



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA  
INGENIERÍA CIVIL– GEOTECNIA

“ANÁLISIS Y DISEÑO DE CIMENTACIONES PARA MAQUINARIA”

**TESIS**  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:  
JOSÉ MIGUEL BIMBRERA DÍAZ

TUTOR  
DR. ALBERTO JAIME PAREDES  
INSTITUTO DE INGENIERÍA, UNAM

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. DE MÉXICO, ABRIL 2018



**JURADO ASIGNADO:**

Presidente: Dr. Magaña del Toro Roberto

Secretario: Dra. Ossa López Alexandra

Vocal: Dr. Jaime Paredes Alberto

1<sup>er.</sup> Suplente: Dr. Botero Jaramillo Eduardo

2<sup>do.</sup> Suplente: M.I. Martínez Mier Jaime Antonio

Lugar o lugares donde se realizó la tesis: CIUDAD UNIVERSITARIA, CIUDAD DE MÉXICO.

**TUTOR DE TESIS:**

Dr. Alberto Jaime Paredes.

-----  
**FIRMA**



## **AGRADECIMIENTOS**

A Jehová Dios por todas las bendiciones que me ha dado inmerecidamente.

A mi madre Josefina, que aunque ya no esté a mi lado, siempre dio todo para sacarme adelante. Sus enseñanzas, apoyo y ejemplo me hicieron esforzarme por alcanzar mis metas y ser lo que soy hoy, te amo madre.

A mi padre Miguel y hermanos Manuel y Moisés por su apoyo y el tiempo de escucharme y animarme cuando lo necesite. Son muchas las alegrías que hemos vivido juntos.

A mi amada esposa Sara, por su compañía, apoyo y cariño a lo largo de esta etapa y la vida que nos queda juntos.

Al Dr. Alberto Jaime Paredes por su apoyo en la elaboración de este trabajo, pero sobre todo por su paciencia, consejos y enseñanzas las cuales me ayudaron a ser un mejor ingeniero y mejor persona.

A los sinodales por el tiempo invertido en la revisión de mi Tesis y sus valiosas observaciones

Al Dr. Venancio Trueba por compartir su conocimiento y confianza en los trabajos que realizamos en conjunto.

A la Universidad Nacional Autónoma de México mi segundo hogar.

Al CONACYT por el apoyo económico recibido que me permitió estudiar la maestría.



**ÍNDICE**

1	INTRODUCCIÓN .....	1
1.1	ANTECEDENTES .....	1
1.2	OBJETIVOS .....	1
1.3	ALCANCES .....	2
2	TEORÍA DE VIBRACIONES .....	3
2.1	Sistema en vibración. ....	3
2.2	Sistema de un solo grado de libertad .....	3
2.3	Conceptos de la teoría de vibraciones. ....	5
2.4	Vibración libre de sistemas de un solo grado de libertad .....	7
2.5	Vibración inducida en sistemas de un solo grado de libertad.....	16
2.6	Factores de respuesta dinámica. ....	20
3	VIBRACIÓN DE MAQUINARIA.....	24
3.1	Vibración vertical de una cimentación en un semi-espacio elástico.....	24
3.2	Vibración debida a un momento en los ejes $x$ y $y$ de una cimentación (oscilación). ....	36
3.3	Vibración horizontal de una cimentación.....	40
3.4	Vibración torsionante de una cimentación.....	42
3.5	Vibraciones acopladas de deslizamiento y oscilación. ....	45
3.6	Amortiguador viscoso y radiación de amortiguamiento .....	50
3.7	Tipos de maquinaria.....	51
4	PROPAGACIÓN DE ONDAS .....	55
4.1	Ondas longitudinales y de torsión en una barra .....	55
4.2	Estado de esfuerzos en una partícula de un medio elástico. ....	59
4.3	Ondas superficiales en un semi espacio elástico Ondas Rayleigh. ....	62
4.4	Ondas Love .....	64
4.5	Atenuación de las ondas con la distancia. ....	65
5	PROPIEDADES DINÁMICAS DE LOS SUELOS .....	69
5.1	Módulo de elasticidad ( $E$ ) y relación de Poisson ( $\nu$ ) y .....	69
5.2	Módulo dinámico de resistencia al cortante ( $G$ ). ....	70

5.3	Relación de amortiguamiento ( $D$ ).....	71
5.4	Módulo de compresibilidad volumétrica. ....	71
5.5	Módulo de reacción $k_s$ .....	72
5.6	Obtención de las propiedades dinámicas del suelo .....	81
5.6.1	Ensayes de campo.....	81
5.6.2	Ensayes de laboratorio.....	104
6	DISEÑO DE UNA CIMENTACIÓN PARA MAQUINARIA.....	111
6.1	Consideraciones para la elección de un criterio de diseño .....	111
6.2	Atenuación de las vibraciones con la distancia. ....	121
6.3	Diseño de una cimentación para maquinaria. ....	122
7	Análisis de confiabilidad de una cimentación. ....	127
7.1	VARIABLES ALEATORIAS.....	128
7.2	Desviación estándar y coeficiente de variación (COV). ....	129
7.3	Distribución de densidad de probabilidad de tipo normal .....	129
7.4	Distribución de densidad de probabilidad de tipo log-normal .....	130
7.5	Probabilidad de falla ( $P_f$ ).....	132
7.6	Índice de confiabilidad ( $\beta$ ) .....	133
7.7	Método de Montecarlo.....	134
8	ANÁLISIS DE FRECUENCIAS EN UN SISTEMA SUELO-CIMENTACIÓN MAQUINARIA.....	136
8.1	Programa en Lenguaje Fortran .....	136
8.2	Análisis de confiabilidad de una cimentación para maquinaria. ....	145
9	CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES .....	167
10	BIBLIOGRAFÍA Y REFERENCIAS.....	169
	Apéndice .....	171



**INDICE DE FIGURAS**

Figura 2.1. a) Fuerzas que actúan en un sistema de un solo grado de libertad, .....	4
Figura 2.2. Tipos de vibración .....	7
Figura 2.3. a) Sistema de vibración libre, con un grado de libertad sin amortiguamiento.....	8
Figura 2.4. Comportamiento de un sistema de vibración libre.....	9
Figura 2.5. Sistema de vibración libre, con un grado de libertad amortiguado. ....	10
Figura 2.6. Vibración libre de un sistema críticamente amortiguado, un sistema sobre amortiguado y un sistema sub-amortiguado.....	13
Figura 2.7. a) Fuerza harmónica b) respuesta de un sistema sin amortiguamiento a una fuerza harmónica cuando $\lambda/\omega_n=0.2$ , $u(0)=0$ y la velocidad es $(\omega_n p_0)/k$ .....	18
Figura 2.8. Respuesta de un sistema amortiguado sometido a una fuerza harmónica. Con las siguientes condiciones, $\lambda/\omega_n=0.2, \zeta=0.05$ , $u(0)=0$ y la velocidad es $(\omega_n p_0)/k$ . .....	20
Figura 2.9. Comportamiento del factor de amplificación dinámica. ....	22
Figura 3.1. Modos de vibración de un bloque rígido.....	24
Figura 3.2. Fuerza de vibración actuando sobre la superficie de un medio semi-elástico. ....	25
Figura 3.3. Vibración de un área circular uniformemente cargada. ....	26
Figura 3.4. Cimentación circular flexible, sujeta a una fuerza de vibración. ....	27
Figura 3.5. Cimentación circular flexible, sujeta a una fuerza de vibración. ....	30
Figura 3.6. Vibración de una cimentación debido a una frecuencia dependiente de la fuerza de excitación. ....	31
Figura 3.7. Variación de las funciones de desplazamiento con $a_0$ y $v$ .....	32
Figura 3.8. Cimentación circular rígida sometida a un momento alrededor del eje $y$ . .....	36
Figura 2.9. Excitación debido a masas rotatorias.....	39
Figura 3.10. Vibración deslizante de una cimentación circular rígida.....	40
Figura 3.11. Torsión de una cimentación circular rígida debida vibración.....	43
Figura 3.12. Movimiento horizontal y oscilatorio acoplados en una cimentación circular rígida.....	46

Figura 3.13. Radiación de energía mediante la propagación de ondas de una cimentación .....	50
Figura 3.14. Mecanismo de manivela.....	52
Figura 3.15. Fuerzas producidas por excitadores de masas rotatorias. ....	53
Figura 3.16. Fuerzas producidas por excitadores de masas rotatorias. ....	53
Figura 4.1. Ondas elásticas longitudinales en una barra.....	56
Figura 4.2. Ondas elásticas de torsión en una barra. ....	58
Figura 4.3. Esfuerzos aplicados sobre un elemento de suelo. ....	59
Figura 4.4. Onda plana a través de un semi-espacio elástico con límites planos..	63
Figura 4.5. Relación entre velocidades de propagación de onda (P, S y Rayleigh) y relación de Poisson. (Richart 1962) .....	64
Figura 4.6. Sistema de ondas generadas en la superficie de un medio ideal. (Richart, 1970). ....	67
Figura 4.7. Onda plana a través de un semi-espacio elástico con límites planos..	67
Figura 5.1. Determinación del módulo de cortante y de la relación de amortiguamiento (A. Jaime 1980). ....	70
Figura 5.2. Inclinación inducida de una placa cargada provocada por una compresión no uniforme. ....	77
Figura 5.3. Diferentes métodos para generar ondas en pruebas geofísicas: a) explosivos superficiales, b) impacto vertical y c) impacto horizontal. ....	82
Figura 5.4. Patrón de ondas reflejadas al límite de una capa horizontal. ....	83
Figura 5.5. Prueba de reflexión en una capa inclinada. ....	85
Figura 5.6. Método de refracción.....	86
Figura 5.7. Curvas domocrónicas para el caso de dos capas horizontales. (Rascón, 1972) .....	87
<i>Figura 5.8. Esquema de dos arreglos instrumentales para el registro de microtemores. a) arreglo con siete instrumentos equiespaciados, analizados con el Método SPAC. b) arreglo con solo cuatro instrumentos equiespaciados, analizados con el Método SPAC. ....</i>	<i>93</i>
Figura 5.9. Ensayes de campo realizados en sondeos. ....	97

Figura 5.10. Esquema general del sistema perforación-sonda suspendida (Modificado de Bringen y Davie, 2010) .....	99
Figura 5.11. Esquema general de un cono sísmico .....	101
Figura 5.12. Diseño esquemático de prueba de penetración de cono sísmico ...	102
Figura 5.13. Ensaye de oscilación inducida (Jaime.A) .....	103
Figura 5.14. Registro típico de una prueba de torsión libre.....	104
Figura 6.1. Límites generales de amplitud de desplazamiento para una frecuencia particular de vibración (Richart 1962).....	113
Figura 6.2. Criterios para vibraciones de máquinas rotatorias. ....	114
Figura 6.3. Vibraciones verticales permisibles (Richart 1962).....	117
Figura 6.4. Tipos de cimentación para maquinaria.....	123
Figura 7.1. Clasificación de las variables aleatorias.....	128
Figura 7.2 Forma típica de una distribución normal .....	130
Figura 7.3 Forma típica de una distribución log- normal. ....	131
Figura 7.4 Funciones de densidad de probabilidad de capacidad y demanda. (Jaime A.).....	132
Figura 8.1 Dimensiones del sistema suelo-cimentación-maquinaria.....	137
Figura 8.2 Diagrama de flujo del programa. ....	138
Figura 8.3 Resultados obtenidos con el programa en Fortran empleando el módulo de reacción.....	143
Figura 8.4 Resultados obtenidos con el programa en Fortran empleando el módulo de G. ....	144
Figura 8.5 Elección del método a emplear para el análisis. ....	148
Figura 8.6 Introducción de iteraciones a realizar en el análisis de probabilidad..	148
Figura 8.7 Distribución normal del módulo G. ....	149
<i>Figura 8.8 Distribución normal del peso volumétrico.....</i>	<i>149</i>
<i>Figura 8.9 Distribución normal de la relación de Poisson.....</i>	<i>150</i>
<i>Figura 8.10 Distribución normal del módulo de reacción.....</i>	<i>150</i>
<i>Figura 8.11 Función de densidad de probabilidad de la <math>F_r</math> para la frecuencia natural vertical, (método con el módulo G).....</i>	<i>153</i>

<i>Figura 8.12 Función de densidad de probabilidad de la Fr para la frecuencia natural horizontal, (método con el módulo G).</i>	154
<i>Figura 8.13 Función de densidad de probabilidad de la Fr para la frecuencia natural oscilatoria, (método con el módulo G).</i>	154
<i>Figura 8.14 Función de densidad de probabilidad de la Fr para la frecuencia natural torsional, (método con el módulo G).</i>	155
<i>Figura 8.15 Función de densidad de probabilidad de la Fr para la frecuencia amortiguada vertical, (método con el módulo G).</i>	155
<i>Figura 8.16 Función de densidad de probabilidad de la Fr para la frecuencia amortiguada horizontal, (método con el módulo G).</i>	156
<i>Figura 8.17 Función de densidad de probabilidad de la Fr para la frecuencia amortiguada oscilatoria, (método con el módulo G).</i>	156
<i>Figura 8.18 Función de densidad de probabilidad de la Fr para la frecuencia amortiguada torsional, (método con el módulo G).</i>	157
<i>Figura 8.19 Función de densidad de probabilidad de la Fr para la frecuencia natural vertical, (método con el módulo de reacción).</i>	157
<i>Figura 8.20 Función de densidad de probabilidad de la Fr para la frecuencia natural horizontal, (método con el módulo de reacción).</i>	158
<i>Figura 8.21 Función de densidad de probabilidad de la Fr para la frecuencia natural oscilatoria, (método con el módulo de reacción).</i>	158
<i>Figura 8.22 Función de densidad de probabilidad de la Fr para la frecuencia natural torsional, (método con el módulo de reacción).</i>	159
<i>Figura 8.23 Función de densidad de probabilidad de la Fr para la frecuencia amortiguada vertical, (método con el módulo de reacción).</i>	159
<i>Figura 8.24 Función de densidad de probabilidad de Fr para la frecuencia amortiguada horizontal, (método con el módulo de reacción).</i>	160
<i>Figura 8.25 Función de densidad de probabilidad de la Fr para la frecuencia amortiguada oscilatoria, (método con el módulo de reacción).</i>	160
<i>Figura 8.26 Función de densidad de probabilidad de la Fr para la frecuencia amortiguada torsional, (método con el módulo de reacción).</i>	161

<i>Figura 8.27 Función de densidad de probabilidad de la Fr para la frecuencia amortiguada vertical, (método con el módulo G).....</i>	164
<i>Figura 8.28 Función de densidad de probabilidad de la Fr para la frecuencia amortiguada horizontal, (método con el módulo G).....</i>	165
<i>Figura 8.29 Función de densidad de probabilidad de la Fr para la frecuencia amortiguada torsional, (método con el módulo de reacción).....</i>	166
Figura 10.1 Introducción de datos de la primera ventana del programa .....	171
Figura 10.2 Introducción de datos de la segunda ventana del programa .....	172
Figura 10.3 Introducción de datos tercera ventana del programa (CASO MÓDULO G) .....	173
Figura 10.4 Introducción de datos tercera ventana del programa (CASO MÓDULO DE REACCIÓN) .....	174
Figura 10.5 Elección del método a utilizar.....	175
Figura 10.6 Introducción de las fuerzas generadas por la maquinaria .....	176

**INDICE DE TABLAS**

Tabla 5.1. Obtención del Módulo de reacción. ....	81
Tabla 5.2. Velocidades de ondas P y S típicas de algunos suelos y rocas. (A. Jaime) .....	90
Tabla 5.3. Diferentes métodos de análisis de registros de microtemores. ....	92
Tabla 6.1. Factores de servicio Blake (1964) .....	115
Tabla 6.2. Guía tentativa para tolerancias de vibraciones para maquinaria de herramientas (Baxter & Bernhard 1967).....	116
Tabla 6.3. Datos típicos de vibraciones.....	119
Tabla 8.1. Datos usados en el análisis.....	136
Tabla 8.2. Introducción de datos Tabla 1 de la hoja de cálculo.....	146
Tabla 8.3. Introducción de datos Tabla 2 de la hoja de cálculo.....	146
Tabla 8.4. Introducción de datos Tabla 3 de la hoja de cálculo.....	146
Tabla 8.5. Introducción de datos Tabla 4 de la hoja de cálculo, empleando el Módulo de reacción.....	147
Tabla 8.6. Introducción de datos Tabla 4 de la hoja de cálculo, empleando el Módulo G. ....	147
Tabla 8.7. Valores obtenidos de las frecuencias naturales y amortiguadas con los valores medios de las propiedades del suelo (empleando el método con el módulo G). ....	151
<i>Tabla 8.8. Valores obtenidos de las frecuencias naturales y amortiguadas con los valores medios de las propiedades del suelo (empleando el método con el módulo de reacción).....</i>	<i>151</i>
<i>Tabla 8.9. Probabilidad de ocurrencia del fenómeno de resonancia en el sistema para cada modo de vibración (empleando el método con el módulo de G). ....</i>	<i>152</i>
<i>Tabla 8.10. Probabilidad de ocurrencia del fenómeno de resonancia en el sistema para cada modo de vibración (empleando el método con el módulo de reacción). .....</i>	<i>153</i>

<i>Tabla 8.11. Probabilidad de ocurrencia del fenómeno de resonancia en el sistema para cada modo de vibración con una frecuencia de operación de 660.00 rpm (empleando el método con el módulo de G).....</i>	<i>162</i>
<i>Tabla 8.12. Probabilidad de ocurrencia del fenómeno de resonancia en el sistema para cada modo de vibración con una frecuencia de operación de 660.00 rpm (empleando el método con el módulo de reacción).....</i>	<i>163</i>

**LISTA DE SÍMBOLOS**

<b>SIMBOLO</b>	<b>SIGNIFICADO</b>
$a, \ddot{u}$	Aceleración
$h$	Altura
$c$	Amortiguador, Amortiguamiento
$D$	Amortiguamiento del suelo, Demanda
$A_u$	Amplitud de vibración
$\alpha$	Ángulo de deflexión
$C$	Capacidad
$cps$	Ciclos por segundo
$COV$	Coefficiente de variación
$k$	Constante de resorte
$\delta$	Decremento logarítmico de la vibración
$u_{st}$	Deformación estática
$\rho$	Densidad
$u(t)$	Desplazamiento
$z_0$	Desplazamiento vertical
$\sigma$	Desviación Estándar
$e$	Excentricidad, exponente
$E[C]$	Esperanza matemática
$a_0$	Factor de aceleración adimensional
$U$	Factor de amplitud adimensional
$\omega_d$	Frecuencia amortiguada
$\omega$	Frecuencia circular
$\lambda$	Frecuencia de excitación
$f_m$	Frecuencia de resonancia
$f_n$	Frecuencia natural cíclica
$\omega_n$	Frecuencia natural circular
$P$	Fuerza
$P_I$	Fuerza de amortiguamiento
$g$	Fuerza de gravedad
$P_c$	Fuerza de inercia
$P_k$	Fuerza de resorte
$g(C)$	Función de densidad de probabilidad de la capacidad



$f(D)$	Función de distribución acumulada de la demanda
$f_1$ y $f_2$	Funciones adimensionales de Reissner
$Hz$	Hertz
$\beta$	Índice de confiabilidad
$m$	Masa
$B$	Módulo de deformación volumétrica
$E$	Módulo de elasticidad
$\nu$	Relación de Poisson
$k_s$	Módulo de reacción
$G$	Módulo de resistencia al corte
$M_y$	Momento con respecto al eje Y
$I$	Momento de inercia
$T_d$	Periodo amortiguado
$T_n$	Periodo natural
$W$	Peso
$W_0$	Peso de la cimentación
$\gamma$	Peso volumétrico del suelo
$p$	Presión de contacto
$P_f$	Probabilidad de falla
$r_0$	Radio
$\zeta$	Relación de amortiguamiento
$B$	Relación de masa adimensional
$t$	Tiempo
$v_s$	Velocidad de ondas de corte



## 1 INTRODUCCIÓN

### 1.1 ANTECEDENTES

Para realizar un análisis completo y diseño de cimentaciones para maquinaria se requiere conocer las propiedades de la masa de suelo en la cual se colocará la cimentación, también se debe estimar la respuesta dinámica que esta presentará debido a las vibraciones que genere la maquinaria. Además, dentro del análisis se debe tomar en cuenta la interacción del sistema *suelo-cimentación -maquinaria*.

El análisis en conjunto de estos elementos conducirá a una solución satisfactoria que cumpla con los criterios de diseño establecidos para el caso de estudio.

### 1.2 OBJETIVOS

En este escrito se presenta la teoría de vibraciones y sus ecuaciones características, empleadas en el análisis de vibraciones de un sistema *suelo-cimentación-maquinaria*. También se presentan las propiedades dinámicas del suelo que intervienen en el análisis del sistema, así como algunos de los métodos empleados en su estimación. En la parte de confiabilidad se analizan algunos de los conceptos básicos de probabilidad y la teoría del método de Montecarlo, con el cual se realizara en análisis de confiabilidad.

Se hace el planteamiento de un problema ilustrativo, en el que se analice el comportamiento del sistema mediante un programa reescrito en Fortran, que permite obtener sus vibraciones y desplazamientos. Para finalizar se presenta la teoría básica de probabilidad que se emplea en el análisis de confiabilidad. Empleando la teoría de probabilidad se desarrolló una hoja de cálculo programada (.xls), con la cual se realiza el análisis de confiabilidad al sistema *suelo-cimentación-maquinaria*, esta hoja permite conocer la probabilidad que el sistema entre en resonancia, mediante la aplicación del método probabilístico de Montecarlo.

### 1.3 ALCANCES

En este escrito se desarrollaran los siguientes capítulos:

Capítulo 2: Se estudian los principios de la teoría de vibración, analizando los sistemas de vibración de un grado de libertad.

Capítulo 3: Se presentan las diferentes vibraciones que se pueden presentar en una cimentación y la utilización de la teoría de vibración para estudiar su comportamiento.

Capítulo 4: Estudio de los tipos de ondas, así como de su comportamiento y su propagación en los cuerpos.

Capítulo 5: Se enunciaran las propiedades que intervienen en el análisis de frecuencias de un sistema suelo-cimentación-maquinaria. Además de las pruebas de campo y laboratorio para poder estimarlas.

Capítulo 6: En este capítulo se mencionan algunos de los criterios que se deben tomar en cuenta para un correcto diseño de una cimentación para maquinaria.

Capítulo 7: En este capítulo se presenta algunos conceptos básicos de probabilidad que son utilizados para el análisis de confiabilidad.

Capítulo 8: En este capítulo se conjunta lo estudiado para realizar el análisis de confiabilidad de un sistema suelo-cimentación-maquinaria, empleando el método estadístico de Montecarlo. De esta manera se tiene una herramienta que ayuda a verificar la idoneidad del diseño propuesto.

## 2 TEORÍA DE VIBRACIONES

Para entender el comportamiento de una cimentación sometida a vibraciones, es necesario conocer los conceptos básicos de la teoría de vibraciones, en la cual se fundamentan las expresiones empleadas en el estudio del comportamiento de las cimentaciones para maquinaria. Por tanto, a continuación se presenta la teoría básica de los sistemas de vibración y su comportamiento, con base en lo escrito por autores como E. Richart et al. (1970), S. Prakash(1981) y M.Das (2011).

### 2.1 Sistema en vibración.

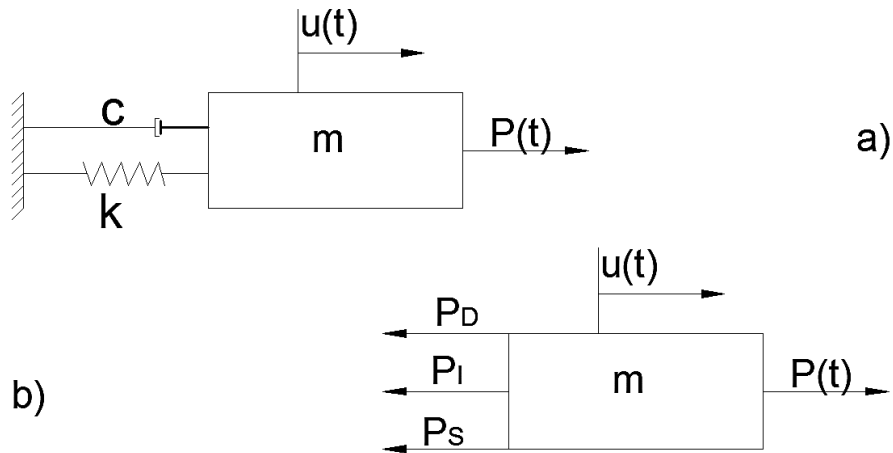
En un sistema en vibración se puede presentar una disipación de energía, que es propiciada por el amortiguamiento ( $c$ ). Este amortiguamiento depende de las características intrínsecas del sistema, para este escrito se considerará un amortiguador del tipo viscoso.

En el sistema también se presenta un desplazamiento o deformación, que puede ser ocasionado al colocar una masa ( $m$ ) o debido a la aplicación de una fuerza ( $P$ ), la magnitud y aceleración del desplazamiento está determinada por la rigidez ( $k$ ) que posea el sistema. Para el desarrollo de este trabajo se supondrá que el resorte y el amortiguador presentan un comportamiento lineal.

### 2.2 Sistema de un solo grado de libertad

Para estudiar el comportamiento de un sistema en vibración es necesario conocer cuántos grados de libertad posee. Los grados de libertad se definen como el número de desplazamientos independientes requerido para definir la posición relativa a su posición original de todas las masas de un sistema en cualquier instante de tiempo (Anik. Chopra).

En este escrito se analizará el comportamiento de un sistema sometido a vibración con un solo grado de libertad, como el que se muestra en la Fig.2.1.



**Figura 2.1. a) Fuerzas que actúan en un sistema de un solo grado de libertad, b) Diagrama de cuerpo libre.**

En la Figura 2.1b se muestra el diagrama de cuerpo libre correspondiente al sistema de la Fig. 2.1a, en este diagrama se muestran las fuerzas que intervienen en el sistema las cuales se explican a continuación:

- ◆  $P(t)$  es la excitación externa que varía en el tiempo.
- ◆ La fuerza de inercia  $P_I$ , que está relacionada con la aceleración y varía con respecto al tiempo. Esta fuerza se rige por la segunda ley de Newton  $P=ma$ .
- ◆ La fuerza de amortiguamiento  $P_c$ , la cual influye en la variación de la velocidad con respecto al tiempo y depende de la capacidad de disipación de energía del amortiguador ( $c$ ).
- ◆ La fuerza de resorte  $P_k$ , esta se relaciona con el desplazamiento a lo largo del tiempo, y se obtiene de la rigidez ( $k$ ) multiplicada por el desplazamiento.

Si se considera un sistema lineal, y empleando el principio de D’Alambert que enuncia que tanto las fuerzas externas como internas se encuentran en equilibrio, la ecuación que describe al movimiento del sistema se puede expresar como:

$$P_k + P_I + P_c = P(t) \tag{2.1}$$

Algunos de los conceptos más importantes que se desprenden del estudio de los sistemas de vibración se analizan a continuación.

### 2.3 Conceptos de la teoría de vibraciones.

- Movimiento periódico: Es el movimiento vibratorio que se repite en un intervalo igual de tiempo ( $t$ ).
- Frecuencia natural circular de vibración ( $\omega_n$ ): La vibración de un sistema sin ninguna alteración debida a una fuerza externa.

$$\omega_n = \sqrt{k/m} = 2\pi f_n \text{ Rad/s} \quad (2.2)$$

- Ciclo de vibración: Es el lapso en el que un movimiento se repite en un punto específico.
- Periodo natural de vibración: Es el tiempo requerido para completar un ciclo de vibración. Si el movimiento se repite en intervalos de tiempo iguales, se llama movimiento periódico.

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{k/m} \quad (2.3)$$

- Frecuencia natural cíclica de vibración: es el número de ciclos por unidad de tiempo y se mide en Hertz ( $\text{Hz}$ ) o en ciclos por segundo ( $\text{cps}$ ).

Se puede relacionar con la frecuencia natural circular  $\omega_n$  mediante la ecuación 2.4, la frecuencia circular es el número de radianes por unidad de tiempo.

$$f_n = \frac{1}{T} = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{k/m} \quad (2.4)$$

- Resonancia: Ocurre cuando se iguala la frecuencia natural del sistema suelo-cimentación a la frecuencia de la maquinaria haciendo que el desplazamiento tienda a infinito.
- $\zeta$  = proporción o relación de amortiguamiento del sistema, definido como:

$$\zeta = \frac{c}{2m\omega_n} = \frac{c}{c_{cr}} \quad (2.5)$$

Dónde:

$c$  es el coeficiente de amortiguamiento que depende de las características de la masa de suelo.

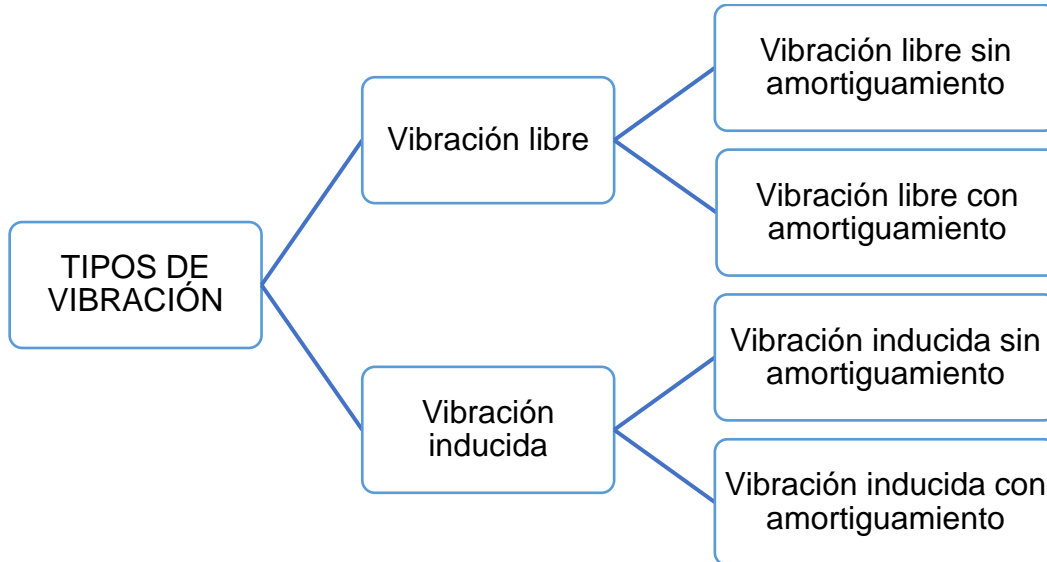
$C_{cr}$  es el amortiguamiento crítico, y es el valor mínimo de  $c$ , para evitar la oscilación en el sistema. Se expresa mediante:

$$c_{cr} = 2m\omega_n = 2\sqrt{km} = \frac{2k}{\omega_n} \quad (2.6)$$

### **Tipos de vibración**

Un sistema puede presentar varios tipos de vibración. Estos tipos de vibración dependen de las condiciones dinámicas y las características del sistema. En el siguiente esquema se muestran los tipos de vibración que se estudiarán en este capítulo.





**Figura 2.2. Tipos de vibración**

#### 2.4 Vibración libre de sistemas de un solo grado de libertad

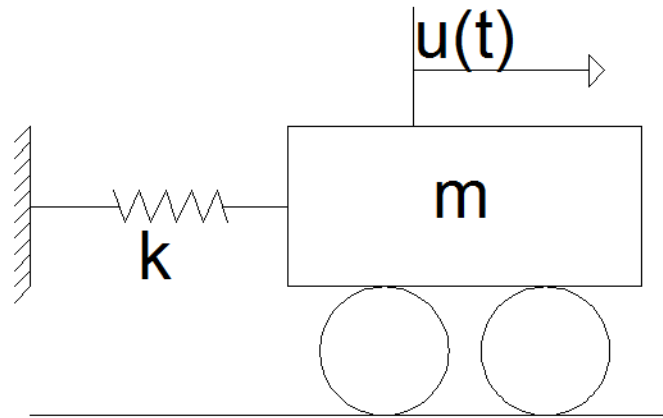
La vibración libre se produce, cuando se aplica momentáneamente una fuerza externa dejando vibrar al sistema por sí mismo. Es decir, se cambia su estado de equilibrio estático provocando un desplazamiento  $u(t)$  en la masa ( $m$ ) y una variación en la velocidad  $\dot{u}(t)$ .

Existen dos tipos de vibración libre; el primero de ellos se presenta cuando el sistema no presenta un amortiguador es decir  $c=0$ ; el segundo es el caso en el cual el sistema posee un amortiguamiento, por lo tanto  $c \neq 0$ .

- ***Vibración libre sin amortiguamiento***

En la figura 2.3 se presentan los componentes de un sistema en vibración libre sin amortiguamiento que son:

$(k)$  es la rigidez representada por un resorte,  
 $(m)$  es la masa,  
 $u(t)$  el desplazamiento inducido en el sistema.



**Figura 2.3. a) Sistema de vibración libre, con un grado de libertad sin amortiguamiento**

Utilizando el principio de D’Alambert, se obtiene la ecuación 2.7, para representar al sistema en equilibrio:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0$$

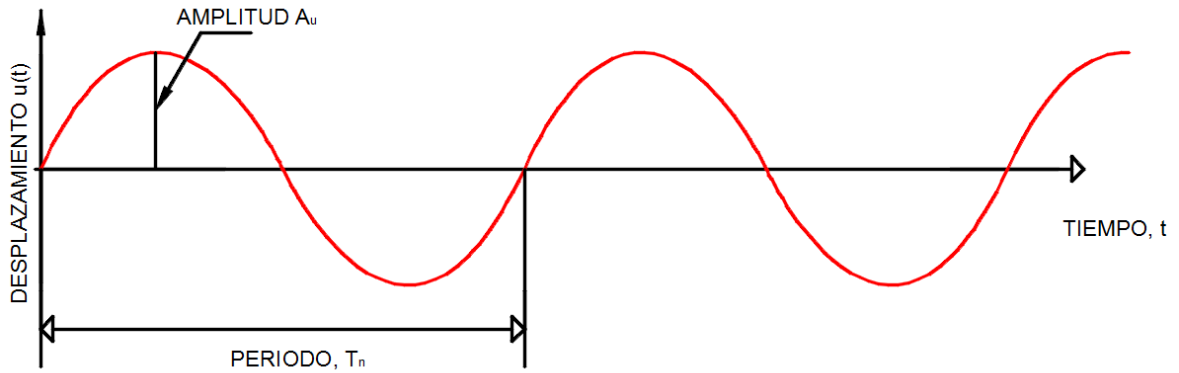
Como  $c=0$  (2.7)

$$m\ddot{u} + ku = 0$$

Esta es una ecuación diferencial de tipo lineal de segundo orden con coeficientes constantes. Para obtener su solución se emplea un cambio de variables para su derivación y utilizando identidades trigonométricas se obtiene la siguiente solución:

$$u(t) = u(0)\cos\omega_n t + \frac{\dot{u}(0)}{\omega_n}\text{sen}\omega_n t \quad (2.8)$$

La representación gráfica de esta ecuación se muestra en la figura 2.4 , donde se observa la vibración oscilatoria que presenta el sistema, y que este movimiento se repite en cada periodo T.



**Figura 2.4. Comportamiento de un sistema de vibración libre.**

El sistema de vibración libre sin amortiguamiento es un caso idealizado, pues el sistema jamás deja de vibrar, considerando un amortiguamiento cero, lo cual no sucede en realidad. La amplitud del desplazamiento que se observa en la figura 2.4 se puede calcular con la expresión:

$$A_u = \sqrt{(u(0))^2 + \left(\frac{\dot{u}(0)}{\omega_n}\right)^2} \quad (2.9)$$

Es importante mencionar que el periodo natural y la frecuencia natural del sistema son independientes a la amplitud de vibración; dependen únicamente de la masa y la rigidez de la estructura.

**Ejemplo 1.1**

Para una cimentación de maquinaria con un peso de  $120kN$  que se encuentra sobre un resorte con una constante de rigidez con un valor de  $10^4kN/m$  determine

a) Frecuencia natural

Si

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi}$$

Entonces

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{10^4}{(120 \cdot 9.81)}} = 2.91Hz$$

Hertz=ciclos/seg

b) Periodo de oscilación

$$T_n = \frac{1}{f_n} = \frac{1}{2.91} = 0.34s$$

▪ **Vibración libre con amortiguamiento.**

En la figura 2.5 se presenta un sistema de vibración libre amortiguado, el cual se compone por una masa, un resorte y un amortiguador que es el encargado de disipar la energía.

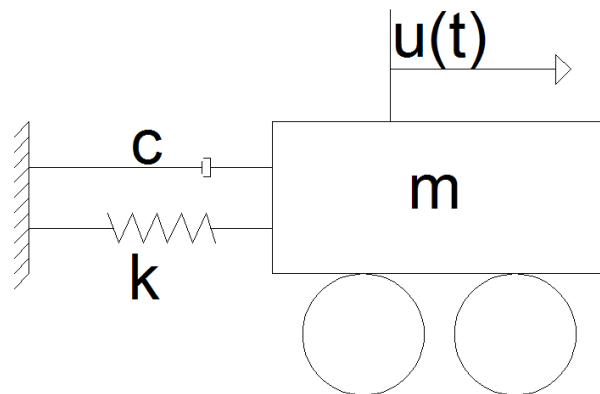


Figura 2.5. Sistema de vibración libre, con un grado de libertad amortiguado.

La ecuación de movimiento para este tipo de condiciones empleando el principio de D’Alambert es:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0 \quad (2.10)$$

Donde  $c \neq 0$

Para llegar a la solución de la ecuación, primero se le divide entre la masa y posteriormente se aplica un cambio de variable  $u = De^{st}$ . Al realizar el proceso de derivación para conocer la velocidad y aceleración del sistema se tiene que:

$$\dot{u} = sDe^{st} \quad (2.11)$$

$$\ddot{u} = s^2De^{st} \quad (2.12)$$

Sustituyendo la velocidad y la aceleración en la ecuación 2.13 y dividiendo entre la masa se puede reescribir de la siguiente forma:

$$\left(s^2 + \frac{cs}{m} + \frac{k}{m}\right) = 0 \quad (2.13)$$

Las raíces para esta ecuación se obtendrán mediante la fórmula general de ecuaciones de segundo grado:

$$s_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \quad \text{o} \quad -\frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4km}}{2m} \quad (2.14)$$

La ecuación 2.17 presenta tres soluciones, donde cada una equivale a una de las posibles condiciones en las que se encuentra el sistema, el término  $\frac{c}{2m}$  dentro de la raíz determina la respuesta del sistema.

- I. Si  $\frac{c}{2m} > \sqrt{\frac{k}{m}}$  tendrá dos raíces reales negativas, y se tendrá una condición de sistema sobre amortiguado
- II. Si  $\frac{c}{2m} = \sqrt{\frac{k}{m}}$  caso con amortiguamiento crítico
- III. Si  $\frac{c}{2m} < \sqrt{\frac{k}{m}}$  la ecuación tendrá dos raíces complejas y se presentara un sistema sub amortiguado

Existen dos parámetros que también pueden identificar el caso en el que se encuentra nuestro sistema, el primero es la proporción o relación de amortiguamiento del sistema ( $\zeta$ ), esta depende de la masa y la rigidez. Otro es el coeficiente de amortiguamiento crítico ( $C_{cr}$ ) el cual se puede definir como el valor mínimo de amortiguamiento, necesario para evitar la oscilación de un sistema, cuando está sometido a una condición de vibración libre amortiguada.

Estos dos parámetros se expresan como:

$$\zeta = \frac{c}{2m\omega_n} = \frac{c}{c_{cr}} \quad (2.15)$$

El amortiguamiento crítico también se puede expresar con los siguientes términos:

$$c_{cr} = 2\sqrt{km} = \frac{2k}{\omega_n} \quad (2.16)$$

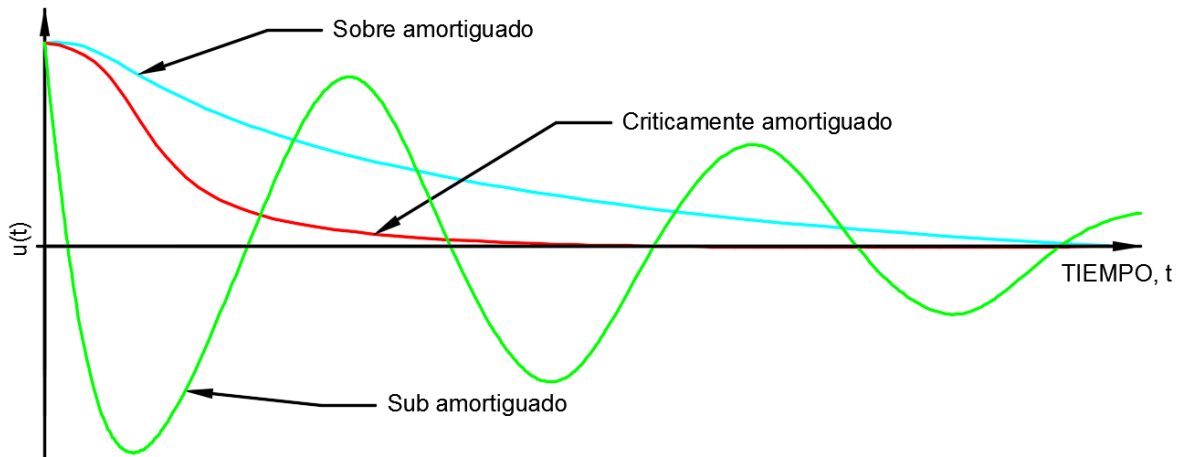
Si se realiza una comparación del amortiguamiento  $c$  del sistema y el amortiguamiento crítico, también se puede ver el comportamiento que presentara el sistema.

Si  $c > c_{cr}$  o  $\zeta > 1$ , será la condición sobre amortiguada y no presenta oscilación.

Si  $0 < c < c_{cr}$  o  $0 < \zeta < 1$ , es un sistema sub amortiguado y si presenta oscilación.

Si  $c = c_{cr}$  o  $\zeta = 1$ , será un sistema con amortiguamiento crítico y no presentará oscilación.

En la siguiente imagen se ilustra los tres comportamientos que puede presentar el sistema:



**Figura 2.6. Vibración libre de un sistema críticamente amortiguado, un sistema sobre amortiguado y un sistema sub-amortiguado.**

➤ **Caso con amortiguamiento crítico**

Este sistema se le conoce así debido a que con una pequeña disminución en la fuerza de amortiguamiento haría que en el sistema se presentara oscilación.

Queda la ecuación para este tipo de sistema como:

$$u(t) = e^{-\omega_n t} [u_0 + (\dot{u}_0 + \omega_n u_0) t] \quad (2.17)$$

➤ **Caso sobre amortiguado**

Para el caso sobre amortiguado las raíces son reales y diferentes por lo tanto la ecuación del movimiento general queda como:

$$u(t) = e^{-\zeta \omega_n t} \left[ u_0 \cosh(\omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} t) + \frac{\dot{u}_0 + \zeta \omega_n u_0}{\omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}} \sinh(\omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} t) \right] \quad (2.18)$$

➤ **Sub-amortiguado**

Esta condición presenta raíces complejas, por lo tanto la solución que se tiene para conocer el movimiento en cualquier instante de tiempo es.

$$u(t) = e^{-\zeta\omega_n t} \left[ u(0)\cos \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t + \left( \frac{\dot{u}(0)+\zeta\omega_n u(0)}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} \right) \text{sen } \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} t \right] \quad (2.19)$$

Este tipo de sistema al tener oscilación presenta un periodo sub amortiguado que se expresa como:

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_D} \quad (2.20)$$

Donde

$$\omega_D = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \quad (2.21)$$

$\omega_D$  es conocido como la frecuencia natural amortiguada o simplemente como periodo de amortiguamiento de vibración.

Este tipo de movimiento conforme el tiempo avanza la amplitud disminuye de forma logarítmica, este decremento ( $\delta$ ) se expresa mediante:

$$\delta = \ln \frac{u_1}{u_2} = \ln \frac{u_3}{u_4} = \dots = \ln \frac{u_{n-1}}{u_n} \quad (2.22)$$

El decremento logarítmico de la amplitud ( $\delta$ ) es el logaritmo natural de la relación de dos amplitudes sucesivas del movimiento, oscilando libremente:

$$\delta = \ln \left( \frac{u_n}{u_{n+1}} \right) = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (2.23)$$



Cuando se presenta un amortiguamiento cercano a cero se puede reescribir como:

$$\delta = \ln\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right) = 2\pi\zeta \quad (2.24)$$

### Ejemplo 1.2

Para una cimentación de maquinaria, que tiene un peso de 115kN con una constante de resorte de 18500kN/m, y un coeficiente de amortiguamiento  $c=500\text{kN}\cdot\text{s}/\text{m}$

- a) determinar si el sistema se encuentra sobre amortiguado, sub amortiguado y con amortiguamiento crítico.

$$4mk = 4 * \left(18500 * \frac{115}{9.81}\right) = 867482.16 \text{ kN}^2 - \text{s}^2/\text{m}^2 \quad \text{y} \quad c^2 = 500^2 = 250000$$

$c^2 < 4mk$  por lo que el sistema se considera sub amortiguado

Utilizando otro criterio para la determinación de que caso se trata:

$$c_{cr} = 2\sqrt{km} = 2\sqrt{18500 * \left(\frac{115}{9.81}\right)} = 931.39 \text{ kN} - \text{s}/\text{m}$$

Si  $c=500$  y  $C_{cr}= 931.39$

$$\zeta = \frac{c}{c_{cr}} = \frac{500}{931.39} = 0.54 < 1$$

Por lo que también se comprueba que es sub amortiguado.

- b) el decremento logarítmico

$$\delta = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{2\pi*0.54}{\sqrt{1-0.54^2}} = 3.99$$

c) la relación de dos amplitudes sucesivas

$$\delta = \ln \frac{u_1}{u_2}$$

Por lo tanto

$$e^{\delta} = e^{3.99} = 54.48$$

## 2.5 Vibración inducida en sistemas de un solo grado de libertad

Un sistema puede presentar diferentes comportamientos de acuerdo al tipo de vibración inducida; este puede presentar un movimiento periódico, que conlleva que el cuerpo en movimiento tarde el mismo tiempo en llegar a su posición inicial.

El segundo tipo es el anti periódico; este se presenta cuando el movimiento varía irregularmente en el tiempo, y puede ser de dos clases;

- Transitorio: cuando el tiempo final tiende a cero,  $t$  es menor que  $t_f$ , por ejemplo, el sismo
- Estado estable: cuando  $t$  tiende a infinito, ejemplo el viento.

En este tipo de sistemas existe una fuerza externa  $P(t)$  aplicada de manera constante, lo que genera un cambio continuo en el sistema. Para fines de este escrito, se supondrá una fuerza aplicada  $P(t)$  de forma senoidal, y de amplitud  $p_0$  es decir:

$$P(t) = p_0 \sin \lambda t \quad (2.25)$$

$\lambda$  es la frecuencia con la que se aplica la fuerza de excitación.

