



**FACULTAD DE INGENIERÍA UNAM
DIVISIÓN DE EDUCACIÓN CONTINUA**

A LOS ASISTENTES A LOS CURSOS

Las autoridades de la Facultad de Ingeniería, por conducto del Jefe de la División de Educación Continua, otorgan una constancia de asistencia a quienes cumplan con los requisitos establecidos para cada curso.

El control de asistencia se llevará a cabo a través de la persona que le entregó el material didáctico y será registrada por las autoridades de la División, con el fin de entregarle constancia a los alumnos que cumplan como mínimo el 80% de asistencia.

Recomendamos a los asistentes recojan su constancia en la fecha que se les señale al término del evento. La DECFI solo las retendrá por el periodo de un año, pasado este tiempo no se hará responsable de este documento.

Se recomienda a los alumnos participar activamente con sus ideas y experiencias, pues los cursos que ofrece la División están planeados para que los profesores expongan una tesis, pero sobre todo, para que coordinen las opiniones de todos los interesados, constituyendo verdaderos seminarios.

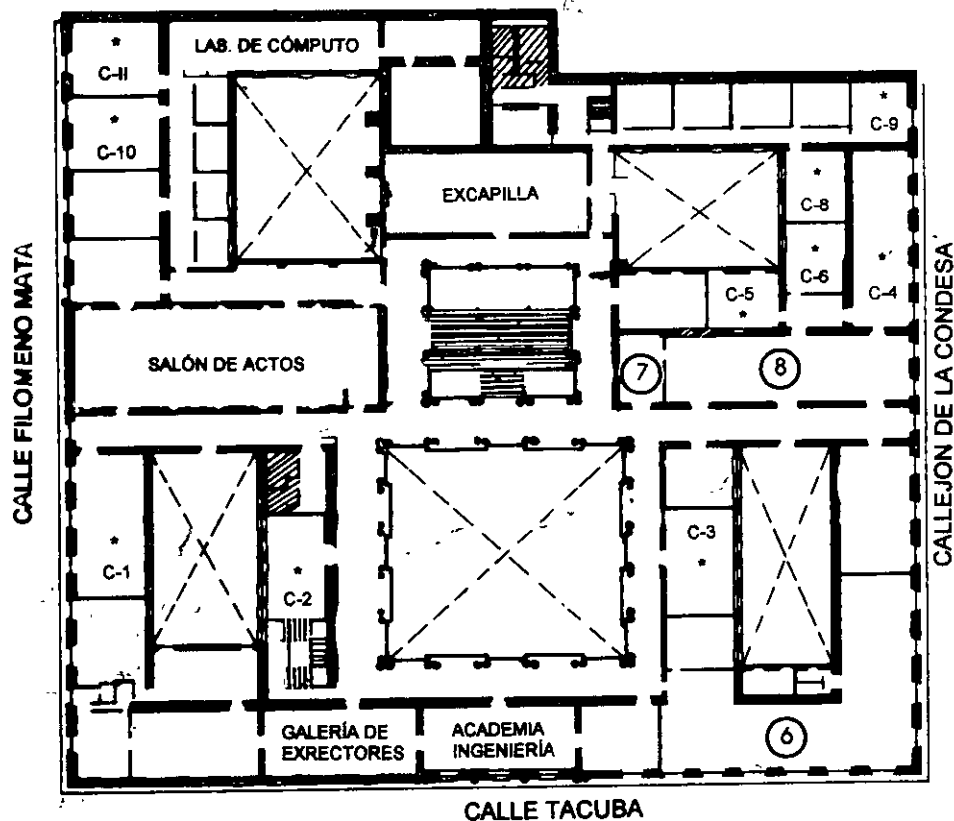
Es muy importante que todos los asistentes llenen y entreguen su solicitud de inscripción al inicio del curso, información que servirá para integrar un directorio de asistentes.

Con el objeto de mejorar los servicios que la División de Educación Continua ofrece, al final del curso deberán requisitar y entregar la evaluación a través de un cuestionario diseñado para emitir juicios anónimos.

Se recomienda llenar dicha evaluación conforme los profesores impartan sus clases, a efecto de llenar en la última sesión las evaluaciones y con esto sean más fehacientes sus apreciaciones.

Atentamente
División de Educación Continua

PALACIO DE MINERÍA



GUÍA DE LOCALIZACIÓN

1. ACCESO
2. BIBLIOTECA HISTÓRICA
3. LIBRERÍA UNAM
4. CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN "ING. BRUNO MASCANZONI"
5. PROGRAMA DE APOYO A LA TITULACIÓN
6. OFICINAS GENERALES
7. ENTREGA DE MATERIAL Y CONTROL DE ASISTENCIA
8. SALA DE DESCANSO

SANITARIOS

* AULAS

1er. PISO

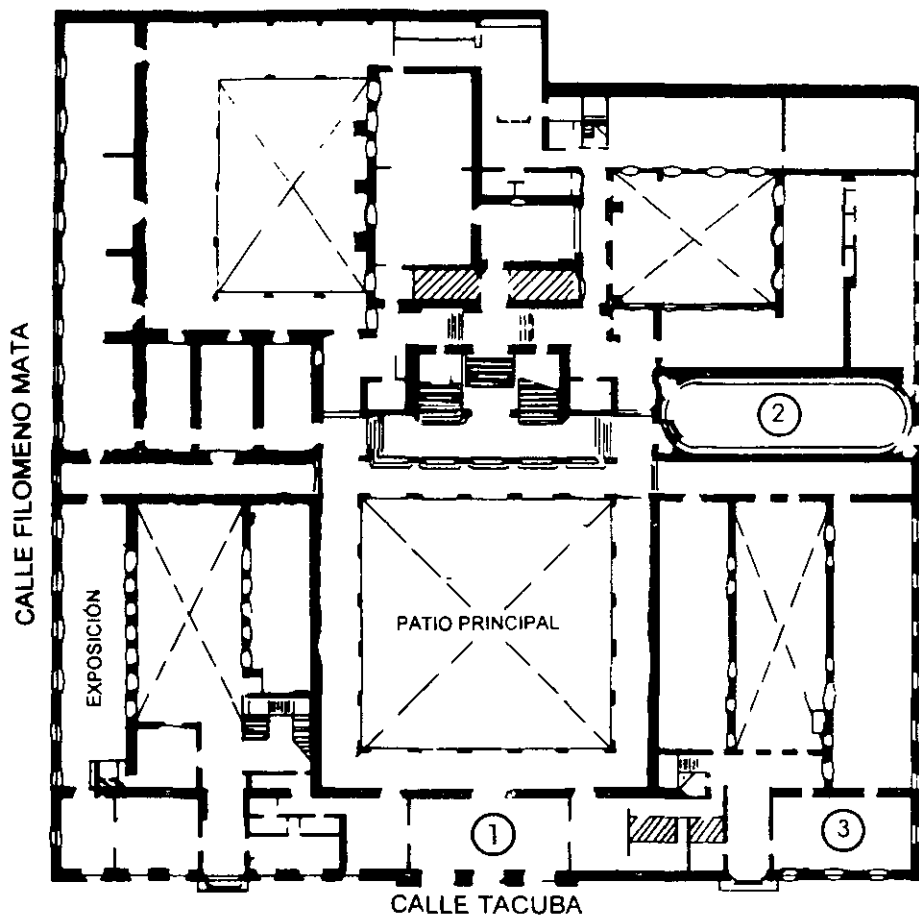


DIVISIÓN DE EDUCACIÓN CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERÍA U.N.A.M.
CURSOS ABIERTOS

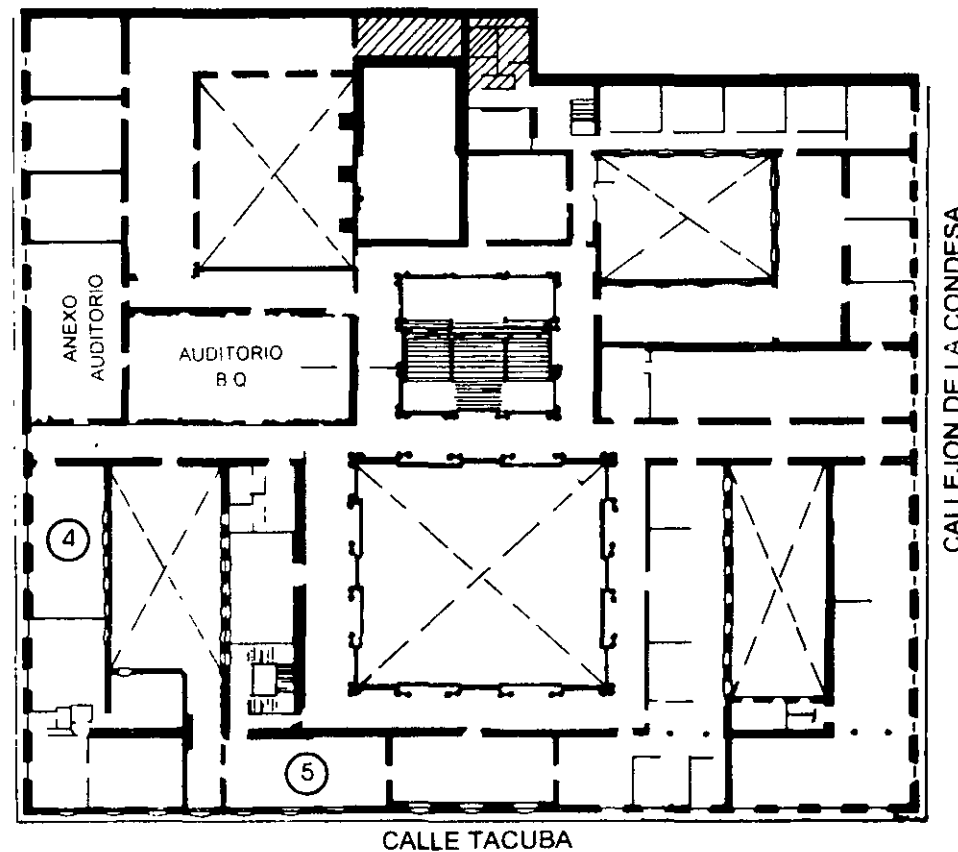
DIVISIÓN DE EDUCACIÓN CONTINUA



PALACIO DE MINERIA



PLANTA BAJA



MEZZANINNE



FACULTAD DE INGENIERÍA UNAM
DIVISIÓN DE EDUCACIÓN CONTINUA



División de Educación Continua, Facultad de Ingeniería, UNAM.

CURSOS ABIERTOS

SISTEMAS ELÉCTRICOS DE POTENCIA I

CA 178

TEMA

ÁLGEBRA MATRICIAL APLICADA AL
ANÁLISIS DE REDES ELÉCTRICAS

**EXPOSITORES: ING. ESTHER BARRIOS MARTÍNEZ E
ING. ALBERTO CORTES MONDRAGON
DEL 25 DE JUNIO AL 04 DE JULIO DE 2007
PALACIO DE MINERÍA**

DIPLOMADO EN SISTEMAS ELÉCTRICOS DE POTENCIA

MÓDULO I

SISTEMAS ELÉCTRICOS DE POTENCIA I

TEMA:

ÁLGEBRA MATRICIAL APLICADA AL ANÁLISIS DE REDES ELÉCTRICAS

ALBERTO CORTES MONDRAGON

ÁLGEBRA MATRICIAL APLICADA AL ANÁLISIS DE REDES ELÉCTRICAS

INTRODUCCIÓN

La representación de un sistema eléctrico de potencia utilizando el lenguaje matricial permite no sólo su expresión clara y concisa, si no también la manipulación de la teoría que sustenta al álgebra matricial para analizar y resolver tales sistemas y el apoyo de los paquetes computacionales desarrollados en este campo, con el ahorro consecuente de tiempo y esfuerzo que el trabajo ya invertido en esta dirección significa.

DEFINICIONES Y NOTACIÓN

Las matrices representan herramientas convenientes para la sistematización de cálculos laboriosos, ya que proveen una notación compacta para almacenar información y describir relaciones complicadas.

Definición: Una matriz se define como un arreglo ordenado de elementos, colocados de manera sistemática en renglones y columnas, generalmente se representa con una letra mayúscula A..

Sus elementos se llaman entradas de la matriz y son identificados a partir de dos subíndices que se les asignan, representando, el primero el renglón en que el elemento se encuentra y el segundo la columna que ocupa, estos subíndices funcionan como las coordenadas que permiten localizarlos dentro de la matriz. Comúnmente se utilizan letras minúsculas para representar las entradas de una matriz:

$$A = [a_{ij}]$$

Donde: $i = 1, 2, \dots, m.$
 $j = 1, 2, \dots, n.$

En forma concisa, o bien en forma desarrollada:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Estas entradas pueden ser elementos cualitativos o cuantitativos. Para los intereses del curso se hará énfasis sobre los segundos, que pueden ser números reales o números complejos.

ORDEN DE UNA MATRIZ

El orden de una matriz es la pareja ordenada de números naturales que corresponden respectivamente al número de renglones y columnas que la forman, esto es, el primer número representa los renglones y el segundo las columnas, así una matriz que tiene "m" renglones y "n" columnas se dice que es una matriz de orden "m x n" y se indica $A_{m \times n}$.

MATRICES ESPECIALES

Algunas matrices con características especiales cobran importancia por la frecuencia con la que se presentan en las aplicaciones.

MATRIZ CUADRADA:

Es una matriz que consta del mismo número de renglones que de columnas por lo que su orden se indica con un solo número natural. En una matriz cuadrada A_n , las entradas a_{11} constituyen lo que se conoce como diagonal principal.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Donde: $m = n$

Los siguientes son casos particulares de éste tipo de matrices:

MATRIZ TRIANGULAR SUPERIOR. Es una matriz cuadrada en la que las entradas a_{ij} son cero para $i > j$, esto es, las entradas debajo de la diagonal principal son nulas:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{mn} \end{bmatrix}$$

MATRIZ TRIANGULAR INFERIOR. Es una matriz cuadrada en la que las entradas a_{ij} son cero para $i < j$, esto es, las entradas arriba de la diagonal principal son nulas:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{31} & a_{mn} \end{bmatrix}$$

MATRIZ DIAGONAL: En la que los elementos de la diagonal son iguales se llama matriz escalar, el caso particular de matriz escalar con los elementos de la diagonal iguales a uno, es la matriz identidad.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Una matriz diagonal en la que los elementos de la diagonal son iguales se llama matriz escalar, el caso particular de la matriz escalar con los elementos de la diagonal iguales a uno, es la matriz identidad.

$$I_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & 1 \end{bmatrix}$$

MATRIZ SIMÉTRICA. Es una matriz en la que las entradas satisfacen la relación $a_{ij} = a_{ji}$ para toda $i, j = 1, \dots, n$

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ -1 & 8 & 3 \\ 0 & 3 & 10 \end{bmatrix}$$

Se llama MATRIZ ANTISIMÉTRICA a aquella en la que la relación que satisfacen sus entradas es $a_{ij} = -a_{ji}$, para toda $i, j = 1, \dots, n$. Note que los elementos de la diagonal satisfacen entonces que $a_{ii} = -a_{ii}$, es decir, deben ser nulos.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 & -3 & -4 \\ 1 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

MATRIZ RECTANGULAR. Es una matriz en la que el número de renglones no coincide con el de columnas, $m \neq n$, todas las matrices no cuadradas son rectangulares, entre las matrices rectangulares con especial interés se encuentran las siguientes:

MATRIZ RENGLON o vector renglón, es una matriz formada por un solo renglón, su orden es $1 \times n$.

MATRIZ COLUMNA o vector columna, es una matriz con una sola columna, su orden es $m \times 1$.

Entonces una matriz de $m \times n$ puede considerarse compuesta por m vectores renglón o n vectores columna:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \\ \vdots \\ a^n \end{bmatrix}$$

Los elementos es un vector generalmente, se indican solo con un subíndice. Una letra negrita con índice superior representa vector columna y con índice inferior corresponde a un vector renglón.

Se dan a continuación algunos ejemplos de marices y vectores:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 3 \\ 5 & 9 & 6 \end{bmatrix} 3 \times 3$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} 2 \times 2$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & -5 \end{bmatrix} 1 \times 4$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix} 3 \times 1$$

Un vector se llama vector unidad si solo tiene un elemento diferente de cero, y este es igual a uno, se simboliza con e_i , donde i indica el lugar en el que se encuentra el uno.

VECTOR SUMA Es un vector que tiene todas sus componentes iguales a uno, su nombre se debe al efecto que tiene su operación con otra matriz.

MATRIZ NULA. Es aquella en la que todos sus elementos son iguales a cero.

MATRIZ DISPERSA Es aquella en la que la mayor parte de sus entradas es igual a cero.

RELACIÓN ENTRE MATRICES

Entre matrices del mismo orden se establece una relación de equivalencia que corresponde a la igualdad entre las matrices.

Dos matrices son iguales si satisfacen las condiciones:

- 1) Tienen el mismo orden
- 2) Son iguales elemento a elemento

$A_{m \times n} = B_{m \times n}$ si y sólo si $a_{ij} = b_{ij}$, para $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$.

Dadas dos matrices del mismo orden, en ocasiones se puede establecer una relación de desigualdad.

Se dice que $A_{m \times n} > B_{m \times n}$ si y sólo si cada elemento $a_{ij} \geq b_{ij}$ correspondientes y existe al menos un para que satisfice que $a_{rs} > b_{rs}$.

OPERACIONES ENTRE MATRICES

TRANSPOSICION. Es más que una operación entre matrices, una transformación de la matriz que convierte cada renglón en columna y cada columna en renglón. La transpuesta de la matriz A se representa por A^T . Si la matriz A es de orden $m \times n$ la matriz A^T será de orden $n \times m$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}_{3 \times 2} \quad A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

- La transpuesta de matriz transpuesta es la matriz original $(A^T)^T = A$
- La transpuesta de una matriz simétrica es igual a la matriz original.
 $A^T = A$.
- Si A es una matriz antisimétrica entonces $A^T = -A$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 8 \\ -3 & 5 & 7 \\ 8 & 7 & 9 \end{bmatrix} \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 8 \\ -3 & 5 & 7 \\ 8 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

Otra transformación de matrices, aplicada a las matrices cuyas entradas son números complejos es la CONJUGACIÓN:

MATRIZ CONJUGADA. La matriz conjugada de una matriz compleja, indicada como A , se encuentra reemplazando cada elemento de A por su complejo conjugado.

$$A = \begin{bmatrix} 5i & 4 \\ 8+6i & 1+5i \end{bmatrix} \quad A^* = \begin{bmatrix} -5i & 4 \\ 8-6i & 1-5i \end{bmatrix}$$

MATRIZ TRASPUESTA HERMITIANA. Es la matriz compleja conjugada de A^T y se representa por A^H , esto es, $A^H = (A^T)^*$. Una matriz se llama hermitiana cuando $A^H = A$.

SUMA Y RESTA DE MATRICES

Una operación definida entre las matrices es una función con dominio en el producto cartesiano $M \times M$, es decir, las parejas ordenadas de matrices y contradominio M , donde M es el conjunto de matrices, esto es, a cada pareja de matrices le hace corresponder una matriz conocida como resultante de la operación.

La suma o resta está definida sólo para matrices del mismo orden, esto es, el dominio de la función es $M_{m \times n} \times M_{m \times n}$ y su contradominio es $M_{m \times n}$

$$+ : M_{m \times n} \times M_{m \times n} \rightarrow M_{m \times n}$$

$$+(A_{m \times n} \times B_{m \times n}) = A + B = C_{m \times n} = [c_{ij}], \text{ donde } c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 & 4 \\ 6 & 3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 8 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 3 & 4 \\ 10 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Leyes de la adición de matrices

- 1) La suma de matrices es conmutativa:
 $A + B = B + A$
- 2) La suma de matrices es asociativa:
 $A + (B+C) = (A+B) + C = A + B + C$
- 3) Existe un neutro aditivo, la matriz nula:
 $A + 0 = 0 + A = A$
- 4) Existe el inverso aditivo: Para cada matriz A existe una matriz B tal que $A + B = 0$, a esta matriz B se le llama inverso aditivo de A y se representa como $-A$.
- 5) $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T$

Múltiplos de matrices

Parece natural que $A + A = 2A$, el producto del número dos por la matriz A, pero $[a_{ij}] + [a_{ij}] = 2[a_{ij}]$ por lo que $[2a_{ij}] = 2[a_{ij}]$ es decir, la forma natural de multiplicar un número por una matriz es multiplicar por dicho número cada elemento de la matriz.

Si A es una matriz y k un número real o complejo, también llamado escalar, entonces el múltiplo escalar kA de la matriz A es la matriz del mismo orden que A que tiene como entradas los productos de cada una de las entradas de A por el escalar k.

$$kA = B$$

Donde los elementos $b_{ij} = kA_{ij}$ para toda i y j

$$k \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{bmatrix}$$

Leyes de la multiplicación de una matriz por un escalar:

- 1) $(r + s)A = rA + sA$
- 2) $r(sA) = (rs)A$
- 3) $r(A + B) = rA + rB$
- 4) $(-1)A = -A$
- 5) $0A = 0$
- 6) $r0 = 0$
- 7) $(rA)^T = rA^T$

Hasta aquí las matrices se han comportado de manera muy similar a los números, las diferencias se presentan cuando se define la siguiente operación, la multiplicación entre matrices.

MULTIPLICACIÓN DE MATRICES

La multiplicación es una función

$$+ : M_{m \times n} \times M_{n \times p} \rightarrow M_{m \times p}$$

Si u es un vector renglón orden $1 \times n$ y v es un vector columna de orden $n \times 1$ entonces uv es una matriz 1×1 que se obtiene como:

$$\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \dots & \dots & u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n$$

El resultado de esta operación es una matriz de 1×1 , no un número.

Multiplicación de matrices. El producto de dos matrices A y B está definido únicamente cuando el número de columnas de A es igual al número de renglones de B . Si se cumple esta condición decimos que las matrices son conformables para esta operación, note que la conformabilidad con respecto a la suma se reduce a la igualdad del orden de las matrices.

El producto de la matriz A de orden m x q y la matriz B de orden q x n dará como resultado la matriz C de orden m x n.

$$A_{m \times q} \times B_{q \times n} = C_{m \times n}$$

Cualquier elemento c_{ij} de C es la suma de los productos de los correspondientes elementos de i-ésimo renglón de a y la j-ésima columna de B.

$$C_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{iq} b_{qj}$$

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^q a_{ik} b_{kj} \quad \begin{matrix} i=1,2,\dots,m \\ j=1,2,\dots,n \end{matrix}$$

Ejemplos

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \times \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}_{2 \times 1} = \begin{bmatrix} 3 \times 5 + 2 \times 6 \\ 1 \times 5 + 4 \times 6 \end{bmatrix}_{2 \times 1} = \begin{bmatrix} 27 \\ 29 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}_{1 \times 3} \times \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}_{3 \times 1} = \begin{bmatrix} 1 \times 4 + 2 \times 5 + 3 \times 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26 \end{bmatrix}_{1 \times 1}$$

Al efectuar el producto $A \times B = C$ se acostumbra a decir que la matriz B es premultiplicada por la matriz A. También se dice que la matriz A es postmultiplicada por la matriz B. La razón por lo que se hace esta diferencia entre pre y post multiplicación es muy importante ya que la multiplicación matricial no es conmutativa, es decir, en general:

$$A \times B \neq B \times A$$

Propiedades de la multiplicación de matrices:

Como se hizo notar en el párrafo anterior, la multiplicación de matrices no es conmutativa, sin embargo existe un caso especial en el que el orden de la multiplicación no tiene importancia: cuando cada matriz es alguna potencia positiva de una matriz cuadrada:

$$A^1 = A, A^2 = AA, A^3 = AAA, \dots, A^n = AA \dots A \text{ (n veces)}$$
$$\text{entonces } A^r A^s = A^{r+s} = A^s A^r$$

Aún para matrices pequeñas el cálculo a mano de potencias de una matriz es un trabajo tedioso, para esto, un programa de computo puede ser extremadamente útil.

Leyes de la multiplicación de matrices

1) Asociativa $A(BC) = (AB)C = ABC$

2) Distributiva $(A \pm B)C = AC \pm BC$
 $A(B \pm C) = AB \pm AC$

3) Existencia del neutro multiplicativo
 $A I_d = I_d A = A$

4) $r(AB) = (rA)B = A(rB)$

5) $A0 = 0$
 $0B = 0$

6) Para una matriz cuadrada A:
 $(A)^0 = I_d$ (definición)
 $(A)^1 = A$ (definición)
 $(A)^{r+1} = A(A)^r$ (para r número natural, $r \in \mathbb{N}$)
 $(A)^r (A)^s = A^{r+s}$ ($r, s \in \mathbb{N}$)

7) Existen divisores de cero, esto es, $AB = 0$, con $A \neq 0$ y $B \neq 0$, por ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

8) La transposición de un producto matricial es igual al producto de las matrices transpuestas en orden inverso es decir:

$$(AB)^T = B^T A^T$$

Asimismo

$$(ABC)^T = C^T B^T A^T$$

$$(AB)^H = B^H A^H$$

INVERSION DE MATRICES

Dada una matriz A,

- Cualquier matriz L para la que $LA = I_d$ se llama inversa izquierda de la matriz A.
- Cualquier matriz R tal que $AR = I_d$, se llama inversa derecha de A.
- Cualquier matriz X para la cual $XA = AX = I_d$ se llama inversa bilateral, o simplemente inversa de A y se la representa por A^{-1} .

A una matriz con inversa bilateral se le conoce como matriz no singular, regular, o matriz invertible. Cuando no tiene inversa se le dice matriz singular.

Si A es una matriz de orden $m \times n$, entonces cualquier inversa izquierda L o inversa derecha R es de orden $n \times m$.

- Dada una matriz A, si existen una inversa izquierda L y una inversa derecha R, son iguales y la matriz A tiene inversa bilateral.

$$L = LI_d = L(AR) = (LA)R = I_d R = R$$

- La inversa bilateral es única

Si X y Y son dos inversas bilaterales, repitiendo el razonamiento del inciso anterior se concluye su igualdad

- La inversa de una matriz diagonal es otra matriz diagonal cuyos elementos son los inversos de los elementos de la matriz original.

$$\begin{bmatrix} 2 & & \\ & -3 & \\ & & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & & \\ & -1/3 & \\ & & 1/4 \end{bmatrix}$$

Si A y B son dos matrices no singulares de orden nxn, entonces:

- a) AB es no singular y $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- b) A^{-1} es no singular y $(A^{-1})^{-1} = A$.
- c) A^T y A^H son no singulares y $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ y $(A^H)^{-1} = (A^{-1})^H$

PARTICIÓN DE MATRICES

En ciertas aplicaciones se manejan matrices de orden muy elevado, estos casos presentan dificultades en la organización de los cálculos, el tiempo requerido para obtener los resultados o la memoria necesaria en la computadora aumentan en forma exponencial al orden de la matriz. Existen métodos que permiten sortear estas dificultades, uno de ellos consiste en particionar la matriz en otras de menores dimensiones.

Al particionar una matriz de orden elevado en varias submatrices de menor orden, se trazan líneas de puntos que indican el esquema de partición que se ha utilizado. El único requisito necesario es el de mantener la conformabilidad de las operaciones entre las submatrices correspondientes.

$$AB = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1B_1 + A_2B_3 & A_1B_2 + A_2B_4 \\ A_3B_1 + A_4B_3 & A_3B_2 + A_4B_4 \end{bmatrix}$$

Una matriz cuadrada compuesta por bloques diagonales puede ser invertida tomando las inversas de las submatrices respectivas:

$$\begin{bmatrix} A & & \\ & B & \\ & & C \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & & \\ & B^{-1} & \\ & & C^{-1} \end{bmatrix}$$

OPERACIONES ELEMENTALES SOBRE RENGLONES Y COLUMNAS

Las operaciones elementales son operaciones que se efectúan entre los elementos de una matriz para transformarla en otra equivalente, estas operaciones se aplican sobre los renglones o columnas de la matriz. Existen tres tipos de operaciones elementales:

- a) Intercambio del renglón "k" y el renglón "m" de una matriz

$$\begin{matrix} k \\ m \end{matrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} m \\ k \end{matrix}$$

- b) Multiplicación del renglón k por una constante diferente de cero

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} \quad \cdot 2 \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$$

- c) Suma al renglón "k" del renglón "m" multiplicado por "c" siendo c una constante diferente de cero.

$$\begin{matrix} m \\ k \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{--- } k(-3m) \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Estas operaciones pueden ser aplicadas también sobre las columnas de la matriz utilizando la denominación de operaciones elementales sobre columnas.

MATRICES ELEMENTALES

Reciben el nombre de matrices elementales aquellas que se obtienen aplicando una operación elemental a la matriz identidad del orden correspondiente, por lo que existen tres tipos de matrices elementales, una correspondiente a cada operación:

- a) E_{kn} que es la matriz identidad con los renglons k y n intercambiados, así E_{23} es igual a:

$$E_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- b) $E_i(k)$ que es el resultado de multiplicar el renglón i de la matriz identidad por la constante k :

$$E_3(-7) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}$$

- c) $E_{km}(c)$, resultado de cambiar el renglón k de la matriz identidad por la suma del renglón k y el renglón m multiplicado por c .

$$E_{23}(5) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cuando una matriz elemental premultiplicada a una matriz cualquiera A , la matriz resultante presenta el mismo cambio en sus renglones que se efectuó sobre la matriz identidad para obtener la matriz elemental.

$$E_{32}(-5)A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/5 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como puede observarse las operaciones elementales efectuadas sobre los renglones de una matriz no son sino casos particulares de multiplicación de matrices, en las que se utilizan las matrices elementales como uno de los factores.

Las operaciones elementales sobre las columnas de una matriz son, de la misma manera, resultado de la multiplicación por matrices elementales, pero en este caso se trata de posmultiplicación. Si se postmultiplica una matriz que presenta el mismo cambio sobre sus columnas que se efectuó sobre las columnas de la matriz identidad para obtener E , por ejemplo a la columna tres se le sumó la primera

multiplicada por -3 para obtener $E_{31}(-3)$, a la tercera columna se le sumó la primera multiplicada por -3, para obtener la matriz resultante:

$$AE_{31}(-3) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 5 \\ 3 & 9 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & -1 \\ 3 & 9 & 1 \end{bmatrix}$$

PROPIEDADES DE LAS MATRICES ELEMENTALES

Cada matriz elemental es no singular y su inversa es otra matriz elemental:

a) $E_y^{-1} = E_{yy} = E_y$

b) $E_i^{-1}(c) = E_i(1/c)$ con $c \neq 0$.

c) $E_{ij}^{-1}(c) = E_{ij}(-c)$ con $i \neq j$.

Es importante resaltar los siguientes hechos:

- Cualquier secuencia de operaciones elementales de renglón es equivalente a la premultiplicación por el producto de una sucesión de matrices elementales.
- Cada matriz elemental es singular y el producto de matrices no singulares es no singular

Entonces si U se obtiene de aplicar a A una secuencia de operaciones elementales renglón, existe una matriz no singular F tal que $FA = U$, esto es, $A = F^{-1}U$.

SOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES POR MÉTODOS MATRICIALES Y CALCULO DE LA INVERSA DE UNA MATRIZ.

La aplicación principal del algebra matricial al análisis de sistemas de potencia es la solución de conjuntos de ecuaciones lineales de la forma.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \cdot & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

Este conjunto de ecuaciones puede escribirse en notación matricial como:

$$A x = b$$

Donde:

A = matriz cuadrada de coeficientes
b = vector de constantes
x = vector de incógnitas

El valor del vector de incógnitas "x" se puede encontrar premultiplicando ambos lados de la ecuación por la inversa de A (suponiendo que dicha inversa existe, es decir la matriz A es no singular).

$$A^{-1} A x = A^{-1} b$$

$$x = A^{-1} b$$

En la práctica de los sistemas grandes de ecuaciones no se resuelven por inversión directa, sino que se utilizan técnicas de dispersidad y algunos de los procesos de eliminación Gaussiana.

