MATEMATICAS APLICADAS A LA INGENIERIA ESTRUCTURAL

CONCEPTOS FUNDAMENTALES

M. en I. G. Rafael Aranda Hernández

MARZO, 1985

1. CONCEPTOS FUNDAMENTALES

1. CONCEPTOS FUNDAMENTALES

El objetivo principal de este curso es proporcionar conocimientos fundamentales de algunos métodos matemáticos que son útiles para resolver problemas estructurales que se presentan en la práctica común de la ingeniería.

Se ha organizado de tal forma que el participante-alumno primero tenga un breve panorama de los conceptos fundamentales de la teoría estructural y la importancia que tiene el planteamiento matemático matricial del análisis estructural. En seguida, se hace una presentación de la teoría de álgebra de matrices y de la solución de sistemas de ecuaciones; en esta parte se trata también el problema de valores y vectores característicos.

En el capítulo tres, análisis matricial de estructuras, se desarrolla de manera bastante completa lo concerniente con los concep tos de energía de estructuras, que sirven de base para estudiar los métodos de flexibilidades y rigideces; en esta parte se hace una presentación de los que es el análisis por subestructuras y por recursión.

En el capítulo cuatro se estudia la respuesta dinámica de estructuras empleando métodos matriciales y, finalmente, en el último capítulo se presenta el método del elemento finito.

En cada capítulo se proporcionan problemas cuya aplicación a casos de la práctica ingenieril es común. En todo momento oportuno se hace énfasis en la conveniencia y necesidad que se tiene de programar en la computadora los algoritmos o métodos matriciales de solución que se presentan en estas notas.

Aun cuando la idea pueda estar clara, conviene decir que el término 'estructura' se empleará para describir un sistema cuya función primordial es la de transmitir cargas; puede consistir de un solo elemento simple tal como una viga, o puede estar constituida por el 'ensamble' de elementos interconectados. Estos, a su vez, pueden ser cables a tensión, barras a tensión o compresión, vigas, elementos-muro que trabajen a cortante, elementos-placa y elementos-cascarón. Generalmente estos elementos se clasifican en la forma como transmiten la carga, sin embargo, la clasificación basada en la forma del elemento también es posible.

Uno de los principales objetivos del análisis de estructuras es definir las características del sistema estructural a partir de las propiedades de los elementos; con ello será posible predecir el comportamiento de una estructura real. Así, si se puede definir a un conjunto de fuerzas que actúan en un sistema, se podrá calcular la configuración deformada del mismo como una medida de la respuesta.

El problema matemático-estructural de conocer la respuesta de un sistema sometido a solicitaciones arbitrarias, y lo que es el recíproco, esto es, dada la respuesta de un sistema y sus características, es posible definir las acciones que ocasionaron esa respuesta. Para recorrer este camino, en una u otra dirección, es conveniente discutir conceptos relacionados con la medición de fuerzas y desplazamientos.

1.1 Medición de fuerzas y desplazamientos.

Existe una gran cantidad de formas útiles para medir fuerzas aplicadas a una estructura o el desplazamiento provocado en un punto en cualquier dirección. Algunos son manuales, rudimentarios, que tienen una gran fuente de error; otros son dispositivos hidráulicos-mecánicos; otros se apoyan en la fotoelasticidad, y otros en dispositivos electrónicos. Si se miden las fuerzas será posible conocer los desplazamientos y viceversa.

Con la palabra 'fuerza' es común incluir pares de fuerzas y momentos; con la palabra desplazamiento se incluyen rotaciones; medir una fuerza o un desplazamiento implica conocer su magnitud. Para establecer dónde y en qué dirección se hace la medición conviene emplear un 'sistema coordenado'; en la figura siguiente se indica un sistema coordenado usual en el análisis de marcos rígidos

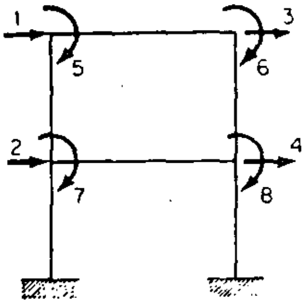


Fig 1.1 Sistema coordenado de referencia

El número de coordenadas en la figura anterior es arbitrario; se pueden eliminar algunas de ellas o adicionar otras entre puntos o en dirección vertical.

Si para cada coordenada de las indicadas anteriormente se aplica una fuerza, el vector que define a las mismas está dado por

$$F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_8 \end{bmatrix}$$

donde los subíndices sirven para designar el número de la coordenada asociada con la fuerza. Este es un vector columna y sirve para definir el primer estado de fuerzas en la estructura. Puede darse el caso en que se tengan k casos de carga lo cual dará origen a los k vectores columna

$$F = \begin{bmatrix} F_1^1 & \cdots & F_1^k \\ F_2^1 & \cdots & F_2^k \\ \vdots & & \vdots \\ F_8 & \cdots & F_8^k \end{bmatrix}$$

cualquier signo negativo que aparezca en los términos F_i^k significa que la carga (fuerza) ha sido aplicada en dirección negativa a la definición positiva de la coordenada.

De manera similar a la definición anterior, se tiene el vector desplazamiento dado por

$$u_i = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_8 \end{bmatrix}$$

este vector es un arreglo ordenado de mediciones de desplazamientos con posición y signo coincidentes con los términos asociados del vector de fuerzas.

En general, para cualquier sistema se podrán hacer n mediciones de fuerzas y desplazamientos, ello dará lugar a definir una matriz columna de orden n×1, en la cual el primer número se asocia con los renglones y el segundo con las columnas.

Asociado con el hecho de medir desplazamientos está el de 'grado de libertad'; una estructura elástica tiene un número infinito de grados de libertad. Sin embargo, en los problemas estructurales de interés basta conocer el comportamiento para ciertos grados de libertad lo cual hace que el número de ellos se vuelva finito.

1.2 Espacios n-dimensionales.

De geometría elemental se sabe que la posición de un punto en el plano se fija con dos mediciones independientes y con tres de ellas en elespacio tridimensional. A las ocho coordenadas del marco indicado en el inciso anterior se pueden asociar ocho coordenadas independientes, si bien el marco está en el plano del papel. Matemáticamente, sin embargo, las fuerzas y los desplazamientos en ese marco tienen el mismo significado que el de las coordenadas de un punto en el espacio bi o tridimensional; por tanto, es usual referirse a los problemas en los cuales se tienen n grados de libertad como problemas en el espacio n dimensional o en el espacio n. Los vectores de 'mediciones' (fuerzas o desplazamientos) se denominan vectores n dimensionales, de dimensión n o en el espacio n. En un sentido amplio, los componentes de estos vectores pueden o no tener dirección, si son escalares se podrían referir a variables como la temperatura o la presión.

1.3 Comportamiento de estructuras

Un aspecto importante en el comportamiento de una estructura es la definición de las relaciones fuerza-desplazamiento; se distinguen esencialmente las siguientes: elástica, inelástica, lineal y no lineal.

a) Comportamiento elástico e inelástico. Esta caracterización estructural depende del tipo de respuesta; así, si después de que una carga ha sido removida de una estructura ésta recupera su configuración inicial, el comportamiento es elástico; si ello no ocurre, entonces la estructura se comporta inelásticamente.

En la estructura siguiente se ilustra el primer tipo de comportamiento

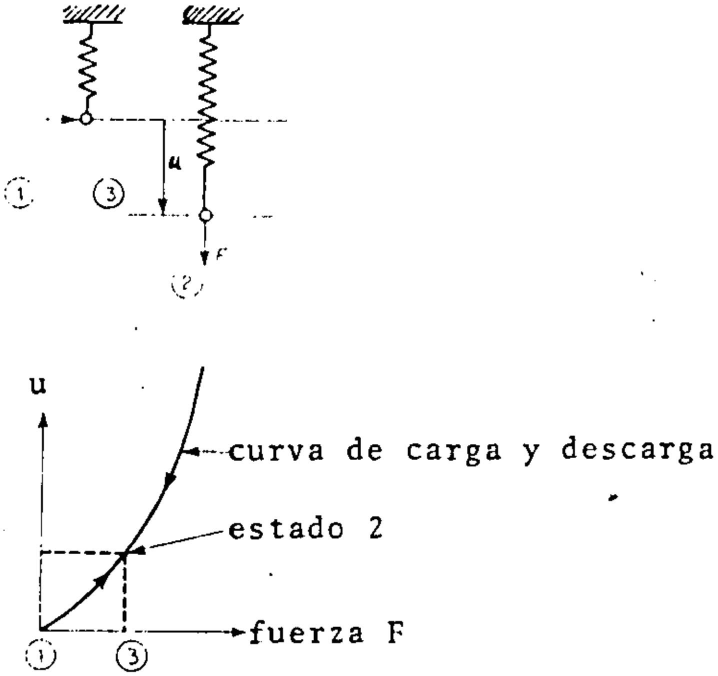


Fig 1.2 Comportamiento elástico

El resorte elástico muestra el mismo tipo de comportamiento en carga que en descarga. En la fig 1.3 se ilustra el comportamiento inelástico.

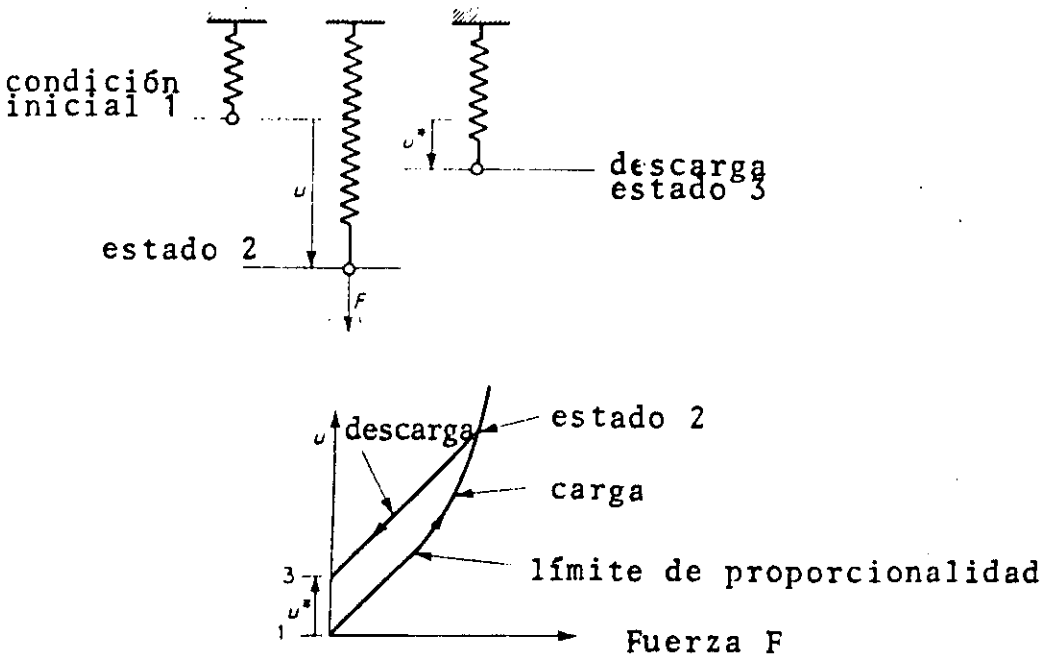


Fig 1.3 Comportamiento inelástico

Se puede observar que el resorte se comporta elásticamente hasta un punto que se designa como el 'límite de proporcionalidad', más allá del cual el resorte se comporta inelásticamente. Cuando al resorte se le lleva al estado 2 de carga experimenta un desplazamiento u^* que no se recupera plenamente una vez que la carga ha sido removida.

b) Comportamiento lineal y no lineal. Esta caracterización depende de la definición matemática de la relación fuerza-desplazamiento. Así, para un resorte que sea lineal, la relación está dada por

$$u = \frac{F}{k}$$

siendo F y u la fuerza y el desplazamiento, respectivamente y k es la rigidez.

Esta ecuación es lineal y matemáticamente implica que el desplazamiento debido a un número de cargas que actúan simultáneamente puede obtenerse sumando los efectos de cada carga por separado. Este es el 'Principio de Superposición', el cual se aplica a sistemas lineales.

1.4 Superposición de fuerzas y desplazamientos.

En la fig. 1.4 se ilustra el principio de superposición

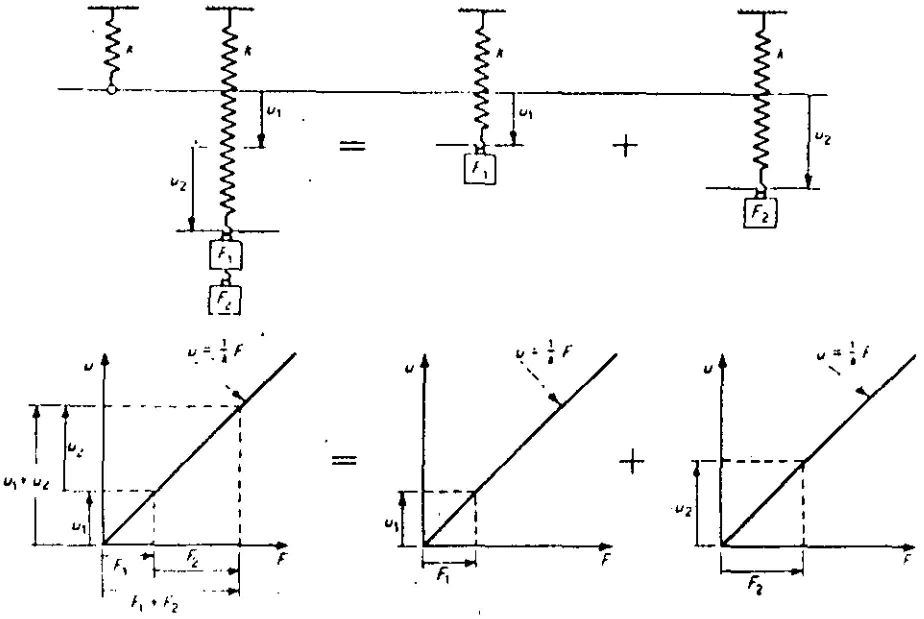


Fig 1.4 .Superposición de cargas y efectos

En la figura a la izquierda del signo igual se muestra al resorte cargado con una fuerza F_1 la cual provoca un desplazamiento u_1; en seguida se aplica la fuerza F_2 que ocasiona el desplazamiento u_2. A la derecha se tienen los resortes con propiedades idénticas al de la izquierda y se han cargado con las fuerzas F_1 y F_2, que generan por separado los desplazamientos u_1 y u_2 respectivamente. Aquí el punto importante es que la historia de aplicación de la carga no es relevante en cuanto al efecto de cada una de ellas;

así, la fuerza F_2 siempre causará el mismo efecto u_2, independientemente de cuándo se haya aplicado.

En estructuras no lineales, la superposición no se aplica y el desplazamiento debido a una carga dada depende de la carga total que actúa en la estructura, es decir, depende de la historia de carga. En la fig 1.5 se muestra por qué el principio de superposición no se aplica en un sistema no lineal

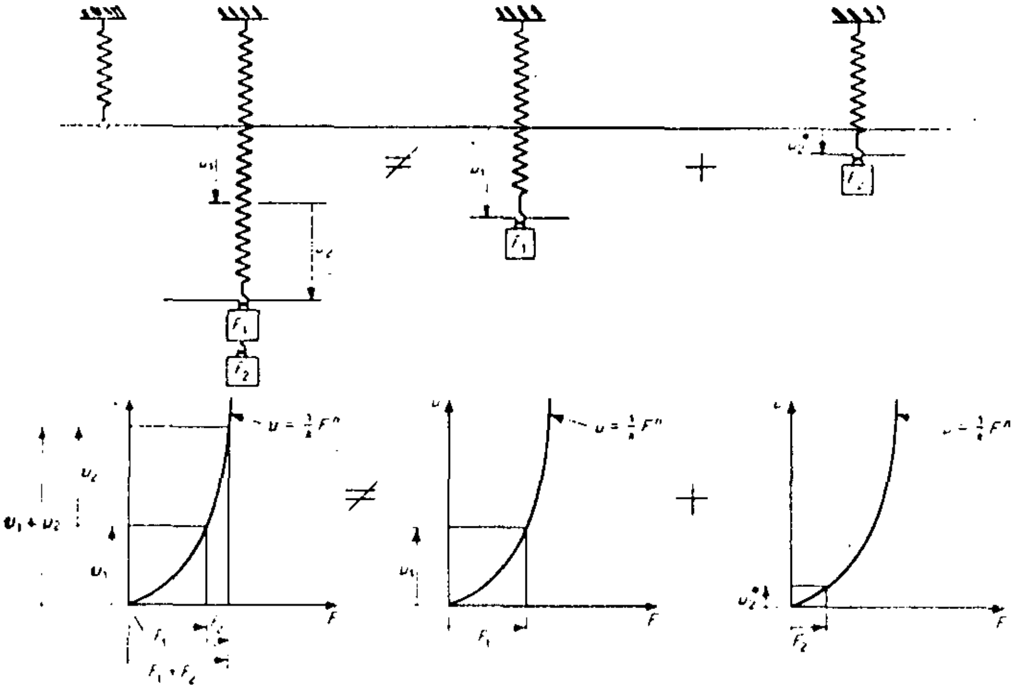


Fig 1.5 Caso en que no se aplica el principio de superposición

La relación carga-desplazamiento tiene la forma

$$u = \frac{1}{k} F^n$$

donde $n \neq 1$ y k es una constante. A la izquierda del signo 'no igual' (diferente a) el resorte está cargado primero con F_1 la cual causa un desplazamiento u_1, luego se aplica F_2 y genera u_2. A la derecha, aparecen dos resortes idénticos al de la izquierda y se cargan con F_1 y F_2 por separado; los desplazamientos que se provocan son u_1 y u_2^* , respectivamente. Pero $u_2 \neq u_2^*$ debido a la historia de carga y F_2 aplicada después de F_1 ocasiona un desplazamiento mucho mayor que cuando se aplica antes de F_1.

El comportamiento no lineal puede deberse a la relación esfuerzo-deformación unitaria inherente al material o debido a cambios en la geometría (dimensiones y configuraciones) inducidos por las cargas. Si el material tiene una curva lineal esfuerzo-deformación unitaria, entonces en la medida que los desplazamientos causados por las cargas son pequeños en comparación con las dimensiones de la estructura, ésta se comportará linealmente para fines prácticos. La teoría estructural que trata con este tipo de comportamiento es la 'deformaciones pequeñas'. Para cuando los desplazamientos que aparecen en los cálculos se refieren a magnitudes completamente finitas, y se tienen impresiciones con la teoría lineal, se deberá emplear la teoría de 'grandes deformaciones'.

En este curso se tratará primordialmente con estructuras con comportamiento elástico lineal.

En las figs 1.6 a 1.8 se muestra la superposición de fuerzas y desplazamientos para dos estructuras típicas

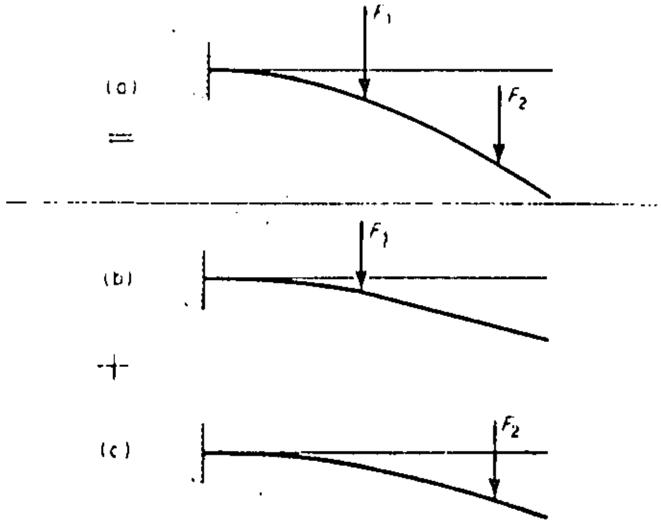


Fig 1.6 Aplicación del principio de superposición

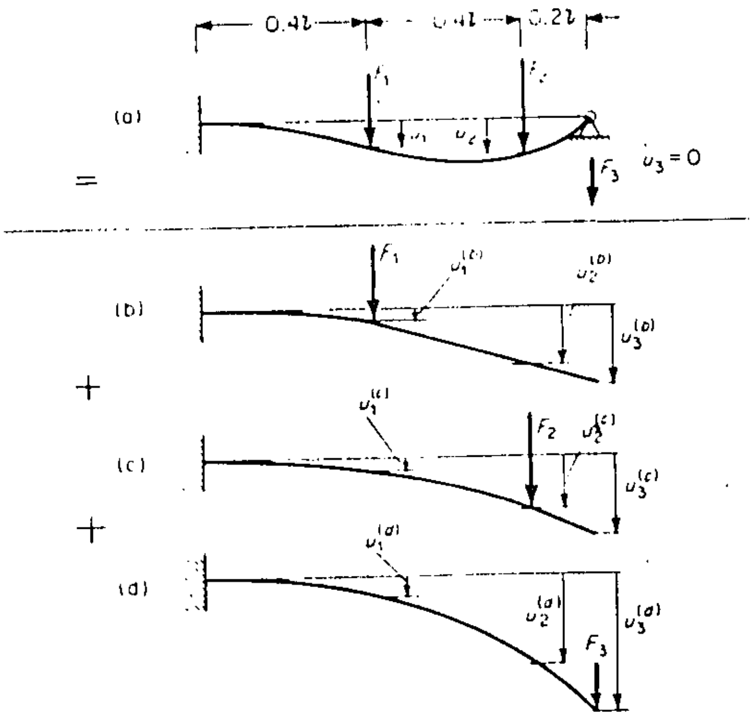


Fig 1.7 Aplicación del principio de superposición

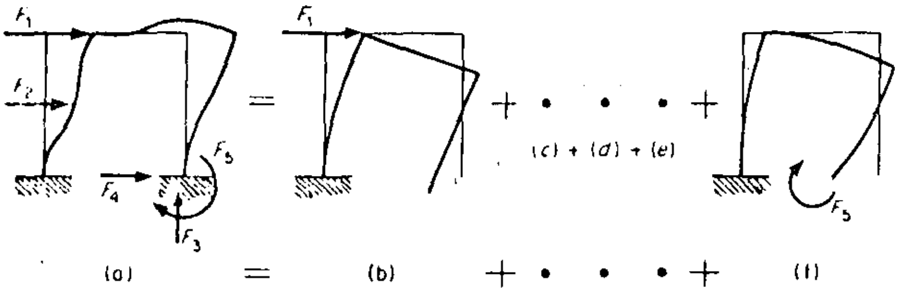


Fig 1.8 Aplicación del principio de superposición

El vector de fuerzas de la fig. 1.8 a) está dado por

$$F = \frac{1}{EI}\begin{bmatrix} 4/\ell \\ 2/\ell \\ -6/\ell^2 \\ 6/\ell^2 \end{bmatrix}$$

al multiplicarlo por u_1 se obtiene

$$F_1^b = (4EI/\ell)u_1$$
$$F_2^b = (2EI/\ell)u_1$$
$$F_3^b = -(6EI/\ell^2)u_1$$
$$F_4^b = (6EI/\ell^2)u_1$$

De la fig 1.8 c) se obtiene

$$F_1^c = (2EI/\ell)u_2$$
$$F_2^c = (4EI/\ell)u_2$$
$$F_3^c = -(6EI/\ell^2)u_2$$
$$F_4^c = (6EI/\ell^2)u_2$$

Al superponer las fuerzas y desplazamientos correspondientes a las cuatro coordenadas, se obtiene

$$F_1 = \frac{2EI}{\ell}(2u_1 + u_2)$$

$$F_2 = \frac{2EI}{\ell}(u_1 + 2u_2)$$

$$F_3 = \frac{-6EI}{\ell^2}(u_1 + u_2)$$

$$F_4 = \frac{6EI}{\ell^2}(u_1 + u_2)$$

$$u_1 = u_1 + 0;\ u_2 = 0 + u_2\ ;\ u_3 = 0 + 0;\ u_4 = 0 + 0$$

Se puede observar que F_3 y F_4 pueden obtenerse directamente de la fig 1.8 a) si se emplean condiciones de equilibrio.

En la fig 1.9 se muestra, un marco rígido con coordenadas 1 y 2 donde ocurren los desplazamientos u_1 y u_2, al actuar F_1 y F_2. En las figs 1.9 b) y c) los desplazamientos u_1 y u_2 se aplican por separado; del principio de superposición, se puede calcular F_1 y F_2 de la fig 1.9 a), al sumar los valores en las figs 1.9 b) y c):

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1^b \\ F_2^b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_1^c \\ F_2^c \end{bmatrix}$$

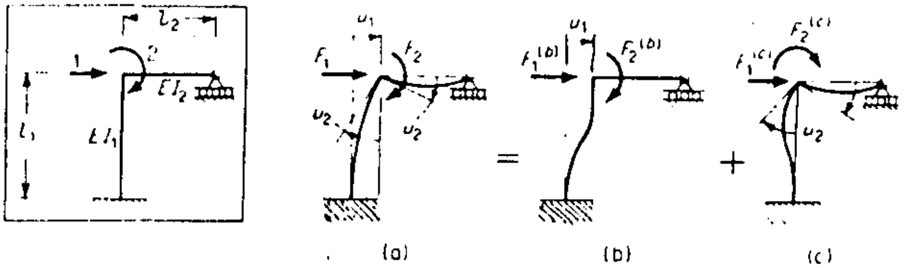


Fig 1.9 Superposición de fuerzas en un marco

Para las fuerzas de este marco, se emplearon los diagramas de cuerpo libre que se muestran en la fig 1.10

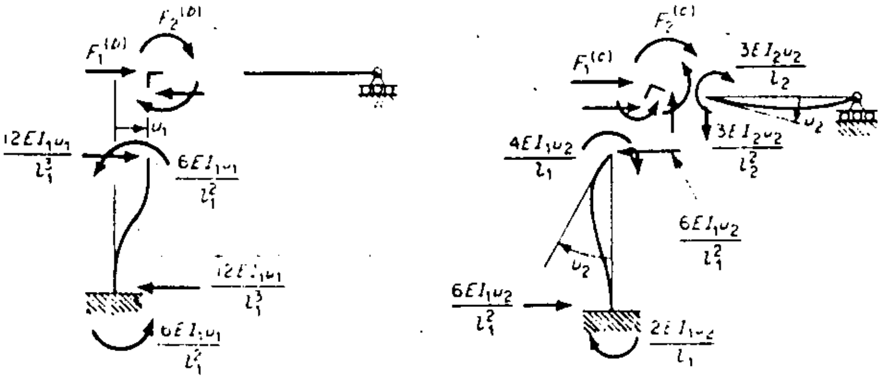


Fig 1.10 Diagramas de cuerpo libre

1.5 Métodos matriciales de análisis estructural

a) Método de las fuerzas

La superposición de fuerzas mostrada en las figuras anteriores es típica del método de las fuerzas (algunos autores le llaman método de compatibilidad y otros lo definen como método de flexibilidades) útil para analizar estructuras indeterminadas. La condición de que el extremo libre del voladizo de la fig 1.7 deba permanecer en su soporte, se conoce como una 'condición de compatibilidad', y se emplea para determinar el valor de F_3. Condiciones similares se pueden emplear para conocer F_3, F_4 y F_5 en la fig 1.8. En general se puede decir que las condiciones de compatibilidad son aquellas que garantizan que todas las partes de la estructura permanezcan unidas sin que se violen las 'condiciones de frontera' en el proceso de aplicar el principio de superposición para obtener la configuración final.

Las condiciones de compatibilidad se pueden expresar como ecuaciones de compatibilidad que son ecuaciones de restricción para los desplazamientos medidos en la estructura.

b) Método de los desplazamientos

La superposición de desplazamientos indicada en la fig 1.9 es típica del método de los desplazamientos (llamado también método de equilibrio) útil para formular y resolver problemas en ingeniería estructural. En este planteamiento siempre se cumplen las condiciones de compatibilidad debido a que no se quitan las restricciones geométricas de la estructura.

El método se basa en satisfacer las condiciones de equilibrio en los cuerpos libres que involucran a las coordenadas de interés. Para el entendimiento de este enfoque conviene ver a las ecuaciones de equilibrio como ecuaciones de restricción de las fuerzas tal como las de compatibilidad lo son para los desplazamientos.

Puede verse que existe analogía entre el método de las fuerzas y el de los desplazamientos; así, cuando se superponen fuerzas se restringen desplazamientos para satisfacer condiciones de compatibilidad; mientras que cuando se superponen desplazamientos, se restringen las fuerzas para satisfacer el equilibrio.

La elección del método de análisis depende en lo fundamental del tipo de estructura o problema en cuestión, la facilidad de formulación y el tiempo requerido para la solución. Estos dos aspectos dependen de la eficiencia de los programas y de la capacidad de la máquina. En el cap 3 se discuten con mayor detalle estos métodos.

1.6 BIBLIOGRAFIA

1.6.1 Beaufait, F W, Rowan Jr, W H, Hoadley, P G, y Hackett, R M, Computer methods of structural analysis, Prentice Hall, 1970

1.6.2 West, H H, Analysis of structures. An integration of classical and modern methods, John Wiley & Sons, 1980

1.6.3 Martin, H C, Introduction to matrix methods of structural analysis, McGraw Hill, 1966

1.6.4 Ghali, A, y Neville, A M, Structural analysis, A unified classical and matrix approach, Intext Educational Publishers, 1972

1.6.5 White, R N, Gergely, P, y Sexsmith, R G, Structural engineering. Combined edition. John Wiley & Sons, 1976

1.6.6 Gere, J M, y Weaver Jr, W, Análisis de estructuras reticulares. CECSA, 1970.

1.6.7 Ketter, R L, Lee, G C, y Prawel Jr, S, Structural analysis and design, McGraw Hill Book Company, 1979

DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.

MATEMATICAS APLICADAS A LA INGENIERIA ESTRUCTURAL

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES Y MATRICES

MARZO, 1985

STEMAS DE ECUACIONES LINE ES

Y MATRICES

INTRODUCCIÓN

Consideramos el siguiente ejemplo:

Una industria fabrica tres tipos de productos (llamémosles A, B y C) y cuenta con un total de 50 obreros que trabajan 8 hr. diarias. Es decir, dispone de un total de 400 horas-hombre al día.

Para fabricar un producto del tipo A, se requieren 20 horas-hombre ; para uno del tipo B, 100 y para uno del tipo C, 40.

En condiciones normales, no existen restricciones de materia prima ni de maquinaria y los obreros estan capacitados para intervenir en la fabricación de cualquiera de los productos.

Se quiere saber, que cantidad de productos A, B y C pueden fabricarse diariamente empleando la totalidad de horas-hombre disponible.

Podemos entonces plantear el modelo matemático siguiente:

Si x_1, x_2 y x_3 representan el número de productos A, B y C que se fabrican diariamente, entonces $20x_1$, $100x_2$ y $40x_3$ serán, el número de horas-hombre empleadas diariamente en fabricar todos los productos A, B y C.

Como se desean emplear las 400 horas-hombre disponibles, los valores de x_1, x_2 y x_3 deben ser tales que

$$20x_1+100x_2+40x_3=400 \quad . \; . \; . \; . \; .. \; . \quad (1)$$

Expresiones como ésta, reciben el nombre de ecuaciones lineales.

Una respuesta al problema podría ser fabricar 4 productos del tipo A, 2 del tipo B y 3 del tipo C, ya que, al sustituir estos valores en la expresión (1), se verifica la igualdad. Entonces, diremos que

$$x_1=4,\quad x_2=2,\quad x_3=3$$

es una solución de la ecuación (1).

Sin embargo, podemos notar que esta solución no es única ya que los valores

$$x_1=7,\quad x_2=1,\quad x_3=4,$$

también satisfacen la ecuación (1), por lo que constituyen otra solución.

Generalizando, la ecuación (1) es una expresión del tipo

$$a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n=b \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

a la que llamaremos ecuación lineal.

A las constantes a_1, a_2,..., a_n se les llama coeficientes, a b término independiente y a x_1, x_2,..., x_n incógnitas o variables. Vemos que las incógnitas aparecen todas elevadas a la primera potencia, de ahí el nombre de ecuación lineal.

IV.1 SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES.

Regresando al ejemplo anterior, supongamos que por razones de demanda los productos B y C deben fabricarse en cantidades iguales.

Entonces, se tiene la restricción adicional $x_2=x_3$, que expresada en la forma (2) queda

$$0x_1+x_2-x_3=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

Ahora el problema consiste en encontrar una solución que satisfaga, simultáneamente, las ecuaciones (1) y (3), por lo que las dos soluciones que antes encontramos no son útiles.

Si se fabrican 6 productos del tipo A y 2 de los tipos B y C, vemos que se satisfacen simultáneamente las ecuaciones (1) y (3). Entonces diremos que

$$x_1=6, \quad x_2=2, \; x_3=2$$

es una solución del sistema

$$\left.\begin{array}{l} 20x_1+100x_2+40x_3=400 \\ \;0x_1+\quad x_2-\quad x_3=\;\;0 \end{array}\right\} \; . \; . \; . \; . \; (4)$$

el cual consta de 2 ecuaciones con tres incógnitas.

Definición.

Un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto de ecuaciones de la forma (2) que deben resolverse simultáneamente.

En general, un sistema de m ecuaciones con n incógnitas, definido sobre el campo de los números complejos, es de la forma

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m \end{array}\right\} \; . \; . \; . \; . \; (5)$$

donde a_{ij} ε C son los coeficientes, x_i las incógnitas y b_i ε C los términos independientes.

Definición.

Una solución del sistema de ecuaciones (5) es un conjunto ordenado de n valores que satisface simultáneamente a todas las ecuaciones.

Una forma de obtener soluciones.

Tal vez, la técnica fundamental para encontrar las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales, sea la de eliminación. El proceso consiste en transformar el sistema original en un nuevo sistema de ecuaciones que puede resolverse fácilmente. El nuevo sistema, deberá tener las mismas soluciones que el original y en este caso diremos que ambos sistemas son equivalentes.

Para obtener el nuevo sistema se hace uso de las siguientes transformaciones, que reciben el nombre de "Transformaciones elementales" y consisten en:

1) Intercambiar dos ecuaciones.

2) Multiplicar una ecuación por un número $k\neq 0$

3) Multiplicar una ecuación por un número $k\neq 0$ y sumar el resultado a otra ecuación del sistema.

No es difícil aceptar que el sistema original y el nuevo sistema son equivalentes. Sin embargo, el estudiante puede consultar la referencia 1 pag. 414 para una demostración.

Podemos ilustrar la técnica mediante el siguiente ejemplo:

Ejemplo IV.1.

$$\begin{aligned} 2x_2+2x_3&=6\\ x_1-2x_2+x_3&=1\\ -x_1+x_2+5x_3&=10 \end{aligned}$$

si intercambiamos las dos primeras ecuaciones (con el objeto de que x_1 aparezca en la primera ecuación) obtenemos

$$\begin{aligned} x_1-2x_2+x_3&=1\\ 2x_2+2x_3&=6\\ -x_1+x_2+5x_3&=10 \end{aligned}$$

si sumamos la primera ecuación a la tercera obtenemos

$$\begin{aligned} x_1-2x_2+x_3&=1\\ 2x_2+2x_3&=6\\ 0-x_2+6x_3&=11 \end{aligned}$$

si multiplicamos la segunda ecuación por $\frac{1}{2}$ y sumamos el resultado a la tercera obtenemos

$$\begin{aligned} x_1-2x_2+x_3&=1\\ 2x_2+2x_3&=6\\ 0+7x_3&=14 \end{aligned}$$

dividiendo las ecuaciones dos y tres entre 2 y 7 respectivamente:

$$\begin{aligned} x_1-2x_2+x_3&=1\\ x_2+x_3&=3\\ x_3&=2 \end{aligned}$$

De la tercera ecuación inmediatamente vemos que $x_3=2$ y sustituyendo este valor en la segunda ecuación se encuentra que $x_2=1$. Finalmente, al sustituir en la primera ecuación se encuentra que $x_1=1$, por lo que la solución del sistema es

$$x_1=1, \quad x_2=1, \quad x_3=2$$

- -

Ahora bien, hay sistemas de ecuaciones que admiten más de una solución; un ejemplo lo tenemos en el sistema

$$\left.\begin{aligned} 20x_1+100x_2+40x_3&=400\\ 0x_1+x_2-x_3&=0 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (4)$$

que empleamos como introducción. La solución que habíamos mencionado es

$$x_1=6 \qquad x_2=2 \qquad x_3=2$$

y el estudiante puede comprobar que

$$x_1=13 \qquad x_2=1 \qquad x_3=1$$

es otra solución. A este tipo de sistemas, que tienen más de una solución, se les llama indeterminados.

También hay sistemas que no admiten solución. Por ejemplo, resulta evidente que el sistema

$$\begin{aligned} x_1+x_2&=1\\ x_1+x_2&=3 \end{aligned}$$

no tiene solución, puesto que no existen dos números cuya suma sea 1 y 3 a la vez. A este tipo de sistemas se les llama incompatibles (o inconsistentes).

En general, de acuerdo con la existencia y tipos de solución, los sistemas de ecuaciones lineales se clasifican en:

- Compatibles (tienen solución)
  - Determinados (una solución)
  - Indeterminados (más de una solución)
- Incompatibles (no tienen solución)

Más adelante, y con ayuda de otros conceptos que trataremos, podremos determinar si un sistema tiene solución o no la tiene, y si esta es única o no lo es.

IV.2 MATRICES.

El estudio de los sistemas de ecuaciones realizado en la sección precedente, puede servir como una introducción natural al concepto de matriz. En el proceso de construcción de un sistema equivalente, puede advertirse que no es necesario escribir las incógnitas x_1, x_2, ..., x_n, ya que realmente sólo se opera con los coeficientes a_{ij} y con los términos independientes b_i.

Si analizamos el ejemplo IV.1, vemos que el sistema

$$\begin{aligned} 2x_2+2x_3&=6 \\ x_1-2x_2+x_3&=1 \\ -x_1+x_2+5x_3&=10 \end{aligned}$$

queda completamente determinado al conocer el valor y la posición de cada uno de los coeficientes y términos independientes. Esta información se puede presentar convenientemente en el siguiente arreglo

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 6 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 5 & 10 \end{bmatrix} \quad \dots. \quad (6)$$

al cual se le llama MATRIZ.

Este arreglo en particular, consta de 12 elementos (números) dispuestos en 3 renglones y 4 columnas, por lo que diremos que la matriz es de orden 3x4.

Definición.

Una matriz de orden mxn sobre el campo de los números complejos, es un arreglo rectangular

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m_1} & a_{m_2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \ldots\ldots (7)$$

con m renglones y n columnas, donde los $a_{ij} \in C$ se llaman sus elementos.

Comunmente, se representa a las matrices con letras mayúsculas y a sus elementos con letras minúsculas. En forma abreviada la matriz (7) puede expresarse como

$A=(a_{ij})$ donde $i=1,2,\ldots,m$ y $j=1,2,\ldots,n$

Los subíndices i, j indican, respectivamente, el renglón y la columna en que se encuentra el elemento a_{ij}. Así por ejemplo, a_{23} representa al elemento que se encuentra en el segundo renglón y tercera columna de la matriz A.

Dada la importancia de la posición que guardan los elementos en el arreglo, decimos que dos matrices son iguales si son del mismo orden y sus elementos correspondientes son iguales. A esto obedece la siguiente

Definición.

Sean $A=(a_{ij})$ y $B=(b_{ij})$ dos matrices del mismo orden, entonces:

$$A=B \iff a_{ij}=b_{ij} \quad \forall\ i,j$$

Haciendo referencia nuevamente al ejemplo IV. 1, podemos efectuar con los renglones de la matriz (6) transformaciones equivalentes a las efectuadas con las ecuaciones del sistema.

El proceso sería entonces el que se ilustra a continuación

$$M=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 6 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 5 & 10 \end{bmatrix} \quad \ldots\ (6)$$

$$M_I=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 6 \\ -1 & 1 & 5 & 10 \end{bmatrix}$$

hemos intercambiado los dos primeros renglones.

$$M_{II}=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & 6 & 11 \end{bmatrix}$$

hemos sumado el primer renglón al tercero.

$$M_{III}=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 14 \end{bmatrix}$$

multiplicando el segundo renglón por $\frac{1}{2}$, lo hemos sumado al tercero

$$M_{IV}=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

hemos dividido el segundo y tercer renglón entre 2 y 7 respectivamente

La última matriz (M_{IV}) representa el sistema equivalente

$$\begin{aligned} x_1-2x_2+x_3&=1 \\ x_2+x_3&=3 \\ x_3&=2 \end{aligned}$$

cuya solución puede obtenerse fácilmente.

La matriz M_{IV}, se dice que está en forma escalonada o que es una matriz escalonada. En general, una matriz es escalonada si el primer elemento distinto de cero de cada renglón, es igual a 1 y el número de ceros anteriores a dicho elemento aumenta de renglón a renglón. Las siguientes matrices son escalonadas:

$$M=\begin{bmatrix}1 & 3 & 6\\0 & 1 & 5\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\qquad N=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\0 & 0 & 1 & 1\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\qquad P=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 1\\0 & 0 & 1 & 5 & 2\\0 & 0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Transformaciones elementales por renglón.

Las transformaciones efectuadas con los renglones de la matriz M, para obtener finalmente la matriz M_{IV}, se llaman "transformaciones elementales por renglón" y como hemos visto, pueden ser de tres tipos:

1) Intercambio de dos renglones.

2) Multiplicación de un renglón por un número $k \neq 0$.

3) Multiplicación de un renglón por un número $k \neq 0$ y suma del resultado a otro renglón de la matriz.

Utilizando las transformaciones elementales por renglón, es posible transformar cualquier matriz en una matriz escalonada.

Definición.

Diremos que dos matrices son equivalentes, si cualquiera de ellas puede obtenerse a partir de la otra efectuando un número finito de transformaciones elementales por renglón.

En el ejemplo anterior tenemos que las matrices M, M_I, M_{II}, M_{III} y M_{IV} son equivalentes.

Ejemplo IV.2

Sea la matriz $A=\begin{bmatrix}2 & 4 & 2 & 8 & -2\\4 & 8 & 4 & 16 & -4\\3 & -3 & 9 & 1 & 1\\1 & -1 & 3 & \frac{1}{3} & 4\end{bmatrix}$

transformar a la matriz A en una matriz escalonada equivalente utilizando transformaciones elementales por renglón.

Solución:

Dividiendo entre 2 el primer renglón de A obtenemos

$$A_I=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 4 & -1\\4 & 8 & 4 & 16 & -4\\3 & -3 & 9 & 1 & 1\\1 & -1 & 3 & \frac{1}{3} & 4\end{bmatrix}$$

Multiplicando por -4 el primer renglón y sumando al 2o. renglón de A_I obtenemos

$$A_{II}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 4 & -1\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\\3 & -3 & 9 & 1 & 1\\1 & -1 & 3 & \frac{1}{3} & 4\end{bmatrix}$$

Multiplicando por -3 el primer renglón y sumando al 3er. renglón de A_{II} obtenemos

$$A_{III}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 4 & -1\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & -9 & 6 & -11 & 4\\1 & -1 & 3 & \frac{1}{3} & 4\end{bmatrix}$$

Multiplicando por -1 el primer renglón y sumando al 4o. renglón de A_{III} obtenemos

$$A_{IV}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 4 & -1\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & -9 & 6 & -11 & 4\\0 & -3 & 2 & \frac{-11}{3} & 5\end{bmatrix}$$

Intercambiando el segundo renglón con el cuarto renglón de A_{IV} obtenemos

$$A_V=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 4 & -1\\0 & -3 & 2 & \frac{-11}{3} & 5\\0 & -9 & 6 & -11 & 4\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Multiplicando por -3 el segundo renglón y sumando al tercer renglón de A_V obtenemos

$$A_{VI}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & -3 & 2 & -\frac{11}{3} & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dividiendo entre -3 el segundo renglón de A_{VI} obtenemos

$$A_{VII}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{11}{9} & -\frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dividiendo entre -11 el tercer renglón de A_{VII} obtenemos

$$A_{VIII}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{11}{9} & -\frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matriz A_{VIII} es una matriz escalonada.

\- -

Al hablar de las transformaciones elementales, hemos hecho énfasis en el término "por renglón". Esto obedece a que existen transformaciones, análogas a las aquí descritas, efectuadas -- con las columnas de una matriz. En este capítulo no se justificará la existencia de dichas transformaciones y tampoco serán utilizadas. El estudiante interesado en saber más acerca de esto, puede consultar la referencia 3 pag. 141, una vez que haya terminado el capítulo.

Rango de una matriz.

Definición.

Si transformamos una matriz A en una matriz escalonada B, el número de renglones de la matriz B con al menos un elemento distinto de cero se llama RANGO DE LA MATRIZ A y se representa con -- R(A). El mismo rango se asigna a la matriz B.

De acuerdo con esta definición, cuando dos matrices son equivalentes ambas tienen el mismo rango. Las matrices A, A_I,..., A_{VIII} del ejemplo IV.2 son todas de rango 3.

El concepto de rango de una matriz, juega un papel muy - importante en la teoría de sistemas de ecuaciones lineales que veremos más adelante. El estudiante puede darse cuenta que la definición de rango, tal como se enuncia aquí, proporciona a la vez un método para obtenerlo.

IV.3. PRODUCTO DE MATRICES.

Consideremos nuevamente el sistema

$$\left.\begin{array}{l} 20x_1+100x_2+40x_3= 400 \\ 0x_1+ \quad x_2- \quad x_3= \quad 0 \end{array}\right\} \ldots\ldots (4)$$

podemos formar las matrices

$$A=\begin{bmatrix} 20 & 100 & 40 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \bar{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad \bar{b}=\begin{bmatrix} 400 \\ 0 \end{bmatrix}$$

donde hemos reunido los coeficientes(en A),las incógnitas (en $\bar{x}$) y los términos independientes (en $\bar{b}$) que aparecen en el sistema.

Con ayuda de estas matrices, podemos expresar el sistema (4) como

$$A\bar{x}=\bar{b} \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

siempre y cuando demos una definición adecuada para el producto - $A\bar{x}$.

La matriz producto $A\bar{x}$, debe ser de orden 2x1 para poder establecer la igualdad con $\bar{b}$. Además, por igualdad de matrices, los elementos correspondientes de $A\bar{x}$ y $\bar{b}$ deben ser iguales.

Sabemos que la igualdad entre matrices

$$\begin{bmatrix} 20x_1+100x_2+40x_3 \\ 0x_1+ \quad x_2- \quad x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 400 \\ 0 \end{bmatrix}$$

se satisface si y sólo si

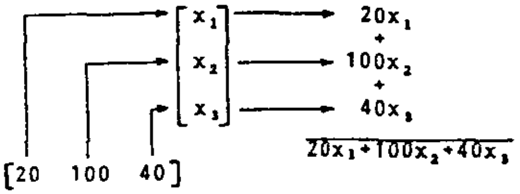
$$20x_1+100x_2+40x_3=400$$
$$0x_1+ \quad x_2- \quad x_3= 0$$

que son precisamente las condiciones que establece el sistema (4). Por tanto

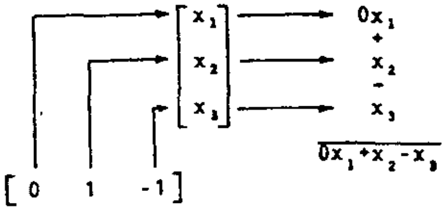
$$A\bar{x}=\begin{bmatrix} 20x_1+100x_2+40x_3 \\ 0x_1+ \quad x_2- \quad x_3 \end{bmatrix} \quad \ldots\ldots (9)$$

A la matriz $A\bar{x}$ expresada en (9) le llamaremos "el producto de las matrices A y $\bar{x}$" (en ese orden). Veamos como puede obtenerse la matriz $A\bar{x}$, a partir de las matrices A y $\bar{x}$:

El primer elemento de $A\bar{x}$, es igual a la suma de los productos de los elementos del primer renglón de A por los elementos de la única columna de $\bar{x}$. En forma esquemática:



El segundo elemento de $A\bar{x}$, es igual a la suma de los productos de los elementos del segundo renglón de A por los elementos de la única columna de $\bar{x}$. En forma esquemática:



En forma similar, obtengamos el producto de las matrices

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \quad y \quad B=\begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix}$$

con el objeto de establecer una definición general.

El producto será la matriz

$$AB=\begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} \end{bmatrix}$$

donde observamos que:

1o.) El elemento que se encuentra en el primer renglón primera columna de la matriz producto, es la suma:

$$a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31}=\sum_{k=1}^{3} a_{1k}b_{k1}$$

2o.) El elemento que se encuentra en el segundo renglón primera columna de la matriz producto, es la suma:

$$a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31}=\sum_{k=1}^{3} a_{2k}b_{k1}$$

Generalizando, el elemento que se encuentra en el renglón i, columna j, de una matriz producto AB, es la suma:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

donde n es el número de columnas de la matriz A y el número de renglones de la matriz B, que deberá ser el mismo para que pueda efectuarse el producto.

Definición.

Sean: $A=(a_{ij})$ $(i=1, 2, \ldots, m$ y $j=1, 2, \ldots, n)$

y $B=(b_{ij})$ $(i=1, 2, \ldots, n$ y $j=1, 2, \ldots, p)$

dos matrices de orden mxn y nxp respectivamente.

El producto AB es una matriz

$C=(c_{ij})$ $(i=1, 2, \ldots, m$ y $j=1, 2, \ldots, p)$

de orden mxp cuyos elementos están dados por

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

Ejemplo IV.3

Para ilustrar la definición, obtengamos el producto de las matrices

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -3 & -1 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 3} \quad y \quad B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 4 & 3 \end{bmatrix}_{3\times 4}$$

que es una matriz C de orden 2x4 tal que

$c_{11}= 2-9+1= -6$

$c_{12}= 0-3+3= 0$

$c_{13}= -4+0-4= -8$

$c_{14}= 2-3-3= -4$

$c_{21}= -1+12-1= 10$

$c_{22}= 0+4-3= 1$

$c_{23}= 2+0+4 = 6$

$c_{24}= -1+4+3= 6$

entonces, la matriz producto es

$$AB=\begin{bmatrix} -6 & 0 & -8 & -4 \\ 10 & 1 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

Obsérvese que el elemento que se encuentra en el renglón i columna j de la matriz producto AB, se obtiene efectuando el producto escalar del renglón i de A por la columna j de B.

Por ejemplo, el elemento c_{13} es el producto

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} = -4+0-4= -8=c_{13}$$

- -

Podemos concluir, en base a la definición, que podemos efectuar el producto AB sólo cuando el número de columnas de A es igual al número de renglones de B. En este caso, diremos que las matrices A y B son conformables para la multiplicación.

En general, la multiplicación de las matrices NO es conmutativa. Incluso, en muchas ocasiones se tiene que dos matrices A y B son conformables para multiplicarse en ese orden (es decir - puede obtenerse el producto AB), mientras que no son conformables para multiplicarse en el orden contrario (no puede obtenerse el -- producto BA). Por tal motivo, es necesario precisar el orden en que las matrices se van a multiplicar. Para el caso del producto AB, diremos que A premultiplica a B, o bien que B postmultiplica a A

Ejemplo IV. 4.

Dada las matrices

$$R=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}, \quad S=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 3 & -1\end{bmatrix}, \quad T=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\\ 2 & 3\end{bmatrix}$$

obtener:
a) RS
b) SR
c) TS
d) ST

Solución:

$$a)\quad RS=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -1\\ 3 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & -3\\ 12 & -7\end{bmatrix}$$

(Las matrices R y S son de orden 2x2, por lo que les llamaremos matrices cuadradas y diremos simplemente que son de orden 2)

$$b)\quad SR=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 3 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & -4\\ 0 & 2\end{bmatrix}$$

En este caso, pudieron obtenerse tanto el producto RS como el producto SR, debido a que ambas matrices son cuadradas y del mismo orden. Sin embargo, notamos que RS≠SR pues, como se mencionó, el producto de matrices no es una operación conmutativa.

$$c)\quad TS=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\\ 2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -1\\ 3 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 3 & -2\\ 9 & -5\end{bmatrix}$$

$$d)\quad ST=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 3 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\\ 2 & 3\end{bmatrix}$$

no se puede efectuar, ya que el número de columnas de S (2) es diferente del - número de renglones de T (3). En otras palabras, S y T no son -- conformables para la multiplicación.

Obsérvese que, aunque pudo obtenerse el producto TS, no fué posible obtener ST, lo cual resalta la importancia de especificar claramente el orden en que se desea multiplicar dos matrices.

- -

Definición.

Si una matriz A es de orden nxn, diremos que A es una matriz cuadrada de orden n.

Ejemplo IV. 5.

Para las matrices

$$M=\begin{bmatrix}i\\ -i\\ 1\end{bmatrix} \qquad N=\begin{bmatrix}-i, & 1, & i\end{bmatrix} \qquad P=\begin{bmatrix}i+\alpha & i & -1\\ p_{21} & -i & 1\\ -i & 1+\beta & p_{33}\end{bmatrix}$$

encontrar los valores de α, β, p_{21}, p_{33} de tal forma que se verifique la igualdad

$$MN = P$$

Solución:

Primero obtenemos

$$MN = \begin{bmatrix} 1 & i & -1 \\ -1 & -i & 1 \\ -i & 1 & i \end{bmatrix}$$

Por otra parte, como $MN=P$,

$$\begin{bmatrix} 1 & i & -1 \\ -1 & -i & 1 \\ -i & 1 & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i+\alpha & i & -1 \\ p_{21} & -i & 1 \\ -i & 1+\beta & p_{33} \end{bmatrix}$$

$i+\alpha=1 \quad \therefore \quad \underline{\alpha=1-i}$

$\underline{p_{21}=-1}$

$1+\beta=1 \quad \therefore \quad \underline{\beta=0}$

$\underline{p_{33}=i}$

- -

Teorema IV.1

La multiplicación de matrices (cuando puede efectuarse) es asociativa.

Demostración.

Sean $A=(a_{ij})_{mxn}$, $B=(b_{jk})_{nxp}$ y $C=(c_{kr})_{pxq}$ tres matrices cualesquiera de orden mxn, nxp, pxq respectivamente. Queremos probar que

$$(AB)\,C = A\,(BC)$$

De la definición de producto:

$$AB = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\; b_{jk}\right)_{mxp}$$

donde los índices libres son $i=1,2,\ldots,m$ y $k=1,2,\ldots,p$, y la matriz es de orden mxp. (Los índices libres son los que indican el renglón y la columna del nuevo elemento).

Aplicando ahora la definición de producto a las matrices $(AB)_{mxp}$ y C_{pxq}:

$$(AB)C = \left(\sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\; b_{jk}\right) c_{kr}\right)_{mxq}$$

multiplicando C_{kr} por cada una de las sumas del paréntesis, obtenemos:

$$(AB)C = \left(\sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\; b_{jk}\; c_{kr}\right)\right)_{mxq}$$

donde los índices libres son $i=1,2,\ldots,m$ y $r=1,2,\ldots,q$ y la matriz es de orden mxq.

En forma análoga obtenemos:

$$A(BC) = \left(\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{p} a_{ij}\; b_{jk}\; c_{kr}\right)\right)_{mxq}$$

Dado que el orden de la suma es arbitrario.

$$\sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\; b_{jk}\; c_{kr}\right) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{p} a_{ij}\; b_{jk}\; c_{kr}\right) \;\forall\; i,\, r$$

Por lo tanto queda demostrado que

$$(AB)C = A(BC)$$

Se recomienda al estudiante consultar el apéndice I de la referencia 3 para obtener habilidad en el manejo y comprensión de los símbolos de Σ(suma) y $\Sigma\Sigma$ (doble suma), y hacer la demostración completa de este teorema para el caso particular de las matrices cuadradas de orden dos.

Ejemplo IV. 6.

Verificar la propiedad asociativa para el producto, con las matrices.

$$A=\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1-i \end{bmatrix} \quad C=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Solución. Debemos verificar que

$$(AB)C=A(BC)$$

$$AB=\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1-i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1-i \end{bmatrix}$$

$$(AB)C=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1-i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 7-3i & \frac{3}{2}-\frac{1}{2}i \end{bmatrix}$$

Por otro lado:

$$(BC)=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1-i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 8-3i & \frac{3}{2}-\frac{1}{2}i \end{bmatrix}$$

$$A(BC)=\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 8-3i & \frac{3}{2}-\frac{1}{2}i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 7-3i & \frac{3}{2}-\frac{1}{2}i \end{bmatrix}$$

por lo que

$$(AB)C=A(BC)$$

\- -

Matriz Identidad.

Si con las matrices

$$I=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad y \quad B=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

efectuamos el producto IB vemos que

$$IB=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} =B$$

Si con la misma matriz I efectuamos el producto IA, donde A es una matriz con 3 renglones y cualquier número de columnas, obtenemos siempre que IA=A. A la matriz I le llamamos matriz identidad de orden 3 y la representamos mediante I_3.

En general, a la matriz cuadrada

$$I_n=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{nxn}$$

le llamaremos matriz identidad de orden n.

Esta matriz puede expresarse en forma abreviada como

$$I_n=(\delta_{ij}) \quad \text{donde} \begin{cases} \delta_{ij}=1 & \text{si} \quad i=j \\ \delta_{ij}=0 & \text{si} \quad i\neq j \end{cases}$$

Teorema IV.2

Para toda matriz A de orden mxn se tiene que:

$$I_mA = A$$

$$A\, I_n = A$$

Demostración

Sean $I_m=(\delta_{ij})_{mxm}$ y $A=(a_{jk})_{mxn}$

De la definición de producto:

$$I_mA = (\sum_{j=1}^{m} \delta_{ij}a_{jk})_{mxn}$$

donde los índices libres son $i=1,2,\dots,m$ y $k=1,2,\dots,n$.

Como $\delta_{ij}=0 \ \forall \ i\neq j$:

$$I_mA= (\sum_{j=1}^{m} \delta_{jj}a_{jk})_{mxn}$$

donde ahora, los índices libres son $j=1,2,\ldots,m$ y $k=1,2,\ldots,n$.

Como $\delta_{jj}=1$ $\forall j$:

$$I_mA=\left(\sum_{j=1}^{m} a_{jk}\right)_{mxn}$$

Como j es un índice libre

$$I_mA=(a_{jk})_{mxn}=A$$

La segunda parte del teorema se demuestra en forma similar.

Matrices elementales.

El resultado de efectuar un número finito de transformaciones elementales por renglón a una matriz A de orden mxn, puede obtenerse también si premultiplicamos A por una cierta matriz cuadrada - de orden m.

Para mostrar lo anterior, consideremos por separado cada una de las tres transformaciones elementales por renglón.

1) Intercambio de renglones.

Supongamos que tenemos una matriz A de mxn y que efectuamos el intercambio de sus renglones i y j. Llamemos a la matriz - así obtenida matriz B.

Si por otro lado, tomamos la matriz identidad de orden m (I_m) e intercambiamos sus renglones i y j, obtendremos una nueva matriz que llamaremos $I_m^{(i,j)}$.

Si ahora efectuamos el producto $I_m^{(i,j)}$ A, se obtiene la - matriz B.

Ejemplo IV. 7.

Sea $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$

intercambiamos sus renglones 1 y 3 para obtener la matriz

$$B=\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Por otro lado, consideremos la matriz

$$I_3=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e intercambiemos sus renglones 1 y 3 para obtener

$$I_3^{(1,3)}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Efectuando el producto $I_3^{(1,3)}A$, tenemos:

$$I_3^{(1,3)}A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

vemos entonces que, $I_3^{(1,3)}$ A es igual a B.

2) Multiplicación de un renglón por un número $k\neq0$.

Supongamos que tenemos una matriz A de mxn y que multiplicamos su renglón i por el escalar $k\neq0$. Llamemos a la matriz así - obtenida matriz B.

Si por otro lado, tomamos la matriz identidad de orden - m (I_m) y multiplicamos su renglón i por el escalar $k\neq0$ obtendremos una nueva matriz que llamaremos $I_m^{k(i)}$.

Si ahora efectuamos el producto $I_m^{k(i)}A$, se obtiene la ma triz B.

Ejemplo IV. 8.

Sea $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 5 & 10 & 20\end{bmatrix}$

multipliquemos el segundo renglón por 3 para obtener la matriz

$$B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 15 & 30 & 60\end{bmatrix}$$

Por otro lado, consideremos la matriz

$$I_2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

y multipliquemos su segundo renglón por 3 para obtener

$$I_2^{3(2)}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}$$

Efectuando el producto $I_2^{3(2)}A$, obtenemos:

$$I_2^{3(2)}A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 5 & 10 & 20\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 15 & 30 & 60\end{bmatrix}$$

vemos entonces que, $I_2^{3(2)}A$ es igual a B.

- -

3) Multiplicación de un renglón por un número $k\neq 0$, sumando el resultado a otro renglón diferente.

Supongamos que tenemos una matriz A de mxn en la que multiplicamos su renglón i por el escalar $k\neq 0$ y el resultado lo sumamos al renglón $j\neq i$. Llamemos a la matriz asi obtenida, matriz B.

Si por otro lado, tomamos la matriz identidad de orden - m (I_m), multiplicamos su renglón i por el escalar $k\neq 0$ y el resultado lo sumamos al renglón j, obtendremos una nueva matriz que llamaremos $I_m^{k(i,j)}$.

Si ahora efectuamos el producto $I_m^{k(i,j)}A$, se obtiene la matriz B.

Ejemplo IV. 9

Sea $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 0 & 1\\ 5 & 10\end{bmatrix}$

multipliquemos el primer renglón por 2 y sumemos al cuarto renglón para obtener la matriz

$$B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 0 & 1\\ 7 & 14\end{bmatrix}$$

Por otro lado consideremos la matriz

$$I_4=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

multiplicando el primer renglón por 2 y sumando al cuarto renglón obtenemos

$$I_4^{2(1,4)}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Efectuando el producto $I_4^{2(1,4)}A$, obtenemos:

$$I_4^{2(1,4)}A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 0 & 1\\ 5 & 10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 0 & 1\\ 7 & 14\end{bmatrix}$$

vemos entonces que, $I_4^{2(1,4)}A$ es igual a B.

\- -

Definición.

A las matrices $I_m^{(i,j)}$, $I_m^{k(i)}$, $I_m^{k(i,j)}$ se les llama matrices elementales correspondientes a las transformaciones elementales 1, 2, 3, respectivamente.

Vemos ahora que, cada transformación elemental puede ser llevada a cabo premultiplicando, la matriz dada, por la matriz elemental que se obtiene efectuando en I, la misma transformación elemental.

Ejemplo IV. 10.

Hallar la matriz P, de orden 3, tal que transforme a la matriz A en una matriz escalonada (es decir, que el producto PA sea una matriz escalonada).

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ \frac{1}{2} & 6 & 1 \\ 2 & \frac{1}{7} & 0 \end{bmatrix}$$

Solución.

En la siguiente tabla aparece una secuencia de transformaciones elementales que transforma a la matriz A en una matriz escalonada, las correspondientes matrices elementales y el resultado - de efectuar estas transformaciones sobre A.

Transformación.	Matriz elemental correspondiente.	
		$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ \frac{1}{2} & 6 & 1 \\ 2 & \frac{1}{7} & 0 \end{bmatrix} = A$
Intercambio de los renglones 1 y 2	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\downarrow$ $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 6 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & \frac{1}{7} & 0 \end{bmatrix}$
Multiplicación del primer renglón por 2	$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\downarrow$ $\begin{bmatrix} 1 & 12 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & \frac{1}{7} & 0 \end{bmatrix}$
Multiplicación del renglón 1 por -2 y sumar al renglón 3.	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\downarrow$ $\begin{bmatrix} 1 & 12 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -\frac{167}{7} & -4 \end{bmatrix}$
Multiplicación del renglón 2 por $\frac{167}{7}$ y sumar al renglón 3.	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{167}{7} & 1 \end{bmatrix}$	$\downarrow$ $\begin{bmatrix} 1 & 12 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -\frac{362}{7} \end{bmatrix}$
Multiplicación del renglón 3 por $-\frac{7}{362}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{7}{362} \end{bmatrix}$	$\downarrow$ $\begin{bmatrix} 1 & 12 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (matriz escalonada)

El mismo resultado que se obtiene al aplicar la secuencia de transformaciones, puede obtenerse premultiplicando por las respectivas matrices elementales.

Efectuando estos productos con la secuencia que marca la tabla y dado que la multiplicación es asociativa, podemos escribir:

$$\left[\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&\frac{-7}{362}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&\frac{167}{7}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-2&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\right]\underbrace{\begin{bmatrix}0&1&-2\\\frac{1}{2}&6&1\\2&\frac{1}{7}&0\end{bmatrix}}_{A}=\underbrace{\begin{bmatrix}1&12&2\\0&1&-2\\0&0&1\end{bmatrix}}_{\substack{\text{Matriz}\\\text{escalón}}}$$

La matriz P buscada, será el producto de las cinco matrices elementales.

Sin embargo, para obtener la matriz P no es necesario multiplicar las cinco matrices elementales; bastará con efectuar la misma secuencia de transformaciones elementales sobre la matriz I (referencia 1, pag. 452).

Las siguientes transformaciones sobre I conducen a la matriz P (las transformaciones son las de la tabla).

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}0&2&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}0&2&0\\1&0&0\\0&-4&1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}0&2&0\\1&0&0\\\frac{167}{7}&-4&1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}0&2&0\\1&0&0\\-\frac{167}{362}&\frac{14}{181}&\frac{-7}{362}\end{bmatrix}=P$$

Para comprobar, efectuemos el producto PA

$$PA=\begin{bmatrix}0&2&0\\1&0&0\\\frac{167}{362}&\frac{14}{181}&\frac{-7}{362}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&-2\\\frac{1}{2}&6&1\\2&\frac{1}{7}&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&12&2\\0&1&-2\\0&0&1\end{bmatrix}$$

\- -

Una situación interesante, se presenta en el caso de las matrices cuadradas de orden n cuyo rango es también n, las cuales pueden transformarse en la matriz identidad I_n.

Estas matrices son equivalentes a una matriz escalonada de la forma

$$\begin{bmatrix}1&a_{12}&a_{13}&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&a_{1,n-1}&a_{1n}\\0&1&a_{23}&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&a_{2,n-1}&a_{2n}\\0&0&1&a_{34}&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&a_{3,n-1}&a_{3n}\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\0&0&0&0&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&1&a_{n-1,n}\\0&0&0&0&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&0&1\end{bmatrix}\qquad(10)$$

donde todos los elementos a_{ij} tales que $i=j$ (a los que se llama elementos de la diagonal principal) son iguales a 1. Es decir, $a_{11}=a_{22}=a_{33}=\ldots=a_{nn}=1$.

Mostraremos ahora que, una matriz de este tipo, se puede transformar en una matriz identidad I_n mediante una secuencia de transformaciones elementales.

En efecto, si el último renglón de la matriz (10) lo multiplicamos por $-a_{1n}$ y lo sumamos al primer renglón, luego lo multiplicamos por $-a_{2n}$ y lo sumamos al segundo renglón, etc., obtenemos la matriz.

$$\begin{bmatrix}1&a_{12}&a_{13}&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&a_{1,n-1}&0\\0&1&a_{23}&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&a_{2,n-1}&0\\0&0&1&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&a_{3,n-1}&0\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\0&0&0&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&1&0\\0&0&0&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&0&1\end{bmatrix}$$

Si ahora, el penúltimo renglón de esta nueva matriz lo multiplicamos por $-a_{1,n-1}$ y lo sumamos al primer renglón, luego lo multiplicamos por $-a_{2,n-1}$ y lo sumamos al segundo renglón, etc., obtenemos

$$\begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & . & . & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_{23} & . & . & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & . & . & . & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & . & . & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & . & . & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Al final de este proceso se obtendrá la matriz identidad I_n.

Ejemplo IV. 11.

Usando transformaciones elementales, transformaremos la matriz escalón

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

en una matriz identidad:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Este procedimiento puede aplicarse a cualquier matriz escalonada arbitraria.

Sin embargo, es importante notar que una matriz cuadrada de orden n, en forma escalonada y cuyo rango sea menor que n, no - podrá nunca transformarse en una matriz identidad. Esto se debe a que una matriz de este tipo, tendrá siempre en su último renglón únicamente ceros.

Asi mismo, una matriz no cuadrada tampoco podrá transformarse en una matriz identidad (ya que ésta es una matriz cuadrada).

Matriz Inversa.

Con lo que hemos visto hasta ahora, sabemos que si se tiene una matriz cuadrada A de orden n y rango n, es posible (mediante una serie de transformaciones elementales) transformarla primero en una matriz escalonada y luego en la matriz identidad I_n.

También se vió anteriormente, que el efecto de una sucesión finita de transformaciones elementales sobre cualquier matriz A, puede obtenerse premultiplicando A por una cierta matriz P. Por lo que, el efecto de toda la secuencia de transformaciones utilizadas para llevar la matriz A a la matriz I_n, se puede obtener premultiplicando A por una cierta matriz P.

Podemos entonces enunciar el siguiente

Teorema IV. 3.

Si A es una matriz cuadrada de orden n y rango n, existe una matriz P tal que

$$PA = I_n$$

No es difícil demostrar(1) que dicha matriz P, cumple también con

$$AP = I_n$$

aunque la multiplicación de matrices no sea conmutativa.

Puesto que la matriz I_n, es el elemento idéntico para la

---

(1) El estudiante puede obtener una demostración, a partir de la demostración del teorema 10-4-9 de la referencia 1 (pags. 454 y 455).

multiplicación en el conjunto de las matrices cuadrades de orden n, resulta adecuada la siguiente

Definición.

Si A y P son dos matrices cuadradas de orden n tales que

$$PA=AP=I_n$$

a la matriz P le llamaremos matriz inversa de A.

Si una matriz A tiene inversa, diremos que es no singular y a su inversa la representaremos con A^{-1}. Se puede demostrar que la inversa A^{-1}de una matriz A es única y también que (referencia 1 pag. 444) el producto de dos matrices no singulares es una matriz no singular.

Dado que una matriz cuadrada de orden n y rango menor que n no puede transformarse en una matriz identidad, no existe ninguna matriz P tal que

$$PA = I_n$$

En consecuencia, estas matrices no tienen inversa. A las matrices que no tienen inversa les llamaremos matrices singulares.

Con los conceptos tratados hasta ahora, el estudiante debe poder demostrar el siguiente

Teorema IV. 4.

Si A es una matriz de orden mxn, existe su inversa A^{-1}si y solo si

$$m=n= R(A).$$

Ejemplo IV. 12.

Investigue si la siguiente matriz tiene inversa

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & \frac{7}{2} & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & \frac{8}{5} & 1 \end{bmatrix}$$

Solución

Vamos a transformar A en una matriz escalón

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & \frac{7}{2} & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & \frac{8}{5} & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & -\frac{11}{2} & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & \frac{8}{5} & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & -\frac{11}{2} & 1 \\ 0 & 10 & -11 & 0 \\ 2 & 0 & \frac{8}{5} & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & -\frac{11}{2} & 1 \\ 0 & 10 & -11 & 0 \\ 0 & 4 & -\frac{22}{5} & 1 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{11}{10} & \frac{1}{5} \\ 0 & 10 & -11 & 0 \\ 0 & 4 & -\frac{22}{5} & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{11}{10} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & -\frac{22}{5} & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{11}{10} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{11}{10} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{11}{10} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

vemos que la matriz escalonada tiene tres renglones diferentes de cero, en consecuencia R(A)=3. Entonces, A es una matriz singular (no existe A^{-1}).

- -

Para obtener la matriz inversa de una matriz no singular, haremos uso del siguiente teorema.

Teorema IV. 5.

La inversa de una matriz A no singular se puede obtener si aplicamos a I, la misma secuencia de transformaciones elementales por renglón que se utilizan para transformar la matriz A en la matriz I.

Demostración

Sabemos que podemos transformar la matriz A en I mediante una cierta secuencia de transformaciones elementales. Entonces, existe una secuencia de matrices elementales $E_1, E_2, \ldots, E_{k-1}, E_k$ tales que

$$E_k E_{k-1} \cdots E_2 E_1 A = I$$

si llamamos P al producto de las matrices elementales

$$P = E_k E_{k-1} \cdots E_2 E_1$$

podemos escribir

$$PA = I$$

además, sabemos que

$$AP = I$$

Es decir; P es la inversa de A.

Como I es el idéntico para el producto

$$P = PI$$

entonces

$$P = E_k E_{k-1} \cdots E_2 E_1 I$$

lo cual nos indica que P se obtiene a partir de I, efectuando en orden las transformaciones elementales que corresponden a $E_1, E_2, \ldots E_{k-1}$ y E_k

Ejemplo IV. 13.

Investigar si la siguiente matriz tiene inversa y en caso afirmativo hallarla.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Solución:

Aplicaremos el proceso descrito en el teorema IV.5. La primera columna de la siguiente tabla, describe la secuencia de transformaciones elementales por renglón, utilizada para transformar la matriz A en la matriz I. La segunda columna, muestra las matrices obtenidas a partir de A con la aplicación de estas transformaciones. La tercera columna, muestra las matrices obtenidas a partir de I con la aplicación de las mismas transformaciones.

Transformaciones	$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix} = A$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$
Intercambio del primero y segundo renglones	$\downarrow$ $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$	$\downarrow$ $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
Suma del primer renglón al tercero	$\downarrow$ $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 6 \end{bmatrix}$	$\downarrow$ $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
Multiplicación del segundo renglón por $\frac{1}{2}$	$\downarrow$ $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 6 \end{bmatrix}$	$\downarrow$ $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
Suma del segundo renglón al tercero	$\downarrow$ $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$	$\downarrow$ $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \end{bmatrix}$
Multiplicación del ter	$\downarrow$	$\downarrow$

cer renglón por $\frac{1}{7}$

$$\begin{bmatrix} 1 & \overset{\downarrow}{-2} & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & \overset{\downarrow}{1} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{14} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$$

Hasta ahora hemos transformado a la matriz A en una matriz escalonada. Vemos que el rango es 3 e igual al orden de la matriz, por lo tanto la matriz A tiene inversa.

Continuando el proceso:

Multiplicación del tercer renglón por -1 y sumar al segundo renglón

$$\begin{bmatrix} 1 & \overset{\downarrow}{-2} & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & \overset{\downarrow}{1} & 0 \\ \frac{6}{14} & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} \\ \frac{1}{14} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$$

Multiplicación del tercer renglón por -1 y sumar al primer renglón

$$\begin{bmatrix} 1 & \overset{\downarrow}{-2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -\frac{1}{14} & \overset{\downarrow}{\frac{6}{7}} & -\frac{1}{7} \\ \frac{6}{14} & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} \\ \frac{1}{14} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$$

Multiplicación del segundo renglón por 2 y sumar al primer renglón

$$\begin{bmatrix} 1 & \overset{\downarrow}{0} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I \qquad \begin{bmatrix} \frac{11}{14} & \overset{\downarrow}{\frac{4}{7}} & -\frac{3}{7} \\ \frac{6}{14} & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} \\ \frac{1}{14} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{bmatrix} = A^{-1}$$

La matriz que se encuentra al final de la segunda columna, es la matriz identidad, en consecuencia, por el teorema IV. 5, la matriz que se encuentra al final de la tercera columna es la inversa de A. Por lo que:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{11}{14} & \frac{4}{7} & -\frac{3}{7} \\ \frac{6}{14} & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} \\ \frac{1}{14} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$$

Podemos comprobar el resultado efectuando el producto:

$$A^{-1}\ A = \begin{bmatrix} \frac{11}{14} & \frac{4}{7} & -\frac{3}{7} \\ \frac{6}{14} & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} \\ \frac{1}{14} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

- -

En ocasiones, en lugar de hacer una tabla como la del ejemplo anterior, se trabaja con un arreglo que contiene a la matriz A en el lado izquierdo y a la matriz I en el lado derecho. Se efectúan las mismas transformaciones en ambas matrices, hasta que se obtenga la matriz I en el lado izquierdo. La matriz que resulta en el lado derecho es A^{-1}.

En forma esquemática:

$$\left[A \ \vdots \ I \right] \rightarrow \ . \ . \ . \ \rightarrow \left[I \ \vdots \ A^{-1} \right]$$

IV. 4. SUMA DE MATRICES.

Definición.

Sean $A=(a_{ij})$ y $B=(b_{ij})$ dos matrices del mismo orden mxn. La adición o suma A+B de dichas matrices es una nueva matriz $C=(c_{ij})$ de orden mxn tal que

$$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$$

Es decir, los elementos de la matriz C son las sumas de los elementos correspondientes de A y B.

Ejemplo IV. 14.

Dadas las matrices

$$A=\begin{bmatrix}5 & 7\\ 0 & 4\\ -1 & 3\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}-4 & -3\\ 2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\quad C=\begin{bmatrix}3 & -2 & 0\\ 2 & -1 & 2\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}\quad D=\begin{bmatrix}2 & -3\\ 0 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

a) Obtener A+B

b) Obtener C+D

Solución

a)
$$A+B=\begin{bmatrix}5 & 7\\ 0 & 4\\ -1 & 3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-4 & -3\\ 2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5-4 & 7-3\\ 0+2 & 4+1\\ -1+1 & 3+2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 2 & 5\\ 0 & 5\end{bmatrix}$$

b) No puede efectuarse la suma C+D dado que las matrices no son del mismo orden, en estos casos se dice que las matrices no son conformables para la suma.

- -

Propiedades de la suma de matrices.

El estudiante puede demostrar las siguientes propiedades.

Sean A, B y C tres matrices del mismo orden (mxn), se cumple siempre que:

1.- $(A+B)+C=A+(B+C)$ la suma es asociativa

2.- $A+B = B+A$ la suma es conmutativa

3.- Existe una matriz $0=(c_{ij})$ (donde $c_{ij}=0\ \forall\ i,\ j$) de orden mxn, a la que llamaremos matriz nula, tal que

$$A+0=0+A=A$$

4.- Para toda matriz $A=(a_{ij})$ de orden mxn, existe una matriz a la que llamaremos simétrica de A y representaremos con -A, tal que

$$A+(-A)=(-A)+A=0$$

(fácilmente se puede comprobar que la simétrica de $A=(a_{ij})$ es $-A=(-a_{ij})$)

De la definición de suma y las propiedades anteriores, vemos que el conjunto de las matrices del mismo orden forman un grupo abeliano.

Un caso particular, es el de las matrices cuadradas de orden n. El conjunto (M) de estas matrices, con las operaciones de suma y producto, forma un anillo con unidad (no conmutativo), ya que,

$\forall A,\ B,\ C\ \varepsilon\ (M)$ se cumple siempre que:

1) $A + B\ \varepsilon\ (M)$
   $A\,B\ \varepsilon\ (M)$

2) $(A+B)+C= A+(B+C)$
   $(AB)C= A(BC)$

3) $\exists\ 0\ \varepsilon\ (M)$ tal que $A+0= 0+A=A$
   $\exists\ I_n\varepsilon\ (M)$ tal que $A\ I_n=I_n\ A=A$

4) $\forall\ A \in (M),\ \exists\ -A \in (M)$ tal que $A+(-A)= -A+A =0$

5) $A+B = B+A$

6) $A(B+C) = AB+AC$ y $(B+C)A = BA + CA$

Las propiedades 1 a 5, se han tratado ya para el caso general de matrices de orden mxn. La propiedad distributiva (6) la demostraremos a continuación.

Demostración.

Sean $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$ y $C=(c_{ij})$ tres matrices cualesquiera de orden n.

De la definición de suma

$$B+C= (b_{ij}+c_{ij})$$

De la definición de producto

$$A(B+C)=(a_{ij})(b_{ij}+c_{ij})$$

$$A(B+C)=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(b_{ij}+c_{ij})$$

Como la multiplicación es distributiva sobre la suma en C y por las propiedades de la suma

$$A(B+C)=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ij}+\sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_{ij}$$

De la definición de producto: $A(B+C) = AB+AC$.

La segunda parte se demuestra en forma análoga.

La propiedad distributiva del producto sobre la suma de matrices, tanto por la izquierda como por la derecha, puede generalizarse (referencia 3 pág. 26) de la siguiente forma:

$$A(B+C)=AB+AC \quad \text{y} \quad (B+C)A=BA+CA$$

siempre y cuando las operaciones indicadas puedan ser efectuadas.

Definiremos la resta o sustracción de matrices, a partir de la suma, como

$$A-B=A+(-B)$$

lo cual equivale simplemente a restar de los elementos de A, los correspondientes de B. Resulta claro según la definición que, para que dos matrices sean conformables para la resta deben serlo para la suma.

Ejemplo IV. 15.

Para las matrices

$$A= \begin{bmatrix} 3i & -3 \\ 5 & 1 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \quad B= \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -i & -1 \\ 3 & -i \end{bmatrix} \quad C= \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & i \end{bmatrix}$$

a) Obtener A-B

b) Obtener A-C

Solución

a) $A-B= \begin{bmatrix} -4+3i & -7 \\ 5+i & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$

b) A-C no puede efectuarse.

Producto por un escalar.

Definición.

Sean: $A=(a_{ij})$ una matriz de orden mxn y $\alpha \in$ C un escalar.

El producto α por A, que representaremos mediante αA, es la matriz

$$\alpha A=(\alpha a_{ij})$$

Ejemplo IV. 16.

Sean $\alpha=3i$ y $A=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ i & 3 \\ 1 & 2+i \end{bmatrix}$

el producto αA es la matriz

$$\alpha A=\begin{bmatrix} 0 & -3i \\ -3 & 9i \\ 3i & -3+6i \end{bmatrix}$$

- -

El estudiante puede fácilmente demostrar que esta operación tiene las siguientes propiedades.

Sean A y B dos matrices del mismo orden y α,β dos números complejos, se cumple siempre que:

1.- $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$

2.- $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$

3.- $\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A$

4.- $1\cdot A=A$

Transpuesta de una matriz.

Definición.

Sea la matriz A de orden mxn. Llamaremos "transpuesta de A" y la representaremos mediante A^T, a la matriz de orden nxm cuyos renglones son las columnas de A y cuyas columnas son los renglones de A.

es decir:

si $A=(a_{ij})$ entonces $A^T=(a_{ji})$

Se puede demostrar (referencia 3 pag. 33) que

$(AB)^T=B^TA^T$

Ejemplo IV. 17.

Sean $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ y $B=\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

obtener $(AB)^T$ y B^TA^T.

Solución

$$AB=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 5 & 10 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(AB)^T=\begin{bmatrix} 5 & 5 & 0 \\ 10 & 10 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B^TA^T=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 & 5 & 0 \\ 10 & 10 & 0 \end{bmatrix}$$ ∴ se

comprueba que $(AB)^T=B^TA^T$

- -

Ecuaciones matriciales.

Ejemplo IV. 18.

Dadas las matrices

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \\ -5 & 4 \end{bmatrix} \quad C=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & -3 \end{bmatrix} \quad D=\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

obtener una matriz x tal que

$$Ax-B^T=C+Dx$$

Solución

En este caso tenemos una ecuación entre matrices, donde la incógnita es la matriz x. Este tipo de ecuaciones pueden resolverse empleando las propiedades de las operaciones que hemos definido, siempre y cuando la ecuación haya sido planteada correc tamente.

Para el caso que nos ocupa, x debe ser tal que

$Ax-B^T=C+Dx$

sumando en ambos miembros -Dx:

$-Dx+(Ax-B^T)=-Dx+(C+Dx)$	
$-Dx+(Ax-B^T)=-Dx+(Dx+C)$	La suma es conmutativa.
$-Dx+Ax-B^T=(-Dx+Dx)+C$	La suma es asociativa.
$-Dx+Ax-B^T=0+C$	-Dx es el inverso para la suma de Dx.
$-Dx+Ax-B^T=C$	La matriz nula es el idéntico para la suma.
$(-Dx+Ax-B^T)+B^T=C+B^T$	Sumando en ambos miembros B^T.
$-Dx+Ax+(-B^T+B^T)=C+B^T$	La suma es asociativa.
$-Dx+Ax+0=C+B^T$	$-B^T$ es el inverso para la suma de B^T.
$-Dx+Ax=C+B^T$	La matriz nula es el idéntico para la suma.
$(-D+A)x=C+B^T$	La multiplicación es distributiva sobre la suma.
$(-D+A)^{-1}((-D+A)x)=(-D+A)^{-1}(C+B^T)$	Suponiendo que existe $(-D+A)^{-1}$ premultiplicamos ambos miembros por dicha matriz.
$((-D+A)^{-1}(-D+A))x=(-D+A)^{-1}(C+B^T)$	Por asociatividad del producto.
$I_2x=(-D+A)^{-1}(C+B^T)$	Por la definición de matriz inversa.

Finalmente, como I_2 es el idéntico para el producto y por la conmutatividad de la suma

$$x=(A-D)^{-1}(C+B^T)$$

Lo que hemos hecho es despejar la incógnita x de la ecuación matricial, justificando los pasos de dicho despeje. Pueden omitirse estas justificaciones y algunos pasos que se consideren -- obvios, con el objeto de hacer mas corto el proceso.

Sin embargo, el estudiante debe tener cuidado al despejar una incógnita de una ecuación matricial, ya que existen diferencias entre las propiedades de las operaciones con matrices y con números reales.

Efectuemos las operaciones indicadas en la última expresión:

$$C+B^T=\begin{bmatrix}2 & -1 & 4\\ 0 & -3 & -3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 3 & -5\\ -1 & 2 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 2 & -1\\ -1 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

$$A-D=\begin{bmatrix}1 & -3\\ 0 & -1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3 & -2\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & -1\\ 0 & -2\end{bmatrix}$$

Veamos si efectivamente existe $(A-D)^{-1}$:

$$\left[\begin{array}{cc|cc}-2 & -1 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 0 & 1\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{cc|cc}-2 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2}\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{cc|cc}1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2}\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4}\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2}\end{array}\right]$$

$$\therefore\quad (A-D)^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{1}{4}\\ 0 & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 0 & -2\end{bmatrix}$$

Por lo que, la incógnita x puede obtenerse como:

$$x=(A-D)^{-1}(C+B^T)=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 2 & -1\\ -1 & -1 & 1\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}-5 & -5 & 3\\ 2 & 2 & -2\end{bmatrix}$$

Finalmente, la matriz pedida es

$$x = \begin{bmatrix} -\frac{5}{4} & -\frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

* * *

La principal diferencia entre las matrices y los números reales es que, mientras que podemos sumar o multiplicar dos números cualesquiera, no siempre podemos hacerlo con las matrices. Suponiendo que pueden efectuarse las operaciones indicadas, enlistamos a continuación las principales diferencias entre las propiedades de las operaciones con números y con matrices:

1) La multiplicación de números es conmutativa; la multiplicación de matrices no lo es.

2) Si definimos $A^2=AA$, el desarrollo matricial $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$ es en general falso (como consecuencia de 1). El desarrollo correcto es $(A+B)^2=A^2+AB+BA+B^2$.

3) El producto de dos números diferentes de cero nunca es cero, pero el producto de dos matrices diferentes de la matriz nula -- puede ser igual a cero (la matriz nula).

Por ejemplo, si

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad y \quad B=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

se tiene que $AB=0$

4) La ley cancelativa para el producto se verifica en los números, pero no en las matrices.

Esto es, si $a, b \in R$ y $a \neq 0$

$$(ab = ac) \Longrightarrow (b=c)$$

pero en las matrices

$$(AB = AC) \not\Longrightarrow (B=C)$$

Por ejemplo, con las matrices A y B del ejemplo anterior tenemos que

$AB = A0$ pero $B \neq 0$, por lo que no podemos cancelar A.

Nota. Aunque $(AB=AC) \not\Longrightarrow (B=C)$, sí se cumple que

$$(B=C) \Longrightarrow (AB=AC) \ \forall A.$$

Antes de pasar a la sección siguiente, es conveniente aclarar que aunque hemos definido matriz como un arreglo de números -- (reales o complejos), el concepto de matriz puede generalizarse como "un arreglo de números, funciones u operadores". En el siguiente capítulo y en cursos posteriores se verá la utilidad de dicha - extensión.

IV. 5. SOLUCION DE SISTEMAS DE ECUACIONES.

Como vimos al inicio de la sección IV. 3, podemos representar el sistema

$$\left.\begin{array}{l} 20x_1+100x_2+40x_3=400 \\ 0x_1+\quad x_2-\quad x_3=0 \end{array}\right\}\ldots.(4)$$

mediante la expresión matricial

$$A\bar{x}=\bar{b}$$

A esta ecuación matricial, donde $\bar{x}$ es la matriz incógnita o indeterminada, se le conoce como "forma matricial del sistema de ecuaciones (4)".

La matriz

$$A=\begin{bmatrix} 20 & 100 & 40 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

recibe el nombre de "matriz de coeficientes del sistema", y a las matrices

$$\bar{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad y \quad \bar{b}=\begin{bmatrix} 400 \\ \\ 0 \end{bmatrix}$$

se les llama "vector de incógnitas" y "vector de términos independientes" respectivamente.

En general, la forma matricial del sistema

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m \end{array}$$

$$A\bar{x}=\bar{b}$$

donde la matriz de coeficientes es la matriz de mxn:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

el vector de incógnitas es la matriz de nx1:

$$\bar{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

y el vector de términos independientes es la matriz de mx1:

$$\bar{b}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Es claro que resolver la ecuación matricial $A\bar{x}=\bar{b}$ es equivalente a resolver el sistema, por lo que una solución de dicho sistema será una matriz columna de n renglones

$$\bar{k}=\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix} \qquad (k_i \in C)$$

tal que $A\bar{k}=\bar{b}$.

Definiremos una matriz más para el sistema, a la que llamaremos "matriz ampliada" del sistema, la cual juega un papel importante en el estudio teórico de los sistemas de ecuaciones.

Definición.

La matriz ampliada de un sistema de ecuaciones, que representaremos con $(A, \bar{b})$, es la matriz de orden $m\times(n+1)$ que resulta de aumentar, a la matriz de coeficientes, el vector de términos independientes.

Entonces, la matriz ampliada del sistema es:

$$(A,\bar{b})=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

Sistemas incompatibles.

Si analizamos el sistema

$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3&=6 \\ x_1+2x_2-x_3&=1 \\ x_1+x_2+x_3&=-5 \end{aligned}$$

vemos que las ecuaciones 1a. y 3a. no pueden satisfacerse simultáneamente, ya que no existen tres números x_1, x_2, x_3 cuya suma sea igual a 6 y -5 a la vez. El sistema es entonces incompatible.

Veamos que sucede con los rangos de las matrices

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad (A,\bar{b})=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

Al efectuar solamente transformaciones por renglón, es posible determinar a la vez los rangos de las matrices A y $(A, \bar{b})$ operando sobre la matriz ampliada, la cual contiene a la matriz A.

Transformaremos entonces en una matriz escalón el siguiente arreglo.

$$\underbrace{\left[\overbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}}^{A}\;\begin{array}{:r} 6 \\ 1 \\ -5 \end{array}\right]}_{(A,\bar{b})} \rightarrow \left[\begin{array}{rrr:r} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -11 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{rrr:r} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

De la última matriz vemos que

$R(A) = 2$

y $R(A, \bar{b}) = 3$

es decir $R(A) < R(A, \bar{b})$, que es una característica de todos los sistemas incompatibles.

Sabemos que el sistema es incompatible porque las ecuaciones 1a. y 3a. no admiten solución simultánea. Daremos otra prueba de la incompatibilidad de dicho sistema:

La última matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

representa el siguiente sistema equivalente

$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3&=6 \\ 0x_1+x_2-2x_3&=-5 \\ 0x_1+0x_2+0x_3&=1 \end{aligned}$$

donde vemos que no existen valores para x_1, x_2, x_3 que satisfagan la 3a. ecuación. Esto implica que el sistema equivalente no tiene solución y en consecuencia el sistema original tampoco.

Conviene hacer la siguiente observación.

El rango de la matriz ampliada de un sistema de ecuaciones lineales, es igual al rango de la matriz de coeficientes o mayor en una unidad, por lo que:

$$R(A) \le R(A, \bar{b})$$

En efecto, sea un sistema de m ecuaciones con n incógnitas

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n=b_2\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mn}x_n=b_m \end{array}\right\}\dots\dots(11)$$

cuya matriz de coeficientes es:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}\dots\dots(12)$$

y cuya matriz ampliada es:

$$(A,\bar{b})=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}\dots(13)$$

Sea el rango de la matriz de coeficientes R(A)=r. Efectuando en $(A,\bar{b})$ las mismas transformaciones que se efectúan para llevar la matriz A a su forma escalonada, obtendremos la matriz:

$$\begin{array}{c} r\\ \text{renglones} \end{array}\left\{\vphantom{\begin{matrix}1\\0\\\cdot\\0\end{matrix}}\right.\begin{bmatrix} 1 & c_{12} & \cdots & c_{1r} & c_{1,r+1} & \cdots & c_{1n} & d_1\\ 0 & c_{22} & \cdots & c_{2r} & c_{2,r+1} & \cdots & c_{2n} & d_2\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 0 & 0 & \cdots & c_{rr} & c_{r,r+1} & \cdots & c_{rn} & d_r\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_m \end{bmatrix}$$

continuando con el proceso, hasta transformar esta matriz en una matriz escalonada obtendremos:

$$\begin{bmatrix} 1 & c_{12} & \cdots & c_{1r} & c_{1,r+1} & \cdots & c_{1n} & d_1\\ 0 & c_{22} & \cdots & c_{2r} & c_{2,r+1} & \cdots & c_{2n} & d_2\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 0 & 0 & \cdots & c_{rr} & c_{r,r+1} & \cdots & c_{rn} & d_r\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & e\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}\dots(14)$$

$$\text{donde}\left\{\begin{array}{ll} c_{ij}=1 & \text{si } j=k\\ c_{ij}=0 & \text{si } j<k \end{array}\right\}\text{para algún } k\geq i.$$

Existen entonces sólo dos posibilidades:

a) Si $e=0$, $R(A,\bar{b})=r=R(A)$

b) Si $e\neq 0$, podemos dividir el r+1 ésimo renglón entre e, obteniendo:

$$\begin{bmatrix} 1 & c_{12} & \cdots & c_{1r} & c_{1,r+1} & \cdots & c_{1n} & d_1\\ 0 & c_{22} & \cdots & c_{2r} & c_{2,r+1} & \cdots & c_{2n} & d_2\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 0 & 0 & \cdots & c_{rr} & c_{r,r+1} & \cdots & c_{rn} & d_r\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}\dots(15)$$

de donde $R(A,\bar{b}) = r+1 = R(A)+1$

Entonces $R(A) < R(A,\bar{b})$.

Por tanto, hemos demostrado que $R(A) \leq R(A,\bar{b})$.

Teorema IV. 6.

Si en un sistema de ecuaciones lineales

$$R(A) < R(A,\bar{b})$$

entonces el sistema es incompatible.

Demostración

Si $R(A) < R(A, \bar{b})$, la matriz ampliada del sistema (11) puede transformarse en la matriz (15). En esta última, el r+1 ésimo renglón representa la ecuación

$$0x_1+0x_2+ \dots +0x_n= 1$$

de un sistema equivalente.

Obviamente, esta ecuación no se satisface para ningún conjunto de valores $x_1, x_2, \dots, x_n$, por lo que el sistema es incompatible.

Ejemplo IV. 19.

Investigue si el siguiente sistema de ecuaciones tiene solución

$$2x_1+3x_2+5x_3= 2$$
$$6x_1+9x_2+15x_3= 1$$

Transformemos la matriz de coeficientes en una matriz escalonada

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 6 & 9 & 15 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 6 & 9 & 15 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ $R(A)=1$

Transformemos ahora la matriz ampliada en una matriz escalonada

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 2 \\ 6 & 9 & 15 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & 1 \\ 6 & 9 & 15 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \rightarrow$$
$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$R(A,\bar{b})= 2$

Como $R(A) < R(A,\bar{b})$, el sistema no tiene solución.

Obsérvese que se hubiera llegado a la misma conclusión de haber trabajado directamente con la matriz ampliada.

- -

Sistemas compatibles determinados.

Analicemos primeramente el caso particular de los sistemas de n ecuaciones con n incógnitas, en los cuales la matriz de coeficientes es de rango n.

Un sistema de n ecuaciones con n incógnitas tiene la forma

$$\begin{array}{l} a_{11}\ x_1 + \dots + a_{1n}\ x_n = b_1 \\ a_{21}\ x_1 + \dots + a_{2n}\ x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\ x_1 + \dots + a_{nn}\ x_n = b_n \end{array}$$

En este caso, la matriz de coeficientes es la matriz cuadrada de orden n

$$A= \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

y si además $R(A)=n$, por el teorema IV. 4 existe su inversa A^{-1}

El sistema puede escribirse como

$$A\bar{x}=\bar{b}$$

Premultiplicando ambos miembros por A^{-1}

$$A^{-1}(A\bar{x})= A^{-1}\bar{b}$$

$$(A^{-1}A)\bar{x}= A^{-1}\bar{b}$$

$$I\bar{x}= A^{-1}\bar{b}$$

$$\bar{x}= A^{-1}\bar{b}$$

Entonces, la matriz columna $\bar{x}$ que satisface la ecuación $A\bar{x}=\bar{b}$ puede ser obtenida con sólo efectuar el producto $A^{-1}\bar{b}$.

Puesto que el producto $A^{-1}\bar{b}$ define una única solución $\bar{x}$, podemos concluir que

> Un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas, tal que la matriz de coeficientes tiene rango n, es compatible determinado y su solución puede obtenerse como:
>
> $$\bar{x}=A^{-1}\bar{b}$$

Ejemplo IV. 20.

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones

$$3x_3-5+2x_2=-x_1$$

$$2x_1+4x_3= 11+x_2$$

$$-x_2+ x_3= 3$$

Solución

Ordenando el sistema tenemos

$$x_1+2x_2+3x_3=5$$

$$2x_1-x_2+4x_3=11$$

$$-x_2+ x_3=3$$

que en forma matricial puede expresarse como:

$$A\bar{x} = \bar{b}$$

donde: $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & -1 & 4\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}$, $\bar{x}=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$, $\bar{b}=\begin{bmatrix}5\\ 11\\ 3\end{bmatrix}$

Investiguemos si existe la inversa de A:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}\multicolumn{3}{c|}{\overbrace{\hphantom{1\quad 2\quad 3}}^{A}} & \multicolumn{3}{c}{\overbrace{\hphantom{1\quad 0\quad 0}}^{I}}\\ 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 2 & -1 & 4 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -5 & -2 & -2 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right] \to$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0\\ 0 & 0 & \frac{7}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 1\end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0\\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{5}{7}\end{array}\right]$$

En este paso, vemos que $R(A)=3$, por lo que existe A^{-1}

Continuando con el proceso

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{2}{7}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{5}{7}\end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 0 & \frac{1}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{15}{7}\\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{2}{7}\\ 0 & 0 & -1 & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{5}{7}\end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc}\multicolumn{3}{c|}{\overbrace{\hphantom{1\quad 0\quad 0}}^{I}} & \multicolumn{3}{c}{\overbrace{\hphantom{-\frac{3}{7}\quad \frac{5}{7}\quad -\frac{11}{7}}}^{A^{-1}}}\\ 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{7} & \frac{5}{7} & -\frac{11}{7}\\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{2}{7}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{5}{7}\end{array}\right]$$

Entonces

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{3}{7} & \frac{5}{7} & -\frac{11}{7}\\ \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{2}{7}\\ \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{5}{7}\end{bmatrix} =-\frac{1}{7}\begin{bmatrix}3 & -5 & 11\\ -2 & 1 & 2\\ -2 & 1 & -5\end{bmatrix}$$

En consecuencia, la solución es $\bar{x}=A^{-1}\bar{b}$

de donde

$$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}= -\frac{1}{7}\begin{bmatrix}3 & -5 & 11\\ -2 & 1 & 2\\ -2 & 1 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\ 11\\ 3\end{bmatrix} = -\frac{1}{7}\begin{bmatrix}-7\\ 7\\ -14\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\ -1\\ 2\end{bmatrix}$$

o sea $x_1=1$, $x_2=-1$, $x_3=2$

- -

Veamos ahora cuales son los rangos de A y $A,\bar{b}$ para el sistema del ejemplo anterior:

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|c}\overbrace{\begin{matrix}1&2&3\\2&-1&4\\0&-1&1\end{matrix}}^{A}&\begin{matrix}5\\11\\3\end{matrix}\end{array}\right]}_{(A,\bar{b})}\rightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&3&5\\0&-5&-2&1\\0&-1&1&3\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&3&5\\0&-1&1&3\\0&-5&-2&1\end{array}\right]\rightarrow$$

$$\rightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&3&5\\0&-1&1&3\\0&0&-7&-14\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&3&5\\0&1&-1&-3\\0&0&1&2\end{array}\right]$$

De la última matriz vemos que

$R(A)=3$

$R(A,\bar{b})=3$

es decir $R(A)=R(A,\bar{b})$

Además, $R(A)=R(A,\bar{b})=n$, que es una característica de los sistemas compatibles determinados.

<u>Teorema</u> IV. 7.

Si en un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas

$R(A)=R(A,\bar{b})=n$

entonces el sistema es compatible determinado.

Demostración.

Si $R(A)=R(A,\bar{b})=n$, la matriz ampliada del sistema (11) puede transformarse en la matriz

$$\begin{array}{c}n\\ \text{renglones}\end{array}\left\{\begin{array}{l}\\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\right.\!\!\begin{bmatrix}1&c_{12}&\cdots\cdots&c_{1n}&d_1\\0&1&\cdots\cdots&c_{2n}&d_2\\\cdots&\cdots&\cdots\cdots&\cdots&\cdots\\\cdots&\cdots&\cdots\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots\cdots&1&d_n\\0&0&\cdots\cdots&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots\cdots&0&0\end{bmatrix}$$

que representa al sistema equivalente

$$\begin{aligned}x_1+c_{12}x_2+\ \dots\ +c_{1n}x_n&=d_1\\x_2+\ \dots\ +c_{2n}x_n&=d_2\\\dots\dots\dots\dots&\\\dots\dots\dots\dots&\\x_n&=d_n\end{aligned}$$

ya que las ecuaciones representadas por los renglones n+1, ..., m son todas de la forma

$0x_1+0x_2+\ \dots+\ 0x_n=0$

y se satisfacen para cualquier conjunto de valores $x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n$.

El sistema equivalente tiene n ecuaciones con n incógnitas, y el rango de su matriz de coeficientes es también n, por lo que es compatible determinado.

Ejemplo IV. 21.

Resolver el sistema

$3x_1+2x_2=6$

$x_1-x_2=1$

$4x_1+x_2=7$

Solución

Calculemos los rangos de A y $(A,\bar{b})$

$$\left[\begin{array}{cc|c}3&2&6\\1&-1&1\\4&1&7\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{cc|c}1&\frac{2}{3}&2\\1&-1&1\\4&1&7\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{cc|c}1&\frac{2}{3}&2\\0&-\frac{5}{3}&-1\\0&-\frac{5}{3}&-1\end{array}\right]\rightarrow$$

$$\rightarrow\left[\begin{array}{cc|c}1&\frac{2}{3}&2\\0&1&\frac{3}{5}\\0&-\frac{5}{3}&-1\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{cc|c}1&\frac{2}{3}&2\\0&1&\frac{3}{5}\\0&0&0\end{array}\right]$$

vemos que $R(A)=R(A,\bar{b})=n=2$, por lo que el sistema es compatible determinado.

Resolviendo el sistema equivalente

$$x_1+\frac{2}{3}x_2=2$$
$$x_2=\frac{3}{5}$$

obtenemos la solución

$$x_1=\frac{8}{5}$$
$$x_2=\frac{3}{5}$$

- -

Sistemas compatibles indeterminados.

Volvamos nuevamente al sistema

$$\left.\begin{aligned} 20x_1+100x_2+40x_3 &= 400 \\ 0x_1+\quad x_2-\ x_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \text{.....(4)}$$

para el que, al inicio del capítulo, dimos las soluciones

a) $x_1=6,\quad x_2=2,\quad x_3=2$

y b) $x_1=13,\quad x_2=1,\quad x_3=1$

Veamos ahora cuales son los rangos de A y $(A,\bar{b})$:

Dividiendo entre 20 el primer renglón de la matriz ampliada

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 20 & 100 & 40 & 400 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 2 & 20 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

En consecuencia

$$R(A)=R(A,\bar{b})=2$$

si en el sistema equivalente

$$x_1+5x_2+2x_3=20$$
$$x_2-x_3=0$$

damos a x_3 el valor de $x_3=2$, tendremos

$$x_1+5x_2+4=20$$
$$x_2-2=0$$

De la segunda ecuación

$$x_2=2$$

y, sustituyendo en la primera ecuación

$$x_1=6$$

con lo que hemos obtenido la solución a).

Si en el sistema equivalente hacemos ahora $x_3=1$, obtenemos la solución b).

En general, haciendo $x_3=k$ (una constante arbitraria) en el sistema equivalente, obtenemos

$$x_1+5x_2+2k=20$$
$$x_2-k=0$$

De la segunda ecuación

$$x_2=k$$

y, sustituyendo en la primera

$$x_1+5k+2k=20 \Longrightarrow x_1=20-7k$$

con lo que podemos dejar la solución en función de k como

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 20-7k \\ x_2 &= k \\ x_3 &= k \end{aligned}\right\} \text{..... (16)}$$

A la expresión (16) le llamaremos solución general del sistema (4), ya que, para cualquier valor de k, los valores de x_1, x_2, x_3 dados por dicha expresión constituyen una solución del sistema.

Recordemos que el sistema (4) nos representa el problema de encontrar el número (x_1, x_2, x_3) de objetos de diferentes tipos (A, B, C) que se pueden fabricar, por lo que la solución está restringida a valores enteros no negativos (0, 1, 2 ...) de dichas incógnitas. Entonces, de (16), es fácil observar que k puede tomar únicamente los valores 0, 1 y 2 ($k \geq 3$ haría x_1 negativo).

Tenemos por tanto un sistema indeterminado con tres soluciones (para k=0, 1, 2).

Sin embargo, si consideramos un problema en el que las incógnitas x_1, x_2 y x_3 pueden tomar cualquier valor, tendremos un sistema indeterminado con un número infinito de soluciones (una para cada valor real de k).

Considerando nuevamente los rangos de A y $(A, \bar{b})$ y el número de incógnitas n, vemos que, para el sistema del ejemplo anterior

$$R(A) = R(A, \bar{b}) < n$$

que es una característica de los sistemas compatibles indeterminados.

Teorema IV. 8

Si en un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas

$$R(A) = R(A, \bar{b}) = r$$

y $r < n$

entonces el sistema es compatible indeterminado

Demostración

Si $R(A) = R(A, \bar{b}) = r$ y $r < n$

la matriz ampliada del sistema (11) puede reducirse a la forma (14), donde e=0.

Los primeros r renglones de dicha matriz son tales que su primer elemento distinto de cero es igual a uno y el número de ceros anteriores a dicho elemento aumenta de renglón a renglón.

Si llamamos $z_1, z_2, \ldots, z_r$ a las incógnitas cuyos coeficientes son los elementos mencionados, podemos ordenar el sistema equivalente en la forma

$$\begin{aligned} z_1 + p_{12}z_2 + \ldots + p_{1r}z_r &= d_1 - p_{1,r+1}z_{r+1} - \ldots - p_{1n}z_n \\ z_2 + \ldots + p_{2r}z_r &= d_2 - p_{2,r+1}z_{r+1} - \ldots - p_{2n}z_n \\ &- - - - - - - - - - - - - - - - - \\ z_r &= d_r - p_{r,r+1}z_{r+1} - \ldots - p_{rn}z_n \end{aligned}$$

Si asignamos valores arbitrarios a las incógnitas $z_{r+1}, z_{r+2}, \ldots, z_n$ trasladadas a los segundos miembros, el sistema es compatible determinado en las incógnitas $z_1, z_2, \ldots, z_r$.

