EJERCICIOS DE MÉTODOS NUMÉRICOS

Rafael Iriarte V. Balderrama
Hugo E. Borrás García

DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS APLICADAS

1984

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
FACULTAD DE INGENIERIA

EJERCICIOS DE
METODOS NUMERICOS

RAFAEL IRIARTE V. BALDERRAMA
HUGO E. BORRAS GARCIA

DIVISION DE CIENCIAS BASICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS APLICADAS

FI/DCB/84-030

P R O L O G O

Con base en la experiencia que se ha obtenido a lo largo de muchos semestres al impartir la materia de METODOS NUMERICOS, se ha observado la necesidad de que los alumnos cuenten con ejercicios suficientes con el objeto de que puedan practicar los desarrollos matemáticos vistos durante la clase.

El presente cuaderno de ejercicios trata de satisfacer las necesidades antes mencionadas, además de complementar a los apuntes de la materia.

Este cuaderno se elaboró acorde al programa vigente de la asignatura, consta de ocho temas, teniendo en cada uno de ellos ejercicios resueltos y propuestos. Recomendamos que el alumno estudie los problemas resueltos y posteriormente intente resolver los propuestos ya que de esta manera podrá adquirir habilidad para resolver otros problemas.

Agradecemos al Ing. Roberto Ruíz Vilá su participación en el presente trabajo ya que colaboró grandemente en la elaboración de la primera versión de este material.

ING. RAFAEL IRIARTE V. BALDERRAMA
ING. HUGO E. BORRAS GARCIA

FACULTAD DE INGENIERIA
DIVISION DE CIENCIAS BASICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS APLICADAS

I N D I C E

TEMA I INTRODUCCION A LA COMBINACION Y TEOREMA DEL BINOMIO

1. Una empresa está formada por dos divisiones, la A y la B, en la A existen trece departamentos y en la B sólo hay cinco. En cada departamento de la división A se deben seleccionar tres representantes para un comité mientras que en el B deben ser cuatro por cada departamento.

   ¿De cuántas personas estará formado el comité?

Solución:

Por la regla de la multiplicación, para A

$$13 \times 3 = 39$$

y para B

$$5 \times 4 = 20$$

Por la regla de la suma

$$39 + 20 = 59$$

2. ¿Cuántos números de 3 cifras, mayores de 500, se pueden formar con los dígitos 1, 3, 5, 7, 9.

   a) Si no se pueden repetir los dígitos en la misma cifra?

   b) ¿Cuántos de ellos terminan en siete?

Solución:

a) Para que sean mayores de 500, la primera cifra puede ser 5, 7 ó 9, es decir que existen tres maneras de ubicar el primer dígito.

La segunda cifra podrá ser cualquiera de los cinco dígitos, menos el dígito que ocupa la primera cifra; esto es que hay cuatro posibilidades.

La última también puede ser cualquiera de los cinco dígitos menos los dos que ya fueron seleccionados. Entonces por la regla de la multiplicación existen 3 x 4 x 3 = 36 números diferentes mayores que 500.

b) Si el número termina en (7) solamente existe una forma de ubicar el tercer dígito. En la primera cifra quedarán sólo 2 alternativas (5 ó 9) y en la segunda quedarán sólo 3 alternativas.

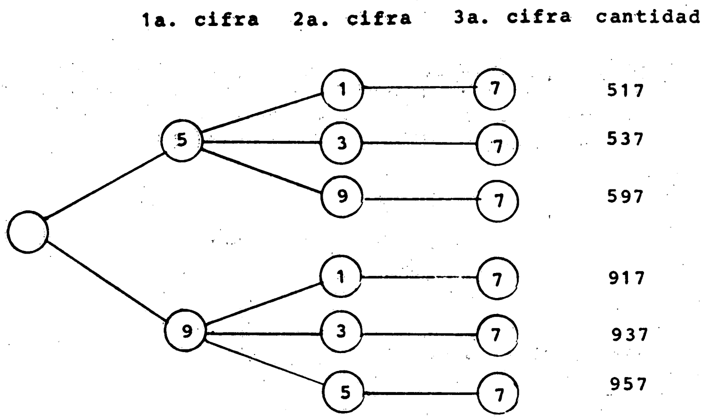
Por la regla de la multiplicación hay 2 x 3 x 1 = 6.

Observe que la ubicación debe hacerse en el orden seguido anteriormente. De otra manera se pueden presentar resultados diferentes.

3. Resolver el inciso (b) del problema anterior mediante un diagrama de árbol.

Solución:

Marcando en cada etapa del árbol las alternativas que existen para ubicar los dígitos.



4. En una asociación civil existen 3 candidatos para ocupar el puesto de director, 2 para el de tesorero y 2 para el de vocal.

a) ¿De cuántas maneras diferentes se pueden seleccionar los tres puestos?

b) Si uno de los tres candidatos para ocupar el puesto de director, también puede ser nombrado como tesorero en caso de no ser nombrado director.

¿Cuál sería la respuesta del inciso a)?

c) Elaborar un diagrama de árbol para resolver el inciso anterior.

Solución:

a) Por la regla de la multiplicación, existen:

$$3 \times 2 \times 2 = 12 \text{ maneras}$$

b) Si la persona con doble candidatura ocupa el puesto de director, existen 2 x 2 = 4 maneras de seleccionar al tesorero y al vocal.

En caso contrario, la dirección la puede ocupar cualquiera de los otros dos candidatos. Para tesorero aumentará a 3 y para el vocal seguirán siendo 2. Por lo cual, en este caso existen:

$$2 \times 3 \times 2 = 12 \text{ maneras}$$

En total existen entonces, por la regla de la suma:

$$4 + 12 = 16 \text{ maneras}$$

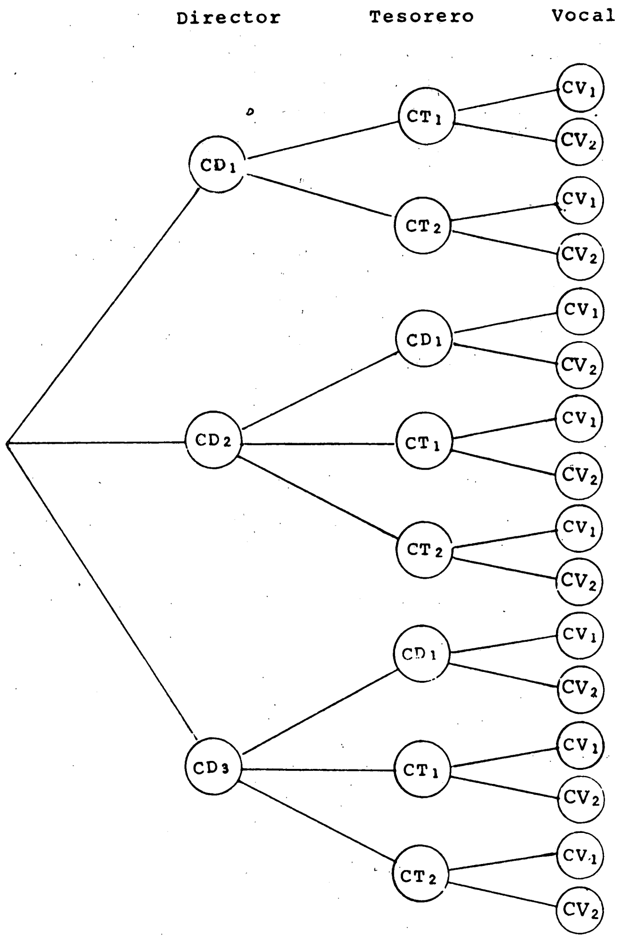
c) Usando la siguiente notación:

CD_i ; es el i-ésimo candidato para director; i=1,2,3

CT_j ; es el j-ésimo candidato para tesorero; j=1,2

CV_k ; es el k-ésimo candidato para vocal; k = 1,2

CD_1 ; es el candidato a director o tesorero.



Con el número total de ramas al final del árbol se verifica el resultado del inciso (b).

5. Se desea sentar a cinco hombres y cuatro mujeres en una fila de manera que las mujeres ocupen posiciones pares. ¿De cuántas formas diferentes pueden sentarse?

Solución:

Considerando el siguiente diagrama:

H_1	M_1	H_2	M_2	H_3	M_3	H_4	M_4	H_5
1	2	3	4	5	6	7	8	9

posiciones

Las posiciones impares, ocupadas por los hombres, son:

H_1	H_2	H_3	H_4	H_5
1	3	5	7	9

posiciones

De estas posiciones, se observa que las diferentes formas en que pueden permutar sus lugares, son:

$$P_5 = 5!$$

así mismo, las posiciones ocupadas por las mujeres, son:

M_1	M_2	M_3	M_4
2	4	6	8

posiciones

En forma similar, las diferentes maneras en que pueden permutar sus lugares son:

$$P_4 = 4!$$

Aplicando la regla del producto, el número total de formas en que pueden sentarse es:

$$P_5! \times P_4! = 120 \times 24 = 2880$$

6. ¿Cuántos números diferentes de 3 cifras se pueden formar con los dígitos 1, 2, 3, 4.

a) Si no es posible repetir cada dígito.

b) Si es posible repetir cada dígito.

a) Debido a que en la numeración arábica el valor de la cantidad, depende del orden en el que se presentan los dígitos, se trata de ordenaciones de n - elementos tomados de r en r, esto es:

$$O(n, r) = O(4,3) = \frac{4!}{(4-3)!} = 4 \times 3 \times 2 = 24$$

b) Si los dígitos se pueden repetir, se trata entonces de ordenaciones con repetición, de esta manera

$$OR(4, 3) = 4^3 = 64$$

7. Para que valor de n la identidad $O(n+1, 3) = O(n, 4)$ es verdadera.

Solución:

como $$O(n+1, 3) = \frac{(n+1)!}{(n+1-3)!} = \frac{(n+1)!}{(n-2)!}$$

$$= \frac{(n+1)\ n\ (n-1)\ (n-2)!}{(n-2)!}$$

$$= (n+1)\ n\ (n-1)$$

Por otra parte

$$O(n, 4) = \frac{n!}{(n-4)!}$$

$$= \frac{n(n-1)\ (n-2)\ (n-3)\ (n-4)!}{(n-4)!}$$

$$= n(n-1)\ (n-2)(n-3)$$

igualando

$$(n+1)\ n\ (n-1) = n\ (n-1)\ (n-2)\ (n-3)$$

$$n+1 = (n-2)\ (n-3)$$

$$n^2 - 6n+5 = 0$$

Resolviendo la ecuación $n_1 = 5$ y $n_2 = 1$

Verificando para $n_1 = 5$

$$O(n+1, 3) = O(6, 3) = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!} = 120$$

$$O(n, 4) = O(5, 4) = \frac{5!}{(5-4)!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$$

para $n_2 = 1$ las ordenaciones no cumplen con la restricción $n>r$ entonces el único resultado es:

$$n = 5$$

8. Las placas para autómovil, en cierto estado se codifican por medio de letras y dígitos, las letras consignadas al estado son A, B y C exclusivamente. Cada placa se forma con 2 letras primero y 3 dígitos a continuación, ¿cuántas placas diferentes se pueden formar:

a) Si se permite repetir tanto letras como dígitos?

b) Si no se permite repetir ni letras ni dígitos?

c) Si se permite repetir letras pero no dígitos?

Solución:

a) Como una placa se forma primero con 2 letras, el primero y segundo lugar podrá ser ocupado por cualquiera de las 3 letras, entonces se tienen:

$$OR(3,\ 2) = 3^2 = 9 \text{ maneras}$$

Los dígitos ocupan 3 lugares; el primero lo pueden ocupar los 10 dígitos, el segundo también y lo mismo el tercero, por tanto son

$$OR(5,\ 3) = 10^3 = 1000 \text{ maneras}$$

Por la regla de multiplicación, se tendrán entonces:

$$9 \times 1000 = 9000 \text{ placas diferentes}$$

b) De manera semejante

$$O(3,\ 2) = \frac{3!}{(3-2)!} = 6$$

$$O(10,\ 3) = \frac{10!}{(10-3)!} = 10 \times 9 \times 8 = 720$$

$$\therefore\ 6 \times 720 = 4320 \text{ placas}$$

c) $OR(3,\ 2)\ O(10,\ 3) = 3^2 \times 7\ 20 = 6480$

9. Cuántos mensajes en clave diferentes se pueden enviar con cinco símbolos alineados si:

a) Se tienen en total cinco símbolos diferentes que no se pueden repetir en un mismo mensaje.

b) Se tienen siete símbolos y se permite repetirlos.

Solución:

Considerando que dos mensajes son diferentes si su arreglo es diferente:

a) $P_5 = 5! = 120$

b) $OR(7, 5) = 7^5 = 16\ 807$

10. De cuántas formas diferentes se pueden alojar 7 científicos en un cuarto triple y en dos cuartos dobles en un hotel, considerando que no importa el orden en el que se acomodan dentro de cada cuarto.

Solución:

Se tienen permutaciones de 7 elementos por acomodar en 7 lugares, de los cuales se forman grupos con características iguales que serían los cuartos, esto es $q_1 = 3$ y los otros $q_2 = q_3 = 2$, entonces:

$$P(7, 3, 2, 2) = \frac{7!}{3!\ 2!\ 2!} = 210$$

11. Una compañía de aviación cuenta con el siguiente equipo para cubrir sus rutas

- 3 aviones tipo A
- 4 aviones tipo B

Se desea dar servicio diario a las ciudades de Mexicali, Mazatlán, Acapulco, Veracruz, Mérida y Villahermosa.

Tomando en cuenta que los aviones tipo A, sólo pueden ser usados para dar servicio a las ciudades de Mazatlán, Acapulco, Veracruz y Mérida; mientras que los de tipo B pueden cubrir cualquier ruta.

¿De cuántas formas diferentes se pueden programar los vuelos en un día?

Solución:

Como hay siete aviones y solamente se deben cubrir seis rutas uno de los aparatos deberá quedarse. Si el avión que no sale es de tipo A. El número de formas en las cuales se pueden programar los recorridos es:

Para los de tipo A

$$O(4, 2) = \frac{4!}{(4-2)!} = 12$$

para los de tipo B

$$O(4, 4) = 4! = 24$$

por la regal del producto

$$12 \times 24 = 288$$

Por otra parte, si el avión que no sale es de tipo B, se tiene:

Para los de tipo A

$$O(4,\ 3) = \frac{4!}{(4-3)!} = 24$$

para los de tipo B

$$O(3,\ 3) = 3! = 6$$

por la regla del producto

$$24 \times 6 = 144$$

finalmente por la regla de la suma, existen en total

$$288 + 144 = 432 \text{ maneras}$$

12. Si $O(n,\ r) = 336$ y $c(n,\ r) = 56$, ¿cuál es el valor de n y r?

Solución:

$$O(n,\ r) = \frac{n!}{(n-r)!} \quad \text{y} \quad C(n,\ r) = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

haciendo el cociente $O(n,\ r)/C(n,\ r)$ se obtiene:

$$\frac{O(n,\ r)}{C(n,\ r)} = \frac{n!/(n-r)!}{n!/(n-r)!r!} = r!$$

Por otra parte, de las condiciones del problema

$$\frac{O(n,\ r)}{C(n,\ r)} = \frac{336}{56} = 6$$

entonces $r! = 6$ y $r = 3$, con lo cual

$$O(n,\ r) = 336 = \frac{n!}{(n-3)!}$$

lo que equivale a

$$336 = n(n-1)\ (n-2)$$

$$336 = n^3 - 3n^2 + 2n$$

resolviendo la ecuación:

$$n_1 = 8$$

$$n_2 = -2.5 + 11.96i$$

$$n_3 = 2.5 - 11.96i$$

como la única solución entera es $n_1 = 8$, el resultado es:

$$n = 8 \quad y \quad r = 3$$

verificando el resultado

$$O(8,\ 3) = \frac{8!}{5!} = 336 \quad ; \quad C(8,\ 3) = \frac{8!}{3!5!} = 56$$

13. Demostrar que $C(n, r) + C(n, r - 1) = C(n + 1, r)$

Solución:

A partir del primer miembro

$$C(n, r) + C(n, r - 1) = \frac{n!}{r!(n-r)!} + \frac{n!}{(r-1)!\,(n-r+1)!}$$

$$= n!\,\frac{(n - r + 1) + r}{r!\,(n - r + 1)!}$$

$$= \frac{n!\,(n + 1)}{r!\,(n - r + 1)!}$$

$$= \frac{(n + 1)!}{r!\,(n + 1 - r)!}$$

$$= C(n + 1, r)$$

14. Expandir

a) $(x + \frac{1}{x})^4$

b) $(x^2 - 2)^5$

Solución:

a) Por el teorema del binomio se tiene que

$$(a + b)^n = \sum^{n} \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$$

donde

$$\binom{n}{r} = C(n, r)$$

entonces

$$(x + \frac{1}{x})^4 = \sum_{r=0}^{4} \binom{4}{r} (x)^{4-r} (\frac{1}{x})^r$$

$$= \binom{4}{0}x^4(\frac{1}{r})^0+\binom{4}{1}x^3 (\frac{1}{x})+\binom{4}{2}x^2(\frac{1}{x})^2+\binom{4}{3}x(\frac{1}{x})^3+\binom{4}{4}x^0(\frac{1}{x})^4$$

$$= x^4 + 4 x^2 + 6 + 4 x^{-2} + x^{-4}$$

b) $$(x^2 -2)^5 = \sum_{r=0}^{5} \binom{5}{r} (x\ )^{5-r} (-2)^r$$

$$= \binom{5}{0}(x^2)^5(-2)^0+\binom{5}{1}(x^2)^4(-2)+\binom{5}{2}(x^2)^3(-2)^2+$$
$$+ \binom{5}{3}(x^2)^2(-2)^3+\binom{5}{4} (x^2)(-2)^4+ \binom{5}{5}(x^2)^0(-2)^5$$

$$= x^{10}+5(-2)x^8+10(4)x^6+10(-8)x^4+5(16)x^2+(-32)$$

$$= x^{10}-10x^8 + 40x^6 - 80x^4 + 80x^2 - 32$$

15. Hallar el coeficiente de x^{-4} en la expansión del binomio $(x^2 + \frac{3}{x^2})^{10}$.

Solución:

Del teorema de binomio

$$(x^2 + \frac{3}{x^2})^{10} = \sum_{r=0}^{10} \binom{10}{r} (x^2)^{10-r} (\frac{3}{x^2})^r$$

Analizando únicamente los factores que involucran a x

$$(x^2)^{10-r} (\frac{3}{x^2})^r = x^{20-2r}\ 3^r\ x^{-2r} = 3^r\ x^{20-4r}$$

como se quiere que el exponente de x sea igual a - 4 entonces:

$$20 - 4r = -4$$

resolviendo la ecuación

$$r = 6$$

con lo cual

$$\binom{10}{6} 3^6\ x^{-4} = \frac{10!}{6!\ 4!} 3^6\ x^{-4}$$

$$= 210(729)\ x^{-4}$$

por lo tanto el coeficiente es 153,090.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. a) ¿Cuántos números de 3 cifras, entre 100 y 500, pueden formarse con los dígitos 0, 1, 2, 3, 4 y 5 si cada dígito se puede usar una vez?

   b) ¿Cuántos de ellos son impares?

   c) ¿Cuántos de ellos son mayores de 330?

Solución:

a) 80 ; b) 48 ; c) 48

2. De cuántas formas se puden acomodar 2 libros de Algebra, 1 de Matemáticas II, 4 de Ecuaciones Diferenciales, 2 de Métodos Numéricos y 1 de Mecánica, en un librero lineal:

   a) De tal forma que todos los de cada materia queden juntos.

   b) ¿Cuántos si los de Ecuaciones Diferenciales van al inicio?

   c) ¿Cuántos si los de Matemáticas II deben quedar junto a los de Algebra?

   d) ¿Cuántos si en los de Ecuaciones 3 de ellos forman una colección y deben quedar juntos y ordenados?

Solución:

a) 11,520 ; b) 2304 ; c) 4608 ; d) 960

3. Para llenar una boleta de pronósticos deportivos, se debe marcar para cada partido, una de las tres alternativas G, E ó P. Considerando que hay trece partidos en cada boleta.

De cuántas maneras diferentes se puede llenar una boleta,

a) Sin ninguna otra restricción.

b) De tal forma que haya cinco marcas en G, 2 en E y las demás en C.

Solución:

a) 3^{13} b) 36,036

4. Mediante un diagrama de árbol, determine de cuántas formas puede terminar un jugador de tenis un torneo de cuatro encuentros, de los cuales en dos resulta vencedor, en uno empatado y en el otro derrotado.

5. De cuántas maneras diferentes se puede formar un compuesto de 5 elementos, si debe contener dos elementos del grupo A, uno del B y los demás del grupo C. En total son 20 elementos disponibles, de los cuales 8 son del grupo A y 6 del grupo B.

Solución:

2520 maneras

6. A partir de un diagrama de árbol determine el número de maneras diferentes en las cuales se pueden colocar 3 esfe ras rojas (idénticas), 2 azules (idénticas) y una verde, - alrededor de una circunferencia

Solución:

10 ramas terminales

7. Encuentre el coeficiente de x^{25} en la expansión del binomio $(x^2 + \frac{1}{x^3})^{25}$

Solución:

53130

8. Encuentre el valor de n que satisface la ecuación

$$6C(n + 1, 3) = 2CR(n, 2)$$

Solución:

$n = 2$

TEMA III SOLUCION NUMERICA DE ECUACIONES ALGEBRAICAS Y TRASCENDENTES

1. Encontrar una aproximación a la raíz de la siguiente ecuación trascendente:

$$e^{x-1} - 1.5\,x = 0$$

Utilizando el método de aproximaciones sucesivas. Proporcionar la aproximación a la raíz con un error relativo menor del 0.5%.

Solución:

Tabulando la función a intevalos de 0.5 unidades con el fin de localizar alguna raíz se obtiene:

x	$f(x) = e^{x-1} - 1.5\,x$
0.0	0.3679
0.5	-0.1435
1.0	-0.5000

Se observa que existe un cambio de signo entre $x = 0.0$ y $x = 0.5$, por lo tanto se puede asegurar que existe una raíz real de la ecuación en el intervalo:

$$0.0 \leq x \leq 0.5$$

utilizando el método de aproximaciones sucesivas

$$x_n = G(x_{n-1})$$

$$n = 1, 2, 3, \ldots$$

se tiene

$$G(x) = f(x) + x$$

$$G(x) = e^{x-1} - 1.5x + x$$

$$G(x) = e^{x-1} - 0.5\,x$$

sustituyendo

$$x_n = e^{x_{n-1} - 1} - 0.5\,x_{n-1}$$

$$n = 1, 2, 3 \ldots$$

tomando $i = 1$

$$x_1 = e^{x_0 - 1} - 0.5\ x_0$$

Considerando x_0 como un valor promedio entre los dos valores de las abscisas en donde se encuentra el cambio de signo

$$x_0 = \frac{0 + 0.5}{2} = 0.2500$$

sustituyendo

$$x_1 = e^{0.25-1} - 0.5(0.25) = 0.3474$$

considerando que la raíz buscada es $x_1 = 0.3474$ y que $x_0 = 0.3500$ es una aproximación al valor x_1 se tiene que el error relativo es

$$e_r = \left| \frac{x_1 - x_0}{x_1} \right| x\ 100 = \left| \frac{0.3474 - 0.2500}{0.3474} \right| x\ 100 = 28.04\%$$

tomando $i = 2$

$$x_2 = e^{x_1 - 1} - 0.5\ x = e^{0.3474-1} - 0.5(0.3474) = 0.3470$$

y el error relativo en esta iteración es:

$$e_r = \left| \frac{x_2 - x_1}{x_2} \right| x\ 100 = \left| \frac{0.3470 - 0.3474}{0.3470} \right| x\ 100 = 0.11\%$$

como $x_2 = 0.3470$ proporciona un error relativo menor que 0.5% con respecto al valor anterior $x_1 = 0.3474$ se considera que la aproximación a la raíz buscada es

$$R = 0.3470$$

2. Elaborar un programa en una calculadora programable para resolver el problema anterior, considere como condición inicial $x_0 = -4$, proporcionar la aproximación a la raíz de la ecuación con siete cifras decimales exactas.

Solución:

Utilizando una calculadora con notación RPN el programa es el siguiente:

00			
01	23	00	STO 0
02		1	1
03		41	-
04	15	1	y e^x
05	24	0	RCL 0
06		73	.
07		5	5
08		61	x
09		41	-
10	13	00	GTO 00

los resultados que arroja son:

	x_0 = -4.000000000
i = i;	x_1 = 2.006737947
i = 2;	x_2 = 1.733290337
i = 3;	x_3 = 1.215274399
i = 4;	x_4 = 0.632564962
i = 5;	x_5 = 0.376225831
i = 6;	x_6 = 0.347805055
i = 7;	x_7 = 0.346998644
i = 8;	x_8 = 0.346981959
i = 9;	x_9 = 0.346981617
i = 10;	x_{10} = 0.346981610

Debido a que el resultado que proporciona la iteración número diez es igual a el resultado de la iteración nueve se puede considerar que la raíz buscada es

$$R = 0.3469816$$

Con siete cifras decimales correctas.

3. Encontrar una raíz de la siguiente ecuación trascendente por el método de aproximaciones sucesivas:

$$\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

Solución:

Como primer paso se debe escribir en la forma $F(x) = 0$ es decir

$$\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2 - \frac{1}{2} = 0$$

Su solución es un valor de "x" tal que satisfaga dicha ecuación, se trata de encontrar el punto de intersección de la gráfica de la función $F(x)$ con el eje "x".

El término $\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2$ deberá valer cerca de 1/2 para estar alrededor de una raíz. Para lograr esto, si se sabe que "sen x" varía de -1 a 1, el denominador "x" tendrá que valer alrededor de $\sqrt{2}$, es decir, $x \doteq \sqrt{2}$.

Así el intervalo que se debe tabular será entre $x = -\pi$ y $x = \pi$ aproximadamente, con la seguridad de que se encontrará una raíz, tabulando se tiene lo siguiente

x	F(x)
$-\pi$	-0.5
$-\frac{\pi}{2}$	-0.0947
$-\frac{\pi}{4}$	0.3106
0	0.5
$\frac{\pi}{4}$	0.3106
$\frac{\pi}{2}$	-0.0947
π	-0.5

Al analizar la tabla, existen dos cambios de signo en F(x), lo cual indica que la función tiene dos raíces, una en el intervalo; $x = -\frac{\pi}{4}$ a $x = -\frac{\pi}{2}$ y otra en el intevalo de $x = \frac{\pi}{4}$ a $x = \frac{\pi}{2}$

Para aplicar el método de aproximaciones sucesivas, es necesario expresar la ecuación $F(x) = 0$, como $x = G(x)$, es decir, sólo basta con sumar "x" en ambos miembros de la primera ecuación

$$\left(\frac{\text{sen } x}{x}\right)^2 - \frac{1}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\text{sen } x}{x}\right)^2 - \frac{1}{2} + x = x$$

o sea

$$x = \left(\frac{\text{sen } x}{x}\right)^2 + x - \frac{1}{2}$$

La fórmula anterior constituye la fórmula de recurrencia y se expresa en general:

$$x_{n+1} = \left(\frac{\text{sen } x_n}{x_n}\right)^2 + x_n - \frac{1}{2}$$

Se determinará la raíz contenida en el intervalo de $x = \frac{\pi}{4}$ a $x = \frac{\pi}{2}$

Se toma, como una primera aproximación el punto medio del intervalo, esto es que $x_0 = (\pi/4 + \pi/2)/2$ o sea $x_0 = 1.1781$, a través del cual se prueba si el método converge, como el criterio de convergencia es:

$$\left| G'(x) \right| < 1$$

en donde

$$G(x) = \left(\frac{\text{sen } x}{x}\right)^2 + x - \frac{1}{2}$$

y

$$G'(x) = 2\left(\frac{\text{sen } x}{x}\right)\left(\frac{x \cos x - \text{sen } x}{x^2}\right) + 1$$

entonces

$$G'(x)\Big|_{x = 1.1781} = 2\left(\frac{\text{sen } 1.1781}{1.1781}\right)\left(\frac{1.1781 \cos 1.1781 - \text{sen } 1.1781}{(1.1781)^2}\right) + 1$$

$G'(1.1781) = 0.4654$ como $0.4654 < 1$ es probable que el método converja.

Con base en lo anterior se itera con la fórmula de recurrencia y un valor inicial $x_0 = 1.1781$

$$x_1 = \left(\frac{\text{sen } (1.1781)}{1.1781}\right)^2 + 1.1781 - 0.5 = 1.2931$$

Evidentemente $x_1 \neq x_0$ difieren en 0.115, sin embargo, como esta diferencia es pequeña, esto indica que la raíz esta - cerca, entonces se continua iterando, tomando x_1 para encontrar x_2

$$x_2 = \left(\frac{\text{sen } 1.2931}{1.2931}\right)^2 + 1.2931 - 0.5 = 1.3462$$

$$\left| x_2 - x_1 \right| = 0.0531 \quad , \quad 5.31\% \text{ de diferencia}$$

$$x_3 = \left(\frac{\text{sen } 1.3462}{1.3462}\right)^2 + 1.3462 - 0.5 = 1.3706$$

$$\left| x_3 - x_2 \right| = 0.0244 \quad , \quad 2.44\% \text{ de diferencia}$$

Esto indica que el método esta convergiendo a la solución, se continua iterando hasta que esta sea casi nula.

$$x_4 = \left(\frac{\text{sen } 1.3706}{1.3706}\right)^2 + 1.3706 - 0.5 = 1.3819$$

$$\left| x_4 - x_3 \right| = 0.0113 \quad , \quad 1.13\%$$

$$x_5 = \left(\frac{\text{sen } 1.3819}{1.3819}\right)^2 + 1.3819 - 0.5 = 1.3871$$

$$\left| x_5 - x_4 \right| = 0.0052 \quad , \quad 0.52\%$$

$$x_6 = \left(\frac{\text{sen } 1.3871}{1.3871}\right)^2 + 1.3871 - 0.5 = 1.3895$$

$$\left| x_6 - x_5 \right| = 0.0024 \quad , \quad 0.24\%$$

$$x_7 = \left(\frac{\text{sen } 1.3895}{1.3895}\right)^2 + 1.3895 - 0.5 = 1.3906$$

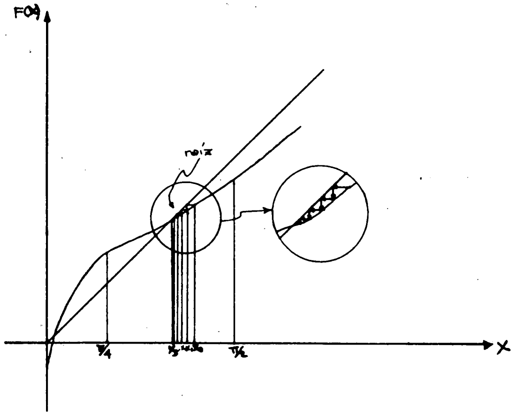
$$\left| x_7 - x_6 \right| = 0.0011 \quad , \quad 0.11\%$$

$$x_8 = 1.3911 \quad , \quad \left| x_8 - x_7 \right| = 0.0005 \quad , \quad 0.05\%$$

$$x_9 = 1.3913 \quad , \quad \left| x_9 - x_8 \right| = 0.0002 \quad , \quad 0.02\%$$

Como la diferencia entre los valores de las "x" es cada vez más pequeña la raíz será a tres cifras decimales de exactitud $x = 1.391$.

interpretación gráfica



4. Con el método de Newton - Raphson, encuentre la raíz negativa de la siguiente ecuación:

$$2 \operatorname{sen} x = x$$

Solución:

Expresándola en la forma $F(x) = 0$, se tiene:

$$2 \operatorname{sen} x - x = 0$$

Tabulando la función para valores negativos

x	F(x)
0	0
$-\frac{\pi}{4}$	- 0.6288
$-\frac{\pi}{2}$	- 0.4292
$-\pi$	3.1416

La raíz negativa se encuentra en el intervalo de $x = -\pi$ a $x = -\frac{\pi}{2}$, tomando como x al punto medio de ese intervalo se tiene $x_0 = - 2.3562$.

Usando el criterio de convergencia se verifica si se puede llegar a la raíz por el método especificado.

Si

$$F(x) = 2 \text{ sen } x - x$$

entonces

$$F'(x) = 2 \cos x - 1$$

y

$$F''(x) = - 2 \text{ sen } x$$

como

$$\left| \frac{F(x)\ F''(x)}{\left(F'(x)\right)^2} \right| < 1$$

es criterio de convergencia, se sustituyen valores en esta expresión para

$$x_0 = - 2.3562$$

así se obtiene que:

$$\frac{\left(2 \text{ sen } (-2.3562) + 2.3562\right)\left(-2 \text{ sen } (-2.3562)\right)}{\left(2 \cos (-2.3562) - 1\right)^2} = 0.2153$$

Como $0.2153 < 1$, es probable que el método converja.

Aplicando el valor $x_0 = - 2.3562$ a la fórmula de recurrencia.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)} \quad , \quad \text{es decir}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2 \text{ sen } x_n - x_n}{2 \cos x_n - 1}$$

$$x = - 2.3562 - \frac{2 \text{ sen } (-2.3562) + 2.3562}{2 \cos (-2.3562) - 1} = - 1.9660$$

$$\left| x_1 - x_0 \right| = 0.3902 \quad , \quad 39\% \text{ de diferencia}$$

$$x_2 = - 1.966 - \frac{2 \text{ sen } (-1.966) + 1.966}{2 \cos (-1.966) - 1} = - 1.8981$$

$$\left| x_2 - x_1 \right| = 0.0679 \quad ; \quad 6.79\% \text{ de diferencia}$$

$$x_3 = -1.8981 - \frac{2\ \text{sen}\ (-1.8981) + 1.8981}{2\cos\ (-1.8981) - 1} = -1.8955$$

$$\left| x_3 - x_2 \right| = 0.0026 \quad ; \quad 0.26\% \text{ de diferencia}$$

$$x_4 = -1.8955 - \frac{2\ \text{sen}\ (-1.8955) + 1.8955}{2\cos\ (-1.8955) - 1} = -1.8954$$

Se puede afirmar que a tres cifras decimales exactas la raíz es $x = -1.895$, ya que en las dos últimas iteraciones se repitieron.

5. Encontrar una raíz de la siguiente ecuación por el método de Newton - Raphson.

$$e^x - 4 = 0$$

Solución:

Para valores negativos de "x", $e^x < 0$ y no hay posibilidad de tener ninguna raíz. Sin embargo, se puede ver que para valores positivos de "x" entre 1 y 2, e^x es positivo y cercano a 4, por lo que se puede encontrar una raíz en ese intervalo. Para valores de "x" mayores, e^x será muy grande y no se tendrá ninguna raíz. Se tabula entonces en un intervalo de $x = 0$ a $x = 3$.

x	F(x)
0	-3
1	-1.2817
2	3.3891
3	16.0855

La raíz se encuentra en el intervalo $x = 1$ a $x = 2$ tomando como valor inicial a $x_0 = 1.5$, se prueba la convergencia.

Como

$$F(x) = e^x - 4$$

$$F'(x) = e^x$$

$$F''(x) = e^x$$

entonces

$$\left|\frac{F(x)\ F''(x)}{\left(F'(x)\right)^2}\right| = \left|\frac{(e^x - 4)\ (e^x)}{(e^x)^2}\right| < 1$$

valuando para $x = 1.5$

$$\left|\frac{(e^{1.5} - 4)\ (e^{1.5})}{(e^{1.5})^2}\right| = 0.1075 < 1$$

es probable que el método converja.

La fórmula de recurrencia es

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)}$$

asi

$$x_1 = x_0 - \frac{e^{x_0} - 4}{e^{x_0}} = 1.5 - \frac{e^{1.5} - 4}{e^{1.5}} \quad ; \quad x_1 = 1.3925$$

con un error relativo

$$\left|\frac{x_1 - x_0}{x_1}\right| = 0.0712 \quad ; \quad 7.12\%$$

$$x_2 = 1.3925 - \frac{e^{1.3925} - 4}{e^{1.3925}} = 1.3863$$

con

$$\left|\frac{x_2 - x_1}{x_1}\right| = 0.0045 \quad , \quad 0.45\%$$

$$x_3 = 1.3863 - \frac{e^{1.3863} - 4}{e^{1.3863}} = 1.3863$$

entonces la raíz a cuatro cifras exactas es $x = 1.3863$

6.- Hallar por el método de Newton - Raphson de la doble division sintética, las raíces de la ecuación

$$x^5 - 3x^4 - 23x^3 + 55x^2 + 74x - 120 = 0$$

Solución:

Aplicando la regla de los signos de Descartes se forma la siguiente tabla que contiene las posibles raíces del polinomio.

	I	II	III	IV
Positivas	3	1	1	3
Negativas	2	0	2	0
Complejas	0	4	2	2
Total	5	5	5	5

Como la ecuación tiene coeficientes enteros, hay posibilidades de que existan raíces racionales

Posibles numeradores: todos los posibles factores de 120

Posibles denominadores: ± 1

Al menos existe una raíz positiva, por lo que se prueba primero a través de división sintética, las posibles raíces racionales positivas.

1	1	-3	-23	55	74	-120
		1	-2	-25	30	104
	1	-2	-25	30	104	-16
2		2	-2	-50	10	168
	1	-1	-25	5	84	48
3		3	0	-69	-42	96
	1	0	-23	-14	32	-24

Hay cambio de signo entre $x = 1$ y $x = 2$ por lo que existe una raíz irracional en este intervalo.

Hay otro cambio de signo existe otra raíz irracional entre $x = 2$ y $x = 3$

Como se tienen localizadas dos raíces positivas forzosamente tiene que existir la otra para cumplir con la tabla de los signos de Descartes.

