are calculated for each member. A uniform temperature change and inertia loads in three directions can be considered as the basic element load conditions. The truss elements are described by the following sequence of cards:

A. Control Card (3I5)

Columns	1 - 5	The number 1
	6 - 10	Total number of truss elements
	11 - 15	Number of material property cards

B. Material Property Cards (I5,5F10.0)

There need be as many of the following cards as are necessary to define the properties listed below for each element in the structure.

Columns	1 - 5	Material identification number
	6 - 15	Modulus of elasticity
	16 - 25	Coefficient of thermal expansion
	26 - 35	Mass density (used to calculate mass matrix)
	36 - 45	Cross-sectional area
	46 - 55	Weight density (used to calculate gravity loads)

C. Element Load Factors (4F10.0) Four cards

Three cards specifying the fraction of gravity (in each of the three global coordinate directions) to be added to each element load case.

Card 1: Multiplier of gravity load in the +X direction

Columns	1 - 10	Element load case A
	11 - 20	Element load case B
	21 - 30	Element load case C
	31 - 40	Element load case D

Card 2: As above for gravity in the +Y direction

Card 3: As above for gravity in the +Z direction

Card 4: This indicates the fraction of the thermal load to be added to each of the element load cases.

D. Element Data Cards (4I5,F10.0,I5)

One card per element in increasing numerical order starting with one.

Columns 1 - 5 Element number

Columns	6 - 10	Node number I
	11 - 15	Node number J
	16 - 20	Material property number
	21 - 30	Reference temperature for zero stress
	31 - 35	Optional parameter k used for automatic generation of element data.

NOTES/

(1) If a series of elements exist such that the element number, N_i, is one greater than the previous element number (i.e. $N_i = N_{i-1} + 1$) and the nodal point number can be given by

$$I_i = I_{i-1} + k$$

$$J_i = J_{i-1} + k$$

then only the first element in the series need be provided. The element identification number and the temperature for the generated elements are set equal to the values on the first card. If k (given on the first card) is input as zero it is set to 1 by the program.

(2) The element temperature increase ΔT used to calculate thermal loads is given by

$$\Delta T = (T_i + T_j)/2.0 - T_r$$

where $(T_i + T_j)/2.0$ is the average of the nodal temperatures specified on the nodal point data cards for nodes i and j; and T_r is the zero stress reference temperature specified on the element card. For truss elements it is generally more convenient to set $T_i = T_j = 0.0$ such that $\Delta T = -T_r$ (note the minus sign). Other types of member loadings can be specified using an equivalent ΔT. If a truss member has an initial lack of fit by an amount d (positive if too long) then $\Delta T = d/(\alpha L)$. If an initial prestress force P (positive if tensile) is applied to the member ends that is released after the member is connected to the rest of the structure then $\Delta T = - P/(\alpha A E)$. In the above formulas A = cross section area, L = member length and α = coefficient of thermal expansion.

T2

TYPE 2 - THREE-DIMENSIONAL BEAM ELEMENTS

Beam elements are identified by the number 2. Forces (axial and shear) and moments (bending and torsion) are calculated (in the beam local coordinate system) for each beam. Gravity loadings in each coordinate direction and specified fixed end forces form the basic element load conditions.

The beam elements are described by the following sequence of cards:

A. Control Card (5I5)

Columns		
	1 - 5	The number 2
	6 - 10	Total number of beam elements
	11 - 15	Number of element property cards
	16 - 20	Number of fixed end force sets
	21 - 25	Number of material property cards

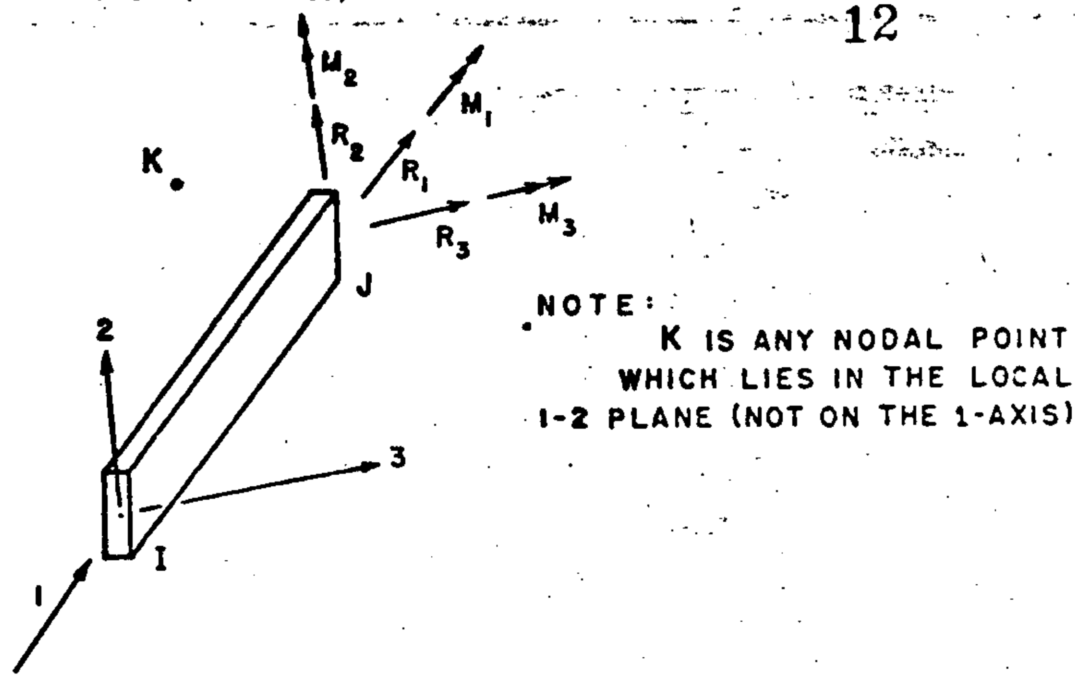
B. Material Property Cards (I5,3F10.0)

Columns		
	1 - 5	Material identification number
	6 - 15	Young's modulus
	16 - 25	Poisson's ratio
	26 - 35	Mass density (used to calculate mass matrix)
	36 - 45	Weight density (used to calculate gravity loads)

C. Element Property Cards (I5,6F10.0)

Columns		
	1 - 5	Geometric property number
	6 - 15	Axial area
	16 - 25	Shear area associated with shear forces in local 2-direction
	26 - 35	Shear area associated with shear forces in local 3-direction
	36 - 45	Torsional inertia
	46 - 55	Flexural inertia about local 2-axis
	56 - 65	Flexural inertia about local 3-axis

One card is required for each unique set of properties. Shear areas need be specified only if shear deformations are to be included in the analysis.



LOCAL COORDINATE SYSTEM FOR BEAM ELEMENT

D. Element Load Factors (4F10.0)

Nodal point loads (no moments) due to gravity are computed. Three cards need be supplied which specify the fraction of these loads (in each of the three global coordinate directions) to be added to each element load case.

Card 1: Multiplier of gravity load in the +X direction

Columns	1 - 10	Element load case A
	11 - 20	Element load case B
	21 - 30	Element load case C
	31 - 40	Element load case D

Card 2: As above for gravity in the +Y direction

Card 3: As above for gravity in the +Z direction

E. Fixed-End Forces (I5,6F10.0/I5,6F10.0)

Two cards are required for each unique set of fixed-end forces occurring in the analysis. Distributed loads and thermal loads can be specified using the fixed-end forces.

Card 1:

Columns	1 - 5	Fixed-end force number
	6 - 15	Fixed-end force in local 1-direction at Node I
	16 - 25	Fixed-end force in local 2-direction at Node I
	26 - 35	Fixed-end force in local 3-direction at Node I
	36 - 45	Fixed-end moment about local 1-direction at Node I
	46 - 55	Fixed-end moment about local 2-direction at Node I
	56 - 65	Fixed-end moment about local 3-direction at Node I

IV. ELEMENT DATA (continued)

Card 2:

Columns	1 - 5	Blank
	6 - 15	Fixed-end force in local 1-direction at Node J
	16 - 25	Fixed-end force in local 2-direction at Node J
	26 - 35	Fixed-end force in local 3-direction at Node J
	36 - 45	Fixed-end moment about local 1-direction at Node J
	46 - 55	Fixed-end moment about local 2-direction at Node J
	56 - 65	Fixed-end moment about local 3-direction at Node J

Note that values input are literally fixed-end values. Corrections due to hinges and rollers are performed within the program. Directions 1, 2 and 3 indicate principal directions in the local beam coordinates

F. Beam Data Cards (10I5,2I6,I8)

Columns	1 - 5	Element number
	6 - 10	Node number I
	11 - 15	Node number J
	16 - 20	Node number K - see accompanying figure
	21 - 25	Material property number
	26 - 30	Element property number
	31 - 35	A
	36 - 40	B
	41 - 45	C
	46 - 50	D
		(A–D) Fixed-end force identification for element load cases A, B, C, and D respectively
	51 - 56	End release code at node I
	57 - 62	End release code at node J
	63 - 70	Optional parameter k used for automatic generation of element data. This option is described below under a separate heading. If the option is not used, the field is left blank.

The end release code at each node is a six digit number of ones and/or zeros. The 1st, 2nd, ... 6th digits respectively correspond to the force components R1, R2, R3, M1, M2, M3 at each node.

If any one of the above element end forces is known to be zero (hinge or roller), the digit corresponding to that component is a one.

NOTES/

(1) If a series of elements occurs in which each element number NE_i is one greater than the previous number NE_{i-1}

i.e., $$NE_i = NE_{i-1} + 1$$

only the element data card for the first element in the series need be given as input, provided

(1) The end nodal point numbers are $NI_i = NI_{i-1} + k$

$NJ_i = NJ_{i-1} + k$

and the

(2) material property number
(3) element property number
(4) fixed-end force identification numbers for each element load case
(5) element release code
(6) orientation of local 2-axis

are the same for each element in the series.

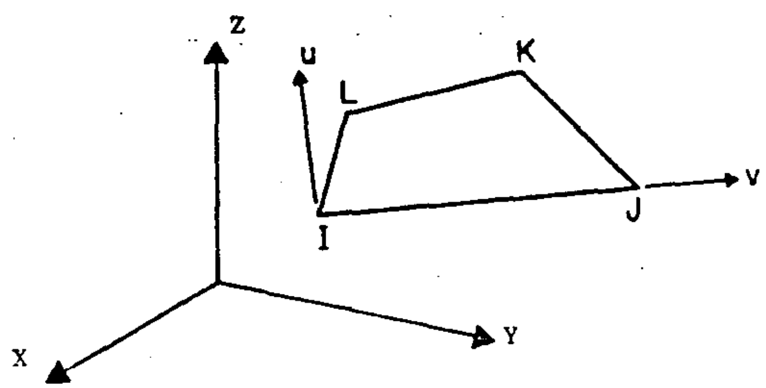
The value of k, if left blank, is taken to be one. The element data card for the last beam element must always be given.

(2) When successive beam elements have the same stiffness, orientation and element loading, the program automatically skips recomputation of the stiffness. Note this when numbering the beams to obtain maximum efficiency.

TYPE 3 - PLANE STRESS MEMBRANE ELEMENTS

Quadrilateral (and triangular) elements can be used for plane stress membrane elements of specified thickness which are oriented in an arbitrary plane. All elements have temperature-dependent orthotropic material properties. Incompatible displacement modes can be included at the element level in order to improve the bending properties of the elements.

A general quadrilateral element is shown below:



A local element coordinate system is defined by a u-v system. The v-axis coincides with the I-J side of the element. The u axis is normal to the v-axis and is in the plane defined by nodal points I, J and L. Node K must be in the same plane if the element stiffness calculations are to be correct. The following sequence of cards define the input data for a set of TYPE 3 elements.

A. Control Card (6I5)

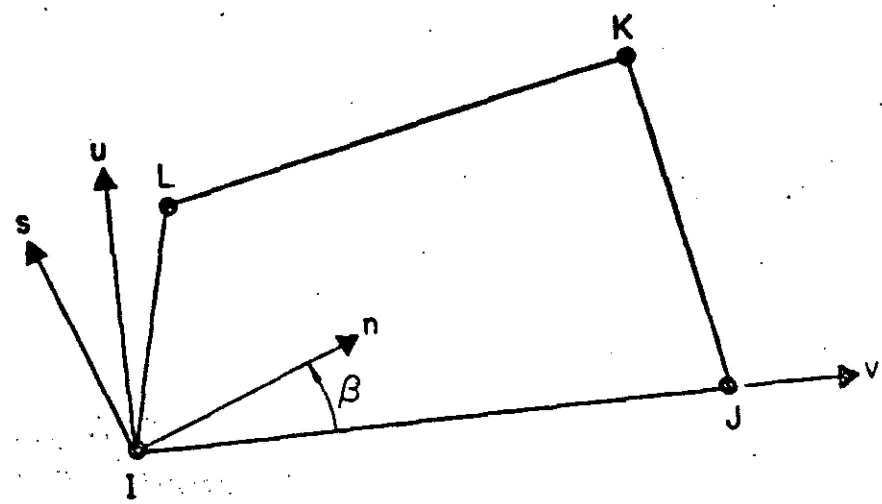
Columns	1 - 5	The number 3
	6 - 10	Total number of plane stress elements
	11 - 15	Number of material property cards
	16 - 20	Maximum number of temperature points for any one material; see Section B below.
	30	Non-zero numerical punch will suppress the introduction of incompatible displacement modes.

B. Material Property Information

Orthotropic, temperature-dependent material properties are possible. For each different material, the following group of cards must be supplied.

1. Material Property Card (2I5,3F10.0)

Columns	1 - 5	Material identification number
	6 - 10	Number of different temperatures for which properties are given. If this field is left blank, the number is taken as one.
	11 - 20	Weight density of material (used to calculate gravity loads)
	21 - 30	Mass density (used to calculate mass matrix)
	31 - 40	Angle β in degrees, measured counter-clockwise from the v-axis to the n-axis.



The n-s axes are the principal axes for the orthotropic material. Weight and mass densities need be listed only if gravity and inertia loads are to be considered.

2. Two cards for each temperature:

Card 1: (8F10.0)

Columns	1 - 10	Temperature
	11 - 20	Modulus of Elasticity - E_n
	21 - 30	Modulus of Elasticity - E_s
	31 - 40	Modulus of Elasticity E_t
	41 - 50	Strain Ratio - ν_{ns}
	51 - 60	Strain Ratio - ν_{nt}
	61 - 70	Strain Ratio - ν_{st}
	71 - 80	Shear Modulus - G_{ns}

Card 2: (3F10.0)

Columns	1 - 10	Coefficient of thermal expansion - α_n
	11 - 20	Coefficient of thermal expansion - α_s
	21 - 30	Coefficient of thermal expansion - α_t

All material constants must always be specified. For plane stress, the program modifies the constitutive relations to satisfy the condition that the normal stress σ_t equals zero.

C. Element Load Factors (5F10.0)

Four cards are used to define the element load cases A, B, C and D as fraction of the basic thermal, pressure and acceleration loads.

First card, load case A: Second card, load case B, etc.

Columns	1 - 10	Fraction of thermal load
	11 - 20	Fraction of pressure load
	21 - 30	Fraction of gravity in X-direction
	31 - 40	Fraction of gravity in Y-direction
	41 - 50	Fraction of gravity in Z-direction

D. Element Cards (6I5,2F10.0,2I5,F10.0)

One card per element must be supplied (or generated) with the following information:

Columns	1 - 5	Element number
	6 - 10	Node I
	11 - 15	Node J
	16 - 20	Node K
	21 - 25	Node L (Node L must equal Node K for triangular elements)
	26 - 30	Material identification number
	31 - 40	Reference temperature for zero stresses within element
	41 - 50	Normal pressure on I-J side of element
	51 - 55	Stress evaluation option "n"
	56 - 60	Element data generator "k"
	61 - 70	Element thickness

NOTES/

(1) Element Data Generation - Element cards must be in element number sequence. If cards are omitted, data for the omitted elements will be generated. The nodal numbers will be generated with respect to the first card in the series as follows:

$$I_n = I_{n-1} + k$$

$$J_n = J_{n-1} + k$$

$$K_n = K_{n-1} + k$$

$$L_n = L_{n-1} + k$$

All other element information will be set equal to the information on the last card read. The data generation parameter "k" is specified on that card.

(2) <u>Stress Print Option</u> - See element type 4

(3) <u>Thermal Data</u> - See element type 4

(4) <u>Use of Triangles</u> - See element type 4

(5) <u>Use of Incompatible Modes</u> - See element type 4

T4

TYPE 4 - TWO-DIMENSIONAL FINITE ELEMENTS

Quadrilateral (and triangular) elements can be used as:

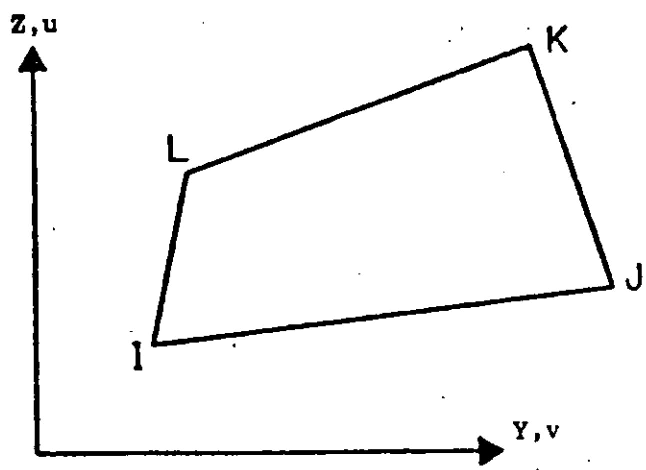
(i) Axisymmetric solid elements symmetrical about the Z-axis. The radial direction is specified as the Y-axis. Care must be exercised in combining this element with other types of elements.

(ii) Plane strain elements of unit thickness in the Y-Z plane.

(iii) Plane stress elements of specified thickness in the Y-Z plane.

All elements have temperature-dependent orthotropic material properties. Incompatible displacement modes can be included at the element level in order to improve the bending properties of the element.

A general quadrilateral element is shown below:



A. Control Card (6I5)

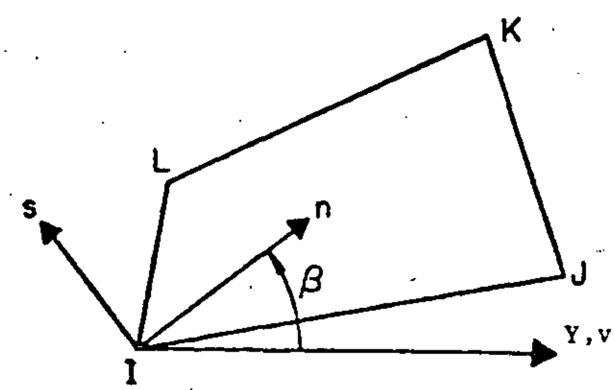
Columns	1 - 5	The number 4
	6 - 10	Total number of elements
	11 - 15	Number of different materials
	16 - 20	Maximum number of temperature cards for any one material - see Section B below.
	25	0 for axisymmetric analysis 1 for plane strain analysis 2 for plane stress analysis
	30	Non-zero numerical punch will suppress the introduction of incompatible displacement modes. Incompatible modes cannot be used for triangular elements and are automatically suppressed.

B. Material Property Information

Orthotropic, temperature-dependent material properties are possible. For each different material the following group of cards must be supplied.

1. Material Property Card (2I5,3F10.0)

Columns	1 - 5	Material identification number
	6 - 10	Number of different temperature for which properties are given. If this field is left blank, the number is taken as one.
	11 - 20	Weight density of material (used to calculate gravity loads)
	21 - 30	Mass density (used to calculate mass matrix)
	31 - 40	Angle β in degrees, measured counter-clockwise from the v-axis to the n-axis.



PRINCIPAL MATERIAL AXES

The n-s axes are the principal axes for the orthotropic material. Weight density is needed only if gravity and inertia loads are to be considered.

2. Two cards for each temperature:

Card 1: (8F10.0)

Columns	1 - 10	Temperature	
	11 - 20	Modulus of elasticity	- E_n
	21 - 30	Modulus of elasticity	- E_s
	31 - 40	Modulus of elasticity	- E_t
	41 - 50	Strain ratio	- ν_{ns}
	51 - 60	Strain ratio	- ν_{nt}
	61 - 70	Strain ratio	- ν_{st}
	71 - 80	Shear modulus	- G_{ns}

Card 2: (3F10.0)

Columns	1 - 10	Coefficient of thermal expansion - α_n
	11 - 20	Coefficient of thermal expansion - α_s
	21 - 30	Coefficient of thermal expansion - α_t

All material constants must always be specified. In plane stress, the program modifies the constitutive relations to satisfy the condition that the normal stress σ_t equals zero.

C. Element Load Factors

Four cards are used to define the element load cases A, B, C and D as fraction of the basic thermal, pressure and acceleration loads.

First card, load case A; Second card, load case B; etc.

Columns	1 - 10	Fraction of thermal load
	11 - 20	Fraction of pressure load
	21 - 30	Fraction of gravity in X-direction
	31 - 40	Fraction of gravity in Y-direction
	41 - 50	Fraction of gravity in Z-direction

D. Element Cards (6I5,2F10.0,2I5,F10.0)

One card per element must be supplied (or generated) with the following information:

Columns	1 - 5	Element number
	6 - 10	Node I
	11 - 15	Node J
	16 - 20	Node K
	21 - 25	Node L (Node L must equal Node K for triangular elements)
	26 - 30	Material identification number
	31 - 40	Reference temperature for zero stresses within element
	41 - 50	Normal pressure on I-J side of element
	51 - 55	Stress evaluation option "n"
	56 - 60	Element data generator "k"
	61 - 70	Element thickness (For plane strain set equal to 1.0 by program)

NOTES/

(1) Element Data Generation - Element cards must be in element number sequence. If cards are omitted the omitted element data will be generated. The nodal numbers will be generated with respect to the first card in the series as follows:

$$I_n = I_{n-1} + k$$

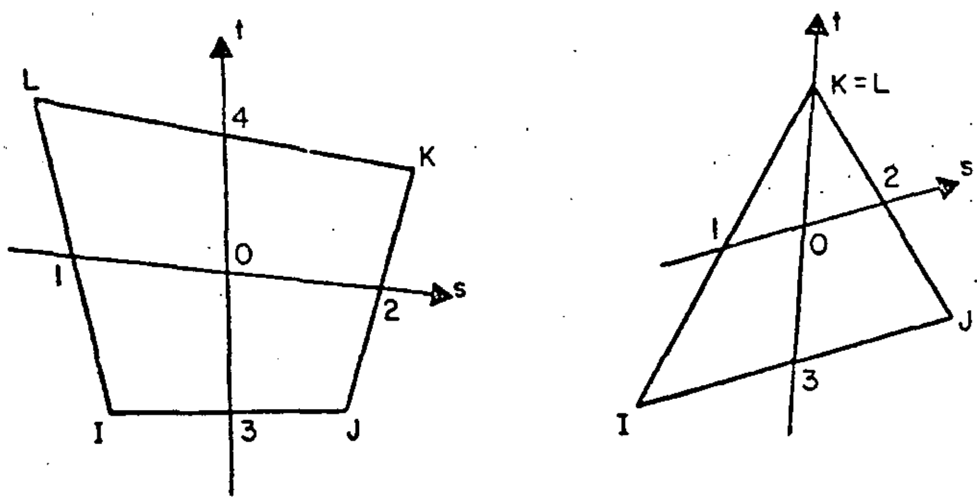
$$J_n = J_{n-1} + k$$

$$K_n = K_{n-1} + k$$

$$L_n = L_{n-1} + k$$

All other element information will be set equal to the information on the last card read. The data generation parameter k is given on that card.

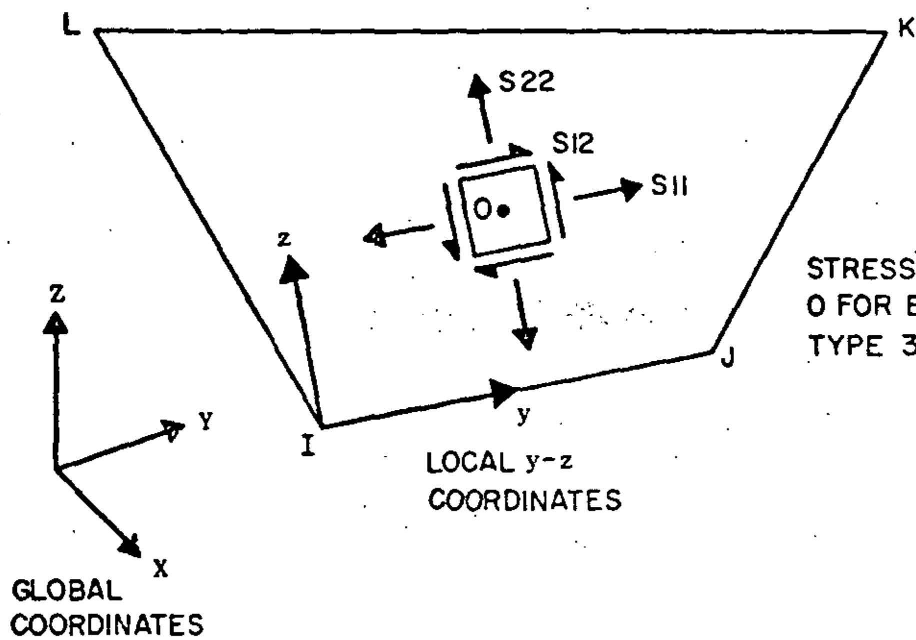
(2) Stress Print Option - The following description of the stress print option applies to both element types 3 and 4. The value of the stress print option "n" can be given as 1, 0, 8, 16 or 20.



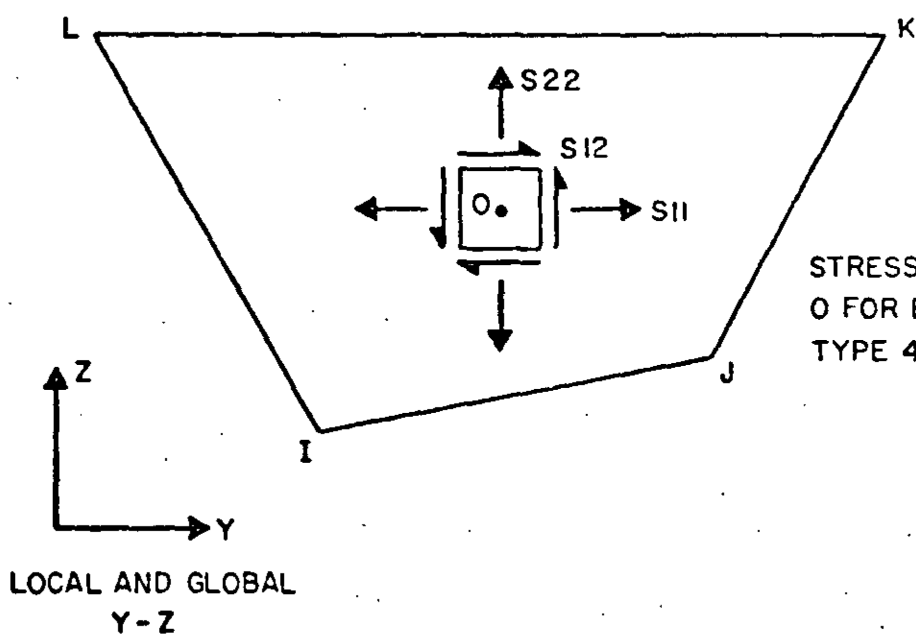
0 = origin of natural s-t coordinates (Fig. 5-2). Points 1, 2, 3 and 4 are midpoints of sides. The points at which stresses are output depend on the value of n as described in the following table.

n	Stresses output at
1	None
0	0
8	0, 1
16	0, 1, 2, 3
20	0, 1, 2, 3, 4

The stresses at O are printed in a local y-z coordinate system. For element type 3, side I-J defines the local y-z axes in the plane of the element. For element type 4 the local y-z axes are parallel to the global Y-Z axes.

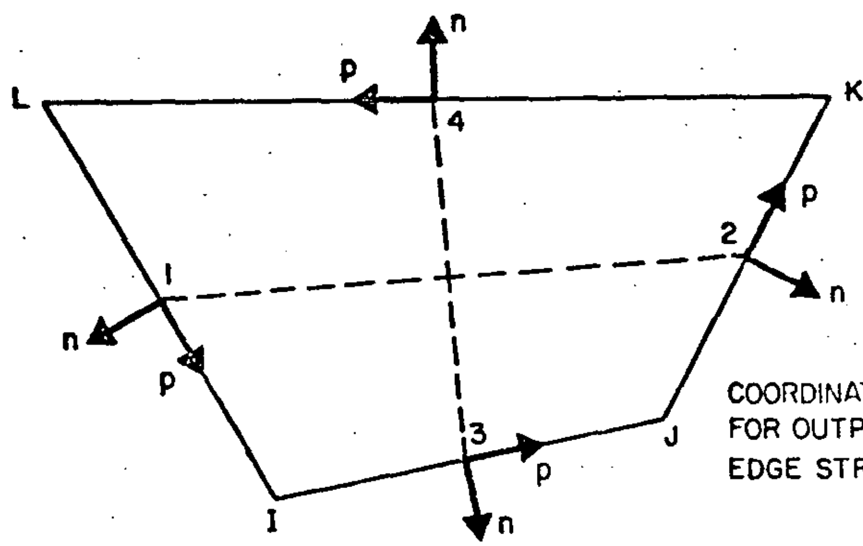


STRESSES AT
O FOR ELEMENT
TYPE 3

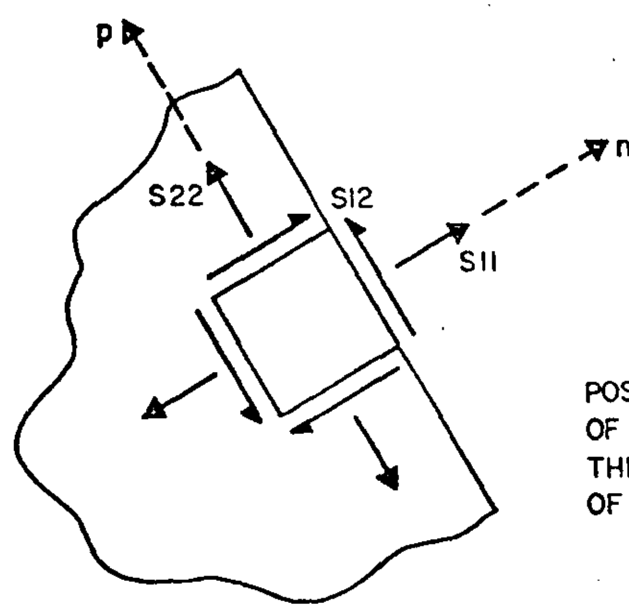


STRESSES AT
O FOR ELEMENT
TYPE 4

For both element types 3 and 4 the stresses at each edge midpoint are output in a rectangular n-p coordinate system defined by the outward normal to the edge (n axis) and the edge (p axis). The positive p axis for points 1, 2, 3 and 4 is from L to I, J to K, I to J and K to L respectively (positive direction is counterclockwise about element).



COORDINATE SYSTEMS FOR OUTPUT OF EDGE STRESSES



POSITIVE STATE OF STRESS AT THE MIDPOINT OF A SIDE

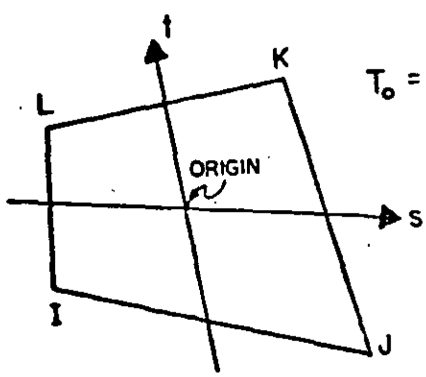
IV. ELEMENT DATA (continued)

The stresses for an element are output under the following headings: S11, S22, S12, S33, S-MAX, S-MIN, ANGLE. The normal stresses S11 and S22 and the shear stress S12 are as described above. S-MAX and S-MIN are the principal stresses in the plane of the element and S33 is the third principal stress acting on the plane of the element. ANGLE is the angle in degrees from (1) the local y axis at point 0, or (2) the n axis at the midpoints, to the axis of the algebraically largest principal stress.

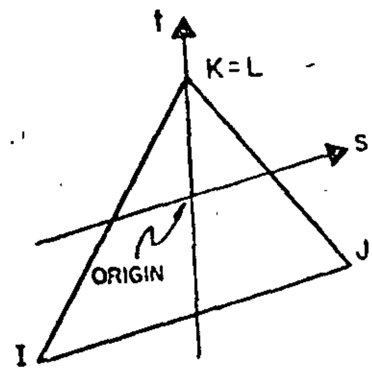
For triangular elements the stress print option is as described above except that n = 20 is not valid. If n = 20 is input, n will be set to 16 by the program.

(3) Thermal Data - Nodal temperatures as specified on the nodal point data cards are used by element types 3 and 4 in the following two ways:

(1) Temperature-dependent material properties are approximated by interpolating (or extrapolating) the input material properties at the temperature T_o corresponding to the origin of the local s-t coordinate system (see Fig. 5.2 for description of local element coordinates). The material properties throughout the element are assumed constant corresponding to this temperature.



$$T_o = \frac{T_I + T_J + T_K + T_L}{4.0}$$



(2) For computation of nodal loads due to thermal strains in the element a bilinear interpolation expansion for the temperature change ΔT (s,t) is used.

$$\Delta T\ (s,t) = \sum_{i=1}^{4} h_i(s,t)\ T_i - T_r$$

where T_i are the nodal temperatures specified on the joint data cards, T_r is the reference stress free temperature and h_i (s,t) are the interpolation functions given by Eq. 5.7.

(4) Use of Triangles - In general, the elements are most effective when they are rectangular, i.e. the elements are not distorted. Therefore, regular and rectangular element mesh layouts should be used as much as possible. In particular, the triangle used is the constant strain triangle; and it should be avoided, since its accuracy is not satisfactory.

(5) Use of Incompatible Modes - Incompatible displacement modes have been found to be effective only when used in rectangular elements. They should always be employed with care. Since incompatible modes are used for all elements of a group it is recommended to use separate element groups for elements with incompatible modes and elements without incompatible modes, respectively. (See Section II, note (2)).

TYPE 5 - THREE-DIMENSIONAL SOLID ELEMENTS (EIGHT NODE BRICK)

General three-dimensional, eight-node, isoparametric elements with three translational degrees of freedom per node are identified by the number 5. Isotropic material properties are assumed. The element load cases (A, B, C and D) are defined as a combination of surface pressure, hydrostatic loads, inertia loads in three directions and thermal loads. The six components of stress and three principal stresses are computed at the center of each element. Also, surface stresses are evaluated. Nine incompatible displacement modes are assumed in the formation of element stiffnes matrices. For 8-node elements without incompatible modes use element type 8.

A. Control Card (4I5)

Columns	1 - 5	The number 5
	6 - 10	Number of 8-node solid elements
	11 - 15	Number of different materials
	16 - 20	Number of element distributed load sets

B. Material Property Cards (I5,4F10.0) One card for each different material

Columns	1 - 5	Material identification number
	6 - 15	Modulus of elasticity (only elastic, isotropic materials are considered)
	16 - 25	Poisson's ratio
	26 - 35	Weight density of material (for calculation of gravity loads or mass matrix)
	36 - 45	Coefficient of thermal expansion

C. Distributed Surface Loads (2I5,2F10.2,I5) One card is required for each unique set of uniformly distributed surface loads and for each reference fluid level for hydrostatically varying pressure loads. See notes (4) and (5) for sign convention.

Columns	1 - 5	Load set identification number
	6 - 10	LT (load type) LT = 1 if this card specifies a uniformly distributed load. LT = 2 if this card specifies a hydrostatically varying pressure.
	11 - 20	P If LT = 1, P is the magnitude of the uniformly distributed load If LT = 2, P is the weight density of the fluid causing the hydrostatic pressure
	21 - 30	Y If LT = 1, leave blank If LT = 2, Y is the global Y coordinate of the surface of fluid causing hydrostatic pressure loading
	31 - 35	Element face number on which surface load acts. Face numbers are from 1 to 6 as

described in note (5) for uniformly distributed loads and can be only faces 2, 4 or 6 for hydrostatically varying pressures.

D. Acceleration due to gravity (F10.2)

Columns 1 - 10 Acceleration due to gravity (for calculation of mass matrix)

E. Element Load Case Multipliers (5 cards of 4F10.2)

Multipliers on the element load cases are scaling factors in order to provide flexibility in modifying applied loads.

Card 1:	Columns	1 - 10	PA	Pressure load multipliers
		11 - 20	PB	
		21 - 30	PC	
		31 - 40	PD	

PA is a factor used to scale the complete set of distributed surface loads. This scaled set of loads is assigned to element load case A. Note that zero is a valid multiplier. PB, PC and PD are similar to PA except that scaled loads are assigned to element load cases B, C and D respectively. For the majority of applications these factors should be 1.0

Card 2:	Columns	1 - 10	TA	Thermal load multipliers
		11 - 20	TB	
		21 - 30	TC	
		31 - 40	TD	

TA is a factor used to scale the complete set of thermal loads. The scaled set of loads are then assigned to element load case A. TB, TC and TD are similar and refer to element load cases B, C and D respectively.

Card 3:	Columns	1 - 10	GXA	Gravity load multipliers for + X global direction
		11 - 20	GXB	
		21 - 30	GXC	
		31 - 40	GXD	
Card 4:	Columns	1 - 10	GYA	Gravity load multipliers for + Y global direction
		11 - 20	GYB	
		21 - 30	GYC	
		31 - 40	GYD	
Card 5:	Columns	1 - 10	GZA	Gravity load multipliers for + Z global direction
		11 - 20	GZB	
		21 - 30	GZC	
		31 - 40	GZD	

Gravity loads are computed from the weight density of the material and from the geometry of the element. GXA is a multiplier which reflects the location of the gravity axis and any load factors used. The program computes the weight of the element, multiplies it by GXA and assigns the resulting loads to the + X direction of element load case A. Consequently GXA is the product of the component of gravity along the + X global axis (from - 1.0 to 1.0) and any desired load factor. GXB, GXC and GXD are similar to GXA and refer to element load cases B, C and D respectively. GYA and GZA refer to the global Y and Z directions respectively.

F. Element Cards (12I5,4I2,2I1,F10.2)

Columns		
1 - 5	Element number	
6 - 10	Global node point numbers corresponding to element nodes (See note (3))	1
11 - 15		2
16 - 20		3
21 - 25		4
26 - 30		5
31 - 25		6
36 - 40		7
41 - 45		8
46 - 50	Integration Order	
51 - 55	Material Number	
56 - 60	Generation Parameter (INC)	
61 - 62	LSA	LSA is the distributed surface load set identification number of the distributed load acting on this element to be assigned to element load case A. LSB, LSC and LSD refer to element load cases B, C and D respectively
63 - 64	LSB	
65 - 66	LSC	
67 - 68	LSD	
69 - 70	Face numbers for stress output	
71 - 80	Stress-free element temperature	

NOTES/

(1) Element Generation

1. Element cards must be in ascending order
2. Generation is possible as follows:
   If a series of element cards are omitted,
   a. Nodal point numbers are generated by adding INC to those of the preceding element. (If omitted, INC is set equal to 1.)
   b. Same material properties are used as for the preceding element.
   c. Same temperature is used for succeeding elements.

d. If on first card for the series the integration order is:
   >0 Same value is used for succeeding elements.
   = 0 A new element stiffness is not formed. Element stiffness is assumed to be identical to that of the preceding element.
   <0 Absolute value is used for the first element of the series, and the same element stiffness is used for succeeding elements.

e. If on first card for the series, the distributed load number (for any load case) is:
   >0 Same load is applied to succeeding elements.
   <0 The load case is applied to this element but not to succeeding elements in the series.

3. Element card for the last element must be supplied.

(2) Integration Order

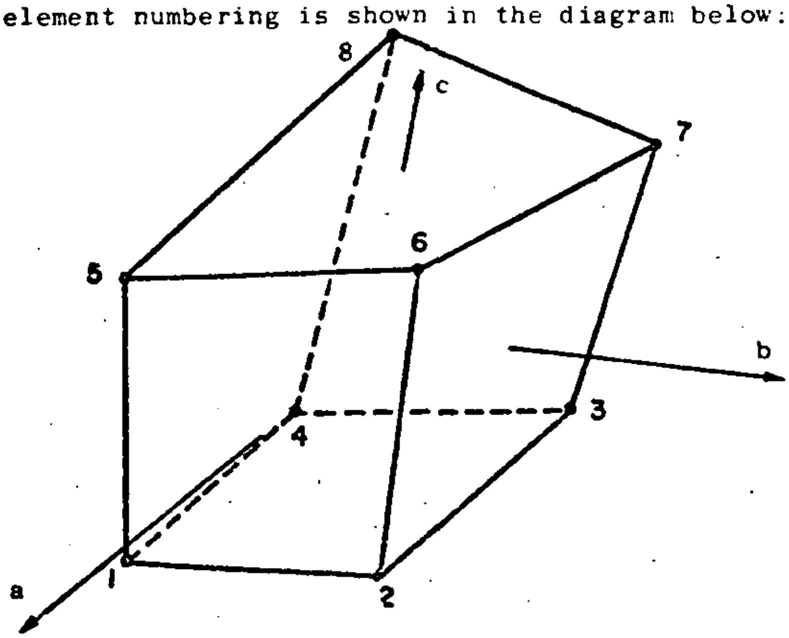
Computation time (for element stiffness) increases with the third power of the integration order. Therefore, the smallest satisfactory order should be used. This is found to be:

- 2 for rectangular element
- 3 for skewed element
- 4 may be used if element is extremely distorted in shape, but not recommended.

Mesh should be selected to give "rectangular" elements as far as possible.

(3) Element Coordinate System

Local element coordinate system is a natural system for this element in which the element maps onto a cube. Local element numbering is shown in the diagram below:



(4) Identification of Element Faces

Element faces are numbered as follows:

Face 1 corresponds to + a direction
2 corresponds to - a direction
3 corresponds to + b direction
4 corresponds to - b direction
5 corresponds to + c direction
6 corresponds to - c direction
0 corresponds to the center of the element

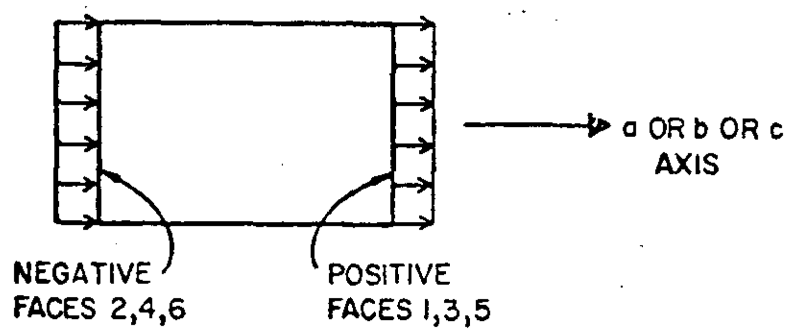
Faces 1,3,5 are positive faces

Faces 2,4,6 are negative faces

(5) Distributed Surface Loads

Two types of surface loadings may be specified; load type 1 (LT = 1), uniformly distributed surface load and load type 2 (LT = 2), hydrostatically varying surface pressure (but not surface tension). Both loading types are for loads normal to the surface and do not include surface shears. Surface loadings that do not fall into these categories must be input as nodal loads on the concentrated load data cards (see Section V).

(1) LT = 1: A positive surface load acts in the direction of the outward normal of a positive element face and along the inward normal of a negative element face as shown in the following diagram.



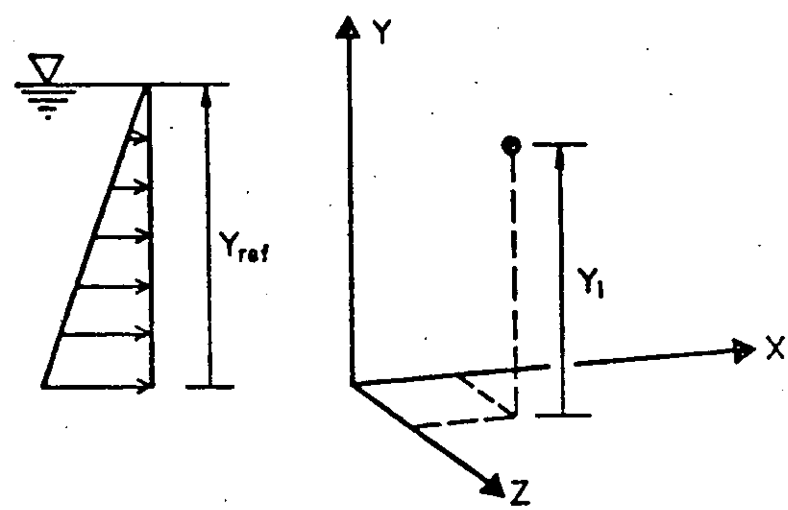
POSITIVE SURFACE LOADING P

If the uniformly distributed surface loading P is input as a positive quantity then it describes pressure loading on faces 2, 4 or 6 and tensile loading on faces 1, 3 or 5. If P is input as a negative quantity then it describes tensile loading on faces 2, 4 or 6 and pressure on faces 1, 3 or 5.

(2) LT = 2: A hydrostatically varying surface pressure on element faces 2, 4 or 6 can be specified by a reference fluid surface and a fluid weight density γ as input. Only one hydrostatic surface pressure card need be input in order to specify a hydrostatic loading on the complete structure. The consistent nodal loads are calculated by the program as follows. At each numerical integration point "i" on an element surface the pressure P_i is calculated from

$$P_i = \gamma \, (Y_i - Y_{ref})$$

where Y_i is the global Y coordinate of the point in question and Y_{ref} specifies the fluid surface assuming gravity acts along the -Y axis



If $P_i > 0$, corresponding to surface tension, the contribution is ignored. If an element face is such that $Y_i > Y_{ref}$ for all i (16 integration points are used by program) then no nodal loads will be applied to the element. If some $P_i > 0$ and some $P_i < 0$ for a particular face, then approximate nodal loads are obtained for the partially loaded surface.

(6). Thermal Loads

Thermal loads are computed assuming a constant temperature increase ΔT throughout the element.

$\Delta T = T_{avg} - T_o$

T_{avg} = the average of the 8 nodal point temperatures specified on nodal point data cards

T_o = stress free element temperature specified on the element card.

(7). Element Load Cases

Element load case A consists of all the contributions from distributed loadings, thermal loadings and gravity loading for all the elements taken collectively.

Load case A = Σ (PA x pressure loading
+ TA x thermal loading
+ GXA x gravity X loading
+ GYA x gravity Y loading
+ GZA x gravity Z loading)

Element load case A for the set of three dimensional solid elements is added to element load case A for the other element types in the analysis. The treatment of element load cases B, C and D is analogous to that of element load case A. The loading cases for the structure are obtained by adding linear combinations of element load cases A, B, C and D to the nodal loads specified on the joint data cards.

(8) Output of Element Stresses

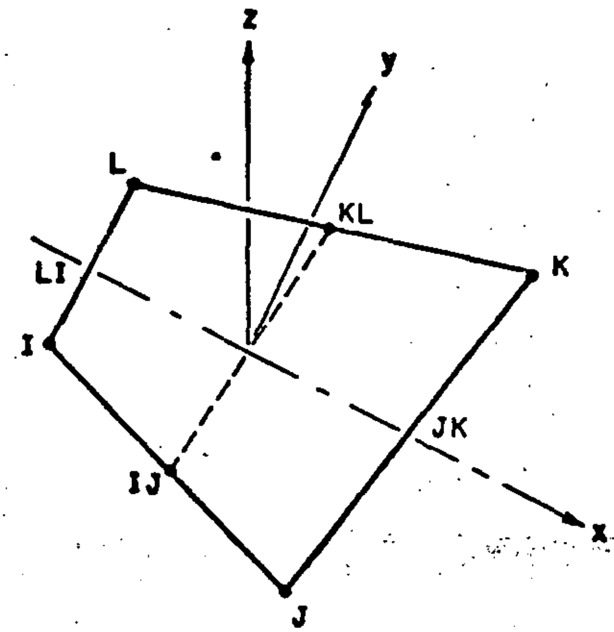
1. At the centroid of the element, stresses are referred to the global axes. Three principal stresses are also presented.

2. At the center of an element face, stresses are referred to a set of local axes (x,y,z). These local axes are individually defined for each face as follows: Let nodal points I, J, K and L be the four corners of the element face. Then

   x is specified by LI - JK, where LI and JK are midpoints of sides L-I and J-K,

   z is normal to x and to the line joining midpoints IJ and KL.

   y is normal to x and z, to complete the right-handed system.



The corresponding nodal points I, J, K and L in each face are given in the table.

FACE	NODAL POINTS			
	I	J	K	L
1	1	2	6	5
2	4	3	7	8
3	3	7	6	2
4	4	8	5	1
5	8	5	6	7
6	4	1	2	3

Two surface principal stresses and the angle between the algebraically largest principal stress and the local x axis are printed with the output. It is optional to choose one or two locations of an element where stresses are to be computed. In the output, "face zero" designates the centroid of the element.

TYPE 6 - PLATE AND SHELL ELEMENTS (QUADRILATERAL)

A. Control Card (3I5)

Columns	1 - 5	The number 6
	6 - 10	Number of shell elements
	11 - 15	Number of different materials

B. Material Property Information

Anisotropic material properties are possible. For each different material, two cards must be supplied.

Card 1: (I10,20X,4F10.0)

Columns	1 - 10	Material identification number
	31 - 40	Mass density
	41 - 50	Thermal expansion coefficient α_x
	51 - 60	Thermal expansion coefficient α_y
	61 - 70	Thermal expansion coefficient α_{xy}

Card 2: (6F10.0)

Columns	1 - 10	Elasticity element C_{xx}
	11 - 20	Elasticity element C_{xy}
	21 - 30	Elasticity element C_{xs}
	31 - 40	Elasticity element C_{yy}
	41 - 50	Elasticity element C_{ys}
	51 - 60	Elasticity element G_{xy}

Elements in plane stress material matrix [C]

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xs} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{xx} & C_{xy} & C_{xs} \\ C_{xy} & C_{yy} & C_{ys} \\ C_{xs} & C_{ys} & G_{xy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

C. Element Load Multipliers (5 cards)

Card 1: (4F10.0)

Columns	1 - 10	Distributed lateral load multiplier for load case A
	11 - 20	Distributed lateral load multiplier for load case B
	21 - 30	Distributed lateral load multiplier for load case C
	31 - 40	Distributed lateral load multiplier for load case D

Card 2: (4F10.0)

Columns	1 - 10	Temperature multiplier for load case A
	11 - 20	Temperature multiplier for load case B
	21 - 30	Temperature multiplier for load case C
	31 - 40	Temperature multiplier for load case D

Card 3: (4F10.0)

Columns	1 - 10	X-direction acceleration for load case A
	11 - 20	X-direction acceleration for load case B
	21 - 30	X-direction acceleration for load case C
	31 - 40	X-direction acceleration for load case D

Card 4: (4F10.0) Same as Card 3 for Y-direction

Card 5: (4F10.0) Same as Card 3 for Z-direction

D. Element Cards (8I5,F10.0)

One card for each element

Columns	1 - 5	Element number
	6 - 10	Node I
	11 - 15	Node J
	16 - 20	Node K
	21 - 25	Node L
	26 - 30	Node 0
	31 - 35	Material identification (if left blank, taken as one)
	36 - 40	Element data generator K_n
	41 - 50	Element thickness
	51 - 60	Distributed lateral load (pressure)
	61 - 70	Mean temperature variation T from the reference level in undeformed position
	71 - 80	Mean temperature gradient $\partial T/\partial z$ across the shell thickness (a positive temperature gradient produces a negative curvature).

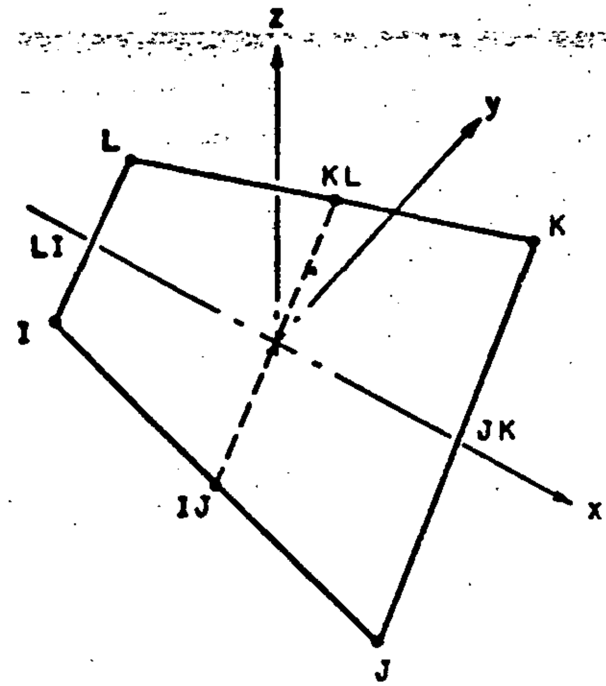
NOTES/

(1) Nodal Points and Coordinate Systems

The nodal point numbers I, J, K and L are in sequence in a counter-clockwise direction around the element. The local element coordinate system (x, y, z) is defined as follows:

- x Specified by LI - JK, where LI and JK are midpoints of sides L-I and J-K.
- z Normal to x and to the line joining midpoints IJ and KL.
- y Normal to x and z to complete the right-handed system.

This system is used to express all physical and kinematic shell properties (stresses, strains, material law, etc.), except that the body force density is referred to the global coordinate system (X, Y, Z).



For the analyses of shallow shells, rotational constraints normal to the surface may be imposed by the addition of boundary elements at the nodes (element type #7).

(2) Node 0

When columns 26 - 30 are left blank, mid-node properties are computed by averaging the four nodes.

(3) Element Data Generation

Element cards must be in element number sequence. If element cards are omitted, the program automatically generates the omitted information as follows:

The increment for element number is one

i.e. $NE_{i+1} = NE_i + 1$

The corresponding increment for nodal number is K_n

i.e. $NI_{i+1} = NI_i + K_n$

$NJ_{i+1} = NJ_i + K_n$

$NK_{i+1} = NK_i + K_n$

$NL_{i+1} = NL_i + K_n$

Material identification, element thickness, distributed lateral load, temperature and temperature gradient for generated elements are the same. Always include the complete last element card.

(4) Element Stress Calculations

Output are moments per unit length and membrane stresses.

TYPE 7 - BOUNDARY ELEMENTS

This element is used to constrain nodal displacements to specified values, to compute support reactions and to provide linear elastic supports to nodes. If the boundary condition code for a particular degree of freedom is specified as 1 on the structure nodal point data cards, the displacement corresponding to that degree of freedom is zero and no support reactions are obtained with the printout. Alternatively, a boundary element can be used to accomplish the same effect except that support reactions are obtained since they are equal to the member end forces of the boundary elements which are printed. In addition the boundary element can be used to specify non-zero nodal displacements in any direction which is not possible using the nodal point data cards.

The boundary element is defined by a single directed axis through a specified nodal point, by a linear extensional stiffness along the axis or by a linear rotational stiffness about the axis. The boundary element is essentially a spring which can have axial displacement stiffness and axial rotational stiffness. There is no limit to the number of boundary elements which can be applied to any joint to produce the desired effects. Boundary elements have no effect on the size of the stiffness matrix.

INPUT DATA

A. Control Card (2I5)

Columns	1 - 5	The number 7.
	6 - 10	Total number of boundary elements.

B. Element Load Multipliers (4F10.0)

Columns	1 - 10	Multiplier for load case A
	11 - 20	Multiplier for load case B
	21 - 30	Multiplier for load case C
	31 - 40	Multiplier for load case D

C. Element Cards (8I5,3F10.0)

One card per element (in ascending nodal point order) except where automatic element generation is used.

Columns	1 - 5	Node N,	at which the element is placed
	6 - 10	Node I	Leave columns 11 - 25 blank if only node I is needed.
	11 - 15	Node J	
	16 - 20	Node K	
	21 - 25	Node L	
	26 - 30	Code for displacement	
	31 - 35	Code for rotation	
	36 - 40	Data generator K_n	
	41 - 50	Specified displacement along element axis	
	51 - 60	Specified rotation about element axis	
	61 - 70	Spring stiffness (set to 10^{10} if left blank) for both extension and rotation.	

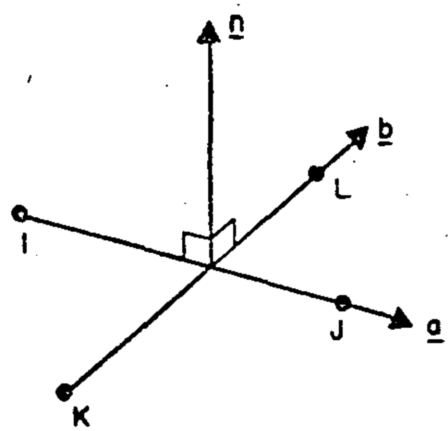
NOTES/

(1) Direction of boundary element

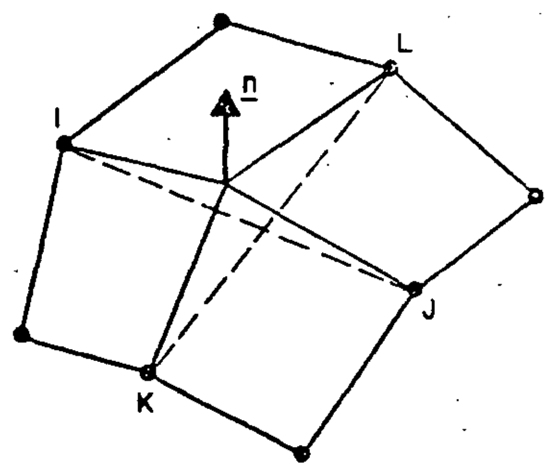
The direction of the boundary element at node N is specified in one of two ways.

(i) A second nodal point I defines the direction of the element from node N to node I.

(ii) Four nodal points I, J, K and L specify the direction of the element as the normal to the plane defined by two intersecting straight lines (vectors $\underline{a}$ and $\underline{b}$, see Fig. below).



$\underline{n} = \underline{a} \times \underline{b}$



ROTATIONAL CONSTRAINT IN THIN SHELL ANALYSIS

The four points I, J, K and L need not be unique. A useful application for the analysis of shallow thin shells employs the boundary element to approximate rotational constraint about the surface normal as shown above.

$\underline{n}$ is given by the vector cross product $\underline{n} = \underline{a} \times \underline{b}$ and defines the direction of the boundary element.

Note that node I in case (i) and nodes I, J, K and L in case (ii) are used only to define the direction of the element and if convenient may be any nodes used to define other elements. However 'artificial nodes' may be created to define directions of boundary elements. These 'artificial nodes' are input on the nodal point data cards with their coordinates and with all the boundary condition codes specified as 1 (one).

It should be noted that node N is the structure node to which the boundary element is attached. In case (i), a positive displacement moves node N towards node I. Correspondingly, a positive force in the element means compression in the element. In case (ii), a positive displacement moves node N into the direction n (see Fig.).

(2) Displacement and rotation codes

Displacement code = 1: When this code is used, the displacement δ, specified in columns 41-50, and the spring stiffness k, specified in columns 61-70, are used by the program in the following way. The load P, evaluated from $P = k\delta$, is applied to node N in the direction node N to node I in case (i) and into direction n in case (ii), if δ is positive. If k is much greater than the stiffness of the structure at node N without the boundary element, then the net effect is to produce a displacement very nearly equal to δ at node N. If $\delta = 0$, then $P = 0$ and the stiff spring approximates a rigid support. Note that the load P will contribute to the support reaction for nonzero δ. The boundary condition codes specified on the structure nodal point data cards must be consistent with the fact that a load P is being applied to node N to effect the desired displacement (even when this displacement is zero).

Rotation code = 1: This case is analogous to the situation described above. A torque T, evaluated from $T = k\,\theta$, is applied to node N about the axis (direction) of the element. The rotation θ is specified in columns 51-60.

(3) Data generator K_n

When a series of nodes are such that:

(i) All have identical boundary elements attached
(ii) All boundary elements have same direction
(iii) All specified displacements and rotations are identical
(iv) The nodal sequence forms an arithmetic sequence, i.e., N, $N + K_n$, $N + 2K_n$ etc.,

then only the first and last node in the sequence need be input. The increment K_n is input in columns 36-40 of the first card.

(4) Element load multipliers

Each of the four possible element load cases A, B, C and D associated with the boundary elements consists of the complete set of displacements as specified on the boundary element cards multiplied by the element load multiplier for the corresponding load case. As an example, suppose that displacement of node N is specified as 1.0, spring stiffness as 10^{10} and no other boundary element displacements are specified. Let case A multiplier be 0.0 and case B multiplier be 2.0. For element load case A the specified displacement is $0.0 \times 1.0 = 0.0$ while that for B is $2.0 \times 1.0 = 2.0$. Linear combinations of element load cases A, B, C and D for all types of elements collectively for a particular problem are specified on the structure element load multiplier cards. As far as the boundary element is concerned, this device is useful when a particular node has a support displacement in one load case but is fixed in others.

(5) Recommendations for use of boundary elements

If a boundary element is aligned with a global displacement direction, only the corresponding diagonal element in the stiffness matrix is modified. Therefore, no stiffness matrix ill-conditioning results. However, when the boundary element couples degrees of freedom, large off-diagonal elements introduce ill-conditioning into the stiffness matrix which can cause solution difficulties.

In the analysis of shallow shells boundary elements with stiffness a fraction of the element bending stiffness should be used (say less than or about 10%).

In dynamic analysis "artificially stiff" boundary elements should not be used. (See note (8) in Section VII.A).

TYPE 8 - VARIABLE-NUMBER-NODES THICK SHELL AND THREE-DIMENSIONAL ELEMENTS

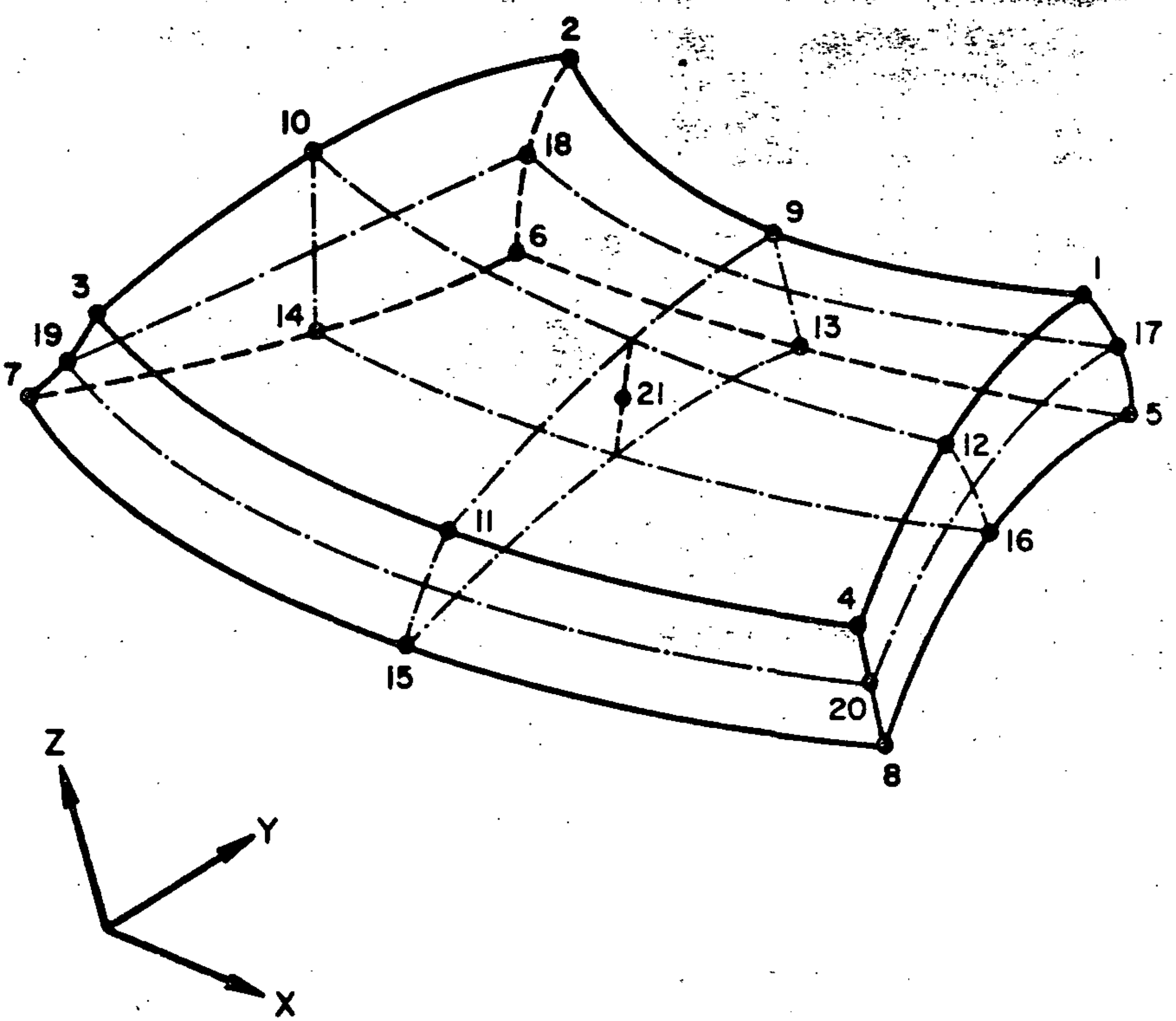
A minimum of 8 and a maximum of 21 nodes are used to describe a general three dimensional isoparametric element; the element is used to represent orthotropic, elastic media. The element type is identified by the number eight (8). Three translational degrees of freedom are assigned to each node, and at least the eight corner nodes must be input to define a hexahedron. Input of nodes 9 to 21 is optional; the figures below illustrate some of the most commonly used node combinations.

Element load cases (A,B,C,...) are formed from combinations of applied surface pressure, hydrostatic loads, inertia loads in the three directions X,Y,Z and thermal loads. Six global stresses are output at up to seven (7) locations within the element; these output locations are selected by means of appropriate data entries.

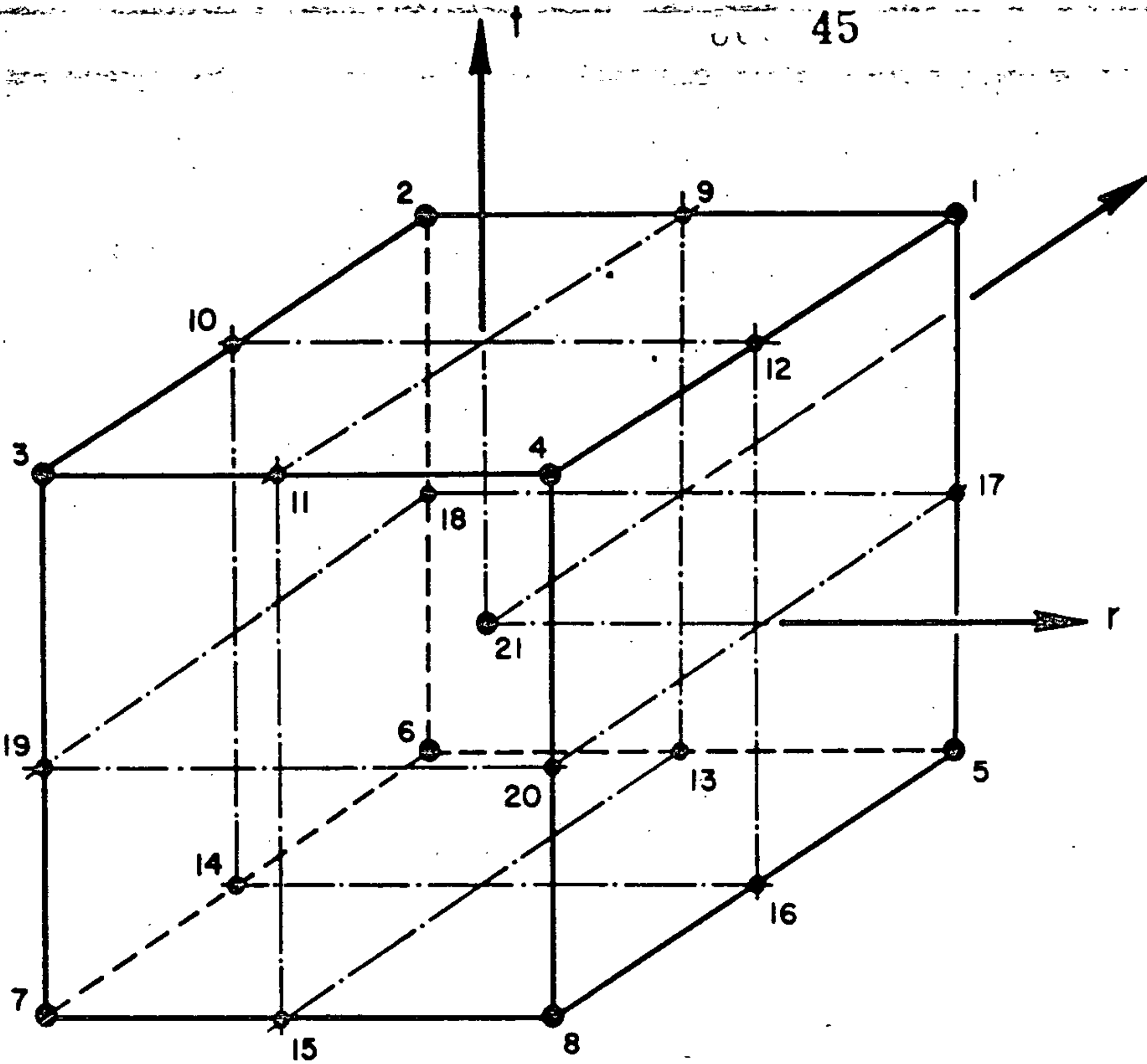
Node temperatures input in Section III are used to form an average element temperature, which is the basis of material property selection for the element. If thermal loads are applied, node temperatures are used to establish the temperature field within the element, and the temperature interpolation functions are the same as those assumed to represent element displacements.

1. Control Card (10I5)

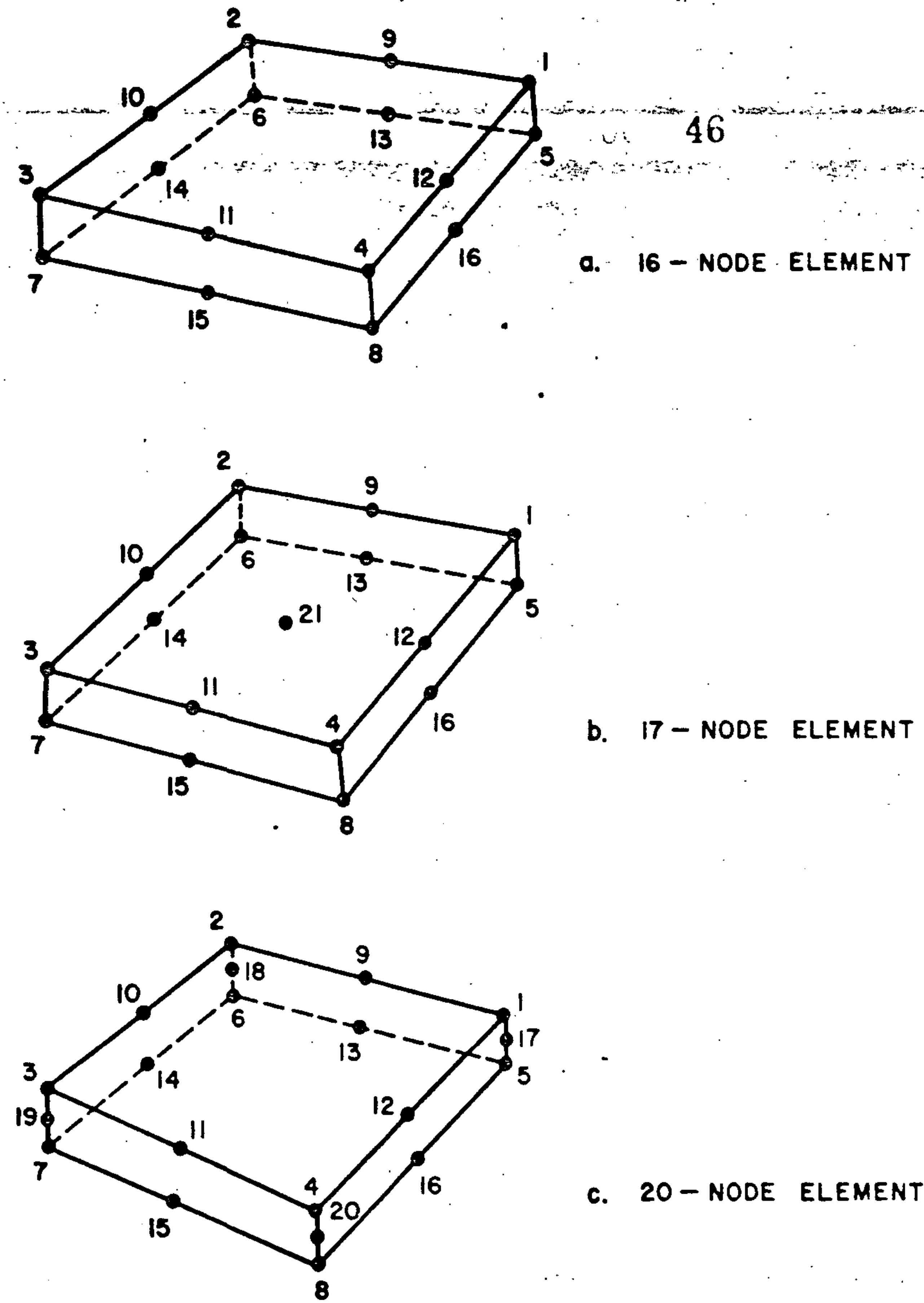
notes	columns	variable	entry
	5		Enter the number "8"
	6 - 10	NSOL21	Number of solid elements; GE.1
	11 - 15	NUMMAT	Number of different materials; GE.1
(1)	16 - 20	MAXTP	Maximum number of temperature points used in the table for any material; EQ.0; default set to "1"
(2)	21 - 25	NORTHO	Number of different sets of material axis orientation data; EQ.0; all properties are defined in the X,Y,Z, system
(3)	26 - 30	NDLS	Number of different distributed load (i.e., pressure) sets
(4)	31 - 35	MAXNOD	Maximum number of nodes used to describe any one element; GE.8 and LE.21 EQ.0; default set to "21"
(5)	36 - 40	NOPSET	Number of sets of data requesting stress output at various element locations; EQ.0; centroid output only



THREE DIMENSIONAL ISOPARAMETRIC ELEMENT



HEXAHEDRAL ELEMENT IN NATURAL COORDINATES



COMMONLY USED ELEMENT GEOMETRIES

T.8

IV. ELEMENT DATA (continued)

1. Control Card (10I5) (continued)

notes	columns	variable	entry
(6)	41 - 45	INTRS	Standard integration order for the natural (r,s) directions; GE.2 and LE.4 EQ.0; default set to "2"
	46 - 50	INTT	Standard integration order for the natural (t)-direction; GE.2 and LE.4 EQ.0; default set to "2"

NOTES/

(1) The variable MAXTP limits the number of temperature points that can be input for any one of the NUMMAT material sets; i.e., the variable NTP in Section 2 cannot exceed the value of MAXTP.

(2) NORTHO specifies the number of cards to be read in Section 3, and if omitted, all orthotropic material axes are assumed to coincide with the global cartesian axes X,Y,Z.

(3) NDLS specifies the number of card pairs to be read in Section 4. NDLS must be a positive integer if any pressure loads are to be applied to solid element faces.

(4) MAXNOD specifies the maximum number of non-zero node numbers assigned to any one of the NSOL21 elements input in Section 7. Locations of the element's 21 possible nodes are shown in the figure below in which the element is shown mapped into its natural r,s,t coordinate system. The eight corner nodes must be input for every element, and nodes 9 to 21 are input optionally. If MAXNOD is 9 or greater, all 21 node entries are read for each element (Cards 2 and 3, Section 7), but only the first MAXNOD non-zero entries encountered when reading in sequence from 1 to 21 will be used for element description. As an example, for the 16-17- and 20-node elements MAXNOD has values of 16, 17, 20, respectively.

(5) As a means of controlling the amount of solution output, stress output location sets are defined in Section 5, and the total number of these output requests is specified by the variable NOPSET. For the case of NOPSET.EQ.0, no data is input in Section 5, and the only stress output produced by the program is at the element centroid. Otherwise, stress output can be requested at up to seven (7) locations (selected from a table of 27 possible locations) by means of the data entries given in Section 5.

NOTES (continued)

(6) The entries INTRS and INTT control the number of integration points to be used in numerical evaluation of integrals over volumes in the (r,s) and (t)-coordinate directions, respectively. When solid elements are used to represent shell structures, the through-the-thickness integrations (i.e., in the natural t-axis direction) can be evaluated less accurately than those in-plane (i.e., in the r,s plane). For this case INTRS might be 3 and INTT would be chosen typically as 2. The entries INTRS and INTT are standard or reference values and are used if the integration order entries on the element cards (Card 1, Section 7) are omitted. Non-zero entries for integration order(s) given on the element cards over-ride the standard values posted on this card.

2. Material Property Cards

Orthotropic, temperature dependent material properties are allowed. For each different material that is requested on the Control Card, the following set of data must be supplied (i.e., NUMMAT sets total):

a. Material identification card (2I5,2F10.0,6A6)

notes	columns	variable	entry
(1)	1 - 5	M	Material identification number; GE.1 and LE.NUMMAT
	6 - 10	NTP	Number of different temperatures at which properties are given; LE.MAXTP EQ.0; default set to "1"
(2)	11 - 20	WTDEN	Weight density of the material used to computed static gravity loads
	21 - 30	MASSDN	Mass density of the material used to compute the mass matrix in a dynamic analysis; EQ.0; default set to "WTDEN/386.4"
	31 - 66		Material description used to label the output.

NOTES:

(1) Material numbers (M) must be input in ascending sequence beginning with "1" and ending with "NUMMAT"; omissions or repetitions are illegal.

(2) Weight density is used to compute static node forces due to applied gravity loads; mass density is used to calculate element mass matrices for use in connection with a dynamic analysis.

b. Material cards (7F10.0,6F10.0)

NTP pairs of cards are input in order of algebraically increasing value of temperature.

First Card

notes	columns	variable	entry
(1)	1 - 10		Temperature, T_n
(2)	11 - 20		E_{11} at T_n
	21 - 30		E_{22} at T_n
	31 - 40		E_{33} at T_n
	41 - 50		ν_{12} at T_n
	51 - 60		ν_{13} at T_n
	61 - 70		ν_{23} at T_n

Second Card

notes	columns	variable	entry
	1 - 10		G_{12} at T_n
	11 - 20		G_{13} at T_n
	21 - 30		G_{23} at T_n
	31 - 40		α_1 at T_n
	41 - 50		α_2 at T_n
	51 - 60		α_3 at T_n

NOTES/

(1) The 12 entries following the temperature value T_n are physical properties known at T_n. When two or more temperature points describe a material, interpolation based on average element temperature is performed to establish a property set for the element. Hence, the range of temperature points for a material table must span the expected range of average element temperatures for all elements associated with the material.

(2) The 12 constants $(E_{11}, E_{22}, \ldots, \alpha_3)$ are defined with respect to a set of axes (X_1, X_2, X_3) which are the principal material directions for an orthotropic, elastic medium. The stress-strain relations with respect to the (X_1, X_2, X_3) system is written as follows :

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_{11} & -\nu_{12}/E_{22} & -\nu_{13}/E_{33} & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{21}/E_{11} & 1/E_{22} & -\nu_{23}/E_{33} & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{31}/E_{11} & -\nu_{32}/E_{22} & 1/E_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \end{bmatrix}$$

$$- [\Delta T\alpha_1 \quad \Delta T\alpha_2 \quad \Delta T\alpha_3 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$$

where ϵ_{ii} and σ_{ii} are normal strains and stresses in the X_i directions; γ_{ij} and τ_{ij} are shear strains and stresses on the principal material planes; α_i are the coefficients of thermal expansion, and ΔT is the increase in temperature from stress free distributed over the element volume.

3. Material Axes Orientation Sets (4I5)

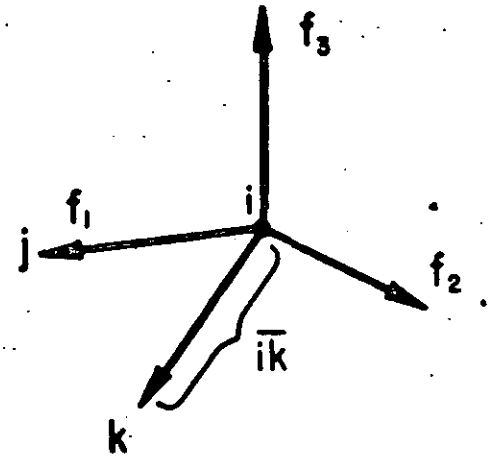
If NORTHO is zero on the Control Card, skip this data section, and all material axes (X_1,X_2,X_3) will be assumed to coincide with the global cartesian system X,Y,Z. Otherwise, NORTHO cards must be input as follows:

notes	columns	variable	entry
(1)	1 - 5	M	Identification number; GE.1 and LE.NORTHO
(2)	6 - 10	NI	Node number for point "i"
	11 - 15	NJ	Node number for point "j"
	16 - 20	NK	Node number for point "k"

NOTES/

(1) Identification numbers (M) must be input in increasing sequence beginning with "1" and ending with "NORTHO".

(2) Orthotropic material axes orientations are specified by means of the three node numbers NI,NJ,NK. For the special case where orthotropic material axes coincide with the global axes (X,Y,Z), it is not necessary to input data in this section; see Section 7, note (4). Let $\underline{f}_1$,$\underline{f}_2$,$\underline{f}_3$ be the three orthogonal vectors which define the axes of material orthotropy, then their directions are as shown below:



$$\underline{f}_1 = \overleftrightarrow{ij}$$

$$\underline{f}_3 = \overleftrightarrow{ij} \times \overleftrightarrow{ik}$$

$$\underline{f}_2 = \underline{f}_3 \times \underline{f}_1$$

Node numbers NI,NJ,NK are only used to locate points i,j,k, respectively, and any convenient nodes may be used.

4. Distributed Surface Load Data

NDLS pairs of cards are to be input in this section in order of increasing set number (N). These data describe surface loads acting on element faces and may be prescribed directly in terms of face corner node pressures or indirectly by means of a hydrostatic pressure field.

a. Control Card (3I5)

notes	columns	variable	entry
(1)	1 - 5	N	Load set identification number; GE.1 and LE.NDLS
(2)	6 - 10	NFACE	Element face number on which this distributed load is acting; GE.1 and LE.6
(3)	11 - 15	LT	Load type code; EQ.1; prescribed normal pressure intensities EQ.2; hydrostatically varying pressure field EQ.0; default set to "1"

NOTES/

(1) The surface load data sets established in this section are assigned to the elements in Section 7.

(2) Hexahedra have six quadrilateral faces each uniquely described by four node numbers at the corners of the face. The face number convention established for elements is given in the Table below.

(3) Two types of surface pressure loads may be applied to faces of the elements. If LT.EQ.0 (or 1), a normal pressure distribution is prescribed directly by means of pressure intensities at the face corner nodes. If LT.EQ.2, the face is exposed to hydrostatic pressure due to fluid head.

FACE NUMBER	NATURAL COORDINATES	CORNER NODE NUMBERS N_1	N_2	N_3	N_4
1	(+1, s, t)	1	4	8	5
2	(-1, s, t)	2	3	7	6
3	(r,+1, t)	1	5	6	2
4	(r,-1, t)	4	8	7	3
5	(r, s,+1)	1	2	3	4
6	(r, s,-1)	5	6	7	8

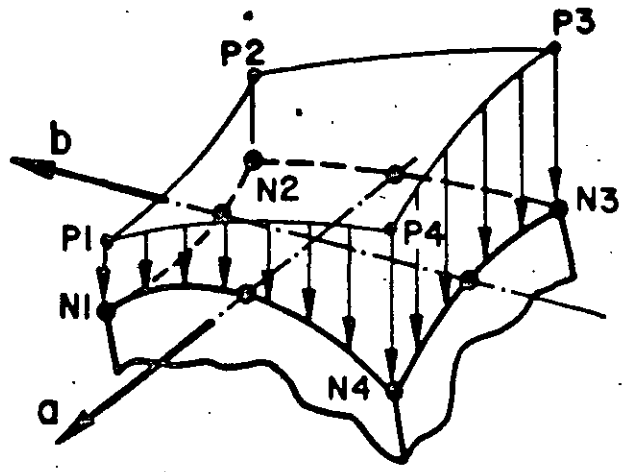
TABLE Corner Node Numbers for the Solid Element Faces

b. Normal Pressure Data (4F10.0) (LT.EQ.1, only)

notes	columns	variable	entry
(1)	1 - 10	P1	Pressure at face node N_1
(2)	11 - 20	P2	Pressure at face node N_2; EQ.0; default set to "P1"
	21 - 30	P3	Pressure at face node N_3; EQ.0; default set to "P1"
	31 - 40	P4	Pressure at face node N_4; EQ.0; default set to "P1"

NOTES/

(1) The pressure distribution acting on an element face is defined by specifying intensities P1,P2,P3,P4 at the face corner nodes as shown below:



The face corner node numbers are given in the Table and positive pressure tends to compress the volume of the element.

The variation of pressure over the element face, p(a,b), is given as:

$$p(a,b) = P1 \times h_1 + P2 \times h_2 + P3 \times h_3 + P4 \times h_4$$

where

$$h_1 = (1/4)\ (1+a)\ (1+b)$$
$$h_2 = (1/4)\ (1-a)\ (1+b)$$
$$h_3 = (1/4)\ (1-a)\ (1-b)$$
$$h_4 = (1/4)\ (1+a)\ (1-b)$$

in quadrilateral natural face coordinates (a,b).

(2) If any of the entries P2,P3,P4 are omitted, these values are re-set to the value of P1; i.e., for a uniformly distributed pressure (p), we have P1.EQ.p and cc 11-40 blank. If P2 is zero specify a small number.

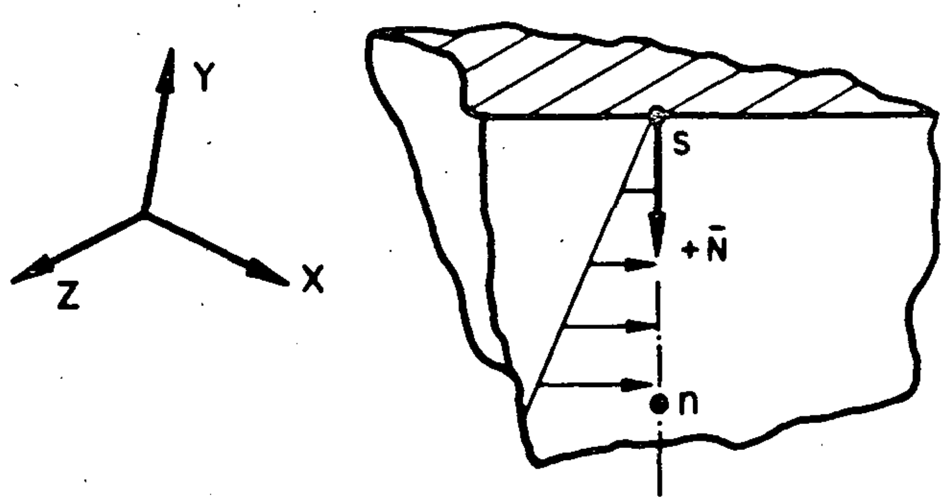
c. Hydrostatic Pressure Data (7F10.0) (LT.EQ.2, only)

notes	columns	variable	entry
(1)	1 - 10	GAMMA	Weight density of the fluid, γ; GT.0
(2)	11 - 20	XS	X-ordinate of point s in the free surface of the fluid
	21 - 30	YS	Y-ordinate of point s in the free surface of the fluid
	31 - 40	ZS	Z-ordinate of point s in the free surface of the fluid
	41 - 50	XN	X-ordinate of a point n on the normal to the fluid surface
	51 - 60	YN	Y-ordinate of a point n on the normal to the fluid surface
	61 - 70	ZN	Z-ordinate of a point n on the normal to the fluid surface

NOTES/

(1) GAMMA is the weight density (i.e., units of force per unit of fluid volume) of the fluid in contact with element face number NFACE.

(2) Point "s" is any point in the free surface of the fluid, and point "n" is located such that the direction from s to n is normal to the free surface and is positive with increasing depth.



Hydrostatic pressure in contact with an element face causes element compression; i.e., pressure resultant acts toward the element centroid. Nodes located above the fluid surface are automatically assigned zero pressure intensities if an element face is not (or only partially) submerged in the fluid.

5. Stress Output Request Location Sets (7I5)

If NOPSET is zero on the Control Card, skip this section, and global stresses will be computed and output at the element centroid only. Otherwise, NOPSET cards must be input as follows:

notes	column	variable	entry
(1)	1 - 5	LOC1	Location number of output point 1
	6 - 10	LOC2	Location number of output point 2
	11 - 15	LOC3	Location number of output point 3
	16 - 20	LOC4	Location number of output point 4
	21 - 25	LOC5	Location number of output point 5
	26 - 30	LOC6	Location number of output point 6
	31 - 35	LOC7	Location number of output point 7 LE. 27

NOTES/

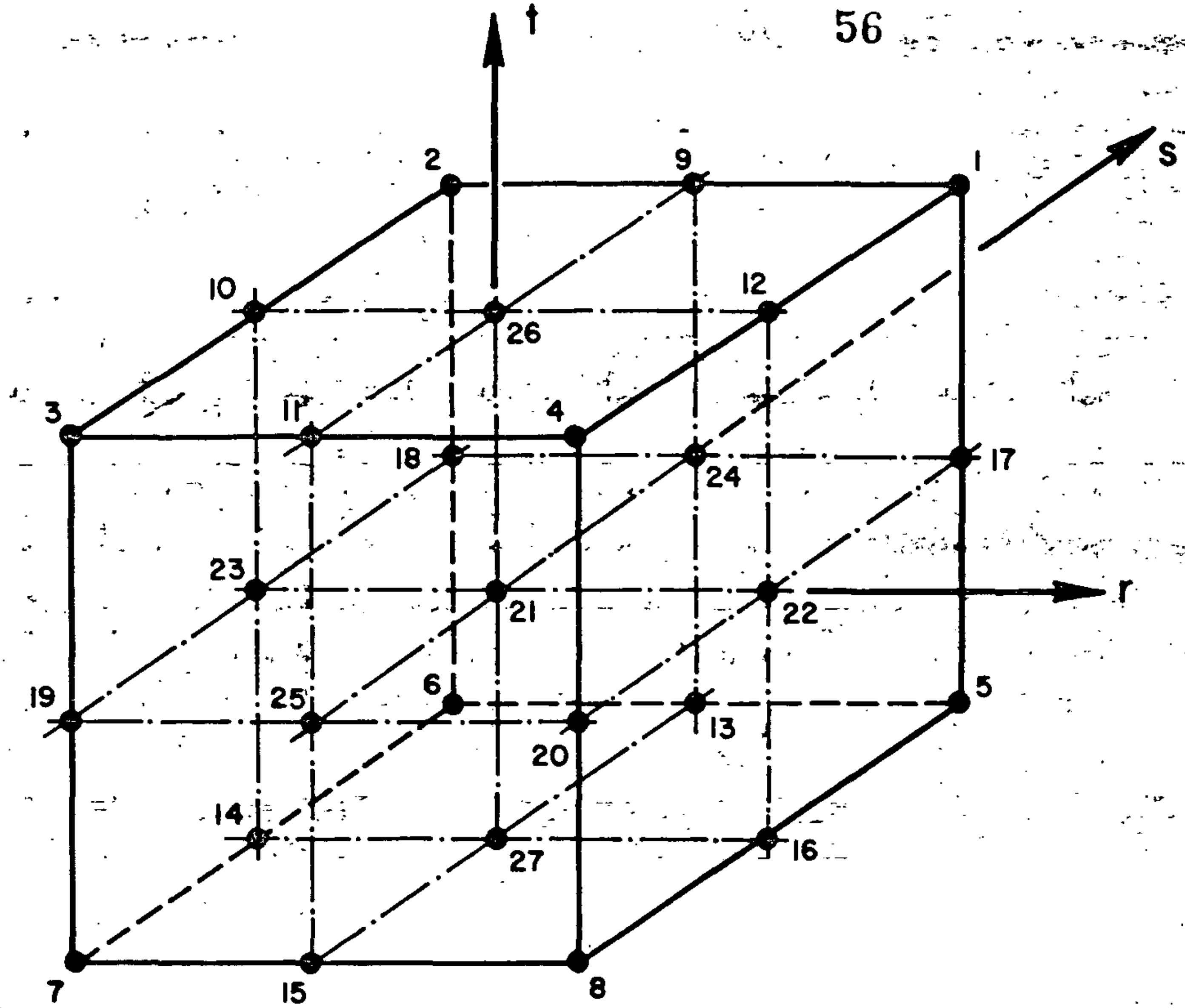
(1) 27 element locations are assigned numbers as shown in the Figure below. Locations 1 to 21 correspond to node numbers 1 to 21, respectively. Locations 22 to 27 are element face centroids. The first zero (or blank) entry on a location card terminates reading of location numbers for the output set; hence, fewer than seven locations can be requested in an output set. Location numbers must be input in order of increasing magnitude; i.e., LOC2 is greater than LOC1, LOC3 is greater than LOC2, etc. In dynamic analysis, FACE 1, FACE 2,..., FACE 6 correspond to output locations 22,23,...,27 respectively. (See Table VII.1).

6. Element Load Case Multipliers

Five (5) cards must be input in this section specifying the fraction of gravity (X,Y,Z), the fraction of thermal loads and the fraction of pressure loads to be added to each of the element loading combinations (A,B,...). Load case multiplier data affect static analysis calculations only.

Card 1 X-direction gravity (4F10.0)

notes	columns	variable	entry
(1)	1 - 10	GXA	Fraction of X-direction gravity to be applied in element load case A
			. . .
	31 - 40	GXD	Fraction of X-direction gravity to be applied in element load case D



ELEMENT STRESS OUTPUT LOCATION NUMBERS

T.8

IV. ELEMENT DATA (continued)

Card 2 Y-direction gravity (4F10.0)

Card 3 Z-direction gravity (4F10.0)

Card 4 Thermal loads (4F10.0)

notes	columns	variable	entry
(2)	1 - 10	TA	Fraction of thermal loads to be applied in element load case A
			. . .
	31 - 40	TD	Fraction of thermal loads to be applied in element load case D

Card 5 Pressure loads (4F10.0)

notes	columns	variable	entry
(3)	1 - 10	PA	Fraction of pressure loads to be applied in element load case A
			. . .
	31 - 40	PD	Fraction of pressure loads to be applied in element load case D

NOTES/

(1) Gravity loads on the structure due to static body forces are computed from the weight density of element materials and the element geometry. These loads are assigned to the element load combinations by means of the entries on Cards 1,2 and 3 for forces in the X,Y,Z directions, respectively.

(2) Thermal loads are computed knowing the node temperatures input in Section III, the stress free reference temperature (T_o) input in Section 7 and the element's material properties and node coordinates. The temperature distribution within the element is described using the same interpolation functions which describe the variation of displacements within the element.

(3) Pressure loads are first assigned to element load cases (A,B,...) by means of the entries (scale factors) on Card 5, and the distributed load sets which were input in Section 4 are then applied to the elements individually for cases (A,B,...) by means of load set references given in Section 7.

7. <u>Element Cards</u>

Two cards (if MAXNOD.EQ.8) or three cards (if MAXNOD.GT.8) must be prepared for each element that appears in the input, and the format for these cards is as follows:

Card 1 (6I5,F10.,4I5,4I2)

notes	columns	variable	entry
(1)	1 - 5	M	Element number; GE.1 and LE.NSOL21
(2)	6 - 10	NDIS	Number of nodes to be used in describing the element's displacement field; EQ.0; default set to "MAXNOD"
(3)	11 - 15	NXYZ	Number of nodes to be used in the description of element geometry; EQ.0; default set to "NDIS" EQ.NDIS → isoparametric element LT.NDIS → subparametric element
	16 - 20	NMAT	Material identification number; GE.1 and LE.NUMMAT
(4)	21 - 35	MAXES	Identification number of the material axis orientation set; GE.1 and LE.NORTHO EQ.0; material axes default to the global X,Y,Z system
(5)	26 - 30	IOP	Identification number of the stress output location set; GE.1 and LE.NOPSET EQ.0; centroid output only
	31 - 40	TZ	Stress free reference temperature, T_o
(6)	41 - 45	KG	Node number increment for element data generation; EQ.0; default set to "1"
	46 - 50	NRSINT	Integration order for natural coordinate (r,s) directions; EQ.0; default set to "INTRS"
	51 - 55	NTINT	Integration order for natural coordinate (t) direction; EQ.0; default set to "INTT"
(7)	56 - 60	IREUSE	Flag indicating that the stiffness and mass matrices for this element are the same as those for the preceding element; EQ.0; no EQ.1; yes
(8)	61 - 62	LSA	Pressure set for element load case A
	63 - 64	LSB	Pressure set for element load case B
	65 - 66	LSC	Pressure set for element load case C
	67 - 68	LSD	Pressure set for element load case D; LE.NDLS

IV. ELEMENT DATA (continued)

Card 2 (16I5)

notes	columns	variable	entry
(9)	1 - 5		Node 1 number
	6 - 10		Node 2 number
	11 - 15		Node 3 number
	16 - 20		Node 4 number
	21 - 25		Node 5 number
	26 - 30		Node 6 number
	31 - 35		Node 7 number
	36 - 40		Node 8 number
(10)	41 - 45		Node 9 number
	46 - 50		Node 10 number
	51 - 55		Node 11 number
	56 - 60		Node 12 number
	61 - 65		Node 13 number
	66 - 70		Node 14 number
	71 - 75		Node 15 number
	76 - 80		Node 16 number

Card 3 (5I5) (required if MAXNOD.GT.8)

note	columns	variable	entry
	1 - 5		Node 17 number
	6 - 10		Node 18 number
	11 - 15		Node 19 number
	16 - 20		Node 20 number
	21 - 25		Node 21 number

NOTES/

(1) Element cards must be input in ascending element number order beginning with "1" and ending with "NSOL21". Repetition of element numbers is illegal, but element cards may be omitted, and missing element data are generated according to the procedure described in note (7).

(2) NDIS is a count of the node numbers actually posted on Cards 2 and 3 which must immediately follow Card 1. NDIS must be at least eight (8), but must be less than or equal to the limit (MAXNOD) which was given on the Control Card, Section 1. Element displacements are assigned at the NDIS non-zero nodes, and thus, the order of the element matrices is three (i.e., translations X,Y,Z) times NDIS. The eight corner nodes of the hexahedron must be input, but nodes 9 to 21 are optional, and any or all of these optional nodes may be used to describe the element's displacement field.

(3) When element edges are straight it is unnecessary computationally to include side nodes in the numerical evaluation of coordinate derivatives, the Jacobian matrix, etc., and since regular element shapes are common, an option has been included to use fewer nodes in these geometric calculations than are used to describe element displacements. The first NXYZ non-zero nodes posted on Cards 2 and 3 are used to evaluate those parameters which pertain to element geometry only. NXYZ must be at least eight (8), and if omitted is re-set to NDIS. A common application might be a 20 node element (i.e., NDIS.EQ.20) with straight edges in which case NXYZ would be entered as "8".

(4) MAXES (unless omitted) refers to one of the material axes set defined in Section 3. If omitted, the material (NMAT) orientation is such that the (X_1,X_2,X_3) axes coincide with the (X,Y,Z) axes, respectively.

(5) IOP (unless omitted) refers to one of the output location sets given in Section 5. If IOP.EQ.0, stress output is quoted at the element centroid only. Stress output at a point consists of three normal and three shear components referenced to the global (X,Y,Z) axes.

(6) When element cards are omitted, element data are generated automatically as follows:

  (a) all data on Card 1 for generated elements is taken to be the same as that given on the first element card in the sequence;

  (b) non-zero node numbers (given on Cards 2 and 3 for the first element) are incremented by the value "KG" (which is given on Card 1 of the first element) as element generation progresses; zero (or blank) node number entries are generated as zeroes.

The last element cannot be generated.

(7) The flag IREUSE allows the program to bypass stiffness and mass matrix calculations providing the current element is identical to the preceding element; i.e., the preceding and current elements are identical except for a rigid body translation. If IREUSE.EQ.0, new matrices are computed for the current element. If IREUSE.EQ.1 it is also assumed that the node temperatures of the element (for calculation of thermal loads) are the same as those of the preceding element.

(8) Pressure loads are assigned (i.e., applied) to the element by means of load set references in cc 61-62 for combination A, cc 63-64 for B, etc. A zero entry means that no pressure acts on the element for that particular element load combination.

(9) The first eight node numbers establish the corners or vertices of a general hexahedron and must be all non-zero, (see Figure in Section 1 on control cards). Node numbers must be input in the sequence indicated otherwise volume and surface area integrations will be indefinite.

(10) The number of cards required as input for each element depends on the variable MAXNOD. For the case of MAXNOD.EQ.8, only Card 2 is required. If MAXNOD.GT.8, Cards 2 and 3 are required for all elements.

Nodes 9 to 21 are optional, and only those nodes actually used to describe the element are input. The program will read all 21 entries if MAXNOD was given as 9 or greater, but only NDIS non-zero values are expected to be read on Cards 2 and 3. If for example one element is described by 10 nodes, then cc 1-40 on Card 2 would be the eight corner node numbers, and the remaining two node numbers would be posted somewhere on Cards 2 and 3.

TYPE 9 - THREE-DIMENSIONAL STRAIGHT OR CURVED PIPE ELEMENTS

Pipe elements are identified by the number twelve (12). Axial and shear forces, torque and bending moments are calculated for each member. Gravity loadings in the global (X,Y,Z) directions, uniform temperature changes (computed from input nodal temperatures), and extensional effects due to internal pressure form the basic member loading conditions. Pipe element input is described by the following sequence of cards:

1. Control Card (14I5)

notes	columns	variable	entry
	4 - 5		Enter the number "12"
(1)	6 - 10	NPIPE	Number of pipe elements
	11 - 15	NUMMAT	Number of material sets
	16 - 20	MAXTP	Maximum number of temperature points used in the table for any material GE.1; at least one point
	21 - 25	NSECT	Number of section property sets; GE.1
(2)	26 - 30	NBRP	Number of branch point nodes at which output is required; EQ.0; no branch point output is produced
	31 - 35	MAXTAN	Maximum number of tangent elements common to any one branch point node; EQ.0; default set to "4"
	36 - 40	NPAR(8)	Blank
	41 - 45	NPAR(9)	Tangent stiffness load matrix dump flag EQ.1; Print EQ.0; Suppress printing
	46 - 50	NPAR(10)	Bend stiffness load matrix dump flag EQ.1; Print EQ.0; Suppress printing
	51 - 55	NPAR(11)	Element parameters dump flag EQ.1; Print EQ.0; Suppress printing

NOTES/

(1) The number of pipe elements ("NPIPE") counts both tangent and bend geometries, and both the material and section property tables can reference either the bend or tangent element types.

(2) A branch point is defined as a nodal location where at least three (3) tangent pipe elements connect. The two input parameters "NBRP" and "MAXTAN" reserve storage for an index array created during the processing of pipe element data; posting a larger number of maximum common tangents than actually exist is not considered a fatal error condition. Branch point data is read if requested, but not currently used; i.e. to be used in future program versions.

T.9

2. Material Property Cards

Temperature-dependent Young's modulus (E), Poisson's ratio (ν) and thermal expansion coefficient (α) are allowed. If more than one (1) temperature point is input for a material table, then the program selects properties using linear interpolation between input temperature values. The temperature used for property selection is the average element temperature which is denoted as T_a:

$$T_a = (T_i + T_j)/2$$

where T_i and T_j are the input nodal temperatures for ends "i" and "j" of the pipe. For each different material, the following set of cards must be input:

a. material identification card (2I5,6A6)

notes	columns	variable	entry
(1)	1 - 5	M	Material identification number; GE.1 and LE.NUMMAT
	6 - 10	NT	Number of different temperatures at which properties are given; EQ.0; one temperature point is assumed to be input
	11 - 46		Material description used to label the output for this material

NOTES/

(1) Material identification number must be input between one ("1") and the total number of materials specified ("NUMMAT")

b. material cards (4F10.0)

notes	columns	variable	entry
(1)	1 - 10	T(N)	Temperature, T_n
	11 - 20	E(N)	Young's modulus, E_n
	21 - 30	XNU(N)	Poisson's ratio, ν_n
	31 - 40	ALP(N)	Thermal expansion coefficient, α_n

NOTES/

(1) Supply one card for each temperature point in the material table; at least one card is required. Temperatures must be input in increasing (algebraic) order. If two or more points are used, care must be taken to insure that the table covers the expected range of average temperatures existing in the elements to which the material table is assigned.