- **Vibración inducida sin amortiguamiento.**

En este sistema se presenta un periodo de excitación el cual se expresa como:

$$T = 2\pi/\lambda \quad (2.26)$$

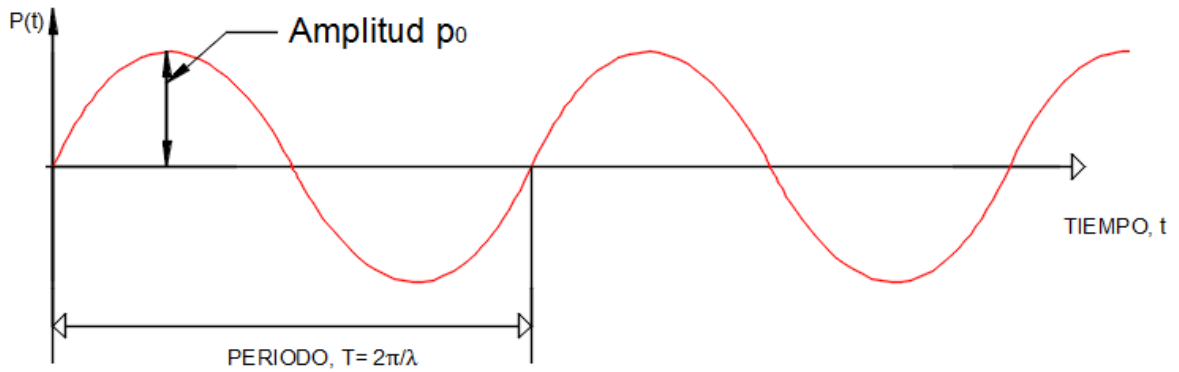
La ecuación de movimiento se obtiene aplicando el principio de D’Alambert, quedando expresada como:

$$m\ddot{u} + ku = p_0 \text{sen}(\lambda t) \quad (2.27)$$

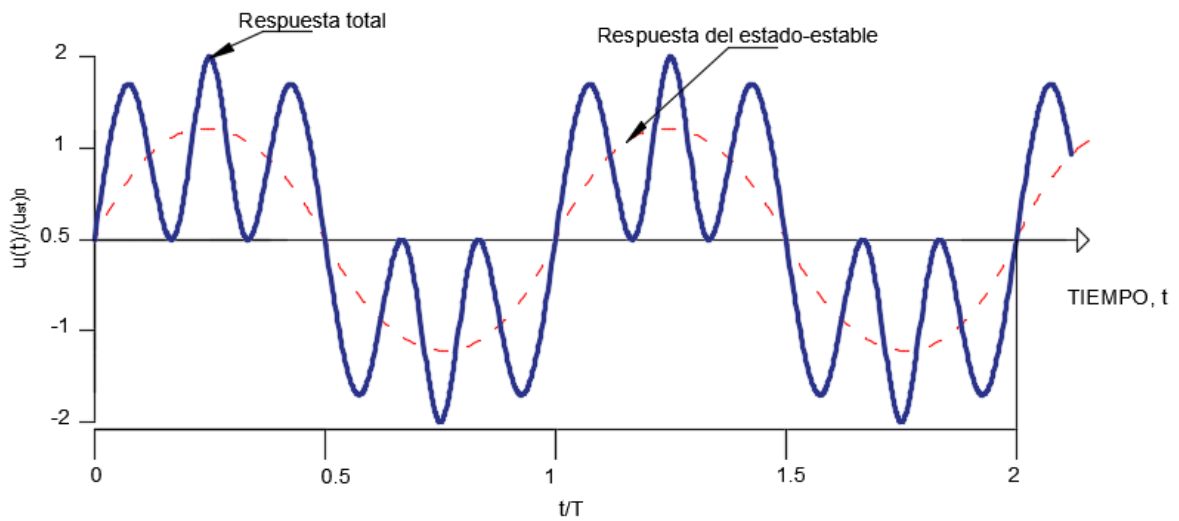
Este tipo de ecuación diferencial presenta una solución compuesta, es decir, la primer parte de la solución es donde interviene la fuerza inducida. La solución complementaria se refiere al comportamiento del sistema en vibración libre. Al sumar ambas soluciones se obtiene la siguiente ecuación que describe el comportamiento de un sistema con vibración inducida sin amortiguamiento.

$$u(t) = \left[ u(0)\cos\omega_n t + \left( \left( \frac{\dot{u}(0)}{\omega_n} \right) - \frac{p_0}{k} \frac{\frac{\lambda}{\omega_n}}{1 - \left( \frac{\lambda}{\omega_n} \right)^2} \right) \text{sen}\omega_n t \right] + \left( \frac{p_0}{k} \frac{1}{1 - \left( \frac{\lambda}{\omega_n} \right)^2} \right) \text{sen}(\lambda t) \quad (2.28)$$

El término dentro de los corchetes se conoce como estado transitorio, este movimiento se desvanece con el tiempo dejando en el sistema únicamente a la vibración libre o también llamado estado estable.



a)



b)

**Figura 2.7. a) Fuerza harmónica b) respuesta de un sistema sin amortiguamiento a una fuerza harmónica cuando  $\lambda/\omega_n=0.2$ ,  $u(0)=0$  y la velocidad es  $(\omega_n p_0)/k$**

El tipo de fuerza aplicada al sistema se observa en la figura 2.7.a. El comportamiento generado del sistema se observa la figura 2.7.b, donde se muestra las dos componentes de vibración generadas en el sistema. El primer término es la fuerza externa aplicada o estado estable, y no depende de las condiciones iniciales; el segundo término es estado transitorio, que depende del desplazamiento y velocidad inicial.

Como se observa en la figura 2.7; la vibración se presenta de forma infinita lo que en la realidad no sucede, siendo esto un caso teórico. En la realidad todo sistema posee un amortiguamiento teniendo así un sistema amortiguado con vibración inducida.

- **Vibración inducida con amortiguamiento.**

Se utilizará la misma ecuación del movimiento que en el sistema de vibración libre sin amortiguamiento; sin embargo, ahora el término que corresponde al amortiguamiento no tendrá un valor igual a cero.

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p_0 \text{sen}\lambda t \quad (2.29)$$

Esta ecuación posee de igual manera dos componentes; la primera es la generada por la vibración libre del sistema o vibración transitoria y la segunda debido a la vibración inducida o estado estable. La solución propuesta para esta ecuación se muestra a continuación:

$$u(t) = [e^{-\zeta\omega_n t}(A\cos\lambda_D t + B\text{sen}\lambda_D t)] + (C\text{sen}\lambda t + D\cos\lambda t) \quad (2.30)$$

Siendo

$$\lambda_D = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (2.31)$$

La parte encerrada en corchetes pertenece a la parte transitoria, mientras que la otra pertenece a la parte de estado estable. Este comportamiento se ilustra en la figura 2.8, suponiendo las siguientes condiciones:

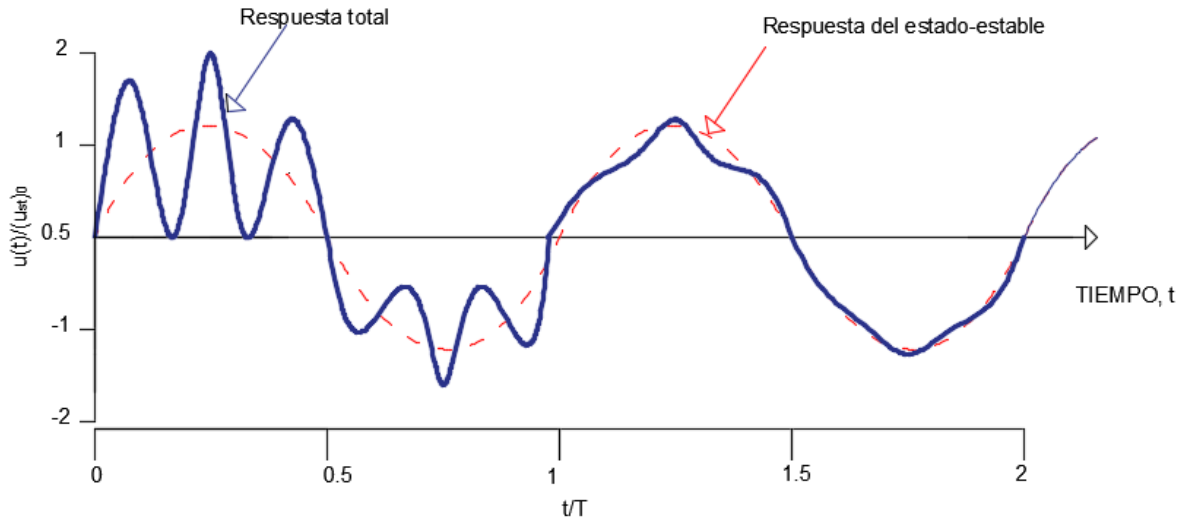
$$\lambda/\omega_n = 0.2$$

$$u(0) = 0$$

$$\zeta = 0.05$$

$$\text{Velocidad} = (\omega_n p_0) / k$$

En la figura 2.8 la respuesta total del sistema se ilustra con una línea sólida, el estado estable con una línea punteada.



**Figura 2.8. Respuesta de un sistema amortiguado sometido a una fuerza armónica. Con las siguientes condiciones,  $\lambda/\omega_n=0.2, \zeta=0.05, u(0)=0$  y la velocidad es  $(\omega_n p_0)/k$ .**

Como se observa, el estado transitorio decrece exponencialmente con el tiempo, en relación a la relación de amortiguamiento y con la división entre la frecuencia externa y la frecuencia natural del sistema. Después de que transcurre un tiempo la fuerza inducida es la que permanece quedando el sistema en estado estable, la deformación máxima ocurre antes de que el sistema alcance el estado estable.

## 2.6 Factores de respuesta dinámica.

Los factores de respuesta dinámica son adimensionales y se emplean para conocer la amplitud de la velocidad, deformación y aceleración.

Para el estudio de estos factores se utiliza el estado transitorio del sistema, como el siguiente:

$$\frac{u(t)}{p_0/k} = R_d \text{ sen}(\lambda t - \phi) \tag{2.32}$$

El factor de respuesta a la deformación  $R_d$ , es la relación de la amplitud  $u_0$  de la deformación dinámica con respecto a la deformación estática  $(u_{st})_0$ ; al diferenciarlas con respecto al tiempo se obtiene la velocidad de respuesta.

$$\frac{\dot{u}(t)}{p_0/\sqrt{km}} = Rv \cos(\lambda t - \phi) \quad (2.33)$$

$R_v$  es el factor de respuesta de velocidad, y se relaciona con  $R_d$  empleando la siguiente expresión:

$$Rv = \frac{\lambda}{\omega_n} R_d \quad (2.34)$$

Si se realiza nuevamente la diferenciación se obtendrá el factor de respuesta de aceleración:

$$\frac{\ddot{u}(t)}{p_0/m} = -Ra \sin(\lambda t - \phi) \quad (2.35)$$

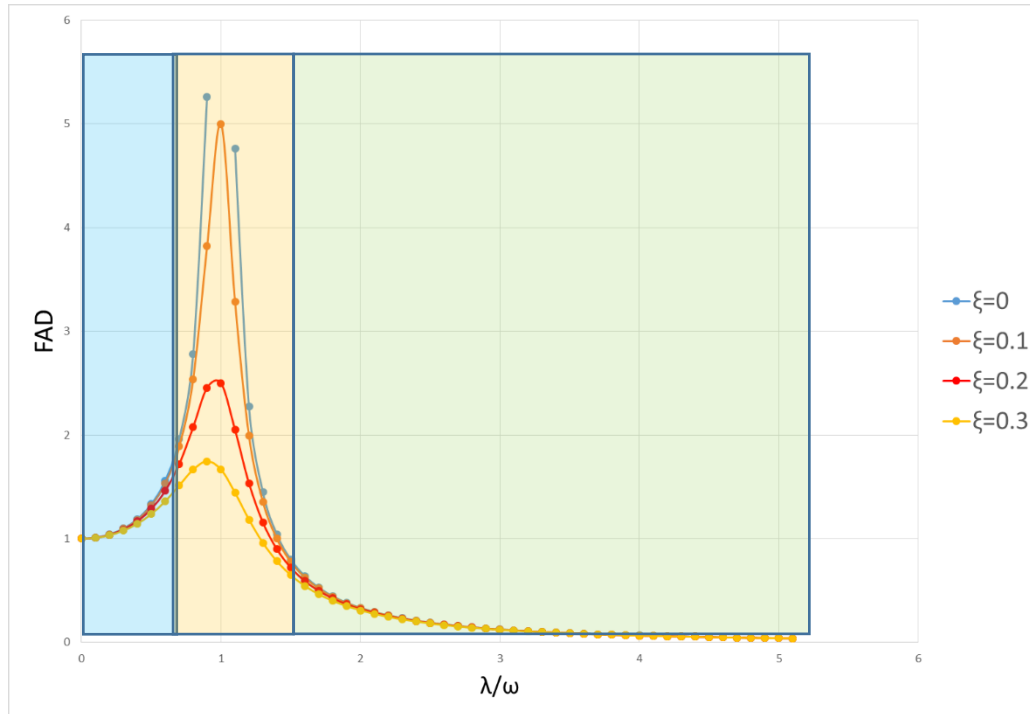
Se puede observar en esta última ecuación que  $R_a$  es la relación de la amplitud de la aceleración vibratoria con la aceleración debida a la fuerza  $p$  que actúa en la masa.

Además, también se puede obtener una relación con el  $R_d$  con la siguiente expresión:

$$R_a = \left(\frac{\lambda}{\omega}\right)^2 R_d \quad (2.36)$$

Los tres factores se relacionan utilizando la siguiente ecuación:

$$\frac{Ra}{\frac{\lambda}{\omega_n}} = Rv = \frac{\lambda}{\omega_n} R_d \quad (2.37)$$



**Figura 2.9. Comportamiento del factor de amplificación dinámica.**

Analizando la figura 2.9 se nota que cuando  $R_d$  se aproxima a 1 el desplazamiento en estado estable  $u_s(t)$  es casi igual al desplazamiento estático  $u_{st}$ . Esto quiere decir que es directamente afectado por la rigidez esta es la zona 1 coloreada de azul.

Ahora cuando  $r$  es muy grande, quiere decir que la frecuencia externa aplicada es muy alta comparada con la frecuencia del sistema.

En un sistema en vibración lo que puede controlarse es la frecuencia del sistema; por ejemplo si se incrementa la masa, la frecuencia del sistema disminuye por lo tanto se entiende que la zona de color verde de la figura 2.9 es controlada directamente por la masa.

La zona de en medio coloreada de naranja está controlada por el amortiguamiento, en esta zona es donde se encuentra el  $R_d máx$ , que es directamente proporcional al factor de amortiguamiento.

Es importante mencionar que la relación  $r = \frac{\lambda}{\omega_n}$  en la práctica nunca debe ser 1, es decir que la frecuencia natural sea igual a la frecuencia externa pues la fórmula se



invalida haciendo que el  $R_d$  crezca indefinidamente es decir que tienda a infinito. Este fenómeno se conoce como resonancia y es muy peligroso en las estructuras. La frecuencia de resonancia se define como aquella fuerza en la cual ocurre la deformación máxima. Para un sistema sin amortiguamiento la frecuencia de resonancia es igual a la frecuencia natural  $\omega_n$  del sistema. En el caso de los sistemas amortiguados, las tres frecuencias de resonancia para cada uno de los factores de respuesta del sistema son :

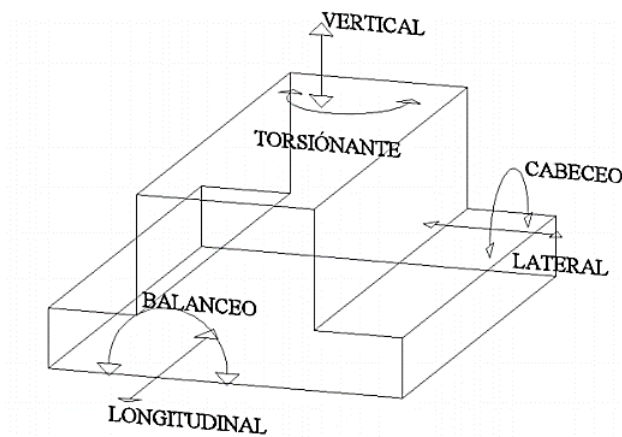
$$R_d = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (2.38)$$

$$Rv = \frac{1}{2\zeta} \quad (2.39)$$

$$Ra = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (2.40)$$

### 3 VIBRACIÓN DE MAQUINARIA

Para poder realizar el diseño de una cimentación de maquinaria es necesario conocer la forma en que se comportará la cimentación al estar sometida a la vibración de dicha maquinaria. Este capítulo que se basa en lo escrito por M.Das y Richart et al (1970). Se estudiará el comportamiento de la cimentación al idealizarse como un bloque rígido. Tal bloque puede presentar tres desplazamientos y tres rotaciones con respecto a cada uno de sus ejes, es decir, la cimentación presenta 6 modos de vibración como se observa en la figura 3.1.

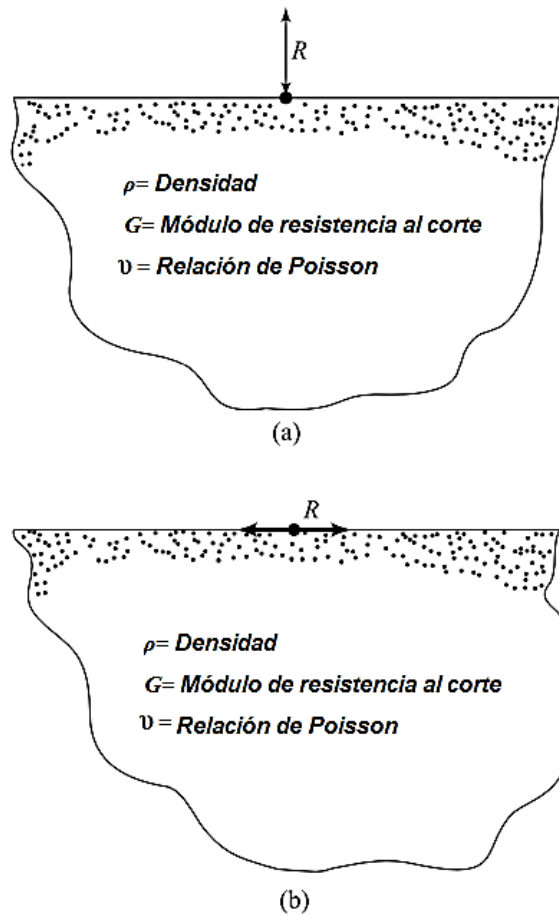


**Figura 3.1. Modos de vibración de un bloque rígido.**

Otro aspecto importante es considerar a la masa de suelo como un material elástico. Esto se plantea así debido a que generalmente las vibraciones generadas son pequeñas para llegar a generar un comportamiento plástico en la masa de suelo.

#### 3.1 Vibración vertical de una cimentación en un semi-espacio elástico.

Los estudios del comportamiento de una cimentación sometida a vibración, inician con Lamb quien estudió el caso de un oscilador sobre la superficie de un medio elástico semi-infinito, para poder observar la respuesta al estar sometido a fuerzas de vibración en sentido vertical (figura 3.1a) que actúan alrededor el eje  $z$ . Conjuntamente estudió el caso para una vibración en sentido horizontal (figura 3.1b) la cual actúa en la línea de la superficie del medio semi-elástico. En ambos casos consideró un punto sobre el cual actuaba la fuerza  $R$ .



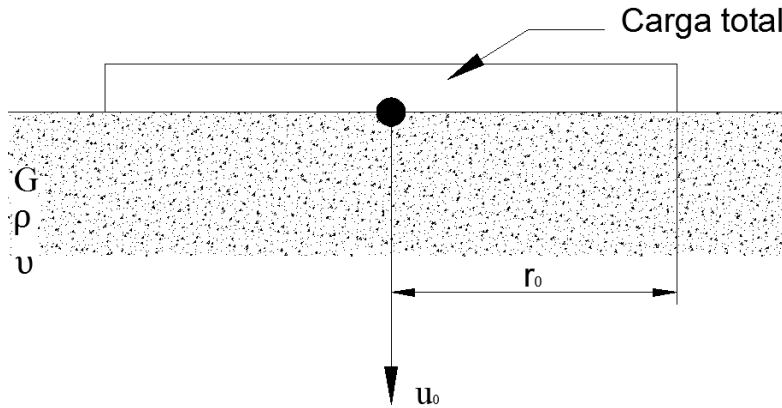
**Figura 3.2.** Fuerza de vibración actuando sobre la superficie de un medio semi-elástico.

En 1936 Reissner dió una solución para poder evaluar la respuesta dinámica de una cimentación completamente flexible con geometría circular sometida a vibración, considerando que se encontraba cargada uniformemente.

Reissner representó a la cimentación como una masa en oscilación, la cual producía una presión vertical periódica distribuida uniformemente sobre un área circular.

Además, utilizó las mismas consideraciones que Lamb (cuerpo semi-elástico y un medio semi infinito) para modelar el comportamiento de la masa de suelo. El propósito de Reissner era poder integrar los parámetros del suelo como el módulo de resistencia al cortante  $G$ , la relación de Poisson  $\nu$  y la densidad  $\rho$  (peso unitario total del suelo seco o saturado dividido por la aceleración de la gravedad) en el análisis del problema. Basándose en lo realizado por Lamb pudo llegar a la ecuación

3.1, que representa un desplazamiento vertical  $u_0$  al centro de un área circular cargada en su superficie como la que se muestra en la figura 3.3.



**Figura 3.3. Vibración de un área circular uniformemente cargada.**

$$u_0 = \frac{P_0 e^{i\omega t}}{Gr_0} (f_1 + if_2) \quad (3.1)$$

$P_0$  = Magnitud de la fuerza de excitación,

$u_0$  = desplazamiento periódico de la cimentación,

$\omega$  = frecuencia circular aplicada,

$r_0$  = radio del área cargada,

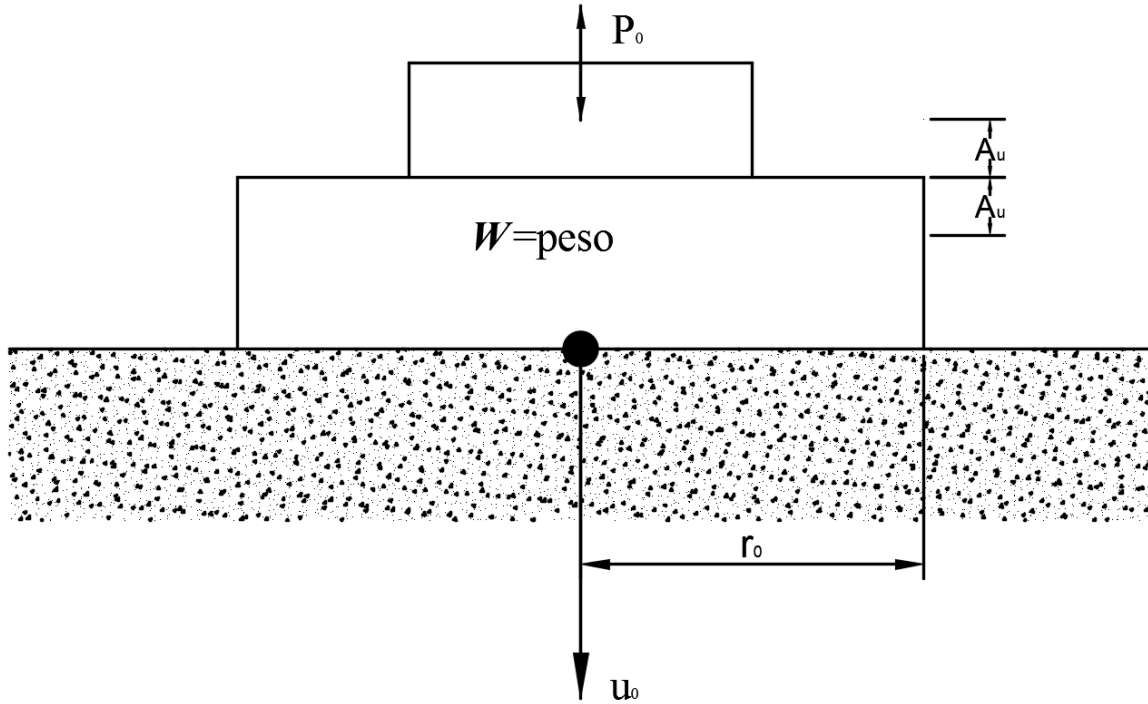
$G$  = módulo de cortante del suelo,

$f_1, f_2$  = funciones adimensionales de oscilación de Reissner.

En la ecuación 3.1 se considera al desplazamiento y a la fuerza como positiva cuando tiene dirección hacia abajo. Mientras que  $f_1$  y  $f_2$  son funciones de desplazamiento relacionadas con la relación de Poisson y de la frecuencia de la fuerza de excitación.

Si se considera una cimentación flexible de forma circular, de un peso  $W$  (masa =  $m = W/g$ ) colocada sobre un semi-espacio elástico y sometido a una fuerza de excitación  $P$  con magnitud  $P_0 e^{i(\omega t + \alpha)}$  como se muestra en la figura 3.4 ( $\alpha$  se conoce

como ángulo de desfase, y se refiere a la diferencia en los desplazamientos de la cimentación y de la fuente de excitación, debidos a la vibración entre dos cuerpos).



**Figura 3.4. Cimentación circular flexible, sujeta a una fuerza de vibración.**

Mediante el uso de este modelo Reissner desarrolló diferentes expresiones para analizar su comportamiento dinámico:

$$A_u = \frac{P_0}{G r_0} U \quad (3.2)$$

$$U = \sqrt{\frac{f_1^2 + f_2^2}{(1 - b a_0^2 f_1)^2 + (b a_0^2 f_2)^2}} \quad (3.3)$$

$$b = \frac{m}{\rho r_0^3} = \left(\frac{W}{g}\right) \left[\frac{1}{(\gamma/g)r_0^3}\right] = \frac{W}{\gamma r_0^3} \quad (3.4)$$

$$a_0 = \omega r_0 \sqrt{\frac{\rho}{G}} = \frac{\omega r_0}{v_s} \quad (3.5)$$

Donde:

$A_u$  = La amplitud de vibración oscilatoria

$U$  = Amplitud adimensional

$b$  = Relación de masa adimensional

$\rho$  = Densidad de la masa de suelo

$\gamma$  = Peso volumétrico del material elástico

$a_0$  = Frecuencia adimensional

$v_s$  = Velocidad de ondas de corte en el material elástico en el cual está colocada la cimentación.

En el caso de que se presente un ángulo de desfase este se obtiene mediante la expresión 3.6.

$$\tan(\alpha) = \frac{f_2}{-f_1 + b a_0^2 (f_1^2 + f_2^2)} \quad (3.6)$$

Quinlan (1953) y Sung (1953) extendieron la solución propuesta por Reissner para analizar el efecto del cambio en la presión de contacto sobre el área cargada al considerar a la cimentación circular totalmente rígida, lo que genera que las presiones en el contacto entre la cimentación y el medio elástico no sean iguales a lo largo de la sección circular, Sung desarrolló las ecuaciones para tres casos de distribución de presiones para tres casos de cimentaciones circulares (ecuaciones 3.7-3.9). Estas distribuciones de presiones se observan en la figura 3.5.

- Cimentaciones flexibles de geometría circular Figura 3.5a para  $r \leq r_0$

$$p = \frac{P_0 e^{i(\omega t + \alpha)}}{\pi r_0^2} \quad (3.7)$$

- Cimentaciones rígidas de geometría circular Figura 3.5b para  $r \leq r_0$

$$p = \frac{P_0 e^{i(\omega t + \alpha)}}{2\pi r_0^2 \sqrt{r_0^2 - r^2}} \quad (3.8)$$

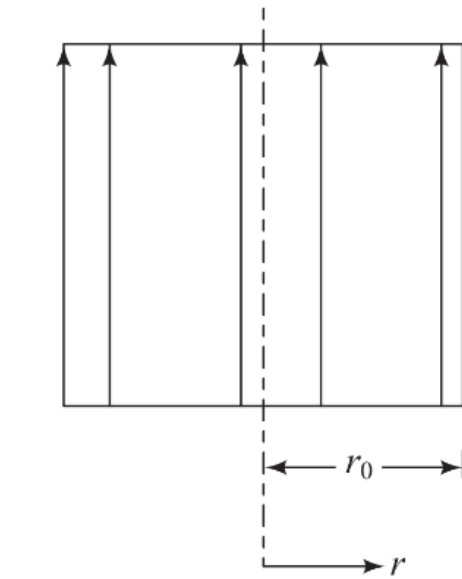
- Cimentaciones flexibles de geometría circular Figura 3.5c para  $r \leq r_0$

$$p = \frac{2(r_0^2 - r^2)P_0 e^{i(\omega t + \alpha)}}{\pi r_0^4} \quad (3.9)$$

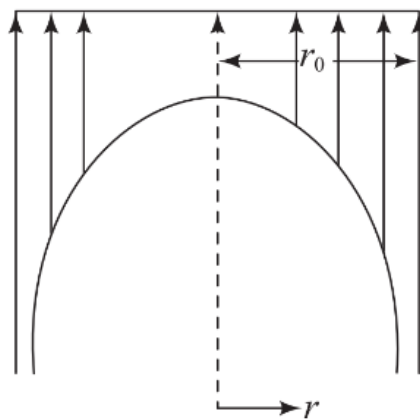
Donde:

$p$  = presión de contacto a una distancia  $r$  medidas desde el centro de la cimentación

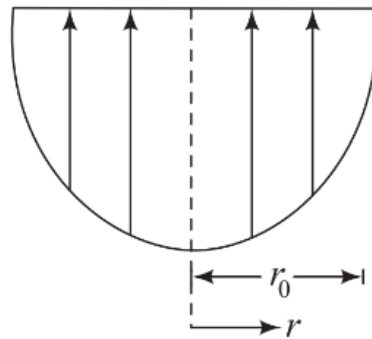
Las ecuaciones desarrolladas por Sung describen el desplazamiento al centro de un área circular cargada. Para el caso de las presiones parabólicas y uniforme, la superficie cargada presenta desplazamientos mayores al centro que en los extremos. Este patrón de desplazamiento es posible solo en una cimentación flexible. En el caso de una cimentación rígida se presentan desplazamientos uniformes en la superficie del área cargada. En los tres casos la amplitud del movimiento se puede obtener utilizando las expresiones propuestas por Reissner 3.2-3.6, salvo la diferencia en las funciones  $f_1$  y  $f_2$  las cuales cambian pues dependen de la distribución de contacto como se muestra en la siguiente figura.



(a) Distribución de presión uniforme



(b) Distribución de presión bajo una cimentación rígida

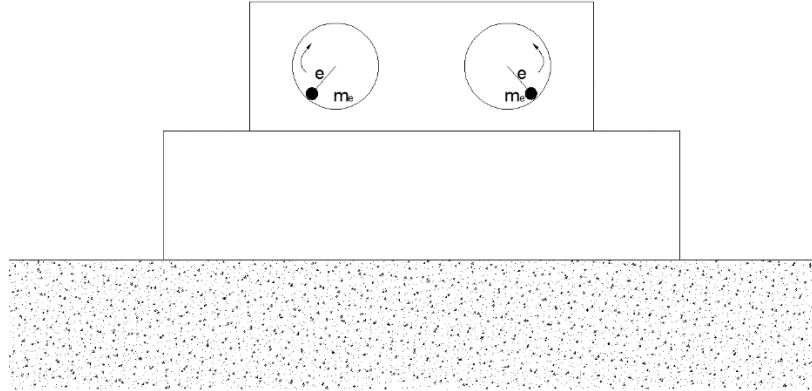


(c) Distribución de presión parabólica

**Figura 3.5. Cimentación circular flexible, sujeta a una fuerza de vibración.**



Otro caso que se puede presentar en una cimentación, es cuando está sujeta a una frecuencia de excitación dependiente, o en otras palabras, la amplitud de la fuerza de oscilación es constante. Un caso como éste se presenta cuando se tiene una maquinaria con masas en rotación. Por ejemplo, una cimentación excitada por dos masas rotatorias como la de la figura 3.6.



**Figura 3.6. Vibración de una cimentación debido a una frecuencia dependiente de la fuerza de excitación.**

En este caso la amplitud de la fuerza de excitación está dada por la ecuación 3.10.

$$P = 2m_e e \omega^2 = m_1 e \omega^2 \quad (3.10)$$

Donde:

$m_1$ : total de masas rotando

$\omega$ : frecuencia circular de las masas rotatorias.

En esta condición la amplitud de la vibración se estima utilizando la ecuación 3.11.

$$A_u = \frac{m_1 e a_0^2}{\rho r_0^3} \sqrt{\frac{f_1^2 + f_2^2}{(1 - b a_0^2 f_1)^2 + (b a_0^2 f_2)^2}} = \frac{m_1 e}{\rho r_0^3} U' \quad (3.11)$$

$a_0$  se obtiene utilizando la ecuación 3.5.

$U'$  es una amplitud adimensional definida por

➤ **Variación de las funciones de desplazamiento  $f_1$  y  $f_2$**

Bycroft (1956) supuso que la distribución de presiones permanece constante en el intervalo de frecuencias considerado. Para ello evaluó el promedio ponderado de los desplazamientos bajo la cimentación, y proporcionó valores mas aproximados de las funciones  $f_1$  y  $f_2$ . Estos valores, como se mencionó, dependen del valor de frecuencia adimensional  $a_0$  y de la relación de Poisson del material elástico. Asumió valores de  $\nu=0, 0.25$  y  $0.5$ . La variación de estas funciones se observa en la figura 3.7.

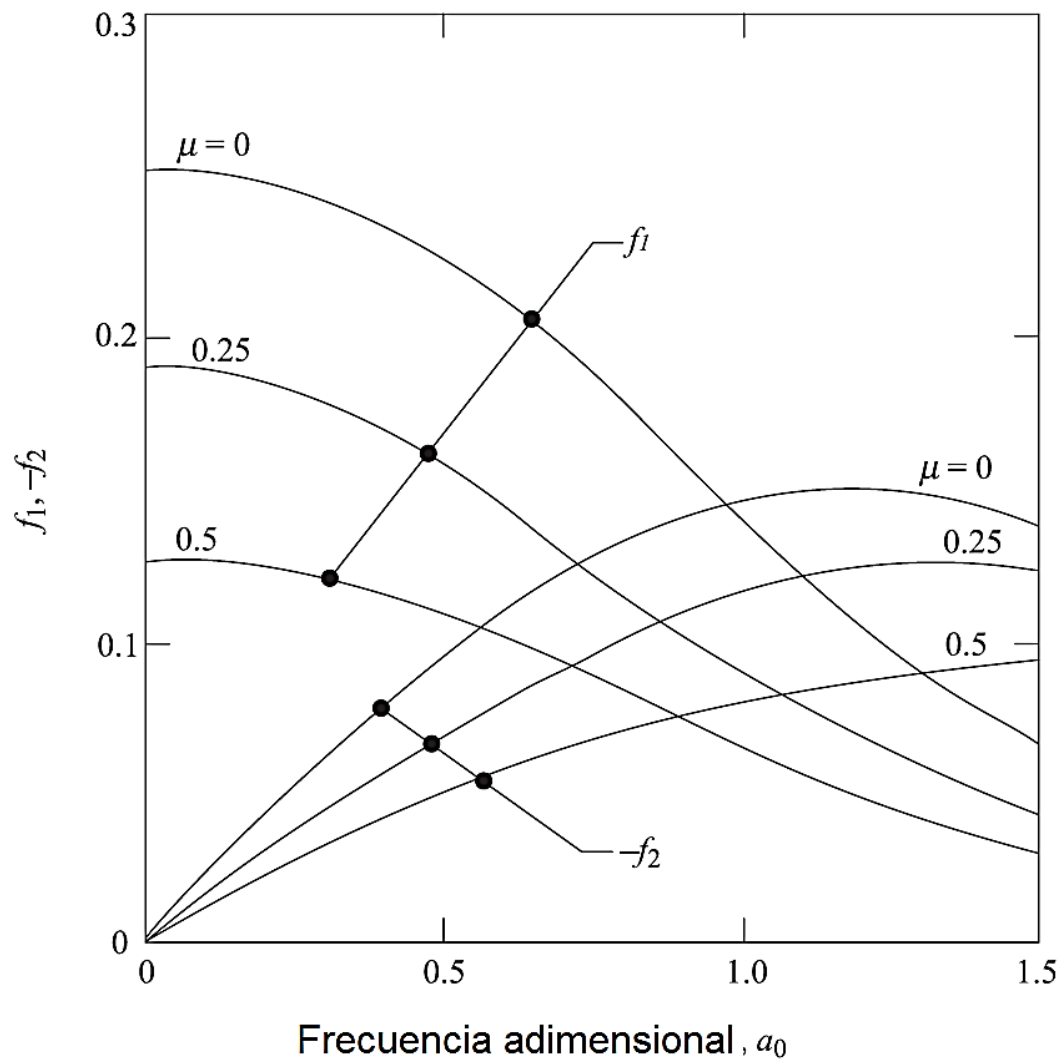


Figura 3.7. Variación de las funciones de desplazamiento con  $a_0$  y  $\nu$

➤ **Analogía de un sistema masa-resorte-amortiguador.**

Hsieh utilizó en 1962 lo propuesto por Reissner para desarrollar una ecuación similar a la de un sistema vibratorio amortiguado con un grado de libertad ecuación 3.12, la cual se utiliza para el estudio de cimentaciones sometidas a vibración vertical. Sin embargo, hasta este momento, la constante de resorte y del amortiguador son dependientes de la frecuencia de vibración lo que complica el análisis de la respuesta del sistema.

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = P_0 e^{i(\omega t + \alpha)} \quad (3.12)$$

Lysmer y Richart generaron en 1966 un modelo simplificado para la solución del problema de la vibración vertical, conocida como la analogía de Lysmer. Este modelo consistió en considerar a todo el semi-espacio elástico como un resorte equivalente, que es independiente de la frecuencia, que es la misma que la rigidez vertical estática para una base circular rígida obtenida integrando la solución estática de Boussinesq para el semi-espacio.

$$k = \frac{4Gr_0}{1-\nu} \quad (3.13)$$

$k$  es la constante de resorte para una cimentación circular sometida a una vibración vertical. De igual manera obtuvieron un amortiguador  $c$  independiente de la frecuencia.

$$c = \frac{3.4r_0^2}{1-\nu} \sqrt{G\rho} \quad (3.14)$$

Lysmer también modificó la relación de la masa que interviene en el desplazamiento de la cimentación, considerando la aplicación de una carga dinámica vertical, siendo esta  $B$ .

$$B = \frac{1-\nu}{4} b = \frac{1-\nu}{4} \frac{m}{\rho r_0^3} \quad ; \quad b = \frac{m}{\rho r_0^3} \quad (3.15)$$

Donde:

$m$ : masa total del sistema (peso de la cimentación + peso del equipo)

Utilizando la ecuación 3.12, se procede al estudio del comportamiento de la cimentación, lo que conlleva la obtención de la frecuencia de resonancia y las amplitudes de vibración del sistema.

➤ **Frecuencia de resonancia**

Para el estudio de la frecuencia de resonancia de un sistema suelo-cimentación-maquinaria es necesario conocer inicialmente la frecuencia natural, utilizando la ecuación 3.13 y sustituyéndola en la ecuación 2.4 obtenemos la expresión 3.16.

$$f_n = 9.55 \sqrt{\left(\frac{4Gr_0}{1-\nu}\right) \frac{1}{m}} = 9.55 \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (3.16)$$

Lysmer y Richart encontraron que la resonancia ocurre cuando la relación de masa B es mayor de 0.36. A continuación se procedió a calcular la relación de amortiguamiento del sistema utilizando la ecuación 3.6 donde se sustituye el valor de  $k$  y utilizando la relación de Lysmer se obtiene el amortiguamiento crítico de la siguiente forma.

$$c_{cr} = 2\sqrt{km} = 2\sqrt{\frac{4Gr_0}{1-\nu} m} = 8\sqrt{\frac{4Gr_0}{1-\nu} \left(\frac{B\rho r_0^3}{1-\nu}\right)} = \frac{8r_0^2}{1-\nu} \sqrt{GB\rho} \quad (3.17)$$

Por lo tanto, la relación de amortiguamiento dada en la ecuación 2.5 para el sistema será:

$$\zeta = \frac{c}{c_{cr}} = \frac{\frac{3.4r_0^2}{1-\nu} \sqrt{G\rho}}{\frac{8r_0^2}{1-\nu} \sqrt{GB\rho}} = \frac{0.425}{\sqrt{B}} \quad (3.18)$$

La frecuencia de resonancia que como se mencionó anteriormente es cuando el sistema alcanza su mayor desplazamiento debido a la igualación de las

frecuencias del sistema suelo-cimentación-maquinaria. La frecuencia de resonancia se obtiene por lo tanto mediante la ecuación 3.19 para el caso de una excitación constante.

$$f_m = f_n \sqrt{1 - 2\zeta^2} = \frac{c}{c_{cr}} = \frac{3.4r_0^2}{8r_0^2} \frac{\sqrt{G\rho}}{\sqrt{GB\rho}} = \frac{0.425}{\sqrt{B}} \quad (3.19)$$

Si se presenta el caso de una maquinaria con masas rotatorias la frecuencia de resonancia se puede calcular con la ecuación 3.20.

$$f_m = \frac{f_n}{\sqrt{1 - 2\zeta^2}} = \frac{\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{4Gr_0}{1-\nu} \left(\frac{1}{m}\right)}}{\sqrt{1 - 2\left(\frac{0.425}{\sqrt{B}}\right)^2}} \quad (3.20)$$

➤ **Amplitud de la vibración en la resonancia.**

La amplitud de vibración  $A_u$  cuando se presenta el fenómeno de resonancia se determina utilizando la ecuación 3.21.

$$A_u = \frac{P_0(1-\nu)}{4Gr_0} \left( \frac{B}{0.85\sqrt{B}-0.18} \right) \quad (3.21)$$

La amplitud de vibración  $A_u$  para el caso de un sistema con masas rotatorias se obtiene de la siguiente ecuación.

$$A_u = \frac{m_1 e}{m} \left( \frac{B}{0.85\sqrt{B}-0.18} \right) \quad (3.22)$$

Recordando que anteriormente  $m_1$  se definió como el total de masas rotando que causan la excitación y B se observa en la ecuación 3.15.

Las ecuaciones mencionadas hasta el momento se desarrollaron asumiendo una cimentación circular. Cuando se presente una cimentación rectangular de longitud L y ancho B, se puede obtener un radio equivalente para su análisis.

Dobry y Gazetas (1986) emplearon la ecuación 3.23 para calcular el radio equivalente  $r_0$  de una cimentación rectangular.

$$r_0 = \sqrt{\frac{BL}{\pi}} \quad (3.23)$$

### 3.2 Vibración debida a un momento en los ejes $x$ y $y$ de una cimentación (oscilación).

La solución para este tipo de problemas fue presentada por Arnold, Bycroft (1966) y Wartburton (1955). Donde se asumió nuevamente una cimentación de geometría circular como la que se observa en la figura 3.8. Lo primero en analizar es la presión de contacto  $p$  del sistema, la cual se determina mediante la ecuación 3.24.

$$p = \frac{3M_y r \cos \alpha}{2\pi r_0^3 \sqrt{r_0^2 - r^2}} e^{it\omega} \quad (3.24)$$

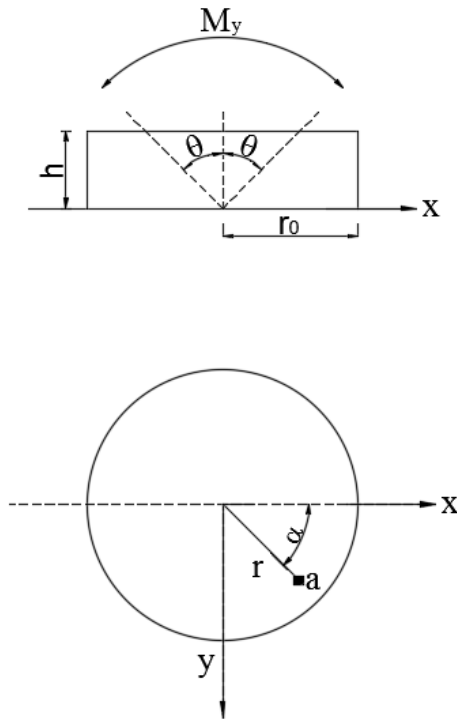


Figura 3.8. Cimentación circular rígida sometida a un momento alrededor del eje  $y$ .

En la figura 3.8 se observa al momento  $M_y$  actuando alrededor el eje  $y$ , este momento se supondrá igual a  $M_y e^{i\omega t}$ . Por lo que para poder resolver este sistema se utilizó un modelo masa-resorte-amortiguador como el utilizado por Lysmer y Richart, el cual empleó Hall (1967) para una cimentación circular y determinó que la ecuación que representaba su comportamiento era:

$$I\ddot{\theta} + c_\theta\dot{\theta} + k_\theta\theta = M_y e^{i\omega t} \quad (3.25)$$

Donde

$\theta$  = es la rotación del eje vertical de la cimentación en cualquier momento de tiempo

$I$  = momento inercia con respecto al eje  $y$ .

$$I = \frac{W_0}{g} \left( \frac{r_0^2}{4} + \frac{h^2}{3} \right) \quad (3.26)$$

Igual a:

$W_0$  = peso de la cimentación

$g$  = aceleración de la gravedad

$h$  = altura de la cimentación

Para este caso de vibración las constantes de  $k$ ,  $c$  y  $B$  se obtienen con las siguientes ecuaciones.

$$k_\theta = \frac{8Gr_0^3}{3(1-\nu)} \quad (3.27)$$

$$c_\theta = \frac{0.8r_0^4\sqrt{G}}{(1-\nu)(1+B_\theta)} \quad (3.28)$$

$$B_\theta = \frac{3(1-\nu)}{8} \frac{I}{\rho r_0^5} \quad (3.29)$$

➤ **Frecuencia de resonancia y amplitud de vibración en la frecuencia de resonancia**

Frecuencia natural

$$f_n = 9.55 \sqrt{\frac{k_\theta}{I}} \quad (3.30)$$

Relación de amortiguamiento:

$$c_{c\theta} = 2\sqrt{k_\theta I} \quad (3.31)$$

$$\zeta_\theta = \frac{c_\theta}{c_{c\theta}} = \frac{0.15}{\sqrt{B_\theta(1+B_\theta)}} \quad (3.32)$$

Frecuencia de resonancia para una excitación constante:

$$f_m = f_n \sqrt{1 - 2\zeta_\theta^2} \quad (3.33)$$

Frecuencia de resonancia para masas rotatorias:

$$f_m = \frac{f_n}{\sqrt{1 - 2\zeta^2}} \quad (3.34)$$

Amplitud de vibración en resonancia:

$$A_\theta = \frac{M_y}{k_\theta} \left( \frac{1}{2\zeta_\theta \sqrt{1 - 2\zeta_\theta^2}} \right) \quad (3.35)$$



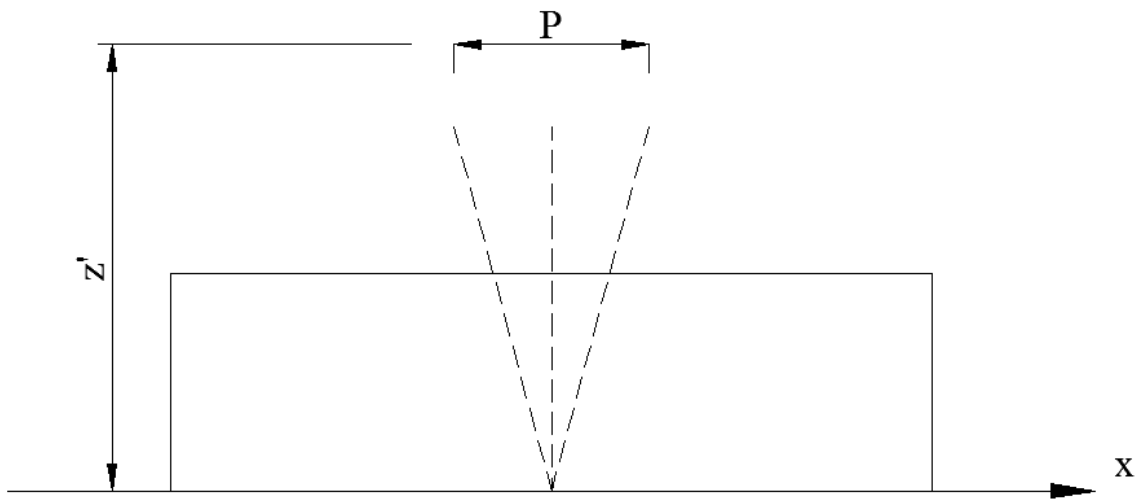
Amplitud de vibración en resonancia para masas rotatorias, Figura 3.9:

$$A_{\theta} = \frac{m_1 e z'}{I} \left( \frac{1}{2\zeta_{\theta} \sqrt{1-2\zeta_{\theta}^2}} \right) \quad (3.36)$$

Donde

$m_1$  = total de masas que causan excitación al rotar,

$e$  = excentricidad de cada una de las masas rotando.



**Figura 2.9. Excitación debido a masas rotatorias.**

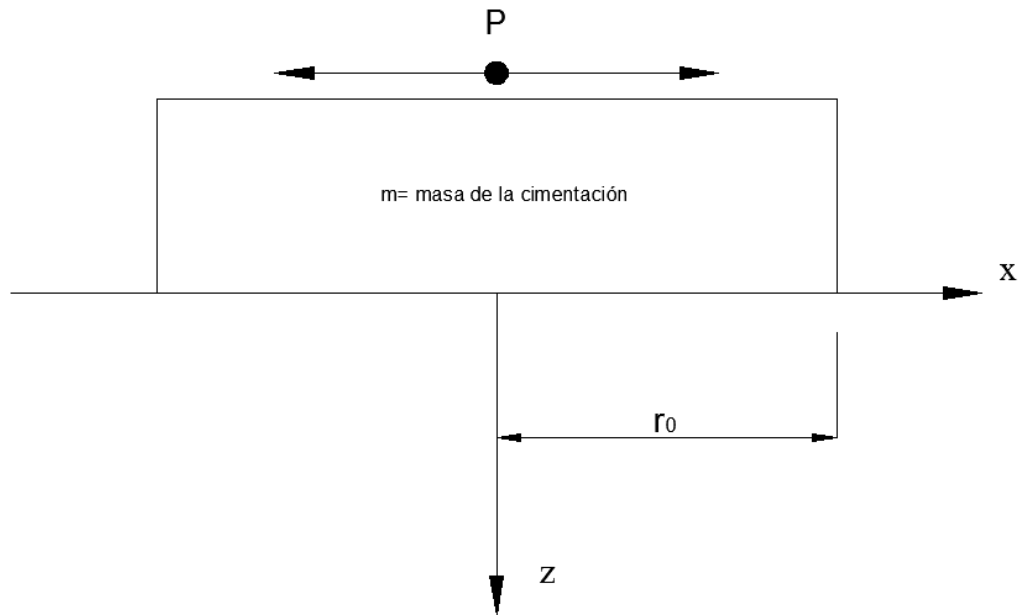
El radio equivalente para este caso se obtiene utilizando la siguiente expresión.

$$r_0 = \sqrt[4]{\frac{BL^3}{3\pi}} \quad (3.37)$$

### 3.3 Vibración horizontal de una cimentación

Este caso fue estudiado por Arnold, Bycroft y Wartburton (1955), asumiendo una cimentación circular rígida, colocada en la superficie de un medio elástico, sometida a una fuerza  $P=P_x e^{i\omega t}$  que genera un desplazamiento en el plano de la superficie, pero sin provocar una torsión, como se observa en la figura 3.10. Hall (1967) desarrolló nuevamente un modelo con base en la teoría de vibración para describir el comportamiento de este tipo de cimentación obteniendo la ecuación 3.37,

$$m\ddot{u} + c_x\dot{u} + k_x u = P_x e^{i\omega t} \quad (3.38)$$



**Figura 3.10. Vibración deslizante de una cimentación circular rígida.**

Obteniendo así las ecuaciones para la constante de resorte y de amortiguamiento que se presentan a continuación.

$$k_x = \frac{32(1-\nu)Gr_0}{7-8\nu} \quad (3.39)$$

$$c_x = \frac{18.4(1-\nu)r_0^2}{7-8\nu} \sqrt{G\rho} \quad (3.40)$$

A estas ecuaciones se les conoce como la analogía de Hall.

