

CAPÍTULO IV

MARCO TEORICO

4.1 Tomografía Eléctrica Resistiva

Tomografía Eléctrica Resistiva o ERT (del inglés Electrical Resistance Tomography) es un método utilizado para estimar la distribución de resistividad eléctrica en una sección del subsuelo, a partir de la adquisición de mediciones de resistividad aparente realizadas con un cuadripolo de electrodos (2 corriente y 2 potencial) en una geometría determinada, posteriormente se les aplica un algoritmo de inversión, para obtener así una imagen eléctrica (un modelo de resistividad verdadera en 2D ó 3D del subsuelo).

Una corriente eléctrica continua puede propagarse en rocas y minerales de tres maneras distintas: por conducción electrónica u óhmica (los electrones fluyen libremente dentro de la estructura cristalina del material), por conducción electrolítica (la corriente es portada por los iones de soluciones salinas, a una velocidad lenta, y se mueven a través de los poros interconectados de suelo permeable, sedimentos no consolidados y rocas) y por conducción dieléctrica (en materiales de baja conductividad o aislantes cuando se aplica una corriente variable en el tiempo). La mayoría de las rocas no contienen materiales de tipo metálico, por lo que su conductividad eléctrica se debe a los iones y a su movilidad a través del agua almacenada en los poros de las rocas; la presencia de iones está estrechamente relacionada con el contenido de agua en la roca y las sales que contenga en disolución (Telford *et al.*, 1976).

La resistividad del subsuelo varía de acuerdo con el contenido y clase de minerales y fluidos, de su porosidad y grado de saturación de agua (Loke y Baker, 1996a).

Para representar las mediciones en un sondeo eléctrico 2D se utiliza el método de contornos o pseudosección. En estos casos, la ubicación horizontal del punto de medición (punto de atribución) se pone en medio entre los electrodos del arreglo o dispositivo utilizado. La ubicación vertical del punto de medición se dispone a una distancia que es proporcional a la separación entre los electrodos.

La pseudosección presenta una distribución aproximada de la resistividad del subsuelo, debido a que la forma de los contornos depende del tipo de arreglo o configuración electródica utilizada, así como también, de la resistividad del subsuelo. Las diferentes configuraciones utilizadas para una misma zona pueden dar origen a representaciones gráficas o pseudosecciones muy

diferentes. Una equivocación común es tratar de usar la pseudosección como una imagen final de resistividad verdadera del subsuelo.

Una aplicación práctica y de gran utilidad de la pseudosección es escoger y reconocer medidas de resistividad aparente “malas”, ya que tales medidas comúnmente aparecen como puntos con valores extraordinariamente altos o bajos.

En comparación con los SEVs (Sondeos Eléctricos Verticales) y las calicatas que utilizan cuatro electrodos y se toman unas decenas de mediciones, la tomografía requiere hablar de diez o centenares de electrodos y hacer centenares o miles de tales medidas. Claramente, los sistemas manuales disponibles de medidas que fueron diseñados para una, o quizá algunas medidas a la vez, no fueron prácticos para Tomografía Eléctrica. Los sistemas de alta velocidad, automatizados fueron necesarios y son los que utilizan actualmente en la adquisición de información.

El sistema automatizado actual es mucho más rápido que la adquisición manual y eliminó el cambio de conexión con los electrodos y errores en la transcripción de datos a un medio digital (computadora). El día de hoy, los sistemas de medidas están comercialmente disponibles, resultando de diez a veinte veces más rápido (hasta algunas mil medidas por hora) el proceso de la toma de medidas, además, pueden tomarse simultáneamente medidas con centenares de electrodos (Butler *et al.*, 2005).

En una ERT, se usan cuatro electrodos para hacer la medida, para minimizar el efecto de resistencia de contacto en la interfaz entre el agua del poro del terreno y el electrodo. Una corriente conocida es inyectada en dos electrodos y la diferencia potencial es medida en los otros electrodos.

Los errores en la medición no son generalmente aleatorios, dependen entre otras cosas del entorno en donde se lleve a cabo las mediciones, la inversión de datos se ve afectada fuertemente por este tipo de errores, además, la resolución del perfil final dependerá de la distribución de la resistividad en el subsuelo y de la geometría de electródica, entre otros factores (Tejero *et al.*, 2002).