3. Section Property Cards (I5,5F10.0,3A6)

notes	columns	variable	entry
(1)	1 - 5	N	Section property identification number; GE.1 and LE.NSECT
(2)	6 - 15		Outside diameter of the pipe, d_o
	16 - 25		Pipe wall thickness, t
	26 - 35		Shape factor for shear distortion, α_v
(3)	36 - 45		Weight per unit length of section, γ_1
(4)	46 - 55		Mass per unit length of section, ρ_1
	56 - 73		Section description (used to label the output)

NOTES/

(1) Section property identification numbers must be input in an ascending sequence beginning with one ("1") and ending with the total number of section specified ("NSECT").

(2) Assuming that (y,z) are the section axes and that the x-axis is normal to the section, the properties for the section are computed from the input parameters [d_o, t and α_v] as follows:

(a) inner and outer pipe radii;

$$r_o = d_o/2$$

$$r_i = r_o - t$$

(b) cross-sectional area (axial deformations);

$$A_x = \pi(r_o^2 - r_i^2)$$

(c) principal moments of inertia (bending);

$$I_y = (\pi/4)\ (r_o^4 - r_i^4)$$

$$I_z = I_y$$

(d) polar moment of inertia (torsion);

$$J_x = 2I_y$$

(e) effective shear areas (shear distortions);

$$A_y = A_x/\alpha_v$$

$$A_z = A_y$$

Note that the shape factor for shear distortion (α_v) may be input directly. If the entry is omitted, the shape factor is computed using the equation:

$$\alpha_v = (4/3)\ (r_o^3 - r_i^3)/[(r_o^2 + r_i^2)\ (r_o - r_i)]$$

$$\simeq 2.0$$

An input value for α_v greater than one hundred (100.) causes the program to neglect shear distortions entirely. If used, the same shape factor is applied to both in and out-of-plane shear distortions.

(3) The weight per unit length of section (γ_1) is used to compute gravity loadings on the elements. Fixed end shears, moments, torques, etc. are computed automatically and applied as equivalent nodal loads. These forces will not act on the structure unless first assigned to one of the element load cases (A,B,C,D) in Section IV.L.5, below.

(4) The mass per unit length is only used to form the lumped mass matrix for a dynamic analysis case. If no entry is input, then the program will re-define the mass density from the weight density using:

$$\rho_1 = \gamma_1/386.4$$

Either a non-zero weight density or mass density will cause the program to assign masses to all pipe element nodes.

4. Branch Point Node Numbers

If the number of output branch point nodes has been omitted from the control card (i.e., cc 26-30 blank), skip this section of input, and no branch point data will be read. Otherwise, supply node numbers for a total number of branch points requested on the control card, ten (10) nodes per card:

first card (10I5)

notes	columns	variable	entry
(1)	1 - 5		Node number at branch point 1
	6 - 10		Node number at branch point 2
	. . .		. . .
	45 - 50		Node number at branch point 10

second card (10I5) -- if required

notes	columns	variable	entry
	1 - 5		Node number at branch point 11
	. . .		. . .

NOTES/

(1) A node does not define a branch point unless at least three (3) tangent elements are common to the node. Branch point output is only produced for static analysis cases.

5. Element Load Case Multipliers

Five (5) cards must be input in this section specifying the fraction of gravity (in each of the X,Y,Z coordinate directions), the fraction of thermal loading and the fraction of internal pipe pressure loading to be added to each of four (4) possible element loading combinations (A,B,C,D).

Card 1 X-direction gravity (4F10.0)

notes	columns	variable	entry
(1)	1 - 10		Fraction of X-direction gravity to be applied in element load case A
	11 - 20		Fraction of X-direction gravity to be applied in element load case B
	21 - 30		Fraction of X-direction gravity to be applied in element load case C
	31 - 40		Fraction of X-direction gravity to be applied in element load case D

Card 2 Y-direction gravity (4F10.0)

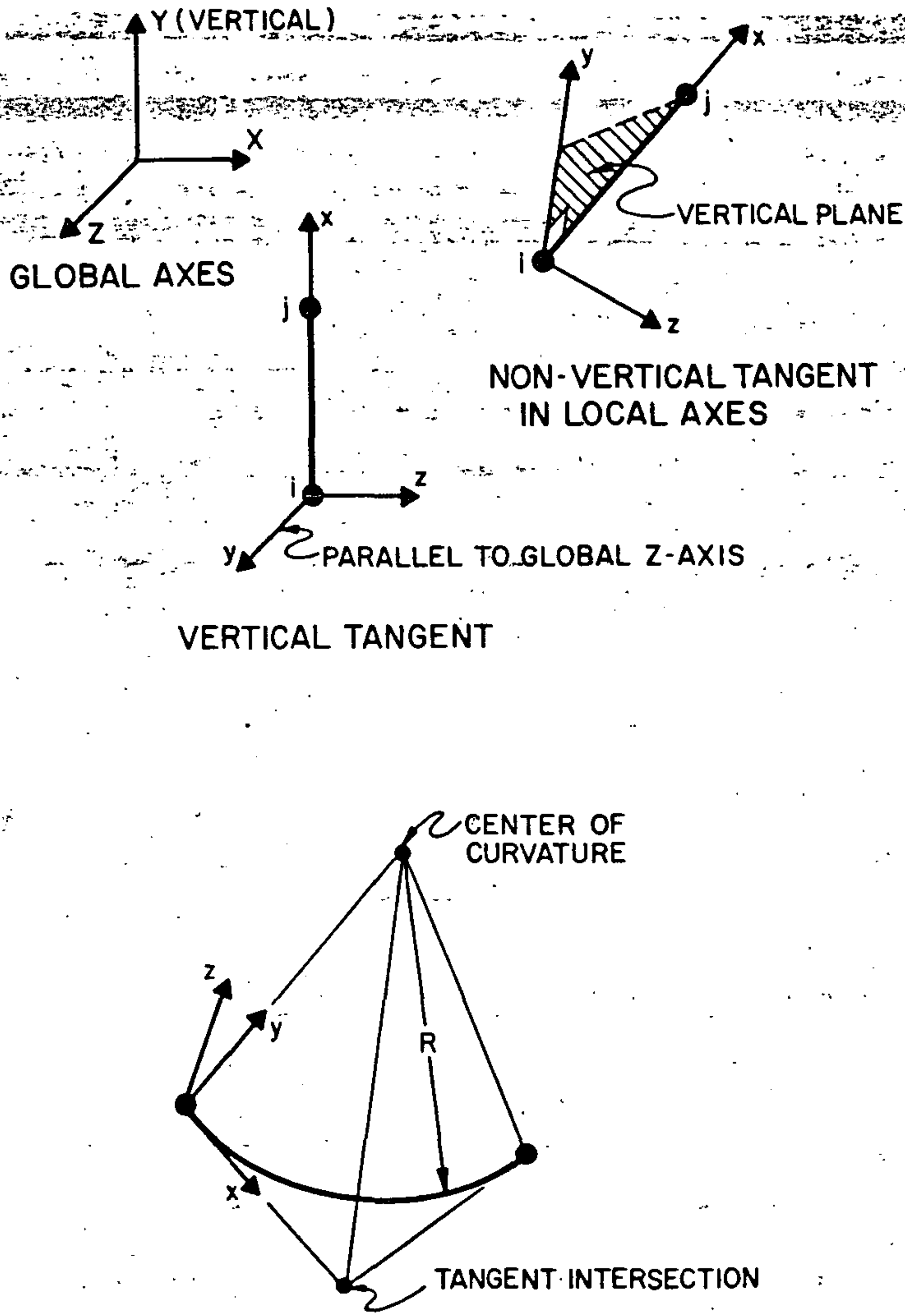
Card 3 Z-direction gravity (4F10.0)

Card 4 Thermal loads (4F10.0)

notes	columns	variable	entry
(2)	1 - 10		Fraction of thermal loading to be applied in element load case A
	11 - 20		Fraction of thermal loading to be applied in element load case B
	21 - 30		Fraction of thermal loading to be applied in element load case C
	31 - 40		Fraction of thermal loading to be applied in element load case D

Card 5 Internal pressure (4F10.0)

notes	columns	variable	entry
(3)	1 - 10		Fraction of pressure-induced loading applied in element load case A
	11 - 20		Fraction of pressure-induced loading applied in element load case B
	21 - 30		Fraction of pressure-induced loading applied in element load case C
	31 - 40		Fraction of pressure-induced loading applied in element load case D



LOCAL COORDINATE SYSTEMS FOR PIPE ELEMENTS

5. Element Load Case Multipliers (continued)

NOTES/

(1) No gravity loads will be produced if the weight per unit length was input as zero on all section property cards. Otherwise, a multiplier of 1.0 input for an element load case means that 100% of deadweight will be assigned to that load combination.

(2) No thermal loading will result if the coefficient of thermal expansion has been omitted from all the material cards. Otherwise, thermal loads are computed for each element using the ΔT between the average element temperature (T_a) and the stress-free temperature (T_o) given with each pipe element card (Section IV.L.6, below).

(3) Element distortions are computed for each element due to internal pressure, and these loads are combined into element load cases by means of appropriate non-zero entries in Card 5.

Gravity, thermal or pressure induced loads cannot act on the structure unless first combined in one or more of the element load sets (A,B,C,D). Once defined, element load cases are assigned (via scale factors) to the structure load cases by means of Element Load Multipliers given in Section VI. An element load case combination may be used a multiple number of times when defining the various structure loading conditions.

6. Pipe Element Cards

a. card type 1

notes	columns	variable	entry
(1)	1 - 4	N	Pipe element number; GE.1 and LE.NPIPE
	5		Geometric type code: "T" (or blank); tangent section "B" ; bend (circular) section
	6 - 10	I	Node I number
	11 - 15	J	Node J number
	16 - 20	MAT	Material identification number; GE.1 and LE.NUMMAT
	21 - 25	ISECT	Section property identification number; GE.1 and LE.NSECT
(2)	26 - 35		Stress-free temperature, T_o
(3)	36 - 45		Internal pressure, p
(4)	46 - 55		Positive projection of a local y-vector on the global X-axis; A(yX)

6. Pipe Element Cards (continued)

notes	columns	variable	entry
	56 - 65		Positive projection of a local y-vector on the global Y-axis; A(yY)
	66 - 75		Positive projection of a local y-vector on the global Z-axis A (yZ)
(5)	76 - 80	KG	Node number increment for tangent element generation; EQ.0; default set to "1"

NOTES/

(1) Card type 1 is used for both tangent and bend elements; a second card (card type 2, below) must be input immediately following card type 1 if the pipe element is a bend (i.e., "B" in cc 5). Note that element cards must be input in ascending sequence beginning with one ("1") and ending with the total number of pipe elements. If tangent elements are omitted, generation of the intermediate elements will occur; the generation algorithm is described below. An attempt to generate bend type elements is considered to be an error.

(2) The stress-free temperature, T_o, is subtracted from the average element temperature, T_a, to compute the uniform temperature difference acting on the element:

$$\Delta T = T_a - T_o$$

The entire element is assumed to be at this uniform value of temperature difference.

(3) The value of pressure is used to compute a set of self-equilibrating joint forces arising from member distortions due to pressurization; i.e., the mechanical equivalent of thermal loads. For bend elements, the pressure is also used to compute the bend flexibility factor, k_p. The curved pipe subjected to bending is more flexible than elementary beam theory would predict. The ratio of "actual" flexibility to that predicted by beam theory is denoted by k_p, where

$$k_p = (1.65/h)/[1 + (6p/Eh)(R/t)^{4/3}] \geq 1$$

in which

$$h = tR/r^2$$

$$r = (d_o - t)/2$$

and

t = pipe wall thickness
R = radius of the circular bend
r = mean radius of the pipe cross section
d_o = outside diameter of the pipe
E = Young's modulus
p = internal pressure

The flexibility factor is computed and applied to all bend elements; pressure stiffening is neglected if the entry for internal pressure ("p") is omitted.

(4) The global projections of the local y-axis for a tangent member may be omitted (cc 46-75 blank); for this case, the following convention for the local system is assumed:

(a) tangents parallel to the global Y-axis (vertical axis) have their local y-axes directed parallel to and in the same direction as the global Z-axis;

(b) tangents not parallel to the global Y-axis have their local y-axes contained in a vertical (global) plane such that local y projects positively on the positive global Y-axis.

For bend elements, the global projections of the local y-axis are not used; instead, the local axis convention is defined as follows:

(a) the local y-axis is directed positively toward and intersects the center of curvature of the bend (i.e., radius vector);

(b) the local x-axis is tangent to the arc of the bend and is directed positively from node I to node J.

Note that for all elements, the local x, y, z system is a right-handed set (see figure).

(5) If a tangent element sequence exists such that each element number (NE_i) is one (1) greater than the previous number (NE_{i-1}); i.e.,

$$NE_i = NE_{i-1} + 1$$

only the element card for the first tangent in the

6. Pipe Element Cards (continued)

series need be input. The node numbers for the missing tangents are computed using the formulae:

$$NI_i = NI_{i-1} + KG$$

$$NJ_i = NJ_{i-1} + KG$$

where "KG" is the node number increment input in cc 76-80 for the first element in the series, and the

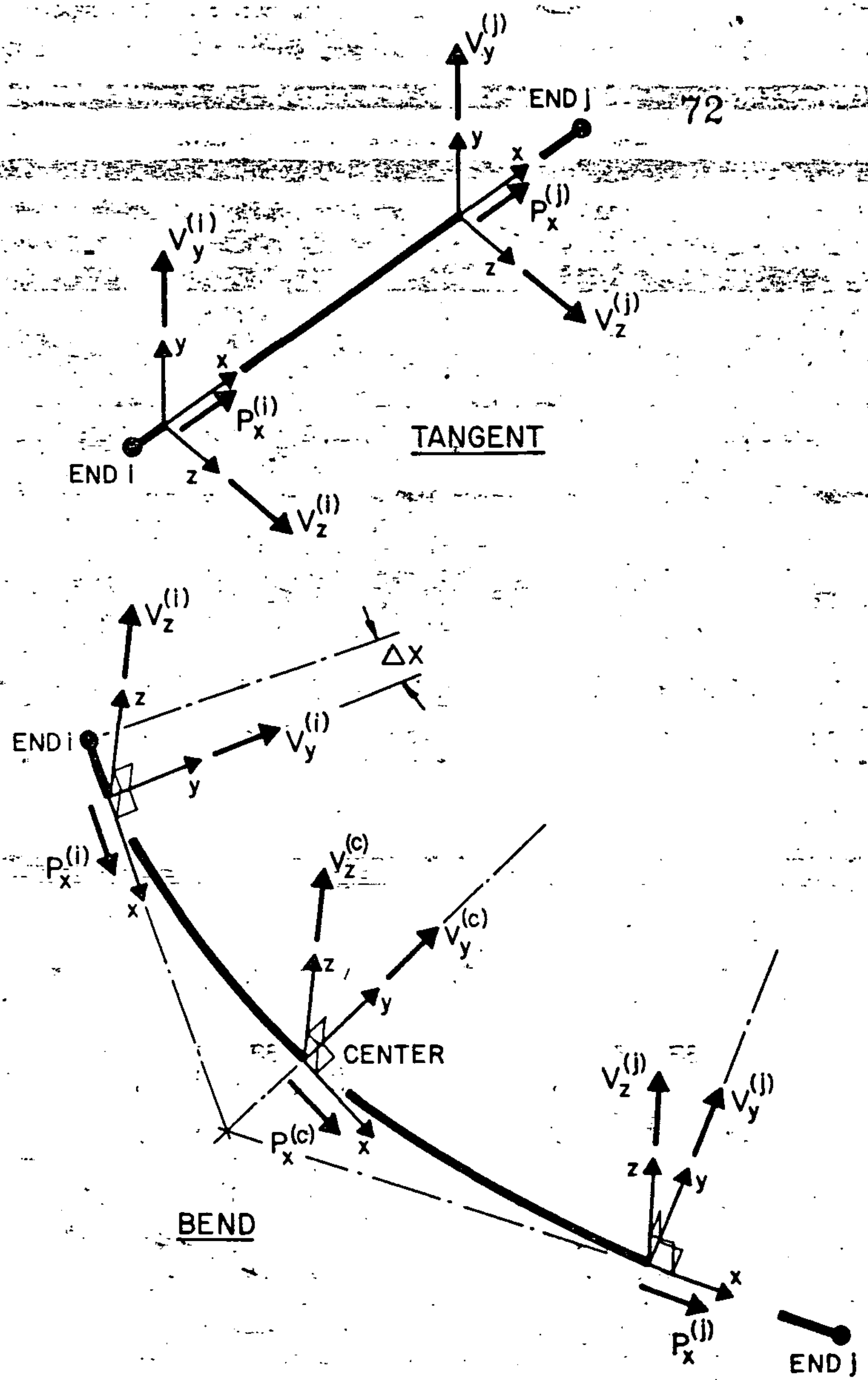
(a) material identification number
(b) section property identification number
(c) stress-free temperature
(d) internal pressure
(e) y-axis global projections

for each tangent in the generation sequence are taken to be the same as those input on the first card in the series. The node number increment ("KG") is reset to one (1) if left blank on the first card in the series. The last (highest) element cannot be generated; i.e., it must be input.

Bend element data cannot be generated because two input cards are required for each bend. Also, the element just prior to a bend element must appear on an input card. Several bends may be input in a sequence, but each bend must appear (on two cards) in the input stream.

b. card type 2 (F10.0,3X,A2,4F10.0)

notes	columns	variable	entry
(1)	1 - 10	R	Radius of the bend element, R
(2)	14 - 15		Third point type code: "TI" (or blank); third point is the tangent intersection point "CC" ; third point is the center of curvature
	16 - 25		X-ordinate of the third point, X_3
	26 - 35		Y-ordinate of the third point, Y_3
	36 - 45		Z-ordinate of the third point, Z_3
	46 - 55		Fraction of wall thickness to be used for dimensional tolerance tests; EQ.0; default set to "0.1"



FORCE SIGN CONVENTION FOR PIPE ELEMENT OUTPUT

6. Pipe Element Cards (continued)

NOTES/

(1) The radius of the bend ("R") must be input regardless of the method ("TI" or "CC") used to define the third point for the bend.

(2) If the tangent intersection point is used, the program computes a radius for the bend and compares the computed value with the input radius. An error condition is declared if the two radii are different by more than the specified fraction (or multiple) of the section wall thickness. The lengths of the two tangent lines (I to TI and J to TI) are compared for equality, and an error will be flagged if the two values are discrepant by more than the dimensional tolerance.

If the center of curvature is input, the distances from the third point to nodes I and J are compared to the input radius; discrepancies larger than the user defined tolerance are noted as errors.

This second element card is only to be input for the bend type element.

Element Stress Output

Stress output for pipe elements consists of forces and moments acting in the member cross sections at the ends of each member and at the midpoints of the arcs in bend elements. Output quantitites act on the element segment connecting the particular output station and end i; i.e., j to i, center to i, or ΔX to i (where $\Delta X \to 0$). Positive force/moment vectors are directed into the positive local (x,y,z) directions, as shown in the accompanying figure.

V. CONCENTRATED LOAD/MASS DATA (2I5,6F10.4)

notes	columns	variable	entry
(1)	1 - 5	N	Nodal point number
(2)	6 - 10	L	Structure load case number; GE.1; static analysis EQ.0; dynamic analysis
	11 - 20	FX(N,L)	X-direction force (or translational mass coefficient)
	21 - 30	FY(N,L)	Y-direction force (or translational mass coefficient)
	31 - 40	FZ(N,L)	Z-direction force (or translational mass coefficient)
	41 - 50	MX(N,L)	X-axis moment (or rotational inertia)
	51 - 60	MY(N,L)	Y-axis moment (or rotational inertia)
	61 - 70	MZ(N,L)	Z-axis moment (or rotational inertia)

NOTES/

(1) For a static analysis case (NDYN.EQ.0), one card is required for each nodal point ("N") having applied (non-zero) concentrated forces or moments. All structure load cases must be grouped together for the node ("N") before data is entered for the next (higher) node at which loads are applied. Only the structure load cases for which node N is loaded need be given, but the structure load case numbers ("L") which are referenced must be supplied in ascending order. Node loadings must be defined (input) in increasing node number order, but again, only those nodes actually loaded are required as input. The static loads defined in this section act on the structure exactly as input and are not scaled, factored, etc. by the element load case (A,B,C,D) multipliers (Section VI, below). Nodal forces arising from element loadings are combined (additively) with any concentrated loads given in this section. Applied force/moment vectors act on the structure, positive in the positive global directions. Only one card is allowed per node per load case.

For a dynamic analysis case (NDYN.EQ.1,2, 3 or 4), structure load cases have no meaning, but the program expects to read data in this section nonetheless. In place of concentrated loads, lumped mass coefficients for the nodal degrees of freedom may be input for any (or all) nodes. The mass matrix is automatically constructed by the program from element geometry and associated material densities; the mass coefficients read in this section are combined (additively) with the existing element-based lumped mass matrix. For mass input, a node may only be specified once, and the load case number ("L") must be zero (or blank).

V. CONCENTRATED LOAD/MASS DATA (2I5,6F10.4) (continued)

The program terminates reading loads (or mass) data when a zero (or blank) node number ("N") is encountered; i.e., terminate this section of input with a blank card. For the special case of a static analysis with no concentrated loads applied, input only one (1) blank card in this section. Similarly, a dynamic analysis in which the mass matrix is not to be augmented by any entries in this section requires only one (1) blank card as input.

(2) For a static analysis, structure load case numbers range from "1" to the total number of load cases requested on the Master Control Card ("LL"); thus, $1 \le L \le LL$, NDYN.EQ.0. For a dynamic analysis, only zero (0) references are allowed; thus, L = 0, NDYN.EQ.1,2 3, or 4.

VI. ELEMENT LOAD MULTIPLIERS (4F10.0)

notes	columns	variable	entry
(1,2)	1 - 10	EM(1)	Multiplier for element load case A
	11 - 20	EM(2)	Multiplier for element load case B
	21 - 30	EM(3)	Multiplier for element load case C
	31 - 40	EM(4)	Multiplier for element load case D

NOTES/

(1) One card must be given for each static (NDYN.EQ.0) structure load case requested on the Master Control Card ("LL"). The cards must reference load case numbers in ascending order. The four (4) element load sets (A,B,C,D), if created during the processing of element data (Section IV, above), are combined with any concentrated loads specified in Section V for the structure load cases. For example, suppose an analysis case calls for seven (7) static structure loading conditions (i.e., LL = 7), then the program expects to read seven (7) cards in this section. Further, suppose card number three (3) in this section contains the entries:

[EM(1),EM(2),EM(3),EM(4)] = [-3.0,0.0,2.0,0.0]

Structure load case three (3) will then be constructed using 100% of any concentrated loads specified in Section V minus (-) 300% of the loads in element set A plus (+) 200% of the loads in element set C. Load sets B and D will not be applied in structure load case 3. Element load sets may be referenced any number of times in order to construct different structure loading conditions. Element-based loads (gravity, thermal, etc.) can only be applied to the structure by means of the data entries in this section.

(2) If this case calls for one of the dynamic analysis options, supply only one blank card in this section. If the job is a dynamic re-start case (NDYN.EQ.-2 or -3), skip this section.

Static analysis input is complete with this section. Begin a new data case with a new Heading Card (see Section I).

VII. DYNAMIC ANALYSES

Four (4) types of dynamic analysis can be performed by the program. The type of analysis is indicated by the number "NDYN" specified in card columns 21-25 of the Master Control Card (Section II). If

NDYN.EQ.1; Determination of system mode shapes and frequencies only (complete input Section VII.A, only)

NDYN.EQ.2; Dynamic Response Analysis for arbitrary time dependent loads using mode superposition (complete both Sections VII.A and B below)

NDYN.EQ.3; Response Spectrum Analysis (complete both Sections VII.A and C, below)

NDYN.EQ.4; Dynamic Response Analysis for arbitrary time dependent loads using step-by-step direct integration (complete Section VII.B below)

In any given dynamic analysis case only one (1) value of NDYN will be considered. However, if NDYN.EQ.2 or 3, the program must first solve the eigenvalue problem for structure modes and frequencies. These eigenvalues/vectors are then used as input to either the Forced Response Analysis (NDYN.EQ.2) or to the Response Spectrum Analysis (NDYN.EQ.3). Hence, options 1, 2 or 3 all require that the control parameters for eigenvalue extraction be supplied in Section VII.A, below.

In case of a direct step-by-step integration analysis (NDYN.EQ.4) do not provide the eigenvalue solution control card of Section VII.A.

For the special case of dynamic analysis re-start (NDYN.EQ.-2 or -3), data input consists of the Heading Card (Section I), the Master Control Card (Section II), and either of Sections VII.B (-2) or VII.C (-3), below. Re-starting is possible only if a previous solution using the same model was performed with NDYN.EQ.1, and the results from this eigenvalue solution were saved on the re-start file. (See Appendix A.)

Up to this section the program processes (i.e., expects to read) essentially the same blocks of data for either the static or dynamic analysis cases; certain of these preceding data cards, however, are read by the program but are not used in the dynamic analysis phase. In general, the purpose of the preceding data sections is to provide information leading to the formation of the system stiffness and mass matrices (appropriately modified for displacement boundary conditions). For example, element load sets (A,B,C,D) may be constructed as though a static case were to be considered, but these data are not used in a dynamic analysis; i.e., the same data deck through Section IV can be used for either type of analysis. The concept of structure loading conditions is not defined for the dynamic case, and input for Sections V and VI must be prepared specially.

A diagonal (lumped) mass matrix is formed automatically using element geometry and assigned material density or densities. The mass matrix so defined contains only translational mass coefficients calculated from tributary element volumes common to each node. Known rotational inertias must be input for the individual nodal degrees of freedom in Section V, above.

Non-zero impressed displacements (or rotations) input by means of the BOUNDARY element (type "7") are ignored; instead the component is restrained against motion during dynamic motion of the structure.

The program does not change the order of the system by performing a condensation of those nodal degrees of freedom having no (zero) mass coefficients; i.e., a zero mass reduction is not performed. No distinction is made between static and dynamic degrees of freedom; i.e., they are identical in sequence, type and total number.

VII. DYNAMIC ANALYSES (continued)

A. MODE SHAPES AND FREQUENCIES (NDYN.EQ.1, 2 or 3) (3I5,2F10.0)

notes	columns	variable	entry
(1)	1 - 5	IFPR	Flag for printing intermediate matrices, norms, etc. calculated during the eigenvalue solution; EQ.0; do not print EQ.1; print
(2)	6 - 10	IFSS	Flag for performing the STURM SEQUENCE check; EQ.0; check to see if eigenvalues were missed EQ.1; pass on the check
(3)	11 - 15	NITEM	Maximum number of iterations allowed to reach the convergence tolerance; EQ.0; default set to "16"
(4)	16 - 25	RTOL	Convergence tolerance (accuracy) for the highest ("NF") requested eigenvalue; EQ.0; default set to "1.0E-5"
(5)	26 - 35	COFQ	Cut-off frequency (cycles/unit time) EQ.0; NF eigenvalues will be extracted GT.0; extract only those values below COFQ
(6)	36 - 40	NFO	Number of starting iteration vectors to be read from TAPE10

NOTES/

(1) Extra output produced by the eigenvalue solutions can be requested; output produced by this option can be quite voluminous. Normal output produced by the program consists of an ordered list of eigenvalues followed by the eigenvectors for each mode. The number of modes found and printed is specified by the variable "NF" given in card columns 16-20 of the Master Control Card.

(2) The program performs the solution for eigenvalues/vectors using either of two (2) distinct algorithms:

(a) the DETERMINANT SEARCH algorithm requires that the upper triangular band of the system stiffness matrix fit into high speed memory (core); i.e., one equation "block".

(b) the SUBSPACE ITERATION algorithm is used if only portions (fractions) of the system matrix can be retained in core; i.e., the matrix (even though in band form) must be manipulated in blocks.

A. MODE SHAPES AND FREQUENCIES (continued)

The program will automatically select the SUBSPACE ITERATION procedure for eigenvalue solution if the model is too large for the in-core algorithm.

The entries "IFSS", "NITEM" and "RTOL" are ignored if the program can use the DETERMINANT SEARCH to find eigenvalues. Whether or not a model is too large for the DETERMINANT SEARCH depends on the amount of core allocated (by the programmer and not the user) for array storage. The program variable "MTOT" equals the amount of working storage available.

Define:

MBAND = maximum equation bandwidth (coefficients)
≃ (maximum element node number difference) X (average number of degrees of freedom per node)

NEQ = total number of degrees of freedom in the model
= (6) X (total number of nodes) - [number of fixed (deleted) degrees of freedom]

NEQB = number of equations per block of storage
≃ MTOT/ MBAND/ 2 (for large systems)

If NEQB is less than NEQ, the model is too large for the DETERMINANT SEARCH algorithm, and the SUBSPACE ITERATION procedure will be used.

If the SUBSPACE ITERATION algorithm is used the user may request that the STURM SEQUENCE check be performed. By experience the algorithm has always produced the lowest NF eigenvalues, but there is no formal mathematical proof that the calculated NF eigenvalues will always be the lowest ones. The STURM SEQUENCE check can be used to verify that the lowest NF eigenvalues have been obtained. It should be noted that the computational effort expended in performing the STURM SEQUENCE check is not trivial. A factorization of the complete system matrix is performed at a shift just to the right of the NFth eigenvalue.

If during the SUBSPACE ITERATION the NFth eigenvalue fails to converge to a tolerance of "RTOL" (normally 1.0E-5, or 5 significant figures) within "NITEM" (normally "16") iterations, then the STURM SEQUENCE flag ("IFSS") is ignored.

(3) The maximum number of iterations to reach convergence ("NITEM") applies only to the SUBSPACE ITERATION algorithm. If cc 11-15 are left blank, a default value of "16" for NITEM is assumed.

(4) The convergence tolerance ("RTOL") is applicable only if the SUBSPACE ITERATION algorithm is used. This tolerance test applies to the NFth eigenvalue, and all eigenvalues lower than the NFth one will be more accurate than RTOL. The lowest mode is found most accurately with precision decreasing with increasing mode number until the highest requested mode ("NF") is accurate to a tolerance of RTOL. Iteration is terminated after cycle number (k+1) if the NFth eigenvalue (λ, say) satisfies the inequality:

$$[\,|\lambda(k+1) - \lambda(k)|/\lambda(k)] < RTOL$$

If the determinant search algorithm is used, the eigenpairs are obtained to a high precision, which is indicated by the "physical error bounds"

$$\epsilon_i = \|r_i\|_2 \,/\, \|K\phi_i\|_2$$

where

$$r_i = (K - \omega_i^2 M)\,\phi_i \,,$$

and (ω_i^2 ϕ_i) are the i'th eigenvalue and eigenvector obtained in the solution.

(5) The cut-off frequency ("COFQ") is used by both eigenvalue algorithms to terminate computations if all eigenvalues below the specified frequency have been found.

The DETERMINANT SEARCH algorithm computes eigenvalues in order from "1" to "NF". If the Nth eigenvalue ($1 \le N < NF$) has a frequency greater than "COFQ", the remaining (NF-N) eigenvalues are not computed.

A. MODE SHAPES AND FREQUENCIES (continued)

The SUBSPACE ITERATION algorithm terminates calculation when the Nth eigenvalue is accurate (i.e., does not change with iteration) to a tolerance of RTOL. As before, the Nth eigenvalue is the nearest eigenvalue higher than COFQ. If the SUBSPACE ITERATION solution determines N eigenvalues less than COFQ (where, $N < NF$) , the STURM SEQUENCE check (if requested) is performed using the Nth (rather than the NFth) eigenvalue as a shift.

Only those modes whose frequencies are less than COFQ will be used in the TIME HISTORY or RESPONSE SPECTRUM analyses (Sections VII.B and C, below).

(6) The starting iteration vectors, together with control information, must be written onto TAPE10 before the program execution is started. Appendix B describes the creation of TAPE10 and gives the required control cards.

(7) The program does not calculate rigid body modes, i.e. the system must have been restraint so that no rigid body modes are present. In exact arithmetic the element d_{nn} of the matrix D in the triangular factorization of the stiffness matrix, i.e. $K = LDL^T$, is zero if a rigid body mode is present. In computer arithmetic the element d_{nn} is small when compared with the other elements of the matrix D. If this condition occurs the program stops with a message.

Note: If many "artificially" stiff boundary elements are used, the average of the elements of D will be artificially large. Consequently, d_{nn} may be small in comparison, and although no rigid body modes may be present, the program will stop. In a dynamic analysis it is recommended not to use very stiff boundary elements.

END OF DATA CASE INPUT (NDYN.EQ.1)

B. RESPONSE HISTORY ANALYSIS (NDYN.EQ.2 or NDYN.EQ.4)

The NDYN.EQ.2 option uses the ("NF") mode shapes and frequencies computed in the preceeding Section (VII.A) to perform a mode superposition solution for forced response. The NDYN.EQ.4 option initiates a direct step-by-step integration of the coupled system equations, i.e. no eigenvalue solution has been performed and no transformation to the eigenvector basis is now carried out. The data input is identical to the case NDYN.EQ.2 except for the definition of damping. Dynamic response can be produced by two (2) general types of forcing function:

(1) ground acceleration input in any (or all) of the three (3) global (X,Y,Z) directions;

and/or

(2) time varying loads (forces/moments) applied in any (or all) nodal degrees of freedom (except - "slave" - degrees of freedom).

Time dependent forcing functions (whether loads or ground acceleration components) are described in two steps. First, a number (1 or more are possible) of non-dimensional time functions are specified tabularly by a set of descrete points: $[f(t_i),t_i]$, where $i = 1,2,\ldots,k$. Each different time function may have a different number of definition points (k). A particular forcing function applied at some point on the structure is then defined by a scalar multiplier ("β", say) and reference to one of the input time functions ("f(t)", say). The actual force (or acceleration) at any time ("τ", say) equals $\beta \times f(\tau)$; $f(\tau)$ is found by linear interpolation between two of the input time points $\{t_i, t_{i+1}\}$, where $t_i \le \tau \le t_{i+1}$.

Assuming that the solution begins at time zero (0), an independent arrival time (t_a, where $t_a \ge 0$) may be assigned to each forcing function. The forcing function is not applied to the system until the solution time ("τ", say) equals the arrival time, t_a. Interpolation for function values is based on relative time within the function table; i.e., $g(\tau) = f(\tau - t_a)$.

The structure is assumed to be at rest at time zero; i.e., zero initial displacements and velocities are assumed at time of solution start.

The following data are required for a Forced Dynamic Response Analysis:

1. Control Card (5I5,2F10.0)

notes	columns	variable	entry
(1)	1 - 5	NFN	Number of different time functions; GE.1

B. RESPONSE HISTORY ANALYSIS (continued)

notes	columns	variable	entry
(2)	6 - 10	NGM	Ground motion indicator; EQ.0; no ground motion is input EQ.1; read ground motion control card (Section VII.B.3)
(3)	11 - 15	NAT	Number of different arrival times for the forcing functions; EQ.0; all arrival times are zero
(4)	16 - 20	NT	Total number of solution time steps; GE.1
(5)	21 - 25	NOT	Output print interval for stresses, displacements, etc. GE.1 and LE.NT
(4)	26 - 35	DT	Solution time step, Δt; GT.0
(6)	36 - 45	DAMP	Damping factor to be applied to all NF modes (fraction of critical); GE.0

In case of NDYN.EQ.4 use

notes	columns	variable	entry
(6)	36 - 45	ALPHA	Damping factor α
(7)	46 - 55	BETA	Damping factor β

NOTES/

(1) At least one (1) time function must be input.

(2) If no ground acceleration acts on the structure, set "NGM" to zero and skip Section VII.B.3, below. Both ground acceleration and nodal force input are allowed.

(3) If no arrival time values are input, all forcing functions begin acting on the structure at time zero. The same arrival time value may be referenced by different forcing functions. "NAT" determines the number of non-zero entries that the program expects to read in Section VII.B.4, below.

(4) The program performs a step-by-step integration of the equations of motion using a scheme which is unconditionally stable with respect to time step size, Δt. In case NDYN.EQ.2 the modal uncoupled equations of motion are integrated. In case NDYN.EQ.4 the coupled system equations are integrated. If "T" is the period of the highest numbered mode (normally the NFth mode) that is to be included in the response calculation, Δt should be chosen such that $\Delta t/T < 0.1$. A

B. RESPONSE HISTORY ANALYSIS (continued)

larger time step (i.e., $\Delta t > 0.1T$) will not cause failure (instability), but participation of the higher modes is "filtered" from the predicted response. In general, with increasing time step size the solution is capable of capturing less of the higher frequency participation.

(5) The program computes system displacements at every solution time step, but printing of displacements and recovery of element stresses is only performed at solution step intervals of "NOT". NOT must be at least "1" and is normally selected in the range of 10 to 100.

(6) The damping factor ("DAMP") is applied to all NF modes. The admissible range for DAMP is between 0.0 (no damping) and 1.0 (100% of critical viscous damping).

(7) In case NDYN.EQ.4 the damping matrix used is $C = \alpha M + \beta K$, where α and β are defined in columns 36 to 55.

B. RESPONSE HISTORY ANALYSIS (continued)

2. Time-Varying Load Cards (4I5,F10.0)

notes	columns	variable	entry
(1)	1 - 5	NP	Nodal point number where the load component (force or moment) is applied; GE.1 and LE.NUMNP EQ.0 last card only
(2)	10	IC	Degree of freedom number; GE.1 and LE.6 (δX=1, δY=2, δZ=3, ΦX=4, ΦY=5, ΦZ=6)
(3)	11 - 15	IFN	Time function number; GE.1 and LE.NTFN
(4)	16 - 20	IAT	Arrival time number; EQ.0; load applied at solution start GE.1; non-zero arrival time
(5)	21 - 30	P	Scalar multiplier for the time function; EQ.0; no load applied

NOTES/

(1) One card is required for each nodal degree of freedom having applied time varying loads. Cards must be input in ascending node point order. This sequence of cards must be terminated with a blank card. A blank card must be supplied even if no loads are applied to the system.

(2) The same node may have more than one degree of freedom loaded; arrange degrees of freedom references ("IC") in ascending sequence at any given node.

(3) A non-zero time function number ("IFN") must be given for each forcing function. IFN must be between 1 and NFN. The time functions are input tabularly in Section VII.B.5, below. Function values at times between input time points are computed with linear interpolation.

(4) If "IAT" is zero (or blank), the forcing function is assumed to act on the system beginning at time zero. If IAT is input as a positive integer between 1 and NAT, the IATth arrival time (defined in Section VII.B.4, below) is used to delay the application of the forcing function; i.e., the forcing function begins acting on the structure when the solution reaches the IATth arrival time value.

(5) The actual magnitude of force (or moment) acting on the model at time, t, equals the product: ("P") x (value of function number "IFN" at time, t).

3. Ground Motion Control Card (6I5)

notes	columns	variable	entry
(1)	1 - 5	NFNX	Time function number describing the ground acceleration in the X-direction
	6 - 10	NFNY	Time function number describing the ground acceleration in the Y-direction
	11 - 15	NFNZ	Time function number describing the ground acceleration in the Z-direction
(2)	16 - 20	NATX	Arrival time number, X-direction
	21 - 25	NATY	Arrival time number, Y-direction
	26 - 30	NATZ	Arrival time number, Z-direction

NOTES/

(1) This card must be input only if the ground motion indicator ("NGM") was set equal to one (1) on the Control Card (Section, VII.B.1, above). A zero time function number indicates that no ground motion is applied for that particular direction.

(2) Zero arrival time references mean that the ground acceleration (if applied) begins acting on the structure at time zero (0). Non-zero references must be integers in the range 1 to NAT.

B. RESPONSE HISTORY ANALYSIS (continued)

4. Arrival Time Cards

a. card one (8F10.0)

notes	columns	variable	entry
(1)	1 - 10	AT(1)	Arrival time number 1
	11 - 20	AT(2)	Arrival time number 2
		. . .	. . .
	71 - 80	AT(8)	Arrival time number 8

b. card two (8F10.0) - (required if NAT.GT.8)

notes	columns	variable	entry
	1 - 10	AT(9)	Arrival time number 9
		etc.	etc.

NOTES/

(1) The entry ("NAT") given in cc 11-15 on the Control Card (Section VII.B.1, above) specifies the total number of arrival time entries to be read in this section. Input as many cards as are required to define "NAT" different arrival times, eight (8) entries per card. If no arrival times were requested (NAT.EQ.0), supply one (1) blank card in this section.

5. Time Function Definition Cards

Supply one set (card 1 and card(s) 2) of input for each of the "NFN" time functions requested in cc 1-5 of the Control Card (Section VII.B.1, above). At least one set of time function cards is expected in this section. The card sets are input in ascending function number order.

a. card 1 (I5,F10.0,12A5)

notes	columns	variable	entry
(1)	1 - 5	NLP	Number of function definition points; GE.2
(2)	6 - 15	SFTR	Scale factor to be applied to f(t) values; EQ.0; default set to "1.0"
	16 - 75	HED(12)	Label information (to be printed with output) describing this function table

NOTES/

(1) At least two points (i.e., 2 pairs: $f(t_i),t_i$) must be specified for each time function. Less than two points would preclude linear interpolation in the table for f(t).

(2) The scale factor "SFTR" is used to multiply function values only; i.e., input time values are not changed. If the scale factor is omitted, SFTR is re-set by the program to "1.0" thereby leaving input function values unchanged.

B. RESPONSE HISTORY ANALYSIS (continued)

5. Time Function Definition Cards (continued)

b. card(s) 2 (12F6.0)

notes	columns	variable	entry
(1)	1 - 6	T(1)	Time values at point 1, t_1
	7 - 12	F(1)	Function value at point 1, $f(t_1)$
	13 - 18	T(2)	Time value at point 2, t_2
	19 - 24	F(2)	Function value at point 2, $f(t_2)$
		etc.	etc.

NOTES/

(1) Input as many card(s) 2 as are required to define "NLP" pairs of $t_i, f(t_i)$, six (6) pairs per card. Pairs must be input in order of ascending time value. Time at point one must be zero, and care must be taken to ensure that the highest (last) input time value (t_{NLP}) is at least equal to the value of time at the end of solution; i.e., the time span for all functions must cover the solution time period otherwise the interpolation for function values will fail. For the case of non-zero arrival times associated with a particular function, the shortest arrival time reference ("t_A", say) plus (+) the last function time ("t_{NLP}") must at least equal the time at the end of the solution period (t_{END}, say); i.e., $t_A + t_{NLP} \geq t_{END}$.

6. Output Definition Cards

To minimize the amount of output which would be produced by the program if all displacements, stresses, etc. were printed, output requests for specific components must be given in this section. Time histories for selected components appear in tables; the solution step output printing interval is specified as "NOT" which is given in cc 21-25 of the Control Card (Section VII.B.1, above).

a. displacement output requests

(1) control card (2I5)

notes	columns	variable	entry
(1)	1 - 5	KKK	Output type indicator; EQ.1; print histories and maxima EQ.2; printer plot histories and recovery of maxima EQ.3; recover maxima only
(2)	6 - 10	ISP	Printer plot spacing indicator

NOTES/

(1) The type of output to be produced by the program applies to all displacement requests. KKK.EQ.0 is illegal.

(2) "ISP" controls the vertical (down the page) spacing for printer plots. Output points are printed on every (ISP+1)th line. The horizontal (across the page) width of printer plots is a constant ten (10) inches (100 print positions). ISP is used only if KKK.EQ.2.

VII. DYNAMIC ANALYSES (continued)

B. RESPONSE HISTORY ANALYSIS (continued)

6. Output Definition Cards

a. displacement output requests (continued)

(2) node displacement request cards (7I5)

notes	columns	variable	entry
(1)	1 - 5	NP	Node number GE.1 and LE.NUMNP EQ.0 last card only
(2)	6 - 10	IC(1)	Displacement component, request 1
	11 - 15	IC(2)	Displacement component, request 2
	16 - 20	IC(3)	Displacement component, request 3
	21 - 25	IC(4)	Displacement component, request 4
	26 - 30	IC(5)	Displacement component, request 5
	31 - 36	IC(6)	Displacement component, request 6 GE.1 and LE.6 EQ.0 terminates requests for the node

NOTES/

(1) Only those nodes at which output is to be produced (or at which maxima are to be determined) are entered in this section. Cards must be input in ascending node number order. Node numbers may not be repeated. This section must be terminated with a blank card.

(2) Displacement component requests ("IC") range from 1 to 6, where 1=δX,2=δY,3=δZ,4=ΦX,5=ΦY,6=ΦZ. The first zero (or blank) encountered while reading IC(1),IC(2),...,IC(6) terminates information for the card. Displacement components at a node may be requested in any order. As an example, suppose that δY, ΦX and ΦZ are to be output at node 34; the card could be written as /34,2,4,6,0/, or /34,6,4,2,0/, etc. but only four (4) fields would have non-zero entries.

B. RESPONSE HISTORY ANALYSIS (continued)

6. Output Definition Cards

b. element stress component output requests

(1) control card (2I5)

notes	columns	variable	entry
(1)	1 - 5	KKK	Output type indicator; EQ.1; print histories and maxima EQ.2; printer plot of histories and recovery of maxima EQ.3; recover maxima only
	6 - 10	ISP	Plot spacing indicator

NOTES/

(1) See Section VII.B.6.a.(1), above.

(2) element stress component request cards (13I5)

Requests are grouped by element type; "NELTYP" groups must be input. A group consists of a series of element stress component request cards terminated by a blank card. Element number references within an element type (TRUSS, say) grouping must be in ascending order. Element number references may be omitted but not repeated. The program processes element groups in the same order as originally input in the Element Data (Section IV, above). If no output is to be produced for an element type, then input one blank card for its group.

notes	columns	variable	entry
(1)	1 - 5	NEL	Element number GE.1 EQ.0; last card in the group only
(2)	6 - 10	IS(1)	Stress component number for output, request 1
	11 - 15	IS(2)	Stress component number for output, request 2
	. . . .	. . .	. . .
	61 - 65	IS(12)	Stress component number for output, request 12

B. RESPONSE HISTORY ANALYSIS (continued)

6. Output Definition Cards

b. element stress component output requests

(2) request cards (continued)

NOTES/

(1) Terminate each different element output group (type) with a blank card. Elements within a group must be in element number order (ascending); element number repetitions are illegal.

(2) The first zero (or blank) request encountered while reading IS(1), IS(2),..., IS(12) terminates information for the card. No more than twelve (12) different components may be output for any one of the elements. Table VII.1 lists the stress component numbers and corresponding descriptions for the various element types. Some element types (TRUSS, for example) have fewer than 12 components defined; only the stress component numbers listed in Table VII.1 are legal references.

END OF DATA CASE INPUT (NDYN.EQ.2 or NDYN.EQ.4)

TABLE VII.1

ELEMENT TYPE	MAXIMUM NUMBER OF COMPONENTS	STRESS COMPONENT NUMBER	OUTPUT SYMBOL	D E S C R I P T I O N
1. TRUSS	(2)	(1)	(P/A)	AXIAL STRESS
		(2)	(P)	AXIAL FORCE
* * * * *	* * * * *	* * * * *	* * * * *	* * * * *
2. BEAM	(12)	(1)	(P1(I))	1-FORCE AT END I
		(2)	(V2(I))	2-SHEAR AT END I
		(3)	(V3(I))	3-SHEAR AT END I
		(4)	(T1(I))	1-TORQUE AT END I
		(5)	(M2(I))	2-MOMENT AT END I
		(6)	(M3(I))	3-MOMENT AT END I
		(7)	(P1(J))	1-FORCE AT END J
		(8)	(V2(J))	2-SHEAR AT END J
		(9)	(V3(J))	3-SHEAR AT END J
		(10)	(T1(J))	1-TORQUE AT END J
		(11)	(M2(J))	2-MOMENT AT END J
		(12)	(M3(J))	3-MOMENT AT END J
* * * * *	* * * * *	* * * * *	* * * * *	* * * * *
3. PLANE-STRESS/ PLANE-STRAIN				
4. AXISYMMETRIC	(20)	(1)	(11-S0)	V- STRESS AT POINT 0
		(2)	(22-S0)	U- STRESS AT POINT 0
		(3)	(33-S0)	T- STRESS AT POINT 0
		(4)	(12-S0)	UV-STRESS AT POINT 0
		(5)	(11-S1)	V- STRESS AT POINT 1
		(6)	(22-S1)	U- STRESS AT POINT 1
		(7)	(33-S1)	T- STRESS AT POINT 1
		(8)	(12-S1)	UV-STRESS AT POINT 1
		(9)	(11-S2)	V- STRESS AT POINT 2
		(10)	(22-S2)	U- STRESS AT POINT 2
		(11)	(33-S2)	T- STRESS AT POINT 2
		(12)	(12-S2)	UV-STRESS AT POINT 2
		(13)	(11-S3)	V- STRESS AT POINT 3
		(14)	(22-S3)	U- STRESS AT POINT 3
		(15)	(33-S3)	T- STRESS AT POINT 3
		(16)	(12-S3)	UV-STRESS AT POINT 3

ELEMENT TYPE	MAXIMUM NUMBER OF COMPONENTS	STRESS COMPONENT NUMBER	OUTPUT SYMBOL	DESCRIPTION
		(17)	(V -S4)	V- STRESS AT POINT 4
		(18)	(U -S4)	U- STRESS AT POINT 4
		(19)	(T -S4)	T- STRESS AT POINT 4
		(20)	(UV-S4)	UV-STRESS AT POINT 4

* *

ELEMENT TYPE	MAXIMUM NUMBER OF COMPONENTS	STRESS COMPONENT NUMBER	OUTPUT SYMBOL	DESCRIPTION
5. EIGHT NODE BRICK	(12)	(1)	(XX-SL1)	XX-STRESS AT LOCATION 1
		(2)	(YY-SL1)	YY-STRESS AT LOCATION 1
		(3)	(ZZ-SL1)	ZZ-STRESS AT LOCATION 1
		(4)	(XY-SL1)	XY-STRESS AT LOCATION 1
		(5)	(YZ-SL1)	YZ-STRESS AT LOCATION 1
		(6)	(ZX-SL1)	ZX-STRESS AT LOCATION 1
		(7)	(XX-SL2)	XX-STRESS AT LOCATION 2
		(8)	(YY-SL2)	YY-STRESS AT LOCATION 2
		(9)	(ZZ-SL2)	ZZ-STRESS AT LOCATION 2
		(10)	(XY-SL2)	XY-STRESS AT LOCATION 2
		(11)	(YZ-SL2)	YZ-STRESS AT LOCATION 2
		(12)	(ZX-SL2)	ZX-STRESS AT LOCATION 2

* *

ELEMENT TYPE	MAXIMUM NUMBER OF COMPONENTS	STRESS COMPONENT NUMBER	OUTPUT SYMBOL	DESCRIPTION
6. PLATE/ SHELL	(6)	(1)	(XX-S/R)	XX-STRESS RESULTANT
		(2)	(YY-S/R)	YY-STRESS RESULTANT
		(3)	(XY-S/R)	XY-STRESS RESULTANT
		(4)	(XX-M/R)	XX-MOMENT RESULTANT
		(5)	(YY-M/R)	YY-MOMENT RESULTANT
		(6)	(XY-M/R)	XY-MOMENT RESULTANT

* *

ELEMENT TYPE	MAXIMUM NUMBER OF COMPONENTS	STRESS COMPONENT NUMBER	OUTPUT SYMBOL	DESCRIPTION
7. BOUN-DARY	(2)	(1)	(BDRY-F)	BOUNDARY FORCE
		(2)	(BDRY-M)	BOUNDARY MOMENT

* *

ELEMENT TYPE	MAXIMUM NUMBER OF COMPONENTS	STRESS COMPONENT NUMBER	OUTPUT SYMBOL	DESCRIPTION
8. THICK SHELL AND 3-DIM.	(42)	(1)	(SXX(0))	XX-STRESS AT CENTROID (0)
		(2)	(SYY(0))	YY-STRESS AT CENTROID (0)
		(3)	(SZZ(0))	ZZ-STRESS AT CENTROID (0)
		(4)	(SXY(0))	XY-STRESS AT CENTROID (0)
		(5)	(SYZ(0))	YZ-STRESS AT CENTROID (0)
		(6)	(SZX(0))	ZX-STRESS AT CENTROID (0)
		(7)	(SXX(1))	XX-STRESS AT CENTER OF FACE 1

ELEMENT TYPE	MAXIMUM NUMBER OF COMPONENTS	STRESS COMPONENT NUMBER	OUTPUT SYMBOL	D E S C R I P T I O N
		(8)	(SYY(1))	YY-STRESS AT CENTER OF FACE 1
		(9)	(SZZ(1))	ZZ-STRESS AT CENTER OF FACE 1
		(10)	(SXY(1))	XY-STRESS AT CENTER OF FACE 1
		(11)	(SYZ(1))	YZ-STRESS AT CENTER OF FACE 1
		(12)	(SZX(1))	ZX-STRESS AT CENTER OF FACE 1
		(13)	(SXX(2))	XX-STRESS AT CENTER OF FACE 2
		(14)	(SYY(2))	YY-STRESS AT CENTER OF FACE 2
		(15)	(SZZ(2))	ZZ-STRESS AT CENTER OF FACE 2
		(16)	(SXY(2))	XY-STRESS AT CENTER OF FACE 2
		(17)	(SYZ(2))	YZ-STRESS AT CENTER OF FACE 2
		(18)	(SZX(2))	ZX-STRESS AT CENTER OF FACE 2
		(19)	(SXX(3))	XX-STRESS AT CENTER OF FACE 3
		(20)	(SYY(3))	YY-STRESS AT CENTER OF FACE 3
		(21)	(SZZ(3))	ZZ-STRESS AT CENTER OF FACE 3
		(22)	(SXY(3))	XY-STRESS AT CENTER OF FACE 3
		(23)	(SYZ(3))	YZ-STRESS AT CENTER OF FACE 3
		(24)	(SZX(3))	ZX-STRESS AT CENTER OF FACE 3
		(25)	(SXX(4))	XX-STRESS AT CENTER OF FACE 4
		(26)	(SYY(4))	YY-STRESS AT CENTER OF FACE 4
		(27)	(SZZ(4))	ZZ-STRESS AT CENTER OF FACE 4
		(28)	(SXY(4))	XY-STRESS AT CENTER OF FACE 4
		(29)	(SYZ(4))	YZ-STRESS AT CENTER OF FACE 4
		(30)	(SZX(4))	ZX-STRESS AT CENTER OF FACE 4
		(31)	(SXX(5))	XX-STRESS AT CENTER OF FACE 5
		(32)	(SYY(5))	YY-STRESS AT CENTER OF FACE 5
		(33)	(SZZ(5))	ZZ-STRESS AT CENTER OF FACE 5
		(34)	(SXY(5))	XY-STRESS AT CENTER OF FACE 5
		(35)	(SYZ(5))	YZ-STRESS AT CENTER OF FACE 5
		(36)	(SZX(5))	ZX-STRESS AT CENTER OF FACE 5
		(37)	(SXX(6))	XX-STRESS AT CENTER OF FACE 6
		(38)	(SYY(6))	YY-STRESS AT CENTER OF FACE 6
		(39)	(SZZ(6))	ZZ-STRESS AT CENTER OF FACE 6
		(40)	(SXY(6))	XY-STRESS AT CENTER OF FACE 6
		(41)	(SYZ(6))	YZ-STRESS AT CENTER OF FACE 6
		(42)	(SZX(6))	ZX-STRESS AT CENTER OF FACE 6

* *

9. PIPE

A. TANGENT	(12)	(1)	(PX(I)) X-FORCE AT END I
		(2)	(VY(I)) Y-SHEAR AT END I
		(3)	(VZ(I)) Z-SHEAR AT END I
		(4)	(TX(I)) X-TORQUE AT END I
		(5)	(MY(I)) Y-MOMENT AT END I
		(6)	(MZ(I)) Z-MOMENT AT END I
		(7)	(PX(J)) X-FORCE AT END J
		(8)	(VY(J)) Y-SHEAR AT END J
		(9)	(VZ(J)) Z-SHEAR AT END J
		(10)	(TX(J)) X-TORQUE AT END J
		(11)	(MY(J)) Y-MOMENT AT END J
		(12)	(MZ(J)) Z-MOMENT AT END J
B. BEND	(18)	(1)	(PX(I)) X-FORCE AT END I
		(2)	(VY(I)) Y-SHEAR AT END I
		(3)	(VZ(I)) Z-SHEAR AT END I
		(4)	(TX(I)) X-TORQUE AT END I
		(5)	(MY(I)) Y-MOMENT AT END I
		(6)	(MZ(I)) Z-MOMENT AT END I
		(7)	(PX(C)) X-FORCE AT CENTER OF ARC
		(8)	(VY(C)) Y-SHEAR AT CENTER OF ARC
		(9)	(VZ(C)) Z-SHEAR AT CENTER OF ARC
		(10)	(TX(C)) X-TORQUE AT CENTER OF ARC
		(11)	(MY(C)) Y-MOMENT AT CENTER OF ARC
		(12)	(MZ(C)) Z-MOMENT AT CENTER OF ARC
		(13)	(PX(J)) X-FORCE AT END J
		(14)	(VY(J)) Y-SHEAR AT END J
		(15)	(VZ(J)) Z-SHEAR AT END J
		(16)	(TX(J)) X-TORQUE AT END J
		(17)	(MY(J)) Y-MOMENT AT END J
		(18)	(MZ(J)) Z-MOMENT AT END J

* *
* *

VII. DYNAMIC ANALYSES (continued)

C. RESPONSE SPECTRUM ANALYSIS (NDYN.EQ.3)

This option combines all (NF) mode shapes and frequencies computed during the eigenvalue solution (Section VII.A) to calculate R.M.S. stresses/deflections due to an input displacement (or acceleration) spectrum. The input spectrum is applied in varying proportions in the global X,Y,Z directions. For the case of a non-zero cut-off frequency "COFQ" (Section VII.A), only those modes whose frequencies are less than COFQ will be combined in the R.M.S. analysis.

1. Control Card (3F10.0,I5)

notes	columns	variable	entry
(1)	1 - 10	FX	Factor for X-direction input
	11 - 20	FY	Factor for Y-direction input
	21 - 30	FZ	Factor for Z-direction input
			EQ.0; not acting
(2)	31 - 35	IST	Input spectrum type;
			EQ.0; displacement vs. period
			EQ.1; acceleration vs. period

NOTES/

(1) All three (3) direction factors may be non-zero in which case the entries represent the X,Y,Z components of the input direction vector.

(2) "IST" defines the type of spectrum table to be input immediately following. The spectral displacements ("S_d") and accelerations ("S_a") are assumed to be related as follows: $S_a = (4\pi^2 f^2)(S_d)$.

C. RESPONSE SPECTRUM ANALYSIS (continued)

2. Spectrum Cards

a. heading card (12A6)

notes	columns	variable	entry
	1 - 72	HED(12)	Heading information used to label the spectrum table

b. control card (I5,F10.0)

notes	columns	variable	entry
	1 - 5	NPTS	Number of definition points in the spectrum table; GE.2
	6 - 15	SFTR	Scale factor used to adjust the displacement (or acceleration) ordinates in the spectrum table EQ.1.0; no adjustment

c. spectrum data (2F10.0)

notes	columns	variable	entry
(1)	1 - 10	T	Period (reciprocal of frequency)
(2)	11 - 20	S	Value of displacement (or acceleration if IST.EQ.1)

NOTES/

(1) Input one definition point per card; "NPTS" cards are required in this section. Cards must be arranged in ascending value of period.

(2) "S" is interpreted to be a displacement quantity if "IST" was input as zero. For IST.EQ.1, "S" is an acceleration value.

END OF DATA CASE INPUT (NDYN.EQ.3)

APPENDIX A - CONTROL CARDS AND DECK SET-UP FOR DYNAMIC ANALYSIS RE-START

The purpose of this appendix is to describe the procedure (including control cards and deck set-up) required for program re-start following an eigenvalue/eigenvector extraction analysis. The re-start option has been included in the program in order to make a repeated forced response or spectrum analysis possible without solving each time for the required eigensystem. For medium-to-large size models, eigenvalue solution is quite costly when compared to the forced response calculations; hence, excessive costs may be incurred if the entire job has to be re-run due to improper specification of forcing functions or input spectra, inadequate requests, etc. For small models (less than 100 nodes, say) the extra effort required for re-start is normally not justified.

A complete dynamic analysis utilizing the re-start feature requires that the job be run in two (2) steps:

JOB(1): Eigenvalue extraction solution only, after which program files TAPE1,TAPE2,TAPE7,TAPE8, and TAPE9 are saved on the re-start tape.

JOBS(2): Re-instatement of program files TAPE1,TAPE2,TAPE7,TAPE8, and TAPE9 from the re-start tape followed by a Dynamic Response Analysis (NDYN.EQ.-2) or a Response Spectrum Analysis (NDYN.EQ.-3).

For a given model, the first job [JOB(1)] creating the re-start tape is run only once. The re-start tape then contains all the initial information required by the program at the beginning of a forced response analysis. More than one second job [JOBS(2)] may be run using the re-start tape as initial input; i.e., the re-start tape is not destroyed.

Control cards and deck set-up for execution on the CDC 6400 computer at the University of California, Berkeley are given below:

JOB(1) - EIGENVALUE SOLUTION/RE-START TAPE CREATION

```
Notes   Card Deck

(1)   Job number, 1, 200, 120000,300.  User Name
(2)   REQUEST, TP1,I.  Reel No., Tape User Name
(3)   CØPYBF, TP1,SAP4
      UNLØAD,TP1
(4)   LGØ,SAP4
      REWIND,TAPE1,TAPE2,TAPE7,TAPE8,TAPE9
(5)   REQUEST,RESTART,I.  Reel No., Tape User Name, ØUTPUT
     (CØPYBF,TAPE1,RESTART
     |CØPYBF,TAPE2,RESTART
(6)  <CØPYBF,TAPE7,RESTART
     |CØPYBF,TAPE8,RESTART
     (CØPYBF,TAPE9,RESTART
(7)   7-8-9

      PROBLEM DATA DECK:
            I.     HEADING CARD
            II.    MASTER CONTROL CARD with
                   (LL.EQ.0)
                   (NF.GE.1)
                   (NDYN.EQ.1)
                   (MØDEX.EQ.0)
            III.   JOINT DATA
            IV.    ELEMENT DATA
            V.     CONCENTRATED MASS DATA
            VI.    ELEMENT LOAD MULTIPLIERS
            VII.   DYNAMIC ANALYSIS
                   A.   Mode Shapes and Frequencies
      blank card
      blank card

(8)   6-7-8-9
```

NOTES:

(1) The job control card parameters are defined as follows:
"1" = Number of tape drives required for the job.
"200" = CPU time limit (in octal seconds).
"120000" = Central memory field length (in octal).
"300" = Page limit for printing.

(2) Tape containing binary version of program (TP1) is requested.

(3) Binary version of the program is copied onto a disk file (SAP4).

(4) Program is loaded and execution is initiated.

(5) A blank tape (RESTART) is requested.

(6) The contents of disk files TAPE1,TAPE2, etc. are copied onto tape RESTART.

(7) End-of-record card: 7,8,9 punched in column 1.

(8) End-of-file card: 6,7,8,9 punched in column 1.

JOB (2) - RE-START FOR RESPONSE HISTORY ANALYSIS (NDYN.EQ.-2)
or RESPONSE SPECTRUM ANALYSIS (NDYN.EQ.-3)

Notes	Card Deck
	Job number, 1,200,120000,300. User Name
(1)	REQUEST, RESTART, I. Reel No., User Name CØPYBF,RESTART,TAPE1 CØPYBF,RESTART,TAPE2 CØPYBF,RESTART,TAPE7 CØPYBF,RESTART,TAPE8 CØPYBF,RESTART,TAPE9 REWIND,TAPE1,TAPE2,TAPE7,TAPE8,TAPE9 UNLØAD,RESTART
(2)	REQUEST,TP1,I. Reel No., User Name CØPYBF,TP1,SAP4 LGØ,SAP4 7-8-9
	PROBLEM DATA DECK
	I. HEADING CARD
	II. MASTER CONTROL CARD with (LL.EQ.0) (NF.GE.1) (NDYN.EQ.-2 or -3)
(3)	(MODEX.EQ.0)
	VII. DYNAMIC ANALYSIS B. Dynamic Response Analysis (NDYN.EQ.-2) or C. Response Spectrum Analysis (NDYN.EQ.-3)
	blank card blank card
	6-7-8-9

NOTES/

(1) The disk files TAPE1,TAPE2, etc. are re-created using the information saved on tape RESTORE.

(2) The binary version of the program is again obtained from tape TP1.

(3) Normally, the number of frequencies ("NF") entered on the MASTER CONTROL CARD for a re-start case has the same value as was specified earlier when the eigenvalue problem was solved in JOB(1). If a value for the cut-off frequency ("COFQ") was entered on the "Mode Shapes and Frequencies" control card [in JOB(1)] and the program extracted fewer than "NF" frequencies (eigenvalues), then only the actual number of eigenvalues computed by the program in JOB(1) is specified for "NF" in this re-start run.

APPENDIX B: CONTROL CARDS AND DECK SET-UP FOR USE OF STARTING ITERATION VECTORS

In the dynamic analysis of large-order systems, the solution of the required eigensystem is normally the most expensive phase. The option described in this appendix demonstrates how it is possible to use NFØ previously calculated eigenvalues and vectors when the solution for NF ≥ NFØ eigenvalues and eigenvectors is required.

Assume that in Job(1), the solution for NFØ eigenvalues and eigenvectors was performed. At the end of this job, TAPE2 and TAPE7 must have been saved on a physical tape, say "RESTART". Assuming that in JOB(2) the solution of NF eigenvalues and eigenvectors is required, then prior to the execution of this job, tape RESTART needs to be copied onto TAPE10.

This procedure was performed with the following control cards on the CDC 6400 of the University of California at Berkeley:

JOB(1) - SOLUTION FOR NFØ EIGENVALUES/RESTART TAPE CREATION

Notes	Card Deck
(1)	Job No., 1,200,120000,500. User Name
	REQUEST,TP1,I. Reel No., Tape User Name
	CØPYBF,TP1,SAP4
	UNLØAD,TP1
(2)	REQUEST,TAPE2,NB
	REQUEST,TAPE7,NB
	LGØ,SAP4
	REWIND,TAPE2,TAPE7
(3)	REQUEST,RESTART,I. Reel No., Tape User Name, OUTPUT
(4)	CØPYBR,TAPE2,RESTART,1
	CØPYBF,TAPE7,TP3
	7-8-9
	PROBLEM DATA DECK
	6-7-8-9

Notes/

(1) See Notes (1) - (4) in Appendix A.

(2) The computer is directed to write on disk files TAPE2 and TAPE7 in an unblocked format.

(3) A blank tape (RESTART) is requested onto which the contents of files TAPE2 and TAPE7 are to be written.

(4) The contents of files TAPE2 and TAPE7 are written as <u>one file</u> onto tape RESTART.

JOB(2) - SOLUTION FOR ADDITIONAL EIGENVALUES USING THE INFORMATION STORED ON TAPE "RESTART"

Notes	Card Deck
	Job No.,1,200,120000,500. User Name
(1)	REQUEST,RESTART,I. Reel No., Tape User Name
	REQUEST,TAPE10,NB
	REQUEST,TAPE2,NB
	REQUEST,TAPE7,NB
(2)	CØPYBF,RESTART,TAPE10
	UNLOAD,RESTART
(3)	REWIND,TAPE10
	REQUEST,TP1,I. Reel No., Tape User Name
	CØPYBF,TP1,SAP4
	LGØ,SAP4
	7-8-9
	PROGRAM DATA DECK
	6-7-8-9

Notes/

(1) TAPE10 (as TAPE2 and TAPE7 if they are to be used for further restarts,) is requested to be an unblocked file.

(2) The contents of tape RESTART are copied into TAPE10 as one file.

(3) Program execution.

EARTHQUAKE ENGINEERING RESEARCH CENTER REPORTS

EERC 67-1 "Feasibility Study Large-Scale Earthquake Simulator Facility", by J. Penzien, J. G. Bouwkamp, R. W. Clough and D. Rea - 1967 (PB 187 905)

EERC 68-1 Unassigned

EERC 68-2 "Inelastic Behavior of Beam-to-Column Subassemblages Under Repeated Loading", by V. V. Bertero - 1968 (PB 184 888)

EERC 68-3 "A Graphical Method for Solving the Wave Reflection-Refraction Problem", by H. D. McNiven and Y. Mengi - 1968 (PB 187 943)

EERC 68-4 "Dynamic Properties of McKinley School Buildings", by D. Rea, J. G. Bouwkamp and R. W. Clough - 1968 (PB 187 902)

EERC 68-5 "Characteristics of Rock Motions During Earthquakes", by H. B. Seed, I. M. Idriss and F. W. Kiefer - 1968 (PB 188 338)

EERC 69-1 "Earthquake Engineering Research at Berkeley" - 1969 (PB 187 906)

EERC 69-2 "Nonlinear Seismic Response of Earth Structures", by M. Dibaj and J. Penzien - 1969 (PB 187 904)

EERC 69-3 "Probabilistic Study of the Behavior of Structures During Earthquakes", by P. Ruiz and J. Penzien - 1969 (PB 187 886)

EERC 69-4 "Numerical Solution of Boundary Value Problems in Structural Mechanics by Reduction to an Initial Value Formulation", by N. Distefano and J. Schujman - 1969 (PB 187 942)

EERC 69-5 "Dynamic Programming and the Solution of the Biharmonic Equation", by N. Distefano - 1969 (PB 187 941)

EERC 69-6 "Stochastic Analysis of Offshore Tower Structures", by A. K. Malhotra and J. Penzien - 1969 (PB 187 903)

EERC 69-7 "Rock Motion Accelerograms for High Magnitude Earthquakes", by H. B. Seed and I. M. Idriss - 1969 (PB 187 940)

EERC 69-8 "Structural Dynamics Testing Facilities at the University of California, Berkeley", by R. M. Stephen, J. G. Bouwkamp, R. W. Clough and J. Penzien - 1969 (PB 189 111)

Note: Numbers in parentheses are Accession Numbers assigned by the National Technical Information Service. Copies of these reports may be ordered from the National Technical Information Service, Springfield, Virginia, 22151. Either the accession number or a complete citation should be quoted on orders for the reports.

Revised 4/23/73

EERC 69-9 "Seismic Response of Soil Deposits Underlain by Sloping Rock Boundaries", by H. Dezfulian and H. B. Seed - 1969 (PB 189 114)

EERC 69-10 "Dynamic Stress Analysis of Axisymmetric Structures Under Arbitrary Loading", by S. Ghosh and E. L. Wilson - 1969 (PB 189 026)

EERC 69-11 "Seismic Behavior of Multistory Frames Designed by Different Philosophies", by J. C. Anderson and V. V. Bertero - 1969 (PB 190 662)

EERC 69-12 "Stiffness Degradation of Reinforcing Concrete Structures Subjected to Reversed Actions", by V. V. Bertero, B. Bresler and H. Ming Liao - 1969 (PB 202 942)

EERC 69-13 "Response of Non-Uniform Soil Deposits to Travel Seismic Waves", by H. Dezfulian and H. B. Seed - 1969 (PB 191 023)

EERC 69-14 "Damping Capacity of a Model Steel Structure", by D. Rea, R. W. Clough and J. G. Bouwkamp - 1969 (PB 190 663)

EERC 69-15 "Influence of Local Soil Conditions on Building Damage Potential During Earthquakes", by H. B. Seed and I. M. Idriss - 1969 (PB 191 036)

EERC 69-16 "The Behavior of Sands Under Seismic Loading Conditions", by M. L. Silver and H. B. Seed - 1969 (AD 714 982)

EERC 70-1 "Earthquake Response of Concrete Gravity Dams", by A. K. Chopra - 1970 (AD 709 640)

EERC 70-2 "Relationships Between Soil Conditions and Building Damage in the Caracas Earthquake of July 29, 1967", by H. B. Seed, I. M. Idriss and H. Dezfulian - 1970 (PB 195 762)

EERC 70-3 "Cyclic Loading of Full Size Steel Connections", by E. P. Popov and R. M. Stephen - 1970 (PB 213 545)

EERC 70-4 "Seismic Analysis of the Charaima Building, Caraballeda, Venezuela", by Subcommittee of the SEAONC Research Committee, V. V. Bertero, P. F. Fratessa, S. A. Mahin, J. H. Sexton, A. C. Scordelis, E. L. Wilson, L. A. Wyllie, H. B. Seed, and J. Penzien, Chairman - 1970 (PB 201 455)

EERC 70-5 "A Computer Program for Earthquake Analysis of Dams", by A. K. Chopra and P. Chakrabarti - 1970 (AD 723 994)

EERC 70-6 "The Propagation of Love Waves Across Non-Horizontally Layered Structures", by J. Lysmer and L. A. Drake - 1970 (PB 197 896)

EERC 70-7 "Influence of Base Rock Characteristics on Ground Response", by J. Lysmer, H. B. Seed and P. B. Schnabel - 1970 (PB 197 897)

EERC 70-8 "Applicability of Laboratory Test Procedures for Measuring Soil Liquefaction Characteristics Under Cyclic Loading", by H. B. Seed and W. H. Peacock - 1970 (B 198 016)

EERC 70-9 "A Simplified Procedure for Evaluating Soil Liquefaction Potential", by H. B. Seed and I. M. Idriss - 1970 (PB 198 009)

EERC 70-10 "Soil Moduli and Damping Factors for Dynamic Response Analysis", by H. B. Seed and I. M. Idriss - 1970 (PB 197 869)

EERC 71-1 "Koyna Earthquake and the Performance of Koyna Dam", by A. K. Chopra and P. Chakrabarti - 1971 (AD 731 496)

EERC 71-2 "Preliminary In-Situ Measurements of Anelastic Absorption in Soils Using a Prototype Earthquake Simulator", by R. D. Borcherdt and P. W. Rodgers - 1971 (PB 201 454)

EERC 71-3 "Static and Dynamic Analysis of Inelastic Frame Structures", by F. L. Porter and G. H. Powell - 1971 (PB 210 135)

EERC 71-4 "Research Needs in Limit Design of Reinforced Concrete Structures", by V. V. Bertero - 1971 (PB 202 943)

EERC 71-5 "Dynamic Behavior of a High-Rise Diagonally Braced Steel Building", by D. Rea, A. A. Shah and J. G. Bouwkamp - 1971 (PB 203 584)

EERC 71-6 "Dynamic Stress Analysis of Porous Elastic Solids Saturated With Compressible Fluids", by J. Ghaboussi and E. L. Wilson - 1971 (PB 211 396)

EERC 71-7 "Inelastic Behavior of Steel Beam-to-Column Subassemblages", by H. Krawinkler, V. V. Bertero and E. P. Popov - 1971 (PB 211 335)

EERC 71-8 "Modification of Seismograph Records for Effects of Local Soil Conditions" by P. Schnabel, H. B. Seed and J. Lysmer - 1971 (PB 214 450)

EERC 72-1 "Static and Earthquake Analysis of Three Dimensional Frame and Shear Wall Buildings" by E. L. Wilson and H. H. Dovey - 1972 (PB 212 589)

EERC 72-2 "Accelerations in Rock For Earthquakes in the Western United States", by P. B. Schnabel and H. B. Seed - 1972 (PB 213 100)

EERC 72-3 "Elastic-Plastic Earthquake Response of Soil-Building Systems" by T. Minami and J. Penzien - 1972 (PB 214 868)

EERC 72-4 "Stochastic Inelastic Response of Offshore Towers to Strong Motion Earthquakes", by M. K. Kaul and J. Penzien - 1972 (PB 215 713)

EERC 72-5 Cyclic Behavior of Three Reinforced Concrete Flexural Members With High Shear" by E. P. Popov, V. V. Bertero and H. Krawinkler - 1972 (PB 214 555)

EERC 72-6 "Earthquake Response of Gravity Dams Including Reservoir Interaction Effects" by P. Chakrabarti and A. K. Chopra - 1972.

EERC 72-7 "Dynamic Properties of Pine Flat Dam", by D. Rea, C. Y. Liaù and A. K. Chopra - 1972.

EERC 72-8 "Three Dimensional Analysis of Building Systems", by E.L. Wilson and H.H. Dovey - 1972.

EERC 72-9 "Rate of Loading Effects on Uncracked and Repaired Reinforced Concrete Members", by V.V. Bertero, D. Rea, S. Mahin and M. Atalay - 1973

EERC 72-10 "Computer Program for Static and Dynamic Analysis of Linear Structural Systems", by E.L. Wilson, K.J. Bathe, J.E. Peterson and H.H. Dovey - 1972.

EERC 72-11 "Literature Survey - Seismic Effects on Highway Bridges" by T. Iwasaki, J. Penzien and R. Clough - 1972 (PB 215 613)

EERC 72-12 "SHAKE, a Computer Program for Earthquake Response Analysis of Horizontally Layered Sites", by P.B. Schnabel and J. Lysmer - 1972.

EERC 73-1 "Optimal Seismic Design of Multistory Frames", by V.V. Bertero and H. Kamil - 1973.

EERC 73-2 "Analysis of the Slides in the San Fernando Dams During the Earthquake of February 9, 1971", by H.B. Seed, K.L. Lee, I.M. Idriss and F. Makdisi - 1973.

EERC 73-3 "Computer Aided Ultimate Load Design of Unbraced Multistory Steel Frames", by M.B. El-Hafez and G.J. Powell - 1973.

EERC 73-4 "Experimental Investigation into the Seismic Behavior of Critical Regions of Reinforced Concrete Components as Influenced by Moment and Shear", by M. Celebi and J. Penzien - 1973 (PB 215 884)

EERC 73-5 "Hysteretic Behavior of Epoxy-Repaired Reinforced Concrete Beams", by M. Celebi and J. Penzien - 1973.

EERC 73-6 "General Purpose Computer Program for Inelastic Dynamic Response of Plane Structures", by A. Kanaan and G.H. Powell - 1973.

EERC 73-7 "A Computer Program for Earthquake Analysis of Gravity Dams Including Reservoir Interaction", by P. Chakrabarti and A.K. Chopra - 1973.

EERC 73-8 "Seismic Behavior of Spandrel Frames — A Review and Outline for Future Research", by R. Razani and J.G. Bouwkamp - 1973.

EERC 73-9 "Earthquake Analysis of Structure-Foundation Systems", by A. K. Vaish and A. K. Chopra - 1973.

EERC 73-10 "Deconvolution of Seismic Response for Linear Systems", by R. B. Reimer - 1973.

EERC 73-11 "SAP IV Structure Analysis Program for Static and Dynamic Response of Linear Systems", by K. -J. Bathe, E. L. Wilson, and F. E. Peterson - 1973 (revised).

EERC 73-12 "Analytical Investigations of the Seismic Response of Tall Flexible Highway Bridges", by W. S. Tseng and J. Penzien - 1973.

EERC 73-13 "Earthquake Analysis of Multi-Story Buildings Including Foundation Interaction", by A. K. Chopra and J. A. Gutierrez - 1973 (PB 222 970).

EERC 73-14 "ADAP A Computer Program for Static and Dynamic Analysis of Arch Dams", by R. W. Clough, J. M. Raphael and S. Mojtahedi - 1973 (PB 223 763/AS).

EERC 73-15 "Cyclic Plastic Analysis of Structural Steel Joints", by R. B. Pinkney and R. W. Clough - 1973.

EERC 73-16 "QUAD-4 A Computer Program for Evaluating the Seismic Response of Soil Structures by Variable Damping Finite Element Procedures" by I. M. Idriss, J. Lysmer, R. Hwang and H. G. Seed - 1973.

EERC 73-17 "Dynamic Behavior of a Multi-Story Pyramid Shaped Building", by R. M. Stephen and J. G. Bouwkamp - 1973.

EERC 73-18 "Effect of Different Types of Reinforcing on Seismic Behavior of Short Concrete Columns", by V. V. Bertero, J. Hollings, O. Kustu, R. M. Stephen and J. G. Bouwkamp - 1973.

EERC 73-19 "Olive View Medical Center Material Studies, Phase I", by B. Bresler and V. Bertero - 1973.

EERC 73-20 "Linear and Nonlinear Seismic Analysis Computer Programs for Long Multiple-Span Highway Bridges", by W. S. Tseng and J. Penzien - 1973.

EERC 73-21 "Constitutive Models for Cyclic Plastic Deformation of Engineering Materials", by J. M. Kelly and P. P. Gillis - 1973.

EERC 73-22 "DRAIN-2D Users' Guide" by G. H. Powell - 1973.

EERC 73-23 "Earthquake Engineering at Berkeley - 1973" by D. Rea - 1973.

EERC 73-24 "Seismic Input and Structural Response During the 1971 San Fernando Earthquake" by R. B. Reimer, R. W. Clough, and J. M. Raphael - 1973.

EERC 73-25 "Earthquake Response of Axisymmetric Tower Structures Surrounded by Water", by C. Y. Liaw and A. K. Chopra - 1973.

EERC 73-26 "Investigation of the Failures of the Olive View Stairtowers During the San Fernando Earthquake and Their Implications on Seismic Design", by V. V. Bertero and Robert G. Collins - 1973.

EERC 73-27 "Further Studies on Seismic Behavior of Steel Beam-Column Subassemblages" by V. V. Bertero, H. Krawinkler and E. P. Popov - 1973.

DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.

EL METODO DEL ELEMENTO FINTIO EN LA INGENIERIA

PRINCIPALES INSTRUCCIONES PARA CREAR UN ARCHIVO POR MEDIO DE TERMINAL Y PARA CORRER EN PROGRAMA SAP IV

FEBRERO, 1985

Palacio de Mineria Calle de Tacuba 5 primer piso Deleg. Cuauhtémoc 06000 México, D.F. Tel.: 521-40-20 Apdo. Postal M-2285

PRINCIPALES INSTRUCCIONES PARA CREAR UN ACHIVO POR MEDIO DE TERMINAL Y PARA CORRER EL PROGRAMA SAP IV

1. Para crear un archivo de datos teclear MAKE FILENAME DATA
2. Para secuenciarlo teclear SEQ 100+100
3. Para salirse de secuencia oprimir dos veces la tecla RETURN
4. Para volver a secuenciarlo teclear SEQ No. de secuencia + 100
5. Para corregir una línea teclear FIX No. de línea /lo que se quiere quitar/lo que se quiere poner.
6. Para revisar lo que se corrigió teclear L=
7. Para listar el programa teclear LIST
8. Para listar una línea teclear LIST No. de línea
9. Para guardar el archivo teclear SAVE
10. Para volver a llamar el archivo teclear GET FILE NAME
11. Para correr el programa SAP IV y que los resultados aparezcan en la pantalla teclear RUN$SAPIV/CORR;FILE FILE5(TITLE= "FILENAME")
12. Para correr el programa SAP IV y que los resultados aparezcan en la impresora teclear RUN$SAPIV/CORR;FILE FILE5/TITLE="FILE-NAME"),FILE8(PRINTER)

Nota FILENAME puede ser cualquier nombre, pero tiene que ser el mismo en el archivo de datos y al correr el programa

B U E N A   S U E R T E

SAP INPUT DATA S[illegible]

Sheet__ _of____

SECTION I. - HEADING CARD

IDENTIFICATION "HED"

cols 1-72

FORMAT: ALPHANUMERIC

SECTION II. - "MASTER CONTROL CARD"

ANALYSIS							
NUMNP	NELTYP	LL	NF	NDYN	MODEX	NAD	KEQB
cols 1-5	6-10	11-15	16-20	21-25	26-30	31-35	36-40

FORMAT(8I5)

NUMNP - No. of nodes (if Eq. 0 use two blank cards)

NELTYP - No. of types of elements

LL - No. of structural load cases (Eq. 0 for dynamic analysis)

NF - Frequencies to be found in the eigenvalue solution (applies for LL = 0)

NDYN - Analysis type:
Enter 0 for static analysis
1 eigenvalue/vector sol
2 forced dynamic response by mode superposition
3 response espectrum analysis
4 direct step by step integration

MODEX - Execution mode:
Enter 0 for problem solution
1 for data check only

NAD - No. of vectors applies only for NDYN = 1

KEQB - No. of D. O. F. Eq. 0 for automatic calculation

SECTION III - "NODAL POINT DATA"

NODES DEFINITION												
Coordinate System	Node Number	Translation Boundary Condition Code (X,Y,Z)			Rotation Boundary Condition Code (X,Y,Z)			Coordinates for Cylindrical (X=R,Z=θ)			Node No. Increment	Nodal Temperature
CT	N	IX(N,1)	IX(N,2)	IX(N,3)	IX(N,4)	IX(N,5)	IX(N,6)	X(N)	Y(N)	Z(N)	k(N)*	T(N)
cols 1	2-5	6-10	11-15	16-20	21-25	26-30	31-35	36-45	46-55	56-65	66-70	71-80

*Use for node generation with Node No. increment = k(N)

FORMAT(A1,I4,6I5,3F10.0,I5,F10.0)

SECTION III - "NODAL POINT DATA"

4

NODES DEFINITION													
Coordinate System	Node Number	Translation Boundary Condition Code (X,Y,Z)			Rotation Boundary Condition Code (X,Y,Z)			Coordinates for Cylindrical (X=R,Z=θ)			Node No. Increment	Nodal Temperature
CT	N	IX(N,1)	IX(N,2)	IX(N,3)	IX(N,4)	IX(N,5)	IX(N,6)	X(N)	Y(N)	Z(N)	k(N)*	T(N)
cols 1	2-5	6-10	11-15	16-20	21-25	26-30	31-35	36-45	46-55	56-65	66-70	71-80

*Use for node generation with Node No. increment = k(N)

FORMAT(A1,I4,6I5,3F10.0,I5,F10.0)

5

SECTION IV - "ELEMENT DATA"

TYPE 1 TRUSS ELEMENT

A. Control Card		
TYPE	NUMEL	NMAT
1		
cols 1-5	6-10	11-15

FORMAT(3I5)

TYPE - SAP Element Code

NUMEL- No. of Elements of Type 1

NMAT - No. of Material Property Cards

B. Material Properties (*)					
IMAT	E	α	ρ	A	W
cols 1-5	6-15	16-25	26-35	36-45	46-55

*as many cards as NMAT

FORMAT(I5,5F10.0)

IMAT - Material Identification Number

E - Young's Modulus

α - Coefficient of Thermal Expansion

ρ - Mass Density

A - Cross Section Area

W - Weight Density

C. Element Load Factors Cards			
Element Load Case A	Element Load Case B	Element Load Case C	Element Load Case D
cols 1-10	11-20	21-30	31-40

FORMAT(4F10.0)

NOTE: Four cards are required even if values are zero

For Gravity in the X Direction

For Gravity in the Y Direction

For Gravity in the Z Direction

Fraction of Thermal Load for Each Case ABCD

SECTION . - "ELEMENT DATA" 6

TYPE 1 TRUSS ELEMENTS (cont.)

D. ELEMENT DATA CARDS

ELNUM	NODE I	NODE J	IMAT	REFTEMP	K
cols 1-5	6-10	11-15	16-20	21-30	31-35

FORMAT(4I5,F10.0,I5)

ELNUM - Element Number

IMAT - Material Property Code

REFTEMP - Reference Temperatur for Zero Stress

K - Node Increment for Data Generation

SECTION IV - "ELEMENT DATA"

Type 2 BEAM ELEMENTS

A. CONTROL CARD

TYPE	NUMEL	NELP	NSETS	NMAT
2				
cols 1-5	6-10	11-15	16-20	21-25

FORMAT(5I5)

TYPE - SAP Element Code

NUMEL - Total No. of Elements Type 2

NELP - No. of Element Property Cards

NSETS - No. of Fixed End Force Sets

NMAT - No. of Material Property Cards

B. MATERIAL PROPERTIES(*)

IMAT	E	NU	ρ	W
cols 1-5	6-15	16-25	26-35	36-45

(*) As Many Cards as NMAT

FORMAT(I5,4F10.0)

IMAT - Material Identification Number

E - Young's Modulus

NU - Poisson's Coefficient

ρ - Mass Density

W - Weight Density

C. ELEMENT PROPERTY CARDS (*)

IGEOM	AXA	SHEAR2(†)	SHEAR3(†)	TOR	FLEXU2	FLEXU3
cols 1-5	6-15	16-25	26-35	36-45	46-55	56-65

(*) As Many Cards as NELP (†) Specify Only if Shear Deformation is Included

IEGOM - Geometric Property Number

AXA - Axial Area

SHEAR2 - Shear Area in Local 2 — Direction

SHEAR3 - Shear Area in Local 3 - Direction

TOR - Torsional Inertia

FLEXU2 - Flexural Inertia 2 - Axis

FLEXU3 - Flexural Inertia 3 - Axis

FORMAT(I5,6F10.0)

SAP INPUT DATA SHEET

SECTION IV - "ELEMENT DATA"

Type 2 BEAM ELEMENTS (CONT.)

D. ELEMENT LOAD FACTORS			
Element Load Case A	Element Load Case B	Element Load Case C	Element Load Case D
cols 1-10	11-20	21-30	31-40

FORMAT(4F10.0)

NOTE: Three Cards are Required Even if Values are Zero

FOR GRAVITY IN THE X DIRECTION

FOR GRAVITY IN THE Y DIRECTION

FOR GRAVITY IN THE Z DIRECTION

E. FIXED END FORCES (*)							
FEFN	FEF1I	FEF2I	FEF3I	FEM1I	FEM2I	FEM3I	First Card
BLANK	FEF1J	FEF2J	FEF3J	FEM1J	FEM2J	FEM3J	Second Card
cols 1-5	6-15	16-25	26-35	36-45	46-55	56-65	

(*) Two Cards Required for Each Set

FORMAT(I5,6F10.0)

SECTION IV - "ELEMENT DATA"

Type 2 BEAM ELEMENTS (CONT.)

ELEMENT DATA CARDS												
ELNUM	NODEI	NODEJ	NODEK	IMAT	NELP	FEFA	FEFB	FEFC	FEFD	RELI	RELJ	K
cols 1-5	6-10	11-15	16-20	21-25	26-30	31-35	36-40	41-45	46-50	51-56	57-62	63-70

FORMAT(10I5,2I6,I8)

SECTION IV - "ELEMENT DATA"

Type 3 PLANE STRESS MEMBRANE ELEMENTS

A. CONTROL CARD				
TYPE	NUMEL	NMAT	MTEMP	*
3				
cols 1-5	6-10	11-15	16-20	30

FORMAT(6I5)

TYPE - SAP Element Code
NUMEL - Total No. of Elements
NMAT - No. of Material Property Cards
MTEMP - Max. No. of Temp. Points for Any One Mat.
* - Non-zero Character to Suppress the Introduction of Incompatible Displacement Modes

B.1 MATERIAL PROPERTY CARDS				
IMAT	NTEMP	W	ρ	β
cols 1-5	6-10	11-20	21-30	31-40

IMAT - Material Identification Number
NTEMP - Nol of Diff. Temperatures
W - Weight Density
ρ - Mass Density
β - Angle, Counterclockwise+

B.2 MATERIAL PROPERTIES FOR NTEMP (2 CARD FOR EACH)							
T	E_n	E_s	E_t	ν_{ns}	ν_{nt}	ν_{st}	σ_{ns}
cols 1-10	11-20	21-30	31-40	41-50	51-60	61-70	71-80

FORMAT(8F10.0)

E - Young's Modulus
ν - Strain Ratio
σ - Shear Modulus
α - Thermal Expansion Coefficient

B.3

α_n	α_s	α_t
cols 1-10	11-20	21-30

FORMAT(3F10.0)

SECTION IV - "ELEMENT DATA"

Type 4 TWO DIMENSIONAL FINITE ELEMENTS

A CONTROL CARD					
TYPE	NUMEL	NMAT	MTEMP	ANALYZ	*
4					
cols 1-5	6-10	11-15	16-20	25	30

TYPE - SAP Element Code
NUMEL - Total No. of Elements
NMAT - No. of Material Property Cards
MTEMP - Maximum No. of Temp. Cards for Any Mat.
ANALYZ - ENTER 0 for Axisymmetric
1 for Plane Strain
2 for Plane Stress
* - Non-zero punch will suppress incompatible Displacement Modes

E.1 MATERIAL PROPERTY CARDS				
IMAT	NTEMP	W	ρ	β
cols 1-5	6-10	11-20	21-30	31-40

FORMAT(2I5,3F10.0)

IMAT - Material Identification Number
NTEMP - No. of Diff. Temperatures
W - Weight Density
ρ - Mass Density
β - Angle Counterclockwise+

E.2 MATERIAL PROPERTIES FOR NTEMP (2 CARDS FOR EACH)							
T	E_n	E_s	E_t	ν_{ns}	ν_{nt}	ν_{st}	G_{ns}
cols 1-10	11-20	21-30	31-40	41-50	51-60	61-70	71-80

FORMAT(8F10.0)

E - Young's Modulus
ν - Strain Ratio
G - Shear Modulus
α - Thermal Expansion Coefficient

E.3

α_n	α_s	α_t
cols 1-10	11-20	21-30

FORMAT(3F10.0)

Sheet ____ of ____

SAP INPUT DATA SHEET

SECTION IV - "ELEMENT DATA"

Type 3 & 4 PLANE STRESS MEMBRANE ELEMENTS (CONT.)
TWO DIMENSIONAL FINITE ELEMENTS

C. ELEMENT LOAD FACTORS				
THERMAL LOAD FRAC.	PRESSURE LOAD FRAC.	GRAVITY IN X DIRECTION	GRAVITY IN Y DIRECTION	GRAVITY IN Z DIRECTION
cols 1-10	11-20	21-30	31-40	41-50

Element Load Case A

Element Load Case B

Element Load Case C

Element Load Case D

(Four Cards Required Even If Not Used)

FORMAT(5F10.0)

SECTION IV - "ELEMENT DATA"

Type 3 & 4 PLANE STRESS MEMBRANE (CONT)
TWO DIMENSIONAL FINITE ELEMENTS

D. ELEMENT CARDS

ELEMENT NO. N	NODE I	NODE J	NODE K	NODE L	IMAT	REFTEMP	PRESSURE I-J SIDE	EVALUATION OPTION n	MESH GENE-RATOR k	THICKNESS T
cols 1-5	6-10	11-15	16-20	21-25	26-30	31-40	41-50	51-55	56-60	61-70

FORMAT(6I5,2F10.0,2I5,F10.0)

SAP INPUT DATA SHEET

TYPE 5 THREE DIMENSIONAL SOLID ELEMENTS (8 NODES)

A. CONTROL CARD

TYPE	NUMEL	NMAT	LSETS
5			
COL. 1-5	6-10	11-15	16-20

FORMAT (4I5)

B. MATERIAL PROPERTY CARDS (ONE CARD FOR EACH MATERIAL)

IMAT	E	NU	W	α
COL. 1-5	6-15	16-25	26-35	36-45

FORMAT (I5, 4F10.0)

C. DISTRIBUTED SURFACE LOADS

ISET	LT	P	Y	FACE
COL. 1-5	6-10	11-20	21-30	31-35

FORMAT (2I5, 2F10.2, I5)

D. ACCELERATION DUE TO GRAVITY

G
COL 1-10

FORMAT (F10.2)

TYPE — SAP ELEMENT TYPE 5

NUMEL — Nº OF ELEMENTS TYPE 5

NMAT — Nº OF DIFFERENT MATERIALS

LSETS — Nº OF LOAD SETS

IMAT — MATERIA IDENTIFICATION NUMBER

E — MODULUS OF ELASTICITY

NU — POISSON'S RATIO

W — WEIGHT DENSITY

α — COEFFICIENT OF THERMAL EXPANSION

ISET — LOAD SET ID NUMBER

LT — LOAD TYPE =1 UNIFORM PRESSURE
=2 HYDROSTATICALLY VARYING

P — MAGNITUDE OF PRESSURE IF LT=1
WEIGHT DENSITY OF FLUID IF LT=2

Y — BLANK IF LT=1
Y AXIS IF LT=2

FACE — FACE OF ELEMENT ON WHICH PRESSURE ACTS

SAP INPUT DATA SHEET

SHEET ___ OF ___

TYPE 5. THREE DIMENSIONAL SOLID ELEMENTS (8 NODES)
(CONT. 1)

E. ELEMENT LOAD CASE MULTIPLIERS			
PRESSURE			
PA	PB	PC	PD
THERMAL			
TA	TB	TC	TD
GRAVITY + X			
GXA	GXB	GXC	GXD
GRAVITY + Y			
GYA	GYB	GYC	GYD
GRAVITY + Z			
GZA	GZB	GZC	GZD
1-10	11-20	21-30	31-40

COL 1-10, 11-20, 21-30, 31-40

FORMAT (4 F10.2)

SAP INPUT DATA SHEET

SHEET ___ OF ___

TYPE 5. THREE DIMENSIONAL SOLID ELEMENTS (8 NODES)
(CONT. 2)

F. ELEMENT CARDS

NEL	I	J	K	L	M	N	O	P	INT	MN	INC	LSA	LSB	LSC	LSD	FACE	SFREE
1-5	6-10	11-15	16-20	21-25	26-30	31-35	36-40	41-45	46-50	51-55	56-60	61-62	63-64	65-66	67-68	69-70	71-80

FORMAT (12I5, 4I2, 2I1, F10.2)

SAP INPUT DATA SHEET

SHEET _OF___.

TYPE 6. PLATE AND SHELL ELEMENTS (QUADRILATERAL)

A. CONTROL CARD		
TYPE	NUMEL	NMAT
6		
COL 1-5	6-10	11-15

FORMAT (3I5)

B. MATERIAL PROPERTY INFORMATION (TWO CARDS FOR EACH MATERIAL)						
IMAT	—	—	RO	α_x	α_y	α_{xy}
C_{xx}	C_{xy}	C_{xs}	C_{yy}	C_{ys}	C_{xy}	
COL 1-10	11-20	21-30	31-40	41-50	51-60	61-70

FORMAT (I10, 20X, 4F10.0)
FORMAT (6F10.0)

WHERE:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xs} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{xx} & C_{xy} & C_{xs} \\ C_{xy} & C_{yy} & C_{ys} \\ C_{xs} & C_{ys} & C_{xy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

C. ELEMENT LOAD MULTIPLIERS (FIVE CARDS)				
LLM (A)	LLM (B)	LLM (C)	LLM (D)	DISTRIBUTED LOAD
TM (A)	TM (B)	TM (C)	TM (D)	TEMPERATURE
GRX (A)	GRX (B)	GRX (C)	GRX (D)	GRAVITY IN X
GRY (A)	GRY (B)	GRY (C)	GRY (D)	GRAVITY IN Y
GRZ (A)	GRZ (B)	GRZ (C)	GRZ (D)	GRAVITY IN Z
COL 1-10	11-20	21-30	31-40	

FORMAT (4F10.10)

SAP INPUT DATA SHEET

SHEET ___ OF ___

TYPE 6. PLATE AND SHELL ELEMENTS (QUADRILATERAL)
(CONT. 1)

D. ELEMENT CARDS											
ELNUM	NODE I	NODE J	NODE K	NODE L	NODE O	IMAT	Kn	THK	DLLP	MT	TGR
COL 1-5	6-10	11-15	16-20	21-25	26-30	31-35	36-40	41-50	51-60	61-70	71-80

FORMAT(8I5, 4F10.0)

SAP INPUT DATA SHEET

SECTION IV - "ELEMENT DATA"

Type 7 BOUNDARY ELEMENTS

CONTROL CARD		
TYPE	NUMEL	
cols 1-5	6-10	

FORMAT(2I5)

ELEMENT LOAD FACTORS			
ELEMENT LOAD CASE A	ELEMENT LOAD CASE B	ELEMENT LOAD CASE C	ELEMENT LOAD CASE D
cols 1-10	11-20	21-30	31-40

FORMAT(4F10.0)

NOTE: At least one card for element load factor is required.

Combinations of conditions for element load cases ABC&D can be done with the Structure Load Multipliers (Section VI)

SAP INPUT DATA SHEET

Sheet ______ of ______

SECTION IV - "ELEMENT DATA"

Type 7 BOUNDARY ELEMENTS (CONT.)

ELEMENT CARDS										
NODEN	NODEI	NODEJ	NODEK	NODEL	CDISP	CROT	K	DEAX	REAX	SSTF
cols 1-5	6-10	11-15	16-20	21-25	26-30	31-35	36-40	41-50	51-60	61-70

FORMAT(8I5,3F10.0)

SECTION V - "CONCENTRATED LOAD/MASS DATA"

LOADS MOMENTS/MASS							
N	L	FX(N,L)	FY(N,L)	FZ(N,L)	MX(N,L)	MY(N,L)	MZ(N,L)
*							
cols 1-5	6-10	11-20	21-30	31-40	41-50	51-60	61-70

(*) Terminate with a Blank Card

N - Node Number (Ascending Number)

L - Structure Load Case No. Eq. 0 for Dynamic Analysis

FX(N,L), FY(N,L), FZ(N,L) } Force Components

MX(N,L), MY(N,L), MZ(N,L) } Moment Component

SAP INPUT DATA SHEET

Sheet ______ of ______

SECTION VI - ELEMENT LOAD MULTIPLIERS

EM(1)	EM(2)	EM(3)	EM(4)
cols 1-10	11-20	21-30	31-40

EM(1) - Multiplier for Element Load Case A

EM(2) - Multiplier for Element Load Case B

EM(3) - Multiplier for Element Load Case C

EM(4) - Multiplier for Element Load Case D

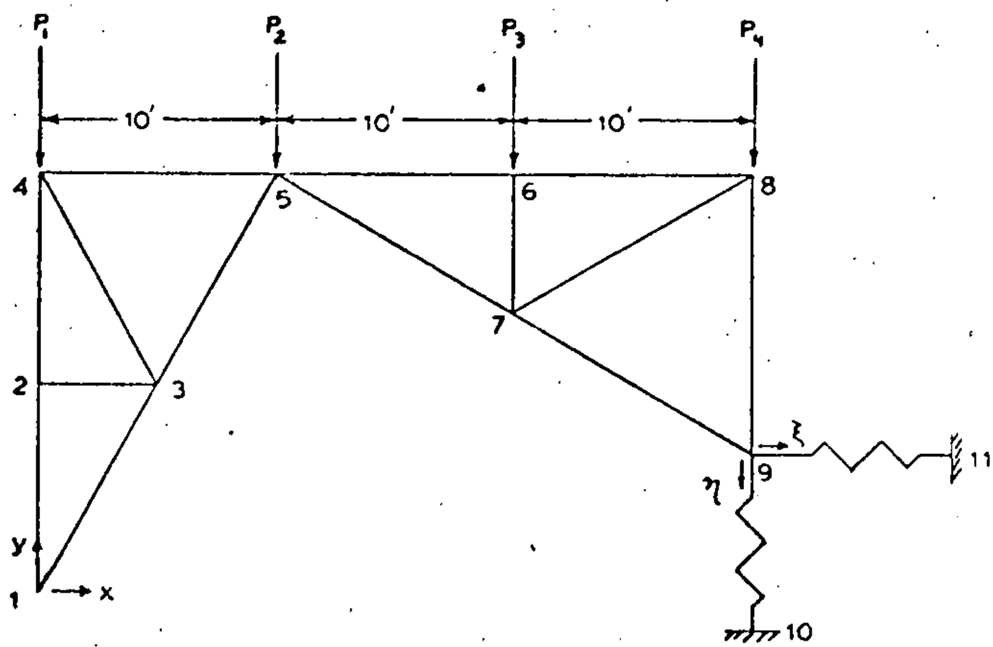
NOTE: Each Card Represents a Structure Load Case

22

PROBLEM 1.1 PLANE TRUSS

<u>Problem Definition</u>

Ref: Timoshenko, S. P. and Young, D. H., Theory of Structures, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1965, pp. 266-267.



Each truss member has $A = 2\ in^2$, $E = 30 \times 10^6$ psi, $\alpha = 6.5 \times 10^6$ in/in/°F

This problem has two structure load cases:

1) Uniform temp. increase of 70°F; $P_1=P_2=P_3=P_4=0$; $\eta = \xi = 0$.

2) Uniform temp. decrease of 40°F; $P_1=P_2=P_3=P_4=10{,}000$ lb; $\eta = \xi = .01$ ft.

<u>Problem Formulation</u>

Since two different temperature cases are used, it is best to specify the nodal temperatures as 0°F and alter the zero stress reference temperature for each structure load case. The SAP IV manual, page IV.1.2, gives the temperature increase as

$$\Delta T = (T_i + T_j)/2.0 - T_r$$

where T_i and T_j are the nodal temperatures. Thus the zero stress reference temperature for each member is specified as -1°F, and the thermal load multipliers are +70.0 and -40.0 for element load cases A and B. To understand the signs, note that the element load case A the zero stress reference temperature is (+70.0)(-1.0) = -70°F. Since the nodal temperatures are 0°F, each member of the truss has experienced a rise of 70°F above the stress-free temperature, as required.

Problem 1.1 (cont.)

The settlement of the foundation is produced by using the boundary element (type 7). The default stiffness of 10^{10} is used, and the displacement specified is 0.12". For the first structural load case zero displacement is required, so the element load case multiplier for load case A is zero. For element load case B the multiplier is 1.0 to give the desired displacements.

The concentrated forces (section V) are all for structural load case 2, as required. The element load multipliers are such that structural load case 1 consists of element load case A, and structural load case 2 consists of element load case B.

Note that since no nodal generation is done, the printing of the generated nodal data is suppressed by coding "A" in column 6 of the first nodal card. This feature is not documented in the manual, but is incorporated in the program. (Other options available are B, which suppresses the printing of the ID array, and C, which combines the effect of A and B.)

Another feature not documented in the manual, but useful, is the coding of -1 for the boundary condition code where a series of nodes have a DOF suppressed. This is very useful for the elements with only translational DOF allowed.