Se continua, entonces con las posibles raíces racionales

4	1	-3	-23	55	74	-120
		4	4	-76	-84	-40
	1	1	-19	-21	-10	$\boxed{-160}$
5		5	10	-65	-50	120
	1	2	-13	-10	24	$\boxed{0}$

luego $x = 5$ es raíz racional positiva

Se determinará la raíz que se encuentra entre $x = 1$ y $x = 2$ a partir del polinomio reducido, dado por la división sintética anterior, en donde se dedujo que 5 era una de las raíces esto es

$$x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 10x + 24 = 0$$

Utilizando el método de la doble división sintética

$$x_{n+1} = x_n - \frac{R_n}{R'_n}$$

con un valor inicial $x_0 = 1.5$, punto medio del intervalo donde se encuentra la raíz se tiene lo siguiente

1.5	1	2	-13	-10	24	
		1.5	5.25	-11.625	-32.4375	
	1	3.5	-7.75	-21.625	$\boxed{-8.4375}$	$\Rightarrow$ R
		1.5	7.5	-0.375		
	1	5.0	-0.25	$\boxed{-22.00}$ $\Rightarrow$ R'		

$$x_1 = 1.5 - \frac{8.4375}{22.00} = 1.1165 \; ; \; \left|\frac{x_1 - x_0}{x_0}\right| = 25.57\% \text{ de diferencia}$$

continuando

1.1165	1	2	-13	-10	24	
		1.1165	3.4796	-10.6296	-23.0329	
	1	3.1165	-9.5204	-20.6296	$\boxed{0.9671}$	$\Rightarrow$ R
		1.1165	4.7261	-5.3528		
	1	4.233	-4.7943	$\boxed{-25.9824}$	$\Rightarrow$	R'

$$x_2 = 1.1165 + \frac{0.9671}{25.9824} = 1.1537 \; ; \; \left|\frac{x_2 - x_1}{x_1}\right| = 3.37\% \text{ de diferencia}$$

1.1537	1	2	-13	-10	24	
		1.1537	3.6384	-10.8005	-23.9975	
	1	3.1537	-9.3616	-20.8005	$\boxed{0.0025}$	⇒ R
		1.1337	4.9694	-5.0672		
	1	4.3074	-4.3922	$\boxed{-25.8677}$	⇒	R'

$$x_3 = 1.1537 + \frac{0.0025}{25.8677} = 1.1537\ 96 \quad ; \quad \left|\frac{x_3 - x_2}{x_2}\right| = 8 \times 10^{-5}$$

a tres cifras decimales la raíz es <u>1.153</u>

Ahora se determinará la raíz irracional que se encuentra entre los valores de $x = 2$ y $x = 3$; con $x_0 = 2.5$

2.5	1	2	-13	-10	24	
		2.5	11.25	-4.375	-35.9375	
	1	4.5	-1.75	-14.375	$\boxed{-11.9375}$	⇒ R
		2.5	17.5	39.375		
	1	7.0	15.75	$\boxed{25.00}$	⇒	R'

$$x_1 = 2.5 + \frac{11.9375}{25.00} = 2.9775 \quad ; \quad \left|\frac{x_1 - x_0}{x_0}\right| = 19.1\%\text{ de diferencia}$$

2.9775	1	2	-13	-10	24	
		2.9775	14.8205	5.4206	-13.6353	
	1	4.9775	1.8205	-4.5794	10.3647	⇒ R
		2.9775	23.6860	75.9456		
	1	7.955	25.5065	$\boxed{71.3662}$	⇒	R'

$$x_2 = 2.9775 - \frac{10.3647}{71.3662} = 2.8323 \quad ; \quad \left|\frac{x_2 - x_1}{x_1}\right| = 4.88\%\text{ de diferencia}$$

2.8323	1	2	-13	-10	24	
		2.8323	13.6865	1.9444	-22.8158	
	1	4.8323	0.6865	-8.0556	$\boxed{1.1842}$	⇒ R
		2.8323	21.7084	63.4292		
	1	7.6646	22.3949	$\boxed{55.3736}$	⇒	R'

$$x_3 = 2.8323 - \frac{1.1842}{55.3736} = 2.8109 \quad ; \quad \left|\frac{x_3 - x_2}{x_2}\right| = 0.76\%$$

2.8109	1	2	-13	-10	24	
		2.8109	13.5230	1.4701	-23.9767	
	1	4.8109	0.5230	-8.5299	$\boxed{0.0233}$	$\Rightarrow$ R
		2.8109	21.4241	61.6912		
	1	7.6218	21.9471	$\boxed{53.1613}$	$\Rightarrow$ R'	

$$x_4 = 2.8109 - \frac{0.0233}{53.1613} = 2.8105 \quad ; \quad \left|\frac{x_4 - x_3}{x_3}\right| = 14 \times 10^{-5}$$

a tres cifras decimales la raíz es 2.810

Para saber si las otras dos raíces son negativas o complejas a través del teorema d factor, y de la división sintética se reduce la ecuación a una de segundo grado.

	1	-3	-23	55	74	-120
5		5	10	-65	-50	120
	1	2	-13	-10	24	$\boxed{0}$
1.153		1.153	3.6354	-10.7974	-23.9794	
	1	3.153	-9.3646	-20.7974	$\boxed{0.0206 \doteq 0}$	
2.810		2.810	16.7560	20.7699		
	1	5.963	7.3914	$\boxed{-0.0275 \doteq 0}$		

la ecuación proveniente del polinomio reducido es

$$x^2 + 5.963\, x + 7.3914 = 0$$

$$DISC = B^2 - 4AC = 5.991769$$

$$x_4 = -\frac{B + \sqrt{DISC}}{2\,A} = -1.7575955$$

$$x_5 = -\frac{B - \sqrt{DISC}}{2\,A} = -4.2054045$$

redondeando a 3 cifras decimales $x_4 = -1.758$, $x_5 = -4.205$

Resumiendo las raíces son

$x_1 = 5$, $x_2 = 2.810$, $x_3 = 1.153$, $x_4 = -1.758$, $x_5 = -4.205$

7. Encontrar una raíz de la ecuación $e^{-(x-1)}$ sen $x = -1$ por el método de Newton - Raphson.

Solución:

Expresando la ecuación en la forma $F(x) = 0$ se tiene:

$$e^{-(x-1)} \operatorname{sen} x + 1 = 0$$

tabulando

x	F(x)
-2	-17.2638
-1	-5.2179
0	1.0000
1	1.8415
2	1.3345

La raíz se encuentra en el intervalo de $x = -1$ a $x = 0$ tomando $x_0 = -0.5$ y aplicando la fórmula de recurrencia.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)}$$

con

$$F(x) = e^{-(x-1)} \operatorname{sen} x + 1$$

y

$$F'(x) = e^{-(x-1)} (\cos x - \operatorname{sen} x)$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{e^{-(x_{n-1})} \operatorname{sen} x_n + 1}{e^{-(x_{n-1})} (\cos x_n - \operatorname{sen} x_n)}$$

entonces

$$x_1 = -0.5 - \frac{e^{1.5} \operatorname{sen} (-0.5) + 1}{e^{1.5} \left[\cos (-0.5) - \operatorname{sen} (-0.5)\right]} = -0.3112$$

$$x_2 = -0.3112 - \frac{e^{1.3112} \operatorname{sen} (-0.3312) + 1}{e^{1.3112} \cos \left[(-0.3112) - \operatorname{sen} (-0.3312)\right]} = -0.282$$

continuando así:

$$x_3 = -0.2813 \quad y \quad x_4 = -0.812$$

Luego, se puede afirmar que la raíz a tres cifras decimales es $x = -0.281$, ya que son las cifras que se repitieron en dos iteraciones sucesivas.

8. Obtener una raíz de la ecuación: $2x^3 - 3x + 4 = 0$, por el método de Newton - Raphson de la doble división sintética.

Solución:

Como primer punto se investigará, cuántas raíces positivas y negativas puede tener esta ecuación. Para esto, se emplea la regla de los signos de Descartes.

Raíces positivas $\quad 2x^3 - 3x + 4$

$\qquad\qquad\qquad\qquad 1 \qquad 1$

Existen dos cambios de signo, por lo que la ecuación puede tener; dos raíces positivas o ninguna.

Raíces negativas $\quad 2(-x)^3 - 3(-x) + 4$

$$-2x^3 + 3x + 4$$

$\qquad\qquad\qquad\qquad 1 \qquad 0$

Como existe un cambio de signo, la ecuación tiene una raíz negativa.

Con los datos anteriores se puede formar la siguiente tabla

Posibilidades

	I	II
Positivas	2	0
Negativas	1	1
Complejas	0	2
Total	3	3

Como segundo paso, se ve si existen raíces racionales, que tendrán que estar entre las siguientes:

$$\pm \frac{1}{2}, \pm 1, \pm 2, \pm 4$$

Para localizarlas se usa la división sintética, y así se prueba cada una de las posibilidades anteriores.

Como existe una raíz negativa, se empieza a probar por las negativas

-0.5	2	0	-3	4	
		-1	0.5	1.25	
	2	-1	-2.5	$\boxed{5.25}$	
-1.0		-2	2	1	
	2	-2	-1	$\boxed{5}$	
-2.0		-4	8	-10	cambio de signo
	2	-4	5	$\boxed{-6}$	
-4.0		-8	32	-116	
	2	-8	29	$\boxed{-112}$	

No hay raíces racionales negativas, sin embargo se observa que existe un cambio de signo en los residuos para los valores de $x = -1$ y $x = -2$, por lo que existe una raíz irracional negativa entre dichos valores.

Se ve ahora si existen raíces racionales positivas

	2	0	-3	4
0.5		1	0.5	-1.25
	2	1	-2.5	$\boxed{2.75}$
1		1	2	-1
	2	2	-1	$\boxed{3}$
2		4	8	10
	2	4	5	$\boxed{14}$
4		8	32	116
	2	8	29	$\boxed{120}$

No hay raíces racionales positivas, ni se observa ningún cambio de signo del polinomio para los valores positivos.

Se recomienda determinar la raíz irracional negativa por el método de la doble división sintética, reducir la ecuación a segundo grado, para entonces posteriormente, con la fórmula general, ver si existen dos raíces positivas o dos complejas.

La fórmula de recurrencia es

$$x_{n+1} = x_n - \frac{R_n}{R'_n}$$

Como valor inicial x_0 se tomará el punto medio del intervalo de $x = -1$ a $x = -2$, esto es $x_0 = -1.5$

-1.5	2	0	-3	4	
		-3	4.5	-2.25	
	2	-3	1.5	$\boxed{1.75}$	⇒ R
		-3	9		
	2	-6	$\boxed{10.5}$	⇒ R'	

$$x_1 = -1.5 - \frac{1.75}{10.5} = -1.67$$

$$\left|\frac{x_1 - x_0}{x_0}\right| = 0.111 \quad ; \quad 11.1\% \text{ de diferencia}$$

-1.67	2	0	-3	4	
		-3.34	5.578	-4.305	
	2	-3.34	2.578	$\boxed{-0.305}$	⇒ R
		-3.34	11.156		
	2	-6.68	$\boxed{13.734}$	⇒ R'	

$$x_2 = -1.67 + \frac{0.305}{13.734} = -1.648$$

$$\left|\frac{x_2 - x_1}{x_1}\right| = 0.013 \quad ; \quad 1.3\% \text{ de diferencia}$$

-1.648	2	0	-3	4	
		-3.296	5.432	-4.008	
	2	-3.296	2.432	$\boxed{-0.008}$	⇒
		-3.296	10.864		
	2	-6.592	$\boxed{13.296}$	R'	

$$x_3 = -1.648 + \frac{0.008}{13.296} = -1.6474$$

$$\left|\frac{x_3 - x_2}{x_2}\right| = 0.0004 \quad ; \quad 0.04\% \text{ de diferencia}$$

-1.6474	2	0	-3	4	
		-3.2948	5.4278	-3.9996	
	2	-3.2948	2.4278	$\boxed{0.0004}$	$\Rightarrow$ R
		-3.2948	10.8557		
	2	-6.5896	$\boxed{13.2835}$	$\Rightarrow$ R'	

$$x_4 = -1.6474 - \frac{0.0004}{13.2835} = -1.64743$$

La raîz a cuatro cifras decimales es $x = -1.6474$.

Aplicando la fórmula general de solución, se tiene que el - descriminante $D = B^2 - 4\,a\,C = -8.5667$, por tanto las otras dos raîces son compleias.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Encuentre una raîz de la siguiente ecuación $e^{-x} - x = 0$ por el método de aproximaciones sucesivas

Solución:

$$x = 0.567$$

2. Encuentre una raîz de las siguientes ecuaciones por el método de aproximaciones sucesivas

a) $e^x - 3x = 0$

b) $a^3 = -e^{-a}$

c) $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2} x$

Soluciones:

$x = 0.619$

$a = -1.857$

$x_1 = 0; \quad x_2 = 1.8955 \quad ; \quad x_3 = -1.8955$

3. Encontrar dos raíces de las siguientes ecuaciones por el método de Newton - Raphson.

a) $\cos x - x^2 = 0$

b) $2x^2 + 1 - e^x = 0$

c) $x \tan x = 1$

Soluciones:

$x_1 = -0.824$, $x_2 = 0.824$

$x_1 = 0$, $x_2 = 0.740$

$x_1 = 0.86$, $x_2 = 3.426$

4. Hallar una raíz de cada una de las siguientes ecuaciones, - con el método de Newton - Raphson con tres cifras decimales de exactitud.

a) $4x - \tan x = 0$

b) $e^x - 4 \operatorname{sen} x = 0$

(aplicar logaritmos en este inciso, para que converja el método).

c) $e^x \operatorname{sen} x - \frac{1}{2} x = 0$

d) $2x - e^{2x} + e^x = 0$

e) $\operatorname{sen} x + 1 - x^2 = 0$

f) $e^x = 3x$

Soluciones:

$x = 1.393$

$x = 0.370$

$x = 3.070$

$x = 0.456$

$x = 1.410$

$x = 0.619$

5. Por el método de aproximaciones sucesivas, y el de Newton-Raphson, encontrar la raíz positiva a tres cifras decimales exactas de la ecuación $x = \cos x$, comente el grado de dificultad y la convergencia comparando los dos métodos.

Solución:

$$x = 0.739$$

6. En las siguientes ecuaciones, con el método de Newton - Raphson, encuentre las raíces localizadas en los intervalos indicados:

a) $4 \operatorname{sen} x = e^{x}$ para ; $0 < x < 0.5$ rad

b) $e^{x} \operatorname{sen} x = \frac{1}{2} x$ para ; $0 < x < \pi$ rad

c) $2 \operatorname{sen} h\, x = \cos h\, x$ para ; $0 < x < 1$ rad

Soluciones:

$$x = 0.3705$$

$$x = 3.0702$$

$$x = 0.5492$$

7. En la siguiente ecuación el factor K tiene diferentes valores. Encuentre una raíz en cada caso, con tres cifras decimales de exactitud, con el método de Newton - Raphson.

$$\cot x = Kx$$

a) $K = 200$

b) $K = 5$

c) $K = 1.111$

d) $K = 0.011$

Soluciones:

0.07065

0.4328

0.8274

1.553

8. Obtener todas las raíces de las siguientes ecuaciones algebraicas, por el método de Newton-Raphson de la doble división sintética, a 3 cifras decimales de exactitud.

a) $x^5 - 9x^4 + 25x^3 - 5x^2 - 26x + 24 = 0$

b) $2x^3 - 3x + 4 = 0$

c) $x^3 + 1.2x^2 - 4x - 4.8 = 0$

d) $x^3 + 6.6x^2 - 29.05\,x + 22.64 = 0$

e) $x^3 - 4.65x^2 - 49.92x - 76.69 = 0$

f) $x^4 + x^3 + 0.56x^2 - 1.44\,x - 2.88 = 0$

g) $b^3 - 0.8\,b^2 + 0.2b - 3.6 = 0$

h) $x^3 - 12.1\,x^2 + 7.2\,x + 41.5 = 0$

i) $b^3 + 12.1\,b^2 + 13.1\,b + 22.2 = 0$

j) $c^4 + c^3 + 0.56\,c^2 - 1.44c - 2.88 = 0$

k) $x^3 + 3x - 1 = 0$

l) $x^5 + x + 1 = 0$

Soluciones:

$x_1 = -1.091$; 4 compl.

$x_1 = -1.647$; 2 compl.

$x_1 = 2$; $x_2 = -2$; $x_3 = -1.2$

$x_1 = 2.1$; $x_2 = -9.8$; $x_3 = 1.1$

$x_1 = 10.25$; $x_2 = -3.4$; $x_3 = -2.2$

$x_1 = 1.2$, $x_2 = -1.2$; 2 compl.

$b_1 = 1.8$; 2 compl.

$x_1 = 11.12$; $x_2 = 2.474$; $x_3 = \underline{-1.494}$ -1.502

11.1305   2.4855

$b_1 = -11.1$; 2 compl.

$c_1 = 1.2$; $c_2 = -1.2$; 2 compl.

$x_1 = 0.322$; 2 compl.

$x_1 = -0.7548$; 4 compl.

TEMA IV SOLUCION NUMERICA DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

1. Aplicando el método de Gauss-Jordan, resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

a) Tomando como pivote los elementos de mayor valor absoluto.

b) Tomando como pivote los elementos de menor valor absoluto. Comparar los resultados al redondear a tres cifras decimales:

$$3.1\ x_1 + 4.3\ x_2 - x_3 = 2.31$$

$$0.5\ x_1 - 2\ x_2 + 3.7\ x_3 = 5.77$$

$$-\ x_1 - 0.7\ x_2 + 0.3\ x_3 = -3.58$$

Solución:

Para resolver el problema por el método de Gauss-Jordan, se hacen transformaciones elementales para modificar la matriz ampliada [A, b] , en la matriz [I, x] , donde [A] es la matriz de coeficientes, [b] el vector de términos independientes, [I] la matriz identidad y [x] el vector solución del sistema.

Escribiendo el sistema en forma matricial

$$\begin{bmatrix} 3.1 & 4.3 & -1.0 \\ 0.5 & -2.0 & 3.7 \\ -1.0 & -0.7 & 0.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.31 \\ 5.77 \\ -3.58 \end{bmatrix}$$

a) Se pide tomar primero como pivotes los elementos mayores y después los menores, ésto es para comprobar que la solución es más aproximada cuando se toman como pivotes los mayores elementos, en valor absoluto.

La matriz ampliada es:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3.1 & 4.3 & -1.0 & 2.31 \\ 0.5 & -2.0 & \boxed{3.7} & 5.77 \\ -1.0 & -0.7 & 0.3 & -3.58 \end{array}\right]$$

Tomando como pivote el 3.7 (que es el mayor elemento en valor absoluto) y dividiendo el renglón entre él, se tiene

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3.100 & 4.300 & -1.0 & 2.310 \\ 0.135 & -0.541 & 1.0 & 5.770 \\ -1.000 & -0.700 & 0.3 & -3.580 \end{array}\right]$$

Ahora se hacen ceros los elementos de la columna del pivote, para lo cual se multiplica el segundo renglón por (1) y se suma al 1ª, por otra parte multiplicando el 2° por (-0.3) y sumándolo al 3° se tendrá

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3.235 & \boxed{3.759} & 0 & 3.869 \\ 0.135 & -0.541 & 1 & 1.559 \\ -1.041 & -0.538 & 0 & -4.048 \end{array}\right]$$

De esta nueva matriz se elige el mayor elemento en valor absoluto (en este caso 3.759) y se divide todo el renglón entre él

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0.861 & 1.000 & 0 & 1.036 \\ 0.135 & -0.541 & 1 & 1.559 \\ -1.041 & -0.538 & 0 & -4.048 \end{array}\right]$$

Se hacen ceros los elementos de la columna del pivote, para ello se multiplica el 1er. renglón por (0.541) y se suma al 2°, después se multiplica el 1er. renglón por (0.538) y se suma al 3°, así

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0.861 & 1 & 0 & 1.036 \\ 0.601 & 0 & 1 & 2.119 \\ \boxed{-0.578} & 0 & 0 & -3.491 \end{array}\right]$$

Repitiendo el proceso se elige (-0.578) como pivote y se divide el renglón entre él

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0.861 & 1 & 0 & 1.036 \\ 0.601 & 0 & 1 & 2.119 \\ 1.000 & 0 & 0 & 6.040 \end{array}\right]$$

Finalmente para obtener la solución buscada se hacen ceros los elementos de la columna del pivote, para lo cual se multiplica el 3er. renglón por (-0.861) y (-0.601) y se suma al 1° y 2° renglón respectivamente

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & -4.164 \\ 0 & 0 & 1 & -1.511 \\ 1 & 0 & 0 & 6.040 \end{array}\right]$$

Reordenando la matriz se tiene

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 6.040 \\ 0 & 1 & 0 & -4.164 \\ 0 & 0 & 1 & -1.511 \end{array}\right]$$

Por lo cual, la solución buscada es $x_1 = 6.040$, $x_2 = -4.164$, $x_3 = -1.511$

Sustituyendo valores en el sistema original, se comprueban estos resultados:

$$3.1(6.04) + 4.3\,(-4.164) - (1)\,(-1.511) = 2.330$$

$$0.5(6.04) - 2\,(-4.164) + (3.7)\,(-1.511) = 5.757$$

$$(-1)(6.040) - 0.7\,(-4.164) + (0.3)(-1.511) = -3.579$$

b) Tomando como pivotes los elementos de menor valor absoluto

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3.1 & 4.3 & -1.0 & 2.31 \\ 0.5 & -2.0 & 3.7 & 5.77 \\ -1.0 & -0.7 & \boxed{0.3} & -3.58 \end{array}\right]$$

Se elige a (0.3) como pivote y se divide el renglón entre él mismo, de esta manera

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -3.100 & 4.300 & -1.000 & 2.310 \\ 0.500 & -2.000 & 3.700 & 5.770 \\ -3.333 & -2.333 & 1.000 & -11.930 \end{array}\right]$$

Para que los elementos de la columna del pivote sean ceros, se multiplica el 3er. renglón por (-3.7) y (1) y se suman al 2° y 1er. renglones respectivamente, con lo cual

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{-0.230} & 1.970 & 0 & -9.620 \\ 12.820 & 6.620 & 0 & 49.910 \\ -3.333 & -2.333 & 1 & -11.930 \end{array}\right]$$

Ahora el pivote es (-0.230) y dividiendo el renglón entre él

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -8.565 & 0 & 41.826 \\ 12.820 & 6.620 & 0 & 49.910 \\ -3.333 & -2.333 & 1 & -11.930 \end{array}\right]$$

Multiplicando el 1er. renglón por (-12.820) y (3.333), y sumándose a los renglones correspondientes, se tendrá

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -8.565 & 0 & 41.826 \\ 0 & \boxed{116.423} & 0 & -486.299 \\ 0 & -30.877 & 1 & 127.476 \end{array}\right]$$

El último pivote es (116.423); dividiendo el renglón entre él

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -8.565 & 0 & 41.826 \\ 0 & 1 & 0 & -4.177 \\ 0 & -30.877 & 1 & 127.476 \end{array}\right]$$

Finalmente multiplicando el 2° renglón por (8.565) y (30.877), se le suma al 1° y 3er renglón respectivamente.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 6.050 \\ 0 & 1 & 0 & -4.177 \\ 0 & 0 & 1 & -1.497 \end{array}\right]$$

La solución es

$$x_1 = 6.05 \quad , \quad x_2 = -4.177 \quad y \quad x_3 = -1.497$$

Comprobando el resultado.

$$3.1\ (6.05) + 4.3\ (-4.177) - (1)\ (-1.497) = 2.291$$

$$0.5\ (6.05) - 2\ (-4.177) + (3.7)\ (-1.497) = 5.840$$

$$-(1)\ (6.05) - 0.7\ (-4.177) + (0.3)\ (-1.497) = -3.575$$

Comparando los errores relativos entre los resultados obtenidos se tiene

Para pivotes:	mayores	menores
1a. ecuación	0.86%	0.82%
2a. ecuación	0.23%	1.20%
3a. ecuación	0.028%	0.14%

En estos porcentajes se observa que la aproximación es en general mejor al tomar como pivotes los elementos de mayor valor absoluto.

2. Obtener la matriz inversa del siguiente sistema de ecuaciones utilizando el método de Gauss-Jordan.

$$2.5\ x_1 + 3.2\ x_2 + 4.0\ x_3 = 27.29$$

$$1.3\ x_1 - 2.3\ x_2 + 3.4\ x_3 = 9.76$$

$$2.0\ x_1 + 4.8\ x_2 - 1.3\ x_3 = 14.52$$

Solución

El sistema en forma matricial es

$$\begin{bmatrix} 2.5 & 3.2 & 4.0 \\ 1.3 & -2.3 & 3.4 \\ 2.0 & 4.8 & -1.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27.29 \\ 9.76 \\ 14.52 \end{bmatrix}$$

El problema se puede resolver trabajando con los renglones de la matriz $[A, I]$, ya que se puede demostrar que al realizar operaciones elementales se obtiene la matriz $[I\ A^{-1}]$. De esta forma:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2.50 & 3.20 & 4.00 & 1 & 0 & 0 \\ 1.30 & -2.30 & 3.40 & 0 & 1 & 0 \\ 2.00 & \boxed{4.80} & -1.30 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Aplicando el método con (4.8) como pivote y dividiendo todo el renglón entre él

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2.50 & 3.20 & 4.00 & 1 & 0 & 0 \\ 1.30 & -2.30 & 3.40 & 0 & 1 & 0 \\ 0.42 & 1.00 & -0.27 & 0 & 0 & 0.21 \end{array}\right]$$

Al multiplicar el 3er. renglón por (2.3) y sumárselo al 2°, además de multiplicar el 3er. renglón por (-3.2) y sumárselo al primero, se hacen ceros los elementos de la columna del privote, de esta forma

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1.16 & 0 & \boxed{4.86} & 0 & 0 & -0.67 \\ 2.27 & 0 & 2.78 & 0 & 1 & 0.48 \\ 0.42 & 1 & -0.27 & 0 & 0 & 0.21 \end{array}\right]$$

Ahora el pivote es 4.84 y dividiendo el 1er. renglón entre él

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0.24 & 0 & 1 & 0.21 & 0 & -0.14 \\ 2.27 & 0 & 2.78 & 0 & 1 & 0.48 \\ 0.42 & 1 & -0.27 & 0 & 0 & 0.21 \end{array}\right]$$

Al repetir el procedimiento, se multiplica al 1er. renglón por (-2.78) y por (0.27), sumándolos respectivamente al 2o. y 3er. renglón.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{0.24} & 0 & 1 & 0.21 & 0 & -0.14 \\ \boxed{1.60} & 0 & 0 & -0.58 & 1 & 0.87 \\ 0.48 & 1 & 0 & 0.06 & 0 & 0.17 \end{array}\right]$$

El pivote es 1.6. Dividiendo todo el renglón entre él

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0.24 & 0 & 1 & 0.21 & 0 & -0.14 \\ 1 & 0 & 0 & -0.46 & 0.63 & 0.54 \\ 0.48 & 1 & 0 & 0.06 & 0 & 0.17 \end{array}\right]$$

Finalmente se multiplica el 2° renglón por (-0.24) y (-0.48), y se suman al 1° y 3er. renglón respectivamente.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 0.32 & -0.15 & -0.27 \\ 1 & 0 & 0 & -0.46 & 0.63 & 0.54 \\ 0 & 1 & 0 & 0.28 & -0.30 & -0.09 \end{array}\right]$$

Reordenando los renglones para tener la matriz en la forma $(I\ A^{-1})$ se tiene

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -0.46 & 0.63 & 0.54 \\ 0 & 1 & 0 & 0.28 & -0.30 & -0.09 \\ 0 & 0 & 1 & 0.32 & -0.15 & -0.27 \end{array}\right]$$

Entonces la matriz inversa es

$$\left[A\right]^{-1} = \begin{bmatrix} -0.46 & 0.63 & 0.54 \\ 0.28 & -0.30 & -0.09 \\ 0.32 & -0.15 & -0.27 \end{bmatrix}$$

3. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones y obtener la matriz inversa del mismo por el método de Gauss-Jordan.

$$x_1 - x_2 + 4\,x_3 = 6$$
$$2\,x_1 + 3\,x_2 - x_3 = 18$$
$$3\,x_1 + x_2 + x_3 = 19$$

Solución:

Escribiendo el sistema en forma matricial se tiene

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 18 \\ 19 \end{bmatrix}$$

Realizando operaciones elementales se resuelve el sistema y además se obtiene la matriz inversa, a través de trabajar con la matriz $[A, b, I]$ para obtener $[I, x, A^{-1}]$; así

$$\left[\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & -1 & \boxed{4} & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 18 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 19 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Tomando como pivote el 4, y dividiendo el renglón entre él

$$\left[\begin{array}{ccc|c|ccc} 0.25 & -0.25 & 1.00 & 1.50 & 0.25 & 0 & 0 \\ 2.00 & 3.00 & -1.00 & 18.00 & 0 & 1 & 0 \\ 3.00 & 1.00 & 1.00 & 19.00 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Haciendo ceros los elementos en la columna del pivote

$$\left[\begin{array}{ccc|c|ccc} 0.25 & -0.25 & 1 & 1.50 & 0.25 & 0 & 0 \\ 2.25 & 2.75 & 0 & 19.50 & 0.25 & 1 & 0 \\ \boxed{2.75} & 1.25 & 0 & 17.50 & -0.25 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Se elige como pivote al 2.75 y se divide el renglón entre él

$$\left[\begin{array}{ccc|c|ccc} 0.2500 & -0.2500 & 1 & 1.5000 & 0.2500 & 0 & 0 \\ 2.2500 & 2.7500 & 0 & 19.5000 & 0.2500 & 1 & 0 \\ 1 & 0.4545 & 0 & 6.3636 & -0.0909 & 0 & 0.3636 \end{array}\right]$$

Repitiendo la operación de hacer ceros los elementos de la columna del pivote

$$\left[\begin{array}{ccc|c|ccc} 0 & -0.3636 & 1 & -0.0909 & 0.2727 & 0 & -0.0909 \\ 0 & \boxed{1.7273} & 0 & 5.1818 & 0.4545 & 1 & -0.8182 \\ 1 & 0.4545 & 0 & 6.3636 & -0.0909 & 0 & 0.3636 \end{array}\right]$$

Finalmente el pivote es (1.7273), con lo cual

$$\left[\begin{array}{ccc|c|ccc} 0 & -0.363 & 1 & -0.0909 & 0.2727 & 0 & -0.0909 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0.2632 & 0.5789 & -0.4737 \\ 1 & 0.4545 & 0 & 6.3636 & -0.0909 & 0 & 0.3636 \end{array}\right]$$

Haciendo ceros los elementos de la columna del pivote

$$\left[\begin{array}{ccc|c|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0.3648 & 0.2105 & -0.2632 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0.2632 & 0.5789 & -0.4737 \\ 1 & 0 & 0 & 5 & -0.2105 & -0.2631 & 0.5789 \end{array}\right]$$

Reordenando

$$\left[\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & -0.2105 & 0.2631 & 0.5789 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0.2632 & 0.5789 & -0.4737 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0.3648 & 0.2105 & -0.2632 \end{array}\right]$$

Por lo cual el vector solución es

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ y la matriz inversa; } [A]^{-1} = \begin{bmatrix} -0.2105 & 0.2631 & 0.5789 \\ 0.2632 & 0.5789 & -0.4737 \\ 0.3648 & 0.2105 & -0.2632 \end{bmatrix}$$

4. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones por el método de Gauss-Seidel, con una aproximación a dos cifras decimales:

$$x_1 - x_2 + 4\,x_3 = 6$$

$$2\,x_1 + 3\,x_2 - x_3 = 18$$

$$3\,x_1 + x_2 + x_3 = 19$$

Solución:

Para que el método de aproximaciones sucesivas, tenga convergencia, cada uno de los elementos que está en la diagonal principal tiene que ser mayor o igual en valor absoluto que la suma de los valores absolutos de cada uno de los elementos restantes del renglón correspondiente. (Condición suficiente más no necesaria).

En este sistema:

Para el 1er. renglón: $|1|<|-1|+|4|$, por tanto, no cumple.

Para el 2° renglón: $|3|=|2|+|-1|$, por tanto, si cumple.

Para el 3er. renglón: $|1|<|3|+|1|$, por tanto, no cumple.

Por lo que de esta forma no se puede asegurar la convergencia.

Sin embargo si se reordena el sistema en la siguiente forma, se asegura la convergencia (nótese que ahora si se cumple la condición requerida).

$$3\,x_1 + x_2 + x_3 = 19$$

$$2\,x_1 + 3x_2 - x_3 = 18$$

$$x_1 - x_2 + 4x_3 = 6$$

Despejando de la primera ecuación a x_1 , de la segunda a x_2 de la tercera a x_3

$$x_1 = \frac{19 - x_2 - x_3}{3} = 6.3\bar{3}3 - 0.333\ (x_2 + x_3)$$

$$x_2 = \frac{18 - 2\,x_1 + x_3}{3} = 6 - 0.333\ (2\,x_1 - x_3)$$

$$x_3 = \frac{6 - x_1 + x_2}{4} = 1.5 - 0.25\ (x_1 - x_2)$$

El método consiste en suponer un vector solución inicial, sustituyéndolo en la primera ecuación.

Sea

$$\bar{x}^{(0)} = (0,\ 0,\ 0)$$

entonces

$$x_1 = 6.333$$

$$x_2 = 6 - 0.333\ (2\ (6.333) - 0) = 1.78$$

$$x_3 = 1.5 - 0.25\ (6.333 - 1.78) = 0.36$$

por tanto

$$\bar{x}^{(1)} = (6.333,\ 1.78,\ 0.36)$$

Como los valores del vector solución $\bar{x}^{(1)}$ difieren mucho del vector inicial, se continua iterando

$$x_1 = 6.333 - 0.333\ (1.78 + 0.36) = 5.62$$

$$x_2 = 6 - 0.333\ (2\ (5.62) - 0.36) = 2.38$$

$$x_3 = 1.5 - 0.25\ (5.62 - 2.38) = 0.69$$

entonces

$$\bar{x}^{(2)} = (5.62,\ 2.38,\ 0.69)$$

Como la diferencia entre $\bar{x}^{(2)}$ y $\bar{x}^{(1)}$ es superior a las centésimas.

$$x_1 = 6.333 - 0.333\,(2.38 + 0.69) = 5.31$$

$$x_2 = 6 - 0.333\,(2\,(5.31) - 0.69) = 2.69$$

$$x_3 = 1.5 - 0.25\,(5.31 - 2.69) = 0.85$$

con lo cual

$$\bar{x}^{(3)} = (5.31,\ 2.69,\ 0.85)$$

repitiendo el proceso

$$x_1 = 6.333 - 0.333\,(2.69 + 0.85) = 5.15$$

$$x_2 = 6 - 0.333\,(2\,(5.15) - 0.85) = 2.85$$

$$x_3 = 1.5 - 0.25\,(5.15 - 2.85) = 0.93$$

$$\bar{x}^{(4)} = (5.15,\ 2.85,\ 0.93)$$

$$x_1 = 6.333 - 0.333\,(2.85 + 0.93) = 5.07$$

$$x_2 = 6 - 0.333\,(2\,(5.07) - 0.93) = 2.93$$

$$x_3 = 1.5 - 0.25\,(5.07 - 2.93) = 0.97$$

$$\bar{x}^{(5)}\ (5.07,\ 2.93,\ 0.97)$$

Continuando de esta misma forma hasta tener 2 cifras decimales repetidas en iteraciones sucesivas se tiene

$$\bar{x}^{(6)} = (5.03,\ 2.97,\ 0.99)$$

$$\bar{x}^{(7)} = (5.01,\ 2.99,\ 1.00)$$

$$\bar{x}^{(8)} = (5.00,\ 3.00,\ 1.00)$$

$$\bar{x}^{(9)} = (5.00,\ 3.00,\ 1.00)$$

5. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones por el método de Gauss-Seidel y aproximando a dos cifras decimales.

$$5.6\,x_1 + 1.1\,x_2 - 3.4\,x_3 = 8.28$$

$$1.7\,x_1 + 4.3\,x_2 + 7.3\,x_3 = 1.37$$

$$0.3\,x_1 + 5.7\,x_2 + 3.3\,x_3 = -\,6.75$$

Solución:

Las ecuaciones deben ser reordenadas, pues como están el método no converge

$$5.6\ x_1 + 1.1\ x_2 - 3.4\ x_3 = 8.28$$

$$0.3\ x_1 + 5.7\ x_2 + 3.3\ x_3 = -\ 6.75$$

$$1.7\ x_1 + 4.3\ x_2 + 7.3\ x_3 = 1.37$$

Despejando x_1 , x_2 , x_3 , respectivamente

$$x_1 = 1.48 - 0.18\ (1.1\ x_2 - 3.4\ x_3\ )$$

$$x_2 = -\ 1.18 - 0.18\ (0.3\ x_1 + 3.3\ x_3)$$

$$x_3 = 0.19 - 0.14\ (1.7\ x_1 + 4.3\ x_2)$$

Partiendo del vector $\bar{x}^{(0)} = (0,\ 0,\ 0)$.

$$x_1 = 1.48$$

$$x_2 = -\ 1.18 - 0.18\ (0.3\ (1.48) + 3.3(0)) = -\ 1.26$$

$$x_3 = 0.19 - 0.14\ (1.7\ (1.48) + 4.3\ (-1.26)) = 0.60$$

$$\bar{x}^{(1)} = (1.48,\ -\ 1.26,\ 0.60)$$

Continuando de esta misma forma

$$\bar{x}^{(2)} = (2.10,\ -\ 1.62,\ 0.67)$$

$$\bar{x}^{(3)} = (2.21,\ -\ 1.70,\ 0.69)$$

$$\bar{x}^{(4)} = (2.24,\ -\ 1.71,\ 0.69)$$

$$x^{(5)} = (2.24,\ -\ 1.71,\ 0.69)$$

6. Aplicando el método de aproximaciones sucesivas obtener para el siguiente sistema de ecuaciones homogéneo:

a) El mayor valor característico y su vector correspondiente.

b) El menor valor característico y su vector correspondiente.