➤ **Frecuencia de resonancia y amplitud de vibración en la frecuencia de resonancia**

Frecuencia natural:

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{32(1-\nu)Gr_0}{(7-8\nu)m}} \quad (3.41)$$

Relación de amortiguamiento:

$$c_{cx} = 2 \sqrt{\frac{32(1-\nu)Gr_0}{(7-8\nu)}} m \quad (3.42)$$

$$\zeta_x = \frac{c}{c_{cx}} = \frac{0.288}{\sqrt{B_x}} \quad (3.43)$$

Siendo la relación de masa adimensional para el caso deslizante:

$$B_x = \frac{7-8\nu}{32(1-\nu)} \frac{m}{\sqrt{\rho r_0^3}} \quad (3.44)$$

Frecuencia de resonancia para una excitación constante:

$$f_m = f_n \sqrt{1 - 2\zeta_x^2} \quad (3.45)$$

Frecuencia de resonancia para masas rotatorias:

$$f_m = \frac{f_n}{\sqrt{1 - 2\zeta_x^2}} \quad (3.46)$$

Amplitud de vibración en resonancia:

$$A_x = \frac{P_x}{k_x} \left( \frac{1}{2\zeta_x \sqrt{1-2\zeta_x^2}} \right) \quad (3.47)$$

Amplitud de vibración en resonancia para masas rotatorias:

$$A_x = \frac{m_1 e}{m} \left( \frac{1}{2\zeta_x \sqrt{1-2\zeta_x^2}} \right) \quad (3.48)$$

Donde

$m_1$  = total de masas que causan excitación al rotar

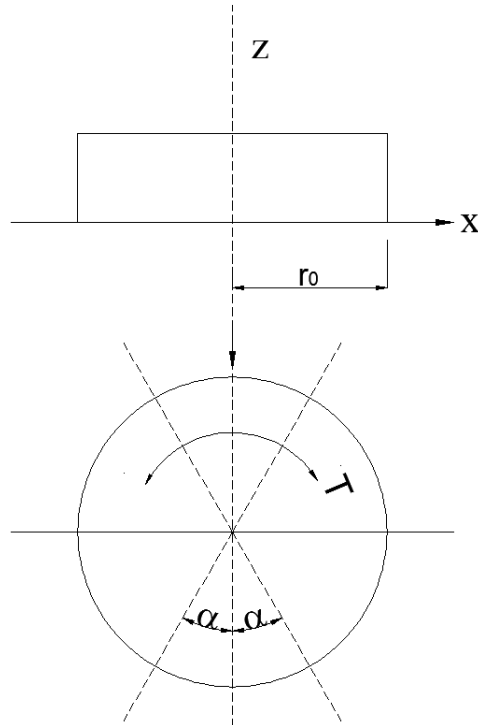
$e$  = excentricidad de cada una de las masas rotando.

Para este caso el radio equivalente es igual al del caso vertical.

### 3.4 Vibración torsionante de una cimentación

En la figura 3.11 se observa una cimentación circular sujeta a un torque  $T = T_0 e^{i\omega t}$  actuando en el eje  $z$ - $z$ . Reissner obtuvo la ecuación para este caso asumiendo una distribución lineal de los esfuerzos, donde al centro de la cimentación los esfuerzos son cero y en los extremos alcanzan su mayor valor. Este fenómeno se presenta en una cimentación flexible. Posteriormente obtuvo la solución para el caso de una cimentación rígida donde se presentan una variación lineal del desplazamiento. Obteniendo que los esfuerzos cortantes están dados por la ecuación 3.49.

$$\tau_{z\psi} = \frac{3}{4\pi} \frac{T_r}{r_0^3 \sqrt{r_0^2 - r^2}} \quad \text{para } 0 < r < r_0 \quad (3.49)$$



**Figura 3.11. Torsión de una cimentación circular rígida debida vibración.**

Este problema se plantea nuevamente utilizando la ecuación de movimiento 3.50 de un sistema masa-amortiguador-resorte.

$$J_{zz}\ddot{\alpha} + c_{\alpha}\dot{\alpha} + k_{\alpha}\alpha = T_0e^{i\omega t} \quad (3.50)$$

Donde

$J_{zz}$ =Momento de inercia correspondiente a la masa de la cimentación

$c_{\alpha}$ =coeficiente de amortiguamiento de una vibración torsionante, que en el caso de torsión se considera cercano a 0.

$k_{\alpha}$ =Constante de resorte que para este caso es

$$k_{\alpha} = \frac{16Gr_0^3}{3} \quad (3.51)$$

$\alpha$ =rotación de la cimentación en cualquier instante de tiempo debido a la aplicación de un torque  $T$

➤ **Frecuencia de resonancia y amplitud de vibración en la frecuencia de resonancia**

Relación de amortiguamiento:

$$\zeta_{\alpha} = \frac{0.5}{1+2B_{\alpha}} \quad (3.52)$$

Relación de masa adimensional para el caso de torsión:

$$B_{\alpha} = \frac{J_{zz}}{\rho r_0^5} \quad (3.53)$$

Frecuencia natural:

$$f_n = 9.55 \sqrt{\frac{k_{\alpha}}{J_{zz}}} \quad (3.54)$$

Frecuencia de resonancia para una excitación constante:

$$f_m = f_n \sqrt{1 - 2\zeta_x^2} \quad (3.55)$$

Frecuencia de resonancia para masas rotatorias:

$$f_m = \frac{f_n}{\sqrt{1 - 2\zeta_x^2}} \quad (3.56)$$

Amplitud de vibración en resonancia:

$$A_{\alpha} = \frac{T_0}{k_{\alpha}} \left( \frac{1}{2\zeta_x \sqrt{1 - 2\zeta_{\alpha}^2}} \right) \quad (3.57)$$

Amplitud de vibración en resonancia para masas rotatorias:

$$A_{\alpha} = \frac{m_1 e \left(\frac{\alpha}{2}\right)}{J_{zz}} \left( \frac{1}{2\zeta_{\alpha} \sqrt{1-2\zeta_{\alpha}^2}} \right) \quad (3.58)$$

Donde

$m_1$ = total de masas que causan excitación al rotar

$e$ = excentricidad de cada una de las masas rotando.

El radio equivalente para este tipo de vibración es:

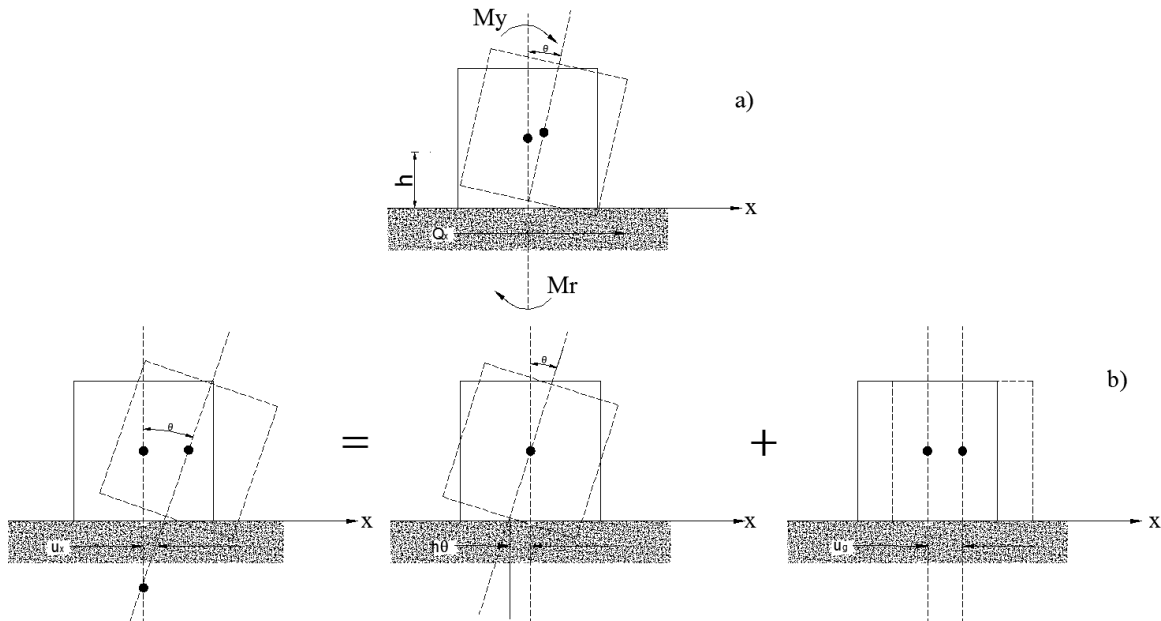
$$r_0 = \sqrt[4]{\frac{BL(B^2+L^2)}{6\pi}} \quad (3.59)$$

### 3.5 Vibraciones acopladas de deslizamiento y oscilación.

Hasta este momento se han estudiado los posibles movimientos de una cimentación sometida a una vibración. Sin embargo, se han estudiado de manera independiente, por lo que es conveniente ahora estudiar lo referente a cuando dos movimientos se acoplan. El caso que con mayor frecuencia se presenta es cuando un bloque se ve sometido a un movimiento oscilatorio y deslizante. Esto se debe a que el centro de gravedad de la cimentación y las vibraciones no coinciden con el centro de resistencia deslizante. Este es un caso de vibración de una cimentación con dos grados de libertad

En la figura 3.12a puede observarse una cimentación colocada sobre la superficie de un semi-espacio elástico. Su centro de gravedad se asume al centro del eje vertical y a una distancia  $h'$  desde la superficie del semi-espacio. El desplazamiento del cuerpo rígido es posible representarlo mediante una traslación horizontal  $u_g$ , de su centro de gravedad y de una rotación  $\theta$  del cuerpo rígido. La fuerza  $Q_x$  y el momento  $M_y$  se presentan debido a la interacción de la masa de suelo con el bloque.

En la figura 3.12b, se puede observar que utilizando la superposición del desplazamiento del centro de gravedad del bloque  $u_g$  y la rotación  $\theta$  con respecto al centro de gravedad se puede estimar el desplazamiento  $u_x$ .



**Figura 3.12. Movimiento horizontal y oscilatorio acoplados en una cimentación circular rígida.**

Es importante mencionar que se consideraron positivos los signos para el movimiento de traslación y el giro, lo que obliga al centro de rotación a situarse por debajo del centro de gravedad. A este fenómeno se le conoce como movimientos en fase. Esto se designa como el primer modo de vibración. Si la traslación es positiva mientras la rotación es negativa se dice que se tienen movimientos fuera de fase, entonces el centro de rotación se encuentra por encima del centro de gravedad y el movimiento se designa como el segundo modo de vibración.

Para poder establecer las ecuaciones de movimiento con las cuales se pueden calcular las amplitudes de movimiento y las frecuencias a máxima amplitud (frecuencias de resonancia), se debe estimar el deslizamiento de la base mediante:

$$u_x = u_g - h\theta \quad (3.60)$$



Por lo tanto, la fuerza horizontal en la base de la cimentación se puede expresar en términos de desplazamiento y de velocidad como:

$$Q_x = -c_x \dot{u}_x - k_x u_x \quad (3.61)$$

Para la resistencia del semi-espacio a la oscilación de la cimentación, la ecuación queda como:

$$M_\theta = -c_\theta \dot{\theta} - k_\theta \theta \quad (3.62)$$

Las constantes de resorte y amortiguador se expresan de la misma manera que el caso de oscilación propuestas por Hall (ecuaciones 3.27 y 3.28).

La ecuación de movimiento del centro de gravedad para el movimiento de desplazamiento horizontal se expresa como:

$$m\ddot{u}_g = Q_x = -c_x \dot{u}_x - k_x u_x \quad (3.63)$$

al sustituirla en la 3.58, y dejando la expresión en términos de la ecuación 3.61, se obtiene la expresión 3.62.

$$m\ddot{u}_g + c_x \dot{u}_g + k_x u_g - hc_x \dot{\theta} - hk_x \ddot{\theta} = 0 \quad (3.64)$$

La ecuación de movimiento para la rotación del centro de gravedad es:

$$I_g \ddot{\theta} = M_y + M_\theta - hQ_x \quad (3.65)$$

Donde:

$I_g$  = Momento de inercia de la cimentación con respecto a su centro de gravedad.

$$M_y = M_y e^{i\omega t}$$

Al sustituir las ecuaciones 3.60, 3.59 y 3.58 se obtiene a la ecuación 3.63 de la forma:

$$I_g \ddot{\theta} + (c_\theta + h^2 c_x) \dot{\theta} + (k_\theta + h^2 k_x) \theta - h c_x \dot{u}_g - h c_x u_g = M_y \quad (3.66)$$

Para la solución de esta ecuación, se supone al momento  $M_y$  igual a cero. Quedando la ecuación como:

$$I_g \ddot{\theta} + (c_\theta + h^2 c_x) \dot{\theta} + (k_\theta + h^2 k_x) \theta - h c_x \dot{u}_g - h c_x u_g = 0 \quad (3.67)$$

Las ecuaciones 3.62 y 3.65, se pueden resolver mediante un cambio de variable, como los realizados en el capítulo uno, por lo que se tiene que:

$$u_g = A e^{i\omega_d t} \quad (3.68)$$

$$\theta = B e^{i\omega_d t} \quad (3.69)$$

Donde:

$\omega_d$  = Frecuencia natural amortiguada.

Sustituyendo estas variables en las ecuaciones 3.62 y 3.65 y reacomodándolas obtenemos (Prakash y Puri, 1981,1988):

$$\left[ \omega_d^4 - \omega_d^2 \left( \frac{\omega_{n\theta}^2 + \omega_{nx}^2}{\delta} - \frac{4\zeta_\theta \zeta_x \omega_{n\theta} \omega_{nx}}{\delta} \right) + \frac{\omega_{n\theta}^2 * \omega_{nx}^2}{\delta} \right]^2 + 4 \left[ \frac{\zeta_x \omega_{nx} \omega_d}{\delta} (\omega_{n\theta}^2 - \omega_d^2) + \frac{\zeta_\theta \omega_{n\theta} \omega_d}{\delta} (\omega_{nx}^2 - \omega_d^2) \right] = 0 \quad (3.70)$$

Donde:

$\zeta_x$  = Relación de amortiguamiento para el caso de una cimentación sometida a una vibración deslizante

$\zeta_\theta$  = Relación de amortiguamiento para el caso de una cimentación sometida a oscilación.

$\delta = \frac{I_g}{I}$  I se obtiene de la ecuación 3.26

$$\omega_{nx} = \sqrt{\frac{32(1-\nu)Gr_0}{(7-8\nu)m}} \text{ Utilizando en la ecuación 3.39.} \quad (3.71)$$

$$\omega_{n\theta} = \sqrt{\frac{8Gr_0^3}{3(1-\nu)I}} \text{ Utilizando las ecuaciones 3.27 y 3.30.} \quad (3.72)$$

Por lo que la ecuación 3.68 se emplea para obtener dos valores de frecuencia amortiguada del sistema  $\omega_d$ .

Las amplitudes amortiguadas para la oscilación y el deslizamiento se obtienen utilizando las siguientes ecuaciones.

$$A_x = \left(\frac{My}{I_g}\right) \left(\frac{\sqrt{(\omega_{nx}^2)^2 + (2\zeta_x\omega_{nx})^2}}{\Delta\omega^2}\right) \quad (3.73)$$

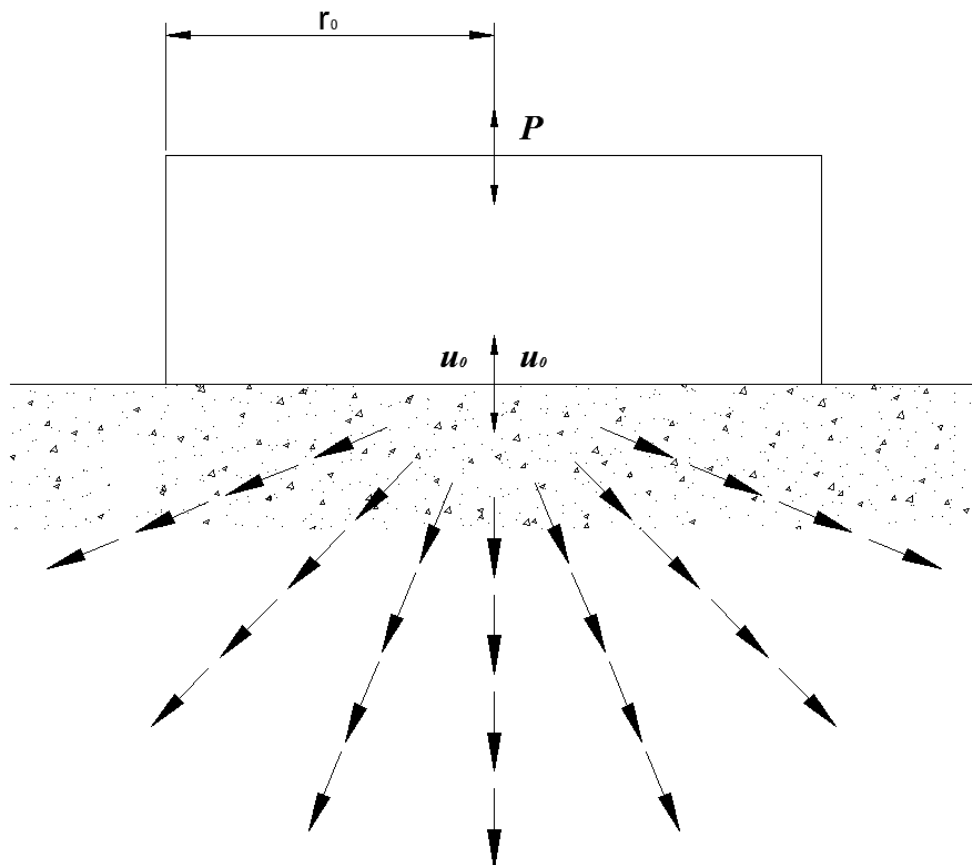
$$A_\theta = \left(\frac{My}{I_g}\right) \left(\frac{\sqrt{(\omega_{n\theta}^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta_\theta\omega_{n\theta}\omega)^2}}{\Delta(\omega^2)}\right) \quad (3.74)$$

Donde

$$\Delta(\omega^2) = \sqrt{\left\{ \left[ \omega^4 - \omega^2 \left( \frac{\omega_{n\theta}^2 + \omega_{nx}^2}{\delta} - \frac{4\zeta_\theta\zeta_x\omega_{n\theta}\omega_{nx}}{\delta} \right) + \frac{\omega_{n\theta}^2 * \omega_{nx}^2}{\delta} \right]^2 + 4 \left[ \frac{\zeta_x\omega_{nx}\omega}{\delta} (\omega_{n\theta}^2 - \omega^2) + \frac{\zeta_\theta\omega_{n\theta}\omega}{\delta} (\omega_{nx}^2 - \omega^2) \right]^2 \right\}} \quad (2.75)$$

### 3.6 Amortiguador viscoso y radiación de amortiguamiento

Como se mencionó al principio del estudio de la vibración vertical se consideró al suelo como un semi-espacio elástico, el cual no presentaba un amortiguamiento interno, por lo que le es imposible disipar la energía producida por la vibración. Sin embargo, esto no sucede así. Cuando el sistema está vibrando se genera una disipación mediante la propagación de ondas en el suelo, lo que genera que el desplazamiento generado por la vibración no sea infinito. Esta forma de disipación de energía elástica en forma de ondas que se alejan de la cimentación (figura 3.12) se conoce como radiación de amortiguación o amortiguación geométrica, que simplemente es una aproximación matemática del problema real.



**Figura 3.13. Radiación de energía mediante la propagación de ondas de una cimentación**

### 3.7 Tipos de maquinaria

Algunos tipos de maquinaria que se pueden encontrar son:

- Máquinas reciprocantes

Este tipo de máquinas transmite a la cimentación fuerzas armónicas, y actúan a la frecuencia de operación de la maquinaria. Algunos ejemplos de este tipo de maquinaria son las de combustión interna, compresores de pistón, máquinas de vapor y todas aquellas que involucren mecanismos de manivela. Las máquinas reciprocantes generan dos tipos de fuerzas verticales, la primaria la cual su frecuencia es igual a la frecuencia de operación, y la secundaria la cual tiene una frecuencia del doble de la frecuencia de operación. Cuando llega a existir un desbalanceo en el sistema, se genera una fuerza horizontal con una frecuencia igual a la de operación.

Fuerza primaria (vertical)

$$F_Z = (m_{rec} + m_{rot})r\omega_n^2 \cos\omega_n t \quad (3.76)$$

Fuerza secundaria (vertical)

$$F'_Z = m_{rec} \frac{r^2}{L} \cos\omega_n t \quad (3.77)$$

Fuerza horizontal

$$F_y = m_{rot} r\omega_n^2 \sin\omega_n t \quad (3.78)$$

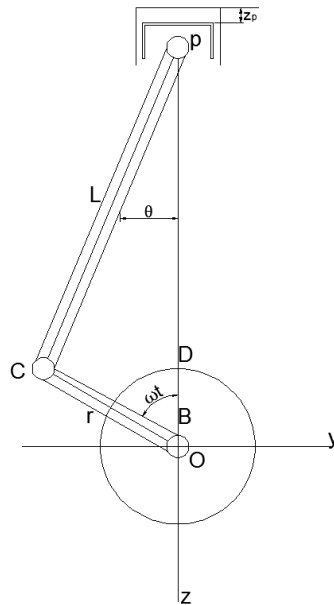
Donde:

$m_{rot}$  = masa rotatoria desbalanceada

$m_{rec}$  = masa total reciprocante

$\omega_n$  = Frecuencia natural circular

$r$  y  $y$  se observan en la siguiente figura.



**Figura 3.14. Mecanismo de manivela**

– Máquinas rotatorias

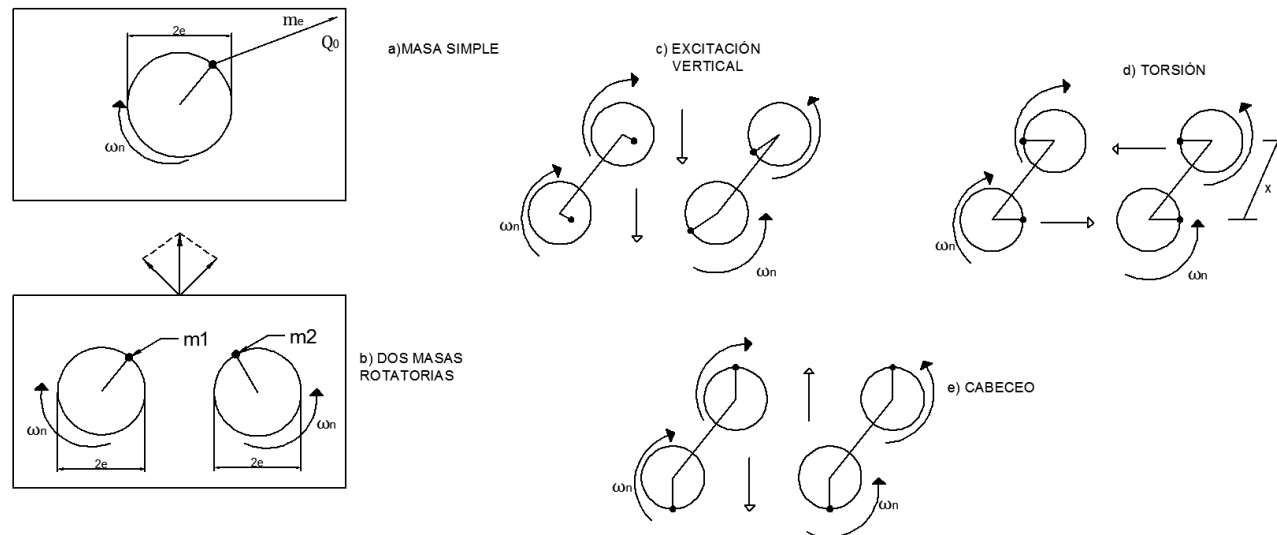
Aunque este tipo de maquinaria no genera fuerzas dinámicas desbalanceadas cuando llegue a tener un desgaste, asentamiento o cambios de velocidad de operación, generaría que la condición cambiara y se generara fuerzas desbalanceadas. Algunas de las maquinarias que entran en esta clasificación son las turbinas, bombas centrifugas, compresores axiales, turbogeneradores y ventiladores. Este tipo de maquinaria se diseñó para trabajar a una velocidad constante. Cuando se presenta un desbalanceo la fuerza dinámica vertical se puede estimar mediante la siguiente expresión.

$$Q_z = m_e e \omega_n^2 \quad (3.79)$$

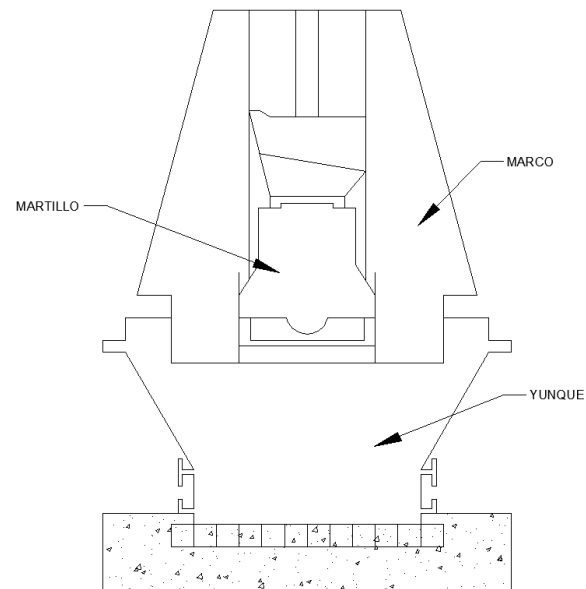
Donde

$m$  es la masa desbalanceada y  $e$  su excentricidad

Este tipo de máquinas pueden tener más de una masa rotatoria, estas masas pueden tener diferentes arreglos, como los que se muestran en la figura 3.15.



**Figura 3.15. Fuerzas producidas por excitadores de masas rotatorias.**



**Figura 3.16. Fuerzas producidas por excitadores de masas rotatorias.**

Cuando se tienen dos masas, (Fig. 3.15b) la fuerza vertical se estima con la siguiente expresión.

$$Q_z = 2m_1 e \omega_n^2 \text{sen}(\omega_n t) \quad (3.80)$$

Donde

$m$  es cada masa con excentricidad  $e$

Las fuerzas torsionales desarrolladas por un excitador de cuatro masas (fig. 3.15 c) y 3.15 d)), generan un momento el cual se determina con la siguiente expresión.

$$T = 2m_1 e x \omega_n^2 \text{sen}(\omega_n t) \quad (3.81)$$

Donde

$x$  es la separación entre los pesos de un mismo eje.

– Máquinas de impacto

Las fuerzas generadas no son constantes, sino más bien son pulsos los cuales alcanzan su valor máximo y mínimo en un instante, por lo que normalmente cuando se genera un nuevo impulso normalmente los efectos del anterior ya desaparecieron.

Dentro de esta categoría se puede encontrar maquinaria como los martinetes de forja y cizallas de impacto. En la figura 3.16 se observa un martinete típico de forja que está compuesto por marco, yunque, martillo y su cimentación.



## 4 PROPAGACIÓN DE ONDAS

Las ondas que se generan en un medio continuo se deben a una perturbación en el mismo, algunas de las fuentes de perturbación pueden ser sismos, explosiones, maquinaria.

Se ha observado que cuando la carga es aplicada repentinamente, no todo el cuerpo es perturbado en ese instante, sino que la zona más cercana a la fuente de perturbación, son las primeras en ser afectadas. Por lo tanto, las deformaciones generadas se propagan por el cuerpo en forma de ondas.

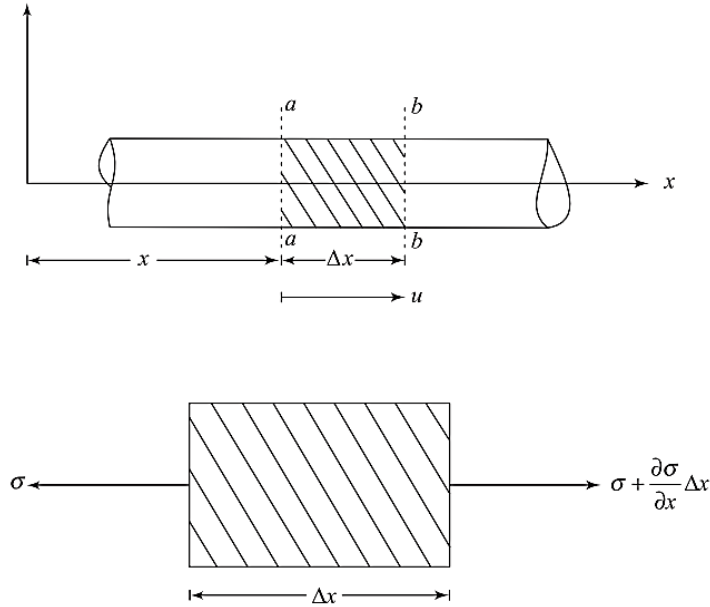
Para comenzar con el estudio de la propagación de ondas se analizará el caso que se presenta en una barra. Este capítulo está basado en lo desarrollado por autores como A. Jaime (1980) y Richart et al (1970).

En este escrito se asume que el esfuerzo es uniforme en toda el área de la sección transversal y que esta permanece plana durante el movimiento.

### 4.1 Ondas longitudinales y de torsión en una barra

Para el análisis de las ondas que se generan en una barra se supondrá, una barra con las siguientes características:

- sección transversal  $A$
- módulo de Young  $E$
- peso volumétrico unitario  $\gamma$



**Figura 4.1. Ondas elásticas longitudinales en una barra.**

Si los esfuerzos a través de la sección a-a de la barra incrementan en  $\sigma$ , los incrementos en los esfuerzos que se generan a lo largo de la sección b-b, están dados por la ecuación 4.1.

$$\sigma + (\delta\sigma/\delta x)\Delta x \tag{4.1}$$

Con base en la segunda ley de Newton, la cual establece que la aceleración de un objeto es directamente proporcional a la fuerza neta que actúa sobre él e inversamente proporcional a su masa, si al desplazamiento del elemento en dirección  $x$  se le llama  $u$ , se tiene que la suma de fuerzas es:

$$-\sigma A + \left(\sigma + \frac{\delta\sigma}{\delta x} \Delta x\right) A = \frac{A(\Delta x \gamma)}{g} \frac{\delta^2 u}{\delta t^2} \tag{4.2}$$

Donde:

$\Delta x \gamma$  es el peso de la barra de longitud  $\Delta x$

$g$  es la aceleración de la gravedad

$u$  es el desplazamiento en dirección  $x$

$t$  es el tiempo.

La expresión 4.2 también puede expresarse como:

$$\frac{\delta^2 \sigma}{\delta x} = \frac{\gamma}{g} \frac{\delta^2 u}{\delta t^2} \quad (4.3)$$

Si el esfuerzo en la dirección  $x$  es  $\delta u / \delta x$ , y la relación del esfuerzo debido a la deformación es el Módulo de Young  $E$ , se tiene que.

$$E \frac{\delta^2 u}{\delta x^2} = \rho \left[ \frac{\delta^2 u}{\delta t^2} \right] \quad \text{ó} \quad \frac{\delta^2 u}{\delta t^2} = v_r^2 \left[ \frac{\delta^2 u}{\delta x^2} \right] \quad (4.4)$$

Esta ecuación se reescribe como:

$$v_r^2 = \frac{E}{\rho} \quad (4.5)$$

Donde

$E$ : es el módulo de Young

$\rho$ : a la densidad del material ( $\gamma/g$ ).

$v_r$ : se define como la velocidad de propagación de onda longitudinal en una barra.

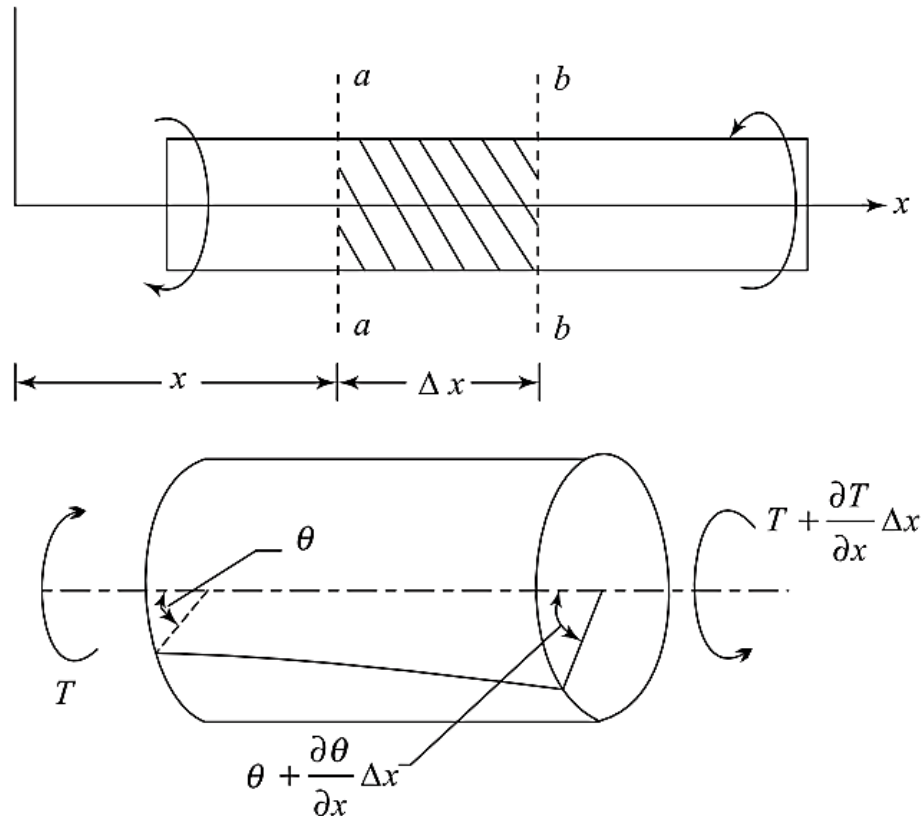
➤ **Ondas de torsión en una barra**

En la figura 4.2, se muestra una barra sometida a un torque  $T$  aplicado a una distancia  $x$ , que produce un giro  $\theta$  en la barra. La ecuación de movimiento de una barra para un movimiento de vibración torsional es similar al caso longitudinal. Para ello se supondrá que el torque se genera en una sección localizada a una distancia  $x+\Delta x$ , y que está dado por:

$$T + (\delta_T/\delta_x)\Delta x \tag{4.6}$$

Y la correspondiente rotación se expresa como:

$$\theta + (\delta_\theta/\delta_x)\Delta x \tag{4.7}$$



**Figura 4.2. Ondas elásticas de torsión en una barra.**

Aplicando un desarrollo similar al caso longitudinal se tiene que la velocidad de onda para este caso se obtiene mediante la siguiente ecuación.

$$v_s^2 = \frac{G}{\rho} \tag{4.8}$$

Donde

$G$ : es el módulo de resistencia al cortante

$\rho$ : a la densidad del material ( $\gamma/g$ ).

$v_s$ : se define como la velocidad de propagación de onda de cortante en una barra.

#### 4.2 Estado de esfuerzos en una partícula de un medio elástico.

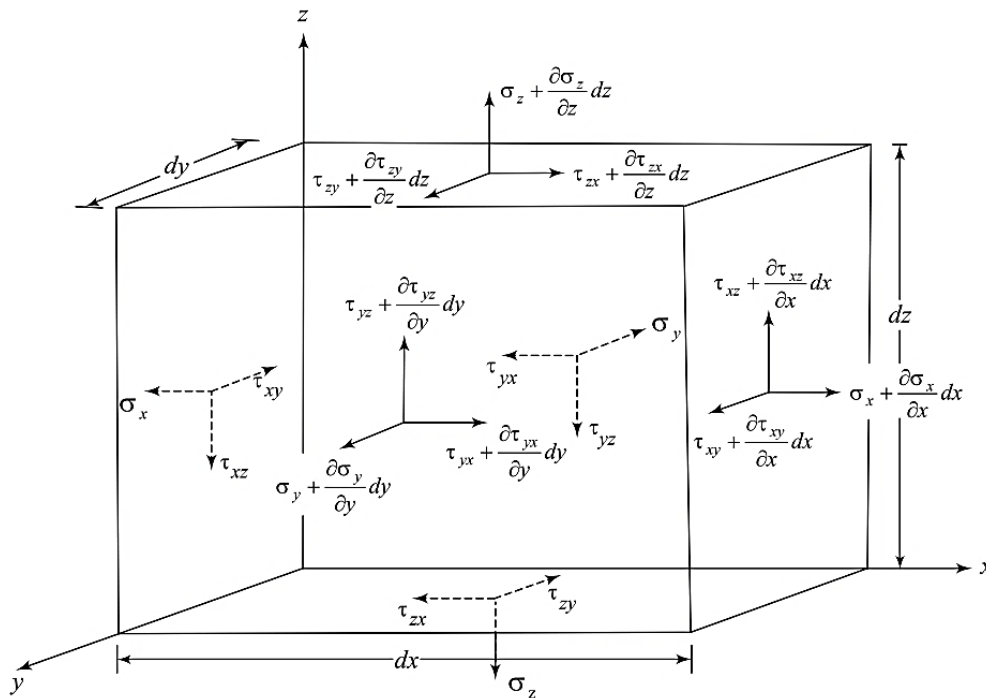


Figura 4.3. Esfuerzos aplicados sobre un elemento de suelo.

En la figura 4.3 se observan los esfuerzos que actúan sobre un elemento elástico, cuyos lados miden,  $d_x$ ,  $d_y$  y  $d_z$ .

Para entender los esfuerzos que se generan en el elemento, primero se analiza la variación en fuerza en las caras opuestas del elemento de la figura 4.3, Los esfuerzos en cada una de las caras son representados por un conjunto de vectores ortogonales. Los vectores representados con línea sólida actúan en las caras visibles del elemento, mientras que los vectores con línea punteada actúan en las caras ocultas. El equilibrio traslacional del elemento se puede expresar mediante la suma de las fuerzas que actúan en paralelo en cada uno de los ejes. A lo largo de la dirección  $x$ , la ecuación de equilibrio de las fuerzas queda expresada de manera simplificada como:

$$\frac{\delta\sigma_x}{\delta x} + \frac{\delta\tau_{xy}}{\delta y} + \frac{\delta\tau_{zx}}{\delta z} = \rho \frac{\delta^2 u}{\delta t^2} \quad (4.9)$$

De manera análoga se obtienen la suma de las fuerzas a lo largo de los otros dos ejes obteniendo:

$$\frac{\delta\sigma_y}{\delta y} + \frac{\delta\tau_{xy}}{\delta x} + \frac{\delta\tau_{zy}}{\delta z} = \rho \frac{\delta^2 v}{\delta t^2} \quad (4.10)$$

$$\frac{\delta\sigma_z}{\delta z} + \frac{\delta\tau_{xz}}{\delta x} + \frac{\delta\tau_{yz}}{\delta y} = \rho \frac{\delta^2 w}{\delta t^2} \quad (4.11)$$

En las ecuaciones 4.10 y 4.11  $u$ ,  $v$  y  $w$ , son desplazamientos generados en las direcciones  $x$ ,  $y$  y  $z$ , respectivamente.

Mediante una serie de relaciones de los desplazamientos se obtienen las ecuaciones de movimiento de un medio infinito isotrópico y elástico, las cuales se muestran a continuación.

$$\rho \frac{\delta^2 u}{\delta t^2} = (\lambda + G) \frac{\delta \bar{\epsilon}}{\delta x} + G \nabla^2 u \quad (4.12)$$

$$\rho \frac{\delta^2 v}{\delta t^2} = (\lambda + G) \frac{\delta \bar{\epsilon}}{\delta y} + G \nabla^2 v \quad (4.13)$$

$$\rho \frac{\delta^2 w}{\delta t^2} = (\lambda + G) \frac{\delta \bar{\epsilon}}{\delta z} + G \nabla^2 w \quad (4.14)$$

Donde  $\nabla^2$  es el operador cartesiano definido como:

$$\nabla^2 = \left( \frac{\delta^2}{\delta x^2} + \frac{\delta^2}{\delta y^2} + \frac{\delta^2}{\delta z^2} \right) \quad (4.15)$$

Las ecuaciones 4.12 a 4.15 presentan dos soluciones. Cada solución describe un tipo de propagación de una onda irrotacional (ondas de compresión), mientras que la segunda solución describe la propagación de una onda de rotación pura (ondas de cortante).

❖ **Ondas de compresión**

Esta solución se obtiene al diferenciar 4.12 a 4.14, respecto a  $x$ ,  $y$  y  $z$ . Y sumándolas tres expresiones obtenidas, dando como resultado la siguiente expresión.

$$\rho \frac{\delta^2 \bar{\epsilon}}{\delta t^2} = (\lambda + 2G) \nabla^2 \bar{\epsilon} \quad (4.16)$$

Que se puede expresar de la siguiente manera.

$$\frac{\delta^2 \bar{\epsilon}}{\delta t^2} = v_c^2 \nabla^2 \bar{\epsilon} \quad (4.17)$$

ó

$$v_c = \sqrt{\frac{\lambda + 2G}{\rho}} = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (4.18)$$

### ❖ Ondas de cortante

La segunda solución se obtiene al diferenciar la ecuación 4.13 con respecto a  $z$  y la 4.14 con respecto a  $y$ . Siendo la velocidad de onda de cortante para una partícula de un medio elástico.

$$v_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (4.19)$$

Como conclusión, un medio elástico infinito tiene dos tipos de ondas. El primer tipo son las ondas de compresión también llamadas ondas P, ondas longitudinales, ondas dilatacionales u ondas irrotacionales. Estas ondas generan una excitación en las partículas con la misma dirección que se propagan, además producen en el suelo de manera alterna dilataciones y compresiones entre las partículas provocando un cambio volumétrico en las mismas cuando el suelo está saturado. Biot en 1956 encontró que se desarrollan dos tipos de ondas de compresión, la primera se transmite a través del fluido y la otra a través de la estructura del material o suelo, la velocidad de onda en el fluido es mayor que la velocidad de propagación en el sólido.

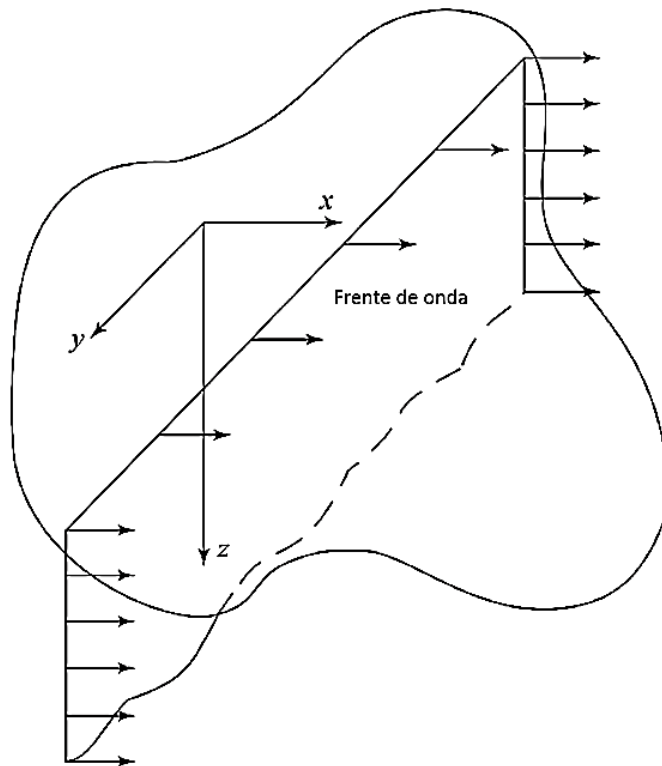
El segundo tipo de onda son las ondas de cortante que se conocen también como ondas S, transversales u ondas distorsionales. Estas ondas excitan a las partículas del suelo en forma perpendicular a la dirección de propagación, lo cual genera en las partículas deformaciones angulares sin presentar cambio volumétrico. Este tipo de ondas solo se transmiten en la estructura sólida aún estando saturado debido a que el agua no presenta resistencia al cortante.

### 4.3 Ondas superficiales en un semi espacio elástico Ondas Rayleigh.

Se ha analizado que se tienen dos tipos de solución para la ecuación de onda, cada solución representa a las ondas posibles, que se generan en un medio elástico, que, son las ondas de compresión y las ondas de cortante. Sin embargo, también es posible encontrar un tercer tipo de onda. Este caso

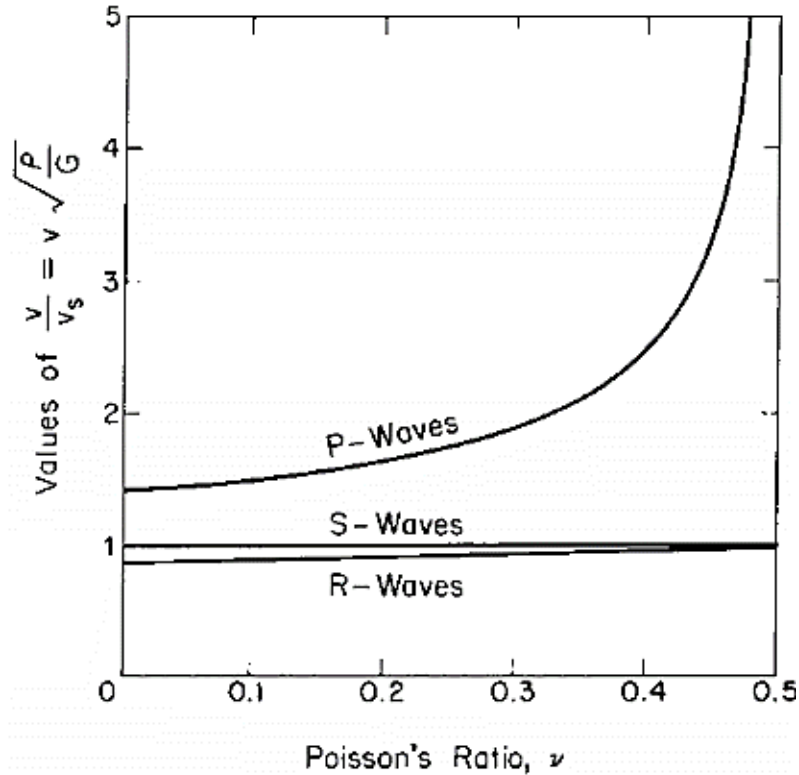


corresponde a una onda cuyo movimiento está confinado a una zona cercana al límite de un semi-espacio elástico. Esta onda fue estudiada por primera vez por Lord Rayleigh en 1885 y fue descrita posteriormente con más detalle por Lamb (1904). La onda elástica descrita por estos investigadores se conoce como onda de Rayleigh (onda R). La influencia de la onda de Rayleigh disminuye rápidamente con la profundidad. Para estudiar esta onda, se considera una onda plana a través de un medio elástico con un límite plano como se muestra en la Figura 4.4.



**Figura 4.4. Onda plana a través de un semi-espacio elástico con límites planos.**

La velocidad de la onda Rayleigh se puede obtener en términos de la velocidad de onda de cortante. La figura 4.5 muestra un gráfico relación de Poisson-Velocidades de propagación de onda.



**Figura 4.5. Relación entre velocidades de propagación de onda (P, S y Rayleigh) y relación de Poisson. (Richart 1962)**

Para una relación de 0.25 la velocidad de onda Rayleigh será:

$$v_R = 0.9194v_s$$

Para una relación de 0.50 la velocidad de onda Rayleigh será:

$$v_R = 0.9553v_s$$

#### 4.4 Ondas Love

Cuando una onda reflejada regresa a la superficie de un semiespacio estratificado, es debido a que encuentra la interfaz entre sólido y vacío donde se reflejará por completo. Lo que genera múltiples reflejos totales dentro de la capa superior, que a su vez genera un segundo tipo de onda de superficie llamada onda Love.