Ahora bien, como a $z_{r+1}, z_{r+2}, \ldots, z_n$ podemos asignarles un número infinito de valores arbitrarios, el sistema además de ser compatible es indeterminado.

Ejemplo IV. 22

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 - x_5 = 1$$

$$3x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 + 4x_5 = 4$$

$$x_1 + x_2 + 5x_3 - 9x_4 - 8x_5 = 0$$

Solución.

Calculamos primero los rangos de A y $(A, \bar{b})$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & -1 & 1 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 5 & -9 & -8 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 7 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -7 & -7 & -1 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\rightarrow\left[\begin{array}{rrrrr|r}1&1&1&-2&-1&1\\0&0&-4&7&7&1\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{rrrrr|r}1&1&1&-2&-1&1\\0&0&1&-\frac{7}{4}&-\frac{7}{4}&-\frac{1}{4}\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right]$$

Como $R(A)=R(A,\ \bar{b})=2=r$ el sistema es compatible.

Como $r < n$, $(2 < 5)$, el sistema es indeterminado.

Tenemos ahora el sistema equivalente

$$x_1+x_2+x_3-2x_4-x_5=1$$
$$x_3-\frac{7}{4}x_4-\frac{7}{4}x_5=-\frac{1}{4}$$

Las dos incógnitas que dejamos en el sistema equivalente son x_1 y x_3, ya que sus coeficientes son los primeros elementos distintos de cero en los renglones de la última matriz. En consecuencia, trasladamos las tres incógnitas restantes a los segundos miembros de las ecuaciones.

Asignando a x_2, x_4, x_5 los valores $x_2=k_1$, $x_4=k_2$ y $x_5=k_3$ tenemos el sistema

$$x_1+x_3=1-k_1+2k_2+k_3$$
$$x_3=-\frac{1}{4}+\frac{7}{4}k_2+\frac{7}{4}k_3$$

Sustituyendo x_3 en la primera ecuación obtenemos finalmente

$$x_1=\frac{1}{4}(5-4k_1+k_2-3k_3)$$
$$x_2=k_1$$
$$x_3=\frac{1}{4}(-1+7k_2+7k_3)$$
$$x_4=k_2$$
$$x_5=k_3$$

que es la solución general del sistema.

Si por ejemplo hacemos

$$k_1=1,\quad k_2=1,\quad k_3=0$$

obtenemos la solución particular.

$$x_1=\frac{1}{2},\ x_2=1,\ x_3=\frac{3}{2},\ x_4=1,\ x_5=0$$

Otra solución particular sería

$$x_1=\frac{5}{4},\ x_2=0,\ x_3=-\frac{1}{4},\ x_4=0,\ x_5=0$$

que se obtuvo para los valores

$$k_1=k_2=k_3=0$$

……

Los resultados obtenidos en esta sección, pueden resumirse en el siguiente cuadro

$$\begin{array}{c}\text{Sistemas de ecuaciones lineales}\\ A\bar{x}=\bar{b}\end{array}\begin{cases}\begin{array}{c}\text{Compatibles}\\ R(A)=R(A,\bar{b})=r\end{array}\begin{cases}\begin{array}{c}\text{Determinados}\\ r=n\end{array}\\ \begin{array}{c}\text{Indeterminados}\\ r<n\end{array}\end{cases}\\ \\ \begin{array}{c}\text{Incompatibles}\\ R(A)<R(A,\bar{b})\end{array}\end{cases}$$

Las condiciones que aparecen en el cuadro, fueron enunciadas en los teoremas IV. 6, IV. 7 y IV. 8 como condiciones suficientes. No es difícil probar que dichas condiciones son también necesarias.

De los ejemplos utilizados en el desarrollo de esta sección, se ve que un proceso conveniente para obtener soluciones de sistemas de ecuaciones lineales es el siguiente:

1) Se obtienen los rangos de A y $(A,\ \bar{b})$ trabajando directamente con la matriz ampliada.
2) Se clasifica el sistema en base al cuadro anterior.
3) De ser compatible, se trabaja con el sistema equivalente representado por la matriz escalonada que se obtuvo al calcular los rangos.
4) Se trasladan n-r incógnitas a los segundos miembros de las

ecuaciones, de tal forma que se obtenga un sistema compatible determinado en r incógnitas.

5) Se resuelve el sistema obtenido en 4 por cualquier método (matriz inversa, sustitución, etc.)

Ejemplo IV. 23.

Resolver el siguiente sistema

$$\begin{aligned}
&-4x_1+x_2-4x_3-10x_4+22x_5+4x_6= -9\\
&x_1 \quad +2x_3+4x_4 - 5x_5- x_6= 2\\
&-2x_1+2x_2+4x_3+5x_4+13x_5+4x_6=-3\\
&3x_1-2x_2-2x_3+3x_4-21x_5+3x_6= 15\\
&5x_1 \quad +10x_3+20x_4-25x_5-5x_6=10\\
&x_1-x_2-2x_3-x_4-6x_5+x_6=2
\end{aligned}$$

obtengamos los rangos:

$$\left[\begin{array}{cccccc|c}
-4 & 1 & -4 & -10 & 22 & 4 & -9\\
1 & 0 & 2 & 4 & -5 & -1 & 2\\
-2 & 2 & 4 & 5 & 13 & 4 & -3\\
3 & -2 & -2 & 3 & -21 & 3 & 15\\
5 & 0 & 10 & 20 & -25 & -5 & 10\\
1 & -1 & -2 & -1 & -6 & 1 & 2
\end{array}\right]
\rightarrow
\left[\begin{array}{cccccc|c}
1 & 0 & 2 & 4 & -5 & -1 & 2\\
-4 & 1 & -4 & -10 & 22 & 4 & -9\\
-2 & 2 & 4 & 5 & 13 & 4 & -3\\
3 & -2 & -2 & 3 & -21 & 3 & 15\\
5 & 0 & 10 & 20 & -25 & -5 & 10\\
1 & -1 & -2 & -1 & -6 & 1 & 2
\end{array}\right]
\rightarrow$$

$$\rightarrow
\left[\begin{array}{cccccc|c}
1 & 0 & 2 & 4 & -5 & -1 & 2\\
0 & 1 & 4 & 6 & 2 & 0 & -1\\
0 & 2 & 8 & 13 & 3 & 2 & 1\\
0 & -2 & -8 & -9 & -6 & 6 & 9\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & -1 & -4 & -5 & -1 & 2 & 0
\end{array}\right]
\rightarrow
\left[\begin{array}{cccccc|c}
1 & 0 & 2 & 4 & -5 & -1 & 2\\
0 & 1 & 4 & 6 & 2 & 0 & -1\\
0 & 2 & 8 & 13 & 3 & 2 & 1\\
0 & -2 & -8 & -9 & -6 & 6 & 9\\
0 & -1 & -4 & -5 & -1 & 2 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]
\rightarrow$$

$$\rightarrow
\left[\begin{array}{cccccc|c}
1 & 0 & 2 & 4 & -5 & -1 & 2\\
0 & 1 & 4 & 6 & 2 & 0 & -1\\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 3\\
0 & 0 & 0 & 3 & -2 & 6 & 7\\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & -1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]
\rightarrow
\left[\begin{array}{cccccc|c}
1 & 0 & 2 & 4 & -5 & -1 & 2\\
0 & 1 & 4 & 6 & 2 & 0 & -1\\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 3\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2\\
0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -4\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]
\rightarrow$$

$$\rightarrow
\left[\begin{array}{cccccc|c}
1 & 0 & 2 & 4 & -5 & -1 & 2\\
0 & 1 & 4 & 6 & 2 & 0 & -1\\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 3\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]$$

De esta matriz podemos observar que

$R(A)=R(A,\bar{b})=4$ (sistema compatible).

Tenemos entonces $r=4$

y $n=6$ (número de incógnitas), por lo que el sistema en cuestión es compatible indeterminado.

El sistema equivalente que representa la última matriz es:

$$\begin{aligned}
&x_1 \quad +2x_3+4x_4-5x_5-x_6=2\\
&x_2+4x_3+6x_4+2x_5 \quad =-1\\
&x_4-x_5+2x_6=3\\
&x_5 \quad =-2
\end{aligned}$$

Como se dijo anteriormente, debemos despejar $n-r=2$ incógnitas, dejando del lado izquierdo aquellas cuyo coeficiente es el primer uno de cada renglón de la matriz escalonada (x_1, x_2, x_4, x_5):

$$\begin{aligned}
&x_1 \quad +4x_4-5x_5=2-2x_3+x_6\\
&x_2+6x_4+2x_5=-1-4x_3\\
&x_4- x_5= 3-2x_6\\
&x_5=-2
\end{aligned}$$

Dando valores arbitrarios a x_3 y x_6;

$x_3=k_1$

$x_6=k_2$

obtenemos el sistema

$$\begin{aligned} x_1 \quad +4x_4-5x_5&=2-2k_1+k_2\\ x_2+6x_4+2x_5&=-1-4k_1\\ x_4-\ x_5&=3-2k_2\\ x_5&=-2 \end{aligned}$$

Este sistema es de la forma

$A\bar{x}=\bar{b}$

donde

$$A=\begin{bmatrix}1&0&4&-5\\0&1&6&2\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{bmatrix}_{4\times 4}\qquad \bar{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_4\\x_5\end{bmatrix}_{4\times 1}\qquad \bar{b}=\begin{bmatrix}2-2k_1+k_2\\-1-4k_1\\3-2k_2\\-2\end{bmatrix}_{4\times 1}$$

y podemos resolverlo utilizando la matriz inversa de A, como

$\bar{x}=A^{-1}\bar{b}$

Como es fácil verificar:

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&-4&1\\0&1&-6&-8\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

Por tanto

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_4\\x_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&-4&1\\0&1&-6&-8\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2-2k_1+k_2\\-1-4k_1\\3-2k_2\\-2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_4\\x_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2-2k_1+k_2-4(3-2k_2)-2\\-1-4k_1-6(3-2k_2)-8(-2)\\3-2k_2-2\\-2\end{bmatrix}$$

finalmente

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_4\\x_6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-12-2k_1+9k_2\\-3\ -4k_1+12k_2\\1-2k_2\\-2\end{bmatrix}$$

Entonces, la solución general del sistema original es:

$x_1=-12-2k_1+9k_2$

$x_2=-3-4k_1+12k_2$

$x_3=k_1$

$x_4=1-2k_2$

$x_5=-2$

$x_6=k_2$

$\forall\ k_1,\ k_2\quad R.$

- -

Ejemplo IV. 24.

Sea el sistema
$$\begin{aligned} x+y+z&=6\\ x-2z&=-4\\ 3x+2y&=8\\ 5x+2y+\beta z&=0 \end{aligned}$$

¿Qué valores puede tomar β para que la solución del sistema sea única? Dando a β uno de esos valores resuélvase el sistema.

Solución.

La solución del sistema es única para aquellos valores de β que hagan $R(A)=R(A,\bar{b})=n$

Reduciendo la matriz ampliada a su forma escalonada:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & -2 & -4 \\ 3 & 2 & 0 & 8 \\ 5 & 2 & \beta & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & -3 & -10 \\ 0 & -1 & -3 & -10 \\ 0 & -3 & -5+\beta & -30 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -5+\beta & -30 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4+\beta & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 4+\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

De la última matriz vemos que

Si $4+\beta=0$, $R(A)=R(A,\bar{b})=2$ (compatible indeterminado)

Si $4+\beta\neq 0$, $R(A)=R(A,\bar{b})=3$ (compatible determinado)

por tanto, el sistema tiene solución única $\forall\ \beta \in R,\ \beta \neq -4$.

Si $\beta\neq -4$, de la última matriz se tiene el sistema equivalente

$$x+y+z=6$$
$$y+3z=10$$
$$(4+\beta)z=0$$

cuya solución es

$$x=-4,\quad y=10,\quad z=0$$

\- -

Sistemas homogéneos.

A los sistemas de ecuaciones lineales de la forma

$$a_{11}\ x_1\ +a_{12}\ x_2\ +\ \ldots\ +\ a_{1n}\ x_n\ =\ 0$$
$$a_{21}\ x_1\ +a_{22}\ x_2\ +\ \ldots\ +\ a_{2n}\ x_n\ =\ 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{m1}\ x_1\ +a_{m2}\ x_2\ +\ \ldots\ +\ a_{mn}\ x_n\ =\ 0$$

Se les llama sistemas homogéneos.

La representación matricial de un sistema homogéneo es

$A\bar{x}=0$ (donde 0 es la matriz nula de orden mx1)

Estos sistemas son siempre compatibles puesto que admiten la solución

$$x_1=x_2=\ldots=x_n=0$$

llamada solución trivial. Además, en un sistema homogéneo se tiene siempre que

$$R(A)=R(A,\bar{b})$$

puesto que agregando una columna de ceros no puede elevarse el rangon de una matriz.

Si $R(A)=n$, el sistema solo admite la solución trivial ya que la solución de la ecuación

$$A\bar{x}=0$$

es $\quad x=A^{-1}0=0.$

Si $R(A)<n$, el sistema es indeterminado y admite otras soluciones además de la trivial, las cuales pueden obtenerse mediante cualquiera de los procedimientos vistos anteriormente.

IV. 6. DETERMINANTES.

Consideremos el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{matrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{matrix}\right\} \dots (17)$$

cuya matriz de coeficientes es

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Para eliminar x_2 por sustracción multipliquemos la primera ecuación por a_{22} y la segunda por a_{12}, con lo que resulta el sistema equivalente.

$$a_{11}a_{22}x_1+a_{12}a_{22}x_2=a_{22}b_1$$
$$a_{12}a_{21}x_1+a_{12}a_{22}x_2=a_{12}b_2$$

restando la segunda ecuación de la primera

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=a_{22}b_1-a_{12}b_2$$

si $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \quad \dots (18)$$

En forma similar podemos obtener

$$x_2=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \quad \dots (19)$$

Sustituyendo en las ecuaciones (17), los valores de x_1 y x_2 dados por las expresiones (18) y (19), puede comprobarse fácilmente que se trata de una solución.

El común denominador de las expresiones (18) y (19) está expresado en términos de los elementos de la matriz A de coeficientes. A este número se le conoce como determinante de la matriz A y se le representa con det (A). Se dice que es un determinante de segundo orden, por ser la matriz de orden 2.

Para designar al determinante de la matriz A se emplea la siguiente notación

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \dots\dots (20)$$

donde hemos reemplazado los paréntesis rectangulares por barras verticales para distinguir al determinante de la matriz. Es importante subrayar que, mientras que la matriz es un arreglo de números, el determinante es un número perfectamente definido por la matriz cuadrada.

Por ejemplo

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}=(-2)(5)-(3)(-1)=-10+3=-7$$

Los numeradores de las expresiones (18) y (19) tienen la misma forma que el denominador, o sea, también son determinantes de segundo orden.

De acuerdo con la expresión (20) que define al determinante de segundo orden, podemos escribir

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

$$x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \quad \dots\dots$$

El numerador de la primera expresión es el determinante de una matriz que se obtiene a partir de la matriz A, sustituyendo la columna de coeficientes de x_1 por el vector de términos independientes. El numerador de la segunda expresión es el determinante de otra matriz, que se obtiene también a partir de A, reemplazando ahora la columna de coeficientes de x_2 por el vector de términos independientes.

A la regla sugerida por estas expresiones para resolver un sistema de ecuaciones se le conoce como regla de Cramer y obviamente es aplicable siempre y cuando det (A) $\neq 0$

Consideremos ahora el sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{array}\right\} \ldots\ldots \quad (21)$$

cuya matriz de coeficientes es

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Mediante un proceso similar al empleado para el sistema (17), encontramos que los valores de las incógnitas que satisfacen el sistema son

$$x_1=\frac{b_1a_{22}a_{33}+a_{13}b_2a_{32}+a_{12}a_{23}b_3-a_{13}a_{22}b_3-b_1a_{23}a_{32}-a_{12}b_2a_{33}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}} \quad (22)$$

$$x_2=\frac{a_{11}b_2a_{33}+a_{13}a_{21}b_3+b_1a_{23}a_{31}-a_{13}b_2a_{31}-a_{11}a_{23}b_3-b_1a_{21}a_{33}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}} \quad (23)$$

$$x_3=\frac{a_{11}a_{22}b_3+b_1a_{21}a_{32}+a_{12}b_2a_{31}-b_1a_{22}a_{31}-a_{11}b_2a_{32}-a_{12}a_{21}b_3}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}} \quad (24)$$

Al común denominador de las expresiones (22), (23) y (24) se le conoce como determinante de la matriz A y es un determinante de tercer orden. La expresión que define al determinante de tercer orden es;

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}- \\ -a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}. \end{array} \quad (25)$$

Por ejemplo

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -4 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} \begin{array}{l} =(1)(5)(0)+(0)(2)(1)+(-3)(-4)(-2)-(-3)(5)(1)- \\ -(0)(-4)(0)-(1)(2)(-2)=0+0-24+15-0+4=-5 \end{array}$$

De acuerdo con la expresión (25), podemos escribir la solución del sistema como sigue

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

$$x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

$$x_3=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

con lo que resulta lógico tratar de generalizar la regla de Cramer para el caso de un sistema de n ecuaciones con n incógnitas. Sin embargo, requerimos de una definición para el determinante de orden n.

Definición de determinante.

Queremos generalizar la definición de determinante para un n arbitrario, en base a las expresiones (20) y (25) que definen a los determinantes de orden 2 y 3, respectivamente.

Sin embargo, no es posible hacer esto del mismo modo (es decir, resolviendo en forma general un sistema de ecuaciones lineales), pues a medida que aumenta n, los cálculos se hacen más complicados y, siendo n arbitrario, son prácticamente irrealizables.

Estableceremos una ley general examinando los determinantes de segundo y tercer orden, y tomaremos ésta como definición para el determinante de orden n. Antes, definiremos los conceptos de permutación y clase de una permutación que necesitaremos para ello.

Las permutaciones de los n números del conjunto {1,2,3, ...,n} son las diferentes maneras en que pueden ser arreglados.

Por ejemplo, las permutaciones de los números 1,2,3, son los arreglos

1, 3, 2
2, 3, 1
3, 2, 1
1, 2, 3
2, 1, 3
3, 1, 2

El conjunto de todas las permutaciones de n números, está formado por n! arreglos o permutaciones y se representa por S_n.

Llamaremos permutación principal a aquella en la que los números aparecen en el orden natural.

En el ejemplo anterior tenemos 3!=6 permutaciones, donde la permutación principal es 1, 2, 3.

Consideremos una permutación arbitraria $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ de los números 1, 2, ..., n. Diremos que dicha permutación es de clase par o impar según exista un número par o impar de inversiones en el orden natural, es decir; parejas (α_l, α_k) tales que α_l precede a α_k en la permutación y $\alpha_k<\alpha_l$. A la permutación principal le asignaremos la clase par.

Para las permutaciones del ejemplo tenemos que:

1, 3, 2 es de clase impar ya que existe una pareja, la pareja (3, 2), tal que 3 precede a 2 en la permutación y 2<3.

2, 3, 1 es de clase par ya que existen dos parejas, (2,1) y (3,1), tales que 2 precede a 1 y 1<2; 3 precede a 1 y 1<3

3, 2, 1 es de clase impar ya que existen tres parejas, (3,2), (3,1) y (2,1), tales que 3 precede a 2 y 2<3; 3 precede a 1 y 1<3; 2 precede a 1 y 1<2.

1, 2, 3 es de clase par (por definición).

Procediendo en forma análoga vemos que:

2, 1, 3 es de clase impar.

3, 1, 2 es de clase par.

Recordando la expresión que define al determinante de 2o. orden

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

observamos que:

a) El determinante es la suma algebraica de dos (2!) productos.

b) Cada producto tiene dos factores.

c) En cada producto hay elementos de todos los renglones (y uno sólo de cada renglón).

d) En cada producto hay elementos de todas las columnas (y uno sólo de cada columna).

e) Si los elementos se escriben de tal manera que los primeros índices formen una permutación principal, se antepone un signo + al producto en que los segundos índices forman una permutación de clase par y un signo - al producto en que los segundos índices forman una permutación de clase impar.

Recordando la expresión que define al determinante de 3er. orden:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}- -a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32} \quad \ldots\ldots(25)$$

observamos que:

a) El determinante es la suma algebraica de seis (3!) productos.

b) Cada producto tiene 3 factores

c) En cada producto hay elementos de todos los renglones (y uno sólo de cada renglón).

d) En cada producto hay elementos de todas las columnas (y uno sólo en cada columna).

e) Si los elementos se escriben de tal manera que los primeros índices formen una permutación principal, se antepone un signo + a los productos en que los segundos índices forman una permutación de clase par y un signo - a los productos en que los segundos índices forman una permutación de clase impar.

Generalizando, para el determinante de orden n se tendrá:

a) El determinante es la suma algebraica de n! productos.

b) Cada producto tiene n factores.

c) En cada producto hay elementos de todos renglones (y uno sólo de cada renglón).

d) En cada producto hay elementos de todas las columnas (y uno sólo de cada columna).

e) Si los elementos se escriben de tal manera que los primeros índices formen una permutación principal, se antepone un signo + a los productos en que los segundos índices forman una permutación de clase par y un signo - a los productos en que los segundos índices forman una permutación de clase impar.

Establezcamos ahora la ley que define al determinante de orden n:

Consideremos la matriz cuadrada de orden n

$$A= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

y un producto de n de sus elementos

$$a_{1\alpha_1} \quad a_{2\alpha_2} \quad \cdots \quad a_{n\alpha_n}$$

tomados de tal manera que haya elementos de todos sus renglones (y uno sólo de cada renglón), y que haya elementos de todas sus columnas (y uno sólo de cada columna).

Los factores de este producto están ordenados de tal modo que los primeros índices forman una permutación principal. La sucesión de los segundos índices forman una permutación.

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$

de los números 1, 2, ... n. Para esta permutación definiremos

$\varepsilon = +1$ si la permutación es de clase par

$\varepsilon = -1$ si la permutación es de clase impar

Formemos el producto provisto de signo

$$\varepsilon \; a_{1\alpha_1} \quad a_{1\alpha_2} \quad \ldots \quad a_{n\alpha_n} \qquad (26)$$

Como el conjunto S_n de todas las permutaciones de n números está formada por n! arreglos, podemos formar n! productos del tipo (26).

El determinante de la matriz A se define como la suma de estos n! productos dotados de signo (a los cuales se les llama términos del determinante).

Definición.

$$\boxed{\det\,(A) = \sum_{S_n} \varepsilon \quad a_{1\alpha_1} \quad a_{2\alpha_2} \quad \ldots \quad a_{n\alpha_n}} \; \ldots\ldots(27)$$

De la definición anterior se concluye que:

1) Para obtener todos los términos del desarrollo de un determinante, basta con escribir el término principal (multiplicando los elementos sobre la diagonal principal) y a partir de éste obtener todos los demás dejando fijos los primeros índices y permutando de todas las maneras posibles los segundos índices.

2) Como de los segundos índices hay n! permutaciones, la mitad de clase par y la mitad de clase impar, habrá n! términos en el desarrollo del determinante, la mitad con signo + y la mitad con signo -.

3) Los signos + y - se asignan según la permutación de los segundos índices sea de clase par o impar.

Ejemplo IV. 25.

Obtener el desarrollo del determinante de 2o. orden a partir de la definición

$$\det\,(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

De acuerdo con lo anterior, el término principal será

$a_{11} \quad a_{22}$

Dejamos fijos los primeros índices y permutamos los segundos de todas las maneras posibles:

12	clase par	→	+
21	clase impar	→	-

El desarrollo será entonces:

$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

Ejemplo IV. 26.

Obtener el desarrollo del determinante de 3er. orden, a partir de la definición

$$\det\,(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Término principal: $a_{11} \quad a_{22} \quad a_{33}$.

Dejando fijos los primeros índices, las permutaciones de los segundos índices son:

1 2 3	clase par	→	+
1 3 2	clase impar	→	-
2 1 3	clase impar	→	-
2 3 1	clase par	→	+
3 1 2	clase par	→	+
3 2 1	clase impar	→	-

el desarrollo será:

$$\det(A)=a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-$$
$$-a_{13}a_{22}a_{31}$$

\- -

Cálculo de determinantes.

Si (M) representa al conjunto de las matrices cuadradas de orden n con elementos en C, podemos definir la función

$\det: (M) \rightarrow C$

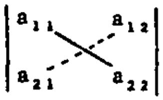
que asigna a la matriz $A \in (M)$ el escalar específico $\det(A) \in C$.

Tal función queda definida por la expresión (27) que representa una suma de n! productos de elementos de A.

El empleo de dicha expresión para el cálculo de determinantes no se acostumbra en la práctica por resultar demasiado laborioso, a cambio se han desarrollado métodos más sencillos que conducen a los mismos resultados. Tres de dichos métodos trataremos en esta sección.

Regla de Sarrus.

La regla de Sarrus indica que para obtener el valor de un determinante de 2o. orden, al producto de los elementos de la diagonal principal (lineas llenas) se resta el producto de los elementos de la "diagonal secundaria" (lineas punteadas). Así tendremos que



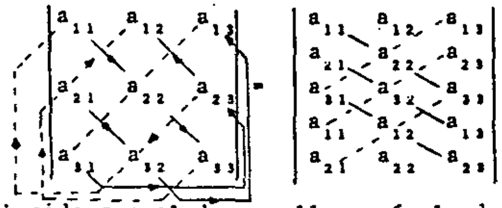
$$=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

que coincide con el desarrollo según la definición.

por ejemplo

$$\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = (3)(-3)-(-5)(4)=-9+20=11$$

La regla de Sarrus indica que para obtener el valor de un determinante de 3er. orden, a los productos de los elementos de la diagonal principal y paralelas a ella (lineas llenas) se restan los productos de los elementos de la diagonal secundaria y paralelas a ella (líneas punteadas).. Para observar mejor éstos productos, se pueden escribir el primero y segundo renglón inmediatamente después del tercero. Así tenemos que:



$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+$$
$$+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22}a_{31}-$$
$$-a_{23}a_{32}a_{11}-a_{33}a_{12}a_{21}$$

que coincide con el desarrollo según la definición.

Por ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 2 \\ -3 & -5 & 4 \end{vmatrix} = (3)(5)(4)+(1)(-5)(4)+(-3)(2)(2)-(4)(5)(-3)-$$
$$-(2)(1)(4)-(3)(-5)(2)=110$$

Vale la pena subrayar que la regla de Sarrus se ha enunciado exclusivamente para los determinantes de 2o. y 3er. orden.

Es frecuente tender a generalizar esta regla para calcular determinantes de orden mayor, sin embargo; el estudiante puede fácilmente demostrar que al aplicar la regla de Sarrus a un determinante de orden superior al tercero, se obtiene un desarrollo que no coincide con la definición. El método que veremos a continuación es aplicable a un determinante de cualquier orden.

Desarrollo por cofactores.

Volviendo al ejemplo IV. 26, el resultado obtenido para el determinante de 3er. orden según la definición es:

$$\det(A)=a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+$$
$$+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

factorizando los elementos del primer renglón tenemos:

$$\det(A)=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})$$
$$+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})$$

de acuerdo con la definición de determinante de 2o. orden podemos escribir:

$$\det(A)=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

para determinar los signos de los términos hacemos:

$$\det(A)=(-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+(-1)^{1+2}a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+$$
$$+(-1)^{1+3}a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \quad \ldots .(27)$$

donde los exponentes de (-1) son la suma de los índices del elemento del primer renglón.

A la expresión (27) se le llama desarrollo por cofactores del determinante respecto a su primer renglón.

Se recomienda al estudiante hacer el desarrollo del mismo determinante respecto a alguno de los renglones o columnas restantes. Es obvio que el resultado de ambos desarrollos es numéricamente igual a det(A).

En la expresión (27) puede observarse que, los determinantes que multiplican a los elementos del primer renglón, pueden obtenerse eliminando en el determinante original, el renglón y la columna donde se encuentra el elemento correspondiente.

Por ejemplo, el determinante que multiplica al elemento a_{12} puede obtenerse suprimiendo el primer renglón y la segunda columna del determinante original

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \boxed{a_{12}} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

a este determinante se le llama el menor de a_{12} y lo representaremos con M_{12}.

Generalizando, daremos la siguiente

Definición.

Se llama menor del elemento a_{ij} de un determinante de orden n, al determinante de orden n-1 que se obtiene al suprimir, en el determinante original, el renglón i y la columna j.

Al menor de a_{ij} lo representaremos con M_{ij}.

De acuerdo con esta notación, la expresión (27) puede escribirse como

$$\det(A)=(-1)^{1+1}a_{11}M_{11}+(-1)^{1+2}a_{12}M_{12}+(-1)^{1+3}a_{13}M_{13}.$$

o bien, en forma condensada

$$\det(A)=\sum_{j=1}^{3}(-1)^{1+j}\,a_{1j}\,M_{1j}$$

Si elegimos el renglón k, para desarrollar por cofactores el determinante de 3er. orden, dicho desarrollo está expresado por

$$\det(A)=\sum_{j=1}^{3}(-1)^{k+j}a_{kj}\,M_{kj}$$

y si elegimos la columna k, por

$$\det(A)=\sum_{i=1}^{3}(-1)^{i+k}a_{ik}M_{ik}$$

En general. Si A es una matriz cuadrada de orden n:

$$\det(A)=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{k+j}a_{kj}M_{kj} \quad \ldots\ldots \quad (28)$$

$$\det(A)=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+k}a_{ik}M_{ik} \quad \ldots\ldots \quad (29)$$

donde $k \in N$ y $1<k<n$

<u>Definición.</u>

Llamamos cofactor del elemento a_{ij} al determinante $(-1)^{i+j}M_{ij}$, al que representamos con A_{ij}.

Con ayuda de esta definición, el método sugerido por las expresiones (28) y (29) (al que se llama "método de desarrollo por cofactores") puede enunciarse como sigue:

El valor de un determinante puede obtenerse efectuando la suma de los productos de los elementos de una cualquiera de sus líneas (renglón o columna) por sus respectivos cofactores.

Ejemplo IV. 27

Calcular el determinante de la matriz A por el método de desarrollo por cofactores.

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{bmatrix}$$

Solución

Primero, debemos elegir un renglón o una columna para efectuar el desarrollo. Analizando la matriz, vemos que es conveniente elegir alguna de las siguientes líneas:

2o. Renglón

3er. Renglón

1a. Columna

3a. Columna

ya que cada una de ellas tiene un elemento nulo y el producto de dicho elemento por su respectivo cofactor será igual a cero. Esto simplifica el trabajo al cálculo de sólo tres determinantes de 3er. orden.

Desarrollando por cofactores según el 2o. renglón:

$\det(A)=1A_{21}-3A_{22}+0A_{23}-6A_{24}$

Los cofactores A_{ij} se obtienen como

$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$

Desarrollando por la regla de Sarrus los menores M_{21}, M_{22} y M_{24} obtenemos:

$$M_{21}=\begin{vmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}=-6-40-14+4+60+14=18 \quad \therefore\ A_{21}=-18$$

$$M_{22}=\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -7 & 6 \end{vmatrix}=-12-10+1+28=7 \quad \therefore\ A_{22}=7$$

$$M_{24}=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & -7 \end{vmatrix}=-28-1+10+8=-11 \quad \therefore\ A_{24}=-11$$

finalmente

$\det(A)=-18-3(7)-6(-11)=27$

\- -

En el caso general, el desarrollo por cofactores transforma el problema de calcular un determinante de orden n en el de calcular n determinantes de orden n-1. Cada uno de éstos determinantes puede desarrollarse a su vez por cofactores, obteniéndose menores de orden n-2 y así sucesivamente. Se acostumbra continuar el proceso hasta obtener menores de orden 3 o de orden 2, los cuales pueden resolverse empleando la regla de Sarrus.

Propiedades elementales.

Los determinantes tienen ciertas propiedades que es útil conocer. Son de interés principalmente las condiciones bajo las cuales un determinante es nulo; así como las transformaciones que, efectuadas en la matriz, no alteran el valor del determinante o le producen una alteración fácilmente calculable.

Estas propiedades, llamadas propiedades elementales, se demuestran a partir de la definición(2) y son las que a continuación se enlistan. En lo que sigue, por una linea deberá entenderse un renglón o una columna.

1) Si una línea está constituida por ceros, el determinante es nulo.
2) Si dos líneas paralelas son proporcionales, el determinante es nulo. (En particular, si dos líneas paralelas son iguales, el determinante es nulo).
3) Si se intercambian dos líneas paralelas cualesquiera, el determinante sólo cambia de signo.
4) Si se multiplican todos los elementos de una linea por un número k, el valor del determinante queda multiplicado por k.
5) El valor del determinante no cambia, si se intercambian renglones por columnas y viceversa. Es decir:

$$\det(A)=\det(A^T)$$

6) El valor de un determinante no cambia, si a los elementos de una de sus líneas, se suman los elementos correspondientes a otra línea paralela multiplicados por un número k.

Un método de condensación.

El método de desarrollo por cofactores, aunque aplicable a determinantes de cualquier orden, puede resultar en ocasiones demasiado laborioso. Si regresamos al ejemplo IV. 27, vemos que al elegir el 2o. renglón en lugar del 1o., nos hemos evitado el cálculo de un determinante de 3er. orden.

Si en una línea cualquiera de un determinante, todos los elementos excepto uno fueran nulos, sin duda escogeríamos dicha línea para efectuar el desarrollo. El método que propondremos a continuación se basa en esta idea y consiste en:

a) Elegir la línea que contenga el mayor número de ceros.
b) Aplicar reiteradamente la propiedad (6) hasta reducir a cero todos los elementos de dicha línea excepto uno. (Si todos los elementos se reducen a cero, el determinante es nulo por la propiedad (1)).
c) Desarrollar por cofactores según dicha línea.
d) Repetir el proceso hasta obtener un determinante de segundo o tercer orden.

Ejemplo IV. 28

Calcular el determinante de la matriz A empleando el método de condensación.

---

(2) El estudiante puede consultar la demostración en la referencia 2 pags. 35 a 39.

$$A=\begin{vmatrix}1&1&2&-1&4\\3&2&1&0&-1\\1&5&2&1&0\\4&2&1&-1&2\\1&2&4&1&1\end{vmatrix}$$

$$\det(A)=\begin{array}{c}\begin{vmatrix}1&1&2&-1&4\\3&2&1&0&-1\\1&5&2&1&0\\4&2&1&-1&2\\1&2&4&1&1\end{vmatrix}\\ \begin{matrix}(3)&(2)&(1)&&\overset{*}{\uparrow}\end{matrix}\end{array}=\begin{vmatrix}13&9&6&-1&4\\0&0&0&0&-1\\1&5&2&1&0\\10&6&3&-1&2\\4&4&5&1&1\end{vmatrix}$$

Eligiendo el 2o. renglón, la columna * que sirve como pivote se ha multiplicado por 3, 2 y 1 se ha sumado a las columnas que se indican.

Desarrollando por cofactores según el segundo renglón, tenemos:

$$\det(A)=-(-1)\begin{vmatrix}13&9&6&-1\\1&5&2&1\\10&6&3&-1\\4&4&5&1\end{vmatrix}\begin{matrix}(1)\\ * \leftarrow\\(1)\\(-1)\end{matrix}=-(-1)\begin{vmatrix}14&14&8&0\\1&5&2&1\\11&11&5&0\\3&-1&3&0\end{vmatrix}$$

Se ha aplicado nuevamente el método eligiendo ahora la cuarta columna y tomando el segundo renglón * como pivote. Desarrollando ahora por cofactores según la cuarta columna, tendremos:

$$\det(A)=-(-1)(1)\begin{array}{c}\begin{vmatrix}14&14&8\\11&11&5\\3&-1&3\end{vmatrix}\\ \begin{matrix}(3)&\overset{*}{\uparrow}&(3)\end{matrix}\end{array}=-(-1)(1)\begin{vmatrix}56&14&50\\44&11&38\\0&-1&0\end{vmatrix}$$

Desarrollando nuevamente por cofactores según el 3er. renglón:

$$\det(A)=-(-1)(1)(-(-1))\begin{vmatrix}56&50\\44&38\end{vmatrix}$$

Desarrollando este último determinante por la regla de Sarrus:

$$\det(A)=-(-1)(1)(-(-1))((56)(38)-(50)(44))=-72$$

Cálculo de la inversa por medio de la adjunta.

Con la ayuda de los determinantes, podemos obtener la inversa de una matriz empleando un método diferente al expuesto en la sección IV. 3. Antes daremos la siguiente

Definición.

Se llama matriz adjunta de la matriz cuadrada A, a la matriz que se obtiene de A^T al sustituir sus elementos por sus respectivos cofactores.

A la matriz adjunta de A la representaremos con A^*. Entonces, si A es la matriz cuadrada de orden n

$$A=(a_{ij})$$

la transpuesta de A es

$$A^T=(a_{ji})$$

y la adjunta de A es

$$A^*=(A_{ji})$$

Ejemplo IV. 29

Obtener la adjunta de la matriz

$$A=\begin{bmatrix}1&0&4\\-1&2&3\\3&1&-2\end{bmatrix}$$

Obtengamos primero la transpuesta

$$A^{T}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

La adjunta es:

$$A^{*}=\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

desarrollando los determinantes obtenemos finalmente:

$$A^{*}=\begin{bmatrix} -7 & 4 & -8 \\ 7 & -14 & -7 \\ -7 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

- -

Se puede demostrar que la inversa de una matriz A, puede obtenerse mediante la relación

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\,A^{*} \quad \ldots\ldots(30)$$

de esta relación vemos que

$$\exists\ A^{-1} \Longleftrightarrow \det(A)\neq 0.$$

En consecuencia:

1) Si A es una matriz cuadrada de orden n, no singular, las siguientes afirmaciones son equivalentes:
   - a) $\exists\ A^{-1}$
   - b) $R(A)=n$
   - c) $\det(A)\neq 0$
2) Si A es una matriz cuadrada de orden n, singular, las siguientes afirmaciones son equivalentes:
   - a) $\nexists\ A^{-1}$
   - b) $R(A) < n$
   - c) $\det(A)=0$

Empleando la relación (30), podemos obtener la inversa de la matriz

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

del ejemplo IV. 29

En efecto, como

$$\det(A)=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}=-35\neq 0$$

existe A^{-1}.

Del resultado del ejemplo IV. 29

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\quad A^{*}=-\frac{1}{35}\quad\begin{bmatrix} -7 & 4 & -8 \\ 7 & -14 & -7 \\ -7 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Para comprobar efectuemos el producto $A\,A^{-1}$:

$$A\,A^{-1}=-\frac{1}{35}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -7 & 4 & -8 \\ 7 & -14 & -7 \\ -7 & -. & 2 \end{bmatrix}=-\frac{1}{35}\begin{bmatrix} -35 & 0 & 0 \\ 0 & -35 & 0 \\ 0 & 0 & -35 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- -

Regla de Cramer.

Otra de las aplicaciones de los determinantes, la encontramos en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales. La definición de determinante dada por la expresión (27), permite generalizar la regla de Cramer (3) enunciada al principio de esta -

---

(3) La demostración de esta afirmación puede consultarse en la referencia 2 pags. 50 a 54.

sección como sigue:

Sea el sistema de n ecuaciones con n incógnitas

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=b_n$$

cuya matriz de coeficientes es

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Siempre y cuando det(A)≠0, el valor de las incógnitas x_i que satisfacen al sistema está dado por

$$x_i=\frac{\det(Ai)}{\det(A)}$$

donde A_i es la matriz que se obtiene, a partir de A, reemplazando la columna formada con los coeficientes de x_i por el vector de términos independientes.

Ejemplo IV. 30.

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones empleando la regla de Cramer

$$x_1+2x_2+x_3=2$$
$$3x_1+x_2-2x_3=1$$
$$4x_1-3x_2-x_3=3$$

Solución

$$\det(A)=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 4 & -3 & -1 \end{vmatrix}=-1-16-9-(4-6+6)=-26-4=-30$$

$$\det(A_1)=\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & -3 & -1 \end{vmatrix}=-30$$

$$\det(A_2)=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 4 & 3 & -1 \end{vmatrix}=0$$

$$\det(A_3)=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & 3 \end{vmatrix}=-30$$

Por lo tanto

$$x_1=\frac{-30}{-30}=1$$

$$x_2=\frac{0}{-30}=0$$

$$x_3=\frac{-30}{-30}=1$$

\- -

Es importante notar que este método sólo se aplica directamente en los casos en los que m=n=r.

Sin embargo, si recordamos lo expuesto en la sección -- IV. 5, podemos siempre reducir un sistema arbitrario a un nuevo sistema en donde m=n=r y en este aplicar la regla de Cramer.

Ejemplo IV. 31

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones aplicando la regla de Cramer.

$$x_1+x_2+x_3=3$$

$$-x_1+x_2+2x_3=4$$

Solución

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 7 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{7}{2} \end{array}\right]$$

$R(A)=R(A,\bar{b})=2=r$ el sistema es compatible

$2<3$, $(r<n)$ el sistema es indeterminado

Trasladando a los segundos miembros la incógnita x_3 y asignando el valor de k obtenemos

$$x_1+x_2=3-k$$

$$-x_1+x_2=4-2k$$

$$\det(A)=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=2$$

$$\det(A_1)=\begin{vmatrix} 3-k & 1 \\ 4-2k & 1 \end{vmatrix}=-1+k$$

$$\det(A_2)=\begin{vmatrix} 1 & 3-k \\ -1 & 4-2k \end{vmatrix}=7-3k$$

$$\therefore \quad x_1=\frac{-1+k}{2}$$

$$x_2=\frac{7-3k}{2}$$

$$x_3=k \qquad \forall k \in R.$$

Una solución particular es por ejemplo

$$x_1=-\frac{1}{2}$$

$$x_2=\frac{7}{2}$$

$$x_3=0$$

la cual se obtuvo haciendo k=0

\- -

BIBLIOGRAFIA

1) Pierce Beaumont.
The algebraic foundations of Mathematics.
Editorial Addison Wesley. 1963.

2) A. G. Kurosch
Curso de Algebra Superior
Editorial MIR. Moscú, 1968

3) Franz E. Hohn
Algebra de Matrices
Editorial Trillas, S. A. 1970

DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.

MATEMATICAS APLICADAS A LA INGENIERIA ESTRUCTURAL

VALORES Y VECTORES CARACTERISTICOS

MARZO, 1985

5.1 Valores y vectores característicos

Definición. Un escalar λ es un valor característico de una matriz A de orden nxn si existe un vector x de n componentes distinto de cero tal que

$$Ax = \lambda x$$

El vector x se denomina vector característico de A.

La interpretación geométrica de un vector característico es que la aplicación de la matriz A en x, únicamente cambia de longitud (y quizá el sentido) del vector x. Conviene señalar que dado un valor característico λ, la ecuación

$$Ax = \lambda x$$

es equivalente al sistema homogéneo

$$[A - \lambda I]x = 0$$

cuya solución $x \neq 0$ existe sí y sólo sí el determinante de la matriz $[A - \lambda I]$ es igual a cero. Por lo que una condición necesaria y suficiente para que λ sea valor característico es que

$$\det [A - \lambda I] = 0$$

denominada la ecuación característica de A y

$$P(\lambda) = \det [A - \lambda I]$$

es conocido como el polinomio característico de A

La manera de determinar los valores característicos de una matriz A es por medio de la solución de la ecuación característica det $[A - \lambda I] = 0$. Equivalentemente dado que el valor del determinante de $[A - \lambda I]$ es un polinomio de grado n en la variable λ lo que se desea es determinar las raices de dicho polinomio, las cuales no son necesariamente distintas y al menos una existe.

Proposición 1. Toda matriz A de orden nxn tiene al menos un valor característico y un correspondiente vector característico.

Prueba. El polinomio característico de A es de grado n en la variable λ con coeficiente de λ^n igual a $(-1)^n$. El polinomio tiene al menos una raíz (posiblemente compleja) si $n>1$, debido al teorema fundamental del álgebra. Asimismo, podemos expresar a $p(\lambda)$ en la forma

$$p(\lambda) = (\lambda_1-\lambda)\ (\lambda_2-\lambda)\ldots\ldots(\lambda_n-\lambda)$$

donde λ_i $i=1,\ldots,n$ denota las raíces (no necesariamente distintas) del polinomio. Usando estas raices ó valores característicos podemos determinar el correspondiente vector característico y la prueba termina.

Ejemplo 1. Considere la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

cuyo polinomio característico es

$$\det [A - \lambda I] = (3-\lambda)\ (3-\lambda)\ -1 = \lambda^2 - 6\lambda + 8$$

que puede ser factorizado como $p(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda-4)$. Las raices de este polinomio son $\lambda_1=2$ y $\lambda_2=4$. Usando el valor característico $\lambda_1=2$ se puede determinar el vector característico de la ecuación homogenea $[A-\lambda_1 I]\ x=0$. Específicamente sea

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

cuya solución es $x_1 = -x_2$ y una forma general del vector característico es $x = [a, -a]^t$ donde $a \neq 0$: Una solución particular es $x = [1,-1]^t$. Si $\lambda_2=4$ la ecuación homogenea es

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

cuya solución general es de la forma $x= [b, b]^t$ donde $b=0$. Una solución particular es $x= [1, 1]$.

5.2 Matriz modal.

Dada una matriz A de orden nxn existe al menos un valor característico. De hecho la matriz A tiene n valores característicos pero puede darse el caso de que todos ellos sean iguales. Consideremos ahora el caso en que algunos de los valores característicos sean distintos. En tal caso se tiene relación de independencia lineal entre los correspondientes vectores característicos.

Proposición 2. Sean $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ valores característicos distintos de una matriz A. Entonces, los vectores característicos x_1, $x_2, \ldots, x_m$ son linealmente independientes.

Prueba. Considere la ecuación

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 + \ldots, + \alpha_m x_m = 0$$

Defina la transformación lineal $P_1(A) = \prod_{i=2}^{n} (A-\lambda_i I)$ y note que su aplicación a la ecuación anterior implica $\alpha_1=0$ pues

$$P_1(A)x_1 = \prod_{i=2}^{n} (\lambda_1 - \lambda_j)x_1 \neq 0$$

dado que $P_1(A)x_j=0$ para toda j=2,...,m. Repitiendo este proceso con $P_2(A), \ldots, P_m(A)$ se demuestra que todos los escalares α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ son iguales a cero y por lo tanto los vectores característicos son linealmente independientes.

base es

$$\Lambda = M^{-1}AM$$

donde Λ es una matriz diagonal cuyos elementos son los valores característicos de A, esto es,

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & \cdot \\ & & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Teorema [illegible]. Toda matriz con valores característicos distintos puede ser expresada en forma diagonal por medio de un cambio de base. Especificamente, asociada a cada matriz A de orden nxn con valores característicos distintos se tiene que

$$\Lambda = M^{-1}AM$$

donde M es la matriz modal y A es matriz diagonal.

Prueba. Se sigue de la discusión anterior.

Ejemplo. Considere la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

cuyos valores característicos son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 4$. Los vectores característicos son

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \\ -1 \end{bmatrix} \quad ; \quad e_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \\ 2 \end{bmatrix}$$

La matriz modal M y su inversa son

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad M^{-1} = (1/3) \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Entonces, la matriz diagonal Λ es

$$\Lambda = M^{-1}AM = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Vectores característicos izquierdos y derechos.

En la discusión de esta sección se ha descrito el concepto de vector característico derecho pues

$$Ax = \lambda x$$

involucra al vector x en el lado derecho de la matriz A. Sin embargo, también podemos hablar del vector característico izquierdo como

$$f^t A = \lambda f^t$$

Ahora bien, esta ecuación puede escribirse como

$$A^t f = \lambda f$$

De donde se observa que el vector característico izquierdo de A es, simplemente, un vector característico ordinario de A^t. Sin embargo, existen aplicaciones en que es más sencillo manejar vectores característicos izquierdos y derechos que la transpuesta de A. Conviene también señalar que debido a la identidad

$$\det\left[A - \lambda I\right] = \det\left[A^t - \lambda I\right]$$

los valores característicos izquierdos y derechos son iguales.

Ejemplo. Considere la matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Se ha demostrado que $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 4$ son valores característicos y que los vectores característicos derechos son

$$e_1^t = \left[1, -1\right] \quad ; \quad e_2^t = \left[1, 2\right]$$

Asimismo, puede verificarse que los vectores característicos izquierdos son dados por

$$f_1 = \left[2, -1\right] \quad ; \quad f_2 = \left[1, 1\right]$$

Existe una relación importante entre vectores característicos izquierdos y derechos que se resume en:

Teorema 3. Sea A una matriz cuadrada y suponga que λ y μ donde $\lambda \neq \mu$ son valores característicos de A. Entonces el vector característico derechc x asociado con λ es ortogonal al vector característico izquierdo f asociado con μ.

Prueba. Observe que

$$Ax = \lambda x \qquad ; \qquad f^t A = \mu f^t$$

premultiplicando por f^t y posmultiplicando por x, las respectivas ecuaciones se tiene que

$$f^t Ax = \lambda f^t x \qquad ; \qquad f^t Ax = \mu f^t x$$

Restando las ecuaciones se tiene $0=(\lambda-\mu)f^t x$, pero puesto que $\lambda \neq \mu$ se implica que $f^t x=0$.

Corolario. Dados dos valores característicos distintos de una matriz, el vector característico izquierdo de un valor es ortogonal al vector característico derecho del otro.

Matrices simétricas

Propiedad 1. Si $A = A^t$ entonces $x^t Ax$ es real para todo vector x real.

Propiedad 2. Todo valor característico de una matriz simétrica es real

Propiedad 3. Si $A = A^t$ los vectores característicos, correspondientes a distintos valores característicos son ortogonales.

Propiedad 4. Si $A = A^t$ existe una matriz modular M tal que sus columnas son ortonormales y que

$$\Lambda = M^{-1}AM$$

donde Λ es una matriz diagonal cuyos elementos son valores característicos.

Matrices Hermitianas (A = A^H

Propiedad 1. Si $A = A^H$ entonces x^HAx es real para todo vector x real o complejo.

Propiedad 2. Todo valor característico de una matriz hermitiana es real.

Propiedad 3. Si $A = A^H$, los vectores característicos correspondientes a distintos valores característicos son ortogonales.

Propiedad 4. Si $A = A^H$, existe una matriz modular M tal que sus columnas son ortonormales y que

$$\Lambda = U^1AU$$

donde Λ es diagonal cuyos elementos son valores característicos.

1. Sean A y B matrices de orden 4x4. Suponga que las matrices C, D y E son de orden 4x1, 1x4 y 3x4, respectivamente. Determine el orden de las siguientes matrices (si estan definidas).

   a. $B + (CD)^2$
   b. EB^tE^t
   c. A^tBCD
   d. E^tEDC
   e. B^tDE
   f. C^tABD^t

2. Considere las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Efectúe las siguientes operaciones (si estan definidas)

   a. A^6
   b. BAC
   c. ABC
   d. $2BB^t + AA^t$
   e. B^tAB
   f. BCC^tB^t

3. Considere las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a. ¿Es $(C^2)^t$ matriz triangular inferior?

b. ¿Es CBC matriz triangular inferior?

c. ¿Es A^2B matriz diagonal?.

4. Sea A matriz de orden 6x6 y suponga que las hileras 3 y 5 de A consisten de elementos iguales a cero. Sea B matriz de orden 6x5

a. ¿Es cierto que la tercera y quinta hilera de AB consisten de elementos cero?.

b. ¿Es cierto que BB^tA tiene la tercera y quinta hilera de elementos cero?.

5. Determine la matriz producto AB si

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ B_2 & B_3 \end{bmatrix}$$

donde

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \; A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} ; \; A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad B_3 = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

6. Resuelva el sistema de ecuaciones Lx = b

$$L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

7. Resuelva el sistema Ax = b si A = LU donde

$$L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Note que A esta expresada en la forma producto LU donde L es matriz triangular inferior y U matriz triangular superior. (Sugerencia. Resuelva primero Ly = b y despues Ux = y)

8. Resuelva el sistema de ecuaciones Ax = b si

$$A = \left[\begin{array}{ccc|cc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 2 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 4 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad b = \left[\begin{array}{c} 2 \\ 1 \\ 2 \\ \hline 3 \\ 1 \\ \hline 4 \\ -2 \\ -1 \end{array}\right]$$

SOLUCIÓN TAREA 1 CURSO INTRODUCTORIO Dr. Fuentes Maya

1. a matriz 4x4 b matriz 3x3 c matriz 4x4

   d-e NO DEFINIDAS f matriz 1x1

2.

a
$$A^6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

c
$$ABC = \begin{bmatrix} 8 & 14 \\ 3 & 7 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

d
$$2BB^t+AA^t = \begin{bmatrix} 10 & 5 & 8 \\ 5 & 35 & 12 \\ 8 & 12 & 10 \end{bmatrix}$$

f
$$BCC^tB^t = \begin{bmatrix} 40 & 52 & 48 \\ 52 & 74 & 64 \\ 48 & 64 & 58 \end{bmatrix}$$

e
$$B^tAB = \begin{bmatrix} 8 & 11 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$$

b
NO DEFINIDA

3. a SI b NO c NO

4. a SI b NO

5.

$$AB = \left[\begin{array}{c|c} A_1B_1+A_2B_2 & A_2B_3 \\ \hline A_3B_2 & A_3B_3 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|cc} 8 & 5 & 3 & 8 & 2 \\ 6 & 3 & 2 & 4 & 2 \\ 8 & 3 & 3 & 8 & 3 \\ \hline 10 & 3 & 4 & 4 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

6. X = [1/2, 7/4, -7/8, 29/8]

7. y = [1/2, 0, 0, 1/2] x = [11/24, -1/24, -1/24, 1/8]

8. x = [-4, 83/12, -35/4, 3/4, -5/4, 5, 0, -1].

1. Resuelva la ecuación matricial

$$AX - pq^t = BX$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -i \\ 0 & -i \end{bmatrix} ; \; B = \begin{bmatrix} -4 & 2+i \\ 0 & qi \end{bmatrix} ; \; p = \begin{bmatrix} 1+i \\ 2i \end{bmatrix} ; \; q = \begin{bmatrix} 3i \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. Resuelva la ecuación matricial

$$AX + B = C$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} ; \; B = \begin{bmatrix} i+1 & 2i \\ 4i & -i \end{bmatrix} ; \; C = \begin{bmatrix} 2i & i \\ 2 & i \end{bmatrix}$$

3. Determine la inversa izquierda y la inversa derecha (si existen) de las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \; ; \; B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4. Determine la inversa de la matriz

$$A = \left[\begin{array}{cc:cc} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hdashline 2 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

5. Determine la inversa de las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{bmatrix}$$

donde

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 9 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 9 & 9 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \ ; \ C_1 = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

6. En el estudio y manipulación de matrices existen tres operaciones, denominados elementales, que estan asociadas con las matrices elementales.

Definición. Las operaciones elementales en las hileras de una matriz son:

a. Intercambio de dos hileras
b. Multiplicar una hilera por un escalar distinto de cero
c. Multiplicar una hilera por un escalar y sumarla a otra

Definición. Las operaciones elementales en las columnas de una matriz son:

a. Intercambio de dos columnas

b. Multiplicar una columna por un escalar distinto de cero

c. Multiplicar una columna por un escalar y sumarla a otra

La colección de operaciones elementales en hileras y columnas se denominan operaciones matriciales elementales. Un aspecto importante de estas operaciones es que pueden ser realizadas por medio de la premultiplicación o posmultiplicación de la matriz original por una cierta matriz denominada elemental.

Definición. Una matriz E se dice matriz elemental sí resulta de efectuar una operación matricial elemental en la matriz identidad.

Las matrices elementales se denotan como:

E_{pq} = intercambio de hileras p y q

$E_p(\alpha)$ = multiplicación de la hilera de p por $\alpha \neq 0$

$E_{pq}(\beta)$ = multiplicación de la hilera p por β y sumarla a q.

Conviene señalar que si E es matriz elemental entonces EA es una operación hilera en A. Sin embargo AE (si está definida) es una operación columna en A. Note que AE_{pq} corresponde al intercambio de las columnas p y q de A y que $AE_p(\alpha)$ corresponde a la multiplicación por $\alpha \neq 0$ de la columna p de A.

Sin embargo $AE_{pq}(\beta)$ corresponde la multiplicación de la columna q por β y su correspondiente suma a la columna p.

En cada uno de los siguientes casos A = EB o A = BE donde E matriz elemental. Determine E.

a.
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

b.
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 7 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 & 2 \\ 6 & 8 & 6 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

c.
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 8 & 16 & 16 \end{bmatrix}$$

7. Sea $A(t) = [a_{ij}(t)]$ matriz mxn cuyos elementos son funciones diferenciables respecto a t. Se define la derivada de A(t), denotada $\frac{dA(t)}{dt}$, como la matriz mxn tal que

$$\frac{dA(t)}{dt} = \left[\frac{da_{ij}(t)}{dt} \right]$$

Algunas propiedades inmediatas de la derivada son:

a. $$\frac{d}{dt}[\alpha A(t)] = \alpha \frac{dA(t)}{dt}$$

b. $$\frac{d}{dt}[A(t) + B(t)] = \frac{dA(t)}{dt} + \frac{dB(t)}{dt}$$

c. $$\frac{d}{dt}[A(t) \quad B(t)] = \frac{dA(t)}{dt} B(t) + A(t) \frac{dB(t)}{dt}$$

Nota. En <u>a</u> se supone que A(t) y B(t) son matrices del mismo orden y en <u>c</u> que las matrices son conformables respecto a la multiplicación.

a. Determine la derivada de la matriz $2A(t) + A^2(t)$ si

$$A(t) = \begin{bmatrix} e^t & 2^t & 10 \\ 0 & t & 2t \\ 2 & 0 & t^2 \end{bmatrix}$$

b. Determine la derivada de la matriz $A(t)=PQ(t)P^{-1}$ donde

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad Q(t) = \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & t^2 \end{bmatrix}$$

8. Determine la forma escalon de los siguientes sistemas de ecuaciones

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 4 \\ 2x + ky + 6z &= 6 \\ -x + 3y + (k-3)z &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + y + z + w &= 2 \\ 4x + 4y + 4z + 2w &= 4 \\ 3x + y + 2z + w &= 1 \end{aligned}$$

SOLUCION TAREA 2 CURSO INTRODUCTORIO Dr. Fuentes Maya

1. $Ax - pq^t = BX \quad ; \quad X = (A-B)^{-1}pq^t$

$$X = \begin{bmatrix} \frac{-2121i}{40} & \frac{7+7i}{40} \\ -\frac{3}{5}i & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

2. $AX + B = C \quad ; \quad X = A^{-1}\,(C-B)$

$$X = \begin{bmatrix} 5+9i & 5i \\ -3+5i & -3i \end{bmatrix}$$

3. a. No existe inversa izquierda. La inversa derecha es:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \\ H_{31} & H_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$4H_{11} + 2H_{21} + H_{31} = 1 \qquad 3H_{11} + H_{21} = 0$$

$$4H_{12} + 2H_{22} + H_{32} = 0 \qquad 3H_{12} + H_{22} = 1$$

si $H_{31} = \alpha$ y $H_{32} = B$; resolviendo los sistemas de ecuaciones:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1/2(1-\alpha) & 1+\beta/2 \\ 3/2-3/2\,\alpha & -2-3/2\beta \\ \alpha & \beta \end{bmatrix}$$

b. No existe inversa izquierda ni derecha.

4.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ -A_3^{-1}A_2A_1^{-1} & A_3^{-1} \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \left[\begin{array}{cc|cc} -1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ \hline -2 & 8 & 1 & -3 \\ 3 & -12 & -1 & 4 \end{array}\right]$$

5. a

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & B_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & C_1^{-1} \end{bmatrix}$$

b

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & -A_1^{-1}A_2B_1^{-1} & -A_1^{-1}A_3C_1^{-1} \\ 0 & B_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & C_1^{-1} \end{bmatrix}$$

$$A_1^{-1} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \quad B_1^{-1} = \begin{bmatrix} -1/9 & 1/2 \\ 2/9 & -1/2 \end{bmatrix} \quad C_1^{-1} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/4 \end{bmatrix}.$$

$$-A_1^{-1}A_2B_1^{-1} = \begin{bmatrix} 8/9 & -5/2 \\ 26/9 & 8 \end{bmatrix} \qquad -A_1^{-1}A_3C_1^{-1} = \begin{bmatrix} 17/4 & -13/4 \\ -25/2 & 17/2 \end{bmatrix}$$

6.

a $A = BE_{23}(-1)$ b $A = E_{12}(-1)B$ c $A = E_2(1/8)B$

7. a.

$$\frac{d}{dt}\,[2A(t)+A^2(t)] = \frac{2dA(t)}{dt} + \frac{dA(t)}{dt}\,A(t) + A(t)\,\frac{dA(t)}{dt}$$

$$= \begin{bmatrix} 2e^t+2e^{2t} & 2^{t+1}Ln2+2^te^t+t2^tLn2+e^t2^tLn2+2t & 10e^t + 2 + (2^tLn2) + 2^{t+1} + 20^t \\ 4 & 2 + 2t & 4 + 4t + 6t^2 \\ 4t+2e^t & 2(2^tLn2) & 4t + 4t^3 \end{bmatrix}$$

b

$$\frac{d}{dt}\,[PQ(t)p^{-1}] = \frac{dp}{dt}\,[Q(t)p^{-1}] + \frac{pd}{dt}\,[Q(t)p^{-1}]$$

$$= 0 + P\,\frac{dQ(t)}{dt}\,p^{-1} + PQ(t)\,\frac{dp^{-1}}{dt}$$

$$= P\,\frac{dQ(t)}{dt}\,P^{-1} \quad ; \qquad p^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{dA(t)}{dt} = \begin{bmatrix} et & 0 & 0 \\ 2e^{t}+4e^{2t}-8 & -2e^{2t}+4t & 4e^{2t}-4t \\ 4e^{2t}-4t & 4e^{2t}-2t & 4e^{2t}-2t \end{bmatrix}$$

8. a.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & k & 6 & 6 \\ -1 & 3 & k-3 & 0 \end{array}\right] \simeq \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & k+4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & k & 4 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & k & 4 \\ 0 & k+4 & 0 & -2 \end{array}\right] \simeq \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & k & 4 \\ 0 & 0 & k^{2}+4k & 4k+14 \end{array}\right]$$

b

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 4 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right] \simeq \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -4 \end{array}\right]$$

0. Determinantes. Un concepto importante en la manipulación y caracterización de clases de matrices cuadradas es el determinante, esto es, un número asociado a cada matriz A de orden nxn, denotado detA o bien $|A|$. Existen diferentes maneras de definir el determinante de una matriz. La forma que se presenta aqui es por medio de un proceso recursivo. Específicamente si A es una matriz de orden 1x1, esto es, $A = [a_{11}]$, diremos que $\det A = a_{11}$. En el caso general de matrices A de orden nxn donde $n \geq 2$ es necesario introducir los conceptos de menor y cofactor.

Definición. Sea A matriz nxn. El menor del elemento (i,j) de A es el determinante de la submatriz de orden (n-1)x(n-1) que resulta de eliminar la hilera i y la columna j de A. El menor del elemento (i,j) de A se denota como M_{ij} y el número

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

se denomina el cofactor del elemento (i,j) de A.

Definición. Sea A matriz nxn. El determinante de $A=[a_{ij}]$, denotado det A ó bien $|A|$, esta dado por la expresión

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}\, A_{ij}$$

esto es, la suma de los productos de los elementos de la primera hilera de A por sus correspondientes cofactores.

Los resultados mas importantes de determinantes son:

A. Sea A matriz nxn. Entonces

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{pj}\, A_{pj} \qquad p = 1,\ldots\ldots, n$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{iq}\, A_{iq} \qquad q = 1,\ldots\ldots, n$$

esto es, la suma de los productos de los elementos de cualquier hilera (o columna) de una matriz cuadrada con sus correspondientes cofactores es igual al determinante de A.

B. Sea B matriz que resulta de intercambiar dos hileras distintas de una matriz cuadrada A. Entonces

$$\det B = - \operatorname{Det} A$$

C. Suponga detA $\neq$ 0. Entonces A^{-1} existe y

$$A^{-1} = B/\det A$$

donde B es la transpuesta de una matriz cuyos elementos, digamos A_{ij}, es el cofactor de A_{ij}. Dicha matriz B se denomina la matriz <u>adjunta</u> de A.

D. Considere el sistema Ax = b. Si A tiene inversa se tiene que la solución del sistema es

$$x_j = \det A_j/\det A \qquad J = 1,\ 2,\ldots\ldots, n$$

donde A_j se obtiene de reemplazar la columna j de A por b.

Este método se denomina de <u>Cramer</u>.

1. Demuestre que Det A = - 8 y Det B = - 10 donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

2. Considere la matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & \ell \\ m & n & o & p \end{bmatrix}$$

cuyos valores son tales que detA = 10. Determine

a. Det (4A) b. Det $(2A^{-1})$ c. Det $(3A)^{-1}$

3. (Continúa problema 2). Calcule Det B y Det C si

$$B = \begin{bmatrix} a & e & i & m \\ b & f & j & n \\ c & g & k & o \\ d & h & \ell & p \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 2a & 2e & 2m & 2i \\ b & f & n & j \\ 3c & 3g & 3o & 3k \\ 5d & 5h & 5p & 5\ell \end{bmatrix}$$

4. Sea $A = PBP^{-1}$. Demuestre que Det A = Det B

5. Considere el sistema de ecuaciones $Ax = b$ donde

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Determine el valor de x_2 usando la regla de Cramer.

6. En la solución mediante la regla de Cramer de un sistema $Ax = b$ donde $x^t = [x_1, x_2, x_3]$ se tiene la siguiente información

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & a & 4 \\ 2 & 2 & 6 \end{vmatrix}}{\text{Det A}} \qquad x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ a & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 6 \end{vmatrix}}{\text{Det A}} = \frac{1}{3}$$

Determine el valor de a y x_2.

7. Obtenga el determinante de A si

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

8. Considere la matriz

$$B = \begin{bmatrix} -x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x & y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -x & 0 \\ y & 0 & 0 & 0 & -x \end{bmatrix}$$

Demuestre que Det $B = y^5 - x^5$.

9. Considere el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} kx + y + z &= -3 \\ x + ky + z &= 4 \\ x + y + kz &= 3 \\ 2x + 2y + 2z &= k \end{aligned}$$

Determine los valores del parámetro k de manera tal que el sistema tenga:

a. Solución única

b. Múltiples soluciones

c. Ninguna solución.

10. Sea A matriz antisimétrica de orden 3x3. Obtenga el determinante de A.

SOLUCION TAREA 3 CURSO INTRODUCTORIO Mayo 1984.

1. Usando operaciones elementales que no alteren el valor del determinante se tiene:

$$A \simeq \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad B \simeq \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

De donde Det A = - 8 y Det B = - 10.

2. a. $\text{Det}(4A) = 4^4 \text{det}A = 2560$

b. $\text{Det}\ (2A^{-1}) = 2^4 \text{det}A^{-1} = 16(1/\text{det}A) = 16/10$

c. $\text{Det}(3A)^{-1} = 1/\text{det}(3A) = 1/(3^4 \text{det}A) = 1/810$

3. a. $\text{Det}B = \text{det}A^t = \text{Det}A = 10$

b. $\text{Det}C = \text{Det}[E_1(2)E_3(3)E_4(5)A] = 2 \text{x} 3 \text{x} 5 \text{x} \text{Det}A = 300$

4. $\text{Det}A = \text{Det}P\ \text{Det}B\ \text{det}P^{-1} = \text{Det}P\text{x}\ \text{Det}P^{-1}\ \text{Det}B$

$= \text{Det}(PP^{-1})\ \text{det}B = \text{Det}(I)\ \text{Det}B = \text{Det}B.$

5.

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}}{\text{det}A} = \frac{13}{31}$$

6. DetA = - 6 . a = 2...x = - 1/3.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

7. $$A \simeq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{bmatrix}$$

donde primero se resta la última columna a todas las demás y segundo, se suma cada hilera a la última. DetA = 11.

8. $$\text{DetB} = \sum_{i=1}^{n} a_{i1} A_{i1} = (-x)(x^4) + y(y^4) = y^5 - x^5$$

9. El sistema tiene solución única si y solo si $k = 2$ ó $k = 4$, pues

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & k/2 \\ 1 & 1 & k & 3 \\ 1 & k & 1 & 4 \\ k & 1 & 1 & -3 \end{array}\right] \simeq \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & k/2 \\ 0 & 0 & k-1 & 3-k/2 \\ 0 & k-1 & 0 & 4-k/2 \\ k-1 & 0 & 0 & -3-k/2 \end{array}\right] \simeq$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} k-1 & k-1 & k-1 & \frac{k^2-k}{2} \\ 0 & 0 & k-1 & 3-k/2 \\ 0 & k-1 & 0 & 4-k/2 \\ k-1 & 0 & 0 & -3-k/2 \end{array}\right] \simeq \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & (k-2)(k+4) \\ 0 & 0 & k-1 & 3-k/2 \\ 0 & k-1 & 0 & 4-k/2 \\ k-1 & 0 & 0 & -3k/2 \end{array}\right]$$

Si $k \neq 2$ ó $k \neq 4$. No existe solución

10. Si $A = -A^t$ entonces $\text{DetA} = \text{Det}((-1)A^t) = (-1)^3 \,\text{DetA}^t = \text{DetA}$ y $\text{DetA} = 0$.

1. Resuelva la ecuación matricial

$$X A + C + Xpq^t = 0$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -i \\ 0 & -i \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad p = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad q = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. Determine la inversa de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & A_2 \\ 0 & 0 & A_3 \end{bmatrix}$$

donde

$$I = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad A_3 = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Demuestre usando induccion que:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A^n = \begin{bmatrix} 1 & n & n(n-1)/2 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4. Especifique si los siguientes postulados son ciertos o falsos.

a. $AB = BA$ (C) (F)

b. $AB = 0$ implica $A = 0$ ó $B = 0$ (C) (F)

c. A simétrica entonces $AB = BA$ (C) (F)

d. A triangular inferior entonces $(A^2)^t$ triangular inferior (C) (F)

5. Considere las matrices

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Calcule el determinante de las matrices $A = BC$ y P

6. Considere la matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Cuyo determinante es 10. Calcule

a. Det $(2A^2)$

b. Det $(2A^{-1})$

c. Det (AA^{-1}).

7. Sea X espacio vectorial. Sea P subconjunto de X se dice que P es <u>subespacio</u> de X si se cumple que

a. $x_1, x_2 \varepsilon P$ implica $x_1+x_2 \varepsilon P$
b. $x \varepsilon P$, $\alpha \varepsilon R$ implica $\alpha x \varepsilon P$

Sea $X = R^3$. Especifique si los siguientes conjuntos son subespacios de X.

a. $P_1 = \{x \varepsilon R^3 \mid x = (x_1, x_2, 0)\}$
b. $P_2 = \{x \varepsilon R^3 \mid x = (1, 0, x_3)\}$

8. Considere la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

a. ¿Son los vectores de A linealmente independientes?
b. ¿Cuantos vectores de A son linealmente independientes?.

9. Sea el espacio vectorial $X = R^3$. Determine si los siguientes conjuntos de vectores forman una base de R^3.

a.

$$B_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

b.

$$B_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 14 \end{bmatrix} \right\}$$

10. Sea $X = C[0,1]$ el espacio vectorial de funciones continuas en el intervalo $[0,1]$. Determine si los siguientes conjuntos de funciones son linealmente independientes:

a. $f_1(t) = t^2 + 1$ $\quad t\varepsilon[0,1]$

$f_2(t) = t+t^2$ $\quad t\varepsilon[0,1]$

$f_3(t) = t$ $\quad t\varepsilon[0,1]$

b. $f_1(t) = 1$ $\quad t\varepsilon[0,1]$

$f_2(t) = e^t$ $\quad t\varepsilon[0,1]$

$f_3(t) = e^{2t}$ $\quad t\varepsilon[0,1]$

SOLUCION EXAMEN FINAL CURSO INTRODUCTORIO Mayo, 1984.

1. $X(A+pq^t) = -C \quad ; \quad X = -(A+pq^t)^{-1}C.$

$$(A+pq^t)^{-1} = \frac{1}{-1-i}\begin{bmatrix} 0 & 1+i \\ 1 & 4-i \end{bmatrix}$$

$$X = \frac{1}{-1-i}\begin{bmatrix} 1+i & 2+2i \\ 5-i & 10-2i \end{bmatrix}$$

2.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & A_1^{-1} & -A_1^{-1}A_2A_3^{-1} \\ 0 & 0 & A_3^{-1} \end{bmatrix}$$

$$A_1^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad A_1^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$-A_1^{-1}A_2A_3^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{8} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}$$

3. Si $n = 1$ el postulado es cierto por inspección. Supongamos que el postulado es cierto para $n = 1,2,\ldots,k$. Suponga $n = k+1$. Entonces.

$$A^kA = \begin{bmatrix} 1 & k & k(k-1)/2 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.

MATEMATICAS APLICADAS A LA INGENIERIA ESTRUCTURAL

ANALISIS MATRICIAL DE ESTRUCTURAS

Ing. José Luis Camba Castañeda

MARZO, 1985

Palacio de Minería Calle de Tacuba 5 primer piso Deleg. Cuauhtémoc 06000 México, D.F. Tel.: 521-40-20 Apdo. Postal M-2285

ANALISIS MATRICIAL DE ESTRUCTURAS

1.- INTRODUCCION

2.- ENERGIA DE DEFORMACION

- Trabajo Real
- Trabajo virtual
- Matriz de Flexibilidades no ensamblada
- Matriz de Flexibilidades ensamblada
- Teorema recíproco de Maxwell-Betti

3.- METODOS GENERALES DE ANALISIS

- Método de las flexibilidades
- Método de las Rigideces

4.- PROPIEDADES DE LAS MATRICES DE FLEXIBILIDADES Y RIGIDECES.

5.- SOLUCION MATRICIAL GENERALIZADA DEL METODO DE LAS FLEXIBILIDADES.

JOSE LUIS CAMBA CASTAÑEDA

José Luis Camba C.

1.- INTRODUCCION.

El análisis estructural tiene como objetivo cálcular el estado de esfuerzos y deformaciones en cualquier punto de una estructura.

Para el análisis de una estructuras se tendrán como datos la geometría y las cargas que actúan sobre ella y se calcularán las fuerzas internas y los desplazamientos.

En todo proceso de análisis estructural, deben considerarse los tres conceptos fundamentales:

1.1) Concepto de equilibrio

Toda estructura somedida a un sistema de fuerzas externas, deberá estar en equilibrio con las fuerzas internas en todos y cada uno de los miembros de dicha estructura, siendo las expresiones vectoriales que cumplan esa condición:

$$\sum_{i=1}^{n} \{F\} = \{0\} \qquad (1.1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \{F\}\{r_i\} + \sum_{i=1}^{n} \{M_i\} = \{0\} \qquad (1.2)$$

en las cuales:

Mi y Fi son los vectores que indican los pares y fuerzas actuando en la estructura y r_i los vectores de posición de las fuerzas con respecto a cada uno de los ejes coordenados.

Estas ecuaciones de equilibrio se pueden expresar escalarmentes como sigue:

en un plano	en el espacio:	
$\Sigma F_{ix} = 0$	$\Sigma F_{ix} = 0$	$\Sigma M_{ix} = 0$
$\Sigma F_{iy} = 0$	$\Sigma F_{iy} = 0$	$\Sigma M_{iy} = 0$
$\Sigma M_i = 0$	$\Sigma F_{iz} = 0$	$\Sigma M_{iz} = 0$

1.2.- Concepto continuidad (o compatibilidad)

Al aplicar las fuerzas externas, la estructura se deforma pero conserva las características de continuidad iniciales, siendo los desplazamientos finales compatibles con las condiciones de deformación de los apoyos.

El concepto de continuidad o compatibilidad establece que los desplazamientos son funciones continuas y derivables, por lo tanto una vez conocidos los desplazamientos se pueden conocer las deformaciones. Expresado en ecuaciones, se tendría:

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} \qquad \gamma_{xy} = \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}$$

$$\varepsilon_y = \frac{dv}{dy} \qquad \gamma_{xz} = \frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx}$$

$$\varepsilon_z = \frac{dw}{dz} \qquad \gamma_{yz} = \frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}$$

; u, v y w las 3 componentes de desplazamiento.

En forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} \qquad (1.3)$$

$$\{\varepsilon\} = [e]\{\sigma\}$$

; $[e]$ = matriz cuadrada simétrica que representa la flexibilidad del elemento.

1.3.- Relaciones fuerza desplazamiento.

En él análisis estructural es indispensable para cualquier estructura de geometría dada, conocer las relaciones entre las fuerzas y los desplazamientos.

Si llamamos F al vector de fuerzas y D el vector desplazamientos, sus componentes serán de acuerdo con la Fig. 1.1

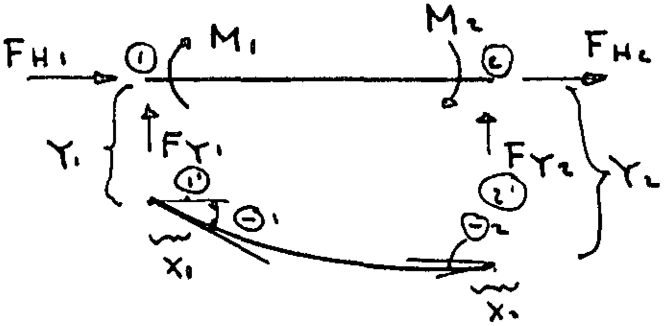


FIG. 1.1

$$\left\}F\right\{ = \left\}\begin{matrix} F_{Y_1} \\ F_{H_1} \\ M_1 \\ F_{Y_2} \\ F_{H_2} \\ M_2 \end{matrix}\right\{ \; ; \; \left\}D\right\{ = \left\}\begin{matrix} Y_1 \\ X_1 \\ \Theta_1 \\ Y_2 \\ X_2 \\ \Theta_2 \end{matrix}\right\{$$

y la relación entre ellos será: $\}F\{ = [K]\;\}D\{ \quad (1.4)$

La matriz $[K]$ se determina a partir de la geometría de la estructura y de las características mecánicas del material.

Si la variación entre ellas es lineal, la matriz $[K]$ es una constante, y las estructuras que cumplen esta condición se les llama lineales (Ley de Hooke) y es aplicable el principio de superposición de efectos.

2.- ENERGIA DE DEFORMACION.

Si una fuerza Fi se aplica gradualmente a una estructura produce un desplazamiento Di en la dirección en que se aplica la fuerzas, ésta efectúa un trabajo, que se manifiesta por un incremento de la energía cinética de la masa, si ésta adquiere una aceleración o bien, en energía potencial si mofifica su posición respecto al campo gravitacional.

Un sistema de fuerzas externo provoca un estado de deformación en una estructura, realizando un trabajo cada una de las fuerzas aplicadas que se permanece en la estructura bajo la forma de energía de deformación o energía interna. Si el sistema es perfectamente elástico el fenómeno es reversible (fig. 2.1a) y cuando se trata de un material elástico no lineal, corresponde a la(fig.2.1b).

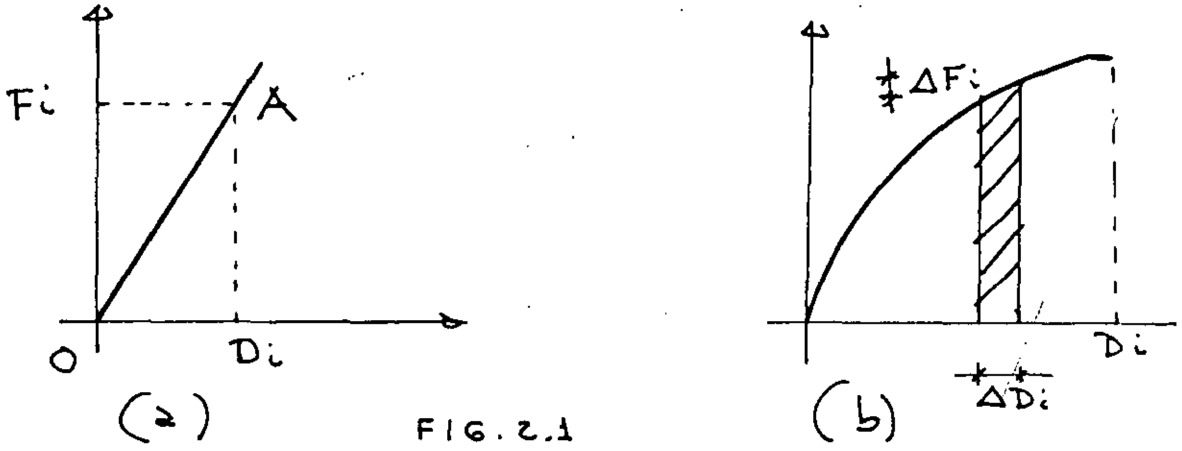


FIG. 2.1

El trabajo hecho por un incremento de carga será: $W = Fi \Delta Di$

El trabajo total efectuado será:

$$W = \int_0^{D_i} F \, d\Delta \qquad (2.1)$$

Cuando se trata de un material elástico lineal, el trabajo hecho por la fuerza Fi es:

$$W = \frac{1}{2} Fi\ Di.$$

Cuando un sistema de fuerzas se aplica gradualmente a la estructura y provocando desplazamientos en la dirección de las fuerzas aplicadas, el trabajo total externo o la energía de deformación será: $W = U = \frac{1}{2}(FiDi + F2D2 + \ldots. + FnDn) = \frac{1}{2} \Sigma\ FiDi$ (2.2)

La ecuación anterior puede escribirse como:

$$[W] = \frac{1}{2} \}F\{^{T}_{nx1} \}D\{_{nx1} \qquad (2.3)$$

en la cual $\}F\{^{T}$ es el transpuesto del vector $\}F\{$ que representa las fuerzas..

El área que se encuentra en la parte superior de la curva OA se le llama energía complementaria de deformación.

La expresión de igualdad del trabajo externo W y la energía de deformación o energía interna U, puede utilizarse para cálcular deflexiones.

$$U = \frac{1}{2} \int \sigma_m \varepsilon_m \, dV \qquad (2.4)$$

Axial : $U_a = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{P^2 L}{AE}$ (2.5)

Flexión : $U_f = \frac{1}{2} \int \frac{M^2}{EI} dx$ (2.6)

Cortante: $U_r = \frac{1}{2} c \int \frac{V^2}{AG} dx$ (2.7)

Torsión: $U_t = \frac{1}{2} \int \frac{T^2}{GJ} dx$ (2.8)

$\Sigma = U_a + U_f + U_r + U_t$ (2.9)

2.1.- Teoremas de los Trabajos virtuales.

El nombre de virtual, se deriva del hecho de que un sistema ficticio (virtual) de fuerzas en equilibrio o un pequeño desplazamiento virtual se aplica a una estructura, relacionándolo con fuerzas o desplazamientos reales.

El método de los desplazamientos virtuales consiste en aplicar desplazamientos ficticios (virtuales) de cuerpo rígido en una estructura y calcular las reacciones reales, mediante el método energético.

Una variante sería la de calcular desplazamientos reales a través de fuerzas virtuales, como se indica a continuación.

Si en una estructura real, en equilibrio y deformada bajo un sistema de fuerzas reales aplicadas y llamando ϵ la deformación actual en cualquier punto y sus correspondientes desplazamientos en los puntos D1,D2....Dn, se introduce un sistema de fuerzas virtuales F1, F2,..... , Fn en las coordenadas 1,2,...n , provocando esfuerzos σ en esos puntos.

El principio del <u>trabajo virtual</u> establece que el producto de los desplazamientos reales y las fuerzas virtuales correspondientes es igual al producto de los desplazamientos internos y las fuerzas internas virtuales correspondientes, por lo tanto:

$$FiDi = \int_{v} \}\sigma\{^{T} \}\varepsilon\{ \, dV \qquad (2.1.0)$$

en la cual:

σ = esfuerzos debidos a fuerzas virtuales F

ϵ = deformaciones reales compatibles en desplazamientos reales $\}D\{$

Cuando se trata de una sola fuerza virtual aplicada para calcular el desplazamiento Dj en la coordenada j, la ecuación anterior se escribe :

$$1 \times D_j = \int \{\sigma_{uj}\}^T \{\varepsilon\} \, dV \qquad (2.11)$$

$$D_j = \int_v \{\sigma_{uj}\}^T \{\varepsilon\} \, dV \qquad (2.12)$$

siendo $\{\sigma_{uj}\}$ los esfuerzos vrtuales correspondientes a la fuerza virtual unitaria en j y $\{\varepsilon\}$ la deformación real debida a la carga real.

Las expresiones del trabajo virtual en axial, flexión, cortante y torsión se indican a continuación.

Tipo de deformación	Componente de la fuerza virtual	Componente del desplaz. real	Trabajo virtual interno
Axial	p	$dL = \frac{P}{AE} dx$	$\int p \frac{P}{AE} dx$ (2.13)
Flexión	m	$d\phi = \frac{M}{EI} dx$	$\int m \frac{M}{EI} dx$ (2.14)
Cortante	v	$dy = c \frac{V}{AG} dx$	$\int cv \frac{V}{AG} dx$ (2.15)
Torsión	t	$d\beta = \frac{T}{GJ} dx$	$\int t \frac{T}{GJ} dx$ (2.16)

De la tabla anterior, para valuar la integral de flexión $m \frac{M}{EI} dx$, para elementos de sección transversal constante se utiliza para los casos mas comunes de cargas, la multiplicación directa de diagramas de momentos flexionantes.

Cálculo de deflexiones por el método de los trabajos virtuales.

1) Armaduras

En armaduras, la expresión para el cálculo de deflexiones es:

$$Dj = \sum_{i=1}^{m} \int p \frac{Pi}{AE} dx \qquad (2.17)$$

Un resultado igual se logrará si multiplicamos matrices tales que:

$$Dj = \}p\{^{T}_{mx1} \left[fM \right]_{mxm} \}P\{_{mx1} \qquad (2.18)$$

en la cual:

$\}p\{^{T}$ es la transpuesto de la matriz $\}p\{$, siendo esta última las fuerzas en los elementos debidas a una <u>carga virtual</u> unitaria actuando en la coordenada correspondiente.

$\}P\{$ son las fuerzas en los elementos debidas a las <u>cargas reales</u>

$$Y \quad [f_M] = \begin{bmatrix} \frac{L_1}{A_1E_1} & & 0 \\ & \frac{L_2}{A_2E_2} \ddots & \\ 0 & & \frac{L_n}{A_nE_n} \end{bmatrix}$$

siendo los elementos de la diagonal principal la flexibilidad por deformación axial de los elementos aislados. A esta matriz se le conoce como la <u>matriz de flexibilidades de la estructura no ensamblada</u>.

Cuando se desea calcular las deflexiones en diferentes puntos de la estructura, la carga virtaul deberá aplicarse por separado en cada una de las coordenadas deseadas y que corresponde al conjunto de fuerzas determinadas, la ecuación

tendrá la forma:

$$\left[D \right]_{nxp} = \left[P \right]^{T}_{mxn} \left[f_M \right]_{mxm} \left[P \right]_{mxp} \qquad (2.20)$$

p = fuerza en un elemento debido a una carga virtual actuando en la coordenadas. Los elementos de la matriz [p] son las fuerzas debidas a cargas unitarias aplicadas en la coordenada correspondiente

f_M = La flexibilidad del elemento $= \frac{L}{AE}$

P = fuerza en un elemento debido a la carga real. Cada columna de la matriz [P] son las fuerzas correspondientes a un caso de carga.

m = número de elementos

n = número de coordenadas en las cuales se desea conocer el desplazamiento.

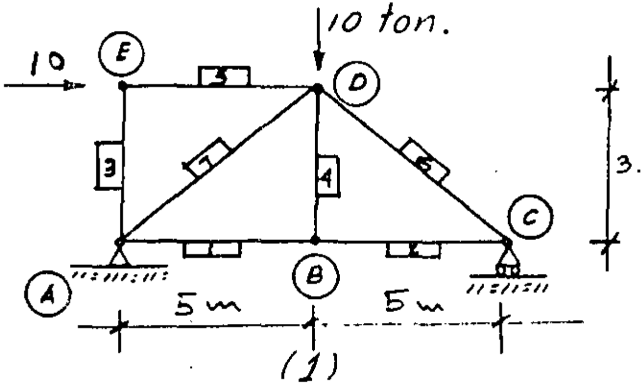
p = número de casos de carga.

El ejemplo No. 1 muestra la aplicación del cálculo de deformaciones en armaduras por trabajos virtuales.

2.22.- Cálculo de deflexiones por trabajos virtuales en vigas y marcos.

En una estructura formada por varios miembros y sujeta a una carga cualesquiera en un miembro, de tal forma que los momentos extremos internos sean Mi M2. Si se quieren calcular los desplazamientos en un extremo, se aplicaran momentos virtuales unita

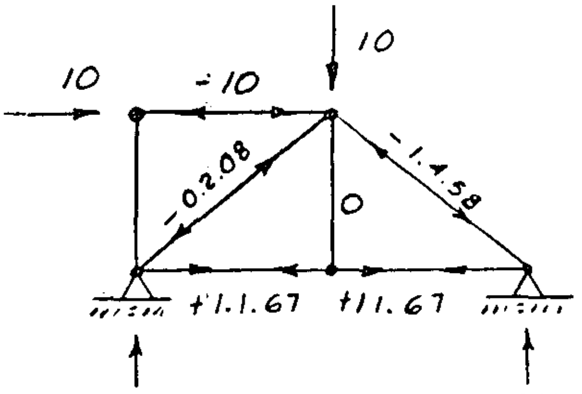
Ejemplo No. 1. Calcular el desplazamiento horizontal en el punto C y el movimiento relativo entre los nudos B y E. de la armadura siguiente:



(1)

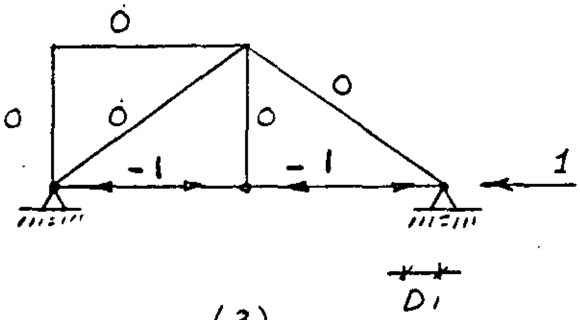
barras 1, 2, 3, 4 y 5 = AE

barras 6 y 7 = 1.25 AE



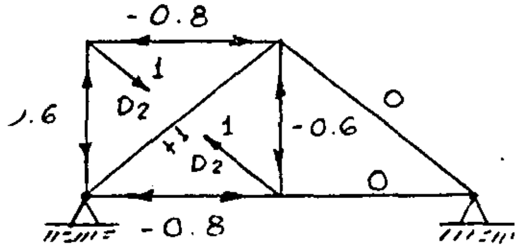
(2)

$$[P]_{7\times1} = \begin{Bmatrix} 11.67 \\ 11.67 \\ 0 \\ 0 \\ -10 \\ -14.58 \\ -2.08 \end{Bmatrix}$$



(3)

$$1\;[P]_{7\times2} = \begin{bmatrix} -1 & -0.8 \\ -1 & 0 \\ 0 & -0.6 \\ 0 & -0.6 \\ 0 & -0.8 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

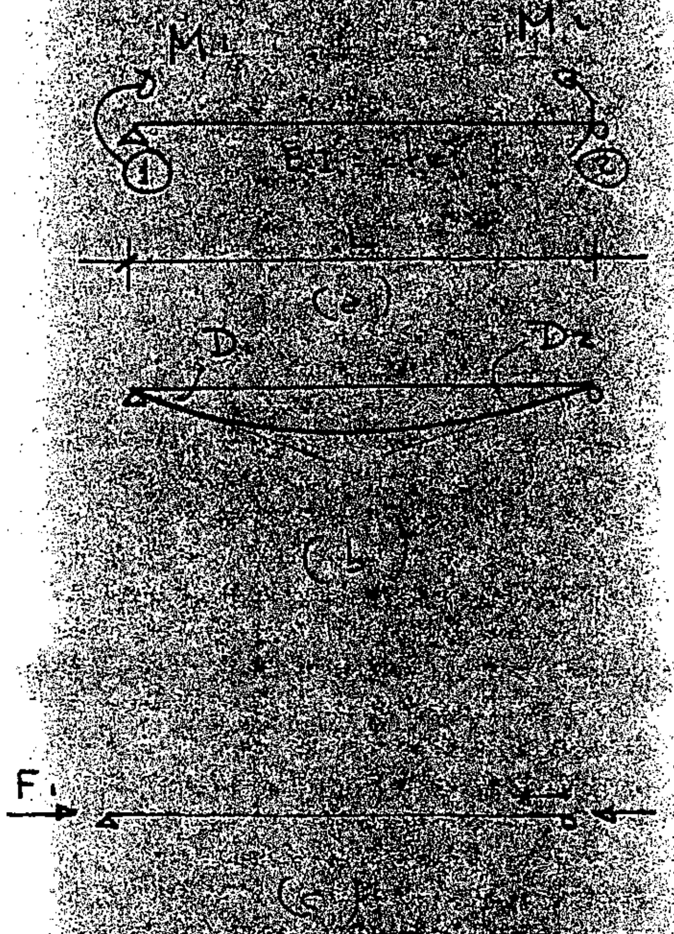


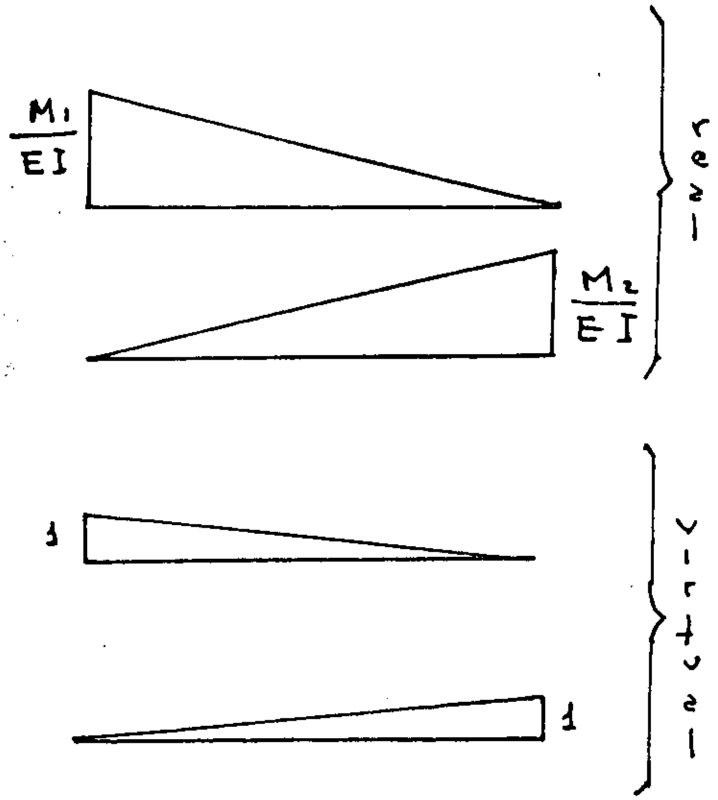
(4)

$$[f_M]_{7\times7} = \frac{1}{AE}\begin{bmatrix} 5 & & & & & & \\ & 5 & & & & & \\ & & 3.75 & & & & \\ & & & 3.75 & & & \\ & & & & 5 & & \\ & & & & & 5 & \\ & & & & & & 5 \end{bmatrix}$$

$[D]_{2\times1} = [P]^{T}_{7\times2}\;[f_M]\;[P]_{7\times1} = \frac{1}{\ }\begin{Bmatrix} -116.5 \end{Bmatrix}$

ríos en los extremos para calcular los giros debidos a flexión.





Por trabajos virtuales la contribución de desplazamientos por flexión en j será:

$$DJ = m \frac{M}{EI} dx = \frac{L}{6EI}\left(M1\ m1 + M1m2 + M2m1 + 2\ M2m2\right)$$

NOTA.- SI SE CONSIDERA EFECTOS DE AXIAL (C)

$$\left[f_M\right] = \begin{bmatrix} \frac{2}{3EI} & \frac{1}{6EI} & 0 \\ \frac{1}{6EI} & \frac{2}{3EI} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{AE} \end{bmatrix} L$$

y expresándolo matricialmente:

$$\Delta DJ = \Big\}mu\Big\{^{T} \left[f_M\right] \Big\}M\Big\{ \text{, en la cual:} \qquad 2.21$$

$$\Big\}mu\Big\{J = \Big\}\begin{matrix} m1 \\ m2 \end{matrix}\Big\{ \qquad \left[f_M\right] = \frac{1}{6EI}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

en la cual

$$\Big\}M\Big\{ = \Big\}\begin{matrix} M1 \\ M2 \end{matrix}\Big\{$$

Los elementos de $\left[f_M \right]$ son los giros izquierda y derecha debidos a momentos unitarios en un extremo de la viga. En forma semejante a la mencionada en armaduras, $\left[f_M \right]$ es la matriz de flexibilidad en flexión del elemento.

El desplazamiento en J sera la sumatoria de todos los elementos:

$$D_j = \sum_{i=1}^{m} \Big\}mu\Big\{_{2nx1}^{T} \left[f_M \right]_{2nx2n} \Big\}M\Big\{_{2mx1} \qquad (2.22)$$

en al cual:

$$\Big\}mu\Big\{ j = \left\} \begin{matrix} m1j \\ m2j \\ \vdots \\ mnj \end{matrix} \right\{ \; ; \quad M = \left\} \begin{matrix} M1 \\ M2 \\ \vdots \\ Mn \end{matrix} \right\{ \; ; \quad \left[f_M \right] = \begin{bmatrix} \left[f_{M_1} \right] & & \\ & \left[f_{M_2} \right] & \\ & & \left[f_M \right] n \end{bmatrix} \qquad 2.23$$

A la matriz $\left[f_M \right]$ que contiene las matrices de flexibilidades separadas de todos los miembros se le llama <u>matriz de flexibilidades no ensamblada</u>.

Cuando se requiere conocer los desplazamientos de n coordenadas, la carga virtual unitaria debe aplicarse en cada una de las coordenadas separadamente para determinar los momentos en los extremos, arreglándolos en tal forma que

$$\left[m \right] 2mxn = \begin{bmatrix} -\}m\{\, 11 & \}m\{\, 12 & \}m\{\, 1n \\ \}m\{\, 21 & \}m\{\, 22 & \}m\{\, 2n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \}m\{\, m1 & \}M\{\, n2 & \}m\{\, n\ n \end{bmatrix}$$

en la cual los elementos de cada submatriz son los momentos extremos en el elementos.

El primer subíndice indica el momento y el segundo la coordenada en la cual se aplica el momento unitario.

Cuando se trata de varios casos de carga, los desplazamiento se calcularán:

$$\left[D \right]_{nxp} = \left[mu \right]^{T}_{2mxn} \left[f_M \right]_{2mx2m} \left[M \right]_{2mxp} \qquad (2.24)$$

<u>Matriz de flexibilidades ensamblada de la estructura</u>.

Esta matriz puede determinarse a partir de las flexibilidades de cada uno de los elementos usando la ecuación 2.24. Los elementos de la matriz de flexibilidades puesto que son los desplazamientos en las coordenadas correspondientes debidos a una fuerza unitaria actuando separadamente en cada una de esas coordenadas, la carga real y la carga virtual son las mismas, por lo que la ecuación 2.24 quedará:

$$\left[f \right] = \sum_{s=1}^{4} \left[mu \right]^{T}_{s} \left[f_M \right]_{s} \left[mu \right]_{s} \qquad (2.25)$$

en la cual $\left[f \right]$ es la matriz de flexibilidades ensamblada de la estructura y el subíndice s se refiere a las cuatro causas que pueden provocar deformación: flexión, axial, cortante y torsión.

Cuando solo se considera flexión la ec. 2.25, quedaría:

$$\left[f \right]_{nxn} = \left[mu \right]^{T}_{2mxn} \left[f_M \right]_{2mx2m} \left[mu \right]_{2mxn} \qquad 2.26$$

en la cual:

m = número de elementos

n = de coordenadas

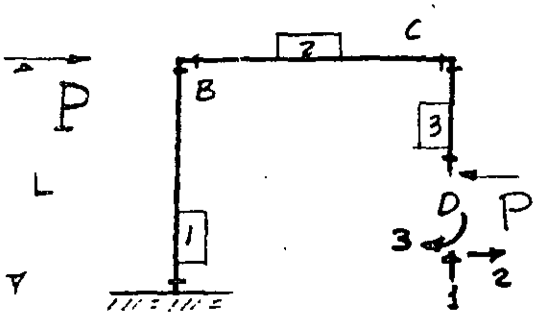
El ejemplo 2 muestra la aplicación de los conceptos anteriores.

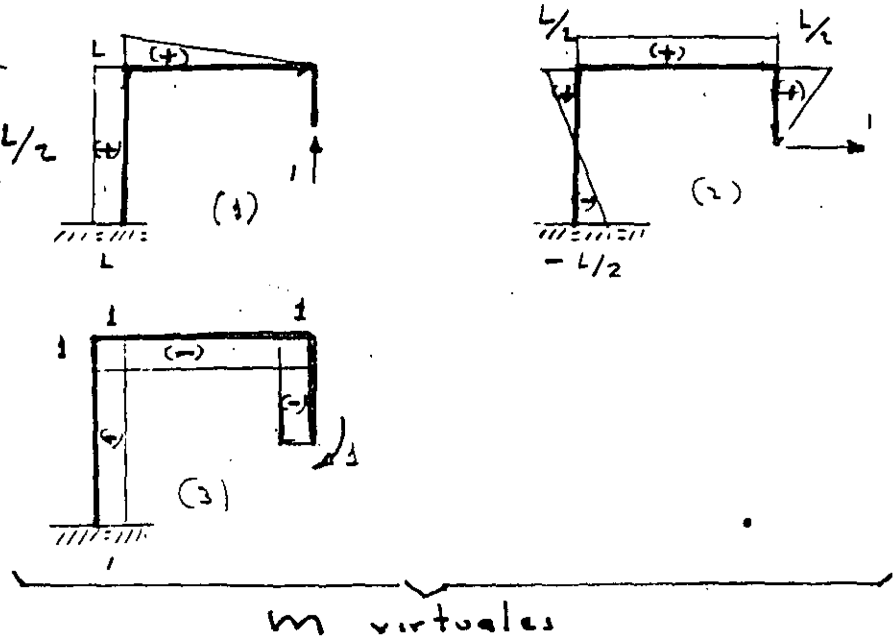
Ejemplo No. 2 En el marco indicado se pide:

A) Calcular los desplazamientos en D, debidos a flexión

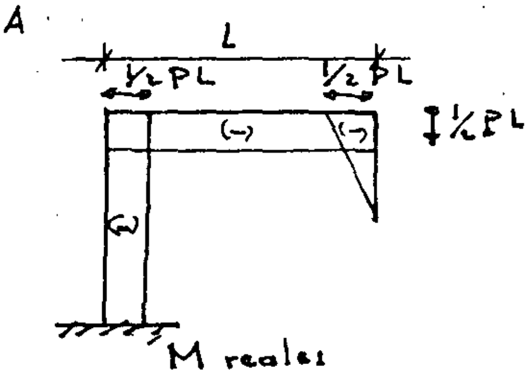
B) Calcular la matriz de flexibilidad.

(A)





m virtuales



M reales

$$[m_v]_{6\times3} = \begin{bmatrix} L & -L/2 & -1 \\ -L & -L/2 & 1 \\ L & L/2 & -1 \\ 0 & -L/2 & 1 \\ 0 & L/2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad [M]_{6\times1} = PL \begin{Bmatrix} -0.5 \\ -0.5 \\ -0.5 \\ -0.5 \\ -0.5 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$[f_M]_{6\times6} = \frac{1}{6EI}\left[\begin{array}{cc|cc|cc} 2 & 1 & \multicolumn{2}{c|}{0} & \multicolumn{2}{c}{0} \\ 1 & 2 & & & & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & 2 & 1 & \multicolumn{2}{c}{0} \\ & & 1 & 2 & & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & \multicolumn{2}{c|}{0} & 1 & 0.5 \\ & & & & 0.5 & 1 \end{array}\right]$$

$$\{D\}_{3\times1} = [m_v]^T_{6\times1}\,[f_M]_{6\times6}\,[M]_{6\times1} = \frac{PL^3}{EI}\begin{Bmatrix} -0.75 \\ -0.29 \\ +1.12/L \end{Bmatrix}$$

B) *Calculo de la matriz de flexibilidad*

$$F_{3\times3} \quad mu^{T}_{6\times3} \quad fm_{6\times6} \quad mu_{6\times3}$$

$$\boxed{F} = \begin{bmatrix} L & -L/2 & -1 \\ -L & -L/2 & 1 \\ L & \frac{L}{2} & -1 \\ 0 & -L/2 & 1 \\ 0 & -L/2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{array}{c|c|c} \begin{matrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{matrix} & 0 & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & 0 & \begin{matrix} 14 & -05 \\ -05 & 1 \end{matrix} \end{array} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L & -L/2 & -1 \\ -L & -L/2 & 1 \\ L & L/2 & -1 \\ 0 & -L/2 & 1 \\ 0 & +L/2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{GEI} \begin{bmatrix} 8L^2 & 1.5L^2 & -9L \\ 1.5L^2 & 2.25L^2 & -3.75L \\ -9L & -3.75L & 15 \end{bmatrix}$$

2.3 Teorema recíproco de Maxwell-Betti.

Si un sistema de fuerzas F_1, F_2, Fn se aplica a una estructura en las coordenadas 1, 2 .... n provocan desplazamientos D_1F,$D2F$..., DnF . Manteniendo el sistema de fuerzas F_1 F_2,....,Fn, se aplica otro sistema de fuerzas Q1,Q2,... Qn, provocarán desplazamientos D1Q, D2Q...., DnQ y además desplazamientos D1F, D2F... DnF en los puntos donde actúa el sistema F1,F2,... Fn.

El trabajo externo total será:

$$WF + Q = \frac{1}{2} \text{ Fidi} + \frac{1}{2} \text{ FiDiQ} + \frac{1}{2} \text{ FiDiQ} \qquad 2.27$$

invirtiendo: $$W_{F+Q} = \frac{1}{2} \Sigma \text{ FiDiF} + \frac{1}{2} \Sigma \text{ FiDiQ} + \frac{1}{2} \Sigma \text{ FiDiF} \qquad 2.28$$

como $$W_{F+Q} = W_{Q+F} : \frac{1}{2} \Sigma \text{ FiQip} = \frac{1}{2} \Sigma \text{ QiDiF} \qquad 2.29$$

Esta ecuación es el teorema recíproco de Betti cuyo enunciado sería que el trabajo externo hecho por un sistema de fuerzas Fi a través de desplazamientos debidos al sistema Qi es igual al trabajo externo hecho por el sistema de fuerzas Qi a través de desplazamientos provocados por el sistema Fi.

El teorema de Maxwell, consiste en aplicar el principio anterior a las deflexiones y haciendo que Fi = 1 en la coordenada i en el sistema de fuerzas F y Qj = 1 en la coordenada j :

$$DiQ = DjF$$

que se puede escribir como $fij = fji$ 2.30

Estos desplazamientos se les llama coeficientes de flexibilidad como se vió en los ejemplos 1 y 2 y para una estructura de n coordenadas, estos coeficientes se arreglarán para formar una matriz de flexibilidades. Esta matriz deberá ser simétrica debido al teorema recíproco de Maxwell - Betti.

