



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

---

**FACULTAD DE INGENIERÍA**

**Simulación de controladores basados en  
el modelo matemático de un  
exoesqueleto de miembro superior**

**TESIS**

Que para obtener el título de  
**Ingeniero Mecatrónico**

**P R E S E N T A**

Gerardo Estrada Sánchez

**DIRECTOR DE TESIS**

Dr. Edmundo Gabriel Rocha Cózatl



**Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2018**

# Agradecimientos

A diferencia de otros, yo no nací con vocación, nací con la convicción de ayudar. Esta convicción me llevó de querer ser astronauta, a querer ser químico, a querer ser inventor, y dado mi gusto por las matemáticas, a querer ser ingeniero, ingeniero mecatrónico. Mi paso por la universidad no fue nada sencillo, muchos sacrificios fueron hechos, aunque no puedo negar que era feliz y que disfruté muchos de los momentos que viví; nunca hubiera imaginado que lo que verdaderamente forjaría mi carácter iba a ser la redacción de este documento. También debo decir que lograr entender, aunque fuera un poco y bajo mis propias limitaciones, las ideas de los autores en los que está basada mi tesis, fue una experiencia muy gratificante. Agradezco a todos aquellos, que, a su manera, me ayudaron a llegar hasta este punto de mi vida.

A mis abuelitos Ana y Enrique, por ser como unos padres para mí y por formarme con una escala de valores que me es imposible ignorar. Gracias abuelito por todos tus consejos, por las experiencias que vivimos, por enseñarme a siempre usar la cabeza antes de actuar, por siempre confiar en mí y nunca negarme tu ayuda. No sabes cuánto me gustaría que pudieras leer lo que he escrito y ver en lo que me he convertido, pero sé que te fuiste sabiendo que no te decepcionaría. Gracias abuelita por tus regaños, por tus consejos, por tus recuerdos y por tu ayuda, gracias por recordarme siempre que aunque creo saberlo todo, aún me queda mucho por aprender; créeme que aunque coincidimos pocas veces, siempre me hace feliz platicar contigo. Gracias a los dos por todo.

A Gaby, mi novia, por estar conmigo en uno de los momentos más difíciles de mi vida, por motivarme a terminar mi tesis y por confiar en mí cuando ya ni siquiera yo lo hacía. Gracias por la paciencia que me has tenido a lo largo de este tiempo, sé que ha sido difícil esperar a que terminara algo que inicialmente no tardaría más de un par de meses, de verdad espero que tengamos tiempos mejores. Gracias por todos los buenos momentos y por soportarme cuando ya no podía ni conmigo mismo. Sé que pensarás que no debo agradecerlo, pero gracias por tu cariño y comprensión; el haberte conocido fue una de las mejores cosas que me pudo suceder, sin tu apoyo tal vez esto nunca hubiera sucedido. Gracias también a tu familia por ayudarme, incluso sin pedirlo, haciéndome sentir como en casa.

A mi tía Sonia, por siempre confiar en mi potencial y apoyarme emocional y económicamente, no cabe duda de que sin ti no hubiera concluido este proyecto. Gracias por preocuparte por mí como si de un hijo se tratase y por siempre tenderme la mano cada vez que acudía a ti, aunque no siempre te encontraras en la mejor situación.

A mi mamá Dolores, por permitirme experimentar esta realidad y agradezco la libertad que me has siempre brindado. Gracias por enseñarme que la vida no es como quisiéramos y que comúnmente deberemos tomar decisiones difíciles y aceptar las consecuencias que de ellas surjan, buenas y malas. Gracias también por demostrarme que independientemente del rol que cumplamos en la sociedad, no dejamos de ser personas, con sus propias ideas, intereses, virtudes y defectos, y que por eso mismo el único apoyo incondicional que tendremos es el propio y, con suerte, el de algunas pocas personas más.

A mi hermano Armando, por mostrarme que no es que seas malo en algo, sino que no haces algo que te apasiona. El verte hacer tus tareas y estudiar para tus materias fue muy buena motivación para terminar este escrito. Gracias también por escucharme cuando tenía algo que decir y motivarme cada que te comentaba algún avance relacionado a mi tesis. Sé sin duda que serás un excelente psicólogo porque pasión y vocación te sobran.

A mi tía Edith, mi tío Clauzel, Chantal y Valéry por permitirme vivir con ustedes por un tiempo y considerarme como su hijo y hermano aún después de ello. Gracias por las lecciones aprendidas, el apoyo a mi educación y por enseñarme una forma distinta de ver el mundo a la que en algún momento tuve.

A mi tía Elizabeth y mi tío José, porque siempre pude expresar mi punto de vista con ustedes y ser comprendido, también por ayudarme a entender la forma de pensar y actuar de los demás, por dejarme vivir con ustedes en algún punto de mi vida y por estar dispuestos a ayudarme cuando lo necesitaba. Gracias a mi primo Enrique por ser como un hermano más, siempre es agradable platicar contigo de cualquier cosa cada que voy de visita; espero que logres lo que te propongas, sé que tú puedes.

A mi amigo Drago, por enseñarme algo que en algún momento ya había perdido, mi voluntad y perseverancia. Han sido tiempos difíciles, pero gracias a ti han sido más soportables, ya recuperaremos los paseos perdidos.

A mi exjefe, maestro y amigo Alan, por la confianza que me tuviste cuando apenas te conocía, por todas las enseñanzas que me diste y por ayudarme a ser más humano. Gracias por mostrarme que hay una diferencia enorme entre la teoría y la implementación y que esa diferencia radica, en gran medida, en que solo somos personas. Gracias por estar conmigo a lo largo de este camino, hacerlo menos pesado y por escucharme cuando necesitaba que alguien razonable lo hiciera. Gracias por aquel libro que alguna vez me prestaste, nunca imaginé que a pesar de entender menos de la mitad de lo que decía, iba a darle tanto “sentido” a mi forma de ver la vida.

A mi amigo Jorge, porque, aunque no somos tan cercanos y tal vez sin darte cuenta, el consejo que me diste logró que decidiera poner control a mi situación y entendiera que ver por mi propio bienestar no es algo necesariamente malo.

A mis amigos César y Antonio, porque a pesar de que hace mucho que no platicábamos, me orientaron cada vez que les preguntaba mis dudas sobre la titulación. Gracias también porque se tomaron el tiempo de explicarme y proporcionarme información valiosa para la realización de este documento. Gracias por las experiencias vividas en la universidad.

A mis amigos Jonathan y Josué, porque sé que aunque pasen los años siempre podremos platicar como si nos hubiéramos visto el día anterior. Gracias por motivarme con sus metas y logros. Gracias Jonathan por las palabras que me diste la primera vez que viste mi borrador de tesis, eso permitió que creyera un poco más en mí y siguiera con este proyecto.

A mis amigos Luis Miguel y Alejandro, porque en todo este tiempo platicar con ustedes sobre cualquier cosa me hacía sentir mejor, incluso sobre temas que no domino; espero que ahora podamos hacerlo un poco más. Gracias Alejandro por ayudarme a armar la computadora donde todo lo mostrado ha sido realizado.

A mi director de tesis, el Dr. Edmundo Rocha, por su paciencia y tiempo para orientarme y darme su punto de vista para la realización de mi trabajo, por estar al pendiente de mis avances incluso cuando éstos eran pocos. Gracias por también ser un maestro ejemplar y siempre enseñar con gran dedicación.

A mis sinodales, Dr. Francisco Cuenca, Dr. Paul Maya, M.I. Mayverena Jurado y M. I. Itzel Flores, por sus comentarios y observaciones acerca de mi tesis que ayudaron a mejorarla y que a su vez sirvieron como motivación para su término.

A Claudia Jiménez, por su contribución en la búsqueda de información relacionada a esta tesis

y en la elaboración del capítulo 2 “Estado del Arte”.

A la Universidad Nacional Autónoma de México y especialmente a la Facultad de Ingeniería, por ser como un segundo hogar, donde conocí excelentes profesores que no solo se limitaron a compartir sus conocimientos sobre su materia en cuestión, sino que también se preocuparon por formarnos un criterio basado en valores.

Sé que esta ha sido una lista bastante grande, pero no podía dejar pasar la oportunidad de dejarlos saber la importancia que han tenido en esta etapa de mi vida.

«La lucha por llegar a las cumbres basta para llenar un corazón de hombre.»  
Albert Camus, *El mito de Sísifo*

# Índice general

<b>1. Introducción, justificación y objetivos</b>	<b>1</b>
1.1. Justificación del trabajo . . . . .	2
1.2. Objetivo y alcance del trabajo . . . . .	3
<b>2. Estado del arte</b>	<b>5</b>
2.1. Anatomía y fisiología de miembros superiores . . . . .	5
2.2. Exoesqueletos . . . . .	8
2.2.1. Extremidades inferiores y de cuerpo completo . . . . .	8
2.2.2. Extremidades superiores . . . . .	10
2.3. Métodos de control . . . . .	13
2.3.1. Por tipo de entrada . . . . .	13
2.3.2. Por su configuración . . . . .	14
2.3.3. Por tipo de aplicaciones . . . . .	15
<b>3. Modelado matemático</b>	<b>16</b>
3.1. Modelo cinemático directo . . . . .	17
3.1.1. Construcción del modelo cinemático directo del robot exoesqueleto . . . . .	17
3.2. Obtención del modelo dinámico del exoesqueleto por el método Euler-Lagrange . . . . .	21
3.2.1. Obtención de la energía cinética . . . . .	24
3.2.2. Obtención de la energía potencial . . . . .	29
3.2.3. Construcción de la ecuación dinámica . . . . .	31
3.2.4. Inclusión de factores no considerados en el modelo dinámico . . . . .	33
3.2.5. Obtención de puntos de equilibrio por medio de la solución numérica de las ecuaciones dinámicas . . . . .	35
3.2.6. Despeje de la aceleración para la simulación numérica de las ecuaciones dinámicas . . . . .	36
<b>4. Controladores de Posición</b>	<b>41</b>
4.1. Control de posición por par calculado en el espacio articular . . . . .	42
4.1.1. Simulación del control de posición por par calculado en el espacio articular . . . . .	45
4.1.2. Conclusiones generales y aplicaciones del control de posición articular por par calculado . . . . .	58
4.2. Ecuación dinámica en el espacio cartesiano . . . . .	58
4.3. Control de posición por par calculado en el espacio cartesiano . . . . .	60
4.3.1. Simulación de control de posición por par calculado en el espacio cartesiano . . . . .	63
4.3.2. Conclusiones generales y aplicaciones del control de posición cartesiano por par calculado . . . . .	70

<b>5. Controladores para amplificación de fuerza</b>	<b>71</b>
5.1. Control por retroalimentación de fuerza externa . . . . .	71
5.1.1. Ley de control sin retroalimentación de fuerza . . . . .	72
5.1.2. Ley de control proporcional . . . . .	73
5.1.3. Simulación del control proporcional por retroalimentación de fuerza externa sobre una masa simple . . . . .	76
5.1.4. Simulación del control proporcional por retroalimentación de fuerza externa sobre el modelo del exoesqueleto . . . . .	86
5.1.5. Conclusiones generales y aplicaciones del control por retroalimentación de fuerza externa . . . . .	101
5.2. Control de posición por par calculado en el espacio cartesiano con control de fuerza explícito . . . . .	102
5.2.1. Simulación del control de posición por par calculado en el espacio cartesiano con control de fuerza explícito sobre el modelo del exoesqueleto . . . . .	106
5.2.2. Conclusiones generales del control de posición por par calculado en el espacio cartesiano con control de fuerza explícito . . . . .	113
5.3. Control de fuerza basado en un lazo interno de posición . . . . .	114
5.3.1. Modelo de interacción humano/robot . . . . .	114
5.3.2. Control de fuerza basado en un lazo interno de posición . . . . .	115
5.3.3. Simulación del control de fuerza basado en un lazo interno de posición . . . . .	120
5.3.4. Conclusiones generales y aplicaciones del control de fuerza basado en un lazo interno de posición . . . . .	141
5.4. Control cooperativo humano/robot para amplificación de fuerza . . . . .	142
5.4.1. Simulación del control cooperativo humano/robot para amplificación de fuerza	145
5.4.2. Amplificación de fuerza en el control cooperativo humano/robot . . . . .	159
5.4.3. Conclusiones generales y aplicaciones del control cooperativo humano/robot para amplificación de fuerza . . . . .	159
5.5. Resumen de pruebas a controladores de fuerza . . . . .	160
<b>6. Comentarios sobre la interacción humano/exoesqueleto</b>	<b>162</b>
<b>7. Conclusiones</b>	<b>165</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>167</b>
<b>Anexos</b>	<b>172</b>
<b>A. Control de posición articular</b>	<b>172</b>
<b>B. Control de posición cartesiano</b>	<b>176</b>
<b>C. Control por retroalimentación de fuerza externa</b>	<b>178</b>
<b>D. Control de posición por par cmutado en el espacio cartesiano con control de fuerza explícito</b>	<b>181</b>
<b>E. Control de fuerza basado en un lazo interno de posición</b>	<b>187</b>



# Capítulo 1

## Introducción, justificación y objetivos

Conforme evoluciona, el ser humano ha desarrollado herramientas con las cuales interactúa con el medio que lo rodea, que en conjunto con los sentidos fundamentales utiliza para adecuarse a su ambiente y sobrevivir.

Si bien el sentido del tacto se encuentra presente en toda la piel, es en las manos donde generalmente es utilizado de forma voluntaria conformando una interfaz en el que el flujo de información entre el ambiente y el humano ocurre. La función de las manos no se limita al intercambio de información táctil, sino que desde un punto de vista funcional o evolutivo, su existencia otorga ventajas de supervivencia al humano al permitirle manipular el ambiente. La labor de las manos está a su vez respaldada por el movimiento complejo de todo el conjunto anatómico que comprende las extremidades superiores. De esta manera es posible afirmar que el complejo brazo-mano es de vital importancia para la interacción con el medio ya que brinda autonomía, al permitir realizar actividades necesarias en diferentes ambientes.

Debido al papel fundamental que desempeñan las extremidades superiores, la pérdida de capacidad motriz causada por sobreexigencia, accidentes o enfermedades, así como la amplificación de capacidades físicas, son dos cuestiones que se han intentado enfrentar por distintos medios, siendo el uso de exoesqueletos una opción que ha ganado interés en las últimas décadas.

## 1.1. Justificación del trabajo

El desarrollo de exoesqueletos que potencien las habilidades humanas podría tener enormes implicaciones en la vida humana y no solo en la industria, al trabajar en conjunto con el humano apoyándolo en actividades de alta demanda física y amplificando sus capacidades. Aunado a esto, se consideró también que el estudio de exoesqueletos desarrollados en otras partes del mundo es un primer paso para entender los principios de funcionamiento bajo los que trabajan estos dispositivos y poder sentar las bases para un desarrollo posterior.

En la investigación sobre exoesqueletos realizada se pudo observar que la información disponible sobre el desarrollo y teorías de control enfocada a éstos se encuentra restringida, y las que se estudian están especialmente enfocadas a miembros inferiores; el desarrollo de exoesqueletos, como podrá verse más adelante, se realiza en países bélicos o de alto desarrollo tecnológico como lo son Estados Unidos, Japón y Corea, lo que contribuye a la poca difusión de la información, siendo ésta superficial e incluso con vacíos, dificultando el aprendizaje y desarrollo de este campo por lo menos en nuestro país.

Debido a la importancia de las extremidades superiores en las actividades humanas, el aumentar sus capacidades es un asunto de interés para la comunidad científica y tecnológica. Uno de los aspectos que involucra el desarrollo de este tipo de tecnología es el método de control que se utiliza y debido a que existen diferentes maneras de abordarlo, el propósito primordial de este trabajo es presentar y complementar la teoría en la que se apoya el desarrollo de controladores de movimiento y amplificación de fuerza de robots exoesqueletos.

Sentando las bases teóricas, se pretende dar un primer paso para la implementación del controlador en un modelo real, que permitirá apoyar a las personas que realizan actividades con un alto impacto físico a disminuir el daño que se produce como consecuencia de este tipo de actividades, ayudando a prevenir lesiones en brazos, espalda y cualquier parte del cuerpo que se vea comprometida con la actividad física desarrollada.

Actualmente en la Universidad Nacional Autónoma de México no se han desarrollado proyectos referentes a los exoesqueletos de extremidades superiores, por lo que el actual trabajo se plantea como un posible punto de partida para el estudio de este tipo de dispositivos.

En todos los esquemas de control presentados se realizaron pruebas para evaluar su desempeño en el cumplimiento de su objetivo primordial y la factibilidad de implementación real de cada uno de ellos así como una comparación constante entre las virtudes y desventajas de cada uno.

## 1.2. Objetivo y alcance del trabajo

El presente trabajo tiene dos objetivos principales, siendo el primero el desarrollo del modelo matemático del exoesqueleto de miembro superior HEXAR [21], mientras que el segundo consta del desarrollo y pruebas en simulación de algunos controladores propuestos en la literatura, desarrollando detalles teóricos para facilitar la comprensión del tema y que en muchas ocasiones se dan por entendidos, esto con la finalidad de brindar un apoyo al lector que busque introducirse en el campo de la robótica y control.

Para el cumplimiento de los dos objetivos generales, se contemplan los siguientes objetivos específicos:

1. Obtención del modelo cinemático del exoesqueleto a través de la parametrización Denavit-Hartenberg.
2. Obtención del modelo dinámico del exoesqueleto por medio de las ecuaciones de Euler-Lagrange.
3. Desarrollo teórico de controladores de posición, fuerza e híbrido existentes en la literatura.
4. Demostración del comportamiento natural del exoesqueleto y con control por medio de simulaciones y gráficas.

El desarrollo teórico, así como las simulaciones de los esquemas de control aplicados sobre el modelo del exoesqueleto, permitieron la comprensión de su principio de funcionamiento y de los efectos que cada uno de estos controladores tienen sobre el sistema; distinguiendo sus ventajas, limitaciones y diferencias, al considerar las implicaciones que su comportamiento supone para el usuario. Es importante mencionar que la construcción del exoesqueleto e implementación física de controladores están fuera del alcance del proyecto, razón por la cual el modelo dinámico del exoesqueleto, elemento clave de esta tesis, fue obtenido a partir de valores de HEXAR [21].

El lector podrá notar que en muchas de las pruebas realizadas el comportamiento del exoesqueleto no es el óptimo para una interacción segura y ergonómica con el usuario, sin embargo, como ya fue mencionado, el objetivo es entender el funcionamiento que tienen los diferentes esquemas de control, más no aún el cumplimiento de una tarea cooperativa real que implicaría el cumplimiento de ciertos requisitos de control.

El presente documento se conforma de siete capítulos, siendo éste el primero y en el que una pequeña introducción, la justificación y objetivos del trabajo fueron presentados. En el capítulo

posterior se muestra el avance que se ha tenido en el campo de los exoesqueletos, así como algunas cuestiones básicas de anatomía y métodos de control. Ambos capítulos proveen en conjunto el contexto bajo el cual el trabajo fue realizado. Por su parte el capítulo tres muestra la obtención del modelo matemático del exoesqueleto utilizado a lo largo del documento. En los capítulos cuatro y cinco se muestran respectivamente los controladores de posición y fuerza aplicados sobre el modelo, presentando teoría y pruebas de cada esquema en forma conjunta, de tal forma que la información referente a cada controlador se encuentre en un mismo lugar; asimismo, en un esfuerzo por facilitar la comprensión del tema, la presentación tanto de controladores como de pruebas fue realizada de lo considerado más sencillo a lo más complejo. Finalmente, en los capítulos seis y siete, comentarios acerca de la interacción humano/exoesqueleto y la conclusión del trabajo son presentados.

# Capítulo 2

## Estado del arte

### 2.1. Anatomía y fisiología de miembros superiores

Las extremidades superiores del cuerpo humano están formadas principalmente por los componentes presentes en los conjuntos del hombro, codo y la articulación de la muñeca. Sin tener en cuenta los grados de libertad (GDL) de la mano, el brazo tiene un total de 7GDL distribuidos; 3GDL en el hombro, 2GDL en el codo y 2GDL en la muñeca [14].

El conjunto anatómico del hombro está formado por tres huesos, clavícula, escápula, húmero y cuatro articulaciones. El hombro puede ser modelado como una articulación esférica. Los movimientos que puede realizar son descritos a continuación.

- Flexión/extensión. Sucede cuando el brazo es elevado hacia adelante. La extensión es el movimiento opuesto, éste acerca el brazo al cuerpo si el brazo está en flexión. El rango de movimiento es de  $180^\circ$  para la flexión y  $60^\circ$  para la extensión.
- Abducción/aducción. Movimiento que ocurre cuando el brazo de manera lateral, se aleja-acerca al cuerpo, respectivamente. El rango de movimiento es de  $180^\circ$  para la abducción y  $75^\circ$  para la aducción.
- Rotación interna/externa: Se llama rotación interna o media si se da hacia adentro del cuerpo, si el movimiento se da hacia afuera recibe el nombre de rotación externa o lateral. Sus respectivos rangos de movimiento son de hasta  $110^\circ$  para la rotación interna y  $90^\circ$  para la rotación externa.

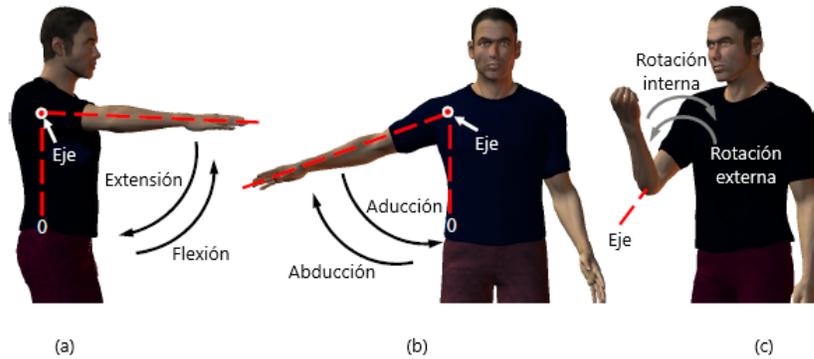


Figura 2.1: Tomada de [14]. (a) Extensión/flexión del hombro. (b) Abducción/aducción del hombro. (c) Rotación interna/externa del hombro.

El codo está formado por un conjunto de articulaciones que interactúan en el mismo espacio; articulación húmero-radial y húmero-cubital. La articulación compuesta por el húmero y el radio es esférica, pero debido a su localización e interacción con las otras articulaciones, se reducen sus grados de libertad de 3 a 2, de esta manera, el codo permite realizar los movimientos de flexión/extensión y pronación/supinación.

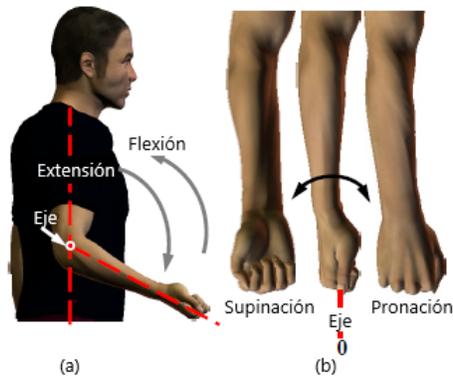


Figura 2.2: Tomada de [14]. (a) Flexión/extensión del codo. (b) Supinación/pronación del codo.

- Flexión/extensión: El movimiento que está definido como flexión se da cuando el ángulo entre el antebrazo y el brazo superior decrece, en cambio, si este ángulo aumenta, entonces se habla de extensión, los rangos de movimiento promedio, son  $145^\circ$  para la flexión y  $5^\circ$  para la extensión.
- Supinación/pronación: Movimiento que se da entre el radio y el cúbito. Si el movimiento se da de manera que la palma de la mano quede dirigida hacia la espalda, es llamado pronación, la supinación lleva la palma de la mano en dirección contraria, es decir la palma de la mano ahora coincide con la parte frontal del cuerpo. El rango de movimiento de ambos es de  $90^\circ$ .

Por último, la muñeca es la unidad que conecta la mano con el antebrazo y posee dos grados de libertad, flexión-extensión y abducción/aducción.

- Flexión/extensión: La flexión consiste en doblar la muñeca de tal forma que la palma se acerque a la superficie anterior del antebrazo, el movimiento opuesto es la extensión. El rango de movimiento promedio de la muñeca son  $60^\circ$  en extensión,  $70^\circ$  en flexión.
- Abducción/Aducción: La abducción o desviación radial se produce al doblar la muñeca dirigiéndola hacia el lado del pulgar, el movimiento contrario es llamado aducción o desviación cubital. El rango de movimiento promedio en aducción es  $35^\circ$  y  $25^\circ$  en abducción.

Para profundizar acerca de la anatomía y fisiología humana puede recurrirse a [14] donde la información presentada anteriormente fue obtenida.

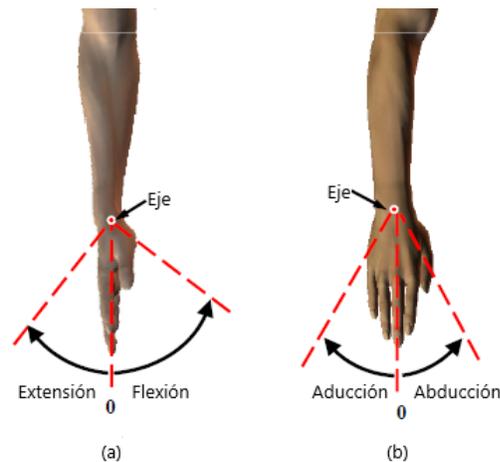


Figura 2.3: Tomada de [14]. (a) Extensión/flexión de la muñeca. (b) Abducción/aducción de la muñeca.

## 2.2. Exoesqueletos

Desde la antigüedad el ser humano se ha valido de elementos presentes en su entorno, los cuales ha transformado para incrementar su fuerza y reemplazar o auxiliar alguna parte de su cuerpo con algún tipo de debilidad o deficiencia; algunos ejemplos son las máquinas simples, sillas de ruedas, bastones, prótesis, entre otros. A partir de este hecho, se han desarrollado elementos tecnológicos con los que ha sido posible crear estructuras antropomorfas que emulan la naturaleza del ser humano, llamados exoesqueletos. Hablando técnicamente, la definición de la palabra exoesqueleto, tiene que ver con la estructura rígida que poseen algunos artrópodos, y que es utilizada para proteger sus órganos internos. En un intento de emular este tipo de estructuras, se ha adoptado un concepto análogo. De esta manera, el usuario puede utilizar este tipo de dispositivos por encima de sus extremidades, proveyendo algunas características adicionales. Uno de los primeros registros existentes de un dispositivo con características que buscaran imitar el movimiento humano proviene de 1495, diseñado por Leonardo da Vinci; este modelo era capaz sentarse, mover los brazos y cuello y era manipulado por medio de poleas y cables [33].

### 2.2.1. Extremidades inferiores y de cuerpo completo

A pesar de que se había tenido la inquietud anteriormente de construir robots que simularan los movimientos humanos, no fue hasta inicios del siglo XX que se pusieron en marcha esfuerzos formales por desarrollar, en particular, exoesqueletos que fueran capaces de amplificar la fuerza del usuario. El primer exoesqueleto desarrollado con este propósito fue el que llamado *Hardiman*, desarrollado en 1966 por *General Electric Research*, el cual fue terminado en 1971 sin resultados completamente exitosos [25]. El *Hardiman I* estaba basado en el funcionamiento maestro-esclavo. El dispositivo de cuerpo completo estaba compuesto por dos exoesqueletos, el primero e interno que contenía todos los sensores (maestro), y el externo que estaba completamente actuado (esclavo). La actuación del *Hardiman I* era hidráulica y fue capaz de levantar 750 libras, aunque permaneció incompleto [9]. De forma casi paralela, en el año de 1969, en el *Instituto Mihajlo Pupin* (Serbia), bajo el mando del profesor Vukobratovic, se desarrolló el primer exoesqueleto activo para miembros inferiores del que se tiene registro y se planteó la teoría que respalda este tipo de sistemas[26].

En la década de los ochentas, el Profesor Kazerooni en la Universidad de Berkeley se enfocó en el estudio de la manipulación de objetos. Para el año 2000 la DARPA (*Defense Advanced Research Protect Agency*) puso en marcha el proyecto EHPA *Exoskeletons for Human Power Augmentation*, que abarcó cuatro principales lineamientos tecnológicos; arquitectura de diseño, algoritmo de control,

red para implementar el algoritmo de control y la unidad integrada en el exoesqueleto [16]. El objetivo principal era aumentar las capacidades de los soldados de forma que pudieran sobrepasar sus habilidades naturales. Diversas instituciones participaron en este proyecto, de países como, Japón, Rusia, Reino Unido, Alemania, Corea y Singapur. De este proyecto se desprendieron dispositivos importantes [23].

Uno de los exoesqueletos que se derivó del proyecto EPHA es el BLEEX *Berkley Lower Extremity Exoskeleton*, presentado en 2004. Este exoesqueleto consiste en un par de piernas con 7GDL cada una, de las cuales 4 funcionan con actuadores hidráulicos además de utilizar encoders y acelerómetros como parte de su instrumentación. Posteriormente en el 2005 se desarrolló otro exoesqueleto desarrollado bajo la firma Sarcos, a diferencia del BLEEX, este exoesqueleto contaba con dos brazos que servían para levantar objetos [10]. El último proyecto que se presentó de manera funcional para el proyecto EPHA fue el desarrollado en el grupo de biomecánica del MIT *Massachusetts Institute of Technology*, este dispositivo funcionaba gracias a la energía almacenada por medio de resortes activos presentes en el exoesqueleto [26].

Proyecto	Parte del cuerpo que apoya	Grados de libertad	Actuadores	Propósito	Descripción
<b>EEUU</b>					
BLEEX	Piernas	14 (7 en cada pierna)	Hidráulicos	Amplificación de potencia	n/d
SARCOS	Cuerpo completo	24	Hidráulicos y eléctricos	Amplificación de potencia	n/d
RoboWalker	Cadera y rodilla	n/d	Elásticos en serie	Auxiliar en la caminata	Basado en la investigación de laboratorio del MIT, aumenta o reemplaza la función muscular. Se planea su comercialización.
SpringWalker	Piernas	n/d	Resortes	Amplificación de potencia	Capaz de correr a 24 km/h o cargar 90 kg.
<b>ASIA</b>					
HAL-5	Cuerpo completo	n/d	Motores eléctricos	Amplificación de potencia	n/d
PowerSuit	Cuerpo completo	n/d	Actuadores neumáticos	Amplificación de potencia	Funciona con baterías. Permite a una enfermera cargar a un paciente de 85 kg
<b>EUROPA</b>					
Günter Hommel	Piernas	n/d	Motores eléctricos	Rehabilitación	Extremidad órtica, asiste a los pacientes con ejercicios de rehabilitación y movimientos de la vida cotidiana

Tabla 2.1: Algunos exoesqueletos desarrollados para cuerpo completo y piernas

Otros proyectos de interés son: HAL (*Hybrid Assistive Limb*), exoesqueleto actuado por medio de motores eléctricos, que se vale de señales electromiográficas (EMG) para su funcionamiento [15]; HULC (*Human Universal Load Carrier*) propuesto por el departamento de Biónica de la universidad de Berkley el cual es un exoesqueleto de extremidades inferiores altamente sobreactuado [31].

La Tabla 2.1, basada en [15], muestra el desarrollo de los exoesqueletos para las extremidades inferiores desarrolladas en EEUU, Asia y Europa además de una breve descripción de los dispositivos.

### 2.2.2. Extremidades superiores

El propósito de los desarrollos destinados a las extremidades superiores ha tenido dos aplicaciones fundamentales, rehabilitación de la extremidad o la mejora en las capacidades motrices y de fuerza de la misma.

Uno de estos exoesqueletos es el desarrollado en la Universidad de Saga, cuenta con 4GDL para asistir el movimiento del codo-hombro y está instalado en una silla de ruedas, de manera que la silla soporta todo el peso del dispositivo. Otro mecanismo de 4GDL es el ARMin Robot, con fines terapéuticos ya que ayuda a fortalecer a los pacientes con el fin de realizar tareas cotidianas y es posible ajustar la altura del brazo del exoesqueleto. Gupta y O'Malley también desarrollaron un dispositivo con fines terapéuticos, cuenta con 5GDL y esta compuesto por juntas de revolución, 3GDL fueron destinados al codo y la longitud del antebrazo es ajustable. Tsagarkis y Caldwell emplearon su diseño *Soft-actuated* para fines de rehabilitación y cuenta con actuadores neumáticos que dan al usuario la sensación de movimiento suave al momento de su operación, cuenta con 7GDL [12].

Algunos exoesqueletos se diferencian por su diseño mecánico, muestra de esto es el dispositivo CADEN 7, en el cual se elimina la reacción súbita de algunos movimientos del exoesqueleto, cuenta con 7GDL y en el que se usa la fijación abierta entre el usuario y el exoesqueleto. O el caso de W-EXOS, donde su característica más importante es la consideración de la compensación de los ejes de la muñeca ya que las articulaciones de la misma son muy sensibles a los cambios en la posición y en el par [12].

Algunos casos particulares como el ASSIST, solo cuentan con 1GDL, cuyo diseño funciona con actuadores neumáticos; tiene como objetivo ser usado como férula de soporte activo, diseñado por Sasaki, su principal ventaja es la ligereza del dispositivo cuando no está siendo operado y es usado para rehabilitación física [12].

El NEUROexos es un brazo robótico de tres juntas y tres eslabones que se caracteriza por la

implementación de estrategias de control bioinspiradas para obtener un brazo robótico parecido al humano. Basándose en EMG y aplicando un control proporcional, el NEUROexos calcula el par de acuerdo a el movimiento del brazo del operador, las ganancias inician en cero y van aumentando hasta que el usuario se sienta cómodo con el peso que está sintiendo. El diseño del exoesqueleto está basado en el modelo humano en términos de la biomecánica, el control y de las estrategias de aprendizaje [19].

Otro exoesqueleto del que se tiene conocimiento desde el 2010 es el denominado XOS 2, construido por la compañía Raytheon para la armada de Estados Unidos, incrementa la fuerza, agilidad y resistencia del soldado que lo está usando. Utiliza actuadores hidráulicos para permitirle al usuario levantar objetos pesados con una proporción de 17:1 (peso real a peso percibido), pesa 210 lb y puede cargar hasta 200 lb con ambos brazos[17].

El exoesqueleto llamado HEXAR (*Hanyang university EXoskeleton Assistive Robot*) y CAES (*Cartesian Arm Exoskeleton System*) desarrollados en Corea del Sur tienen como objetivo amplificar la fuerza del usuario, con 3GDL y 5GDL respectivamente, estos exoesqueletos además basan su control en su modelo dinámico [21] [7]. En el capítulo 5 de este documento se analiza y muestran pruebas de los controladores en los que basan su funcionamiento.

Otros proyectos que pueden ser nombrados son: el modelo de traje que se ha propuesto por Kobayashi y Hiramatsu, que provee de fuerza muscular a las personas que sufren parálisis [19], L-EXOS que cuenta con 4GDL y es un exoesqueleto para interacción háptica en un entorno virtual [11]. Papadopulus y Patsianis proponen un exoesqueleto de 2GDL que tiene la particularidad de la localización de su centro de rotación del humero con respecto a la escápula [29].

La Tabla 2.2, tomada de [12], presenta más exoesqueletos para extremidades superiores, agrupados según el tipo de actuadores que utilizan.

Referencia	Parte del cuerpo que apoya	GDL Activos	Actuadores	Propósito
<b>MOTORES</b>				
Gupura y Kiguchi	Articulaciones del hombro, codo, muñeca y movimiento del antebrazo	6	Servomotores CD	Auxiliar del movimiento
Papadopulus y Patsianis	Articulación del hombro	2	Servomotores	Auxiliar a las personas con distrofia muscular
Mulas et al.	Mano	2	Servomotores	Rehabilitación de la mano
Rosen et al.	Articulaciones del hombro y del codo	2	Motores CD	Asistencia de movimiento
Perry y Rosen	Articulaciones del hombro, codo, muñeca y movimiento del antebrazo	7	Motores de escobillas	Rehabilitación, simulación de realidad virtual y asistente en la potencia muscular
Kawasaki et al	Articulación de la muñeca, dedos y movimiento del antebrazo	18	Servomotores	Terapia de rehabilitación
Gupta	Articulación del hombro, muñeca y movimiento del antebrazo	5	Motores eléctricos	Entrenamiento y rehabilitación en entornos virtuales
Nef et al.	Articulación del hombro y codo	4 2 pasivos	Motores CD	Rehabilitación de las extremidades superiores
Mihelj et al.	Articulaciones del hombro, codo, muñeca y movimiento del antebrazo	4 3-pasivos	Motores CD	Rehabilitación de las extremidades superiores
Johnson et al.	Articulación del, hombro, codo y movimiento del antebrazo	3	Motores eléctricos	Robot de asistencia y rehabilitación
Sarakoglou et al.	Dedos de la mano	7	Motores CD	Asistir en el ejercicio de la mano
Wege and Hommel	Dedos	4	Motores CD	Rehabilitación de dedos
Carignan et al.	Articulación del, hombro, codo y movimiento del antebrazo	5	Motores CD sin escobillas	Rehabilitación y ejercicios terapéuticos
Rocon et al.	Articulación del codo, muñeca y movimiento del antebrazo	3	Motor de corriente continua	Evaluación y supresión del temblor
<b>ACTUADORES NEUMÁTICOS</b>				
Lucas et. Al	Dedo índice	3, 1 pasivo	Cilindros neumáticos	Asistencia para ejercer presión contra el dedo pulgar como auxiliar para la sujeción
Kobayashi y Hiramatsu	Articulaciones del hombro, codo y muñecas	6	Actuadores neumáticos	Provee soporte muscular
Cramer et al.	Mano y articulación de la muñeca	3	Actuadores neumáticos	Terapia de rehabilitación para la mano
Sugar et al.	Articulaciones del hombro codo y muñecas	4	Actuadores neumáticos	Terapias repetitivas de las extremidades superiores
Noritsugu et al.	Dedos	15	Músculos neumáticos	Auxiliar de potencia para la manipulación de la mano
Tsagarakis y Caldwell	Articulaciones del hombro, codo, muñecas y movimiento del antebrazo	7	Músculos neumáticos	Rehabilitación de las extremidades superiores
Columbia Scientific LLC	Mano y muñeca	4	Músculos de aire comprimido	Terapia de rehabilitación
<b>ACTUADORES HIDRÁULICOS</b>				
Mistry et al.	Articulaciones del hombro, codo, muñecas y movimiento del antebrazo	7	Actuadores hidráulicos	Estudio de los movimientos del brazo

Tabla 2.2: Desarrollo de exoesqueletos para miembro superior

## 2.3. Métodos de control

Las teorías de control que respaldan el funcionamiento de los exoesqueletos son muy diversas y no tienen una línea de estudio completamente definida en comparación con el diseño mecánico de los mismos. En un esfuerzo por clasificar las metodologías de control existentes se han propuesto cuatro parámetros [2]:

<b>Control</b>	
Tipo de entrada	Señales biológicas
	Señales no biológicas
	Plataforma independiente
Configuración	Jerarquía
	Parámetros físicos
	Modelo (dinámico, músculo)
Tipo de aplicaciones	Realidad virtual
	Teleoperación
Salida	Corriente
	Voltaje

Tabla 2.3: Clasificación de metodologías de control

### 2.3.1. Por tipo de entrada

El control basado en la entrada de señales biológicas, se vale de las señales electromiográficas (EMG), obtenidas por medio de electrodos superficiales o intramusculares. La señal EMG es utilizada como señal de entrada de un microprocesador, este es un conjunto de modelos computacionales del músculo humano que se encarga de predecir el par necesario en el exoesqueleto en tiempo real, en función de las relaciones cinemáticas de las articulaciones y las señales EMG. Algunos exoesqueletos donde se ha aplicado este tipo de control son SUEFUL- 7 [13] y NEUROExos [1]. La desventaja principal de este tipo de controlador es la adquisición de las señales EMG, debido a que son muy susceptibles a los cambios externos.

Los métodos de control basados en la entrada de señales no biológicas usan instrumentación del tipo sensores de fuerza y de posición como entrada al controlador. Moubarak y su equipo de investigación utilizaron este método de control para un exoesqueleto de miembro superior de cuatro grados de libertad para rehabilitación, en donde la intención de movimiento del usuario es obtenida por medio de sensores de fuerza unidos al soporte del brazo [28]. Aunque los sensores de par/fuerza son los más recurridos, no son los únicos sensores que pueden ser usados, Exoskeletal Power Assistive Device (EPAD) es un exoesqueleto para miembro inferior en donde se utilizaron sensores de expansión

de fibra muscular (MFE) [20].

Otros ejemplos de exoesqueletos que utilizan sensores de par/fuerza y de posición son CAES y HEXAR, cuyos esquemas de control son presentados en este documento. Los métodos denominados de plataforma independiente, por su parte, son aquellos que se valen de señales biológicas y no biológicas.

### **2.3.2. Por su configuración**

El controlador puede ser clasificado según la configuración dependiendo de su jerarquía, parámetros físicos o el modelo que está usando. Un controlador puede pertenecer a más de una de estas subcategorías.

La metodología de control que se basa en la jerarquía tiene tres niveles; primer nivel o controlador de tarea, segundo nivel o controlador de alto nivel y por último, el controlador de bajo nivel. El controlador de tarea se ejecuta en base a un cometido en específico, mientras que el controlador de alto nivel recibe como entrada la información de la salida del controlador de tarea. En el último peldaño, están los controladores de bajo nivel, que controlan la posición o fuerza de las juntas del exoesqueleto.

En el subnivel perteneciente a los parámetros físicos, se encuentran los controladores de posición, par/fuerza e interacción de fuerza.

Con respecto a los controladores basados en el modelo, estos pueden ser clasificados dependiendo si se utiliza el modelo dinámico o un modelo del comportamiento biológico del músculo. El modelo dinámico puede ser obtenido por medio de, modelado matemático, identificación de parámetros e inteligencia artificial. Considerar los huesos como eslabones rígidos unidos por medio de juntas, son las principales acepciones hechas para obtener el modelo dinámico. De forma general, el modelo dinámico se compone de efectos inerciales, gravitacionales y de Coriolis.

El modelado matemático considera las características dinámicas que se desea imitar, un buen ejemplo del uso del modelo dinámico para la implementación del sistema de control, es el exoesqueleto BLEEX, ya que su funcionamiento depende en su totalidad del modelo dinámico, lo cual implica la necesidad de contar un modelo muy preciso, con una sensibilidad muy alta pero sin comprometer la robustez del sistema. Los controladores desarrollados para los exoesqueletos CAES y HEXAR también dependen del modelo dinámico del robot, por lo que es necesario un modelo que sea fiel a la dinámica del exoesqueleto. Existen diferentes métodos para obtener el modelo dinámico, uno de ellos es la identificación de parámetros, el cual es utilizado cuando el modelado matemático no

brinda la información suficiente o necesaria al modelo dinámico. Otro método para obtener el modelo dinámico es el de inteligencia artificial, en especial útil cuando se trabaja con sistemas no lineales.

Además del modelo dinámico, el modelo del músculo también puede ser utilizado para la implementación del control donde el método Hill es ampliamente usado para su obtención. En [18] un modelo de músculo ajustado por un modificador neuro-fuzzy es presentado para realizar un control basado en EMG de un exoesqueleto.

### **2.3.3. Por tipo de aplicaciones**

Respecto a las aplicaciones del controlador, se pueden considerar tres categorías, realidad virtual, teleoperación y controladores de caminata. La aplicación de realidad virtual tiene como objetivo desarrollar ejercicios terapéuticos de forma que guía y ayuda al paciente a transportar objetos, auxiliado de una plataforma virtual. La teleoperación ofrece un funcionamiento del tipo maestro-esclavo, en donde el exoesqueleto constituye el dispositivo maestro, de forma que la interacción con el ambiente se realiza a través del dispositivo esclavo y no directamente por medio del operador. Por último el controlador de caminata auxilia al usuario, realizando subtareas como la detección de la fase de la caminata, brindando el soporte necesario.

## Capítulo 3

# Modelado matemático

Para lograr controlar un sistema es necesario conocer su comportamiento ya que el método de control depende fuertemente de él. Es importante resaltar que aunque el modelo matemático debe reflejar con precisión el comportamiento del sistema, algunas veces es difícil considerar todas las características del mismo, por lo que en ocasiones se realizan algunas simplificaciones que aún así permitan obtener un modelo final aceptable para el nivel de detalle requerido. La obtención de los modelos cinemático y dinámico es fundamental para el tipo de controlador que se pretende implementar, donde el primero es obtenido comúnmente por medio de la convención Denavit-Hartenberg mientras que para el segundo los métodos Euler-Lagrange y Newton-Euler son empleados. La consideración del sistema como un conjunto de eslabones rígidos unidos mediante juntas es una simplificación recurrente que tiene resultados bastante acertados, razón por la cual fue empleada en este trabajo.

En general los exoesqueletos no tienen diferencias significativas con respecto a los robots manipuladores hasta ahora; en su mayoría se encuentran compuestos por eslabones conectados entre sí a través de articulaciones permitiendo que se transmita el movimiento a través de estas cadenas cinemáticas. Los movimientos van desde la rotación o desplazamiento lineal hasta la combinación de ambas, siendo las dos primeras las más usadas; se dice que existen  $n$  grados de libertad cuando la articulación permite  $n$  movimientos independientes entre dos articulaciones. Como consecuencia de lo anterior, los exoesqueletos pueden tener diferentes configuraciones y grados de libertad.

Para poder implementar un controlador sobre el exoesqueleto primero es necesario conocer sus características físicas como posiciones, velocidades, aceleraciones, etc., así como las relaciones entre ellas. El modelo cinemático tiene como objetivo describir el movimiento del exoesqueleto sin tener

en cuenta las fuerzas que lo causan, información que será usada posteriormente en el desarrollo del modelo dinámico, que permite conocer la interacción entre movimiento y fuerza, utilizada de forma recurrente en el desarrollo de los controladores.

Es importante mencionar que por su necesidad y utilidad, en el desarrollo de este capítulo se podrán encontrar transcripciones/traducciones de párrafos de [8] donde se puede encontrar información más detallada sobre el desarrollo de modelos matemáticos de manipuladores.

### 3.1. Modelo cinemático directo

El modelo cinemático directo permite la obtención de la posición en el espacio cartesiano de algún punto del robot (especialmente el efector final) a través de las variables articulares, para lo cual se hace uso del método de Denavit- Hartenberg.

El método Denavit- Hartenberg es el algoritmo más utilizado para conocer la cinemática directa de manipuladores, parte de la asociación de sistemas de referencia a cada una de las articulaciones del robot y tiene como resultado final la obtención de 4 parámetros ( $a$ ,  $\alpha$ ,  $d$  y  $\theta$ ) relacionados con las características propias de la configuración del eslabón y su conexión con los otros eslabones con la finalidad de construir las llamadas matrices de transformación homogénea, utilizadas para obtener las posiciones y orientaciones de los sistemas de referencia entre sí y respecto a algún sistema de referencia fijo. Cabe señalar que este algoritmo presenta variaciones en la literatura y que la naturaleza del mismo permite que existan diferencias en el modelado debido a la arbitrariedad de algunos de sus pasos, en este caso se utilizó el algoritmo mostrado en [8].

#### 3.1.1. Construcción del modelo cinemático directo del robot exoesqueleto

Como ya fue mencionado se modeló el robot exoesqueleto HEXAR utilizando los parámetros y geometría mostrada en [21]. HEXAR esta conformado por dos extremidades en contacto con la espalda y manos del operador, moviéndose en sincronía con sus brazos; en total cuenta con seis grados de libertad, tres en cada brazo que por su simetría permiten que el estudio cinemático se realice únicamente en uno de ellos. Los tres grados de libertad permiten los movimientos de extensión/flexión y de abducción/aducción del hombro, así como extensión/flexión del codo que son los más utilizados al manipular objetos [21]. Al tener 3 grados de libertad en cada miembro, HEXAR cuenta con 3 coordenadas generalizadas en cada uno de ellos con las que se puede determinar su configuración, conocidas también como las variables articulares  $q_1$ ,  $q_2$  y  $q_3$ . Una representación

sencilla del exoesqueleto objeto de estudio se muestra en la Figura 3.1 donde pueden apreciarse las 3 articulaciones y eslabones que lo conforman, en el que la primer articulación se encuentra unida a un punto fijo que bien puede ser la espalda del usuario, además se observa la manija acoplada al eslabón 3 en la que ocurre la interacción humano/robot que puede considerarse como el efector final y donde se encuentra el punto de interés  $p_{hr}$ .

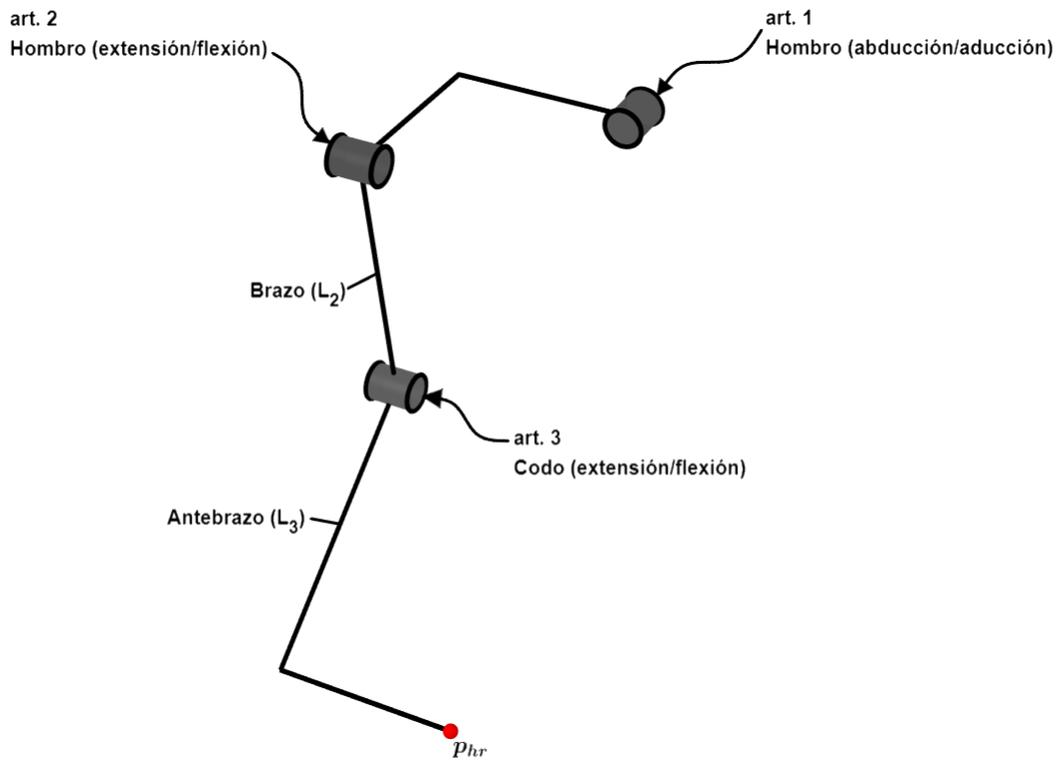


Figura 3.1: Representación gráfica del exoesqueleto de miembro superior

### Implementación de algoritmo DH

A partir de la representación gráfica es posible utilizar el modelo DH para determinar las matrices de transformación homogénea de la siguiente forma:

1. Se identifican los 3 eslabones y sus 3 articulaciones asociadas, así como los 3 ejes sobre los que rotan.
2. Empezando por las articulaciones 1 y 2 se observa que sus ejes se intersectan, por lo se asigna

el origen del sistema de referencia 1 en el punto de intersección.

3. Se asigna el eje  $Z_1$  apuntando a lo largo del eje de la articulación 1 (la dirección es arbitraria).
4. Se coloca el eje  $X_1$  de tal forma que sea normal al plano formado por los ejes intersectados (la dirección es arbitraria).
5. Se procede a colocar el sistema de referencia asociado a la segunda articulación, para lo cual se observa que los ejes articulares 2 y 3 son paralelos por lo que existen múltiples perpendiculares comunes entre ellos, por facilidad se elige la perpendicular que pasa por el origen del sistema  $S_1$ , y que corta al eje articular  $S_2$  en ese mismo punto por lo que el origen  $S_2$  es coincidente con  $S_1$ .
6. Se designa como  $Z_2$  al eje que apunta a lo largo del segundo eje articular
7.  $X_2$  será la perpendicular común entre los ejes articulares 2 y 3 (su dirección es arbitraria)
8. Para  $S_3$  se elige su origen en el punto de intersección de  $X_2$  con el eje articular 3 el cual será  $Z_3$ .
9.  $X_3$  se elige de tal forma que sea paralelo a la línea que define el eslabón 3
10.  $S_0$ , asociado a la base del exoesqueleto, se elige de tal forma que que coincida con  $S_1$  cuando la variable articular  $q_1$  es cero.

Con los sistemas de referencia definidos, fue posible obtener los parámetros DH asociados a su configuración y que son mostrados a continuación

$i$	$\alpha_{i-1}$	$a_{i-1}$	$d_i$	$\theta_i$
1	$0^\circ$	0	0	$q_1$
2	$-90^\circ$	0	0	$q_2$
3	$0^\circ$	$L_2$	0	$q_3$

Siendo  $L_2$  la longitud del segundo eslabón la cual variará de acuerdo a las características físicas del usuario y que por el momento se mantendrá como una expresión simbólica para no perder generalidad en el desarrollo. Asimismo en [21] se puede observar que los mismos parámetros DH fueron obtenidos, es decir, un análisis cinemático idéntico, representado en la Figura 3.2.

Con los parámetros de Denavit-Hartenberg obtenidos, las matrices de transformación homogénea se definieron como

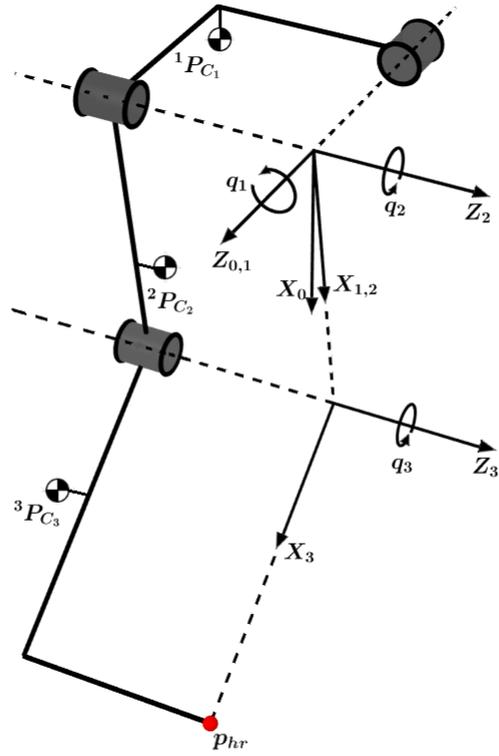


Figura 3.2: Sistemas de referencia y parámetros asociados al exoesqueleto

$${}^0T_1 = \begin{bmatrix} \cos(q_1) & -\sin(q_1) & 0 & 0 \\ \sin(q_1) & \cos(q_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

$${}^1T_2 = \begin{bmatrix} \cos(q_2) & -\sin(q_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin(q_2) & \cos(q_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

$${}^2_3T = \begin{bmatrix} \cos(q_3) & -\sin(q_3) & 0 & L_2 \\ \sin(q_3) & \cos(q_3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Así, la matriz de transformación homogénea que representa el sistema 3 referido al sistema fijo está dada por la ecuación:

$${}^0_3T = {}^0_1T {}^1_2T {}^2_3T \quad (3.4)$$

### 3.2. Obtención del modelo dinámico del exoesqueleto por el método Euler-Lagrange

Para la obtención del modelo dinámico de cualquier robot manipulador es necesario, en principio, contar con cuatro parámetros que de una u otra forma serán utilizados en algún paso del método [8]:

1. Masas de los eslabones  $m_i$
2. Vectores de posición de los centros de gravedad de los eslabones  $P_{C_i}$
3. Tensores de inercia de los eslabones  $I_i$
4. Matrices de rotación de los sistemas de referencia asociados a cada eslabón  ${}^i_{i+1}R$

Los primeros 3 parámetros son obtenidos a partir de mediciones físicas de los eslabones y de la configuración del robot, usualmente auxiliados por el modelo CAD del robot. En este trabajo en particular no se creó el modelo CAD del exoesqueleto ni tampoco se contaba con el robot mismo, sin embargo los parámetros ofrecidos en [21] fueron utilizados para la obtención de la ecuación dinámica, lo cual fue posible debido a que los sistemas de referencia obtenidos por el método Denavit-Hartenberg y los parámetros obtenidos fueron los mismos a los presentados en dicho artículo.

Para el cuarto punto, las matrices de transformación homogénea nos proporcionan implícitamente las matrices de rotación necesarias, recordando que las primeras están conformadas por la matriz de rotación y vectores de posición entre sistemas de referencia de la siguiente forma [8]:

$${}^A_B T = \begin{bmatrix} {}^A_B R & {}^A P_{BORG} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Donde  ${}^A_B R$  esta definida como la matriz de rotación del sistema  $B$  respecto a  $A$  y  ${}^A P_{BORG}$  el vector de posición del origen del sistema  $B$  respecto al sistema  $A$ . Por lo que, de las transformaciones homogéneas (3.1), (3.2) y (3.3) se observa que la las matrices de rotación asociadas son:

$${}^0_1 R = \begin{bmatrix} \cos(q_1) & -\sin(q_1) & 0 \\ \sin(q_1) & \cos(q_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

$${}^1_2 R = \begin{bmatrix} \cos(q_2) & -\sin(q_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\sin(q_2) & -\cos(q_2) & 0 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

$${}^2_3 R = \begin{bmatrix} \cos(q_3) & -\sin(q_3) & 0 \\ \sin(q_3) & \cos(q_3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

También, para una mayor comprensión del problema es importante tener en consideración el diagrama del exoesqueleto dado por la Figura 3.2, en el que algunas de sus características están plasmadas. Cabe recordar también que la ecuación dinámica a la que se quiere llegar es

$$M(q)\ddot{q} + V(q, \dot{q}) + G(q) = \tau \quad (3.9)$$

donde  $q$  es el vector  $n \times 1$  de coordenadas generalizadas, en este caso particular  $q = [q_1 \ q_2 \ q_3]^T$ ,  $\dot{q}$  y  $\ddot{q}$  los vectores  $n \times 1$  de velocidades y aceleraciones angulares respectivamente,  $M(q)$  la matriz  $n \times n$  de inercia,  $V(q, \dot{q})$  el vector  $n \times 1$  de fuerzas centrífugas y de Coriolis,  $G(q)$  el vector  $n \times 1$  de los efectos gravitatorios y  $\tau$  el vector  $n \times 1$  de pares articulares. El modelo (3.9) se obtiene usando

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial k}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial k}{\partial q} + \frac{\partial u}{\partial q} = \tau \quad (3.10)$$

donde  $k$  y  $u$  son la energía cinética y potencial del sistema respectivamente. A su vez  $k$  y  $u$  se conforman por la sumatoria de energía cinética y potencial de cada eslabón, que se encuentran definidas como

$$k_i = \frac{1}{2} m_i v_{C_i}^T v_{C_i} + \frac{1}{2} {}^i \omega_i^T C_i I_i {}^i \omega_i \quad (3.11)$$

$$u_i = -m_i {}^0 g^T {}^0 P_{C_i} + u_{ref_i} \quad (3.12)$$

Resumiéndose el problema del modelo dinámico al cálculo de la velocidad lineal de los centros de gravedad y velocidad angular de los eslabones,  $v_{C_i}$  y  ${}^i \omega_i$  respectivamente, para la energía cinética y los vectores  ${}^0 P_{C_i}$  de posición de los centros de gravedad de los eslabones para la energía potencial. Es importante mencionar que la constante  $u_{ref_i}$  es elegida de tal forma que el valor mínimo de  $u_i$  sea cero, y debido a que solo la derivada parcial de la energía potencial con respecto a  $q$  aparecerá en la ecuación dinámica entonces esta constante es arbitraria, por lo que para el caso de este documento  $u_{ref_i} = 0$  [8].

Cabe aclarar que existen por lo menos tres formas de obtener la componente lineal de la energía cinética; con la obtención de los jacobianos de velocidad lineal de los centros de gravedad [24], por el concepto de velocidad de un punto debido a la rotación del sistema de referencia y por medio del concepto de propagación de la velocidad [8]. En este trabajo se utilizó el concepto de la propagación de velocidad y de las ecuaciones (3.13),(3.14) y (3.15), ya que no se recomienda el uso de jacobianos desde el punto de vista de la implementación en el primer caso, y que tanto como en el primer caso como en el segundo se utiliza el concepto de propagación de la velocidad para la obtención de la componente angular de la ecuación de energía cinética.

$${}^{i+1} \omega_{i+1} = {}^i R {}^i \omega_i + \dot{\theta}_{i+1} {}^{i+1} \hat{Z}_{i+1} \quad (3.13)$$

$${}^{i+1} v_{i+1} = {}^i R ({}^i v_i + {}^i \omega_i \times {}^i P_{i+1}) \quad (3.14)$$

$${}^i v_{i+1} = {}^i v_i + {}^i \omega_i \times {}^i P_{i+1} \quad (3.15)$$

En resumen, el proceso del modelado matemático del exoesqueleto consta de los siguientes pasos:

1. Obtención de la energía cinética  $k$  a través del concepto de propagación de la velocidad
2. Obtención de la energía potencial  $u$  a través de los vectores  ${}^0 P_{C_i}$
3. Construcción de la ecuación Euler-Lagrange
4. Inclusión de factores no considerados en el modelo dinámico

### 3.2.1. Obtención de la energía cinética

Es importante mencionar que a partir de este punto los parámetros de HEXAR mostrados en [21] fueron utilizados con la finalidad de obtener el modelo particular del exoesqueleto.

#### Eslabón 1

Para la velocidad angular  ${}^1\omega_1$ , utilizando (3.13)

$${}^1\omega_1 = {}^1_0R^0\omega_0 + \dot{\theta}_1 {}^1\hat{Z}_1 \quad (3.16)$$

con

$$\dot{\theta}_1 {}^1\hat{Z}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

En este caso en particular, ya que  $S_0$  se considera como fijo,  ${}^0\omega_0 = 0$  y por tanto

$${}^1\omega_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

Para la obtención de la velocidad del centro de gravedad  $v_{C_1}$ , se puede obtener  ${}^1v_1$  por medio de (3.14)

$${}^1v_1 = {}^1_0R({}^0v_0 + {}^0\omega_0 \times {}^0P_1) \quad (3.19)$$

Ya que  $S_0$  es fijo también  ${}^0v_0 = 0$  y en consecuencia

$${}^1v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

Utilizando (3.15) para encontrar la velocidad del centro de gravedad del eslabón 1 utilizando la velocidad del sistema asociado al eslabón 1, se tiene que

$${}^1v_{C_1} = {}^1v_1 + {}^1\omega_1 \times {}^1P_{C_1} \quad (3.21)$$

Aquí es importante mencionar que se asume que los vectores  ${}^iP_{C_i}$  son los mismos que los vectores  $P_{C_i}$  de [21] ya que de lo contrario no serían constantes; por consecuencia, todos los elementos que conforman la ecuación son conocidos, así

$${}^1v_{C_1} = \begin{bmatrix} 0.10498 \dot{q}_1 \\ -0.00444 \dot{q}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

Finalmente, solo es necesario utilizar la matriz de rotación  ${}^0R_1$  sobre  ${}^1v_{C_1}$

$$v_{C_1} = {}^0R_1 {}^1v_{C_1} \quad (3.23)$$

Dando como resultado que

$$v_{C_1} = \begin{bmatrix} 0.10498 \dot{q}_1 \cos(q_1) + 0.00444 \dot{q}_1 \sin(q_1) \\ -0.00444 \dot{q}_1 \cos(q_1) + 0.10498 \dot{q}_1 \sin(q_1) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

Obteniéndose así los valores necesarios para conformar la energía cinética del eslabón 1, la cual da como resultado

$$k_1 = 0.0134333 \dot{q}_1^2 \quad (3.25)$$

Que depende totalmente de la velocidad angular de la articulación 1. Este proceso se realizó de manera similar para obtener la energía cinética de los siguientes eslabones  $k_2$  y  $k_3$ .