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$$

$$x_1 + 3x_2 + x_3 = 0$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0$$

Solución:

a) Este método se dedujo a partir de la ecuación $[A]\ \bar{x} = \lambda\bar{x}$ y consiste en suponer un vector inicial $\bar{x}^{(0)}$ que se aproxime a un vector característico de la matriz $[A]$. Después se multiplica $[A]\ \bar{x}^{(0)}$. Del vector producto así obtenido, se factoriza el máximo elemento, en valor absoluto (λ_1), el cual representa una primer aproximación al mayor valor característico λ, obteniendo $[A]\ \bar{x}^{(0)} = \lambda_1\ \bar{x}^{(1)}$. Tomando el vector normalizado $\bar{x}^{(1)}$ para multiplicarse de nuevo por $[A]$, se inicia una segunda iteración. Este proceso se repite hasta conseguir que la diferencia entre los elementos del vector $\bar{x}^{(n)}$ y los de $\bar{x}^{(n-1)}$ sea menor que una tolerancia de error preestablecida. Iterando sucesivamente se llega al mayor valor característico y a su vector correspondiente.

Así, como el sistema en forma matricial es

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

y suponiendo un vector inicial $\bar{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ se tiene

$$[A]\ \bar{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

factorizando el mayor elemento en valor absoluto de este vector producto

$$[A]\ \bar{x}^{(0)} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

El escalar 2 representa una primera aproximación al mayor valor característico λ y el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$ su vector correspondiente

Continuando

$$[A]\ \bar{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.5 \\ 3.0 \\ 3.0 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 0.833 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$[A]\ \bar{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.833 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.667 \\ 5.833 \\ 5.833 \end{bmatrix} = 5.833 \begin{bmatrix} 0.9714 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$[A]\ \bar{x}^{(3)} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.971 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.943 \\ 4.971 \\ 4.971 \end{bmatrix} = 4.971 \begin{bmatrix} 0.994 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$[A]\ \bar{x}^{(4)} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.994 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.989 \\ 4.994 \\ 4.994 \end{bmatrix} = 4.994 \begin{bmatrix} 0.999 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$[A]\ \bar{x}^{(5)} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.999 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.998 \\ 4.999 \\ 4.999 \end{bmatrix} = 4.999 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Es claro que $\lambda = 5$ y $\bar{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

b) Para encontrar el menor valor característico y su vector correspondiente, se puede aplicar el mismo método modificándolo en tal forma de llegar a la siguiente expresión

$$[A]^{-1}\ \bar{x} = \frac{1}{\lambda}\ \bar{x}$$

donde λ es el mayor valor característico de $[A]^{-1}$ y $\bar{x}$ su vector correspondiente.

Así pues, se necesita obtener $[A]^{-1}$. Aplicando el método de Gauss-Jordan se obtiene

$$[A]^{-1} = \begin{bmatrix} 0.8 & -0.4 & -0.2 \\ -0.2 & 0.6 & -0.2 \\ -0.2 & -0.4 & 0.8 \end{bmatrix}$$

Aplicando el método con un vector inicial $\bar{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$[A]^{-1}\bar{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0.8 & -0.4 & -0.2 \\ -0.2 & 0.6 & -0.2 \\ -0.2 & -0.4 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 \\ -0.2 \\ -0.2 \end{bmatrix} = 0.8 \begin{bmatrix} 1 \\ -0.25 \\ -0.25 \end{bmatrix}$$

$$[A]^{-1}\,\bar{x}^{(1)} = [A]^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ -0.25 \\ -0.25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.95 \\ -0.30 \\ -0.30 \end{bmatrix} = 0.95 \begin{bmatrix} 1 \\ -0.316 \\ -0.316 \end{bmatrix}$$

$$[A]^{-1}\,\bar{x}^{(2)} = [A]^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ -0.316 \\ -0.316 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.990 \\ -0.326 \\ -0.326 \end{bmatrix} = 0.990 \begin{bmatrix} 1 \\ -0.330 \\ -0.330 \end{bmatrix}$$

$$[A]^{-1}\,\bar{x}^{(3)} = [A]^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ -0.330 \\ -0.330 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.998 \\ -0.332 \\ -0.332 \end{bmatrix} = 0.998 \begin{bmatrix} 1 \\ -0.333 \\ -0.333 \end{bmatrix}$$

$$[A]^{-1}\,\bar{x}^{(4)} = [A]^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ -0.333 \\ -0.333 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.999 \\ -0.333 \\ -0.333 \end{bmatrix} = 0.999 \begin{bmatrix} 1 \\ -0.333 \\ -0.333 \end{bmatrix}$$

Se ve que $\frac{1}{\lambda} \Rightarrow 1$ y el vector característico tiende a

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.333 \\ -0.333 \end{bmatrix}$$ Iterando con este valor

$$[A]^{-1}\,\bar{x} = \begin{bmatrix} 0.8 & -0.4 & -0.2 \\ -0.2 & 0.6 & -0.2 \\ -0.2 & -0.4 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -0.333 \\ -0.333 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.333 \\ -0.333 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ -0.333 \\ -0.333 \end{bmatrix}$$

Por tanto $\frac{1}{\lambda} = 1$, $\lambda = 1$

y

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.333 \\ -0.333 \end{bmatrix}$$

7. Calcular la ecuación característica y los valores característicos de las siguientes matrices por el método de Krylov.

a) $$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

b) $$B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -10 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

Solución:

El método de Krylov, determina la ecuación característica correspondiente mediante el cálculo de los coeficientes b_i ; con $i = 1, \ldots, n$ de la expresión

$$\lambda^n + b_1 \lambda^{n-1} + b_2 \lambda^{n-2} + \ldots + b_{n-1} + b_n = 0$$

A partir del teorema de Cayley - Hamilton

$$A^n + b_1 A^{n-1} + b_2 A^{n-2} + \ldots + b_{n-1} A + b_n I = [0]$$

que equivale a

$$A^n \bar{y} + b_1 A^{n-1} \bar{y} + b_2 A^{n-2} \bar{y} + \ldots + b_{n-1} A \bar{y} + b_n \bar{y} = \bar{0}$$

donde $\bar{y}$ es un vector cualquiera y $n = 3$, ya que la ecuación característica que corresponda a esta matriz es de 3er. grado, con lo cual

$$A^3 \bar{y} + b_1 A^2 \bar{y} + b_2 A \bar{y} + b_3 \bar{y} = \bar{0}$$

La expresión anterior representa un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas b_1, b_2, b_3 y b_4 .

Para plantear el sistema se partirá de

$$\bar{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

y como

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

entonces

$$A \bar{y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A^2\overline{y} = A\left[A\overline{y}\right] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A^3\overline{y} = A\left[A^2\,\overline{y}\right] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Sustituyendo

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 5 \end{bmatrix} + b_1\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + b_2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + b_3\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

de donde se obtiene el siguiente sistema

$$\begin{aligned} 2\,b_1 \qquad\quad + b_3 &= -\,4 \\ 3\,b_1 + b_2 \qquad &= -\,9 \\ b_1 + b_2 \qquad &= -\,5 \end{aligned}$$

Resolviendo por Gauss-Jordan

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & -4 \\ 3 & \underline{1} & 0 & -9 \\ 1 & 1 & 0 & -5 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & -4 \\ 3 & 1 & 0 & -9 \\ \underline{-2} & 0 & 0 & 4 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right]$$

$$b_1 = -\,2\ ,\quad b_2 = -\,3\ ,\quad b_3 = 0$$

Por tanto la ecuación característica será

$$\lambda^3 - 2\,\lambda^2 - 3\lambda = 0$$

cuyas raíces son $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = -\,1$ que son los valores característicos correspondientes.

b) En este caso el sistema será de la forma

$$B^3\overline{y} + b_1B^2\overline{y} + b_2B\overline{y} + b_3\overline{y} = \overline{0}$$

donde

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -10 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & 9 \end{bmatrix} \quad ; \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$B\bar{y} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -10 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -10 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$B^2\bar{y} = B\left[B\bar{y}\right] = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -10 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -10 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -22 \\ -34 \\ -62 \end{bmatrix}$$

$$B^3\bar{y} = B\left[B^2 y\right] = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -10 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -22 \\ -34 \\ -62 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -298 \\ 62 \\ -650 \end{bmatrix}$$

sustituyendo

$$\begin{bmatrix} -298 \\ 62 \\ -650 \end{bmatrix} + b_1 \begin{bmatrix} -22 \\ -34 \\ -62 \end{bmatrix} + b_2 \begin{bmatrix} 2 \\ -10 \\ -2 \end{bmatrix} + b_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

con lo cual

$$- 22\, b_1 + 2\, b_2 + b_3 = 298$$

$$- 34\, b_1 - 10\, b_2 = - 62$$

$$- 62\, b_1 - 2\, b_2 = 650$$

Resolviendo el sistema con el método de Gauss-Jordan

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -22 & 2 & 1 & 298 \\ -34 & -10 & 0 & -62 \\ \underline{-62} & -2 & 0 & 650 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2.711 & 1 & 67.354 \\ 0 & -8.902 & 0 & -418.453 \\ 1 & 0.032 & 0 & -10.484 \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & -60.065 \\ 0 & 1 & 0 & 47.008 \\ 1 & 0 & 0 & -12.002 \end{array}\right]$$

$$b_1 = -12 \quad b_2 = 47 \quad b_3 = -60$$

la ecuación es $\lambda^3 - 12\lambda^2 + 47\lambda = 60$

cuyas raíces son, $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = 5$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones aplicando el método de Gauss-Jordan redondeando a dos cifras decimales, Comprobar el resultado obtenido.

a) $$\begin{aligned} 2x + 6y - z &= -12 \\ 5x - y + 2z &= 29 \\ -3x - 4y + z &= 5 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 5x_3 &= 13 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 20 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 &= 10 \end{aligned}$$

c) $$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

d) $$\begin{aligned} 3x + 2y - 5z &= -16 \\ x - y + z &= 6 \\ -x + 2y - 2z &= -11 \end{aligned}$$

e) $$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 - x_3 &= -9 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 13 \\ -x_1 - x_2 + 3x_3 &= 12 \end{aligned}$$

f) $$\begin{aligned} 5x - 2y \quad &= 1 \\ -2x + 3y - z &= 5 \\ y + z &= -3 \end{aligned}$$

g) $$\begin{bmatrix} 6 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 4 & -2 \\ 3 & 2 & -5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

h) $$\begin{aligned} 8.4x - 2.6y + 3z &= 5.3 \\ -3.9x - 0.7y + 2.3z &= -10.54 \\ 1.07x + 1.2y - 0.5z &= 5.08 \end{aligned}$$

i) $$\begin{aligned} \alpha + \beta - \gamma &= 3 \\ -\alpha - 4\beta + \gamma &= 3 \\ 3\alpha + 4\beta + 2\gamma &= 2 \end{aligned}$$

j) $$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ s \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 11 \end{bmatrix}$$

2. Obtenga la matriz inversa de cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones por el método de Gauss-Jordan.

a) $$\begin{aligned} 2.2x - 4.6y - 0.9z &= 5 \\ -1.7x + 2.31y + 2z &= -0.01 \\ 3.8x - 0.75y + 1.7z &= 7.95 \end{aligned}$$

b) $$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

c)
$$\begin{aligned} \omega + 2x \qquad\quad + 2z &= -6.8 \\ -\omega + 2x - 2y - 2z &= -5.74 \\ \omega + 3x - y + 2z &= -12.0 \\ x + 2y + z &= 3.81 \end{aligned}$$

3. Obtener la solución de los siguientes sistemas de ecuaciones así como la la matriz inversa aplicando el método de Gauss-Jordan. Aproximar a tres cifras decimales.

a)
$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 &= -3 \\ 4x_1 - x_2 - 2x_3 &= -12 \\ -3x_1 + 10x_2 - 5x_3 &= 11 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 3\omega + 2x + y - z &= 1 \\ -\omega + 4x - y + 8z &= 7 \\ 2\omega + x - 5y + 3z &= -14 \\ \omega + x - y + 2z &= -4 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} 10x_1 + 2x_2 + x_3 &= 6 \\ 2x_1 + 20x_2 - 2x_3 &= -14 \\ -2x_1 + 3x_2 + 10x_3 &= -25 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 5 & -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}$$

4. Obtener la solución de los siguientes sistemas de ecuaciones empleando el método de Gauss-Seidel. Aproxime a tres cifras decimales:

a)
$$\begin{aligned} x_1 + 10x_2 + 9x_3 &= 7 \\ 2x_1 - 7x_2 - 10x_3 &= -17 \\ 10x_1 + 2x_2 + 6x_3 &= 28 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 4.71\,x - 1.72\,y - 0.21\,z &= 4.03 \\ 0.73\,x \qquad\qquad - 6.3\,z &= 8.06 \\ -2.1\,x + 5.6\,y + 2.3\,z &= 13.67 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} \alpha \qquad\qquad + \delta &= 2 \\ \alpha + 4\beta \qquad - \delta &= 4 \\ \alpha \qquad + \gamma \qquad &= 2 \\ \gamma + \delta &= 2 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 13 \end{bmatrix}$$

e) $$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 &= 2 \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 &= 6 \\ - x_2 + 4x_3 &= 2 \end{aligned}$$

f) $$\begin{aligned} -3.9\,y + 0.3\,z + 2.1\,\omega &= 0.6 \\ -x \quad + 2.3\,z + 0.7\,\omega &= 3.5 \\ 0.5\,x + 4.3\,y + 5.5\,\omega &= -14.3 \\ 8.4\,x + 2.8\,y - 1.7\,z + 2\,\omega &= 4.9 \end{aligned}$$

g) $$\begin{aligned} 20x + 2\,y + 6\,z &= 38 \\ x + 20\,y + 9\,z &= -23 \\ 2\,x - 7\,y - 20\,z &= -57 \end{aligned}$$

5. Del siguiente sistema de ecuaciones obtener el mayor valor característico y su respectivo vector, por el método de aproximaciones sucesivas. Tomar como vector inicial:

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

6. Por el método iterativo (aproximaciones sucesivas), obtener el mayor valor característico con su correspondiente vector de los sistemas homogéneos. Redondear a tres cifras decimales:

a) $$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

b) $$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ -5 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

c) $$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 0 \\ 10x + y + \text{[illegible]}z &= 0 \\ -2\,x + 4\,y + 9\,z &= 0 \end{aligned}$$

d) $\quad 2x_2 + 3x_3 = 0$

$-10x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$

$-2x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 0$

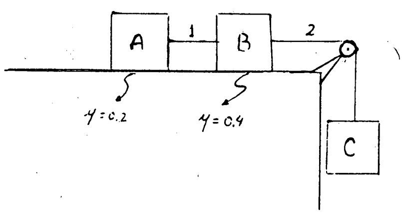
e) $\quad 2x + 2y + 3z = 0$

$-10x - y + 2z = 0$

$-2x + 4y + 9z = 0$

7. De los sistemas del problema anterior, obtener por el mismo método, el menor valor característico con su respectivo vector (No incluya el inciso (c)).

8. En el diagrama de la figura suponga los cables inextensibles y sin peso, considere que no hay fricción entre la polea y el cable, Calcule la aceleración del sistema y las tensiones de los cables. Plantee el sistema de ecuaciones y resuélvalo por el método de Gauss-Jordan aproximando a dos cifras decimales.



μ = coeficiente de fricción entre el plano y los cuerpos.

Peso de "A"	$\omega_A = 10$ Kg
Peso de "B"	$\omega_B = 20$ Kg
Peso de "C"	$\omega_C = 50$ Kg

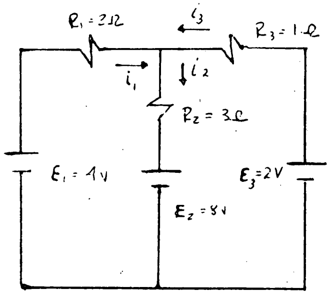
Sugerencia: Aplique la segunda ley de Newton $\quad \Sigma F = ma$
Recuerde que la fuerza de fricción es $F_f = \frac{N}{\mu}$ y $N = \omega$ en este caso.

9. Del circuito de la figura, el sistema de ecuaciones que permite calcular las corrientes i_1, i_2, i_3, se obtiene a partir de las leyes de Kirchoff, que dicen:

$$\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k = \sum_{k=1}^{n} R_K\, i_K \quad \text{en una malla}$$

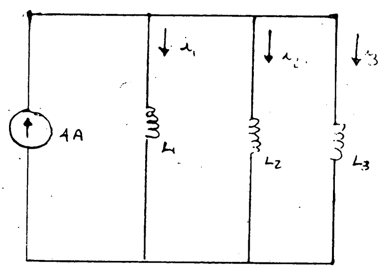
$$\sum_{j=1}^{n} i_j = 0 \quad \text{en un nodo}$$

Resuelva el sistema que se plantea a continuación por el método de Gauss-Jordan.



$$\begin{cases} i_1 + i_3 = i_2 \\ \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = R_1 i_1 + R_2 i_2 \\ \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = R_3 i_3 + R_2 i_2 \end{cases}$$

10. El circuito de la figura muestra tres inductancias o bobinas en paralelo.



Se sabe que la matriz de inductancias es

$$[L] = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

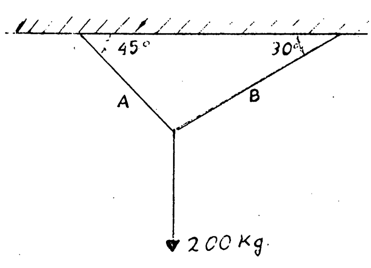
y que el sistema de ecuaciones que resuelve el circuito es:

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}$$

Calcular las corrientes i_1, i_2, i_3. Obtenga la matriz $[L]^{-1}$ por el método de Gauss-Jordan y resuelva el sistema planteado por el mismo método.

11. Los lados de un triángulo son A, B y C. Si se sabe que la suma de las longitudes de los tres es de 60 metros, el lado B es dos veces mayor que el lado C y el lado A es cuatro veces la suma de los otros lados, calcular la longitud de cada uno de los lados, planteando un sistema de ecuaciones y resolviéndolo con el método de Gauss-Jordan.

12. A partir del diagrama mostrado, plantear el sistema de ecuaciones que permita calcular el valor de las tensiones en los cables y resuélvalo por el método de Gauss-Jordan. Considere los cables inextensibles y sin peso.



Recuerde que $\Sigma F = 0$

13. Obtenga las intersecciones de cada uno de los pares de rectas dados a continuación, aplicando el método de Gauss-Seidel.

a) $8x + y = 3$

$2x - 5y = -6$

b) $3x + 6y = 2$

$-4x - y = 1$

c) $4.5x - y = 3$

$-2x + 4y = 8$

14. Obtener la ecuación característica y los valores característicos de las siguientes matrices por el método de Krylov.

a) $\begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & -6 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

S O L U C I O N E S

PROBLEMA No. 1

a) $x = 3, \quad y = -2, \quad z = 6$ b) $x_1 = 1, \quad x_2 = 2; \quad x_3 = 3$

c) $x_1 = 1, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 2$ d) $x = 1, \quad y = -2, \quad z = 3$

e) $x_1 = 2, \quad x_2 = -5, \quad x_3 = 3$ f) $x = 0.5, \quad y = 0.75, \quad z = -3.75$

g) $x_1 = 1, \; x_2 = -2, \; x_3 = 1, \; x_4 = 3$ h) $x = 1.69, \; y = 2.33, \; z = -0.95$

i) $\alpha = 4, \; \beta = -2, \; \gamma = -1$ j) $x = 4, \; s = -3, \; a = -1$

PROBLEMA No. 2

a) $$\left[A\right]^{-1} = \begin{bmatrix} -0.183 & -0.287 & 0.240 \\ -0.354 & -0.242 & 0.097 \\ 0.253 & 0.535 & -0.092 \end{bmatrix}$$

b) $$\left[A\right]^{-1} = \begin{bmatrix} 0.429 & 0.286 & 0.143 \\ -0.143 & 0.571 & 0.286 \\ 0.143 & 0.429 & 0.714 \end{bmatrix}$$

c) $$\left[A\right]^{-1} = \begin{bmatrix} 11 & 2 & -8 & 2 \\ 1.5 & 0.5 & -1 & 0 \\ 2.5 & 0.5 & -2 & 0 \\ -6.5 & -1.5 & -5 & 1 \end{bmatrix}$$

PROBLEMA No. 3

$$a) \quad [A]^{-1} = \begin{bmatrix} -0.438 & 0.614 & 0.192 \\ -0.456 & 0.438 & 0.280 \\ -0.649 & 0.508 & 0.245 \end{bmatrix}$$

$x_1 = -3.929,\ x_2 = -0.807,\ x_3 = -1.456$

$$b) \quad [A]^{-1} = \begin{bmatrix} -0.044 & -0.253 & -0.223 & 1.328 \\ 0.477 & 0.373 & 0.388 & -1.835 \\ -0.074 & -0.089 & -0.373 & 0.880 \\ -0.253 & -0.104 & -0.268 & 1.194 \end{bmatrix}$$

$\omega = -4,\ x = 5,\ y = 1,\ z = -2$

$$c) \quad [A]^{-1} = \begin{bmatrix} 0.099 & -0.008 & -0.011 \\ -0.007 & 0.049 & 0.010 \\ 0.022 & -0.016 & 0.094 \end{bmatrix}$$

$x_1 = 1,\quad x_2 = -1,\quad x_3 = -2$

$$d) \quad [A]^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.3 & -0.01 & -0.2 \\ 0.8 & 1.4 & -0.2 \end{bmatrix}$$

$x = 2,\quad y = -3,\quad z = 5$

PROBLEMA No. 4

a) $x_1 = 1.003,\ x_2 = -2.990,\ x_3 = 3.994$

b) $x = 2.15,\ y = 3.67,\ z = -1.03$

c) $\alpha = 1,\ \beta = 1,\ \gamma = 1,\ \delta = 1$

d) $x_1 = -2,\ x_2 = 1,\ x_3 = 5$

e) $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 1$

f) $x = 2,\ y = -1,\ z = 3,\ \omega = -2$

g) $x = 1,\ y = -3,\ z = 4$

PROBLEMA No. 5

$$\lambda = 8 \quad ; \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

PROBLEMA No. 6

a) $\lambda = 4 \quad ; \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} 0.667 \\ 1.000 \end{bmatrix}$

b) $\lambda = 5 \quad , \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

c) $\lambda = 6.862 \quad ; \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} 0.397 \\ 0.336 \\ 1.000 \end{bmatrix}$

d) $\lambda = 6.381 \quad ; \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} 0.500 \\ -0.406 \\ 1.000 \end{bmatrix}$

e) $\lambda = 3 \quad ; \quad \bar{x} \begin{bmatrix} 0.50 \\ -0.75 \\ 1.00 \end{bmatrix}$

PROBLEMA No. 7

a) $\lambda = -1 \quad ; \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

b) $\lambda = 1 \quad , \quad \bar{x} \begin{bmatrix} 0.50 \\ 0.25 \\ 1.00 \end{bmatrix}$

d) $\lambda = 1.595 \quad ; \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} -0.271 \\ 1.000 \\ -0.542 \end{bmatrix}$

e) $\lambda = 1 \quad , \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} -0.355 \\ 1.000 \\ -0.782 \end{bmatrix}$

PROBLEMA No. 8

$T_1 = 7$ Kg ; $T_2 = 25$ Kg , $a = 4.91$ m/seg^2

PROBLEMA No. 9

$i_1 = 1.9286$ Amp. , $i_2 = 2.7143$ Amp. ; $i_3 = 0.7857$ Amp.

PROBLEMA No. 10

$i_1 = -0.6667$ Amp. ; $i_2 = 1.8333$ Amp. ; $i_3 = 2.8333$ Amp.

PROBLEMA No. 11

$A = 48$ m., $B = 8$ m., $C = 4$ m.

PROBLEMA No. 12

$T_A = 179.3151$ Kg ; $T_B = 146.4102$ Kg

PROBLEMA No. 13

a) P(0.214, 1.286) b) P(-0.381, 0.524) c) P(1.25, 2.625)

PROBLEMA No. 14

a) $\lambda^3 + 6\lambda^2 + 7\lambda = 0$ $\lambda_1 = 0$ $\lambda_2 = 1.5858$ $\lambda_3 = 4.9142$

b) $\lambda^2\ 10\lambda - 6 = 0$ $\lambda_1 \doteq -0.5678$, $\lambda_2 \doteq 10.5678$

c) $\lambda^3 - 2\lambda^2 - 8\lambda = 0$ $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 4$

d) $\lambda^2 - 5\lambda - 11 = 0$ $\lambda_1 \doteq -1.65$, $\lambda_2 \doteq 6.65$

e) $\lambda^3 - 8\lambda^2 - 9\lambda = 0$ $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 9$

TEMA V FORMULA DE TAYLOR CON RESIDUO

1. El departamento de producción de la Compañía ALFA ha determinado que el pronóstico de ventas de uno de sus productos en el mercado se comporta de acuerdo a la siguiente función

$$f(t) = 10^6 \text{ x } \mathrm{Ln}\left|\frac{1}{2} + t\right| \quad [\text{pesos}]$$

donde la variable t representa el tiempo medido en años.

Determinar:

a) El polinomio de Taylor de grado cinco de la función en el entorno del punto $t = \frac{1}{2}$ año.

b) Las ventas para $t = 9$ meses

. Utilizando la funcion $f(t)$

. Utilizando el polinomio de Taylor obtenido en el inciso anterior.

Solución:

a) El polinomio de Taylor pedido es:

$$P(t) = T_5\left[f(t;\ \frac{1}{2})\right] = \sum_{k=0}^{5} \frac{f^{(k)}\ (a = \frac{1}{2})}{k!}\ (x - \frac{1}{2})^k$$

desarrollando

$$P(t) = f(\frac{1}{2}) + \frac{f'(\frac{1}{2})}{1!}(x - \frac{1}{2}) + \frac{f''(\frac{1}{2})}{2!}(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{f'''(\frac{1}{2})}{3!}(x - \frac{1}{2})^3 +$$

$$\frac{f^{IV}(\frac{1}{2})}{4!}(x - \frac{1}{2})^4 + \frac{f^{V}(\frac{1}{2})}{5!}(x - \frac{1}{2})^5$$

evaluando las derivadas

$$f(t) = 10^6 \text{ x } \mathrm{Ln}\left|\frac{1}{2} + t\right| \qquad f(\frac{1}{2}) = 10^6 \text{ x } \mathrm{Ln}\ (1) = 0$$

$$f'(t) = \frac{10^6}{\frac{1}{2} + t} \qquad f'(\frac{1}{2}) = 10^6 \text{ x } \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 10^6$$

$$f''(t) = \frac{-10^6}{(\frac{1}{2} + t)^2} \qquad f''(\frac{1}{2}) = 10^6\ \frac{-1}{(\frac{1}{2} + \frac{1}{2})^2} = -10^6$$

$$f'''(t) = \frac{2 \times 10^6}{(\frac{1}{2} + t)^3} \qquad f'''(\frac{1}{2}) = \frac{2 \times 10^6}{(\frac{1}{2} + \frac{1}{2})^3} = 2 \times 10^6$$

$$f^{IV}(t) = \frac{-6 \times 10^6}{(\frac{1}{2} + t)^4} \qquad f^{IV}(\frac{1}{2}) = \frac{-6 \times 10^6}{(\frac{1}{2}) + \frac{1}{2})^4} = - \;6 \times 10^6$$

$$f^{V}(t) = \frac{24 \times 10^6}{(\frac{1}{2} + t)^5} \qquad f^{V}(\frac{1}{2}) = \frac{24 \times 10^6}{(\frac{1}{2} + \frac{1}{2})^5} = 24 \times 10^6$$

sustituyendo

$$P(t) = 10^6 \left[(1)\ (t - \frac{1}{2}) + \frac{(-1)}{2!}\ (t - \frac{1}{2})^2 + \frac{2}{3!}\ (t - \frac{1}{2})^3 + \frac{(-6)}{4!}\ (t - \frac{1}{2})^4 + \right.$$

$$\left. + \frac{24}{5!}\ (t - \frac{1}{2})^5 \right]$$

simplificando

$$P(t) = 10^6 \left[0.2000\ t^5 - 0.7500\ t^4 + 1.3333\ t^3 - 1.6250\ t^2 + \right.$$

$$\left. + 1.9375 t - 0.6886 \right]$$

b) Las ventas para $t = .9$ meses son

. Utilizando la función $f(t)$

$$f(t = 0.75) = 10^6 \times \text{Ln}\ \frac{1}{2} + 0.75 = 223{,}143.55 \text{ pesos}$$

. Utilizando el polinomio $T_5 \left[f(t;\ \frac{1}{2}) \right]$

$$P(t = 0.75) = 10^6 \left[0.2000(0.75)^5 - 0.7500(0.75)^4 + \right.$$

$$\left. + 1.3333(0.75)^3 - 1.6250(0.75)^2 + 1.9375(0.75) - 0.6886 \right]$$

$$P(t = 0.75) = 10^6(0.2231) = 223{,}100.00 \text{ pesos}$$

2. La respuesta de un sistema de segundo orden a una entrada impulso es:

$$y(x) = \frac{\omega_n}{2\sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \; e^{-(\varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2 - 1})\omega_n x} - \frac{\omega_n}{2\sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \; e^{-(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - 1})\omega_n x}$$

Encontrar el polinomio de Taylor correspondiente

Solución:

La expresión anterior se puede expresar en la forma

$$y(x) = K\, e^{-ax} - K\, e^{-bx}$$

siendo:

$$K = \frac{\omega_n}{2\sqrt{\varepsilon^2 - 1}}$$

$$a = \left(\varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2 - 1}\right) \omega_n$$

$$b = \left(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - 1}\right) \omega_n$$

Partiendo de que el polinomio de Taylor de la función $f(x) = e^x$ es

$$P(x) = \mathrm{Tn}\left[e^x\right] = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$$

y aplicando la propiedad de sustitución se obtiene que

$$\mathrm{Tn}\left[e^{-ax}\right] = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-ax)^k}{k!} = 1 - \frac{ax}{1!} + \frac{a^2x^2}{2!} - \frac{a^3x^3}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n a^n x^n}{n!}$$

así mismo

$$\mathrm{Tn}\left[e^{-bx}\right] = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-bx)^k}{k!} = 1 - \frac{bx}{1!} + \frac{b^2x^2}{2!} - \frac{b^3x^3}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n b^n x^n}{n!}$$

ahora aplicando la propiedad de linealidad

$$\mathrm{Tn}\left[k\, e^{-ax} - k\, e^{-bx}\right] = k\, \mathrm{Tn}\left[e^{-ax}\right] - k\, \mathrm{Tn}\left[e^{-bx}\right]$$

sustituyendo los polinomios correspondientes

$$\mathrm{Tn}\left[y(x)\right] = k\left[1 - \frac{a^2x^2}{2!} - \frac{a^3x^3}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n a^n x^n}{n!} - 1 + \right.$$

$$\left. + \frac{bx}{1!} - \frac{b^2x^2}{2!} + \frac{b^3x^3}{3!} - \ldots + \frac{(-1)^n b^n x^n}{n!}\right]$$

simplificando

$$T_n\left[y(x)\right] = k\left[(-a+b)\,x + \frac{1}{2!}(a^2-b^2)\,x^3 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{3!}(-a^3+b^3)\,x^3 + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}(a^n+b^n)\,x^n\right]$$

3. Obtener el área bajo la curva de la siguiente función

$$f(x) = \frac{4\ \text{sen}\ x^2}{x}$$

en el intervalo $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

Solución:

El área bajo la curva es

$$A = \int_0^{\pi/2} \frac{4\ \text{sen}\ x^2}{x}\,dx$$

Como esta función no se puede integrar por los métodos tradicionales se utilizará un polinomio de Taylor para resolver el problema. Teniendo en cuenta que

$$T_n\left[\text{sen}\ x\right] = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

sustituyendo x por x^2

$$T_n\left[\text{sen}\ x^2\right] = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \ldots + (-1)^n\frac{(x^2)^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

ahora, sustituyendo en la integral

$$A = \int_0^{\pi/2} \frac{4\ T_n\left[\text{sen}\ x^2\right]}{x}\,dx$$

$$A = \int_0^{\pi/2} \frac{4(x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \ldots + (-1)^n\frac{(x\ )^{2n-1}}{(2n-1)!})\,dx}{x}$$

considerando un polinomio de Taylor de grado 14 (despreciando los demás términos) se obtiene

$$A = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{4(x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!})}{x}\right)\,dx$$

simplificando

$$A = \int_0^{\pi/2} (4x - \frac{2}{3}x \quad \frac{1}{30}x^9 - \frac{1}{1.260}x^{13})dx$$

efectuando la integral

$$A = 2x^2 - \frac{1}{9}x^6 + \frac{1}{300}x^{10} - \frac{1}{17,640}x^{14}\Big|_0^{\pi/2}$$

$$A = \frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^6}{576} + \frac{\pi^{10}}{307,200} - \frac{\pi^{14}}{289,013,760}$$

realizando las operaciones

$$A = 3.539\ u^2$$

4. Determinar el error que se comete al evaluar la integral $\int_0^{\pi/2} \frac{4 \operatorname{sen} x^2}{x} dx$ con el polinomio de Taylor utilizando en el ejercicio anterior.

Solución:

Para calcular el error involucrado en la integral se toma el siguiente término no nulo que aparece en el polinomio generado, el cual resulta ser igual a

$4\frac{x^{18}/9!}{x} = 4\frac{x^{17}}{9!}$, según el ejercicio 3 valuando este para $x \in [0, \pi/2]$ se tiene que el error es igual a 0.0237 este coincide con el error $E_{2n}(x^2)$ esto es:

$E_{2n}(x^2) = \frac{1}{2n!}\int_0^{\pi/2} (x^2 - t)^{2n} f^{2n+1}(t)\ dt$ en donde la derivada se evalua para $t = 0$ y se considera $n = 4$ que corresponde a los términos existentes en el polinomio entonces:

$$E_8(x^2) = \frac{1}{8!}\int_0^{\pi/2} (x^2)^8\ dx$$

ya que la novena derivada de sen x^2 valuada en cero es igual a uno.

Haciendo

$$u = x^2 \quad ; \quad E_8(u) = \frac{1}{8!}\int_0^{\pi/2} u^8\ du = \frac{1}{9!}u^9\Big|_0^{\pi/2}$$

el error

$$E_8\left[4\,\frac{\text{sen } x^2}{x}\right]$$

sería

$$\frac{4\ E_8(u)}{x}$$

sustituyendo

$$\frac{4}{x}\left[\frac{1}{9!}\,u^9\right] \qquad \text{como} \quad u = x^2$$

esto implica

$$\frac{4}{x}\,\frac{1}{9!}\,(x^2)^9 = \frac{4\ x^{17}}{9!}$$

para

$$x \in \left[0,\ \pi/2\right]$$

el error sería el antes calculado, esto es: 0.0237

5. Se ha determinado que la fuerza que ejerce un soporte de una mesa vibradora sobre el piso esta dada por la siguiente expresión

$$F_s = \int_0^{\pi/4} \left(\frac{\text{sen}(2x) - \cos(2x)}{2x}\right) dx \quad [Tn]$$

evaluar la integral, utilizando un polinomio de Taylor de grado menor o igual a cinco.

Solución:

La magnitud de la fuerza se puede determinar al evaluar la integral

$$F_s = \int_0^{\pi/4} f(x)\ dx$$

siendo

$$f(x) = \frac{\text{sen}(2x) - \cos(2x)}{2x}$$

esta función se sustituirá por un polinomio de Taylor de quinto grado, el cual se obtiene como sigue:

$$P(x) = T_5\left[f(x)\right] = T_5\left[\frac{\text{sen}(2x) - \cos(2x)}{2x}\right] = \sum_{k=0}^{5} \frac{f^{(n)}(0)}{k!}\ x^k$$

desarrollando:

$$T_5\left[f(x)\right] = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{IV}(0)}{4!}x^4$$

$$+ \frac{f^{V}(0)}{5!}x^5$$

Al tratar de obtener las derivadas $f'(0)$, $f''(0)\ldots f^{V}(0)$ se observa que el proceso es sumamente tedioso, por lo cual conviene mejor utilizar las propiedades del operador de Taylor. Partiendo de los siguientes polinomios de Taylor

$$T_n\left[\text{sen } x\right] = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots (-1)\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

$$T_n\left[\cos x\right] = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!}$$

utilizando la propiedad de sustitución, se obtiene que

$$T_5\left[\text{sen } 2x\right] = 2x - \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^5}{5!}$$

$$T_5\left[\cos 2x\right] = 1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!}$$

Ahora, utilizando la propiedad de linealidad

$$T_5\left[\text{sen}(2x) - \cos(2x)\right] = T_5\left[\cos 2x\right] - T_5\left[\text{sen } 2x\right]$$

sustituyendo

$$T_5\left[\text{sen}(2x) - \cos(2x)\right] = 2x - \frac{2^3x^3}{3!} + \frac{2^5x^5}{5!} - 1 + \frac{2^2x^2}{2!} - \frac{2^4x^4}{4!}$$

simplificando

$$T_5\left[\frac{\text{sen}(2x) - \cos(2x)}{2x}\right] = 2x + 2x^2 - \frac{4}{3}x^3 - \frac{2}{3}x^4 + \frac{4}{15}x^5$$

sustituyendo este polinomio en el numerador de la integral

$$F_s = \int_0^{\pi/4} \frac{(2x + 2x^2 - \frac{4}{3}x^3 - \frac{2}{3}x^4 + \frac{4}{15}x^5)}{2x}\,dx$$

simplificando

$$F_s = \int_0^{\pi/4} (1 + x - \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^4)\,dx$$

efectuando la integral

$$F_s = x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{9}x^3 - \frac{1}{12}x^4 + \frac{2}{75}x^5 \Bigg|_0^{\pi/4}$$

$$F_s = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi^2}{32} - \frac{\pi^3}{288} - \frac{\pi^4}{3{,}072} + \frac{\pi^5}{38{,}400} = 0.962$$

por lo tanto

$$F_s = 962 \text{ Kg}$$

6. Calcular el error que se comete al evaluar la integral de la función $f(x) = \frac{\text{sen}(2x) - \cos(2x)}{2x}$, en el intervalo $[0, \pi/4]$ a través del polinomio de Taylor de grado cinco.