Butler *et al.* (2005) asegura que:

- 1) Es importante lograr que todos los datos sean linealmente independientes para probar la configuración de electrodos. Con esto se logra cualquier medida adicional mediante la superposición lineal de medidas ya asumidas.
- 2) Es necesario para probar el arreglo, obtener cada medida y su recíproco. Una medida recíproca se hace intercambiando el par de electrodos que se empleó para la medida de voltaje con el par de electrodos que se usó para la inyección. La impedancia de transferencia para estos dos casos será idéntica si el sistema responde linealmente (i.e., según la ley de Ohm) y allí no habrá ningún error de medida. Por consiguiente, una comparación de una resistencia de medida con su recíproco provee una estimación del error de datos que es un señalizador más confiable de error que repetibilidad del equipo.

4.2 Teoría básica de inversión

La finalidad de la inversión de los datos para una Tomografía Eléctrica Resistiva es hallar un modelo de la distribución de resistividades de una sección del subsuelo que se ajuste con las mediciones de resistividad obtenidas sobre la superficie (Loke y Baker, 1996b).

Para calcular una imagen de resistividad de datos mediante el método de Tomografía Eléctrica, hay que llevar a cabo un procedimiento de inversión que produce un modelo que da un ajuste "aceptable" para los datos y satisface cualquier restricción prescrita en el modelo, desafortunadamente, un ajuste aceptable puede ser mirado como subjetivo.

Se puede empezar con una función objetivo que define qué tan bien el modelo de inversión reproduciría el campo de las mediciones (mediciones de campo) para un nivel de incertidumbre en los datos (error). Así, el procedimiento numérico requiere tres elementos:

- a) Un modelo directo que calcula la resistencia para secciones 2D ó 3D.
- b) Una función objetivo que indica los criterios del modelo de ajuste que será adoptada,
- c) y un algoritmo de búsqueda que determina la forma en la cual el modelo "óptimo" de resistividad es encontrado.

Dahlin *et al.* (2002), dice que el método de mínimos cuadrados con ajuste suavizado se utiliza para determinar la resistividad de los bloques en el modelo de inversión para los datos adquiridos en campo, este método se basa en la siguiente ecuación:

$$(\mathbf{J}_i^T \mathbf{J}_i + \lambda_i \mathbf{C}^T \mathbf{C}) \Delta \mathbf{r}_i = \mathbf{J}_i^T \mathbf{g}_i \dots (1)$$

Donde i el número de iteración, \mathbf{J}_i es la matriz Jacobiana de las derivadas parciales, \mathbf{g}_i es el vector que contiene la diferencia entre los algoritmos de los valores medidos y calculados de la resistividad aparente. λ_i es el factor de amortiguamiento. El vector $\Delta \mathbf{r}_i$ contiene los cambios en los valores del modelo de resistividad para cada iteración, y \mathbf{r}_{i-1} son los valores del modelo de resistividad previo en cada iteración. El filtro de rugosidad \mathbf{C} es usado para el ajuste suavizado del modelo de resistividad resultante con el fin de impedir soluciones inestables y extremas. El factor de amortiguamiento determina relativamente la importancia de reducir datos desajustados y la suavidad del modelo. Los métodos de diferencias finitas o elemento finito se usan para calcular los valores de resistividad aparente, así como los valores de la matriz Jacobiana para el modelo de inversión.

Se utilizan métodos iterativos para obtener en cada iteración el modelo (la matriz de sensibilidad o Jacobiana) y los datos usando algún método numérico (diferencias finitas o elemento finito), el tiempo de cálculo y capacidad computacional (capacidad de cálculo), limitan estos métodos. Loke y Barker (1996b) utilizan el método de cuasi-Newton que reduce el tiempo de cálculo.

Loke y Barker (1996b) y Dahlin *et al.* (2002), describen el método de cuasi-Newton, el cual consiste básicamente en calcular la matriz Jacobiana J_i para cada iteración i -ésima es remplazada por la aproximación B_i , que se obtiene de la siguiente ecuación:

$$B_{i+1} = B_i + u_i p_i^T \dots (2)$$

Donde:

$$u_i = (\Delta y_i - B_i p_i) / p_i^T p_i$$

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$$

B_{i+1} es la aproximación de la matriz Jacobiana para cada $(i+1)$ esima iteración, y_i es el modelo resultante en cada i -ésima iteración y Δy_i es el cambio en el modelo resultante en cada i -ésima iteración.