## Eslabón 2

Se obtuvo  ${}^2\omega_2$  de la siguiente forma

$${}^2\omega_2 = {}^2R_1 {}^1\omega_1 + \dot{\theta}_2 {}^2\hat{Z}_2 \quad (3.26)$$

con

$$\dot{\theta}_2 {}^2\hat{Z}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

A diferencia de la obtención de  ${}^1\omega_1$ , fue necesario calcular  ${}^2_1R$  que no es conocida, invirtiendo  ${}^1_2R$  que sí lo es. Aprovechando la ortonormalidad de las matrices de rotación [3] pudo deducirse fácilmente que  ${}^2_1R = {}^1_2R^T$ , obteniendo que

$${}^2\omega_2 = \begin{bmatrix} -\dot{q}_1 \sin(q_2) \\ -\dot{q}_1 \sin(q_2) \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

Al utilizar la ecuación (3.14) para obtener la velocidad del sistema de referencia dos respecto a sí mismo, es decir

$${}^2v_2 = {}^2_1R({}^1v_1 + {}^1\omega_1 \times {}^1P_2) \quad (3.29)$$

Se observa en la matriz de transformación homogénea  ${}^1_2T$  que el vector  ${}^1P_2 = 0$ , fácilmente comprobable en la Figura 3.2 debido a que el origen del sistema dos coincide con el del sistema uno, además de que se sabe que  ${}^1v_1 = 0$  y por consecuencia  ${}^2v_2 = 0$  que se comprueba al observar que el sistema dos también coincide con el sistema inercial y sólo presenta rotación respecto a él. Siendo así, la velocidad del centro de gravedad del eslabón 2 vista desde el sistema 2 se calcula como

$${}^2v_{C_2} = {}^2\omega_2 \times {}^2P_{C_2} \quad (3.30)$$

Multiplicando a su vez por  ${}^0_2R$

$$v_{C_2} = \begin{bmatrix} v_{c_2(11)} \\ v_{c_2(21)} \\ v_{c_2(31)} \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

con

$$v_{C_{2(11)}} = \cos(q_1)(0.11595 \dot{q}_1 - 0.15274 \dot{q}_2 \sin(q_2) - 0.00172 \dot{q}_2 \cos(q_2)) \\ + \dot{q}_1 \sin(q_1)(0.00172 \sin(q_2) - 0.15274 \cos(q_2)) \quad (3.32)$$

$$v_{C_{2(21)}} = \sin(q_1)(0.11595 \dot{q}_1 - 0.15274 \dot{q}_2 \sin(q_2) - 0.00172 \dot{q}_2 \cos(q_2)) \\ + \cos(q_1)(0.15274 \dot{q}_1 \cos(q_2) - 0.00172 \dot{q}_1 \sin(q_2)) \quad (3.33)$$

$$v_{C_{2(31)}} = 0.00172 \dot{q}_2 \sin(q_2) - 0.15274 \dot{q}_2 \cos(q_2) \quad (3.34)$$

Obteniendo así todos los valores necesarios para construir la ecuación de la energía cinética para el segundo eslabón

$$k_2 = -0.0230786 \dot{q}_1^2 \sin^2(q_2) + 0.0230786 \dot{q}_1^2 \cos^2(q_2) + 0.0444049 \dot{q}_1^2 - 0.0525886 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \sin(q_2) \\ + \dot{q}_1 \cos(q_2)(0.0000269042 \dot{q}_1 \sin(q_2) - 0.000520805 \dot{q}_2) + 0.0481655 \dot{q}_2^2 \quad (3.35)$$

### Eslabón 3

Finalmente se obtuvo  ${}^3\omega_3$  como

$${}^3\omega_3 = {}^3R^2\omega_2 + \dot{\theta}_3 {}^3\hat{Z}_3 \quad (3.36)$$

con

$$\dot{\theta}_3 {}^3\hat{Z}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

De manera similar al caso anterior, se utilizó la igualdad  ${}^3R = {}^2R^T$ , siendo el resto de la ecuación conocida

$${}^3\omega_3 = \begin{bmatrix} -\dot{q}_1 \sin(q_2 + q_3) \\ -\dot{q}_1 \cos(q_2 + q_3) \\ \dot{q}_2 + \dot{q}_3 \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

Utilizando una vez más la ecuación (3.14) pero esta vez con  $i = 2$

$${}^3v_3 = {}^3R({}^2v_2 + {}^2\omega_2 \times {}^2P_3) \quad (3.39)$$

Que para este caso, todos los componentes son diferentes de cero, sin embargo todos fueron obtenidos en pasos anteriores, incluyendo  ${}^2P_3$  que se encuentra inmerso en  ${}^2T$ , así

$${}^3v_3 = \begin{bmatrix} L_2 \dot{q}_2 \sin(q_3) \\ L_2 \dot{q}_2 \cos(q_3) \\ L_2 \dot{q}_1 \cos(q_2) \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

De (3.15)

$${}^3v_{C_3} = {}^3v_3 + {}^3\omega_3 \times {}^3P_{C_3} \quad (3.41)$$

utilizando  ${}^0R$  en  ${}^3v_{C_3}$  para cambiar al sistema de referencia cero, se obtuvo

$$v_{C_3} = \begin{bmatrix} v_{C_3(11)} \\ v_{C_3(21)} \\ v_{C_3(31)} \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

con

$$\begin{aligned} v_{C_3(11)} = & \cos(q_1)(-L_2 \dot{q}_2 \sin(q_2) + 0.10642 \dot{q}_1 + (-0.00847 \dot{q}_2 - 0.00847 \dot{q}_3) \cos(q_2 + q_3) \\ & - 0.17466 \dot{q}_2 \sin(q_2 + q_3) - 0.17466 \dot{q}_3 \sin(q_2 + q_3)) + \dot{q}_1 \sin(q_1)(\cos(q_2)(L_2 \\ & + 0.00847 \sin(q_3) - 0.17466 \cos(q_3)) + \sin(q_2)(0.17466 \sin(q_3) + 0.00847 \cos(q_3))) \end{aligned} \quad (3.43)$$

$$\begin{aligned}
v_{C_{3(21)}} = & \sin(q_1)(L_2 \dot{q}_2 \sin(q_2) + 0.10642 \dot{q}_1 + (-0.00847 \dot{q}_2 - 0.00847 \dot{q}_3) \cos(q_2 + q_3)) \\
& - 0.17466 \dot{q}_2 \sin(q_2 + q_3) - 0.17466 \dot{q}_3 \sin(q_2 + q_3)) + \dot{q}_1 \cos(q_1)(\cos(q_2)(L_2 \\
& - 0.00847 \sin(q_3) + 0.17466 \cos(q_3)) + \sin(q_2)(-0.17466 \sin(q_3) - 0.00847 \cos(q_3)))
\end{aligned} \tag{3.44}$$

$$\begin{aligned}
v_{C_{3(31)}} = & - L_2 \dot{q}_2 \cos(q_2) + 0.00847 \dot{q}_2 \sin(q_2 + q_3) - 0.17466 \dot{q}_2 \cos(q_2 + q_3) \\
& + 0.00847 \dot{q}_3 \sin(q_2 + q_3) - 0.17466 \dot{q}_3 \cos(q_2 + q_3)
\end{aligned} \tag{3.45}$$

Por lo que ya es posible obtener la ecuación de la energía cinética del eslabón 3 como

$$\begin{aligned}
k_3 = & 0.325 L_2^2 \dot{q}_1^2 \cos(2 q_2) + 0.325 L_2^2 \dot{q}_1^2 + 0.65 L_2^2 \dot{q}_2^2 - 0.0055055 L_2 \dot{q}_1^2 \sin(2 q_2 + q_3) \\
& + 0.113529 L_2 \dot{q}_1^2 \cos(2 q_2 + q_3) - 0.0055055 L_2 \dot{q}_1^2 \sin(q_3) + 0.113529 L_2 \dot{q}_1^2 \cos(q_3) \\
& - 0.138346 L_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \sin(q_2) - 0.011011 L_2 \dot{q}_2^2 \sin(q_3) + 0.227058 L_2 \dot{q}_2^2 \cos(q_3) \\
& - 0.011011 L_2 \dot{q}_2 \dot{q}_3 \sin(q_3) + 0.227058 L_2 \dot{q}_2 \dot{q}_3 \cos(q_3) - 0.00104742 \dot{q}_1^2 \sin(2 q_2 + 2 q_3) \\
& + 0.0131412 \dot{q}_1^2 \cos(2 q_2 + 2 q_3) + 0.0215492 \dot{q}_1^2 - 0.0251635 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \sin(q_2 + q_3) \\
& - 0.00129789 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \cos(q_2 + q_3) - 0.0251635 \dot{q}_1 \dot{q}_3 \sin(q_2 + q_3) - 0.00129789 \dot{q}_1 \dot{q}_3 \cos(q_2 \\
& + q_3) - 1.1275702593849246 \times 10^{-18} \dot{q}_2^2 \cos(2 q_2 + 2 q_3) - 1.1275702593849246 \\
& \times 10^{-18} \dot{q}_3^2 \cos(2 q_2 + 2 q_3) + 0.0273756 \dot{q}_2^2 + 0.0547512 \dot{q}_2 \dot{q}_3 + 0.0273756 \dot{q}_3^2
\end{aligned} \tag{3.46}$$

Así finalmente, es obtenida la energía cinética,  $k$ , como la suma de los elementos  $k_1$ ,  $k_2$  y  $k_3$

### 3.2.2. Obtención de la energía potencial

Para la componente  $u$  no es necesario obtener de forma secuencial  $u_1$ ,  $u_2$  y  $u_3$ , pudiéndose obtener de manera simultánea los elementos que conforman sus ecuaciones. Aprovechando que el vector gravedad respecto a  $S_0$  es colineal con el eje  $X_0$ , se definió el vector de gravedad como

$${}^0g = \begin{bmatrix} g_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

Con  $g_x = 9.81 \text{ m/s}^2$ .

Llegado a este punto, los únicos elementos faltantes son los vectores  ${}^0P_{C_i}$ , que pueden ser obtenidos a través de los vectores  ${}^iP_{C_i}$  a través de la siguiente transformación

$${}^0P_{C_i} = {}^0R^i P_{C_i} \quad (3.48)$$

Siendo las matrices de rotación conocidas a través de la cinemática directa obtenida con anterioridad. Así los vectores de posición de los centros de gravedad respecto  $S_0$  son

$${}^0P_{C_1} = \begin{bmatrix} -0.00444 \cos(q_1) + 0.10498 \sin(q_1) \\ -0.10498 \cos(q_1) - 0.00444 \sin(q_1) \\ -0.0279 \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

$${}^0P_{C_2} = \begin{bmatrix} 0.11595 \sin(q_1) + \cos(q_1)(0.15274 \cos(q_2) - 0.00172 \sin(q_2)) \\ -0.11595 \cos(q_1) + \sin(q_1)(0.15274 \cos(q_2) - 0.00172 \sin(q_2)) \\ -0.00172 \cos(q_2) - 0.15274 \sin(q_2) \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

$${}^0P_{C_3} = \begin{bmatrix} P_{C_3(1,1)} \\ P_{C_3(2,1)} \\ P_{C_3(3,1)} \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

con

$$P_{C_3(1,1)} = 0.10642 \sin(q_1) + \cos(q_1)(\cos(q_2)(L_2 + 0.17466 \cos(q_3) - 0.00847 \sin(q_3)) \\ + \sin(q_2)(-0.00847 \cos(q_3) - 0.17466 \sin(q_3)))$$

$$P_{C_3(2,1)} = \sin(q_1)(\cos(q_2)(L_2 + 0.17466 \cos(q_3) - 0.00847 \sin(q_3)) + \sin(q_2)(-0.00847 \cos(q_3) \\ - 0.17466 \sin(q_3))) - 0.10642 \cos(q_1)$$

$$P_{C_3(3,1)} = \cos(q_2)(-0.00847 \cos(q_3) - 0.17466 \sin(q_3)) + \sin(q_2)(L_2 \\ - 0.17466 \cos(q_3) + 0.00847 \sin(q_3))$$

Definidos los vectores de posición y gravedad así como la masa de los eslabones, ya es posible obtener la energía potencial para cada eslabón resultando

$$u_1 = 0.0823216 \cos(q_1) - 1.94642 \sin(q_1) \quad (3.52)$$

$$u_2 = -3.18491 \sin(q_1) + \cos(q_1)(-4.19546 \cos(q_2) + 0.047245 \sin(q_2)) \quad (3.53)$$

$$u_3 = -1.35717 \sin(q_1) + \cos(q_1)(\cos(q_2)(-12.753 L_2 - 2.22744 \cos(q_3)) \\ + 0.108018 \sin(q_3)) + \sin(q_2)(0.108018 \cos(q_3) + 2.22744 \sin(q_3)) \quad (3.54)$$

Obteniéndose finalmente la energía potencial  $u$  como la suma de los elementos  $u_1$ ,  $u_2$  y  $u_3$ .

### 3.2.3. Construcción de la ecuación dinámica

La construcción de la ecuación dinámica del exoesqueleto por el método de Euler-Lagrange exige la obtención de 3 vectores de derivadas parciales; la parcial de la energía potencial y cinética respecto al vector de variables articulares así como la derivada parcial de la energía cinética respecto al vector de velocidad angular de los actuadores,  $\dot{q}$ . Este último término es derivado respecto al tiempo para obtener la componente  $M(q)\ddot{q}$  de la ecuación dinámica. De hecho, la ecuación vectorial (3.10) para ser calculada puede ser separada en sus tres ecuaciones escalares

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial k}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial k}{\partial q_1} + \frac{\partial u}{\partial q_1} = \tau_1 \quad (3.55)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial k}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial k}{\partial q_2} + \frac{\partial u}{\partial q_2} = \tau_2 \quad (3.56)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial k}{\partial \dot{q}_3} - \frac{\partial k}{\partial q_3} + \frac{\partial u}{\partial q_3} = \tau_3 \quad (3.57)$$

Al construir las 3 ecuaciones anteriores, la dinámica del exoesqueleto queda descrita como

$$\begin{aligned}
& 0.65 L_2^2 \ddot{q}_1 \cos(2 q_2) - 2.6 L_2^2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \sin(q_2) \cos(q_2) + 0.65 L_2^2 \ddot{q}_1 - 0.227058 L_2 \dot{q}_1 (2 \dot{q}_2 \\
& + \dot{q}_3) \sin(2 q_2 + q_3) - 0.011011 L_2 \ddot{q}_1 \sin(2 q_2 + q_3) - 0.011011 L_2 \dot{q}_1 (2 \dot{q}_2 + \dot{q}_3) \cos(2 q_2 \\
& + q_3) + 0.227058 L_2 \ddot{q}_1 \cos(2 q_2 + q_3) - \sin(q_1) (\cos(q_2) (-12.753 L_2 + 0.108018 \sin(q_3) \\
& - 2.22744 \cos(q_3) - 4.19546) + \sin(q_2) (2.22744 \sin(q_3) + 0.108018 \cos(q_3) + 0.047245) \\
& + 0.0823216) - 0.227058 L_2 \dot{q}_1 \dot{q}_3 \sin(q_3) - 0.011011 L_2 \ddot{q}_1 \sin(q_3) \\
& - 0.011011 L_2 \dot{q}_1 \dot{q}_3 \cos(q_3) + 0.227058 L_2 \ddot{q}_1 \cos(q_3) - 0.138346 L_2 \ddot{q}_2 \sin(q_2) \\
& - 0.138346 L_2 (\dot{q}_2)^2 \cos(q_2) - 0.0525647 \dot{q}_1 (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) \sin(2(q_2 + q_3)) \\
& - 0.00209483 \ddot{q}_1 \sin(2(q_2 + q_3)) - 0.00418966 \dot{q}_1 (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) \cos(2(q_2 + q_3)) \\
& + 0.0262823 \ddot{q}_1 \cos(2(q_2 + q_3)) + 0.0000538083 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \cos(2 q_2) + 0.0461572 \ddot{q}_1 \cos(2 q_2) \\
& - 0.184629 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \sin(q_2) \cos(q_2) + 0.0000538083 \ddot{q}_1 \sin(q_2) \cos(q_2) - 6.48851 \cos(q_1) \\
& + 0.158775 \ddot{q}_1 + 0.00129789 \dot{q}_2 (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) \sin(q_2 + q_3) + 0.00129789 \dot{q}_3 (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) \sin(q_2 + q_3) \\
& - 0.0251635 \ddot{q}_2 \sin(q_2 + q_3) - 0.0251635 \ddot{q}_3 \sin(q_2 + q_3) - 0.0251635 \dot{q}_2 (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) \cos(q_2 + q_3) \\
& - 0.0251635 \dot{q}_3 (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) \cos(q_2 + q_3) - 0.00129789 \ddot{q}_2 \cos(q_2 + q_3) \\
& - 0.00129789 \ddot{q}_3 \cos(q_2 + q_3) + 0.000520805 (\dot{q}_2)^2 \sin(q_2) \\
& - 0.0525886 \ddot{q}_2 \sin(q_2) - 0.0525886 (\dot{q}_2)^2 \cos(q_2) - 0.000520805 \ddot{q}_2 \cos(q_2) = \tau_1
\end{aligned} \tag{3.58}$$

$$\begin{aligned}
& (\dot{q}_1)^2(1.3 L_2^2 \sin(q_2) \cos(q_2) + 0.227058 L_2 \sin(2q_2 + q_3) + 0.011011 L_2 \cos(2q_2 + q_3)) \\
& + 0.0262823 \sin(2(q_2 + q_3)) + 0.00209483 \cos(2(q_2 + q_3)) - 0.0000269042 \cos(2q_2) \\
& + 0.0923143 \sin(q_2) \cos(q_2)) + 1.3 L_2^2 \ddot{q}_2 + 12.753 L_2 \cos(q_1) \sin(q_2) - 0.138346 L_2 \ddot{q}_1 \sin(q_2) \\
& - 0.022022 L_2 \ddot{q}_2 \sin(q_3) + 0.454116 L_2 \ddot{q}_2 \cos(q_3) + \dot{q}_2 \dot{q}_3(-0.454116 L_2 \sin(q_3) \\
& - 0.022022 L_2 \cos(q_3) + 4.5102810375396986 \times 10^{-18} \sin(2(q_2 + q_3))) \\
& - 0.227058 L_2 (\dot{q}_3)^2 \sin(q_3) - 0.011011 L_2 \ddot{q}_3 \sin(q_3) - 0.011011 L_2 (\dot{q}_3)^2 \cos(q_3) \\
& + 0.227058 L_2 \ddot{q}_3 \cos(q_3) + 0.108018 \cos(q_1) \cos(q_2) \cos(q_3) + 2.22744 \cos(q_1) \sin(q_2) \cos(q_3) \\
& + 2.22744 \cos(q_1) \cos(q_2) \sin(q_3) - 0.108018 \cos(q_1) \sin(q_2) \sin(q_3) - 0.0251635 \ddot{q}_1 \sin(q_2 + q_3) \\
& - 0.00129789 \ddot{q}_1 \cos(q_2 + q_3) + 0.047245 \cos(q_1) \cos(q_2) + 4.19546 \cos(q_1) \sin(q_2) \\
& - 0.0525886 \ddot{q}_1 \sin(q_2) - 0.000520805 \ddot{q}_1 \cos(q_2) + 2.2551405187698493 \times 10^{-18} (\dot{q}_2)^2 \sin(2(q_2 \\
& + q_3)) - 2.2551405187698493 \times 10^{-18} (\dot{q}_3)^2 \sin(2(q_2 + q_3)) - 2.2551405187698493 \\
& \times 10^{-18} \ddot{q}_2 \cos(2(q_2 + q_3)) + 0.151082 \ddot{q}_2 + 0.0547512 \ddot{q}_3 = \tau_2
\end{aligned} \tag{3.59}$$

$$\begin{aligned}
& 0.113529 L_2 (\dot{q}_1)^2 \sin(2q_2 + q_3) + 0.0055055 L_2 (\dot{q}_1)^2 \cos(2q_2 + q_3) + 0.113529 L_2 (\dot{q}_1)^2 \sin(q_3) \\
& + 0.0055055 L_2 (\dot{q}_1)^2 \cos(q_3) + 0.227058 L_2 (\dot{q}_2)^2 \sin(q_3) - 0.011011 L_2 \ddot{q}_2 \sin(q_3) \\
& + 0.011011 L_2 (\dot{q}_2)^2 \cos(q_3) + 0.227058 L_2 \ddot{q}_2 \cos(q_3) - 1.11372 \sin(q_1 - q_2 - q_3) \\
& + 1.11372 \sin(q_1 + q_2 + q_3) + 0.054009 \cos(q_1 - q_2 - q_3) + 0.054009 \cos(q_1 + q_2 + q_3) \\
& + 0.0262823 (\dot{q}_1)^2 \sin(2q_2 + 2q_3) - 0.0251635 \ddot{q}_1 \sin(q_2 + q_3) + 0.00209483 (\dot{q}_1)^2 \cos(2q_2 + 2q_3) \\
& - 0.00129789 \ddot{q}_1 \cos(q_2 + q_3) - 2.2551405187698493 \times 10^{-18} (\dot{q}_2)^2 \sin(2q_2 + 2q_3) \\
& + 2.2551405187698493 \times 10^{-18} (\dot{q}_3)^2 \sin(2q_2 + 2q_3) + 4.5102810375396986 \times 10^{-18} \dot{q}_2 \dot{q}_3 \sin(2 \\
& \times q_2 + 2q_3) - 2.2551405187698493 \times 10^{-18} \ddot{q}_3 \cos(2q_2 + 2q_3) + 0.0547512 \ddot{q}_2 + 0.0547512 \ddot{q}_3 = \tau_3
\end{aligned} \tag{3.60}$$

### 3.2.4. Inclusión de factores no considerados en el modelo dinámico

Como aclara [8], las ecuaciones dinámicas obtenidas no consideran todos los efectos que actúan en el manipulador ya que solo se incluyen fuerzas que provienen de la mecánica del cuerpo rígido,

siendo las fuerzas por fricción las más importantes por considerar. Sin embargo, estas fuerzas pueden ser modeladas de formas distintas siendo que, en su forma más general, el momento de fuerza debido a la fricción es una función de la posición y velocidad articular

$$\tau_{fricción} = f(q, \dot{q}) \quad (3.61)$$

Sin embargo por simplicidad se utilizó la fricción viscosa en el que el momento es proporcional a la velocidad del movimiento articular [8]

$$\tau_{fricción} = b\dot{q} \quad (3.62)$$

donde  $b$  es la constante de fricción viscosa. Se define entonces un par debido a la fricción para cada articulación individual como

$$\tau_{fricción_1} = b_1\dot{q}_1 \quad (3.63)$$

$$\tau_{fricción_2} = b_2\dot{q}_2 \quad (3.64)$$

$$\tau_{fricción_3} = b_3\dot{q}_3 \quad (3.65)$$

Elementos que fueron agregados en el lado izquierdo de las ecuaciones dinámicas obtenidas de tal forma que el modelo representara de forma más aproximada la realidad. Siendo así, el modelo es representado entonces por la siguiente ecuación

$$M(q)\ddot{q} + V(q, \dot{q}) + G(q) + F(q, \dot{q}) = \tau \quad (3.66)$$

que es una ecuación diferencial no lineal acoplada, entendiéndose por acoplamiento a la influencia de la dinámica de cada eslabón sobre los demás. Tanto la no linealidad y el acoplamiento dificultan el control del sistema, por lo que usualmente se utilizan leyes de control que las eliminen como será mostrado más adelante.

### 3.2.5. Obtención de puntos de equilibrio por medio de la solución numérica de las ecuaciones dinámicas

Antes de la presentación de los esquemas de control empleados y de la implementación de los mismos en el modelo matemático obtenido, será de utilidad conocer el comportamiento del robot, especialmente de sus puntos de equilibrio o las posiciones a las que tienden las articulaciones cuando no existe excitación ni movimiento en el sistema; es decir,  $\tau = 0$ ,  $\dot{q} = 0$  y  $\ddot{q} = 0$  bajo ciertas condiciones de posición iniciales  $q_{inicial}$ .

Se puede observar en las ecuaciones dinámicas que no fueron definidas las constantes de rozamiento  $b_i$ , ni longitud  $L_2$  que se encuentra asociada a la longitud del brazo del usuario. Las constantes  $b_i$  deberían ser obtenidas a partir de la construcción de las articulaciones, también dependerían de los materiales usados y de la lubricación utilizada; sin embargo, al no contar con el sistema físico el valor de  $0.2 [N \cdot m \cdot s]$  se propuso como constante de rozamiento para las 3 articulaciones. Para el caso de la longitud del eslabón  $L_2$  se utilizó la medida de  $0.31 m$  dado que es la media de la longitud de un brazo de un trabajador mexicano de acuerdo a [5] dado que por ergonomía se especifica en [8] que las articulaciones de usuario y exoesqueleto deben ser coincidentes. Es claro que aunque  $L_2$  en este desarrollo se mantiene constante, en la implementación su valor deberá cambiar de acuerdo a la antropometría del usuario.

Al sustituir todos los parámetros y sustituyendo los valores de  $\tau$ ,  $\dot{q}$  y  $\ddot{q}$  en la ecuación dinámica (3.66) se obtiene que

$$G(q) = 0 \tag{3.67}$$

ecuación vectorial formada por 3 ecuaciones escalares trigonométricas con 3 incógnitas ( $q_1$ ,  $q_2$  y  $q_3$ ), para las cuales existen distintos conjuntos de soluciones, por lo tanto, distintos puntos de equilibrio que pueden obtenerse de manera numérica al proponer una triada de valores iniciales para las 3 incógnitas mencionadas. Los puntos de equilibrio obtenidos al realizar este procedimiento se reportan en la Tabla 3.1.

Esta obtención de puntos de equilibrio no fue exhaustiva ya que existe un número infinito de combinaciones debido a la periodicidad de las ecuaciones trigonométricas analizadas. Con la finalidad de determinar los puntos de equilibrio que tienen interpretación física, se realizaron simulaciones del modelo dinámico tomando como condiciones iniciales de posición los cinco puntos de equilibrio de la Tabla 3.1.

prueba	$q_{1eq}$ [rad]	$q_{2eq}$ [rad]	$q_{3eq}$ [rad]
1	0.562295	-0.00579765	-0.0426586
2	0.838238	-0.00579765	3.09893
3	1.5708	1.54217	0.026696
4	2.3172	3.1358	3.09893
5	4.71239	4.8952	3.61556

Tabla 3.1: Puntos de equilibrio

### 3.2.6. Despeje de la aceleración para la simulación numérica de las ecuaciones dinámicas

Para la simulación del exoesqueleto, el sistema de ecuaciones obtenidas por el método Euler-Lagrange fue ordenado en la ecuación matricial (3.68) de acuerdo a la ecuación genérica (3.69), permitiendo obtener fácilmente el vector de aceleraciones angulares, de acuerdo a (3.70), como resultado de la entrada de control o par articular y de las matrices  $M$  y  $N$  dependientes de los vectores de posiciones y velocidades angulares y donde  $M$  es invertible al ser positiva definida.

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_{11} \\ n_{21} \\ n_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix} \quad (3.68)$$

con

$$\begin{aligned} m_{11} = & 0.65L_2^2 \cos(2q_2) + 0.65L_2^2 - 0.011011L_2 \sin(2q_2 + q_3) + 0.227058L_2 \cos(2q_2 + q_3) \\ & - 0.011011L_2 \sin(q_3) + 0.227058L_2 \cos(q_3) - 0.00209483 \sin(2(q_2 + q_3)) \\ & + 0.0262823 \cos(2(q_2 + q_3)) + 0.0461572 \cos(2q_2) + 0.0000538083 \sin(q_2) \cos(q_2) + 0.158775 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_{12} = & -0.138346L_2 \sin(q_2) - 0.0251635 \sin(q_2 + q_3) - 0.00129789 \cos(q_2 + q_3) \\ & - 0.0525886 \sin(q_2) - 0.000520805 \cos(q_2) \end{aligned}$$

$$m_{13} = -0.0251635 \sin(q_2 + q_3) - 0.00129789 \cos(q_2 + q_3)$$

$$m_{21} = -0.138346L_2 \sin(q_2) - 0.0251635 \sin(q_2 + q_3) - 0.00129789 \cos(q_2 + q_3) \\ - 0.0525886 \sin(q_2) - 0.000520805 \cos(q_2)$$

$$m_{22} = 1.3L_2^2 - 0.022022L_2 \sin(q_3) + 0.454116L_2 \cos(q_3) + 0.151082$$

$$m_{23} = -0.011011L_2 \sin(q_3) + 0.227058L_2 \cos(q_3) + 0.0547512$$

$$m_{31} = -0.0251635 \sin(q_2 + q_3) - 0.00129789 \cos(q_2 + q_3)$$

$$m_{32} = -0.011011L_2 \sin(q_3) + 0.227058L_2 \cos(q_3) + 0.0547512$$

$$m_{33} = 0.0547512$$

$$\begin{aligned}
n_{11} = & b_1 \dot{q}_1 - 2.6L_2^2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \sin(q_2) \cos(q_2) - \sin(q_1) (\cos(q_2) (-12.753L_2 + 0.108018 \sin(q_3)) \\
& - 2.22744 \cos(q_3) - 4.19546) + \sin(q_2) (2.22744 \sin(q_3) + 0.108018 \cos(q_3) + 0.047245) \\
& + 0.0823216) - 0.227058L_2 \dot{q}_1 (2\dot{q}_2 + \dot{q}_3) \sin(2q_2 + q_3) - 0.011011L_2 \dot{q}_1 (2\dot{q}_2 + \dot{q}_3) \cos(2q_2 \\
& + q_3) - 0.227058L_2 \dot{q}_1 \dot{q}_3 \sin(q_3) - 0.011011L_2 \dot{q}_1 \dot{q}_3 \cos(q_3) - 0.138346L_2 \dot{q}_2^2 \cos(q_2) \\
& - 6.48851 \cos(q_1) - 0.0525647 \dot{q}_1 (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) \sin(2(q_2 + q_3)) - 0.00418966 \dot{q}_1 (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) \cos(2(q_2 \\
& + q_3)) + 0.0000538083 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \cos(2q_2) - 0.184629 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \sin(q_2) \cos(q_2) + 0.000520805 \dot{q}_2^2 \sin(q_2) \\
& - 0.0525886 \dot{q}_2^2 \cos(q_2) + 0.00129789 \dot{q}_2 (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) \sin(q_2 + q_3) + 0.00129789 \dot{q}_3 (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) \sin(q_2 \\
& + q_3) - 0.0251635 \dot{q}_2 (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) \cos(q_2 + q_3) - 0.0251635 \dot{q}_3 (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) \cos(q_2 + q_3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
n_{22} = & \dot{q}_2 (b_2 + \dot{q}_3 (-0.454116L_2 \sin(q_3) - 0.022022L_2 \cos(q_3))) + \dot{q}_1^2 (1.3L_2^2 \sin(q_2) \cos(q_2) \\
& + 0.227058L_2 \sin(2q_2 + q_3) + 0.011011L_2 \cos(2q_2 + q_3) + 0.0262823 \sin(2(q_2 + q_3)) \\
& + 0.00209483 \cos(2(q_2 + q_3)) - 0.0000269042 \cos(2q_2) + 0.0923143 \sin(q_2) \cos(q_2)) \\
& + 12.753L_2 \cos(q_1) \sin(q_2) - 0.227058L_2 \dot{q}_3^2 \sin(q_3) - 0.011011L_2 \dot{q}_3^2 \cos(q_3) \\
& + 0.108018 \cos(q_1) \cos(q_2) \cos(q_3) + 2.22744 \cos(q_1) \sin(q_2) \cos(q_3) + 2.22744 \cos(q_1) \\
& \times \cos(q_2) \sin(q_3) - 0.108018 \cos(q_1) \sin(q_2) \sin(q_3) + 0.047245 \cos(q_1) \cos(q_2) \\
& + 4.19546 \cos(q_1) \sin(q_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
n_{33} = & b_3 \dot{q}_3 + 0.113529L_2 \dot{q}_1^2 \sin(2q_2 + q_3) + 0.0055055L_2 \dot{q}_1^2 \cos(2q_2 + q_3) + 0.113529L_2 \dot{q}_1^2 \sin(q_3) \\
& + 0.0055055L_2 \dot{q}_1^2 \cos(q_3) + 0.227058L_2 \dot{q}_2^2 \sin(q_3) + 0.011011L_2 \dot{q}_2^2 \cos(q_3) - 1.11372 \sin(q_1 \\
& - q_2 - q_3) + 1.11372 \sin(q_1 + q_2 + q_3) + 0.054009 \cos(q_1 - q_2 - q_3) + 0.054009 \cos(q_1 \\
& + q_2 + q_3) + 0.0262823 \dot{q}_1^2 \sin(2q_2 + 2q_3) + 0.00209483 \dot{q}_1^2 \cos(2q_2 + 2q_3)
\end{aligned}$$

$$M(q)\ddot{q} + N(q, \dot{q}) = \tau, \quad N(q, \dot{q}) = V(q, \dot{q}) + G(q) \quad (3.69)$$

$$\ddot{q} = M^{-1}(\tau - N) \quad (3.70)$$

La ecuación (3.70) conforma el modelo del exoesqueleto utilizado en las pruebas mostradas en adelante y donde la implementación de controladores es realizada al variar el valor de la ley de control  $\tau$  de acuerdo a los diferentes objetivos de control, y obteniendo a la salida los vectores  $\ddot{q}$ ,  $\dot{q}$  y  $q$ .

Implementado el modelo dado por (3.69), se propuso analizar el comportamiento del sistema cuando no se provee par, partiendo de las posiciones de equilibrio mostradas en la Tabla 3.1, con condiciones iniciales de velocidad nulas. Los vectores de salida  $\dot{q}$  y  $q$ , a su vez fueron retroalimentados al modelo para construir las matrices  $M$  y  $N$  en conjunto con la entrada de control  $\tau = 0$ . El diagrama de bloques que representa las simulaciones realizadas se muestra en la Figura 3.3, mientras que los resultados en estado permanente para cada una de las pruebas, pueden observarse en la Tabla 3.2.

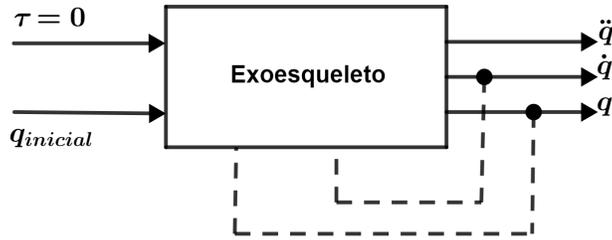


Figura 3.3: Análisis de estabilidad. Diagrama de bloques

Prueba	$q_{1eq}$ [rad]	$q_{2eq}$ [rad]	$q_{3eq}$ [rad]
1	0.5623	-0.005797	-0.0426
2	0.5623	-0.005797	-0.0426
3	0.5623	-0.005797	-0.0426
4	2.5864	3.1358	-0.0426
5	2.5864	3.1358	-0.0426

Tabla 3.2: Puntos de equilibrio

Como se puede notar, a pesar de que las condiciones iniciales fueron los puntos de equilibrio de la Tabla 3.1, el sistema se estabiliza en dos posiciones; por lo que se puede concluir que solo  $q_{p1} = [0.5623 \quad -0.005797 \quad -0.0426]^T$  y  $q_{p2} = [2.5864 \quad 3.1358 \quad -0.0426]^T$  muestran ser puntos de equilibrio estables, pudiendo ser inestables los restantes. Una representación simplificada del

sistema configurado en ambos puntos de equilibrio es mostrada en las Figuras 3.4 y 3.5, donde su simetría respecto al eje  $X_0$  es evidente.

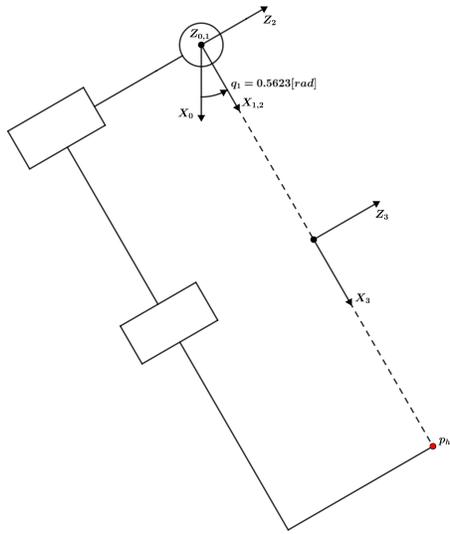


Figura 3.4: Primer punto de equilibrio

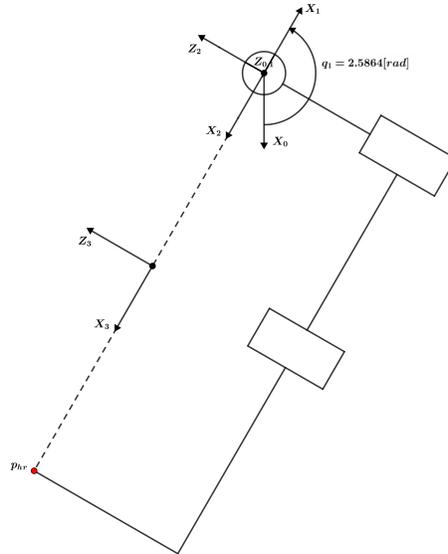


Figura 3.5: Segundo punto de equilibrio

## Capítulo 4

# Controladores de Posición

A pesar de obtener el modelo dinámico de exoesqueletos de la misma manera en que se obtienen los modelos de manipuladores, el propósito de diseño de cada uno es distinto. Mientras que los manipuladores son utilizados generalmente para automatizar alguna tarea en específico (como pintar, soldar, cortar, etc.) en un ambiente controlado y de forma autónoma, el caso de los exoesqueletos es diferente ya que su propósito es mejorar alguna capacidad humana, ya sea de movimiento o de fuerza, y que por tanto se debe considerar que en la mayoría de los casos estos últimos tendrán interacción con un usuario en ambientes no controlados.

Estas diferencias en su propósito tienen un impacto directo en los objetivos de control de manipuladores y exoesqueletos. Por poner un ejemplo, la posición final del efector final en manipuladores usualmente se encuentra en términos de una trayectoria predefinida, mientras que por otra parte la posición del efector final de un exoesqueleto usualmente es controlada por la interacción de movimiento del usuario, por medio de interacciones cognitivas o físicas humano-robot [21], siendo los presentados pertenecientes al segundo grupo al considerar la utilización de un sensor de fuerza en el punto de interacción.

Para facilitar el entendimiento de controladores más complejos utilizados en exoesqueletos es importante presentar y probar sobre el modelo obtenido, controladores de posición que han sido utilizados ampliamente sobre manipuladores y conforman la base sobre la cual los esquemas de interés están contruidos.

También es importante mencionar que de la misma forma que en el capítulo anterior, la teoría de este capítulo proviene directamente de [8] y [22] que explican de forma comprensible los controladores

presentados y facilitan asimismo la realización de pruebas y la comprensión del capítulo siguiente.

## 4.1. Control de posición por par calculado en el espacio articular

A continuación se muestra la teoría del control de posición por par calculado obtenida de [22]. Partiendo de la ecuación dinámica (3.66) agregando un término de perturbación  $\tau_d$  se obtiene

$$M(q)\ddot{q} + V(q, \dot{q}) + F(\dot{q}) + G(q) + \tau_d = \tau \quad (4.1)$$

o de forma compacta

$$M(q)\ddot{q} + N(q, \dot{q}) + \tau_d = \tau \quad (4.2)$$

se requiere entonces que las articulaciones tengan una trayectoria deseada  $q_d(t)$ , por lo que puede ser definida una salida o error de posición como

$$e(t) = q_d(t) - q(t) \quad (4.3)$$

que representa qué tanto la posición articular coincide con la posición deseada. Para poder conocer la relación entre el error de posición y el par articular, se puede derivar dos veces la ecuación anterior obteniendo

$$\dot{e} = \dot{q}_d - \dot{q} \quad (4.4)$$

$$\ddot{e} = \ddot{q}_d - \ddot{q} \quad (4.5)$$

despejando  $\ddot{q}$  de (4.2) y sustituyendo en (4.5)

$$\ddot{e} = \ddot{q}_d + M^{-1}(N + \tau_d - \tau) \quad (4.6)$$

definiendo ahora una función de entrada de control como

$$u = \ddot{q}_d + M^{-1}(N - \tau) \quad (4.7)$$

y una función de perturbación

$$w = M^{-1}\tau_d \quad (4.8)$$

además de definir un vector de estados  $x(t)$

$$x = \begin{bmatrix} e \\ \dot{e} \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

se puede escribir la dinámica del error de posición como

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} e \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ \dot{e} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} w \quad (4.10)$$

que representa un sistema de error lineal que depende de la entrada  $u(t)$  y de la perturbación  $w(t)$ . Cabe hacer notar que esta es una derivación del procedimiento de linealización por retroalimentación general también desarrollado en [22].

La transformación linealizante por retroalimentación (4.7) puede invertirse para obtener

$$\tau = M(\ddot{q}_d - u) + N \quad (4.11)$$

conocida como la ley de control de par calculado. El procedimiento mostrado nos permite seleccionar una entrada  $u(t)$  que establezca la dinámica del error (4.10), entonces la entrada de control no lineal dada por  $\tau(t)$  hará que el robot siga la trayectoria deseada. Sustituyendo (4.11) en (4.2) para obtener el comportamiento del sistema en lazo cerrado resulta

$$M\ddot{q} + N + \tau_d = M(\ddot{q}_d - u) + N \quad (4.12)$$

simplificando

$$\ddot{e} = u + M^{-1}\tau_d \quad (4.13)$$

que es exactamente la ecuación dinámica del error (4.10).

La ecuación (4.7) convierte el problema de diseñar un controlador no lineal en el diseño de un sistema lineal conformado por  $n$  subsistemas desacoplados en ausencia de perturbaciones. El esquema de control resultante consiste de un lazo interno no lineal además de una señal de control externa  $u(t)$ . Siendo que  $u(t)$  dependerá de  $q(t)$  y  $\dot{q}(t)$ , el lazo externo es un lazo de retroalimentación.

La selección de  $u(t)$  puede ser distinta dependiendo del comportamiento que se requiera de la dinámica del error, una forma de elegir esta entrada es como una retroalimentación proporcional derivativa, o PD, que proporciona menos complicaciones que una PID [22]. De tal forma que definiendo la entrada PD como

$$u = -K_v \dot{e} - K_p e \quad (4.14)$$

la entrada de control total (4.11) queda redefinida como

$$\tau = M(q)(\ddot{q}_d + K_v \dot{e} + K_p e) + N(q, \dot{q}) \quad (4.15)$$

al sustituir esta ley de control en el modelo del robot

$$M\ddot{q} + N + \tau_d = M(\ddot{q}_d + K_v \dot{e} + K_p e) + N \quad (4.16)$$

se obtiene la ecuación en lazo cerrado del sistema

$$\ddot{e} + K_v \dot{e} + K_p e = w \quad (4.17)$$

representada en el espacio de estados como

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} e \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -K_p & -K_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ \dot{e} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} w \quad (4.18)$$

que tiene asociado el polinomio característico

$$p(\lambda) = |\lambda^2 I + K_v \lambda + K_p| \quad (4.19)$$

y debido a que generalmente las matrices  $n \times n$  de ganancias se eligen como diagonales, esto es

$$K_v = \text{diag} \{k_{v_i}\}, \quad K_p = \text{diag} \{k_{p_i}\} \quad (4.20)$$

el polinomio característico puede ser representado como

$$p(\lambda) = \prod_{i=1}^n (\lambda^2 + k_{v_i} \lambda + k_{p_i}) \quad (4.21)$$

y la dinámica del error es asintóticamente estable mientras los valores de las matrices de ganancias sean positivos. Entonces, mientras la perturbación  $w(t)$  esté acotada el error  $e(t)$  también lo estará. Recordando que la forma estándar del polinomio característico de segundo orden es

$$p_2(\lambda) = \lambda^2 + 2\xi\omega_n\lambda + \omega_n^2 \quad (4.22)$$

con  $\xi$  como el coeficiente de amortiguamiento y  $\omega_n$  como la frecuencia natural. Entonces el desempeño requerido de las componentes del error se puede alcanzar al elegir las ganancias del control PD como

$$k_{p_i} = \omega_n^2, \quad k_{v_i} = 2\xi\omega_n \quad (4.23)$$

con  $\xi$ ,  $\omega_n$  como el coeficiente de amortiguamiento y la frecuencia natural para cada error articular  $e_i$ . Ya que no es deseable que se presente sobrepaso en el movimiento del robot, debido a que puede causar algún impacto (o daño en el usuario en el caso de exoesqueletos), las ganancias PD son elegidas generalmente para un comportamiento críticamente amortiguado  $\xi = 1$ . En este caso

$$k_{v_i} = 2\sqrt{k_{p_i}}, \quad k_{p_i} = k_{v_i}^2/4 \quad (4.24)$$

#### 4.1.1. Simulación del control de posición por par calculado en el espacio articular

El término  $\tau_d$  en la ecuación (4.2) es empleado para robustecer el modelo representando el efecto de factores no considerados, principalmente dinámica no modelada o interacción con el medio ambiente. En la implementación de este controlador se consideró que el modelo dinámico construido en el capítulo anterior representa fielmente el comportamiento del exoesqueleto y que éste no tiene interacción con el exterior, o de tenerla, sus efectos son despreciables; por lo que la ecuación (4.17) queda reducida a

$$\ddot{e} + K_v\dot{e} + K_p e = 0 \quad (4.25)$$

con el vector  $e$  conformado por los elementos  $e_i$  con  $i = 3$  asociado a los errores de posición articular de las 3 articulaciones del exoesqueleto, y con  $\dot{e}$  y  $\ddot{e}$  definidos de forma congruente. Además, las matrices de ganancia  $K_p$  y  $K_v$  se eligieron como matrices diagonales de la siguiente forma

$$K_p = \begin{bmatrix} k_{p1} & 0 & 0 \\ 0 & k_{p2} & 0 \\ 0 & 0 & k_{p3} \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

$$K_v = \begin{bmatrix} k_{v1} & 0 & 0 \\ 0 & k_{v2} & 0 \\ 0 & 0 & k_{v3} \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

sustituyendo en (4.25) se obtiene que

$$\ddot{e}_1 + k_{v1}\dot{e}_1 + k_{p1}e_1 = 0 \quad (4.28)$$

$$\ddot{e}_2 + k_{v2}\dot{e}_2 + k_{p2}e_2 = 0 \quad (4.29)$$

$$\ddot{e}_3 + k_{v3}\dot{e}_3 + k_{p3}e_3 = 0 \quad (4.30)$$

ecuaciones diferenciales homogéneas de segundo orden con coeficientes constantes en la que el error de posición de cada articulación se encuentra desacoplado como fue mencionado anteriormente. Cada una tiene asociado su propio polinomio característico representado por la ecuación (4.22), que al diseñarse para un comportamiento críticamente amortiguado, la respuesta en el tiempo de las tres ecuaciones del error tendrán la forma

$$e_i = c_1 e^{-\omega_n t} + c_2 t e^{-\omega_n t} \quad (4.31)$$

donde se puede observar claramente que cuando el valor del tiempo  $t$  tiende a infinito el error articular tenderá a ser cero, siempre y cuando el valor de  $\omega_n$  sea positivo. Para obtener el valor de las constantes  $c_1$  y  $c_2$  se deriva la ecuación anterior obteniendo

$$\dot{e}_i = -c_1 \omega_n e^{-\omega_n t} - c_2 \omega_n t e^{-\omega_n t} + c_2 e^{-\omega_n t} \quad (4.32)$$

Definiendo las condiciones iniciales  $e_i(0) = e_0$  y  $\dot{e}_i(0) = \dot{e}_0$  y sustituyendo en (4.31) y (4.32) se obtiene que

$$c_1 = e_0$$

$$c_2 = \dot{e}_0 + \omega_n e_0$$

por lo que la respuesta en el tiempo para el error de posición de cada articulación está completamente definida como

$$e_i(t) = \dot{e}_0 t e^{-\omega_n t} + (1 + \omega_n t) e_0 e^{-\omega_n t} \quad (4.33)$$

que es el mismo resultado que puede obtenerse al resolver la dinámica del error en el espacio de estados, y que involucra un proceso más complejo al tener que obtener una matriz exponencial de una matriz de  $6 \times 6$ . Para demostrar de forma aún más clara que se cumple con el objetivo de seguimiento, partiendo de la definición del error como  $e_i = q_{d_i} - q_i$ , sustituyendo en (4.33) y despejando  $q_i$  se tiene

$$q_i = q_{d_i} - \dot{e}_0 t e^{-\omega_n t} - (1 + \omega_n t) e_0 e^{-\omega_n t} \quad (4.34)$$

que muestra que conforme el tiempo avance el valor de la posición articular tenderá a ser el de la posición deseada  $q_i \rightarrow q_{d_i}$  cumpliendo así el objetivo de control propuesto. Cabe aclarar que aunque las ecuaciones del error de posición articular parecen completamente independientes están ligadas de acuerdo a (4.21) por lo que su repercusión física será mostrada más adelante.

En la Figura 4.1 se muestra el diagrama de bloques que representa el esquema de control por par calculado en el espacio articular y que engloba la teoría que ha sido presentada sobre él. A continuación se muestran las pruebas realizadas bajo este esquema y los resultados obtenidos.

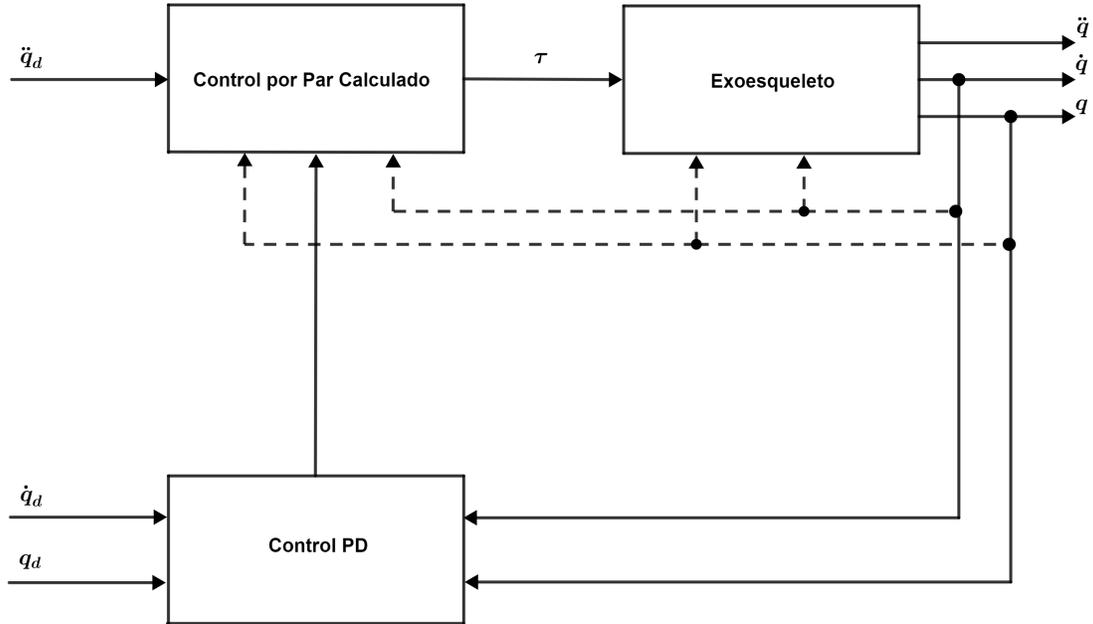


Figura 4.1: Control de posición articular. Diagrama de bloques

El obtener el modelo del sistema permitió que fueran realizadas simulaciones en la que este esquema de control fuera probado, especialmente para los objetivos de regulación de posición y el seguimiento de trayectorias, de tal forma que pudiera observarse y analizarse la evolución del sistema para alcanzarlos.

Considerando que el conocimiento del comportamiento del sistema y del esquema de control es limitado, las pruebas realizadas fueron pensadas para ir de lo sencillo a lo complejo. En la primera, enfocada al objetivo de regulación de la posición, el controlador diseñado fue el mismo para cada articulación, observándose que las condiciones iniciales afectan el desempeño de cada una de ellas; posteriormente se elevó el grado de complejidad al diseñar de manera independiente el controlador de cada articulación para que la posición deseada fuera alcanzada de forma secuencial. En la segunda prueba, enfocada al seguimiento de trayectorias, se propuso una trayectoria continua que debía ser alcanzada por las 3 articulaciones en diferentes momentos, es decir, sus controladores no comparten los mismos parámetros de desempeño. El desarrollo de ambas pruebas es mostrado a continuación.

## Primera prueba

El rango de selección de las matrices  $K_p$  y  $K_v$  es muy amplio, y debido a que las ecuaciones que describen la dinámica del error son de segundo orden se propuso un primer diseño al partir de un tiempo de asentamiento requerido, de tal forma que se cumpliera con él. Tomando como punto de partida  $t_s = 5$  [s] y definido éste a su vez como

$$t_s = N c_\tau; \quad c_\tau = \frac{1}{\omega_n} \quad (4.35)$$

con  $c_\tau$  como la constante de tiempo y  $N \in \mathbb{N}$ . Utilizando  $N = 5$  se obtuvo el valor de  $\omega_n$  como 1 [Hz], por lo que para el caso críticamente amortiguado al utilizar las ecuaciones (4.23) los valores de los elementos  $k_{p_i}$  y  $k_{v_i}$  son 1 y 2 respectivamente.

Para probar el comportamiento del control diseñado se partió de la posición de equilibrio del exoesqueleto o condición inicial  $q_e = [0.5623 \quad -0.0058 \quad -0.0427]^T$  con una velocidad inicial igual a cero; mientras que como posición deseada se utilizó el punto de equilibrio inestable del cuadro 3.1,  $q_d = [1.5708 \quad 1.5422 \quad 0.0267]^T$  por lo que al ser constante los valores de la velocidad y aceleración deseadas son cero. Los resultados obtenidos se muestran en las figuras 4.2, 4.3 y 4.4.

En la Figura 4.2 se puede observar que el objetivo principal de estabilizar el error en las tres articulaciones es logrado, o como lo muestra la Figura 4.3, se logra llegar a la posiciones angulares deseadas a partir de la posición inicial. De acuerdo al diseño, el objetivo debe cumplirse en todo el sistema en  $t = 5$  [s] que para el caso de la articulación 3 es fácilmente verificable; sin embargo, para el caso de las articulaciones 1 y 2, de la Figura 4.3 o al resolver la ecuación (4.34) se observa que a los 5 segundos sus posiciones son 1.53 y 1.48 radianes, teniéndose un 97% y 96% de las posiciones deseadas respectivas. Este comportamiento variable para cada articulación puede ser explicado al sustituir la definición del tiempo de asentamiento en la ecuación (4.34), obteniéndose que

$$q_i = q_{d_i} - \frac{N}{\omega_n} \dot{e}_0 e^{-N} - (1 + N) e_0 e^{-N} \quad (4.36)$$

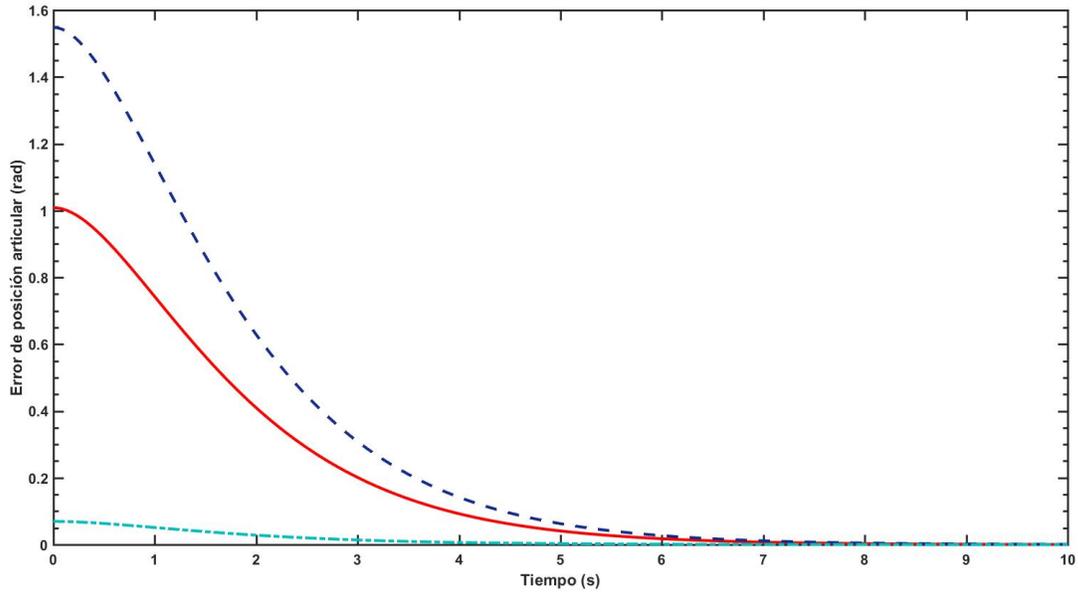


Figura 4.2: Primera prueba A. Error de posición articular

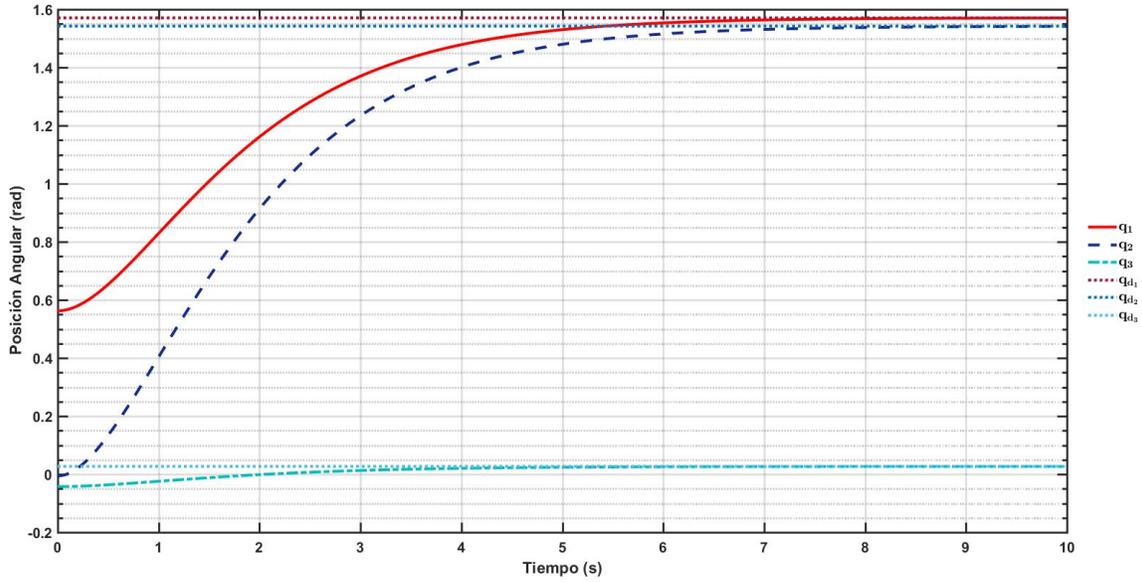


Figura 4.3: Primera prueba A. Posiciones articulares y posiciones articulares deseadas

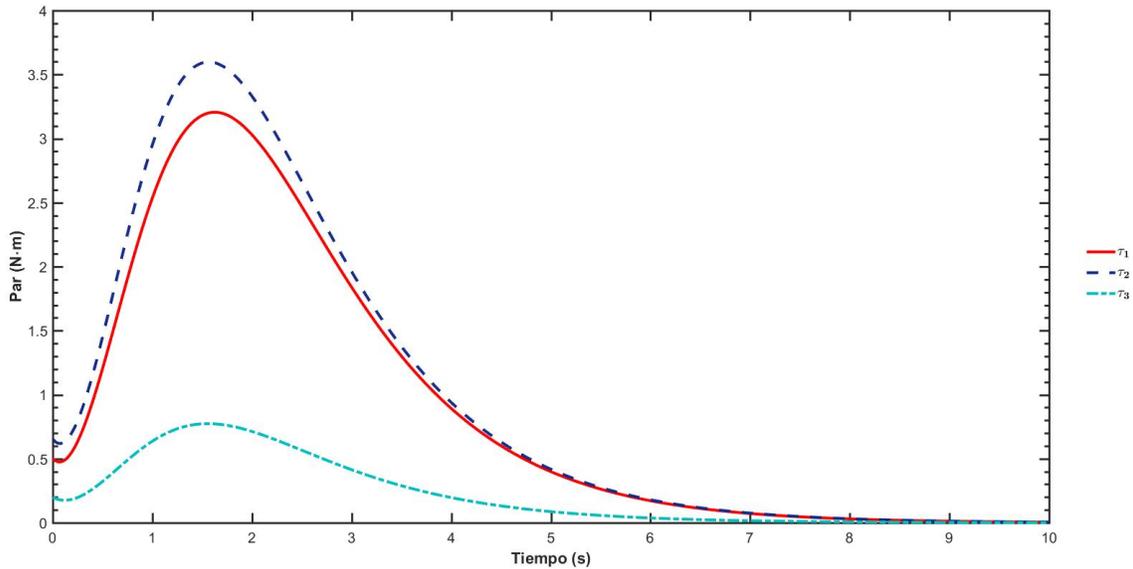


Figura 4.4: Primera prueba A. Par calculado

donde el valor de  $N$  determina la influencia que tienen las condiciones iniciales del error, dependientes de las condiciones iniciales de posición y posiciones deseadas, sobre el desempeño de las posiciones angulares; aumentar el valor de  $N$  decrece el impacto de las condiciones iniciales de error al aproximarlas a cero. En esta prueba elegir  $N = 5$  aunado a condiciones iniciales de posición y posiciones deseadas distintas para cada articulación, ocasionó que el desempeño para cada articulación fuera distinto a pesar de haber diseñado los controladores bajo los mismos requerimientos, sin embargo estas diferencias no son considerables por lo que el desempeño puede considerarse aceptable. Un mejor diseño para un tiempo de asentamiento dado puede lograrse al utilizar un valor de  $N$  mayor lo que causaría un aumento en las ganancias del controlador.

Otro resultado de interés se obtiene al observar la Figura 4.4 asociada al par ejercido sobre el exoesqueleto; conforme se va llegando a las posiciones deseadas para las tres articulaciones, el par calculado requerido para mantener dichas posiciones converge a cero en los tres casos, confirmando de esta forma que la posición deseada propuesta es un punto de equilibrio al no requerir una entrada de control para mantenerse, lográndose así la estabilización de un punto de equilibrio en principio inestable.

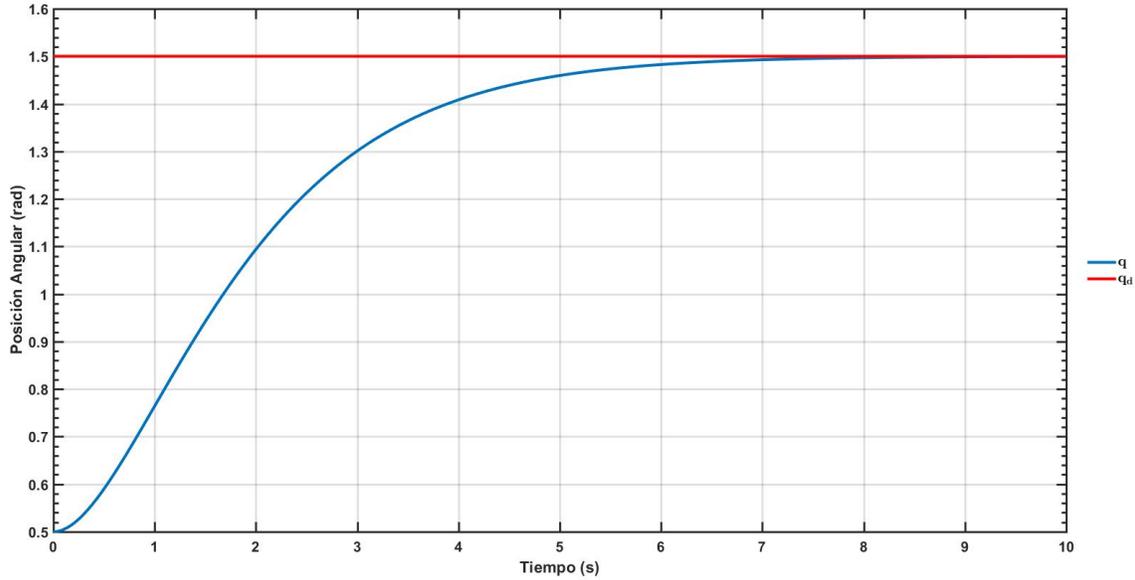


Figura 4.5: Primera prueba B. Posiciones articulares y posiciones articulares deseadas

Por su parte, la Figura 4.5 demuestra que el desempeño para los tres controladores es el mismo bajo las mismas condiciones iniciales y posiciones deseadas independientemente de la dinámica del exoesqueleto,  $q_{inicial} = [0.5 \ 0.5 \ 0.5]^T$  y  $q_d = [1.5 \ 1.5 \ 1.5]^T$ , obteniéndose el 97% del valor de la posición deseada para las 3 articulaciones así como el cumplimiento del objetivo de control en su totalidad en el segundo 8.

Siguiendo la recomendación hecha en [22] de elegir una respuesta más rápida al final del brazo robótico que en la base, debido a que las masas al final de la cadena cinemática son más ligeras que al inicio, se mantuvieron las mismas características en el controlador para la tercer articulación pero se diseñaron nuevos controladores para las dos articulaciones restantes partiendo de tiempos de asentamiento mayores aunque conservando el comportamiento críticamente amortiguado.

Para la articulación 2 se propuso que la posición final deseada fuera alcanzada cinco segundos después que la de la articulación uno para que el atraso fuera notable, por lo que se partió de  $t_s = 10$  [s] dando como resultado las ganancias  $k_{p_2} = \frac{1}{4}$  y  $k_{v_2} = 1$  al utilizar el mismo procedimiento mostrado con anterioridad. Para las ganancias del controlador asociado a la primer articulación se propuso  $t_s = 15$  [s] resultando ser  $k_{p_1} = \frac{1}{9}$  y  $k_{v_1} = \frac{2}{3}$ .

En la Figura 4.6 se presentan las posiciones angulares de las articulaciones considerando las

mismas condiciones iniciales y posiciones deseadas de la Figura 4.5, donde es observable que se cumplió en alcanzar la posición deseada, además de que se cumplió también con que la respuesta de la articulación 3 fuera más rápida que las demás, así como la respuesta de la articulación 2 fuera más rápida que la de 1. Se observa también que la posiciones angulares  $q_1$   $q_2$  y  $q_3$  alcanzan un valor de 1.46 [rad] en los tiempos de asentamiento propuestos para cada una de ellas, siendo este valor el 97% de la posición angular deseada, lo que puede considerarse un desempeño aceptable bajo las observaciones que se discutieron en el diseño anterior.

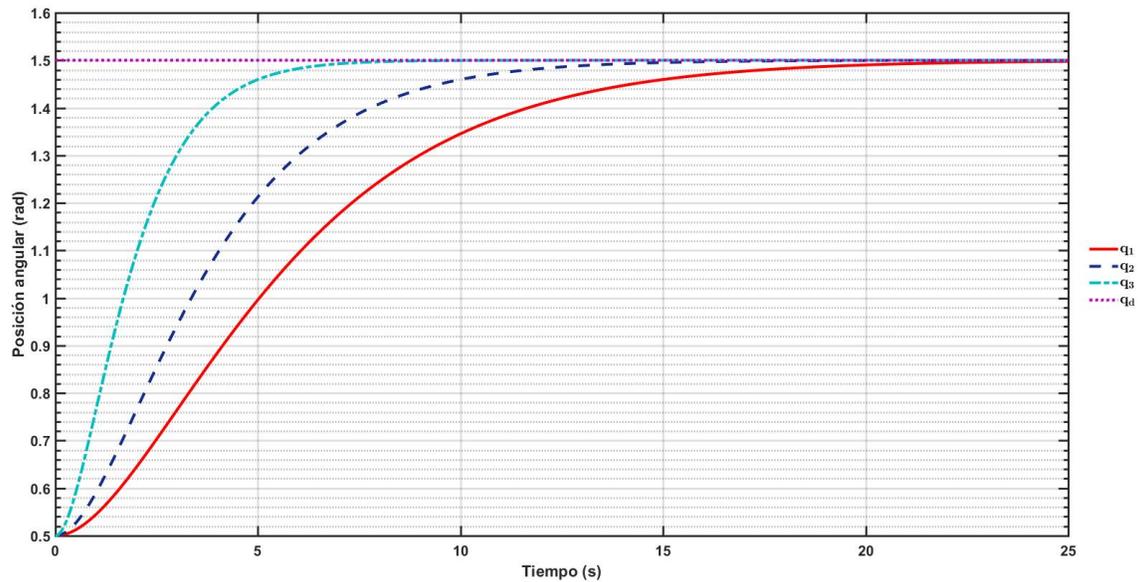


Figura 4.6: Primera prueba C. Posiciones articulares y posiciones articulares deseadas

Diseñado el controlador de esta forma, se muestra en la Figura 4.7 el comportamiento de las articulaciones cuando se parte del punto de equilibrio estable al punto de equilibrio  $q_e$ , donde se observa que se cumple con que las articulaciones más alejadas de la base respondan antes, e incluso siendo que  $e_2$  inicialmente es más grande que  $e_1$ , es decir, la distancia a recorrer es mayor, el primero alcanza antes la posición deseada que el segundo.