Un conjunto de ecuaciones lineales se puede resolver mediante operaciones elementales sobre los renglones. El objetivo de estas operaciones es el transformar la matriz de coeficiente en una matriz triangular superior, con lo cual es posible obtener la solución por sustitución hacia atrás. Si cada operación sobre los renglones de A se efectúa también sobre los elementos correspondientes del vector b, el nuevo conjunto de ecuaciones $Ax = b$ tendrá el mismo vector de solución x del sistema original. En la práctica, las operaciones elementales se efectúan sobre la matriz aumentada. $[A | b]$ hasta que la matriz A es convertida a forma triangular. Una vez logrado esto el vector x se obtiene fácilmente por sustitución directa, como se a continuación:

MATRIZ AUMENTADA. Se forma anexando una matriz o vector de dimensiones adecuadas a la izquierda o a la derecha de otra. Por ejemplo, si

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 1 & 5 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\left[A \mid B \right] = \left[\begin{array}{ccc|cc} 2 & 3 & 8 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 4 & -1 & 2 \end{array} \right]$$

Considérese el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ X_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{bmatrix}$$

El proceso consiste en llevar la matriz aumentada

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array} \right]$$

A la forma

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & 1 & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & b_n \end{array} \right]$$

Mediante operaciones elementales sobre los renglones. La solución para x de este nuevo conjunto de ecuaciones se obtiene por sustitución hacia atrás de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} x_n &= b_n \\ x_{n-1} &= b_{n-1} - a_{n-1, n} x_n \\ x_{n-2} &= b_{n-2} - a_{n-2, n} x_n - a_{n-2, n-1} x_{n-1} \\ &\vdots \\ &\vdots \\ x_1 &= b_1 - \sum_{j=2}^n a_{1j} x_j \end{aligned}$$

La fórmula recursiva para el proceso de sustitución hacia atrás se puede entonces escribir como:

$$x_i = b_i - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j; \quad i=n, n-2, \dots, 2, 1$$

Ejemplo: Considere el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{bmatrix} -2x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 6x_4 = -4 \\ -3x_1 + 6x_2 + 3x_3 - 15x_4 = -3 \\ 5x_1 - 8x_2 - x_3 + 17x_4 = 9 \\ x_1 + x_2 + 11x_3 + 7x_4 = 7 \end{bmatrix}$$

En forma matricial

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & -4 & -6 \\ -3 & 6 & 3 & -15 \\ 5 & -8 & -1 & 17 \\ 1 & 1 & 11 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \\ 9 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Matriz aumentada:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -2 & 2 & -4 & -6 & -4 \\ -3 & 6 & 3 & -15 & -3 \\ 5 & -8 & -1 & 17 & 9 \\ 1 & 1 & 11 & 7 & 7 \end{array} \right]$$

Operaciones elementales sobre renglones:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -2 & 2 & -4 & -6 & -4 \\ -3 & 6 & 3 & -15 & -3 \\ 5 & -8 & -1 & 17 & 9 \\ 1 & 1 & 11 & 7 & 7 \end{array} \right] \xrightarrow{E_1(-1/2)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 & 2 \\ -3 & 6 & 3 & -15 & -3 \\ 5 & -8 & -1 & 17 & 9 \\ 1 & 1 & 11 & 7 & 7 \end{array} \right] \begin{array}{l} \xrightarrow{E_{21}(-3)} \\ \xrightarrow{E_{31}(-5)} \\ \xrightarrow{E_{41}(-1)} \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 9 & -6 & 3 \\ 0 & -3 & -11 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 9 & 4 & 5 \end{array} \right] \begin{array}{l} \xrightarrow{E_2(1/3)} \\ \xrightarrow{E_{32}(3)} \\ \xrightarrow{E_{42}(-2)} \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 8 & 3 \end{array} \right] \begin{array}{l} \xrightarrow{E_3(-1/2)} \\ \xrightarrow{E_{43}(-3)} \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 6 \end{array} \right]$$

Como puede observarse se ha completado la eliminación de Gauss obteniendo la forma reducida U, esto es, $FA = U$:

$$E_{43}(-3) \ E_3(-1/2) \ E_{42}(-2) \ E_{32}(3) \ E_2(1/3) \ E_{41}(-1) \ E_{31}(-5) \ E_{21}(3) \ E_1(-1/2) \ A = U$$

$$\text{con } F = E_{43}(-3) \ E_3(-1/2) \ E_{42}(-2) \ E_{32}(3) \ E_2(1/3) \ E_{41}(-1) \ E_{31}(-5) \ E_{21}(3) \ E_1(-1/2)$$

y

$$U = \left[\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right]$$

Para utilizar la sustitución en reversa, se pasa al sistema de ecuaciones, obteniendo:

$$\begin{array}{rccccrcr} x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 2 \\ & & x_2 & + & 3x_3 & - & 2x_4 & = & 1 \\ & & & & x_3 & + & 2x_4 & = & -1 \\ & & & & & & 2x_4 & = & 6 \end{array}$$

Entonces $x_4 = 3$, $x_3 = -1 - 6 = -7$, $x_2 = 1 + 6 + 21 = 28$, $x_1 = 2 - 9 + 14 + 28 = 35$, el vector solución es: $[35, 28, -7, 3]^T$

ALGORITMO DE LA ELIMINACIÓN DE GAUSS

La eliminación de Gauss procede a eliminar en las columnas, comenzando por la 1, siguiendo con la 2, así sucesivamente; se usa el renglón r_i para eliminar en la columna j , además se puede intercambiar un renglón inferior con el j -ésimo antes de la eliminación.

Paso 1) Sea $J = 1$ y $r_1 = 1$; utilice el renglón r_j para eliminar en la columna j de la matriz aumentada actual como se indica en los pasos del 2 al 6.

Paso 2) Seleccione un renglón de entre los renglones numerados r_j, r_{j+1}, \dots, m , para su uso en la eliminación de la columna J , llame a ese renglón i , de modo que el elemento (i, j) , llamado pivote, en la matriz aumentada actual sea diferente de cero, si no hay elementos diferentes de cero no se requiere eliminación, ponga $r_{j+1} = r_j$ para utilizar el mismo renglón y pase a 6.

Paso 3) Intercambie los renglones i -ésimo y r -ésimo.

Paso 4) Reemplace este renglón por si mismo dividido entre el pivote, su elemento diferente de cero en la columna j -ésima.

Paso 5) Utilice el mismo renglón para eliminar los elementos en la columna j -ésima en los renglones $r_j + 1, r_j + 2, \dots, m$. Ponga $r_{j+1} = r_j + 1$, para utilizar el siguiente renglón.

Paso 6) Si $j \leq n$ y $r_{j+1} \leq m$, aún es posible seguir eliminando, incremente j en 1 y vuelva al paso 2.

EXISTENCIA DE SOLUCIONES A SISTEMAS DE ECUACIONES

La primera variable de una ecuación, es la primera variable (leyendo de izquierda a derecha) con un coeficiente diferente de cero. La primera columna para un renglón de una matriz es la columna que contiene al primer elemento diferente de cero en ese renglón (de izquierda a derecha).

Después de completar la eliminación de Gauss en la matriz aumentada $[A \ b]$ del sistema de ecuaciones $Ax = b$, se encuentran las primeras variables y las primeras columnas de las ecuaciones reducidas y se llega a las siguientes conclusiones:

1. No existen soluciones si y sólo si la última columna es la primera columna para algún renglón.
2. De otra manera:
 - a) Existe solución única si y sólo si cada variable es primera variable para alguna ecuación
 - b) Existen infinitas de soluciones si y sólo si hay algunas variables que no son primeras variables, cada una de estas variables es una variable libre, es decir, se le puede asignar valor arbitrario, entonces cada primera variable está determinada a partir de los valores asignados a las que no son primeras variables.

El número de renglones diferentes de cero y primeras columnas que aparecen en cualquier forma reducida de una matriz A obtenida aplicando a A operaciones elementales es siempre el mismo y constituye una de las características más importantes de una matriz, se llama su rango.

DETERMINACION DE LA INVERSA DE UNA MATRIZ MEDIANTE LA ELIMINACIÓN DE GAUSS.

La eliminación de Gauss se puede prolongar hasta obtener, en lugar de una matriz triangular superior U , una matriz diagonal, es más, la matriz idéntica. Esta ampliación de la eliminación se llama Gauss-Jordan. Cuando se logra mediante operaciones elementales llegar a la identidad se tiene: $FA = I_d$, lo que implica que $F =$ producto de las matrices elementales utilizadas en la eliminación de Gauss-Jordan, es la inversa de la matriz A . Para obtenerla sin tener que efectuar el producto de las matrices elementales, al final, basta con manejar la matriz ampliada $\tilde{A} \ I_d$. Cada operación aplicada a A , se aplica a I_d , obteniendo en esta parte la matriz elemental correspondiente. Al aplicar una nueva operación, esta se aplica sobre la matriz elemental resultante de la operación anterior, con lo que se obtiene el resultado del producto de las dos operaciones, por lo que en esta parte de la matriz, lo que se va guardando es el producto de las operaciones elementales utilizadas, así al final lo que aparece es $F = A^{-1}$.

EJEMPLO: Para invertir la matriz A =

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{E_1(-1) \\ E_{31}(-1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{E_{12}(2) \\ E_{32}(-6)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 1 & -6 & 1 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -5 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 1 & -6 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{E_3(1/2) \\ E_{13}(5) \\ E_{23}(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -7/12 & -1/2 & 5/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/6 & 0 & 1/6 \\ 0 & 0 & 1 & 1/12 & -1/2 & 1/12 \end{array} \right] \text{ , de donde:}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -7/12 & -1/2 & 5/12 \\ 1/6 & 0 & 1/6 \\ 1/12 & -1/2 & 1/12 \end{bmatrix}$$

La eliminación de Gauss no siempre puede completarse satisfactoriamente, en ocasiones aparecen ceros en la diagonal, o son necesarias operaciones de intercambio para completarla. Cuando esto no sucede, el proceso es equivalente a escribir $A = LU$, de una matriz triangular inferior L y una matriz triangular superior U. U es la matriz a la que se llega, la L viene a ser F^{-1} .

Si A es una matriz de nxn entonces la eliminación de Gauss puede completarse si y sólo si U es una matriz reducida unitaria triangular superior y L es una matriz triangular inferior con los pivotes a_{ii} de la eliminación en la diagonal principal y los negativos de los multiplicadores m_{ji} de la eliminación en las subdiagonales. De modo equivalente $A = L_0 U_0$ triangular superior con los pivotes a_{ii} en la diagonal principal. $D_0 = \text{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn})$ y $a_{ii} = [U_0]_{ii} = [L]_{ii}$

Los pivotes son los elementos que sirven para eliminar los de debajo de ellos en la misma columna y los multiplicadores son los factores por los que se debe multiplicar el renglón que contiene al uno de la columna (en el que se convirtió el pivote) para eliminar el elemento correspondiente del renglón debajo de él.

EJEMPLO:

$$\begin{array}{ccc}
 & A = & \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \end{bmatrix} \\
 \begin{array}{l} \xrightarrow{E_1(-1)} \\ \xrightarrow{E_{31}(-1)} \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 6 & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \xrightarrow{E_{32}(-6)} \\ \xrightarrow{E_3(1/12)} \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

Pivotes: -1, 1, 12 Multiplicadores: -1, -6,

$$U = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 12 \end{bmatrix}$$

De otra manera, estableciendo las ecuaciones y resolviéndolas:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ L_{21} & 1 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ 0 & U_{22} & U_{23} \\ 0 & 0 & U_{33} \end{bmatrix}$$

De esta igualdad surgen las siguientes relaciones entre los elementos de A L y U:

$$\begin{array}{l}
 a_{11} = U_{11} \\
 a_{21} = L_{21} U_{11} \\
 a_{31} = L_{31} U_{11}
 \end{array}$$

De donde se pueden calcular los elementos de las primeras columnas de U y L. a continuación se tiene:

$$\begin{array}{l}
 a_{12} = U_{12} \\
 a_{22} = L_{21} U_{12} + U_{22} \\
 a_{32} = L_{31} U_{12} + L_{32} U_{22}
 \end{array}$$

relaciones que permiten calcular los elementos de la segunda columna de U y L. Finalmente para la matriz de 3 x 3 se tienen las relaciones:

$$\begin{aligned} a_{13} &= U_{13} \\ a_{23} &= L_{21} U_{13} + U_{23} \\ a_{33} &= L_{31} U_{13} + L_{32} U_{23} + U_{33} \end{aligned}$$

de las cuales se encuentran los valores de las terceras columnas de las matrices L y U.

Una vez lograda la factorización, el sistema de ecuaciones se transforma en dos sistemas más sencillos:

$$Ax = (LU)x = b, \text{ que equivale a: } \begin{cases} L(Ux) = Ly = b \\ Ux = y \end{cases}$$

Una vez que se ha encontrado y, es decir, se ha resuelto la ecuación:

$$Ly = b$$

Se procede a encontrar x mediante sustitución hacia atrás

Ambos sistemas son muy sencillos debido a la estructura triangular de las matrices.

Si $A = LU$, esto es, $FA = U$, entonces los espacios de soluciones de los sistemas $Ax = b$ y $Ux = Fb$ coinciden, por lo que basta analizar el sistema ya reducido para conocer el espacio de soluciones del primer sistema.

En esta sección se ha venido manejando la forma reducida de Gauss, a continuación se dará una caracterización de dicha forma:

Se dice que una matriz B es una forma reducida de Gauss cuando existe un $k \in \mathbb{N}$, con $0 \leq k \leq m$, donde m es el número de renglones de la matriz inicial, para el cual es válido lo siguiente:

- a. Los primeros k renglones de B son diferentes de cero, mientras que los $n - k$ restantes son cero.

- b. El primer elemento diferente de cero en cada renglón es igual a 1, y por lo tanto la columna en la que esto ocurre es una primera columna.
- c. Para las k primeras columnas, la primera para cada renglón está más a la derecha que la primera columna del renglón superior.
- d. El elemento i -ésimo en la i -ésima primera columna es igual a uno, mientras que el elemento j -ésimo es igual a cero para $j > i$.

Una vez que la matriz se ha reducido, se puede inspeccionar el espacio de soluciones correspondiente al sistema $Ax = b$, tomando en cuenta las siguientes posibilidades:

1. Si el rango de la matriz aumentada $[A | b]$ es mayor que el de A , entonces no existe solución. Como ya se mencionó, el rango de una matriz es el número de renglones diferentes de cero de la matriz reducida.
2. Si el rango de $[A | b]$ es igual al de A , e igual al número de incógnitas, entonces el sistema tiene exactamente una solución
3. Si el rango de $[A | b]$ es igual al de A , y es estrictamente menor que el número de incógnitas, entonces el sistema tiene infinidad de soluciones.

Es posible caracterizar la existencia de la inversa de una matriz a través de su rango.

Dada una matriz A de orden $m \times n$ y rango k , entonces

- a) A tiene inversa derecha si y sólo si $k = m$ y $m \leq n$.
- b) A tiene inversa izquierda si y sólo si $k = n$ y $n \leq m$.
- c) A tiene inversa bilateral si y sólo si $k = m = n$.

DETERMINANTES

Se llama determinante de una matriz a una función con dominio en el conjunto de matrices cuadradas y contradominio en los números reales (\mathbb{R}):

$$\left| \begin{array}{c} | \\ | \\ | \\ | \\ | \end{array} \right| : M_{n \times n} \longrightarrow \mathbb{R}$$

que se define en forma recursiva:

Si A es de 2x2

$$\begin{vmatrix} A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Los determinantes de las matrices de orden n se definen a partir de determinantes de matrices de orden n-1, pero para precisar esta definición se requieren algunos conceptos que se presentan a continuación:

MENORES Y COFACTORES

Si A es una matriz de nxn, el menor ij de A, que se denota por M_{ij} , es el determinante de la matriz de orden (n-1)x(n-1) que se obtiene omitiendo el i-ésimo renglón y la j-ésima columna de A. por ejemplo:

$$\text{si } A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 5 & 6 & 2 \end{bmatrix} \quad M_{23} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 20 = -8$$

El co-factor ij de A, representado por A_{ij} se calcula como $(-1)^{i+j} M_{ij}$
Por ejemplo:

$$\text{si } A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 5 & 6 & 2 \end{bmatrix} \quad C_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^3 (-26) = 26$$

Los elementos mencionados permiten definir el determinante de una matriz:

a) El determinante de una matriz $A_{n \times n}$ se calcula como:

$$|A| = \sum_{j=1}^n a_{1j} A_{1j} \quad (\text{desarrollando con respecto de los elementos de la columna } j)$$

En otras palabras $|A| = \det(A) =$ suma de los productos de los elementos del renglón j por sus cofactores, o bién:

$$|A| = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij} \quad (\text{desarrollando con respecto de los elementos de la columna } i)$$

$|A| = \det(A) =$ suma de los productos de los elementos del renglón j por sus cofactores.

Ejemplo: El determinante de la matriz A es:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 3 & 8 & 6 \end{bmatrix}$$

Si se selecciona el renglón 1 para el cálculo se tiene:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 3 & 8 & 6 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 6 \end{vmatrix} = (-1)2 \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= 1(36 - 56) - 2(30 - 21) + 4(40 - 18) = 50$$

Si se selecciona la columna 1 para el desarrollo se tiene:

$$|A| = 1 \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 6 \end{vmatrix} + (-1)5 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 8 & 6 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= 1(36 - 56) - 5(12 - 32) + 3(14 - 24) = 50$$

PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

- a) El determinante de A se puede desarrollar con respecto a cualquier renglón o cualquier columna, su valor siempre es el mismo.
- b) $\det(A) = \det(A^T)$
- c) Si cualquier renglón o columna de A es cero entonces $\det(A) = 0$
- d) Para cualquier $c \in \mathbb{R}$ y cualquier matriz $A_{n \times n}$, $\det(cA) = c^n \det(A)$
- e) Si A tiene dos renglones o columnas iguales, el $\det(A) = 0$
- f) Si A y B son iguales con excepción de su k-ésimo renglón y C es otra matriz idéntica a A y B, excepto en su k-ésimo renglón, que es la suma de los renglones correspondientes de A y B, entonces:

$$\det(C) = \det(A) + \det(B)$$

- g) Si A' se obtiene intercambiando dos renglones o dos columnas A, entonces $\det(A') = -\det(A)$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2 ; \quad \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

Entonces $\det(E_{ij}) = -1$

- h) Si todos los elementos de un renglón o todos los elementos de una columna se multiplican por una constante k, el valor del determinante resultante es $k |A|$

Entonces $\det(E_i(k)) = k$

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = ka_{11} a_{22} - ka_{12} a_{21} = k(a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21})$$

- i) Si se añade un múltiplo de una línea (renglón o columna) a una línea paralela, el valor del determinante no se altera.

Entonces $\det(E_{ij}(k)) = 1$

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 5 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 153$$

$$\det(E_{21}(2)A) = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 5+6 & 1+0 & 2+12 \\ 2 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 153$$

Las propiedades básicas de los determinantes tienen algunas consecuencias sorprendentes como:

- Una matriz es no singular si y sólo si su determinante es distinto de cero, en caso contrario es singular.
- Si A es no singular entonces $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$
- El determinante del producto de matrices es igual al producto de los determinantes de las matrices.

$$|ABC| = |A||B||C|$$

- El determinante de una matriz diagonal o de una matriz triangular es igual al producto de los elementos sobre la diagonal principal.

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 3 \times 4 \times (-1) = -12$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 2 \times 1 \times 5 = 10$$

Esta característica se puede explotar para desarrollar una técnica computacionalmente eficiente, que consiste en llevar una matriz dada a forma triangular a través de operaciones elementales sobre los renglones y columnas de la misma y una vez logrado esto efectuar el producto de los elementos de la diagonal principal.

Muchas de las aplicaciones de los determinantes se basan en que mediante ellos, las inversas de las matrices y las soluciones de las ecuaciones pueden representarse en forma compacta.

MATRIZ ADJUNTA

La adjunta de una matriz $A_{n \times n}$ $\text{adj}(A)$ es la matriz cuyas entradas son los cofactores de las entradas de la matriz A , tomados en orden traspuesto, esto es:

$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$$

Es importante notar que se de la siguiente relación:

$$A \text{adj}(A) = \det(A) I_d = \text{adj}(A) A$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{ij} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n a_{ik} A_{jk}$$

cuando $i = j$ esta suma coincide en el desarrollo del determinante de A con respecto al renglón i , pero cuando $i \neq j$ el desarrollo corresponde al determinante con respecto al renglón j de una matriz en la que el renglón i y el j coinciden, por lo que este determinante vale cero, de donde:

$$[C_{ij}] = \begin{bmatrix} \det(A) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det(A) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \det(A) \end{bmatrix} = \det(A) I_d$$

Este resultado conduce a otro método para encontrar la inversa de una matriz, dado que $A \text{adj}(A)/\det(A) = I_d \Rightarrow A^{-1} = \text{adj}(A)/\det(A)$, como puede observarse en condición necesaria y suficiente para que se de esta igualdad que $\det(A) \neq 0$

Ejemplo: Sea

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

a) Obteniendo la matriz transpuesta:

$$A^T = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

b) Obteniendo la matriz adjunta

$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -4 & -2 \\ -7 & 8 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

c) Obteniendo el determinante de A:

$$|A| = 7 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 28 - 28 + 2 = 2$$

d)

$$A^{-1} = \frac{\text{adj}(A)}{\det(A)} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -3.5 & 4 & 1.5 \\ 0.5 & -1 & 0.5 \end{bmatrix}$$

e) Comprobación

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -3.5 & 4 & 1.5 \\ 0.5 & -1 & 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

BIBLIOGRAFÍA

1. Computer Methods in Power System Analysis
Stagg and El-Abiad
Mc Graw Hill Book Co.
2. Solution of Large Networks by Matriz Methods
Homer E. Brown
John Wiley and Sons, Inc.
3. Linear Algebra
Gilbert Strang
Academic Press, Inc.
4. Engineering Problem Solving with Matlab
D. M. Etter
Prentice Hall



FACULTAD DE INGENIERÍA UNAM
DIVISIÓN DE EDUCACIÓN CONTINUA



División de Educación Continua, Facultad de Ingeniería, UNAM.

CURSOS ABIERTOS

SISTEMAS ELÉCTRICOS DE
POTENCIA I

CA 178

TEMA
SISTEMA POR UNIDAD

**EXPOSITORES: ING. ESTHER BARRIOS MARTÍNEZ E
ING. ALBERTO CORTES MONDRAGON
DEL 25 DE JUNIO AL 04 DE JULIO DE 2007
PALACIO DE MINERÍA**



FACULTAD DE INGENIERÍA

DIPLOMADO EN SISTEMAS ELÉCTRICOS DE POTENCIA

MÓDULO I

SISTEMAS ELÉCTRICOS DE POTENCIA

TEMA:

Sistema por unidad

EXPOSITORES:

ING. ESTHER BARRIOS MARTINEZ Y ALBERTO CORTES MONDRAGON



FACULTAD DE INGENIERÍA

SISTEMA EN POR UNIDAD.

Objetivo: El Ingeniero simplificará el manejo de los parámetros de los Sistemas Eléctricos de Potencia.

Contenido:

- 1 Definiciones de Por Unidad y Por Ciento
- 2 Cantidades Base
- 3 Cantidades en Por Unidad
 - 3.1 Cantidades en por unidad para sistemas monofásicos
 - 3.2 Cantidades en por unidad para sistemas trifásicos
- 4 Conversión de valores de por unidad a valores reales
- 5 Cambio de Base
- 6 Procedimiento general



FACULTAD DE INGENIERÍA

Sistema en por unidad

Los sistemas eléctricos transmiten grandes cantidades de potencia expresada en *kVA* y/o *MVA* operando a diferentes valores de tensión, cuantificados normalmente en *kV*. Estas cantidades, junto con *kW*, *kVARS*, *A*, Ω , entre otras, son usualmente expresadas en por unidad. Originalmente se usó para simplificar los cálculos a mano y también el tiempo de cómputo gastado en efectuar análisis de sistemas eléctricos de potencia.

Actualmente, con la velocidad del procesamiento de los equipos de cómputo, las razones principales para usar el sistema en por unidad han cambiado.

Ahora es importante que el manejo de datos sea sencillo, permitiendo una comparación directa entre cantidades similares de un sistema y detectando posibles errores. Conservar la precisión en dichos cálculos, especialmente en sistemas que operan a diferentes niveles de voltaje.

Además, la impedancia equivalente en por unidad de un transformador es la misma cuando se refiere al lado primario o al lado secundario. La impedancia equivalente en por unidad de un transformador trifásico es la misma, independientemente del tipo de conexión de sus devanados (estrella-estrella, estrella-delta, delta-estrella). El método por unidad es independiente de los cambios de voltaje y el defasamiento en el transformador, donde los voltajes base en los devanados son proporcionales al número de vueltas en los devanados.



FACULTAD DE INGENIERÍA

1 Definiciones de por unidad y por ciento

El valor por unidad de cualquier cantidad se define como la relación de esta cantidad y un valor base. Entonces, los valores de los parámetros de un sistema pueden ser expresados en por unidad de la siguiente manera:

$$C_{pu} = \frac{C_a}{C_b} \quad (1)$$

Donde C_{pu} es la cantidad en por unidad, C_a es la cantidad actual un valor escalar o complejo de la cantidad expresada en sus propias unidades, y C_b es un valor arbitrariamente seleccionado, siendo designada como base

El valor por ciento es 100 veces el valor por unidad.

$$C_{\%} = 100C_{pu} \quad (2)$$

Donde $C_{\%}$ es la cantidad en por ciento.

Según las Ecuaciones (1) y (2), los valores en por unidad y por ciento son cantidades adimensionales, que pueden ser escalares o complejos.

Como un ejemplo, para una base de 115 kV, los voltajes de 92, 115 y 161 kV, son 0.80, 1 y 1.4 pu o 80%, 100% y 140%, respectivamente.

Cuando se realizan cálculos eléctricos, el emplear valores en por unidad tiene una ventaja sobre los valores en por ciento, ya que el producto de dos cantidades expresadas en por unidad se expresa a sí mismo en por unidad, mientras que el



FACULTAD DE INGENIERÍA

producto de dos cantidades expresadas en por ciento debe dividirse entre 100 para obtener el resultado en porciento.

2 Cantidades base

El voltaje, corriente, potencia e impedancia están relacionados entre sí, tal que la selección de los valores base para cualquiera de dos de ellos determina los valores base de los dos restantes.

En el análisis de los sistemas eléctricos, el voltaje nominal de las líneas y de los equipos es siempre conocido, por lo que el voltaje es un parámetro conveniente para seleccionarlo como base.

Una segunda base que normalmente se selecciona es la potencia aparente, ya que esta cantidad también es conocida en los equipos.

La misma potencia base se usa en todas las partes del sistema, no así el voltaje base que al seleccionarlo arbitrariamente en un punto, todos los demás voltajes tendrán que relacionarse con éste por la relación de vueltas de los transformadores en el sistema.

3 Cantidades en por unidad

En sistemas eléctricos los datos se dan usualmente en kVA trifásicos y kV de línea a línea. Aunque el voltaje de línea a línea sea especificado como base, el voltaje en el circuito monofásico requerido para la solución es aún el voltaje a neutro. El voltaje base de línea a neutro es el voltaje base de línea a línea dividido por $\sqrt{3}$. Similarmente, los kVA trifásicos base son tres veces los kVA base por



FACULTAD DE INGENIERÍA

fase; de igual manera, los kVA en por unidad obtenidos por los kVA trifásicos base o por los kVA monofásicos base son exactamente los mismos.

3.1 Cantidades en por unidad para sistemas monofásicos

Si designamos a la potencia y al voltaje como cantidades base, entonces, se puede calcular la corriente e impedancia base.

$$I_B = \frac{S_B}{V_B} \quad (3)$$

$$Z_B = \frac{V_B}{I_B} \quad (4)$$

Donde S_B está en $VA_{\phi B}$ y V_B en kV_{LNB} , es decir, en potencia monofásica y voltaje de línea a neutro, respectivamente. La impedancia base también se puede calcular con la Ecuación (5) y es la impedancia que tendrá una caída de voltaje igual al voltaje base cuando circule por ella una corriente igual a la corriente base.

$$Z_B = \frac{V_B^2}{S_B} \quad (5)$$

Entonces, al definir las cantidades base, podemos normalizar cualquier cantidad del sistema dividiéndola por la cantidad base de la misma dimensión, así las expresiones matemáticas para obtener los valores en por unidad (pu) son las siguientes:

$$I_{pu} = \frac{I_a}{I_B} \quad (6)$$



FACULTAD DE INGENIERÍA

$$Z_{pu} = \frac{Z_a}{Z_B} \quad (7)$$

$$V_{pu} = \frac{V_a}{V_B} \quad (8)$$

$$S_{pu} = \frac{S_a}{S_B} \quad (9)$$

Según estas ecuaciones las dimensiones se cancelan y el resultado es una cantidad adimensional que se especifica en por unidad.

Por otro lado, las magnitudes se normalizan, pero los ángulos no. Los valores base no llevan ángulo, o más precisamente tiene un ángulo de 0° .

Así, si definimos la impedancia como:

$$Z_a = R_a + jX_a \quad (10)$$

Sustituyendo la Ecuación (10) en (7), tenemos:

$$Z_{pu} = \frac{R_a + jX_a}{Z_B} \quad (11)$$

Separando la parte real y la imaginaria obtenemos:

$$Z_{pu} = \frac{R_a}{Z_B} + j \frac{X_a}{Z_B} \quad (12)$$

Entonces, obtenemos:



FACULTAD DE INGENIERÍA

$$Z_{pu} = R_{pu} + jX_{pu} \quad (13)$$

No definimos base separadas para R y para X .

$$Z_B = R_B = X_B \quad (14)$$

Los tres valores están en Ω .