Discussion of Results

Timoshenko gives only the y displacement of node 5:

	Timoshenko*	SAP IV
load case 1	+0.158"	+0.15762"
load case 2	-0.223"	-0.22280"

```
                 1         2         3         4         5         6         7         8
CARD    12345678901234567890123456789012345678901234567890123456789012345678901234567890

   1    PROBLEM 1.1 -- PLANE TRUSS
   2       11    2    2
   3       1A    1    1   -1   -1   -1   -1
   4        2                                        103.923048
   5        3                                 60.    103.923048
   6        4                                        207.846097
   7        5                                120.    207.846097
   8        6                                240.    207.846097
   9        7                                240.    138.564065
  10        8                                360.    207.846097
  11        9                                360.     69.282032
  12       10    1    1                      360.       -100.
  13       11    1    1    1    1    1    1  460.     69.282032
  14        1   14    1
  15        1   30.0E+6    6.5E-6              2.
  16
  17
  18
  19      70.      -40.
  20        1    1    2    1  -1.
  21        2    1    3    1  -1.
  22        3    2    3    1  -1.
  23        4    2    4    1  -1.
  24        5    3    4    1  -1.
  25        6    4    5    1  -1.
  26        7    3    5    1  -1.
  27        8    5    7    1  -1.
  28        9    5    6    1  -1.
  29       10    6    7    1  -1.
  30       11    6    8    1  -1.
  31       12    7    8    1  -1.
  32       13    8    9    1  -1.
  33       14    7    9    1  -1.
  34        7    2
  35                   1.
  36        9   10                   1                 .12
  37        9   11                   1                 .12
  38        4    2          -10000.
  39        5    2          -10000.
  40        6    2          -10000.

                 1         2         3         4         5         6         7         8
        12345678901234567890123456789012345678901234567890123456789012345678901234567890
```

25

1.1 Pg 3

SAP IV DATA CARD.

PROBLEM 1.1 -- PLANE TRUSS PAGE 2

```
                 1         2         3         4         5         6         7         8
CARD    12345678901234567890123456789012345678901234567890123456789012345678901234567890

  41           8    2             -10000.
  42
  43           1.
  44                     1.

                 1         2         3         4         5         6         7         8
        12345678901234567890123456789012345678901234567890123456789012345678901234567890
```

PROBLEM .1 -- PLANE TRUSS

C O N T R O L   I N F O R M A T I O N

```
NUMBER OF NODAL POINTS       =   11
NUMBER OF ELEMENT TYPES      =    2
NUMBER OF LOAD CASES         =    2
NUMBER OF FREQUENCIES        =    0
ANALYSIS CODE (NDYN)         =    0
   EQ.0.  STATIC
   EQ.1.  MODAL EXTRACTION
   EQ.2.  FORCED RESPONSE
   EQ.3.  RESPONSE SPECTRUM
   EQ.4.  DIRECT INTEGRATION
SOLUTION MODE (MODEX)        =    0
   EQ.0.  EXECUTION
   EQ.1.  DATA CHECK
NUMBER OF SUBSPACE
ITERATION VECTORS (NAD)      =    0
EQUATIONS PER BLOCK          =    0
TAPE10 SAVE FLAG (N10SV)     =    0
```

NODAL POINT INPUT DATA

NODE NUMBER	BOUNDARY CONDITION CODES X	Y	Z	XX	YY	ZZ	NODAL POINT COORDINATES X	Y	Z		T
1A	1	1	-1	-1	-1	-1	0.0	0.0	0.0	0	0.0
2	0	0	0	0	0	0	0.0	103.923	0.0	0	0.0
3	0	0	0	0	0	0	60.000	103.923	0.0	0	0.0
4	0	0	0	0	0	0	0.0	207.846	0.0	0	0.0
5	0	0	0	0	0	0	120.000	207.846	0.0	0	0.0
6	0	0	0	0	0	0	240.000	207.846	0.0	0	0.0
7	0	0	0	0	0	0	240.000	138.564	0.0	0	0.0
8	0	0	0	0	0	0	360.000	207.846	0.0	0	0.0
9	0	0	0	0	0	0	360.000	69.282	0.0	0	0.0
10	1	1	0	0	0	0	360.000	-100.000	0.0	0	0.0
11	1	1	1	-1	1	-1	460.000	69.282	0.0	0	0.0

27

EQUATION NUMBERS

N	[illegible]	Y	Z	XX	YY	ZZ
1	0	0	0	0	0	0
2	1	2	0	0	0	0
3	3	4	0	0	0	0
4	5	6	0	0	0	0
5	7	8	0	0	0	0
6	9	10	0	0	0	0
7	11	12	0	0	0	0
8	13	14	0	0	0	0
9	15	16	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0

NUMBER OF TRUSS MEMBERS= 14
NUMBER OF DIFF. MEMBERS= 1

TYPE	E	ALPHA		DEN	AREA	WT
1	0.3000000D 08	0.6500000D-05	0.0		0.2000000D 01	0.0

ELEMENT LOAD MULTIPLIERS

	A	B	C	D
X-DIR	0.0	0.0	0.0	0.0
Y-DIR	0.0	0.0	0.0	0.0
Z-DIR	0.0	0.0	0.0	0.0
TEMP	0.7000000D 02	-0.4000000D 02	0.0	0.0

N	I	J	TYPE	TEMP	BAND
1	1	2	1	-1.00	2
2	1	3	1	-1.00	2
3	2	3	1	-1.00	4
4	2	4	1	-1.00	6
5	3	4	1	-1.00	4
6	4	5	1	-1.00	4
7	3	5	1	-1.00	6
8	5	7	1	-1.00	6
9	5	6	1	-1.00	4
10	6	7	1	-1.00	4
11	6	8	1	-1.00	6
12	7	8	1	-1.00	4
13	8	9	1	-1.00	4
14	7	9	1	-1.00	6

29

I-1
Pg 7

B O U N D A R Y   E L E M E N T S

ELEMENT TYPE = 7
NUMBER OF ELEMENTS = 2

ELEMENT LOAD CASE MULTIPLIERS

CASE(A)	CASE(B)	CASE(C)	CASE(D)
0.0	1.0000	0.0	0.0

ELEMENT NUMBER	NODE (N)	NODES DEFINING CONSTRAINT DIRECTION (NI)	(NJ)	(NK)	(NL)	CODE KD	CODE KR	GENERATION CODE (KN)	SPECIFIED DISPLACEMENT	SPECIFIED ROTATION	SPRING RATE
1	9	10	0	0	0	1	0	0	0.12000 00	0.0	0.10000 11
2	9	11	0	0	0	1	0	0	0.12000 00	0.0	0.10000 11

E Q U A T I O N   P A R A M E T E R S

TOTAL NUMBER OF EQUATIONS = 16
BANDWIDTH = 6
NUMBER OF EQUATIONS IN A BLOCK = 16
NUMBER OF BLOCKS = 1

N O D A L   L O A D S   (S T A T I C)   O R   M A S S E S   (D Y N A M I C)

NODE NUMBER	LOAD CASE	X-AXIS FORCE	Y-AXIS FORCE	Z-AXIS FORCE	X-AXIS MOMENT	Y-AXIS MOMENT	Z-AXIS MOMENT
4	2	0.0	-0.100000D 05	0.0	0.0	0.0	0.0
5	2	0.0	-0.100000D 05	0.0	0.0	0.0	0.0
6	2	0.0	-0.100000D 05	0.0	0.0	0.0	0.0
8	2	0.0	-0.100000D 05	0.0	0.0	0.0	0.0

STRUCTURE LOAD CASE — ELEMENT LOAD MULTIPLIERS

STRUCTURE LOAD CASE	A	B	C	D
1	1.000	0.0	0.0	0.0
2	0.0	1.000	0.0	0.0

NODE DISPLACEMENTS/ROTATI[illegible]S

NODE NUMBER	LOAD CASE	X-TRANSLATION	Y-TRANSLATION	Z-TRANSLATION	X-ROTATION	Y-ROTATION	Z-ROTATION
11	1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	2	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
10	1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	2	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
9	1	0.27285D-21	-0.81855D-21	0.0	0.0	0.0	0.0
	2	0.12000D 00	-0.12000D 00	0.0	0.0	0.0	0.0
8	1	0.54600D-01	0.63047D-01	0.0	0.0	0.0	0.0
	2	0.60141D-01	-0.19067D 00	0.0	0.0	0.0	0.0
7	1	-0.27300D-01	0.78808D-01	0.0	0.0	0.0	0.0
	2	0.10794D 00	-0.24759D 00	0.0	0.0	0.0	0.0
6	1	0.44886D-10	0.11033D 00	0.0	0.0	0.0	0.0
	2	0.10866D 00	-0.27715D 00	0.0	0.0	0.0	0.0
5	1	-0.54600D-01	0.15762D 00	0.0	0.0	0.0	0.0
	2	0.15718D 00	-0.22280D 00	0.0	0.0	0.0	0.0
4	1	-0.10920D 00	0.94570D-01	0.0	0.0	0.0	0.0
	2	0.18838D 00	-0.88681D-01	0.0	0.0	0.0	0.0
3	1	-0.27300D-01	0.78808D-01	0.0	0.0	0.0	0.0
	2	0.82610D-01	-0.11372D 00	0.0	0.0	0.0	0.0
2	1	-0.54600D-01	0.47285D-01	0.0	0.0	0.0	0.0
	2	0.98210D-01	-0.44341D-01	0.0	0.0	0.0	0.0
1	1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	2	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

TRUSS M[illegible]ER ACTIONS

MEMBER	LOAD	STRESS	FORCE
1	1	0.00000	0.000
1	2	-5000.00003	-10000.000
2	1	-0.00000	-0.000
2	2	-6495.19050	-12990.381
3	1	-0.00000	-0.000
3	2	0.00000	0.0
4	1	0.00000	0.000
4	2	-5000.00003	-10000.000
5	1	-0.00000	-0.000
5	2	0.00003	0.000
6	1	-0.00000	-0.000
6	2	-0.00002	-0.000
7	1	0.00000	0.0
7	2	-6495.19052	-12990.381
8	1	0.00000	0.000
8	2	-1250.00000	-2500.000
9	1	-0.00000	-0.000
9	2	-4330.12701	-8660.254
10	1	-0.00000	0.0
10	2	-5000.00000	-10000.000
11	1	-0.00000	-0.000
11	2	-4330.12701	-8660.254
12	1	0.00000	0.000
12	2	-4999.99999	-10000.000
13	1	-0.00000	-0.000
13	2	-7499.99999	-15000.000
14	1	-0.00000	-0.000
14	2	-3750.00001	-7500.000

B O U N D A R Y   E L E M E N T   F O R C E S / M O M E N T S

ELEMENT NUMBER	LOAD CASE	FORCE	MOMENT
1	1	0.81855D-11	0.0
1	2	0.12000D 10	0.0
2	1	0.27285D-11	0.0
2	2	0.12000D 10	0.0

S T A T I C   S O L U T I O N   T I M E   L O G

EQUATION SOLUTION = 0.30
DISPLACEMENT OUTPUT = 0.21
STRESS RECOVERY = 0.32

O V E R A L L   T I M E   L O G

NODAL POINT INPUT = 0.25
ELEMENT STIFFNESS FORMATION = 0.39
NODAL LOAD INPUT = 0.09
TOTAL STIFFNESS FORMATION = 0.35
STATIC ANALYSIS = 0.85
EIGENVALUE EXTRACTION = 0.0
FORCED RESPONSE ANALYSIS = 0.0
RESPONSE SPECTRUM ANALYSIS = 0.0
STEP-BY STEP INTEGRATION = 0.0

TOTAL SOLUTION TIME = 1.92

34

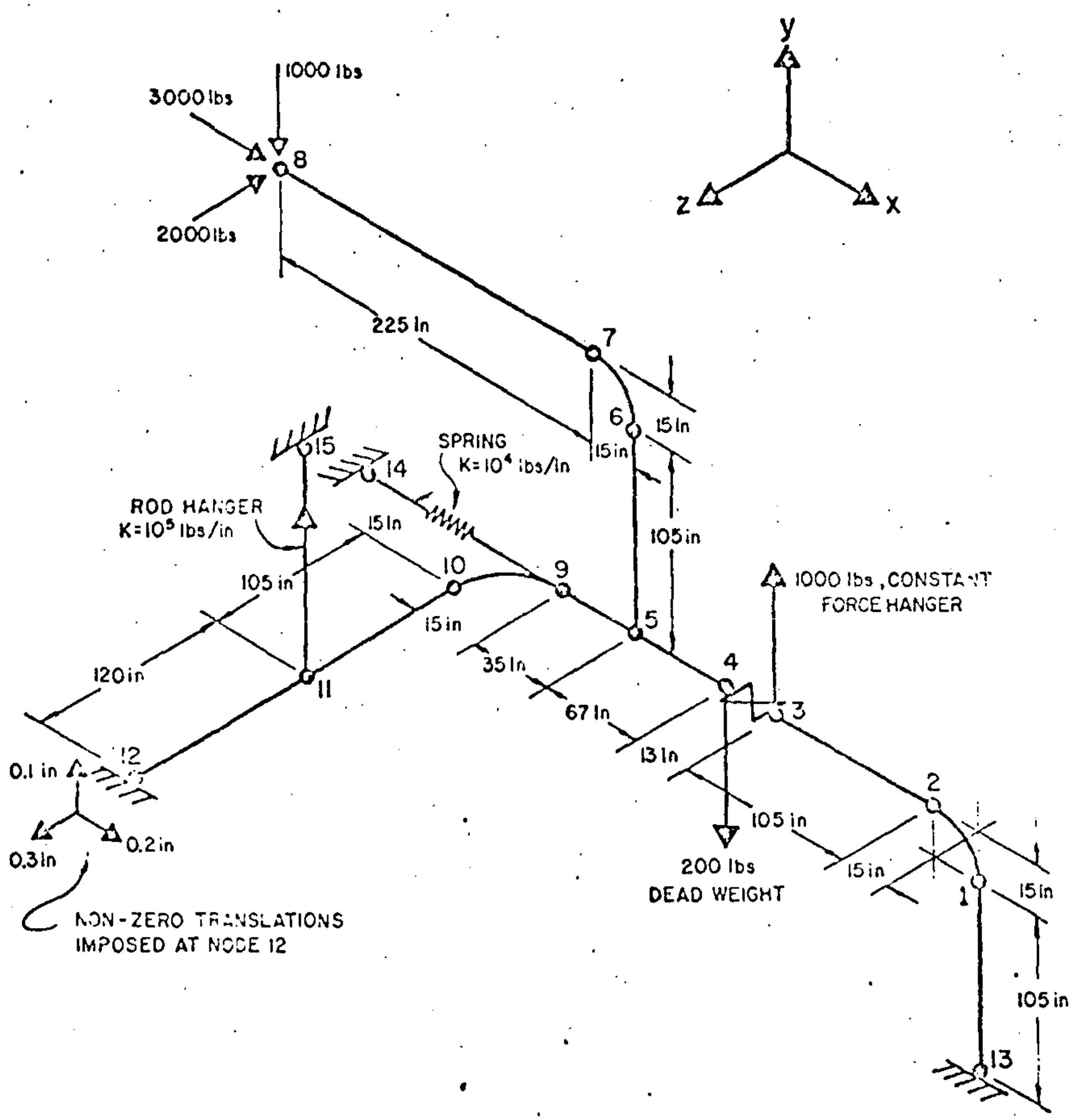
J-1 Pg 12

PROBLEM 12.1 PIPE NETWORK STATIC ANALYSIS

Problem Definition

Ref: SAP IV Manual, problem 1

35



Problem Formulation

The non-zero displacements at node 12 are created by using boundary elements connected to added nodes 16, 17 and 18.

Problem 12.1 (cont.)

Discussion of Results

The results as given in the SAP IV Manual are:

REACTIONS:

Node	SAP FX	SAP FY	SAP FZ	ADLPIPE FX	ADLPIPE FY	ADLPIPE FZ
9	5643.51	--	--	5659.	--	--
11	--	-4044.59	--	--	-4052.	--
12	2350.08	4023.01	-4960.70	2361.	4026.	-4966.
13	-10993.59	4505.61	2960.70	-11021.	4509.	2966.
Total	-3000.00	4484.03	-2000.00	-3001.	4483.	-2000.

APPLIED LOADS:

Loading Type	Direction X	Direction Y	Direction Z
Concentrated:			
at node 3	-	1000.00	-
at node 4	-	-200.00	-
at node 8	3000.	1000.00	2000.
Distributed Weight		-6284.03	
TOTAL	3000.	-4484.03	2000.

```
                 1         2         3         4         5         6         7         8
CARD    12345678901234567890123456789012345678901234567890123456789012345678901234567890

  1     PROBLEM 12.1 -- PIPE NETWORK STATIC ANLYSIS
  2        18    2    1    0    0    0        40
  3         1    0    0    0    0    0    0       0.0      105.0       0.0    0     740.0
  4         2    0    0    0    0    0    0     -15.0      120.0       0.0    0     740.0
  5         3    0    0    0    0    0    0    -120.0      120.0       0.0    0     740.0
  6         4    0    0    0    0    0    0    -133.0      120.0       0.0    0     740.0
  7         5    0    0    0    0    0    0    -200.0      120.0       0.0    0     740.0
  8         6    0    0    0    0    0    0    -200.0      225.0       0.0    0     740.0
  9         7    0    0    0    0    0    0    -215.0      240.0       0.0    0     740.0
 10         8    0    0    0    0    0    0    -440.0      240.0       0.0    0     740.0
 11         9    0    0    0    0    0    0    -235.0      120.0       0.0    0     740.0
 12        10    0    0    0    0    0    0    -250.0      120.0      15.0    0     740.0
 13        11    0    0    0    0    0    0    -250.0      120.0     120.0    0     740.0
 14        12    0    0    0    1    1    1    -250.0      120.0     240.0    0     740.0
 15        13    1    1    1    1    1    1       0.0        0.0       0.0    0     740.0
 16        14    1    1    1    1    1    1    -245.0      120.0       0.0    0       0.0
 17        15    1    1    1    1    1    1    -250.0      130.0     120.0    0       0.0
 18        16    1    1    1    1    1    1    -240.0      120.0     240.0    0       0.0
 19        17    1    1    1    1    1    1    -250.0      130.0     240.0    0       0.0
 20        18    1    1    1    1    1    1    -250.0      120.0     250.0    0       0.0
 21         7    5
 22            1.0       0.0       0.0       0.0
 23         9   14    0    0    0    1    0    0         0.0               1.0 4
 24        11   15    0    0    0    1    0    0         0.0               1.0 5
 25        12   16    0    0    0    1    0    0         0.2              1.0E13
 26        12   17    0    0    0    1    0    0         0.1              1.0E13
 27        12   18    0    0    0    1    0    0         0.3              1.0E13
 28        12   12    1    1    2    2    2    0    0    0    0
 29         1    1CARBON STEEL
 30            0.0     27.9E6    0.333    6.81E-6
 31         1     10.74     0.50      0.0       6.61          NORMAL PIPE
 32         2     10.74     2.00      0.0       6.61          VALVE
 33            0.0       0.0       0.0       0.0      X-GRAVITY
 34           -1.0       0.0       0.0       0.0      Y-GRAVITY
 35            0.0       0.0       0.0       0.0      Z-GRAVITY
 36            1.0       0.0       0.0       0.0      THERMAL
 37            0.0       0.0       0.0       0.0      PRESSURE
 38        16   13    1    1    1
 39        28    1    2    1    1
 40           15.0   CC    -15.0     105.0       0.0

                 1         2         3         4         5         6         7         8
        12345678901234567890123456789012345678901234567890123456789012345678901234567890
```

37

12.1
Pg 3

SAP IV DATA CARDS

PROBLEM .1 -- PIPE NETWORK STATIC ANLYSIS PAGE 2

```
                 1         2         3         4         5         6         7         8
CARD    12345678901234567890123456789012345678901234567890123456789012345678901234567890

 41        3T    2    3    1    1
 42        4T    3    4    1    2
 43        5T    4    5    1    1
 44        6T    5    6    1    1
 45        7B    6    7    1    1
 46            15.0   CC   -215.0      225.0       0.0
 47        8T    7    8    1    1
 48        9T    5    9    1    1
 49       10B    9   10    1    1
 50            15.0   CC   -235.0      120.0      15.0
 51       11T   10   11    1    1
 52       12T   11   12    1    1
 53         3    1              1000.0
 54         4    1              -200.0
 55         8    1   3000.0     1000.0    2000.0
 56                                                                    BLANK
 57             1.0       0.0       0.0       0.0                      LAST

                 1         2         3         4         5         6         7         8
        12345678901234567890123456789012345678901234567890123456789012345678901234567890
```

PROBLEM 12 -- PIPE NETWORK STATIC ANLYSIS

C O N T R O L   I N F O R M A T I O N

```
     NUMBER OF NODAL POINTS      =    18
     NUMBER OF ELEMENT TYPES     =     2
     NUMBER OF LOAD CASES        =     1
     NUMBER OF FREQUENCIES       =     0
     ANALYSIS CODE (NDYN)        =     0
       EQ.0,  STATIC
       EQ.1,  MODAL EXTRACTION
       EQ.2,  FORCED RESPONSE
       EQ.3,  RESPONSE SPECTRUM
       EQ.4,  DIRECT INTEGRATION
     SOLUTION MODE (MODEX)       =     0
       EQ.0,  EXECUTION
       EQ.1,  DATA CHECK
     NUMBER OF SUBSPACE
     ITERATION VECTORS (NAD)     =     0
     EQUATIONS PER BLOCK         =    40
     TAPE10 SAVE FLAG (N10SV)    =     0
```

NODAL POINT INPUT DATA

NODE NUMBER	BOUNDARY CONDITION CODES X	Y	Z	XX	YY	ZZ	NODAL POINT COORDINATES X	Y	Z		T
1	0	0	0	0	0	0	0.0	105.000	0.0	0	740.000
2	0	0	0	0	0	0	-15.000	120.000	0.0	0	740.000
3	0	0	0	0	0	0	-120.000	120.000	0.0	0	740.000
4	0	0	0	0	0	0	-133.000	120.000	0.0	0	740.000
5	0	0	0	0	0	0	-200.000	120.000	0.0	0	740.000
6	0	0	0	0	0	0	-200.000	225.000	0.0	0	740.000
7	0	0	0	0	0	0	-215.000	240.000	0.0	0	740.000
8	0	0	0	0	0	0	-440.000	240.000	0.0	0	740.000
9	0	0	0	0	0	0	-235.000	120.000	0.0	0	740.000
10	0	0	0	0	0	0	-250.000	120.000	15.000	0	740.000
11	0	0	0	0	0	0	-250.000	120.000	120.000	0	740.000
12	0	0	0	1	1	1	-250.000	120.000	240.000	0	740.000
13	1	1	1	1	1	1	0.0	0.0	0.0	0	740.000
14	1	1	1	1	1	1	-245.000	120.000	0.0	0	0.0
15	1	1	1	1	1	1	-250.000	130.000	120.000	0	0.0
16	1	1	1	1	1	1	-240.000	120.000	240.000	0	0.0
17	1	1	1	1	1	1	-250.000	130.000	240.000	0	0.0
18	1	1	1	1	1	1	-250.000	120.000	250.000	0	0.0

DAL DATA

NUMBER	BOUNDARY CONDITION CODES X	Y	Z	XX	YY	ZZ	NODAL POINT COORDINATES X	Y	Z	T
1	0	0	0	0	0	0	0.0	105.000	0.0	740.000
2	0	0	0	0	0	0	-15.000	120.000	0.0	740.000
[illegible]	0	0	0	0	0	0	-120.000	120.000	0.0	740.000
4	0	0	0	0	0	0	-133.000	120.000	0.0	740.000
5	0	0	0	0	0	0	-200.000	120.000	0.0	740.000
6	0	0	0	0	0	0	-200.000	225.000	0.0	740.000
7	0	0	0	0	0	0	-215.000	240.000	0.0	740.000
8	0	0	0	0	0	0	-440.000	240.000	0.0	740.000
9	0	0	0	0	0	0	-235.000	120.000	0.0	740.000
10	0	0	0	0	0	0	-250.000	120.000	15.000	740.000
11	0	0	0	0	0	0	-250.000	120.000	120.000	740.000
12	0	0	0	1	1	1	-250.000	120.000	240.000	740.000
13	1	1	1	1	1	1	0.0	0.0	0.0	740.000
14	1	1	1	1	1	1	-245.000	120.000	0.0	0.0
15	1	1	1	1	1	1	-250.000	130.000	120.000	0.0
16	1	1	1	1	1	1	-240.000	120.000	240.000	0.0
17	1	1	1	1	1	1	-250.000	130.000	240.000	0.0
18	1	1	1	1	1	1	-250.000	120.000	250.000	0.0

EQUATION NUMBERS

N	X	Y	Z	XX	YY	ZZ
1	1	2	3	4	5	6
2	7	8	9	10	11	12
3	13	14	15	16	17	18
4	19	20	21	22	23	24
5	25	26	27	28	29	30
6	31	32	33	34	35	36
7	37	38	39	40	41	42
8	43	44	45	46	47	48
9	49	50	51	52	53	54
10	55	56	57	58	59	60
11	61	62	63	64	65	66
12	67	68	69	0	0	0
13	0	0	0	0	0	0
14	0	0	0	0	0	0
15	0	0	0	0	0	0
16	0	0	0	0	0	0
17	0	0	0	0	0	0
18	0	0	0	0	0	0

B O U N D A R Y   E L E M E N T S

ELEMENT TYPE = 7
NUMBER OF ELEMENTS = 5

ELEMENT LOAD CASE MULTIPLIERS

CASE(A)	CASE(B)	CASE(C)	CASE(D)
1.0000	0.0	0.0	0.0

ELEMENT NUMBER	NODE (N)	NODES DEFINING CONSTRAINT DIRECTION (NI)	(NJ)	(NK)	(NL)	CODE KD	CODE KR	GENERATION CODE (KN)	SPECIFIED DISPLACEMENT	SPECIFIED ROTATION	SPRING RATE
1	9	14	0	0	0	1	0	0	0.0	0.0	0.1000D 01
2	11	15	0	0	0	1	0	0	0.0	0.0	0.1000D 01
3	12	16	0	0	0	1	0	0	0.2000D 00	0.0	0.1000D 14
4	12	17	0	0	0	1	0	0	0.1000D 00	0.0	0.1000D 14
5	12	18	0	0	0	1	0	0	0.3000D 00	0.0	0.1000D 14

P I P E   L E M E N T   I N P U T   D A T A

C O N T R O L   I N F O R M A T I O N

NUMBER OF PIPE ELEMENTS	=	12
NUMBER OF MATERIAL SETS	=	1
MAXIMUM NUMBER OF MATERIAL TEMPERATURE INPUT POINTS	=	1
NUMBER OF SECTION PROPERTY SETS	=	2
NUMBER OF BRANCH POINT NODES	=	0
MAXIMUM NUMBER OF TANGENTS COMMON TO A BRANCH POINT	=	4
FLAG FOR NEGLECTING AXIAL DEFORMATIONS IN BEND ELEMENTS (EQ.1, NEGLECT)	=	0

M A T E R I A L   P R O P E R T Y   T A B L E S

MATERIAL NUMBER = (1)
NUMBER OF
TEMPERATURE POINTS = (1)
IDENTIFICATION = (CARBON STEEL)

POINT NUMBER	TEMPERATURE	YOUNG*S MODULUS	POISSON*S RATIO	THERMAL EXPANSION
1	0.0	27900000.0	0.333	0.681D-05

43

J2.1
Pg 9

SECTION PROPERTY TABLE

SECTION NUMBER	OUTSIDE DIAMETER	WALL THICKNESS	SHAPE FACTOR FOR SHEAR	WEIGHT/ UNIT LENGTH	MASS/ UNIT LENGTH	DESCRIPTION
1	10.740	0.5000	0.0	0.6610D 01	0.1711D-01	NORMAL PIPE
2	10.740	2.0000	0.0	0.6610D 01	0.1711D-01	VALVE

ELEMENT LOAD CASE MULTIPLIERS

	CASE A	CASE B	CASE C	CASE D
X-DIRECTION GRAVITY	0.0	0.0	0.0	0.0
Y-DIRECTION GRAVITY	-1.000	0.0	0.0	0.0
Z-DIRECTION GRAVITY	0.0	0.0	0.0	0.0
THERMAL DISTORTION	1.000	0.0	0.0	0.0
PRESSURE DISTORTION	0.0	0.0	0.0	0.0

44

PIPE ELEMENT INPUT DATA

ELEMENT NUMBER	ELEMENT TYPE	NODE -I	NODE -J	MATL. NUMBER	SECTION NUMBER	REFERENCE TEMPERATURE (BEND RADIUS)	INTERNAL PRESSURE (THIRD POINT)	DIRECTION COSINES A(YX) (X3-ORDINATE)	A(YY) (Y3-ORDINATE)	A(YZ) (Z3-ORDINATE)	NO INCREMENT (ALL FRACTION)	INP TAG
1	TANGENT	13	1	1	1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1	II
2	BEND	1	2	1	1	0.0	0.0					IC
						(15.000)	(CC)	(-15.000)(	105.000)(	0.0)	(0.1000)	
3	TANGENT	2	3	1	1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1	II
4	TANGENT	3	4	1	2	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1	II
5	TANGENT	4	5	1	1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1	II
6	TANGENT	5	6	1	1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1	II
7	BEND	6	7	1	1	0.0	0.0					IC
						(15.000)	(CC)	(-215.000)(	225.000)(	0.0)	(0.1000)	
8	TANGENT	7	8	1	1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1	II
9	TANGENT	5	9	1	1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1	II
10	BEND	9	10	1	1	0.0	0.0					IC
						(15.000)	(CC)	(-235.000)(	120.000)(	15.000)	(0.1000)	
11	TANGENT	10	11	1	1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1	II
12	TANGENT	11	12	1	1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1	II

EQUATION PARAMETERS

TOTAL NUMBER OF EQUATIONS = 60
BANDWIDTH = 30
NUMBER OF EQUATIONS IN A BLOCK = 40
NUMBER OF BLOCKS = 2

NODAL LOADS (STATIC) OR MASSES (DYNAMIC)

NODE NUMBER	LOAD CASE	X-AXIS FORCE	Y-AXIS FORCE	Z-AXIS FORCE	X-AXIS MOMENT	Y-AXIS MOMENT	Z-AXIS MOMENT
3	1	0.0	0.10000D 04	0.0	0.0	0.0	0.0
4	1	0.0	-0.20000D 03	0.0	0.0	0.0	0.0
8	1	0.30000D 04	0.10000D 04	0.20000D 04	0.0	0.0	0.0

ELEMENT LOAD MULTIPLIERS

STRUCTURE LOAD CASE	A	B	C	D
1	1.000	0.0	0.0	0.0

46

12.1
Pg 12

N O D E   I S P L A C E M E N T S / R O T A T   S

NODE NUMBER	LOAD CASE	X- TRANSLATION	Y- TRANSLATION	Z- TRANSLATION	X- ROTATION	Y- ROTATION	Z- ROTATION
18	1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
17	1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
16	1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
15	1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
14	1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
13	1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
12	1	0.20000D 00	0.10000D 00	0.30000D 00	0.0	0.0	0.0
11	1	-0.23704D 00	0.24036D 00	-0.30334D 00	0.24913D-02	0.59867D-02	-0.98373D-03
10	1	-0.87692D 00	0.62212D 00	-0.83127D 00	0.46491D-02	0.51914D-02	-0.18445D-02
9	1	-0.85293D 00	0.67357D 00	-0.93816D 00	0.56803D-02	0.50548D-03	-0.19557D-02
8	1	-0.12371D 01	0.35037D 01	0.56155D 01	0.11600D-01	0.26668D-01	-0.10589D-01
7	1	-0.10469D 00	0.13227D 01	0.25396D 00	0.11600D-01	0.18081D-01	-0.84242D-02
6	1	-0.14196D 00	0.11282D 01	-0.11576D 00	0.87383D-02	0.11426D-04	-0.68345D-02
5	1	-0.67678D 00	0.59932D 00	-0.94228D 00	0.63342D-02	0.32005D-04	-0.23464D-02
4	1	-0.34004D 00	0.54623D 00	-0.79028D 00	0.39505D-02	-0.40911D-02	0.35735D-03
3	1	-0.27458D 00	0.55174D 00	-0.73563D 00	0.37734D-02	-0.42902D-02	0.46305D-03
2	1	0.25315D 00	0.62396D 00	-0.18389D 00	0.37826D-04	-0.51543D-02	0.61334D-04
1	1	0.29269D 00	0.52834D 00	-0.10914D 00	-0.10141D-02	-0.39355D-02	-0.35586D-02

47

Pg 13

B O U N D A R Y   E L E M E N T   F O R C E S / M O M E N T S

ELEMENT NUMBER	LOAD CASE	FORCE	MOMENT
1	1	0.85634D 00	0.0
2	1	0.24157D 00	0.0
3	1	0.20000D 13	0.0
4	1	0.10000D 13	0.0
5	1	0.30000D 13	0.0

P I P E   F O R C E S   A N D   M O M E N T S

ELEMENT NUMBER	ELEMENT TYPE	LOAD CASE	STATION	AXIAL FORCE	Y-AXIS SHEAR	Z-AXIS SHEAR	TORSIONAL MOMENT	Y-AXIS MOMENT	Z-AXIS MOMENT
1	TANGENT	1	END-I	-3735.024	-3174.927	6012.520	-165785.17	-515408.41	-223626.96
			END-J	-3049.974	-3174.927	6012.520	-165785.17	115826.22	109740.35
2	BEND	1	END-I	-3049.974	-6012.520	-3174.927	-165785.17	-109740.35	115826.22
			CENTER	-6346.724	-2156.254	-3174.927	-208774.67	5954.49	166464.10
			END-J	-6012.520	2885.230	-3174.927	-157364.25	118161.27	161986.65
3	TANGENT	1	END-I	-6012.520	-2885.230	3174.927	-157364.25	-118161.27	-161986.66
			END-J	-6012.520	-2191.180	3174.927	-157364.25	215206.04	104624.85
4	TANGENT	1	END-I	-6012.520	-3191.180	3174.927	-157364.25	215206.04	104624.85
			END-J	-6012.520	-3105.250	3174.927	-157364.25	256400.08	145551.65
5	TANGENT	1	END-I	-6012.520	-2905.250	3174.927	-157364.25	256400.08	145551.65
			END-J	-6012.520	-2462.380	3174.927	-157364.25	469200.17	325367.24
6	TANGENT	1	END-I	-1337.044	2000.000	3000.000	480000.00	-409526.71	240000.00
			END-J	-642.994	2000.000	3000.000	480000.00	-94526.71	30000.00
7	BEND	1	END-I	-642.994	-3000.000	2000.000	480000.00	-30000.00	-94526.71
			CENTER	-2520.922	-1721.719	2000.000	326984.85	-339411.25	-65306.15
			END-J	-3000.000	497.250	2000.000	-0.00	-450000.00	-57684.37
8	TANGENT	1	END-I	-3000.000	-497.250	-2000.000	0.00	450000.00	57684.38
			END-J	-3000.000	1000.000	-2000.000	0.00	-0.00	-0.00
9	TANGENT	1	END-I	-3012.520	-1125.335	5174.927	82635.75	-10799.93	-84157.46
			END-J	-3012.520	-893.985	5174.927	82635.75	170322.61	-48821.35
10	BEND	1	END-I	-3011.664	-5174.927	-893.985	82635.75	48821.35	170322.61
			CENTER	-5788.794	-1529.658	-816.113	89143.01	-32956.94	211979.55
			END-J	-5174.927	3011.664	-738.241	36260.48	-94558.29	202771.55
11	TANGENT	1	END-I	-5174.927	-738.241	-3011.664	36260.48	202771.55	94558.29
			END-J	-5174.927	-44.191	-3011.664	36260.48	-113453.17	135635.96
12	TANGENT	1	END-I	-5174.927	-47.049	-3011.664	36260.48	-113453.17	135635.96
			END-J	-5174.927	[illegible]	-3011.664	36260.48	-474852.96	93317.89

S T A T I C   S O L U T I O N   T I M E   L O G

EQUATION SOLUTION	=	0.73
DISPLACEMENT OUTPUT	=	0.27
STRESS RECOVERY	=	0.60

O V E R A L L   T I M E   L O G

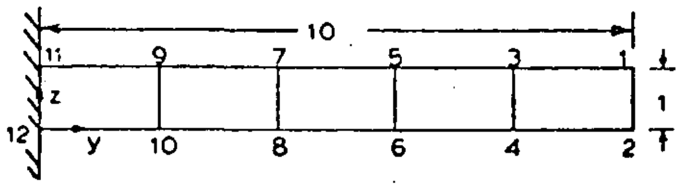
NODAL POINT INPUT	=	0.42
ELEMENT STIFFNESS FORMATION	=	1.82
NODAL LOAD INPUT	=	0.13
TOTAL STIFFNESS FORMATION	=	0.77
STATIC ANALYSIS	=	1.61
EIGENVALUE EXTRACTION	=	0.0
FORCED RESPONSE ANALYSIS	=	0.0
RESPONSE SPECTRUM ANALYSIS	=	0.0
STEP-BY-STEP INTEGRATION	=	0.0
TOTAL SOLUTION TIME	=	4.75

PROBLEM 3.2 PLANE STRESS CANTILEVER BEAM EIGENVALUES

Problem Definition

Ref: Carnegie, W. and Thomas, J., "The Effects of Shear Deformation and Rotary Inertia on the Lateral Frequencies of Cantilever Beams in Bending", ASME Journal of Engineering for Industry, February 1972, pp. 267-278.

See also problems 5.2 and 8.2.



$E = 10^6$ psi

$y = 0.3$

$\gamma = .386$ lb/in^3

$t = 1.2"$

Problem Formulation

Note that by placing the first two nodes at the tip only four nodal cards are required. Since the boundary condition code for the generated nodes are set equal to the values on the first care of a series, the nodal numbering should be such that the nodes with unique boundary condition codes occur last in a series.

Discussion of Results

The frequencies for the flexural vibrations of a cantiler beam are

$$f_i = \frac{\lambda_i^2}{2\pi}\sqrt{\frac{EI}{\mu \ell^4}}$$

while the extensional vibration frequencies are

$$f_i' = \frac{i}{4\ell}\sqrt{\frac{E}{\mu}}$$

However, the flexural frequencies are too high because of neglecting shear and rotary inertia. This effort is more pronounced for the higher modes. The results for a Timoshenko beam were obtained by multiplying the Euler beam frequencies by a factor obtained from figure 1 in the article by Carnegie and Thomas.

Mode Number	Type	Euler Beam	Timoshenko Beam	SAP IV
1	flexural	55.96	55.6	50.01
2	flexural	350.7	332.	295.9
3	flexural	982.0	876.	788.5
4	extensional	790.6	--	791.5
5	flexural	1924.	1590.	1485.

```
                 1         2         3         4         5         6         7         8
CARD    12345678901234567890123456789012345678901234567890123456789012345678901234567890

   1    PROBLEM 3.2 -- PLANE STRESS CANTILEVER BEAM EIGENVALUES
   2       12    1         5    1
   3        1   -1             -1   -1   -1             10.        1.
   4       11         1    1                                       1.        2
   5        2                                           10.
   6       12    1    1    1    1    1    1                                   2
   7        3    5    1    1
   8        1       .386      .001
   9                  1.0E+6    1.0E+6    1.0E+6     0.3       0.3       0.3   384000.
  10
  11
  12
  13
  14
  15        1    4    2    1    3    1                                   1.2
  16        5   12   10    9   11    1                             2     1.2
  17
  18
  19

                 1         2         3         4         5         6         7         8
        12345678901234567890123456789012345678901234567890123456789012345678901234567890
```

PROBLEM 3 -- PLANE STRESS CANTILEVER BEAM EIGENVALUES

C O N T R O L   I N F O R M A T I O N

```
    NUMBER OF NODAL POINTS    =    12
    NUMBER OF ELEMENT TYPES   =     1
    NUMBER OF LOAD CASES      =     0
    NUMBER OF FREQUENCIES     =     5
    ANALYSIS CODE (NDYN)      =     1
       EQ.0, STATIC
       EQ.1, MODAL EXTRACTION
       EQ.2, FORCED RESPONSE
       EQ.3, RESPONSE SPECTRUM
       EQ.4, DIRECT INTEGRATION
    SOLUTION MODE (MODEX)     =     0
       EQ.0, EXECUTION
       EQ.1, DATA CHECK
    NUMBER OF SUBSPACE
    ITERATION VECTORS (NAD)   =     0
    EQUATIONS PER BLOCK       =     0
    TAPE10 SAVE FLAG (N10SV)  =     0
```

NODAL POINT INPUT DATA

NODE NUMBER	BOUNDARY CONDITION CODES X	Y	Z	XX	YY	ZZ	NODAL POINT COORDINATES X	Y	Z		T
1	-1	0	0	-1	-1	-1	0.0	10.000	1.000	0	0.0
11	0	1	1	0	0	0	0.0	0.0	1.000	2	0.0
2	0	0	0	0	0	0	0.0	10.000	0.0	0	0.0
12	1	1	1	1	1	1	0.0	0.0	0.0	2	0.0

GENERATED NODAL DATA

NODE NUMBER	BOUNDARY CONDITION CODES X	Y	Z	XX	YY	ZZ	NODAL POINT COORDINATES X	Y	Z	T
1	-1	0	0	-1	-1	-1	0.0	10.000	1.000	0.0
2	-1	0	0	-1	-1	-1	0.0	10.000	0.0	0.0
3	-1	0	0	-1	-1	-1	0.0	8.000	1.000	0.0
4	-1	0	0	-1	-1	-1	0.0	8.000	0.0	0.0
5	-1	0	0	-1	-1	-1	0.0	6.000	1.000	0.0
6	-1	0	0	-1	-1	-1	0.0	6.000	0.0	0.0
7	-1	0	0	-1	-1	-1	0.0	4.000	1.000	0.0
8	-1	0	0	-1	-1	-1	0.0	4.000	0.0	0.0
9	-1	0	0	-1	-1	-1	0.0	2.000	1.000	0.0
10	-1	0	0	-1	-1	-1	0.0	2.000	0.0	0.0
11	-1	1	1	-1	-1	-1	0.0	0.0	1.000	0.0
12	1	1	1	1	1	1	0.0	0.0	0.0	0.0

EQUATION NUMBERS

N	X	Y	Z	XX	YY	ZZ
1	0	1	2	0	0	0
2	0	3	4	0	0	0
3	0	5	6	0	0	0
4	0	7	8	0	0	0
5	0	9	10	0	0	0
6	0	11	12	0	0	0
7	0	13	14	0	0	0
8	0	15	16	0	0	0
9	0	17	18	0	0	0
10	0	19	20	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	0	0

PLANE ST[illegible] ANALYSIS
MEMBRANE [illegible]NTS

NUMBER OF ELEMENTS	=	5
NUMBER OF MATERIALS	=	1
MAXIMUM TEMPERATURES PER MATERIAL	=	1
ANALYSIS CODE	=	2
CODE FOR INCLUSION OF BENDING MODES	=	0

EQ.0. INCLUDE
GT.0. SUPPRESS

MATERIAL I.D. NUMBER	=	1
NUMBER OF TEMPERATURES	=	1
WEIGHT DENSITY	=	0.3860D 00
MASS DENSITY	=	0.1000D-02
DELTA ANGLE	=	0.0

TEMPERATURE	E(N)	E(S)	E(T)	NU(NS)	NU(NT)	NU(ST)	G(NS)	ALPHA(N)	ALPHA(S)	ALPHA(T)
0.0	0.1000D 07	0.1000D 07	0.1000D 07	0.3000	0.3000	0.3000	0.3840D 06	0.0	0.0	0.0

ELEMENT LOAD MULTIPLIERS

LOAD CASE	TEMPERATURE	PRESSURE	X-GRAVITY	Y-GRAVITY	Z-GRAVITY
A	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
B	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
C	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
D	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

54

Pg 5

NUMBER	I	J	K	L	MATL TYPE	REFERENCE TEMPERATURE	I-J FACE PRESSURE	STRESS OPTION	KG	THICKNESS
1	4	2	1	3	1	0.0	0.0	4	1	1.2000
2	6	4	3	5	1	0.0	0.0	4	2	1.2000
3	8	6	5	7	1	0.0	0.0	4	2	1.2000
4	10	8	7	9	1	0.0	0.0	4	2	1.2000
5	12	10	9	11	1	0.0	0.0	4	2	1.2000

E Q U A T I O N   P A R A M E T E R S

```
TOTAL NUMBER OF EQUATIONS       =   20
BANDWIDTH                       =    8
NUMBER OF EQUATIONS IN A BLOCK  =   20
NUMBER OF BLOCKS                =    1
```

N O D A L   L O A D S   (S T A T I C)   O R   M A S S E S   (D Y N A M I C)

NODE NUMBER	LOAD CASE	X-AXIS FORCE	Y-AXIS FORCE	Z-AXIS FORCE	X-AXIS MOMENT	Y-AXIS MOMENT	Z-AXIS MOMENT

STRUCTURE LOAD CASE	ELEMENT LOAD MULTIPLIERS A	B	C	D
1	0.0	0.0	0.0	0.0

E I G E N V A L U E   A N A L Y S I S

DETERMINANT SEARCH SOLUTION IS CARRIED OUT

CONTROL INFORMATION

```
    FLAG FOR ADDITIONAL PRINTING  =    0
      EQ.0, SUPPRESS
      EQ.1, PRINT

    STURM SEQUENCE CHECK FLAG (*) =    0
      EQ.0, PERFORM CHECK
      EQ.1, PASS

    MAXIMUM ITERATION CYCLES (*)  =   16

    CONVERGENCE TOLERANCE (*)     =    0.1000D-04

    CUT-OFF FREQUENCY (CPS)       =    0.1000D 09

    NUMBER OF STARTING ITERATION
    VECTORS TO BE READ FROM
    TAPE10 (*)                    =    0

    (*)  APPLICABLE TO SUBSPACE
         ITERATION SOLUTIONS ONLY
```

SOLUTION IS SOUGHT FOR FOLLOWING EIGENPROBLEM

```
NUMBER OF EQUATIONS                  =   20

HALF BANDWIDTH OF STIFFNESS MATRIX   =    8

NUMBER OF EQUATION BLOCKS            =    1

NUMBER OF EQUATIONS PER BLOCK        =   20

NUMBER OF EIGENVALUES REQUIRED       =    5
```

WE SOLVED FOR THE FOLLOWING EIGENVALUES

```
  0.987332583216D 05  0.345657494089D 07  0.245437047195D 08  0.247324605108D 08  0.870709345901D 08
```

56

Pg7

PRINT OF FREQUENCIES

MODE NUMBER	CIRCULAR FREQUENCY (RAD/SEC)	FREQUENCY (CYCLES/SEC)	PERIOD (SEC)
1	0.3142D 03	0.5001D 02	0.2000D-01
2	0.1859D 04	0.2959D 03	0.3380D-02
3	0.4[illegible]54D 04	0.7[illegible]D 03	0.1268D-02
4	0.4973D 04	0.7915D 03	0.1263D-02
5	0.9331D 04	0.1485D 04	0.6734D-03

PRINT OF EIGENVECTORS

NODE DISPLACEMENTS/ROTATIONS

NODE NUMBER	EIGEN-VECTOR	X-TRANSLATION	Y-TRANSLATION	Z-TRANSLATION	X-ROTATION	Y-ROTATION	Z-ROTATION
12	1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	2	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	3	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	4	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	5	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
11	1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	2	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	3	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	4	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	5	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
10	1	0.0	-0.53896D 00	-0.11142D 01	0.0	0.0	0.0
	2	0.0	0.20006D 01	0.47053D 01	0.0	0.0	0.0
	3	0.0	-0.30586D 01	-0.89671D 01	0.0	0.0	0.0
	4	0.0	-0.38374D 01	-0.37761D 00	0.0	0.0	0.0
	5	0.0	0.21168D 01	0.11197D 02	0.0	0.0	0.0
9	1	0.0	0.53896D 00	-0.11142D 01	0.0	0.0	0.0
	2	0.0	-0.20006D 01	0.47053D 01	0.0	0.0	0.0
	3	0.0	0.30586D 01	-0.89671D 01	0.0	0.0	0.0
	4	0.0	-0.38874D 01	0.37761D 00	0.0	0.0	0.0
	5	0.0	-0.21168D 01	0.11197D 02	0.0	0.0	0.0
8	1	0.0	-0.91299D 00	-0.40531D 01	0.0	0.0	0.0
	2	0.0	0.10642D 01	0.11370D 02	0.0	0.0	0.0
	3	0.0	0.26339D 01	-0.10374D 02	0.0	0.0	0.0
	4	0.0	-0.75613D 01	-0.22735D 00	0.0	0.0	0.0
	5	0.0	-0.66668D 01	-0.10953D 01	0.0	0.0	0.0
7	1	0.0	0.91299D 00	-0.40531D 01	0.0	0.0	0.0
	2	0.0	-0.10642D 01	0.11370D 02	0.0	0.0	0.0
	3	0.0	-0.26339D 01	-0.10374D 02	0.0	0.0	0.0
	4	0.0	-0.75613D 01	0.22735D 00	0.0	0.0	0.0
	5	0.0	0.66668D 01	-0.10953D 01	0.0	0.0	0.0
6	1	0.0	-0.11339D 01	-0.81778D 01	0.0	0.0	0.0
	2	0.0	-0.14369D 01	0.10750D 02	0.0	0.0	0.0
	3	0.0	0.40081D 01	0.50050D 01	0.0	0.0	0.0
	4	0.0	-0.10442D 02	-0.19037D 00	0.0	0.0	0.0
	5	0.0	0.39362D 01	-0.87552D 01	0.0	0.0	0.0
5	1	0.0	0.11339D 01	-0.81778D 01	0.0	0.0	0.0
	2	0.0	0.14369D 01	0.10750D 02	0.0	0.0	0.0
	3	0.0	-0.40081D 01	0.50050D 01	0.0	0.0	0.0
	4	0.0	-0.10442D 02	0.19037D 00	0.0	0.0	0.0
	5	0.0	-0.39362D 01	-0.87552D 01	0.0	0.0	0.0
4	1	0.0	-0.12303D 01	-0.12929D 02	0.0	0.0	0.0
	2	0.0	-0.35639D 01	0.43651D 00	0.0	0.0	0.0
	3	0.0	-0.25031D 01	0.88303D 01	0.0	0.0	0.0
	4	0.0	-0.12298D 02	-0.86434D-01	0.0	0.0	0.0
	5	0.0	0.22626D 01	0.93845D 01	0.0	0.0	0.0
3	1	0.0	0.12303D 01	-0.12929D 02	0.0	0.0	0.0

58

3.2 Pg 9

	2	0.0	0.35639D 01	0.48551D 00	0.0	0.0	0.0
	3	0.0	0.25231D 01	0.88303D 01	0.0	0.0	0.0
	4	0.0	-0.122[illegible]D [illegible]	0.864[illegible]D-01	0.0	0.0	0.0
	5	0.0	-0.22626D 01	0.93845D 01	0.0	0.0	0.0
2	1	0.0	-0.12523D 01	-0.17903D 02	0.0	0.0	0.0
	2	0.0	-0.42964D 01	-0.15513D 02	0.0	0.0	0.0
	3	0.0	-0.68324D 01	-0.11283D 02	0.0	0.0	0.0
	4	0.0	-0.12951D 02	-0.29121D-01	0.0	0.0	0.0
	5	0.0	-0.86237D 01	-0.61[illegible]72D 01	0.0	0.0	0.0
1	1	0.0	0.12523D 01	-0.17903D 02	0.0	0.0	0.0
	2	0.0	0.42964D 01	-0.15513D 02	0.0	0.0	0.0
	3	0.0	0.68324D 01	-0.11283D 02	0.0	0.0	0.0
	4	0.0	-0.12951D 02	0.29121D-01	0.0	0.0	0.0
	5	0.0	0.86237D 01	-0.61[illegible]72D 01	0.0	0.0	0.0

E I G E N S O L U T I O N   T I M E   L O G

EIGENSOLUTION = 2.03
PRINTING = 0.43

O V E R A L L   T I M E   L O G

NODAL POINT INPUT	=	0.23
ELEMENT STIFFNESS FORMATION	=	0.65
NODAL LOAD INPUT	=	0.10
TOTAL STIFFNESS FORMATION	=	0.41
STATIC ANALYSIS	=	0.0
EIGENVALUE EXTRACTION	=	2.51
FORCED RESPONSE ANALYSIS	=	0.0
RESPONSE SPECTRUM ANALYSIS	=	0.0
STEP-BY-STEP INTEGRATION	=	0.0
TOTAL SOLUTION TIME	=	3.90

DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.

EL METODO DEL ELEMENTO FINITO EN LA INGENIERIA

APLICACIONES AVANZADAS

APLICACIONES DEL METODO DE ELEMENTOS FINITOS A PROBLEMAS DE FLUIDOS

ING. ERNESTO MARTIN DEL CAMPO V.
DR. MIHIR SEN

FEBRERO, 1985

8. APLICACIONES AVANZADAS

"APLICACIONES DEL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS A PROBLEMAS DE TERMOFLUIDOS"

ERNESTO MARTÍN DEL CAMPO VÁZQUEZ
MIHIR SEN

DIVISIÓN DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA
FACULTAD DE INGENIERÍA

U.N.A.M.

ABRIL 1982

RESUMEN

Debido a la gran aceptación que ha tenido últimamente el método de elementos finitos en termofluidos, este trabajo pretende ejemplificar su uso mediante aplicaciones a la trnsferencia de calor y la mecánica de fluidos.

Se resuelve el problema de conducción de calor en una placa, determinándose la distrubución de temperaturas, tanto en el estado permanente como en el transitorio. Asimismo, se comparan estas soluciones numéricas con soluciones analíticas, para observar la variación del error con respecto a la variación y número de elementos.

Por otra parte se analiza el flujo potencial bidimensional alrededor de un cilindro entre placas planas, para obtener líneas de corriente y líneas equipotenciales. Para el caso de flujo incompresible, la ecuación que gobierna el proceso es lineal con solución numérica directa, mientras que para el flujo compresible, la no linealidad en las ecuaciones requiere de un método iterativo para su solución; en este último caso también se obtienen los números de Mach locales.

Al final se trata el mismo problema considerando flujo viscoso, incompresible en el plano y se obtienen líneas de corriente.

CONTENIDO

NOMENCLATURA

a	ancho de la placa
a_i	constantes de las funciones de interpolación
AS_1	malla con más elementos en la zona de variación
AS_2	malla con menos elementos en la zona de variación
A	matriz de coeficientes para un elemento, de componentes A_{ij}
A^*	matriz global de coeficientes, de componentes A^*_{ij}
b	largo de la placa
b_i	constantes de las funciones de interpolación
B	matriz de coeficientes de temperatura transitoria para un elemento, de componentes B_{ij}
B^*	matriz global de coeficientes de temperatura transitoria, de componentes B^*_{ij}
$\hat{c}$	velocidad del sonido dimensional
c	velocidad del sonido adimensional
c_∞	velocidad del sonido alejado del cuerpo
c_i	constantes de las funciones de interpolación
C	calor específico
C_i	constantes
D	distancia característica
e	error raíz medio cuadrático
f	función conocida en el dominio
$\mathfrak{f}$	vector de flujo para un elemento, de componentes $\mathfrak{f}_i$
$\mathfrak{f}^*$	vector global de flujo, de componentes $\mathfrak{f}^*_i$
F	funcional
$\tilde{g}$	función del potencial de velocidad adimensional
$\mathcal{g}$	vector de términos no lineales, aproximados para un elemento, del potencial de velocidad, de componentes $\mathcal{g}_i$

G	variable en función de la temperatura en estado permanente
$\hat{h}$	entalpía específica dimensional
H	variable en función de la temperatura en estado transitorio
I	principio variacional
K	conductividad térmica
ℓ	vector de términos no lineales, aproximados para un elemento, de la función de corriente, de componentes ℓ_i
L	longitud de referencia
L_i	coordenadas de área
M	número de Mach
M_∞	número de Mach alejado del cuerpo
$\tilde{n}$	normal a la superficie adimensional
N_i	funciones de interpolación
$\hat{p}$	presión dimensional
$\hat{q}$	velocidad total dimensional
q_∞	velocidad total alejada del cuerpo
q	vector de fuentes de calor para un elemento, de componentes q_i
q^*	vector global de fuentes de calor, de componentes q_i^*
s	vector que representa los términos no lineales, aproximados para un elemento, de la función de corriente, de componenetes s_i
s^*	vector global que representa los términos no lineales aproximados, de la función de corriente, de componentes s_i^*
t	vector que representa los términos no lineales, aproximados para un elemento, del potencial de velocidad, de componentes t_i
t^*	vector global que representa los términos no lineales aproximados, del potencial de velocidad, de componentes t_i^*
$\hat{u}$	componente dimensional de la velocidad en la dirección $\hat{x}$
$\hat{v}$	componente dimensional de la velocidad en la dirección $\hat{y}$

w_i	funciones de peso
$\hat{x}$	coordenada cartesiana dimensional
x	coordenada cartesiana adimensional
$\hat{y}$	coordenada cartesiana dimensional
y	coordenada cartesiana adimensional
γ	relación de calores específicos
Γ	frontera del dominio de un elemento
δ	delta de Dirac
Δ	área de un elemento
ε	residuo
$\hat{\theta}$	temperatura absoluta dimensional
$\tilde{\theta}$	temperatura absoluta adimensional
θ	temperatura aproximada para un elemento, de componentes θ_i
θ^*	temperatura global aproximada, de componentes θ_i^*
θ_o	temperatura de referencia
θ_1	temperatura inicial
θ_m	temperatura media
Λ	operador diferencial lineal
$\tilde{\xi}$	variable cualquiera dimensional
ξ	variable cualquiera aproximada, de componentes ξ_i
$\hat{\rho}$	densidad dimensional
ρ_∞	densidad alejada del cuerpo
$\hat{\tau}$	tiempo dimensional
τ	tiempo adimensional
$\Delta\tau$	incremento de tiempo
$\hat{\phi}$	potencial de velocidad dimensional
$\tilde{\phi}$	potencial de velocidad adimensional

ϕ potencial de velocidad aproximado para un elemento, de componentes ϕ_i

ϕ^* potencial de velocidad global aproximado, de componentes ϕ_i^*

$\hat{\psi}$ función de corriente dimensional

$\tilde{\psi}$ función de corriente adimensional

ψ función de corriente aproximada para un elemento, de componentes ψ_i

ψ^* función de corriente global aproximada, de componentes ψ_i^*

Ω dominio de un elemento

CAPITULO I
INTRODUCCION

El desarrollo de la tecnología va a pasos agigantados y el estudio de problemas asociados con ésta, requiere frecuentemente de nuevas técnicas de análisis. A veces estas técnicas provienen de principios ya conocidos, que originalmente tenían poca utilidad por falta de equipos modernos, como por ejemplo la computadora digital.

El estudio de los termofluidos es un caso donde los avances han sido notorios. El movimiento de un fluido real, se describe por medio de un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales no lineales. Aún para el problema más sencillo, de un flujo uniforme alrededor de una placa plana inclinada o alrededor de un cilindro, soluciones analíticas tiene que basarse en alguna aproximación y por eso son de uso limitado. Estas aproximaciones pueden ser ángulo de ataque pequeño en el caso de la placa y bajo número de Reynolds en el caso del cilindro.

En situaciones de interés práctico, la presencia de geometrías irregulares sólidas complica aún más la predicción del comportamiento del fluido, es por ello que el análisis teórico debe complementarse, cuando sea posible, con experimentos o métodos numéricos. Este trabajo se enfoca al área de los métodos numéricos; uno de éstos, con gran aceptación actualmente, es el "método de elementos finitos" que será el que se utilice aquí.

No se pretende, ni con mucho, hacer un análisis del método para lo cual existen ya bastantes libros, sino más bien una orientación de su aplicación a las áreas de mecánica de fluidos y transferencia de calor. Para lograr ésto, se resuelven algunos problemas específicos cuya solución analítica es conocida y algunos otros de más alto grado de dificultad.

1.1 METODOS EXISTENTES

En la actualidad existen modelos matemáticos que describen el comportamiento de los fluidos, en casi cualquier circunstancia y además, tienen una estrecha relación con problemas prácticos que existen actualmente. Sin embargo, hay una gran cantidad de problemas específicos en la dinámica de fluidos que no han sido resueltos, debido a las dificultades encontradas en la mayoría de los métodos analíticos y numéricos convencionales. Estas dificultades son ocasionadas principalmente por la no linealidad de las ecuaciones, producida al escoger una descripción Euleriana de los procesos y también, por lo difícil que es introducir las condiciones de frontera, cuando los cuerpos tienen una geometría un tanto irregular.

El método que ha sido más usado para resolver estas dificultades y que además es bien conocido, es el "método de diferencias finitas" (Richtmyer and Morton, 1967, Roache, 1972), en el cual las derivadas parciales de las ecuaciones que gobiernan el fenómeno, son reemplazadas por cocientes de diferencias finitas. Una de las desventajas de este método es que se aplica fácilmente sólo a problemas en que el dominio sea de una forma más o menos regular; sin embargo, se han resuelto una variedad de problemas teóricos y prácticos por medio de él.

Otro método numérico es el de "partículas en celda" (Evans y Harlow, 1957), en el cual se construye un sistema de celdas de tal manera, que se puede definir la posición de las partículas del fluido en términos de estas celdas, cada una de ellas está definida por un conjunto de variables, que describen las componentes de velocidad, energía interna, densidad y presión en la celda. Este método tiene un uso limitado dadas sus características.

Entre los últimos métodos que se han desarrollado para la solución de problemas en dinámica de fluidos, está el "método do pánel" (Hess, 1975), el cual consiste en cubrir la superficie de la frontera sólida por un número finito de pequeñas áreas, llamadas páneles, cada una de las cuales está formada por singularidades de una cierta clase, que tienen una densidad indeterminada. Las singularidades se distribuyen de tal manera, que orientan el flujo alrededor de un determinado cuerpo. Generalmente se usan páneles formados por fuentes o dobletes para cuerpos de superficies sin sustentación y formados por vórtices para superficies con sustentación. La condición que deben cumplir las ecuaciones es que el flujo debe ser tangente a cada uno de los páneles, con lo que se puede calcular la densidad de las singularidades. El flujo total es la superposición de un flujo uniforme y un flujo inducido por las singularidades, con lo cual se puede determinar la velocidad y presión en cualquier punto del flujo. Este método ha sido aplicado felizmente, tanto en problemas aerodinámicos en dos y tres dimensiones con cuerpos de geometría compleja, como a problemas de flujos internos, no uniformes y en estado transitorio.

En años recientes ha tenido una gran popularidad el "método de elementos finitos" en las áreas de mecánica de fluidos y transferencia de calor, debido a su gran flexibilidad. Está íntimamente relacionado con los "métodos varacionales" y los "métodos de residuos pesados" (Finlayson, 1972). Los principios variacionales son usados en combinación con el método de Rayleigh-Ritz, pero desgraciadamente, éstos no pueden ser encontrados en algunos problemas de ingeniería, particularmente cuando las ecuaciones diferenciales no son auto-adjuntas. Los residuos pesados pueden tener la forma de los métodos de Galerkin, mínimos cuadrados y colocación. El método de residuos pesados utiliza el concepto de la proyección ortogonal de un residuo de una ecuación diferencial, sobre un subespacio formado por ciertas funciones de peso. En el método de elementos finitos, podemos usar tanto los principios variacionales, cuando existen, como los residuos pesados a través de aproximaciones.

En las aplicaciones de elementos finitos a la dinámica de fluidos, generalmente el método de Galerkin es considerado la herramienta más conveniente en la formulación de los modelos de elementos finitos, ya que no requiere principios variacionales. Normalmente el método de mínimos cuadrados requiere funciones de interpolación de alto orden, aunque el comportamiento físico pueda ser descrito por ecuaciones lineales de bajo órden.

En estas notas se utilizará el método de elementos finitos combinado con el método de Galerkin ya que es el más conveniente.

1,2 UTILIDAD DEL METODO DE ELEMENTOS FINITOS

Al tratar de resolver una ecuación diferencial lineal que describe el comportamiento de cierto fenómeno, uno de los principales problemas que se presentan es cómo introducir las condiciones de frontera, sobre todo si el cuerpo con el que se está trabajando tiene una configuración irregular. La mayoría de las ecuaciones diferenciales lineales, tienen solución para algunos problemas específicos, en los que las fronteras presentan alguna simetría, pero en la realidad, los cuerpos pueden tener configuraciones bastante irregulares, como es el caso de una ala de avión, en la que no existe simetría por ningún lado.

Con métodos analíticos es prácticamente imposible resolver estos problemas en general y los demás métodos numéricos exigen una configuración más o menos regular. Aquí está una de las principales ventajas del método de elementos finitos, ya que la superficie del cuerpo se puede conformar a través de pequeñas regiones y se pueden colocar tantas como sea necesario para lograr un perfil aproximado del cuerpo. Además, el valor de la condición de frontera puede ser diferente entre una y otra región adyacente, con lo que se puede atacar una variedad de problemas reales.

Otra ventaja del método, es que al aplicar la formulación de elementos finitos a la ecuación diferencial, quedan separadas automáticamente las condiciones de frontera (de Dirichlet y de Neumann), algo que es muy útil.

En el caso de problemas modelados por medio de ecuaciones diferenciales no lineales, el método de elementos finitos es útil para resolverlos, ya que se puede combinar este método con algún método iterativo, a fín de encontrar la solución. Esto se verá más claro en el capítulo dedicado a flujo compresible (Cap. V).

Una desventaja de este método, estriba en que hay que darle una gran cantidad de datos entre coordendas, condiciones iniciales, de frontera, etc., lo que ocasiona por un lado un sobre esfuerzo personal y por otro la posibilidad de errores al teclear los datos para un programa de computación. Afortunadamente, se ha estado trabajando en ello y se han ideado formas para que el mismo programa calcule la mayoría de los datos que necesita, a través de un preprocesamiento.

Otro problema es que los programas son muy extensos y utilizan un gran tiempo de procesamiento; es por ello que siempre se tratan de utilizar métodos de integración numérica, de solución de sistemas de ecuaciones, etc., que sean muy eficientes para reducir los tiempos.

Por lo anteriormente expuesto, el método de elementos finitos tiene una utilidad en la solución de problemas de la dinámica de fluidos y de muchas otras ramas en las que intervengan ecuaciones diferenciales. Sin embargo, cuando un problema es difícil, lo sigue siendo, no importa el método que se utilice; lo único, es que el método de elementos finitos nos da la posibilidad de resolverlo.

1.3 RESUMEN HISTORICO

El método de elementos finitos fué originalmente desarrollado por ingenieros estructurales de aviación en los años 50's

para analizar los grandes sistemas estructurales que existen en los aviones. Turner, Clough, Martin y Topp (1956), presentaron el primer artículo relacionado con ésto; continuaron con los estudios Clough (1960) y Argyris (1963), además de otros. La aplicación del método de elementos finitos a problemas no estructurales, tales como flujo de fluidos y electromagnetismo, fué iniciado por Zienkiewicz y Cheung (1965) y por último, Oden (1972) ha contribuido en las aplicaciones a diferentes clases de problemas en la mecánica no lineal.

Han dado un impulso significativo a la teoría de elementos finitos, el concepto clásico del método variacional de Rayleigh-Ritz(Rayleigh, 1877; Ritz, 1909) y los métodos de residuos pesados, modelados después del método de Galerkin (1965), ya que existe una relación importante entre ellos. En años recientes varios autores han contribuido al desarrollo de la teoría matemática de elementos finitos; algunos de ellos son Babuska y Aziz (1972), Ciarlet y Raviart (1972), Aubin (1972), Strong y Fix (1973) y Oden y Reddy(1976), todos ellos influenciados grandemente por los trabajos de Lions y Magenes (1968).

CAPITULO II
METODO DE ELEMENTOS FINITOS

El método de elementos finitos es un procedimiento de aproximación para la solución de ecuaciones diferenciales, con condiciones a la frontera y condiciones inicales, del tipo que se presentan en problemas de ingeniería, física y matemática. El procedimiento básicamente envuelve la división del dominio en muchas pequeñas regiones, llamadas "elementos", convenientemente distribuidas, las cuales pueden ser de forma triangular, cuadrilátera, etc., y usando una interpolación para describir el comportamiento de estos subdominios. Un número satisfactorio de puntos, llamados "nodos", son especificados para cada elemento y a cada uno de ellos le corresponde un valor de la variable o las variables de la ecuación diferencial, que se obtiene interpolando dentro de cada elemento. Usando el principio variacional o el método de residuos pesados las ecuaciones diferenciales que gobiernan el dominio, se transforman en ecuaciones de elementos finitos, que gobiernan aisladamente a cada uno de los elementos y en general son ecuaciones algebraicas. Estas ecuaciones son convenientemente ensambladas para formar un sistema global, en el cual se pueden introducir las condiciones de frontera y las condiciones iniciales, según se requiera. Por último, los valores de la variable en los nodos, son determinados de la solución del sistema de ecuaciones algebraicas.

2.1 DIFERENTES METODOS

2.1.1 Método Variacional

Al modelar algún fenómeno físico por medio del cálculo diferencial, frecuentemente se llega a una ecuación integral, en la que únicamente nos interesan sus valores máximos o sus valores mínimos. El problema concerniente a la determinación de valores extremos de las integrales, en las cuales los integrandos contienen

funciones desconocidas, nos lleva al cálculo variacional,

Para ejemplificar ésto, tomaremos el problema de encontrar una función $\hat{y}=\hat{y}(\hat{x})$, conociendo $\hat{y}(\hat{x}_0)$ y $\hat{y}(\hat{x}_1)$, de tal manera que la integral

$$I = \int_{\hat{x}_0}^{\hat{x}_1} F(\hat{x},\hat{y},\hat{y}')\,d\hat{x} \tag{2.1}$$

sea mínima. Aquí la prima indica derivada con respecto a $\hat{x}$.

Si suponemos que $F(\hat{x},\hat{y},\hat{y}')$ es una función, que tiene derivadas parciales de segundo orden y continuas con respecto a sus argumentos, la minimización de I nos conduce a la ecuación de Euler-Lagrange de la forma

$$\frac{\partial F}{\partial \hat{y}} - \frac{\partial^2 F}{\partial \hat{x}\partial \hat{y}'} - \frac{\partial^2 F}{\partial \hat{y}\,\partial \hat{y}'}\hat{y}' - \frac{\partial^2 F}{\partial \hat{y}'^2}\hat{y}'' = 0 \tag{2.2}$$

Este procedimiento se puede generalizar para la integral

$$I = \int_{\hat{x}_0}^{\hat{x}_1} F(\hat{x},\hat{y},\hat{y}',\hat{y}'',\ldots,\hat{y}^n)\,d\hat{x} \tag{2.3}$$

en la que su minimización corresponde a la ecuación de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial F}{\partial \hat{y}} - \frac{d}{d\hat{x}}\left\{\frac{\partial F}{\partial \hat{y}'}\right\} + \frac{d^2}{d\hat{x}^2}\left\{\frac{\partial F}{\partial \hat{y}''}\right\} - \ldots (-1)^n \frac{d^n}{d\hat{x}^n}\frac{\partial F}{\partial \hat{y}(n)} = 0 \tag{2.4}$$

La ecuación (2.3) es llamada "principio variacional" y F, el integrando del principio variacional es la "funcional".

La discusión anterior también puede ser generalizada a problemas en dos y tres dimensiones. Por ejemplo, la minimización de la integral doble

$$I\ (\hat{\xi}) = \iint_{\Omega} F(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \hat{\xi}, \frac{\partial \hat{\xi}}{\partial \mathfrak{X}}, \frac{\partial \hat{\xi}}{\partial \mathfrak{Y}})\, d\Omega \qquad (2.5)$$

con los valores conocidos en la frontera Γ, le corresponde una ecuación de la forma

$$\frac{\partial F}{\partial \hat{\xi}} - \frac{\partial}{\partial \mathfrak{X}} \{\frac{\partial F}{\partial (\frac{\partial \hat{\xi}}{\partial \mathfrak{X}})}\} - \frac{\partial}{\partial \mathfrak{Y}} \{\frac{\partial F}{\partial (\frac{\partial \hat{\xi}}{\partial \mathfrak{Y}})}\} = 0 \qquad (2.6)$$

El método variacional es uno de los métodos más poderosos en la solución de problemas de ingeniería. Casi siempre que tenemos una ecuación del tipo (2.6), suponemos que ésta es la minimización de una funcional, la cual podemos resolver por el método de Rayleigh-Ritz. No siempre es fácil encontrar el problema de minimización el cual corresponde a la ecuación diferencial bajo consideración. Sin embargo, para gran parte de los problemas de estructuras y mecánica de sólidos la funcional sí existe, es por ello que este método tiene popularidad en esas áreas.

2.1.2 METODO DE RAYLEIGH-RITZ

Teóricamente, cualquier medio continuo consiste en un número de puntos, a los cuales podemos asociar diferentes variables, como son velocidad, esfuerzo, temperatura, etc. El método de Rayleigh-Ritz es un procedimiento de aproximación en el cual reducimos un sistema continuo a un sistema con un número finito de puntos. Este método tiene una aplicación directa a los principios variacionales, como se muestra a continuación.

Consideremos el problema de minimizar la integral

$$I(\hat{\xi})=\iint_{\Omega} F(\hat{x},\hat{y},\hat{\xi},\frac{\partial\xi}{\partial\hat{x}},\frac{\partial\hat{\xi}}{\partial\hat{y}})\,d\Omega \tag{2.7}$$

con una condición de frontera $\hat{\xi}=\hat{\xi}(\Gamma)$, en la que Γ representa la frontera del dominio. Podemos suponer una solución de la forma

$$\hat{\xi}=\xi(\hat{x},\hat{y},C_1,C_2,\ldots,C_n) \tag{2.8}$$

de tal manera que ésta satisfaga las condiciones de frontera, para todos los valores de las constantes C_i. Sustituyendo (2.8) en (2.7) se tiene

$$I(\hat{\xi})=I(C_i) \quad (i=1,2,\ldots,n) \tag{2.9}$$

Ya que nosotros buscamos el mínimo de esta función, las constantes C_i deben satisfacer la condición

$$\frac{\partial I}{\partial C_i}=0 \quad (i=1,2,\ldots,n) \tag{2.10}$$

Este es un sistema de ecuaciones algebraicas que puede resolverse para las constantes C_i. Una vez obtenidas las constantes, las sustituiremos en (2.8) obteniendo la solución aproximada que se buscaba.

Una de las limitaciones de este método, es que es difícil en general, si no imposible, encontrar una función ξ que satisfaga las condiciones de frontera globales, para un dominio con geometrías complicadas.

2.1.3 METODO DE RESIDUOS PESADOS

La idea básica del método de residuos pesados, es obtener una solución aproximada de la siguiente ecuación diferencial

$$\Lambda \hat{\xi} + f = 0 \text{ en un dominio} \tag{2.11}$$

donde Λ es un operador diferencial, $\hat{\xi}$ es una variable como puede ser velocidad, temperatura, etc. y f es una función conocida en el dominio. Además está sujeta a las condiciones de frontera

$$\Lambda_k(\hat{\xi}) = f_k \text{ en la frontera } \Gamma \tag{2.12}$$

Si suponemos una aproximación de la forma

$$\hat{\xi} \approx \xi = \sum_{i=1}^{n} C_i N_i \tag{2.13}$$

donde las C_i son constantes y las N_i son funciones linealmente independientes que satisfacen las condiciones de frontera, llamadas funciones de base.

Ya que (2.13) es una aproximación de la función $\hat{\xi}$, si la sustituimos en (2.11)no la va a satisfacer exactamente, sin embargo, la podemos igualara un cierto residuo ε que será el error que tengamos en la aproximación

$$\Lambda \ \xi + f = \varepsilon \tag{2.14}$$

Introduciendo las funciones de peso w_i $(i=1,2,\ldots,n)$ y construyendo el producto interno (ε, w_i) e igualándolo a cero tenemos

$$(\varepsilon, \ w_i)=0 \tag{2.15}$$

lo que es equivalente a decir que la proyección del residuo sobre el espacio de las funciones de peso es cero. Estas ecuaciones se utilizan para encontrar los valores de las C_i. La definición del producto interno que se utiliza es la siguiente

$$(U,V) = \int_{\Omega} UV d\Omega \tag{2.16}$$

Hay varias maneras de escoger las funciones de peso w_i entre las que están:

a) Método de Galerkin.- En este método las funciones de peso se hacen igual que las funciones de base, obteniéndose

$$(\varepsilon, N_i) = 0 \tag{2.17}$$

b) Método de Mínimos Cuadrados. En este método se escogen las funciones de peso igual que el residuo y se minimiza el producto interno con respecto a cada una de las constantes C_i esto es

$$\frac{\partial}{\partial C_i}(\varepsilon, \varepsilon) = 0 \tag{2.18}$$

c) Método de Momentos.- Aquí se escogen las funciones de peso de un conjunto de funciones linealmente independientes como son $1, x, x^2, x^3, \ldots$, para problemas unidimensionales, de tal manera que

$$(\varepsilon, \hat{x}_i) = 0 \qquad (i=0,1,2,3,\ldots) \tag{2.19}$$

d) Método de Colocación.- Se escoge un conjunto de n puntos $\hat{x}_i$ en el dominio Ω como puntos de colocación y la función de peso es

$$w_i = \delta(\hat{x}-\hat{x}_i) \tag{2.20}$$

donde δ es la función de Dirac. Aquí obtenemos

$$(\varepsilon, \delta(\hat{x}-\hat{x}_i)) = \varepsilon|_{\hat{x}_i} \tag{2.21}$$

El error entonces es cero en n puntos de Ω.

Los métodos de Galerkin y Mínimos Cuadrados se adaptan muy bien a las aplicaciones de elementos finitos y los métodos de Momentos y Colocación, no se prestan tan directamente a éstas, ya que son más complicados.

2.2 METODO DE GALERKIN

El método de Galerkin se adapta muy bien a los problemas que existen en mecánica de fluidos y transferencia de calor, y será el que se utilice a lo largo de este trabajo. Es por ello que se hará un análisis un poco más a fondo de él.

— Este método implica la proyección ortogonal del residuo ε sobre un espacio de funciones linealmente independientes N_i lo que se efectúa por medio del producto interno (2.16). Esto es equivalente a decir, que el residuo ε es ortogonal a todo el sistema de funciones $N_i (i=1,2,...,n)$, para lo cual se necesita que ε sea considerado continuo. Ya que sólamente disponemos de n constantes $C_1, C_2, ..., C_n$ solo podemos satisfacer n condiciones de ortogonalidad.

Efectuando el proceso anterior para (2.11) tenemos

$$\int_\Omega \varepsilon N_i \, d\Omega = \int_\Omega \left[\Lambda \left(\sum_{j=1}^{n} C_j N_j \right) + f \right] N_i \, d\Omega = 0 \qquad (2.22)$$

donde Ω es el dominio del elemento.

La ecuación anterior es un sistema de ecuaciones algebraicas, el cual se puede resolver para las constantes C_i. Ya que tanto las C_i como las N_i son arbitrarias, podemos escoger $C_i=\xi_i$ donde las ξ_i son valores de la variable en los puntos discretizados del dominio, por lo que la ec. (2.13) se convierte

$$\hat{\xi} \approx \xi = \sum_{i=1}^{n} \xi_i N_i \qquad (2,23)$$

Utilizando esta aproximación en el proceso anterior llegamos a

$$\int_\Omega \varepsilon N_i d\Omega = \int_\Omega \left[\Lambda\left(\sum_{j=1}^{n} \xi_j N_j\right) + f\right] N_i d\Omega = 0 \qquad (2.24)$$

Al resolver este sistema de ecuaciones, se obtiene directamente la solución aproximada, sin necesidad de calcular primero las constantes y luego sustituirlas para obtener el resultado.

Para ejemplificar, tomaremos la ecuación de Poisson

$$\frac{\partial^2 \hat{\xi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{\xi}}{\partial y^2} + f(x,y) = 0 \qquad (2.25)$$

Si aproximamos la solución por medio de (2.23), el residuo está definido por

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + f(x,y) = \varepsilon \qquad (2.26)$$

Efectuando el producto interno entre el residuo y las funciones de base e igualando a cero, nos queda una integral de la forma

$$\int_\Omega \varepsilon N_i dxdy = \int_\Omega \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + f(x,y)\right) N_i dxdy = 0 \qquad (2.27)$$

Utilizando el teorema de Green, se tiene

$$-\int_{\Omega}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\,\frac{\partial N_i}{\partial x}+\frac{\partial\xi}{\partial y}\,\frac{\partial N_i}{\partial y}-f(x,y)N_i\right)dxdy+\int_{\Gamma}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\,N_i dy-\frac{\partial\xi}{\partial y}N_i dx\right)=0 \tag{2.28}$$

donde Γ es la frontera de Ω. Sustituyendo (2.23) en (2.28) y reordenando

$$\xi_j\int_{\Omega}\left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\,\frac{\partial N_j}{\partial x}+\frac{\partial N_i}{\partial y}\,\frac{\partial N_j}{\partial y}\right)dxdy=\int_{\Gamma}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}N_i dy-\frac{\partial\xi}{\partial y}N_i dx\right)+\int_{\Omega}f(x,y)N_i dxdy \tag{2.29}$$

Una cualidad muy importante del método de elementos finitos, se puede observar en (2.29). En la forma original de la ecuación de Poisson (2.25) y generalmente cualquier ecuación diferencial, no es evidente como introducir las condiciones de frontera, tanto de Dirichlet como de Neumann. Sin embargo en (2.29) podemos aplicar fácilmente las condiciones de frontera de Dirichlet, en la integral de la izquierda, y las condiciones de frontera de Neumann, en la primera integral de la derecha. Esta separación de las condiciones de frontera de una y otra clase, es debido a la integración por partes que se realiza durante el proceso.

Hay que hacer notar, que para todos los problemas de ingeniería para los cuales existe una funcional, la integral de Galerkin (2.22) da un resultado idéntico al que se obtendría con el método de Rayleigh-Ritz, además para los problemas en los que no existe una funcional, el método de Galerkin siempre es aplicable.

CAPITULO III
CONDUCCION DE CALOR

3.1 GENERAL

Una de las grandes preocupaciones que existen al utilizar un método numérico, es la precisión que se obtendrá al usarlo, ya que hay una diversidad de factores que pueden alterar el resultado.

En el caso del método de elementos finitos, en principio existe un error, al hacer la aproximación de la función, por una sumatoria de funciones evaluados en determinados puntos, ésto es, al hacer la aproximación de la función en un espacio de dimensión infinita a otro de dimensión finita. Varios autores han calculado el error que se obtiene en diferentes problemas, al aplicar el método de elementos finitos, entre ellos están Oden and Reddy (1976), sin embargo utilizan un análisis matemático muy complicado, para obtener únicamente una estimación.

Al error anterior hay que agregarle el que se tiene al utilizar otros métodos numéricos, como son: integración numérica, derivación numérica, solución de sistemas de ecuaciones, métodos iterativos para ecuaciones no lineales, etc., si a ésto le agregamos la precisión de la computadora al efectuar las operaciones, resultaría muy difícil efectuar un análisis exacto, del error total obtenido. Por otra parte, al dividir la región en estudio en diferentes elementos, una buena distribución de ellos puede aumentar la precisión del resultado, en cambio, una mala distribución de éstos, puede incluso conducir a resultados localmente muy erróneos además, teóricamente, entre más elementos se utilicen, mayor es la exactitud, pero más costosa es la solución, por lo que es muy difícil precisar cual es el término medio para obtener una solución suficientemente precisa y a la vez la más económica. Se ha llegado incluso a considerar que es un arte el efectuar la división del dominio en diferentes elementos.

Debido a todo lo anterior, surgió la necesidad de efectuar una comparación, para observar como se comporta el método; es por ello que en este capítulo se resuelven dos problemas de solución analítica conocida por el método de elementos finitos de Galerkin, con lo cual podemos comparar los resultados, además que se aprovechan para dar ciertas normas muy sencillas, pero muy objetivas, en el uso del método.

3.2 PROBLEMA BIDIMENSIONAL EN ESTADO PERMANENTE

El primer problema que se resolverá será el de una placa en dos dimensiones, con transferencia de calor por conducción, en estado permanente, con lo cual se obtendrá la distribución de las temperaturas en toda la superficie. Para ciertas condiciones de frontera, es posible encontrar una solución analítica de este problema y es por ello por lo que se escogió.

3.2.1 Planteamiento de las Ecuaciones y Solución Exacta

La ecuación que define la conducción de calor en dos dimensiones y en estado permanente es (Holman, 1972)

$$\frac{\partial^2 \hat{\theta}}{\partial \hat{x}^2} + \frac{\partial^2 \hat{\theta}}{\partial \hat{y}^2} = 0 \qquad (3.1)$$

que es la ecuación de Laplace bidimensional donde $\hat{\theta}$ es la temperatura y $\hat{x}$ y $\hat{y}$ son las coordenadas cartesianas.

Se definen las siguientes variables adimensionales

$$\tilde{\theta} = \frac{\hat{\theta}}{\theta_0} ; \; x = \frac{\hat{x}}{L} ; \; y = \frac{\hat{y}}{L} \qquad (3.2)$$

donde θ_0 y L son la temperatura y longitud de referencia respectivamente. Utilizando (3.2) en (3.1) tenemos

$$\frac{\partial^2 \tilde{\theta}}{\partial x} + \frac{\partial^2 \tilde{\theta}}{\partial y} = 0 \tag{3.3}$$

Si consideramos como ejemplo la placa rectangular mostrada en la Fig. 3.1, tres lados de la placa se mantienen a una temperatura constante θ_1 y el lado superior tiene impuesta una distribución de temperaturas senoidal.

Este problema se puede resolver analíticamente por el método de separación de variables. Utilizando las siguientes condiciones de frontera

$$\begin{aligned} &\tilde{\theta}=\theta_1 \quad \text{en } x=0 \\ &\tilde{\theta}=\theta_1 \quad \text{en } y=0 \\ &\tilde{\theta}=\theta_1 \quad \text{en } x=a \\ &\tilde{\theta}=\theta_m \operatorname{sen}\frac{\pi x}{a}+\theta_1 \text{ en } y=b \end{aligned} \tag{3.4}$$

y resolviendo la ec. (3.3) usando (3.4) llegamos a

$$\tilde{\theta}=\theta_m \frac{\operatorname{senh}\frac{\pi y}{a}}{\operatorname{senh}\frac{\pi b}{a}} \operatorname{sen}\frac{\pi x}{a} + \theta_1 \tag{3.5}$$

La ec. (3.5) es la solución analítica del ejemplo propuesto.

3.2.2 Formulación de Elementos Finitos

La temperatura $\tilde{\theta}$ la podemos aproximar en la forma de elementos finitos como

$$\tilde{\theta} \approx \theta = \sum_{i=1}^{n} N_i \theta_i \tag{3.6}$$

donde n es el número total de nodos en un elemento, N_i son las funciones de interpolación o funciones de base de un elemento

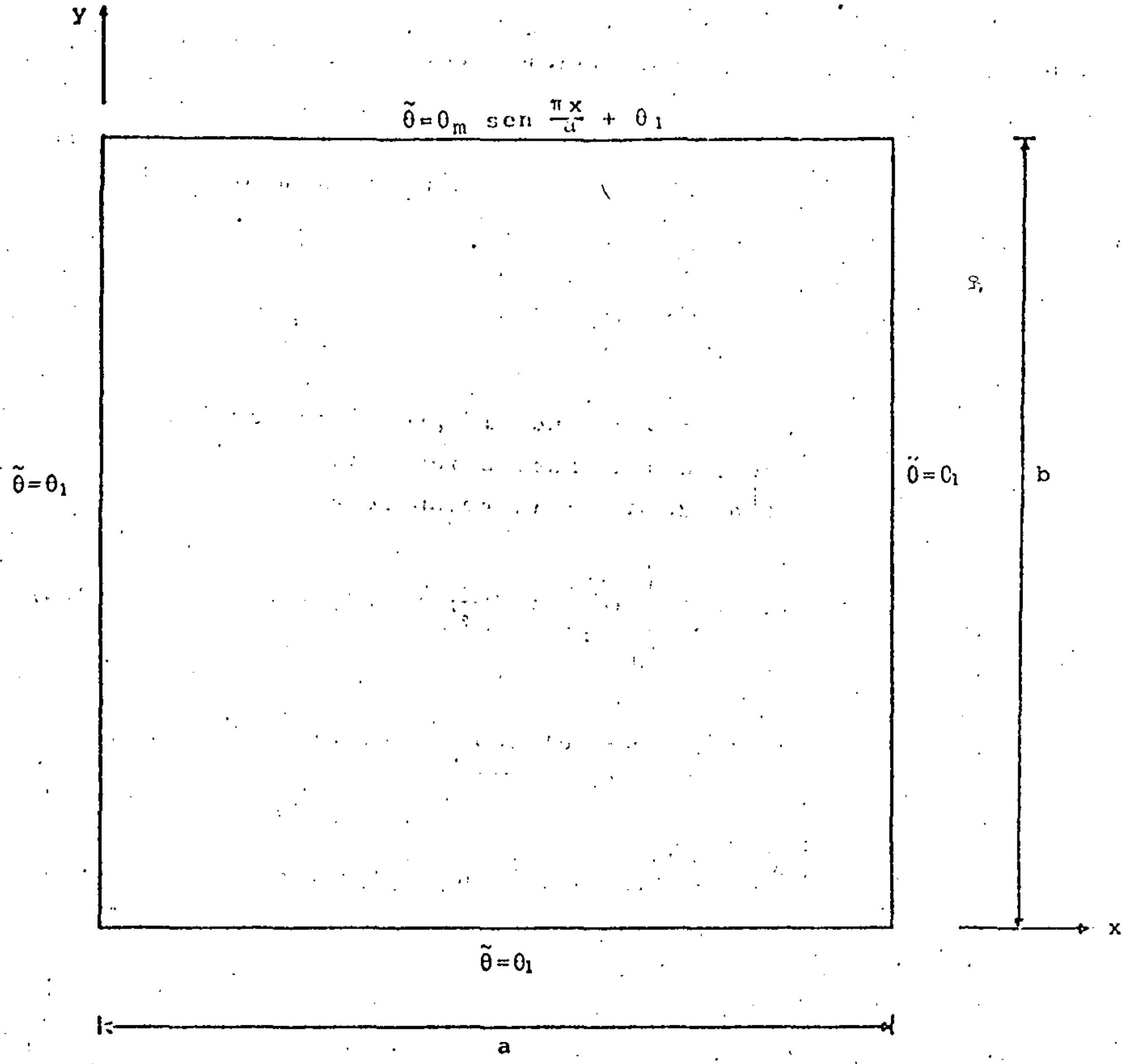


Fig 3.1. Placa rectangular con transferencia de calor por conducción y sus condiciones de frontera

y θ_i son los valores de la temperatura en cada nodo del elemento.

Ya que la función θ es una aproximación de la función $\tilde{\theta}$, al sustituirla en la ec. (3.3) se obtendrá un residuo o error. Entonces tenemos

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = \varepsilon \tag{3.7}$$

donde ε es el residuo. Considerando la proyección ortogonal del residuo sobre las funciones de base e igualando a cero, que es lo que indica el método de Galerkin se obtiene

$$(\varepsilon, N_i) \int_\Omega \left(\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}\right) N_i\,dxdy = 0 \tag{3.8}$$

Si a la ec. (3.8) le aplicamos el teorema de Green llegamos a

$$-\int_\Omega \left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial N_i}{\partial x} + \frac{\partial\theta}{\partial y}\frac{\partial N_i}{\partial y}\right) dxdy + \int_\Gamma \left(\frac{\partial\theta}{\partial x}N_i\,dy - \frac{\partial\theta}{\partial y}N_i\,dx\right) = 0 \tag{3.9}$$

Sustituyendo (3.6) en (3.9) y reordenando

$$\theta_j \int_\Omega \left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial y}\right) dxdy = \int_\Gamma \left(\frac{\partial\theta}{\partial x} N_i\,dy - \frac{\partial\theta}{\partial y} N_i\,dx\right) \tag{3.10}$$

Podemos usar una notación simplificada con lo que escribimos

$$\sum_{j=1}^{n} A_{ij}\theta_j = q_i \quad (i=1,2,\ldots,n) \tag{3.11}$$

A es llamada matriz de coeficientes de temperaturas y q es el vector de fuentes de calor y son

$$A_{ij} = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial y}\right) dxdy \qquad (3.12)$$

$$q_i = \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} N_i dy - \frac{\partial \theta}{\partial y} N_i dx\right) \qquad (3.13)$$

Hay que hacer notar que debido a la forma de la integral (3.12) la matriz A es simétrica.

Como la formulación que se hizo fué únicamente para un elemento, se deben de juntar las contribuciones de todos los elementos, para obtener el campo de temperaturas en toda la placa. Para lograr ésto, se efectúa un ensamble de todas las ecuaciones, de tal manera, que al final se obtenga un sistema de ecuaciones que contenga todos los nodos de la placa. El sistema global de ecuaciones a resolver será

$$\sum_{j=1}^{m} A^*_{ij} \theta^*_j = q^*_i \qquad (i=1,2,...,m) \qquad (3.14)$$

donde A^* es la matriz global de coeficientes, θ^* el vector global de temperaturas, q^* el vector global de flujo de calor y m el número total de nodos.

La forma en que se efectúa el ensamble se explica detalladamente en Cook (1974).

La ec. (3.14) es un sistema algebraico de ecuaciones lineales simétrico y bandeado, que se puede resolver por cualquiera de

los métodos conocidos, como pueden ser Gauss-Jordan, Gauss-Seidel, etc. o algún otro que aproveche las características de la matriz A^* como es el Gauss-Crout modificado para matrices bandeadas, que es el que se utiliza en el programa de computadora presentado.

Es importante observar que la matriz A^* es singular; sin embargo, al introducir las condiciones de frontera tanto de Neumann como de Dirichlet en la ec.(3.4), se quita la singularidad, pudiéndose resolver el sistema de ecuaciones resultante.

3.2.3 Ejemplo Numérico

Con el fín de hacer más objetivo cual es el procedimiento que se sigue en elementos finitos, en este inciso se resuelve un problema numérico paso por paso. Este consiste en calcular la temperatura en una placa bidimensional con transferencia de calor por conducción, en estado permanente. Los parámetros que se usan en la solución numérica, son los siguientes

θ_l = 100 unidades de temperatura

θ_m = 100 unidades de temperatura

a = 12 unidades de longitud

b = 12 unidades de longitud

Unicamente van a existir condiciones de frontera del tipo Dirichlet y son las que se indican en la Fig. 3.1. Por lo tanto, la ecuación de elementos finitos para un elemento es

$$\sum_{j=1}^{n} \theta_j \int_{\Omega} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial y}\right) dxdy = 0 \qquad (3.15)$$

o en notación compacta

$$\sum_{j=1}^{n} A_{ij}\ \theta_j = 0 \quad (i=1,2,\ldots,n) \tag{3.16}$$

Para la solución de elementos finitos, se utilizarán elementos triangulares, como muestra la Fig. 3.2, con funciones de interpolación lineal, y son

$$N_i = a_i + b_i x + c_i y \tag{3.17}$$

donde i=1,2,3 debido a que son tres nodos, una función por cada uno y las constantes están dadas por

$$\begin{aligned} a_1 &= (x_2y_3-x_3y_2)/2\Delta \;;\; b_1 = (y_2-y_3)/2\Delta \;;\; c_1 = (x_3-x_2)/2\Delta \\ a_2 &= (x_3y_1-x_1y_3)/2\Delta \;;\; b_2 = (y_3-y_1)/2\Delta \;;\; c_2 = (x_1-x_3)/2\Delta \\ a_3 &= (x_1y_2-x_2y_1)/2\Delta \;;\; b_3 = (y_1-y_2)/2\Delta \;;\; c_3 = (x_2-x_1)/2\Delta \end{aligned} \tag{3.18}$$

aquí Δ es el área del triángulo y se puede obtener por

$$\Delta = \frac{1}{2}\,(x_1y_2-x_2y_1+x_3y_1-x_1y_3+x_2y_3-x_3y_2) \tag{3.19}$$

Se observa que la numeración local en el triángulo, está hecha en contra de las manecillas del reloj, para que Δ resulte positiva. La obtención de las funciones de interpolación se encuentra en Segerlind (1976).

Para obtener la matriz A se sustituyen las funciones de interpolación (3.17), en la integral de la ec. (3.10). Por ejemplo para el término A_{11}

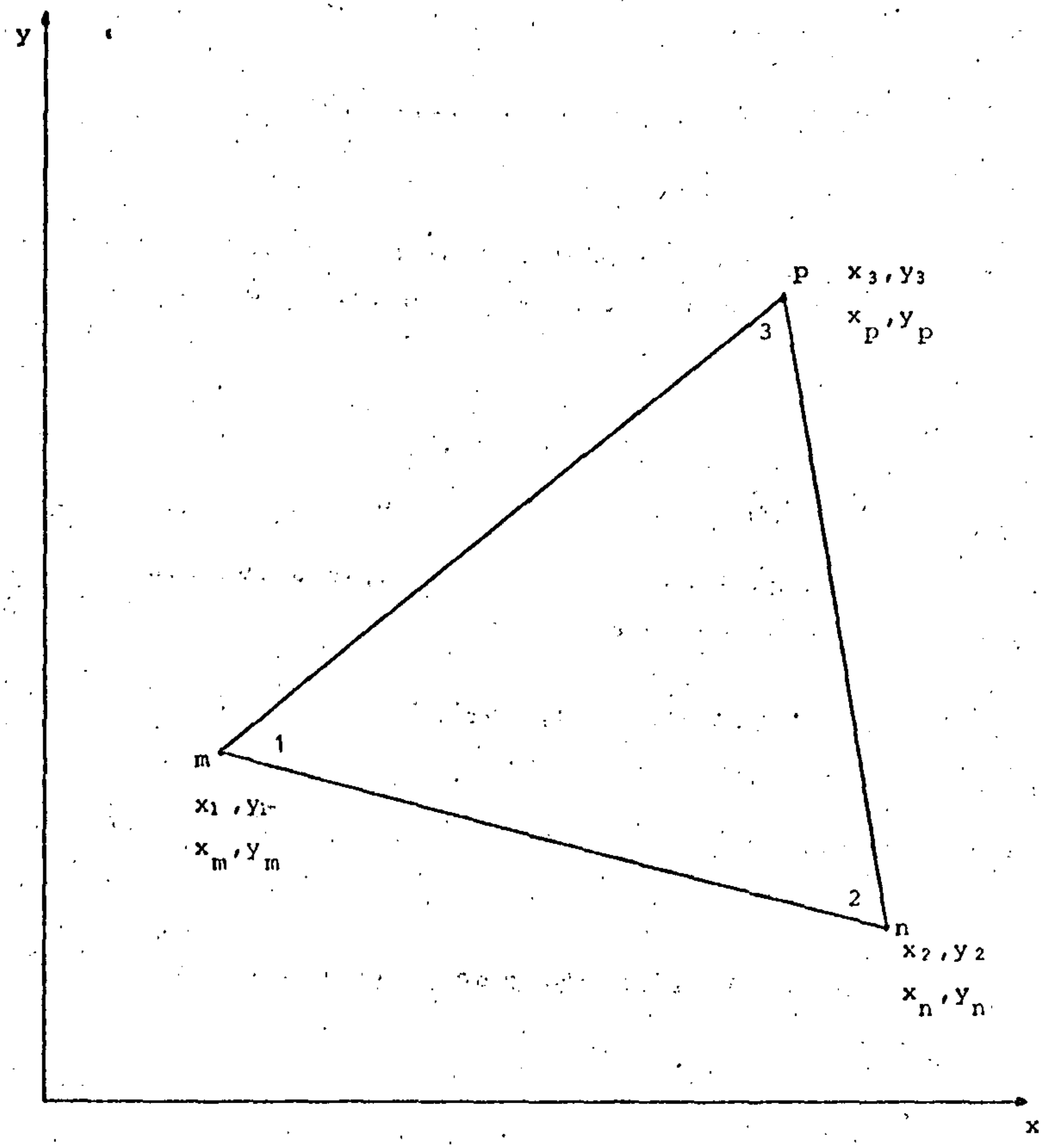


Fig 3.2. Elemento triangular con la numeración local (1,2,3) y la numeración global (n,m,p) y sus respectivas coordenadas cartesianas.

$$\Lambda_{11} = \int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x}(a_1+b_1x+c_1y)\right]^2 \left[\frac{\partial}{\partial y}(a_1+b_1x+c_1y\right]^2 dxdy$$

$$= \Delta\ (b_1^2 + c_1^2) \tag{3.20}$$

Procediendo de la misma manera para los demás coeficientes, llegamos a

$$\Lambda = \Delta \begin{bmatrix} b_1^2+c_1^2 & b_1b_2+c_1c_2 & b_1b_3+c_1c_3 \\ b_1b_2+c_1c_2 & b_2^2+\ c_2^2 & b_2b_3+c_2c_3 \\ b_1b_3+c_1c_3 & b_2b_3+c_2c_3 & b_3^2+\ c_3^2 \end{bmatrix} \tag{3.21}$$

donde las constantes son las mismas de la ec. (3.18).

El siguiente paso es evaluar las matrices para cada elemento, para lo cual es necesario numerar, de acuerdo a la malla que se utilice, todos los nodos y los elementos, procurando siempre que la diferencia entre los números asignados globalmente, de los nodos de cada elemento, sea mínima, para que el ancho de banda de la matriz global Λ^* también sea el mínimo posible. Esto es muy importante, porque en el momento de almacenar la matriz en la memoria en la computadora, se puede hacer en forma bandeada y mientras esta banda sea menor, la memoria que se utilice también es menor, ya que el resto de los coeficients son ceros y no necesitan almacenaje.

Tomando como ejemplo una discretización de pocos elementos, como muestra la Fig. 3.3, que es una malla de 7 nodos globales con 7 elementos, se puede observar que con la numeración global de los nodos que se indica, la máxima diferencia entre los nodos de cualquiera de cada uno de los elementos es 3, a este factor se le llama esparcidad y para la malla mostrada es

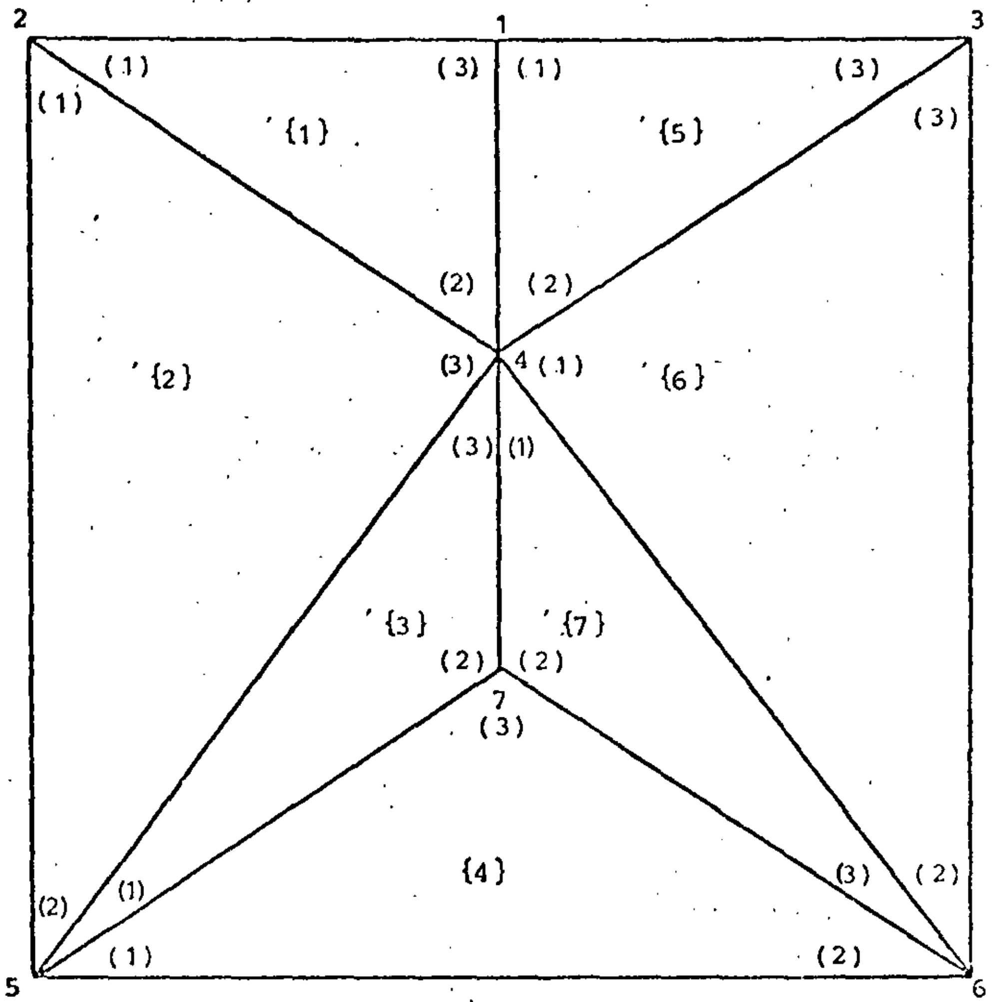


Fig 3.3. Discretización cruda de la placa, mostrando la numeración global, la numeración local y la numeración de los elementos.

el mínimo que se puede obtener. El ancho de la banda de la matriz global, se puede obtener sumándole uno a la esparcidad; para nuestro caso el ancho de la banda es 4, ésto es, la matriz tendrá 4 diagonales con valores numéricos no nulos, incluyendo la diagonal principal, ya sea hacia arriba o hacia abajo de ésta última.