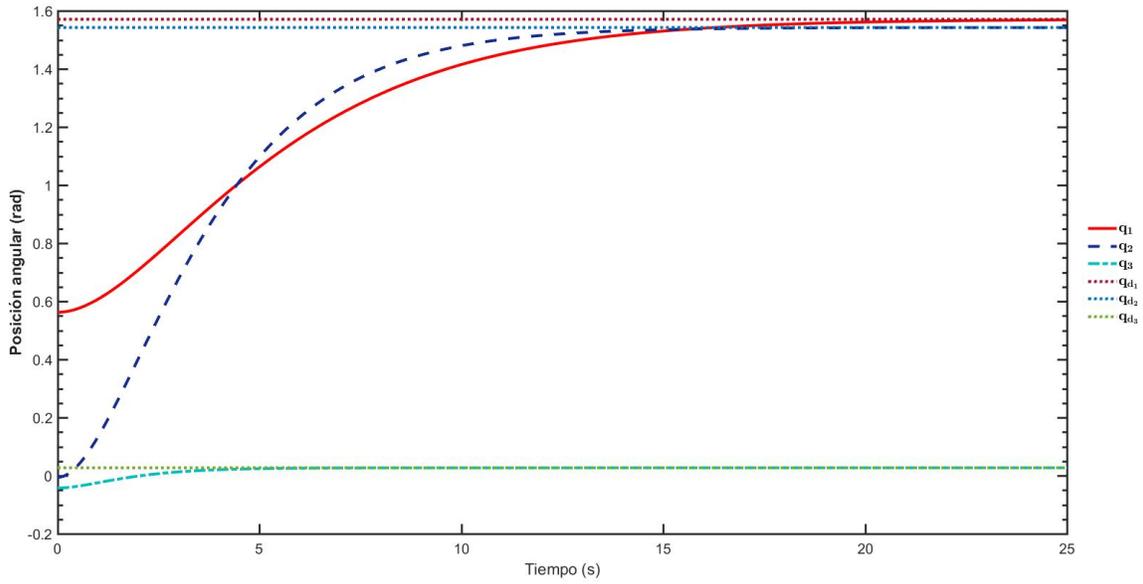


Figura 4.7: Primera prueba D. Posiciones articulares y posiciones articulares deseadas

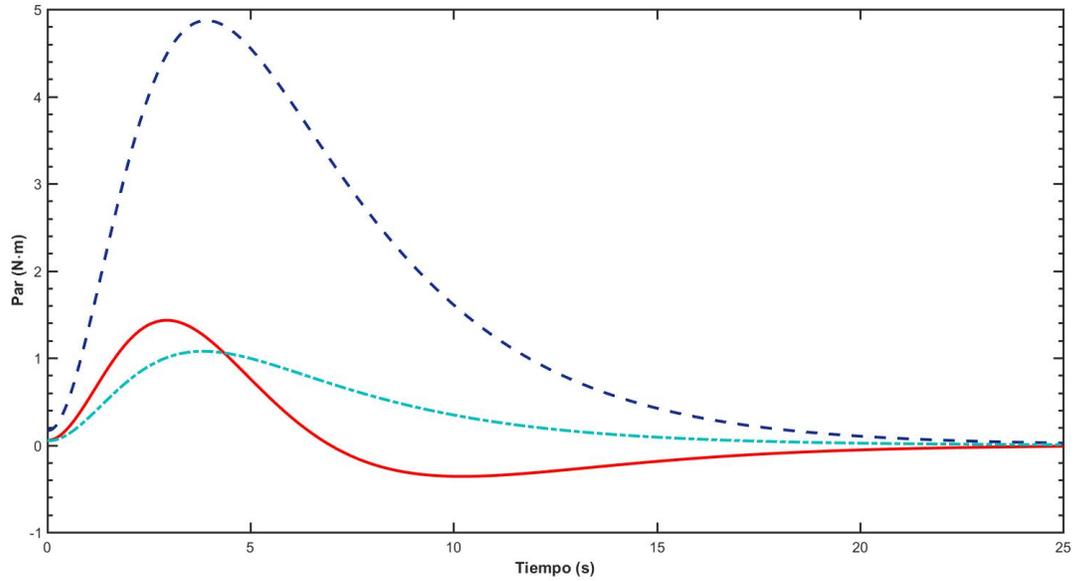


Figura 4.8: Primera prueba D. Par calculado

## Segunda prueba

Como se mostró en la ecuación (4.34) el controlador de posición no solo permite lograr que una posición deseada constante sea lograda, sino que permite también realizar el seguimiento de una trayectoria dada, cualquiera que esta sea. Para demostrar que se logra el cumplimiento de este objetivo se propuso que partiendo de la posición de equilibrio  $q_e = [0.5623 \quad -0.0058 \quad -0.0427]^T$ , con condición inicial de velocidad cero, las tres articulaciones lograran el seguimiento de la trayectoria definida como

$$q_d = A \sin(\omega t) \quad (4.37)$$

donde  $A$  es una constante conocida como la amplitud de oscilación y  $\omega = 2\pi/T$  donde  $T$  es a su vez una constante definida como el periodo de oscilación. El controlador requiere que se suministre también el valor de la velocidad y aceleración deseadas que se obtienen al derivar analíticamente la ecuación (4.37).

$$\dot{q}_d = A\omega \cos(\omega t) \quad (4.38)$$

$$\ddot{q}_d = -A\omega^2 \sin(\omega t) \quad (4.39)$$

Eligiendo  $A = \pi$  y  $T = 10$ , la trayectoria deseada representa físicamente una rotación completa de cada articulación lograda en 10 segundos seguida de una rotación en sentido contrario en un mismo intervalo de tiempo, secuencia que se repite indefinidamente. Las ganancias del controlador fueron las mismas obtenidas en el 2do diseño de controladores, los resultados obtenidos se muestran en las Figuras 4.9, 4.10 y 4.11.

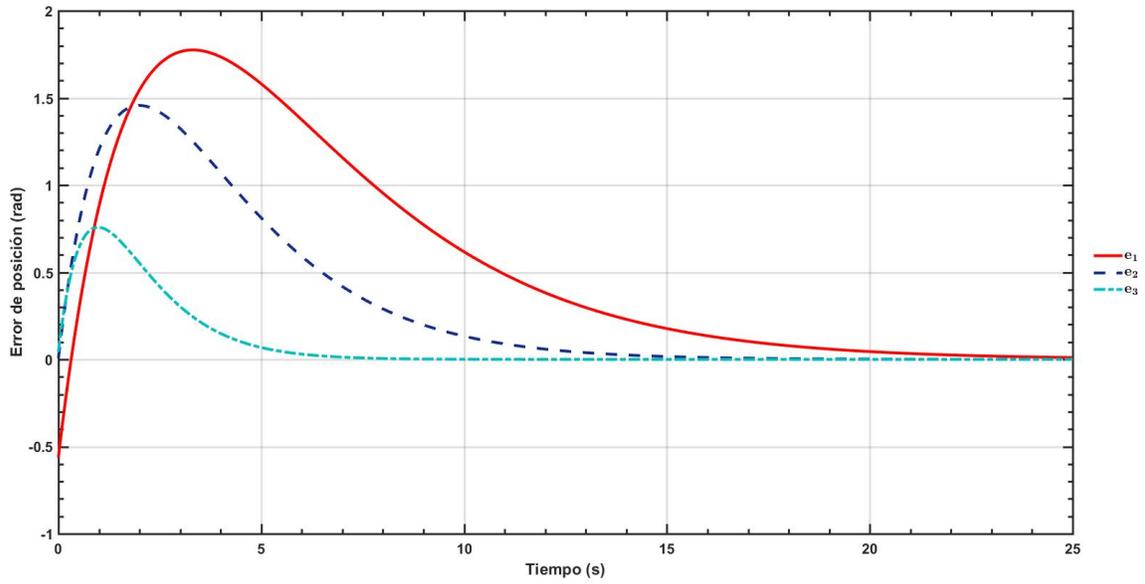


Figura 4.9: Segunda prueba. Error de posición

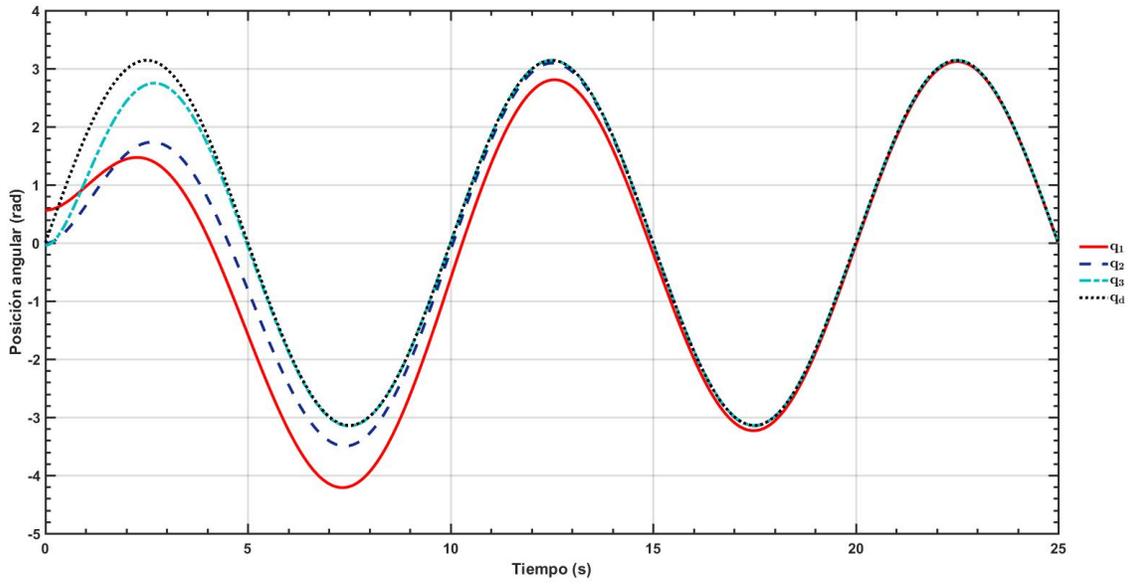


Figura 4.10: Segunda prueba. Posiciones articulares

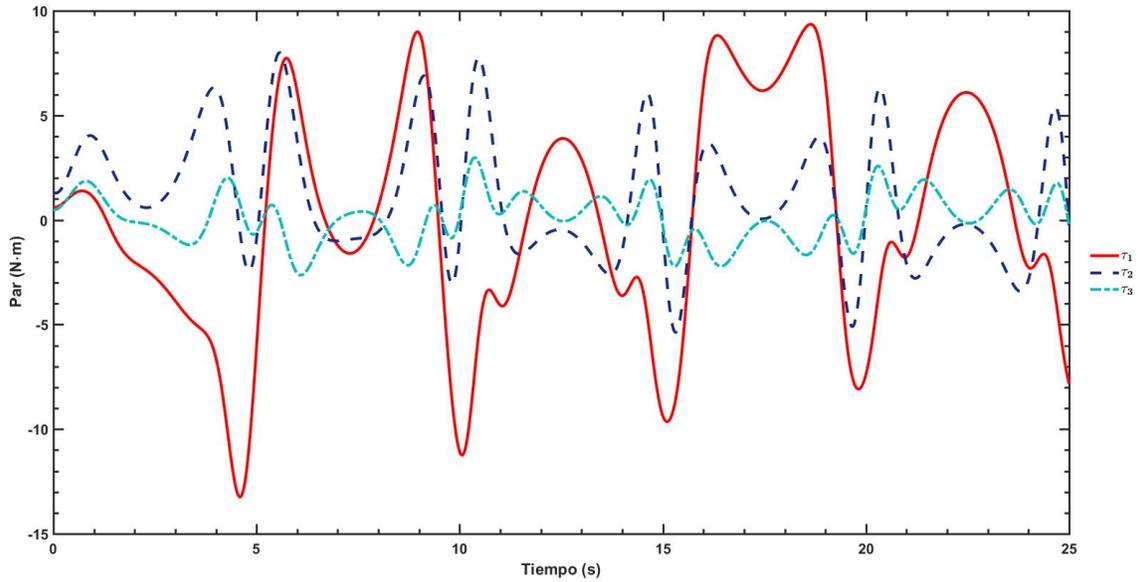


Figura 4.11: Segunda prueba. Par calculado

La Figura 4.9 muestra que el objetivo de seguimiento es logrado en todas las articulaciones, siendo el error de la articulación tres el más rápido en estabilizar mientras que el referente a la articulación uno es el que más tarda en responder como consecuencia de las ganancias elegidas para cada controlador independiente. El error puede ser reducido al aumentar las ganancias o tener condiciones iniciales de posición cercanas al valor inicial de la función de la trayectoria deseada. En la Figura 4.10 se observa que de acuerdo a los tiempos de asentamiento empleados, se logra el seguimiento casi perfecto en  $t = 5 [s]$  para la articulación uno, y en  $t = 10 [s]$  y  $t = 15 [s]$  para las las articulaciones dos y tres. Finalmente, el vector de pares para lograr que las articulaciones sigan la trayectoria deseada presenta un valor máximo aproximado de  $14 [N \cdot m]$  para la articulación uno, que no excede los valores alcanzados por motores comunes, además, no se presentan impulsos ni inconsistencias en las funciones de momentos que puedan representar un problema más allá del punto de vista teórico.

### 4.1.2. Conclusiones generales y aplicaciones del control de posición articular por par calculado

Se logró discutir, diseñar y simular a detalle el control de posición articular por par calculado aplicado sobre el modelo dinámico del exoesqueleto obtenido de acuerdo a lo propuesto por la literatura y obteniendo resultados coincidentes con ella. Se demostró que el seguimiento de trayectorias por cada articulación independiente puede lograrse con alto grado de predictibilidad además que, como puede verse en el Anexo A de este trabajo, aunque este control se realice de forma independiente, las variables articulares no dejan de estar interrelacionadas; de tal forma que la inestabilidad de una inestabiliza el sistema completo. Se deja como trabajo futuro la demostración de los efectos de una perturbación sobre el sistema, aunque [22] indica que si ésta esta acotada el error también lo estará.

Este controlador se ha empleado comúnmente para que robots manipuladores realicen de forma independiente tareas que requieran el seguimiento de una trayectoria como soldadura, pintura, etc., o incluso para mantener y/o regresar a una posición predefinida con el fin de evitar posiciones que puedan ocasionar fallas en el sistema al no ser alcanzables.

Existen dos razones fundamentales para estudiar este controlador: la primera es que robots con controladores de posición han sido utilizados en rehabilitación de miembros superiores, de tal forma que los pacientes sujetan el efector final del robot para que realicen el seguimiento de trayectorias predefinidas en conjunto, a lo que se le ha denominado en ocasiones como rehabilitación asistida por robots y que representa un control de riesgo correctivo en el campo de los TME de origen laboral; la segunda razón es que al pretender que el presente escrito sea una guía de la teoría y diseño de controladores por par calculado que existen en la literatura, se consideró que el estudio del controlador de posición articular es necesario al representar la base para el entendimiento de otros controladores más complejos que serán discutidos posteriormente.

## 4.2. Ecuación dinámica en el espacio cartesiano

Hasta este punto se consideró el modelo del exoesqueleto en el espacio articular, esto es, que la ecuación dinámica se encuentra en función del vector de variables articulares  $q$ , sin embargo, para los siguientes esquemas de control es necesario considerar el modelo que relaciona la aceleración del efector final expresada en el espacio cartesiano con las fuerzas y momentos cartesianos actuando en el efector final.

De acuerdo a Craig [8], la ecuación dinámica del exoesqueleto con respecto a las variables cartesianas es la siguiente

$$\mathcal{F} = M_{\mathcal{X}}(q)\ddot{\mathcal{X}} + V_{\mathcal{X}}(q, \dot{q}) + G_{\mathcal{X}}(q) \quad (4.40)$$

donde  $\mathcal{F}$  es un vector de fuerzas y pares actuando en el efector final del robot, y  $\mathcal{X}$  es un vector cartesiano que representa la posición y orientación del efector final, además de que  $M_{\mathcal{X}}(q)$ ,  $V_{\mathcal{X}}(q, \dot{q})$  y  $G_{\mathcal{X}}(q)$  son la matriz de masas, el vector de términos de velocidad y el vector de gravedad, todos en el espacio cartesiano. El vector de fuerzas virtuales  $\mathcal{F}$  puede ser aplicado por los actuadores de las articulaciones de tal forma que la relación está descrita por la expresión (4.41) obtenida por medio del concepto del Trabajo Virtual explicado brevemente en [8]

$$\tau = J^T(q)\mathcal{F} \quad (4.41)$$

Recordando que  $J(q)$  es definido como el Jacobiano y relaciona las velocidades en el espacio articular con las velocidades en el espacio cartesiano, además de que  $J(q)$  debe ser escrito en el mismo sistema de referencia que  $\mathcal{F}$  y  $\ddot{\mathcal{X}}$ .

La última igualdad nos permite encontrar la relación existente entre el modelo en el espacio articular y el espacio cartesiano al premultiplicar primero la ecuación del modelo articular por la inversa del jacobiano transpuesto de la siguiente forma

$$J^{-T}\tau = J^{-T}M(q)\ddot{q} + J^{-T}V(q, \dot{q}) + J^{-T}G(q) \quad (4.42)$$

Posteriormente despejando  $\mathcal{F}$  de (4.41) y sustituyendo en (4.42) se obtiene la expresión

$$\mathcal{F} = J^{-T}M(q)\ddot{q} + J^{-T}V(q, \dot{q}) + J^{-T}G(q) \quad (4.43)$$

Por lo que ahora es necesario obtener la relación entre la aceleración en el espacio cartesiano y espacio articular. Recordando la definición del jacobiano como

$$\dot{\mathcal{X}} = J\dot{q} \quad (4.44)$$

derivando para obtener la relación buscada

$$\ddot{\mathcal{X}} = \dot{J}\dot{q} + J\ddot{q} \quad (4.45)$$

al resolver para  $\ddot{q}$

$$\ddot{q} = J^{-1}\ddot{\mathcal{X}} - J^{-1}\dot{J}\dot{q} \quad (4.46)$$

y sustituyendo (4.46) en (4.43), se tiene que

$$\mathcal{F} = J^{-T}M(q)J^{-1}\ddot{\mathcal{X}} - J^{-T}M(q)J^{-1}\dot{J}\dot{q} + J^{-T}V(q, \dot{q}) + J^{-T}G(q) \quad (4.47)$$

que es la ecuación dinámica del robot en el espacio cartesiano. Igualando los términos de las ecuaciones (4.40) y (4.47) se observa que

$$M_{\mathcal{X}}(q) = J^{-T}(q)M(q)J^{-1}(q) \quad (4.48)$$

$$V_{\mathcal{X}}(q, \dot{q}) = J^{-T}(q)(V(q, \dot{q}) - M(q)J^{-1}(q)\dot{J}(q)\dot{q}) \quad (4.49)$$

$$G_{\mathcal{X}}(q) = J^{-T}(q)G(q) \quad (4.50)$$

Al estar involucrado el Jacobiano en el modelo cartesiano, este modelo presenta inconvenientes si el robot se encuentra en posiciones cercanas a las singulares.

### 4.3. Control de posición por par calculado en el espacio cartesiano

De acuerdo a [22] se puede definir una nueva salida, en este caso el error cartesiano, definido como

$$e_{\mathcal{X}} = \mathcal{X}_d(t) - \mathcal{X}(t) \quad (4.51)$$

con  $\mathcal{X}_d(t)$  definida como la trayectoria cartesiana deseada y  $\mathcal{X}(t)$  como la posición cartesiana del efector final que presentan problemas al ser especificados ya que puede ser de diferentes formas [22], una de ellas es como matrices de transformación de la siguiente forma

$$\mathcal{X}_d(t) = T_d(t) = \begin{bmatrix} n_d(t) & o_d(t) & a_d(t) & p_d(t) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.52)$$

$$\mathcal{X}(t) = T(t) = \begin{bmatrix} n(t) & o(t) & a(t) & p(t) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.53)$$

que contiene la orientación deseada  $(n_d(t), o_d(t), a_d(t))$  y posición deseada  $p_d(t)$  del efector final en el caso de la primera y de forma similar la segunda contiene la orientación y posición del efector final. Asimismo el error cartesiano puede ser fácilmente especificado como el vector de 6 elementos

$$e_{\mathcal{X}} = \begin{bmatrix} e_p \\ e_o \end{bmatrix} \quad (4.54)$$

con  $e_p(t)$  como el error de posición y  $e_o$  como el error de orientación. Se puede derivar la expresión (4.51) para obtener las expresiones

$$\dot{e}_{\mathcal{X}} = \dot{\mathcal{X}}_d - \dot{\mathcal{X}} \quad (4.55)$$

$$\ddot{e}_{\mathcal{X}} = \ddot{\mathcal{X}}_d - \ddot{\mathcal{X}} \quad (4.56)$$

y sustituyendo la ecuación de aceleración cartesiana (4.45) en (4.56) se tiene que

$$\ddot{e}_{\mathcal{X}} = \ddot{\mathcal{X}}_d - (\dot{J}\dot{q} + J\ddot{q}) \quad (4.57)$$

donde  $\ddot{q}$  es sustituida a su vez de acuerdo a la dinámica inversa del exoesqueleto de la expresión (4.2), de tal forma que se obtiene la expresión de la segunda derivada del error como

$$\ddot{e}_{\mathcal{X}} = \ddot{\mathcal{X}}_d + JM^{-1}(N - \tau + \tau_d) - \dot{J}\dot{q} \quad (4.58)$$

Se define entonces  $\ddot{e}_{\mathcal{X}}$ , de forma similar que para el control de posición articular, como la suma de una entrada de control  $u$  y una función de perturbación  $w$ , tal que

$$u = \ddot{\mathcal{X}}_d + JM^{-1}(N - \tau) - \dot{J}\dot{q} \quad (4.59)$$

$$w = JM^{-1}\tau_d \quad (4.60)$$

Finalmente, definiendo un vector de estados

$$x = \begin{bmatrix} e_{\mathcal{X}} \\ \dot{e}_{\mathcal{X}} \end{bmatrix} \quad (4.61)$$

se puede escribir la dinámica del error de posición cartesiano como

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} e_{\mathcal{X}} \\ \dot{e}_{\mathcal{X}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{\mathcal{X}} \\ \dot{e}_{\mathcal{X}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} w \quad (4.62)$$

expresión similar a (4.10) dependiente también de la entrada  $u(t)$  y  $w(t)$ , siendo otra derivación particular del procedimiento de linealización por retroalimentación mostrado por Lewis [22]. Despejando  $\tau$  de la expresión (4.59), conocida también como transformación linealizante, se obtiene la ley de control por par calculado cartesiana

$$\tau = MJ^{-1}(\ddot{\mathcal{X}}_d - \dot{J}\dot{q} - u) + N \quad (4.63)$$

donde la señal de control externa  $u(t)$  puede ser elegida libremente, que para un control PD es definida como

$$u = -K_v \dot{e}_{\mathcal{X}} - K_p e_{\mathcal{X}} \quad (4.64)$$

por lo que la la ley de control completa es

$$\tau = MJ^{-1}(\ddot{\mathcal{X}}_d - \dot{J}\dot{q} + K_v \dot{e}_{\mathcal{X}} + K_p e_{\mathcal{X}}) + N \quad (4.65)$$

Sustituyendo esta ecuación en el modelo del robot descrito por 2.2 se tiene que

$$M\ddot{q} + N + \tau_d = MJ^{-1}(\ddot{\mathcal{X}}_d - \dot{J}\dot{q} + K_v \dot{e}_{\mathcal{X}} + K_p e_{\mathcal{X}}) + N \quad (4.66)$$

y sustituyendo  $\ddot{q}$  de acuerdo a la expresión (4.46) en (4.66) y simplificando, se tiene que la ecuación en lazo cerrado del sistema es

$$\ddot{e}_{\mathcal{X}} + K_v \dot{e}_{\mathcal{X}} + K_p e_{\mathcal{X}} = w \quad (4.67)$$

expresada en el espacio de estados, de forma similar que (4.18), como

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} e_{\mathcal{X}} \\ \dot{e}_{\mathcal{X}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -K_p & -K_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{\mathcal{X}} \\ \dot{e}_{\mathcal{X}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} w \quad (4.68)$$

por lo que el análisis es el mismo que descrito en el control de posición articular.

### 4.3.1. Simulación de control de posición por par calculado en el espacio cartesiano

La ley de control (4.65) requiere la utilización de la inversa del Jacobiano, por lo que se necesita como primer condición que la matriz jacobiana sea una matriz cuadrada, de lo contrario la ecuación no podría utilizarse directamente; como segunda condición esta matriz debe ser no singular, es decir el determinante no debe ser cero ya que implicaría una configuración singular del robot lo cual es necesario evitar desde este enfoque, sin embargo, el análisis de singularidades está fuera del alcance de este escrito. Recordando que el número de columnas del Jacobiano es el mismo que el número de articulaciones del robot, se tiene que al contar este robot con 3 articulaciones, las columnas del jacobiano también son 3 lo que implica que debe tener 3 renglones para cumplir con la primer condición. Esto a su vez, significa que solo se pueden manipular 3 grados de libertad en el espacio cartesiano, siendo el subvector de de posición lineal del efector final  $p = [p_x \ p_y \ p_z]$  el de más utilidad, de lo que se deriva que en la dinámica del error solo se considerará el error asociado a este vector definido como

$$e_p = p_d - p \quad (4.69)$$

y no el de orientación, el cual por si mismo presenta dificultades en su análisis y cómputo. Así, se tiene que  $e_{\mathcal{X}} = e_p$  y al no considerar el término  $\tau_d$ , asociado a perturbaciones, la ecuación (4.67) se escribe como

$$\ddot{e}_p + K_v \dot{e}_p + K_p e_p = 0 \quad (4.70)$$

con las matrices de ganancia diagonales de tamaño  $3 \times 3$  de forma congruente, por lo que cada ecuación escalar tiene la la forma

$$\ddot{e}_{p_i} + k_{v_i} \dot{e}_{p_i} + k_p e_{p_i} = 0 \quad (4.71)$$

y que de forma similar que el control de posición en el espacio articular, al diseñarse para un desempeño amortiguado su solución vendrá dada por

$$e_{p_i}(t) = \dot{e}_{p_0} t e^{-\omega_n t} + (1 + \omega_n t) e_{p_0} e^{-\omega_n t} \quad (4.72)$$

que muestra que para un tiempo muy grande el error convergerá a cero. Al sustituir la definición del error dada por (4.69) en (4.72) y despejando para  $p_i$  se tiene que

$$p_i = p_{d_i} - \dot{e}_{p_0} t e^{-\omega_n t} - (1 + \omega_n t) e_{p_0} e^{-\omega_n t} \quad (4.73)$$

donde se puede observar de mejor forma que el objetivo de seguimiento de una trayectoria cartesiana es cumplido. Cabe aclarar que aunque la ecuación (4.73) requiere saber las condiciones iniciales en el espacio cartesiano, en la práctica es más sencillo ingresar las condiciones iniciales en el espacio articular. En la Figura 4.12 se muestra el diagrama de bloques general del esquema de control presentado.

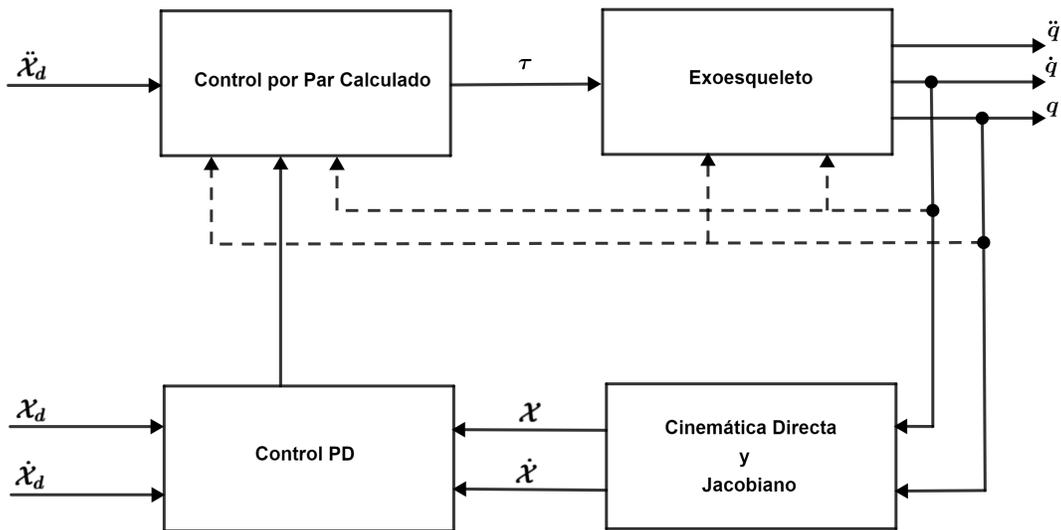


Figura 4.12: Control de posición cartesiano. Diagrama de bloques

De forma similar que en el control de posición articular, dos pruebas fueron realizadas enfocadas como primer punto en la regulación de una posición cartesiana en los 3 grados de libertad mientras

que la segunda prueba se realizó el seguimiento de una trayectoria en el espacio cartesiano. En el primer caso también se muestra que a una posición cartesiana puede llegarse con diferentes configuraciones singulares lo que puede representar problemas al interactuar con el usuario. Asimismo, en el Anexo B de este documento se ejemplifica lo que sucede cuando la posición cartesiana deseada se encuentra fuera del espacio de tarea.

### Primera prueba

Como primer paso para utilizar este controlador, fue necesario definir la posición del efector final respecto al sistema cero,  $p_{hr}$ , lo cual puede hacerse obteniendo la cinemática directa del sistema de referencia asociado al efector final, lo cual sería necesario si su orientación fuera diferente al sistema de referencia anterior, considerada como coincidente en este modelo; lo que permitió que teniendo el vector de posición del efector final respecto al último sistema de referencia, en este caso  $S_3$ , premultiplicarlo por la matriz de transformación de tres respecto a cero. Definiendo el vector de posición del efector final respecto a  $S_3$ ,  ${}^3p_{hr}$ , como

$${}^3p_{hr} = [{}^3p_{hr_x} \ {}^3p_{hr_y} \ {}^3p_{hr_z}]^T \quad (4.74)$$

con  ${}^3p_{hr_x}$ ,  ${}^3p_{hr_y}$  y  ${}^3p_{hr_z}$  con valores constantes y conocidos. Es importante mencionar que por simplicidad en este trabajo se consideró que el efector final se encuentra sobre el eje  $X_3$  a una distancia  $L_3$  del origen de  $S_3$ , por lo que la expresión anterior pudo ser simplificada como

$${}^3p_{hr} = [L_3 \ 0 \ 0]^T \quad (4.75)$$

siendo  $L_3$  la longitud del tercer eslabón considerada de  $0.33 [m]$ , al basarla en las antropometría del antebrazo de trabajadores mexicanos según [5]. Así el vector  $p_{hr}$  se obtuvo como

$$p_{hr} = {}^0T_3 {}^3p_{hr} \quad (4.76)$$

que permite conocer la posición del efector final como función de variables articulares y conformar el error de posición. Por otro lado, elegir una posición cartesiana deseada  $p_d$  no es tan simple, especialmente si no se realizó un análisis sobre posiciones singulares y si no se conoce los límites del espacio de la tarea como es el caso. Para evitar elegir una posición deseada que no pudiera ser alcanzada por el exoesqueleto, se utilizó la cinemática directa del efector final descrita por (4.76)

para conocer  $p_d$  dada una posición articular deseada  $q_d$ , lo cual ayudó a minimizar el riesgo de elegir una posición fuera del espacio de la tarea. Es importante mencionar también que el jacobiano que fue necesario obtener es el del efector final respecto al sistema cero  ${}^0J_{hr}$ .

Esta primera prueba tuvo el objetivo de que el efector final alcanzara una posición estable en un tiempo determinado y la mantuviera. Al proponer que la posición se alcanzara en  $t = 5[s]$ , para un desempeño críticamente amortiguado en todos los grados de libertad, se obtuvo que los valores en las diagonales de las matrices de ganancias  $K_p$  y  $K_v$  eran de 1 y 2 respectivamente.

La posición deseada para la prueba realizada es geoméricamente idéntica a la posición básica de [7], aunque bajo la convención de Denavit- Hartenberg utilizada, la posición cartesiana es de  $0.31[m]$  a lo largo de  $X_0$ , cero a lo largo de  $Y_0$  y  $0.33[m]$  a lo largo de  $Z_0$ ; buscando que el brazo de usuario estuviera en reposo con el codo flexionado  $90^\circ$  manteniendo el antebrazo horizontal, es decir, una posición básica de carga. Los resultados obtenidos al partir de la posición de equilibrio estable  $q_e$  con una condición inicial de velocidad angular cero se muestran a continuación

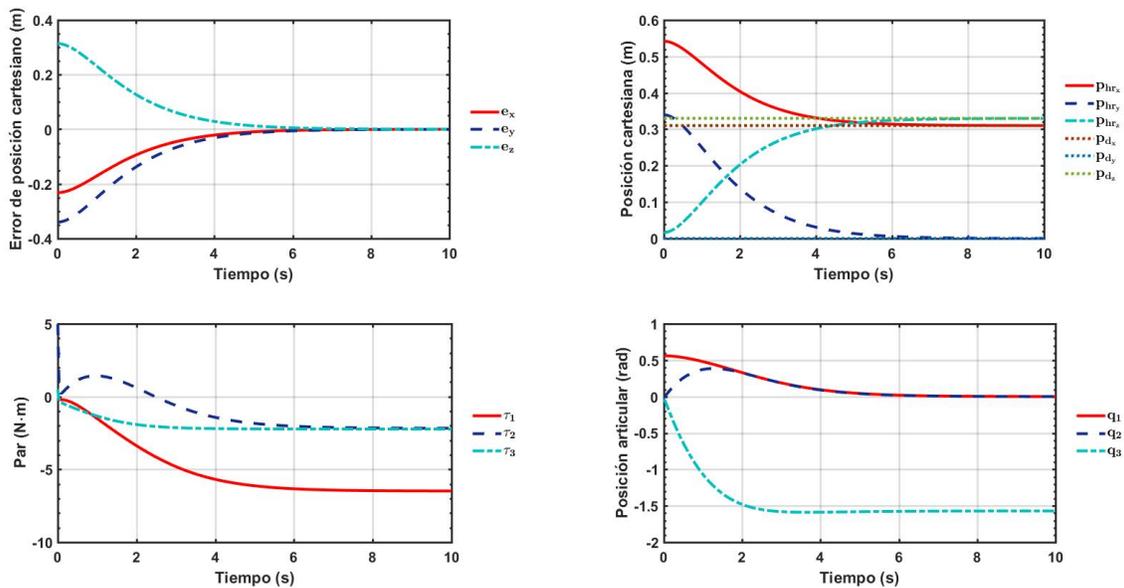


Figura 4.13: Primera prueba A. Control de posición en el espacio cartesiano

Se puede observar que tal como fue diseñado el error cartesiano es prácticamente cero en  $t = 5[s]$  y la posición cartesiana deseada es lograda en un tiempo similar en todas sus componentes a pesar de tener condiciones iniciales distintas. El par se encuentra dentro de valores razonables, con un par

máximo de  $-6.5 [N \cdot m]$  en la articulación uno en cuanto se llega a la posición deseada. En la gráfica de posición articular se muestra que la posición articular para lograr la posición deseada es en este caso el vector  $q_d = [0 \ 0 \ -\pi/2]^T$ , el cual coincide con la configuración del robot requerida.

Se sabe que para una posición cartesiana la posición articular asociada no es única, es decir, la posición cartesiana puede alcanzarse con configuraciones del robot diferentes. Esto es de suma importancia cuando se pretende que exista una interacción humano-robot como en el caso de los exoesqueletos, ya que la configuración del robot con la que sea alcanzada la posición cartesiana puede no ser lograda por el usuario pudiendo incluso lastimarlo. Con fines demostrativos se realizó una segunda simulación que consistió en llegar a la misma posición cartesiana deseada pero partiendo de una posición articular inicial diferente  $q_{inicial} = [-\pi \ 0 \ -\pi/2]^T$  con condiciones iniciales de velocidad angular nulas

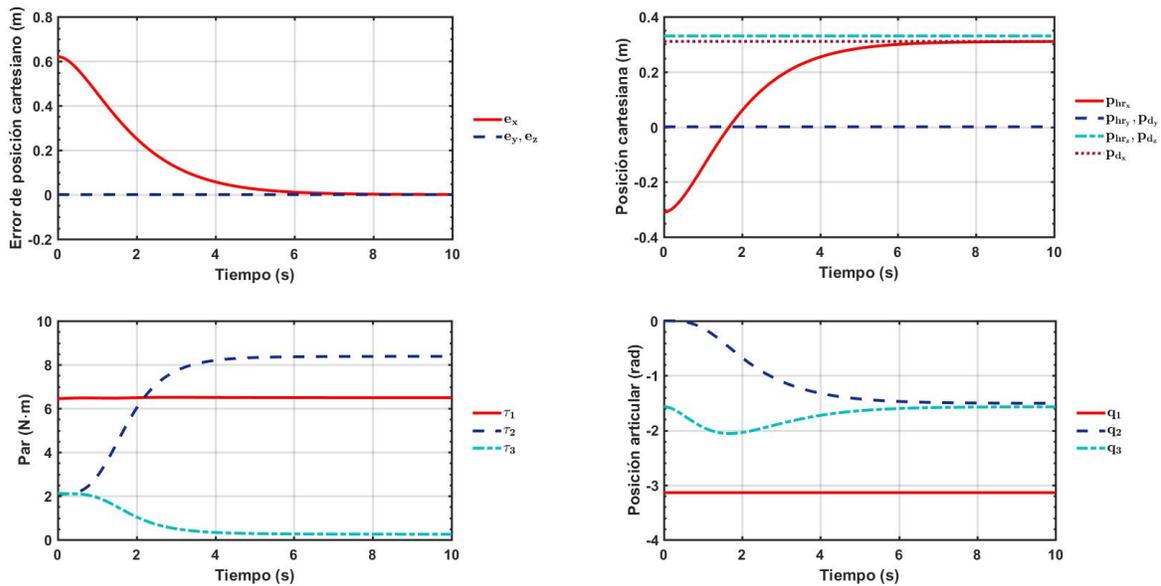


Figura 4.14: Primera prueba B. Control de posición en el espacio cartesiano

La Figura 4.14 muestra que en esta segunda simulación también se logra estabilizar el error, por lo que la posición deseada en el espacio cartesiano es alcanzada con un par máximo para la articulación dos de aproximadamente  $8.5 [N \cdot m]$ , sin embargo también se muestra que la posición articular deseada para este caso es  $q_d = [-\pi \ -1.5 \ -\pi/2]^T$  que es completamente diferente a la posición articular deseada de la prueba anterior. Esto demuestra que si bien este controlador cumple

con el objetivo de alcanzar una posición articular deseada, la configuración con la que lo logra no es controlable pudiendo representar un riesgo para el usuario o en el mejor de los casos no se podría realizar la tarea requerida adecuadamente.

## Segunda prueba

Como ya se dijo esta prueba consistió en observar el comportamiento del sistema cuando se requiere seguir una trayectoria. Elegir una trayectoria cartesiana es complicado cuando no se tiene el robot de forma física además de que se corre el riesgo que en la trayectoria seguida se genere una configuración singular que cause problemas en la realización del objetivo de control. Para evitar esto, la trayectoria deseada no puede ser completamente aleatoria, forzando a elegir una en la que el comportamiento fuera predecible; una prueba que se consideró fácil de interpretar fue partir de  $q_{inicial} = q_e$  y hacer que el efector final oscilara entre los valores máximos que puede alcanzar en el eje  $Z_0$  manteniendo una posición cero en  $Y_0$  y  $0.31[m]$  en  $X_0$ ; este comportamiento fue logrado al elegir  $p_d = \begin{bmatrix} 0.31 & 0 & A \sin(\omega t) \end{bmatrix}^T$  con los valores correspondientes para  $\dot{p}_d$  y  $\ddot{p}_d$ . El valor de  $\omega$  se eligió para un periodo  $T = 10[s]$  mientras que el valor de  $A$  de la componente en  $Z_0$  fue el alcance máximo del robot en esa dirección,  $Z_{max}$ . En la Figura 4.15 se aprecia que este valor está dado por la longitud del cateto  $b$  del triángulo rectángulo formado, donde el valor del cateto  $a$  es el valor constante  $X_0 = 0.31[m]$  y donde la hipotenusa está dada por la suma de las longitudes de los eslabones  $L_2$  y  $L_3$  que se sabe es de  $0.64[m]$  dando como resultado que  $A = 0.5599[m]$ . Los resultados obtenidos son mostrados en la Figura 4.16.

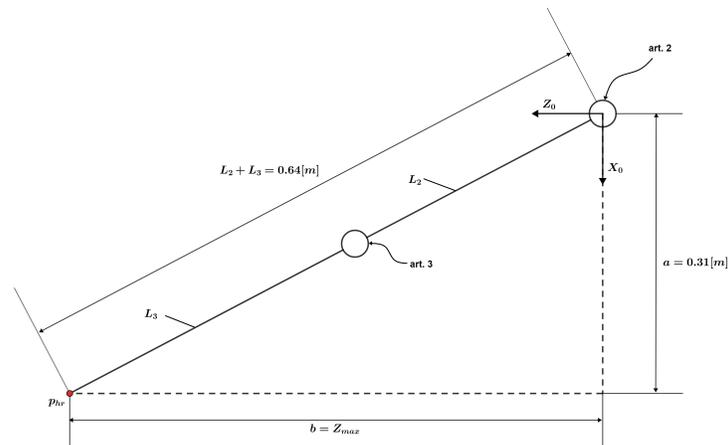


Figura 4.15: Movimiento máximo en eje  $Z_0$  con posición de carga fija en  $X_0$  y  $Y_0$

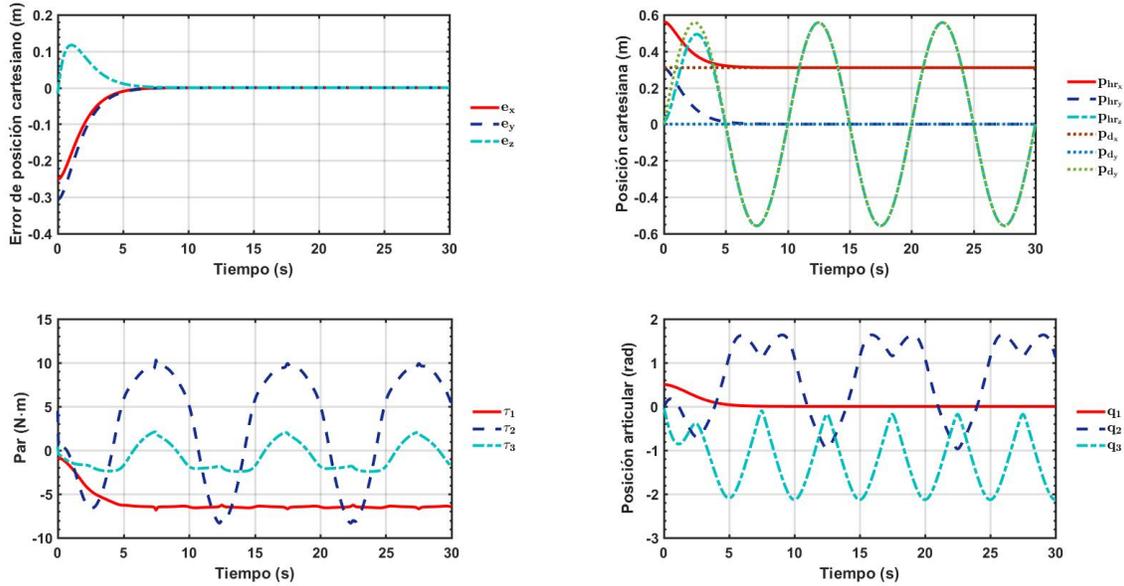


Figura 4.16: Segunda prueba. Control de posición en el espacio cartesiano para el seguimiento de una trayectoria variable

Esta prueba es interesante ya que ejemplifica los posibles usos del controlador: se puede llegar a una posición deseada como en  $p_x$  y  $p_y$  o se puede seguir una trayectoria como en  $p_z$ ; en todos los casos el error convergerá a cero. Se observa que el comportamiento del robot no presenta eventualidades, teniendo un par máximo aproximado de  $10 [N]$  en la articulación dos y presentando un movimiento articular repetitivo a partir de  $t = 5[s]$  lo que muestra que las trayectorias articulares trazadas referentes a las trayectorias cartesianas son consistentes. En las pruebas el valor de  $A$  utilizado fue de  $0.557 [m]$  lo cual es ligeramente menor al valor calculado ya que al computarlo el controlador fallaba la primera vez que se aproximaba a  $p_z = -A$ . Se concluyó que debido a que en el tiempo en que se llega a este valor el error aún no era cero, ya que el controlador buscaba alcanzar un valor de  $p_z$  ligeramente mayor en magnitud a  $Z_{max}$ , ocasionaba una falla en el funcionamiento al ser una posición fuera del espacio de tarea; esto se comprobó al aumentar las diagonales de las matrices de ganancias  $K_p$  y  $K_v$  a 4, logrando un valor máximo en  $p_z$  de  $0.5592 [m]$ , que es más cercano al valor  $Z_{max}$  calculado. De manera similar se observó que al realizar la misma prueba pero cambiando la diagonal de la matriz  $K_v$  por las ganancias 2 para  $p_x$ , 4 para  $p_y$  y 6 para  $p_z$  con  $K_p$  elegida para un comportamiento críticamente amortiguado, la simulación del sistema falló en  $t = 1.54 [s]$  al alcanzar

la posición  $p_{hr} = [0.45 \quad 0.06 \quad 0.45]^T$ . Al obtener el módulo de este vector se tiene como resultado 0.64, es decir, la completa extensión del brazo considerada como una configuración singular.

#### **4.3.2. Conclusiones generales y aplicaciones del control de posición cartesiano por par calculado**

Similar al controlador de posición articular, se demostró la utilización del control de posición cartesiano sobre el modelo matemático del exoesqueleto, además de demostrar que se puede estabilizar una posición, o bien el seguimiento de alguna trayectoria predefinida, siempre y cuando ésta no provoque que el robot se posicione en una configuración singular o fuera del espacio de tarea, como se ejemplifica en el Anexo B; todo esto bajo algún desempeño deseado. Si bien controladores de este tipo son utilizados en robots para que realicen tareas de forma autónoma, se mostraron algunas desventajas inherentes que deben ser atendidas al pretender ser usado en tareas conjuntas con el ser humano; por un lado se debe tener cuidado en que el robot no presente configuraciones singulares o fuera del espacio de la tarea, además de considerar que es posible llegar una posición cartesiana por medio de más de una configuración articular. La segunda prueba además muestra que si la respuesta del controlador no es lo suficientemente rápida en su tarea de llegar a un error cero, puede producir que el sistema atraviese por posiciones singulares que hagan que el sistema falle; de forma similar también la elección de las ganancias puede provocar que el sistema colapse al propiciar que se pase por una configuración singular en el proceso de alcanzar las trayectorias deseadas.

Dependiendo del diseño del robot, las condiciones mencionadas podrían lograr un daño en el miembro del usuario, por lo que se considera que para el uso de este controlador en exoesqueletos, se requiere un conocimiento del robot tal que se eviten todas las posiciones singulares y se predefinan trayectorias cartesianas en las que se tenga plena confianza de que el sistema puede comportarse de una forma segura y predecible.

## Capítulo 5

# Controladores para amplificación de fuerza

### 5.1. Control por retroalimentación de fuerza externa

Para entender mejor la aplicación de este controlador para la amplificación de fuerza, como primer paso se muestra la teoría presentada por primera vez en [4], donde el controlador fue utilizado con el objetivo de replicar una fuerza remota sobre el brazo de un usuario; posteriormente se muestra la implementación de la ley de control a un sistema compuesto por una masa simple y algunas simulaciones de interés debido a que, bajo ciertas consideraciones, aplicar la ley de control de fuerza en el exoesqueleto causa que éste se comporte como un sistema de  $n$  masas simples e independientes, donde  $n$  depende de los grados de libertad en el espacio cartesiano. Como último paso, al haber ya presentado la teoría del controlador basado en su fuente principal así como algunas de sus características al ser aplicado a un sistema sencillo, se revisa con mayor claridad la implementación del controlador para la amplificación de fuerza en el modelo del robot exoesqueleto.

El controlador en cuestión fue presentado en [4] con la finalidad de ser aplicado en teleoperación y entornos virtuales, sin embargo como se explicará más adelante fue utilizado para amplificación de fuerza en el esquema de control propuesto en [7]. El objetivo del sistema puede resumirse en que se requería que el usuario experimentara una fuerza deseada  $\mathcal{F}_{des}$  aplicada en un brazo remoto o virtual, es decir, de forma indirecta sobre su cuerpo.

El sistema completo estaba conformado por un brazo robótico acoplado al brazo de un usuario de

tal forma que en conjunto podían moverse en casi la totalidad el espacio de trabajo del brazo humano. Este brazo robótico o exoesqueleto solo tenía dos puntos de contacto con el cuerpo del usuario, el hombro/torso para ser cargado y la mano a la altura de los metacarpos para ser manipulado por medio de un agarre. Siendo así el exoesqueleto podría ejercer acciones sobre el cuerpo humano en estas dos regiones que podrían ser descritas por vectores fuerza. Se consideró entonces que el exoesqueleto era un manipulador robótico con su base unida al hombro/torso del operador y que ejercía fuerzas en la mano de éste por medio del agarre. Las fuerzas ejercidas por el robot en el hombro/torso fueron consideradas como un efecto secundario que, se asumió, debe ser contrareestado por el cuerpo del operador; desde luego, el cumplimiento de esta suposición deberá ser revisado si se quiere la implementación física de un exoesqueleto de este tipo.

En condiciones cuasiestáticas y sin considerar la gravedad, el mapeo de la fuerza ejercida por el robot en la mano del usuario y los pares articulares se deriva del principio de Trabajo Virtual de tal forma que

$$\tau = J^T(q)\mathcal{F}_{hr} \quad (5.1)$$

siendo  $\mathcal{F}_{hr}$  el vector  $n \times 1$  de fuerzas y momentos aplicados sobre la mano del usuario. Por lo que la ecuación dinámica de este exoesqueleto tendría la misma forma que (4.1) más el término asociado a la interacción dando como resultado la siguiente ecuación

$$M(q)\ddot{q} + V(q, \dot{q}) + F(\dot{q}) + G(q) + J^T(q)\mathcal{F}_{hr} + \tau_d = \tau \quad (5.2)$$

donde la interacción externa es considerada y el vector de  $n \times 1$ ,  $\tau_d$ , se mantiene en la ecuación al representar dinámica no modelada u otro tipo de perturbaciones. El desarrollo de [4] considera condiciones cuasiestáticas, por lo que es posible asumir que el modelo utilizado fue simplificado a

$$G(q) + J^T(q)\mathcal{F}_{hr} + \tau_d = \tau \quad (5.3)$$

lo que permitió el diseño de dos leyes de control fundamentales.

### 5.1.1. Ley de control sin retroalimentación de fuerza

Esta ley no considera que exista retroalimentación de la fuerza  $\mathcal{F}_{hr}$  y compensa los efectos gravitatorios de tal forma que la ley de control esta descrita como

$$\tau = G(q) + J^T(q)\mathcal{F}_{des} \quad (5.4)$$

siendo  $\mathcal{F}_{des}$  el vector de  $n \times 1$  de fuerzas y momentos que se desea sea aplicado en la mano del usuario. Utilizando las ecuaciones (5.3) y (5.4) se tiene que

$$G(q) + J^T(q)\mathcal{F}_{hr} + \tau_d = G(q) + J^T(q)\mathcal{F}_{des} \quad (5.5)$$

y simplificando se encuentra la siguiente relación

$$\mathcal{F}_{hr} + J^{-T}\tau_d = \mathcal{F}_{des} \quad (5.6)$$

Definiendo el error de fuerza como  $e_f = \mathcal{F}_{hr} - \mathcal{F}_{des}$ , la ecuación anterior se puede expresar como

$$e_f = \mathcal{F}_d \quad (5.7)$$

donde  $\mathcal{F}_d$  es el vector de  $n \times 1$  que representa los efectos de los factores no considerados en coordenadas cartesianas y esta definido como  $\mathcal{F}_d = J^{-T}\tau_d$ . Se puede notar que de no existir perturbaciones o dinámica no modelada, el valor de la fuerza experimentada por el usuario será la misma que la fuerza deseada, de lo contrario el error dependerá de  $\tau_d$ . Estas dos últimas ecuaciones, que si bien pueden considerarse triviales, son congruentes con lo comentado en [4] y facilitan el entendimiento de este controlador y los presentados posteriormente.

### 5.1.2. Ley de control proporcional

Para superar las limitantes del control sin retroalimentación y haciendo uso de un sensor de fuerza/par en el efector final, en [4] se propuso la siguiente ley de control

$$\tau = G(q) + J^T(\mathcal{F}_{des} + K(\mathcal{F}_{des} - \mathcal{F}_{hr})) \quad (5.8)$$

en el que  $K$  es una matriz de ganancias diagonal apropiada tal que  $K = \text{diag}\{k_i\}$  con  $k_i \in \mathbb{R}$ , y el término  $J^T K(\mathcal{F}_d - \mathcal{F})$  representa la parte de control proporcional al error de fuerza mapeado en el espacio articular. De forma similar a la ley de control anterior, se puede encontrar la ecuación de lazo cerrado al igualarla con el modelo del exoesqueleto de la siguiente forma

$$G(q) + J^T(q)\mathcal{F}_{hr} + \tau_d = G(q) + J^T(\mathcal{F}_{des} + K(\mathcal{F}_{des} - \mathcal{F}_{hr})) \quad (5.9)$$

que al simplificarse, utilizando las definiciones anteriores y resolviendo para  $e_f$  da como resultado

$$e_f = (I + K)^{-1}\mathcal{F}_d \quad (5.10)$$

en la que  $I$  es la matriz identidad acorde a las dimensiones de la ecuación, y dado que la matriz de ganancias  $K$  es diagonal, cada elemento del vector error puede ser expresado como

$$e_{f_i} = \frac{1}{1 + k_i}\mathcal{F}_{d_i} \quad (5.11)$$

donde la mejora de este controlador respecto al anterior es fácilmente observable, ya que conforme la magnitud de  $k_i$  crezca, el error tenderá a ser cero, aunque esto dependa también de la magnitud de cada  $\mathcal{F}_{d_i}$ ; si  $k_i = 0$  el esquema de control será el mismo que el anterior. Por otro lado, es claro que  $k_i$  no puede tener el valor de  $-1$  ya que se tendría una indeterminación.

Una cuestión importante que mencionar es el sistema de referencia bajo el que están referenciadas las fuerzas y jacobianos. En condiciones reales la forma más sencilla de realizar el cómputo de estos vectores sería medir la fuerza en el punto de interacción del humano con el robot, llamado aquí  $p_{hr}$ , respecto a su sistema de referencia asociado,  ${}^{hr}\mathcal{F}_{hr}$ , y consecuentemente calcular el jacobiano correspondiente  ${}^{hr}J_{hr}$ . Sin embargo, por simplicidad, se trabajó con la fuerza de interacción trasladada al sistema cero, escrita como  ${}^0\mathcal{F}_{hr}$  para fines de compresión; por lo que el jacobiano utilizado fue  ${}^0J_{hr}$ , que es el mismo que ya había sido empleado.

Considerando que solo es posible trabajar en tres grados de libertad del espacio cartesiano, el vector de fuerzas y momentos  $\mathcal{F}_{hr}$ , en este caso particular, sólo está conformado por las fuerzas aplicadas en los 3 ejes que componen el sistema de referencia  $S_0$ , de tal forma que  $\mathcal{F}_{hr}$  y todos los vectores fuerza existentes tienen un tamaño de  $n \times 1$  y trabajan sobre los grados de libertad mencionados. Aclarado este punto, y considerando que  $\mathcal{F}_{hr}$  es la salida a controlar, en condiciones cuasiestáticas, vectores  $\ddot{q}$  y  $\dot{q}$  igual a cero, el modelo (5.3) se reordenó de tal forma que se obtuviera el vector  $\mathcal{F}_{hr}$  como resultado de los otros elementos de la siguiente forma

$$\mathcal{F}_{hr} = J^{-T}(\tau - G(q) - \tau_d) \quad (5.12)$$

que representa el modelo del robot en condiciones cuasiestáticas donde la fuerza de interacción es

función del vector de coordenadas generalizadas  $q$ , el vector de pares articulares y el vector de pares de perturbación. Un ejemplo del funcionamiento del sistema bajo estas condiciones puede observarse en la primer prueba del Anexo C.

De forma teórica se puede observar que la ley de control (5.8) funciona en condiciones dinámicas incluso sin el término que compensa la gravedad, tal que la ley de control descrita como

$$\tau = J^T(\mathcal{F}_{des} + K(\mathcal{F}_{des} - \mathcal{F}_{hr})) \quad (5.13)$$

aplicada sobre el modelo dinámico (5.2) representado como

$$J^T(q)\mathcal{F}_{hr} + \tau_{din}(\ddot{q}, \dot{q}, q) = \tau \quad (5.14)$$

con

$$\tau_{din} = M(q)\ddot{q} + V(q, \dot{q}) + F(\dot{q}) + G(q) + \tau_d \quad (5.15)$$

de forma similar a (5.10), da como resultado la ecuación de lazo cerrado

$$e_f = (I + K)^{-1}\mathcal{F}_{din}(\ddot{q}, \dot{q}, q) \quad (5.16)$$

donde el vector de  $n \times 1$ ,  $\mathcal{F}_{din}$ , representa el mapeo en el espacio cartesiano de todos los efectos dinámicos modelados y no modelados en el robot y está definido como  $\mathcal{F}_{din} = J^{-T}\tau_{din}$ . Considerando de nuevo que la matriz  $K$  es diagonal, cada elemento de  $e_f$  estará definido como

$$e_{f_i} = \frac{1}{1 + k_i}\mathcal{F}_{din_i}(\ddot{q}, \dot{q}, q) \quad (5.17)$$

donde se comprueba de nuevo, que en el caso más general el logro de un  $e_f = 0$  depende de la magnitud de las ganancias  $k_i$ , entre mayor sean éstas, el objetivo de control sera cumplido de mejor manera, incluso si existe movimiento del robot. Por el contrario, si la ganancias no son lo suficientemente grandes, el error estará acotado siempre y cuando el valor  $\tau_{din}$  lo esté. En la segunda prueba del Anexo C es posible observar una simulación que utiliza el modelo de la planta representado por (5.18) para ejemplificar el comportamiento descrito por (5.17), donde la salida del sistema es la fuerza de interacción  $\mathcal{F}_{hr}$  dependiente de los otros términos de la ecuación.

$$\mathcal{F}_{hr} = J^{-T}(\tau - N(\dot{q}, q) - M(q)\ddot{q} - \tau_d) \quad (5.18)$$

### 5.1.3. Simulación del control proporcional por retroalimentación de fuerza externa sobre una masa simple

Hasta ahora el modelo del exoesqueleto donde se consideró la fuerza de interacción  $\mathcal{F}_{hr}$  como una respuesta directa de la planta por efecto del par de entrada así como la dinámica del robot, dependiente de  $q$  y sus derivadas, permitió demostrar las propiedades del controlador, así como observar la influencia de la matriz de ganancias  $K$  sobre el error de fuerza  $e_f$ , incluso cuando el sistema no se encuentra en condiciones cuasiestáticas. Como se mostrará más adelante, el implementar el controlador de [4] en conjunto con el controlador por par calculado en el modelo del exoesqueleto, en condiciones ideales, causa que en cada grado de libertad el sistema se comporte como una masa simple, de forma similar a la mostrado en la Figura 5.1 y cuyo modelo matemático esta dado por la ecuación (5.19). Siendo así, resulta razonable estudiar el comportamiento de este sistema cuando la ley de control proporcional de fuerza es aplicada.

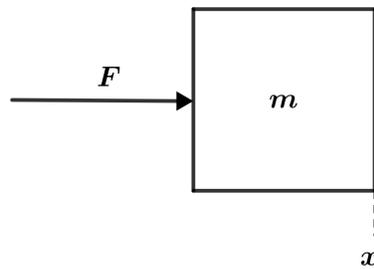


Figura 5.1: Representación gráfica de un sistema dinámico representado por (5.19)

$$m\ddot{x} = F \quad (5.19)$$

La ecuación (5.19) describe el comportamiento de un cuerpo de masa  $m$  al aplicarle una fuerza  $F$ , donde además se puede notar un detalle importante: al ser  $m$  una magnitud escalar y  $F$  y  $\ddot{x}$  cantidades vectoriales, que describen la fuerza resultante y la aceleración de la masa respectivamente, la aceleración del cuerpo será en la misma dirección que la fuerza resultante escalada por  $1/m$ . Considerando interacción externa este modelo puede ser completado de acuerdo a la Figura 5.2 como

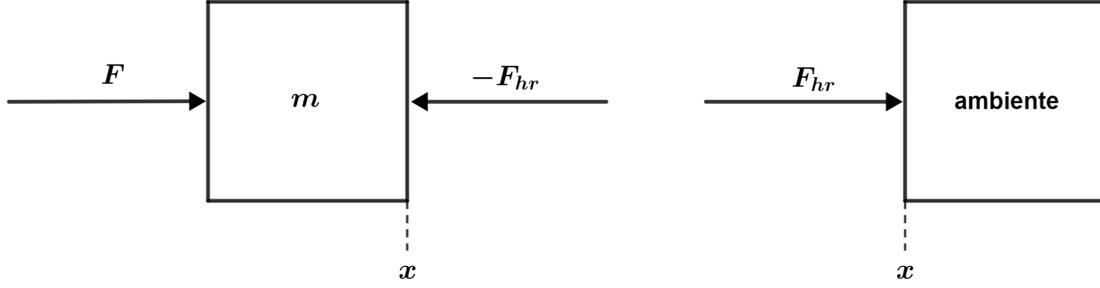


Figura 5.2: Representación gráfica de un sistema dinámico con interacción externa representado por (5.20)

$$m\ddot{x} + F_{hr} = F \quad (5.20)$$

donde  $F_{hr}$  es la fuerza aplicada por el cuerpo en el ambiente. Suponiendo que  $F_{hr}$  pueda ser medida por medio de un sensor y  $F$  es la variable de control, ésta última se eligió de forma similar a (5.13) como

$$F = F_{des} + k(F_{des} - F_{hr}) \quad (5.21)$$

con  $F_{des}$  definida como la fuerza deseada. Sustituyendo (5.21) en (5.20) da como resultado la ecuación en lazo cerrado

$$e_f = \frac{m\ddot{x}}{1+k} \quad (5.22)$$

ecuación muy similar a (5.17) donde si el valor de  $k$  es lo suficientemente grande el error tenderá a ser cero, aunque será más útil escribir la ecuación anterior como

$$m\ddot{x} = (1+k)e_f \quad (5.23)$$

De acuerdo a [4],  $F_{hr}$  fue considerada una variable a controlar, es decir, una salida del sistema, sin embargo un cambio de enfoque es de utilidad al considerar que  $F_{hr}$  también es una variable de control, que se requiere se estabilice en  $F_{des}$ , y que tiene como variable a controlar o salida la posición  $x$  del sistema. El caso particular cuando  $F_{des} = 0$  es el utilizado para la aplicación de este

controlador en la amplificación de fuerza [7] [21], por lo que sustituyendo este valor en la ecuación (5.23) se obtiene que

$$m\ddot{x} = -(1+k)F_{hr} \quad (5.24)$$

que puede entenderse como si al objeto se le aplicara una fuerza neta proporcional en  $-(1+k)$  veces la fuerza de interacción  $F_{hr}$ , es decir, los efectos de  $F_{hr}$  pueden amplificarse, reducirse o contrarestarse. Tres casos de interés pueden ser identificados: si  $k > -1$ , el objeto se acelerará en dirección contraria a la fuerza de interacción; si por el contrario  $k < -1$  la dirección de la aceleración será en la misma dirección que  $F_{hr}$  y si  $k = -1$  o la masa es muy grande en relación al término  $1+k$  el objeto tendería al equilibrio estático. Además es importante notar que si  $k > 0$  o  $k < -2$  el efecto que se tendría es una aceleración correspondiente a la fuerza amplificada independientemente de la dirección que tuviera ésta.

Debido a que la forma de  $F_{hr}$  es variable y a que, como se mencionó anteriormente, al aplicar el controlador sobre el sistema éste se comporta de forma similar a la que fue descrita, resultó razonable la realización de simulaciones para formas distintas de  $F_{hr}$ . A continuación se muestran 5 pruebas realizadas por orden de complejidad; en la primera prueba se muestra el comportamiento del sistema cuando la fuerza es constante, mientras que en la segunda y tercera se muestra el efecto de aplicar una fuerza con forma rampa y sinusoidal respectivamente. La prueba 4, en la que se considera una fuerza compuesta de constantes y rampas, así como la prueba 5 en la que se considera los efectos de una perturbación, proveen información, que completada con las pruebas anteriores, permiten un entendimiento amplio, aunque no exhaustivo, de los efectos del controlador.

### Primera prueba

Al elegir  $F_{hr}$  como constante, el resolver la ecuación (5.24) para la posición  $x$  da como resultado

$$x = x_0 + \dot{x}_0 t - \frac{(1+k)}{2m} F_{hr} t^2 \quad (5.25)$$

con  $x_0$  y  $\dot{x}_0$  como la posición y velocidad inicial respectivamente. Si el cuerpo no estuviera inicialmente en movimiento  $\dot{x}_0 = 0$ , como comúnmente sucede, el sistema se moverá en sentido de la aceleración, en el que el valor de  $k$  define bajo las mismas reglas el sentido respecto a la fuerza de interacción resultante así como la proporción respecto a ésta; es decir, tanto la aceleración como el movimiento del objeto van en una misma dirección, sentido y proporción respecto a  $F_{hr}$  definidos

por la ganancia  $k$  aunque sean funciones distintas.

Para demostrar el comportamiento del sistema gráficamente, se muestran los resultados obtenidos cuando se considera  $m = 1$  y  $F_{hr} = 1$ , aplicando distintos valores de la ganancia  $k$

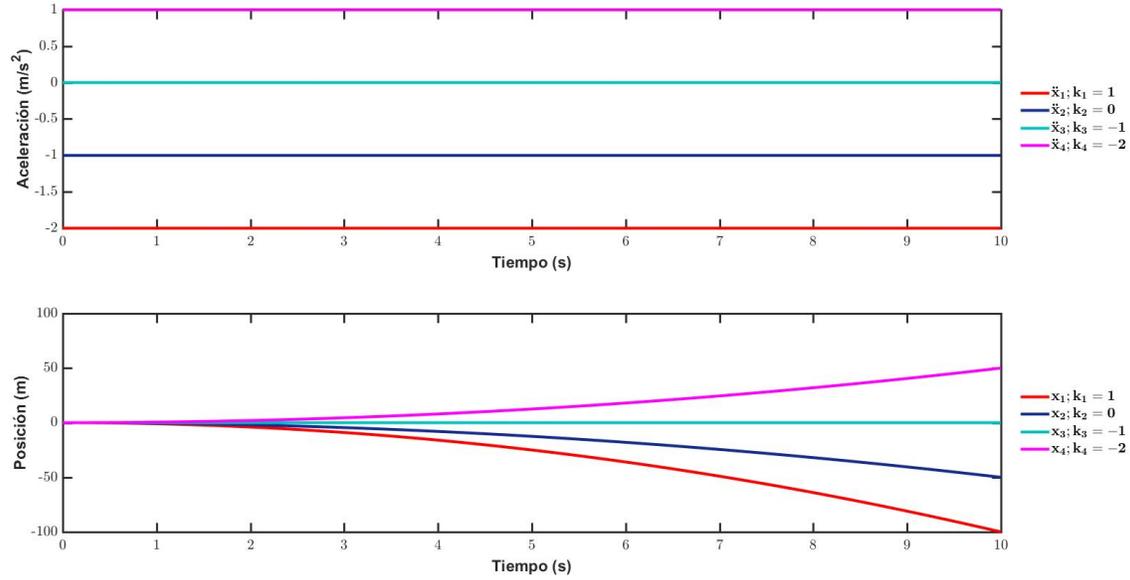


Figura 5.3: Primera prueba. Entrada constante. Dinámica del sistema para distintos valores de  $k$

### Segunda prueba

Una segunda posibilidad que fue explorada es que la fuerza deseada tuviera forma de rampa por ejemplo  $F_{hr} = k_t t$  por lo que la ecuación en lazo cerrado del sistema sería

$$m\ddot{x} = -(1+k)k_t t \quad (5.26)$$

que al resolver para  $x$  da como resultado

$$x = x_0 + \dot{x}_0 t - \frac{(1+k)k_t}{6m} t^3 \quad (5.27)$$

que muestra que en este caso también bajo una velocidad inicial nula, la aceleración y posición serán proporcionales a la fuerza de interacción, aunque en este caso el efecto del tiempo en ambas es mayor que cuando  $F_{hr}$  se elige constante. En la Figura 5.4 se muestran los resultados obtenidos para

el mismo sistema usado en la prueba anterior con una entrada  $F_{hr} = k_t t$  con  $k_t = 1$ , condiciones iniciales nulas y para distintos valores de  $k$

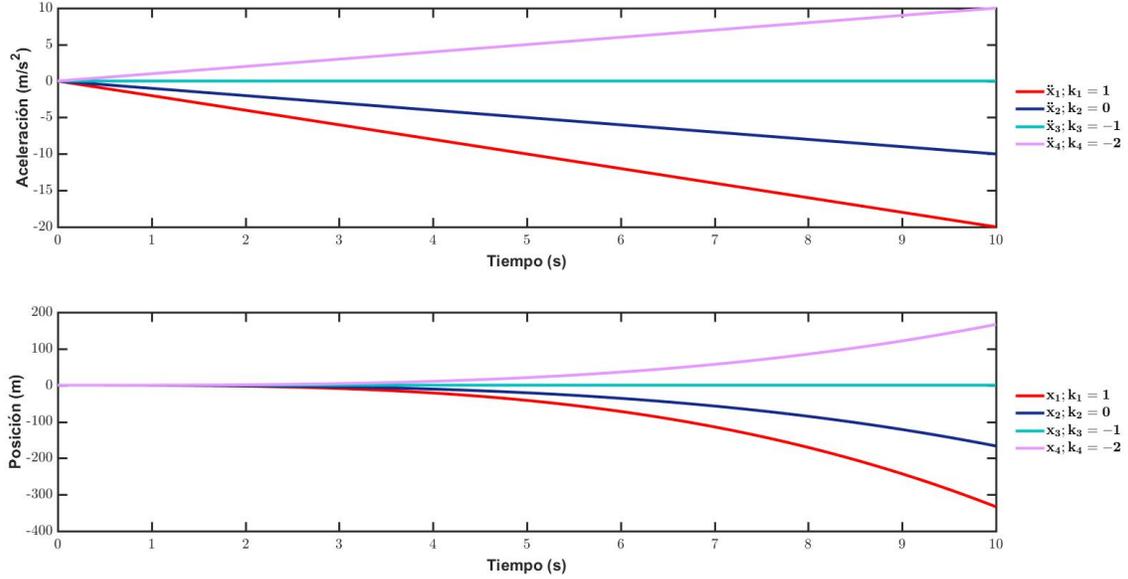


Figura 5.4: Segunda prueba. Entrada rampa. Dinámica del sistema para distintos valores de  $k$

### Tercera prueba

Ya que  $F_{hr}$  puede tomar cualquier forma se mostrará el caso en el que la entrada  $F_{hr}$  tiene la forma  $F_{hr} = A \sin \omega t$  por lo que el sistema en lazo cerrado queda descrito como

$$m\ddot{x} = -(1+k)A \sin \omega t \quad (5.28)$$

al resolver la ecuación para la posición, se tiene que

$$x = x_0 + \left(\dot{x}_0 - \frac{(1+k)A}{\omega m}\right)t + \frac{(1+k)A}{\omega^2 m} \sin \omega t \quad (5.29)$$

que es una ecuación mucho más compleja, aunque es visible que en esta ocasión ambas ecuaciones en un tiempo determinado no dan como resultado vectores en el mismo sentido, es decir, se puede acelerar en dirección negativa pero moverse positivamente. Para demostrar esto, en esta prueba la fuerza de interacción, el valor de los parámetros  $A$  y  $\omega$  se eligieron como uno; el sistema analizado

fue el mismo y también se utilizaron diferentes valores de  $k$ , obteniéndose lo siguiente

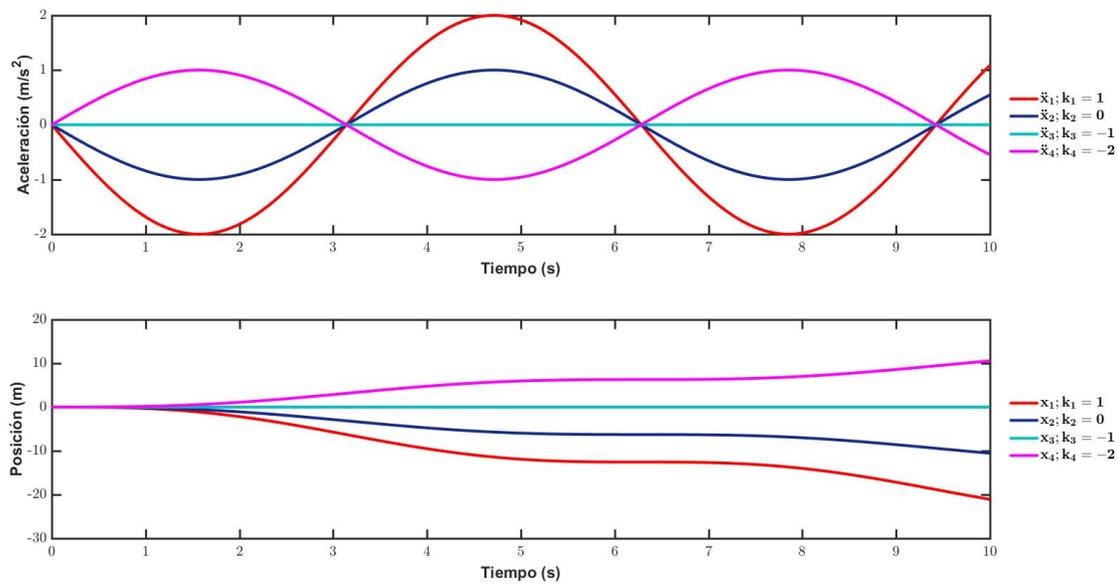


Figura 5.5: Tercera prueba. Entrada seno. Dinámica del sistema para distintos valores de  $k$

Donde se observa que no importando el valor de  $k$  la aceleración oscila mientras que la posición crece en el sentido del primer valor de la onda de aceleración, esto debido a la componente constante dependiente de  $k$ ,  $A$  y  $\omega$  que multiplica a  $t$  en (5.29). Se puede interpretar este resultado de la siguiente forma: si se acelera inicialmente el objeto en el sentido positivo del eje  $X$  ejerciendo una fuerza en ese mismo sentido, el objeto se moverá en esa misma dirección; sin embargo, cuando la aceleración cambia de sentido por la fuerza, ésta no es lo suficientemente grande para primero detener el objeto y después moverlo en sentido opuesto, por lo que el cuerpo se sigue moviendo aunque menos en sentido positivo y ésto se repite cíclicamente. Si por ejemplo se quisiera que el cuerpo oscilara entre dos posiciones, la fuerza aplicada en sentido contrario debería contrarrestar la inercia del objeto y cambiar el sentido de su movimiento.