Con un procedimiento similar, convertimos los componentes de S a pu y también usamos una base común.

$$S_B = P_B = Q_B \quad (15)$$

Ejemplo 1

Para el siguiente circuito:

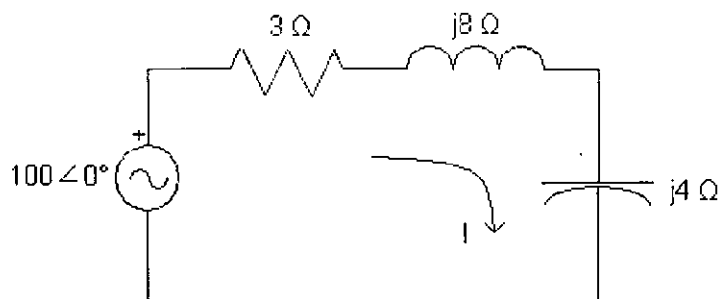


Figura 1. Circuito para el ejemplo 1

- Obtener la corriente en pu
- Obtener el diagrama unifilar con valores en pu
- Calcular la potencia en cada elemento y la potencia total en pu



FACULTAD DE INGENIERÍA

Suponer un $V_B = 100[V]$ y $S_B = 500[VA]$

- a) Primero calculamos los otros valores base, I_B y Z_B con las Ecuaciones (3) y (4)

$$I_B = \frac{500}{100} = 5[A]$$

$$Z_B = \frac{100}{5} = 20[\Omega]$$

y entonces, de acuerdo a las Ecuaciones (8) y (12), los valores del circuito en pu son:

$$V_{pu} = \frac{100 \angle 0^\circ}{100} = 1 \angle 0^\circ$$

$$R_{pu} = \frac{3}{20} = 0.15$$

$$X_{L_{pu}} = \frac{8}{20} = 0.4$$

$$X_{C_{pu}} = -\frac{4}{20} = -0.2$$

Ahora calculamos la impedancia equivalente

$$Z_{pu} = 0.15 + j(0.4 - 0.2) = 0.15 + j0.2$$

Y entonces



FACULTAD DE INGENIERÍA

$$I_{pu} = \frac{1 \angle 0^\circ}{0.25 \angle 53.1^\circ} = 4 \angle -53.1^\circ$$

b) El circuito con valores en *pu* se muestra en la Figura 2

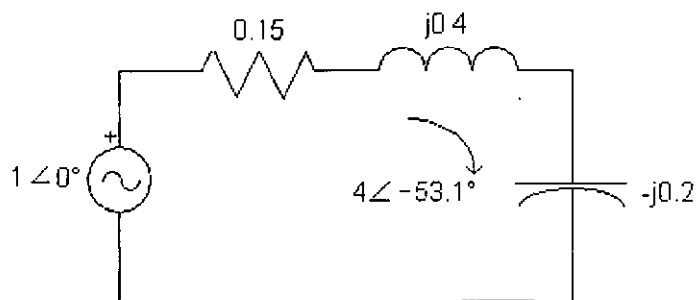


Figura 2. Circuito con valores en *pu*

c) La potencia consumida de cada elemento es:

Para la resistencia, si $S_{Rpu} = RI^2$

$$\text{Entonces } S_{Rpu} = 0.15(4)^2 = 2.4$$

Igualmente, para la inductancia, si $S_{Lpu} = jX_L I^2$

$$\text{Entonces } S_{Lpu} = j0.4(4)^2 = j6.4$$

Para el capacitor tenemos $S_{Cpu} = jX_C I^2$

$$\text{Sustituyendo valores obtenemos } S_{Cpu} = j0.2(4)^2 = -j3.2$$



FACULTAD DE INGENIERÍA

Finalmente la potencia total será $S_{pu} = S_{Rpu} + S_{Lpu} + S_{Cpu}$

$$S_{pu} = 2.4 + j6.4 - j3.2 = 2.4 + j3.2 = 4 \angle 53.1^\circ$$

3.2 Cantidades en por unidad para sistemas trifásicos

Algunas ecuaciones son válidas sólo para sistemas monofásicos, para sistemas trifásicos se trabaja con potencias trifásicas y voltajes línea – línea. A partir de las cantidades de línea y suponiendo un sistema trifásico balanceado, se obtienen las siguientes expresiones.

$$S_{3\phi B} = 3S_B \quad (16)$$

$$V_{LB} = \sqrt{3}V_B \quad (17)$$

$$Z_{YB} = Z_B \quad (18)$$

$$Z_{\Delta B} = 3Z_B \quad (19)$$

$$I_{LB} = I_B \quad (20)$$

$$I_{YB} = I_B \quad (21)$$

$$I_{\Delta B} = \frac{I_B}{\sqrt{3}} \quad (22)$$

Donde V_{LB} es el voltaje base línea – línea , I_{YB} indica la corriente base de fase de un dispositivo conectado en estrella y $I_{\Delta B}$ es la corriente de rama en un dispositivo conectado en delta.

En sistemas trifásicos generalmente se fijan como cantidades base a la potencia trifásica $S_{3\phi B}$ y al voltaje de línea – línea V_{LB} . Entonces, podemos derivar las ecuaciones para calcular la corriente base y la impedancia base.



FACULTAD DE INGENIERÍA

$$I_B = \frac{S_{3\phi B}}{\sqrt{3}V_B} \quad (23)$$

$$Z_B = \frac{S_{3\phi B}}{V_{LB}^2} \quad (24)$$

En estas ecuaciones, los subíndices 3ϕ y L denotan cantidades trifásicas y de línea a línea, respectivamente.

Las cantidades en *pu* se obtienen al dividir las cantidades actuales entre las cantidades base, tal como lo describen las ecuaciones (6) a (9).

4 Conversión de valores en *pu* a valores reales

Una vez que los cálculos en por unidad de algún sistema se han terminado y se requiere convertir algunas o todas estas cantidades a valores reales, el procedimiento se realiza de forma inversa.

Despejando los valores reales de las ecuaciones (6) al (9) tenemos las siguientes ecuaciones.

$$I_a = I_{pu} I_B \quad (25)$$

$$Z_a = Z_{pu} Z_B \quad (26)$$

$$V_a = V_{pu} V_B \quad (27)$$

$$S_a = S_{pu} S_B \quad (28)$$



FACULTAD DE INGENIERÍA

5 Cambio de base

Frecuentemente, la impedancia por unidad de un equipo eléctrico está especificada en base a sus valores nominales o de placa, los cuales usualmente son diferentes a los valores base del sistema eléctrico. Puesto que todas las impedancias del sistema deben expresarse sobre una misma base para efectuar los cálculos en por unidad o por ciento, es necesario convertir todos los valores a una base común seleccionada. Esta conversión puede derivarse al expresar en por unidad una misma impedancia, pero con dos bases diferentes.

Considerando la ecuación (25) y además igualando para dos bases diferentes tenemos la ecuación (29).

$$Z_{pu1} Z_{B1} = Z_{pu2} Z_{B2} \quad (29)$$

Despejando, obtenemos la ecuación general para el cambio de una base a otra base.

$$Z_{pu2} = Z_{pu1} \frac{Z_{B1}}{Z_{B2}} \quad (30)$$

Además, sustituyendo la ecuación (5) en la ecuación (30) para ambos casos tenemos, se obtiene la expresión para el cambio de base en función de la potencia y el voltaje base.

$$Z_{pu2} = Z_{pu1} \frac{S_{B2}}{S_{B1}} \left(\frac{V_{B1}}{V_{B2}} \right)^2 \quad (31)$$



FACULTAD DE INGENIERÍA

Ejemplo 2

Tenemos dos transformadores en un sistema, ambos con diferente capacidad, los valores de impedancia deben convertirse antes de realizar otros cálculos.

| | Transformador 1 | Transformador 2 |
|-------------------|-----------------|-----------------|
| $S_{3\phi} [MVA]$ | 100 | 75 |
| $V_L [KV]$ | 230 | 230 |
| X_{pu} | 0.1 | 0.1 |

Las cantidades base del sistema son:

$$S_{3\phi B} = 100 [MVA]$$

$$V_{L,B} = 230 [KV]$$

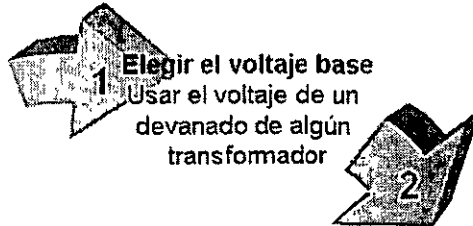
El transformador 1 tiene la misma base, pero el transformador 2 no, entonces, debemos convertir la X_{pu} del transformador 2, usando la ecuación (31).

$$X_{puT2} = 0.1 \frac{100}{75} \left(\frac{230}{230} \right)^2 = 0.133 pu$$



FACULTAD DE INGENIERÍA

6 Procedimiento general



2

Calcular las otras cantidades base para cada elemento del sistema
Es decir, la corriente base y la impedancia base



3

Elegir la potencia base
Usar la potencia del generador, transformador u otro elemento del sistema

Después de los cálculos, si se requiere conocer los valores reales, multiplicar los valores en *pu* por los valores base correspondientes



4

Si los datos se dan en otra base cambiar las cantidades base





FACULTAD DE INGENIERÍA

7 Bibliografía

- Anderson. Analysis of faulted power systems. Iowa state University Press.
- Gross. Power systems analysis. John Wiley & sons.
- Stevenson. Electric power systems. Prentice Hall.



FACULTAD DE INGENIERÍA UNAM
DIVISIÓN DE EDUCACIÓN CONTINUA



División de Educación Continua, Facultad de Ingeniería, UNAM.

CURSOS ABIERTOS

SISTEMAS ELÉCTRICOS DE POTENCIA I

CA 178

TEMA

COMPONENTES DE LOS SISTEMAS ELÉCTRICOS

**EXPOSITORES: ING. ALFREDO LÓPEZ TAGLE
DEL 25 DE JUNIO AL 04 DE JULIO DE 2007
PALACIO DE MINERÍA**



FACULTAD DE INGENIERÍA

**COMPONENTES DE LOS
SISTEMAS ELECTRICOS**

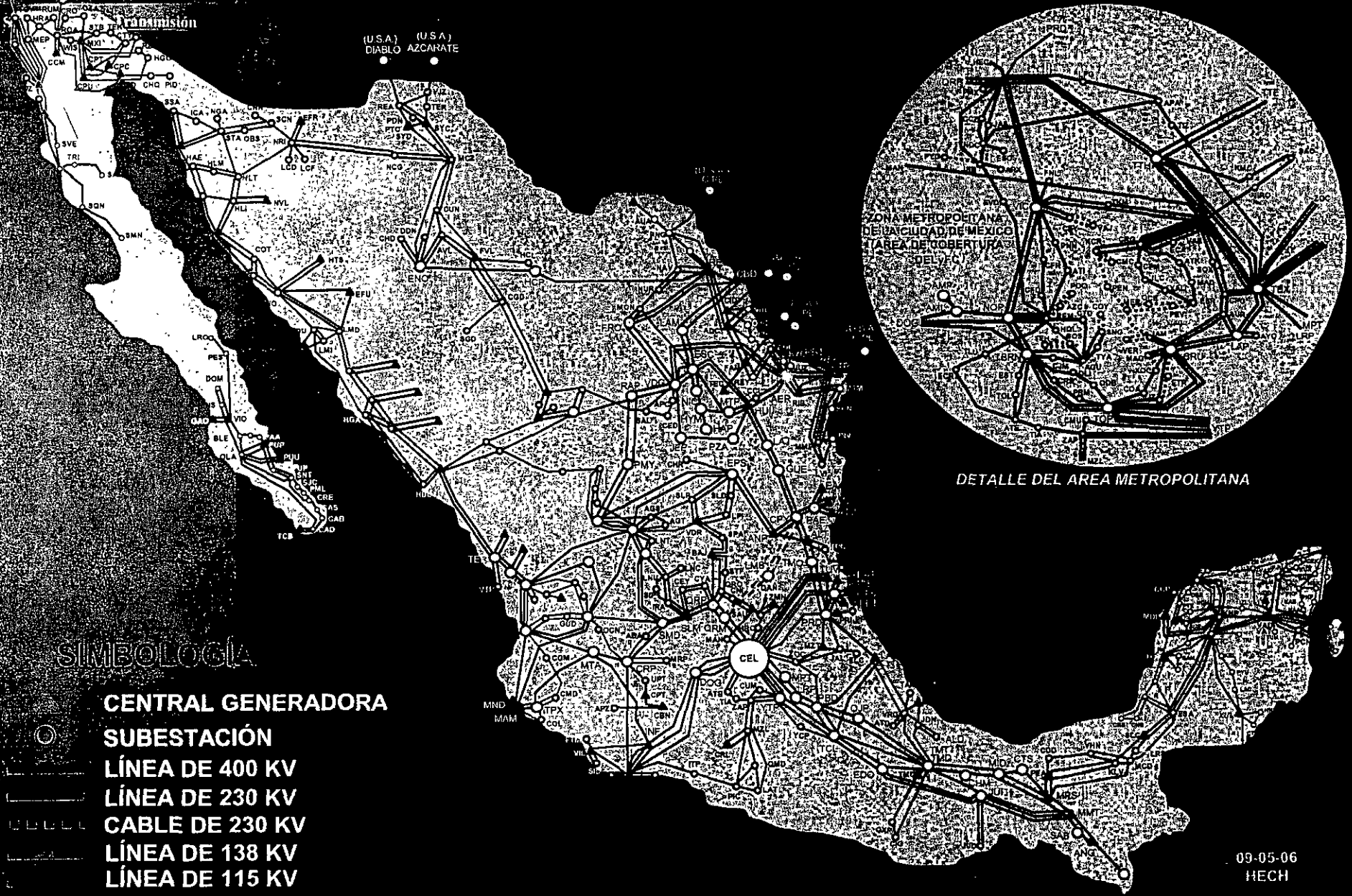
ING. ALFREDO LOPEZ TAGLE

COMPONENTES DE LOS SISTEMAS ELECTRICOS DE POTENCIA

- I.- La Red Eléctrica
- II.- La Líneas de Transmisión
- III.- La Subestación Eléctrica
- IV.- El Interruptor de Potencia
- V.- El Transformador y el Autotransformador de Potencia
- VI.- Las Cuchillas Desconectoras
- VII.- Las Protecciones Eléctricas
- VIII.- Los Bancos de Baterías y los Servicios Propios

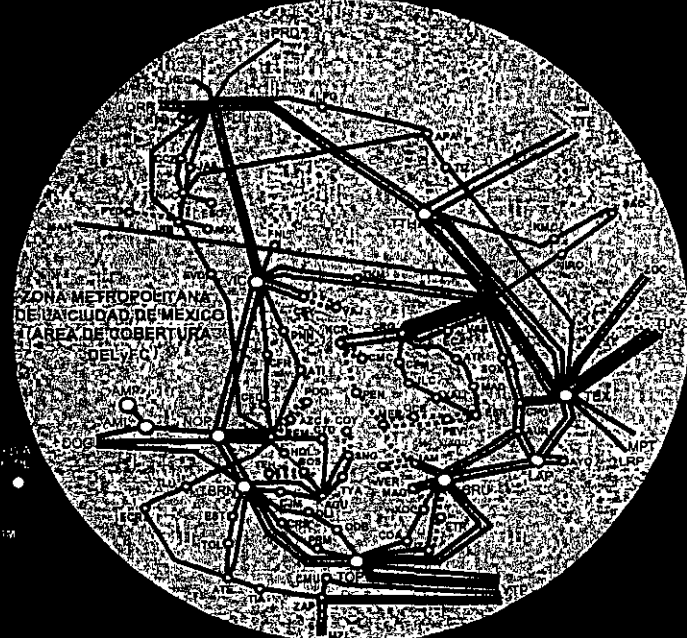


Red Troncal del Sistema Eléctrico Nacional



(U.S.A.)
DIABLO

(U.S.A.)
AZCARATE



DETALLE DEL AREA METROPOLITANA

SIMBOLOGIA

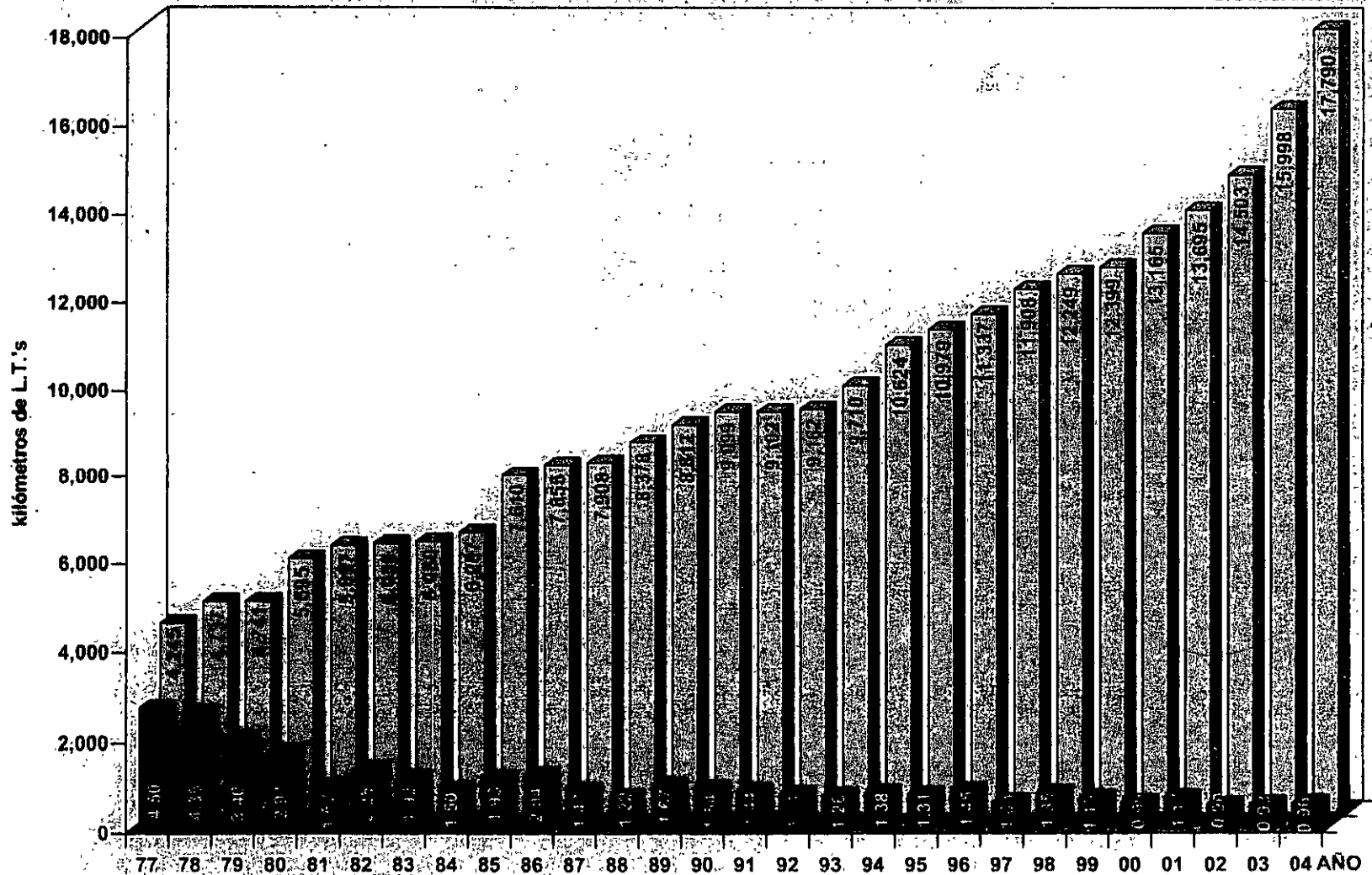
- CENTRAL GENERADORA
- SUBESTACION
- LÍNEA DE 400 KV
- LÍNEA DE 230 KV
- CABLE DE 230 KV
- LÍNEA DE 138 KV
- LÍNEA DE 115 KV

CRECIMIENTO Y COMPORTAMIENTO DE LINEAS DE TRANSMISION

400 kV

1977 - 2004

GRAFICA No. 5.1



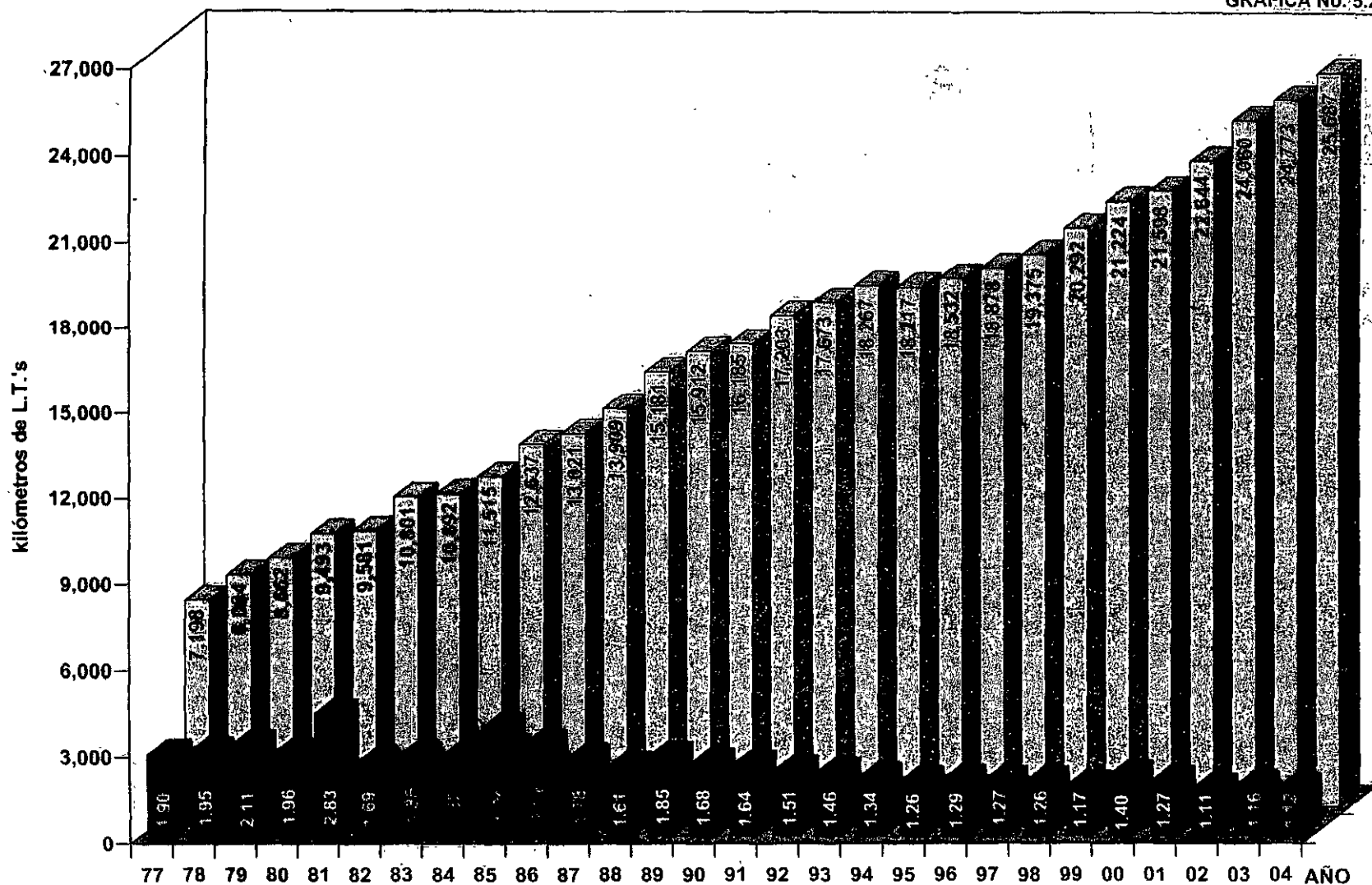
INDICE DE SALIDAS POR FALLA PROPIA

KILOMETROS DE LINEAS DE TRANSMISION

CRECIMIENTO Y COMPORTAMIENTO DE LINEAS DE TRANSMISION

230 kV
1977 - 2004

GRAFICA No. 5.2



INDICE DE SALIDAS POR FALLA PROPIA

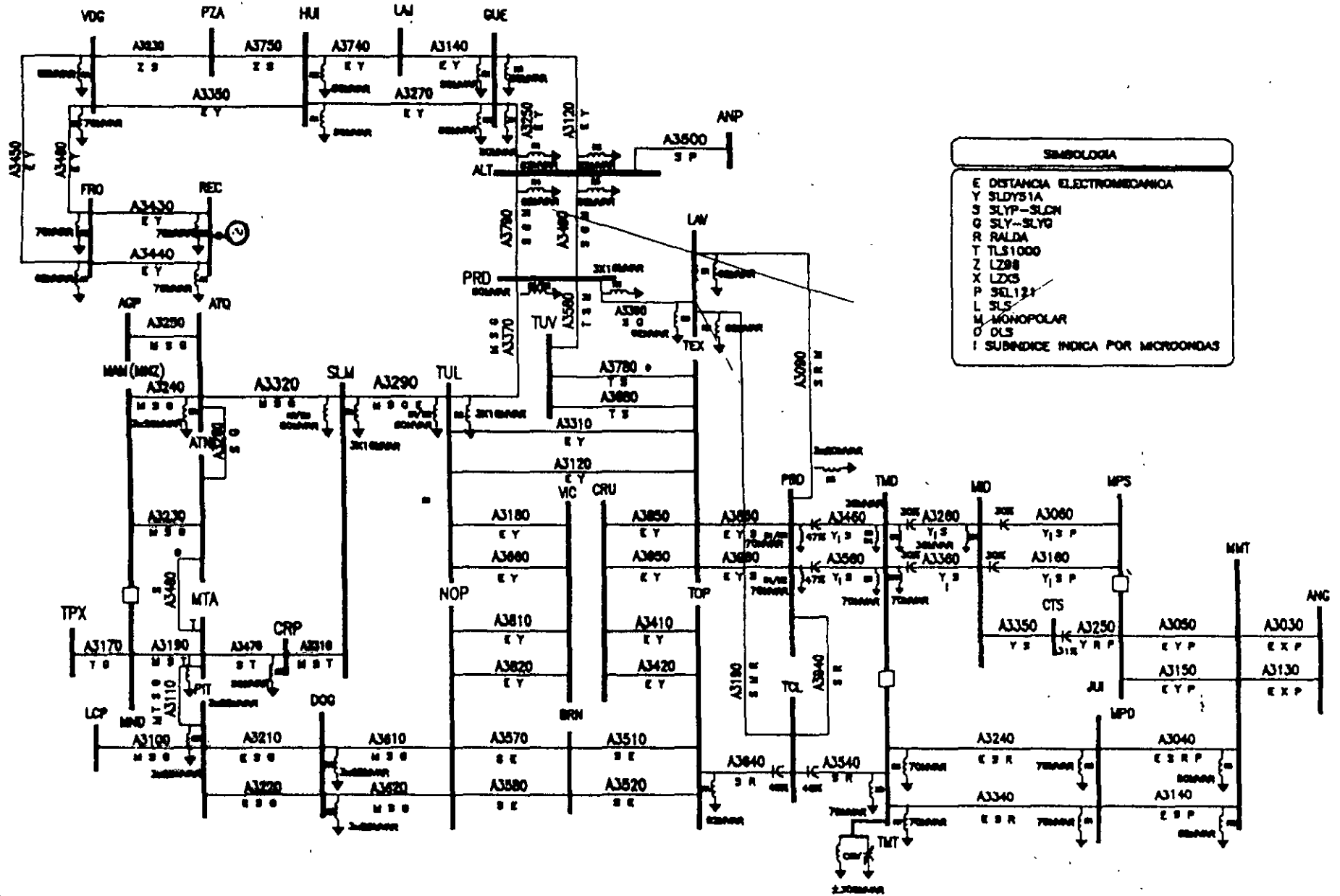
KILOMETROS DE LINEAS DE TRANSMISION

Mapa 12
Sistema Eléctrico Nacional
Proyección de la capacidad de transmisión entre regiones (MW), 2004



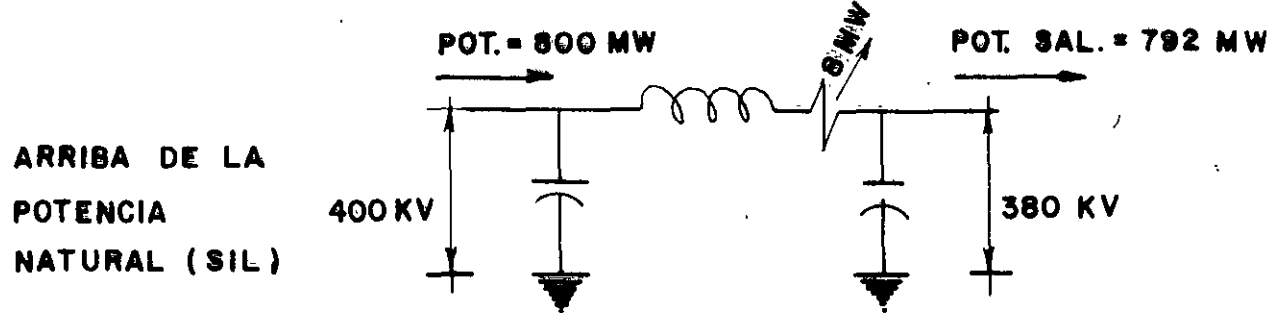
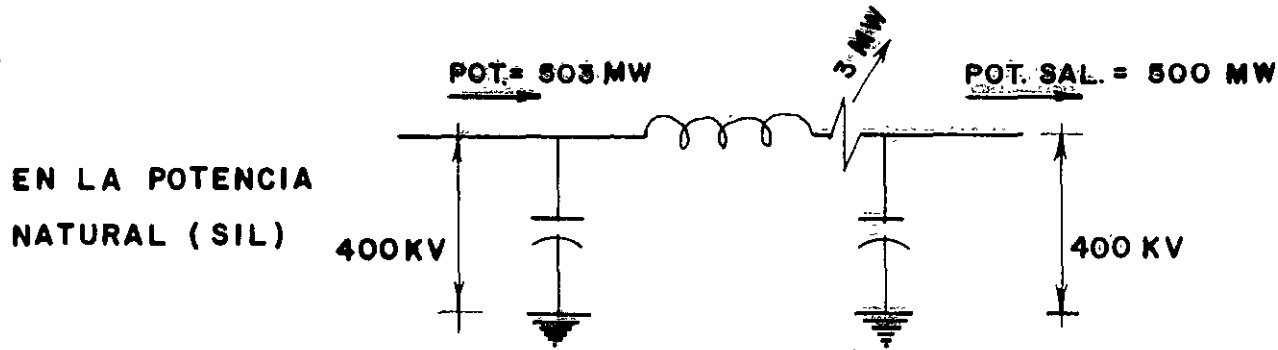
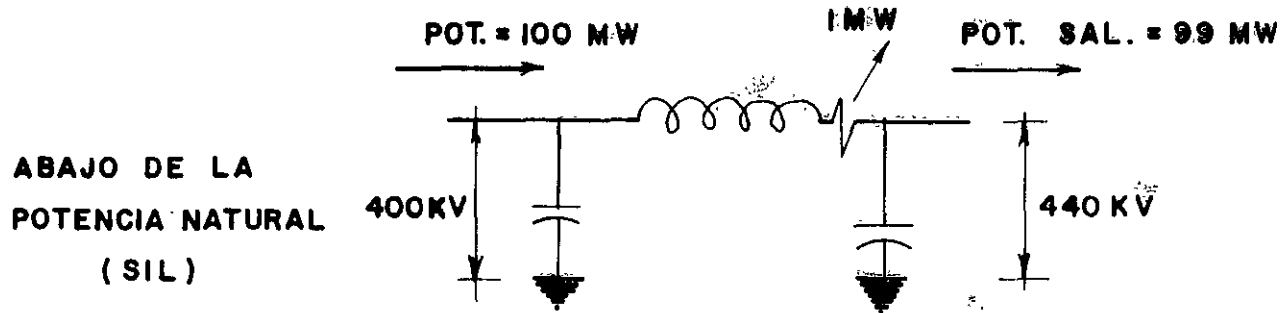