Para evaluar las matrices de cada elemento, primero se procede a formar una tabla que relacione las coordenadas, con los nodos globales a las que corresponden, como sigue.

Nodo	1	2	3	4	5	6	7
x	6	0	12	6	0	12	6
y	12	12	12	8	0	0	4

En seguida se forma una tabla que relacione los nodos globales, con los nodos locales de cada elemento.

Elemento No / Nodos Locales	Nodos Globales						
	1	2	3	4	5	6	7
1	2	2	5	5	1	4	4
2	4	5	7	6	4	6	7
3	1	4	4	7	3	3	6

Con las dos tablas anteriores, podemos localizar fácilmente las coordenadas para cada nodo local, las cuales se utilizan para obtener las b's y las c's de la matriz A en la ec. (3.2) y al mismo tiempo el área, así por ejemplo para el elemento 1

$$x_1 = 0 \;; \quad x_2 = 6 \quad ; \quad x_3 = 6$$

$$y_1 = 12 ; \quad y_2 = 8 \quad ; \quad y_3 = 12$$

aquí los subíndices indican los nodos locales. Con estas coordenadas, podemos evaluar la matriz para el elemento 1 como sigue

$$A^{(1)} = \frac{1}{72}\begin{array}{c c} \begin{array}{ccc} (2) & (4) & (1) \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 24 & 0 & -24 \\ 0 & 54 & -54 \\ -24 & -54 & 78 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} (2) \\ (4) \\ (1) \end{array} \end{array}$$

se observa que como la matriz es simétrica, únicamente se tiene que calcular 6 términos. Los números entre paréntesis a los lados de la matriz, indican los nodos globales a los que pertenecen los renglones y las columnas. Similarmente para los otros elementos, tenemos

$$A^{(2)} = \frac{1}{72}\begin{array}{c c} \begin{array}{ccc} (2) & (5) & (4) \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 45 & -2 & -48 \\ -2 & 26 & -24 \\ -48 & -24 & 72 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} (2) \\ (5) \\ (4) \end{array} \end{array} \qquad A^{(3)} = \frac{1}{72}\begin{array}{c c} \begin{array}{ccc} (5) & (7) & (4) \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 24 & -48 & 24 \\ -48 & 150 & -102 \\ 24 & -102 & 78 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} (5) \\ (7) \\ (4) \end{array} \end{array}$$

$$A^{(4)} = \frac{1}{72}\begin{array}{c c} \begin{array}{ccc} (5) & (6) & (7) \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 39 & 15 & -54 \\ 15 & 39 & -54 \\ -54 & -54 & 108 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} (5) \\ (6) \\ (7) \end{array} \end{array} \qquad A^{(5)} = \frac{1}{72}\begin{array}{c c} \begin{array}{ccc} (1) & (4) & (3) \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 78 & -54 & -24 \\ -54 & 54 & 0 \\ -24 & 0 & 24 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} (1) \\ (4) \\ (3) \end{array} \end{array}$$

$$A^{(6)} = \frac{1}{72}\begin{array}{c c} \begin{array}{ccc} (4) & (6) & (7) \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 72 & -24 & -48 \\ -24 & -2 & -2 \\ -48 & -2 & 45 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} (4) \\ (6) \\ (3) \end{array} \end{array} \qquad A^{(7)} = \frac{1}{72}\begin{array}{c c} \begin{array}{ccc} (4) & (7) & (6) \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 78 & -102 & 24 \\ -102 & 150 & -48 \\ 24 & -48 & 24 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} (4) \\ (7) \\ (6) \end{array} \end{array}$$

En seguida se ensamblan estas matrices en la matriz global, para lo cual se suman los coeficientes de cada matriz del elemento, que correspondan al mismo lugar en matriz global, utilizando los números que están entre paréntesis; así por ejemplo, para el coeficiente A^*_{11} de la matriz global, hay contribuciones tanto en la matriz del elemento 1 como en la matriz del elemento 5 y nos queda

$$A^*_{11} = \frac{1}{72}(78+78) = \frac{1}{72}156$$

siguiendo un procedimiento similar para los demás coeficientes, tenemos

$$\frac{1}{72}\begin{bmatrix} 156 & -24 & -24 & -108 & 0 & 0 & 0 \\ -24 & 69 & 0 & -48 & -2 & 0 & 0 \\ -24 & 0 & 69 & -48 & 0 & -2 & 0 \\ -108 & -48 & -48 & 408 & 0 & 0 & -204 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 89 & 15 & -102 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 15 & 89 & -102 \\ 0 & 0 & 0 & -204 & -102 & -102 & 408 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \\ \theta_6 \\ \theta_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (3.22)$$

A continuación se introducen las condiciones de frontera. Como se observa en la fig. 3.3, hay 5 nodos en la frontera y 2 en el interior, que son nuestras incógnitas. Los valores de los nodos en la frontera son

$$\theta_1 = 200 \quad \theta_5 = 100$$
$$\theta_2 = 100 \quad \theta_6 = 100$$
$$\theta_3 = 100$$

Estos valores se sustituyen en la ec. (3.22), multiplicando las columnas correspondientes y pasándolas del otro lado con signo negativo, ya que los renglones de los nodos conocidos no nos interesan, podemos sustituirlos por un 1 en el coeficiente correspondiente de la diagonal principal y los demás términos del renglón ceros y en el lado derecho el valor del nodo. Haciendo estas operaciones tenemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5.66 & 0 & 0 & -2.83 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2.83 & 0 & 0 & 5.66 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \\ \theta_6 \\ \theta_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 \\ 100 \\ 100 \\ 433.33 \\ 100 \\ 100 \\ 283.33 \end{bmatrix} \qquad (3.23)$$

En la ec. (3.23) podemos descartar los renglones y columnas 1,2,3,5,6 quedándonos

$$\begin{bmatrix} 5.66 & -2.83 \\ -2.83 & 5.66 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_4 \\ \theta_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 433.33 \\ 283.33 \end{bmatrix} \qquad (3.24)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones anterior, llegamos a

$$\theta_4 = 135.2491$$
$$\theta_7 = 117.6471$$

La solución exacta usando la ec. (3.5) es

$$\theta_4 = 134.6244$$
$$\theta_7 = 110.8182$$

El error en el nodo 4 es de 0.5% y en el nodo 2 es de 6.2%. El hecho de que exista tanta diferencia entre el error de uno y otro nodo, se puede explicar refiriéndose a la Fig 3.3, el nodo 4 pertenece a 6 de los 7 elementos que forman la malla, en cambio el nodo 7 pertenece únicamente a 3 elementos, por lo que tiene menos elementos que contribuyan a su solución. De aquí se concluye inmediatamente, que aumentando el número de elementos, se aumenta la precisión.

El procedimiento anterior se puede implementar en un programa de computadora, ya que para una malla más fina, sería prácticamente imposible efectuarlo a mano y además, se pueden aprovechar las características de simetría y bandeado de la matriz global.

Existen otras formas de efectura el ensamble, que para ciertos problemas son más eficientes, sin embargo, la presentada es la más sencilla y bastante práctica.

3.2.4 Solución de Elementos Finitos Contra Solución Exacta

Para obtener los resultados que se muestran en este inciso, se realizó un programa de computadora, el cual se muestra en el anexo, que sigue casi exactamente los mismos pasos del ejemplo 3.3.3. y que tiene además, una subrutina que calcula el error y otra que calcula líneas de temperatura constante.

El error que se utiliza, es el error raíz medio cuadrático, definido por

$$e = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (\theta_i - \tilde{\theta}_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (3.25)$$

donde θ_i es la solución de elementos finitos y $\tilde{\theta}$ es la solución exacta y además se toma únicamente por los nodos incógnitos, por lo que n es el número de nodos que no son de frontera.

En la primera prueba que se realiza, se usa una malla como la que se muestra en la Fig.3.4, con 9 nodos, 8 elementos y un solo nodo incógnito y la variación de temperaturas senoidal en la parte de arriba. Los parámetros que se utilizan son los mismos del ejemplo numérico.

Si se desplazan los nodos a, b y c la misma distancia, a lo largo del eje y, manteniendo constante su distancia x, se van a obtener diferentes temperaturas del nodo c, una para cada posición.

Con ésto se intenta ver cual es el comportamiento del método, cuando para una malla con el mismo número de elementos, éstos se hacen más grandes o más pequeños en determinada región, en este caso únicamente se varían en sentido vertical, porque arriba es donde está la mayor variación de temperaturas.

La Fig. 3.5 nos muestra una gráfica posición de la línea $\overline{acb}$ contra temperatura, en la que se representan las curvas de los resultados obtenidos por elementos finitos y la solución exacta. Se observa que a medida que se van haciendo más pequeños los elementos en la parte superior, se va acercando la solución de elementos finitos a la solución exacta, hay un momento en que son iguales y después se aleja otra vez la curva, a pesar de que son todavía más pequeños los elementos.

En la Fig. 3.6 se puede ver más claro este proceso; aquí se grafica posición de la línea $\overline{acb}$ contra el error raíz medio cuadrático, a medida que se van haciendo más pequeños los elementos de la parte superior, el error disminuye, hasta que incluso es cero y después vuelve a aumentar.

De estas dos gráficas podemos concluir, que se deben colocar elementos más pequeños en la zona de mayor variación y más grandes donde no exista tanta variación. El hecho que exista un punto en el que el error vuelva a aumentar, es debido a que para

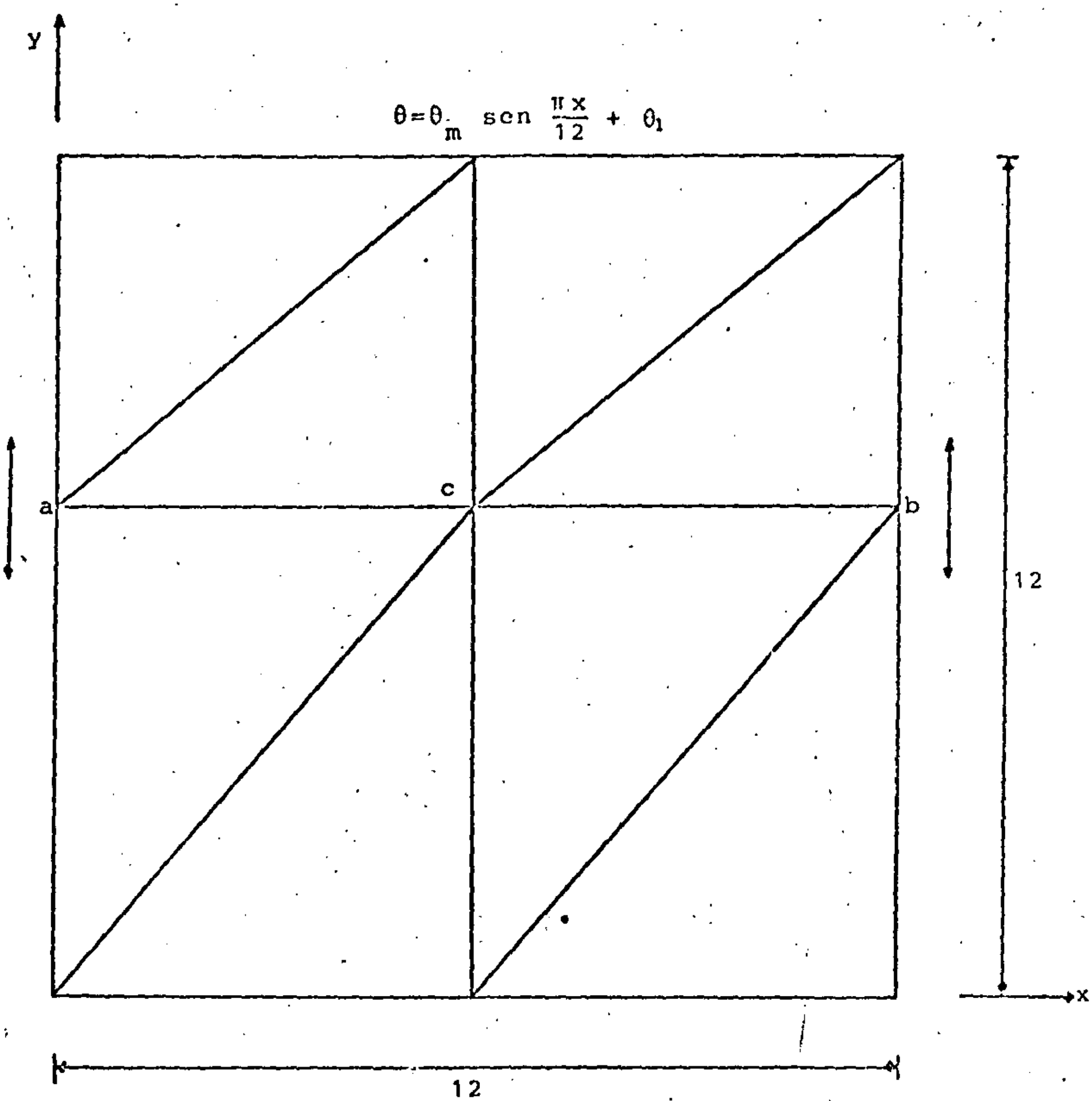


Fig 3.4. Malla con la barra $\overline{acb}$ móvil.

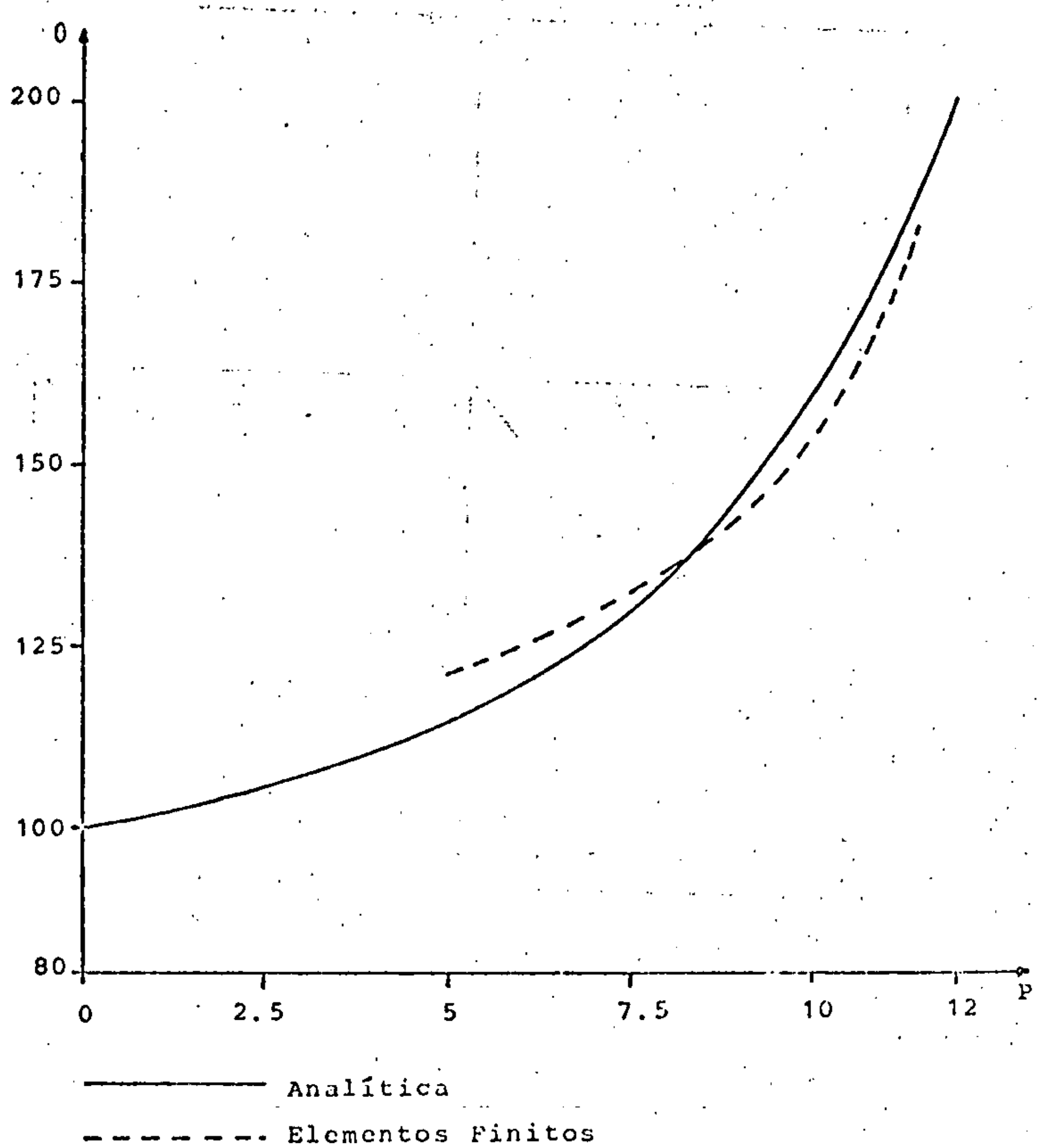


Fig 3.5 Gráfica posición contra temperatura para la solución exacta y de elementos finitos.

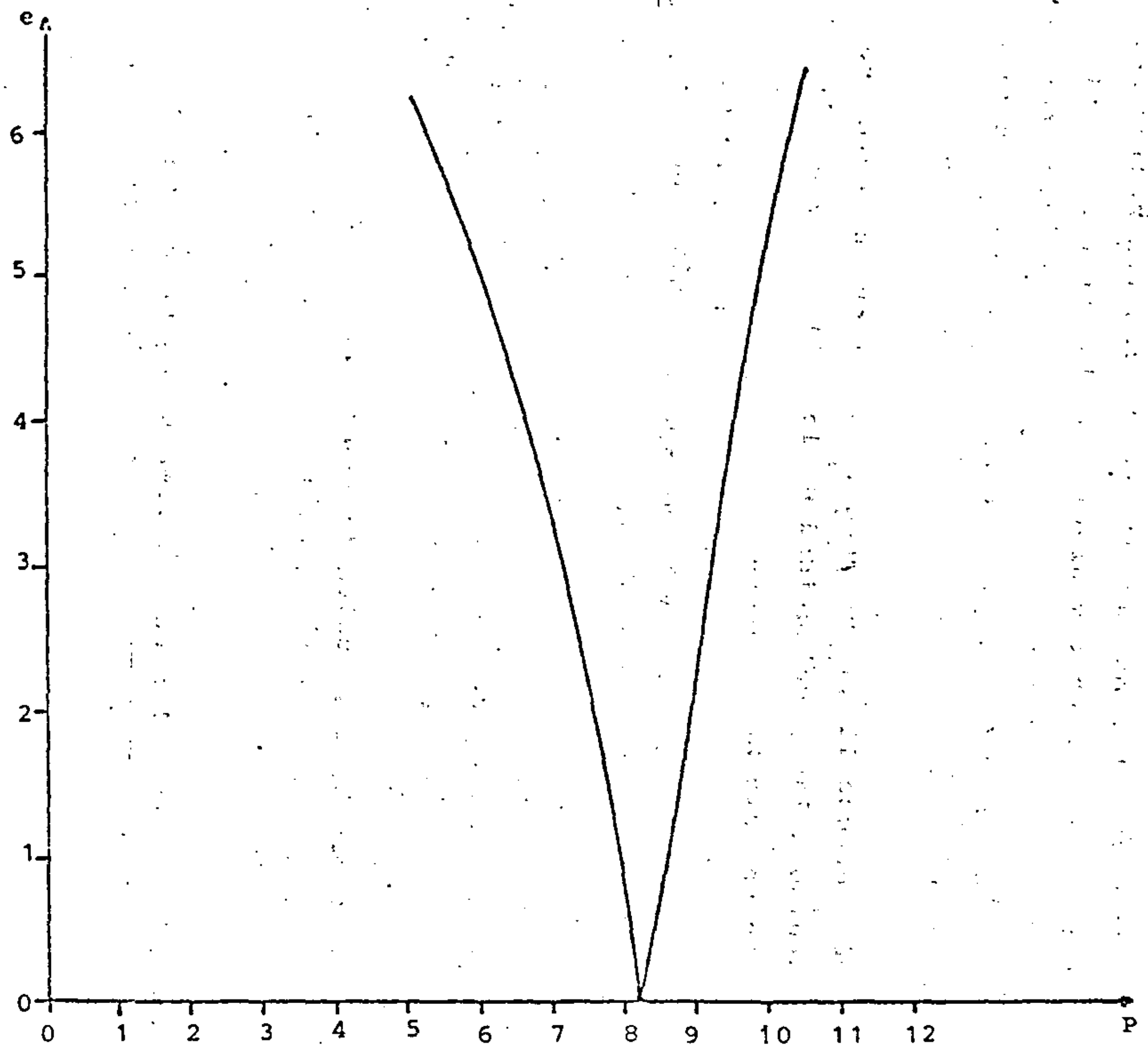


Fig 3.6. Gráfica posición contra error raíz medio cuadrático.

las posiciones de la línea muy altas, los triángulos de la parte superior son muy deformes, ésto es debido a que la base y la altura del triángulo están muy desproporcionados. De aquí se desprende que siempre hay que procurar que los triángulos tiendan a ser equiláteros. Otra razón por la que el error vuelve a aumentar para posiciones muy altas, es que los triángulos de arriba son muy pequeños en comparación de los de abajo, entonces siempre hay que tratar que los triángulos que estén contiguos, tengan una cierta relación de áreas, aunque esto último no es tan importante.

El hecho de que llegue un momento en el que el error sea cero, es debido a las peculiaridad de la malla, ya que sólamente existe un solo nodo incógnito. Usualmente es muy difícil obtener una solución exacta por elementos finitos, pero en general se puede obtener una muy buena aproximación, sobre todo para problemas sencillos como éste.

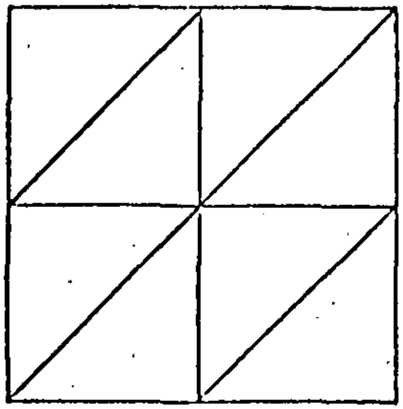
La siguiente prueba consiste en analizar el comportamiento del método, en función del número de elementos y de la posición de éstos, para lo cual primero definiremos tres tipos de mallas.

Mallas tipo S_a, las cuales tienen el mismo número de elementos, en cualquiera de los lados de la placa, como muestra la Fig. 3.7.

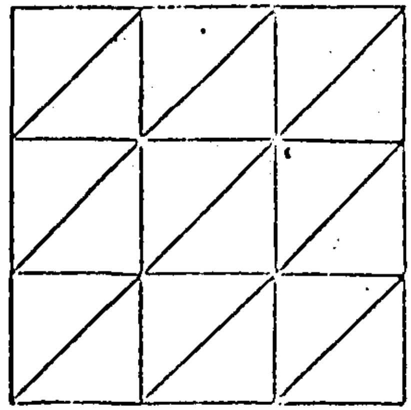
Mallas tipo AS_1, las cuales tienen más elementos arriba y abajo, que en los lados de la placa, como muestra la Fig.3.8.

Mallas tipo AS_2, las cuales tienen más elementos a los lados que arriba y abajo de la placa, como muestra la Fig.3.9.

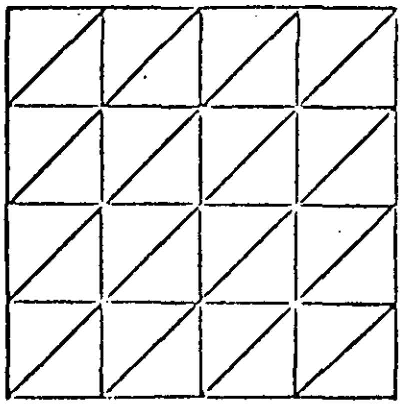
Calculando las temperaturas y el error para todas las mallas anteriores, se obtiene una gráfica como la que muestra la Fig. 3.10, en la que se dibujan las curvas de número de elementos contra error raíz medio cuadrático, para cada tipo de malla. Se observa que para pocos elementos, se obtiene menor error en



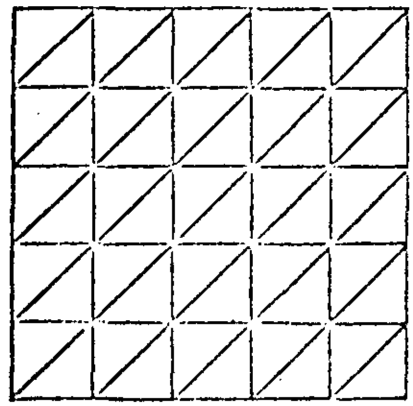
9 Nodos
8 Elementos



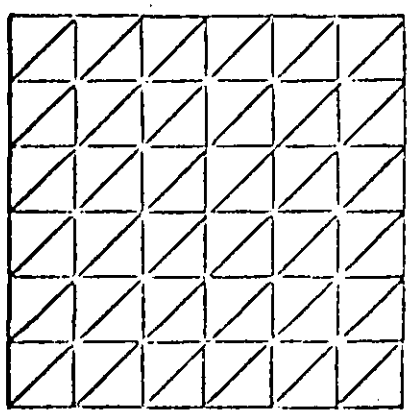
16 Nodos
18 Elementos



25 Nodos
32 Elementos



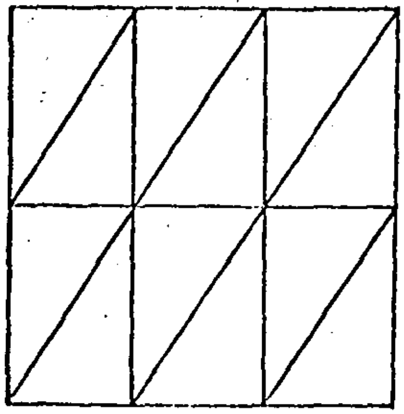
36 Nodos
50 Rlementos



49 Nodos

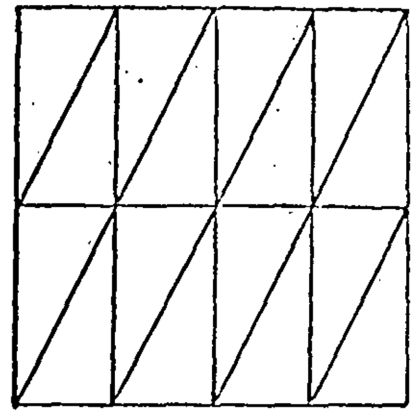
72 Elementos

Fig 3.7. Mallas tipo S_a.



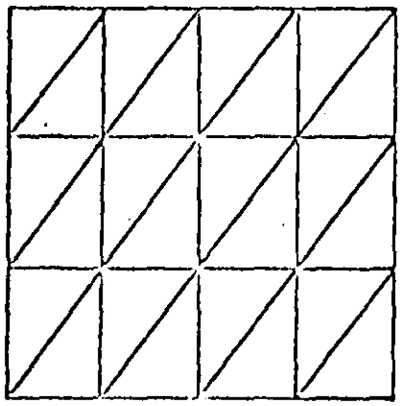
12 Nodos

12 Elementos



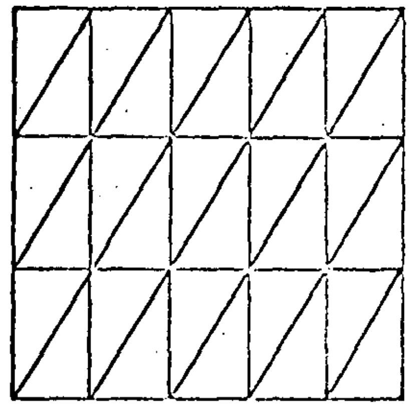
15 Nodos

16 Elementos



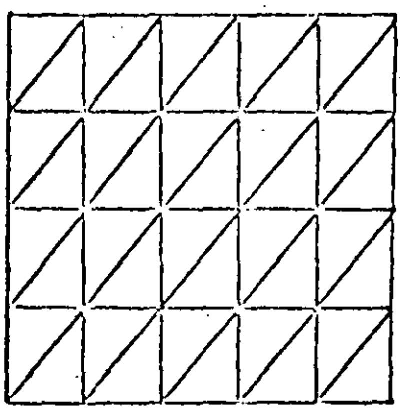
20 Nodos

24 Elementos



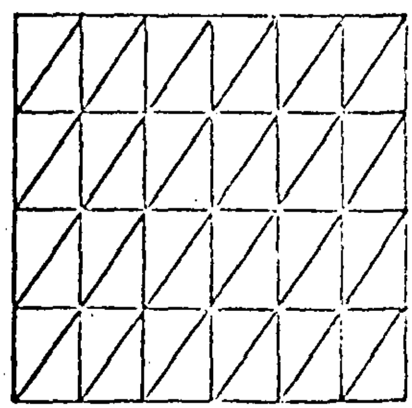
24 Nodos

30 Elementos



30 Nodos

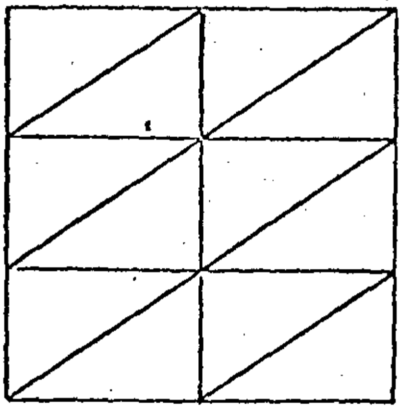
40 Elementos



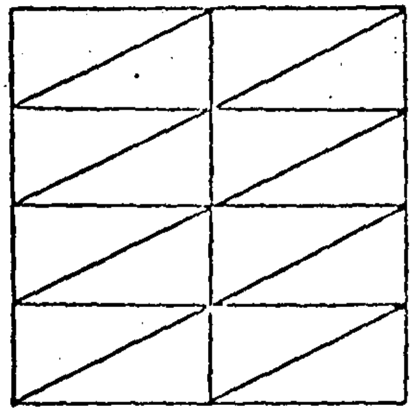
35 Nodos

48 Elementos

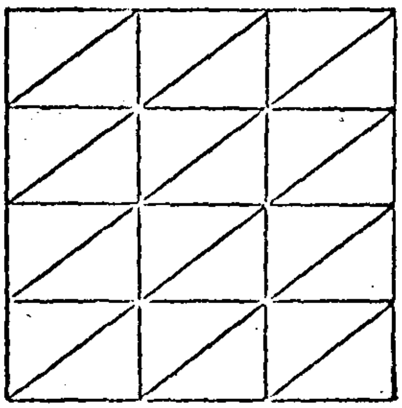
Fig 3.8. Mallas tipo AS_1.



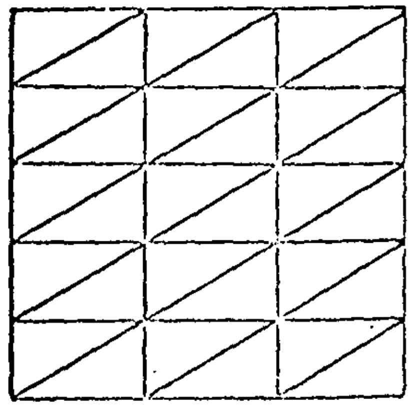
12 Nodos
12 Elementos



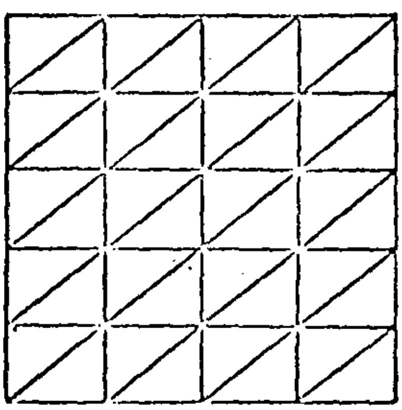
15 Nodos
16 Elementos



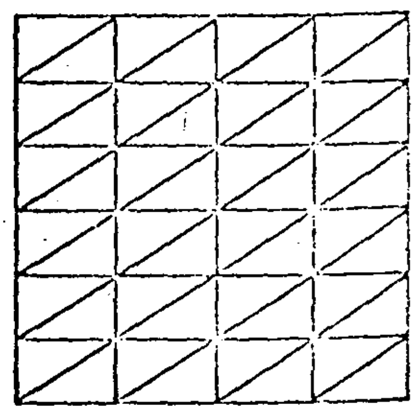
20 Nodos
24 Elementos



24 Nodos
30 Elementos



30 Nodos
40 Elementos



35 Nodos
48 Elementos

Fig 3.9. Mallas tipo AS_2.

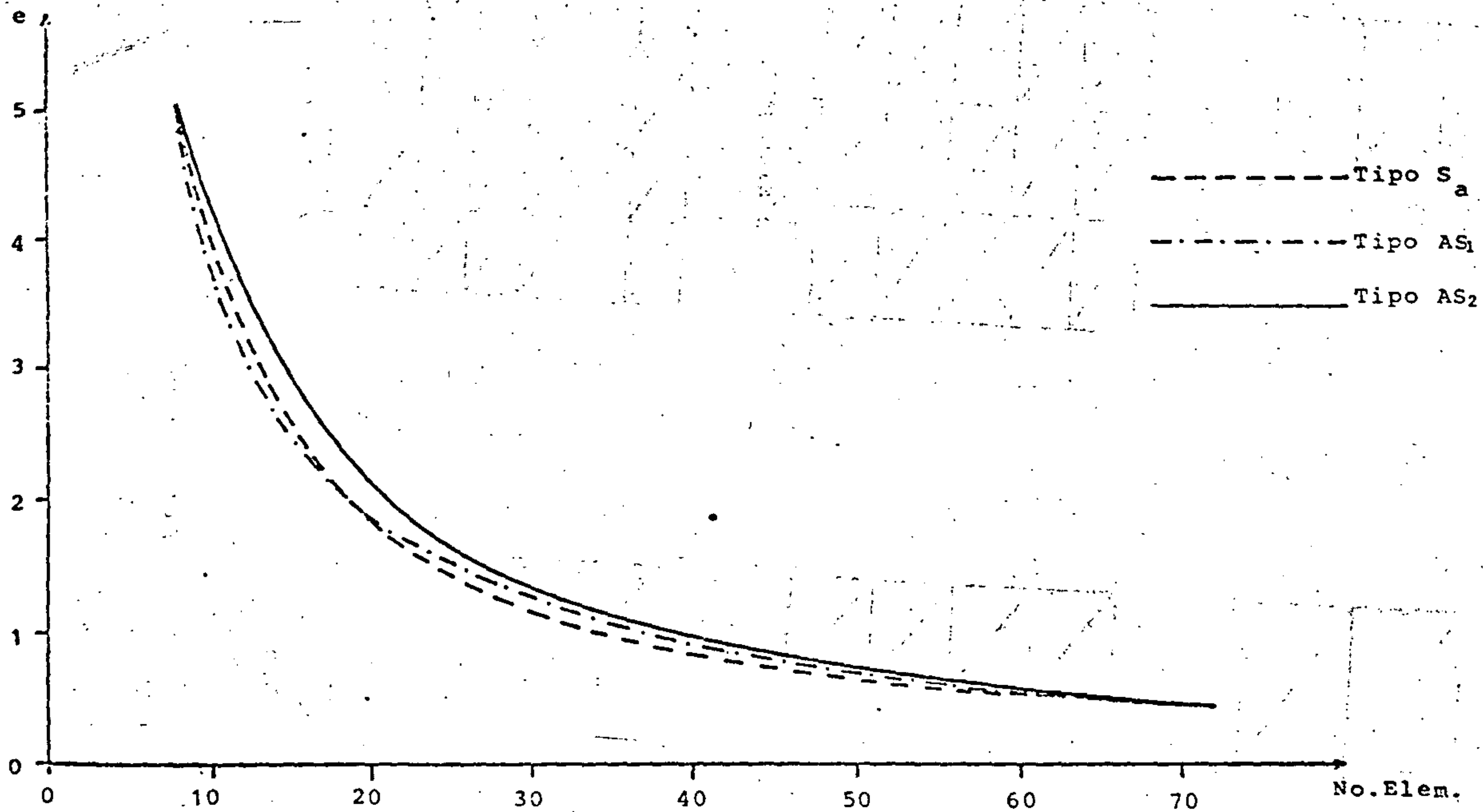


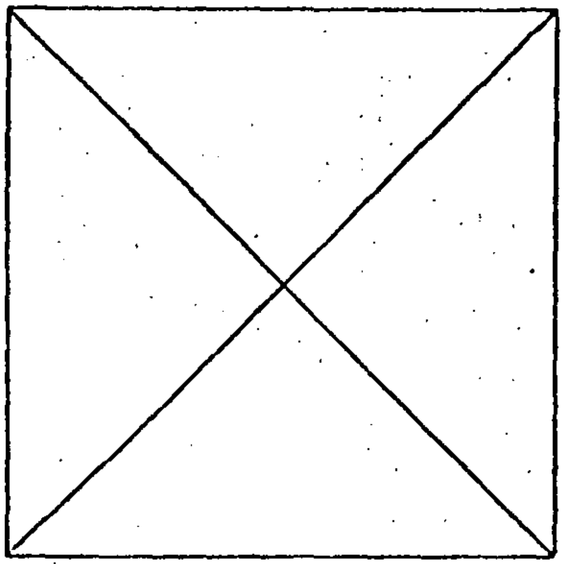
Fig 3.10. Gráfica Número de elementos contra error raíz medio cuadrático para mallas tipo S_a, AS_1 y AS_2

las mallas del tipo AS_1, ésto es mallas con más elementos en la zona de variación y mayor error para mallas del tipo AS_2, que son lo contrario de las anteriores. Para más elementos se obtiene un menor error utilizando mallas del tipo S_a. Esto es debido a que los triángulos de estas mallas tienden más a ser equiláteros, que los de las mallas tipo AS_1 y a la vez hay suficientes elementos en la zona de variación, para poder detectar los cambios.

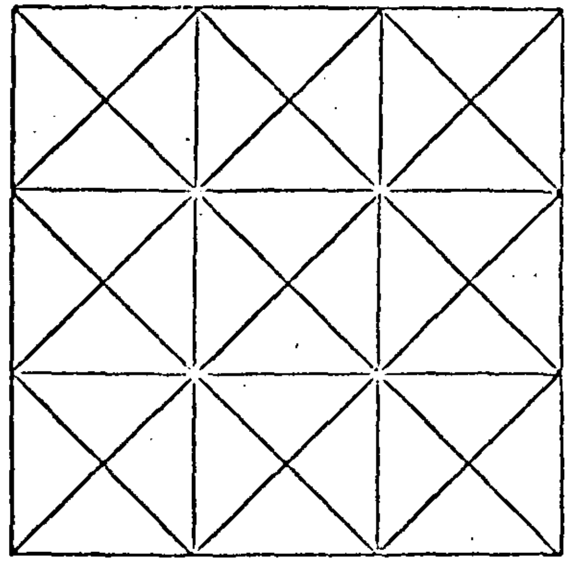
Otra vez podemos concluir, que siempre hay que tratar de poner más elementos en la zona de mayor variación y a la vez procurar que éstos tiendan a ser equiláteros. Las mallas del tipo AS_2 no son recomendables.

Se puede definir otro tipo de mallas, como es la S_b que muestra la Fig. 3.11, en la que el número de elementos en todos los lados de la placa es el mismo. La curva que se obtiene al graficar número de elementos contra error raíz medio cuadrático, es idéntica a la que se obtiene con la malla tipo S_a, sin embargo, con la malla S_b es más fácil aproximar contornos redondeados. Como dato curioso, al utilizar la primera malla de la Fig. 3.11, resulta que la temperatura en toda la placa es constante e igual θ_1, ésto es debido a que no hay ningún nodo que detecte que hay una temperatura diferente, por lo que siempre hay que poner suficientes nodos, en las fronteras donde exista variación.

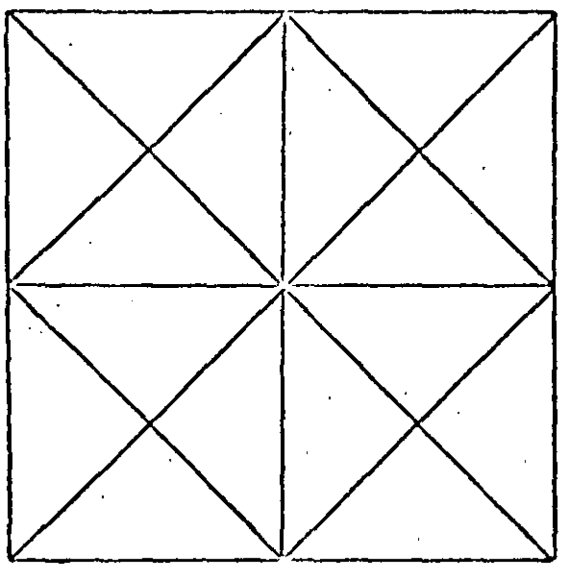
La Fig.3.12 nos muestra una curva, número de elementos contra error raíz medio cuadrático, graficados ambos logarítmicamente para mallas del tipo S_a. Se observa que la curva se asemeja mucho a una recta, por lo que podemos decir que el error disminuye exponencialmente, a medida que aumente el número de elementos, o en otras palabras, que el método de elementos finitos converge exponencialmente a la solución exacta, a medida que aumenta el número de elementos. Esta conclusión no se puede generalizar para todos los problemas, ya que el caso que estamos tratando es muy sencillo, debido a



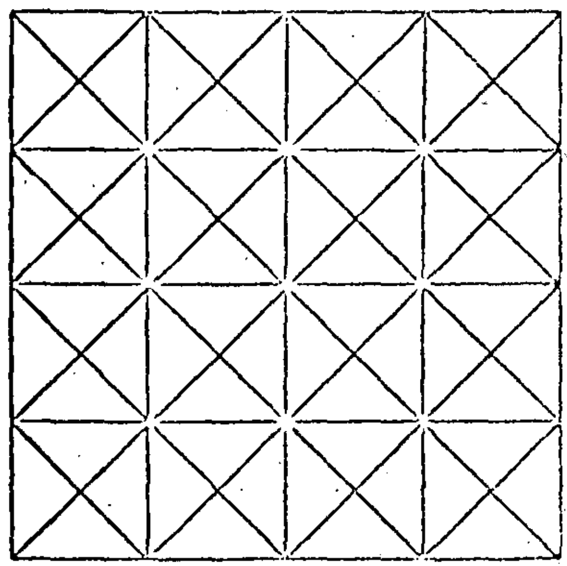
5 Nodos
4 Elementos



25 Nodos
36 Elementos



13 Nodos
16 Elementos



41 Nodos
64 Elementos

Fig 3.11 Mallas tipo S_b

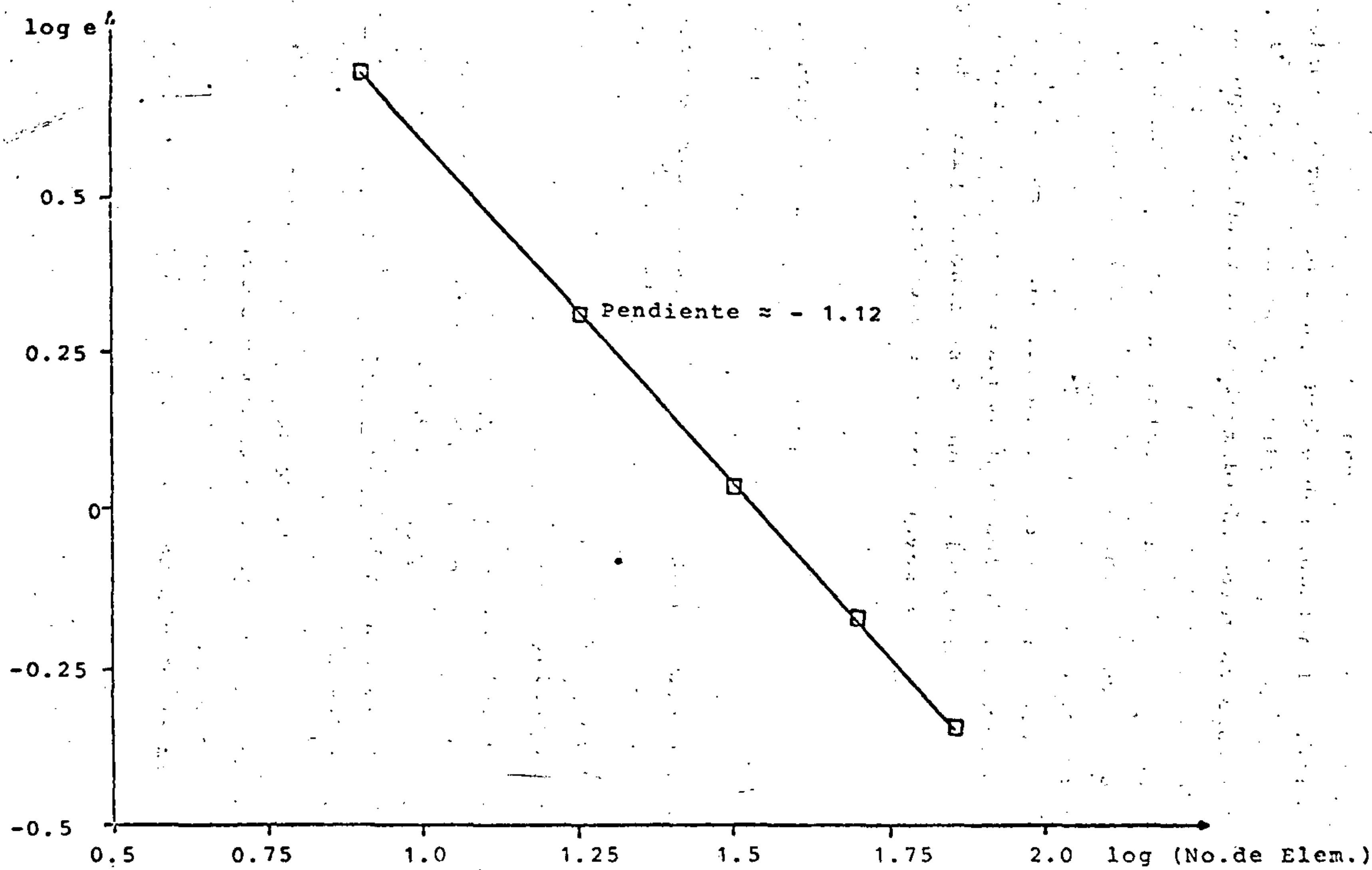


Fig 3.12. Gráfica número de elementos contra error raíz medio cuadrático para mallas de tipo S_a

que es una ecuación lineal, en la que está definida la temperatura en todas las fronteras y además no existen fuentes de calor. Sin embargo, sí nos damos una muy buena idea de cual es la convergencia del método, sobre todo para problemas similares; ésto es, al principio, a medida que se aumentan los elementos, el método converge rápidamente y al final, aunque se aumente el número de elementos, no se mejora mucho la solución, por lo que hay que tratar de encontrar un justo medio, sobre todo teniendo en cuenta que a más elementos la solución es más costosa. Para lograr esto último se pueden hacer dos o tres mallas con distintos números de elementos, para darse una idea de cual es la diferencia de los resultados entre una y otra, además se puede aprovechar, si es que no se conoce, para detectar cuales son las zonas de mayor variación y colocar en ellas más elementos y más pequeños.

Los resultados anteriores, se resumen en las siguientes normas para el uso del método de elementos finitos:

1.- Dividir la región con una malla gruesa, para observar cuales son las zonas de mayor variación.

2.- Colocar más elementos y más pequeños en las zonas de gran variación.

3.- Dividir la región con una malla más fina y comparar los resultados con los obtenidos con la malla de aproximación, en caso de existir mucha diferencia, utilizar una malla todavía más fina y repetir el procedimiento.

4.- Procurar que los triángulos tiendan a ser equiláteros y evitar aquellos que sean muy deformes. Siempre es posible substituir un triángulo muy deformado por dos triángulos más parecidos a triángulos equiláteros.

5.- Colocar suficientes nodos en las fronteras donde exista variación.

Por último, la Fig. 3.13 muestra líneas de temperatura constante en la superficie de la placa, obtenidas con una malla del tipo S_a, que tiene 49 nodos y 72 elementos y con un error raíz medio cuadrático relativo en la solución de 0.35%.

3.3 PROBLEMA BIDIMENSIONAL EN ESTADO TRANSITORIO

El segundo problema que se resolverá en este capítulo, es el de una placa en dos dimensiones con transferencia de calor por conducción en estado transitorio, para obtener la distribución de temperaturas en toda la superficie, en el transcurso del tiempo. Para el mismo ejemplo del inciso anterior, se puede encontrar una solución analítica a través de series de Fourier, con la que se pueden comparar los resultados obtenidos por elementos finitos.

3.3.1 Planteamiento de las Ecuaciones y Solución Exacta

La ecuación que define la conducción de calor en dos dimensiones y en estado transitorio es, Holman (1972)

$$\frac{\partial^2 \hat{\theta}}{\partial \hat{x}^2} + \frac{\partial^2 \hat{\theta}}{\partial \hat{x}^2} = \frac{\hat{\rho} C}{K} \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \hat{\tau}} \qquad (2.26)$$

donde $\hat{\theta}$ es la temperatura, $\hat{x}$ y $\hat{y}$ son coordenadas cartesianas, $\hat{\rho}$ es la densidad, C es el calor específico, K es la conductividad térmica del material y $\hat{\tau}$ es el tiempo. Se tomará como constanes las propiedades del material.

Definiendo las siguientes variables adimensionales:

$$\tilde{\theta} = \frac{\hat{\theta}}{\theta_0} \; ; \; x = \frac{\hat{x}}{L} \; ; \; y = \frac{\hat{y}}{L} \; ; \; \tau = \frac{\hat{\tau}}{\hat{\rho} C L^2 / K} \qquad (3.27)$$

Aquí θ_0 y L son variables de referencia. Usando (3.27) en (3.26) se tiene

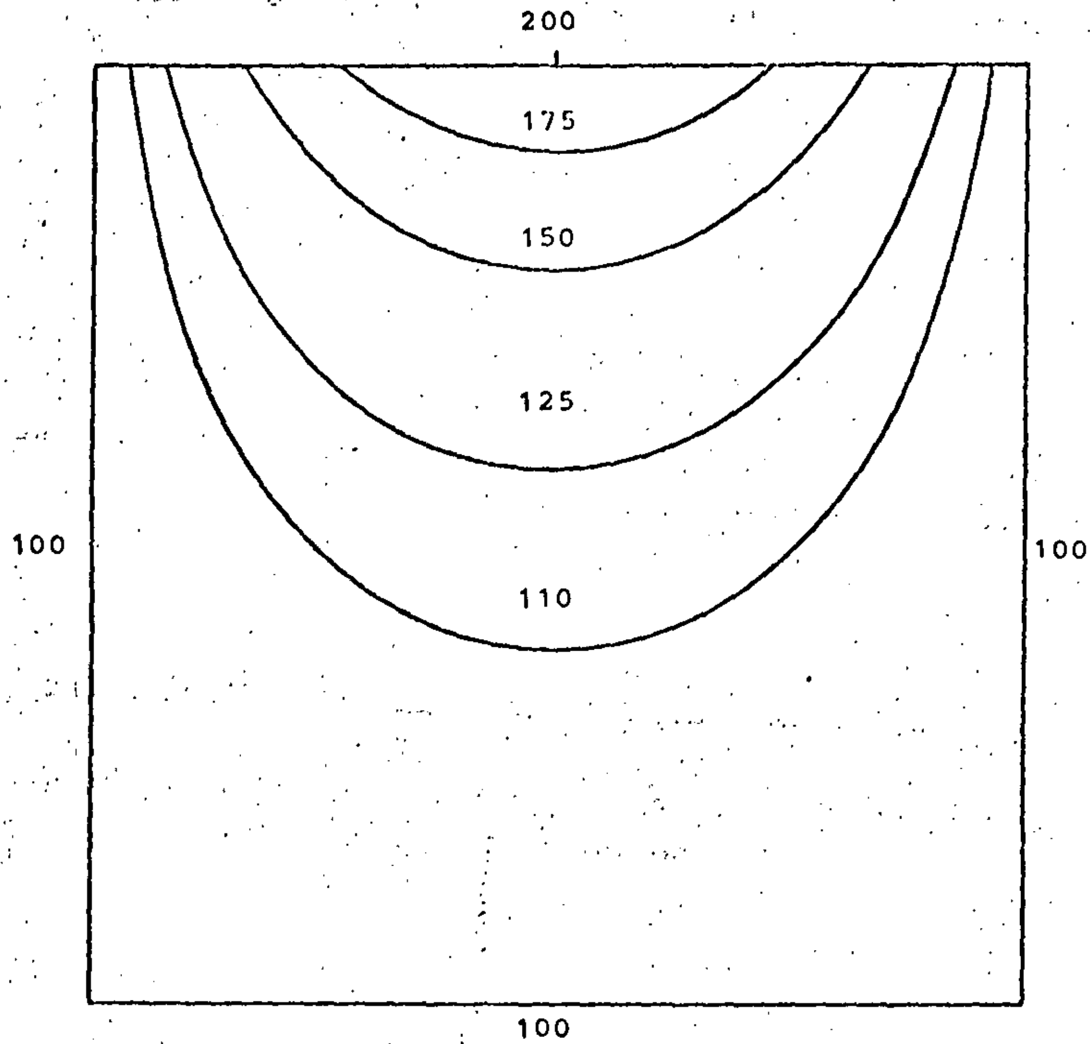


Fig 3.13. Líneas de temperatura constante

$$\frac{\partial^2\tilde{\theta}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\tilde{\theta}}{\partial y^2}=\frac{\partial\tilde{\theta}}{\partial\tau} \tag{3.28}$$

Considerando un ejemplo similar al de la sección anterior, pero ahora en estado transitorio. Tenemos una placa rectangular, como la mostrada en la Fig. 3.14, donde para tiempo $\tau=0$ toda la placa se encuentra a una temperatura $\tilde{\theta}=0$ y para tiempo $\tau>0$ se cambia la temperatura del lado superior por una distribución de temperaturas senoidal. Para este problema también se puede encontrar una solución analítica como sigue.

Se supone que la solución sea de la forma

$$\tilde{\theta} = G(x,y) + H(x,y,\tau) \tag{3.29}$$

donde el primer término del lado derecho es la solución en estado permanente y el segundo término es la componente debida al estado transitorio.

La solución en estado permanente se obtiene por medio del método de separación de variables, utilizadno las siguientes condiciones de frontera

$$\begin{aligned} G&=0 \quad \text{en } x=0\\ G&=0 \quad \text{en } x=a\\ G&=0 \quad \text{en } y=0\\ G&=\theta_m \operatorname{sen}\frac{\pi x}{a} \quad \text{en } y=b \end{aligned} \tag{3.30}$$

La solución del problema permanente está dada en la ec.(3.5), así que

$$G(x,y)=\theta_m\frac{\operatorname{senh}\frac{\pi y}{a}}{\operatorname{senh}\frac{\pi b}{a}}\operatorname{sen}\frac{\pi x}{a} \tag{3.31}$$

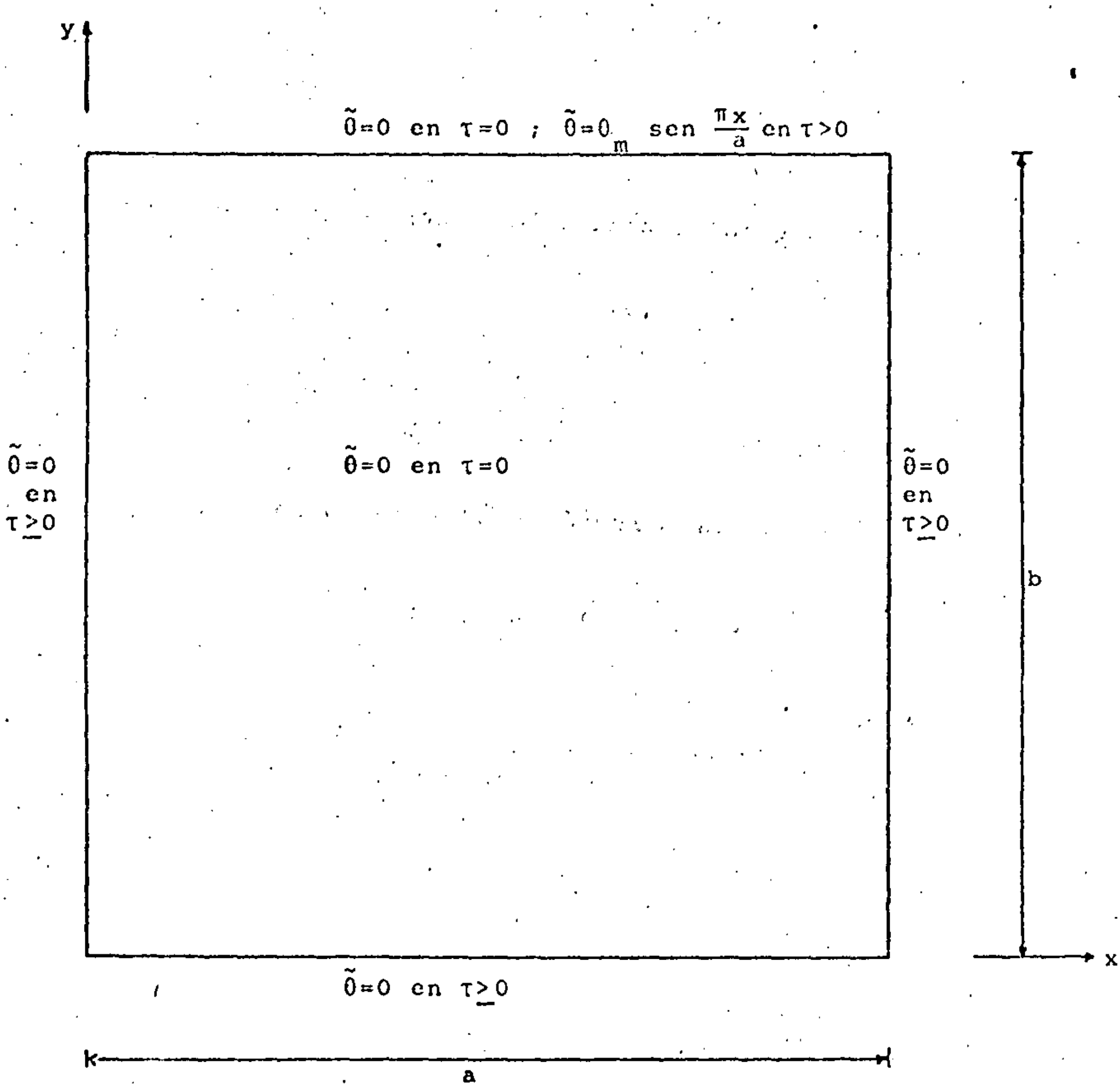


Fig 3.14. Placa con transferencia de calor por conducción con sus condiciones iniciales y de frontera.

Por otra parte, la contribución en estado transitorio también se puede obtener por el método de separación de variables, pero ahora se usan las siguientes condiciones de frontera, para tiempo mayor que cero

$$\tau>0\ ; \quad \begin{array}{ll} H=0 & \text{en } x=0 \\ H=0 & \text{en } x=a \\ H=0 & \text{en } y=0 \\ H=0 & \text{en } y=b \end{array} \tag{3.32}$$

y para tiempo igual a cero las condiciones iniciales son

$$H(x,y,0)=-G(x,y) \quad \text{en} \quad 0\leq x\leq a,\ 0\leq y\leq b \tag{3.33}$$

Sustituyendo $H(x,y,\tau)$ por $\hat{\theta}$ en la ec. (3.28) y resolviéndola usando (3.32) y (3.33) llegamos a una solución de la forma

$$H(x,y,\tau)=\frac{2\theta_m}{\pi}\ \text{sen}\ \frac{\pi x}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(-1)^{n+1}}{b^2/a^2+n^2}\ \text{sen}\ \frac{n\pi y}{b}e^{-(\frac{1}{a^2}+\frac{n^2}{b^2})\pi^2\tau} \tag{3.34}$$

La cual es una serie de Fourier senoidal, cuya exactitud depende del número de términos que se tomen en la sumatoria.

Por último, sustituyendo (3.31) y (3.34) en (3.29), tenemos

$$\tilde{\theta}=\theta_m \text{sen}\ \frac{\pi x}{a}\left[\frac{\text{senh}\ \frac{\pi y}{a}}{\text{senh}\ \frac{\pi b}{a}}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(-1)^{n+1}}{b^2/a^2+n^2}\ \text{sen}\ \frac{n\pi y}{b}e^{-(\frac{1}{a^2}+\frac{n^2}{b^2})\pi^2\tau}\right] \tag{3.35}$$

que es la solución analítica de la ec. (3.28) para el problema propuesto.

3.3.2 Formulación de Elementos Finitos

Debido a que el problema que estamos considerando se encuentra en estado transitorio, ésto es, depende del tiempo, en la formulación se hace una combinación de dos métodos, el método de elementos finitos en espacio y el método de diferencias finitas en tiempo. Para lograrlo, se calcula la distribución de temperaturas en la placa para un tiempo inicial, utilizando elementos finitos, después se incrementa el tiempo por un $\Delta\tau$ y se vuelve a calcular la distribución de temperaturas por elementos finitos, utilizando los resultados del tiempo anterior,como indica el método de diferencias finitas, así sucesivamente hasta que se llega al estado permanente.

Para la formulación de elementos finitos se procede de la siguiente manera: la temperatura $\tilde{\theta}$ la podemos aproximar de la forma

$$\tilde{\theta}(x,y,\tau) \approx \theta(x,y,\tau) = \sum_{i=1}^{n} \theta_i(\tau) N_i(x,y) \qquad (3.36)$$

donde θ es la función aproximada, $\theta_i(\tau)$ son los valores de la temperatura en cada nodo del elemento, N_i son las funciones de interpolación del elemento y n es el número total de nodos del elemento.

Debido a que se hizo una aproximación al sustituir (3.37) en (3.28), se obtendrá un residuo como sigue

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} - \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \varepsilon. \qquad (3.37)$$

donde ε es el residuo. Tomando el residuo ortogonal a las funciones de interpolación

$$(\varepsilon,N_i)=\int_{\Omega}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}-\frac{\partial\theta}{\partial\tau}\right)N_i\,dxdy=0 \tag{3.38}$$

donde Ω es el dominio de un elemento. Aplicando el teorema de Green a la ec. (3.38) llegamos a

$$-\int_{\Omega}\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial N_i}{\partial x}+\frac{\partial\theta}{\partial y}\frac{\partial N_i}{\partial y}\right)dxdy+\int_{\Gamma}\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}N_i\,dy-\frac{\partial\theta}{\partial y}N_i\,dx\right)-\int_{\Omega}\frac{\partial\theta}{\partial\tau}N_i\,dxdy=0 \tag{3.39}$$

donde Γ es el contorno del elemento. Sustituyendo (3.36) en (3.39) y reordenando

$$\theta_j\int_{\Omega}\left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial x}+\frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial y}\right)dxdy+\dot{\theta}_j\int_{\Omega}N_iN_j\,dxdy=\int_{\Gamma}\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}N_i\,dy-\frac{\partial\theta}{\partial y}N_i\,dx\right) \tag{3.40}$$

donde $\dot{\theta}_j\equiv\frac{d\theta_j}{d\tau}$. Usando notación compacta escribimos

$$\sum_{j=1}^{n}(A_{ij}\theta_j+B_{ij}\dot{\theta}_j)=q_i \quad (i=1,2,\ldots,n) \tag{3.41}$$

A es la matriz de coeficientes de temperatura estables, B es la matriz de coeficientes de temperatura transitorios y q es el vector de fuentes de calor y son

$$A_{ij}=\int_{\Omega}\left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial x}+\frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial y}\right)dxdy \tag{3.42}$$

$$B_{ij}=\int_{\Omega} N_i N_j \, dx dy \tag{3.43}$$

$$q_i=\int_{\Gamma} \left(\frac{\partial\theta}{\partial x}N_i \, dy-\frac{\partial\theta}{\partial y}N_i \, dx\right) \tag{3.44}$$

Ahora utilizando el método de diferencias finitas en tiempo, hacemos las siguientes aproximaciones

$$\theta_j = \frac{\theta_j^{k+1}+\theta_j^k}{2} \tag{3.45}$$

$$\dot{\theta}_j = \frac{\theta_j^{k+1}-\theta_j^k}{\Delta\tau} \tag{3.46}$$

donde k contabiliza los incrementos de tiempo $\Delta\tau$. Sustituyendo (3.45) y (3.47) en (3.41) y agrupando términos tenemos

$$(\Delta\tau A_{ij}+2B_{ij})\theta_j^{k+1}=(-\Delta\tau A_{ij}+2B_{ij})\theta_i^k+2\Delta\tau q_i \tag{3.47}$$

lo que se puede escribir como

$$\sum_{j=1}^{n} G_{ij}\theta_j^{k+1}=h_i \quad (i=1,2,\ldots,n) \tag{3.48}$$

donde

$$G_{ij}=\Delta\tau A_{ij}+2B_{ij} \tag{3.49}$$

$$h_i=2\Delta\tau q_i+(-\Delta\tau A_{ij}+2B_{ij})\theta_i^k \tag{3.50}$$

Con la ec. (3.48) se pueden encontrar las temperaturas para el siguiente tiempo en función de las temperaturas del tiempo anterior y en nuestro caso, para el tiempo inicial las temperaturas en toda la placa son cero, excepto en la parte superior donde se encuentra la distribución de temperaturas senoidal. Se puede observar que las matrices A y B únicamente se tienen que calcular una vez, ya que éstas dependen solo de la topología del cuerpo y no del tiempo, lo cual facilita mucho los cálculos.

A continuación se procede a efectura el ensamble de las matrices de cada elemento, en la matriz global. También en este caso la matriz global resulta ser simétrica y bandeada, lo cual es debido a la forma de los integrales (3.42) y (3.43).

3.3.3 Solución del Problema por Elementos Finitos Contra Solución Analítica

Los resultados que se muestran a continuación, se obtuvieron de un programa de computadora. En éste, primero se generan las matrices A y B de la ec. (3.47) para cada elemento, con ellas se calcula la matriz G de la ec. (3.48) para el incremento de tiempo y se ensamblan las matrices de todos los elementos, obteniéndose la matriz global G^*. En seguida se genera el vector h para lo cual se utilizan los valores de la temperatura del tiempo anterior. El orden del sistema de ecuaciones (3.48), se reduce a únicamente el número de incógnitas sustituyendo las condiciones de frontera del tipo Dirichlet y se resuelve obteniéndose las temperaturas. Este proceso se repite hasta que llega al estado permanente, o sea cuando la diferencia entre las temperaturas del tiempo anterior y el nuevo sea menor que un cierto valor preestablecido. En el posprocesamiento se calcula el error entre la solución analítica y la de elementos finitos para cada instante de tiempo y se interpola linealmente dentro de cada elemento para obtener las coordenadas de las líneas de temperatura constante.

Al igual que la solución en estado permanente, la norma del error, que se utiliza para comparar la solución analítica y la solución de elementos finitos, es el error raíz medio cuadrático definido en la ec. (3.25).

La malla que se utiliza para efectuar los cálculos es del tipo S_a de 25 nodos y 32 elementos, como la que se muestra en la Fig. 3.7, debido a que con esta malla, para el estado permanente, se obtiene un error bastante pequeño al efectuar los cálculos y además no consume mucho tiempo de procesamiento en la computadora.

En la Fig. 3.15 se grafica la variación en el tiempo de la temperatura del nodo central de la malla, obtendida analíticamente y por elementos finitos. Se observa que para tiempos muy pequeños la temperatura obtenida por elementos finitos desciende de la condición inicial y luego vuelve a subir, lo que físicamente no es posible. Después se observa que las dos temperaturas se elevan al mismo tiempo de la condición inicial y se separan hasta que llega un momento en que la diferencia entre una y otra es más o menos constante, esta diferencia es la misma que existe entre la solución de elementos finitos y analítica para estado permanente, lo cual es aceptable, ya que no se puede pedir menor diferencia si se utiliza la misma malla. La oscilación no se disminuye al hacer más pequeños los incrementos de tiempo y sí se puede aumentar si éstos son más grandes, por lo que es un defecto del método. Si se utilizan mallas más finas con más elementos en la zona de mayor variación, la oscilación disminuye y la precisión aumenta.

La Fig. 3.16 nos muestra una gráfica de la variación del error raíz medio cuadrático a lo largo del tiempo. En ella se observa que para tiempos muy pequeños el error es grande, debido a las oscilaciones de la tempratura en los nodos, y a medida que transcurre el tiempo, el error se reduce hasta que es igual al que se obtiene en estado permanente. El máximo error es de

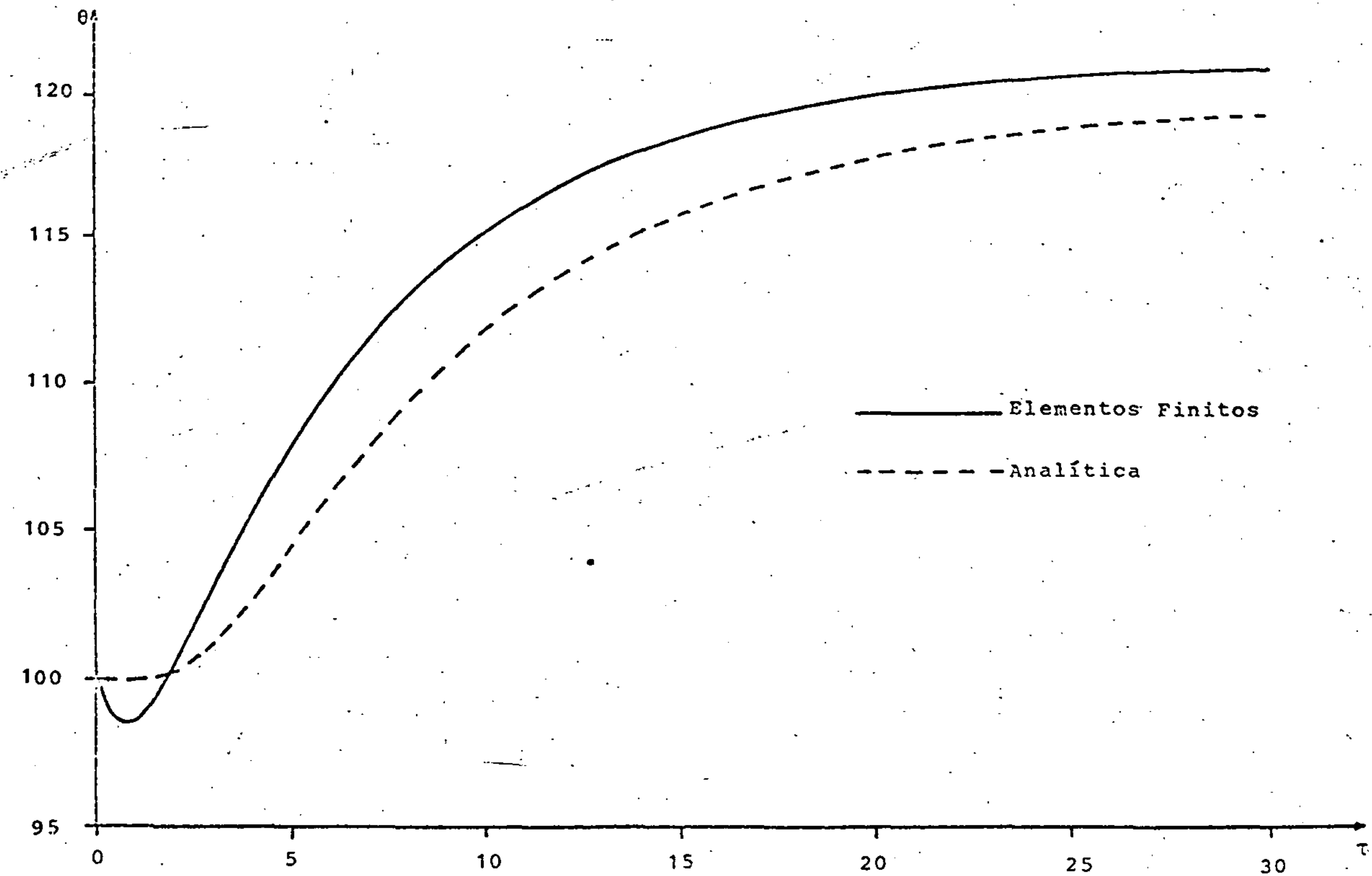


Fig 3.15 Gráfica tiempo contra temperatura para el nodo central de la malla.

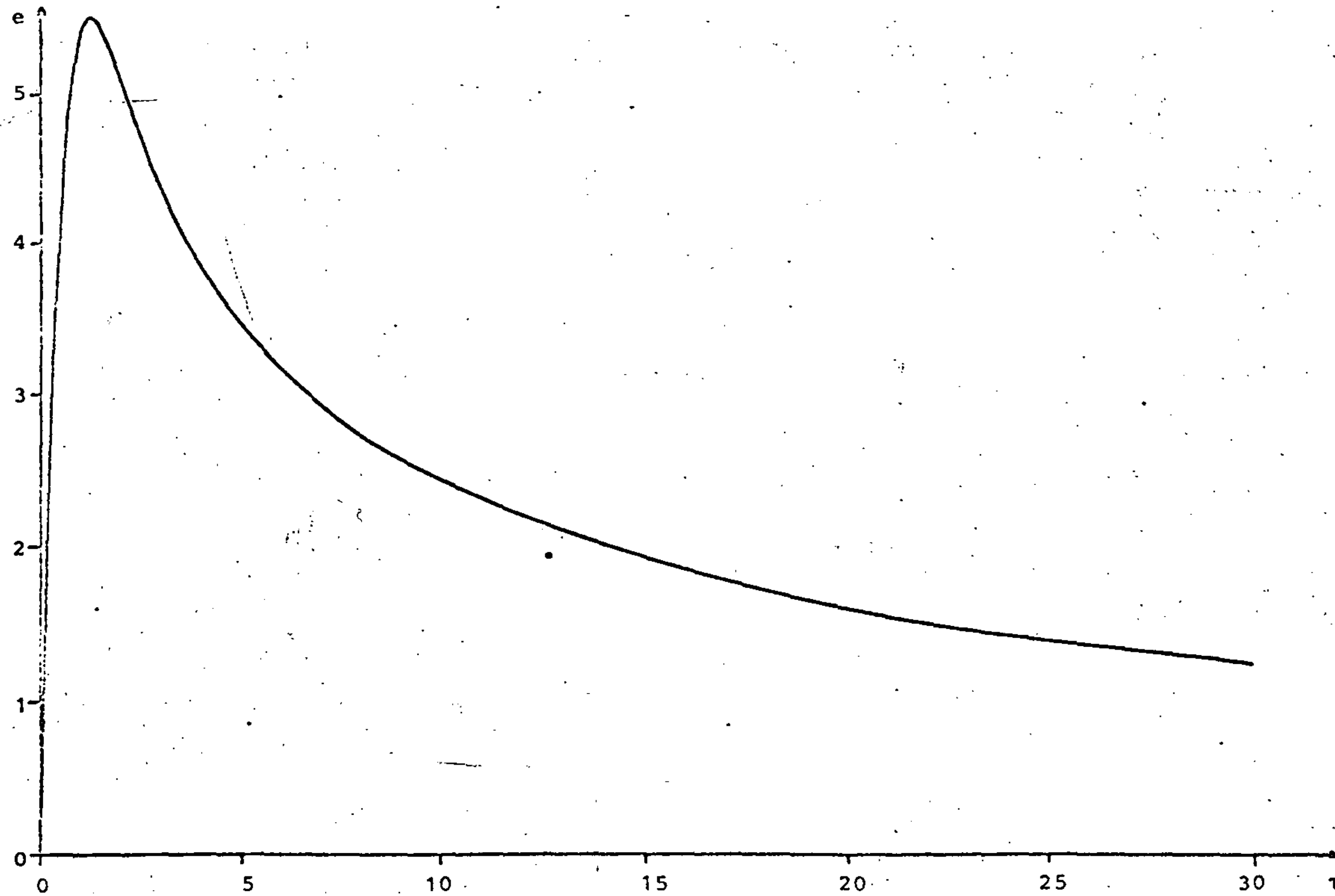


Fig. 3.16. Gráfica tiempo contra error raíz medio cuadrático

5.45%, el cual es bastante pequeño considerando la malla que se utilizó.

Para el ejemplo escogido, la distribución de temperaturas llego al estado permanente en 32 unidades de tiempo aproximádamente y coinciden en este tiempo tanto la solución de elementos finitos como la analítica. La Fig. 3.17 muestra líneas de temperatura constante e igual a 110 unidades en diferentes tiempos, obtenidas a partir de la solución de elementos finitos.

En base a los resultados obtenidos, podemos decir que la combinación del método de elementos finitos y el método de diferencias finitas para resolver problemas parabólicos es efectiva, únicamente teniendo en cuenta que la discretización del dominio debe ser más fina que para un problema elíptico, para disminuir la oscilación que se presenta en los primeros instantes de tiempo.

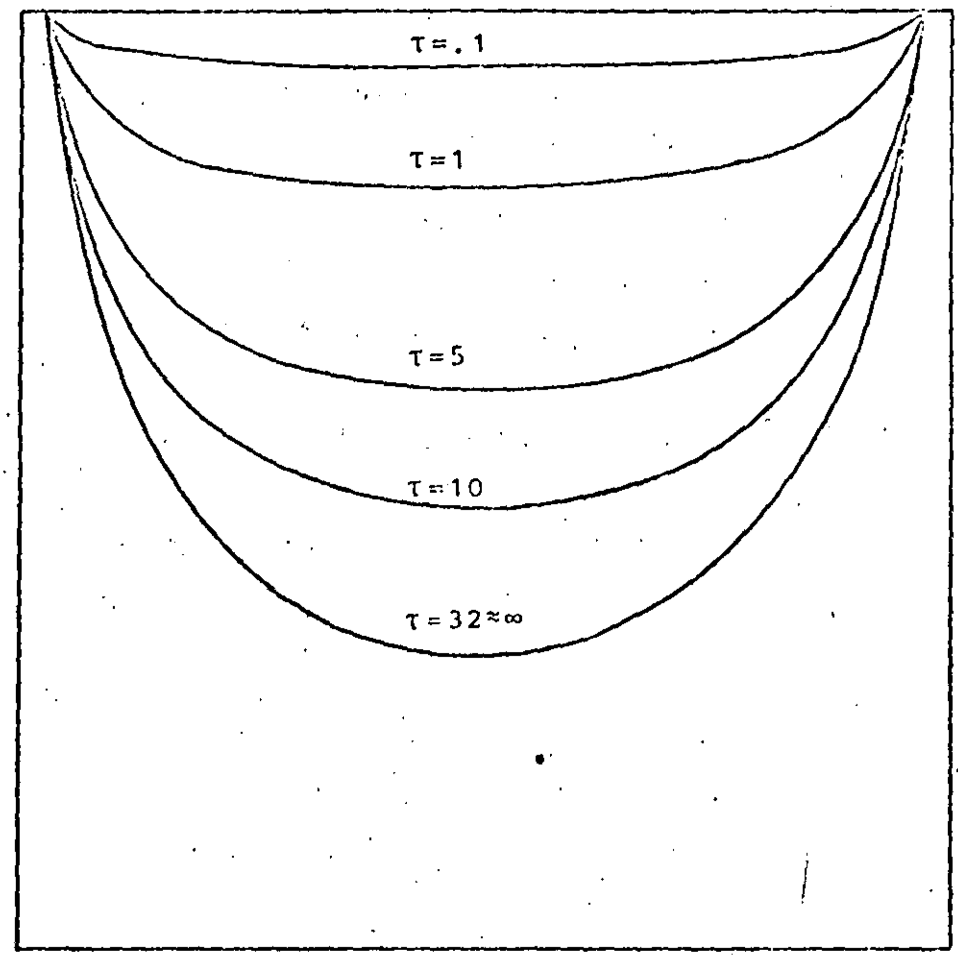


Fig 3.17. Líneas de temperatura constante
θ=110 en diferentes tiempos.

CAPITULO IV
FLUJO POTENCIAL INCOMPRESIBLE

4.1 GENERAL

En este capítulo se va a tratar el caso de la solución de un flujo potencial incompresible y no viscoso, o sea un flujo ideal, por medio del método de elementos finitos, en conjunto con el método de Galerkin.

Para ejemplificar, se resolverá el problema de un flujo bidimensional alrededor de un cilindro, el cual se encuentra entre dos placas planas.

Este tipo de flujo puede ser utilizado para obtener una aproximación del comportamiento de un flujo real, con una viscosidad muy pequeña, y con una capa límite muy delgada en la superficie, además de que sea incompresible. Un ejemplo de los flujos que cumplen estas condiciones, son los flujos convergentes o acelerados.

4.2 PLANTEAMIENTO DE LAS ECUACIONES

Ya que lo que nos interesa es un flujo bidimensional, todos los planteamientos que se hagan a continuación serán descritos en dos dimensiones para mayor facilidad.

Un fluido real debe satisfacer las siguientes condiciones:

a) La ecuación de continuidad, que en coordenadas cartesianas es:

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{y}} = 0 \qquad (4.1)$$

donde $\hat{u}$ y $\hat{v}$ son los componentes de velocidad en las direcciones $\hat{x}$ y $\hat{y}$ respectivamente.

b) La segunda ley de Newton en todos los puntos y en cualquier instante.

c) El fluido no debe penetrar dentro de cualquier contorno sólido, ni tampoco se deben formar oquedades entre el fluido y el contorno.

d) A las condiciones anteriores le añadimos otra más. El fluido debe ser irrotacional, esto es

$$\frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{x}} - \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{y}} = 0 \qquad (4.2)$$

El aplicar la segunda ley de Newton a una partícula del fluido, nos conduce a las ecuaciones de Euler y son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{t}} + \hat{u}\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} + \hat{v}\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{y}} &= -\frac{1}{\hat{\rho}}\frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x}} \\ \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{t}} + \hat{u}\frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{x}} + \hat{v}\frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{y}} &= -\frac{1}{\hat{\rho}}\frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{y}} \end{aligned} \qquad (4.3)$$

donde $\hat{t}$ es el tiempo, $\hat{\rho}$ es la densidad y $\hat{P}$ es la presión.

Nosotros vamos a considerar un flujo en estado permanente, por lo tanto para este caso el primer término de la ecuación (4.3) desaparece.

Ya que el flujo que estamos considerando es irrotacional, podemos definir un potencial de velocidad a partir de la ec. (4.2) de la siguiente forma

$$\hat{u} = \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \hat{x}} \; ; \; \hat{v} = \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \hat{y}} \qquad (4.4)$$

donde $\hat{\phi}$ es el potencial de velocidad. De esta manera obtenemos una función $\hat{\phi}$ tal, que su derivada con respecto a una dirección cualquiera es la componente de velocidad en esa dirección. Esto

es posible ya que no existe rozamiento, una partícula que esté inicialmente en reposo no puede ponerse a girar, de igual manera una partícula que está girando, no puede alterar su rotación.

Si substituimos la ec. (4.4) en la ec. de continuidad(4.1) obtenemos

$$\frac{\partial^2\hat{\phi}}{\partial\hat{x}^2} + \frac{\partial^2\hat{\phi}}{\partial\hat{y}^2} = 0 \tag{4.5}$$

que es la llamada ecuación de Laplace en dos dimensiones. Toda función $\hat{\phi}$ que satisfaga esta ecuación es un caso posible de flujo irrotacional.

La ec. (4.5) tiene solución analítica para casos muy sencillos, en los que las fronteras no presenten ninguna complicación, sin embargo, para casos en los que las fronteras no son muy regulares, hay que utilizar un método numérico para resolverla.

Para el caso de un flujo bidimensional, también se puede definir una función $\hat{\psi}$, llamada función de corriente, que nos relacione las velocidades en las dos direcciones. A partir de la ec. (4.1) tenemos

$$\hat{u} = \frac{\partial\hat{\psi}}{\partial\hat{y}} \; ; \; \hat{v} = -\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial\hat{x}} \tag{4.6}$$

sustituyendo (4.6) en (4.2) se tiene

$$\frac{\partial^2\hat{\psi}}{\partial\hat{x}^2} + \frac{\partial^2\hat{\psi}}{\partial\hat{y}^2} = 0 \tag{4.7}$$

que es la ecuación de Laplace para la función de corriente y su solución tiene dificultades similares a la del potencial de velocidad.

Se puede demostrar fácilmente, que la línea descrita por la función $\hat{\psi}$=const. es la trayectoria de una partícula del fluido y a esta curva se le llama línea de corriente.

El potencial de velocidad y la función de corriente se relaciona de (4.6) y (4.4)

$$\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \hat{x}} = \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \hat{y}} \; ; \; \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \hat{y}} = - \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \hat{x}} \tag{4.8}$$

Como consecuencia las líneas de corriente y las líneas equipotenciales son perpendiculares entre sí para un flujo ideal.

4.3 FORMULACION DE ELEMENTOS FINITOS

Ya que el mismo tipo de ecuación, ésto es, la ecuación de Laplace, se utiliza para obtener el potencial de velocidad y la función de corriente, la formulación de elementos finitos es idéntica para cualquiera de las dos y la única difencia estriba en las condiciones de frontera que se utilizan. No existe ventaja de una sobre otra formulación si las geometrías son más o menos simples. Por lo tanto únicamente se describirá la formulación de la función de corriente.

Se definen las siguientes variables adimensionales

$$\tilde{\psi} = \frac{\hat{\psi}}{q_\infty D} \; ; \; x = \frac{\hat{x}}{D} \; ; \; y = \frac{\hat{y}}{D}$$

donde q_∞ es la velocidad alejada del cuerpo y D es una distancia característica. Sustituyendo en la ec. (4.8), se tiene

$$\frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial y^2} = 0 \tag{4.9}$$

Haciendo la siguiente aproximación para un elemento

$$\tilde{\psi} \approx \psi = \sum_{i=1}^{n} N_i \psi_i \tag{4.10}$$

donde ψ es la función aproximada y N_i son las funciones de interpolación o funciones de base de un elemento, n es el número de nodos del elemento y ψ_i es el valor de la función en cada nodo. Sustituyendo (4.10) en (4.9) e igualando a un residuo ε se obtiene

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \varepsilon \tag{4.11}$$

Considernado una proyección ortogonal del residuo sobre las funciones de peso, que en este caso son iguales a las funciones de base

$$(\varepsilon,\ N_i) = \int_\Omega \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\right) N_i\, dxdy = 0 \tag{4.12}$$

donde Ω es el dominio del elemento. Aplicando el teorema de Green en (4.12) llegamos

$$-\int_\Omega \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial N_i}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial N_i}{\partial y}\right) dxdy + \int_\Gamma \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} N_i\, dy - \frac{\partial \psi}{\partial y} N_i\, dx\right) = 0 \tag{4.13}$$

Sustituyendo (4.10) en (4.13) y reordenando

$$\psi_j \int_\Omega \left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial y}\right) dxdy = \int_\Gamma \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} N_i\, dy - \frac{\partial \psi}{\partial y} N_i\, dx\right) \tag{4.14}$$

Usando una notación simplificada escribimos

$$\sum_{j=1}^{n} A_{ij} \psi_j = \delta_i \quad (i=1,2,\ldots,n) \tag{4.15}$$

Aquí A y δ son llamados matriz de coeficientes y vector de flujo respectivamente y son

$$A_{ij}=\int_{\Omega}\left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial x}+\frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial y}\right)dxdy \qquad (4.16)$$

$$\delta_i=\int_{\Gamma}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}N_i\,dy-\frac{\partial\psi}{\partial y}N_i\,dx\right) \qquad (4.17)$$

Para obtener el sistema de ecuaciones global, se ensamblan las ec. (4.15) de todos los elementos, obteniéndose

$$\sum_{j=1}^{m} A^*_{ij}\psi^*_j=\delta^*_i \quad (i=1,2,\ldots,m) \qquad (4.18)$$

donde m es el número total de nodos.

4.4 SOLUCION Y RESULTADOS

El problema específico escogido como ejemplo, es el del flujo alrededor de un cilindro de radio D=1 entre placas planas separadas una distancia 4D y suponiendo que el flujo uniforme se encuentra a una distancia 3.5D, medida desde el centro del cilindro, Fig 4.1.

Por simetría se utiliza una cuarta parte del dominio, sección a-b-c-d-e. Por inspección notamos que las fronteras a-b y e-d-c son líneas de corriente y como referencia tomaremos $\tilde{\psi}=0$ en e-d-c. Ya que la velocidad es constante en a-e podemos poner

$$\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial y} = u = 1 \qquad (4.19)$$

Integrando

$$\tilde{\psi} = y + \text{const.} \qquad (4.20)$$

lo que significa que la función de corriente varía linealmente con respecto a y, en la frontera a-e. Sustituyendo los valores de y, en la ec. (4.20), para la frontera a-b llegamos a $\tilde{\psi}=2$.

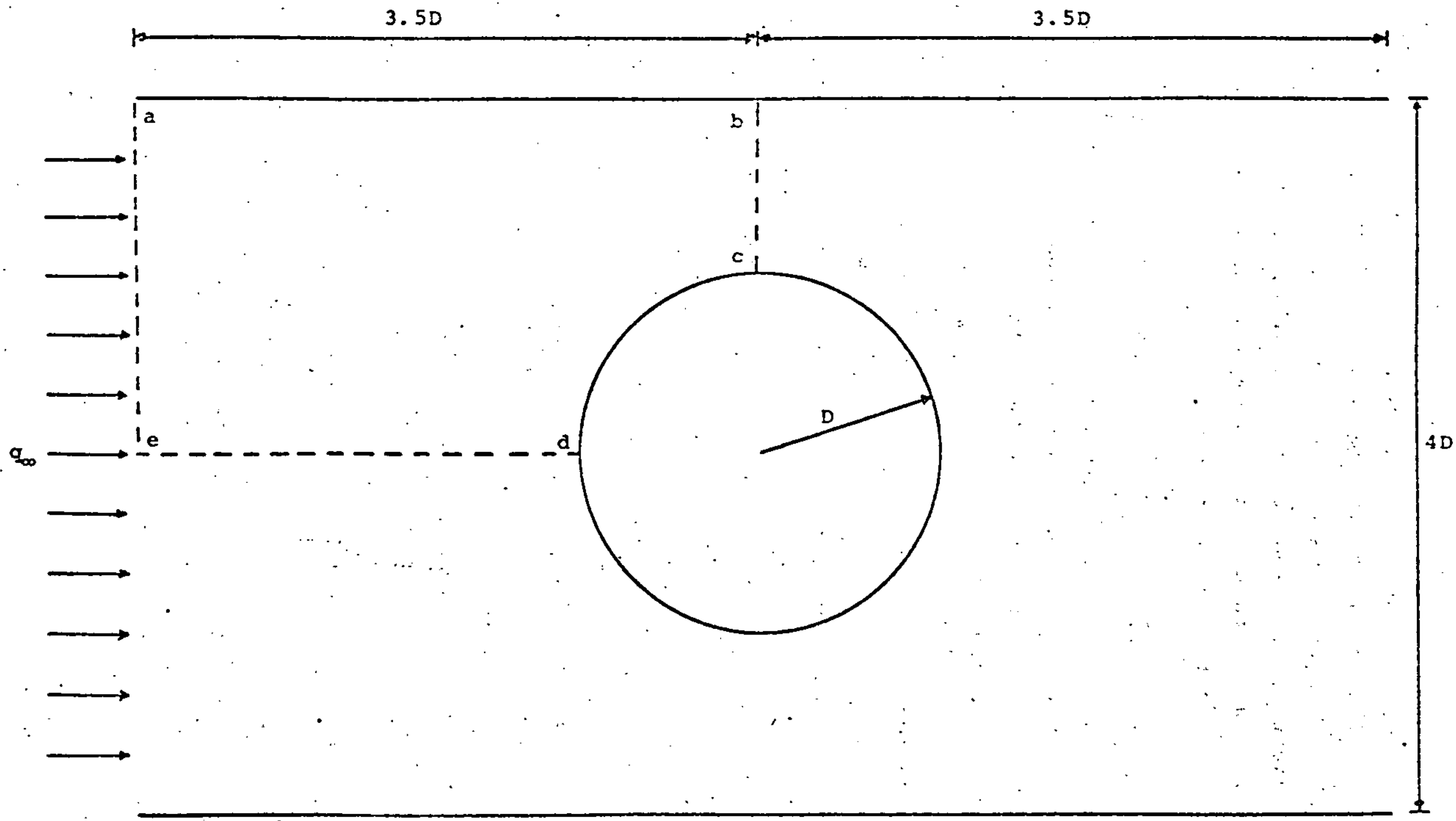


Fig 4.1 Flujo uniforme alrededor de un cilindro entre placas planas.

Todas las condiciones de frontera que hemos definido hasta el momento son del tipo Dirichlet. Lo único que resta es definir la condición de frontera para el lado b-c, sabemos que la línea de corriente es perpendicular a ese lado, por lo que definimos $\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial n}=0$, siendo esta del tipo Neumann. Las condiciones de frontera se presentan en la Fig 4.2.

Para resolver este problema, se escogieron elementos triangulares, con funciones de interpolación lineal, por lo que sólamente tienen 3 nodos cada elemento. Los elementos y las funciones son los mismos utilizados en la sección 3.2.3 donde se pueden consultar.

En el programa de computadora que se realizó, primero se generan las matrices de coeficientes A de cada elemento, mismas que se ensamblan en la matriz global A^*. Para el vector δ en los nodos en la frontera que tienen la condición de Neumann la integral (4.17) debe evaluarse. En nuestro caso resulta ser cero. En los demás nodos con la condición de Dirichlet esta integral tiene valor desconocido pero ya que la función de corriente es conocida allí, no es necesario calcularla. Las condiciones de frontera del tipo Dirichlet se sustituyen en el sistema (4.19), reduciéndose con ello el orden de la matriz global, a únicamente el número de incógnitas y se resuelve el sistema resultante obteniéndose los valores de ψ. En el posprocesamiento, se interpola linealmente dentro de cada elemento para obtener las coordenadas de las líneas de corriente, además, por medio de la ec. (4.23), se calculan las velocidades arriba de la cresta del cilindro.

Se utilizan dos discretizaciones del dominio como muestra las figuras 4.3 y 4.4. La primera es una malla gruesa de 10 nodos, usada tanto para probar el programa como para observar las zonas de mayor variación. La segunda es una malla fina de 73 nodos con 111 elementos, que se realizó tomando en cuenta los resultados obtenidos con la malla anterior.

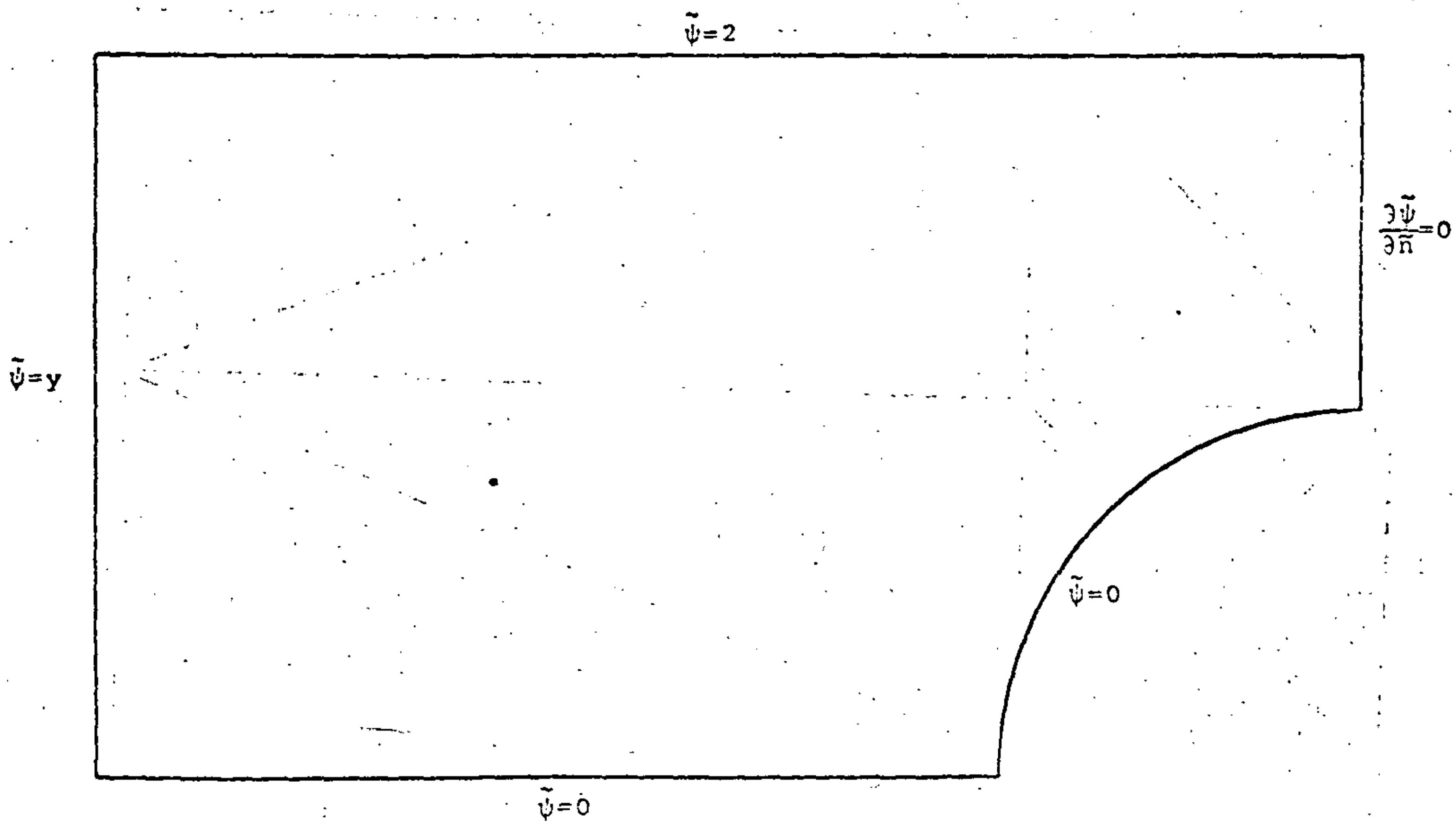


Fig 4.2. Condiciones de frontera.

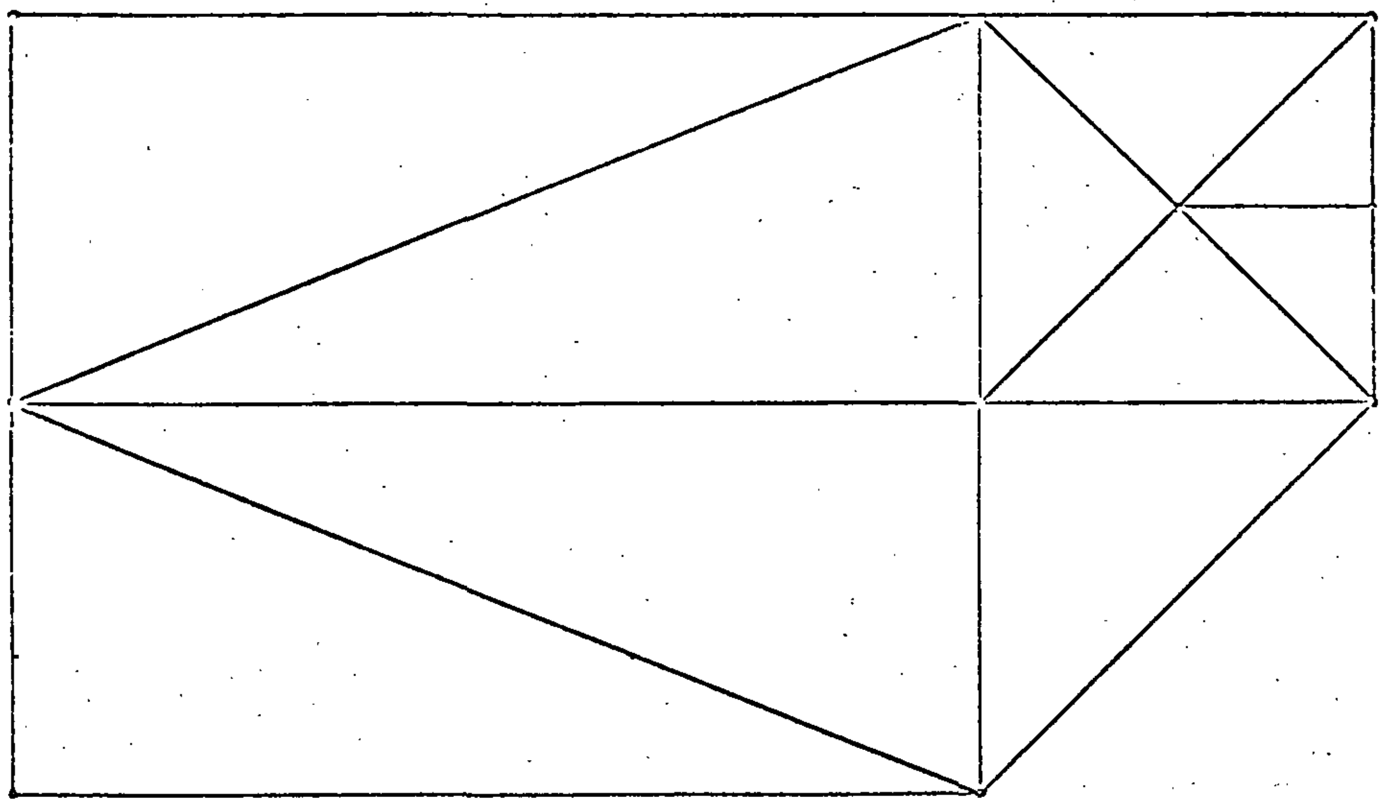


Fig 4.3. Malla gruesa.

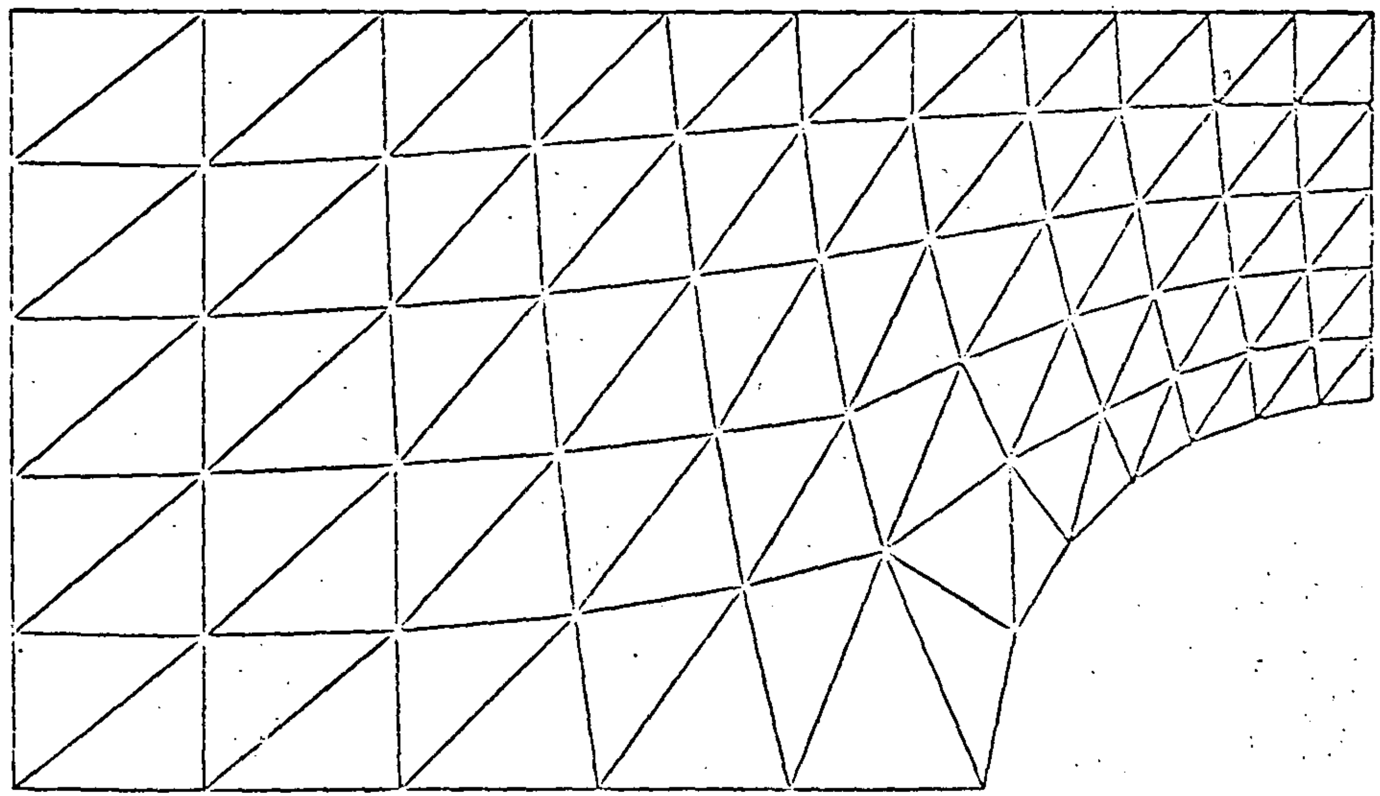


Fig 4.4. Malla Fina.