Loke y Barker (1996b), mencionan un modelo 2-D de inversión basado en el criterio de mínimos cuadrados, divide la superficie del subsuelo en un número de bloques rectangulares, la resistividad de estos bloques se ajusta de una manera iterativa para minimizar la diferencia entre los valores medidos y los calculados de la resistividad aparente

Esta aproximación da resultados satisfactorios para las modalidades Wenner y Wenner-Schlumberger donde el punto de atribución en la pseudosección cae en un área con valores altos de sensibilidad. Sin embargo, esto no es aplicable para modalidades tales como Dipolo-Dipolo y Polo-Dipolo donde el punto de atribución en la pseudosección cae en un área con valores de sensibilidad bajos (Urbieto, 2001).

Tejero *et al.* (2002) menciona que para obtener la imagen eléctrica (perfil de resistividad) puede ser dividida en 2 pasos: 1) adquisición de datos, y 2) inversión para estimar la resistividad verdadera del subsuelo. El modelo matemático comprende los siguientes pasos:

- 1) Obtener la resistividad aparente mediante algún método como diferencias finitas o elemento finito.
- 2) Seleccionar una técnica de optimización no lineal.
- 3) Evaluar los elementos de la matriz Jacobiana.
- 4) Resolver el sistema de ecuaciones.

Un semiespacio homogéneo con una resistividad constante se asume que contiene inhomogeneidades laterales para aproximar el modelo de la tierra. El modelo de la tierra se compone de una serie de prismas cercanos 2D (dominios). Cada dominio se supone homogéneo y de extensión infinita en la dirección “y”, por lo tanto, una mejor representación de la resistencia lateral en profundidad se puede obtener usando un mallado mas fino. Sin embargo, la densidad de datos y errores de medida limita la calidad de las soluciones.

Loke y Barker (1995, 1996b) desarrollaron el algoritmo matemático empleado para obtener la imagen de resistividad (cuasi-Newton). Esta técnica está basada en el método de mínimos cuadrados.

A continuación se describe brevemente el proceso inverso tomado de Tejero *et al.* (2002) para obtener el modelo de resistividad del terreno en 2D:

La resistividad aparente (ρ_{app}) puede ser expresada en términos de un desarrollo de Taylor de primer orden como:

$$\rho_{app} = F(\vec{p}) + \sum_{k=1}^M \frac{\partial F(\vec{p})}{\partial p_k} \delta p_k \dots (3)$$

Donde \vec{p} es el vector de parámetros de dimensión M. por ejemplo, la resistividad verdadera del prisma k_{th} es p_k y $F(\vec{p})$ es la función para determinar la resistividad aparente.

Se define la diferencia entre la resistividad observada y calculada en el sitio observado j_{th} por la ecuación 3 como:

$$\delta \rho_{appj} = \rho_{appj}^{obs} - \rho_{appj}^{est}$$

Donde ρ^{obs} es resistividad observada y ρ^{est} es resistividad estimada.

La función de error cuadrático puede estar definida como:

$$E^2 = \sum_{j=1}^N \delta \rho_{appj}^2 = \sum_{j=1}^N (\rho_{appj}^{obs} - \rho_{appj}^{est})^2 = \sum_{j=1}^N (\rho_{appj}^{obs} - F_j(\vec{p}) - \sum_{k=1}^M \frac{\partial F_j(\vec{p})}{\partial p_k} \delta p_k)^2 \dots (4)$$

Donde N es el número de mediciones.

Simplificando la ecuación 4 con respecto al vector \vec{p} tenemos que:

$$\frac{\partial E^2}{\partial \delta p_i} = 2 \sum_{j=1}^N (\rho_{appj}^{obs} - F_j(\vec{p}) - \sum_{k=1}^M \frac{\partial F_j(\vec{p})}{\partial p_k} \delta p_k) \left(-\frac{\partial F_j(\vec{p})}{\partial p_i} \right) = 0 \dots (5)$$

Donde $i=1, \dots, M$. La expresión (5) se define como la ecuación de ajuste normal, que se puede mostrar como:

$$\sum_{k=1}^M \delta p_k \sum_{j=1}^N \frac{\partial F_j(\vec{p})}{\partial p_k} \frac{\partial F_j(\vec{p})}{\partial p_i} = \sum_{j=1}^N \frac{\partial F_j(\vec{p})}{\partial p_k} \delta \rho_{appj} \dots (6)$$