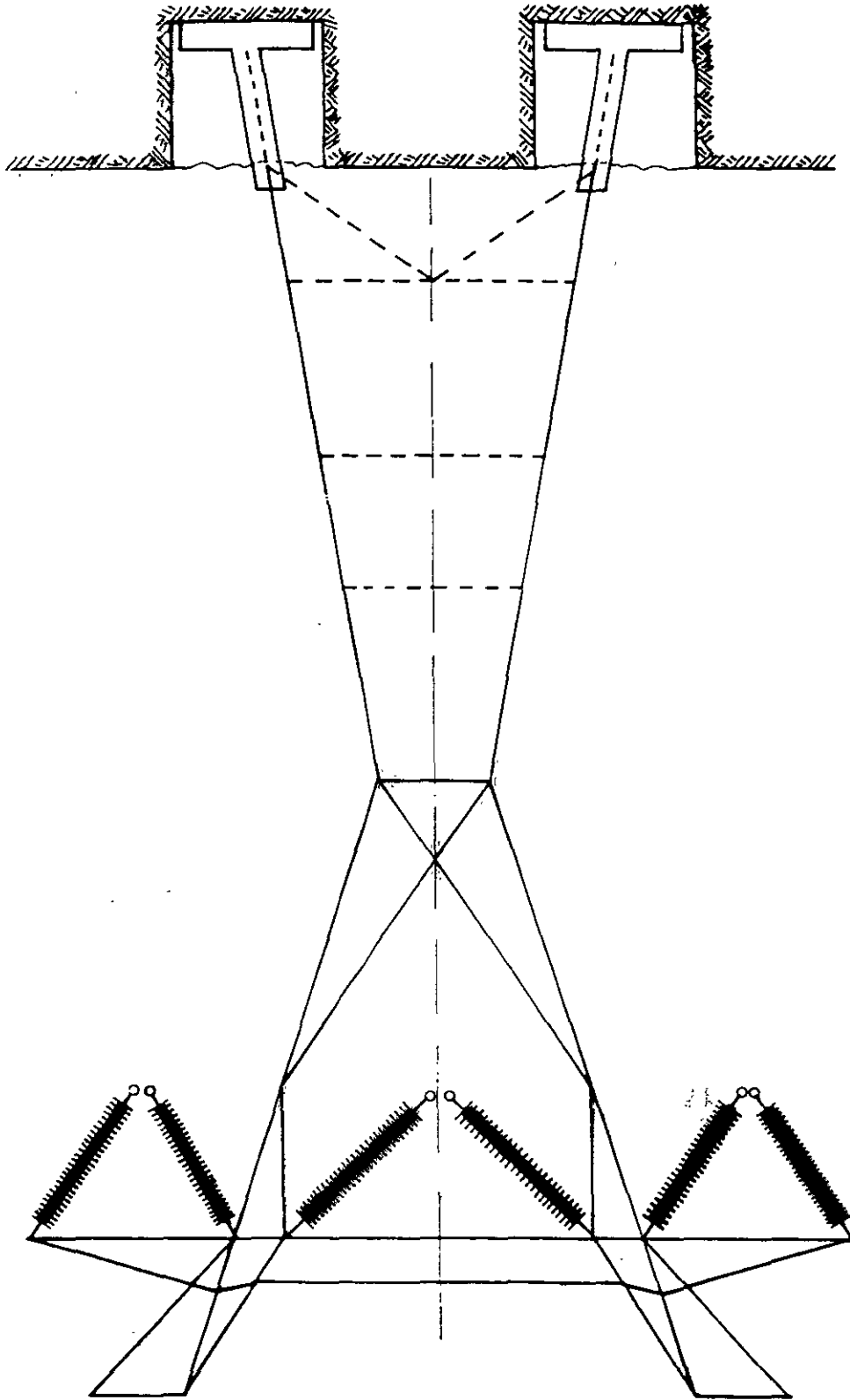
SISTEMA INTERCONECTADO NACIONAL RED DE 400 KV



| SIMBOLOGIA | |
|------------|---------------------------------|
| E | DISTANCIA ELECTROMECANICA |
| Y | SLDYS1A |
| S | SLYP-SLCH |
| G | SLY-SLYG |
| R | RALDA |
| T | TL51000 |
| Z | LZ98 |
| X | LZXS |
| P | SEL121 |
| L | SLS |
| M | MONOPOLAR |
| O | DLS |
| I | SUBINDICE INDICA POR MICROONDAS |

OPERACION DE UNA LINEA DE TRANSMISION





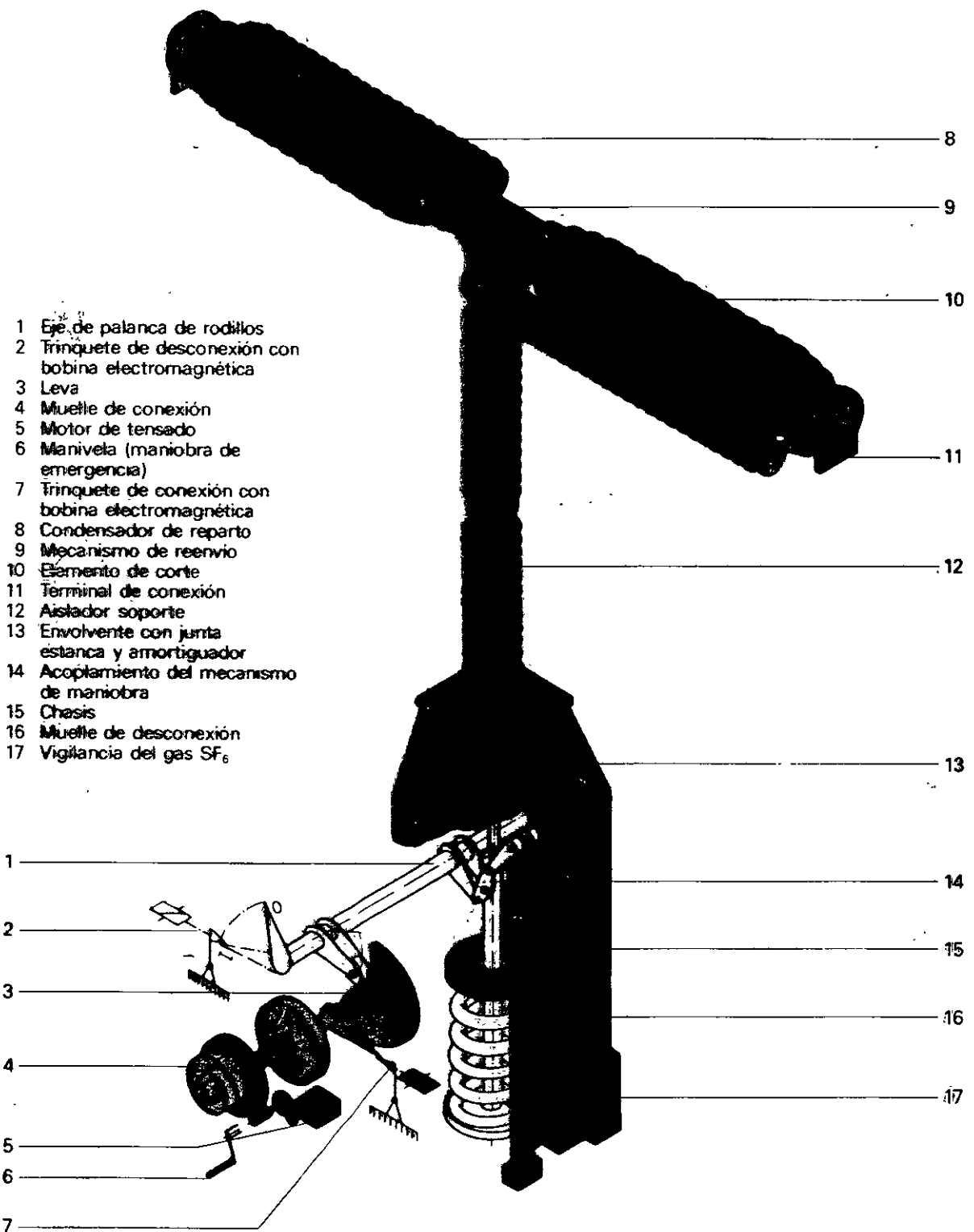
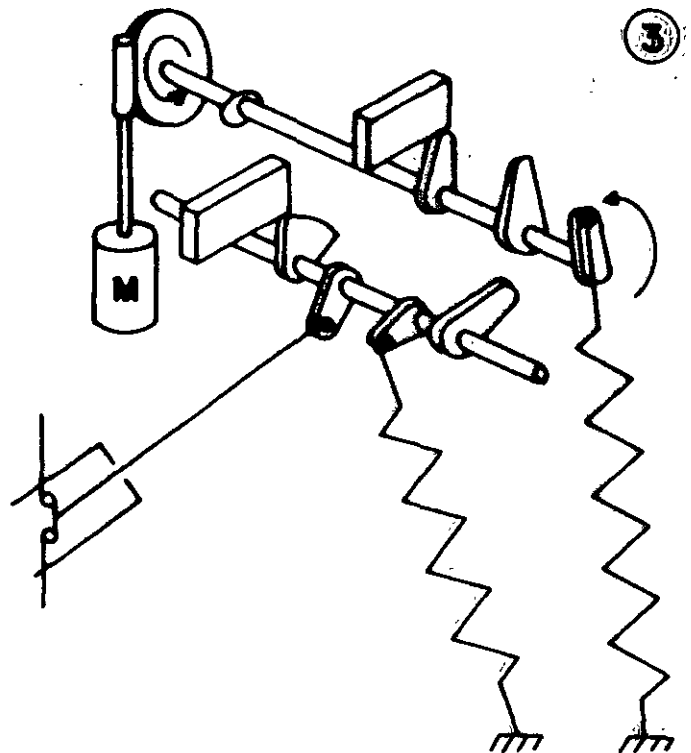
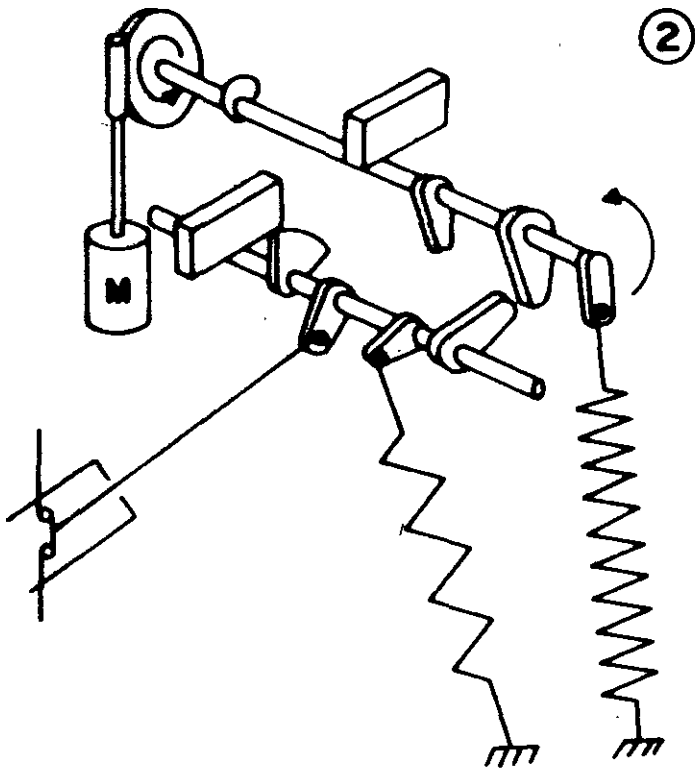
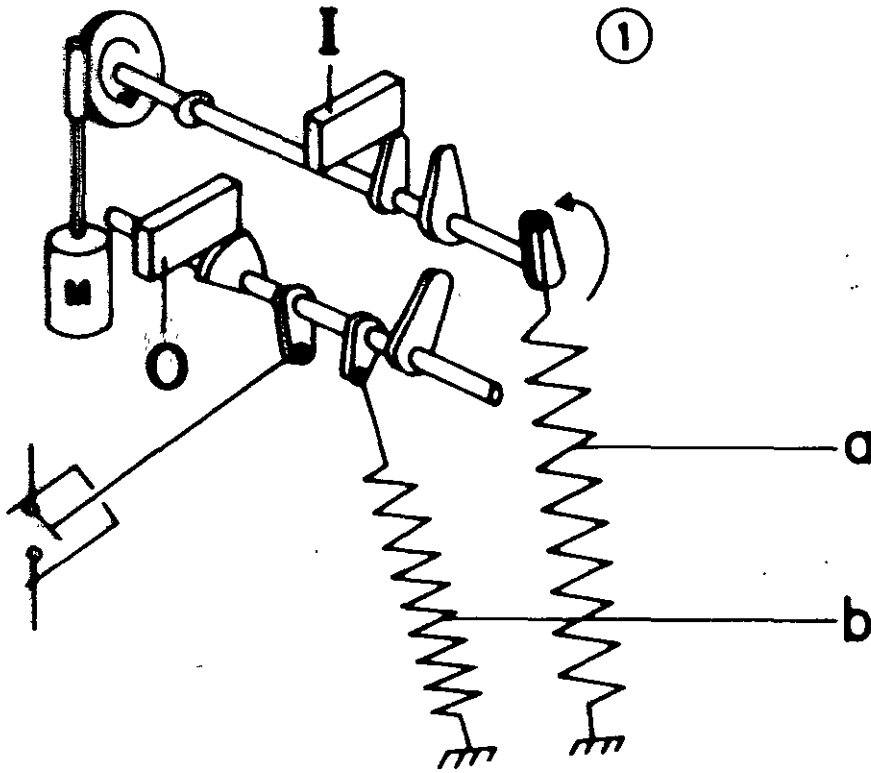


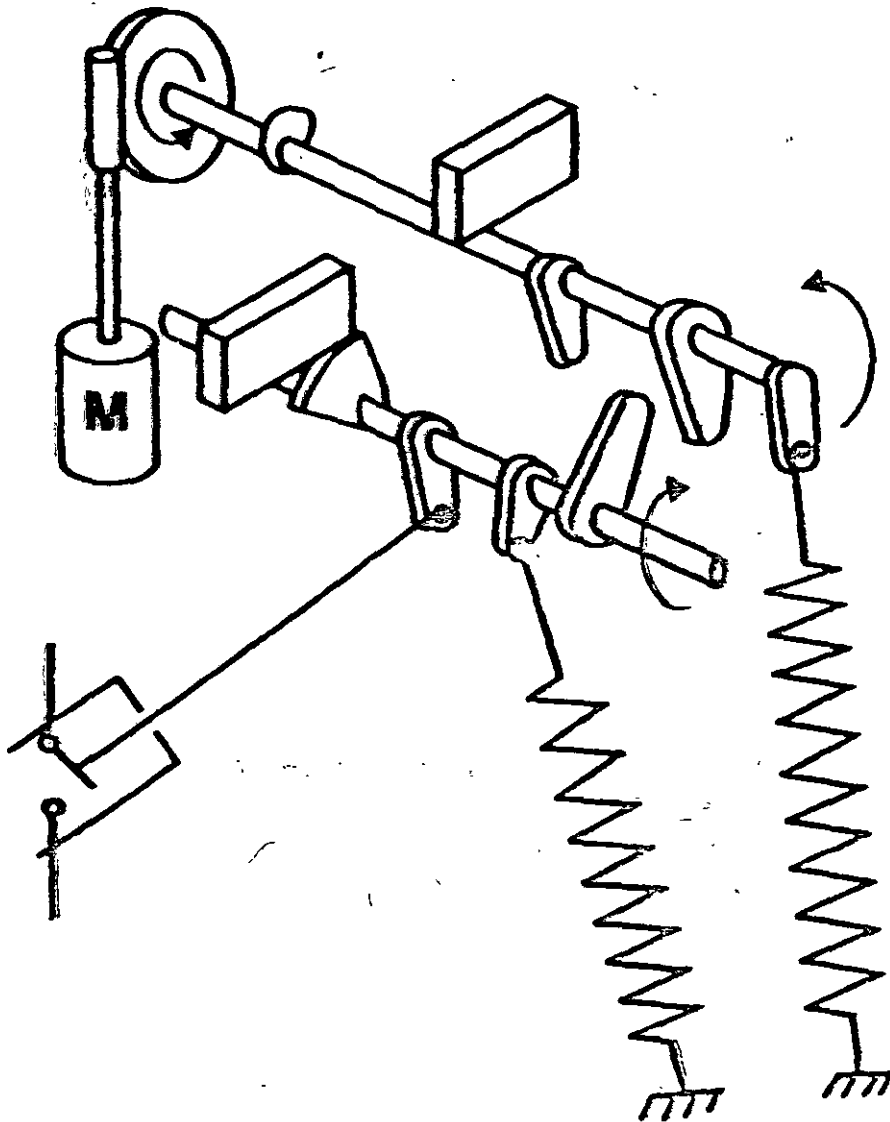
Fig. 13 Principio del mecanismo de maniobra mediante muelles tensados por motor *Sprecher Energie* en el interruptor automático HGF 200 (representado sin dispositivos auxiliares y sin enclavamientos)

EDI/EDF SF Br aker

Spring drive operating principle



Spring drive operating principle

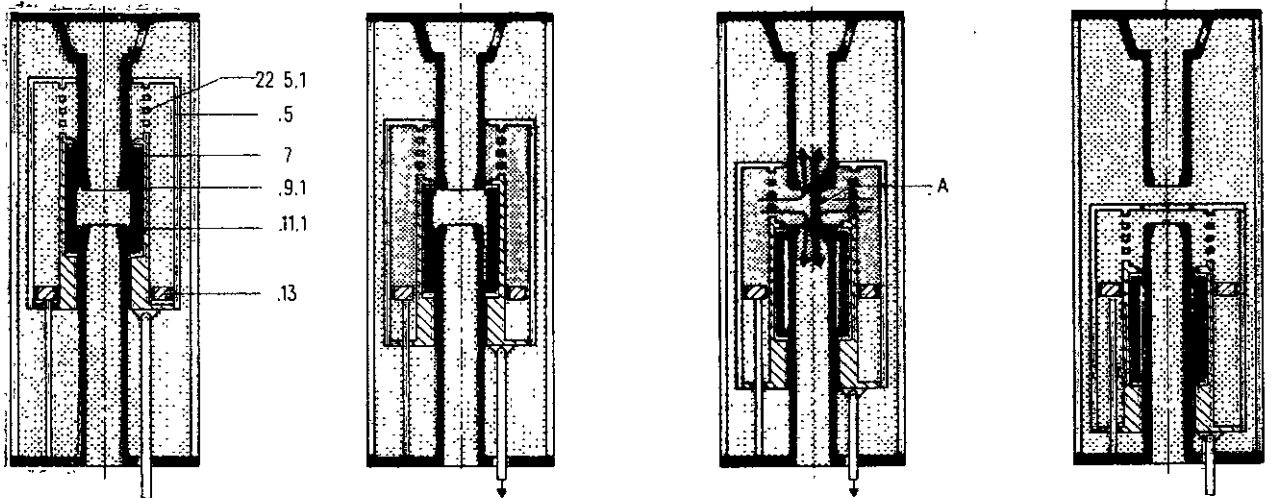


Lichtbogenlöschung

Beim Ausschaltvorgang werden das bewegbare Schaltrohr 22.7 und der Blaszyylinder 22.5 gemeinsam gegen den Blaskolben 22.13 bewegt. Dabei wird das SF₆-Gas im Blaszyylinder 22.5 verdichtet. Nach der Kontakttrennung, d.h. dem Öffnen der Schaltstrecke, strömt das verdichtete SF₆-Gas durch die Löschdüsen 22.9.1 und 22.11.1 und löscht den Lichtbogen.

Extinción del arco

En el movimiento de desconexión, el tubo de maniobra móvil 22.7 junto con el cilindro de barrido 22.5 se desplazan contra el émbolo de barrido 22.13. El gas SF₆ encerrado en el cilindro de barrido 22.5 se comprime. Después de la separación de los contactos, es decir, al quedar abierto el tramo de ruptura, el gas SF₆, comprimido, fluye por las toberas de extinción 22.9.1 y 22.11.1 y apaga el arco.



a) Schaltstellung "EIN"

Posición de maniobra
"CON"

b) Ausschaltung:
Vorverdichtung
Desconexión:
Precompresión

c) Ausschaltung:
Löschung
Desconexión
Extinción

d) Schaltstellung "AUS"

Posición de maniobra
"DES"

22.5 Blaszyylinder
22.5.1 Blasgitter
22.7 bewegbares Schaltrohr
22.9.1 Löschdüse
22.11.1 Löschdüse
22.13 Blaskolben
A Lichtbogen

22.5 Cilindro de barrido
22.5.1 Rejilla
22.7 Tubo de maniobra móvil
22.9.1 Tobera de extinción
22.11.1 Tobera de extinción
22.13 Émbolo de barrido
A Arco

Fig. 1 Ausschaltvorgang, schematisch
Representación esquemática del proceso de desconexión

Datos técnicos

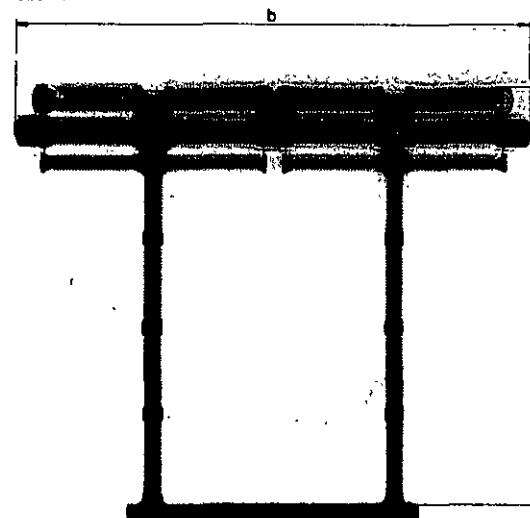
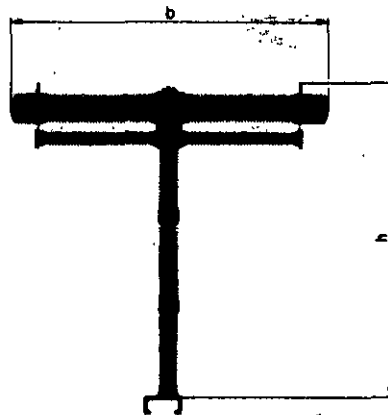
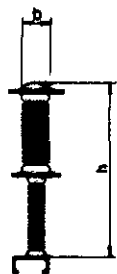
Ejemplo de realización

123 kV

245 kV

420 kV

525 kV



Los datos técnicos corresponden a las normas del VDE y las publicaciones de CEI

| Tipo | | Ø 1 | Ø 1 | Ø 1 | Ø 1 | Ø 1 | Ø 2 | Ø 2 | Ø 2 | Ø 2 | Ø 4 | Ø 4 M ¹⁾ | Ø 4 M ¹⁾ |
|--|-----|--------|----------|----------|------|---------|------|------|------|------|-------|---------------------|---------------------|
| Tensión asignada, 50 Hz | kV | 72,5 | 123 | 145 | 170 | 245 | 245 | 300 | 382 | 420 | 420 | 525 | 765 |
| Tensión soportada a frecuencia industrial asignada | kV | 140 | 230 | 275 | 325 | 480 | 480 | 480 | 820 | 810 | 810 | 780 | 1100 |
| Tensión soportada a impulso tipo rayo asignada | kV | 325 | 550 | 650 | 750 | 1050 | 1050 | 1050 | 1175 | 1425 | 1550 | 1550 | 2100 |
| Tensión soportada a impulso tipo maniobra asignada | kV | — | — | — | — | — | — | 850 | 950 | 1050 | 1050 | 1175 | 1550 |
| Corriente asignada | A | 3150 | 3150 | 3150 | 4000 | 4000 | 4000 | 4000 | 4000 | 4000 | 4000 | 4000 | 4000 |
| Corriente de corte en cortocircuito asignada | KA | 25/40 | 25...40 | 25...40 | 40 | 40/80 | 63 | 50 | 50 | 50 | 63 | 40/50 | 40/50 |
| Valor de cresta de la corriente admisible asignada | KA | 63/100 | 63...100 | 63...100 | 100 | 100/125 | 180 | 125 | 125 | 125 | 180 | 100/125 | 100/125 |
| Sobrepresión asignada de SF ₆ a +20 °C | MPa | 0,7 | 0,7 | 0,7 | 0,7 | 0,7 | 0,7 | 0,7 | 0,7 | 0,7 | 0,7 | 0,7 | 0,7 |
| Tempos de maniobra (± 10 %) | | | | | | | | | | | | | |
| Tiempo de cierre | ms | 120 | 120 | 120 | 120 | 120 | 120 | 120 | 120 | 120 | 120 | 120 | 120 |
| Tiempo de apertura | ms | 40 | 40 | 40 | 30 | 30 | 30 | 30 | 30 | 30 | 30 | 30 | 30 |
| Tiempo de corte | ms | 60 | 60 | 60 | 50 | 50 | 50 | 50 | 50 | 50 | 50 | 50 | 50 |
| Peso aproximado | Kg | 2830 | 2830 | 2970 | 3450 | 4400 | 4480 | 5050 | 6130 | 6500 | 10100 | 12700 | 14800 |
| Dimensiones | | | | | | | | | | | | | |
| Ancho, b | mm | 450 | 450 | 450 | 450 | 530 | 3980 | 4480 | 5120 | 5120 | 7340 | 8520 | 9780 |
| Alto, h | mm | 2790 | 2790 | 3230 | 3820 | 5440 | 3180 | 3580 | 3580 | 5040 | 5040 | 8715 | 7235 |
| Distancia media entre polos | mm | 1715 | 1715 | 1715 | 2100 | 3000 | 3000 | 3800 | 4800 | 4800 | 4800 | 8200 | 10500 |

¹⁾ Con resistencias de conexión

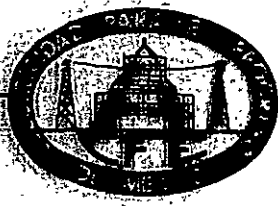
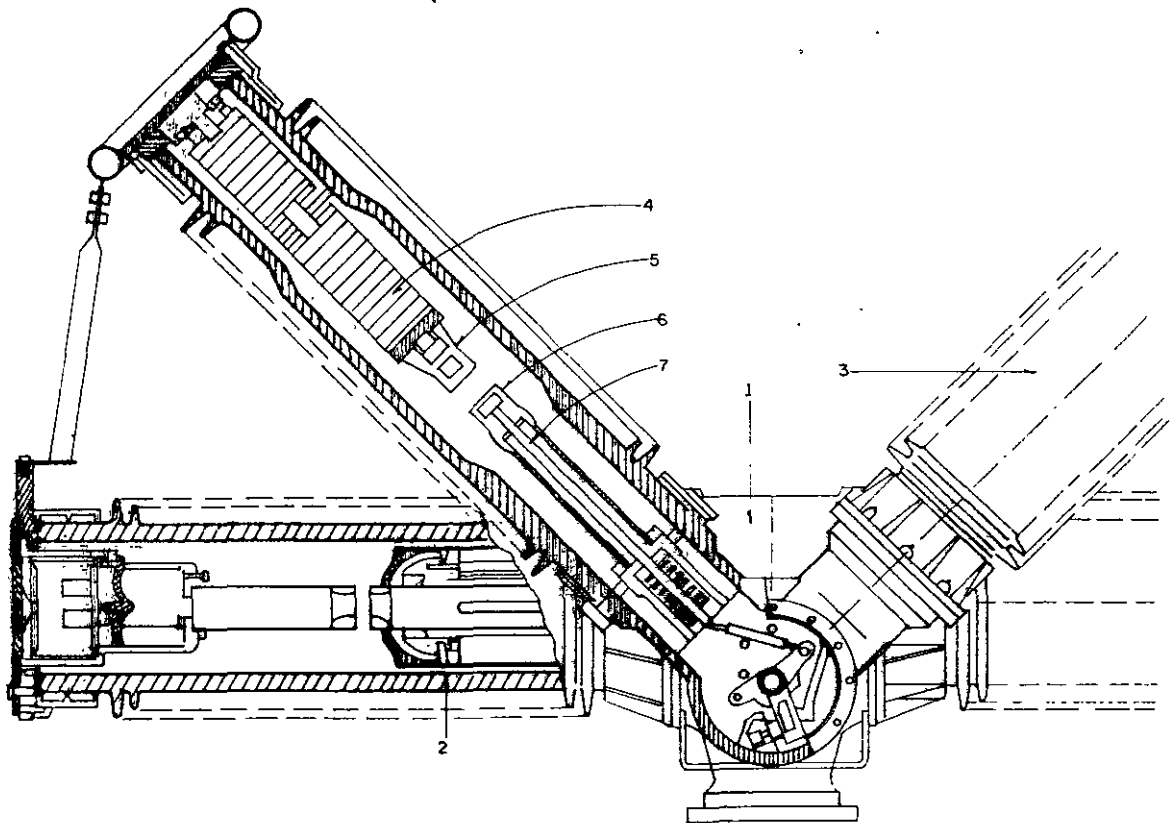
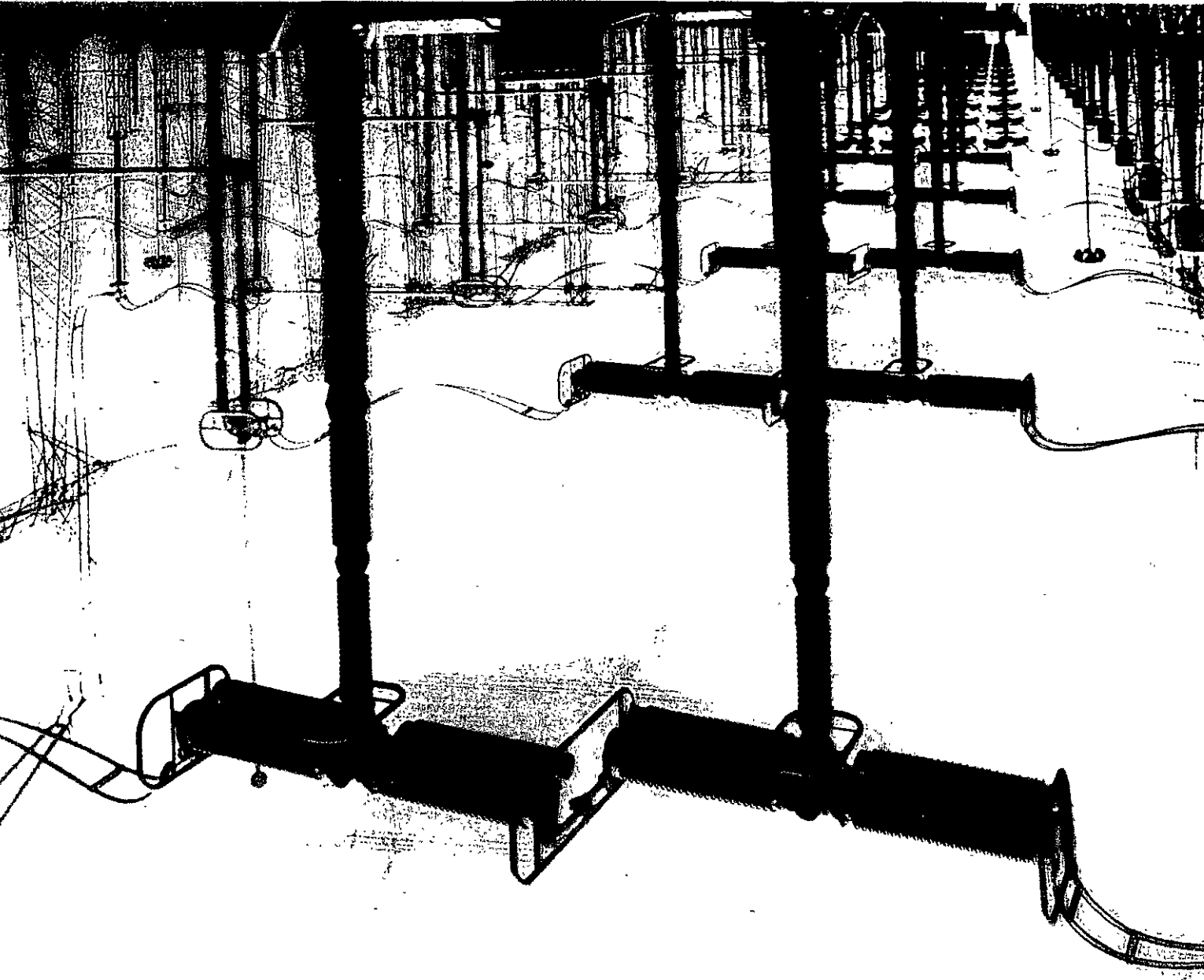


FIG. 1.—
DOBLE CABEZA DE MANIOBRA CON RESISTENCIAS
DE PREINSERCION



1— TRANSMISION INTERMEDIA
2— UNIDAD RUPTORA
3— RESISTENCIA DE CONEXION
4— RESISTENCIA

5 — CONTRACONTACTO
6.— CONTACTO DESLIZANTE
7 — VASTAGO DE CONTACTO



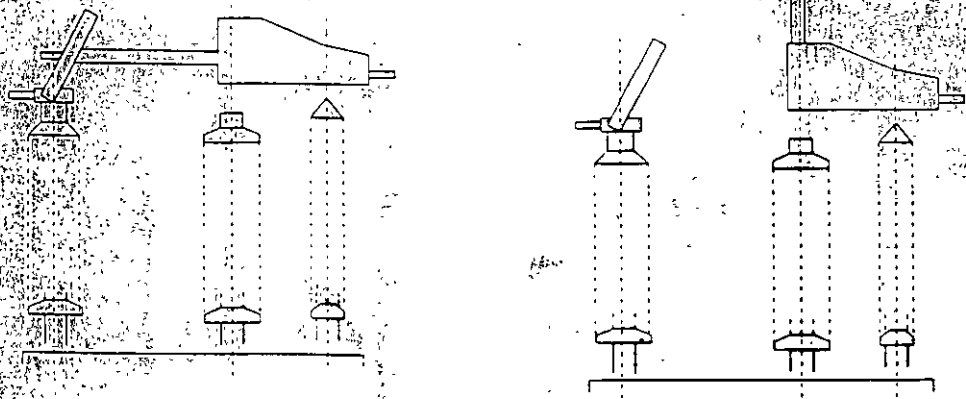


Figura 2.3.8.
Cuchilla desconectadora de tres columnas y apertura vertical.