En la Fig. 4.5 se muestran las líneas de corriente y la variación de la velocidad en la cresta del cilindro, se comparan con la solución analítica aproximada, obtenida por el método de imágenes de la siguiente forma (Chung, 1978)

$$\tilde{\psi}=q_{\infty}' \{y-\frac{H}{2\pi}\operatorname{senh}^2(\frac{\pi b}{H})\operatorname{sen}(\frac{2\pi y}{H}) / \left[\cosh^2(\frac{\pi x}{H})-\cos^2(\frac{\pi y}{H})\right]\} \tag{4.24}$$

donde x,y son coordenadas con origen en el centro del cilindro, b es el radio y H es la distancia vertical entre las dos placas.

Se observa que existe bastante diferencia entre los resultados obtenidos con la malla gruesa y la solución analítica, el error raíz medio cuadrático relativo es de 8.5%. Sin embargo,al comparar los resultados de la malla fina con la solución analítica, el error raíz medio cuadrático relativo, en la desviación de las curvas de líneas de corriente, es de 0.9% el cual es bastante pequeño; en la figura se ve claramente que casi coinciden las curvas.

También se observa como la velocidad aumenta en la cresta del cilindro al acercarse a éste y la poca diferencia que existe entre la curva de la malla fina y la solución analítica.

Concluyendo, los resultados demuestran la utilidad del método de elementos finitos de Galerkin en la solución de problemas de flujo potencial incompresible y cómo,con una buena discretización se pueden obtener resultados bastantes precisos.

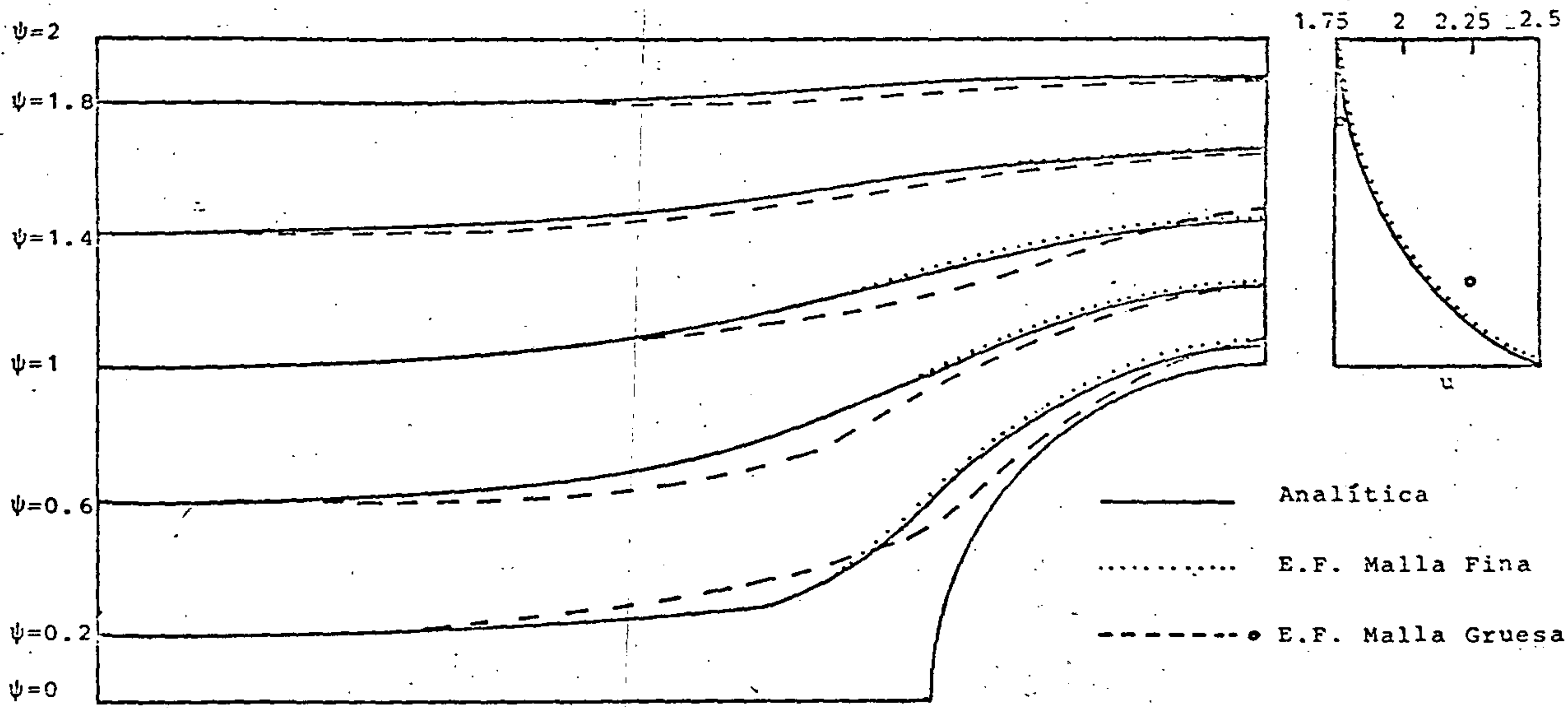


Fig 4.5 Líneas de corriente y variación de la velocidad arriba de la cresta del cilindro.

CAPITULO V
FLUJO POTENCIAL COMPRESIBLE

5.1 GENERAL

Cuando se estudian flujos alrededor de cuerpos sumergidos, normalmente no se pueden resolver las ecuaciones de movimiento en forma analítica, debido a la no linealidad de las mismas, es por ello que en el presente capítulo se estudiará la solución de un flujo potencial compresible subsónico y no viscoso, por medio del método de elementos finitos, usando el método de residuos pesados de tipo Galerkin.

El caso de flujos subsónicos ha sido estudiado principalmente utilizando los principios variacionales (Shen, 1977). Entre los trabajos más importantes se encuentra el de Carey(1975), el cual utiliza un principio variacional, en combinación con una expansión de perturbaciones. Sin embargo, como se muestra en Martín del Campo y Sen (1980), se puede resolver el problema de flujos potenciales más sencillamente, con un método iterativo combinado con el método de elementos finitos. En esta forma se pueden calcular las líneas de corriente y equipotenciales, así como el número de Mach local en cada punto del espacio.

Para ejemplificar, se resolverá el problema de un flujo bidimensional alrededor de un cilindro sin circulación, el cual se encuentra entre dos placas. Este problema puede ser extendido fácilmente a el tratamiento de flujos compresibles alrededor de perfiles aerodinámicos, para lo cual únicamente habría que añadir la circulación.

5.2 PLANTEAMIENTO DE LAS ECUACIONES

Al igual que en el capítulo anterior, ya que lo que se va a tratar es un flujo bidimensional, todos los desarrollos que se hagan a continuación, serán descritos en dos dimensiones.

que es la ecuación que define la velocidad del sonido, en función de las velocidades y de la relación de calores específicos y $\hat{q}$ es

$$\hat{q} = \hat{u}^2 + \hat{v}^2$$

Multiplicando por $\hat{u}$ la primera ecuación y por $\hat{v}$ la segunda de las ec. (5.5), sumándolas y sustituyendo la ec. (5.6) tenemos

$$\left[1-\left(\frac{\hat{u}}{\hat{c}}\right)^2\right]\frac{\partial\hat{u}}{\partial\hat{x}} + \left[1-\left(\frac{\hat{v}}{\hat{c}}\right)^2\right]\frac{\partial\hat{v}}{\partial\hat{y}} - \frac{\hat{u}\hat{v}}{\hat{c}^2}\left(\frac{\partial\hat{u}}{\partial\hat{y}} + \frac{\partial\hat{v}}{\partial\hat{x}}\right) = 0 \qquad (5.10)$$

Si a la ec. (5.10) le sumamos y restamos $\frac{\hat{u}\hat{v}}{\hat{c}^2}\frac{\partial\hat{u}}{\partial\hat{y}}$ y sustituimos la ec. (5.7) llegamos a

$$\left[1-\left(\frac{\hat{u}}{\hat{c}}\right)^2\right]\frac{\partial\hat{u}}{\partial\hat{x}} + \left[1-\left(\frac{\hat{v}}{\hat{c}}\right)^2\right]\frac{\partial\hat{v}}{\partial\hat{y}} - \frac{2\hat{u}\hat{v}}{\hat{c}^2}\frac{\partial\hat{u}}{\partial\hat{y}} = 0 \qquad (5.11)$$

De la ecuación de irrotacionalidad (5.7) se puede definir un potencial de velocidad $\hat{\phi}(x,y)$ que satisface

$$\hat{u} = \frac{\partial\hat{\phi}}{\partial\hat{x}} \; ; \; \hat{v} = \frac{\partial\hat{\phi}}{\partial\hat{y}} \qquad (5.12)$$

Sustituyendo (5.12) en (5.11) se obtiene

$$\left[1-\frac{1}{\hat{c}^2}\left(\frac{\partial\hat{\phi}}{\partial\hat{x}}\right)^2\right]\frac{\partial^2\hat{\phi}}{\partial\hat{x}^2} + \left[1-\frac{1}{\hat{c}^2}\left(\frac{\partial\hat{\phi}}{\partial\hat{y}}\right)^2\right]\frac{\partial^2\hat{\phi}}{\partial\hat{x}^2} - \frac{2}{\hat{c}^2}\frac{\partial\hat{\phi}}{\partial\hat{x}}\frac{\partial\hat{\phi}}{\partial\hat{y}}\frac{\partial^2\hat{\phi}}{\partial\hat{x}\partial\hat{y}} = 0 \qquad (5.13)$$

Las ecuaciones (5.9) y (5.13) forman un sistema acoplado en la incognita $\hat{\phi}(x,y)$. Definiendo las siguientes variables adimensionales

$$x = \frac{\hat{x}}{D} \;;\; y = \frac{\hat{y}}{D} \;;\; \tilde{\phi} = \frac{\hat{\phi}}{Dq_{\infty}},$$
$$c = \frac{\hat{c}}{c_{\infty}} \;;\; q = \frac{\hat{q}}{q_{\infty}} \tag{5.14}$$

donde D es una distancia característica, las ecuaciones (5.9) y (5.13) transforman

$$\frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial y^2} = \frac{M_{\infty}^2}{c^2}\left[\left(\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial x^2} + 2\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x}\,\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial y}\,\frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial x\,\partial y} + \left(\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial y}\right] \tag{5.15}$$

$$c^2 = 1 + \left(\frac{\gamma - 1}{2}\right) M_{\infty}^2 \left[1 - \left(\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial y}\right)^2\right] \tag{5.16}$$

donde $M_{\infty} = \frac{q_{\infty}}{c_{\infty}}$. M_{∞} es el número de Mach alejado del cilindro.

En seguida se procede a obtener la ecuación para la función de corriente. De la ecuación de conservación de masa (5.6) podemos definir una función de corriente $\hat{\psi}(x,y)$ que satisface

$$\hat{u} = \frac{\rho_{\infty}}{\hat{\rho}}\,\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \hat{y}} \;;\; \hat{v} = -\frac{\rho_{\infty}}{\hat{\rho}}\,\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{5.17}$$

sustituyendo (5.17) en la condición de irrotacionalidad (5.7) llegamos a

$$\frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial \hat{x}^2} + \frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial \hat{y}^2} = \frac{1}{\hat{\rho}}\left(\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \hat{x}}\,\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \hat{y}}\,\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \hat{y}}\right) \tag{5.18}$$

Esta ecuación, aparte de no ser lineal, tiene dos incógnitas $\hat{\psi}$ y $\hat{\rho}$. De las ec. (5.5) podemos despejar los términos $\frac{1}{\beta}\frac{\partial\hat{\rho}}{\partial\hat{y}}$, $\frac{1}{\beta}\frac{\partial\hat{\rho}}{\partial\hat{x}}$ y sustituirlos en (5.18) con lo que se obtiene

$$\frac{\partial^2\hat{\psi}}{\partial\hat{x}^2} + \frac{\partial^2\hat{\psi}}{\partial\hat{y}^2} = -\frac{1}{\hat{c}^2}\left(\hat{u}\frac{\partial\hat{u}}{\partial\hat{x}}\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial\hat{x}} + \hat{v}\frac{\partial\hat{u}}{\partial\hat{y}}\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial\hat{x}} + \hat{u}\frac{\partial\hat{v}}{\partial\hat{x}}\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial\hat{y}} + \hat{v}\frac{\partial\hat{v}}{\partial\hat{y}}\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial\hat{y}}\right) \quad (5.19)$$

Otra vez, sería muy difícil resolver esta ecuación, ya que ahora está en función de las velocidades que no conocemos. Sin embargo si sustituimos el potencial de velocidad en lugar de las velocidades, (5.12) en (5.19)

$$\frac{\partial^2\hat{\psi}}{\partial\hat{x}^2} + \frac{\partial^2\hat{\psi}}{\partial\hat{y}^2} = -\frac{1}{\hat{c}^2}\left(\frac{\partial\hat{\phi}}{\partial\hat{x}}\frac{\partial^2\hat{\phi}}{\partial\hat{x}^2}\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial\hat{x}} + \frac{\partial\hat{\phi}}{\partial\hat{y}}\frac{\partial^2\hat{\phi}}{\partial\hat{x}\partial\hat{y}}\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial\hat{x}}\right.$$

$$\left. + \frac{\partial\hat{\phi}}{\partial\hat{x}}\frac{\partial^2\hat{\phi}}{\partial\hat{x}\partial\hat{y}}\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial\hat{y}} + \frac{\partial\hat{\phi}}{\partial\hat{y}}\frac{\partial^2\hat{\phi}}{\partial\hat{y}^2}\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial\hat{y}}\right) \quad (5.20)$$

nos queda una ecuación de la función de corriente en términos del potencial de velocidad, el cual podemos calcular de la ec. (5.15), al igual que la velocidad del sonido de la ec. (5.16), Definiendo las siguientes variables adimensionales

$$x = \frac{\hat{x}}{D}\ ;\ y = \frac{\hat{y}}{D};\ \tilde{\psi} = \frac{\hat{\psi}}{Dq_\infty}\ ,$$

$$\tilde{\phi} = \frac{\hat{\phi}}{Dq_\infty}\ ;\ c = \frac{\hat{c}}{c_\infty} \quad (5.21)$$

y sustituyéndolas en (5.20), se tiene

$$\frac{\partial^2\tilde{\psi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\tilde{\psi}}{\partial y^2} = -\frac{M_\infty^2}{c^2}\left(\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial x}\frac{\partial^2\tilde{\phi}}{\partial x^2}\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial x} + \frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial y}\frac{\partial^2\tilde{\phi}}{\partial x\partial y}\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial x}\right.$$

$$\left. + \frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial x}\frac{\partial^2\tilde{\phi}}{\partial x\partial y}\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial y} + \frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial y}\frac{\partial^2\tilde{\phi}}{\partial y^2}\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial y}\right) \quad (5.22)$$

5.3 FORMULACION DE ELEMENTOS FINITOS

Para el potencial de velocidad $\tilde{\phi}(x,y)$, escribimos la ec. (5.15) como una ecuación de Poisson de la siguiente forma

$$\frac{\partial^2\tilde{\phi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\tilde{\phi}}{\partial y^2} - \tilde{g}(\tilde{\phi}) = 0 \tag{5.23}$$

donde

$$\tilde{g}(\tilde{\phi}) = \frac{M_\infty^2}{c^2}\left[\left(\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2\tilde{\phi}}{\partial x^2} + 2\,\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial x}\,\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial y}\,\frac{\partial^2\tilde{\phi}}{\partial x\,\partial y} + \left(\frac{\tilde{\phi}}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2\tilde{\phi}}{\partial y^2}\right] \tag{5.24}$$

Haciendo la aproximación para un elemento

$$\tilde{\phi}(x,y) \approx \phi(x,y) = \sum_{i=1}^{n} N_i\phi_i \tag{5.25}$$

donde ϕ es la función aproximada y N_i son las funciones de interpolación de un elemento, n el número de nodos del elemento y ϕ_i es el valor de la función en cada nodo. Sustituyendo (5.25) en (5.23) se obtiene un residuo.

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} - \tilde{g} = \varepsilon$$

Se hace el residuo ortogonal a las funciones de interpolación tal que

$$(\epsilon, N_i) = \int_\Omega \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} - \tilde{g}\right)N_i\,dx\,dy = 0 \tag{5.26}$$

donde Ω es el dominio del elemento. Tomando la siguiente aproximación

$$\tilde{g} \approx g = \sum_{j=1}^{n} N_j g_j \tag{5.27}$$

y aplicando el teorema de Green a (5.26) resulta

$$\phi_j \int_\Omega \left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial y}\right) dxdy = \int_\Gamma \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} N_i dy - \frac{\partial \phi}{\partial y} N_i dx\right)$$

$$- g_j \int_\Omega N_i N_j dxdy \tag{5.28}$$

Usando notación simplificada escribimos

$$\sum_{j=1}^{n} A_{ij}\ \phi_j = f_i + t_i \quad (i=1,2,\ldots,n) \tag{5.29}$$

A es la matriz de coeficientes, f es el vector de flujo t es el vector que representa los términos no lineales y son

$$A_{ij} = \int_\Omega \left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial y}\right) dxdy \tag{5.30}$$

$$f_i = \int \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} N_i dy - \frac{\partial \phi}{\partial y} N_i dx\right) \tag{5.31}$$

$$t_i = -g_j \int_\Omega N_i N_j d\Omega \tag{5.32}$$

El vector g se obtiene sustituyendo (5.25) en (5.24) como

$$g_j=\frac{M_\infty^2}{c^2}\left[(\phi_i\frac{\partial N_i}{\partial x})^2\,\phi_j\frac{\partial^2 N_j}{\partial x^2}+2(\phi_i\frac{\partial N_i}{\partial x})(\phi_j\frac{\partial N_j}{\partial y})(\phi_k\frac{\partial^2 N_k}{\partial x\partial y})\right.$$

$$\left.+(\phi_i\frac{\partial N_i}{\partial y})^2\,\phi_j\frac{\partial^2 N_j}{\partial y^2}\right] \tag{5.33}$$

y la velocidad del sonido

$$c^2=1+(\frac{\gamma-1}{2})M_\infty^2\left[1-(\phi_i\frac{\partial N_i}{\partial x})^2-(\phi_i\frac{\partial N_i}{\partial y})^2\right] \tag{5.34}$$

A continuación se ensamblan las ecuaciones de todos los elementos obtenidos

$$\sum_{j=1}^{m} A^*_{ij}\phi^*_j=f^*_i+t^*_i \qquad (i=1,2,\ldots,m) \tag{5.35}$$

Ya que el vector t^* de la ec. (5.35) está en función de los valores del potencial de velocidad en los nodos, esta ecuación se resuelve por medio de iteraciones, para lo cual en la primera iteración se resuelve

$$A^*\phi = f^* \tag{5.36}$$

Para $M_\infty=0$. Los valores obtenidos de $\phi(x,y)$ se sustituyen en el vector t^* de (5.35) y se resuelve la ecuación obteniéndose con ella nuevos valores de $\phi(x,y)$, los que se utilizan en la siguiente iteración. Así sucesivamente, hasta que la diferencia del valor anterior y el nuevo sea menor que una cierta magnitud.

Para la formulación de la función de corriente, se sigue un procedimiento similar al utilizado en el potencial de velocidad, llegando a

$$\sum_{j=1}^{n} A_{ij}\psi_j = 6_i + \delta_i \qquad (i,1,2,\ldots,n) \tag{5.37}$$

y el vector δ se obtiene a partir de

$$\delta_i = \ell_j \int_\Omega N_i N_j dxdy \tag{5.38}$$

donde ℓ esta dado por

$$\ell_j = \frac{-M_\infty^2}{c^2}\left[(\phi_i\frac{\partial N_i}{\partial x})(\phi_j\frac{\partial^2 N_j}{\partial x^2})(\psi_k\frac{\partial N_k}{\partial x}) + (\phi_i\frac{\partial N_i}{\partial y})(\phi_j\frac{\partial^2 N_j}{\partial x\partial y})(\phi_k\frac{\partial N_k}{\partial x})\right.$$

$$\left. + (\phi_i\frac{\partial N_i}{\partial x})(\phi_j\frac{\partial^2 N_j}{\partial x\partial y})(\psi_k\frac{\partial N_k}{\partial y}) + (\phi_i\frac{\partial N_i}{\partial y})(\phi_j\frac{\partial^2 N_j}{\partial y^2})(\psi_k\frac{\partial N_k}{\partial y})\right] \tag{5.39}$$

donde c^2 se obtiene de la misma forma que en la ec. (5.34). Al igual que para el potencial de velocidad, se efectúa un ensamble de todas las matrices de los elementos (5.37), para obtener la matriz global de coeficientes, lo que se representa

$$A^* \psi = 6^* + \delta^* \tag{5.40}$$

En este caso el vector δ^* de la ec. (5.40) está en función de los valores del potencial de velocidad y de la función de corriente en los nodos, sin embargo los primeros ya se conocen de la solución de la ec. (5.35), por lo que se pueden sustituir aquí, quedando la ecuación únicamente en función de $\psi(x,y)$. Nuevamente se utiliza un método de iteraciones,

igual al usado en el potencial de velocidad para encontrar $\psi(x,y)$.

5.4 SOLUCION Y RESULTADOS

El problema específico escogido como ejemplo, es el del flujo uniforme alrededor de un cilindro de radio D, entre placas planas separadas por un distancia 2 H y se supone que el flujo uniforme se encuentra a una distancia 3.5D del centro del cilindro Fig.5.1. Por la simetría del flujo, se puede tomar para el cálculo solamente un cuadrante del dominio total.

Las condiciones de frontera, tanto para el potencial de velocidad como para la función de corriente, se muestran en la Fig. 5.2.

Para la discretización del dominio se utilizan elementos triangulares. Las funciones de interpolación para cada elemento son cuadráticas, para poder sustituirlas en las ec.(5.33) y (5.39), ya que de menor grado se anularían. Es por ello que cada elemento tiene 6 nodos uno por cada función de interpolación, las cuales son

$$\begin{aligned} N_1 &= 2L_1^2 - L_1 & \qquad N_4 &= 4L_1 L_2 \\ N_2 &= 2L_2^2 - L_2 & N_5 &= 4L_2 L_3 \\ N_3 &= 2L_3^2 - L_3 & N_6 &= 4L_3 L_1 \end{aligned} \tag{5.41}$$

donde L_1, L_2, L_3 son las coordenadas de área y su relación con las coordendas cartesianas es

$$L_i = a_i + b_i x + c_i y \tag{5.42}$$

donde las constantes a_i, b_i, c_i están definidas por la ec. (3.23). Se utilizan coordenadas de área por su facilidad al efectuar operaciones, así por ejemplo las derivadas de las funciones de

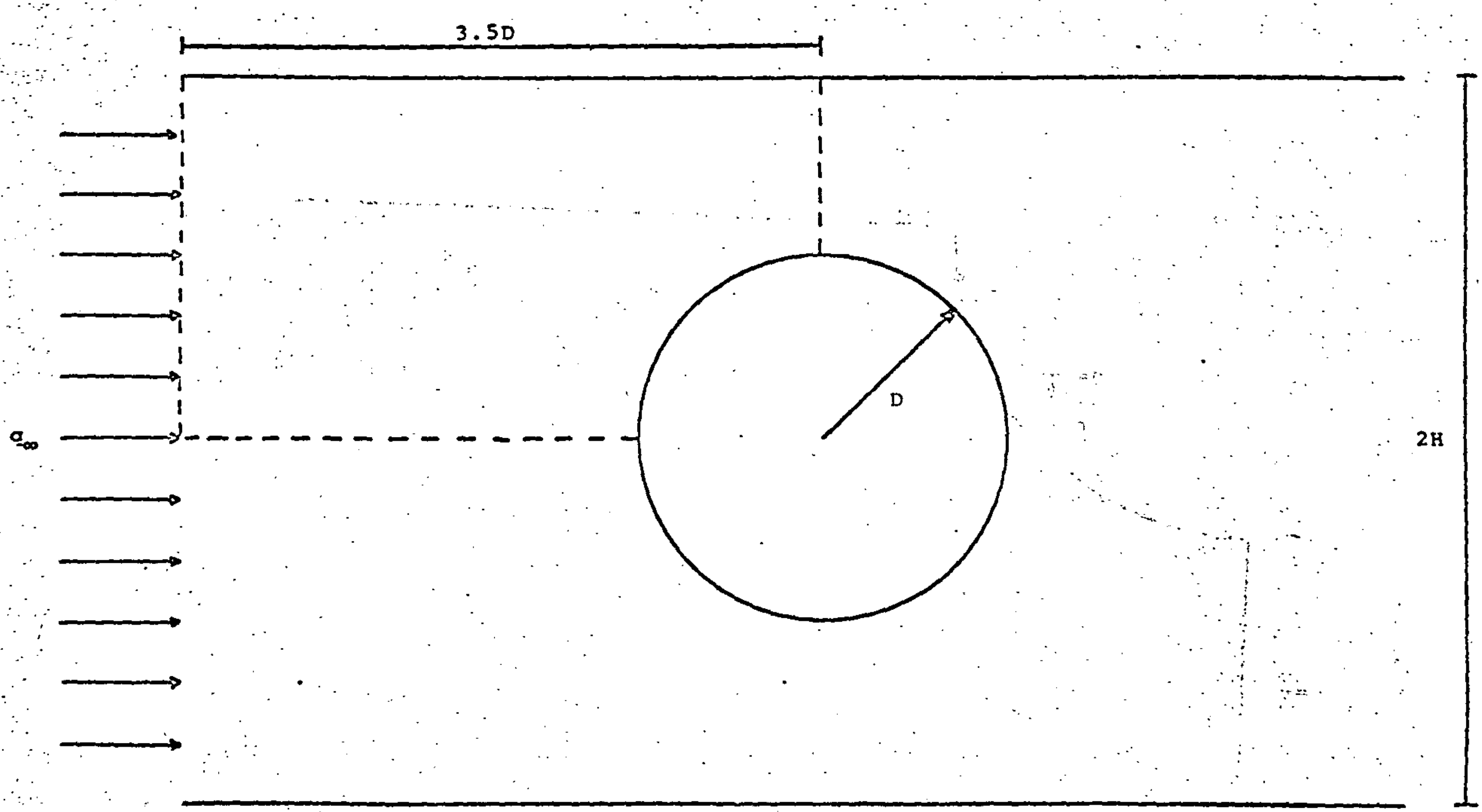


Fig 5.1. Flujo compresible alrededor de un cilindro entre placas planas.

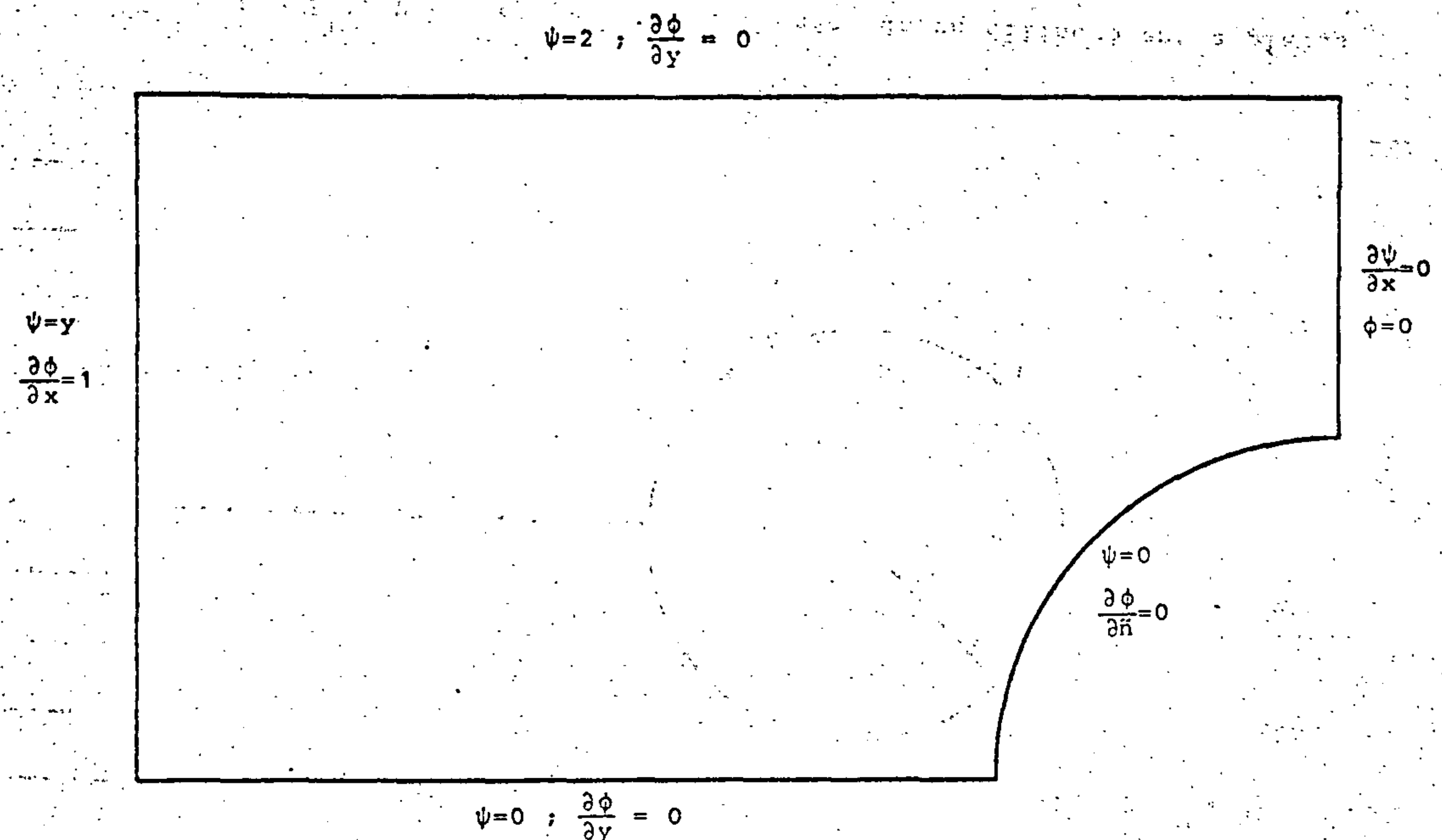


Fig 5.2. Condiciones de frontera.

interpolación se obtienen por la regla de la cadena como

$$\frac{\partial N_i}{\partial x} = \frac{\partial N_i}{\partial L_1}\frac{\partial L_1}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial L_2}\frac{\partial L_2}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial L_3}\frac{\partial L_3}{\partial x}$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial y} = \frac{\partial N_i}{\partial L_2}\frac{\partial L_2}{\partial y} + \frac{\partial N_i}{\partial L_2}\frac{\partial L_2}{\partial y} + \frac{\partial N_i}{\partial L_3}\frac{\partial L_3}{\partial y} \tag{5.43}$$

y las integralaes que aparecen en las ecuaciones se resuelven a través de

$$\int_\Omega L_1^n\, L_2^m\, L_3^p\, dxdy = 2\Delta\, \frac{n!m!p!}{(n+m+p+2)!} \tag{5.44}$$

donde Δ es el área del elemento triangular.

Se realizó un programa de computación que calcula las matrices y vectores de elementos finitos y también efectúa las iteraciones. Para el potencial de velocidad, primero se generan las matrices de coeficientes $\mathcal{A}$ de cada elemento, mismas que se ensamblan en la matriz global $\mathcal{A}^*$. Se calcula la integral (5.31) utilizando las condiciones de frontera del tipo Neumann y estas ya ensambladas forman el vector global f^*. El vector t^* se calcula con los valores obtenidos de ϕ en la iteración anterior. Las condiciones de frontera del tipo Dirichlet se sustituyen en el sistema de ecuaciones (5.29), con lo que se reduce la matriz global a únicamente el número de incognitas y se resuelve, obteniéndose nuevos valores de ϕ. La matriz $\mathcal{A}^*$ y el vector f^* únicamente se calculan una vez, ya que son los mismos para cada iteración, lo único que cambia es el vector t^*, en el cual se introducen los nuevos valores de ϕ, hasta que haya una convergencia dentro de una magnitud predeterminada. En el pos-

procesamiento se interpola cuadráticamente dentro de cada elemento, para obtener las coordenadas de las líneas equipotenciales.

El programa para la función de corriente sigue un procedimiento similar al anterior. La matriz A de la ec. (5.40) es la misma que la del potencial de velocidad, ya que ésta depende únicamente de la malla y las funciones de interpolación que se utilicen. En el vector δ^* se utilizan los valores ϕ obtenidos en el programa anterior.

El dominio primero se discretiza con una malla gruesa, como muestra la Fig. 5.3, la cual tiene 10 elementos y 28 nodos. Esto tiene dos finalidades: La primera probar y corregir el programa de computación y la segunda observar donde se encuentran las zonas de mayor variación, para hacer una mejor discretización.

La Fig. 5.4 muestra una malla más fina con 37 elementos y 92 nodos, la que se realizó tomando en cuenta los resultados obtenidos por la malla anterior.

En la Fig 5.5 se presentan las lineas de corriente para las dos mallas en el caso de flujo incompresible. En las Figuras 5.6, 5.7 y 5.8 se muestran las líneas de corriente y equipotenciales para números de Mach 0.1, 0.2 y 0.3 respectivamente, obtenidos con la malla fina. Estas figuras también indican la variación del número de Mach local, sobre la cresta del cilindro.

Se observa una diferencia entre el caso de flujo incompresible comparado con el flujo compresible y esta diferencia es notable para altos números de Mach. Se nota también que en el caso de flujo compresible, el número de Mach aumenta al acercarce al cilindro. Esto puede presentar problemas para un perfil aerodinámico si el número de Mach local se acercara a la unidad.

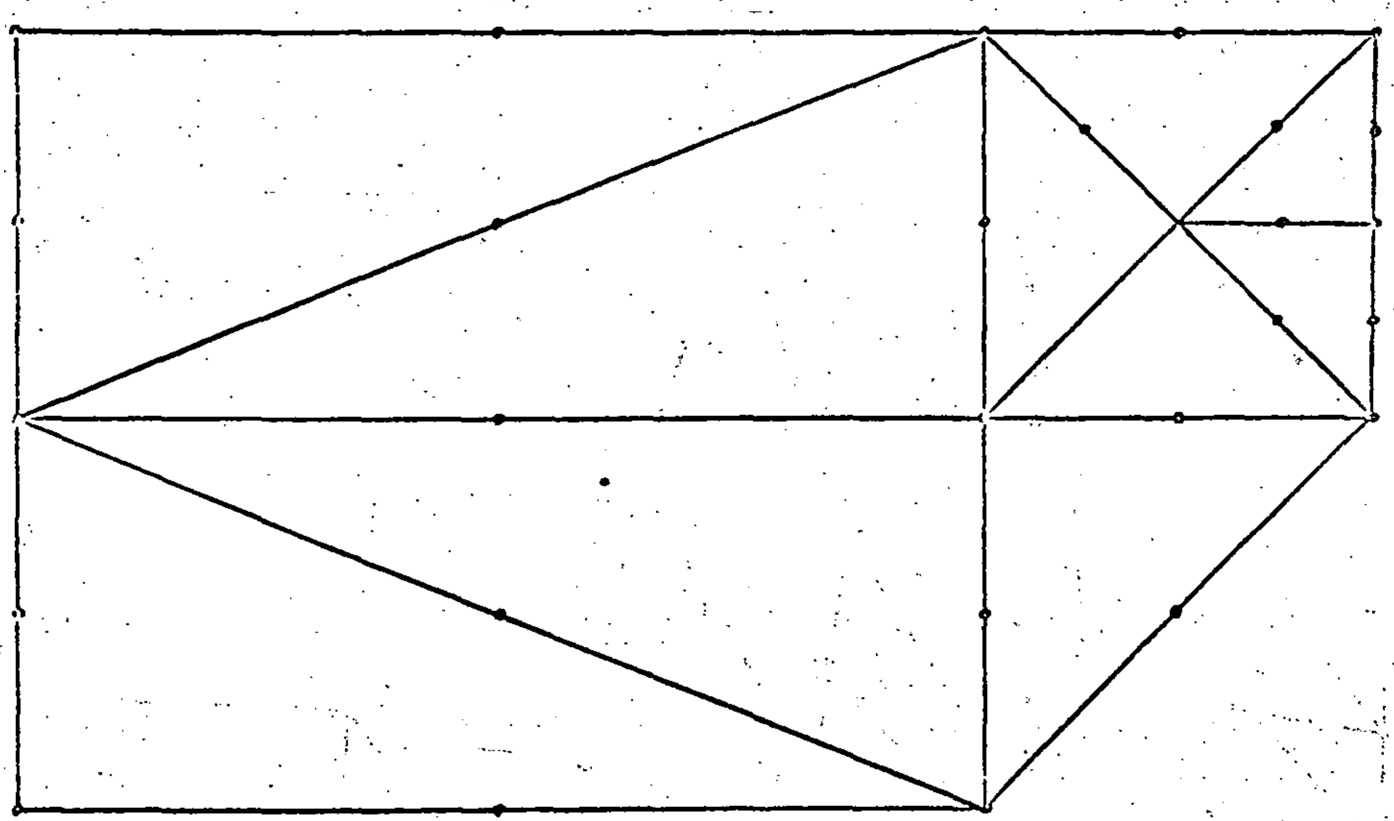


Fig 5.3. Malla gruesa con sus nodos.

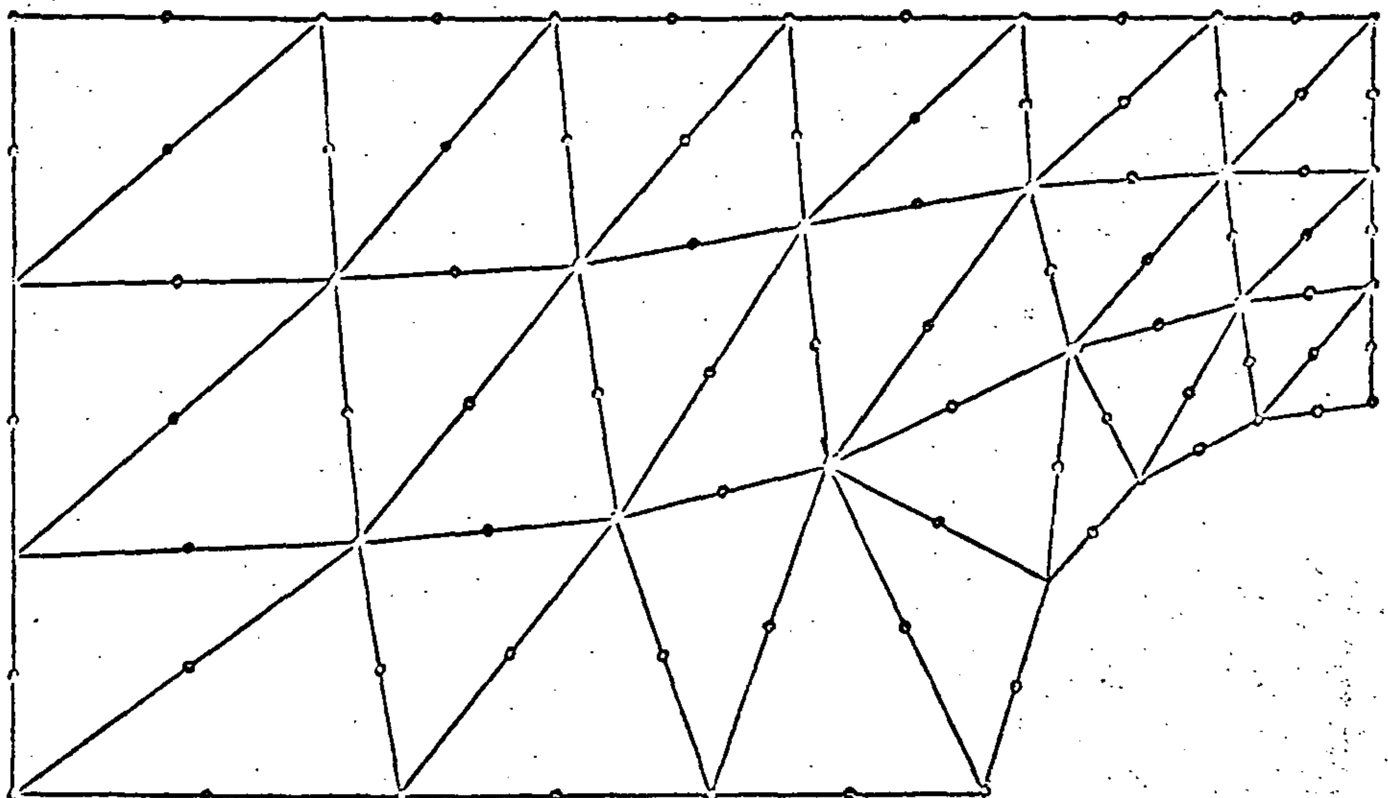


Fig 5.4. Malia fina con sus nodos.

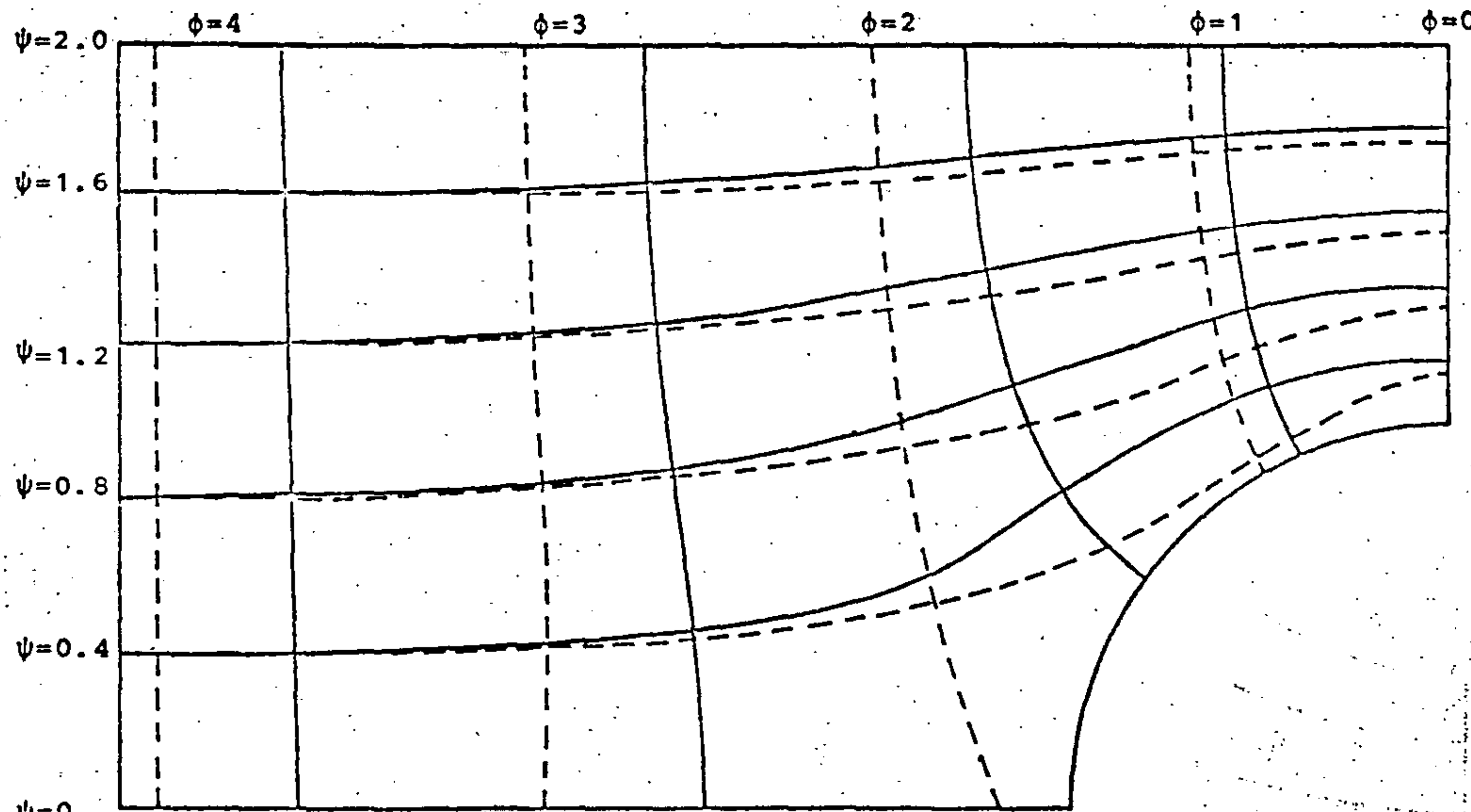


Fig 5.5 Líneas de corriente para las dos mallas, $M_{\infty}=0$, Línea punteada malla gruesa, Línea continua: Malla fina.

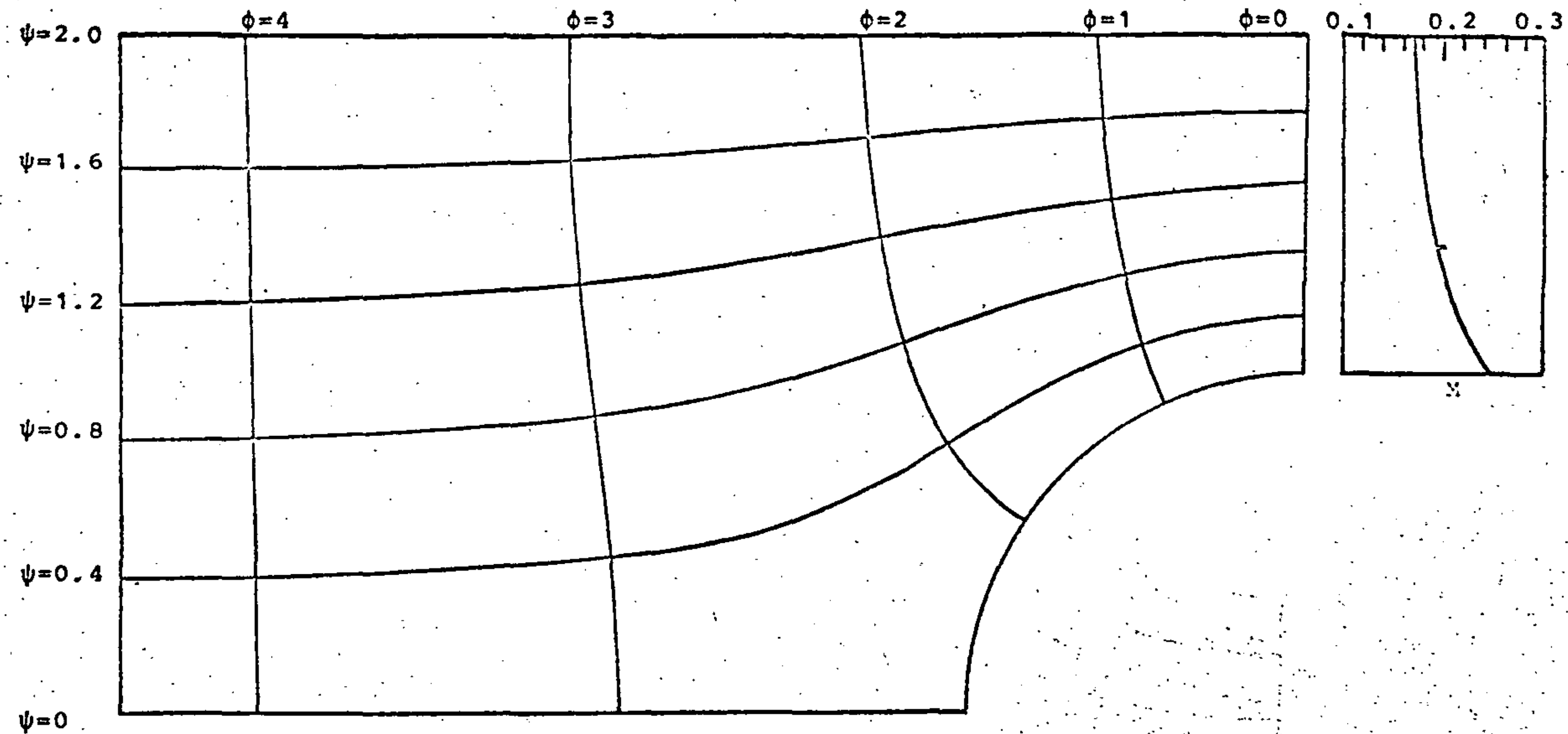


Fig 5.6. Líneas equipotenciales y líneas de corriente para M_∞=0.1 y variación del número de Mach local en la cresta del cilindro.

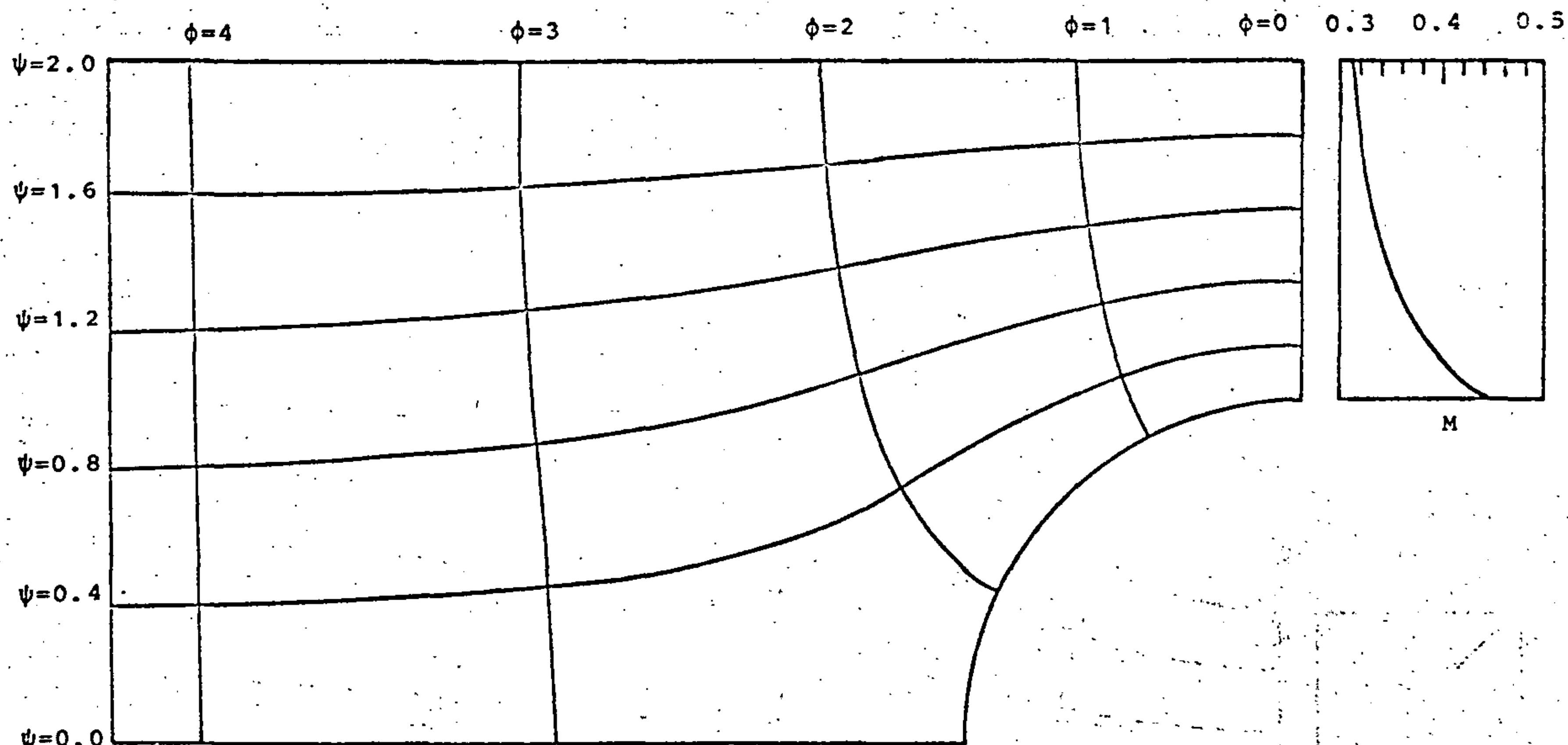


Fig 5.7. Líneas equipotenciales y líneas de corriente para $M_\infty=0.2$ y variación del número de Mach local en la cresta del cilindro.

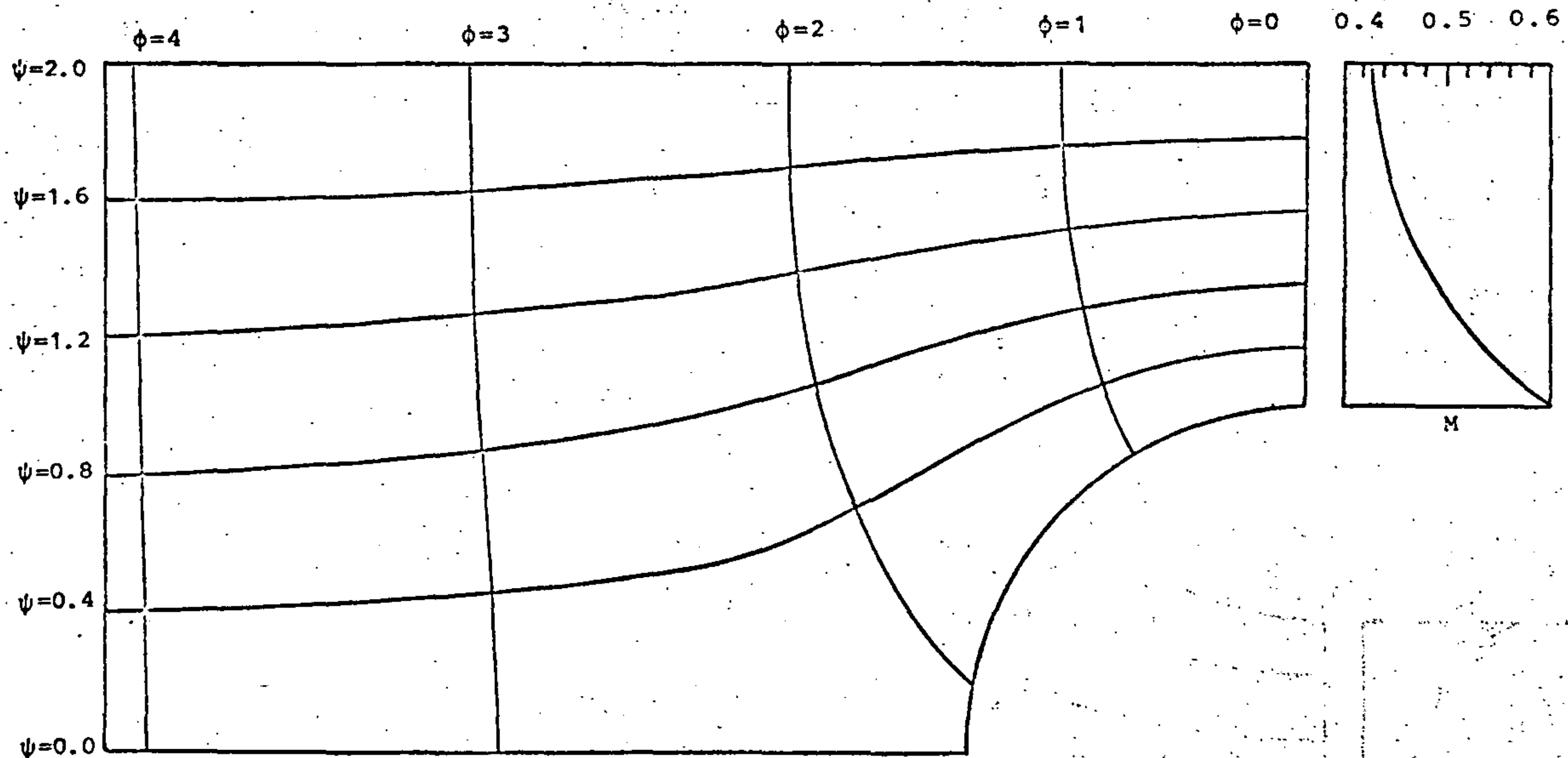


Fig 5.8. Líneas equipotenciales y líneas de corriente para $M_\infty=0.3$ y variación del número de Mach local en la cresta del cilindro.

Para bajos números de Mach, se necesitan pocas iteraciones para la convergencia, como muestra la siguiente tabla:

M_∞	ERMC	Interaciones para ϕ	Iteraciones para ψ
0.1	0.0001	4	3
0.2	0.0001	9	3
0.3	0.0001	20	3

La función de corriente necesita menos iteraciones para converger, ya que se parte de valores exactos obtenidos del potencial de velocidad.

Para la malla gruesa se logra convergencia hasta para número de Mach 0.5, sin embargo los resultados obtenidos para este número no son confiables, debido a lo grueso de la discretización, es por ello que no se presentan.

Por último las soluciones numéricas demuestran la utilidad del método de elementos finitos de Galerkin, en combinación con un método iterativo, en la solución de problemas de flujo potencial subsónico.

CAPITULO VI
ECUACIONES NO LINEALES

6.1 INTRODUCCION La ecuación diferencial representada por

$$L\ (n) = 0$$

es lineal su combinaciones lineales de soluciones son también soluciones. De otra forma la ecuación es no lineal. O veces la ecuación diferencial es lineal con condiciones a la frontera no lineales. El problema en su conjunto es entonces no lineal.

En cualquier caso, la solución completa a un problema diferencial no lineal no puede obtenerse mediante la superposición de soluciones más sencillas. Esta es una desventaja tanto para el análisis teórico como para el numérico.

En la mecánica de fluidos y transferencia de calor aparecen comúnmente cuatro diferentes tipos de nolinealidades:

(a) No linealidades debidas al cambio de las propiedades materiales con respecto a las variables de campo como son la velocidad, temperatura y presión. En la mayoría de los casos este cambio es relativamente poco. La no linealidad es como consecuencia, débil. El problema puede resolverse numéricamente mediante iteraciones en las que se toman los valores de las propiedades correspondiendo a las variables de campo en la iteración anterior. Al llegar a una convergencia del proceso iterativo se habrá encontrado la solución del problema nolineal. Esta técnica se utilizó para resolver el problema del flujo potencial compresible mencionado en el capítulo anterior.

(b) No linealidades debidas a la convección de las variables de campo. Estas provienen del hecho de que la des-

cripción euliana de las lineaciones de balance incluyen términos que reflejan el cambio en la variable de campo correspondiendo al transporte físico de un lugar al otro del material que constituye el medio continuo. En algunas situaciones específicas estos términos pueden ser idénticamente cero por lo que estos problemas se prestan a soluciones analíticas. Sin embargo, en muchos casos de interés práctico, los términos convectivos no pueden despreciarse frente a los difusivos. La relación entre la magnitud de los efectos convectivos y difusivos se representan mediante el número de Reynolds (Re) en el caso de la ecuación de movimiento (o ecuación de transporte de cantidad de movimiento) y el número de Péclet(Pe) en el caso de la ecuación de energía (o ecuación de transporte técnico). Para Re=0, el conjunto de evacuaciones es lineal y fácilmente resuelto tanto analíticamente como numéricamente. En caso de que Re sea de orden unitario se puede hacer una expansión alrededor de la solución de Re=0, obteniéndose las ecuaciones de perturbación también lineales (VamDyke, 1964). Para Re→∞, puede usarse la teoría de la capa límite (Sehhicenting, 1968) para dividir el dominio en una zona viscosa y otra no viscosa. Esta simplificación ayuda a la solución del problema y se usa para la mayoría de los cálculos aerodinámicos, en conjunto quizás con algún modelo de la turbulencia.

El problema del número de Reynolds intermedio es importante de punto de vista de su aplicación sobre todo a flujos internos Los métodos numéricos tienen que emplearse en estos casos para la obtención del campo de variables y otros parámetros de interés como son las fuerzas sobre obstáculos y flujos de calor en las paredes. La no linealidad del problema es fuerte y el proceso itertativo necesario para llegar a la solución debe ser relativamente compleja. En este capítulo se usa la técnica de Newton-Raphson para este problema

(c) No linealidades debidas a las condiciones de frontera. Estas bueden provenir de una variedad de efectos, como por ejem-

$$\tilde{u} \approx u = \sum_{i=1}^{n} u_i\, n_i\ (x) \qquad (6.4)$$

donde las $n_i(x)$ son las función de interpolación. Efectuando el criterio de Galerkín al residuo ε obtenido, se tiene

$$\int_{\Omega^e} \varepsilon\ N_i\ dx = 0 \qquad (6.5)$$

donde $\Omega^e = [x^-, x^+]$ representa un elemento y

$$\varepsilon = \frac{d^2 n}{dx^2} - 6u^2 \qquad (6.6)$$

Se tiene

$$\int_{x^-}^{x^+} \frac{d^2 u}{dx^2}\ N_i dx - b\int_{x^-}^{x^+} u^2\ N_i = 0 \qquad (6.7)$$

Integrando el primer término por partes.

$$\int_{x^-}^{x^+} \frac{du}{dx}\,\frac{dN_i}{dx}\ dx + 6\int_{x^-}^{x^+} u^2 N_i dx = N_i\ \frac{dn}{dx}\Big|_{x^-}^{x^+} \qquad (6.8)$$

Sustituyendo la ecuación (6.4) en la (6.8), se tiene

$$\sum_{j=1}^{n} u_j \int_{x^-}^{x^+} \frac{dN_j}{dx}\,\frac{dN_i}{dx}dx + 6\sum_{j=1}^{n}\ \sum_{k=1}^{n}\ u_j u_k \int_{x^-}^{x^+} N_i N_j N_k\ dx = N_i\ \frac{dn}{dx}\Big|_{x^-}^{x^+} \qquad (6.9)$$

plo la ponencia de una superficie libre en un fluido o transferencia de calor por radiación en las fronteras. La no linealidad puede ser débil o fuerte dependiendo del valor de un parámetro que la represente, la pendiente de la superficie libre o la del flujo de calor por radiación comparado con el debido a conducción y convección.

(d) Otras no linealidades que forman parte de la formulación física del problema y que pueden deberse a procesos físicos como reacciones químicas en la combustión o a fronteras internas incógnitas como ondas de choque en el flujo transónico, ambos siendo ejemplos de la nolinalidad fuerte.

6.2. ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

Considérese el problema no lineal representado por la ecuación diferencial ordinaria.

$$\frac{d^2\tilde{u}}{dx^2} - 6\tilde{u}^2 = 0 \qquad (6.1)$$

con las condiciones de frontera

$$\tilde{u}(1)=1, \ \tilde{u}(2)=0.25 \qquad (6.2)$$

La solución exacta de esta ecuación nolineales

$$\tilde{u}(x) = \frac{1}{x^2}, \qquad (6.3)$$

la que se va a usar para propósitos de comparación con los resultados numéricos.

Para resolver la ecuación (6.1) numéricamente, se divide primero el dominio $[1,2]$ en elementos. En cada elemento se hace la aproximación.

lo que puede inscribirse como

$$\sum_{j=1}^{n} A_{ij}\, u_j + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} B_{ijk}\, u_j u_k + C_i = 0 \qquad (6.10)$$

donde,
$$A_{ij} = \int_{x^-}^{x^+} \frac{dN_i}{dx} \frac{dN_j}{dx}\, dx$$

$$B_{ijk} = 6\int_{x^-}^{x^+} N_i\, N_j\, N_k\, dx$$

$$C_i = - N_i \frac{du}{dx}\Big|_{x^-}^{x^+}$$

La ecuación (6.10) representa la formulación de elementos finitos para cada elemento. Se tiene aquí dos opciones a seguir (a) Ensamblar las ecuaciones algebráicas de cada elemento en una formualción global. Recordando que las contribuciones C_i de elementos adyacentes se anulan, se llegará al siguiente conjunto de ecuaciones algebráicas no lineales.

$$\sum_{j=1}^{m} A^*_{ij}\, u_j + \sum_{j=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} B^*_{ijk}\, u_j u_k + C^*_i = 0, \; i=1,m \qquad (6.11)$$

Ahora se puede introducir las condiciones a la frontera y resolver las ecuaciones que se queden. Una solución directa de las ecuaciones algebráicas no linales no es posible, sino por medio de algún método iterativo.
Un método comúnmente usado es el de Newton-Raphson, descrito a continuación.

Considérese m ecuaciones en la n incógnitas $u_1, u_2, \ldots, u_n$ representadas por:

$$F_i(u_1, u_2, \ldots, u_n)=0, \quad i=1,2,\ldots,n$$

Haciendo una expansión en serie de Taylor alrededor de los valores $u_i=u_i(j)$ de las funciones F_i, se tiene

$$F_i(n^{(j+1)}, u_2^{(j+1)}, \ldots u_n^{(j+1)} = F_i\ (u_1^{(j)}, u_2^{(j)}, \ldots u_n^{(j)}$$

$$(\frac{\partial F_i}{\partial u_1})\Delta u_1 + (\frac{\partial F_i}{\partial u})\Delta u_2 + \ldots + (\frac{\partial F_i}{\partial u_n})\Delta u_n \qquad (6.12)$$

para $i=1,2,\ldots,n$. Las derivadas se evalúan en $u_1=u_1^{(j)}, u_2=u_2^{(j)}, \ldots, u_n=u_n^{(j)}$. Si se quiere que $F_i(u_1^{(j+1)}, u_2^{(j+1}, \ldots, u_n^{(j+1)}$ sea cero, se tiene al despreciar los términos de orden superior,

$$F(u_1^{(j)}, u_2^{(j)}, \ldots, u_n^{(j)}) = \sum_{k=1}^{n} (\frac{\partial F_i}{\partial u_k})\Delta u_k \quad i=1,2,\ldots,n \qquad (6.13)$$

Entonces si $u_i^{(j)}$ son los valores de u_i en una iteración j, los siguientes valores deben ser

$$u_i^{(j+1)} = u_i^{(j)} + \Delta u_i$$

donde Δu_i es la solución del conjunto de ecuaciones (6.13). El proceso se sigue hasta obtener convergencia de acuerdo con algún criterio prefijado.

(b) Un procedimiento mejor es el de aplicar la técnica de Newton-Raphson a las ecuaciones (6.10) de cada elemento, para después

En este caso la ecuación representativa de un elemento es:

$$F_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} u_j + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} B_{ijk} u_j u_k + C_i = 0 \tag{6.14}$$

De aquí

$$\frac{\partial F_i}{\partial u_k} = A_{ik} + \sum_{m=1}^{n} (B_{ikm} + B_{imk}) u_m = H_{ik} \tag{6.15}$$

Estas expresiones para F_i y $\partial F_i/\partial n_k$ pueden sustituirse en la ecuación (6.13) y el ensamblar estas ecuaciones de todos los elementos se tiene el conjuto global. Este puede resolverse para los incrementos Δn_k después de incroporar las condiciones a la frontera. La importante ventaja de este segundo procedimiento es que se tiene que almacenar solamente matrices de nxn mientras que en el primero se necesitaría lugar para nxnxn. Desde luego aun aquí se puede aprovechar de la simetría de las matrices con el fin de ahorrar memoria de la computadora.

La figura 6.1 ejemplifica la solución de la ecuación (6.1) con las condiciones de frontera)6.2) utilizando tres elementos de tipo lineal. Se indica también la solución exacta dada por la ecuación (6.3). La figura 6.2 tiene el error raíz medio cuadrático e para diferentes números de elementos tanto para elementos tipo lineal como cuadrático.

6.3 FLUJO VISCOSO

Las ecuaciones diferenciales adimensionales para la solución del flujo de un fluido viscoso incompresible son:

$$\text{div}\ \underset{\sim}{q} = 0 \tag{6.16}$$

$$\frac{\partial \underset{\sim}{q}}{\partial t} + \underset{\sim}{q}.\mathrm{grad}\underset{\sim}{q} = -\mathrm{grad}p + \frac{1}{Re}\nabla^2 \underset{\sim}{q} \qquad (6.17)$$

El vector $\underset{\sim}{q}$ representa la velocidad, p la presión y t, el tiempo adimensionales. Aquí se tratará únicamente el caso bidimensional permanente en que n y v son las componentes cartesianas de $\underset{\sim}{q}$. Con esta restricción, las ecuaciones se reducen a:

$$\frac{\partial n}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \qquad (6.18)$$

$$n\frac{\partial n}{\partial x} + v\frac{\partial n}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \qquad (6.19)$$

$$n\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \qquad (6.20)$$

Existen tre posibilidades para tratar estas ecuaciones:

(a) Formulación variables primitivas: Se puede usar las ecuaciones (6.18),(6.19) y (6.20) en su forma original y determinar las tres incógnitas n,v,p.

(b) Formulación ψ-w: Se definen la función de correinte ψ y la vorticidad w de manera que

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \qquad (6.21)$$

$$w = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}. \qquad (6.22)$$

De éstas se obtiene:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -w \qquad (6.23)$$

Fig 6.1: Solución de elemento finito

Fig. 6.2: Error obtenido con el método de elemento finito para deferentes números de elementos.

Además, se deriva la ecuación (6.20) con respecto a x y se resta la derivada de la (6.19) con respecto a y. Al utilizar la ecuación (6.18) se tiene la llamada linación de vorticidad:

$$u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{1}{R_e}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \qquad (6.24)$$

En términos de la función de corriente ésta queda como

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = R_e\left\{\frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right\} \qquad (6.25)$$

El conjunto de ecuaciones (6.23) y (6.25) debe resolverse para las dos íncógnitas ψ y w.

(c) Formulación ψ: Al sustituir w de la ecuación (6.23) en la (6.25) se obtiene

$$\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} = R_e\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

$$\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\right) \qquad (6.26)$$

la cual es una sola ecuación de cuarto orden en al incógnita ψ.

Las tres formulaciones han sido utilizadas para la solución del problema de flujo viscoso. Aquí se verá solamente la ψ-w que tiene ciertas ventajas con respecto a su bajo orden y la sencilla aplicación de las condiciones a la frontera. En efecto estas condiciones deben ser sobre u y v o sobre sus derivadas normales en contorno cerrado.

Para ejemplificar el uso delmétodo del elemento finito se considera el caso del flujo viscoso alrededor de un cilindro entre placas planas como mostrado en la figura 6.3. Considerando simetria alrededor de una línea horizontal, se toma únicamente la mitad del dominio total indicado por el área ABCDEF.

En las fronteras sólidas BC y EF, la condición de que la velocidad normal sea cero se traduce a ψ=constante sobre estso tramos. Por esta razón, la ecuación (6.23) se reduce a $w=-\partial^2\psi/\partial^2 n$, donde n es la coordenada local normal a la superfice. Tómese un punto I en el interior del fluido, a una pequeña distancia Δs normal a la frontera. El punto F queda sobre la frontera a pie de esta normal. Con una expansión en serie de Taylor alrededor de F se tiene

$$\psi_I=\psi_F+\left(\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)_F\Delta s + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial n^2}\right)_F(\Delta s)^2 \tag{6.27}$$

con un error del orden $(\Delta s)^3$.

La condición de que la velocidad tanpencial sobre la pared sólida es también cero se convierte a $(\partial\psi/\partial n)_F=0$. La ecuación (6.27) se reduce a

$$\psi_I = \psi_F - w_F(\Delta s)^2/2 \tag{6.28}$$

Esta relación en combinación con ψ=constante debe ser utilizada en las fronteras sólidas BC y EF. En el tramo AF se usa la condición $\psi=y-y3/3$ y $w=2y$ que corresponde al perfil de velocidad semiparabólico. En la parte DE se considera $\partial\psi/\partial x=\partial x=0$. En AB y CD, $\psi=0$ ya que forman parte de uan línea de corriente y $w=0$ por la simetría del flujo.

En la figura 6.4 se muest4a la malla utilizada. Las ecuaciones (6.23) y (6.25) se discretizan utilizando el método de elemento finito de Galerkin. Las incógnitas son las ψ es en todos los modos interiores así como alguno de la frontera. A este conjunto de ecuaciones algebráicas se le introduce las condiciones de frontera, resolviéndose el conjunto reducido. Las figuras 6.5,6.6,6.7 y 6.8 muestran las líneas de corriente obtenidas para diferentes números de Reynolds. Alrededor de Re=50 comienza a aparecer el vórtice estacionario atrás del cilindro que se hace más notorio a mayores números de Reynolds.

CAPITULO VII

C O C L U C I O N E S

Con estos apuntes se pretende ejemplificar las aplicaciones del método de elementos finito al problema de termofluidos. Aparte de una descripción del método se ha incluido análisis de errores en algunos casos comparando la solución numérica con la analítica. Esto tiene el propósito de demostrar la validez del método de punto de vista de un usuario del método. También se formó un archivo de programas de cierta flexibilidad que se pueden encontrar en los Apéndices. Estos pueden usarse en relación con los problemas comunes de la tranferencia de calor y mecánica de fluidos.

Se nota que la utilidad del método de elemento finito estriba principalmente en la solución de problemas elípticos, ya que se adapta bien a geometrías irregulares con condiciones de frontera tipo Dirichlet y Neumann. Es por ello que ha tenido una gran aceptación en la solución de problemas de la ingeniería. Se observa también que las ecuaciones parabólicas pueden manejarse a través de una combinación del método de elemento finito en la parte elíptica con el método de diferencias finitas en la parte parabólica.

Aunque el método de elemento finito no es el único para resolver los problemas de termofluidos, definitivamente debe ser considerado como una de las posibilidades para ello.