#### Cuarta prueba

En esta prueba se utilizó una función  $F_{hr}$  compuesta de constantes y rampas que tiene la forma mostrada en la Figura 5.6

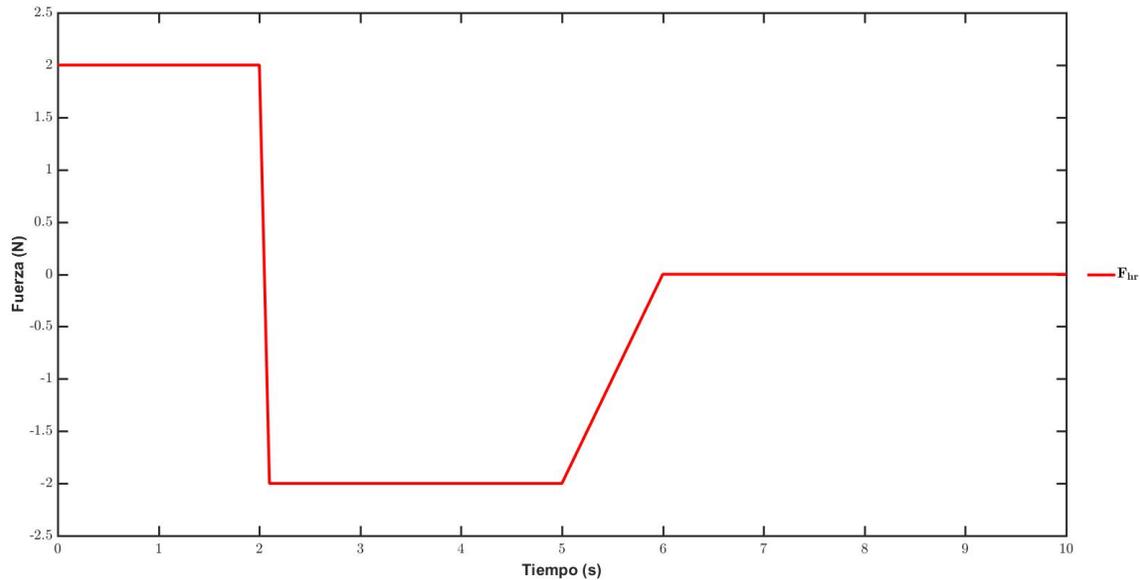


Figura 5.6: Cuarta prueba. Fuerza de interacción compuesta por constantes y rampas

Aunque es posible obtener las ecuaciones que describen el comportamiento de  $F_{hr}$ ,  $\ddot{x}$ ,  $\dot{x}$  y  $x$ ; su desarrollo teórico no son prioridad para el desarrollo de esta prueba, por lo que sólo las graficas que describen el comportamiento dinámico del sistema con diferentes valores de  $k$  son mostradas en la Figura 5.7.

Con  $k = -2$ , que es cuando la aceleración tiene la misma forma que la fuerza de interacción, sucede lo siguiente: Primero una fase de aceleración constante hasta  $t = 2[s]$ , donde la velocidad del cuerpo aumenta y se mueve en sentido positivo; posteriormente en  $t = 2[s]$  la fuerza cambia casi de forma instantánea de sentido y se mantiene constante hasta  $t = 5[s]$  y por consecuencia la aceleración también, el objeto pierde velocidad y se mueve menos en sentido positivo hasta que en poco más de  $t = 4[s]$  la velocidad es nula, el objeto se detiene y comienza a moverse en sentido negativo, es decir, la fuerza tarda poco mas de dos segundos en detener la inercia del objeto y comenzar a mover en dirección contraria; en la última fase, la fuerza pierde intensidad paulatinamente a partir de  $t = 5[s]$  hasta volverse nula en  $t = 6[s]$  donde la aceleración también lo hace consecuentemente y por su parte la velocidad deja de crecer negativamente y se estabiliza en un valor por lo que el objeto sigue moviéndose en sentido negativo y nunca deja de hacerlo a pesar de que la fuerza de interacción haya desaparecido ya que no existe fricción u otra fuerza que lo impida, en concordancia con la primera

ley de Newton.

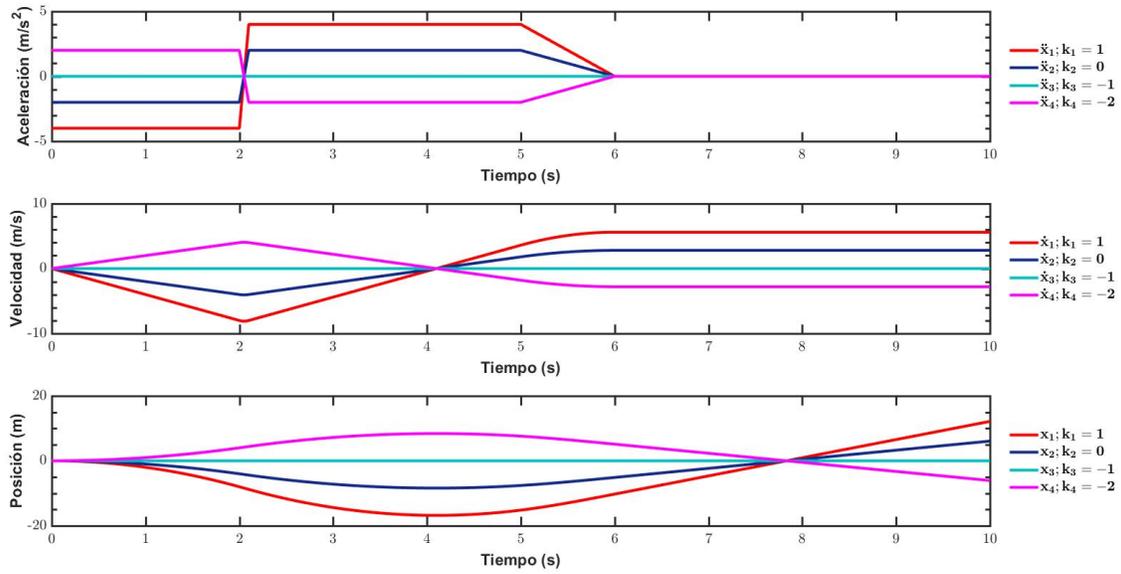


Figura 5.7: Cuarta prueba. Dinámica del sistema

### Quinta prueba

Si en el sistema se considera que actúa una perturbación, representada por la fuerza denominada  $F_e$  conocida por medio de otro sensor, la ecuación que describe el sistema sin la fuerza de control  $F$  es la siguiente

$$m\ddot{x} = -F_{hr} + F_e \quad (5.30)$$

Si se escribe ahora la ecuación cuando existe  $F$  y además es elegida como (5.21) con  $F_{des} = 0$ , la ecuación resultante es

$$m\ddot{x} = -(1 + k)F_{hr} + F_e \quad (5.31)$$

En ambos casos el equilibrio estático se logra cuando  $m\ddot{x} = 0$ , lo que se logra para la ecuación (5.30) cuando

$$F_{hr} = F_e \quad (5.32)$$

mientras que para la ecuación (5.31) se logra cuando

$$F_{hr} = \frac{1}{1+k} F_e \quad (5.33)$$

en lo que se observa un comportamiento interesante. En ausencia de la fuerza de control  $F$ , para lograr que el objeto no se mueva, la fuerza de interacción debe ser la misma que la fuerza de perturbación; el ingresar la fuerza de control permite que si  $k > 0$  o  $k < -2$  la fuerza  $F_{hr}$  necesaria para lograr el equilibrio estático sea una fracción de  $F_e$ , más aún, si  $F_{hr}$  no es igual a (5.33) el cuerpo se acelerará en dirección a la fuerza resultante de (5.31).

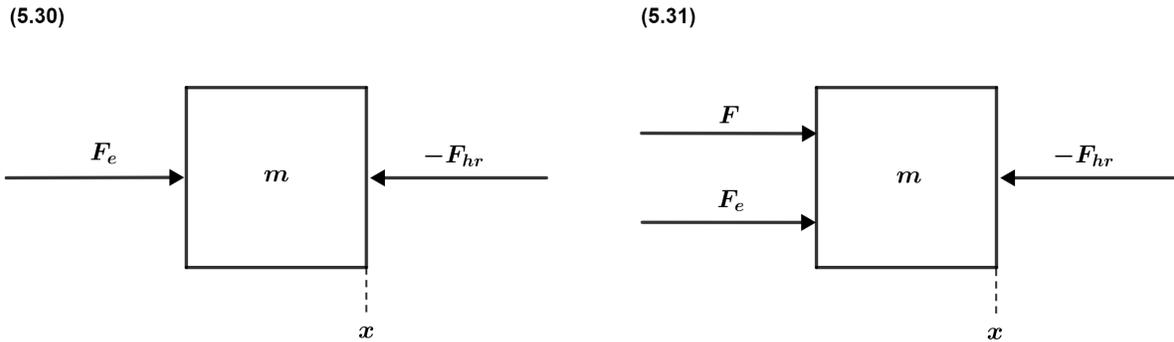


Figura 5.8: Representación gráfica de las ecuaciones (5.30) y (5.31)

Si se considera que  $m = 1 [kg]$  y la fuerza de perturbación  $F_e = 10 [N]$  y se quisiera mantener el cuerpo estático en el primer caso se tiene que  $F_{hr} = 10 [N]$ ; mientras que para el segundo si  $k = 1$  entonces  $F_{hr} = 5 [N]$  lo cual es la mitad de la fuerza necesaria para contrarrestar  $F_e$  en el caso sin controlador. Bajo estas mismas condiciones si en  $t = 5 [s]$  la fuerza  $F_{hr}$  aumenta momentáneamente a  $5.1 [N]$ , el equilibrio se rompería y entonces la aceleración sería  $\ddot{x} = -0.2 [m/s^2]$  lo que indica que el objeto se movería en dirección contraria al vector  $F_{hr}$  hasta que una nueva fuerza se presentara. Este comportamiento puede verse a detalle en la Figura 5.9.

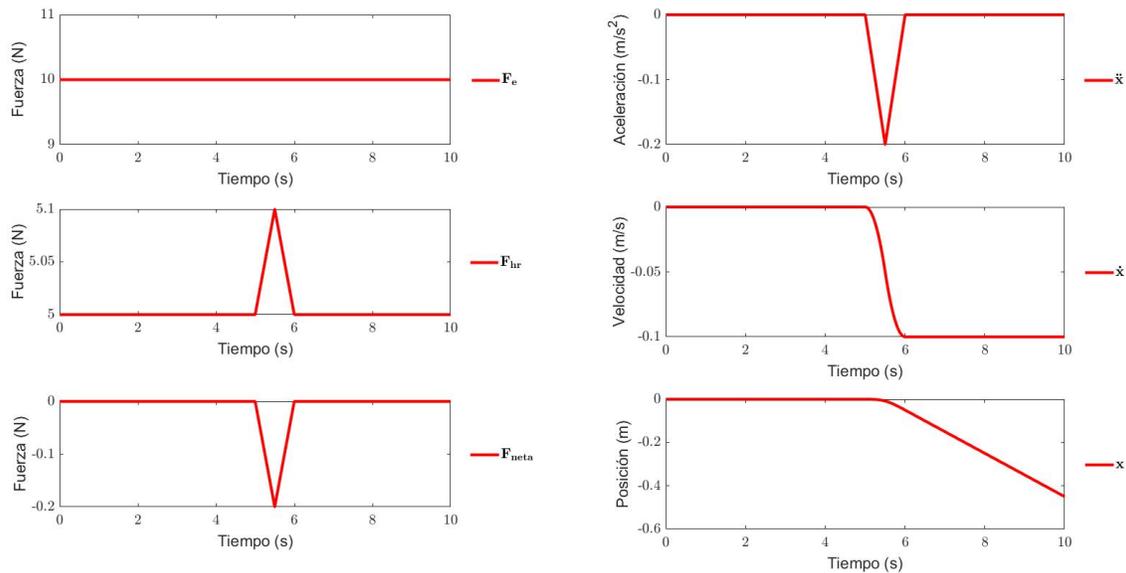


Figura 5.9: Quinta prueba. Dinámica del sistema

La finalidad de las pruebas realizadas fue mostrar de forma general el comportamiento y el motivo por el cual este controlador, pensado con el objetivo de replicar fuerzas para la aplicación de teleoperación y háptica, puede utilizarse en la amplificación de fuerza bajo la premisa de que  $F_{des} = 0$  y de que  $F_{hr}$  es una entrada de control. Como fue demostrado en las pruebas realizadas, el objeto se moverá en proporción a  $F_{hr}$  y en su misma dirección y sentido o de forma inversa dependiendo del valor de  $k$ , lo que también puede verse como un controlador de posición por fuerza. También se mostró que si el sistema se encuentra en movimiento la fuerza primero debe ser lo suficientemente grande para detener el objeto y cambiar el sentido de movimiento así como también se observó que si el objeto se encuentra en movimiento no se detendrá a menos que una fuerza se aplique para lograrlo. En el último apartado se observó que el controlador permite mantener el cuerpo en reposo al contrarrestar con una fuerza  $F_{hr}$  menor los efectos de alguna fuerza de perturbación  $F_e$ , incluso permitiendo mover el cuerpo con la existencia de la perturbación si  $F_{hr}$  es ligeramente mayor en valor absoluto a la necesaria para mantener el equilibrio. En todos los casos la amplificación del valor absoluto de la fuerza  $F_{hr}$  fue logrado bajo ciertas condiciones de la ganancia  $k$  en la fuerza de control  $F$ .

#### 5.1.4. Simulación del control proporcional por retroalimentación de fuerza externa sobre el modelo del exoesqueleto

Si se asume que la fuerza  $F_{hr}$  se produce por la interacción del cuerpo con la mano del usuario y  $F_e$  es producida por la interacción del cuerpo con una carga, es fácil reconocer que entonces el humano podría empujar o jalar la carga con mayor o menor facilidad de acuerdo a la ganancia del controlador. En [7] que hace uso de este controlador, las afirmaciones que se realizan son congruentes con lo observado si la fuerza medida en el sensor es  $F_{hr}$  y es la que dicta la intención de movimiento, por lo que para seguirla la ganancia  $k$  debe ser menor a  $-1$  de acuerdo a como se comenta en el documento; sin embargo, bajo el concepto utilizado cabe recordar que  $F_{hr}$  es la fuerza ejercida por el objeto en el ambiente, en este caso sobre la mano, de acuerdo a la convención empleada en [8], [4], [21] y [30], por lo que de acuerdo a la tercer ley de Newton entonces se puede definir

$$F_{control} = -F_{hr} \quad (5.34)$$

que es la fuerza que la mano ejerce sobre el cuerpo y entonces la ley de control empleada cuando  $F_{des} = 0$  estaría dada por

$$F = kF_{control} \quad (5.35)$$

por lo que si esta es la fuerza medida por el sensor, entonces para realizar un movimiento en su misma dirección  $k < -1$ . Es importante mencionar que entre mayor sea el valor absoluto de  $k$ , además de permitir que con valores de  $F_{hr}$  más pequeños se puedan empujar cargas más pesadas, el control de movimiento será más sensible al moverse grandes distancias incluso con pequeñas fuerzas.

En [7] el controlador utilizado es una combinación del control de posición cartesiano con el controlador proporcional por retroalimentación de fuerza externa, aunque ellos lo consideran como un control de fuerza explícito. También mencionan que el controlador por retroalimentación de fuerza externa puede utilizarse independientemente como control del exoesqueleto, lo que motivó el uso de éste en el modelo del exoesqueleto obtenido con la finalidad de entender sus beneficios e inconvenientes y la razón por la cual fue combinado con el control de posición.

Bajo el contexto de [7] el modelo del robot con interacción humana puede escribirse como

$$M(q)\ddot{q} + V(q, \dot{q}) + F(\dot{q}) + G(q) = \tau - J^T(q)\mathcal{F}_{hr} \quad (5.36)$$

donde el término  $\tau_d$  en esta ocasión no es considerado; y al realizar un mapeo en el espacio cartesiano la ecuación resultante es

$$M_{\mathcal{X}}(q)\ddot{\mathcal{X}} + V_{\mathcal{X}}(q, \dot{q}) + G_{\mathcal{X}}(q) = \mathcal{F} - \mathcal{F}_{hr} \quad (5.37)$$

donde  $\mathcal{F}$  asociada a la ley de control  $\tau$ , siguiendo el desarrollo de [7], queda definida como

$$\mathcal{F} = V_{\mathcal{X}}(q, \dot{q}) + G_{\mathcal{X}}(q) + \mathcal{F}_{des} + K(\mathcal{F}_{des} - \mathcal{F}_{hr}) \quad (5.38)$$

la cual representa un control por dinámica inversa que compensa los efectos de fuerza centrífuga, Coriolis, fricción y gravedad en el espacio cartesiano así como el control proporcional por retroalimentación de fuerza externa. Al formar el la ecuación del sistema en lazo cerrado para cuando  $\mathcal{F}_{des} = 0$  se obtiene

$$M_{\mathcal{X}}(q)\ddot{\mathcal{X}} = -(I + K)\mathcal{F}_{hr} \quad (5.39)$$

en lo que es importante enunciar las características de cada elemento de la ecuación. Al solo manejar tres grados de libertad, el vector de aceleración  $\ddot{\mathcal{X}}$  es de tamaño  $3 \times 1$  y se encuentra definido como  $\ddot{\mathcal{X}} = \ddot{p}_{hr} = [\ddot{p}_{hr_x} \quad \ddot{p}_{hr_y} \quad \ddot{p}_{hr_z}]^T$ , es decir, la aceleración del efector final respecto a  $S_0$ ; el vector de fuerza  $F_{hr}$  se define como  $F_{hr} = [F_{hr_x} \quad F_{hr_y} \quad F_{hr_z}]^T$ , fuerzas de interacción referenciadas a cada eje de  $S_0$ ;  $I$  es la matriz identidad y  $K$  es la matriz de ganancias conformada por la diagonal de elementos  $k_i$ , ambas matrices de  $3 \times 3$ .  $M_{\mathcal{X}}$  es el mapeo de la matriz  $M$ , de  $3 \times 3$ , la cual depende del vector  $q$  de variables articulares, y que generalmente no es diagonal por lo que las fuerzas y aceleraciones en las 3 direcciones están acopladas [32]. Siendo así, para la fuerza  $F_{hr_x}$  se tiene que

$$m_{\mathcal{X}_{11}}\ddot{p}_{hr_x} + m_{\mathcal{X}_{12}}\ddot{p}_{hr_y} + m_{\mathcal{X}_{13}}\ddot{p}_{hr_z} = -(1 + k_1)F_{hr_x} \quad (5.40)$$

donde ésta es una combinación de las aceleraciones en todos los ejes demostrando este acoplamiento. El ser  $M_{\mathcal{X}}$  una matriz simétrica positiva definida [36], implica que es una matriz diagonalizable como afirma [32] tal que

$$M_{\mathcal{X}} = PM_{diag}P^{-1} \quad (5.41)$$

donde  $M_{diag}$  es una matriz diagonal cuya diagonal principal está compuesta por los valores propios

de la matriz  $M_{\mathcal{X}}$ ,  $\lambda_i$ , y  $P$  es una matriz cuyas columnas son formadas por los vectores propios asociados a cada valor propio de  $M_{\mathcal{X}}$  [34], por lo que sustituyendo (5.41) en (5.39) se obtiene

$$PM_{diag}P^{-1}\ddot{\mathcal{X}} = -(I + K)\mathcal{F}_{hr} \quad (5.42)$$

premultiplicando por  $P^{-1}$

$$M_{diag}P^{-1}\ddot{\mathcal{X}} = P^{-1}(-(I - K)\mathcal{F}_{hr}) \quad (5.43)$$

y definiendo  $\mathcal{F}_{res} = -(I - K)\mathcal{F}_{hr}$  como la fuerza resultante en  $S_0$  además de considerar a  $P$  como una matriz de rotación que permite un cambio de coordenadas de un sistema  $S'_0$  a  $S_0$ , entonces

$$M_{diag}\ddot{\mathcal{X}}' = \mathcal{F}'_{res} \quad (5.44)$$

donde ya no existe acoplamiento entre las aceleraciones y fuerzas bajo este nuevo sistema, además al ser  $M_x$  positiva definida los valores propios que conforman  $M_{diag}$  siempre son positivos y como consecuencia cada ecuación vectorial de (5.44) es similar a (5.19) por lo que se comportan de la misma forma; aún así cabe hacer notar que cada elemento  $\lambda_i$  que conforma la diagonal de  $M_{diag}$  está en función del vector  $q$  por lo que cada uno de ellos puede ser considerado como una masa variable dependiente de la configuración del robot, así mismo la amplificación de fuerza no es fácil de diseñar al depender también cada elemento  $F'_{resi}$  de la configuración. Otras complicaciones en la implementación de este desarrollo teórico es que tanto la obtención de  $M_{diag}$  y  $P$  no es trivial debido a su también dependencia de  $q$ , por lo que cierto grado de conocimiento es necesario para disminuir el cómputo de estos elementos, incluso aún el manejo en  $S'_0$  no es del todo útil al ser también variable en función de  $q$ .

En [32] con la finalidad de simplificar el análisis y debido a que considera que el modelo de la matriz de inercia  $M_x$  es más complejo que lo necesario, se hace la suposición de que el sistema de referencia del efector final está alineado con los vectores propios de  $M_x$ , esto equivaldría a asumir que  $M_x = M_{diag}$  y entonces (5.34) puede ser reescrita como

$$M_{diag}(q)\mathcal{X} = -(I + K)\mathcal{F}_{hr} \quad (5.45)$$

en la que cada grado de libertad ya es independientemente, así (5.40) se simplifica como

$$\lambda_1 \ddot{x} = -(1 + k_1) F_{hr_x} \quad (5.46)$$

y de forma similar en los otros grados de libertad, por lo que cada ecuación es similar a (5.24) aunque para este caso  $\lambda(q)$  por lo que es variable aunque siempre positiva; siendo así, las pruebas presentadas anteriormente permiten entender su comportamiento aunque para este caso más complejo elegir las ganancias  $k_i$  ya no es una tarea sencilla por lo que mejor es sintonizarlas.

En [7] esta discusión no es planteada por lo que se asumió que la ecuación en lazo cerrado a la que se llega es (5.39) y entonces ninguna modificación a la ley de control o modelo de la planta fue realizada. El diagrama de bloques del controlador aplicado sobre el exoesqueleto se muestra en la Figura 5.10.

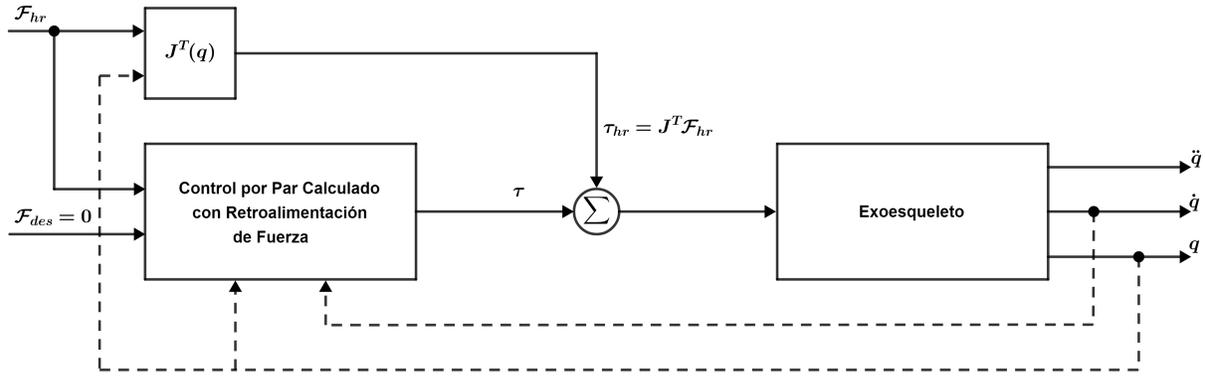


Figura 5.10: Control por retroalimentación de fuerza externa. Diagrama de bloques

Para observar los efectos del controlador sobre el exoesqueleto fueron realizadas diferentes pruebas, cuatro de ellas son mostradas a continuación. En la primera prueba se muestra el comportamiento del sistema al ser aplicada una fuerza constante por el humano en ausencia del controlador de fuerza, en la segunda prueba se muestra el comportamiento meramente inercial del sistema al aplicar una fuerza impulso en él, el acoplamiento entre grados de libertad así como el efecto de la matriz de ganancias. Por su parte, en las pruebas tres y cuatro, se consideran los efectos de una carga y se discuten las condiciones necesarias para que el exoesqueleto mantenga el equilibrio o se mueva de acuerdo a la fuerza humana además observar el efecto de amplificación de fuerza. En todos las pruebas presentadas se utilizó la configuración inicial  $q_{inicial} = [0 \ 0 \ -\pi/2]^T$  a menos que se indique lo contrario. Es importante recordar al lector que todas las posiciones, velocidades,

aceleraciones y fuerzas son medidas respecto al sistema  $S_0$ .

### Primera prueba

Como primer prueba se eligieron  $k_i = 0$  con la finalidad de observar el comportamiento del exoesqueleto sin controlador de fuerza, por su parte la fuerza de interacción se eligió como  $\mathcal{F}_{hr} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ , es decir, una fuerza aplicada en el efector final que trasladada al sistema cero da  $1[N]$  en sentido positivo de  $X_0$ , cabe recordar que la posición inicial fue la misma utilizada en pruebas anteriores. Los resultados se muestran en la Figura 5.11.

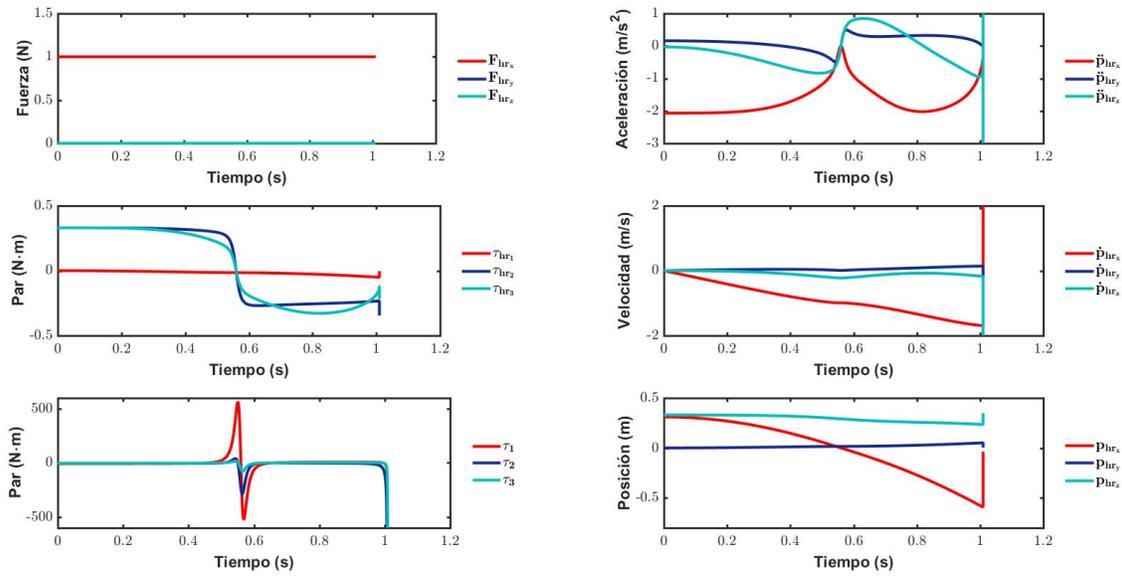


Figura 5.11: Primera prueba A. Dinámica del sistema

Donde en condiciones ideales se esperaría una aceleración y desplazamiento en sentido contrario a  $F_{hr_x}$ , lo que es logrado, sin embargo también se observa un ligero desplazamiento en los otros ejes como consecuencia del acoplamiento existente al tener en lazo cerrado la ecuación (5.39). Como segunda observación alrededor de  $t = 0.6$  [s] el comportamiento de los pares articulares así como la aceleración del efector final presentan un comportamiento extraño; un mapeo de  $\tau_{hr}$  en cero a pesar de que  $\mathcal{F}_{hr}$  se mantiene constante, lo que pareciera un impulso en  $\tau$  y una aceleración de casi  $0 [m/s^2]$  lo que implicaría que si  $F_{hr_x} = 1 [N]$  entonces bajo la ecuación (5.45) se tendría que  $\lambda_1 = 0$ , lo que da indicios de que se atraviesa por una configuración singular. Como última observación la

simulación se detiene en  $t = 1 [s]$  donde todas las gráficas presentan un impulso, y donde la posición alcanzada es de  $p_{hr} = [-0.5934 \quad 0.051 \quad 0.2342]^T$ , que al calcular su módulo da como resultado que  $|p_{hr}| = 0.64 [m]$ , la suma de las longitudes de los eslabones  $L_2$  y  $L_3$ , lo que implica que el exoesqueleto se encuentra completamente estirado y por lo que ya no le es posible moverse más hacia donde lo esta haciendo llegando a un límite del espacio de tarea, o visto de otra forma, una configuración singular.

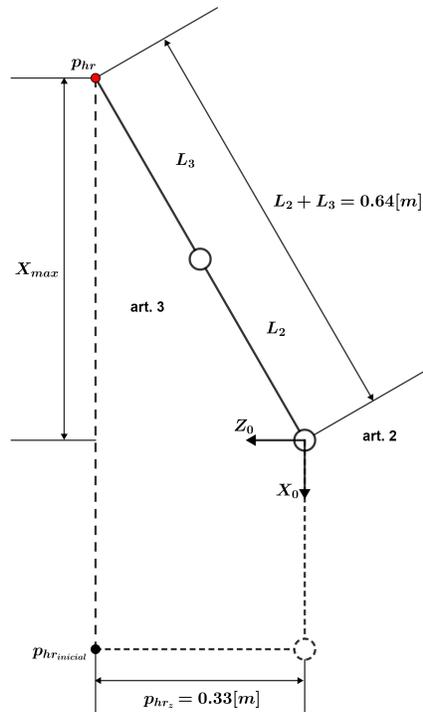


Figura 5.12: Primera prueba A. Representación física despreciando acoplamiento

Una mejor forma de entender esta situación es considerar que se parte de la posición inicial y aplicada la fuerza, aunque esta vez despreciando el acoplamiento, el efector final solo debería moverse en dirección de  $X_0$ , manteniendo la posición constante  $p_{hr_y} = 0 [m]$  y  $p_{hr_z} = 0.33 [m]$  ya que no hay fuerza aplicada en esos ejes; llegando a formar la configuración mostrada en la Figura 5.12 y donde se aprecia que el brazo estaría completamente extendido llegando a un valor máximo en  $X_0$ ,  $X_{max} = -0.5484 [m]$ , sin poder seguirse moviendo de acuerdo a la fuerza de interacción aplicada.

Para observar de forma más clara esta situación, se utilizó  $\mathcal{F}_{hr} = [-1 \ 0 \ 0]^T$  lo que es una fuerza con la misma magnitud pero sentido contrario a la utilizada anteriormente, obteniéndose lo siguiente

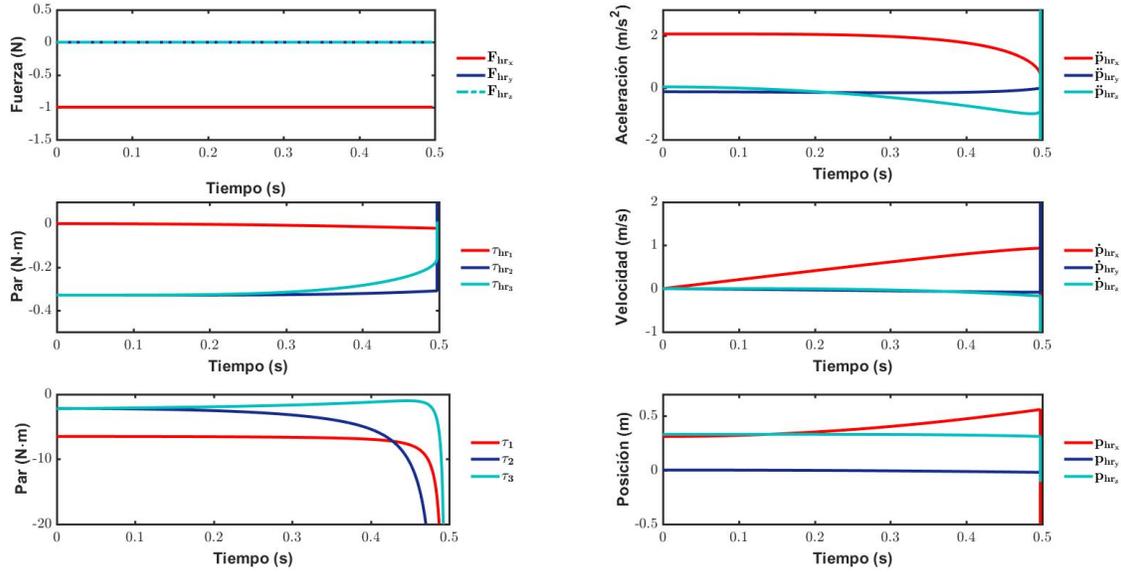


Figura 5.13: Primera prueba B. Dinámica del sistema

Donde se observa que el efector final se mueve en sentido contrario a  $F_{hr_x}$  como se esperaba, además la afectación sobre el movimiento en los ejes restantes es menor que en la prueba anterior. No se observa el paso por configuraciones singulares al mantenerse un comportamiento dentro de lo normal en todas las variables, sin embargo en  $t = 0.497$  [s] la simulación se detiene y las gráficas muestran un impulso en ese tiempo. La posición alcanzada en este tiempo es  $p_{hr} = [0.5592 \ -0.0213 \ 0.3106]^T$  con módulo  $|p_{hr}| = 0.64$  [m], por lo que de nuevo el brazo se encuentra completamente extendido y ya que el acoplamiento no es tan grande el valor se acerca más a  $X_{max} = 0.5484$  [m] aunque sigue siendo ligeramente mayor debido a que en el eje  $Z_0$  hubo un desplazamiento de  $0.33$  [m] a  $0.3106$  [m]. En esta prueba ya que el movimiento se realiza en dirección de la gravedad se llega antes a la posición máxima. El sistema colapsa ya que de acuerdo a la ecuación (5.45) se comporta como una masa en cada grado de libertad que como ya fue demostrado se seguirá moviendo en el sentido de la fuerza aplicada hasta que otra fuerza lo detenga; sin embargo,

el movimiento de cada masa está limitado por el espacio de tarea, por lo que le es imposible seguirse moviendo más allá de éste.

## Segunda prueba

En la prueba anterior es posible observar que al aplicar fuerzas del orden de  $1 [N]$  se logra una aceleración muy rápida en el sistema, además de que idealmente en cada grado de libertad el sistema se comporta como una masa sin fricción, las Figuras 5.14 a 5.16 muestran el comportamiento del sistema cuando una fuerza que presenta un impulso de 1 segundo con valor máximo de  $0.001 [N]$  es aplicada en cada eje de forma independiente, manteniendo  $k_i = 0$ .

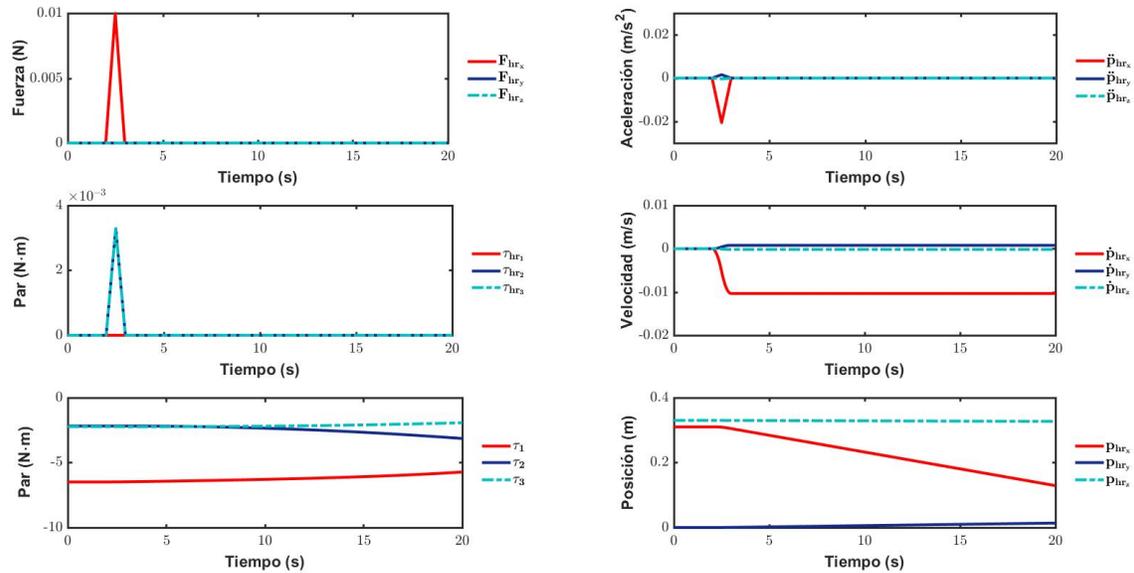


Figura 5.14: Segunda prueba A. Fuerza impulso  $F_{hr_x}$

Donde como se esperaba la mayor aceleración es en sentido opuesto al sentido de la  $F_{hr}$  aplicada además de que el objeto no deja de moverse a pesar de que la aplicación de la fuerza duró solo 1 [s] ya que la velocidad se mantiene constante. En todos los casos el efector final se acelera, aunque en menor medida, en los otros ejes donde no fue aplicada fuerza como consecuencia del acoplamiento. Se observa que la relación entre fuerza y aceleración es mayor en el eje  $X_0$  mientras que el eje  $Y_0$  es menor, esto implica que para mover el efector final en  $Y_0$  la fuerza aplicada debe ser mayor si se

requiere que se acelere de forma similar a como lo hace en los eje  $X_0$  y  $Z_0$ . Los valores de  $\tau$  en los tres casos se encuentra dentro de valores que pueden considerarse normales.

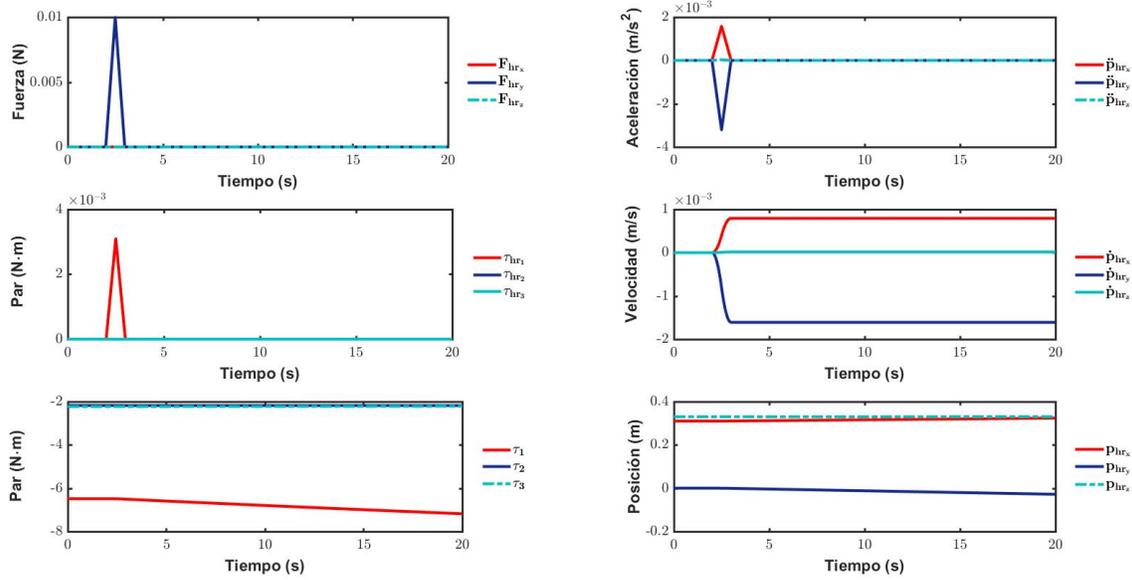


Figura 5.15: Segunda prueba A. Fuerza impulso  $F_{hry}$

Para completar esta prueba, en las Figuras 5.17 a 5.19 se muestra el comportamiento del sistema cuando la fuerza  $\mathcal{F}_{hr}$  es aplicada de la misma forma pero en este caso el controlador de amplificación de fuerza es implementado eligiendo  $k_i = 4$ .

En estos tres casos se observa que la aceleración es mayor y por lo tanto la posición alcanzada en un mismo intervalo de tiempo también lo es. Se puede notar que la dinámica en  $Y_0$  afecta de manera considerable la que ocurre en  $X_0$  aunque no ocurre lo contrario, es decir,  $F_{hry}$  provoca una aceleración y desplazamiento considerables en  $X_0$ , mientras que  $F_{hrx}$  causa un menor desplazamiento en  $Y_0$ . Esto implica que se debe tener cuidado en las ganancias elegidas o que el usuario debe estar consciente del funcionamiento del controlador, de tal forma que compense el movimiento no deseado en las otras direcciones. En comparación con figuras 5.14 a 5.16 es posible notar que a pesar de que  $F_{hr}$  aplicada en cada eje independiente no cambia, la aceleración es resultado de aplicar, en este caso particular, 5 veces  $F_{hr}$ .

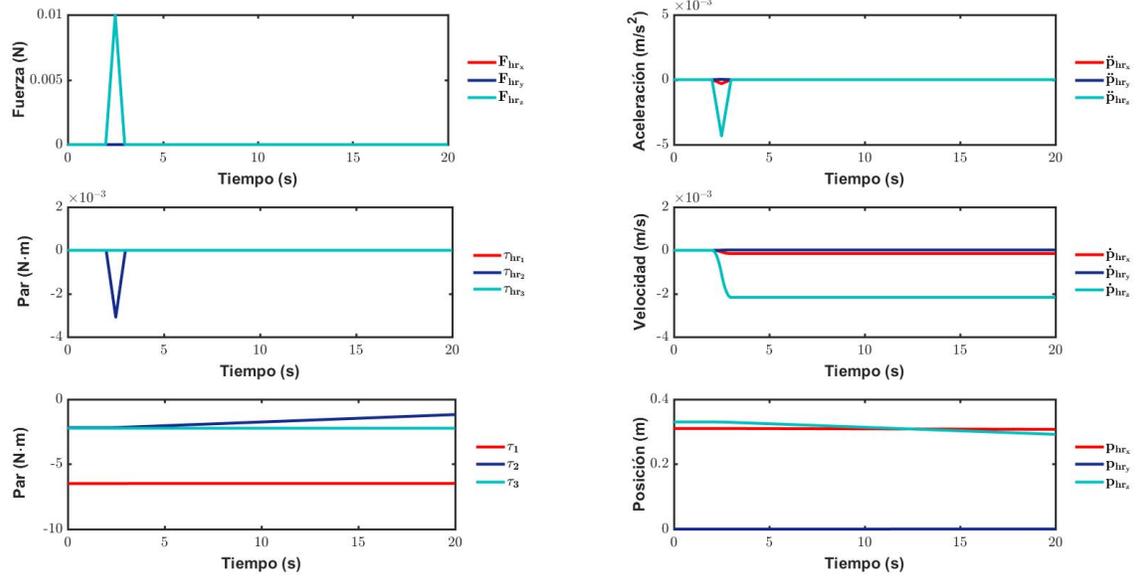


Figura 5.16: Segunda prueba A. Fuerza impulso  $F_{hr_z}$

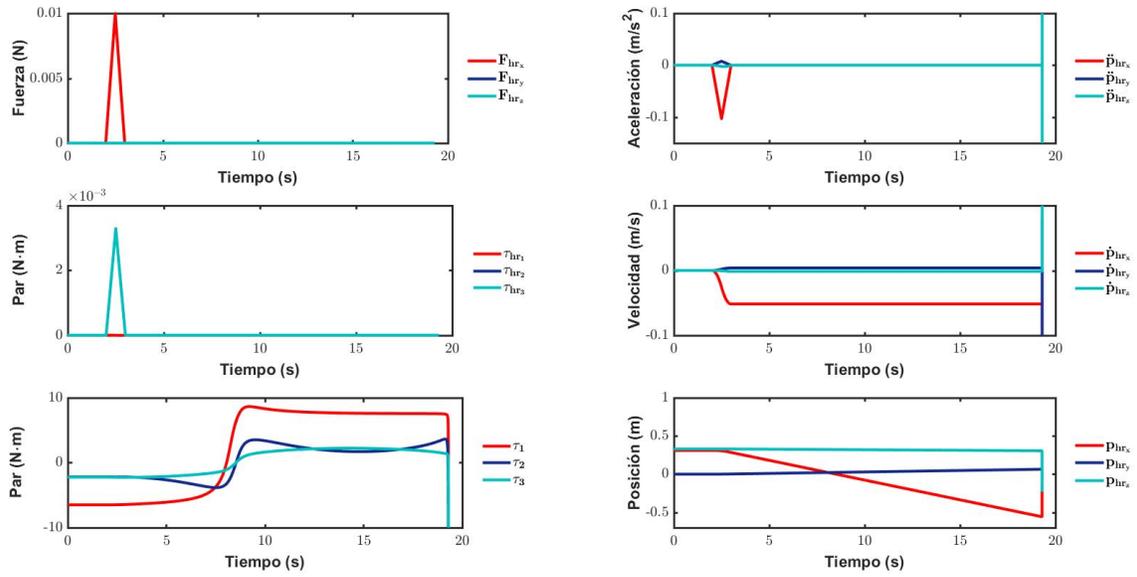


Figura 5.17: Segunda prueba B. Fuerza impulso  $F_{hr_x}$

En todas las pruebas realizadas se muestra que al aplicar una fuerza en el efector final, éste seguirá su movimiento hasta llegar eventualmente al límite del espacio de tarea causando una falla, por lo que de nuevo se requeriría que el usuario fuera capaz de conocer las capacidades del exoesqueleto de tal forma que siempre ejerciera fuerzas en él para mantenerlo en el espacio de tarea. En ausencia de carga, incluso  $K$  podría elegirse para aumentar la inercia del exoesqueleto y causar que para moverlo se requiriera más fuerza de tal forma que el usuario tuviera tiempo de ejercer fuerzas que mantuviesen el efector final dentro de los límites del espacio de tarea.

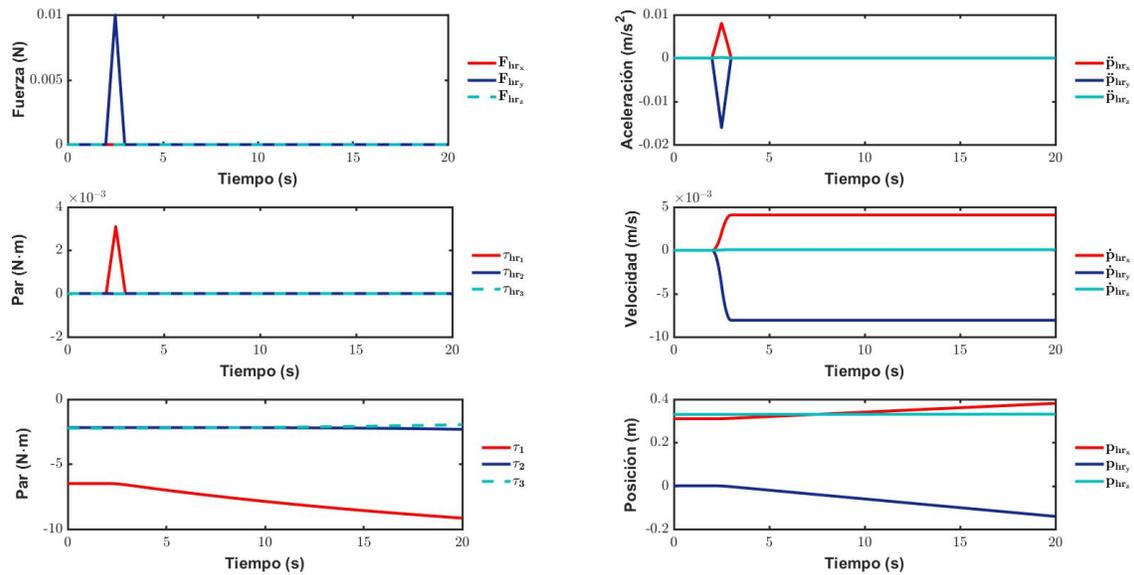


Figura 5.18: Segunda prueba B. Fuerza impulso  $F_{hry}$

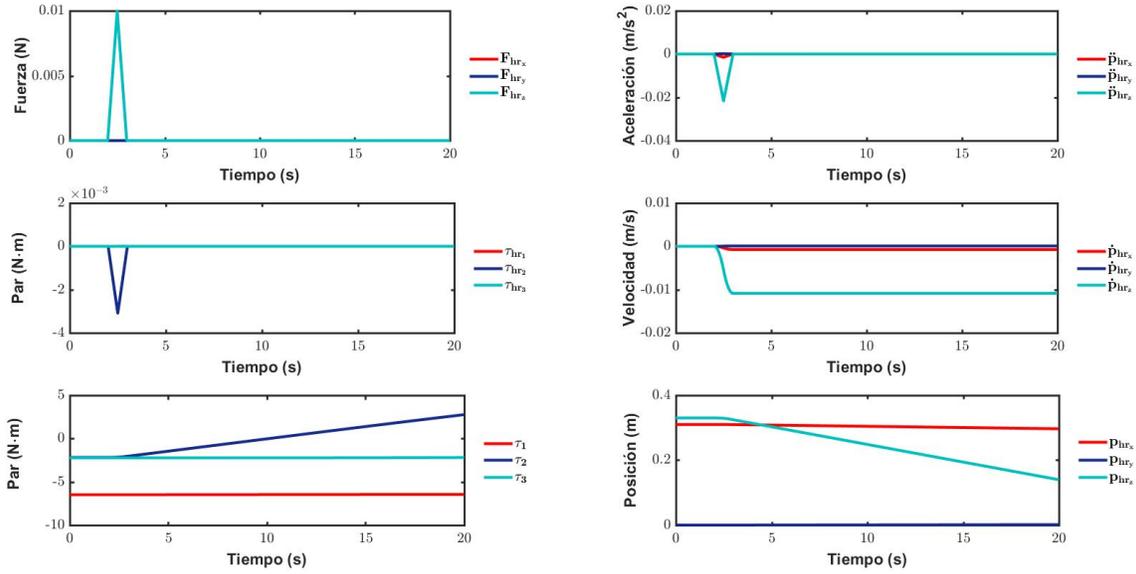


Figura 5.19: Segunda prueba B. Fuerza impulso en  $F_{hr_z}$

### Tercera prueba

Tanto esta prueba como la siguiente muestran el comportamiento del sistema cuando existe una carga, primero para mantener el equilibrio en la posición inicial y segundo para mover la carga en el espacio.

De acuerdo a [21] se puede definir el efecto de una carga como (5.47) donde  $\mathcal{F}_e$  es el vector de fuerzas y momentos producidos por la carga en el exoesqueleto y  $\mathcal{F}_{carga}$  y  $\mathcal{F}_{inerxia}$  los vectores de fuerzas y momentos producidos por la gravedad y a la inercia del cuerpo.

$$\mathcal{F}_e = \mathcal{F}_{carga} + \mathcal{F}_{inerxia} \quad (5.47)$$

De tal forma que al mapearse en el espacio articular a través del jacobiano para representar sus efectos, la ecuación dinámica del exoesqueleto se completa como

$$M(q)\ddot{q} + V(q, \dot{q}) + F(\dot{q}) + G(q) = \tau - J^T(q)\mathcal{F}_{hr} + J^T(q)\mathcal{F}_e \quad (5.48)$$

y el sistema en en lazo cerrado, bajo la misma ley de control utilizada en este apartado, queda

descrito por la ecuación

$$M_{\mathcal{X}}(q)\ddot{\mathcal{X}} = -(I + K)\mathcal{F}_{hr} + \mathcal{F}_e \quad (5.49)$$

Similar al caso de un cuerpo con un grado de libertad, para mantener el equilibrio la siguiente ecuación debe cumplirse

$$-(I + K)\mathcal{F}_{hr} + \mathcal{F}_e = 0 \quad (5.50)$$

despejando a  $\mathcal{F}_{hr}$

$$\mathcal{F}_{hr} = (I + K)^{-1}\mathcal{F}_e \quad (5.51)$$

donde hacer  $K = 0$  equivale a cancelar los efectos del controlador y por tanto  $\mathcal{F}_{hr} = \mathcal{F}_e$ , en cambio, utilizando el controlador con una ganancia de 4 en la diagonal de  $K$ , por poner un ejemplo, entonces se cumple que  $F_{hr_i} = F_{e_i}/5$ , es decir, con el controlador se necesitaría causar entre el usuario y el exoesqueleto sólo 1/5 del valor total de la fuerza producida por la carga.

A continuación se muestran los resultados obtenidos en la situación particular donde se tienen condiciones iniciales de velocidad y aceleración nulas y cuando  $\mathcal{F}_e = [10 \ 10 \ 10]^T$  con  $k_i = 0$  y  $k_i = 4$  partiendo de la posición inicial de carga. Por facilidad se consideró que  $\mathcal{F}_e$  es la fuerza de la carga medida en el sistema de referencia del efector final trasladada al sistema cero por lo que para su mapeo se utilizó el mismo jacobiano que para  $\mathcal{F}_{hr}$ . A su vez,  $\mathcal{F}_{hr}$  se eligió para mantener el equilibrio en el primer caso como  $F_{hr} = [10 \ 10 \ 10]^T$  mientras que para el segundo  $\mathcal{F}_{hr} = [2 \ 2 \ 2]^T$ .

Tanto la Figura 5.20 como 5.21 muestran que el equilibrio estático es logrado, sin embargo mientras que la fuerza de interacción entre humano y exoesqueleto,  $\mathcal{F}_{hr}$ , es de 10 [N] en todas las direcciones en el primer caso, cuando el controlador es implementado con  $k_i = 4$  esta fuerza se reduce hasta 2 [N] y por consecuencia  $\tau_{hr}$  en el segundo caso también se reduce mientras que la ley de control  $\tau$  debe proveer el par restante para compensar términos gravitacionales y en cierta medida el par producido por la carga.

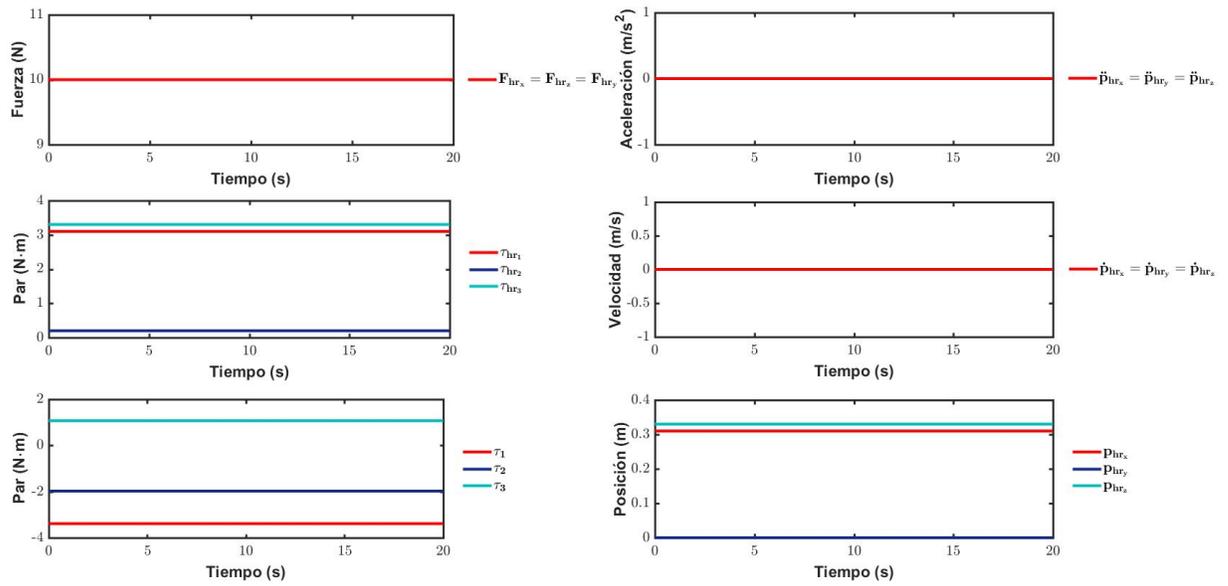


Figura 5.20: Tercera prueba A. Equilibrio estático del sistema sin controlador

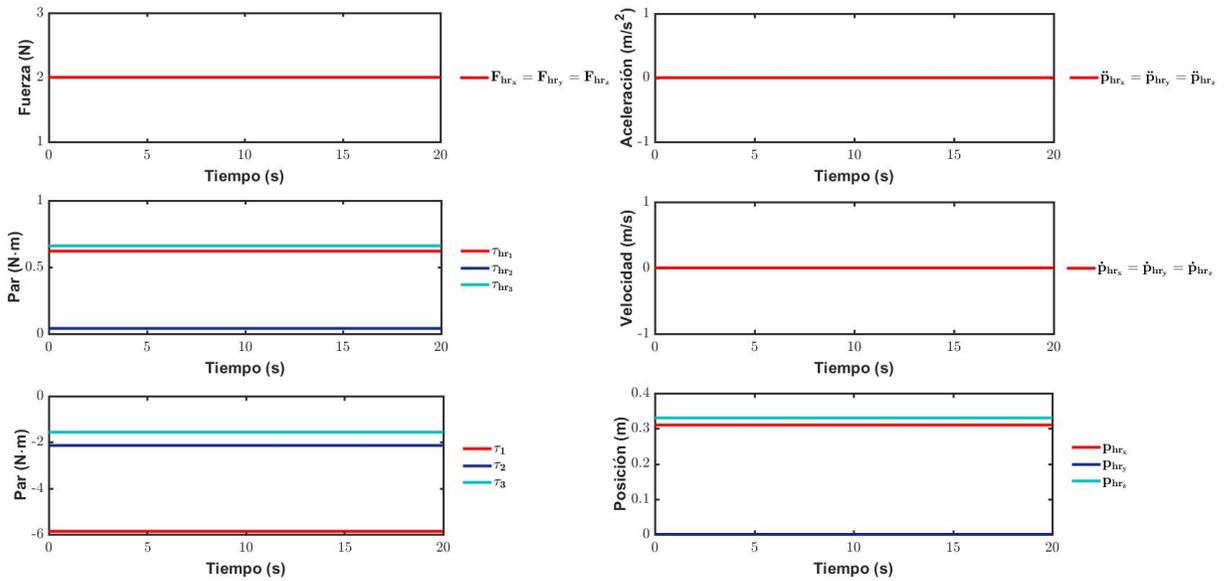


Figura 5.21: Tercera prueba B. Equilibrio estático del sistema con controlador

### Cuarta prueba

En esta última prueba se consideró que  $\mathcal{F}_e$  solo actúa en sentido positivo del eje  $X_0$ ,  $\mathcal{F}_e = [10 \ 0 \ 0]^T$ , y el usuario quiere levantar la carga, es decir, moverla en sentido negativo del eje  $X_0$ . Similar al ejemplo analizado de solo grado de libertad, para lograr esto, basta que la fuerza resultante definida como  $\mathcal{F}_{result} = -(I + K)\mathcal{F}_{hr} + \mathcal{F}_e$  en (5.49) sea ligeramente negativa en el eje  $X_0$  lo que bajo la ganancia propuesta de  $k_i = 4$  se logra si  $F_{hr_x} > 2$ . Debido al comportamiento inercial del sistema por efecto del controlador, no es necesario que en todo tiempo se mantenga diferente de cero  $F_{result_x}$ , basta que sea ligeramente diferente en un intervalo de tiempo pequeño. El comportamiento descrito puede observarse en la Figura 5.22.

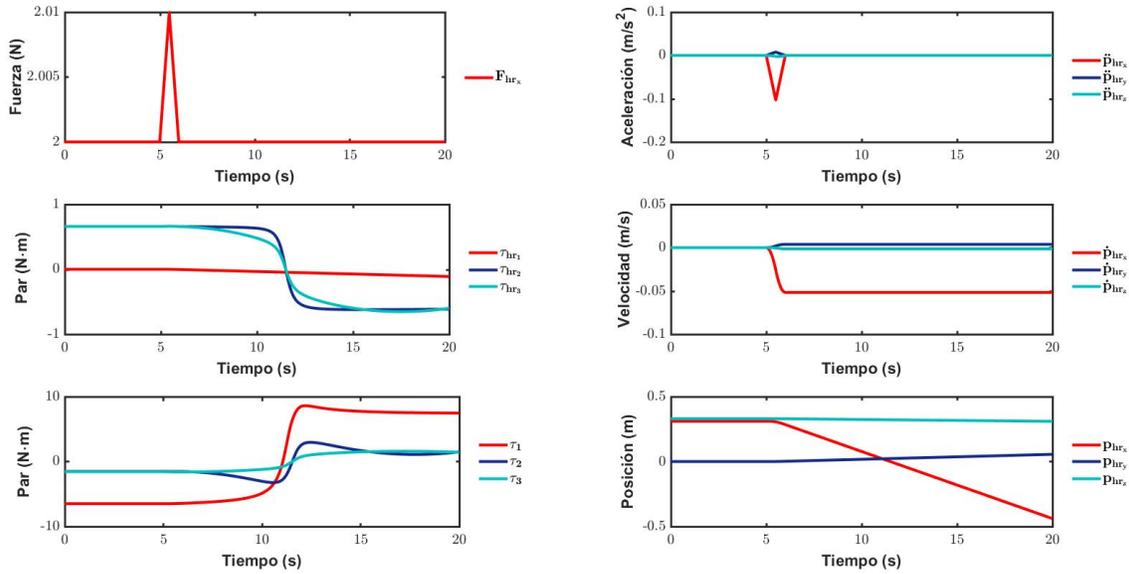


Figura 5.22: Cuarta prueba. Dinámica del sistema en movimiento con controlador

Donde se mantiene el equilibrio con  $F_{hr_x} = 2$  hasta  $t = 5 [s]$  cuando se presenta un ligero impulso de  $2.01 [N]$  que se traduce en una ligera aceleración en sentido opuesto de duración de  $1 [s]$  por lo que existe una velocidad que se mantiene constante y el objeto no deja de moverse a pesar de que ya no existe una fuerza de interacción aplicada, lo que se traduce a su vez en que el exoesqueleto mueve el objeto que genera  $F_{e_x} = 10 [N]$  con una fuerza aplicada por el humano, casi imperceptible, de  $F_{control_x} = -F_{hr_x} = -2.01 [N]$  y que hace visible el efecto de amplificación de fuerza.

### 5.1.5. Conclusiones generales y aplicaciones del control por retroalimentación de fuerza externa

A lo largo de este apartado se ha descrito y ejemplificado la utilización del controlador propuesto en [4] para la amplificación de fuerza, como fue utilizado en [7] al definir  $\mathcal{F}_{des} = 0$ , de una forma entendible y sin tener conocimiento profundo de teorías como el control de fuerza explícito o control por impedancia que engloban el control de [4] de una u otra forma. Se aplicó la ley de control sobre el exoesqueleto obteniendo simulaciones que demuestran que el controlador bajo ciertas características funciona como un control de posición por fuerza. Independientemente de si  $\mathcal{F}_{hr}$  o  $\mathcal{F}_{control}$  es medida, de acuerdo al valor de  $K$  el controlador realizará un movimiento en su dirección, en contra, manteniendo el equilibrio estático, aumentando la inercia  $M_{\mathcal{X}}$  o disminuyéndola. Se observó también que el acoplamiento de los grados de libertad en el espacio cartesiano a pesar de ser notable podría ser regulado por la fuerza de interacción entre el humano y exoesqueleto, sin embargo presenta un inconveniente: al no tener un elemento de fricción el sistema se mueve hasta llegar al límite del espacio de tarea por lo que requiere que el usuario sea consciente de las limitantes del exoesqueleto y mantenga el efector final en el espacio operacional ejerciendo una fuerza de interacción de forma imperativa. Otro inconveniente que se menciona en [4] es que si el exoesqueleto esta acoplado al conjunto torso hombro, éste generará fuerzas en él pudiendo lesionarlo, por lo que más conveniente sería utilizarlo como parte de un exoesqueleto completo de tal forma que las fuerzas actuando en el cuerpo humano sean mínimas.