El investigador Love fue el primero en describir esta onda en 1911 como “una onda de corte polarizada horizontalmente”. Ewing, Jardetzky y Press (1957) describen la onda de Love como una "onda de corte polarizada horizontalmente atrapada en una capa superficial y propagada por múltiples" reflejos totales".

Para que las ondas Love se confinen en la capa superficial, es necesario que la velocidad de fase de la onda Love sea menor que la velocidad de onda de corte ( $v_{p1}$ ) en la siguiente capa inferior. Una onda Love no ocurrirá si la capa superficial es la capa de mayor velocidad. La onda Love viaja con una velocidad que está entre la velocidad cortante de onda de la capa superficial  $v_{s1}$  y la velocidad de onda de corte de la siguiente capa inferior  $v_{s2}$ .

#### 4.5 Atenuación de las ondas con la distancia.

En los párrafos anteriores, para las expresiones se han determinado las velocidades de onda de las tres ondas principales que se producen en un semi-espacio elástico. Conociendo estas velocidades. Se puede predecir fácilmente el orden en que las ondas llegarán a un punto dado debido a una perturbación en otro punto. Además de predecir el orden de llegada de las ondas a lo largo de la superficie, Lamb (1904) describió el movimiento de la superficie que se produce a grandes distancias desde una fuente de perturbación en la superficie de un medio ideal. Este desplazamiento se observa en la figura 4.6, donde también se observan las componentes horizontales y verticales del movimiento de las partículas.

Considerando las condiciones propuestas por Lamb, al generar una perturbación las ondas de cuerpo viajan a través del medio con frentes de onda semiesféricos, como se muestra en la figura 4.7, mientras que las ondas Rayleigh se propagarán radialmente hacia fuera, a lo largo de un frente de onda cilíndrico.

La forma inicial de este sistema de onda dependerá del impulso de entrada, pero si la entrada es de corta duración, se desarrolla el sistema de onda característico

que se muestra en la figura 4.6 a y b. Este sistema de onda tiene tres características que corresponden a las llegadas de la onda P, onda S y onda R.

Las componentes horizontales y verticales del movimiento de partículas se muestran por separado en la figura 4.6c. Una partícula en la superficie experimenta primero un desplazamiento en forma de una oscilación a la llegada de la onda P, seguido por un período relativamente silencioso que conduce a otra oscilación a la llegada de la onda S. Estos eventos son referidos por Lamb como “temblor menor” y son seguidos por una oscilación de magnitud mucho mayor, el cual llama temblor principal, que es el momento de la llegada de la onda R.

El intervalo de tiempo entre las llegadas de onda se hace mayor y la amplitud de las oscilaciones se reduce a medida que aumenta la distancia desde la fuente de perturbación. Además, el temblor menor decae más rápido que el temblor mayor. Es evidente que la onda R es la perturbación más significativa a lo largo de la superficie de un semi-espacio y, a grandes distancias de la fuente, puede llegar a ser la única onda claramente distinguible.

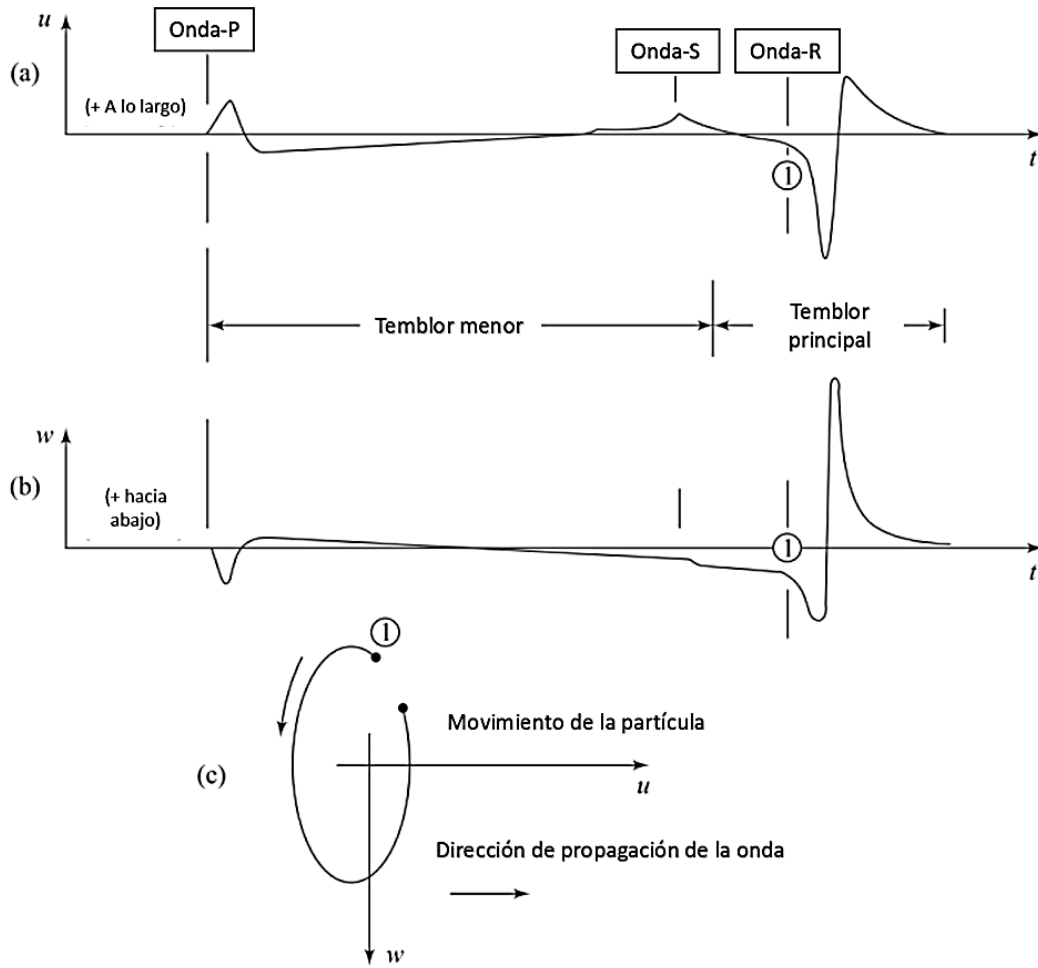


Figura 4.6. Sistema de ondas generadas en la superficie de un medio ideal. (Richart, 1970).

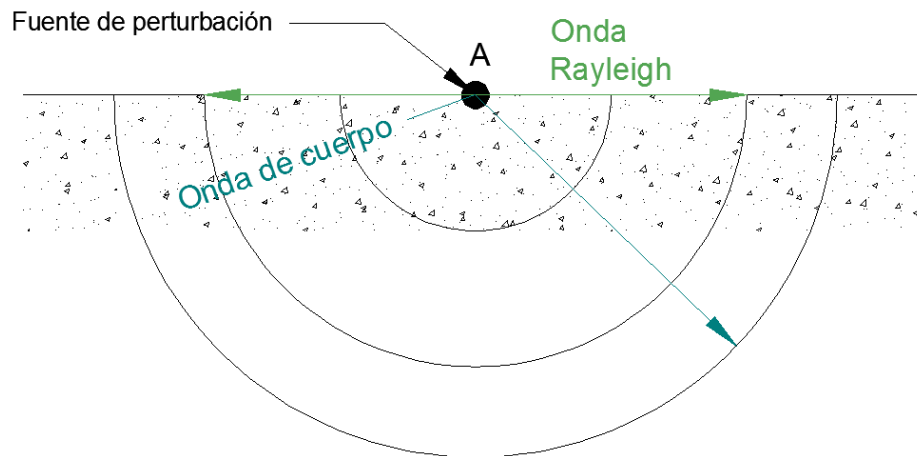


Figura 4.7. Onda plana a través de un semi-espacio elástico con límites planos.

Combinando las componentes horizontales y verticales del movimiento de partículas comenzando en los puntos *I* en las Figs. 4.6a y 4.6b, el lugar del movimiento de la superficie de la partícula para la onda R puede dibujarse como se muestra en la figura 4.6c. La ruta del movimiento de partícula describe una elipse retrógrada.

## 5 PROPIEDADES DINÁMICAS DE LOS SUELOS

Las principales propiedades dinámicas del suelo que se deben conocer para el estudio de un sistema suelo-cimentación- maquinaria son:

- Relación de Poisson  $\nu$ ,
- Módulo de elasticidad  $E$ ,
- Módulo dinámico de resistencia al corte  $G$ ,
- Módulo de compresibilidad volumétrica  $B$ ,
- Atenuación o amortiguamiento  $D$ ,
- Módulo de reacción  $k_s$

Estas se determinan en el laboratorio o en campo, mediante la simulación de una acción dinámica para conocer el comportamiento de la masa de suelo.

En este escrito se tomará en cuenta lo escrito por autores como Barkan(1962), Richart, et al(1970), Zeevaert (1973) y A. Jaime (1980) principalmente. Se revisarán algunas de las pruebas tanto de campo como de laboratorio, que permiten estimar las propiedades requeridas para la modelación del problema de una cimentación de maquinaria. Se debe mencionar que para el propósito de este trabajo se considerara que las deformaciones que se presentan en un sistema suelo-cimentación- maquinaria caen en el rango lineal, es decir que estas deformaciones se encuentran en la parte inicial de la curva esfuerzo-deformación.

### 5.1 Módulo de elasticidad ( $E$ ) y relación de Poisson ( $\nu$ ) y

La relación de Poisson  $\nu$  es definida como la relación entre la deformación radial o lateral y la deformación axial vertical de un elemento. En la actualidad existen técnicas de laboratorio y de campo que permiten determinar la relación de Poisson. Sin embargo, normalmente se estima su valor. La relación de Poisson puede variar desde 0.5 para arcillas saturadas a un rango de 0.3-0.35 para suelos granulares (A. Jaime).

La relación de Poisson  $\nu$  es definida como:

$$\nu = \frac{-\Delta\varepsilon_r}{\Delta\varepsilon_z} \quad (5.1)$$

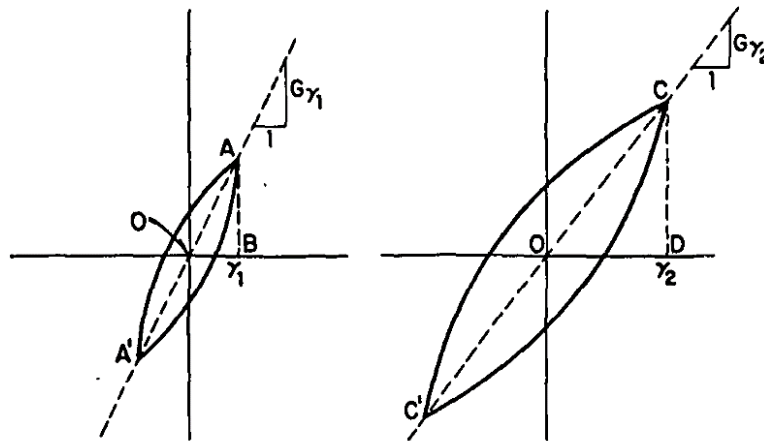
El módulo de elasticidad  $E$  o Módulo de Young mide la rigidez del material, y se puede obtener en el laboratorio y en campo.

De la curva esfuerzo deformación se estima el Módulo de Young  $E$ , como la pendiente de la gráfica esfuerzo deformación, de un material isotrópico y lineal.

### 5.2 Módulo dinámico de resistencia al cortante ( $G$ ).

El módulo  $G$  se define como la relación del esfuerzo cortante y la deformación debido al cortante.

El suelo presenta generalmente un comportamiento no lineal, por lo que en un proceso de carga y descarga el patrón esfuerzo-deformación genera una curva histerética, como la que se muestra en la figura 5.1. Por lo tanto, el módulo  $G$  se determina en laboratorio o en campo como el módulo secante.



**Figura 5.1.** Determinación del módulo de cortante y de la relación de amortiguamiento (A. Jaime 1980).

El mayor valor para el módulo de resistencia al cortante conocido como  $G_{máx}$ , se obtiene para deformaciones muy bajas, debido al comportamiento lineal del suelo, pero al incrementar la amplitud de deformación, el módulo  $G$  disminuye.



### 5.3 Relación de amortiguamiento ( $D$ ).

La relación de amortiguamiento se puede conocer si se tiene un gráfico como el que se muestra en la figura 5.1.

La relación de amortiguamiento se define como el área bajo la curva histerética, y depende de la magnitud de la deformación, es decir es la medida de la capacidad para disipar energía que posee suelo al ser deformado.

La relación de amortiguamiento ha sido medida en laboratorio satisfactoriamente. Sin embargo, en campo resulta muy difícil su determinación con precisión. La relación de amortiguamiento se expresa en la ecuación 5.2 donde se utiliza información obtenida de gráficos como el de la figura 5.1.

$$D\gamma_1 = \frac{\text{Área de la curva}}{4\pi (\text{Área } OAB)} \quad D\gamma_2 = \frac{\text{Área de la curva}}{4\pi (\text{Área } OCD)} \quad (5.2)$$

El módulo  $G$  y la relación de amortiguamiento  $D$ , son afectados por la amplitud de la deformación; sin embargo, también otros parámetros como el número de ciclos de carga y descarga, la frecuencia de carga, la relación de vacíos del suelo, la magnitud de la deformación angular y el grado de saturación pueden afectar a estos módulos.

Se ha demostrado que si se conocen dos de las siguientes propiedades,  $\nu$ ,  $G$  o  $E$  es aplicable la ecuación 5.3, para la determinación de la propiedad faltante.

$$E = 2G(1+\nu) \quad (5.3)$$

### 5.4 Módulo de compresibilidad volumétrica.

Este módulo se estima a partir de  $G$  y  $\nu$  utilizando la ecuación 5.4.

$$B = \frac{2(1+\nu)}{3(1-2\nu)} G \quad (5.4)$$

### 5.5 Módulo de reacción $k_s$

El módulo de reacción ( $k_s$ ) se determina por lo general mediante una prueba de carga con placa rígida, realizando una serie de ciclos de carga y descarga. El módulo de reacción se define como la relación del incremento de presión entre la placa y el suelo con el asentamiento provocado. La curva presión-desplazamiento, generalmente presenta un comportamiento no lineal. El  $k_s$ , se obtiene de la pendiente de la línea tangente al inicio de las curvas de recarga o de descarga, o mediante la secante.

Barkan (1962) realizó varios experimentos de los cuales concluyó que se tienen cuatro módulos:

- a) el módulo de reacción normal uniforme
- b) el módulo de reacción normal no uniforme
- c) el módulo de reacción de cortante uniforme
- d) el módulo de reacción de cortante no uniforme.

Distingue que éstos varían en función de la rigidez de la placa, sus dimensiones y del tipo de suelo ensayado. Además, para el caso del módulo de reacción de cortante, se observó que también influye el nivel de presión ejercida sobre la placa de prueba. Barkan determinó el módulo de reacción normal no uniforme al aplicar un momento de volteo a una placa rígida concluyendo que la forma en que se aplica la carga si influye en el comportamiento de la masa de suelo.

#### ○ **Módulo de reacción normal uniforme $k_u$ .**

Existe una relación entre el asentamiento y la carga aplicada mediante una placa a la masa de suelo, además el suelo inicialmente presenta un comportamiento lineal, y al aumentar la presión, el suelo comienza a comportarse de manera no lineal. Este cambio de comportamiento está dado por el término límite de proporcionalidad, que se define como el límite en el cual la relación asentamiento-presión es lineal bajo un cierto punto y se estima mediante la siguiente ecuación:

$$p_z = k_p s \quad (5.5)$$

Donde:

$p_z$ = presión normal en el suelo

$k_p$ = coeficiente de proporcionalidad o módulo de reacción

$s$ = asentamiento total debido a la carga de una placa resultado de una presión externa.

Sin embargo, este criterio considera condiciones estáticas de carga llegando a la conclusión que el límite de proporcionalidad no depende del área de la placa con la que se realiza la prueba, sino únicamente depende de las propiedades del suelo.

Barkan (1948) realizó pruebas bajo condiciones dinámicas y observó que varios suelos, al ser cargados, no presentaban una recuperación total de su volumen a pesar de no llegar a su límite de proporcionalidad, lo que le llevó a asumir que el límite elástico es mucho menor que el límite de proporcionalidad, por lo que propuso la siguiente ecuación considerando el rango elástico de una masa de suelo:

$$p_z = k_u s_e \quad (5.6)$$

Donde

$p_z$ = presión normal en el suelo

$k_u$ = coeficiente de proporcionalidad, llamado en este caso coeficiente de compresión uniforme elástica.

$s_e$ = asentamiento elástico de la placa de carga debido a una presión externa.

Barkan destacó que  $k_p$  y  $k_u$  serían valores constantes si los esfuerzos en el suelo bajo una carga uniforme, debido a una cimentación, permanecen constantes en cualquier punto. Si esto no fuera así, ambos coeficientes dependerían del área y de la forma de la cimentación.

Sin embargo, para el caso de cimentaciones de maquinaria, al ser en su mayoría bloques rígidos, la distribución de esfuerzos no es uniforme. Sadovsky (1928) dió una solución para este caso considerando una base rígida de forma circular y propuso obtener:

$$k(A) = \frac{E}{1-\nu^2} \frac{1}{\pi\sqrt{R^2-\rho^2}} \quad (5.7)$$

Donde:

$k(A)$ : es un coeficiente de proporcionalidad variable, cuya magnitud depende de las constantes elásticas de la masa de suelo y su posición bajo la cimentación.

$E$ =Módulo de Young de la masa de suelo

$\nu$ =Relación de Poisson

$R$ = radio de la cimentación

$\rho$ = radio del vector del punto bajo la cimentación.

Esta ecuación muestra que los esfuerzos en la base de una cimentación se van incrementando conforme se alejan del centro de la misma alcanzando su máximo valor al llegar a los límites cuando  $\rho=R$ .

Barkan mostró mediante un proceso de integración de la ecuación 5.7, que el coeficiente de compresión uniforme elástica de un suelo se puede expresar mediante:

$$k_u = 1.13 \frac{E}{1-\nu^2} \frac{1}{\pi\sqrt{A}} \quad (5.8)$$

La ecuación 5.8 muestra que al presentarse un asentamiento uniforme en la masa de suelo, los esfuerzos en la base no están distribuidos uniformemente. El coeficiente de compresión elástica  $k_u$ , (O, si se da la solución para un suelo proporcionalmente deformado, el coeficiente  $k_p$ ) dependerá no solamente de las propiedades elásticas del suelo, sino también del tamaño de la base en contacto con la masa de suelo.

Cuando se presenta el caso de una losa totalmente flexible cargada uniformemente, los esfuerzos en la masa de suelo en la base se distribuirán uniformemente, pero el asentamiento variará a lo largo de la base, por lo que el  $k_u$  en una losa totalmente flexible se obtiene de la relación de la presión uniforme  $p_s$  con el asentamiento promedio  $s_{av}$ .

$$k_u = \frac{p_s}{s_{av}} \quad (5.9)$$

Si se tiene una base rectangular totalmente flexible y suponiendo que el asentamiento promedio es igual al que se obtuvo en la ecuación 5.5, entonces

$$k_u = \frac{K_s \frac{E}{1-\nu^2}}{A} \quad (5.10)$$

Donde

$A$ : área de la base

$k_s$ : es un coeficiente que depende únicamente de la relación entre el ancho y largo expresado como  $\alpha$ .

$$K_s = \frac{\pi\sqrt{\alpha}}{\ln \frac{\sqrt{1+\alpha^2}+\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}-\alpha} + \alpha \ln \frac{\sqrt{1+\alpha^2}+1}{\sqrt{1+\alpha^2}-1} - \frac{2}{3} \left[ (1+\alpha^2)^{3/2} - \frac{1+\alpha^2}{\alpha} \right]} \quad (5.11)$$

Donde:

$$\alpha = 2a/2b$$

$2a, 2b$  = longitud, ancho de la cimentación.

Para el caso de una cimentación como el de maquinaria, Gorbunov-Posadov demostraron que había una mínima diferencia entre los coeficientes, por lo que la ecuación 5.9 se puede utilizar para el caso de cimentaciones rígidas como el de máquinas, aunque normalmente se utiliza una proporción grande entre la longitud y ancho, muchas veces no exceden el 3. Por lo tanto, se puede decir que, el coeficiente de compresión uniforme elástica no dependerá de  $\alpha$ .

Si se utiliza la ecuación 5.9, y se considera dos cimentaciones de diferente área, se pueden relacionar los coeficientes de compresión uniforme elástico mediante:

$$k_{u_2} = k_{u_1} \sqrt{\frac{A_1}{A_2}} \quad (5.12)$$

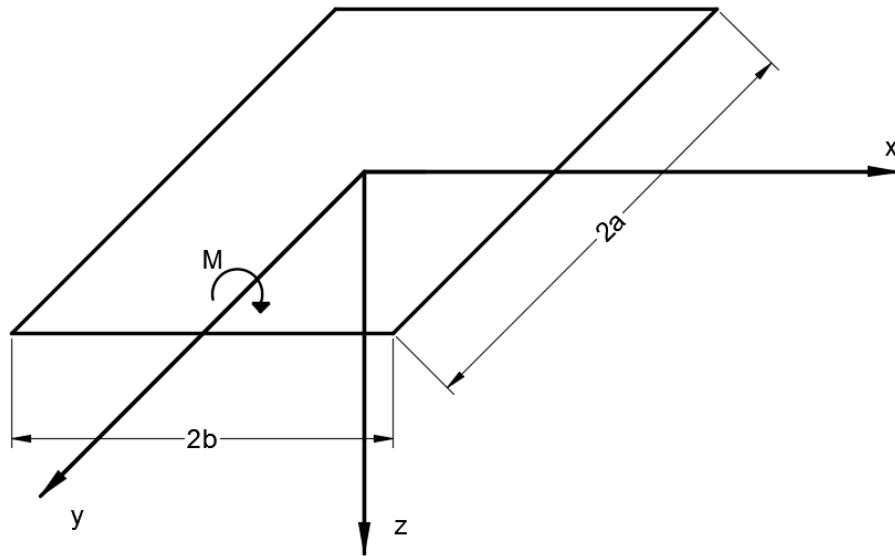
Barkan realizó múltiples experimentos, donde utilizando vibración libre en una cimentación generada por un compresor horizontal. Observó que en una cimentación de aproximadamente  $1.5\text{m}^2$  y un  $k_u$  determinado experimentalmente de  $10.8 \text{ kg/cm}^3$ , al emplear la ecuación 5.12 puede encontrarse de manera analítica el coeficiente para una cimentación de área de  $90\text{m}^2$ , la cual tiene un  $k_u$  experimental de  $4.7 \text{ kg/cm}^2$ .

$$k_{u_2} = 10.8 \sqrt{\frac{1.5}{90}} = 1.39 \text{ kg/cm}^2 \quad (5.13)$$

El coeficiente calculado es menor en un rango de 3.6 veces que el establecido experimentalmente. Barkan llegó a la conclusión que el coeficiente  $k_u$  varía a un ritmo mucho menor de lo que indica la ecuación 5.12. Esto se puede explicar por la dependencia de las propiedades elásticas de un suelo, pues éstas varían en la masa de suelo a lo largo de la profundidad. Es por esto que al aplicar una carga mayor, la reacción generada en el suelo llega a una profundidad mayor, generando que otras partes de la masa de suelo con diferentes propiedades elásticas intervengan en el comportamiento de la misma.

- **Módulo de reacción normal no uniforme  $k_\phi$ .**

Para este coeficiente se considera una cimentación rectangular flexible como la que se muestra en la figura 5.2, con lados de  $2a$  y  $2b$  de longitud, y sometida a un momento  $M$  alrededor el eje  $y$ .



**Figura 5.2. Inclinación inducida de una placa cargada provocada por una compresión no uniforme.**

Polshin, consideró una placa absolutamente flexible, proporcionó la siguiente ecuación para estimar la pendiente del ángulo  $\varphi$  generado en la placa, el cual es dependiente de  $y$ .

$$\varphi(y) = K_{\varphi} \left[ (\alpha + y) \ln \frac{\sqrt{(a+y)^2 + b^2} + b}{\sqrt{(a+y)^2 + b^2} - b} + (\alpha - y) \ln \frac{\sqrt{(a-y)^2 + b^2} + b}{\sqrt{(a-y)^2 + b^2} - b} \right] \quad (5.14)$$

Donde

$$K_{\varphi} = \frac{1-\nu^2}{\pi E} \frac{M}{I} \quad (5.15)$$

$M$ : es el momento externo que actúa en la placa alrededor del eje  $y$   
 $I$ : es el momento de inercia de la placa con respecto al eje  $y$ .

Barkan posteriormente utilizó lo realizado por Polshin para la obtención del coeficiente de reacción o coeficiente elástico de compresión no uniforme  $k_{\varphi}$ , considerando que la reacción normal vertical en la masa de suelo bajo cualquier punto de una losa de cimentación (rígida) depende únicamente del asentamiento en este punto en consideración; obteniendo la ecuación 5.16 para conocer  $k_{\varphi}$ .

$$k_{\varphi} = \frac{K_{\varphi} \frac{E}{1-\nu^2}}{\sqrt{A}} \quad (5.16)$$

Donde

$$K_{\varphi} = \frac{2\pi\alpha\sqrt{\alpha}}{2\alpha^2 \ln \left[ \frac{(\sqrt{4\alpha^2+1}+1)}{(\sqrt{4\alpha^2-1}-1)} + \sqrt{4\alpha^2+1} - 1 \right]} \quad (5.17)$$

$$\alpha = a/b$$

Barkan concluyó que el coeficiente de reacción depende no únicamente de las propiedades elásticas del suelo y del tamaño del suelo, sino también en cierto grado de si la carga es uniforme o no. Además, experimentalmente Barkan comprobó que, al incrementar el área de una cimentación,  $k_{\varphi}$  disminuye.

○ **Módulo de reacción de cortante uniforme  $k_{\tau}$ .**

Este coeficiente se presenta cuando una cimentación es sometida a una fuerza horizontal que actúa o es aplicada al nivel del contacto entre la base de la cimentación y la masa de suelo, lo que genera que la cimentación se deslice en dirección de la fuerza. El desplazamiento en cualquier instante de tiempo depende de la magnitud de la fuerza en ese instante.

Sin embargo, cuando la fuerza desaparece, la cimentación presenta un desplazamiento residual. El deslizamiento de la cimentación debido a la fuerza horizontal en un principio no difiere en modo alguno del asentamiento. Barkan mencionó, que basado en experiencia, se ha observado una relación lineal entre los esfuerzos cortantes por deslizamiento que aparecen a lo largo de la base de contacto y el deslizamiento de la cimentación. Esta relación se expresa como:



$$\tau_{av} = k_{\tau} s_e \quad (5.18)$$

Donde:

$\tau_{av}$ : es el promedio de los esfuerzos cortantes del suelo en el plano de contacto con la cimentación.

$s_e$ : es la parte elástica del deslizamiento horizontal de la cimentación bajo la acción de  $\tau_{av}$ .

Barkan consideró este caso como un problema de deformación de un sólido semi-infinito bajo la acción de una fuerza horizontal  $Q_t$  aplicada a su superficie, de esta manera logró relacionar las propiedades elásticas del suelo y el tamaño y forma de la cimentación, llegando a la ecuación 5.19 para poder obtener el módulo de reacción de cortante uniforme  $k_{\tau}$ .

$$k_{\tau} = \frac{K_{\tau} \frac{E}{1-\nu^2}}{\sqrt{A}} \quad (5.19)$$

Donde

$$K_{\tau} = \frac{\pi}{2\sqrt{\alpha} \left( \frac{1}{\alpha} \operatorname{senh}^{-1} \alpha + \operatorname{senh}^{-1} \left( \frac{1}{\alpha} \right) - \frac{1}{3} \left[ \left( \frac{1}{\alpha^2} \right) (\sqrt{1+\alpha^2} - 1) \right. \right.}$$

$$+ \frac{\pi}{\sqrt{1+\alpha^2} - \alpha + [\nu/(1-\nu)] \{ (\frac{1}{\alpha}) \operatorname{senh}^{-1} \alpha$$

$$\left. \left. + \frac{\pi}{\frac{1}{3} [\sqrt{1+\alpha^2} - \alpha - (\frac{2}{\alpha^2}) (\sqrt{1+\alpha^2} - 1)] \right] \right) \} \right)} \quad (5.20)$$

$$\alpha = a/b$$

La ecuación 5.20 muestra que a diferencia de los coeficientes de compresión, este coeficiente depende no solamente de la relación  $\alpha$  de las longitudes de los extremos de la cimentación, sino también de la relación de Poisson.

○ **Módulo de reacción de cortante no uniforme  $k_\psi$ .**

Este coeficiente se presenta cuando una cimentación está sometida a un momento con respecto al eje vertical  $z$ . Experimentalmente se comprobó que el ángulo de rotación  $\psi$  que presenta la cimentación es proporcional al momento externo; esto se expresa en la ecuación 5.21.

$$M_z = k_\psi J_z \psi \quad (5.21)$$

Donde:

$M_z$ : Momento externo que produce torsión en la base de la cimentación respecto al eje vertical

$J_z$ : Momento polar de inercia en el contacto del área base de la cimentación.

$k_\psi$ : Módulo de reacción de cortante no uniforme, llamado debido a que la cimentación presenta un deslizamiento no uniforme en esta condición.

Los módulos de reacción dependerán de la forma en la que la cimentación sea sometida a esfuerzos, además en ellos influyen las propiedades elásticas del suelo y en algunos casos también la forma y el tamaño de la cimentación.

Debido a la complejidad de realizar estudios para cada tipo de coeficiente en la construcción de una cimentación. Barkan (1962) ha utilizado ampliamente el concepto de módulo de reacción-elástico y ha indicado constantes de resorte para los diversos modos de vibración de cimientos rígidos que se muestran a continuación:

**Tabla 5.1. Obtención del Módulo de reacción.**

VIBRACIÓN VERTICAL	$k_z = k_s A$	
VIBRACIÓN HORIZONTAL	$k_x = k'_x A$	$k'_x = 0.5 k_s$
VIBRACIÓN OSCILATORIA	$k_\psi = k \psi I'$	$k' \psi = 2 k_s$
VIBRACIÓN TORSIONANTE	$k_\theta = k'_\theta I''$	$k'_\theta = 1.5 k_s$

Donde:

$A$ : área de contacto entre la cimentación y el suelo

$k_s$ : es el módulo de reacción normal uniforme obtenido de las pruebas

$I'$ : segundo momento del área de contacto respecto al eje horizontal normal al plano de oscilación que pasa por el centroide.

$I''$ : segundo momento del área de contacto respecto al eje vertical que pasa por el centroide.

## 5.6 Obtención de las propiedades dinámicas del suelo

Las propiedades dinámicas se estiman de diversas formas, por ejemplo: pruebas en campo, muestreo y pruebas de laboratorio, tablas de valores publicados y en algunas ocasiones recomendaciones de experto. A continuación, se enunciarán algunas de las pruebas de campo y laboratorio más empleadas.

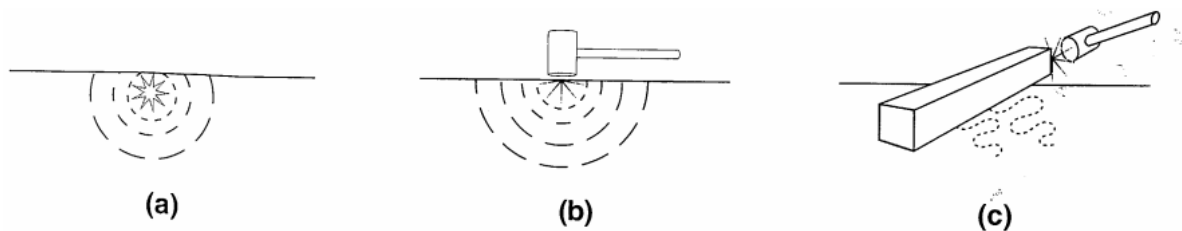
### 5.6.1 Ensayes de campo

Las pruebas en campo presentan dos formas diferentes para la obtención de las propiedades dinámicas. La primera es utilizando métodos geofísicos y la otra mediante una oscilación inducida. Las dos utilizan el principio de propagación de ondas, es decir generan una onda o tren de ondas para posteriormente registrarlas en otro extremo y así poder interpretar el comportamiento de la o las ondas en el suelo. Una vez generada la excitación en el sitio, se debe conocer el tiempo  $t$  que transcurre para llegar a un punto en específico y el tipo de onda generado; entonces es posible estimar las velocidades de propagación de onda del material, y por ende inferir los módulos dinámicos con ayuda de la teoría de la elasticidad.

Una ventaja de estas pruebas es que permiten medir las propiedades sin necesidad de extracción de muestras. Esto se traduce a que no se generan cambios en las condiciones (esfuerzos, temperatura y estructura.) a las que está sometida la masa de suelo de forma natural.

Las ondas para la realización de las pruebas pueden ser generadas en la superficie del terreno o en su interior. Estas ondas generan deformaciones en el suelo de manera similar a las pruebas de laboratorio.

Al generar la o las ondas se tienen dos factores que intervienen en el proceso. El primero es la fuente con la que se generara la onda y el segundo es que tipo de onda se quiere generar. Las fuentes generadoras de ondas pueden ser desde un martillo hasta un explosivo. Los explosivos y fuentes de impacto vertical forman en su mayoría ondas P, mientras que las ondas SH se obtienen al golpear el extremo de una viga. Estas fuentes y las ondas que generan se observan en la figura 5.3.



**Figura 5.3. Diferentes métodos para generar ondas en pruebas geofísicas: a) explosivos superficiales, b) impacto vertical y c) impacto horizontal.**

Se debe tomar en cuenta las condiciones del agua subterránea, pues las ondas P viajan mucho más rápido en un suelo saturado que en un suelo seco. Sin embargo, las ondas S únicamente se propagan en la estructura del suelo.

Algunos otros métodos no miden directamente las propiedades dinámicas del suelo, pero éstas, se pueden conocer por medio de correlaciones.

**1) Ensayo de reflexión sísmica.**

Este ensayo permite conocer el espesor ( $H$ ) de las capas superficiales de suelo y la velocidad de propagación de onda. El proceso se observa en la figura 5.4 y consiste en generar una excitación generalmente que posee en su mayoría ondas P, en una fuente A, y se mide el tiempo de llegada en un punto B. La excitación genera ondas de esfuerzo que irradian en todas las direcciones desde la fuente. Este proceso toma en cuenta dos caminos que puede tomar el tren de ondas, el primero se conoce como directo, que es cuando las ondas van en línea recta de la fuente (punto A) al receptor (punto B), y el tiempo que tarda en llegar se estima mediante.

$$t_d = \frac{\text{distancia del viaje}}{\text{velocidad de onda}} = \frac{x}{c_{p1}} \quad (5.22)$$

En la que  $x$  es la distancia entre la fuente (A) y el punto (B) donde se registrará el tiempo  $t_d$  de llegada de la onda. Por lo que al medir  $x$  y  $t_d$ , se puede conocer la velocidad de onda.

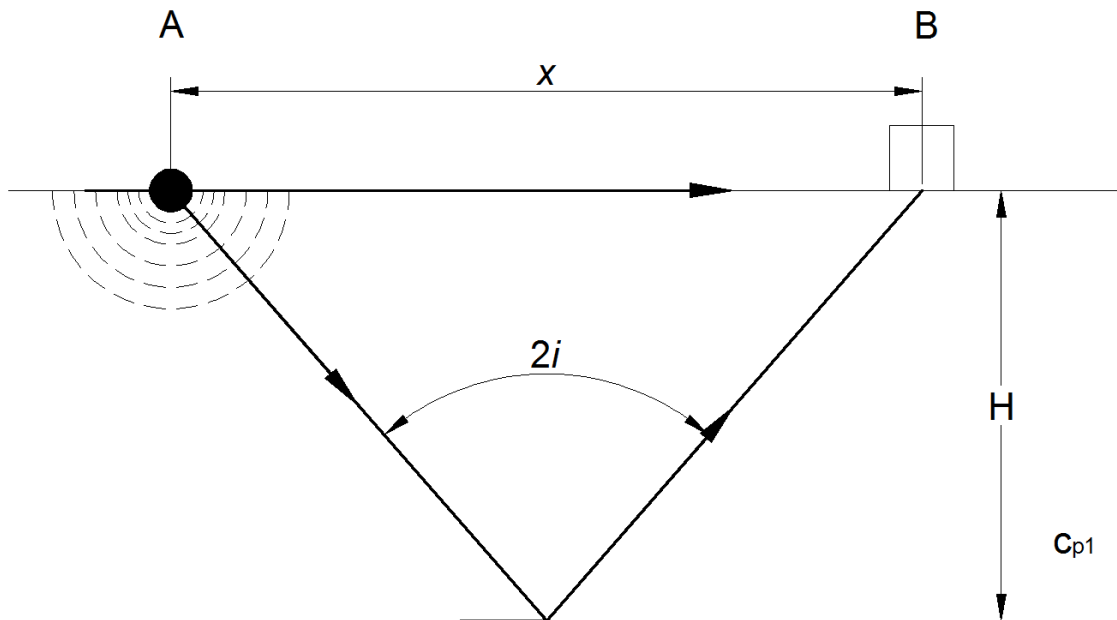


Figura 5.4. Patrón de ondas reflejadas al límite de una capa horizontal.

También se presenta el fenómeno de reflexión que consiste en que una onda al viajando en un medio, cuando encuentra otro choca y cambia su trayectoria, siguiendo una dirección con un ángulo igual al definido por la trayectoria de entrada con la perpendicular al plano de incidencia, como se muestra en la figura 5.4. El ángulo de incidencia  $i$  con el que se refleja la onda al chocar con otro medio (capa de mayor densidad) se define como:

$$i = \tan^{-1} \frac{x}{2H} \quad (5.23)$$

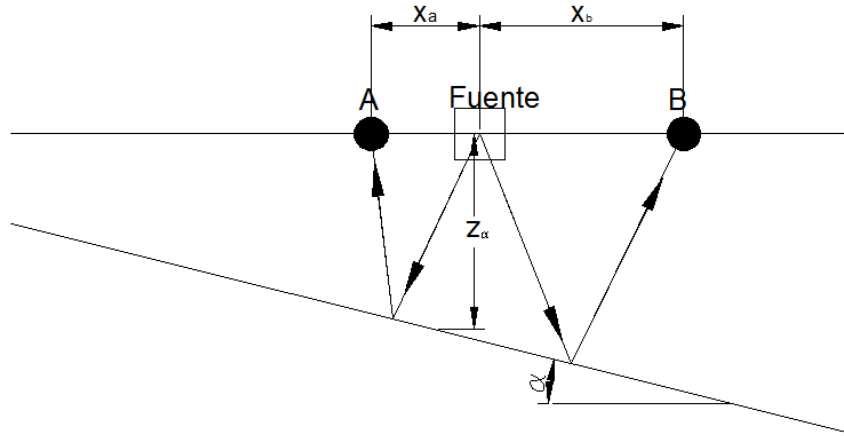
La onda que se refleja de regreso a la superficie del suelo tarda en llegar un tiempo  $t_r$ :

$$t_r = \frac{\text{distancia}}{\text{velocidad de onda}} = \frac{2\sqrt{H^2+(x/2)^2}}{c_{p1}} = \frac{\sqrt{4H^2+x^2}}{c_{p1}} \quad (5.24)$$

Este segundo patrón de dirección de la onda se utiliza para conocer el espesor de la capa de suelo, pues una vez que se conoce el tiempo  $t_r$  de reflexión de la onda, la distancia  $x$  y la velocidad de onda  $c_p$ , es posible calcular el espesor del estrato mediante:

$$H = \frac{1}{2} \sqrt{t_r^2 c_p^2 - x^2} \quad (5.25)$$

Sin embargo, muchas veces las capas de la masa de suelo pueden presentar cierta inclinación como se ve en la figura 5.5.



**Figura 5.5. Prueba de reflexión en una capa inclinada.**

En este caso se puede utilizar las mediciones del tiempo que tardan en recibir la señal A y B para determinar el ángulo de inclinación mediante.

$$\text{sen}\alpha = \frac{V_{p1}^2(t_{rA}+t_{rB})(t_{rA}-t_{rB})}{4z_{\alpha}(x_B-x_A)} - \frac{x_A+x_B}{4z_{\alpha}} \quad (5.26)$$

## 2) Ensayo de refracción:

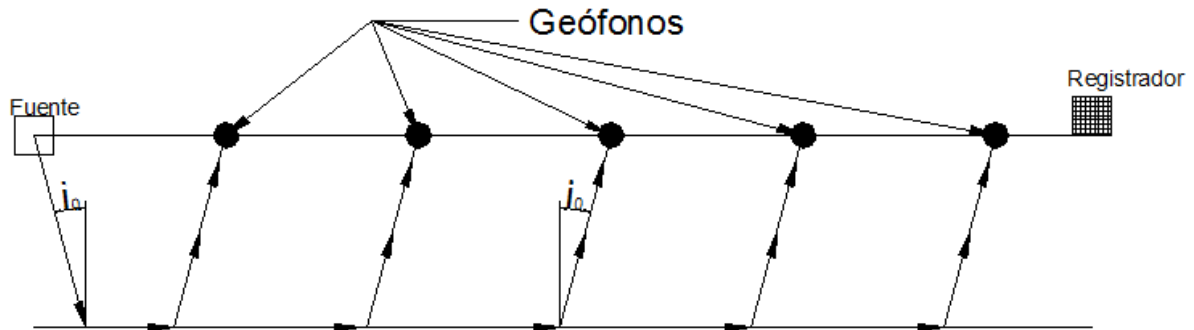
El ensayo de refracción utiliza al igual que el de reflexión el principio de propagación de ondas, sin embargo, el fenómeno de refracción se produce cuando una onda que viaja por un medio, al pasar a otro cambia su dirección.

Esta prueba se puede observar en la figura 5.6. Este método se considera más confiable, pues utiliza el tiempo de las primeras ondas en llegar sin importar el patrón de dirección que hayan tomado a un receptor dado.

La prueba de refracción consiste en generar un tren de ondas, que se puede generar golpeando una placa de acero colocada sobre la superficie del terreno, o mediante, una explosión dentro de un barreno poco profundo (1 o 2m).

Las ondas generadas son del tipo P, S y R que viajan en todas direcciones, por lo que se generan ondas refracción y de reflexión; sin embargo, se ha comprobado

que las ondas de reflexión son muy lentas por lo que la primera señal captada serán las de refracción totalmente.



**Figura 5.6. Método de refracción**

Las ondas son captadas por sensores llamados geófonos. Estos se colocan en tendidos rectos, separados de 2, 5 o más metros; sin embargo existe una distancia crítica  $d_0$  con respecto a la fuente donde la onda refractada y la onda directa arriban en el mismo instante. Una vez generado el tren de ondas se registra el tiempo de llegada con ayuda de un graficador u osciloscopio. Posteriormente se genera otro tren de onda en el extremo opuesto de la línea de geófonos y se vuelve a tomar el registro de los tiempos, la finalidad de conocer si los estratos son o no horizontales. Con las distancias conocidas entre cada geófono y los tiempos  $t$  de llegada a cada uno, se generan gráficas domocrónicas como las que se observan en la figura 5.7.

El proceso descrito ayuda a obtener las velocidades de ondas P, las cuales se determinan como el recíproco de las pendientes de las rectas, de las gráficas domocrónicas.



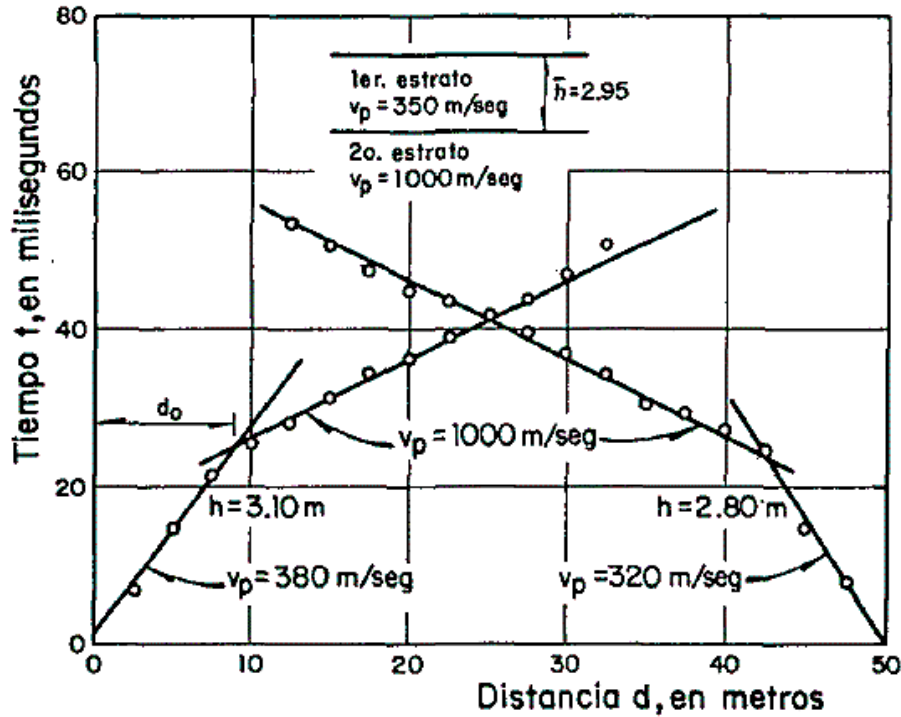


Figura 5.7. Curvas domocrónicas para el caso de dos capas horizontales. (Rascón, 1972)

Las curvas domocrónicas de la figura 5.7 son simétricas; esto pasa cuando en la masa de suelo, las capas son horizontales, y se asume un semi-espacio elástico de dos capas.

Como se mencionó anteriormente las ondas generadas en la fuente, viajan en todas direcciones, algunas de ellas viajan hacia abajo con dirección al límite entre los materiales 1 y 2, en este punto las ondas se reflejan y refractan.

Asumiendo que las ondas se refractan bajo la ley de Snell, ecuación 5.39, quien relacionó las velocidades de propagación de las ondas en dos medios con los ángulos de incidencia.

$$\frac{c_1}{\text{sen } i} = \frac{c_2}{\text{sen } i_r} \quad (5.27)$$

Donde

$c_1, c_2$ : velocidad de propagación en los medios 1 y 2 respectivamente.

$i$ : ángulo de incidencia.

$i_r$ : ángulo de refracción.

Para que las ondas refractadas sigan la trayectoria definida por la frontera entre los dos medios, se requiere que  $i_r=90^\circ$  siendo este fenómeno conocido como refracción total. Esto genera que la onda refractada en esta condición produce ondas que regresan por el primer medio con un ángulo igual al ángulo de incidencia crítica, es decir el ángulo con el cual ingreso a la primera capa, como se muestra en la figura 5.6.

El método empleado en geotecnia utiliza la refracción total, que está representada como:

$$\text{sen } i_0 = \frac{c_1}{c_2} \quad (5.28)$$

Donde  $i_0$  es el ángulo de incidencia crítica.

En la ecuación 5.40 se tiene como condición que  $i_0$  debe ser menor de  $90^\circ$  por lo que  $\text{sen } i_0$  debe es menor que la unidad, y en consecuencia  $v_1 < v_2$ . Esto quiere decir que este método solo se puede utilizar cuando los estratos más superficiales tienen velocidades de propagación de ondas menores que las de los más profundos.

Si se presentan dos estratos, el espesor  $H$  del primer estrato se puede determinar utilizando:

$$H = \frac{d_0}{2} \sqrt{\frac{c_2 - c_1}{c_2 + c_1}} \quad (5.29)$$

Dónde:  $d_0$ ,  $c_2$  y  $c_1$  se obtienen de las gráficas domocrónicas.

En el caso que se tengan más de dos capas horizontales en la masa de suelo, el espesor de la  $k$ th capa está dada por (Cuerpo de ingenieros, 1979):

$$H_i = \frac{d_{0k}}{2} \sqrt{\frac{c_{k+1} - c_k}{c_{k+1} + c_k}} + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{H_j}{v_j} \frac{c_{k+1} \sqrt{c_k^2 - c_j^2} - c_k \sqrt{(c_{k+1})^2 - c_j^2}}{\sqrt{(c_{k+1})^2 - c_k^2}} \quad (k \geq 2) \quad (5.30)$$

En el caso de que las gráficas tiempo-distancia sean asimétricas, significa que los estratos son inclinados. Cuando en la masa de suelo se presentan de 3 o más capas, las curvas domocrónicas exhibirán más de dos quiebres.

Realizando un arreglo en la ley de Snell, se observa una diferencia aparente pues la velocidad en dirección hacia abajo ( $c_{2D}$ ) es menor que cuando lleva una dirección hacia arriba ( $c_{2U}$ ), quedando la ecuación 5.40 como:

$$\text{sen}(i_0 + \alpha) = \frac{c_1}{c_{2D}} \quad (5.31)$$

$$\text{sen}(i_0 - \alpha) = \frac{c_1}{c_{2U}} \quad (5.32)$$

Donde se produce un ángulo aparente de inmersión  $\alpha$ , el cual solo es igual al verdadero cuando el vector de inmersión se encuentra dentro del plano de la matriz receptora, ese ángulo se calcula utilizando:

$$\alpha = \frac{1}{2} \left( \text{sen}^{-1} \frac{c_1}{c_{2D}} - \text{sen}^{-1} \frac{c_1}{c_{2U}} \right) \quad (5.33)$$

El espesor de la capa superior, medida perpendicularmente al límite de la capa en un punto, se estima mediante:

$$H_d = \frac{c_1 T_{id}}{2 \cos \alpha} \quad (5.34)$$

$$H_u = \frac{c_1 T_{iu}}{2 \cos \alpha} \quad (5.35)$$

Donde

$H_u$  es el espesor realizando la prueba en dirección hacia arriba

$H_d$  es el espesor realizando la prueba en dirección hacia abajo

$T_{iu}$  y  $T_{id}$  son los tiempos de llegada al límite de la primera capa en cada dirección respectivamente.