REFERENCIAS ADICIONALES

1. Van Dylec. M., Perturbation Methods in Fluid Mechanics, Academic Press, 1964.

2. Schlichting, H., Bonndary Layer Theory, McGraw-Hill,1968.

```
C       ************************************************************
C       ************************************************************
C       **                                                        **
C       **              M A R C - C O N D C A L                   **
C       **                                                        **
C       **   ESTE PROGRAMA RESUELVE PROBLEMAS DE CONDUCCION DE    **
C       **   CALOR BIDIMENSIONAL EN ESTADO TRANSITORIO O PER-     **
C       **   MANENTE POR EL METODO DE ELEMENTOS FINITOS.          **
C       **                                                        **
C       **    REALIZADO POR: ERNESTO MARTIN DEL CAMPO V.          **
C       **            ABRIL  1982                                 **
C       **                                                        **
C       ************************************************************
C       ************************************************************
C
C       ************************************************************
C       *                                                          *
C       *                    #DATOS DE ENTRADA#                    *
C       *                                                          *
C       *     NES    =0  SI SE QUIERE REVISAR LOS DATOS            *
C       *            =1  SI NO SE QUIERE REVISAR LOS DATOS         *
C       *     NNO    =   NUMERO TOTAL DE NODOS                     *
C       *     NEL    =   NUMERO TOTAL DE ELEMENTOS                 *
C       *     NCF    =   NUMERO DE NODOS EN LA FRONTERA            *
C       *     NBAN   =   MAXIMA DIFERENCIA ENTRE NODOS DE UN ELEMENTO *
C       *     NIT    =   MAXIMO NUMERO DE INCREMENTOS DE TIEMPO    *
C       *     DELT   =   INCREMENTO DE TIEMPO                      *
C       *     LCR    =   NUMERO DE LINEAS DE TEMPERATURA CONSTANTE *
C       *     MODE   =1  NODO EN LA FRONTERA                       *
C       *            =0  NODO EN EL INTERIOR                       *
C       *     XNODE  =   COORDENADA X                              *
C       *     YNODE  =   COORDENADA Y                              *
C       *     NENN   =   DISTRIBUCION DE NODOS EN CADA ELEMENTO    *
C       *     NOD    =   NUMERO DE NODO DE FRONTERA                *
C       *     VAL    =   CONDICION DE FRONTERA DE DIRICHLET        *
C       *     TEA    =   TEMPERATURA INICIAL                       *
C       *     T1     =   TEMPERATURA INICIAL DE LA PLACA           *
C       *     TM     =   TEMPERATURA MEDIA DE LA PLACA             *
C       *     H      =   ANCHO DE LA PLACA                         *
C       *     W      =   LARGO DE LA PLACA                         *
C       *     FO     =   MODULO DE FOURIER DE LA PLACA             *
C       *                                                          *
C       ************************************************************
C
        DIMENSION XNODE(200),YNODE(200),MODE(200),NENN(80,3),NOD(60)
     *            ,TEA(25),VAL(60),ALI(50)
C
C        LEE LOS PARAMETROS DEL PROGRAMA
C
        READ (5,/)NES
        READ (5,/) NNO,NEL,NCF,NBAN
        READ (5,/) NIT,DELT,LCR
```

```
C
C     LEE EL MODO Y LAS COORDENADAS PARA CADA NODO
C
      READ (5,/) (MODE(I),XNODE(I),YNODE(I),I=1,NNO)
C
C     LEE LA DISTRIBUCION DE NODOS PARA CADA ELEMENTO
C
      READ (5,/) ((NENN(I,J),J=1,3),I=1,NEL)
C
C     LEE LAS CONDICIONES DE FRONTERA DE DIRICHLET
C
      READ (5,/) (NOD(I),VAL(I),I=1,NCF)
C
C     LEE LAS LINEAS DE TEMPERATURA CONSTANTE DESEADAS
C
      READ (5,/) (ALI(I),I=1,LCR)
C
C     LEE  LAS TEMPERATURAS INICIALES
C
      READ (5,/) (TEA(I),I=1,NNO)
C
C     LEE LOS PARAMETROS PARA LA SOLUCION ANALITICA
C
      READ (5,/) T1,TM,H,W,FO
      IF (NES.EQ.1) GO TO 1
C
C     ESCRIBE LOS DATOS DEL PROGRAMA
C
      WRITE (6,100) NNO,NEL,NCF,NBAN
      WRITE (6,101)
      WRITE (6,102) (I,MODE(I),XNODE(I),YNODE(I),I=1,NNO)
      WRITE (6,103)
      WRITE (6,104) (I,(NENN(I,J),J=1,3),I=1,NEL)
      WRITE (6,105)
      WRITE (6,106) (NOD(I),VAL(I),I=1,NCF)
      WRITE (6,107)
      WRITE (6,108) (I,TEA(I),I=1,NNO)
    1 CONTINUE
C
C     LLAMA A LA SUBRUTINA MAESTRA
C
      CALL ELFIN (NNO,NEL,NCF,NIT,LCR,NBAN,DELT,MODE,XNODE,YNODE,
     *           NENN,NOD,VAL,TEA,ALI,T1,TM,H,W,FO)
      CALL EXIT
  100 FORMAT (/30X,'VALORES DE LOS PARAMETROS',//20X,'NNO = ',I3,
     *         ' NEL = ',I3,' NCF = ',I3,' NBAN = ',I3)
  101 FORMAT (///20X,' NODO MODO    COORD-X   COORD-Y'/)
  102 FORMAT (20X,' ',I3,3X,I1,' ',2F12.5)
  103 FORMAT (///20X,'TABLA DE NODOS NUMERADOS POR ELEMENTO',//,
     *        20X,'  ELMT    1     2     3'/)
  104 FORMAT (20X,4I5)
  105 FORMAT (///20X,'     CONDICIONES DE FRONTERA',//26X,'NODO',
     *        5X,'VALOR'/)
  106 FORMAT (20X,' ',I9,F10.4)
  107 FORMAT (///20X,'TEMPERATURAS INICIALES PARA CADA NODO'/)
  108 FORMAT (25X,'TEM(',I3,') = ',F16.12)
      END
```

```
C
      SUBROUTINE ELFIN (NNO,NEL,NCF,NIT,LCR,NBAN,DELT,MODE,XNODE,YNODE,
     *      NENN,NOD,VAL,TEA,ALI,T1,TA,H,W,FO)
C     ******************************************************************
C     *                                                                *
C     *      ESTA SUBRUTINA CONTROLA TODOS LOS CALCULOS QUE SE         *
C     *      NECESITAN PARA LA SOLUCION DEL PROBLEMA, YA SEA CON-      *
C     *      DUCCION DE CALOR EN ESTADO PERMANENTE O TRANSITORIO.      *
C     *                                                                *
C     ******************************************************************
C
      DIMENSION MODE(200),XNODE(200),YNODE(200),NENN(80,3),TEA(25)
     *      ,TEN(25),ALI(50),CMP(25,8),DMP(25,8),CMPR(9,8),
     *      TENR(9),NOD(60),VAL(60),CNM(3,3),DNM(3,3),TEMP(200)
      NMP=NNO-NCF
C
C     LIMPIA LAS MATRICES
C
      DO 1 I=1,NNO
      DO 1 J=1,NBAN
      CMP(I,J)=0.0
      DMP(I,J)=0.0
    1 CONTINUE
C
C     CALCULA LAS MATRICES DE COEFICIENTES PARA CADA ELEMENTO
C     Y LAS ENSAMBLA EN LAS MATRICES GLOBALES
C
      DO 5 I=1,NEL
      CALL ELMT (I,XNODE,YNODE,NENN,CNM,DNM,DELT)
      DO 4 J=1,3
      JJ=NENN(I,J)
      DO 3 K=J,3
      KK=NENN(I,K)
      LL=JJ
      IF (LL.LT.KK) GO TO 2
      LL=KK
      KK=JJ
      KKK=KK-LL+1
    2 CMP(LL,KK-LL+1)=CMP(LL,KK-LL+1)+CNM(J,K)
      DMP(LL,KK-LL+1)=DMP(LL,KK-LL+1)+DNM(J,K)
    3 CONTINUE
    4 CONTINUE
    5 CONTINUE
C
C     REDUCE LA MATRIZ GLOBAL
C
      K=0
      DO 6 I=1,NNO
      IF (MODE(I).NE.0) GO TO 6
      K=K+1
      L=0
      JJ=NNO-I+1
      IF (JJ.GT.NBAN) JJ=NBAN
      DO 5 J=1,JJ
      IF (MODE(I+J-1).NE.0) GO TO 5
```

```
      L=L+1
      CMPR(K,L)=CMP(I,J)
    5 CONTINUE
    6 CONTINUE
C
C     TRIANGULARIZA LA MATRIZ REDUCIDA
C
      CALL TRIBAN (NMP,NBAN,CMPR)
C
C     INICIA LA MARCHA EN EL TIEMPO
C
      DO 16 M=1,NIT
      DO 7 I=1,NNO
      TEN(I)=0.0
    7 CONTINUE
C
C     CALCULA EL VECTOR DE TEMPERATURA TRANSITORIA
C
      DO 10 I=1,NNO
      JJ=NNO-I+1
      IF (JJ.GT.NBAN) JJ=NBAN
      DO 8 J=1,JJ
      TEN(J+I-1)=TEN(J+I-1)+CMP(I,J)*TEA(I)
    8 CONTINUE
      IF (I.EQ.1) GO TO 10
      JJ=NBAN
      IF (JJ.GT.I) JJ=I
      DO 9 J=2,JJ
      TEN(I-J+1)=TEN(I-J+1)+DMP(I-J+1,J)*TEA(I)
    9 CONTINUE
   10 CONTINUE
C
C     INTRODUCE LAS CONDICIONES DE FRONTERA DE DIRICHLET
C
      DO 13 II=1,NCF
      I=NOD(I)
      JJ=NNO-I+1
      IF (JJ.GT.NBAN) JJ=NBAN
      DO 11 J=1,JJ
      IF (MODE(J+I-1).NE.0) GO TO 11
      TEN(J+I-1)=TEN(J+I-1)-CMP(I,J)*VAL(II)
   11 CONTINUE
      JJ=NBAN
      IF (JJ.GT.I) JJ=I
      DO 12 J=1,JJ
      IF (MODE(I-J+1).NE.0) GO TO 12
      TEN(I-J+1)=TEN(I-J+1)-CMP(I-J+1,J)*VAL(II)
   12 CONTINUE
      TEN(I)=VAL(II)
   13 CONTINUE
C
C     REDUCE EL VECTOR GLOBAL DE TEMPERATURAS
C
      K=0
      DO 14 I=1,NNO
```

```
      IF (MODE(I).NE.0) GO TO 14
      K=K+1
      TENR(K)=TEN(I)
   14 CONTINUE
C
C     RESUELVE EL SISTEMA DE ECUACIONES
C
      CALL RESOLV (NMP,NBAN,CMPR,TENR)
C
C     ENZAMBLA EL VECTOR DE TEMPERATURAS RESULTANTE
C
      L=0
      DO 15 I=1,NNO
      IF (MODE(I).NE.0) GO TO 15
      L=L+1
      TEA(I)=TENR(L)
   15 CONTINUE
C
C     ESCRIBE  LAS TEMPERATURAS PARA EL INCREMENTO DE TIEMPO
C
      TIM=DELT*M
      WRITE (6,100) TIM
      WRITE (6,200) (I,TEA(I),I=1,NNO)
C
C     CALCULA LAS LINEAS DE TEMPERATURA CONSTANTE
C
      CALL LICOR (TEA,NEL,LCR,XNODE,YNODE,NENN,ALI)
C
C     CALCULA LA SOLUCION ANALITICA EN EL CASO DE LA PLACA
C
      CALL TEMPER (NNO,XNODE,YNODE,NENN,T1,TM,H,W,FO,TEMP,TIM)
C
C     CALCULA LINEAS DE TEMPERATURA CONSTANTE PARA LA SOLUCION
C     ANALITICA
C
      CALL LICOR (TEMP,NEL,LCR,XNODE,YNODE,NENN,ALI)
C
C     CALCULA EL ERROR ENTRE LA SOLUCION ANALITICA Y
C     DE ELEMENTOS FINITOS
C
      CALL ERROR (NNO,MODE,TEA,TEMP)
   16 CONTINUE
      RETURN
  100 FORMAT (///20X,'VALORES DE LAS TEMPERATURAS PARA',//,
     *         30X,'TIEMPO = ',E18.12/)
  200 FORMAT (25X,'TEM(',I3,') = ',E18.12)
      END
C
      SUBROUTINE ELMT (N,XNODE,YNODE,NENN,CNM,DNM,DELT)
C     *****************************************************************
C     *                                                               *
C     *      ESTA SUBRUTINA CALCULA LAS MATRICES DE COEFICIENTES      *
C     *      DE TEMPERATURA PERMANENTE Y TRANSITORIA, PARA CADA       *
C     *      ELEMENTO.                                                *
C     *                                                               *
C     *****************************************************************
```

```
C
      DIMENSION XNODE(200),YNODE(200),NENN(80,3),CNM(3,3),DNM(3,3)
     *          ,X(3),Y(3),B(3),C(3)
      DO 1 L=1,3
      I=NENN(N,L)
      X(L)=XNODE(I)
      Y(L)=YNODE(I)
    1 CONTINUE
      A2=X(2)*Y(3)-X(3)*Y(2)+X(3)*Y(1)-X(1)*Y(3)+X(1)*Y(2)-X(2)*Y(1)
      A=A2/2.
      B(1)=(Y(2)-Y(3))/A2
      B(2)=(Y(3)-Y(1))/A2
      B(3)=-B(1)-B(2)
      C(1)=(X(2)-X(3))/A2
      C(2)=(X(3)-X(1))/A2
      C(3)=-C(1)-C(2)
      DO 2 I=1,3
      Z=(B(I)*B(I)+C(I)*C(I))*DELT*A
      CNM(I,I)=A/3.+Z
      DNM(I,I)=A/3.-Z
    2 CONTINUE
      DO 4 I=1,2
      DO 3 J=I+1,3
      Z=(B(I)*B(J)+C(I)*C(J))*DELT*A
      CNM(I,J)=A/6.+Z
      DNM(I,J)=A/6.-Z
    3 CONTINUE
    4 CONTINUE
      RETURN
      END
C
      SUBROUTINE ERROR (NNO,MODE,TEA,TEMP)
C     *****************************************************************
C     *                                                               *
C     *      ESTA SUBRUTINA CALCULA EL ERROR RAIZ MEDIO CUADRATICO    *
C     *      QUE EXISTE ENTRE LA SOLUCION ANALITICA Y LA DE           *
C     *      ELEMENTOS FINITOS.                                       *
C     *                                                               *
C     *****************************************************************
C
      DIMENSION TEA(200),TEMP(200),MODE(200)
      L=0
      ERMC=0.
      ERMCR=0.
      DO 1 I=1,NNO
      IF (MODE(I).NE.0) GO TO 1
      L=L+1
      ERMC=ERMC+(TEA(I)-TEMP(I))**2.
      ERMCR=ERMCR+((TEA(I)-TEMP(I))/TEMP(I))**2.
    1 CONTINUE
      ERMC=SQRT(ERMC/L)
      ERMCR=SQRT(ERMCR/L)*100.
      WRITE (6,100) ERMC,ERMCR
      RETURN
  100 FORMAT (/20X,'ERROR RAIZ MEDIO CUADRATICO = ',E18.12,//20X,
     *        'ERROR RAIZ MEDIO CUADRATICO RELATIVO = ',E18.12,' %')
      END
```

```
      SUBROUTINE LICOR (GHI,NEL,LCR,XNODE,YNODE,NENN,ALI)
C
C     ******************************************************************
C     *                                                                *
C     *     ESTA SUBRUTINA CALCULA LINEAS DE TEMPERATURA CONSTANTE     *
C     *     POR MEDIO DE INTERPOLACION LINEAL DENTRO DE CADA           *
C     *     ELEMENTO.                                                  *
C     *                                                                *
C     ******************************************************************
C
      DIMENSION XNODE(200),YNODE(200),NENN(80,3),GHI(200),ALI(50)
     *          ,XLIN(70),YLIN(70)
      DO 13 M=1,LCR
      N=0.
      DO 9 I=1,NEL
      J=NENN(I,1)
      K=NENN(I,2)
      L=NENN(I,3)
      IF (GHI(J).EQ.ALI(M).OR.GHI(K).EQ.ALI(M).OR.
     *    GHI(L).EQ.ALI(M)) GO TO 6
      IF (GHI(J).GT.ALI(M).AND.GHI(K).LT.ALI(M).OR.
     *    GHI(J).LT.ALI(M).AND.GHI(K).GT.ALI(M)) GO TO 1
      GO TO 2
    1 N=N+1.
      FACT=(GHI(J)-ALI(M))/(GHI(J)-GHI(K))
      XLIN(N)=XNODE(J)-(XNODE(J)-XNODE(K))*FACT
      YLIN(N)=YNODE(J)-(YNODE(J)-YNODE(K))*FACT
    2 IF (GHI(J).GT.ALI(M).AND.GHI(L).LT.ALI(M).OR.
     *    GHI(J).LT.ALI(M).AND.GHI(L).GT.ALI(M)) GO TO 3
      GO TO 4
    3 N=N+1.
      FACT=(GHI(J)-ALI(M))/(GHI(J)-GHI(L))
      XLIN(N)=XNODE(J)-(XNODE(J)-XNODE(L))*FACT
      YLIN(N)=YNODE(J)-(YNODE(J)-YNODE(L))*FACT
    4 IF (GHI(K).GT.ALI(M).AND.GHI(L).LT.ALI(M).OR.
     *    GHI(K).LT.ALI(M).AND.GHI(L).GT.ALI(M)) GO TO 5
      GO TO 9
    5 N=N+1.
      FACT=(GHI(K)-ALI(M))/(GHI(K)-GHI(L))
      XLIN(N)=XNODE(K)-(XNODE(K)-XNODE(L))*FACT
      YLIN(N)=YNODE(K)-(YNODE(K)-YNODE(L))*FACT
      GO TO 9
    6 IF (GHI(J).NE.ALI(M)) GO TO 7
      N=N+1.
      XLIN(N)=XNODE(J)
      YLIN(N)=YNODE(J)
    7 IF (GHI(K).NE.ALI(M)) GO TO 8
      N=N+1.
      XLIN(N)=XNODE(K)
      YLIN(N)=YNODE(K)
    8 IF (GHI(L).NE.ALI(M)) GO TO 9
      N=N+1.
      XLIN(N)=XNODE(L)
      YLIN(N)=YNODE(L)
    9 CONTINUE
```

```
      WRITE(6,100) ALI(M)
      MM=N-1.
      LL=N
      DO 12 II=1,MM
      KK=II+1.
      DO 11 JJ=KK,N
      PIT=XLIN(II)-XLIN(JJ)
      TIP=YLIN(II)-YLIN(JJ)
      IF (ABS(PIT).GT.0.000000001.OR.ABS(TIP).GT.0.000000001) GO TO 10
      LL=LL-1.
      XLIN(JJ)=100000.0
      YLIN(JJ)=LL*100000.0
   10 IF (XLIN(II).LE.XLIN(JJ)) GO TO 11
      S=XLIN(II)
      T=YLIN(II)
      XLIN(II)=XLIN(JJ)
      YLIN(II)=YLIN(JJ)
      XLIN(JJ)=S
      YLIN(JJ)=T
   11 CONTINUE
   12 CONTINUE
      WRITE(6,101) (I,XLIN(I),YLIN(I),I=1,LL)
   13 CONTINUE
      RETURN
  100 FORMAT (///32X,'PUNTOS EN LOS QUE LA TEMPERATURA',//36X,
     *        ' ES CONSTANTE PARA:',//45X,'TEM =',F10.4,
     *        //33X,'PUNTO        COORD-X           COORD-Y'/)
  101 FORMAT (34X,I3,2X,F15.8,'  ',F15.8)
      END
C
      SUBROUTINE RESOLV (N,NBAN,A,B)
C     ******************************************************************
C     *                                                                *
C     *     ESTA SUBRUTINA RESUELVE UN SISTEMA DE ECUACIONES           *
C     *     TRIANGULARIZADO,POR MEDIO DE SUSTITUCION GAUSSIANA         *
C     *     HACIA ADELANTE Y HACIA ATRAS.                              *
C     *                                                                *
C     ******************************************************************
C
      DIMENSION A(87,87),B(87)
      DO 20 I=2,N
      SUM=B(I)
      KK=I-NBAN+1
      IF (KK.LE.0) KK=1
      DO 10 K=KK,I-1
      SUM=SUM-A(K,I+1-K)*B(K)
   10 CONTINUE
      B(I)=SUM
   20 CONTINUE
      DO 50 L=1,N
      I=N-L+1
      SUM=B(I)/A(I,1)
      KK=I+1
      II=I+NBAN-1
      IF (II.GT.N) II=N
```

```
      IF (KK.GT.II) GO TO 40
      DO 30 K=KK,II
      SUM=SUM-A(I,K-I+1)*B(K)
   30 CONTINUE
   40 B(I)=SUM
   50 CONTINUE
      RETURN
      END
C
      SUBROUTINE TEMPER (NNO,XNODE,YNODE,NENN,T1,TM,H,W,FO,TEMP,TIM)
C     ******************************************************************
C     *                                                                *
C     *      ESTA SUBRUTINA OBTIENE LA SOLUCION ANALITICA POR          *
C     *      MEDIO DE SERIE DE FOURIER SENOIDAL, PARA EL PROBLEMA      *
C     *      DE CONDUCCION DE CALOR, EN ESTADO PERMANENTE Y            *
C     *      TRANSITORIO, EN UNA PLACA RECTANGULAR.                    *
C     *                                                                *
C     ******************************************************************
C
      DIMENSION XNODE(200),YNODE(200),NENN(80,3),TEMP(200),IT(200)
      PI=3.141592654
      DO 3 I=1,NNO
      KON=-1
      GAR=0.0
      DO 1 J=1,1000
      KON=-1*KON
      TIA=J*KON/(H*H/W/W+J*J)*SIN(J*PI*YNODE(I)/H
     *      )*EXP(-(1./W/W+J*J/H/H)*PI*PI*FO*TIM)
      GAR=GAR+TIA
      IF (ABS(TIA).LT.1.E-45) GO TO 2
    1 CONTINUE
    2 IT(I)=J
      TEMP(I)=TM*SIN(PI*XNODE(I)/W)*(SINH(PI*YNODE(I)/W)
     *       /SINH(PI*H/W)-2./PI*GAR)+T1
    3 CONTINUE
      WRITE (6,100)
      WRITE (6,200) (IT(I),I,TEMP(I),I=1,NNO)
      RETURN
  100 FORMAT (///20X,'DISTRIBUCION DE TEMPERATURAS EN LA PLACA'//)
  200 FORMAT (21X,'ITER =',I4,2X,'TEM(',I3,') = ',E18.12)
      END
C
      SUBROUTINE TRIBAN (N,NBAN,A)
C     ******************************************************************
C     *                                                                *
C     *      ESTA SUBRUTINA TRIANGULARIZA UNA MATRIZ SIMETRICA         *
C     *      POR EL METODO DE GAUSS-CROUT, MODIFICADO PARA             *
C     *      MATRICES BANDEADAS.                                       *
C     *                                                                *
C     ******************************************************************
C
      DIMENSION A(250,250)
      DO 50 I=1,N
      IP=N-I+1
      IF (NBAN.LT.IP) IP=NBAN
```

```
      DO 40 J=1,IP
      SUM=A(I,J)
      KK=I+J-NBAN
      IF (KK.LE.0) KK=1
      II=I-1
      IF (KK.GT.II) GO TO 20
      DO 10K=KK,II
      SUM=SUM-A(K,1)*A(K,I+1-K)*A(K,I+J-K)
   10 CONTINUE
   20 IF (J.EQ.1) GO TO 30
      A(I,J)=SUM/PARA
      GO TO 40
   30 PARA=SUM
      IF (ABS(SUM).LE.0.00000001) GO TO 60
      A(I,J)=SUM
   40 CONTINUE
   50 CONTINUE
      RETURN
   60 WRITE (6,100) I,J,PARA
      STOP
  100 FORMAT (10X,'LA MATRIZ SE HACE SINGULAR'//10X,'EN EL ELEMENTO',
     *       ' A(',I3,',',I3,') =',F15.12)
      END
```

```
C     ***********************************************************************
C     ***********************************************************************
C     **                                                                   **
C     **                 M A R C - F L U P O T                             **
C     **                                                                   **
C     **    ESTE PROGRAMA RESUELVE PROBLEMAS DE FLUJO POTENCIAL            **
C     **    BIDIMENSIONAL, EN ESTADO PERMANENTE, CON FLUJO                 **
C     **    COMPRESIBLE O INCOMPRESIBLE, POR EL METODO DE                  **
C     **    ELEMENTOS FINITOS.                                             **
C     **                                                                   **
C     **    REALIZADO POR: ERNESTO MARTIN DEL CAMPO V.                     **
C     **                 ABRIL 1982                                        **
C     **                                                                   **
C     ***********************************************************************
C     ***********************************************************************
C
C     ***********************************************************************
C     *                                                                     *
C     *                    #DATOS DE ENTRADA#                               *
C     *                                                                     *
C     *     NES    =0  SI SE QUIERE REVISAR LOS DATOS                       *
C     *            =1  SI NO SE QUIERE REVISAR LOS DATOS                    *
C     *     NNO    =   NUMERO TOTAL DE NODOS                                *
C     *     NEL    =   NUMERO TOTAL DE ELEMENTOS                            *
C     *     NCFN   =   NUMERO DE NODOS CON CONDICION DE                     *
C     *                FRONTERA DE NEUMANN                                  *
C     *     NCFD   =   NUMERO DE NODOS CON CONDICION DE                     *
C     *                FRONTERA DE DIRICHLET                                *
C     *     NEFN   =   NUMERO DE ELEMNTOS DE FRONTERA DE                    *
C     *                CONDICION DE FRONTERA DE NEUMANN                     *
C     *     NNE    =   NUMERO DE NODOS QUE ESTAN EN LAS                     *
C     *                ESQUINAS DE LOS TRIANGULOS                           *
C     *     LCR    =   NUMERO DE LINEAS EQUIPOTENCIALES                     *
C     *     NBAN   =   ANCHO DE BANDA DE LA MATRIZ GLOBAL                   *
C     *     AMAC   =   NUMERO DE MACH ALEJADO DEL CUERPO                    *
C     *     B      =   FACTOR ISOENTROPICO                                  *
C     *     IMAX   =   MAXIMO NUMERO DE ITERACIONES PERMITIDAS              *
C     *     ERR    =   MAXIMO ERROR PERMITIDO EN LA DIFERENCIA              *
C     *                DE UNA ITERACION A OTRA                              *
C     *     NENN   =   DISTRIBUCION DE NODOS EN CADA ELEMENTO               *
C     *     NODO   =   NUMERO DE NODO EN ESQUINA                            *
C     *     XNODO  =   COORDENADA X DE LOS NODOS EN ESQUINA                 *
C     *     YNODO  =   COORDENADA Y DE LOS NODOS EN ESQUINA                 *
C     *     NODE   =   NUMERO DE NODO CON CONDICION DE                      *
C     *                FRONTERA DE NEUMANN                                  *
C     *     VELX   =   VELOCIDAD EN LA DIRECCION X                          *
C     *     VELY   =   VELOCIDAD EN LA DIRECCION Y                          *
C     *     ANOR1  =   COMPONENTE DE LA NORMAL EN X                         *
C     *     ANOR2  =   COMPONENTE DE LA NORMAL EN Y                         *
C     *     NOD    =   NUMERO DE NODO CON CONDICION DE                      *
C     *                FRONTERA DE DIRICHLET                                *
C     *     MODO   =1  INDICADOR DE NODO DE FRONTERA                        *
C     *     VAL    =   CONDICION DE FRONTERA DE DIRICHLET                   *
C     *     ALC    =   VALOR DE LAS LINEAS EQUIPOTENCIALES                  *
C     *                                                                     *
C     ***********************************************************************
```

```
      DIMENSION NENN(250,6),XNODE(250),YNODE(250),MODE(250),NODO(100),
     *          XNODO(100),YNODO(100),NODE(150),VELX(150),VELY(150),
     *          ANOR1(50),ANOR2(50),NOD(50),MODO(50),VAL(50),XL(6),YL(6),
     *          AL1(6),AL2(6),AL3(6),ALC(75)
C
C     LEE LOS PARAMETROS DEL PROGRAMA
C
      READ (5,/) NES
      READ (5,/) NNO,NEL,NCFN,NCFD,NEFN,NNE,LCR,NBAN
      READ (5,/) AMAC,B,IMAX,ERR
C
C     LEE LA DISTRIBUCION DE NODOS EN CADA ELEMENTO
C
      READ (5,/) ((NENN(I,J),J=1,6),I=1,NEL)
C
C     LEE LAS COORDENADAS DE LOS NODOS EN ESQUINA
C
      READ (5,/) (NODO(I),XNODO(I),YNODO(I),I=1,NNE)
      IF (NCFN.LE.0) GO TO 1
C
C     LEE LAS CONDICIONES DE FRONTERA DE NEUMANN
C
      READ (5,/) (NODE(I),VELX(I),VELY(I),I=1,NCFN)
      READ (5,/) (ANOR1(I),ANOR2(I),I=1,NEFN)

      LEE LAS CONDICIONES DE FRONTERA DE DIRICHLET
C
    1 READ (5,/) (NOD(I),MODO(I),VAL(I),I=1,NCFD)
C
C     LEE LOS VALORES DE LAS LINEAS EQUIPOTENCIALES
C
      READ (5,/) (ALC(I),I=1,LCR)
C
C     CALCULA LAS COORDENADAS DE LOS NODOS INTERMEDIOS
C
      DO 2 I=1,NNE
      K=NODO(I)
      XNODE(K)=XNODO(I)
      YNODE(K)=YNODO(I)
    2 CONTINUE
      DO 4 I=1,NEL
      DO 3 J=1,3
      K=NENN(I,J)
      XL(J)=XNODE(K)
      YL(J)=YNODE(K)
    3 CONTINUE
      XL(4)=(XL(1)+XL(2))/2.
      XL(5)=(XL(2)+XL(3))/2.
      XL(6)=(XL(1)+XL(3))/2.
      YL(4)=(YL(1)+YL(2))/2.
      YL(5)=(YL(2)+YL(3))/2.
      YL(6)=(YL(1)+YL(3))/2.
      DO 4 J=4,6
      K=NENN(I,J)
```

```
      XNODE(K)=XL(J)
      YNODE(K)=YL(J)
    4 CONTINUE
      DO 5 I=1,NNO
      MODE(I)=0.0
    5 CONTINUE
      DO 6 I=1,NCFD
      K=NOD(I)
      MODE(K)=MODO(I)
    6 CONTINUE
C
C     ASIGNA LOS VALORES DE LAS COORDENADAS DE AREA
C
      DO 7 I=1,6
      AL1(I)=0.0
      AL2(I)=0.0
    7 CONTINUE
      AL1(1)=1.
      AL1(4)=0.5
      AL1(6)=0.5
      AL2(2)=1.
      AL2(4)=0.5
      AL2(5)=0.5
      DO 8 I=1,6
      AL3(I)=1.-AL1(I)-AL2(I)
    8 CONTINUE
      IF (NES.EQ.1) GO TO 9
C
C     ESCRIBE LOS DATOS DEL PROGRAMA
C
      WRITE(6,100) AMAC,B,IMAX,ERR
      WRITE (6,101) NNO,NEL,NCFN,NCFD,NEFN,NNE
      WRITE (6,102) (I,(NENN(I,J),J=1,6),I=1,NEL)
      WRITE (6,103)
      WRITE (6,104) (I,MODE(I),XNODE(I),YNODE(I),I=1,NNO)
      WRITE (6,105)
      WRITE (6,106) (NODE(I),VELX(I),VELY(I),I=1,NCFN)
      WRITE (6,107)
      WRITE (6,108) (I,ANOR1(I),ANOR2(I),I=1,NEFN)
      WRITE (6,109)
      WRITE (6,110) (NOD(I),VAL(I),I=1,NCFD)
C
C     LLAMA A LA SUBRUTINA MAESTRA
C
    9 CALL ELFIN (NNO,NEL,NCFN,NCFD,NEFN,AMAC,B,IMAX,ERR,NENN,MODE,
     *            XNODE,YNODE,NODE,VELX,VELY,ANOR1,ANOR2,NOD,VAL,
     *            AL1,AL2,AL3,LCR,ALC,NBAN)
      CALL EXIT
  100 FORMAT (//5X,'NUMERO DE MACH =',F8.5,//5X,'FACTOR ISOENTROPICO =',
     *        F8.5,//5X,'NUMERO MAXIMO DE ITERACIONES =',I4,//5X,
     *        'MAXIMO ERROR PERMITIDO =',F7.6)
  101 FORMAT (////5X,'NUMERO TOTAL DE NODOS =',I4,//5X,'NUMERO ',
     *        'DE ELEMENTOS =',I4,//5X,'NUMERO DE CONDICIONES DE ',
     *        'DE FRONTERA DE DIRICHLET =',I4,//5X,'NUMERO DE ',
     *        'ELEMENTOS CON CONDICION DE FRONTERA DE NEUMAN =',
```

```
     *         I4,//5X,'NUMERO DE NODOS EN ESQUINA =',I4,////15X,
     *         'DISTRIBICION DE NODOS EN CADA ELEMENTO',//20X,
     *         'ELMT   1   2   3   4   5   6',//)
   2 FORMAT (20X,7I4)
 103 FORMAT (////28X,'COORDENADAS DE LOS NODOS',//20X,
     *         ' NODO MODO  COORD-X   COORD-Y',//)
 104 FORMAT (20X,2I5,2F10.5)
 105 FORMAT (////20X,'VALORES DE LAS VELOCIDADES EN',/24X,
     *         'LOS NODOS DE FRONTERA',//22X,' NODO   VEL-X     VEL-Y',//)
 106 FORMAT (22X,I5,2F10.5)
 107 FORMAT (////20X,'VALORES DE LAS NORMALES EN LOS',/24X,'ELE',
     *         'MENTOS DE FRONTERA',//22X,' ELMT NORMAL-1  NORMAL-2'//)
 108 FORMAT (22X,I5,2F10.5)
 109 FORMAT (////20X,'VALORES DE LAS CONDICIONES DE',/24X,
     *         'FRONTERA DE DIRICHLET',//26X,' NODO   VALOR'//)
 110 FORMAT (26X,I5,F10.5)
 111 FORMAT (////20X,'VALORES DE LAS COORDENADAS DE AREA',/28X,
     *         'EN CADA ELEMENTO',//22X,' NODO      L1          L2',
     *         '          L3',//)
 112 FORMAT (22X,I5,3F8.5)
     END
C
     SUBROUTINE ELFIN (NNO,NEL,NCFN,NCFD,NEFN,AMAC,B,IMAX,ERR,NENN,MODE
    *        ,XNODE,YNODE,NODE,VELX,VELY,ANOR1,ANOR2,NOD,VAL,AL1,AL2
    *        ,AL3,LCR,ALC,NBAN)
C    ***************************************************************
C    *                                                             *
     *    ESTA SUBRUTINA CONTROLA TODOS LOS CALCULOS QUE SE        *
     *    NECESITAN PARA LA SOLUCION DEL PROBLEMA,YA SEA            *
C    *    FLUJO COMPRESIBLE O INCOMPRESIBLE.                        *
C    *                                                             *
C    ***************************************************************
C
     DIMENSION MODE(250),XNODE(250),YNODE(250),NENN(250,6),PHI(250),
    *         AMP(250,250),AMPRA(180,180),AMPRN(180,180),PHIRN(180),
    *         PHIR1(180),COM(250),COMR(180),NOD(50),VAL(50),NODE(150),
    *         VELX(150),VELY(150),ANOR1(50),ANOR2(50),ANM(6,6),FN(3),
    *         AL1(6),AL2(6),AL3(6),PHIRA(180),FHI(6),XLIN(200),YLIN(200)
    *         ,ALC(75)
     NMP=NNO-NCFD
C
C    LIMPIA LAS MATRICES Y LOS VECTORES
C
     DO 1 I=U,NNO
     PHI(I)=0.0
     DO 1 J=1,NBAN
     AMP(I,J)=0.0
     AMPRN(I,J)=0.0
   1 CONTINUE
C
C    CALCULA LAS MATRICES DE COEFICIENTES PARA CADA ELEMENTO
C    Y LAS ENSAMBLA EN LA MATRIZ GLOBAL

     DO 5 I=1,NEL
     CALL ELMT (I,XNODE,YNODE,NENN,ANM)
```

```
      DO 4 J=1,6
      JJ=NENN(I,J)
      DO 3 K=J,6
      KK=NENN(I,K)
      LL=JJ
      IF (LL.LT.KK) GO TO 2
      LL=KK
      KK=JJ
    2 AMP(LL,KK-LL+1)=AMP(LL,KK-LL+1)+ANM(J,K)
    3 CONTINUE
    4 CONTINUE
    5 CONTINUE
      IF (NCFN.LE.0) GO TO 7
C
C     CALCULA EL VECTOR DE FLUJO SI EXISTE
C
      LL=1
      DO 7 I=1,NEFN
      CALL NEUMAN (I,LL,XNODE,YNODE,VELX,VELY,ANOR1,ANOR2,FN)
      JJ=LL
      DO 6 J=1,3
      KK=NODE(JJ)
      PHI(KK)=PHI(KK)+FN(J)
      JJ=JJ+1
    6 CONTINUE
      LL=LL+2
    7 CONTINUE
C
C     INTRODUCE LAS CONDICIONES DE FRONTERA DE DIRICHLET
C
      DO 10 II=1,NCFD
      I=NOD(II)
      JJ=NNO-I+1
      IF (JJ.GT.NBAN) JJ=NBAN
      DO 8 J=1,JJ
      IF (MODE(J+I-1).NE.0) GO TO 8
      PHI(J+I-1)=PHI(J+I-1)-AMP(I,J)*VAL(II)
    8 CONTINUE
      JJ=NBAN
      IF(JJ.GT.I) JJ=I
      DO 9 J=1,JJ
      IF (MODE(I-J+1).NE.0) GO TO 9
      PHI(I-J+1)=PHI(I-J+1)-AMP(I-J+1,J)*VAL(II)
    9 CONTINUE
      PHI(I)=VAL(II)
   10 CONTINUE
C
C     REDUCE LA MATRIZ Y EL VECTOR GLOBALES
C
      K=0
      DO 12 I=1,NNO
      IF (MODE(I).NE.0) GO TO 12
      K=K+1
      PHIR1(K)=PHI(I)
      PHIRN(K)=PHI(I)
```

```
      L=0
      JJ=NNO-I+1
      IF (JJ.GT.NBAN) JJ=NBAN
      DO 11 J=1,JJ
      IF (MODE(I+J-1).NE.0) GO TO 11
      L=L+1
      AMPRN(K,L)=AMP(I,J)
   11 CONTINUE
   12 CONTINUE
C
C     TRIANGULARIZA LA MATRIZ REDUCIDA
C
      CALL TRIBAN (NMP,NBAN,AMPRN)
C
C     RESUELVE EL SISTEMA DE ECUACIONES PARA FLUJO INCOMPRESIBLE
C
      CALL RESOLV (NMP,NBAN,AMPRN,PHIRN)
      CALL ERROR (ITER,ERR,IMAX,NNO,NMP,PHI,PHIRN,MODE
     *       ,PHIRA)
C
C     INICIA LAS ITERACIONES PARA FLUJO COMPRESIBLE
C
      ITER=0
   13 ITER=ITER+1
      IF (ITER.EQ.10001) GO TO 19
      DO 14 I=1,NNO
      COM(I)=0.0
   14 CONTINUE
C     CALCULA LOS TERMINOS NO LINEALES
C
      DO 16 N=1,NEL
      CALL NOLINE (N,AMAC,B,XNODE,YNODE,NENN,PHI,AL1,AL2,AL3,FHI)
      DO 15 J=1,6
      K=NENN(N,J)
      COM(K)=COM(K)+FHI(J)
   15 CONTINUE
   16 CONTINUE
      L=0
C
C     CALCULA EL NUEVO VECTOR DE FLUJO
C
      DO 17 I=1,NNO
      IF (MODE(I).NE.0) GO TO 17
      L=L+1
      COMR(L)=COM(I)
   17 CONTINUE
      DO 18 I=1,NMP
      PHIRN(I)=PHIR1(I)+COMR(I)
   18 CONTINUE
C
C     RESUELVE EL SISTEMA DE ECUACIONES PARA FLUJO COMPRESIBLE
C
      CALL RESOLV (NMP,NBAN,AMPRN,PHIRN)
C
```

```
C     CALCULA LA DIFERENCIA CON LA ITERACION ANTERIOR
C
      CALL ERROR (ITER,ERR,IMAX,NNO,NMP,PHI,PHIRN,MODE
     *           ,PHIRA)
      GO TO 13
C
C     CALCULA LAS LINEAS EQUIPOTENCIALES
C
   19 CALL LICOR (NENN,XNODE,YNODE,PHI,ALC,XLIN,YLIN,LCR,NEL)
      RETURN
      END
C
      SUBROUTINE ELMT (N,XNODE,YNODE,NENN,ANM)
C     ****************************************************************
C     *                                                              *
C     *      ESTA SUBRUTINA CALCULA LAS MATRICES DE COEFICIENTES     *
C     *      PARA CADA ELEMENTO, UTILIZANDO FUNCIONES DE INTERPO-    *
C     *      LACION CUADRATICA.                                      *
C     *                                                              *
C     ****************************************************************
C
      DIMENSION XNODE(250),YNODE(250),NENN(250,6),X(3),Y(3),ANM(6,6)
      DO 1 I=1,3
      K=NENN(N,I)
      X(I)=XNODE(K)
      Y(I)=YNODE(K)
    1 CONTINUE
      DET=X(2)*Y(3)-X(3)*Y(2)+X(3)*Y(1)-X(1)*Y(3)+X(1)*Y(2)-X(2)*Y(1)
      B1=(Y(2)-Y(3))/DET
      B2=(Y(3)-Y(1))/DET
      B3=(Y(1)-Y(2))/DET
      C1=(X(3)-X(2))/DET
      C2=(X(1)-X(3))/DET
      C3=(X(2)-X(1))/DET
      Z1=B1*B1+C1*C1
      Z2=B2*B2+C2*C2
      Z3=B3*B3+C3*C3
      Z12=B1*B2+C1*C2
      Z13=B1*B3+C1*C3
      Z23=B2*B3+C2*C3
      AREA=DET/2.
      H=AREA/3.
      ANM(1,1)=3.*H*Z1
      ANM(1,2)=-Z12*H
      ANM(1,3)=-Z13*H
      ANM(1,4)=4.*Z12*H
      ANM(1,5)=0.0
      ANM(1,6)=4.*Z13*H
      ANM(2,2)=3.*Z2*H
      ANM(2,3)=-Z23*H
      ANM(2,4)=4.*Z12*H
      ANM(2,5)=4.*Z23*H
      ANM(2,6)=0.0
      ANM(3,3)=3.*Z3*H
      ANM(3,4)=0.0
```

```
      ANM(3,5)=4.*Z23*H
      ANM(3,6)=4.*Z13*H
      ANM(4,4)=8.*H*(Z1+Z2+Z12)
      ANM(4,5)=4.*H*(Z2+Z12+2.*Z13+Z23)
      ANM(4,6)=4.*H*(Z1+Z12+Z13+2.*Z23)
      ANM(5,5)=8.*H*(Z2+Z3+Z23)
      ANM(5,6)=4.*H*(Z3+2.*Z12+Z13+Z23)
      ANM(6,6)=8.*H*(Z1+Z3+Z13)
      RETURN
      END
C
      SUBROUTINE ERROR (ITER,ERR,IMAX,NNO,NMP,PHI,PHIRN,MODE
     *                 ,PHIRA)
C     ****************************************************************
C     *                                                              *
C     *     ESTA SUBRUTINA CALCULA LA DIFERENCIA ENTRE EL VALOR      *
C     *     DE LA ITERACION ANTERIOR Y LA NUEVA, POR MEDIO DEL       *
C     *     ERROR RAIZ MEDIO CUADRATICO.                             *
C     *                                                              *
C     ****************************************************************
C
      DIMENSION PHI(250),PHIRN(180),PHIRA(180),MODE(250)
      IF (ITER.GT.0) GO TO 3
      L=0
      DO 1 I=1,NNO
      IF (MODE(I).NE.0) GO TO 1
      L=L+1
      PHI(I)=PHIRN(L)
    1 CONTINUE
      DO 2 I=1,NMP
      PHIRA(I)=PHIRN(I)
    2 CONTINUE
      WRITE (6,100)
      WRITE (6,200) (I,PHI(I),I=1,NNO)
      GO TO 7
    3 ERMEC=0.
      EMECRE=0.0
      DO 4 I=1,NMP
      ERMEC=ERMEC+(PHIRN(I)-PHIRA(I))**2.
      EMECRE=EMECRE+((PHIRN(I)-PHIRA(I))/PHIRA(I))**2.
    4 CONTINUE
      ERMEC=SQRT(ERMEC/NMP)
      EMECRE=SQRT(EMECRE/NMP)
      L=0
      DO 5 I=1,NNO
      IF (MODE(I).NE.0) GO TO 5
      L=L+1
      PHI(I)=PHIRN(L)
    5 CONTINUE
      WRITE (6,300) ITER,ERMEC,EMECRE
      WRITE (8,/) ITER
      IF (EMECRE.LE.ERR) GO TO 8
      IF (ITER.GE.IMAX) GO TO 9
      DO 6 I=1,NMP
      PHIRA(I)=PHIRN(I)
```

```
    6 CONTINUE
    7 RETURN
    8 WRITE (6,400)
      WRITE (6,500)
      WRITE (6,200) (I,PHI(I),I=1,NNO)
      ITER=10000
      RETURN
    9 WRITE (6,600)
      WRITE (6,500)
      WRITE (6,200) (I,PHI(I),I=1,NNO)
      STOP
  100 FORMAT (////20X,'VALORES DE LA VELOCIDAD POTENCIAL',/27X,
     *         'SIN COMPRESIBILIDAD'//)
  200 FORMAT (22X,'PHI(',I3,') =',E18.12)
  300 FORMAT (/5X,'NO. ITERACION =',I3,4X,'ERR.M.C. =',
     *       E18.12,4X,'ERR.M.C.R. =',E18.12,/)
  500 FORMAT (//20X,'VALORES DE LA VELOCIDAD POTENCIAL',/
     *         ,21X,'OBTENIDOS EN LA ULTIMA ITERACION.',//)
  400 FORMAT (//10X,'JJJJ EL SIGUIENTE ES EL RESULTADO FINAL ',
     *         'JJJJ'/)
  600 FORMAT (//10X,'JJJJ NO CONVERGE EN EL MAXIMO NUMERO DE ',
     *         'ITERACIONES JJJJ'//)
      END
C
      SUBROUTINE LICOR (NENN,XNODE,YNODE,FAS,CAL,XLIN,YLIN,LCR,NEL)
C     ******************************************************************
C     *                                                                *
C     *      ESTA SUBRUTINA CALCULA LINEAS EQUIPOTENCIALES             *
C     *      INTERPOLANDO CUADRATICAMENTE DENTRO DE CADA               *
C     *      ELEMENTO.                                                 *
C     *                                                                *
C     ******************************************************************
C
      DIMENSION NENN(250,6),XNODE(250),YNODE(250),FAS(250),CAL(100),
     *          XAI(3),XLIN(200),YLIN(200)
      DO 29 M=1,LCR
      N=0
      DO 25 I=1,NEL
      L=0
      II=NENN(I,1)
      JJ=NENN(I,2)
      KK=NENN(I,3)
      LL=NENN(I,4)
      MM=NENN(I,5)
      NN=NENN(I,6)
      IF (FAS(II).GE.CAL(M).AND.FAS(JJ).LE.CAL(M).OR.
     *    FAS(II).LE.CAL(M).AND.FAS(JJ).GE.CAL(M).OR.
     *    FAS(II).GE.CAL(M).AND.FAS(KK).LE.CAL(M).OR.
     *    FAS(II).LE.CAL(M).AND.FAS(KK).GE.CAL(M)) GO TO 1
      GO TO 11
    1 DO 19 J=1,3
      IF (J.NE.1) GO TO 2
      IA=II
      IB=JJ
      IC=LL
```

```
      GO TO 4
    2 IF (J.NE.2) GO TO 3
      IA=JJ
      IB=KK
      IC=MM
      GO TO 4
    3 IF (J.NE.3) GO TO 19
      IA=II
      IB=KK
      IC=NN
    4 IF (FAS(IA).EQ.CAL(M).OR.FAS(IB).EQ.CAL(M).OR.
     *    FAS(IC).EQ.CAL(M)) GO TO 5
      GO TO 8
    5 IF (FAS(IA).NE.CAL(M)) GO TO 6
      N=N+1
      XLIN(N)=XNODE(IA)
      YLIN(N)=YNODE(IA)
    6 IF (FAS(IB).NE.CAL(M)) GO TO 7
      N=N+1
      XLIN(N)=XNODE(IB)
      YLIN(N)=YNODE(IB)
    7 IF (FAS(IC).NE.CAL(M)) GO TO 19
      N=N+1
      XLIN(N)=XNODE(IC)
      YLIN(N)=YNODE(IC)
      GO TO 19
    8 IF (FAS(IA).GT.CAL(M).AND.FAS(IB).LT.CAL(M).OR.
     *    FAS(IA).LT.CAL(M).AND.FAS(IB).GT.CAL(M)) GO TO 9
      GO TO 19
    9 N=N+1
      L=L+1
      IF (XNODE(IA).EQ.XNODE(IB)) GO TO 12
      D1=XNODE(IA)*XNODE(IA)-XNODE(IA)*XNODE(IB)-XNODE(IA)*XNODE(IC)
     *    +XNODE(IC)*XNODE(IB)
      D2=XNODE(IC)*XNODE(IC)-XNODE(IC)*XNODE(IB)-XNODE(IC)*XNODE(IA)
     *    +XNODE(IA)*XNODE(IB)
      D3=XNODE(IB)*XNODE(IB)-XNODE(IB)*XNODE(IA)-XNODE(IB)*XNODE(IC)
     *    +XNODE(IA)*XNODE(IC)
      AA=FAS(IA)/D1+FAS(IC)/D2+FAS(IB)/D3
      BB=-FAS(IA)*(XNODE(IC)+XNODE(IB))/D1-FAS(IC)*(XNODE(IA)+XNODE(IB))
     *    /D2-FAS(IB)*(XNODE(IA)+XNODE(IC))/D3
      CC=FAS(IA)*XNODE(IC)*XNODE( IB)/D1+FAS(IC)*XNODE(IA)*XNODE(IB)/D2+
     *    FAS(IB)*XNODE(IA)*XNODE(IC)/D3-CAL(M)
      IF (AA.EQ.0) GO TO 13
      XL1=(-BB+SQRT(BB*BB-4.*AA*CC))/(2.*AA)
      XL2=(-BB-SQRT(BB*BB-4.*AA*CC))/(2.*AA)
      IF (XL1.GT.XNODE(IA).AND.XL1.LT.XNODE(IB).OR.
     *    XL1.LT.XNODE(IA).AND.XL1.GT.XNODE(IB)) GO TO 10
      GO TO 11
   10 XLIN(N)=XL1
      GO TO 14
   11 XLIN(N)=XL2
      GO TO 14
   12 XLIN(N)=XNODE(IA)
      GO TO 14
```

```
13 XLIN(N)=-CC/BB
14 IF (YNODE(IA).EQ.YNODE(IB)) GO TO 17
   D1=YNODE(IA)*YNODE(IA)-YNODE(IA)*YNODE(IB)-YNODE(IA)*YNODE(IC)
  *    +YNODE(IC)*YNODE(IB)
   D2=YNODE(IC)*YNODE(IC)-YNODE(IC)*YNODE(IB)-YNODE(IC)*YNODE(IA)
  *    +YNODE(IA)*YNODE(IB)
   D3=YNODE(IB)*YNODE(IB)-YNODE(IB)*YNODE(IA)-YNODE(IB)*YNODE(IC)
  *    +YNODE(IA)*YNODE(IC)
   AA=FAS(IA)/D1+FAS(IC)/D2+FAS(IB)/D3
   BB=-FAS(IA)*(YNODE(IC)+YNODE(IB))/D1-FAS(IC)*(YNODE(IA)+YNODE(IB))
  *    /D2-FAS(IB)*(YNODE(IA)+YNODE(IC))/D3
   CC=FAS(IA)*YNODE(IC)*YNODE(IB)/D1+FAS(IC)*YNODE(IA)*YNODE(IB)/D2+
  *    FAS(IB)*YNODE(IA)*YNODE(IC)/D3-CAL(M)
   IF (AA.EQ.0) GO TO 18
   YL1=(-BB+SQRT(BB*BB-4.*AA*CC))/(2.*AA)
   YL2=(-BB-SQRT(BB*BB-4.*AA*CC))/(2.*AA)
   IF (YL1.GT.YNODE(IA).AND.YL1.LT.YNODE(IB).OR.
  *     YL1.LT.YNODE(IA).AND.YL1.GT.YNODE(IB)) GO TO 15
   GO TO 16
15 YLIN(N)=YL1
   GO TO 19
16 YLIN(N)=YL2
   GO TO 19
17 YLIN(N)=YNODE(IA)
   GO TO 19
18 YLIN(N)=-CC/BB
19 CONTINUE
20 IF (L.EQ.0) GO TO 25
   XAI(1)=XLIN(N-1)+(XLIN(N)-XLIN(N-1))/3.
   XAI(2)=XLIN(N-1)+2.*(XLIN(N)-XLIN(N-1))/3.
   DO 24 J=1,2
   XI=XAI(J)
   N=N+1
   DET=XNODE(II)*YNODE(JJ)-XNODE(JJ)*YNODE(II)+XNODE(JJ)*YNODE(KK)-
  *     XNODE(KK)*YNODE(JJ)+XNODE(KK)*YNODE(II)-XNODE(II)*YNODE(KK)
   A1=(XNODE(JJ)*YNODE(KK)-XNODE(KK)*YNODE(JJ))/DET
   A2=(XNODE(KK)*YNODE(II)-XNODE(II)*YNODE(KK))/DET
   A3=(XNODE(II)*YNODE(JJ)-XNODE(JJ)*YNODE(II))/DET
   B1=(YNODE(JJ)-YNODE(KK))/DET
   B2=(YNODE(KK)-YNODE(II))/DET
   B3=(YNODE(II)-YNODE(JJ))/DET
   C1=(XNODE(KK)-XNODE(JJ))/DET
   C2=(XNODE(II)-XNODE(KK))/DET
   C3=(XNODE(JJ)-XNODE(II))/DET
   AA=2.*(FAS(II)*C1*C1+FAS(JJ)*C2*C2+FAS(KK)*C3*C3+FAS(LL)*C1*C2*2.+
  *    2.*FAS(MM)*C2*C3+2.*FAS(NN)*C1*C3)
   BB=FAS(II)*(4.*A1*C1-C1)+FAS(JJ)*(4.*A2*C2-C2)+FAS(KK)*(4.*A3*C3-
  *    C3)+4.*FAS(LL)*(A1*C2+A2*C1)+4.*FAS(MM)*(A2*C3+A3*C2)+
  *    4.*FAS(NN)*(A1*C3+A3*C1)+4.*XI*(FAS(II)*B1*C1+FAS(JJ)*B2*C2
  *    +FAS(KK)*B3*C3+FAS(LL)*(B1*C2+B2*C1)+FAS(MM)*(B2*C3+B3*C2)
  *    +FAS(NN)*(B1*C3+B3*C1))
   CC=2.*XI*XI*(FAS(II)*B1*B1+FAS(JJ)*B2*B2+FAS(KK)*B3*B3+2.*FAS(LL)*
  *    B1*B2+2.*FAS(MM)*B2*B3+2.*FAS(NN)*B1*B3)+XI*(FAS(II)*(4.*
  *    A1*B1-B1)+FAS(JJ)*(4.*A2*B2-B2)+FAS(KK)*(4.*A3*B3-B3)+
  *    4.*FAS(LL)*(A1*B2+A2*B1)+4.*FAS(MM)*A2*B3+A3*B2)+4.*FAS(NN)*(A1
```

```
     *     *B3+A3*B1)+FAS(II)*(2.*A1*A1-A1)+FAS(JJ)*(2.*A2*A2-A2)+FAS(KK)
     *     *(2.*A3*A3-A3)+4.*FAS(LL)*A1*A2+4.*FAS(MM)*A2*A3+4.*FAS(NN)*A1
     *     *A3-CAL(M)
           IF (AA.EQ.0) GO TO 23
           YL1=(-BB+SQRT(BB*BB-4.*AA*CC))/(2.*AA)
           YL2=(-BB-SQRT(BB*BB-4.*AA*CC))/(2.*AA)
           IF (YL1.GT.YNODE(II).AND.YL1.LT.YNODE(KK).OR.
     *      YL1.LT.YNODE(II).AND.YL1.GT.YNODE(KK).OR.
     *      YL1.GT.YNODE(II).AND.YL1.LT.YNODE(JJ).OR.
     *      YL1.LT.YNODE(II).AND.YL1.GT.YNODE(JJ)) GO TO 21
           GO TO 22
   21 YLIN(N)=YL1
           XLIN(N)=XI
           GO TO 24
   22 YLIN(N)=YL2
           XLIN(N)=XI
           GO TO 24
   23 YLIN(N)=-CC/BB
           XLIN(N)=XI
   24 CONTINUE
   25 CONTINUE
           MMM=N-1
           LLL=N
           DO 28 III=1,MMM
           KKK=III+1
           DO 27 JJJ=KKK,N
           PIT=XLIN(III)-XLIN(JJJ)
           TIP=YLIN(III)-YLIN(JJJ)
           IF (ABS(PIT).GT.0.000000001.OR.ABS(TIP).GT.0.000000001) GO TO 26
           LLL=LLL-1
           XLIN(JJJ)=100000.
           YLIN(JJJ)=LLL*100000.
   26 IF (XLIN(III).LE.XLIN(JJJ)) GO TO 27
           S=XLIN(III)
           T=YLIN(III)
           XLIN(III)=XLIN(JJJ)
           YLIN(III)=YLIN(JJJ)
           XLIN(JJJ)=S
           YLIN(JJJ)=T
   27 CONTINUE
   28 CONTINUE
           WRITE(6,100) CAL(M)
           WRITE (6,101) (I,XLIN(I),YLIN(I),I=1,LLL)
   29 CONTINUE
  100 FORMAT (///32X,'PUNTOS EN LOS QUE LA FUNCION DE CORRIENTE',
     *          //32X,'ES CONSTANTE PARA:',//45X,'PHI =',E18.12,
     *          //33X,' PUNTO          COORD-X            COORD-Y'/)
  101 FORMAT (34X,I3,1X,E18.12,1X,E18.12)
           END
C
           SUBROUTINE NEUMAN (I,LL,XNODE,YNODE,VELX,VELY,ANOR1,
C          ***************************************************************
           *                                                             *
           *      ESTA SUBRUTINA CALCULA EL VECTOR DE FLUJO DEBIDO       *
C          *      A LAS CONDICIONES DE FRONTERA DE NEUMANN.              *
C          *                                                             *
C          ***************************************************************
```

```
C
     *          ANOR2,FN)
      DIMENSION NODE(150),XNODE(250),YNODE(250),VELX(150),VELY(150),
     *          ANOR1(50),ANOR2(50),FN(3),X(3),Y(3),VX(3),VY(3)
      II=LL
      DO 10 K=1,3
      J=NODE(II)
      X(K)=XNODE(J)
      Y(K)=YNODE(J)
      VX(K)=VELX(II)
      VY(K)=VELY(II)
      II=II+1
   10 CONTINUE
      AN1=ANOR1(I)
      AN2=ANOR2(I)
      DIS=SQRT((X(2)-X(1))**2.+(Y(2)-Y(1))**2.)
      FN(1)=DIS/15.*(AN1*(4.*VX(1)+2.*VX(2)-VX(3))
     *              +AN2*(4.*VY(1)+2.*VY(2)-VY(3)))
      FN(2)=DIS/15.*(AN1*(2.*VX(1)+16.*VX(2)+2.*VX(3))
     *              +AN2*(2.*VY(1)+16.*VY(2)+2.*VY(3)))
      FN(3)=DIS/15.*(AN1*(-VX(1)+2.*VX(2)+4.*VX(3))
     *              +AN2*(-VY(1)+2.*VY(2)+4.*VY(3)))
      RETURN
      END
C
      SUBROUTINE NOLINE (N,AMAC,B,XNODE,YNODE,NENN,PHI,AL1,AL2,AL3,FHI)
C     ****************************************************************
C     *                                                              *
C     *      ESTA SUBRUTINA CALCULA LOS TERMINOS NO LINEALES         *
C     *      DE LA ECUACION PARA FLUJO COMPRESIBLE, POR MEDIO        *
C     *      DE LA APROXIMACION DE ELEMENTOS FINITOS.                *
C     *                                                              *
C     ****************************************************************
C
      DIMENSION XNODE(250),YNODE(250),NENN(250,6),PHI(250),AL1(6),
     *          AL2(6),AL3(6),F(6),G(6,6),FHI(6),PLI(6),X(3),Y(3)
      DO 10 I=1,3
      K=NENN(N,I)
      X(I)=XNODE(K)
      Y(I)=YNODE(K)
   10 CONTINUE
      DO 20 I=1,6
      K=NENN(N,I)
      PLI(I)=PHI(K)
   20 CONTINUE
      DET=X(2)*Y(3)-X(3)*Y(2)+X(3)*Y(1)-X(1)*Y(3)+X(1)*Y(2)-X(2)*Y(1)
      B1=(Y(2)-Y(3))/DET
      B2=(Y(3)-Y(1))/DET
      B3=-B1-B2
      C1=(X(3)-X(2))/DET
      C2=(X(1)-X(3))/DET
      C3=-C1-C2
      S2=4.*PLI(1)*B1*B1+4.*PLI(2)*B2*B2+4.*PLI(3)*B3*B3+8.*PLI(4)
     *   *B1*B2+8.*PLI(5)*B2*B3+8.*PLI(6)*B1*B3
      S4=4.*PLI(1)*C1*C1+4.*PLI(2)*C2*C2+4.*PLI(3)*C3*C3+8.*PLI(4)
```

```
*    *C1*C2+8.*PLI(5)*C2*C3+8.*PLI(6)*C1*C3
      S5=4.*(PLI(1)*B1*C1+PLI(2)*B2*C2+PLI(3)*B3*C3+PLI(4)*(B1*C2
*    +B2*C1)+PLI(5)*(B2*C3+B3*C2)+PLI(6)*(B1*C3+B3*C1))
      DO 30 I=1,6
      S1=PLI(1)*B1*(4.*AL1(I)-1.)+PLI(2)*B2*(4.*AL2(I)-1.)
*    +PLI(3)*B3*(4.*AL3(I)-1.)+4.*PLI(4)*(B1*AL2(I)+B2*AL1(I))
*    +PLI(5)*4.*(B2*AL3(I)+B3*AL2(I))
*    +4.*PLI(6)*(B1*AL3(I)+B3*AL1(I))
      S3=PLI(1)*C1*(4.*AL1(I)-1.)+PLI(2)*C2*(4.*AL2(I)-1.)
*    +PLI(3)*C3*(4.*AL3(I)-1.)+4.*PLI(4)*(C1*AL2(I)+C2*AL1(I))
*    +PLI(5)*4.*(C2*AL3(I)+C3*AL2(I))
*    +4.*PLI(6)*(C1*AL3(I)+C3*AL1(I))
      Q2=S1*S1+S3*S3
      A2=1.-B*AMAC*AMAC*(1.-Q2)
      F(I)=(S1*S1*S2+S3*S3*S4+2.*S1*S3*S5)/A2*AMAC*AMAC
   30 CONTINUE
      AREA=DET/2.
      DO 40 I=1,6
      DO 40 J=1,6
      G(I,J)=0.0
   40 CONTINUE
      DO 50 I=1,3
      G(I,I)=AREA/309
      G(I+3,I+3)=AREA*8./45.
   50 CONTINUE
      G(1,2)=-AREA/180.
      G(1,3)=G(1,2)
      G(2,3)=G(1,2)
      G(4,5)=AREA*4./45.
      G(4,6)=G(4,5)
      G(5,6)=G(4,5)
      G(1,5)=-AREA/45.
      G(2,6)=G(1,5)
      G(3,4)=G(1,5)
      DO 60 I=1,6
      DO 60 J=1,6
      IF(I.EQ.J) GO TO 60
      G(J,I)=G(I,J)
   60 CONTINUE
      DO 70 I=1,6
      FHI(I)=0.0
   70 CONTINUE
      DO 80 I=1,6
      DO 80 J=1,6
      FHI(I)=FHI(I)+G(I,J)*F(J)
   80 CONTINUE
      RETURN
      END
```

REFERENCIAS

Argyris, J.H. (1963); "Recent Advances in Matrix Method of Structural Analysis", Pergamon Press, Elmsford, New York.

Aubin, J.P. (1972); "Approximation of Elliptic Boundary Value Problems", Wiley-Interscience, New York.

Babuska, I. and Aziz, A.K. (1972); Lectures on the Mathematical Foundations of the Finite Element Method, "Mathematical Foundations of the Finite Element Method with Applications to Partial Differential Equations", A.K. Aziz (ed), Academic Press, New York.

Carey, G.F. (1975); "A Dual Perturbation Expansion and Variational Solution for Compressible flows Using Finite Elements in Fluids, Vol. 2, ed. Gallagher, Oden, Taylor and Zienkiewicz, John Wiley & Sons.

Ciarlet, P.G. and Raviart, P.A. (1972); "General Lagrange and Hermite Interpolation in R^n with Applications to the Finite Element Method", Arch. Rat. Mech. Anal. 46.

Clough, R.W. (1960); "The Finite Element Method in Plane Stress Analysis", Proceedings of 2nd Conf. on Electronic Computation, American Society of Civil Engineers, Pittsburgh, Penn.

Cook, R.D. (1974); "Concepts and Applications of Finite Element Analysis", John Wiley & Sons, New York.

Chung, T.J. (1978); "Finite Element Analysis in Fluid Dynamics", McGraw Hill Co.,

Evans, M.E. and Harlow, F.H. (1957); "The Particle-in-Cell Method for Hydrodynamic Calculations", Los Alamos Scientific Lab., Report No. LA-2139, Los Alamos, New Mexico.

Finlayson, B.A. (1972); "The Method of Weighted Residuals and Variational Princples", Academic Press, New York.

Galerkin, B.G. (1915) "Rods and Plates", Series Occuring in Various Questions Concerning the Elastic Equilibrium of Rods and Plates (in Russian) Vestn, Inghenevov, Vol. 19.

Hess, J.L. (1975); "Review of Integral-Equation Techniques for Solving Potential-Flow Problems with Emphasis on the Surface-Source Method", Computer Methods.

Holman, J.P. (1972); "Heat Transfer", Mc Graw Hill Co., New York.

Lions, J.L. and Magenes, E. (1968), "Non-Homogeneous Boundary-Value Problems and Applications", Vol. 1 (Trans from 1968 French edition by P. Kenneth), Springer-Verlag, 1972.

Martín del Campo, E. y Sen, M. (1980); "Cálculo del Flujo Potencial Compresible por el Método de Elementos Finitos de Galerkin", Memorias VI Congreso, ed. Academia Nacional de Ingeniería, Querétaro, Qro., México.

Oden, J.T. (1972)"Finite Element of Nonlinear Continua", McGraw-Hill, New York.

Oden, J.T. and Reddy, J.N. (1976); "Introduction to Mathematical Theory of Finite Elements", John Wiley & Sons, New York.

Rayleigh, J.W.S. (1877); "Theory of Sound", 1st. ed. revised, Dover Publications Inc., New York, 1945.

Richtmyer, R.D. and Morton, K.W. (1967); "Difference Methods of Initial-Value Problems", 2nd ed., Interscience Publishers, New York.

Ritz, W. (1909); "Uber Eine Neve Methods Zur Losung Gewisser Variations-Probleme der Mathematischen Physik", J. Reine Angew. Math., Vol. 135.

Roache, P.J. (1972); "Computational Fluid Dynamics", Hermosa Publishers, Alburquerque, New Mexico.

Segerlind, L.J. (1976); "Applied Finite Elements Analysis", John Wiley & Sons Inc., New York.

Shen, S. (1977); "Finite Element Methods in Fluid Mechanics", Ann. Rev. Fluid Mech., Vol. 9.

Strang, G. and Fix, G. (1973); "An Analysis of Finite Element Methods", Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

Turner, MJ.J., Clough, R.W., Martin, H.C., and Topp, L.P. (1965); "Siffness and Deflection Analysis of Complex Structures", J. Aeron, Sci., 23, No. 9.

Zienkiewics, O.C. and Cheung, Y.K. (1965); "Finite Elements in the Solution of Field Problems", The Engineering.

DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.

EL METODO DEL ELEMENTO FINITO EN LA INGENIERIA

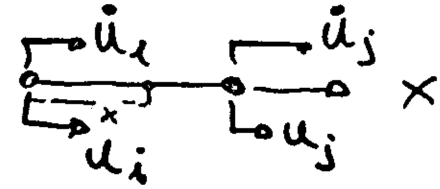
ECUACIONES DINAMICAS

DR. VICTOR HUGO MUCIÑO QUINTERO

FEBRERO, 1985

Palacio de Minería Calle de Tacuba 5 primer piso Deleg. Cuauhtémoc 06000 México, D.F. Tel.: 521-40-20 Apdo. Postal M-2285

ELASTODINAMICA



$$\{f\} = \{u\ v\ w\} = [N]\{d\}$$

$$\{\dot f\} = \{\dot u\ \dot v\ \dot w\} = [N]\{\dot d\}$$

$[N]$ = Funciones de Interpolación

$$\dot u_x = \left[\left(1-\tfrac{x}{L}\right)\ \left(\tfrac{x}{L}\right)\right]\begin{Bmatrix}\dot u_i\\ \dot u_j\end{Bmatrix}$$

si $\rho \equiv$ Densidad de Masa

$$T_e = \int_{Vol} \frac{\rho}{2}\{\dot f\}^T\{\dot f\}\,dV$$

$$T_e = \frac{1}{2}\{\dot d\}^T \int_{Vol} \rho [N]^T[N]\,dV\,\{\dot d\}$$

T_e, para un sistema holónomo, natural es una función cuadrática y homogenea

$$T_e = \frac{1}{2}\{\dot d\}^T[m]\{\dot d\}$$

$$\Rightarrow [m] = \int_{Vol} \rho [N]^T[N]\,dV \equiv \text{Matriz de masa DISTRIBUIDA}$$

$$T = \sum T_e = \sum \frac{1}{2}\{\dot d\}^T[m]\{\dot d\} = \frac{1}{2}\{\dot D\}^T[M]\{\dot D\}$$

La Función Disipación

$$F_e = \frac{1}{2}\{\dot d\}^T[c]\{\dot d\}\ ;\quad F = \frac{1}{2}\{\dot D\}^T[C]\{\dot D\}$$

La Función Lagrangiana queda definida por

$$L = T - \Pi_p$$

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial L}{\partial \dot{D}}\right\} - \left\{\frac{\partial L}{\partial D}\right\} + \left\{\frac{\partial F}{\partial \dot{D}}\right\} = 0$$

$\therefore$ $L \equiv$ Lagrangiano

$T \equiv$ E. Cinética

$\Pi_p \equiv$ E. Potencial

$F =$ Función de Rayleigh de Disipación

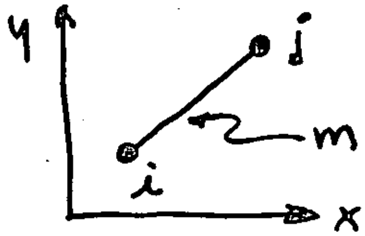
$$[M]\{\ddot{D}\} + [C]\{\dot{D}\} + [K]\{D\} = \{R\}$$

Ecuaciones de Movimiento para el caso Dinámico con amortiguamiento

En Fricción seca se puede aproximar

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K]$$

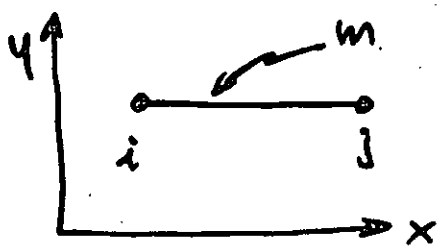
$\therefore$ α y β son empiricos (Experimentales posiblemente)



Barra

$$[m] = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \frac{m}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{m}{2} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{array}$$

Matriz de Masa Concentrada



Viga

$$[m] = \begin{bmatrix} \frac{m}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{array}$$

Problema de Valores Caracteristicos :

$$\{D\} = \{D_0\} \operatorname{sen} \omega t \,, \Rightarrow \{\ddot{D}\} = -\omega^2 \{D_0\} \operatorname{sen} \omega t$$

Sin Amortiguamiento

$$[M]\{\ddot{D}\} + [K]\{D\} = \{F(t)\}$$

$$[M]\{\ddot{D}\} + [K]\{D\} = \{0\} \quad \text{homogeneo}$$

$$\Rightarrow \left([K] - \omega^2[M]\right)\{D_0\} = \{0\} \Rightarrow \left[[A] - \lambda[I]\right]\{D_0\} = \{0\}$$

$$\left|[A] - \lambda[I]\right| = 0 \quad \text{Problema di valores característicos}$$

$$\therefore \lambda = \omega^2 \,, \quad [A] = [M]^{-1}[K]$$

DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.

EL METODO DEL ELEMENTO FINITO EN LA INGENIERIA

A N E X O S

FEBRERO, 1985

Palacio de Minería Calle de Tacuba 5 primer piso Deleg. Cuauhtémoc 06000 México, D.F. Tel.: 521-40-20 Apdo. Postal M-2285

79-DE-18

Design Improvement of a Friction Brake Plate Through Finite Element Analysis

V. H. MUCINO

V. PAVELIC

R. G. TASCHNER

The University of Wisconsin-Milwaukee,
Milwaukee, Wisc.

The finite element method is applied to conduct the stress analysis of the friction brake plate used in the rear axle system of agricultural tractors. External loads on the plate are considered to be applied to the spline and fixed boundary conditions at the friction material area. The original design of the friction plate is analyzed and shown to have an uneven distribution of load on the teeth of the spline, causing high stresses at some critical areas of the plate. Design changes are made on the analysis model, having as a primary interest the reduction of peak stresses to an acceptable level, without severe modifications to the original design. With a minimum of computer manipulations, the finite element model used yielded the best configuration of the brake plate for the given loads.

Contributed by the Design Engineering Division of The American Society of Mechanical Engineers for presentation at the Design Engineering Conference & Show, Chicago, Illinois, May 7-10, 1979. Manuscript received at ASME Headquarters February 22, 1979.

Copies will be available until February 1, 1980.

Design Improvement of a Friction Brake Plate Through Finite Element Analysis

V. H. MUCINO V. PAVELIC R. G. TASCHNER

NOMENCLATURE

A_f = flank area of the teeth
d_{ri} = radial displacement at the tip of the tooth (i)
d_{ti} = tangential displacement at the tip of the tooth (i)
f_i = load distribution factor
F_n = normal force acting on the flank of the teeth
F_r = radial force acting on the flank of the teeth
F_t = tangential component of the normal force (F_n)
m = slope of loading line in Goodman diagram
P_e = equivalent pressure on the flank of the teeth
r = stress ratio of alternating stress (s_{ai}) to mean stress (s_{mi})
S_{ai} = alternating stress at tooth (i)
S_{mi} = mean stress at tooth (i)
$S_{max,\ i}$ = maximum stress at tooth (i)
S_{vmi} = Von Mises criterion of failure
S_1, S_2, S_3 = principal stresses
T_i = torque carried by tooth (i)
T_{in} = input torque in the spline shaft
T_{pl} = torque carried by one friction plate
ϕ = pressure angle of the spline teeth

INTRODUCTION

The system considered in this analysis is a multiple disk brake, which is used in a typical rear axle of an agricultural tractor. The main objective of the analysis is the design improvement of the brake system which depends upon the performance of the friction plates. These friction plates are subject to fluctuating loads that may cause fatigue failure of the system. Therefore, the analysis is carried out having as primary interest the reduction of peak stresses occurring at the critical area of the friction plate.

In pursuing the objective it is desirable to keep the overall modifications to a minimum.

This paper demonstrates the application of the finite element method as an efficient tool to identify critically stressed areas of a typical friction plate, and also as a tool to qualitatively evaluate the design modifications proposed in order to reduce the critical stresses.

Fig. 1 shows the main components of the rear axle assembly which consists of a differential gear train (A), a clutch system (B), a dual brake system (C&C') and the planetary gear train systems (D&D'). The various components in the assembly of each brake system, are shown separately in Fig. 2.

The operation of a multiple disk brake system may be described briefly as follows: the friction plates rotate along with the shaft to which they are attached through the spline, and the steel plates are attached to the housing in such a way that rotation is prevented. Axial displacement is allowed for both the friction plates and steel plates. When hydraulic pressure is applied to the brake cylinder, the brake piston moves axially and presses the friction plates against the steel plates, the acting torque in the shaft is transmitted to the friction plates through the spline, and then transmitted to the steel plates through the friction material on the friction plates, the absorbed braking torque from the steel plates is finally transmitted to the housing which is attached to the frame of the tractor. The heat generated during the brake application is absorbed by coolant fluid which circulates on either side of the friction plate through the holes provided on the plate.

The braking loads imposed on the friction plates, induce high stress concentration at the root of the teeth in the spline, which are sub-

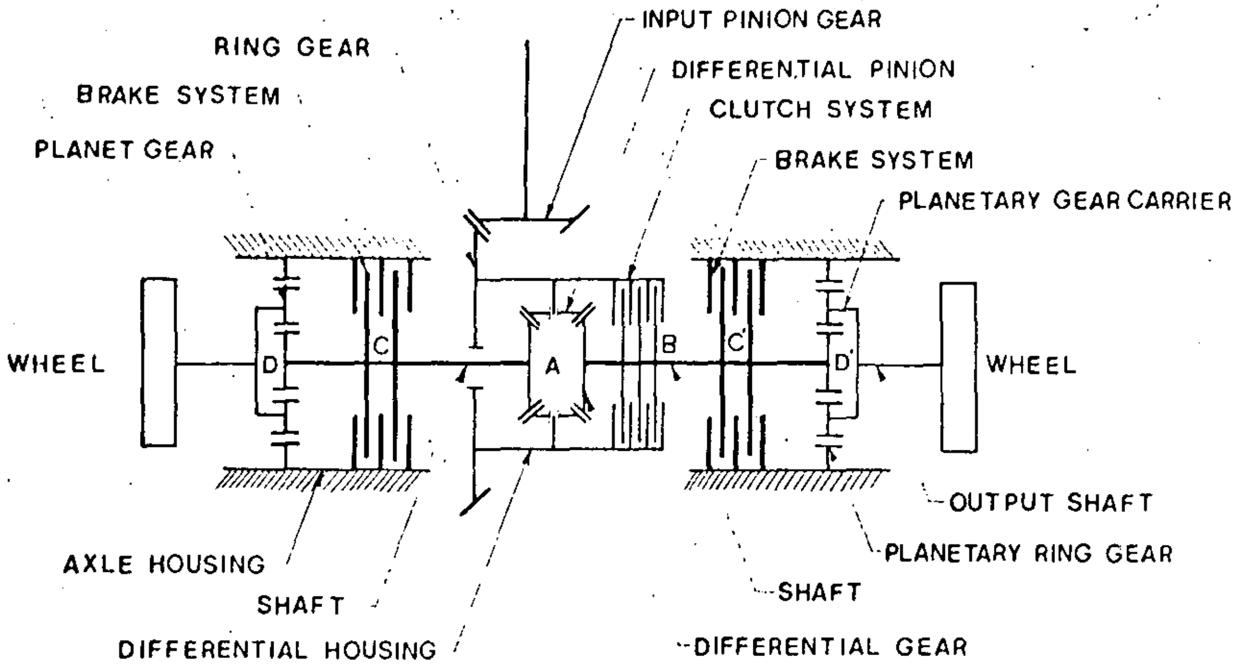


Fig. 1 Schematic view of a tractor rear axle assembly

ject to a stress variation ranging from zero value (idle mode) to some maximum value (brake application).

Fig. 3 shows schematically torques applied to the friction plate, the geometry of the spline, and the location of the coolant circulation holes.

LOADING CONSIDERATIONS

Due to the repetitive nature of the loads, these can be expressed by means of a static (mean) component, and a dynamic (alternating) component, for the purpose of analysis. These loads are distributed among the teeth on the friction plate, in such a way that the ratio of alternating stress to steady stress at any location of the plate is always constant. This is due to the fact that the load varies from zero to some maximum value in each brake application. However, the load that a particular tooth carries is not necessarily equal to the load carried by a different tooth in the spline.

Fig. 4 shows qualitatively the variation of stresses with respect to time, at three arbitrary locations of the friction plate. Also plotted in the same Fig. 4 is the variation of the load with respect to time. It can be appreciated that the maximum stresses at any of the locations shown are reached when the applied load is maximum, this is, the stress peaks are in phase with the load peaks.

Using the notation of Juvinall (1),[1] the stress ratio can be expressed as follows:

$$r = \frac{S_{ai}}{S_{mi}} \qquad (1)$$

where Sai is the alternating stress component Smi is the mean stress component and for the particular case in which the load varies from zero to a maximum value then r = 1; or

$$S_{ai} = S_{mi} \qquad (2)$$

Fig. 5 shows the Goodman diagram and the loading line for the teeth in the spline of the friction plate. The slope of the loading line is such that:

$$S_{max,i} = S_{mi} + S_{ai} \qquad (3)$$

by substituting the equality (2) in equation (3) it results

$$S_{max,i} = 2S_{mi}$$

therefore, the slope of the loading time in the Goodman diagram is

$$m = 2$$

[1] Underlined numbers in parentheses designate References at end of paper.

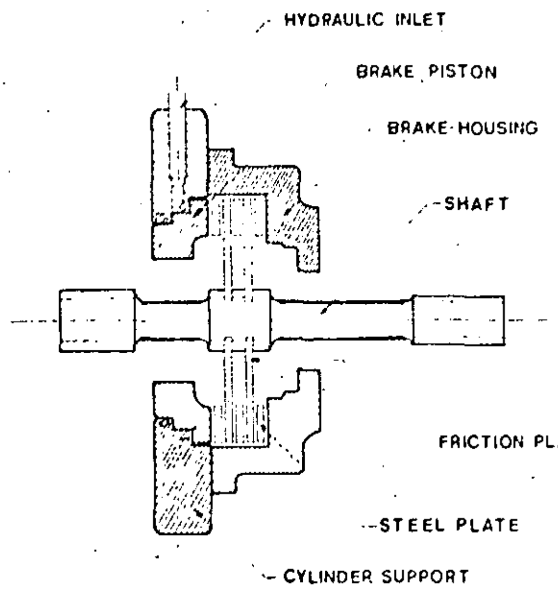


Fig. 2 Brake assembly system

Based on these stress relationships and for the particular case treated in this analysis, the following considerations can be made in order to formulate the finite element model.

1 From fatigue theory as treated by Sors (2), the alternating stress component must be as small as possible in order to improve the fatigue life of the part.
2 Due to the nature of the loads, and by inspection of equations (2) and (3), the reduction of the maximum peak stress at any location of the part will result in a reduction of the dynamic component of stress.
3 Since both the steel plates and friction plates are allowed to displace in the axial

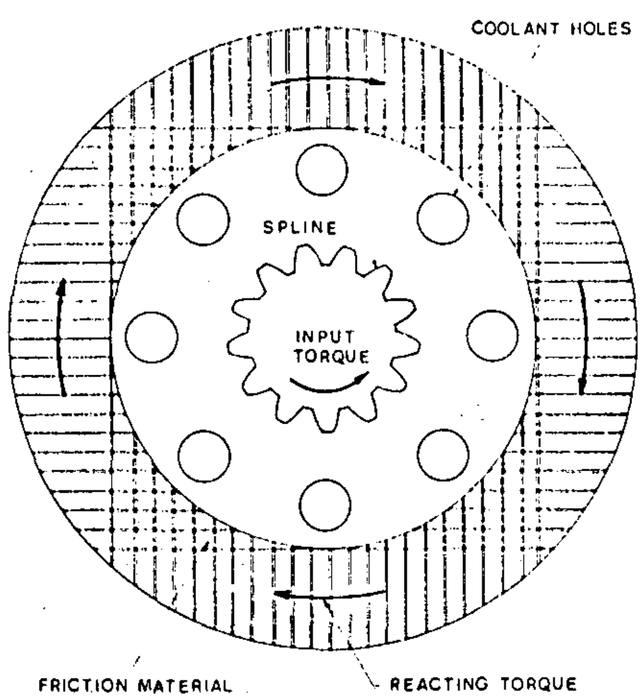


Fig. 3 Torques applied and geometry of the friction plate

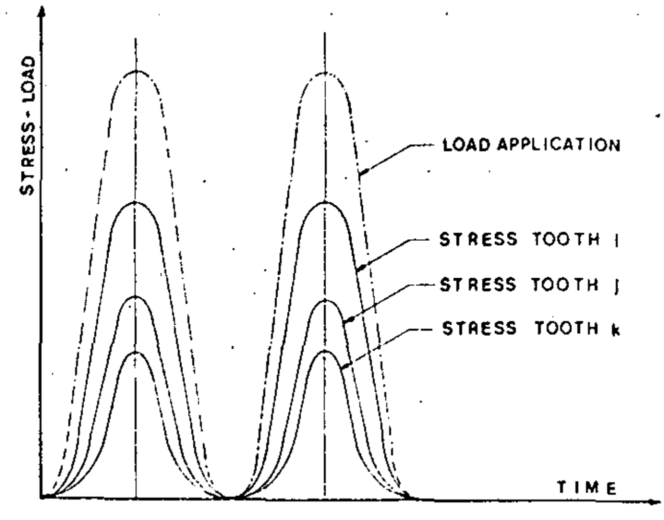


Fig. 4 Variation of load and stresses at three arbitrary locations of the friction plate

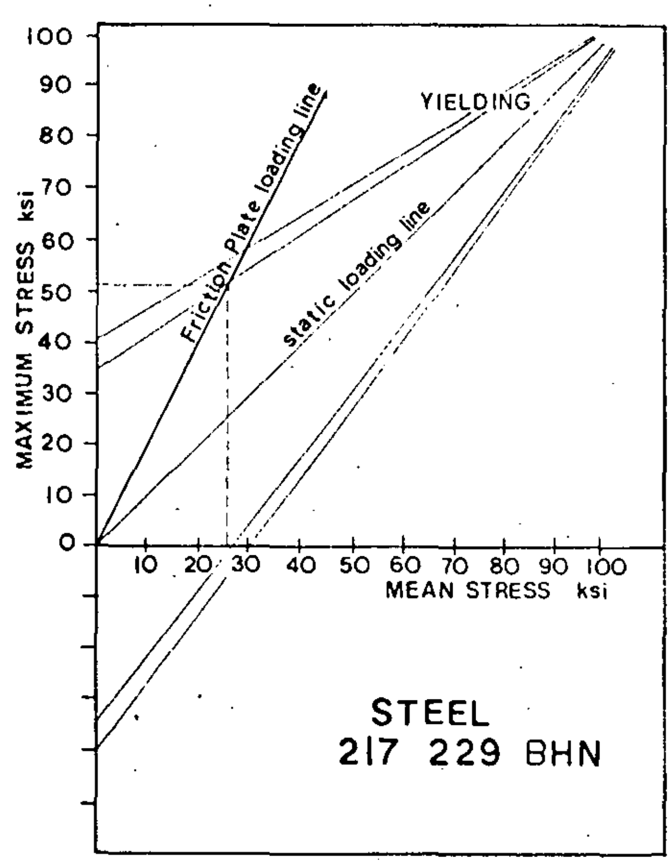


Fig. 5 Goodman diagram and loading line for the friction plate

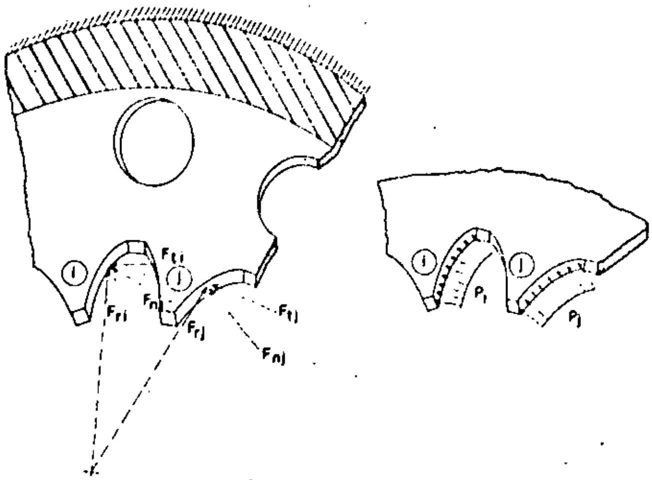


Fig. 6 Application of the load on the friction plate spline teeth

direction the load on the friction plate can be considered to be acting only in the plane of the plate and it has no component in the axial direction.

4 The total load acting on the friction plate can be broken down into tangential and radial forces acting on the teeth of the spline, such that the summation of the resulting tangential forces at the pitch circle, multiplied by the corresponding pitch radius is equivalent to the torque provided by the shaft.

5 The loads applied to the teeth of the plate are reacted by the friction material, which transmits the braking torque to the steel plates.

6 A static analysis alone can be performed on the friction plate, to estimate the stress distribution on the plate.

FORMULATION OF THE PROBLEM

Fig. 6 shows schematically the application of the load on the friction plate, at the location of two adjacent teeth, and the boundary conditions at the friction material area of the plate. In order to avoid local effects due to concentrated point loads, it is convenient to represent the applied forces at the teeth as uniform pressures along the flank of each tooth. The resultant force at the pitch circle must hold for the consideration as discussed earlier in item 4.

The total input torque for each wheel is carried by two plates, such that each plate carries one-half of the input torque.

For the numerical portion of this study

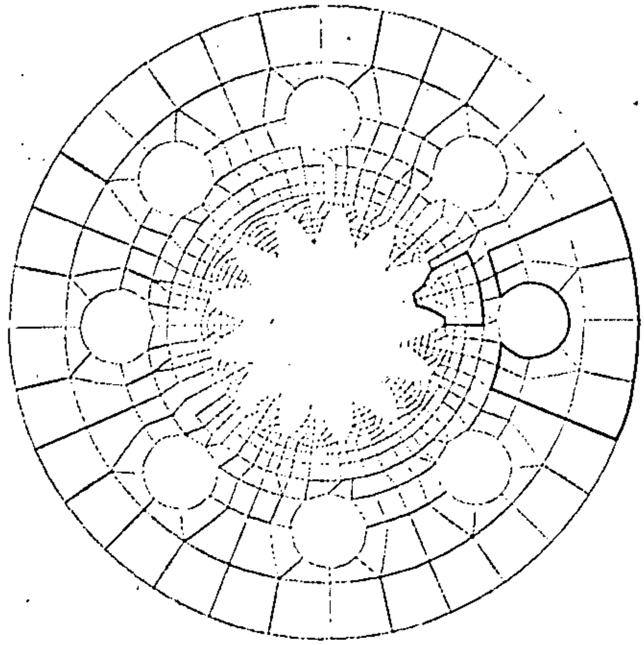


Fig. 7 Computer plot of the original design 8-holes friction plate geometry

and test data available for the particular case, the torque carried by each plate was determined to be as follows:

$$T_{p\ell} = \frac{1}{2} T_{in} \qquad (4)$$

Then

$$T_{p\ell} = \frac{1}{2}(32400) = 16200 \text{ lb-in} \qquad [1833\text{N-m}]^{2}$$

assuming equal load per tooth, the torque in the plate is distributed equally among the 13 teeth. The torque carried by each tooth is then:

$$T_i = \frac{1}{13} T_{p\ell} \qquad (5)$$

then

$$T_i = \frac{1}{13}(16200) = 1250 \text{ lb-in} \qquad [141 \text{ N-m}]$$

The equivalent tangential force at each tooth acting at the pitch circle is obtained by dividing the torque by the radius of the pitch circle, this is:

[2] Numbers in brackets indicate the SI equivalence.

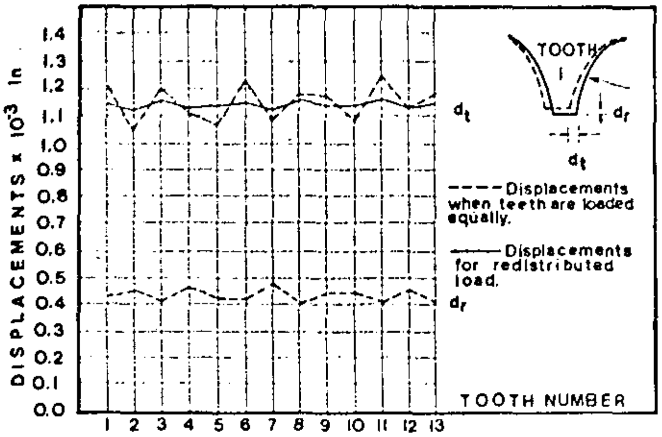


Fig. 8 Displacements at the tip of each tooth for the original 8-holes friction plate model

$$F_{ti} = \frac{T_i}{r_p} \qquad (6)$$

where $r_p = 1.3$ in. Then

$$F_{ti} = \frac{1250}{1.3} = 960 \text{ lb} \qquad [4276 \text{ N}]$$

The equivalent normal force at the flank of the tooth is obtained as follows:

$$F_{ni} = \frac{1}{\cos\phi} F_{ti} \qquad (7)$$

where ϕ is the pressure angle of the spline geometry. For the present case $\phi = 25$ deg.

The normal force is then:

$$F_{ni} = \frac{1}{\cos 25°} (960) = 1060 \text{ lb} \qquad [4722 \text{ N}]$$

The equivalent pressure at the flank of the teeth is obtained by dividing the normal force by the area of the flank:

$$p_e = \frac{F_{ni}}{A_f} \qquad (8)$$

where A_f is the area of the flank of the tooth for the present case $A_f = 0.04106$ in.^{2} then:

$$P_e = \frac{1060}{.04106} = 25800 \text{ psi} \qquad [178 \text{ M Pa}]$$

The load as uniform pressure on each tooth is estimated to be 25800 psi [178 M Pa] acting on the overall flank of each tooth.

Table 1 Spline Teeth Load Factors Table

Tooth Number	Tangential Displacement $d_{ti} \times 10^3$ in	Inverse $1/d_{ti}$	Percentage %	Nominal Percentage %	Percentage Difference %	Load Factor
1	0.1200	8.3333	7.2684	7.6923	-0.4239	0.9448
2	0.1054	9.4876	8.2753	7.6923	0.5829	1.0750
3	0.1200	8.3333	7.2684	7.6923	-0.4239	0.9448
4	0.1126	8.8809	7.7461	7.6923	0.0537	1.0069
5	0.1088	9.1911	8.0166	7.6923	0.3242	1.0421
6	0.1219	8.2034	7.1511	7.6923	-0.5372	0.9301
7	0.1064	9.3984	8.1974	7.6923	0.5050	1.0655
8	0.1166	8.5763	7.4804	7.6923	-0.2119	0.9724
9	0.1167	8.5689	7.4739	7.6923	-0.2184	0.9716
10	0.1062	9.4250	8.2207	7.6923	0.5285	1.0686
11	0.1220	8.1967	7.1493	7.6923	-0.5430	0.9294
12	0.1091	9.1659	7.9947	7.6923	0.3023	1.0393
13	0.1125	8.8888	7.7530	7.6923	0.0601	1.0079
Total	—	114.6496	100.000	100.000	—	—

THE FINITE ELEMENT MODEL

Due to the type of geometry and loading, plane stress elements were considered adequate for this analysis. Flat plate parabolic elements (8 nodes per element) were chosen to model the geometry of the friction plate.

In order to define the finite element mesh of the structure of the friction plate, node and element generation patterns were used. The procedure is as follows: only one tooth is broken down into finite elements, the location of nodes is defined with respect to a cylindrical coordinate system which origin is at the center of the plate. The element connectivity is also defined for this tooth, then, node generation is performed to define the node locations of the remaining 12 teeth. In the same manner, element generation is performed for the remaining 12 teeth. The generation is done by incrementing the node numbers by 100, at every 27.69 deg twelve times around the center of the plate. A similar approach is used to define the mesh for the outer part of the plate encompassing the coolant circulation holes; in this case one sector is defined and seven sectors are generated around the center of the plate. Finally, quadrilateral and triangular elements are used in order to connect the two sets of sectors together. This is shown in Fig. 7.

The finite element program used, developed by structural Dynamics Research Corporation (3)

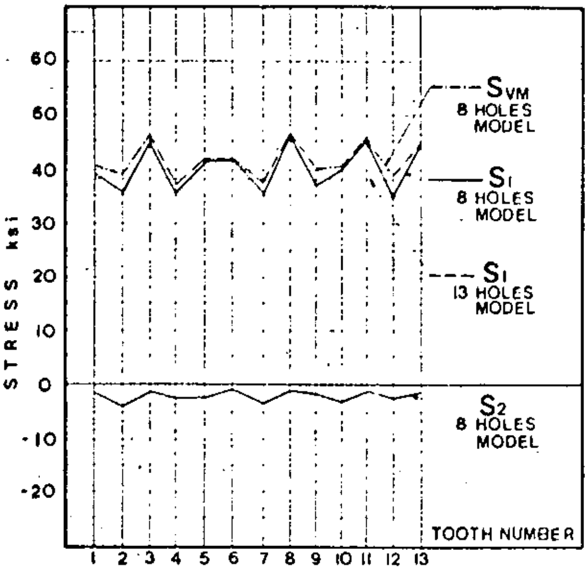


Fig. 9 Stresses at the root of each tooth. The von Mises failure criterion and the principal stresses S_1 and S_2, correspond to the original design. The constant line for S_1 corresponds to the proposed new design

is based on a wave front algorithm solver, therefore, node numbering does not affect the size of the wave front, which is in function of the order in which the elements are defined. (A more detailed description of the wave front algorithm solver can be found in Reference (4) by Nicolas et al.) However, the order in which it is convenient to generate the elements, is not necessarily the most efficient for the wave front size; therefore, a wave front optimizer preprocessor was applied after the mesh generation was accomplished, in order to rearrange the element definition.

The resulting wave front was considerably reduced and the computer costs of this analysis were also reduced.

THE FINITE ELEMENT COMPUTER RUNS

Inspection of the solution yielded by the finite element method application showed that the largest displacement for each tooth occurs at the tip. For the case where the load is considered equally distributed among the teeth, these displacements showed to be different from one tooth to another. Then, the relative differences of displacements are indicative of the particular flexibility of each tooth. Fig. 8 shows graphically the variation of tangential displacements at the tip for all thirteen teeth (dashed line).

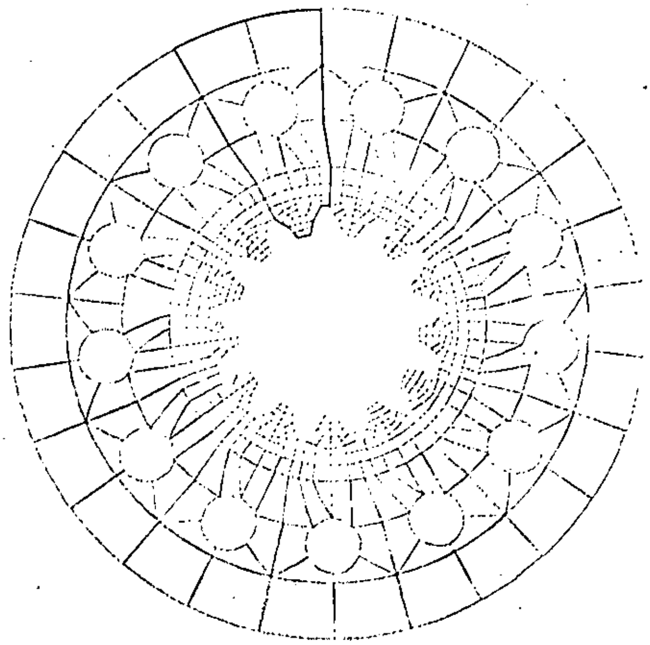


Fig. 10 Computer plot of the proposed 13-holes friction plate

Due to the variation in flexibility for each tooth, the load carried by the most flexible tooth must be less than that for the stiffest tooth. Because of this, a redistribution of the load must be considered, such that the load for a particular tooth is inversely proportional to the tangential displacement at every tooth.

Based on the relative differences of tangential displacements, load factors were developed, in order to redistribute the load on the teeth.

The significance of the load factors is that they indicate the amount of load in percentage carried by each individual tooth.

Table 1 summarizes the calculations made in order to obtain the load factor values for each tooth.

The equivalent pressures applied to the teeth as obtained by equation (8) are then modified as follows:

$$Pe_i = \frac{Fni}{Af}\,(f_i) \qquad (9)$$

i.e., f_i is the load factor for the ith tooth.

A computer run was performed considering the load factors, and the resulting displacements are shown in Fig. 8 (solid line) for all 13 teeth. The stress solution obtained from this run showed that the maximum stress for each tooth occurs at the base of the root.

Fig. 9 shows the magnitude of the maximum

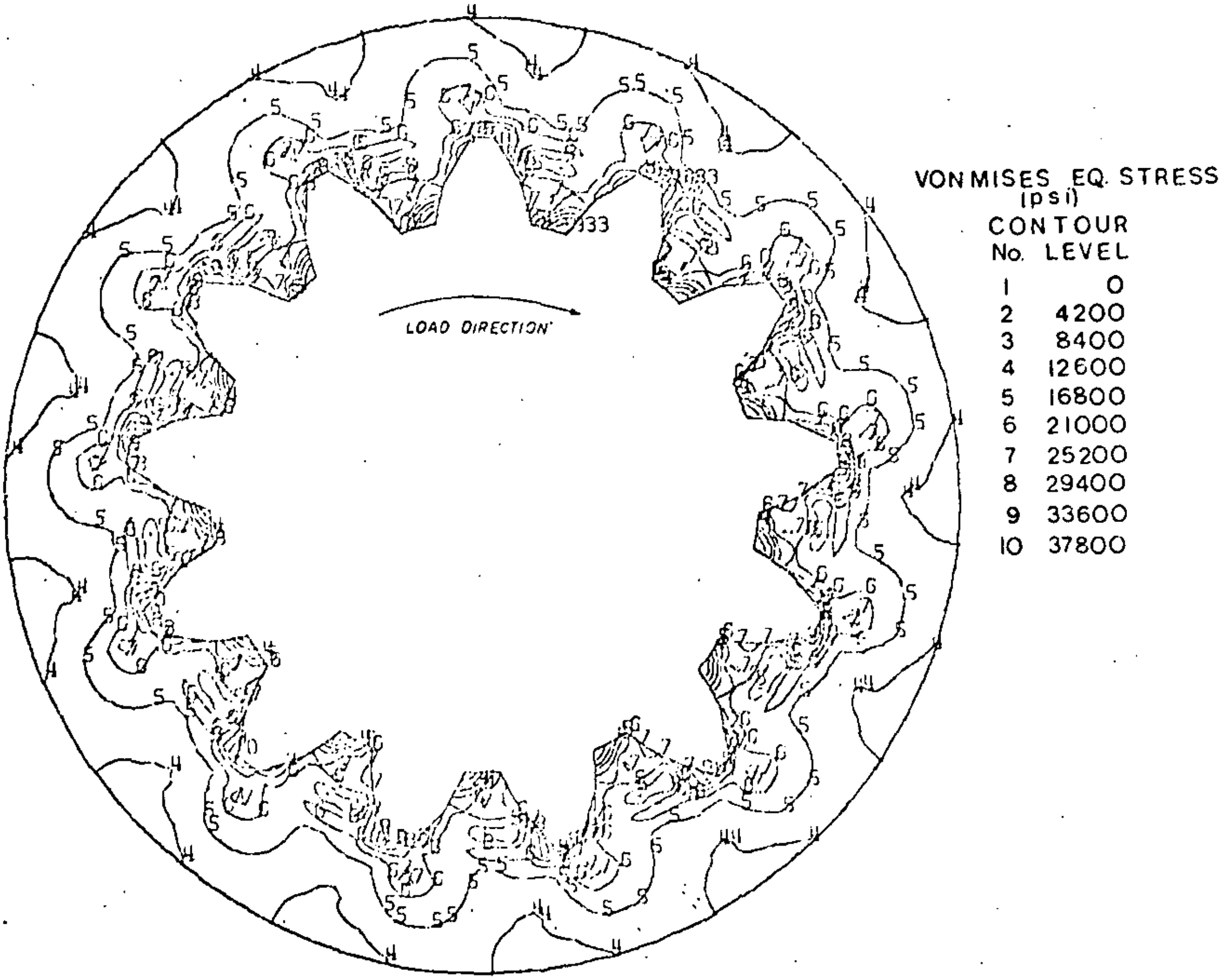


Fig. 11 Stress contour plot for the teeth of the 13-holes friction plate

principal stress (solid line) for all 13 teeth, and also in the same graph, the Von Mises criterion of failure is plotted (dashed line).

The Von Mises criterion of failure as treated by Juvinall (1) is given by the following expression:

$$Svm = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[(S_2 - S_1)^2 + (S_3 - S_1)^2 + (S_3 - S_2)\right]^{1/2} \quad (10)$$

where S_1, S_2, S_3 are the principal stresses at the point of consideration.

For the particular case treated in this analysis, $S_3 = 0$ and equation (10) reduces to

$$Svm = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[(S_2-S_1)^2 + S_1^2 + S_2^2\right]^{1/2} \quad (11)$$

It can be observed in Fig. 9 that the second principal stress S_2 obtained at the root of the teeth is very small. In the limit, as the mesh is refined S_2 will approach zero.

From the results of the initial computer runs, it was concluded that there exists a significant influence of the relative positions of the coolant circulation holes with respect to each tooth on the spline, some of which will be more susceptible to fail due to fatigue.

A NEW DESIGN MODEL

On the basis of this study, and with the purpose of redistributing the loads and stresses more evenly, a new design having 13 holes equally spaced was suggested. The geometry of the model proposed is shown in Fig. 10.

The main objective of this change as described previously is to obtain a uniform stiffness for all the teeth such that each tooth carries the same load.

One additional computer run was performed considering again equal loading per tooth, and

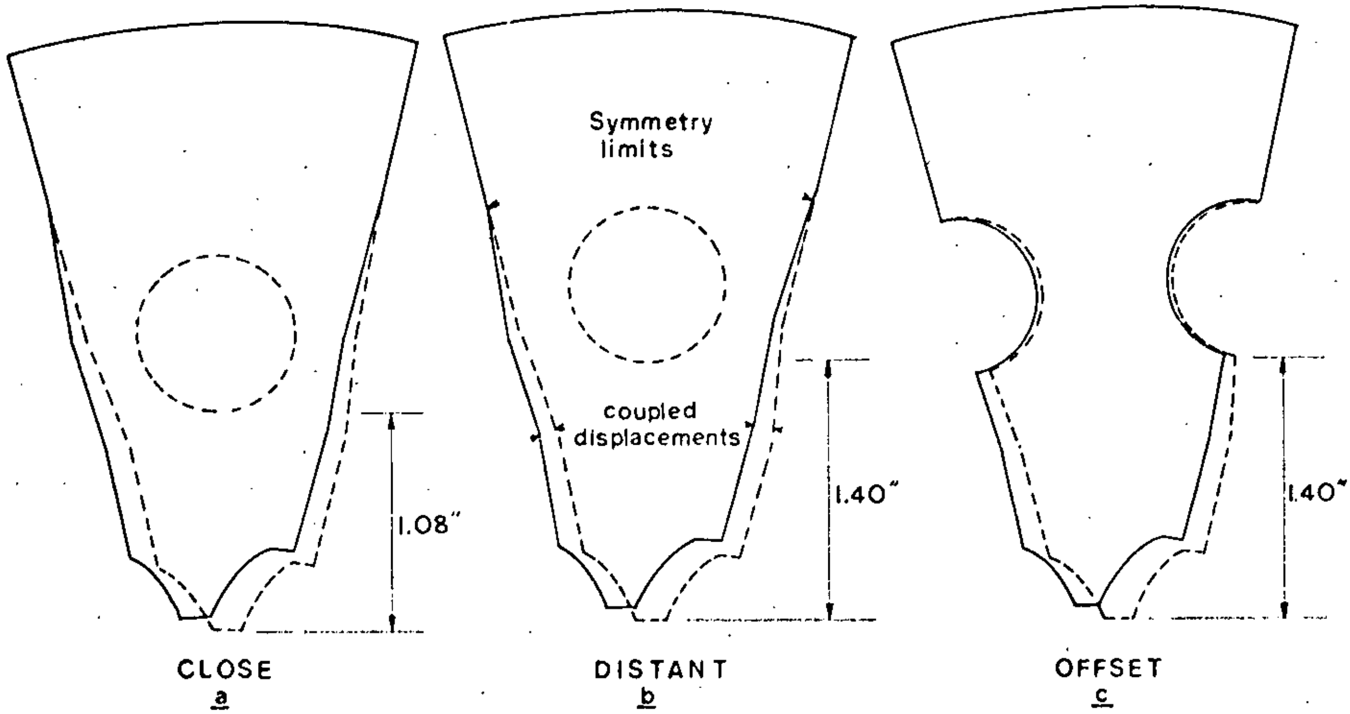


Fig. 12 Additional models of one sector used to determine the most adequate position of the holes with respect to the teeth

the resulting stress distribution (Fig. 11) shows a consistent pattern of stresses which indicates an even distribution of the load on the teeth.

The maximum stress level for the new design plots as the straight line in the graph shown in Fig. 9. As it can be observed, the peak stresses obtained with the original design can be reduced by having the same number of coolant holes than teeth on the plate.

Finally, three additional models were considered in the analysis to determine the most adequate position for the holes with respect to the teeth. These models were made for only one sector encompassing one tooth and one hole. In order to make the one sector model represent to complete structure of the plate, proper boundary conditions were imposed by coupling the displacements of the nodes in the symmetry limits as shown in Fig. 12.

Very good correlation was found between stresses obtained with the complete model and the stresses obtained with the simplified one sector model, (within a 1 percent of difference).

Table 2 summarizes the results obtained in the various computer runs, and provides a reference for the maximum stresses and locations for each case treated.

Table 2 Summary of Results Obtained from the Finite Element Method Computer Runs

RUN No.	MODEL	LOAD DISTRIBUTION	MAXIMUM STRESS LOCATION psi [MPa]	MINIMUM STRESS LOCATION psi [MPa]
1	8-HOLES	Equal load per tooth	S_1=468000 [322.7] S_2=-1400 [-9.65] S_{vm}=47500 [327.5] Root of tooth No 2	S_1=33600 [231.7] S_2=-3900 [26.90] S_{vm}=35700 [246.15] Root of tooth No 6
2	8-HOLES	Distributed load by load Factor	S_1=45500 [313.72] S_2=-1600 [11.0] S_{vm}=46300 [319.23] Root of tooth No 8	S_1=35200 [242.10] S_2=-3900 [26.90] S_{vm}=37300 [257.18] Root of tooth No 11
3	13-HOLES	Equal load per tooth	S_1=36500 [251.64] S_2=-6000 [41.37] S_{vm}=39500 [272.35] Root of all 13 teeth	same
4	ONE SECTOR Hole 1.40" from tooth	Uniform Pressure	S_1=38000 [262.01] S_2=-3000 [20.68] S_{vm}=40500 [279.24] Root of tooth	
5	ONE SECTOR Hole 1.08" from tooth	Uniform Pressure	S_1=39000 [268.90] S_2=-3000 [20.68] S_{vm}=41000 [282.70] Root of tooth	
6	ONE SECTOR Hole Offset from tooth	Uniform Pressure	S_1=39000 [268.90] S_2=-3000 [20.68] S_{vm}=41000 [282.70] Root of tooth	

CONCLUSIONS

From the results in this analysis, the following conclusions can be drawn:

1 The distribution of stresses on various teeth in the original design is uneven due to the unique position of each tooth with respect to the coolant circulation holes.

2 A uniform distribution of stresses among the teeth can be obtained by having the same number of holes and teeth.

3 The maximum stresses for the new 13-holes design are 22 percent lower than the stresses obtained with the 8-holes model, for the same loading condition.

4 The most adequated position of the holes with respect to the teeth is above the thick section of each tooth as shown in Fig. 12(b).

The new design produced by this analysis did not require any modification to any of the components of the assembly, and the reduction of the peak stresses resulted in an improvement of the life expectancy of the friction plate.

Laboratory tests have shown an improvement of 100 percent in the fatigue life of the new friction plate, as compared to the original design.

This represents a significant improvement in the performance of the brake system in the rear axles under dynamic loading conditions.

There exists several other parts in the tractor system, which have similar characteristics to the part analyzed herein, and it is visualized that the present analysis method provides the fundamental base for some of the most important aspects to perform a finite element analysis.

ACKNOWLEDGMENT

The authors wish to acknowledge the support provided by the J. I. Case Company of Racine, Wisc., for this study and analysis.

REFERENCES AND BIBLIOGRAPHY

1 Juvinall, R. C., Stress, Strain and Strength, McGraw-Hill, New York, 1967.

2 Sors, L., Fatigue Design of Machine Components, Pergamon Press, New York, 1971.

3 S.D.R.C. "SUPERB," A General Finite Element Program, Cincinnati, Ohio, 1976.

4 Nicolas, V. T., and Citipitioglu, E., "A General Isoparametric Finite Element Program," S.D.R.C.* "SUPERB," Second National Symposium on Computerized Structural Analysis and Design, George Washington University, Washington, D. C., 1976.

5 Citipitioglu, E., Nicolas, V. T., and Toland, S. K., "Finite Element Method in Stress Analysis Practice," Second International Conference on Vehicle Mechanics, Southfield, Mich., April 18-20, 1977, SAE.

6 Segerlind, L. J., Applied Finite Element Analysis, Wiley, New York, 1976.

80-C2/DET-123

AN ASME PUBLICATION
$3.00 per copy $1.50 to ASME Members

THE AMERICAN SOCIETY OF MECHANICAL ENGINEERS
345 E 47 St., New York, N.Y. 10017

An Exact Condensation Procedure for Chain-Like Structures Using a Finite Element-Transfer Matrix Approach

V. H. Mucino
Research Asst.,
Department of Mechanical Engineering,
Assoc. Mem. ASME

V. Pavelic
Professor of Mechanical Engineering,
Mem. ASME

The main objective of this study is to describe a new scheme to carry out the static or dynamic analysis of elastic systems using a combined Finite Element-Transfer Matrix Approach. The proposed scheme offers the advantage of automatic matrix size reduction without having to truncate degrees of freedom, and preserving the strain and kinetic energy throughout the condensation. Although limited to chain-like elastic systems, the method is generalized to non-repetitive configurations with substructures having intermediate active degrees of freedom.

Introduction

The analysis of large and complex systems often requires a discretization so refined that the resulting stiffness and mass matrices become too large for the computer to handle. To overcome this difficulty, several "reduction techniques" have been proposed, having as primary objective the size reduction of the system matrices, through a truncation of degrees of freedom (d.o.f.), which involves the selection of certain "master" and "slave" d.o.f., also known in literature as retained and truncated d.o.f., respectively.

Guyan [1] is credited with establishing the concepts involved in performing the reduction, which is based upon the assumption that for dynamic analysis, the kinetic energy of the lower frequency modes is less sensitive to the truncation than the kinetic energy of the higher frequency modes, while the strain energy is preserved through the truncation.

In this procedure, the problems involved are two-fold; first, the results are dependent on the ability and experience of the analyst, to arbitrarily select the master d.o.f. in such a way that the motion of the principal modes can be characterized adequately by the retained d.o.f., and second, that the truncation modifies to an extent the distribution of the inertial properties of the structure, which in turn introduces some error in the results obtained. Further, no criteria currently exists to relate the number and location of the retained d.o.f. and the error introduced by the truncation. Common sense, experience and technical intuition in some cases are about the only possible tools to come up with an efficient truncation, unless the problem in hand is fairly simple. However, for practical purposes, even though these techniques are used, they produce limited success results.

The idea of matrix condensation lends itself particularly well to the concept of substructuring, which involves the "Macrodiscretization" of a large system into a set of subsystems known as substructures, which in turn are discretized using a finite element method, having as its main purpose to extract the most significant modes and to assemble the system as a whole in terms of the principal modes of each substructure. This area received significant attention in the aerospace industry and is well documented under the subject of "Modal Synthesis Techniques." Hurty [2], Bamford [3] and Goldman [4], among others, have developed extensive studies in this area and the theory need not be repeated here.

These techniques have been well adapted to the present finite element practice, and several codes, such as NASTRAN [5], ANSYS [6] and SUPERB [7], among others, offer the features of "substructuring" and "dynamic condensation."

It is to be noted that the use of these techniques is primarily directed towards the dynamic analysis area, in which not only the stiffness matrix is stored, but also, the mass, and in some cases, the damping matrices are stored, thus reducing the problem size memory storage capacity requirements to enhance the computer analysis work.

While matrix methods of analysis have significantly contributed to the development of these techniques, particularly the "Direct Stiffness Method" [8], upon which the finite element method is based, other methods have not enjoyed the same degree of application, but may potentially be proved useful for the analysis of structures. Such is the case for the "Transfer Matrix Method" [9], which can be viewed as a continuity function for an enclosed system with transferable boundaries. Its advantages and limitations are documented by Dimarogonas [10] and Eshleman [11], but it has had some successful applications for very particular types of problems, as have the studies published by Prohl [12], Leckie [13], and Lin and McDaniel [14].

Contributed by the Design Engineering Division of THE AMERICAN SOCIETY OF MECHANICAL ENGINEERS for presentation at the Century 2 Design Technology Transfer Conference, San Francisco, Calif., Aug. 19-21, 1980. Manuscript received at ASME Headquarters March, 1980. Paper No. 80-C2/DET-123.

Copies will be available until May 1981.

The generalization achieved by the finite element method and the correspondence or correlation between the "Direct Stiffness" and the "Transfer Matrix" methods prompted various researchers to investigate the possibility of combining the advantages of both methods. Pestel and Leckie [15], treated the field transfer matrix as a different way of expressing the stiffness matrix. Later Dokainish [16] presented a combined Finite Element-Transfer Matrix (FE-TM) Method for the dynamic analysis of tapered or rectangular plates. In his approach, a finite element formulation was used to obtain the stiffness and mass matrices for a strip of elements whose boundaries were successively connected and whose end boundaries were characterized by state vectors, as defined in the standard transfer matrix method. Then a transformation of matrices was performed as described by Pestel and Leckie [15] and an algorithm similar to that proposed by Holzer [17] was used to successively solve for the natural frequencies of the system. McDaniel and Eversole [18] followed a similar approach to treat a stiffened plate structure and gave some numerical values of merit in the computing time efficiency of the algorithm as compared with regular finite element formulation without condensation.

In this paper a further generalization for the FE-TM method is presented with special emphasis on the non-repetitive configuration, but still chain-like type of structures, without restricting the substructures to be of the same nature. A special feature, described herein, is the treatment given to the intermediate d.o.f. which are condensed into a more compact form rather than regarding them as slave or truncated d.o.f. Condensation in this sense implies that all the d.o.f. contribute to both kinetic and strain energy.

Theory

The Equations of Motion. The equations of motion of any elastic structure able to store energy in terms of elastic and inertial properties can be obtained from the applicable form of the Lagrange equation as follows:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right]-\frac{\partial L}{\partial x_i}=Q_i \tag{1}$$

Where the Lagrangian function (L) is given by the following expression:

$$L=1/2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}M_{ij}\dot{X}_i\dot{X}_j-1/2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}K_{ij}X_iX_j \tag{2}$$

In this expression, it is assumed that the characteristics of the system can be approximated by expressing the kinetic energy (first term), and the strain energy (second term) in terms of a finite number (n) of generalized coordinates of d.o.f.

The substitution of equation (2) in equation (1) yields the resulting equations of motion, which expressed in matrix notation have the following general form:

$$[M]\{\ddot{X}\}+[K]\{X\}=\{F(t)\} \tag{3}$$

Systems Matrices and Substructures. In finite element practice, the mass matrix $[M]$ can be formulated using a lumped mass approach as described by Bisplinghoff et. al. [19]. This formulation results in a diagonal matrix.

Also, a consistent mass formulation can be used to describe the distributed mass properties of the system. Archer [20] introduced the concept of consistent mass matrix, and gave it a physical interpretation analogous to that of the stiffness matrix. The later approach results in a banded matrix and the natural frequencies obtained using this consistent mass formulation are upper bounds to the exact frequencies of the system.

The formulation of the equations of motion using either a lumped or consistent mass matrix, generally satisfy the requirements of minimum potential energy. The explicit form of the equations of motion is as follows:

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_n \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2n} \\ m_{n1} & m_{n2} & \dots & m_{nn}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{x}_1\\ \ddot{x}_2\\ \ddot{x}_n\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{n2} \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_n\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}f_1\\ f_2\\ f_n\end{Bmatrix} \tag{4}$$

This system of equations is applicable to any elastic structure if damping can be neglected. If finite elements are used to discretize the overall structure, and the system is composed of several substructures, the overall system matrices have the following form:

Nomenclature

$\frac{\partial}{\partial t}$ = partial derivative with respect to time
$\dot{x}_i, \dot{x}_j$ = generalized velocities
x_i, x_j = generalized coordinates
Q_i = generalized forces
L = Lagrangian function
$\{\ddot{X}\}, \{X\}$ = vector of generalized (accelerations, displacements)
$\{\ddot{X}_m\}, \{X_m\}$ = vector of (accelerations, displacements) of master d.o.f.
$\{\ddot{X}_s\}, \{X_s\}$ = vector of (accelerations, displacements) of slave d.o.f.
$\{X_L\}, \{X_R\}$ = vector of d.o.f. of the (left, right) boundaries of a substructure
$\{X_I\}$ = vector of intermediate d.o.f. of a substructure
m_{ij} = mass coefficient associated with generalized coordinates "i" and "j"
$[M]$ = global mass matrix
$[M_{mm}]$
$[M_{ms}]\,[M_{sm}]$ = partitions of the global mass matrix corresponding to the master and slave d.o.f.
$[M_{ss}]$
K_{ij} = stiffness coefficient associated with generalized coordinates "i" and "j"
$[K]$ = global stiffness matrix
$[K_{mm}]$
$[K_{ms}]\,[K_{sm}]$ = partitions of the global stiffness matrix corresponding to the master and slave d.o.f.
$[K_{ss}]$
$[K_{LL}]$
$[K_{LR}]\,[K_{RL}]$ = partitions of the global stiffness matrix corresponding to the left and right boundaries d.o.f.
$[K_{RR}]$
R = order of the global stiffness matrix
r_i = order of the substructure "i" stiffness matrix
d.o.f. = number of degrees of freedom per node
N = number of nodes at the interfaces

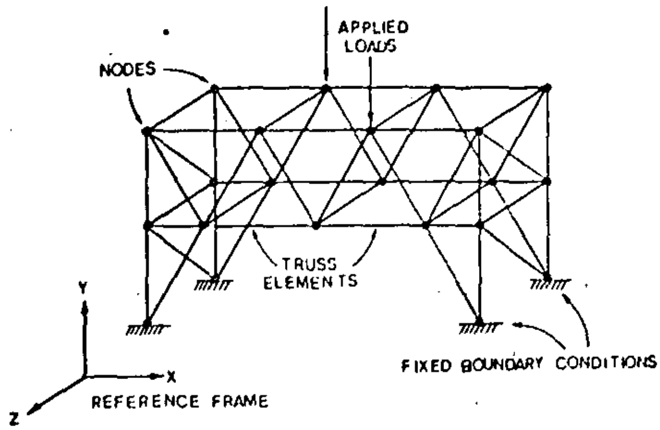


Fig. 1 Multidegree of freedom general structure with constrained boundary conditions and applied load vectors

$$
\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 & \\ & \end{bmatrix} & \\ & \begin{bmatrix} & \\ & M_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix}_{rxr} \begin{Bmatrix} \ddot{X}_1 \\ \ddot{X}_I \\ \ddot{X}_2 \end{Bmatrix}_{rx1} + \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 & \\ & \end{bmatrix} & \\ & \begin{bmatrix} & \\ & K_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix}_{rxr} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_I \\ X_2 \end{Bmatrix}_{rx1} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_I \\ f_2 \end{Bmatrix}_{rx1} \quad (7)
$$

where:

$\{X_i\}$ are the degrees of freedom associated with subsystem "i" only $i = 1,2$ and $\{X_I\}$ are the degrees of freedom connecting the two substructures.

For the example used here, the order of the global matrices is given by the following relationship.

$$R = r_1 + r_2 - (\text{d.o.f.}) \times N \quad (8)$$

where:

r_i is the order of the ith substructure matrix, $i = 1,2$, N is

$$
[M] = \begin{bmatrix} [m_1[\;]_{m_2}[\;] & & \\ & \ddots & \\ & & [\;]_{m_n}] \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad [K] = \begin{bmatrix} [k_1[\;]_{k_2}[\;] & & \\ & \ddots & \\ & & [\;]_{k_n}] \end{bmatrix} \quad (5)
$$

The overlap between the blocks represents the common boundaries between two adjacent substructures. Physically, the overlap between matrices represents the degrees of freedom connecting the two subsystems.

The order of these matrices is directly given by the total number of d.o.f. in the overall system. As an example, consider the structural system shown in Fig. 1.

If a lumped mass matrix is used, and no damping is assumed, the equations describing the motion of the structure under a harmonic driving force are as follows:

$$[M]_{r_1 \times r_1} \{\ddot{X}\}_{r_1 \times 1} + [K]_{r_1 \times r_1} \{X\}_{r_1 \times 1} = \{f\}_{r_1 \times 1} \quad (6)$$

If the system as shown in Fig. 1 is assembled to another alike system, as shown in Fig. 2, such that some nodes are common to both systems, the resulting equations become:

the number of nodes at the interface and d.o.f. is the number of degrees of freedom per node.

In general, the substructures do not have to be of the same order, and several substructures can be assembled following the same procedure. The general expression for the order of the global matrices of the chain-like system shown in Fig. 3 is given by:

$$R = \sum_{i=1}^{n} r_i - \sum_{i=1}^{n-1} (\text{d.o.f.})_i \times N_i \quad (9)$$

It should be noted that the interfaces may or may not have the same number of nodes. The important fact to note here is that the more substructures there are in the system, the larger the order of the system matrices will be. This is not the case for the proposed method described in the following sections.

Nomenclature (cont.)

$\{F(t)\}$ = vector of applied time dependent forces

$\{F_m\}\ \{F_s\}$ = vector of forces associated with (master, slave) d.o.f.

$\{F^*\}$ = reduced vector of applied forces after condensation

$\{F_L\}\ \{F_R\}$ = vectors of forces for the (left, right) boundary d.o.f.

$\{F_I\}$ = vector of forces at the intermediate d.o.f.

$[D]$ = dynamic stiffness matrix

$[D_{mm}]$
$[D_{ms}]\ [D_{sm}]$ = partitions of the global dynamic stiffness matrix corresponding to the master and slave d.o.f.
$[D_{ss}]$

$[D^*]$ = reduced dynamic stiffness matrix after condensation

$[T_i]$ = transfer matrix of substructure i

$[T_{11}]$
$[T_{12}]\ [T_{21}]$ = partitions corresponding to the overall transfer matrix of a substructure with active intermediate d.o.f.
$[T_{22}]$

$Z_R\ Z_L$ = state vectors of the (right, left) boundaries

$[A]\ [B]\ [C]$
$[D]\ [E]\ [F]$ = partitions of the global stiffness matrix corresponding to the (left, right and intermediate) d.o.f.
$[G]\ [H]\ [I]$

$[\psi_{11}]$
$[\psi_{21}]\ [\psi_{12}]$ = partitions of the reduced set of equations after the intermediate d.o.f. have been eliminated in the global system
$[\psi_{22}]$

$\{R_1\}$ = vectors of remainder terms after the intermediate d.o.f. have been eliminated in the global system
$\{R_2\}$

$\{S_1\}$ = complementary vectors for the extended transfer matrix of equation (32)
$\{S_2\}$

w = frequency of vibration

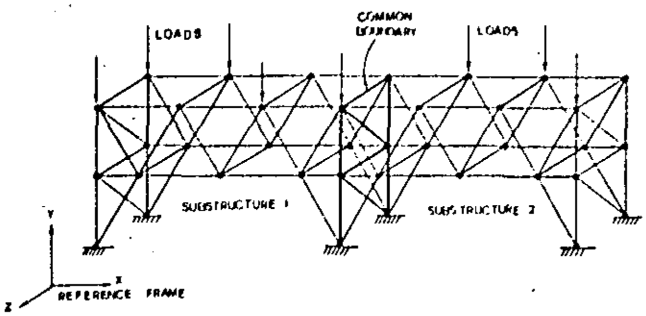


Fig. 2 Superstructure composed of two alike substructures having a common interface boundary

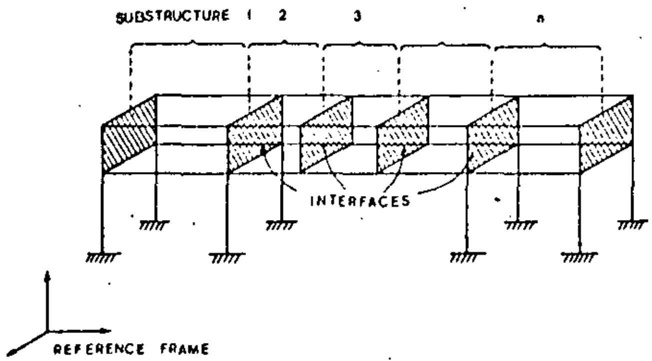


Fig. 3 Multisegmented superstructure with "n" substructures chain-like connected. The substructures are of a non-repetitive nature.

Condensation Techniques. As stated earlier, the condensation of d.o.f. has as its primary objective, the matrix size reduction and is conceptually done in four steps which are:

1 Selection of master set of d.o.f.
2 Partition of the system matrices.
3 Obtaining the solution for the master set of d.o.f.
4 Performing expansion or recovery for slave d.o.f.

The selection of the master set of d.o.f. is generally left to the analyst, who designates certain d.o.f. as being the most representative of the motion of the system. Once the master set has been specified, rearrangement of rows and columns is performed on the mass and stiffness matrices, in order to make the partitions given in the following equation:

$$\begin{bmatrix} Mmm & Mms \\ Msm & Mss \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{X}m \\ \ddot{X}s \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} Kmm & Kms \\ Ksm & Ksm \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Xm \\ Xs \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Fm \\ Fs \end{Bmatrix} \tag{10}$$

Where the subscript (m) indicates the terms associated with the "master set" of d.o.f., and subscript (s) indicates the terms associated with the "slave d.o.f." Assuming a harmonic solution, the following expression can be obtained:

$$\left[\begin{bmatrix} Kmm & Kms \\ Ksm & Kss \end{bmatrix} - w^2 \begin{bmatrix} Mmm & Mms \\ Msm & Mss \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} Xm \\ Xs \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Fm \\ Fs \end{Bmatrix} \tag{11}$$

this equation can be written as follows:

$$\begin{bmatrix} Dmm & Dms \\ Dsm & Dss \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Xm \\ Xs \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Fm \\ Fs \end{Bmatrix} \tag{12}$$

or

$$[D]\{X\} = \{F\} \tag{13}$$

Where the matrix $[D]$ is known as the "Dynamic Stiffness Expanding" equation (12), solving for $\{X_S\}$ and substituting, several times, the following system of equations is obtained:

$$[D^*]\{Xm\} = \{F^*\} \tag{14}$$

where

$$[D^*] = [Dmm] - [Dms] \quad [Dss]^{-1} \quad [Dsm] \tag{15}$$

and

$$\{F^*\} = \{Fm\} + [Dms] \quad [Dss]^{-1} \quad \{Fs\} \tag{16}$$

Equation (14) constitutes the "Reduced" set of equations, whose matrix order is dependent on the number of master d.o.f. The expanded solution can be obtained using the recovery equations; these equations are given by the following expression:

$$\{X_s\} = [Dss]^{-1}[\{F_s\} - [Dsm]\{Xm\}] \tag{17}$$

A special case in the condensation results when the master d.o.f. are chosen in such a way that there are no driving forces acting on the slave d.o.f.; in this case equations (16) and (17) become:

$$\{F^*\} = \{Fm\} \tag{18}$$

and

$$\{Xs\} = [Dss]^{-1}[Dsm]\{Xm\} \tag{19}$$

Aside from the inherent approximation in the discretization of the system, the solution expressed by equations (14) and (17) do not fully satisfy the Lagrange equation (1), since the kinetic energy is not minimized, considering the slave d.o.f. This argument is well documented by Guyan [21] and Clough [22], among others. Therefore, the truncation of d.o.f. introduces some error in the results obtained.

The Finite Element-Transfer Matrix Approach

Prior to the discussion and derivation of the proposed method, the fundamental concepts of combining the finite element and the transfer matrix method will be reviewed briefly. A more detailed description can be found in references [15, 16] and [18].

The application of the direct stiffness method to an elastic system subject to a static load vector results in the following equation:

$$[K]\{X\} = \{F\} \tag{20}$$

Now, let's consider the system described by equation (20) as a structure such that the degrees of freedom can be partitioned into "left" and "right" d.o.f. Then equation (20) becomes:

$$\begin{bmatrix} K_{LL} & K_{LR} \\ K_{RL} & K_{LL} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_L \\ X_R \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_L \\ F_R \end{Bmatrix} \tag{21}$$

By expanding this expression and solving for $\{X_R\}$ and $\{F_R\}$ in terms of $\{X_L\}$ and $\{F_L\}$, the following equations can be obtained:

$$\{X_R\} = [-[K_{LR}]^{-1} \quad [K_{LL}]] \quad \{X_L\} + [K_{LR}]^{-1}\{F_L\} \tag{22}$$

and

$$\{F_R\} = [[K_{RL}] - [K_{RR}] \quad [K_{LR}]^{-1} \quad [K_{LL}]]\{X_L\}$$

$$+[K_{RR}]\ [K_{LR}]^{-1}\ \{F_L\} \tag{23}$$

which arranged in matrix form become:

$$\left\{\begin{matrix} X_R \\ F_R \end{matrix}\right\} = \left[\begin{array}{c|c} -[K_{LR}]^{-1}[K_{LL}] & [K_{LR}]^{-1} \\ \hline [K_{RL}]-[K_{RR}][K_{LR}]^{-1}[K_{LL}] & [K_{RR}][K_{LR}]^{-1} \end{array}\right] \left\{\begin{matrix} X_L \\ F_L \end{matrix}\right\} \tag{24}$$

or simplifying the notation, it can be written as follows:

$$\left\{\begin{matrix} X_R \\ F_R \end{matrix}\right\} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \left\{\begin{matrix} X_L \\ F_L \end{matrix}\right\} \tag{25}$$

or

$$\{Z_R\} = [T]\{Z_L\} \tag{26}$$

Equation (26) can be recognized as the transfer matrix relationship between the state vectors $\{Z_R\}$ and $\{Z_L\}$, which were derived directly from the stiffness relationship between the displacement vector $\{X\}$ and force vector $\{F\}$, given by equation (20).

In this example, only the filed transfer matrix was derived. In a similar manner, the point transfer matrix could be derived.

The Proposed Method of Analysis

Consider now, that the structure to be analyzed is such that it can be broken down into substructures which are chain-like connected as shown in Fig. 4. The substructures have certain number of d.o.f. which are at the interfaces and some which are intermediate between the two interfaces. Then taking the vector of d.o.f. for one substructure, and dividing it into three subsets:

$$X = \left\{\begin{matrix} X_L \\ X_I \\ X_R \end{matrix}\right\}$$

where

$\{X_L\}$ are the d.o.f. at the left interface
$\{X_I\}$ are the intermediate d.o.f., and
$\{X_R\}$ are the d.o.f. at the right interface

Using this partition in equation (13) applied to one substructure, the following expressions can be written:

$$\begin{bmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & I \end{bmatrix} \left\{\begin{matrix} X_L \\ X_I \\ X_R \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} F_L \\ F_I \\ F_R \end{matrix}\right\} \tag{27}$$

solving for the X_I and substituting in the remaining equations, the following expressions are obtained:

$$[[A]-[B][E]^{-1}[D]]\{X_L\}$$

$$+[[C]-[B][E]^{-1}[F]]\{X_R\}+[B][E]^{-1}\{F_I\}=\{F_L\}$$

$$[[G]-[H][E]^{-1}[D]]\{X_L\}$$

$$+[[I]-[H][E]^{-1}[F]]\{X_R\}+[H][E]^{-1}\{F_I\}=\{F_R\} \tag{28}$$

which can also be written in matrix form as follows:

$$\begin{bmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} \\ \psi_{21} & \psi_{22} \end{bmatrix} \left\{\begin{matrix} X_L \\ S_R \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix} R_1 \\ R_2 \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} F_L \\ F_R \end{matrix}\right\} \tag{29}$$

where $\{\psi_{ij}\}$ and $\{R_i\}$ are the short hand notation of the matrices in the square brackets of equations (28).