En condiciones ideales este controlador podría utilizarse en la industria y construcción, en la vida cotidiana e incluso en labores de búsqueda y rescate, donde el ambiente no es controlado y es necesaria la inteligencia humana para ayudar a las personas a realizar tareas que demanden fuerza en las extremidades superiores que presenten un desgaste físico, daño o simplemente no puedan ser logradas por la condición física del usuario de tal forma que las tareas puedan ser realizadas y que los trastornos musculoesqueléticos sean prevenidos. En el ámbito de rehabilitación este mismo controlador puede ser utilizado para realizar ejercicios de fuerza en el tren superior de forma ergonómica, esto es por ejemplo, eligiendo el valor de  $K$  para que con la misma fuerza del usuario el efector final se mueva menos al aumentar la inercia aparente del exoesqueleto.

## 5.2. Control de posición por par calculado en el espacio cartesiano con control de fuerza explícito

El control por retroalimentación de fuerza propuesto en [4] puede ser considerado una particularidad del control por fuerza explícito presentado en [32] y que como fue mostrado presenta algunas deficiencias en su utilización sobre un exoesqueleto de miembro superior; en [7] se propuso un controlador basado en el enfoque paralelo propuesto por [6], que será discutido a continuación, logrando que el funcionamiento del exoesqueleto sea mejorado en aplicaciones de interacción con el humano.

En [6] se propuso y estudió el funcionamiento de un control de fuerza/posición paralelo, esto como una opción diferente al control híbrido de posición/fuerza [8] [27], el cual partiendo de la tarea requerida por medio de las llamadas matrices de selección realiza el control de fuerza o de posición de forma independiente en un grado de libertad, es decir, en un momento dado es posible controlar la fuerza o la posición (nunca las dos de forma simultánea) dependiendo de la tarea que se realice y, que por tanto, su utilización en tareas de movimiento restringido es motivada.

El enfoque de [6] también propuesto para tareas de movimiento restringido, o en contacto con el ambiente, parte de la hipótesis que es posible controlar las variables de posición y fuerza de forma simultánea de tal forma que la tarea realizada no deba ser tomada en cuenta y permite robustecer el comportamiento del sistema ante fuerzas de interacción no consideradas. Para prevenir conflicto entre los controladores de posición y fuerza, se le da prioridad al segundo de tal forma que, antes de buscar seguir una trayectoria deseada, se prevenga principalmente la recuperación automática ante colisiones; esta prioridad en el controlador es lograda utilizando un control Proporcional Integral (PI) de fuerza en conjunto de un control Proporcional Derivativo (PD) de posición. Para un estudio más detallado ver [6].

EN [7] se propuso un enfoque similar en el que controladores de posición y fuerza son combinados basándose en el mismo principio de prioridad aunque para una aplicación distinta, amplificación de fuerza humana y no robustez en ambientes no controlados. Los controladores utilizados en paralelo son el control de posición cartesiano y el control proporcional por retroalimentación de fuerza, ambos discutidos anteriormente.

La prioridad en el controlador de fuerza es realizada, en este enfoque, utilizando ganancias pequeñas en el controlador de posición además de que éste es utilizado no para seguir una trayectoria sino para mantener una posición fija en ausencia de una fuerza de interacción con el humano, es decir, evitar el problema que ya fue visualizado en el que el efector final se comporta como una

inercia, y evitar así configuraciones singulares.

Con la finalidad de discutir el controlador, será útil reescribir la ecuación del exoesqueleto en contacto con el humano

$$M(q)\ddot{q} + V(q, \dot{q}) + F(\dot{q}) + G(q) = \tau - J^T(q)\mathcal{F}_{hr} \quad (5.52)$$

con la ley de control de posición por par calculado en el espacio cartesiano

$$\tau_p = MJ^{-1}(\ddot{\mathcal{X}}_d - \dot{J}\dot{q} + K_v\dot{e}_{\mathcal{X}} + K_p e_{\mathcal{X}}) + N \quad (5.53)$$

y la ley de control proporcional por retroalimentación de fuerza

$$\tau_f = J^T \mathcal{F}_{des} + J^T K(\mathcal{F}_{des} - \mathcal{F}_{hr}) \quad (5.54)$$

la ley de control completa es la suma de (5.53) y (5.54)

$$\tau = MJ^{-1}(\ddot{\mathcal{X}}_d - \dot{J}\dot{q} + K_v\dot{e}_{\mathcal{X}} + K_p e_{\mathcal{X}}) + N + J^T \mathcal{F}_{des} + J^T K(\mathcal{F}_{des} - \mathcal{F}_{hr}) \quad (5.55)$$

sustituyendo (5.55) en (5.52) y simplificando los términos iguales, se obtiene que

$$M(q)\ddot{q} = MJ^{-1}(\ddot{\mathcal{X}}_d - \dot{J}\dot{q} + K_v\dot{e}_{\mathcal{X}} + K_p e_{\mathcal{X}}) + J^T \mathcal{F}_{des} + J^T K(\mathcal{F}_{des} - \mathcal{F}_{hr}) - J^T(q)\mathcal{F}_{hr} \quad (5.56)$$

expresando el vector de aceleración angular  $\ddot{q}$  en términos de la aceleración cartesiana  $\ddot{\mathcal{X}}$  entonces

$$MJ^{-1}(\ddot{\mathcal{X}} - \dot{J}\dot{q}) = MJ^{-1}(\ddot{\mathcal{X}}_d - \dot{J}\dot{q} + K_v\dot{e}_{\mathcal{X}} + K_p e_{\mathcal{X}}) + J^T \mathcal{F}_{des} + J^T K(\mathcal{F}_{des} - \mathcal{F}_{hr}) - J^T(q)\mathcal{F}_{hr} \quad (5.57)$$

donde otra simplificación puede ser realizada y obtener

$$MJ^{-1}\ddot{\mathcal{X}} = MJ^{-1}(\ddot{\mathcal{X}}_d + K_v\dot{e}_{\mathcal{X}} + K_p e_{\mathcal{X}}) + J^T \mathcal{F}_{des} + J^T K(\mathcal{F}_{des} - \mathcal{F}_{hr}) - J^T(q)\mathcal{F}_{hr} \quad (5.58)$$

y multiplicando ambos lados de la ecuación por  $J^{-T}$  para trabajar en el espacio cartesiano, se tiene que

$$M_{\mathcal{X}}\ddot{\mathcal{X}} = M_{\mathcal{X}}(\ddot{\mathcal{X}}_d + K_v\dot{e}_{\mathcal{X}} + K_p e_{\mathcal{X}}) + \mathcal{F}_{des} + K(\mathcal{F}_{des} - \mathcal{F}_{hr}) - \mathcal{F}_{hr} \quad (5.59)$$

Finalmente expresando la ecuación (5.59) en función de los errores de posición y fuerza se tiene que en lazo cerrado

$$M_{\mathcal{X}}(\ddot{e}_{\mathcal{X}} + K_v \dot{e}_{\mathcal{X}} + K_p e_{\mathcal{X}}) + (I + K)e_f = 0 \quad (5.60)$$

donde se logra diferenciar los efectos de ambos controladores, recordando que para la aplicación en particular se define  $\mathcal{F}_{des} = 0$ , por lo que en el caso de que no exista una fuerza de interacción  $\mathcal{F}_{hr}$  se obtiene el mismo comportamiento que el control de posición cartesiano por par calculado, que en ausencia de perturbaciones permitiría que la trayectoria deseada fuera alcanzada. Por otro lado, si la ganancia  $K$  es elegida como  $-I$  también se tiene el mismo comportamiento del control de posición independiente pero en este caso permitiría que la fuerza de interacción, de existir, fuera compensada; lo que resulta en una mejora en el controlador de posición para la aplicación de rehabilitación ya que aunque el usuario ejerciera una fuerza tal que dificultara el seguimiento de trayectorias en el caso de utilizar el controlador de posición de forma individual, en este caso el sistema se robustece permitiendo un mejor desempeño, siempre y cuando los motores sean capaces de alcanzar los pares de la ley de control.

Para analizar de mejor forma lo que sucede cuando la fuerza de interacción existe, la ecuación (5.54) puede reescribirse al considerar  $\ddot{\mathcal{X}}_{des} = 0$  y  $\dot{\mathcal{X}}_{des} = 0$  cuando una posición constante es requerida, obteniendo que

$$M_{\mathcal{X}}\ddot{\mathcal{X}} + M_{\mathcal{X}}K_v\dot{\mathcal{X}} - M_{\mathcal{X}}K_p e_{\mathcal{X}} = (I + K)e_f \quad (5.61)$$

sustituyendo el valor de  $\mathcal{F}_{des} = 0$  y reordenando la ecuación se tiene que

$$M_{\mathcal{X}}\ddot{\mathcal{X}} + M_{\mathcal{X}}K_v\dot{\mathcal{X}} + M_{\mathcal{X}}K_p\mathcal{X} = M_{\mathcal{X}}K_p\mathcal{X}_d - (I + K)\mathcal{F}_{hr} \quad (5.62)$$

Si se hace la suposición de que  $M_{\mathcal{X}}$  es la matriz  $M_{diag}$  con su diagonal conformada por los valores propios de  $M_{\mathcal{X}}$  y considerando que las demás matrices también son elegidas como diagonales, la ecuación anterior puede reescribirse como

$$M_{diag}\ddot{\mathcal{X}} + K_{Mv}\dot{\mathcal{X}} + K_{Mp}\mathcal{X} = \mathcal{F}_{\mathcal{X}d} - (I + K)\mathcal{F}_{hr} \quad (5.63)$$

con  $K_{Mv} = M_{diag}K_v$ ,  $K_{Mp} = M_{diag}K_p$  y  $\mathcal{F}_{\mathcal{X}d} = M_{diag}K_p\mathcal{X}_d$ . Por lo que la dinámica en cada grado de libertad vendría dada por

$$\lambda_i \ddot{x} + k_{mvi} \dot{x} + k_{mpi} x = F_{id} - (1 + k_i) F_{hr_i} \quad (5.64)$$

ecuación diferencial de segundo orden no homogénea con coeficientes variables (pero acotados) y que por tanto no puede resolverse fácilmente, sin embargo su estabilidad está asegurada mientras las ganancias del control de posición sean elegidas adecuadamente debido a las características de la matriz  $M_{diag}$ ; se observa también, así como desde (5.63), que la amplificación de fuerza o modificación de inercia se mantiene por medio de la ganancia  $K$  y que en ausencia de interacción humana se mantiene una fuerza, que aunque variable, está acotada para alcanzar la posición deseada  $\mathcal{X}_d$ . Lo más importante que provee este sistema de control, al observar (5.64), es que a diferencia del resultado para la ley de fuerza independiente, ésta en cambio provee de fricción y el efecto de un resorte lo que asegura que al ejercerle cualquier fuerza al sistema no se mueva por siempre; sin embargo una mayor fuerza de interacción es requerida, por lo que elegir las ganancias del controlador de posición pequeñas en comparación de la ganancia del controlador de fuerza, permitiría que el sistema se moviera de forma similar a que si solo existiera el controlador de fuerza aunque regresándolo a una posición deseada una vez que la interacción humana desapareciera. El diagrama de bloques que representa este esquema de control se muestra en la Figura 5.23.

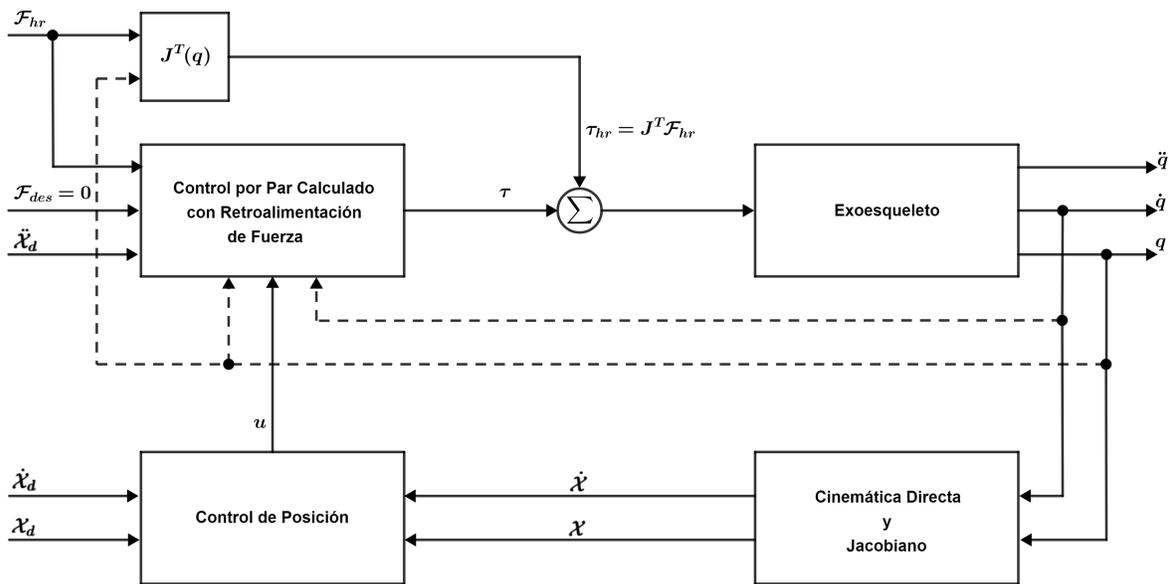


Figura 5.23: Control de posición por par calculado en el espacio cartesiano con control de fuerza explícito. Diagrama de bloques

### 5.2.1. Simulación del control de posición por par calculado en el espacio cartesiano con control de fuerza explícito sobre el modelo del exoesqueleto

En las pruebas siguientes se muestra el comportamiento del sistema, empezando por la regulación de una posición deseada en ausencia de la fuerza de interacción y en ausencia del controlador de fuerza, para tener una base con la cual comparar los efectos de una fuerza de interacción constante sin el controlador de fuerza y con él, mostrado en las pruebas 1 a 3. En las pruebas 4 y 5 se ejemplifica el efecto de amplificación de fuerza bajo los efectos de una carga, al buscar mantener el equilibrio estático de todo el sistema para posteriormente mover el exoesqueleto en conjunto con la carga. En todos los casos se partió de la misma posición inicial además de que ésta también fue elegida como la posición deseada; las ganancias del controlador de posición se eligieron para un comportamiento críticamente amortiguado como  $k_{p_i} = 1$  y  $k_{v_i} = 2$ . Es importante mencionar nuevamente que todas las posiciones, velocidades, aceleraciones y fuerzas son medidas respecto al sistema  $S_0$ .

#### Primera prueba

El comportamiento del sistema cuando no existe interacción externa ni carga, se muestra en la Figura 5.24 donde se observa que la posición inicial se mantiene indefinidamente con la ley de control ejerciendo pares cercanos a  $-2 [N \cdot m]$  en articulaciones 2 y 3 y poco más de  $-5 [N \cdot m]$  en la articulación 1, que es la que debe cargar más peso.

#### Segunda prueba

En esta prueba, bajo la mismas condiciones que la anterior, se consideró el efecto de una fuerza de interacción constante  $F_{hr_x} = 0.1[N]$ , obteniendo los resultados mostrados en la Figura 5.25. En ella dos cosas importantes pueden ser observadas; en primer lugar la posición es proporcional a la fuerza, es decir, a una fuerza constante se llega a una posición constante de una manera amortiguada; también se observa que el acoplamiento en los ejes  $X_0$  y  $Z_0$  es considerable ya que el movimiento en el eje  $Z_0$  al ejercer una fuerza en  $X_0$  es notable, esto indica que el usuario debería tomar las acciones correctivas necesarias para contrarestar el efecto del acoplamiento.

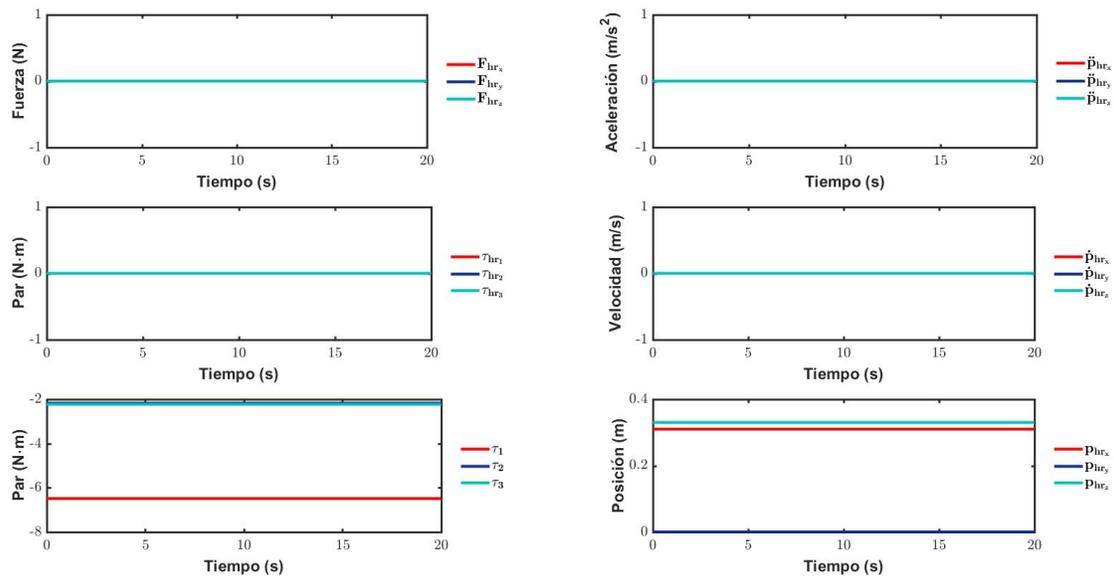


Figura 5.24: Primera prueba. Dinámica del sistema

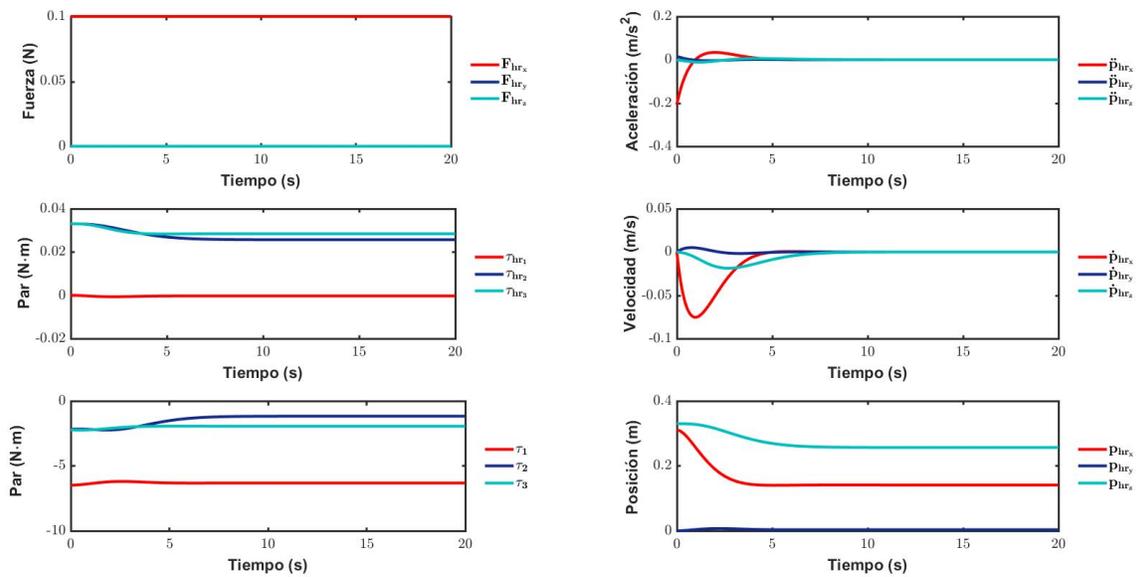


Figura 5.25: Segunda prueba A. Dinámica del sistema,  $F_{hr_x} = 0.1 [N]$

Para completar el análisis se aplicaron fuerzas  $F_{hr_y}$  y  $F_{hr_z}$  del orden de  $0.1 [N]$  constantes de forma independiente, mostrándose los resultados obtenidos en las Figuras 5.26 y 5.27. Cuando la fuerza es aplicada en el eje  $Y_0$  se observa que aunque el efector final se mueve en sentido contrario lo hace en menor proporción que en el caso anterior, se observa también que un movimiento en igual magnitud en el eje  $X_0$  también se presenta, es decir, una fuerza aplicada en  $Y_0$  genera un desplazamiento de magnitud similar tanto en  $Y_0$  como en  $X_0$  lo que debería ser compensado por el usuario. Por su parte una fuerza en el eje  $Z_0$  muestra que el efector final se mueve proporcionalmente en sentido contrario como se espera, presentando el menor acoplamiento al observarse que las posiciones en los otros ejes se ven muy poco afectadas.

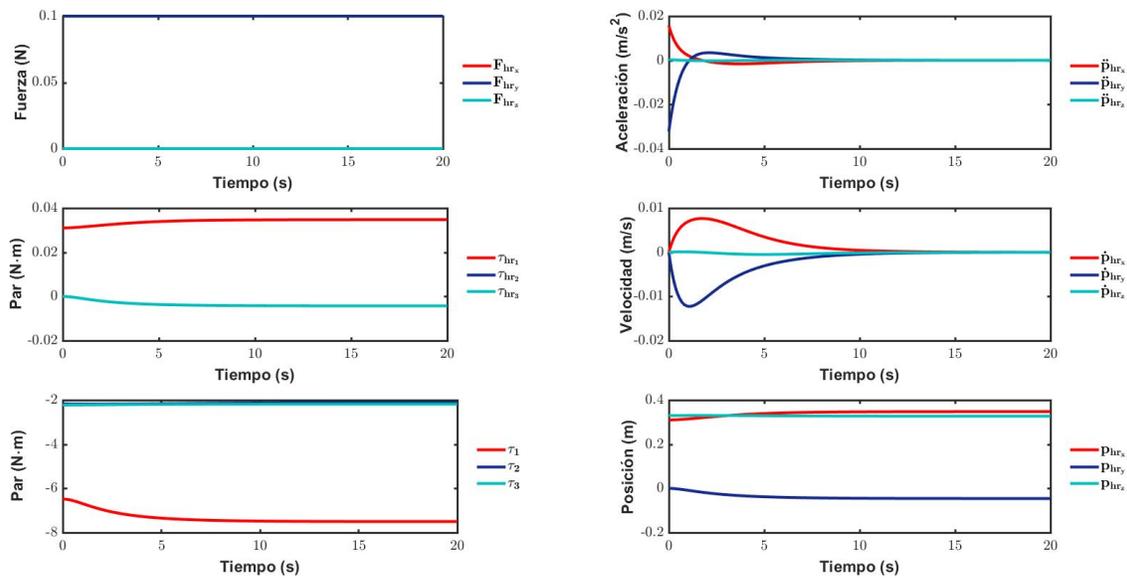


Figura 5.26: Segunda prueba B. Dinámica del sistema,  $F_{hr_y} = 0.1 [N]$

### Tercera prueba

Para demostrar el efecto de amplificación de fuerza cuando el controlador de fuerza está activo, se aplicó la misma fuerza  $F_{hr_x}$  que en la prueba anterior aunque esta vez variando el valor de la diagonal de la matriz de ganancia de fuerza  $K$ , obteniéndose lo mostrado en las Figuras 5.28 y 5.29.

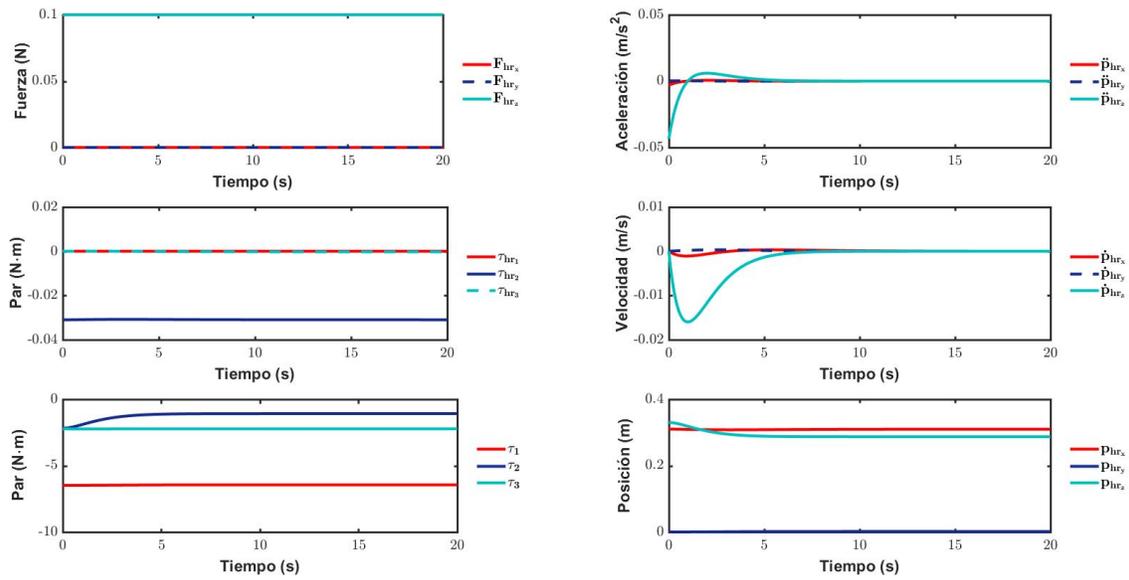


Figura 5.27: Segunda prueba C. Dinámica del sistema,  $F_{hr_z} = 0.1 [N]$

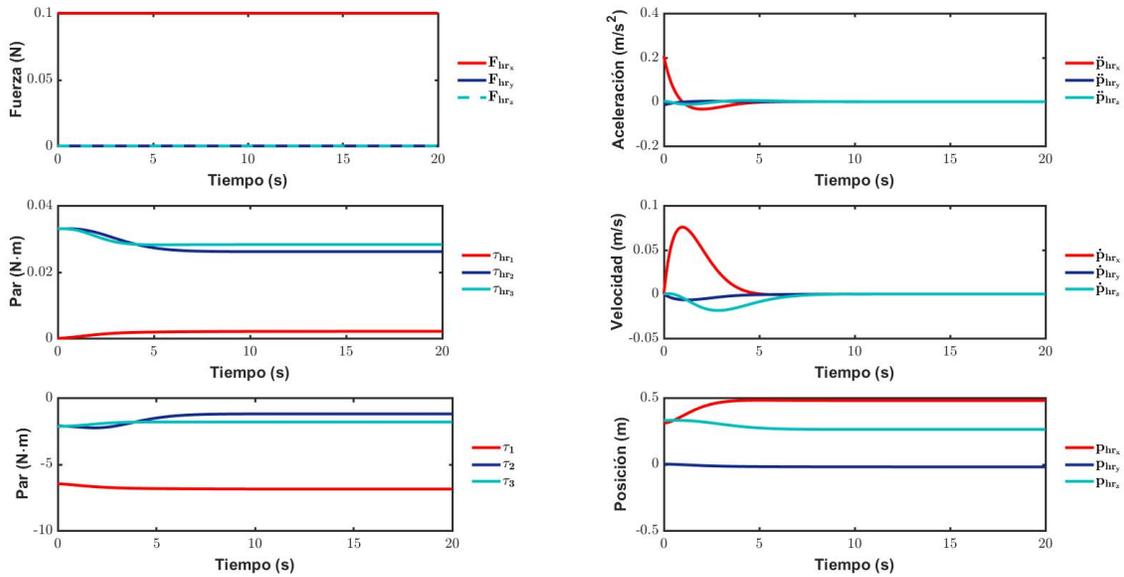


Figura 5.28: Tercera prueba A. Dinámica del sistema,  $F_{hr_x} = 0.1 [N]$ ,  $k_i = -2$

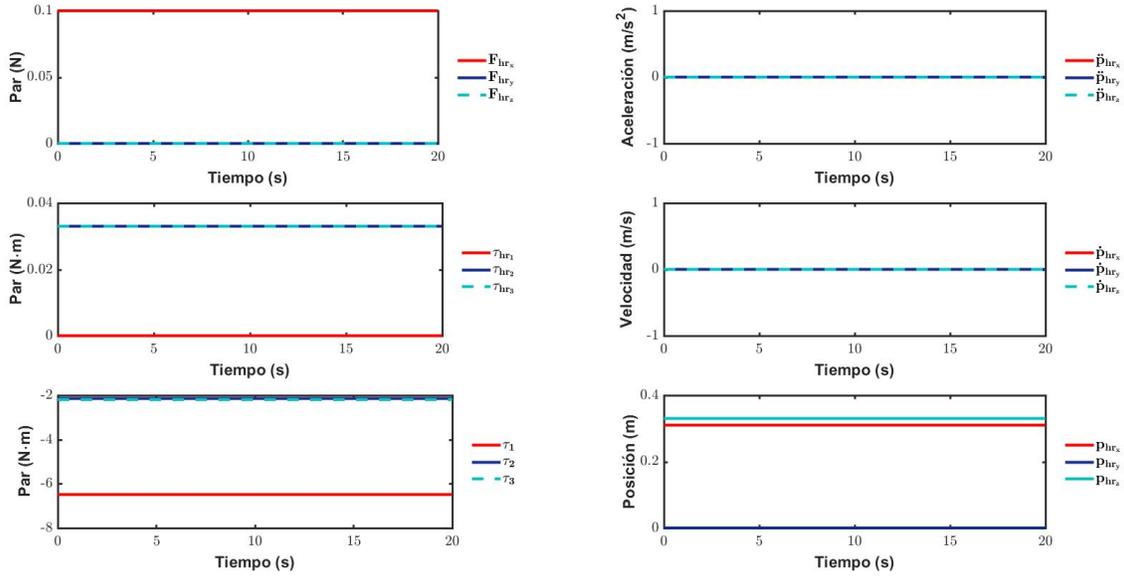


Figura 5.29: Tercera prueba B. Dinámica del sistema,  $F_{hr_x} = 0.1 [N]$ ,  $k_i = -1$

Cuando  $k_i = -2$  se observa en la Figura 5.28 que el efector se mueve en el mismo sentido que la fuerza  $F_{hr_x}$  mientras que en la Figura 5.29 se muestra que con  $k_i = -1$  se compensan los efectos de la fuerza externa por lo que se mantiene la posición deseada, es decir, a pesar de que existe una fuerza de interacción en el sistema, sus efectos se ven compensados; esta comportamiento es útil en la rehabilitación ya que es posible dar trayectorias que deban ser seguidas por humano y robot en conjunto sin que la fuerza del humano afecte el seguimiento de las mismas.

En la segunda prueba del anexo D de este documento es posible observar el comportamiento del sistema para otros valores de  $k_i$  y se comentan algunos de los efectos indeseables que pueden presentarse al cambiar este valor.

#### Cuarta prueba

Para hacer más notable el efecto de amplificación de fuerza se supuso que existe una fuerza  $\mathcal{F}_e$  por efectos de una carga y que es medida en el mismo punto que  $\mathcal{F}_{hr}$  por lo que la ecuación (5.63) se completa como

$$M_{diag}\ddot{\mathcal{X}} + K_{Mv}\dot{\mathcal{X}} + K_{Mp}\mathcal{X} = \mathcal{F}_{Xd} - (I + K)\mathcal{F}_{hr} + \mathcal{F}_e \quad (5.65)$$

Por lo que para lograr el equilibrio estático el mismo principio que el utilizado en el ejemplo de 1 grado de libertad es aplicado, si por ejemplo  $\mathcal{F}_e = [10 \ 10 \ 10]^T$ , en ausencia del controlador debería cumplirse que  $\mathcal{F}_{hr} = \mathcal{F}_e$ ; en cambio si se eligen  $k_i = 4$  solo se necesitaría que  $\mathcal{F}_{hr} = [2 \ 2 \ 2]^T$  para que el sistema no se moviera lo que demuestra que la amplificación de fuerza es lograda. Esto comportamiento es observable en las Figuras 5.30 y 5.31.

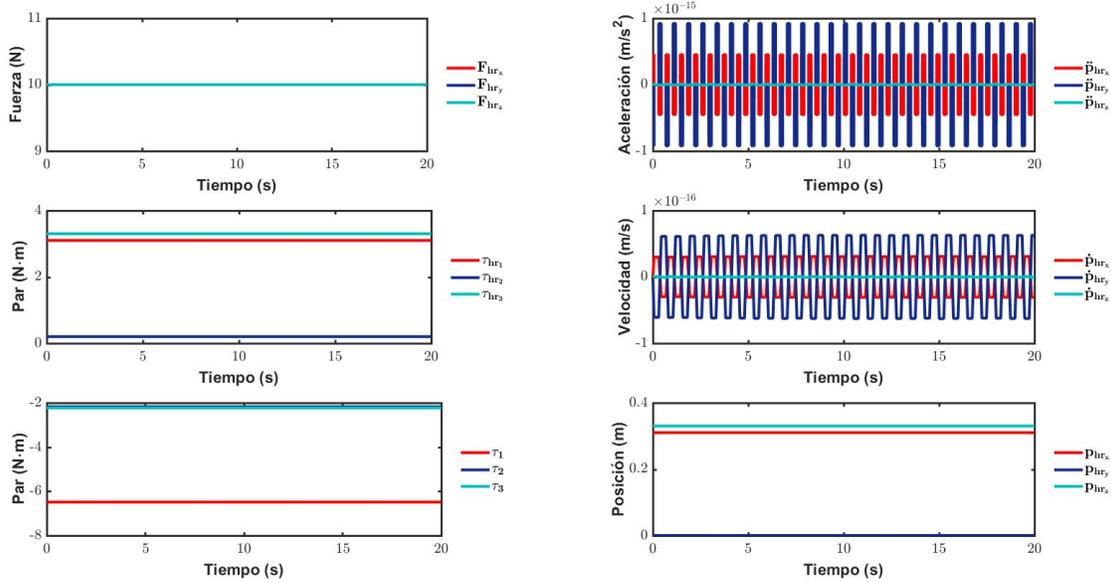


Figura 5.30: Cuarta prueba A. Dinámica del sistema sin controlador de fuerza

### Quinta prueba

Suponiendo que se quisiera mover la carga a lo largo del eje  $X_0$ , la fuerza de interacción  $F_{hr}$  simplemente deberá ser ligeramente mayor o menor en ese eje, mientras en los otros ejes debería mantenerse constante, esto es mostrado en la Figura 5.32. Incluso se puede ver que es posible controlar el movimiento de una mejor forma que cuando solo se tiene el controlador de fuerza independiente, si por ejemplo la fuerza de interacción oscilara en el eje  $X_0$  entre valores ligeramente mayores y menores a 2, se puede ver en la Figura 5.33 que el efector final en presencia la carga también oscilaría, haciendo más intuitivo el movimiento.

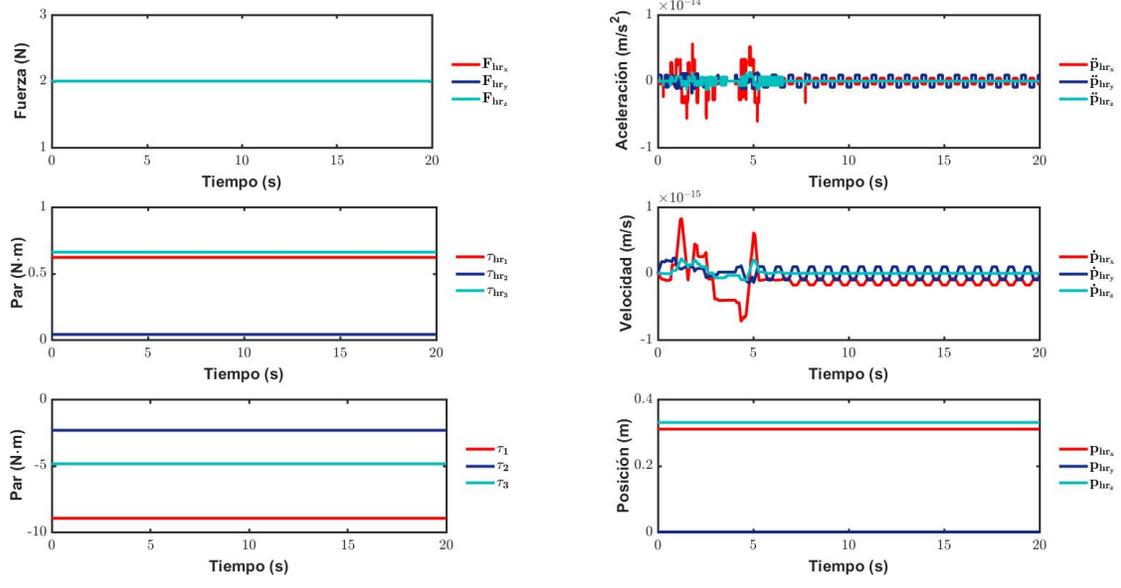


Figura 5.31: Cuarta prueba B. Dinámica del sistema con controlador de fuerza

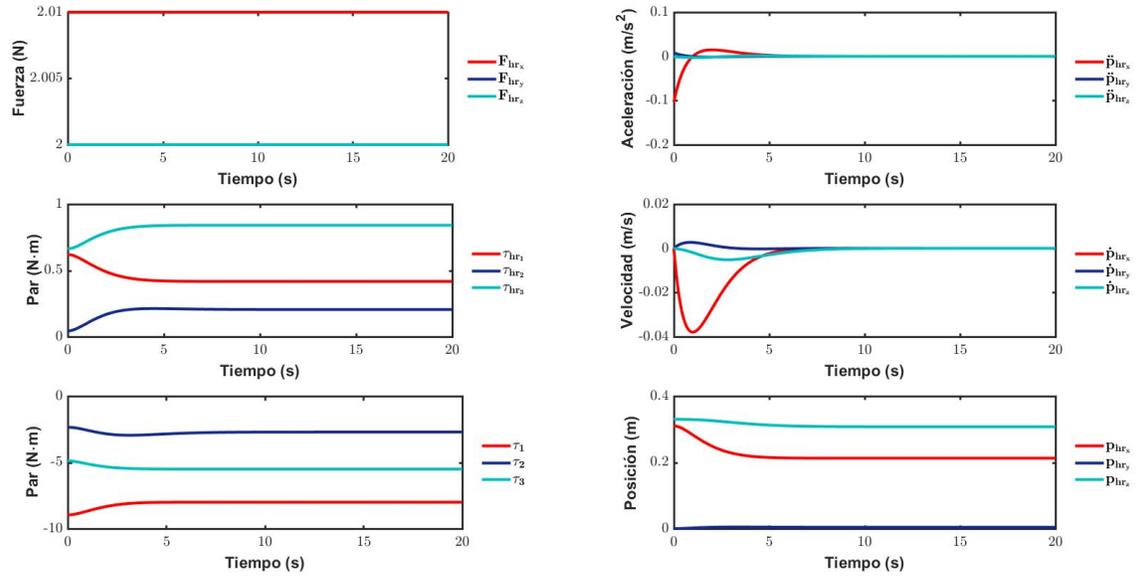


Figura 5.32: Quinta prueba A. Dinámica del sistema

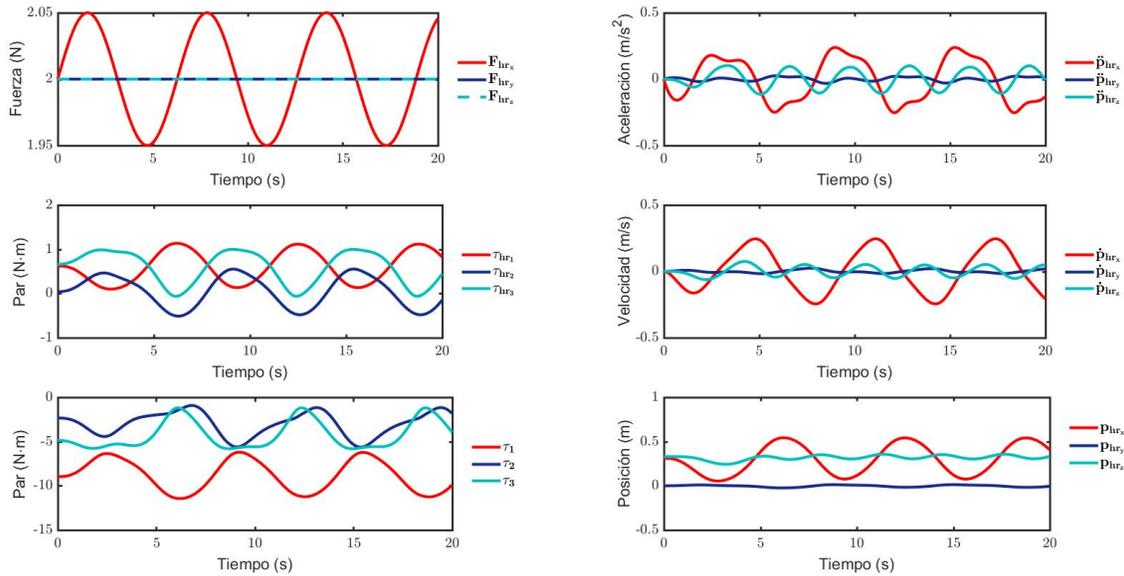


Figura 5.33: Quinta prueba B. Dinámica del sistema

Aunque de la Figura 5.33 se puede interpretar que entre el movimiento del efector final y la fuerza  $\mathcal{F}_{hr}$  existe un desfase, el movimiento esperado es realizado; a reserva de una verificación experimental y recordando que el movimiento para este caso se realiza en sentido contrario de la fuerza, esto puede ser más notorio al observar que mientras el primer ciclo de la fuerza se cumple de  $t = 0[s]$  a aproximadamente  $t = 6[s]$ , el ciclo correspondiente de la posición termina aproximadamente  $t = 8[s]$ . Asimismo se observa la presencia de movimiento en el eje  $Z_0$  aunque ninguna fuerza en esa dirección fuera aplicada, lo cual se cree que podría ser compensado por el usuario en un aplicación real, que es complicada de simular.

## 5.2.2. Conclusiones generales del control de posición por par calculado en el espacio cartesiano con control de fuerza explícito

A lo largo de este apartado se discutió el controlador proporcional por retroalimentación de fuerza y bajo un enfoque sencillo, sin involucrarse en el modelado de la interacción con el ambiente, se explicó y probó su funcionamiento sobre el modelo del exoesqueleto, realizando una breve explicación sobre el controlador paralelo implementado en [7] como una combinación del control de posición en el espacio cartesiano por par calculado y el control proporcional de fuerza; se demostró de forma teórica

y práctica las mejoras que presenta en comparación con el controlador de fuerza independiente, así como las deficiencias que el usuario puede contrarrestar. Se observó que dependiendo de los parámetros elegidos el controlador puede tener distintas aplicaciones, desde la amplificación de fuerza que supondría un herramienta importante en el trabajo diario en la industria o en el campo de la rehabilitación permitiendo un controlador de posición robusto ante perturbaciones del usuario. A pesar de las deficiencias encontradas en [7] el esquema de control es por más interesante y parece indicar que bajo un diseño adecuado, tratamiento de singularidades y un usuario consciente del comportamiento del sistema podría ser una herramienta útil en diversas aplicaciones.

### **5.3. Control de fuerza basado en un lazo interno de posición**

El controlador utilizado por [21] también tiene el efecto de amplificar la fuerza además de que por sus características podría ser considerado como un controlador de posición por fuerza. En [21] el esquema de control implementado no es identificado bajo un nombre en específico como sucede en otros casos, sin embargo se encontró que dicho esquema presenta una gran similitud al presentado en [35] como “Control de fuerza de un traje exoesqueleto basado en un lazo interno de posición” por lo que fue considerado como una variante de éste último. Aunque se realizaron pruebas y simulaciones del controlador presentado en [21], el esquema presentado en [35] brinda la oportunidad de entender conceptos aplicables al primero y comparar sus diferencias incluso con el controlador de [7], por lo que su esquema y análisis aquí también son presentados. Cabe aclarar que para el análisis de cada controlador se utilizó el mismo enfoque del documento en el que fueron encontrados.

#### **5.3.1. Modelo de interacción humano/robot**

Este apartado está basado fuertemente en [35], en el cual se realiza una afirmación que cabe comentar referente a los controladores que utilizan la fuerza de interacción para “descubrir” o “descifrar” la intención de movimiento del usuario, como es el caso de los controladores de fuerza que se han mostrado; esta premisa dice que cuando existe un error entre la trayectoria deseada por el usuario y el exoesqueleto, la fuerza de interacción se producirá de forma natural en el proceso de movimiento y por lo tanto no es necesario conocer la relación matemática específica entre este error y la fuerza de interacción. Aunque con la finalidad de realizar simulaciones y análisis más complejos, dicha relación usualmente se modela como

$$\mathcal{F}_{hr} = K_{Pf}(\mathcal{X} - \mathcal{X}_e) + K_{Df}\dot{\mathcal{X}} + K_{Mf}\ddot{\mathcal{X}} \quad (5.66)$$

lo que puede ser visto como una impedancia, y que usualmente se considera lineal pero bien podría definirse de una forma no lineal, donde  $\mathcal{F}_{hr}$  expresa la fuerza del robot actuando en el ambiente;  $\mathcal{X}$ ,  $\dot{\mathcal{X}}$  y  $\ddot{\mathcal{X}}$  son los vectores de posición, velocidad y aceleración del efector final en el espacio cartesiano,  $\mathcal{X}_e$  la posición del ambiente y las matrices  $K_{Pf}$ ,  $K_{Df}$  y  $K_{Mf}$  son matrices de ganancias que para el caso lineal son diagonales.

El ambiente descrito por (5.66) es estático mientras que para el robot exoesqueleto el ambiente es el humano el cual es cinético. Entonces, partiendo de que fue definida anteriormente  $\mathcal{F}_{control} = -\mathcal{F}_{hr}$  como la fuerza que el humano ejerce en el exoesqueleto y definiendo los vectores  $\mathcal{X}_h$ ,  $\dot{\mathcal{X}}_h$  y  $\ddot{\mathcal{X}}_h$  que expresan la información del movimiento del humano, o la trayectoria deseada por él, entonces  $\mathcal{F}_{control}$  puede redefinirse como

$$\mathcal{F}_{control} = K_{Pf}(\mathcal{X}_h - \mathcal{X}) + K_{Df}(\dot{\mathcal{X}}_h - \dot{\mathcal{X}}) + K_{Mf}(\ddot{\mathcal{X}}_h - \ddot{\mathcal{X}}) \quad (5.67)$$

En ocasiones el término inercial en ambos casos no es tomado en cuenta, incluso tampoco el término de amortiguamiento mientras que el modelo de fuerza como rigidez es el más común. El modelo de la interacción puede ser de ayuda para un análisis más profundo de [7] como el que se muestra en [35] y [8].

### 5.3.2. Control de fuerza basado en un lazo interno de posición

Este apartado fue tomado directamente de [35], por lo que es necesario aclarar que podrán encontrarse transcripciones del mismo con la finalidad del proveer al lector la información necesaria para la comprensión de este controlador y el utilizado en [21], analizado en el apartado siguiente, el cual es una particularidad de éste. En [35] se presenta y divide el control de fuerza explícito en dos clases, el basado en la posición y el basado en la fuerza. La estructura del controlador de fuerza propuesto en [4], utilizado en [7] y retomado en los apartados anteriores podría considerarse como un control directo de fuerza que a su vez tiene la misma estructura que el control de fuerza explícito basado en la fuerza.

El control de fuerza explícito basado en el lazo interno de posición nace de la idea de que la fuerza de interacción humano-robot está estrechamente ligada al error de posición entre el humano y el exoesqueleto, por lo que de existir una desviación entre ellas la fuerza de interacción se producirá;

y como extensión de esta premisa se puede afirmar que, controlando la posición del exoesqueleto es posible controlar la fuerza de interacción indirectamente. A diferencia de las aplicaciones de manipuladores que se realizan en ambientes controlados, en el caso de los exoesqueletos la posición deseada no es conocida ya que es la misma posición del humano; conocerla implicaría medir el movimiento de éste lo cual es complicado y poco práctico. En cambio es posible usar el sensor de fuerza para medir la fuerza de interacción y de acuerdo a ella, estimar la posición de referencia de tal forma que se complete el control de fuerza indirectamente.

Lo anterior se puede lograr realizando dos tareas: primero diseñar un control de posición de tal forma que el exoesqueleto siga una trayectoria de referencia de forma precisa y posteriormente generar esa trayectoria por medio de la retroalimentación de fuerza para controlar el seguimiento del movimiento humano realizado por el exoesqueleto. En [35] se proponen dos controladores de este tipo empleando los modelos estático y dinámico de un exoesqueleto de miembro inferior, sin embargo el segundo es el de interés para fines de este documento al ser el más parecido al utilizado en [21].

### **Lazo de posición interno**

El control de posición utilizado en [35] es el mismo que ya ha sido presentado y utilizado, el cual es en el espacio cartesiano y además utiliza la dinámica inversa para desacoplar y linealizar el sistema, de tal forma que el sistema en lazo cerrado, sin perturbaciones, queda representado por la ecuación

$$\ddot{\mathcal{X}} + K_v \dot{\mathcal{X}} + K_p e_{\mathcal{X}} = 0 \quad (5.68)$$

### **Control de fuerza basado en el lazo de posición interno**

Con la ley de control implementada el sistema puede seguir una trayectoria de forma precisa en ausencia de perturbaciones, aún si el usuario ejerciera una fuerza/par de perturbación en el efector final, ésta tendría que ser grande si quisiera moverlo a voluntad; sin embargo se requiere que humano-exoesqueleto se muevan en conjunto de forma casi imperceptible lo que se traduce que el control del usuario sobre el exoesqueleto debe ser por medio de una fuerza de interacción pequeña sino que imperceptible. En [35] de forma intuitiva se propone establecer una relación entre la fuerza/par de perturbación, mejor conocido como fuerza de interacción, y la posición de referencia del exoesqueleto  $\mathcal{X}_d$ , es decir, estimar la magnitud de la posición de referencia con la magnitud de fuerza/par para controlar el movimiento del exoesqueleto. Al moverse el efector final a la posición deseada por el

operador, la fuerza de interacción se hace cero; si la posición de referencia no cambia entonces el seguimiento de la intención de movimiento es logrado. Dada la hipótesis anterior, la relación entre la posición de referencia y la fuerza interacción se puede representar como

$$\mathcal{X}_d = f(\mathcal{F}_{control}) \quad (5.69)$$

donde  $\mathcal{F}_{control}$  es medida a través del sensor de fuerza/par y es causada por la diferencia entre la posición deseada por el operador  $\mathcal{X}_h$  y la orientación del efector final del exoesqueleto  $\mathcal{X}$ , así entonces  $\mathcal{X}_d$  entonces se puede interpretar como la estimación de la orientación deseada por el operador, una trayectoria generada por la retroalimentación de la fuerza de interacción. El diagrama de bloques que representa este esquema de control se muestra en la Figura 5.34.

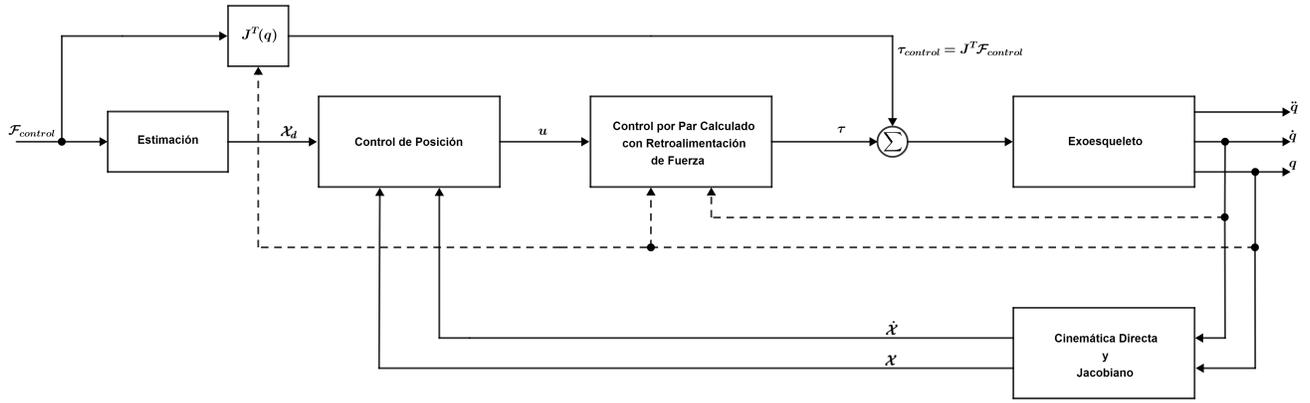


Figura 5.34: Control de fuerza basado en el lazo de posición interno. Diagrama de bloques

El modelo del robot con interacción externa utilizado en [35] es

$$M(q)\ddot{q} + N(q, \dot{q}) = \tau + \tau_{hm} \quad (5.70)$$

donde  $\tau_{hm} = J^T \mathcal{F}_{control}$ , equivalente a  $-J^T \mathcal{F}_{hr}$  como fue utilizado en los apartados anteriores. Para compensar los efectos de  $\tau_{hm}$  producidos por  $\mathcal{F}_{control}$  la ley de control de posición cartesiano por par calculado presenta una variación de tal forma que está descrita como

$$\tau = MJ^{-1}(\ddot{\mathcal{X}}_d - \dot{J}\dot{q} - JM^{-1}J^T \mathcal{F}_{control} + K_v \dot{e}_{\mathcal{X}} + K_p e_{\mathcal{X}}) + N \quad (5.71)$$

por lo que al sustituirla en (5.70) da como resultado (5.68). Si (5.69) se elige como

$$\mathcal{X}_d = K_p^{-1} K_f \mathcal{F}_{control} \quad (5.72)$$

con  $K_f = \text{diag}\{k_{f_i}\}$ , el sistema en estado permanente se comporta de acuerdo a (5.73)

$$\mathcal{F}_{control_\infty} = K_f^{-1} K_p \mathcal{X} \quad (5.73)$$

donde se observa que  $\mathcal{F}_{control}$  no logra ser cero aunque las ganancias pueden diseñarse para que sea lo más cercano posible; además que establece una relación proporcional entre la posición del efector final y la fuerza de interacción, a una fuerza dada una posición en su mismo sentido y dirección. Para eliminar este error en estado permanente, se puede incluir un término integral de tal forma que (5.69) ahora esté representada por

$$\mathcal{X}_d = K_p^{-1} (K_f \mathcal{F}_{control} + K_I \int_0^t \mathcal{F}_{control} dt) \quad (5.74)$$

donde la matriz de ganancias  $K_I$  es una matriz diagonal compuesta por los elementos  $k_{I_i}$  tal que  $K_I = \text{diag}\{k_{I_i}\}$ , que puede también ser diseñada como las otras ganancias, y que asegura que en estado permanente se cumpla que

$$\mathcal{F}_{control_\infty} = 0 \quad (5.75)$$

De acuerdo al modelo dado por la ecuación (5.67) o sus variantes, se observa que cuando  $\mathcal{F}_{control_\infty} = 0$  entonces se cumple que  $\mathcal{X} = \mathcal{X}_h$  y entonces la trayectoria deseada por el humano es seguida. Este análisis implica que la fuerza es resultado de la interacción o movimiento, sin embargo, como se verá más adelante, es posible obtener las variables de movimiento dada una fuerza de entrada.

De acuerdo a [35] en una aplicación real del controlador, lo siguiente ocurre: la entrada en el controlador es la posición del efector final que como está acoplado a la mano del usuario dará como resultado la fuerza de interacción  $\mathcal{F}_{control}$ . Cuando el sensor percibe  $\mathcal{F}_{control}$ , producirá la señal de posición de referencia del lazo interno de posición para controlar el movimiento del exoesqueleto; cuando el error de posición decrezca,  $\mathcal{F}_{control}$  también lo hará, eventualmente haciendo que el exoesqueleto se mueva a la posición deseada por el usuario y manteniendo la fuerza en cero. Durante todo este proceso el controlador no sabe la posición deseada del operador, solo puede reflejar la posición deseada de forma indirecta a través de  $\mathcal{F}_{control}$ , y tanto la dinámica de la posición deseada como la

dinámica de la fuerza de interacción son desconocidas. De cualquier forma, durante las simulaciones, a la computadora se le dió la posición deseada del operador y proporcionó la función que relaciona la posición deseada específica y  $\mathcal{F}_{control}$ , de tal forma que el proceso de simulación fuera completado.

El efecto de amplificación de fuerza es demostrado en [35] bajo el enfoque de que al tratarse de un exoesqueleto de miembro inferior, el efecto de una carga se ve reflejado en el aumento de la masa del tronco del robot por lo que realizaron pruebas en que esta masa aumenta un porcentaje obteniéndose que el factor humano al realizar movimiento con carga varía muy poco incluso si este aumento era de 160 %.

También es posible demostrar de una forma diferente que el objetivo de seguimiento por medio de la fuerza de interacción incluso bajo los efectos de una carga puede ser logrado bajo este esquema. Suponiendo que en lugar de trasladar los efectos de la carga en la masa de un eslabón, como lo es el tronco, se incluyen como una fuerza  $\mathcal{F}_e$  que es desconocida, la ecuación (5.70) se completa como

$$M(q)\ddot{q} + N(q, \dot{q}) = \tau + \tau_{hm} + \tau_e \quad (5.76)$$

con  $\tau_e = J^T \mathcal{F}_e$ , y aplicando la misma ley de control (5.71) se tiene como ecuación en lazo cerrado

$$\ddot{\mathcal{X}} + K_v \dot{\mathcal{X}} + K_p e_{\mathcal{X}} = -\gamma \quad (5.77)$$

con  $\gamma = JM J^T \mathcal{F}_e$ . La cual es muy parecida a la obtenida en los controladores de posición, donde se asegura que si  $\gamma$  está acotada el error lo estará también. Sin embargo se puede observar que si se sustituye  $\mathcal{X}_d$  como propone la ecuación (5.74) en (5.77), entonces en estado permanente también se logra que

$$\mathcal{F}_{control\infty} = 0 \quad (5.78)$$

y de nuevo la trayectoria por el humano sería seguida incluso con una carga. Cabe mencionar que la parte proporcional de la estimación de la orientación deseada por el humano  $\mathcal{X}_d$  en las ecuaciones (5.72) y (5.74), establece de forma sutil que la posición deseada está en la misma dirección y sentido que el vector de fuerza, aunque en el segundo caso también depende también de la componente integral.

### 5.3.3. Simulación del control de fuerza basado en un lazo interno de posición

En [35] las pruebas realizadas muestran el cumplimiento del seguimiento de la trayectoria humana, esto con ayuda de un modelo de la fuerza como ya fue mostrado. Sin embargo, como en las pruebas realizadas para el controlador anterior y como se muestra en [21] es posible obtener resultados importantes al ingresar diferentes formas de  $\mathcal{F}_{hr}$  o  $\mathcal{F}_{control}$  directamente.

De la misma forma que para los controladores anteriores, las pruebas son presentadas por orden de complejidad, lo que se cree, permite un mejor entendimiento de los efectos del controlador sobre el sistema. En la primera prueba, la definición de  $\mathcal{X}_d$  de acuerdo a (5.72) es explorada para después, en la segunda prueba, estudiar las mejoras que supone utilizar la definición dada por (5.74) al incluir el término integral; ambas pruebas consideran una fuerza de control constante. La definición de la posición de acuerdo a (5.74) sigue siendo utilizada en las pruebas restantes; en la tercera prueba se explora lo sucedido para una fuerza de control de forma rampa para posteriormente, en la prueba quinta, observar el comportamiento del sistema cuando una fuerza formada por constantes y rampas es introducida al sistema, cabe mencionar que esta prueba es la que más información arroja acerca de los efectos del controlador. Finalmente en las pruebas quinta y sexta se analiza el controlador cuando el exoesqueleto se encuentra bajo los efectos de una carga, en la cuales también es posible observar el efecto de amplificación de fuerza. No está de más recordar que todas las posiciones, velocidades, aceleraciones y fuerzas son medidas respecto al sistema  $S_0$ .

#### Primera prueba

La resolución de la ecuación (5.68) en los 3 grados de libertad del exoesqueleto analizado para un comportamiento críticamente amortiguado ya fue mostrado dando como resultado la ecuación (4.72) que por medio de la definición del error permite obtener la ecuación (4.73) reescrita aquí para tener mas claridad

$$p_i = p_{d_i} - \dot{e}_{p_0} t e^{-\omega_n t} - (1 + \omega_n t) e_{p_0} e^{-\omega_n t} \quad (5.79)$$

sustituyendo el valor de  $p_{d_i}$  dado por la ecuación (5.72) se tiene que

$$p_i = k_{p_i}^{-1} k_{f_i} F_{control_i} - \dot{e}_{p_0} t e^{-\omega_n t} - (1 + \omega_n t) e_{p_0} e^{-\omega_n t} \quad (5.80)$$

que en estado permanente coincide con lo descrito por (5.73), en la que la relación entre posición y fuerza es proporcional y en el mismo sentido entre ambos vectores. Además de mostrar que habrá un error de posición en estado permanente dependiente de todas las ganancias involucradas, se puede deducir que aplicar una fuerza provocará que el sistema busque mantenerse específicamente en una posición. Si por ejemplo se eligen la diagonal de las ganancias de las matrices de posición como  $k_{p_i} = 1$  y  $k_{v_i} = 2$  para un control de posición críticamente amortiguado y además se propone la diagonal de la ganancia de fuerza como  $k_{f_i} = 1$ , teniéndose la entrada de una fuerza constante  $F_{control_x} = 0.1 [N]$ , la posición del efector final en estado permanente sería  $p_{hr_x} = 0.1 [m]$ . Cabe mencionar también que debido a las características del lazo interno de posición el controlador requiere el ingreso de  $\dot{p}_{hr_x}$  y  $\ddot{p}_{hr_x}$  que para el caso particular de una fuerza constante son cero.

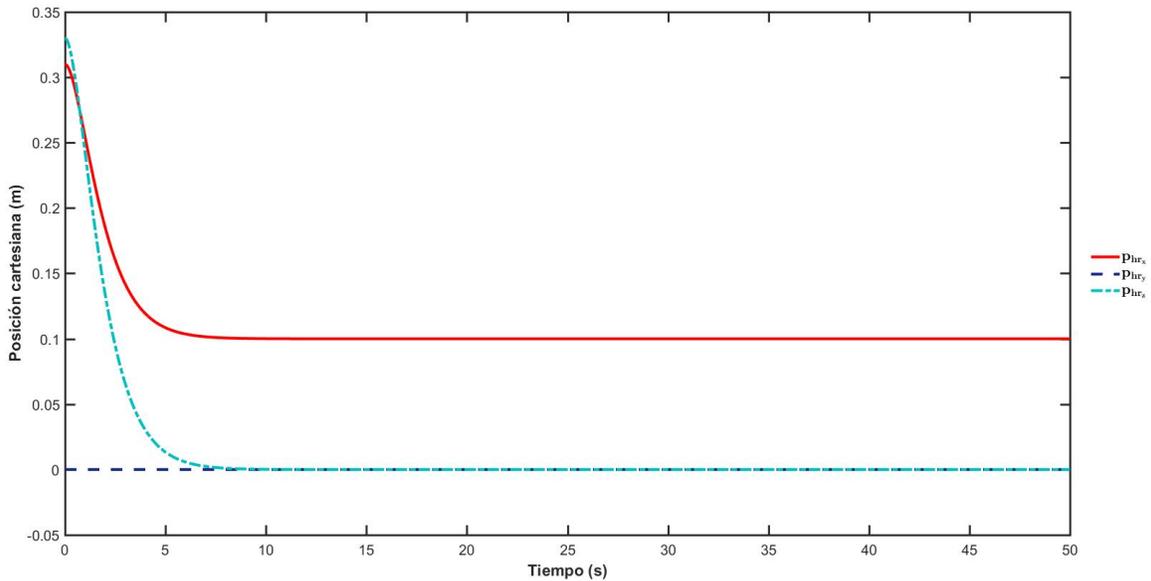


Figura 5.35: Primera prueba A. Posiciones cartesianas

En la Figura 5.35 se observa el comportamiento descrito. Partiendo de la posición inicial y aplicando la fuerza en el eje  $X_0$ , sin aplicar fuerza en los dos ejes restantes, el efector final se mueve en dirección negativa en los ejes  $X_0$  y  $Z_0$  manteniendo la posición en  $Y_0$ , en el primer caso porque como fue mencionado antes bajo el diseño implementado a una fuerza de 0.1 de corresponde la posición 0.1 el el mismo sentido y dirección del vector, aunque para lograrlo deba moverse en sentido negativo. El comportamiento en los ejes  $Y_0$  y  $Z_0$  es interesante al mostrar que si no existe fuerza,

entonces esto implica una posición deseada cero por lo que el efector busca alcanzar este valor. De aquí se concluye entonces que bajo la elección de  $\mathcal{X}_d$  como la ecuación (5.72) para mantener una posición distinta de cero el usuario tendría que ejercer la fuerza proporcional a la posición deseada, en el que la matriz de ganancias  $K_f$  es capaz de modificar esta proporción. Es claro que la posición será alcanzada siempre y cuando no implique que el sistema pase por una configuración singular y no existan perturbaciones.

Dado este comportamiento, para mantener la posición inicial entonces una fuerza  $\mathcal{F}_{control} = [0.31 \ 0 \ 0.33]^T$  debe ser aplicada a diferencia del controlador paralelo de posición/fuerza en el cual solo se requería no ejercer ninguna fuerza en el efector final. Para visualizar que el sistema funciona de igual forma en los tres grados de libertad se propuso introducir al sistema una fuerza  $\mathcal{F}_{control} = [-0.1 \ 0.2 \ -0.2]^T$  obteniéndose lo mostrado en la Figura 5.36.

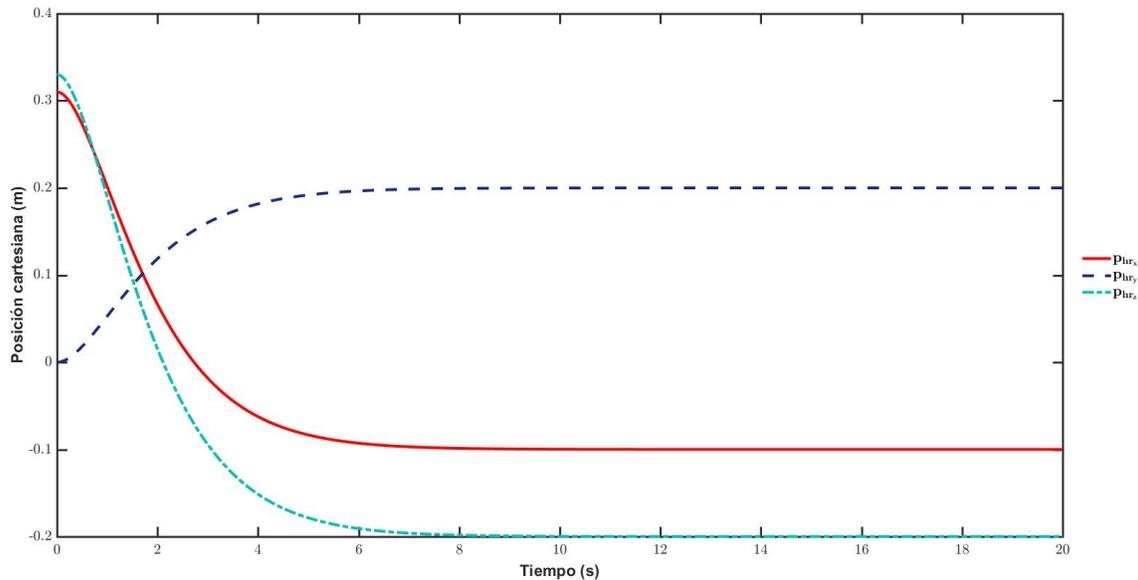


Figura 5.36: Primera prueba B. Posiciones cartesianas

De forma similar al control de posición cartesiano, el controlador con una  $\mathcal{X}_d$  proporcional a la fuerza realizará el seguimiento de una trayectoria definida por  $\mathcal{F}_{control}$  según un desempeño basado en las matrices de ganancia por lo que más pruebas no fueron realizadas.