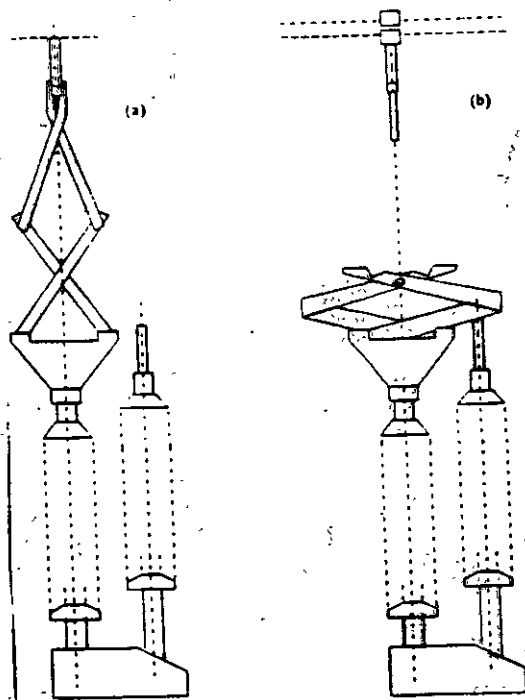


Figura 2.3.9.
Cuchilla desconectadora del tipo pantógrafo
a) Posición cerrada; b) Posición abierta

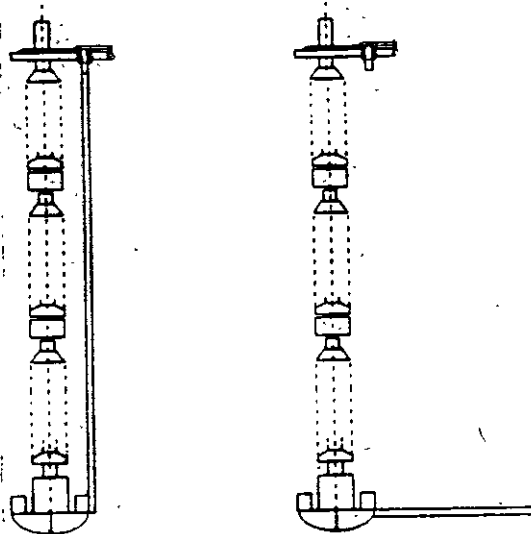


Figura 2.3.10.
Cuchilla de puesta a tierra.



FACULTAD DE INGENIERÍA UNAM
DIVISIÓN DE EDUCACIÓN CONTINUA



División de Educación Continua, Facultad de Ingeniería, UNAM.

CURSOS ABIERTOS

SISTEMAS ELÉCTRICOS DE
POTENCIA I

CA 178

TEMA

ESTUDIOS DE CORTO CIRCUITO

**EXPOSITORES: ING. ALFREDO LÓPEZ TAGLE
DEL 25 DE JUNIO AL 04 DE JULIO DE 2007
PALACIO DE MINERÍA**



FACULTAD DE INGENIERÍA

ESTUDIOS DE CORTO CIRCUITO

ING. ALFREDO LOPEZ TAGLE

Analysis of Unsymmetrical Faults: Three-Component Method

Having introduced the symmetrical component notation and defined the sequence networks, we are ready to evaluate the way in which unsymmetrical conditions may be represented. In doing so, we will proceed in a very orderly manner, evaluating the conditions at the fault point and then deriving the exact circuit representation in the 0-1-2 coordinate system. We call this type of analysis the *three-component method* to distinguish it from other methods to be introduced later.

In what follows we will refer to the unbalanced condition at the fault point as a "fault." It should be understood that this term is intended to mean any unbalanced situation and may be an unbalanced load or other unsymmetrical condition.

It is also convenient to distinguish between shunt and series unbalances or faults. A *shunt fault* is an unbalance between phases or between phase and neutral. A *series fault* is an unbalance in the line impedances and does not involve the neutral or ground, nor does it involve any interconnection between phases. We will consider these items separately.

Our objective here is to determine exactly how the sequence networks are related or how they are interconnected for various kinds of fault situations. Since we must do this for several different situations we establish the following procedure.

1. Sketch a *circuit diagram* of the fault point showing all phase connections to the fault. Label all currents, voltages, and impedances, carefully noting assumed positive directions and polarities. Such a sketch is shown in Figure 3.1. It is assumed that a "normal" system consisting of only balanced impedances is connected to the left and right of the fault point and that the Thevenin equivalent looking in at this point is known. Note that phase voltages are defined as drops from line to ground at this point and that currents are defined as flowing from the system toward the fault.
2. Write the *boundary conditions* relating known currents and voltages for the type of fault under consideration.
3. *Transform* the currents and/or voltages of 2 from the *a-b-c* to the 0-1-2 coordinate system by use of the transformation A or A^{-1} .
4. Examine the *sequence currents* to determine the proper connection of the F or N terminals of the sequence networks, satisfying 3.

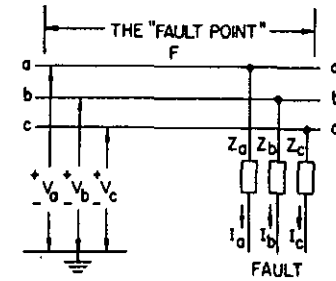


Fig. 3.1. Circuit diagram of the fault point.

5. Examine the *sequence voltages* to determine the connection of the remaining terminals of the sequence networks, adding impedances as required to satisfy 3 and 4.

These five steps will be followed rigorously for each type of fault except where noted to the contrary.

I. SHUNT FAULTS

Shunt faults are an important class of faults and include various kinds of "short circuits" as well as unbalanced loads.

3.1 The Single Line-to-Ground (SLG) Fault

1. *Circuit diagram*: See Figure 3.2.
2. *Boundary conditions*: By inspection of Figure 3.2,

$$I_b = I_c = 0 \quad (3.1)$$

and

$$V_a = Z_f I_a \quad (3.2)$$

3. *Transformation*: From equation (2.25) we write $I_{012} = A^{-1} I_{abc}$, or from (3.1), with A defined from (2.36)

$$I_{012} = \frac{h}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{h}{3} I_a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

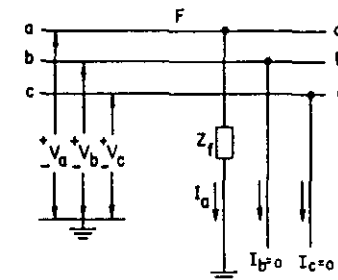


Fig. 3.2. Diagram of a SLG fault at F .

or all sequence currents are equal. Also, we have from (3.2) and (3.3),

$$V_a = Z_f I_a = \frac{3}{h} Z_f I_{a1}$$

which we may write as

$$V_{a0} + V_{a1} + V_{a2} = 3Z_f I_{a1} \quad (3.4)$$

4. *Sequence currents:* From (3.3) we note that the sequence currents are equal. This implies that the sequence networks must be connected in series, as shown in Figure 3.3.

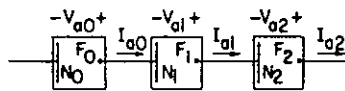


Fig. 3.3. Sequence network partial connection specified by the current equation.

5. *Sequence voltages:* From (3.4) we see that the sequence voltages add to $3Z_f I_{a1}$. This requires the addition of an external impedance as noted from Figure

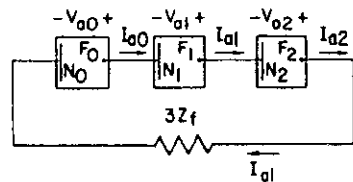


Fig. 3.4. Sequence network connection for a SLG fault.

3.3. The final connection is shown in Figure 3.4. With this connection we compute

$$I_{a0} = I_{a1} = I_{a2} = \frac{hV_F}{Z_0 + Z_1 + Z_2 + 3Z_f} \quad (3.5)$$

and knowing the sequence currents we easily find the sequence voltages from equation (2.58).

Example 3.1

The simple power system shown in Figure 3.5, consists of a generator, transformer, transmission line, load transformer, and load. Consider a SLG fault at bus

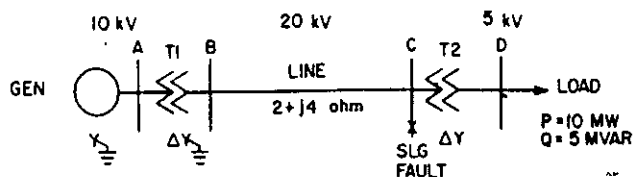


Fig. 3.5. Power system for Example 3.1.

C with a fault resistance of 4 ohms. The following data concerning the system is known.

- Generator: 25 MVA, 10 kV, $x = 0.125$ pu, connected Y-grounded
- T1: 30 MVA, 10-20 kV, $x = 0.105$, connected Δ -Y-grounded
- Line: $Z = 2 + j4 \ \Omega$
- T2: 20 MVA, 5-20 kV, $x = 0.05$ pu, connected Y- Δ
- Load: static (constant z) load of $10 + j5$ MVA at 5 kV

Solution

Select $S_B = 20$ MVA, a load voltage of 5 kV, and compute all system impedances. Let $h = 1$.

- Generator: $x = (0.125)(20/25) = 0.10$ pu
- T1: $x = (0.105)(20/30) = 0.07$ pu
- Line: $z = [(2 + j4)(20)]/(20)^2 = 0.1 + j0.2$ pu
- T2: $x = 0.05$ pu

Load (as series impedance):

$$R = \frac{(V_u)^2 (S_B) P}{P^2 + Q^2}$$

$$= \frac{(1.0)^2 (20 \times 10^6) (10 \times 10^6)}{(10 \times 10^6)^2 + (5 \times 10^6)^2} = \frac{200}{125} = 1.6 \text{ pu}$$

Similarly, $X = 100/125 = 0.8$ pu. Then the positive sequence network for a SLG fault at bus C is represented as shown in Figure 3.6.

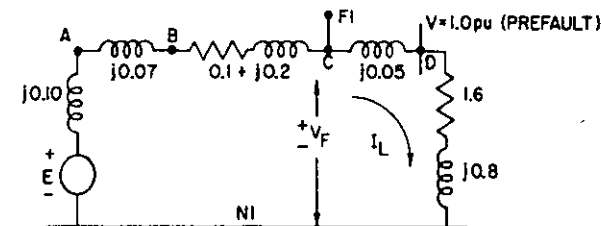


Fig. 3.6. One-line diagram of the positive sequence network.

The load current I_L is (with V as the reference phasor)

$$I_L = \frac{P - jQ}{V^*} = \frac{10 - j5}{20} = 0.5 - j0.25 \text{ pu}$$

The Thevenin voltage at bus C is

$$V_F = 1.0 + j0 + (0.5 - j0.25)(j0.05)$$

$$= 1.0125 + j0.025 = 1.0125 \angle 1.27^\circ \text{ pu}$$

We set $V_F = 1.0125 \angle 0^\circ$ and it becomes the reference phasor in the fault calculations. The impedance seen looking in at F1 with E shorted is $0.1 + j0.37$ on the left in parallel with $1.6 + j0.85$ on the right, or

$$Z_1 = \frac{(0.1 + j0.37)(1.6 + j0.85)}{1.7 + j1.22} = 0.332/67.3^\circ = 0.128 + j0.307 \text{ pu}$$

This is the impedance to the flow of both positive and negative sequence currents.

The zero sequence current, for reasons to be investigated later, sees an open circuit to the left of bus A, with A grounded (because of the Y-grounded connection) and an open circuit to the right of bus C. Thus Z_0 is the sum of the line and T1 impedances, or $Z_0 = 0.1 + j0.27$ pu.

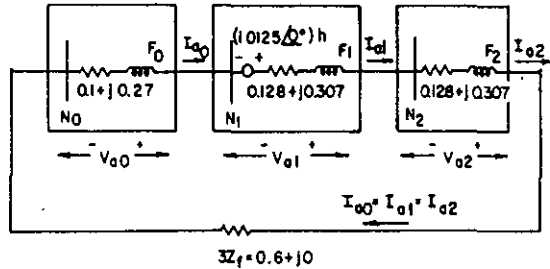


Fig. 3.7. Sequence networks for SLG fault at bus C.

The complete connection of sequence networks is shown in Figure 3.7, where Z_f is shown to be

$$Z_f = \frac{4 + j0}{Z_B} = \frac{4}{20} = 0.2 \text{ pu}$$

The total circuit impedance is

$$Z_t = Z_0 + Z_1 + Z_2 + 3Z_f = 0.956 + j0.884 = 1.3/42.8^\circ \text{ pu}$$

From (3.5) we compute

$$I_{a1} = \frac{1.0125/0^\circ}{1.3/42.8^\circ} = 0.78/-42.8^\circ = 0.572 - j0.530 \text{ pu}$$

Then $I_a = 3I_{a1} = 2.34/-42.8^\circ$ pu.

Since the fault occurs on a 20 kV bus,

$$I_B = S_B/V_B = \frac{20 \times 10^6}{\sqrt{3}(20 \times 10^3)} = 577 \text{ A}$$

and $I_a = 1350$ A. We may also synthesize the phase voltages by first computing the sequence voltages.

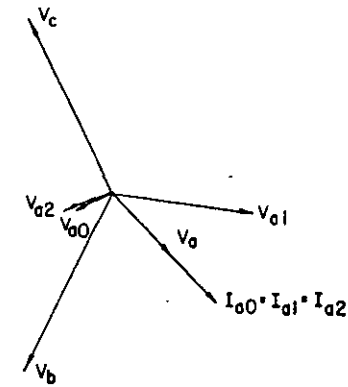
$$\begin{aligned} V_{a0} &= -Z_0 I_{a0} = -(0.288/69.7^\circ)(0.78/-42.8^\circ) \\ &= -0.225/26.9^\circ = -0.200 - j0.102 \text{ pu} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{a1} &= V_F - Z_1 I_{a1} = (1.0125 + j0) - (0.332/67.3^\circ)(0.78/-42.8^\circ) \\ &= (1.0125 + j0) - (0.236 + j0.1075) = 0.7765 - j0.1075 \end{aligned}$$

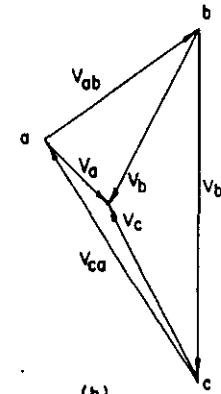
$$V_{a2} = -Z_2 I_{a2} = -0.236 - j0.1075$$

Thus

$$V_a = V_{a0} + V_{a1} + V_{a2} = 0.3405 - j0.3170 = 0.466/-42.9^\circ \text{ pu}$$



(a)



(b)

Fig. 3.8. Currents and voltages for the SLG fault: (a) sequence quantities (b) postfault LL voltages at the fault.

which should check with

$$V_a = Z_f I_a = (0.6)(0.78/-42.8^\circ) = 0.468/-42.8^\circ$$

This is a good check considering the algebra involved. From (2.23)

$$\begin{aligned} V_b &= V_{a0} + a^2 V_{a1} + a V_{a2} \\ &= -0.200 - j0.102 - 0.4826 - j0.6212 + 0.2111 - j0.1512 \\ &= -0.4715 - j0.874 = -0.994/61.7^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_c &= V_{a0} + a V_{a1} + a^2 V_{a2} \\ &= -0.200 - j0.102 - 0.2964 + j0.7288 + 0.0249 + j0.2588 \\ &= -0.4715 + j0.8856 = -0.994/-61.7^\circ \end{aligned}$$

These voltages are shown in Figure 3.8 together with the line-to-line voltages at bus C, where

$$V_{ab} = V_a - V_b, \quad V_{bc} = V_b - V_c, \quad V_{ca} = V_c - V_a$$

3.2 The Line-to-Line (LL) Fault

1. *Circuit diagram:* See Figure 3.9 and note that the LL fault is placed between lines *b* and *c* to retain symmetry with respect to phase *a*.

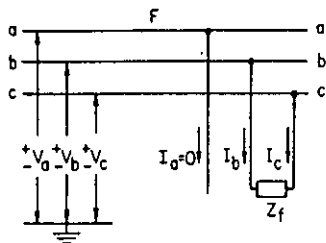


Fig. 3.9. Diagram of a LL fault at *F*.

2. *Boundary conditions:* By inspection of Figure 3.9,

$$I_a = 0 \quad (3.6)$$

$$I_b = -I_c \quad (3.7)$$

$$V_b - V_c = I_b Z_f \quad (3.8)$$

3. *Transformation:* From the analysis equation $I_{012} = A^{-1} I_{abc}$ and incorporating (3.6) and (3.7),

$$I_{012} = \frac{h}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ I_b \\ -I_b \end{bmatrix} = \frac{jhI_b}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Also from (3.8) we write

$$Z_f I_b = V_b - V_c = \frac{1}{h} (V_{a0} + a^2 V_{a1} + a V_{a2}) - \frac{1}{h} (V_{a0} + a V_{a1} + a^2 V_{a2})$$

$$\frac{1}{h} Z_f (I_{a0} + a^2 I_{a1} + a I_{a2}) = \frac{(a^2 - a)}{h} V_{a1} + \frac{(a - a^2)}{h} V_{a2}$$

From (3.9) $I_{a0} = 0$ and $I_{a1} = -I_{a2}$. Substituting this information into the above, we have for any *h*,

$$Z_f (a^2 - a) I_{a1} = (a^2 - a) V_{a1} - (a^2 - a) V_{a2}$$

or

$$Z_f I_{a1} = V_{a1} - V_{a2} \quad (3.10)$$

4. *Sequence currents:* From (3.9), $I_{a0} = 0$, so the zero sequence network is open. Also from (3.9) $I_{a1} = -I_{a2}$, which requires the connection shown in Figure 3.10.

5. *Sequence voltages:* From equation (3.10) and Figure 3.10 we see that the remaining connection must be as shown in Figure 3.11. Then

$$I_{a1} = \frac{hV_F}{Z_1 + Z_2 + Z_f} \quad (3.11)$$

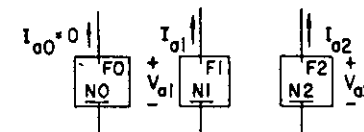


Fig. 3.10. Sequence network partial connection specified by the current equation.

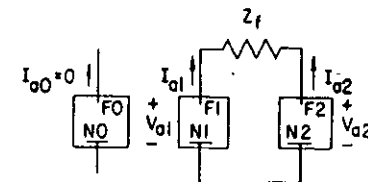


Fig. 3.11. Sequence network connection for a LL fault.

Example 3.2

Compute the phase voltages and currents for a LL fault at bus *C* of Figure 3.5, where a fault impedance of 4 ohms is assumed between phases *b* and *c*. Let $h = 1$.

Solution

The sequence networks are exactly as shown in Figure 3.7, but their interconnection is that of Figure 3.11. With the new connection the total impedance is

$$Z_t = Z_1 + Z_2 + Z_f = 0.456 + j0.614 = 0.765/53.4^\circ \text{ pu}$$

Then

$$I_{a1} = -I_{a2} = hV_F/Z_t = \frac{1.0125/0^\circ}{0.765/53.4^\circ}$$

$$= 1.325/-53.4^\circ = 0.788 - j1.065 \text{ pu}$$

From equation (3.9) with $h = 1$

$$I_b = -I_c = -j\sqrt{3}I_{a1} = -1.86 - j1.38 = -2.32/36.6^\circ \text{ pu} = 1320 \text{ A}$$

This system voltages may also be synthesized from a knowledge of the sequence currents and sequence network connections. Thus with $h = 1$,

$$V_{a1} = hV_F - Z_1 I_{a1} = 1.0125 - (0.332/67.3^\circ)(1.325/-53.4^\circ)$$

$$= 1.0125 - 0.427 - j0.1055 = 0.5855 - j0.1055 \text{ pu}$$

$$V_{a2} = -Z_2 I_{a2} = -(0.332/67.3^\circ)(-1.325/-53.4^\circ)$$

$$= 0.44/13.9^\circ = 0.427 + j0.1055 \text{ pu}$$

and we compute

$$V_a = V_{a1} + V_{a2} = 1.0125 + j0$$

$$V_b = a^2 V_{a1} + a V_{a2} = -0.389 - j0.448 - 0.310 + j0.317$$

$$= -0.699 - j0.131 = -0.705/10.6^\circ \text{ pu}$$

$$V_c = a V_{a1} + a^2 V_{a2} = -0.196 + j0.554 - 0.118 - j0.423$$

$$= -0.314 + j0.131 = -0.342/-22.6^\circ \text{ pu}$$

The line-to-line voltages on a phase voltage base are

$$V_{ab} = V_a - V_b = 1.712 + j0.131 \text{ pu}$$

$$V_{bc} = V_b - V_c = -0.385 - j0.262 \text{ pu}$$

$$V_{ca} = V_c - V_a = -1.326 + j0.131 \text{ pu}$$

We make a check on V_{bc} from equation (3.8)

$$\begin{aligned} V_{bc} &= V_b - V_c = I_b Z_f \\ &= (-1.86 - j1.38)(0.2) = -0.372 - j0.276 \text{ pu} \end{aligned}$$

which is a good check, considering the algebra involved.

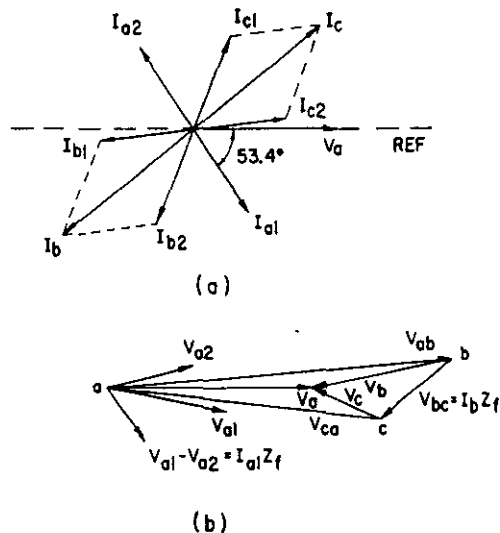


Fig. 3.12. Phasor diagrams for a LL fault: (a) currents (b) voltages.

Phasor diagrams of currents and voltages are shown in Figure 3.12. Note that if Z_f were zero the voltage "triangle" would collapse to zero on the b - c side and the $V_{a1} - V_{a2}$ phasor would go to zero.

3.3 The Double Line-to-Ground (2LG) Fault

1. *Circuit diagram:* The fault connection is shown in Figure 3.13. Note that symmetry with respect to phase a is obtained by faulting phases b and c .

2. *Boundary conditions:* By inspection of Figure 3.13 we have

$$I_a = 0 \quad (3.12)$$

$$V_b = (Z_f + Z_g) I_b + Z_g I_c \quad (3.13)$$

$$V_c = (Z_f + Z_g) I_c + Z_g I_b \quad (3.14)$$

3. *Transformation:* From (3.12) we write

$$I_a = 0 = \frac{1}{h} (I_{a0} + I_{a1} + I_{a2}) \quad (3.15)$$

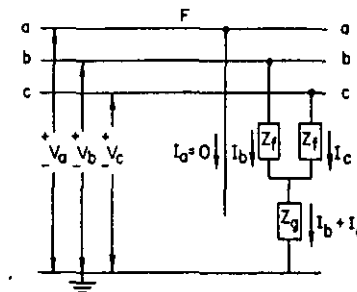


Fig. 3.13. Diagram of a 2LG fault at F .

From (2.24) we write

$$V_b = \frac{1}{h} (V_{a0} + a^2 V_{a1} + a V_{a2}) \quad (3.16)$$

$$V_c = \frac{1}{h} (V_{a0} + a V_{a1} + a^2 V_{a2}) \quad (3.17)$$

and find the difference

$$V_b - V_c = -\frac{j\sqrt{3}}{h} (V_{a1} - V_{a2}) \quad (3.18)$$

But from (3.13) and (3.14) we also find that

$$V_b - V_c = Z_f (I_b - I_c) \quad (3.19)$$

Substituting (3.18) and a similar relation for $I_b - I_c$ into (3.19), we have for any h , $V_{a1} - V_{a2} = Z_f (I_{c1} - I_{a1})$, or

$$V_{a1} - Z_f I_{a1} = V_{a2} - Z_f I_{a2} \quad (3.20)$$

Also, adding equations (3.16) and (3.17), we find the sum

$$V_b + V_c = \frac{1}{h} [2V_{a0} - (V_{a1} + V_{a2})] \quad (3.21)$$

which we equate to the sum of (3.13) and (3.14)

$$V_b + V_c = \frac{Z_f}{h} [2I_{a0} - (I_{a1} + I_{a2})] + \frac{Z_g}{h} [4I_{a0} - 2(I_{a1} + I_{a2})] \quad (3.22)$$

Since (3.21) and (3.22) are equal, we collect terms to write for any h ,

$$2V_{a0} - 2Z_f I_{a0} - 4Z_g I_{a0} = V_{a1} + V_{a2} - Z_f (I_{a1} + I_{a2}) - 2Z_g (I_{a1} + I_{a2})$$

This may be simplified by noting that $I_{a1} + I_{a2} = -I_{a0}$ and using the result (3.20). Rearranging then, we have

$$V_{a0} - Z_f I_{a0} - 3Z_g I_{a0} = V_{a1} - Z_f I_{a1} \quad (3.23)$$

4. *Sequence currents:* From (3.15) we see immediately that the N terminals of the sequence networks must be connected to a common node as shown in Figure 3.14.

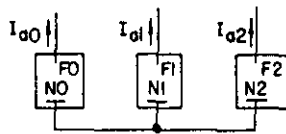


Fig. 3.14. Sequence network partial connection specified by the current equation.

5. *Sequence voltages:* From (3.20) we observe that the voltages across the positive and negative sequence networks are equal if an external impedance of Z_f is added in series with each network. Similarly, (3.23) requires that an external impedance of $Z_f + 3Z_g$ be added to the zero sequence network. The final connection is shown in Figure 3.15. Then

$$I_{a1} = \frac{hV_F}{Z_1 + Z_f + \frac{(Z_2 + Z_f)(Z_0 + Z_f + 3Z_g)}{Z_0 + Z_2 + 2Z_f + 3Z_g}} \quad (3.24)$$

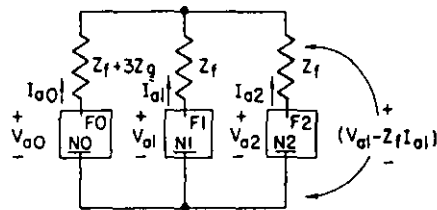


Fig. 3.15. Sequence network connection for a 2LG fault.

Example 3.3

Refer again to the system of Example 3.1, this time with a 2LG fault and with fault impedances of $Z_f = 4$ ohms and $Z_g = 8$ ohms. The fault is at bus C, so the sequence networks are internally the same as those of Figure 3.7. Let $h = 1$.

Solution

The pu impedances are

$$\begin{aligned} Z_0 &= 0.1 + j0.27, & Z_1 &= Z_2 = 0.128 + j0.307 \\ Z_f &= 0.2 + j0, & Z_g &= 0.4 + j0 \end{aligned}$$

As before, $hV_F = 1.0125 + j0$ pu. The network to be solved appears schematically as shown in Figure 3.16.

The total impedance seen by current I_{a1} is

$$\begin{aligned} Z_t &= 0.328 + j0.307 + \frac{(0.328 + j0.307)(1.5 + j0.27)}{1.828 + j0.577} \\ &= 0.617 + j0.515 = 0.805/39.8^\circ \text{ pu} \end{aligned}$$

Then I_{a1} is

$$I_{a1} = \frac{1.0125/0^\circ}{0.805/39.8^\circ} = 1.259/-39.8^\circ = 0.965 - j0.805 \text{ pu}$$

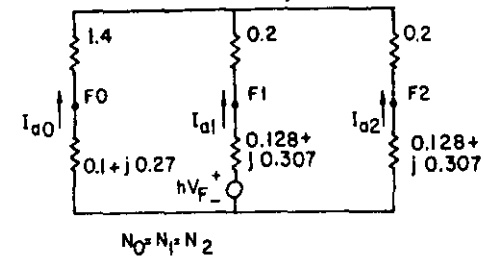


Fig. 3.16. A 2LG fault network.

By inspection of Figure 3.16 we compute

$$\begin{aligned} I_{a0} &= -\frac{Z_2 + Z_f}{Z_2 + Z_0 + 2Z_f + 3Z_g} I_{a1} \\ &= -\frac{0.449/43.1^\circ}{1.92/17.5^\circ} (1.259/-39.8^\circ) = -0.294/-14.2^\circ = -(0.285 - j0.072) \text{ pu} \end{aligned}$$

Similarly,

$$\begin{aligned} I_{a2} &= -\frac{Z_0 + Z_f + 3Z_g}{Z_2 + Z_0 + 2Z_f + 3Z_g} I_{a1} = -\frac{1.525/10.2^\circ}{1.92/17.5^\circ} (1.259/-39.8^\circ) \\ &= -1.00/-47.1^\circ = -(0.68 - j0.732) \text{ pu} \end{aligned}$$

Checking these results, we compute $I_o = I_{a0} + I_{a1} + I_{a2} = 0 - j0.001 \cong 0$. Synthesizing the other phase currents, we have

$$\begin{aligned} I_b &= I_{a0} + a^2 I_{a1} + a I_{a2} \\ &= -0.285 + j0.072 - 1.181 - j0.432 - 0.293 - j0.955 \\ &= -1.759 - j1.315 = -2.195/36.8^\circ \text{ pu} \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} I_c &= I_{a0} + a I_{a1} + a^2 I_{a2} \\ &= -0.285 + j0.072 + 0.215 + j1.24 + 0.977 + j0.210 \\ &= 0.907 + j1.522 = 1.774/59.2^\circ \text{ pu} \end{aligned}$$

Thus $I_b + I_c = -0.852 + j0.207$ pu. But we may also show from (2.26) and (3.15) that

$$I_b + I_c = 3I_{a0} = -0.855 + j0.216 \quad (3.25)$$

which is a good check.