Recordando que este método se basa en la refracción total, la velocidad de los estratos profundos debe ser mayor que la de los superficiales. Por otra parte, en medios saturados la velocidad de onda P que se mide sería la del agua y no la correspondiente al material.

En la tabla 5.2 se presentan algunas velocidades de ondas complejionales para diferentes suelos y rocas.

**Tabla 5.2. Velocidades de ondas P y S típicas de algunos suelos y rocas. (A. Jaime)**

MATERIAL	Cp (m/seg)	Cs (m/seg)
Agua	1525	-
Aluvión	480-1980	360-700
Arena	300-1000	100-500
Arcilla	1000-2800	
Grava	450-1220	
Limo	400-610	
Caliza	1700-6400	900-3800
Lutita	1800-4000	

### 3) Microtremores

Los microtremores también son conocidos como microtrepidaciones, microsismos, campo natural, ruido o vibración ambiental, o microtemblores.

Algunas fuentes de microtremores (Bard, 1988) son:

- A bajas frecuencias, es decir por debajo de 0.3 y hasta 0.5 Hz. Los microtremores son causados por olas oceánicas que ocurren a grandes distancias.
- A frecuencias intermedias, estas se encuentran de 0.3 Hz hasta 1hz. En este caso los microtremores son generados por oleaje que rompe en las costas.

- Altas frecuencias, se refiere a aquellas mayores a 1 Hz, las principales fuentes de este tipo de microtremores son las derivadas de la actividad humana.

Los registros del ruido ambiental se obtienen mediante arreglos instrumentales, llamados arreglos de microtremores. Estos arreglos se refieren a la colocación de dispositivos digitales que algunas veces son amplificadores y el uso de un equipo de cómputo para obtener la información digital. La geometría de estos arreglos normalmente es circular, aunque esto no sea una regla se debe procurar que la distancia entre los sensores sea igual.

La mayoría de los métodos que se emplean para el análisis de la información obtenida de los microtremores utilizan la componente vertical que está dominada por ondas Rayleigh. Los métodos para el análisis de microtremores se conocen como métodos de ondas superficiales, y pueden ser de dos tipos:

- Métodos activos: Estos métodos emplean ondas Rayleigh, las cuales fueron generadas por una fuente impulsiva u oscilatoria con movimiento vertical armónico. Para estos métodos los sensores son ubicados en la superficie con un arreglo lineal a la fuente. Es recomendable para explorar profundidades no mayores a 20m.
- Métodos pasivos: Los microtremores se registran mediante un arreglo bidimensional sobre la superficie, o en su defecto con un solo instrumento. El análisis de los datos se realiza para obtener las características de dispersión de ondas superficiales, o características de las capas más superficiales como son: la frecuencia fundamental y la amplitud asociada.

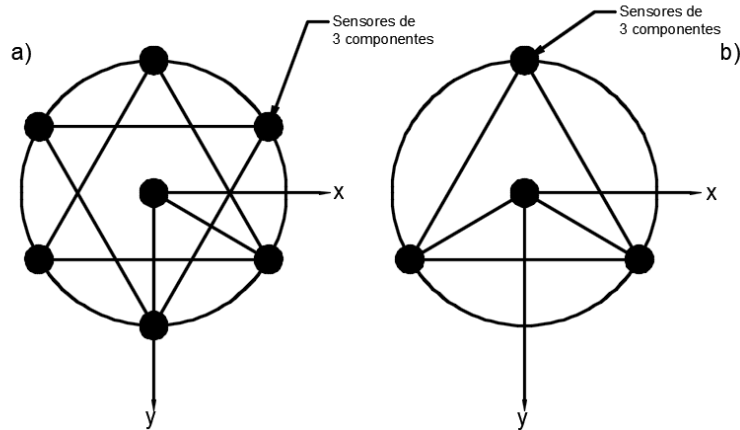
En la tabla 5.3 se mencionan algunos métodos de análisis de microtremores, y posteriormente se presentan tres de los métodos más utilizados.

**Tabla 5.3. Diferentes métodos de análisis de registros de microtremores.**

	Método	Número de puntos de observación	Componentes de movimiento usadas	Tipo de onda asumido	Resultado óptimo
<b>Métodos pasivos</b>	Espectral	1	Horizontal	Ondas S	Periodo predominante
	Cocientes espectrales	1-2	Horizontal Vertical	Ondas Rayleigh	Periodo natural del sitio
	Nakamura H/V	1	Horizontal Vertical	Ondas Rayleigh	Periodo natural del sitio
	F-K	7	Horizontal Vertical	Ondas Rayleigh y LOVE	Velocidad de fase: Perfil de velocidades
	SPAC	4-7	Horizontal Vertical	Ondas Rayleigh y LOVE	Velocidad de fase: Perfil de velocidades
<b>Métodos de fuente activa</b>	SASW	varios	Horizontal Vertical	Ondas Rayleigh y LOVE	Velocidad de fase: Perfil de velocidades
	MASW	varios	Horizontal Vertical	Ondas Rayleigh	Velocidad de fase: Perfil de velocidades

○ **SPAC**

Este método asume que los microtremores están formados por ondas superficiales, y su principal objetivo es calcular la velocidad de fase de cada frecuencia, a partir de registros simultáneos de microtremores obtenidos de un arreglo de cuatro a siete estaciones como se muestra en la Figura 5.8. Primero se obtiene el registro de ondas superficiales, a continuación se realiza el cálculo de los coeficientes de correlación y se termina realizando la estimación de la velocidad de fase.



**Figura 5.8. Esquema de dos arreglos instrumentales para el registro de microtremores. a) arreglo con siete instrumentos equiespaciados, analizados con el Método SPAC. b) arreglo con solo cuatro instrumentos equiespaciados, analizados con el Método SPAC.**

○ **SASW y MASW**

El método de análisis espectral de ondas de superficie o SASW por sus siglas en inglés (*spectral analysis of surface waves*) utiliza una fuente activa de energía sísmica, la cual es registrada repetidamente por un par de sismómetros de 1 Hz, esto es válido para distancias pequeñas de 1 m hasta muy grandes de aproximadamente 500 m.

Los sismómetros son sensores verticales de velocidad de partícula, por lo que los perfiles de velocidad de cortante se analizan en función de las velocidades de fase de ondas de Rayleigh interpretadas a partir de los registros.

Como los sismogramas originales no se guardan, y toda la interpretación se realiza en el dominio de la frecuencia, el método SASW supone que las llegadas más energéticas registradas son las ondas de Rayleigh.

Donde el ruido sobrepasa el poder de la fuente artificial, como es común en áreas urbanas, o donde las fases de la onda corporal son más energéticas que las ondas de Rayleigh, SASW no dará resultados confiables (Brown, 1998; Sutherland y Logan, 1998). Las velocidades de las ondas de Rayleigh no pueden separarse de las de otros tipos de ondas en el dominio de la frecuencia.

MASW por sus siglas en inglés (*multichannel analysis of surface waves*), es una técnica de análisis multicanal de ondas de superficie desarrollado en respuesta a las deficiencias de SASW en presencia de ruido. La grabación simultánea de 12 o más receptores a distancias cortas (1-2 m) a largas (50-100 m) desde una fuente impulsiva o vibratoria proporciona redundancia estadística a las mediciones de las velocidades de fase. Las pantallas de datos multicanal en un formato de frecuencia variable en el tiempo también permiten la identificación y el rechazo de las ondas de Rayleigh de modo no fundamental y otros ruidos coherentes del análisis.

Miller et al. (2000) lograron obtener excelentes resultados de MASW en el ambiente ruidoso. Utilizando fuentes pequeñas, grandes y apiladas, pudieron adquirir registros dominados por ondas Rayleigh de modo fundamental. También intentaron utilizar un perfil bidimensional para detectar anomalías laterales en la velocidad de cortante invirtiendo muchos registros a lo largo de un perfil.

- **ReMi (Refracción de microtremores)**

Existe actualmente otro método conocido como método ReMi (refracción de microtremores), el cual fue propuesto por Louie (2001). El método de refracción de microtremores combina la utilidad urbana y la facilidad en las técnicas en los arreglos de microtremores con la simplicidad operacional de la técnica SASW y la precisión superficial de la técnica MASW, y se considera un método pasivo al no necesitar una fuente de energía generadora.

Al registrar el microtremor generado por el ruido urbano en una matriz lineal de una gran cantidad de sismómetros livianos, el método logra una recolección de datos de campo rápida y fácil sin necesidad de una fuente pesada la cual requiere mucho tiempo para el trabajo en los métodos SASW y MASW.



La técnica ReMi se basa en dos ideas fundamentales:

- (1) El equipo de registro de refracción sísmica común, diseñado de forma casi idéntica a los estudios de refracción de ondas P, puede registrar ondas superficiales de manera efectiva a frecuencias tan bajas como 2 Hz; y
- (2) Una transformación simple, bidimensional de la frecuencia de lentitud (p-f) del registro de un microtremor puede separar las ondas de Rayleigh de otras llegadas sísmicas y así permitir el reconocimiento de la velocidad de fase verdadera frente a las velocidades aparentes.

Por otra parte existen dos factores esenciales que permiten que el equipo de exploración registre la dispersión de velocidad de onda superficial, con un mínimo esfuerzo de campo.

- (1) El uso de un solo sensor de geófono en cada canal, en lugar de un conjunto de geófonos.
- (2) El uso de una extensión lineal de 12 o más canales de sensores de geófonos.

Una matriz de grupos de geófonos consta de varios sensores conectados para sumar de manera eléctrica, produciendo un único canal de entrada.

El método de ReMi puede determinar velocidades de ondas a profundidades mínimas de 30m y hasta un máximo de 3-400m usando arreglos más grandes y sismógrafos inalámbricos.

#### **4) Pruebas de sondeos:**

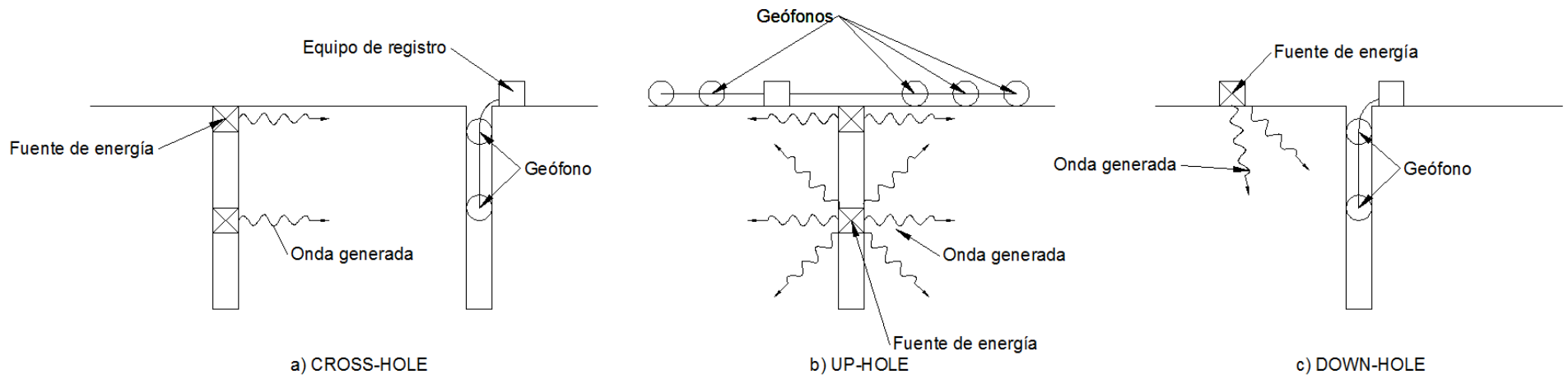
Estas pruebas consisten en realizar perforaciones además, en las cuales se podrá medir la velocidad de propagación de ondas de cuerpo en la masa de suelo.

Dependiendo del acomodo de los pozos (Figura 5.9) se pueden tener las siguientes pruebas.

- **Cross-hole:** En este proceso se utilizan dos o más perforaciones además los cuales son perforados en dirección vertical. La prueba consiste en únicamente dos pozos, en donde en uno se tiene la fuente que generará la onda y en el otro se tiene el receptor (geófono). Ambos tienen que estar a la misma profundidad. Posteriormente se genera la onda y entonces es posible medir el tiempo en llegar y por ende la velocidad. Se realizan varias mediciones a diferentes profundidades generalmente a cada 1m.
- **Up-hole y Down-hole:** En el caso de la prueba de Up-hole la excitación se genera dentro de la perforación (pozo) y la medición se toma en la superficie con ayuda de un geófono, generalmente el geófono o receptor es móvil para así tener diferentes distancias desde la fuente. La diferencia con la prueba de Cross-hole es que en este caso únicamente se utiliza un pozo.

La prueba de Down-hole es el proceso inverso a la Up-Hole. Esto significa que la fuente generadora de ondas se encuentra en la superficie y dentro del pozo el geófono o receptor. Para esta prueba se pueden colocar diferentes geófonos a varias profundidades.

Para estos métodos existen varios mecanismos generadores de ondas, el más básico es, una barra hueca o placa de acero, que al golpearse dentro del pozo o afuera dependiendo del ensaye, generara ondas P y S. En algunos otros casos se utilizan explosivos.

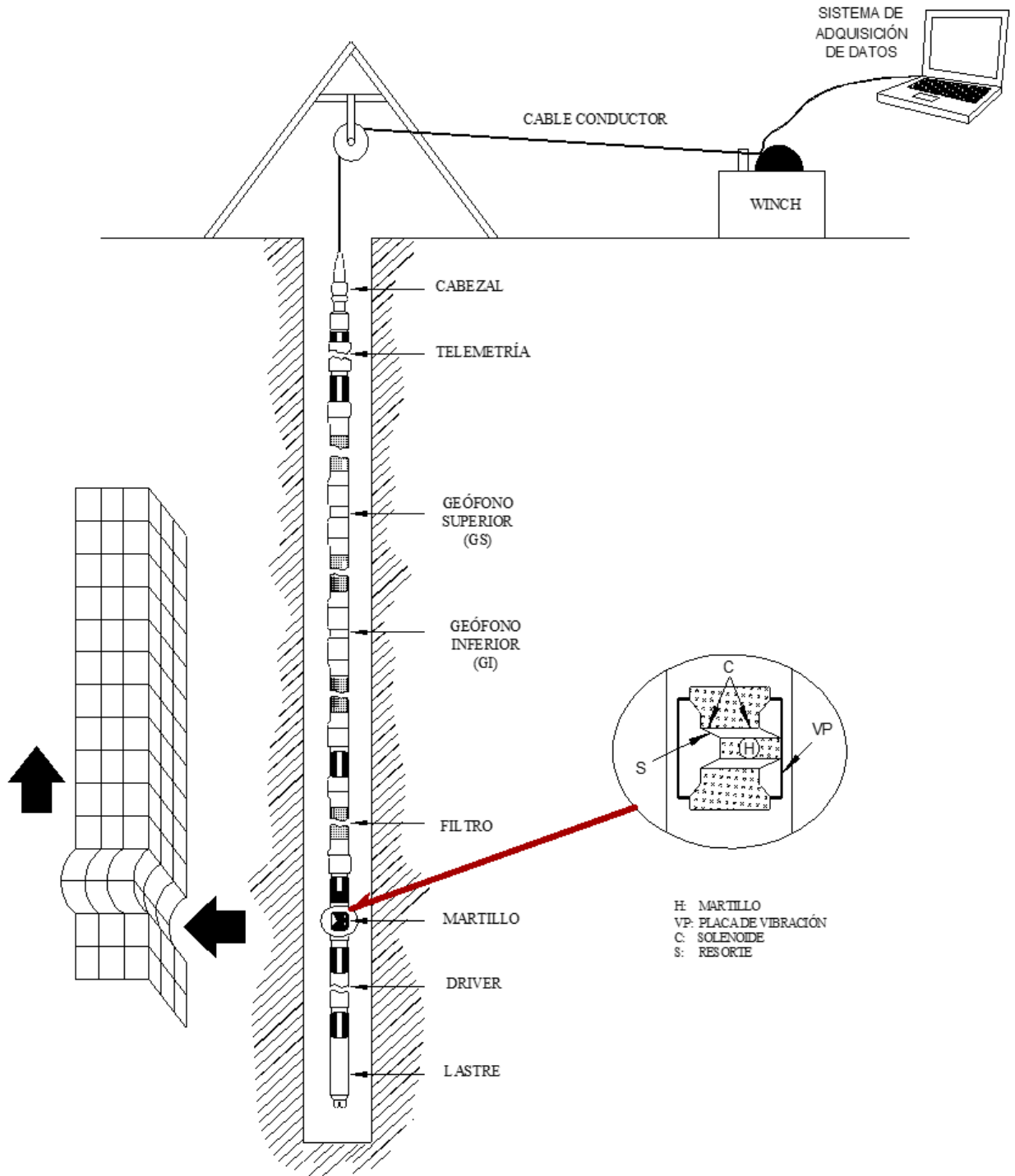


**Figura 5.9. Ensayes de campo realizados en sondeos.**

- Sonda suspendida: El registro de velocidad de sonda suspendida P-S (también conocido como registro de suspensión) es un método que permite determinar los perfiles de las velocidades de onda de cortante  $v_s$  y de compresión  $v_p$  en función de la profundidad.

Para la ejecución del ensaye se requiere una perforación, la sonda, el cable, el winch o malacate y el sistema de control y adquisición de datos. La prueba consiste en un golpe (transmisor) y dos geófonos biaxiales (superior e inferior) separados por unos filtros físicos (elemento flexible). La Figura 5.10 muestra los elementos básicos que conforman la sonda.

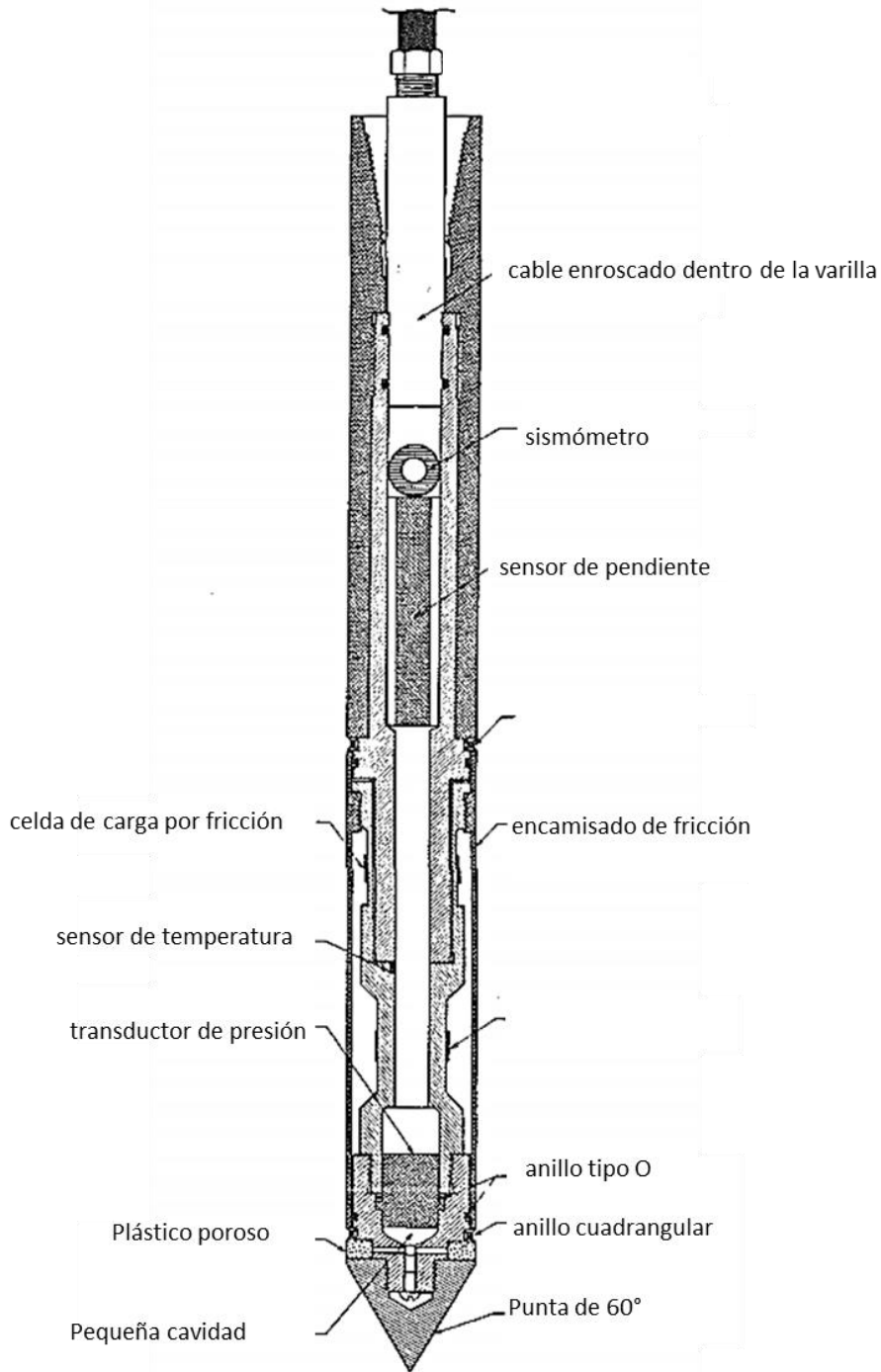
En la prueba, el sistema genera ondas que viajan a través del suelo y son registradas por los geófonos. La sonda se mueve por la perforación en sentido ascendente o descendente, produciendo una señal con amplitud aproximadamente constante en toda la perforación. El sistema excitador consiste en dos solenoides con polarización reversible para generar ondas horizontales de cortante (SH) y de compresión (SP). En otro punto se encuentran los receptores (R1 y R2) separados 1 m, lo que permite registrar las vibraciones emitidas con el martillo. Estas señales se registran y amplifican para luego mandarlas al sistema de adquisición de datos. Los cables conductores están envueltos por un cable metálico, el que soporta el peso de la sonda y que se enreda en el malacate o winch. Al activar el martillo de la sonda suspendida, las ondas P y S viajan a través de la periferia de la perforación y éstas son registrados por los geófonos inferior y superior para su posterior análisis.



**Figura 5.10. Esquema general del sistema perforación-sonda suspendida (Modificado de Bringen y Davie, 2010)**

- Cono sísmico: Esta prueba se usa ampliamente en alta mar y en suelos para investigaciones geotécnicas. El cono posee las siguientes características especificadas en los estándares europeos y estadounidenses (ASTM,1979):
  - base con un área de  $10 \text{ cm}^2$  con un ángulo de vértice de  $60^\circ$  se acepta generalmente como estándar.
  - Posee un encamisado de fricción, ubicado sobre la punta cónica, que tiene un área estándar de  $150 \text{ cm}^2$ .
  - Transductor de presión de poro para medir las presiones dinámicas de poro durante la penetración.
  - Sensor de pendiente para verificar la verticalidad del sonido.

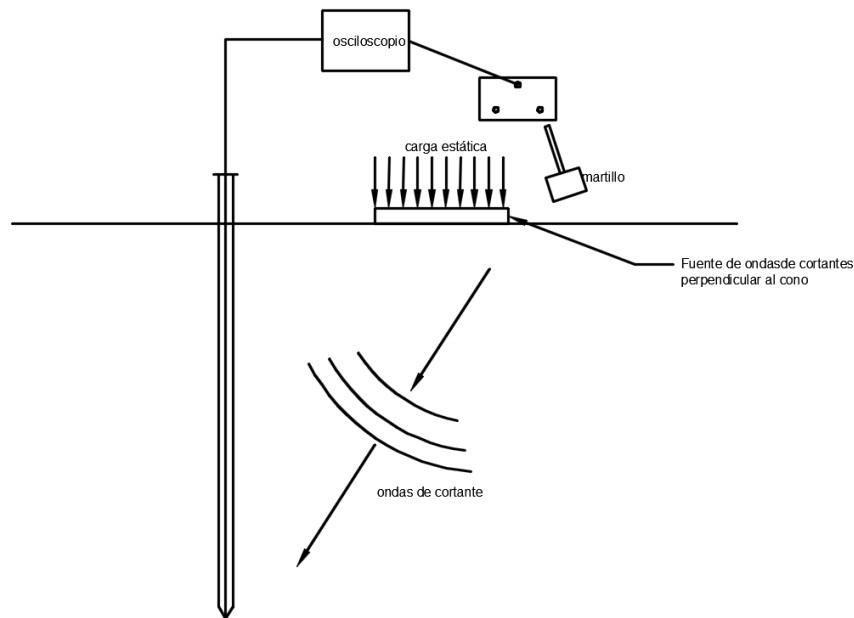
El penetrómetro de cono se empuja a la velocidad estándar de  $2,0 \text{ cm/s}$ . Se usan varillas huecas estándar de  $1 \text{ m}$  de largo para empujar el penetrómetro del cono hacia el suelo. Se coloca un cable, pre-roscado a través del centro de las varillas el cual conecta al cono de penetración con el sistema de adquisición de datos. En la Fig. 5.11 se muestra un ejemplo de un penetrómetro de cono electrónico moderno que también incluye un sensor de temperatura.



**Figura 5.11. Esquema general de un cono sísmico**

La introducción de mediciones sísmicas en los procedimientos de prueba de penetración del cono permite la determinación específica del módulo de cortante dinámico ( $G_{max}$ ).

Para obtener la medición del módulo de corte dinámico, se ha incorporado un pequeño sismómetro de velocidad resistente en el penetrómetro de cono. El sismómetro se coloca en la dirección horizontal y se orienta transversalmente a la fuente de señal para detectar el componente horizontal de las llegadas de la onda de cortante. Una fuente de señal sísmica adecuada debe generar preferentemente ondas de cortante de gran amplitud con poco o ningún componente de onda compresional. Las ondas de corte viajan a través del esqueleto del suelo y, por lo tanto, están relacionadas con el módulo  $G$  del suelo. La generación de ondas de cortante se puede realizar al golpear con un mazo una viga o plataforma rígida, con camisa de acero y con peso en el suelo. Si el cono está siendo empujado por una plataforma de perforación, la viga puede ser cargada por las almohadillas traseras de la plataforma de perforación. Si el cono está siendo empujado por un vehículo de penetración de cono, la viga puede ser cargada por las almohadillas del vehículo o incorporada en las almohadillas de estabilización para el camión. La fuente de la señal generalmente se coloca con extremos equidistantes a unos 3 m del orificio del cono. La viga debe colocarse de forma segura en el suelo, de modo que las pérdidas de energía se minimicen debido a la deformación plástica del suelo debajo de la viga.



**Figura 5.12. Diseño esquemático de prueba de penetración de cono sísmico**



**5) Método de oscilación inducida:**

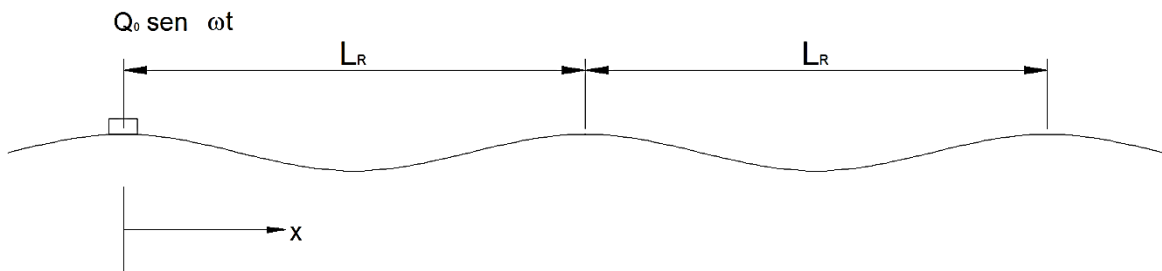
El método utiliza un vibrador de masas excéntricas o un vibrador electromagnético, mediante este vibrador se generan ondas Rayleigh en la superficie de un depósito de suelo, es decir se hace vibrar a la masa de suelo verticalmente, y con la ayuda de un geófono se registran las vibraciones inducidas. Este geófono se coloca a diferentes distancias del oscilador. El procedimiento se realiza para detectar que distancias están en fase con la excitación. Los puntos que vibran en fase con la excitación se encuentran separados entre sí a una distancia igual a la longitud de onda  $L_R$ , como se observa en la figura 5.13.

La frecuencia de vibración que genera el oscilador se conoce, por lo que la velocidad de onda Rayleigh  $c_r$  se calcula utilizando la siguiente ecuación:

$$c_R = L_R f \tag{5.36}$$

$f$ : Frecuencia de oscilación en *cps*

$L_R$ : Longitud de onda



**Figura 5.13. Ensayo de oscilación inducida (Jaime.A)**

La profundidad de alcance es aproximadamente la mitad de la longitud de onda generada, el valor de  $C_r$  es el promedio de la velocidad de propagación de onda en el suelo hasta esta profundidad. Para el caso de que se requieran profundidades mayores, pueden utilizarse equipos más pesados para generar una mayor vibración.

### 5.6.2 Ensayes de laboratorio

Las pruebas de laboratorio consisten en aplicar una deformación a pequeños especímenes de suelo que se asumen son representativos de la masa de suelo. La principal diferencia entre los métodos existentes son las magnitudes de deformación que se aplican para obtener estas características del suelo, así como la forma en que se aplica la deformación.

- Columna resonante** en ella se generan deformaciones  $\gamma$  menores a  $(10^{-4})$ . Esta prueba se basó en el péndulo de torsión libre de Zeevaert (1973). El aparato consiste de una cámara triaxial en donde se colocan especímenes cilíndricos de suelo, después estos se consolidan para posteriormente aplicar un pequeño giro (torsión armónica)  $\Delta\theta$ , y después liberar el giro, donde se observa la recuperación del espécimen, generalmente al hacer este proceso se presentan oscilaciones que disminuyen con el tiempo. Una vez que se realizó la prueba es posible estimar el módulo  $G$  utilizando los registros de amplitud vs tiempo como el que se muestra en la figura 5.14.

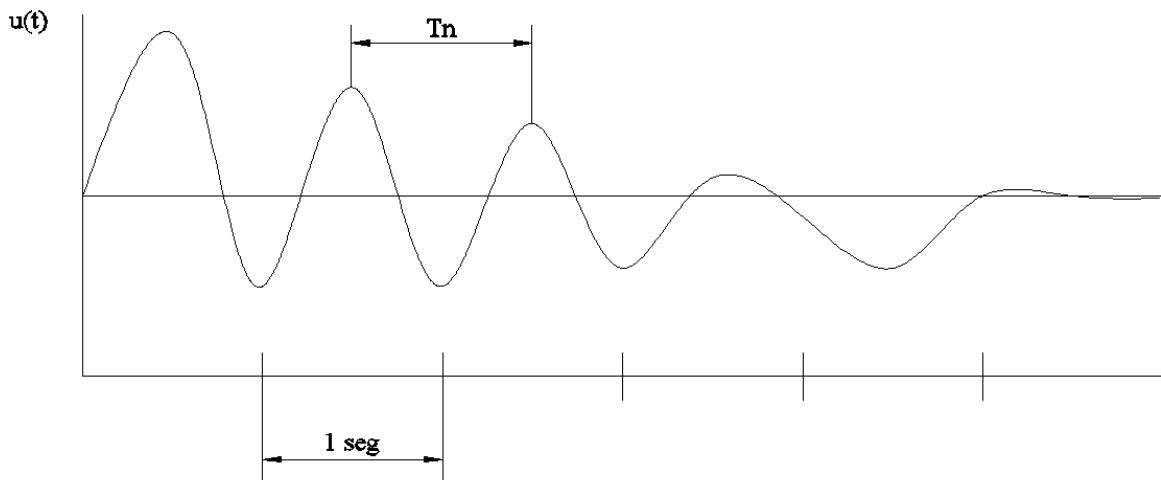


Figura 5.14. Registro típico de una prueba de torsión libre.

De estos registros se obtienen el periodo de vibración libre amortiguada del sistema aparato-suelo  $T_d$ , y su decremento logarítmico  $\delta$ . El módulo  $G$  y relación de amortiguamiento  $\lambda$ , se estiman mediante las siguientes expresiones:

$$\lambda = \frac{\delta}{2\pi} \quad (5.37)$$

$$G = \omega_d Z \quad (5.38)$$

Donde:

$Z$ , constante del aparato que depende de las características geométricas del aparato y del espécimen

$\omega_d$ , frecuencia amortiguada expresada como:

$$\omega_d = \frac{2\pi}{T_d} \quad (5.39)$$

En la columna resonante se aplican vibraciones inducidas longitudinales o torsionantes y mediante el principio de la teoría de propagación de ondas en barras prismáticas (cortas).

Este principio considera que la frecuencia de resonancia depende de las condiciones de frontera teniendo tres casos.

Ambos extremos libres o empotrados.

$$\omega_{n=\frac{n\pi}{2L}C_w} \quad (5.40)$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

Un extremo empotrado y el otro libre.

$$\omega_n = \frac{n\pi}{2L} c_w \quad (4.41)$$

$$n = 1, 3, 5, \dots$$

Un extremo empotrado y en el otro un peso  $W_m$ .

$$\frac{\omega_n L}{c_w} \tan \frac{\omega_n L}{c_w} = \frac{W_b}{W_m} \quad \text{ó} \quad \frac{I_b}{I_m} \quad (5.42)$$

Donde

$\omega_n$ : frecuencia circular del modo de vibración correspondiente en rad/seg

$n$ : modo de vibración.

$L$ : longitud de la barra (m o cm)

$c_w$ : velocidad del tipo de onda generada en el medio que forma la barra ( $m/seg$  ó  $cm/seg$ )

$w_b, w_m$ : pesos de la barra y de la masa sujeta en el extremo

$I_b, I_m$ : momentos polares de inercia de las masas de la barra y del peso sujeta en el extremo.

Estas ecuaciones son válidas para ondas longitudinales y de cortante en una barra. Para las ondas de cortante, su velocidad  $c_w$  es igual a la velocidad de onda de corte  $c_s$  del suelo en el campo (suponiendo un medio homogéneo).

En el caso de las ondas de compresión se ha observado que sus velocidades son diferentes en el laboratorio y en campo.

Durante la ejecución de la prueba de columna resonante se hace variar la frecuencia de vibración inducida en el espécimen, hasta lograr la condición de resonancia para su primer modo de vibración. Como se observa en las ecuaciones anteriores las frecuencias de resonancia de los modos más altos para el primer caso (ambos extremos libres o empotrados) son de 2,3,.. veces la frecuencia del primer modo de vibración; mientras que para el segundo caso las

frecuencias de resonancia de los modos más altos son de 3,5, ... veces la frecuencia del primer modo.

Por lo tanto, si se conocen las frecuencias de resonancia para cualquiera de los primeros tres modos, las condiciones de frontera del espécimen y el tipo de onda generada, se puede estimar la velocidad de onda de corte  $c_s$  y la velocidad de onda de compresión  $c_b$ , mediante las expresiones de los tres casos mencionados.

Los módulos dinámicos  $G$  y  $E$  se obtienen mediante.

$$E = \rho c_b^2 \quad (5.43)$$

$$G = \rho c_s^2 \quad (5.44)$$

Donde

$$\rho = \frac{\gamma_m}{g} = \frac{\text{peso volumétrico de la muestra}}{\text{aceleración de la gravedad}} \quad (5.45)$$

- **Pulsos**: con este sistema se generan deformaciones  $\gamma$  menores a ( $10^{-4}$ ); En la prueba se mide la velocidad de propagación de ondas, para ello se requiere tener un equipo capaz de transmitir ondas a través de una muestra de suelo cilíndrica de longitud  $L$ . Esta probeta puede estar confinada o no. Las ondas se transmiten con ayuda de cristales piezoeléctricos colocados en los extremos de la probeta, los cuales al inducirles una carga eléctrica producen un movimiento mecánico y viceversa. La posición de los cristales es importante ya que, dependiendo de ésta, se provocarán ondas de compresión o de cortante. La onda se genera en un extremo del espécimen y viaja hasta llegar al otro extremo, donde los cristales receptores se excitan y generan un impulso eléctrico. Ambas señales eléctricas se registran con ayuda de un osciloscopio y así se conoce el tiempo  $\Delta t$  que tarda en recorrer al espécimen de suelo, es decir el tiempo entre el pulso de entrada y el de salida, con esto se pueden obtener  $c_s$  y  $c_p$ .

$$c_s \text{ ó } c_p = \frac{L}{\Delta t} \quad (5.46)$$

Si la onda generada es de cortante el módulo  $G$  se obtiene con la ecuación antes vista:

$$G = \rho c_s^2 \quad (5.47)$$

Y en el caso de compresión se estima el módulo  $E$  para después obtener  $G$ .

$$E = \frac{1-\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} \rho c_p^2 \quad (5.48)$$

Algunas de las problemáticas que se han observado en la realización de esta prueba es que se presenta una atenuación de la onda dando inconsistencias en los resultados.

Al generar deformaciones grandes en los especímenes de suelo, se ha observado que pueden llegar a presentar cambios de volumen bajo condiciones drenadas, y en el caso de condiciones no drenadas se ha observado variaciones en la presión de poro. Lo anterior quiere decir que el comportamiento del suelo depende de los esfuerzos efectivos, lo que lleva a que los métodos que generan altas deformaciones la probeta deben ser capaces de monitorear y controlar el drenaje de la muestra, los cambios de presión de poro y los cambios volumétricos.

- **Ensayo triaxial cíclico genera deformaciones  $\gamma$  mayores a  $10^{-2}$ .**

El ensayo triaxial cíclico permite ensayar especímenes de suelo cilíndricos.

Para realizar el proceso el espécimen se cubre con una membrana impermeable, y a continuación se realiza un proceso de consolidación aplicando esfuerzos radiales y en sentido axial. Una vez hecho esto se aplica mediante el vástago de

la cámara, una carga axial controlada (esfuerzo desviador cíclico), o una deformación axial (controlada cíclica) normalmente con una frecuencia de 1Hz.

Esto se realiza con una onda de forma conocida. Generalmente se aplica una onda de forma senoidal o cuadrada a la frecuencia deseada. La frecuencia con la que se aplica la carga debe iniciar con un valor bajo, para posteriormente incrementarlo gradualmente. La frecuencia más baja a la cual la respuesta es maximizada localmente se conoce como frecuencia fundamental.

En el primer caso (esfuerzo controlado) se mide la deformación axial y la fuerza inducida a la probeta. Estas mediciones se hacen con ayuda de transductores. Además, en algunas ocasiones se miden también los cambios en la presión de poro.

Conociendo los datos de fuerza y desplazamiento se obtienen gráficos como el de la figura 5.1 para cada ciclo de carga.

Cuando se aplica una deformación controlada, se obtienen los mismos datos.

El esfuerzo desviador cíclico  $\sigma_{dc}$  se puede aplicar de dos maneras:

- Únicamente en compresión, aplicando confinamiento hidrostático o anisotrópico: cuando el esfuerzo axial mínimo es siempre mayor o igual que el esfuerzo confinante  $\sigma_c$ .
- En compresión y extensión, bajo confinamiento hidrostático o anisotrópico: cuando el esfuerzo axial máximo es mayor que el valor  $\sigma_c$  y el mínimo menor que este valor, pero mayor a cero.
- **Corte simple cíclico** (deformaciones de  $\gamma(10^{-2})$  al 1%)  
Este ensaye consiste en aplicar una fuerza cortante cíclica a una muestra cilíndrica o de sección rectangular previamente consolidada, envuelta en una membrana que impedirá que se genera una expansión lateral, en algunas ocasiones también se puede usar un helicoide de alambre de acero, un resorte plano o un recipiente de paredes móviles.

Esta prueba induce deformaciones angulares al espécimen mayores al  $10^{-2}\%$ , pues el aparato únicamente aplica al espécimen esfuerzos en la parte superior e inferior, lo que provoca que el estado de esfuerzos no sea puramente cortante.

Durante la prueba se mide el desplazamiento horizontal y la presión de poro y entonces se obtienen curvas  $\tau$  vs  $\gamma$  para cada ciclo y con estas calcular  $G$  y el amortiguamiento crítico  $\lambda$ .

- **Corte torsional cíclico** (deformaciones de  $\gamma(10^{-2})$  al 1%)  
Esta prueba permite utilizar condiciones de esfuerzos iniciales isotrópicos o anisotrópicos, además de la aplicación de esfuerzos cortantes cíclicos en planos horizontales con una rotación continua de los esfuerzos principales axiales. Esta prueba es usada principalmente para medir la rigidez y la relación de amortiguamiento.



## 6 DISEÑO DE UNA CIMENTACIÓN PARA MAQUINARIA

### 6.1 Consideraciones para la elección de un criterio de diseño

Muchos autores han tratado el tema de los criterios de diseño. Algunos de ellos y en los que se basa este capítulo son Richart et al (1970), Prakash (1981) y Mc Neil (1969).

Richart et al (1970) menciona que para una cimentación de maquinaria existen tres puntos que se deben tener claros para la elección de un diseño.

- Condición de falla y como se define
- Condiciones o cargas externas que podrían generar la falla
- Procedimiento analítico para relacionar las cargas aplicadas a la condición de falla.

Mc Neil (1969) divide en dos categorías los problemas en el diseño de maquinaria. El primero es analizar la respuesta de la propia cimentación de la maquinaria y la segunda el aislamiento para evitar el daño en alguna otra estructura cercana. Además, menciona que para un correcto diseño se debe conocer la frecuencia natural, la frecuencia amortiguada, la frecuencia de operación, la frecuencia de respuesta máxima para una frecuencia generalmente pequeña  $f_{cf}$  y la frecuencia de respuesta máxima para una frecuencia constante  $f_{fd}$ .

El propósito de los criterios de diseño es la determinación de un sistema suelo-cimentación el cual soporte satisfactoriamente a la maquinaria. Normalmente los criterios consideran cimentaciones sujetas a vibraciones del tipo estable y transitorio, además de suponer que la masa de suelo sobre el cual descansará la cimentación no presentará cambios de ninguna manera.

Estos criterios utilizan la respuesta dinámica de la cimentación, por lo que están expresados en términos de la amplitud de vibración, a una frecuencia determinada o en algunos otros casos a un valor máximo límite de la aceleración o de la velocidad.

Los criterios de diseño dependerán de la condición de falla que se elija o se analice; sin embargo, se pueden considerar otros factores que intervienen para que un diseño no sea satisfactorio.

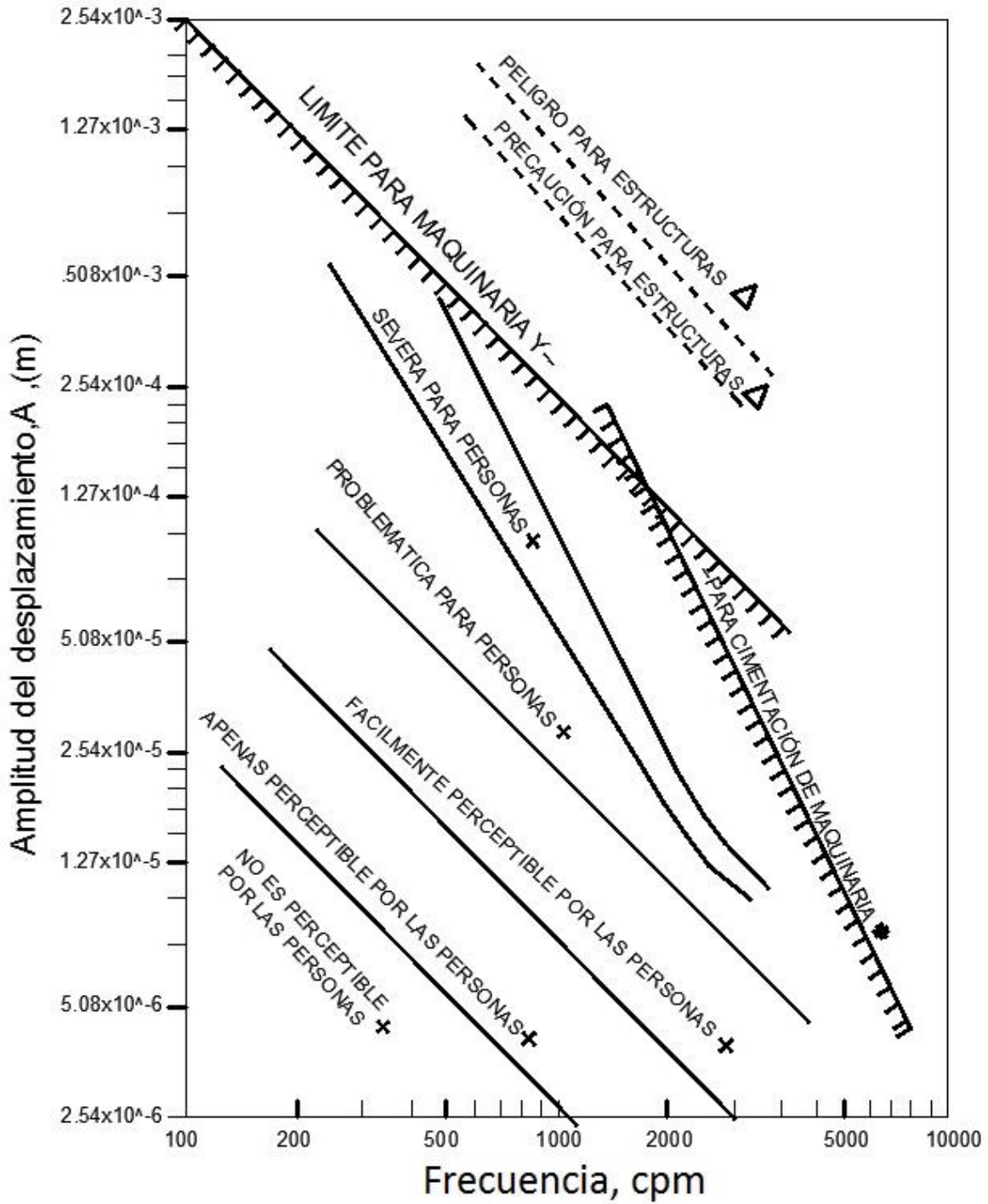
En la figura 6.1 se indica el orden de las magnitudes de desplazamiento recomendadas cuando se considera la respuesta dinámica. En ella se observan cinco curvas que limitan zonas que categorizan el impacto de respuesta en las personas; éstas van desde “no perceptible” hasta “severo”. Estas categorías suponen que las personas se encuentran de pie y están sujetas a vibraciones verticales.

El límite entre “no perceptible” y “apenas perceptible” se define mediante una línea de pendiente de  $-1$  en un gráfico *log-log*, que representa una velocidad máxima de aproximadamente  $0,01 \text{ pulg/s}$  ( $2.54 \times 10^{-4} \text{ m/s}$ ). La línea que divide las zonas de “fácilmente perceptible” y “problemático” representa una velocidad máxima de  $0,10 \text{ pulg/s}$  ( $2.54 \times 10^{-3} \text{ m/s}$ ).

En la misma figura se puede apreciar una envolvente (parte sombreada) para maquinarias y cimentaciones de maquinaria. Esta línea indica el límite de seguridad, mas no un límite de operación satisfactoria de la maquinaria. Este límite está compuesto por dos partes. La primera por debajo de alrededor de 2.000 ciclos / min, representa una velocidad máxima de  $.0254 \text{ m/s}$ , y la segunda por encima de 2000 ciclos / min que corresponde a una aceleración máxima de  $(0,5) \text{ g}$ . Además, se observan dos líneas marcadas con el símbolo ( $\Delta$ ), estas líneas indican los límites en condiciones dinámicas para explosiones. Sin embargo, se pueden emplear otros criterios para el caso de explosiones, como por ejemplo, el propuesto por Wiss (1968), quien emplea como límite una velocidad máxima de  $0.0528 \text{ m/s}$ .

Por otro lado, las oficinas de Minas de los Estados Unidos, emplean tanto una velocidad máxima como una aceleración máxima, bajo los 3 ciclos/s la aceleración límite es de  $.0528 \text{ m/s}$ , y por encima de los 3 ciclos/s la aceleración máxima es de  $0.10 \text{ g}$ .