Solución:

El error esta dado como

$$E_n(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x (x - t)^n f^{(n+1)}(t)\, dt$$

Esto implica la determinación de la sexta derivada de la función f(x); en el ejercicio 5 se calculó esta integral, el operador se obtuvo a través de polinomios de Taylor ya conocidos, así la derivada sexta de la función sen(2x) es nula y la derivada sexta de cos(2x) es igual a - 1 para x = 0 que con el signo negativo de la función resulta 1.

Sustituyendo valores en la expresión que da el error se tiene:

$$E_5(2x) = \frac{1}{5!} \int_0^{\pi/4} (2x)^5\,(1)\, dx$$

haciendo

$$u = 2x \quad ; \quad E_5(u) = \frac{1}{5!} \int_0^{\pi/4} u^5\, du = \frac{1}{5!}\left(\frac{u^6}{6}\right)$$

$$E_5(u) = \frac{1}{6!}(u)^6$$

entonces

$$E_5(2x) = \frac{1}{6!}(2x)^6$$

para

$$x \in [0, \pi/4] \quad \therefore \quad E_5(2x) = \frac{1}{6!}(2x)^6 \Big|_0^{\pi/4} = 0.0209$$

este error es el de la función $f(x) = \text{sen}(2x) - \cos(2x)$ y se quiere el de $\frac{f(x)}{2x}$, el error de esta función sería

$$\frac{E_5(2x)}{2x} = \left[\frac{1}{6!}(2x)^6\right]/2x = \frac{1}{6!}(2x)^5$$

para

$$x \in [0, \pi/4]$$

$$\therefore \quad \frac{E_5(2x)}{2x} = 0.0133$$

el cual coincide con el sexto término del operador, esto es

$$\left[\frac{(2x)^6}{6!}\right] /2x$$

7. Una particula dentro de un fluido, describe una tayectoria dada por la función

$$f(t) = \text{sen}\ \frac{1}{2}\ t + \cos\ \frac{1}{2}\ t$$

Obtener

a) El polinomio de Taylor de séptimo grado que representa a la función f(t) en el entorno del punto t = 0.

b) El polinomio de Taylor que representa la velocidad de la particula.

Solución:

Partiendo de los polinomios de Taylor de las funciones

$$f_1(t) = \text{sen}\ t$$

$$f_2(t) = \cos\ t$$

los cuales se obtienen de la siguiente forma

$$P_1(t) = T_7\left[f_1(t)\right] = \sum_{k=0}^{7} \frac{f_1^{(n)}(0)}{k!}\ t^k$$

$$P_2(t) = T_7\left[f_2(t)\right] = \sum_{k=0}^{7} \frac{f_2^{(k)}(0)}{k!}\ t^k$$

desarrollando las sumatorias

$$P_1(t) = T_7\left[f_1(t)\right] = f_1(0) + \frac{f_1'(0)}{1!}\ t + \frac{f_1''(0)}{2!}\ t^2 + \ldots + \frac{f_1^{(VII)}(0)}{7!}\ t^7$$

$$P_2(t) = T_7\left[f_2(t)\right] = f_2(0) + \frac{f_2'(0)}{1!}\ t + \frac{f_2''(0)}{2!}\ t^2 + \ldots + \frac{f^{(VII)}(0)}{7!}\ t^7$$

Calculando las derivadas

$f_1(t) = \text{sen}\ t$ $\qquad$ $f_2(t) = \cos\ t$

$f_1(0) = \text{sen}\ (0) = 0$ $\qquad$ $f_2(0) = \cos(0) = 1$

$f_1'(t) = \cos\ t$ $\qquad$ $f_2'(t) = -\ \text{sen}\ t$

$f_1'(0) = \cos\ (0) = 1$ $\qquad$ $f_2'(0) = -\ \text{sen}\ (0) = 0$

$f_1''(t) = -\ \text{sen}\ t$ $\qquad$ $f_2''(t) = -\ \cos\ t$

$f_1''(0) = -\ \text{sen}(0) = 0$ $\qquad$ $f_2''(0) = -\ \cos(0) = -\ 1$

$f_1'''(t) = -\ \cos\ t$ $\qquad$ $f_2'''(t) = \text{sen}\ t$

$f_1'''(0) = -\ \cos\ (0) = -\ 1$ $\qquad$ $f_2'''(0) = \text{sen}(0) = 0$

$f_1^{IV}(t) = \text{sen } t$ $\qquad$ $f_2^{IV}(t) = \cos t$

$f_1^{IV}(0) = \text{sen}(0) = 0$ $\qquad$ $f_2^{IV}(0) = \cos(0) = 1$

$f_1^{V}(t) = \cos t$ $\qquad$ $f_2^{V}(t) = -\text{ sen } t$

$f_1^{V}(t) = \cos(0) = 1$ $\qquad$ $f_2(0) = -\text{ sen}(0) = 0$

$f_1^{VI}(t) = -\text{ sen } t$ $\qquad$ $f_2^{VI}(t) = -\cos t$

$f_1^{VI}(t) = -\text{ sen}(0) = 0$ $\qquad$ $f_2^{VI}(0) = -\cos(0) = -1$

$f_1^{VII}(t) = -\cos t$ $\qquad$ $f_2^{VII}(t) = \text{sen } t$

$f_1^{VII}(t) = -\cos(0) = -1$ $\qquad$ $f_2^{VII}(0) = \text{sen}(0) = 0$

sustituyendo

$$P_1(t) = T_7\left[\ _1(t)\right] = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!}$$

$$P_2(t) = T_7\left[\ _2(t)\right] = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!}$$

Aplicando la propiedad de sustitución para obtener los polinomios de Taylor de las funciones

$$F_1(t) = f\ (ct) = \text{sen } \frac{1}{2}t$$

$$F_2(t) = f\ (ct) = \cos \frac{1}{2}t$$

se obtiene

$$P_1(\tfrac{1}{2}t) = T_7\left[\text{sen } \frac{1}{2}t\right] = \frac{1}{2}t - \frac{(\frac{1}{2}t)^3}{3!} + \frac{(\frac{1}{2}t)^5}{5!} - \frac{(\frac{1}{2})^7}{7!}$$

$$P\ (\tfrac{1}{2}t) = T_7\left[\cos \frac{1}{2}t\right] = 1 - \frac{(\frac{1}{2}t)^2}{2!} + \frac{(\frac{1}{2}t)^4}{4!} - \frac{(\frac{1}{2}t)^6}{6!}$$

ahora aplicando la propiedad de linealidad

$$P(t) = T_7\left[\text{en } \frac{1}{2}t + \cos \frac{1}{2}t\right] = T_7\left[\text{sen } \frac{1}{2}t\right] + T_7\left[\cos \frac{1}{2}t\right]$$

$$P(t) = \frac{1}{2}t - \frac{t^3}{2^3 3!} + \frac{t^5}{2^5 5!} - \frac{t^7}{2^7 7!} + 1 - \frac{t^2}{2^2 2!} + \frac{t^4}{2^4 4!} - \frac{t^6}{2^6 6!}$$

simplificando

$$P(t) = 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{2^2 2!} - \frac{t^3}{2^3 3!} + \frac{t^4}{2^4 4!} + \frac{t^5}{2^5 5!} - \frac{t^6}{2^6 6!} - \frac{t^7}{2^7 7!}$$

$$P(t) = 1 + \frac{1}{2} t - \frac{1}{8} t^2 - \frac{1}{48} t^3 + \frac{1}{384} t^4 + \frac{1}{3840} t^5 - \frac{1}{46080} t^6 - \frac{1}{645120} t^7$$

b) Para encontrar la velocidad de la partícula será necesario encontrar la derivada del polinomio que se encontró anteriormente, para lograrlo se utiliza la propiedad de derivación de los polinomios de Taylor.

$$\frac{d}{dt} T_n \left[f(t:a) \right] = T_{n-1} \left[\frac{d}{dt} f(t:a) \right]$$

sustituyendo

$$v(t) = \frac{d}{dt} T_7 \left[\text{sen } \frac{1}{2} t + \cos \frac{1}{2} t \right] = T_6 \left[\frac{d}{dt} (\text{sen } \frac{1}{2} t + \cos \frac{1}{2} t) \right]$$

$$v(t) = T_6 \left[\frac{1}{2} \cos \frac{1}{2} t - \frac{1}{2} \text{sen } \frac{1}{2} t \right]$$

Aplicando la propiedad de linealidad

$$v(t) = \frac{1}{2} T_6 \left[\cos \frac{1}{2} t \right] - \frac{1}{2} T_6 \left[\text{sen } \frac{1}{2} t \right]$$

$$v(t) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{t^2}{2^2 2!} + \frac{t^4}{2^4 4!} - \frac{t^6}{2^6 6!}\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} t - \frac{t^3}{2^3 3!} + \frac{t^5}{2^5 5!}\right)$$

simplificando

$$v(t) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{t^2}{2^2 2!} + \frac{t^4}{2^4 4!} - \frac{t^6}{2^6 6!} - \frac{t}{2} + \frac{t^3}{2^3 3!} - \frac{t^5}{2^5 5!}\right)$$

$$v(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} t - \frac{1}{16} t^2 + \frac{1}{96} t^3 + \frac{1}{768} t^4 - \frac{1}{7680} t^5 - \frac{1}{92160} t^6$$

Otra forma de obtener el resultado anterior sería derivando directamente el polinomio de Taylor obtenido en el inciso anterior.

8. Calcular el error en los incisos a y b del ejercicio anterior.

Solución:

a) Como ya se vió en los ejercicios anteriores

$$E_7(t) = \frac{1}{7!}\int_a^t (t-k) \quad f^{VIII}(k)dk$$

coincide con el siguiente término del polinomio de Taylor generado por la función

$$f(t) = \text{sen}\ \frac{1}{2}\ t + \cos\ \frac{1}{2}\ t$$

este es igual a $\frac{t^8}{8!}$; entonces

$$E_7(t) = \frac{t^8}{8!}$$

b) El error sería

$$d\ \frac{E_7(t)}{dt} = \frac{1}{8!}\ (t/2)^8 = \frac{t^7}{7!2^8}$$

9. Evaluar la integral de probabilidad

$$\int_{-3}^{3} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{t^2}{2}}\ dt$$

utilizando un polinomio de Taylor de grado 30.

Solución:

A partir del plinomio de Taylor de la función $f(t) = e^t$

$$T_n\left[e^t\right] = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \ldots + \frac{t^n}{n!}$$

se puede obtener el polinomio de Taylor de la función

$f(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$ haciendo uso de la propiedad de sustitución.

cambiando t por $-\frac{t^2}{2}$ se tiene:

$$T_n\left[e^{-\frac{t^2}{2}}\right] = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-\frac{t^2}{2})^k}{k!} = 1 + \frac{(-\frac{t^2}{2})}{1!} + \frac{(-\frac{t^2}{2})^2}{2!} + \ldots + \frac{(-\frac{t^2}{2})^n}{n!}$$

simplificando y considerando un polinomio de grado 30:

$$P(t) = T_{30}\left[e^{-\frac{t^2}{2}}\right] = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{8} - \frac{t^6}{48} + \frac{t^8}{384} - \frac{t^{10}}{3840} + \frac{t^{12}}{46080}$$

$$- \frac{t^{14}}{645120} + \frac{t^{16}}{10321920} - \frac{t^{18}}{185794560} + \frac{t^{20}}{3715891200}$$

$$- \frac{t^{22}}{8.174960 \times 10^{10}} + \frac{t^{24}}{1.961990 \times 10^{12}} - \frac{t^{26}}{5.101175 \times 10^{13}}$$

$$+ \frac{t^{28}}{1.428329 \times 10^{15}} - \frac{t^{30}}{4.2850 \times 10^{16}}$$

integrando

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-3}^{3} T_{30}\left[e^{-\frac{t^2}{2}}\right] dt = t - \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{40} - \frac{t^7}{336} + \frac{t^9}{3456} - \frac{t^{11}}{42240} + \frac{t^{13}}{599040}$$

$$+ \frac{t^{15}}{9676800} + \frac{t^{17}}{175472640} - \frac{t^{19}}{3530096640}$$

$$+ \frac{t^{21}}{7.803371 \times 10^{10}} - \frac{t^{23}}{1.880240 \times 10^{12}} + \frac{t^{25}}{4.90475 \times 10^{13}} - \frac{t^{27}}{1.377317 \times 10^{15}} +$$

$$+ \frac{t^{29}}{4.142154 \times 10^{16}} - \frac{t^{31}}{1.328345 \times 10^{18}} \Bigg|_{-3}^{3}$$

sustituyendo límites:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-3}^{3} T_{30}\left[e^{-\frac{t^2}{2}}\right] dt = 2\left[3 - \frac{27}{6} + \frac{243}{40} - \frac{2187}{336} + \frac{19683}{3456}\right.$$

$$- \frac{177147}{42240} + \frac{1594323}{599040} - \frac{14348907}{9676800}$$

$$+ \frac{129140163}{175472640} - \frac{1162261467}{3530096640}$$

$$+ \frac{1.0460 \times 10^{10}}{7.803371 \times 10^{10}} - \frac{9.4143 \times 10^{10}}{1.880240 \times 10^{12}}$$

$$+ \frac{8.472886 \times 10^{11}}{4.90475 \times 10^{13}} - \frac{7.625597 \times 10^{12}}{1.377317 \times 10^{15}}$$

$$\left. + \frac{6.863037 \times 10^{13}}{4.142154 \times 10^{16}} - \frac{6.176733 \times 10^{14}}{1.328345 \times 10^{18}}\right]$$

efectuando operaciones:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-3}^{3} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (2.4998) = 0.9973$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

Obtener el polinomio de Taylor de cada una de las siguientes funciones:

Solución:

1. $T_{2n+1}\left[(1+x)^{\alpha}\right] = ?$ $\qquad P(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k$

2. $T_n\left[\frac{1}{1+x}\right] = ?$ $\qquad P(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k$

3. $T_n\left[\frac{x}{1-x^2}\right] = ?$ $\qquad P(x) = \sum_{k=0}^{n} x^{2k+1}$

4. $T_n\left[a^x\right] = ?$ $\qquad P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(\log a)^k}{k!} x^k$

5. $T_{2n}\left[\operatorname{sen}^2 x\right] = ?$ $\qquad P(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{2^{2k-1}}{(2k)!} x^{2k}$

(considerar que $\cos 2x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$)

6. $T_n\left[\log(1+x)\right] = ?$ $\qquad P(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k}$

7. $T_{2n+1}\left[\log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right] = ?$ $\qquad P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$

8. $T_n\left[\frac{1}{2-x}\right] = ?$ $\qquad P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{2^{k+1}}$

9. $T_{2n+1}\left[\arctan x\right] = ?$ $\qquad P(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}$

TEMA VI INTERPOLACION, DERIVACION E INTEGRACION NUMERICA

1. Aplicando el método de interpolación de Newton y usando la siguiente tabla calcular:

a) El valor de **y** para $x = 0.5$

b) El valor de **y** para $x = 4$

c) El valor de **y** para $x = -3.4$

d) Los coeficientes del polinomio de Newton

x	-3	-1	1	3	5
y	-51	-11	-11	-3	61

Solución:

a) Para poder aplicar este método es necesario que los espaciamientos en las x sean constantes como ocurre en este caso, en que $h = 2$. Construyamos la tabla de diferencias finitas:

	x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
	-3	-51			
			40		
	-1	-11		-40	
x=0.5 →			0		48
	1	-11		8	
			8		48
	3	-3		56	
			64		
	5	61			

Como las terceras diferencias se vuelven constantes, el grado del polinomio que corresponde a los datos es 3.

Calculemos el valor de y para $x = 0.5$. Para esto aplicaremos la fórmula de Newton, debido a que los espaciamientos en las x son constantes. La fórmula en cuestión es:

$$y_k = y_0 + k\Delta y_0 + \frac{k(k-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{4!}\Delta^4 y_0 + \cdots$$

Así mismo el valor de k está dado por:

$$k = \frac{x_k - x_0}{h}$$

donde x_k es el valor de x para el cual deseamos encontrar y, x_0 es el valor anterior de x_k al introducirlo en la tabla y h es el incremento constante de los valores de x en la tabla, en este caso $h = 2$.

Así, el valor de k es:

$$k = \frac{0.5-(-1)}{2} = \frac{0.5+1}{2} = 0.75$$

Sustituyendo este valor y los de la tabla en la fórmula se tiene:

$$y_{0.75} = -11 + (0.75)(0) + \frac{(0.75)(0.75-1)}{2}(8) + \frac{(0.75)(0.75-1)(0.75-2)}{6}(48)$$

efectuando las operaciones necesarias se tiene que:

$$y_{0.75} = -9.875$$

es decir que para $x = 0.5$; $y = -9.875$

b) Para obtener el valor de y cuando $x = 4$ no se tienen en la tabla las segundas y terceras diferencias, sin embargo como se sabe que las terceras diferencias son constantes se completa la tabla. Así:

X = 4 →

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
-3	-51			
		40		
-1	-11		-40	
		0		48
1	-11		8	
		8		48
3	-3		56	
		64		48*
5	61		104*	
				48*

Los valores con asteriscos se obtuvieron en base a las terceras diferencias constantes. Ahora bien, como sabemos que una cantidad "x" menos 56 debe ser igual a 48 tenemos:

$$z - 56 = 48 \qquad \therefore \quad z = 104$$

Una vez completada la tabla se calcula y para $x = 4$ como en el inciso anterior.

Existe también otra forma de resolver este problema y consiste en invertir la tabla original, obtener las nuevas diferencias y aplicar la fórmula . En esta forma se resolverá el inciso. La tabla queda de la siguiente forma:

	x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
	5	61			
x=4 →			-64		
	3	-3		56	
			-8		-48
	1	-11		8	
			0		-48
	-1	-11		-40	
			-40		
	-3	-51			

El valor de k es:

$$k = \frac{4 - 5}{-2} = 0.5$$

Ahora se sustituye en la fórmula:

$$y_{0.5} = 61 + (0.5)(-64) + \frac{(0.5)(0.5-1)}{2}(56) + \frac{(0.5)(0.5-1)(0.5-2)}{6}(-48)$$

y el valor de y para $x = 4$ es:

$$y = 19$$

c) El valor de y para $x = -3.4$ queda fuera de la tabla por lo cual el problema es de extrapolación. Para resolver el problema se vuelve a utilizar el hecho de que las terceras diferencias son constantes, con lo cual la tabla queda:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
-5	-179*			
		128*		
-3	-51		-88*	
		40		48*
-1	-11		-40	
		0		48
1	-11		8	
		8		48
3	-3		56	
		64		
5	61			

Calculando k:

$$k = \frac{-3.4 - (-5)}{2} = \frac{-3.4 + 5}{2} = 0.8$$

Sustituyendo valores

$$y_{0.8} = -179 + (0.8)(128) + \frac{(0.8)(0.8 - 1)}{2}(-88) + \frac{(0.8)(0.8 - 1)(0.8 - 2)}{6}(48)$$

por tanto el valor buscado es:

$$y = -68.024$$

d) En este inciso se busca el polinomio del cual provienen los datos de la tabla, ésto es, determinar el valor de y para cualquier x ; se interpola en cualquier intervalo de la tabla.. Si se interpola entre x = - 1 y x = 1 se tendrá:

X	Y	ΔY	$\Delta^2 Y$	$\Delta^3 Y$
-3	-51			
		40		
-1	-11		-40	
		0		48
x = x				
			8	
1	-11			
		8		48
3	-3		56	
		64		
5	61			

$$k = \frac{x - (-1)}{2} = \frac{x + 1}{2}$$

Sustituyendo en la fórmula obtenemos el polinomio:

$$y_k = -11 + \left(\frac{x+1}{2}\right)(0) + \frac{\left(\frac{x+1}{2}\right)\left(\frac{x+1}{2}-1\right)}{2}(8) + \frac{\left(\frac{x+1}{2}\right)\left(\frac{x+1}{2}-1\right)\left(\frac{x+1}{2}-2\right)}{6}(48)$$

Agrupando para hacer operaciones:

$$y_k = -11 + \left(\frac{1}{2}\right)(x+1)\left(\frac{1}{2}\right)(x+1-2)(4) + \left(\frac{1}{2}\right)(x+1)\left(\frac{1}{2}\right)(x+1-2)(x+1-4)(8)$$

Desarrollando los productos indicados:

$$y_k = -11 + x^2 - 1 + x^3 - 3x^2 - x + 3$$

Finalmente agrupando y reduciendo términos semejantes se obtiene:

$$y = x^3 - 2x^2 - x - 9$$

que es el polinomio buscado.

2. Dada la función definida por la tabla, calcular el valor de y cuando $x = -1$

X	Y
-6	40.1000
-4	4.2200
-2	-27.6550
0	-55.3790
2	-79.2130
4	-99.1570
6	-114.7720
8	-126.0940
10	-133.2430
12	-136.0100
14	-134.6800
16	-129.3590

Use la fórmula de interpolación de Newton.

Solución:

La tabla de diferencias de la función es:

x	y	Δy	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$	$\Delta^4 y_0$	$\Delta^5 y_0$	$\Delta^6 y_0$
-6	40.100						
		-35.880					
-4	4.220						
		-31.875	4.013				
				0.138			
-2	-27.655		4.151		-0.399		
		-27.724		-0.261		1.221	
0	-55.379		3.890	-0.561	0.822	-1.505	-2.726
		-23.834					
2	-79.213		4.451		-0.683		2.274
		-19.944		-0.122		0.769	
4	-99.157		4.329		0.086		-0.939
		-15.615		-0.036		-0.170	
6	-114.772		4.293		-0.084		0.583
		-11.322		-0.120		0.413	
8	-126.094		4.173		0.329		-1.236
		- 7.140		0.209		-0.823	
10	-133.243		4.382		-0.494		1.496
		- 2.760		-0.285		0.673	
12	-136.010		4.097		0.179		
		1.330		-0.106			
14	-134.680		4.991				
		5.321					
16	-129.359						

Se observa que las diferencias no se hacen constantes, sin embargo se puede ver que las segundas diferencias son las que más se aproximan a serlo. Por esto, a pesar de que las siguientes diferencias son diferentes de cero, se puede decir que el polinomio que mejor se ajusta a los datos es de segundo grado.

Así sólo se usará la siguiente parte de la tabla:

x	y	Δy_0	$\Delta^2 y_0$
-6	40.100		
		-35.880	
-4	4.220		
		-31.875	4.013
-2	-27.655		
x=-1		-27.724	4.151
0	-55.379		3.890
		-23.834	
2	-79.213		4.451
		-19.944	
4	-99.157		4.329
		-15.615	
6	-114.772		4.293
		-11.322	
8	-126.094		4.173
		- 7.140	
10	-133.243		4.382
		- 2.760	
12	-136.010		4.097
		1.330	
14	-134.680		4.991
		5.321	
16	-129.359		

siendo el valor de k

$$k = \frac{x_k - x_0}{h} = \frac{-1 - (-2)}{2} = \frac{1}{2} = 0.5$$

La fórmula se reduce a

$$y_k = y_0 + k \ \Delta y_0 + \frac{k(k-1)}{2!} \Delta^2 y_0$$

Sustituyendo valores numéricos

$$y_{0.5} = - 27.655 + 0.5(-27.724) + \frac{0.5(0.5-1)}{2} (3.890)$$

Haciendo operaciones

$$y_{0.5} = - 42.490$$

Es decir, el valor de y cuando x = - 1 es aproximadamente:

$$y = - 42.49$$

3. Obtenga los valores de y para x = 3 y para x = 6 para la función definida por la siguiente tabla:

x	0	1	2	5	7
y	5	7	9	15	19

Solución:

Debido a que los espaciamientos de las x no son constantes no es posible aplicar la fórmula de interpolación de Newton, sin embargo podemos usar la fórmula de interpolación de Lagrange.

Dicha fórmula es la siguiente:

$$y = \frac{(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) \ldots\ldots (x - x_n)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)\ldots\ldots(x_1 - x_n)} y_1$$

$$+ \frac{(x - x_1)(x - x_3)(x - x_4) \ldots\ldots\ldots (x - x_n)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)\ (x_3 - x_4)\ldots\ldots\ (x_2 - x_n)} y_2$$

$$+ \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_4) \ldots\ldots\ldots (x - x_n)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_3 - x_4)\ldots\ldots(x_3 - x_n)} y_3 + \ldots$$

$$+ \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\ldots\ldots\ldots(x - x_{n-1})}{(x_n - x_1)(x_n - x_2)(x_n - x_3)\ldots\ldots(x_n - x_{n-1})} y_n$$

	x	y
x_1	0	5
x_2	1	7
x_3	2	9
x=3 →		
x_4	5	15
x=6 →		
x	7	19

Hagamos que los puntos queden representados por un polinomio de 4to. grado, para lo cual tomaremos los 5 puntos de la tabla y la fórmula se reducirá a 5 términos. Cabe mencionar que no es necesario usar todos los términos de la tabla para la interpolación, sino que generalmente se toma un intervalo de la misma de acuerdo al grado del polinomio que se quiere aproximar y que incluya los puntos de interés. Así al sustituir los valores numéricos de la tabla tenemos:

$$y = \frac{(x-1)(x-2)(x-5)(x-7)}{(0-1)(0-2)(0-5)(0-7)}(5) + \frac{(x-0)(x-2)(x-5)(x-7)}{(1-0)(1-2)(1-5)(1-7)}(7)$$

$$+ \frac{(x-0)(x-1)(x-5)(x-7)}{(2-0)(2-1)(2-5)(2-7)}(9) + \frac{(x-0)(x-1)(x-2)(x-7)}{(5-0)(5-1)(5-2)(5-7)}(15)$$

$$+ \frac{(x-0)(x-1)(x-2)(x-5)}{(7-0)(7-1)(7-2)(7-5)}(19)$$

Para $x = 3$ tenemos:

$$y = \frac{(3-1)(3-2)(3-5)(3-7)}{(0-1)(0-2)(0-5)(0-7)}(5) + \frac{(3-0)(3-2)(3-5)(3-7)}{(1-0)(1-2)(1-5)(1-7)}(7)$$

$$+ \frac{(3-0)(3-1)(3-5)(3-7)}{(2-0)(2-1)(2-5)(2-7)}(9) + \frac{(3-0)(3-1)(3-2)(3-7)}{(5-0)(5-1)(5-2)(5-7)}(15)$$

$$+ \frac{(3-0)(3-1)(3-2)(3-5)}{(7-0)(7-1)(7-2)(7-5)}(19)$$

Desarrollando:

$$y = \frac{(2)(1)(-2)(-4)}{(-1)(-2)(-5)(-7)}(5) + \frac{(3)(1)(-2)(-4)}{(1)(-1)(-4)(-6)}(7) + \frac{(3)(2)(-2)(-4)}{(2)(1)(-3)(-5)}(9)$$

$$+ \frac{(3)(2)(1)(-4)}{(5)(4)(3)(-2)}(15) + \frac{(3)(2)(1)(-2)}{(7)(6)(5)(2)}(19)$$

Haciendo operaciones:

$$y = \frac{16}{70}(5) + \frac{24}{-24}(7) + \frac{48}{30}(9) + \frac{-24}{-120}(15) + \frac{-12}{420}(19)$$

$$y = (0.22)(5) + (-1)(7) + (1.6)(9) + (0.2)(15) + (-0.029)(19)$$

Finalmente:

$$y = 1.143 - 7 + 14.4 + 3 - 0.543$$

Y el valor de y para $x = 3$ es:

$$y = 11$$

Ahora bien, para $x = 6$ tenemos:

$$y = \frac{(6-1)(6-2)(6-5)(6-7)}{(0-1)(0-2)(0-5)(0-7)}(5) + \frac{(6-0)(6-2)(6-5)(6-7)}{(1-0)(1-2)(1-5)(1-7)}(7) + \frac{(6-0)(6-1)(6-5)(6-7)}{(2-0)(2-1)(2-5)(2-7)}(9)$$

$$+ \frac{(6-0)(6-1)(6-2)(6-7)}{(5-0)(5-1)(5-2)(5-7)}(15) + \frac{(6-0)(6-1)(6-2)(6-5)}{(7-0)(7-1)(7-2)(7-5)}(19)$$

Y haciendo operaciones:

$$y = \frac{-20}{70}(5) + \frac{-24}{-24}(7) + \frac{-30}{30}(9) + \frac{-120}{-120}(15) + \frac{120}{420}(19)$$

$$y = -1.429 + 7 - 9 + 15 + 5.429$$

Esto es, el valor de y para $x = 6$ es:

$$y = 17$$

4. De la siguiente tabla se quiere saber para que valor de x se obtuvo $y = 3.3$, aproximando un polinomio de 3er. grado.

x	0.3	0.7	1.2	1.4
y	4.568	3.126	3.562	4.115

Solución:

Se trata de una interpolación inversa, por lo tanto se invierte la tabla, o sea, las x serán ahora y y viceversa; una vez hecho esto se procede a interpolar con la fórmula de Lagrange por no tener espacios constantes.

La tabla ahora es:

x	y
4.568	0.3
3.126	0.7
3.562	1.2
4.115	1.4

La fórmula de Lagrange para el caso es:

$$y = \frac{(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)}\, y_1 + \frac{(x - x_1)(x - x_3)(x - x_4)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)}\, y_2 +$$

$$+ \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_4)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_3 - x_4)}\, y_3 + \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_4 - x_1)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)}\, y_4$$

Sustituyendo los valores de la tabla y considerando $x = 3.3$ se tiene:

$$y = \frac{(3.3 - 3.126)(3.3 - 3.562)(3.3 - 4.115)}{(4.568 - 3.126)(4.568 - 3.562)(4.568 - 4.115)}(0.3) +$$

$$+ \frac{(3.3 - 4.568)(3.3 - 3.562)(3.3 - 4.115)}{(3.126 - 4.568)(3.126 - 3.562)\ (3.126 - 3.562)}(0.7) +$$

$$+ \frac{(3.3 - 4.568)(3.3 - 3.126)(3.3 - 4.115)}{(3.562 - 4.568)(3.562 - 3.126)(3.562 - 4.115)}(1.2) +$$

$$+ \frac{(3.3 - 4.568)(3.3 - 3.126)\ (3.3 - 3.562)}{(4.115 - 4.568)(4.115 - 3.126)(4.115 - 3.562)}(1.4)$$

Resolviendo:

$$y = 0.0170 + 0.3048 + 0.8896 - 0.3266 = 0.8848$$

Por lo tanto la x es:

$$x = 0.8848$$

5. Para la función definida en la tabla

x	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1.2
y	0.938	0.864	0.832	0.867	1	1.3

calcular:

a) La primera derivada en $x = 0.2$ utilizando fórmulas de derivación obtenidas con polinomios de 1o., 2o. y 3er. grado.

b) La segunda derivada en $x = 0.6$ utilizando una fórmula de derivación obtenida con un polinomio de 2o. grado.

c) La primera derivada en $x = 1.2$ usando fórmulas de derivación obtenidas con polinomios de 2o. y 3er. grado.

Comparar con los resultados exactos si: $y = x^{x^2}$

Solución:

a) Para $x = 0.2$, se deben utilizar fórmulas de derivación que tengan el pivote en primer término, pues este es el primer valor de la tabla. Tomando en cuenta lo anterior para la interpolación a través de un polinomio de primer grado la fórmula correspondiente es:

$$y_0' = \frac{1}{h}\left[\ \underline{\underline{-1}}\quad 1\ \right] \quad \text{es decir:} \quad y_0' = \frac{1}{h}\left[-1(y_0) + 1(y_1)\right]$$

donde h es el incremento de las x. Para este caso $h=0.2$, sustituyendo los valores correspondientes en la fórmula se tiene:

$$y'\ (0.2) = \frac{1}{0.2}\left[(-1)\ (0.938) + (1)\ (0.864)\right]$$

haciendo operaciones:

$$y'(0.2) = -\ 0.370$$

Ahora bien, para interpolación de segundo orden la fórmula que se aplica es:

$$y_0' = \frac{1}{2h}\left[-\underline{\underline{3}}\ 4\ -1\right] \quad \text{es decir,} \quad y_0' = \frac{1}{2h}\left[-\ 3(y_c) + 4(y_1) - 1(y_2)\right]$$

Sustituyendo valores y realizando las operaciones indicadas se tiene:

$$y'\ (0.2) = \frac{1}{2(0.2)}\left[(-3)(0.938) + (4)(0.864) + (-1)(0.832)\right]$$

$$y'\ (0.2) = -\ 0.475$$

Para la interpolación de tercer orden, la fórmula que se utiliza es:

$$y_0' = \frac{1}{6h}\left[-\underline{\underline{11}} \quad 18 \quad -9 \quad 2\right]$$

Sustituyendo valores:

$$y'\ (0.2) = \frac{1}{6\ 0.2)}\left[(-11)(0.938) + (18)(0.864) + (-9)(0.832) + (2)(0.867)\right]$$

$$y\ \ (0.2) = -\ 0.433$$

Calculando ahora el valor exacto: $y' = x^{x^2}\ (x + Lx^{2x})$

que se obtuvo como:

$$y = x^{x^2} = e^{Lx^{x^2}} = e^{x^2 Lx}$$

$$y' = e^{x^2 Lx}\left[\frac{d}{dx}\ \left(x^2 Lx\right)\right]$$

$$y' = e^{x^2 Lx}\left[x^2\ \frac{1}{x} + 2\ x\ Lx\right]$$

$$y' = y\left(x + Lx^{2x}\right)$$

Sustituyendo $x = 0.2$ tenemos:

$$y'(0.2) = (0.2)^{(0.2)^2}\left[0.2 + L(0.2)^{2(0.2)}\right]$$

$$y'(0.2) = -\ 0.416$$

Por lo cual se ve que los valores obtenidos con las fórmulas de derivación tienen errores del 11.08%, 14.15% y 4.14% respectivamente.

b) En este inciso se debe utilizar la fórmula:

$$y_i'' = \frac{1}{h^2}\left[\begin{matrix} 1 & \underline{\underline{-2}} & 1 \end{matrix}\right]$$

ya que en la tabla tenemos valores anteriores y posteriores a $x = 0.6$, esto es, que el pivote en la fórmula debe ser intermedio.

Sustituyendo valores:

$$y''(0.6) = \frac{1}{(0.2)^2}\left[(1)(0.864) + (-2)(0.832) + (1)(0.867)\right]$$

Haciendo operaciones:

$$y''(0.6) = 1.675$$

Ahora se compara con el resultado exacto:

$$y'' = \left[x^{x^2}(x + L\,x^{2x})\right]\left[(x + L\,x^{2x})\right] + x^{x^2}\left[3 + L\,x^2\right]$$

$$y''(0.6) = \left[(0.6)^{(0.6)^2}(0.6) + L(0.6)^{2(0.6)}\right]\left[(0.6) + L(0.6)^{2(0.6)}\right] +$$

$$+\ 0.6^{(0.6)^2}\left[3 + L(0.6)^2\right] = 1.646$$

por lo cual el error que se presenta es de 1.95%.

Aquí se aprecia la utilidad del método, pues el error no es muy grande y la derivada se calcula más rápidamente que con métodos exactos.

c) En este inciso debemos utilizar fórmulas que tengan el pivote en el último término, ya que $x = 1.2$ es el último dato de la tabla.

Para una interpolación de segundo orden la fórmula es:

$$y_2' = \frac{1}{2h}\left[\begin{matrix} 1 & -4 & \underline{\underline{3}} \end{matrix}\right]$$

Sustituyendo valores:

$$y'(1.2) = \frac{1}{2(0.2)}\left[(1)(0.867) + (-4)(1) + (3)(1.3)\right]$$

$$y_2'(1.2) = 1.918$$

Para la interpolación de tercer orden la fórmula a utilizar es:

$$y'_3 = \frac{1}{6h}\left[-2 \quad 9 \quad -18 \quad \underline{\underline{11}}\right]$$

Sustituyendo los valores correspondientes:

$$y'(1.2) = \frac{1}{6(0.2)}\left[(-2)(0.832) + (9)(0.867) + (-18)(1) + (11)(13)\right]$$

$$y'(1.2) = 2.033$$

Ahora se calcula el valor exacto y se comparan resultados:

$$y' = x^{x^2}(x + L\,x^{2x})$$

$$y(1.2) = (1.2)^{(1.2)^2}\left[(1.2 + L(1.2)^{2(1.\ldots)})\right] = 2.129$$

Y los errores que aparecen son del 9.94% y 4.54% respectivamente.

Se debe hacer notar que las fórmulas con pivotes centrales dan una mejor aproximación, siendo éste el caso del inciso b).