The sequence voltages are

$$V_{a0} = -Z_0 I_{a0} = -(0.1 + j0.27)(-0.285 + j0.072) \\ = 0.048 + j0.07 \text{ pu}$$

$$V_{a1} = hV_F - Z_1 I_{a1} = 1.0125 - (0.128 + j0.307)(0.965 - j0.805) \\ = 1.0125 - (0.370 + j0.193) = 0.6425 - j0.193 \text{ pu}$$

$$V_{a2} = -Z_2 I_{a2} = -(0.128 + j0.307)(-0.68 - j0.732) \\ = 0.311 + j0.115 \text{ pu}$$

and the drop across parallel networks is

$$V_{a1} - Z_f I_{a1} = 0.6425 - j0.193 - (0.2)(0.965 - j0.805) \\ = 0.4495 - j0.032 \text{ pu}$$

The phase voltages are synthesized from equation (2.24).

$$V_a = V_{a0} + V_{a1} + V_{a2} = 1.001 - j0.008 \text{ pu}$$

which is close to the desired value of $1.0125 + j0$.

$$V_b = V_{a0} + a^2 V_{a1} + a V_{a2} \\ = 0.0479 + j0.07 - 0.488 - j0.4595 - 0.2552 + j0.212 \\ = -0.6953 - j0.1775 = -0.717/14.3^\circ \text{ pu}$$

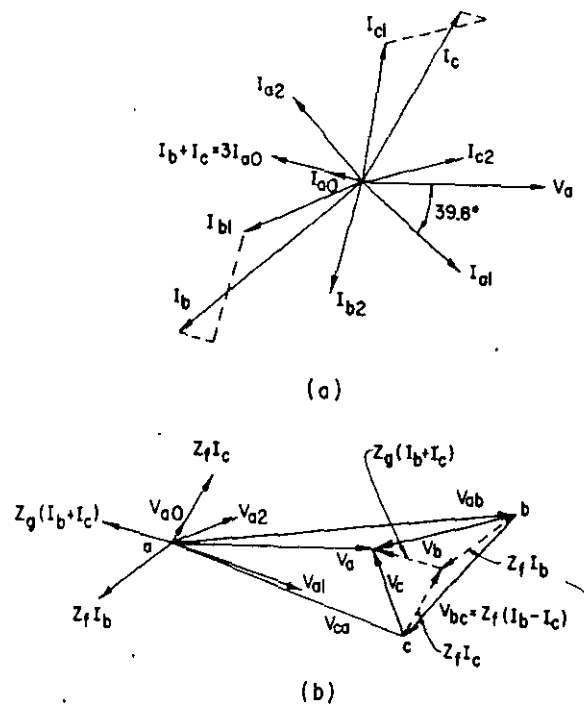


Fig. 3.17. Current and voltage phasors for a 2LG fault: (a) currents (b) voltages.

$$V_c = V_{a0} + a V_{a1} + a^2 V_{a2} \\ = 0.0497 + j0.07 - 0.154 + j0.6525 - 0.0558 - j0.3270 \\ = -0.1619 + j0.3955 = -0.427 / -67.7^\circ \text{ pu}$$

As a check we compute from (3.13)

$$V_b = (Z_f + Z_g) I_b + Z_g I_c = Z_f I_b + Z_g (I_b + I_c) \\ = (0.2)(-1.759 - j1.315) + (0.4)(-0.852 + j0.207) \\ = (-0.352 - j0.263) + (-0.341 + j0.083) = -0.693 - j0.180 \text{ pu}$$

a close check. The current and voltage phasors are plotted in Figure 3.17.

3.4 The Three-Phase (3 ϕ) Fault

The three-phase fault, although not an unbalanced one, is analyzed here to complete the "family" of shunt unbalances of greatest common interest. This fault is important for several reasons. First, it is often the most severe type¹ and hence must be checked to verify that circuit breakers have adequate interrupting rating. Second, it is the simplest fault to determine analytically and is therefore the only one calculated in some cases when complete system information is lacking. Finally, it is often assumed that other types of faults, if not cleared promptly, will develop into 3 ϕ faults. It is therefore essential that this type of fault be computed in addition to the other types.

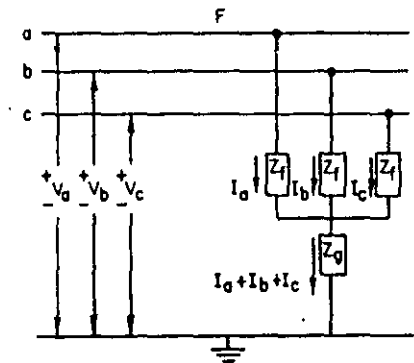


Fig. 3.18. Diagram of a 3 ϕ fault at F.

1. *Circuit diagram:* The 3 ϕ fault connection is shown in Figure 3.18. The fault is shown as a 3 ϕ -to-ground fault with individual phase impedances Z_f and neutral-to-ground impedance Z_g .

2. *Boundary conditions:*

$$V_a = Z_f I_a + Z_g (I_a + I_b + I_c) \quad (3.26)$$

$$V_b = Z_f I_b + Z_g (I_a + I_b + I_c) \quad (3.27)$$

¹Exceptions: The SLG fault is more severe than the 3 ϕ fault in cases where (1) the generators have solidly grounded neutrals or low-impedance neutral impedances and (2) on the Y-grounded side of Δ -Y-grounded transformer banks.

$$V_c = Z_f I_c + Z_g (I_a + I_b + I_c) \quad (3.28)$$

3. *Transformation:* First, we write (3.26)–(3.28) in terms of the symmetrical components of phase *a*, recognizing that $I_a + I_b + I_c = (3/h)I_{a0}$, by definition. Thus

$$V_a = \frac{1}{h} (V_{a0} + V_{a1} + V_{a2}) = \frac{1}{h} Z_f (I_{a0} + I_{a1} + I_{a2}) + \frac{3}{h} Z_g I_{a0} \quad (3.29)$$

$$V_b = \frac{1}{h} (V_{a0} + a^2 V_{a1} + a V_{a2}) = \frac{1}{h} Z_f (I_{a0} + a^2 I_{a1} + a I_{a2}) + \frac{3}{h} Z_g I_{a0} \quad (3.30)$$

$$V_c = \frac{1}{h} (V_{a0} + a V_{a1} + a^2 V_{a2}) = \frac{1}{h} Z_f (I_{a0} + a I_{a1} + a^2 I_{a2}) + \frac{3}{h} Z_g I_{a0} \quad (3.31)$$

Subtracting (3.31) from (3.30), we find V_{bc} for any *h* to be

$$V_{bc} = V_b - V_c = (a^2 - a) V_{a1} + (a - a^2) V_{a2} = Z_f [(a^2 - a) I_{a1} + (a - a^2) I_{a2}] \quad (3.32)$$

Since $(a^2 - a) = -j\sqrt{3}$, (3.32) may be simplified as follows:

$$V_{bc} = -j\sqrt{3} V_{a1} + j\sqrt{3} V_{a2} = Z_f (-j\sqrt{3} I_{a1} + j\sqrt{3} I_{a2})$$

or $V_{a1} - V_{a2} = Z_f (I_{a1} - I_{a2})$. This may be written more conveniently as

$$V_{a1} - Z_f I_{a1} = V_{a2} - Z_f I_{a2} \quad (3.33)$$

Now add equations (3.29) and (3.30) and recognize that $1 + a^2 = -a$ and $1 + a = -a^2$. Then

$$V_a + V_b = \frac{1}{h} (2V_{a0} - aV_{a1} - a^2 V_{a2}) = \frac{1}{h} Z_f (2I_{a0} - aI_{a1} - a^2 I_{a2}) + \frac{6}{h} Z_g I_{a0}$$

Rearranging and canceling the *h* factor, we have

$$2(V_{a0} - Z_f I_{a0} - 3Z_g I_{a0}) = a(V_{a1} - Z_f I_{a1}) + a^2(V_{a2} - Z_f I_{a2}) \quad (3.34)$$

From (3.33) we see that the two quantities in parentheses on the right-hand side of (3.34) are equal. Thus (3.34) simplifies to

$$2(V_{a0} - Z_f I_{a0} - 3Z_g I_{a0}) = (a + a^2)(V_{a1} - Z_f I_{a1})$$

Since $a + a^2 = -1$, this may be written as

$$2(V_{a0} - Z_f I_{a0} - 3Z_g I_{a0}) = -(V_{a1} - Z_f I_{a1}) \quad (3.35)$$

Now add equations (3.30) and (3.31) to find $V_b + V_c$ and recall that $a + a^2 = -1$. Then

$$V_b + V_c = 2V_{a0} - V_{a1} - V_{a2} = Z_f (2I_{a0} - I_{a1} - I_{a2}) + 6 Z_g I_{a0}$$

which we rearrange to write

$$2(V_{a0} - Z_f I_{a0} - 3Z_g I_{a0}) = (V_{a1} - Z_f I_{a1}) + (V_{a2} - Z_f I_{a2})$$

and utilizing (3.33) again,

$$V_{a0} - Z_f I_{a0} - 3Z_g I_{a0} = V_{a1} - Z_f I_{a1} \quad (3.36)$$

4. *Sequence currents:* There are no sequence current equations for this fault.

5. *Sequence voltages:* From equations (3.33) and (3.36) we deduce that each

sequence network with series impedances of $Z_f + 3Z_g$, Z_f , and Z_f the zero, positive, and negative sequences are in parallel, exactly as in Figure 3.15. However, upon further examination of equations (3.35) and (3.36),

$$V_{a1} - Z_f I_{a1} = -2(V_{a0} - Z_f I_{a0} - 3Z_g I_{a0}) \quad (3.37)$$

$$V_{a1} - Z_f I_{a1} = V_{a0} - Z_f I_{a0} - 3Z_g I_{a0} \quad (3.38)$$

we see a contradiction. Obviously, these equations can be satisfied simultaneously only if $I_{a0} = 0$, in which case $V_{a0} = 0$ also. But this requires that (3.33) also be zero, i.e.,

$$V_{a1} - Z_f I_{a1} = V_{a2} - Z_f I_{a2} = 0 \quad (3.39)$$

If we short out the negative sequence network, $I_{a2} = 0$ and $V_{a2} = 0$ as well. Thus our sequence network connections are those shown in Figure 3.19.

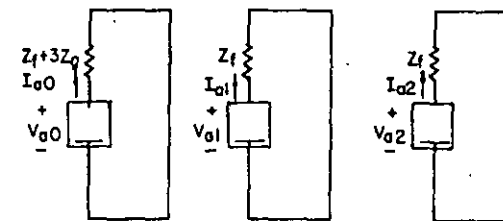


Fig. 3.19. Sequence network connections for a 3 ϕ fault.

Note that the result in Figure 3.19 could have been obtained by inspection of Figure 3.18. Since the "load" is Z_f in each phase and the applied voltages are balanced, the currents are obviously balanced. Then

$$(3/h)I_{a0} = I_a + I_b + I_c = 0 \quad (3.40)$$

Also, since the currents are balanced,

$$I_{012} = \frac{h}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ I_{a1} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

or $I_{a1} = hI_a$, $I_{a0} = I_{a2} = 0$.

The impedance Z_f is really the load impedance of a balanced three-phase load. If this impedance is small, however, we would consider this situation to be a short circuit. In either event the computation is the same.

Example 3.4

Consider a 3 ϕ fault with fault impedance of 4 ohms ($Z_f = 4$ ohm) at bus *C* of Figure 3.5. Let $h = 1$.

Solution

The pu fault impedance is $Z_f = 4/Z_B = 4/20 = 0.2$ pu. Thus

$$I_{a1} = I_a = \frac{hV_F}{Z_1 + Z_f} = \frac{1.0125 + j0}{0.328 + j0.307}$$

or

$$I_{a1} = \frac{1.0125/0^\circ}{0.449/43.1^\circ} = 2.255/-43.1^\circ = 1.647 - j1.54 \text{ pu}$$

The voltage at the fault is

$$V_a = V_{a1} = Z_f I_{a1} = (0.2)(1.647 - j1.54) = 0.329 - j0.308 = 0.451/-43.1^\circ \text{ pu}$$

Currents and voltages in phases *b* and *c* are found by applying phase rotations of -120° and $+120^\circ$ respectively to the above results.

It is interesting to compare the results of Examples 3.1–3.4 to get some idea as to the relative severity of the various faults. This comparison is somewhat arbitrary because of the choice of the fault impedances. For example, in the 2LG fault the impedance Z_g was chosen to be 0.4 pu, whereas Z_f was chosen as 0.2 pu in all cases. With this understanding that the results are subject to choice of impedance, we have the comparisons shown in Table 3.1. It is clear from this table

Table 3.1. Comparison of Fault Currents and Voltages

| Type of Fault | Current in Faulted Phase (pu) | Lowest Voltage at Fault (pu) |
|---------------|-------------------------------|------------------------------|
| SLG* | 2.34 | 0.468 |
| LL* | 2.32 | 0.342 |
| 2LG† | 2.195 | 0.303 |
| 3φ* | 2.255 | 0.451 |

* $Z_f = 0.2$ pu, † $Z_f = 0.2$ pu and $Z_g = 0.4$ pu.

that the SLG fault is the most severe from the standpoint of current magnitudes. This is not to imply that this would always be the case by any means. The circuit parameters of the examples used here are not chosen to be typical of any physical system but merely to illustrate the procedure. In a physical system each fault at each fault location must be computed on the basis of actual circuit conditions. When this is done, it is often the case that the SLG fault is the most severe, with the 3φ, 2LG, and LL following in that order. This was not true in the examples because of the large value of Z_g chosen.

3.5 Other Types of Shunt Faults

The four types of faults discussed above are the types of most general interest. The SLG fault is usually assumed to be by far the most prevalent, making up perhaps 70% of all transmission line faults.² Occasionally, a fault configuration other than these four is of interest, e.g., in special cases where it is considered necessary to analyze a given unusual occurrence. In such cases a straightforward application of steps 1–4 will permit the evaluation of any situation. Reference [14] gives the sequence network connections for a number of these special cases, and some of them are recommended for study in the problems at the end of the chapter.

²The "Westinghouse Transmission and Distribution Reference Book" [14, p. 358] gives a typical frequency of occurrence for 3φ, 2LG, LL, and SLG faults as 5%, 10%, 15%, and 70% respectively.

3.6 Comments on Shunt Fault Calculation

In all the above the computation of fault currents and voltages are based upon finding the open circuit (Thevenin) voltage hV_F at the fault point *F*. This voltage and the Thevenin impedance are then connected to external faults, i.e., to fault connections external to the positive sequence network. This equivalent circuit gives correct results for the current flowing external to *F*, namely I_{a1} .

If the distribution of I_{a0} , I_{a1} , and I_{a2} inside the sequence networks is desired, this must be found by Kirchhoff's laws applied to the actual branches within the three sequence networks. Then the currents in any branch may be synthesized by $I_{abc} = A I_{012}$ to find the branch phase currents at that location which contribute to the fault. Note that this branch current does not include the balanced load current which was flowing prior to the fault. However, since the network is linear, the fault and load currents may be added by linear superposition to obtain the total current flowing after the fault is applied.

Example 3.5

Compute the total current flowing from bus *B* to bus *C* in the system of Figure 3.5 for the SLG fault condition of Example 3.1.

Solution

In Example 3.1 we computed the load current to be $I_L = 0.5 - j0.25$ pu. This is based on a reference voltage at bus *D* of $1.0 + j0$ pu. The SLG fault current is $I_a = 1.713 - j1.965$ pu, based on a reference voltage $hV_F = 1.0125 + j0$ at bus *C*. Actually there is only 1.27° difference in the reference voltages and this will be ignored. If it were significant, the fault current could easily be rotated to agree with the load reference. The load and fault currents are superimposed as shown in Table 3.2.

Table 3.2. Total Current Leaving Bus *B* for a SLG Fault at Bus *C*

| Phase | Load Current | Fault Current | Total Current |
|----------|-----------------|----------------|-----------------|
| <i>a</i> | 0.5 - j0.25 | 1.434 - j1.554 | 1.934 - j1.804 |
| <i>b</i> | -0.467 - j0.308 | 0.142 - j0.008 | -0.324 - j0.316 |
| <i>c</i> | -0.033 + j0.558 | 0.142 - j0.008 | 0.109 + j0.550 |

II. SERIES FAULTS

Next we consider a group of unbalanced conditions which do not involve any connection between lines or between line and neutral at *F*. These are referred to as series faults because there is generally an unbalanced series impedance condition.

Since the unbalance for this type of problem is in series with the line, there is no "fault point" in the sense described in Part I. Rather, there are two "fault points," one on either side of the unbalance. Thus the sequence network is still that of a completely symmetric system, and the unbalanced portion is isolated outside the sequence network.

Our notation for this situation will be to consider the system connections to the point of unbalance as shown in Figure 3.20, where the two sides of the fault point are *F* and *F'*. Current direction is assumed to be from *F* to *F'*, and a voltage drop is shown in the assumed direction of current.

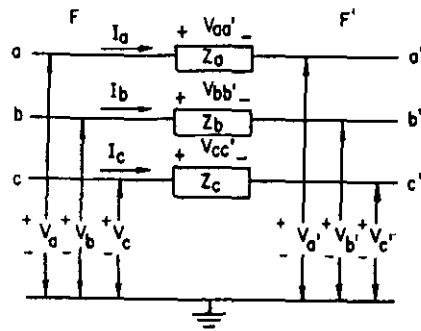


Fig. 3.20. Voltages and currents at the fault point $F-F'$.

The sequence networks contain the symmetrical portions of the system, looking back to the left of F and to the right of F' . These symmetrical portions may or may not be interconnected. We shall represent the sequence networks schematically as shown in Figure 3.21. Note that the voltage polarities and current directions are consistent with those defined in Figure 3.20.

As shown in Chapter 2 the general case of series unbalance (i.e., with $Z_a \neq Z_b \neq Z_c$) generates a condition where coupling exists between sequence networks. Such a condition would require a special connection from, say, I_{a1} to the network of I_{a2} , with possibly an isolation and phase shifting transformer. We will generally avoid such situations since they introduce as many problems as they solve. The problems under study here are the simple cases of series unbalance, but they include some very important special cases. One class of special problems which are of particular interest is that of open lines. This is easily solved by our usual technique, as shown below.

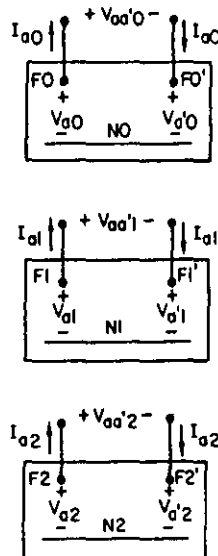


Fig. 3.21. Sequence networks for series faults between F and F' .

3.7 Sequence Network Equivalents for Series Faults

Before proceeding with the analysis of series faults, we examine briefly the nature of the sequence networks of Figure 3.21. For a shunt fault the situation is simpler since only one point in the balanced network, namely F , is of interest, and a straightforward application of Thevenin's theorem derives a simple equivalent circuit. With series faults the situation is changed. Now there are two points in the balanced (unfaulted) system which are of direct interest, F and F' . Hence we need a two-port Thevenin's equivalent. Since Thevenin's theorem is not commonly used for more than one port, we digress briefly to establish a method of obtaining such an equivalent.³

The zero and negative sequence networks—being entirely linear, bilateral, and passive—are no problem insofar as their two-port description is concerned. Many authors, [5] for example, examine two-port parameters of such networks in great detail, and six possible sets of parameters are derived— Y , Z , H , G , $ABCD$, and $\alpha\beta\gamma\delta$. For our work we will be most interested in the Y and Z parameters described by the two equations

$$V = Z I \quad (3.42)$$

and

$$I = Y V \quad (3.43)$$

We establish the nature of these parameters by referring to the general two-port network shown in Figure 3.22, where we define the currents to be entering

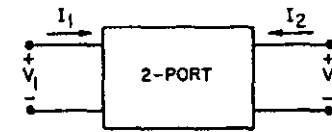


Fig. 3.22. General two-port network.

the network as shown and the voltages to be drops in the direction of the current through the network. Then we write,

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

or

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

The parameters of (3.44) are called the "open circuit impedance parameters" since they are found by leaving the ports "open." Thus

$$\begin{aligned} Z_{11} &= \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{I_2=0} & Z_{12} &= \left. \frac{V_1}{I_2} \right|_{I_1=0} \\ Z_{21} &= \left. \frac{V_2}{I_1} \right|_{I_2=0} & Z_{22} &= \left. \frac{V_2}{I_2} \right|_{I_1=0} \end{aligned} \quad (3.46)$$

³This subject is explored in greater depth in [15] where Ward applies Thevenin's theorem to n ports and derives quite general results. Our analysis is restricted to two ports.

and these equations show exactly how the parameters may be found. For example, to find Z_{11} , apply a current, say 1 ampere, at port 1 and leave port 2 open. Then measure or compute V_1 to find the ratio V_1/I_1 . Note that a current source has infinite impedance, so that both ports are open; hence the name "open circuit Z parameters."

Similarly, the Y parameters of (3.45) are found by shorting terminals. Thus we have

$$\begin{aligned} Y_{11} &= \left. \frac{I_1}{V_1} \right|_{V_2=0} & Y_{12} &= \left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{V_1=0} \\ Y_{21} &= \left. \frac{I_2}{V_1} \right|_{V_2=0} & Y_{22} &= \left. \frac{I_2}{V_2} \right|_{V_1=0} \end{aligned} \quad (3.47)$$

and we note that in this case we apply a voltage source of zero impedance to one port while shorting the other port.

Note that the networks with which we deal are linear, bilateral, passive networks. In such cases we are assured that $Z_{12} = Z_{21}$ and $Y_{12} = Y_{21}$. We also note that the lower (negative) terminals are common to ports 1 and 2 in power networks since this connection represents the system neutral. A port description often ignores impedances in this "neutral" in any event [5]. Also, it is easy to show that $Y = Z^{-1}$. Hence the name "short circuit Y parameters."

The Y parameters are really more useful for finding an equivalent circuit since the elements of the Y matrix give the admittance connected between nodes of the network. This is because each Y is found with the opposite port grounded so that any impedance at that port is shorted out. Thus we may redraw Figure 3.22 in a general way, using admittances computed in (3.47) to find the equivalent circuit of Figure 3.23. We see that Y_{11} is the sum of admittances connected to the +1

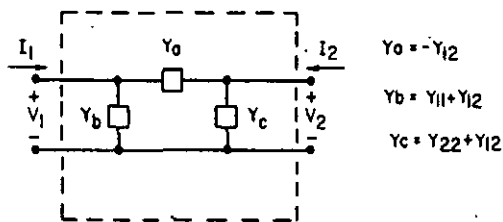


Fig. 3.23. Two-port equivalent circuit.

terminal, Y_{22} is the sum of admittances connected to the +2 terminal, and Y_{12} is the negative of the admittance between +1 and +2.

Returning to the sequence networks of Figure 3.21, we see that for the zero sequence network,

$$I_1 = -I_{a0}, \quad I_2 = I_{a0}, \quad V_1 = V_{a0}, \quad V_2 = V_{a'0} \quad (3.48)$$

and similarly for the negative sequence network. Thus, for example, we write

$$\begin{bmatrix} -I_{a0} \\ I_{a0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11-0} & Y_{12-0} \\ Y_{21-0} & Y_{22-0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{a0} \\ V_{a'0} \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

where we continue to associate the left (number 1) terminal with F and the right (number 2) terminal with F' .

The positive sequence network description is the same as that given above except that the positive sequence network has internal sources. If we consider these sources as independent,⁴ the network equations become [5]

$$V = Z I + h V_s \quad (3.50)$$

and

$$I = Y V + h I_s \quad (3.51)$$

where V_s and I_s are due exclusively to the internal sources, and Z and Y are the same as before. More specifically V_s in equation (3.50) consists of the open circuit voltages measured at ports 1 and 2 (F and F'), such voltages being due to internal (generator) sources. Likewise I_s in (3.51) consists of the currents which would flow into ports 1 and 2 (F and F') if these ports were shorted. Since

$$Y = Z^{-1} \quad (3.52)$$

we easily show that

$$I_s = -Y V_s \quad (3.53)$$

It is reasonable that these two source descriptions should be related. Note that the scalar multiplier h is required on the source terms due to the way the symmetrical component transformation A was defined in (2.36).

To construct an equivalent circuit for the positive sequence network, it is easiest to work with the admittance description. Thus from equation (3.51) we write

$$\begin{bmatrix} -I_{a1} \\ I_{a1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11-1} & Y_{12-1} \\ Y_{21-1} & Y_{22-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{a1} \\ V_{a'1} \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} I_{S1} \\ I_{S2} \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

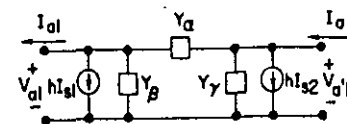


Fig. 3.24. Equivalent circuit for positive sequence network.

The equivalent circuit corresponding to equation (3.54) is shown in Figure 3.24, where we use the simplification

$$Y_\alpha = -Y_{12-1}, \quad Y_\beta = Y_{11-1} + Y_{12-1}, \quad Y_\gamma = Y_{22-1} + Y_{12-1} \quad (3.55)$$

where Y_α , Y_β , and Y_γ are elements of the equivalent circuit but the quantities on the right of (3.55) are Y matrix elements.

Example 3.6

The system shown in Figure 3.25 is to be studied for a series fault between buses F and F' . Find the equivalent circuits for the positive and negative sequence networks.

⁴It could be argued that the terminal voltage of a synchronous generator depends both upon its current and perhaps upon some remote voltage. For simplicity we assume constant voltage sources. Otherwise the Y and Z matrices become complicated and are no longer reciprocal [5].

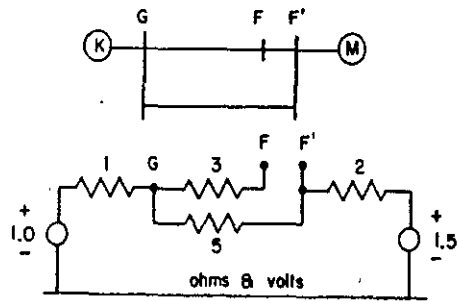


Fig. 3.25. System diagram for Example 3.6.

Solution

Following the notation of Figure 3.22, we sketch the system as shown in Figure 3.26.

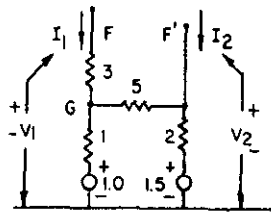


Fig. 3.26. Currents and voltages of the system under study

To find the elements of the Y matrix, we first remove the internal sources. Since these are voltage sources, they are shorted. Then, with $V_2 = 0$, apply $V_1 = 1.0$ and compute

$$Y_{11} = I_1 = \frac{1.0}{3 + 5/6} = \frac{6}{23} \text{ mho}$$

and

$$Y_{21} = I_2 = -(1/6)I_1 = -1/23 \text{ mho}$$

Now, with $V_1 = 0$ and $V_2 = 1.0$, compute

$$Y_{22} = I_2 = \frac{2 + 23/4}{2(23/4)} = \frac{31}{46} \text{ mho}$$

and

$$Y_{12} = I_1 = -\frac{1}{4} \left(\frac{2}{2 + 23/4} \right) \left(\frac{31}{46} \right) = -\frac{1}{23} \text{ mho (check)}$$

Thus

$$Y = \begin{bmatrix} 6/23 & -1/23 \\ -1/23 & 31/46 \end{bmatrix} \text{ mho}$$

Now, with both F and F' shorted, we compute the source currents as follows

for $h = 1$ (using superposition):

$$I_{S1} = I_{S1(1.0)} + I_{S1(1.5)} \\ = -\frac{5}{8} \left(\frac{1.0}{1 + 15/8} \right) - \frac{1}{4} (0) = -\frac{5}{23} \text{ A}$$

$$I_{S2} = I_{S2(1.0)} + I_{S2(1.5)} \\ = -\frac{3}{8} \left(\frac{1.0}{1 + 15/8} \right) - \frac{1.5}{2} = -\frac{3}{23} - \frac{3}{4} = -\frac{81}{92} \text{ A}$$

Thus the positive sequence equivalent circuit is shown in Figure 3.27. The negative sequence network equivalent is the same as Figure 3.27, assuming that the negative sequence impedances are the same as positive sequence impedances, except the current sources are missing.

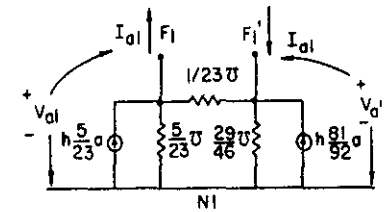


Fig. 3.27. Positive sequence network equivalent.

One additional important result may be established for the two-port Thevenin equivalent. Our two-port network is a special one since if any connection is to be made at all between F and F' , it is made in such a way that $I_e = I_{e'}$. Then $I_{012} = I_{012}$ or I_{012} at $F = I_{012}$ at F' , and the currents entering the ports of the sequence networks have a special constraint. Thus, for example, I_{a1} leaves the network at F and enters at F' . Note that this constraint is not due to any internal network condition but is due entirely to the anticipated external connection. In other words, we assume that the phases do not become crossed in establishing the series unbalance. (See [16] for a case where the phases do become crossed.) This equality of sequence currents is recognized in equation (3.54) and may also be noted in connection with the Z description

$$\begin{bmatrix} V_{a1} \\ V_{a'1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11-1} & Z_{12-1} \\ Z_{21-1} & Z_{22-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -I_{a1} \\ I_{a1} \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} V_{S1} \\ V_{S2} \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

but this equation simplifies immediately to

$$\begin{bmatrix} V_{a1} \\ V_{a'1} \end{bmatrix} = h \begin{bmatrix} V_{S1} \\ V_{S2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (Z_{11-1} - Z_{12-1}) I_{a1} \\ -(Z_{22-1} - Z_{12-1}) I_{a1} \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

Thus the voltage V_{a1} may be written in terms of the equivalent voltage V_{S1} and the current I_{a1} , exactly as in the case of shunt faults where we write

$$V_{a1} = h V_F - Z_1 I_{a1}$$

This means that the ports of the network are completely uncoupled and may be represented by the circuit of Figure 3.28.

Using the Y parameters, which are preferred when finding the equivalent circuit, we solve (3.54) for V_{a1} and $V_{a'1}$ by premultiplying by Y^{-1} . The result is given by

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} V_{a1} \\ V_{a'1} \end{bmatrix} &= Y^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} -I_{a1} \\ I_{a1} \end{bmatrix} - h \begin{bmatrix} I_{S1} \\ I_{S2} \end{bmatrix} \right\} \\ &= \frac{1}{\det Y} \begin{bmatrix} h(Y_{12-1} I_{S2} - Y_{22-1} I_{S1}) - (Y_{12-1} + Y_{22-1}) I_{a1} \\ h(Y_{12-1} I_{S1} - Y_{11-1} I_{S2}) + (Y_{12-1} + Y_{11-1}) I_{a1} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.58)$$

where $\det Y = Y_{11-1} Y_{22-1} - Y_{12-1}^2$. Thus for the uncoupled representation of Figure 3.28 the Z parameters are preferred:

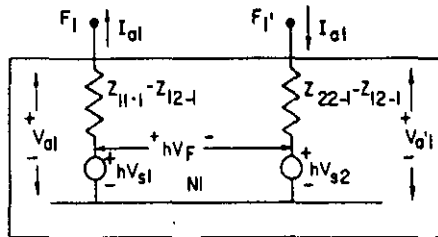


Fig. 3.28. Uncoupled positive sequence network.

Example 3.7

Find the uncoupled representation similar to Figure 3.28 for the system of Example 3.6.