3.- METODOS GENERALES DE ANALISIS.

Existen básicamente dos métodos generales, para la resolución de estructuras hiperestáticas principalmente y que son el método de las flexibilidades (o de las fuerzas) y el método de las rigideces (o de los desplazamientos) que se describen en los parrafos siguientes.

Mas adelante se analizan con detalle cada uno de estos métodos.

3.1.- <u>Método de las flexibilidades</u>.

En el inciso 2.2 al hablar de cálculo de deflexiones, se introdujo el concepto de matriz de flexibilidades de una estructura.

A continuación se definirá el método de las flexibilidades.

En este método las incógnitas son las fuerzas redundantes que se calculan superponiendo desplazamientos de estructuras isostáticas y planteando las ecuaciones para resolver las incógnitas con base en la compatibilidad de deformaciones de la estructura.

Las ecuaciones de compatibilidad son del tipo:

$$\}D\{ + [f]\ \}F\{ = \}0\{\ ; \qquad 3.1$$

en la cual :

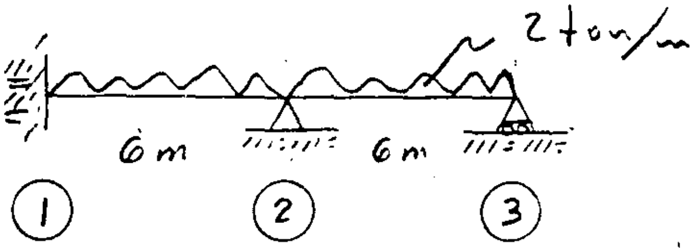
D = vector columna de los desplazamientos debidos a cargas externas.

F = vector de las fuerzas redundantes

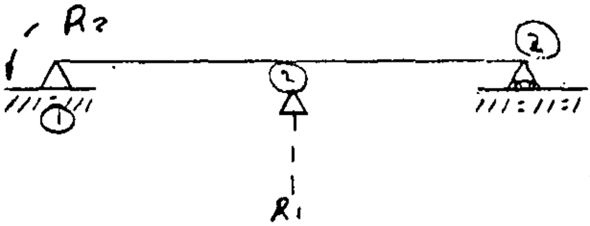
f = matriz de flexibilidades. Sus elementos representan desplazamientos debidos a fuerzas unitarias.

Ejemplo No 3 Calcular las reacciones resolviendo por el metodo de las flexibilidades

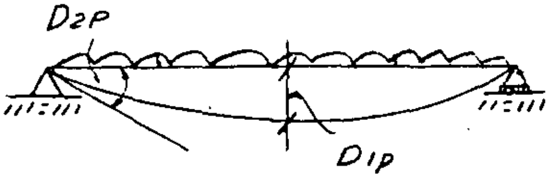
$EI = cta.$



a) Estructura primaria

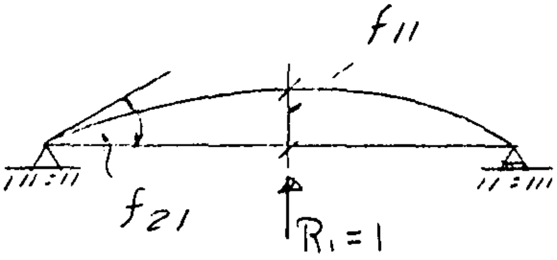


b) Desplazamientos debidos a las cargas



$$D = \begin{Bmatrix} \frac{-540}{EI} \\ -\frac{144}{EI} \end{Bmatrix}$$

c) Desplazamientos debidos a $R_1 = 1$

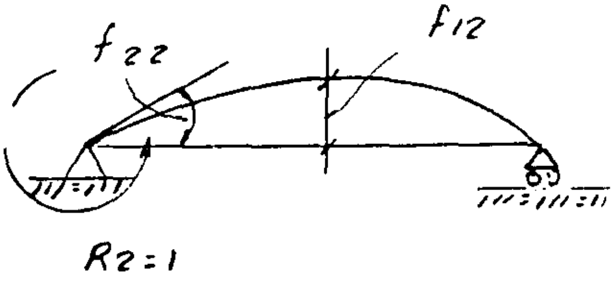


$$\begin{bmatrix} F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{36}{EI} & \frac{9}{EI} \\ \frac{9}{EI} & \frac{4}{EI} \end{bmatrix}$$

Ecuaciones de compatibilidad de deformaciones:

$$\begin{Bmatrix} D \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} F \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \end{Bmatrix}$$

d) Desplazamiento debidos a $R_2 = 1$



$$\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} F \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} -D \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 13.71 \\ 5.14 \end{Bmatrix} \text{ton}$$

La secuela de cálculo seá entonces:

1) Determinar el grado de hiperestáticidad

2) Plantear la estructura primaria isostática

3) Determinar los desplazamientos debidos a las cargas en los puntos liberados.

4) Determinar los desplazamientos debidos a cada una de las redundantes supuestas con valores unitarios, que son los coeficientes de flexibidad

5) Sumar los desplazamientos debidos a las cargas y a cada reduntante con base en condiciones de compatibilidad de deformaciones.

A continuación se indica el ejemplo 3 de aplicación.

3.2.- Método de las rigideces.

En este método, las incógnitas son los desplazamientos nodales y los elementos mecáncios se calculan superponiendo una esttructura a la cual se restringen los desplazamientos nodales calculando las fuerzas que provocan estas restricciones.

Posteriormente se van permitiendo uno a uno los desplazamientos en los nudos, calculando los coeficientes de rigidez correspondientes.

Finalmente con base en ecuaciones de equilibrio se calculan los desplazamientos y con éstos se determinas los elementos mecánicos por superposición.

Las ecuaciones de equilibrio son de la forma:

$$\}F\{ + [K]\}D\{ = \}0\{ \qquad (3.2)$$

en la cual:

$\{F\}$ = vector columna que depende de las cargas externas

$[K]$ = matriz de rigideces cuyos elementos representan fuerzas debidas a desplazamientos unitarios.

No depende de las cargas

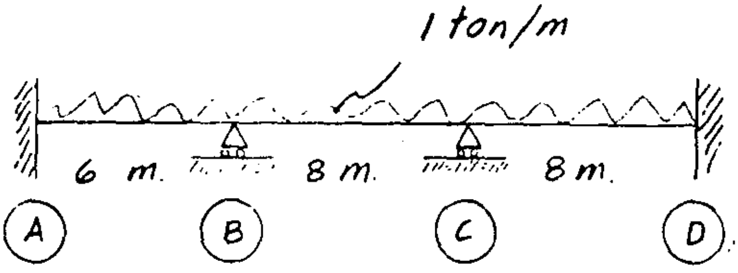
$\{D\}$ = vector que representa las incógnitas que son los desplazamientos

La secuela de cálculo será:

1) Encontrar el número de desplazamientos nodales posibles
2) Fijar los desplazamientos posibles calculando las fuerzas nodales de fijación correspondientes
3) Ir permitiendo desplazarse uno a uno los desplazamientos unitarios inicialmente impedidos, calculando las fuerzas correspondientes (coeficientes de rigidez)
4) Con base en las ecuaciones de equilibrio, calcular los desplazamientos
5) Los elementos mecánicos se obtendrán de superponer la estructura impedida de desplazarse en (2) con las correspondientes liberadas una a una

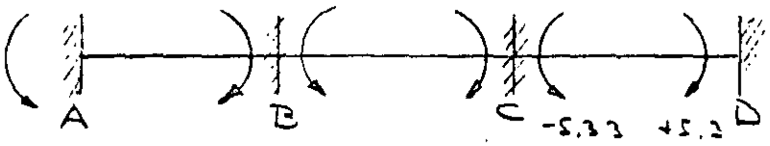
A continuación el ejemplo 4 muestra la aplicación de este método.

Ejemplo No. 4: Calcular reacciones por el método de las rigideces.



1) Incógnitas Θ_B y Θ_C

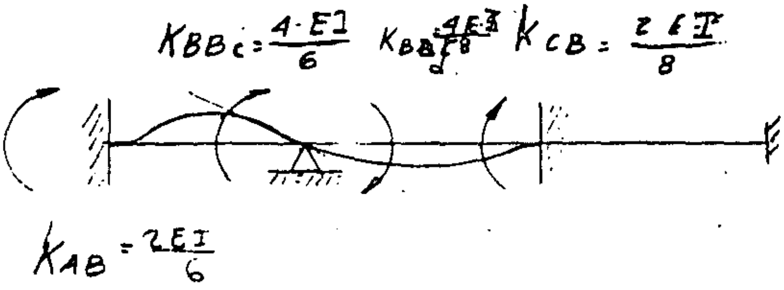
2) Fzas. nodales de fijación.



$M_{AB}=-3$ M_{BA}, $M_{BC}=-M_{CB}=+M_{CD}=-M_{DC}=-5.33$ t-m

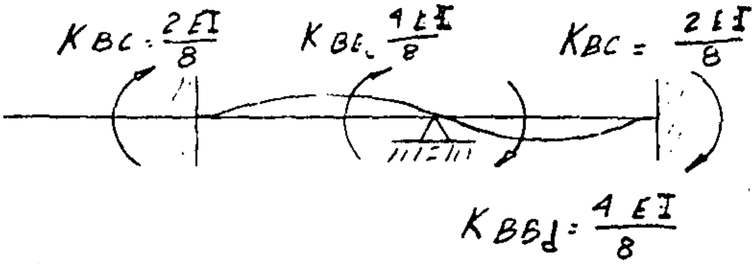
$=+3$ t m

3.1) $\Theta B=+1$



$$[K]=\begin{bmatrix}K_{BB} & K_{BC}\\ K_{CB} & K_{CC}\end{bmatrix}$$

3 2) $\Theta_C=+1$



4) Ec. de equilibrio : $\Sigma M_B=0$

$$\{F\}=[K]\{D\}$$

$$\begin{Bmatrix}-2.33\\ 0\end{Bmatrix}=EI\begin{bmatrix}\frac{4}{6}+\frac{4}{8} & \frac{2}{8}\\ \frac{2}{8} & \frac{4}{8}+\frac{4}{8}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}D_1\\ D_2\end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix}D_1\\ D_2\end{Bmatrix}=[K]^{-1}\{-F\}=\begin{Bmatrix}\frac{2.11}{EI}\\ -0.53\end{Bmatrix}$$

4.- PROPIEDADES DE LAS MATRICES DE FLEXIBILIDADES Y DE RIGIDECES.

La relación entre la matriz de flexibilidad y la de rigidez se establecera a través del siguiente ejemplo (Fig. 1a).

Los desplazamientos $\{D\}$ se pueden expresar en términos de desplazamientos de cada una de las fuerzas actuando y superponiendo: (figura 1b).

$$D1 = f_{11}F1 + f_{12}F_2 + \ldots + f_{1n}F_n$$

$$D2 = f21F1 + f_{22}F_2 + \ldots + f2n\ Fn$$

$$\vdots$$

$$Dn = f_{n1}F1 + f_{n2}F_2 + \ldots + f_{nn}F_n$$

$$[f]_{nxn}\ \{F\}_{nx1} = \{D\}_{nx1} \qquad 4.1$$

resolviendo 4.1

$$\{F\}_{nx1} = [f]^{-1}_{nxn}\ \{D\}_{nx1} \qquad 4.2$$

La ecuación 4.2 puede usarse para determianr las fuerzas formando los elementos de la matriz de rigidez de la misma estructuras

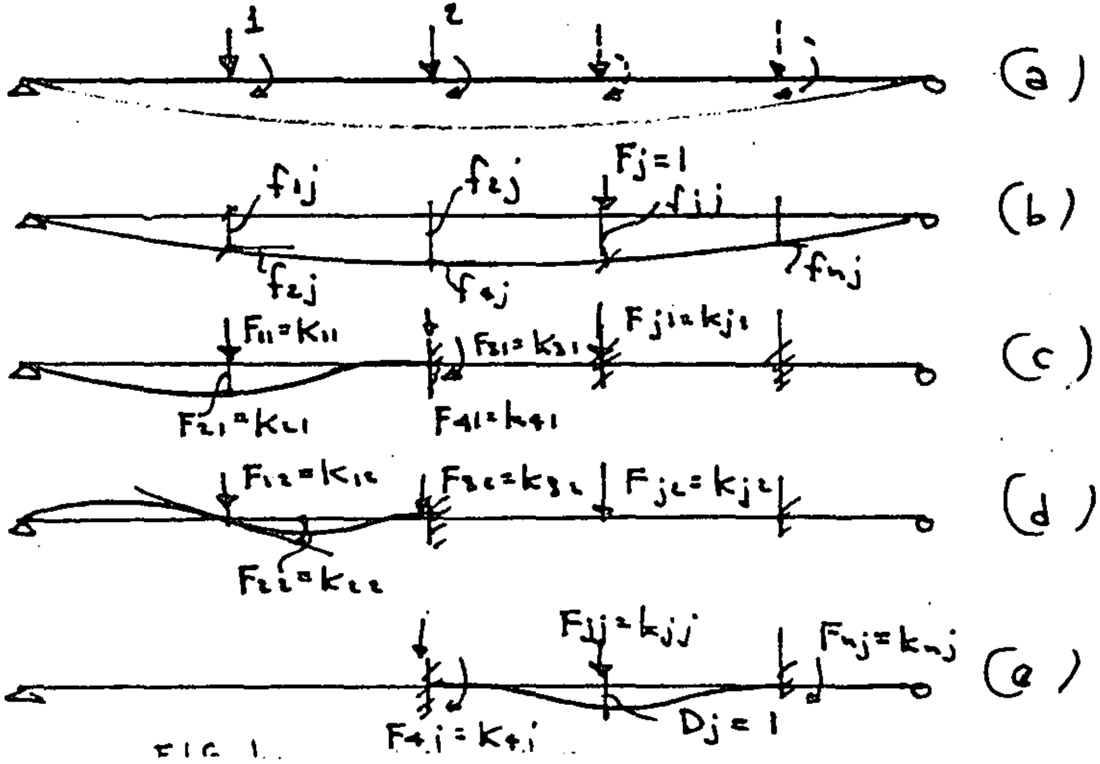


FIG. 1.

Si la estructura es deformada por fuerzas F_{11}, F_{21}, F_{n1}, a través de coordenadas tales que el desplazamiento $D_1 = 1$, mientras que $D_2 = D_3 = \ldots D_n = 0$, Fig.1(c)

$$\begin{Bmatrix} F_{11} \\ F_{21} \\ F_{31} \\ F_{n1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} f \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix}$$

En forma similar, las fuerzas requeridas para conservar la estructura deformada tal que $D_2 = 1$, mientras que $D_1 = D_3 = :..=D_n = 0$ (fig.1d)

$$\begin{Bmatrix} F_{12} \\ F_{22} \\ F_{32} \\ \vdots \\ F_{n2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} f \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix}$$

En caso general, si $D_j = 1$, mientras todos los otros desplazamientos son cero, las ecuaciones serán:

$$\begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & \cdots & F_{1n} \\ F_{21} & F_{22} & \cdots & F_{2n} \\ F3 \;.\;. & . \;.\;.\;. & . & . \\ F_{n1} & F_{n2} & & F_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

siendo las fuerzas Fij de la izquierda en esta ecuación los elementos de la matriz de rigideces, por lo tanto:

$$\begin{bmatrix} K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \end{bmatrix}^{-1} \quad ó \quad \begin{bmatrix} K \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} f \end{bmatrix} \qquad 4.3$$

La matriz de rigideces es la inversa de la de flexibilidades y viceversa, teniendo el mismo sistema de coordenadas para fuerzas y desplazamientos.

Sin embargo en el análisis por flexibilidad se transforma la estructura en isostática: y el sistema de coordenadas representan la localización y dirección de las restricciones y en cambio en rigideces, se agregan fuerzas para restringir desplazamientos de nudos, siendo su sistema de coordenada la localización y dirección de los desplamientos incógnitas; por lo tando la inversa de la matriz de flexibilidad utilizada en el método de las fuerzas en una matriz, en la cual los elementos son coeficientes de rigidez, pero no los que se utilizan en el análisis del método de rigidez y viceversa.

Propiedades de simetría.

Como se demostró en el teorema recíproco de Maxwell-Betti y con relación a la matriz de flexibilidades, hace que esta matriz sea simétrica. Como la ecuación 4.3 indica que la matriz de rigedeces es la inversa de la matriz de flexibilidades, será también simétrica, es decir que los coeficientes de la matriz de rigideces serán entonces:

$$Kij = Kji \qquad 4.4$$

Otra propiedad importante es que los coeficientes de la diagonal principal f_{ii} ó K_{ii} deben ser positivos ya que para el cálculo de f_{ii} el desplazamiento ocurrirá en la coordenada i debida a una fuerza unitaria en i, teniendo ambos la misma dirección y en forma semejante para Kii, la fuerza nexesaria enla coordenada i que provoca un desplazamiento unitario en i, tendrán la misma dirección.

Si en la ecuación (2.3) se substituyen los desplazamientos expresados en la ecuación 4.1, se tiene:

$$\left[W \right]_{1x1} = \frac{1}{2} \left\{ F \right\}^{T}_{nx1} \left[f \right]_{nxn} \Big\} F \Big\{ \quad (4.5)$$

y por otro lado, substituyendo la ecuación (3.2) de nuevo en la 4.1

$$\left[W \right]_{1x1} = \frac{1}{2} \Big\} D \Big\{^{T} \left[K \right] \Big\} D \Big\{ \quad (4.6)$$

De las ecuaciones 4.5 y 4.6, los miembros de la derecha tienen forma cuadrática de las variables F o D y ésta es positivamente definida si tiene valores positivos para cualquier valor no nulo de la variable y será cero si F ó D son cero.

Por lo anterior, las ecuaciones 4.5 y 4.6 representan el trabajo externo de fuerzas a través de desplazamientos y esta cantidad debe ser positiva en una estructura estable, deduciendo que en esa forma cuadrática, las matrices $\left[f \right]$ y $\left[K \right]$ son <u>matrices positivamente definidas</u>, siendo los determinantes de $\left[f \right]$ y $\left[K \right]$ mayores que cero.

Selección del método de las flexibilidades o de las rigideces.

Para seleccionar cualquiera de los dos métodos generales, es necesario haberse familiarizado con ellos, para poder decidir en cada caso cual sería de aplicación mas sencilla.

Sin embargo se pueden adelantar algunos comentarios:

1.- El número de incógnitas es en general mayor en el método de las rigideces que en flexibilidades, pero la formulación de las ecuaciones es mas sencilla y de mas fácil aplicación para programas de computadora, debido principalmente a la dificultad de programar la estructura primaria.

2.- Cuando el trabajo se hace con calculadoras y para sistemas relativamente pequeños, la selección dependerá de comparar el grado de hiperestaticidad en flexibilidades con el número de grados de libertad en rigideces.

5.- METODO DE LAS FLEXIBILIDADES.

En el inciso 3 se describió este método. A continuación se analizan en detalle la aplicación de matrices para su resolución.

5.1.- Matriz de transformación de fuerzas.

En una estructura estáticamente determinada cada una de las fuerzas internas de sus elementos puede expresarse en función de las fuerzas externas nodales, por medio de la ecuación de equilibrio:

$$p_1 = b_{11} F_1 + b_{12} + \dots + b_{1n}F_n$$

$$p_2 = b_{21} F_1 + b_{22} F_2 + \dots + b_{an}F_n$$

$$p_m = b_{m1}F_1 + B_{m2} F_2 + \dots + b_{mn}F_n$$

en la cual p son las fuerzas internas y F el conjunto del sistema de cargas aplicada a la estructura.

No existe relación entre los subíndices de F y p

En forma matricial:

$$\}p\{ = [b_F]\,\}F\{ \qquad (5.1)$$

en la cual

$$b_F = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} \dots & b_{an} \\ \vdots & & \\ b_{m1} & b_{m2} \dots & b_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n} \qquad (5,2)$$

[b] es la matriz de transformación de fuerzas que relaciona las fuerzas internas con las externas.

La matriz [b] es una matriz rectangular y el elemento bij representa el valor de la componente de pi de la fuerza interna, producida por la fuerza externa Fj de valor unitario.

Cuando la estructura es hiperestática, las fuerzas internas no pueden determinarse en función de las cargas externas aplicando solamente ecuaciones de equilibrio. Sin embargo, haciendo la estructura isostática, que llamaremos primaria, suprimiendo las redundantes, como se hace en el método de las flexibilidades, se considera la estructura primaria sujeta primeramente a las cargas reales aplicadas y posteriormente a las redundantes. En esta forma, se puede expresar las fuerzas internas de los elementos en función de las cargas externas F y de las redundantes o hiperestáticas R, como sigue:

$$\}p\{ = \left[b_F \right] \ F \ + \left[b_R \right] \ R \qquad (5.3)$$

o utilizando la propiedad de subdivisión de matrices:

$$\}p\{ = \left[b_F \ \vdots \ b_R \right] \ \}\frac{F}{R}\{ \qquad (5.4)$$

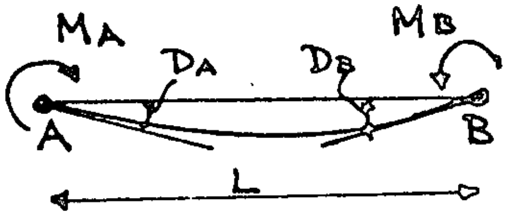
En la cual:

b_F = matriz de transformación de fuerzas externas en la que cada columna representa los valores de p producidos por las fuerzas externas unitarias aplicadas a la estructura primaria con redundantes nulas.

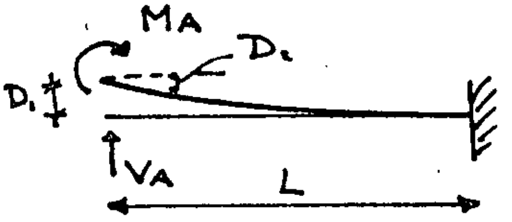
b_R = Matriz de transformación de fuerzas redundantes en la que cada columna representa los valores de p producidos por redundantes unitarias aplicadas a la estructura primaria con fuerzas externas nulas.

5.2.- Solución matricial generalizada por el método de las flexibilidades.

Considerando un elemento aislado, despreciando los efectos de fuerza axial



(a)



(b)

$$[f_M] = \frac{1}{6EI}\begin{bmatrix} 2L^2 & 3L \\ 3L & 6 \end{bmatrix}$$

Los vectores de fuerzas internas y deformaciones se pueden expresar: $\left\{ p \right\} = \left\{ \begin{matrix} M_A \\ M_B \end{matrix} \right\}$; $\left\{ D \right\} = \left\{ \begin{matrix} D_A \\ D_B \end{matrix} \right\}$

quedando cada componente del vector desplazamiento con la misma componente del vector carga.

La matriz de flexibilidades de la barra será como se indicó anteriormente:

$$\left[f_M \right] = \frac{1}{6EI} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

y la relación con las deformaciones es:

$$\left\{ D \right\} = \left[f_M \right] \left\{ p \right\} \qquad (5.5)$$

Los vectores de fuerzas internas y deformaciones quedarán como sigue:

$$\left\{ p \right\} = \left\{ \begin{matrix} p1 \\ --- \\ p2 \\ -\cdot- \\ -- \\ -- \\ pn \end{matrix} \right\} \qquad D = \left\{ \begin{matrix} D\,1 \\ ---- \\ D\,2 \\ -\cdot- \\ -- \\ --- \\ D\,n \end{matrix} \right\}$$

Los subíndices se refieren a la designación de cada elemento en que se ha descompuesto la estructura.

Aplicando el principio de los trabajos virtuales.

We = Wi real

$$\{F\}^T \{D\} = \{p\} \{e\} \qquad (5.6)$$

virtual

como $\{p\} = [b_R]\{F\}$, (5.7) substituyendo en 5.6

$$\{F\}^T \{D\} = [[b_R]\{F\}]^T \{e\}$$

$$\{F\}^T \{D\} = \{F\}^T b^T e$$

$$\{D\} = [b_R]^T \{e\} \qquad (5.8)$$

Esta expresión permite calcular los desplazamientos de la estructura a partir de la <u>matriz de transformación de fuerzas virtuales</u>. La transpuesta de la matriz de transformaciones de fuerzas, representa la matriz de deformaciones.

El vector de deformaciones internas $\{e\}$, si se substituye en 5.5.

$$\{D\} = [b_R]^T [f_M] \{P\}$$

El vector de fuerza internas $\{p\}$, en función de las cargas externas $\{F\}$, mediante una matriz de transformación:

$$\{p\} = [b_F]\{F\}$$

El término b_F ij representa el valor de la fuerza interna en el nudo i debido a una fuerza externa unitaria aplicada en j

Substituyendo valores:

$$\}D\{ = \left[b_R\right]^T \left[f_M\right]\left[b_F\right] F \qquad 5.10$$

Por definición de matriz de flexibilidad de una estructura:

$$\}D\{ = \left[f\right] \}F\{ \qquad 5.11$$

Por lo tanto, la ecuación de transformación para obtener la matriz de flexibilidades será:

$$\left[f_F\right] = \left[b_R\right]^T \left[f_M\right]\left[b_F\right] \qquad 5.12$$

en la cual:

$\left[f_F\right]$ = Matriz de flexibilidades asociada al vector de cargas externas $\}F\{$, referida a los nudos indicados en la matriz b

$\left[f_M\right]$ = matriz diagonal, cuyos términos son las flexibilidades de los elementos de la estructura.

$\left[b_R\right]$ = Matriz de transformación del sistema virtual de fuerzas aplicadas en los puntos según las redundantes.

$\left[b_F\right]$ = Matriz de transformación del sistema real de fuerza externa.

Aplicando finalmente la ecuación general de compatibilidad de deformaciones:

$$\}D_x\{ = \}D_{xF}\{ + \}D_{RR}\{ \qquad 5.13$$

$$= \left[f_{xF}\right] \}F\{ + \left[f\right] \}R\{ , \qquad 5.14$$

en la cual:

$\left[fx_F \right]$ = Matriz de flex. asociada a las cargas. Cada término representa el desplazamiento según la redundante i producido por un valor unitario de la fuerza externa aplicada en "j',

$\left[f \right]$ = Matriz de flexibilidades ensamblada de la estructura referida al sistema de redundantes.

Aplicando las ecuaciones de transformación de fuerzas se tendrá:

$$\left[f_F \right] = \left[b_R \right]^T \left[f_M \right] \left[b_F \right] \qquad 5.15$$

$$\left[f \right]_{nRxnR} = \left[b_R \right] \left[f_M \right] \left[b_R \right] \qquad 5.16$$

y substituyendo en la ecuación general de compatibilidad de deformaciones:

$$\left[b_R \right]^T \left[f_M \right] \left[b_F \right] \left\{ F \right\} + \left[b_R \right]^T \left[f_M \right] \left[b_R \right] \left\{ R \right\} = \left\{ Dx \right\} \qquad 5.17$$

El vector Dx indica los desplazamientos reales de los apoyos, que serán iguales a cero en la mayor parte de casos en la práctica o iguales a desplazamientos impuestos como asentamientos de apoyos, giros, efectos de temperatura, resortes elásticos, etc.

De la ecuación anterior si $\left\{ Dx \right\} = 0$:

$$\left\{ R \right\} = - \left[f \right]^{-1} \left[b_R \right]^T \left[f_M \right] \left[b_F \right] \left\{ F \right\} \qquad 5.18$$

Con las redundantes $\left\{ R \right\}$ obtenidas, aplicando el principio de superposición se obtienen los elementos mecánicos:

$$\left\{ p \right\} = \left[b_F \right] \left\{ F \right\} + \left[b_R \right] \left\{ R \right\} \qquad 5.19$$

Las ecuaciones anteriores son válidas para cualquier tipo de estructuras: armaduras, vigas, marcos, etec., tomando las flexibilidades correspondientes de axial, flexión, etc.

Para el caso de armaduras, es conveniente aplicar la ecuación equilibrio:

$$\}p\{ = \left[b_F\right] \}F\{ = \}po\{$$

siendo $\}po\{$ el vector de fuerzas internas en las barras debidas a fuerzas externas $\}F\{$ aplicada en la estructura primaria, quedando la ecuación 5.19

$$\left[b_R\right]^T \left[f_M\right] \}po\{ + \left[b_R\right]^T \left[f_M\right] \}b_R\{ \}R\{ = 0 \qquad 5.20$$

ecuaciones en las cuales no será necesario calcular $\left[b_F\right]$

Para calcular los desplazamientos, la ecuación 5.3 puede escribirse:

$$\}p\{ = \left[b_F \ \vdots \ b_R\right] \left\} \begin{array}{c} F \\ \hdashline R \end{array} \right\{ \qquad (5.4)$$

$$\left\} \begin{array}{c} D_F \\ \hdashline D_R \end{array} \right\{ = \left[\begin{array}{c} b_F^T \\ \hdashline b_R^T \end{array} \right] \}Q\{ \qquad (5.21)$$

En la cual: $\}D_F\{$ = desplazamientos debidos a $\}F\{$

$\}D_R\{$ = desplazamientos debidos a la redundantes

Por el principio de contragradiencia:

$$\{D\} = [b_F]^T \{e\} \tag{5.22}$$

$$\{D_R\} = [b_R]^T \{e\} \tag{5.23}$$

Pero por continuidad o compatibilidad, dado que los elementos de la estructura no están realmente "cortados", los valores de D_R deben ser nulos.

Por otro lado como:

$$\{e\} = [f]\{p\} \tag{5.24}$$

que es la ley de Hooke al revés, substituyendo en 5.22

$$\{D\} = [b_F]^T \{e\} = [b_F]^T [f] \{p\} \tag{5.25}$$

Esta ecuación permite calcular los desplazamientos aplicando una fuerza unitaria en la estructura primaria isostática.

5.21.- Caso de fuerzas aplicadas en los elementos

La solución matricial generalizada requiere que las fuerzas estén aplicadas en los nudos, lo cual supone que en el caso de vigas y marcos que el momento flexionante entre nudos varía linealmente y que los desplazamientos entre mudos son nulos.

Sin embargo como en la práctica las cargas se aplican en cualquier punto, habrá que transladarlas a los nudos previamente seleccionados, calculando además los desplazamientos locales debidos a estas cargas en los nudos externos del elemento considerado.

Las deformaciones locales deben tomar en cuenta las condiciones de frontera, establecidas para cada barra, cuando se subdivide la estructura en elementos. La expresión para obtener los desplazamientos según el sistema de redundantes basada en el teorema de trabajos virtuales, será:

$$\}D_I\{ = [b_R]^T \{D''\{$$

en la cual $\{D''\{$ es el vector de desplazamientos impuesto a cada elemento debido a las cargas aplicadas sobre él.

5.3- Resumen de aplicación del método de las flexibilidades

5.31- Estructuras isostáticas.

a) Las fuerzas internas se obtienen con la aplicación de la ecuación de equilibrio:

$$\}P\{ = [b_F]\}F\{$$

b) Los desplazamientos nodales se calcularán:

$$\}D\{ = [b_F]^T [f_M] [b_F] \}F\{ = [f] \}F\{$$

(Nota.- En el caso de vigas o marcos cargados en los elementos deberán trasladarse las cargas a los nudos).

El ejemplo No. 5 muestra la aplicación del método a una armadura isostática.

5.32.- Estructuras hiperestáticas.

a) Definir la estructura primaria y por lo tanto especificar cuales son las redundantes

b) Calcular vector de fuerzas y la matriz de transformación de redundantes $[b_R]$ y la asociada a las cargas $[b_F]$

c) Calcular la matriz de flexibilidad no ensamblada de los elementos f_M

d) Calcular el producto $[b_R]^T [f_M][b_F]$ que es la matriz de flexib. asociada a las cargas

e) Calcular la matriz de flexibilidades ensamblada de la estructura

$$[f]_{RxR} = [b_R]^T [f_M][b_R]$$

f) Plantear y resolver las ecuaciones de compatibilidad de deformaciones:

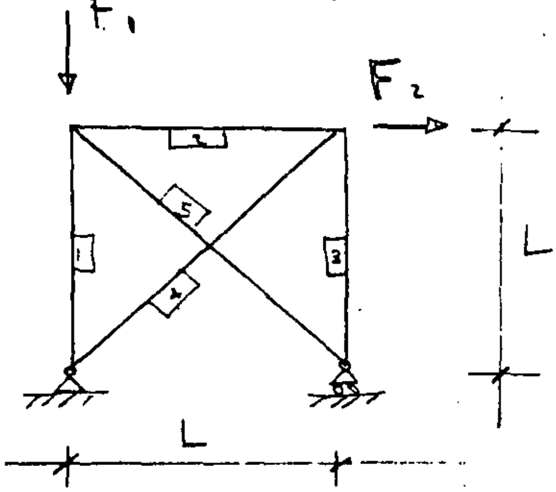
$$[D_{xF}] \} F \{ + [D_{RR}] R = Dx \overset{o}{=} 0$$

g) Si se desea calcular los desplazamientos.

$$D_A = [b_F]^T [f] \} P \{$$

Los siguientes ejemplos ilustran la aplicación de la secuela mencionada.

EJEMPLO No.5- Calcular las fuerzas en las barras resolviendo por flexibilidad y los desplaz. corresp. en la dirección de F1 y F2



AE= constante.

1.- La armadura es isostática

2.- La ecuación de equilibrio es

$$\{P\} = [b_F]\{F\}$$

Cálculo de b_F :

$$[b_F]_{5\times 2} = \begin{array}{cc} F_1=1 & F_2=1 \\ \left[\begin{matrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{matrix}\right] \end{array} \quad ;$$

Cálculo de $\{F\}$

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$$

$$\{P\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -F_1 \\ 0 \\ -F_2 \\ \sqrt{2}F_2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

3.- Cálculo de desplazamientos:

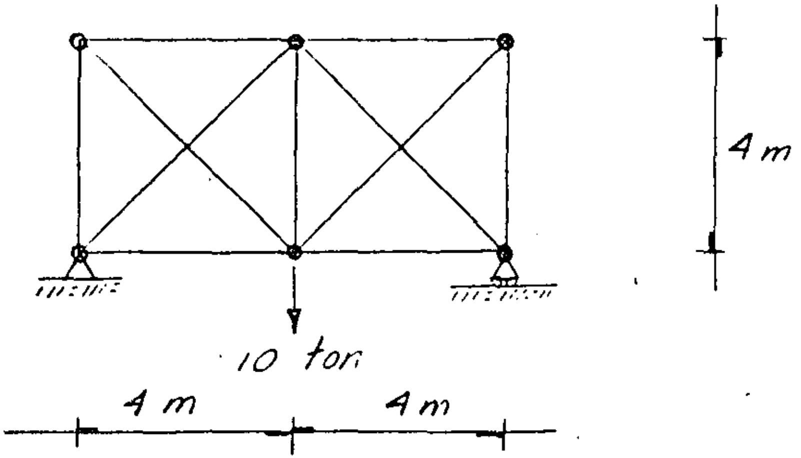
$$\{D\} = \underbrace{[b_F]^T [f_M] [b_F]}_{[f]}\{F\} \; ; \quad [f_M] = \begin{bmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ 0 & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$[f] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{AE}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \{D\} = \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{AE}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1/E \\ 3/F_1 \end{Bmatrix}$$

Ejemplo No. 6

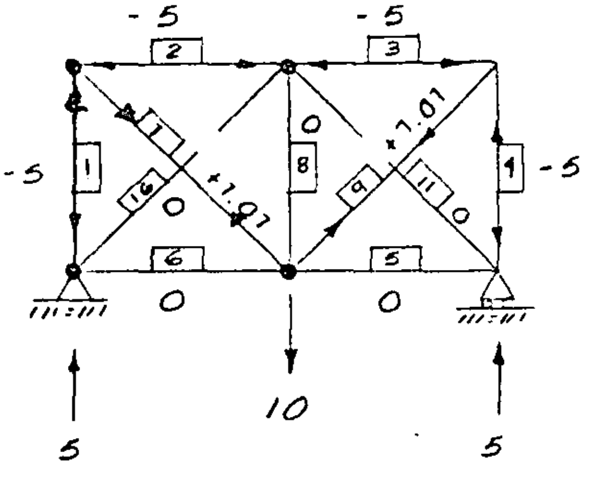
Resolver la armadura por flexibilidades.



AE = cte.

Solución:

1.— La estructura es hiperestática en 2° grado y la estructura primaria seleccionado será la siguiente:



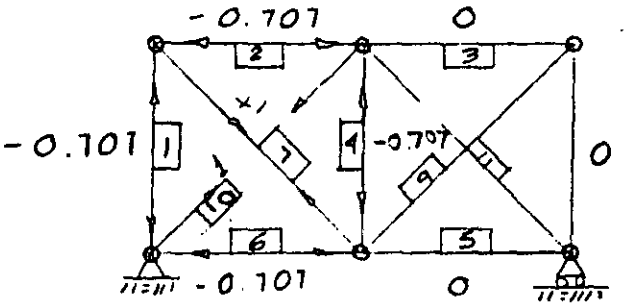
El vector de fuerzas interna:

$p_o = [bF]\}F\{$

$$\text{El vector}\left\{\begin{matrix} p_0 \\ 11\times 1\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} -5 \\ -5 \\ -5 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \\ +7\ 07 \\ 0 \\ +7\ 07 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right\}$$

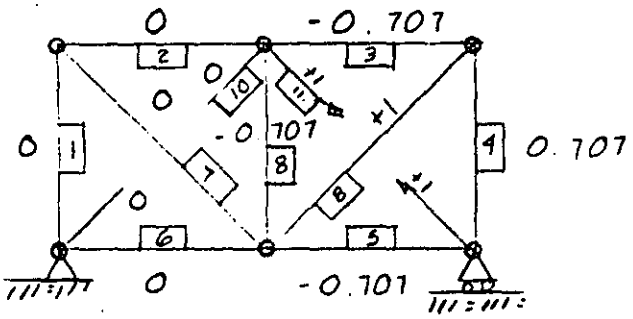
2) Obtención de $[b_R]_{9\times 2}$

1ª columna de $[b_R]$ $R_1 = 1$



$$\begin{array}{r} -0.707 \\ -0.701 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.709 \\ +1 \\ -0.707 \\ 0 \\ +1 \\ 0 \end{array}$$

2ª columna de $[b_R]$ $R_2 = 1$



$$\begin{array}{r} 0 \\ 0 \\ -0.707 \\ -0.707 \\ -0.707 \\ 0 \\ 0 \\ -0.707 \\ +1 \\ 0 \\ +1 \end{array}$$

$$[b_R] = \left[\begin{array}{cc} -0.707 & 0 \\ -0.701 & 0 \\ 0 & -0.707 \\ 0 & -0.701 \\ 0 & -0.707 \\ -0.707 & 0 \\ +1 & 0 \\ -0.707 & -0.707 \\ 0 & +1 \\ \hline +1 & 0 \\ 0 & +1 \end{array}\right]$$

Cálculo de $[f]$

$$\underset{11\times 11}{[f]} = \begin{bmatrix} 4 & & & & & & & & & & \\ & 4 & & & & & & & & & \\ & & 4 & & & & & & & & \\ & & & 4 & & & & & & & \\ & & & & 4 & & & & & & \\ & & & & & 4 & & & & & \\ & & & & & & 5.65 & & & & \\ & & & & & & & 4 & & & \\ & & & & & & & & 5.65 & & \\ & & & & & & & & & 5.65 & \\ & & & & & & & & & & 5.65 \end{bmatrix} \times \frac{1}{AE} \equiv \frac{1}{AE}\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \\ 5.65 \\ 4 \\ 5.65 \\ 4 \\ 5.65 \\ 5.65 \\ 5.65 \end{bmatrix}$$

Calculando el producto $[b_R]^T [f] [p_o]$

$[f]$ [illegible] $=$

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \\ 5.65 \\ 4 \\ 5.65 \\ 5.65 \\ 5.65 \end{bmatrix} \quad \frac{1}{AE} \quad \begin{bmatrix} -5 \\ -5 \\ -5 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \\ +7.07 \\ 0 \\ +7.01 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 \\ -20 \\ -20 \\ -20 \\ 0 \\ 0 \\ +40 \\ 0 \\ +40 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[b_R]^T [f] [p_o] = \begin{bmatrix} -0.707 & -0.707 & 0 & 0 & 0 & -0.707 & +1 & -0.707 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -0.707 & -0.707 & -0.707 & 0 & 0 & -0.707 & +1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -20 \\ -20 \\ -20 \\ -20 \\ 0 \\ 0 \\ +40 \\ 0 \\ +40 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\underbrace{[f_F]\{p^\circ\}}_{D \times F} = \begin{Bmatrix} 68.28 \\ 68.28 \end{Bmatrix} \times \frac{1}{AE}$$

Ahora calculando el producto $[b_R]^T [f_M] [b_R]$

$$\underset{11\times 11}{[f_M]}\ \underset{11\times 2}{[b_R]} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \\ 5.65 \\ 4 \\ 5.65 \\ 5.65 \\ 5.65 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.707 & 0 \\ -0.707 & 0 \\ 0 & -0.707 \\ 0 & -0.707 \\ 0 & -0.707 \\ -1 & \\ -0.707 & 0 \\ +1 & 0 \\ -0.707 & -0.707 \\ 0 & 1 \\ +1 & 0 \\ 0 & +1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.83 & 0 \\ -2.83 & 0 \\ 0 & -2.83 \\ 0 & -2.83 \\ 0 & -2.83 \\ -2.83 & 0 \\ +5.65 & 0 \\ -2.83 & -2.83 \\ 0 & +5.65 \\ 5.65 & 0 \\ 0 & +5.65 \end{bmatrix}$$

$$[f] = [b_R]^T [f_M]\ [b_R] = \begin{bmatrix} -0.707 & -0.707 & 0 & 0 & 0 & -0.707 & +1 & -0.707 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.707 & -0.707 & -0.707 & 0 & 0 & -0.707 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2.83 & 0 \\ -2.83 & 0 \\ 0 & -2.83 \\ 0 & -2.83 \\ 0 & -2.83 \\ -2.83 & \text{[illegible]} \\ +5.65 & 0 \\ -2.83 & -2.83 \\ 0 & +5.65 \\ +5.65 & 0 \\ 0 & +5.65 \end{bmatrix}$$

$$[f] = \begin{bmatrix} 19.32 & 2 \\ 2 & 19.32 \end{bmatrix} \frac{1}{AE}$$

La ecuación de compatibilidad de deformación será:

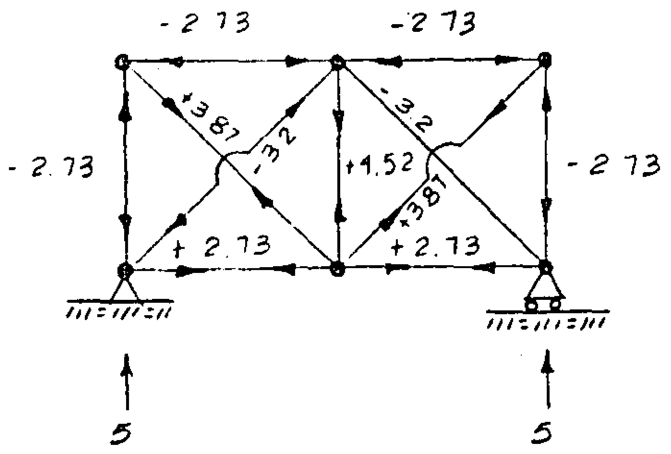
$$\{D \times F\} + \{f\}\{R\} = \{0\}$$

$$\begin{Bmatrix} 68.28 \\ 68.28 \end{Bmatrix} \times \frac{1}{A\ E} + \begin{bmatrix} 19.32 & 2 \\ 2 & 19.32 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \end{Bmatrix} ; \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3.2 \\ 3.2 \end{Bmatrix}$$

Las fuerzas en las barras serán :

$$\left\{ p \right\} = \left\{ po \right\} + \left[b_R \right] \left\{ R \right\} = \left\{ 0 \right\}$$

$$\left\{ \begin{matrix} -5 \\ -5 \\ -5 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \\ +7.07 \\ 0 \\ +7.07 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\} + \left[\begin{matrix} -0.707 & 0 \\ -0.707 & 0 \\ 0 & -0.707 \\ 0 & -0.707 \\ 0 & -0.707 \\ -0.707 & 0 \\ +1 & 0 \\ -0.707 & -0.707 \\ 0 & +1 \\ +1 & 0 \\ 0 & +1 \end{matrix} \right] \left\{ \begin{matrix} -3.2 \\ -3.2 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} -2.73 \\ -2.73 \\ -2.73 \\ -2.73 \\ +2.73 \\ +2.73 \\ +3.87 \\ +4.52 \\ +3.87 \\ -3.2 \\ -3.2 \end{matrix} \right\}$$

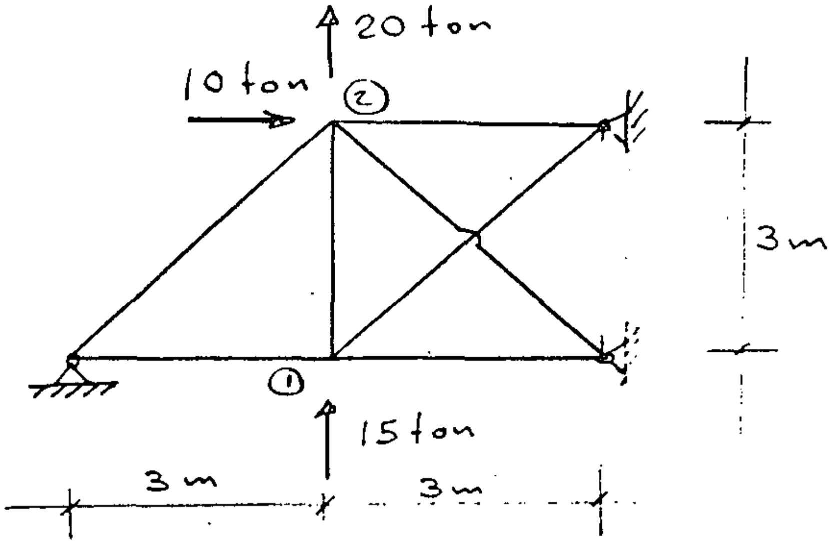


+ = tensión

− = compresión

Fuerzas finales en las barras (ton)

Ejemplo No. 7 – Resolver la armadura por flexibilidades y calcular $\{P\}$, $\begin{Bmatrix} D_{1x} \\ D_{2Y} \end{Bmatrix}$

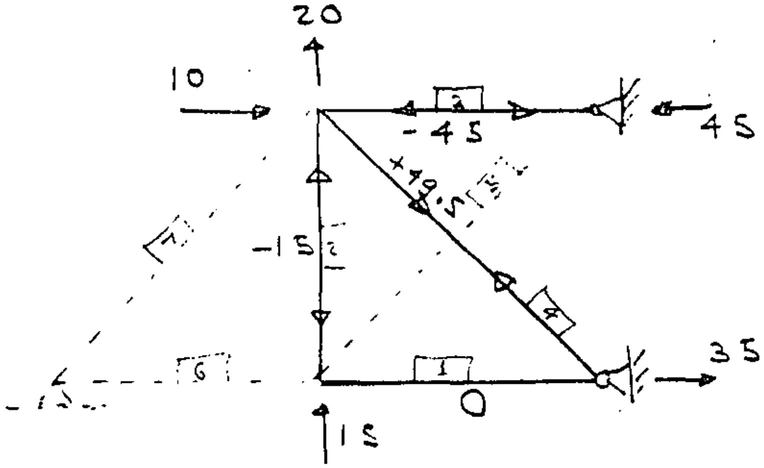


$A = 30\ cm^2$

$E = 2.1 \times 10^6\ Kg/cm^2$

Solución 1) CALCULO DE FUERZAS

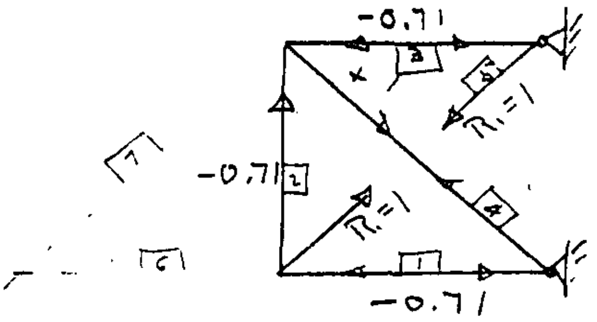
La estructura es hiperestática en tercer grado y se seleccionará la siguiente estructura primaria



$$\text{Cálculo de } P_0 = \begin{Bmatrix} 0 \\ -15 \\ -45 \\ +49.5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

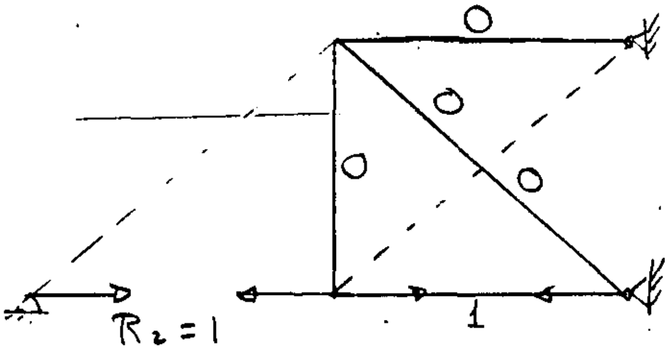
Obtención de $[b_R]$

1) 1ª columna de $[b_R]$; $R_1 = 1$



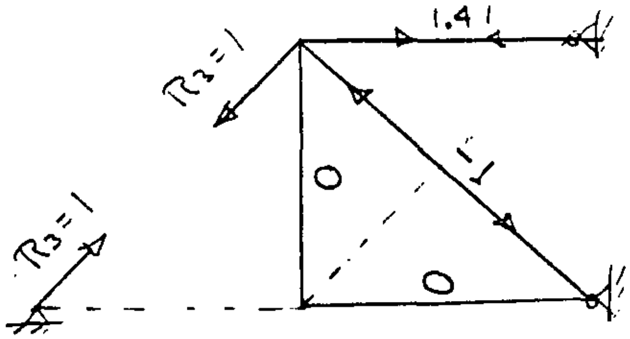
$$\begin{matrix} -0.71 \\ -0.71 \\ -0.71 \\ +1 \\ +1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$

2ª columna de $[b_R]$; $R_2 = 1$



$$\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}$$

3ª columna de $[b_R]$; $R_3 = 1$



$$\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ +1.41 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}$$

$$[b_R] = \begin{bmatrix} -0.71 & 1 & 0 \\ -0.71 & 0 & 0 \\ -0.71 & 0 & +1.41 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Calculo de [f]

$$[f_M] = \frac{1}{AE}\begin{bmatrix} 3 & & & & & & \\ & 3 & & & & 0 & \\ & & 3 & & & & \\ & & & 4.24 & & & \\ & 0 & & & 4.24 & & \\ & & & & & 3 & \\ & & & & & & 4.24 \end{bmatrix}$$

$$[f] = [b_R]^T [f] [b_R] = \frac{1}{AE}\begin{bmatrix} 13.01 & -2.13 & -7.24 \\ -2.13 & 6 & 0 \\ -7.24 & 0 & 14.44 \end{bmatrix}$$

Calculando ahora

$$[b_R]^T [f] \{P_0\} = \frac{1}{AE}\begin{Bmatrix} 342.18 \\ 0 \\ +400 \end{Bmatrix}$$

La ecuación de compatibilidad de deformaciones será:

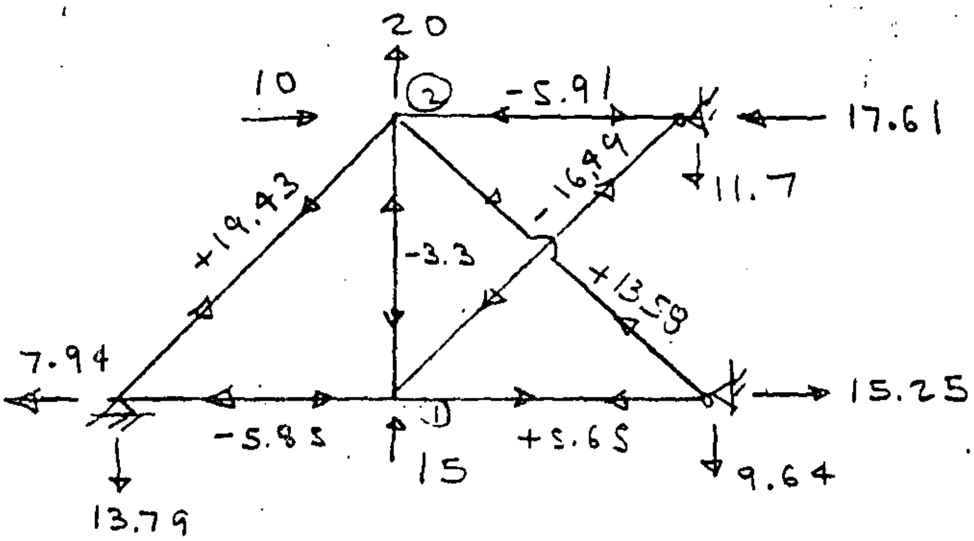
$$\{D_{RF}\} + [f]\{R\} = \{0\}$$

$$\frac{1}{AE}\begin{Bmatrix} 342.18 \\ 0 \\ +400 \end{Bmatrix} + \frac{1}{AE}\begin{bmatrix} 13.01 & -2.13 & -7.24 \\ -2.13 & 6 & 0 \\ -7.24 & 0 & 14.44 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{Bmatrix} = \{0\}$$

$$\therefore \quad \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -16.49 \\ -5.85 \\ +19.43 \end{Bmatrix} \text{ ton}$$

Los valores de las fuerzas en las barras será

$$\{P\} = \underset{[illegible]}{\begin{Bmatrix} 0 \\ -15 \\ -45 \\ +49.5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}} + \underset{[b_R]\{R\}}{\begin{Bmatrix} +5.65 \\ 11.70 \\ 39.09 \\ -35.92 \\ -16.49 \\ -5.85 \\ +19.43 \end{Bmatrix}} = \begin{Bmatrix} +5.65 \\ -3.30 \\ -5.91 \\ +13.58 \\ -16.49 \\ -5.85 \\ +19.43 \end{Bmatrix}$$



2) CALCULO DE DESPLAZAMIENTO:

Como se obtuvo directamente {po} del equilibrio de la armadura bajo las cargas se tendrá que calcular $[b_F]$

$$[b_F] = \begin{array}{cccc} F_{x_1}=1 & F_{y_1}=1 & F_{x_2}=1 & F_{y_2}=1 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & +1.41 & 0 & +1.41 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Como $\{D\} = [b_F]^T [f] \{P\}$

$$D_{1x} = \{-1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0\} \begin{Bmatrix} +16.95 \\ -9.90 \\ -17.73 \\ +57.57 \\ -69.91 \\ -17.55 \\ +82.34 \end{Bmatrix} \frac{1}{AE} = \frac{16.95}{AE}$$

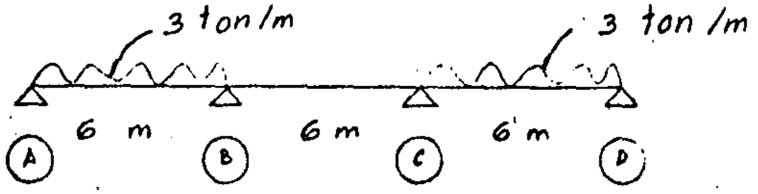
$= 0.00027\ m$

$$D_{2y} = \{0 \quad 0 \quad -1 \quad +1.41 \quad 0 \quad 0 \quad 0\} \begin{Bmatrix} -17.73 \\ +57.57 \end{Bmatrix} \times \frac{1}{AE} = \frac{98.90}{AE}$$

$= 0.00157\ m$

Ejemplo No.- 8

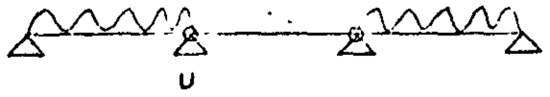
Resolver la viga siguiente por el método de la flexibilidad:

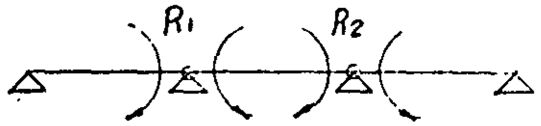


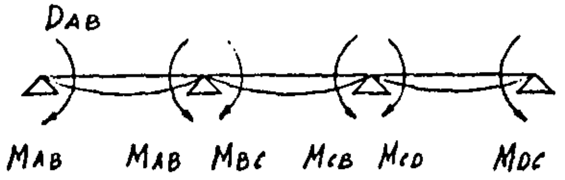
E I = cte.

Solución.-

El grado de hiperestaticidad es dos y se seleccionará la siguiente estructura primaria:





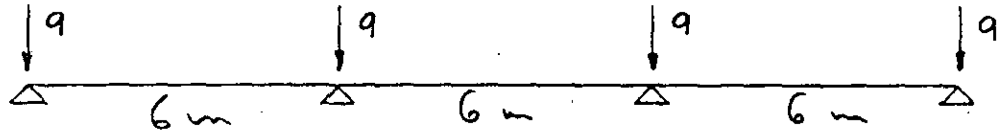


Los vectores de fuerzas y desplazamientos será:

$$F = \begin{Bmatrix} M_{AB} \\ M_{BA} \\ M_{BC} \\ M_{CB} \\ M_{CD} \\ M_{DC} \end{Bmatrix} \qquad D = \begin{Bmatrix} D_{AB} \\ D_{BA} \\ D_{BC} \\ D_{CB} \\ D_{CD} \\ D_{DC} \end{Bmatrix}$$

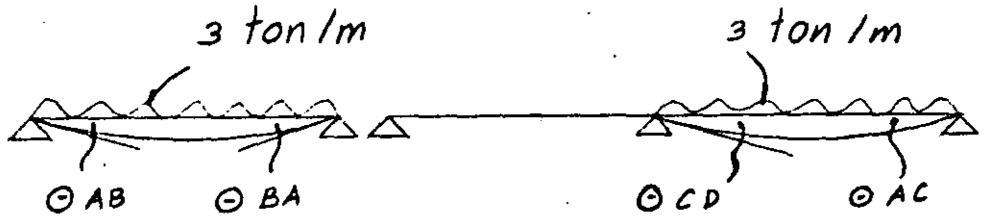
Como el sistema de fuerzas externas no está aplicado en los nudos, habrá que trasladarlo a los apoyos y calcular los giros en los extremos de las barras

$$\Theta_F = \int m \frac{M}{EI} dx$$



El vector de carga será:

$$F = \begin{Bmatrix} -9 \\ -9 \\ -9 \\ -9 \end{Bmatrix}$$



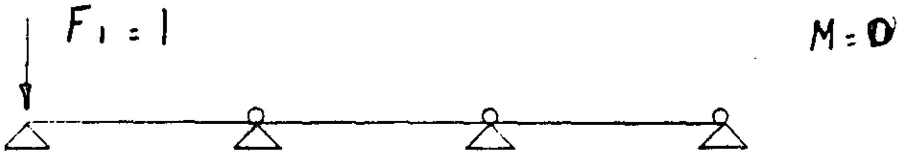
$$\Theta BA = \Theta BC = \Theta CD = \Theta DC = \frac{1}{3} Lik = \frac{27}{EI}$$

El vector de desplazamiento será:

$$\begin{Bmatrix} D_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 27 \\ 27 \\ 0 \\ 0 \\ 27 \\ 27 \end{Bmatrix} \frac{1}{EI}$$

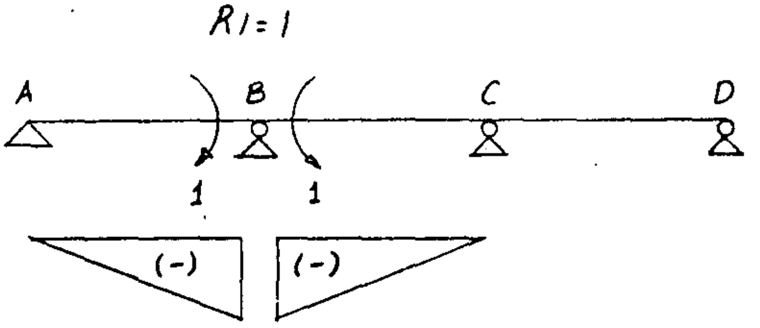
Cálculo de matrices de transformación de fuerzas.

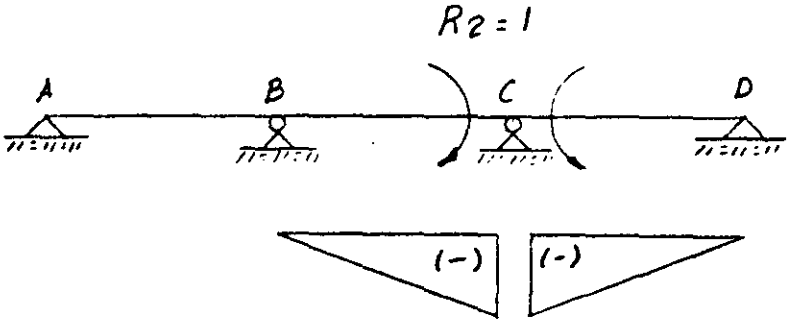
Trazando los diagramas de momentos debidos a fuerzas unitarias y redundantes unitarias:



Para las condiciones $F_2 = 1$, $F_3 = 1$ y $F_4 = 1$ tampoco producen momentos flexionales, por lo tanto la matriz $[b_F]$ será:

$[b_F] = 0$





La matriz de transformación de redundantes será:

$$[b_R]_{6\times 2} = \begin{array}{ccc} & R_1 & R_2 \\ M_{AB} & 0 & 0 \\ M_{BA} & -1 & 0 \\ M_{BC} & -1 & 0 \\ M_{CB} & 0 & -1 \\ M_{CD} & 0 & -1 \\ M_{DC} & 0 & 0 \end{array} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Calculo de $[f_M]$

La matriz de flexibilidades no ensamblada será:

$$[f_M] = \begin{bmatrix} [f_{AB}] & & \\ & [f_{BC}] & \\ & & [f_{CD}] \end{bmatrix} = \frac{1}{6EI} \begin{bmatrix} 12 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 12 \end{bmatrix}$$

El producto $[b_R]^T [f_M] [b_F] = 0$

Cálculo del producto $[b_R]^T [f_M] [b_R]$, que es la matriz de flexibilidades ensamblada

$$[f] = [b_R]^T [f_M] [b_R] = \frac{1}{EI}\begin{bmatrix}4 & 1\\ 1 & 4\end{bmatrix}$$

Los desplazamientos debidos a las cargas en las barras, referidas al sistema general serán:

$$\{D_1\} = [b_R]\{D\} = \begin{bmatrix}0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1\\1\\0\\0\\1\\1\end{Bmatrix} = \frac{27}{EI}\begin{Bmatrix}-1\\-1\end{Bmatrix}$$

Por lo cual los desplazamientos totales debidos a las cargas serán:

$$\{D_{xF}\} = [f_F]\{F\} + [D_1] = 0 + \frac{27}{EI}\begin{Bmatrix}-1\\-1\end{Bmatrix} = \frac{27}{EI}\begin{Bmatrix}-1\\-1\end{Bmatrix}$$

y la ecuación de compatibilidad de deformaciones será:

$$\{D_{xF}\} + [f]\{R\} = \{0\}$$

$$\frac{27}{EI}\begin{Bmatrix}-1\\-1\end{Bmatrix} + \begin{bmatrix}4 & 1\\ 1 & 4\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}R_1\\R_2\end{Bmatrix} = \{0\}$$

de donde: $\begin{Bmatrix}R_1\\R_2\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}5.4\\5.4\end{Bmatrix}$ ton-m

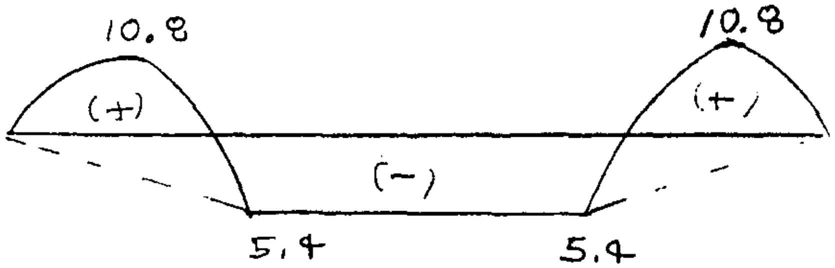
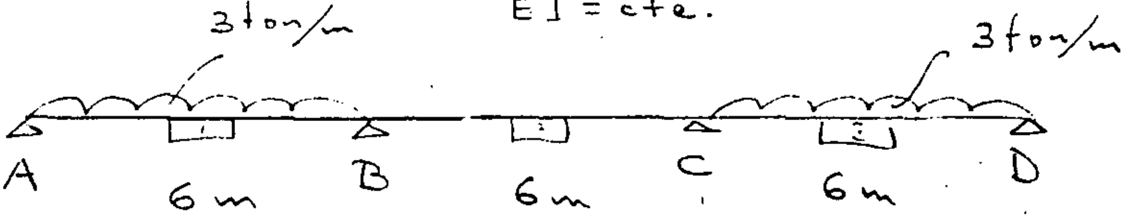


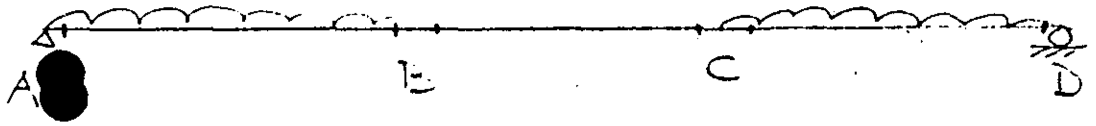
Diagrama de momentos flexionantes (ton-m)

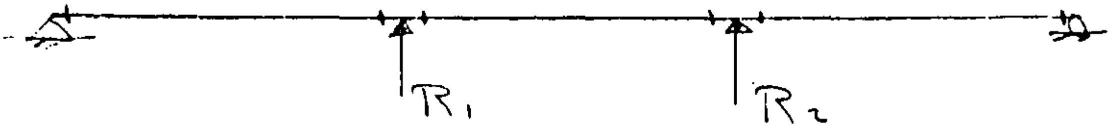
EJEMPLO No 9 - Resolver la misma viga del ejemplo anterior por flexibilidades, utilizando otra estructura primaria.



Solución

1) Grado de hiperestaticidad = 2 y se selecciona la siguiente estructura primaria



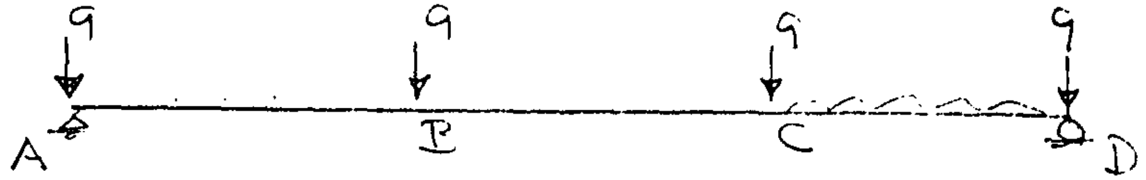


Los vectores de fuerzas y desplazamientos serán:

$$F = \begin{Bmatrix} M_{AB} \\ M_{BA} \\ M_{BC} \\ M_{CB} \\ M_{CD} \\ M_{DC} \end{Bmatrix} \quad , \quad D = \begin{Bmatrix} D_{AB} \\ D_{BA} \\ D_{BC} \\ D_{CB} \\ D_{CD} \\ D_{DC} \end{Bmatrix}$$

Como el sistema de fuerzas externas no está aplicado en los nudos, habrá que trasladarlos a los apoyos y calcular los giros en los extremos de cada barra

Igual que en el ejemplo anterior



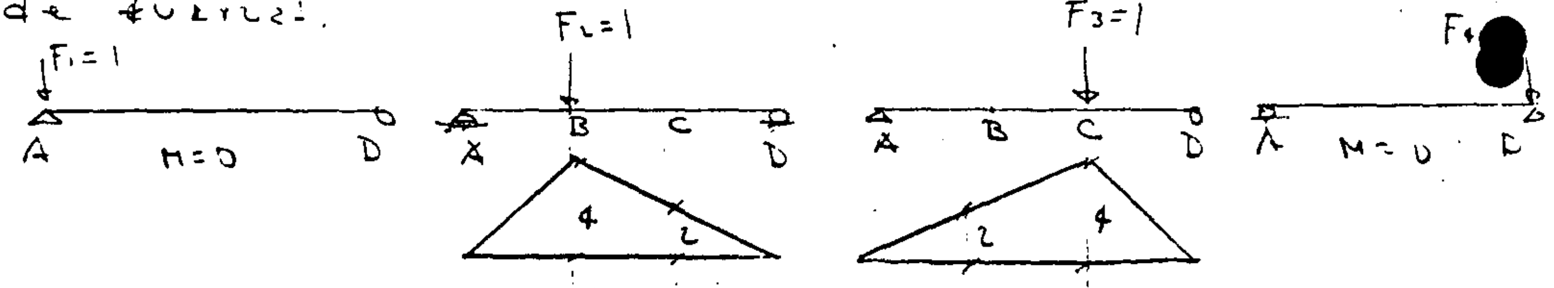
El vector de cargas será:

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} 9 \\ 9 \\ 9 \\ 9 \end{Bmatrix} \quad y \quad \Theta_{AB} = \Theta_{BA} = \Theta_{CD} = \Theta_{DC} = \frac{27}{EI}$$

(valores ya calculados)

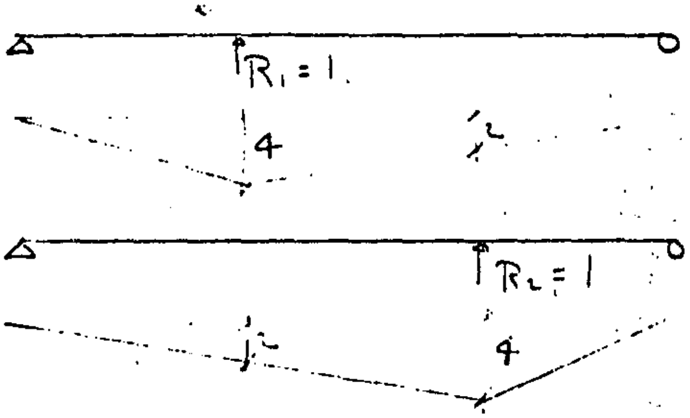
$$D = \begin{Bmatrix} 27 \\ 27 \\ 0 \\ 0 \\ 27 \\ 27 \end{Bmatrix}$$

Cálculo de las matrices de transformación de fuerzas:



$$[b_F] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} , \quad [f_M] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & & & & \\ 1 & 2 & & & & \\ & & 2 & 1 & & \\ & & 1 & 2 & & \\ & & & & 2 & 1 \\ & & & & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Cálculo de $[b_R]$



$$[b_R] = \begin{array}{cc} R_1=1 & R_2=1 \\ \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ -4 & -2 \\ -4 & -2 \\ -2 & -4 \\ -2 & -4 \\ 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

Cálculo de $[f_F] = [b_R]^T [f_M] [b_F]$

$$[f_F] = \frac{1}{EI}\begin{bmatrix} 0 & 96 & 84 & 0 \\ 0 & 84 & 96 & 0 \end{bmatrix}$$

∴ Los desplazamientos debidos a las cargas serán: los vodales + debidos cargas repartidas

$$[f_F]\{F\} + [b_R]^T\{L\} = \frac{1}{EI}\begin{bmatrix} 0 & 96 & 84 & 0 \\ 0 & 84 & 96 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} -9 \\ -9 \\ -9 \\ -9 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -4 & -4 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -4 & -4 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 27 \\ 27 \\ 0 \\ 0 \\ 27 \\ 27 \end{Bmatrix}$$

$$= \frac{1}{EI}\begin{Bmatrix} -1620 \\ -1620 \end{Bmatrix} + \frac{1}{EI}\begin{Bmatrix} -162 \\ -162 \end{Bmatrix} = \frac{1}{EI}\begin{Bmatrix} -1782 \\ -1782 \end{Bmatrix}$$

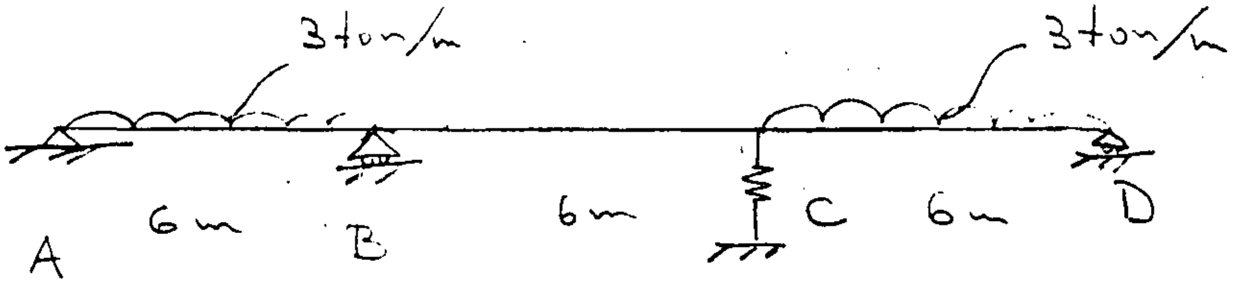
$$[f] = [b_R]^T [f_M][b_R] = \frac{1}{EI}\begin{bmatrix} 96 & 84 \\ 84 & 96 \end{bmatrix}$$

La ecuación de compatibilidad de deformaciones será: $\{D_{xF}\} + \{D_{xR}\} = \{0\}$

$$\frac{1}{EI}\begin{Bmatrix} -1782 \\ -1782 \end{Bmatrix} + \frac{1}{EI}\begin{bmatrix} 96 & 84 \\ 84 & 96 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix} = \{0\}$$

$$\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 9.90 \\ 9.90 \end{Bmatrix} \text{ton}$$

EJEMPLO No 10 – Resolver la viga de los dos ejemplos anteriores, sabiendo que en C hay un apoyo elástico



$$k_{resorte} = \frac{EI}{20}$$

Solución.-

1) Los cálculos serán idénticos al los del ejemplo, salvo las ecuaciones de compatibilidad de deformaciones que serán:

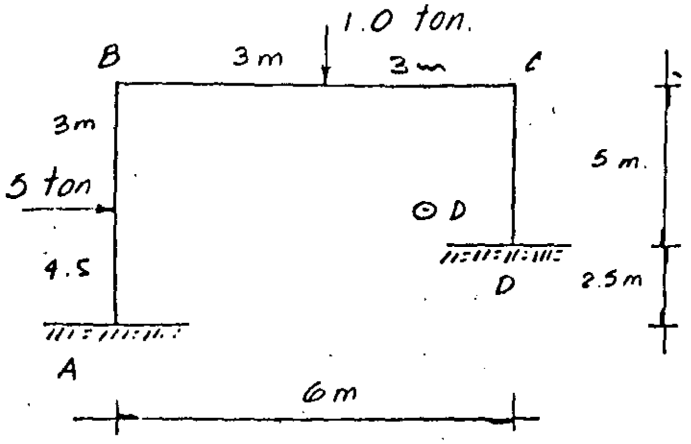
$$\left\{ D_{xF} \right\} + \left\{ D_{xR} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \Delta_B \\ \Delta_C \end{matrix} \right\}$$

$$\frac{1}{EI} \left\{ \begin{matrix} -1782 \\ -1782 \end{matrix} \right\} + \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} 96 & 84 \\ 84 & 96 \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ -\frac{R_2}{k_{res}} \end{matrix} \right\}$$

$$\left\{ \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 13.98 \\ 5.24 \end{matrix} \right\} \text{ton}$$

Ejemplo No. 11

Resolver por flexibilidades considerando efectos de flexión y calcular los desplazamientos de los nudos.

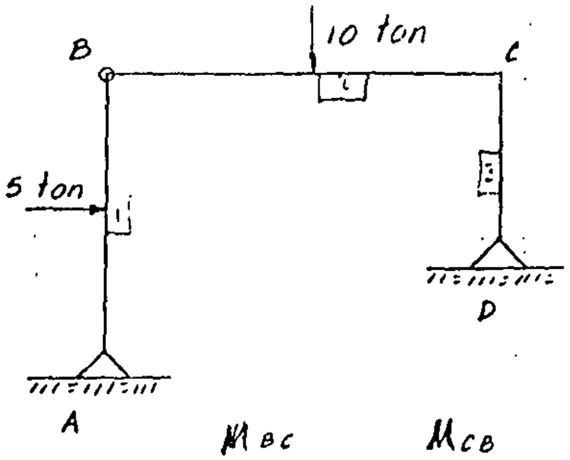


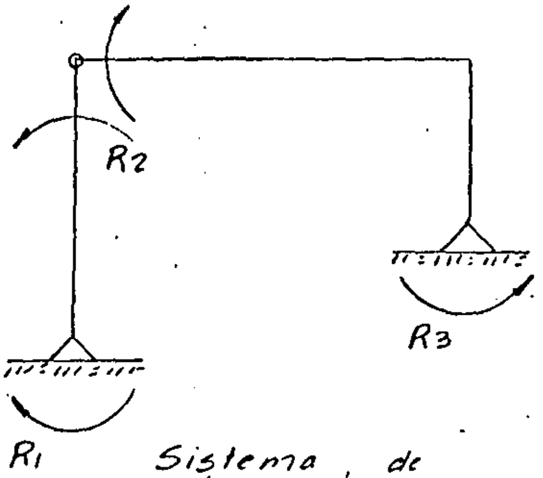
$E \cdot I = 6600 \text{ ton} \cdot m^2$

$\Theta_D = +0.002$ rad.

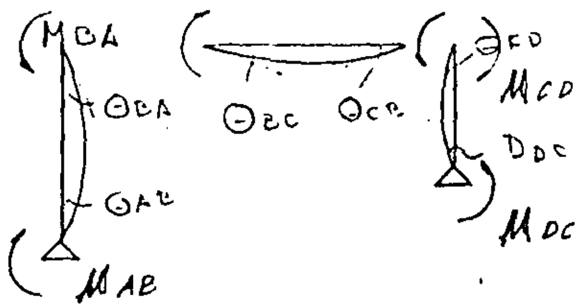
Solución.

La estructura es hiperestática en tercer grado y se seleccionará la siguiente estructura primaria:





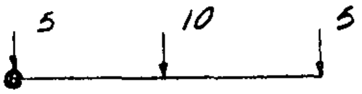
Sistema de redundantes

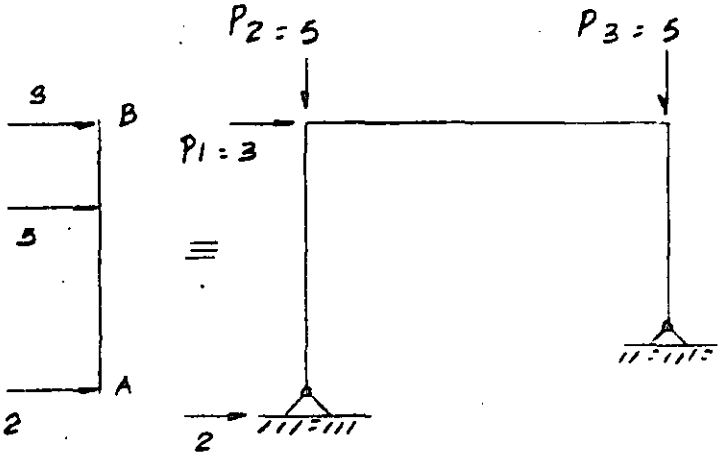


Los vectores de fuerzas internas y desplazamientos serán:

$$\left\{ \rho^{\circ} \right\} = \left\{ \begin{matrix} M_{AB} \\ M_{BA} \\ M_{BC} \\ M_{CB} \\ M_{CD} \\ M_{DC} \end{matrix} \right\} \qquad \left\{ D \right\} = \left\{ \begin{matrix} D_{AB} \\ D_{BA} \\ D_{BC} \\ D_{CB} \\ D_{CD} \\ D_{DC} \end{matrix} \right\}$$

Como el sistema de fuerzas externas no está aplicado en los nudos, habrá que trasladarlos a los apoyos; para hacerlo se aplicarán las ecuaciones de estática.



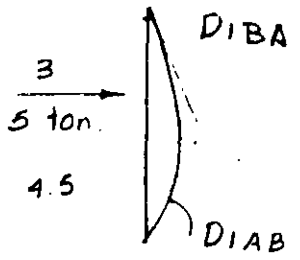


El vector de carga será:

$$\left\{ F \right\} = \left\{ \begin{matrix} 3 \\ 5 \\ 5 \end{matrix} \right\}$$

Además el sistema externo de cargas por estar aplicado en las barras impone deformaciones que se calculan con la expresión de trabajo virtuales.

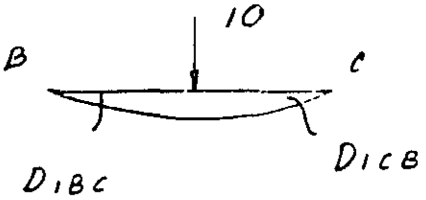
$$\Theta_F = \int m \frac{M}{EI} \, dx$$



Haciendo uso de las tablas para multiplicar diagramas :

$$D_{1AB} = \frac{15.75}{EI}$$

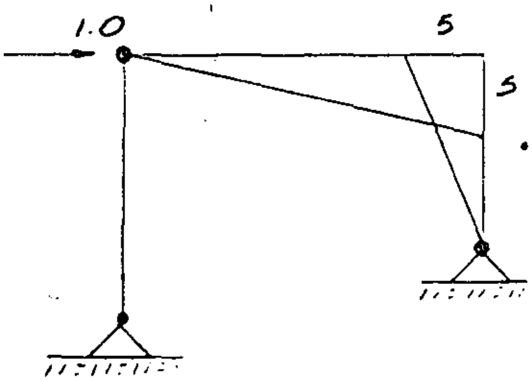
$$D_{1AB} = \frac{18}{E \cdot I}$$



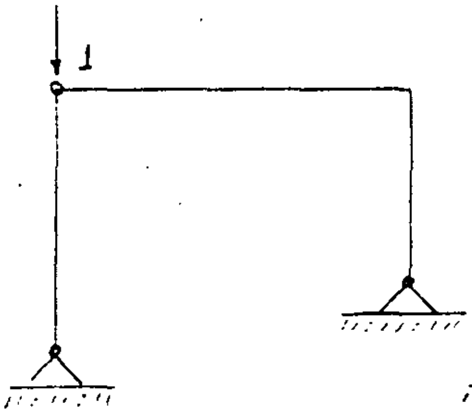
$$D_{1BC} = D_{1CB} = \frac{22.5}{EI} \quad \therefore \quad D_1 = \begin{Bmatrix} 15.75 \\ 18 \\ 22.5 \\ 22.5 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \frac{1}{EI}$$

Para poder calcular las matrices de transformación de fuerzas, se calcularán los diagramas debidos a fuerzas externas unitarios y los de redundancia unitarias.

$F_1 = 1$

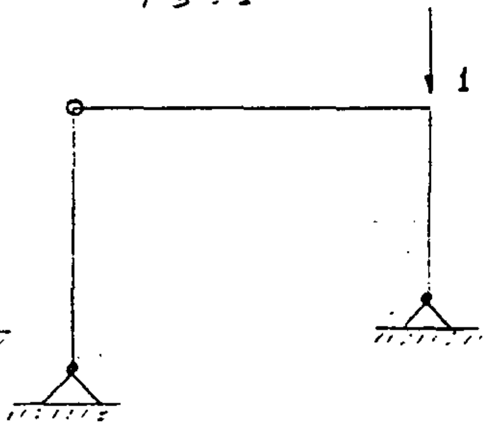


$F_1 = 1$

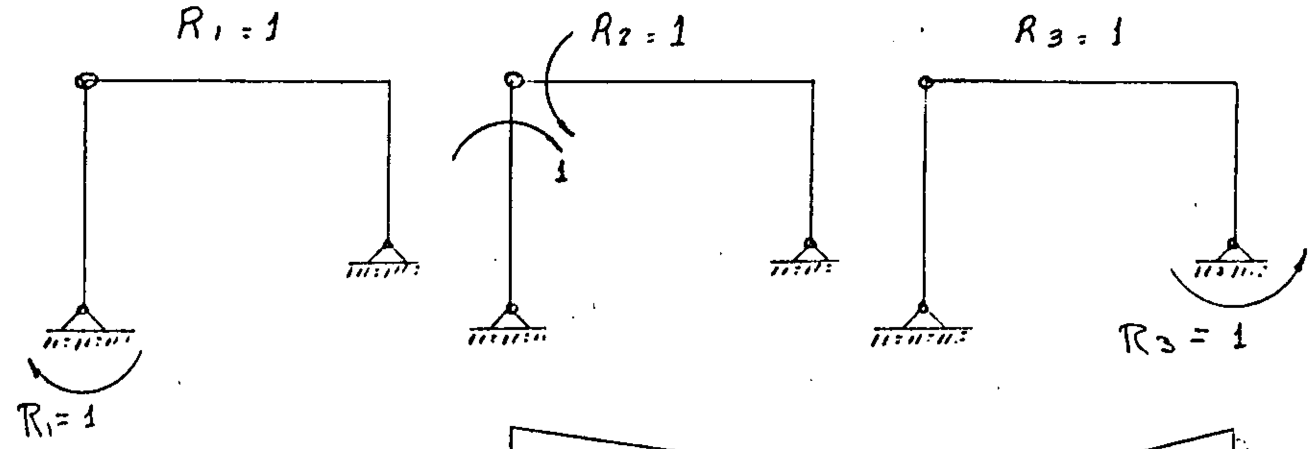


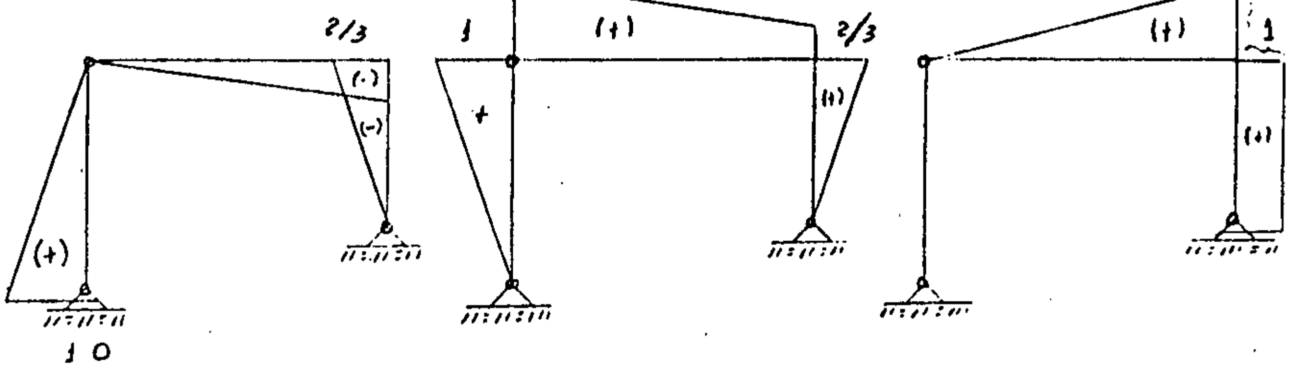
$M = 0$

$F_3 = 1$



$M = 0$





La matriz de transformación de carga será:

$$p_o = \left[b_F \right] \left\{ F \right\}$$

$$\begin{array}{cccc} & F_1 = 1 & F_2 = 1 & F_3 = 1 \\ M_{AB} & 0 & 0 & 0 \\ M_{BA} & 0 & 0 & 0 \\ M_{BC} & 0 & 0 & 0 \\ M_{CB} & -5 & 0 & 0 \\ M_{CD} & -5 & 0 & 0 \\ M_{DC} & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 \end{array} \quad \therefore \left[b_o \right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matriz de trasformación de redundante:

$$\begin{array}{cccc} & R_1 & R_2 & R_3 \\ M_{AB} & 1 & 0 & 0 \\ M_{BA} & 0 & 1 & 0 \\ M_{BC} & 0 & 1 & 0 \\ M_{CB} & -2/3 & 2/3 & 1 \\ M_{CD} & -2/3 & 2/3 & 1 \\ M_{DC} & 0 & 0 & 1 \end{array} \quad \therefore \left[b_R \right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2/3 & 2/3 & 1 \\ -2/3 & 2/3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Calculo de $\left[f_M \right]$

La matriz no ensamblada de la estructura será:

$$\left[f_M \right] = \begin{bmatrix} [f_{AB}] & & \\ & [f_{BC}] & \\ & & [f_{CD}] \end{bmatrix} = \frac{1}{6EI} \begin{bmatrix} 15 & 7.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7.5 & 15 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 10 \end{bmatrix}$$

Cálculo del producto $\left[b_R \right]^T \left[f_M \right] \left[b_0 \right] = \left[f_F \right]$

$$\left[b_R \right]^T \left[f \right] \left[b_0 \right] = \begin{bmatrix} 73.33 & 0 & 0 \\ -103.33 & 0 & 0 \\ 135 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{6EI}$$

Cálculo del producto $[b_R]^T [f_M] [b_R]$, que es la matriz de flexibilidad ensamblada

$$[f] = \begin{bmatrix} 24.78 & -62.78 & -18 \\ -62.78 & 44.78 & 24 \\ -18 & 24 & 42 \end{bmatrix} \times \frac{1}{6EI}$$

A los desplazamientos producidos por el sistema de carga en los nudos, deberá sumarse el de las cargas aplicadas en las barras y que referido al sistema general, mediante la ecuación:

$$\{D_1\} = [b_R] \{D\} = \begin{Bmatrix} 0.75 \\ 55.50 \\ 22.50 \end{Bmatrix} \frac{1}{EI}$$

Por lo tanto los desplazamientos totales debidos al sistema de carga externa será:

$$\{D_{xp}\} = [f_p] \{F\} + \{D_1\}$$

$$= \frac{1}{6EI} \begin{bmatrix} 73.33 & 0 & 0 \\ -103.33 & 0 & 0 \\ -135 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 3 \\ 5 \\ 5 \end{Bmatrix} + \frac{1}{EI} \begin{Bmatrix} 0.75 \\ 55.50 \\ 22.50 \end{Bmatrix}$$

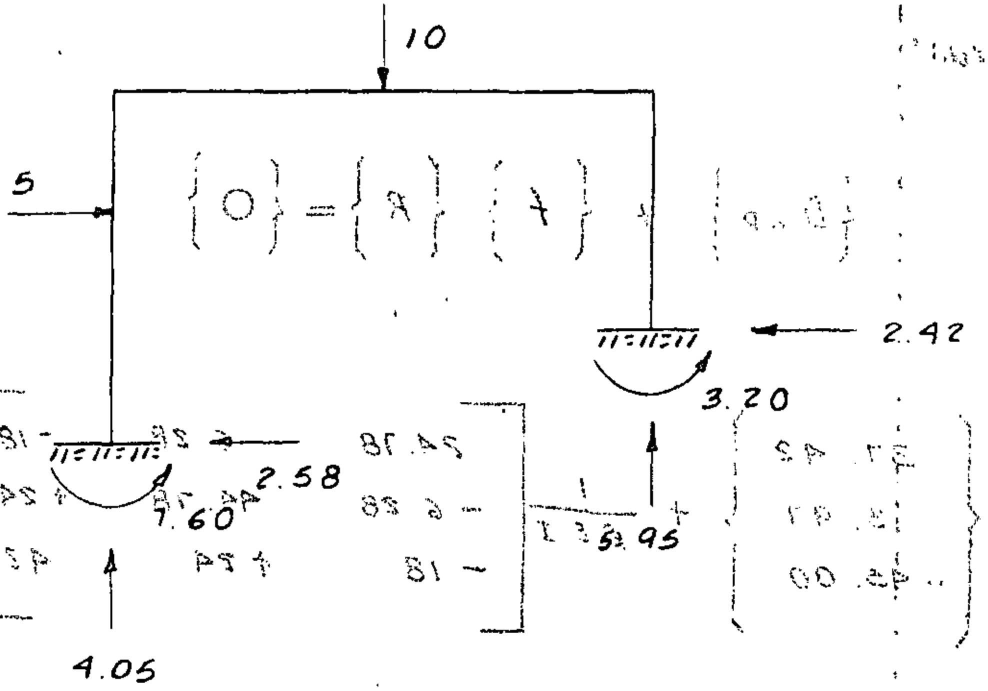
$$= \frac{1}{EI} \begin{Bmatrix} 36.67 \\ -51.67 \\ -67.50 \end{Bmatrix} + \frac{1}{EI} \begin{Bmatrix} 0.75 \\ 55.50 \\ 22.50 \end{Bmatrix} = \frac{1}{EI} \begin{Bmatrix} 37.42 \\ 3.91 \\ -45.00 \end{Bmatrix}$$

las ecuaciónes de compatibilidad de deformación serán:

$$\{D x p\} + \{f\}\{R\} = \{0\}$$

$$\frac{1}{EI}\begin{Bmatrix} 37.42 \\ 3.97 \\ -45.00 \end{Bmatrix} + \frac{1}{6EI}\begin{bmatrix} 24.78 & -6.28 & -18 \\ -6.28 & 44.78 & +24 \\ -18 & +24 & 42 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.002 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -7.60 \\ -3.21 \\ +3.20 \end{Bmatrix}$$



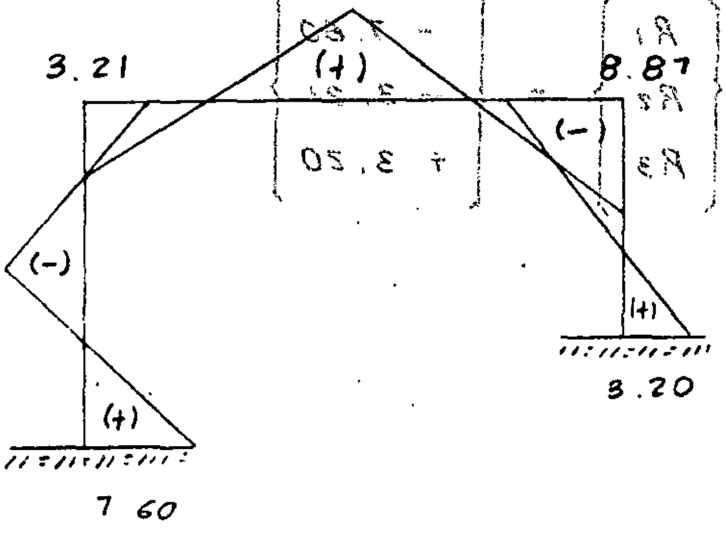


Diagrama de momentos finales las fuerzas internas se obtienen calculando por su superposición los efectos debidos a carga externas y por redundantes:

$$\{p\} = [b_F] \{F\} + [b_R] \{R\}$$

BIBLIOGRAFIA

Beaufait, Fred "Análisis Estructural", Prentice Itall Internacional, Madrid 1981

Ghali A, Neville M., "Structural Analysis" Intext Educational PubliJhers, Scranton 1972

Yuan-Yu Hsieh, "Teoría de Estructuras", Prentice Itall Internacional, Madrid 1982

Michalos J., Wilson E., "Structural Mechamcs and Analysis", The Macmillan Company 1975

Norris Ch, Wilbur J.B., UTKUS., "Analisis Elemental de Estructuras" Mc Graw-Hill, Bogotá 1982

DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.

MATEMATICAS APLICADAS A LA INGENIERIA ESTRUCTURAL

PRINCIPIOS FUNDAMENTALES

Ing. Damy Ríos

MARZO, 1985

Matemáticas Aplicadas a la Ingeniería Estructural

Apuntes por

Julio Damy Ríos

(Febrero 1985)

Principios Fundamentales.

a).- Continuidad

$$e = a\ d$$

b).- Ley de Hooke

$$p = k\ e$$

c).- Equilibrio

$$F = a^T\ p$$

Solución de Estructuras.

Método de los desplazamientos o de las rigideces.
(Continuidad —— Ley de Hooke —— Equilibrio)

$$F = a^T\ p = a^T\ k\ e = a^T\ k\ a\ d$$

$$F = K\ d\ ;\ K = a^T\ k\ a$$

Solución:

$$d = K^{-1}\ F$$

$$e = a\ d = a\ K^{-1}\ F$$

$$p = k\ e = k\ a\ K^{-1}\ F$$

Si la estructura es isostática, a^T es no singular, por consiguiente:

$$p = (a^T)^{-1}\ F$$

$$e = (k)^{-1}\ p$$

$$d = (a)^{-1}\ e$$

Si la estructura es hiperestática estable, la matriz a^T se puede particionar.

$$\begin{bmatrix} a^T \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c:c} a_o^T & a_1^T \end{array}\right]$$

a_o^T debe ser una matriz cuadrada no singular, que define la estructura primaria o isostática.

$$F = \left[\begin{array}{c:c} a_o^T & a_1^T \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} p_o \\ \hdashline p_1 \end{array}\right]$$

p_o = fuerzas en las barras que forman la estructura primaria.

p_1 = fuerzas en las barras sobrantes.

Método de las fuerzas o método de las flexibidades.

Equilibrio:

$$\begin{bmatrix} p \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c:c} b_o & b_1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} F \\ \hdashline R \end{array}\right]$$

o bien:

$$\left[\begin{array}{c} p_o \\ \hdashline p_1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c:c} b_{oo} & b_{10} \\ \hdashline 0 & b_{11} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} F \\ \hdashline R \end{array}\right]$$

Ley de Hooke:

$$\begin{bmatrix} e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \end{bmatrix}$$

$$f = k^{-1}$$

Continuidad:

$$\left[\begin{array}{c} d \\ \hdashline u \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} b_o^T \\ \hdashline b_1^T \end{array}\right] \begin{bmatrix} e \end{bmatrix}$$

Relaciones de b_{oo}, b_{10}, a :

$$b_{oo} = (a_o^T)^{-1}$$

$$b_{10} = - b_{oo}\, a_1^T\, b_{11}$$

b_{11} = depende de R

Las redundantes (R) se obtienen obligando a que $u = 0$:

$$u = b_1^T e = b_1^T f p = b_1^T f (b_0 F + b_1 R)$$

$$\underline{R = -(b_1^T f b_1)^{-1} b_1^T f b_0 F}$$

$$p = \left[b_0 - b_1 (b_1^T f b_1)^{-1} b_1^T f b_0 \right] F$$

$$e = f p = f b F$$

$$d = b_0^T e = b_0^T f b F$$

Notas:

a).- Si: $p = b F$

Por el principio de contragradiencia:

$$d = b^T e$$

$$d = b^T f b F$$

b).- Se demuestra que:

$$b_0^T f b = b^T f b = b^T f b_0 = K^{-1}$$

$(K)^{-1}$ = matriz de flexibidades de la estructura.

Demostraciones

1).- $a^T b_0 = I$; $a^T b_1 = 0$

Por la ecuación de equilibrio:

$$p = b_0 F + b_1 R$$

Premultiplicando por a^T :

$$\therefore \quad a^T p = a^T b_0 F + a^T b_1 R$$

Pero: $a^T p = F$

$$\therefore \quad F = a^T b_0 F + a^T b_1 R$$

La ecuación anterior se debe cumplir para cualquier F y cualquier R

$$a^T b_0 = I$$

$$a^T b_1 = 0 \qquad \text{l.q.q.d.}$$

2).- $b_{00} = (a_0^T)^{-1}$

Por el teorema (1)

$$\begin{bmatrix} a^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0^T & \vdots & a_1^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{00} \\ \hline 0 \end{bmatrix} = I$$

$$a_0^T b_{00} = I$$

La matriz a_0^T es cuadrada, por lo tanto:

$$b_{00} = (a_0^T)^{-1} \qquad \text{l.q.q.d.}$$

3).- $b_{10} = - b_{00} a_1^T b_{11}$

Por el teorema (1)

$$\begin{bmatrix} a^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0^T & \vdots & a_1^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{10} \\ b_{11} \end{bmatrix} = 0$$

$$a_0^T b_{10} + a_1^T b_{11} = 0$$

Despejando a b_{10} :

$$b_{10} = - (a_0^T)^{-1} a_1^T b_{11}$$

Pero por (2)

$$\underline{b_{10} = - b_{00} \, a_1^T \, b_{11}} \qquad \text{l.q.q.d.}$$

4).- $b_O^T f b = b^T f b = b^T f b_O = K^{-1}$

Recordemos que: $b = b_O - b_1 (b_1^T f b_1)^{-1} b_1^T f b_O$ por consiguiente:

$$b^T f b = \left[b_O - b_1 (b_1^T f b_1)^{-1} b_1^T f b_O \right]^T f b =$$

$$= b_O f b - \underbrace{b_O^T f b_1 (b_1^T f b_1)^{-1} b_1^T f b}_{0}$$

$$b_O f b_1 (b_1^T f b_1)^{-1} b_1^T f b_O - b_O f b_1 \underbrace{(b_1^T f b_1)^{-1} b_1^T f b_1}_{I}$$

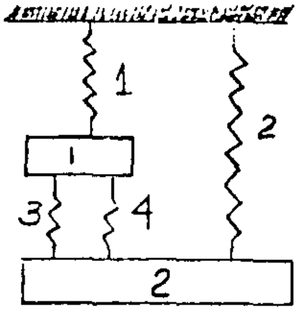
$$(b_1^T f b_1)^{-1} b_1^T f b_O$$

$$\therefore - b_O^T f b_1 (b_1^T f b_1)^{-1} b_1^T f b_O = 0 \qquad \text{l.q.q.d.}$$

La matriz K^{-1} es simétrica, por consiguiente:

$$K^{-1} = (K^{-1})^T \quad \therefore \quad b_O^T f b = (b_O^T f b_{,})^T = b^T f b_O$$

Ejemplos:



$$F = \begin{bmatrix} 10 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$k_j = 1$ T/cm.

$j = 1, 2, 3, 4$

a).- Método de las rigideces

$$a = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \; k = I$$

$$a^T \, k \, a = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = K$$

$$K^{-1} = \begin{bmatrix} 3/5 & 2/5 \\ 2/5 & 3/5 \end{bmatrix}$$

$$d = K^{-1} F = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ cm.}$$

$$e = a \; d = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix} \text{ cm.}$$

$$p = k \; e = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix} \text{ Ton.}$$

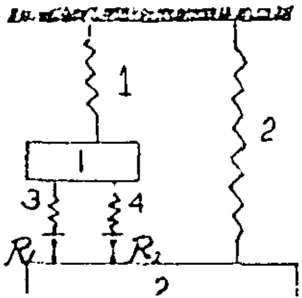
Solución para cualquier F

$$d = \begin{bmatrix} 3/5 & 2/5 \\ 2/5 & 3/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F \end{bmatrix}$$

$$e = \begin{bmatrix} 3/5 & 2/5 \\ 2/5 & 3/5 \\ -1/5 & 1/5 \\ -1/5 & 1/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F \end{bmatrix}$$

$$p = \begin{bmatrix} 3/5 & 2/5 \\ 2/5 & 3/5 \\ -1/5 & 1/5 \\ -1/5 & 1/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F \end{bmatrix}$$

b).- Método de las flexibilidades



$$b_0 = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right] \qquad b_1 = \left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ -1 & -1 \\ \hline 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$b_1^T f b_1 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(b_1^T f b_1)^{-1} = \begin{bmatrix} 3/5 & -2/5 \\ -2/5 & 3/5 \end{bmatrix}$$

$$b_1 (b_1^T f b_1)^{-1} b_1^T f b_O = 1/5 \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$b = b_O - b_1 (b_1^T f b_1)^{-1} b_1^T f b_O = 1/5 \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \\ -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \therefore p = b$$

$$d = b_O^T f b F$$

$$b_O^T f b = \begin{bmatrix} 3/5 & 2/5 \\ 2/5 & 3/5 \end{bmatrix} = K^{-1}$$

Resumen (2)

I.- Armaduras

- Vectores fuerza y desplazamiento

a).- armadura plana

$$F_j = \begin{bmatrix} F_{jx} \\ F_{jy} \end{bmatrix} \quad ; \quad d_j = \begin{bmatrix} d_{jx} \\ d_{jy} \end{bmatrix}$$

b).- armadura en el espacio

$$F_j = \begin{bmatrix} F_{jx} \\ F_{jy} \\ F_{jz} \end{bmatrix} \quad ; \quad d_j = \begin{bmatrix} d_{jx} \\ d_{jy} \\ d_{jz} \end{bmatrix}$$

2.- Matriz de continuidad (a)

$$(a) = \begin{array}{c|ccccc} & & Ⓐ & & Ⓑ & \\ \hline i & \cdots & -u_i & \cdots & +u_i & \cdots \end{array}$$

Barra i con extemos en los nudos (A) y (B)

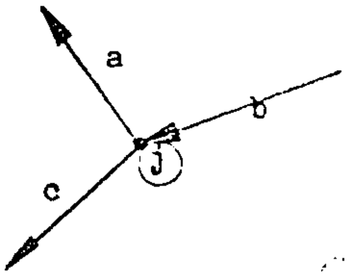
$$u_i = \begin{bmatrix} \text{sen}\,\theta \,, \cos\theta \end{bmatrix} \quad ó \quad u_i = \begin{bmatrix} \cos\alpha , \cos\beta , \cos\gamma \end{bmatrix}$$

3.- Matriz de equilibrio $[a^T]$

$$[a^T] = \begin{array}{c|ccc} & a & b & c \\ \hline j & -u_a^T & +u_b^T & -u_c^T \end{array}$$

Si entra al nudo +

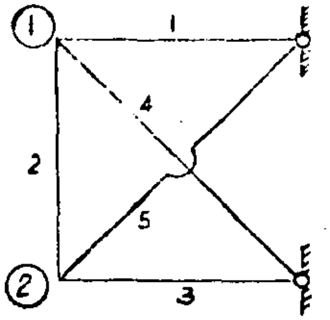
Si sale del nudo -

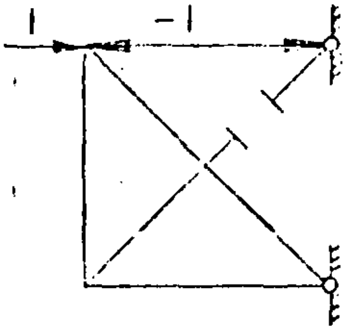


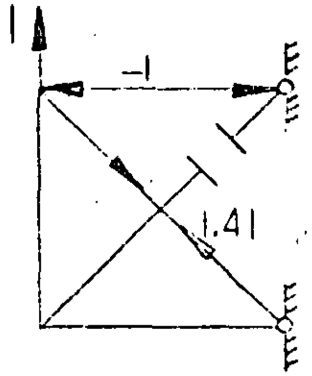
Nudo (j) concurren barras a, b, c, ...