## Segunda prueba

Suponiendo el caso en que  $\mathcal{X}_d$  se define como la ecuación (5.74) la posición del efector final estará regida por la siguiente ecuación

$$p_i = k_{p_i}^{-1} (k_{f_i} F_{control_i} + k_{I_i} \int_0^t F_{control_i} dt) - \dot{e}_{p_0} t e^{-\omega_n t} - (1 + \omega_n t) e_{p_0} e^{-\omega_n t} \quad (5.81)$$

En estado permanente ya se sabe que  $\mathcal{F}_{control_\infty} = 0$ , pero si  $\mathcal{F}_{control}$  como en la primera prueba se mantiene constante en algún grado de libertad, el controlador para ‘volverla’ cero se movería de acuerdo a

$$p_i = k_{p_i}^{-1} (k_{f_i} F_{control_i} + k_{I_i} F_{control_i} t) - \dot{e}_{p_0} t e^{-\omega_n t} - (1 + \omega_n t) e_{p_0} e^{-\omega_n t} \quad (5.82)$$

que ignorando los dos últimos términos transitorios muestra que la posición alcanzada será proporcional también como el caso anterior, pero se le sumará un elemento que crecerá con el tiempo en la misma dirección y sentido que el vector fuerza. Este comportamiento puede observarse en la Figura 5.37 en donde los parámetros fueron elegidos de la misma forma que en la primera prueba, con  $F_{control_x} = 0.1[N]$  y para diferentes valores de la diagonal de  $K_I$ ; sin embargo al elegir esta forma de  $\mathcal{X}_d$ , al ser diferente de cero,  $\dot{\mathcal{X}}_d$  también es diferente de cero e incluso  $\ddot{\mathcal{X}}_d$  podría serlo aunque este no es el caso. Esto es importante de mencionar debido a que la forma más fácil de obtener estas entradas es por medio de la derivación directa de  $\mathcal{X}_d$  lo que desgraciadamente puede cuasar problemas en las simulaciones, por los que para fines de este estudio fueron obtenidas analíticamente. Para el caso de  $F_{control_i}$  constante se tiene que  $\dot{p}_{d_i} = k_{p_i}^{-1} k_{I_i} F_{control_i}$  y  $\ddot{p}_{d_i} = 0$ .

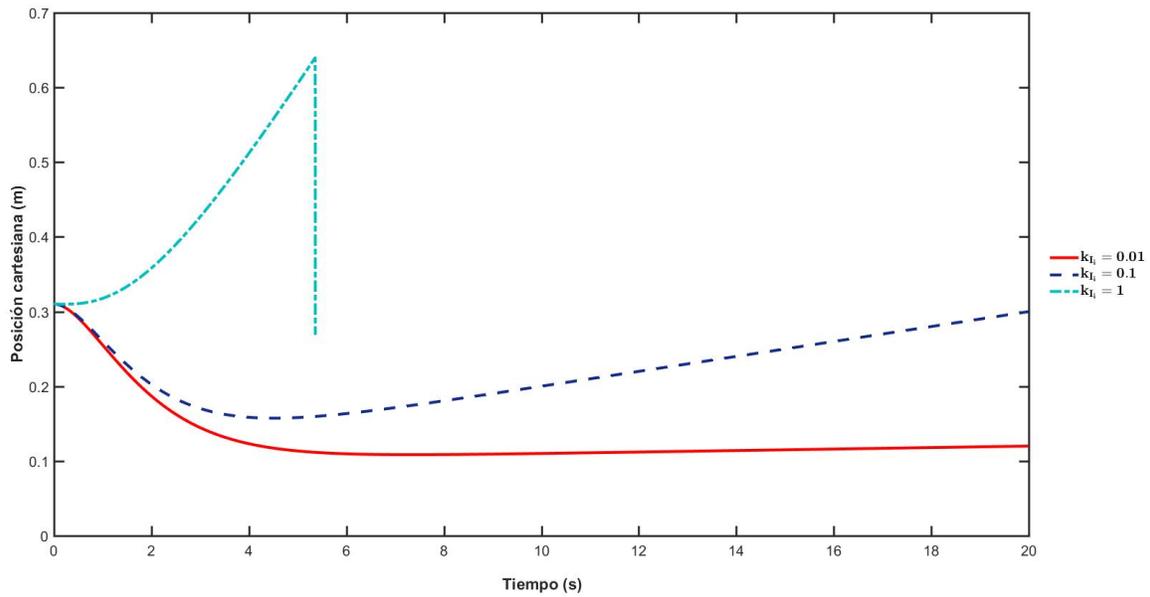


Figura 5.37: Segunda prueba A. Posición cartésiana  $p_{hr_x}$ ,  $k_{I_i}$  variable

En la Figura 5.37 también se observa que inicialmente el sistema busca la posición proporcional a la fuerza que se ejerce, en este caso  $0.1 [m]$ , y a partir de ahí moverse en el mismo sentido y dirección que la fuerza que el humano aplica sobre el efector final. Entre mayor sea la ganancia  $k_{I_i}$  la función dependiente del tiempo dominará la dinámica y entonces el periodo en el que se busca la posición dictada por la parte proporcional será menor, pero el movimiento será más rápido como puede observarse cuando  $k_{I_i} = 1$ , que en alrededor de 5.5 segundos permite que se alcance la extensión máxima del exoesqueleto, lo que parece un comportamiento aceptable.

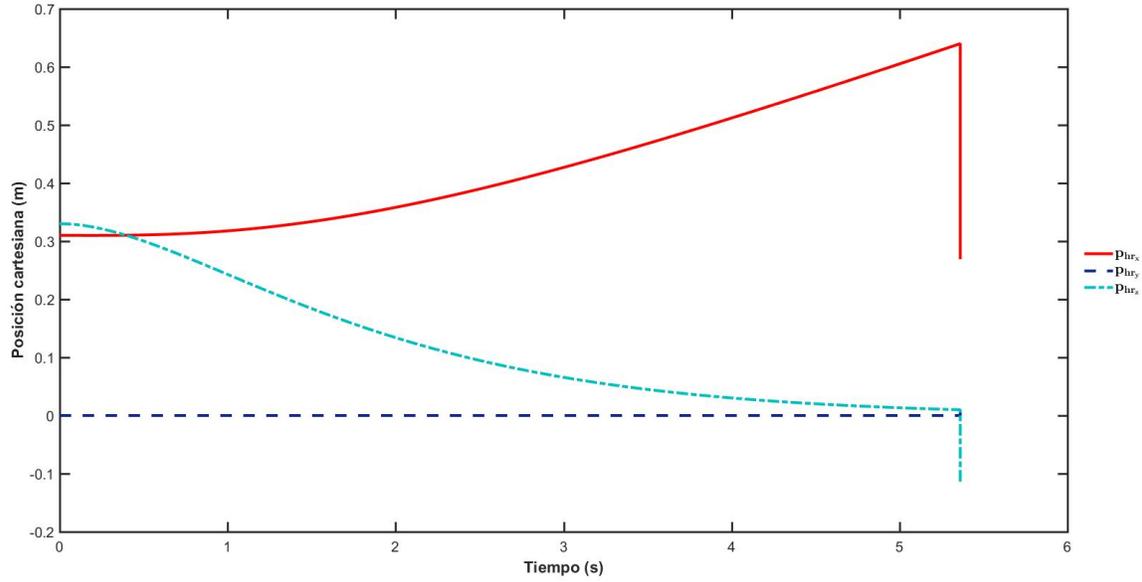


Figura 5.38: Segunda prueba B. Posiciones cartesianas,  $k_{I_i} = 1$

Por su parte, en 5.38 se muestra la posición en los 3 ejes cuando se elige  $k_{I_i} = 1$  y solo una fuerza  $F_{control_x} = 0.1 [N]$  es aplicada. Se puede observar que de igual forma que cuando el modelo de la posición estimada no considera el término integral, la ausencia de una fuerza de interacción en un eje hará que el efector final busque alcanzar la posición cero, esto es fácilmente verificable en la ecuación de posición, además cada grado de libertad sigue comportándose de forma independiente y desacoplado, aunque cuando se llega a la extensión máxima el sistema falla como era de esperarse. Otra prueba que complementa lo observado en ésta, puede observarse en el Anexo E de este documento.

### Tercera prueba

Si se considera que  $F_{control_i}$  ahora es una función lineal tal que  $F_{control_i} = mt$ , la ecuación (5.79) da como resultado

$$p_i = k_{p_i}^{-1} \left( k_{f_i} m t + \frac{k_{I_i} m}{2} t^2 \right) - \dot{e}_{p_0} t e^{-\omega_n t} - (1 + \omega_n t) e_{p_0} e^{-\omega_n t} \quad (5.83)$$

siendo

$$p_{d_i} = k_{p_i}^{-1} \left( k_{f_i} m t + \frac{k_{I_i} m}{2} t^2 \right) \quad (5.84)$$

$$\dot{p}_{d_i} = k_{p_i}^{-1} (k_{f_i} m + k_{I_i} m t) \quad (5.85)$$

$$\ddot{p}_d = k_{p_i}^{-1} k_{I_i} m \quad (5.86)$$

En este sentido tanto la posición estimada y, por el lazo de control de posición, la posición del robot, en estado permanente ya no buscarán primero una posición definida sino que crecerán en dirección de la fuerza desde un principio, de una forma más acelerada que en el caso de una fuerza constante, aunque también dependerá de todas las ganancias involucradas así como de la magnitud de la fuerza de entrada. Las ganancias del control de posición fueron mantenidas iguales, sin embargo es interesante observar el comportamiento del sistema cuando la ganancia  $K_I$  cambia o cuando la pendiente de la fuerza  $m$  lo hace. En la Figura 5.39 se muestra el comportamiento del sistema cuando  $k_{I_i} = 0.1$  y bajo distintos valores de  $m$ , por otra parte en la Figura 5.40 se muestra el comportamiento del sistema cuando las ganancias  $k_{I_i}$  cambian y se mantiene una pendiente  $m = 0.1$  en la fuerza de control.

En ambas figuras se observa que tanto el aumento de la amplitud de la fuerza o de la ganancia  $K_I$  reducen el efecto transitorio del sistema, que como se observa cuando  $m = 0.01$  puede incluso ocasionar que el sistema se mueva en sentido contrario del deseado durante este tiempo y posteriormente comportarse de la forma requerida. Es claro que todo esto puede solucionarse reduciendo el tiempo de asentamiento del sistema por medio de las ganancias de posición, o aumentar la ganancia  $K_f$ , sin embargo considerando que  $\mathcal{F}_{control}$  es generada por el usuario, se puede asumir que si éste sintiera que el robot se mueve en sentido contrario por el periodo transitorio, aplicaría una fuerza de mayor magnitud en el mismo sentido requerido y así de forma sencilla el efecto podría ser reducido y el movimiento en sentido de la fuerza logrado.

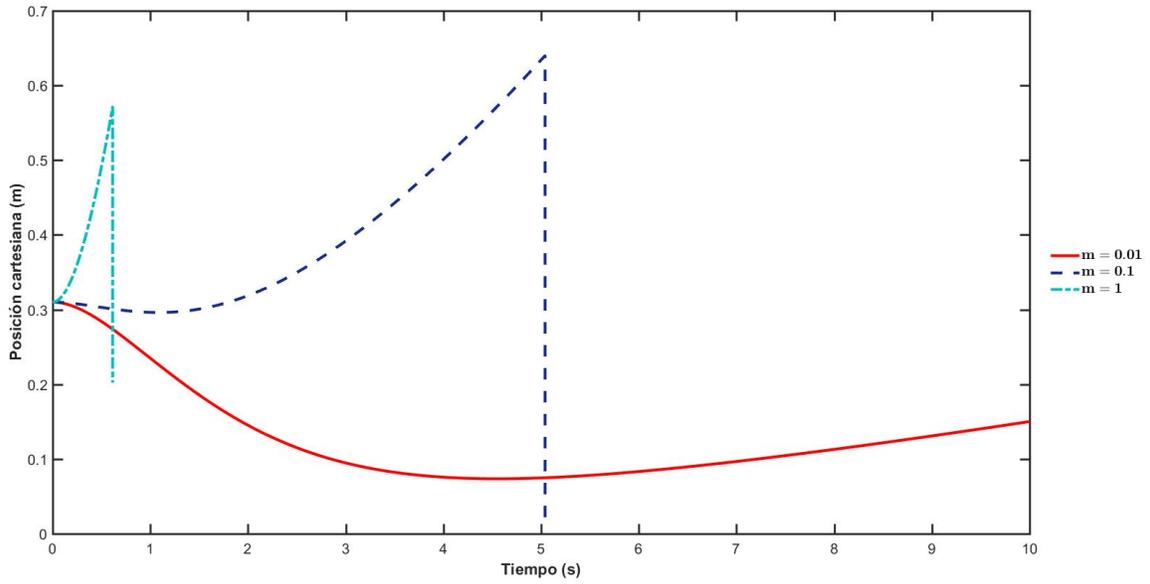


Figura 5.39: Tercera prueba A. Posición cartesiana  $p_{hr,x}$ ,  $m$  variable,  $k_{I_i}$  constantes

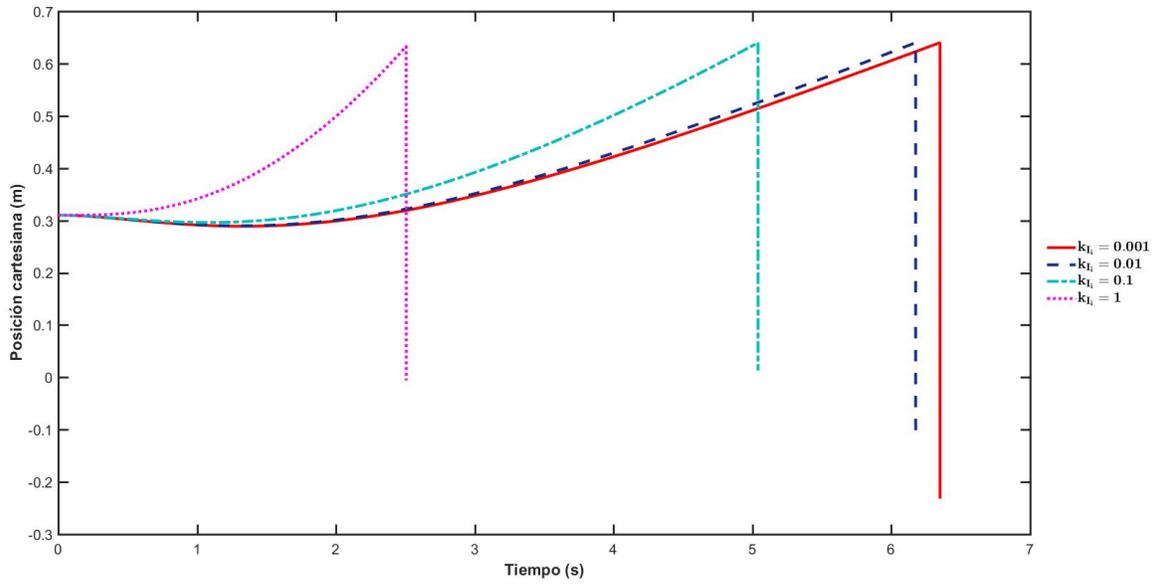


Figura 5.40: Tercera prueba B. Posición cartesiana  $p_{hr,x}$ ,  $k_{I_i}$  variables,  $m$  constante

#### Cuarta prueba

Ahora que se conoce el comportamiento del sistema cuando una fuerza  $\mathcal{F}_{control}$  constante o rampa es aplicada, con la finalidad de obtener un mejor conocimiento del sistema una fuerza de interacción variable en el eje  $X_0$  fue propuesta 5.41 , manteniendo fuerzas cero en los otros ejes.

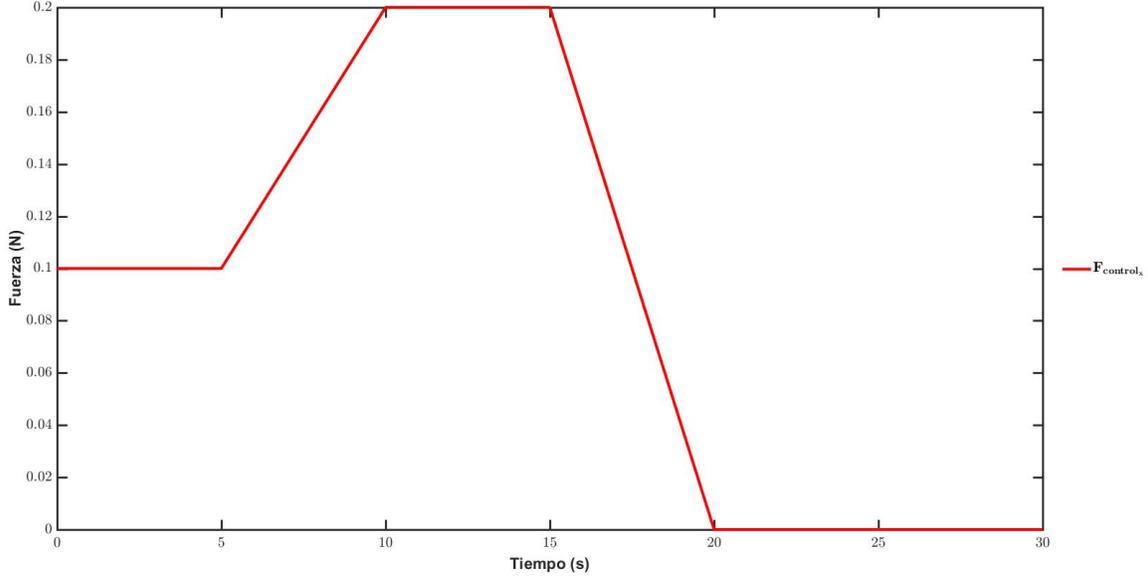


Figura 5.41: Cuarta prueba.  $F_{control_x}$

Esta fuerza está compuesta por constantes y rampas y es la base de donde se obtuvieron las estimaciones de posición, velocidad y aceleración deseadas. Obtener la velocidad y aceleración presenta problemas si se realiza numéricamente como ya fue mencionado, y de forma analítica es un poco complicado especialmente si la función de donde se obtiene, en este caso  $\mathcal{X}_d$ , depende de otra  $\mathcal{F}_{control}$ . Esto nos indica que la forma más sencilla es construir  $\dot{\mathcal{X}}_d$  y  $\ddot{\mathcal{X}}_d$  es a través de la definición misma de  $\mathcal{X}_d$ , por lo que partiendo de (5.74) se tiene de forma general que

$$\dot{\mathcal{X}}_d = K_p^{-1}(K_f \dot{\mathcal{F}}_{control} + K_I \mathcal{F}_{control}) \quad (5.87)$$

y

$$\ddot{\mathcal{X}}_d = K_p^{-1}(K_f \ddot{\mathcal{F}}_{control} + K_I \dot{\mathcal{F}}_{control}) \quad (5.88)$$

Lo que indica que la primera y segunda derivada de  $\mathcal{F}_{control}$  deben ser obtenidas que de entrada ya representa un problema en la implementación ya que tendrían que obtenerse en tiempo real; además, en el caso particular analizado, también representa un problema debido a que aunque puede ser obtenida  $\dot{F}_{control_x}$ , ésta no es continua, luego no es derivable en los puntos de discontinuidad por lo que  $\ddot{F}_{control_x}$  no puede ser obtenida y como última consecuencia el vector  $\ddot{\mathcal{X}}_d$  no puede ser construido. Como se sabe entonces que la discontinuidad de  $\dot{F}_{control_x}$  es la causante del problema se propuso modelarla de tal forma que las discontinuidades fueran evitadas pasando de la forma mostrada en la Figura 5.42, que estrictamente no es una función debido a que en varias ocasiones existen dos valores de la señal en un tiempo determinado, a la mostrada en la Figura 5.43.

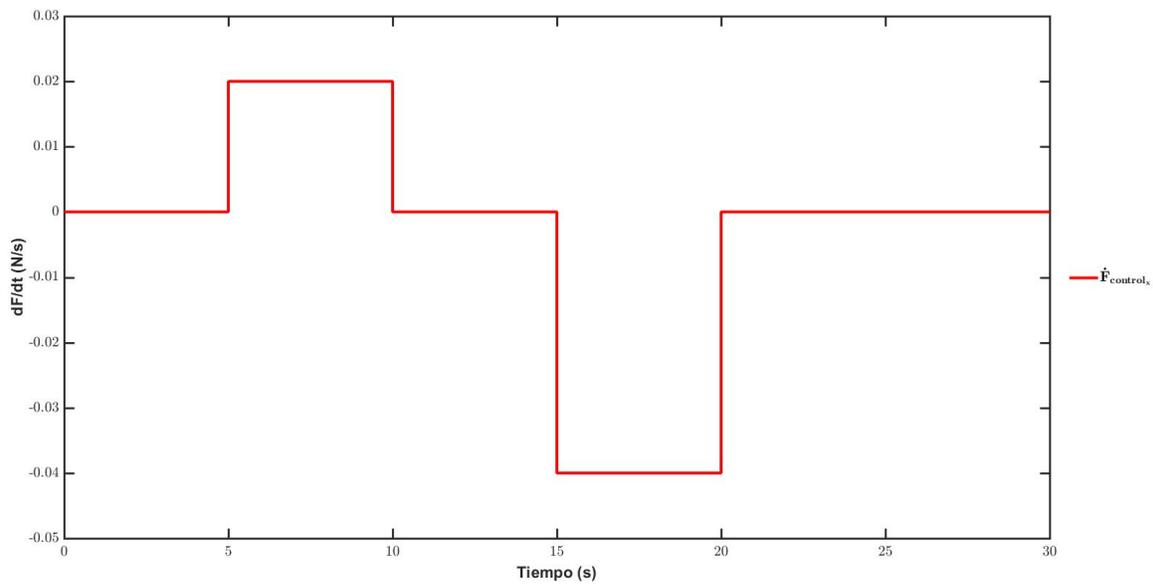


Figura 5.42: Cuarta prueba.  $\dot{F}_{control_x}$

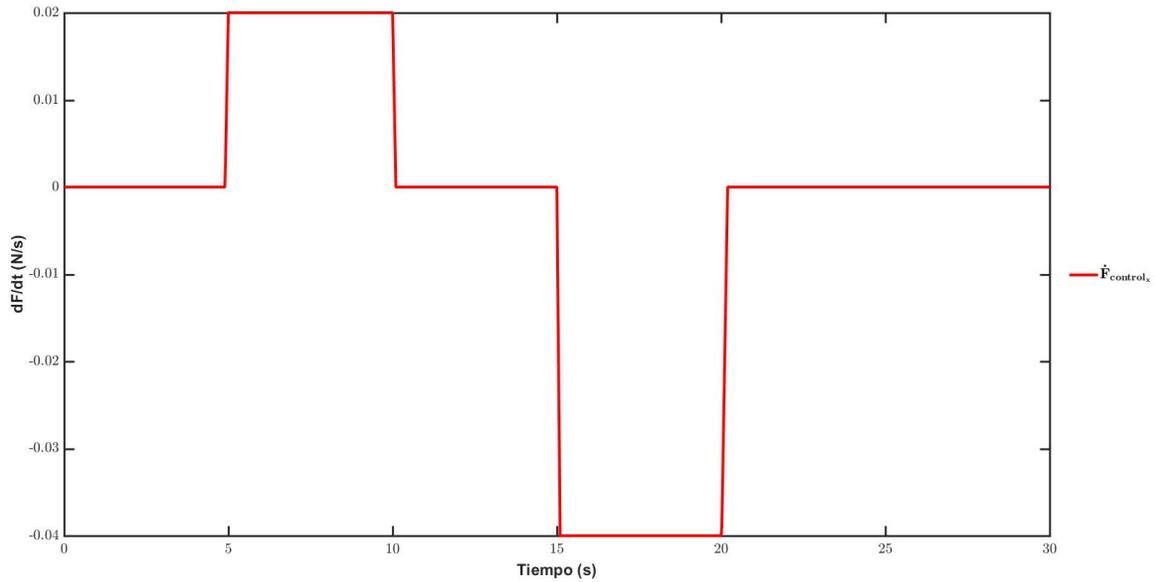


Figura 5.43: Cuarta prueba.  $\dot{F}_{control_x}$  modificada

Esta nueva  $\dot{F}_{control_x}$  es continua y por lo tanto es derivable en cualquier punto, por su parte al integrarla se obtiene una  $F_{control_x}$  muy parecida a la inicialmente diseñada con algunas variaciones, que por ejemplo evitan que en el periodo  $t > 20$  [s] ésta sea cero como se quería. Para la prueba realizada era especialmente importante llegar a un valor final de cero en la fuerza por lo que la transición de  $\dot{F}_{control_x}$  en  $t = 20$  [s] fue suavizada de tal forma que un valor final muy cercano a cero fuera alcanzado. En las Figuras 5.44 y 5.45 se presentan las funciones para  $F_{control_x}$  y  $\ddot{F}_{control_x}$  obtenidas al usar como base  $\dot{F}_{control_x}$  de la Figura 5.43.

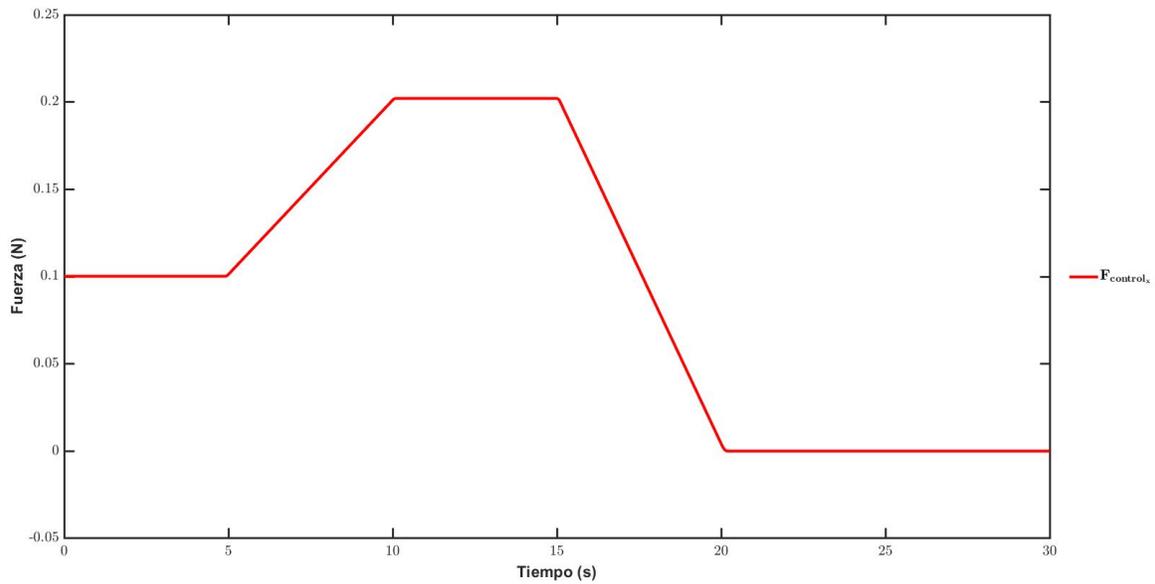


Figura 5.44: Cuarta prueba.  $F_{control_x}$  a partir de  $\dot{F}_{control_x}$  modificada

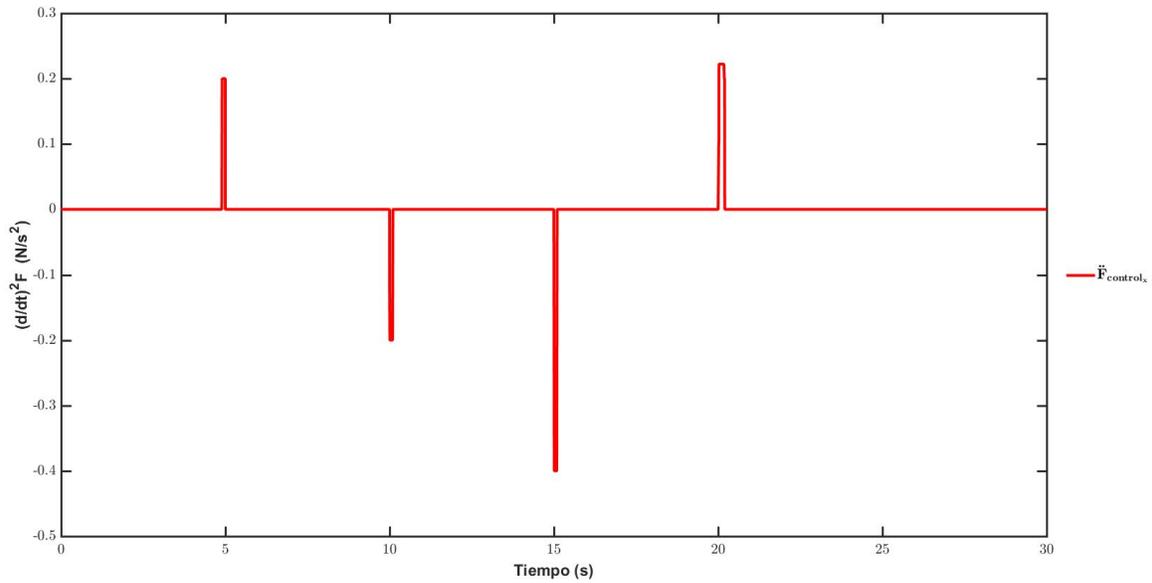


Figura 5.45: Cuarta prueba.  $\ddot{F}_{control_x}$  a partir de  $\dot{F}_{control_x}$  modificada

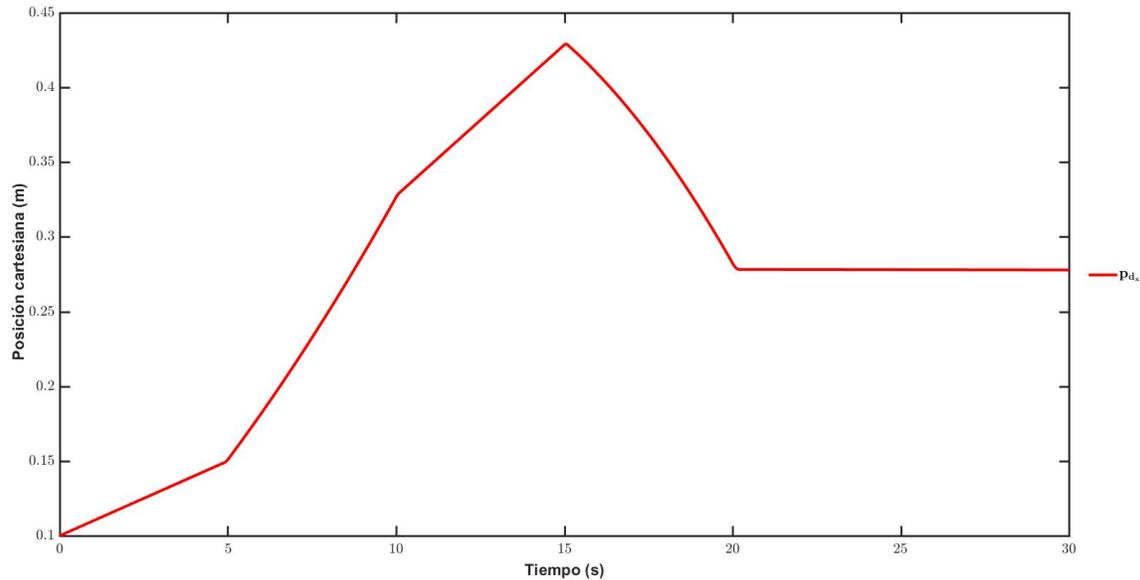


Figura 5.46: Cuarta prueba.  $p_{d_x}$

Proporcionando al controlador con la fuerza descrita, con  $k_{f_i} = 1$  y  $k_{I_i} = 0.1$  se obtiene la estimación de posición deseada en el eje  $X_0$  mostrada en la Figura 5.46 donde vale la pena discutir su comportamiento. Aplicar una fuerza como la propuesta implica que la estimación de la posición inicial es  $0.1 [m]$  aunque se sabe que la posición inicial real es de  $0.31 [m]$ , conforme se mantiene constante la fuerza la estimación de la posición deseada va aumentando de forma lineal en el mismo sentido de la fuerza; al aumentar la fuerza de forma lineal en  $t = 5 [s]$  también la posición estimada aumenta aunque aún más rápido (de forma parabólica). Posteriormente en  $t = 10 [s]$  al mantener una fuerza mayor constante la posición estimada avanza más lento que el intervalo inmediato anterior pero más rápido que cuando la fuerza constante era más pequeña. Después, en  $t = 15 [s]$  la fuerza disminuye linealmente, y aunque sigue siendo positiva, se ve reflejado de forma inmediata en que la posición estimada deseada también disminuye aunque más rápido, de forma parabólica, lo que en la realidad implica que si el usuario quiere moverse en sentido contrario a donde está realizando el movimiento bajo este esquema de control no tiene que dar forzosamente una fuerza negativa sino que basta con disminuir la magnitud de la fuerza que está aplicando. Finalmente en  $t = 20 [s]$  la fuerza deja de existir y se observa que inmediatamente la estimación de la posición deseada se mantiene constante, es decir, que se ha logrado la posición deseada por medio de la posición estimada, sin

embargo si se quiere seguir moviendo el efector final en la misma dirección, tendría entonces que ejercerse una fuerza negativa.

Es claro que si la fuerza se mantiene en cero desde un inicio la estimación de la posición deseada, como ya se demostró, será una posición cero y también que bajo un diseño de control de posición lo suficientemente rápido la posición del exoesqueleto alcanzaría la trayectoria estimada y entonces cuando la fuerza fuera cero la posición del exoesqueleto concidiría con la posición deseada por el humano.

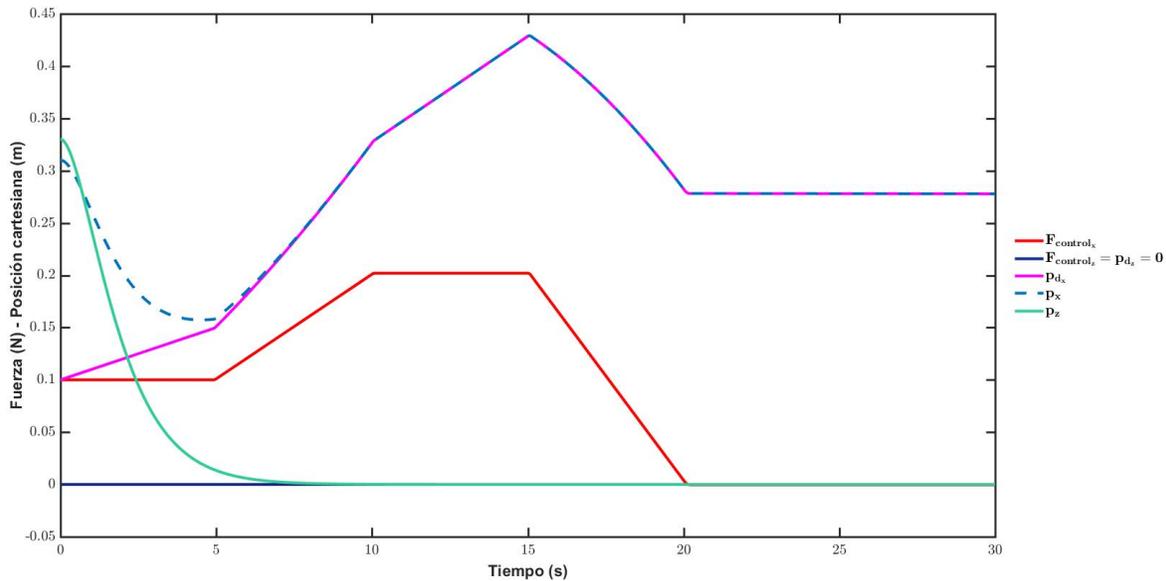


Figura 5.47: Cuarta prueba. Posiciones cartesianas y fuerza de interacción

En la Figura 5.47 se muestra el comportamiento de la posición del exoesqueleto en comparación con la estimación de la trayectoria deseada así como la fuerza de interacción aplicada, por claridad las fuerzas y posiciones referentes al eje  $Y_0$  no fueron mostradas al ser cero en toda la prueba. Se puede observar de forma más clara cómo la estimación de la posición deseada se ve afectada inmediatamente al realizar cambios en la fuerza; aunque las pruebas no fueron exhaustivas todo parece indicar que si ya fue aplicada una fuerza constante la posición estimada irá aumentando conforme pase el tiempo, mientras no se logre la extensión completa del brazo o posiciones singulares, cualquier aumento de esta fuerza producirá un aumento más rápido de la posición, por el contrario, cualquier disminución causará que el movimiento sea en sentido contrario y como extensión de esto si la fuerza cambia de

sentido el movimiento también lo hará; finalmente, tan pronto se llegue a una fuerza cero, el sistema mantendrá la posición alcanzada. Todo parece indicar que entre más lejos se encuentre la posición inicial mayor debe ser la fuerza aplicada para evitar algún retroceso inicial, de cualquier forma esto se logra ya que si el humano siente que el robot se regresa lo más natural es que aplique una fuerza mayor y el efecto sería minimizado; de hecho, la forma de la función de fuerza utilizada en esta prueba representa este comportamiento: el usuario ejerce una fuerza constante para mover el efector en esa dirección, al sentir el retroceso aumenta linealmente la fuerza hasta que logra una velocidad que le agrada por lo que mantiene una fuerza constante aunque mayor, conforme va llegando a la posición deseada va disminuyendo la fuerza hasta que deja de ejercerla al llegar a ella. Por su parte en la Figura 5.47 se observa que el objetivo de la estimación de trayectoria es logrado a partir del segundo 5 de acuerdo a lo mencionado en el apartado del control de posición cartesiano, este seguimiento tan preciso es una muestra de que la compensación de la fuerza externa de acuerdo a [35] logra el objetivo de eliminar el par producido por  $\mathcal{F}_{control}$ .

### Quinta prueba

En las últimas pruebas se buscó observar el comportamiento del sistema cuando existe una fuerza producida por una carga, lo cual como fue mostrado en la ecuación (5.77) provocará que el error entre la posición del robot y la estimación de la posición deseada sea diferente de cero, aunque acotado si  $\mathcal{F}_e$  lo está, cabe mencionar también que no se ha considerado las limitantes del robot, esto es, que aunque el error esté acotado es posible que mientras que la estimación de la posición se pueda encontrar dentro del espacio de tarea, el error sea tal que implique una posición del robot fuera de este espacio, causando una falla total en el sistema. Además de esta situación, en la ecuación (5.77) se observa que se ha perdido la linealidad de la ecuación y el desacoplo en los grados de libertad del sistema debido a la definición de  $\gamma$  por lo que si  $\mathcal{F}_e$  solo tuviera componente en un grado de libertad, en términos generales se esperaría que el error de posición en todos los grados de libertad fuera distinto de cero. Aunque [35] asegura que en estado permanente  $\mathcal{F}_{control}$  tenderá a cero, bajo  $\mathcal{X}_d$  definida como (5.74) y en ausencia de perturbaciones, ya se observó que si ésta es cero desde el inicio de la prueba entonces la posición deseada estimada también lo es y entonces en lugar de mantenerse en la posición inicial el robot buscaría ir a esa posición; esta situación además de la no linealidad de  $\gamma$  complican el estudio del equilibrio estático del sistema. Sin embargo, si se obtiene la ecuación diferencial que describe el comportamiento dinámico del sistema en lazo cerrado bajo (5.74) se obtiene que

$$\ddot{\mathcal{X}} + K_v \dot{\mathcal{X}} + K_p \mathcal{X} = K_p^{-1} K_f \ddot{\mathcal{F}}_{control} + (K_p^{-1} + K_v K_p^{-1} K_f) \dot{\mathcal{F}}_{control} + (K_v K_p^{-1} K_I + K_f) \mathcal{F}_{control} + K_I \int_0^t \mathcal{F}_{control} dt + \gamma \quad (5.89)$$

donde se observa que la dinámica del robot depende de todas las ganancias así como de la fuerza y sus derivada; suponiendo que no se quiere modificar el control de posición y se tenga un comportamiento similar al mostrado en la Figura 5.47 al aplicar la misma función de fuerza podría pensarse en que es posible elegir las ganancias  $K_f$  y  $K_I$  de tal forma que los efectos de  $\gamma$  sean compensados lo que implicaría un efecto de amplificación de fuerza humana. Para demostrar los efectos deducidos por medio de las ecuaciones se propuso realizar la prueba anterior aunque esta vez con la presencia de una fuerza externa de  $\mathcal{F}_e = [-0.1 \ 0 \ 0]^T$  obteniéndose lo mostrado en la Figura 5.48.

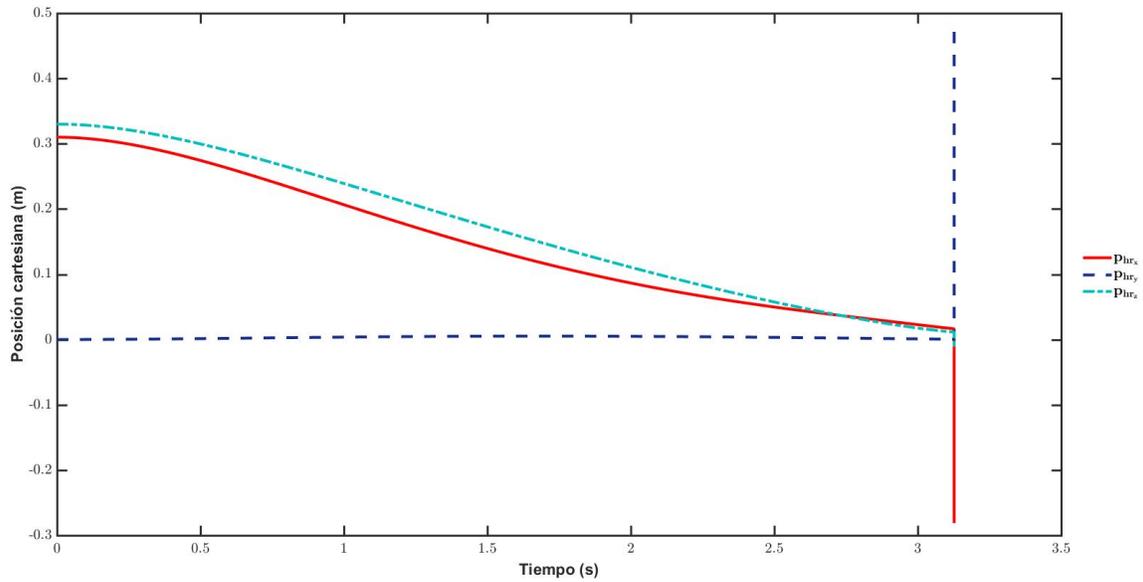


Figura 5.48: Quinta prueba A. Posiciones cartesianas,  $k_{f_i} = 1$   $k_{I_i} = 0.1$

En donde la fuerza externa añadida no permite que se realice el movimiento de acuerdo a  $\mathcal{F}_{control}$  como en la prueba anterior, moviéndose en sentido contrario en el eje  $X_0$  y pasando  $t = 3$  [s] se observa que la carga logra que se alcance una posición singular de casi cero en todos los ejes. Posteriormente

se realizó la misma prueba aumentando el valor de  $k_{f_i}$  a 1.5, otra más manteniendo  $k_{f_i} = 1$  pero aumentando  $k_{I_i}$  a 0.2 y finalmente utilizando  $k_{f_i} = 1.5$  y  $k_{I_i} = 0.15$  cuyos resultados respectivos son mostrados en las Figuras 5.49, 5.50 y 5.51.

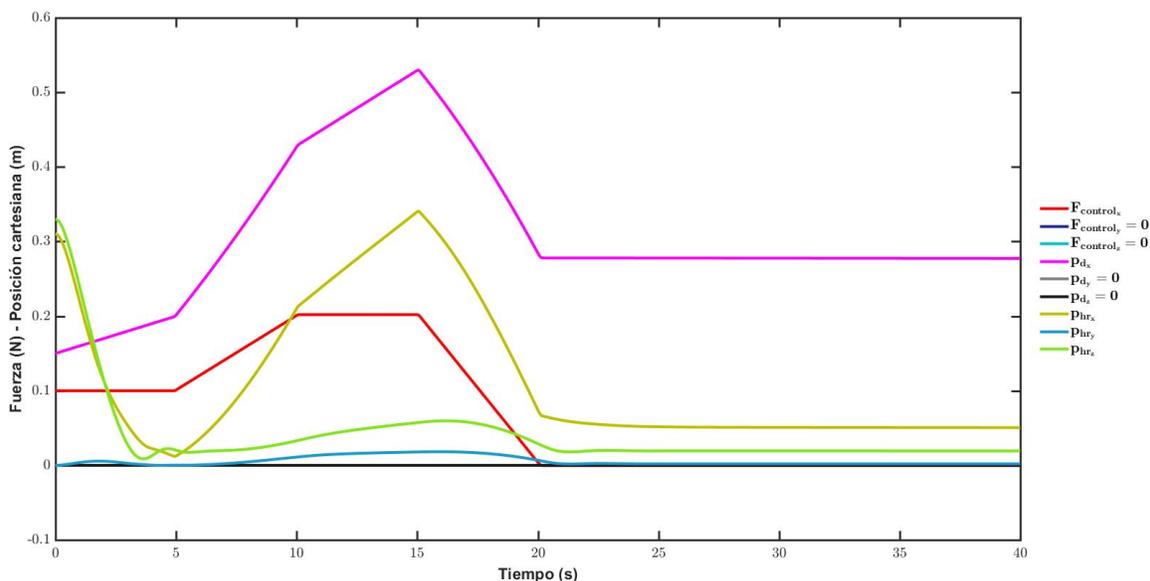


Figura 5.49: Quinta prueba B. Posiciones cartesianas y fuerza de interacción,  $k_{f_i} = 1.5$   $k_{I_i} = 0.1$

Mientras que al no cambiar las ganancias  $F_{control_x}$  no es capaz de mover el exoesqueleto a voluntad, en las pruebas subsecuentes al modificar las ganancias  $k_{I_i}$  y  $k_{f_i}$  fue posible que el exoesqueleto se moviera de acuerdo a la dirección y magnitud de ella aunque con una dinámica distinta; además en cuanto  $F_{control_x}$  se volvió cero, el sistema mantuvo la posición alcanzada en ese eje de acuerdo a lo que se esperaba. Al cambiar las ganancias, la posición estimada  $p_{d_x}$  también cambió, incluso se observa en la Figura 5.50 que la posición estimada está fuera del espacio de tarea en  $t = 15$  [s] sobrepasando la extensión máxima que puede lograr el robot; sin embargo en los 3 últimos casos por causa de la fuerza de perturbación,  $p_{d_x}$  no es alcanzada nunca por  $p_{hr_x}$  manteniendo cierto error en  $X_0$ . En los grados de libertad asociados a los ejes  $Y_0$  y  $Z_0$  se observa que también existe cierto error a pesar de que ni  $\mathcal{F}_{control}$  ni  $\mathcal{F}_e$  tenían componentes asociados a esos grados de libertad, esto por causa del acoplamiento causado por la segunda, por lo que para compensar estos efectos el humano tendría que ejercer fuerza también en esas direcciones.

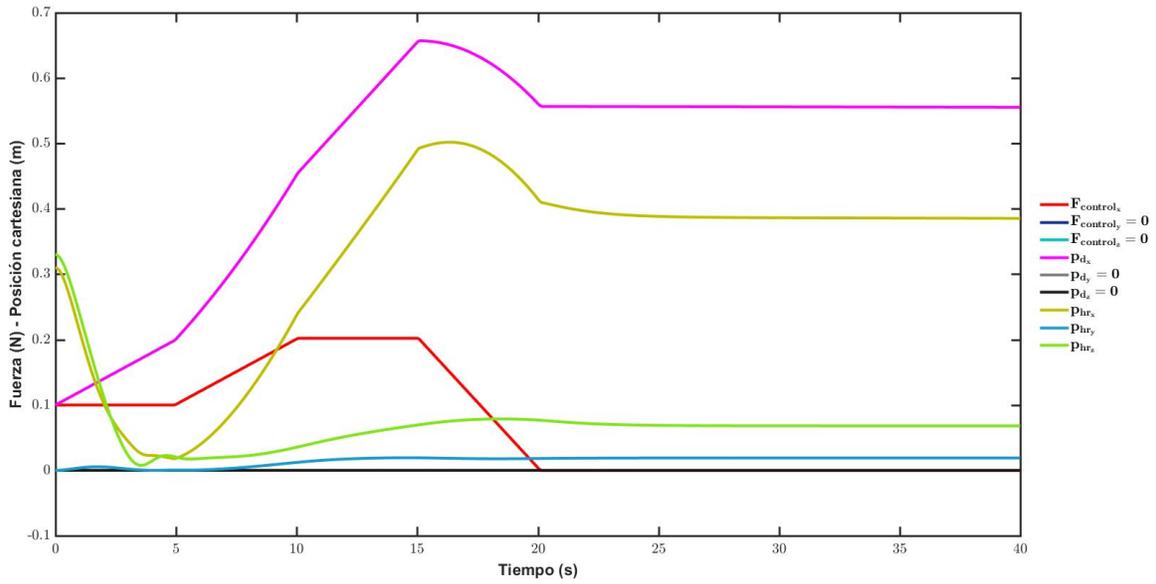


Figura 5.50: Quinta prueba C. Posiciones cartesianas y fuerza de interacción,  $k_{f_i} = 1$   $k_{I_i} = 0.2$

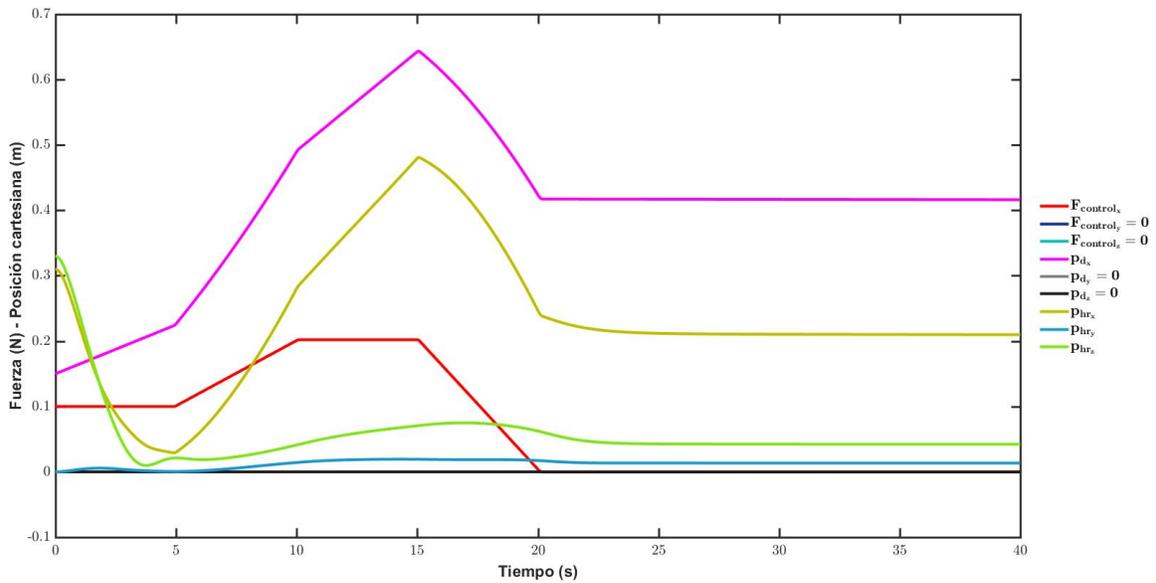


Figura 5.51: Quinta prueba D. Posiciones cartesianas y fuerza de interacción,  $k_{f_i} = 1.5$   $k_{I_i} = 0.15$

## Sexta prueba

Debido a la situación mostrada es complicado observar el efecto de amplificación de fuerza de una forma clara, sin embargo se propuso como última prueba considerar  $\mathcal{F}_e = [-10 \ 0 \ 0]^T$  y  $\mathcal{F}_{control} = [0.1 \ 0 \ 0]^T$  modificando el valor de las ganancias  $K_f$  y  $K_I$  de tal forma que algunos efectos de la perturbación fueran compensados y que se produjera movimiento en sentido de  $\mathcal{F}_{control}$ . El comportamiento del sistema para cuando  $k_{f_i} = 1$  y  $k_{I_i} = 0.1$  se muestra en la Figura 5.52.

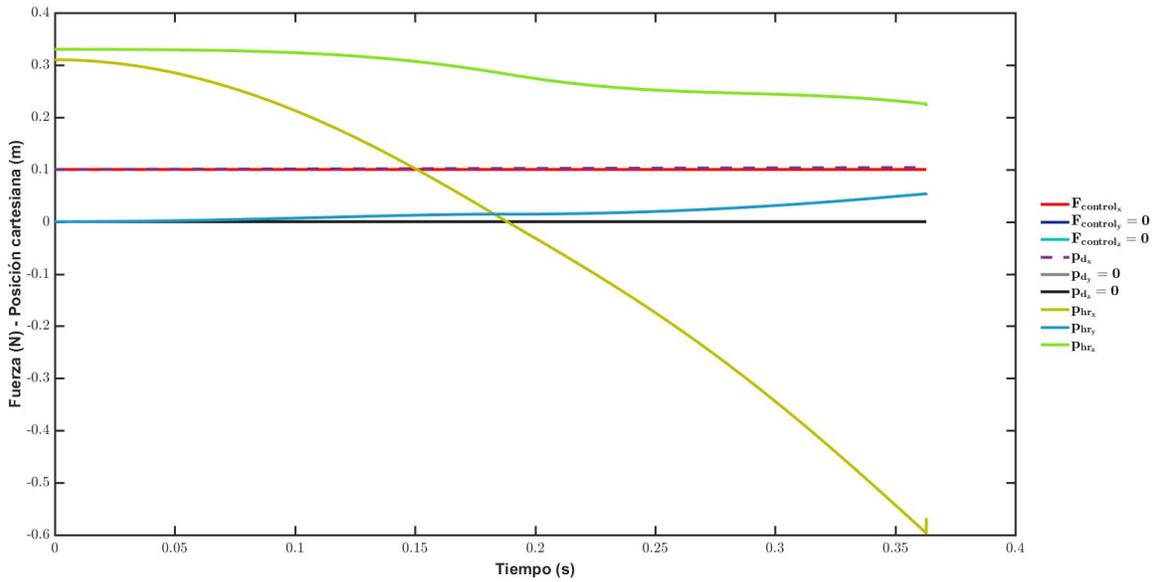


Figura 5.52: Sexta prueba A. Posiciones cartesianas y fuerza de interacción,  $k_{f_i} = 1$   $k_{I_i} = 0.1$

Donde es claro al observar el movimiento en sentido de  $F_{e_x}$  por parte de  $p_{hr_x}$  que el efecto de la carga es muy superior a la fuerza de interacción incluso con ayuda del controlador, así también se observa que la carga afecta el movimiento en los 2 grados de libertad restantes.

Debido a que las ganancias  $K_f$  y  $K_I$  modifican en mayor o menor medida el control, se propuso elegir  $k_{f_i} = 100$  y  $k_{I_i} = 10$  obteniendo lo mostrado en la Figura 5.53, donde se observa que hasta  $t = 0.6$  [s] el controlador aún no puede contrarrestar los efectos de la carga en el eje  $X_0$ , sin embargo llegado a este tiempo rápidamente hace que el robot se mueva en el sentido requerido; además, las nuevas ganancias provocan que la afectación en los otros ejes sea mayor, moviéndose incluso más en el eje  $Z_0$  sin que alguna fuerza humana lo indique. Debido a esto se aumentó  $k_{I_i}$  a un valor de 50

obteniéndose lo mostrado en la Figura 5.54, donde aún se puede notar el efecto de la carga hasta 0.3 [s], sin embargo éste ya es menor en comparación con lo observado en la Figura 5.53, además la afectación en los ejes  $Y_0$  y  $Z_0$  también se vio disminuida.

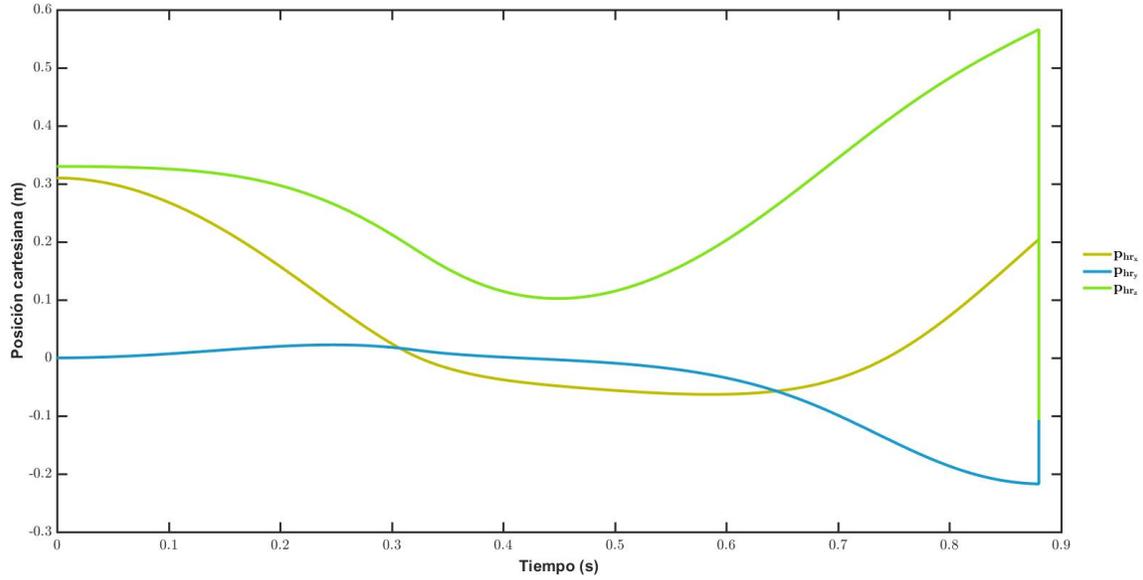


Figura 5.53: Sexta prueba B. Posiciones cartesianas,  $k_{f_i} = 100$   $k_{I_i} = 10$

Finalmente se propuso aumentar el valor de  $k_{f_i}$  a 150 dejando  $k_{I_i} = 50$  obteniendo lo mostrado en la Figura 5.55 donde se observa que aunque el efecto de la carga existe en todos los grados de libertad, el movimiento se hace en sentido de la fuerza humana aplicada y de forma muy rápida, aunque también existe movimiento en los otros ejes el cual puede evitarse si el humano ejerce una fuerza que contraresta este movimiento producido por el acoplamiento. Recordando que  $\mathcal{F}_{control} = [0.1 \ 0 \ 0]^T$  y que  $\mathcal{F}_e = [-10 \ 0 \ 0]^T$ , estas pruebas demuestran que se bajo las ganancias elegidas se pudo mover el exoesqueleto en dirección de la fuerza humana que es 100 veces menor a la fuerza de la perturbación que actuaba en sentido contrario, demostrándose así la utilización del controlador como amplificador de fuerza. Para complementar el análisis, en la Figura 5.56 se muestra la ley de control  $\tau$  asociada a la Figura 5.55 donde se observa que aunque los pares se comportan de una manera que puede considerarse normal, conforme se acerca a la completa extensión del brazo, éstos tienden a infinito.

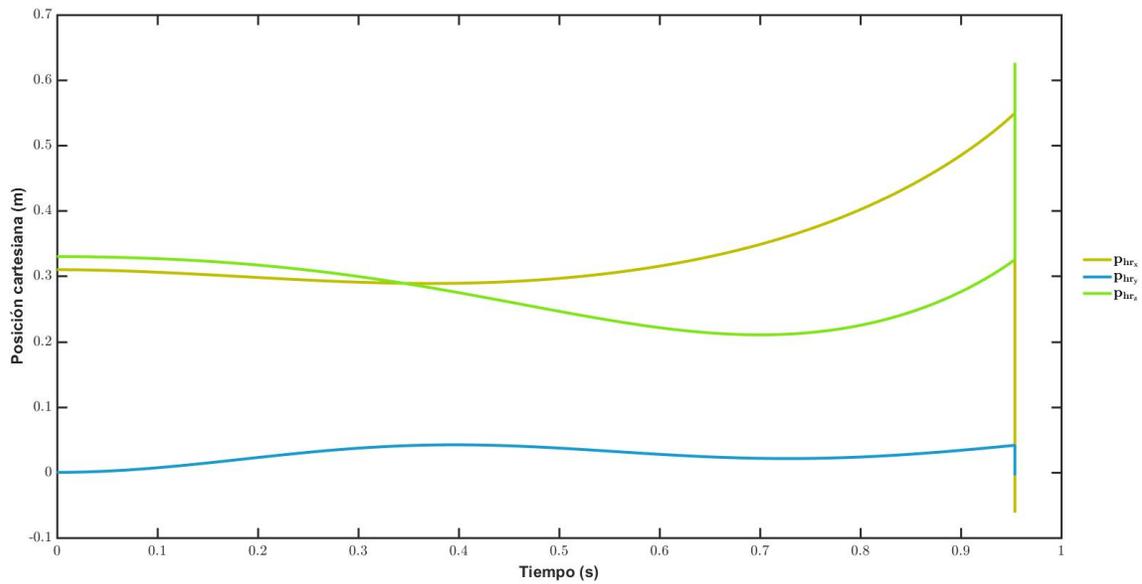


Figura 5.54: Sexta prueba C. Posiciones cartesianas,  $k_{f_i} = 100$   $k_{I_i} = 50$

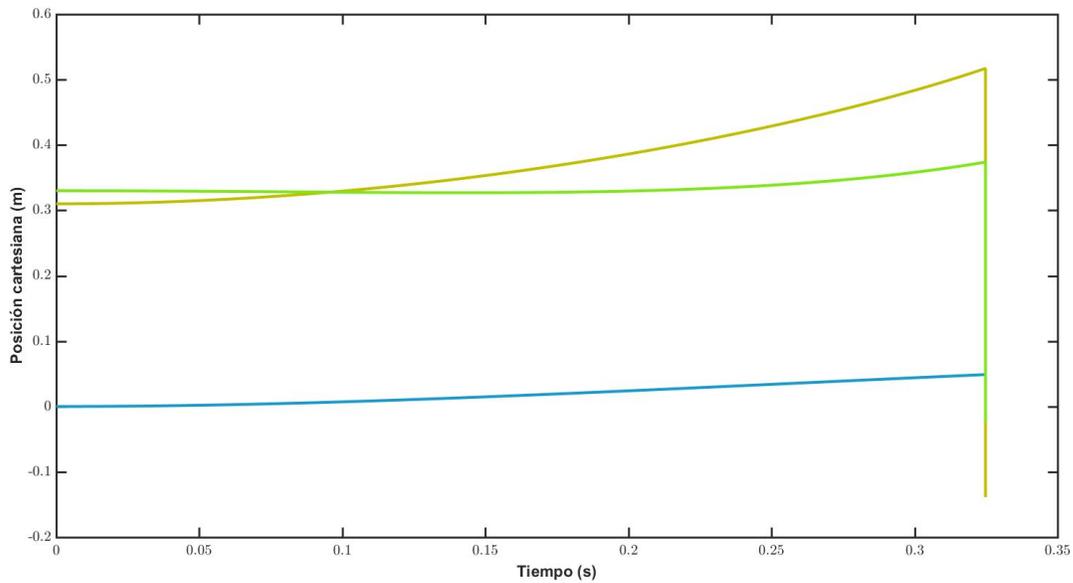


Figura 5.55: Sexta prueba D. Posiciones cartesianas,  $k_{f_i} = 150$   $k_{I_i} = 50$

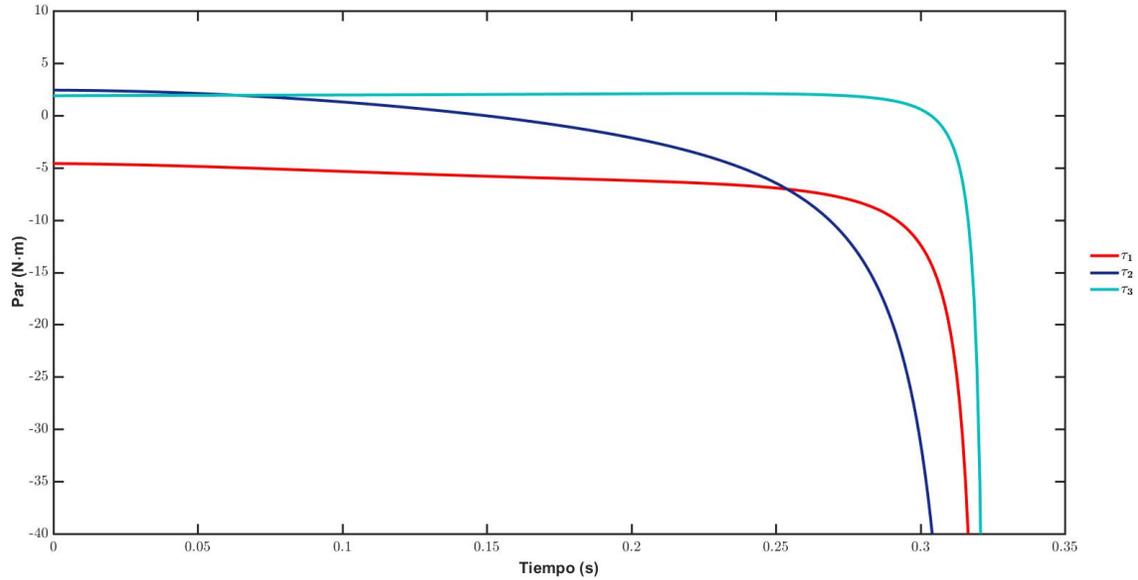


Figura 5.56: Sexta prueba D. Par calculado,  $k_{f_i} = 150$   $k_{I_i} = 50$

### 5.3.4. Conclusiones generales y aplicaciones del control de fuerza basado en un lazo interno de posición

Aunque se ha analizado el comportamiento del controlador modificando distintos parámetros, lo cual no es tan práctico en una aplicación real, se ha visto también que el comportamiento del controlador de cierta forma es fiable y permite un buen control del exoesqueleto por el humano siempre y cuando no se llegue a posiciones singulares por efecto de la fuerza ejercida, las ganancias empleadas o la carga. Siendo esto así,  $\mathcal{F}_{control}$  es completamente controlable por el humano, por lo que a pesar del diseño empleado éste podría evitar todas las desventajas que implica usar el controlador, por ejemplo, evitando posiciones singulares, contrarestando los efectos producidos por la carga en todos los grados de libertad, e incluso al generar una función de fuerza que pueda ser fácilmente derivable en tiempo real.

El controlador, aunque mucho más complejo de diseñar en comparación a los anteriores, parece bastante intuitivo en ausencia de carga; se debe ejercer una fuerza en el sentido donde se quiera el movimiento, disminuir su magnitud o ejercerla en el sentido contrario para cambiar el sentido y finalmente dejarla de ejercer cuando se haya llegado a la posición deseada, además que este comport-

tamiento es independiente en todos los grados de libertad. Sin embargo se observa que también es requerida la primera y segunda derivada de la fuerza sensada o de la posición estimada dependiente de ella, lo cual como se observó posiblemente causaría problemas ya que la derivación amplificaría el ruido, acentuado aún más si la fuerza ejercida por el usuario no presenta una forma suave, por lo que debería encontrarse la forma de minimizar este comportamiento indeseable.