6. La trayectoria de un electrón está definida por la siguiente tabla. Calcule la pendiente de la trayectoria cuando el electrón esta a 2, 4 y 5 μ (micras), medidas del eje de las abcisas. Use la fórmula de derivación que mejor se ajuste a los datos.

x(μ)	1	2	3	4	5
y(μ)	1	1.26	1.44	1.59	1.71

Solución:

Se pide calcular la pendiente de la trayectoria, para lo cual se calculará la derivada de la misma en los puntos pedidos.

La tabla de diferencias finitas será útil para ver el orden del polinomio que mejor se ajusta a los datos:

x	Y	ΔY	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
1	1			
		0.26		
2	1.26		-0.08	
		0.18		0.05
3	1.44		-0.03	
		0.15		0.0
4	1.59		-0.03	
		0.12		
5	1.71			

Como las segundas diferencias se hacen constantes, la fórmula de derivación que se debe utilizar es de segundo orden.

Para calcular la derivada cuando $x = 2$, la fórmula que se aplica es:

$$y_1' = \frac{1}{2h}\left[-1 \quad \underline{\underline{0}} \quad 1\right]$$

la cual corresponde a una interpolación limitada a un polinomio de segundo grado con pivote central, sustituyendo valores y efectuando operaciones, se tiene

$$y'(2) = \frac{1}{2(1)}\left[(-1)(1) + 0 + (1)(1.44)\right] = 0.220$$

Por lo cual la pendiente de la trayectoria en $x = 2$ es $m = 0.220$.

Ahora para $x = 4$, la fórmula que se va a utilizar es la misma, ya que es para un término medio de la tabla.

Sustituyendo valores y calculando la derivada:

$$y'(4) = \frac{1}{2(1)}\left[(-1)(1.44) + 0 + (1)(1.71)\right] = 0.135$$

Por lo tanto $m = 0.135$ cuando $x = 4$

Finalmente para $x = 5$ la fórmula que se usará es:

$$y_2' = \frac{1}{2h}\left[1 \quad -4 \quad \underline{\underline{3}}\right]$$

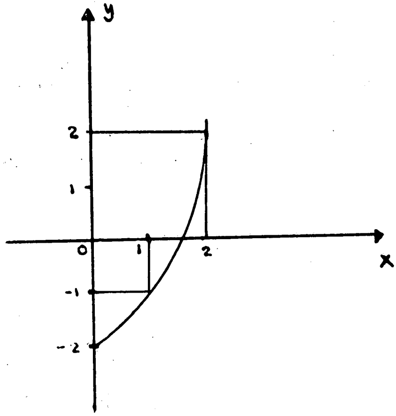
pues el pivote está en el último término, así:

$$y'(5) = \frac{1}{2(1)}\left[(1)(1.44) + (-4)(1.59) + (3)(1.71)\right] = 0.105$$

Es decir, en $x = 5$, la pendiente es $m = 0.105$

7. Obtener un valor aproximado de la pendiente de la tangente a la curva en el punto donde cruza el eje x.

x	y
0	-2
1	-1
2	2



Solución:

Se pide la pendiente donde y = 0, pero se desconoce el punto x en el cual ocurre ésto. Sin embargo podemos calcularlo con una interpolación inversa de Lagrange.

Para realizarla se debe invertir la tabla:

y	x
-2	0
-1	1
2	2

y = 0 →

Ahora se aplica la fórmula de interpolación de Lagrange:

$$x = \frac{(0+1)(0-2)}{(-2+1)(-2-2)}(0) + \frac{(0+2)(0-2)}{(-1+2)(-1-2)}(1) + \frac{(0+2)(0+1)}{(2+2)(2+1)}(2)$$

Realizando operaciones:

$$x = 1.67$$

Y la tabla resultante es:

x	y
0	-2
1	-1
1.67	0
2	2

ahora se obtiene la derivada en $x = 1.67$, pero los espaciamientos no son constantes, para poder aplicar una fórmula de derivación es necesario completar la tabla para lo cual se obtendrá el valor de y para $x = 0.33$, con esto se logra un intervalo con espaciamientos constantes entre 0.33 y 1.67.

Aplicando la fórmula de interpolación de Lagrange

$$y = \frac{(0.33 - 1)\ (0.33 - 2)}{(0 - 1)\ \ (0 - 2)}(-2) + \frac{0.33(0.33-2)}{(1-0)\ (1-2)}(-1) + \frac{0.33(0.33-1)}{(2-0)\ (2-1)}(2) = -1.89$$

la tabla con espaciamientos constantes queda de la siguiente forma

x	y
0.33	-1.89
1.00	-1.00
1.67	0.00

ahora se obtiene la derivada en $x = 1.67$ que da la pendiente pedida, aplicando la siguiente fórmula de derivación numérica

$$y'_2 = \frac{1}{2h}\left[1 \quad -4 \quad \underline{\underline{3}}\right]$$

Sustituyendo valores:

$$y'(1.67) = \frac{1}{2(.067)}\left[1(-1.89) - 4(-1.00) + 3(0.00)\right]$$

realizando operaciones:

$$y'(1.67) = 1.57$$

Es decir, la pendiente de la tangente a la curva en $y = 0$ es:

$$m = 1.57$$

8. Obtener una raíz de la siguiente ecuación por el método de Newton-Raphson, usando fórmulas de derivación numérica.

$$3\,x^2 - 6\,x + 1 = 0$$

Solución:

La fórmula de Newton-Raphson es la siguiente:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)}$$

para valuar el denominador se puede utilizar una fórmula de derivación numérica, sustituyendo por ejemplo $F'(x)$ por

$$F'(x) = \frac{1}{h}(-y_0 + y_1)$$

Pudiéndose expresar de la siguiente forma:

$$F'(x_n) = \frac{1}{x_n - x_{n-1}}\left\{-F(x_{n-1}) + F(x_n)\right\}$$

Sustituyendo en la ecuación de Newton-Raphson

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)\left[x_n - x_{n-1}\right]}{\left[F(x_n) - F(x_{n-1})\right]}$$

para este caso

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\left[3x_n^2 - 6x_n + 1\right]\left[x_n - x_{n-1}\right]}{\left[3x_n^2 - 6x_n + 1\right] - \left[3x_{n-1}^2 - 6x_{n-1} + 1\right]}$$

aplicando esta fórmula de recurrencia se obtiene la raíz buscada, tabulando la función para localizar un valor inicial

x	F(x)
0	1 ←
1	-2
2	1
3	10

Como hay un cambio de signo entre $x = 0$ y $x = 1$, ello implica que en este intervalo hay una raíz.

consideremos $x_0 = 0$ y $x_1 = 0.6$, aplicando la fórmula de recurrencia

$$x_2 = 0.6 - \frac{\left(3(0.6)^2 - 6(0.6) + 1\right)\left(0.6 - 0\right)}{\left(3(0.6)^2 - 6(0.6) + 1\right) - \left(3(0)^2 - 6(0) + 1\right)}$$

Haciendo operaciones

$$x_2 = 0.6 - \frac{-0.912}{-2.520} = 0.238$$

Interando con $x_2 = 0.238$

$$x_3 = 0.238 - \frac{[3(0.238)^2 - 6(0.238) + 1]\;[0.238 - 0.6]}{[3(0.238)^2 - 6(0.238) + 1] - [3(0.6)^2 - 6(0.6) + 1]}$$

$$x_3 = 0.238 - \frac{0.093}{1.262} = 0.164$$

Haciendo una nueva iteración

$$x_4 = 0.164 - \frac{[3(0.164)^2 - 6(0.164) + 1]\;[0.164 - 0.238]}{[3(0.164)^2 - 6(0.164) + 1] - [3(0.238)^2 - 6(0.238) + 1]}$$

$$x_4 = 0.164 - \frac{-0.007}{0.355} = 0.184$$

Iterando nuevamente

$$x_5 = 0.184 - \frac{[3(0.184)^2 - 6(0.184) + 1]\;[0.184 - 0.164]}{[3(0.184)^2 - 6(0.184) + 1] - [3(0.16 \quad - 6(0.164) + 1]}$$

$$x_5 = 0.184 - \frac{-0.00005}{-0.09912} = 0.184$$

Como se repite el valor de x, la raíz es aproximadamente

$$X = 0.184$$

Comprobando el resultado

$$3(0.184)^2 - 6(0.184) + 1 = -0.0024$$

Se ve que el error es muy pequeño.

Este método es muy útil cuando el cálculo de la derivada de la función es difícil.

9. Encuentre la siguiente integral definida utilizando la fórmula de integración numérica que más se aproxime.

$$\int_3^7 x^2 \log x \, dx$$

Solución:

Primero se hace una tabla de esta función con puntos que se encuentren entre 3 y 7.

Mientras más puntos se tengan, la integral se aproxima mejor a la exacta, por lo tanto se toma un incremento $h = 0.5$

i	x_i	y_i
0	3.0	4.2941
1	3.5	6.6648
2	4.0	9.6330
3	4.5	13.2276
4	5.0	17.4743
5	5.5	22.3960
6	6.0	28.0134
7	6.5	34.3456
8	7.0	41.4098

donde:

$$y = x^2 \log x$$

Sobre esta tabla hagamos la de diferencias finitas, ya que los espaciamientos de las x son constantes para ver de qué grado es el polinomio que se puede ajustar a la función dada.

i	x_i	y	Δy	$\Delta^2 y$
0	3.0	4.2941		
			-2.3707	
1	3.5	6.6648		0.5975
			-2.9682	
2	4.0	9.6330		0.6264
			-3.5946	
3	4.5	13.2276		0.6521
			-4.2467	
4	5.0	17.4743		0.6750
			-4.9217	
5	5.5	22.3960		0.6957
			-5.6174	
6	6.0	28.0134		0.7148
			-6.3322	
7	6.5	34.3456		0.7320
			-7.0642	
8	7.0	41.4098		

en la tabla se puede observar que las segundas diferencias son aproximadamente constantes.

Esto quiere decir que se puede aproximar un polinomio de segundo grado a la función que definen los puntos de la tabla . Por lo tanto podremos utilizar las fórmulas de Simpson y el error será pequeño.

En este caso n (número de espaciamientos) es igual a 8 , y como es par podremos usar la fórmula de Simpson - de 1/3. Si n hubiera sido múltiplo de 3 podríamos usar la de 3/8 y si hubiera sido impar y múltiplo de 3 utilizaríamos las dos combinadas.

La fórmula de Simpson de 1/3 es:

$$A = \frac{h}{3}\left[y_0 + y_n + 2\sum \begin{matrix}\text{ordenadas de}\\ \text{orden par}\end{matrix} + 4\sum \begin{matrix}\text{ordenadas de}\\ \text{orden impar}\end{matrix}\right]$$

$$h = 0.5$$

sustituyendo valores

$$\int_3^7 x^2 \log x \, dx = \frac{0.5}{3}\Big[4.2941 + 41.4098 + 2(9.6330) + 17.4743 + 28.0134 +$$

$$+ 4(6.6648 + 13.2276 + 22.3960 + 34.3456)\Big]$$

$$A = 77.0802 \ u^2$$

calculando la integral exacta

$$\int_3^7 x^2 \log x \, dx = \int_3^7 x^2 \frac{\ln x}{\ln 10} dx = \frac{1}{\ln 10}\int_3^7 x^2 \ln x \, dx$$

integrando por partes

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

$$u = \ln x \quad ; \quad du = \frac{1}{x} dx$$

$$dv = x^2 \, dx \quad ; \quad v = \frac{x^3}{3}$$

sustituyendo

$$\int x^2 \text{Ln } x \, dx = \frac{x^3}{3} \text{Ln } x - \int \frac{x^3}{3} \frac{dx}{x} = \frac{x^3}{3} \text{Ln } x - \frac{x^3}{9} = \frac{x^3}{3} (\text{Ln } x - \frac{1}{3})$$

por lo tanto

$$\frac{1}{\text{Ln } 10} \int_3^7 x^2 \text{ Ln } x \, dx = \frac{1}{\text{Ln } 10} \left[\frac{x^3}{3} (\text{Ln } x - \frac{1}{3} \right]_3^7$$

$$= 80.07143 - 2.9912 = 77.08022 \text{ u}^2$$

al calcular la integral exacta se observa que presenta mayores dificultades que al evaluarla utilizando métodos numéricos, siendo el resultado prácticamente el mismo.

10. Dada la siguiente función tabulada

i	x_i	y_i
0	1	-4
1	2	6
2	3	18
3	4	32
4	5	48
5	6	66
6	7	86
7	8	108
8	9	132

calcular las integrales definidas para los intervalos siguientes:

a) $1 \leq x \leq 9$ por Simpson $\frac{1}{3}$

b) $1 \leq x \leq 9$ por Trapecial

c) $1 \leq x \leq 6$

Solución:

Primero se hace una tabla de diferencias para ver si la función se puede ajustar a algún polinomio.

i	x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$
0	1	-4		
			-10	
1	2	6		2
			-12	
2	3	18		2
			-14	
3	4	32		2
			-16	
4	5	48		2
			-18	
5	6	66		2
			-20	
6	7	86		2
			-22	
7	8	108		2
			-24	
8	9	132		

como las segundas diferencias se hacen constantes, la función tabulada se ajusta a un polinomio de segundo grado, por lo tanto al utilizar las fórmulas de Simpson el error será nulo.

a) Para el intervalo $1 \leq x \leq 9$ por Simpson $\frac{1}{3}$ se obtiene:

$$A = \frac{h}{3}\left[y_0 + y_n + 2\sum \begin{matrix}\text{ordenadas de}\\ \text{orden par}\end{matrix} + 4\sum \begin{matrix}\text{ordenadas de}\\ \text{orden impar}\end{matrix}\right]$$

donde h es el espaciamiento entre cada punto tabulado; para este caso es 1

sustituyendo valores

$$\int_1^9 y\,dx = \frac{1}{3}\left[-4 + 132 + 2(18 + 48 + 86) + 4(6 + 32 + 66 + 108)\right]$$

$$= \frac{1}{3}\,(1280) = 426.667 \quad u^2$$

b) Ahora utilizando la fórmula trapecial

$$A = \frac{h}{2}\left[y_0 + y_n + 2\sum \text{resto de las ordenadas}\right]$$

sustituyendo valores

$$\int_1^9 y\,dx = \frac{1}{2}\left[-4 + 132 + 2(6 + 18 + 32 + 48 + 66 + 86 + 108)\right] = 428\ u^2$$

como se ve el resultado es bastante diferente del anterior.

La tabla se obtuvo al tabular la función

$$y = x^2 + 7x - 12$$

por lo tanto, la integral exacta es

$$\int_1^9 (x^2 + 7x - 12)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{7x^2}{2} - 12x\right]_1^9$$

$$= \frac{(9)^3}{3} + \frac{7(9)^2}{2} - 12(9) - \frac{1}{3} - \frac{7}{2} + 12 = 426.667\ u^2$$

Como se puede observar, con la fórmula de Simpson 1/3 se llegó al resultado exacto, y con la trapecial el error es de 0.314%.

c) Para el intervalo $1 \leq x \leq 6$ el valor de n(número de subintervalos) es cinco por lo tanto no se puede usar la fórmula de Simpson 1/3 y tampoco se puede utilizar Simpson 3/8. Lo que se hará es dividir el intervalo en dos, uno de $1 \leq x \leq 4$ en el que se usará Simpson 3/8 y otro de $4 \leq x \leq 6$ en que se utilizará Simpson 1/3. Para el primer intervalo la tabla es

i	x_i	y_i
0	1	-4
1	2	6
2	3	18
3	4	32

la fórmula de Simpson de 3/8 es:

$$A = \frac{3}{8}h\left[y_0 + y_n + 2\sum \begin{matrix}\text{ordenadas de}\\ \text{orden múltiplo}\\ \text{de 3}\end{matrix} + 3\sum \begin{matrix}\text{resto de}\\ \text{las orde-}\\ \text{nadas}\end{matrix}\right]$$

sustituyendo valores se tendrá que:

$$\int_1^4 y\,dx = \frac{3}{8}\left[-4 + 32 + 2(-) + 3(6 + 18)\right] = 37.5\ u^2$$

para el intervalo $4 \leq x \leq 6$ la tabla queda

i	x_i	y_i
0	4	32
1	5	48
2	6	66

La fórmula de Simpson de 1/3 es:

$$A = \frac{1}{3}h\left[y_0 + y_n + 2\sum \begin{matrix}\text{ordenadas de}\\ \text{orden par}\end{matrix} + 4\sum \begin{matrix}\text{ordenadas de}\\ \text{orden impar}\end{matrix}\right]$$

sustituyendo valores

$$\int_4^6 y\,dx = \frac{1}{3}\left[32 + 66 + 4(48)\right] = 96.667\ u^2$$

Sumando los dos resultados

$$37.5 + 96.667 = 134.167\ u^2$$

La integral exacta es

$$\left[\frac{x^3}{3} + \frac{7x^2}{2} - 12x\right]_1^6 = \frac{(6)^3}{3} + \frac{7(6)^2}{2} - 12(6) - \frac{1}{3} - \frac{7}{2} + 12 = 134.167\ u^2$$

Se puede observar que el resultado es exacto, esto se debe a que el índice de error en las dos fórmulas es el mismo y se trata de un polinomio de segundo grado, por lo tanto el error es nulo.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Encontrar el grado del polinomio que puede representar al conjunto de valores de la siguiente tabla:

x	-4	-2	0	2	4
y	-4.333	2.333	1	7.667	38.333

Solución: 3er. grado.

2. De la tabla del problema anterior, aplicando el método de interpolación de Newton, obtener:

a) El valor de y para $x = -1$

b) El valor de y para $x = 3.53$

c) El valor de y para $x = -4.5$

d) El polinomio que define la función.

Solución:

a) $y = 1.6667$

b) $y = 28.1232$

c) $y = -69.875$

d) $y = \frac{x^3}{3} + x^2 + 1$

3. Para la siguiente tabla obtener los valores del desplazamiento s para los tiempos:

a) $t = 7.5$ seg

b) $t = -1$ seg.

c) $t = 28.3$ seg.

Utilice la fórmula de interpolación de Newton.

t (tiempo en seg.)	0	5	10	15	20	25	30
s (distancia en m.)	0	0.5	7	27	68	137.5	243

$(s=t^3-3t^2)$

Solución:

a) s = 2.5313 m

b) s = 0

c) s = 202.6252 m

4. En la siguiente tabla se tienen los datos del peso y altura de varios individuos de diferentes edades. Calcular el peso de cada individuo para las siguientes alturas:

a) h = 1.84 m

b) h = 1.72 m

c) h = 1.76 m

h (altura en m)	1.73	1.75	1.77	1.79	1.81	1.83
W (peso en Kg)	72.21	72.26	72.30	72.32	72.36	72.38

Solución:

a) W = 72.395 Kg

b) W = 72.215 Kg

c) W = 72.275 Kg

5. Haciendo una interpolación lineal calcular $f(x) = e^x$, para x = 1.2. Si f(1) = 2.7183 y f(1.4) = 4.0552. ¿Cuál es el error?

Solución:

f(1.2) = 3.3867 ; error = 2.0067%

6. Del problema anterior, calcular f(x) para el mismo valor de x haciendo una interpolación de segundo orden, si f(1.8) = 6.0496. Calcular el error y comparar el resultado con el de interpolación lineal.

Solución:

f(1.2) = 3.1374 ; error = 5.5023%

7. La energía cinética (E) de un cuerpo de masa (m) está dada para diferentes velocidades (v) por la siguiente tabla. Determinar la energía cinética cuando:

a) v = 0.6

b) v = 1.3

c) v = 2.5

v (m/s)	0.8	1.2	1.6	2.0	2.4
E(Joules)	0.145	0.327	0.581	0.908	1.308

Solución:

a) E = 0.082 Joules

b) E = 0.384 Joules

c) E = 1.419 Joules

8. Los siguientes datos corresponden al crecimiento de una planta. Calcular la altura de la misma:

a) A los 10 días

b) A los 20 días

c) A los 30 días

Semana	1	2	3	4	5	6
Altura (m)	0.75	1.2	1.75	2.5	3.45	4.7

9. Encontrar el polinomio correspondiente a la siguiente tabla por medio de la fórmula de interpolación de Lagrange.

x	y
-2	25
1	-8
2	-15
4	-23

Solución:

$$y = x^2 - 10x + 1$$

10. Calcule el valor de y para x = 5.6 y x = 7.8 de la siguiente función:

x	y
1	3
4	12
6	18
9	21

Solución:

$y = 16.95$ para $x = 5.6$

$y = 21.07$ para $x = 7.8$

11. Obtenga los valores de y para $x = 0.5$ y $x = 2$ por medio de la fórmula de interpolación de Lagrange. Obtenga después el polinomio al cual corresponden los valores de la tabla:

x	y
0	1
1	-3
3	25
4	129
5	381

Solución:

$y = 0.9375$ para $x = 0.5$

$y = -3.00$ para $x = 2$

$$y = x^4 - 2x^3 + x^2 - 4x + 1$$

12. Experimentalmente se han obtenido las deformaciones de un resorte para diferentes cargas, datos que se registran en la tabla. Hallar la carga que corresponde a una deformación de 14 mm. en el resorte

x [mm]	P [kg]
5	49
11	105
17	172
21	253
25	352

Solución:

$P = 160.96$ Kg

13. La siguiente tabla nos muestra las diferentes velocidades de un automóvil. Calcule la velocidad para $t = 3.5$ s ; $t = 6$ s y $t = 11.6$ s .

t [s]	v [m/s]
0	25
5	60.5
7	82.1
10	95.6
12	105

Solución:

$v = 52.96$ m/s para $t = 3.5$ s

$v = 74.07$ m/s para $t = 6$ s

$v = 101.28$ m/s para $t = 11.6$ s

14. Una pelota es lanzada hacia arriba y su altura para diferentes tiempos se muestra en la tabla siguiente. Calcule las correspondientes a $t = 2.5$ s y $t = 4$ s .

t [s]	h [m]
0	0
2	5
3	8
5	7

Solución:

$h = 6.63$ m para $t = 2.5$ s

$h = 9.20$ m para $t = 4$ s

15. Calcular los valores pedidos para cada una de las tablas siguientes por medio de la fórmula de interpolación de Lagrange.

a)

x	0	1.2	2.5	4.0	5.1	6.0	6.5	7.0
f(x)	3	6.84	14.25	27.00	39.21	51.00	58.25	66.00

$f(2) = ?$ $\quad f(4.5) = ?$ $\quad f(6.3) = ?$

Solución:

$f(2) = 11; \quad f(4.5) = 27.58; \quad f(6.3) = 55.25$

b)

x	0	1.4	2.5	3.8	5.4	6.0	6.7	7.0
f(x)	5.00	1.36	1.25	4.24	7.56	17.00	23.09	26.00

$f(2) \doteq ?$ $\quad f(3) = ?$ $\quad f(6.40) = ?$

Solución:

$f(2) = -3.06; \quad f(3) = 2; \quad f(6.4) = 21.29$

16. Obtenga el valor de y correspondiente a $x = 4.5$, usando interpolación de Lagrange. Compare el resultado con la respuesta exacta, si ésta es $y = 5.456$.

x	2	3.5	4	5	5.5
y	2.827	3.623	4.573	5.920	5.998

Solución:

$y = 5.402; \quad \text{Error} = 0.99\%$

17. Dada la siguiente tabla de puntos, encuentre el valor de y para $x = 2.5$, utilice la fórmula de interpolación Lagrange. Compare las respuestas con la respuesta exacta.

x_i	y_i
0	1
1	1.209
2	1.837
3	0.423
4	-3.027

Solución:

R exacta $y(2.5) = 1.498$

R Lagrange $y(2.5) = 1.442$

18. Encuentre utilizando la fórmula de interpolación de Lagrange una x que proporcione una $y = 7.386$, basándose en la tabla siguiente:

x_i	y_i
0.2	-2.619
1	3
1.3	4.425
2.2	8.177

Solución:

$x = 1.999$

19. La siguiente tabla muestra la producción y el consumo aparente en toneladas de ácido sulfúrico en México, encuentre la producción y el consumo aparente para los años de 1953 y de 1958.

año	producción	consumo aparente
1950	43.374	43.754
1951	56.667	56.744
1954	109.962	115.263
1956	156.915	159.543
1957	186.203	186.940
1960	248.828	249.248
1961	275.984	276.195

Solución:

año	producción	consumo aparente
1953	102.503	102.865
1958	200.000	200.270

0. Calcular la primera y segunda derivadas de las funciones definidas por las siguientes tablas para los valores pedidos. (Use la fórmula del orden que mejor se ajuste a los datos).

a) Para $x = -0.4$; $x = 0.2$; $x = 0.6$

x	y
0.6	0.4573
0.4	0.6827
0.2	0.9720
0	1.3333
-0.2	1.7747
-0.4	2.3040
-0.6	2.92 93

Solución:

$$y'(-0.4) = -2.2222$$

$$y'(0.2) = -1.6198$$

$$y'(0.6) = -0.9808$$

$$y''(-0.4) = 2.4000$$

$$y''(0.2) = 1.8000$$

$$y''(0.6) = 1.3950$$

b) Para $t = -2$; $t = 0$

t	S
-3	13
-2	3
-1	-1
0	1
1	9
2	23

Solución:

$S'(-2) = -7$

$S'(0) = 5$

$S''(-2) = 6$

$S''(0) = 6$

c) Para $t = -0.45$; $t = 0.55$; $t = 0.05$

t	v
-0.70	6.470
-0.45	5.608
-0.20	5.120
0.05	5.008
0.30	5.270
0.55	5.908

Solución:

$v'(-0.45) = -2.700$; $v''(-0.45) = 5.984$

$v'(-0.2) = -1.1921$; $v''(0.2) = 6.016$

$v'(0.05) = 0.300$; $v''(0.05) = 5.984$

21. Para la función definida por la siguiente tabla calcular usando interpolación de tercer orden:

a) La primera derivada para $x = -3;\ x = 1;\ x = 7$

b) La segunda derivada para $x = 3$ y $x = 7$

c) La tercera derivada para $x = 5$

x	f(x)
-3	0.368
-1	0.717
1	1.396
3	1.718
5	5.294
7	10.312

Solución:

a) $f'(-3) = 0.144$; $f'(1) = 0.449$; $f'(7) = 3.318$

b) $f''(3) = 0.314$; $f''(7) = 0.908$

c) $f'''(5) = 0.149$

22. Usando fórmulas de interpolación de segundo y tercer orden calcular para la siguiente tabla:

x	y
2	1.0986
3	2.0794
4	2.7081
5	3.1781
6	3.5553

a) $y'(2)$; $y'(4)$; $y'(6)$; $y''(5)$

b) $y'''(3)$; $y'''(4)$; $y'''(5)$ (sólo con fórmulas de tercer orden).

Solución:

a) Segundo orden

$y'(2) = 1.1569$

$y'(4) = 0.5494$

$y'(6) = 0.3308$

$y''(5) = -0.0928$

Tercer orden

$y'(2) = 1.0647$

$y'(4) = 0.538$

$y'(6) = 0.3528$

$y''(5) = -0.0928$

b)

$y'''(3) = 0.1934$

$y'''(4) = 0.0659$

$y'''(5) = 0.6590$

23. Obtener las derivadas pedidas aplicando fórmulas de interpolación de Primer, Segundo y Tercer orden para la función definida en la tabla. En el caso de que no pueda obtenerse la derivada con las fórmulas conocidas explicar por que:

a) $z'(-0.3)$; $z'(-0.2)$; $z'(0.3)$

b) $z'''(0)$; $z''(0.2)$; $z'''(0.2)$; $z''(0)$; $z''(-0.1)$

W	Z
-0.3	2.473
-0.2	1.992
-0.1	1.499
0	1
0.1	0.501
0.2	0.008
0.3	-0.473

Solución:

	Primer orden	Segundo orden	Tercer orden
a)	$z'(-0.3) = -4.81$	$z'(-0.3) = -4.75$	$z'(-0.3) = -4.73$
	$z'(-0.2) = -4.93$	$z'(-0.2) = -4.87$	$z'(-0.2) = -4.88$
	$z'(0.3)$ = no se puede	$z'(0.3) = -4.75$	$z'(0.3) = -4.73$

b) $z'''(0) = 6$ $\quad z''(0) = 0$

$z''(0.2) = 1.2$ $\quad z''(-0.1) = -0.6$

$z'''(0.2) = 6$

24. Calcular para la función definida por la tabla:

a) $y'(-1)$; $y'(-0.2)$; $y'(0.6)$ usando interpolación de segundo y tercer orden.

b) $y''(-0.2)$; $y''(0.6)$ usando interpolación de segundo y tercer orden.

t	f(t)
-1	0.5403
-0.6	0.9359
-0.2	0.9992
0.2	0.9992
0.6	0.9359
1	0.5403

Solución:

	segundo orden		tercer orden
a)	$y'(-1) = 1.4044$	;	$y'(-1) = 1.6285$
	$y'(-0.2) = 0.0791$	;	$y'(-0.2) = 0.0635$
	$y'(0.6) = -0.5736$	;	$y'(0.6) = -0.4685$
b)	$y''(-0.2) = -0.3956$	;	$y''(-0.2) = -0.3956$
	$y''(0.6) = -2.0769$	;	$y''(0.6) = -2.0769$

25. En la siguiente tabla se muestran los valores de la velocidad (v) de un tren que frena al llegar a la estación en los diferentes tiempos (t). Calcular la aceleración para los instantes t = 15 y t = 20 . Use interpolación de tercer orden.

t [s]	v [m/s]
5	6.6328
10	4.7590
15	3.6741
20	2.9164
25	2.3412
30	1.8842

Solución:

$$a(15) = -0.1794 \text{ m/s}^2$$

$$a(20) = -0.1285 \text{ m/s}^2$$

26. Usando fórmulas de derivación con interpolación de tercer orden y la siguiente tabla, calcular:

a) $\theta'(-2\pi)$; $\theta'(-3\pi/2)$; $\theta'(-\pi)$

b) $\theta''(-2\pi)$; $\theta''(-3\pi/2)$; $\theta''(-\pi)$

c) $\theta'''(-7\pi/4)$; $\theta'''(-5\pi/4)$

ρ	θ
-2π	0.8415
$-7\pi/4$	0.6496
$-3\pi/2$	0
$-5\pi/4$	-0.6496
$-\pi$	-0.8415

Solución:

a) $\theta'(-2\pi) = 0.2413$; $\theta'(-3\pi/2) = -0.9242$, $\theta'(-\pi) = 0.2409$

b) $\theta''(-2\pi) = -1.4840$; $\theta''(-3\pi/2) = 0$; $\theta''(-\pi) = 1.484$

c) $\theta'''(-7\pi/4) = 0.9447$; $\theta'''(-5\pi/2) = 0.9447$

27. Los datos de la tabla nos indican la energía interna de una sustancia (u), al aumentar la entropía (s). Si se define a la temperatura como a la derivada de la energía interna con respecto a la entropía a volumen específico constante, calcular:

T(-0.6) ; T(-0.4) ; T(-0.2) y T(0.1) (use interpolación de tercer orden).

s	u
-0.6	0.6081
-0.5	0.5303
-0.4	0.5050
-0.3	0.5251
-0.2	0.5961
-0.1	0.7389
0	1
1	1.4777

Solución:

$$T(-0.6) = -1.0642$$

$$T(-0.4) = -0.0352$$

$$T(-0.2) = 1.6833$$

$$T(0.1) = 6.1877$$

28. Los datos de la siguiente tabla nos muestran la posición de un cierto proyectil teledirigido en los instantes marcados. Calcular:

a) La velocidad del proyectil en los instantes $t = \pi$; $t = \pi/2$; $t = \pi/4$.

b) La aceleración del proyectil para $t = 3\pi/4$ y $t = \pi/2$ Utilice fórmulas de interpolación de segundo orden.

t [s]	x [m]
π	0.106
$3\pi/4$	0.238
$\pi/2$	0.397
$\pi/4$	0.604
0	1

Solución:

a) $v(\pi) = -0.151$ m/s ; $v(\pi/2) = -0.233$ m/s ; $v(\pi/4) = -0.384$ m/s

b) $a(3\pi/4) = 0.044$ m/s^2 ; $a(\pi/2) = 0.078$ m/s^2

29. Los datos de la tabla fueron medidos empíricamente de un circuito RC . Si t es el tiempo y q la carga en el capacitor, calcular la corriente i en el mismo capacitor si $i = \frac{dq}{dt}$ para todos los tiempos mostrados. Use fórmulas de interpolación de tercer orden.

t[s]	q[coul]
0	0
1	2.379
2	4.532
3	6.480
4	8.242
5	9.837

Solución:

i(0) = 2.499 amp ; i(3) = 1.852 amp

i(1) = 2.263 amp ; i(4) = 1.675 amp

i(2) = 2.047 amp ; i(5) = 1.518 amp

30. La utilidad bruta de una empresa particular t años después del 1º de enero de 1970 es p millones de pesos, estando p definida en la tabla.

Encontrar la tasa a la cual estuvo creciendo la utilidad bruta al 1º de enero de 1972, al 1º de enero de 1976 y al 1º de enero de 1980. Teniendo en cuenta que la utilidad bruta es dP/dt

t	P
2	15.6
4	24.4
6	36.4
8	51.6
10	70.0

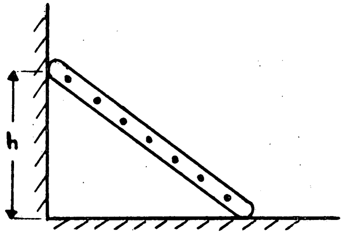
Solución:

P'(2) = 3.6 millones de pesos por año.

P'(6) = 6.8 millones de pesos por año

P'(10) = 10.0 millones de pesos por año

31. Una escalera se encuentra apoyada como se muestra en la figura. En el tiempo cero empieza a resbalar disminuyendo la altura de su extremo superior. Basándose en la siguiente tabla calcular la velocidad y aceleración del extremo superior cuando t = 4 s ; t = 8 s . Aplique fórmulas de interpolación de segundo orden.



t [s]	h [m]
0	15
2	13
4	9
6	5
8	2
10	0

Solución:

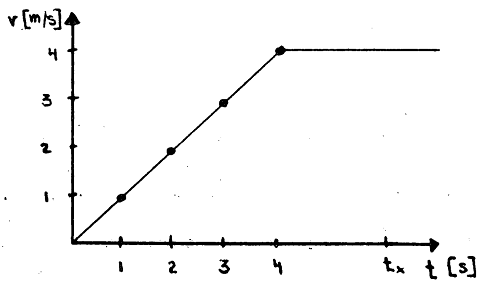
v (4) = - 2 m/s

v' (4) = 0

v (8) = - 1.25 m/s

v' (8) = 0.25 m/s

32. Un automóvil registra valores de velocidad con respecto al tiempo, como en la gráfica



a) ¿Cuál es su aceleración para $t = 2$ s ?

b) ¿Cuál es su aceleración para $t = 4$ s ?

c) ¿Cuál es su aceleración para $t = t_x$?

d) Interprete resultados

Solución:

a) $a\Big|_{t=2} = 1$ m/s

b) $a\Big|_{t=4} = 1$ m/s

c) $a\Big|_{t=t_x} = 0$

d) La aceleración hasta $t = 4$ s es igual al 1 m/s^2 porque la pendiente de la recta es 1, la recta es $y = x$. La aceleración para $t = t_x$ vale cero pues es un punto de velocidad constante.

33. Dada la tabla de valores a continuación:

P	T
1	0.13
2	2
3	10.13
4	32
5	78.12
6	162

Encontrar:

a) $\dfrac{d^3T}{dP^3}$ en $P = 3$

b) $\dfrac{d^3T}{dP^3}$ para $P = 2$

Solución:

a) $\left.\dfrac{d^3T}{dP^3}\right|_{P=3} = 10.51$

b) $\left.\dfrac{d^3T}{dP^3}\right|_{P=2} = 7.48$

34. Un pistón se mueve registrando los siguientes valores de velocidad en diferentes tiempos:

t [s]	1	1.57	2.14	2.71	3.28
v [m/s]	0.84	1	0.84	0.42	-0.14

¿Cuál es el valor de su aceleración para $t = 1.57$ s ?

Solución:

$$a_{t\,=\,1.57} = -\,0.0175\ \text{cm/s}^2$$

35. Un submarino "Polaris" dispara un proyectil y por medio del sistema de radar se encuentra que a los 2 s ha recorrido 4m (debido al choque repentino con el agua), a los 4 s deja el agua y ha recorrido 56m, a los 6 s . + 204m, a los 8 s + 496m y a los 10 s ha viajado 980m.

Se quiere conocer su velocidad y aceleración en el momento de dejar el agua y a los 10 s de haberse disparado.

Solución:

$$v(4) = 46\ \text{m/s} \quad ; \quad v(10) = 298\ \text{m/s}$$

$$a(4) = 24\ \text{m/s}^2 \quad ; \quad a(10) = 60\ \text{m/s}^2$$

36. La integral $\int_0^2 e^{-x^2}\,dx$ es muy importante en estadística ma- matemática, se le conoce como "integral de probabilidad" y no pueder ser valuada por cálculo diferencial e integral. Usar la fórmula trapecial con $n = 6$ para encontrar un valor aproximado y esperar el resultado con tres cifras decimales.

Solución:

$$0.882\ u^2$$

37. Sabiendo que el valor exacto de $\int_0^2 \sqrt{4 - x^2}\,dx$ es π. Aproximar la integral definida por la regla trapecial a tres cifras decimales con $n = 8$, y comparar el valor obtenido con el exacto.