- + Reiher and Meister (1931) – (Steady State Vibrations)
- \* Rausch (1943) – (Steady State Vibrations)
- Δ Crandell (1949) – (Due to Blasting)

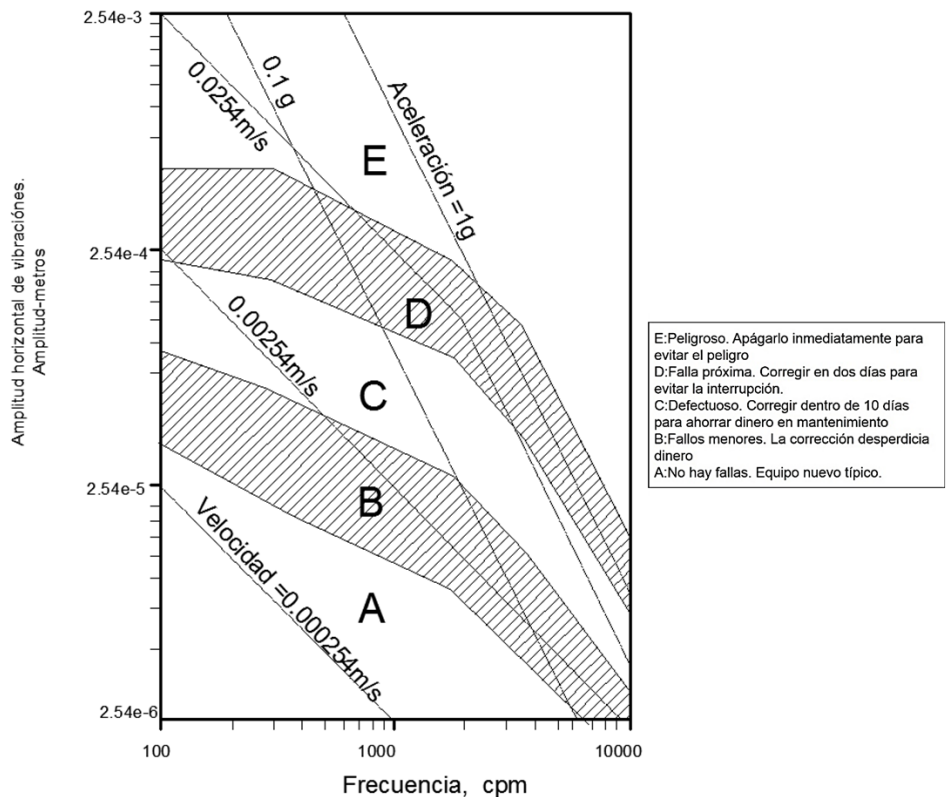


**Figura 6.1.** Límites generales de amplitud de desplazamiento para una frecuencia particular de vibración (Richart 1962).

Existen otros criterios relacionados con el funcionamiento de la maquinaria, que toman en consideración la función principal de toda la instalación, así como de la importancia de cada unidad de la maquinaria para esta función. Estos criterios de diseño incluyen consideraciones como el costo inicial, costo de mantenimiento dentro del cual se analiza el impacto económico al estar la maquinaria fuera de funcionamiento y el costo de reemplazo de la unidad.

▪ **Vibraciones en estado estable de maquinaria**

Para el caso de una maquinaria rotatoria, Richart(1970) propuso emplear la información presentada por Blake (1964), que ayuda a establecer las amplitudes permisibles de movimiento utilizando la velocidad de operación. La figura 6.2 ilustra las categorías de rendimiento propuestas por Blake desde A hasta E, en el diagrama de amplitud vs frecuencia. La amplitud de vibración utilizada en la figura, se refiere a los movimientos horizontales medidos en la base (no en el eje) de la maquinaria.



**Figura 6.2. Criterios para vibraciones de máquinas rotatorias.**

Blake (1964) también introdujo el concepto de factor de servicio, el cual indica la importancia de la máquina para la función del sistema. Los valores numéricos más altos para el factor de servicio indican las máquinas más críticas. Con los factores de servicio que se observan en la tabla 6.1 se puede evaluar el rendimiento de una amplia variedad de máquinas. En esta tabla se excluyen las máquinas de herramientas y los valores son para equipo atornillado; si el equipo no estuviese atornillado Blake indica que se debe multiplicar el factor de servicio por 0.4.

**Tabla 6.1. Factores de servicio Blake (1964)**

Maquinaria	Factor
Bomba centrífuga de una sola etapa , motor eléctrico y ventilador	1
Equipos de procesamiento químico	1
Turbina, turbogenerador, compresor centrífugo.	1.6
Centrífuga, eje rígido, bomba centrífuga multietapa	2
Equipo variado, características desconocidas	2
Centrífuga, ejes suspendidos, eje cerca de cesta	0.5
Centrífuga suspendida mediante enlace o colgada	0.3

Existen tipos de maquinaria especiales, para las cuales las empresas que se encargan de su fabricación, instalación y operación suelen desarrollar clasificaciones para diferentes condiciones de operación. Baxter y Bernhard, (1967) elaboraron la tabla 6.2, donde se observa información adicional relacionada al funcionamiento de las máquinas rotatorias en general.

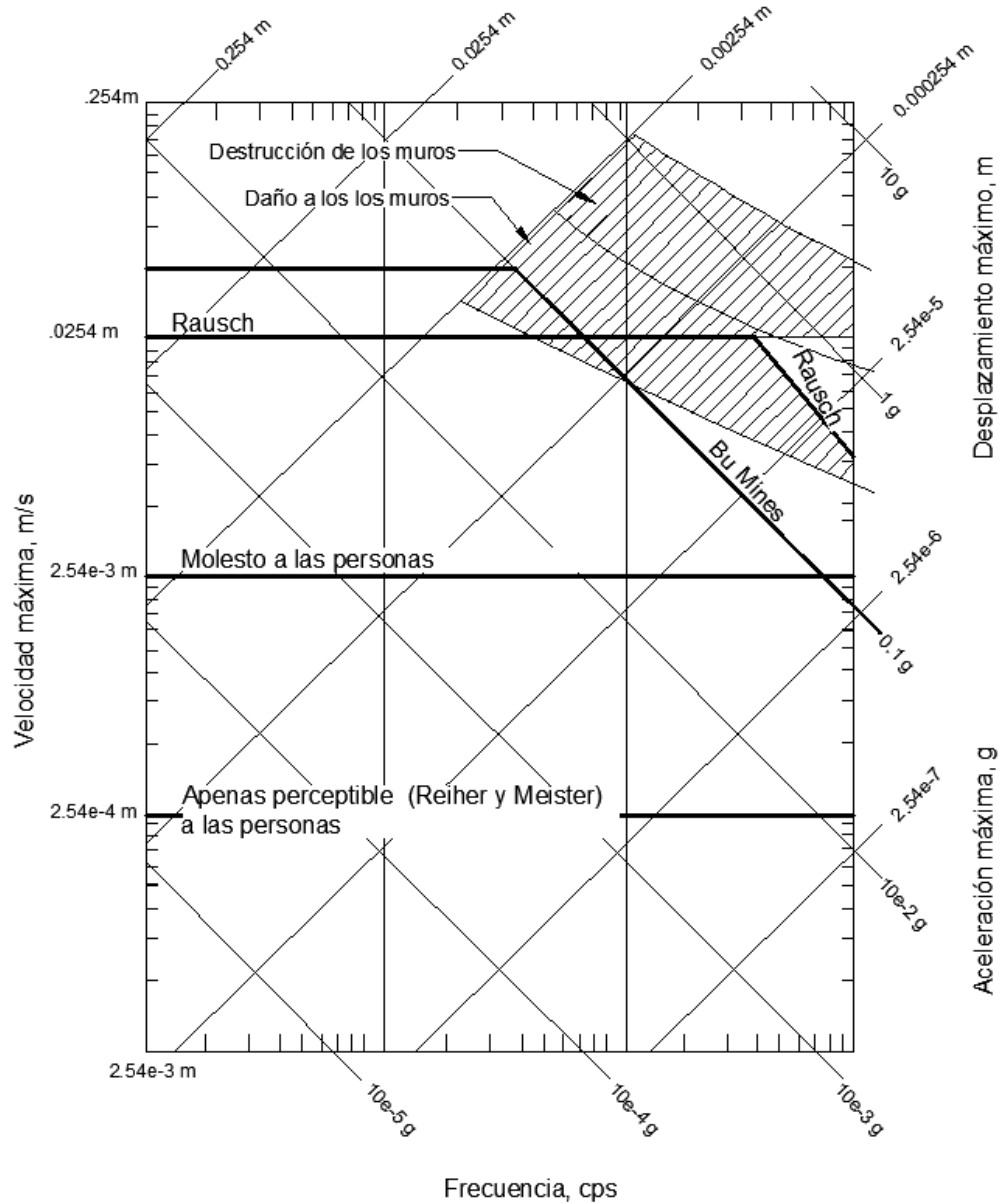
Estos límites se basan únicamente en los criterios de velocidad máxima y se podrían representar por líneas rectas en una imagen similar a la Figs. 6.1 y 6.2. Es importante observar la similitud en los valores de velocidad máxima para el límite inferior del rango para maquinaria como "suave" (0.000254 m/s en la Tabla 6.2) y el límite inferior del rango "apenas perceptible para las personas"

(0.000254 m/s en la Fig. 6.1). Es necesario también tomar en cuenta los límites inferiores para "ligeramente áspero" de maquinarias (0.004064 m/s en la Tabla 6.2) y "problemático para las personas" (0.00254 m/s en la figura 6.1), y los límites de peligro de "muy áspero" (> 0.016002 m/s en la Tabla 6.2) y el límite de Rausch para las máquinas (0.254 m/s en la figura 6.1).

**Tabla 6.2. Guía tentativa para tolerancias de vibraciones para maquinaria de herramientas (Baxter & Bernhard 1967)**

Tipo de Maquinaria	Desplazamiento de las vibraciones como se lee con la elección en la carcasa de rodamiento del eje en la dirección del corte
<b>Trituradoras</b>	<b>Rango de tolerancia (m)</b>
Trituradoras de hilo	2.54e-7 - 1.524e-6
Trituradora de contorno	7.62e-7 - 2.032e-6
Rectificadora cilíndrica	7.62e-7 - 2.54e-5
Rectificadora de superficie	7.62e-7 - 5.08e-7
Rectificadora tipo Besley o Gardner	1.27e-6 - 5.08e-6
Rectificadora sin centro	1.016e-6 - 2.54e-6
Taladradoras	1.524e-6 - 2.54e-6
Torno	5.08e-6 - 2.54e-5

Para el análisis de las estructuras se tomará en cuenta que las condiciones de falla se rigen por valores máximos de velocidad y aceleración. Richart (1970) recomienda emplear la figura 6.3 para revisar la seguridad de las estructuras cercanas a la maquinaria.



**Figura 6.3. Vibraciones verticales permisibles (Richart 1962).**

La Figura 6.3 muestra valores simultáneos de desplazamiento, velocidad y aceleración. La condición límite para cada una de estos tres valores forma una envolvente en este diagrama. Los puntos que caen por encima de esta envolvente violan las condiciones de "falla", mientras que los puntos que caen por debajo de la envolvente representan condiciones satisfactorias. En la Fig. 6.3 se muestran las condiciones límite para:

- (1) Los límites de "gente" de "apenas perceptible" hasta "problemático para personas",
- (2) Los límites de Rausch para máquinas y cimentaciones de maquinarias
- (3) Los criterios de la Oficina de Minas de los Estados Unidos.

También en la Fig.6.3 se muestran dos zonas sombreadas que describen la posibilidad de daños estructurales, particularmente a las paredes, que pueden ser causados por vibraciones en estado estacionario. Sin embargo esto puede variar pues los criterios de diseño de las mismas estructuras varían de un lugar a otro.

Diagramas similares a los de la Fig. 6.3 son útiles para evaluar la respuesta dinámica de un sistema vibratorio y se designan a menudo como diagramas de choque o espectro de respuesta.

#### ▪ **Vibraciones transitorias de maquinaria**

Steffens (1952) investigó el impacto de las cargas transitorias, por lo que analizó diversos métodos propuestos para la evaluación de la intensidad de las vibraciones y sus aplicaciones al estudiar las vibraciones en los edificios. Por otro lado, propuso que en el caso de las personas se podría utilizar los criterios de Reiher y Meister (1931) que se mencionaron en la Fig. 6.1.

Steffens también realizó tablas que describen los rangos de intensidad para las escalas abreviadas de "Modificada de Mercalli" "de 1931," Mercalli-Cancani "de Seiberg, "Rossi-Forel " y "Omori" y trató de aplicarlas al caso de las vibraciones industriales; sin embargo, concluyó que no era aplicable.

Después de analizar varios datos y métodos, llegó a la tabla 6.3, donde presentó datos típicos de vibración del tráfico, explosiones y maquinaria; sin embargo, en este escrito se tratará solo lo correspondiente a maquinaria y explosiones.



**Tabla 6.3. Datos típicos de vibraciones**

Fuente de vibración	Autoridad	Detalles	Observaciones		Clasificación de Reiher y Meister	Derivada	
			Amplitud (m)	Frecuencia (ciclos/s)		Máxima velocidad (m/s)	Aceleración (g)
Explosión	BRS y RAE (1950)	Mediciones en túneles dañados por bombas; Ningún daño causado por la vibración de voladura	3.81e-5 1.778e-6	6 80	Claramente perceptible Claramente perceptible	1.46E-03 9.14e-04	0.006 0.045
Maquinaria	Tillman (1933)	Vibración de la fábrica del chocolate; Mediciones en casa cercana	1.42E-05	42	Molesto	3.75E-03	0.09
Maquinaria	Tillman (1933)	Vibración en casas (3er piso), 400 pies de diesel de 120 hp	2.03E-05	3.5	Apenas perceptible	4.45E-04	0.01
Maquinaria	BRS	Mesa vibratoria; Mediciones en la mesa	0.000127	25	Doloroso	1.98E-02	0.32
Maquinaria	Tillman (1933)	Vibración en casa de 70 años adyacente a seis prensas litográficas	7.87E-06	64	Molesto	3.18E-03	0.133

NOTAS:

1.-De los resultados anteriores pareciera que las velocidades máximas implicadas en las diversas etapas de perceptibilidad son (aproximadamente) en metros por segundo.

**Apenas perceptible 2.54E-04 a 7.62E-04**

**Claramente perceptible 7.62E-04 a 2.54E-03**

**Molesto Más de 2.54E-03**

2.-Digby da una velocidad de vibración molesta de 2.18E-03 a 6.35E-03 metros por segundo y una vibración ligeramente perceptible de 6.35E-04 a 1.60E-03

• De Steffens (1952).

Un criterio para evaluar la influencia del impacto o de la energía vibratoria en los suelos y estructuras es la "razón de energía" propuesta por Crandell (1949) quien empleo la siguiente ecuación.

$$E.R(\text{relación de energía}) = \frac{\text{Aceleración}^2 \left(\frac{m}{s^2}\right)^2 \left(\frac{s}{\text{ciclos}}\right)^2}{\text{Frecuencia}^2} \quad (5.1)$$

La relación de energía disminuye con la distancia desde la fuente con una tasa de decremento que depende del tipo de suelo y las condiciones locales. Crandell observó una tendencia general de la disminución de la relación de energía de acuerdo a  $(\text{distancia})^{-2}$ ; concluyó que el daño a las estructuras no ocurre cuando la relación de energía producida en una explosión es menor que 3.

El concepto de relación de energía también se ha seleccionado como criterio para evaluar la excitación requerida para compactar suelos sin cohesión (D'Appolonia, 1966). Sin embargo, hasta 1969 no se había determinado un límite inferior de la relación de energía que no afectase a la estructura del suelo.

Richart (1970) señaló que la influencia total de la carga vibratoria sobre la estructura del suelo no puede evaluarse por un simple límite indicado por la relación de energía, ya que el número de repeticiones también es importante.

- **Cimentaciones para equipos sensibles.**

Existen casos especiales donde se requiere diseñar una cimentación en la que no se presenten vibraciones. Aunque esto es imposible, se emplea un valor extremadamente bajo de movimiento permisible para el propósito que se tenga. Esta condición generalmente se requiere para equipos sensibles como microscopios electrónicos, puestos de calibración, máquinas automatizadas de precisión o torres de radar.

Existe el caso en el que el equipo que requiere estas condiciones no genere vibraciones, por lo que se debe cuidar las condiciones del sitio, pues las vibraciones pueden provenir de agentes externos. Una vez analizado esto, se debe generar un aislamiento de la cimentación y al equipo a estas vibraciones

externas. Los criterios de diseño deben ser establecidos por el propietario o el fabricante del equipo generalmente.

Para el caso de un microscopio electrónico, Sell (1963) estableció un criterio limitativo de  $10^{-4}g$  en la máquina mediante pruebas. Para este caso normalmente se utilizan almohadillas de aislamiento local, las cuales pueden proporcionar aproximadamente un orden de magnitud de reducción en los valores de  $g$ . Los criterios para lugares de prueba de calibración e instalaciones similares son a menudo del mismo orden, con algunas variaciones según la frecuencia de las vibraciones de entrada.

## **6.2 Atenuación de las vibraciones con la distancia.**

El término de aislamiento utilizado por Richart (1970) y en esta parte del escrito se refiere al aislamiento de sistemas enteros de cimentación o de estructuras enteras, quien definió al aislamiento mecánico como el aislamiento de máquinas o estructuras desde sus cimientos o de elementos estructurales mayores usando aisladores localizados.

Algunos aisladores que se usan comúnmente en el aislamiento mecánico son los cojines de caucho o compuestos, resortes o sistemas de resorte, y muelles neumáticos.

Richart mencionó que es importante identificar el tipo de problema que se tenga pues algunas vibraciones no se pueden aislar empleando este sistema de aislamiento. Para aquellos problemas de vibración en los que el aislamiento mecánico es inadecuado, el aislamiento de cimentación puede proporcionar la protección requerida.

Como se mencionó en el capítulo 4, las ondas de Cuerpo y las ondas Rayleigh disminuyen su amplitud al incrementar la distancia desde una fuente de perturbación, en un semi-espacio elástico. Para este tipo de aislamiento es importante considerar a las ondas Rayleigh, pues también se analizó que son las ondas que disminuyen su amplitud en un lapso de tiempo mayor las de cuerpo. Para la atenuación de las ondas R se consideran dos aspectos; el primero es el

amortiguamiento geométrico y el amortiguamiento intrínseco de la masa de suelo, Bornitz (1931) conjuntó ambos amortiguamientos mediante la siguiente expresión.

$$w = w_1 \sqrt{\frac{r_1}{r}} \exp[-\alpha(r - r_1)] \quad (6.2)$$

Donde

$r_1$  = distancia desde la fuente a un punto con amplitud conocida

$r$  = distancia desde la fuente a un punto en cuestión

$w_1$  = amplitud de la componente vertical de la onda R a la distancia  $r_1$  de la fuente

$w$  = amplitud de la componente vertical de la onda R a la distancia  $r$  de la fuente

$\alpha$  = coeficiente de atenuación que se relaciona con el decremento logarítmico *ecuación 1.77*, que tiene dimensiones de *1/distancia*.

La ecuación 6.2 implica que la energía total en dos círculos concéntricos en los radios  $r_1$  y  $r$  de una fuente de energía del punto es constante a excepción de la energía perdida con el amortiguamiento debido al material. Barkan (1962) sugirió valores de  $r_1 \times$  que van de 0,01 a 0,04 (1 / pies) para varios tipos de suelos.

Aunque el amortiguamiento del material se produce en suelos reales, es el amortiguamiento geométrico el que más contribuye a la atenuación de las ondas R. La atenuación considerada hasta ahora sólo se ha asociado con la distancia horizontal (radial) de la fuente. Un grado adicional de aislamiento de la energía de la onda R se puede obtener al localizar a las cimentaciones debajo de la superficie pues las ondas R se atenúan con la profundidad.

### 6.3 Diseño de una cimentación para maquinaria.

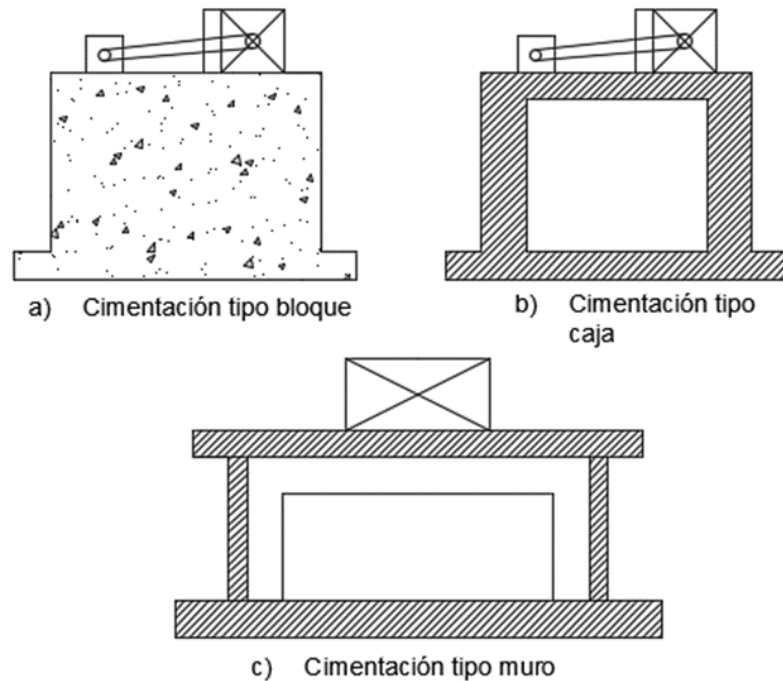
El diseño de una cimentación para maquinaria requiere principalmente conocer el tipo de maquinaria que albergará. Prakash (2006) recomienda para compresores y máquinas recíprocas, el empleo de una cimentación tipo bloque, Fig. 6.4a, la cual consiste en un pedestal que descansa sobre un pie. Si dos o más máquinas de tipo similar deben instalarse, éstas pueden ser rentables en una losa continua. Una

cimentación de bloque posee una gran masa dando como resultado una frecuencia natural pequeña.

Sin embargo, si se desea una base más ligera, se puede proporcionar una cimentación de tipo caja o cajón, Fig. 6.4b. La masa de la cimentación se reduce y su frecuencia natural aumenta. Los martillos también pueden montarse en cimentaciones de bloques, pero sus detalles serían bastante diferentes a los de las máquinas recíprocas.

Las turbinas de vapor tienen cimentaciones llamadas complejas, que pueden consistir en un sistema de muros columnas, vigas y losas, Fig.6.4c. Cada elemento de dicha base es relativamente flexible en comparación con un bloque rígido y una caja o una cimentación tipo cajón.

El análisis de una cimentación de bloque es relativamente simple en comparación con una base compleja.



**Figura 6.4. Tipos de cimentación para maquinaria.**

♦ **Revisión del diseño por capacidad de carga**

Lo primero que se debe verificar es que la cimentación cumpla el criterio de capacidad de carga, para esto se realizó el análisis de carga resistente  $q_r$  utilizando la ecuación 6.3.

$$q_r = cN_c + \bar{q}N_q + \gamma BN_\gamma \quad (6.3)$$

Donde:

$c$  es la cohesión del suelo bajo la cimentación

$\bar{q}$  es la presión del suelo excavado, en este caso será 0 pues la cimentación esta sobre la superficie.

$B$  es el ancho del bloque de cimentación

$\gamma$  es el peso volumétrico del suelo

$N_c, N_q$  y  $N_\gamma$  se calculan de la siguiente manera.

$$N_c = \frac{2\sqrt{\tan\left(45+\frac{\phi}{2}\right)}}{\cos\phi} \quad (6.4)$$

$$N_q = \frac{\sqrt{\tan\left(45+\frac{\phi}{2}\right)\tan\left(45+\frac{\phi}{2}\right)}}{\cos\phi} \quad (6.5)$$

$$N_\gamma = 0.25 \left[ \frac{\left(\tan\left(45+\frac{\phi}{2}\right)\right)^2}{\cos\phi} - \sqrt{\tan\left(45+\frac{\phi}{2}\right)} \right] \quad (6.6)$$

$\phi$  es el ángulo de fricción del suelo.

En el problema que se analizará en este escrito, se tiene un equipo de maquinaria con un peso de 77.11 kg, el cual posee una cimentación de concreto, cuyo peso total es de 85012.53 kg y posee un área de 7.252 m<sup>2</sup>. El suelo sobre cual está

colocado el bloque de cimentación posee una cohesión de 2039.43 kg/m<sup>2</sup>, un ángulo de fricción de 30° y un peso volumétrico de 1521.90 kg/m<sup>3</sup>.

Empleando las ecuaciones 6.3 a 6.6 y los datos proporcionados se obtiene una carga resistente de 22604.52 kg/m<sup>2</sup>. Si se aplica un factor de seguridad de 1.5 a la carga resistente, se determina la carga admisible del suelo de cimentación. Por lo tanto:

$$q_a = \frac{q_r}{FS} = \frac{22604.52}{1.5} = 14850.01 \text{ kg/m}^2 \quad (6.7)$$

Para comprobar que el diseño cumple con el criterio estático de capacidad de carga se debe cumplir que la presión ejercida por el sistema cimentación-maquinaria ( $q$ ), sea menor que la carga admisible ( $q_a$ ).

Si

$$q = \frac{\text{peso total del sistema}}{\text{Area de la cimentación}} = \frac{84067.311 \text{ kg}}{7.28 \text{ m}^2} = 11722.63 \text{ kg/m}^2 \quad (6.8)$$

Por lo tanto se cumple que  $q < q_a$ , siendo el diseño satisfactorio para la condición estática de capacidad de carga.

#### ◆ Revisión del diseño por cargas dinámicas

En lo que respecta a las cargas dinámicas, se debe analizar que el sistema suelo-cimentación-maquinaria no caiga en el fenómeno de resonancia, es decir que la frecuencia de operación de la maquinaria no coincida con la vibración del sistema en general. Para esto se analizan las frecuencias que se generan en el sistema mediante las ecuaciones del capítulo 4, para cada modo de vibración (vertical, horizontal, oscilatorio y torsionante).

Una vez analizado esto se debe cumplir que las amplitudes no excedan los límites especificados por el fabricante de la maquinaria, además de las amplitudes que se mencionaron anteriormente para el cuidado tanto de cimentaciones o estructuras aledañas y para aquellas personas que se encuentren próximas al sitio. Prakash (1979) recomienda que la frecuencia natural del sistema no debe ser un múltiplo entero de la frecuencia de operación de la maquinaria para evitar la resonancia con los armónicos superiores.



## 7 Análisis de confiabilidad de una cimentación.

Andrei Kolmogorov definió a la probabilidad de la siguiente manera:

Si se hace un determinado experimento, que tiene un espacio muestral  $S$ , se define la probabilidad como una función que asocia a cada suceso  $A$  una determinada probabilidad,  $P(A)$ , que cumple las siguientes propiedades:

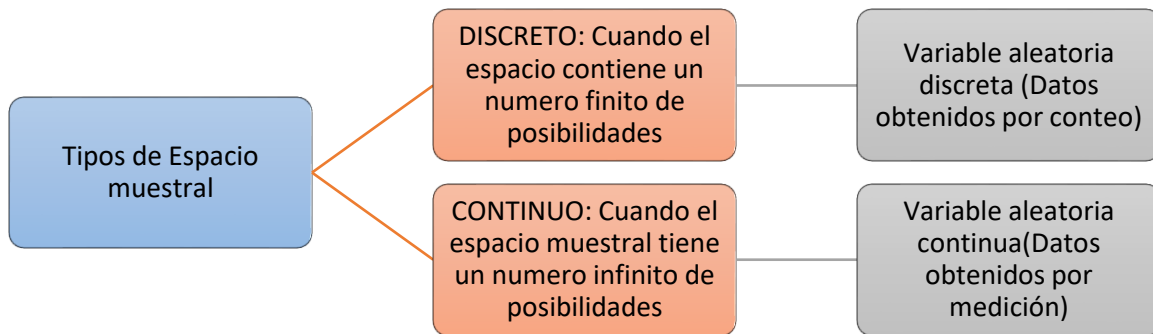
- La probabilidad de cualquier suceso  $A$  es positiva o cero. Es decir,  $P(A) \geq 0$ . La probabilidad mide, en cierta manera, lo difícil que es que ocurra un suceso  $A$ : cuanto menor sea la probabilidad, más difícil es que ocurra.
- La probabilidad del suceso seguro es 1. Es decir,  $P(S) = 1$ . Así pues, la probabilidad siempre es mayor que 0 y menor que 1. Probabilidad cero quiere decir que no hay ninguna posibilidad de que pase (es un suceso imposible), y probabilidad 1, que siempre pasa (es un suceso seguro).
- La probabilidad de la unión de un conjunto cualquiera de sucesos incompatibles dos a dos es la suma de las probabilidades de los sucesos. Esto es, si tenemos, por ejemplo, los sucesos  $A, B, C$ , y son incompatibles dos a dos, entonces  $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$ .

La probabilidad, está relacionada con los términos, frecuencia relativa de ocurrencia de un evento, que es el cociente entre la **frecuencia absoluta** (número de veces que aparece un valor) y el **número total de resultados**.

En este capítulo se hará una pequeña introducción a la probabilidad de falla y términos básicos de probabilidad, para poder aplicarlo en el análisis de la cimentación para maquinaria, basándose en lo escrito por J.Duncan (2015) y A. Jaime (2010)

## 7.1 Variables aleatorias

En los análisis de probabilidad, existen dos tipos de variables aleatorias, las cuales dependerán del espacio muestral que se tenga.



**Figura 7.1. Clasificación de las variables aleatorias**

Los posibles valores de las variables aleatorias se representan con ayuda de una función de distribución de probabilidad. Esta distribución ayuda a conocer la probabilidad de que la variable aleatoria tome un valor dentro del rango de la distribución. Se podrán elegir para esto diferentes tipos de distribuciones de probabilidad; la elección de la distribución dependerá del tipo de variable aleatoria que se tenga.

Algunos ejemplos de distribuciones son:

- Distribución de Bernoulli
- Distribución hiper geométrica
- Distribución de Poisson
- Distribución rectangular
- Distribución normal
- Distribución Log normal

## 7.2 Desviación estándar y coeficiente de variación (COV).

La desviación estándar es una medida de la dispersión de una variable. Matemáticamente se define como:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \quad (7.1)$$

Donde:

$\sigma$ : desviación estándar de una muestra con n valores medidos de x

$\sum_{i=1}^N$ : es la suma de valores desde 1 hasta n

$x_i$ : el i valor medido

$\bar{x}$ : promedio de los valores medidos

n : número de valores

El coeficiente de variación (COV) es una medida adimensional de la cantidad de dispersión de una variable con respecto a la media, y se suele expresar en porcentaje, y matemáticamente es la relación de la desviación estándar y la media.

$$COV = \frac{\sigma}{\bar{x}} \quad (7.2)$$

## 7.3 Distribución de densidad de probabilidad de tipo normal

La distribución normal es una curva en forma de campana simétrica como se muestra en la Figura 7.2. El pico de esta campana es el valor promedio, y el área bajo la campana siempre es igual a 1. La distribución normal está determinada principalmente por dos parámetros, que son la media y la desviación estándar. Cuanto mayor sea la desviación estándar mayor es la dispersión de la variable aleatoria.

Para obtener la distribución de tipo normal de un espacio muestral se utiliza la siguiente expresión.

$$Normalf(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\bar{x}}{\sigma}\right)^2\right] \quad (7.3)$$

Donde:

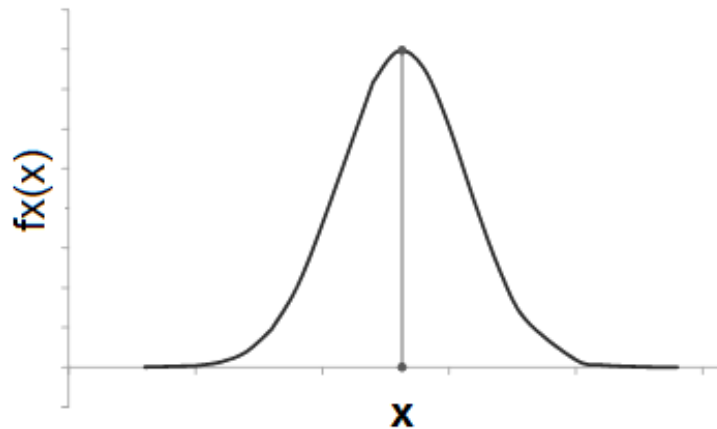
$f(x)$  es la probabilidad particular de un valor  $x$

$\sigma$  es la desviación estándar del espacio muestral

$x$  es el valor medio

$\bar{x}$  es el promedio

En la Figura 7.2 se observa la curva típica de una distribución normal.



**Figura 7.2 Forma típica de una distribución normal**

#### 7.4 Distribución de densidad de probabilidad de tipo log-normal

Se define como la distribución de una variable aleatoria cuyo logaritmo tiene una forma de distribución normal. La distribución log normal también es conocida como distribución de colas anchas, esto debido a que existe una alta probabilidad de que la variable aleatoria tome valores distantes de la media. En la Figura 7.3 se muestra el tipo de campana que se supone en esta distribución.

Para poder obtener la curva de la distribución logarítmica se utiliza la siguiente expresión:

$$Lognormalf(x) = \frac{1}{\zeta x\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - \lambda}{\zeta}\right)^2\right] \quad (7.4)$$

Donde:

$f(x)$ . - es la probabilidad particular de un valor  $x$

$\varsigma$ .- es la desviación estándar del espacio muestral en forma de logaritmo natural y se obtiene mediante

$$\varsigma = \sqrt{\ln(1 + COV^2)} \quad (7.5)$$

Donde:

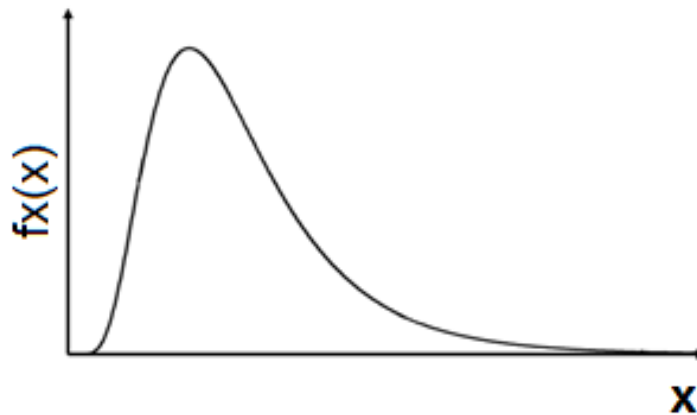
$COV$ .- es el coeficiente de variación

$\bar{x}$ .- es el valor medio

$\lambda$ .- es el valor promedio del logaritmo natural de  $x$  y se obtiene como:

$$\lambda = \ln(\bar{x}) - 0.5\varsigma^2 \quad (7.6)$$

En la Figura 7.3 se observa una curva típica de la distribución logarítmica.



**Figura 7.3 Forma típica de una distribución log- normal.**

Cuando se debe calcular la probabilidad de que el valor observado de una variable aleatoria  $X$  sea menor o igual que algún valor  $x$ , se utiliza una función de densidad acumulada  $F_D(x)$  ( $CDF$  por sus siglas en ingles) de la variable aleatoria. Específicamente, expresa el área por debajo de la función de densidad de

probabilidad, es decir es la integral de la función de probabilidad  $f(x)$ , calculada desde menos infinito a un valor específico.

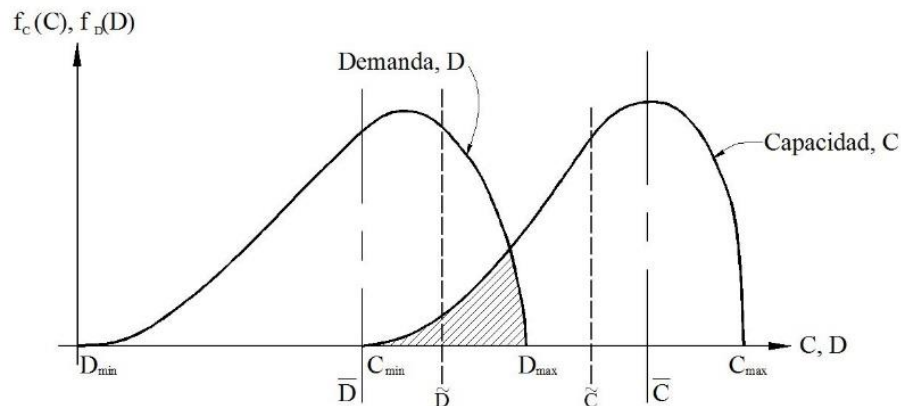
### 7.5 Probabilidad de falla ( $P_f$ ).

La confiabilidad, se define como la probabilidad de que un sistema lleve a cabo sus funciones satisfactoriamente para la función con la que se diseñó, durante un periodo de tiempo y bajo condiciones de operación establecidas. Al evento que interrumpe este funcionamiento se le denomina como falla.

Para el estudio de la probabilidad de falla se debe decidir cuáles cantidades o valores deben ser modelados como variables aleatorias, y cuáles deben ser modeladas como parámetros determinísticos.

En el análisis de la confiabilidad se tienen tres tipos de incertidumbres: las físicas, las estadísticas (datos) y las de modelo; estas últimas se refieren al modelo matemático o función de rendimiento elegida para analizar el comportamiento de un sistema en su estado límite o de falla, y que generalmente relaciona a la capacidad y demanda de un sistema.

Asumiendo que una capacidad  $C$  y una demanda  $D$  son independientes y que pueden representarse como una función de densidad de probabilidad, y pueden mostrarse gráficamente como en la Figura 6.7. El diseño óptimo de cualquier proyecto será aquel que minimice la probabilidad de ocurrencia de falla,  $p_f$ , es decir, hacer que las funciones de  $C$  y  $D$  tengan el menor traslape posible o aceptable.



**Figura 7.4** Funciones de densidad de probabilidad de capacidad y demanda. (Jaime A.)

Si se conocen las funciones de densidad de probabilidad de la capacidad y demanda, se puede calcular la probabilidad de falla (área de traslape), mediante la siguiente ecuación integral:

$$Pf = P(C > D) = \int_{-\infty}^{\infty} f(D) * g(C)dx \quad (7.7)$$

Donde:

$f(D)$ : Función de distribución acumulada de la demanda,

$g(C)$ : Función de densidad de probabilidad de la capacidad.

Existen varios métodos para la solución de dicha integral o cálculo de la probabilidad de falla de un sistema.

## 7.6 Índice de confiabilidad ( $\beta$ )

El índice de confiabilidad es una medida cuantitativa de la confiabilidad de un sistema o estructura que refleja la mecánica del problema y la incertidumbre en las variables de entrada, y se puede definir como el número de desviaciones estándar entre el valor más probable del factor de seguridad y el factor de seguridad = 1.0.

Este índice fue desarrollado en ingeniería estructural para proporcionar una medida de confiabilidad sin tener que determinar la distribución de probabilidad necesaria para calcular un valor exacto de la probabilidad de falla.

El índice de confiabilidad es función del valor esperado y la desviación estándar de la distribución de probabilidad de la resistencia y de las cargas aplicadas, y permite comparar la confiabilidad para diferentes condiciones sin tener que calcular los valores absolutos de probabilidad.

El índice de confiabilidad se calcula utilizando la siguiente ecuación:

$$\beta = \frac{E[C]-1}{\sigma_C} \quad (7.8)$$

Donde:

$E[C]$ : Es la esperanza matemática de  $C$

$\sigma_C$ : es la desviación estándar de  $C$

$C$ : variable

Para calcular el índice de confiabilidad se requiere contar con:

- Modelo determinista
- Función de densidad de probabilidad de las variables de interés
- Valores esperados y desviaciones estándar de las variables
- Definir un criterio límite de falla
- Método para calcular el estado límite de falla
- Desviación estándar del estado límite de falla y su valor esperado
- Método de análisis de confiabilidad

## 7.7 Método de Montecarlo

El método de Monte Carlo es un método numérico que permite resolver problemas matemáticos utilizando la simulación de variables aleatorias.

Realiza una serie de evaluaciones de una función de rendimiento en cada cálculo que realiza emplea valores aleatorios de los parámetros. Una característica importante es que cada cálculo es independiente del otro.

Este método requiere asumir una distribución de probabilidad de las variables aleatorias y de la función de rendimiento. En cada cálculo, los valores aleatorios obtenidos de los parámetros se generan en función de las desviaciones estándar de cada parámetro y con la distribución de probabilidad elegida.



El proceso para el método de Montecarlo consiste en:

1. Seleccionar los parámetros que se utilizaran como variables aleatorias.
2. Conocer los valores medios y desviaciones estándar de los parámetros
3. Elegir la función de rendimiento que modele el estado límite de falla.
4. Realizar iteraciones, donde en cada una, se generan valores aleatorios de los parámetros suponiendo una distribución de probabilidad y empleando su desviación estándar.
5. Evaluar la función de rendimiento en cada iteración para obtener uno de sus posibles valores.
6. Repetir el paso 4 y 5, tantas veces se considere suficiente para obtener una distribución completa de los valores de la función de rendimiento.
7. Calcular la probabilidad de falla utilizando la ecuación 7.9. Donde el factor de seguridad recomendado ( $F_{mlv}$ ) para este método es propuesto por el experto. Normalmente se utiliza el valor de 1, que matemáticamente es cuando el sistema falla pues la demanda iguala a la capacidad.

$$P_f = \frac{\# \text{ de factores menores o iguales } F_{mlv}}{\# \text{ de iteraciones}} \quad (7.9)$$

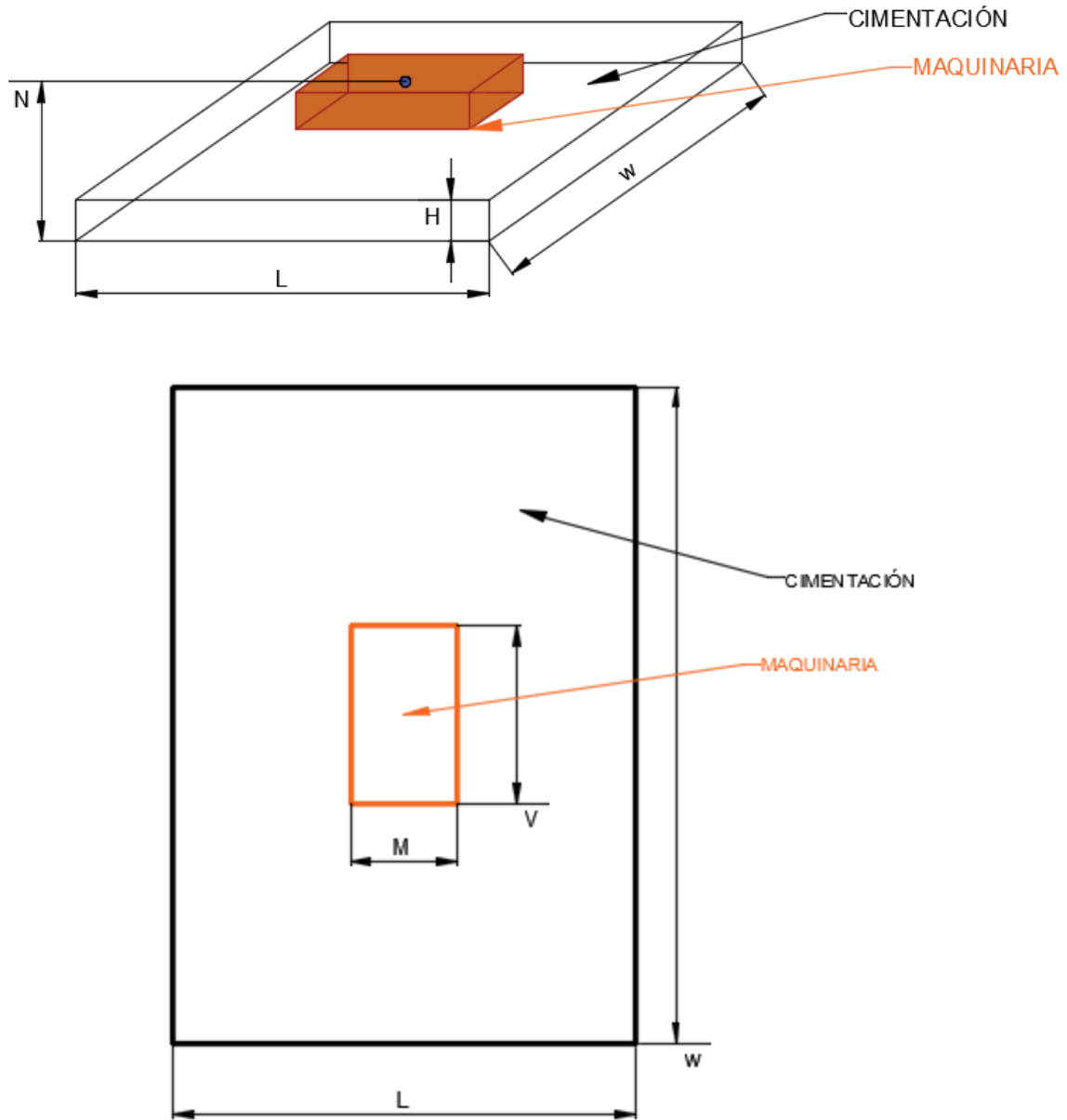
## 8 ANÁLISIS DE FRECUENCIAS EN UN SISTEMA SUELO-CIMENTACIÓN MAQUINARIA

### 8.1 Programa en Lenguaje Fortran

Para el análisis del sistema suelo-cimentación-maquinaria se reescribió y actualizó un programa en Lenguaje Fortran (A. Jaime, 1979, Apuntes de clase), con el cual al introducir los datos de la Tabla 8.1, el programa analiza las frecuencias de resonancia naturales y las frecuencias de resonancia amortiguadas del sistema.

*Tabla 8.1. Datos usados en el análisis.*

<b>DATO</b>	<b>VALOR</b>	<b>UNIDADES</b>
FRECUENCIA DE OPERACIÓN (FO)	1800.0000	RPM
PESO TOTAL DEL EQUIPO (MW)	77.1107	kg
DIST. DEL CENTRO DE MASA DE LA MAQUINARIA AL FONDO DE LA CIMENTACIÓN (N) <b>Ver Fig. 8.1</b>	5.4864	m
<b>DIMENSIONES EN PLANTA DE LA MAQUINARIA <b>Ver Fig. 8.1</b></b>		
M	1.5240	m
V	1.4021	m
FUERZA VERTICAL PRIMARIA (VP)	2052.51	kgf
FUERZA VERTICAL SECUNDARIA (VS)	0.00	kgf
FUERZA HORIZONTAL PRIMARIA (HP)	0.00	kgf
FUERZA HORIZONTAL SECUNDARIA (HS)	0.00	kgf
PAR VERTICAL PRIMARIA (TP)	2189.41	kgf-m
PAR VERTICAL SECUNDARIA (TS)	0.00	kgf-m
PAR HORIZONTAL PRIMARIA (RP)	0.00	kgf-m
PAR HORIZONTAL SECUNDARIA (RS)	0.00	kgf-m
PESO VOLUMÉTRICO DEL SUELO HUMEDO (SW)	1521.90	kg/m <sup>3</sup>
MÓDULO DE REACCIÓN (CZ)	3043508.00	kg/m <sup>3</sup>
MÓDULO DE POISSON (P)	0.40	
MODULO G DE RESISTENCIA AL CORTANTE (CORT)	2176102.68	kgf/m <sup>2</sup>
PESO DE LA CIMENTACIÓN (FW)	35470.92	kg
LONGITUD DE LA CIMENTACIÓN (L) <b>Ver Fig. 8.1</b>	5.18	m
ANCHO DE LA CIMENTACIÓN (W) <b>Ver Fig. 8.1</b>	1.40	m
ALTURA DE LA CIMENTACIÓN (H) <b>Ver Fig. 8.1</b>	4.88	m



**Figura 8.1 Dimensiones del sistema suelo-cimentación-maquinaria.**

El diagrama de flujo del funcionamiento del programa se ilustra en el esquema de la figura 8.2.