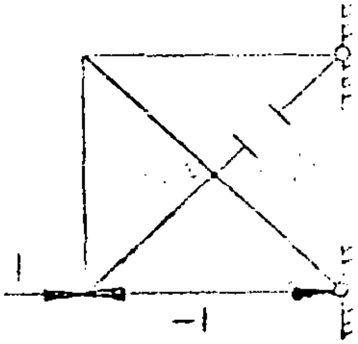
II.- Interpretación física de algunas matrices en el método de las fuerzas

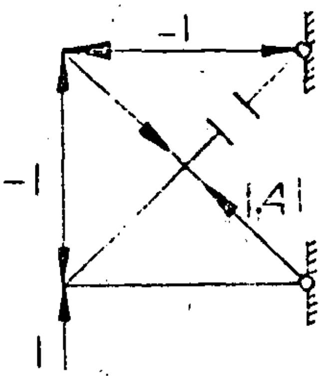
b_o = fuerzas en las barras producidas por fuerzas unitarias aplicadas en la estructura primaria





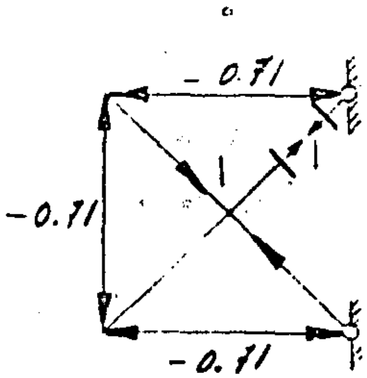






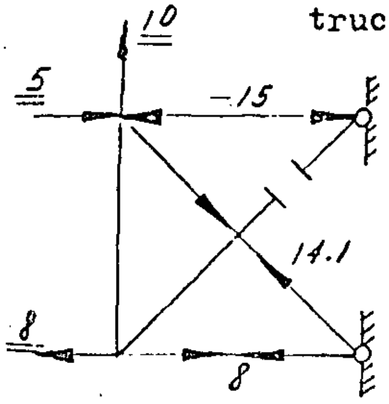
$$b_o = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1.41 & 0 & 1.41 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b_1 = fuerzas en las barras producidas por redundantes unitarios aplicados en la estructura primaria



$$b_1 = \begin{bmatrix} -0.71 \\ -0.71 \\ -0.71 \\ +1 \\ +1 \end{bmatrix}$$

$b_O F$ = fuerzas en las barras producidas por las fuerzas $[F]$ aplicadas en la estructura primaria.



$$F = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ -8 \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad b_O F = \begin{bmatrix} -15 \\ 0 \\ +8 \\ 14.1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

III.- Casos particulares de $\left[a_O^T\right]$

Si la estructura es una armadura, que se puede resolver la estructura primaria por el método de los nudos, es posible que la matriz sea triangular interior.

Posteriormente veremos que para algunas estructuras es posible hacer que $\left[a_O^T\right]$ sea triangular inferior ó superior. (Ver ejemplo)

IV.- Obtención directa de las reacciones y efecto de desplazamiento en los apoyos.

Sean $[P]$ las reacciones y $[d_A]$ los desplazamientos de los apoyos - (en general $d_A = 0$) si consideramos a estos como nudos, en el método de los desplazamientos, se obtiene:

$$\left[\begin{array}{c} F \\ \hline P \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} K_{11} & K_{21} \\ \hline K_{12} & K_{22} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} d \\ \hline d_A \end{array}\right]$$

$$(K_{11} = K_{21}^T)$$

O bien:

$$F = K_{11}\, d + K_{21}\, d_A$$

$$F - K_{21}\, d_A = K_{11}\, d \qquad d = K_{11}^{-1} F_{et}$$

$$P = K_{12}\, d + K_{22}\, d_A$$

O bien:

$$P = K_{12} K_{11}^{-1} F + \left[K_{22} - K_{12} K_{11}^{-1} K_{21} \right] d_A$$

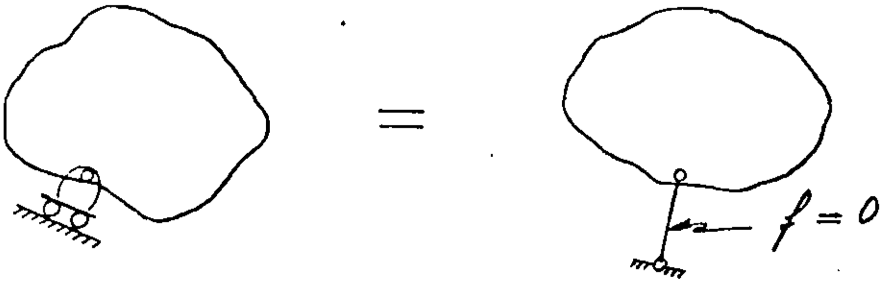
Observe que si F = 0

$$P = \tilde{K} d_A$$

donde $\tilde{K} = K_{22} - K_{12} K_{11}^{-1} K_{21}$ es la contracción de la matriz $\left[K\right]$

Cuando un apoyo no es completo (tiene algun grado de libertad) se puede substituir por un sistema de barras de rigidez infinita - (flexibilidad nula) que se apoyen en apoyos completos.

Ejemplo:



Si el apoyo es completo no es necesario ni se debe hacer esta substitución.

V.- Apéndice

1.- Inversión de una matriz triangular inferior

Sea L una matriz triangular inferior y M su inversa, es muy facil demostrar el siguiente algoritmo para obtener los elementos de M.

$$m_{ii} = (l_{ii})^{-1} \quad \text{(elementos diagonales)}$$

$$m_{ij} = -(l_{ii})^{-1} \sum_{r=j} l_{ir} m_{rj} \quad (i > j)$$

$$m_{ij} = 0 \quad \text{(i<j, M es también triangular inferi)}$$

2.- J. Robinson ha publicado dos artículos:

"Automatic Selection of Redundancies in the Matrix Force Method: The Rank Technique"

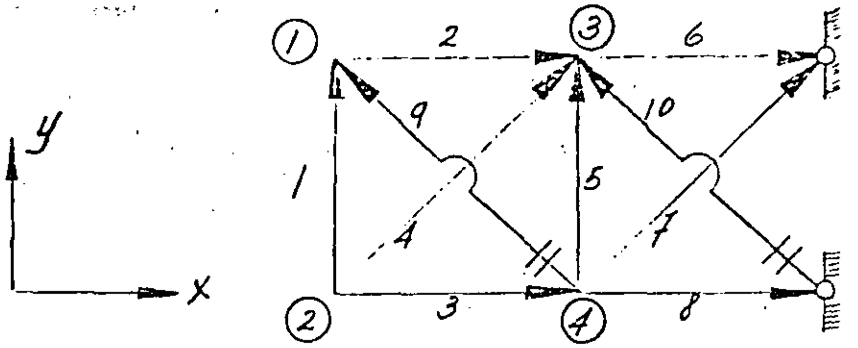
Car. Aeron Space J; 11: 9-12 (1965)

"Dissertation on the Rank Technique and its Application" J Roy Aeron Soc., 69:280-283 (1965)

en los cuales desarrolla un método bastante ingenioso, basado en la eliminación de Jordan, para elegir las redundantes y obtener $\left[a_o^T\right]$; el método es aplicable a cualquier tipo de estructura.

VI.- Ejemplos

1.- Matriz $\left[a_o^T\right]$ triangular inferior:

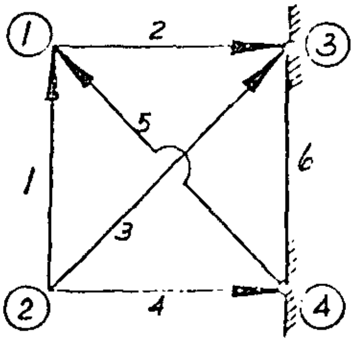


$$\left[a^T\right] = \begin{array}{c|cccccccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 2 & 9 & 10 \\
\hline
1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.71 & 0 \\
 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.71 & 0 \\
2 & 0 & 0 & -1 & -0.71 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & -1 & 0 & 0 & -0.71 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
3 & 0 & 1 & 0 & 0.71 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -0.71 \\
 & 0 & 0 & 0 & 0.71 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.71 \\
4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -0.71 & -1 & 0.71 & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -0.71 & 0 & -0.71 & 0
\end{array}$$

Obtengamos $\left[a_o^T\right]$ con el algoritmo de la inversión de matrices triangular inferior trabajando con submatrices de 2 x 2.

$$\left[a_o^T\right]^{-1} = \left[b_{og}\right] = \begin{array}{|cccccccc|}
\hline
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1.41 & 0 & -1.41 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1.41 & 0 & -1.41 & 0 & -1.41 & 0 & -1.41 \\
0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\
\hline
\end{array}$$

2.- Desplazamientos en los apoyos y obtención de reacciones



$$d_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \text{cm.}$$

$$d_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{cm.}$$

$$k_i = 1 \text{ Ton/cm.}$$

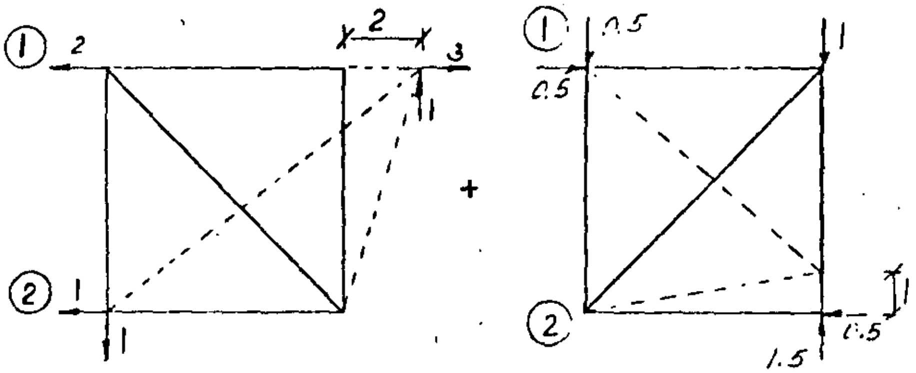
$$a = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -0.71 & -0.71 & 0.71 & 0.71 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline -0.71 & 0.71 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.71 & -0.71 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ \hline \end{array}$$

Calculemos a^T k a:

$$a \ k \ a = K = \begin{array}{|cccc|cccc|} \hline 1.5 & -0.5 & 0 & 0 & -1 & 0 & -0.5 & 0.5 \\ -0.5 & 1.5 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0.5 & -0.5 \\ 0 & 0 & 1.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0.5 & 1.5 & -0.5 & -0.5 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 & -0.5 & -0.5 & 1.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5 & -0.5 & 0.5 & 1.5 & 0 & -1 \\ -0.5 & 0.5 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1.5 & -0.5 \\ 0.5 & -0.5 & 0 & 0 & 0 & -1 & -0.5 & 0 \\ \hline \end{array} = \left[\begin{array}{c|c} K_{11} & K_{12} \\ \hline K_{21} & K_{22} \end{array}\right]$$

$$d_A = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad -K_{21} \, d_A = \begin{bmatrix} +1.5 \\ +0.5 \\ +1 \\ +1 \end{bmatrix}$$

Observe que:



$= +K_{21}\ d_A$.

$$F_{ex} = \begin{bmatrix} -10 \\ 0 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.5 \\ 0.5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8.5 \\ 0.5 \\ 6 \\ 11 \end{bmatrix}$$

I.- Generalización de vectores fuerza y desplazamiento.

$$\begin{bmatrix} F \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} d \end{bmatrix}$$

Armadura plana $\begin{bmatrix} Fx \\ Fy \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix}$

Armadura en el espacio $\begin{bmatrix} Fx \\ Fy \\ Fz \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix}$

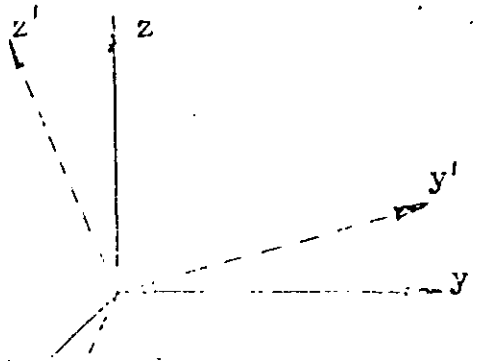
Marco plano $\begin{bmatrix} Fx \\ Fy \\ Mz \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ \theta z \end{bmatrix}$

Marco en el espacio $\begin{bmatrix} Fx \\ Fy \\ Fz \\ Mx \\ My \\ Mz \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \\ \theta x \\ \theta y \\ \theta z \end{bmatrix}$

Malla plana $\begin{bmatrix} Fz \\ Mx \\ My \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} dz \\ \theta x \\ \theta y \end{bmatrix}$

II.- Transformación de coordenadas.

a).- Rotación
(Espacio tridimensional)



La rotación queda definida con la matriz Λ_3

$$\Lambda_3 = \begin{bmatrix} \cos\alpha_{x'} & \cos\beta_{x'} & \cos\gamma_{x'} \\ \cos\alpha_{y'} & \cos\beta_{y'} & \cos\gamma_{y'} \\ \cos\alpha_{z'} & \cos\beta_{z'} & \cos\gamma_{z'} \end{bmatrix}$$

α, β, γ = Angulos que forman los ejes X',Y',Z', con los ejes X,Y,Z.

(Λ_3 es ortogonal; $\Lambda_3^T = \Lambda_3^{-1}$)

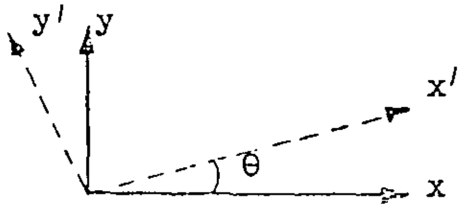
$$[F'] = [T]\,[F]$$

Donde: V' = Vector referido al sistema X,Y,Z (6 componentes)

V = Vector referido al sistema X,Y,Z (6 componentes)

$$T = \left|\begin{array}{c:c} \Lambda_3 & 0 \\ \hdashline 0 & \Lambda_3 \end{array}\right| = \text{matriz de transformación } (6 \times 6)$$

(Plano)



$$[F'] = [T]\,[F] \text{ , etc.}$$

Donde:

$$T = \left[\begin{array}{cc:c} \cos\theta & \operatorname{Sen}\theta & 0 \\ -\operatorname{Sen}\theta & \cos\theta & \\ \hdashline \multicolumn{2}{c:}{0} & 1 \end{array}\right]$$

O bien:

$$= \left[\begin{array}{c:c} \Lambda_2 & 0 \\ \hdashline 0 & 1 \end{array}\right]$$

F, d, V = Vectores con tres componentes (Fx, Fy, Mz), etc.

$$= \begin{bmatrix} 1 & k+1 & k(k+1)/2 \\ 0 & 1 & k+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y el postulado es cierto para toda n = 1, 2,...,.

4. a FALSO b FALSO

c FALSO d FALSO

5. Det A = Det B Det C = 8.2 = 16 Det P = - 4.

$$P \simeq \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

6. a Det (2A) Det(A) = (4x10)x10 = 400

b. Det $(2A^{-1})$ = 4Det A^{-1} = 4/10

c. Det (AA^{-1}) = 1

7. a Es SUBESPACIO

b. NO ES SUBESPACIO

8. a. Son linealmente independientes

b. Son Cuatro

9. a SI b. NO 10.- a. SI b. SI

III.- Transformación de rigideces

Si: $F' = T\ F$

Se sigue que: $d = T^T\ d'$ (por contragradiencia)

Si $\left[k\right]$ es la matriz de rigidez para $\left[F\right]$ y $\left[d\right]$

$$F = k\ d$$

Se puede obtener $\left[k'\right]$ (matriz de rigidez para $\left[F'\right]$ y $\left[d'\right]$)

$$F = k\ d = k\ T^T\ d'$$

$$T\ F = T\ k\ T^T\ d'$$

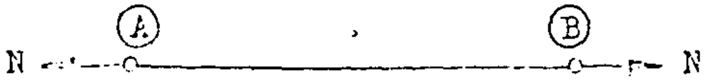
$$F' = (T\ k\ T^T)d'$$

$$\therefore\ k' = T\ k\ T^T$$

Aplicaciones:

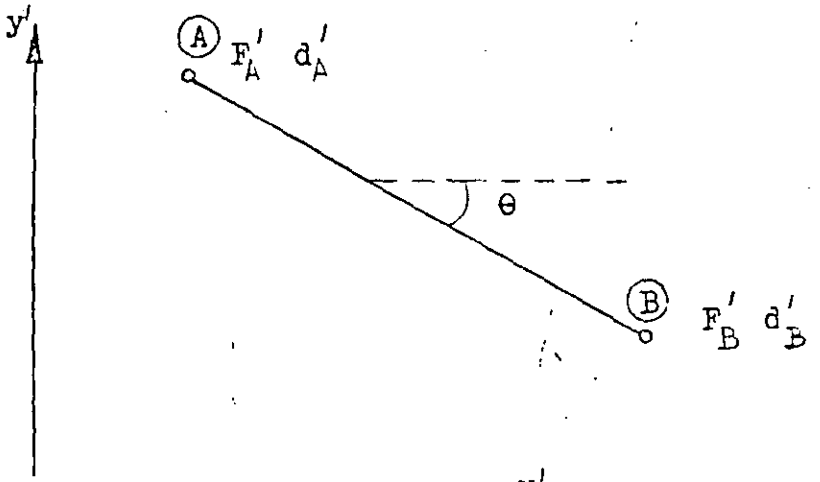
a).- Barras de armaduras

Sistema F, d:



$$F = \left[N\right];\ d = \left[e\right];\ k = \left[EA/L\right]$$

Sistema F', d'



$$F' = \left[\begin{array}{c} F_{x'A} \\ F_{y'A} \\ \hdashline F_{x'B} \\ F_{y'B} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} F'_A \\ \hdashline F'_B \end{array}\right]$$

$$d' = \left[\begin{array}{c} d_{x'A} \\ d_{y'A} \\ \hdashline d_{x'B} \\ d_{y'B} \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{c} d'_A \\ \hdashline d'_B \end{array}\right]$$

Matriz T: (Por estática)

$$T = \begin{bmatrix} -\mathrm{Cos}\ \theta \\ +\mathrm{Sen}\ \theta \\ +\mathrm{Cos}\ \theta \\ -\mathrm{Sen}\ \theta \end{bmatrix}$$

$$k' = T\ k\ T^T$$

$$k' = EA/L \left[\begin{array}{cc:cc} c^2 & -cs & -c^2 & cs \\ -cs & s^2 & cs & s^2 \\ \hdashline -c^2 & cs & c^2 & -cs \\ cs & -s^2 & -cs & s^2 \end{array}\right]$$

Si $\theta = 0^\circ$

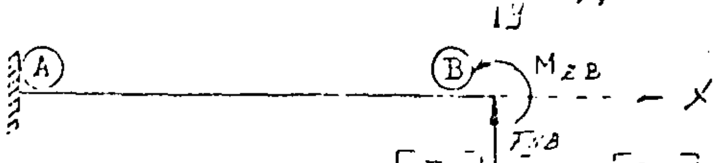
$$k'^{\circ} = EA/L \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

ANALISIS

ESTRUCTURAL II

RESUMEN 6

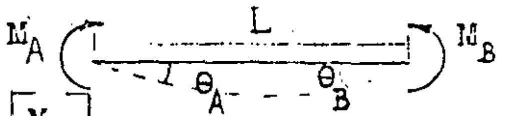
b).- Vigas (considerando únicamente flexión),



Sistema F, d: $$F = \begin{bmatrix} F_{yB} \\ M_{zB} \end{bmatrix}; \quad d = \begin{bmatrix} d_{yB} \\ \theta_{zB} \end{bmatrix}$$

$$k = \begin{bmatrix} 12EI/L^3 & -6EI/L^2 \\ -6EI/L^2 & 4EI/L \end{bmatrix} \text{ (Ver apéndice)}$$

Sistema F', d':



$$F' = \begin{bmatrix} M_A \\ M_B \end{bmatrix} \text{(momentos Flex.)}; \quad d' = \begin{bmatrix} \theta_A \\ \theta_B \end{bmatrix}$$

Matriz T: (Por estática)

$$T = \begin{bmatrix} L & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$k' = EI/L \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Note: Observese que los ángulos θ_A y θ_B se miden a partir de la linea Ⓐ - Ⓑ, se considera que Ⓐ y Ⓑ no se desplazan relativamente.

IV.- Ensamble de la matriz K .

Se ha visto que la matriz K (rigidez ensamblada de la estructura), se obtiene:

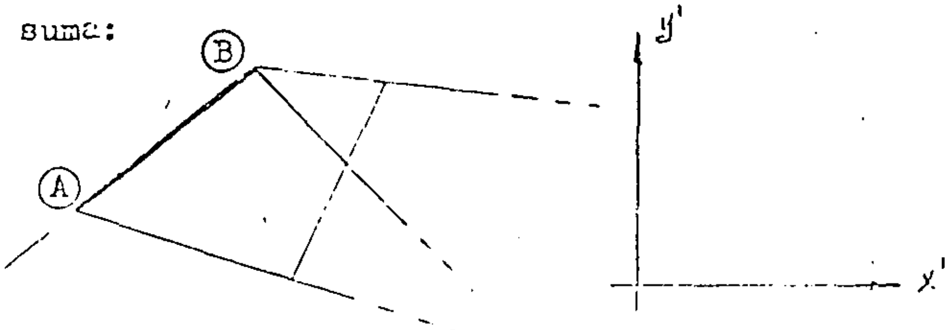
$$K = a^T k a$$

donde: $$F = a^T p$$ $$e = a d$$

Obsérvese que $[a^T]$ es semejante a la matriz $[T]$, donde el sistema $[p]$, $[e]$ se transforma al sistema $[F]$, $[d]$.

Hay dos formas de obtener K sin afectar el producto (a^T k a) directamente.

1).- Regla de la suma:

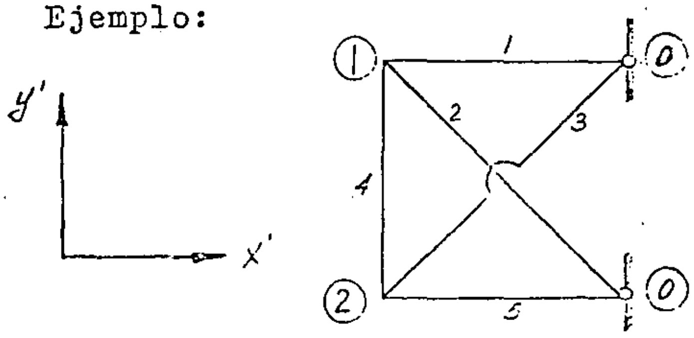


Consideremos la barra Ⓐ-Ⓑ de una estructura, sea $[k']$ su rigidez acoplada referida al sistema global x', y'

$$[k'] = \left[\begin{array}{c|c} k'_{AA} & k'_{AB} \\ \hline k'_{BA} & k'_{BB} \end{array}\right]$$

$$[K] = \sum_{j=1}^{j=b} \begin{array}{c} \\ A \\ B \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|c} k_{AA_j} & k_{AB_j} \\ \hline k_{BA_j} & k_{BB_j} \end{array}\right] \end{array}$$

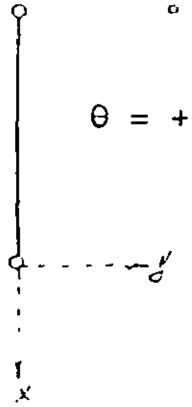
Ejemplo:



$A_1 = A_4 = A_5 = A$

$A_2 = A_3 = A/\sqrt{2}$

Barra ①-② (4)



$\theta = +90^\circ$

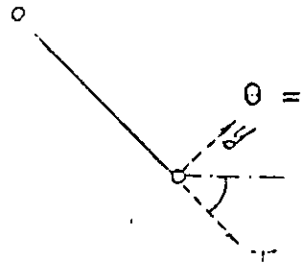
$$k'_4 = EA/L \begin{array}{c|cc|cc} & \multicolumn{2}{c|}{①} & \multicolumn{2}{c}{②} \\ \hline ① & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 1 & 0 & -1 \\ \hline ② & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}$$

Barra ①-⓪ (1)

$\theta = 0^{\circ}$

$$k'_1 = EA/L \begin{array}{c|cc|cc} & \textcircled{1} & & \textcircled{0} & \\ \hline \textcircled{1} & 1 & 0 & -1 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \textcircled{0} & -1 & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Barra ①-⓪ (2)



$\theta = 45^{\circ}$

$$k'_2 = \begin{array}{c|cc|cc} & \textcircled{1} & & \textcircled{0} & \\ \hline \textcircled{1} & 1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ & -1/2 & 1/2 & +1/2 & -1/2 \\ \hline \textcircled{0} & -1/2 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ & 1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{array} EA/L$$

Barra ⓪-② (3)

$\theta = -45^{\circ}$

$$k'_3 = \begin{array}{c|cc|cc} & \textcircled{0} & & \textcircled{2} & \\ \hline \textcircled{0} & 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ & 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ \hline \textcircled{2} & -1/2 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ & -1/2 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{array} EA/L$$

Barra ②-⓪ (5)

$\theta = 0^{\circ}$

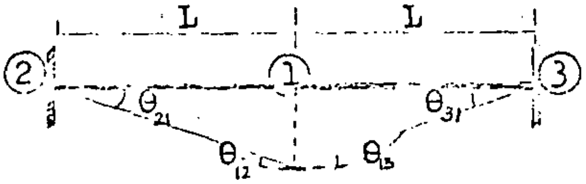
$$k'_5 = EA/L \begin{array}{c|cc|cc} & \textcircled{2} & & \textcircled{0} & \\ \hline \textcircled{2} & 1 & 0 & -1 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \textcircled{0} & -1 & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$K = \begin{array}{c|cc|cc} & ① & & ② & \\ \hline ① & 0+1+1/2 & 0+0-1/2 & 0 & 0 \\ & 0+0-1/2 & 1+0+1/2 & 0 & -1 \\ \hline ② & 0 & 0 & 0+1/2+1 & 0+1/2+0 \\ & 0 & -1 & 0+1/2+0 & 1+1/2+0 \end{array}$$

$$K = EA/L \left[\begin{array}{cc|cc} 3/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 3/2 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 3/2 & 1/2 \\ 0 & -1 & 1/2 & 3/2 \end{array}\right]$$

2).- Generalización de a^T

(Ejemplo)



EI = cte.

Se quiere obtener $[K']$, considerando solo el desplazamiento vertical $[\Delta]$ en ① producido por una carga $[P]$, usemos la rigidez a flexión en función de momentos.

Sistema F, d:

$$F = \begin{bmatrix} M_{21} \\ M_{12} \\ M_{13} \\ M_{31} \end{bmatrix} \quad ; \quad d = \begin{bmatrix} \theta_{21} \\ \theta_{12} \\ \theta_{13} \\ \theta_{31} \end{bmatrix}$$

$$K = EI/L \left[\begin{array}{cc|cc} 4 & -2 & & \\ -2 & 4 & & \\ \hline & & 4 & -2 \\ & & -2 & 4 \end{array}\right]$$

Sistema F', d':

$$F' = \left[P \right] ; \quad d' = \left[\Delta \right]$$

Matriz T (a^T generalizada)

$$T = 1/L \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K' = T\ K\ T^T \text{ (K' matriz ensamblada)}$$

$$K' = EI/L^3 \left[24 \right]$$

V.- Apendice

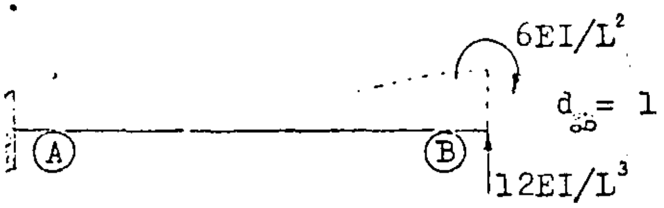
1).- Interpretación de K

$$F = K\ d$$

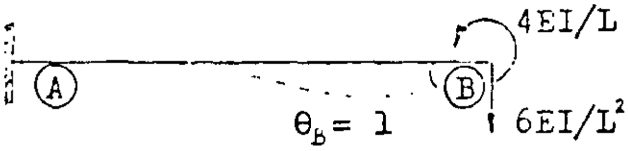
$$\text{Si: } d = I$$

$$F = K$$

Por consiguiente $\left[K \right]$ son las fuerzas que hay que aplicar para producir desplazamientos unitarios; ejemplo:



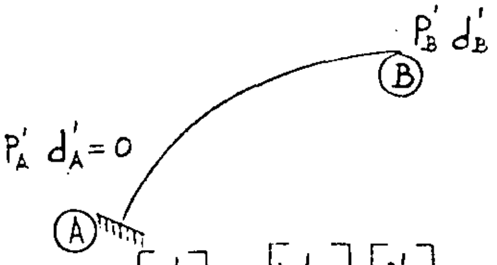
$$K = \begin{bmatrix} 12EI/L^3 & -6EI/L^2 \\ -6EI/L^2 & 4EI/L \end{bmatrix}$$



Resumen (4)

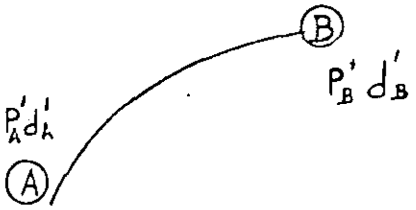
I.- Relación entre rigideces "no acopladas" y rigideces "acopladas"

No acoplada



$$[p'_B] = [k'_{BB}]\,[d'_B]$$
$$[k'_{BB}] = [f_{BB}]^{-1}$$

Acoplada



$$\begin{bmatrix} p'_A \\ \hdashline p'_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k'_{AA} & k'_{AB} \\ k'_{BA} & k'_{BB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_A \\ \hdashline d_B \end{bmatrix}$$

Por estática: (Ver apéndice)

$$\begin{bmatrix} p_A \\ \hdashline p_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -H_{BA} \\ \hdashline I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_B \end{bmatrix}$$

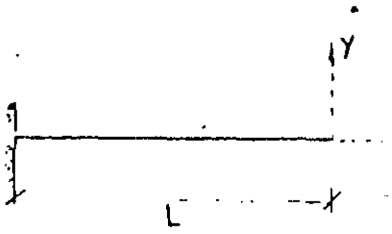
Por consiguiente:

$$\begin{bmatrix} k'_{AA} & k'_{AB} \\ k'_{BA} & k'_{BB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -H_{BA} \\ \hdashline I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{BB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -H^T_{BA} & I \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} k'_{AA} & k'_{AB} \\ k'_{BA} & k'_{BB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{BA}\ k_{BB}\ H^T_{BA} & -H_{BA}\ k_{BB} \\ -k_{BB}\ H^T_{BA} & k_{BB} \end{bmatrix}$$

Para una viga recta de sección constante, considerando los efectos de flexión, fuerza normal y cortante:

$$f_{BB} = \begin{bmatrix} \frac{L}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L^3}{3EI}\ (1+c) & \frac{L^2}{2EI} \\ 0 & \frac{L^2}{2EI} & \frac{L}{EI} \end{bmatrix}$$



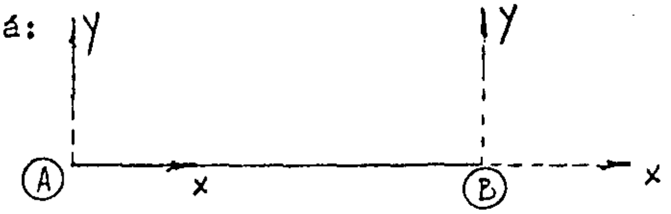
$$c = 6(1+u) \; (\; \rho /L)^2 \; k_{forma}$$

$$(\rho = \sqrt{I/A} \; ; \; k_{forma} = A/A_{corte})$$

Invirtiendo a f_{BB} , se obtiene a k_{BB}

$$k = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3(1+4c)} & \frac{-6EI}{L^2(1+4c)} \\ 0 & \frac{-6EI}{L^2(1+4c)} & \frac{4EI\,(1+c)}{L\,(1+4c)} \end{bmatrix}$$

La matriz acoplada será:



$$\begin{bmatrix} k_{AA} & k_{AB} \\ k_{BA} & k_{BB} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{EA}{L} & & & & & \\ 0 & \frac{12EI}{L^3(1+4c)} & & & \text{SIMETRICA} & \\ 0 & \frac{6EI}{L^2(1+4c)} & \frac{4EI(1+c)}{L(1+4c)} & & & \\ \hline -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{GA}{L} & & \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3(1+4c)} & -\frac{6EI}{L^2(1+4c)} & 0 & \frac{12EI}{L^3(1+4c)} & \\ 0 & \frac{6EI}{L^2(1+4c)} & \frac{2EI(1-2c)}{L(1+4c)} & 0 & \frac{-6EI}{L^2(1+4c)} & \frac{4EI(1+c)}{L(1+4c)} \end{array} \right].$$

Conociendo la matriz acoplada de las barras que forman una estructura, bastará aplicar la regla de la suma para obtener la matriz de rigidez de la estructura K' (matriz de rigidez ensamblada)

Nota: para pasar de coordenadas locales a globales, recuerde que:

$$k' = T\ k\ T^T$$

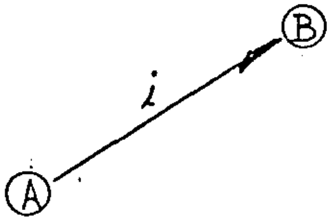
O bien:

$$k'_{BB} = T\ k_{BB}\ T^T$$

$$k'_{AA} = T\ k_{AA}\ T^T \text{ etc.}$$

II.- Matriz de continuidad para marcos planos

a).- Alternativa 1



$$[a] = ⓘ \begin{array}{c|cc} & Ⓐ & Ⓑ \\ \hline Ⓐ & T^T & 0 \\ Ⓑ & 0 & T^T \end{array}$$

$[a]$ (6b x 3n)

$$[k] = \begin{bmatrix} k_1 & & & & \\ & k_2 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & k_b \end{bmatrix}$$

ki = rigidez acoplada de la barra i

$$[K'] = [a^T][k][a]$$

Solución:

$$d' = K^{-1}\ F'$$

$$e = a\ d'$$

$p = k\ e$ (Obteniendose p y p , en coordenadas locales, de cada barra)

b).- Alternativa 2

$$[a] = ⓘ \begin{array}{c|cc} & Ⓐ & Ⓑ \\ \hline & -H_{BA}^T\ T & T^T \end{array}$$

$[a]$ (3b x 3n)

$$[k] = \begin{bmatrix} k_{BB1} & & & & \\ & k_{BB2} & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & k'_{BBb} \end{bmatrix}$$ k_{BBi} = matriz de rigidez "no acopl
de la barra i.

$$K' = a^T \, k \, a$$

Solución:

$$d' = (K')^{-1} \, F'$$

$$e = a \, d'$$

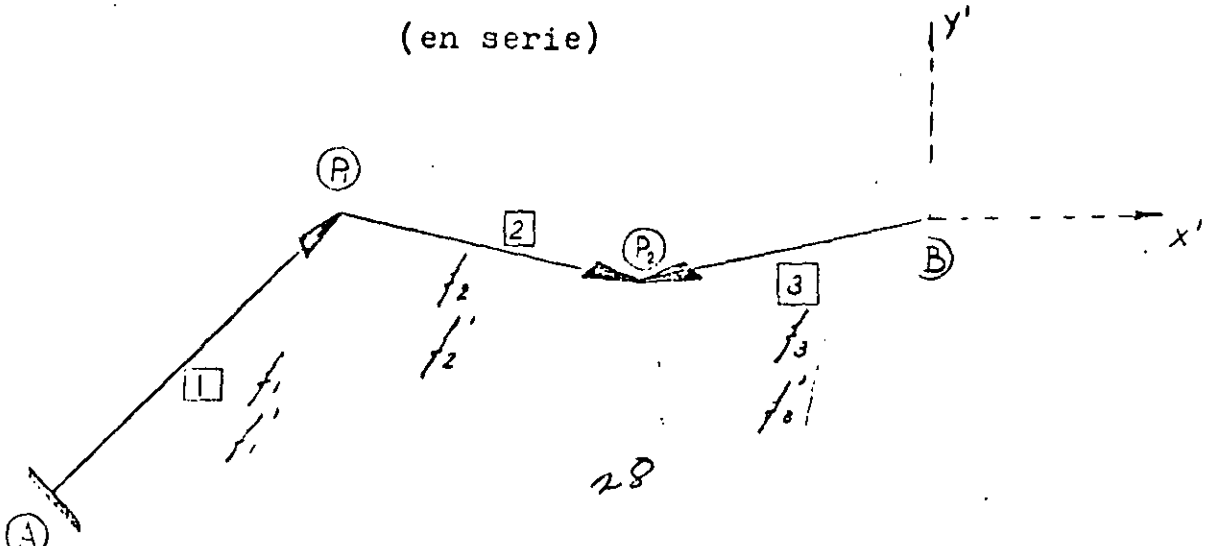
$p = k \, e$ Obteniendose sólo p_B , en coordenadas locales, de cada barra; p_A se obtiene por estática:

$$p_A = -H_{BA} \, p_B$$

$$H_{BA} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & L & 1 \end{bmatrix}$$ (barra recta)

(Coordenadas locales)

III.- Flexibilidad de barras encadenadas (en serie)



Por definición:

$$\underline{\underline{d'_B = f_{BB}\ p'_B}}$$

$$f_{BB} = H'^T_{BP_2}\ f'_3\ H'_{BP_1} + H'^T_{BP_1}\ f'_2\ H'_{BP_2} + H'^T_{BP_1}\ f'_1\ H'_{BP_1}$$

Nota: Si se tienen dos sistemas F, d y F', d' las relaciones entre sus flexibilidades son las siguientes:

Si: $F = A\ F'$

$d' = A^T\ d$ (por contragradiencia)

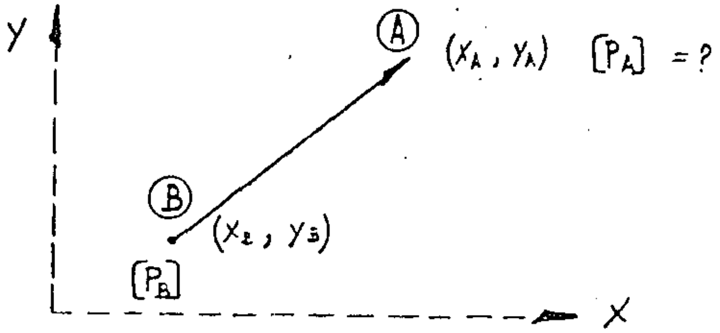
$f' = A^T\ f\ A$

Por consiguiente: $(F = T^T\ F')$

$$f' = T\ f\ T^T$$

Apendice:

I.- Matriz $[H]$ de transporte de fuerzas.



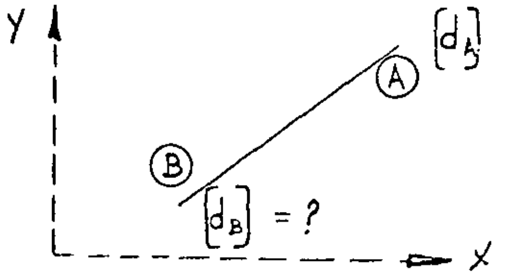
Aplicada $[p_B]$ en Ⓑ se quiere transportar a A: por estática:

$$\begin{bmatrix} p_{Ax} \\ p_{Ay} \\ M_{Az} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ (y_A - y_B) & -(x_A - x_B) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{Bx} \\ p_{By} \\ M_{Bz} \end{bmatrix}$$

H_{BA} = Matriz para transportar fuerzas de B a A

Nota: Observe que $H_{BA} = (H_{Ab})^{-1}$

II.- Matriz $[H^T]$ de transporte de desplazamientos:



Supongamos que a Ⓐ se le da un desplazamiento $[d_A]$, cuanto vale $[d_B]$ si la barra $\overline{AB}$ se considera rígida, por geometría:

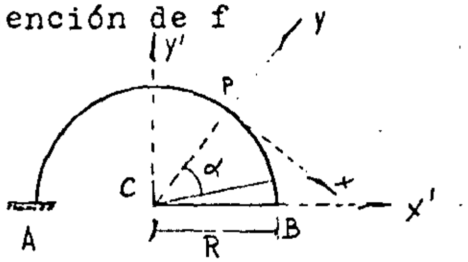
$$\begin{bmatrix} d_{Bx} \\ d_{By} \\ \theta_{Bz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & (y_A - y_B) \\ 0 & 1 & -(x_A - x_B) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{Ax} \\ d_{Ay} \\ \theta_{Az} \end{bmatrix}$$

H^T_{BA} = Matriz para transportar desplazamientos de Ⓐ, Ⓑ

Nota: Este resultado se puede obtener directamente aplicando el principio de contragradiencia a la formulación anterior.

Ejemplos:

I.- Obtención de f



E = cte ,
G = cte
Sección = constante

Conviene obtener f_{cc}, suponiendo que Ⓒ este unido rígidamente a Ⓑ

$$f_{BB} = H^T_{BC} \; f_{cc} \; H_{BC}$$

f_{cc} es más fácil de calcular que f_{BB}, por ser Ⓒ el centro de la circunferencia.

$$f_{cc} = \int_L H'^T_{cP} \; T \; \phi \; T^T \; H'_{cP} \; ds$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ R\ \text{sen}\,\alpha & -R\ \cos\alpha & 1 \end{bmatrix}; \qquad T = \begin{bmatrix} \text{sen}\,\alpha & \cos\alpha & 0 \\ -\cos\alpha & \text{sen}\,\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$x' = R\ \text{sen}\,\alpha$

$y' = R\ \cos\alpha$

$\theta = 90 - \alpha$

$$\phi = \begin{bmatrix} \frac{1}{EA} & & \\ & \frac{1}{GA_c} & \\ & & \frac{1}{EI} \end{bmatrix}$$

$A_c = \frac{A}{K_{forma}}$

$G = \frac{E}{2(1+u)}$

$$T^T H_{cp} = \begin{bmatrix} s & -c & 0 \\ c & s & 0 \\ Rs & -Rc & 1 \end{bmatrix}; \qquad H_{cp} T^T = \begin{bmatrix} s & c & Rs \\ -c & s & -Rc \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\phi\,(T^T H_{cp}) = \begin{bmatrix} \frac{s}{EA} & \frac{-c}{EA} & 0 \\ \frac{c}{GA_c} & \frac{s}{GA_c} & 0 \\ \frac{Rs}{EI} & \frac{-Rc}{EI} & \frac{1}{EI} \end{bmatrix}$$

$$(H^T_{cp}\,T)\,(\phi\ T^T H_{cp}) = \begin{bmatrix} \left[\frac{s^2}{EA} + \frac{c^2}{GA_c} + \frac{R^2 s^2}{EI}\right] & & \\ \left[\frac{-cs}{EA} + \frac{cs}{GA_c} - \frac{Rcs}{EI}\right] & \left[\frac{c^2}{EA} + \frac{s^2}{GA_c} + \frac{R^2 c^2}{EI}\right] & \\ \left[\frac{Rs}{EI}\right] & \left[\frac{-Rc}{EI}\right] & \left[\frac{1}{EI}\right] \end{bmatrix}$$

$$ds = R\, d\alpha$$

Obtengamos las integrales que figuren:

$$\int_0^{\pi} s^2\, d\alpha = \left[\frac{\alpha}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2\alpha}{4}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

$$\int c^2\, d\alpha = \left[\frac{\alpha}{2} + \frac{\cos 2}{4}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\pi} c\ s\, d\alpha = \left[\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{2}\right]_0^{\pi} = 0 \ ; \quad \int_0^{\pi} s\, d\alpha = 2 \ ; \quad \int c\, d\alpha = 0$$

$$f_{cc} = \begin{bmatrix} \left[\frac{\pi R}{2EA} + \frac{\pi R}{2GA_c} + \frac{\pi R}{2EI}\right] & \multicolumn{2}{c}{\textit{Simétrica}} \\ 0 & \left[\frac{\pi R}{2EA} + \frac{\pi R}{2GA_c} + \frac{\pi R^3}{2EI}\right] & \\ \left[\frac{2R^2}{EI}\right] & 0 & \left[\frac{\pi R}{EI}\right] \end{bmatrix}$$

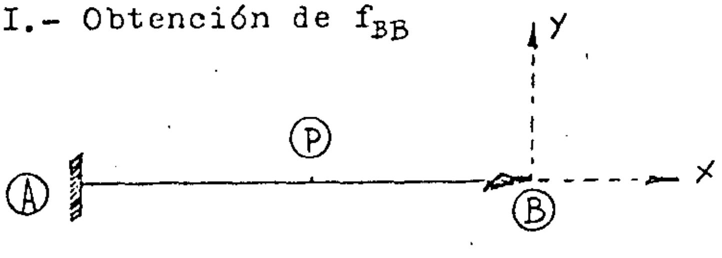
Obtengamos f_{BB}:

$$H_{BC} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & R & 1 \end{bmatrix}$$

$$f_{cc}\, H_{BC} = \begin{bmatrix} \frac{\pi R}{2}\left[\frac{1}{EA} + \frac{1}{GA_c} + \frac{R^2}{EI}\right] & \left[\frac{2R^3}{EI}\right] & \left[\frac{2R^2}{EI}\right] \\ 0 & \frac{\pi R}{2}\left[\frac{1}{EA} + \frac{1}{GA_c} + \frac{R^2}{EI}\right] & 0 \\ \left[\frac{2R^2}{EI}\right] & \left[\frac{\pi R^2}{EI}\right] & \left[\frac{\pi R}{EI}\right] \end{bmatrix}$$

$$H_{BC}^{T}\,(f_{CC}\,H_{BC}) = f_{BB} = \begin{bmatrix} \frac{\pi R}{2}\left[\frac{1}{EA} + \frac{1}{GA_c} + \frac{R^2}{EI}\right] & \left[\frac{2R^3}{EI}\right] & \left[\frac{2R^2}{EI}\right] \\ \left[\frac{2R^3}{EI}\right] & \frac{\pi R}{2}\left[\frac{1}{EA} + \frac{1}{GA_c} + \frac{3R^2}{EI}\right] & \left[\frac{\pi R^2}{EI}\right] \\ \left[\frac{2R^2}{EI}\right] & \left[\frac{\pi R^2}{EI}\right] & \left[\frac{\pi R}{EI}\right] \end{bmatrix}$$

II.- Obtención de f_{BB}



E = cte.

G = cte.

Sección constante

$$H_{BP} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -x & 1 \end{bmatrix} ; \quad T = I \; ; \quad \phi = \begin{bmatrix} \frac{1}{EA} & & \\ & \frac{1}{GA_c} & \\ & & \frac{1}{EI} \end{bmatrix}$$

$$H_{BP}^{T}\,\phi = \begin{bmatrix} \frac{1}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{GA_c} & -\frac{x}{EI} \\ 0 & 0 & \frac{1}{EI} \end{bmatrix}$$

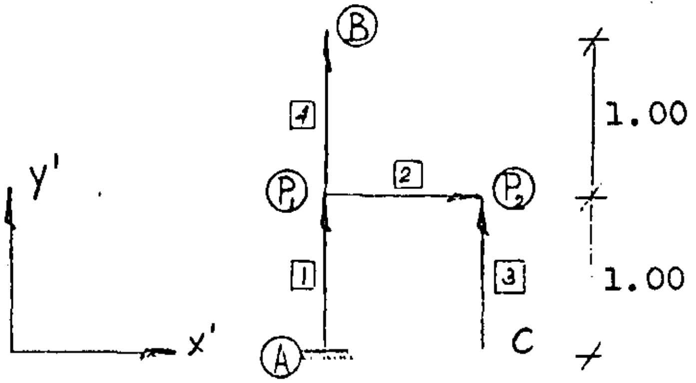
$$(H_{BP}\,\phi)\;H_{BP} = \begin{bmatrix} \frac{1}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & \left[\frac{1}{GA_c} + \frac{x^2}{EI}\right] & -\frac{x}{EI} \\ 0 & -\frac{x}{EI} & \frac{1}{EI} \end{bmatrix} \therefore$$

$$\text{Integrado: } \int_{x=-L}^{x=0} \qquad ds = dx$$

$$f_{BB} = \begin{bmatrix} \frac{L}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{L^3}{3EI} + \frac{L}{GA_c} \right) & \frac{L^2}{2EI} \\ 0 & \frac{L^2}{2EI} & \frac{L}{EI} \end{bmatrix}$$

Nota: $\frac{L^3}{3EI} + \frac{L}{GA_c} = \frac{L^3}{3EI} \left[1 + \frac{3EI}{GA_c L^2} \right] = \frac{L^3}{3EI} \left[1 + c \right]$

III.- Obtención de f_{BB} f_{cc} f_{Bc} f_{cB} :



$E = 2 \times 10^7$ T/m^2

$I = 2 \times 10^{-4}$ m^4

$A = 0.01$ m^2

Desprecíemos el efect del cortante ($c = 0$)

$$f_{BB} = f'_4 + H^T_{BP_2} f'_1 \; H_{BP_2}$$

$$f_{cc} = H^T_{cP_1} f'_3 \; H_{cP_1} + H^T_{cP_1} f'_2 \; H_{cP_1} + H^T_{cP_2} f'_1 \; H_{cP_2}$$

$$f_{Bc} = H^T_{BP_2} f'_{P_2P_2} H_{cP_2}$$

$$f_{cB} = f^T_{Bc}$$

Obtención de f_i (flexibilidad en coordenadas locales)

$$\frac{L}{EA} = \frac{1}{2 \times 10^7 \times 0.01} = 0.5 \times 10^{-5} \text{ m/Ton.} = 0.05 \times 10^{-4} \text{ m/Ton.}$$

$$\frac{L}{3EI} = \frac{1}{3 \times 2 \times 10^7 \times 2 \times 10^4} = 0.083 \times 10^{-3} \text{ m/Ton.}$$

$$\frac{L}{2EI} = \frac{1}{2 \times 2 \times 10^7 \times 2 \times 10^{-4}} = 0.125 \times 10^{-3} \text{ 1/Ton.}$$

$$\frac{L}{EI} = \frac{1}{2 \times 10^7 \times 2 \times 10^{-4}} = 0.25 \times 10^{-3} \text{ 1/Ton-m.}$$

$$f_1 = f_2 = f_3 = f_4 = \begin{bmatrix} 0.05 & 0 & 0 \\ 0 & 0.83 & 1.25 \\ 0 & 1.25 & 2.5 \end{bmatrix} \times 10^{-4}$$

Obtención de f'_i (flexibilidad en coordenadas globales)

a).- Barras $\boxed{1}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$

$$\theta = -90^{\circ} \qquad T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$f'_1 = f'_3 = f'_4 = \begin{bmatrix} 0.83 & 0 & -1.25 \\ 0 & 0.05 & 0 \\ -1.25 & 0 & 2.5 \end{bmatrix} \times 10^{-4}$$

b).- Barra $\boxed{2}$

$$f'_2 = f_2 = \begin{bmatrix} 0.05 & 0 & 0 \\ 0 & 0.83 & 1.25 \\ 0 & 1.25 & 2.5 \end{bmatrix} \times 10^{-4}$$

Obtención de las matrices de transporte:

$$H_{BP_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1.0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad H \quad = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ +1.0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H_{CP_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1.00 & 1.00 & 1 \end{bmatrix}$$

Obtención de f_{BB} :

$$H_{BP_2}^{T}\ f_1' = \begin{bmatrix} 2.08 & 0 & -3.75 \\ 0 & 0.05 & 0 \\ 1.25 & 0 & 2.5 \end{bmatrix}$$

$$(H_{BP_2}^{T}\ f_1'\ )\ H_{BP_2} = \begin{bmatrix} 5.83 & 0 & -3.75 \\ 0 & 0.05 & 0 \\ -3.75 & 0 & 2.50 \end{bmatrix}$$

$$f_{BB} = \begin{bmatrix} 6.66 & 0 & -5.00 \\ 0 & 0.10 & 0 \\ -5.00 & 0 & 5.00 \end{bmatrix} \text{ x } 10^{-4}$$

Obtención de f_{cc} :

$$H_{CP_1}^{T}\ f_3' = \begin{bmatrix} -0.42 & 0 & 1.25 \\ 0 & 0.05 & 0 \\ -1.25 & 0 & 2.50 \end{bmatrix} \; ; \quad (H_{CP_1}^{T}\ f_3')\ H_{CP_1} = \begin{bmatrix} 0.83 & 0 & 1\text{[illegible]}5 \\ 0 & 0.05 & 0 \\ 1.25 & 0 & 2.50 \end{bmatrix}$$

$$H_{CP_1}^{T}\ f_2' = \begin{bmatrix} 0.05 & 1.25 & 2.50 \\ 0 & 0.83 & 1.25 \\ 0 & 1.25 & 2.5 \end{bmatrix} \; ; \quad (H_{CP_1}^{T}\ f_2')\ H_{CP_1} = \begin{bmatrix} 2.55 & 1.25 & 2.50 \\ 1.25 & 0.83 & 1.25 \\ 2.50 & 1.25 & 2.50 \end{bmatrix}$$

$$H_{CP_2}^{T}\ f_1' = \begin{bmatrix} -0.42 & 0 & 1.25 \\ -1.25 & 0.05 & 2.50 \\ -1.25 & 0 & 2.5 \end{bmatrix} \; ; \quad (H_{CP_2}^{T}\ f_1')\ H_{CP_2} = \begin{bmatrix} 0.83 & 1.25 & 1.25 \\ 1.25 & 2.55 & 2.50 \\ 1.25 & 2.5 & 2.50 \end{bmatrix}$$

$$f_{cc} = \begin{bmatrix} 4.21 & 2.50 & 5.0 \\ 2.50 & 3.43 & 3.75 \\ 5.0 & 3.75 & 7.50 \end{bmatrix} \text{ x } 10^{-4}$$

Obtención de f_{BC}:

$$f'_{P_2P_2} = f'_1$$

$$H^T_{BP_2}\, f'_1 = \begin{bmatrix} 2.08 & 0 & -2.50 \\ 0 & 0.05 & 0 \\ -1.25 & 0 & 2.50 \end{bmatrix}; \quad f_{BC} = (H^T_{BP_2}\, f'_1)\; H_{CP_2}$$

$$f_{BC} = \begin{bmatrix} -0.42 & -2.50 & -2.50 \\ 0 & 0.05 & 0 \\ 1.25 & 2.50 & 2.50 \end{bmatrix} \times 10^{-4}$$

Recordemos que:

$$\begin{bmatrix} d'_B \\ d'_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f'_{BB} & f'_{BC} \\ f'_{CB} & f_{CC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p'_B \\ p'_C \end{bmatrix} \qquad (\text{Si: } d'_A = 0)$$

O bien: $\quad d' = [\gamma]\, p'$

Obtengamos: $\quad [\gamma]^{-1}$

$$[\gamma] = \begin{bmatrix} 6.66 & 0 & -5.00 & -0.42 & -2.50 & -2.50 \\ 0 & 0.10 & 0 & 0 & 0.05 & 0 \\ -5.00 & 0 & 5.00 & 1.25 & 2.50 & 2.50 \\ -0.42 & 0 & 1.25 & 4.21 & 2.50 & 5.0 \\ -2.50 & 0.05 & 2.50 & 2.50 & 3.43 & 3.75 \\ -2.50 & 0 & 2.50 & 5.0 & 3.75 & 7.50 \end{bmatrix} \times 10^{-4}$$

$$[\gamma]^{-1} = \left[\begin{array}{c:c} k'_{BB} & k'_{BC} \\ \hdashline k'_{CB} & k'_{CC} \end{array}\right]$$

$$[\gamma]^{-1} = \begin{bmatrix} 1.217 & -0.067 & 1.055 & -1.230 & 0.133 & 0.808 \\ -0.067 & 10.224 & 0.081 & 0.133 & -0.447 & 0.086 \\ 1.055 & 0.081 & 1.253 & -0.904 & 0.162 & 0.618 \\ -1.230 & 0.133 & -0.904 & 2.460 & -0.266 & 1.615 \\ 0.133 & -0.447 & -0.162 & -0.266 & 0.895 & -0.171 \\ 0.808 & 0.086 & 0.618 & -1.615 & -0.171 & 1.360 \end{bmatrix} \times 1$$

Obtengamos la matriz de rigidez "acoplada", esto es cuando $d'_A \neq 0$; $d'_B \neq 0$; $d'_C \neq 0$

Por estática:

$$\begin{bmatrix} p'_A \\ p'_B \\ p'_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -H'_{BA} & -H'_{CA} \\ I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p'_B \\ p'_C \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{c|cc} k'_{AA} & k'_{AB} & k'_{AC} \\ \hline k_{BA} & k_{BB} & k_{BC} \\ \hline k_{CA} & k_{CB} & k_{CC} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} -H'_{BA} & -H_{CA} \\ \hline I & 0 \\ \hline 0 & I \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} k'_{BB} & k'_{BC} \\ k'_{CB} & k'_{CC} \end{bmatrix} \left[\begin{array}{c|c|c} -H^T_{BA} & I & 0 \\ \hline -H & 0 & I \end{array}\right] =$$

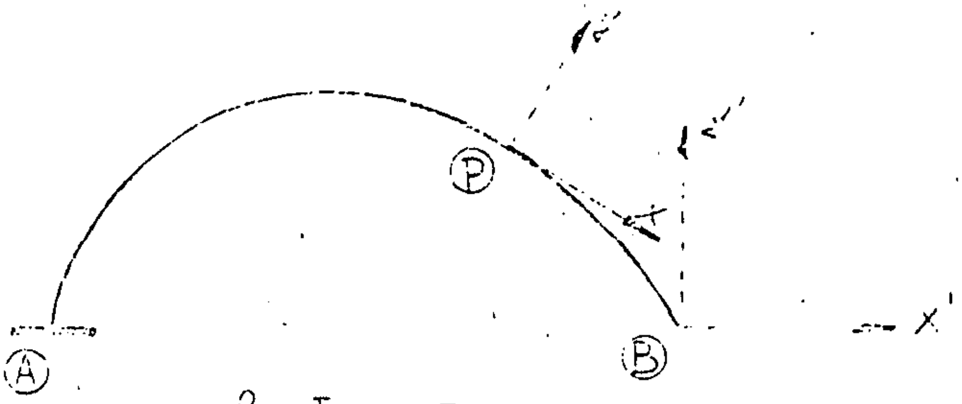
$$= \left[\begin{array}{c|c|c} \begin{matrix} (H'_{BA}\, k'_{BB}\, H'^T_{BA} + H'_{CA}\, k'_{CC}\, H'^T_{CA} + \\ H'_{CA}\, k'_{CB}\, H'^T_{BA} + H'_{BA}\, k'_{BC}\, H^T_{CA}) \end{matrix} & -H'_{BA}\, k'_{BB} - H'_{CA}\, k_{CB} & -H'_{BA}\, k'_{BC} - H'_{CA}\, k'_{CC} \\ \hline -k'_{BB}\, H'^T_{BA} - k'_{BC}\, H'^T_{CA} & k'_{BB} & k'_{BC} \\ \hline -k'_{CB}\, H'^T_{BA} - k_{CC}\, H'^T_{CA} & k'_{CB} & k'_{CC} \end{array}\right]$$

Generalización de la fórmula dada en la hoja 24

```
·SOLEC      19:00      034  10/16/70

MATRIZ A
 .66600000E+01   .00000000E+00  -.50000000E+01  -.42000000E+00
-.25000000E+01  -.25000000E+01   .00000000E+00   .10000000E+00
 .00000000E+00   .00000000E+00   .50000000E-01   .00000000E+00
-.50000000E+01   .00000000E+00   .50000000E+01   .12500000E+01
 .25000000E+01   .25000000E+01  -.42000000E+00   .00000000E+00
 .12500000E+01   .42100000E+01   .25000000E+01   .50000000E+01
-.25000000E+01   .50000000E-01   .25000000E+01   .25000000E+01
 .34300000E+01   .37500000E+01  -.25000000E+01   .00000000E+00
 .25000000E+01   .50000000E+01   .37500000E+01   .75000000E+01

MATRIZ (A) (-1)
 .12174584E+01  -.66563716E-01   .10545104E+01  -.12300975E+01
 .13312743E+00   .80781727E+00  -.66563715E-01   .10223654E+02
 .80941477E-01   .13312743E+00  -.44730816E+00   .85734063E-01
 .10545104E+01   .80941476E-01   .12526551E+01  -.90420154E+00
-.16188295E+00   .61769426E+00  -.12300975E+01   .13312743E+00
-.90420153E+00   .24601949E+01  -.26625486E+00  -.16156345E+01
 .13312743E+00  -.44730816E+00  -.16188295E+00  -.26625486E+00
 .89461633E+00  -.17146813E+00   .80781726E+00   .85734063E-01
 .61769425E+00  -.16156345E+01  -.17146813E+00   .13595314E+01
```

Resumen (5)

I.- Flexibilidades de barras curvas de sección variable:



$$f'_{PB} = \int_L H'^{T}_{BP}\, T\, \phi\, T^{T} H'_{BP}\, ds$$

donde:

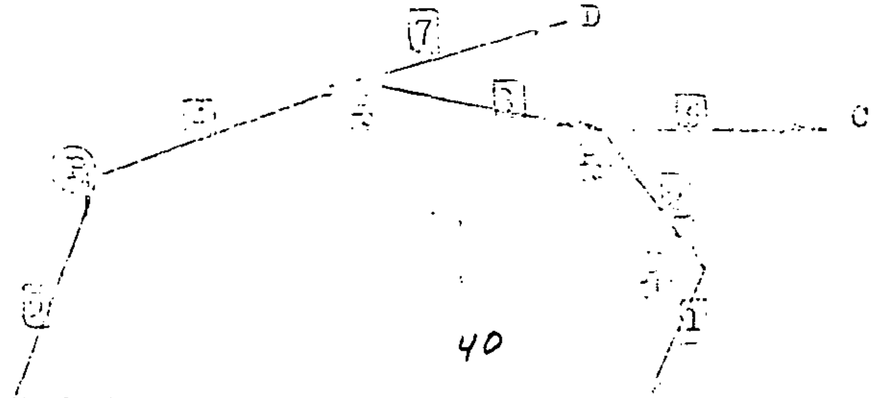
$$H'_{BP} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ y'_P & -x'_P & 1 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} \text{Cos } \theta & \text{Sen } \theta & 0 \\ -\text{Sen } \theta & \text{Cos } \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\phi = \begin{bmatrix} \frac{1}{EA} & & \\ & \frac{1}{GA_c} & \\ & & \frac{1}{EI} \end{bmatrix}; \quad \left(A_c = \frac{A}{K} \right)$$

II.- Flexibilidades y rigideces de árboles

Consideremos un elemento con 4 nudos (4 puntos donde se pueden aplicar fuerzas externas)



La matriz k' ("acoplada") tendrá los siguientes elementos:

$$k' = \left[\begin{array}{c|ccc} k'_{AA} & k'_{AB} & k'_{AC} & k'_{AD} \\ \hline & k'_{BB} & k'_{BC} & k'_{BD} \\ & & k'_{CC} & k'_{CD} \\ & & & k'_{DD} \end{array}\right]$$ Considerando empotrado a Ⓐ

Para obtener esta matriz habra que invertir a la matriz γ'

$$\gamma' = \begin{bmatrix} f'_{BB} & f'_{BC} & f'_{BD} \\ & f'_{CC} & f'_{CD} \\ & & f'_{DD} \end{bmatrix}$$

donde: $f'_{BB} = f'_1 + H'^T_{BP_1} f'_2 H_{BP_1} + H'^T_{BP_2} f_3 H'_{BP_2} + H'^T_{BP_3} f'_4 H'_{BP_3} + H'^T_{BP_4} f'_5 H_{BP_4}$

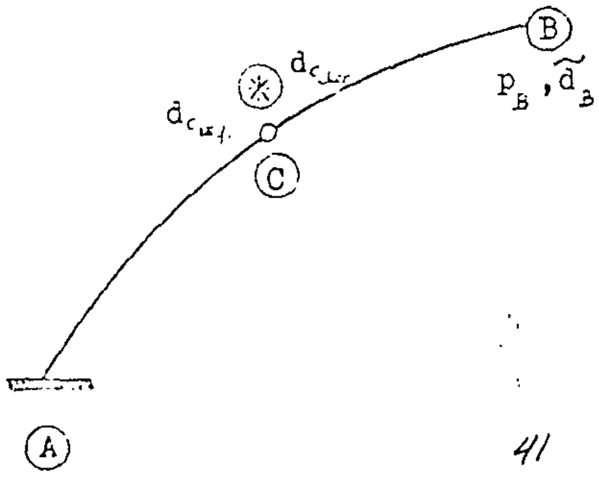
$f'_{CC} = f'_6 + H'^T_{CP_2} f'_3 H'_{CP_2} + H'^T_{CP_3} f'_4 H_{CP_3} + H'^T_{CP_4} f_5 H_{CP_4}$

$f'_{BC} = H'^T_{BP_2} f'_{P_2P_2} H'_{CP_2}$

donde: $f'_{P_2P_2} = f'_3 + H'^T_{P_2P_3} f'_4 H'_{P_2P_3} + H'^T_{P_2P_4} f'_5 H_{P_2P_4}$

Nota: Con elementos de n nudos las matrices de rigideces acopladas serán de dimensión (n x n) y se podrá aplicar la <u>regla de la suma</u> para ensamblar la matriz K', utilizando las rigideces acopladas en coordenadas globales.

III.- Rigideces de barras con discontinuidades (Releases)



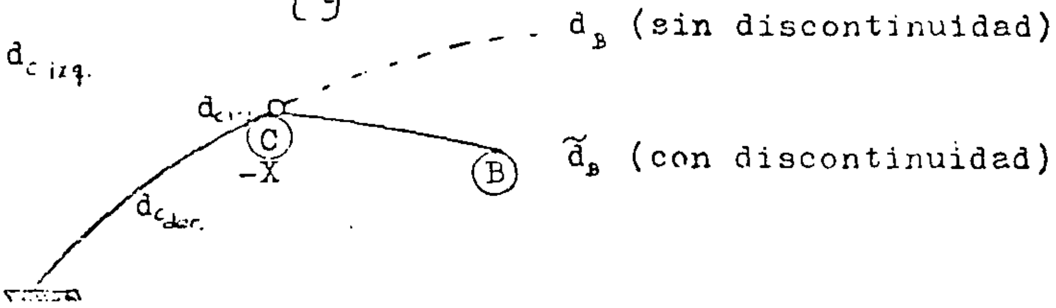
✻ discontinuidad en algunos componentes del desplazamiento; por ejemplo: giro o si se trata de una articulación.

Se desea obtener $\widetilde{k}_{BB}$ tal que

$$p_B = \widetilde{k}_{BB}\ \widetilde{d}_B$$

Sea $[X]$ la discontinuidad de $[d_c]$

$$X = d_{c\,der.} - d_{c\,izq.}$$



$$d_B = \widetilde{d}_B + H_{BC}^T\ (-X)$$

$$p_B = k_{BB}\ d_B = k_{BB}\ (\widetilde{d}_B - H_{BC}^T\ X)$$

En la discontinuidad se tiene que:

$$\Lambda\, p_c = \Lambda\, H_{BC}\ p_B = 0$$

donde Λ es una matriz que define la discontinuidad en Ⓒ

Ejemplos: a).- Articulación —○— $\Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

$p_{c_z} = 0$ (Momento flexionante en Ⓒ = 0)

b).- Discontinuidad y —| |— $\Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$p_{c_y} = 0$ (Fuerza cortante en Ⓒ = 0)

Observe que: $X = \Lambda^T\ x$

donde x = Parte no nula de X

(Si se trata de una articulación:)

$$X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_1 \end{bmatrix}; \quad x = [x_1]$$

$$p_B = k_{BB}(\tilde{d}_B - H^T_{BC}\ \Lambda^T x) \ldots\ldots (5.1)$$

pero $\Lambda H_{BC}\, p_B = \Lambda H_{BC}\, k_{BB}\tilde{d}_B - \Lambda H_{BC}\, k_{BB} H^T_{BC}\ \Lambda^T x = 0$

$$X = (\Lambda\ H_{BC} k_{BB} H^T_{BC}\ \Lambda^T)^{-1} \Lambda\ H_{BC} k_{BB}\tilde{d}_B$$

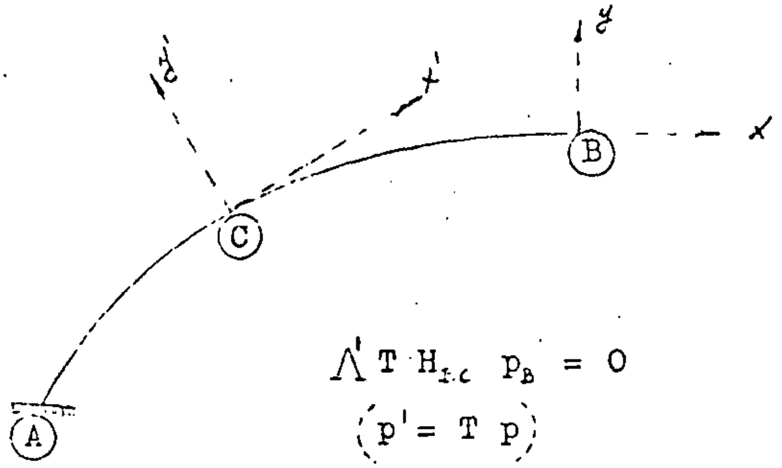
Sustituyendo en (5.1)

$$p_B = k_{BB}\underbrace{\left[I - H^T_{BC}\ \Lambda^T (\ \Lambda H_{BC} k_{BB} H^T_{BC}\ \Lambda^T\ )^{-1} \Lambda\ H_{BC}\ k_{BB}\right]}_{=\ \tilde{k}_{BB}} \tilde{d}_B$$

Por consiguiente:

$$\tilde{k}_{BB} = k_{BB}\left[I - A\right] \qquad A = H^T_{BC}\ \Lambda^T(\ \Lambda\ H_{BC} k_{BB} H^T_{BC}\ \Lambda^T)^{-1} \Lambda H_{BC} k_{BB}$$

Nota: Si la discontinuidad en C esta referida a un sistema x', y', se tiene:



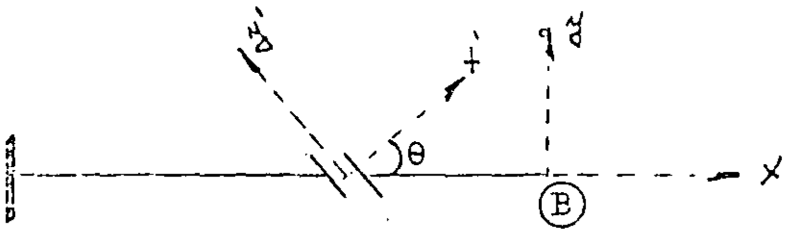
$$\Lambda' T\ H_{BC}\ p_B = 0$$

$$(p' = T\ p)$$

En este caso:

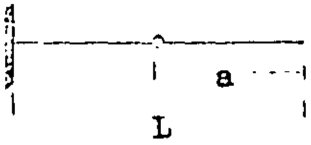
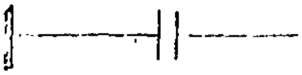
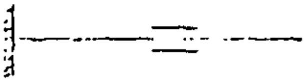
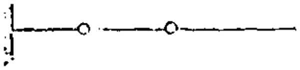
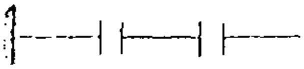
$$A = H^T_{BC} - T^T\ \Lambda'^T (\ \Lambda'\ T\ H_{BC} k_{BB} H_{BC}\ T^T \Lambda'^T)^{-1} \Lambda'^T H_{BC} k_{BB}$$

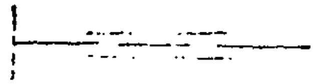
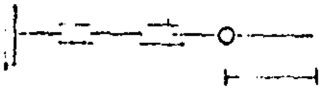
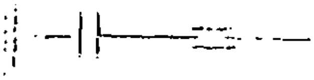
Ejemplo:



$$\Lambda' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

IV.- Rigideces de miembros rectos de sección uniforme con discontinuidad

Discontinuidad	$\tilde{k}_{SB}$
	$\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{L^3\psi(\alpha)} & -\frac{3EI\alpha}{L^2\psi(\alpha)} \\ 0 & -\frac{3EI\alpha}{L^2\psi(\alpha)} & \frac{3EI\alpha^2}{L\psi(\alpha)} \end{bmatrix}$ $\alpha = a/L$ $\psi(\alpha) = 1+c-3\alpha+3\alpha^2$
	$\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EI}{L} \end{bmatrix} = \tilde{k}_{AA}$
	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3(1+4c)} & \frac{-6EI}{L^2(1+4c)} \\ 0 & & \frac{4EI(1+c)}{L\,(1+4c)} \end{bmatrix}$
	$\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \tilde{k}_{AA}$
	$\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EI}{L} \end{bmatrix} = \tilde{k}_{AA}$

Discontinuidad	$k_{\beta\beta}$
	IGUAL CASO (3)
	$\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \tilde{k}_{AA}$
	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & & \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{\text{CASO (1)}} \end{bmatrix}$
	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EI}{L} \end{bmatrix} = \tilde{k}_{AA}$

APENDICE

I.- Demostración de que $\tilde{k}_{\beta\beta}$ es singular

Se sabe que: $\tilde{k}_{\beta\beta} = k_{\beta\beta}(I-A)$

Observe que:

$$A \cdot A = H^{T}_{\beta c} \; \Lambda \; (\; \Lambda H_{\beta c} k_{\beta\beta} H^{T}_{\beta c} \; \Lambda^{T} \;)^{-1} \Lambda H_{\beta c} k_{\beta\beta} H^{T}_{\beta c} \Lambda (\quad)^{-1} \Lambda H_{\beta c} k_{\beta\beta}$$

$$A \cdot A = A$$

Premultipliquemos por A

$$A^{-1} A A = A^{-1} A$$

$$\therefore A = I$$

a).- Si A no es la identidad A^{-1} no existe pues su existencia contradice el hecho de que $A \neq I$, por lo tanto A es singular.

b).- A es la identidad. (no singular)

Si usamos la alternativa (a)

$$B = \left[I - A\right] \neq 0$$

pero: $B\,B = \left[I - A\right]\left[I - A\right] = I - 2A + A^2$

$$= I - 2A + A = I - A = B$$

Por consiguiente para $\left[B\right]$ se tienen las siguientes alternativas

c).- $\left[B\right]$ no es la identidad por lo tanto es singular y también $\left[k_{EB}\right]$

d).- $\left[B\right]$ es la identidad, lo que es imposible porque sería el caso de que no hubiera discontinuidad

$$k_{EB} = \tilde{k}_{EB}$$

Si usamos la alternativa (b)

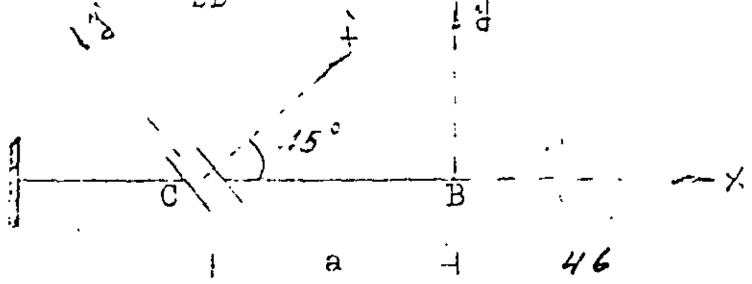
$$A = I \therefore I - A = 0 \quad \therefore \tilde{k}_{EB} = 0 \; *$$

$\tilde{k}_{EB}$ evidentemente que será singular.

* Caso de que la discontinuidad sea total $\Lambda = I$.

Ejemplos:

I.- Obtener $\tilde{k}_{EB}$, viga de sección uniforme:



$\theta = + 45°$

$$H_{BC} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \end{bmatrix} \qquad T = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & +1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Lambda' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \ ; \quad \Lambda' T = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Lambda' T H_{BC} = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & +1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Lambda' T H_{BC} k_{BB} = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & +1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^{3}(1+4c)} & \frac{-6EI}{L^{3}(1+4c)} \\ 0 & & \frac{4EI(1+c)}{L\ (1+4c)} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{-EA}{\sqrt{2}\,L} & \frac{+12EI}{\sqrt{2}\,L^{3}(1+4c)} & \frac{-6EI}{\sqrt{2}\,L^{2}(1+4c)} \end{bmatrix}$$

$$\Lambda' T H_{BC} k_{BB} (\Lambda' T H_{BC})^{T} = \left(\frac{EA}{2L} + \frac{6EI}{L^{3}(1+4c)} \right)$$

$$(\qquad)^{-1} = \frac{1}{\frac{EA}{2L} + \frac{6EI}{L^{3}(1+4c)}}$$

$$(\qquad)^{-1} \Lambda' T H_{BC} k_{BB} = (\qquad)^{-1} \begin{bmatrix} \frac{-EA}{\sqrt{2}\,L} & \frac{+12EI}{\sqrt{2}\,L^{3}(1+4c)} & \frac{-6EI}{\sqrt{2}\,L^{2}(1+4c)} \end{bmatrix}$$

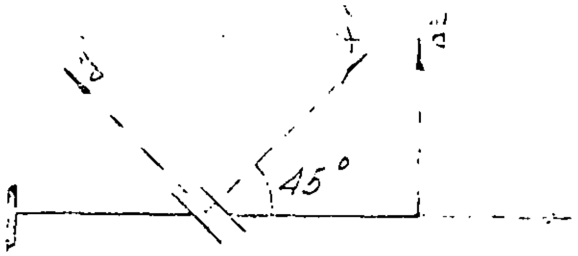
$$(\Lambda' T H_{BC})^{T} \circ (\qquad)^{-1} \Lambda T H_{BC} k_{BB} = A$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{+EA}{2\,L} & \frac{-6EI}{L^3(1+4c)} & \frac{+3EI}{L^2(1+4c)} \\ \frac{-EA}{2\,L} & \frac{+6EI}{L^3(1+4c)} & \frac{-3EI}{L^2(1+4c)} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$I-A = \begin{bmatrix} \frac{6EI}{L^3(1+4c)} & \frac{+6EI}{L^3(1+4c)} & \frac{-3EI}{L^2(1+4c)} \\ \frac{+EA}{2\,L} & \frac{EA}{2\,L} & \frac{+3EI}{L^2(1+4c)} \\ 0 & 0 & \frac{EA}{2\,L} + \frac{6EI}{L^3(1+4c)} \end{bmatrix} \frac{1}{\frac{EA}{2\,L} + \frac{6EI}{L^3(1+4c)}}$$

$$k_{BB}\left[I-A\right] = \begin{bmatrix} \frac{6EI}{L\,(1+4c)}\,\frac{EA}{L} & \frac{+6EI}{L\,(1+4c)}\,\frac{EA}{L} & & \frac{-3EI}{L\,(1+4c)}\,\frac{EA}{L} & \\ & \frac{6EI}{L\,(1+4c)}\,\frac{EA}{L} & \frac{36E\,I}{L\,(1+4c)} & \frac{-6EI}{L\,(1+4c)} & \frac{EA}{2\,L}\,\frac{+6EI}{L\,(1+4c)} \\ \text{simétrico} & & \frac{-18E\,I}{L\,(1+4c)} & \frac{+4EI(1+c)}{L(1+4c)} & \frac{EA}{2\,L}\,\frac{+6EI}{L\,(1+4c)} \end{bmatrix}$$

$$x \frac{1}{\frac{EA}{2\,L} + \frac{6EI}{L^3(1+4c)}}$$



La expresión de k para

Se puede simplificar:

$$k = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3(1+\beta)} & \frac{+12EI}{L^2(1+\beta)} & \frac{-6EI}{L^2(1+\beta)} \\ \frac{+12EI}{L^2(1+\beta)} & \frac{12EI}{L^3(1+\beta)} & \frac{-6EI}{L^2(1+\beta)} \\ \frac{-6EI}{L^2(1+\beta)} & \frac{-6EI}{L^2(1+\beta)} & \frac{EI}{L}\left\{4\,(1+c) - \frac{3\,\beta}{1+\beta}\right\} \end{bmatrix} \frac{1}{(1+4c)}$$

donde:

$$\beta = \frac{12}{(1+4c)}\left(\frac{\rho}{L}\right)^2 \quad ; \qquad \rho = \sqrt{\frac{I}{A}}$$

Observese que si se desprecia el efecto de fuerza normal ($A = \infty$), se tiene:

$$\rho = 0 \quad ; \qquad \beta = 0$$

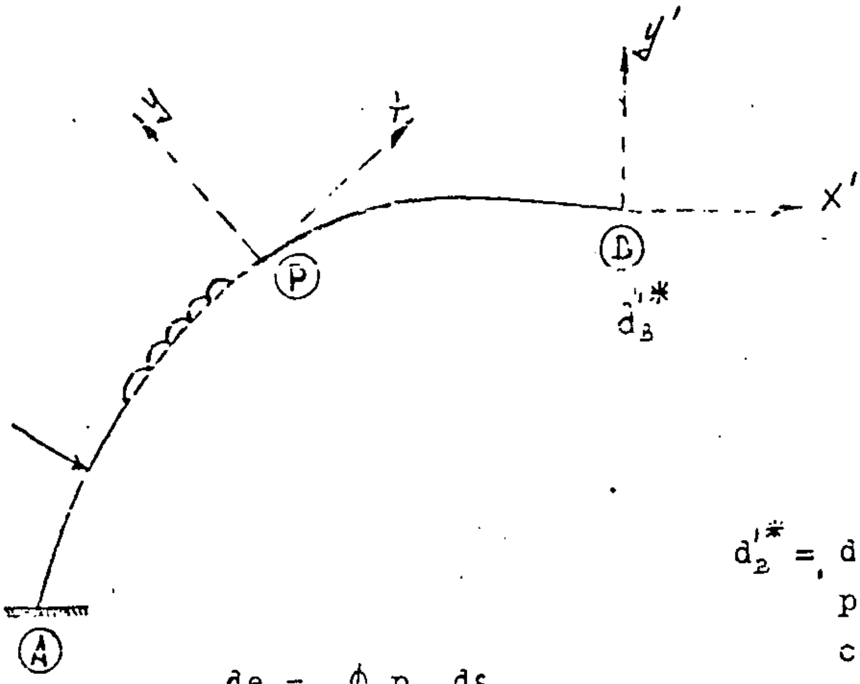
Si también se desprecia el efecto de la fuerza cortante: $c = 0$

Se obtiene:

$$k_{55} = \frac{EI}{L}\begin{bmatrix} \frac{12}{L^2} & \frac{12}{L^2} & \frac{-6}{L} \\ \frac{12}{L^2} & \frac{12}{L^2} & \frac{-6}{L} \\ \frac{-6}{L} & \frac{-6}{L} & 4 \end{bmatrix}$$

Resumen (6)

I.- Desplazamientos producidos por cargas intermedias.



$d_B^{'*}$ = desplazamiento en B producido por las cargas intermedias -- considerando empotrado a A

$$de = \phi \, p_p \, ds$$

$$d \, d_B^{'*} = H_{BP}^{'T} \, T \, \phi \, p_p \, ds \; ; \; p_p = T^T p_p'$$

$$\boxed{d_B^* = \int_L H_{BP}^{'T} \, T \, \phi \, T^T \, p_p \, ds} \quad (6.1)$$

p_p' = elementos mecánicos en P referidos a coordenadas globales

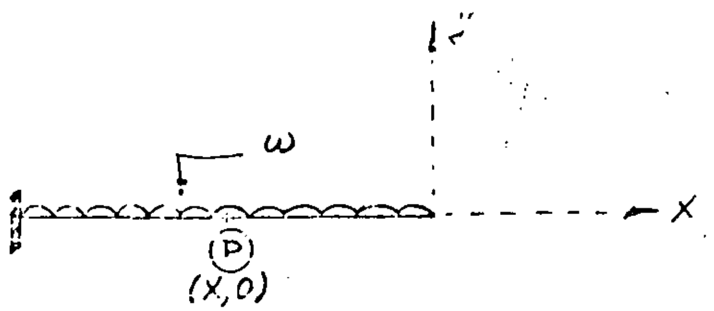
$$d_B^{'*} = \int_L H_{BP}^{'T} \, T \, \phi \, p_p \, ds \; \text{.......} \; (6.2)$$

p_p = elementos mecánicos en P referidos a coordenadas locales

$$\phi = \begin{bmatrix} \frac{1}{EA} & & \\ & \frac{1}{GA_c} & \\ & & \frac{1}{EI} \end{bmatrix} \; ; \quad H_{BP}^{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & (y_p' - y_B') \\ 0 & 1 & -(x_p' - x_B') \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplos:

①



$$H'^{T}_{BP} = H^{T}_{BP} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -x \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad d^{*}_{B} = \int_{x=-L}^{x=0} H^{T}_{BP}\, \phi\, p_{P}\, ds$$

$$ds = dx$$

$T = I$

$$p_{P} = p'_{P} = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega x \\ \frac{-\omega x^{2}}{2} \end{bmatrix}$$

$$H^{T}_{BP}\, \phi = \begin{bmatrix} \frac{1}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{GA_c} & \frac{-x}{EI} \\ 0 & 0 & \frac{1}{EI} \end{bmatrix} \quad ; \quad H^{T}_{BP}\, \phi\, p_{P} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\omega x}{GA_c} + \frac{\omega x^{3}}{2EI} \\ \frac{-\omega x^{2}}{2EI} \end{bmatrix}$$

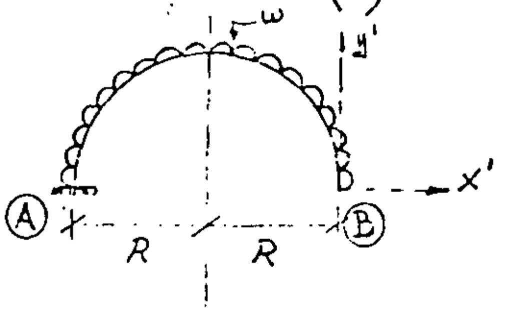
$$d^{*}_{B} = d'^{*}_{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-\omega L^{2}}{2GA_c} - \frac{\omega L^{4}}{8EI} \\ \frac{-\omega L^{3}}{6EI} \end{bmatrix}$$

O bien:

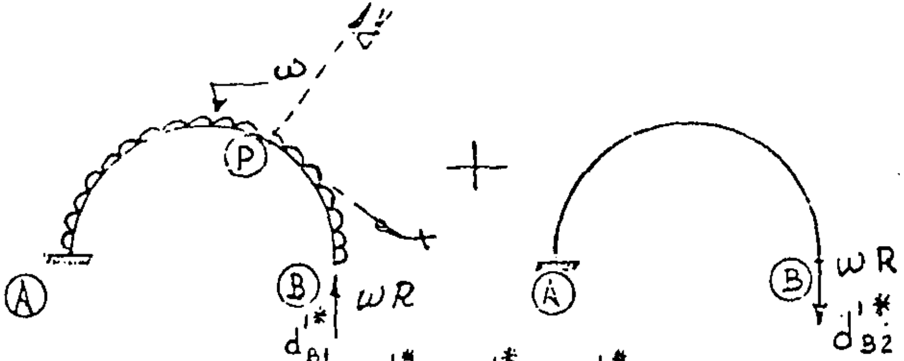
$$d^{*}_{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-\omega L^{4}}{8EI}\left(1 + \frac{4}{3}c\right) \\ \frac{-\omega L^{3}}{6EI} \end{bmatrix}$$

donde: $c = 6\,(1+\mu)\left(\frac{\rho}{L}\right)^2 k_{forma} = \frac{3EI}{GA_c L^2}$

②

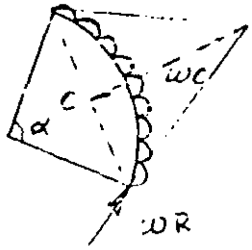


Para obtener $d_B^{'*}$ hagamos la siguiente superposición de fuerzas:

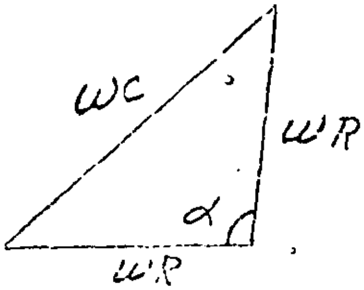


$$\underline{d_B^{'*} = d_{B1}^{'*} + d_{B2}^{'*}}$$

a).- Obtención de $d_{B1}^{'*}$



c = cuerda



$$p_P = \begin{bmatrix} -\omega R \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ (en coordenadas locales)

Utilezemos la fórmula (6.2) $(ds = R\,d\alpha)$

$$T = \begin{bmatrix} \text{sen}\,\alpha & \cos\alpha & 0 \\ -\cos\alpha & \text{sen}\,\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \quad H_{BP}^{'T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & R\,\text{sen}\,\alpha \\ 0 & 1 & R(1-\cos\alpha) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H'^{T}_{BP}\ T = \begin{bmatrix} s & c & R\ \text{sen}\ \alpha \\ -c & s & R(1-\cos\alpha) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

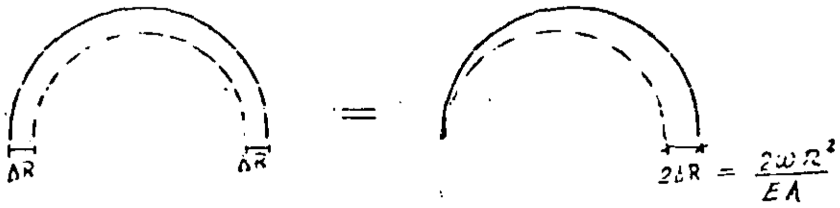
$$H'^{T}_{BP}\ T\ \phi = \begin{bmatrix} \frac{s}{EA} & \frac{c}{GA_c} & \frac{R\ s}{EI} \\ \frac{-c}{EA} & \frac{s}{GA_c} & \frac{R(1-c)}{EI} \\ 0 & 0 & \frac{1}{EI} \end{bmatrix}$$

$$H\ \ T\ \ p = \begin{bmatrix} \frac{-\omega R\ \text{sen}}{EA}\alpha \\ \frac{-\omega R\ \cos}{EA}\alpha \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$d'^{*}_{B1} = \int_{0}^{\pi} H'^{T}_{BP}\ T\ \phi\ p_p\ ds$$

$$d'^{*}_{B1} = \begin{bmatrix} \frac{-2\omega R^2}{EA} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Nota: Este resultado es obvio porque el arco está trabajando a solo fuerza normal, por consiguiente solo sufrirá un acortamiento su radio, igual a: $\frac{\omega R}{EA} \cdot R = \frac{\omega R^2}{EA} = \Delta R$



b).- Obtención de d'^{*}_{B2}

$$d'^{*}_{B2} = \begin{bmatrix} f_{BB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -\omega R \\ 0 \end{bmatrix}$$

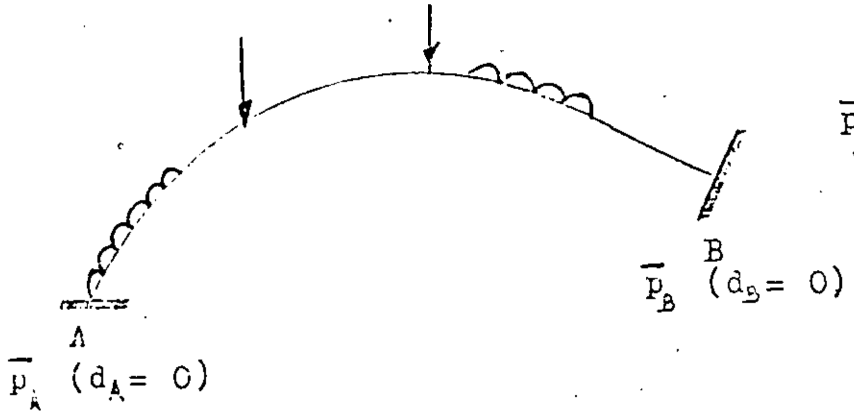
Utilizemos el valor de f_{BB}

$$d'^{*}_{B2} = \begin{bmatrix} -\frac{2\omega R^4}{EI} \\ -\frac{\pi \omega R^2}{2}\left(\frac{1}{EA} + \frac{1}{GA_c} + \frac{3\ R^2}{EI}\right) \\ -\frac{\pi \omega R^3}{EI} \end{bmatrix}$$

Por consiguiente:

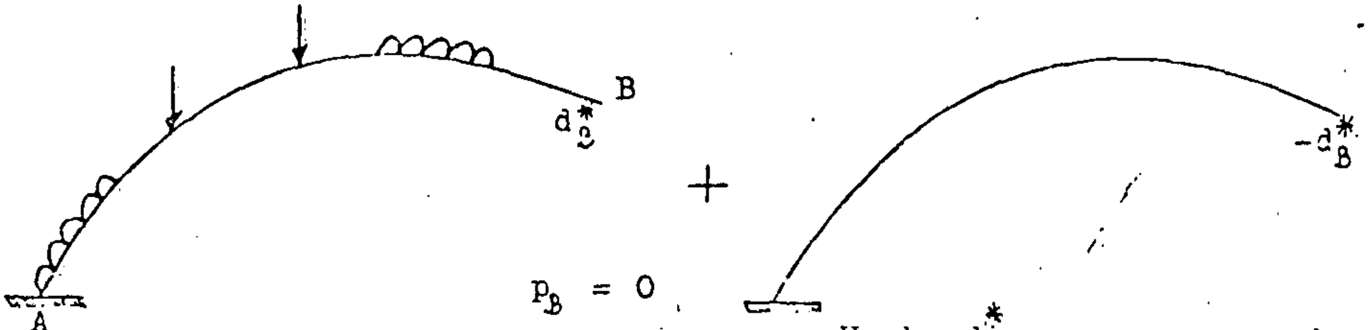
$$d^{*}_{B} = \begin{bmatrix} -\frac{2\omega R^2}{EA} - \frac{2\omega R^4}{EI} \\ -\frac{\pi \omega R^2}{2} \quad \frac{1}{EA} + \frac{1}{GA_c} + \frac{3\ R^2}{EI} \\ -\frac{\pi \omega R^3}{EI} \end{bmatrix}$$

II.- Fuerzas de fijación



$\overline{p}_A, \overline{p}_B$ = reacciones en Ⓐ y Ⓑ, considerando empotrados a Ⓐ y Ⓑ

Para obtener $\overline{p}_A$ y $\overline{p}_B$ usemos la siguiente superposición:



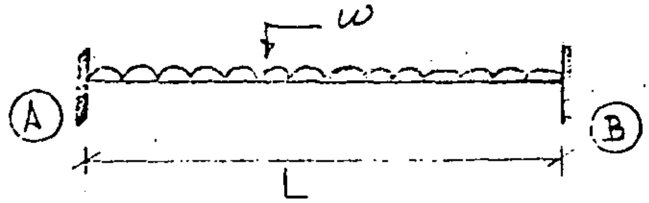
$p_A = p_A^*$ $\quad p_B = 0$ $\quad p_A = H_{BA}\, k_{BB}\, d_B^*$ $\quad p_B = -k_{BB}\, d_B^*$

$$\boxed{\begin{aligned}\overline{p}_A &= p_A^* + H_{BA}\, k_{BB}\, d_B^* \\ \overline{p}_B &= -\, k_{BB}\, d_B^*\end{aligned}}$$

$p_A^* =$ Reacción en Ⓐ considerando suelto a Ⓑ (cantiliver)

Ejemplos:

①



Usando los resultados de los ejemplos anteriores

$$d_B^* = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\omega L^4}{8EI}\left(1+\frac{4}{3}c\right) \\ -\frac{\omega L^3}{6EI} \end{bmatrix}$$

$$k_{BB} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3(1+4c)} & \frac{-6EI}{L^2(1+4c)} \\ 0 & \frac{-6EI}{L^2(1+4c)} & \frac{4EI(1+c)}{L\,(1+4c)} \end{bmatrix}$$

$$k_{BB}\, d_B^* = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{3}{2}\,\omega L \left(\frac{1+4c/3}{1+4c}\right) + \frac{\omega L}{(1+4c)} \\ +\frac{3}{4}\,\omega L^2 \left(\frac{1+4c/3}{1+4c}\right) - \frac{2}{3}\quad L\,\frac{(1+c)}{(1+4c)} \end{bmatrix}$$

Simplificando:

$$k_{BB}\, d_B^* = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-\omega L}{2} \\ \frac{+\omega L^2}{12} \end{bmatrix}$$

Por estática, se tiene:

$$p_A^* = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega L \\ \frac{+\omega L^2}{2} \end{bmatrix}$$

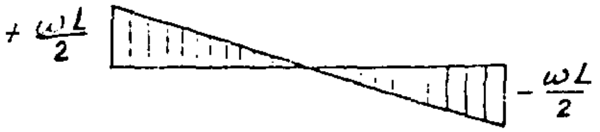
Obtengamos $H_{BA}\, k_{BB}\, d_B^*$

$$H_{BA} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & L & 1 \end{bmatrix}$$

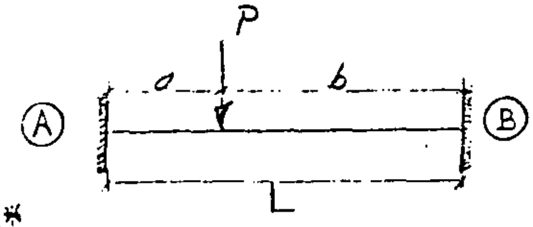
$$H_{BA}\, k_{BB}\, d_B^* = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-\omega L}{2} \\ -\frac{5}{12}\,\omega L^2 \end{bmatrix}$$

$$\overline{p}_A = \begin{bmatrix} 0 \\ +\frac{\omega L}{2} \\ +\frac{\omega L^2}{12} \end{bmatrix} \quad ; \quad \overline{p}_B = \begin{bmatrix} 0 \\ +\frac{\omega L}{2} \\ -\frac{\omega L^2}{12} \end{bmatrix}$$

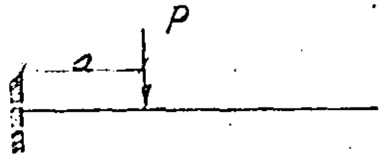
Resultado que es interesante, porque no se ve afectado por el trabajo de la fuerza cortante, lo cual es evidente porque el diagrama de T es antisimétrico y se anula al ser integrado.



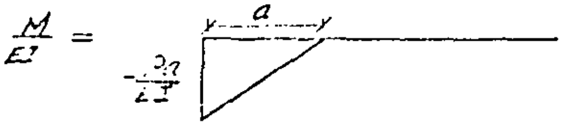
②

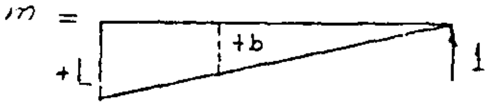


a).- Obtengamos d_B^*



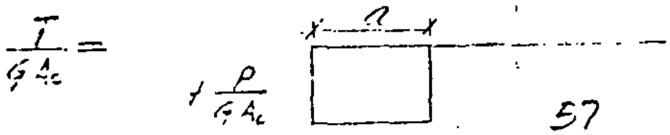
Utilizemos las ecuaciones del trabajo virtual, obtención de d_{By}^*

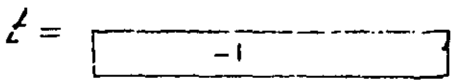




$$\int \frac{Mm}{EI}\, ds = \frac{1}{6} \; a \left(-\frac{Pa}{EI}\right)\left(+ \; 2 \; L + b\right)$$

$$= -\frac{Pa^2}{6EI} \; (2 \; L + b)$$





$$\int \frac{Tt}{GA_c} = \frac{-Pa}{GA_c}$$

$$d^*_{By} = \frac{-Pa^2}{6EI}\,(2L+b)\, \frac{-Pa}{GA_c}$$

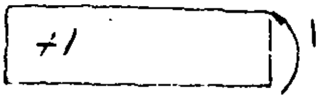
Simplificando:

$$d^*_{By} = \frac{-Pa^2}{6EI}\left[2L(1+cL/a)+b\right]$$

$$\left(C = \frac{3EI}{GA_c L^2}\right)$$

Obtención de d^*_{Bz} (= θ^*_{Bz})

$m =$



$t = 0$

$$\int \frac{Mm}{EI}\,ds = \frac{-Pa^2}{2EI}$$

$$d^*_{Bz} = \frac{-Pa^2}{2EI}$$

$$d^*_B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-Pa^2}{6EI}\quad 2L(1+cL/a)+b \\ \frac{-Pa^2}{2EI} \end{bmatrix}$$

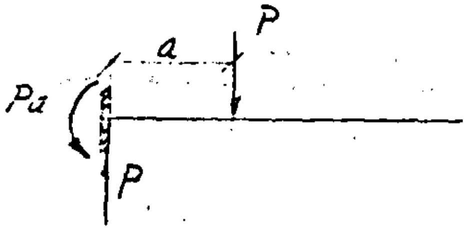
b).- Obtengamos $k_{BB}\ d^*_B$ (simplificando)

$$k_{BB}\ d^*_B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-Pa}{L(1+4c)}\left[1+4c+\frac{ab-b^2}{L^2}\right] \\ \frac{+Pa^2 b}{L^2(1+4c)}\left[1+2cL/a\right] \end{bmatrix}$$

c).- Obtenemos $H_{BA}\, k_{BB}\, d_B^*$

$$H_{BA}\, k_{BB}\, d_B^* = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{-Pa}{L(1+4c)} \left[1+4c+\dfrac{ab-b^2}{L^2} \right] \\ \dfrac{Pab^2}{L^2(1+4c)} \left[1+2cL-\dfrac{L^2}{b^2}\;(1+4c) \right] \end{bmatrix}$$

d).- Por estática



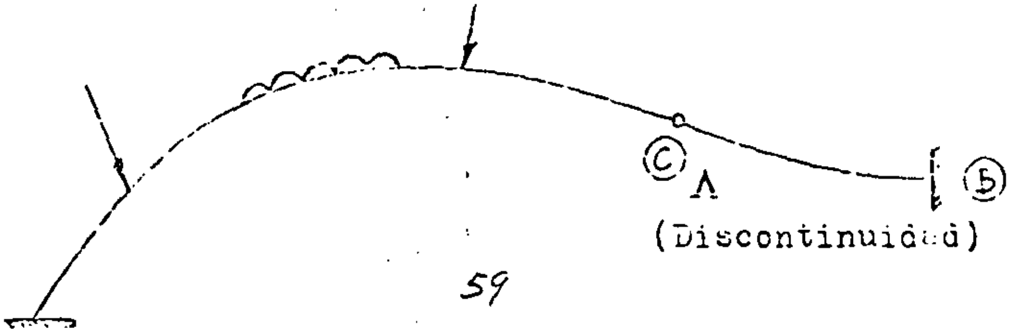
$$p_A^* = \begin{bmatrix} 0 \\ +P \\ +Pa \end{bmatrix}$$

$$\overline{p}_A = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{Pb}{L(1+4c)} \left[1+4c+\dfrac{ab-a^2}{L^2} \right] \\ +\dfrac{Pab^2}{L^2(1+4c)} \left[1+\dfrac{2cL}{b} \right] \end{bmatrix} \; ; \; \overline{p}_B = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{Pa}{L(1+4c)} \left[1+4c+\dfrac{ab-b^2}{L^2} \right] \\ -\dfrac{Pa^2b}{L^2(1+4c)} \left[1+2c\dfrac{L}{a} \right] \end{bmatrix}$$

Nota: Obsérvese que cuando $a = b = L/2$
(Diagrama de T antisimétrico)

$$\overline{p}_A = \begin{bmatrix} 0 \\ +\dfrac{P}{2} \\ +\dfrac{PL}{8} \end{bmatrix} ; \quad \overline{p}_B = \begin{bmatrix} 0 \\ +\dfrac{P}{2} \\ -\dfrac{PL}{8} \end{bmatrix}$$

III.- Fuerzas de fijación de barras con discontinuidades.