38. Ninguna de las integrales definidas, en los siguientes incisos puede calcularse exactamente en términos de funciones elementales. Use la regla de Simpson de 3/8 para encontrar los valores redondeando a tres cifras decimales.

a) $\int_1^2 \dfrac{\operatorname{sen} h\ x}{x}\,dx \quad ; \quad n = 4$

b) $\int_0^2 e^{-x^2}\,dx \quad ; \quad n = 4$

c) $\int_0^2 \dfrac{dx}{\sqrt{1 + x^3}} \quad ; \quad n = 8$

Solución:

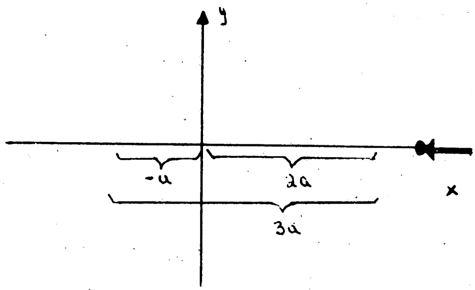
a) 1.445 ; b) 0.883 ; c) 1.402

39. Una partícula sobre el eje x es atraída por una fuerza hacia el origen, la magnitud de la fuerza es:

$$F = \frac{k\ x}{(a^2 + x^2)^{3/2}} \text{ Newtons}$$

Hallar el trabajo hecho por la fuerza si mueve a la partícula de una distancia 2a a una distancia -a del origen.

Utilice la fórmula de integración de Simpson de 3/8 si a = 1 m y k = 1, recordando que W = F dx.



Solución:

W = 0.634 69 Joules

40. La siguiente tabla muestra el comportamiento de cierta máquina térmica en la cual se comprime cierto gas desde 100 plg^3 hasta 40 plg^3.

Halle el trabajo hecho por esta máquina, procurando que el error con la respuesta exacta no sea mayor de 0.71%

Recuerde que el trabajo hecho, es el área bajo la curva definida por los puntos de la tabla.

Nota: 1 pie = 12 pulg.

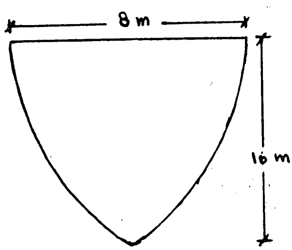
$V\,[plg^3]$	$P\,[lb/plg^2]$
40	288.5399
60	163.56
80	109.3362
100	80

Solución:

$$W = 736 \text{ lb - pie}$$

41. Una placa con la forma de un segmento parabólico, se sumerge verticalmente en agua como se indica en la figura, la siguiente tabla muestra la curva de presión contra área de la placa, encuentre la fuerza que actúa sobre la placa, recordando que esta equivale al área bajo la curva descrita por la tabla. Procure que su resultado no difiera en más de 7.5% de la respuesta real.

$A\,[m^2]$	$P\,[lb/m^2]$
0	0
4	78609.9840
8	85013.2647
12	72082.7723
16	46241.1200



Solución:

$$F = 1,124,584.038 \text{ lb}$$

42. La siguiente tabla nos muestra los puntos de la gráfica fuerza contra distancia que se obtuvo al estirar un resorte desde 10 hasta 25 cm. Encuentre el trabajo hecho por la fuerza al estirar este resorte

$$\text{Fuerza} = k\,x$$

donde

$$k = 120 \text{ Kg/m}$$

x[m]	F [Kg]
0	0
0.025	3
0.05	6
0.075	9
0.10	12

Solución:

$$W = 0.6 \text{ Kg - m}$$

43. Para las siguientes integrales definidas haga una tabla y por medio de las diferencias encuentre qué fórmula de integración es la más adecuada e integre, usando una cantidad no menor de 6 puntos ($n \geq 6$).

1) $\int_0^{\pi/2} \cos x \, dx$ integral exacta = 1.000 u^2

2) $\int_1^{11} \sqrt{1 + x^2} \, dx$ integral exacta = 60.5229 u^2

3) $\int_3^{7} \log x \, dx$ integral exacta = 2.7469 u^2

4) $\int_1^{5} \frac{dx}{\sqrt{x + 2}}$ integral exacta = 1.8274 u^2

5) $4\int_0^{1} \frac{dx}{1 + x^2}$ integral exacta = $\pi \text{ u}^2$

6) $\displaystyle\int_{4}^{8} \frac{dx}{\sqrt{16\ x - y^2}}$ integral exacta = 0.5236 u^2

7) $\displaystyle\int_{0}^{4} \frac{dx}{\sqrt{25 - x^2}}$ integral exacta =-0.9258 u^2

44. Utilizando la fórmula de Simpson de 1/3 encuentre el valor de la siguiente integral definida.

$$\int_{2}^{10} \frac{dx}{1 + x} \qquad \text{para } n = 8$$

Solución:

$R = 1.29959\ u^2$

Rexacta = 1.704748

45. Resuelva la siguiente integral definida utilizando:

a) Fórmula trapecial para n = 10

b) Combinando Simpson de 1/3 y 3/8 para n = 10

c) Compare resultados entre a) y b)

$$\int_{0}^{1} (e^x + x^2 + 4)\ dx$$

Solución:

Rexacta = 6.051615 u^2

46. Utilizando la fórmula trapecial resuelva la siguiente integral definida:

$$\int_0^2 x\sqrt{4 - x^2}\, dx \quad \text{para} \quad n = 8$$

Solución:

$$R = 2.62488\ u^2$$

47. Encuentre la siguiente integral definida para n = 2 y n = 4 utilizando la fórmula trapecial.

$$\int_0^{0.8} \cos h\, x^2\, dx$$

Solución:

$$A_2 = 0.835\ u^2$$

$$A_4 = 0.834\ u^2$$

48. Encuentre la siguiente integral definida para n = 2; n = 4 y n = 6 usando la fórmula trapecial.

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^3 x\, dx$$

Solución:

$$A_2 = 1.571\ u^2$$

$$A_4 = 1.342\ u^2$$

$$A_6 = 1.335\ u^2$$

$$\text{Exacta} = 1.333\ u^2$$

TEMA VII SOLUCION NUMERICA DE ECUACIONES Y SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

1. Resolver la siguiente ecuación diferencial de primer orden:

Condición inicial

$$\frac{d}{dx} y = \frac{1}{4} (5 + x)y \; ; \qquad y(0) = 2$$

Utilizando el método de Runge-Kutta de cuarto orden, en el intervalo $0 \leq x \leq 0.8$. Considerando un incremento constante $h = 0.2$.

Solución:

Las expresiones del método de Runge-Kutta de cuarto orden son:

$$y_{i+1} = y_i + h\, \emptyset\, (x_i, y_i) \qquad \ldots (a)$$

$$i = 0, 1, 2, \ldots,$$

donde

$$\emptyset\, (x_i, y_i) = \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \qquad \ldots (b)$$

siendo

$$k_1 = f(x_i, y_i) \qquad \ldots (c)$$

$$k_2 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{1}{2} hk_1) \qquad \ldots (d)$$

$$k_3 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{1}{2} hk_2) \qquad \ldots (e)$$

$$k_4 = f(x_i + h, y_i + hk_3) \qquad \ldots (f)$$

Para este problema $f(x, y)$ es

$$f(x, y) = \frac{1}{4} (5 + x)y$$

considerando $i = 0$ en la expresión (a)

$$y_1 = y_0 + h\, \emptyset(x_0, y_0)$$

siendo

$$\emptyset(x_0, y_0) = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

donde

$$k_1 = f(x_0, y_0) = \frac{1}{4}(5 + x_0)\, y_0 = \frac{1}{4}(5 + 0)2 = 2.5000$$

$$k_2 = f(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{1}{2}hk_1) = \frac{1}{4}\left(5 + \left(0 + \frac{0.2}{2}\right)\right)\left(2 + \frac{1}{2}(0.2)(2.5)\right)$$

$$k_2 = 2.86875$$

$$k_3 = f(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{1}{2}hk_2) = \frac{1}{4}\left(5 + \left(0 + \frac{0.2}{2}\right)\right)\left(2 + \frac{1}{2}(0.2)(2.86875)\right)$$

$$k_3 = 2.91577$$

$$k_4 = f(x_0 + h, y_0 + hk_3) = \frac{1}{4}(5 + (0 + 0.2))(2 + 0.2(2.91577))$$

$$k_4 = 3.35810$$

sustituyendo

$$y_1 = 2 + \frac{0.2}{6}(2.5 + 2(2.86875) + 2(2.91577) + 3.35810)$$

$$y_1 = y(x_1) = y(0.2) = 2.58090$$

Para $i = 1$

$$y_2 = y_1 + h\, \emptyset(x_1, y_1)$$

siendo

$$\emptyset(x_1, y_1) = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = f(x_1, y_1) = \frac{1}{4}(5 + 0.2)(2.58090)$$

$$k_1 = 3.35518$$

donde:

$$k_2 = f(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{1}{2}hk_1) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(5 + \left(0.2 + \frac{0.2}{2}\right)\right)\left(2.58090 + \frac{1}{2}(0.2)(3.35518)\right)$$

$$k_2 = 3.86425$$

$$k_3 = f(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{1}{2}hk_2) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(5 + \left(0.2 + \frac{0.2}{2}\right)\right)\left(2.58090 + \frac{1}{2}(0.2)(3.86425)\right)$$

$$k_3 = 3.93171$$

$$k_4 = f(x_1 + h, y_1 + hk_3) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(5 + (0.2 + 0.2)\right)\left(2.5809 + 0.2(3.93171)\right)$$

$$k_4 = 4.54578$$

sustituyendo

$$y_2 = 2.58090 + \frac{0.2}{6}(3.35518 + 2(3.86425) + 2(3.93171) + 4.54578)$$

$$y_2 = y(x_2) = y(0.4) = 3.36400$$

Para $i = 2$

$$y_3 = y_2 + h\, \emptyset(x_2, y_2)$$

$$\emptyset(x_2, y_2) = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$_1 = f(x_2, y_2) = \frac{1}{4}(5 + 0.4)(3.36400)$$

$$k_1 = 4.54140$$

$$k_2 = f(x_2 + \frac{h}{2}, y_2 + \frac{1}{2} hk_1) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(5 + (0.4 + \frac{0.2}{2})\right)\left(3.36400 + \frac{1}{2}(0.2)(4.54140)\right)$$

$$k_2 = 5.24994$$

$$k_3 = f(x_2 + \frac{h}{2}, y_2 + \frac{1}{2} h\, k_2) =$$

$$= \frac{1}{4}(5 + (0.4 + \frac{0.2}{2}))\left(3.36400 + \frac{1}{2}(0.2)(5.24994)\right)$$

$$k_3 = 5.34737$$

$$k_4 = f(x_2 + h, y_2 + hk_3) =$$

$$= \frac{1}{4}(5.(0.4 + 0.2))(3.36400 + 0.2(5.3437))$$

$$k_4 = 6.20686$$

sustituyendo

$$y_3 = 3.36400 + \frac{0.2}{6}\left(4.54140 + 2(5.24994) + 2(5.34737) + 6.20686\right)$$

$$y_3 = y(x_3) = y(0.6) = 4.42877$$

Para $i = 3$

$$y_4 = y_3 + h\, \emptyset(x_3, y_3)$$

$$\emptyset(x_3, y_3) = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = f(x_3, y_3) = \frac{1}{4}(5 + 0.6)(4.42877)$$

$$k_1 = 6.20028$$

$$k_2 = f(x_3 + \frac{h}{2}, y_3 + \frac{1}{2} hk_1) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(5 + (0.6 + \frac{0.2}{2})\right)\left(4.42877 + \frac{1}{2}(0.2)(6.20027)\right)$$

$$k_2 = 7.19453$$

$$k_3 = f(x_3 + \frac{h}{2}, y_3 + \frac{1}{2} hk_2) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(5 + (0.6 + \frac{0.2}{2})\right)\left(4.42877 + \frac{1}{2}(0.2)(7.19452)\right)$$

$$k_3 = 7.33621$$

$$k_3 = f(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{1}{2}hk_2) = \frac{1}{4}\left(5 + (0 + \frac{0.2}{2})\right)\left(2 + \frac{1}{2}(0.2)(2.86875)\right)$$

$$k_3 = 2.91577$$

$$k_4 = f(x_0 + h, y_0 + hk_3) = \frac{1}{4}(5 + (0 + 0.2))(2 + 0.2(2.91577))$$

$$k_4 = 3.35810$$

sustituyendo

$$y_1 = 2 + \frac{0.2}{6}(2.5 + 2(2.86875) + 2(2.91577) + 3.35810)$$

$$y_1 = y(x_1) = y(0.2) = 2.58090$$

Para $i = 1$

$$y_2 = y_1 + h\,\phi(x_1, y_1)$$

siendo

$$\phi(x_1, y_1) = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = f(x_1, y_1) = \frac{1}{4}(5 + 0.2)(2.58090)$$

$$k_1 = 3.35518$$

donde:

$$k_2 = f(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{1}{2}hk_1) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(5 + (0.2 + \frac{0.2}{2})\right)\left(2.58090 + \frac{1}{2}(0.2)(3.35518)\right)$$

$$k_2 = 3.86425$$

$$k_3 = f(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{1}{2}hk_2) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(5 + (0.2 + \frac{0.2}{2})\right)\left(2.58090 + \frac{1}{2}(0.2)(3.86425)\right)$$

$$k_3 = 3.93171$$

$$k_4 = f(x_1 + h, y_1 + hk_3) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(5 + (0.2 + 0.2)\right)\left(2.5809 + 0.2(3.93171)\right)$$

$$k_4 = 4.54578$$

sustituyendo

$$y_2 = 2.58090 + \frac{0.2}{6}\left(3.35518 + 2(3.86425) + 2(3.93171) + 4.54578\right)$$

$$y_2 = y(x_2) = y(0.4) = 3.36400$$

Para $i = 2$

$$y_3 = y_2 + h\,\phi(x_2, y_2)$$

$$\phi(x_2, y_2) = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$_1 = f(x_2,\ y_2) = \frac{1}{4}\ (5 + 0.4)(3.36400)$$

$$k_1 = 4.54140$$

$$k_2 = f(x_2 + \frac{h}{2},\ y_2 + \frac{1}{2}\ hk_1) =$$

$$= \frac{1}{4}\ \left(5 + (0.4 + \frac{0.2}{2})\right)\ \left(3.36400 + \frac{1}{2}\ (0.2)(4.54140)\right)$$

$$k_2 = 5.24994$$

$$k_3 = f(x_2 + \frac{h}{2},\ y_2 + \frac{1}{2}\ h\ k_2) =$$

$$= \frac{1}{4}(5 + (0.4 + \frac{0.2}{2})\ )\ \left(3.36400 + \frac{1}{2}\ (0.2)(5.24994)\right)$$

$$k_3 = 5.34737$$

$$k_4 = f(x_2 + h,\ y_2 + hk_3) =$$

$$= \frac{1}{4}\ (5.(0.4 + 0.2))(3.36400 + 0.2(5.3437))$$

$$k_4 = 6.20686$$

sustituyendo

$$y_3 = 3.36400 + \frac{0.2}{6}\left(4.54140 + 2(5.24994) + 2(5.34737) + 6.20686\right)$$

$$y_3 = y(x_3) = y(0.6) = 4.42877$$

Para $i = 3$

$$y_4 = y_3 + h\ \emptyset(x_3,\ y_3)$$

$$\emptyset(x_3,\ y_3) = \frac{1}{6}\ (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = f(x_3,\ y_3) = \frac{1}{4}\ (5 + 0.6)(4.42877)$$

$$k_1 = 6.20028$$

$$k_2 = f(x_3 + \frac{h}{2},\ y_3 + \frac{1}{2}\ hk_1) =$$

$$= \frac{1}{4}\ \left(5 + (0.6 + \frac{0.2}{2})\right)\ \left(4.42877 + \frac{1}{2}\ (0.2)(6.20027)\right)$$

$$k_2 = 7.19453$$

$$k_3 = f(x_3 + \frac{h}{2},\ y_3 + \frac{1}{2}\ hk_2) =$$

$$= \frac{1}{4}\ \left(5 + (0.6 + \frac{0.2}{2})\right)\ \left(4.42877 + \frac{1}{2}\ (0.2)(7.19452)\right)$$

$$k_3 = 7.33621$$

$$k_4 = f(x_3 + h,\ y_3 + hk_3) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(5 + \left(0.6 + 0.2\right)\right)\ \left(4.42877 + 0.2(7.33620)\right)$$

$$k_4 = 8.54921$$

ustituyendo

$$y_4 = 4.4287 + \frac{0.2}{6}\,(6.20028 + 2(7.19453) + 2(7.33621) + 8.54921)$$

$$y_4 = y(x_4) = y(0.8) = 5.88913$$

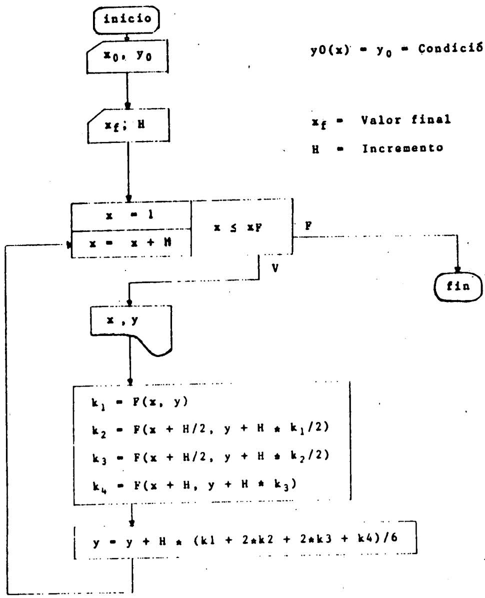
Por lo tanto, la solución que proporciona este método es

x	y(x)
0.0	2.00000
0.2	2.58090
0.4	3.36400
0.6	4.42876
0.8	5.88913

2. Elaborar un programa de computadora en lenguaje BASIC para resolver ecuaciones diferenciales de primer orden, utilizando el método de Runge-Kutta de cuarto orden. Comprobar el programa resolviendo la ecuación diferencial del problema anterior.

Solución:

a) Diagrama de flujo:



$y0(x) = y_0$ = Condición inicial

x_f = Valor final

H = Incremento

b) Codificación (BASIC, TRS-80-II)

```
100 'RUNGE/MN
110 '
120 EC$ = "Y' = ( 5 + X ) * Y / 4"
130 CI$ = "Y(0) = 2"
140 '
150 '  X0 = VALOR INICIAL
160 '  XN = VALOR FINAL
170 '  H  = INCREMENTO
180 '
190 '  DECLARACIONES
200      DEF FNF(X,Y) = (5+X)*Y/4
210 '
220 CLS
230 PRINT "M E T O D O   D E   R U N G E - K U T T A"
240 PRINT
250 PRINT
260 PRINT "Ecuacion diferencial:"
270 PRINT
280 PRINT EC$
290 PRINT
300 PRINT CI$
310 PRINT
320 PRINT
330 ' LECTURA DE CONDICIONES INICIALES
340      INPUT "Condiciones iniciales: (X0,Y0) ";X0,Y
350 ' LECTURA DE LAS CONDICIONES DE OPERACION
360      INPUT "Valor final e incremento: (XN,H) ";XN,H
```

```
370 ' IMPRESION DE ENCABEZADO
380     CLS
390     PRINT "M E T O D O   D E   R U N G E   K U T T A"
400     PRINT
410     PRINT "Ecuacion diferencial:"
420     PRINT EC$
430     PRINT
440     PRINT "      X      ","      Y  "
450     PRINT "---------------";"---------------"
460   CALCULOS
470     FOR X = X0 TO XN STEP H
480        PRINT USING "  ####.#####";X;
490        PRINT USING "       ######.#####";Y
500        ' FORMULA DE RECURRENCIA
510        K1 = FNF(X,Y)
520        K2 = FNF(X+H/2,Y+H*K1/2)
530        K3 = FNF(X+H/2,Y+H*K2/2)
540        K4 = FNF(X+H,Y+H*K3)
550        Y = Y+H*(K1+2*K2+2*K3+K4)/6
560     NEXT X
570 END
```

c) **Utilizando la ecuación diferencial del problema anterior, se obtienen los siguientes resultados**

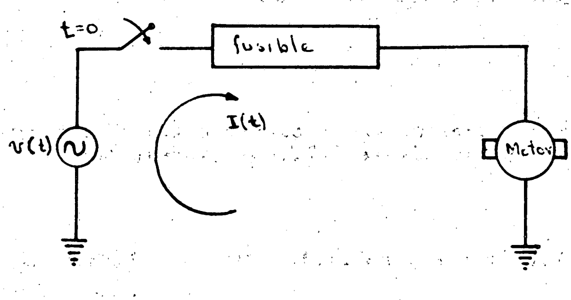
```
M E T O D O   D E   R U N G E - K U T T A

Ecuacion diferencial:
Y' =(5 + X^2) * Y/ 4

        X                   Y

     0.00000             2.00000
     0.20000             2.50090
     0.40000             3.27400
     0.60000             4.42076
     0.80000             5.88213
```

3. El motor de una bomba de agua se encuentra funcionando en estado estable, alimentándose de una fuente de voltaje como lo muestra la siguiente figura



El fusible y el motor del esquema anterior se representan eléctricamente como

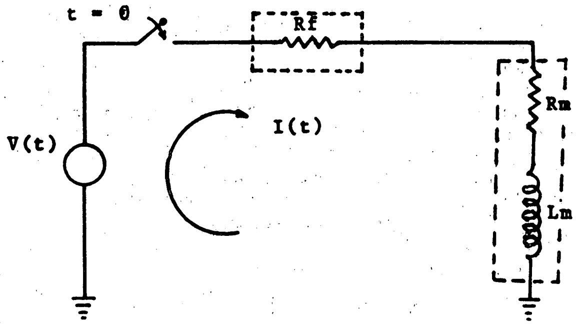


Figura 3.1

donde:

V(t) es el voltaje de alimentación

R_f es una resistencia, que al paso de una determinada corriente se funde, abriendo el circuito

R_m es la resistencia del motor

L_m es la inductancia del embobinado del motor

Considerando que el voltaje de la fuente de alimentación es

$$V(t) = 120 \sqrt{2} \operatorname{sen}(120 \pi t)$$

y que los parámetros R_f, R_m y L_m tienen los siguientes valores

$$R_f = 10 \ \Omega$$

$$R_m = 70 \ \Omega$$

$$L_m = 0.15 \ H$$

Calcular la corriente que circulará por el fusible a partir de que el interruptor es cerrado, considerando que en ese momento la corriente generada por el embobinado del motor es de -1 amper.

Solución:

Para resolver el problema es necesario obtener un modelo matemático del circuito de figura 3.1, este modelo es

$$L_m \frac{d}{dt} I(t) + (R_f + R_m) I(t) = V(t) \ ; \qquad I(t_0) = I_0$$

Condición inicial

como se observa, el modelo matemático del circuito eléctrico es una ecuación diferencial de primer orden, cuya solución es la función I(t), la cual representa la corriente que circulará por el fusible a partir de t = 0, considerando este tiempo el momento en el cual se cierra el interruptor.

Utilizando el método de Runge-Kutta de cuarto orden, para resolver la ecuación diferencial se tiene que

$$I'(t) = \frac{V(t)}{L_m} - \frac{R_m + R_f}{L_m} I(t) \; ; \qquad I(t_0) = I_0$$

Condición inicial

sustituyendo valores

$$I'(t) = \frac{120\sqrt{2}}{0.15} \operatorname{sen}(120\,\pi t) - \frac{70 + 10}{0.15} I(t) \; ; \qquad I(0) = -1$$

Condición inicial

efectuando operaciones

$$I'(t) = 1.131.37085 \operatorname{sen}(376.99112\, t) - 533.33333\, I(t)$$

Esta ecuación es de la forma

$$I' = f(t, I) \; ; \qquad I(t_0) = I_0$$

siendo

$$f(t, I) = 1131.37085 \operatorname{sen}(376.99112\, t) - 533.33333\, I$$

sustituyendo en las fórmulas del método de Runge-Kutta de cuarto orden

$$I_{i+1} = I_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = f(t_i, I_i)$$

$$k_2 = f(t_i + \frac{h}{2}, I_i + \frac{1}{2} hk_1)$$

$$k_3 = f(t_i + \frac{h}{2}, I_i + \frac{1}{2} hk_2)$$

$$k_4 = f(t_i + h, I_i + hk_3)$$

$$i = 0, 1, 2, \ldots$$

Se obtiene, para $i = 0$

$$I_1 = I_0 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = f(t_0, I_0) = 1131.37085 \text{ sen}(376.99112\ (0)) - 533.33333\ (-1)$$

$$k_1 = 533.33333$$

$$k_2 = f(t_0 + \frac{h}{2}, I_0 + \frac{1}{2} hk_1) = 1131.37085 \text{ sen}\left(376.99112 \left(0 + \frac{10^{-3}}{2}\right)\right)$$

$$- 533.33333 \left(-1 + \frac{1}{2} (10^{-3}) (533.33333)\right)$$

$$k_2 = 603.10887$$

$$k_3 = f(t_0 + \frac{h}{2}, I_0 + \frac{1}{2} hk_2) = 1131.37085 \text{ sen}\left(376.99112 \left(0 + \frac{10^{-3}}{2}\right)\right)$$

$$- 533.33333 \left(-1 + \frac{1}{2} (10^{-3})(603.10887)\right)$$

$$k_3 = 584.50206$$

$$k_4 = f(t_0 + h, I_0 + hk_3) = 1131.37085 \text{ sen}(376.99112\ (0 + 10^{-3}))$$

$$- 533.33333 \left(-1 + 10^{-3}(584.50206)\right)$$

$$k_4 = 638.08429$$

sustituyendo:

$$I_1 = -1 + \frac{10^{-3}}{6}\left(533.33333 + 2(603.10887) + 2(584.50206) + 638.08429\right)$$

$$I_1 = -0.40889 \text{ amp.}$$

Procediendo en forma similar, con ayuda del programa del problema anterior se obtiene

Para $i = 1$

$$I_2 = I_1 + \frac{h}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = f(t_1, I_1) = 634.56006$$

$$k_2 = f(t_1 + \frac{h}{2}, I_1 + \frac{1}{2} hk_1) = 655.07747$$

$$k_3 = f(t_1 + \frac{h}{2}, I_1 + \frac{1}{2} hk_2) = 649.60616$$

$$k_4 = f(t_1 + h, I_1 + hk_3) = 646.09469$$

sustituyendo

$$I_2 = -0.40889 + \frac{10^{-3}}{6}\left(634.56006 + 2(655.07747) + 2(649.60616) + 646.09469\right)$$

$$I_2 = 0.23945$$

Para $i = 2$

$$I_3 = I_2 + \frac{h}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = f(t_2, I_2) = 646.76998$$

$$k_2 = f(t_2 + \frac{h}{2}, I_2 + \frac{1}{2} hk_1) = 615.11959$$

$$k_3 = f(t_2 + \frac{h}{2}, I_2 + \frac{1}{2} hk_2) = 623.55969$$

$$k_4 = f(t_2 + h, I_2 + hk_3) = 563.42312$$

sustituyendo

$$I_3 = 0.23945 + \frac{10^{-3}}{6} \left(646.76998 + 2(615.11959) + 2(623.55969) + 563.42312\right)$$

$$I_3 = 0.85404$$

Para $i = 3$

$$I_4 = I_3 + \frac{h}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = f(t_3, I_3) = 568.20696$$

$$k_2 = f(t_3 + \frac{h}{2}, I_3 + \frac{1}{2} hk_1) = 488.81690$$

$$k_3 = f(t_3 + \frac{h}{2}, I_3 + \frac{1}{2} hk_2) = 509.98759$$

$$k_4 = f(t_3 + h, I_3 + hk_3) = 401.65697$$

sustituyendo

$$I_4 = 0.85404 + \frac{10^{-3}}{6} \left(568.20696 + 2(488.81690) + 2(509.98759) + 401.65697\right)$$

$$I_4 = 1.34862$$

Para $i = 4$

$$I_5 = I_4 + \frac{h}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = f(t_4, I_4) = 409.87435$$

$$k_2 = f(t_4 + \frac{h}{2}, I_4 + \frac{1}{2} hk_1) = 293.88583$$

$$k_3 = f(t_4 + \frac{h}{2}, I_4 + \frac{1}{2} hk_2) = 324.81610$$

$$k_4 = f(t_4 + h, I_4 + hk_3) = 183.49837$$

sustituyendo

$$I_5 = 1.34862 + \frac{10^{-3}}{6} \left(409.87435 + 2(293.88583) + 2(324.81610) + 183.49837\right)$$

$I_5 = 1.65375$

Análogamente

$$i = 5 \quad ; \quad I_6 = 1.72659$$

$$i = 6 \quad ; \quad I_7 = 1.58486$$

$$i = 7 \quad ; \quad I_8 = 1.26122$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

Finalmente, la corriente que fluye a través del fusible se resume en la siguiente tabla

t (ms)	I(t) (Amp.)
0	-1.00000
1	-0.40889
2	0.23945
3	0.85404
4	1.34862
5	1.65375
6	1.72659
7	1.58486
8	1.26122
:	:
⋮	⋮

4. Para el rescate de un barco antiguo hundido durante el siglo XIX, se piensa utilizar un batiscafo para grandes profundidades.

Para que la maniobra tenga éxito es necesario sumergir el batiscafo lentamente para que los cambios de presión en la coraza del mismo sean graduales. Considerando una velocidad de hundimiento constante se obtuvo el siguiente modelo matemático de la variación de la presión con respecto al tiempo

$$\frac{dp}{dt} = 1600 \; \frac{\rho_{agua} g t}{P}$$

Determinar como varía la presión conforme pasan los primeros cinco minutos del descenso.

Solución:

Una vez determinado el modelo matemático, representado por la ecuación diferencial anterior, el problema se reduce simplemente a resolverla. Sustituyendo los valores de las constantes

$$\rho_{agua} = 1.0021 \times 10^{-3} \quad Kgm/m^3$$

$$g = 9.807 \quad m/s^2$$

se obtiene

$$\frac{dp}{dt} = 1600 \; \frac{1.0021 \times 10^{-3}(9.807)\,t}{P}$$

simplificando

$$\frac{dp}{dt} = 15.724 \; \frac{t}{P}$$

Siendo la condición inicial de la ecuación diferencial la presión sobre la coraza del batiscafo al nivel de la superficie, la cual es la presión atmosférica

$$P(t_0 = 0) = P_0 = 1.013 \quad bar$$

Utilizando el método de Euler se tiene

$$P' = f(P,t)$$

siendo f(P, t) igual a

$$f(P,\ t) = 15.724 \; \frac{t}{P}$$

La fórmula de recurrencia del método de Euler es

$$P_{i+1} = P_i + h\ f(P_i,\ t_i)$$

$$i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

considerando que se registra una lectura de presión cada medio minuto se tomará $h = 0.5$.

Para $i = 0$

$$P_1 = P_0 + h\ f(P_0,\ t_0)$$

$$P_0 = 1.013$$

$$h = 0.5$$

$$f(P_0,\ t_0) = 15.724 \; \frac{t_0}{P_0} = 15.724 \; \frac{(0)}{1.013} = 0$$

sustituyendo

$$P_1 = 1.013 + 0.5\ (0) = 1.013$$

$P(t_1 = 0.5) = 1.013$

Para $i = 1$

$$P_2 = P_1 + h\, f(P_1,\, t_1)$$

$$P_1 = 1.013$$

$$h = 0.5$$

$$f(P_1,\, t_1) = 15.724\ \frac{t_1}{P_1} = 15.724\ \frac{0.5}{1.013}$$

sustituyendo

$$P_2 = 1.013 + 0.5\ (7.761) = 4.894$$

$$P(t_2 = 1.0) = 4.894$$

Procediendo en forma similar hasta llegar a $t = 5$ minutos

$i = 2 \quad ; \quad P_3 = 6.501$

$i = 3 \quad ; \quad P_4 = 8.315$

$i = 4 \quad ; \quad P_5 = 10.206$

$i = 5 \quad ; \quad P_6 = 12.132$

$i = 6 \quad ; \quad P_7 = 14.076$

$i = 7 \quad ; \quad P_8 = 16.031$

$i = 8 \quad ; \quad P_9 = 17.993$

$i = 9 \quad ; \quad P_{10} = 19.959$

Por último, se construye la siguiente tabla para analizar presiones contra tiempo

t(min)	P(t)(bares)
0.0	1.013
0.5	1.013
1.0	4.894
1.5	6.501
2.0	8.315
2.5	10.206
3.0	12.132
3.5	14.076
4.0	16.031
4.5	17.993
5.0	19.959

5. En un proceso metalúrgico, se ha observado que para lograr un buen resultado la aleación procedente del horno de fundición debe ser colada a una temperatura superior a los 1 000 °C. Si la aleación se extrae del horno a una temperatura de 1 300 °C y a partir de ese momento se enfria según la ley de enfriamiento de Newton

$$\frac{d}{dt} u(t) = - k \left[u(t) - T \right] \qquad \ldots \text{(a)}$$

donde

u(t) es la temperatura de la aleación conforme avanza el tiempo

K es una constante que depende de los materiales de la aleación

T es la temperatura ambiente

Investigar si se obtendrá un resultado satisfactorio, considerando que la operación entre la extracción del horno y la terminación del colado requiere de 1.5 minutos.

Solución:

Para obtener un resultado satisfactorio se requiere que la temperatura de la aleación sea mayor de 1000 °C después de un minuto y medio de haber sido extraida del horno. Habrá que investigar cuál es la temperatura de la aleación para $t = 1.5$, en otras palabras, es necesario conocer

$$u(t = 1.5)$$

para ello se resolverá la ecuación diferencial (a).

Considerando que la temperatura ambiente es de 35 °C y que la constante K para los materiales con los cuales se esta trabajando la aleación es igual a 0.1567, entonces se tiene que

$$\frac{d}{dt} u(t) = - 0.1567 \left[u(t) - 35 \right]$$

siendo la condición inicial $u(0) = 1300$.

Aplicando el método de Runge-Kutta de cuarto orden, cuyas fórmulas de recurrencia son

$$u_{i+1} = u_i + \frac{h}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$i = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$k_1 = f(t_i, u_i)$$

$$k_2 = f(t_i + \frac{h}{2}, u_i + \frac{1}{2} hk_1)$$

$$k_3 = f(t_i + \frac{h}{2}, u_i + \frac{1}{2} hk_2)$$

$$k_4 = f(t_i + h, u_i + hk_3)$$

f(t, u) para la ecuación diferencial dada es

$$f(t, u) = - 0.1567\ u(t) + 5.4845$$

considerando un incremento h constante igual a 0.5 minutos, se tiene

para $i = 0$:

$$u_1 = u_0 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = f(t_0, u_0) = - 0.1567\ u(t_0) + 5.4845 = - 0.1567(1300) + 5.4845$$
$$= - 198.2255$$

$$k_2 = f(t_0 + \frac{h}{2}, u_0 + \frac{1}{2} hk_1) = - 0.1567 \left(1300 + \frac{1}{2}(0.5)(-198.2255) - 35\right)$$
$$= - 190.4600$$

$$k_3 = f(t_0 + \frac{h}{2}, u_0 + \frac{1}{2} hk_2) = -0.1567 \left(1300 + \frac{1}{2}(0.5)(-190.46) - 35\right)$$
$$= - 190.7642$$

$$k_4 = f(t_0 + \frac{h}{2}, u_0 + hk_3) = - 0.1567 \left(1300 + 0.5(-190.7642) - 35\right)$$
$$= - 183.2791$$

sustituyendo

$$u_1 = 1300 + \frac{0.5}{6}\left(-198.2255 + 2(-190.46) + 2(-190.7642) - 183.2791\right)$$

$$u_1 = 1300 - 95.3294$$

$$u(0.5) = u_1 = 1204.6706 \quad °C$$

Para $i = 1$

$$u_2 = u_1 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = f(t_1, u_1) = -0.1567\ u(t_1) + 5.4845 = -0.1567\ (1204.6706) + 5.4845 =$$
$$= - 183.2874$$

$$k_2 = f(t_1 + \frac{h}{2}, u_1 + \frac{1}{2} hk_1) = -0.1567\ (1204.6706 + \frac{1}{2}(0.5)(-183.2874) - 35) =$$
$$= - 176.1071$$

$$k_3 = f(t_1 + \frac{h}{2}, u_1 + \frac{1}{2} hk_2) = -0.1567(1204.6706 + \frac{1}{2}(0.5)(-176.1071) - 35) =$$
$$= - 176.3884$$

$$k_4 = f(t_1 + h,\ u_1 + hk_3) = -0.1567\ (12\ 04.6706 + 0.5\ (-176.3884) - 35)$$
$$= -\ 169.4674$$

sustituyendo

$$u_2 = 1204.6706 + \frac{0.5}{6}\ (-183.2874 + 2(-176.1071) + 2(-176.3884) - 169.4674)$$

$$u_2 = 1204.6706 - 88.1455$$

$$u(1.0) = u_2 = 1116.5251\ °C$$

Para $i = 2$

$$u_3 = u_2 + \frac{h}{6}\ (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = f(t_2,\ u_2) = -0.1567(1116.5251) + 5.4845 = -\ 169.475$$

$$k_2 = f(t_2 + \frac{h}{2},\ u_2 + \frac{1}{2}\ hk_1) = -0.1567(1116.5251 + \frac{1}{2}(0.5)(-169.4751) - 35)$$
$$= -\ 162.8358$$

$$k_3 = f(t_2 + \frac{h}{2},\ u_2 + \frac{1}{2}\ hk_2) = -0.1567(1116.5251 + \frac{1}{2}(0.5)(-162.8358) - 35)$$
$$= -\ 163.0959$$

$$k_4 = f\ (t_2 + h,\ u_2 + hk_3) = -0.1567(1116.5251 + 0.5(-163.09589) - 35)$$
$$= -\ 156.6964$$

sustituyendo

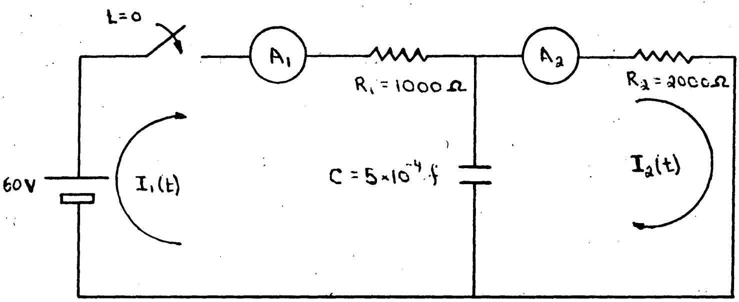
$$u_3 = 1116.5251 + \frac{0.5}{6}\ (-169.475 + 2(-162.8358) + 2(-163.0959) - 156.6964)$$

$$u_3 = 1\ 116.5251 - 81.5029$$

$$u(1.5) = u_3 = 1035.022\ °C$$

El valor anterior nos dice que la temperatura de la aleación después de 1.5 minutos de haber sido extraida del horno es de 1035 °C aproximadamente, por lo tanto, se concluye que el resultado del proceso será satisfactorio.