Si el comportamiento y desventajas del controlador son comprendidas por el usuario, la derivación de la señal de fuerza/posición estimada es atacada adecuadamente, el diseño es óptimo para las funciones requeridas, se atacan adecuadamente las configuraciones singulares y el usuario tiene cierto grado de habilidad para evitarlas (de forma similar a como lo hace con sus propios miembros) el exoesqueleto con este controlador es capaz de amplificar la fuerza humana de tal forma que ayude al usuario a realizar tareas que por su fuerza física no podría realizar, previniendo lesiones e incluso dándole oportunidades laborales a personas con distinta capacidad muscular al permitirles desempeñar funciones en las cuales podrían estar limitados por esta característica.

## 5.4. Control cooperativo humano/robot para amplificación de fuerza

En [21] el exoesqueleto utilizado a diferencia del de [35] es de miembro superior, su controlador es presentado como un control cooperativo humano/robot para la amplificación de poder humano cuyo objetivo es permitir la operación del robot con la misma fuerza sin importar el objeto que sea manipulado, o visto de otra forma, un control de posición por fuerza que además tenga el efecto de aumentar la fuerza humana. Como ya fue comentado el controlador presenta muchas similitudes con el controlador de [35] por lo que podría considerarse una particularidad de éste. A continuación se presenta su análisis mientras se indican las diferencias que presenta respecto a [35].

Como primer punto importante [21] utiliza en su desarrollo la fuerza que ejerce el exoesqueleto en el ambiente tal y como ha sido utilizado en la representación clásica de manipuladores con interacción con el ambiente, de tal forma que la ecuación del sistema esta dada por

$$M(q)\ddot{q} + N(q, \dot{q}) = \tau - \tau_{hr} \quad (5.90)$$

donde  $\tau_{hr} = J^T \mathcal{F}_{hr}$  con  $\mathcal{F}_{hr} = -\mathcal{F}_{control}$  con  $\mathcal{F}_{hr}$  definida como la fuerza que ejerce el sistema en el humano, en este caso, a través del efector final y que puede conocerse por medio del sensor de

fuerza/par.

De forma similar, [21] también se vale de un control de posición cartesiano por par calculado, aunque la forma de compensar el par producido por la fuerza de interacción es diferente ya que lo hace directamente por dinámica inversa y no dentro de la variable de control auxiliar  $u$  como lo hace [35] además de que la elección de  $u$  es para un control PID, de tal forma que la ley de control de [21] puede representarse como

$$\tau = MJ^{-1}(\ddot{\mathcal{X}}_d - \dot{J}\dot{q} + K_v\dot{e}_{\mathcal{X}} + K_p e_{\mathcal{X}} + K_{Ip} \int_0^t e_{\mathcal{X}} dt) + N + J^T \mathcal{F}_{hr} \quad (5.91)$$

por lo que el sistema en lazo cerrado esta dado por

$$\ddot{e}_{\mathcal{X}} + K_v\dot{e}_{\mathcal{X}} + K_p e_{\mathcal{X}} + K_{Ip} \int_0^t e_{\mathcal{X}} dt = 0 \quad (5.92)$$

que de forma similar a (5.68) logra el seguimiento de una trayectoria, de hecho, es un diseño que robustece el sistema contra perturbaciones o dinámica no modelada como menciona [22]; a diferencia de (5.68), se espera que al ser aplicada una fuerza de perturbación al exoesqueleto, éste no se desvíe de su trayectoria lo que le ayudaría en tener un mejor desempeño en caso del que modelo dinámico no fuera tan preciso o la retroalimentación de fuerza no fuera óptima. A su vez, en [21] se observa que se asume que  $\dot{\mathcal{X}}_d = 0$  y  $\ddot{\mathcal{X}}_d = 0$  lo que implica que una de dos consideraciones pudo ser realizada: que solo se realiza una estimación de posición y no de velocidad y aceleración o que se usa el enfoque tradicional en manipuladores donde la posición del ambiente, en este caso el humano, es fija. De cualquier forma, si se desarrolla (5.92) de acuerdo a la definición del error se puede representar como

$$\ddot{\mathcal{X}}_d - \ddot{\mathcal{X}} + K_v(\dot{\mathcal{X}}_d - \dot{\mathcal{X}}) + K_p e_{\mathcal{X}} + K_{Ip} \int_0^t e_{\mathcal{X}} dt = 0 \quad (5.93)$$

donde sustituyendo directamente por cero los valores de  $\ddot{\mathcal{X}}_d$  y  $\dot{\mathcal{X}}_d$  se obtiene que

$$-\ddot{\mathcal{X}} - K_v\dot{\mathcal{X}} + K_p e_{\mathcal{X}} + K_{Ip} \int_0^t e_{\mathcal{X}} dt = 0 \quad (5.94)$$

Sin embargo, (5.94) también puede ser representada como

$$\ddot{\mathcal{X}}_d - \ddot{\mathcal{X}}_d - \ddot{\mathcal{X}} + K_v(\dot{\mathcal{X}}_d - \dot{\mathcal{X}}_d - \dot{\mathcal{X}}) + K_p e_{\mathcal{X}} + K_{Ip} \int_0^t e_{\mathcal{X}} dt = 0 \quad (5.95)$$

donde de nuevo, utilizando la definición del error, se tiene finalmente que el sistema en lazo cerrado

al hacer las consideraciones de [21] queda representado por

$$\ddot{e}_{\mathcal{X}} + K_v \dot{e}_{\mathcal{X}} + K_p e_{\mathcal{X}} + K_{Ip} \int_0^t e_{\mathcal{X}} dt = \ddot{\mathcal{X}}_d + K_v \dot{\mathcal{X}}_d \quad (5.96)$$

lo que demuestra que de no existir el término integral, el error de seguimiento sería diferente de cero y dependería de la aceleración y velocidad asociadas a la trayectoria deseada, que entre más grandes sean mayor será su afectación. Evidentemente si la trayectoria deseada es constante el error sería cero, incluso se observa fácilmente que en estado permanente también el error tiende a cero. En términos generales el seguimiento de trayectoria no es logrado mientras el robot este en movimiento sino hasta que se detenga. Por esta razón la decisión de agregar un término integrador por parte de [21] hace pensar que la razón principal de hacerlo no solo es robustecer el sistema ante perturbaciones no conocidas o dinámica no modelada como ocurre comúnmente, sino solucionar una deficiencia inherente al diseño de su controlador al no proporcionar/requerir la velocidad y aceleración asociadas a la trayectoria deseada. El efecto de utilizar un controlador PID en el sistema se presenta en [22], el cual también menciona que utilizar este tipo de controlador causará un problema si la saturación de los actuadores y el fenómeno conocido como “Integrator Windup” no son atendidos adecuadamente.

En [21] también se realiza una estimación de la posición deseada  $\mathcal{X}_d$  aunque haciendo uso del error entre la fuerza deseada y la fuerza de interacción  $\mathcal{F}_{hr}$  para lograrlo, de tal forma que se define

$$\mathcal{X}_d = K_p^{-1} (K_f e_f + K_I \int_0^t e_f dt) \quad (5.97)$$

con  $e_f = \mathcal{F}_{des} - \mathcal{F}_{hr}$ . Sin embargo, también hace la misma suposición de que cuando se llega a la posición deseada la fuerza es cero por lo que se define  $\mathcal{F}_{des} = 0$  y recordando que  $\mathcal{F}_{hr} = -\mathcal{F}_{control}$ , es claro entonces que esta ecuación es equivalente a (5.74). Sustituyendo en (5.94), despreciando el término integral del control de posición, se tiene que

$$\ddot{\mathcal{X}} + K_v \dot{\mathcal{X}} + K_p \mathcal{X} = K_f \mathcal{F}_{control} + K_I \int_0^t \mathcal{F}_{control} dt \quad (5.98)$$

ecuación que demuestra que en estado permanente también se logra que la fuerza de interacción sea cero  $\mathcal{F}_{control\infty} = 0$  incluso si el término integrador del error de posición no es considerado, es decir, se cumple el objetivo de forma similar a [35] aunque la dinámica del error de posición se rige por una ecuación distinta en la que su desempeño depende de la forma de  $\ddot{\mathcal{X}}_d$  y  $\dot{\mathcal{X}}_d$  que podría ser mejorado por el término integrador. Sin embargo, el no requerir suministrar estos valores puede suponer una

mejora en la implementación al no tener que derivar la señal de fuerza del sensor o en su caso  $\mathcal{X}_d$ , lo cual puede afectar negativamente el comportamiento del sistema al amplificar el ruido.

#### 5.4.1. Simulación del control cooperativo humano/robot para amplificación de fuerza

A continuación se muestran 4 pruebas diferentes, pensadas para ejemplificar detalles importantes sobre el efecto que este controlador tiene sobre el exoesqueleto, siempre empezando por mostrar las pruebas más básicas hasta la realización de pruebas más complejas. Dado que, como ya fue señalado, a este controlador no se le proporciona la dinámica completa deseada, se realizó una primera prueba en la que se puede observar sus deficiencias en el cumplimiento de los objetivos de regulación de la posición y seguimiento de trayectorias bajo un diseño PD y PID; dejando claro sus deficiencias como controlador de posición, las pruebas segunda y tercera fueron realizadas, mostrando como en los controladores de fuerza ya mostrados, su respuesta ante una fuerza de control constante y de forma rampa, ambas pruebas son similares a las pruebas homónimas presentadas en 5.3.3. Finalmente, en la cuarta prueba, se observa la respuesta del sistema a la fuerza de entrada descrita por la Figura 5.41, esto bajo diferentes consideraciones en el diseño del controlador, así también se comentan las implicaciones físicas que tiene el comportamiento observado.

##### Primera prueba

Al realizar la misma prueba mostrada en la Figura 4.16 en la que se demostró el seguimiento de una trayectoria en el espacio cartesiano, bajo los mismos parámetros empleados pero sin proporcionar la velocidad y aceleración deseadas y en ausencia de la parte integral del controlador de posición se obtuvo el comportamiento mostrado en la Figura 5.57. En ella se observa que el no proporcionar la información completa sobre la dinámica deseada repercute directamente en el error, visible en el grado de libertad asociado al eje  $Z_0$  el cual nunca es cero además de que es bastante grande, sin embargo se mantiene dentro del espacio de tarea aunque podría darse el caso que el error fuera tal que el controlador tuviera el efecto de provocar un movimiento fuera de este espacio lo que provocaría una falla.

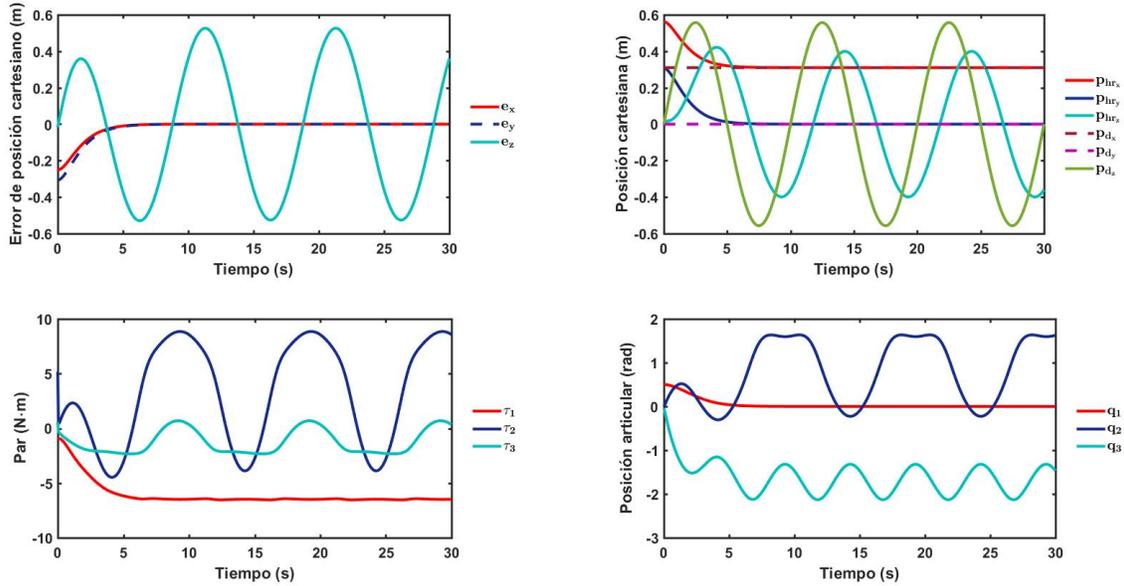


Figura 5.57: Primera prueba A. Seguimiento de trayectoria 1. Control PD

Por su parte, la Figura 5.58 muestra el resultado de realizar la misma simulación pero esta vez agregando el término integral al controlador con  $k_{I p_i} = 0.2$ , pasando de un control PD a un PID. Aunque aún existe un desfase, se observa que existe una mejora en el seguimiento de la trayectoria del robot, acercándose más a la posición máxima deseada que si el término integrador no hubiera sido empleado; sin embargo, se observa también que el utilizar el integrador en los otros ejes con posición deseada constante retrasa el logro del objetivo de control hasta por 10 segundos en ambos casos.

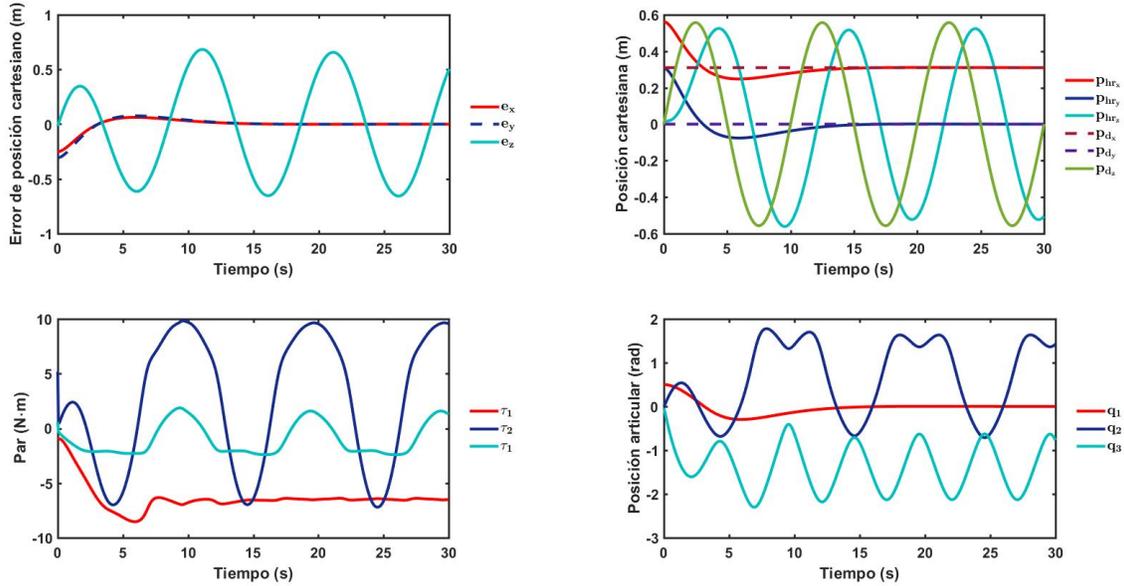


Figura 5.58: Primera prueba B. Seguimiento de trayectoria 1. Control PID

Para complementar el análisis se utilizó una segunda trayectoria de posición deseada en el eje  $Z_0$ , también bajo las mismas condiciones que las simulaciones anteriores y en ausencia de la parte integral del controlador, resultando lo mostrado en la Figura 5.59, donde de nuevo el seguimiento no es logrado adecuadamente; aún así, parece ser que el movimiento del exoesqueleto de cierta forma imita la trayectoria deseada con un retraso en el tiempo. En la gráfica del error se observa que constantemente el error asociado al eje  $Z_0$  busca acercarse a cero e incluso lo logra en el segundo 15; pero no es sino hasta el segundo 20, donde la trayectoria mantiene una posición constante, cuando con un retraso de aproximadamente 5 segundos el robot alcanza la posición deseada y se mantiene en un error cero, lo que es coincidente con la observación realizada en la que en estado permanente se logra que el error sea cero.

Al realizar la simulación representada por la Figura 5.59 pero agregando el término integral en el controlador con  $k_{IP_i} = 0.2$  se obtuvo lo mostrado en la Figura 5.60, donde es más perceptible la mejora en el desempeño que supone el control PID sobre el PD; sin embargo se observa que incluso la posición del exoesqueleto sobrepasa la posición deseada, lo cual representaría un problema especialmente grave si la posición deseada estuviera en el límite del espacio de trabajo por que el robot buscaría llegar más allá de él.

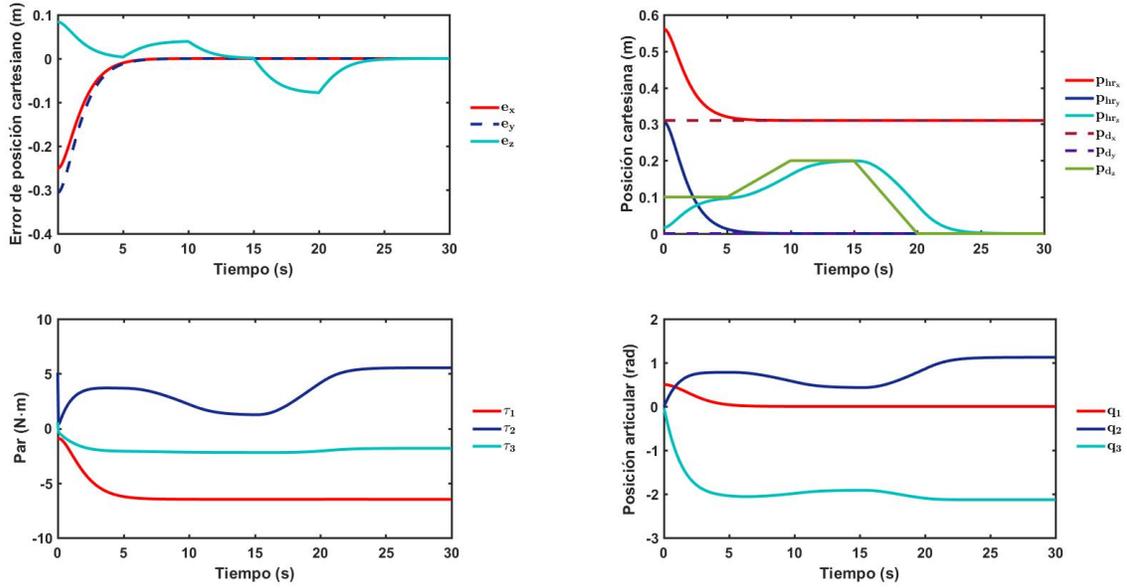


Figura 5.59: Primera prueba C. Seguimiento de trayectoria 2. Control PD

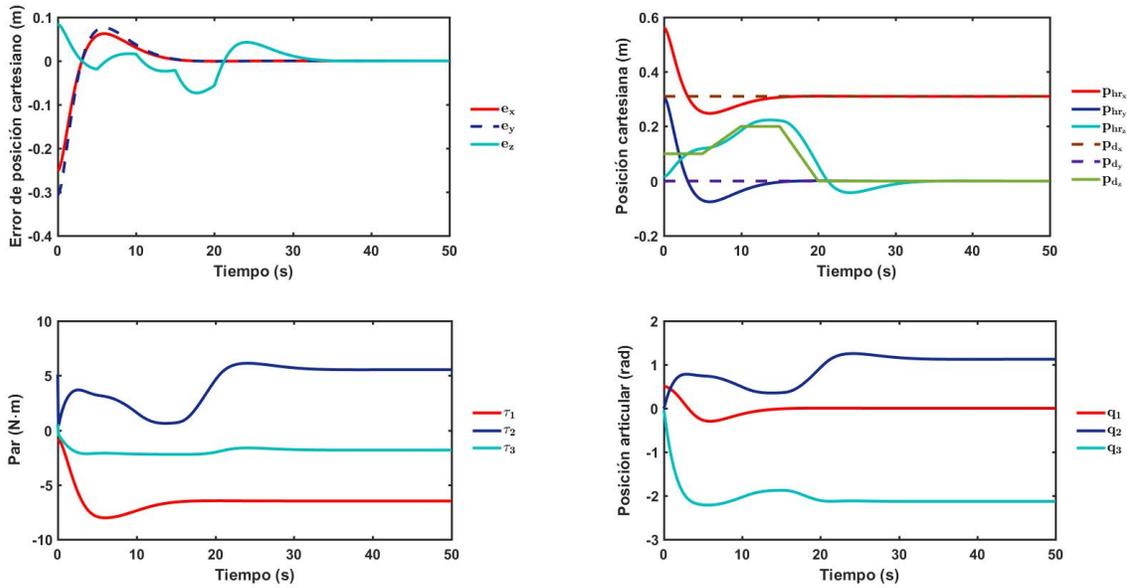


Figura 5.60: Primera prueba D. Seguimiento de trayectoria 2. Control PID

## Segunda prueba

Ya que fueron observados los efectos del componente integrador en el control de posición, se realizaron algunas de las pruebas realizadas en el control de fuerza basado en el lazo interno de posición debido a las similitudes que presenta con éste.

Para  $\mathcal{F}_{control} = [0.1 \ 0 \ 0]^T$  con la posición estimada definida como la ecuación (5.74) con  $k_{f_i} = 1$ ,  $k_{I_i} = 0.1$  y bajo los mismos parámetros del controlador PD aunque considerando ahora el componente integral de  $K_{Ip_i} = 1$  el sistema falla como se puede ver en la Figura 5.61.

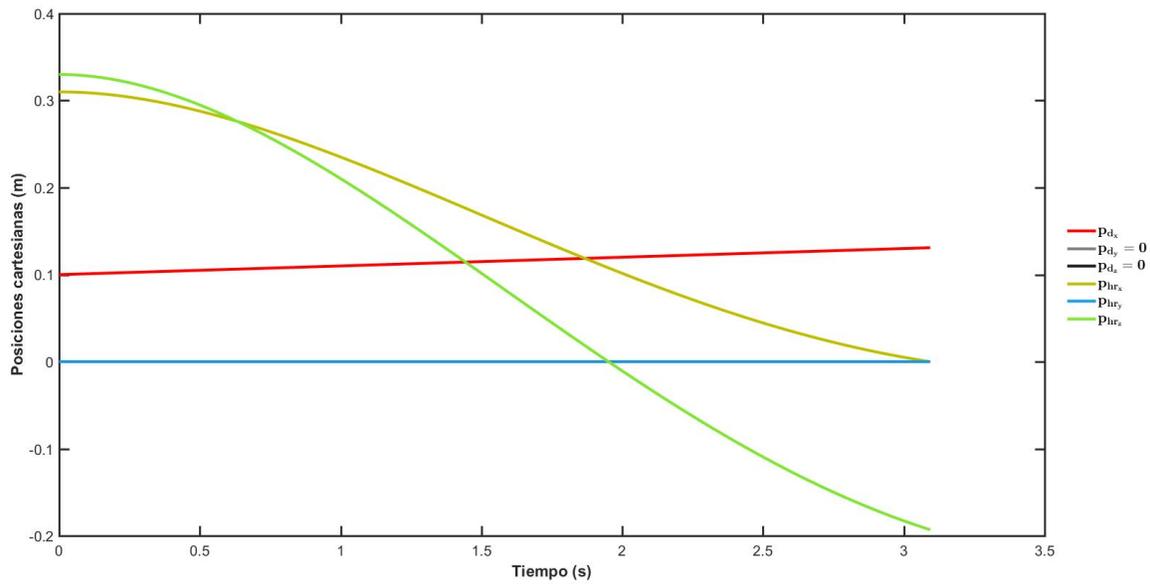


Figura 5.61: Segunda prueba A. Posiciones cartesianas,  $K_{Ip_i} = 1$

Donde se observa que el agregar el término integrador en el control de posición causa que en el periodo transitorio, en su esfuerzo de alcanzar la trayectoria deseada, el sistema llega a una posición singular por lo que la simulación falla y nunca llega a un error cero.

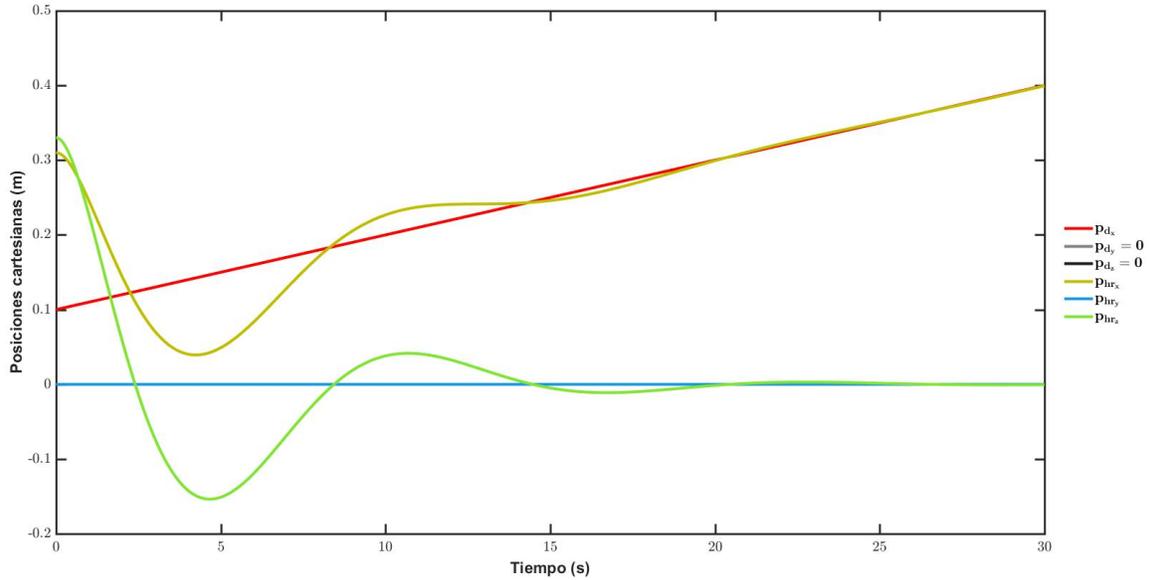


Figura 5.62: Segunda prueba B. Posiciones cartesianas,  $K_{Ip_i} = 0.5$

En la Figura 5.62 se muestra el comportamiento del sistema al realizar la misma prueba pero aumentando el valor en la diagonal la ganancia integral a 0.5 observándose que en comparación con 5.61 no se pasa por una posición singular en el tiempo de transición hacia el seguimiento de la posición deseada. Se observa también que aunque en todos los grados de libertad el objetivo de seguimiento es cumplido, ahora se presentan oscilaciones en la transición las cuales, como ya se mencionó, pueden ser peligrosas si ocasionan una configuración singular. Especialmente en el seguimiento de la trayectoria en el eje  $Z_0$  se observa que el desempeño disminuyó considerablemente con respecto a cuando el término integral en el control de posición fue omitido.

En la Figura 5.63 se muestra el comportamiento del sistema cuando se elige  $K_{Ip_i} = 0.1$ , observándose que las oscilaciones se redujeron, aunque incluso a los 30 segundos de simulación existe cierto error entre la posición estimada y la del robot; también se nota una reducción en el error máximo alcanzado en comparación a las otras pruebas. De aquí se deduce que el valor de  $KI$  no debe ser grande para evitar posiciones singulares o errores máximos muy grandes. En todos los casos se observa que ejercer una fuerza constante causará una trayectoria que aumenta en sentido de la fuerza lo que es invariante respecto a [35]. Si el término integral no es agregado se tiene lo siguiente

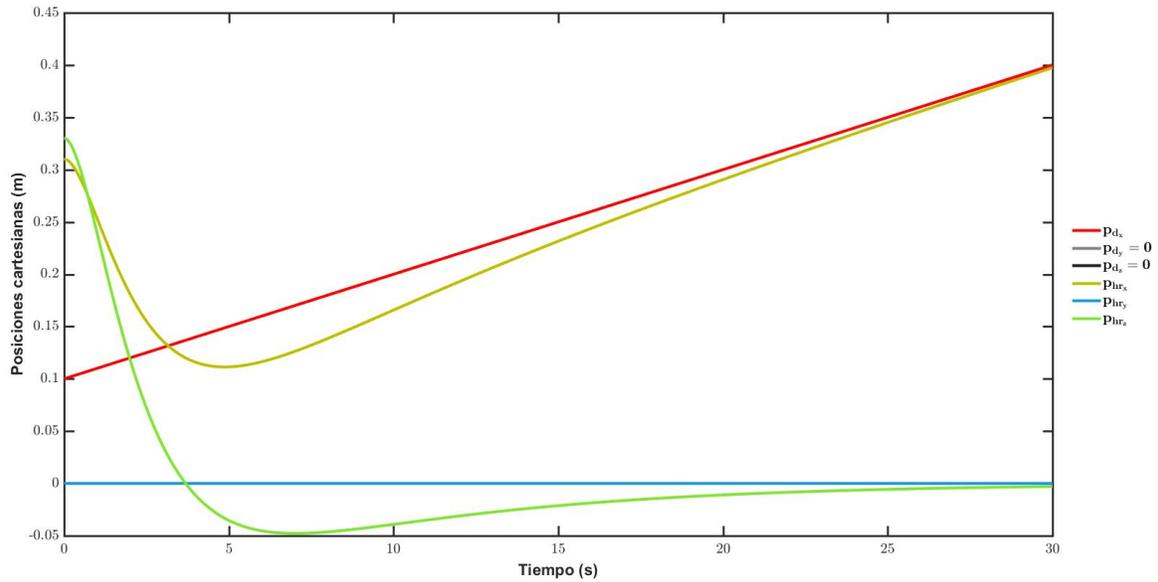


Figura 5.63: Segunda prueba C. Posiciones cartesianas,  $K_{I p_i} = 0.1$

Si el término integral en el control de posición es omitido completamente, se observa el comportamiento mostrado en la Figura 5.64 en donde el desempeño en el eje  $Z_0$  es mejorado aunque en el eje  $X_0$  existe un error de posición constante resultado de no suministrar la dinámica deseada completa, o visto de otra forma, se logra que el sistema se mueva en la dirección de la fuerza aunque lo hace de una forma más lenta. Dejando de lado el periodo transitorio, el comportamiento del sistema es muy similar a [35]: una fuerza constante causa un movimiento del robot en el mismo sentido de ella, aunque bajo este esquema no se suministra la dinámica deseada completa que podría causar problemas de implementación.

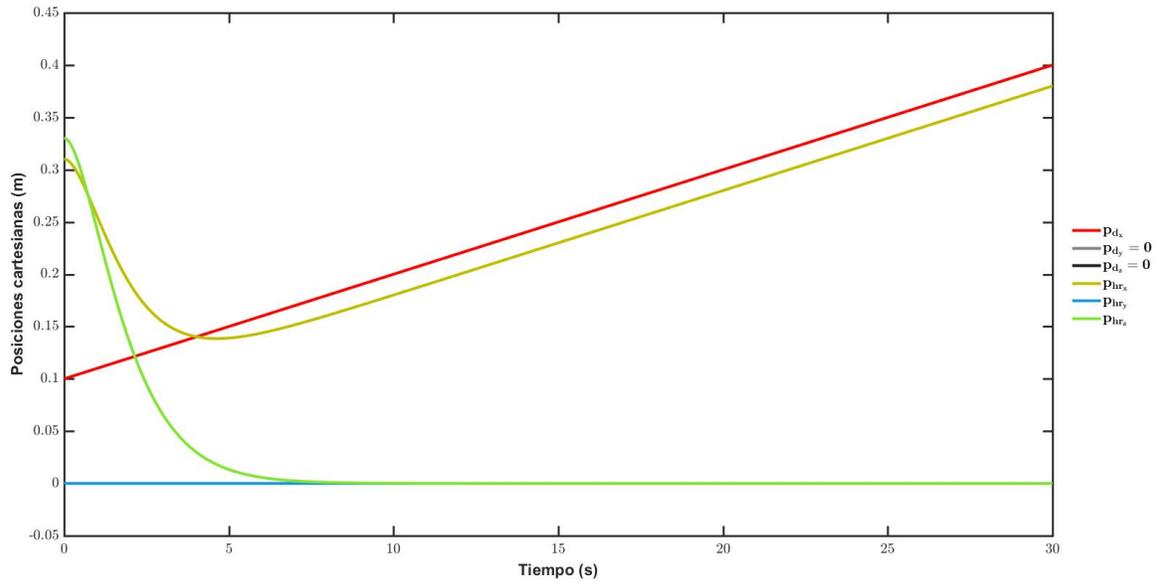


Figura 5.64: Segunda prueba D. Posiciones cartesianas,  $K_{I p_i} = 0$

### Tercera prueba

De forma similar a la prueba homónima del controlador anterior, se supuso que la fuerza de entrada en el eje  $X_0$  era una función rampa con  $m = 0.1$ ,  $k_{f_i} = 1$  y  $k_{I_i} = 0.1$ , mientras que en los otros ejes ninguna fuerza era aplicada, en ausencia de la parte integral del controlador de posición y proporcionando solo la trayectoria deseada, sin la velocidad y aceleración correspondientes. Se obtuvo el resultado mostrado en la Figura 5.65 que presenta un comportamiento muy similar al mostrado en la Figura 5.39, aunque en este caso el avance de la posición en el sentido de la fuerza es un poco más tardado, lo que se ve reflejado en que la extensión completa se logra hasta  $t = 7[s]$ . Además se observa que el objetivo de seguimiento no es logrado, no obstante, es importante recordar que el seguimiento de  $\mathcal{X}_d$  es un objetivo secundario que ayuda a cumplir el objetivo principal de controlar la posición del efector final por medio de la fuerza de interacción, el cual es cumplido en esta prueba a pesar de que el seguimiento de la trayectoria no es logrado. Como se mostró anteriormente aumentar la magnitud de la fuerza causaría que el pequeño retroceso inicial fuera reducido.

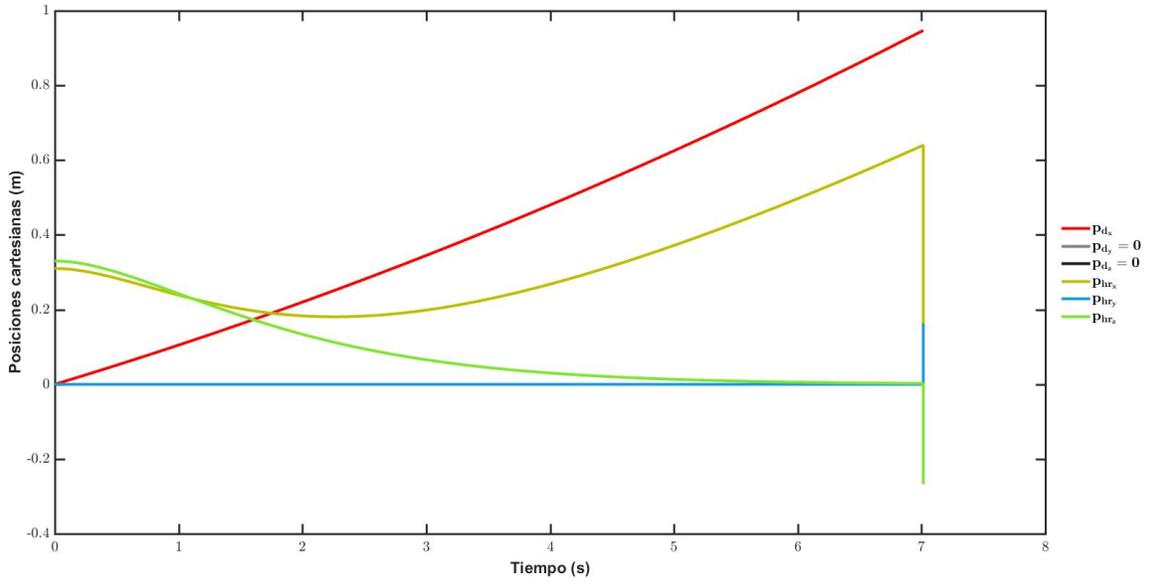


Figura 5.65: Tercera prueba A. Posiciones cartesianas,  $K_{Ip_i} = 0$

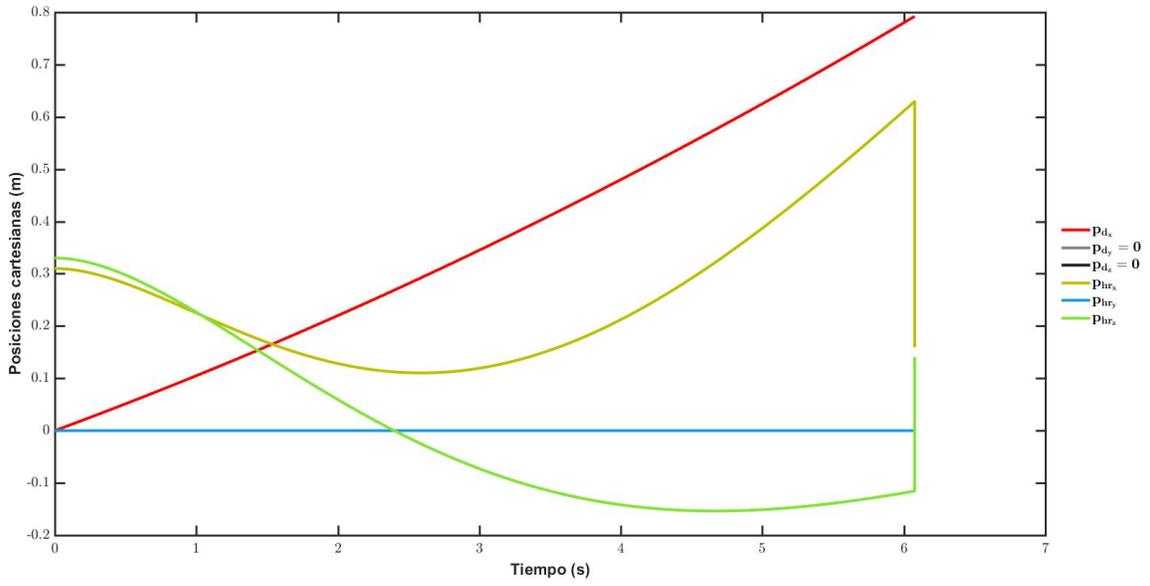


Figura 5.66: Tercera prueba B. Posiciones cartesianas,  $K_{Ip_i} = 0.5$

Al incluir el término integral en el control de posición con  $k_{I p_i} = 0.5$  el comportamiento descrito por la Figura 5.66 es observado y donde el error no llega a ser cero ya que la extensión completa se logra antes. El objetivo de posición cero no se cumple en el eje  $Z_0$  y aunque en el eje  $X_0$  el brazo se mueve en el sentido de la fuerza al inicio, se regresa más que cuando el integrador no es incluido, demostrando que dependiendo del diseño el componente podría causar más problemas que ayuda en el desempeño.

#### Cuarta prueba

Al aplicarse una fuerza en el eje  $X_0$  descrita por la figura 5.44 de tal forma que  $p_{d_x}$  descrita por 5.46 sea seguida pero sin ingresar la velocidad y aceleración correspondientes dadas por  $\dot{p}_{d_x}$  y  $\ddot{p}_{d_x}$  respectivamente y en ausencia del término integral del control de posición se observó el comportamiento descrito por la Figura 5.67. El sistema mantiene un error de posición en el eje  $X_0$  desde el inicio de la simulación hasta que en  $t = 25 [s]$  la posición del exoesqueleto alcanza la posición estimada que para ese entonces ya lleva siendo constante desde  $t = 20 [s]$ . Cuando la fuerza cambia de forma la posición estimada también lo hace como fue visto anteriormente, sin embargo parece ser que la posición del exoesqueleto presenta un retraso al notarse que cada que la fuerza y posición estimada cambian de forma la posición del exoesqueleto lo hace posteriormente. Como se predijo en estado permanente cuando la fuerza es cero la posición es mantenida por el robot.

Haciendo a un lado el seguimiento de la posición estimada y enfocándose solo en lo que implica la forma de la fuerza y de la posición del robot se puede entender lo siguiente: el usuario partiendo de la posición inicial ejerce una fuerza constante (aunque pequeña) en el sentido positivo del eje  $X_0$ , al ser pequeña la fuerza, el movimiento del robot se realiza en sentido contrario hasta que en  $t = 5 [s]$ , el usuario, al notar que el robot se mueve contrariamente, va aumentando la fuerza progresivamente por lo que ahora el robot empieza a moverse en dirección de la fuerza aplicada; posteriormente en  $t = 10 [s]$  al notar que el movimiento se realiza de buena manera ejerce una fuerza constante para seguirlo moviendo pero con una velocidad menor. En  $t = 15 [s]$  el usuario empieza a disminuir la fuerza al llegar a  $p_{hr_x} = 0.4 [m]$ , aunque la estimación del controlador es  $p_{d_x} = .425 [m]$  al querer que el robot ahora se mueva en sentido contrario, lo que supondría entonces que entre  $p_{h_x}$  y  $p_{d_x}$  también hay un error e incluso podría ser que  $p_{hr_x} = p_{h_x}$  en ese instante. Al realizar esta disminución de fuerza el robot no reacciona de forma inmediata, por lo que hasta alrededor de  $1 [s]$  después de disminuida la fuerza empieza a moverse en sentido negativo. Finalmente en  $t = 20 [s]$  el usuario deja de ejercer la fuerza porque ha llegado a la posición deseada que es de aproximadamente  $0.35 [m]$ ; aún así el robot

sigue moviéndose hasta  $t = 25 [s]$  lo que causa que llegue hasta  $0.27 [m]$  aproximadamente causando que entre  $p_{h_x}$  y  $p_{hr_x}$  entonces exista un error debido al retraso en la intención del movimiento por parte del controlador a pesar de que no exista error entre  $p_{hr_x}$  y  $p_{d_x}$ . Este análisis resulta en que la intención de movimiento que es el verdadero objetivo de control, a pesar de que  $\mathcal{X}_d$  no es seguida en toda la simulación y  $\mathcal{X}$  presenta un retraso a los cambios en  $\mathcal{F}_{control}$ , podría considerarse como lograda sin embargo es notable que dependiendo del desempeño del controlador el sistema puede presentar errores entre la posición estimada y la posición deseada real lo cual podría representar problemas especialmente cerca de los límites del espacio de tarea, por lo que esta situación debe ser tomada en cuenta por el operador.

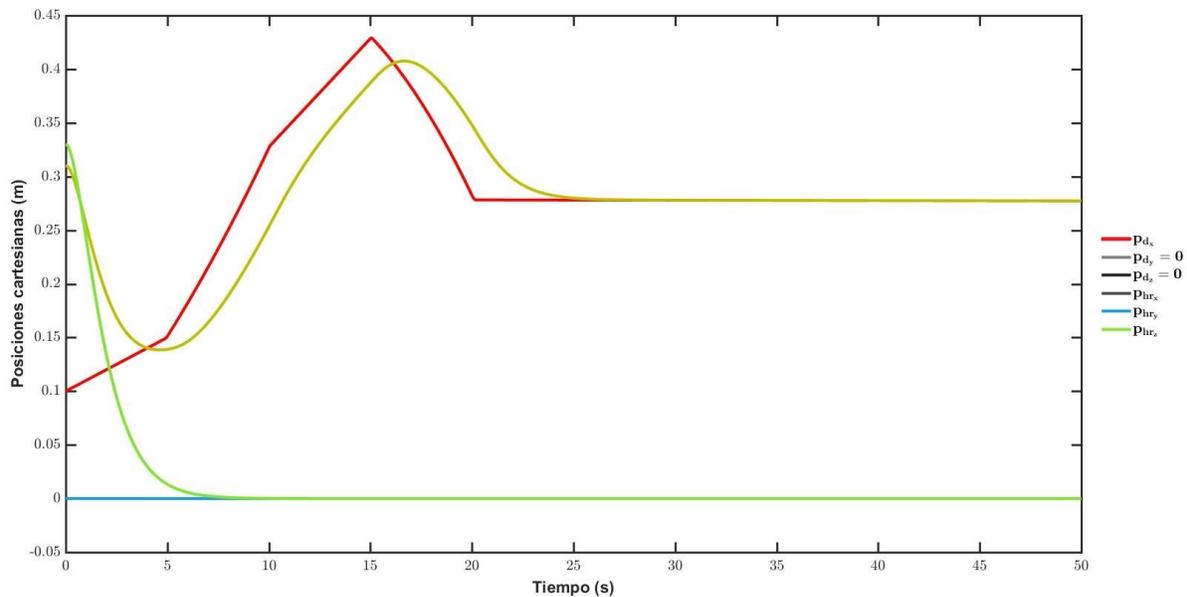


Figura 5.67: Cuarta prueba A. Posiciones cartesianas y posiciones cartesianas deseadas,  $k_{Ip_i} = 0$

Posteriormente se realizó la misma prueba pero esta vez implementado el control PID de posición para  $k_{Ip_i}=0.1$  y  $k_{Ip_i}=0.5$  obteniéndose los resultados mostrados en las Figuras 5.68 y 5.69.

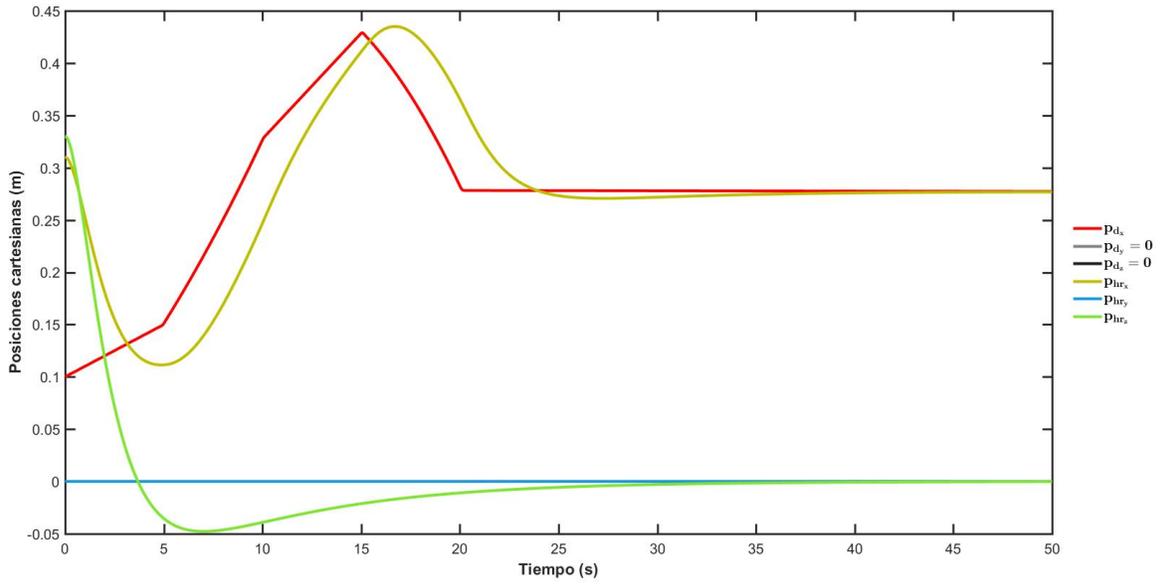


Figura 5.68: Cuarta prueba B. Posiciones cartesianas y posiciones cartesianas deseadas,  $k_{I p_i} = 0.1$

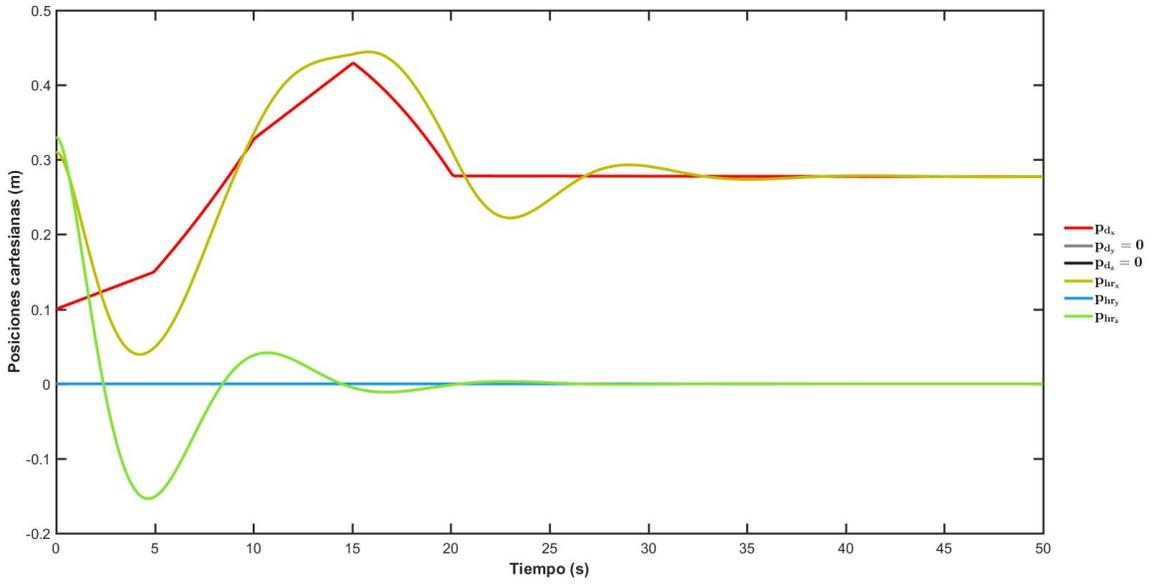


Figura 5.69: Cuarta prueba B. Posiciones cartesianas y posiciones cartesianas deseadas,  $k_{I p_i} = 0.5$

En ambas figuras se observa un comportamiento muy similar al caso del controlador PD, sin embargo cuando  $k_{I_{p_i}} = 0.5$  se observa que al término de cada tramo de 5 segundos, donde la fuerza cambia de forma, el error se va disminuyendo. También en esta misma prueba es visible que cuando en  $t = 20 [s]$  la fuerza se hace cero y la posición en el eje  $X_0$  del exoesqueleto de  $0.314 [m]$  es la posición deseada por el operador en ese eje, aunque la respuesta no es inmediata y es oscilante, es más rápida que cuando el integrador no existe logrando un valor final de  $0.278 [m]$  teniendo un error final entre la posición deseada y la del exoesqueleto mucho menor en contraste de la prueba sin integrador lo que podría considerarse una mejora en el desempeño. En ambos casos se sigue observando un retraso en la reacción del controlador lo cual como ya se dijo se vuelve especialmente importante cerca de configuraciones singulares.

Con la finalidad mejorar el desempeño se cambiaron las ganancias del control de posición  $k_{v_i}$  y  $k_{p_i}$  por el valor de 4, manteniendo el comportamiento sobreamortiguado. Los resultados cuando  $K_{I_{p_i}} = 0$  y  $K_{I_{p_i}} = 0.5$  se muestran en las Figuras 5.70 y 5.71.

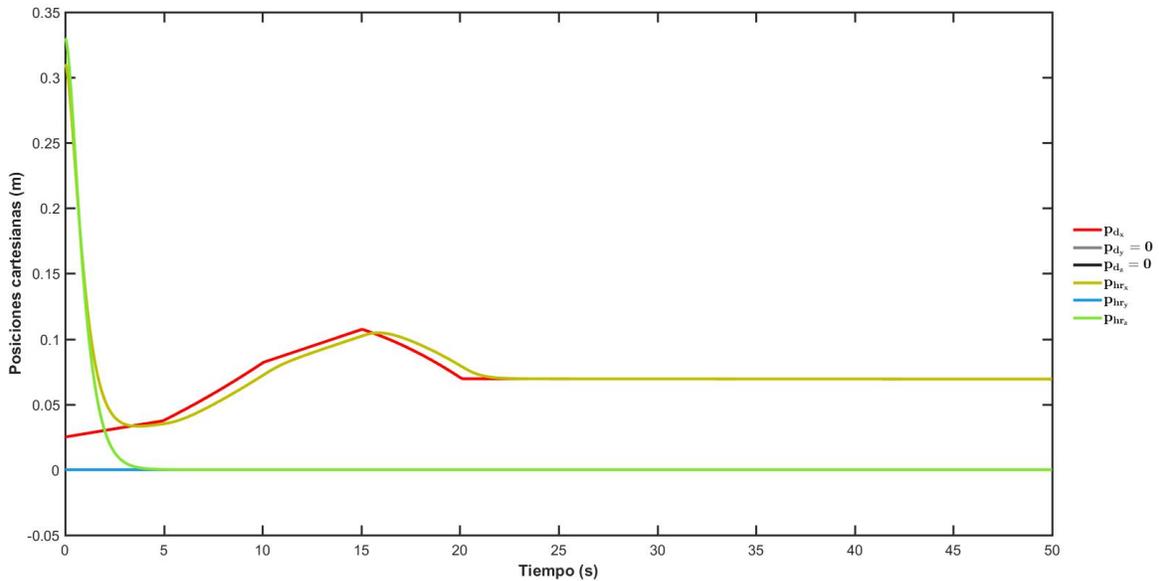


Figura 5.70: Cuarta prueba C. Posiciones cartesianas y posiciones cartesianas deseadas,  $k_{I_{p_i}} = 0$

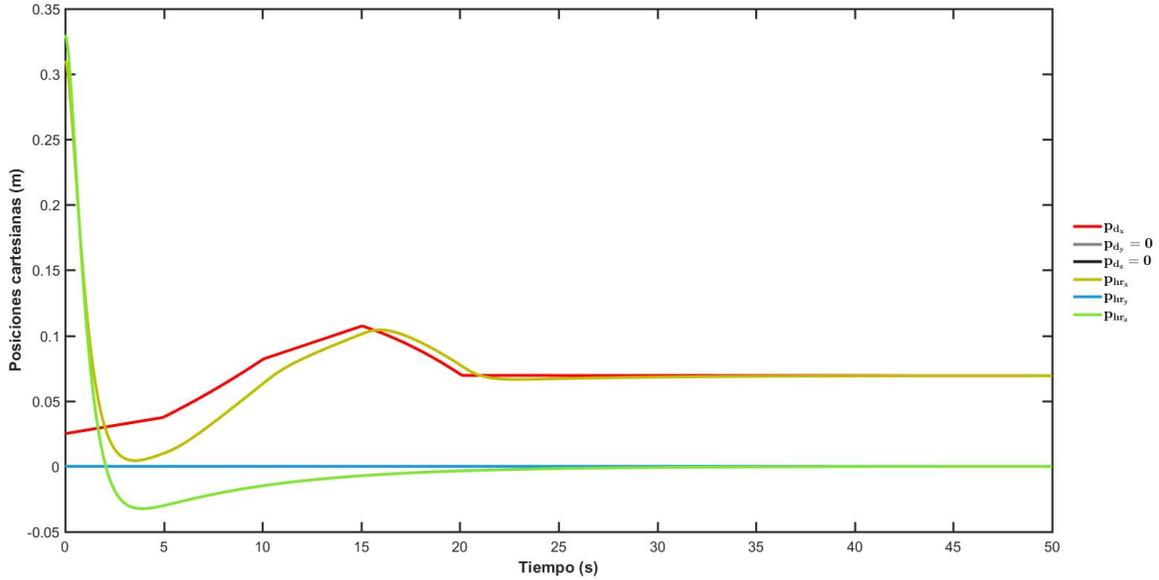


Figura 5.71: Cuarta prueba C. Posiciones cartesianas y posiciones cartesianas deseadas,  $k_{I p_i} = 0.5$

Como primer observación el cambiar las ganancias de posición impacta la posición estimada a través de la ganancia  $k_{p_i}$  haciendo que ésta sea escalada aunque mantenga la misma forma. Debido a esto el robot en un inicio se regresa más y avanza menos a lo largo de la simulación. Por otra parte, también se observa que en términos generales el error de posición es mucho menor en ambos casos, incluso sin el integrador, sin embargo éste da la posibilidad de que en aún en movimiento, bajo ciertas condiciones, se logre un error cero y aunque esto no es notable debido a que la función  $p_{d_x}$  cambia de forma cada 5 segundos, posiblemente si se extendiera el periodo de cada tramo la posición del robot alcanzaría la estimada. Lo más importante es notar aquí que en  $t = 20 [s]$  cuando la fuerza es cero, a pesar de que el robot no se detiene inmediatamente, el movimiento que tiene desde que la fuerza se hace cero hasta que lo hace es mucho más pequeño y entonces el error entre  $\mathcal{X}_h$ ,  $\mathcal{X}_d$  y por consecuencia  $\mathcal{X}$  es menor. Para el caso sin integrador en  $t = 20 [s]$  el robot se encuentra en  $0.08 [m]$  debiéndose detener ahí, sin embargo se detiene aproximadamente 3 segundos después alcanzando  $.069 [m]$ ; en el caso con integrador se alcanza un valor similar después de algunas oscilaciones. Esto muestra que independientemente de si el término integrador es incluido o no en la ley de control de posición, el desfase que tiene el robot para reaccionar a una fuerza cero depende de la velocidad y aceleración que lleve como ya se había deducido de la ecuación (5.96). Al escalar la posición deseada

el movimiento que debe realizar el robot para alcanzarla fue reducido, luego  $\ddot{x}_d$  y  $\dot{x}_d$ , que no fueron suministradas, son más pequeñas y entonces su ausencia afectó en menor medida al sistema por lo que entonces podría afirmarse que entre más lento el movimiento, mejor es el comportamiento del sistema bajo este esquema de control.

#### 5.4.2. Amplificación de fuerza en el control cooperativo humano/robot

Antes de concluir este apartado es importante mencionar que en [21] en lugar de basarse solamente en las matrices de ganancias  $K_f$  y  $K_I$  para el efecto de amplificación de fuerza, se hace el uso de otro sensor de fuerza que mide los efectos de la carga de tal forma que la ley de control compense los efectos de ella por retroalimentación directa. En contacto con una carga el sistema queda descrito por la ecuación

$$M(q)\ddot{q} + N(q, \dot{q}) = \tau - \tau_{hr} + \tau_e \quad (5.99)$$

con  $\tau_{carga} = J^T \mathcal{F}_e$ , por lo que en [21] con ayuda del nuevo sensor logra compensar por dinámica inversa este elemento con la siguiente ley de control

$$\tau = MJ^{-1}(\ddot{\mathcal{X}}_d - \dot{J}\dot{q} + K_v\dot{e}_{\mathcal{X}} + K_p e_{\mathcal{X}} + K_{IP} \int_0^t e_{\mathcal{X}} dt) + N + J^T \mathcal{F}_{hr} - J^T \mathcal{F}_e \quad (5.100)$$

con  $\ddot{\mathcal{X}}_d = 0$  y  $\dot{\mathcal{X}}_d = 0$  lo que logra que se obtenga el mismo comportamiento del sistema que ya fue analizado y razón por la cual más pruebas no son presentadas.

#### 5.4.3. Conclusiones generales y aplicaciones del control cooperativo humano/robot para amplificación de fuerza

La elección de un control PID de posición toma más sentido al considerar que la compensación del par de interacción humana, carga y modelo dinámico no es perfecto además de no proveer completamente la dinámica deseada; sin embargo, como fue mostrado, bajo ciertas condiciones podría representar un problema. El diseño propuesto en [21] parece facilitar la implementación al no requerir derivación de señales aunque perdiendo capacidad de reacción por parte del robot. En todo caso cabe recordar que el control del sistema está compartido entre el controlador y el humano y que aunque el primero no sea perfecto, el humano puede contrarrestar las deficiencias que éste tenga por medio de la fuerza que ejerce sobre el sistema; la simulación de estas situaciones no es trivial, por lo que

no habría mejor forma de analizar estos esquemas que la realización de pruebas reales para observar directamente el funcionamiento del sistema humano/robot.

## 5.5. Resumen de pruebas a controladores de fuerza

Controlador	Prueba	Situación	Observaciones
<b>Control por retroalimentación de fuerza externa (masa simple)</b>	1	Fuerza de interacción constante	Movimiento respecto a la fuerza de interacción definido por la ganancia
	2	Fuerza de interacción rampa	Movimiento más rápido que al utilizar una fuerza de interacción constante
	3	Fuerza de interacción sinusoidal	Comportamiento inercial del sistema visible
	4	Fuerza de interacción compuesta	Comportamiento inercial del sistema visible
	5	Presencia de carga. Amplificación de fuerza	La ganancia del controlador modifica la razón de amplificación de fuerza
<b>Control por retroalimentación de fuerza externa (exoesqueleto)</b>	1	Fuerza de interacción constante. Ausencia de controlador de fuerza	Movimiento en sentido contrario a la fuerza de interacción. Acoplamiento visible
	2	Fuerza de interacción impulso. Comparación de dinámica con controlador de fuerza y sin él	Respuesta a fuerza amplificada. Acoplamiento y comportamiento inercial visibles
	3	Equilibrio estático en presencia de carga. Amplificación de fuerza	La ganancia del controlador modifica la razón de amplificación de fuerza
	4	Movimiento con carga. Amplificación de fuerza	Partiendo del equilibrio, basta modificar ligeramente la fuerza de interacción para mover la carga. Acoplamiento visible
<b>Control de posición por par calculado en el espacio cartesiano con control de fuerza explícito</b>	1	Regulación de posición	Regulación de posición lograda en ausencia de fuerza de interacción
	2	Fuerza de interacción constante. Ausencia de controlador de fuerza	Posición proporcional a la fuerza de interacción. Acoplamiento visible
	3	Fuerza de interacción constante. Presencia de controlador de fuerza	La ganancia del controlador modifica la dinámica, incluso compensando los efectos de la fuerza de interacción
	4	Equilibrio estático en presencia de carga. Amplificación de fuerza	La ganancia del controlador modifica la razón de amplificación de fuerza
	5	Movimiento con carga. Amplificación de fuerza	Partiendo del equilibrio, basta modificar ligeramente la fuerza de interacción para mover la carga. Acoplamiento visible

<b>Control de fuerza basado en un lazo interno de posición</b>	1	Fuerza de interacción constante. Estimación proporcional	Posición proporcional a la fuerza de interacción. No existe acoplamiento
	2	Fuerza de interacción constante	El sistema busca inicialmente la posición proporcional a la fuerza de interacción y después moverse en su dirección. Entre mayor sea la ganancia integral, el movimiento será más rápido
	3	Fuerza de interacción rampa	Aumentos de pendiente y ganancia integral agilizan el movimiento. La dinámica depende de varios factores
	4	Fuerza de interacción compuesta. Estimación proporcional integral	Dificultades de implementación. Seguimiento de la trayectoria estimada logrado
	5	Movimiento con carga	Error entre la posición del exoesqueleto y la posición estimada, sin embargo, la posición deseada es alcanzada en el eje de aplicación de la fuerza. Acoplamiento visible
	6	Amplificación de fuerza	Las ganancias del controlador modifican la razón de amplificación de fuerza
<b>Control cooperativo humano/robot para amplificación de fuerza</b>	1	Seguimiento de trayectorias	No se logra satisfactoriamente, se imita con cierto retraso. Incluir la componente integral en el controlador genera oscilaciones
	2	Fuerza de interacción constante	Error de seguimiento de trayectoria en ausencia de componente integral. Incluir el término integral permite el seguimiento de la trayectoria pero genera oscilaciones
	3	Fuerza de interacción rampa	Error de seguimiento de trayectoria. El desempeño mejora al agregar el término integral pero genera oscilaciones
	4	Fuerza de interacción compuesta	En ausencia de componente integral se presenta un retraso en la reacción del exoesqueleto a la fuerza de interacción, lo que puede generar un error entre la posición estimada y deseada. Agregar la componente agiliza la respuesta pero genera oscilaciones. Entre más lento sea el movimiento el sistema responde de mejor forma

## Capítulo 6

# Comentarios sobre la interacción humano/exoesqueleto

Las pruebas realizadas en ambos controladores de posición, articular y cartesiano, mostraron que en condiciones ideales un desempeño puede ser elegido de tal forma que sea cumplido en el seguimiento de trayectorias. Sin embargo, en este documento no se profundizó en la utilización de estos controladores para el seguimiento de trayectorias en conjunto con un miembro humano, la cual empeora algunos de los problemas que ya se tenían con estos controladores y genera otros que de cierta forma ya fueron mencionados en los controladores de fuerza.

Por una parte, el no atender adecuadamente las posiciones singulares en el caso de un manipulador provocaría en el peor de los casos: daños a sí mismo y otros activos y, dependiendo de su uso, daño a personas; esto último usualmente trata de evitarse al mantener a los robots aislados. En cambio, el riesgo de daño al humano en el caso de los exoesqueletos se presenta de forma natural, por lo que el llegar a una posición singular, tanto del exoesqueleto como del propio individuo, podría causar un daño que podría ser irreparable. En este sentido, y debido a que para alcanzar una misma posición cartesiana pueden existir diferentes configuraciones articulares, parece razonable la utilización de un control de posición articular por encima de uno cartesiano, pudiendo facilitar a su vez el análisis de configuraciones de humano y exoesqueleto al realizar alguna tarea, permitiendo encontrar las que pudieran ser problemáticas.

Por otro lado, en el desarrollo de los controladores de posición nunca fue considerada la interacción con el humano, la cual, bajo el uso de controladores PD, no garantizaría el seguimiento de

trayectorias. Esto podría mejorarse, de forma teórica, por lo menos de dos formas: utilizando controladores PID, o por medio de sensores de fuerza/par compensar los efectos de la interacción de forma similar que en los controladores de fuerza presentados.

En lo que respecta a los controladores de amplificación de fuerza, en todos se observa que el efecto de amplificación de fuerza es obtenido, aunque la forma en que lo logra así como la forma en que el exoesqueleto es controlado por el usuario sean distintos. El controlador por retroalimentación de fuerza simple en combinación con el control por par computado, logra que en condiciones ideales el sistema mantenga solamente su comportamiento inercial lo que supone un enorme problema debido a dos situaciones fundamentales: la interacción con el humano, y que de forma natural el movimiento del exoesqueleto se encuentra restringido. Esto tiene como consecuencia que sobre el usuario recae una gran parte de la responsabilidad sobre su propia seguridad, al tener que ejercer fuerzas constantemente en el efector final de tal forma que siempre se mantenga dentro del espacio de tarea además de ser lo suficientemente hábil para detener el movimiento y cambiar de sentido el exoesqueleto especialmente cuando se manipula una carga. La situación empeora aún más si se considera que el esquema de control utilizado no desacopla al sistema, es decir, el usuario debería compensar adecuadamente las fuerzas indeseadas. En conclusión, bajo este esquema de control la habilidad del usuario y la ausencia de fallas en la realización de tareas es clave para mantener seguro al usuario, lo cual sobra decir, es extremadamente difícil de lograr.

Como ya fue comprobado el control híbrido de posición/fuerza analizado en este documento mejora la interacción del humano y exoesqueleto al modificar el comportamiento inercial que se obtiene con el controlador de fuerza independiente; permitiendo una configuración predefinida en ausencia de una fuerza de interacción y evitando en consecuencia que el exoesqueleto se mueva por inacción humana a consecuencia de una fuerza aplicada en un intervalo de tiempo anterior. Asimismo se observa que el movimiento se realiza de forma proporcional a la fuerza aplicada, sin embargo el acoplamiento entre grados de libertad se mantiene en este esquema de control, recayendo sobre el usuario la responsabilidad de compensar estos efectos. De la misma forma que en los controladores anteriores las configuraciones singulares deben ser manejadas o evitadas para que ningún daño sea ocasionado. Por último, la elección de las ganancias tanto del control de posición como del control de fuerza impactan de manera importante en la dinámica del exoesqueleto, facilitando o dificultando el control de éste por el usuario.

Las pruebas realizadas al control de fuerza basado en un lazo interno de posición, indican que éste podría ser el esquema de control más ergonómico, evitando el acoplamiento y permitiendo que

el movimiento se realice acorde al sentido común del usuario, por ejemplo, si se requiere mover en una dirección basta con ejercer una fuerza hacia ella, si se requiere un aumento en la velocidad bastaría con aumentar la fuerza ejercida; por el contrario, si se deseara cambiar la dirección del movimiento bastaría con reducir la fuerza ejercida o cambiar su dirección. De la misma forma dejar de ejercer la fuerza implicaría que la posición deseada fue alcanzada. Aunque para este esquema las singularidades deben manejarse de alguna forma y no trabajar en los límites del espacio de tarea, también es importante considerar que para su buen funcionamiento se requiere la dinámica estimada requerida, lo cual podría representar dificultades al depender de la señal de fuerza ejercida en tiempo real.

Se podría decir que desde el punto de vista de la implementación el control cooperativo humano/robot es más sencillo que el basado en el lazo interno de posición, al despreocuparse de las derivadas de la estimación de la posición, esto con la desventaja de que dependiendo del diseño, el exoesqueleto pueda presentar un retraso en respuesta a la fuerza de control e incluso, debido a la componente integral, presentar oscilaciones indeseables, pudiendo dificultar la manipulación por el usuario. Otra ventaja de este controlador es que al utilizar sensores de fuerza/par para la carga, ésta pueda compensarse teniendo como consecuencia el efecto de amplificación de fuerza.