Solution

The determinant of Y is

$$\det Y = (6/23)(31/46) - (1/23)^2 = 4/23$$

Thus from (3.55)

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} V_{a1} \\ V_{a'1} \end{bmatrix} &= \frac{23}{4} \begin{bmatrix} h[(-1/23)(-81/92) - (31/46)(-5/23)] - [(-1/23) + (31/46)] I_{a1} \\ h[(-1/23)(-5/23) - (6/23)(-81/92)] + [(-1/23) + (6/23)] I_{a1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1.063h - 3.625 I_{a1} \\ 1.375h + 1.250 I_{a1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

3.8 Unequal Series Impedances

One case of unequal series impedance where phase a is symmetric is that shown in Figure 3.29.

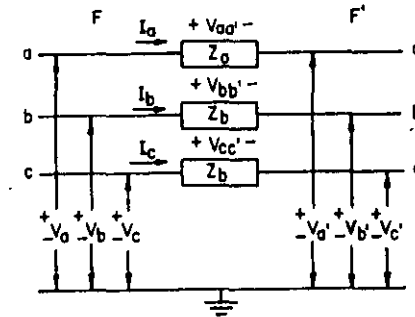


Fig. 3.29. Circuit diagram for unequal series impedances at $F-F'$.

1. *Circuit diagram*: See Figure 3.29 and note that $Z_a \neq Z_b$.
2. *Boundary conditions*: By inspection of Figure 3.29

$$\begin{bmatrix} V_{aa'} \\ V_{bb'} \\ V_{cc'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} V_{a'} \\ V_{b'} \\ V_{c'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_a & 0 & 0 \\ 0 & Z_b & 0 \\ 0 & 0 & Z_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

or

$$V_{abc} - V_{a'b'c'} = Z_{abc} I_{abc} \quad (3.60)$$

3. *Transformation*: We transform (3.60) from the $a-b-c$ coordinate system to the 0-1-2 coordinate system by a similarity transformation. Thus

$$V_{aa'012} = V_{012} - V'_{012} = Z_{012} I_{012} \quad (3.61)$$

where

$$Z_{012} = A^{-1} Z_{abc} A \quad (3.62)$$

Performing the indicated matrix multiplication, we find

$$Z_{012} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} Z_a + 2Z_b & Z_a - Z_b & Z_a - Z_b \\ Z_a - Z_b & Z_a + 2Z_b & Z_a - Z_b \\ Z_a - Z_b & Z_a - Z_b & Z_a + 2Z_b \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

4. *Sequence currents*: There are no sequence current equations for this case.

5. *Sequence voltages*: Since there are no sequence current equations, we must completely determine the sequence network connections by considering only the voltage equation (3.61).

From equation (3.61) we compute row 1 - row 2 to find

$$V_{aa'0} - V_{aa'1} = Z_b (I_{a0} - I_{a1})$$

or

$$V_{aa'0} - Z_b I_{a0} = V_{aa'1} - Z_b I_{a1} \quad (3.64)$$

Similarly, from row 2 - row 3 we see that $V_{a'1} - Z_b I_{a1} = V_{a'2} - Z_b I_{a2}$, which combines with (3.64) for the important equation

$$V_{a'0} - Z_b I_{a0} = V_{a'1} - Z_b I_{a1} = V_{a'2} - Z_b I_{a2} \quad (3.65)$$

Also, taking row 1 + row 2 we find that

$$V_{a'0} + V_{a'1} = (1/3)(2Z_a + Z_b)(I_{a0} + I_{a1}) + (2/3)(Z_a - Z_b)I_{a2}$$

Substituting for $V_{a'0}$ the value taken from (3.64) and simplifying, we find that

$$V_{a'1} - Z_b I_{a1} = (1/3)(Z_a - Z_b)(I_{a0} + I_{a1} + I_{a2}) \quad (3.66)$$

From the two equations (3.65) and (3.66) we see that the sequence networks must be connected as shown in Figure 3.30. From Figure 3.30 (knowing the equivalent impedance in each sequence network from Figure 3.28) we may compute I_{a1} . Before doing so, however, we simplify the notation.

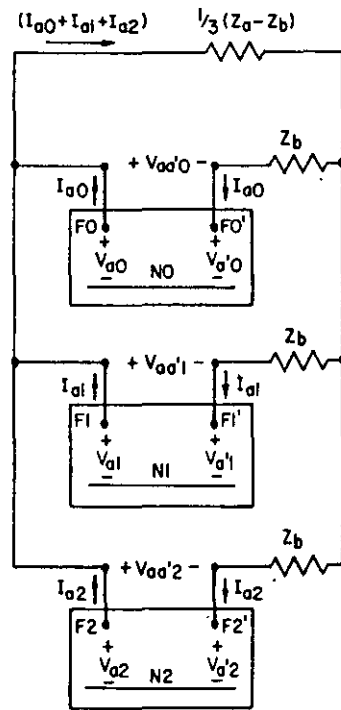


Fig. 3.30. Sequence network connection for unequal series impedances at $F-F'$.

In working with shunt faults, we defined Z_1 to be the impedance to the flow of I_{a1} in the positive sequence network. Similar definitions applied for Z_2 and Z_0 . If we follow this same rule for series faults,

$$\begin{aligned} Z_0 &= (Z_{11-0} - Z_{12-0}) + (Z_{22-0} - Z_{12-0}) \\ &= Z_{11-0} + Z_{22-0} - 2Z_{12-0} \end{aligned} \quad (3.67)$$

Similarly,

$$Z_1 = Z_{11-1} + Z_{22-1} - 2Z_{12-1} \quad (3.68)$$

and

$$Z_2 = Z_{11-2} + Z_{22-2} - 2Z_{12-2} \quad (3.69)$$

We also defined hV_F as a voltage rise in the direction of I_{a1} flow for shunt faults, or the open circuit voltage drop from F to neutral. In the case of series faults we have

$$hV_F = V_{S1} - V_{S2} \quad (3.70)$$

or hV_F is the open circuit voltage drop from F to F' , or

$$hV_F = V_{a'1} |_{I_{a1}=0} \quad (3.71)$$

With this notation established, we compute

$$I_{a1} = \frac{hV_F}{Z_t} = \frac{h(\text{open circuit } V_{FF'})}{Z_t} \quad (3.72)$$

where

$$Z_t = Z_b + Z_1 + Z \quad (3.73)$$

and where

$$Z = \frac{(Z_a - Z_b)(Z_b + Z_0)(Z_b + Z_2)}{(Z_b + Z_2)(Z_a - Z_b) + (Z_b + Z_0)(Z_a - Z_b) + 3(Z_b + Z_0)(Z_b + Z_2)} \quad (3.74)$$

By inspection of Figure 3.30 we see that

$$I_{a2} = -I_{a1}Z/(Z_b + Z_2) \quad (3.75)$$

and

$$I_{a0} = -I_{a1}Z/(Z_b + Z_0) \quad (3.76)$$

where Z is defined as in (3.74).

3.9 One Line Open (1LO)

One open line conductor in phase a is a special case of the previous case in which

$$Z_a = \infty, \quad Z_b \text{ is finite} \quad (3.77)$$

No additional computation is necessary to show that the sequence network connections are as shown in Figure 3.31. In this case the branch $(1/3)(Z_a - Z_b)$ which shunts all three sequence networks is missing. The sequence network connection of Figure 3.31 is similar to the 2LG shunt fault connection except the parallel connections are made between F and F' rather than between F and N .

By inspection of Figure 3.31 we compute

$$I_{a1} = hV_F/Z_t \quad (3.78)$$

where

$$Z_t = Z_b + Z_1 + Z \quad (3.79)$$

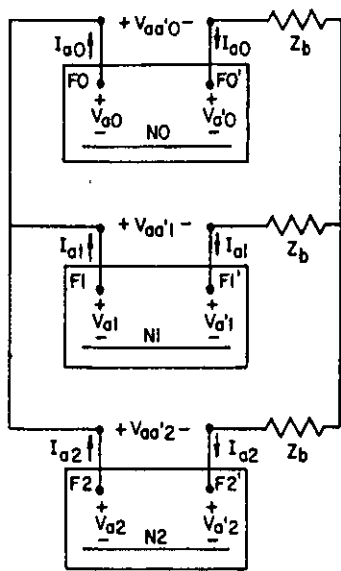


Fig. 3.31. Sequence network connection for line a open at $F-F'$.

and

$$Z = \frac{(Z_b + Z_0)(Z_b + Z_2)}{2Z_b + Z_2 + Z_0} \quad (3.80)$$

Then,

$$I_{a2} = -I_{a1} Z / (Z_b + Z_2) \quad (3.81)$$

and

$$I_{a0} = -I_{a1} Z / (Z_b + Z_0) \quad (3.82)$$

3.10 Two Lines Open (2LO)

If two lines are open, $Z_b = \infty$. Note that the connection of Figure 3.30 will not suffice for this situation. We adopt the usual analytical technique.

1. *Circuit diagram:* See Figure 3.32 and note that $Z_b = Z_c = \infty$.

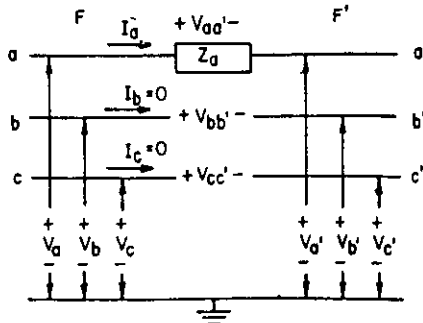


Fig. 3.32. Circuit diagram for two lines open.

2. *Boundary conditions:* By inspection of Figure 3.32 we write

$$I_b = I_c = 0, \quad V_{a'1} = Z_a I_a \quad (3.83)$$

3. *Transformation:* The sequence currents are $I_{012} = A^{-1} I_{abc}$. But from (3.83) $I_{abc} = [I_a \ 0 \ 0]^t$ so that I_{012} reduces to

$$I_{012} = \frac{h}{3} I_a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.84)$$

and the sequence currents are all equal. This is somewhat analogous to the SLG fault, where we found this same condition to be true.

Also from (3.83) $V_{a'1} = Z_a I_a$ or

$$\frac{1}{h} (V_{a'0} + V_{a'1} + V_{a'2}) = \frac{Z_a}{h} (I_{a0} + I_{a1} + I_{a2})$$

Rearranging, we have for any h

$$(V_{a'0} - Z_a I_{a0}) + (V_{a'1} - Z_a I_{a1}) + (V_{a'2} - Z_a I_{a2}) = 0 \quad (3.85)$$

4. *Sequence currents:* Equation (3.84) requires that the three sequence networks be in series.

5. *Sequence voltages:* Equation (3.85) requires that an impedance with total value $3Z_a$ be inserted in series with the sequence networks. The equation also suggests that an impedance Z_a could be associated with each network as shown in Figure 3.33.

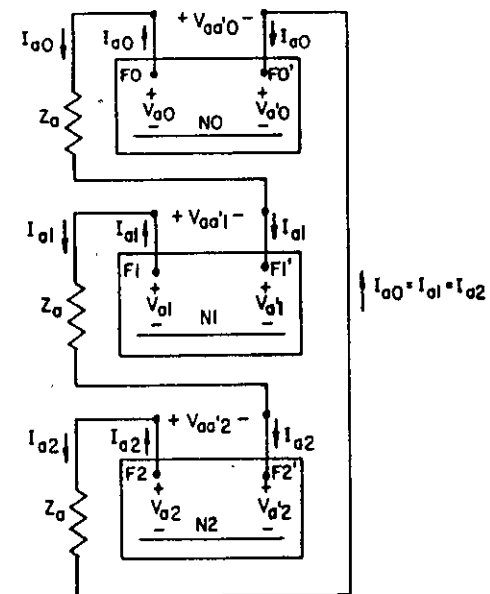


Fig. 3.33. Sequence network connections for two lines open.

To compute the sequence currents, we write from Figure 3.33

$$I_{a0} = I_{a1} = I_{a2} = \frac{hV_F}{Z_0 + Z_1 + Z_2 + 3Z_g} \quad (3.86)$$

3.11 Other Series Faults

Nearly all cases of series faults of general interest are special cases of the three types considered in the preceding paragraphs. The one notable exception is the case where a neutral impedance exists in the zero sequence network. If it is desirable to account for the effect of such neutral impedance separately from Z_0 , a separate impedance $3Z_g$ may be placed in series with the zero sequence network. The multiplier "3" is required because a neutral current, if it exists, is always $3I_{a0}$ and since we define the zero sequence network to have only a current I_{a0} , we may associate the factor 3 with the impedance. Then the voltage drop across the zero sequence network and Z_g is

$$V_{a0} + 3Z_g I_{a0} = -(Z_0 + 3Z_g) I_{a0} \quad (3.87)$$

Ordinarily, the impedance $3Z_g$ will be a part of Z_0 , in which case we write simply $V_{a0} = -Z_0 I_{a0}$.

Problems

- 3.1. Repeat Example 3.1 for a SLG fault at bus C but with zero fault impedance.
- 3.2. Repeat Example 3.1 for a SLG fault at bus C but with a fault impedance of 8 ohms. Plot I_a versus fault impedance.
- 3.3. Analyze the system of Figure 3.5 for a SLG fault at bus B with zero fault impedance.
- 3.4. Repeat Example 3.2 for a LL fault at bus C but with zero fault impedance.
- 3.5. Repeat Example 3.2 for a LL fault at bus C but with a fault impedance of 8 ohms. Plot I_b versus fault impedance.
- 3.6. Analyze the system of Figure 3.5 for a LL fault at bus B with zero fault impedance.
- 3.7. Repeat Example 3.3 for a 2LG fault at bus C but with $Z_g = 0$.
- 3.8. Repeat Example 3.3 for a 2LG fault at bus C but with $Z_f = 0$.
- 3.9. Repeat Example 3.3 for a 2LG fault at bus C but with $Z_f = Z_g = 0$.
- 3.10. Analyze the system of Figure 3.5 for a 2LG fault at bus B with $Z_f = Z_g = 0$.
- 3.11. Graph the results of Example 3.3 and problems 7-9 plotting I_b versus Z_f , then I_b versus Z_g . Also plot a series of phasor diagrams similar to Figure 3.17, showing how the various phasors are changed by fault impedance.
- 3.12. Repeat Example 3.4 for a 3ϕ fault at bus C but with a fault impedance of 0 and then 8 ohms. Plot I_a versus Z_f .
- 3.13. Analyze the system of Figure 3.5 for a 3ϕ fault at bus A, bus B, and bus D.
- 3.14. Compute the total current leaving bus B for a LL fault at bus C in Example 3.2.
- 3.15. Determine the sequence network connections for the network condition shown in Figure P3.15.

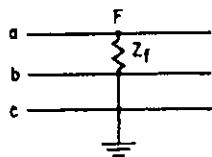


Fig. P3.15.

- 3.16. Determine the sequence network connections for the network condition shown in Figure P3.16.

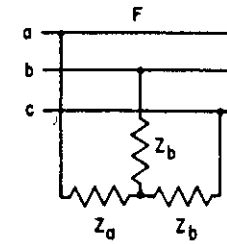


Fig. P3.16.

- 3.17. Consider an unbalanced Δ load at point F. Under what conditions can such a load be represented by symmetrical components? Explain fully.
- 3.18. Determine the sequence network connections for the network condition shown in Figure P3.18.

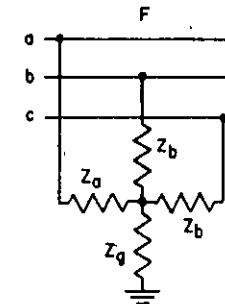


Fig. P3.18.

- 3.19. Consider the problem of Figure P3.18 but where the phase impedances are Z_a , Z_b , and Z_c , with $Z_b \neq Z_c$ as in problem 3.18. How can such a problem be solved by symmetrical components?
- 3.20. Find the two-port Z parameters for the circuits shown in Figure P3.20. All impedances are in ohms.

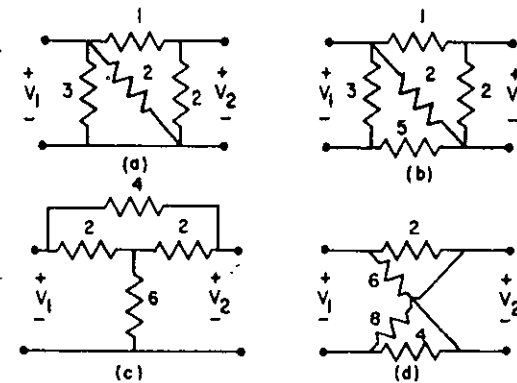


Fig. P3.20.

- 3.21. Find the Y parameters for the circuits shown in Figure P3.20. Show that $Y = Z^{-1}$ in every case.
- 3.22. Determine the two-port equivalent for the circuit of Figure P3.22 with terminals F and F' brought out as the only external connections. Find both the positive and negative sequence equivalents, with your result similar to Figure 3.24.

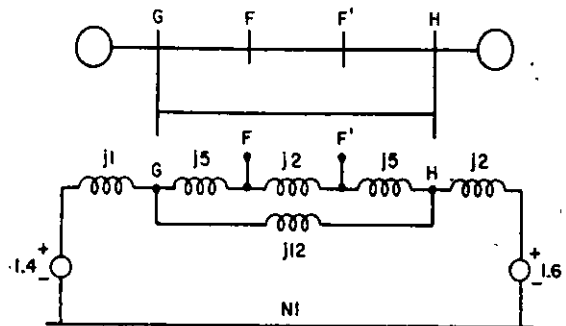


Fig. P3.22.

- 3.23. Repeat problem 3.22, with the impedance between F and F' removed.
- 3.24. In the case of series faults, we propose a connection be made from F to F' external to the normal system in such a way that $I_{abc} = I'_{abc}$. That is, if I_{abc} leaving F has any value, it will have that same value upon entering at F' . Use this to establish that the sequence currents are also equal, i.e., $I_{012} = I'_{012}$.
- 3.25. Suppose that (contrary to the usual assumption with a series fault that $I_{abc} = I'_{abc}$) we let $I_a = I'_a$ and permit phases b and c to become crossed, i.e., $I_b = I'_c$ and $I_c = I'_b$. Derive the sequence network connection to represent such a condition. See [16].
- 3.26. Find the uncoupled two-port equivalent, similar to Figure 3.28, for the system of Figure P3.22.
- 3.27. Find the uncoupled two-port equivalent, similar to Figure 3.28, for the system described in problem 3.23.
- 3.28. Consider the system of Example 3.6 in Figure 3.25 and let it be terminated with unbalanced impedances $Z_a = 1$ ohm and $Z_b = 3$ ohm $= Z_c$. Suppose further that the positive, negative, and zero sequence system impedances are identical. Compute the system currents from F to F' and the voltages at these nodes for all three phases.
- 3.29. In the system of Figure P3.22 suppose that unbalanced impedances $Z_a = j1$ and $Z_b = j5$ are connected between F and F' . Compute the currents I_{abc} flowing toward the fault at F .
- 3.30. The system of Figure P3.22 has one line open between F and F' . Compute the system voltages and currents in the vicinity of the fault.
- 3.31. The system of Figure P3.22 has two lines open between F and F' . Compute the system voltages and currents in the vicinity of the fault.
- 3.32. Consider the 3ϕ fault shown in Figure P3.32, where each line at F is faulted through an impedance Z_f to a point W and then to ground G through impedance Z_g .
- Determine the sequence networks for this fault, clearly identifying points F , W , and G in each network.
 - Compute the voltage $V_{FW} = V_{AF} - V_{WG}$.
 - Distinguish between the ground G and the neutral W in each sequence network.

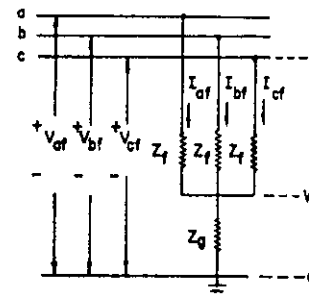


Fig. P3.32.

- 3.33. Generator G supplies its load through a power transformer bank T . In order to limit the SLG fault current for faults on the generator leads, the generator neutral is "high-resistance" grounded through the grounding transformer TG and resistor R . The balanced bank of capacitors C represents surge protection capacitors plus the lumped capacitances to ground of the generator leads, generator windings, and transformer T windings. See Figure P3.33.

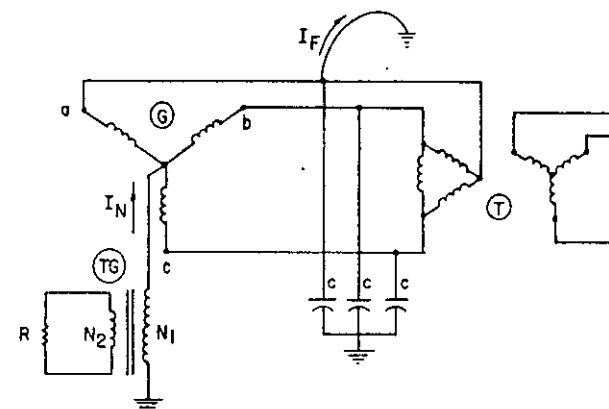


Fig. P3.33.

In order to minimize the danger of damaging transient overvoltages, the following criterion for sizing R is sometimes advocated: Select R so that the power dissipated in it during a SLG fault on the generator leads is equal to ΣQ_c where ΣQ_c is equal to total reactive power (magnetizing vars) generated in all capacitances during the SLG fault.

Capacitance: $C = 0.40 \mu\text{F}/\text{phase}$

Generator:

- 13,800 V (LL)
- 25,000 kW (3 ϕ)
- 31,250 kVA (3 ϕ)
- 60 Hz
- $X_1 = 1.20$ pu based on generator ratings
- $X_2 = 0.10$ pu based on generator ratings
- $X_0 = 0.05$ pu based on generator ratings

Grounding transformer TG:

Rated HV = 13,800 V

Rated LV = 480 V

Turns ratio $a = N1/N2 = 13,800/480$

Neglect leakage impedance of transformer

Generator excitation is such that generated positive sequence voltage is $E_{a1} = 1.00$ pu.

The SLG is assumed to occur at no load.

- (a) Draw the sequence networks properly interconnected to represent the SLG fault on phase a . Evaluate all impedances either in ohms or in pu.
- (b) Calculate the value of the grounding resistor R that will satisfy the given criterion.
- (c) Calculate the fault current I_F and the generator neutral current I_N , that correspond to the value of R found in (b).
- (d) Find the minimum kVA rating of the distribution transformer TG.



**FACULTAD DE INGENIERÍA UNAM
DIVISIÓN DE EDUCACIÓN CONTINUA**



División de Educación Continua, Facultad de Ingeniería, UNAM.

CURSOS ABIERTOS

**SISTEMAS ELÉCTRICOS DE
POTENCIA I**

CA 178

TEMA

**CARGABILIDAD DE LÍNEAS DE
TRANSMISIÓN**

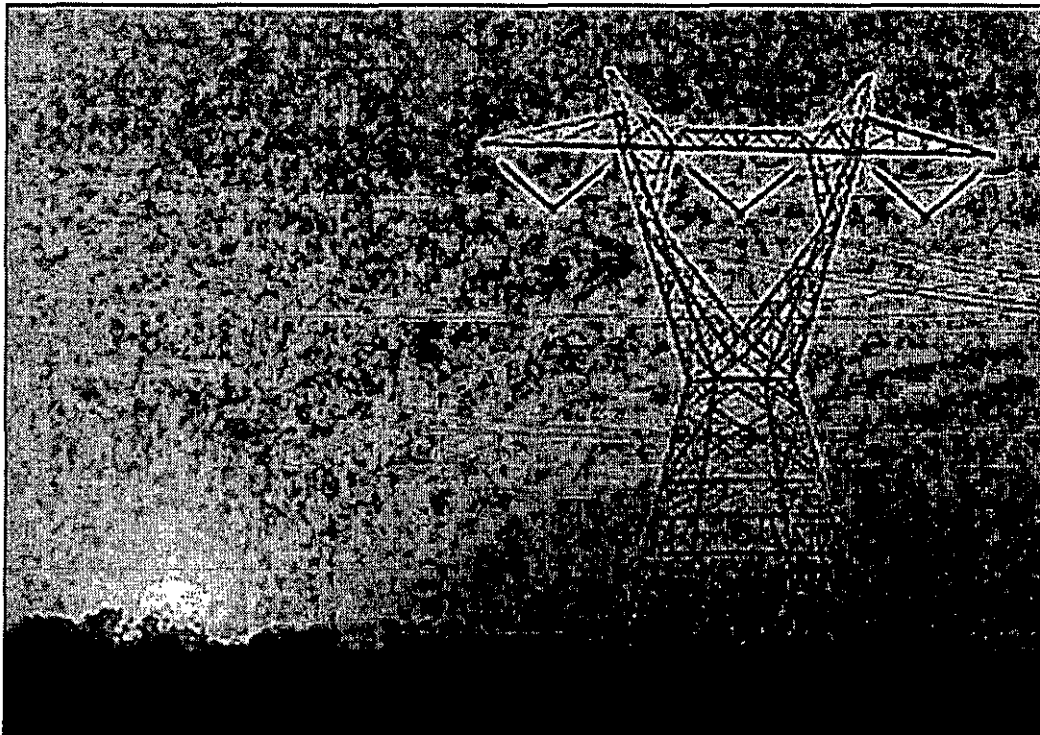
**EXPOSITORES: ING. ARMANDO GRANDE GONZÁLEZ
DEL 25 DE JUNIO AL 04 DE JULIO DE 2007
PALACIO DE MINERÍA**



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

DIVISIÓN DE EDUCACIÓN CONTINUA DE LA FACULTAD DE INGENIERIA

"CARGABILIDAD DE LÍNEAS DE TRANSMISIÓN"



EXPOSITOR

ING. ARMANDO GRANDE GONZALEZ

FACULTAD DE INGENIERÍA, CIUDAD UNIVERSITARIA,

2 DE JULIO DE 2007

CARGABILIDAD DE LÍNEAS DE TRANSMISIÓN

FACULTAD DE INGENIERÍA, CIUDAD UNIVERSITARIA

JULIO 2 DE 2007

ING. ARMANDO GRANDE GONZÁLEZ

| CONTENIDO | PÁGINA | |
|------------------|---|------|
| 3.1 | Introducción | 3.1 |
| 3.2 | Resumen Histórico de la Cargabilidad | 3.1 |
| 3.3 | Limitaciones en la Transferencia de Potencia Real | |
| 3.3.1 | Capacidad Térmica | 3.3 |
| 3.3.2 | Caída de Tensión | 3.3 |
| 3.3.3 | Estabilidad Angular | 3.4 |
| 3.3.4 | Estabilidad de Tensión | 3.7 |
| 3.4 | Técnicas de Análisis utilizadas | |
| 3.4.1 | Análisis en Estado Estable | 3.9 |
| 3.4.1.1 | Flujos de Potencia | 3.9 |
| 3.4.1.2 | Curvas P-V | 3.11 |
| 3.4.1.3 | Curvas V-Q | 3.13 |
| 3.4.1.4 | Análisis Modal | 3.17 |
| | Conclusiones | 3.17 |
| 3.4.2 | Análisis Dinámico | 3.18 |
| 3.5 | Conclusiones | 3.24 |
| 3.6 | Referencias | 3.24 |

CARGABILIDAD DE LÍNEAS DE TRANSMISIÓN

3.1 Introducción

La cargabilidad se define como la cantidad máxima de potencia eléctrica que se puede enviar a través de una o de un conjunto de líneas de transmisión manteniendo las condiciones operativas del Sistema Eléctrico de Potencia (SEP) dentro de márgenes preestablecidos.

El concepto más general sobre cargabilidad o capacidad de transmisión es el que se refiere al límite o capacidad térmica del conductor; sin embargo, existen otros criterios restrictivos como la caída de tensión, los márgenes de estabilidad angular y de tensión que deben ser considerados.

La cargabilidad de líneas de transmisión se debe analizar tanto en el ámbito de la Planeación como en el ámbito de la operación del SEP. Para tal efecto se utilizan curvas características en la que se relacionan al comportamiento de las variables que dependen de la cantidad de potencia que se transfiere por la línea o conjunto de líneas valiéndose de un modelo adecuado del SEP para la cuantificación de la cargabilidad.

Dado que las condiciones de carga o demanda son cambiantes durante los meses, semanas y días, es necesario analizar diferentes condiciones de demanda y de despachos de generación. Por otra parte, como todo SEP está expuesto a la ocurrencia de fallas en alguna o algunas de sus componentes, es necesario considerar en la elaboración de los análisis la ocurrencia de contingencias de líneas de transmisión, subestaciones y unidades generadoras.

Un aspecto de suma importancia lo constituye la Base de datos y Modelos de las distintas componentes y controles del SEP. Los resultados obtenidos dependerán en gran medida de la información utilizada.

3.2 Resumen Histórico de la Cargabilidad

Debido al enorme crecimiento de la demanda de energía eléctrica en los centros de consumo, la energía requiere ser transmitida en cantidades altamente considerables desde los lugares de generación (que por lo general se hallan ubicados a grandes distancias de los centros de consumo) a los centros de demanda (industriales o urbanos). Esta situación da lugar al problema de la transferencia de esta cantidad de potencia y de los criterios citados que se adoptan en el diseño y posterior operación de las líneas de transmisión. Se pueden mencionar los requerimientos citados por H.P. St. Clair en 1953 [1]:

- a) *Incrementar la carga de las líneas existentes.*
- b) *La construcción de líneas o circuitos nuevos que operen a la tensión existente.*
- c) *La superposición de tensiones más elevadas en los Sistemas existentes, con el fin de minimizar las pérdidas por transmisión.*

Originalmente los conceptos sobre cargabilidad y comportamiento de las líneas de transmisión se efectuaron basándose en las tensiones de las líneas que entonces estaban en operación. Por lo que el estudio de cargabilidad de líneas de transmisión fue considerado por Clair con base a estos niveles de tensión y consideraciones prácticas sobre las restricciones de límite térmico, caída de tensión o voltaje y límite de estabilidad angular, así como la evaluación de la cargabilidad para diferentes longitudes de línea. Con base a la experiencia sobre el comportamiento de las líneas se estableció un criterio práctico que citaba una referencia de 1 pu de SIL (Surge Impedance Line) para una línea convencional de 330 kV, 300 millas, que opera a 60 Hertz; de tal manera que para esta carga la pérdida neta de potencia reactiva es igual a cero.

En 1967 el departamento de Planeación de la American Electric Power Service Corporation (AEP) hizo una revisión a la curva de Clair para líneas mayores de 330 kV, hasta el nivel de 500 kV, ampliando la curva hasta 600 millas. La curva obtenida, básicamente igual a la de Clair, fue establecida a través de consideraciones prácticas y como la curva de Clair, también ha sido ampliamente utilizada como guía de diseño para líneas de transmisión, apareciendo publicada en numerosos manuales [2] (Véase la figura 3.1b)

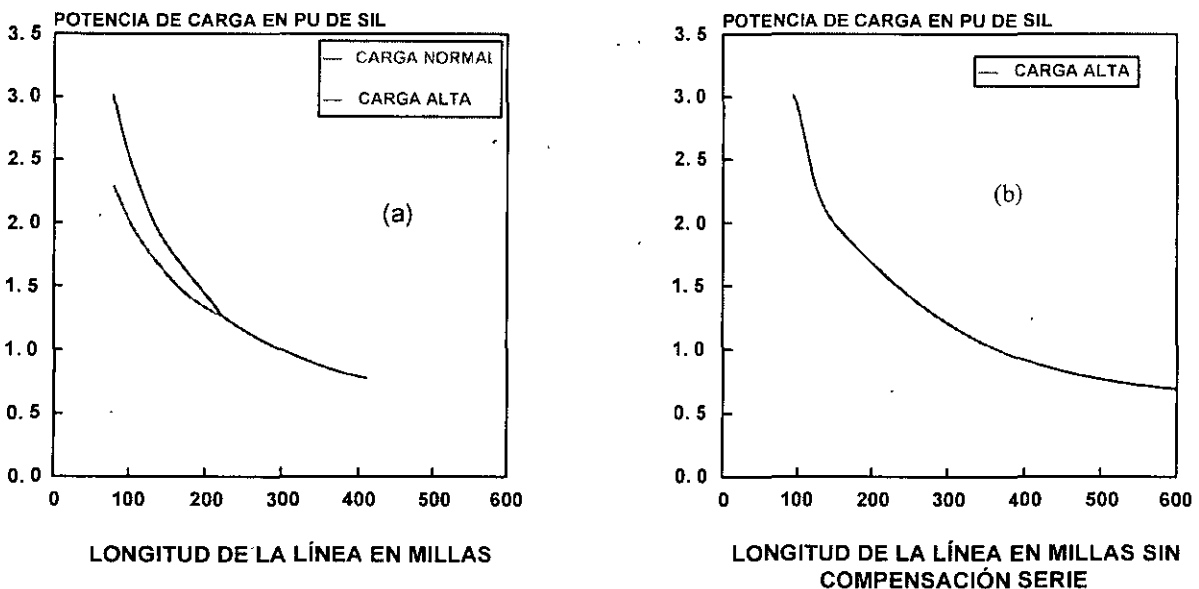


Figura 3.1 Curvas de Cargabilidad: (a) Clair[1], (b) Revisión - 1967.