6. En el laboratorio de electricidad se construyó el siguiente circuito



Por medio de los amperímetros A_1 y A_2 se midieron las corrientes I_1 e I_2 respectivamente a partir de que el interruptor fue cerrado en el tiempo $t = 0$, obteniéndose los siguientes valores

t (miliseg.)	I_1 (Ampers)	I_2 (Ampers)
0.0	0.000	3.000
0.5	0.279	2.860
1.0	0.518	2.740
1.5	0.725	2.638

Calcular la corriente que pasa por el condensador cada 0.5 milisegundos durante los primeros 4 milisegundos.

Solución:

El problema se resuelve al conocer como varian la corriente I_1 e I_2 con respecto al tiempo, estas funciones $I_1(t)$ e $I_2(t)$ se obtienen al resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\frac{d}{dt} I_1(t) = \frac{1}{CR_1}\Big(I_2(t) - I_1(t)\Big)$$

$$\frac{d}{dt} I_2(t) = \frac{1}{CR_2}\Big(I_1(t) - I_2(t)\Big) .$$

Como ya se conocen los cuatro primeros puntos de la solución se puede utilizar el método de Milne para resolver el sistema planteado. Las ecuaciones de recurrencia son, considerando que $x = t$, $I_1 = y$ e $I_2 = z$:

$$y_{i+1,p} = y_{i-3} + \frac{4}{3} h\,(2f_{i-2} - f_{i-1} + 2f_i)$$

$$z_{i+1,p} = z_{i-3} + \frac{4}{3} h\,(2g_{i-2} - g_{i-1} + 2g_i)$$

$$i = 3, 4, 5, \ldots$$

$$y_{i+1,c} = y_{i-1} + \frac{h}{3}\,(f_{i-1} + 4f_i + f_{i+1})$$

$$z_{i+1,c} = z_{i-1} + \frac{h}{3}\,(g_{i-1} + 4g_i + g_{i+1})$$

$$i = 3, 4, 5, \ldots$$

donde las funciones f y g son

$$f(x, y, z) = \frac{1}{CR_1}(z - y)$$

$$g(x, y, z) = \frac{1}{CR_2}(y - z)$$

sustituyendo valores, el sistema es:

$$y' = \frac{1}{(5 \times 10^{-4})10^3}(z - y) \qquad y(t = 0) = y_0 = 0.000$$

$$z' = \frac{1}{(5 \times 10^{-4})2 \times 10^3}(y - z) \qquad \underbrace{z(t = 0) = z_0 = 3.000}_{\text{Condiciones iniciales}}$$

Efectuando operaciones

$$y' = 0.2\,(z - y) \quad ; \quad y_0 = 0.000$$

$$z' = 0.1\,(y - z) \quad ; \quad z_0 = 3.000$$

valuando las ecuaciones predictoras para i = 3 se obtiene

$$y_{4p} = y_0 + \frac{4}{3} h\,(2f_1 - f_2 + 2f_3)$$

$$z_{4p} = z_0 + \frac{4}{3} h\,(2g_1 - g_2 + 2g_3)$$

donde

$$h = 0.5$$

$$y_0 = 0.000 \qquad\qquad z_0 = 3.000$$

$f_1 = f(x_1, y_1, z_1) = 0.2\ (z_1 - y_1)$ $\qquad$ $g_1 = g(x_1, y_1, z_1) = 0.1\ (y_1 - z_1)$

$f_1 = 0.2\ (2.860 - 0.279) = 0.516$ $\qquad$ $g_1 = 0.1\ (0.279 - 2.860) = -0.258$

$f_2 = f(x_2, y_2, z_2) = 0.2\ (z_2 - y_2)$ $\qquad$ $g_2 = g(x_2, y_2, z_2) = 0.1\ (y_2 - z_2)$

$f_2 = 0.2\ (2.740 - 0.518) = 0.444$ $\qquad$ $g_2 = 0.1\ (0.518 - 2.740) = -0.222$

$f_3 = f(x_3, y_3, z_3) = 0.2\ (z_3 - y_3)$ $\qquad$ $g_3 = g(x_3, y_3, z_3) = 0.1\ (y_3 - z_3)$

$f_3 = 0.2\ (2.638 - 0.725) = 0.383$ $\qquad$ $g_3 = 0.1\ (0.725 - 2.638) = -0.191$

sustituyendo

$$y_{4,p} = 0.000 + \frac{4}{3}(0.5)\left[2(0.516) - 0.444 + 2(0.383)\right]$$

$$z_{4,p} = 3.000 + \frac{4}{3}(0.5)\left[2(-0.258) + 0.222 + 2(-0.191)\right]$$

efectuando operaciones

$$y_{4,p} = 0.903$$

$$z_{4,p} = 2.549$$

y las ecuaciones correctoras son

$$y_{4,c} = y_2 + \frac{h}{3}\left[f_2 + 4f_3 + f_4\right]$$

$$z_{4,c} = z_2 + \frac{h}{3}\left[g_2 + 4g_3 + g_4\right]$$

donde

$$h = 0.5$$

$y_2 = 0.518$ $\qquad$ $z_2 = 2.740$

$f_2 = 0.444$ $\qquad$ $g_2 = -0.222$

$f_3 = 0.383$ $\qquad$ $g_3 = -0.191$

$f_4 = f(x_4, y_4, z_4) = 0.2(z_4 - y_4)$ $\qquad$ $g_4 = g(x_4, y_4, z_4) = 0.1(y_4 - z_4)$

$f_4 = 0.2(2.549 - 0.903) = 0.329$ $\qquad$ $g_4 = 0.1(0.903 - 2.549) = -0.165$

sustituyendo valores

$$y_{4,c} = 0.518 + \frac{0.5}{3}\left[0.444 + 4(0.383) + 0.329\right]$$

$$z_{4,c} = 2.740 + \frac{0.5}{3}\left[-0.222 + 4(-0.191) - 0.165\right]$$

efectuando operaciones

$$y_{4,c} = 0.902$$

$$z_{4,c} = 2.548$$

Considerando $i = 4$ en las ecuaciones predictoras:

$$y_{5,p} = y_1 + \frac{4}{3} h \left[2f_2 - f_3 + 2f_4 \right]$$

$$z_{5,p} = z_1 + \frac{4}{3} h \left[2g_2 + g_3 + 2g_4 \right]$$

donde

$$h = 0.5$$

$y_1 = 0.279$ $\quad$ $z_1 = 2.860$

$f_2 = 0.444$ $\quad$ $g_2 = -0.222$

$f_3 = 0.383$ $\quad$ $g_3 = -0.191$

$f_4 = 0.2(z_4 - z_4) = 0.2(2.548 - 0.902)$
$= 0.329$

$g_4 = 0.1(y_4 - z_4) = 0.1(0.902 - 2.548)$
$= -0.165$

sustituyendo valores

$$y_{5,p} = 0.279 + \frac{4}{3}(0.5) \left[2.(0.444) - 0.383 + 2(0.329) \right]$$

$$z_{5,p} = 2.860 + \frac{4}{3}(0.5) \left[2(-0.222) + 0.191 + 2(-0.165) \right]$$

efectuando operaciones

$$y_{5,p} = 1.054$$

$$z_{5,p} = 2.471$$

y las ecuaciones correctoras son

$$y_{5,c} = y_3 + \frac{h}{3} \left[f_3 + 4f_4 + f_5 \right]$$

$$z_{5,c} = z_3 + \frac{h}{3} \left[g_3 + 4g_4 + g_5 \right]$$

siendo

$$h = 0.5$$

$y_3 = 0.725$ $\quad$ $z_3 = 2.638$

$f_3 = 0.383$ $\quad$ $g_3 = -0.191$

$f_4 = 0.329$ $\quad$ $g_4 = -0.165$

$f_5 = 0.2(z_5 - y_5) = 0.2(2.471 - 1.054)$
$= 0.283$

$g_5 = 0.1(y_5 - z_5) = 0.1(1.054 - 2.471)$
$= -0.142$

sustituyendo valores

$$y_{5,c} = 0.725 + \frac{0.5}{3}\left[0.383 + 4(0.329) + 0.283\right]$$

$$z_{5,c} = 2.638 + \frac{0.5}{3}\left[-\ 0.191 + 4(-\ 0.165) - 0.142\right]$$

efectuando operaciones

$$y_{5,c} = 1.055$$

$$z_{5,c} = 2.473$$

Procediendo en forma similar se obtiene

$i = 5$; $y_{6,p} = 1.186$ $y_{6,c} = 1.041$

$z_{6,p} = 2.186$ $z_{6,c} = 2.479$

$i = 6$; $y_{7,p} = 1.283$ $y_{7,c} = 1.596$

$z_{7,p} = 2.360$ $z_{7,c} = 2.204$

$i = 7$; $y_{8,p} = 1.647$ $y_{8,c} = 1.790$

$z_{8,p} = 2.176$ $z_{8,c} = 2.107$

$i = 8$; $y_{9,p} = 1.637$ $y_{9,c} = 2.021$

$z_{9,p} = 2.184$ $y_{9,c} = 2.045$

Por lo tanto, las corrientes I_1 e I_2 durante los primeros cuatro milisegundos son

t (ms)	I_1 (Ampers)	I_2 (Ampers)
0.0	0.000	3.000
0.5	0.279	2.860
1.0	0.518	2.740
1.5	0.725	2.638
2.0	1.055	2.473
2.5	1.372	2.316
3.0	1.596	2.204
3.5	1.790	2.107
4.0	2.021	2.045

Finalmente la corriente en el capacitor es

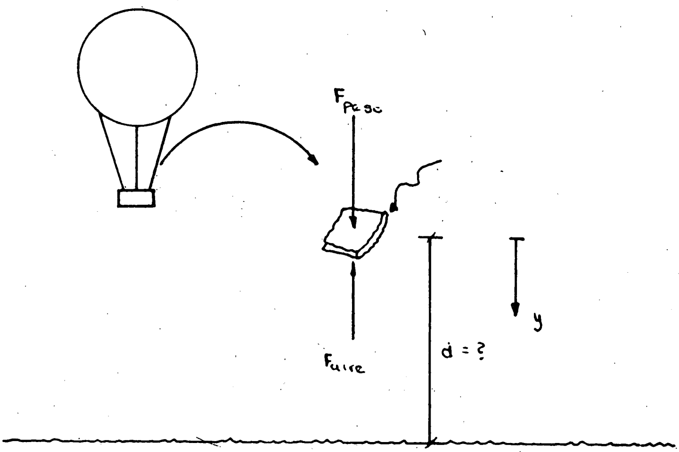
$$I_c(t) = I_1(t) - I_2(t)$$

Tabulándose para cada instante se obtiene

t (ms)	I_c (Ampers)
0.0	-3.000
0.5	-2.581
1.0	-2.222
1.5	-1.913
2.0	1.418
2.5	-0.944
3.0	-0.608
3.5	-0.317
4.0	-0.024

7. De un globo aerostático se suelta una bolsa de lastre con un peso de 30 Kg tardando en llegar al suelo 16 segundos.

Calcular la altura del globo en el momento en que fue lanzada la bolsa, considerando que sobre ella actúan una fuerza hacia abajo debida al peso propio de la bolsa y otra fuerza hacia arriba provocada por el aire, la cual es proporcional a la velocidad de la bolsa durante su caída.



Solución:

Utilizando la segunda ley de Newton

$$F = ma$$

$$- F_{aire} + F_{peso} = m \frac{d^2}{dt^2} y(t) \qquad \ldots (a)$$

siendo y(t) la distancia recorrida por el saco para un tiempo dado.

Como la fuerza del aire es proporcional a la velocidad, se puede escribir

$$F_{aire} = k \frac{d}{dt} y(t)$$

donde k es una constante de proporcionalidad y $\frac{d}{dt} y(t)$ es la velocidad de la bolsa.

La fuerza del peso y la masa se escriben como:

$$F_{peso} = w \quad ; \quad m = \frac{w}{g}$$

sustituyendo en (a) se obtiene

$$- k \frac{d}{dt} y(t) + w = \frac{w}{g} \frac{d^2}{dt^2} y(t)$$

sustituyendo los valores de

w = peso de la bolsa = 30 kg

g = aceleración de la gravedad, a una altura de dos mil metros sobre el nivel del mar

$= 9.7826 \frac{m}{s^2}$

y considerando

$$k = 0.12 \frac{kg.s}{m}$$

se llega a la siguiente ecuación diferencial

$$-0.12 \, y'(t) + 30 = \frac{30}{9.7826} y''(t)$$

simplificando

$$0.1022223 \quad y'' + 0.004 \, y' - 1 = 0$$

multiplicando por 1000

$$102.222 \, y'' + 4.000 \quad y' - 1000 = 0$$

La solución de esta ecuación diferencial de segundo orden es una función y(t) que representa la distancia recorrida por la bolsa de lastre a partir de que es soltada del globo.

Las condiciones iniciales del problema son

$y(0) = 0$ la distancia recorrida en el timepo $t = 0$ es nula

$y'(0) = 0$ la velocidad en el tiempo $t = 0$ es nula

y por último, la altura del globo en el momento de soltar la bolsa estará dada por

$$d = y(t = 16)$$

Para resolver la ecuación diferencial planteada, se utilizará el método de diferencias finitas, el cual consiste básicamente en sustituir las derivadas de la ecuación diferencial por fórmulas de derivación numérica qeu sean consistentes, es decir, que todas ellas tengan el mismo orden de error.

Considerando las siguientes fórmulas de derivación

$$y'_i = \frac{1}{2h}\begin{bmatrix} -1 & \underline{\underline{0}} & 1 \end{bmatrix} + e_r$$

$$y''_i = \frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} 1 & \underline{\underline{-2}} & 1 \end{bmatrix} + e_r$$

las cuales son consistentes, ya que ambas tienen el mismo orden de error(h^2). Sustituyéndolas en la ecuación diferencial se obtiene

$$102.222\left[\frac{1}{h^2}\left(y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}\right)\right] + 4\left[\frac{1}{2h}\left(-y_{i-1} + y_{i+1}\right)\right] - 1000 = 0$$

considerando $h = 2$ segundos

$$\frac{102.222}{4}\left(y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}\right) - y_{i-1} + y_{i+1} - 1000 = 0$$

despejando y_{i+1},

$$y_{i+1} = -0.9247\, y_{i-1} + 1.9247\, y_i + 37.6577$$

esta última ecuación se utilizará para $i = 0, 1, 2, \ldots,$ obteniendo de esta forma la solución de la ecuación diferencial.

Para $i = 0$, se tiene

$$y_1 = y(t_1 = t_0 + h) = -0.9247\, y_{-1} + 1.9247\, y_0 + 37.6577$$

para conocer el valor de y_{-1} se debe sustituir la condición inicial

$$y'(0) = 0$$

por

$$\frac{1}{2h}\left(-y_{-1}+y_1\right)=0$$

de aquí se observa que

$$y_{-1}=y_1$$

Entonces sustituyendo valores se obtiene

$$y_1=y(t=2)=-0.9247\ y_1+1.9247(0)+37.6577$$

despejando y_1

$$y_1(1+0.9247)=37.6577$$

$$y_1=\frac{37.6577}{1.9247}$$

$$y_1=y(t=2)=19.5655$$

Para $i=1$

$$y_2=-0.9247\ y_0+1.9247\ y_1+37.6577$$

sustituyendo valores

$$y_2=-0.9247(0)+1.9247(19.5655)+37.6577$$

$$y_2=y(t=4)=75.3154$$

procediendo en forma similar, se obtiene

$i=2$; $y_3=y(t=6)=164.5250$

$i=3$; $y_4=y(t=8)=284.6748$

$i=4$; $y_5=y(t=10)=433.6875$

$i=5$; $y_6=y(t=12)=609.1372$

$i=6$; $y_7=y(t=14)=809.0333$

$i=7$; $y_8=y(t=16)=1031.5349$

Por lo tanto, a los 16 segundos de haber sido soltada la bolsa, la distancia que ha recorrido (altura del globo) es de

$$d=1032\text{ mts.}$$

8. Teniendo en cuenta el problema anterior, determinar la velocidad de la bolsa de lastre desde el momento en que fue soltada del globo hasta que llegó al suelo.

Solución:

Efectuando el cambio de variable

$$z = y'$$

En la ecuación diferencial del problema anterior

$$102.222y'' + 4.000y' - 1000 = 0$$

se obtiene

$$102.222z' + 4.000z - 1000 = 0 \qquad \ldots \text{(a)}$$

donde la solución de la ecuación diferencial z(t) representa la velocidad de la bolsa de lastre

$$z = y' = \frac{d}{dt}\, y(t) = \text{velocidad}$$

despejando z' de (a);

$$z' = -\,0.0391\, z + 9.7826 \;; \qquad \text{condición inicial} \quad z(0) = z_0 = y'(0) = 0$$

Resolviendo esta ecuación diferencial de primer orden de la forma

$$z' = f(t,\, z)$$

con el método de Euler-Gauss

$$z_{i+1_p} = z_i + h\, f(t_i,\, z_i)$$

$$z_{i+1_c} = z_i + \frac{h}{2}\left[f(t_i,\, z_i) + f(t_{i+1},\, z_{i+1_p}) \right]$$

se obtiene, para $i = 0$

$$z_{1_p} = z_0 + h\, f(t_0,\, z_0)$$

$$z_{1_c} = z_0 + \frac{h}{2}\left[f(t_0,\, z_0) + f(t_1,\, z_{1_p}) \right]$$

donde

$$z_0 = 0$$

y considerando $h = 2$, se tiene

$$f(t_0,\, z_0) = -\,0.0391\, z_0 + 9.7826 = -\,0.0391(0) + 9.7826 = 9.7826$$

sustituyendo en la ecuación predictora

$$z_{1_p} = 0 + 2(9.7826) = 19.5652$$

y para la ecuación correctora

$$z_0 = 0$$

$$h = 2$$

$f(t_0, z_0) = 9.7826$

$f(t_1, z_{1_p}) = -0.0391 z_{1_p} + 9.7826 = -0.0391(19.5652) + 9.7826 = 9.0176$

sustituyendo

$$z_{1_c} = 0 + \frac{2}{2}\left[9.7826 + 9.0176\right] = 18.8002$$

Para $i = 1$

$$z_{2_p} = z_1 + h\, f(t_1, z_1)$$

$$z_{2_c} = z_1 + \frac{h}{2}\left[f(t_1, z_1) + f(t_2, z_{2_p})\right]$$

siendo

$f(t_1, z_1) = -0.0391 z_1 + 9.7826 = -0.0391(18.8002) + 9.7826 = 9.0475$

sustituyendo en la ecuación predictora

$$z_{2_p} = 18.8002 + 2(9.0475) = 36.8952$$

y sustituyendo

$f(t_2, z_{2_p}) = -0.0391(36.8952) + 9.7826 = 8.3400$

en la ecuación correctora se obtiene

$$z_{2_c} = 18.8002 + \frac{2}{2}\left[9.0475 + 8.3400\right] = 36.1877$$

procediendo en forma similar

$i = 2$; $z_{3_p} = 52.9230$ $z_{3_c} = 52.2687$

$i = 3$; $z_{4_p} = 67.7465$ $z_{4_c} = 67.1413$

$i = 4$; $z_{5_p} = 81.4560$ $z_{5_c} = 80.8964$

$i = 5 \quad ; \quad z_{6p} = 94.1355 \qquad z_{6c} = 93.6179$

$i = 6 \quad ; \quad z_{7p} = 105.8622 \qquad z_{7c} = 105.3834$

$i = 7 \quad ; \quad z_{8p} = 116.7076 \qquad z_{8c} = 116.2648$

Finalmente, en la siguiente tabla se pueden apreciar las velocidades de la bolsa a intervalos de 2 segundos hasta que toca tierra a los 16 segundos de haber sido soltada con una velocidad de 116.26 m/s

t (ms)	v(t) m/s
0	0
2	18.8002
4	36.1877
6	52.2687
8	67.1413
10	80.8964
12	93.6179
14	105.3834
16	116.2648

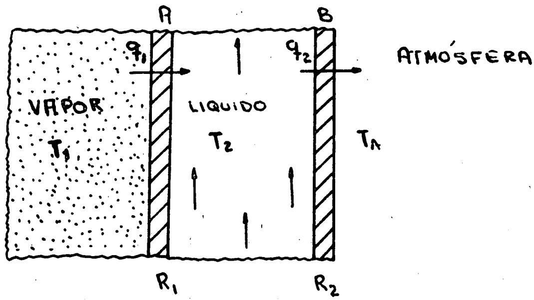
9. El siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\frac{d}{dt} T_1(t) = \frac{T_2(t) - T_1(t)}{R\ C_V}$$

$$\frac{d}{dt} T_2(t) = \frac{T_1(t) - 2T_2(t) + T_A}{R\ C_L}$$

Representa el modelo matemático para obtener las temperaturas $T_1(t)$ y $T_2(t)$ en un condensador de superficie.

La función de este equipo es recoger la energía calorífica del vapor de escape para condensarlo por medio del líquido que pasa por las paredes del tubo exterior, según se muestra en la siguiente figura



donde:

q_1 es el flujo de calor del vapor al líquido

q_2 es el flujo de calor del agua a la atmósfera

T_1 es la temperatura del vapor

T_2 es la temperatura del líquido

T_A es la temperatura ambiente igual a 293 °K

R_1 es la resistencia térmica de la pared A: $R_1 = \frac{2}{3} \times 10^{-2} \frac{°K\ min}{Joule}$

R_2 es la resistencia térmica de la pared B: $R_2 = \frac{2}{3} \times 10^{-2} \frac{°K\ min}{Joule}$

C_V es la capacitancia térmica del vapor = 180 $\frac{Joule}{°K}$

C_L es la capacitancia térmica del líquido = 200 $\frac{Joule}{°K}$

Considerando que inicialmente la temperatura del vapor es de 800 °K y la temperatura del líquido es de 300 °K, obtener, a partir del sistema de ecuaciones diferenciales, las temperaturas tanto del vapor como del líquido durante el primer minuto en que el equipo empieza a funcionar.

Solución:

Sustituyendo valores en el sistema de ecuaciones:

$$\frac{d}{dt} T_1 = \frac{(T_2 - T_1)}{\left(\frac{2}{3} \times 10^{-2}\right)(180)}$$

$$\frac{d}{dt} T_2 = \frac{1}{\left(\frac{2}{3} \times 10^{-2}\right)(200)} \left(T_1 - 2T_2 + 293\right)$$

simplificando:

$$T_1' = \frac{5}{6} \left(T_2 - T_1\right)$$

$$T_2 = 0.75 \ (T_1 - 2T_2 + 293)$$

siendo las condiciones iniciales

$$T_1(t = 0) = 800 \quad y \quad T_2(t = 0) = 300$$

Utilizando la serie de Taylor en el entorno de t = 0, para resolver el sistema, la solución es

$$T_1(t) = T_1(0) + \frac{T_1'(0)}{1!} t + \frac{T_1''(0)}{2!} t^2 + \ldots + \frac{T_1^{(n)}(0)}{n!} t^n + \ldots$$

$$T_2(t) = T_2(0) + \frac{T_2'(0)}{1!} t + \frac{T_2''(0)}{2!} t^2 + \ldots + \frac{T_2^{(n)}(0)}{n!} t^n + \ldots$$

Considerado los primeros cuatro términos de la serie de Taylor, los valores de t_0, $T_1(t_0)$, $T_2(t_0)$ y sus correspondientes derivadas son

$$t_0 = 0$$

$T_1(t_0) = T_{1,0}$ $\qquad$ $T_2(t_0) = T_{2,0}$

$T_1(0) = 800$ $\qquad$ $T_2(0) = 300$ $\quad$ Condiciones iniciales

$$T_1'(t_0) = \frac{5}{6}(T_{2,0} - T_{1,0}) \qquad T_2'(t_0) = \frac{3}{4}\left(T_{1,0} - 2T_{2,0} + 293\right)$$

$$T_1'(0) = \frac{5}{6}\left(300 - 800\right) = -416.667 \qquad T_2'(0) = \frac{3}{4}\left(800 - 2(300) + 293\right) = 369.750$$

$$T_1''(t_0) = \frac{5}{6}(T_{2,0}' - T_{1,0}') \qquad T_2''(t_0) = \frac{3}{4}(T_{1,0}' - 2T_{2,0}')$$

$$T_1''(0) = \frac{5}{6}\left(369.750 - (-416.667)\right) = 655.347 \qquad T_2''(0) = \frac{3}{4}\left(-416.667 - 2(369.750)\right) = -867.125$$

$$T_1'''(t_0) = \frac{5}{6}(T_{2,0}'' - T_{1,0}'') \qquad T_2'''(t_0) = \frac{3}{4}(T_{1,0}'' - 2T_{2,0}'')$$

$$T_1'''(0) = \frac{5}{6}\left(-867.125 - 655.347\right) = -1268.727 \qquad T_2'''(0) = \frac{3}{4}\left(655.347 - 2(-867.125)\right) = 1792.198$$

$$T_1^{iv}(t_0) = \frac{5}{6}(T_{2,0}''' - T_{1,0}''') \qquad T_2^{iv}(t_0) = \frac{3}{4}(T_{1,0}''' - 2T_{2,0}''')$$

$$T_1^{iv}(0) = \frac{5}{6}\left(1792.198 - (-1268.727)\right) = 2550.770 \qquad T_2^{iv}(0) = \frac{3}{4}\left(-1268.727 - 2(1792.198)\right) = -3639.842$$

sustituyendo valores en la solución

$$T_1(t) = 800 + \frac{(-416.667)}{1!} t + \frac{655.347}{2!} t^2 + \frac{(-1268.727)}{3!} t^3 + \frac{2550.770}{4!} t^4$$

$$T_2(t) = 300 + \frac{369.750}{1!} t + \frac{(-867.125)}{2!} t^2 + \frac{1792.198}{3!} t^3 + \frac{(-3639.842)}{4!} t^4$$

efectuando operaciones

$$T_1(t) = 800 - 416.667t + 327.674t^2 - 211.455t^3 + 106.282t^4$$

$$T_2(t) = 300 + 369.750t - 433.563t^2 + 298.700t^3 - 151.660t^4$$

Valuando la solución a intervalos de 0.1 minutos se obtiene

t (min)	$T_1(t)$ (°K)	$T_2(t)$ (°K)
0.0	800	300
0.1	761	333
0.2	728	359
0.3	700	379
0.4	675	394
0.5	654	404
0.6	636	411
0.7	622	412
0.8	612	409
0.9	606	400
1.0	606	383

Debido a que esta solución presenta errores muy grandes conforme se aleja del entorno (en este caso el entorno es la condición inicial del sistema) es conveniente utilizar solamente los primeros cuatro puntos y los demás calcularlos utilizando el método de Milne. Las ecuaciones del método son

$$T_{1,i+1,\,p} = T_{1,i-3} + \frac{4}{3} h \left(2f_{i-2} - f_{i-1} + 2f_i\right)$$

$$T_{2,i+1,\,p} = T_{2,i-3} + \frac{4}{3} h \left(2g_{i-2} - g_{i-1} + 2g_i\right)$$

$$i = 3, 4, 5, \ldots$$

$$T_{1,i+1,C} = T_{1,i-1} + \frac{h}{3} \left(f_{i-1} + 4f_i + f_{i+1,\,p}\right)$$

$$T_{2,i+1,C} = T_{2,i-1} + \frac{h}{3} \left(g_{i-1} + 4g_i + g_{i+1,\,p}\right)$$

$$i = 3, 4, 5, \ldots$$

siendo

$$f_i = f(t_i, T_{1,i}, T_{2,i}) = \frac{5}{6} (T_{2,i} - T_{1,i})$$

$$g_i = g(t_i, T_{1,i}, T_{2,i}) = \frac{3}{4} (T_{1,i} - 2T_{2,i} + 293)$$

Tomando i = 3 en las ecuaciones predictoras del método de Milne, se obtiene para la temperatura T_1:

$$T_{1,4p} = T_{1,0} + \frac{4}{3} h \left[2f_1 - f_2 + 2f_3\right]$$

donde

$$T_{1,0} = 800$$

$$h = 0.1$$

$$f_1 = f(t_1, T_{1,1}, T_{2,1}) = \frac{5}{6} (T_{2,1} - T_{1,1}) = \frac{5}{6} (333 - 761) = -356.667$$

$$f_2 = f(t_2, T_{1,2}, T_{2,2}) = \frac{5}{6} (T_{2,2} - T_{1,2}) = \frac{5}{6} (359 - 728) = -307.500$$

$$f_3 = f(t_3, T_{1,3}, T_{2,3}) = \frac{5}{6} (T_{2,3} - T_{1,3}) = \frac{5}{6} (379 - 700) = -267.500$$

y para la temperatura T_2

$$T_{2,4p} = T_{2,0} + \frac{4}{3} h \left[2g_1 - g_2 + 2g_3\right]$$

donde

$$T_{2,0} = 300$$

$$h = 0.1$$

$$g_1 = g(t_1, T_{1,1}, T_{2,1}) = \frac{3}{4} \left(T_{1,1} - 2T_{2,1} + 293\right) = \frac{3}{4}\left(761 - 2(333) + 293\right) = 291.00$$

$$g_2 = g(t_2, T_{1,2}, T_{2,2}) = \frac{3}{4} \left(T_{1,2} - 2T_{2,2} + 293\right) = \frac{3}{4} \left(728 - 2(359) + 293\right)$$
$$= 227.250$$

$$g_3 = g(t_3, T_{1,3}, T_{2,3}) = \frac{3}{4} \left(T_{1,3} - 2T_{2,3} + 293\right) = \frac{3}{4} \left(700 - 2(379) + 293\right) = 176.250$$

sustituyendo valores en las ecuaciones predictoras de T_1 y T_2 se tiene

$$T_{1,4p} = 800 + \frac{4}{3} (0.1) \left[2(-356.667) - (-307.500) + 2(-267.500)\right]$$

$$T_{2,4p} = 300 + \frac{4}{3} (0.1) \left[2(291.000) - 227.250 + 2(176.250)\right]$$

efectuando operaciones

$$T_{1,4p} = 674.555$$

$$T_{2,4p} = 394.300$$

utilizando las ecuaciones correctoras

$$T_{1,4C} = T_{1,2} + \frac{h}{3}\left(f_2 + 4f_3 + f_4\right)$$

$$T_{2,4C} = T_{2,2} + \frac{h}{3}\left(g_2 + 4g_3 + g_4\right)$$

donde

$$f_2 = -\ 307.500$$

$$f_3 = -\ 267.500$$

$$f_4 = \frac{5}{6}\left(T_{2,4p} - T_{1,4p}\right) = \frac{5}{6}\left(394.300 - 674.55\right) = -\ 233.546$$

$$g_2 = 227.250$$

$$g_3 = 176.250$$

$$g_4 = \frac{3}{4}\left(T_{1,4p} - 2T_{2,4p} + 293\right) = \frac{3}{4}\left(674.555 - 2(394.300) + 293\right) = 134.216$$

sustituyendo

$$T_{1,4c} = 728 + \frac{0.1}{3}\left(-307.500 + 4(-267.500) - 233.546\right)$$

$$T_{2,4c} = 359 + \frac{0.1}{3}\left(227.250 + 4(176.250) + 134.216\right)$$

efectuando operaciones

$$T_{1,4c} = 674.298$$

$$T_{2,4c} = 394.549$$

Repitiendo el procedimiento para i = 4

$$T_{1,5p} = T_{1,1} + \frac{4}{3} h \left[2f_2 - f_3 + 2f_4\right]$$

$$T_{2,5p} = T_{2,1} + \frac{4}{3} h \left[2g_2 - g_3 + 2g_4\right]$$

$f_2 = -\ 307.500$ $\qquad$ $g_2 = 227.250$

$f_3 = -\ 267.500$ $\qquad$ $g_3 = 176.250$

$f_4 = -\ 233.124$ $\qquad$ $g_4 = 133.650$

sustituyendo valores

$$T_{1,5P} = 761 + \frac{4}{3}(0.1)\left[2(-307.500) - (-267.500) + 2(-233.124)\right]$$

$$T_{2,5P} = 333 + \frac{4}{3}(0.1)\left[2(227.250) - (176.250) + 2(133.650)\right]$$

efectuando operaciones

$$T_{1,5P} = 652.500$$

$$T_{2,5P} = 405.740$$

y los valores corregidos son

$$T_{1,5C} = T_{1,3} + \frac{h}{3}\left(f_3 + 4f_4 + f_5\right)$$

$$T_{2,5C} = T_{2,3} + \frac{h}{3}\left(g_3 + 4g_4 + g_5\right)$$

$f_3 = -\ 267.500$ $\qquad$ $g_3 = 176.250$

$f_4 = -\ 233.124$ $\qquad$ $g_4 = 133.650$

$f_5 = -\ 205.633$ $\qquad$ $g_5 = 100.515$

sustituyendo valores

$$T_{1,5C} = 700 + \frac{0.1}{3}\left(-\ 267.500 + 4(-233.124) + (-205.633)\right)$$

$$T_{2,5C} = 379 + \frac{0.1}{3}\left(176.250 + 4(133.650) + 100.515\right)$$

efectuando operaciones

$$T_{1,5C} = 653.146$$

$$T_{2,5C} = 406.046$$

Procediendo retiradamente en forma similar, hasta alcanzar t = 1 minuto, se llega a

$i = 5;$ $\quad T_1(t = 0.6)_p = 632.839 \quad T_1(t = 0.5)_c = 632.722$

$\quad T_2(t = 0.6)_p = 414.991 \quad T_2(t = 0.6)_c = 415.257$

$i = 6;$ $\quad T_1(t = 0.7)_p = 616.964 \quad T_1(t = 0.7)_c = 616.510$

$\quad T_2(t = 0.7)_p = 420.276 \quad T_2(t = 0.7)_c = 420.607$

$i = 7;$ $\quad T_1(t = 0.8)_p = 599.718 \quad T_1(t = 0.8)_c = 600.894$

$\quad T_2(t = 0.8)_p = 441.991 \quad T_2(t = 0.8)_c = 424.278$

$i = 8;$ $\quad T_1(t = 0.9)_p = 587.193 \quad T_1(t = 0.9)_c = 587.492$

$\quad T_2(t = 0.9)_p = 427.280 \quad T_2(t = 0.9)_c = 426.882$

$i = 9;$ $\quad T_1(t = 1.0)_p = 573.399 \quad T_1(t = 1.0)_c = 574.502$

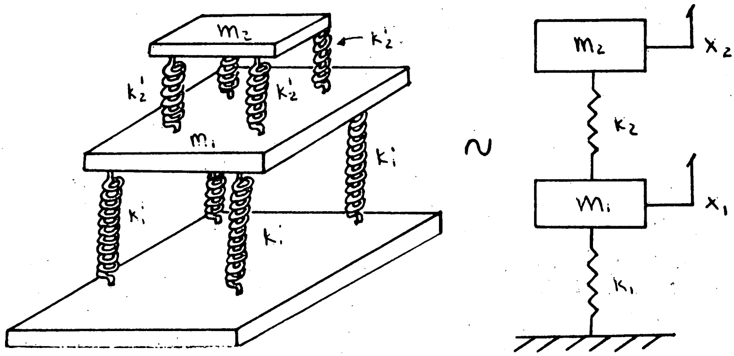
$\quad T_2(t = 1.0)_p = 438.539 \quad T_2(t = 1.0)_c = 427.539$

Finalmente las temperaturas, tanto del vapor como del líquido durante el primer minuto de funcionamiento son

	t (min)	$T_1(t)$ (°K)	$T_2(t)$ (°K)
TAYLOR	0.0	800	300
	0.1	761	333
	0.2	728	359
	0.3	700	379
MILNE	0.4	674	395
	0.5	653	406
	0.6	633	415
	0.7	617	421
	0.8	601	424
	0.9	587	427
	1.0	575	428

10. El departamento de mantenimiento de una empresa desea realizar pruebas de vibración en una máquina. Antes de llevar a cabo estas pruebas, se hizo el siguiente análisis teórico

El modelo simplicado del equipo se consideró como



donde

k_1' y k_2' = contantes de los resortes

m_1 y m_2 = Masa de los elementos

$$k_1 = \sum_{i=1}^{4} k_1^1$$

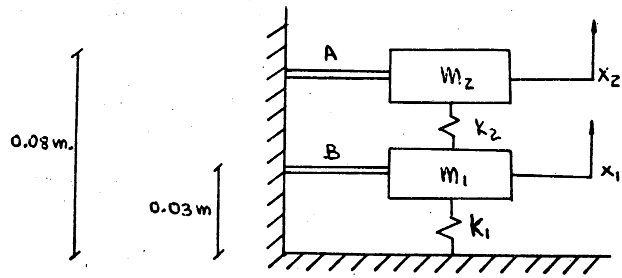
$$k_2 = \sum_{i=1}^{4} k_2^1$$

El sistema se representa matemáticamente con las siguientes ecuaciones diferenciales

$$m_1 \frac{d^2\, x_1(t)}{dt^2} = -\, k_1\, x_1(t) + k_2 \left[x_2(t) - x_1(t) \right]$$

$$m_2 \frac{d^2 x_2(t)}{dt^2} = -\, k_2 \left[x_2(t) - x_1(t) \right]$$

Siendo $x_1(t)$ y $x_2(t)$ los desplazamientos con respecto al tiempo de las masas m_1 y m_2 respectivamente. El sistema se considera inicialmente fijo de la siguiente forma



en el tiempo $t = 0$ son retirados los brazos A y B y las masas m_1 y m_2 comienzan a desplazarse.