Algo que es común en todos los controladores para amplificación de fuerza es que las ganancias asociadas a la fuerza de interacción tienen un impacto directo sobre la sensibilidad del exoesqueleto así como el efecto de amplificación de fuerza, por lo que su elección además de considerar la cantidad de ayuda que deba aportar el exoesqueleto al usuario en la realización de alguna tarea, debe considerar la habilidad de este último para interactuar con el sistema robótico.

Las pruebas en los controladores de fuerza dejaron entrever que dependiendo del esquema utilizado, la propia naturaleza del sistema humano/exoesqueleto exige que el humano tenga en mayor o menor medida cierto grado de pericia y responsabilidad para evitar situaciones peligrosas o indeseables, de forma similar a lo que sucede entre un conductor y su automóvil. A diferencia a la inteligencia artificial, las acciones del exoesqueleto son consecuentes a las decisiones del usuario, aunque dependiendo del esquema, el exoesqueleto tendrá cierta forma de reacción.

## Capítulo 7

# Conclusiones

Como ya fue mencionado el desarrollo de robots exoesqueletos así como controladores adecuados para su aplicación ha sido un tema estudiado en diferentes partes del mundo, con la intención de ser utilizados tanto en la vida cotidiana e industria hasta en la guerra, siempre con la intención de sustituir o mejorar las capacidades humanas. A pesar de que los exoesqueletos de miembro superior comparten muchas características con los robots manipuladores, la aplicación para lo que son creados provoca cambios importantes en el modelado y la búsqueda de nuevos esquemas de control convirtiéndolo en un campo distinto y complejo, además de tener un gran potencial, lo que motivó la realización de este estudio.

Los dos objetivos propuestos en el apartado 1.6 fueron cumplidos en los capítulos tres, cuatro y cinco respectivamente. Como pudo observarse la obtención de los modelos cinemático y dinámico del exoesqueleto no fue distinta respecto a los modelos de robot manipuladores comunes; sin embargo, la aplicaciones en las que son empleados los exoesqueletos suponen objetivos de control particulares en los que se distinguen el movimiento en conjunto con el humano y el efecto de amplificación de fuerza, controlados por la fuerza de interacción. Estos objetivos, como fue mostrado, fueron atacados por los investigadores bajo diferentes estrategias las cuales fueron analizadas aquí tratando de mantener las consideraciones y posturas de sus autores, permitiendo que se obtuviera información relevante acerca de las características de los esquemas de control propuestos que no era proporcionada ampliamente en los artículos publicados, por lo que un mejor entendimiento de sus alcances y limitaciones fue obtenido. Este entendimiento permitió incluso que una modificación en el controlador de [7] utilizando el esquema de control de [35] fuera propuesta, la cual lograría eliminar el problema del acoplamiento

discutido en 5.2 como fue demostrado de forma teórica en el anexo F de este documento.

Todo el desarrollo teórico tanto del modelo dinámico como el de los controladores fueron explicados de tal forma que se espera que puedan ser de utilidad no solo para los lectores interesados en el campo de los exoesqueletos, sino también para todos los interesados en las áreas de robótica y control en general.

Aunque ahora se tiene un mejor conocimiento de los efectos de cada controlador de forma teórica y con ayuda de simulaciones, en el presente documento siempre se consideró un modelado perfecto, tiempo continuo y funcionamiento en tiempo real, lo cual no sucede en la realidad, quedando pendientes todas las consideraciones necesarias y dificultades que implica una aplicación real de los controladores y que incluso podría impactar negativamente su desempeño y funcionalidad.

Pese a las posibles deficiencias teóricas que puedan encontrarse, el presente documento brinda información relevante y necesaria para comprender el principio de funcionamiento de los controladores analizados y brinda la oportunidad de avanzar de las simulaciones al diseño mecánico y construcción de un exoesqueleto así como también a la implementación física de los controladores sobre él, permitiendo ampliar el conocimiento del campo en cuestión y eventualmente permitir que este tipo de sistemas estén al alcance de todos.

# Bibliografía

- [1] N. Vitiello et al. “NEUROExos: A Powered Elbow Exoskeleton for Physical Rehabilitation”. En: *IEEE Transactions on Robotics* 29.1 (2013), págs. 220-235.
- [2] Khairul Anam y Adel Ali Al-Jumaily. “Active Exoskeleton Control Systems: State of the Art”. En: *Procedia Engineering* 41 (2012). International Symposium on Robotics and Intelligent Sensors 2012 (IRIS 2012), págs. 988-994.
- [3] Antonio Barrientos y col. *Fundamentos de Robótica*. McGraw-Hill, 1997. ISBN: 8448108159.
- [4] M. Bergamasco y col. “An arm exoskeleton system for teleoperation and virtual environments applications”. En: *Proceedings of the 1994 IEEE International Conference on Robotics and Automation* 2 (1994), págs. 1449-1454.
- [5] Rosalío Ávila Chaurand, Lilia Roselia Prado León y Elvia Luz González Muñoz. *Dimensiones antropométricas de la población latinoamericana*. Universidad de Guadalajara. Centro Universitario de Arte, Arquitectura y Diseño, 2007. ISBN: 9789702711933.
- [6] Stefano Chiaverini y Lorenzo Sciavicco. “The Parallel Approach to Force/Position Control of Robotic Manipulators”. En: *IEEE Transactions on Robotics and Automation* 9.4 (1993), págs. 361-373.
- [7] Dongil Choi y Jun-ho Oh. “Development of the Cartesian Arm Exoskeleton System (CAES) using a 3-axis Force/Torque Sensor”. En: *International Journal of Control, Automation and Systems* 11.5 (2013), págs. 976-983.
- [8] John J. Craig. *Introduction to Robotics: Mechanics and Control*. Pearson Prentice Hall, 2005. ISBN: 0131236296.

- [9] “Design and development of a human-machine interactive-force controlled powered upper-limb exoskeleton for human augmentation and physical rehabilitation”. En: *Biomedical Engineering and Sciences (IECBES), 2012 IEEE EMBS Conference on*. Dic. de 2012, págs. 465-470. DOI: 10.1109/IECBES.2012.6498089.
- [10] Harry Goldstein Erico Guizzo. *The Rise of the Body Bots*. URL: <http://spectrum.ieee.org/biomedical/bionics/the-rise-of-the-body-bots>.
- [11] A. Frisoli1 y col. “Robotic assisted rehabilitation in virtual reality with the L-EXOS”. En: *International Conference on Disability, Virtual Reality and Associated Technologies with ArtAbilitation 2008*. 2008. ISBN: 07 049 15 00 6.
- [12] R. A. R. C. Gopura y K. Kiguchi. “Mechanical designs of active upper-limb exoskeleton robots: State-of-the-art and design difficulties”. En: *2009 IEEE International Conference on Rehabilitation Robotics* (2009), págs. 178-187.
- [13] R. A. R. C. Gopura, K. Kiguchi e Y. Li. “SUEFUL-7: A 7DOF upper-limb exoskeleton robot with muscle-model-oriented EMG-based control”. En: *2009 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems* (2009), págs. 1126-1131.
- [14] Ranathunga Arachchilage Ruwan Chandra Gopura. “Development and Control of Upper-Limb Exoskeleton Robots”. Tesis doct. Universidad de Saga, 2009. URL: <http://id.nii.ac.jp/0068/00000453>.
- [15] E. Guizzo y H. Goldstein. “The rise of the body bots [robotic exoskeletons]”. En: *IEEE Spectrum* 42.10 (2005), págs. 50-56.
- [16] H. Kazerooni. “Exoskeletons for human power augmentation”. En: *Intelligent Robots and Systems, 2005. (IROS 2005). 2005 IEEE/RSJ International Conference on*. Ago. de 2005, págs. 3459-3464. DOI: 10.1109/IROS.2005.1545451.
- [17] Kazuo Kiguchi. “Active exoskeletons for upper-limb motion assist”. En: *International Journal of Humanoid Robotics* 04.03 (2007), págs. 607-624.
- [18] Kazuo Kiguchi y Qilong Quan. “Muscle-model-oriented EMG-based control of an upper-limb power-assist exoskeleton with a neuro-fuzzy modifier”. En: *2008 IEEE International Conference on Fuzzy Systems (IEEE World Congress on Computational Intelligence)* (2008), págs. 1179-1184.

- [19] H. Kobayashi y K. Hiramatsu. “Development of muscle suit for upper limb”. En: *Robotics and Automation, 2004. Proceedings. ICRA '04. 2004 IEEE International Conference on*. Vol. 3. 2004, 2480-2485 Vol.3.
- [20] Kyoungchul Kong y Doyoung Jeon. “Fuzzy Control of a New Tendon-Driven Exoskeletal Power Assistive Device”. En: *Proceedings of the 2005 IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics* (2005), págs. 146-151.
- [21] Hee-Don Lee y col. “Human-robot cooperation control based on a dynamic model of an upper limb exoskeleton for human power amplification”. En: *Mechatronics* 24.2 (2014), págs. 168-176.
- [22] Frank L. Lewis, Darren M. Dawson y Chaouki T. Abdallah. *Robot Manipulator Control. Theory and Practice*. Marcel Dekker, Inc., 2004. ISBN: 0824740726.
- [23] Zhiqiang Li y col. “Proceeding of human exoskeleton technology and discussions on future research”. En: *Chinese Journal of Mechanical Engineering* 27.3 (2014), págs. 437-447.
- [24] Alessandro De Luca. *Dynamic model of robots: Lagrangian approach [Material de clase]*. URL: [http://www.diag.uniroma1.it/~deluca/rob2\\_en/03\\_LagrangianDynamics\\_1.pdf](http://www.diag.uniroma1.it/~deluca/rob2_en/03_LagrangianDynamics_1.pdf).
- [25] Simone Marcheschi y col. “Body Extender: Whole body exoskeleton for human power augmentation”. En: *2011 IEEE International Conference on Robotics and Automation* (2011), págs. 611-616.
- [26] S. Marcheschi y col. “Body Extender: Whole body exoskeleton for human power augmentation”. En: *Robotics and Automation (ICRA), 2011 IEEE International Conference on*. 2011, págs. 611-616.
- [27] Matthew Thomas Mason. “Compliance and Force Control for Computer Controlled Manipulators”. En: *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics* 11.6 (1981), págs. 418-432.
- [28] S. Moubarak y col. “Gravity compensation of an upper extremity exoskeleton”. En: *2010 Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology* (2010), págs. 4489-4493.
- [29] E. Papadopoulos y G. Patsianis. “Design of an Exoskeleton Mechanism for the Shoulder Joint”. En: *International Federation for the Promotion of Mechanism and Machine Science World Congress*. 2007.
- [30] Bruno Siciliano y Oussama Khatib (Eds.) *Springer Handbook of Robotics*. Springer, 2008. ISBN: 9783540239574.

- [31] Michelle Starr. *Panasonic working on actual 'Alien' Power Loader*. URL: <http://www.cnet.com/news/panasonic-working-on-actual-alien-power-loader/>.
- [32] Richard Alan Volpe. *Real and Artificial Forces in the Control of Manipulators: Theory and Experiments (PhD Thesis)*. Carnegie Mellon University: Department of Physics, The Robotics Institute, 1990.
- [33] Miomir K. Vukobratovic. "When were active exoskeletons actually born?" En: *International Journal of Humanoid Robotics* 04.03 (2007), págs. 459-486.
- [34] Wikipedia. *Matriz diagonal*. URL: [https://es.wikipedia.org/wiki/Matriz\\_diagonal](https://es.wikipedia.org/wiki/Matriz_diagonal).
- [35] Zhiyong Yang y col. *Force Control Theory and Method of Human Load Carrying Exoskeleton Suit*. Springer, 2017. ISBN: 9783662541425.
- [36] Wen Yu, Jacob Rosen y Xiaou Li. "PID Admittance Control for an Upper Limb Exoskeleton". En: *Proceedings of the 2011 American Control Conference* (2011), págs. 1124-1129.

# Anexos

## Anexo A

# Control de posición articular

### Primera prueba

En las pruebas mostradas en el capítulo 3 se lograron controlar de forma desacoplada las variables articulares; sin embargo se puede demostrar que este desacoplo solo es externo [22], ya que de acuerdo a la ecuación (4.21) el polinomio característico del sistema en lazo cerrado representado en el espacio de estados es un polinomio característico de orden 6. Es fácilmente verificable que el polinomio está conformado por la multiplicación de los polinomios característicos de orden 2 asociados a la dinámica del error de cada articulación independiente, de forma tal que si se diseñara la dinámica del error para una de las articulaciones como inestable ( polinomio característico con por lo menos un polo con parte real positiva) el sistema completo también lo sería a pesar de que los otros subsistemas hayan sido diseñados como estables. Para demostrar esta situación se mantuvieron las ganancias de la primera prueba para las articulaciones 1 y 2 pero volviendo inestable a la articulación 3 al cambiar el signo de la ganancia  $k_{v_3}$ . En la figura A.1 se muestra la afectación en el sistema completo como consecuencia de diseñar el comportamiento de la tercer articulación de esta forma, también es posible observar que aunque el valor de la posición de la articulación tres aumenta de forma exponencial, las articulaciones uno y dos lograron llegar a las posiciones deseadas en aproximadamente  $t = 20$  [s], momento en el cual se inestabilizan.

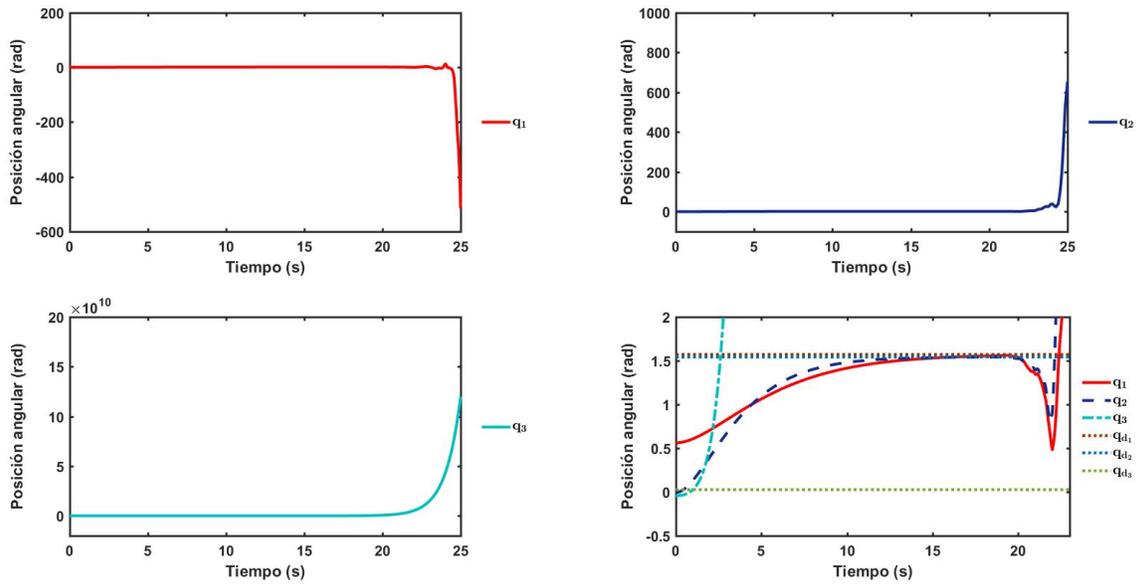


Figura A.1: Primera prueba. Diseño inestable de la articulación 3

La figura A.2 muestra el par que debe ser generado en cada articulación para lograr el comportamiento de posición articular mostrado, demostrando que en los tres casos se tiene un comportamiento inestable que comienza a crecer de forma exponencial en  $t = 4$  [s] y que incluso el comportamiento aparentemente estable de las posiciones angulares  $q_1$  y  $q_2$  que dura hasta  $t = 20$  [s] no puede ser logrado en la práctica al requerir un par oscilante con una frecuencia muy alta y una amplitud que crece de forma exponencial.

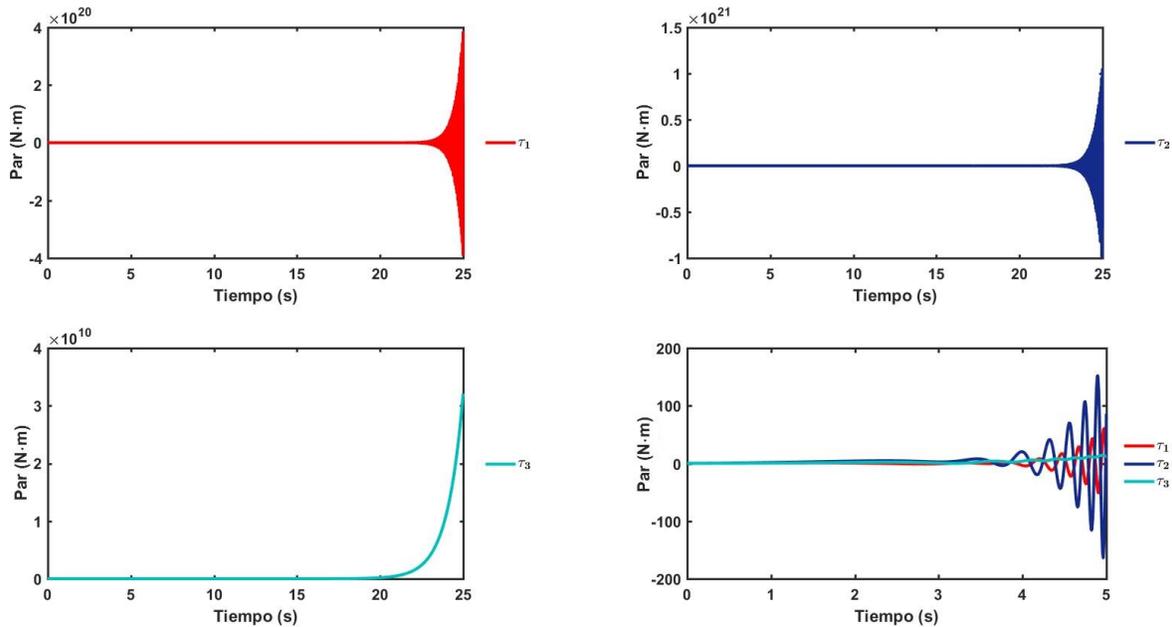


Figura A.2: Primera prueba. Par calculado

## Segunda prueba

Para demostrar que este comportamiento no es propio de una sola articulación, es decir, que la inestabilidad generalizada no solamente puede ser causada por una articulación en particular, se realizó otra prueba en la que a la ganancia  $k_{v_1}$  se le cambió el signo para inestabilizar la articulación 1. Como resultado se observa en la figura A.3 el comportamiento inestable esperado de  $q_1$ , logrando que  $q_2$  y  $q_3$  alcancen las posiciones deseadas de acuerdo al diseño de su controlador independiente, que no obstante, empiezan a tener un comportamiento errático en  $t = 55 [s]$  aproximadamente, lo cual es un tiempo considerablemente mayor a la prueba anterior debido posiblemente a que en este caso la ganancia  $k_{v_1}$  es menor. En la figura A.4 así como en el caso del diseño inestable de  $q_3$ , se observa que todos los pares requeridos son inestables con la diferencia de que en esta ocasión tienen este comportamiento desde el inicio de la prueba y por consecuencia esta prueba tampoco puede ser implementada sobre un sistema físico. Las pruebas realizadas demuestran de forma perceptible lo mencionado por [22], de tal forma que a pesar de que los controladores se diseñen de forma independiente al diseñar alguno como inestable, todo el sistema eventualmente lo será debido a que las variables se mezclan de manera interna afectándose entre ellas.

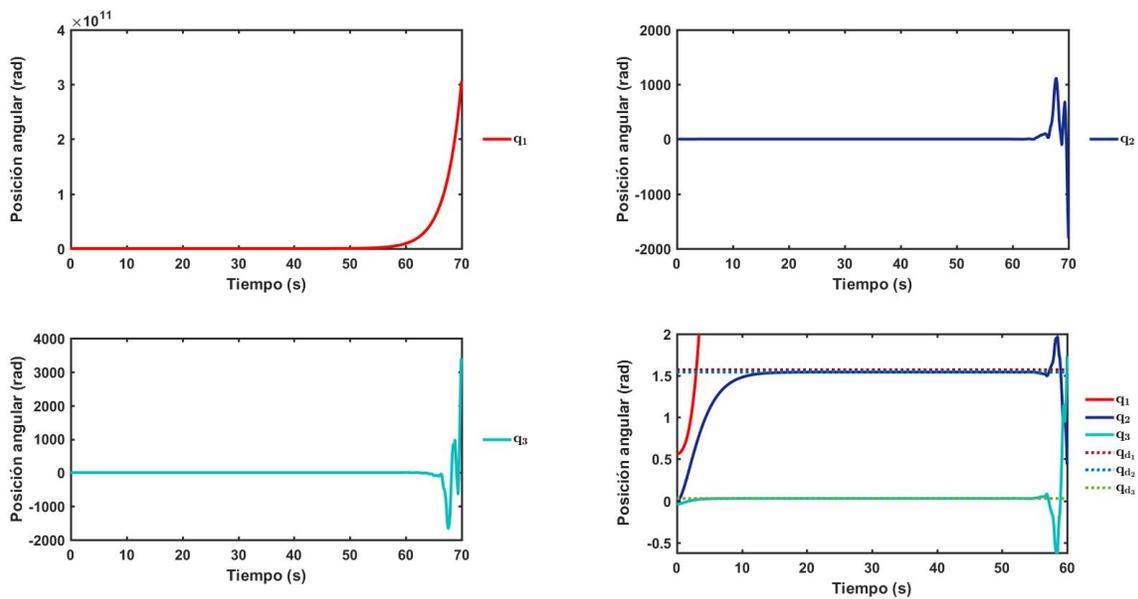


Figura A.3: Segunda prueba. Diseño inestable de la articulación 1

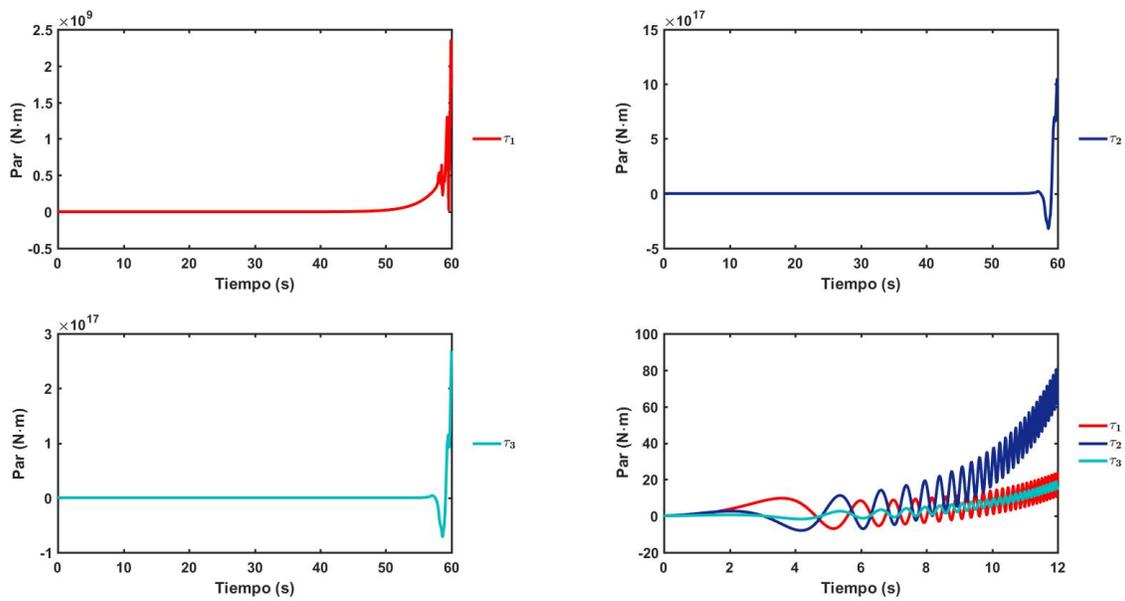


Figura A.4: Segunda prueba. Par calculado

## Anexo B

# Control de posición cartesiano

En esta prueba se buscó observar el comportamiento del robot en los límites del espacio de tarea. Partiendo de  $q_{inicial} = [0 \ 0 \ -\pi/2]^T$ , la posición deseada de carga en la primera prueba, se muestra en B.1 el comportamiento del sistema al establecer como posición deseada la completa extensión del brazo en dirección de  $Z_0$ , correspondiente a  $p_d = [0 \ 0 \ 0.64]^T$  siendo el valor de 0.64 la suma de las longitudes de los eslabones dos y tres. Posteriormente en B.2 se muestra la situación en la que la posición deseada se elige ligeramente mayor,  $p_d = [0 \ 0 \ 0.641]^T$ , lo que implica una posición fuera del espacio de tarea.

Mientras que en el primer caso el comportamiento del sistema no presentó irregularidades, en el segundo el sistema se volvió inestable a partir de  $t = 8[s]$ , aunque antes de ese tiempo su comportamiento fuera normal. Esto como resultado de elegir una posición deseada que se encuentra fuera del espacio de la tarea. Un comportamiento similar se presentó al intentar llegar a posiciones ligeramente mayores que la extensión completa del robot en dirección de los ejes  $X_0$  y  $Y_0$ . Considerando esta situación y al analizar la geometría del robot se puede afirmar que el espacio de la tarea esta delimitado de forma externa por la esfera con centro en  $S_0$  y de radio  $0.64[m]$ , dado por la suma de las longitudes  $L_2$  y  $L_3$ , por lo que posiciones deseadas que sobrepasen este límite producirán una falla generalizada.

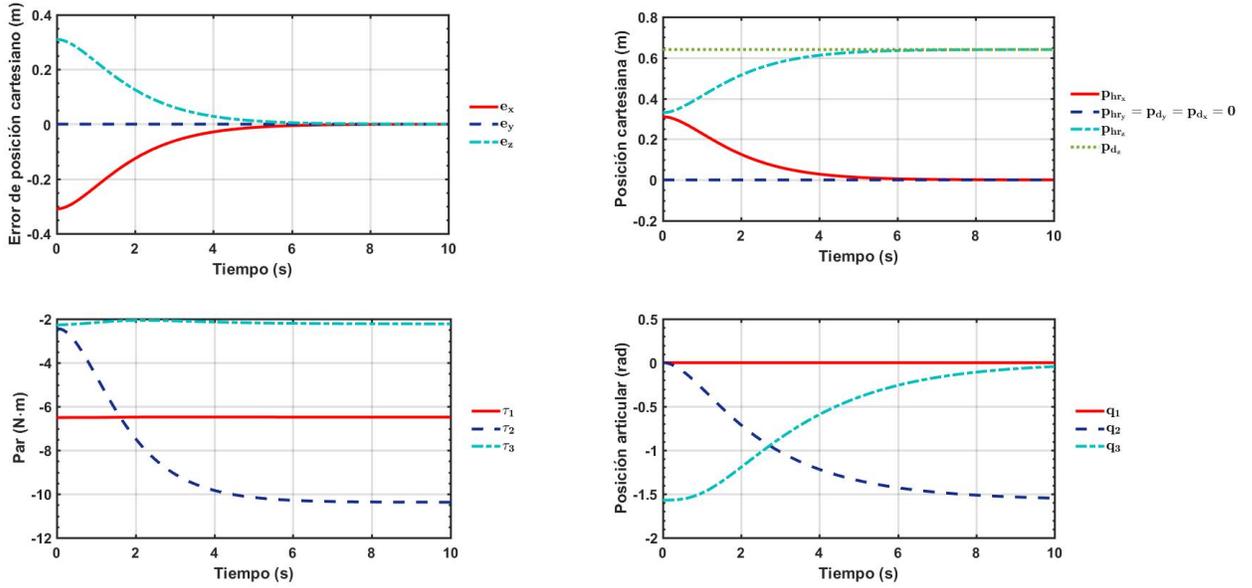


Figura B.1: A. Control de posición en el espacio cartesiano en los límites del espacio de tarea

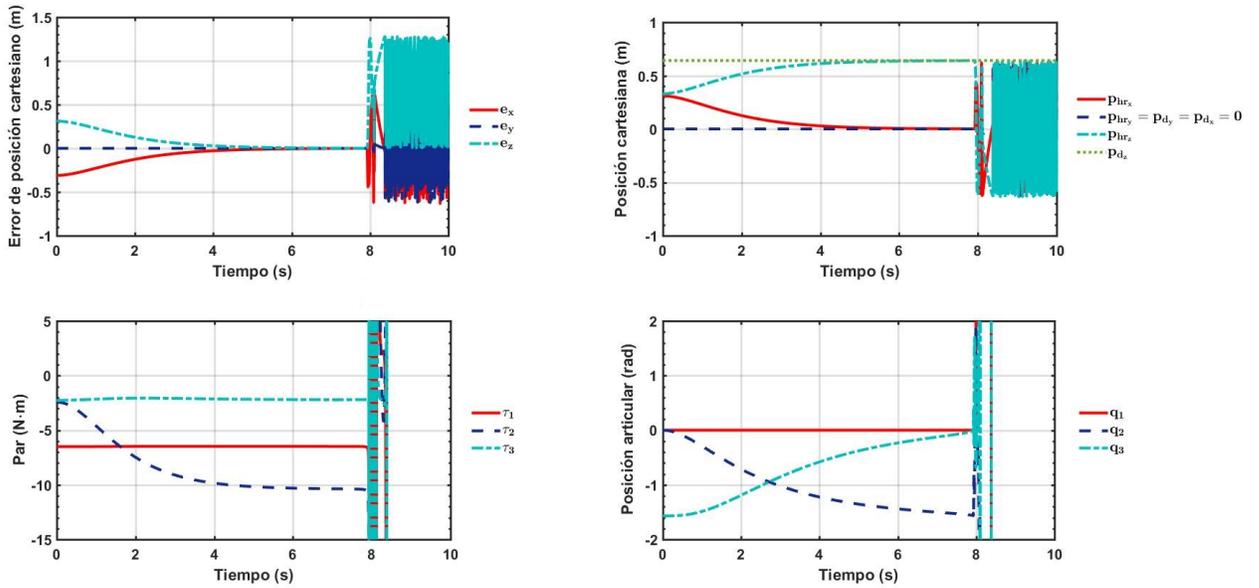


Figura B.2: B. Control de posición en el espacio cartesiano en los límites del espacio de tarea

## Anexo C

# Control por retroalimentación de fuerza externa

### Primera prueba

La fuerza deseada  $\mathcal{F}_{des}$  se eligió como  $\mathcal{F}_{des} = [5 \quad 10 \quad -20]^T$ , mientras que la perturbación  $\tau_d$  se consideró como un vector constante de  $10 \text{ N} \cdot \text{m}$  en cada articulación, es decir,  $\tau_d = [10 \quad 10 \quad 10]^T$ . Con esta primera prueba se buscó demostrar los efectos de la matriz de ganancias  $K$  en el comportamiento de la planta para lo cual en principio se eligió el valor de  $k_i = 10$ , para posteriormente aumentar el valor a  $k_i = 100$ ; los resultados obtenidos se muestran en C.1.

Donde se observa que se tiene un error máximo de fuerza en dirección de los ejes  $X_0$  y  $Y_0$ , aproximadamente de  $3 [N]$ , el cual es reducido a aproximadamente  $0.4 [N]$  al aumentar las ganancias. En esta prueba en particular se observa que el par de la articulación 3 que da como resultado la ley de control es menor al aumentar las ganancias, lo cual cabe aclarar no es una generalización del comportamiento de este controlador, debido a que este par depende de las variables articulares así como del mapeo de las fuerzas del espacio cartesiano al espacio articular por medio del jacobiano.

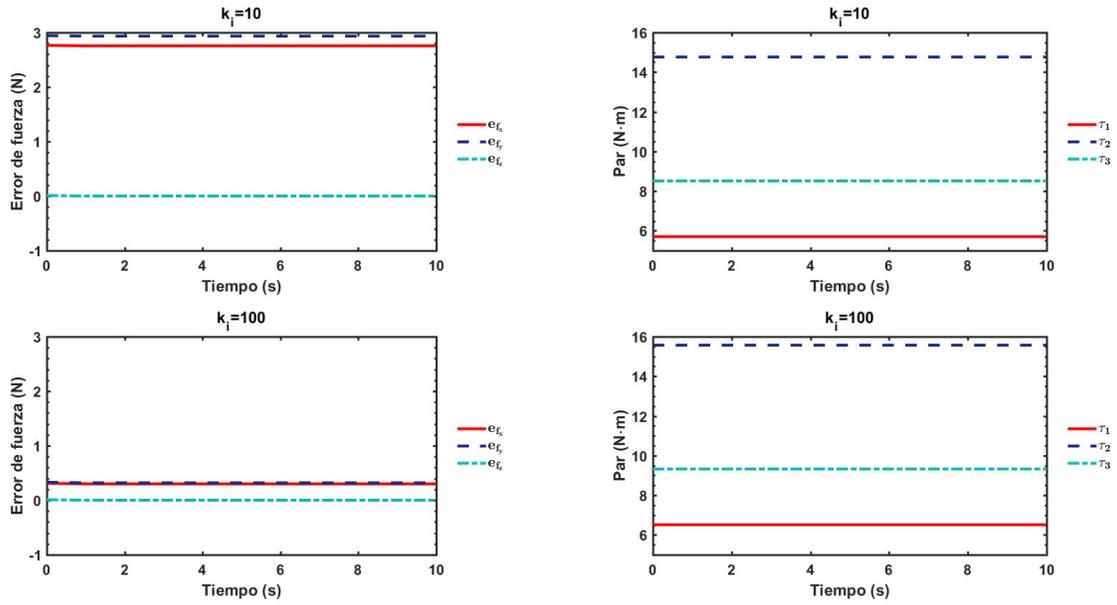


Figura C.1: Primera prueba. Control proporcional por retroalimentación de fuerza externa

## Segunda prueba

En esta prueba se utilizó el modelo completo del robot, aunque considerando que no existe otra dinámica no modelada, es decir,  $\tau_d = 0$ . Para efectos demostrativos se eligió una velocidad angular de 1 [rad/s] y aceleración angular de 1 [rad/s<sup>2</sup>] como condiciones iniciales en cada una de las articulaciones. La ley de control empleada fue la descrita por la ecuación (5.13) donde el vector  $\mathcal{F}_{des}$  fue el mismo utilizado en la prueba anterior. Los resultados que comparan el comportamiento del sistema cuando las ganancias  $k_i$  son 10 y 1000 se muestran a continuación

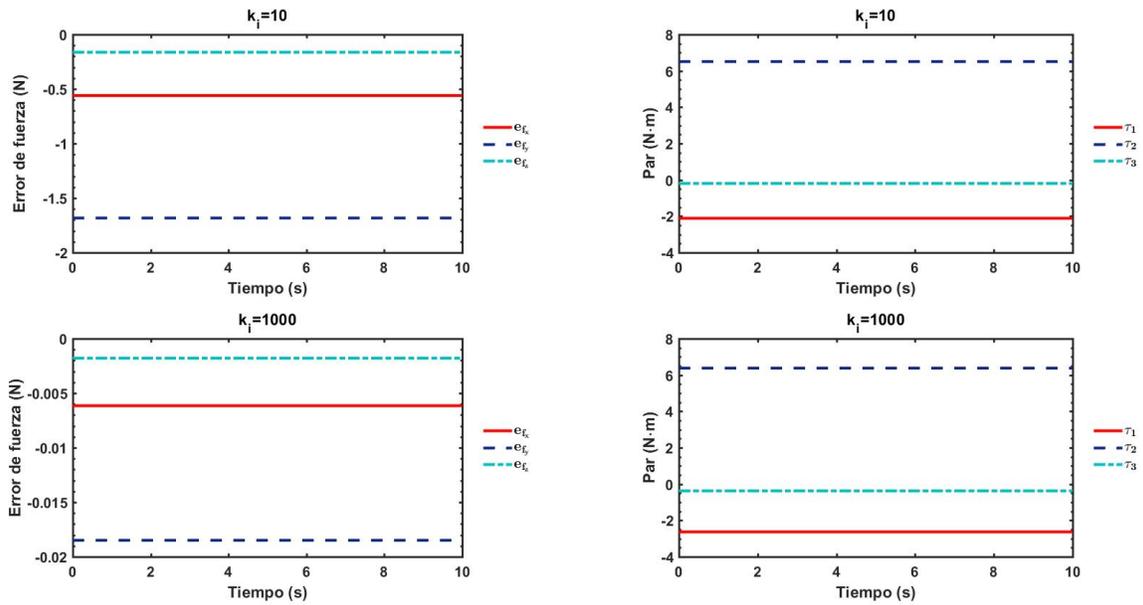


Figura C.2: Segunda prueba. Control proporcional por retroalimentación de fuerza externa sobre el modelo completo de exoesqueleto

Se puede observar que en el primer caso el error de fuerza máximo se encuentra en el eje  $Y_0$  equivalente a  $-1.5 [N]$ , mientras que para el eje  $X_0$  es de  $0.5 [N]$ , y con el error en el eje  $Z_0$  muy cercano a cero; el par máximo necesario es muy cercano a  $7 [N \cdot m]$  en la articulación dos por lo que es aceptable. Elevar la ganancia a 1000 en los tres ejes ocasionó que el error fuera muy cercano a cero en los tres ejes, lo que concuerda con lo analizado y demuestra que aún existiendo movimiento en el robot la fuerza deseada sería alcanzable por lo que este controlador es capaz de lograr su objetivo; la gráfica del par requerido asociado muestra que el par necesario es muy similar para cuando  $k_i$  es de 10 en todos los grados de libertad lo que no demuestra problema alguno.

## Anexo D

# Control de posición por par computado en el espacio cartesiano con control de fuerza explícito

### Primera prueba

En D.1 se muestra el comportamiento del sistema cuando se parte de las mismas condiciones que en la prueba representada por 5.24 pero considerando que ahora existe también una fuerza de interacción constante  $F_{hr_x} = 1 [N]$ , el cual es muy similar al de la prueba realizada con el controlador de fuerza independiente, aunque en proporciones y en tiempos distintos. Se observa el mismo paso por la posición singular así como la inestabilidad del sistema en  $t = 1.7 [s]$  que es cuando la completa extensión del brazo es alcanzada; el movimiento del efector final se realiza en sentido contrario a  $F_{hr_x}$  aunque se observa cierto movimiento en los otros ejes debido al acoplamiento existente.

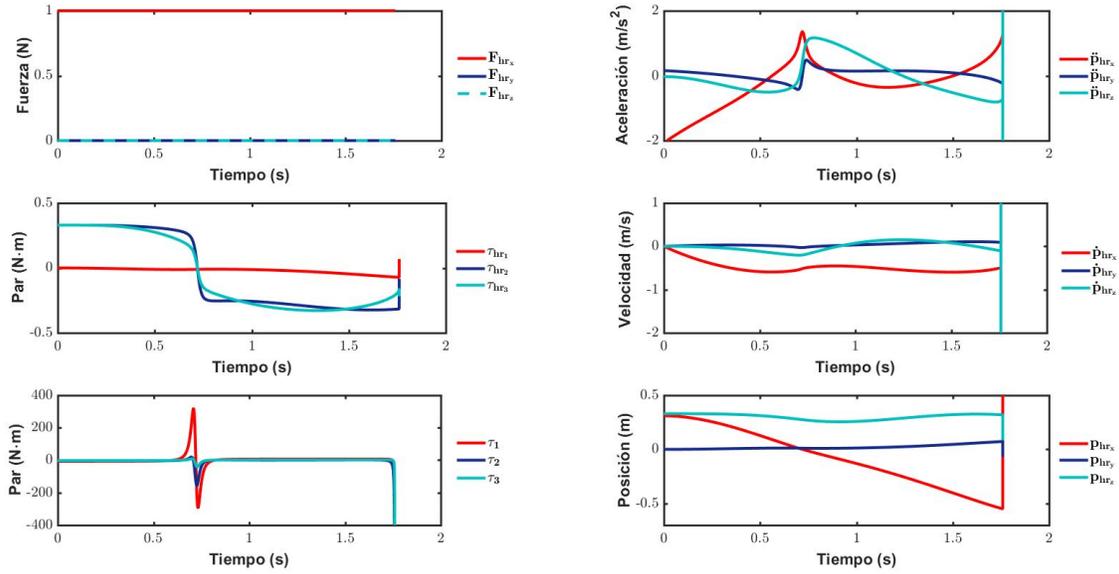


Figura D.1: Primera prueba. Dinámica del sistema,  $F_{hr_x} = 1 [N]$

## Segunda prueba

En las figuras D.2 a D.5 se observa que cuanto mayor sea la magnitud de  $k_i$ , se alcanza una posición más rápido, incluso se alcanzan posiciones más alejadas; sin embargo se observa que cuanto mayor es la ganancia mayor es la inestabilidad del sistema. Esto puede ser debido al paso por configuraciones singulares ya que se pudo comprobar que los impulsos vistos en las gráficas de la ley de control  $\tau$  provienen de la ley de posición y no de la ley de fuerza, lo que indica que el problema es el uso del jacobiano inverso. También es interesante observar que cuando  $k_i = 3$  y  $k_i = 4$  al alcanzar el desplazamiento máximo el sistema comienza a comportarse de forma impredecible, en estos casos moviéndose en sentido contrario a pesar de que la fuerza de interacción nunca cambia. El resultado de estas pruebas indica que aunque la ganancia si funciona como un amplificador de fuerza se debe tener cuidado en dos puntos importantes además del acoplamiento de grados de libertad; evitar configuraciones singulares o buscar la forma de lidiar con ellas como en [21]; por otra parte la elección de las ganancias de fuerza y de posición causan que el sistema funcione de forma muy distinta. Todas estas situaciones se traducen en que el usuario tiene la responsabilidad de controlar una gran parte del sistema ya es el que guía al controlador.

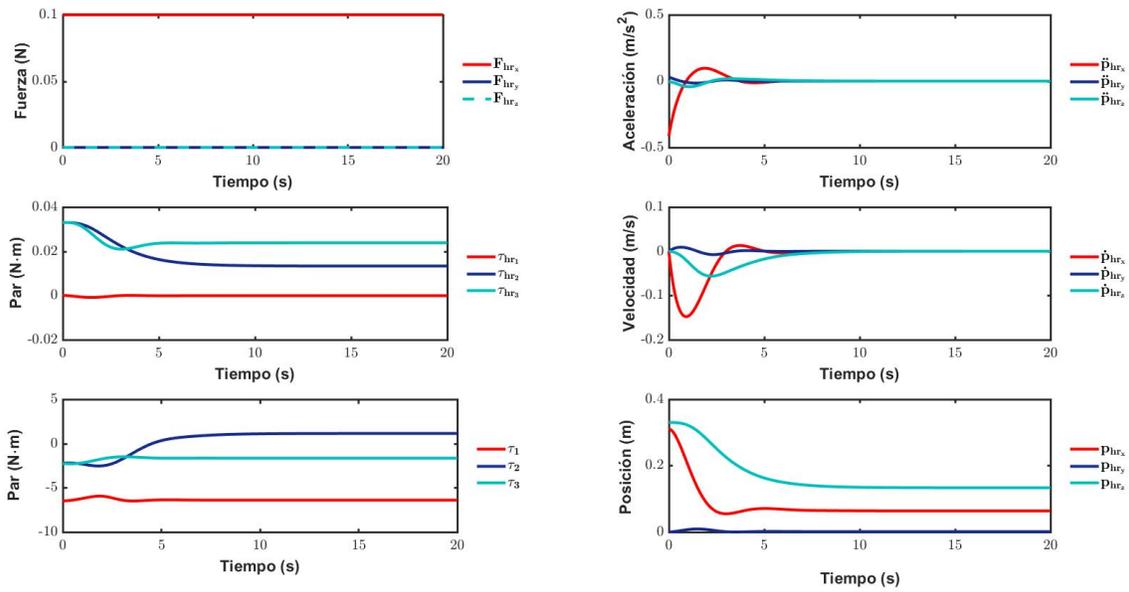


Figura D.2: Segunda prueba A. Dinámica del sistema,  $F_{hr_x} = 0.1 [N]$ ,  $k_i = 1$

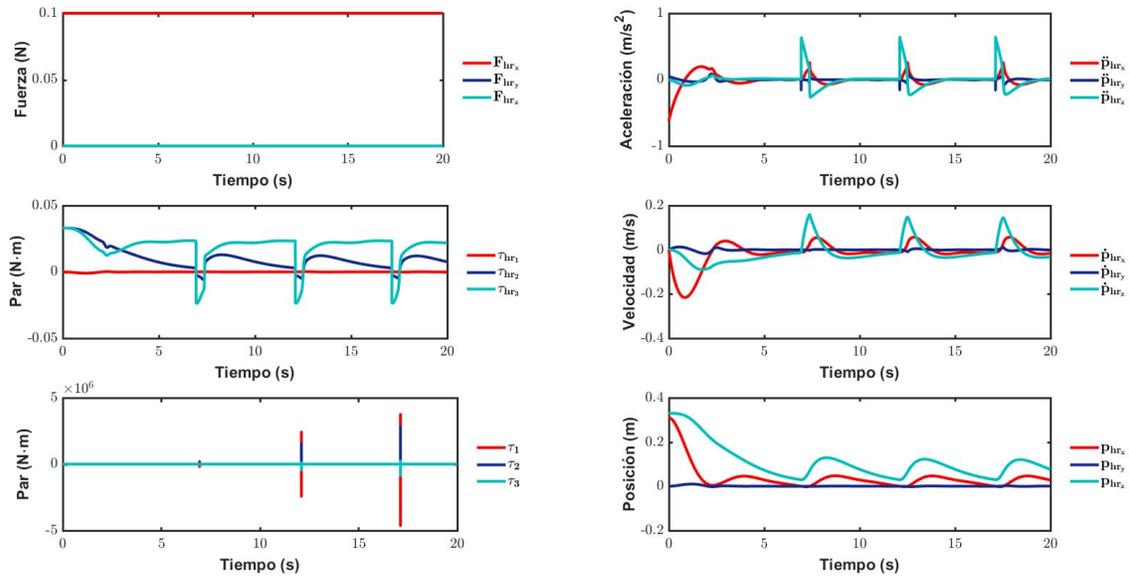


Figura D.3: Segunda prueba B. Dinámica del sistema,  $F_{hr_x} = 0.1 [N]$ ,  $k_i = 2$

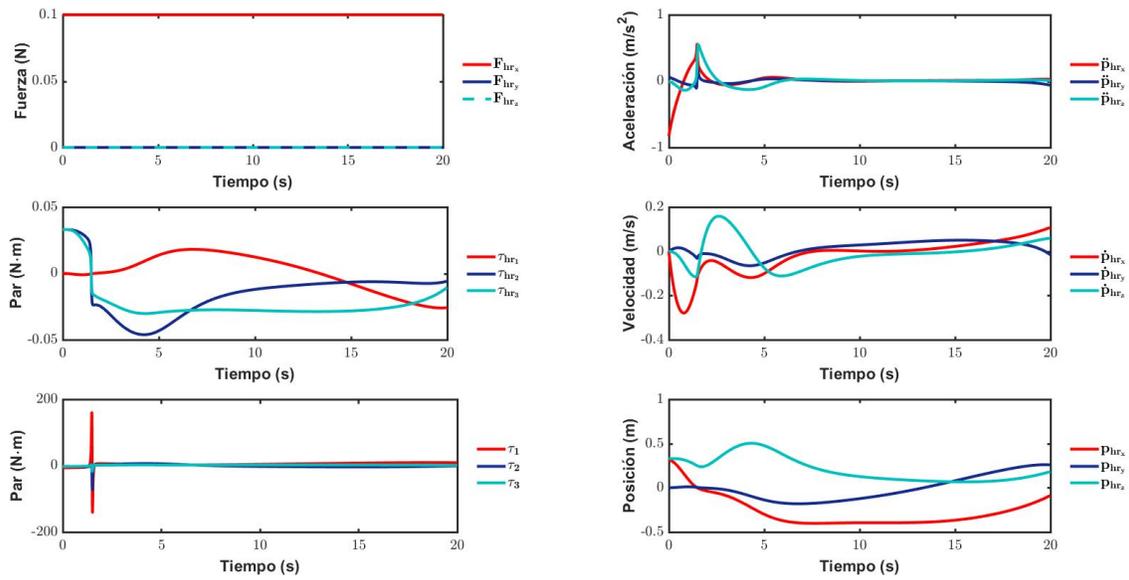


Figura D.4: Segunda prueba C. Dinámica del sistema,  $F_{hr_x} = 0.1 [N]$ ,  $k_i = 3$

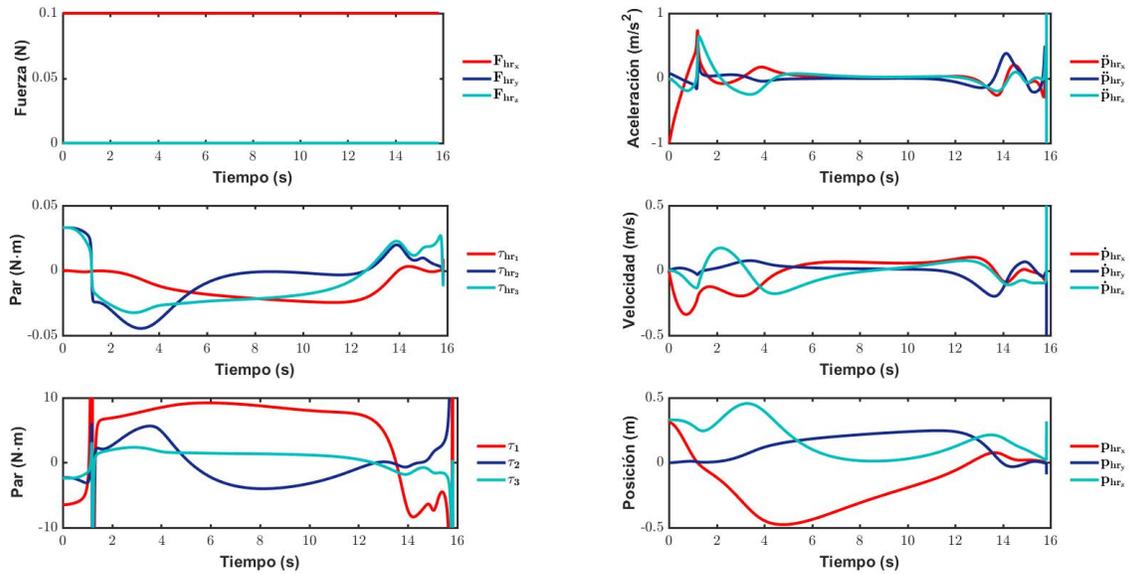


Figura D.5: Segunda prueba D. Dinámica del sistema,  $F_{hr_x} = 0.1 [N]$ ,  $k_i = 4$

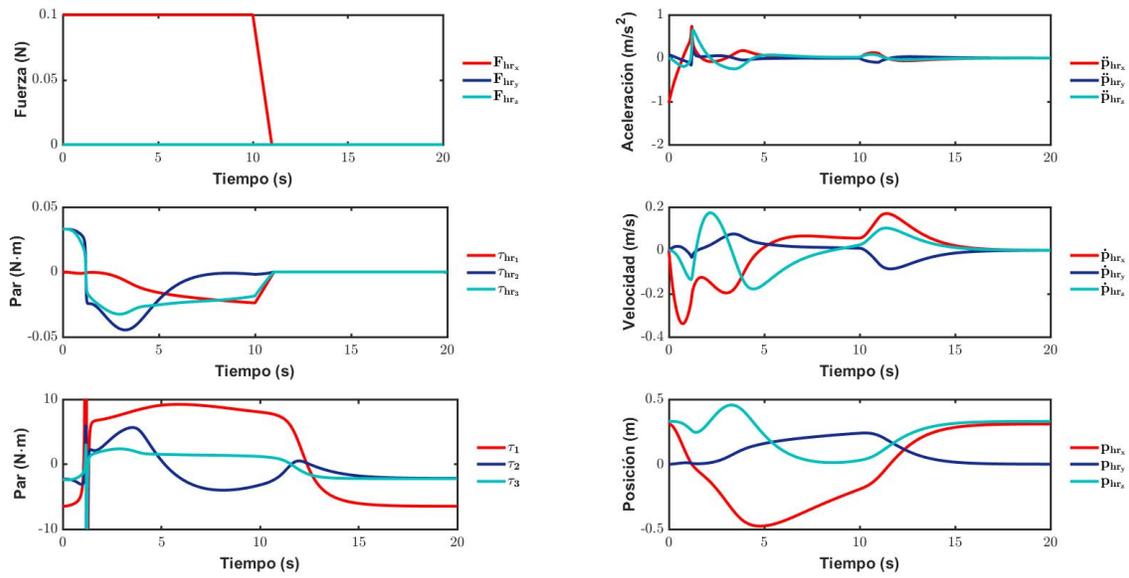


Figura D.6: Segunda prueba E. Dinámica del sistema,  $F_{hr_x} = 0.1 [N]$ ,  $k_i = 4$

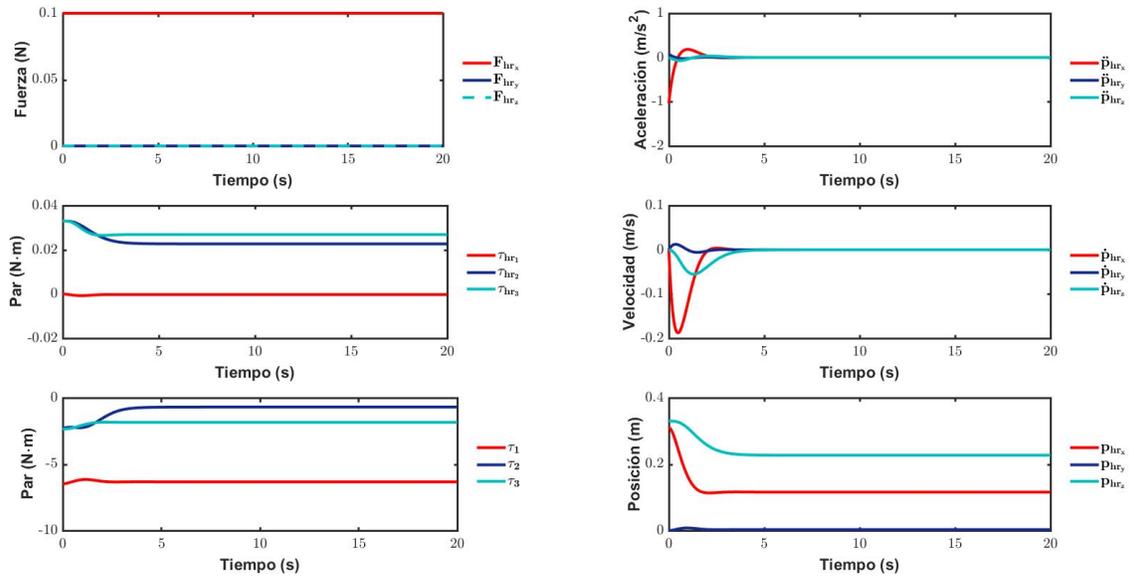


Figura D.7: Segunda prueba F. Dinámica del sistema,  $F_{hr_x} = 0.1 [N]$ ,  $k_{v_i} = k_{p_i} = k_i = 4$

Como ya se mencionó, la figura D.5 muestra que el sistema tiene un comportamiento impredecible después de haber alcanzado el desplazamiento máximo donde cabe hacer notar que la fuerza de interacción se mantiene; sin embargo, como se muestra en D.6 una vez que la fuerza de interacción es cero, el sistema regresa a la posición deseada como resultado de que el control de fuerza se inactiva. Otra forma de estabilizar el sistema fue aumentar las ganancias del controlador de posición al hacer menos dominante el controlador de fuerza, tal como se muestra en D.7.

## Anexo E

# Control de fuerza basado en un lazo interno de posición

En la prueba siguiente se muestra el comportamiento del sistema al aplicar  $F_{control_x} = 0.31 [N]$ , bajo las mismas condiciones que la segunda prueba del apartado 5.3.3, donde se puede observar en E.1 que en el eje  $X_0$  el robot busca la posición proporcional a la fuerza, que en este caso es la posición inicial, por lo que a partir de ahí se mueve en dirección positiva acorde al vector fuerza ejercido hasta que eventualmente llega a la extensión máxima. Es claro que se le puede dar también prioridad a los grados de libertad, es decir, que la respuesta se más rápida en alguno de ellos como se dice en [22], sin embargo esto sería desarrollado de mejor forma al considerar las actividades específicas a las que estaría sujeto el exoesqueleto. Debido a que la extensión máxima es lograda antes de  $t = 5 [s]$ , que es el tiempo de asentamiento bajo el cual fue diseñado el control de posición, se puede notar en E.2 que el error de posición cero no es logrado en los ejes  $X_0$  y  $Z_0$ . De querer lograrlo  $K_I$  debería elegirse entonces menor, diseñar el control de posición para que su desempeño fuera más rápido o que la fuerza en el eje  $X_0$  fuera menor, en todo caso en la práctica la última opción es la más fácil de implementar al depender totalmente del usuario. En las figuras E.3 y E.4 se muestra el comportamiento del sistema cuando se elige  $k_{I_i} = 0.1$  permitiendo que el objetivo de seguimiento si sea logrado.

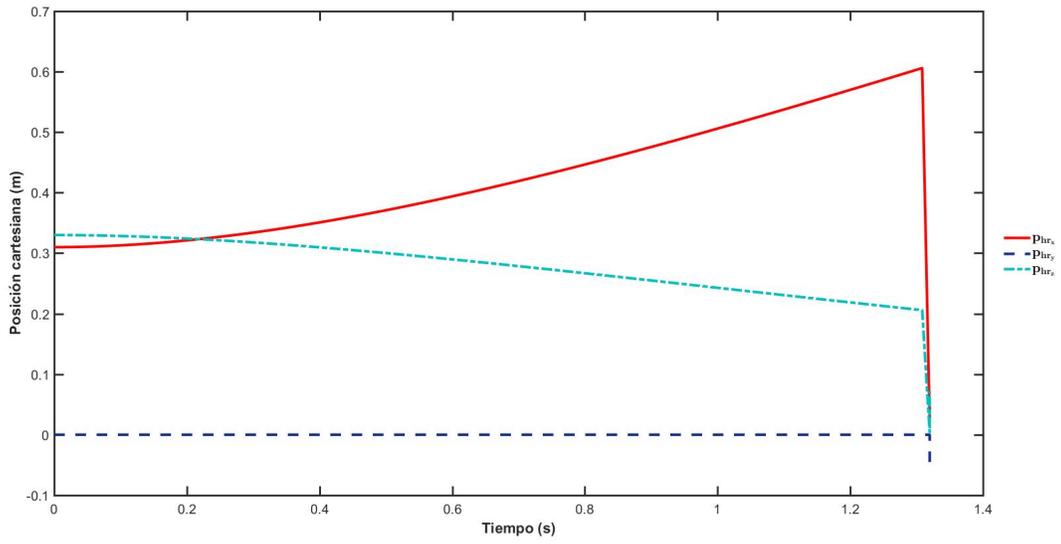


Figura E.1: Posición cartesiana,  $k_{I_i} = 1$

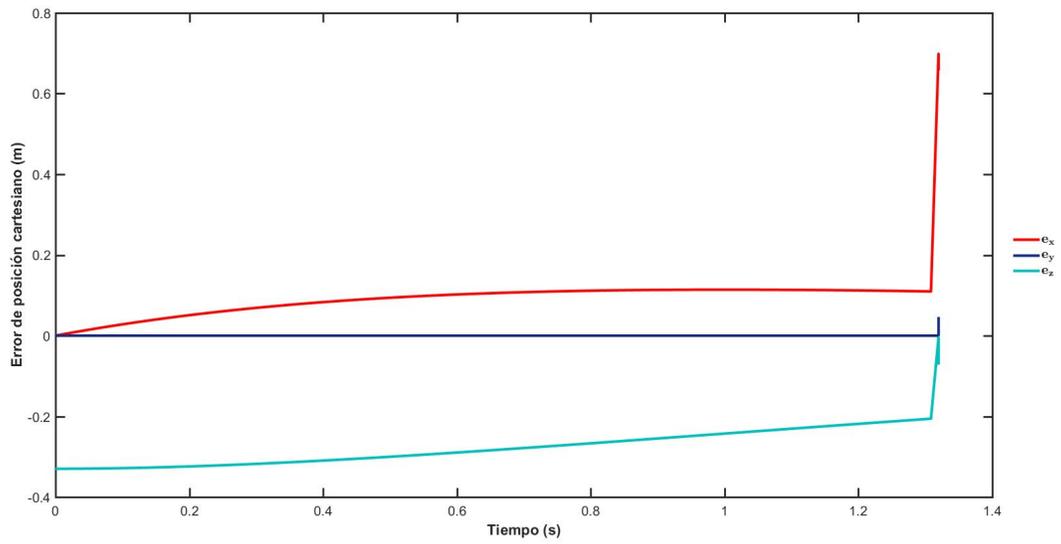


Figura E.2: Error de posición,  $k_{I_i} = 1$

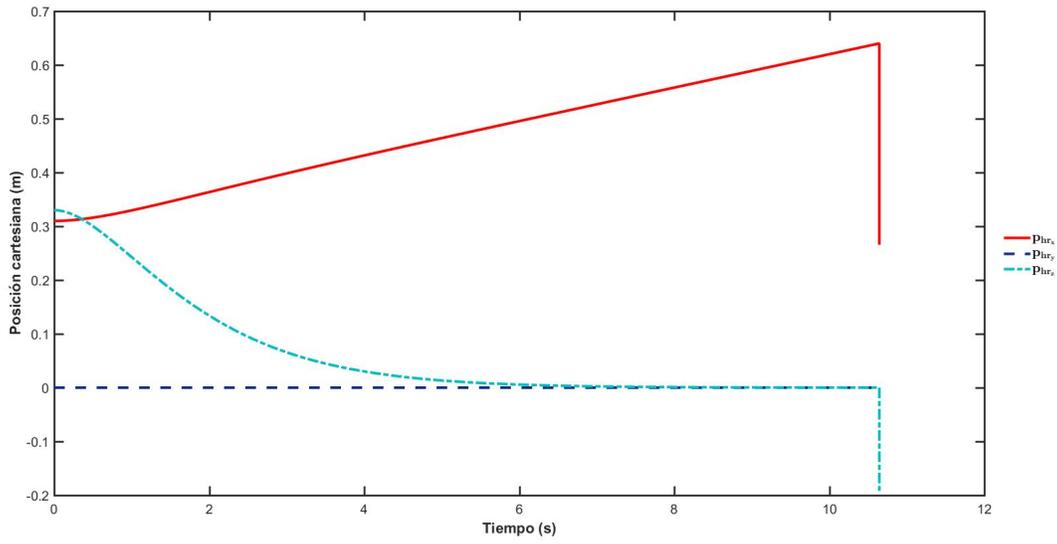


Figura E.3: Posición cartesiana,  $K_{I_i} = 0.1$

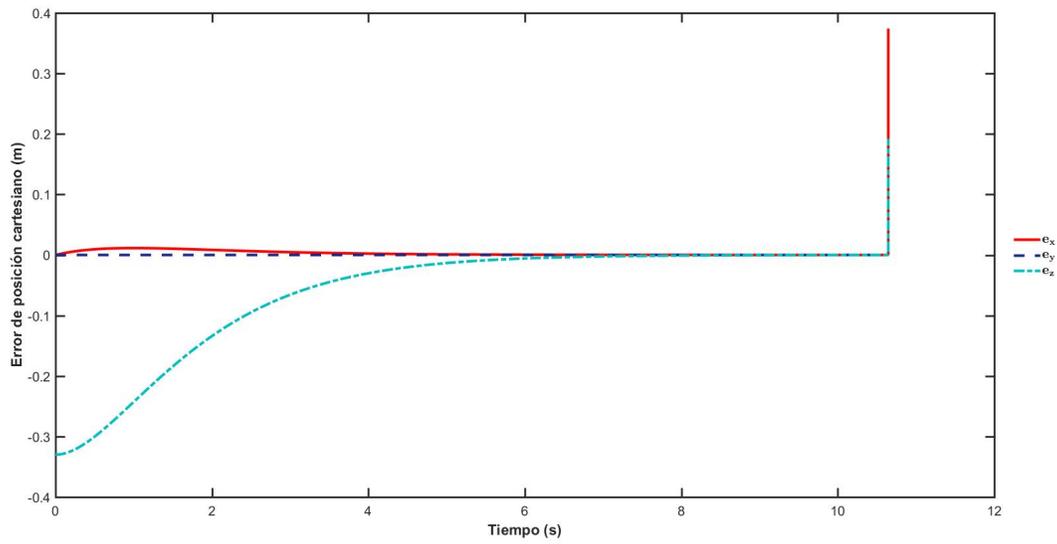


Figura E.4: Error de posición,  $K_{I_i} = 0.1$

## Anexo F

# Modificación al control de posición por par calculado en el espacio cartesiano con control de fuerza explícito

Basado en la forma de compensación de la fuerza utilizado en [35] es posible modificar el esquema de control propuesto en [7] y analizado en el apartado 5.2, de tal forma que cada grado de libertad se comporte de forma desacoplada.

Si la ecuación (5.71) se modifica de tal forma que se ahora se tenga

$$\tau = MJ^{-1}(\ddot{\mathcal{X}}_d - \dot{J}\dot{q} - JM^{-1}J^T\mathcal{F}_{control} + K_F\mathcal{F}_{control} + K_v\dot{e}_{\mathcal{X}} + K_p e_{\mathcal{X}}) + N \quad (\text{F.1})$$

donde el término que compensa el par de interacción bien podría ser sustituido por retroalimentación de fuerza directa utilizada en [21], y donde el término  $K_F\mathcal{F}_{control}$  es agregado. Utilizando esta ecuación sobre el modelo del robot con interacción humana se obtiene

$$\ddot{e}_{\mathcal{X}} + K_v\dot{e}_{\mathcal{X}} + K_p e_{\mathcal{X}} = -K_F\mathcal{F}_{control} \quad (\text{F.2})$$

Si como en [7] la posición deseada es constante, entonces los términos  $\ddot{x}_d$  y  $\dot{x}_d$  son nulos y la

ecuación puede simplificarse como

$$\ddot{\mathcal{X}} + K_v \dot{\mathcal{X}} + K_p \mathcal{X} = K_p \mathcal{X}_d + K_F \mathcal{F}_{control} \quad (\text{F.3})$$

que es muy similar a (5.62), aunque presentando mejoras al tener coeficientes constantes, no depender de  $M_{\mathcal{X}}$  y por tanto estar desacoplada; además de que el factor  $(I + K)$  es reemplazado simplemente por  $K$ .

En ausencia de fuerza de interacción el sistema se comporta como un control de posición cartesiano, por su parte en presencia de fuerza de interacción, a través de la matriz  $K_F$  es posible manipular los efectos de dicha fuerza. En condiciones iniciales de velocidad nulas, el robot se moverá en sentido de la fuerza resultante, de lo contrario la fuerza tendrá que ser capaz de vencer la inercia para dirigir el movimiento, como ya fue visto anteriormente. En estado permanente se tiene la siguiente ecuación

$$\mathcal{X} = \mathcal{X}_d + K_p^{-1} K_F \mathcal{F}_{control} \quad (\text{F.4})$$

donde se observa, al considerar matrices diagonales, que si la fuerza es nula el error de posición será cero, de lo contrario será la posición deseada más un valor proporcional y en sentido dependiente del término  $K_p^{-1} K_F \mathcal{F}_{control}$ .

En este controlador, elegir  $K_F = 0$  haría que el sistema se controlara como un control de posición simplemente, en cambio, si  $K_f = 1$  se tendría un comportamiento comparable cuando se elige  $K = 0$  para el controlador presentado en el apartado 5.2. El controlador por lo demás se comporta de forma similar al presentado en [7], modificar el valor de la ganancia de fuerza, permite las mismas aplicaciones que el controlador del apartado 5.2 como los son la amplificación, reducción o equilibrio de fuerza; también en presencia de una carga es fácilmente observable que el controlador funciona de forma similar e incluso facilita un mejor diseño, por lo que no se presentan pruebas.