By expanding and rearranging equation (29), it can be shown after various matrix manipulations that the left and right boundaries can be related by the following expression.

$$\left\{\begin{matrix} X_R \\ F_R \end{matrix}\right\} = \left[\begin{array}{c|c} -\psi_{12}^{-1}\ \psi_{11} & \psi_{12}^{-1} \\ \hline \psi_{21}-\psi_{22}\psi_{12}^{-1}\psi_{11} & \psi_{22}\psi_{12}^{-1} \end{array}\right] \left\{\begin{matrix} X_L \\ F_L \end{matrix}\right\}$$

$$+\left[\begin{array}{c} -\psi_{12}^{-1}R_1 \\ \hline \psi_{22}\psi_{12}^{-1}R_1+R_2 \end{array}\right] \tag{30}$$

or simplifying the notation:

$$\left\{\begin{matrix} X_R \\ F_R \end{matrix}\right\} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \left\{\begin{matrix} X_L \\ F_L \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix} S_1 \\ S_2 \end{matrix}\right\} \tag{31}$$

where T_{ij} correspond to the terms included in the partitions of the matrix of equation (30).

Adding one dummy equation to the system, i.e., $(1 = 1)$ the following equation can be obtained:

$$\left\{\begin{matrix} X_R \\ F_R \\ 1 \end{matrix}\right\} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & S_1 \\ T_{21} & T_{22} & S_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left\{\begin{matrix} X_L \\ F_L \\ 1 \end{matrix}\right\} \tag{32}$$

which is the expanded transfer matrix relating the state of the left and right boundaries through the intermediate degrees of freedom.

For dynamic analysis, the stiffness matrix $[K]$ can be substituted by the dynamic stiffness matrix given in equations (11) and (13). The procedure then to obtain the transfer matrix is analogous to that just described.

Once the transfer matrix has been formulated for each substructure, the assembly of the system as a whole is made following standard transfer matrix method procedures.

The relation between the left and right interface state vectors, of a substructure in a chain-like connected system is given by equation (32), which in short hand notation has the form of equation (26) repeated here for convenience of the reader.

$$\{Z_R\}_n = [T_n]\{Z_L\}_n \tag{26}$$

When two substructures are linked together, the right interface of substructure (n), becomes also the left interface of substructure $(n+1)$, therefore;

$$\{Z_L\}_{n+1} = \{Z_R\}_n \tag{33}$$

The relationship between state vectors for substructure $(n+1)$ is then

$$\{Z_R\}_{n+1} = [T_{n+1}]\{Z_L\}_{n+1} \tag{34}$$

Combining equations (26), (33) and (34) the equation results:

$$\{Z_R\}_{n+1} = [T_{n+1}][T_n]\{Z_L\}_n \tag{35}$$

In this case, the general expression for the total system with "n" substructures as shown in Fig. 4 is given by

$$\{Z\}_n = [T_n][T_{n-1}][T_2][T_1]\{Z_0\} \tag{36}$$

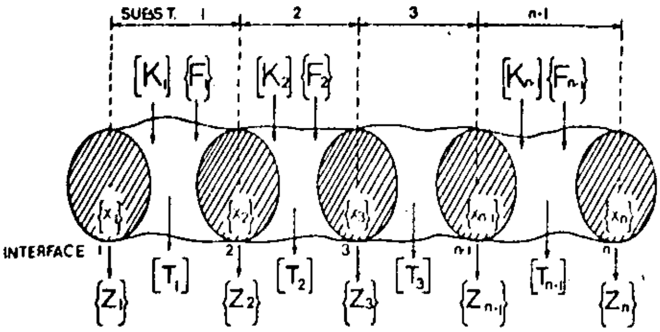


Fig. 4 A chain-like connected system, composed of "n" substructures or stations, with defined stiffnesses $[k]_i$ and applied force vectors $\{F\}$, and state vectors $\{Z\}$ defined at the connecting boundaries

or

$$\{Z\}_n = [U]\{Z_0\} \tag{37}$$

where

$$[U] = [T_n][T_{n-1}] \ldots [T_1] \tag{38}$$

It should be noted that by multiplying the transfer matrices $[T_i]$, the order of matrix $[U]$ does not increase but remains compatible with the matrices being multiplied. If the system is such that all substructures have the same transfer matrix the order of the system transfer matrix $[U]$ remains the same.

This feature results in a reduced size matrix which embodies the entire system. The end state vectors $\{Z\}_n$ and $\{Z\}_1$ contain the boundary conditions of the structure in terms of displacements in the direction of the d.o.f. and forces at the nodes located in the interfaces.

Once the system has been assembled, this is when all the transfer matrices have been multiplied as expressed by equation (38). Subsequently the boundary conditions have to be satisfied by solving for the unknown terms in the end state vectors. After the end state vectors are known the intermediate state vectors can be obtained by recursively applying equation (26) until all state vectors are known.

For dynamic analysis, the dynamic stiffness matrix contains the frequency terms. Those frequency values which satisfy the boundary conditions are the natural frequencies for the system. The procedure to obtain the natural frequencies and the modes is similar to that proposed by Holzer [17]. In this method a natural frequency value is assumed for which the system is "treated," where the test consists in multiplying the transfer matrices and observing whether or not the boundary conditions are satisfied. If the boundary conditions are not satisfied, a different "test" frequency must be chosen; and calculations must be repeated, until the boundary conditions are satisfied producing an actual natural frequency of the system. This iterative procedure is shown schematically in the computer flowchart in Fig. 5.

Operational Aspects of the Finite Element-Transfer Matrix Method

Due to the inherent complications of matrix operations, it is necessary to point out some important aspects to be considered in developing a suitable computer algorithm.

The proposed method is oriented towards the analysis of complex systems which can be modeled by means of substructures connected in a chain-like manner, for instance, beams with intermediate supports, bridges, multithrow crankshafts, etc. The complications involved in obtaining the stiffness and mass matrices are directly associated with the type of finite elements used to describe the structure. Several books [23, 24 among others] are available with detailed descriptions of the procedures required to obtain the system matrices of equations (3) and (4).

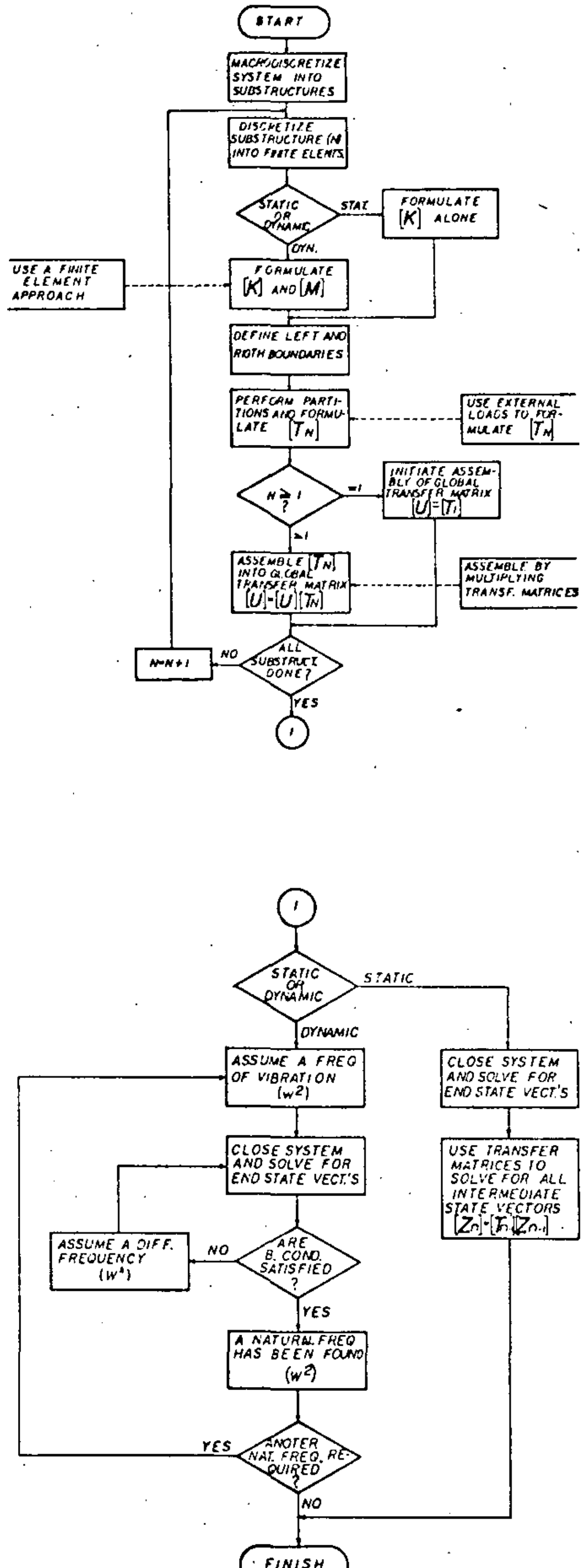


Fig. 5 Computer implementation algorithm for the generalized finite element-transfer matrix method for the static or dynamic analysis of chain-like structures

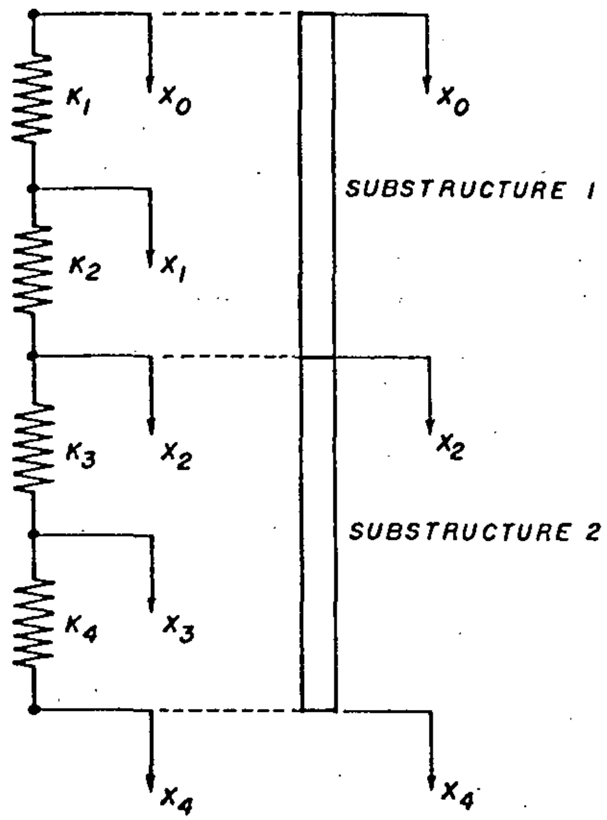


Fig. 6 Simple chain-like system and synthesis by substructuring

The derivation of the transfer matrix for a substructure, however, requires the inversion of submatrix $[E]$ in equation (27) and $[\psi_{12}]$ in equation (30). These inversions are sources of some numerical errors. However, these inversions are done only once for each substructure and are not affected by the load vector. This is an advantage, especially if all the substructures have the same configuration. This is the case in periodic structures such as those treated by Emgels and Mairovitch [25]. Note also that the order of these matrices is smaller than the order of the stiffness and mass matrices for a given substructure, since only the intermediate d.o.f. are considered in the matrix to be inverted.

Finally, it can be noted that the matrix $[k]$ is banded and it does not require full storage in the computer memory. It is the assembly of the various substructures that makes storage requirements increase, since the order of the global matrices increases too. In the FE-TM method the substructure matrix $[T_i]$ is fully populated and requires full storage in the computer memory, but the global transfer matrix $[U]$ does not increase in size since it results from consecutive matrix multiplications as indicated by equation (36).

Some other aspects in obtaining the solution of the system are parallel to those involved in standard transfer matrix applications and discussion may be found, for instance, in papers by Pestel and Leckie [9] or [15].

Although the proposed method is oriented towards more complex structures, a simple example is given in the appendix with the purpose of illustrating the treatment of two substructures which have a common boundary and are chain-like connected. In this example, the stiffness matrix $[k]$ is first derived for each element in the substructure and then assembled using the standard direct stiffness method. Subsequently, the transfer matrix $[T]$ is formulated for each substructure by applying the transformations of equations (28), (30) and (32) to the stiffness matrix found earlier. Finally, global transfer matrix $[U]$ is obtained by multiplying the transfer matrices of each substructure.

Treatment of a larger and more complex system is analogous to that described in this example and the use of the finite element method allows more complex elements to be used to discretize the substructures and to obtain the substructure stiffness and mass matrices. Such applications have been done by the authors using 3-D isoparametric solid elements and will be reported in our next papers which are now in preparation.

Summary and Conclusions

A brief description of the currently available condensation and substructuring techniques has been made, pointing out some of the main features of these techniques and how they apply to the actual type of systems addressed in this study. The correlation between the stiffness and transfer matrix for simple elements was discussed, and a generalization of the concept was developed for complex substructures having intermediate active d.o.f. A detailed derivation of the equations involved in the proposed method was made, and a general computer algorithm flowchart (Fig. 5) was presented showing the main steps required for computer implementation of this method for practical applications to an actual physical system.

It is important to note that special attention must be paid to the numerical aspects involved in the matrix operations, in order to reduce the possibility of numerical error.

From inspection of the equations derived, and from the example given in the appendix, the following conclusions can be drawn which apply for chain-like connected systems.

1 Matrix reduction can be achieved by applying the FE-TM approach to the substructures of a system.

2 No selection of Master and Slave degrees of freedom is required in the FE-TM method, thus reducing the possibility of misrepresentation of the system.

3 All the degrees of freedom are included in the formulation of the reduced equations, and no sacrifice is required in approximating the kinetic energy of the system.

4 Intermediate active d.o.f. can be properly condensed, along with any external loads acting on them as shown by equation (28).

5 The advantages of the finite element method apply to the proposed method in terms of discretizing the system using substructures.

6 The advantages of the Transfer Matrix method also apply to the proposed method, specifically the fact that by multiplying the transfer matrices, the order of the resulting matrix does not increase.

Future improvements in this area perhaps will include the formulation of transfer matrices for structures with complex finite elements and in addition, the inclusion of branches in the system may be considered.

Some of this work is already in progress at this institution, specifically, transfer matrix for structures modeled with 3D-solid finite elements.

References

1 Guyan, R. J., "Reduction of Stiffness and Mass Matrices," *A.I.A.A. Journal*, Vol. 3, No. 2, Feb. 1965, p. 380.

2 Hurty, W. C., "Introduction to Modal Synthesis Techniques," Paper No. 1 of ASME Special Publication Bk. No. H00072, 1971, *Synthesis of Vibrating Systems*.

3 Bamford, R. M., "A Modal Combination Program for Dynamic Analysis of Structures," Technical Memorandum 33-290, Jet Propulsion Laboratory, Pasadena, Calif., July 1967.

4 Goldman, R. L., "Vibration Analysis by Dynamic Partitioning," *A.I.A.A. Journal*, Vol. 7, No. 6, June 1969, p. 1152.

5 MacNeal, R. H., "The NASTRAN Theoretical Manual," (Level 15.5), The MacNeal-Schendler Corporation, Los Angeles, Ca. 1974.
6 DeSalvo, G. J., and Swanson, J. A., "The ANSYS User's Manual," Swanson Analysis Systems, Inc., Elizabeth, Pa., 1974.
7 SUPERB's User Manual, Structural Dynamics Research Corporation, Milford, Ohio, 1978.
8 Clough, R. W., and Penzien, J., *Dynamics of Structures*, McGraw-Hill, N.Y., 1975, p. 158.
9 Leckie, F. A., and Pestel, E., "Transfer Matrix Fundamentals," *Intern. J. Mech. Sci.*, Vol. 2, 1960, pp. 137-167.
10 Dimarogonas, A. D., *Vibration Engineering*, West Publishing Co., N.Y., 1976, p. 406.
11 Eshleman, R. L., *Flexible Rotor-Bearing System Dynamics*, ASME Special Publication, Book No. H00042, 1972.
12 Prohl, M. A., "A General Method for Calculating Critical Speeds of Flexible Rotors," Transactions ASME, Vol. 67, 1945, pp. A142, A148.
13 Leckie, F. A., "The Application of Transfer Matrices to Plate Vibrations," *Ingenieur-Archiv*, Vol. XXXII, 1963, pp. 100-111.
14 Lin, Y. K., and McDaniel, T. J., "Dynamics of Beam-Type Periodic Structures," ASME, *Journal of Engineering for Industry*, Nov. 1969, p. 1133.
15 Pestel, E. C., and Leckie, F. A., *Matrix Methods in Elastodynamics*, McGraw-Hill, N.Y., 1963, p. 148.
16 Dokainish, M. A., "A New Approach for Plate Vibrations: Combination of Transfer Matrix and Finite-Element Technique," ASME, *Journal of Engineering for Industry*, May 1972, pp. 526-530.
17 Holzer, H., "Die Bereschnung der Drehschwingungen," Springer-Verlag OHG, Berlin, 1921, Republished by J. W. Edwards, Pub., Inc., Ann Arbor, Mich.
18 McDaniel, T. J., and Eversole, K. B., "A Combined Finite Element-Transfer Matrix Structural Analysis Method," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 51, No. 2, 1977, pp. 157-169.
19 Bisplinghoff, R. L., Ashley, H., and Halfman, R., *Aeroelasticity*, Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Cambridge, Mass., 1955.
20 Archer, J. S., "Consistent Mass Matrix for Distributed Mass Systems," Proc. ASCE, *Journal of the Structural Division*, Vol. 89, No. ST4, Aug. 1963.
21 Guyan, R. J., "Distributed Mass Matrix for Plate Element Bending," Technical Note, *A.I.A.A. Journal*, Sept. 1964, p. 567.
22 Clough, R. W., and Penzien, J., *Dynamics of Structures*, McGraw-Hill, N.Y., 1975, p. 235.
23 Zienkiewicz, O. C., *The Finite Element Method*, McGraw-Hill, N.Y., 1977.
24 Cook, R. D., *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, John Wiley & Sons, Inc., N.Y., 1974.
25 Engels, R. C., and Meirovitch, L., "Response of Periodic Structures—by Modal Analysis."

APPENDIX

Transfer Matrix derivation for the two substructure system shown, Fig. 6.

Stiffness Matrix of Substructure 1:

$$\begin{bmatrix} K_1 & -K_1 & 0 \\ -K_1 & K_1+K_2 & -K_2 \\ 0 & -K_2 & K_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ S_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}$$

Stiffness Matrix of Substructure 2:

$$\begin{bmatrix} K_3 & -K_3 & 0 \\ -K_3 & K_3+K_4 & -K_4 \\ 0 & -K_4 & K_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{Bmatrix}$$

Assembled Overall System Stiffness Matrix:

$$\begin{bmatrix} K_1 & -K_1 & 0 & 0 & 0 \\ -K_1 & K_1+K_2 & -K_2 & 0 & 0 \\ 0 & -K_2 & -K_2+K_3 & -K_3 & 0 \\ 0 & 0 & -K_3 & K_3+K_4 & -K_4 \\ 0 & 0 & 0 & -K_4 & K_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{Bmatrix}$$

Partitions on Substructure 1 Stiffness Matrix for Transfer Matrix Formulation:

$$\left[\begin{array}{c|c|c} K_1 & -K_1 & 0 \\ \hline -K_1 & K_1+K_2 & -K_2 \\ \hline 0 & -K_2 & K_2 \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} X_0 \\ \hline X_1 \\ \hline X_2 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} f_0 \\ \hline f_1 \\ \hline f_2 \end{array}\right\}$$

Therefore

$$\begin{array}{lll} A = K_1 & B = -K_1 & C = 0 \\ D = -K_1 & E = K_1+K_2 & F = -K_2 \\ G = 0 & H = -K_2 & I = K_2 \end{array}$$

Then, using equations (30) and (32)

$$\psi_{11} = \frac{K_1K_2}{K_1+K_2} \qquad \psi_{12} = \frac{K_1K_2}{K_1+K_2} \qquad R_1 = -\frac{K_1f_1}{K_1+K_2}$$

$$\psi_{12}^{-1} = -\frac{K_1+K_2}{K_1K_2}$$

$$\psi_{21} = -\frac{K_1K_2}{K_1+K_2} \qquad \psi_{22} = \frac{K_1K_2}{K_1+K_2} \qquad R_2 = -\frac{K_2f_1}{K_1+K_2}$$

and

$$T_{11} = -\left(-\frac{K_1+K_2}{K_1K_2}\right)\left(\frac{K_1K_2}{K_1+K_2}\right) = 1 \qquad T_{12} = -\frac{K_1+K_2}{K_1K_2}$$

$$T_{21} = -\left(\frac{K_1K_2}{K_1+K_2}\right) + \left(\frac{K_1K_2}{K_1+K_2}\right)\left(\frac{K_1+K_2}{K_1K_2}\right)\left(\frac{K_1K_2}{K_1+K_2}\right) = 0 \qquad T_{22} = \left(\frac{K_1K_2}{K_1+K_2}\right)\left(-\frac{K_1+K_2}{K_1K_2}\right) = -1$$

$$S_1 = -\left(-\frac{K_1+K_2}{K_1K_2}\right)\left(\frac{-K_1f_1}{K_1+K_2}\right) = -\frac{f_1}{K_2}$$

$$S_2 = \left(\frac{K_2K_1}{K_1+K_2}\right)\left(-\frac{K_1+K_2}{K_1K_2}\right)\left(\frac{-K_1f_1}{K_1+K_2}\right) + \left(\frac{-K_2f_1}{K_1+K_2}\right) = \frac{f_1(K_1-K_2)}{(K_1+K_2)}$$

The Transfer Matrix for Substructure 1 is

$$[T_1] = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{K_1+K_2}{K_1K_2} & \frac{f_1}{K_2} \\ 0 & -1 & \frac{f_1(K_1-K_2)}{(K_1+K_2)} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Therefore

$$\begin{Bmatrix} X_2 \\ f_2 \\ \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{K_1+K_2}{K_1K_2} & \frac{f_1}{K_2} \\ 0 & -1 & \frac{f_1(K_1-K_2)}{(K_1+K_2)} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_0 \\ f_0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

The Global Transfer Matrix is

$$\begin{Bmatrix} X_4 \\ f_4 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \left(\frac{K_3+K_4}{K_3K_4} - \frac{K_1+K_2}{K_1K_2}\right) & \left(-\frac{f_1}{K_2} - \frac{K_3+K_4}{K_3K_4}\left(\frac{f_1(K_1-K_2)}{(K_1+K_2)}\right) - \frac{f_3}{K_4}\right) \\ 0 & 1 & \left(-\frac{f_1(K_1-K_2)}{(K_1+K_2)} + \frac{f_3(K_3-K_4)}{K_3+K_4}\right) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_0 \\ f_0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Printed in U.S.A.

ANALYSIS OF CRANKSHAFT-BEARING SYSTEMS USING A FINITE ELEMENT-TRANSFER MATRIX APPROACH

V. H. Mucino, Professor of Mechanical Engineering
The University of Mexico City
Mexico City, Mexico

V. Pavelic, Professor of Mechanical Engineering
The University of Wisconsin--Milwaukee
Milwaukee, Wisconsin

R. G. Teschner, Engineering Analysis, Manager
J. I. Case Company
Racine, Wisconsin

ABSTRACT

In this study a new approach is proposed for the analysis of a crankshaft-bearing system. The mathematical model of the system incorporates the elastic properties of the crankshaft and supports, the hydrodynamic nature of the journal-bearings, and for the first time the mass distribution of the rotating crankshaft. The procedure of analysis involves substructuring principles applied to the crankshaft for which each crank represents a substructure and a new condensation scheme is used for the synthesis of the system by operating over the transfer matrices of the substructures derived from the finite element discretization of each crank. The analysis yields the loads on the main bearings for a full cycle of 4π at constant speed of rotation.

NOMENCLATURE

$\{F\}$	vector of loads on crankshaft
$\{R_j\}$	vector of reactions on journals
$\{F_s\}$	vector of loads on crankpins
r	journal radius
P	pressure distribution
θ	circumferential polar coordinate
z	longitudinal polar coordinate
h	oil film thickness
μ	oil viscosity
ω	angular velocity
$\dot{\phi}$	journal precision rate
t	time
$\{B\}$	vector of bearing displacements
$\{e\}$	vector of eccentricities
$\{Y_s\}$	vector of displacements of crankshaft
$[F]$	flexibility matrix of supports
$\xi, \dot{\xi}, \ddot{\xi}$	displacement velocities and acceleration, absolute system
$\eta, \dot{\eta}, \ddot{\eta}$	displacement velocities and acceleration, absolute system
$\zeta, \dot{\zeta}, \ddot{\zeta}$	displacement velocities and acceleration, absolute system
$x, \dot{x}, \ddot{x}$	displacement velocities and acceleration, rotating system
$y, \dot{y}, \ddot{y}$	displacement velocities and acceleration, rotating system
$z, \dot{z}, \ddot{z}$	displacement velocities and acceleration, rotating system
$[C]$	coordinate transformation matrix
$\{\Psi\}$	vector of d.o.f. in the absolute system
$\{Q\}$	vector of d.o.f. in the rotating system
m	lumped mass
k	spring stiffness
$[K]$	stiffness matrix of substructure
$\{X\}$	vector of d.o.f. of substructure
$[M]$	mass matrix of substructure
$[D]$	dynamic stiffness matrix of substructure
X_L	d.o.f. of left interface
X_I	d.o.f. of intermediate nodes
X_R	d.o.f. of right interface
F_L	loads on left interface
F_I	loads on intermediate nodes
F_R	loads on right interface
$[T_i]$	transfer matrix of substructure i
$\{Z_j\}$	state vector of interface j
$\{S\}$	vector of transfer matrix
L	length of bearing
D	diameter of bearing
c	radial clearance
(M)	mobility functions
$\{J\}$	journal displacements
$\{R\}$	reactions vector

INTRODUCTION

In the analysis of crankshaft-bearing systems, there are three main areas of concern: stress analysis, dynamic analysis and bearing performance analysis. The analytical models typically used for each of these three areas have very little in common, mainly due to simplifying assumptions which make the calculations practical for designers and analysts. In the stress analysis area, for instance, static loads are generally considered and the crankshaft is almost always isolated from the other components of the system. Stresses are then computed based on the static loads assumed and the corresponding reactions. In the dynamic analysis area, the stress distribution of the crank is of little interest and for all practical purposes of no interest whatsoever and the emphasis is placed on the torsional vibrations caused by the rotating and reciprocating masses and the lack of rotational constraints. Finally, in the area of bearing analysis, the loads acting on the bearings are generally assumed to be those obtained through the static analysis for a number of rotational positions along a full cycle of operation. The bearings are typically isolated from the entire system and thus the effects of the dynamics of the crankshaft and the interaction with the other components of the system are not fully incorporated.

Numerous studies have been published describing a variety of analytical, empirical and experimental methods in each of these three areas, such as the studies by Lowell [1], Eshleman [2] and Ross and Slaymaker [3] among many others.

However, few attempts have been made to model the crankshaft-bearing system as a whole, considering that the loads acting on the crankshaft cause deformations. This in turn interacts with the dynamics of the system, the flexibility of the supports and the hydrodynamics of the journal-bearings of the engine. While a more extensive literature search is presented in [4], here only some of the significant works are discussed.

Gross and Hussman [5] developed a method by means of which loads on the main bearings could be determined considering a model that consisted of a round shaft representing the crankshaft, elastic supports represented by springs and bearings which were assumed to behave as linear springs. The procedure derived by these authors considered the shaft as a statically undetermined system on flexible supports. The results obtained improved over the classical method of considering each crank as a separate simply supported beam on which certain loads act and the reactions satisfy the conditions of static equilibrium for each separate crank. However, the true reality of the hydrodynamic nature of the bearings was not considered. Later, Von Shnurbein [6] incorporated the hydrodynamic characteristics of the bearings by using the expressions derived by Holland [7] which relate the instantaneous eccentricities of the journals with certain velocity. By taking the eccentricities as deflections of the crankshaft, the reaction loads could be determined, but an important assumption was that the supports were rigid. In both cases, [5] and [6], a transfer matrix approach was used to carry out the calculations based on the Holzer method [8].

Most recently, Stickler [9] developed a more elaborate approach which for the first time introduced the finite element method to model the crankshaft and also incorporated the hydrodynamics of the bearings through the mobility method developed by Booker [10, 11]. In the model used by Stickler, the crankshaft was modeled with beam elements and the supports were represented through a flexibility matrix. This study showed very clearly the difficulties involved in considering the crankshaft as an actually unsymmetrical shaft as opposed to the round shafts used in studies [5] and [6]. It should be noted that in none of the previous cases was the mass distribution of the crankshaft considered in the formulation and thus an important aspect of the dynamics of the crankshaft was neglected.

In this study, a general approach is presented which yields the loads on the main bearings and uses a solid finite element model for each crank in such a way that the elastic properties are more representative and, for the first time, includes the mass distribution of the crankshaft.

The approach is based on the finite element-transfer matrix method developed by Mucino and Pavelic [12]. The synthesis of the system substructures is made by combining the state vectors of the substructures with the hydrodynamic loads on the bearings and the flexibility of the supports.

THE SYSTEM MODEL AND EQUATIONS

The system considered in this study consists of three main components: the crankshaft, the flexible supports and the journal-bearings as shown in Figure 1. It is assumed that the loads acting on the crankpins can be obtained using the pressure-volume diagram

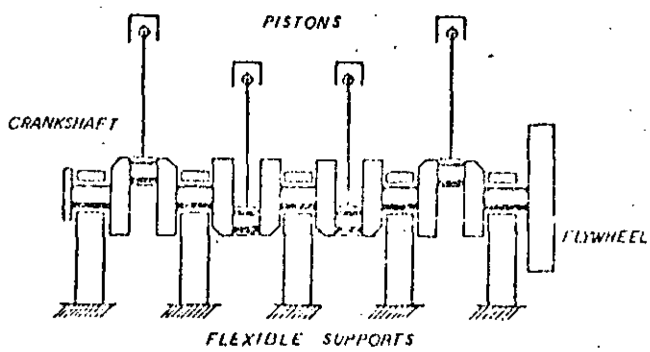


Fig. 1 A Typical Crankshaft-Bearing System on Flexible Supports

and the geometric characteristics of the system for the entire cycle of operation. Thus, the loads acting on the crankpins can be resolved into radial and tangential components as shown in Figure 2.

In order to formulate the equations of the system, it is necessary to define the degrees of freedom of the system in such a way that the interaction between the crankshaft and the bearings and the supports can also be described. First, the vector of loads acting on the crankshaft can be defined as:

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} R_j \\ F_s \end{Bmatrix} \qquad (1)$$

where $\{R_j\}$ are the reactions from the bearings acting on the main journals and $\{F_s\}$ are the loads from the connecting rods acting on the crankpins.

The reactions generated by the bearings are the result of integrating the pressure distribution developed by the lubricant oil film and thus:

$$\{R_j\} = \left\{ \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{z=0}^{L} r\, P_j(\theta, z) d\theta\, dz \right\} \qquad (2)$$

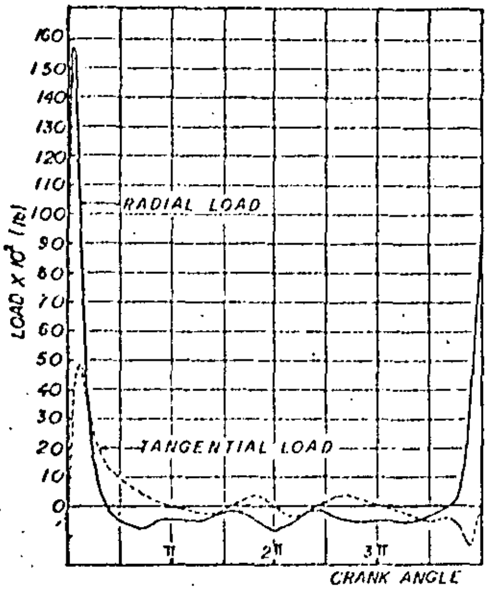


Fig. 2 Radial and Tangential Loads Acting on the Crankpin

where $P_j(\theta, z)$ is the pressure distribution around (θ) and along (L) for bearing of radius r as shown in Figure 3. The pressure distribution is governed by Reynold's equation:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[h^3\frac{\partial p}{\partial\theta}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[h^3\frac{\partial p}{\partial z}\right] = 6\mu\left[(\omega - 2\dot{\phi})\frac{\partial h}{\partial\theta} + 2\frac{\partial h}{\partial t}\right] \quad (3)$$

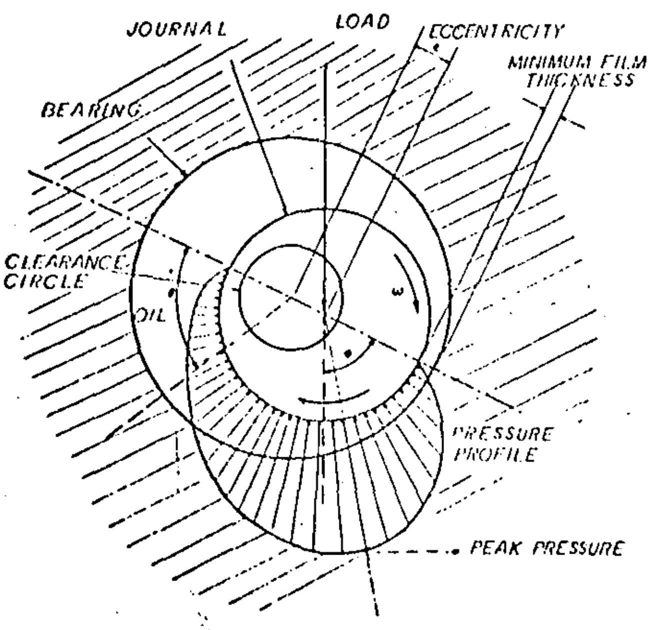


Fig. 3 A Journal-Bearing System and Lubricant Pressure Distribution

In this equation h is the oil film thickness around the bearing, μ is the viscosity of the lubricant, $\dot{\phi}$ is the journal precision rate and ω is the angular velocity of the journal. The vector of displacements of the crankshaft can then be defined as:

$$\{Y\} = \begin{Bmatrix} \{B\} + \{e\} \\ \{Y_s\} \end{Bmatrix} \quad (4)$$

where {B} is the vector of displacements of the bearings which are rigidly attached to the supports, {e} is the vector of eccentricities of the journals with respect to the bearings, and $\{Y_s\}$ is the vector of displacements of the crankshaft at other locations except the displacements of the main bearings.

To incorporate the flexibility of the supports, the vector {B} can be expressed as:

$$\{B\} = [F]\{-R_j\} \quad (5)$$

where [F] is the flexibility matrix representing the support structure and $\{-R_j\}$ is given by the negative of Equation (2).

Due to the nature of the mechanical system, two coordinate systems are needed to derive the equations of motion. Both systems coincide in the origin and one axis as shown in Figure 4, but one is fixed

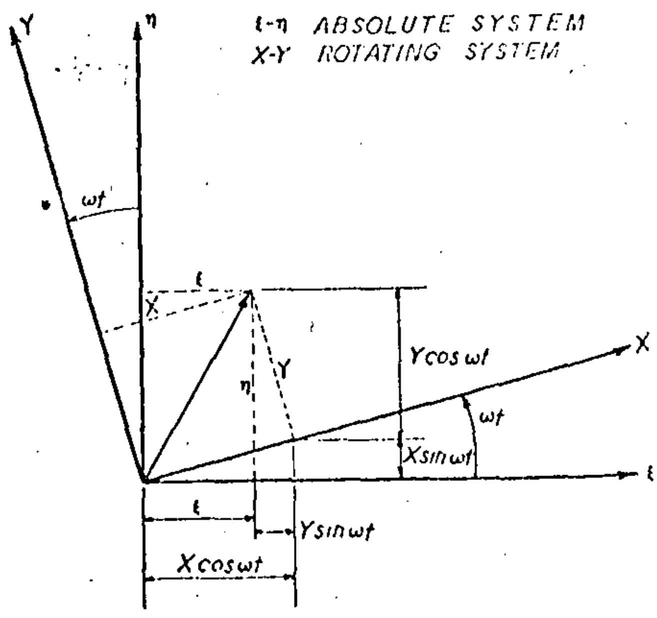


Fig. 4 Coordinate Systems: Rotating (x, y, z) and Absolute (ξ, η, ζ)

(ξ, η, ζ) and the other one rotates (x, y, z) and is attached to the crankshaft. The transformations from rotating to the absolute system are:

Displacements:

$$\begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{Bmatrix} = [C] \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \quad (6)$$

Velocities:

$$\begin{Bmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \\ \dot{\zeta} \end{Bmatrix} = [C] \begin{Bmatrix} \dot{x} - \omega y \\ \dot{y} + \omega x \\ \dot{z} \end{Bmatrix} \tag{7}$$

Acceleration:

$$\begin{Bmatrix} \ddot{\xi} \\ \ddot{\eta} \\ \ddot{\zeta} \end{Bmatrix} = [C] \begin{Bmatrix} \ddot{x} - 2\omega\dot{y} + \omega^2 x \\ \ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2 y \\ \ddot{z} \end{Bmatrix} \tag{8}$$

where [C] is given by:

$$[C] = \begin{bmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t & 0 \\ \sin\omega t & \cos\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{9}$$

The degrees of freedom for the crankshaft and supports can be expressed using the following notation.

In the absolute system (ξ, η, ζ):

$$\{\Psi\}_s^T = (\xi_1\eta_1\zeta_1\xi_2\eta_2\zeta_2 \ldots \xi_n\eta_n\zeta_n)_s =$$

$$(\psi_1\psi_2\psi_3 \ldots \psi_{3n})_s$$

In the rotating system (x, y, z)

$$\{Q\}_s^T = (x_1y_1z_1x_2y_2z_2 \ldots x_ny_nz_n) =$$

$$(q_1q_2q_3 \ldots q_{3n})_s$$

Where the subscript s designates the d.o.f. of the crankshaft and for the supports the subscript is b

$$\xi_i = \psi_{3i-2} \qquad x_i = q_{3i-2}$$

$$\eta_i = \psi_{3i-1} \quad \text{and} \quad y_i = q_{3i-1}$$

$$\zeta_i = \psi_{3i} \qquad z_i = q_{3i}$$

Deriving the potential and kinetic energies of the elastic members, (crankshaft and supports), and applying the Lagrangian equation, the following equations of motion result:

$$M_i^s[\ddot{x}_i - 2\omega\dot{y}_i + \omega^2 x_i] + 2k_i[x_i - e_i^x] + \sum_{j=1}^{n} k_{ij}\, q_j = P_{is}^x \tag{10}$$

$$M_i^s[\ddot{y}_i - \omega^2 y_i] + 2k_i[y_i - e_i^y] + \sum_{j=1}^{n} k_{ij}\, q_j = P_{is}^y \tag{11}$$

$$M_i^s[\ddot{z}_i] + \sum_{j=1}^{n} k_{ij}\, q_j = P_{is}^z \tag{12}$$

$$M_i^b[\ddot{e}_i^x - \ddot{x}_i - \omega^2(x_i - e_i^x)] + k_i[x_i - e_i^x] = P_{ib}^x \tag{13}$$

$$M_i^b[\ddot{e}_i^y - \ddot{y}_i - \omega^2(y_i - e^y)] + k_i\,[y_i - e_i^y] = P_{ib}^y \tag{14}$$

These equations are expressed using the degrees of freedom of the crankshaft in the rotating coordinate system and also in terms of the eccentricities of the journals with respect to the bearings in the rotational system.

The solution of this system of equations is not trivial due to the nature of the system once the loads derived from the pressure distribution generated in the bearings are incorporated in the right hand side of Equations (10) through (14).

NUMERICAL PROCEDURE

In order to carry out the analysis of the system and the solution of the equations previously formulated, it is necessary to make use of the fact that the crankshaft can be macrodiscretized into a number of substructures which have similar characteristics. Each substructure (crankthrow) is then discretized using a finite element model such as the one shown in Figure 5. The equation describing the static equilibrium of this substructure written in matrix form is:

$$[K]\,\{X\} = \{F\} \tag{15}$$

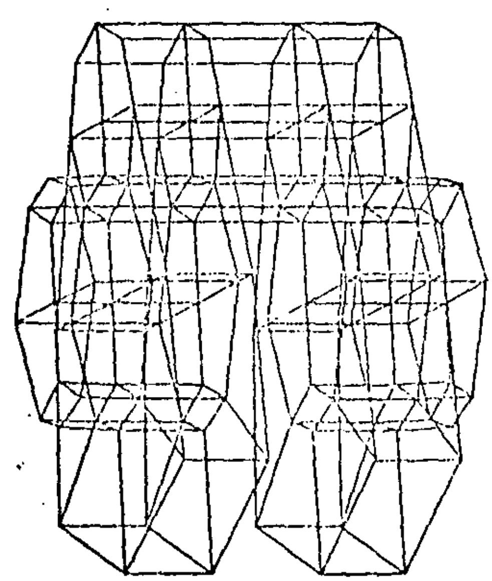


Fig. 5 Finite Element Model of a Crankthrow as a Substructure

where $[K]$ is the stiffness matrix of the substructure and $\{X\}$ is the vector of displacements of the nodes or degrees of freedom and $\{F\}$ is the vector of loads acting on the substructure.

To introduce the mass distribution of the crankshaft, the mass matrix can be incorporated so that:

$$[M]\{\ddot{X}\} + [K]\{X\} = \{F(t)\} \qquad (16)$$

It will be assumed that the internal damping be neglected.

Considering that the load is harmonic with circular frequency of ω, then Equation (16) can be reduced to:

$$[D]\{X_o\} = \{F_o\} \qquad (17)$$

where $[D]$ is the "dynamic stiffness matrix" given by

$$[D] = [K] - \omega^2[M] \qquad (18)$$

In order to synthetize all the substructures, the finite element-transfer matrix method can be applied. To do this, the vectors of displacements and loads can be partitioned as follows:

$$\{X_o\} = \begin{Bmatrix} X_L \\ X_I \\ X_R \end{Bmatrix} \text{ and } \{F_o\} = \begin{Bmatrix} F_L \\ F_I \\ F_R \end{Bmatrix} \qquad (19)$$

Then, by following the formulation given in (12), the final expression for the transfer matrix can be obtained in the form:

$$\begin{Bmatrix} X_R \\ F_R \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & S_1 \\ T_{21} & T_{22} & S_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_L \\ F_L \\ 1 \end{Bmatrix} \qquad (20)$$

Which written in a more compact form becomes:

$$\{Z_R\} = [T_1]\{Z_L\} \qquad (21)$$

This equation is the transfer matrix relationship between state vectors $\{Z_R\}$ and $\{Z_L\}$ which contain both the displacements and the loads acting on the interfaces of the substructure. By changing the subscripts to 1 and 2 instead of L and R, a second substructure can be added by considering the following standard relationships as described by Pestel and Leckie [13]:

$$\{Z_3\} = [T_2]\,[T_1]\,\{Z_1\} \qquad (22)$$

In this equation, $[T_1]$ and $[T_2]$ are the transfer matrices of the first and second substructures and more substructures can be assembled by multiplying the transfer matrices in the corresponding order.

It should be noted that the main advantage of this scheme is that by multiplying the matrices $[T_1]$, $[T_2]$, etc., the size of the matrices does not increase but remains compatible with the order of the matrices being multiplied.

The state vectors $\{Z_i\}$ contain the loads and displacements of the interfaces of the substructures. These in turn are the reactions and the displacements of the journals of the crankshaft where the interfaces were designated. From Equation (20) the following two expressions can be obtained to express the reactions on the main journals assuming that the corresponding displacements are known:

$$\{F_i^k\} = [T_{12}^k]^{-1}\left\{\{X_{i+1}\} - [T_{11}^k]\{X_i\} - \{S_1^k\}\right\} \qquad (23)$$

$$\{F_{i+1}^k\} = [T_{21}^k]\{X_i\} + [T_{22}^k]\{F_i^k\} + \{S_2^k\} \qquad (24)$$

where the superscripts k indicate that the vectors are obtained based on the transfer matrix of the k^{th} crankthrow. The net force on the bearings can be obtained by algebraically adding the contribution of each degree of freedom in the corresponding direction and through the displacements of the supports using the flexibility matrix of Equation (5).

The instantaneous velocities of the journal centers in the bearing clearance circle can be approximated using Booker's equations [10, 11] which have the following form:

$$\frac{de^x}{dt} = \frac{|F|}{LD}\,\frac{c/r}{\mu/c}\,(M^x) - \bar{\omega}(e^y) \qquad (25)$$

$$\frac{de^x}{dt} = \frac{|F|}{LD}\,\frac{c/r}{\mu/c}\,(M^y) + \bar{\omega}(e^x) \qquad (26)$$

where (M_x) and (M_y) are known as the mobility functions and are functions of the bearing characteristics and the eccentricities of the journals with respect to the bearings. The explicit form of these mobility functions which apply to finite bearings are given by Booker [14] and were developed by Moes [15].

Equations (25) and (26) allow the determination of the instantaneous velocities of the journals in the bearings in the plane perpendicular to the axis of the shaft. By extrapolating these velocities through an increment of time, Δt, a new position can be found which can be used to determine a new set of loads which will generate a new set of journal velocities.

COMPUTER ALGORITHM

The computational algorithm consists of an iterative procedure which yields a cycle of displacements and loads of the journals of the crankshaft in such a way that the elasto-hydrodynamic behavior of the system can be approximated. Once the transfer matrix has been derived for each harmonic component of the loads acting on the crankpin of each substructure, complete calculations are performed and the following steps define the algorithm:

1) Initiate with an arbitrary eccentricity of each journal in the bearings and take these eccentricities as the absolute displacements of the journals of the crankshaft.
2) Determine the loads acting on the journals which, combined with the instantaneous loads on the crankpin, are compatible with the eccentricities and displacements of the previous step, using Equations (23) and (24).
3) Determine the loads on the bearings using the following relationship

$$\{R_i\} = \{F_i\}^k - \{F_i\}^{k-1} \tag{27}$$

4) Compute displacements on the journals for the loads just found using Equations (4) and (5).
5) Once the displacements of the bearings and the displacements of the journals are known, the eccentricities can be found by the vectorial difference of these displacements. Thus,

$$\{e\} = \{B\} - \{J\} \tag{28}$$

where $\{e\}$ is the vector of eccentricities, $\{B\}$ is the vector of bearing displacements and $\{J\}$ is the vector of journal displacements.
6) Determine the instantaneous velocities of the journals in the bearings using Equations (25) and (26).
7) Extrapolate the displacements of the journals through an increment of time Δt and find a new absolute position using an extrapolating scheme, such as the Adam's formulas [16], mainly:

$$e_{i+1} = e_i + \frac{1}{2}\Delta t\,(3\dot{e}_i - \dot{e}_{i-1}) \tag{29}$$

8) Rotate the position of the crankshaft with respect to the support through an angle of $\omega\Delta t$ and calculate the new loads from the connecting rods on the crankpin.
9) Repeat steps 2 through 8 until one cycle 4π is completed.
10) Repeat steps 2 through 9 until convergence is achieved. In this step, convergence is achieved when the cycle of loads is identical to the previous cycle within certain margins.

The algorithm just described is shown in the form of a block diagram in Figure 6.

APPLICATION TO A REAL SYSTEM

The computational procedure developed in this study was applied on a crankshaft-bearing system, the main characteristics of which are given in Tables 1, 2 and 3. In this application, the loads on the crankpin were resolved into Fourier components and only the first 6 components were considered in the approximation.

The load cycles for main bearings 1, 2 and 3 are shown in Figures 7 through 12 for two cases. In the first, the mass of the crankshaft is not considered and in the second the mass is introduced by using the dynamic stiffness matrix of Equation (18).

CONCLUSIONS

From the results obtained in this analysis and based on the previous attempts for this type of system, the following conclusions can be drawn:

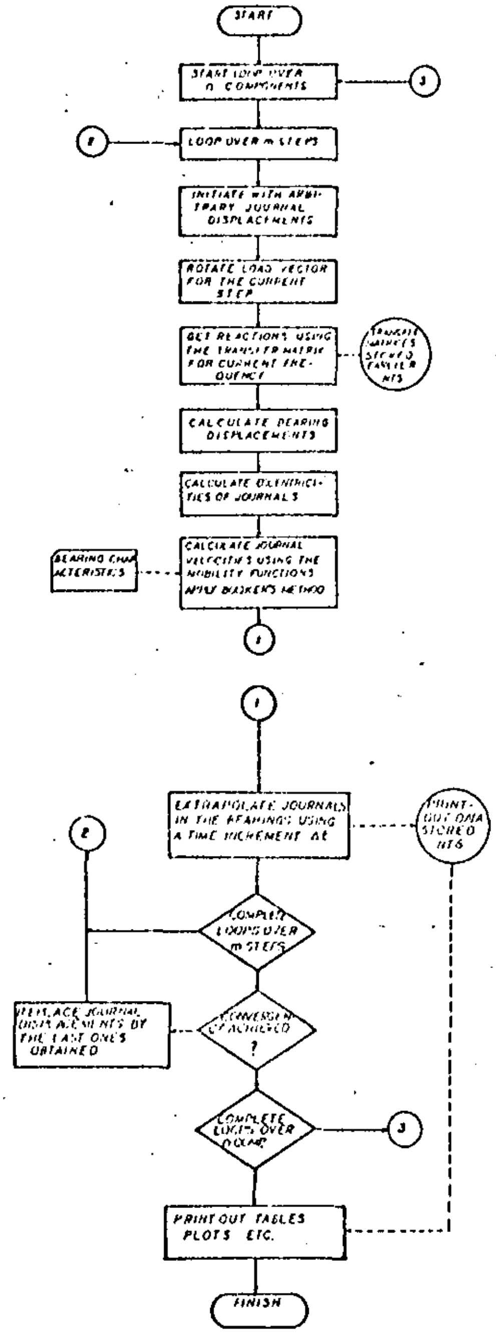


Fig. 6 Flowchart of Computer Algorithm

1) The incorporation of the mass distribution of the crankshaft in the analysis has a considerable effect on the calculation of the loads on the main journals, yielding loads which are approximately 12.5% and 22% smaller for main bearings 1 and 2 and approximately 7% greater for main bearing 3. This can be seen in the Figures 7 through 12.
2) The loads on the bearings, combined with the loads on the crankpins and the displacements of the journals, can be used to perform the stress analysis using the matrices obtained in Equation (15) for the finite element model.
3) The method developed here incorporates for the first time the mass distribution of the crankshaft to carry out the analysis.

BEARING NO	1	2	3	4	5
DIAMETER (in)	2.87	2.87	2.87	2.87	2.87
LENGTH (in)	1.40	1.0	1.1	1.0	1.40
RADIAL CLEARANCE (in)	0.0035	0.0035	0.0035	0.0035	0.0035
FIRING ORDER	1	3	4	2	
OIL VISCOSITY	6.9×10^{-6}				
CRANKSHAFT SPEED	1400 R.P.M.				

Table 1 Crankshaft-Bearing System Data

CRANK NO	1	2	3	4
PHASE ANGLE	0	540	180	360
STROKE (in)	4.125			
WEB THICKNESS (in)	1.1	(average)		
CRANKPIN DIA. (in)	2.25			
CRANKPIN LENGTH (in)	1.04			
MAIN JOURNAL DIA. (in)	2.87			
MAIN JOURNAL LENGTH (in)	1.40			

Table 2 Crankshaft Geometry Data

CRANK ANGLE	RADIAL FORCE	TANGENTIAL FORCE	CRANK ANGLE	RADIAL FORCE	TANGENTIAL FORCE
0	9723	0	370	-298	-140
10	15757	3661	380	-312	-253
20	7764	4556	390	-587	-317
30	4882	4029	400	-450	-322
40	2212	2955	410	-325	-270
50	931	2201	420	-235	-174
60	275	1764	430	-172	-56
70	-93	1378	440	-195	58
80	-324	1174	450	-235	152
90	-487	969	460	-294	213
100	-593	794	470	-362	238
110	-665	652	480	-421	235
120	-751	547	490	-467	210
130	-777	442	500	-499	173
140	-779	328	510	-519	130
150	-539	130	520	-530	86
160	-530	86	530	-534	43
170	-534	43	540	-537	0
180	-537	0	550	-534	-43
190	-535	-43	560	-530	-86
200	-530	-86	570	-519	-130
210	-519	-130	580	-499	-173
220	-499	-173	590	-493	-233
230	-467	-210	600	-513	-327
240	-421	-235	610	-477	-387
250	-362	-238	620	-415	-447
260	-294	-213	630	-338	-479
270	-235	-152	640	-242	-450
280	-195	-98	650	-160	-400
290	-192	56	660	-78	-402
300	-235	174	670	45	-499
310	-325	270	680	434	-730
320	-450	322	690	1752	-1144
330	-587	317	700	2613	-1450
340	-712	253	710	5456	-1796
350	-798	140			
360	-829	0			

Table 3 Radial and Tangential Loads on the Crankpin

LOAD CYCLE ON MAIN BEARING 1

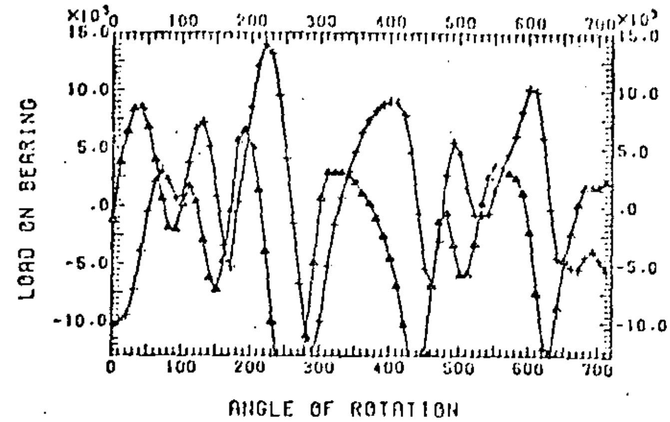


Fig. 7 Radial and Tangential Loads on Main Bearing 1, Crankshaft Without Mass

LOAD CYCLE ON MAIN BEARING 2

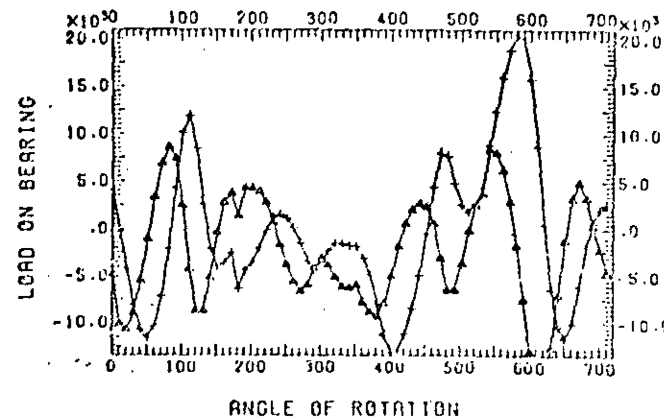


Fig. 8 Radial and Tangential Loads on Main Bearing 2, Crankshaft Without Mass

LOAD CYCLE ON MAIN BEARING 3

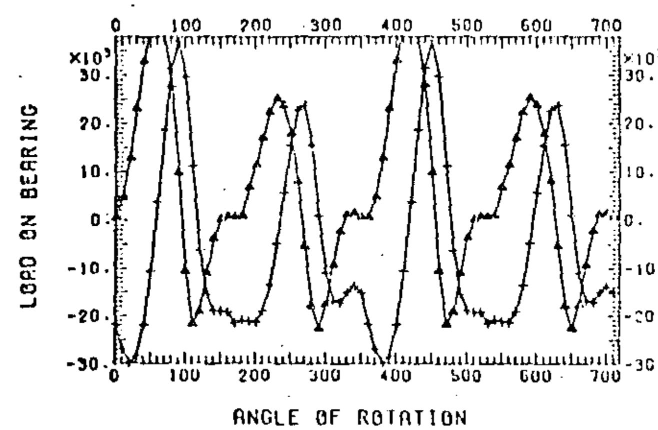


Fig. 9 Radial and Tangential Loads on Main Bearing 3, Crankshaft Without Mass

4) The application of the finite element-transfer matrix method to this problem allows the detailed representation of the crankshaft structure without resulting in large system matrices. This fact increases the efficiency of the method which allows the stress analysis using the same

model and results obtained in the elasto-hydrodynamic analysis.

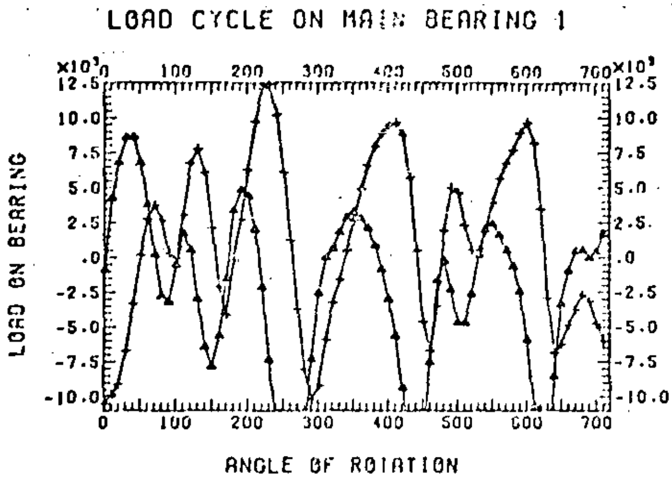


Fig. 10 Radial and Tangential Loads on Main Bearing 1, Crankshaft With Mass

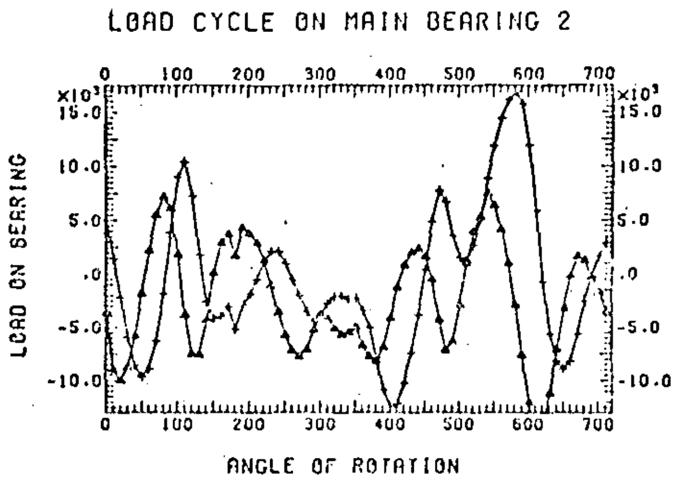


Fig. 11 Radial and Tangential Loads on Main Bearing 2, Crankshaft With Mass

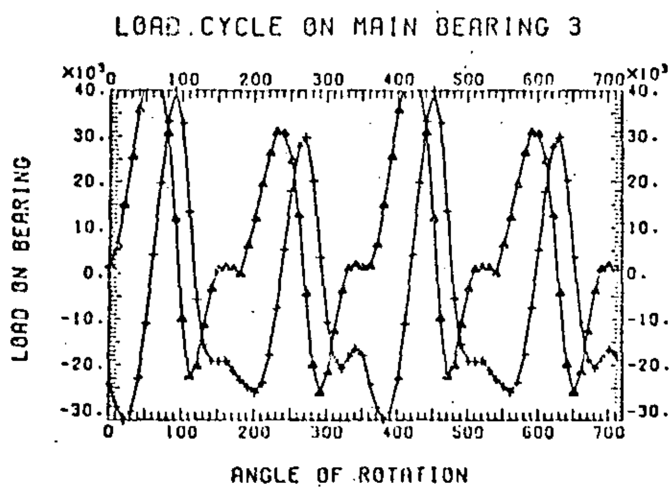


Fig. 12 Radial and Tangential Loads on Main Bearing 3, Crankshaft With Mass

Recommendations for future work in this area may include the consideration of the rotational degrees of freedom in the system in order to obtain moments on the journals and also to consider the Coriolis components of the acceleration given in Equation (10) which was dropped by rotating the supports around the crankshaft instead of doing the opposite.

Also, some parametric analysis would allow the determination of the effect of some additional geometrical parameters on the systems' behavior.

REFERENCES

1. Lowell, C.M., "A Rational Approach to Crankshaft Design," presented by the Gas and Power Division of ASME, Chicago, Ill., Nov. 13-18, 1955, ASME Paper No. 55-A-57.

2. Eshleman, R.L., "Torsional Response of Internal Combustion Engines," Trans. ASME, Journal of Engineering for Industry, May 1974, pp. 441-449.

3. Ross, J.M., and Slaymaker, R.R., "Journal Center Orbits in Piston Engine Bearings," SAE Paper No. 690114, 1969.

4. Mucino, V.H., "Analysis of Multicylinder IC-Engine Crankshafts with Hydrodynamic Bearings Using a Finite Elements-Transfer Matrix Approach." Doctoral Thesis, Department of Mechanical Engineering, University of Wisconsin--Milwaukee, May 1981.

5. Gross, W., and Hussmann, W., "Forces in the Main Bearings of Multicylinder Engines," Trans. SAE, 1966, Paper 660756.

6. Von Schnurbein, E., "A New Method of Calculating Plain Bearings of Statically Indetermined Crankshafts," Trans. SAE, Vol. 79, 1970, Paper 700716.

7. Holland, J., "Contributions to the Investigation of Lubricating Conditions in Internal Combustion Engine," VDI Forsch, p. 475, 1959.

8. Holzer, H., "Die Bereschnumg der Drehschwingungen," Springer-Verlag OHG, Berlin, 1921, Republished by J.W. Edwards, Pub. Inc., Ann Arbor, Michigan.

9. Stickler, A.C., "Calculation of Bearing Performance in Indeterminate Systems," Ph.D. Dissertation, Cornell University, Dept. of Mechanical Engineering, 1974.

10. Booker, J.F., "Dynamically Loaded Journal Bearings: Mobility Method of Solution," Trans. ASME, Journal of Basic Engineering, Series D, Vol. 87, Sept. 1965, p. 537.

11. Booker, J.F., "Dynamically Loaded Journal Bearings: Maximum Film Pressure," Trans. ASME, Journal of Lubrication Technology, July 1969, p. 534.

12. Mucino, V.H., and Pavelic, V., "An Exact Condensation Procedure for Chain-Like Structures Using a Finite Element-Transfer Matrix Approach," Journal of Mechanical Design, ASME PAPER No. 80-C2/DET-123, 1980.

13. Pestel, E.C., and Leckie, F.A., Matrix Methods in Elastodynamics, McGraw-Hill, N.Y., 1963, p. 148.

14. Booker, J.F., "Dynamically Loaded Journal Bearings: Numerical Application of the Mobility Method," Trans. ASME, Journal of Lubrications Technology, January, 1971, p. 168.

15. Moes, H., Discussion, I. Mech. E. 1969 Tribology Convention, Gothenburg, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Vol. 183, Part 3P, 1968-1969, p. 205.

16. Shaupine, L.F., and Gordon, M.K., Computer Solution of Ordinary Differential Equations, W. H. Freeman and Co., San Francisco, California, 1975, Ch. 3, p. 45.

DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.

EL METODO DEL ELEMENTO FINITO EN LA INGENIERIA

FINITE ELEMENT ANALYSIS PACKAGES FOR PERSONAL COMPUTERS

FEBRERO, 1985

Palacio de Minería Calle de Tacuba 5 primer piso Deleg. Cuauhtémoc 06000 México, D.F. Tel.: 521-40-20 Apdo. Postal M-2285

FINITE ELEMENT ANALYSIS PACKAGES FOR PERSONAL COMPUTERS

With these software packages, every engineer can take advantage of powerful computer-based analysis and design tools

HOWARD FALK
Consultant, Montclair, New Jersey
CHARLES W. BEARDSLEY
Editor, ME

As long as finite element analysis was done only on large computers, the applications found in mechanical engineering were necessarily limited. Today there are a number of finite element packages, several of them are discussed in this article, that run on personal computers. By bringing this capability to the desk of virtually every engineer, these packages open the way to much more widespread employment of finite element techniques. More important, they challenge the inventiveness of engineers to find new uses for these techniques in tackling design problems.

There may be some misconceptions about using personal computers for finite element analysis. Because these computers are physically small does not mean that they cannot handle large problems. Today's minicomputer and mainframe computers are faster than personal computers, and their capacity to store data is generally greater. But the differences between the small machines and their minicomputer cousins usually amount only to about an order of magnitude in problem-size capacity and solution time, and the performance gap between them is rapidly closing. For example, the IBM PC/AT is only two to three times slower than minicomputers.

In this article we will take a close look at the actual capacities and speeds offered by personal computer finite element packages, but let us begin by considering the question of computing speed.

CRUCIAL FACTORS

How important is speed?

A personal computer like the IBM PC generally does its computational "number crunching" more slowly than a minicomputer like the DEC VAX or Prime. That means that a small problem that runs for ten or twenty seconds on the PC might be completed in just one second on a larger computer. A large problem that could run for an hour on the larger machine might grind away for 10 or 20 hours on the PC.

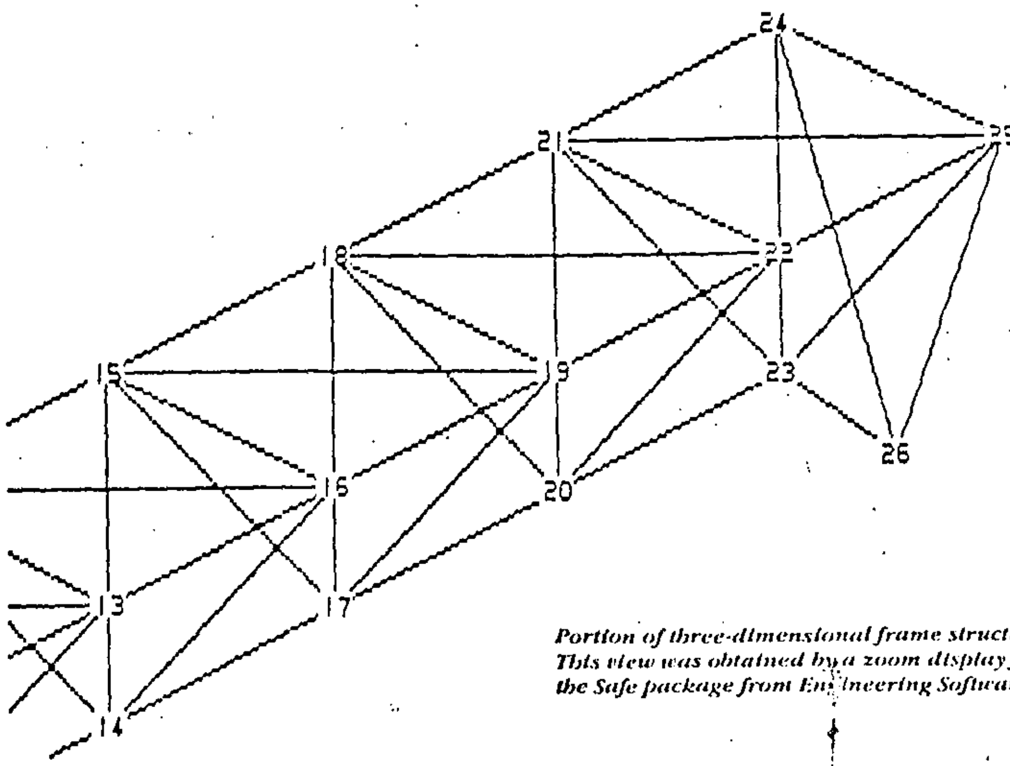
In terms of inconvenience and disruption of work activity, the differences in these situations may not be very important. Seconds of waiting time will not make a significant difference. Where long minutes or hours of computing are involved, the user will probably turn to other tasks while the problem runs; however, the microcomputer is then unavailable for other processing.

The difficulty with computer runs that last for hours is that an analysis might have to be repeated several times, with changes incorporated each time, before the needed design information is obtained. Then runs that take ten hours each can easily add up to a week of design time, and the larger, faster machine may be needed.

One of the main advantages of a micro/personal computer and superminicomputer is that the user has complete control over what the computer is asked to do and when it is used. There is no waiting for programmers, or data processing managers, and no need to compete with other users for shared resources. In many situations these advantages will override the drawback of slower computational speed.

A side benefit of the personal computer is that it virtually forces the vendors of software packages to make their packages easy to learn and to use. Personal computer packages are expected to be self-explanatory, allowing users to sit down at the computer keyboard and interact with screen-displayed questions and instructions to accomplish whatever they desire. These packages must also have an "expert" user mode to bypass "new user" prompting. This is a serious shortcoming of many interactive systems.

As we shall see, the extent to which the packages described here manage to reach the goals of easy learning and use varies. But overall their achieve-



Portion of three-dimensional frame structure model. This view was obtained by a zoom display feature of the Safe package from Engineering Software Co.

ment is impressive, reducing the user's chores dramatically, compared to what most mainframe finite element software has demanded.

To be able to intelligently evaluate the personal computer packages, some explanations of what they are supposed to do and what they actually offer are in order.

Main Memory and Disk Storage

The main task of finite element packages is to solve a large system of equations that will yield the key answers (deflection, force, stress, strain). One way is to place all the necessary information in the main memory area of the computer. This memory is directly, rapidly accessed by the central processing circuits of the computer, and the solutions can therefore be completed at the maximum speed the computer can muster. (This is still a slow process as compared with mainframe computer speeds.) The drawback to this use of main memory is one of size. Even the 640 thousand bytes of main memory (a byte is approximately the amount of memory required to store one alphabetic character) allowed as a maximum by the IBM Personal Computer is not sufficient to accommodate and process solutions for larger finite element problems.

A second approach makes use of the computer's disk storage. This storage can be substantially larger than the main memory. For instance, a so-called "hard" disk unit may provide 10 million or more bytes of storage. In this approach, the solutions are computed in blocks, taking one block of equations at a time from disk memory into main memory for solutions. Then the size of problems that can be handled is limited only by the size of available disk memory and the time the user is willing to wait for a solution to run. Although finite element software is designed to minimize use of disk storage space and to speed access to and from the disk, disk-based solutions are much slower than those based on main memory.

The essential tradeoff is a fast but limited-size main memory solution vs. a much slower disk-based solution that can handle very large problems. In an attempt to get the best of both these approaches some vendors have structured packages so they will run smaller problems in main memory but will automatically shift to a disk-based solution when larger problems are presented.

Finite element packages that run on personal computers often place limits on the number of nodes, elements, and degrees of freedom that can be handled. Problems that fit within these limits may run in a few seconds, or in a matter of minutes.

FESDEC

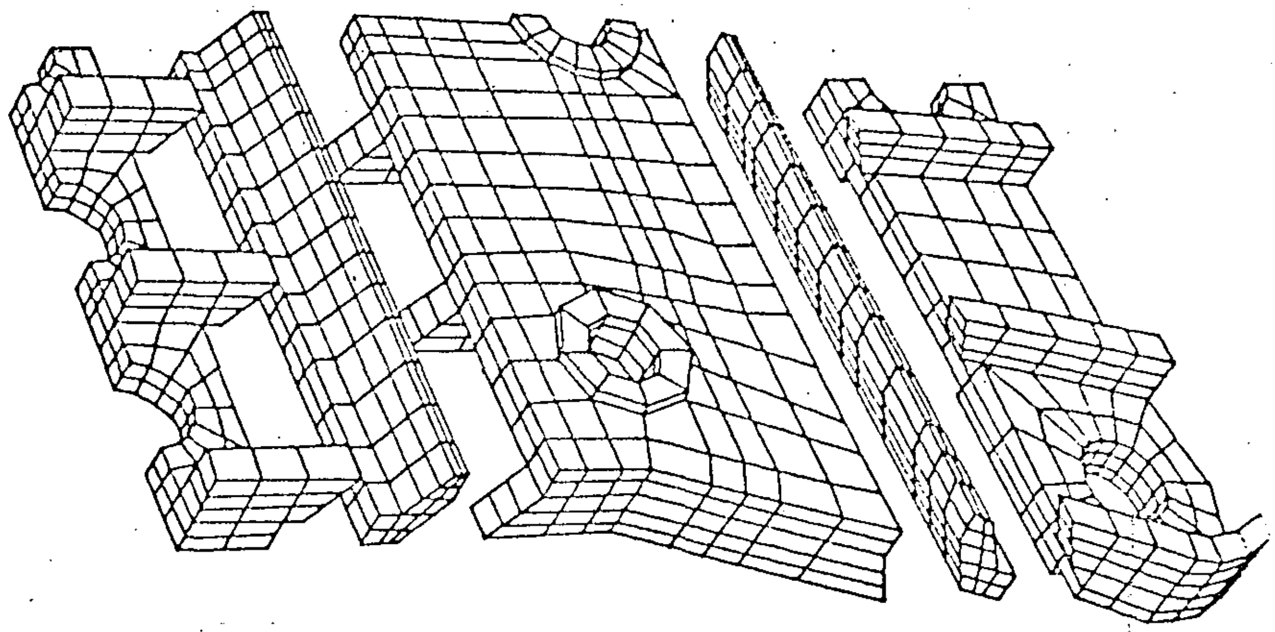
Fesdec is a general-purpose program for both 2-D and 3-D linear static analysis. It can calculate displacements, reactions, and stresses of a structure under a variety of parameters including temperature. Two extension modules cover dynamic analyses such as determining the natural frequencies and modes of vibration of structures, and transient heat conduction problems on 2-D and axisymmetric solids.

The element library contains isometric membranes, shells, and solid elements. The program is modular—modules communicate with each other by modifying the data base.

Fesdec operates with the Hewlett-Packard 9000, 9816, 9826, 9836, and 9845 desktop computers. It uses Basic, and has both 2-D and 3-D graphic displays. Outputs include plots of deflected shapes, stress vectors, and stress contours. The prices are \$8000 for the static analysis module, \$2000 for dynamic analysis, and \$1000 for heat transfer.

For more information, contact Diane Merrick, Engineering Software Coordinator, H.G. Engineering, 260 Lesmill Rd., Don Mills, Ontario, M3B 2T5, Canada.

Circle No. 237 on Reader Service Card



Here sub-models are first set up then, using the model combination capability of the Supersap package (from

Variety in Elements and Loads

To represent different types of systems and structures, finite element packages use a variety of different elements. Beam, pipe, rod, and truss elements are used to represent line members in a structure. Plate, membrane, brick, and other elements are built up to model surfaces or solid objects.

In structures containing rod, truss, or beam-type elements, cross-section properties are important. Usually the packages are designed to handle elements with constant cross sections. The common method of representing tapered sections is to set up a series of constant cross-section elements, with their sections enlarging from one end to the other end of this series. Some software packages allow the user to call for elements with linear taper included.

Types of loading available with these packages may include concentrated loads or moments at the nodes, and concentrated or distributed loads on the elements, or over specified areas on three-dimensional models. Some packages include automatic generation of gravity loads, and distributed loads that are triangularly or trapezoidally shaped. Loads may also be expressed as enforced displacements. Where packages are used to analyze fluid flow or heat transfer, loading will consist of temperatures or appropriate pressures.

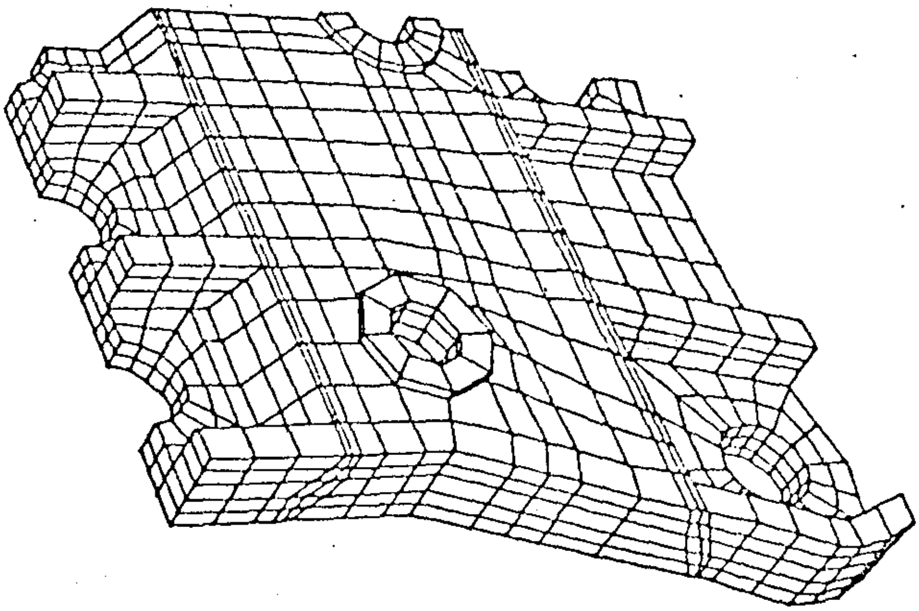
Easing Data Input

Most finite element packages for micro/personal computers use interactive dialog between the computer display and the user to shape the way information is entered and package capabilities are employed. This kind of interaction prompts the user to provide all the data the package requires, and to make all the alternative choices the package provides.

Interactive input of data and commands is useful not only to the beginning user but also for those who do finite element analysis only occasionally and are likely to forget commands and procedures between sittings at the computer. However, the step-by-step format imposed by interactive use can become confining for the constant user who soon becomes very familiar with the necessary procedures, is looking for the most efficient way to do problem-solving, and may prefer to issue direct commands. It is possible to offer users the best of both worlds by providing interactive menus with the option of using direct commands. The Supersap Aedit module offers both these methods. Menus are only displayed at the request of the user.

Some of the packages continue to use the "batch" entry procedures familiar to users of finite element programs that run on larger computers. For these, the user must prepare the necessary input items in correct format, then enter them into the computer as a group. At least one of the personal computer packages allows for the use of word processing to set up this kind of batch input.

One notion promoted by some finite element package vendors is that the user can come to the computer keyboard with just a rough sketch of the system that is to be analyzed. However, as we have already seen, dealing with truss and beam elements requires the user to come prepared with data on cross-section properties and various material properties are also required as input to many analyses. These can include such properties as Young's modulus, Poisson's ratio, weight and mass densities, and inertias. Where anisotropic behavior is to be represented, elastic constants are needed. For heat-transfer calculations inputs may include convection



Interactive Systems), a composite model is created.

and radiation properties. Thermal stress analysis requires thermal expansion coefficients and stress-free temperatures.

Built-in computer files can ease the input burden on the user by collecting and storing this kind of information. The storage capability is often referred to as a library or data base. In some packages, data the user puts in for one element can be drawn from the data base for use with other, similar elements. When packages are directed to very specific types of design, a lot of very useful information can be kept in the data base. For example, the CAEpipe package from SST carries complete descriptions of standard parts in its data base. From this data base pipes and piping components, complete with all dimensions and properties, are supplied at the user's request. The Supersap A Beam module returns all the geometric and area property data contained in Rev 7 and Rev 8 of the AISC (American Institute of Steel Construction) manuals and calculates those area properties not contained in these manuals.

The units of input and result quantities are an important concern. For correct results, units of input parameters must not only be correct but consistent with one another. Most of the personal computer finite element analysis packages rely on the user to monitor correctness and consistency of units. However, the packages from SST (CAEpipe and CAEframe) prompt the user for the right units for input data, and display the correct units for the output data. Users can elect to input either in English or in metric units. But regardless of what input units are used, the packages will display results in whatever units the user selects, making all necessary conversions internally.

Another way that computers can ease the laborious process of entering data is by providing internal controls or checks on the accuracy of the input. Both logical and typographical errors can be checked in this way. Packages may, for example, refuse to accept negative values for area or for Young's modulus. In connection with the entry of nodes and elements, the package can check to see that there are no isolated nodes. Visual checks of a graphic display of the input model are especially valuable in uncovering errors such as missing or misplaced elements. For example, the CAEpipe and CAEframe packages perform extensive diagnostics on logical and typographical errors as the user makes such errors, and provide visual means to check the model as it is being generated.

Generating Nodes, Elements, and Meshes

To simplify the process of inputting node, element, and restraint data, some of the packages allow the user to input data for nodes, elements, and restraints, then replicate that data to reproduce those nodes, elements, and restraints as needed to form the desired structure. For example, if a beam is to be defined by six identical nodes with interconnecting elements between them, the user has to input data only for the first element and the first and last node locations. The package will then replicate the data for each of the four intermediate nodes and elements.

Objects to be modeled by these packages can be defined in a very general way by placing nodes on the object's surface and interconnecting them with appropriate elements. The process of setting up this network of nodes and elements is called mesh generation. In micro/personal computer packages, as in similar software for larger computers, automatic mesh generators for specific types of objects are frequently integrated into the package contained in "preprocessors" that come with the packages.

Of the packages discussed in this article only a few provide a variety of separate preprocessors. The Supersap package has ten and the MSC/pal package has seven, while CAEframe, Finite/GP, and Images 2D and 3D generate nodes and elements using pattern, repeat, or fill capabilities. The CAEpipe can automatically generate a series of pipe runs and elbows and specify rigid sections such as valves. In the case of the Supersap package these preprocessors are selected so the shapes they produce can be used individually, or combined with one another to serve as models for all the mechanical and structural problems the package designers could envision.

Looking at Graphics

Graphics are an important feature for a finite element analysis package. They provide a valuable check on the correctness of the model the user inputs into the computer. Sometimes the user may leave out a node or misplace an element. Even if many nodes and elements are generated automatically, the user will still want to see that the desired shape has actually been generated. It is therefore almost essential to view the shape that results from the input data, and to note how that shape is covered by nodes and elements. It is also important to view such data as boundary displacement, forces, and pressures. Errors in the input data, even gross errors, are not easily recognized in numerical form, but they can be dramatically obvious in a graphic view.

To examine the graphic display of the model from every aspect, a number of packages, particularly those that deal with three-dimensional models, allow the user to translate and rotate the image. In addition it is helpful to be able to view images larger than the screen area, to zoom in on details of the model and to pan across to reveal off-screen portions.

To connect the actual data to what the user sees on the graphic shape, some means of correlating the two is needed. This is usually provided by displaying node and element numbers on the graphics. Some packages also provide the reverse capability. While viewing the complete model, users of packages from SST can ask to see material properties on a certain element. The desired data will be displayed and the indicated section of the model graphics will be highlighted.

When examining graphics and data it is convenient to have both shown on the display screen at the same time. One way of doing this is to provide a split or windowed screen with separate areas for graphics and data; this is provided in the Images 3D package from Celestial Software. Packages from SST use two separate display monitors: a monochrome monitor for data and a color monitor for the graphics.

Display of the deformed model and stress contours after loads have been applied is another valuable feature. This allows the user to see where the largest deflections take place and to observe the overall way the model responds to the loads. Although the same information is included in the output data listings, one picture can be worth a thousand lines of numbers. Some packages provide magnified viewing of the deformed portions of the model so these changes can be more easily viewed. Stress contours and specialized data searches are quite important. Data selections—"highest *N* of," "only those above *XXXX*," "regions bounded by . . ."—are critical display concepts. Plots and printouts should both be controlled by these selections. Animated graphics display is a desirable feature for both static and dynamic analysis. It can make clearer to the designer such characteristics as the vibrational response of structures.

Color display can also be used to advantage. Three package vendors have followed through on this. For example in the CAEpipe package, results that meet code limitations are shown in yellow, while those that exceed the code are shown in red. In the Images package, colors are used to differentiate between element types in the graphics display and between message types: errors, warnings, help screens, prompts, and data in the text portion. The Supersap C-plot module does stress, deflection, and temperature contour plotting of the analysis output. Contours are drawn in multiple colors.

Data at the Output

Because all the packages described in this article use the finite element method, they produce similar basic output data. For static analyses the basic outputs are deflections, reaction forces, stresses, and strains. For dynamic analyses the basic outputs are more varied: resonant frequencies and mode shapes, transient displacement, force, and stress and frequency responses.

The usefulness of these packages can be enhanced by providing user control over combinations, disk storage, and print selections of the basic output variables. For example, maxima and minima can be sorted out and listed for displacements and stresses. Results can be compared to relevant standards, deviations from allowed values can be listed, and outputs for different load cases can be compared.

Graphics can be used to present these output data as well as to show views of the models. The Finite/GP package from COADE, for example, provides contour plots of stresses, displacements, and variables of heat-transfer analysis. Packages from SST display in color deflected shape along with undeformed geometry and high-

THE GIFTS SYSTEM

Gifts (Graphics Interactive Finite-element Time-sharing System) was developed in the early 1970s on 16-bit minis from DEC and Data General. Today, it is being prepared for release on a number of smaller systems, including the IBM PC and AT, the Zenith Z150 (an IBM PC compatible), the Data General Desktop Generation micros, the PERQ-2, and other sophisticated workstations. Recent tests demonstrate that Gifts can run on an IBM PC compatible personal computer with 384KB of memory, a floppy disk drive, and a 10MB hard disk.

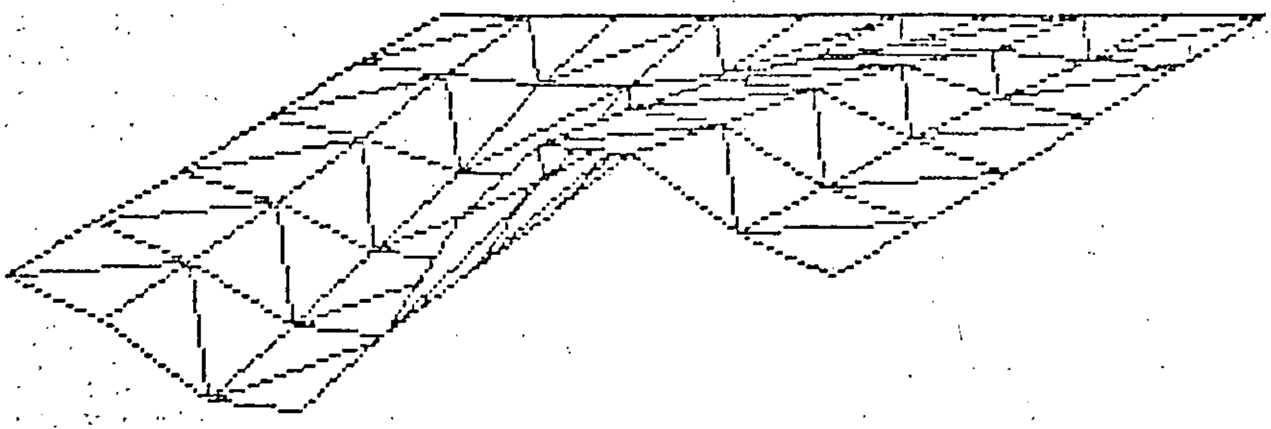
In Gifts, the process of structural analysis is looked upon as a part of the design process. Gifts is capable of automatic model and load generation, linear static and dynamic analysis, as well as postprocessing of results. A model is defined, then analyzed. Based on the results, the structure can be modified in any of several ways. The thickness of a member or group of members can be reassigned or the dimensions associated with a certain thickness designation can be redefined. The geometry can be modified by altering coordinates of a specific structural point or by moving a key geometric location, which will automatically redefine the shape of a portion of the structure. Boundary conditions can be adjusted and new loading cases imposed. The analysis is performed again, and the results are once more examined.

The process is repeated until the engineer is satisfied with the results. In the generation of the model and in examination of results, the user has access to many commands for data-base interrogation and plotting designed specifically with the structural engineer in mind.

Gifts is not a single program but a collection of 52 independent ones called processors, which the user can order in many different ways. Data communication between the various programs is handled by a centralized data base, which presently consists of 10–30 files, the contents of which are well defined. Access to these files is made via Gifts library subroutines.

For further information, contact Hussein A. Kamel, Gifts Inc., 2761 N. Country Club, Suite 201, Tucson, Ariz. 85719.

Circle No. 238 on Reader Service Card



This output plot shows the third-mode response of a flat plate with three edges restrained. The plot was obtained from the Images 3D package (Celestial Software) and is shown with hiddenlines removed.

light maximum displacements and corresponding locations. They also highlight maximum stress and stress ratios. For results other than the maximums, they present results for a node or an element on the monochrome monitor and highlight the corresponding location of the model on the color screen.

Transfers To and From Larger Computers

In several cases, the packages described in this article are versions of software orginally designed to run on larger computers. Thus the SAP-86, Msap-4, and Supersap packages are derived from the SAP IV software that has been in use on mainframe and minicomputers for several years. Supersap also has a minicomputer version for DEC and Prime.

As long as the files of input built up in the personal computer versions are identical in format to those used with the larger computers, there is little difficulty in transferring models input on a smaller machine to be run on a larger one. This can be particularly valuable where large models are to be run repeatedly.

For the programs written specifically for microcomputers, it is possible to transfer models by translating the data files into formats that can be accommodated by other programs that run on larger computers. Thus for the Images 3D pa[illegible]e are translation routines that allow the user to move models built on a personal computer over to larger machines that run such programs as Strudl, Nastran, Ansys, and Stardyne.

Becoming a User

Most of the packages described in this article operate on an interactive basis. That means that when data are needed from the user, a request is displayed. If a command is needed the user is notified by the software, and is usually presented with a choice of available alternatives. This interactive prompting by the computer eliminates the need for the user to memorize procedures and command names, and speeds the process of learning to use the package. Some packages also provide screen-displayed help messages to aid the learning process.

For those users who are generally familiar with finite element analysis, vendors who have interactive packages estimate it takes from 20 minutes to a few days to begin to run practical problems. In contrast, estimates for time to learn from vendors of those packages that do not provide interactive dialog range from several days for experienced analysts to two weeks for beginning users.

Most of the packages provide sample problems to help the new user understand how the packages work. These are helpful, particularly if problems similar to those sampled are what the user wants to run, but they are no substitute for well-written manuals.

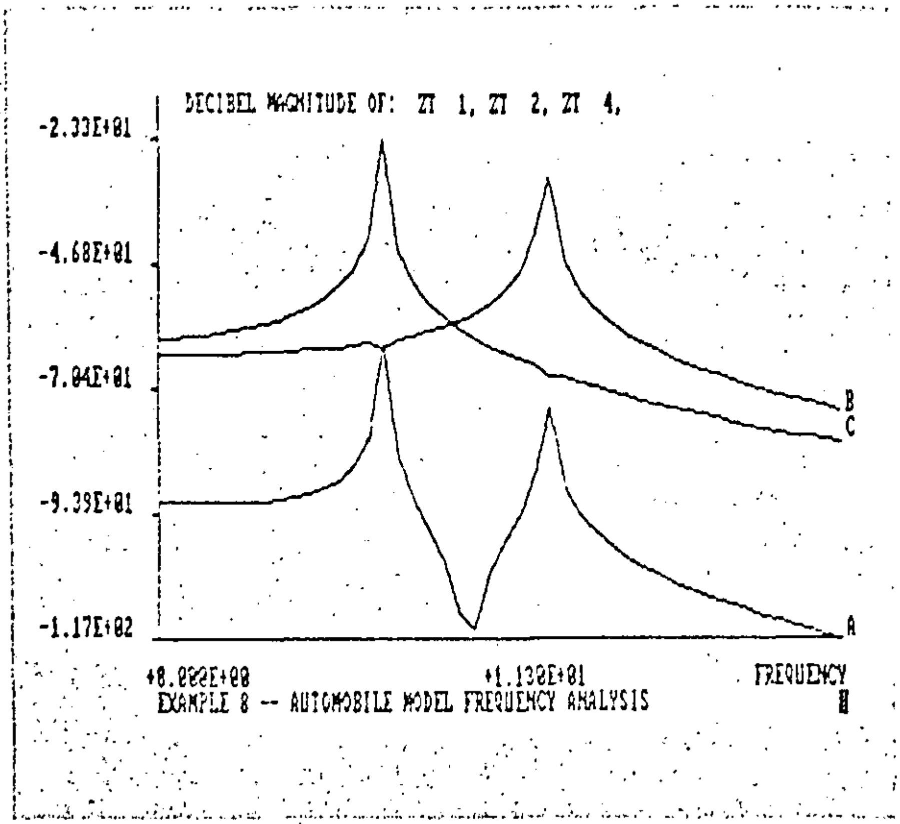
Beyond learning the mechanics of package operation, users should be aware that the finite element method is not as straightforward as we are sometimes led to believe. It is an approximation method that allows users to generate bad models as easily as good ones. The idea is to create models that reasonably represent the mechanics of objects being analyzed.

There can, for example, be differences in the way mass and stiffness are distributed, depending on the number of nodes and elements used in a model. Thus, it may be possible to model a given structure using 20 nodes and get answers that correspond closely to what would be measured in an actual, physical structure. However, if the same structure is modeled with 10 nodes, the answers may be inaccurate.

ASME and many universities offer short courses in finite element analysis that provide excellent perspective on the pitfalls that can be encountered in using this analysis procedure.

Handholding and Updating

All of the package vendors will field questions from users over the phone. In some cases the vendors encourage users to send in printouts of their input and results so problems that present difficulties can be rerun and further analyzed. Experience with the responsiveness of a vendor is the only way to gauge the extent to which they will actually prove helpful so, if this is a matter of concern, prospective users would do well to discuss it



These automobile-ride analysis results are part of an analysis done with the MSC/pal package from MacNeal-Schwendler. A one-meter/sec² ground acceleration was applied to an automobile suspension system model. The plots show motion of the body, one front wheel, and the rear axle in response to this acceleration.

with colleagues who are already using the package under consideration.

Finite element packages, like any other software, are subject to continued change and improvement. Several of the package vendors indicated that they issue update disks every six months or once a year. Cost to users for these updates ran from the cost of disks and postage to about 10 percent of the initial purchase price.

CAEPIPE AND CAEFRAME: RICH IN FEATURES

These packages solve static problems for 2-D and 3-D structures and systems. CAEpipe analyzes networks made up of standard piping elements and fittings. CAEframe analyzes frame structures with plates, pipe and equipment supports, and plate and shell structures. User-oriented features include a graphics display that uses color to highlight results, stores libraries of standard elements and materials, and the ability to automatically convert units and monitor their consistent use. The specialized nature of these packages permits fast operation, with larger problems running only a minute or two to completion.

The per-copy license fee for CAEpipe is $8900, for CAEframe the fee is $4900. The packages come with comprehensive user's and verification manuals and a few sample problems. The packages run on IBM PC, /XT, /AT, and compatible machines. Required equipment includes 640K main memory, 8087 math chip, monochrome adapter and display, Techmar Graphics Master board, color graphics monitor, and a graphics printer.

The packages are available from SST Systems, Inc., 355 W. Olive Ave., Sunnyvale, Calif. 94086; (408) 773-1171.

Elements. With the CAEpipe package, up to 450 nodes can be used. In piping systems with many branches, only about 200 nodes can be used. This limitation is due to the available main memory size of 640K in the case of the IBM PC. With CAEframe, up to 2700 degrees of freedom can be accommodated for a beam problem or half of that number for a plate or shell problem, depending on the bandwidth of the stiffness matrix. For a typical structural or plate or shell problem with an average bandwidth equal to 10 percent of the total number of degrees of freedom, a maximum of 600 degrees of freedom can be accommodated.

Elements for CAEpipe include the piping itself, elbows, standard fittings, elastic supports, and hangers. For CAEframe the elements include beams (six degrees of freedom per node), trusses (three degrees of freedom per node), four-noded quadrilateral plate elements (six degrees of freedom per node) and spring elements (six degrees of freedom). Plates and shells with stiffness can be easily modeled using the rigid offset option available for both beam and plate elements. Any degree of freedom within an element can be released to accommodate internal hinges or special releases.

The packages have built-in libraries of standard components and material properties. CAEpipe libraries have standard piping component dimensions and materials, stress intensification factors for standard fittings, and the ITT-Grinnell pipe-hanger catalog. The program automatically selects the appropriately sized hanger once it's location on the pipe network is specified. It also checks the model for conformity with ANSI B31.1 and B31.3 standards.

CAEframe has stored libraries of standard AISC structural sections, pipe sections, standard pipe, and structural material properties. The user can also create one's own libraies of sections and materials for future use. The package checks the structures for conformity to AISC codes.

Types of loads for CAEpipe include sustained dead weight and pressure, seismic G loads, thermal expansion, and anchor movement. These can be applied in any combination permissible by ANSI standards.

The CAEframe package handles applied displacements, seismic G loads, non-uniform distributed loads (triangular, trapezoidal, etc.), thermal loads, and concentrated loads at the nodes or at any location along the elements. Each model can be analyzed for a maximum of 100 load cases. As many load combinations as desired can be performed, with a maximum of ten load cases per combination. Fractions or multiples of load cases can be included in a combination.

Speed. According to the vendor, speed of operation for CAEpipe running a complex piping problem with many branches and with 200 nodes was under two minutes per load case. More typical problems with about 50 nodes run about 25 seconds per load case. CAEframe ran a complex pipe support problem with 30 elements in about 25 seconds for the first load case. Problems with 100 elements run in just under two minutes.

CAEpipe can automatically generate series of runs and elbows. CAEframe includes automatic node and element generation. Both packages include numerous checks to detect inconsistent input data. If, for example the user attempts to input a pipe element and connect it to an incorrect fitting, the CAEpipe package will immediately bring that discrepancy to the user's attention.

Graphics and output. Two display screens are used, one for interactive text and data display, the other for color graphics and data. As the user enters the input data on the text monitor, a graphical representation of the resulting model takes shape simultaneously on the color screen. In this way the user can see immediately when obvious input errors are made, and can verify that the data represent the model that is desired.

The graphic display can be rotated. Users can also pan across images larger than the display area, and can zoom in on display details. The color display also highlights the node or element the user is currently inputting or examining.

Information on the model is coordinated with the display, and is available for user inquiry. For example, with the CAEpipe package, the user can ask to see in a model those elements which use a certain six-inch pipe section. The text screen immediately displays the details of that pipe size such as diameter, wall thickness, bend radius, corrosion allowance, insulation thickness, etc., while all the elements of the model that use that six-inch pipe are highlighted on the color graphics screen. This provides an added method for checking on the correctness of the model.

Deflected shapes of models can also be displayed on the color screen along with the undeformed geometry. The user can also elect to view all pipe elements that are subjected to stress above, say 7000 psi. The model will then be shown with these elements highlighted, and with the calculated stress numbers displayed next to these elements.

The user can control a magnification factor on deflections so that, if too small to be clearly seen, they can be emphasized as needed. On the display of the deflected model, maximum displacements and their corresponding locations are highlighted. The highest stress value is shown in a box.

There is a "browse" command that allows the user to call for selected results to be displayed on the text screen, while corresponding elements of the model are highlighted on the color screen. For instance the user can ask to see the forces on element number 33. These will be listed on the text screen while element 33 is highlighted on the color graphics screen.

Output data includes stresses, displacements, forces, moments, spring forces, support loads, and stress ratios (calculated over allowed values). During execution of a problem, the packages indicate the elapsed execution time in seconds for each computational task performed. An accounting program that keeps track of software usage time is built into the packages. Vendor plans to release shortly a translator between CAEpipe and Quadrex Corp.'s NUpipe. This translator converts the input file of NUpipe into CAEpipe input format and vice versa. Similar translators between CAEpipe and other commercially available piping programs and be-

SAP-80

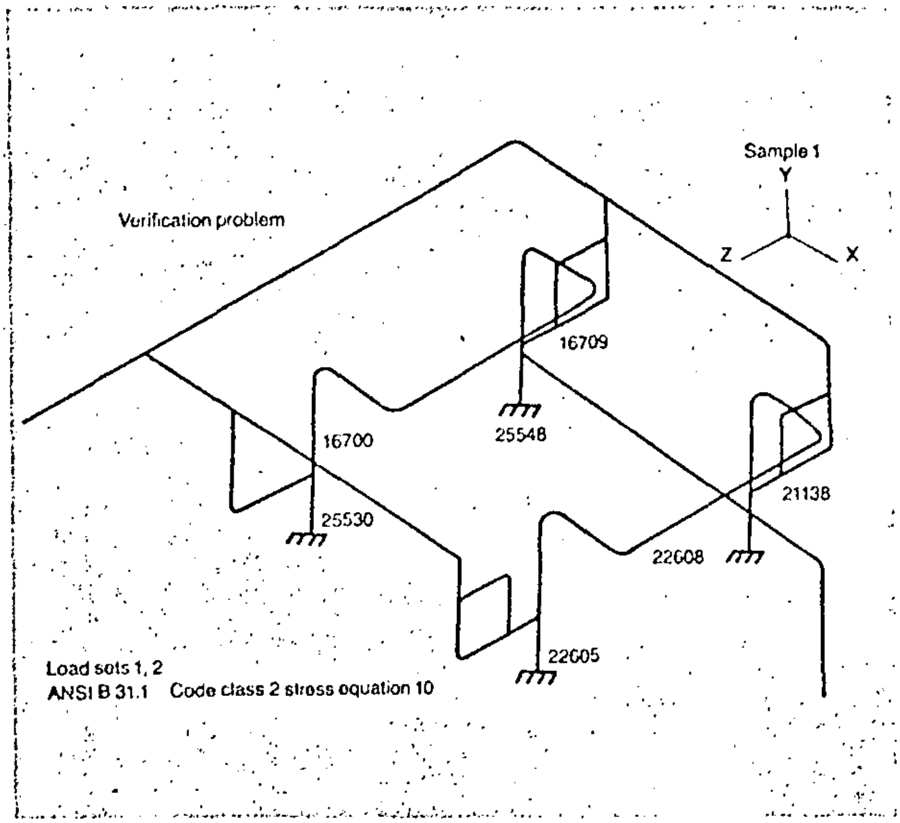
SAP-80, a new general-purpose finite element program, incorporates recent research in data-base management systems, free-field input, new eigenvalue techniques, higher-order finite elements, and limited nonlinear analysis.

The profile approach is used as the basis of the SAP-80 program. The formation of the total stiffness matrix is a separate program segment in which the element stiffnesses are read in sequence from secondary storage and the total stiffness matrix is formed in active column form in large blocks. The actual solution phase is another separate program segment. Evaluation of substructure stiffnesses, calculations of mode shapes and frequencies, and evaluations of reactions and member forces are all separate programs. This clear uncoupling of different phases of the program gives the profile approach an advantage if microcomputers are used. Also, on large computer systems the profile approach has the additional advantage that it can be easily vectorized for computers with array processors.

A group of Fortran 77 subroutines has been developed which is designed to augment the standard Fortran language and to produce a new higher-order, machine-independent language for the development of structural engineering software. The group of subroutines which comprise the Computer Adaptive Language for the development of Structural Analysis Programs, CAL/SAP, is designed to operate effectively on micro, supermini, and mainframe computers. The CAL/SAP system has been used as the basis for the development of the SAP-80 Series of Programs and for CAL-80, a series of interactive programs for computer assisted learning of structural analysis and design.

For more information, contact E.L. Wilson, Department of Civil Engineering, University of California, Berkeley, Calif. 94720.

Circle No. 239 on Reader Service Card



Selective display of stresses with maximum stress highlighted for a 3-D piping problem using the CAEpipe package from SST Systems, Inc.

tween CAEframe and widely used structural programs are planned.

Support. The vendor finds that users familiar with piping or frame design can learn to use these packages in an hour. To supplement the manual and the interactive procedures, information that guides the user with screen-displayed messages is provided.

Support is available from the vendor by telephone and correspondence. It is provided with packages, along with updates, for 90 days. After that time, the monthly charge for further updates and support is about 1.5 percent of the license fee. Updates are generally released at six-month intervals.

FINITE/GP: FOR A VARIETY OF PROBLEMS

Finite/GP handles steady-state analysis for heat transfer and fluid flow as well as for static structural problems. The package includes mesh generation. It also provides carpet plots of output data for the heat-transfer and fluid-flow analyses.

There is a $3500 one-time charge for the package, and a lease arrangement for those who wish to try out the package. Sections of the package, for example one on axisymmetric analysis or another on 3-D frame analysis, are offered separately.

Finite/GP is for use with the IBM PC and compatible computers. Added equipment required are an 8087 coprocessor chip, 512K main memory, color graphics adapter, and a dot matrix printer.

The package is available from COADE, 8550 Katy Freeway #122, Houston, Texas 77024; (713) 973-9060.

Elements. Finite/GP solves for plane stress, plane strain, axisymmetric stress, plane heat transfer (convection or conduction), axisymmetric heat transfer (convection or conduction), flat-plate bending, potential fluid flow (Poisson equation solving), and it will also find 3-D beam and truss solutions.

Structural elements available include the beam, three-noded and four-noded quad elements, a six-noded triangle, and an eight-noded quad.

The package uses a disk-based solution technique and will handle up to about 2000 degrees of freedom. Problems using 2000 constant strain triangles have been successfully run by the vendor. The same problems can be run using six-noded triangles, and fewer elements would be required.

The vendor finds that the average problem will run under 10 minutes on this package. Problems that are so complex as to be near the limits of the package are said to run about 20 to 30 minutes.

All the input data are stored in the same allocated memory area. Node, element, and load data all compete for the same space, so the number of load cases that can be handled depends on the size of the problem. Like nodes and elements, the number of loads and load cases is limited only by available memory.

For heat-transfer calculations, the required inputs are convection, conduction, and thermal expansion coefficients, and stress-free temperature.

Data input is interactive so it can be performed by answering screen-displayed questions. An alternative batch-mode input, using a word processor to format the input data, is also provided.