La ecuación (6) es comúnmente expresada en forma de matrices, que se modifica para obtener una solución en términos de $\delta \vec{p}$ (Loke y Barker, 1995), donde:

$$\delta\vec{p} = (J^T J + \lambda C^T C)^{-1} J \delta\vec{\rho}_{app} \dots (7)$$

Símbolo (T) indica la matriz transpuesta, los elementos de la matriz Jacobiana (J) son definidas en la ecuación (7) de la forma:

$$J_{jk} = \frac{\partial F_j(\vec{p})}{\partial p_k} \dots (8)$$

λ en la ecuación (7) es el factor de amortiguamiento y C es un filtro de alisamiento usado para limitar la suavidad de los parámetros del modelo a un valor constante.

Loke y Barker (1995) resolvieron la ecuación (8) usando el método llamado deconvolucion de mínimos cuadrados. El valor de la derivada de la función $F(\vec{p})$ es la derivada de la función potencial $U(\vec{r})$ con respecto a la resistividad verdadera de cada uno de los prismas. Para un arreglo de electrodos la función se encuentra por superposición. Por lo tanto, para una fuente en las coordenadas (a, 0, 0), y para un potencial en los electrodos con coordenadas (x, 0, 0), la derivada de la función potencial puede ser expresada como:

$$\frac{\partial U(r)}{\partial p_i} = \frac{\partial}{\partial p_i} \sum_{i=1}^L U_i(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{V_i} \left[\frac{x'(x'-a) - y'^2 - z'}{[x'^2 + y'^2 + z'^2]^{3/2} [(x-x')^2 + y'^2 + z'^2]^2} \right] dV_i \dots (9)$$

x', y', z' son el conjunto de coordenadas dentro del prisma, L es el numero de prismas y dV_i es el volumen en cada dominio.

La ecuación (9) es valida para pequeños contrastes de resistividad de prismas cercanos.

Urbietta (2001) ha demostrado que cuando existe un contraste de resistividad entre diferentes estructuras del subsuelo, el algoritmo derivado por Loke y Barker (1996a) da buenos resultados en la definición de grandes contrastes de resistividad (por ejemplo, cuevas), lamentablemente, el método subestima la verdadera resistividades, a pesar de dar la ubicación correcta de la función anómala.

4.3 Error RMS (Root Mean Square)

El error RMS (root mean square) es la diferencia entre los valores medidos y modelados es conocido como error cuadrático medio, sirve como criterio de paro en el proceso de inversión, que se define:

$$RMS = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\frac{d_i^{pred} - d_i^{meas}}{d_i^{meas}} \right)^2} * 100\%$$

Donde N es el numero total de mediciones, d^{pred} son datos del modelo calculado y d^{meas} es el dato medido.

De los objetivos de una inversión es el de reducir los datos entre el campo medido y los datos calculados con la reconstrucción del modelo. Las mediciones usualmente tienen un error de entre 1% y 5%, debido a errores numéricos y de redondeo (Advanced Geosciences, Inc., 2008).

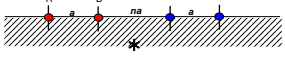
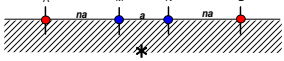
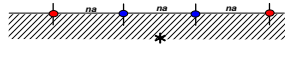
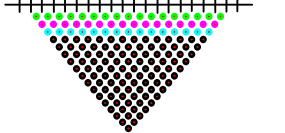
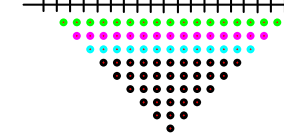
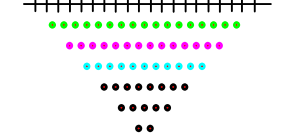
4.4 Configuraciones electródicas

Una configuración electródica, arreglo, modalidad, geometría o dispositivo electródico, consiste en electrodos de potencial y electrodos de corriente; aquellos por medio de los cuales se inyecta una corriente (I) al subsuelo son los de corriente, los de potencial son aquellos en los que se lee el valor de la diferencia de potencial (ΔV) generado por la corriente inyectada.