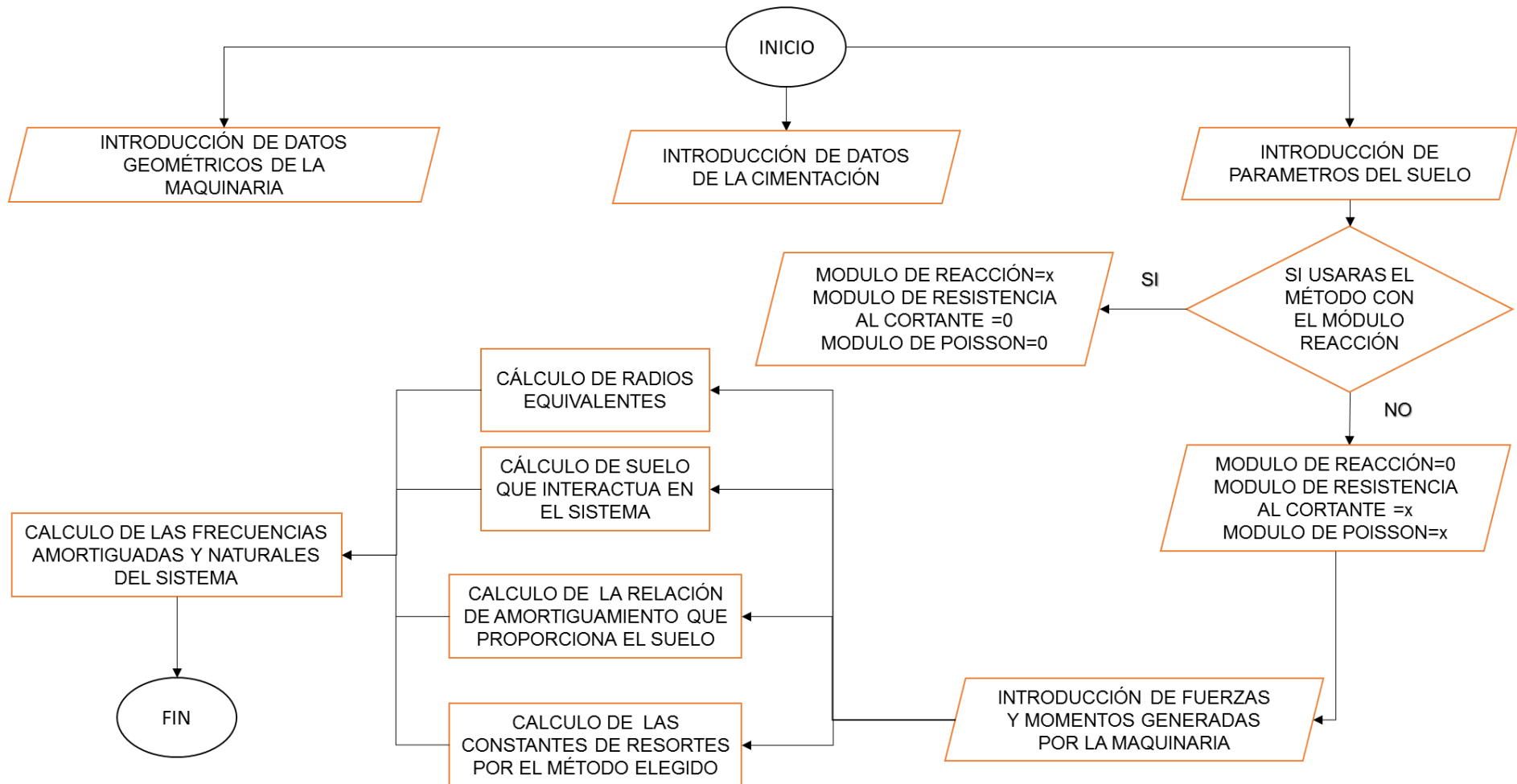


Figura 8.2 Diagrama de flujo del programa.

A continuación se muestra cada uno de los procesos que realiza el programa para poder obtener los resultados de las frecuencias que se generan en el sistema y las amplitudes provocadas.

❖ **Cálculo de la inercia vertical**

$$IV = \frac{1}{12} \frac{FW}{g} (L^2 + W^2) + \frac{1}{12} \frac{MW}{g} (M^2 + V^2) \quad (8.1)$$

Donde:

*IV*: inercia vertical

*FW*: peso de la cimentación

*g*: gravedad

*L, W*: longitud y ancho de la cimentación

*MW*: peso de la maquinaria

*M, V*: longitud y ancho de la maquinaria

❖ **Cálculo de la inercia horizontal**

$$IH = \frac{1}{12} \frac{FW}{g} (L^2 + H^2) + \frac{FW}{g} \left(\frac{H^2}{4}\right) \left(\frac{MW}{g}\right) N^2 \quad (8.2)$$

*IH*: inercia horizontal

*H*: altura de la cimentación

*N*: distancia del centro de masa de la maquinaria al fondo de la cimentación

❖ **Cálculo de los radios equivalentes**

Para este proceso se emplean las ecuaciones 3.23 (vertical y horizontal), 3.37 (oscilación) y 3.59 (torsión), para cada tipo de vibración que puede presentar el bloque de cimentación.

- ❖ **Calculo de los momentos de inercia debido a torsión y oscilación del bloque de cimentación.**

$$IR = \left[ \frac{FW}{g \cdot 12} (4H^2 + L^2) \right] + \left[ \frac{MW}{g \cdot 12} (M^2 + V^2) \right] + \left[ \frac{MW}{g} * (N^2) \right] \quad (8.3)$$

$$IT = \frac{MT}{12} (L^2 + W^2) \quad (8.4)$$

Donde:

**IR:** inercia de por oscilación

**IT:** inercia por torsión

- ❖ **Calculo de la relación de masa que interactúa en el sistema.**

Para este paso se utilizan las siguientes ecuaciones, 3.15 (vertical), 3.29 (oscilación), 3.44 (horizontal) y 3.53 (torsión).

Para la ecuación 3.29 **IR** sustituye a **I** y para la ecuación 3.53 **IT** sustituye a **J<sub>zz</sub>**

- ❖ **Calculo de las relaciones de amortiguamiento del sistema.**

Para la obtención de las relaciones de amortiguamiento utilizando el módulo de cortante G se emplearon las siguientes ecuaciones propuestas por Barkan:

- Vertical:  $k_v = \frac{G}{1-\nu} (L * w) K_s$   
 $K_s$  se obtiene de la ecuación 5.11
- Horizontal:  $k_x = 2(1 - \nu)(G)(L * w^2) K_\tau$   
 $K_\tau$  se obtiene de la ecuación 5.20
- Oscilatoria:  $k_o = \frac{G}{1-\nu} (L * w^2) K_\phi$

$K_\varphi$  se obtuvo en la ecuación 5.17.

- Torsional:  $k_t = \frac{16}{3} G r_0$

$r_0$  es el radio equivalente obtenido en la ecuación 3.59

Para el caso en el que se emplea el módulo de reacción  $k_s$ , el programa emplea las equivalencias de la tabla 5.1,

❖ **Calculo de la rigidez utilizando el módulo resistencia al cortante  $G$ .**

Este método se utiliza cuando se conoce el módulo de resistencia al cortante y la relación de Poisson de la masa de suelo. Entonces es posible estimar la rigidez del suelo para cada caso de vibración empleando las ecuaciones 3.13 (vertical), 3.22 (horizontal), 3.19 (oscilación) y para el caso de torsión se decidió calcular mediante la expresión 3.51 propuesta por Reissner y Sagoci (1944).

❖ **Obtención de las frecuencias amortiguadas y naturales del sistema suelo-cimentación-maquinaria, y de sus amplitudes.**

Las frecuencias naturales se obtienen utilizando la ecuación 3.16, y las frecuencias amortiguadas aplicando la ecuación 3.20.

Estas dos ecuaciones se emplean para los cuatro modos de vibración del sistema en ambos casos:

- Vertical
- Horizontal
- Oscilatorio
- Torsión.

Obteniendo así las frecuencias naturales no amortiguadas ( $FNV$ ,  $FNH$ ,  $FNR$  y  $FNT$ )

Obteniendo así las frecuencias naturales amortiguadas ( $FDV$ ,  $FDH$ ,  $FDR$  y  $FDT$ )

Una vez obtenidas las frecuencias que se generan en el sistema es posible obtener las amplitudes y rotaciones del sistema mediante la siguiente ecuación:

$$\text{Amplitud o rotación} = \frac{\frac{V}{k}}{\sqrt{1 - \left[\left(\frac{F_0}{V}\right)^2\right]^2 + \left[2\zeta^2\left(\frac{F_0}{FN}\right)^2\right]}} \quad (8.5)$$

Donde:

$V$ = es la fuerza ya sea vertical, horizontal, oscilación o torsional,

$FN$ = es la frecuencia natural según sea el caso.

En el Apéndice 1 se muestran las capturas de pantalla del programa y la forma de introducir los datos.

Los resultados obtenidos con ambos métodos se muestran en las figuras 8.3 y 8.4.



```

MÓDULO DE REACC.TXT: Bloc de notas
Archivo Edición Formato Ver Ayuda
FRECUENCIA DE OPERACIÓN DE LA MAQUINARIA= 1800.00RPM
PEÑO TOTAL DEL EQUIPO = 77.11kg
FUERZAS VIBRATORIAS
FUERZA VERTICAL PRIMARIA = 2052.51kg
FUERZA VERTICAL SECUNDARIA = .00kg
FUERZA HORIZONTAL PRIMARIA = .00kg
FUERZA HORIZONTAL SECUNDARIA = .00kg
PARES VIBRATORIOS (SHAKING COUPLES) =
PAR VERTICAL PRIMARIO = 2189.43FT-LB
PAR VERTICAL SECUNDARIO = .00kgf*m
PAR HORIZONTAL PRIMARIO = .00kgf*m
PAR HORIZONTAL SECUNDARIO = .00kgf*m
*****DATOS DE LA CIMENTACIÓN*****
LONGITUD DE LA CIMENTACIÓN = 5.18m
ANCHO DE LA CIMENTACIÓN = 1.40m
ALTURA DE LA CIMENTACION = 4.88m
PEÑO DE LA CIMENTACION = 35470.92m
*****DATOS DE LA MAQUINARIA*****
DIST. DEL CENTRO DE MASA DE LA MAQUINARIA AL CENTRO DE LA CIMENTACIÓN = 5.49m
-DIMENSIONES DE LOS HORIZONTES RECTANGULARES DE LA MAQUINARIA= 1.52 X 1.40m
*****PROPIEDADES DEL SUELO USANDO CZ*****
MÓDULO DE REACCIÓN DEL SUELO =3043508.00kg/m3
PEÑO UNITARIO HUMEDO DEL SUELO = 1521.90kg/m3
***RADIOS EQUIVALENTES***
1.520700=PVV 1.520700=PHH 2.132914=PRR 1.825525=PTT
***CONSTANTES K CALCULADOS***
22111140.000000=kV 11055570.000000=kH 98943590.000000=KR 39820520.000000=KTT
***CONSTANTES B RELACION DE MASA CALCULADOS***
1.660501= BV 1.452939=BH 2.025662=BR 2.766387=BT
***CONSTANTES RELACIONES DE AMORT CALCULADOS***
.329814=DV .238929=DH .034833=DR .076537=DT
***FRECUENCIA NATURAL SIN AMORTIGUAMIENTO EN RPM***
745.99=VERT 527.50=HORIZ 493.69=OSCILACIÓN 646.65=TORCIÓN 1054.76= PARES HORIZONTALES 383.54=OSCILACIÓN
****FRECUENCIAS NATURALES AMORTIGUADAS EN RPM****
0 843.35=VERT, 560.46=HORZ, 494.29=OSCILACIÓN, 650.47=TORSIÓN
**AMPLITUD DEBIDO A FUERZAS DE VIBRACION EN METROS**
VERT PRIMARIA = .0000182805700
VERT SECUNDARIA = .0000000000000
HORIZONTAL PRIMARIA = .0000000000000
HORIZONTAL SECUNDARIA = .0000000000000
**ROTACIONES DEBIDO A PARES DE VIBRACION EN RADIANES**
VERTICAL PRIMARIA = .0000081313210
VERTICAL SECUNDARIA = .0000000000000
HORIZONTAL PRIMARIA = .0000000000000
HORIZONTAL SECUNDARIA = .0000000000000

```

**Figura 8.3 Resultados obtenidos con el programa en Fortran empleando el módulo de reacción.**

```

ANALISIS DE FREC INT.TXT: Bloc de notas
Archivo Edición Formato Ver Ayuda
FRECUENCIA DE OPERACIÓN DE LA MAQUINARIA= 1800.00RPM
PESO TOTAL DEL EQUIPO = 77.11kg
FUERZAS VIBRATORIAS
  FUERZA VERTICAL PRIMARIA = 2052.51kg
  FUERZA VERTICAL SECUNDARIA = .00kg
  FUERZA HORIZONTAL PRIMARIA = .00kg
  FUERZA HORIZONTAL SECUNDARIA = .00kg
  PARES VIBRATORIOS (SHAKING COUPLES) =
  PAR VERTICAL PRIMARIO = 2189.41FT-LB
  PAR VERTICAL SECUNDARIO = .00kgf*m
  PAR HORIZONTAL PRIMARIO = .00kgf*m
  PAR HORIZONTAL SECUNDARIO = .00kgf*m
*****DATOS DE LA CIMENTACIÓN*****
LONGITUD DE LA CIMENTACIÓN = 5.18m
ANCHO DE LA CIMENTACIÓN = 1.40m
ALTURA DE LA CIMENTACION = 4.88m
PESO DE LA CIMENTACION = 35470.92m
*****DATOS DE LA MAQUINARIA*****
DIST. DEL CENTRO DE MASA DE LA MAQUINARIA AL CENTRO DE LA CIMENTACIÓN = 5.49m
-DIMENSIONES DE LOS HORIZONTES RECTANGULARES DE LA MAQUINARIA= 1.54 X 1.40m
*****PROPIEDADES DEL SUELO USANDO MÓDULO G *****
RELACIÓN DE POISSON = .40
MÓDULO DE CORTANTE G =2176103.00kg/m2
PESO UNITARIO HUMEDO DEL SUELO = 1521.90kg/m3
2176103.0000 1.8255 .9442
***RADIOS EQUIVALENTES***
1.520700=PVV 1.520700=PHH 2.132914=PRR 1.825525=PTT
***CONSTANTES K CALCULADOS***
11408750.000000=KV 15507370.000000=KH 60584580.000000=KR 70606000.000000=KTT
***CONSTANTES B RELACION DE MASA CALCULADOS***
.996301= BV 1.314564=BH 1.215397=BR 2.766387=BT
***CONSTANTES RELACIONES DE AMORT CALCULADOS***
.425788=DV .251190=DH .061416=DR .076537=DT
***FRECUENCIA NATURAL SIN AMORTIGUAMIENTO EN RPM***
535.86=VERT 624.74=HORIZ 386.21=OSCILACIÓN 861.06=TORCIÓN 1087.68= PARES HORIZONTALES 344.60=OSCILACIÓN
*****FRECUENCIAS NATURALES AMORTIGUADAS EN RPM*****
0 671.18=VERT, 668.33=HORZ, 387.67=OSCILACIÓN, 866.15=TORSIÓN
**AMPLITUD DEBIDO A FUERZAS DE VIBRACION EN METROS**
VERT PRIMARIA = .0000168546400
VERT SECUNDARIA = .0000000000000
HORIZONTAL PRIMARIA = .0000000000000
HORIZONTAL SECUNDARIA = .0000000000000
**ROTACIONES DEBIDO A PARES DE VIBRACION EN RADIANES**
VERTICAL PRIMARIA = .0000091603380
VERTICAL SECUNDARIA = .0000000000000
HORIZONTAL PRIMARIA = .0000000000000
HORIZONTAL SECUNDARIA = .0000000000000

```

Figura 8.4 Resultados obtenidos con el programa en Fortran empleando el módulo de G.

## 8.2 Análisis de confiabilidad de una cimentación para maquinaria.

Con objeto de realizar el análisis de confiabilidad de un sistema suelo-cimentación-maquinaria, se desarrolló una hoja de cálculo en Excel programada para realizar el mismo análisis que con el programa Fortran, pero a este se le añadió un análisis de confiabilidad, donde se analiza el problema que se presente el fenómeno de resonancia en el sistema suelo-cimentación-maquinaria, empleando el método de Montecarlo. Para este análisis se emplean los mismos datos que en el programa de FORTRAN y adicionalmente se requieren las desviaciones estándar de las propiedades del suelo (Módulo G, Módulo de reacción, Peso volumétrico del suelo y relación de Poisson).

Para esto la función de rendimiento  $Fr$ , será la división de la frecuencia de operación entre cada una de las frecuencias calculadas.

- ✓ Frecuencias naturales no amortiguadas ( $FNV$ ,  $FNH$ ,  $FNR$  y  $FNT$ )
- ✓ Frecuencias naturales amortiguadas ( $FDV$ ,  $FDH$ ,  $FDR$  y  $FDT$ )

$$Fr = \frac{\text{Frecuencia de operación de la maquinaria}}{\text{frecuencia del sistema}} \quad (8.6)$$

Como sabemos cuándo se iguala la frecuencia de operación y la frecuencia del sistema se presenta el fenómeno de resonancia, es por esto que cuando  $Fr$  sea un 1 el sistema fallara, la hoja de cálculo empleara el rango de 0.99 a 1.01 para considerar que se presenta la falla en el sistema.

Para emplear el método de Montecarlo se consideraron a las propiedades del suelo como variables aleatorias, y se supuso que estas presentaban una distribución normal para poder generar valores aleatorios de las propiedades con ayuda de Excel y de su desviación estándar.

A continuación, se muestra la forma de utilizar la hoja de cálculo programada.

1.- Introduzca los datos correspondientes a la maquinaria en la tabla 1 de la hoja de cálculo de color verde.

**Tabla 8.2. Introducción de datos Tabla 1 de la hoja de cálculo.**

<b>TABLA 1.- DATOS DE MAQUINARIA</b>		
FRECUENCIA DE OPERACIÓN (FO)	<b>1800.0000</b>	RPM
PESO TOTAL DEL EQUIPO (MW)	<b>77.1107</b>	kg
DIST. DEL CENTRO DE MASA DE LA MAQUINARIA AL CENTRO DE LA CIMENTACIÓN (N)	<b>5.4864</b>	m
<b>DIMENSIONES DE LA MAQUINARIA EN PLANTA</b>		
M	<b>1.5240</b>	m
V	<b>1.4021</b>	m

2.- Introduzca los datos correspondientes a las vibraciones generadas por la maquinaria en la tabla 2 de la hoja de cálculo de color amarillo.

**Tabla 8.3. Introducción de datos Tabla 2 de la hoja de cálculo.**

<b>TABLA 2.-VIBRACIONES DE LA MAQUINARIA</b>		
FUERZA VERTICAL PRIMARIA (VP)	<b>2052.5100</b>	kgf
FUERZA VERTICAL SECUNDARIA (VS)	<b>0.0000</b>	kgf
FUERZA HORIZONTAL PRIMARIA (HP)	<b>0.0000</b>	kgf
FUERZA HORIZONTAL SECUNDARIA (HS)	<b>0.0000</b>	kgf
PAR VERTICAL PRIMARIA (TP)	<b>2189.4056</b>	kgf-m
PAR VERTICAL SECUNDARIA (TS)	<b>0.0000</b>	kgf-m
PAR HORIZONTAL PRIMARIA (RP)	<b>0.0000</b>	kgf-m
PAR HORIZONTAL SECUNDARIA (RS)	<b>0.0000</b>	kgf-m

3.-Introduzca los datos correspondientes a la cimentación en la tabla 3 de color azul, como se observa a continuación.

**Tabla 8.4. Introducción de datos Tabla 3 de la hoja de cálculo.**

<b>TABLA 3.- DATOS DE LA CIMENTACIÓN</b>		
PESO DE LA CIMENTACIÓN (FW)	<b>35470.9230</b>	kg
LONGITUD DE LA CIMENTACIÓN (L)	<b>5.1816</b>	m
ANCHO DE LA CIMENTACIÓN (W)	<b>1.4021</b>	m
ALTURA DE LA CIMENTACIÓN (H)	<b>4.8768</b>	m

4.- Ahora, se introducen los valores medios de las propiedades del suelo, así como su desviación estándar en la tabla 4 de color gris, dependiendo los datos que posea o el método que desee emplear.

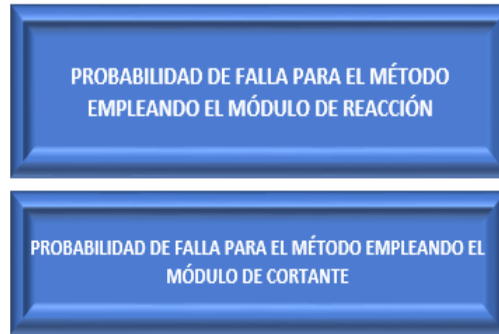
**Tabla 8.5. Introducción de datos Tabla 4 de la hoja de cálculo, empleando el Módulo de reacción.**

TABLA 4.- PROPIEDADES DEL SUELO			
PROPIEDAD	VALOR MEDIO	DESVIACIONES ESTANDAR	UNIDADES
PESO VOLUMÉTRICO DEL SUELO HUMEDO (SW)	1521.9000	250.0000	kg/m <sup>3</sup>
MÓDULO DE REACCIÓN (CZ)	3043508.0403	1000.0000	kg/m <sup>3</sup>
MÓDULO DE POISSON (P)	0.0000	0.0000	
MODULO G DE RESISTENCIA AL CORTANTE (CORT)	0.0000	0.0000	kgf/m <sup>2</sup>

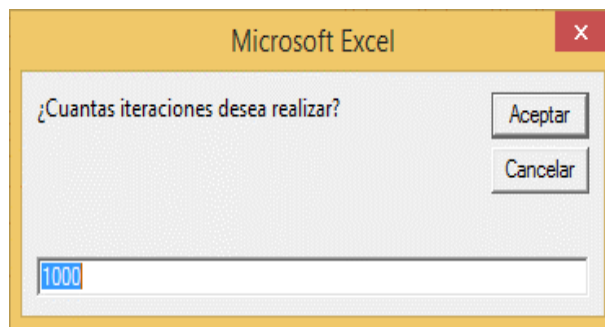
**Tabla 8.6. Introducción de datos Tabla 4 de la hoja de cálculo, empleando el Módulo G.**

TABLA 4.- PROPIEDADES DEL SUELO			
PROPIEDAD	VALOR MEDIO	DESVIACIONES ESTANDAR	UNIDADES
PESO VOLUMÉTRICO DEL SUELO HUMEDO (SW)	1521.9000	250.0000	kg/m <sup>3</sup>
MÓDULO DE REACCIÓN (CZ)	0.0000	0.0000	kg/m <sup>3</sup>
MÓDULO DE POISSON (P)	0.4000	0.1500	
MODULO G DE RESISTENCIA AL CORTANTE (CORT)	2176102.6800	2176.0000	kgf/m <sup>2</sup>

5.- Una vez introducidos los datos se debe dar click en alguno de los dos botones que se observan en la Fig 8.5, para realizar el análisis, por el método que usted desee. En seguida el programa le preguntara el número de iteraciones que quiere que realice (Fig 8.6). Estas iteraciones son las requeridas en el método de Montecarlo para el cálculo de la probabilidad de falla, para este problema se eligieron 10000.



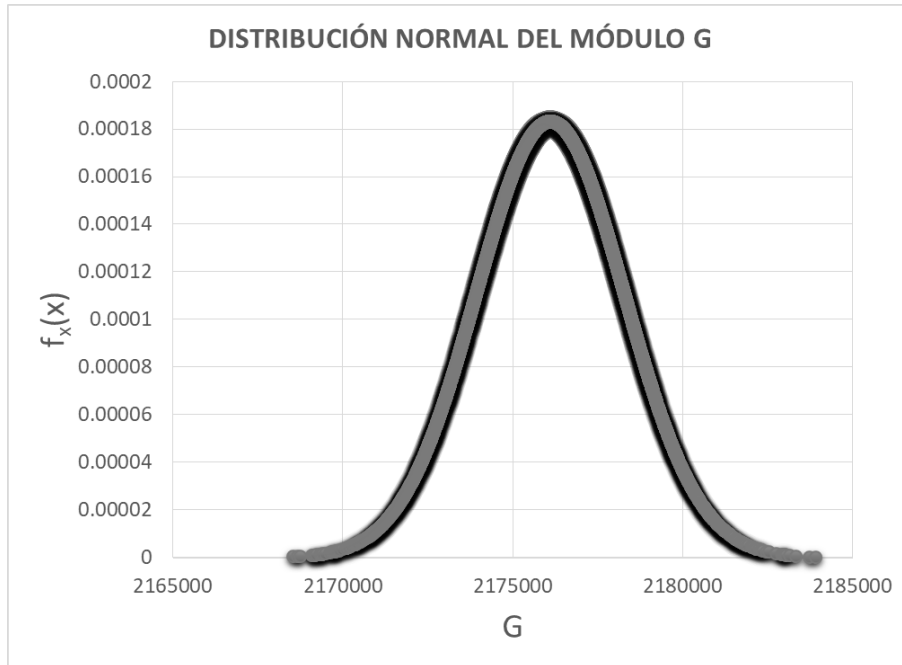
**Figura 8.5 Elección del método a emplear para el análisis.**



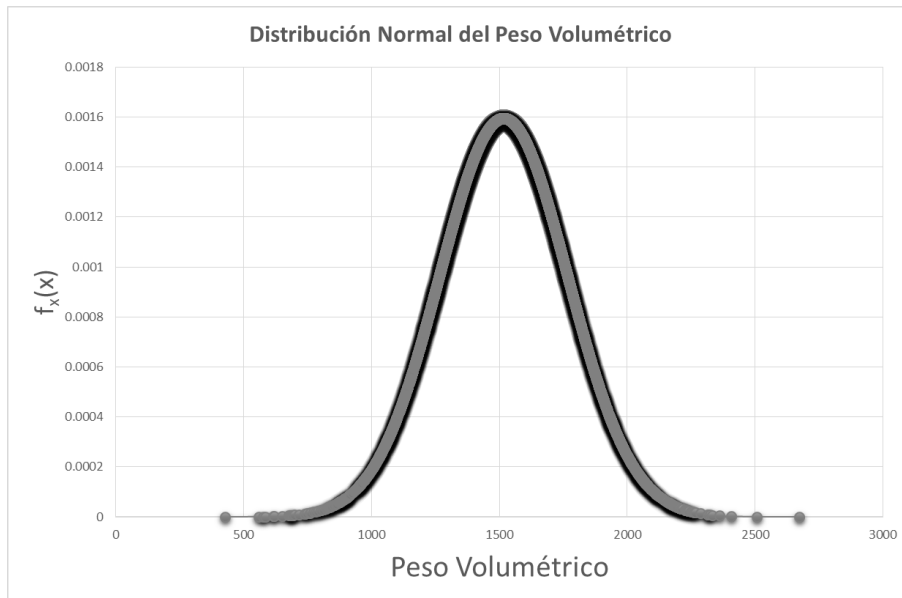
**Figura 8.6 Introducción de iteraciones a realizar en el análisis de probabilidad.**

En cada iteración se genera un valor aleatorio de las propiedades del suelo y se calculan las frecuencias del sistema y a su vez se obtiene un valor de la función de rendimiento  $Fr$ , en cada iteración.

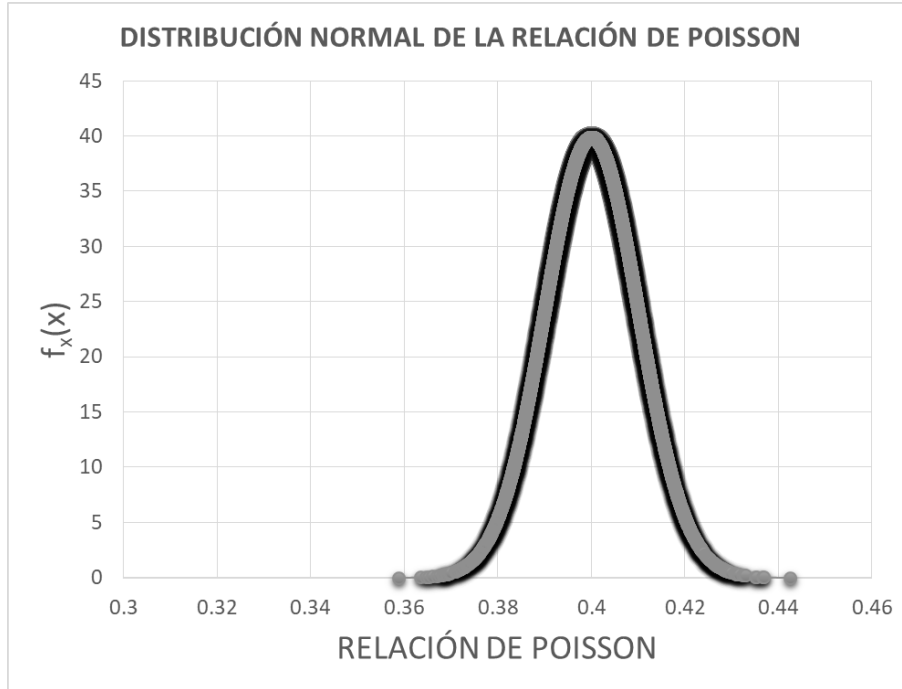
6.- Al terminar se mostrará la pestaña de resultados, donde se muestran los gráficos de la distribución de valores correspondientes a las propiedades del suelo generados aleatoriamente Fig 8.7-8.10.



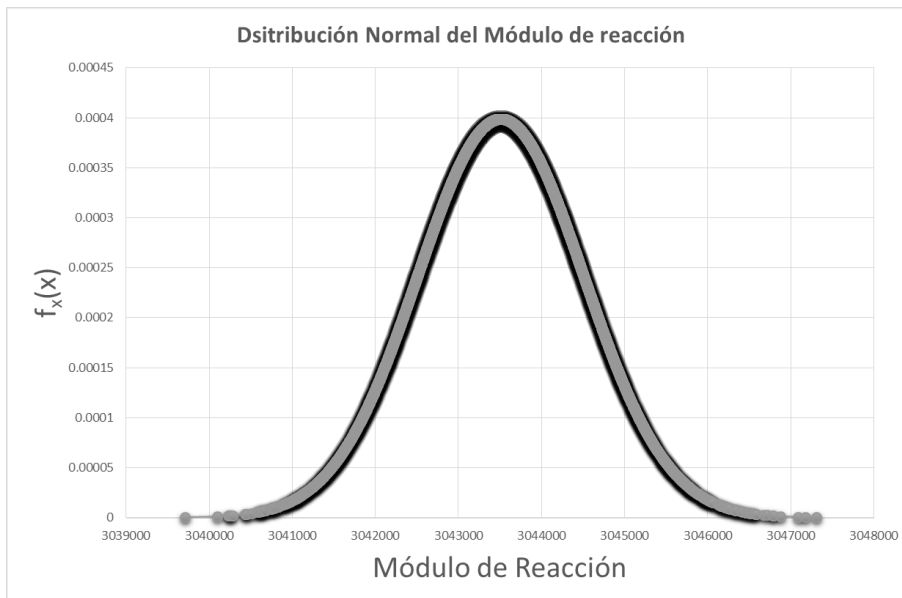
**Figura 8.7** Distribución normal del módulo G.



**Figura 8.8** Distribución normal del peso volumétrico.



**Figura 8.9** Distribución normal de la relación de Poisson.



**Figura 8.10** Distribución normal del módulo de reacción.

En las tablas 8.7 y 8.8 se muestran los resultados de las frecuencias naturales y amortiguadas empleando los valores medios de las propiedades.



**Tabla 8.7. Valores obtenidos de las frecuencias naturales y amortiguadas con los valores medios de las propiedades del suelo (empleando el método con el módulo G).**

MÉTODO CON MÓDULO DE RESISTENCIA AL CORTANTE G	CONSTANTE DE RESORTE k	FRECUENCIAS NATURALES		FRECUENCIAS AMORTIGUADAS		AMPLITUDES Y DEFLEXIONES DEBIDO A LAS FUERZAS		AMPLITUDES Y DEFLEXIONES DEBIDO A LAS FUERZAS SECUNDARIAS	
	11434915.58	FNV	536.471	FDV	672.972168	DVP en m	0.00001685	DVS en m	0
	15692599.96	FNH	628.460	FDH	672.569066	DHP en m	0.00000000	DHS en m	0
	60798001.76	FNO	386.588	FDR	387.712739	DRP en RAD	0.00000000	DRS en RAD	0
	71145646	FNT	861.497	FDT	866.641774	DTP en RAD	0.00000910	DTS en RAD	0

**Tabla 8.8. Valores obtenidos de las frecuencias naturales y amortiguadas con los valores medios de las propiedades del suelo (empleando el método con el módulo de reacción).**

MÉTODO DE MÓDULO DE REACCIÓN	CONSTANTE DE RESORTE k	FRECUENCIAS NATURALES EN RPM		FRECUENCIAS AMORTIGUADAS EN RPM		AMPLITUDES Y DEFLEXIONES DEBIDO A LAS FUERZAS		AMPLITUDES Y DEFLEXIONES DEBIDO A LAS FUERZAS SECUNDARIAS	
	22189657.12	FNV	747.318	FDV	845.474523	DVP en m	0.00001828	DVS en m	0
	11094828.56	FNH	528.434	FDH	561.64961	DHP en m	0.00000000	DHS en m	0
	100001388.1	FNR	495.939	FNR	496.388309	DRP en RAD	0.00000000	DRS en RAD	0
	40226836.56	FNT	647.795	FDT	651.663499	DTP en RAD	0.00000808	DTS en RAD	0

En la misma pestaña se muestran las tablas 8.9 y 8.10, las cuales presentan la probabilidad de ocurrencia del fenómeno de resonancia, para cada modo de vibración.

La probabilidad de falla se obtuvo al dividir el número de valores que caen en el rango de 0.99 a 1.01 (relación entre la frecuencia de operación y las demás frecuencias) entre el número de iteraciones realizadas, también se presenta el coeficiente de variación *COV* para cada modo de vibración analizado.

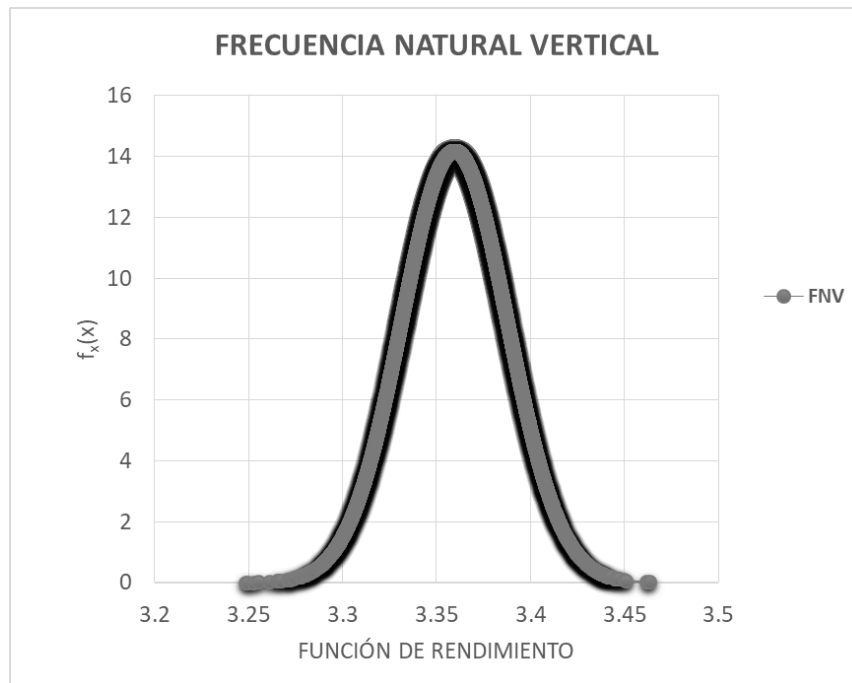
**Tabla 8.9. Probabilidad de ocurrencia del fenómeno de resonancia en el sistema para cada modo de vibración (empleando el método con el módulo de G).**

PROBABILIDAD DE FALLA		COV
PARA LA FRECUENCIA NATURAL VERTICAL FNV	0%	1%
PARA LA FRECUENCIA NATURAL HORIZONTAL FNH	0%	0%
PARA LA FRECUENCIA NATURAL OSCILATORIA FNR	0%	1%
PARA LA FRECUENCIA NATURAL TORSIONAL FNT	0%	0%
PARA LA FRECUENCIA NATURAL AMORTIGUADA VERTICAL FDV	0%	5%
PARA LA FRECUENCIA NATURAL AMORTIGUADA HORIZONTAL FDH	0%	1%
PARA LA FRECUENCIA NATURAL AMORTIGUADA OSCILATORIA FDR	0%	1%
PARA LA FRECUENCIA NATURAL AMORTIGUADA TORSIONAL FDT	0%	0%

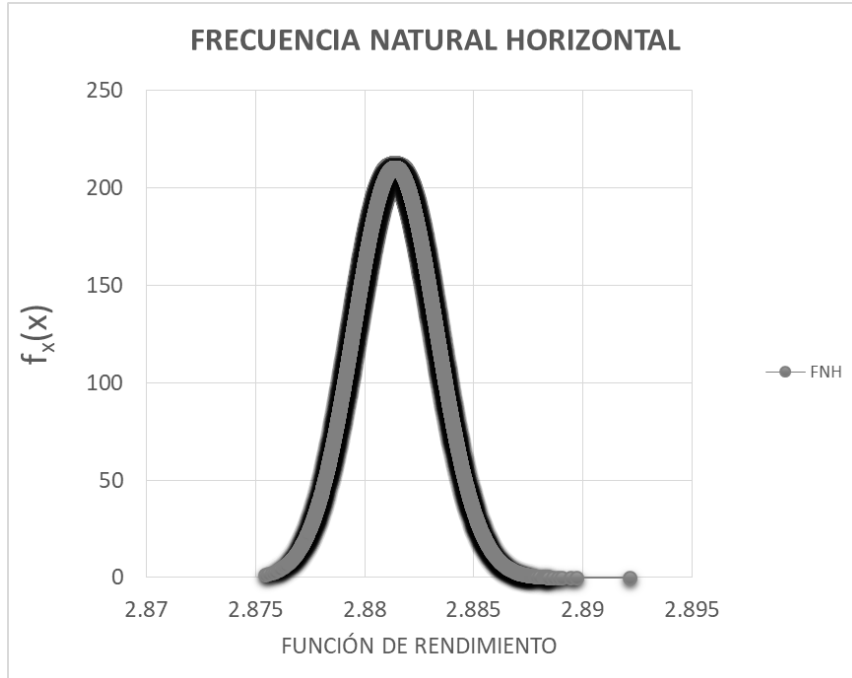
**Tabla 8.10. Probabilidad de ocurrencia del fenómeno de resonancia en el sistema para cada modo de vibración (empleando el método con el módulo de reacción).**

PROBABILIDAD DE FALLA		COV
PARA LA FRECUENCIA NATURAL VERTICAL FNV	0%	0%
PARA LA FRECUENCIA NATURAL HORIZONTAL FNH	0%	0%
PARA LA FRECUENCIA NATURAL OSCILATORIA FNR	0%	0%
PARA LA FRECUENCIA NATURAL TORSIONAL FNT	0%	0%
PARA LA FRECUENCIA NATURAL AMORTIGUADA VERTICAL FDV	0%	2%
PARA LA FRECUENCIA NATURAL AMORTIGUADA HORIZONTAL FDH	0%	1%
PARA LA FRECUENCIA NATURAL AMORTIGUADA OSCILATORIA FDR	0%	0%
PARA LA FRECUENCIA NATURAL AMORTIGUADA TORSIONAL FDT	0%	0%

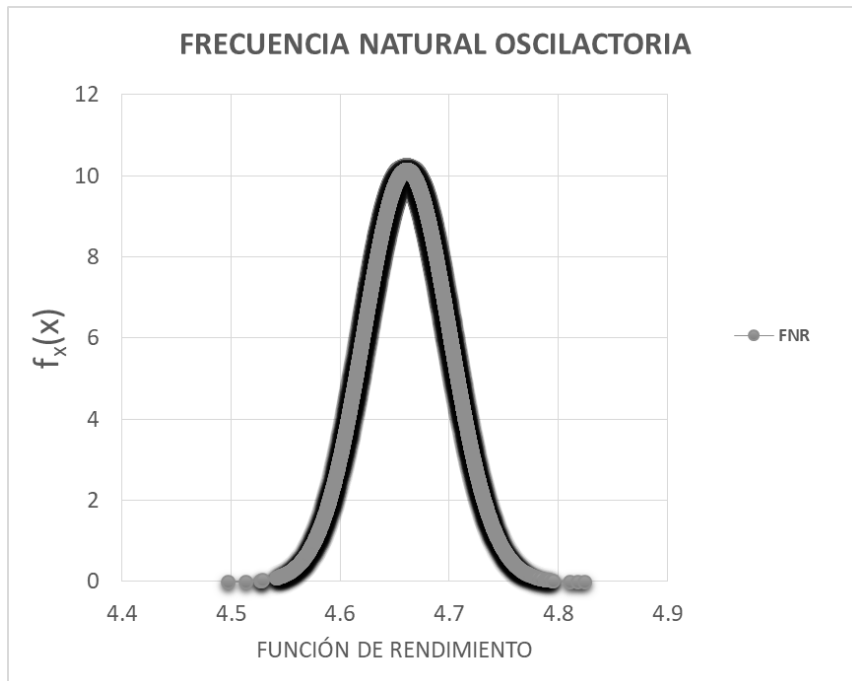
A continuación, se muestran los gráficos que proporciona la hoja de cálculo para cada una de las frecuencias calculadas del sistema.



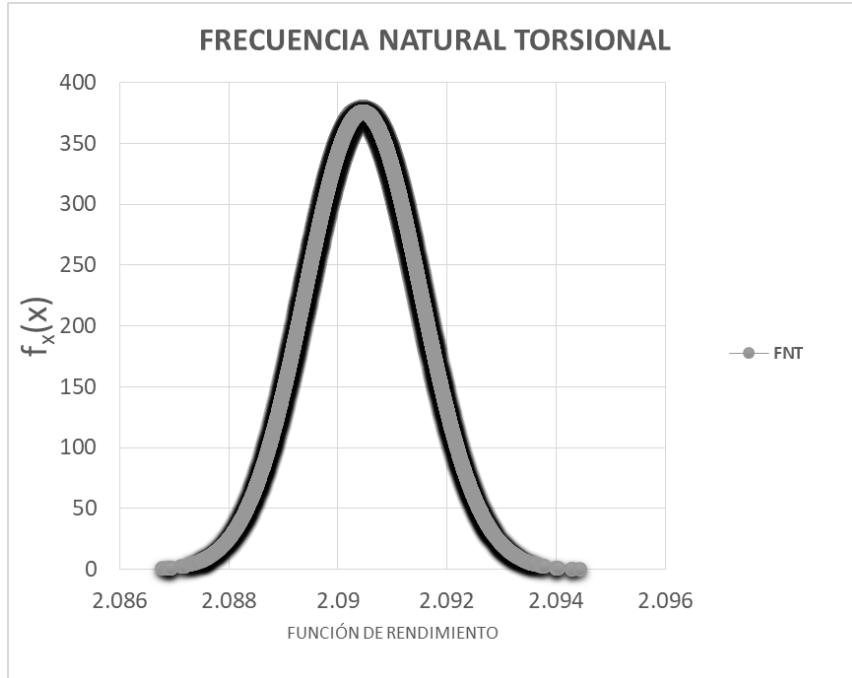
**Figura 8.11 Función de densidad de probabilidad de la  $F_r$  para la frecuencia natural vertical, (método con el módulo G).**



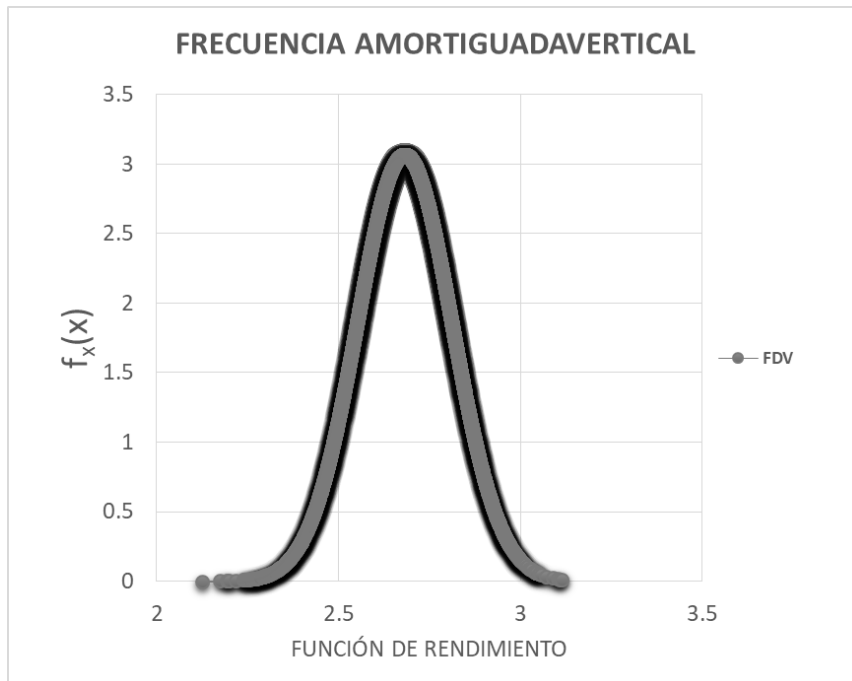
**Figura 8.12** Función de densidad de probabilidad de la  $Fr$  para la frecuencia natural horizontal, (método con el módulo G).



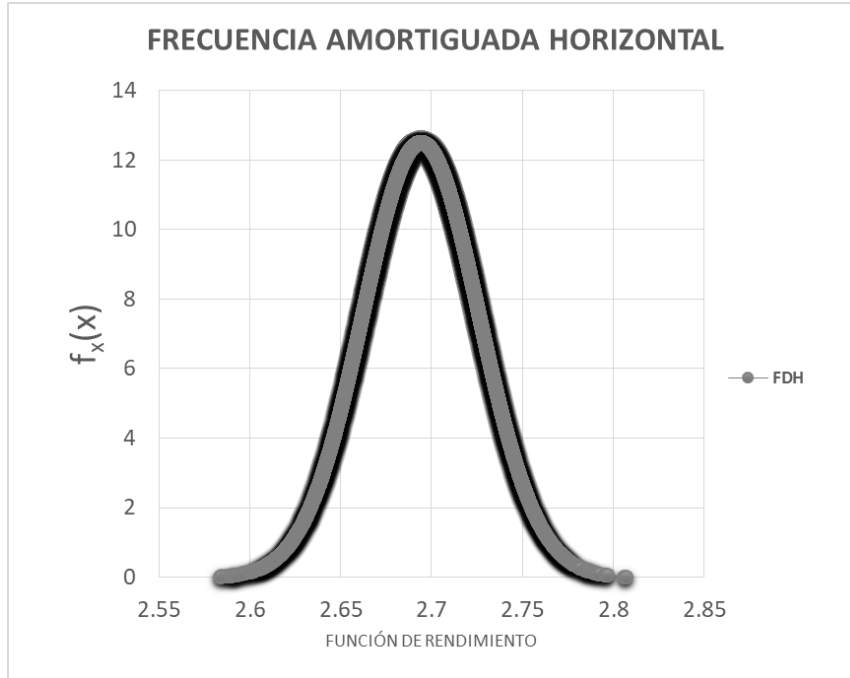
**Figura 8.13** Función de densidad de probabilidad de la  $Fr$  para la frecuencia natural oscilatoria, (método con el módulo G).



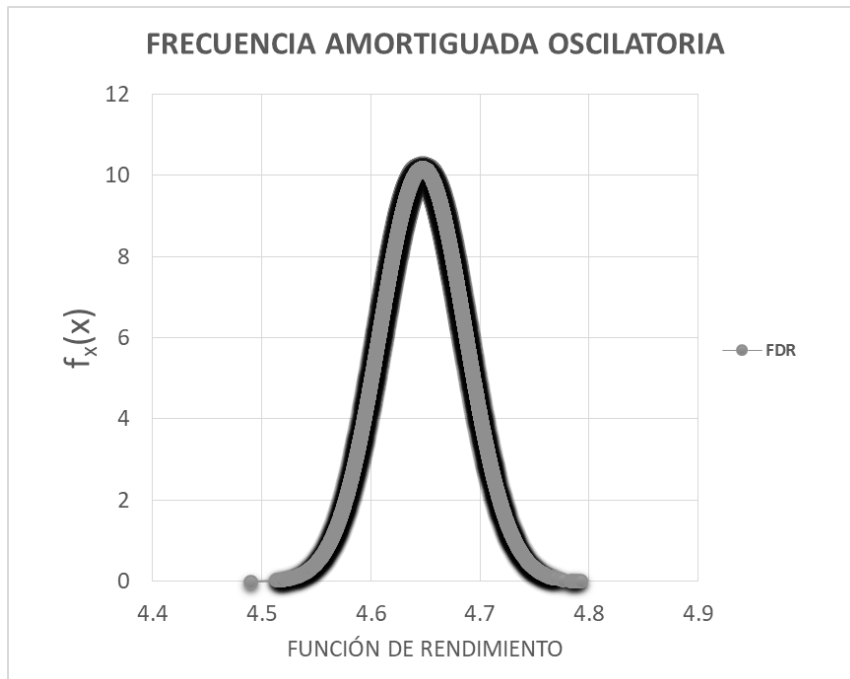
**Figura 8.14** Función de densidad de probabilidad de la  $Fr$  para la frecuencia natural torsional, (método con el módulo G).



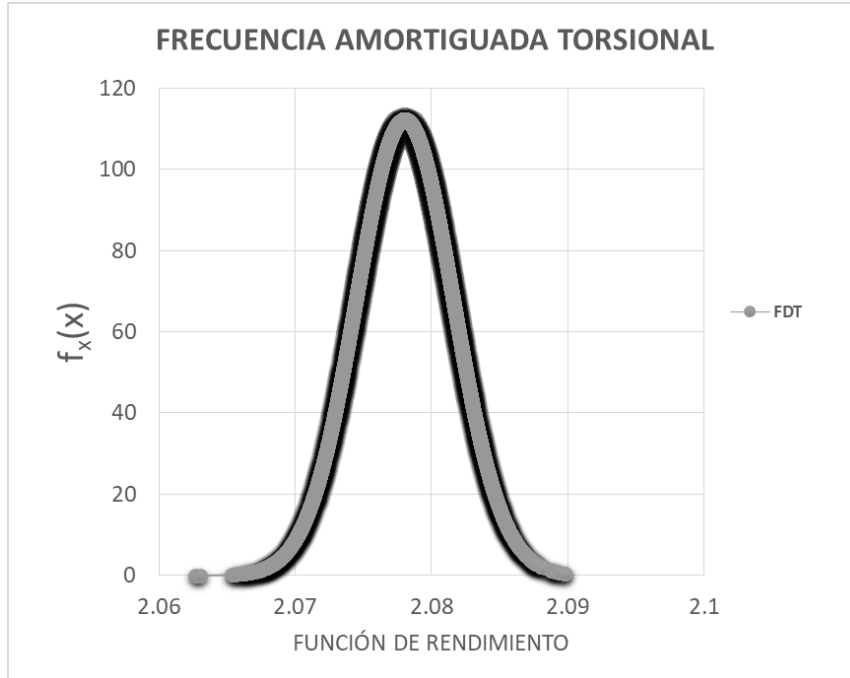
**Figura 8.15** Función de densidad de probabilidad de la  $Fr$  para la frecuencia amortiguada vertical, (método con el módulo G).