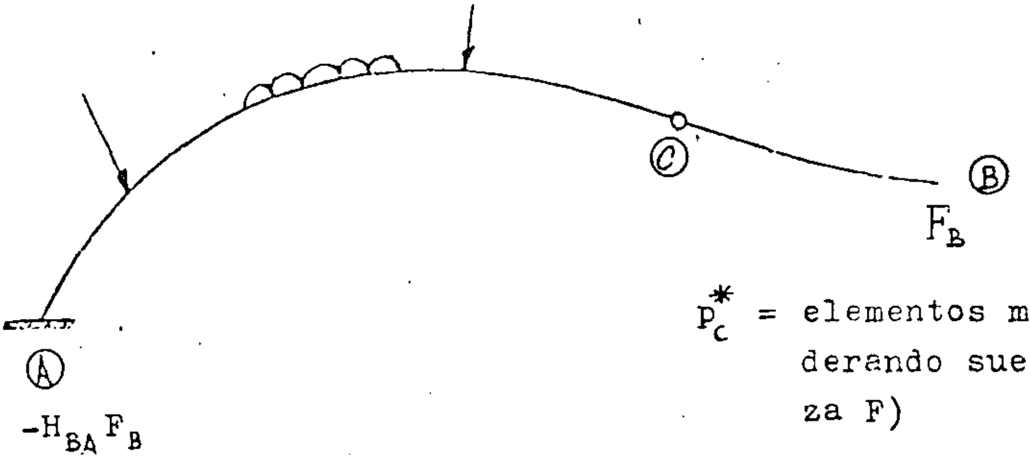


a).- Obtengamos d_B^* sin considerar la discontinuidad en C.

b).- Consideremos en B una fuerza F_B que cumpla con el equilibrio en C

$(\Lambda p_c = 0)$, o sea que:

$$\Lambda(p_c^* + H_{BC} F_B) = 0 \text{ - - - - - } (6.3)$$



p_c^* = elementos mecánicos en C considerando suelto a B (sin la fuerza F)

La fuerza F_B no esta determinada por (6.3), hay muchos valores que la satisfacen, por ejemplo:

$$F_B = -H_{CB}\Lambda^T\Lambda\, p_c^* \text{ - - - - - } (6.4)$$

En efecto, sustituyendo en (6.3)

$$\Lambda(I-H_{BC}H_{CB}\Lambda^T\Lambda)\,p_c^* = \\ = (\Lambda - \Lambda\Lambda^T\Lambda)\,p_c^* = 0$$

Porque: $\Lambda\Lambda^T\Lambda = \Lambda$

La fuerza F_B, produce en B un desplazamiento $f_{BB} F_B$, por lo que el dezplazamiento total en B sera:

$$\tilde{d}_B^* = d_B^* + f_{BB} F_B$$

c).- Obtención de p_B:

$\widetilde{k}_{BB}$ = rigidez modificada en B.

$$\bar{p}_B = - \widetilde{k}_{BB}\, \widetilde{d}^*_B + F_B$$

$$p_B = -\widetilde{k}_{BB}\, \widetilde{d}^*_B - \widetilde{k}_{BB}\, f_{BB}\, F_B + F_B$$

$$\boxed{\bar{p}_B = - \widetilde{k}_{BB}\, d^*_B + (I - \widetilde{k}_{BB}\, f_{BB})\, F_B} \cdots (6.5)$$

O bien sustituyendo a (6.4) en (6.5)

$$\bar{p}_B = - \widetilde{k}_{BB} d^*_B - (I - \widetilde{k}_{BB}\, f_{BB})\, H_{CB}\, \Lambda^T \Lambda\, p^*_C \qquad (6.6)$$

Recordando que:

$$\widetilde{k}_{BB} = k_{BB} \left[I - A \right] = \left[I - D \right] k_{BB}$$

donde:

$$A = H^T_{BC}\ \Lambda^T\ (\Lambda\ H_{BC}\ k_{BB}\ H_{BC}\ \Lambda^T)^{-1}\ \Lambda\ H_{BC}\ k_{BB}$$

$$D = k_{BB}\, H^T_{BC}\, \Lambda^T (\Lambda\, H_{BC}\, k_{BB}\, H^T_{BC}\, \Lambda^T)^{-1} \Lambda\, H_{BC}.$$

(Ver resumen (5))

y sustituyendo en (6.6) y simplificando

$$\bar{p}_B = - k_{BB} \left[(I - A)\, d^*_B + H^T_{BC}\ \Lambda^T\ (\Lambda\ H_{BC}\ k_{BB} H^T_{BC} \Lambda^T)^{-1} \Lambda\, p^*_C \right]$$ (6.7

d).- Por estática:

$$\bar{p}_A = p^*_A - H_{BA}\, \bar{p}_B \ \ldots\ldots\ldots (6.8)$$

Sustituyendo (6.6) en (6.8)

ANALISIS ESTRUCTURAL II

RESUMEN 7

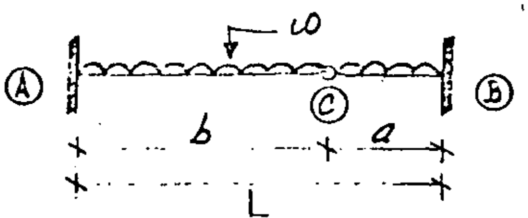
$$\bar{p}_A = p_A^* + H_{BA}\left[\tilde{k}_{BB}\, d_B^* + (I - \tilde{k}_{BB}\, f_{BB})\, H_{CB}\Lambda^T \Lambda\, p_C^*\right] \quad - - - \quad .... (6.9)$$

O sustituyendo (6.7) en (6.8)

$$\bar{p}_A = p_A^* + H_{BA}\, k_{BB}\left[(I - A)\ d_B^* + H_{BC}^T \Lambda^T \ (\ \Lambda\ H_{BC}\, k_{BB} H_{BC}\Lambda^T\ )^{-1} \Lambda\ p_C^*\right] \quad --- \quad (6.10$$

Ejemplos:

①



$$\Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a).- Obtención de d_B^* (ejemplo anterior)

$$d_B^* = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{-\omega L^4}{8EI} \quad (1+4\,c/3) \\ \dfrac{-\omega L^3}{6EI} \end{bmatrix}$$

b).- Obtención de $\tilde{k}_{BB}$ (Tabla en el resumen (5))

$$\tilde{k}_{BB} = \begin{bmatrix} \dfrac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{3EI}{L^3\psi(\alpha)} & \dfrac{-3EI\,\alpha}{L^2\psi(\alpha)} \\ 0 & \dfrac{-3EI\,\alpha}{L^2\psi(\alpha)} & \dfrac{3EI\,\alpha^2}{L\,\psi(\alpha)} \end{bmatrix}; \qquad \alpha = a/L$$

$$\psi(\alpha) = 1+c-3\alpha+3\alpha^2$$

c).- Obtención de p_A^* y p_C^* (Por estática)

$$p_A^* = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega L \\ +\dfrac{\omega L^2}{2} \end{bmatrix}; \qquad p_C^* = \begin{bmatrix} 0 \\ -\omega a \\ -\dfrac{\omega a^2}{2} \end{bmatrix}$$

Reacción en Ⓐ Elementos mecánicos en Ⓒ

d).- Apliquemos la ecuación (6.6) para obtener $\overline{p}_B$:

$$-\tilde{k}_{BB}\; d^*_B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\omega L}{8\psi(\alpha)}\left[3+4c-4\frac{a}{L}\right] \\ \frac{-\omega a L}{8\psi(\alpha)}\left[3+4c-4\frac{a}{L}\right] \end{bmatrix}$$

$$f_{BB} = \begin{bmatrix} \frac{L}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L^3}{3EI}\;(1+c) & \frac{L^2}{2EI} \\ 0 & \frac{L^2}{2EI} & \frac{L}{EI} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{k}_{BB}\; f_{BB} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(1+c-\frac{3a}{2L})}{\psi(\alpha)} & \frac{3}{2L\psi(\alpha)}\;(1-\frac{2a}{L}) \\ 0 & \frac{-a}{\psi(\alpha)}\;(1+c-\frac{3a}{2L}) & \frac{-3a}{2L\psi(\alpha)}\;(1-\frac{2a}{L}) \end{bmatrix}$$

$$I - \tilde{k}_{BB}\; f_{BB} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3a}{2L\psi(\alpha)}\left(1-\frac{2a}{L}\right) & -\frac{3}{2L\psi(\alpha)}\left(1-\frac{2a}{L}\right) \\ 0 & \frac{a}{\psi(\alpha)}\;(1+c-\frac{3a}{2L}) & \frac{1}{\psi(\alpha)}\;(1+c-\frac{3a}{2L}) \end{bmatrix}$$

$$\Lambda^T \Lambda\, p^*_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{\omega a^2}{2} \end{bmatrix} \quad ; \qquad H_{CB} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -a & 1 \end{bmatrix}$$

$$-H_{CB}\; \Lambda^T \Lambda\, p^*_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ +\frac{\omega a^2}{2} \end{bmatrix} \quad (= F_B)$$

$$-\left(I - \widetilde{k}_{BB} f_{BB}\right) H_{CB} \Lambda^{T} \Lambda \; p_{c}^{*} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{3\omega a^{2}}{4L\psi(\alpha)} \left(1-\frac{2a}{L}\right) \\ \frac{\omega a^{2}}{2\psi(\alpha)} \left(1+c-\frac{3a}{2L}\right) \end{bmatrix}$$

$$\overline{p}_{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\omega L}{8\psi(\alpha)} \left[3+4c-4\alpha-6\alpha^{2}+12\alpha^{3}\right] \\ \frac{-\omega L^{2}\alpha}{8\psi(\alpha)} \left[+3+4c-4\alpha(2+c)+6\alpha^{2}\right] \end{bmatrix}$$

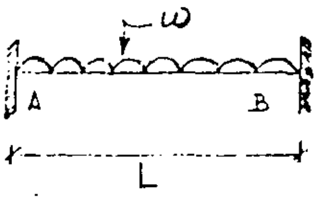
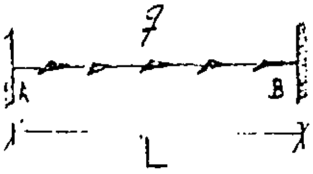
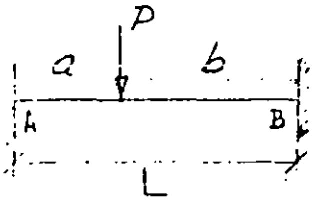
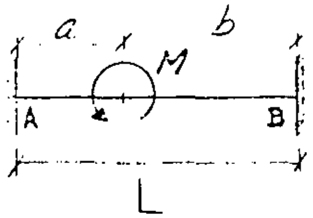
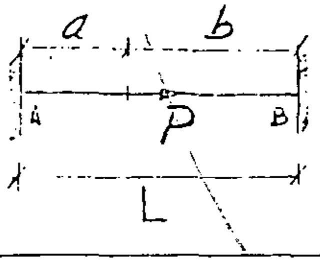
Obtengamos $\overline{p}_{A}$ utilizando (6.8)

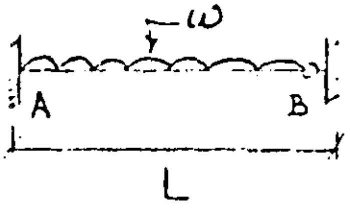
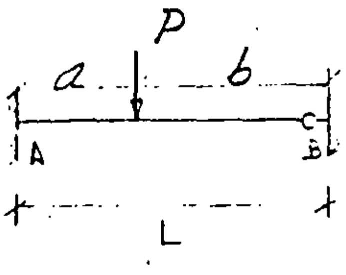
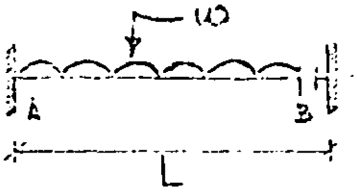
$$-H_{BA}\,\overline{p}_{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-\omega L}{8\psi(\alpha)} \quad 3+4c-4\alpha-6\alpha^{2}+12\alpha^{3} \\ \frac{-\omega L^{2}}{8\psi(\alpha)} \quad 3+4c-\alpha(7+4c)+2\ (1+2c)+6\alpha^{3} \end{bmatrix}$$

$$\overline{p}_{A} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\omega L}{8\psi(\alpha)} \quad 5+4c-20\alpha+30\alpha^{2}-12\alpha^{3} \\ \frac{\omega L^{2}}{8\psi(\alpha)} \quad 1+\alpha(4c-5)+2\alpha^{2}(5-2c)-6\alpha^{3} \end{bmatrix}$$

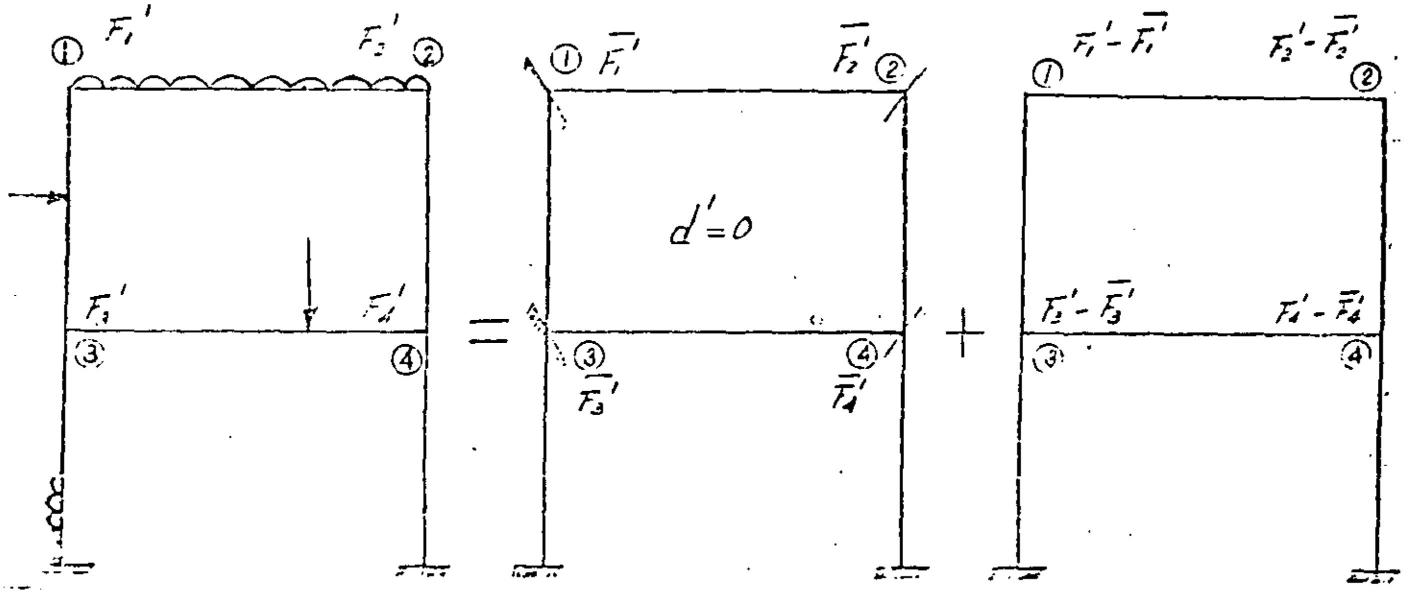
Resumen (7)

I.- Tabla de fuerzas de fijación (Barras rectas de sección cte.)

Carga	$\bar{P}_A$	$\bar{P}_B$
	$\begin{bmatrix} 0 \\ +\frac{\omega L}{2} \\ +\frac{\omega L^2}{12} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ +\frac{\omega L}{2} \\ -\frac{\omega L^2}{12} \end{bmatrix}$
	$\begin{bmatrix} -\frac{qL}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\frac{qL}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
	0 $\frac{Pb}{L(1+4c)}\left\{1+4c+\frac{ab-a^2}{L^2}\right\}$ $\frac{Pab^2}{L^2(1+4c)}\left\{1+\frac{2cL}{b}\right\}$	0 $\frac{Pa}{L(1+4c)}\left\{1+4c+\frac{ab-b^2}{L^2}\right\}$ $\frac{-Pa^2b}{L^2(1+4c)}\left\{1+\frac{2cL}{a}\right\}$
	0 $\frac{6Mab}{L^3(1+4c)}$ $\frac{-Mb}{L(1+4c)}\left\{1+4c-\frac{3a}{L}\right\}$	0 $\frac{-6Mab}{L^3(1+4c)}$ $\frac{-Ma}{L(1+4c)}\left\{1+4c-\frac{3b}{L}\right\}$
	$\begin{bmatrix} -\frac{Pb}{L} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\frac{Pa}{L} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Carga	$\bar{p}_A$	$\bar{p}_B$
	0 $\frac{5\omega L}{8}\left(\frac{1+\frac{4c}{5}}{1+c}\right)$ $\frac{\omega L^2}{8\,(1+c)}$	0 $\frac{3\omega L}{8}\left(\frac{1+\frac{4c}{3}}{1+c}\right)$ 0
	0 $\frac{Pb}{L(1+c)}\left\{\frac{a(L+b)}{2L^2}+1+c\right\}$ $+\frac{Pab(L+b)}{2L^2\,(1+c)}$	0 $\frac{Pa}{L(1+c)}\left\{\frac{a(2L+b)}{2L^2}+c\right\}$ 0
	$\begin{bmatrix} 0 \\ +\omega L \\ +\frac{\omega L^2}{3} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ +\frac{\omega L^2}{6} \end{bmatrix}$

II.- Fuerzas efectivas producidas por fuerzas en las barras.



$\overline{F}'_j$ = Suma de fuerzas de fijación de las barras que concurren a ⓙ (en coordenadas globales)

F'_j = Fuerzas en el nudo ⓙ

Los desplazamientos finales se obtendrán:

$$F' - \overline{F}' = K' d'$$

O bien:

$$F'_{ex} = K' d' \qquad F'_{ex} = F' - \overline{F}'$$

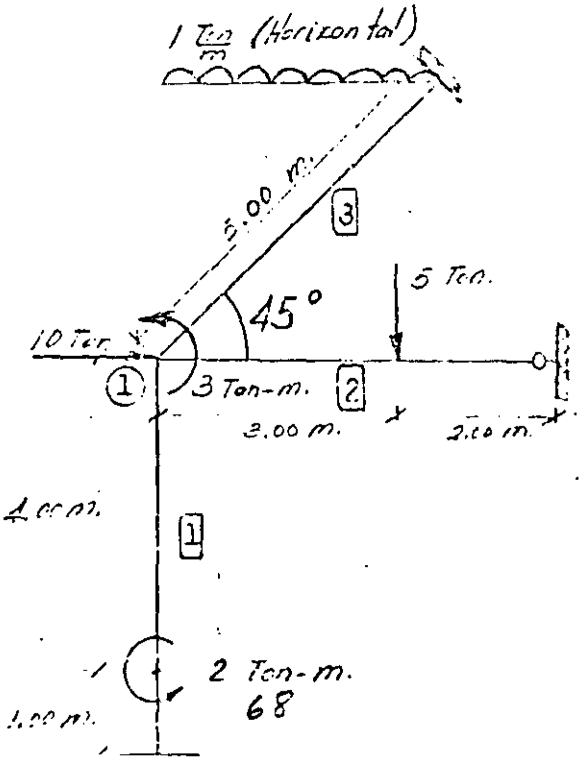
La solución será:

$$d' = (K')^{-1} F'_{ex}$$
$$e = ad'$$

$$p_{B(i)} = k_{BB(i)} e_{(i)} + \overline{p}_{B(i)}$$
$$p_{A(i)} = -H_{BA(i)} k_{BB(i)} e_{(i)} + \overline{p}_{A(i)}$$

donde: $\overline{p}_{A(i)}, \overline{p}_{B(i)}$ = fuerzas de fijación en la barra ⓘ, en coordenadas locales.

Ejemplo: (Por simplificación consideramos una estructura de un solo nudo)



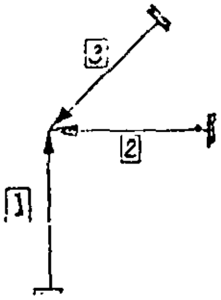
Las tres barras son de igual sección:

$$E = 2x10^{6} \text{ kg/cm}^{2}$$
$$I = 10^{5} \text{ cm}^{4}$$
$$A = 100 \text{ cm}^{2}$$
$$C = 0.1$$

Por consiguiente:

$$k_{BB} = \begin{bmatrix} 4.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.137 & -0.343 \\ 0 & -0.343 & 1.142 \end{bmatrix} x10^{3} \quad (\text{Ton, m})$$

Orientemos las barras en la forma siguiente:

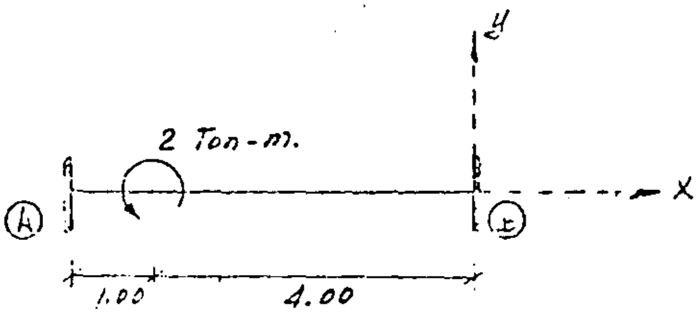


Obtengamos $\tilde{k}_{BB}$ de la barra $\boxed{2}$ (Tabla del resumen (5)

$$(\alpha = 1.0) \quad \tilde{k}_{BB_2} = \begin{bmatrix} 4.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.044 & -0.219 \\ 0 & -0.219 & 1.093 \end{bmatrix} x\ 10^{3}$$

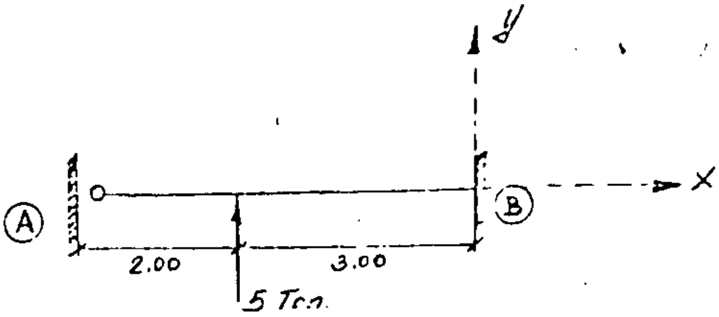
a).- Obtengamos $\bar{p}_A$, $\bar{p}_B$ de cada barra: (Tabla hoja (1))

Barra 1



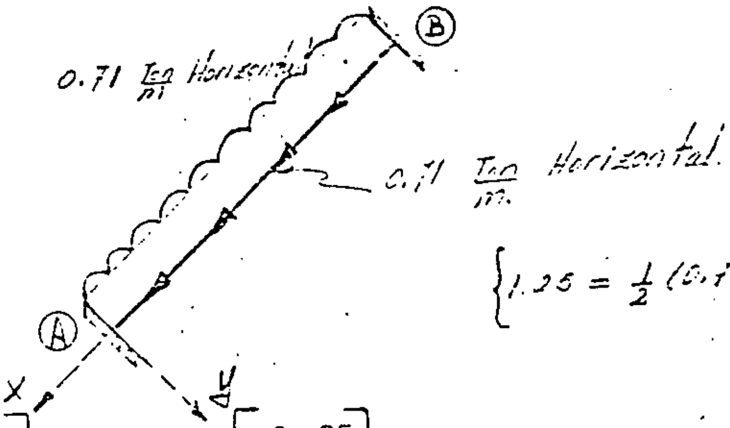
$$\overline{p}_A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.27 \\ -0.91 \end{bmatrix}; \qquad \overline{p}_B = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.27 \\ +0.29 \end{bmatrix}$$

Barra 2



$$\overline{p}_A = \begin{bmatrix} 0 \\ -2.24 \\ 0 \end{bmatrix}; \qquad \overline{p}_B = \begin{bmatrix} 0 \\ -2.76 \\ +3.82 \end{bmatrix}$$

Barra 3

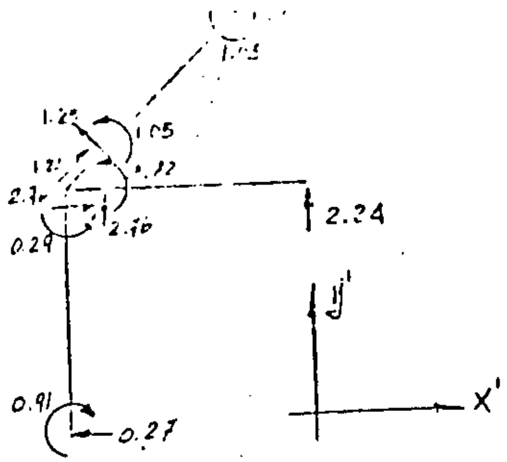


$$\left\{ 1.25 = \frac{1}{2}(0.71)(3.55) \right\}$$

$$\overline{p}_A = \begin{bmatrix} -1.250 \\ -1.25 \\ -1.05 \end{bmatrix}; \qquad \overline{p}_B = \begin{bmatrix} -1.25 \\ -1.25 \\ +1.05 \end{bmatrix}$$

Nota:
$$\begin{cases} \frac{\omega L^2}{12} = \omega L \, \frac{L}{12} = W \, \frac{L}{12} \\ \frac{L}{2} = \frac{1}{2} \, \omega L = \frac{1}{2} \, W \end{cases}$$

En resumen:



b).- Obtengamos $\overline{F}'$ (en coordenadas globales)

$$\overline{F}' = \begin{bmatrix} +0.27 \\ +4.53 \\ +5.16 \end{bmatrix} \quad \text{(Obtenidas por estatica elemental)}$$

c).- Obtengamos F'_{ex}

$$F' = \begin{bmatrix} +10 \\ 0 \\ +3 \end{bmatrix} \quad ; \quad -\overline{F}' = \begin{bmatrix} -0.27 \\ -4.53 \\ -5.16 \end{bmatrix}$$

$$F'_{ex} = \begin{bmatrix} +9.73 \\ -4.53 \\ -2.16 \end{bmatrix}$$

d).- Obtengamos K $(= a^T ka)$ (ó usando la regla la suma, que en este caso son equivalentes)

$$a = \begin{bmatrix} T_1^T \\ T_2^T \\ T_3^T \end{bmatrix} ; \qquad T_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \quad T_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

$$T_3 = \begin{bmatrix} -0.71 & +0.71 & 0 \\ -0.71 & -0.71 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nota:

$$T = \begin{bmatrix} X_{x'} & Y_{x'} & 0 \\ X_{y'} & Y_{y'} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$ donde X, Y son vectores unitarios paralelos a los ejes x, y.

$$k = \begin{bmatrix} k_{BB} & & \\ & \tilde{k}_{BB} & \\ & & k_{BB} \end{bmatrix}$$

(Ver hoja (67) para los valores de k_{BB} y $\tilde{k}_{BB}$)
Efectuando multiplicaciones:

$$K' = \begin{bmatrix} 6.205 & 1.932 & +0.100 \\ 1.932 & 6.112 & +0.462 \\ +0.100 & 0.462 & +3.377 \end{bmatrix} \times 10^{3}$$

e).- Obtengamos d', resolviendo el sistema $F'_{ex} = k'd'$

$$d' = \begin{bmatrix} 1.991 \\ -1.331 \\ -0.516 \end{bmatrix} \times 10^{-3}$$

f).- Obtengamos e (= ad')

$$e = \left[\begin{array}{c} -1.331 \\ -1.991 \\ -0.516 \\ \hdashline -1.991 \\ +1.331 \\ -0.516 \\ \hdashline -0.467 \\ +2.340 \\ -0.516 \end{array}\right] \times 10^{-3}$$

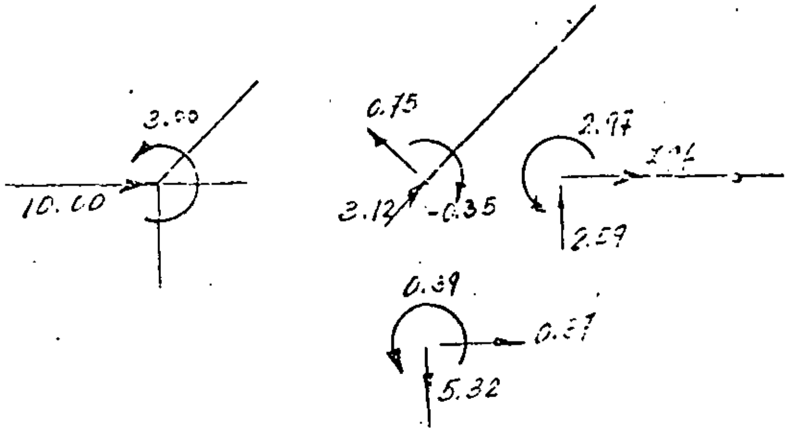
g).- Obtengamos p_B: $(p_B = ke + \overline{p}_B)$

$$p_{B_1} = \begin{bmatrix} -5.324 \\ -0.097 \\ +0.095 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -0.27 \\ +0.29 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5.324 \\ -0.367 \\ +0.385 \end{bmatrix}$$

$$p_{B_2} = \begin{bmatrix} -7.964 \\ +0.172 \\ -0.855 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -2.76 \\ +3.82 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7.964 \\ -2.588 \\ +2.965 \end{bmatrix}$$

$$p_{B_3} = \begin{bmatrix} -1.868 \\ +0.497 \\ -1.398 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1.25 \\ -1.25 \\ +1.050 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3.118 \\ -0.753 \\ -0.348 \end{bmatrix}$$

Comprobación: (Equilibrio)



$\sum F_x = 10.00$

$\sum F_y = 0$

$\sum M = 3.01$

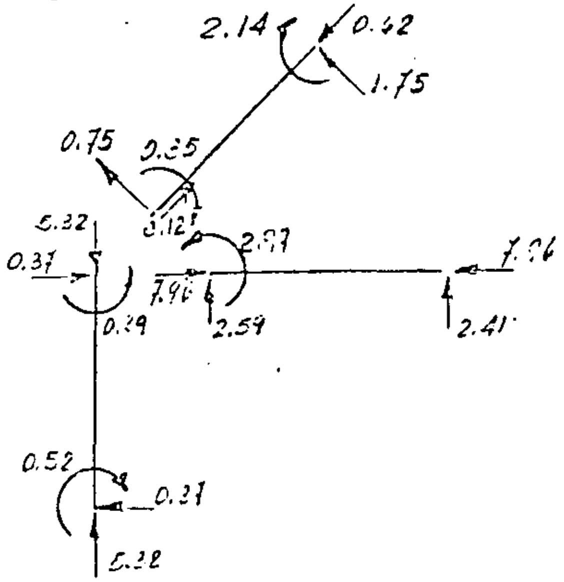
h).- Obtengamos p_A; $(p_A = -H_{BA}\, ke + \overline{p}_A)$

$$H_{BA} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$ (Para todas las barras)

$$p_{A_1} = \begin{bmatrix} +5.324 \\ +0.097 \\ +0.390 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ +0.270 \\ -0.910 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +5.324 \\ +0.367 \\ -0.520 \end{bmatrix}$$

$$p_{A_2} = \begin{bmatrix} +7.964 \\ -0.172 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -2.240 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +7.964 \\ -2.412 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$p_{A_3} = \begin{bmatrix} +1.868 \\ -0.497 \\ -1.087 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1.250 \\ -1.250 \\ -1.050 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +0.618 \\ -1.747 \\ -2.137 \end{bmatrix}$$



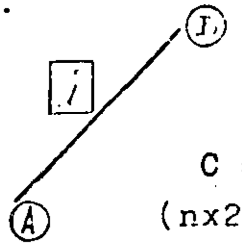
Tratamiento matricial general:

a).- $\overline{F} = C\ \overline{p}$

donde: $\overline{F} = \begin{bmatrix} \overline{F}_1 \\ \overline{F}_2 \\ \overline{F}_3 \\ \vdots \\ \overline{F}_n \end{bmatrix}$; $\quad \overline{p} = \begin{bmatrix} \overline{p}_{A_1} \\ \overline{p}_{B_1} \\ \overline{p}_{A_2} \\ \overline{p}_{B_2} \\ \vdots \\ \overline{p}_{A_b} \\ \overline{p}_{B_b} \end{bmatrix}$

n = No. de nudos

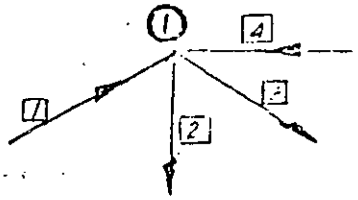
b = No. de barras



C = Nudos
(nx2b)

$$\begin{array}{l} A \\ B \end{array}\left[\begin{array}{cc} T & \\ & T \\ \multicolumn{2}{c}{\underbrace{\qquad\qquad}_{\text{barra } \boxed{i}}} \end{array}\right]$$

O bien la siguiente regla:



$$\overline{F}_1 = T_1\, \overline{p}_{B1} + T_2\, \overline{p}_{A2} + T_3\, \overline{p}_{A3} + T_4\, \overline{p}$$

b).- $\boxed{\tilde{p} = \overline{p} + D\ k\ e}$

donde:

$$\tilde{p} = \begin{bmatrix} p_{A1} \\ p_{B1} \\ \hline p_{A2} \\ p_{B2} \\ \hline \vdots \\ \hline p_{Ab} \\ p_{Bb} \end{bmatrix} \text{(fuerzas finales en las barras)}$$

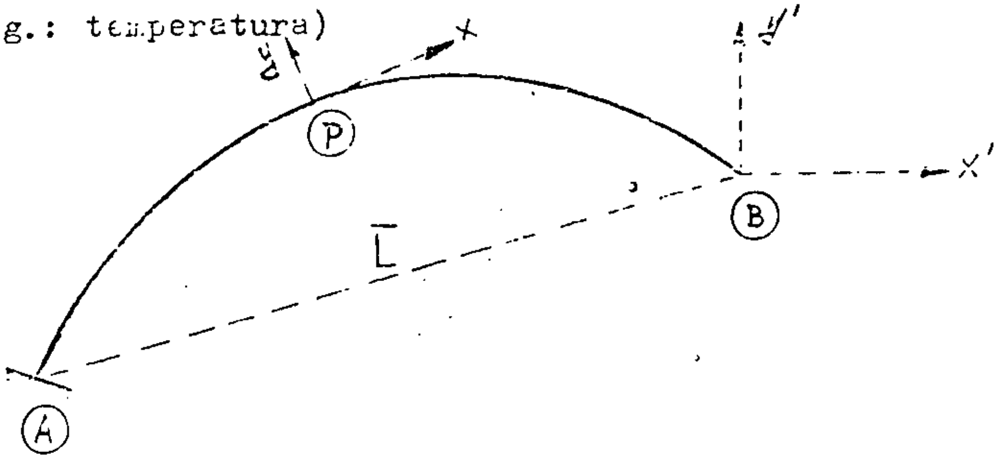
$$\underset{(2bxb)}{D =} \ \text{barra } \boxed{i} \begin{cases} Ⓐ \\ Ⓑ \end{cases} \left[\begin{array}{ccccc} & & \boxed{i} & & \\ & & 0 & & \\ & & 0 & & \\ 0 & 0 & -H_{BA} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ & & 0 & & \\ & & 0 & & \\ & & 0 & & \end{array}\right]$$

Ejemplo: (El ejemplo anterior)

$$C = ① \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cc:cc:cc} 0 & T_1 & 0 & T_2 & 0 & T_3 \end{array}\right] \\ \begin{array}{ccc} \boxed{1} \qquad\qquad & \boxed{2} \qquad\qquad & \boxed{3} \end{array} \end{array}$$

$$D = \begin{array}{cccc} \boxed{1} & \begin{matrix} -H_{BA_1} \\ I \end{matrix} & 0 & 0 \\ \boxed{2} & 0 & \begin{matrix} -H_{BA_2} \\ I \end{matrix} & 0 \\ \boxed{3} & 0 & 0 & \begin{matrix} -H_{BA_3} \\ I \end{matrix} \\ & \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{3} \end{array}$$

III.- Desplazamientos producidos por deformaciones inducidas (v.g.: temperatura)



${}_T d'_B$ = desplazamiento en (B) producido por deformaciones inducidas (de)

$${}_T d'_B = \int_L H'^T_{BP} \;\; T \; de$$

Si se trata de una dilatación producida por un cambio de temperatura θ

$$de = \alpha\theta ds \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ 76

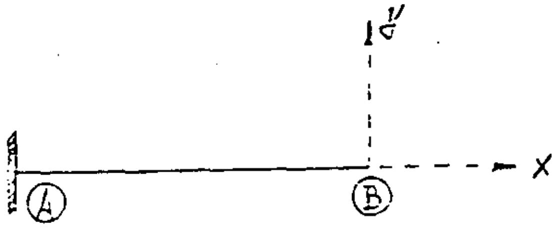
donde: α = coeficiente de dilatación, constante en la sección.
θ = incremento en temperatura, constante en la sección.

Si α y θ son constantes a lo largo de la barra

$${}_{T}d'_{B} = \alpha\,\theta \begin{bmatrix} L_{x'} \\ L_{y'} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$L_{x'}L_{y'}$= proyecciones del vector $\overline{L}$ (A – B), con respecto a x', y'.

Si la barra es recta:



$${}_{T}d_{B} = \alpha\,\theta\,L \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

IV.- Fuerzas efectivas producidas por deformaciones inducidas.

a).- Deformaciones (e) en las barras $\boxed{e = a\,d' - {}_{T}d_{B}}$

b).- Fuerzas en las barras $\boxed{\begin{array}{l} p = k\,e \\ p = k\,a\,d' - k\,{}_{T}d_{B} \end{array}}$

Por equilibrio

$$F' = a^{T}p = a^{T}k\,a\,d' - a^{T}k_{T}d_{b}$$

$$\boxed{F' + a^{T}k\,{}_{T}d_{B} = F'_{ex}}$$

Si $F' = 0$, se tiene la siguiente solución:

$$\begin{cases} d' = (a^T k\ a)^{-1}\ a^T k\ {}_T d_b \\ e = \left[a\ (a^T k\ a)^{-1} a^T k\ - I \right] {}_T d_B \\ p = k \left[a\ (a^T k\ a)^{-1}\ a^T k\ - I \right] {}_T d_b \end{cases}$$

Observe que si la estructura es isostática, la matriz $[a]$ es cuadrado y no singular, por lo tanto:

$$(a^T k\ a)^{-1} = a^{-1} k^{-1} (a^T)^{-1}$$

$$\left[a\ (a^T k\ a)^{-1} a^T k - I \right] = 0$$

O sea que las deformaciones inducidas no causan esfuerzos en las estructuras isostáticas, aunque si producen desplazamientos.

Ejemplo: (Ejemplo hoja 66)

$$\begin{matrix} \text{Supongamos:} \\ \text{(Temperatura)} \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} \alpha = 0.000015/{}^\circ C \\ \theta = 20^\circ C \end{matrix} \right\} \text{ Para todas las barras}$$

Por lo tanto: $${}_T d_B = \begin{bmatrix} 0.0015 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} (m) \quad \text{(Para todas las barras)}$$

a).- Fuerzas efectivas:

$${}_T d_B = \begin{bmatrix} 0.0015 \\ 0 \\ 0 \\ \hdashline 0.0015 \\ 0 \\ 0 \\ \hdashline 0.0015 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad k_T d_B = \begin{bmatrix} 6.0 \\ 0 \\ 0 \\ \hdashline 6.0 \\ 0 \\ 0 \\ \hdashline 6.0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$F'_{ex} = a^{T}(k\,{}_{T}d_{B}) = \begin{bmatrix} -10.25 \\ +\ 1.75 \\ 0 \end{bmatrix}$$

b).- Obtengamos d'; $d' = (k')^{-1} F'_{ex}$ (ó resolviendo el sistema)

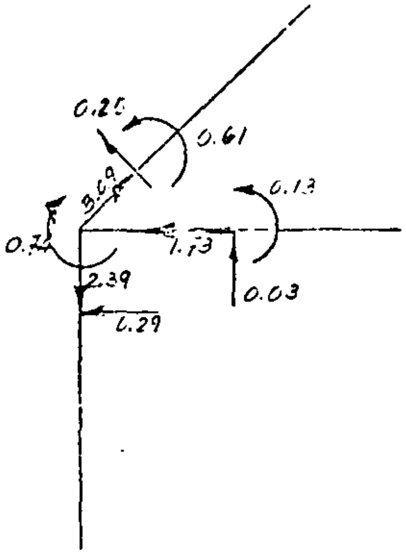
$$d' = \begin{bmatrix} -1.932 \\ +0.902 \\ -0.067 \end{bmatrix} \times 10^{-3}$$

c).- Obtengamos e $(= a\ d' - {}_{T}d_{B})$

$$e\ d' = \begin{bmatrix} +0.902 \\ +1.932 \\ -0.067 \\ +1.932 \\ -0.902 \\ -0.067 \\ +0.728 \\ -2.000 \\ -0.067 \end{bmatrix} \times 10^{-3} \quad e = \begin{bmatrix} -0.598 \\ +1.932 \\ -0.067 \\ +0.432 \\ -0.902 \\ -0.067 \\ -0.772 \\ -2.000 \\ -0.067 \end{bmatrix} \times 10^{-3}$$

d).- Obtengamos p $(=p_{B})$: $(p = k\ e)$

$$p = \begin{bmatrix} -2.39 \\ +0.29 \\ -0.74 \\ +1.73 \\ -0.03 \\ +0.13 \\ -3.09 \\ -0.25 \\ +0.61 \end{bmatrix}$$



Ejemplo: (Ejemplo hoja (69))
La barra [1] tiene una deformación previa (por error de fábrica) igual a

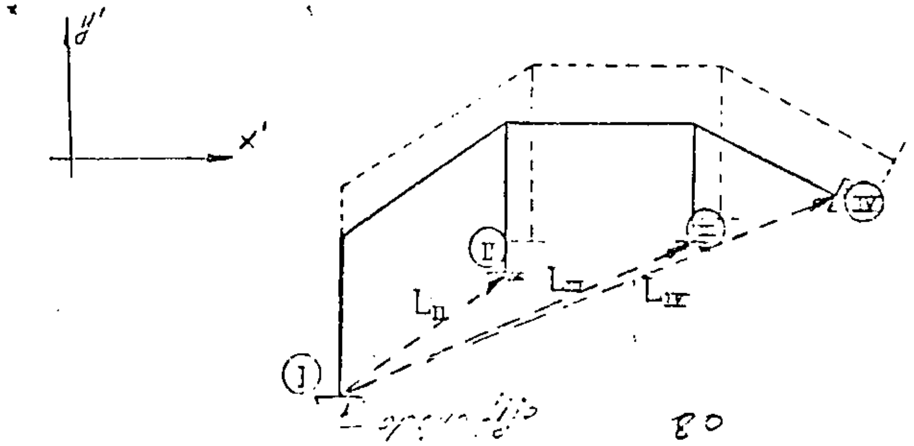
$$ {}_{T}d_{B_1} = \begin{bmatrix} 0.001 \\ 0.001 \\ 0.0005 \end{bmatrix} $$

Obtener las fuerzas efectivas, producidas por esta deformación inducida.

$$ k_T d_E = \begin{bmatrix} +4.000 \\ -0.034 \\ +0.228 \\ \hdashline 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hdashline 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad F'_{EX} = \begin{bmatrix} -0.034 \\ -4.000 \\ +0.228 \end{bmatrix} $$

V.- Simplificación de los efectos por temperatura, cuando α y θ son iguales para todas las barras.

Consideramos una estructura cualquiera con α y θ iguales para todas las barras, soltemos todos los apoyos que le impidan dilatarse libremente, sea Ⓘ el apoyo fijo y (II), (III) y (IV) los apoyos que se han removido.



Estructura dilatada (homóloga a la estructura original)

Los desplazamientos de los apoyos serán:

$$ {}_T d'_I = 0;\ {}_T d'_{II} = \alpha\theta \begin{bmatrix} L_{IIx'} \\ L_{IIy'} \\ 0 \end{bmatrix}; \quad {}_T d_{III} = \alpha\theta \begin{bmatrix} L_{III\,x'} \\ L_{III\,y'} \\ 0 \end{bmatrix} \quad {}_T d_{II} = \alpha\theta \begin{bmatrix} L_{II\,x'} \\ L_{II\,y'} \\ 0 \end{bmatrix} $$

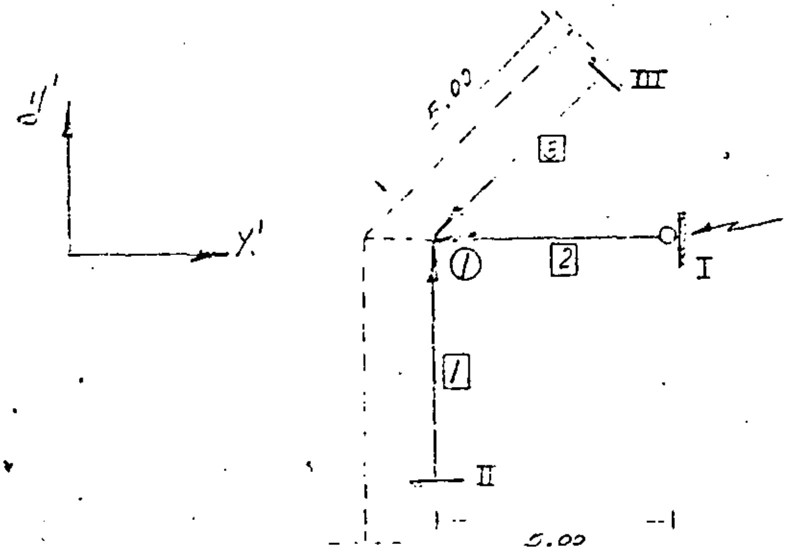
$$ \text{donde:} \quad \left\{ \begin{aligned} L_{ix'} &= X'_i - X'_I \\ L_{iy'} &= y'_i - y'_I \end{aligned} \right\} $$

El problema es <u>equivalente</u> a una estructura cuyos apoyos han sufrido desplazamientos iguales y de signo contrario a los que se obtienen al dilatarse libremente la estructura. (Ver inciso IV del Resumen (2))

$$ \left\{ F'_{ax'} = - K_{12}\ d'_i \right\} $$

Ejemplo: (Ejemplo hoja (72))

$$ \left\{ \begin{aligned} \alpha &= 0.000015/{}^{\circ}C \\ \theta &= 20^{\circ}C \end{aligned} \right. $$



$$ \bar{L}_{II} = \begin{bmatrix} -5.00 \\ -5.00 \end{bmatrix} $$

$$ L_{III} = \begin{bmatrix} -1.465 \\ +3.535 \end{bmatrix} $$

Obtengamos ${}_T d'_I, {}_T d'_{II}, {}_T d'_{III}$

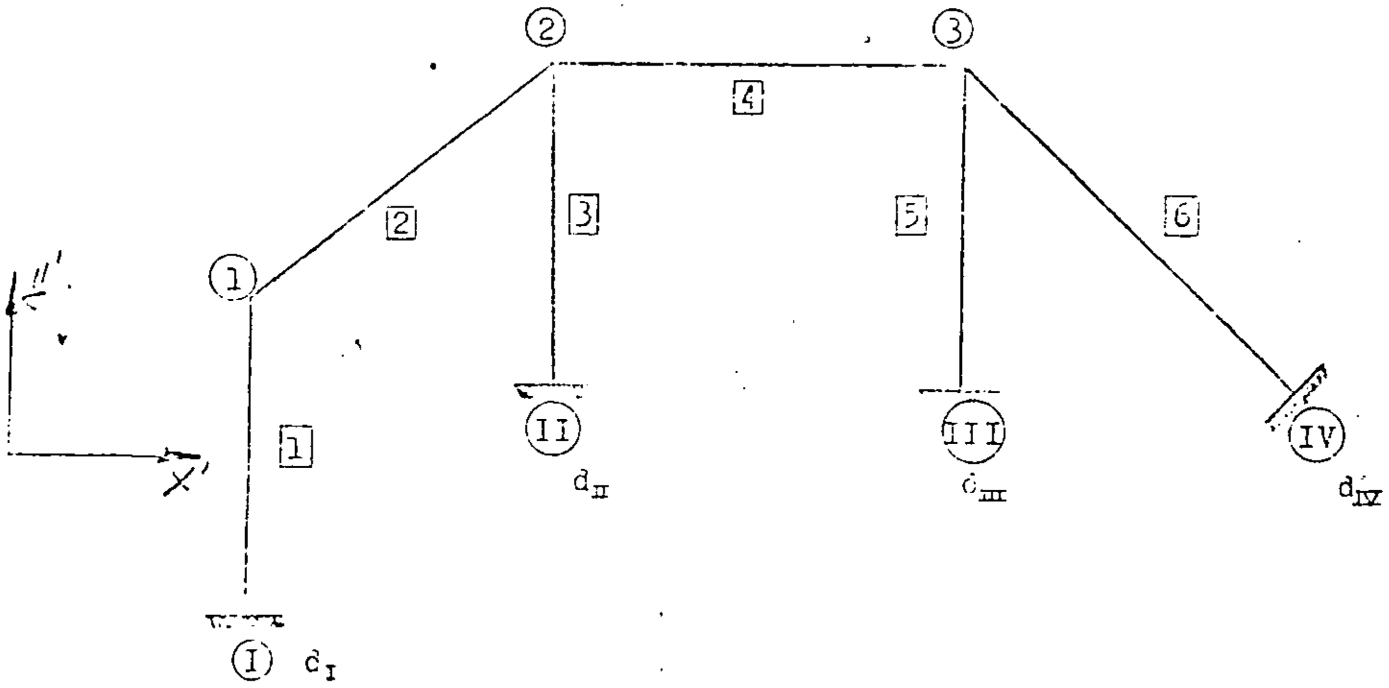
$$ {}_T d'_I = 0\ ;\ {}_T d'_{II} = \begin{bmatrix} -0.00150 \\ -0.00150 \\ 0 \end{bmatrix}\ ; \qquad {}_T d'_{III} = \begin{bmatrix} -0.00044 \\ +0.00106 \\ 0 \end{bmatrix} $$

Resolvamos la estructura con los siguientes desplazamientos en los apoyos:

$$d = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ +0.00150 \\ +0.00150 \\ 0 \\ +0.00044 \\ -0.00106 \\ 0 \end{array}\right]\begin{array}{c} \\ \mathrm{I} \\ \\ \\ \mathrm{II} \\ \\ \\ \mathrm{III} \\ \\ \end{array}$$

Nota:

Para la obtención de las fuerzas en los apoyos efectivas, producidas por desplazamientos, no es necesario usar el procedimiento indicado en el inciso IV del Resumen (2), que consistía en considerar a los apoyos como nudos; basta con obtener las fuerzas de fijación en las barras vecinas a los apoyos, producidas por los desplazamientos de estos, a continuación damos un ejemplo.



Las fuerzas de fijación en las barras $\boxed{1}$, $\boxed{3}$, $\boxed{5}$ y 6 serán:

$$\text{Barra } \boxed{1} \begin{cases} \overline{p}_{A_1} = k_{AA}\ d_I \\ \overline{p}_{B_1} = k_{BA}\ d_I \end{cases} ; \quad \text{Barra } \boxed{3} \begin{cases} \overline{p}_{A_3} = k_{AA}\ d_{II} \\ \overline{p}_{B_3} = k_{BA}\ d_{II} \end{cases}$$

$$\text{Barra } \boxed{5} \quad \begin{matrix} \overline{p}_{A_5} = k_{AB}\ d_{III} \\ p_{B_5} = k_{BB}\ d_{III} \end{matrix} ; \quad \text{Barra } \boxed{6} \begin{cases} \overline{p}_{A_6} = k_{AA}\ d_{IV} \\ \overline{p}_{B_6} = k_{BA}\ d_{IV} \end{cases}$$

d_I, d_{II}, d_{III}, d_{IV}, en coordenadas locales, esto es:

$$d_I = T_1^T\ d'_I \ ; \ d_{II} = T_3^T\ d'_{II}$$
$$d_{III} = T_5^T\ d'_{III} \ ; \ d_{IV} = T_6^T\ d'_{IV}$$

Por lo tanto las fuerzas efectivas (F'_{ex}) en los nudos ①, ② y ③, serán:

$$F'_{ex} = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} -T_1\ \overline{p}_{B_1} \\ \hline -T_3\ \overline{p}_{B_3} \\ \hline -T_5\ \overline{p}_{A_5} - T_6\ \overline{p}_{B_6} \end{array} \right] \end{array} \begin{array}{c} ① \\ ② \\ ③ \end{array}$$

Apliquemos este procedimiento a nuestro ejemplo.

a).- Obtención de d_{II} d_{III}

$$d_{II} = T_1^T\ d'_{II} = \begin{bmatrix} +0.00150 \\ -0.00150 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$d_{III} = T_3^T\ d'_{III} = \begin{bmatrix} +0.000438 \\ +0.001060 \\ 0 \end{bmatrix}$$

b).- Fuerzas de fijación en las barras $\boxed{1}$ y $\boxed{3}$

Barras $\boxed{1}$ $\boxed{3}$

$$k_{BA} = -k_{BB} H^{T}_{BA} = \begin{bmatrix} -4.00 & 0 & 0 \\ 0 & -0.137 & -0.343 \\ 0 & +0.343 & +0.573 \end{bmatrix} \times 10^{3}$$

$$k_{AA} = H_{BA}\, k_{BB}\, H^{T}_{BA} = \begin{bmatrix} 4.00 & 0 & 0 \\ 0 & 0.137 & +0.343 \\ 0 & +0.343 & 1.142 \end{bmatrix} \times 10^{3}$$

Barra $\boxed{1}$

$$\bar{p}_{A_1} = k_{AA}\, d_{II} = \begin{bmatrix} +6.000 \\ -0.205 \\ -0.514 \end{bmatrix} \quad ; \quad \bar{p}_{B_1} = k_{BA}\, d_{II} = \begin{bmatrix} -6.00 \\ +0.205 \\ -0.514 \end{bmatrix}$$

Barra $\boxed{3}$

$$\bar{p}_{A_3} = k_{AA}\, d_{III} = \begin{bmatrix} +1.752 \\ +0.145 \\ +0.365 \end{bmatrix} \quad ; \quad \bar{p}_{B_3} = k_{BA}\, d_{III} = \begin{bmatrix} -1.752 \\ -0.145 \\ +0.365 \end{bmatrix}$$

c).- Obtención F'_{ex}

$$F'_{ex} = \begin{bmatrix} -\,T_1 \bar{p}_{B_1} & -\,T_3\, \bar{p}_{B_3} \end{bmatrix}$$

$$F'_{ex} = \begin{bmatrix} -0.930 \\ +4.660 \\ +0.149 \end{bmatrix}$$

d).- Obtengamos $[d']$ $\left(d' = (K')^{-1}\, F'_{ex}\right)$

$$d' = \begin{bmatrix} -0.430 \\ +0.903 \\ -0.067 \end{bmatrix} \times 10^{-3}$$

Obsérvese que los valores de $\left[d'\right]$ no son iguales a los obtenidos en la hoja ([illegible]) porque falta sumar el desplazamiento de ① cuando se dilató libremente, que es igual a:

$$\begin{bmatrix} -1.500 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times 10 \qquad \text{que sumado al anterior}$$

$$\text{nos da:} \quad \begin{bmatrix} -1.930 \\ +0.903 \\ -0.067 \end{bmatrix}$$

que es el mismo valor que el obtenido en la hoja (77)

e).- Obtengamos $[e]$ $(= a\, d')$

$$e = \left[\begin{array}{c} +0.903 \\ +0.430 \\ -0.067 \\ \hdashline +0.430 \\ -0.903 \\ -0.067 \\ \hdashline -0.334 \\ -0.942 \\ -0.067 \end{array}\right]$$

f).- Obtengamos k e:

$$k\,e = \left[\begin{array}{c} +3.61 \\ +0.08 \\ -0.22 \\ \hdashline +1.72 \\ -0.03 \\ +0.13 \\ \hdashline -1.34 \\ -0.11 \\ +0.25 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \boxed{1} \\ \\ \\ \boxed{2} \\ \\ \\ \boxed{3} \\ \\ \end{array}$$

g).- Obtenemos p_b $(= k_b c + \bar{p})$

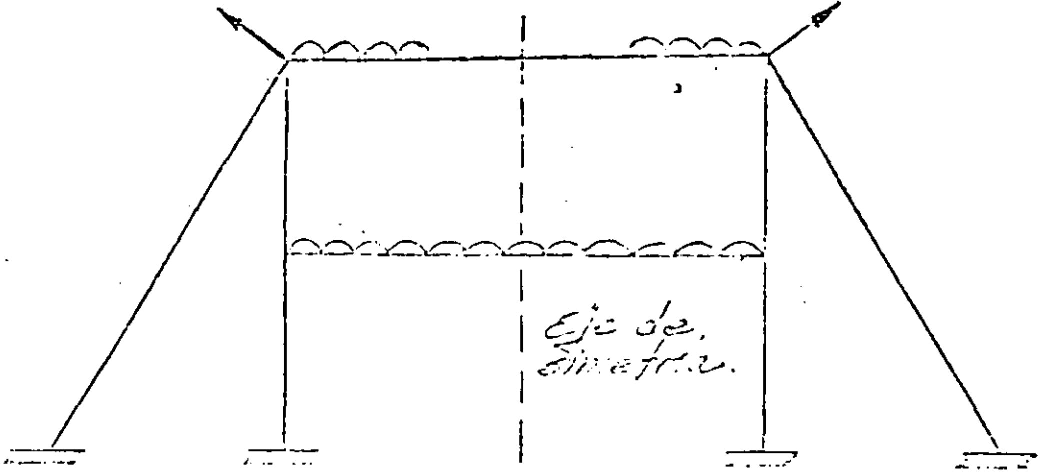
$$p_b = \begin{bmatrix} -2.39 \\ +0.29 \\ -0.73 \\ +1.72 \\ -0.03 \\ +0.13 \\ -3.09 \\ -0.26 \\ +0.61 \end{bmatrix}$$

Iguales resultados a los obtenidos en la hoja (77)

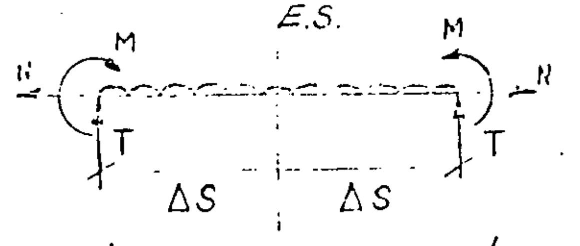
VI.- Simplificación cuando una estructura es simétrica en geometría. (Marcos planos)

1).- Carga simétrica

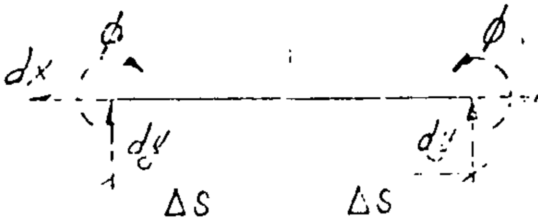
a).- No hay nudos en el eje de simetría



Por simetría: (reflexión)

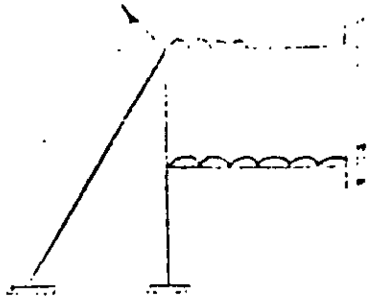


Si $\Delta s \rightarrow 0$
Por equilibrio
$T = 0$



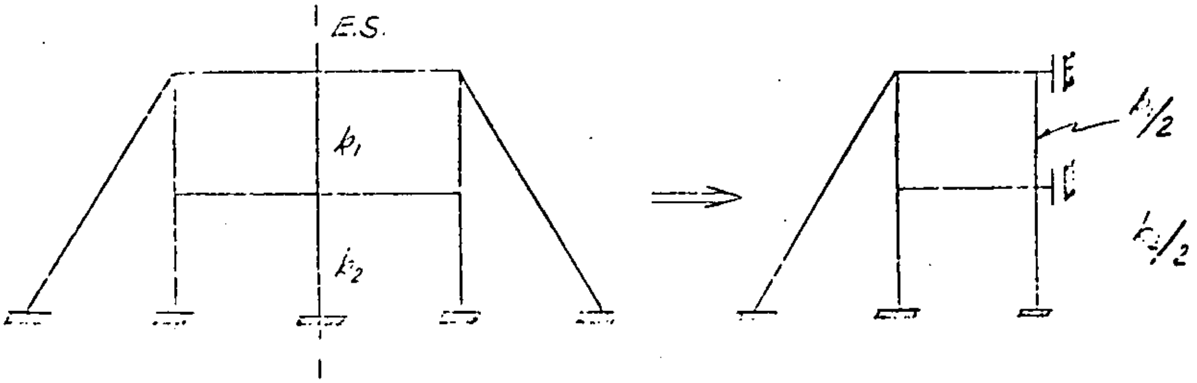
Si $\Delta s \rightarrow 0$
Por continuidad
$d_x = 0$
$\phi = 0$

Por lo tanto, la estructura es equivalente a:

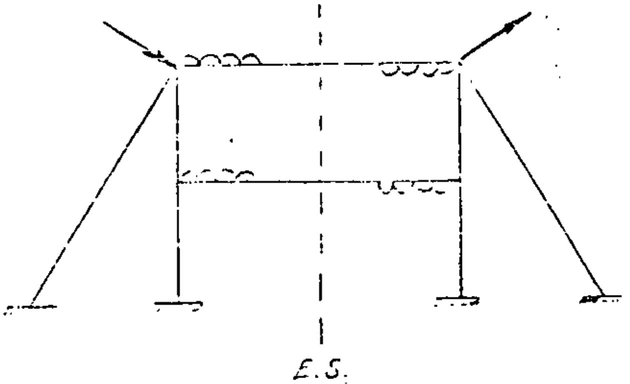


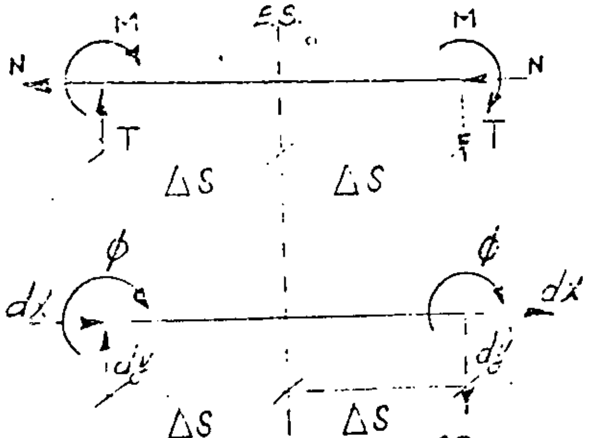
($\phi = d_x = 0$)

b).- Hay nudos (barras) en el eje de simetría



2).- Carga antisimétrica:





Por antisimetría (antireflexión)

Si $\Delta s \rightarrow 0$

Por equilibrio: $N = 0$

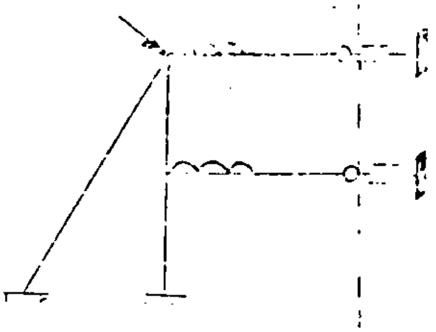
$M = 0$

Si $\Delta s \rightarrow 0$

Por continuidad

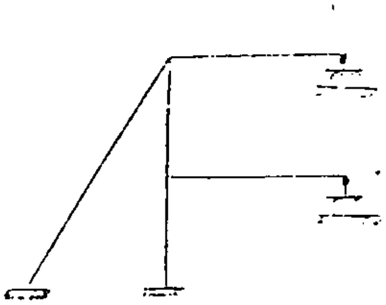
$d_y = 0$

Por lo tanto la estructura es equivalente a:



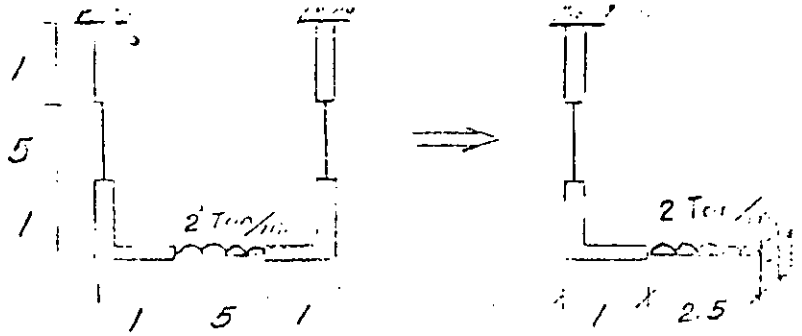
$(d_y = 0)$

o bien:

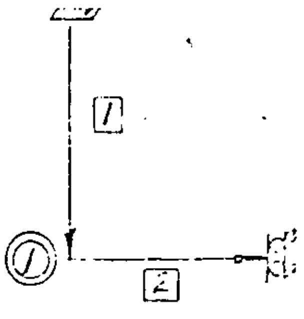


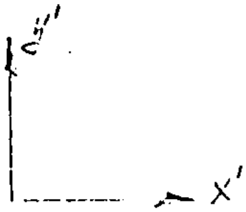
Si hay barras en el eje se toma <u>la mitad</u> de su rigidez, como en el caso anterior.

Ejemplo:



Orientemos las barras:





a).- Rigideces de las barras (k)

$$k_{BB_1} = \begin{bmatrix} 0.400 & 0 & 0 \\ 0 & 0.191 & -0.668 \\ 0 & -0.668 & 2.730 \end{bmatrix} \times 10^5$$

$$k_{BB_2} = \begin{bmatrix} 0.800 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.800 \end{bmatrix} \times 10^5$$

(Ver tabla hoja 43 del resumen (5))

$$k_{AA_2} = H_{BA}\, k_{BB}\, H^T_{BA} = \begin{bmatrix} 0.800 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.800 \end{bmatrix} \times 10^5$$

b).- Obtengamos K' (con la regla de la suma)

$$k'_{BB_1} = \begin{bmatrix} 0.191 & 0 & -0.668 \\ 0 & 0.400 & 0 \\ -0.668 & 0 & 2.730 \end{bmatrix} \times 10^5$$

$$k'_{AA_2} = k_{AA_2}$$

$$K' = \begin{bmatrix} 0.991 & 0 & -0.668 \\ & 0.400 & 0 \\ -0.668 & 0 & 3.530 \end{bmatrix} \times 10^5$$

c).- Las fuerzas efectivas y las de fijación son las mismas que las del nudo C en el problema original (Ver tabla al -- principio de este resumen)

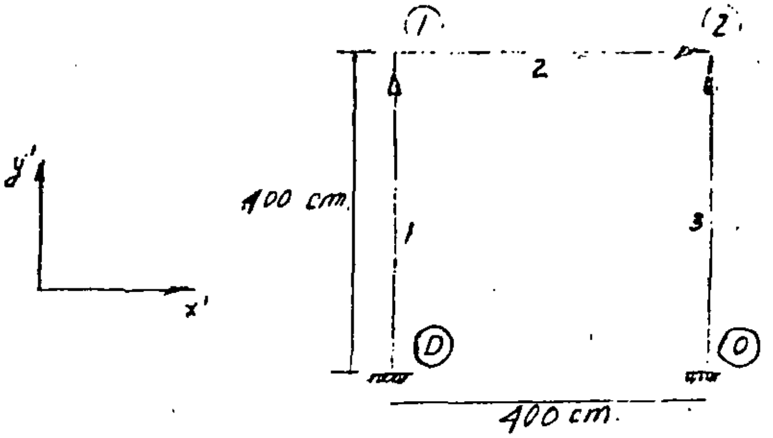
$$F'_{\sigma X} = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ -9.167 \end{bmatrix}$$

d).- Resolviendo el sistema K'd' = F' se obtiene:

$$d' = \begin{bmatrix} -\ 2.01 \\ -12.50 \\ -\ 2.98 \end{bmatrix} x\ 10^{5}$$

Ejemplos:

1.- Obtener K'



$E = 2.1x10 \; kg/cm$

$I = 2x10^4 \; cm^4$

$A = 100 \; cm^2$

$\mu = 0.4$

$K_{Forma} = 1.2$

$$\rho = \sqrt{20000/100} = 14.1 \; cm.$$

$$c = 6(1+\mu)\left(\frac{\rho}{L}\right)^2 K_{Forma} = 6x1.4x\left(\frac{14.1}{400}\right)^2 x1.2 = 0.012$$

$$\frac{EA}{L} = \frac{2.1x10^6 x100}{400} = 5.25x10^5 \; kg/cm$$

$$\frac{12EI}{L^3(1+4c)} = \frac{12x2.1x10^6 x2x10^4}{400^3 \; x \; (1.05)} = 0.075x10^5 \; kg/cm$$

$$\frac{6EI}{L^2(1+4c)} = \frac{6x2.1x10^6 x2x10^4}{400^2 \; x \; (1.05)} = 15.00x10^5 \; kg$$

$$\frac{4EI(1+c)}{L(1+4c)} = \frac{4x2.1x10^6 x2x10^4(1.01)}{400 \;\; (1.05)} = 4040x10^5 \; kg\text{-}cm$$

$$\frac{2EI(1-2c)}{L(1+4c)} = \frac{2x2.1x10^6 x2x10^4 x(0.98)}{400 \;\; (1.05)} = 1960x10^5 \; kg\text{-}cm$$

Regla de la suma

Barra $\boxed{1}$ (⓪ - ①) y Barra $\boxed{3}$ (⓪ - ②)

$$\theta = -90^0 \quad ; \quad T = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$k = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 5.25 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0.075 & 15 & & \text{Simetrica} & \\ 0 & 15 & 4040 & & & \\ \hline -5.25 & 0 & 0 & 5.25 & 0 & 0 \\ 0 & -0.075 & -15 & 0 & 0.075 & -15 \\ 0 & 15 & 1960 & 0 & -15 & 4040 \end{array}\right] \times 10^{5}$$

$k'_{ij} = T\, k_{ij}\, T^{T}$ etc.

$$k = \textcircled{0}$$

$$k = \begin{array}{c} \\ \\ \\ 1 \\ 2 \\ \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0.075 & 0 & -15 & -0.075 & 0 & -15 \\ 0 & 5.25 & 0 & 0 & -5.25 & 0 \\ -15 & 0 & 4040 & 15 & 0 & 1960 \\ -0.075 & 0 & 15 & 0.075 & 0 & 15 \\ 0 & -5.25 & 0 & 0 & 5.25 & 0 \\ -15 & 0 & 1960 & 15 & 0 & 4040 \end{array}\right] \times 10^{5}$$

$$\begin{array}{cccccc} & \textcircled{0} & & & \textcircled{1} & \\ & & & & 2 & \end{array}$$

Barra $\boxed{2}$ (① — ②):

$\theta = 0^{o}$; $T = I$

$$k = k' = \begin{array}{c} \\ \textcircled{1} \\ \\ \\ \textcircled{2} \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 5.25 & 0 & 0 & -5.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0.075 & 15 & 0 & -0.075 & 15 \\ 0 & 15 & 4040 & 0 & -15 & 1960 \\ \hline -5.25 & 0 & 0 & 5.25 & 0 & 0 \\ 0 & -0.075 & -15 & 0 & 0.075 & -15 \\ 0 & 15 & 1960 & 0 & -15 & 4040 \end{array}\right] \times 10$$

$$\begin{array}{cccccc} & \textcircled{1} & & & \textcircled{2} & \end{array}$$

Aplicando la regla de la suma

$$K' = \begin{array}{cc}
\begin{array}{c} \\ \textcircled{1} \\ \\ \\ \textcircled{2} \\ \\ \end{array} &
\left[\begin{array}{ccc|ccc}
5.325 & 0 & 15 & -5.25 & 0 & 0 \\
0 & 5.325 & 15 & 0 & -0.075 & 15 \\
15 & 15 & 8080 & 0 & -15 & 1960 \\
\hline
-5.25 & 0 & 0 & 5.325 & 0 & 15 \\
0 & -0.075 & -15 & 0 & 5.325 & -15 \\
0 & 15 & 1960 & 15 & -15 & 8080
\end{array}\right] \times 10^{5} \\
 & \begin{array}{cccccc} & \textcircled{1} & & & \textcircled{2} & \end{array}
\end{array}$$

Alternativa 2

1) Matriz $\boxed{a}$

Barra $\boxed{1}$ y barra $\boxed{3}$:

$$-T^{T}H_{1,0}^{T} = -T^{T}H_{3,0}^{T} = \quad \text{(No se necesita)}$$

$$T^{T} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Barra $\boxed{2}$

$$-T^{T}H_{2,1}^{T} = -I\ H_{2,1}^{T} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -400 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$a = \begin{array}{c|ccc|ccc|}
 & & \textcircled{1} & & & \textcircled{2} & \\
\hline
 & 0 & 1 & 0 & & & \\
\boxed{1} & -1 & 0 & 0 & & 0 & \\
 & 0 & 0 & 1 & & & \\
\hline
 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
\boxed{2} & 0 & -1 & -400 & 0 & 1 & 0 \\
 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
 & & & & 0 & 1 & 0 \\
\boxed{3} & & 0 & & -1 & 0 & 0 \\
 & & & & 0 & 0 & 1 \\
\hline
\end{array}$$

2) Matriz k

$$k = \begin{array}{c|ccc|ccc|ccc|}
\hline
 & 5.25 & 0 & 0 & & & & & & \\
\boxed{1} & 0 & 0.075 & -15 & & & & & & \\
 & 0 & -15 & 4040 & & & & & & \\
\hline
 & & & & 5.25 & 0 & 0 & & & \\
\boxed{2} & & & & 0 & 0.075 & -15 & & & \\
 & & & & 0 & -15 & 4040 & & & \\
\hline
 & & & & & & & 5.25 & 0 & 0 \\
\boxed{3} & & & & & & & 0 & 0.075 & -15 \\
 & & & & & & & 0 & -15 & 4040 \\
\hline
\end{array} \times 10^{5}$$

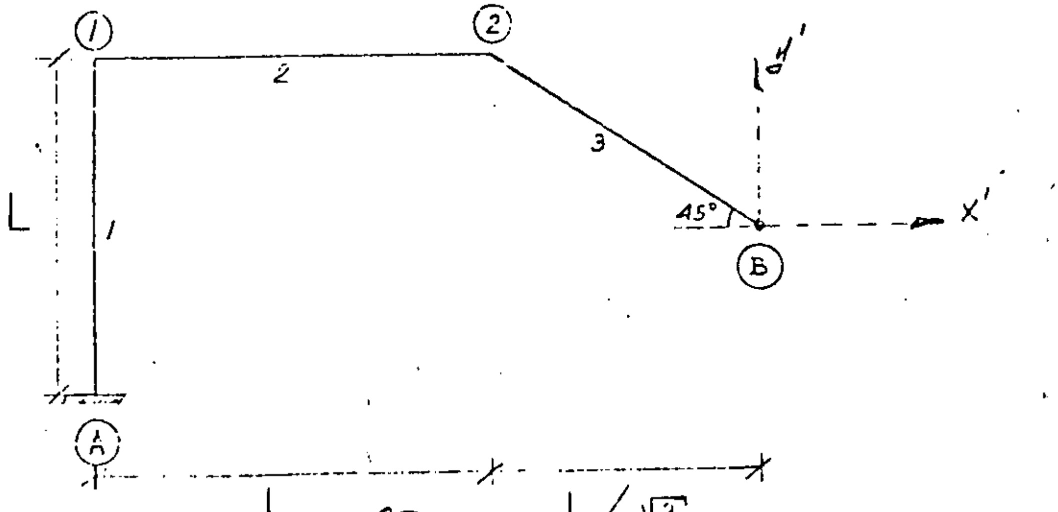
3) Obtención de $K' = a^T\ k\ a$

$$[k]\,[a] = \left[\begin{array}{ccc|ccc}
0 & 5.25 & 0 & & & \\
-0.075 & 0 & -15 & & 0 & \\
15 & 0 & 4040 & & & \\
\hline
-5.25 & 0 & 0 & 5.25 & 0 & 0 \\
0 & -0.075 & -15 & 0 & 0.075 & -15 \\
0 & 15 & 1960 & 0 & -15 & 4040 \\
\hline
 & & & 0 & 5.25 & 0 \\
 & 0 & & -0.075 & 0 & -15 \\
 & & & 15 & 0 & 4040
\end{array}\right] \times 10^5$$

$$a^T\ k\ a = K' = \left[\begin{array}{ccc|ccc}
5.325 & 0 & 15 & -5.25 & 0 & 0 \\
0 & 5.325 & 15 & 0 & -0.075 & 15 \\
15 & 15 & 8080 & 0 & -15 & 1960 \\
\hline
-5.25 & 0 & 0 & 5.325 & 0 & 15 \\
0 & -0.075 & -15 & 0 & 5.325 & -15 \\
0 & 15 & 1960 & 15 & -15 & 8080
\end{array}\right] \times 10^5$$

Igual a la obtenida con la regla de la suma.

II) Obtener $\left[f_{LL}\right]$.



EI = cte

$c = 0$ (despreciemos el efecto del cortante)

EA = cte

Apliquemos la fórmula:

$$f_{BE} = f_3' + H^T_{B,2}\, f_2'\, H_{B,2} + H^T_{B,1}\, f_1'\, H_{B,1}$$

donde: $f' = T\,F\,T^T$

$$f = \begin{bmatrix} \frac{L}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L^3}{3EI} & \frac{L^2}{2EI} \\ 0 & \frac{L^2}{2EI} & \frac{L}{EI} \end{bmatrix}$$ (Flexibilidad en coordenadas locales)

Barra $\boxed{3}$: $\theta = 45^0$

$$T = \begin{bmatrix} 0.71 & 0.71 & 0 \\ -0.71 & 0.71 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$f_3' = \begin{bmatrix} \left(\frac{L}{2EA} + \frac{L^3}{6EI}\right) & \left(\frac{-L}{2EA} + \frac{L^3}{6EI}\right) & \left(\frac{L^2}{2\sqrt{2}EI}\right) \\ \left(\frac{-L}{2EA} + \frac{L^3}{6EI}\right) & \left(\frac{L}{2EA} + \frac{L^3}{6EI}\right) & \left(\frac{L^2}{2\sqrt{2}EI}\right) \\ \left(\frac{L^2}{2\sqrt{2}EI}\right) & \left(\frac{L^2}{2\sqrt{2}EI}\right) & \left(\frac{L}{EI}\right) \end{bmatrix}$$

Barra $\boxed{2}$ $\theta = 0^0$

$$f_2' = f_2\,;\ H_{B,2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{L}{\sqrt{2}} & \frac{L}{\sqrt{2}} & 1 \end{bmatrix} \qquad \left(y_2 = \frac{L}{\sqrt{2}}\ ;\ x_2 = -\frac{L}{\sqrt{2}}\right)$$

$$H \quad f'_2 \, H_{E,2} = \begin{bmatrix} \left(\frac{L}{EA} + \frac{L^3}{2EI}\right) & \frac{L^3}{2EI}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) & \frac{L^2}{\sqrt{2}EI} \\ \frac{L^3}{2EI}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) & \frac{L^3}{EI}\left(\frac{5}{6} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) & \frac{L^2}{2EI}\left(1+\sqrt{2}\right) \\ \frac{L^2}{\sqrt{2}EI} & \frac{L^2}{2EI}\left(1+\sqrt{2}\right) & \frac{L}{EI} \end{bmatrix}$$

Barre $\boxed{1}$: $\theta = -90^{\circ}$

$$T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$f'_1 = \begin{bmatrix} \frac{L^3}{3EI} & 0 & -\frac{L^2}{2EI} \\ 0 & \frac{L}{EA} & 0 \\ -\frac{L^2}{2EI} & 0 & \frac{L}{EI} \end{bmatrix} \; ; \quad H_{E,1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{L}{\sqrt{2}} & L\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) & 1 \end{bmatrix}$$

$$H^T_{E,1} \; f'_1 \; H_{E1} = \begin{bmatrix} \frac{L^3}{EI}\left(\frac{5}{6} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) & \frac{L^3}{2\sqrt{2}EI} & \frac{L^2}{EI}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\right) \\ \frac{L^3}{2\sqrt{2}EI} & \left[\frac{L}{EA} + \frac{L^3}{EI}\left(\frac{3}{2} + \sqrt{2}\right)\right] & \frac{L^2}{EI}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ \frac{L^2}{EI}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\right) & \frac{L^2}{EI}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) & \frac{L}{EI} \end{bmatrix}$$

$$f_{BB} = \begin{bmatrix} \left[\frac{L}{2EA} + \frac{L^3}{EI}\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right] & \left[-\frac{L}{2EA} + \frac{L^3}{EI}\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right] & \frac{L^2}{2EI}\left(\frac{5}{\sqrt{2}} - 1\right) \\ \left[-\frac{L}{2EA} + \frac{L^3}{EI}\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right] & \left[\frac{3L}{2EA} + \frac{L^3}{EI}\left(\frac{5}{2} + \frac{3}{\sqrt{2}}\right)\right] & \frac{L^2}{2EI}\left(\frac{5}{\sqrt{2}} + 3\right) \\ \frac{L^2}{2EI}\left(\frac{5}{\sqrt{2}} - 1\right) & \frac{L^2}{2EI}\left(\frac{5}{\sqrt{2}} + 3\right) & \frac{3L}{EI} \end{bmatrix}$$

DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.

MATEMATICAS APLICADAS A LA INGENIERIA ESTRUCTURAL

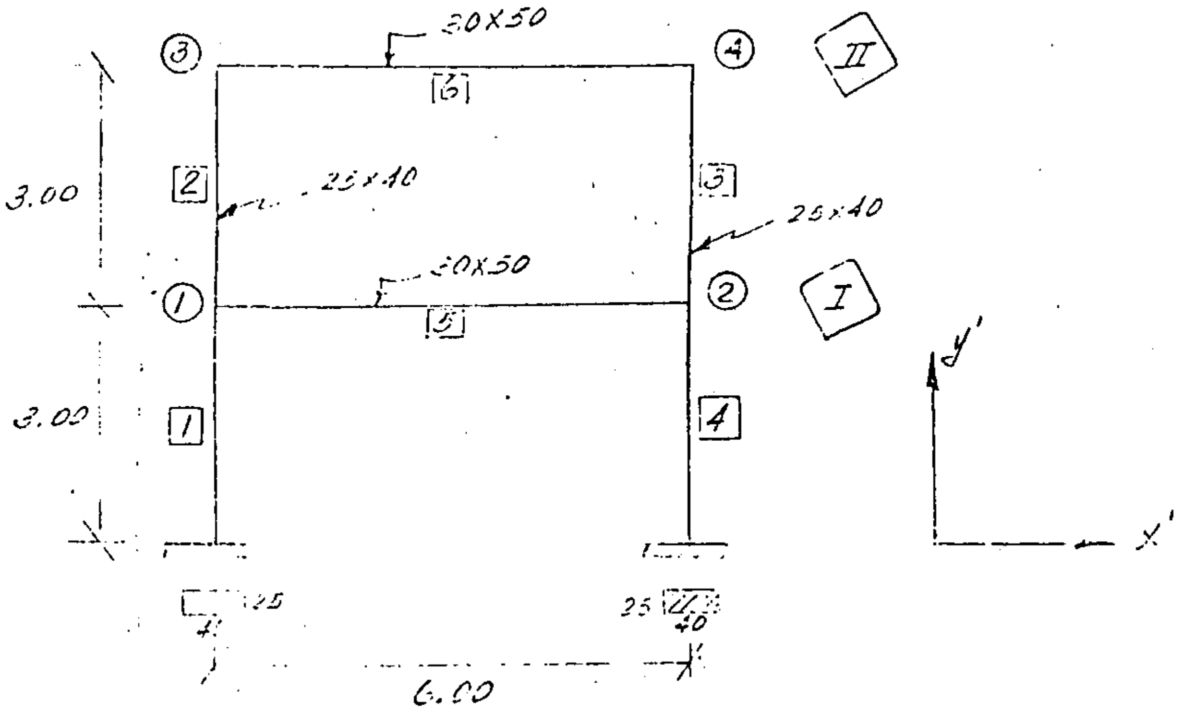
ANALISIS ESTRUCTURAL

- EJEMPLOS -

MARZO, 1985

Ejemplos de análisis dinámico de estructuras.

Ejemplo 1: Obtener los períodos y modos de vibrar (vibración libre)



Datos: $W_1 = W_2 = 30$ ton.

$E = 147000 \ kg/cm^2 \quad (f'_c = 210 \ kg/cm^2)$

$\mu = 0.25$

Hagamos las siguientes alternativas.

1) Análisis dinámico completo.

a) Obtención de $\begin{bmatrix} K \end{bmatrix}$ (12x12), usando la regla de la suma:

Trabes: $\boxed{5}$ y $\boxed{6}$

$$I = \frac{30x50^3}{12} = 3.125x10^5 \text{ cm}^4; \quad A = 30x50 = 1500 \text{ cm}^2$$

$$I/A = 208 \text{ cm}^2; \quad c = 6x1.25x\frac{208}{600^2} x1.2 = 0.0052$$

$$\frac{12EI}{L^3(1+4c)} = \frac{12x1.47x10^6x3.125x10^{-3}}{6.00^3 \text{ x } 1.0208} = 249.0 \text{ ton/m}$$

$$\frac{6EI}{L^2(1+4c)} = \frac{6x1.47x10^6x3.125x10^{-3}}{6.00^2 \text{ x } 1.0208} = 750.0 \text{ ton}$$

$$\frac{4EI(1+c)}{L(1+4c)} = \frac{4x1.47x10^6x3.125x10^{-3}x1.0052}{6.00 \text{ x } 1.0208} = 2980.0 \text{ ton/m}$$

$$\frac{EA}{L} = \frac{1.47x10^6x1500x10^{-4}}{6} = 36750.0 \text{ ton/m.}$$

$$\frac{2EI(1-2c)}{L(1+4c)} = 1470$$

$$k'_{EE(5)} = k'_{FF(6)} = \begin{bmatrix} 36750.0 & 0 & 0 \\ 0 & 249 & -750 \\ 0 & -750 & +2980 \end{bmatrix}$$

Columnas $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$

$$I = \frac{25x40^3}{12} = 1.33x10^5 \text{ cm}^4; \quad A = 1000 \text{ cm}^2$$

$$I/A = 133.3; \quad c = 6x1.25x\frac{133.3}{300^2} x1.2 = 0.0133$$

$$\frac{12EI}{L^3(1+4c)} = \frac{12x1.47x1.333x10^3}{3.00^3 \text{ x } 1.0532} = 824$$

$$\frac{6EI}{L^2(1+4c)} = 1236$$

$$\frac{4EI(1+c)}{L(1+4c)} = \frac{4x1.47x1.33x10^3x1.0133}{3 \text{ x } 1.0532} = 2520$$

$$\frac{EA}{L} = 49000.0$$

$$\frac{2EI(1-2c)}{L(1+4c)} = 1210.0$$

$$k'_{BB_{(1)}} = k_{BB_{(2)}} = \begin{bmatrix} 824 & 0 & 1236 \\ 0 & 49000 & 0 \\ 1236 & 0 & 2520 \end{bmatrix}$$

Aplicando la regla de la suma:

$$K = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc}
 & \textcircled{1} & & & \textcircled{2} & & & \textcircled{3} & & & \textcircled{4} & \\
31398 & 0 & 0 & -30750 & 0 & 0 & -824 & 0 & -1236 & & & \\
0 & 98249 & 750 & 0 & -249 & 750 & 0 & -49000 & 0 & & 0 & \\
 & 750 & 8020 & 0 & -750 & 1470 & 1236 & 0 & 1210 & & & \\
\hline
-30750 & 0 & 0 & 31398 & 0 & 0 & & & & -824 & 0 & -1236 \\
0 & -249 & -750 & 0 & 98249 & -750 & & 0 & & 0 & -49000 & 0 \\
0 & 750 & 1470 & 0 & -750 & 8020 & & & & 1236 & 0 & 1210 \\
\hline
-824 & 0 & 1236 & & & & 31574 & 0 & 1236 & -30750 & 0 & 0 \\
0 & -49000 & 0 & & 0 & & 0 & 49249 & 750 & 0 & -249 & 750 \\
-1236 & 0 & 1210 & & & & 1236 & 750 & 5500 & 0 & -750 & 1470 \\
\hline
 & & & -824 & 0 & 1236 & -30750 & 0 & 0 & 31574 & 0 & 1236 \\
 & 0 & & 0 & -49000 & 0 & 0 & -249 & -750 & 0 & 49249 & -750 \\
 & & & -1236 & 0 & 1210 & 0 & 750 & 1470 & 1236 & -750 & 5500
\end{array}\right]$$

b) Obtención de $\widetilde{k}$ (permutando k) tal que:

$$\left[\begin{array}{c} F_{x'} \\ F_{y'} \\ \hline \mu \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \widetilde{K}_{11} & \widetilde{K}_{12} \\ \hline \widetilde{K}_{21} & \widetilde{K}_{22} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} d_{x'} \\ d_{y'} \\ \hline \phi \end{array}\right]$$

$$K = \left[\begin{array}{cccc|cccc|cccc}
36974 & -36150 & -824 & 0 & & & & & 0 & 0 & -1236 & 0 \\
-36150 & 36974 & 0 & -824 & & 0 & & & 0 & 0 & 0 & -1236 \\
-824 & 0 & 37514 & -36150 & & & & & 1236 & 0 & 1236 & 0 \\
0 & -824 & -36150 & 37514 & & & & & 0 & 1236 & 0 & 1236 \\
\hline
& & & & 98249 & -249 & -49000 & 0 & 750 & 750 & 0 & 0 \\
& 0 & & & -249 & 98249 & 0 & -49000 & -750 & -750 & 0 & 0 \\
& & & & -49000 & 0 & 49249 & -249 & 0 & 0 & 750 & 750 \\
& & & & 0 & -49000 & -249 & 49249 & 0 & 0 & -750 & -750 \\
\hline
0 & 0 & 1236 & 0 & 750 & -750 & 0 & 0 & 8020 & 1470 & 1210 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1236 & 750 & -750 & 0 & 0 & 1470 & 8020 & 0 & 1210 \\
-1236 & 0 & 1236 & 0 & 0 & 0 & 750 & -750 & 1210 & 0 & 5500 & 1470 \\
0 & -1236 & 0 & 1236 & 0 & 0 & 750 & -750 & 0 & 1210 & 1470 & 5500
\end{array}\right]$$

La ecuación característica será:

$$\left[\begin{array}{c|c} \widetilde{K}_{11} & \widetilde{K}_{12} \\ \hline \widetilde{K}_{21} & \widetilde{K}_{22} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} d_x' \\ d_y' \\ \hline \phi \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \omega^2 m d_x' \\ \omega^2 m d_y' \\ \hline 0 \end{array}\right]$$

Por lo tanto se puede contraer (eliminando a ϕ)

$$\underbrace{\left[\widetilde{K}_{11} - \widetilde{K}_{12}\, \widetilde{K}_{22}^{-1}\, \widetilde{K}_{21}\right]}_{\widetilde{K}} \left[\begin{array}{c} d_x' \\ \hline d_y' \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \omega^2 m d_x' \\ \hline \omega^2 m d_y' \end{array}\right]$$

c) Obtengamos: $\underline{\tilde{\tilde{K}} = \tilde{K}_{11} - \tilde{K}_{12}\,\tilde{K}_{22}^{-1}\,\tilde{K}_{21}}$

$$\tilde{\tilde{K}} = \begin{array}{cccc|cccc} & & d_{x'} & & & & d_{y'} & \\ \hline 38085 & -36661 & -563 & -65.8 & -17.3 & 17.3 & 136.0 & -136. \\ -36661 & 38085 & -65.8 & -563 & -17.3 & 17.3 & 136.0 & -136. \\ -563 & -65.8 & 37158 & -36666 & -82.6 & 82.6 & -118.7 & 118. \\ -65.8 & -563 & -36666 & 37158 & -82.6 & 82.6 & -118.7 & 118. \\ \hline -17.3 & -17.3 & -82.6 & -82.6 & 98128 & -128 & -48979 & -21. \\ 17.3 & 17.3 & 82.6 & 82.6 & -128 & 98128 & -21.0 & -4897 \\ 136.0 & 136.0 & -118.7 & -118.7 & -48979 & -21.0 & 49084 & -83. \\ -136.0 & -136.0 & 118.7 & 118.7 & -21.0 & -48979 & -83.9 & 4908 \end{array}$$

Nota: Observe que las lineas de $\tilde{K}_{22}^{-1}$ son los giros producidos por pare unitarios, <u>sin desplazamientos</u>, por lo que se puede aplicar Cro ó Kani (modificados) para efecturar su inversión, ó simplement aplicar el método de Gauss - Seidel.

d) Obtengamos los períodos y modos naturales, con la ecuación:

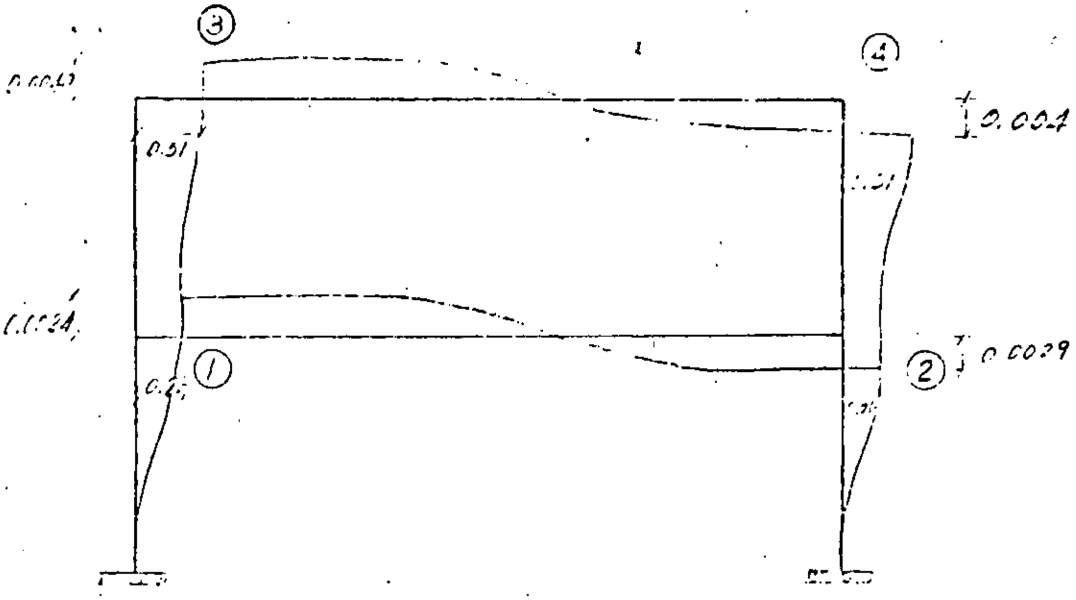
$$\left[\tilde{\tilde{K}}\right]\left[d'\right] = \omega^2\left[M\right]\left[d'\right]$$

donde: $d' = \begin{bmatrix} d_{x'} \\ \hline d_{y'} \end{bmatrix}$; $M = \left[\begin{array}{c|c} m & 0 \\ \hline 0 & m \end{array}\right]$

$\therefore\ m_i = 1/2\ \frac{W_i}{g} = 1/2\left(\frac{30}{9.8}\right) = 1.53\ \frac{T\text{-}s^2}{m}$

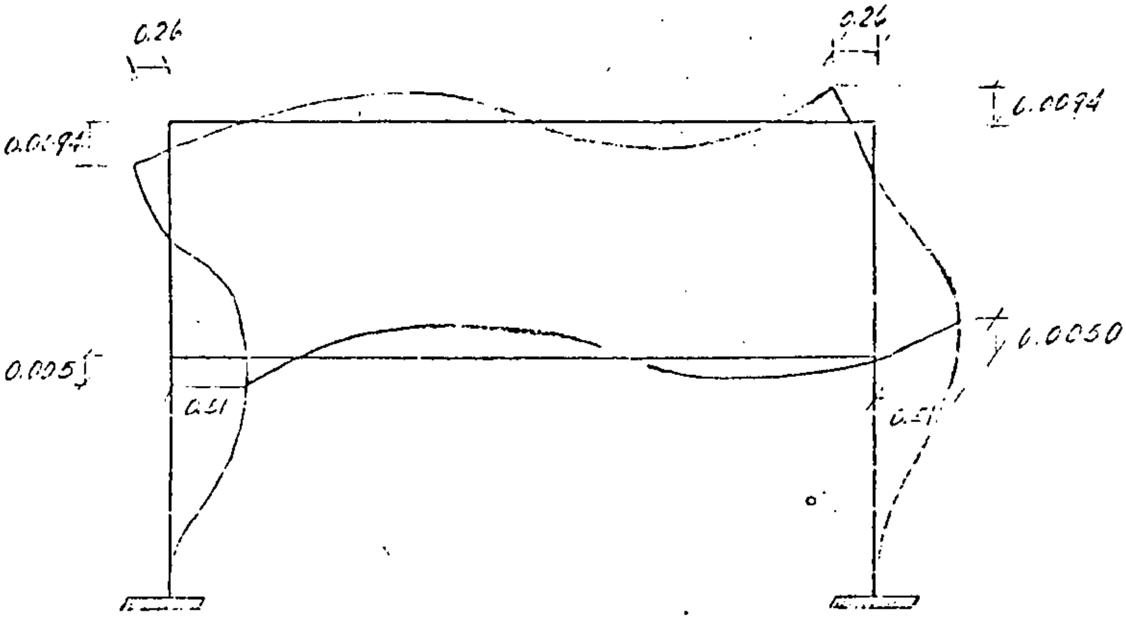
$$\left[M\right] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1.53 & & & & & & & \\ & 1.53 & & & & & & \\ & & 1.53 & & & & & \\ & & & 1.53 & & & & \\ \hline & & & & 1.53 & & & \\ & & & & & 1.53 & & \\ & & & & & & 1.53 & \\ & & & & & & & 1.53 \end{array}\right]$$

1er modo



$T_1 = 0.589$ seg

2° modo



$T_2 = 0.187$ seg.

```
ADIN        11:48     034 11/24/70

PROGRAMA PARA LA OBTENCION DE PERIODOS Y MODOS NATURA-
LES DE VIBRAR. PROGRAMADO POR J. DAMY R.. MEXICO NOVIEMBRE DE 1970


 MATRIZ K
   .38085000E+05 -.36661000E+05 -.56300000E+03 -.65800000E+02
  -.17300000E+02  .17300000E+02  .13600000E+03 -.13600000E+03
   .38085000E+05 -.65800000E+02 -.56300000E+03 -.17300000E+02
   .17300000E+02  .13600000E+03 -.13600000E+03  .37158000E+05
  -.36666000E+05 -.82600000E+02  .82600000E+02 -.11870000E+03
   .11870000E+03  .37158000E+05 -.82600000E+02  .82600000E+02
  -.11870000E+03  .11870000E+03  .98128000E+05 -.12800000E+03
  -.48979000E+05 -.21000000E+02  .98128000E+05 -.21000000E+02
  -.48979000E+05  .49084000E+05 -.83900000E+02  .49084000E+05
 MASAS
   .15300000E+01  .15300000E+01  .15300000E+01  .15300000E+01
   .15300000E+01  .15300000E+01  .15300000E+01  .15300000E+01

 MODO  1
 OMEGA =  10.66051200  PERIODO =     .58938871
   .25623737E+00  .25623737E+00  .51099425E+00  .51099425E+00
   .29466487E-02 -.29466486E-02  .39979469E-02 -.39979469E-02

 MODO  2
 OMEGA =  33.67011100  PERIODO =     .18661017
   .51096589E+00  .51096589E+00 -.25612073E+00 -.25612073E+00
  -.50193496E-02  .50193496E-02 -.93926081E-02  .93926080E-02

 MODO  3
 OMEGA =  110.60265000  PERIODO =     .05680863
   .59273579E-09  .59857214E-09 -.83033499E-09 -.83031192E-09
   .30054070E+00  .30054064E+00  .48628462E+00  .48628453E+00

 MODO  4
 OMEGA =  111.30092000  PERIODO =     .05645223
  -.72833551E-02 -.72833551E-02  .91885201E-02  .91885201E-02
  -.30022755E+00  .30022759E+00 -.48633659E+00  .48633667E+00

 MODO  5
 OMEGA =  219.33793000  PERIODO =     .02864614
   .22869770E+00 -.22869771E+00  .52392246E+00 -.52392246E+00
   .21103940E-13 -.21103940E-13  .39491379E-13 -.39491378E-13

 MODO  6
 OMEGA =  221.34915000  PERIODO =     .02838586
   .52392246E+00 -.52392246E+00 -.22869770E+00  .22869771E+00
  -.11766490E-11  .11766492E-11 -.19060459E-11  .19060462E-11

 MODO  7
 OMEGA =  289.56096000  PERIODO =     .02169901
   .46862398E-09  .46862254E-09  .40180199E-10  .39996558E-10
   .48628428E+00  .48628487E+00 -.30054049E+00 -.30054086E+00

 MODO  8
 OMEGA =  289.78019000  PERIODO =     .02168259
  -.77499100E-03 -.77499100E-03 -.67084765E-04 -.67084765E-04
   .48644342E+00 -.48644283E+00 -.30028316E+00  .30028279E+00
```

Se obtuvo: (Utilizando el servicio de tiempo compartido de G E)

$\omega_1 = 10.66$ 1/s; $T_1 = 0.589$ seg.

$\omega_2 = 33.67$ $T_2 = 0.187$

$\omega_3 = 110.60$ $T_3 = 0.057$

$\omega_4 = 111.30$ $T_4 = 0.056$

$\omega_5 = 219.34$ $T_5 = 0.029$

$\omega_6 = 221.35$ $T_6 = 0.028$

$\omega_7 = 289.56$ $T_7 = 0.022$

$\omega_8 = 289.78$ $T_8 = 0.022$

2) Análisis dinámico, sin considerar acortamiento en trabes

En este caso la matriz $\left[\tilde{\tilde{K}}\right]$ se modifica de acuerdo con lo visto en el Resumen (8) obteniéndose la matriz $\left[K^{=}\right]$

$$\left[K^{III}\right] = \begin{array}{cc|cccc} \Delta_1 & \Delta_2 & d_{y_1}' & d_{y_2}' & d_{y_3}' & d_{y_4}' \\ 2848 & -1257.6 & -34.6 & 34.6 & 272 & -272 \\ -1257.6 & 984 & -34.6 & 34.6 & 272 & -272 \\ \hline & & 98128 & -128 & -48979 & -21 \\ \text{Simétrica} & & & 98128 & -21 & -48979 \\ & & & \text{Simétrica} & 49084 & -83.8 \\ & & & & & 49084 \end{array}$$

donde: $\Delta_1 = d_{x_1}' = d_{x_2}$; $\Delta_2 = d_{x_3}' = d_{x_4}'$

La matriz de masas M será:

$$M = \left[\begin{array}{cc|cccc} 3.06 & & & & & \\ & 3.06 & & & & \\ \hline & & 1.53 & & & \\ & & & 1.53 & & \\ & & & & 1.53 & \\ & & & & & 1.53 \end{array}\right]$$

Obteniendose:

$\omega_1 =$ 10.66 1/s ; $T_1 =$ 0.589 seg
$\omega_2 =$ 33.67 $T_2 =$ 0.187
$\omega_3 =$ 110.60 $T_3 =$ 0.057
$\omega_4 =$ 111.30 $T_4 =$ 0.056
$\omega_5 =$ 289.56 $T_5 =$ 0.022
$\omega_6 =$ 289.78 $T_6 =$ 0.022

Observe que los modos 1.º, 2.º, 3.º y 4.º son iguales al caso anterior y que los modos 5.º y 6.º son iguales al 7.º y 8.º del caso anterior.

3) <u>Análisis dinámico, sin considerar acortamiento en trabes y columnas.</u>

En este caso la matriz de rigidez $\left[K^{IV}\right]$ será:

$$\left[\underset{\sim}{K}^{IV}\right] = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \Delta_1 & \Delta_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2848 & -1257.6 \\ -1257.6 & 984 \end{bmatrix} \end{array} \qquad d_{y_1}' = d_{y_2}' = d_{y_3}' = d_{y_4}' = 0$$

$\Delta_1 = d_{x_1}' = d_{x_2}'$

$\Delta_2 = d_{x_3}' = d_{x_4}'$

```
MATRIZ K
  .28480000E+04 -.12576000E+04 -.34600000E+02  .34600000E+02
  .27200000E+03 -.27200000E+03  .98400000E+03 -.16520000E+03
  .16520000E+03 -.23740000E+03  .23740000E+03  .98128000E+05
 -.12800000E+03 -.48979000E+05 -.21000000E+02  .98128000E+05
 -.21000000E+02 -.48979000E+05  .49084000E+05 -.83900000E+02
  .49084000E+05
MASAS
  .30600000E+01  .30600000E+01  .15300000E+01  .15300000E+01
  .15300000E+01  .15300000E+01

MODO  1
OMEGA =  10.66050900  PERIODO =     .58938884
  .25623737E+00  .51099425E+00  .29466487E-02 -.29466486E-02
  .39979469E-02 -.39979469E-02

MODO  2
OMEGA =  33.67011000  PERIODO =     .18661018
  .51096589E+00 -.25612072E+00 -.50193496E-02  .50193496E-02
 -.93926081E-02  .93926080E-02

MODO  3
OMEGA =  110.60265000  PERIODO =     .05680863
  .60344747E-09 -.82412281E-09  .30054070E+00  .30054064E+00
  .48623462E+00  .48628453E+00

MODO  4
OMEGA =  111.30092000  PERIODO =     .05645223
 -.72833551E-02  .91885200E-02 -.30022755E+00  .30022759E+00
 -.48633659E+00  .48633667E+00

MODO  5
OMEGA =  289.56096000  PERIODO =     .02169901
  .46912016E-09  .40092534E-10  .48628428E+00  .48628487E+00
 -.3054049E+00 -.30054086E+00

MODO  6
OMEGA =  289.78010000  PERIODO =     .02168259
 -.77499100E-03 -.67084765E-04  .48644342E+00 -.48644283E+00
 -.30028316E+00  .30028279E+00
```

La matriz de masas $\begin{bmatrix} M \end{bmatrix}$ será:

$$M = \begin{bmatrix} 3.06 & \\ & 3.06 \end{bmatrix}$$

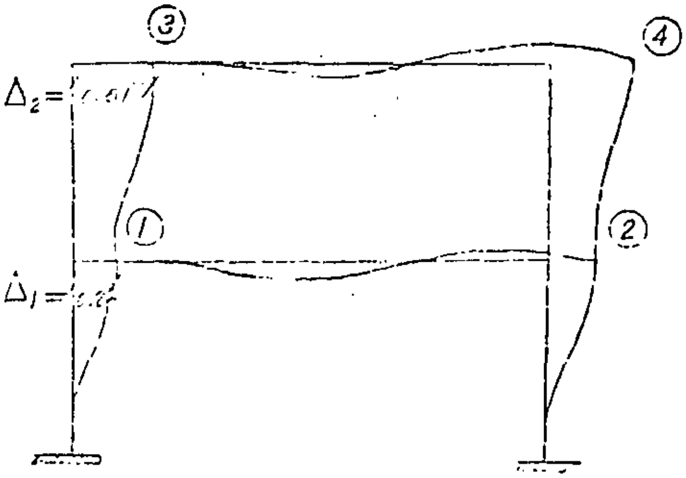
Se obtiene: $\omega_1 = 10.71$ 1/s; T = 0.587 seg

$\omega_2 = 33.73$ 1/s; T = 0.186 seg

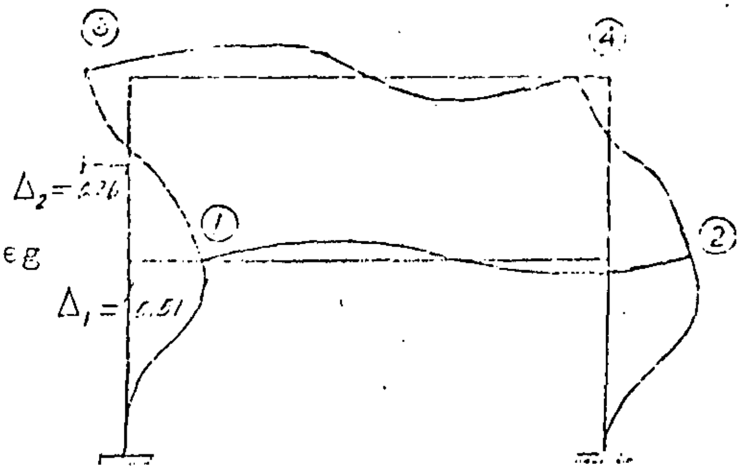
```
Matriz K
  .28480000E+04  -.12576000E+04  .98400000E+03
Masas
  .30600000E+01   .30600000E+01

Modo  1
Omega =  10.70541900  Período =      .58691633
  .25711735E+00  .51057620E+00

Modo  2
Omega =  33.72953600  Período =      .18628140
  .51057620E+00 -.25711735E+00
```

1er modo

T$_1$ = 0.507 seg



2° modo



$T_2 = 0.186$ seg

Observese que son muy parecidos a los dos primeros modos de los casos anteriores.