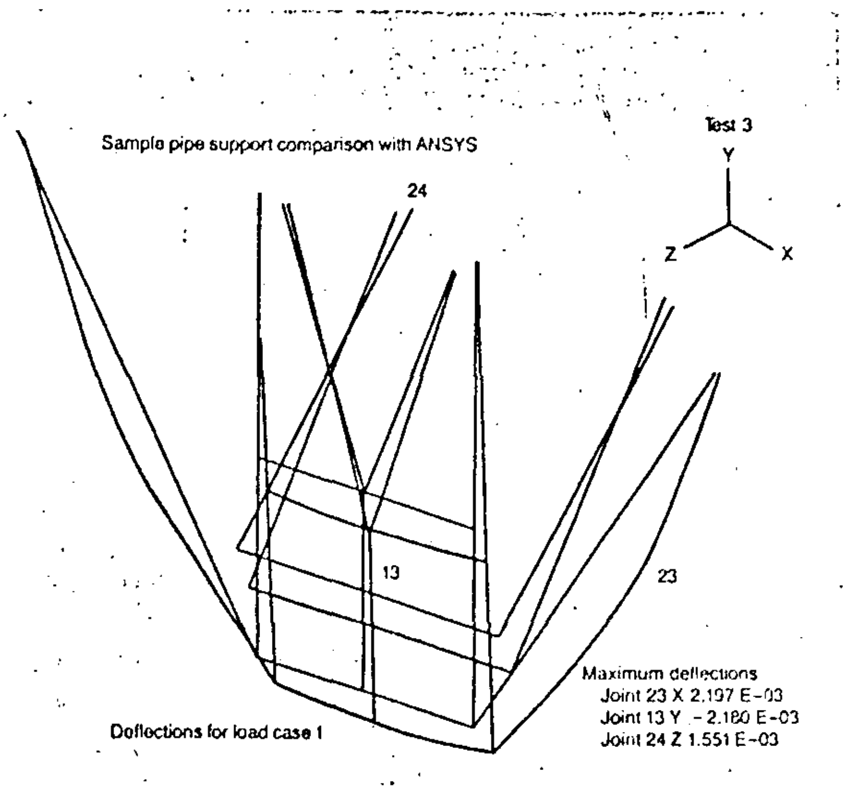
Graphics and output. The mesh-generation technique used is a conformal mapping. The user can start with a simple sketch of the object that is to be represented and use the mesh-generation facility to get a use-able model. Submeshing is provided so different shapes can be attached to one another for analysis.

Both input and deformed structures can be graphically displayed. In heat-transfer analysis graphic output includes contour curves and surface (carpet) plots of temperatures, and gradients. Numerical data output for heat transfer includes temperatures, potentials, and gradients.

Fluid-flow analysis yields velocities, potentials, and pressures. Structural analysis produces the usual stress and displacement information. Carpet plots of these results can also be displayed. The user chooses from a menu which plots are to be shown.

The package provides no built-in transfer of files to larger computers. However a file is reserved by the package for handling the formats, and users able to do so can specify the necessary reformatting.

Support. User questions are taken over the phone. With the package purchase the user gets one year of updates—two major plus several minor ones. After the first year users must make a separate support agreement with the vendor.



Deformed and undeformed shapes with maximum deflections high-lighted for a 3-D pipe support structure using the CAEframe package from SST Systems, Inc.

FRAME 2D, AND SAFE: SIMPLE AND EASY

Frame 2D is for static analysis of two-dimensional structures. Similar analysis of three-dimensional structures is done with the Safe package. Both are quite simple to learn and to use. Only one type of element, a beam, is available for Frame 2D. Safe offers a larger variety of element types, and can handle models with up to 600 nodes and 600 elements. The capacity of Frame 2D is only about half as great. The packages allow fairly complicated loading and run reasonably quickly.

Frame 2D costs $495. Safe costs $795. The packages run on the IBM PC, /XT, /AT, and compatible computers, require 128K main memory, two disk drives, and a graphics adapter. Use of an 8087 math chip is recommended. A version of these programs is available to operate on the TI Professional Computer.

The packages are available from Engineering Software, Co., 1405 Porto Bello, Arlington, Texas 76012; (817) 261-2263.

Elements. Frame 2D uses straight-line beam elements. These have been used to model such structures as airplane wings, frame structures, even C-clamps, since curved surfaces can be approximated by straight line seg-

LIBRA

Two new software packages providing finite element analysis on the IBM PC and compatibles have been introduced by InterCept Software. The Libra family of finite element software includes both structural and heat transfer analysis packages that are simple to use, menu-driven, and suited to the needs of structural, mechanical, and civil engineers.

The Libra family consists of Libra structural analysis, which provides stresses, displacements, and reaction loads to both 2-D and 3-D models, and Libra thermal analysis, which provides temperature distributions in both 2-D and 3-D models. The two packages can work separately or together, with Libra thermal supplying nodal temperatures to Libra structural.

Libra is a microcomputer version of the mainframe Libra finite element analysis code, written by Dr. Harold Durlofsky, which has been in use since 1976. Libra was developed through a joint agreement between Dr. Durlofsky and InterCept Software.

Libra is available for the IBM PC, IBM PC/XT, Compaq, and other IBM compatible machines using MS-DOS 2.0 or later. Libra requires 512K RAM, and a hard disk is recommended. An 8087 math coprocessor is optional. Libra structural and Libra thermal are each $1495 per copy, including documentation. For more information contact: InterCept Software, 3425 Bascom Avenue, Campbell, Calif. 95008.

Circle No. 247 on Reader Service Card

Available in '85

Micro Ansys from Swanson Analysis Systems Inc., P.O. Box 65, Houston, PA 15342.

Circle No. 248 on Reader Service Card

BigPro from Engineering Methods Inc., 301 North 5th St., Lafayette, IN 47901.

Circle No. 249 on Reader Service Card

Further details will appear in future issues of *ME*.

ments for forces and moments. It will handle up to 150 nodes and about 300 elements.

A larger variety of elements is offered to the Safe user. These include both plane and space elements for trusses and frames, a pipe/shaft element, plane stress triangle and rectangle, a rectangular plate for bending applications, and elastic foundation elements for beams and slabs.

Models with up to 600 nodes and 600 elements can be handled by Safe. Up to 25 sets of different element characteristics can be used in any model.

Types of loads in Frame 2D include those at node points (*x, y,* or moments), and distributed pressure loads perpendicular to the surface of the elements. The package will accommodate as many load cases as can be handled in disk storage.

Frame 2D uses main memory-based solutions. A structure with 36 nodes and 55 members ran for about three minutes to a solution.

Frame 2D offers an interactive prompting mode, cueing the user on the data items to enter. As with most finite element packages, users must come to it prepared to input a number of characteristics of the structures beyond the geometry. For example, to represent the cross-section properties of beams in Frame 2D, the user enters a flexural inertia quantity (I), and a section modulus (I/C). The flexural inertia is used to calculate the element stiffness for the matrix computation. The section modulus is used to calculate the maximum bending stress following the matrix solution. Frame 2D will handle 30 different cross sections within one structure.

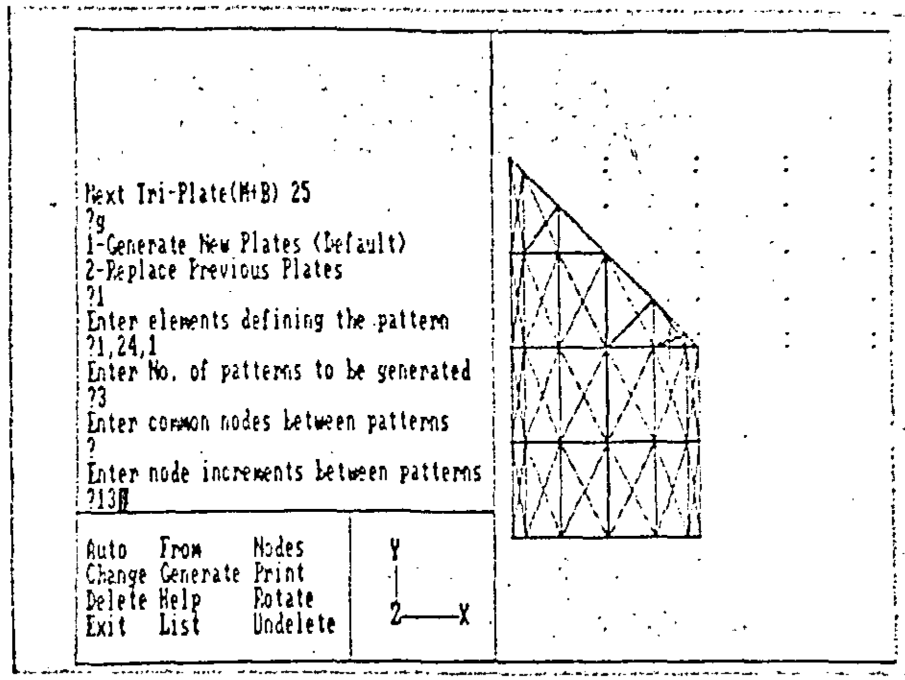
Graphics and output. Once users key in the data they can view a graphics representation to see if everything has been correctly entered. The package will run without a graphics card, but to view the models a graphics card must be used. In fact, if there is no graphics adapter installed in the computer, the package will sense this fact and the interactive dialog will not even offer the user the option of viewing graphics displays.

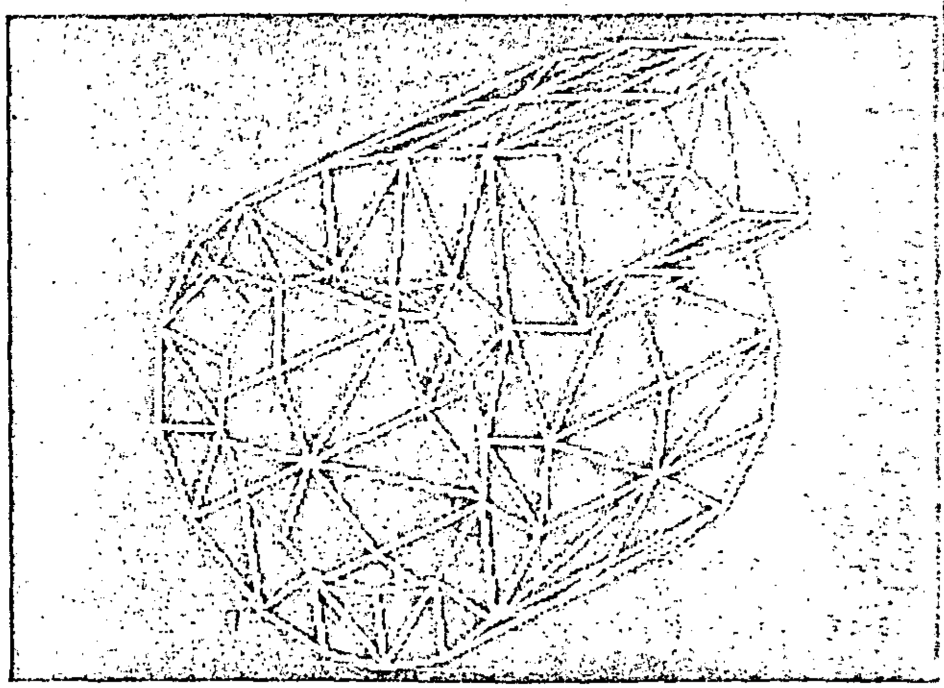
The package also provides displays of the deformed structures after loads have been applied. There the user can see the deformation and get an idea of where the largest deflections take place.

Safe has some added graphics capabilities. It allows the user to specify a desired viewing angle, then display the structure as seen from that angle. It also includes panning of images and zooming in increments of 20 percent increase or decrease in size.

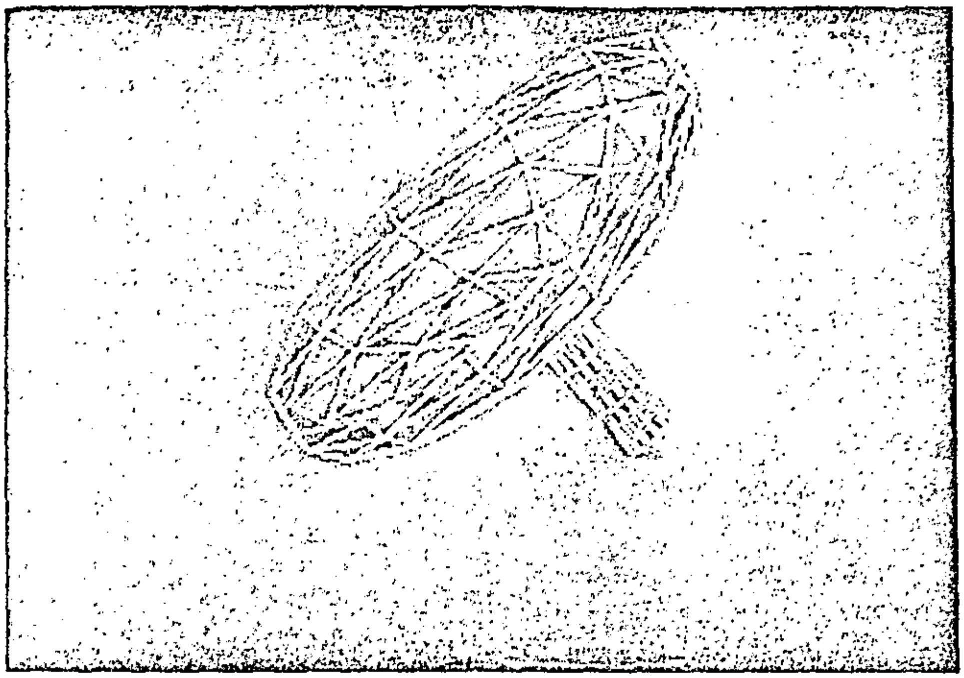
The Frame 2D package includes a calculation of the factor of safety for each member. The user can input an allowable stress. Then the stress in each member is compared to that allowable stress and a factor of safety is calculated. All that is tabulated. Then at the end of the process the worst-stressed elements are pinpointed and identified so the designer can take remedial action if needed.

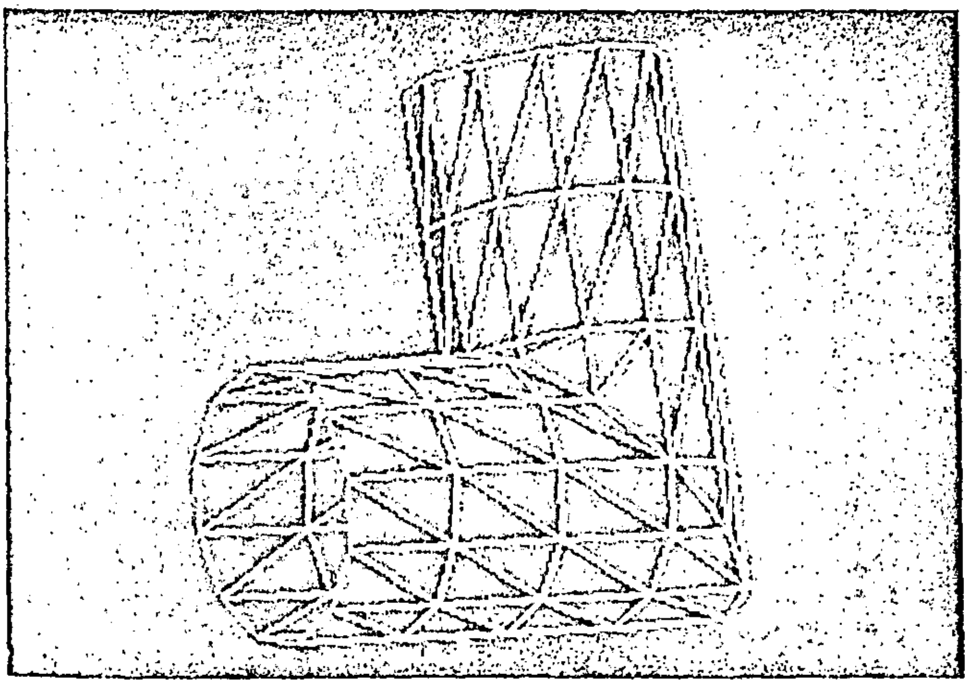
Frame 2D data results include displacements and rotations at the nodes with maximum and minimum node deflections noted. For the elements, axial and shear forces, bending moments, maximum stress, factor of safety are listed. Maximum and minimum stress, moment, shear, and force in the structure are noted.





The type of split-screen display used to model data for Celestial Software's Images 3D element data. As this is executed, a graphic portrayal of the input takes shape on the right models generated by the package.





package. The user works on the left-hand portion of the screen, entering node and side of the screen, making it possible to spot input errors and omissions. The shots are

Support. The effort needed to learn to use the packages is minimal. The vendor has had few requests for assistance from users who seem to be able to run the package after about a half day of experience. The package disk includes sample problems and many users start by going directly to these sample problems to learn how to use the program.

The vendor's policy is to try to answer all user questions the same day they call. To this point there have been no upgrades on either package, but when and if there are, they will be made available to all users at nominal cost.

IMAGES 2D, 3D: DYNAMIC ANALYSIS WITH A SPLIT SCREEN

These two packages provide static and dynamic analysis of 2-D and 3-D structures and systems. A variety of different elements is available. There are facilities for nodes, elements, restraints, and loadings that are quite flexible. Many internal consistancy checks of data input are provided to aid the user.

Complex loading cases can be easily handled with these packages. The 3-D package has a convenient split-screen graphics capability.

The 2-D package costs $500 for the static analysis version and $1300 for the static plus dynamic version. The 3-D is $1500 for the static version, $3900 for the combined version. A companion program that performs AISC/ASME code checks of structural members sells for $200. The packages will run on the IBM PC, /XT, /AT and IBM compatibles. A color graphics adapter is required for Images 3D. For the 3-D version, the 8087 math chip is required; it is recommended for the 2-D package. The vendor also recommends a hard disk for the 3-D package. Images 2D requires 256K main memory. Images 3D requires 512K main memory.

Images 2D and 3D are available from Celestial Software, 125 University Ave., Berkeley, Calif. 94710. (415) 841-7175.

Elements. Images 2D will handle structures with 100 nodes, 150 beam elements, or 50 triangular plate elements. The total degrees of freedom it can accommodate is 300, with three degrees of freedom per node. Images 3D will handle 300 nodes; elements handled can include 300 beams plus 300 plates plus 300 springs. A total of up to 1800 degrees of freedom is available for both static and dynamic analysis.

Six types of elements are available for the 3-D package: truss, beam, membrane plate, membrane plus bending plate, a single-node spring, and a two-node spring. The 2-D package has all the above elements, except for the membrane-plus-bending plate and the two-node spring. Up to 50 different cross sections are available for each package for use with the beam and truss elements.

There are five different types of loading: concentrated loads or moments, gravity loads that can be automatically generated on request, enforced or specified displacements, temperatures for calculation of thermal expansion, and distributed loads. Both the 2-D and 3-D packages have these. In addition the 3-D package has pressure loads and tapered distribution loads.

Five separate load cases in 2D and

Comparison of Personal Compute

Name of Package	Vendor	Types of Analysis Performed	Interactive Use
CAEpipe CAEframe	SST Systems Sunnyvale, CA	Static, 2-D, 3-D	Yes
Finite/GP	COADE Houston, TX	Static, 2-D, 3-D Heat Transfer, Fluid Flow	Yes
Frame 2 D Safe	Engineering Software Co. Arlington, TX	Static, 2-D 3-D	Yes
Images 2 D Images 3 D	Celestial Software Berkeley, CA	Static, Dynamic 2-D, 3-D	Yes
MSC/pal	MacNeal- Schwendler Los Angeles, CA	Static, Dynamic 2-D, 3-D	For preprocessor
SAP86	Number Cruncher Microsystems, San Francisco, CA	Static, Dynamic 2-D, 3-D	No
Supersap	Algor Interactive Systems Pittsburgh, PA	Static, Dynamic Heat Transfer, 2-D, 3-D	Yes

99 in 3D can be built up and used for each design. Those can be summed and factored as desired. A built-in routine sums and applies factors to the load cases.

In Images 2D there is node and element generation. The user specifies the endpoints and the package will interpolate to fill in elements on a straight line. Users can also specify an element and then replicate it by specifying the nodes to which it will be attached.

The 3-D package generates nodes, elements, restraints, and loadings using pattern, repeat, and fill capabilities. And there are many other preprocessing features built in. A complex model such as a piping elbow can be generated from a single node without need for the user to calculate any coordinates. It has the ability to rotate and offset and apply scaling factors in any direction.

The user can input nodes in any convenient fashion. Then a minimization routine will renumber the nodes for calculation purposes, so as to shrink the run time and disk storage that will be needed. If the structure should prove unstable, or if changes are desired for any other reason, the package provides a cross-reference list that allows the user to find the node location of any particular degree of freedom.

The package also checks to see that the model the user inputs is complete. It will detect such user input errors as forgetting to specify a material property, or creating a node and not connecting it to anything.

Graphics and output. The original geometry in complete form, or with nodes only, or elements only, can be displayed. There are zoom and pan capabilities, hidden-line removal, free boundary and surface plots, and rear model clipping to clarify the display of complex models.

The 3-D package has a split screen capability. As the data for the model are entered in response to prompts on one side of the screen, the user sees a graphics representation of the model growing on the other side.

For static and dynamic analyses results can be plotted and animated

The data output repeats the input geometry, stiffness information, and load cases. Output analysis data include deflections, global loads, local loads, beam stresses, and restraint

er Finite Element Analysis Packages

Preprocessing	Graphics Capability	Transfer to Larger Computers	Cost	Circle No. on Reader Service Card
Automatic pipe run and elbow generation; Generate by repeat command	Input and deformed, pan, color, zoom	Translation of files	$6900 $4900	240
Generation by conformal mapping and substructuring	Input and deformed	Translation of files	$3500	241
None	Input and deformed, zoom, pan	No	$495 $795	242
Generation by pattern, repeat, and fill capabilities	Input and deformed, zoom, pan, animation	Translation of files	$1300 $3900	243
Seven schemes, for beams, plates trusses, shafts	Input and deformed, animation	Yes	$995	244
Generation by filling	Interface to CAD programs, and for initial mesh, deformed structure, and mode shape plots	Yes	$995	245
Ten schemes, and the shapes can be combined	Input and deformed, stress, deflection, temperature contouring, random zoom, color	Yes	$5000 $850 (Processor only with plotting)	246

actions along with maximum values. Dynamic results include natural frequencies and mode shapes, along with participation factors for seismic analysis.

The 3-D package has translation files that allow the user to build a model on a micro/personal computer, then run it on larger machines that run Nastran, Ansys, Strudl, and Stardyne.

Support. Both packages are menu-driven, so the user has virtually nothing to memorize in the way of commands. Pressing an *H* key will display help instructions.

According to the vendor, someone who understands the basics of finite element analysis modeling techniques can sit down and be running problems on these packages within an hour.

Program updates are provided free of charge for six months. After that, users can get an annual maintenance agreement. Support is by telephone. Often problems that come in over the phone are run by the vendor to check so that proper advice can be given to the user.

MSC/PAL; STRESS AND VIBRATION ANALYSIS

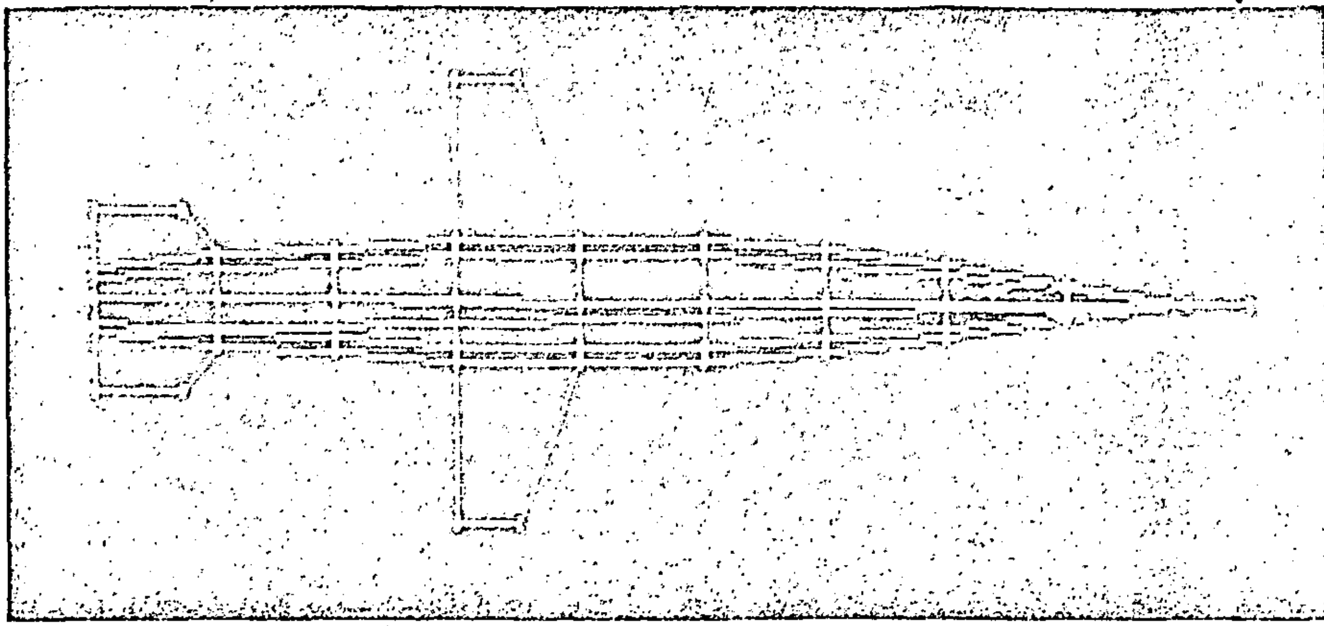
MSC/pal performs both 2-D and 3-D static and dynamic analysis on structures that can be modeled by beams, plates, and associated elements. Among its features is the ability to handle tapered beams. Several preprocessors are included to ease the input of some common structural problems.

The package comes with a comprehensive manual and a dozen assorted sample problems.

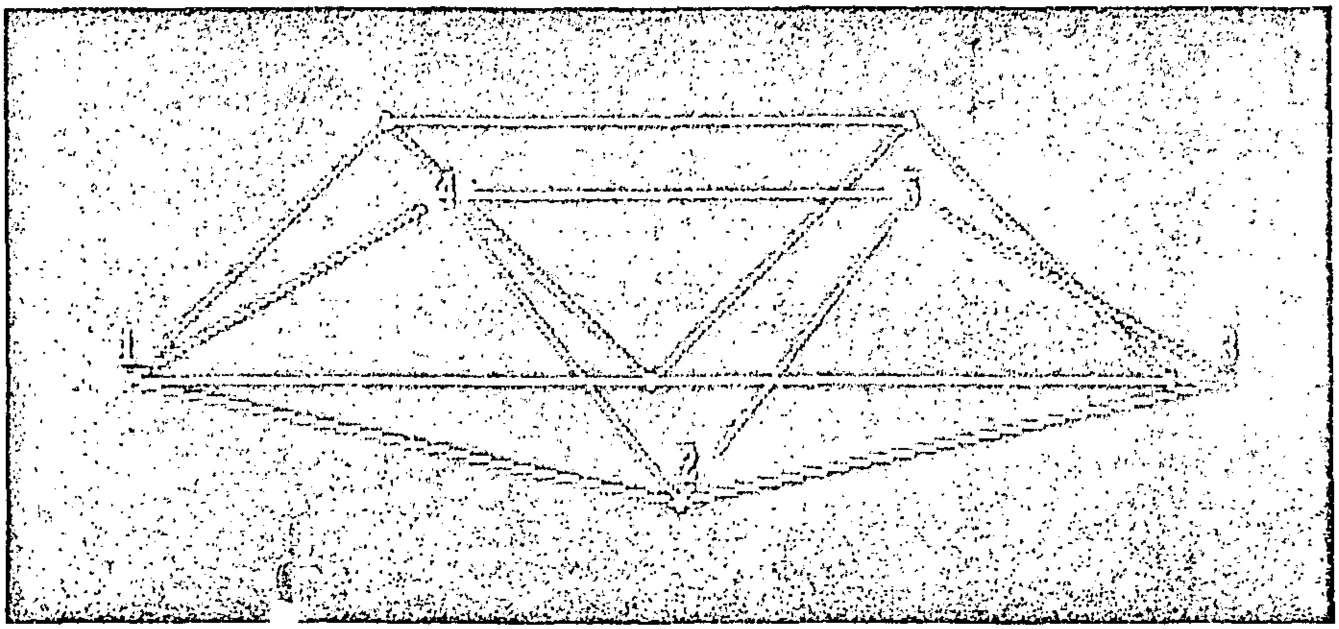
MSC/pal sells for $995. The package will run on the 256K main memory IBM PC with two disks and a color graphics monitor, or on a Compaq computer. The analysis (but not necessarily the graphics) can be run on virtually any machine that is compatible with the IBM PC.

The package is available from the MacNeal-Schwendler Corp., 815 Colorado Blvd., Los Angeles, Calif. 90041; (213) 258-9111.

Elements. Up to 300 nodes can be used to define the geometry of an MSC/pal problem. In static analysis, depending on the problem, there can be up to 1800 degrees of freedom overall, but for most structures, the



(a) MSC/pal—Aircraft structure example



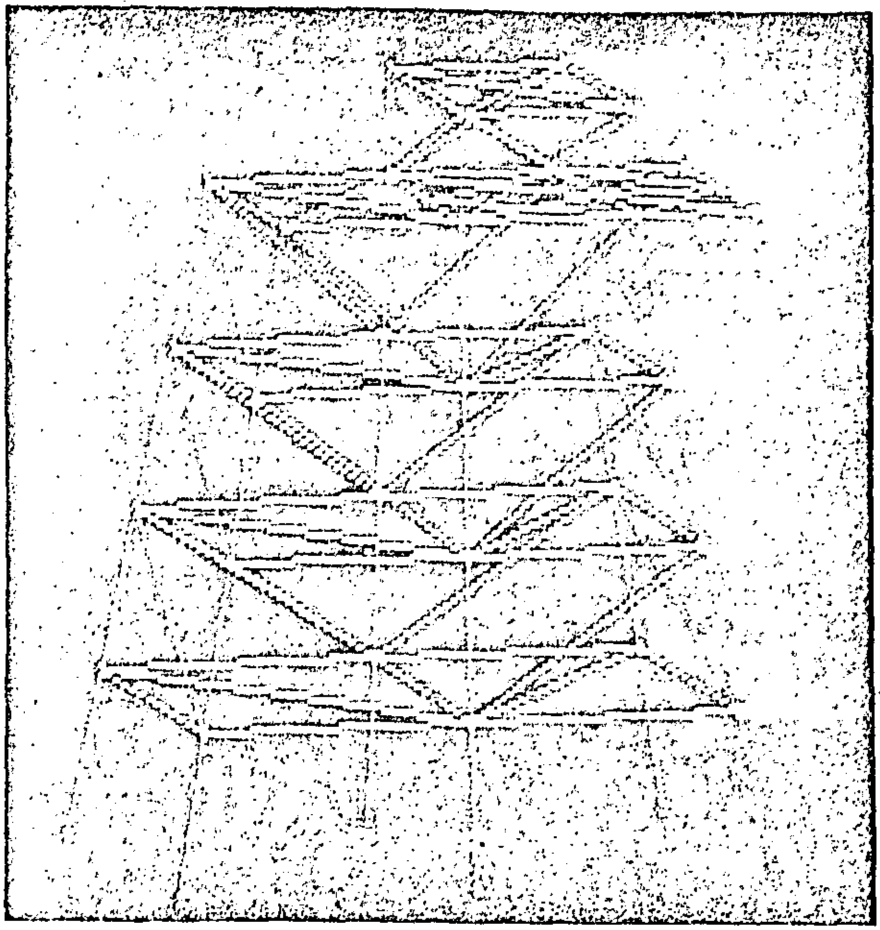
(b) MSC/pal—Deformed truss with center load example

Models executed by MacNeal-Schwendler's MSC/pal package.

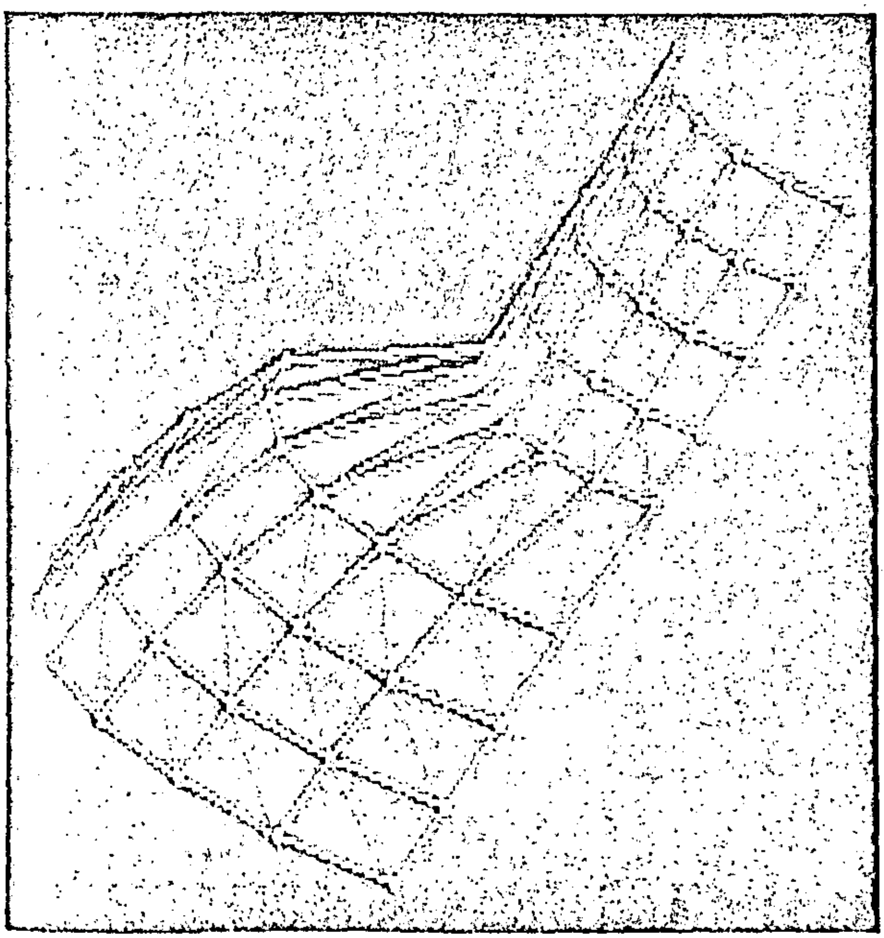
allowable overall degrees of freedom will be smaller. A bandwidth minimizer is provided to generate an efficient node-numbering sequence to maximize the allowable problem size. In dynamic analysis, 250 flexible degrees of freedom are allowed. Those have to be reduced by the package to 125 dynamic degrees of freedom for normal modes and transients. For frequency response, the package is limited to 225 flexible degrees of freedom that are then reduced to 100 dynamic degrees of freedom.

Beam elements can be pin-ended rods whose neutral axes do not have to be coincident with the grid-point locations of the structure. There are constant cross-section beams that can be defined by their cross-sectional areas. Tapered rectangular beams can also be defined with a different cross section at one end than at the other. And pipe-type beam elements can be defined by their inside and outside diameters. If the user defines spring constants at one end and the connectivity of the element, the package will generate an equivalent beam. There is a triangular plate element that can act either as a discrete (Kirchoff) triangle or as a membrane element.

For dynamic analysis there is a damping element that can represent three-dimensional viscous damping. The same element can also be used for single-axis damping. A link element functions as a rigid link with six



(c) MSC/pal—Offshore platform example



(d) MSC/pal—Pipe fitting example

scalar springs at each end. There is a single-axis spring element for lumped parameter vibration studies, which can be extended to act as a 3-D stiffness element.

All loads are applied to nodes. There is no provision for distributed or gravity loads. As many load cases as desired can be set up.

Users have to know the material properties of the structure. Isotropic material is handled. If the user provides E and G or E and Nu, the program will calculate the third value. The user must also provide a mass density value for dynamic analysis problems.

Graphics and preprocessors. There are specialized preprocessors to help the user input data for transverse beam-bending problems, torsional shaft systems, four types of roof trusses, planar frame problems, and three different types of plate analyses.

The package has a built-in capability that allows similar nodes and elements to be replicated in a single dimension. But there is no mesh generation, and no model combination capability.

MSC/pal is basically run from commands that the user must know and use. However there is some prompting to help with the specialized preprocessors.

Input geometric data can be given either in cylindrical coordinates, or in rotated rectangular coordinates as well as in the basic rectangular coordinates. The package does not provide internal checking on the corrections of the input data.

The package will display the input geometry, allowing the user to rotate and examine it. It will also display the deformed geometry, and, most appropriate for a dynamic-analysis package, it provides animated views as well. For transient and frequency response an *xy* plot package is provided.

An MSC/pal input file can be translated into an MSC/Nastran file, to be run on a larger computer.

Support. The MSC/pal manual covers not only installation and operation of the software, it also explains the method of analysis used and the options available to the user. An applications section of the manual goes through 12 sample problems step by step and compares classic analysis results to those of finite element analysis. An input editor is provided to allow for creating or modifying data files. Use of this editor in conjunction with the sample problems will enable the engineer to learn MSC/pal in just a few hours.

SAP86: MAINFRAME-STYLE ANALYSIS

SAP86 does both static and dynamic analysis of 2-D and 3-D structures and systems. It is a personal computer version of the SAP IV software used on mainframe computers. Files can be uploaded and downloaded from mainframes that use SAP IV.

SAP86 data input is not interactive. Users prepare the input in batches, mainframe-computer style. It has no built-in graphics, and requires the use of an external CAD package for graphics display. The package sells for $995. It runs on the IBM PC and compatibles. Required equipment is 384K main memory, the 8087 math chip, 2 floppy drives or one floppy with a hard disk.

SAP86 is available from Number Cruncher Microsystems, Inc., 1455 Hayes St., San Francisco, Calif. 94117; (415) 922-9635.

Elements. Elements for use with SAP86 include 3-D beam and truss, thin shell/thin plate (anisotropic), 3-D solid (8 node), 3-D pipe, and 3-D thick shell (8–21 nodes—orthotropic), 2-D plane stress and plane strain and 2-D membrane (3–4 nodes—orthotropic), and 2-D axisymmetric. There is also a boundary element. Groups of elements can be combined in only limited ways, due to floppy disk storage limitations. One grouping includes 3-D beam and truss, 2-D elements, the thin shell, and plate elements plus the boundary element. Another group that can be combined is the 3-D solid, thick shell, and the boundary element. A third grouping is the 3-D beam and truss, pipe elements, and the boundary element. Other combinations of elements are available at extra cost. Types of loading provided by the package include pressure, gravity, and thermal loads in addition to concentrated loads.

The limit on nodes is 600–800, depending on the type of problem being run. Elements, degrees of freedom, and load cases are limited only by the available storage.

Dynamic analysis capabilities include computation of modes, frequencies, and a response spectrum. The package also allows computation of time histories by modal superposition or by direct integration.

Static analysis of a thin-shell structure with 55 nodes and 52 elements was run by the vendor in about 3½ minutes. Mode and frequency analysis of a plane frame composed of 3-D beams with 110 nodes and 189 elements ran in just over 23 minutes.

Batch input files. The package uses batch input. The user prepares a data file and that file is then read by the package. Along with geometry information the package requires input of fairly standard properties. For some elements, the stress matrix has to be input. But generally what are required are Poisson's and Young's moduli and the shear modulus. For beams, the inertias and cross-sectional areas are required.

SAP86 provides node and element generation. The user specifies desired beginning and end points and the package fills in between.

There is a data-check mode that verifies that needed node-point and

PERSONAL COMPUTER SOLUTIONS TO FINITE ELEMENT EQUATIONS

The general form of the second order differential equations solved by finite element packages to find the static and dynamic properties of structures and systems is:

$$M\ddot{U} + C\dot{U} + KU = F$$

Here U is a vector with the unknown acceleration, velocity, and displacement components that are to be found, and F is the vector of applied moments and forces. M and C are the mass and damping matrices, K is the stiffness matrix.

To obtain static solutions, only the equations involving the stiffness term have to be solved. Dynamic analyses involve the solution of the other terms as well.

Structures and systems that are to be analyzed by the finite element method are represented by node points interconnected by elements. An element is defined by its deflection capacity which is written in terms of nodal deflections (degrees of freedom). In a three-dimensional beam structure, these DOF can be thought of as translations along the three axes and rotations about these axes. So there can be six degrees of freedom at a given node. If an element is restrained from movement, one or more of these degrees of freedom will be removed (zeroed).

The number of equations that has to be solved to analyze a given structure corresponds to the active (non-zero) degrees of freedom. The number of rows and columns in the matrix that represents those equations will also correspond to the active degrees of freedom. So, degrees of freedom are a measure of computation time since larger matrices will take longer to solve.

Generally, the non-zero elements of the stiffness matrix will tend to cluster near the main diagonal. The distance of the furthest non-zero element from that diagonal is termed the "semi-bandwidth" of the matrix. A matrix with a small semi-bandwidth can be solved relatively fast, and with the use of a relatively small memory space. Thus the limits on problem size will depend on the semi-bandwidth of each problem as well as on the number of nodes or degrees of freedom involved.

Various techniques are used to simplify the needed matrix calculations. As much advantage as possible is taken of symmetry; this allows half the stiffness matrix to be immediately discarded. Zeros in the main diagonal of the matrix can also be discarded. Other programming techniques strive to optimize the speed of disk or memory access. Some of these techniques are fairly standard, others may be the individual inventions of software package designers. Depending on the ingenuity with which such techniques are applied, different packages may run similar problems more or less rapidly.

In some packages the ability to handle large problems can be limited by the precision of the arithmetic the computer employs. When so-called single-precision arithmetic is used, roundoff error can produce answers that are increasingly inaccurate for larger problems.

material property data have been entered and that the limits of the program have not been exceeded.

Graphics and output. SAP86 has no interactive graphic display capabilities. Plots are provided by an interface to the MicroCAD and AutoCAD graphics packages. Input and deformed structures can be displayed on MicroCAD. There is no animation capability. Interfaces to other CAD programs are being developed.

Outputs include stresses, stress histories, displacements, nodal forces, moments, mode shapes, and frequencies. Time history response can be obtained using modal superposition, or with direct integration of the equations of motion. The package will also do response spectrum analysis.

The file input is identical to that used in the public domain SAP IV code. There is no communications facility in the SAP86 package, but users can upload and download files from larger machines that use SAP IV. Files can be downloaded and run on the personal computer, or larger problems can be uploaded to run more rapidly on the larger machine.

Support. An analyst experienced with SAP IV can be running the program in only a few hours. If the user has a general knowledge of finite element analysis it would take several days. For an inexperienced user, it will probably take about one or two weeks to begin to run simple problems independently and with confidence. The package has no interactive capability, and therefore no built-in teaching facility.

Telephone consulting is provided to get users started, and to help solve any problems with the software that may arise, but not for continuing consultation on finite element analysis (available on a fee basis). Minor updates are provided for the price of floppy disks and shipping.

SUPERSAP: PLENTY OF ELEMENTS AND PREPROCESSORS

The Supersap package solves both static and dynamic finite element problems using a disk-based solution method. It makes a wide variety of elements available to the user, some of which can handle anisotropic material behavior.

There are ten preprocessors each with its own mesh generation facility, and structures prepared with these can be combined to form many different model shapes. Input data can be stored for convenient use. Output data can be flexibly combined.

The complete Supersap package sells for $5000. Users can purchase the solution unit only, without preprocessing, graphics, or post processing, for $850. It runs on IBM PC with 640K main memory, 8087 coprocessor, and a 10 million byte disk. It will also run on the Pixel computer.

Supersap is available from Algor Interactive Systems, Essex House, Essex Square, Pittsburgh, Penn. 15206; (412) 661-2100.

Elements. Using a 5-million–byte disk memory, Supersap can handle problems with 2000 and more degrees of freedom. A beam problem with 800 degrees of freedom, containing about 350 elements, and a 3-D problem with about 400 nodes were run by the vendor; each took about 1.5 hours to reach a solution. A small truss problem with only 12 degrees of freedom ran in about two minutes.

A large variety of element types is available including 3-D beam, pipe, and truss (with 2 nodes), membrane, plate/shell (with 3–4 nodes), brick (with 8–21 nodes), boundary, rigid link, and direct stiffness elements, 2-D axisymmetric and plane strain and stress elements (with 3–8 nodes). 2-D solid and 3-D brick heat-transfer elements are also available.

Beam-area properties are defined by an area that resists axial force, two areas that resist shear deflection, a constant to represent the torsional moment of inertia, and two moments of inertia to represent the two directions of flexture. Beam orientation can be arbitrarily assigned by the user.

With most of the elements, orthotropic material behavior can be represented: the truss, beam, pipe, and brick elements are isotropic.

Loads can be point, pressure, constant acceleration, centrifugal, weight, center of gravity, or thermal. Number of load cases is limited by available disk memory.

Material property inputs for the elements include Young's modulus, Poisson's ratio, weight density, and mass density. Truss and beam elements require cross-section area properties.

Preprocessors. Ten different modeling preprocessors are provided. For example the Radgen preprocessor produces shapes like pressure vessels and containers. Models can be constructed in parts by these preprocessors, then manipulated to match one another and combined to form more complex models. The concept is to provide enough of these preprocessors so that they can serve for models of all the structural and mechanical problems the package designers could envision.

An input file data base manager (Aedit) is used to construct and edit the models. Data entry is on an interactive basis. Once entered, the data for an element or a configuration can be recalled from storage, modified, and reused as needed. For example stored data relating to elements includes material properties, area properties, acceleration constants, and base load constants, as well as the element data itself.

There are a number of built in data checks. The package will for example refuse to accept negative values for area or for Young's modulus. Both logical and typographical errors are checked.

Graphics and output. Graphic display includes both input and deformed models. The C-plot module displays stress/deflection/temperature contours of mesh-type problems. The user enters and sets up the model and then can view it to verify the set-up process. The user can then make spot checks at various points to further verify it's correctness. To correlate the graphic display with the data, node and element numbers can be shown on the graphics. Random zooming capability on both model geometry and contour plots is provided. No animation is provided; that capability is planned for future versions.

Postprocessing provisions allow the user to create various stress, deflection, and load case combinations. These results can then be displayed graphically.

Problems can be transferred to and from larger computers, like DEC VAX and Prime machines, that run versions of the Supersap package.

Support. Users experienced with other finite element packages will probably be able to use this one with just a few days of practice. With interactive data entry and selection, the user does not have to memorize commands, and this simplifies the learning process.

User questions are handled by telephone. An update disk is supplied every six months at added cost. ME

DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.

EL METODO DEL ELEMENTO FINITO EN LA INGENIERIA

GENERACION DE MALLAS

ING. ERNESTO M. DEL CAMPO

FEBRERO, 1985

Generación Automática de Mallas

Importancia.

Gran cantidad de datos que hay que suministrar a un programa de E.F.

Datos principales para un programa de E.F.

1.- Indicadores de Frontera $O(3 \times \text{No. Nodos})$

2.- Coordenadas de los Nodos $O(3 \times \text{No. Nodos})$

3.- Distribución de Nodos en cada elemento $O(6 \times \text{No. Elem.})$

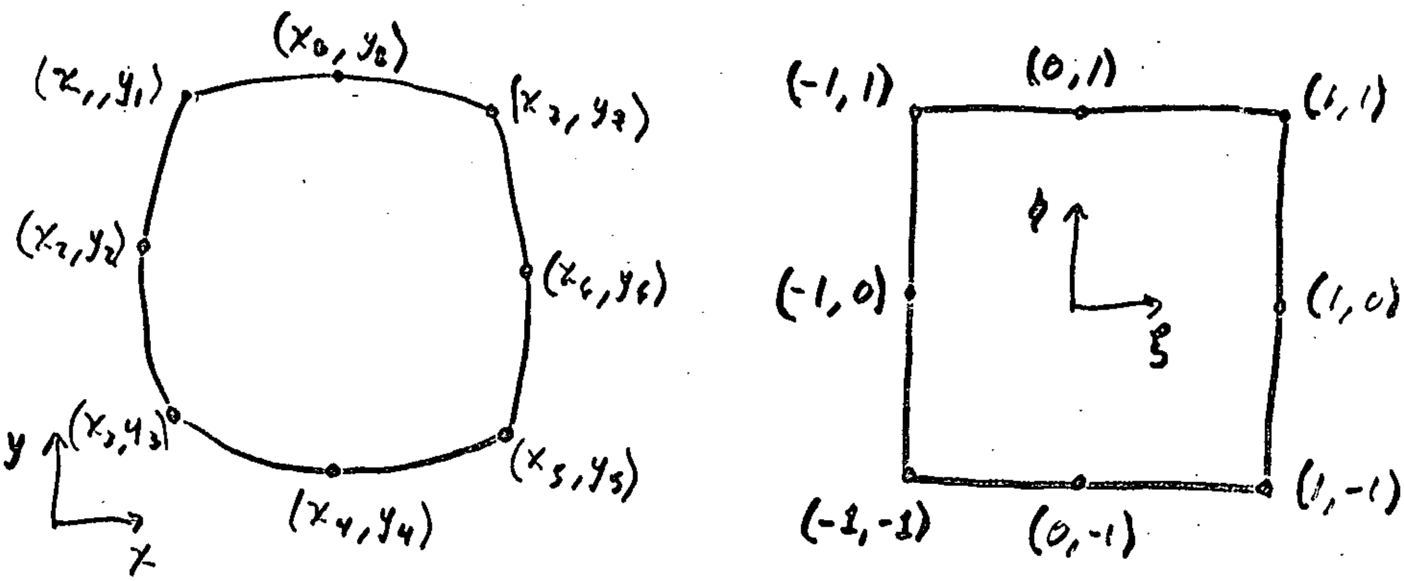
4.- Propiedades de los elementos $O(\text{No. El}/20)$

5.- Condiciones de Frontera $O(\text{No. Nodos}/10)$

No. de Nodos $O(500)$

No. de Elementos $O(1000)$

Elementos Isoparamétricos



Aproximando una función dentro del elemento por

$$u = a + b\xi + c\eta + d\xi^2 + g\,\xi\eta + h\eta^2$$

sustituyendo el valor de la función en cada nodo y resolviendo para las constantes se tiene

$$u = \sum_{i=1}^{8} u_i N_i$$

donde

$$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(-\xi+\eta-1) \qquad N_5 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(\xi-\eta-1)$$

$$N_2 = \frac{1}{2}(1-\xi)(1+\eta^2) \qquad N_6 = \frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(-\xi-\eta-1) \qquad N_7 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(\xi+\eta-1)$$

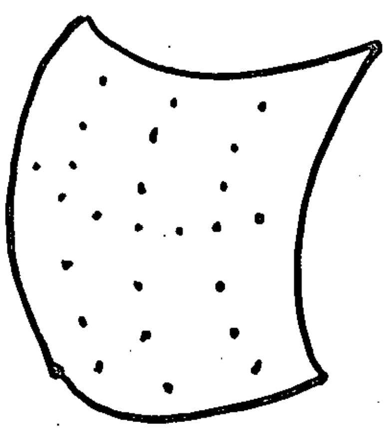
$$N_4 = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta) \qquad N_8 = \frac{1}{2}(1+\xi^2)(1+\eta)$$

Relación entre coordenadas naturales y coordonadas cartesianas es

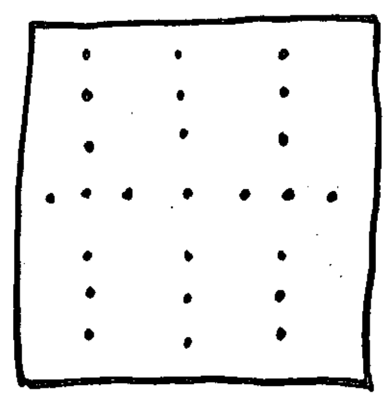
$$x = \sum_{i=1}^{8} x_i N_i(\xi,\eta)$$

$$y = \sum_{i=1}^{8} y_i N_i(\xi,\eta)$$

Aprovechando esta relación se pueden proponer las coordenadas normales y obtener las reales

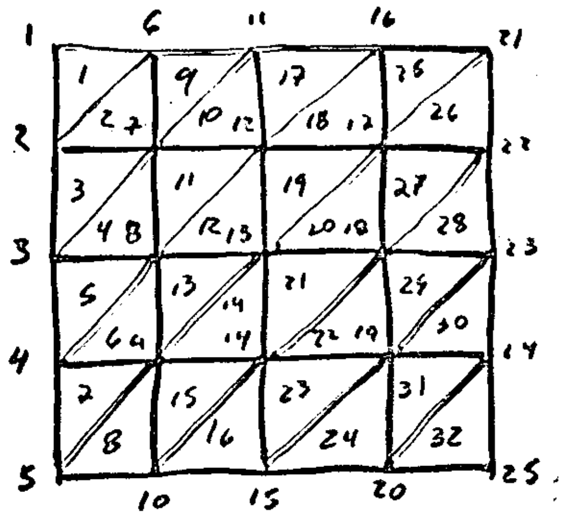


Sistema Real



Sistema Normal

Generación de Elementos Triangulares

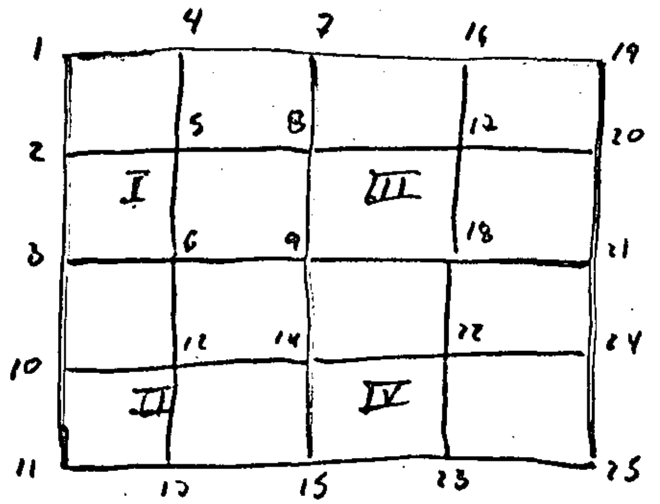


Discretización de la región

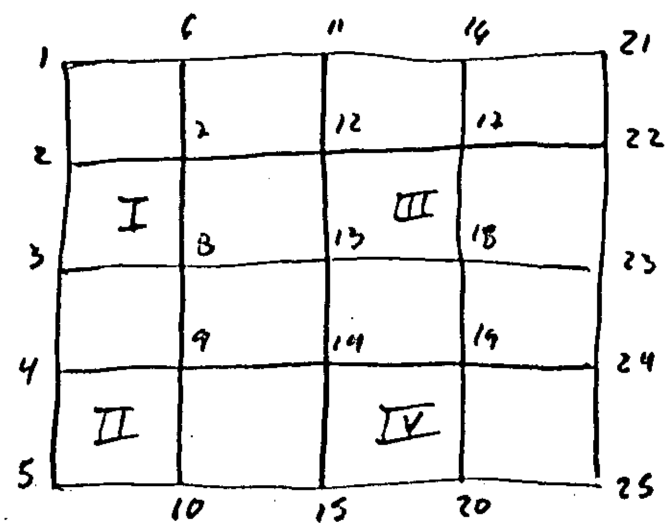
Distribución de Nodos en cada Elemento

El.	Nodo 1	Nodo 2	Nodo 3
1	1	2	6
2	2	7	6
3	2	3	7
4	3	8	7
⋮			
9	6	7	11
10	7	12	11
11	7	8	12
12	8	13	12

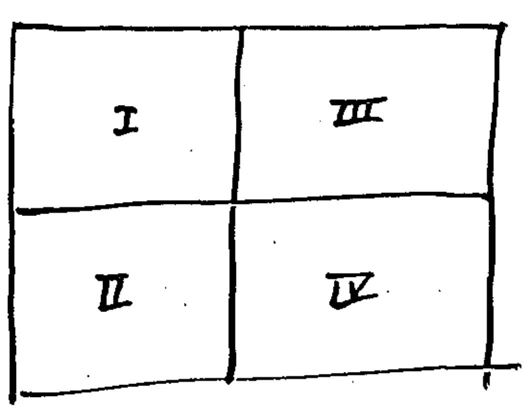
Mapas de Regiones



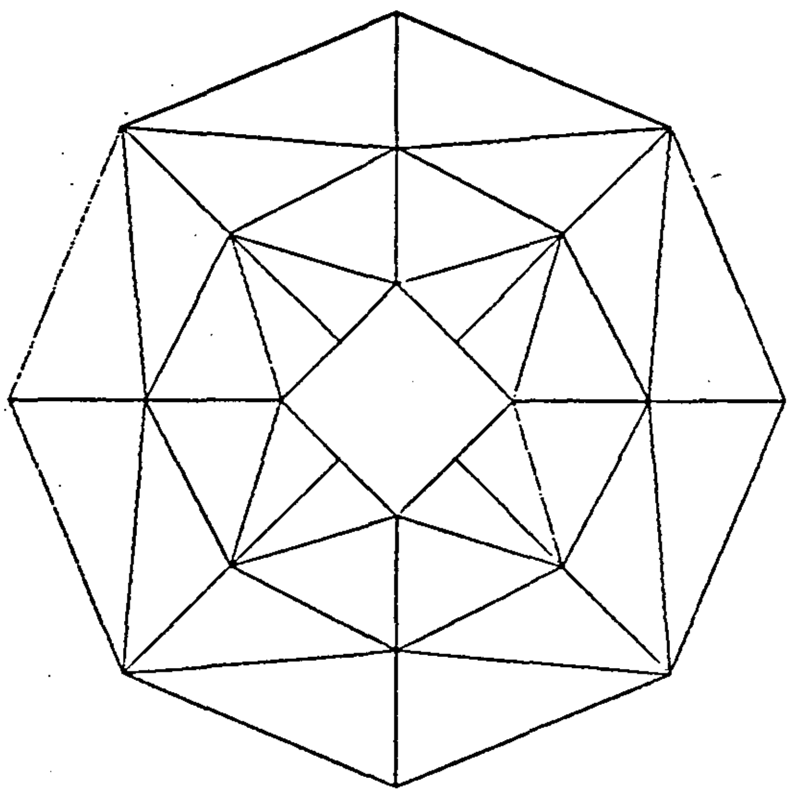
Mala numeración



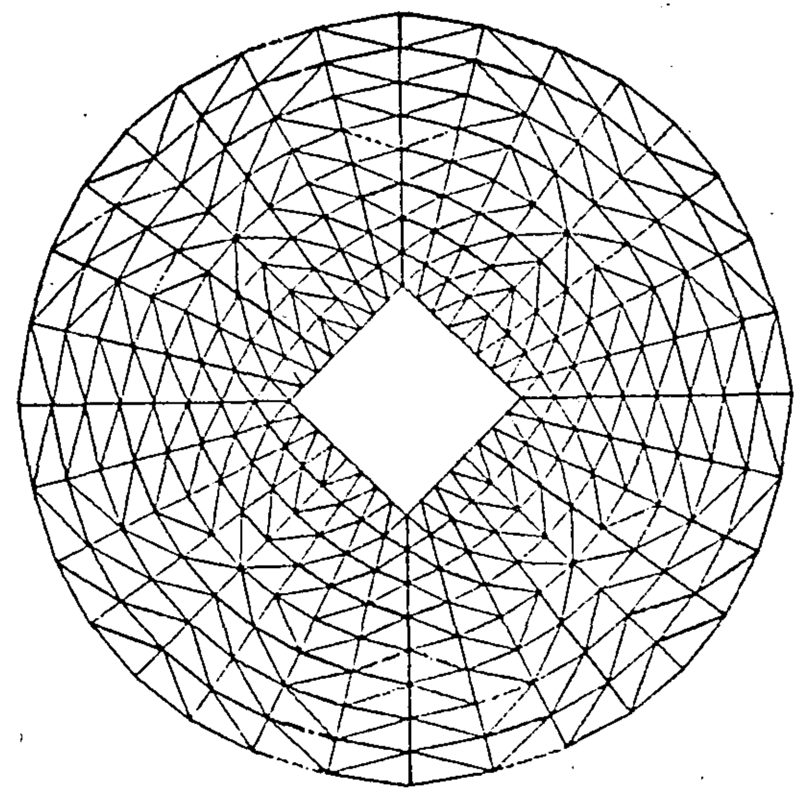
Buena numeración



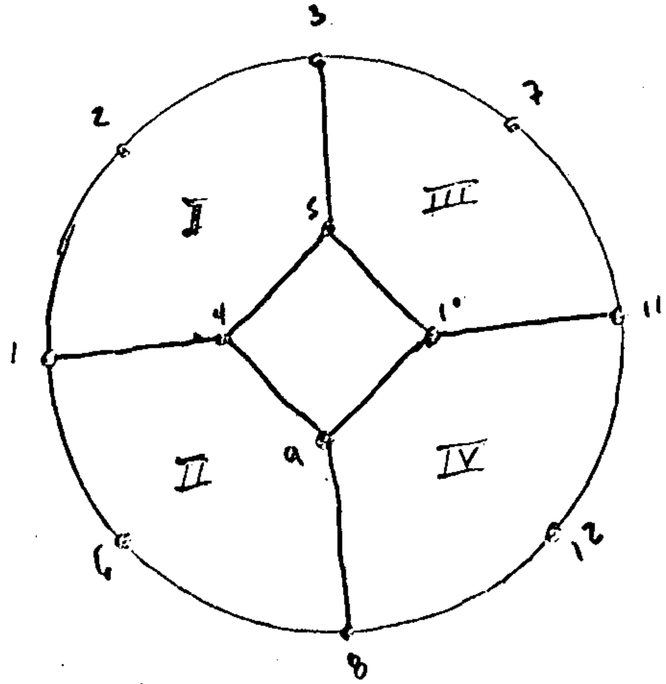
Mapa

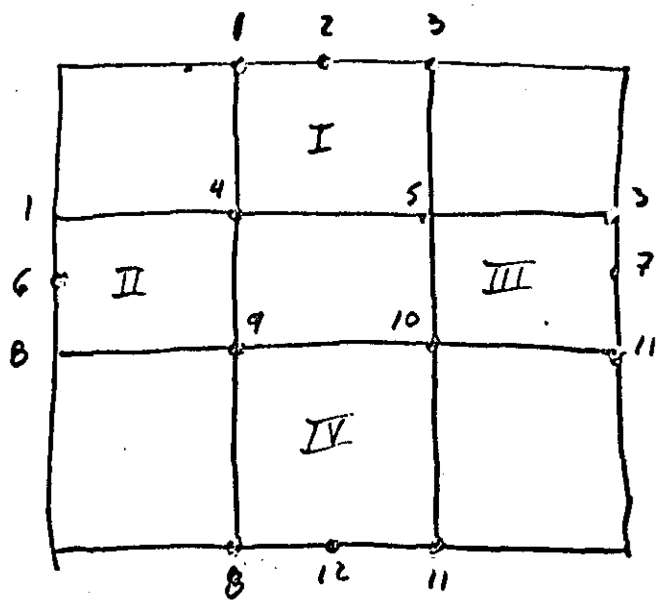


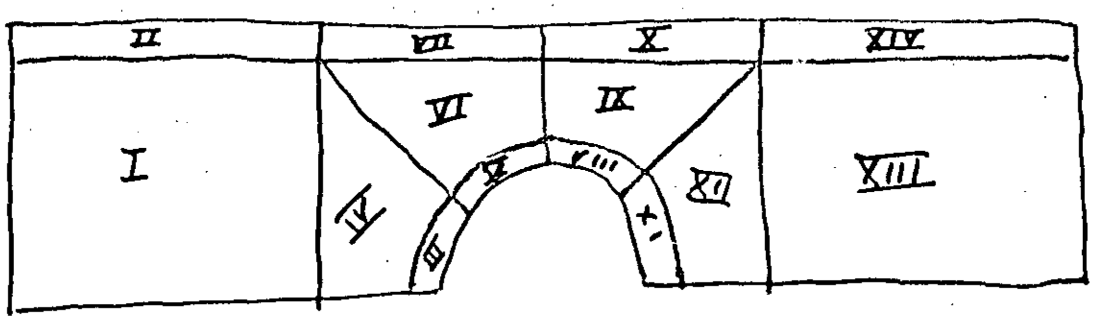
MALLA CON 24 NODOS Y 32 ELEMENTOS



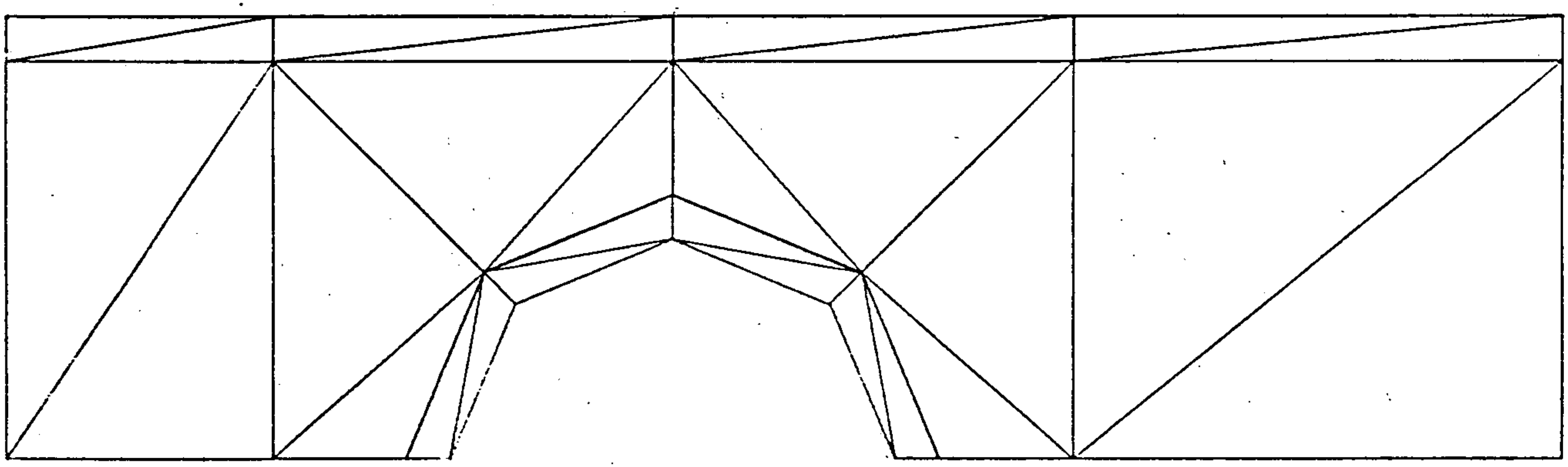
MALLA CON 288 NODOS Y 512 ELEMENTOS


3
2
7
I
III
5
4
10
11
1
II
9
IV
6
12
8

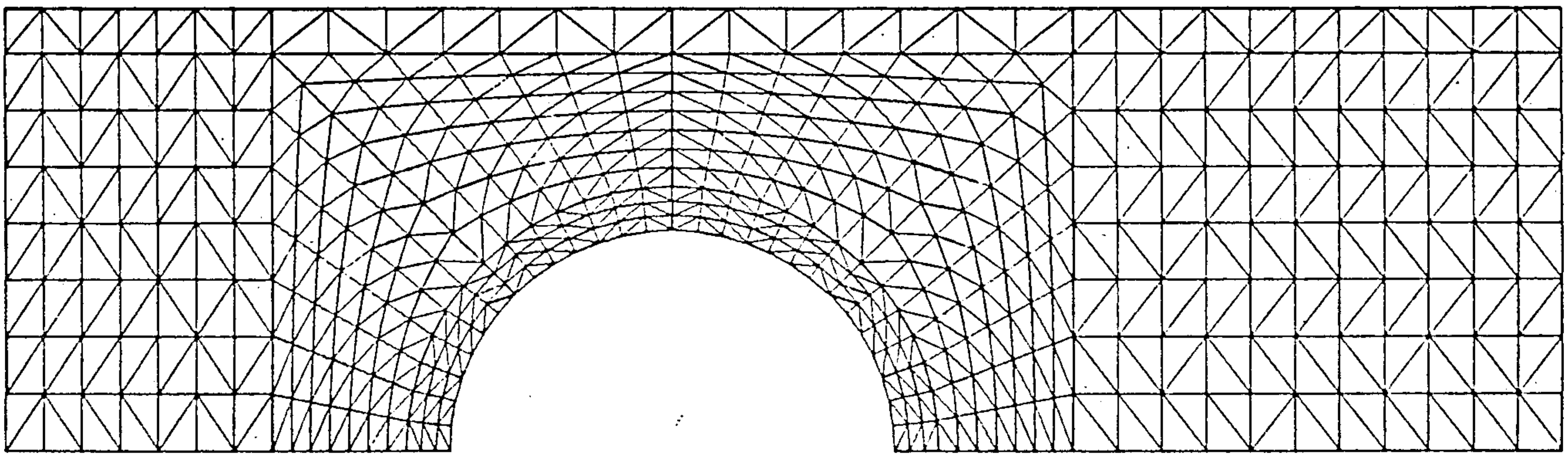

1
2
3
I
4
5
1
3
6
II
III
7
9
10
8
11
IV
8
12
11



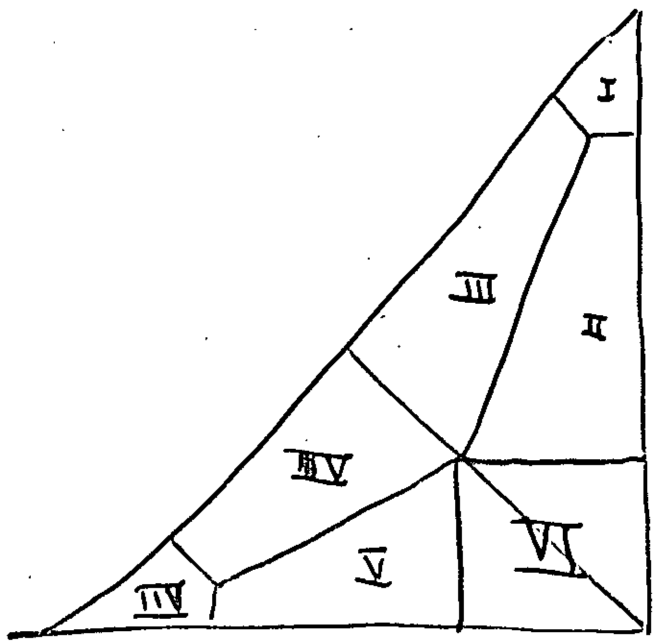
		I	II
III	IV		
V	VI		VII
VIII	IX		X
XI	XII		
		XIII	XIV

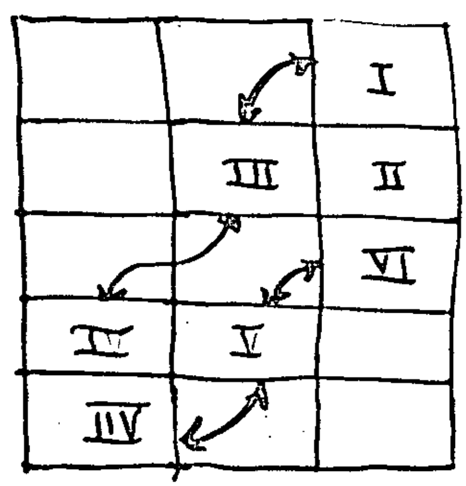


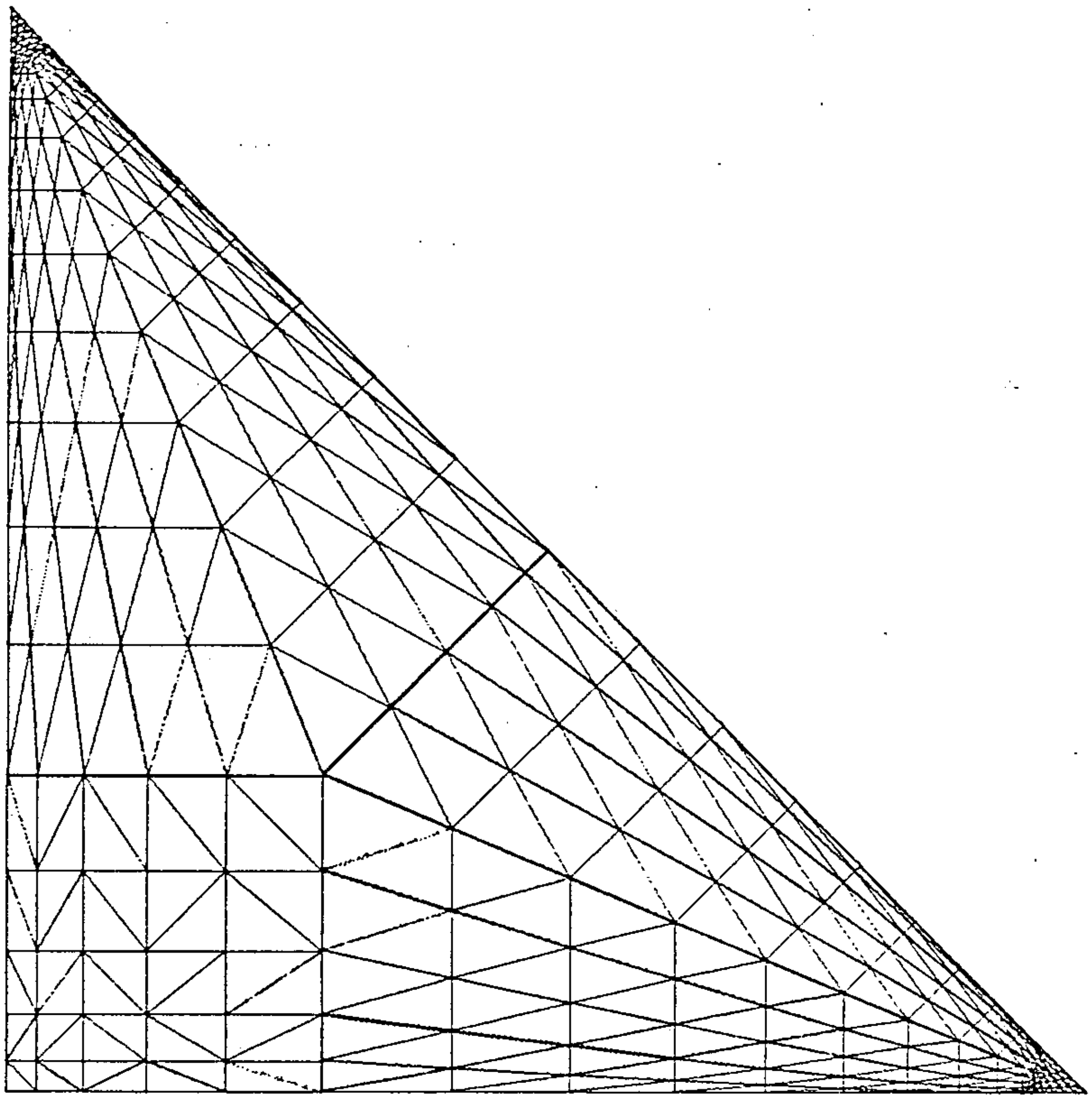
MALLA CON 24 NODOS Y 28 ELEMENTOS



MALLA CON 496 NODOS Y 876 ELEMENTOS







MALLA CON 311 NODOS Y 550 ELEMENTOS

DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.

EL METODO DEL ELEMENTO FINITO EN LA INGENIERIA

TEORIA DE LA ELASTICIDAD

ING. OMAR MARIN

FEBRERO, 1985

TEORIA DE LA ELAST DAD

TEORIA DE DEFORMACIONES

Relaciona el campo de desplazamientos u, v, w con el campo de deformaciones mediante un sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \qquad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}$$

Resultado:

6 ECUACIONES

9 INCOGNITAS

7.2, 7.3 y 7.4 (p 12 y 13)

TEORIA DE ESFUERZOS

Se utiliza el principio de balance y conservación de masa, obteniendose las siguientes ecuaciones

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \rho(f_x - a_x) = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \rho(f_y - a_y) = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \rho(f_z - a_z) = 0$$

Resultado:

3 ECUACIONES

6 INCOGNITAS

9.1, 9.2 p 20

TEORIA CONSTITUTIVA

Se usa la hipotesis de homogeneidad, isotropia elasticidad lineal

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)\right]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)\right]$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\right]$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \qquad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}$$

8.1 p16

Resultado:

6 ECUACIONES

0 INCOGNITAS

En general se tiene un sistema con 15 ecuaciones y 15 incognitas lo cual junto con las condiciones de frontera e iniciales forman un sistema con solución

El sistema conforma un modelo matematico de un cuerpo cualquiera que sastiface las siguientes hipotesis.

TEORÍA DE DEFORMACIONES

i.– Funciones continuas
ii.– Deformaciones infinitesimales

TEORIA DE ESFUERZOS

i.– Continuidad en todas las funciones, asi como en las derivadas que sean necesarias
ii.– Hipotesis de esfuerzos, la cual consiste en decir que lo que es cierto para el cuerpo es cierto para un punto y su vecindad
iii.– Las unicas fuerzas de cuerpo que actuan son las masicas, es decir no existen fuerzas electromagneticas, o sea el medio es no polar

TEORIA CONSTITUTIVA

i.– Homogeneidad
ii.– Isotropia
iii.– Elastico lineal
iv.– Sólido

Para aplicar el modelo es necesario

1.- Definir la forma del cuerpo
2.- Establecer como estan aplicadas las cargas (concentradas, distribuidas, de cuerpo etc)
3.- Tipo de restricciones en el problema
4.- Tipo de material (E, ν)
5.- Método de solución

Esto nos dará 15 funciones u, v, w, $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$. Todas estas variables son funciones de la posición y del tiempo en general.

Para resolver el problema tenemos los siguientes métodos.

1.- Métodos matematicos de solución "exacta" (integración directa)

2.- Métodos matematicos de solución "aproximada"

2.1.- Numericos

2.2.- Diferencias finitas

2.3.- ELEMENTOS FINITOS

2.4.- Variacionales

ETC

3.- Métodos experimentales

3.1 Lacas

3.2 Fotoelasticidad

3.3 Moiré

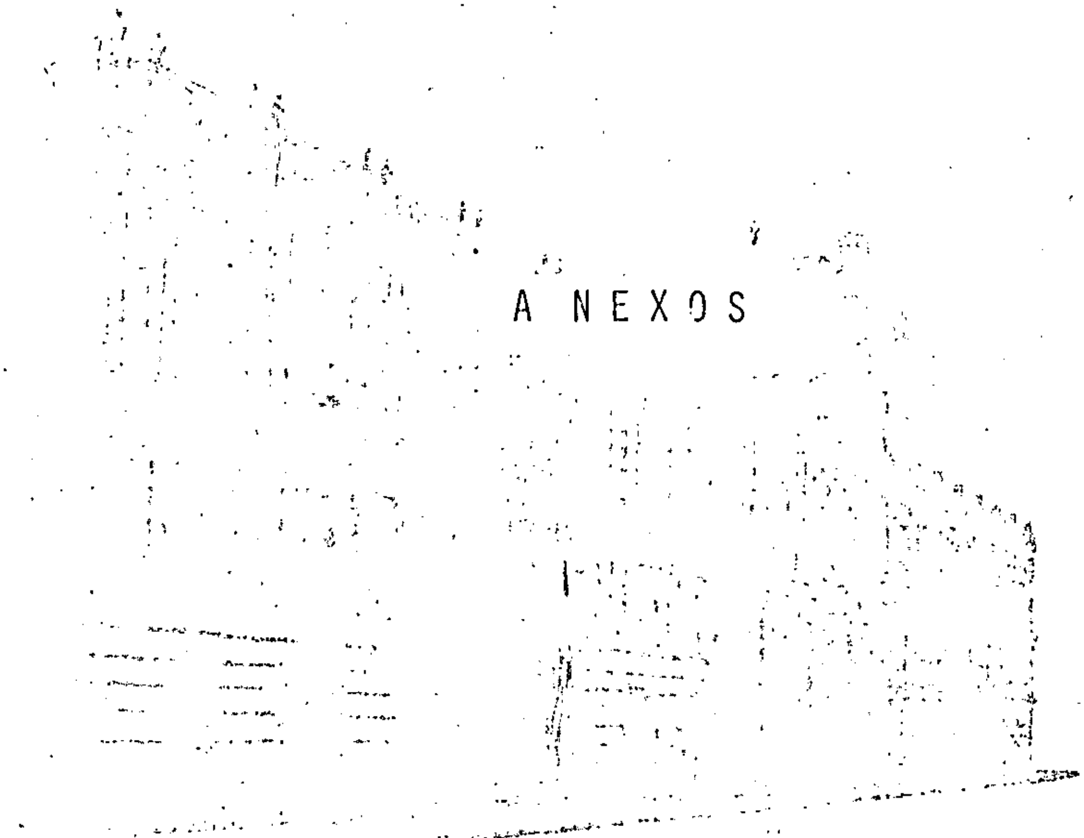
3.4 Rayos X

3.5 Extensometria electrica

ETC.

DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.

EL METODO DEL ELEMENTO FINITO EN LA INGENIERIA



A N E X O S

DR. MIHIR SEN

FEBRERO, 1985

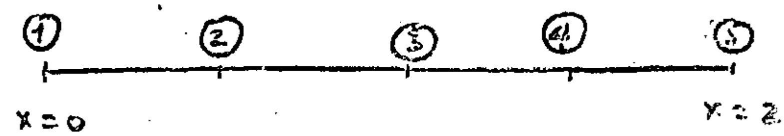
Palacio de Minería Calle de Tacuba 5 primer piso Deleg. Cuauhtémoc 06000 México, D.F. Tel.: 521-40-20 Apdo. Postal M-2285

ECUCIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

$$\frac{d^2 u_0}{dx^2} - u_0 = 0 \quad , \quad u_0(0) = 1$$

$$u_0(2) = e^2 = 7.389$$

Solución exacta: $u_0 = e^x$



Se divide el dominio en 4 elementos iguales

$\longleftarrow h \longrightarrow$ elemento

$$\bar{u} = a_0 + a_1 \bar{x}$$

$\bar{x}$ coordenada local

En los dos nodos

$$\bar{u}_1 = a_0 \qquad\qquad a_0 = \bar{u}_1$$

$$\bar{u}_2 = a_0 + a_1 h \quad \Rightarrow \quad a_1 = \frac{\bar{u}_2 - \bar{u}_1}{h}$$

$$\bar{u} = \bar{u}_1 + \frac{\bar{u}_2 - \bar{u}_1}{h}\bar{x}$$

$$= \left(1 - \frac{\bar{x}}{h}\right)\bar{u}_1 + \frac{\bar{x}}{h}\bar{u}_2$$

$$= \bar{N}_1 \bar{u}_1 + \bar{N}_2 \bar{u}_2$$

donde $\bar{N}_1 = 1 - \dfrac{\bar{x}}{h}$

$\bar{N}_2 = \dfrac{\bar{x}}{h}$

Nótese $\bar{N}_1 + \bar{N}_2 = 1$

$\bar{N}_1(0) = 1, \quad \bar{N}_1(h) = 0$

$\bar{N}_2(0) = 0, \quad \bar{N}_2(h) = 1$

En cada elemento

$$\frac{d^2\bar{u}}{d\bar{x}^2} - \bar{u} = \varepsilon$$

Galerkin: $$\int_0^h \left(\frac{d^2\bar{u}}{d\bar{x}^2} - \bar{u} \right) \bar{N}_i \, d\bar{x} = 0$$

Integración por partes

$$\frac{d\bar{u}}{d\bar{x}} \bar{N}_i \Big|_0^h - \int_0^h \left[\frac{d\bar{u}}{d\bar{x}} \frac{d\bar{N}_i}{d\bar{x}} + \bar{u}\,\bar{N}_i \right] d\bar{x} = 0$$

$$\sum_j^2 \bar{u}_j \int_0^h \left[\frac{d\bar{N}_j}{d\bar{x}} \frac{d\bar{N}_i}{d\bar{x}} + \bar{N}_j \bar{N}_i \right] d\bar{x} = \frac{d\bar{u}}{d\bar{x}} \bar{N}_i \Big|_0^h$$

$$\sum \bar{A}_{ij} \bar{u}_j = \bar{F}_i$$

donde $$\bar{A}_{ij} = \int_0^h \left[\frac{d\bar{N}_j}{d\bar{x}} \frac{d\bar{N}_i}{d\bar{x}} + \bar{N}_j \bar{N}_i \right] dx$$

$$\bar{F}_i = \frac{d\bar{u}}{d\bar{x}} \bar{N}_i \Big|_0^h$$

En este caso

matriz de coeficientes del elemento $\rightarrow$ $$\bar{A}_{ij} = \int_0^h \begin{bmatrix} \frac{1}{h^2} + \left(1 - \frac{\bar{x}}{h}\right)^2 & -\frac{1}{h^2} + \frac{\bar{x}}{h}\left(1 - \frac{\bar{x}}{h}\right) \\ -\frac{1}{h^2} + \frac{\bar{x}}{h}\left(1 - \frac{\bar{x}}{h}\right) & \frac{1}{h^2} + \left(\frac{\bar{x}}{h}\right)^2 \end{bmatrix} d\bar{x}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{h} + \frac{h}{3} & \frac{h}{6} - \frac{1}{h} \\ \frac{h}{6} - \frac{1}{h} & \frac{1}{h} + \frac{h}{3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2.1667 & -1.9167 \\ -1.9167 & 2.1667 \end{bmatrix}$$ con $h = 0.5$

$$\left.\begin{aligned} 2.1667\,\bar{u}_1 - 1.9167\,\bar{u}_2 &= \bar{F}_1 \\ -1.9167\,\bar{u}_1 + 2.1667\,\bar{u}_2 &= \bar{F}_2 \end{aligned}\right\}$$ para cada elemento

Con una tabla de nodos:

$$\begin{aligned} 2.1667\,u_1 - 1.9167\,u_2 &= \bar{F}_1^{(1)} \\ -1.9167\,u_1 + 2.1667\,u_2 &= \bar{F}_2^{(1)} \end{aligned}$$ ← elemento 1

$$\begin{aligned} 2.1667\,u_2 - 1.9167\,u_3 &= \bar{F}_1^{(2)} \\ -1.9167\,u_2 + 2.1667\,u_3 &= \bar{F}_2^{(2)} \end{aligned}$$ ← elemento 2

$$\begin{aligned} 2.1667\,u_3 - 1.9167\,u_4 &= \bar{F}_1^{(3)} \\ -1.9167\,u_3 + 2.1667\,u_4 &= \bar{F}_2^{(3)} \end{aligned}$$ ← elemento 3

$$\begin{aligned} 2.1667\,u_4 - 1.9167\,u_5 &= \bar{F}_1^{(4)} \\ -1.9167\,u_4 + 2.1667\,u_5 &= \bar{F}_2^{(4)} \end{aligned}$$ ← elemento 4

equivalentes a

$$\begin{bmatrix} 2.1667 & -1.9167 & 0 & 0 & 0 \\ -1.9167 & 4.3334 & -1.9167 & 0 & 0 \\ 0 & -1.9167 & 4.3334 & -1.9167 & 0 \\ 0 & 0 & -1.9167 & 4.3334 & -1.9167 \\ 0 & 0 & 0 & -1.9167 & 2.1667 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{F}_1^{(1)} \\ \bar{F}_2^{(1)} + \bar{F}_1^{(2)} \\ \bar{F}_2^{(2)} + \bar{F}_1^{(3)} \\ \bar{F}_2^{(3)} + \bar{F}_1^{(4)} \\ \bar{F}_2^{(4)} \end{bmatrix}$$

$$\bar{F}_2^{(1)} = \left.\frac{du}{dx}\right|_{x=x_2}, \quad \bar{F}_1^{(2)} = -\left.\frac{du}{dx}\right|_{x=x_2} \Rightarrow \bar{F}_2^{(1)} + \bar{F}_1^{(2)} = 0$$

también $\bar{F}_2^{(2)} + \bar{F}_1^{(3)} = \bar{F}_2^{(3)} + \bar{F}_1^{(4)} = 0$

Además $u_1 = 1$, $u_5 = 7.389$ ← condición de frontera

$$\begin{bmatrix} 4.3384 & -1.9167 & 0 \\ -1.9167 & 4.3334 & -1.9167 \\ 0 & -1.9167 & 4.3334 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.9167 \\ 0 \\ 14.1625 \end{bmatrix}$$

Solución: $u_2 = 1.6348$ $\quad (1.6487)$

$u_3 = 2.6961$ $\quad (2.7183)$

$u_4 = 4.4607$ $\quad (4.4817)$

↑ valores exactos

Ahora, la misma ecuación pero con las condiciones

$$u(0) = 1, \quad \frac{du}{dx}(2) = e^2 = 7.389$$

u_5 no es conocido, pero $\bar{F}_2^{(5)} = \left.\dfrac{du}{dx}\right|_{x=2} = 7.389$

$u_1 = 1$

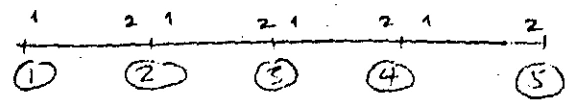
matriz bandeada →

$$\begin{bmatrix} 4.3334 & -1.9167 & 0 & 0 \\ -1.9167 & 4.3334 & -1.9167 & 0 \\ 0 & -1.9167 & 4.3334 & -1.9167 \\ 0 & 0 & -1.9167 & 2.1667 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.9167 \\ 0 \\ 0 \\ 7.389 \end{bmatrix}$$

TABLA DE NODOS:

Elemento	1	1	2	2	3	3	4	4
Nodo local	1	2	1	2	1	2	1	2
Nodo Global	1	2	2	3	3	4	4	5

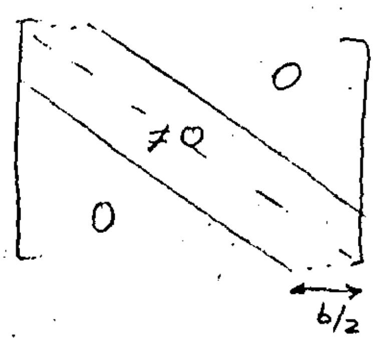
TABLA DE NODOS



Element	Local	Global
1	1	1
1	2	2
2	1	2
2	2	3
3	1	3
3	2	4
4	1	4
4	2	5

Tabla de nodos

ESTRUCTURA BANDEADA DE LA MATRIZ



b = ancho de banda

DIRECTORIO DE ASISTENTES AL CURSO: EL METODO DEL ELEMENTO FINITO EN LA INGENIERIA

DEL 4 AL 9 DE FEBRERO DE 1985

NOMBRE Y DIRECCION	EMPRESA Y DIRECCION
1.- SERVANDO ARANA GARCIA Chilpa No. 108-401 Col. Delg. Alvaro Obregón C.P. 01460 México, D.F. Tel. 563-84-53	COMISION FEDERAL DE ELECTRICIDAD Proyecto Hidroelectrico Ing. Carlos Ramírez, Ulloa, El Caracol Guerrero Tel. 91733 20551
2.- JAVIER ARTEAGA FLORES Cazadores 38-A Col. Bosques de la Hda. Cuautitlan Izcalli Tel.	INDUSTRIAS IEM, S.A. DE C.V. A.P. 18 Tlalnepantla, Edo. de Méx. C.P. 54000 Tel. 565-69-90
3.- CARLOS EDMUNDO CABALLERO B. Av. Universidad No. 1923 Col. Torres de Chimalistac F-10001 Oxtopulco C.P. 04510 México, D.F. Tel.	
4.- LUIS CAMACHO DORANTES Prado Norte No. 403 Col. Delg. Miguel Hidalgo C.P. 11000 México, D.F. Tel. 540-19-81	SECRETARIA DE COMUNICACIONES Y TRANSPORTES Chiapas No. 121 Col. Roma Delg. Cuauhtémoc C.P. México, D.F. Tel. 574-82-69
5.- JUAN JOSE CAMARENA HERNANDEZ Lote 4 Manzana 64 Calle Guirnaldas Col. Villa de las Flores Coacalco Mexico Tel. 874-45-66	COMISION FEDERAL DE ELECTRICIDAD Mississipi No. 71-10° Piso

DIRECTORIO DE ASISTENTES AL CURSO: EL METODO DEL ELEMENTO FINITO EN LA INGENIERIA

DEL 4 AL 9 DE FEBRERO DE 1985

NOMBRE Y DIRECCION	EMPRESA Y DIRECCION
6.- DIEGO CARRASCO AMAYA Orinoco No. 28 Depto 23 Col. Portales Delg. Benito Juárez C.P. 03300 México, D.F. Tel. 532-43-05	DIRECSPICER, S.A. DE C.V. Bosques de Ciruelos No. 278-3°Piso Col. Bosques de las Lomas Delg. Cuajimalpa C.P. 05120 México, D.F. Tel. 596-21-44
7.- ROLANDO CARRASCO RAMIREZ Xicotencatl No. 176-B-303 Col. Del Carmen Delg. Coyoacán C.P. 04000 México, D.F. Tel. 688-41-50	COMISION FEDERAL DE ELECTRICIDAD Mississippi No. 71-10° Piso Col. Cuauhtémoc Delg. C.P. México, D.F. Tel. 525-78-80 Ext. 3189
8.- FRANCISCO MANUEL CERRO DIAZ Soltepec No. 40-2°Piso Col. Hipódromo Delg. C.P. 06100 México, D.F. Tel. 271-12-48	SECRETARIA DE COMUNICACIONES Y TRANSPORTES DIR. GRAL. DE AEROPUERTOS Chiapas No. 121 P.B. Col. Roma C.P. 06700 México, D.F. Tel. 574-83-50
9.- RAMON CONTRERAS ARNAIZ Norte 83 No. 500 Col. Electricistas Delg. Atzapotzalco C.P. 02060 México, D.F. Tel. 352-35-91	COMISION FEDERAL DE ELECTRICIDAD Mississippi No. 71'11°Piso Col. Cuauhtémoc Delg. C.P. México, D.F. Tel. 553-71-33 Ext. 2063
10.- ROBERTO CORDOVA FRUNZ Colón No. 76 Col. Echegaray Delg. Naucalpan C.P. 53300 Tel. 373-18-30	INDUSTRIAS IEM, S.A. DE C.V. A.P. 18 Tlalnepantla, Edo. de Méx Tel. 565-69-00

DIRECTORIO DE ASISTENTES AL CURSO: EL METODO DEL ELEMENTO FINITO EN LA INGENIERIA

DEL 4 AL 9 DE FEBRERO DE 1985

NOMBRE Y DIRECCION	EMPRESA Y DIRECCION
11.- ARMANDO CHAVEZ PIMENTEL Ermita Iztapalapa No. 429 Edif. Q-8 Col. Prado Churubusco Delg. Coyoacán C.P. México, D.F. Tel. 582-58-60	DIRAC, S.A. Insurgentes Sur 1188-11°Piso Col. Del Valle Delg. C.P. 03100 México, D.F. Tel. 575-80-32
12.- JOSE SALVADOR ECHEVERRIA VILLAGOMEZ Arquitectura No. 57 Col. Copilco Universidad Delg. Coyoacán C.P. México, D.F. Tel. 658-71-85	UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO Ciudad Universitaria México, D.F. Tel. 555-52-15
13.- HECTOR ANTONIO GARCIA AGUILAR Borodin No. 58 Col. Vallejo Delg. Gustavo A. Madero C.P. 07870 México, D.F. Tel. 762-45-62	DIRECSPICER, S.A. DE C.V. Bosques Ciruelos No. 278-3°Piso Col. Bosques de las Lomas Delg. Cuajimalpa C.P. 05120 Tel. 596-21-44 586-20-22
14.- MARIO ALBERTO GARCIA GALICIA Paseo Lomas Verdes No. 107 IV Sección lomas Verdes Naucalpan, Edo. de Méx. C.P. 53120 Tel. 393-25-11	COMISION FEDERAL DE ELECTRICIDAD Río MississippiNo. 71 Col. Cuauhtémoc Delg. Cuauhtémoc C.P. Tel. 525-78-80
15.- JOSE ANTONIO GRACIA GARCIA SANCHEZ Río Balsas No. 35 Col. Colinas del Lago Edo. de Méx. Tel. 677-45-89	COMISION FEDERAL DE ELECTRICIDAD Río Mississippi No. 71 Col. Cuauhtémoc Delg. Cuauhtémoc C.P. México, D.F. Tel.

DIRECTORIO DE ASISTENTES AL CURSO: EL METODO DEL ELEMENTO FINITO EN LA INGENIERIA

DEL 4 AL 9 DE FEBRERO DE 1985

NOMBRE Y DIRECCION	EMPRESA Y DIRECCION
16.- ANDRES B. GARCIA HERNANDEZ 2a. Cda. de Alberto Salinas Mza. 3 Lte. 23 Col. Aviación Civil Delg. Venustiano Carranza C.P. 15740 México, D.F. Tel. 558-52-16	SECRETARIA DE COMUNICACIONES Y TRANSPORTES Fernando No. 247 Col. Alamos Del. Benito Juárez C.P. México, D.F. Tel. 5590-93-52
17.- JOSE GPE. GASCA ESPITIA Tizoc M-304 Lote 54 Col. Ciudad Azteca México, D.F. Tel. 569-30-80	COMISION FEDERAL DE ELECTRICIDAD Mississippi No. 71 Col. Cuauhtémoc Delg. Cuauhtémoc México, D.F. Tel. 553-26-33 Ext. 2063
18.- JOSE RAMON GUTIERREZ REED Escollo No. 255-202 Col. Las Aguilas Delg. C.P. 01710 México, D.F. Tel. 569-22-11	BYRON JACKSON Co, S.A. Km. 15 1/2 Carretera México-Laredo Col. Santa Clara Delg. C.P. 55540 Tel. 569-22-11
19.- BENJAMIN HERNANDEZ GALLARDO Oriente 4 Mza. 24 Lte. 35 Col. Cuchilla del Tesoro Delg. Gustavo A. Madero C.P. 07900 México, D.F. Tel.	SECRETARIA DE COMUNICACIONES Y TRANSPORTES Av. Fernando No. 247 Col. Alamos Delg. C.P. México, D.F. Tel. 590-89-86
20.- JOSE ESTEBAN LICONA LOPEZ Oriente 25 No. 3709 Col. La Joya Delg. Gustavo A. Madero C.P. México, D.F. Tel. 551-05-45	HOSPITAL A.B.C. Sur 136 Esq. Observatorio Col. América Delg. C.P. México, D.F. Tel. 277-50-00

91-11-11
[illegible]

[illegible]

[illegible]

14-20-39
[illegible]

[illegible]

12-20-40
[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

DIRECTORIO DE ASISTENTES AL CURSO: EL METODO DEL ELEMENTO FINITO EN LA INGENIERIA

DEL 4 AL 9 DE FEBRERO DE 1985

	NOMBRE Y DIRECCION	EMPRESA Y DIRECCION
21.-	HUMBERTO MARENCO MOGOLLON Patricio Sanz No. 1717-4 Col. Del Valle Delg. B. Juárez C.P. México, D.F. Tel. 524-32-07	COMISION FEDERAL DE ELECTRICIDAD Río Mississippi No. 71-12°Piso Col. Cuauhtémoc Delg. Cuauhtémoc C.P. México, D.F. Tel. 525-52-42
22.-	JOSE LUIS MARIN PRADO Calle Luna 125 Col. Sta. Anita Celaya, Gto. Tel.	TRANSEJE, S.A. DE C.V. Carr. Panamericana Km 284 2a. Fracción De Crespo Celaya, Gto. Tel. 325-95
23.-	PEDRO MEDINA SANCHEZ Calle 7 eje Satélite-Tlalnepantla Col. Viveros del Valle Tlalnepantla, Edo. de Méx. C.P. 54060 Tel. 397-56-40	COMISION FEDERAL DE ELECTRICIDAD Río Mississippi No. 71-11°Piso Col. Cuauhtémoc Delg. Cuauhtémoc C.P. 06500 Tel. 553-71-33
24.-	FCO. JAVIER GONZALO PELCASTRE C. Eten No. 556 Col. Valle del Tepeyac Delg. Gustavo A. Madero C.P. 07740 México, D.F. Tel. 754-36-70	DIRECSPICER, S.A. DE C.V. Bosques de Ciruelos No. 278-3°Piso Col. Bosques de las Lomas Delg. Cuajimalpa C.P. 05120 México, D.F. Tel. 596-21-44 586-20-22
25.-	ELIAS PEÑA CHIMAL Emilio Portes Gil 69 Dpto. 302 B Col. Progresista Delg. Iztapalapa C.P. México, D.F. Tel. 691-11-11	COMISION FEDERAL DE ELECTRICIDAD Río Mississippi No. 71-11°Piso Col. Cuauhtémoc Delg. Cuauhtémoc C.P. México, D.F. Tel. 525-78-80 Ext. 3310

DIRECTORIO DE ASISTENTES AL CURSO: EL METODO DEL ELEMENTO FINITO EN LA INGENIERIA

DEL 4 AL 9 DE FEBRERO DE 1985

NOMBRE Y DIRECCION	EMPRESA Y DIRECCION
26.- JOSE MANUEL REYES RUIZ Zacatecas No. 59-12 Col. Roma Delg. Cuauhtémoc C.P. 06700 México, D.F.	COMISION FEDERAL DE ELECTRICIDAD Río Mississipi No. 71-11°Piso Col. Cuauhtémoc Delg. Cuauhtémoc C.P. México, D.F.
27.- LEOPOLDO G. RAMIREZ MENA Buenavista No. 27 Col. Bo Niño Jesús Delg. Coyoacán C.P. 04330 México, D.F. Tel. 554-40-01	COMISION FEDERAL DE ELECTRICIDAD Río Mississipi No. 71-8°Piso Col. Cuauhtémoc Delg. Cuauhtémoc C.P. México, D.F. Tel.
28.- PABLO RAFAEL REYES GONZALEZ Arneses No. 142 Col. Minerva Delg. Iztapalapa C.P. 09810 México, D.F. Tel. 581-83-54	DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO FAC. DE INGENIERIA Ciudad Universitaria México, D.F. Tel. 550-52-15 Ext. 4470
29.- JOSE LUIS REYES TERAN Paseo de la Reforma No. 27-418 Col. Juárez Delg. C.P. México, D.F. Tel.	TRANSEJE, S.A. DE C.V. Carretera Panamericana, Km. 284 Celaya, Gto. Tel.
30.- LUIS RIVERA MACIAS Maestro Rural L-20 Mza. 46 Col. Zona Escolar Delg. Gustavo A. Madero C.P. 07230 México, D.F. Tel.	LABORATORIOS NACIONALES DE FOMENTO Ind. Militar No. 261 Col. Lomas de Sotelo Naucalpan, Edo. de Méx. Tel. 589-01-99

DIRECTORIO DE ASISTENTES AL CURSO: EL METODO DEL ELEMENTO FINITO EN LA INGENIERIA

DEL 4 AL 9 DE FEBRERO DE 1985

NOMBRE Y DIRECCION	EMPRESA Y DIRECCION
31.- MANUEL ROSADO SARMIENTO Av. Coyoacán No. 1120-4 Col. Del Valle Delg. Benito Juárez C.P. 03100 México, D.F. Tel. 589-73-17	FACULTAD DE INGENIERIA, UNAM Ciudad Universitaria México, D.F.
32.- JORGE EDUARDO RUIZ AVILA Playa Revolcadero No. 444 Col. Militar Marte Delg. Iztacalco C.P. México, D.F. Tel. 590-07-25	UNIVERSIDAD LA SALLE Benjamín Franklin No. 47 Col. Escandón Delg. C.P. México, D.F. Tel. 277-25-76
33.- ARNULFO SANCHEZ MARTINEZ Avestruz No. 20 Int. 13 Col. Bellavista Delg. Alvaro Obregón C.P. 01160 México, D.F. Tel. 271-88-91	DIRECSPICER, S.A. DE C.V. Bosques Ciruelos No. 278-3er. Piso Col. Bosques de las Lomas Delg. Cuajimalpa C.P. 05120 México, D.F. Tel. 596-21-44
34.- TOMAS G. SANCHEZ REYES Tajín No. 28 Depto. 6 Col. Narvarte Delg. Benito Juárez C.P. 03020 México, D.F. Tel. 538-63-34	COMISION FEDERAL DE ELECTRICIDAD Río Mississippi No. 71 12°Piso Col. Cuauhtémoc Delg. Cuauhtémoc C.P. México, D.F. Tel. 553-71-33 Ext. 2066
35.- FERNANDO SANTOYO CANO Rivera No. 104 Col. Los Alpes Delg. Alvaro Obregón C.P. 01710 México, D.F. Tel. 593-82-86	COMISION FEDERAL DE ELECTRICIDAD Río Mississippi No. 71 12°Piso Col. Cuauhtémoc Delg. Cuauhtémoc C.P. México, D.F. Tel. 553-71-33 Ext. 2799

DIRECTORIO DE ASISTENTES AL CURSO: EL METODO DEL ELEMENTO FINITO EN LA INGENIERIA

DEL 4 AL 9 DE FEBRERO DE 1985

NOMBRE Y DIRECCION	EMPRESA Y DIRECCION
36.- MIGUEL SERRANO SALDAÑA Calle 25 No. 116 Edo. de Méx. C.P. 57210 Tel.	SECRETARIA DE COMUNICACIONES Y TRANSPORTES Av. Fernando 247 Col. Alamos Delg. Benito Juárez México, D.F. Tel.
37.- ALFONSO TOVAR SANTANA R. Flores Magon No. 205 Edif. V Centro Guerrero B-704 Tlatelolco Delg. Cuauhtémoc C.P. 06900 Tel. 583-2937	E.S.I.A. Edif. 10 Unidad Profesional de Zacatenco Lindavista C.P. 07300 Tel. 586-18-51