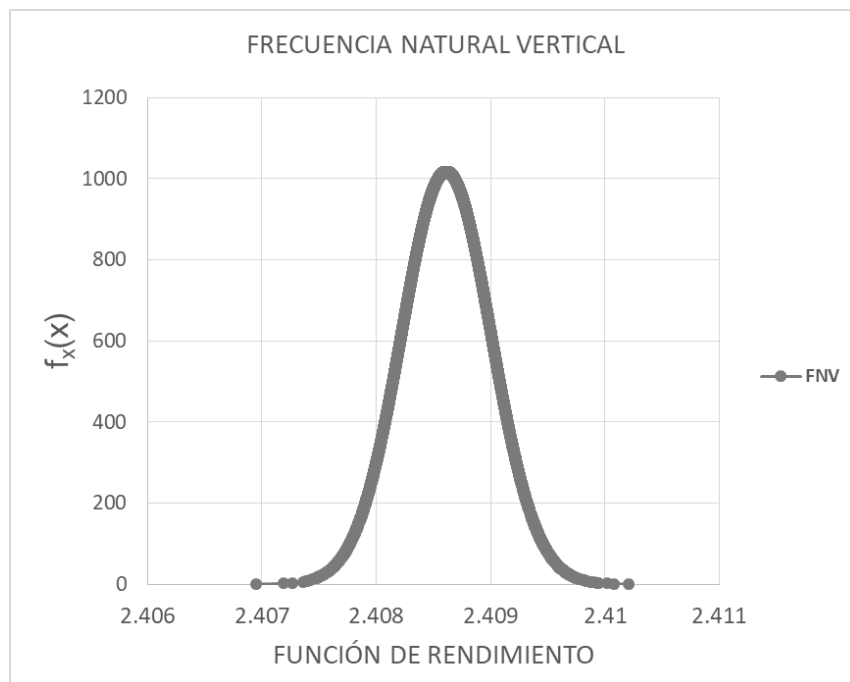
**Figura 8.16** Función de densidad de probabilidad de la  $Fr$  para la frecuencia amortiguada horizontal, (método con el módulo  $G$ ).



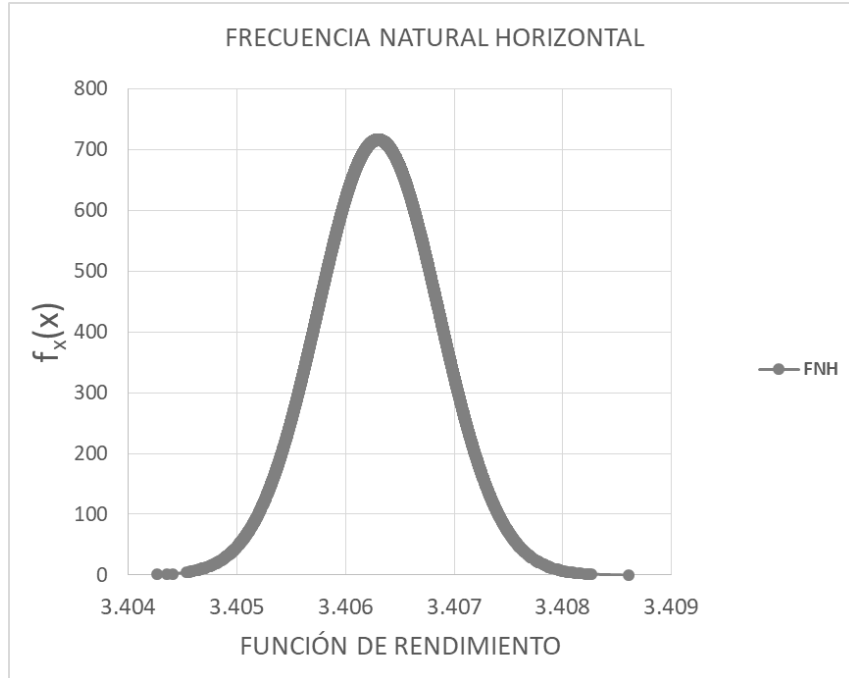
**Figura 8.17** Función de densidad de probabilidad de la  $Fr$  para la frecuencia amortiguada oscilatoria, (método con el módulo  $G$ ).



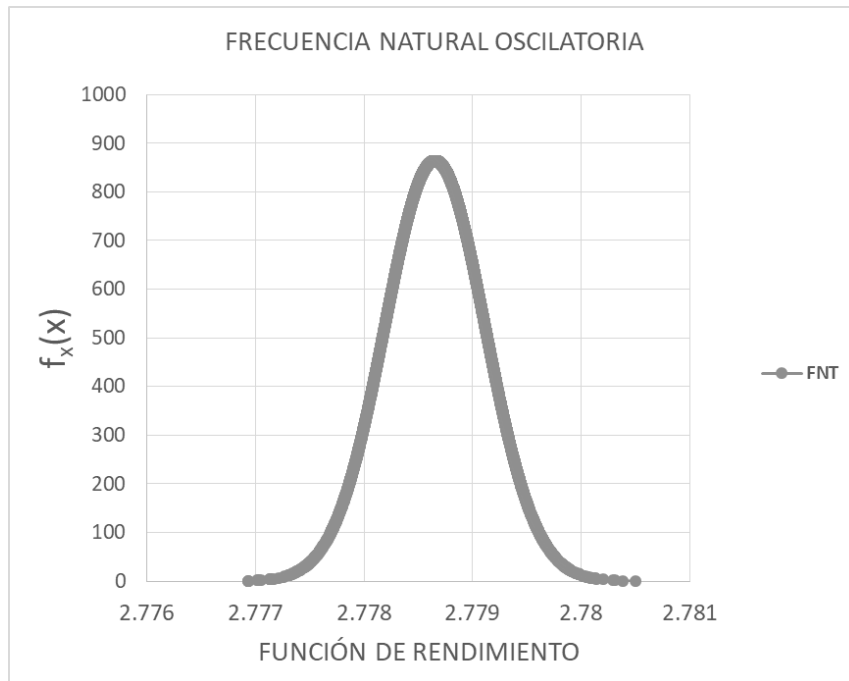
**Figura 8.18** Función de densidad de probabilidad de la  $Fr$  para la frecuencia amortiguada torsional, (método con el módulo G).



**Figura 8.19** Función de densidad de probabilidad de la  $Fr$  para la frecuencia natural vertical, (método con el módulo de reacción).

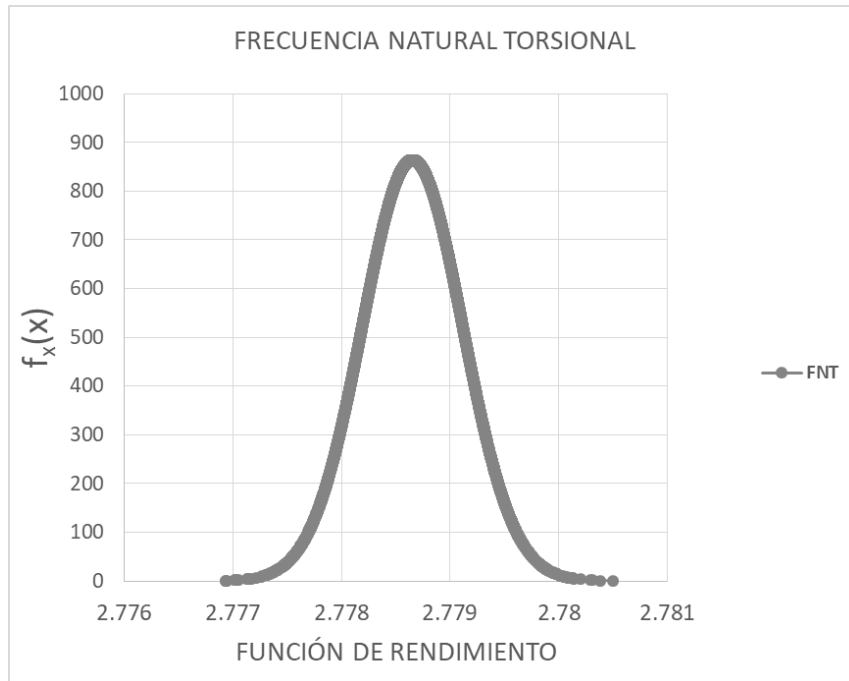


**Figura 8.20** Función de densidad de probabilidad de la  $Fr$  para la frecuencia natural horizontal, (método con el módulo de reacción).

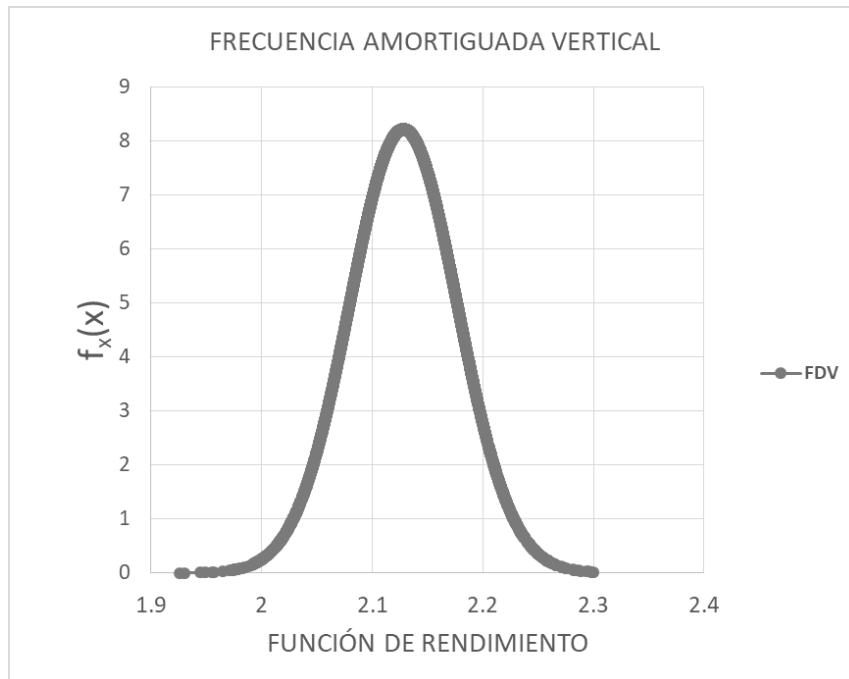


**Figura 8.21** Función de densidad de probabilidad de la  $Fr$  para la frecuencia natural oscilatoria, (método con el módulo de reacción).

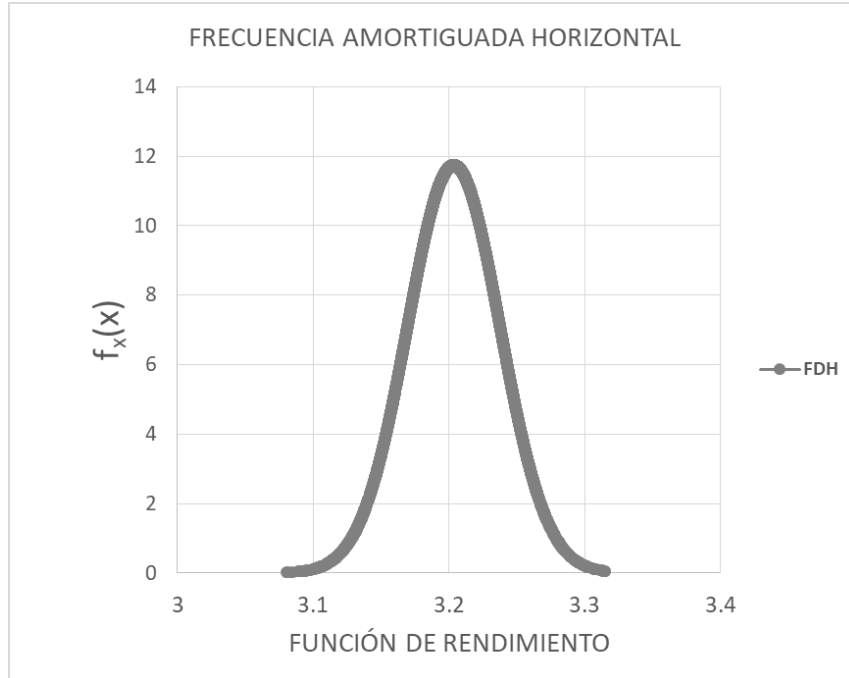




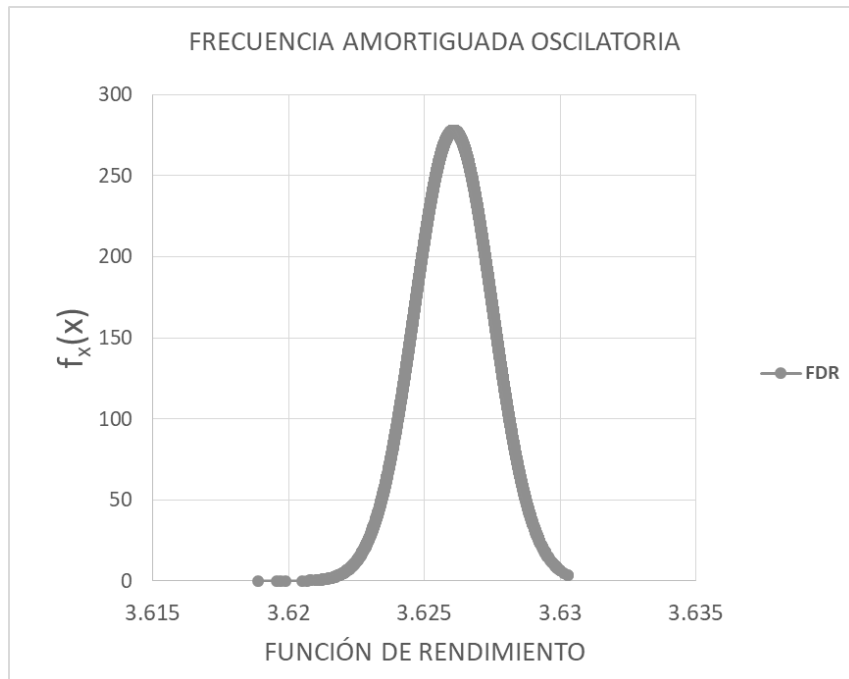
**Figura 8.22** Función de densidad de probabilidad de la  $Fr$  para la frecuencia natural torsional, (método con el módulo de reacción).



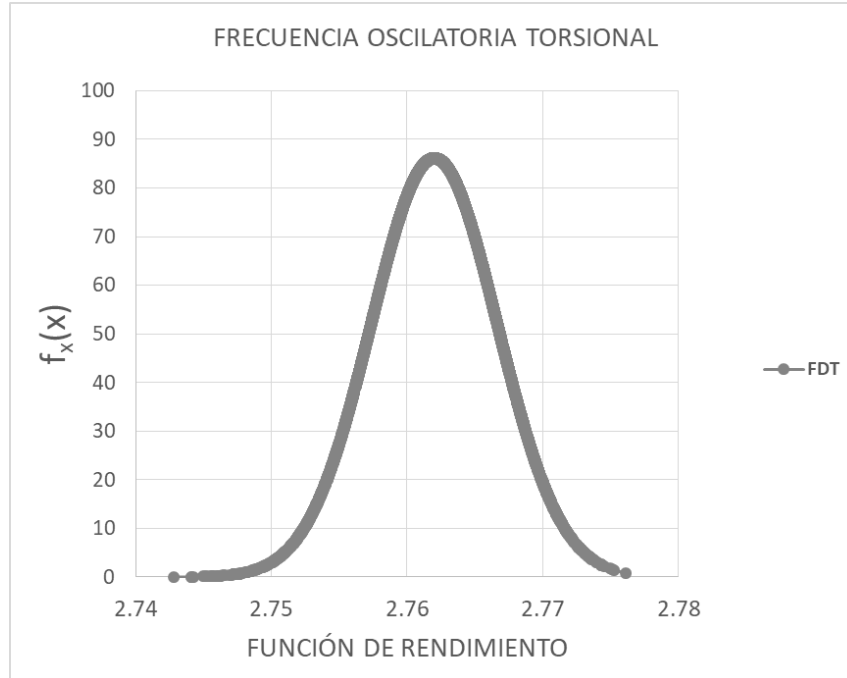
**Figura 8.23** Función de densidad de probabilidad de la  $Fr$  para la frecuencia amortiguada vertical, (método con el módulo de reacción).



**Figura 8.24** Función de densidad de probabilidad de  $Fr$  para la frecuencia amortiguada horizontal, (método con el módulo de reacción).



**Figura 8.25** Función de densidad de probabilidad de la  $Fr$  para la frecuencia amortiguada oscilatoria, (método con el módulo de reacción).



**Figura 8.26** Función de densidad de probabilidad de la  $F_r$  para la frecuencia amortiguada torsional, (método con el módulo de reacción).

Debido a que no se presentó probabilidad de falla en el sistema, se modificó el dato de la frecuencia de operación de la maquinaria a un valor cercano obtenido al emplear el módulo de reacción, para revisar la condición en que el sistema puede presentar resonancia. El valor elegido fue de 660.00 rpm. Se realizó un nuevo análisis de 10000 iteraciones en el cual se obtuvo al emplear el módulo  $G$  la probabilidad de falla para los casos de frecuencia natural amortiguada vertical “FDV” que fue del 16% y para la frecuencia natural amortiguada horizontal (FDH) de 39% los resultados se muestran en la tabla 8.11. Los gráficos que muestran la probabilidad de falla empleando una distribución de densidad de probabilidad del tipo normal se muestran en las figuras 8.27 y 8.28.

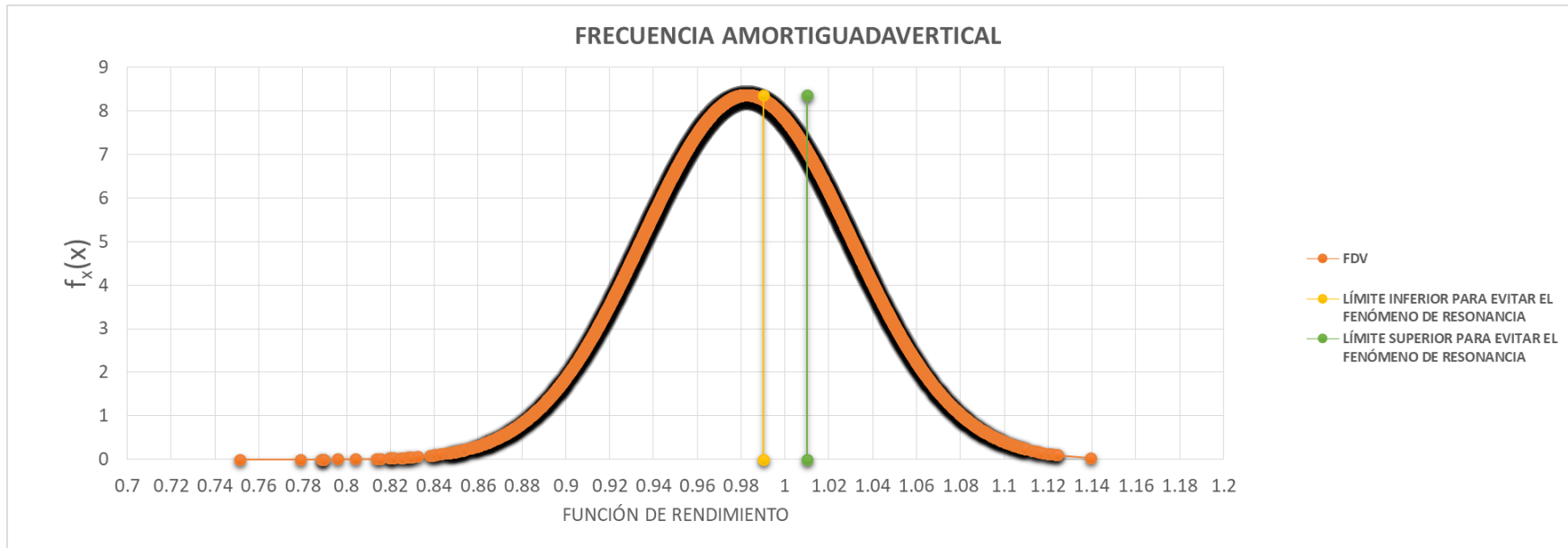
**Tabla 8.11. Probabilidad de ocurrencia del fenómeno de resonancia en el sistema para cada modo de vibración con una frecuencia de operación de 660.00 rpm (empleando el método con el módulo de G).**

PROBABILIDAD DE FALLA		COV
PARA LA FRECUENCIA NATURAL VERTICAL FNV	0%	1%
PARA LA FRECUENCIA NATURAL HORIZONTAL FNH	0%	0%
PARA LA FRECUENCIA NATURAL OSCILATORIA FNR	0%	1%
PARA LA FRECUENCIA NATURAL TORSIONAL FNT	0%	0%
PARA LA FRECUENCIA NATURAL AMORTIGUADA VERTICAL FDV	16%	5%
PARA LA FRECUENCIA NATURAL AMORTIGUADA HORIZONTAL FDH	39%	1%
PARA LA FRECUENCIA NATURAL AMORTIGUADA OSCILATORIA FDR	0%	1%
PARA LA FRECUENCIA NATURAL AMORTIGUADA TORSIONAL FDT	0%	0%

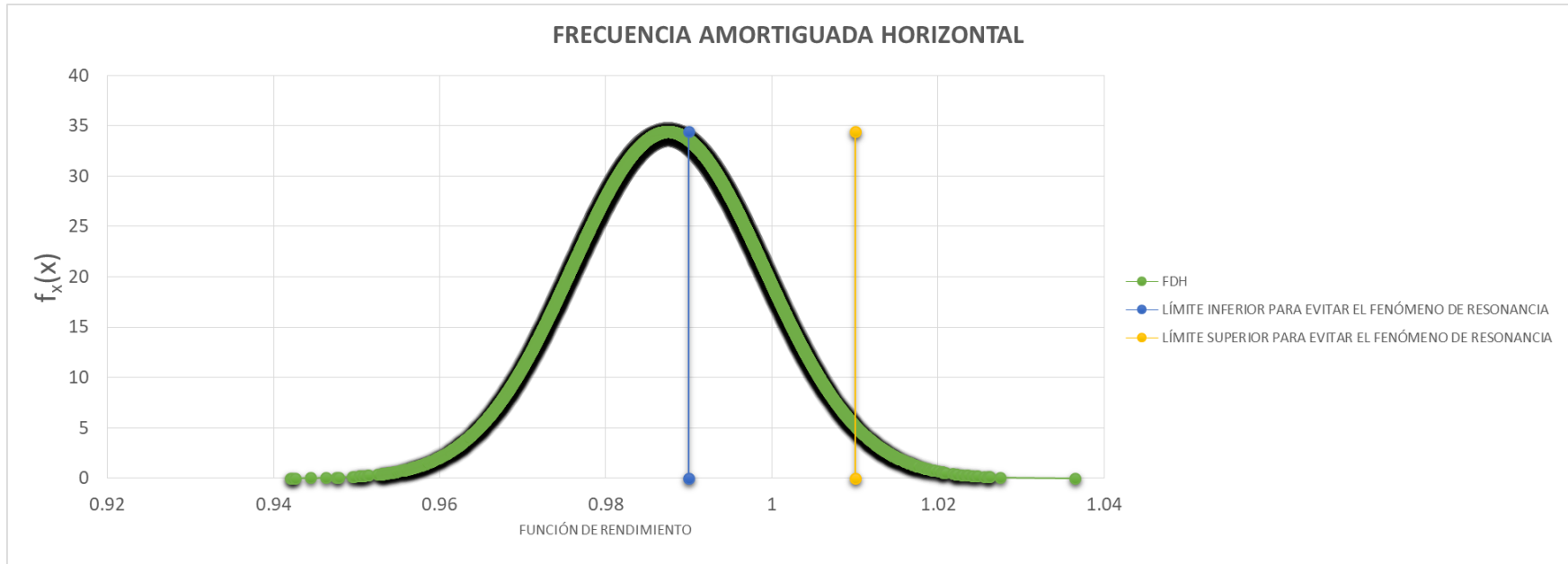
Para el caso donde se emplea el módulo de reacción los resultados obtenidos muestran una probabilidad de falla del 6% para el caso de la frecuencia natural amortiguada torsional (FDT), a continuación se muestran los resultados obtenidos en la tabla 8.12 y la gráfica donde se observa la probabilidad de falla para FDT (Figura 8.29).

**Tabla 8.12. Probabilidad de ocurrencia del fenómeno de resonancia en el sistema para cada modo de vibración con una frecuencia de operación de 660.00 rpm (empleando el método con el módulo de reacción).**

PROBABILIDAD DE FALLA		COV
PARA LA FRECUENCIA NATURAL VERTICAL FNV	0%	0%
PARA LA FRECUENCIA NATURAL HORIZONTAL FNH	0%	0%
PARA LA FRECUENCIA NATURAL OSCILATORIA FNR	0%	0%
PARA LA FRECUENCIA NATURAL TORSIONAL FNT	0%	0%
PARA LA FRECUENCIA NATURAL AMORTIGUADA VERTICAL FDV	0%	2%
PARA LA FRECUENCIA NATURAL AMORTIGUADA HORIZONTAL FDH	0%	1%
PARA LA FRECUENCIA NATURAL AMORTIGUADA OSCILATORIA FDR	0%	0%
PARA LA FRECUENCIA NATURAL AMORTIGUADA TORSIONAL FDT	6%	0%



**Figura 8.27** Función de densidad de probabilidad de la  $Fr$  para la frecuencia amortiguada vertical, (método con el módulo  $G$ ).



**Figura 8.28** Función de densidad de probabilidad de la  $Fr$  para la frecuencia amortiguada horizontal, (método con el módulo G).

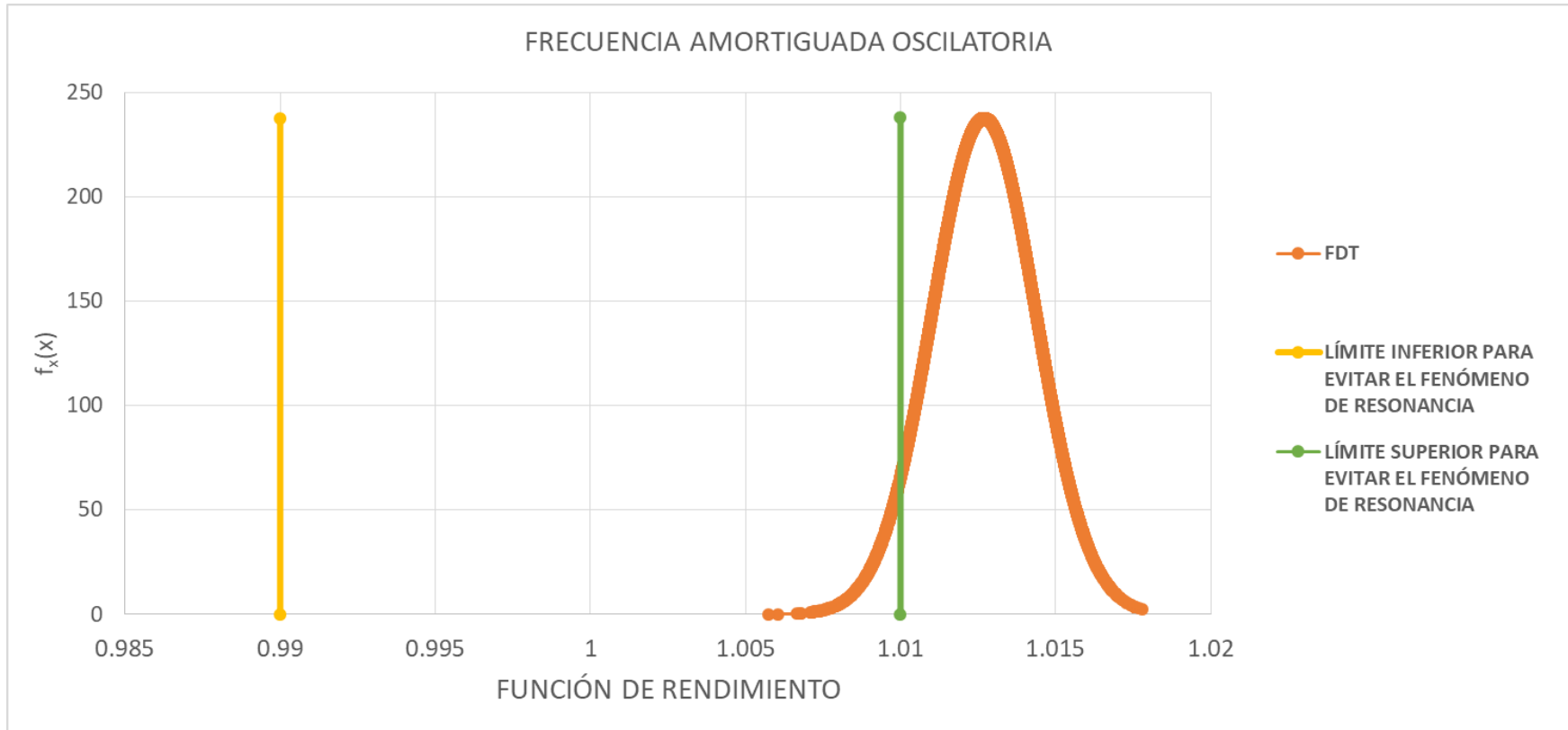


Figura 8.29 Función de densidad de probabilidad de la  $F_r$  para la frecuencia amortiguada torsional, (método con el módulo de reacción).



## 9 CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

- a) Comprender los principios de la teoría de vibración es muy importante para entender el comportamiento que presentara un sistema suelo-cimentación-maquinaria, este tipo de sistemas se estudia empleando la analogía de un sistema masa-resorte-amortiguador.
- b) Para un correcto diseño de una cimentación de maquinaria, es importante la medición de las propiedades del suelo, debido a que el comportamiento del sistema depende en gran parte de estas, por lo tanto, los valores que se determinen mediante pruebas de campo y/o laboratorio repercutirán en gran medida en el diseño.
- c) Por otra parte, algo indispensable que debe tomarse en cuenta en el análisis y diseño son las vibraciones y desplazamientos que se generan en el sistema, no solo para evitar que se presente daño en el sistema, sino también debe cuidarse el impacto que tendrá en las estructuras cercanas e incluso en personas que estarán próximas al sistema en vibración.
- d) En la actualidad las herramientas computacionales, permiten realizar una serie de cálculos de manera rápida. Debido a esta ventaja, la incorporación del análisis de confiabilidad en el diseño de la cimentación para maquinaria, es una herramienta importante que disminuye en cierto grado la incertidumbre que se puede tener en el diseño. El método de Montecarlo al ser un proceso iterativo, proporciona resultados que muestran un panorama general de la seguridad del diseño propuesto.
- e) Es importante mencionar que durante el trabajo realizado se observó que al realizar 1000 iteraciones empleando el método de Montecarlo el coeficiente de variación ya no presenta cambios considerables. Sin embargo para el caso de las propiedades dinámicas del suelo, las funciones de densidad de probabilidad se generaron de una manera más uniforme al realizar 10000 iteraciones.
- f) La verificación del diseño para condiciones estáticas es muy importante, debido a que si en condiciones dinámicas se observa que puede presentarse

el fenómeno de resonancia se puede modificar el diseño al incrementar las dimensiones de la cimentación, sin embargo esto podría generar una falla por capacidad de carga, por lo que las condiciones estáticas se deben revisar nuevamente si el diseño es cambiado.

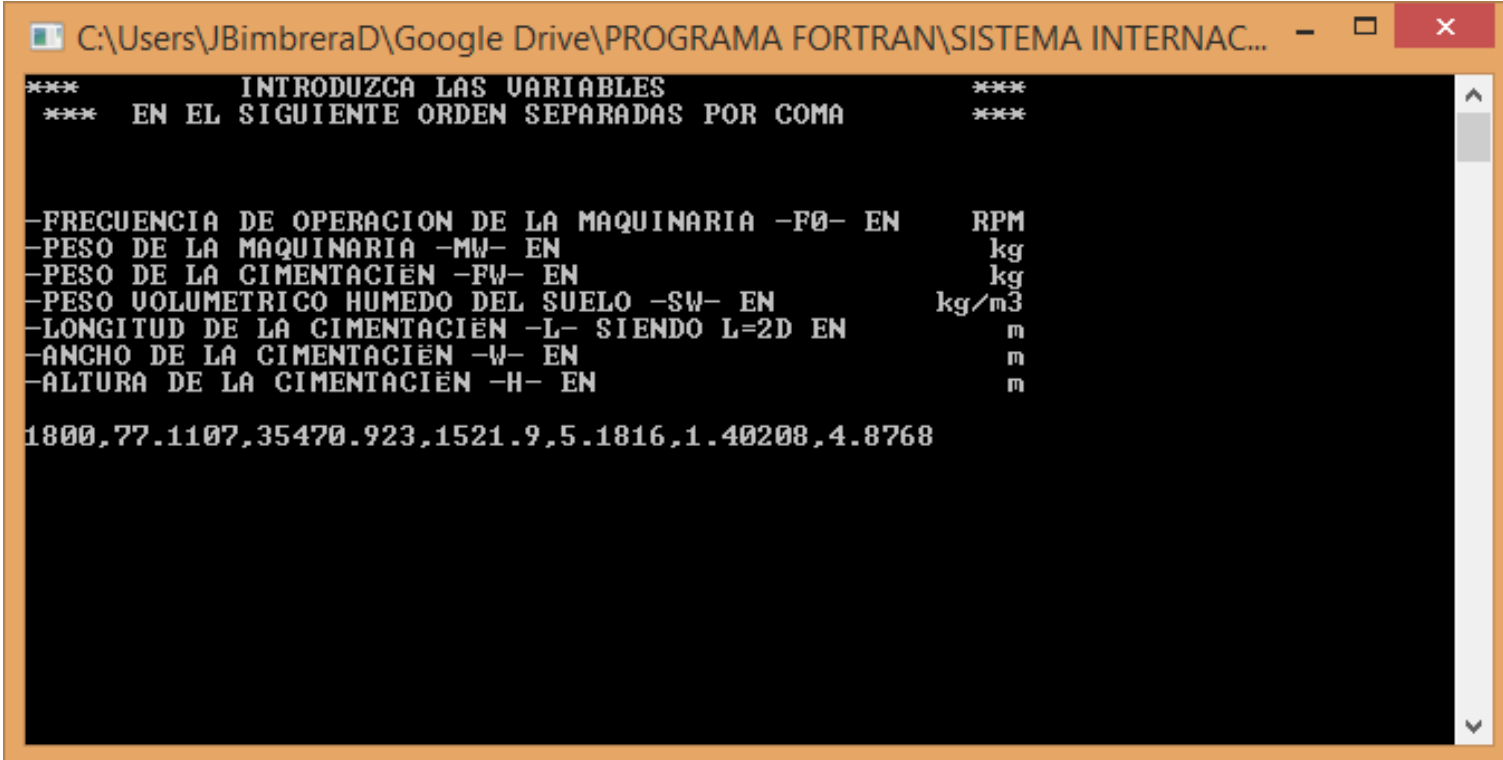
- g) En lo desarrollado en este trabajo se observó que las diferencias de las amplitudes y rotaciones obtenidas con el método que emplea el módulo de reacción no varían demasiado con las obtenidas con el método que emplea el módulo  $G$ . Sin embargo el módulo  $G$  es el más fácil de determinar mediante pruebas de laboratorio o campo y es el más utilizado.

## 10 BIBLIOGRAFÍA Y REFERENCIAS

- Barkan, D.D. (1962), “Dynamics of Bases and Foundations” (Traducido del ruso por L.Drashevskaja y editado por G.P Tschebotarioff). Mc Graw Hill Book. Co. Nueva York.
- Biringen E. y Davie J. (2010) “Suspension P-S Logging for Geophysical Investigation of Deep soil and Bedrock”. GeoFlorida 2010: Advances in Analysis, Modeling & Design.
- Bowles, Joseph.E (1997) “Foundation analysis and design” 5ª Edición. Mc Graw Hill. Singapore.
- Braja. M. DAS. (2011) “Principles of Soils Dynamics” 2ª Edición. Cengage Learning. USA. Stamford.
- Chopra, Anil.K. (2007) “Dynamics of structures, Theory and Aplications to Earthquake Engineering” 3ª Edición. Pearson Prentice Hall. USA, Nueva Jersey.
- Duncan J.M y Sleep M.D. “Evaluating reliability in geotechnical engineering”, capítulo 3 del libro “Risk and reliability in geotechnical engineering”, publicado por Kok-Kwang P. y Jianye C. (2015). CRC Press. USA.
- 
- Flores E. H., Cinna L.A y Yussim G. S. (2004). “Estimación de velocidades de fase a partir del análisis de microtemores con el método SPAC”, Geos, vol. 24, Nº3 pp. 439-445.
- Flores O. y Flores Mario. (2014) “Técnica experimental de campo para determinar las velocidades de compresión y de corte”. Reunión Nacional de Mecánica de Suelos e Ingeniería Geotécnica, Pto. Vallarta. Jalisco.
- Jaime A. (1979) “Apuntes de clase”
- Jaime A. (1980) “Comportamiento Dinámico de suelos”. X Reunión Nacional de Mecánica de suelos, Morelia Michoacán.
- Jaime A. y Bimbrera J.M. (2016) “Una revisión al diseño de cimentaciones de maquinaria”. Reunión Nacional de Ingeniería Geotécnica, Mérida Yucatán.

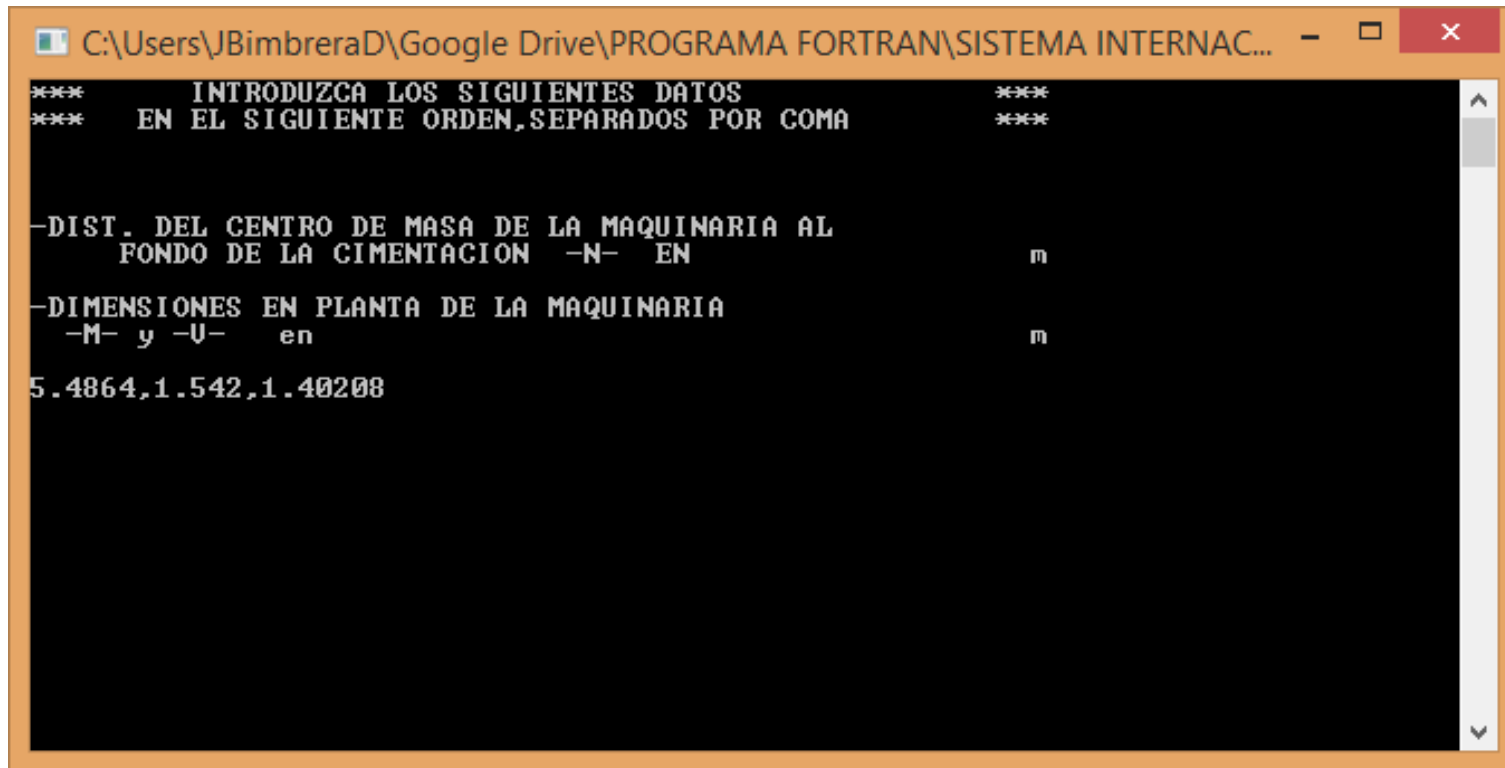
- Jaime A. y Montoya O. A. (2009) “Análisis de Confiabilidad en Geotecnia, Cuatro Enfoques”. XXIV Reunión Nacional de Mecánica de Suelos. Aguascalientes, Ags.
- Kramer, Steven.L. (1996). “Geotechnical earthquake engineering”. Prentice Hall. USA.
- Louie J.N. (2001). “Faster, Better: Shear-Wave Velocity to 100 Meters Depth from Refraction Microtremor Arrays”. Bulletin of the Seismological Society of America, 91, 2, pp. 347–364.
- MC Neill. R.L (1969) “Machine Foundations: The state of the art”. Proc. Soil Dyn. Spee. Sess. 7th ICSMFE, pp. 67-100, 1969
- Montoya O. A. (2008) “Tesis: Confiabilidad en estabilidad de taludes”. UNAM. México D.F.
- Moore, P.J (1985). “Analysis and Design of Foundations for Vibrations”. Ed.A.A Balkema, Holanda.
- Prakash. S. (1981) “Soil Dynamics”. Mc Graw Hill. USA.
- Robertson P.K. and Campanella R.G.(1986), “Seismic cpt to measure in situ shear wave velocity”. ASCE
- Richart. F.E., HALL. J.R., WOODS. R.D. (1970), “Vibrations of soils and foundations”. Prentice Hall. USA.
- U.S. Army Corps of Engineers. (1995). “Introduction to probability and reliability methods for use in geotechnical engineering”. USA. Washington D.C.
- Woods.R.D. (1978), "Measurement of dynamic soil properties ", Earthquake Eng and Soil Dynamics, Proc of the ASCE Geotechnical Eng Div Specialty Conference,Pasadena Cal, Vol I, June
- Zeevaert. L (1973) “Foundation engineering for difficult subsoil conditions” 2° Edición. Van Nostrand Reinhold. USA, Nueva York.

## Apéndice



```
C:\Users\JBimbreraD\Google Drive\PROGRAMA FORTRAN\SISTEMA INTERNAC...  
****      INTRODUCZA LAS VARIABLES      ****  
****      EN EL SIGUIENTE ORDEN SEPARADAS POR COMA      ****  
  
-FRECUENCIA DE OPERACION DE LA MAQUINARIA -F0- EN      RPM  
-PESO DE LA MAQUINARIA -MW- EN                          kg  
-PESO DE LA CIMENTACIEN -FW- EN                          kg  
-PESO UOLUMETRICO HUMEDO DEL SUELO -SW- EN              kg/m3  
-LONGITUD DE LA CIMENTACIEN -L- SIENDO L=2D EN          m  
-ANCHO DE LA CIMENTACIEN -W- EN                          m  
-ALTURA DE LA CIMENTACIEN -H- EN                        m  
  
1800,77.1107,35470.923,1521.9,5.1816,1.40208,4.8768
```

Figura 10.1 Introducción de datos de la primera ventana del programa



```
C:\Users\JBimbreraD\Google Drive\PROGRAMA FORTRAN\SISTEMA INTERNAC... - □ ×
***      INTRODUCZA LOS SIGUIENTES DATOS      ***
***      EN EL SIGUIENTE ORDEN,SEPARADOS POR COMA      ***

-DIST. DEL CENTRO DE MASA DE LA MAQUINARIA AL
  FONDO DE LA CIMENTACION  -N-  EN                      m
-DIMENSIONES EN PLANTA DE LA MAQUINARIA
  -M- y -U-  en                      m
5.4864,1.542,1.40208
```

*Figura 10.2 Introducción de datos de la segunda ventana del programa*

```

-----ATENCIËN-----
SI SE CONOCE EL MODULO DE REACCION "CZ" DEL SUELO
ENTONCES SE DEBE REALIZAR EL SIGUIENTE PROCESO
AL MËDULO DE POISSON P ASIGNE UN VALOR DE CERO AL
IGUAL QUE AL MODULO DE RESISTENCIA AL CORTANTE "G"
EN CASO DE NO CONOCER EL "CZ" DEBERA CONOCER
LOS VALORESDE LA RELACION DE POISSON Y DEL MODULO G
POR LO TANTO UTILIZARA SE ANALIZARA EL SISTEMA
EMPLEANDO ESTOS DOS PARAMETROS
POR LO TANTO INTRODUZCA COMO CERO AL MËDULO DE REACCION-
CZ Y DE LE LOS VALORES A LAS VARIABLES P Y G
INTRODUZCA LOS VALORES DE LOS DATOS EN EL SIGUIENTE ORDEN
SEPARADOS POR COMA
MODULO DE REACCIËN -CZ- EN kg/m3
RELACION DE POISSON -P-
MODULO DINAMICO AL CORTE -G- "kgf/m2"
0,0.4,2176102.68

```

Figura 10.3 Introducción de datos tercera ventana del programa (CASO MÓDULO G)

```

-----ATENCIËN-----
- SI SE CONOCE EL MODULO DE REACCION "CZ" DEL SUELO -
- ENTONCES SE DEBE REALIZAR EL SIGUIENTE PROCESO -
- AL MËDULO DE POISSON P ASIGNE UN VALOR DE CERO AL -
- IGUAL QUE AL MODULO DE RESISTENCIA AL CORTANTE "G" -
-
- EN CASO DE NO CONOCER EL "CZ" DEBERA CONOCER -
- LOS VALORES DE LA RELACION DE POISSON Y DEL MODULO G -
- POR LO TANTO UTILIZARA SE ANALIZARA EL SISTEMA -
- EMPLEANDO ESTOS DOS PARAMETROS -
- POR LO TANTO INTRODUZCA COMO CERO AL MËDULO DE REACCION-
- CZ Y DE LE LOS VALORES A LAS VARIABLES P Y G -
-----
INTRODUZCA LOS VALORES DE LOS DATOS EN EL SIGUIENTE ORDEN
          SEPARADOS POR COMA
-MODULO DE REACCIËN -CZ- EN                kg/m3
-RELACION DE POISSON -P-
-MODULO DINAMICO AL CORTE -G-                "kgf/m2"

3043508,0,0

```

Figura 10.4 Introducción de datos tercera ventana del programa (CASO MÓDULO DE REACCIÓN)





```
C:\Users\JBimbreraD\Google Drive\PROGRAMA FORTRAN\SISTEMA INTERNAC...  
*****  
* SI USARA LA OPCION CON EL MODULO DE REACCIEN ESCRIBA 1*  
* SI USARA LA OPCION CON EL MODULO CORT ESCRIBA -1 *  
*****
```

*Figura 10.5 Elección del método a utilizar.*

```

C:\Users\JBimbreraD\Google Drive\PROGRAMA FORTRAN\SISTEMA INTERNAC...
*****
* INTRODUCZA AHORA LOS DATOS DE LAS FUERZAS GENERADAS *
*   POR LA MAQUINARIA EN EL SIGUIENTE ORDEN           *
*   SEPARADAS POR COMAS                               *
*****
-FUERZA VERTICAL PRIMARIA      -UP- EN          kgf
-FUERZA VERTICAL SECUNDARIA   -US- EN          kgf
-FUERZA HORIZONTAL PRIMARIA   -HP- EN          kgf
-FUERZA HORIZONTAL SECUNDARIA -HS- EN          kgf
-PAR VERTICAL PRIMARIA       -TP- EN          kgf *m
-PAR VERTICAL SECUNDARIA     -TS- EN          kgf *m
-PAR HORIZONTAL PRIMARIA     -RP- EN          kgf *m
-PAR HORIZONTAL SECUNDARIA   -RS- EN          kgf *m

2052.51,0,0,0,2189.4056,0,0,0
    
```

Figura 10.6 Introducción de las fuerzas generadas por la maquinaria