Nota: En los tres casos anteriores, para obtener el valor de $\left[\phi\right]$, se usara la expresión:

$$\left[\phi\right] = \left[-\widetilde{K}_{22}^{-1}\ \widetilde{K}_{21}\right]\begin{bmatrix} d_{x'} \\ d_{y'} \end{bmatrix}$$

(Ver hojas 98, 99, 100 y 101)

donde $\widetilde{K}_{22}^{-1}$:

$$\widetilde{K}_{22}^{-1} = \begin{bmatrix} 1.3470 & -0.2694 & -0.3362 & 0.1491 \\ & 1.3470 & 0.1491 & -0.3362 \\ & & 2.0472 & -0.5800 \\ \text{Simétrico} & & & 2.0472 \end{bmatrix}$$

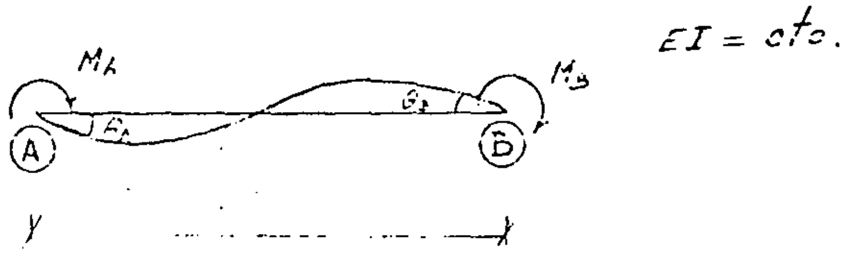
Obtención directa de la matriz $[K^{N}]$

La matriz K^{N} se puede obtener directamente contrayendo una matriz $\mathcal{K}$, que se obtiene:

$$\mathcal{K} = a^{T} \, k \, a$$

donde k son las rigideces de las barras sin considerar acortamiento, referidos a los momentos extremos M_A, M_B

La matriz k en función de M_A y M_B, para una barra recta de sección uniforme, es:



$$\begin{bmatrix} M_A \\ M_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4EI(1+c)}{L(1+4c)} & \frac{2EI(1-2c)}{L(1+4c)} \\ \frac{2EI(1-2c)}{L(1+4c)} & \frac{4EI(1+c)}{L(1+4c)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_A \\ \theta_B \end{bmatrix}$$

Para la deducción de esta matriz, vease los Resumenes (3) y (4)

Para nuestro ejemplo:

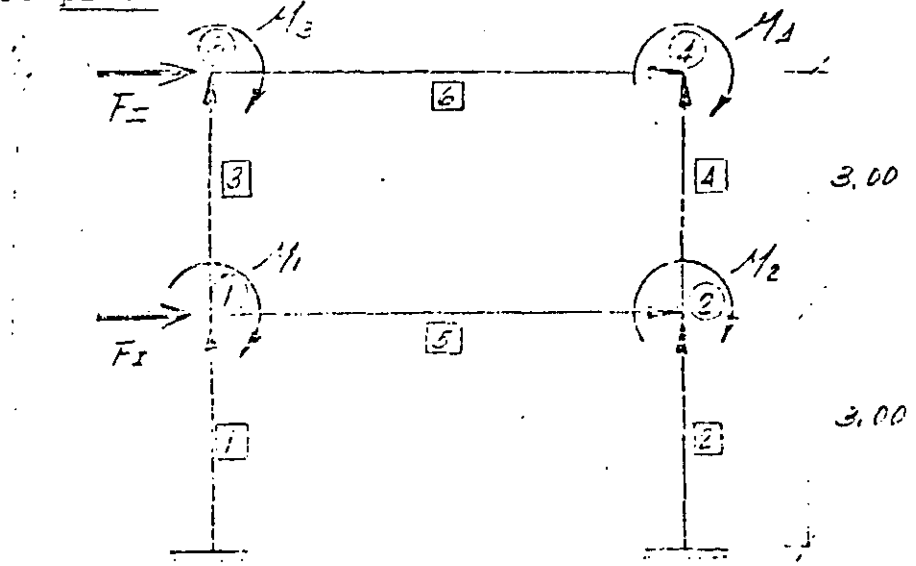
Barras $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$; Ver hojas (96, 97, 98 y 99) $\quad k = \begin{bmatrix} 2520 & 1210 \\ 1210 & 2520 \end{bmatrix}$

Barras $\boxed{5}$, $\boxed{6}$ $\quad k = \begin{bmatrix} 2980 & 1470 \\ 1470 & 2980 \end{bmatrix}$

Por consiguiente:

$$\begin{bmatrix} k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & & & & & \\ & k_2 & & & & \\ & & k_3 & & & \\ & & & k_4 & & \\ & & & & k_5 & \\ & & & & & k_6 \end{bmatrix}$$

La matriz a^T se obtendrá planteando el equilibrio de los nudos y de los pisos:



$$\begin{bmatrix} F \\ F \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} -0.33 & -0.33 & -0.33 & -0.33 & 0.33 & 0.33 & 0.33 & 0.33 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.33 & -0.33 & -0.33 & -0.33 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\left[a^T\right]_o} \begin{bmatrix} M_{A1} \\ M_{B1} \\ M_{A2} \\ M_{B2} \\ M_{A3} \\ M_{B3} \\ M_{A4} \\ M_{B4} \\ M_{A5} \\ M_{B5} \\ M_{A6} \\ M_{B6} \end{bmatrix}$$

Efectuando el producto a^T k a , se obtiene $\mathcal{K}$:

$$a^T\ k\ a = \left[\mathcal{K}\right] = \begin{array}{cc|cccc} \Delta_I & \Delta_{II} & \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 & \phi_4 \\ \hline 3296 & -1648 & 0 & 0 & 1236 & 1236 \\ -1648 & 1648 & -1236 & -1236 & -1236 & -1236 \\ \hline 0 & -1236 & 8020 & 1470 & 1210 & 0 \\ 0 & -1236 & 1470 & 8020 & 0 & 1210 \\ 1236 & -1236 & 1210 & 0 & 5500 & 1470 \\ 1236 & -1236 & 0 & 1210 & 1470 & 5500 \end{array}$$

Nota: Esta matriz puede obtenerse directamente de la matriz $\widetilde{K}$ (hoja 98 y 99); por ejemplo:

3296 = 38398+38398-36750-36750

-1648 = -824-824

etc...

La matriz $\mathcal{K}$ se puede particionar y obtenerse la siguiente ecuación característica:

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathcal{K}_{11} & \mathcal{K}_{12} \\ \hline \mathcal{K}_{21} & \mathcal{K}_{22} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \Delta \\ \hline \phi \end{array}\right] = \omega^2 \left[\begin{array}{c} M\Delta \\ \hline 0 \end{array}\right]$$

Por lo que se puede eliminar a ϕ, obteniendose:

$$\left[\mathcal{K}_{11} - \mathcal{K}_{12}\, \mathcal{K}_{22}^{-1}\, \mathcal{K}_{21}\right] \Delta = \omega^2 M \Delta$$

Es obvio que:

$$\left[K^{IV}\right] = \mathcal{K}_{11} - \mathcal{K}_{12}\, \mathcal{K}_{22}^{-1} \mathcal{K}_{21}$$

Observese que $\mathcal{K}_{22} = \widetilde{K}_{22}$

Cuando la matriz $\mathcal{K}_{21}$ tiene menos columnas que $\mathcal{K}_{22}$ no conviene invertir esta última para obtener K^{IV} , ya que $\mathcal{K}_{22}^{-1} \mathcal{K}_{21}$ tiene por elementos a las raices del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\mathcal{K}_{22}\ X = \mathcal{K}_{21}$$

$$X = \mathcal{K}_{22}^{-1} \mathcal{K}_{21}$$

en nuestro ejemplo la obtención de $K_{22}^{-1} K_{21}$ se reduce a resolver el sistema

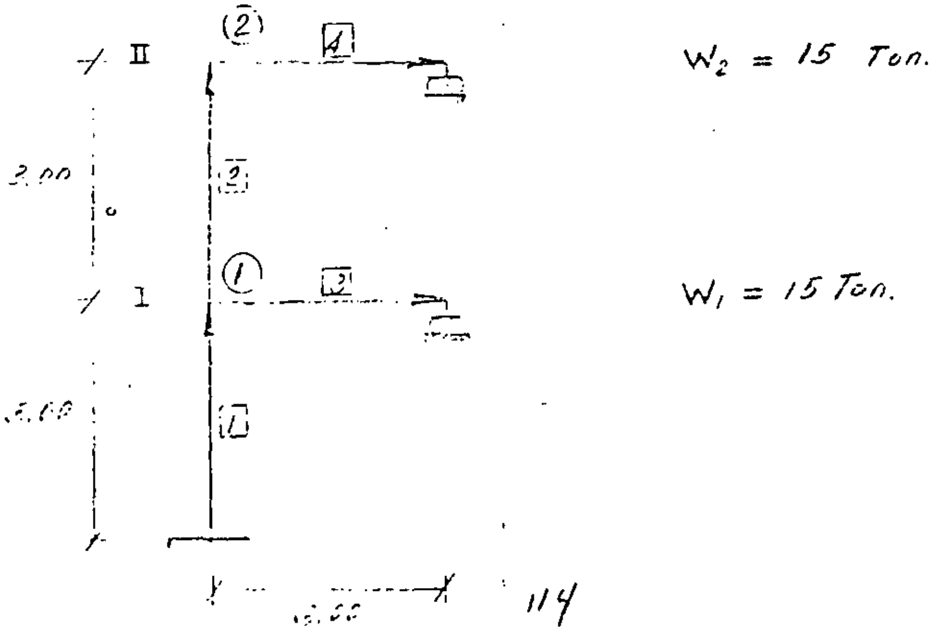
$$\begin{bmatrix} 8020 & 1470 & 1210 & 0 \\ 1470 & 8020 & 0 & 1210 \\ 1210 & 0 & 5500 & 1470 \\ 0 & 1210 & 1470 & 5500 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1236 \\ 0 & -1236 \\ 1236 & -1236 \\ 1236 & -1236 \end{bmatrix}.$$

este procedimiento simplifica bastante el problema de la contracción de K, cuando se trata de marcos con muchos nudos y pocos niveles.

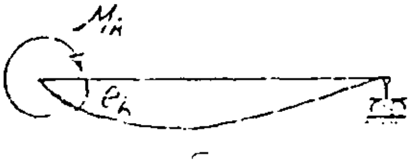
Simplificación por la simetría de la estructura.

Con las alternativas (1) y (2) (exacta y sin acortamiento en trabes, respectivamente) no se puede llevar a cabo ninguna simplificación por la simetría de la estructura ya que solo los modos 1, 2, 4, 8 (en la alternativa (1)) son completamente antisimétricos, los modos 3, 5, 6, 7 son simétricos y antisimétricos en forma simultanea (Ver hoja 100 A).

Con la alternativa (3) (sin acortamiento en trabes y columnas) si se puede efectuar simplificaciones, ya que los modos corresponden siempre a condiciones antisimétricas. En nuestro ejemplo considerariamos la siguiente estructura:



La matriz k (en función de M_A y M_B) para las barras $\boxed{3}$ y $\boxed{4}$ son:



$$M_A = \left[\frac{3EI}{L(1+c)}\right] \theta_A$$

$$k_{3,4} = \frac{3EI}{L(1+c)} \qquad \ast$$

La matriz $\left[a^T\right]$ será:

$$\begin{bmatrix} F_I \\ F_{II} \\ \hline \mathcal{M}_1 \\ \mathcal{M}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\left[\begin{array}{cc|cc|c|c} -0.33 & -0.33 & 0.33 & 0.33 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.33 & -0.33 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{\left[a^T\right]} \begin{bmatrix} M_{A1} \\ M_{B1} \\ M_{A2} \\ M_{B2} \\ M_{A3} \\ M_{B3} \end{bmatrix}$$

La matriz $\left[k\right]$ será:

$$\left[k\right] = \left[\begin{array}{cc|cc|c|c} 2520 & 1210 & & & & \\ 1210 & 2520 & & & & \\ \hline & & 2520 & 1210 & & \\ & & 1210 & 2520 & & \\ \hline & & & & 4500 & \\ \hline & & & & & 4500 \end{array}\right]$$

Efectuando $a^{T}\ k\ a$, se obtiene:

$$[\mathcal{K}] = \left[\begin{array}{cc:cc} 1648 & -824 & 0 & 1236 \\ -824 & 824 & -1236 & -1236 \\ \hdashline 0 & -1236 & 9540 & 1210 \\ 1236 & -1236 & 1210 & 7070 \end{array}\right]$$

Obtengamos $\mathcal{K}_{12}\,\mathcal{K}_{22}^{-1}\,\mathcal{K}_{21}$:

$$\mathcal{K}_{12}\,\mathcal{K}_{22}^{-1}\,\mathcal{K}_{21} = \begin{bmatrix} 223 & -194 \\ -194 & 330 \end{bmatrix}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} 1425 & -630 \\ -630 & 494 \end{bmatrix}$$

✳ Barras $\boxed{3}$ y $\boxed{4}$ $\dfrac{3EI}{L(1+c)} = \dfrac{3x1.47x10\ x3125x10}{3.00\ x\ 1.0208} = 4500$

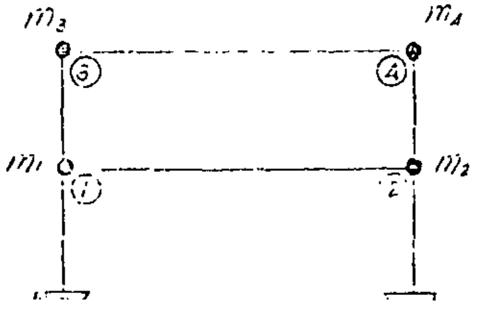
(Nota: $c = 4x0.0052 = 0.0208$)

Observese que: $[K] \approx 1/2\ [K^{III}]$ y las masas son la mitad de las masas de la alternativa (3), por lo tanto los períodos y los modos son los mismos.

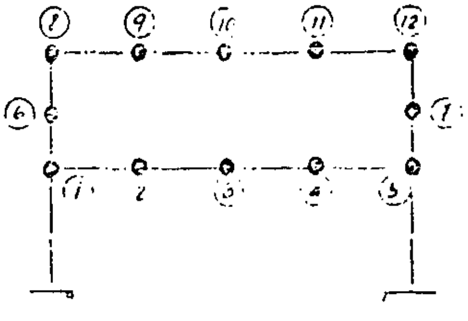
Conclusiones:

Para efectuar el análisis dinámico de una estructura ha sido necesario discretizar a las masas, considerándolas concentradas en los "nudos", porque las matrices de rigideces de las estructuras, estan referidas a ellos. Si se desea una mejor aproximación al análisis dinámico de una estructura cualquiera, bastará aumentar el número de "nudos" y por consiguiente el número de masas concentradas.

1ª aproximación.



2ª aproximación.



Este tratamiento es conveniente cuando se quiere considerar la inercia rotacional de las barras, que puede ser considerable en barras largas.

DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.

MATEMATICAS APLICADAS A LA INGENIERIA ESTRUCTURAL

RESPUESTA DINAMICA DE ESTRUCTURAS EMPLEANDO METODOS MATRICIALES

M. en I. G. Rafael Aranda Hernández

MARZO, 1985

Palacio de Minería Calle de Tacuba 5 primer piso Deleg. Cuauhtémoc 06000 México, D.F. Tel.: 521-40-20 Apdo. Postal M-2285

4. RESPUESTA DINAMICA DE ESTRUCTURAS EMPLEANDO METODOS MATRICIALES

4. RESPUESTA DINAMICA DE ESTRUCTURAS EMPLEANDO METODOS MATRICIALES

4.1 INTRODUCCION

Cuando la carga dinámica se aplica a una estructura los desplazamientos no son función solo de las coordenadas sino también del tiempo. Para un elemento infinitesimal de volumen, W, sometido a una fuerza de inercia $-\rho\ddot{u}dV$, donde ρ es la densidad del cuerpo, se generará un campo de aceleraciones que se puede expresar en el sistema cartesiano como

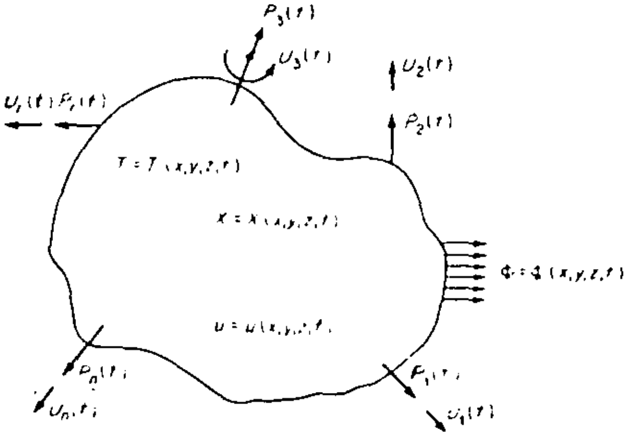
$$\ddot{u} = \begin{bmatrix} \ddot{u}_x \\ \ddot{u}_y \\ \ddot{u}_z \end{bmatrix}$$

De acuerdo con el principio de D'Alembert, que es un corolario de la segunda y tercera Ley de Newton, las ecuaciones de movimiento se obtienen de la condición de equilibrio cuando se toman en cuen ta las fuerzas de inercia. Puesto que estas son proporcionales al volumen del elemento, constituyen lo que se conoce como fuerzas de cuerpo; así, las fuerzas de inercia de cuerpo en todo el sistema elástico, se pueden expresar como

$$X_{inercia} = -\rho\ddot{u} \qquad 4.1$$

Esto indica que la ecuación de movimiento se obtendrá introduciendo fuerzas adicionales de cuerpo, en las ecuaciones de equilibrio estático.

En la dinámica estructural es útil la aplicación del Principio del trabajo virtual; para ello considérese un cuerpo elástico que tiene una deformación por efecto de una carga dinámica, tal como se indica en la figura



Se puede suponer que para cualquier instante de tiempo el desplazamiento u se modifica con desplazamientos virtuales δu, los cuales son infinitesimales y arbitrarios pero compatibles con las condiciones de frontera del cuerpo. Además, los desplazamientos virtuales producen deformaciones unitarias compatibles, δε, a partir de las cuales, si se conoce la distribución instantánea de esfuerzos, se puede calcular la energía de deformación virtual, δu_i, en cualquier instante. El trabajo virtual de las fuerzas internas consistirá además de las fuerzas reales de cuerpo y superficiales de las fuerzas de inercia definidas en la ec 4.1. El principio del trabajo virtual, generalizado para incluir las condi -

ciones dinámicas se pueden expresar como

$$\delta U_i = \delta W - \int_V \rho \delta u^T \ddot{u} dV \qquad 4.2$$

siendo V = volumen

donde

$$\delta U_i = \int_V \delta \varepsilon^T \sigma dV \qquad 4.3$$

y

$$\delta W = \int_s \delta u^T \phi dS + \int_V \delta U^T X dV + \delta U^T P \qquad 4.4$$

siendo s = superficie

El tercer término del miembro del lado derecho de esta ecuación representa el trabajo virtual realizado por las fuerzas externas P que actúan en dirección de los correspondientes desplazamientos virtuales. La ec 4.2 establece que en un desplazamiento virtual del cuerpo, a partir de su estado de equilibrio instantáneo, el incremento de energía de deformación, esto es, la energía virtual de deformación, es igual a la suma del trabajo virtual de todas las fuerzas, incluyendo a las de inercia.

4.1.1 Ecuación de movimiento en sistemas continuos. Las ecuaciones de la teoría de elasticidad derivadas para sistemas estaticos continuos pueden ser adaptadas inmediatamente a las condiciones dinámicas de carga al incluir fuerzas de inercia. Así, en el sistema cartesiano de referencia, se tiene que las ecuaciones de equilibrio de fuerzas son

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + X_x = \rho \ddot{u}_x$$

$$\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + X_y = \rho \ddot{u}_y$$

$$\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + X_z = \rho \ddot{u}_z$$

las ecuaciones de equilibrio de momentos y las ecuaciones de equilibrio de fuerzas en la superficie permanecen sin cambio en relación al caso estático.

A las ecs 4.5 se les conoce como las ecuaciones de movimiento de sistemas elásticos. Estas son las que conducen a conocer los desplazamientos del sistema; se puede suponer que para cualquier instante es válida la aplicación de la ley de Hooke, lo cual implica que todos los esfuerzos en la ec 4.5 pueden expresarse en función de componentes de deformación y, por consiguiente, en términos de derivadas del desplazamiento. A partir de las ecs 4.5 se pueden obtener tres ecuaciones diferenciales parciales cuya solución determina la propagación de ondas de esfuerzos en los sistemas elásticos sometidos a solicitaciones dinámicas específicas; la solución de tales problemas va más allá del alcance de estas notas.

4.1.2 Ecuación de movimiento (equilibrio) en sistemas discretos. En el análisis matricial de estructuras es común tratar con cantidades discretas; así se tienen fuerzas y momentos concentrados, desplazamientos de puntos y giros de secciones específicas. Consecuentemente con ello, todas las ecuaciones de la elasticidad para medios continuos deben reformularse como ecuaciones matriciales empleando esas cantidades discretas. En problemas estáticos, los desplazamientos u pueden relacionarse a un número finito de desplazamientos seleccionados en puntos arbitrarios de la estructura; esto se puede expresar como

$$u = a\,U \qquad 4.6$$

donde

$$u = \{u_x \quad u_y \quad u_z\}$$
$$U = \{U_1 \quad U_2 \quad \dots \quad U_n\}$$
$$a = a(x\ ,\ y\ ,\ z)$$

La ec 4.6 es válida para deformaciones pequeñas. Las deformaciones unitarias se pueden expresar como

$$e = b\ U$$

donde

$$b = b(x,y,z)$$

y se obtiene diferenciando a los términos de la matriz a.

En problemas de dinámica, la ec 4.6 no es válida excepto en algunos casos especiales; sin embargo, si se considera un número suficientemente grande de desplazamientos U, la ecuación será una buena aproximación, siempre que U sea determinada de las ecuaciones dinámicas del sistema. Esta relación se empleará para formular un sistema discreto equivalente a partir de un sistema continuo. Para visualizar esto, se partirá del Principio del trabajo virtual para cargas dinámicas.

$$\delta U_i = \delta W - \int_V \rho \delta u^T \ddot{u} dV$$

Aquí

$$\delta u = a \delta U$$
$$\delta \varepsilon = \delta e = b \delta U$$

Si se aplica la Ley de Hooke, con la cual los esfuerzos se definen como

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij}\ e_{kk} + 2Ge_{ij}$$

siendo σ_{ij} = tensor de esfuerzos; δ_{ij} = delta de Kronecker; $e_{\ell m}$ = tensor de deformaciones unitarias; λ y G son las constantes de Lamé.

Se tiene

$$\int_V \left[\lambda \frac{\partial u_k}{\delta x_k} \ \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_i} + G\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \ \frac{\partial \delta u_k}{\partial x_i}\right) + \rho \ddot{u}_i \delta u_i \right] dV =$$

$$\int_s t_i \delta u_i dS + \int_V B_i \ \delta u_i dV \qquad 4.7$$

Esta ecuación se puede escribir como

$$M\ddot{U} + KU = \int_s t_i \delta u_i dS + \int_V B_i \ \delta u_i dV \qquad 4.8$$

donde M es la matriz de masas del sistema equivalente discreto y K es la matriz de rigideces.

La ec 4.8 representa la ecuación de movimiento del sistema discreto; en general, esta ecuación tiene acoplamiento para las matrices de masa y rigidez, en los términos fuera de la diagonal principal. De especial interés resulta visualizar que matemáticamente los desplazamientos U pueden tratarse como grados de libertad del sistema.

4.1.3 Masas equivalentes en el análisis estructural. Las propiedades de inercia de un sistema estructural discreto se pueden expresar por medio de la matriz de masas equivalente

$$M = \int_V \rho a^T a dV \qquad 4.9$$

se puede demostrar que a existe solo para casos especiales, tales como carga estática o movimiento armónico del sistema. Para los sistemas discretos su evaluación es aproximada debido a la idealización misma; sin embargo, es común en dinámica estructural emplear una configuración estática para definirla, lo cual hace que la matriz M sea una aproximación de la real. Sin embargo, si los elementos discretos son pequeños, la aproximación lograda es aceptable para fines prácticos. Para aclarar ideas se verá un caso sencillo, como lo es el de la barra indicada en la figura

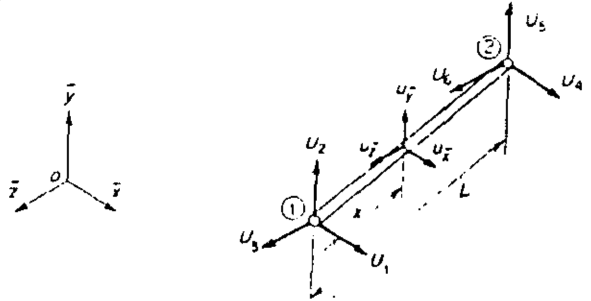


Fig 4.1 Desplazamientos nodales en un elemento barra

De la figura puede observarse que los desplazamientos para un punto a la distancia x del nudo 1 están dados por

$$u_{\bar{x}} = U_1 + (U_4 - U_1)\xi$$

$$u_{\bar{y}} = U_2 + (U_5 - U_2)\xi$$

$$u_{\bar{z}} = U_3 + (U_6 + U_3)\xi$$

donde $\xi = x/\ell$

Este sistema de ecuaciones se puede expresar matricialmente como

$$\begin{bmatrix} u_{\bar{x}} \\ u_{\bar{y}} \\ u_{\bar{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\xi & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 \\ 0 & 1-\xi & 0 & 0 & \xi & 0 \\ 0 & 0 & 1-\xi & 0 & 0 & \xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{bmatrix}$$

de donde

$$a = \begin{bmatrix} 1-\xi & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 \\ 0 & 1-\xi & 0 & 0 & \xi & 0 \\ 0 & 0 & 1-\xi & 0 & 0 & \xi \end{bmatrix}$$

Al sustituir estas ecuaciones en la ec 4.9 se obtiene

$$\mathbf{m} = \int_V \rho \mathbf{a}^t \mathbf{a}\, dV$$

$$= \rho A l \int_0^1 \begin{bmatrix} (1-\xi)^2 & 0 & 0 & (1-\xi)\xi & 0 & 0 \\ 0 & (1-\xi)^2 & 0 & 0 & (1-\xi)\xi & 0 \\ 0 & 0 & (1-\xi)^2 & 0 & 0 & (1-\xi)\xi \\ \xi(1-\xi) & 0 & 0 & \xi^2 & 0 & 0 \\ 0 & \xi(1-\xi) & 0 & 0 & \xi^2 & 0 \\ 0 & 0 & \xi(1-\xi) & 0 & 0 & \xi^2 \end{bmatrix} d\xi$$

$$= \frac{\rho A l}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \frac{\rho A l}{6} \begin{bmatrix} 2\mathbf{I}_3 & \mathbf{I}_3 \\ \mathbf{I}_3 & 2\mathbf{I}_3 \end{bmatrix}$$

Los términos fuera de la diagonal, diferentes de cero, representan el acoplamiento dinámico entre los grados de libertad; puede observarse en este caso que el acoplamiento acurre para grados de libertad en las mismas direcciones, esto es, 1 y 4, 2 y 5, y 3 y 6.

Ahora se considera un elemento barra uniforme con dos masas concentradas, m_1 y m_2, en sus extremos como se indica en la fig 4.2

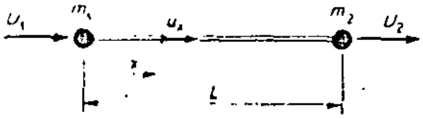


Fig 4.2 Elemento barra con masas concentradas en los extremos

Por simplicidad, se determinarán únicamente las propiedades de inercia en la dirección longitudinal; los desplazamientos en la dirección longitudinal están dados por

$$u_x = \begin{bmatrix} (1 - \xi) & \xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$$

de donde

$$a = \begin{bmatrix} (1 - \xi) & \xi \end{bmatrix}$$

sustituyendo esto en la ec 4.9 se obtiene

$$M = \int_V \rho a^T a dV$$

$$= \begin{bmatrix} \int_V \rho(1 - \xi)^2 \, dV & \int_V \rho(1 - \xi)\xi \, dV \\ \int_V \rho\xi(1 - \xi) \, dV & \int_V \rho\xi^2 \, dV \end{bmatrix}$$

$$= \frac{\rho Al}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}$$

Se puede observar que el efecto de las masas concentradas en los extremos de un elemento, es tomado en cuenta sumando la masa real concentrada y los términos de la diagonal de una matriz que corresponde al sistema equivalente. Para representar un sistema estructural formado por un número n de elementos, se tendrá que hacer el ensamble respetando las relaciones de compatibilidad.

4.1.4 Matrices de masa y rigidez dependientes de la frecuencia.
Se puede mostrar con facilidad que para movimientos armónicos los desplazamientos longitudinales del elemento barra están dados por

$$u_x = \left[\left(\cos\frac{\omega x}{c} - \cot\frac{\omega \ell}{c}\,\mathrm{sen}\frac{\omega x}{c}\right) \quad \mathrm{cosec}\frac{\omega \ell}{c}\,\mathrm{sen}\frac{\omega x}{c} \right] \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} e^{i\omega t}$$

la deformación unitaria ε_{xx} se obtiene directamente por diferenciación con respecto a la variable X, esto conduce a

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{\omega}{c} \left[-\left(\mathrm{sen}\frac{\omega x}{c} + \cot\frac{\omega \ell}{c}\cos\frac{\omega x}{c}\right) \quad \mathrm{cosec}\frac{\omega \ell}{c}\cos\frac{\omega x}{c} \right] \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} e^{i\omega t}$$

De aquí se puede ver que

$$a = \left[\left(\cos\frac{\omega x}{c} - \cot\frac{\omega \ell}{c}\,\mathrm{sen}\frac{\omega x}{c}\right) \quad \mathrm{cosec}\frac{\omega \ell}{c}\,\mathrm{sen}\frac{\omega x}{c} \right]$$

$$b = \frac{\omega}{c} \left[-\left(\mathrm{sen}\frac{\omega x}{c} + \cot\frac{\omega \ell}{c}\cos\frac{\omega x}{c}\right) \quad \mathrm{cosec}\frac{\omega \ell}{c}\cos\frac{\omega x}{c} \right]$$

Después de sustituir esto en la ec 4.7 y hacer la integración correspondiente se obtiene

$$\mathbf{m} = \frac{\rho A l}{2}\frac{c}{\omega l}\,\mathrm{cosec}\,\frac{\omega l}{c}\begin{bmatrix} \left(\frac{\omega l}{c}\,\mathrm{cosec}\,\frac{\omega l}{c} - \cos\frac{\omega l}{c}\right) & \left(1 - \frac{\omega l}{c}\cot\frac{\omega l}{c}\right) \\ \left(1 - \frac{\omega l}{c}\cot\frac{\omega l}{c}\right) & \left(\frac{\omega l}{c}\,\mathrm{cosec}\,\frac{\omega l}{c} - \cos\frac{\omega l}{c}\right) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k} = \frac{AE}{2l}\frac{\omega l}{c}\,\mathrm{cosec}\,\frac{\omega l}{c}\begin{bmatrix} \left(\frac{\omega l}{c}\,\mathrm{cosec}\,\frac{\omega l}{c} + \cos\frac{\omega l}{c}\right) & -\left(1 + \frac{\omega l}{c}\cot\frac{\omega l}{c}\right) \\ -\left(1 + \frac{\omega l}{2}\cot\frac{\omega l}{c}\right) & \left(\frac{\omega l}{c}\,\mathrm{cosec}\,\frac{\omega l}{c} + \cos\frac{\omega l}{c}\right) \end{bmatrix}$$

Los elementos de ambas matrices dependen de la frecuencia circular ω; en los cálculos numéricos normalmente se desconoce ω y ello ocasiona que no se puedan calcular estas matrices de primera intención. Para evitar esto, se puede desarrollar al desplazamiento en una serie de potencias ascendentes de la frecuencia ω, esto es

$$u_x = aU = \sum_{r=0}^{\infty} \omega^r a_r U = \sum_{r=0}^{\infty} \omega^r a_r \underset{\sim}{q} e^{i\omega t}$$

donde

$$\underset{\sim}{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$$

donde las matrices a_r son funciones de x exclusivamente. Si se sustituye esta ecuación en la de movimiento, que para esta barra está dada por

$$c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \ddot{u}_x = 0$$

con c = velocidad del sonido dentro del elemento barra (velocidad de propagación de ondas elásticas unidireccionales) dada por $\sqrt{E/\rho}$, con E igual al módulo de Hooke

Se tiene

$$c^2 \sum_{r=0}^{\infty} \omega^r \underset{\sim}{a}''_r \underset{\sim}{q} e^{i\omega t} + \omega^2 \sum_{r=0}^{\infty} \omega^r \underset{\sim}{a}_r \underset{\sim}{q} e^{i\omega t} = 0$$

Si se igualan a cero los coeficientes de la misma potencia de ω se obtiene

$$a''_0 = 0$$

$$a''_1 = 0$$

$$c^2 a''_2 = - a_0$$

$$c^2 a''_3 = - a_1$$

$$\cdots$$

Estas ecuaciones matriciales pueden integrarse directamente; la primera matriz a_0 se emplea para satisfacer las condiciones de frontera $u_x = U_1$ en $x = 0$ y $u_x = U_2$ en $x = \ell$, mientras que el resto de las matrices $a_1, a_2, a_3, \ldots$ deben desaparecer para $x = 0$ y ℓ. Esto conduce a

$$a_0 = \left[(1 - \xi) \quad \xi \right]$$

$$a_1 = 0$$

$$a_2 = \frac{\rho\ell^2}{6E} \left[(2\xi - 3\xi^2 + \xi^3) \quad (\xi - \xi^2) \right]$$

$$a_3 = 0$$

$$\ldots$$

con lo cual la matriz a está dada por

$$a = a_0 + \omega^2 a_2 + \ldots$$

La matriz a_0 representa la distribución estática debido a valores unitarios de los desplazamientos U_1 y U_2.

La distribución de deformaciones se obtiene como

$$e = \frac{\partial u_x}{\partial x} \sum_{r=0}^{\infty} \omega^r \underset{\sim}{a}''_{r} \underset{\sim}{q} e^{i\omega t} = \sum_{r=0}^{\infty} \omega^r \underset{\sim}{b}_{r} \underset{\sim}{q} e^{i\omega t}$$

donde

$$b_0 = \frac{da_0}{dx} = \frac{1}{\ell} \left[-1 \quad 1 \right]$$

$$b_1 = \frac{da_1}{dx} = 0$$

$$b_2 = \frac{da_2}{dx} = \frac{\rho\ell}{6E} \left[(2 - 6\xi + 3\xi^2) \quad (1 - 3\xi^2) \right]$$

$$b_3 = \frac{da_3}{dx} = 0$$

$$\ldots$$

con lo cual la matriz b de la ecuación $e = bU$ está dada por

$$b = b_0 + \omega^2 b_2 + \ldots$$

Sustituyendo estas ecuaciones en las ecuaciones para calcular la matriz de masa y rigidez se obtiene

$$M = M_0 + \omega^2 M_2 + \ldots$$

con

$$M_0 = \frac{\rho A \ell}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$M_2 = \frac{2\rho^2 A \ell^3}{45E} \begin{bmatrix} 1 & 7/8 \\ 7/8 & 1 \end{bmatrix}$$

y

$$K = K_0 + \omega^4 K_4 + \ldots$$

con $K_0 = \frac{AE}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

y $K_4 = (\rho A \ell)^2 \frac{\ell}{45AE} \begin{bmatrix} 1 & 7/8 \\ 7/8 & 1 \end{bmatrix}$

las matrices M_0 y K_0 representan lo correspondiente a condiciones estáticas, mientras que M_2, K_4 y las de orden superior representan correcciones por condiciones dinámicas.

4.2 PROPIEDADES DE INERCIA DE ELEMENTOS ESTRUCTURALES

4.2.1 Matriz de masas equivalentes.

Para obtener estas matrices se parte de la hipótesis que la distribución dinámica de desplazamientos en los elementos se puede representar adecuadamente con una distribución estática.

Primero se obtendrá la matriz elemental de masas en coordenadas locales y luego se transformará al sistema global de referencia. La matriz elemental se obtendrá de la ecuación

$$m = \int_V \rho a^T a dV$$

donde la matriz a debe calcularse para todos los desplazamientos nodales del sistema. La relación entre los desplazamientos en ambos sistemas se obtiene por la ecuación

$$u = \lambda \overline{u}$$

donde λ es una matriz de n×n de cosenos directores, y n es el número de desplazamientos (grados de libertad) del elemento. De esta ecuación se obtiene que

$$\ddot{u} = \lambda \ddot{\overline{u}}$$

para los desplazamientos virtuales

$$\delta u = \lambda \delta \overline{u}$$

el trabajo virtual de las fuerzas de inercia debe ser independiente del marco de referencia escogido, y entonces se tiene

$$\delta \overline{u}^T (-\overline{m}\ \ddot{\overline{u}}) = \delta u^T (-m\ddot{u})$$

donde $\overline{m}$ es la matriz de masas equivalente en el sistema global. De las ecuaciones anteriores se tiene

$$\delta \overline{u}^T (\overline{m} - \lambda^T m \lambda) \ddot{\overline{u}} = 0$$

donde $\delta \overline{u}$ y $\ddot{\overline{u}}$ son arbitrarios; de esta ecuación se obtiene

$$\overline{m} = \lambda^T m \lambda$$

De aquí se obtiene

$$\overline{m} = \int_V \rho\lambda^T a^T a\lambda dV$$

$$= \int_V \rho\overline{a}^T\overline{a}dV$$

con $$\overline{a} = a\lambda$$

la matriz a representa la distribución de desplazamientos para valores unitarios de los desplazamientos nodales en el sistema global.

Para algunos elementos la matriz de masa equivalente es invariante con respecto a la orientación y a la posición de los ejes coordenados; ello es cierto para elementos barra articulados; tetraedros y paralelepípedos sólidos, elementos placa con rigidez en su plano únicamente.

4.2.2 Ensamble de la matriz de masas equivalentes para una estructura. Para ensamblar las matrices elementales de masas, $\overline{m}^{(i)}$, se procede análogamente a como se ensamblan las matrices de rigideces.

Las fuerzas de inercia que actúan en cada elemento están dadas por

$$\overline{S}_I^{(i)} = - \overline{m}^{(i)}\ddot{\overline{u}}^{(i)}$$

donde el superíndice i se refiere al i-ésimo elemento. Estas ecuaciones elementales se pueden combinar en una matriz.

$$\overline{S}_I = - \overline{m}\ \ddot{\overline{u}}$$

donde

$$\bar{S}_I = \{S_I^{(1)} \; S_I^{(2)} \quad \ldots \quad S_I^{(i)} \; \ldots \quad \}$$

$$\bar{m} = \lceil \bar{m}^{(1)} \; \bar{m}^{(2)} \quad \ldots \quad \bar{m}^{(i)} \; \ldots \quad \rfloor$$

$$\ddot{\bar{u}} = \{\ddot{\bar{u}}^{(1)} \; \ddot{\bar{u}}^{(2)} \quad \ldots \quad \ddot{\bar{u}}^{(i)} \; \ldots \quad \}$$

En adición a las matrices de masas equivalentes $\bar{m}$, pueden existir masas reales concentradas en los puntos nodales; estas masas se asignarán a la matriz diagonal $\bar{m}_c$ cuyo orden es igual al del número de desplazamientos U.

Ahora, al introducir los desplazamientos virtuales

$$\delta\bar{u} = A\delta U$$

e igualar el trabajo virtual de las fuerzas de inercia, se obtiene

$$\delta U^T(-M\ddot{U}) = \delta\bar{u}^T(-\bar{m}\;\ddot{\bar{u}}) + \delta U^T(-\bar{m}_c\ddot{U})$$

donde M es la matriz de masas equivalentes para la estructura completa. De las ecuaciones anteriores se tiene

$$\delta U^T(M - A^T\bar{m}A - \bar{m}_c)\ddot{U} = 0$$

de donde

$$M = A^T\bar{m}A + \bar{m}_c$$

los términos concentrados en la diagonal de la matriz m_c se suman directamente a los correspondientes en posición de la matriz $A^T\bar{m}A$.

4.2.3 Matriz de masas condensada.

Existe un número extenso de estructuras en que para fines dinámi cos solo se requiere conocer el desplazamiento en puntos muy específicos; la parte central de una losa y el centro del claro de una trabe, son dos ejemplos dentro de los muchos existentes. Esto lleva a la necesidad de reducir el orden de la matriz de masas equivalente, mediante lo que se conoce como condensación de grados de libertad.

Esta condensación de la matriz de masas se puede realizar aplicando el principio del trabajo virtual; para ello como primer paso, se particiona a la matriz de rigideces, K, y a los desplazamientos.

$$K = \begin{bmatrix} K_{I,I} & K_{I,II} \\ K_{II,I} & K_{II,II} \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} U_{I} \\ U_{II} \end{bmatrix}$$

El vector U_I se refiere a todos los desplazamientos que se desean mantener como grados de libertad, mientras que U_{II} es el vector de desplazamientos que si bien fueron empleados en el análisis estático, no se emplearán para formular una nueva matriz de masas equivalentes. Los desplazamientos U_{II} pueden determinarse de la ecuación de equilibrio estático $P = KU$ suponiendo que las fuerzas externas P_{II} que corresponden a los desplazamientos U_{II} son nulas. De ello se obtiene

$$U_{II} = - K^{-1}_{II,II} \quad K_{II,I} \quad U_{I}$$

Si se designa a M_c como la matriz de masas equivalentes para los desplazamientos U_I y se introducen los desplazamientos virtuales δU, se obtiene de la equivalencia del trabajo virtual de la repre sentación con dos masas para un sistema continuo que

$$\delta U_I^T(-M_c\ddot{U}_I) = \delta U^T(-M\ddot{U})$$

$$= -\begin{bmatrix}\delta U_I^T & \delta U_{II}^T\end{bmatrix} M \begin{bmatrix}\ddot{U}_I \\ \ddot{U}_{II}\end{bmatrix}$$

Al sustituir U_{II} se obtiene

$$\delta U_I^T M_c \ddot{U}_I = \delta U_I^T \begin{bmatrix} I - K_{I,II} & K_{II,II}^{-1} \end{bmatrix} M \begin{bmatrix} I \\ -K_{II,II}^{-1} & K_{II,I} \end{bmatrix} \ddot{U}_I$$

de donde

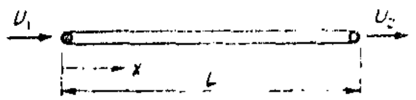
$$M_c = A_c^T M A_c$$

con

$$A_c = \begin{bmatrix} I \\ -K_{II,II}^{-1} & K_{II,I} \end{bmatrix}$$

A la matriz M_c se le conoce como la matriz condensada de masas.

a) Viga uniforme. Para aclarar algunas ideas considérese el caso de la viga uniforme que se indica en la figura.



El vector U está dado por

$$U = \{U_1 \quad U_2 \quad \dots \quad U_{12}\}$$

Al emplear la teoría elemental de flexión y torsión, y despreciar deformaciones por cortante se obtiene la matriz a(u = aU) como

$$\mathbf{a}^T \begin{array}{c|ccc|} & u_x & u_y & u_z \\ 1 & 1-\xi & 0 & 0 \\ 2 & 6(\xi-\xi^2)\eta & 1-3\xi^2+2\xi^3 & 0 \\ 3 & 6(\xi-\xi^2)\zeta & 0 & 1-3\xi^2-2\xi^3 \\ 4 & 0 & (1-\xi)l\zeta & -(1-\xi)l\eta \\ 5 & (1-4\xi+3\xi^2)l\zeta & 0 & (-\xi+2\xi^2-\xi^3)l \\ 6 & (-1+4\xi-3\xi^2)l\eta & (\xi-2\xi^2+\xi^3)l & 0 \\ 7 & \xi & 0 & 0 \\ 8 & 6(-\xi+\xi^2)\eta & 3\xi^2-2\xi^3 & 0 \\ 9 & 6(-\xi+\xi^2)\zeta & 0 & 3\xi^2-2\xi^3 \\ 10 & 0 & -l\xi\zeta & -l\xi\eta \\ 11 & (-2\xi+3\xi^2)l\zeta & 0 & (\xi^2-\xi^3)l \\ 12 & (2\xi-3\xi^2)l\eta & (-\xi^2+\xi^3)l & 0 \end{array}$$

donde

$$\xi = \frac{x}{\ell} \; ; \quad \eta = \frac{y}{\ell} \; ; \quad \zeta = \frac{z}{\ell}$$

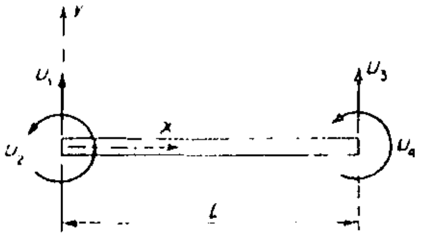
donde ℓ es la longitud del elemento.

Esta matriz se sustituye en la ecuación que define a la matriz de masas, m, y efectuando la integración en todo el volumen se obtiene

$$
\mathbf{m} = \rho A l
\begin{array}{c|cccccccccccc}
1 & \frac{1}{3} &&&&&&&&&&& \\
2 & 0 & \frac{13}{35} + \frac{6I_z}{5Al^2} &&&&&&&&&& \\
3 & 0 & 0 & \frac{13}{35} + \frac{6I_y}{5Al^2} &&&&&&&&& \\
4 & 0 & 0 & 0 & \frac{J_x}{3A} &&&&&&&& \\
5 & 0 & 0 & -\frac{11l}{210} - \frac{I_y}{10Al} & 0 & \frac{l^2}{105} + \frac{2I_y}{15A} &&&&&&& \\
6 & 0 & \frac{11l}{210} + \frac{I_z}{10Al} & 0 & 0 & 0 & \frac{l^2}{105} + \frac{2I_z}{15A} &&&&&& \\
7 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} &&&&& \\
8 & 0 & \frac{9}{70} \; \frac{6I_z}{5Al^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{13l}{420} - \frac{I_z}{10Al} & 0 & \frac{13}{35} + \frac{6I_z}{5Al^2} &&&& \\
9 & 0 & 0 & \frac{9}{70} - \frac{6I_y}{5Al^2} & 0 & -\frac{13l}{420} + \frac{I_y}{10Al} & 0 & 0 & 0 & \frac{13}{35} + \frac{6J_y}{5Al^2} &&& \\
10 & 0 & 0 & 0 & \frac{J_x}{6A} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{J_x}{3A} && \\
11 & 0 & 0 & \frac{13l}{420} - \frac{I_y}{10Al} & 0 & -\frac{l^2}{140} - \frac{I_y}{30A} & 0 & 0 & 0 & \frac{11l}{210} + \frac{I_y}{10Al} & 0 & \frac{l^2}{105} + \frac{2I_y}{15A} & \\
12 & 0 & -\frac{13l}{420} + \frac{I_z}{10Al} & 0 & 0 & 0 & -\frac{l^2}{140} - \frac{I_z}{30A} & 0 & \frac{11l}{210} - \frac{I_z}{10Al} & 0 & 0 & 0 & \frac{l^2}{105} + \frac{2I_z}{15A} \\
\hline
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12
\end{array}
$$

los términos I_x e I_z representan los momentos de inercia y J_x representa la inercia torsionante.

Si se quiere simplificar al caso de una viga en el plano, como se muestra en la figura



se puede demostrar que la matriz a está dada por

$$
\mathbf{a} = \frac{1}{1+\Phi_s}\begin{array}{c} \\ u_x \\ u_y \end{array}\left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 6(\xi-\xi^2)\eta & [-1+4\xi-3\xi^2+(1-\xi)\Phi_s]l\eta & 6(-\xi+\xi^2)\eta & (2\xi-3\xi^2+\xi\Phi_s)l\eta \\ 1-3\xi^2+2\xi^3+(1-\xi)\Phi_s & [\xi-2\xi^2+\xi^3+\frac{1}{2}(\xi-\xi^2)\Phi_s]l & 3\xi^2-2\xi^3+\xi\Phi_s & [-\xi^2+\xi^3-\frac{1}{2}(\xi-\xi^2)\Phi_s]l \end{array}\right]
$$

donde

$$
\phi_s = \frac{12EI}{GA_s\ell^2}
$$

se refiere a la contribución de la deformación por cortante. Al sustituir esta matriz a en la definición de la matriz de masas, m, se obtiene

$$
\frac{\rho Al}{(1+\Phi_s)^2}\begin{bmatrix} \frac{13}{35}+\frac{7}{10}\Phi_s+\frac{1}{3}\Phi_s^2 & & & \\ (\frac{11}{210}+\frac{11}{120}\Phi_s+\frac{1}{24}\Phi_s^2)l & (\frac{1}{105}+\frac{1}{60}\Phi_s+\frac{1}{120}\Phi_s^2)l^2 & & \\ \frac{9}{70}+\frac{3}{10}\Phi_s+\frac{1}{6}\Phi_s^2 & (\frac{13}{420}+\frac{3}{40}\Phi_s+\frac{1}{24}\Phi_s^2)l & \frac{13}{35}+\frac{7}{10}\Phi_s+\frac{1}{3}\Phi_s^2 & \\ -(\frac{13}{420}+\frac{3}{40}\Phi_s+\frac{1}{24}\Phi_s^2)l & -(\frac{1}{140}+\frac{1}{60}\Phi_s+\frac{1}{120}\Phi_s^2)l^2 & -(\frac{11}{210}+\frac{11}{120}\Phi_s+\frac{1}{24}\Phi_s^2)l & (\frac{1}{105}+\frac{1}{60}\Phi_s+\frac{1}{120}\Phi_s^2)l^2 \end{bmatrix}
$$

$$
+\frac{\rho Al}{(1+\Phi_s)^2}\left(\frac{r}{l}\right)^2\begin{bmatrix} \frac{6}{5} & & & \\ (\frac{1}{10}-\frac{1}{2}\Phi_s)l & (\frac{2}{15}+\frac{1}{6}\Phi_s+\frac{1}{3}\Phi_s^2)l^2 & & \\ -\frac{6}{5} & (-\frac{1}{10}+\frac{1}{2}\Phi_s)l & \frac{6}{5} & \\ (\frac{1}{10}-\frac{1}{2}\Phi_s)l & (-\frac{1}{30}-\frac{1}{6}\Phi_s+\frac{1}{6}\Phi_s^2)l^2 & (-\frac{1}{10}+\frac{1}{2}\Phi_s)l & (\frac{2}{15}+\frac{1}{6}\Phi_s+\frac{1}{3}\Phi_s^2)l^2 \end{bmatrix}
$$

r representa el radio de giro de la sección transversal de la viga.

Si se desprecia la inercia rotacional y las deformaciones por cortante, la matriz de masas, m, se reduce a

$$
\mathbf{m} = \frac{\rho Al}{420}\begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l \\ 22l & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ 54 & 13l & 156 & -22l \\ -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix}
$$

4.2.4 Matriz de masas concentradas (Lumped-mass). La forma más simple de representar las propiedades de inercia es con masas concentradas; en esta idealización las masas concentradas se ubican en los puntos nodales en las direcciones de los grados de libertad; lo más usual es asignar masas a la traslación y la rotación. Las masas se calculan suponiendo que el material dentro del medio se comporta como un cuerpo rígido, lo cual excluye el acoplamiento dinámico, y conduce a una matriz diagonal de masas. Para un elemento con n grados de libertad se tiene

$$m = \left\lceil m_1 \quad m_2 \quad \dots \quad m_i \quad \dots \quad m_n \right\rfloor$$

donde m_i representa la masa para la dirección del desplazamiento U_i Así, para un elemento barra se tiene

$$m = \frac{\rho A \ell}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Conviene aclarar que con este tipo de representación la precisión en el análisis es menor que con la matriz de masas equivalentes.

4.3 VIBRACION DE SISTEMAS ELASTICOS

4.3.1 Análisis de vibraciones empleando la matriz de rigideces.

En forma matricial la ecuación de movimiento para un sistema elástico con varios grados de libertad se escribe como

$$M\ddot{U} + KU = P$$

En las estructuras reales siempre existe disipación de energía; debido a ello, deben incluirse las fuerzas disipativas en el análisis. Si estas fuerzas son proporcionales a la velocidad, el amortiguamiento es viscoso; en tal caso, la ecuación de movimiento es

$$M\ddot{U} + CU + KU = P$$

donde C es la matriz de amortiguamientos. Conviene aclarar que existen otros tipos de amortiguamiento.

a) Estructura no restringida (Libre). Se considerará primero el caso de una estructura con vibraciones libres y con amortiguamiento

$$M\ddot{U} + KU = 0$$

La solución para los desplazamientos se escribe como

$$U = \underset{\sim}{q}e^{i\omega t}$$

donde q es el vector de amplitudes de los desplazamientos, ω es la frecuencia circular y t es el tiempo. Al sustituir U en la ecuación de movimiento se obtiene

$$(-\omega^2 M + K)\underset{\sim}{q} = 0$$

La solución no trivial de esta ecuación se obtiene al hacer

$$|-\omega^2 M + K| = 0$$

Esta ecuación se llama la Ecuación Característica del sistema y es a partir de su solución que se conocen las frecuencias naturales; cuando se expande el determinante se obtiene el determinante característico de grado n en ω^2, cuyas raíces conducen a esas frecuencias. El número de frecuencias es igual al número de masas en la diagonal principal de la matriz M. Este número incluye a los valores nulos que representan movimientos de cuerpo rígido.

Para un valor de ω^2 obtenido de la ecuación característica, se puede obtener la ecuación $(-\omega^2 M + K)\underset{\sim}{q} = 0$ para conocer las amplitudes $\underset{\sim}{q}$. Debido a que la ecuación representa un conjunto de ecuaciones lineales homogéneas, sólo se conocerán valores relativos o relaciones de $\underset{\sim}{q}$.

Las raíces ω^2 solo se pueden obtener directamente si el determinante es de orden pequeño. En la mayoría de métodos numéricos se obtienen las frecuencias y las respectivas amplitudes de las masas. Estos métodos se pueden conocer en la bibliografía que aparece al final del capítulo; en algunos métodos se requiere que la ecuación se plantee como

$$(\omega^2 I - M^{-1}K)q = 0$$

que es la forma del problema de 'valores y vectores característicos'. Aquí conviene hacer notar que no es posible hacer la transformación similar postmultiplicando por K^{-1}/ω^2 en virtud de que la matriz de rigideces para una estructura sin restricciones, es singular.

En algunos casos prácticos la matriz de masas es singular; ello sucede cuando solo se toman en cuenta las masas asociadas con algunos grados de libertad. En tales casos, M, K y $\underset{\sim}{q}$ pueden particionarse como sigue

$$M = \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} K_{xx} & K_{xy} \\ K_{yx} & K_{yy} \end{bmatrix}$$

$$q = \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \end{bmatrix}$$

los subíndices x se refieren a direcciones de desplazamientos en las que están presentes las fuerzas de inercia, y el 'y' a la dirección donde no lo están. Al sustituir estas definiciones la ecuación de vibración libre, se obtiene

$$(\omega^2 I - M_c^{-1} K_c)q_x = 0$$

donde

$$K_c = K_{xx} - K_{xy}K_{yy}^{-1}K_{yx}$$

representa la matriz de rigideces condensada para las direcciones x.

b) Estructura restringida. Si la estructura está soportada de tal forma que se eliminen todos los posibles grados de libertad de cuerpo rígido, la matriz de rigideces será no singular. Esa matriz se obtiene de la matriz de rigideces K eliminando renglones y columnas que correspondan a los desplazamientos nulos asignados a esos grados de libertad. Si se define a esta matriz reducida como K_r y a su correspondiente matriz de masas como M_r, se puede escribir

$$(-\omega^2 M_r + K_r)q_r = 0$$

donde q_r se refiere a los grados de libertad no restringidos. Ahora, puesto que $|K_r| \neq 0$, se pueden hacer las operaciones algebraicas siguientes

$$(\frac{1}{\omega^2} I - K_r^{-1}M_r)\underset{\sim}{q}_r = 0$$

$$(\frac{1}{\omega^2} I - D)\underset{\sim}{q}_r = 0$$

con

$$D = K_r^{-1}M_r$$

ésta se conoce comúnmente como la 'matriz dinámica'. La ecuación característica es

$$\left| \frac{1}{\omega^2} I - D \right| = 0$$

Conviene aclarar que algunos métodos numéricos conducen a los primeros valores, más bajos, de ω; ello tiene ventaja cuando solo se requiere un número bajo de frecuencias y modos.

4.3.2 Propiedad de ortogonalidad de modos. Los modos $\underset{\sim}{q}$ obtenidos al resolver el problema de valores y vectores característicos pueden separarse en modos de cuerpo rígido p_0 y modos normales de vibración (modos elásticos) p_e, tal que

$$p_0 = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_w \end{bmatrix}$$

$$p_e = \begin{bmatrix} p_{w+1} & p_{w+2} & \cdots & p_{w+m} \end{bmatrix}$$

donde w representa el número de grados de libertad de cuerpo rígido no restringidos y m el de modos elásticos.

Si $\omega^2 \neq 0$ se puede escribir

$$(\frac{1}{\omega^2} K - M)\underset{\sim}{q} = 0$$

Al sustituir los modos elásticos se obtiene

$$\begin{array}{lcccl} \omega_{w+1}^{-2} & Kp_{w+1} & - & Mp_{w+1} & = 0 \\ \omega_{w+2}^{-2} & Kp_{w+2} & - & Mp_{w+2} & = 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ \omega_{w+m}^{-2} & Kp_{w+m} & & Mp_{w+m} & = 0 \end{array}$$

que se puede expresar como

$$Kp_e\Omega^{-2} - Mp_e = 0$$

donde

$$\Omega^{-2} = \begin{bmatrix} \omega_{w+1}^{-2} & \omega_{w+2}^{-2} & \cdots & \omega_{w+m}^{-2} \end{bmatrix}$$

Al premultiplicar por p_e^T Se obtiene

$$p_e^T K p_e \Omega^{-2} - p_e^T M p_e = 0$$

o

$$\mathcal{K}_e\Omega^{-2} = \mathcal{M}_e \qquad \text{(a)}$$

donde

$$\mathcal{K}_e = p_e^T K p_e \qquad \text{(b)}$$

representa a la matriz generalizada de rigideces y

$$\mathcal{M}_e = p_e^T M p_e \qquad \text{(c)}$$

a la matriz generalizada de masas para obtener los modos elásticos. Ambas matrices son simétricas.

Si se escribe a la matriz de la ec a) como

$$A\ D = S$$

siendo A y S simétricas y D diagonal, se pueden encontrar los elementos de S y $\mathcal{M}_e$ a partir de

$$s_{ij} = \sum_{r=1}^{m} a_{ir}d_{rj} = a_{ij}d_{jj}$$

$$s_{jj} = \sum_{r=1}^{m} a_{jr}d_{ri} = a_{ji}d_{ii}$$

puesto que

$$s_{ij} = s_{ji}$$

se debe tener

$$a_{ij}d_{jj} = a_{ji}d_{ii}$$

esto es cierto si A, esto es, $\mathcal{K}_e$, es diagonal y D, esto es, Ω^{-2}, es escalar; puesto que eso no es cierto, la conclusión es que la matriz A, y la matriz S, esto es, $\mathcal{M}_e$, deben ser diagonales. Se puede observar de las ecs b) y c) que los modos elásticos p_e son ortogonales con respecto a la matriz de rigideces K y a la de masas M.

Es interesante hacer un análisis de la ec b); si se escribe como

$$\frac{1}{2}\, p_e^T K P_e = \frac{1}{2}\, \mathcal{K}_e \tag{d}$$

se puede ver que KP_e representa una fuerza elástica generalizada para los modos p_e, y $\frac{1}{2}\, p_e^T KP_e$ representa el trabajo hecho por ellas. Puesto que $\mathcal{K}_e$ es una matriz diagonal, la ecuación anterior puede interpretarse como que el trabajo realizado por las fuerzas elásticas generalizadas de un modo que actúan sobre los desplazamientos en otro modo es igual a cero. Unicamente cuando las fuerzas actúan sobre los desplazamientos de su propio modo el trabajo es distinto a cero.

4.3.3 Vibración de sistemas amortiguados.

La ecuación de movimiento para un sistema estructural amortiguado, cuando vibra libremente, es

$$M\ddot{U} + C\dot{U} + KU = 0 \tag{e}$$

la solución es

$$U = qe^{pt}$$

donde p es un complejo. Al sustituir esto se obtiene

$$(p^2M + pC + K)\underset{\sim}{q} = 0$$

la cual tiene soluciones distintas a cero para $\underset{\sim}{q}$ si se cumple que

$$|p^2M + pC + K| = 0$$

El método de Duncan reduce estas ecuaciones a la forma normal; este método combina la igualdad

$$M\dot{U} - M\dot{U} = 0$$

con la ec e) para obtener

$$\begin{bmatrix} 0 & M \\ M & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{U} \\ \dot{U} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -M & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U} \\ U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(f)}$$

esta ecuación se puede escribir como

$$\mathcal{A}\dot{\mathcal{U}} + \mathcal{B}\mathcal{U} = 0$$

donde

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & M \\ M & C \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} -M & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{U} = \begin{bmatrix} \dot{U} \\ \dot{U} \end{bmatrix} \qquad \dot{\mathcal{U}} = \begin{matrix} \ddot{U} \\ \dot{U} \end{matrix}$$

Ahora si se tiene

$$\mathcal{U} = ve^{pt}$$

la ecuación de movimiento se transforma a

$$(p\mathcal{A} + \mathcal{B})v = 0$$

la cual está en la forma 'estándar' del problema de valores y vectores característicos.

4.3.4 Amortiguamiento crítico. Si se considera un grado de libertad, la ecuación de movimiento es

$$m\ddot{u} + c\hat{u} + ku = 0$$

si se supone que $p = -\mu + i\omega_d$

que al sustituirla conduce a

$$(\mu^2 m - \omega_d^2 m - \mu c + k) + i(\omega_d c - 2\mu\omega_d m) = 0$$

De la parte imaginaria se obtiene

$$\mu = \frac{c}{2m}$$

Al igualar a cero la parte real y emplear este valor de μ se obtiene

$$\begin{aligned} \omega_d^2 &= \frac{1}{m}(\mu^2 m - \mu c + k) \\ &= \frac{k}{m} - (\frac{c}{2m})^2 \\ &= \omega^2 - (\frac{c}{2m})^2 \end{aligned}$$

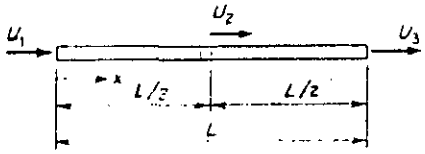
donde $\omega^2 = k/m$, es la frecuencia circular del sistema no amortiguado ($c = 0$).

Cuando la frecuencia circular amortiguada es nula, $\omega_d = 0$, el carácter oscilatorio desaparece y se presenta el régimen de movimiento amortiguado críticamente; en ese caso

$$c_{cr} = 2\sqrt{km} = 2m\omega$$

Si se presenta $\omega_d^2 < 0$, esto es, cuando $c > 2m\omega$, el movimiento está sobreamortiguado y no existirán oscilaciones; sin embargo, eso no ocurre en la mayoría de problemas estructurales

4.3.5 Una aplicación de interés. Se considera el caso de la vibración longitudinal de una barra para cuando no tiene restricción al movimiento y para cuando sí lo tiene. La idealización de la barra se presenta en la figura



Se han escogido dos elementos con tres desplazamientos; U_1, U_2 y U_3 Se obtendrán frecuencias y los modos empleando la matriz de rigidez.

a) Barra sin restricciones

Para esta barra formada por dos elementos

$$\mathbf{M} = \frac{\rho A L}{12}\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \mathbf{K} = \frac{2AE}{L}\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Al sustituir estas matrices en la ecuación de movimiento se obtiene

$$\left\{-\omega^2 \frac{A\rho L}{12}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} + \frac{2AE}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\right\}\mathbf{q} = 0$$

El determinante característico es

$$\begin{vmatrix} 1 - 2\mu^2 & -(1 + \mu^2) & 0 \\ -(1 + \mu^2) & 2(1 - 2\mu^2) & -(1 + \mu^2) \\ 0 & -(1 + \mu^2) & 1 - 2\mu^2 \end{vmatrix} = 0$$

con

$$\mu^2 = \frac{\omega^2 \rho L^2}{24E}$$

Al desarrollar el determinante se obtiene

$$6\mu^2(1 - 2\mu^2)(\mu^2 - 2) = 0$$

de donde

$$\mu_1^2 = 0 \qquad \omega_1^2 = 0 \qquad \omega_1 = 0$$

$$\mu_2^2 = \frac{1}{2} \qquad \omega_2^2 = \frac{12E}{\rho L^2} \qquad \omega_2 = 3.46\sqrt{E/\rho L^2}$$

$$\mu_3^2 = 2 \qquad \omega_3^2 = \frac{48E}{\rho L^2} \qquad \omega_3 = 6.92\sqrt{E/\rho L^2}$$

La primera frecuencia corresponde al movimiento de cuerpo rígido, mientras que ω_2 y ω_3 corresponden a los modos elásticos. Para este problema existe solución exacta y puede comprobarse con ella que los valores anteriores están un diez por ciento por arriba de ellos.

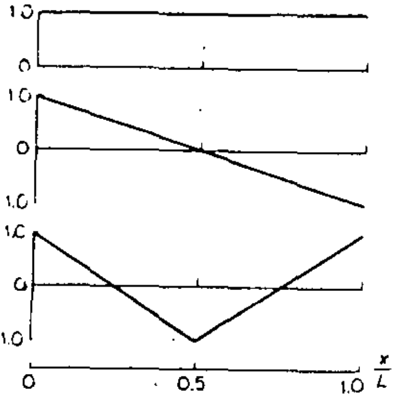
Para cada frecuencia se pueden obtener los valores relativos de $\underset{\sim}{q}$ empleando la ec c) con ello se determinan los modos p. Se puede demostrar fácilmente que para el modo de cuerpo rígido

$$p_0 = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{array} \end{array}$$

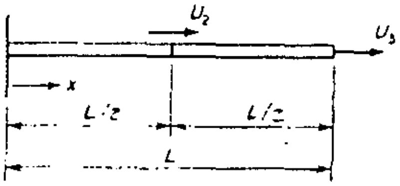
y para los dos modos elásticos

$$p_e = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

La representación de estos modos es la que se indica en la figura



b) Barra con restricciones. En la figura se indica esta barra



El desplazamiento $U_1 = 0$ representa la condición de apoyo del extremo izquierdo; para la barra formada con dos elementos se obtiene

$$K_r = \frac{2AE}{L}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_r = \frac{\rho AL}{12}\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Sustituyendo en la ecuación de equilibrio se obtiene

$$\left\{-\omega^2 \frac{\rho AL}{12}\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \frac{2AE}{L}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\right\}q_r = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2(1-2\mu^2) & -(1+\mu^2) \\ -(1+\mu^2) & 1-2\mu^2 \end{vmatrix} = 0$$

El desarrollo del determinante conduce a la ecuación característica

$$7\mu^4 - 10\mu^2 + 1 = 0$$

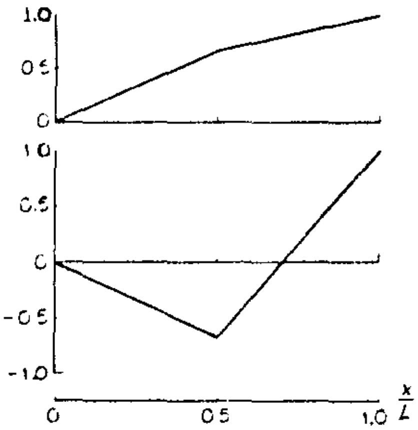
De aquí

$$\mu_1^2 = \tfrac{1}{7}(5 - 3\sqrt{2}) \qquad \omega_1 = 1.6114\sqrt{E/\rho L^2}$$
$$\mu_2^2 = \tfrac{1}{7}(5 + 3\sqrt{2}) \qquad \omega_2 = 5.6293\sqrt{E/\rho L^2}$$

Los valores de ω_1 y ω_2 son 2.6 y 19.5 porciento más altas que los valores exactos correspondientes. Los modos elásticos para esas frecuencias son

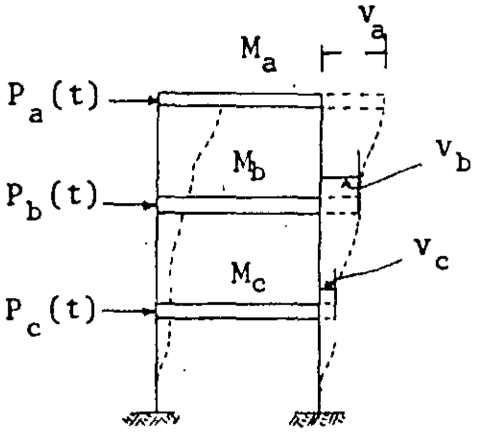
$$\mathbf{p}_r = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

la representación aparece en la figura siguiente



4.4 RESPUESTA DINAMICA DE EDIFICIOS CON COMPORTAMIENTO ELASTICO ANTE EXCITACION ARBITRARIA

En la figura se muestra una estructura típica para representar el comportamiento de un edificio; cuando en los niveles de piso se tienen losas infinitamente rígidas, en comparación con la de las columnas, la deformación de la estructura se debe esencialmente al efecto de la fuerza cortante en las columnas de entrepiso. A este tipo de estructura se les conoce como de cortante; es práctica común para efectos del análisis dinámico concentrar las masas en los niveles de piso. Con ello, el comportamiento de la estructura se puede definir al conocer los desplazamientos v_a, v_b y v_c



La ecuación de movimiento de cualquier piso se obtiene del equilibrio dinámico de fuerzas que actúan en el nivel, incluyendo las fuerzas de inercia, de amortiguamiento y elásticas que resultan del movimiento más las fuerzas aplicadas externamente.

En el caso del marco indicado, las ecuaciones de equilibrio son

$$F_{I_a} + F_{D_a} + F_{S_a} = P_a(t)$$

$$F_{I_b} + F_{D_b} + F_{S_b} = P_b(t)$$

$$F_{I_c} + F_{D_c} + F_{S_c} = P_c(t)$$

Las fuerzas de inercia se calculan con el producto de la masa concentrada en los niveles por su aceleración

$$F_{I_a} = M_a\ddot{v}_a$$

$$F_{I_b} = M_b\ddot{v}_b$$

$$F_{I_c} = M_c\ddot{v}_c$$

que en forma matricial se pueden representar como

$$\begin{bmatrix} F_{I_a} \\ F_{I_b} \\ F_{I_c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_a & 0 & 0 \\ 0 & M_b & 0 \\ 0 & 0 & M_c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{v}_a \\ \ddot{v}_b \\ \ddot{v}_c \end{bmatrix}$$

y para un sistema de más grados de libertad esto se puede escribir como

$$\underset{\sim}{F}_I = M\underset{\sim}{\ddot{v}}$$

Con este tipo de representación (parámetros concentrados) se obtiene una matriz de masas, M, diagonal; ello presenta una ventaja porque implica que no exista acoplamiento inercial.

Las fuerzas elásticas dependen de los desplazamientos del sistema y se pueden expresar convenientemente en función de los coeficientes de influencia

$$F_{S_a} = k_{aa}v_a + k_{ab}v_b + k_{ac}v_c$$

$$F_{S_b} = k_{ba}v_a + k_{bb}v_b + k_{bc}v_c$$

$$F_{S_c} = k_{ca}v_a + k_{cb}v_b + k_{cc}v_c$$

donde las k_{ij} son los coeficientes de influencia.

En forma matricial

$$\begin{bmatrix} F_{S_a} \\ F_{S_b} \\ F_{S_c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{aa} & k_{ab} & k_{ac} \\ k_{bb} & k_{bc} & k_{bc} \\ k_{ca} & k_{cb} & k_{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \end{bmatrix}$$

y en forma matricial para un número mayor de grados de libertad

$$\underset{\sim}{F}_S = K\underset{\sim}{v}$$

Las fuerzas disipativas pueden expresarse como el producto de coeficientes de influencia de disipación multiplicados por las velocidades en dirección de los grados de libertad. Existen diversos procedimientos para calcularlas; uno de ellos, quizá de los más recomendables sea con las series de Caughey. Por analogía con las fuerzas anteriores, siempre podrán expresarse matricialmente como

$$\underset{\sim}{F}_D = C\underset{\sim}{\dot{v}}$$

De lo anterior, la ecuación de equilibrio se puede expresar como

$$F_I + F_D + F_S = P(t)$$

o bien, en forma matricial

$$M\ddot{v} + C\dot{v} + Kv = P(t)$$

Como se ha discutido anteriormente, el problema de vibración libre cuando se considera que no hay amortiguamiento se expresa con la ecuación

$$M\ddot{v} + Kv = 0$$

la solución de ecuación homogénea es

$$v = \hat{v}\ \text{sen}\omega t$$

con aceleración dada por

$$\bar{v} = -\ \omega^2\hat{v}\ \text{sen}\omega t$$

$\hat{v}$ representa la amplitud del movimiento. Al sustituir en la ecuación de vibración libre se obtiene

$$-\omega^2 M\hat{v} + K\hat{v} = 0$$

o bien

$$K\hat{v} = \omega^2 M\hat{v}$$

Esta es la ecuación para obtener los valores y vectores característicos. La solución completa de esta ecuación para un sistema de N grados de libertad proporciona la frecuencia ω_n y la forma modal Φ_n para cada modo. Para el marco de la figura anterior, en forma matricial se ha obtenido para ciertas características estructurales

$$\underset{\sim}{\Phi} = \begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 & \Phi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.00 & 1.00 & 1.00 \\ 0.64 & -0.60 & -2.57 \\ 0.30 & -0.67 & 2.47 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\omega} = < \omega_1 \quad \omega_2 \quad \omega_3 > = < 14.5 \quad 31.2 \quad 46.1 > \text{, rad/seg}$$

a) Ecuaciones modales de movimiento. Las formas modales de vibración tienen dos propiedades de ortogonalidad; una de ellas con respecto a las masas y se expresa como

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \phi_{in} \phi_{im} = 0 \quad \text{, para } m \neq n$$

o en forma matricial como

$$\underset{\sim}{\Phi}_n^T M \underset{\sim}{\Phi}_m = 0 \text{ ,} \qquad \text{para } m \neq n$$

y la otra con respecto a las rigideces

$$\underset{\sim}{\Phi}_n^T K \underset{\sim}{\Phi}_m = 0 \text{ ,} \qquad \text{para } m \neq n$$

Puesto que hay N modos independientes de vibración para un sistema con N grados de libertad, cualquier forma desplazada puede expresarse en términos de las amplitudes de esas formas modales, considerándolas como coordenadas generalizadas de desplazamiento. En general, cualquier desplazamiento v_i puede expresarse como la suma de la contribución de cada modo

$$v_i = \sum_{n=1}^{N} \phi_{in} Y_n$$

donde Y_n es la amplitud del n-ésimo modo. En forma matricial esto se puede expresar como

$$\underset{\sim}{v} = \Phi \underset{\sim}{Y}$$

Al vector $\underset{\sim}{Y}$ se le llama frecuentemente vector de coordenadas generalizadas. La ecuación de movimiento se puede expresar en función de estas coordenadas como

$$M\Phi\underset{\sim}{\ddot{Y}} + C\Phi\dot{Y} + K\Phi Y = P(t)$$

si la premultiplicamos por el vector modal $\underset{\sim}{\Phi}_n$ y se aplican las condiciones de ortogonalidad se obtiene

$$\Phi_n^T M \Phi_n \ddot{Y}_n + \Phi_n^T C \Phi_n \dot{Y}_n + \Phi_n^T K \Phi_n Y_n = \Phi_n^T P(t)$$

En esta ecuación se ha supuesto que existe ortogonalidad de los modos con respecto a la matriz de amortiguamientos. Si se definen a la masa, amortiguamiento, rigidez y carga generalizadas del modo n como

$$M_n^* = \Phi_n^T M \Phi_n$$

$$C_n^* = \Phi_n^T C \Phi_n$$

$$K_n^* = \Phi_n^T K \Phi_n$$

$$P_n^*(t) = \Phi_n^T P(t)$$

la ecuación de equilibrio se puede escribir como

$$M_n^* \ddot{Y}_n + C_n^* \dot{Y}_n + K_n^* Y_n = P_n^*(t)$$

y si se admite que el amortiguamiento y rigidez generalizados se pueden calcular como

$$C_n^* = 2\xi_n \omega_n M_n^*$$

$$K_n^* = \omega_n^2 M_n^*$$

entonces se tiene

$$\ddot{Y}_n + 2\xi_n \omega_n Y_n + \omega_n^2 Y_n = \frac{P_n^*(t)}{M_n^*}$$

Esta ecuación indica que la ecuación de movimiento de cualquier modo n del sistema de varios grados de libertad es equivalente a la ecuación de un oscilador simple con un grado de libertad.

b) Respuesta sísmica. El análisis dinámico de los sistemas con varios grados de libertad se reduce a la solución numérica de la ecuación anterior para cada modo; la respuesta total se obtiene superponiendo efectos. Para excitación sísmica, la carga efectiva que actúa en cada nivel de la estructura, es igual al producto de la masa concentrada en el nivel por la aceleración del terreno; para cualquier nivel, se tiene

$$P_{i_{eff}}(t) = M_i \ddot{v}_g(t)$$

El vector completo de carga se obtiene multiplicando la matriz de masas por la aceleración del terreno

$$\underset{\sim}{P}_{eff}(t) = MI\ddot{v}_g(t)$$

donde I representa un vector unitario de dimensión N.

con ello, la carga generalizada resulta

$$P^*_{eff}(t) = \Phi^T_n M I \ddot{v}_g(t)$$

$$= \mathcal{L}_n \ddot{v}_g(t)$$

donde $\mathcal{L}_n$ es el factor de participación sísmica del modo n.

La ecuación de equilibrio es

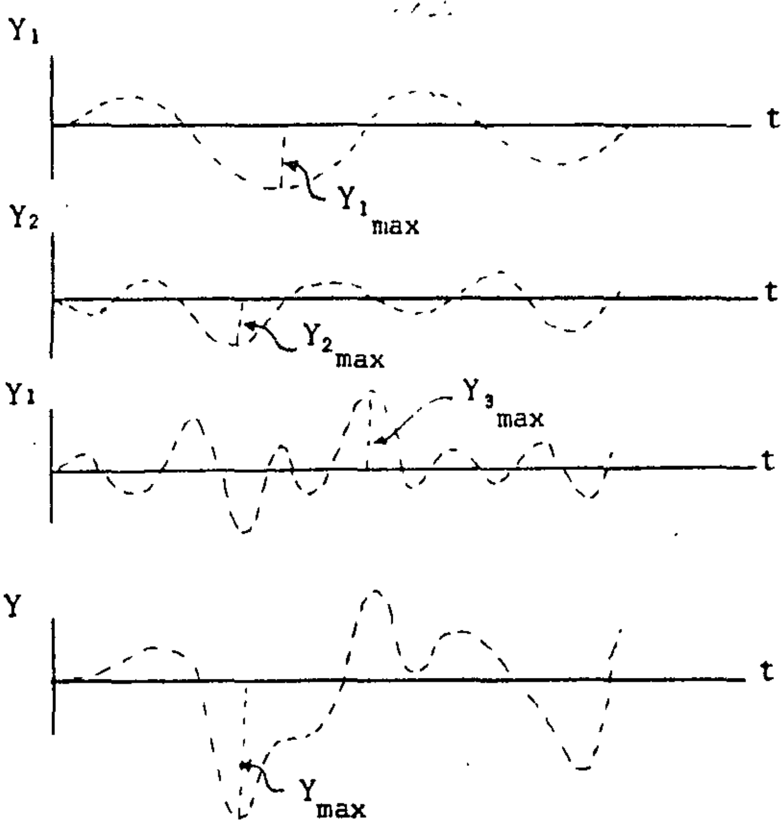
$$\ddot{Y}_n + 2\xi_n \omega_n \dot{Y}_n + \omega_n^2 Y_n = \frac{\mathcal{L}_n}{M^*_n} \ddot{v}_g(t)$$

La respuesta del sistema para el modo n y en cualquier instante se puede obtener empleando la integral de Duhamel, con lo cual

$$Y_n(t) = \frac{\mathcal{L}_n}{M^*_n} \frac{1}{\omega_n} \int_o^t \ddot{v}_g(\tau) e^{-\xi_n \omega_n (t-\tau)} \operatorname{sen}\omega_n (t-\tau) d\tau$$

El desplazamiento completo se obtiene superponiendo la contribución de todos los modos; una solución aproximada se puede lograr al tomar en cuenta la contribución de solo los primeros modos. En la mayoría de estructuras ello conduce a una solución aproximada que es prácticamente la misma que la que se obtiene con la contribución de todos los modos.

Para la combinación de la respuesta debe tenerse presente que por cada modo los máximos de la respuesta no ocurren al mismo tiempo; esto se indica, para los desplazamiento, en las figuras siguientes



Un criterio de combinación de las respuestas modales que se basa en consideraciones probabilísticas, es el conocido como 'raíz cuadrada de la suma de cuadrados' Para los desplazamientos esto se expresa como

$$\underset{\sim}{v} = \sqrt{\underset{\sim}{v}_i^2} \; ; \; i = 1, \ldots N$$

en edificios con características regulares en planta y elevación es común emplear solo los tres primeros modos.

4.5 METODOS PARA CALCULAR VALORES Y VECTORES

4.5.1 METODO DE JACOBI

En los problemas de vibración libre que se tienen en dinámica estructural, se requiere resolver un sistema de ecuaciones que matricialmente se expresa como

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

o bien

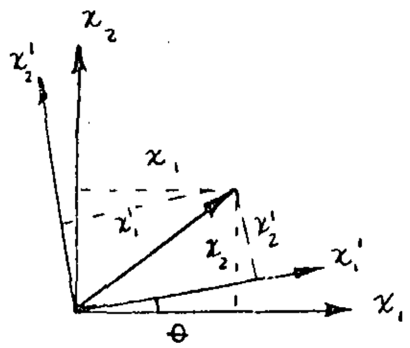
$$A \qquad x = \Lambda \qquad x$$

con A y Λ arreglos matriciales.

El problema consiste en obtener un valor de λ (valor característico) y su correspondiente vector x (vector característico); para ello, en el método de Jacobi se aplican transformaciones sucesivas para llegar a la identidad

$$\begin{bmatrix} a'_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a'_{22} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a'_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix}$$

Las transformaciones básicas que se emplean son las siguientes



$$x_1 = x'_1 \cos\theta - x'_2 \operatorname{sen}\theta$$
$$x_2 = x'_1 \operatorname{sen}\theta + x'_2 \cos\theta$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix}$$

$$x = T\,x'$$

Al sustituir esta transformación se tiene

$$A T x' = \lambda T x'$$

Al premultiplicar por T^T se obtiene

$$T^T A T x' = \lambda T^T T x'$$

Se puede mostrar que $T^T T = I$, con lo cual

$$T^T A T x' = \lambda x'$$

Ahora, el objetivo consiste en diagonalizar la matriz

$$B = T^T A T x'$$

Con los valores de la matriz T, resulta

$$B = \begin{bmatrix} a_{11}\cos^2\theta + 2a_{12}\,sen\theta\cos\theta + a_{22}\,sen^2\theta & a_{12}(\cos^2\theta - sen^2\theta) + \cos\theta\, sen\theta\,(a_{22}-a_{11}) \\ a_{12}(\cos^2\theta - sen^2\theta) + \cos\theta\, sen\theta\,(a_{22}-a_{11}) & a_{11}\,sen^2\theta - 2a_{12}\,sen\theta\cos\theta + a_{22}\cos^2\theta \end{bmatrix}$$

Para que el elemento b_{12} sea nulo se requiere que

$$a_{12}(\cos^2\theta - sen^2\theta) + \cos\theta\, sen\theta\,(a_{22}-a_{11}) = 0$$

lo cual se logra con

$$2\theta = \text{angtan}\ \frac{2a_{12}}{a_{11}-a_{22}}$$

Este argumento hace que el elemento b_{21} también sea nulo; con ello se logra que la matriz B sea diagonal.

La transformación empleada ha servido para eliminar a un elemento fuera de la diagonal principal y al elemento simétrico; en el caso general, para eliminar a todos los elementos fuera de la diagonal se requieren m transformaciones

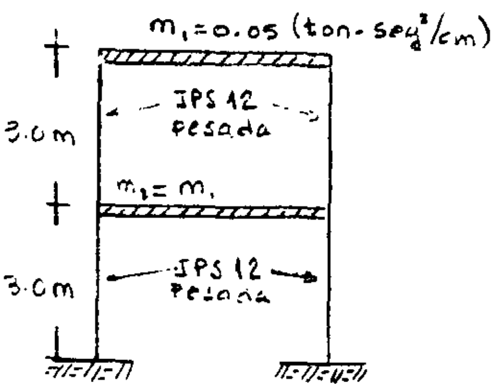
$$T_m^T \cdots T_3^T T_2^T T_1^T A\, T_1 T_2 T_3 \ \cdots\ T_m$$

se puede demostrar que este producto de matrices converge a una matriz

Para la aplicación práctica del método de Jacobi se sugiere seleccionar el término fuera de la diagonal con mayor valor absoluto; la posición de este término que se eliminará, fija el término $-\text{sen}\,\theta$ en la matriz T. Esta se forma al poner el término $\text{sen}\,\theta$ simétricamente opuesto al $-\text{sen}\,\theta$, los términos $\cos\theta$ en la diagonal formando una matriz cuadrada con los términos $\text{sen}\,\theta$ y luego valores unitarios en el resto de la diagonal. Todos los demás términos son nulos.

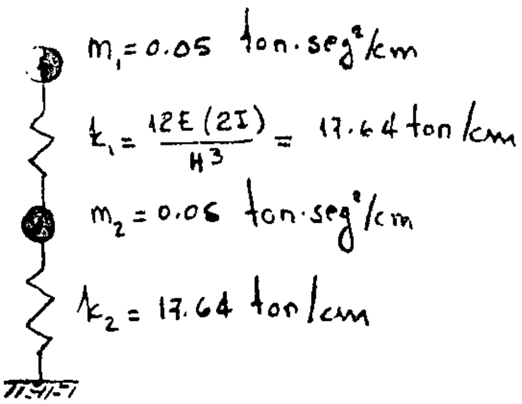
$$
T_k = \begin{array}{cccccccc|c}
 & & & \multicolumn{2}{c}{\text{columna}} & & & & \\
 & & & i & j & & & & \\
1 & & & \vdots & \vdots & & & & \\
 & \ddots & & \vdots & \vdots & & & & \\
 & & 1 & \vdots & \vdots & & & & \text{Renglón} \\
 & & & \cos\theta & -\text{sen}\,\theta & - - - & & & i \\
 & & & \text{sen}\,\theta & \cos\theta & - - - & & & j \\
 & & & & & 1 & & & \\
 & & & & & & \ddots & & \\
 & & & & & & & 1 &
\end{array}
$$

Para aclarar algunas ideas se presenta una aplicación



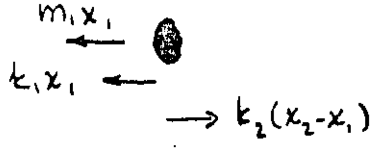
ESTRUCTURA

⇒

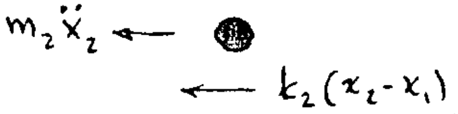


SISTEMA EQUIVALENTE

Las ecuaciones de equilibrio se pueden obtener de los diagramas de cuerpo libre



$$m_1\ddot{x}_1 + k_1x_1 - k_2(x_2-x_1) = 0$$



$$m_2\ddot{x}_2 + k_2(x_2-x_1) = 0$$

Matricialmente

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.05 & 0 \\ 0 & 0{,}05 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35.28 & -17.64 \\ -17.64 & 17.64 \end{bmatrix}$$

La matriz de transformación es

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0.618 \\ -0.618 & 1 \end{bmatrix}$$

Al aplicarla a las matrices K y M se obtiene

$$T_1^T K T_1 = \begin{bmatrix} 63.82 & -7.6\times10^{-4} \\ -5.3\times10^{-3} & 9.31 \end{bmatrix}$$

$$T_1^T M T_1 = \begin{bmatrix} 0.069 & 0 \\ 0 & 0.069 \end{bmatrix}$$

Se puede refinar la aplicación del método al fijar un nivel de convergencia; para ello se puede proceder como se indica a continuación. Se fija una tolerancia s y se verifica si los términos de la matriz diagonal cumplen con la desigualdad

$$\frac{\left| b_{ii}^{(l+1)} - b_{ii}^{(l)} \right|}{b_{ii}^{(l+1)}} \leq 10^{-s} ; \quad i = 1, \ldots, n$$

$$\left| \frac{\left(b_{ij}^{(l+1)} \right)^2}{b_{ii}^{(l+1)} \, b_{jj}^{(l+1)}} \right|^{1/2} \leq 10^{-s} ; \quad i, j ; \quad i < j$$

Con ello se obtiene

$$\lambda_1^{anterior} = \frac{k_{11}}{m_{11}} = \frac{35.28}{0.05} = 705.6$$

$$\lambda_1^{último} = \frac{63.82}{0.069} = 924.93$$

$$\frac{|924.93 - 705.6|}{924.93} = 0.237 > 10^{-12}$$

No converge!

Se debe hacer otra iteración. Conviene hacer una nota aclaratoria para esta segunda iteración.

Al desarrollar los productos $T_k^T K_k T_k$ y $T_k^T M_k T_k$ (con $K_{k+1} = T_k^T K_k T_k$ y $M_{k+1} = T_k^T M_k T_k$) e igualar a cero los términos K_{ij} y m_{ij} de las matrices transformadas, se tienen dos ecuaciones para los términos α y γ de la matriz generalizada de transformación

$$T_k = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & \alpha & & \\ & & \gamma & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

donde α y γ son seleccionados de tal forma que se reduzca a cero el elemento (i,j) en las matrices K_k y M_k, simultáneamente. En este enfoque se parte del hecho que la matriz de masas no es diagonal $(M \neq I)$, entonces con las transformaciones sucesivos se tiene

$$k_{k+1} \longrightarrow \Lambda$$

$$M_{k+1} \longrightarrow I ,$$ para cuando el subíndice $k \to \infty$

Las ecuaciones para α y γ son

$$\alpha k_{ii} + (1 + \alpha\gamma) k_{ij} + \gamma k_{jj} = 0$$

$$\alpha m_{ii} + (1 + \alpha\gamma) m_{ij} + \gamma m_{jj} = 0$$

De donde

$$\gamma = -\frac{\bar{k}_{ii}}{x} \quad ; \qquad \alpha = \frac{\bar{k}_{jj}}{x}$$

con

$$x = \frac{\bar{k}}{2} + \text{signo}(\bar{k}) \sqrt{\underbrace{\left(\frac{\bar{k}}{2}\right)^2 + \bar{k}_{ii}\bar{k}_{jj}}_{A}}$$

$$\bar{k}_{ii} = k_{ii} m_{ij} - m_{ii} k_{ij}$$

$$\bar{k}_{jj} = k_{jj} m_{ij} - m_{jj} k_{ij}$$

$$\bar{k} = k_{ii} m_{jj} - k_{jj} m_{ii}$$

Las expresiones son válidas para una matriz de masas M positiva definida llena o en banda; en ese caso $x \neq 0$ ya que A es > 0.

Con los datos del problema en cuestión, para la segunda iteración se tiene

$$\bar{k}_{11} = 5.24 \times 10^{-5} \; ; \quad \bar{k}_{22} = 5.24 \times 10^{-5} ; \quad \bar{k} = 3.76$$

$$x = 3.76 \; ; \quad \gamma = -1.39 \times 10^{-5} \; ; \quad \alpha = 1.39 \times 10^{-5}$$

$$T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1.39 \times 10^{-5} \\ -1.39 \times 10^{-5} & 1 \end{bmatrix}$$

Con lo cual

$$T_2^T k_2 T_2 = \begin{bmatrix} 63.82 & 0 \\ 0 & 9.31 \end{bmatrix} \; ; \qquad T_2^T M_2 T_2 = \begin{bmatrix} 0.069 & 0 \\ 0 & 0.069 \end{bmatrix}$$

La verificación del grado de convergencia se hace de la siguiente manera

$$\lambda_1^{ant.} = \lambda_1^{último} = \frac{63.82}{0.069} = 924.93$$

$$\lambda_2^{ant.} = \lambda_2^{último} = 134.93$$

La relación de convergencia proporciona un valor cero para ambos casos

$$\frac{|924.93 - 924.93|}{924.93} = 0 < 10^{-12}$$

$$\frac{|134.93 - 134.93|}{134.93} = 0 < 10^{-12}$$

Finalmente, se obtiene

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 = \frac{63.82}{0.069} = 924\ 93 & 0 \\ 0 & \lambda_2 = \frac{9.31}{0.069} = 134.93 \end{bmatrix}$$

de donde las frecuencias y periodos fundamentales serán

$$\omega_2 = 30.41 \text{ rad/seg}^2 ; \qquad T_2 = \frac{2\pi}{\omega_1} = 0.21 \text{ seg}$$

$$\omega_1 = 11.62 \text{ rad/seg}^2 ; \qquad T_1 = 0.54 \text{ seg}$$

Siempre debe cumplirse que $\omega_1 < \omega_2 \ldots$ y $T_1 > T_2 \ldots$

Las formas modales se obtienen del producto de las transformaciones

$$\Phi = T_1 \, T_2 \, . \, . \, . \, T_m$$

Para el caso en que $M \neq I$ esto se modifica

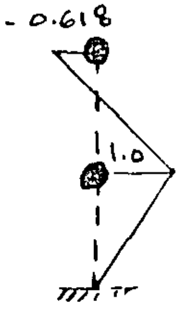
$$\Phi = T_1 T_2 \ \operatorname{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{M}}\right)$$

Con ello se obtiene

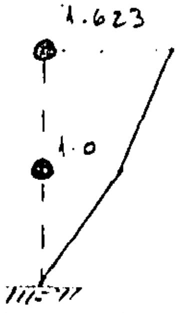
$$\Phi = \begin{bmatrix} 0.033 & 0.053 \\ -0.0204 & 0.086 \end{bmatrix}$$

que normalizada toma la forma

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1.0 & 1.0 \\ -0.618 & 1.623 \end{bmatrix}$$



Modo 2



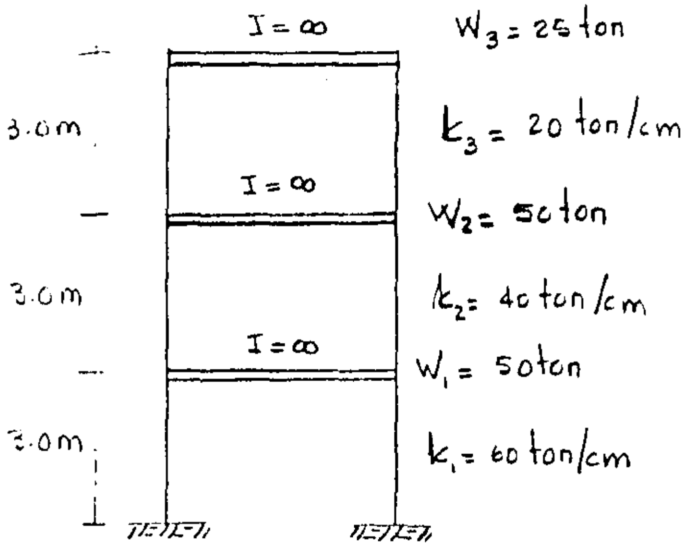
Modo 1

1.5.2 METODO DE STODOLA- VIANELLO

En el caso general este método consiste en resolver las ecuaciones homogéneas de equilibrio por iteración; el procedimiento se puede resumir a los siguientes pasos: 1. Proponer una forma característica, 2. Emplear una ecuación de equilibrio y resolverla para la frecuencia ω. 3. Utilizar los (n-1) ecuaciones restantes para una nueva forma característica, lo que implica resolver las (n-1) "a" en términos de la n-esima "a", 4. Con la nueva forma obtenida, realizar los calculos del paso 1 al 3 hasta lograr convergencia. Esta se logra cuando la forma característica en ciclos consecutivos coincide.

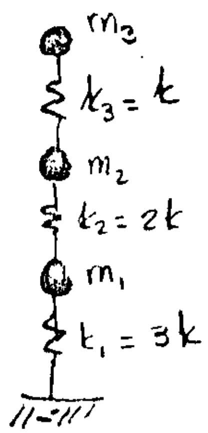
El procedimiento converge al mayor o menor modo de vibración dependiendo de la forma de la ecuación de movimiento. Después de obtenido el primer modo se obtienen los restantes para lo cual, en cada modo, se va eliminando una ecuación al emplear la condición de ortogonalidad.

Para aclarar algunas ideas se presenta un ejemplo.



$$M = \frac{1}{g}\begin{bmatrix} 50 & & \\ & 50 & \\ & & 25 \end{bmatrix}$$

La idealización de este marco rígido empleando el método de parámetros concentrados es la siguiente



con $k = 20$ ton/cm

La ecuación de equilibrio en vibración libre es

$$M\ddot{x} + kx = 0$$

cuya solución se puede expresar como

$$x = z\,\varphi(t)$$
$$\ddot{x} = -\omega^2 z\,\varphi(t)$$

con z = vector que da la forma de la vibración ; $\varphi(t)$ = función armónica del tiempo y ω = frecuencia natural

Con la solución indicada se obtiene

$$-\omega^2\varphi(t)Mz + \varphi(t)kz = 0$$

de donde

$$\omega^2 Mz = kz$$

o bien

$$K^{-1}Mz = \frac{z}{\omega^2}$$

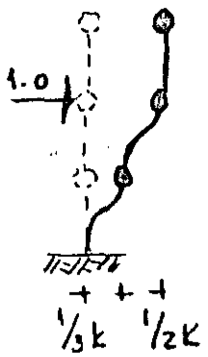
Debe recordarse que la inversa de la matriz de rigideces, K, es igual a la matriz de flexibilidades.

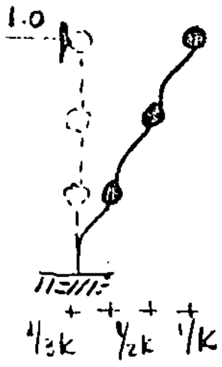
Para calcular la matriz de flexibilidades debe tenerse en cuenta que la estructura en cuestión es del tipo de 'cortante', motivo por el cual el desplazamiento de entrepiso se calcula como

$$\Delta_i = V_i / k_i$$

donde V_i es el cortante de entrepiso.

Al aplicar fuerzas unitarias en la dirección de los grados de libertad se tiene





De aquí se obtiene

$$F = \left[\begin{array}{c|c|c} 1/3k & 1/3k & 1/3k \\ \hline 1/3k & 1/3k + 1/2k & 1/3k + 1/2k \\ \hline 1/3k & 1/3k + 1/2k & 1/3k + 1/2k + 1/k \end{array}\right]; \quad \text{matriz de flexibilidades}$$

Al sustituir datos

$$F = 0.05 \begin{bmatrix} 0.333 & 0.333 & 0.333 \\ 0.333 & 0.833 & 0.833 \\ 0.333 & 0.833 & 1.833 \end{bmatrix}; \quad cm/ton$$

Con ello

$$K^{-1}M = 0.001275 \begin{bmatrix} 0.666 & 0.666 & 0.333 \\ 0.666 & 1.666 & 0.833 \\ 0.666 & 1.666 & 1.833 \end{bmatrix}$$

Con lo cual, si se hace $\alpha = \omega^2 (0.001275)$, el problema queda planteado como

$$A z = \frac{1}{\alpha} z \qquad (I)$$

donde $A = K^{-1}M$

El método de Stodola - Vianello se puede resumir diciendo que consiste en resolver iterativamente la ec (I), hasta lograr que en dos ciclos consecutivos el vector z supuesto y él z calculado coincidan.

Si se escogen

$$B = \begin{bmatrix} 0.666 & 0.666 & 0.333 \\ 0.666 & 1.666 & 0.833 \\ 0.666 & 1.666 & 1.833 \end{bmatrix} \quad y \quad z_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

De la multiplicación de BZ se obtiene

$$BZ = \begin{bmatrix} 1.667 \\ 3.160 \\ 4.167 \end{bmatrix}$$

Por conveniencia se normaliza el vector al valor 4.167, que corresponde a $\frac{1}{\alpha}$; así, se obtiene el nuevo vector Z

$$Z_2 = \begin{bmatrix} 0.40 \\ 0.76 \\ 1.00 \end{bmatrix}$$

Con este vector y la matriz B, se obtiene

$$BZ_2 = \begin{bmatrix} 1.108 \\ 2.367 \\ 3.367 \end{bmatrix}$$

Al normalizar con $\frac{1}{\alpha} = 3.367$, se obtiene

$$Z_3 = \begin{bmatrix} 0.328 \\ 0.704 \\ 1.000 \end{bmatrix}$$

De nuevo

$$BZ_3 = \begin{bmatrix} 1.02 \\ 2.224 \\ 3.224 \end{bmatrix}$$

Con $\frac{1}{\alpha} = 3.224$ se obtiene

$$Z_4 = \begin{bmatrix} 0.317 \\ 0.690 \\ 1.000 \end{bmatrix}; \qquad BZ_4 = \begin{bmatrix} 1.01 \\ 2.19 \\ 3.19 \end{bmatrix}$$

Con $\frac{1}{\alpha} = 3.19$

$$Z_4 = \begin{bmatrix} 0.315 \\ 0.685 \\ 1.000 \end{bmatrix};$$ se acepta y termina la iteración

Con $\frac{1}{\alpha} = 0.319$ se obtiene

$$\omega_1^2 = 246 \, (\text{rad/seg})^2$$

$$\omega_1 = 15.65 \text{ rad/seg} \longrightarrow T_1 = 0.4 \text{ seg}$$

Para obtener las características del segundo modo se toma en cuenta que

$$Z_1^T M Z = 0$$

Al sustituir datos

$$Z_1^T M Z = \begin{bmatrix} 0.315 & 0.685 & 1.00 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = 0$$

de donde

$$0.63 Z_1 + 1.37 Z_2 + Z_3 = 0$$

$$Z_3 = -0.63 Z_1 - 1.37 Z_2$$

al sustituir en la ec I se obtiene

$$\begin{bmatrix} 0.457 & 0.209 \\ 0.143 & 0.527 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\alpha} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

al suponer que $Z_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ se obtiene

$$B = A Z = \begin{bmatrix} 0.666 \\ 0.670 \end{bmatrix} \Longrightarrow Z_2 = \begin{bmatrix} 0.995 \\ 1.000 \end{bmatrix}$$, se acepta

Con los valores de Z_2

$$Z_3 = -0.63(1) - 1.37(1) = -2$$

finalmente, la configuración del segundo modo para las tres masas es

$$Z_2 = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 1.0 \\ -2.0 \end{bmatrix}$$

Con $\frac{1}{\alpha} = 0.67$ se obtiene

$$\omega_2 = 34.3 \text{ rad/seg} \quad , \quad T_2 = 0.183 \text{ seg}$$

Para obtener las características del tercer modo de nuevo se emplean las propiedades de ortogonalidad; así

$$Z_2^T M Z = [-0.5 \quad 0.5 \quad 1.0] \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$$

de donde

$$z_3 = z_1 + z_2$$

de la condición de ortogonalidad del segundo modo se obtuvo

$$z_3 = -0.63 z_1 - 1.37 z_2$$

de estas dos ecuaciones se obtiene

$$z_1 = -1.46 z_2$$

si arbitrariamente se hace $z_2 = 1$, se tiene $z_1 = -1.46$ y con ello $z_3 = -0.46$ con lo que

$$Z_3 = \begin{bmatrix} -1.46 \\ 1.00 \\ -0.46 \end{bmatrix} \quad ; \quad Z_3 = \begin{bmatrix} 3.18 \\ -2.18 \\ 1.00 \end{bmatrix}$$

al sustituir este vector en la ec I se obtiene α, ω_3 y T_3. De la primera ecuación

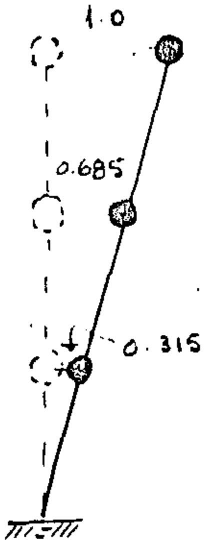
$$\frac{2}{3}(3.18) + \frac{2}{3}(-2.18) + \frac{2}{3}(1.0) = \frac{1}{\alpha}(3.18)$$

de aquí

$$\alpha = 0.418$$

$$\omega_3 = 43.3 \text{ rad/seg} \quad \text{y} \quad T_3 = 0.145 \text{ seg}$$

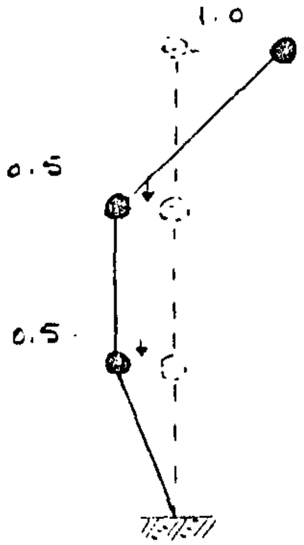
La representación gráfica de los modos de vibrar es la siguiente



PRIMER MODO

$\omega_1 = 15.65$ rad/seg

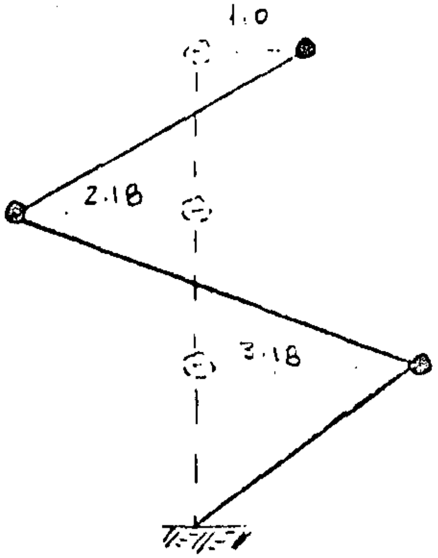
$T_1 = 0.4$ seg



SEGUNDO MODO

$\omega_2 = 34.3$ rad/seg

$T_2 = 0.183$ seg



TERCER MODO

$\omega_3 = 43.3$ rad/seg

$T_3 = 0.145$ seg

4.6 BIBLIOGRAFIA

4.6.1 Hurty, W C, y Rubinstein, M F, Dynamics of structures, Prentice Hall, 1964

4.6.2 Fertis, D G, Dynamics and vibration of structures, John Wiley & Sons, 1973

4.6.3 Clough, R W, y Penzien, J, Dynamics of structures, McGraw Hill, 1975

4.6.4 Paz, M, Structural dynamics. Theory and computation, Van Nostrand Reinhold, Co., 1980

4.6.5 Carnahan, B, Luther, H A, y Wilkes, J O, Applied numerical methods, John Wiley & Sons, 1969

DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.

MATEMATICAS APLICADAS A LA INGENIERIA ESTRUCTURAL

INTRODUCCION AL METODO DEL ELEMENTO FINITO

Dr. Víctor Hugo Muciño Quintero

MARZO, 1985

4. MODELACION MATEMATICA DE SISTEMAS

4.1. Introducción al Cálculo de Variaciones

Existe una gran variedad de sistemas físicos que pueden ser descritos desde un punto de vista variacional y en este contexto, el manejo de cálculo de variaciones se considera como una herramienta matemática que permite la formulación de un sistema mediante conceptos matemáticos que pueden relacionarse directamente con aspectos físicos del mismo.

El problema clásico de cálculo de variaciones consiste en encontrar los valores estacionarios de un funcional el cual se define como una integral definida cuyo valor numérico depende de la función integrada y para encontrar los valores estacionarios de dicha integral es necesario encontrar la función que sustituida en el integrando correspondiente ceda un valor extremo, es decir mínimo o máximo.

Sea el funcional I definido por:

$$I = \int_a^b F(x)\,dX \qquad (4.1.1)$$

Cada función F(x) que sea sustituida en esta ecuación resulta en un valor numérico de I diferente y aquella función F*(x) que resulte en un valor mínimo o máximo, hace el funcional I estacionario.

Es conveniente pensar en el paralelismo que existe entre el concepto de encontrar los valores estacionarios de un funcional y de una función algebráica. Cuando se busca el mínimo o máximo de una función definida como

$$y = f(x) \qquad (4.1.2)$$

Ciertas condiciones deben ser satisfechas, como lo son que la función sea continua en el rango de interés, que sea deribable dos veces en dicho rango y que además la primera derivada de la función con respecto a la variable sea cero es decir

$$y' = \frac{dy}{dx} = 0 \tag{4.1.3}$$

El resultado es un valor de la variable independiente para el cual la función f(x) es estacionario.

Entonces, cuando se extremiza una <u>función</u> se encuentra un <u>valor</u> de la variable independeinte, más cuando se extremiza un funcional se encuentra uan <u>función</u>. La condición suficiente y necesaria para extremizar dicho funcional consiste en que su primera variación sea cero; es decir:

$$\delta I = \delta \int_a^b F(x)\,dx \tag{4.1.4}$$

Esta condición es análoga a la condición de la ecuación (4.1.3). Un ejemplo de aplicación del concepto variacional es el problema de encontrar la trayectoria que debe seguir una partícula de masa m para moverse desde el punto A al punto B en un plano, bajo la acción de la gravedad de tal forma que el tiempo de recorrido sea mínimo. Figura (4.1.1).