Utilizando un polinomio de Taylor de 6°grado, calcular el desplazamiento que sufren las masas m_1 y m_2 durante los primeros 600 milisegundos, considerando que:

$$m_1 = 100 \quad kg_f \qquad k_1' = 175 \ \frac{kg_f}{m}$$

$$m_2 = 200 \ kg_f \qquad k_2' = 125 \ \frac{kg_f}{m}$$

Las condiciones iniciales del sistema son

$$x_1(t = 0) = 0.03 \text{ m}$$

$$x_2(t = 0) = 0.08 \text{ m}$$

estas condiciones se pueden observar claramente de la figura anterior, además

$$x_1'(t = 0) = 0$$

$$x_2'(t = 0) = 0$$

La derivadas de $x_1(t)$ y $x_2(t)$ representan la velocidad de cada una de las masas, siendo éstas iguales a cero, ya que están sujetas por los brazos A y B respectivamente.

Solución:

El sistema de ecuaciones que se obtiene al sustituir valores es

$$100 \ x_1'' = - 175(4) \ x_1 + 125(4) \left[x_2 - x_1 \right]$$

$$200 \ x_2'' = - 125(4) \left[x_2 - x_1 \right]$$

simplificando

$$x_1'' = -12x_1 + 5x_2$$

$$x_2'' = 2.5x_1 - 2.5x_2$$

La solución del sistema que proporciona el polinomio de Taylor es:

$$x_1(t) = x_1(0) + \frac{x_1'(0)}{1!}t + \frac{x_1''(0)}{2!}t^2 + \frac{x_1'''(0)}{3!}t^3 + \ldots + \frac{x_1^{(n)}(0)}{n!}t^n + \ldots$$

$$x_2(t) = x_2(0) + \frac{x_2'(0)}{1!}t + \frac{x_2''(0)}{2!}t^2 + \frac{x_2'''(0)}{3!}t^3 + \ldots + \frac{x_2^{(n)}(0)}{n!}t^n + \ldots$$

Obteniendo las derivadas de ambas funciones

$$\begin{array}{ll}
x_1'' = -12x_1 + 5x_2 & x_2'' = 2.5x_1 - 2.5x_2 \\
x_1''' = -12x_1' + 5x_2' & x_2''' = 2.5x_1' - 2.5x_2' \\
x_1^{iv} = -12x_1'' + 5x_2'' & x_2^{iv} = 2.5x_1'' - 2.5x_2'' \\
\vdots \qquad \vdots & \vdots \qquad \vdots \\
x_1^{(n)} = -12x_1^{(n-2)} + 5x_2^{(n-2)} & x_2^{(n)} = 2.5x_1^{(n-2)} - 2.5x_2^{(n-2)} \\
\vdots & \vdots
\end{array}$$

De las condiciones iniciales y de los valores de las primeras seis derivadas se tiene

$$x_1''(0) = -12x_1(0) + 5x_2(0) = -12(0.03) + 5(0.08) = 0.04$$

$$x_2''(0) = 2.5x_1(0) - 2.5x_2(0) = 2.5(0.03) - 2.5(0.08) = -0.13$$

$$x_1'''(0) = -12x_1'(0) + 5x_2'(0) = -12(0) + 5(0) = 0.00$$

$$x_2'''(0) = 2.5x_1'(0) - 2.5x_2'(0) = 2.5(0) - 2.5(0) = 0.00$$

$$x_1^{iv}(0) = -12x_1''(0) + 5x_2''(0) = -12(0.04) + 5(-0.13) = -1.13$$

$$x_2^{iv}(0) = 2.5x_1''(0) - 2.5x_2''(0) = 2.5(0.04) - 2.5(-0.13) = 0.43$$

$$x_1^{v}(0) = -12x_1'''(0) + 5x_2'''(0) = -12(0) + 5(0) = 0.00$$

$$x_2^{v}(0) = 2.5x_1'''(0) + 2.5x_2'''(0) = 2.5(0) - 2.5(0) = 0.00$$

$$x_1^{vi}(0) = -12x_1^{iv}(0) + 5x_2^{iv}(0) = -12(-1.13) + 5(0.43) = 15.69$$

$$x_2^{vi}(0) = 2.5x_1^{iv}(0) - 2.5x_2^{iv}(0) = 2.5(-1.13) - 2.5(0.425) = -3.89$$

sustituyendo

$$x_1(t) = 0.03 + (0)t + \frac{0.04}{2!}t^2 + (0)t^3 + \frac{-1.13}{4!}t^4 + (0)t^5 + \frac{15.69}{6!}t$$

$$x_2(t) = 0.08 + (0)t + \frac{-0.13}{2!}t^2 + (0)t^3 + \frac{0.43}{4!}t^4 + (0)t^5 + \frac{-3.89}{6!}$$

simplificando

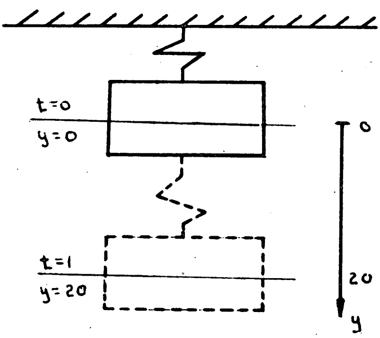
$$x_1(t) = 0.03 + 0.02t^2 - 0.05t^4 + 0.02t^6$$

$$x_2(t) = 0.08 - 0.07t^2 + 0.02t^4 - 0.01t^6$$

Tabulando las soluciones durante los primeros 600 milisegun considerando incrementos de h = 100 milisegundos, se obtien finalmente

t (s)	x_1 (cm)	x_2 (cm)
0.0	3.00	8.00
0.1	3.02	7.93
0.2	3.07	7.72
0.3	3.14	7.38
0.4	3.20	6.93
0.5	3.22	6.36
0.6	3.17	5.69

11. En el sistema mecánico de la siguiente figura



Se encontró que después de un segundo, la masa había recorrido 20 cm. Encontrar la velocidad inicial de la masa ($v(t = 0) = ?$), considerando

$$m = 3 \text{ Kgm}$$

$$K = \text{cte de resorte} = 5 \ \frac{Kg_f}{cm}$$

Solución:

A partir de la segunda Ley de Newton

$$F = ma$$

se obtiene que:

$$F = - Ky(t)$$

$$a = \frac{d^2}{dt^2} y(t)$$

sustituyendo:

$$-yK = m \frac{d^2}{dt^2} y$$

igualando a cero:

$$\frac{d^2y}{dt} + \frac{K}{m} y = 0$$

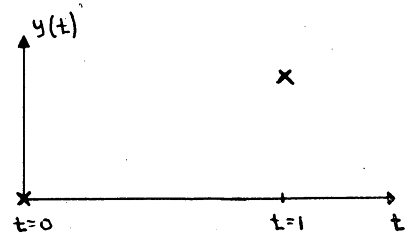
Al resolver esta ecuación diferencial se obtendrá una función y(t) que representa el desplazamiento de la masa, de esta función se conocen los siguientes puntos

$$y(0) = 0$$

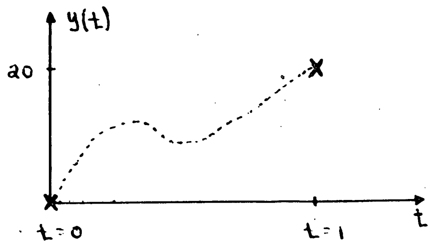
y

$$y(1) = 20$$

Los cuales son las condiciones de las fronteras del problema, gráficamente



El comportamiento de la función entre las dos fronteras se obtendrá al resolver la ecuación diferencial



A través del método de diferencias finitas, se obtiene al sustituir la segunda derivada por la fórmula numérica

$$\hat{y}'' = \frac{1}{h^2}\left\{1 \quad \underline{\underline{-2}} \quad 1\right\} + e_r$$

lo siguiente

$$\frac{1}{h^2}\left\{y_{i-1} - \underset{\uparrow}{2y_i} + y_{i+1}\right\} + \frac{k}{m}\, y_i = 0$$

Pivote

despejando y_{i+1}

$$Y_{i+1} = \left(-\frac{kh^2}{m} + 2\right) y_i - y_{i-1}$$

Considerando h = 0.2 y sustituyendo los valores de k y m se obtiene:

$$y_{i+1} = 1.9333\, y_i - y_{i-1} \qquad \ldots \text{(a)}$$

A partir de la condición de la frontera inicial

$$y_0 = y(0) = 0$$

y suponiendo

$$y_1 = y(0.2) = 4$$

Se puede obtener el valor de $y_2 = y(0.4)$ considerando $i = 1$ en la expresión (a)

$$y_2 = 1.9333\ y_1 - y_0$$

sustituyendo valores

$$y_2 = 1.9333(4) - 0 = 7.7332$$

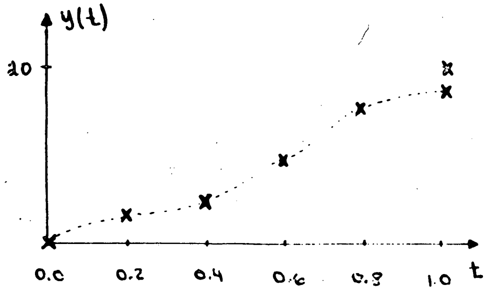
en forma análoga

$i = 2;\quad y_3 = 1.9333y_2 - y_1 = 1.9333(7.7332) - 4 = 10.9506$

$i = 3;\quad y_4 = 1.9333y_3 - y_2 = 1.9333(10.9506) - 7.7332 = 13.4376$

$i = 4;\quad y_5 = 1.9333y_4 - y_3 = 1.9333(13.4376) - 10.9506 = 15.0283$

Graficando estos resultados



Se observa que la condición de la frontera final no se satisface. Suponiendo que y_1 en lugar de cuatro tenga un valor de seis, se obtiene que

$$y_0 = 0$$

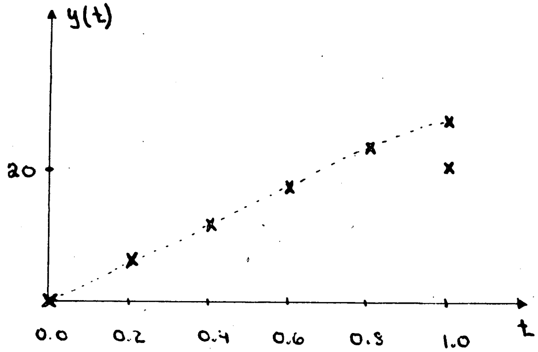
$$y_1 = 6$$

$i = 1;\quad y_2 = 1.9333y_1 - y_0 = 1.9333(6) - 0 = 11.5998$

$i = 2;\quad y_3 = 1.9333y_2 - y_1 = 1.9333(11.5980) - 6 = 16.4259$

$i = 3;\quad y_4 = 1.9333y_3 - y_2 = 1.9333(16.4224) - 115980 = 20.1564$

$i = 4;\quad y_5 = 1.9333y_4 - y_3 = 1.9333(20.1514) - 16.4224 = 22.5424$



La condición de la frontera final tampoco se satisface considerando el valor $y_1 = 6$, pero con este análisis se puede asegurar que el valor correcto de y_1 se encuentra entre cuatro y seis. Efectuando una interpolación lineal con la siguiente tabla

	y_6	y_1
	15.0283	4
20.000 →		
	22.5424	6

$$y_1 = \frac{(20 - 22.5424)}{(15.0283 - 22.5424)}(4) + \frac{(20 - 15.0283)}{(22.5424 - 15.0283)}(6)$$

$$y_1 = 1.3534 + 3.9699 = 5.3233$$

Resolviendo el problema de nuevo

$$y_0 = 0$$

$$y_1 = 5.3233$$

$i = 1;$ $\quad y_2 = 1.9333y_1 - y_0 = 1.9333(5.3233) - 0.0000 = 10.2915$

$i = 2;$ $\quad y_3 = 1.9333y_2 - y_1 = 1.9333(10.2915) - 5.3233 = 14.5733$

$i = 3;$ $\quad y_4 = 1.9333y_3 - y_2 = 1.9333(14.5733) - 10.2915 = 17.8831$

$i = 4;$ $\quad y_5 = 1.9333y_4 - y_3 = 1.9333(17.8831) - 14.5733 = 20.0001$

Siendo esta la solución correcta debido a que satisface las dos condiciones de frontera

t	y(t)
0.0	0.0000
0.2	5.3233
0.4	10.2915
0.6	14.5733
0.8	17.8831
1.0	20.0001

Como $y(t)$ representa la distancia recorrida por la masa entonces $y'(t)$ debe representar su velocidad. Para determinar la velocidad inicial de la masa es necesario obtener $y'(t = 0)$. Derivando numéricamente, haciendo uso de la siguiente fórmula

$$y'_0 = \frac{1}{6h} \left\{ -11 \quad 18 \quad -9 \quad 2 \right\} + e_r$$

se obtiene

$$y'_0 = \frac{1}{6(0.2)} \left\{ -11(0.0000) + 18(5.3233) - 9(10.2915) + 2(14.5733) \right\} + e_r$$

Finalmente, efectuando operaciones y despreciando el error, se tiene que la velocidad inicial de la masa es

$$v(t = 0) = y'_0 = 27 \ {}^{cm}/s$$

12. El departamento de ventas de la compañía "ALFA" ha determinado que la demanda de un nuevo producto se desarrollará de acuerdo a la siguiente ecuación diferencial

$$y'' + y' = 0$$

donde $y(t)$ es una función que representa las ventas del producto en un tiempo dado.

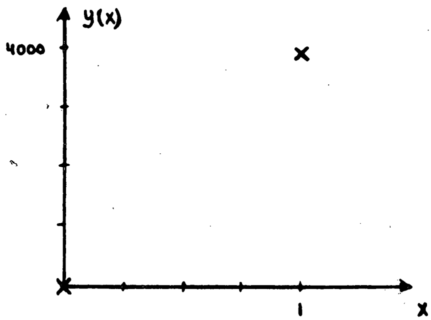
Para que la producción sea rentable se considera necesario que al cabo de un año, se deben vender cuatro mil unidades diarias. ¿Cuál debe ser la producción trimestral para lograr alcanzar la meta al finalizar el primer año?

Solución:

Al resolver la ecuación diferencial, con las siguientes condiciones de frontera:

$$y(0) = 0$$

$$y(1) = 4000$$



se obtiene la respuesta a la pregunta planteada. Utilizando el método de diferencias finitas para resolver la ecuación, por las fórmulas

$$y'' = \frac{1}{h^2} \left\{ 1 \quad \underline{\underline{-2}} \quad 1 \right\}$$

$$y' = \frac{1}{2h} \left\{ -1 \quad \underline{\underline{0}} \quad 1 \right\}$$

se obtiene

$$\frac{1}{h^2} \left\{ y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} \right\} + \frac{1}{2h} \left\{ - y_{i-1} + y_{i+1} \right\} = 0$$

considerando h = 0.25 (un trimestre)

$$\left(\frac{1}{0.25^2} - \frac{1}{2(0.25)} \right) y_{i-1} + \left(\frac{-2}{0.25^2} \right) y_i + \left(\frac{1}{0.25^2} + \frac{1}{2(0.25)} \right) y_{i+1} = 0$$

simplificando

$$14y_{i-1} - 32y_i + 18y_{i+1} = 0$$

Valuando esta ecuación para i = 1, 2, 3 y 4, se obtiene el siguiente sistema

$$\begin{aligned} 14y_0 - 32y_1 + 18y_2 \qquad\qquad &= 0 \\ 14y_1 - 32y_2 + 18y_3 \qquad &= 0 \\ 14y_2 - 32y_3 + 18y_4 &= 0 \end{aligned}$$

sustituyendo las condiciones de frontera

$$\begin{aligned} -32y_1 + 18y_2 \qquad\quad &= 0 \\ 14y_1 - 32y_2 + 18y_3 &= 0 \\ 14y_2 - 32y_3 &= -72{,}000 \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema, utilizando el método de Gauss-Seidel, se obtienen los siguientes resultados

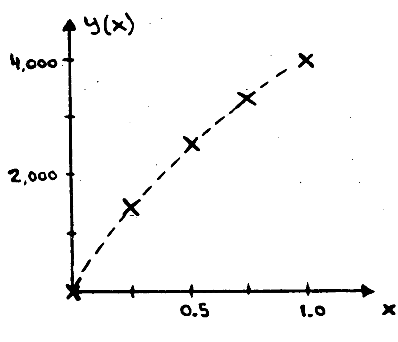
$y_1 = 1402$

$y_2 = 2492$

$y_3 = 3340$

Por lo tanto, el resultado de la ecuación diferencial es:

x	y(x)
0.00	0000
0.25	1402
0.50	2492
0.75	3340
1.00	4000

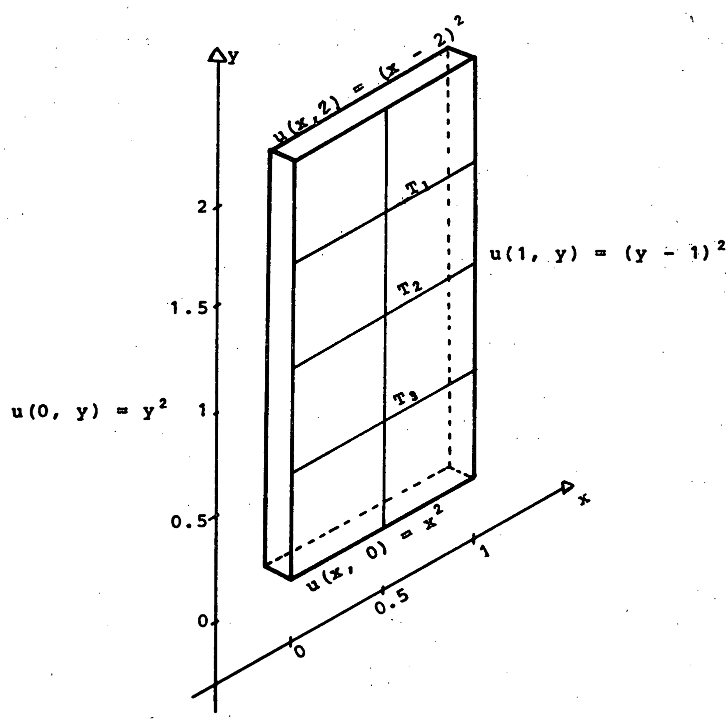


TEMA VIII SOLUCION NUMERICA DE ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES

1. La ecuación elíptica de Poisson

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 4.$$

representa la temperatura de una placa de metal, como la que se muestra en la figura, la cual forma parte de una máquina procesadora de alimentos.



La temperatura en el centro de la placa, debe mantenerse entre cero y un grado centígrado para asegurar el buen funcionamiento de la máquina, las temperaturas en la periferia de dicha placa varían en las cuatro caras debido a la estructura de la propia máquina.

En forma experimental se ha determinado que la distribución de temperaturas en la periferia es como sigue:

$$u(x, 0) = x^2 \quad ; \quad u(x, 2) = (x - 2)^2 \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$u(0, y) = y^2 \quad ; \quad u(1, y) = (y - 1)^2 \quad 0 \leq y \leq 2$$

¿Se podría asegurar el buen funcionamiento de la máquina para las condiciones establecidas?

Solución:

Sustituyendo en la ecuación la fórmula de derivación parcial

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & \underline{\underline{-4}} & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

se obtiene

$$\frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 4$$

Como AX = AY = h = 0.5 , entonces

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 4(0.5)^2 = 1 \quad \ldots (A)$$

que equivale a

$$u(x_{i-1}, y_i) + u(x_i, y_{i-1}) - 4\, u(x_i, y_i) + u(x_i, y_{i+1}) +$$
$$+ u(x_{i+1}, y_i) = 1 \quad \ldots (B)$$

Tabulando las condiciones de frontera

x \ y	0	0.5	1	1.5	2
0	0	0.25	1	2.25	4
0.5	0.25	T_1	T_2	T_3	2.25
1	1	0.25	0	0.25	1

Para facilitar la aplicación de la ecuación de recurrencia se sobrepone la matriz de la ecuación (A) sobre los primeros valores de la Tabla, centrándola en T_1 y multiplicando cada elemento de la matriz por el correspondiente elemento de la tabla, ésto equivale a usar la fórmula de recurrencia (B), tomando como pivote el valor de T_1; de ésta manera, se establece la relación

$$0.25 + 0.25 - 4\ T_1 + T_2 + 0.25 = 1$$

repitiendo el procedimiento con T_2 y T_3.

$$1 + T_1 - 4\ T_2 + T_3 = 1$$

$$2.25 + T_2 - 4\ T_3 + 2.25 + 0.25 = 1$$

simplificando

$$-\ 4\ T_1 + T_2 = 0.25$$

$$T_1 - 4\ T_2 + T_3 = 2$$

$$T_2 - 4\ T_3 = -3.75$$

Como se tiene un sistema cuya matriz de coeficientes contiene los elementos de mayor valor absoluto de la - diagonal principal se puede aplicar el método de Gauss-Seidel.

En donde:

$$T_1 = 0.25\ (T_2 - 0.25)$$

$$T_2 = 0.25\ (T_1 + T_3\ )$$

$$T_3 = 0.25\ (T_2 + 3.75)$$

Resolviendo el sistema con $\bar{T}^{(0)} = \left[\ 0,\ 0,\ 0\ \right]$

$T_1 = -\ 0.0039$; -0.0005 ; 0.0000 ; 0

$T_2 = 0.2344$; 0.2480 ; 0.2498 ; 0.25

$T_3 = 0.9375$; 0.9960 ; 0.9995 ; 1

Por lo tanto

$$T_1 = 0\ ,\quad T_2 = 0.25\ ,\quad T_3 = 1$$

La temperatura en el centro de la placa es menor que uno, se puede asegurar entonces el buen funcionamiento de la máquina.

2. El voltaje en cada punto de una línea de transmisión, durante los primeros instantes después de haberse conectado a una fuente de enrgía, se puede modelar mediante la ecuación

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}(x,t) - LC\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}(x,t) - (RC + LG)\frac{\partial E}{\partial t}(x,t) = RGE(x,t)$$

donde R y L son respectivamente la resistencia e inductancia del conductor por unidad de longitud. Por otra parte C y G representan la capacitancia y conductancia que hay entre la tierra y el conductor, por unidad de longitud.

Considerando los siguientes valores:

$R = 0.031$ [ohm/km]

$G = 6.6 \times 10^{-7}$ [mho/km]

$L = 1.122 \times 10^{-3}$ [henry/km]

$C = 4.42 \times 10^{-4}$ [farad/km]

Tabule el voltaje $E(x,t)$ para una línea de 4 km de longitud, durante un milésimo de segundo, usando el método de diferencias finitas, con las siguiente condiciones:

$E(x,0) = 0$

$E(0,t) = 23000 \text{ sen } 120\pi t$ [volts]

$E(10,t) = E(9,t)$

$$\left.\frac{\partial E(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0; \; x > 0$$

$\Delta x = 1$ [km]

$\Delta t =$ [10^{-4} seg.]

SOLUCION:

Sustituyendo en la ecuación las siguientes fórmulas de derivación parcial (ordenadas en forma matricial).

$$\left.\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}\right|_{i=j} = \frac{1}{\Delta x^2}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left.\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}\right|_{i,j} = \frac{1}{\Delta t^2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left.\frac{\partial E}{\partial t}\right|_{i,j} = \frac{1}{2\Delta t}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

se obtiene

$$\frac{1}{\Delta x^2}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \frac{LC}{\Delta t^2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \frac{RC + LG}{2\Delta t}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = RG\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

sustituyendo los valores de R, C, L, G, Δt y Δx

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \frac{(1.122x10^{-3})(4.42x10^{-4})}{(10^{-4})^2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} -$$

$$- \frac{(0.031)(4.42x10^{-4})+(1.122x10^{-3})(6.6x10^{-7})}{2(10^{-4})}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= (0.031)(6.6x10^{-7})\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

haciendo operaciones y sumando los términos semejantes se obtiene

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -49.52 & 97.18 & -49.59 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

lo cual equivale a la siguiente ecuación

$$E(x_{i-1},t_j) -49.52E(x_i,t_{j-1}) + 97.18E(x_i,t_j)$$

$$-49.59E(x_i,t_{j+1}) + E(x_{i+1},t_j) = 0 \qquad \ldots \text{(A)}$$

Como no se conoce el voltaje que habrá en cada punto de la línea para el tiempo $t = 1 \times 10^{-3}$ segundos, es necesario resolver el problema en forma iterativa para lo cual, se despeja $E(x_i, t_{j+1})$ de la expresión (A), de esta manera

$$E(x_i, t_{j+1}) = 0.02\, E(x_{i-1}, t_j) - E(x_i, t_{j-1}) + 1.96\, E(x_i, t_j) + \\ + 0.02\, E(x_{i+1}, t_j) \qquad \text{(B)}$$

Antes de aplicar esta fórmula de recurrencia es conveniente tabular las condiciones iniciales y de frontera, como se muestra a continuación

x_i \ t_j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10 [$\times 10^{-4}$ seg]
0	0	866	1,732	2,595	3,455	4,309	5,158	5,999	6,831	7,654	8,466
1	0	0									
2	0	0									
3	0	0									
4	0	0									

[km]

Los valores del primer renglón $E(0,t)$ se obtienen al evaluar la condición $E(0,t) = 23000 \text{ sen } 120\pi t$ en $t = 0,1,2,...10$, y los valores de $E(x, 1)$ son iguales a $E(x, 0)$ debido a que la condición

$$\left.\frac{\partial E(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$$

indica que no existe variación del voltaje en $t=0$ y $x > 0$.

Como no es posible calcular $E(10,t_j)$, usando la fórmula de recurrencia, por la falta de los valores $E(11,t_{j-1})$, se usará la condición

$$E(10,t) = E(9,t) \qquad ; \; t > 0$$

Aplicando la fórmula de recurrencia (B) sobre las condiciones iniciales, se obtiene la siguiente tabla que presenta el voltaje en función de la distancia x(km) y el tiempo t(diez milésimas de segundo).

x \ t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	[$x10^{-4}$seg]
0	0	866	1732	2595	3455	4309	5158	5999	6831	7654	8466	
1	0	0	17	67	166	327	561	876	1276	1763	2335	
2	0	0	0	0	1	5	15	35	71	129	217	
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	4	
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
[km]												

3) Se ha observado que la temperatura en los diferentes puntos de una barra delgada, que se encuentra aislada del medio ambiente y parte de un estado de desequilibrio, esta dada por la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, x) = 0 \quad \text{para un tiempo } t_j \text{ en el punto } x_i$$

Considerando una barra de 2 metros de longitud y las siguientes condiciones iniciales:

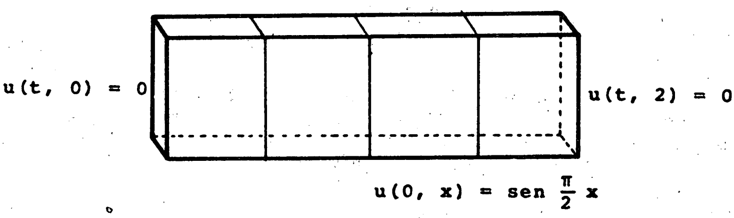
$$u(t, 0) = u(t, 0.2) = 0 \quad ; \ t > 0$$

$$u(0, x) = \text{sen}\,\frac{\pi}{2}\,x \quad ; \ 0 \leq x \leq \ 2 \text{ m.}$$

Cuánto tiempo tiene que transcurrir para que la barra se encuentre a cero grados centígrados en todos los puntos, aproximando a dos cifras decimales.

Solución:

Para aplicar el método de diferencias finitas, se dividirá la barra en cuatro partes iguales de 0.5m cada una y se calculará la temperatura en cada punto de la barra para diferentes tiempos.



Las fórmulas de derivación parcial que se utilizan en este ejemplo son:

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t,x) \Bigg|_{i,j} = \frac{1}{\Delta t} \Big[-u(t_i,x_j) + u(t_{i+1}, x_j) \Big]$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t,x) \Bigg|_{i,j} = \frac{1}{(\Delta x)^2} \Big[u(t_i, x_{j-1}) - 2\, u(t_i, x_j) + u(t_i, x_{j+1}) \Big]$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial

$$\frac{1}{\Delta t} \quad -u(t_i, x_j) + u(t_{i+1}, x_j) \quad -$$

$$\frac{1}{(\Delta x)^2} \quad u(t_i, x_{j-1}) - 2\, u(t_i, x_j) + u(t_i, x_{j+1}) = 0 \qquad \text{(A)}$$

Por las condiciones iniciales y la forma del problema, se debe encontrar una fórmula de recurrencia que proporcione las temperaturas en el tiempo t_{i+1} a partir de las correspondientes en t_i, para lo cual se despeja de la ecuación (A) el término $u(t_{i+1}, x_j)$. Esto es,

$$u(t_{i+1}, x_j) = u(t_i, x_j) + \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \Big[u(t_i, x_{j-1}) - 2\, u(t_i, x_j) + u(t_i, x_{j+1}) \Big]$$

Como $\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$ tiene que ser menor que 0.5 para tener una solución estable y se ha fijado $\Delta x = 0.5$, entonces se tomará $\Delta t = 0.05$, de manera que

$$\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} = \frac{0.05}{(0.5)^2} = 0.2$$

sustituyendo estos valores

$$u(t_{i+1}, x_j) = u(t_i, x_j) + 0.2 \;\; u(t_i, x_{j-1}) - 2\,u(t_i, x_j) + u(t_i, x_{j+1})$$

$$= 0.2\,u(t_i, x_{j-1}) + 0.6\,u(t_i, x_j) + 0.2\,u(t_i, x_{j+1})$$

Para facilitar la aplicación manual de esta fórmula de recurrencia, se puede plantear en la siguiente forma

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} j-1 & j & j+1 \end{array} \\ \begin{array}{c} i-1 \\ i \\ i+1 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0 & \boxed{} & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Tabulando las temperaturas $u(t,x)$ para $t = 0$ mediante la condición

$$u(0,\, x) = \text{sen}\,\frac{\pi}{2}\,x \qquad ; \quad 0 \leq x \leq 2 \text{ m}$$

se obtiene

x	0	0.5	1	1.5	2
u(0, x)	0	0.7071	1	0.7071	0

A partir de estos valores y tomando en cuenta las condiciones

$$u(t,\, 0) = 0 \qquad ; \quad t > 0$$

$$u(t,\, 2) = 0 \qquad ; \quad t > 0$$

se pueden calcular las temperaturas en t = 1, sobreponiendo la plantilla (C) en los puntos u(0, x), con lo cual

$$u(1, 0) = 0$$

$$u(1,0.5) = 0.2(0) + 0.6(0.7071) + 0.2(1) = 0.624$$

$$u(1,1) = 0.2(0.7071) + 0.6(1) + 0.2(0.7071) = 0.8828$$

$$u(1,1.5) = 0.2(1) + 0.6(0.7071) = 0.624$$

$$u(1,2) = 0$$

Como la variación de la temperatura es lenta, es conveniente utilizar un programa de computadora, como el que se muestra a continuación, para hacer los cálculos.

```
10 DIM U(43,5)
20 CLS: RY$="------------------------------------------------------------":
        A$=" ##     ": B$=" #.##   ": PRINT RY$
30 REM CONDICIONES INICIALES Y DE FRONTERA.
40 FOR X=0 TO 2 STEP 0.5
50        U(I,J)= SIN(0.5*3.141592*X)
60        PRINT USING A$;I;: PRINT USING A$;J;
70        PRINT USING B$;T;: PRINT USING B$;X;
80        PRINT USING B$;U(I,J): PRINT
90        J=J+1
100 NEXT X
110 REM
120 REM CALCULO DE LA ECUACION.
130 REM
140 PRINT RY$
150 N=J-1
160 FOR I=0 TO 42
170        J=0: X=0
180        T=T+0.05
190        PRINT USING A$; I+1;: PRINT USING A$;J;
200        PRINT USING B$;T;: PRINT USING B$;X;
210        PRINT USING B$;U(I+1,0): PRINT
220        FOR J=1 TO N-1
230        X=X+0.5
240        U(I+1,J)= 0.2*(U(I,J-1)+U(I,J+1))+0.6*U(I,J)
250        PRINT USING A$;I+1;: PRINT USING A$;J;
260        PRINT USING B$;T;:   PRINT USING B$;X;
270        PRINT USING B$;U(I+1,J): PRINT
280        NEXT J
290        X=X+0.5
300        PRINT USING A$;I+1;: PRINT USING A$;J;
310        PRINT USING B$;T;:   PRINT USING B$;X;
320        PRINT USING B$;U(I+1,J): PRINT
330        PRINT RY$
340 NEXT I
350 END
```

Este programa ha sido elaborado para una máquina Radio Shack, TRS-80 modelo I y los resultados obtenidos fueron los siguientes:

i	j	t_{i+1}	x_j	$u(t_i, x_j)$
1	0	0.05	0.00	0.00
1	1	0.05	0.50	0.62
1	2	0.05	1.00	0.88
1	3	0.05	1.50	0.62
1	4	0.05	2.00	0.00
2	0	0.10	0.00	0.00
2	1	0.10	0.50	0.55
2	2	0.10	1.00	0.78
2	3	0.10	1.50	0.55
2	4	0.10	2.00	0.00
		•		
		•		
		•		
42	0	2.10	0.00	0.00
42	1	2.10	0.50	0.00
42	2	2.10	1.00	0.01
42	3	2.10	1.50	0.00
42	4	2.10	2.00	0.00
43	0	2.15	0.00	0.00
43	1	2.15	0.50	0.00
43	2	2.15	1.00	0.00
43	3	2.15	1.50	0.00
43	4	2.15	2.00	0.00

Por lo tanto se puede concluir que el tiempo necesario para que se estabilice la temperatura es $t = 2.15$ unida des de tiempo.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Para la ecuación en derivadas parciales,

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} - \frac{\partial\, u(x,y)}{\partial y} = 0$$

con las siguientes condiciones:

$$u(0,y) = 1 \ ; \ u(2,y) = 2 \qquad ; \ 0 \leq y \leq 3$$
$$u(1,0) = 3 \ ; \ u(1,3) = 4$$
$$\Delta x = \Delta y = 1$$

encuentre mediante el método de diferencias finitas, una aproximación a los valores de $u(1,1)$ y $u(1,2)$.

Solución:

$u(1,1) = 2$, $u(1,2) = 1$

2. Encuentre una fórmula de recurrencia para determinar los valores de $W(x_{i+1,j})$, que resuelven numéricamente la siguiente ecuación

$$\frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x^2} - 4\frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial y^2} = x + y$$

con $\Delta x = 1$ y $\Delta y = 2$

Solución:

$$W_{i+1,j} = x_i + y_j - W_{i-1,j} + W_{i,j-1} + W_{i,j+1}$$

3. Con el método de diferencias finitas, genere el sistema de ecuaciones (sin resolverlo) que pueda proporcionar una aproximación a la solución, de la ecuación

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + 4\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 10$$

en la región $R = \left\{ (x,y)/0 \leq x \leq 3 \; ; \; 1 \leq y \leq 4 \right\}$

con las siguientes condiciones:

$$u(o,y) = 2y - 1 \quad ; \quad u(3,y) = 2^y \quad ; \quad 1 \leq y \leq 4$$

$$u(x,1) = x \quad ; \quad u(x,4) = x^2 \quad ; \quad 0 < x < 3$$

$$\Delta x = \Delta y = 1$$

Solución:

$$-u_{13} + u_{22} + u_{23} = 14$$

$$-u_{12} - u_{22} + u_{23} = 6$$

$$u_{12} - u_{13} - u_{23} = 1$$

$$u_{12} + u_{13} - u_{22} = -5$$

4. La presión que hay en un tubo de longitud ℓ en función de la distancia al origen de referencia x y del tiempo t, se puede representar mediante la ecuación

$$\frac{\partial^2 P(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{K} \frac{\partial^2 P(x,t)}{\partial t^2}$$

donde K es una constante que depende de las características físicas del tubo.

Considerando las siguientes condiciones:

$$P(o,t) = t \quad ; \quad \left.\frac{\partial P(x,t)}{\partial x}\right|_{x=\ell} = 0 \quad ; \quad t \geq 0$$

$$P(x,0) = 0 \quad ; \quad \left.\frac{\partial P(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0 \quad ; \quad 0 < x \leq 5$$

$$\Delta x = \Delta t = 1 \quad ; \quad \ell = 5 \text{ m}; \; K = 1$$

Encuentre una aproximación de la presión que tendrá el tubo en $t = 5$ y $x = 1,2,3$ y 4.

Solución:

x	t	P(x,t)
0	5	5
1	5	4
2	5	3
3	5	2
4	5	1
5	5	1

5. Dada la ecuación

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + 10\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = -100\, u(x,t)$$

Con las siguientes condiciones

$$u(x,0) = 0 \quad ; \quad \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = 10\, x \qquad ; \quad 0 < x < 1$$

$$u(0,t) = 0 \quad ; \quad u(1,t) = 0 \qquad ; \quad t \geq 0$$

$$\Delta x = \Delta y = 0.1$$

Obtenga una aproximación a la función $u(x,t)$ para $t=0.3$ y $x = 0.5$