En la práctica, un dispositivo electrodo consta de 4 electrodos (dipolares); dos de corriente y dos de potencial, que pueden adoptar cualquier disposición geométrica sobre el plano que representa la superficie del terreno (Urbieta, 2001), sin embargo, existen otras configuraciones como la Polo-Polo y Polo-Dipolo, que no utilizan este número de electrodos.

Se presenta la Tabla 1, donde se muestran las tres configuraciones utilizadas en este estudio, señalando sus características más importantes:

Tabla 1 Diferentes configuraciones donde: Z_e profundidad media de investigación (Edwards, 1977), a espaciamiento entre 2 electrodos (dipolo), n factor de separación entre el dipolo, ρ resistividad.

Arreglo	Dipolo-Dipolo	Wenner-Schlumberger	Wenner																								
Configuración del arreglo																											
Pseudosección																											
Factor Geométrico (k)	$n(n+1)(n+2)\pi a$	$n(n+1)\pi a$	$2\pi a$																								
Z_e/a	<table border="1"> <tr><td>n=1</td><td>0.416</td></tr> <tr><td>n=2</td><td>0.697</td></tr> <tr><td>n=3</td><td>0.962</td></tr> <tr><td>n=4</td><td>1.220</td></tr> <tr><td>n=5</td><td>1.476</td></tr> <tr><td>n=6</td><td>1.730</td></tr> </table>	n=1	0.416	n=2	0.697	n=3	0.962	n=4	1.220	n=5	1.476	n=6	1.730	<table border="1"> <tr><td>n=1</td><td>0.52</td></tr> <tr><td>n=2</td><td>0.93</td></tr> <tr><td>n=3</td><td>1.32</td></tr> <tr><td>n=4</td><td>1.71</td></tr> <tr><td>n=5</td><td>2.09</td></tr> <tr><td>n=6</td><td>2.48</td></tr> </table>	n=1	0.52	n=2	0.93	n=3	1.32	n=4	1.71	n=5	2.09	n=6	2.48	0.519
n=1	0.416																										
n=2	0.697																										
n=3	0.962																										
n=4	1.220																										
n=5	1.476																										
n=6	1.730																										
n=1	0.52																										
n=2	0.93																										
n=3	1.32																										
n=4	1.71																										
n=5	2.09																										
n=6	2.48																										
Ventajas	<ul style="list-style-type: none"> -Profundidad de investigación aproximada del 15% de la longitud total del tendido. -Presenta buena resolución lateral. -Es el más sensitivo a los cambios ρ entre los electrodos de cada par bipolar. -Sensitivo a cambios horizontales de ρ. -Tiene buena cobertura horizontal, mejor que el Arreglo Wenner. 	<ul style="list-style-type: none"> -Profundidad de investigación aproximada del 30% de la longitud total del tendido. -Intensidad de señal bastante fuerte. -Esta modalidad es moderadamente sensitiva tanto a estructuras horizontales como verticales. -Ligeramente mejor cobertura horizontal que la configuración Wenner. 	<ul style="list-style-type: none"> -Profundidad de investigación aproximada del 20% de la longitud total del tendido. -Resolución lateral razonablemente buena. -Sensitivo a cambios verticales en la ρ del subsuelo, bajo el centro del arreglo. -Ideal para estructuras horizontales. Su intensidad de señal es fuerte. Esto puede ser un factor decisivo si el estudio es hecho en áreas con alto nivel de ruido ambiental. 																								
Desventajas	-Profundidad	La intensidad de la señal es mas pobre que la	-Es menos sensitivo a cambios horizontales																								

	<p>investigación somera.</p> <p>-El ruido ambiental afecta los datos fuertemente.</p> <p>-Se pierde muy rápido la señal.</p> <p>-Es relativamente insensitivo a cambios verticales de ρ.</p> <p>-La intensidad de señal es pequeña para valores muy grandes de n.</p>	<p>configuración Dipolo-Dipolo y mayor que la del arreglo Wenner.</p> <p>-Pobre resolución lateral.</p>	<p>de ρ.</p> <p>-Su densidad de datos es muy pobre.</p> <p>-Pobre en la detección de estructuras verticales.</p> <p>-Pobre cobertura horizontal.</p>
Aplicaciones	<p>-Es útil para mapear estructuras verticales como: fallas, diques cavernas, etcétera</p>	<p>En la búsqueda de estructuras horizontales y verticales.</p>	<p>Ideal para mapear estructuras horizontales sills o estratos sedimentarios.</p>