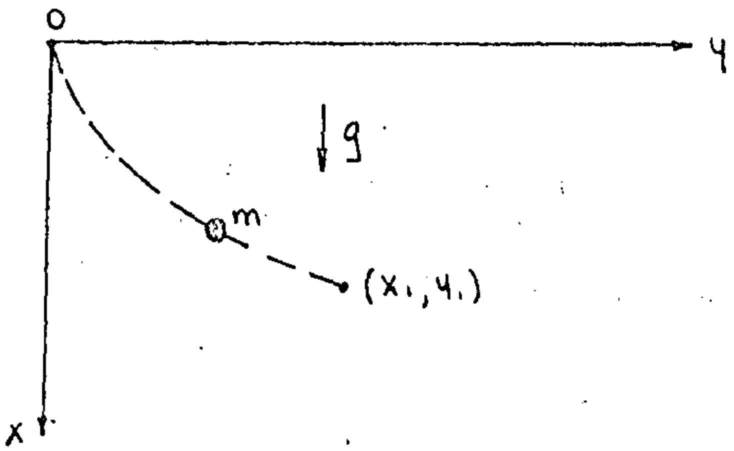


Figura 4.1.1 Problema de brachistochrone

El funcional que se puede proponer para este problema es:

$$t = \int_0^{S_1} \frac{ds}{v} \tag{4.1.5}$$

en donde:

$$ds = \pm\sqrt{1+y'^2}\,dx \tag{4.1.6}$$

y de consideraciones energéticas

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgx \tag{4.1.7}$$

entonces combinando las tres últimas ecuaciones se tiene que

$$t = \int_0^{X_1} \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gx}}\,dx \tag{4.1.8}$$

El problema consiste en encontrar una función y=f(x) tal que el funcional t sea mínimo.

Antes de proceder a formular la solución es necesario describir la forma general del problema clásico de cálculo de variaciones.

Sea el funcional π definido por

$$\Pi = \int_a^b F(x, y, y')\,dx \tag{4.1.9}$$

en donde $y' = \frac{dy}{dx}$. El problema consiste en encontrar funciones y=y(x) para las cuales pequeñas variaciones arbitrarias $\delta y(x)$, no cambien el valor de π.

La condición suficiente y necesaria para encontrar un valor estacionario de π es de acuerdo con la ecuación (4.1.4)

$$\delta\Pi = \int_a^b \delta F(x, y, y')\,dx = 0 \tag{4.1.10}$$

Tomando la variación de F resulta

$$\delta \Pi = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right) dx = 0 \qquad (4.1.11)$$

en donde $\delta y' = \frac{d}{dx}(\delta y)$ (4.1.12)

Sustituyendo (4.1.12) en (4.1.11) e integrando por partes el resultado es:

$$\delta \Pi = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] \delta y \, dx + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \Big|_a^b = 0 \qquad (4.1.13)$$

Entonces para que δπ sea cero es necesario que:

$$y(a) = y(b) = \text{constante} \qquad (4.1.14)$$

y por lo tanto

$$\delta y(a) = \delta y(b) = 0 \qquad (4.1.15)$$

o en su defecto que los dos términos de la integral en la ecuación (4.1.12) sean cero, es decir

$$\frac{\partial F(a)}{\partial y'} = \frac{\partial F(b)}{\partial y'} = 0 \qquad (4.1.16)$$

y

$$\int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] \delta y \, dx = 0 \qquad (4.1.17)$$

dado que δY es arbitraria entre los límites a y b y no necesariamente cero entonces

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0 \qquad (4.1.18)$$

Esta es la ecuación conocida como la ecuación Euler-Lagrange y aquella función Y(x) que satisfaga la ecuación (4.18) hace el funcional π estacionario.

Regresando al problema de brachistochrone podemos identificar el integrando de las ecuaciones (4,1,8) y (4.1.9) es decir

$$F(x,y,y') = \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gx}} \qquad (4.1.19)$$

y dado que y no aparece explícitamente en (4.1.19) entonces

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0 \qquad (4.1.20)$$

que implica que el paréntesis es igual a una constante

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{2gx(1+y'^2}} = C \qquad (4.1.21)$$

despejando Y' de (4.1.21) queda

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{2gc^2x}{1-2gc^2x}} \qquad (4.1.22)$$

de donde

$$y = \int \left(\frac{2gc^2x}{1-2gc^2x}\right)^{1/2} dx \qquad (4.1.23)$$

La solución de esta integral a través de tablas de integración y algunas manipulaciones cede la siguiente solción.

$$y = \frac{1}{4gc^2}(\theta - \text{sen}\,\theta) \qquad (4.1.24)$$

en donde

$$\theta = \cos^{-1}(1-4gc^2x) \qquad (4.1.25)$$

Entonces sustituyendo la ecuación (4.1.22) es (4.1.8) se puede comprobar que el tiempo de recorrido es mínimo en comparación con cualquier otra trayectoría que pase por los puntos extremos de la curva.

Otro problema clásico que el lector puede realizar como ejercicio consiste en encontrar la trayectoria que debe seguir la partícula que haga la distancia de recorrido mínima. El resultado es obviamente una línea recta que une los puntos extremos. El funcional correspondiente para este otro problema es:

$$S=\int_{0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2}\,dx \tag{4.1.26}$$

Un funcional en general puede tener varias variables independientes, por ejemplo:

$$\Pi=\int_V F(x,y,z,\varphi,\varphi_x\,\varphi_y\,\varphi_z)\,dV \tag{4.1.27}$$

en donde ψx, ψy, ψz son las parciales de ψ con respecto a las tres variables independientes. Una variación de π ocasionada por un pequeño cambio en F es:

$$\delta\Pi=\int_V\left(\frac{\partial F}{\partial\varphi}\delta\varphi+\frac{\partial F}{\partial\varphi_x}\delta\varphi_x+\frac{\partial F}{\partial\varphi_y}\delta\varphi_y+\frac{\partial F}{\partial\varphi_z}\delta\varphi_z\right)dV \tag{4.1.28}$$

y aplicando la ecuación (4.1.11) resulta

$$\delta\Pi=\int_V\left[\frac{\partial F}{\partial\varphi}\delta\varphi+\frac{\partial F}{\partial\varphi_x}\frac{\partial}{\partial x}(\delta\varphi)+\frac{\partial F}{\partial\varphi_y}\frac{\partial}{\partial y}(\delta\varphi)+\frac{\partial F}{\partial\varphi_z}\frac{\partial}{\partial z}(\delta\varphi)\right]dV \tag{4.1.29}$$

en esta ecuación los últimos términos satisfacen por el teorema de divergencia de Gauss lo siguiente:

$$\int_V\frac{\partial F}{\partial\varphi_x}\frac{\partial}{\partial x}(\delta\varphi)\,dV=\int_S l_x\frac{\partial F}{\partial\varphi_x}\delta\varphi\,dS-\int_V\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial\varphi_x}\right)\delta\varphi\,dV \tag{4.1.30}$$

en donde lx es el coseno direccional de la normal a la superficie con respecto al eje x. La ecuación (4.1.29) queda como sigue:

$$\delta\Pi = \int_V \left[\frac{\partial F}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial \varphi_x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial \varphi_y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F}{\partial \varphi_z}\right)\right]\delta\varphi \, dV$$

$$+ \int_S \left[l_x \frac{\partial F}{\partial \varphi_x} + l_y \frac{\partial F}{\partial \varphi_y} + l_z \frac{\partial F}{\partial \varphi_z} \right]\delta\varphi \, ds \qquad (4.1.31)$$

Ahora, un valor estacionaro de Π ocurre solamente cuando los términos de los paréntesis son cero. Esto da como resultado la ecuación diferencial que gobierna el sistema y sus condiciones de frontera.

El funcional de la ecuación (4.1.31) es aplicable a problemas de campo y un ejemplo es el siguiente; sea el funcional

$$\Pi = \int_V \frac{1}{2}\left[K_{xx}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + K_{yy}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + K_{zz}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2 - 2Q\varphi \right] dV \qquad (4.1.32)$$

aplicando la forma de la ecuación (4.1.31) el resultado es el siguiente

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial \varphi_x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial \varphi_y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F}{\partial \varphi_z}\right) = 0 \qquad (4.1.33)$$

y considerando los términos individuales resulta

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi} = -2Q$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial \varphi_x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(2K_{xx}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) = 2K_{xx}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial \varphi_y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(2K_{yy}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) = 2K_{yy}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \qquad (4.1.34)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F}{\partial \varphi_z}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(2K_{zz}\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) = 2K_{zz}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$$

Las ecuaciones combinadas ceden la ecuación diferencial que aplica para problemas de campo:

$$Q + K_{xx}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + K_{yy}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + K_{zz}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0 \qquad (4.1.35)$$

y como conclusión tenemos que el funcional Π de la ecuación (4.1.32) es estacionario cuando la ecuación diferencial (4.1.35) se satisface.

4.2 Formulación Variacional del Elemento Finito

4.2.1 Introducción

El concepto fundamental del método del elemento finito (MEF) consiste en que cualquier función continua en un dominio dado, puede aproximarse mediante una sucesión de funciones que se definen en una serie de subdominios dentro de los cuales estas funciones son continuas y las cuales se interconectan para aproximar así la función dada (Fig.4.2.1)

Desde un punto de vista físico, el concepto fundamental del método del elemento finito consiste en que para resolver un sistema que representa una estructura física sujeta a ciertas condiciones físicas, se puede utilizar un modelo aproximado compuesto de una serie de elementos que se interconectan en una serie de puntos llamados nodos (Fig.4.2.2)y cuyo comportamiento es conocido a través de ciertas ecuaciones preestablecidas y que corresponden a los tipos de elementos usados y al número de nodos en cada uno de ellos.

La solución de las ecuaciones del modelo pueden ser exactas, pero el modelo en si es una aproximación discreta al sistema físico y la solución de dicho modelo se aproxima a la solución del sistema real. Los antecedentes del método del elemento finito datan de los años 50's cuando surgió del análisis de estructuras aereonáuticas, y ha evolucionado rápidamente hasta expander sus aplicaciones a varios campos de la ingeniería como son la transmisión de calor, la elasticidad, mecánica de fluidos, estructuras, lubricación y otros muchos.

4.2.2 Formulación de un Problema de Ingeniería

La formulación matemática en problemas de ingeniería generalmente se puede efectuar en dos formas diferentes,

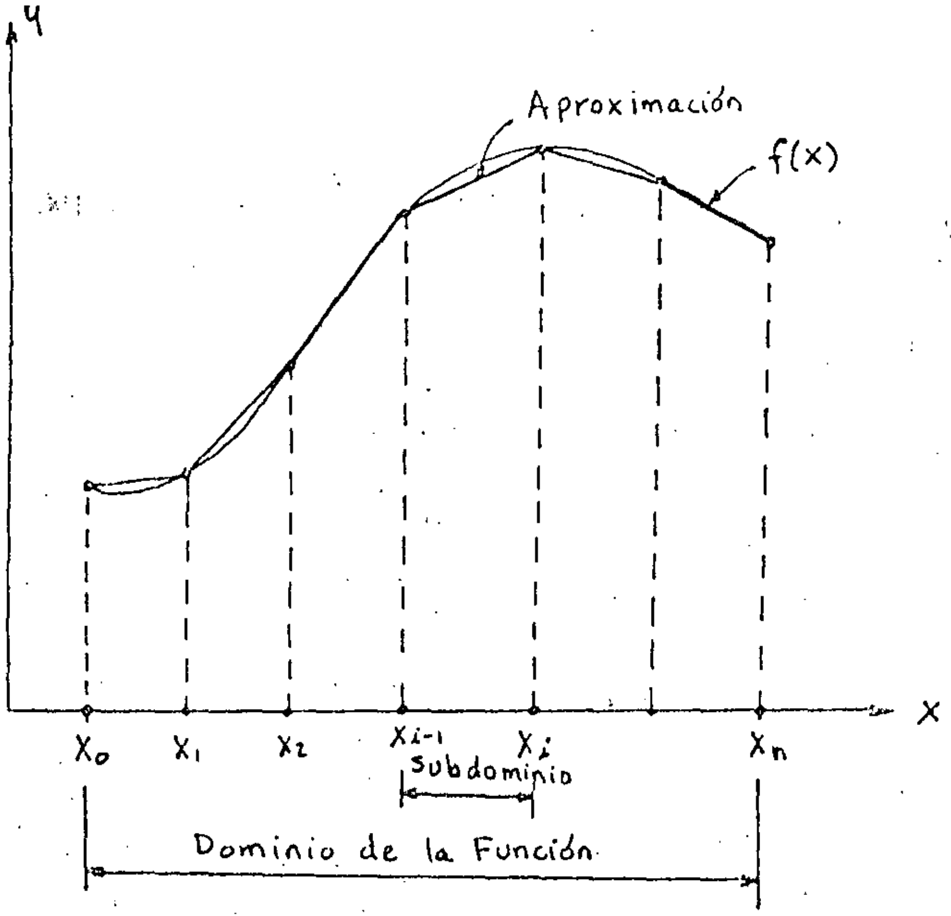


Fig 4.2.1 Aproximación de una función continua a traves de una serie de funciones lineales conectadas

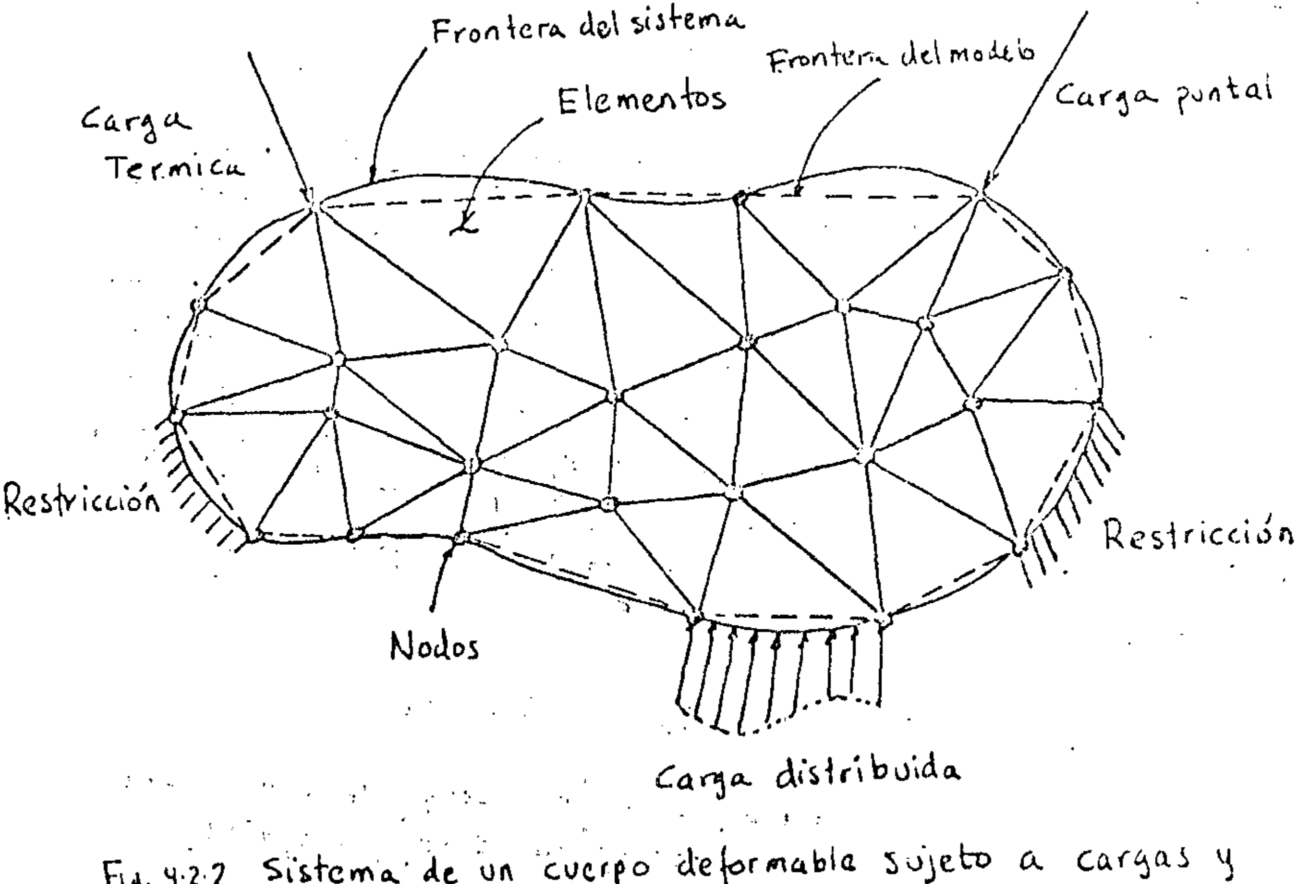


Fig. 4.2.2 Sistema de un cuerpo deformable sujeto a cargas y restricciones y discretizado con elementos finitos

la primera considera el comportamiento de una área o volumen infinitecimal del sistema y las ecuaciones correspondientes se formulan en forma diferenical, y como el área o volumen considerado es representativo de toda la región, las mismas ecuaciones son válidas para todo el dominio de esa región. Como ejemplo tenemos la ecuación de Reynolds en la lubricación hidrodinámica de cojinetes Fig 4.2.3 la cual es una ecuación diferenical en dos dimensiones que se deriva a partir de un elemento infinetesimal y es de la forma:

$$\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[h^3\frac{\partial P}{\partial\theta}\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[h^3\frac{\partial P}{\partial z}\right]=6\mu\omega\frac{\partial h}{\partial\theta} \qquad (4.2.1)$$

en donde h es el espesor de la capa lubricante, θ es la coordenada polar angular, z es la perpendicular al plano (x,y), μ es la viscocidad del lubricante, ω es la velocidad angular de rotación de la flecha y P es la distribución de la presión al rededor y a lo largo del eje z.

En la segunda alternativa se postula un principio que englobe la región entera o dominio dado y consecuentemente es una formulación en forma Integral y la solución es generalmente dada por valores extremos de dicha integral. Este método es conocido como el Método Variacional y como ejemplo se tiene el caso de la energía potencial de cuerpos elasticos, en el cual se establece que la configuración del equilibrio estático de una estructura deformable requiere de una energía potencial mínima. Esta energía se refiere al total de la energía de toda la estructura y se obtiene mediante la suma de energías de las partes de la estructura.

De todas las posibles configuraciones que la estructura pueda adoptar, aquella que ceda un valor mínimo a la energía potencial nos da la configuración de equilibrio. Esto se conce como el Principio de la Energía Potencial Mínima.

11

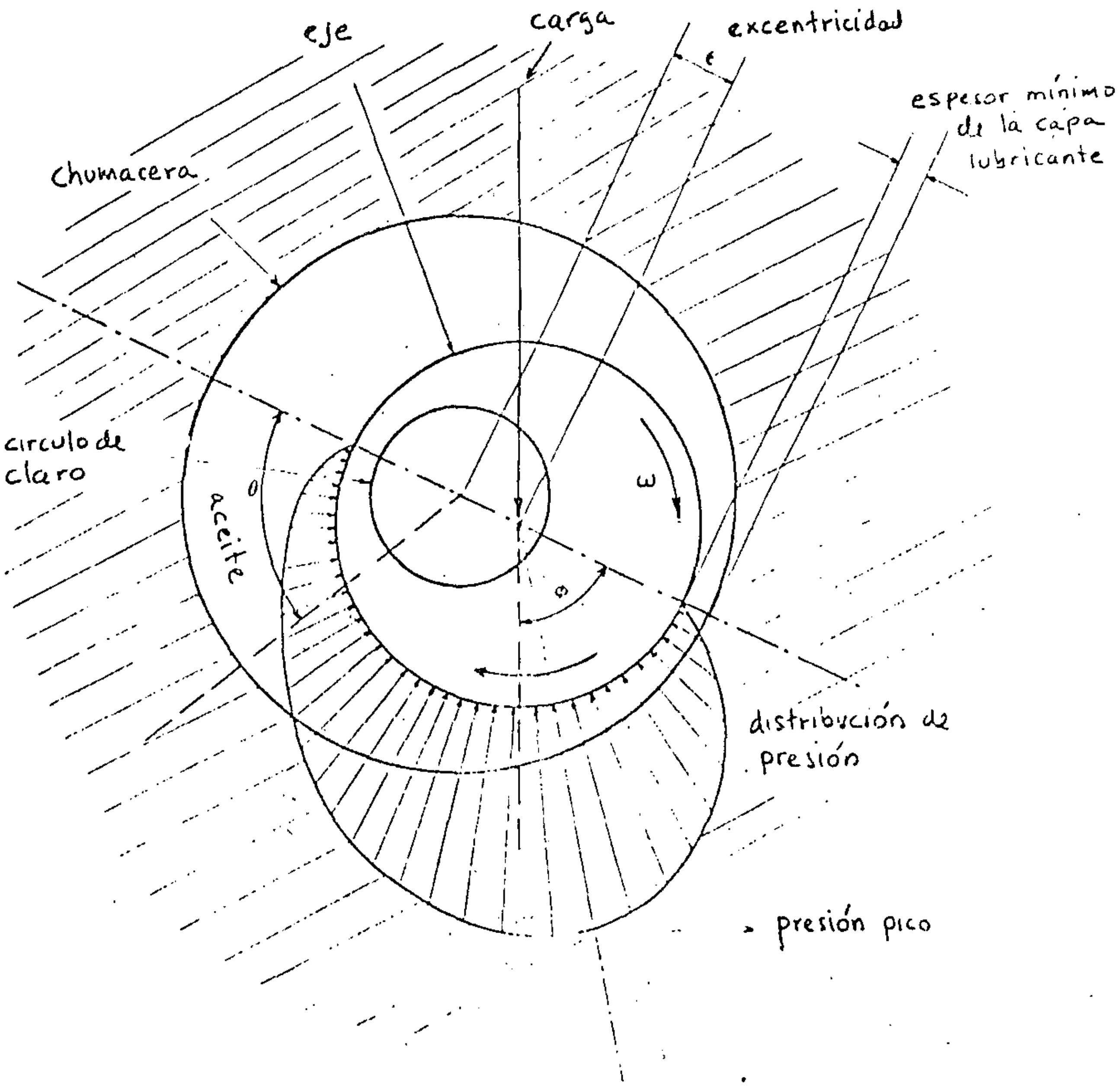


Fig. 4.2.3 Sistema Chumacera - Eje lubricado hidrodinámicamente

Resumiendo lo anterior, el procedimiento para desarrollar el análisis de una estructura deformable consiste en establecer un funcional, el cual es el valor de una integral y que tiene la forma

$$\Pi = \int_{x_a}^{x_b} F(x, y, y')\, dx \tag{4.2.2}$$

en donde

$$y = y(x) \quad , \quad y' = \frac{dy(x)}{dx} \tag{4.2.3}$$

Una vez establecido este funcional se procede a encontrar sus valores extremos, lo cual requiere que su primera variación sea igual a cero, es decir que cumpla con la condición de estacionaridad de una integral mediante:

$$\delta \Pi = 0 \tag{4.2.4}$$

Cabe mencionar que encontrar el valor estacionario de una integral es similar a encontrar los valores mínimos o máximos de una función en cálculo diferenical, excepto que al minimizar una función se obtiene un valor de la variable independiente que nos da un mínimo en la función, mientras que al minimizar un funcional se obtiene una función que al integrarse hace el valor de dicha integral mínimo.

Para llevar a cabo lo anterior se puede proceder a discretizar la integral mediante la siguiente ecuación

$$\Pi = \int_{x_a}^{x_b} F(x,y,y')dx = \int_{x_a}^{x_1} F(x,y,y')dx + \int_{x_1}^{x_2} F(x,y,y')dx + \cdots + \int_{x_n}^{x_b} F(x,y,y')dx \tag{4.2.5}$$

O bien:

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 + \cdots + \Pi_n \qquad (4.2.6)$$

La integral total π ahora consiste en varias integrales parciales π_i, cada una extendiéndose en los subdominios $(x_i - 1, x_i)$.

El concepto de discretizar la integral de la ecuación puede tener una interpretación física al dividir el dominio de la función en una serie de elementos a los cuales se asigna cada una de las integrales. La ventaja es que ahora es posible usar alguna aproximación polinomial (lineal, parabólica etc.) para la función Y(x) en cada integral, es decir en cada <u>elemento</u>. Esto permite que el valor de cada función integral sea una función de los coeficientes utilizados en el polinomio de dicho elemento. Entonces la integral total π es también una función de los coeficientes polinomiales usados en cada uno de los elementos y la condición de la ecuación se satisface si

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_i} = 0 \qquad (i = 1,2,\dots n) \qquad (4.2.7)$$

donde las a_i's son el juego completo de coeficientes polinomiales usados en cada elemento.

Al substituir la función Y(x) por una aproximación polinomial $y(x) \approx a_1 x + a_2 x^2 \ldots$ el problema se reduce a encontrar los coeficientes de los polinomios usados en la aproximación.

Es decir, la solución directa de la ecuación (4.2.2) sujeta a las condiciones (4.2.3) puede ser bastante complicada y es necesario aplicar los conceptos de cálculo variacional, sin embargo el problema se puede formular mediante la ecuación (4.2.5) y al substituir la aproximación polinomial el problema se puede resolver algebráicamente

4.2.3 Energía Potencial

En la introducción de conceptos fundamentales del método del elemento finito se derivaron unas ecuaciones algebráicas de equilibrio que en forma matricial se pueden expresar como:

$$[K]\{D\}=\{P\} \qquad (4.2.8)$$

Este sistema de ecuaciones representa un modelo matemático cuya interpretación física está directamente relacionada con la definición de un sistema físico el cual consiste de un cuerpo deformable caracterizado por la matriz de propiedades elásticas $[k]$, y por las cargas que actuan sobre el sistema $\{P\}$ que ocasionan ciertos desplazamientos en dicho cuerpo $\{D\}$.

En general, un cuerpo elástico es la composición de una infinidad de partículas las cuales interactuan entre si y producen ciertas respuestas a ciertos perturbaciones y dado a que existe un número infinito de partículas en cada cuerpo no es conveniente describir la respuesta de un sistema elástico en términos de los desplazamientos de cada partícula, más bien se toma un número finito de puntos que puedan caracterizar el comportamiento del sistema.

En ciertos casos es posible formular las ecuaciones de equilibrio en base a relaciones directas de carga y desplazamiento, como es en el caso de resortes lineales, o vigas, pero en otros casos no es tan evidente la relación de carga y deformación y por lo tanto es conveniente usar métodos alternativos para la formulación de las ecuaciones de equilibrio. Uno de estos métodos se basa en la expresión de la energía potencial la cual se define como sigue:

La energía potencial de un cuerpo deformable sujeto a cargas estáticas es igual a la energía interna o de deformación almacenada en el cuerpo deformado menos el trabajo.

realizado por las cargas que actuan en el a lo largo de los desplazamientos de los puntos de aplicación de dichas cargas. Esto se puede expresar como sigue

$$V = U - W \tag{4.2.9}$$

en donde V=Energía potencial

U=Energía de deformación o interna

W=Trabajo de las cargas aplicadas

Como ejemplo podemos considerar el caso simple de un resorte lineal mostrado en la Fig. 4.2.4 .El desplazamiento D del extremo libre del resorte es ocasionado por la carga P aplicada en ese extremo en tonces la energía potencial se puede expresar como:

$$V = \int_0^D K x \, dx - \int_0^D P \, dx \tag{4.2.10}$$

En esta expresión, la primera integral representa la energía de deformación y la segunda el trabajo realizado por la carga sobre el resorte de constante K. Al integrar se obtiene:

$$V = \frac{1}{2}\left(K x^2\right)\Big|_0^D - P x\Big|_0^D = \frac{1}{2} K D^2 - P D \tag{4.2.11}$$

Es decir la expresión de la energía potencial es el valor de una integral y por lo tanto V es un funcional el cual puede ser minimizado, de acuerdo al principio de la energía potencial mínima. Entonces de la ecuación(4.2.4) se tiene que:

$$\delta V = \left(K D - P \right) \delta D \tag{4.2.12}$$

La cual es consistente con el principio de trabajo virtual y dado que δD es diferente de cero entonces

$$KD - P = 0 \qquad (4.2.12a)$$

Es decir que el desplazamiento D que resulte en el equilibrio del sistema es tal que:

$$D_e = \frac{P}{K} \qquad (4.2.12b)$$

Gráficamente la ecuación(4.2.11) se puede representar por medio de la suma de dos funciones tal como se muestra en la Fig(4.2.5) de tal forma para un potencial mínimo se tiene que el desplazamiento D es aquel que produce el equilibrio.

4.2.4. Sistemas con Varios Grados de Libertad

Por definición los grados de libertad son aquellas variables que definen completamente y en forma única el estado o configuración de un sistema dado, por ejemplo, el sistema de resorte lineal que se acaba de ver es un sistema con un solo grado de libertad ya que una sola cantidad define el estado del sistema, esa variable es el desplazamiento lineal del extremo del resorte. Si en ese extremo se anexa otro resorte, entonces existen dos grados de libertad y así sucesivamente. Sin embargo la naturaleza de los grados de libertad no es necesariamente la misma, ya que éstos se pueden referir a desplazamientos, rotaciones, temperaturas o también coeficientes de un polinomio que aproximan una función.

Si consideramos un sistema elástico con n grados de libertad el cual está sujeto a ciertas perturbaciones. Entonces la energía potencial total se puede expresar como un función de estos n grados de libertad o sea

$$\Pi_T = \Pi_T(D_1, D_2, D_3 \ldots D_n) \qquad (4.2.13)$$

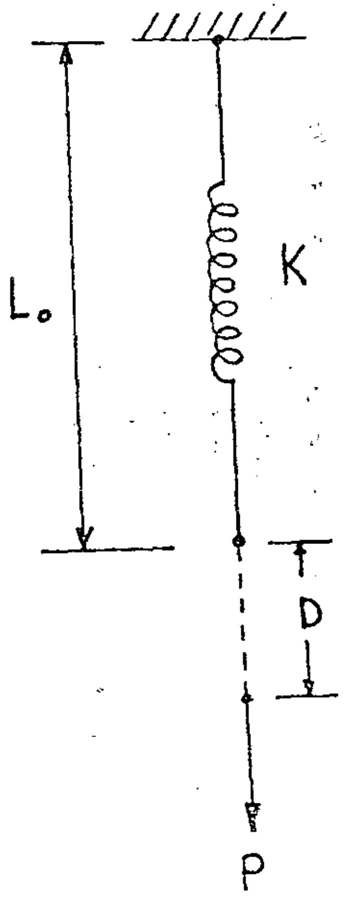


Fig 4.2.4
Sistema de resorte lineal con un extremo fijo y otro extremo libre y cargado (1 grado de libertad).

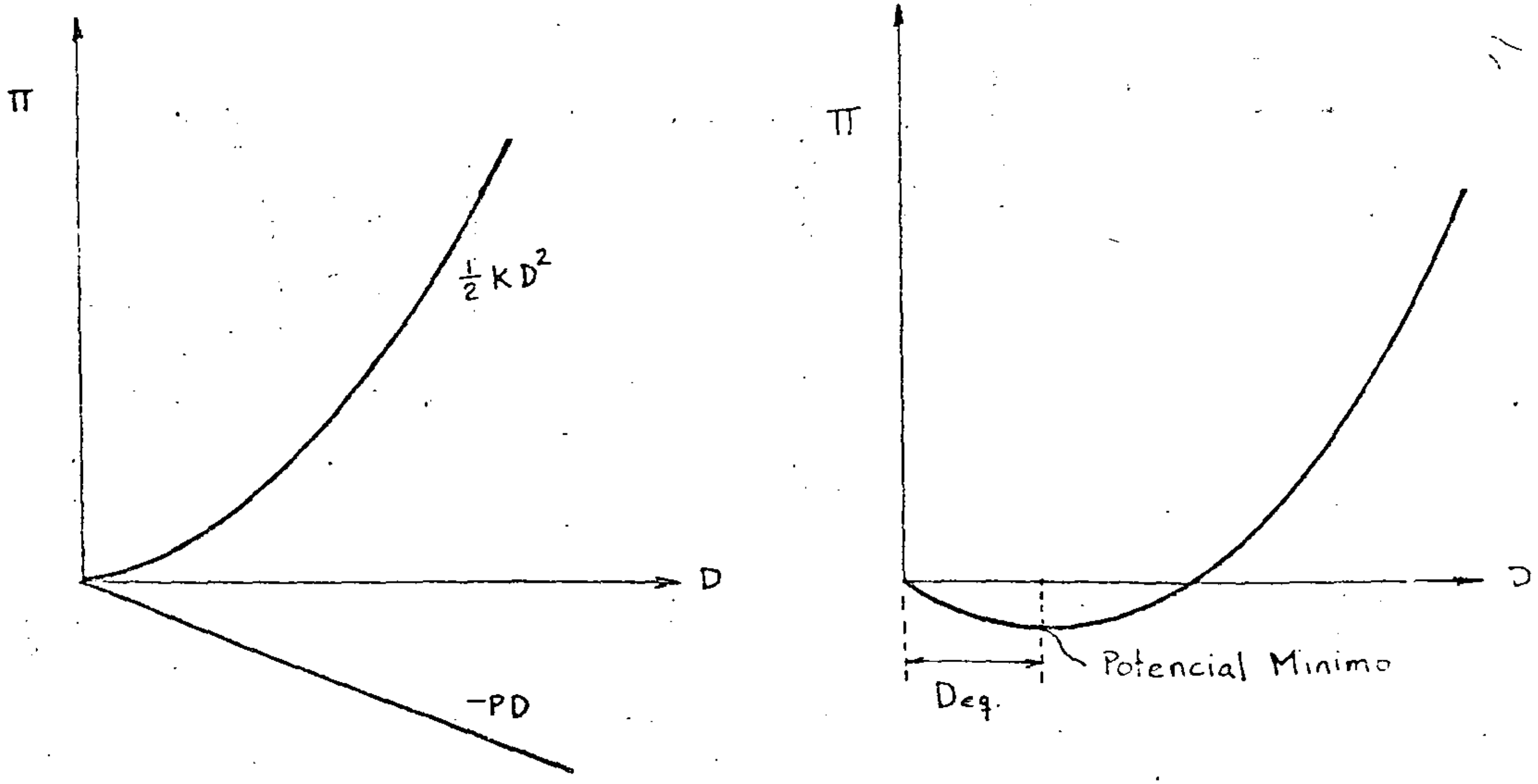


Fig. 4.2.5 Energía potencial como función del desplazamiento en el extremo libre de un resorte con constante K y carga P dadas

entonces la primera variación del potencial con respecto a los grados de libertad se expresa como

$$\delta\Pi_T = \frac{\partial \Pi_T}{\partial D_1}\delta D_1 + \frac{\partial \Pi_T}{\partial D_2}\delta D_2 + \frac{\partial \Pi_T}{\partial D_3}\delta D_3 \ldots + \frac{\partial \Pi}{\partial D_n}\delta D_n \tag{4.2.14}$$

la cual debe cumplir con la condición de estacionaridad de la ecuación (4.2.4), es decir $\delta\pi=0$ y por lo tanto:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial D_1} = \frac{\partial \Pi}{\partial D_2} = \ldots\ldots = \frac{\partial \Pi}{\partial D_n} = 0 \tag{4.2.15}$$

De acuerdo con el principio de energía potencial mínima. la ecuación (4.2.15) define la configuración de equilibrio del sistema.

Un ejmplo de un sistema con dos grado de libertad es el que se muestra en la Fig. 4.2.6 el cual consta de dos resortes lineales empotrados, y una barra rígida ligada los dos resortes con una carga puntal como se muestra. La expresión para la energía, potencial se puede escribir ya integrada como:

$$V = \frac{1}{2}K_1D^2 + \frac{1}{2}K_2(D+\theta L)^2 - P(D+\theta a) \tag{4.2.16}$$

Al substituir v por π en la ecuación (4.2.5) el resultado es:

$$\frac{\partial V}{\partial D} = K_1D + k_2D + k_2\theta L - P = 0 \tag{4.2.17}$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = K_2LD + K_2L^2\theta - aP = 0 \tag{4.2.18}$$

que en forma matricial adquiere la siguiente fomra

$$\begin{bmatrix} (K_1+K_2) & K_2L \\ K_2L & K_2L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D \\ \Theta \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} P \\ aP \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad (4.2.19)$$

que se puede reducir a la forma común de las ecuaciones de equilibrio

$$\left[K \right] \left\{ X \right\} = \left\{ F \right\} \qquad (4.2.20)$$

En la ecuación 4.2.19, (P) y (aP) son llamadas las fuerzas generalizadas correspondientes a las coordenadas generalizadas (D) y (θ).

De este ejemplo se puedo concluir entonces que la matriz de rigidez $[k]$ es una matriz simétrica es decir $k_{ij}=k_{ji}$ y también que el producto de una fuerza generalizada por su correspondiente coordenada siempre tiene unidades de trabajo.

Si un tercer resorte es anexado al sistema digamos en el punto intermedio de la barra, el sistema se convierte en un sistema estaticamente inditerminado. Sin embargo las coordenadas D y θ son aun suficientes para determinar la configuración del sistema y dos ecuaciones de equlibrio son generadas, es decir la indeterminación estática no afecta el procedimiento general basado en la minimización del potencial.

4.2.5 Formulación General Usando Campos de Desplazamiento

Antes de desarrollar una expresión general para la energía potencial de cuerpos elásticos es conveniente describir el concepto de campo de desplazamiento y aproximaciones.

En muchos sistemas mecánicos la configuración del mismo en un instante dado puede ser expresada en términos de los desplazamientos de ciertos puntos de referencia, los cuales represen-

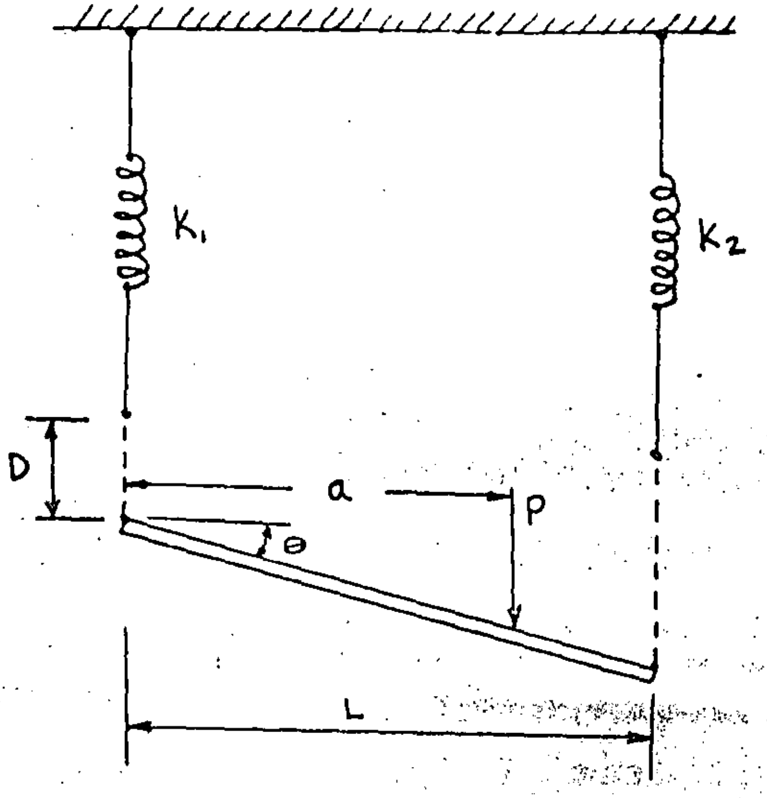


Fig 4.2.6 Sistema de dos resortes y una barra rigida con carga intermedia (dos grados de libertad)

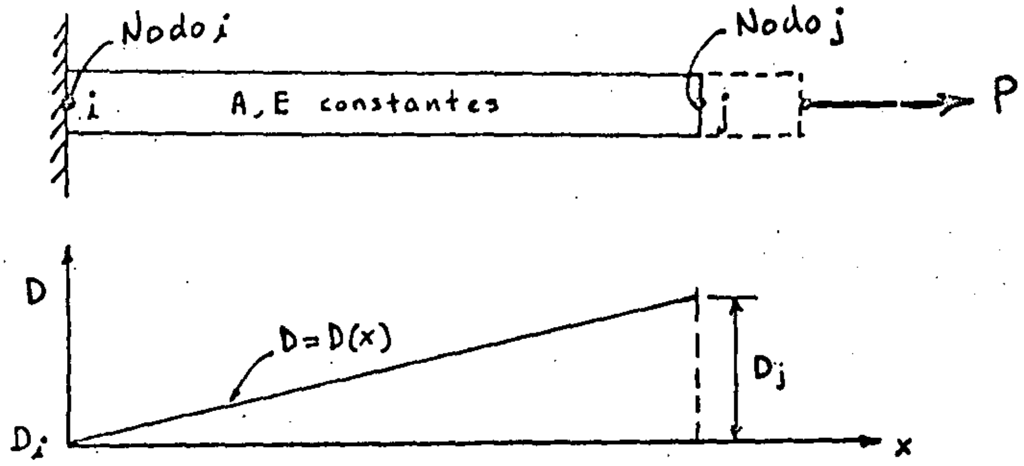


Fig. 4.2.7 Campo de desplazamientos en una barra de sección uniforme en terminos de los desplazamientos nodales.

tan un campo de desplazamientos con respecto a un marco de referencia. Por ejemplo el campo de desplazamiento de una barra elastica de sección uniforme con una carga axial Fig.4.2.7 se puede describir en términos de los desplazamientos en los extremos de la misma en una forma lineal. Es decir el desplazamiento en cualquier punto intermedio de una barra se puede expresar como una función del desplazamiento de los puntos extremos de la misma con una relación de la forma

$$D_x = D_i + \frac{x}{L}\left(D_j - D_i\right) \qquad (4.2.21)$$

Donde Dx es el desplazamienot de un punto en la coordenada x de la barra, L es la longitud original de la barra y D(i,j) es el desplazamiento del extremo (i,j) de la barra.

La ecuación (4.2.21) puede escribirse en forma matricial como sigue:

$$D_x = \left[\left(1-\frac{x}{L}\right) \quad \left(\frac{x}{L}\right)\right] \begin{Bmatrix} D_i \\ D_j \end{Bmatrix} \qquad (4.2.22)$$

Si consideramos que la barra representa un elemento con el nodo i en el extremo i y el nodo j en el extremo j y que f es el desplazamiento de un punto cualquiera del elemento entonces la ecuación(4.2.22) se puede expresar en forma matricial como sigue:

$$\{f\} = [N]\{d\} \qquad (4.2.23)$$

En el caso de un elemento en dos dimensiones como el mostrado en la Fig.4.2.8 el vector {d} los desplazamientos en dos dimensiones de los nodos del elemento, entonces la ecuación (4.2.23) tendría la forma:

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} \qquad (4.2.24)$$

en donde:

$$N_1 = \frac{(b-x)(c-y)}{4bc} \quad , \quad N_2 = \frac{(b+x)(c+y)}{4bc}$$

$$N_2 = \frac{(b+x)(c-y)}{4bc} \quad , \quad N_4 = \frac{(b-x)(c+y)}{4bc} \qquad (4.2.25)$$

$N_{1,2,3,4}$ son llamadas las funciones de"forma" o de interpolación. La descripción del campo de desplazamiento para otros elementos también es posible en base de los desplazamientos nodales, es decir que es posible conocer el desplazamiento obsoluto de cualquier punto en un elemento o estructura conociendo el vector de desplazamientos nodales. Por lo tanto la formulación general usando elementos finitos está orientada a obtener la solución de un sistema con un número finito de grados de libertad, en donde los grados de libertad son los desplazamientos independientes de cada nodo y donde dichos desplazamientos pueden ser de traslación o de rotación.

La aproximación a un campo de desplazamiento también se puede hacer en base a un polinomio cuyo grado de libertad sea el mismo que el correspondiente al elemento en cuestión, por ejmplo en el caso de la barra uniforme se puede utilizar un polinomio del tipo:

$$\{f\} = \{u\} = \{a_1 + a_2 x\} \qquad (4.2.26)$$

o

$$\{f\} = [1 \quad x] \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} \qquad (4.2.27)$$

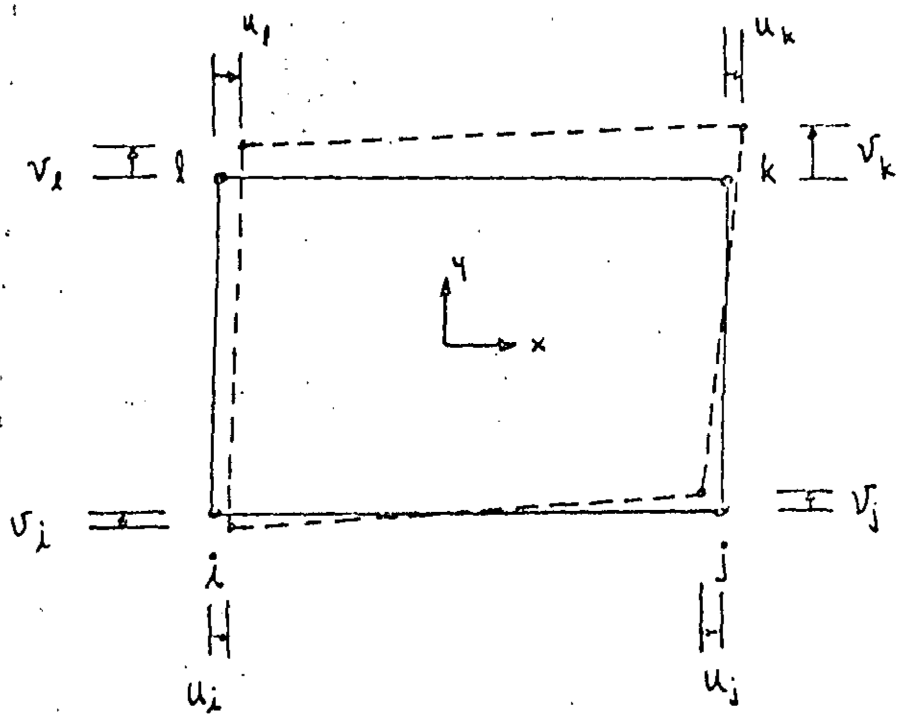


Fig. 4.2.0 Elemento cuadrilatero bidimensional, 2 grados de libertad por nodo, 4 nodos osea 8 g.d.l.

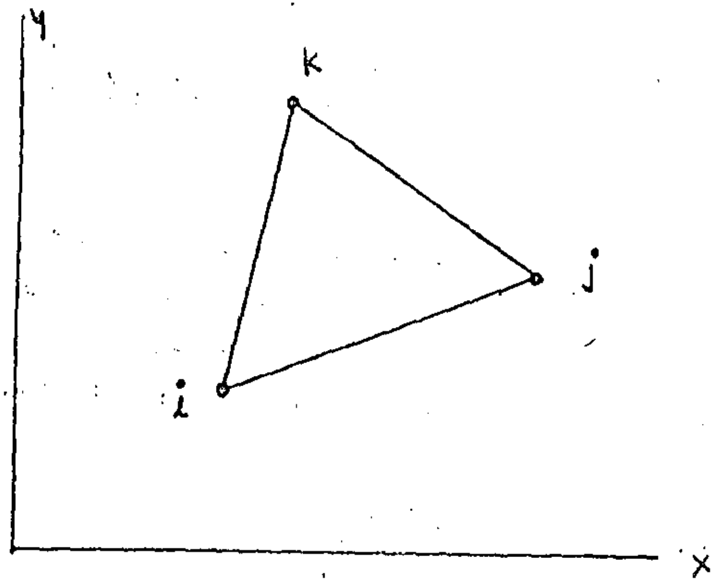


Fig 4.2.9 Elemento triangular plano, 2 grados de libertad por nodo, 3 nodos, 6 g.d.l.

en donde a_1 y a_2 son los coeficientes del polinomio de grado 1, entonces hay dos coeficientes para un elemento que tiene dos grados de libertad.

Los desplazamientos nodales {d}se pueden expresar en función de estos coeficientes substituyendo las condiciones de frontera

$$u_{x=0} = u_i \qquad u_{x=L} = u_j \tag{4.2.28}$$

Entonces substituyendo en (4.2.26) resulta el siguiente sistema:

$$\{d\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = [\Lambda]\{a\} \tag{4.2.29}$$

Despejando {a} de (4.2.29) y substituyendo en (4.2.27) se tiene

$$\{f\} = [1 \quad x][\Lambda]^{-1}\{d\} \tag{4.2.30}$$

Invirtiendo la matriz $[\Lambda]$ y desarrollando el producto en la ecuación 4.2.30 se obtiene la ecuación 4.2.22 o sea:

$$\{f\} = \left[\left(1-\frac{x}{L}\right) \quad \left(\frac{x}{L}\right)\right]\{d\} = [N]\{d\} \tag{4.2.31}$$

En el caso de un elemento plano triangular como el mostrado en la fig.4.2.9, la aproximación se puede hacer en base a las siguientes polinomios:

$$u = a_1 + a_2 x + a_3 y \qquad v = a_4 + a_5 x + a_6 y \tag{4.2.32}$$

Que en forma matricial quedan expresados como

$$\left\{\begin{matrix} u \\ v \end{matrix}\right\} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \left\{\begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{matrix}\right\} \qquad (4.2.33)$$

Tomando las condiciones de frontera se obtiene que para la dirección x

$$\left\{\begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{matrix}\right\} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \left\{\begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{matrix}\right\} \qquad (4.2.34)$$

y para la dirección y

$$\left\{\begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{matrix}\right\} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \left\{\begin{matrix} a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{matrix}\right\} \qquad (4.2.35)$$

de donde

$$\left\{\begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{matrix}\right\} = [\Lambda]^{-1} \left\{\begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{matrix}\right\} \qquad (4.2.36)$$

y

$$\left\{\begin{matrix} a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{matrix}\right\} = [\Lambda]^{-1} \left\{\begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{matrix}\right\} \qquad (4.2.37)$$

Substituyendo (4.2.36) y (4.2.37) en la ecuación (4.2.33) se obtiene

$$u = [1 \quad x \quad y][\Lambda]^{-1}\{u_1 \; u_2 \; u_3\}^T \qquad (4.2.38)$$

$$v = [1 \quad x \quad y][\Lambda]^{-1}\{v_1 \; v_2 \; v_3\}^T \qquad (4.2.39)$$

y donde

$$[\Lambda]^{-1} = \begin{bmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 & x_3 y_1 - x_1 y_3 & x_1 y_2 - x_2 y_1 \\ y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \end{bmatrix} \qquad (4.2.40)$$

Substituyendo (4.2.40) en (4.2.38) y(4.2.39) y reduciendo el sistema resultante es

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}_{Triangulo} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \qquad (4.2.41)$$

en donde

$$N_1 = \frac{1}{2A}\left[\frac{2A}{3} + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y\right] \qquad (4.2.42)$$

$$N_2 = \frac{1}{2A}\left[\frac{2A}{3} + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y\right] \qquad (4.2.43)$$

$$N_3 = \frac{1}{2A}\left[\frac{2A}{3} + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y\right] \qquad (4.2.44)$$

De la misma manera se puede aproximar el campo de desplazamiento para un elemento cuadrilatero plano de la Fig.4.2.8 usando polinomios del tipo:

$$u = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 xy \qquad (4.2.45)$$

$$v = a_5 + a_6 x + a_7 y + a_8 xy \qquad (4.2.46)$$

Los cuales conducen a un sistema equivalente al dado en las ecuaciónes(4.2.24) y (4.2.25).

4.2.6 Exprsión General de la Energía Potencial

Podemos considerar ahora el caso general de un cuerpo elástico en el espacio el cual está sujeto a cargas que producen un campo de desplazamientos, deformaciones y esfuerzos tal que en un punto dado de dicho cuerpo y con respecto a un marco de referencia, los vectores de esfuerzos y de deformaciones son:

$$\{\sigma\} = \{\sigma_x \; \sigma_y \; \sigma_z \; \tau_{xy} \; \tau_{yz} \; \tau_{zx}\}^T \qquad (4.2.47)$$

y

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \varepsilon_z \ \gamma_{xy} \ \gamma_{yz} \ \gamma_{zx}\}^T \qquad (4.2.48)$$

La realción esfuerzo-deformación puede escribirse como:

$$\{\sigma\} = [E]\{\varepsilon\} + \{\sigma_o\} \qquad (4.2.49)$$

en donde $[E]$ es la matriz de propiedades elásticas del material y el vecotor $\{\sigma_o\}$es el vector de esfuerzos iniciales (dichos esfuerzos iniciales pueden referirse a los esfuerzos presentes sin la aplicación de las cargas externas, como podrían ser esfuerzos residuales, esfuerzos de ensamble etc.).

La definición de energía interna o de deformación se puede escribir como

$$U_o = \frac{1}{2}\{\varepsilon\}^T[E]\{\varepsilon\} - \frac{1}{2}\{\varepsilon_o\}^T[E]\{\varepsilon_o\} \qquad (4.2.50)$$

Esta energía de deformación es originada por ciertas cargas que actuan en el cuerpo las cuales desarrolan un cierto trabajo. Estas fuerzas se pueden clasificar en fuerzas internas o de cuerpo, que en un punto cualquiera tiene la forma:

$$\{\Phi\} = \{\varphi_x \ \varphi_y \ \varphi_z\}^T \qquad (4.2.51)$$

y el vector de fuerzas de superficie expresado por:

$$\{F\} = \{F_x \ F_y \ F_z\}^T \qquad (4.2.52)$$

Entonces usando las expresiones (4.2.41) a la (4.2.52) y la expresión general de la energía potencial de la siguiente forma .

$$\Pi = \int_{Vol}\left(\frac{1}{2}\{\varepsilon\}^T[E]\{\varepsilon\} + \{\varepsilon\}^T\{\sigma_o\}\right)dV - \int_{Vol}\{f\}^T\{F\}\,dV - \int_{Sup}\{f\}^T\{\Phi\}\,dS \qquad (4.2.53)$$

en donde la primera integral representa la energía interna, o de deformación, la segunda integral representa el trabajo desarrollado por las fuerzas de cuerpo sobre la estructura y la tercera integral representa el trabajo desarrollado por las fuerzas de superficie sobre el cuerpo. La ecuación (4.2.53) es una forma más general de la ecuación (4.2.9)

4.2.6 Formulación Elemental en Base a la Energía Potnecial

El objetivo ahora es formular las ecuaciones que caracterizan un elemento en base a la minimización de la energía potencial usando la expresión general (4.2.53) y la expresión del campo de desplazamiento $\{f\}=\{u\ v\ w\}$.

Primeramente las deformaciones en un elemento se pueden expresar en terminos de los desplazamientos nodales a través de la siguiente expresión

$$\{\varepsilon\} = [B]\{d\} \tag{4.2.54}$$

en donde $[B]$ es la matriz esfuerzo-deformación que en el caso general de un material elástico isotropico es de la forma

$$[B] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \tag{4.2.55}$$

Substituyendo las ecuaciones (4.2, 23) y (4.2, 54) en (4.2, 53) la energía potencial puede expresarse como:

$$\Pi_e = \frac{1}{2}\{d\}^T\left(\int_{Vol}[B]^T[E][B]\,dV\right)\{d\} + \{d\}^T\int_{Vol}[B]^T\{\sigma_0\}\,dV$$

$$-\{d\}^T\int_{Vol}[N]^T\{F\}\,dV - \{d\}^T\int_{Sup}[N]^T\{\Phi\}\,dS \qquad (4.2.56)$$

En esta ecuación el subíndice en πe indica que la energía potencial es de un elemento y por lo tanto el vector $\{d\}$ es el vector de desplazamientos nodales de un elemento solamente, y para una estructura compuesta de varios elementos se tiene que la energía potencial total se expresa como la sumatoria de las energías potenciales de cada uno de los elementos y la energía potencial total queda expresada como:

$$\Pi_T = \frac{1}{2}\{D\}^T\left(\sum_1^m\int_{Vol}[B]^T[E][B]\,dV\right)\{D\} + \{D\}^T\sum_1^m\left(\int_{Vol}[B]^T\{\sigma_0\}\,dV\right.$$

$$\left.-\int_{Vol}[N]^T\{F\}\,dV - \int_{Sup}[N]^T\{\Phi\}\,dS\right) - \{D\}^T\{P\} \qquad (4.2.57)$$

Una vez encontrada la expresión general de la energía potencial se procede a encontrar el valor extremo del funcional π_T substituyendo en la ecuación (4.2.4) lo cual resulta en el sistema de ecuaciones dado por la ecuación (4.2.7) o

$$\left\{\frac{\partial \Pi_T}{\partial D}\right\} = 0 \qquad (4.2.58)$$

Entonces al substituir π_P dada por la ecuación (4.2.57) en la ecuación (4.2.58) se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones de equilibrio.

$$\left(\sum_{1}^{m}\int_{Vol}[B]^T[E][B]\,dV\right)\{D\} = \sum_{1}^{m}\left(-\int_{Vol}[B]^T\{\sigma_0\}\,dV + \int_{Vol}[N]^T\{F\}\,dV + \int_{Sup}[N]^T\{\Phi\}\,ds\right) + \{P\} \qquad (4.2.59)$$

La ecuación (4.2.59) se puede abreviar en tal forma que la sumatoria de las integrales del lado izquierdo de la misma sea identificada como la "Matriz de Rigidez" y la sumatoria de integrales del lado derecho de la ecuación como vector de cargas generalizadas, entonces la ecuación (4.2.59) queda

$$[K]\{D\} = \{R\} \qquad (4.2.60)$$

Ejemplo. Podemos considerar un caso simple en forma general mediante el cual podremos establecer la siguiente secuencia de operaciones

$$\{f\} = \{u\} = [1 \quad x]\{a\} \qquad (4.2.61)$$

$$\{d\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & L \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = [\Lambda]\{a\} \qquad (4.2.62)$$

$$\{f\} = [1 \quad x][\Lambda]^{-1}\{d\} = \left[\left(1-\frac{x}{L}\right) \quad \left(\frac{x}{L}\right)\right]\{d\} = [N]\{d\} \qquad (4.2.63)$$

$$U = \int_0^L \frac{1}{2} E\,\varepsilon_x^2 A\,dx = \frac{1}{2}\int_0^L \varepsilon_x^T E\,\varepsilon_x A\,dx \qquad (4.2.64)$$

$$U = \frac{1}{2}\{d\}^T\int_0^L [B]^T E\,[B]\,A\,dx\,\{d\} \qquad (4.2.65)$$

$$k_e = \int_0^L [B]^T E [B] A dx = \int_0^L \begin{Bmatrix} -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} \end{Bmatrix} E \left[-\frac{1}{L} \quad \frac{1}{L} \right] A dx \qquad (4.2.66)$$

$$k_e = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \equiv \text{Matriz elemental de rigidez} \qquad (4.2.67)$$

4.2.8 El Método Rayleigh-Ritz

Podemos considerar un ejemplo unidimensional para describir el método Rayleigh-Rith como el mostrado en la Fig.4.2.10 en donde el área (S) y el módulo elástico (E) son constantes y la carga distribuida (q) son tales que

$$A = E = L = 1 \quad y \quad q = X \qquad (4.2.68)$$

Las condiciones de frontera son:

$$u = 0 \quad @ \quad X = 0$$
$$u_{,x} = 0 \quad @ \quad X = L \qquad (4.2.69)$$

La energía potencial se puede expresar como:

$$\Pi = \int_0^L \frac{AE}{2} u_{,x}^2 \, dx - \int_0^L u (q \, dx) \qquad (4.2.70)$$

Substituyendo los valores dados en(4.2.68) y asumiendo que los desplazamientos u son de la forma $u = a_1 x$ entonces

$$\Pi = \frac{1}{2} a_1^2 - \frac{a_1}{3} \qquad (4.2.71)$$

y

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_1} = 0 = a_1 - \frac{1}{3} \Rightarrow a_1 = \frac{1}{3} \qquad (4.2.72)$$

Si se asume ahora que $u=a_1x+a_2x^2$, entonces la energía potencial queda como sigue:

$$\Pi = \int_0^1 \frac{1}{2}(a_1 + 2a_2x)^2 dx - \int_0^1 (a_1x + a_2x^2)x\,dx \qquad (4.2.73)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_1} = \frac{\partial \Pi}{\partial a_2} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4/3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1/3 \\ 1/4 \end{Bmatrix} \qquad (4.2.74)$$

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 7/12 \\ -1/4 \end{Bmatrix} \qquad (4.2.75)$$

Sumarizando Resultados:

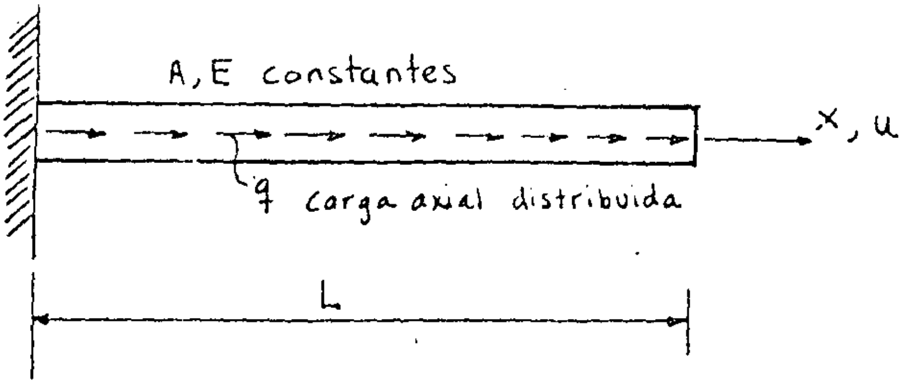
	$u(x=1/4)$	$u(x=1/2)$	$u(x=3/4)$	$u(x=1)$	$\sigma(x=0)$	$\sigma(x=1)$
1 Termino	.0833	.1667	.2500	.333	.333	.333
2 Terminos	.1302	.2292	.2969	.333	.5833	.0833
Exacto	.1224	.2292	.3047	.333	.5000	.0

Si asumimos un polinomio de 3er grado para u(tres términos) obtendríamos la solución exacta porque la solución exacta es cúbica de la forma $u=(3x-x^3)/6$ o sea que el método Rayleigh-Ritz basada en

$$u = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \qquad (4.2.76)$$

daría como resultado

$$a_1 = 1/2$$
$$a_2 = 0 \qquad (4.2.77)$$
$$a_3 = -1/6$$

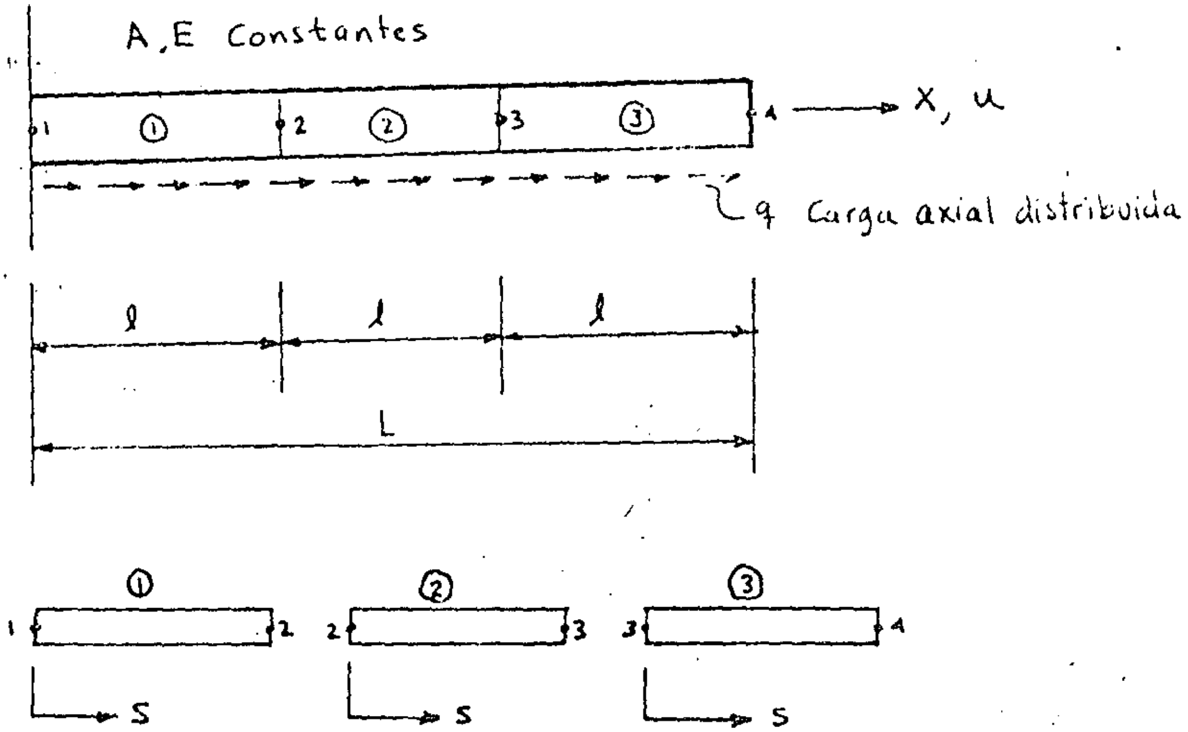


Condiciones de frontera:

Forzada $u = 0$ @ $x = 0$

Natural $u_{,x} = 0$ @ $x = L$

Fig. 4.2.10 Barra con carga axial distribuida y sección constante



$$u = [N]\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \qquad u = [N]\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \qquad u = [N]\begin{Bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix}$$

Fig 4.2.11 Barra con carga axial distribuida dividida en tres elementos.

y si se incluyeran más términos como por ejemplo

$$u = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \cdots + a_n x^n \tag{4.2.78}$$

la solución sería:

$$\begin{gathered} a_1 = 1/2 \\ a_2 = 0 \\ a_3 = -1/6 \\ a_4 = a_5 = \cdots = a_n = 0 \end{gathered} \tag{4.2.79}$$

El Método del Elemento Finito y su relación con R.R

Podemos considerar ahora la barra del ejemplo anterior pero dividida en tres elementos como se muestra en la Fig 4.2.11 Para cada elemento existe una matriz de forma tal que el campo de desplazamientos en cada elemento se puede expresar como:

$$u_i = [N]_i \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}_i \tag{4.2.80}$$

y donde $$[N]_i = \left[\frac{l_i - s}{l_i} \quad \frac{s}{l_i} \right] \tag{4.2.81}$$

Las deformaciones son dadas por:

$$\varepsilon_x = u_{,x} \quad y \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial s} \tag{4.2.82}$$

Usando la ecuación(4.2.82) en la ecuación(4.2.80)

$$\varepsilon_x = \frac{\partial}{\partial s} [N] \{d\} = [B] \{d\} \tag{4.2.83}$$

en donde $$[B] = \frac{\partial}{\partial s} [N] \quad y \quad \{d\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} \tag{4.2.84}$$

y donde que ε_x es escalar entonces;

$$\varepsilon_x^2 = \varepsilon_x^T \varepsilon_x = \{d\}^T [B]^T [B] \{d\} \tag{4.2.85}$$

Substituyendo la ecuación (4.2.85) en la expresión para la energía de un elemento se obtiene que

$$U_i = \int_0^l \frac{AE}{2} \varepsilon_x^2 \, dx = \frac{1}{2} \{d\}_i^T \int_0^l AE \begin{bmatrix} -1/l \\ 1/l \end{bmatrix} [-1/l \quad 1/l] \, ds \{d\} \tag{4.2.86}$$

lo cual se puede expresar en forma compacta como:

$$U_i = \frac{1}{2} \{d\}_i^T [K]_i \{d\}_i \tag{4.2.87}$$

en donde

$$[K]_i = \int_0^l AE \begin{bmatrix} -1/l \\ 1/l \end{bmatrix} [-1/l \quad 1/l] \, ds = \frac{AE}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.2.88}$$

Por otra parte el trabajo realizado por la carga es

$$W = \int_0^l q \, u \, ds = \{d\}_i^T \int_0^L [N]^T q \, ds \tag{4.2.89}$$

y el potencial total de la estructura es

$$\pi_T = \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 \tag{4.2.90}$$

Suponiendo que para cada elemento las propiedades cumplen con las propiedades de las ecuaciones (4.2.68) y además

$$\begin{aligned} l &= 1/3 \\ q &= x \quad \text{para el elemento 1} \\ q &= \tfrac{1}{3} + s \quad \text{para el elemento 2} \\ q &= \tfrac{2}{3} + s \quad \text{para el elemento 3} \end{aligned} \tag{4.2.91}$$

Expandiendo los vectores al rango de la estructura se tiene que el vector global es

$$\left\{D\right\} = \left\{\begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{matrix}\right\} \qquad (4.2.92)$$

Substituyendo las condiciones(4.2.91) en(4.2.90) y expandiendo al rango de la estructura, la energía potencial es:

$$\Pi_T = \frac{1}{2}\left\{D\right\}^T\left(\begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix}\right)\left\{D\right\}$$

$$-\left\{D\right\}^T\left(\frac{1}{54}\left\{\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right\} + \frac{1}{54}\left\{\begin{matrix} 0 \\ 4 \\ 5 \\ 0 \end{matrix}\right\} + \frac{1}{54}\left\{\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 7 \\ 8 \end{matrix}\right\}\right) \qquad (4.2.93)$$

Minimizando la energía potencial se obtiene que

$$\left\{\frac{\partial \Pi_T}{\partial D}\right\} = 0 \qquad (4.2.94)$$

la cual resulta en el siguiente sistema de ecuaciones de equilibrio

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & 6 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix}\left\{\begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} 1/54 \\ 6/54 \\ 12/54 \\ 8/54 \end{matrix}\right\} \qquad (4.2.95)$$

La Matriz cuadrada del lado izquierdo de esta ecuación es singular debido a que no se han impuesto las condiciones de frontera de la estructura, ésta condición es

$$u_1 = 0 \tag{4.2.96}$$

Al imponer la condición (3.96) en la ecuación (4.2.95) se obtiene

$$\begin{bmatrix} 6 & -3 & 0 \\ -3 & 6 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \frac{1}{54} \begin{Bmatrix} 6 \\ 12 \\ 8 \end{Bmatrix} \tag{4.2.97}$$

de donde se obtiene que $u_2 = .1605$, $u_3 = .2840$ y $u_4 = .333$ los cuales son exactos sin embargo son aproximados en cualquier otro punto, por ejemplo en x=L/2 se tiene

$$u = [N]\{d\}_2 = \left[\frac{\ell - \ell/2}{\ell} \quad \frac{\ell/2}{\ell} \right] \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \tag{4.2.98}$$

$$u = \left[1/2 \quad 1/2 \right] \begin{Bmatrix} .1605 \\ .2840 \end{Bmatrix} = .222 \tag{4.2.99}$$

El valor exacto de u en x=L/2 es de 0,2292. El esfuerzo en el elemento i es $\sigma_i = (E\,u_{,x})_i$ o también

$$\sigma_i = E\,[B] \begin{Bmatrix} u_i \\ u_{i+1} \end{Bmatrix} \tag{4.2.100}$$

Substituyendo las condiciones (4.2.91) en (4.2.100) se obtienen los siguientes resultados:

$\sigma_1 = .4815$ exacto en $x = \frac{L}{6}$

$\sigma_2 = .3704$ exacto en $x = \frac{L}{2}$

$\sigma_3 = .1481$ exacto en $x = \frac{5L}{6}$

Es decir los esfuerzos no son continuos en el modelo y los desplazamientos son más exactos que los esfuerzos como se puede apreciar en la Fig. 4.2.12

De estos dos ejemplos se puede concluir que el método clásico de Rayleigh-Ritz (R-R) es aproximado pero más exacto si se utilizan más términos en el polinomio. En el caso de cargas destribuidas el método de R-R puede ser exacto si se usan suficientes términos en el polinomio y la inclusión de más términos no cambia la solución.

Por otra lado usando elementos finitos se llega a resultados exactos si las cargas se localizan en los nodos y es aproximado para el caso de cargas distribuidas pero puede ser bastante cercano al exacto si se usan más elementos.

El método clásico de R-R utiliza un polinomio que se aplica a todo el dominio de la estructura, mientras que el método del elemento finito utiliza un polinomio apra cada elemento.

4.2.10 Modelación de Sistemas con Elementos Finitos

Existe una variedad muy grande de sistemas mecánicos y estructurales los cuales requieren de una solución la cual no es siempre trivial ni simple de obtener, en tales casos es práctica común hacer una clasificación de efectos significantes y otros que por su naturaleza pueden considerarse insignificantes o ignorables, de tal manera que en general siempre se habla en términos de una solución aproximada a la solución real del sistema o de una solución exacta o aproximada de un modelo aproxi-

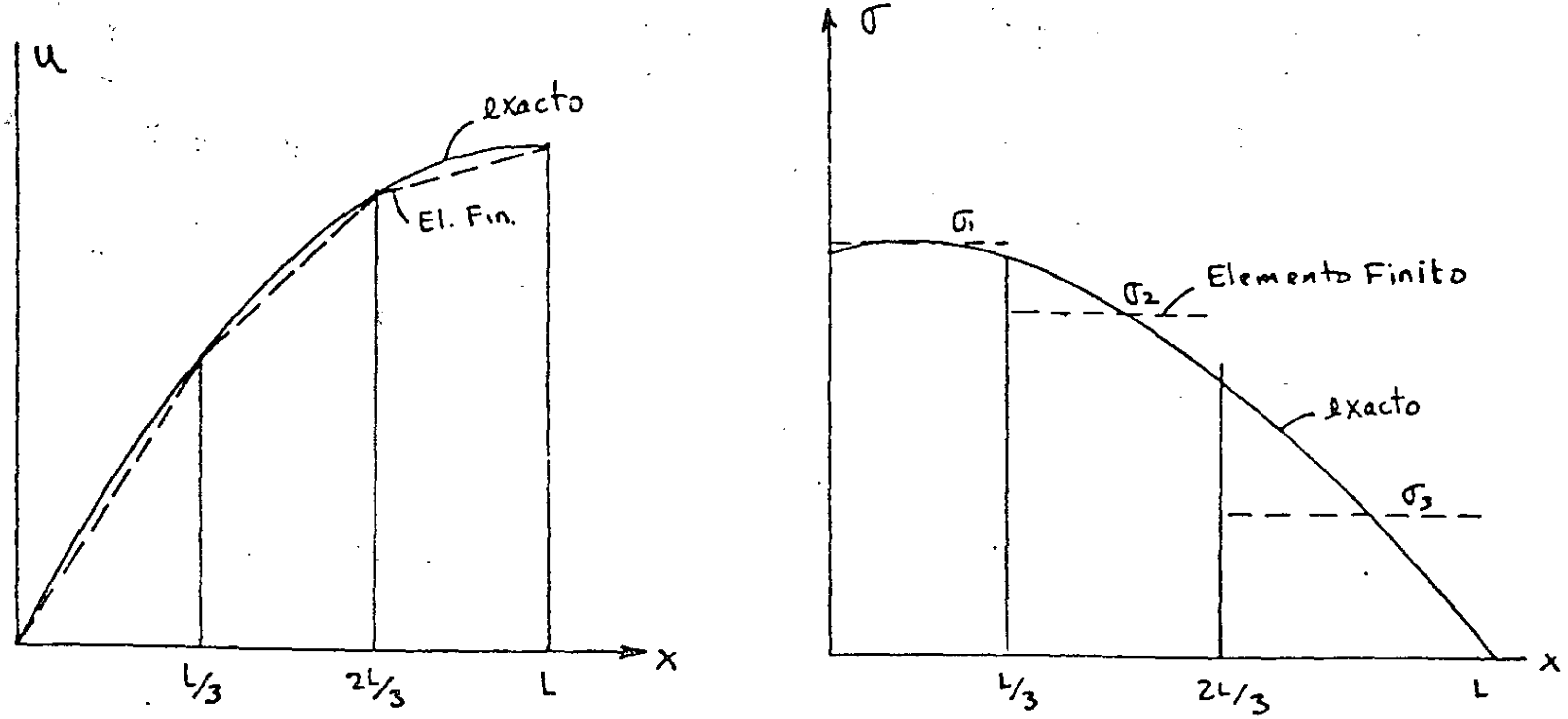


Fig 4.2.12 Comparación del metodo del elemento finito y la solución exacta para el problema de la barra con carga distribuida

mado al sistema real.

En la formulación analítica de un sistema, las suposiciones de que algunos efectos son ignorables tienen como objetivo simplificar los procedimientos de cálculo, sin embargo a través del desarrollo de técnicas digitales se han podido mejorar dichos procedimientos, aunque en general siempre es necesario hacer algunas suposiciones respecto a aquellos efectos que pueden ser ignorables o simplemente no dominantes.

La formulación con elementos finitos también requiere de suposiciones lógicas en base a la naturaleza del sistema en cuestión y para tal efecto se han desarrollado una variedad de elemntos cuyas propiedades son represntativas de algunos casos específicos de sistemas y así se tienen por ejemplo elementos planos para la simulación de problemas bidimensionales de esfuerzo plano o deformación plana, elementos viga en dos y tres dimensiones, elementos sólidos o de volumen, elementos cascaron y otros varios que tienen propósitos específicos.

En general, el análisis y modelación de un sistema es un proceso que se desarrolla en varias etapas que son:

1. Definición del sistema físico
2. Definición de condiciones de frontera
3. Definición de agentes de perturbación
4. Definición de variables de respuesta
5. Definición de efectos despreciables
6. Desarrollo del modelo analítico o modelo matemático
7. Aplicación sistemática de procedimientos de Cálculo
8. Interpretación de Resultados

Cabe mencionar que un entendimiento general del sistema en cuestión es siempre básico e importante pues la definición del sistema físico, de las condiciones iniciales y de frontera y la definición de agentes perturbadores puede depender de un entendimiento bastante completo del problema que se está analizando ya que una formulación erronea conceptualmente genera resultados que no corresponden al verdadero problema.

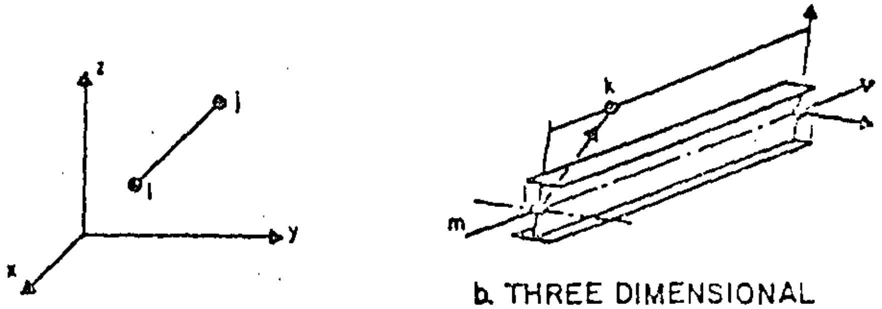
En el área de aplicaciones del método del elemento finito se parte de la suposición que el análisis conoce y entiende el problema en cuestión, de tal forma que los puntos del 1 al 5 del porceso de análisis queden satisfactoriamente establecidos.

En el punto 6, referente al desarrollo del modelo matemático es necesario que las características de los elementos empleados sean compatibles con el comportamiento general del sistema y por compatibilidad se entiende que el conjunto de elementos que componen el sistema sean capaces de reproducir en forma aproximada la respuesta del sistema a las perturbaciones y condiciones a que está sujeto.

Son varios los aspectos que se deben tomar en cuenta para la selección de los elementos apropiados para cada caso, por ejemplo:

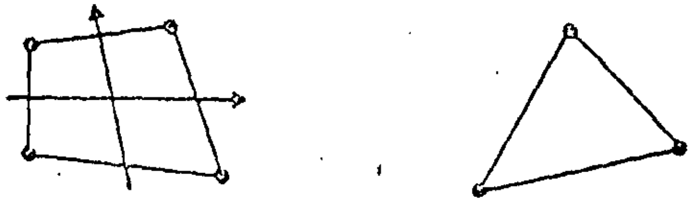
- -El número de nodos del elemento
- -El número de grados de libertad
- -Condiciones naturales de frontera del elemento
- -Tipo de cargas admisibles por el elemento
- -Tipo de geometría permitido por el elemento
- -Sistemas de coordenadas permisibles del elemento
- -Limitaciones del tipo de elemento

En la Fig. 4.2.13 se muestran algunos elementos que en general pueden ser aplicados a la modelación de varios tipos de sistemas y a continuación se presentan algunos casos específicos de aplicaciones a sistemas reales.

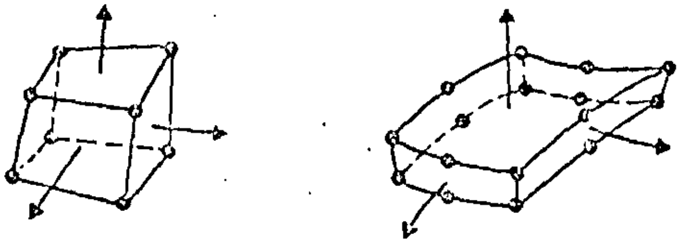


a.TRUSS ELEMENT

b. THREE DIMENSIONAL BEAM ELEMENT

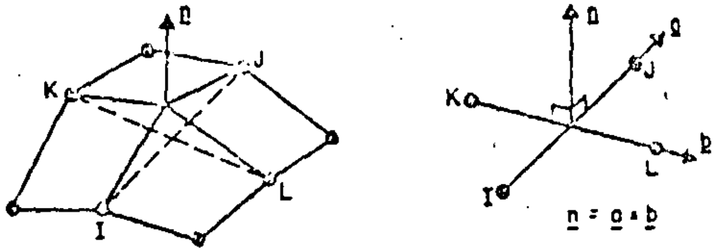


c.PLANE STRESS, PLANE STRAIN AND AXISYMMETRIC ELEMENTS

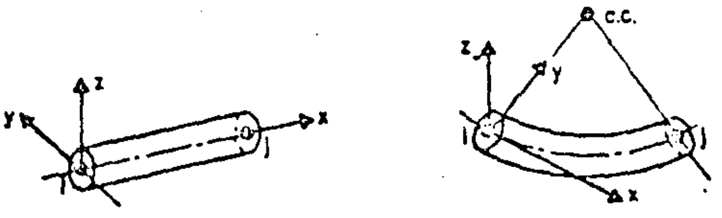


d.THREE DIMENSIONAL SOLID

e.THICK SHELL ELEMENT



f. THIN SHELL AND BOUNDARY ELEMENT



TANGENT

BEND

g. PIPE ELEMENT

Fig 4.2.13 Biblioteca de elementos del programa SAP

4.3. Formulación de Residuos Pesados (Método de Galerkin)

Una formulación alternativa a la variacional es la denominada de residuos pesados. Esta formulación no requiere de un postulado variacional que aplique al sistema de interés y parte de una manipulación directa sobre la ecuación diferencial que gobierna la física del mismo.

Una formulación diferencial resulta en una ecuación del tipo

$$L(\varphi) = 0 \qquad (4.3.1)$$

en donde L es un operador diferencial, con las condiciones de frontera

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= 0 \\ \varphi'(0) &= b \end{aligned} \qquad (4.3.2)$$

Una función de campo que puede satisfacer las condiciones anteriores se puede definir como:

$$\{\varphi\}_a = [N]\{\varphi_i\} \qquad (4.3.3)$$

en donde $[N]$ es una función de las coordenadas

$\{\varphi_i\}$ es el vector de valores nodales de

$\{\varphi\}_a$ es una función a "preuba"

entonces, si $\{\varphi\}_a$ es la verdadera función, al sustituirla en la ecuación (4.3.1) el resultado es:

$$L(\{\varphi\}_a) = 0 \qquad (4.3.4)$$

la verdadera función pero es una buena aproximación de la misam, entonces al sustituir en 4.3.1. el resultado es:

$$L(\{\varphi\}_a) = R \approx 0 \qquad (4.3.5)$$

en donde R es un residuo de error dado por a es solamente una buena aproximación de la verdadera función . Por lo tanto R se puede evaluar en puntos discretos (nodos) e igualar la suma a cero para minimizar el error, o sea

$$\int_V R\,dV = 0 \tag{4.3.6}$$

Pero una mejor solución sería la de distribuir R sobre una región de acuerdo a alguna función de peso w de las coordenadas (nodales) antes de la integración, es decir

$$\int_V W\,R\,dV = 0 \tag{4.3.7}$$

o sustituyendo la ecuación (4.3.3.) en (4.3.5) y esta en (4.3.7) se tiene:

$$\int_V W\,L([N]\{\varphi_i\})\,dV = 0 \tag{4.3.8}$$

La función de peso w puede ser de cualquier forma en general pero cuando se selecciona igual a las funciones de forma o de interpolación se tiene que w es igual a N y por lo tanto

$$\int_V [N]\,L([N]\{\varphi_i\})\,dV = 0 \tag{4.3.9}$$

La ecuación (4.3.9) es la formulación de "Galerkin" de elemento finito y si se aplica a cada elemento en la región, se obtienen n ecuaciones simultáneas para n parámetros nodales en .

La solución del sistema de ecuaciones que resulta se desarrolla de igual manera que para otros casos, aunque una desvetaja es que la ecuación (4.3.9) contiene derivadas de orden más alto que las de formulación variacional.

Considerar la ecuación diferencial:

$$Lu - f = 0 \qquad (4.3.10)$$

en donde L es un operador diferencial, y la aproximación

$$\bar{u} = \sum N_i u_i \qquad (4.3.11)$$

entonces

$$L\bar{u} - f = \varepsilon \qquad (4.3.12)$$

en donde ε=error residual. La condición es entonces:

$$\int_R N_i \varepsilon \, dR = 0 \qquad (4.3.13)$$

Es decir que el error ε entre la solución aproximada y la solución real es ortogonal a las funciones usadas en la aproximación Ni. Este es el método de Galerkin cuya ecuación estable:

$$\int_R N_\beta L(\varphi) \, dR = 0 \qquad \beta = i, j, k \ldots \qquad (4.3.14)$$

donde

$$\varphi = [N_i, N_j, N_k \ldots] \{\Phi\} \qquad (4.3.15)$$

Un ejemplo es el siguiente, sea la ecuación

$$L(\varphi) = \frac{d^2\varphi}{\partial x^2} + 3\frac{d\varphi}{dx} + 4 = 0 \qquad (4.3.16)$$

con condiciones iniciales

$$\varphi(0) = 1$$
$$\varphi'(0) = 0 \qquad (4.3.17)$$

Usando la ecución (4.3.14) resulta

$$\int_0^l N_\beta \left(\frac{d^2\varphi}{\partial x^2} + 3\frac{d\varphi}{dx} + 4 \right) dx = 0 \qquad (4.3.18)$$

l es el límite de x

Aplicación del Método de Galerkin a Vigas.

La ecuación fundamental

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} \tag{4.3.19}$$

Usando la ecuación (4.3.14)

$$\int_0^1 [N]^T \left(\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{M}{EI} \right) dx = 0 \tag{4.3.20}$$

La función de forma óde interplación se define sobre cada elemento, entonces para todo el sistema se tiene:

$$\sum_{e=1}^{R} \int_{l(e)} \left[N^{(e)}\right]^T \left(\frac{d^2y^{(e)}}{dx^2} - \frac{M^{(e)}}{EI} \right) dx = 0 \tag{4.3.21}$$

Las funciones de interpolación son tales que:

$$y = N_i Y_i + N_j Y_j = \left[\left(1 - \frac{x}{L}\right) , \frac{x}{L} \right] \begin{Bmatrix} Y_i \\ Y_j \end{Bmatrix} = \left[N^{(e)}\right] \{Y\} \tag{4.3.22}$$

Entonces el Momento M se puede aproximar:

$$\frac{M}{EI} = \left[N^{(e)}\right] \begin{Bmatrix} M_i/EI \\ M_j/EI \end{Bmatrix} \tag{4.3.23}$$

Para reducir el orden de la integral en la ecuación(4.3.21) se puede integrar por partes entonces:

$$\int_{l^{(e)}} [N^{(e)}]^T \frac{d^2y}{dx^2} = [N^{(e)}]^T \frac{dy}{dx} \Bigg]_{x_i}^{x_j} - \int_{l^{(e)}} \frac{d[N^{(e)}]^T}{dx} \frac{dy}{dx} \, dx \tag{4.3.24}$$

Substituyendo en (4.3.21) se tiene:

$$[N^{(e)}]^T \frac{dy}{dx} \Bigg]_{x_i}^{x_j} - \int_{l^{(e)}} \left(\frac{d[N^{(e)}]^T}{dx} \frac{dy}{dx} + [N^{(e)}]^T \frac{M}{EI} \right) dx = 0 \tag{4.3.25}$$

La primera integral nos da la matriz elemental de coeficientes $[k^{(e)}]$ en la ecuación

$$[K^{(e)}]\{Y\} = \{f^{(e)}\} \qquad (4.3.26)$$

A través de la suma sobre todos los elementos, la segunda integral produce el vector $\{F\}$.

El primer término de la ecuación (4.3.25) contribuye al vector $\{F\}$ si dy/dx se define en cualquier extremo del elemento, si no se desprecia.

Las integrales de la ecuación (4.3.25) se evaluan como sigue:

$$\frac{d}{dx}[N]^T = \frac{d}{dx}\begin{Bmatrix} (1-\frac{x}{l}) \\ \frac{x}{l} \end{Bmatrix} = \frac{1}{l}\begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \qquad (4.3.27)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}[N]\{Y\} = \frac{1}{l}\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} y_i \\ y_j \end{Bmatrix} \qquad (4.3.28)$$

Entonces:

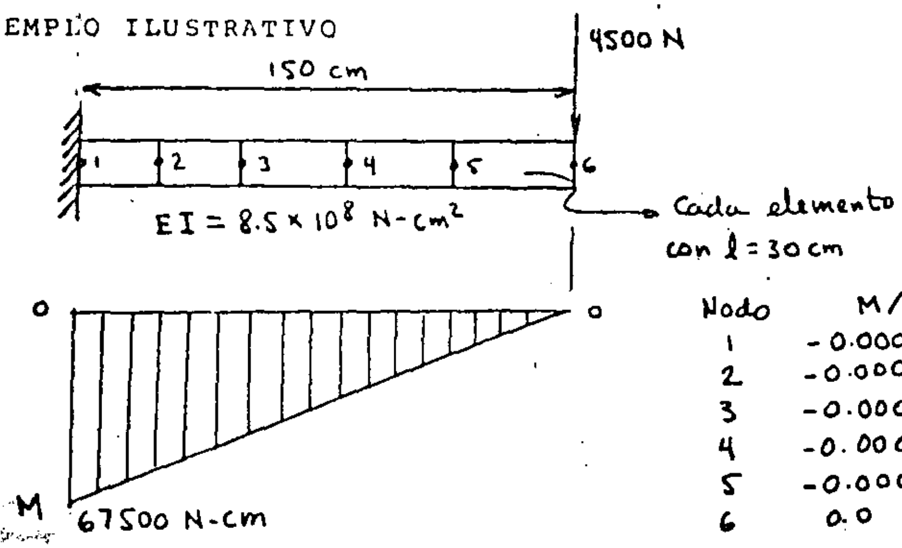
$$\int_0^l \frac{d}{dx}[N]^T \frac{dy}{dx}\,dx = \int_0^l \frac{1}{l^2}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} y_i \\ y_j \end{Bmatrix} dx = \frac{1}{l}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} y_i \\ y_j \end{Bmatrix} \qquad (4.3.29)$$

y para la segunda integral:

$$\int_0^l [N]^T \frac{M}{EI}\,dx = \int_0^l [N]^T[N]\begin{Bmatrix} M_i/EI \\ M_j/EI \end{Bmatrix} dx = \qquad (4.3.30)$$

$$\frac{l}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} M_i/EI \\ M_j/EI \end{Bmatrix}$$

EJEMPLO ILUSTRATIVO



Nodo	M/EI
1	-0.000794
2	-0.000635
3	-0.000476
4	-0.000318
5	-0.000159
6	0.0

Las ecuaciones para el primer elemento son:

$$-\frac{1}{30}\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}y_i\\y_j\end{Bmatrix}-\frac{30}{6}\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}M_i/EI\\M_j/EI\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}1-\frac{x}{l}\\\frac{x}{l}\end{Bmatrix}\frac{dy}{dx}\bigg|_{x=0}=\begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix} \qquad (4.3.31)$$

$\therefore \frac{dy}{dx}=0\Big|_{x=0}$, el último término desaparece. Entonces, una vez ensamblado el sistema queda:

$$\begin{bmatrix}1&-1&&&0&\\-1&2&-1&&&\\&-1&2&-1&&\\&&-1&2&-1&\\0&&&-1&2&-1\\&&&&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\\y_5\\y_6\end{bmatrix}+150\begin{bmatrix}2&1&&&0&\\1&4&1&&&\\&1&4&1&&\\&&1&4&1&\\0&&&1&4&1\\&&&&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-0.000794\\-0.000655\\-0.000476\\-0.000318\\-0.000159\\-0.0\end{bmatrix}=\{0\} \qquad (4.3.32)$$

que se puede reducir a:

$$\begin{bmatrix}1&-1&&&&\\-1&2&-1&&&\\&-1&2&-1&&\\&&-1&2&-1&\\&&&-1&2&-1\\&&&&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\\y_5\\y_6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}.333\\.571\\.428\\.286\\.143\\.023\end{bmatrix}\quad \therefore y_1=0 \qquad (4.3.33)$$

Resultados

Nodo	E.F.	Teoría
1	0	0
2	-.3334	-.3335
3	-1.2385	-1.2388
4	-1.5719	-2.5729
5	-4.1929	-4.1929
6	-5.9559	-5.9559

Conclusión: Sin comentarios.

Ecuación de campo en dos dimensiones:

$$L(\varphi) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \phi = 0 \qquad (4.3.34)$$

Aplicable a problemas de:

-Torsión
-Transmisión de Calor
-Mecánica de Fluidos

La integral de Galerkin para el caso de la ecuación (4.3.34)es:

$$\int_V [N]^T \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \phi \right) dV = 0 \qquad (4.3.35)$$

DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.

MATEMATICAS APLICADAS A LA INGENIERIA ESTRUCTURAL

BIBLIOTECA DE ELEMENTOS Y APLICACIONES

MARZO, 1985

5. BIBLIOTECA DE ELEMENTOS Y APLICACIONES

5.1 Desarrollo de Matrices Elementales

Cada elemento está asociado a un número determinado de nodos y estos a su vez a un número especifico de grados de libertad (g d l). En general, dependiendo de la variable de campo (desplazamiento, temperatura, etc) se puede definir el tipo de grados de libertad que se requieren para la representación física del comportamiento del sistema; por ejemplo, si se trata del desplazamiento de una partícula en una linea, se tiene entonces un (gdl), si se trata de desplazamientos en un plano de la misma entonces se tienen dos (g d l) y se tienen tres (g d l) para el caso de desplazamientos en el espacio.

Los elementos comunmente usados en la práctica de elementos finitos pueden clasificarse de varias formas y en varias categorías, algunas de estas pueden ser las que se indican en la tabla 5.1.1. Algunas de las características indicadas en esta tabla pueden ser fisicamente interpretadas, por ejemplo el número de nodos necesarios para describir la topología del elemento, forma relativa (rectangular, trapezoidal etc), pero otras no son tan obvias como por ejemplo el orden de la integración explicita, el tipo de las fun-

Característica Categórica	Tipos de Elementos	Ejemplos
Espacial Geometrica	Lineales (unidemensionales)	barra, viga
	Planos (bidimensionales) < Triangulares cuadriláteros	esfuerzo plano, deformación plana, axisimetricos
	Espaciales (Tridimensionales)	solidos, placas gruesas
Forma Relativa	Naturales (regulares)	Triangulares, rectangulares
	Isoparametricos (irregulares) 1, 2 y 3 puntos de integración	de geometria irregular
Orden de los polinómios de interpolación	Lineales (nodos esquinales)	lados rectos
	Cuadraticas (nodos esq. y 1 intermedio)	lados parabolicos
	Cubicas (nodos esq. y 2 intermedios)	lados cubicas
Tipo de grados de libertad	Traslacionales	barra, planos, solidos
	Rotacionales	vigas, cascarones, placas.

TABLA 5·1·1 Algunas clasificaciones de Elementos Finitos ciones de interpolación de la variable de campo etc. En un programa general de elementos finitos, cada elemento está debidamente formulado a través de ciertas ecuaciones que toman en cuenta las siguientes caracteristicas:

- Número de nodos
- Numero de grados de libertad por nodo
- coordenadas nodales
- conectividad del elemento
- Numero de puntos de integración (isoparamétricas)
- propiedades del material

y para cada elemento en un sistema, se formulan las matrices elementales que caracterizan sus propiedades y que se ensamblan en matrices globales que caracterizan la estructura total del sistema. Por ejemplo la estructura mostrada en la figura 5.1.1 tiene 8 elementos cuyos nodos tienen un solo grado de libertad (temperatura por ejemplo). El resultado de ensamblar las matrices elementales en la matriz global es una matriz cuyos terminos diferentes de cero se indican con una "x" como se muestra en las siguientes ecuaciones indicadas.

Sea $[K_i]$ la matriz del elemento i cuyo orden $\underline{n}$ es igual al numero de nodos (dado que cada nodo tiene un solo gdl) entonces se obtienen las siguientes matrices elementales

$$[K_1]_{3\times3},\ [K_2]_{4\times4},\ [K_3]_{3\times3},\ [K_4]_{4\times4},\ [K_5]_{3\times3}$$

$$[K_6]_{2\times2},\ [K_7]_{2\times2},\ [K_8]_{2\times2} \qquad (5\cdot1\cdot1)$$

El vector global de grados de libertad se ordena de acuerdo al esquema de nomeración nodal tal que

$$\{D\}^T = \{d_1, d_2 \dots \dots d_9\} \qquad (5\cdot1\cdot2)$$

y los vectores elementales se ordenan de acuerdo a los nodos que definen el elemento, entonces se tienen los siguientes vectores elementales:

$$\begin{aligned}
\{D_1\}^T &= \{d_1\ d_4\ d_5\} \\
\{D_2\}^T &= \{d_1\ d_2\ d_5\ d_6\} \\
\{D_3\}^T &= \{d_4\ d_5\ d_8\} \\
\{D_4\}^T &= \{d_5\ d_6\ d_8\ d_9\} \qquad (5\cdot1\cdot3) \\
\{D_5\}^T &= \{d_2\ d_3\ d_6\} \\
\{D_6\}^T &= \{d_3\ d_7\} \\
\{D_7\}^T &= \{d_6\ d_7\} \\
\{D_8\}^T &= \{d_7\ d_9\}
\end{aligned}$$

Al expander las matrices (5.1.1) al tamaño de la matriz global se pueden sumar término a termino y el resultado sería una matriz [K] cuyos términos diferentes de cero se indican en la siguiente ecuación:

$$[K] = \begin{array}{c|ccccccccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & X & X & O & X & X & X & O & O & O \\ 2 & X & X & X & O & X & X & O & O & O \\ 3 & O & X & X & O & O & X & X & O & O \\ 4 & X & O & O & X & X & O & O & X & O \\ 5 & X & X & O & X & X & X & O & X & X \\ 6 & X & X & X & O & X & X & X & X & X \\ 7 & O & O & X & O & O & X & X & O & X \\ 8 & O & O & O & X & X & X & O & X & X \\ 9 & O & O & O & O & X & X & X & X & X \end{array} \qquad (5 \cdot 1 \cdot 4)$$

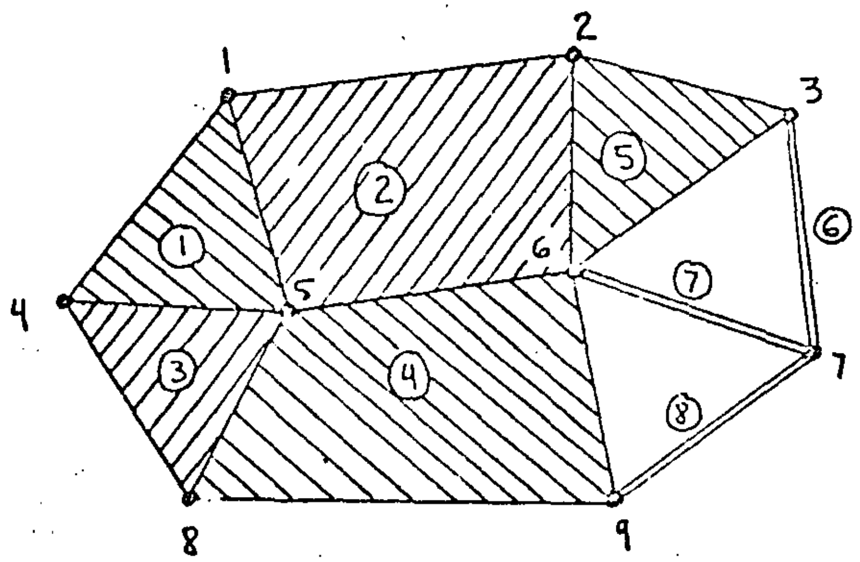
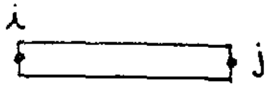
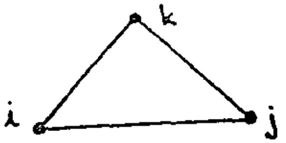
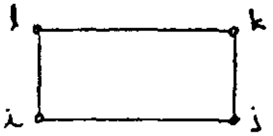
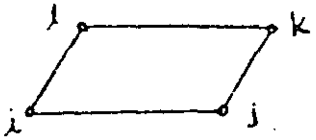
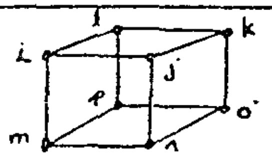
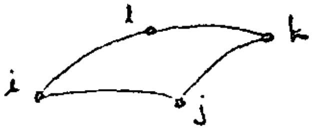
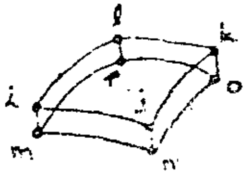
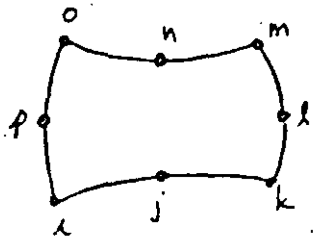
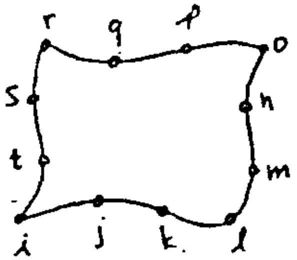
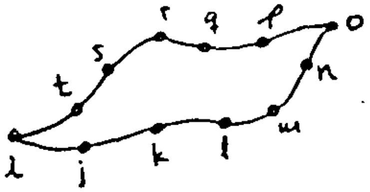


Figura 5·1·1 Sistema con 5 elementos planos (tres triangulares y dos cuadriláteros) y tres elementos barra, con un grado de libertad por nodo

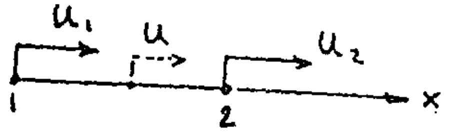
ELEMENTO	TIPO	Nº NODOS	Nº (g d l)	TIPO DE CARGAS
	BARRA	2	1 linea 2 plano 3 espacio	axiales
	VIGA	2	2 3 } plano 6 espacio	Concentradas, distribuidas cortantes, momentos, axiales
	TRIANGULAR PLANO	3	2	concentradas en el plano
	RECTANGULAR PLANO	4	2	concentradas en el plano
	RECTANGULAR PLACA	4	3	concentradas en el plano y fuera del plano y distribuidas en la cara
	SOLIDO	8	3	Concentradas en los nodos en cualquier dirección y en las caras distribuida
	CASCARON	4	6	concentradas y distribuidas en cualquier dirección
	PLACA GRUESA	8	6	concentradas y distribuidas en cualquier dirección

ELEMENTO	TIPO	Nº NODOS	Nº (g d l)	TIPO DE CARGAS
	PLANO ISOPARAMETRICO PARABOLICO	8	2	concentradas en el plano
	PLANO ISOPARAMETRICO CUBICO	12	2	mismas
	CASCARON ISOPARAMETRICO CUBICO	12	6	concentradas, cortantes y momentos y de superficie
	SOLIDO ISOPARAMETRICO CUBICO	32	3	Concentradas, sin momentos, de superficie.

A continuación se presenta el desarrollo de las matrices elementales para algunos elementos basados en una formulación variacional que resulta en matrices del tipo

$$[K_e] = \int_{Vol.} [B]^T [E] [B] \, dV \qquad (5\cdot1\cdot5)$$

Caso 1 Elemento tipo barra



sea la función de campo $\{u\}$ expresada en términos de un campo

$$\{u\} = [1 \quad x]\{a\} \qquad (5\cdot1\cdot6)$$

∴ $\{u\}$ es el desplazamiento de cualquier punto del elemento

$\{a\}$ es el vector de coeficientes de un polinomio que aproxima el desplazamiento en el elemento

x es la coordenada dentro del elemento para la cual se calcula el desplazamiento $\{u\}$

$$\{d\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = [\Lambda]\{a\} \qquad (5\cdot1\cdot7)$$

combinando (5·1·7) y (5·1·6)

$$\{u\} = [1 \quad x][\Lambda]^{-1}\{d\} = \left[\left(1-\frac{x}{L}\right) \quad \frac{x}{L}\right]\{d\} \qquad (5\cdot1\cdot8)$$

$$\{u\} = [N]\{d\} \qquad (5\cdot1\cdot9)$$

por otro lado se tiene que

$$\{\varepsilon\} = [B]\{d\} = \left(-\frac{1}{L} \quad \frac{1}{L}\right)\begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} = \frac{d_2 - d_1}{L} \qquad (5\cdot1\cdot10)$$

De las ecuaciones (5·1·9) y (5·1·10) se tiene que

$$[B] = \frac{\partial}{\partial x}[N] \qquad (5\cdot1\cdot11)$$

De la expresión de la energía de deformación se tiene:

$$U = \frac{1}{2}\int_0^L \{\varepsilon\}^T [E] \{\varepsilon\}\, A\, dx \qquad (5\cdot1\cdot12)$$

Sustituyendo (5·1·10) en (5·1·12) se tiene

$$U = \frac{1}{2}\{d\}^T \left[\int_0^L [B]^T E\, [B]\, A dx\right] \{d\} \qquad (5\cdot1\cdot13)$$

la cual se puede escribir como

$$U = \frac{1}{2}\{d\}^T [K_e] \{d\} \qquad (5\cdot1\cdot14)$$

Entonces para obtener [ke] se tiene

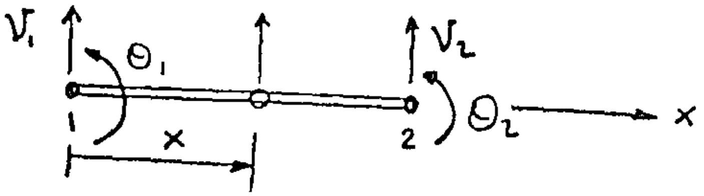
$$[k_e] = \int_0^L [B]^T E\, [B]\, A dx = \int_0^L \begin{Bmatrix} -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} \end{Bmatrix} E \left\{ -\frac{1}{L} \quad \frac{1}{L} \right\} A dx \qquad (5\cdot1\cdot15)$$

y el resultado es

$$[k_e] = \frac{AE}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad (5\cdot1\cdot16)$$

que es la matriz que caracteriza a un elemento barra en coordenadas naturales, es decir cuando el eje x coincide con el eje longitudinal del elemento.

Caso 2 Elemento Viga



Un desplazamiento cortante v en cualquier punto del elemento localizado en una coordenada x del mismo se puede aproximar mediante:

$$v_x = [1 \quad x \quad x^2 \quad x^3] \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} \qquad (5.1.17)$$

Segun la teoría de vigas, el desplazamiento angular θ de un punto en la viga es igual a la derivada del desplazamiento cortante con respecto a la coordenada longitudinal, entonces:

$$\theta_x = \frac{dv_x}{dx} = \frac{d}{dx}[1 \quad x \quad x^2 \quad x^3] \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} \qquad (5.1.18)$$

$$\theta_x = [0 \quad 1 \quad 2x \quad 3x^2] \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} \qquad (5.1.19)$$

tomando las condiciones de frontera para el elemento se tiene que:

$$\begin{aligned} v_x &= v_1 \quad @ \quad x=0 \\ v_x &= v_2 \quad @ \quad x=L \\ \theta_x &= \theta_1 \quad @ \quad x=0 \\ \theta_x &= \theta_2 \quad @ \quad x=L \end{aligned} \qquad (5.1.20)$$

entonces

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} = [\Lambda]\{a\} \qquad (5.1.21)$$

esta ecuación tiene la forma de la ecuación (5.1.7), de (5.1.17) y (5.1.18) se tiene lo siguiente:

$$\begin{Bmatrix} v_x \\ \theta_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 1 & 2x & 3x^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} \qquad (5.1.22)$$

entonces despejando el vector $\{a\}$ de (5.1.21) y sustituyendolo en la última ecuación se obtiene

$$\begin{Bmatrix} v_x \\ \theta_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 1 & 2x & 3x^2 \end{bmatrix} [\Lambda]^{-1} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \qquad (5.1.23)$$

en donde el producto de las matrices en (5.1.23) se define como:

$$[N] = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 1 & 2x & 3x^2 \end{bmatrix} [\Lambda]^{-1} \qquad (5.1.23)$$

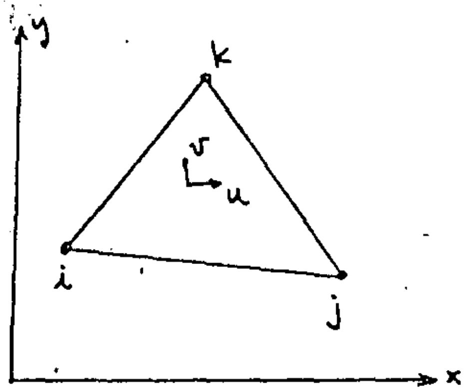
tomando de la ecuación (5.1.23) la derivada con respecto a x se obtiene la matriz [B].

$$[B] = \frac{d}{dx}[N] \qquad (5.1.24)$$

sustituyendo la matriz [B] en la ecuación (5.1.5) con la matriz [E] = [EI] = EI, el resultado es el siguiente después de desarrollar la integración:

$$[K_e] = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \qquad (5.1.25)$$

Caso 3 Elemento Triangular Plano



$$\begin{aligned} u &= a_1 + a_2 x + a_3 y \\ v &= a_4 + a_5 x + a_6 y \end{aligned} \qquad (5\ 1.26)$$

expresando la aproximación de campo (5.1.26) en forma matricial se tiene:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix} \qquad (5.1.27)$$

Tomando las condiciones de frontera para i=1, j=2 y k=3 se tiene que:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} ; \quad \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix} \qquad (5.1.28)$$

despejando los vectores $\{a_1\ a_2\ a_3\}^T$ y $\{a_4\ a_5\ a_6\}^T$ se tiene

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = [\Lambda]^{-1}\{u\} \qquad (5.1.29)$$

y

$$\begin{Bmatrix} a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} = [\Lambda]^{-1}\{v\} \qquad (5.1.30)$$

sustituyendo estas expresiones en la ecuación (5.1.27) debidamente ordenadas se obtiene

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \qquad (5.1.31)$$

en donde:

$$N_1 = \frac{1}{2A}\left[\frac{2A}{3} + (y_2-y_3)x + (x_3-x_2)y\right]$$

$$N_2 = \frac{1}{2A}\left[\frac{2A}{3} + (y_3-y_1)x + (x_1-x_3)y\right] \qquad (5.1.32)$$

$$N_3 = \frac{1}{2A}\left[\frac{2A}{3} + (y_1-y_2)x + (x_2-x_1)y\right]$$

La matriz $[B]$ se obtiene tomando las parciales de $[N]$ es decir.

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \qquad (5.1.33)$$

Para obtener la matriz de rigidez del elemento, solamente es necesario sustituir la expresión de [B] dela ecuación (5.1.33) en la ecuación (5.1.5), pero la matriz de propiedades de material depende del caso que se trate, en el caso de esfuerzo plano se tiene:

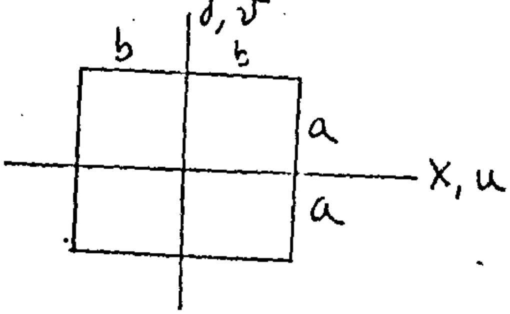
$$[E] = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \qquad (5.1.34)$$

en el caso de diformación plana se tiene:

$$[E] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix} 1 & \nu/(1-\nu) & 0 \\ \nu/(1-\nu) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\nu)/2(1-\nu) \end{bmatrix} \qquad (5.1.35)$$

la matriz final se puede obtener de las ecuaciones (5.1.5), (5.1.33) y segun sea el caso de ecuaciones (5.1.34) y/o (5.1.35).

Caso 4 Elemento cuadrilátero plano



$$\begin{aligned} u &= a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 xy \\ v &= a_5 + a_6 x + a_7 y + a_8 xy \end{aligned} \qquad (5.1.36)$$

las ecuaciones (5.1.36) representan la aproximación de desplazamiento a traves de un polinomio. Desarrollando los mismos pasos que en el caso anterior se obtienen las siguientes matrices:

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \qquad (5.1.37)$$

en donde

$$N_1 = \frac{(b-x)(a-y)}{4ba}$$

$$N_2 = \frac{(b+x)(a-y)}{4ba}$$

$$N_3 = \frac{(b+x)(a+y)}{4ba} \qquad (5.1.38)$$

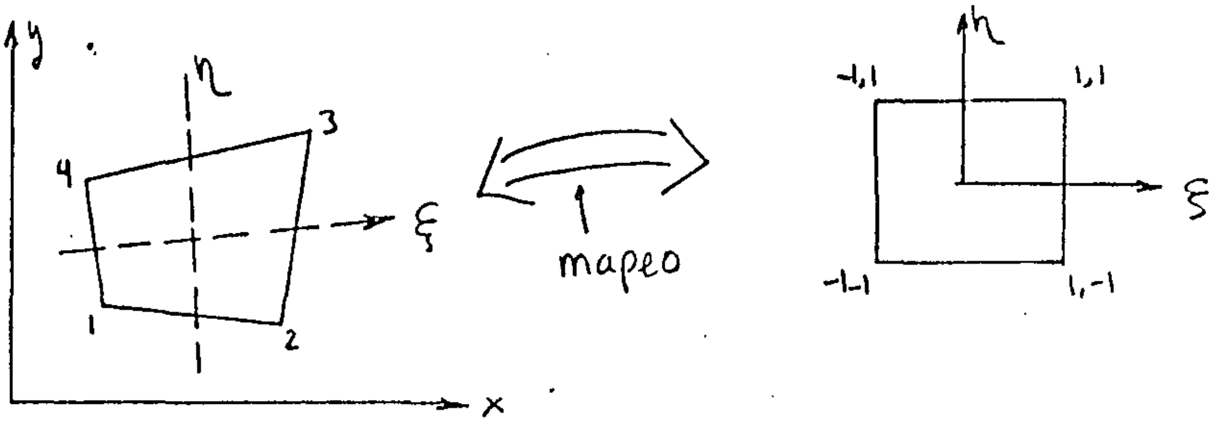
$$N_4 = \frac{(b-x)(a+y)}{4ba}$$

La matriz [B] se obtiene mediante:

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \qquad (5.1.39)$$

la matriz elemental de rigidez se obtiene sustituyendo la matriz [B] dela ecuación (5.1.39) en la ecuación (5.1.5) y donde la matriz [E] tiene la misma forma que para el caso del elemento triangular.

caso 5 Elemento rectangular isoparamétrico



Para este caso, podemos considerar la función de mapeo

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_4 \end{Bmatrix} \qquad (5.1.40)$$

en donde

$$N_1 = \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4}$$

$$N_2 = \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4} \qquad (5.1.41)$$

$$N_3 = \frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4}$$

$$N_4 = \frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4}$$

Este "mapeo" relaciona un punto de coordenadas (x,y) en el elemento irregular con un punto de coordenadas (ξ,η) del elemento regular. El polinomio correspondiente es:

$$x = a_1 + a_2\xi + a_3\eta + a_4\xi\eta$$

$$y = a_5 + a_6\xi + a_7\eta + a_8\xi\eta \qquad (5.1.42)$$

las condiciones de frontera nodales son:

$$\begin{aligned} y &= y_1 \quad , \quad x = x_1 \quad @ \quad \xi = \eta = -1 \\ y &= y_2 \quad , \quad x = x_2 \quad @ \quad \xi = 1, \eta = -1 \\ y &= y_3 \quad , \quad x = x_3 \quad @ \quad \xi = \eta = 1 \\ y &= y_4 \quad , \quad x = x_4 \quad @ \quad \xi = -1, \eta = 1 \end{aligned} \qquad (5\cdot1\cdot43)$$

El campo de desplazamientos queda:

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = [N]\{d\} \qquad (5\cdot1\cdot44)$$

y las funciones de interpolación son tales que:

$$x = \sum_1^4 N_i x_i \qquad y = \sum_1^4 N_i y_i \qquad (5\cdot1\cdot45)$$

y por lo tanto los desplazamientos son:

$$u = \sum_1^4 N_i u_i \qquad v_i = \sum_1^4 N_i v_i \qquad (5\cdot1\cdot46)$$

Usando la regla de la cadena para la derivación en dos sistemas de coordenadas se tiene que:

$$\begin{Bmatrix} (\ )_{,\xi} \\ (\ )_{,\eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} (\ )_{,x} \\ (\ )_{,y} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} (\ )_{,x} \\ (\ )_{,y} \end{Bmatrix} \qquad (5\cdot1\cdot47)$$

entonces para este caso se tiene que el jacobiano queda

$$[J] = \begin{bmatrix} N_{1,\xi} & N_{2,\xi} & N_{3,\xi} & N_{4,\xi} \\ N_{1,\eta} & N_{2,\eta} & N_{3,\eta} & N_{4,\eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix} \qquad (5\cdot1\cdot48)$$

defininimos $[J^*] = [J]^{1}$ entonces usando la ecuación (5·1·47)

$$\begin{Bmatrix} u_{,x} \\ u_{,y} \\ v_{,x} \\ v_{,y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11}^* & J_{12}^* & 0 & 0 \\ J_{21}^* & J_{22}^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_{11}^* & J_{12}^* \\ 0 & 0 & J_{21}^* & J_{22}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{,\xi} \\ u_{,\eta} \\ v_{,\xi} \\ v_{,\eta} \end{Bmatrix} \qquad (5\cdot1\cdot49)$$

de la definición de deformaciones en el plano se tiene que

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{,x} \\ u_{,y} \\ v_{,x} \\ v_{,y} \end{Bmatrix} \qquad (5\cdot1\cdot50)$$

de las expresiones (5·1·45) y (5·1·46)

$$\begin{Bmatrix} u_{,\xi} \\ u_{,\eta} \\ v_{,\xi} \\ v_{,\eta} \end{Bmatrix} = \left[\underbrace{\begin{bmatrix} N_{i,\xi} & 0 \\ N_{i,\eta} & 0 \\ 0 & N_{i,\xi} \\ 0 & N_{i,\eta} \end{bmatrix}}_{i=1} \underbrace{\begin{bmatrix} \; \\ \; \\ \; \\ \; \end{bmatrix}}_{i=2} \underbrace{\begin{bmatrix} \; \\ \; \\ \; \\ \; \end{bmatrix}}_{i=3} \underbrace{\begin{bmatrix} \; \\ \; \\ \; \\ \; \end{bmatrix}}_{i=4} \right] \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_4 \end{Bmatrix} \qquad (5\cdot1\cdot51)$$

combinando las ultimas tres ecuaciones y de la ecuación

$$\{\varepsilon\} = [B]\{d\} \qquad (5\cdot1\cdot52)$$

se obtiene que

$$[B] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_{11}^* & J_{12}^* & 0 & 0 \\ J_{21}^* & J_{22}^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_{11}^* & J_{12}^* \\ 0 & 0 & J_{21}^* & J_{22}^* \end{bmatrix} \left[\underbrace{\begin{bmatrix} N_{i,\xi} & 0 \\ N_{i,\eta} & 0 \\ 0 & N_{i,\xi} \\ 0 & N_{i,\eta} \end{bmatrix}}_{i=1} \underbrace{\begin{bmatrix} \; \\ \; \\ \; \\ \; \end{bmatrix}}_{i=2} \underbrace{\begin{bmatrix} \; \\ \; \\ \; \\ \; \end{bmatrix}}_{i=3} \underbrace{\begin{bmatrix} \; \\ \; \\ \; \\ \; \end{bmatrix}}_{i=4} \right] \qquad (5\cdot1\cdot52)$$

El siguiente paso es integrar el producto $[B]^T[E][B]$ en donde $[E]$ tiene la misma forma que en casos anteriores al integrar se tiene que.

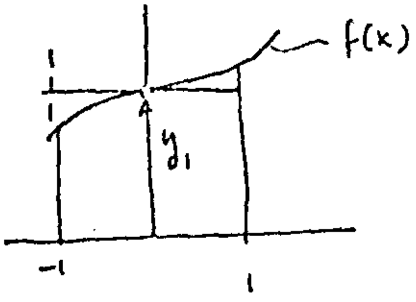
$$I = \int_x \int_y (\quad) \, dx \, dy = \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} (\quad) \det[J] \, d\xi \, d\eta \qquad (5.1.53)$$

pero debido a la complejidad del integrando se requiere de una aaproximación mediante una integración numérica la cual se describe brevemente a continuación

sea la integral

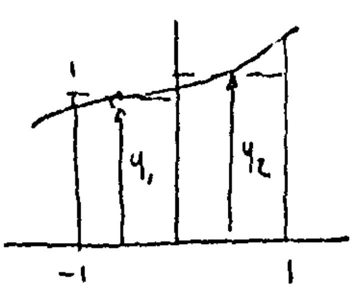
$$I = \int_{-1}^{1} y \, dx \qquad (5.1\ 54)$$

se puede aproximar deacuerdo a las siguientes aproximaciones



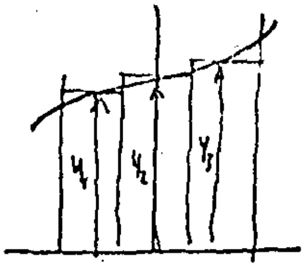
$I = 2y_1$

(a)



$I = W_1 y_1 + W_2 y_2$

(b)



$I = W_1 y_1 + W_2 y_2 + W_3 y_3$

(e)

Entonces la integral se puede expresar como

$$I = \int_{-1}^{1} y \, dx \approx \sum_i w_i y_i \qquad (5.1.54)$$

La integral de la ecuación (5.1.53) se puede aproximar mediante:

$$I = \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} f(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta \approx \int_{-1}^{+1}\left[\sum_i W_i\, f(\xi_i,\eta)\right] d\eta \qquad (5.1.55)$$

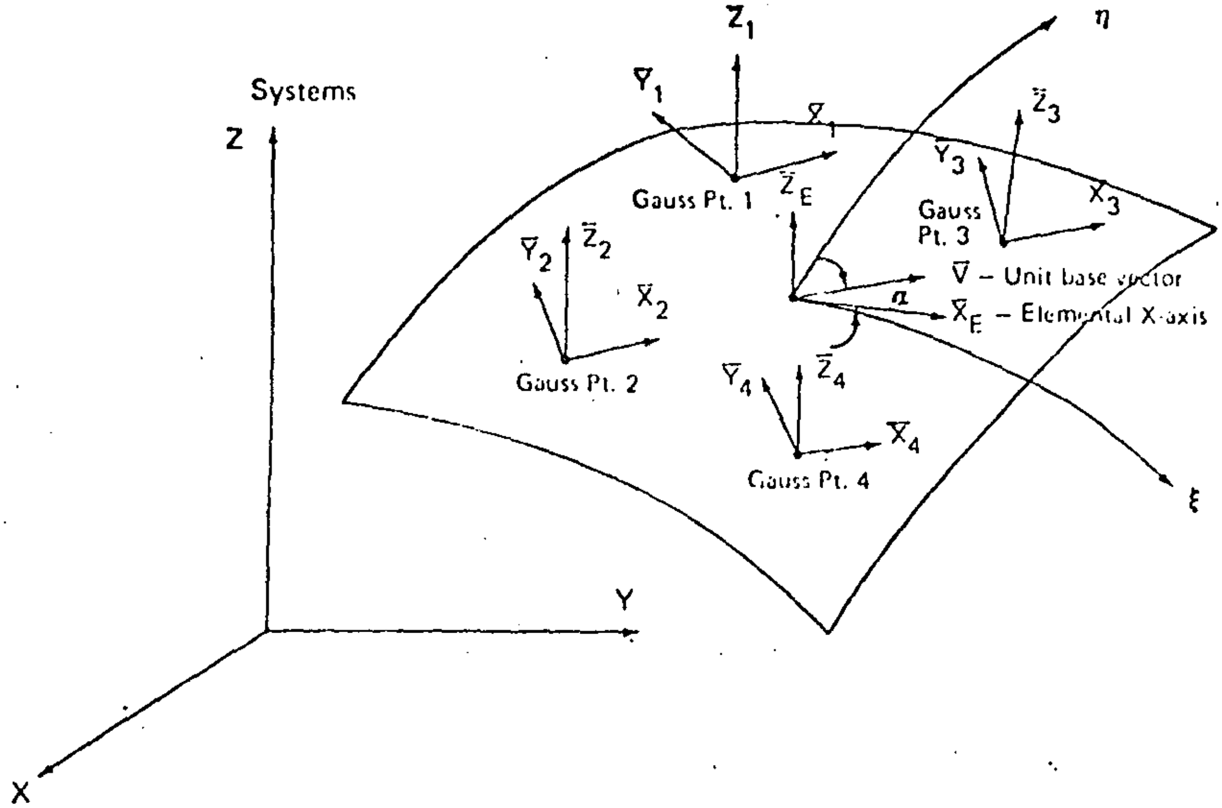
y finalmente

$$I = \sum_i W_i \left[\sum_j W_j\, f(\xi_i,\eta_j)\right] = \sum_i \sum_j W_i W_j\, f(\xi_i,\eta_j) \qquad (5.1.5$$

la localización de los puntos i, j de integración y sus pesos asociados se dan a través de la cuadratura de Gauss dada en la siguiente tabla para 1, 2 y 3 puntos.

Nº de Puntos	Localización	Peso asociado
1	$X = 0.0$	2
2	$X_1, X_2 = \pm 0.57735$	1
3	$X_1, X_3 = \pm 0.77459$ $X_2 = 0.0$	5/9 8/9

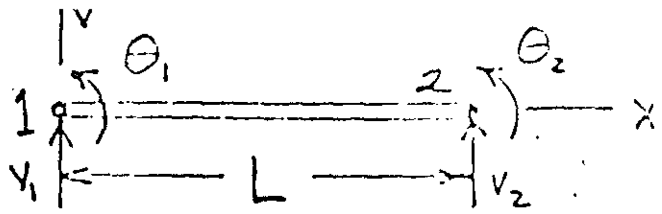
Tabla 5.1.3 Cuadratura de Gauss para integración con 1, 2 y 3 puntos.



1. $\bar{X}_i, \bar{Y}_i, \bar{Z}_i$ = unit vectors defining directions of local coordinate axes at Gauss point (i).
2. $\bar{X}_E$ = elemental X-axis tangent to middle surface at $\xi = \eta = \zeta = 0.0$ and parallel to local ξ direction.
3. $\bar{V}$ = unit base vector defined by rotation angle a with respect to vector $\bar{X}_E$.
4. $\bar{Z}_i$ is normal to middle surface at Gauss point (i)
5. $\bar{Y}_i = \bar{V} \times \bar{Z}_i$
6. $\bar{X}_i = \bar{Y}_i \times \bar{Z}_i$

Figure III.5.3
Definition of Elemental Gauss Point Coordinate
Axes for Shell Elements

Elemento Viga



$$v = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad , \qquad \text{donde}$$

$$N_1 = 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} \qquad N_2 = x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}$$

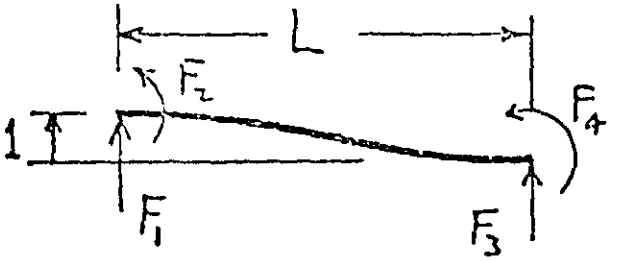
$$N_3 = \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} \qquad N_4 = -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}$$

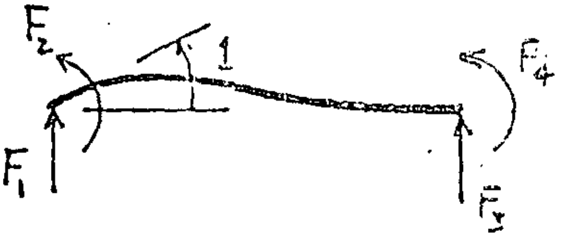
$$v_{,xx} = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad , \qquad \text{donde}$$

$$B_1 = -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} \qquad B_2 = -\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2}$$

$$B_3 = \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \qquad B_4 = -\frac{2}{L} + \frac{6x}{L^2}$$

$$[k] = \int_0^L [B]^T EI [B]\, dx = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$





$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 12EI/L^3 \\ 6EI/L^2 \\ -12EI/L^3 \\ 6EI/L^2 \end{Bmatrix} \qquad \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 6EI/L^2 \\ 4EI/L \\ -6EI/L^2 \\ 2EI/L \end{Bmatrix}$$

Matriz de Rigidez de un elemento cuadrilatero

Ref. Fig. 8

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} [N]$$

$$\underset{3\times 8}{[B]} = \frac{1}{4bc} \begin{bmatrix} -(c-y) & 0 & (c-y) & 0 & - - - - \\ 0 & -(b-x) & 0 & -(b+x) & - - - \\ -(b-x) & -(c-y) & -(b+x) & (c-y) & - - - \end{bmatrix}$$

$$\underset{8\times 8}{[k]} = \int_{-c}^{c}\int_{-b}^{b} \underset{8\times 3}{[B]^T} \underset{3\times 3}{[E]} \underset{3\times 8}{[B]} \, t \, dx \, dy \tag{a}$$

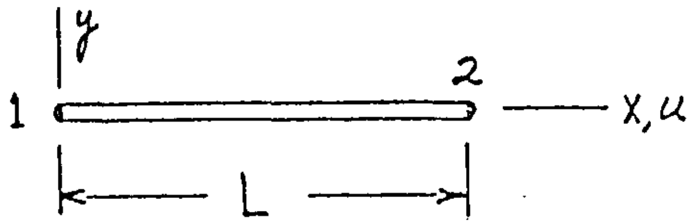
En donde:

$$[E] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

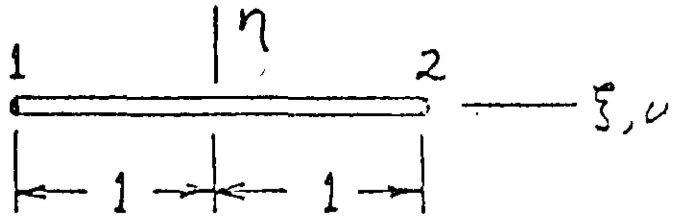
5.2 FAMILIAS DE ELEMENTOS

ELEMENTOS ISOPARAMETRICOS

Barra en coordenadas rectangulares



Barra en coordenadas Isoparam.



Relaciones: $x = \frac{L}{2}(1+\xi)$ $\qquad dx = \frac{L}{2}\,d\xi = J\,d\xi$

$$\frac{d\xi}{dx} = \frac{2}{L}$$

$$u = \begin{bmatrix} \frac{L-x}{L} & \frac{x}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

$$\epsilon_x = u_{,x} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

$$= [B] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

$$[k] = \int_0^L AE\,[B]^T[B]\,dx$$

$$[k] = AE \begin{bmatrix} \frac{1}{L^2} & -\frac{1}{L^2} \\ -\frac{1}{L^2} & \frac{1}{L^2} \end{bmatrix} L$$

$$[k] = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$u = \begin{bmatrix} \frac{1-\xi}{2} & \frac{1+\xi}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

$$\epsilon_x = u_{,\xi}\,\frac{d\xi}{dx} = \frac{2}{L} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ u \end{Bmatrix}$$

$$= [B] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

$$[k] = \int_{-1}^{1} AE\,[B]^T[B]\,J\,d\xi$$

$$[k] = AE \begin{bmatrix} \frac{1}{L^2} & -\frac{1}{L^2} \\ -\frac{1}{L^2} & \frac{1}{L^2} \end{bmatrix} \frac{L}{2}\,2$$

$$[k] = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Podemos continuar con este ejemplo un paso mas, esto es aumentar un nodo en la barra a la mitad del segmento, entonces:

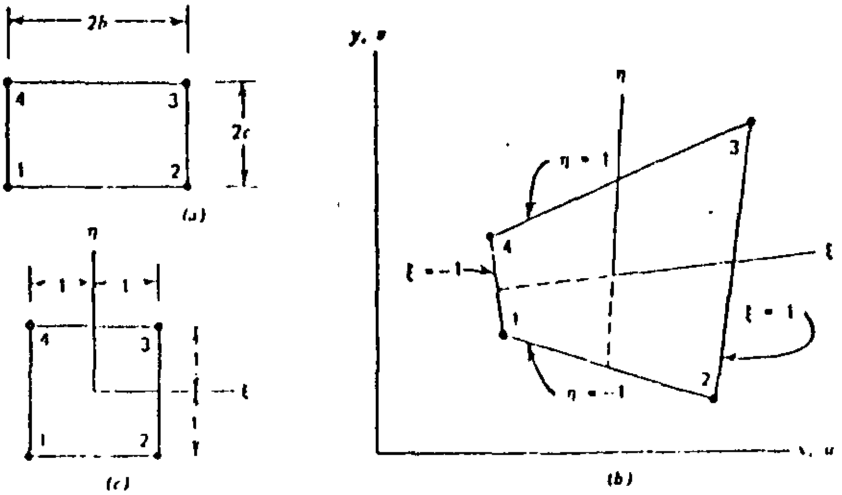
$$u = \left[\frac{2x^2}{2} - \frac{3x}{L} + 1 \; , \; \frac{2x^2}{L^2} - \frac{x}{L} \; , \; -\frac{4x^2}{L^2} + \frac{4x}{L} \right] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \qquad \text{(Rectangular)}$$

$$u = \left[\frac{-\xi + \xi^2}{2} \quad \frac{\xi + \xi^2}{2} \quad 1 - \xi^2 \right] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

$$\epsilon_x = \underbrace{\frac{2}{L} \left[\frac{-1 + 2\xi}{2} \quad \frac{1 + 2\xi}{2} \quad -2\xi \right]}_{[B]} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

Entonces en general [B] es una función de las coordenadas naturales, De la misma manera J dependería de ξ si el nodo 3 no estuviera colocado en el centro.

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_4 \end{Bmatrix}$$



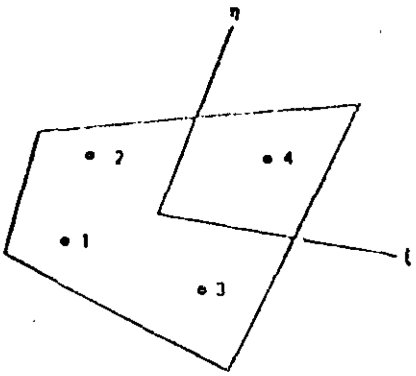
$$x = a_1 + a_2\xi + a_3\eta + a_4\xi\eta$$

$$N_1 = \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4}, \qquad N_2 = \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4}$$

$$N_3 = \frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4}, \qquad N_4 = \frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4}$$

$$x = \sum_1^4 N_i x_i \qquad y = \sum_1^4 N_i y_i$$

$$u = \sum_1^4 N_i u_i \qquad v = \sum_1^4 N_i v_i$$

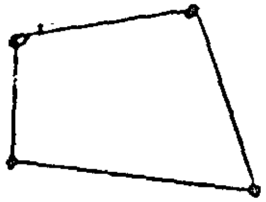


$$I = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(\xi,\eta,\zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta = \sum_i\sum_j\sum_k W_i W_j W_k f(\xi_i,\eta_j,\zeta_k) \quad (5.3.5)$$

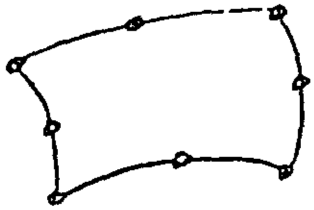
Gauss Quadrature Coefficients

No. of Points	Locations	Associated Weights W_i
1	$x_1 = 0.00000000000000000000000000$	2.
2	$x_1, x_2 = \pm 0.57735026918962576450914 88$	1.
3	$x_1, x_3 = \pm 0.77459666924148337703585 31$	$\frac{5}{9}$ (= 0.555 . . .)
	$x_2 = 0.00000000000000000000000000$	$\frac{8}{9}$ (= 0.888 . . .)

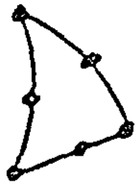
SOME ELEMENT TYPES



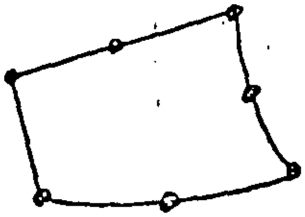
linear



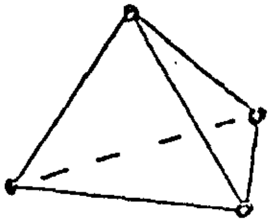
quadratic



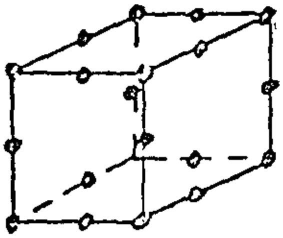
quadratic



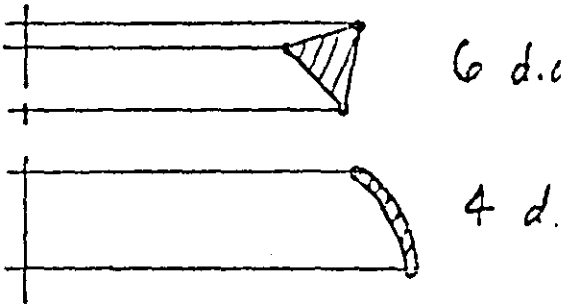
linear - quadrati



linear



quadratic



elements for axisymmetr
solids & thin shells

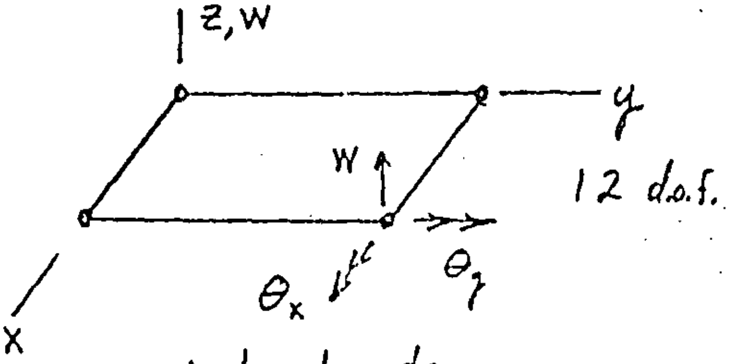
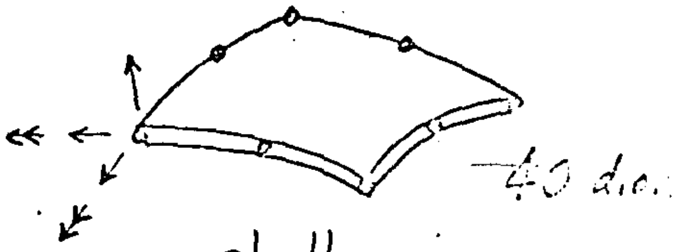
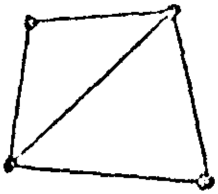


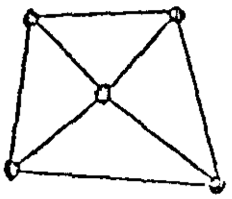
plate bending

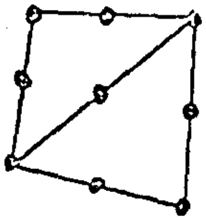


shell

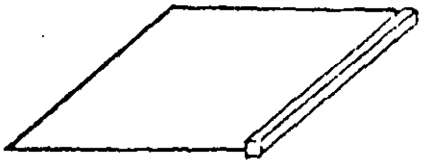
SOME ASSEMBLAGES





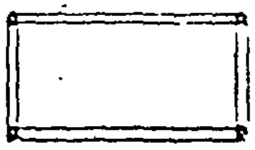


5 tetrahedra
combine into
a hexahedr



edge beam on
a plate

solid propellant
in rocket case



four stringers
on shear pan

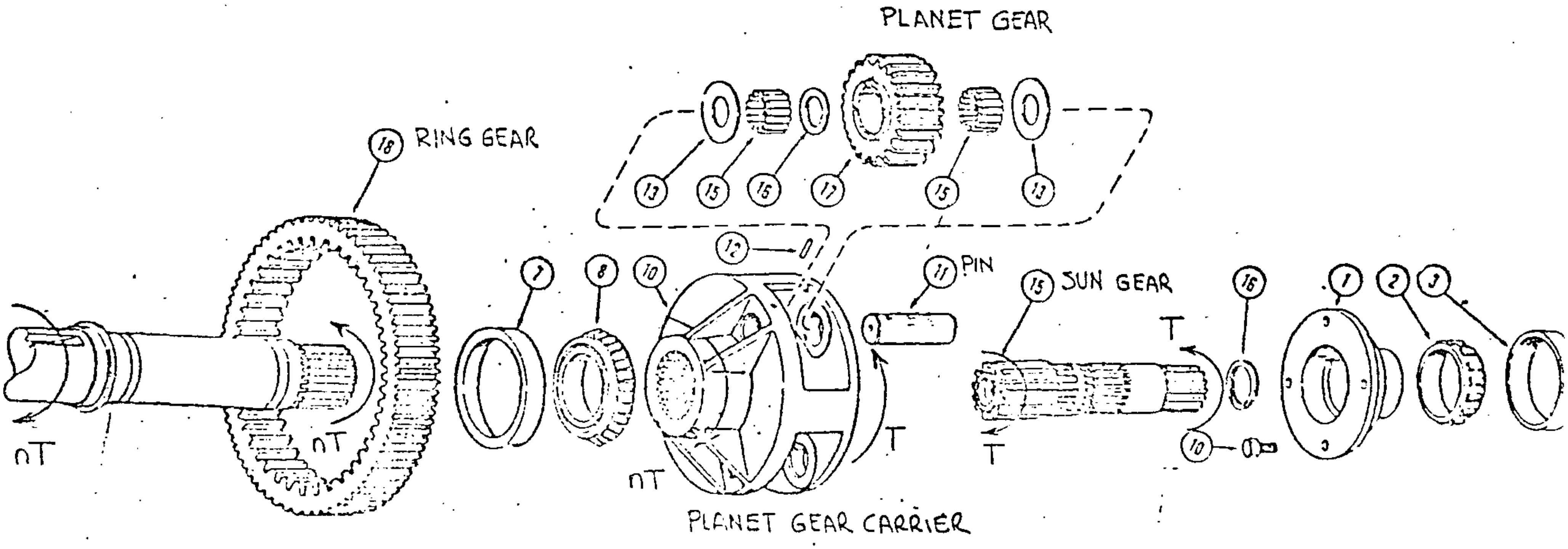
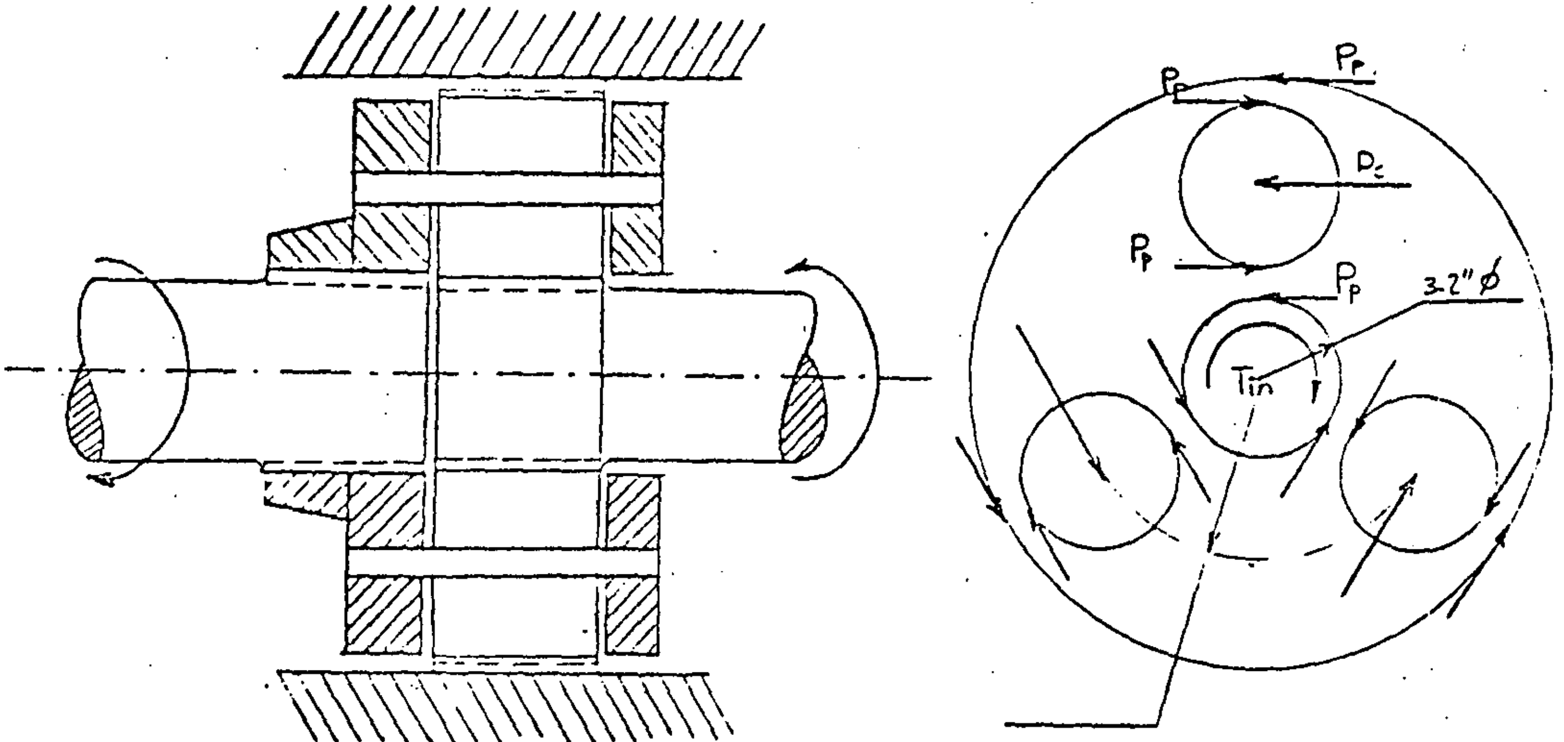


FIG 2

PLANETARY GEAR TRAIN
SYSTEM



$T_{in} = 41\ 022$ lb-in

$F_p = 41022/3 \times 1.6 = 8546.25$ lb

P_p – Reaction @ planet

P_c – Load @ Carrier

$F_c = 2F_p = 17\ 092.5$ lb

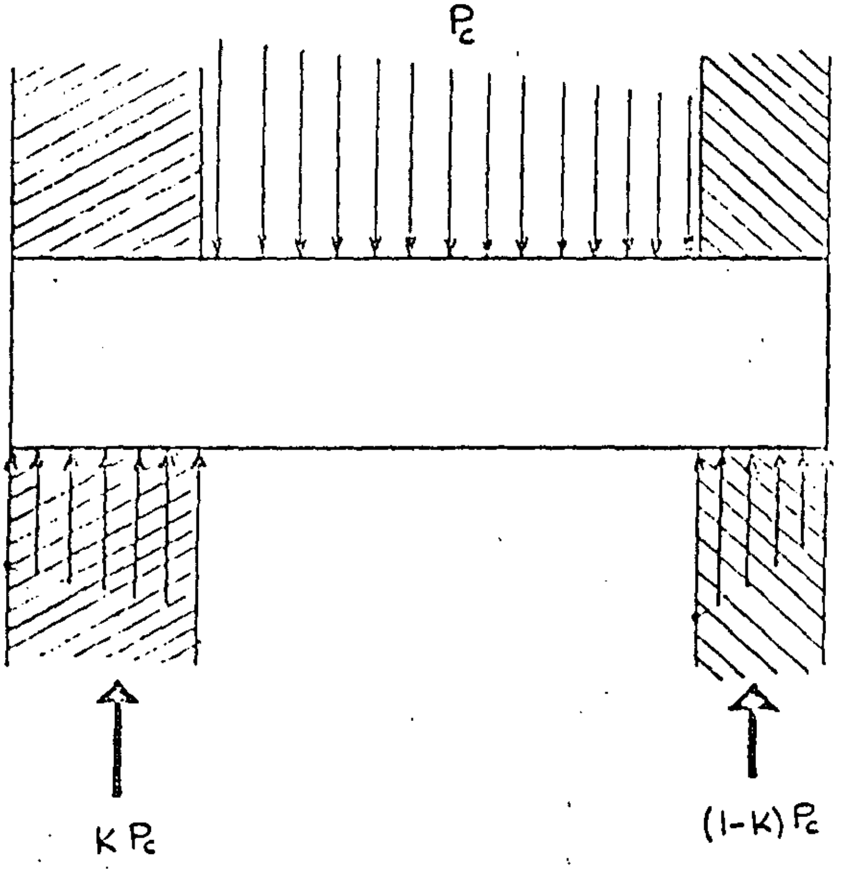


FIG 3

FREE BODY DIAGRAM AND REACTIONS

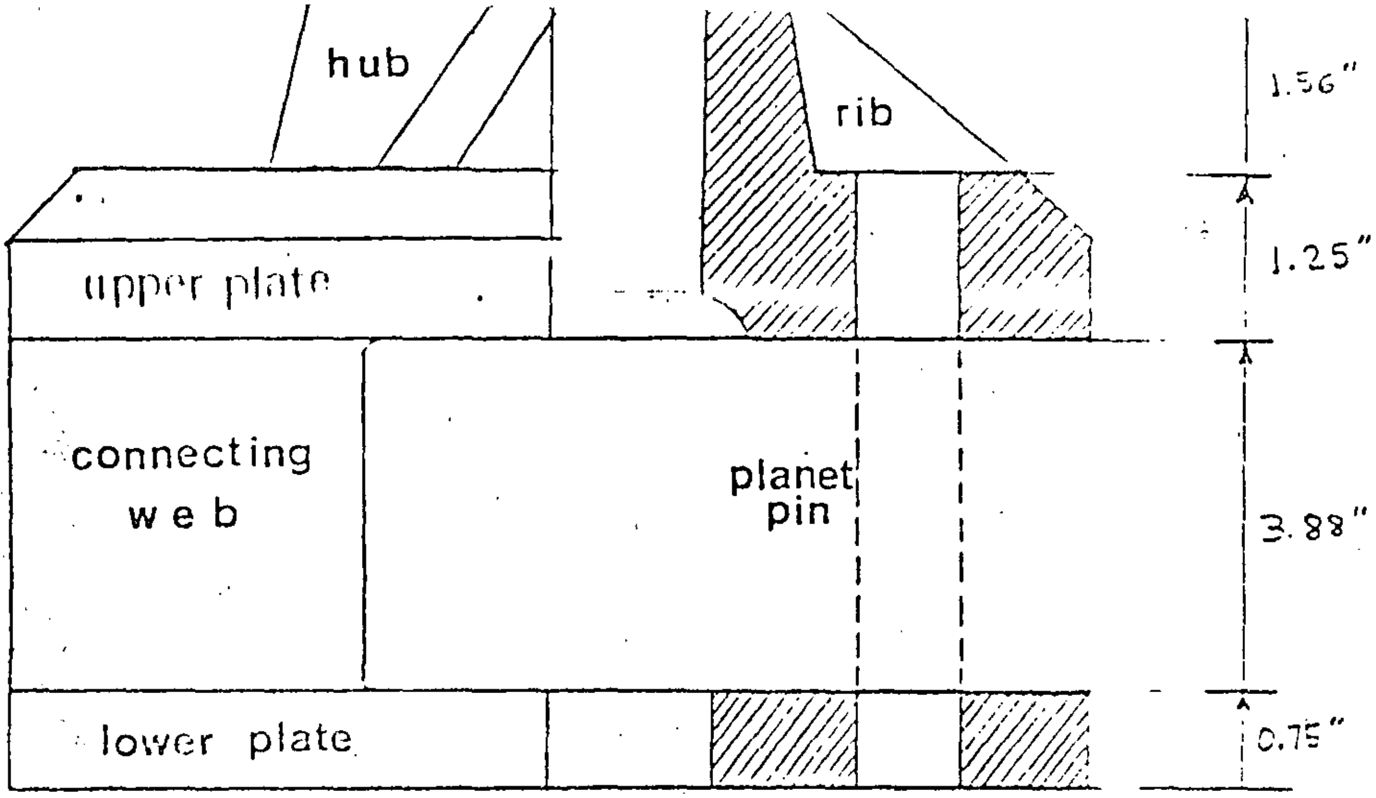

hub
rib
1.56"
upper plate
1.25"
connecting web
planet pin
3.88"
lower plate
0.75"

FIG 4

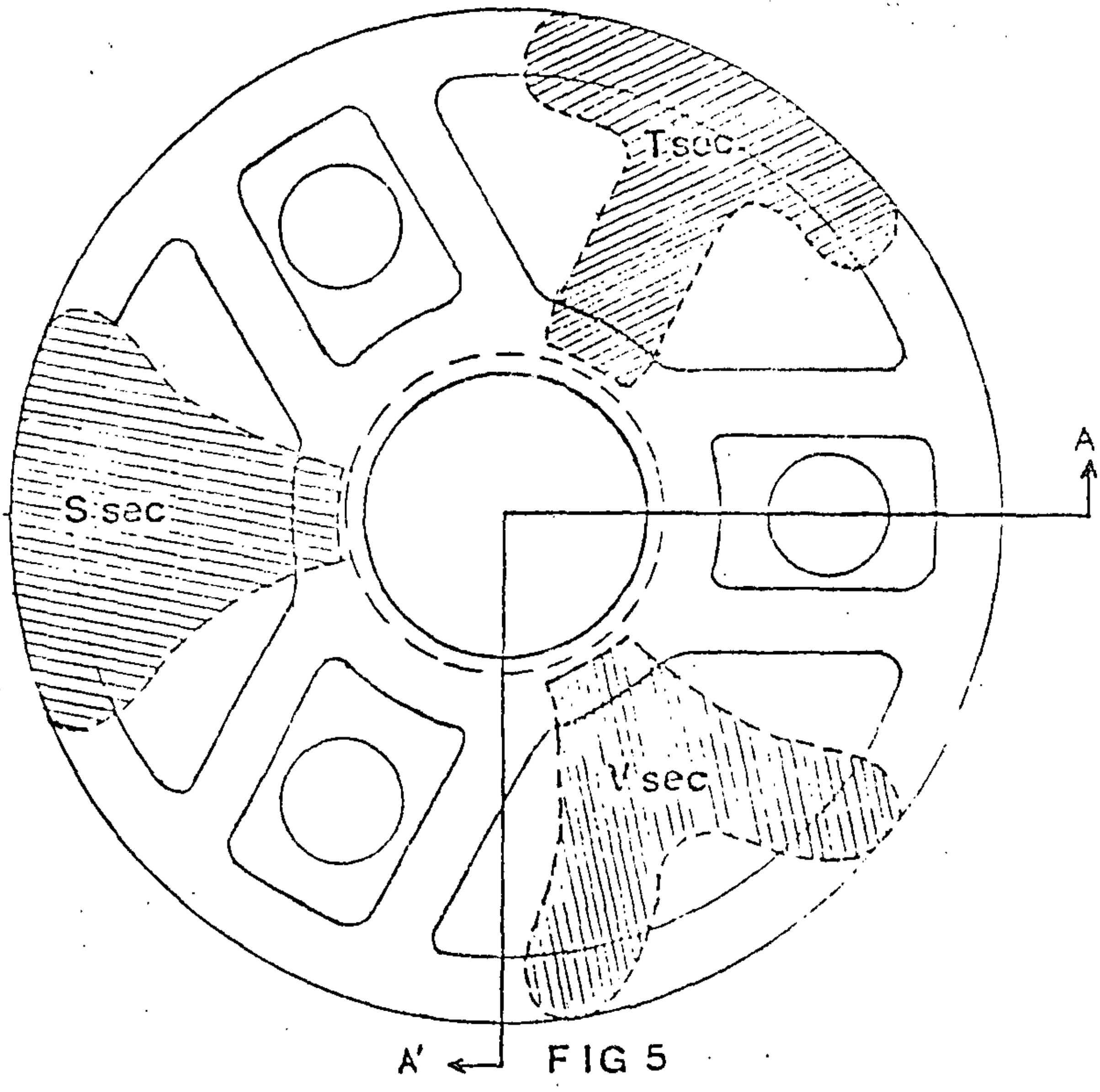
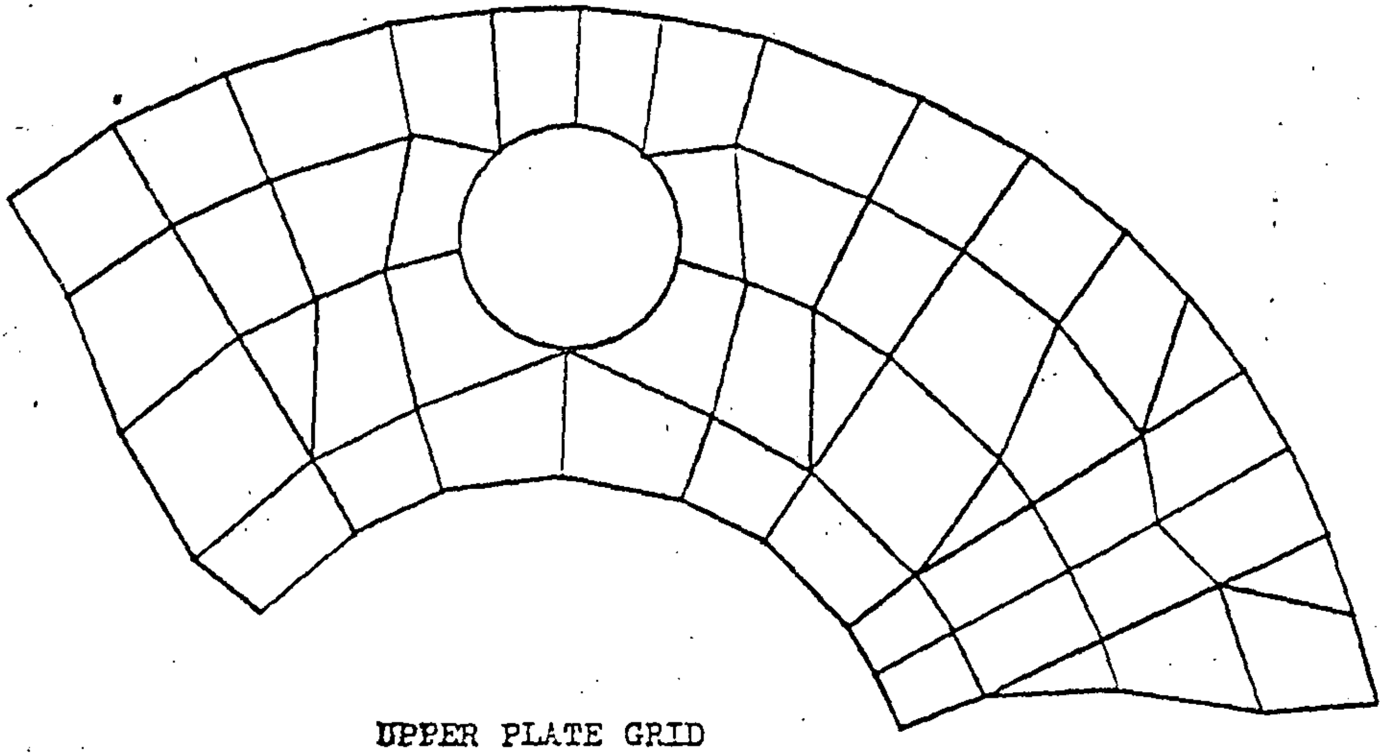
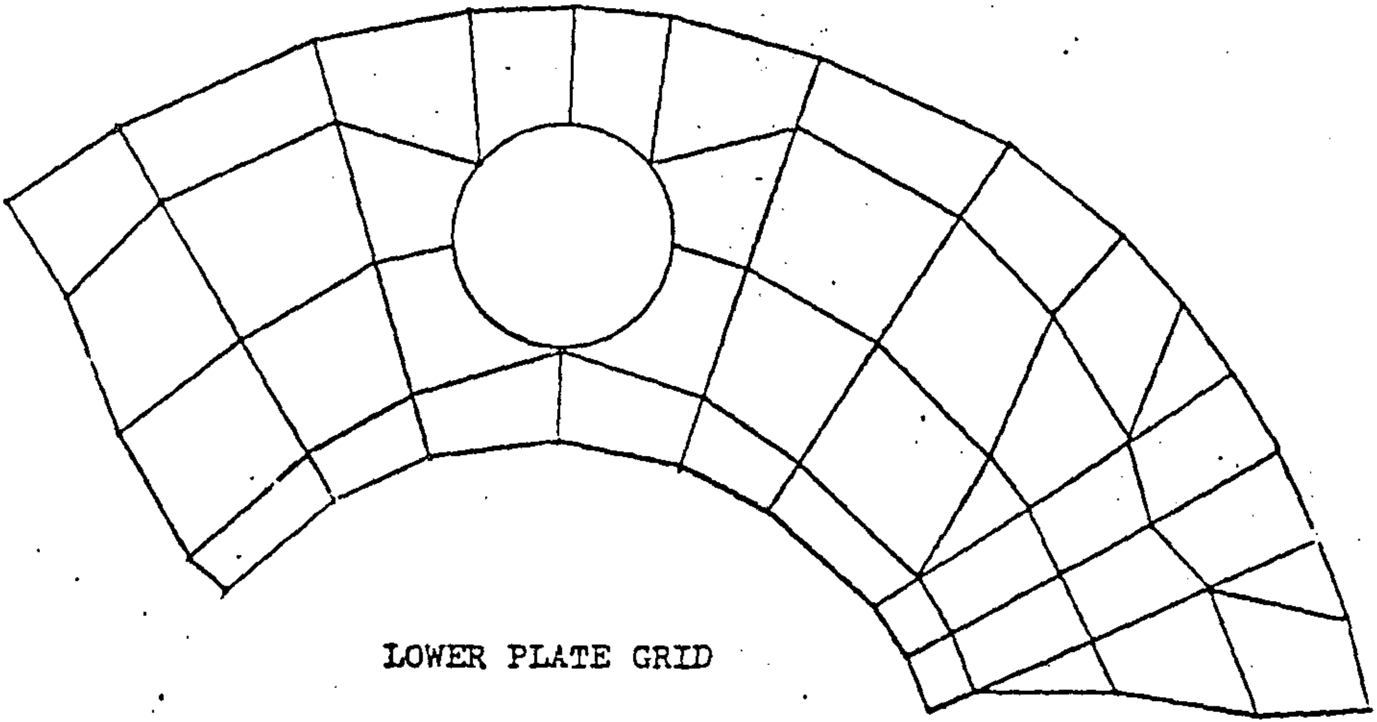

T sec.
S sec
V sec
A
A'

FIG 5

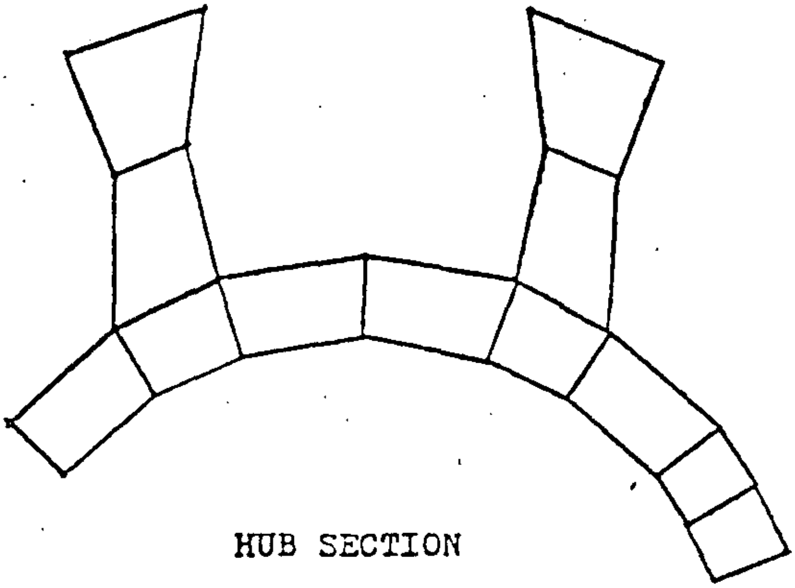


UPPER PLATE GRID

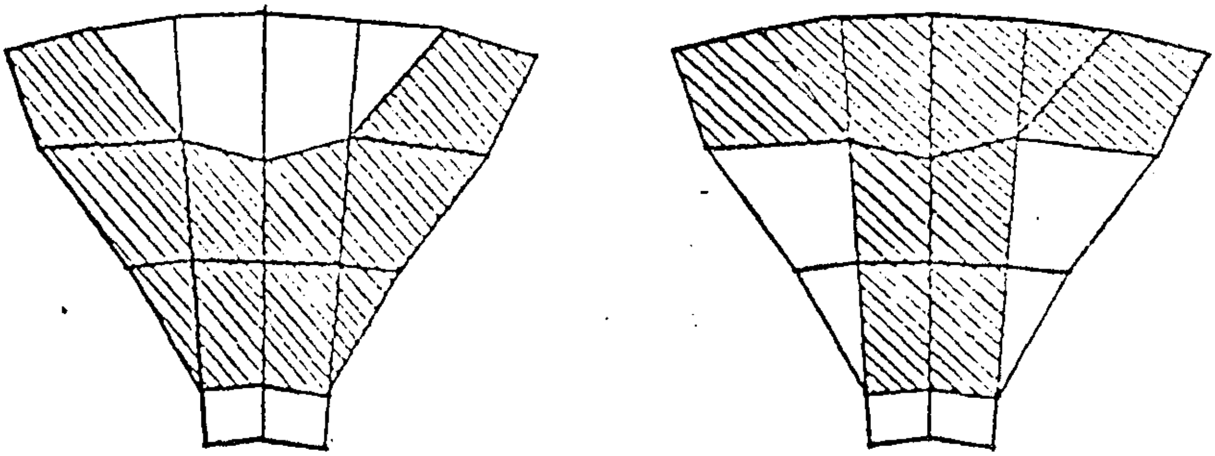


LOWER PLATE GRID

FIG 7 .- GEAR CARRIER FEM MODEL

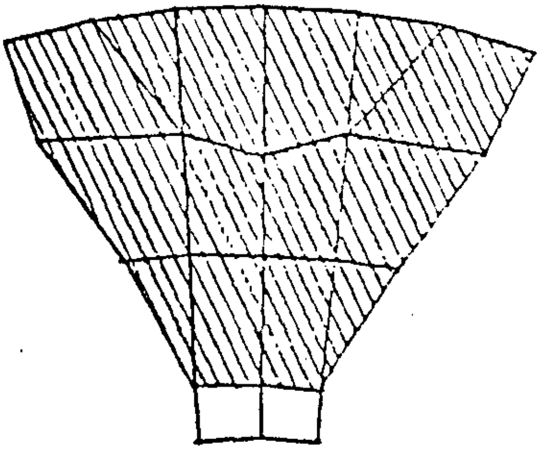


HUB SECTION



"V"-SECTION
CONNECTING WEB

"T"- SECTION
CONNECTING WEB



"S"-SOLID SECTION
CONNECTING WEB

FIG. 8

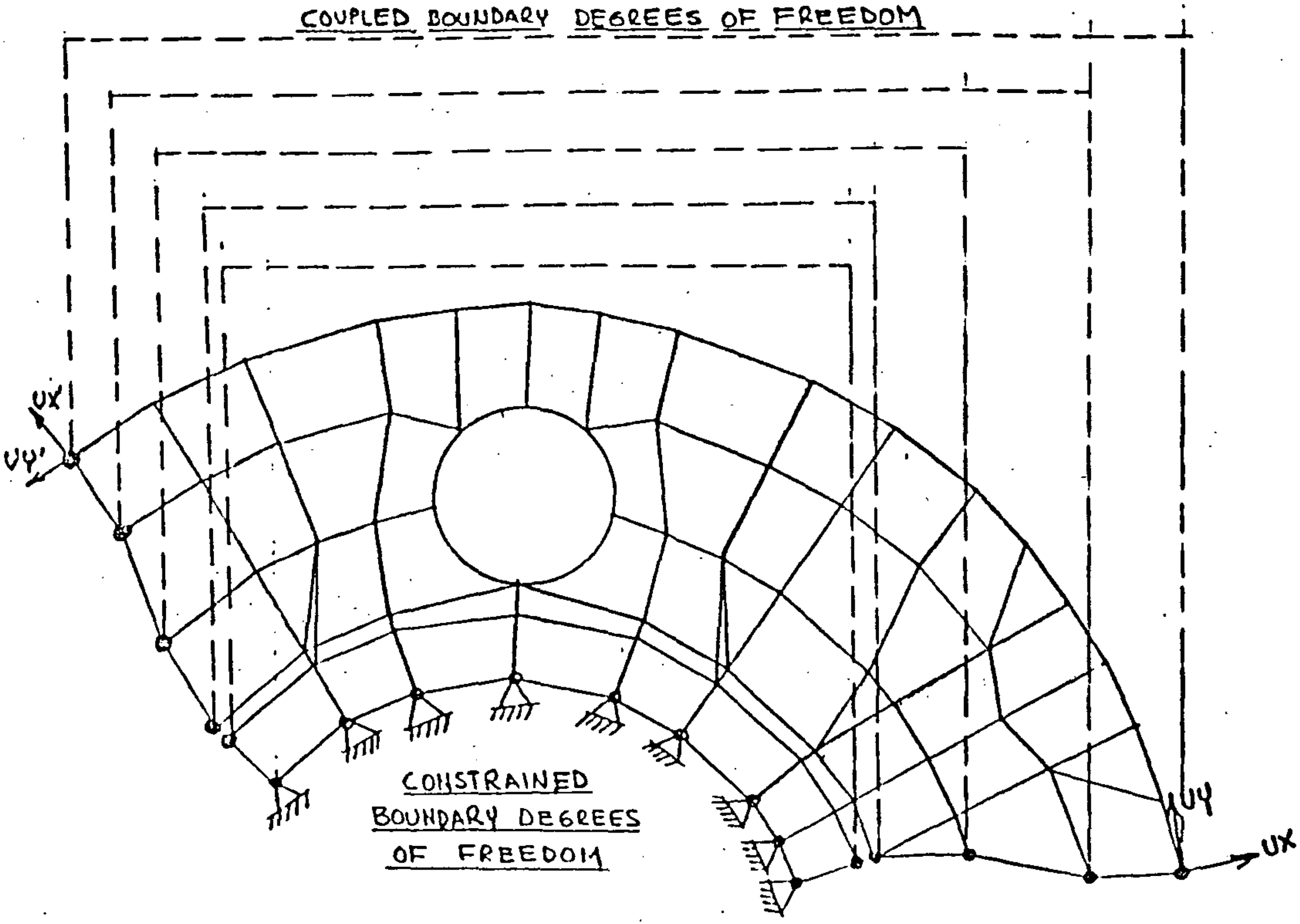
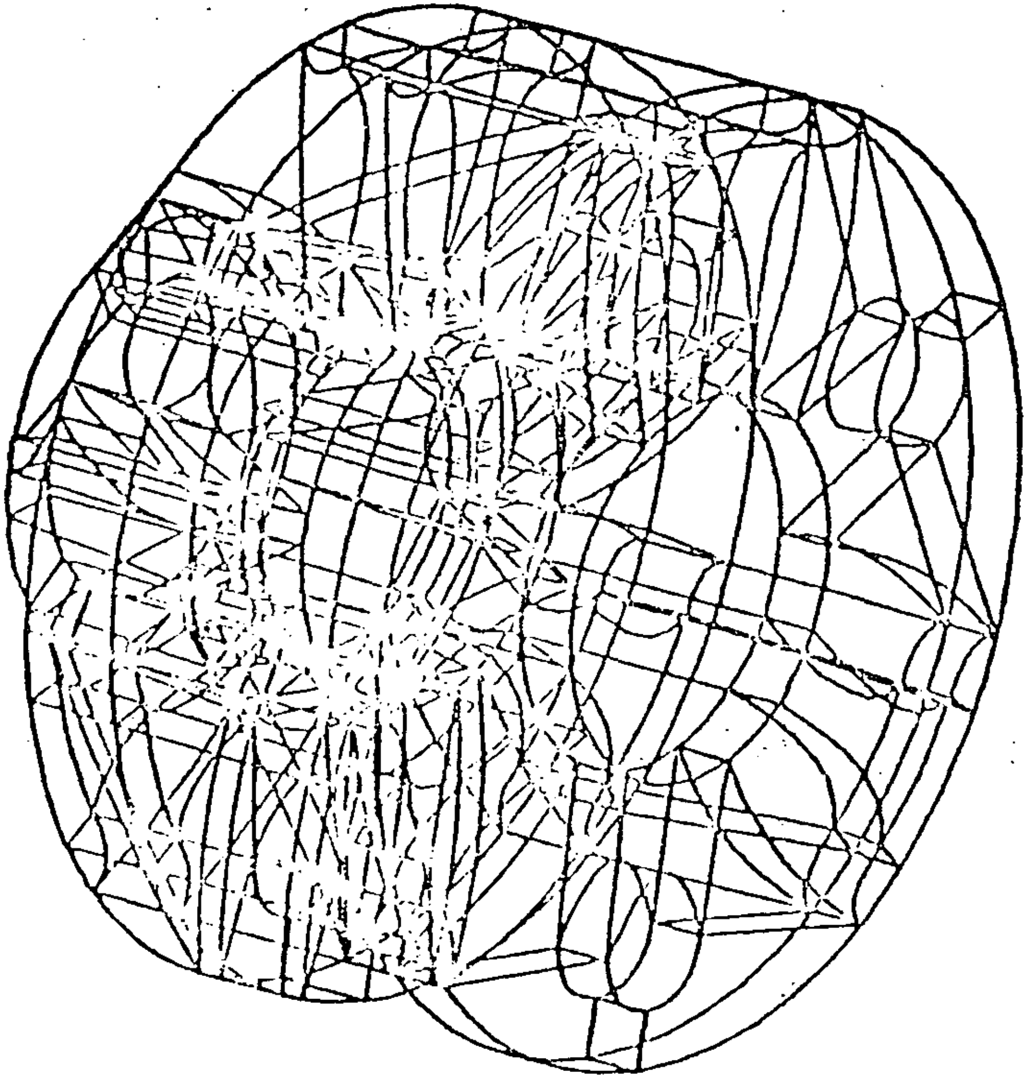

COUPLED BOUNDARY DEGREES OF FREEDOM
UX'
UY'
CONSTRAINED BOUNDARY DEGREES OF FREEDOM
UY
UX

FIG 9

Table 1 - Coupled Node Displacements

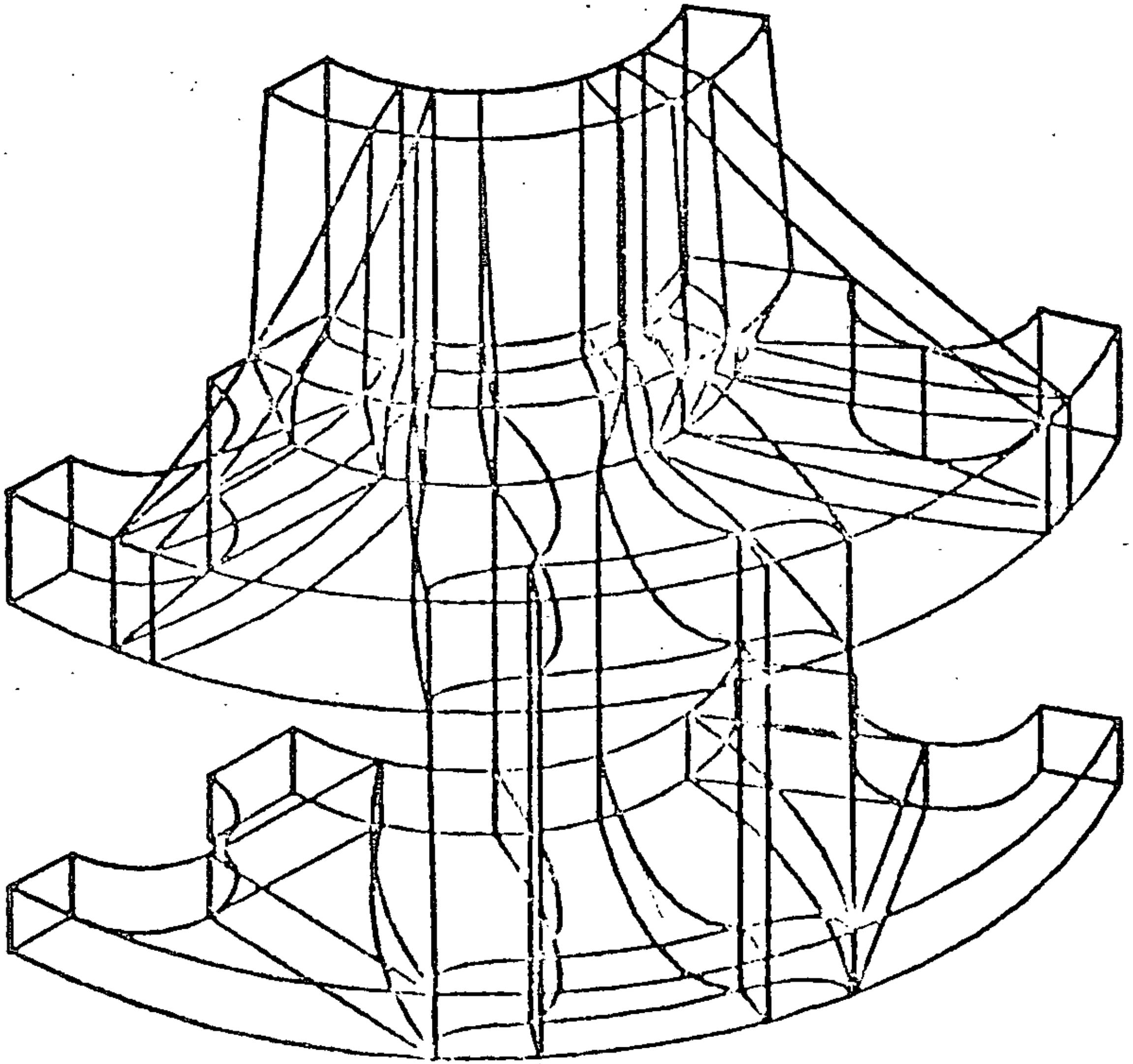
Node 1	Node 2	Directions
1	1001	UX, UY, UZ
27	1027	UX, UY, UZ
40	1040	UX, UY, UZ
55	1055	UX, UY, UZ
70	1070	UX, UY, UZ
85	1085	UX, UY, UZ
102	1002	UX, UY, UZ
119	1119	UX, UY, UZ
215	1215	UX, UY, UZ
651	1651	UX, UY, UZ
664	1664	UX, UY, UZ
667	1667	UX, UY, UZ
709	1709	UX, UY, UZ
728	1728	UX, UY, UZ
747	1747	UX, UY, UZ
764	1764	UX, UY, UZ
781	1781	UX, UY, UZ



PLANETARY GEAR CARRIER

PLOT NO. 1

FIG 10



PLANETARY GEAR CARRIER

PLOT NO. 1

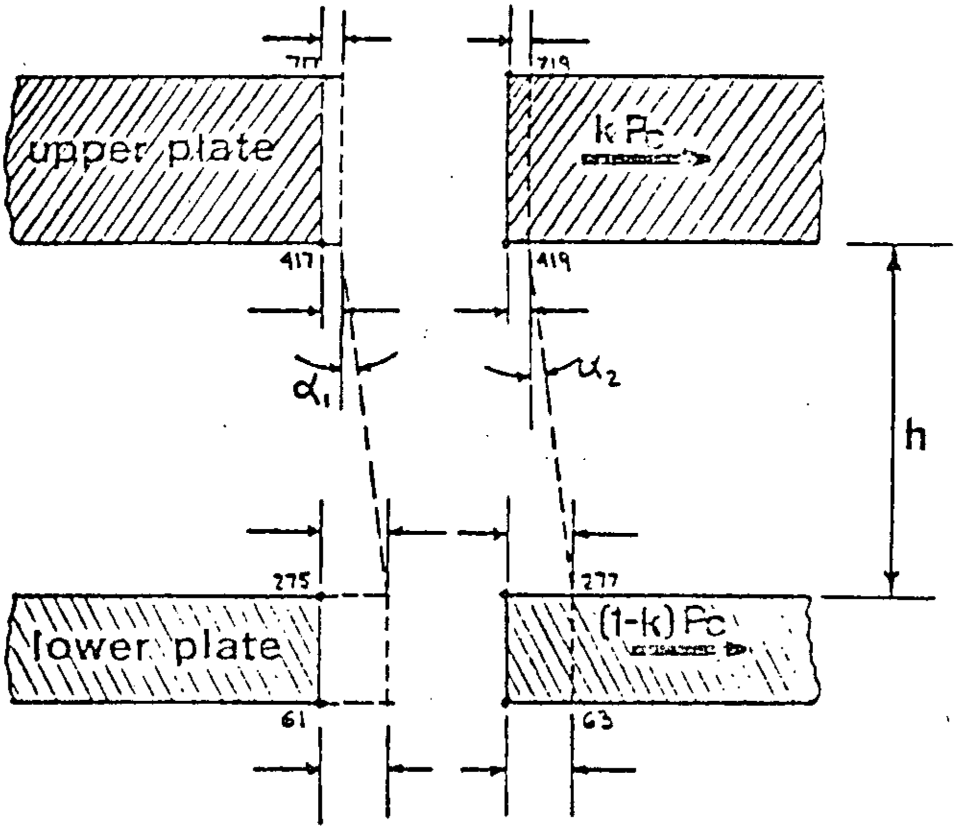
FIG 11

	V section	Tsection	S section	Ssec/pin
U_{61}^{*}	0.005308	0.004900	0.004031	0.00372
U_{63}	0.005324	0.004914	0.004049	0.00375
U_{275}	0.005630	0.005221	0.004260	0.004175
U_{277}	0.006351	0.005945	0.004967	0.004149
U_{417}	0.001577	0.001614	0.001645	0.002155
U_{419}	0.002169	0.002208	0.002235	0.002148
U_{717}	0.001788	0.001817	0.001798	0.001773
U_{719}	0.002117	0.002145	0.002127	0.001766
α_1^{**}	0.001044	0.000929	0.000674	0.000520
α_2	0.001077	0.000963	0.000704	0.000515

TABLE 3

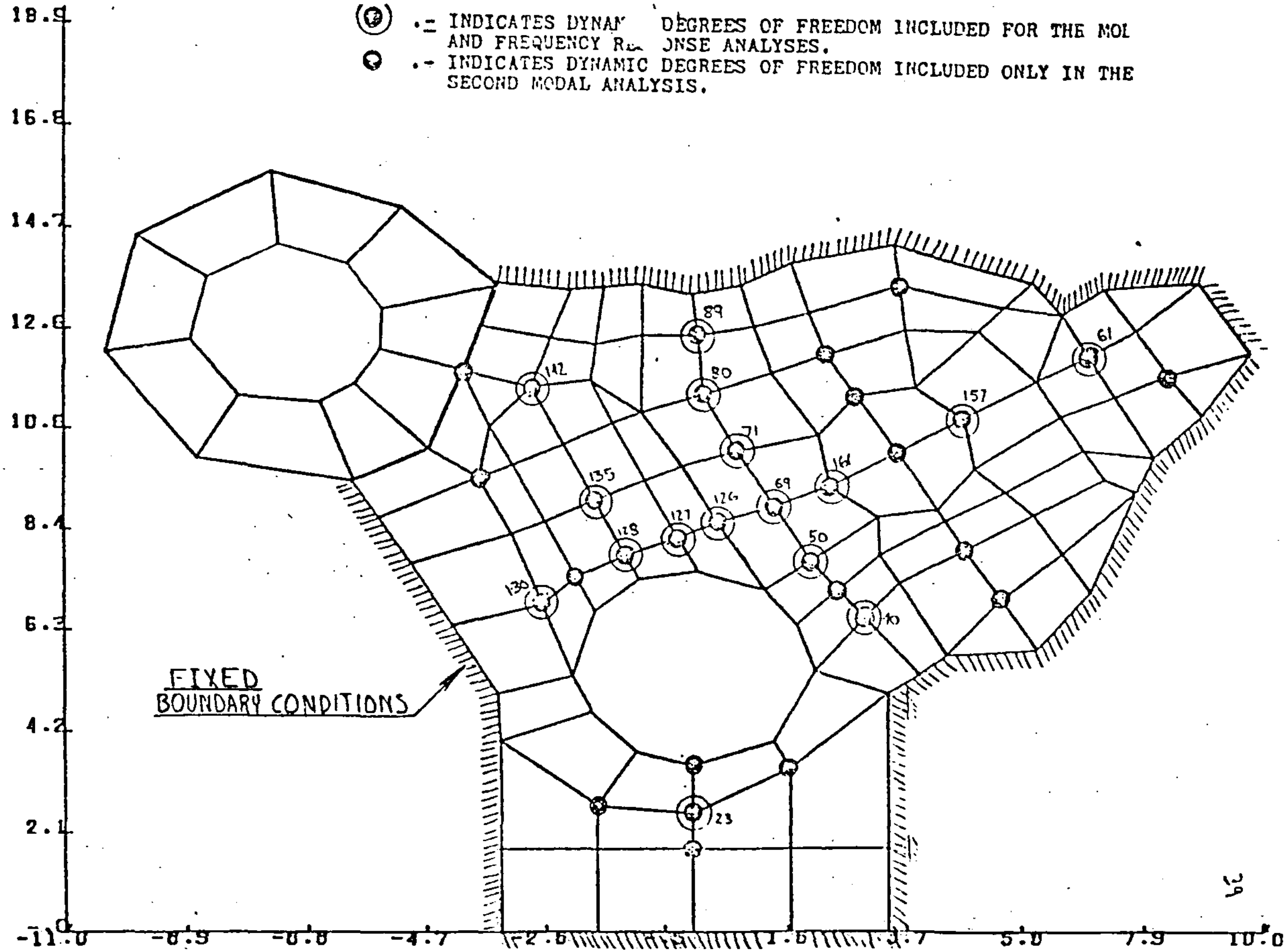
$U_{(i)}^{*}$ - Tangential displacement node i

$\alpha_{(j)}^{**}$ - Slope of pin side j

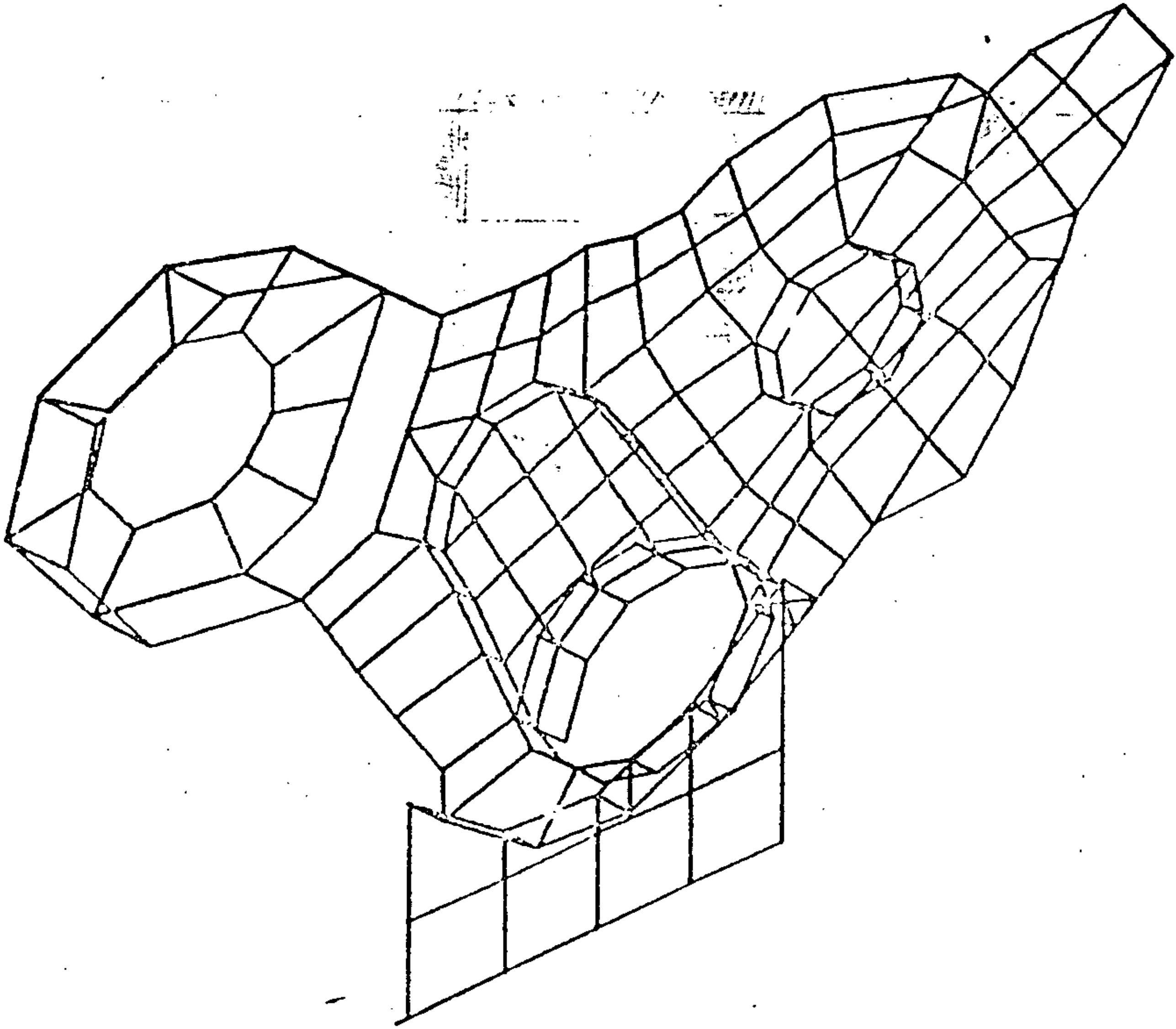


717
719
upper plate
k Pc
417
419
α_1
α_2
h
275
277
lower plate
(1-k) Pc
61
63

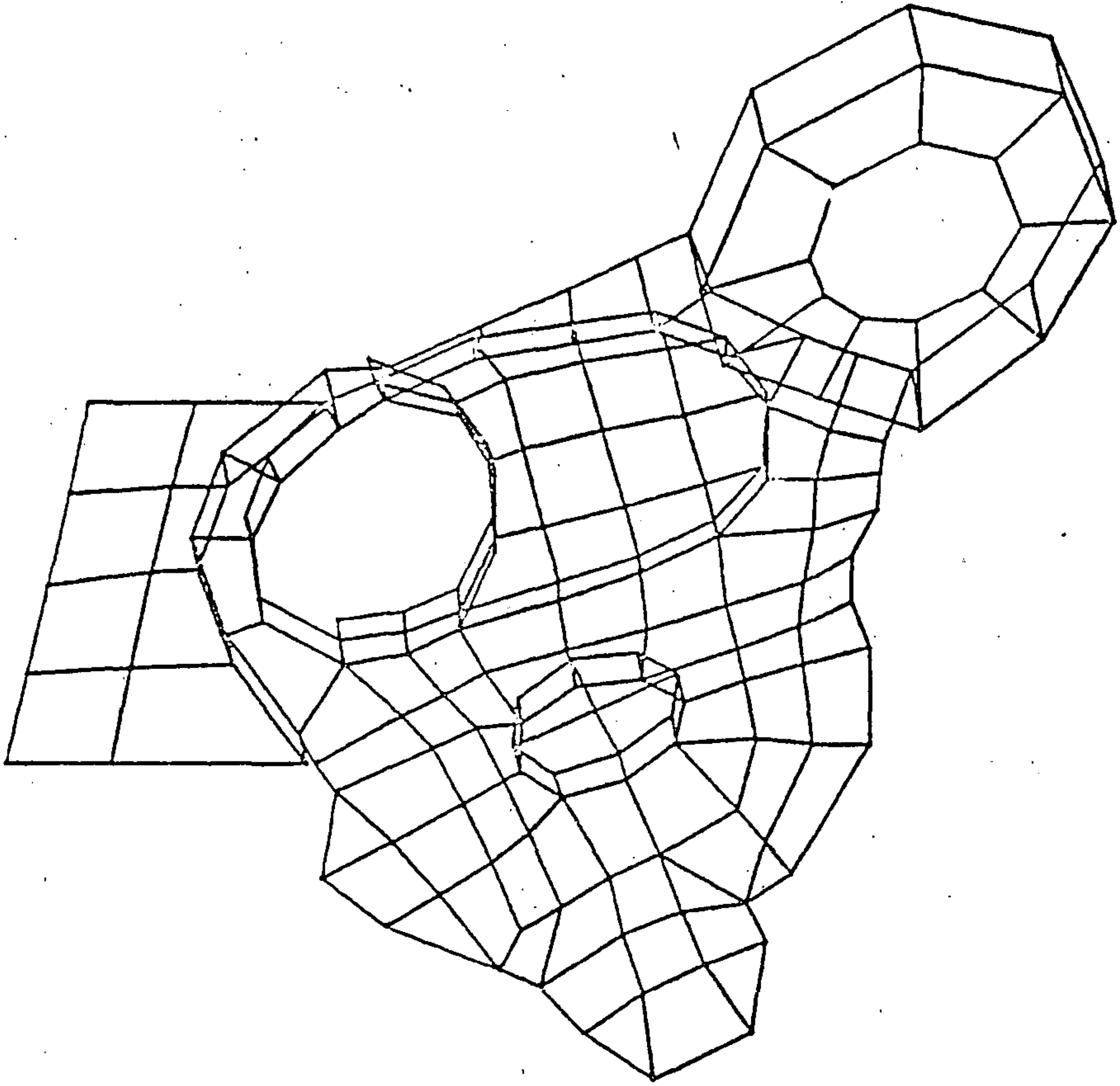
F I G 14

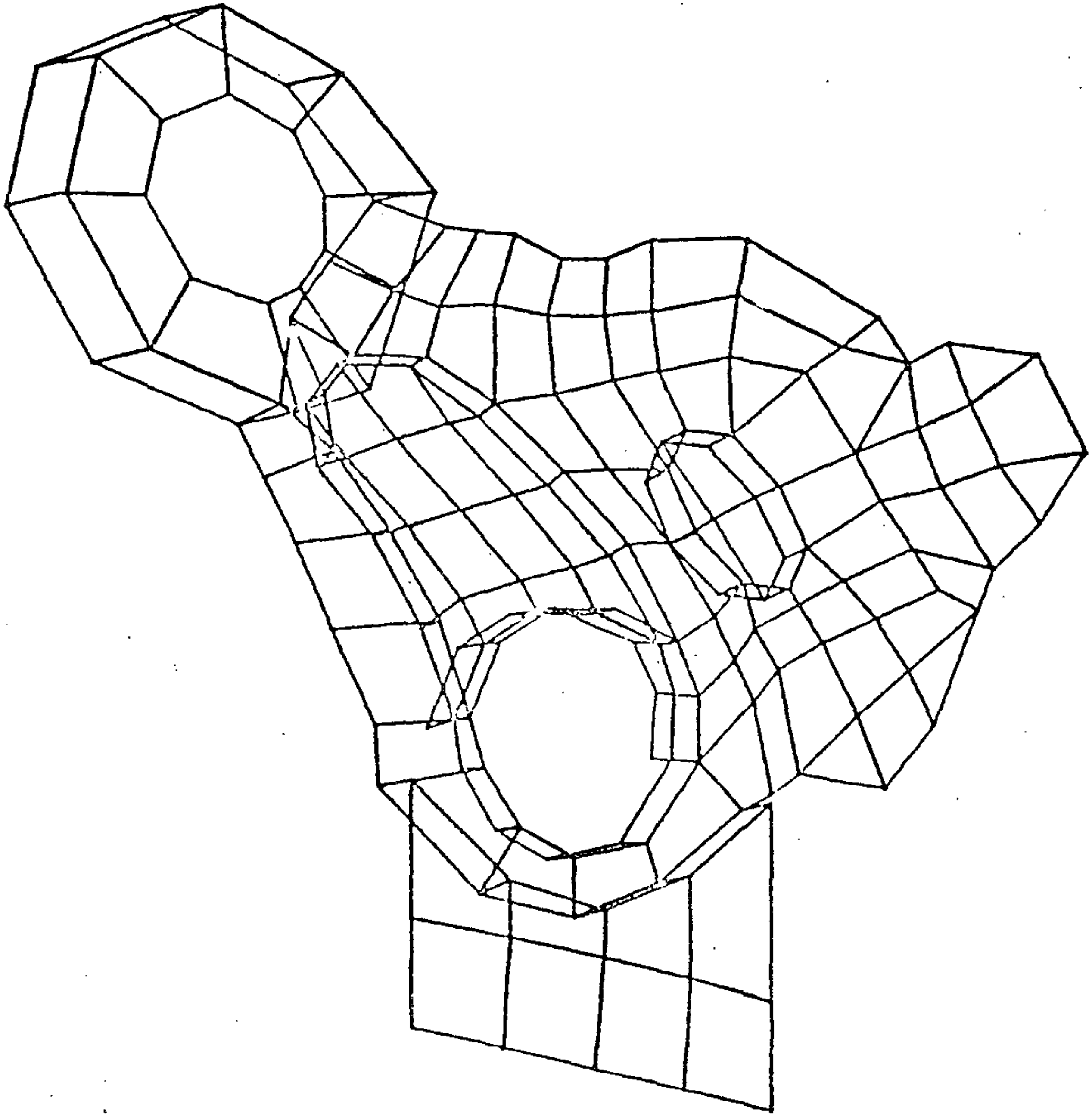


:ND GEAR COVER"

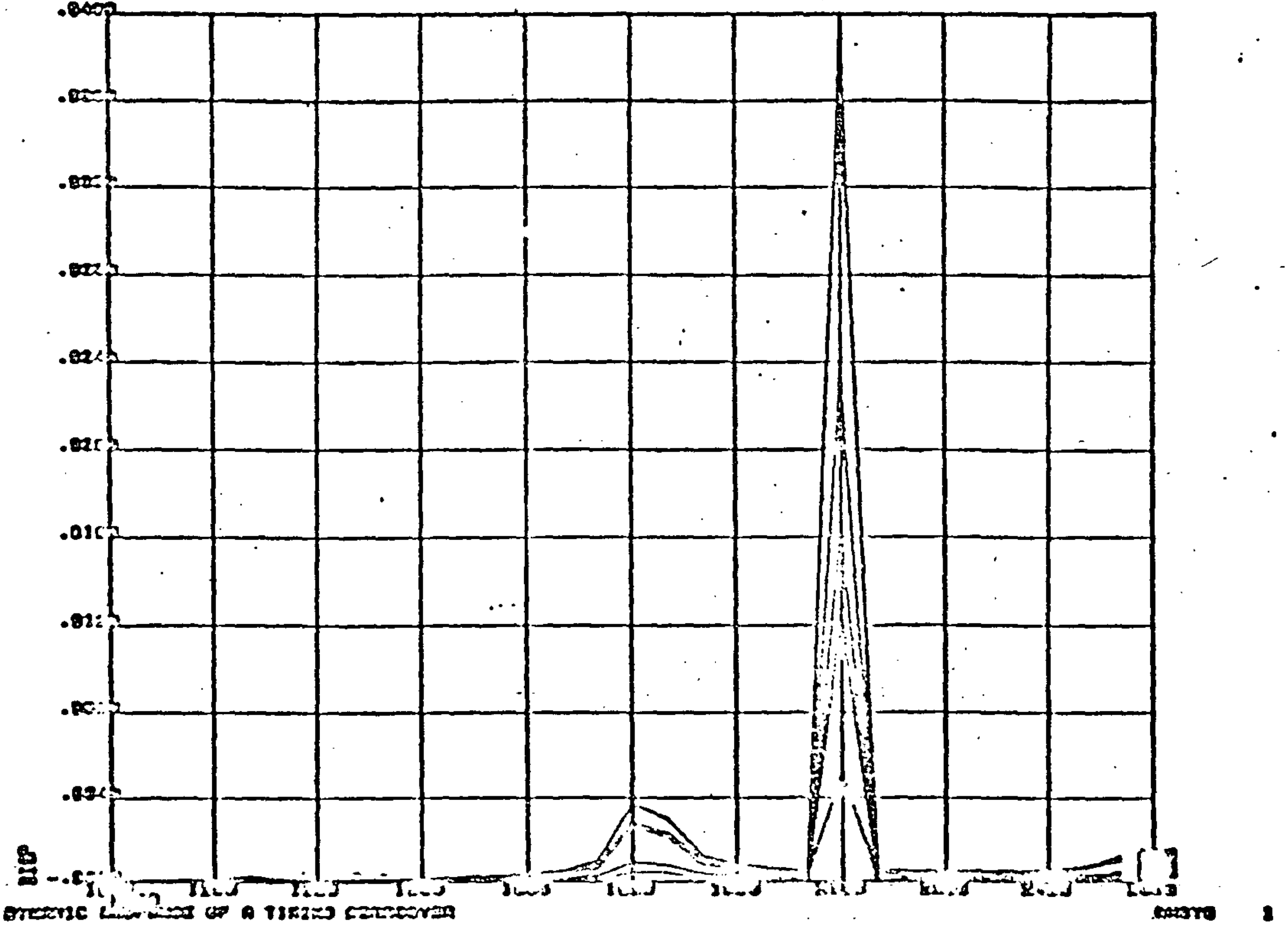


"TIMIND GEAR COVER"

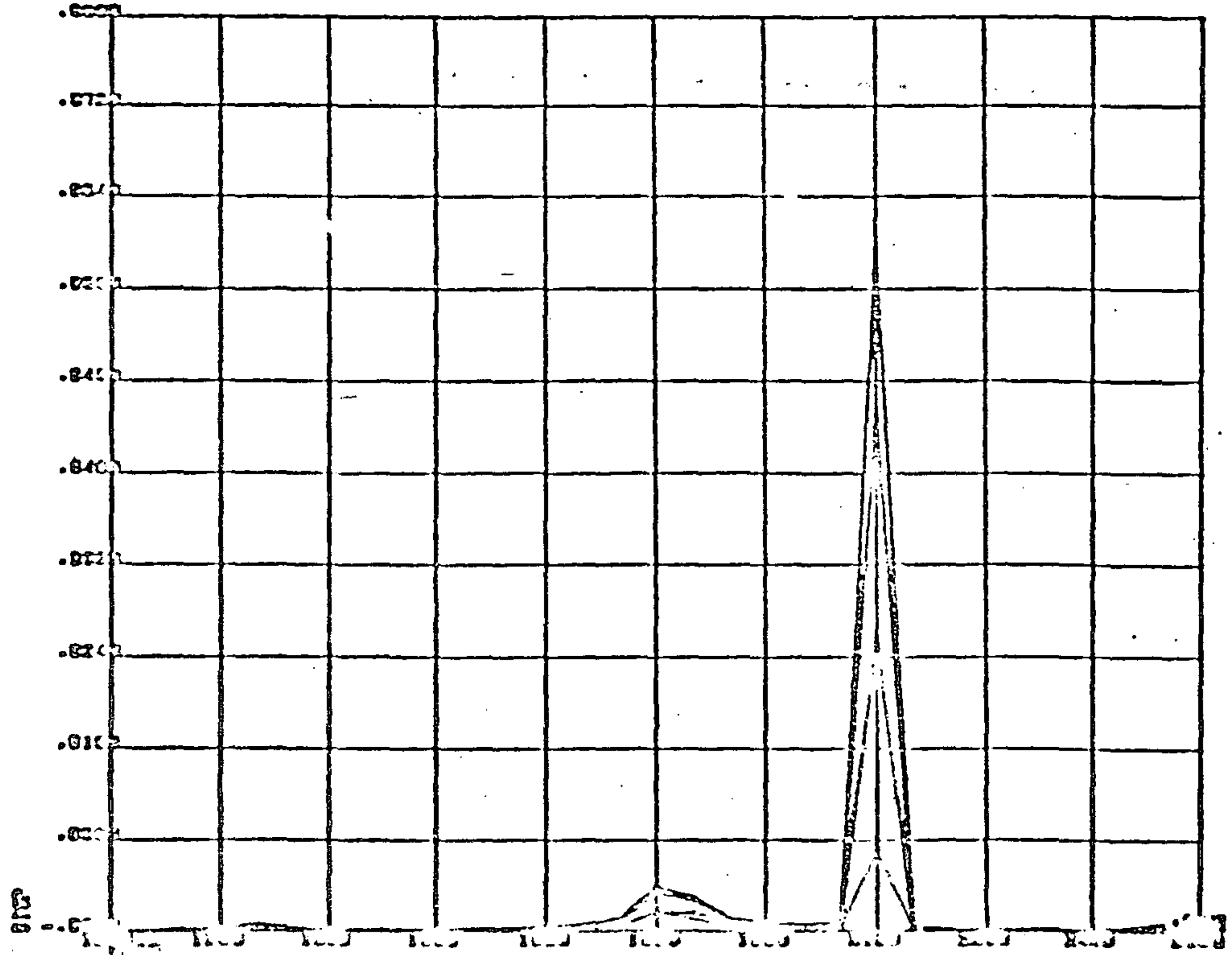




?

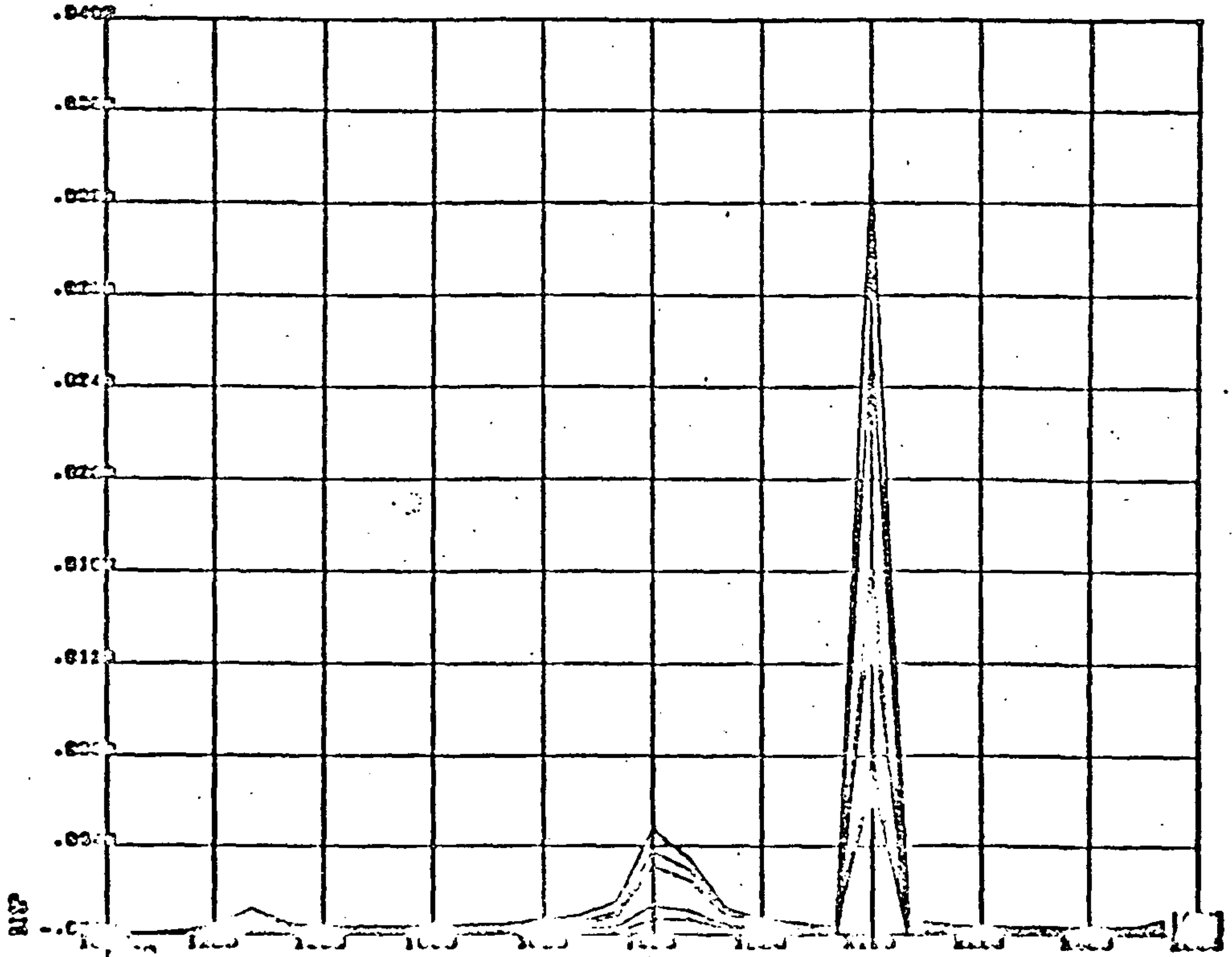

.0400
DISP

?


.040

[illegible]

?



[illegible]

PHOTO

DIRECTORIO DE ALUMNOS DEL CURSO "MATEMATICAS APLICADAS A LA INGENIERIA ESTRUCTURAL" IMPARTIDO EN ESTA DIVISION DEL 18 AL 29 DE MARZO DE 1985.

1.- ADAME DE LEON JOSE ALFREDO
INSTITUTO MEXICANO DEL CEMENTO
Y DEL CONCRETO, A. C.
BECARIO
INSURGENTES SUR No. 1846
COL. FLORIDA
DELEGACION ALVARO OBREGON
524-23-60

CALLE SN BERNARDINO No. 41
COL. SAN BERNARDINO
XOCHIMILCO
676-12-48

2.- AMARO BARRERA DANIEL
MEXICANA DE AUTOBUSES, S.A.
JEFE DE AREA DE ESTRUCTURAS
LAGO DE GPE. No. 289
872-01-99

CICLON N-. 14
HDA. SAN PABLO

3.- ARCE RIOBOO JOSE CARLOS
RIOBOO, S.A.
CALCULISTA
LOPE CE VEGA No. 345
COL. POLANCO
DELEGACION MIGUEL HIDALGO
11000 MEXICO, D.F.
545-19-90

HDA. EMILIANO ZAPATA No. 13
COL. ECHEGARAY
53310 EDO. DE MEXICO
373-12-15

4.- BLANCO ARANDA ANDRES
SECRETARIA DE COMUNICACIONES
Y TRANSPORTES
ANALISIS DE ESTRUCRURAS
EJE CENTRAL Y EJE XOLA

CERRADA DE SILGUERO L/5 M/B
COL. PALO SOLO

5.- DOMINGUEZ HERNANDEZ OSCAR
S. C.T.

6.- DUEÑAS GOMEZ JOSE BENJAMIN
DIREC. GRAL. OBRAS MARITIMAS
JEFE DE OFICINA
PROVIDENCIA No. 207-2o. PISO
COL. DEL VALLE
523-28-15

JORNEL 20 DEPTO. 8
COL. SAN MIGUEL CHAPULTEPEC
DELEGACION MIGUEL HIDALGO
516-34-70

7.- CERVANTES LOPEZ ROBERTO
I M C.Y C
REVISOR TECNICO DE PUBLICACIONES
INSURGENTES SUR No. 1846
COL. FLORIDA
DELEGACION ALVARO OBREGON
01030 MEXICO, D.F.
534-24-40

INSURGENTES SUR No. 1846
COL. FLORIDA
DELEGACION ALVARO OBREGON
01030 MEXICO, D.F.
534-24-40

8.- GARCES CASTILLO JUAN MANUEL
TESORERIA DEL D. D. F.
VALUADOR
NIÑOS HEROES Y.DR. LAVISTA
COL. DOCTORES
DELEGACION CUAUHTEMOC

9.- GORBEA LUBIAN FEDERICO
LUZMETAL, S.A.
CALCULISTA
PONIENTE 111 No. 204
COL. ANAHUAC
DELEGACION MIGUEL HIDALGO
571-28-31

BOSQUE DEL CENTENARIO No. 40
COL. LA HERRADURA
DELEGACION MIGUEL HIDALGO
11000 MEXICO, D.F.
584-01-76

10.- GRIJALVA HIDALGO FRANCISCO JAVIER
MEXICANA DE AUTOBUSES, S.A. DE C.V.
LAGO DE GUADALUPE No. 289
TULTITLAN EDO. DE MEXICO
872-01-99 ext. 173 y 146

AV. JUAREZ No. 34-1
COL. ATIZAPAN DE ZARAGOZA
04500 EDO. DE MEXICO
822-09-25

11.- LOPEZ BAUTISTA FABIAN
GRUPO INDUSTRIAL ANAHUAC, S.A.
INGENIERO DE PROYECTO
LIMA No. 931-218
COL. LINDAVISTA
DELEGACION GUSTAVO A. MADERO
07300 MEXICO, D.F.
754-41-37

WAKE No. 539-10 "B"
COL. ELECTRICISTAS
DELEGACION AZCAPOTZALCO
02060 MEXICO, D.F.
352-60-75

12.- MATIAS ACEVEDO JUAN
INSTITUTO MEXICANO DEL PETROLEO
INGENIERO
AV. EJE CENTRAL LAZARO CARDENAS 152

EDIFICIO "C" No. 102
COL. U. CAMINO SAN JUAN DE ARAGON
DELEGACION GUSTAVO A. MADERO
07920 MEXICO, D.F.

13.- MENDOZA AVILA DELFINO
SERVICIOS ESPECIALIZADOS
DIRECTOR
CALZ. ERMITA IZTAPALAPA No. 1584
COL. SAN MIGUEL
IZTAPALAPA
686-00-34

CALZ. DE TLALPAN No. 2354
COL. AVANTE
DELEGACION COYOACAN
04460 MEXICO, D.F.
544-12-95

14.- OLIVA SALINAS JUAN GERARDO
FAC. DE ARQUITECTURA, UNAM
INVESTIGADOR

CERRO SAN FRANCISCO No. 235
COL. CAMPESTRE CHURUBUSCO
DELEGACION COYOACAN
04200 MEXICO, D.F.
549-45-35