Más adelante, en 1979 los ingenieros de la AEP justificaron analíticamente (mediante un programa digital) la curva de cargabilidad para niveles de extra alta tensión (EHV) para los niveles de voltaje existentes entonces (765 kV) y futuras aplicaciones de nivel de tensión ultra alto (UHV) [3], incluyendo la base analítica para utilizar los criterios de cargabilidad y demostrar la validez del modelo analítico aplicándolo a tensiones de transmisión de líneas existentes verificándolo con la curva de Clair, además de la extensión de las características de cargabilidad a los conceptos de líneas EHV y UHV incorporando las debidas suposiciones y criterios, con lo que se comprobó que para sistemas robustos se podría utilizar una curva de cargabilidad generalizada para todos los niveles de tensión [2]. Para un SEP débil es necesario efectuar a mayor detalle el análisis. La curva de Clair no es aplicable directamente.

3.3 Limitaciones para la Transferencia de Potencia Real

3.3.1 Capacidad Térmica

La capacidad térmica o límite térmico queda determinada por la máxima temperatura que soporta el conductor sin perder sus características eléctricas y mecánicas. El incremento de temperatura afecta la flecha de los conductores y la pérdida de su resistencia mecánica. Por lo anterior, podrían disminuir las distancias a tierra permisibles o bien podría excederse el límite de elasticidad del conductor, con lo cual ya no recuperaría su longitud original aun cuando se enfriara posteriormente. La temperatura del conductor depende de la magnitud de la corriente y de la duración de ésta, así como de la temperatura ambiente, velocidad del viento y de las condiciones físicas en la superficie del conductor (ya que este límite resulta de la producción de calor por las pérdidas óhmicas). La constante de tiempo térmica es de varios minutos por lo que se puede hablar de una capacidad o límite térmico de corto plazo y otra de largo plazo. Para líneas cuyo nivel de tensión es superior a 345 kV, las consideraciones ambientales tales como el efecto corona y los efectos de campos, obligan a que su diseño resulte en capacidades térmicas elevadas. Cuando se tienen varios conductores por fase, la capacidad térmica generalmente excede por un margen significativo los requerimientos del Sistema para transferir potencia a través de una línea específica. En tales casos, el equipo terminal de la línea, tal como trampas de onda o transformadores de corriente, entre otros, pudieran presentar un límite térmico más restrictivo que la línea misma.

3.3.2 Caída de tensión

La limitación por caída de tensión es otro aspecto que es considerado sobre todo en Sistemas Eléctricos Longitudinales (SEL); está íntimamente relacionada con la capacidad de suministro de reactivos en los extremos terminales de la línea [4]. Con base en el modelo simplificado de la figura 3.2, la caída de tensión o de voltaje se define entre el nodo de envío y el de recepción queda determinada de la manera siguiente:

$$CV = \frac{V_E - V_R}{V_R} \times 100 \quad (3.1)$$

y en consecuencia el voltaje límite del extremo de recepción (V_R) en términos de CV.

$$V_R = V_E \left[1 - \frac{CV}{100} \right] \quad (3.2)$$

Dependiendo de la ubicación de la subestación y como resultado del análisis correspondiente se establecen los criterios permisibles. Un valor de 5% podría ser válido para muchas subestaciones, sin embargo podría ser prohibitivo para muchas otras.

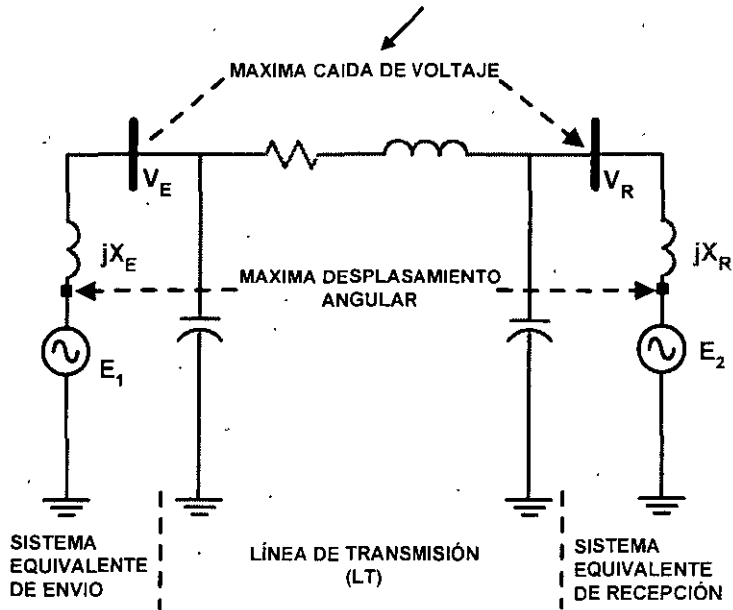


Figura 3.2 Modelo para Análisis de Cargabilidad en LT.

3.3.3 Estabilidad Angular

En un reporte de IEEE [5] se describe la situación extrema de un problema de estabilidad angular: un generador síncrono remoto, conectado mediante líneas de transmisión a un sistema de potencia robusto (estabilidad angular pura - caso máquina bus infinito). Lo anterior se muestra en la figura 3.5.

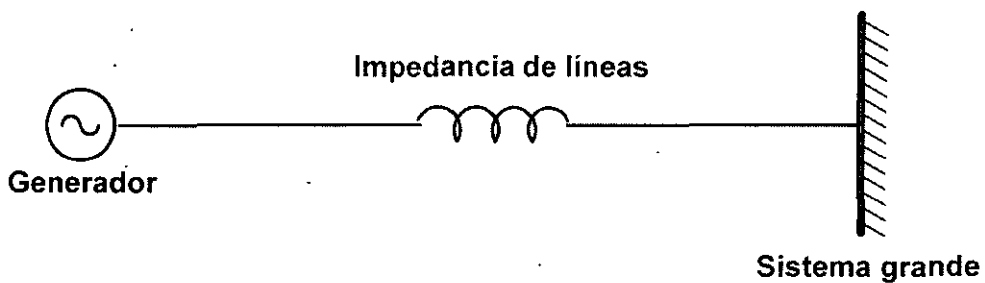


Figura 3.3 Generador síncrono remoto conectado mediante líneas de transmisión a un SEP robusto.

Una función simplificada para determinar la transferencia de potencia activa, se muestra en la ecuación 3.3.

$$P_R = \frac{V_E V_R}{X'} \text{sen } \delta_E \quad (3.3)$$

Al no considerar las pérdidas, la potencia activa en el extremo de envío de la línea es igual a la correspondiente en el extremo de recepción (esto es: $P_E = P_R$). X' representa la reactancia equivalente entre las dos fuentes de tensión.

La ecuación (3.3) se representa gráficamente en la figura 3.3 considerando que las magnitudes de tensión se mantienen constantes y que el ángulo de fase δ_E varía de 0° a 90° . La máxima cantidad de potencia que la línea puede entregar (la cual ocurre cuando $\delta_E = 90^\circ$) está dada la expresión 3.4. Donde P_{\max} representa el **límite teórico de estabilidad de estado permanente** para una línea sin pérdidas.

$$P_{\max} = \frac{V_E V_R}{X'} \quad (3.4)$$

POTENCIA REAL P

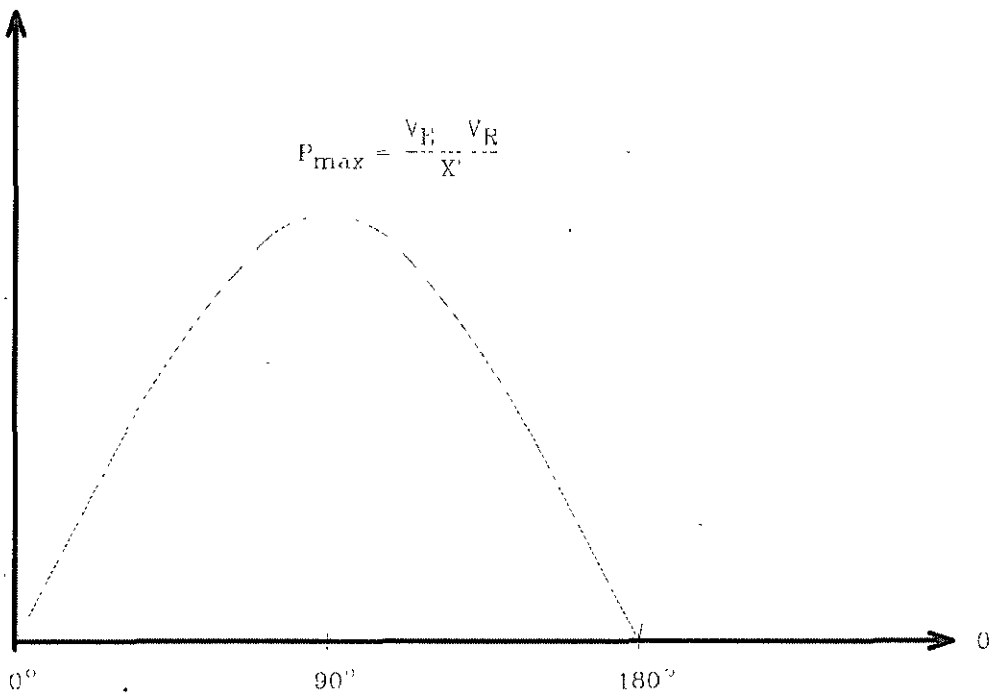


Figura 3.4 Potencia Real transmitida en función del ángulo entre las fuentes de tensión mostradas en la Figura 3.2

La limitación de estabilidad (estabilidad angular) se refiere al margen entre la potencia máxima (P_{\max}) y la potencia de operación permisible (P_{OP}) (véase la figura 3.5). El ME se define en términos de P_{\max} y P_{OP}

$$ME = \frac{P_{\max} - P_{op}}{P_{\max}} \times 100 \quad (3.5)$$

Este margen se selecciona para proporcionar un funcionamiento estable del SEP ante una diversidad de contingencias que ocurren en el mismo y que pueden provocar cambios súbitos de carga y/o de generación ya sean transitorios o de régimen permanente. Esos cambios pueden ser originados por maniobras de apertura y cierre de interruptores, desconexión de líneas y/o transformadores, por cambios en el despacho de generación o por disturbios eléctricos, tales como fallas de corto circuito o fallas de equipos eléctricos. Con el propósito de ejemplificar el significado de la ecuación (3.5) se hace uso de las gráficas mostradas en la figura 3.4. Evidentemente que para una situación real específica se deberán efectuar los análisis que se indican en el punto 3.4 de este material.

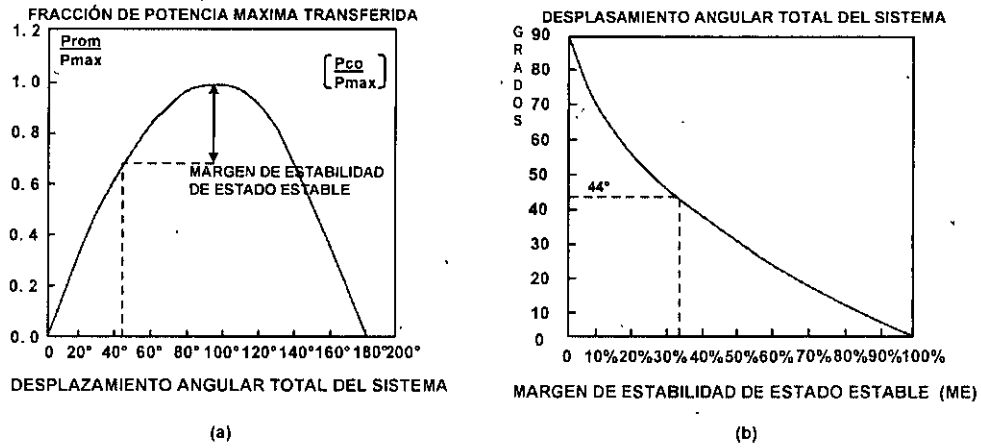


Figura 3.5 a) Curva de Ángulo-Potencia, b) Conversión del ME a Desplazamiento Angular

Generalmente se utiliza un margen de 30% a 35%. Considerando la ecuación (3.5) para un 35% (0.35 pu) de margen de estabilidad:

$$0.35 = 1 - \frac{P_{op}}{P_{\max}} \quad (3.6)$$

$$\frac{P_{op}}{P_{\max}} = 0.65$$

Considerando las ecuaciones 3.3 y 3.4;

$$P_{op} = P_{max} \cdot \text{sen}(\delta_E); \quad (3.7)$$

$$\delta_E = \text{sen}^{-1}(0.65) = 40^\circ$$

Como se observa en la figura 3.5b. Para un valor de ME de 30%, el ángulo δ_E es igual a 44°

Se debe destacar que la separación angular se refiere al Sistema completo; esto es, desde la fuente de tensión equivalente en el extremo receptor hasta la fuente equivalente en el extremo de envío. Como puede observarse, se incluyen entre ambas fuentes de tensión la suma de las reactancias equivalentes de los sistemas extremos y la impedancia de la línea o conjunto de líneas de transmisión.

3.3.4 Estabilidad de Tensión

También en el reporte IEEE [5] se describe la situación extrema de un problema de estabilidad de tensión: *un generador síncrono perteneciente a un SEP robusto conectado mediante líneas de transmisión a una carga*. La figura 3.6 muestra esta condición.

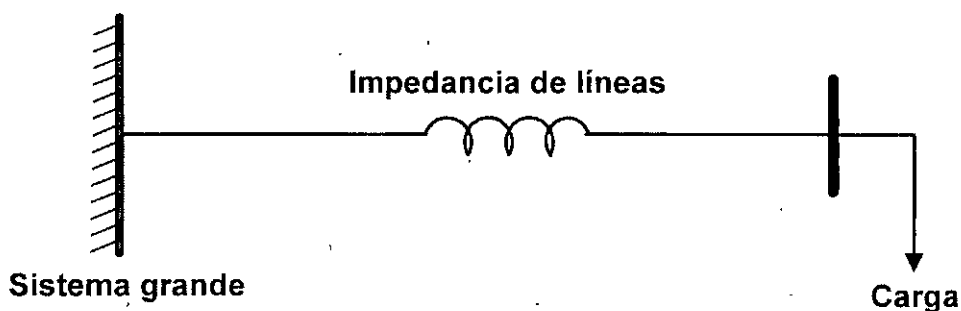


Figura 3.6 Generador síncrono de un SEP robusto conectado mediante líneas de transmisión a una carga.

La estabilidad de voltaje significa diferentes aspectos para distintos ingenieros. De esta forma, representa un fenómeno rápido para ingenieros involucrados con motores de inducción y cargas de aire acondicionado. En cambio, es un fenómeno lento (si se involucran cambiadores de derivaciones o taps de transformadores, limitadores de máxima excitación, entre otros) para otros ingenieros. Muchos investigadores e ingenieros de redes eléctricas han discutido extensamente los métodos de análisis más apropiados, con una particular polémica referente a si la estabilidad de voltaje es un fenómeno estático o dinámico [6].

La inestabilidad de voltaje y el colapso de voltaje son utilizados algunas veces de manera indistinta. La estabilidad de voltaje ha sido vista frecuentemente como una "viabilidad" del problema en estado estable apropiada para el análisis estático (flujos de potencia). La capacidad para transferir potencia reactiva de las fuentes de producción hacia los centros de consumo durante condiciones estables de operación, es un aspecto relevante de la estabilidad de voltaje.

Es importante mencionar que el límite máximo de transferencia de potencia de la red no es necesariamente el límite de estabilidad de voltaje [6]

La estabilidad de voltaje transitoria está frecuentemente relacionada con la estabilidad angular y, las formas más lentas de estabilidad de voltaje están íntimamente relacionadas con la estabilidad angular ante pequeños disturbios. Con frecuencia, los mecanismos de los dos tipos de estabilidad son difíciles de separar.

En contraste con la estabilidad angular, la dinámica de estabilidad de voltaje involucra principalmente las cargas y los medios para el control de voltaje. Debido a esto, la estabilidad de voltaje ha sido llamada comúnmente estabilidad de la carga [6].

Un Sistema de potencia en un estado de operación dado y sujeto a un "x" disturbio, experimenta un colapso de voltaje si los voltajes de equilibrio después del disturbio son inferiores a los límites aceptables. El colapso de voltaje puede ser total o parcial.

La inestabilidad de voltaje en un sistema de potencia es la ausencia de estabilidad de voltaje y resulta en un progresivo decremento (o incremento) de voltaje. Sin embargo, la operación de controles cuando éstos alcanzan sus límites y otro tipo de acciones de control (p.e. desconexión de carga), pueden en algunos casos establecer una estabilidad global [6].

El término seguridad de voltaje se utiliza también con frecuencia. Éste se refiere a la habilidad de un Sistema, no solamente para operar de manera estable, sino también para permanecer estable después de contingencias probables o de incrementos en la carga. Lo anterior frecuentemente significa la existencia de un margen considerable desde un punto de operación hasta el punto de inestabilidad de voltaje (o hasta el punto máximo de transferencia de potencia) después de la ocurrencia de una probable contingencia [6].

Aún cuando la estabilidad de voltaje involucra fenómenos dinámicos, los métodos estáticos de análisis son utilizados con más frecuencia por ser rápidos y por su facilidad de implementación además de la importante e inmediata información que proporcionan la cual, puede servir como punto de partida para realizar posteriormente algunas simulaciones dinámicas con la ventaja de que en este caso, ya se tendría importante información preliminar para decidir los casos de verdadero interés para su simulación en el dominio del tiempo y/o en el dominio de la frecuencia.

3.4 Técnicas de Análisis

A continuación se describen las características generales de las principales técnicas utilizadas en los análisis de cargabilidad de líneas de transmisión. Estos análisis son realizados tanto en estado estable como en estado dinámico

3.4.1 Estado Estable

3.4.1.1 Flujos de Potencia

Los análisis de flujos de potencia son de gran utilidad e importancia en la operación y planificación de un sistema eléctrico de potencia (SEP). Con la información que proporcionan, tensiones y flujos de potencia en los distintos elementos que integran el SEP, es posible detectar y prever situaciones que impliquen, entre otros: regulación de tensión, sobrecarga en líneas de transmisión y transformadores, determinar pérdidas y obtener márgenes de estabilidad en estado estable. Generalmente la mayoría de los estudios se inician con un análisis de flujos de potencia con la finalidad de establecer las condiciones previas de operación, a partir de las cuales se simula la ocurrencia de eventos. Los análisis posteriores pueden ser en estado estable o en estado dinámico.

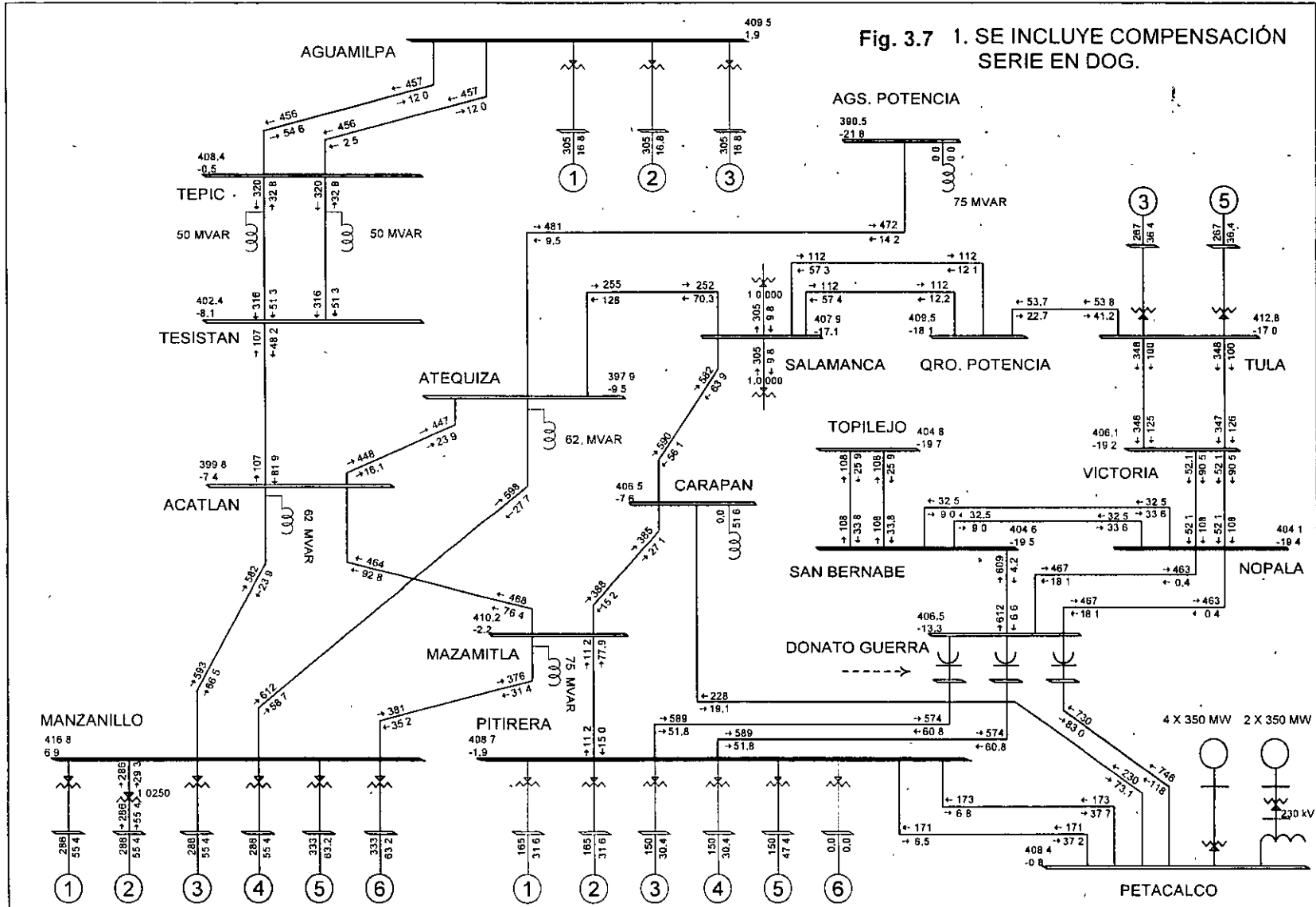
A manera de ejemplo en la figura 3.7 se muestran las condiciones operativas correspondientes a la red asociada a la subestación Donato Guerra. Se observan las tensiones y flujos de potencia correspondientes a demanda máxima de 1996. Las tensiones están expresadas en forma polar. Los flujos de potencia en forma rectangular. Por ejemplo en la subestación Donato Guerra se observa un valor de tensión igual a $406.5 \angle -13.1^\circ$ kV. Se observa que por cada una de las líneas de transmisión provenientes de la subestación Pitirera llegan 574 MW y que se envían 60.8 MVAR.

También se pueden observar en la misma figura 3.7 algunas de las componentes que conforman a un SEP:

- Unidades generadoras
- Transformadores de potencia
- Líneas de transmisión
- Capacitores serie
- Reactores

En este tipo de análisis se asume que la respuesta de los sistemas de regulación de tensión y de velocidad responden de tal manera que satisfacen (siempre y cuando la capacidad física de los equipos lo permita) las exigencias de tensión y de potencia requeridas por el SEP. Es decir, los sistemas de control responden de manera ideal.

Fig. 3.7 1. SE INCLUYE COMPENSACIÓN SERIE EN DOG.



CONDICIONES DE OPERACIÓN EN DEM. MÁXIMA ESTIMADAS PARA 1996
 CONSIDERANDO LT'S LCP - CRP Y LCP - DOG, ESTA ULTIMA COMP. AL 50%
 CASO BASE ... MON FEB 21, 1994 17:22

KV. ≤ 230, ≤ 400

BUS - VOLTAGE (KV)/ANGLE
 BRANCH - MW/MVAR
 EQUIPMENT - MW/MVAR

3.4.1.2 Curvas P - V

Las curvas P-V (Potencia – Voltaje) son muy útiles en los análisis de estabilidad de tensión o de voltaje. Esta técnica es utilizada tanto para Sistemas radiales como para grandes redes malladas donde P es la carga total en un área y V es el voltaje o tensión en un nodo crítico o representativo en dicha área. P puede ser también la potencia de transferencia a través de una línea o líneas de enlace o de interconexión.

El análisis P-V es una técnica de estado estable que desarrolla una curva la cual relaciona el voltaje o tensión en uno o más nodos, con la carga en un área y/o con el flujo a través de un enlace. Los voltajes de nodos son monitoreados a lo largo de un rango de incrementos de carga y de flujos de potencia activa dentro de una región.

Uno de los beneficios más importantes de esta técnica, es que proporciona una indicación directa de la proximidad al colapso de voltaje a lo largo de un rango de niveles de carga o flujos en enlaces para la topología y condiciones de operación específicas del SEP estudiado.

Conforme se incrementa la transferencia de potencia hacia una región de carga específica, el perfil de voltaje de esa región tenderá a degradarse hasta un punto donde se alcance el colapso de voltaje. En la figura 3.8 se muestra una curva P – V para dos condiciones operativas.

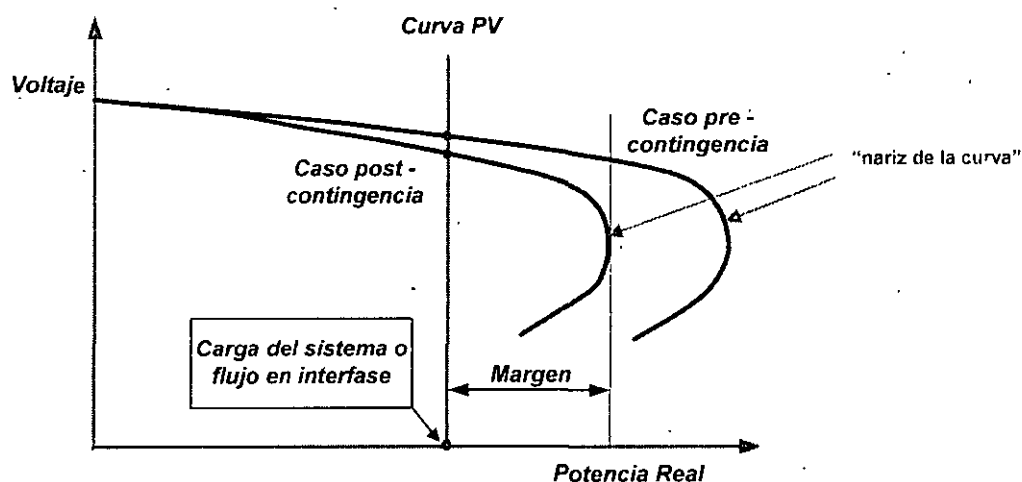


Figura 3.8 Curvas P – V (Potencia – Voltaje)

Los voltajes en nodos específicos de la región pueden variar significativamente y algunos de estos voltajes de nodo pueden parecer aceptables. Sin embargo, el punto de colapso de voltaje en todos los nodos de la región de estudio, ocurrirá en el mismo nivel de importación de potencia, independientemente de los voltajes en esos nodos específicos.

Las áreas susceptibles a problemas de colapso de voltaje pueden ser identificadas mediante un análisis de contingencias de flujos de potencia. Aquellos casos que no tienen convergencia o que presentan grandes desviaciones de voltaje post-disturbio, están típicamente dentro o muy cerca del punto de inestabilidad de voltaje respectivamente.

En la condición de que el programa digital utilizado para el análisis de flujos de potencia tenga la posibilidad de poder monitorear $\Delta V / \Delta Q$ de la matriz Jacobiana durante la generación de la curva P-V, estas magnitudes pueden proporcionar valiosa información sobre los nodos donde el colapso de voltaje iniciará. El nodo que tiene la mayor relación de cambio de $\Delta V / \Delta Q$ antes del colapso (nariz de la curva), es el nodo más débil.

3.4.1.2.1 Margen de Potencia Activa

En un análisis P-V es necesario especificar el margen mínimo de potencia activa del área o región estudiada para las condiciones operativas simuladas. Este margen mínimo debe ser determinado para cada área o región en el nodo más crítico.

- *Determinar la peor o peores contingencias para las condiciones operativas asumidas en el área de estudio. Esto puede efectuarse mediante la realización de numerosos estudios de contingencias post-transitorias considerando un elemento fuera de servicio a la vez.*
- *Desarrollar una curva P-V para la peor contingencia o contingencias identificadas mediante la metodología de incrementos de la carga o de incrementos de flujo en el enlace.*

Por ejemplo, considerar la curva P-V para las condiciones N-0 como se muestra en la figura 3.9. Asumir que la curva P-V para el peor caso N-1 resulta en 500 MW de reducción del margen, medido entre los puntos 1 y 2. Adicionalmente, es necesario asumir un 5% de margen sobre la curva P-V para el peor caso N-1 con objeto de permitir alguna incertidumbre en el pronóstico de la carga. Este 5% está basado en el nivel de carga medido en el punto 2. Estos aspectos resultan en una limitación en el nivel de carga o en el flujo en el enlace a un valor como el mostrado en el punto 3 de la figura 3.9. La distancia entre el punto 2 y el punto 3 representa el 5% de margen para la peor contingencia N-1.

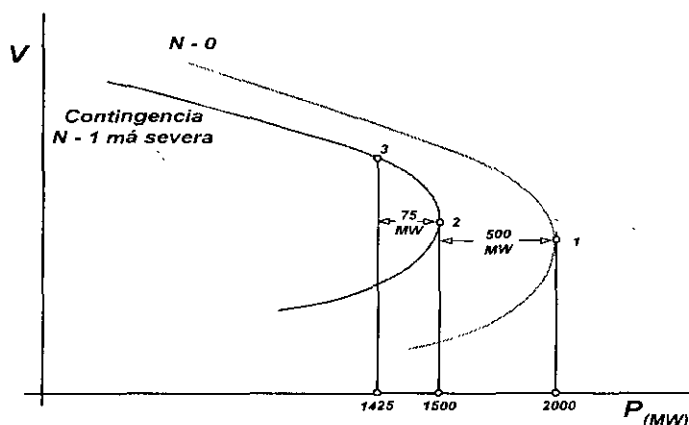


Figura 3.9 Curvas P-V de prueba para la determinación del margen de Potencia Activa

Nota: El valor de 5% u otro es determinado para cada área o región del SEP. Depende de las características de cada Sistema.

Dos aspectos importantes a considerar en este tipo de análisis es el correspondiente a la modelación de la carga y al método utilizado para la generación de las curvas P – V.

3.4.1.2.2 Representación de la carga

Típicamente se consideran tres tipos de representación de la carga: potencia constante, corriente constante e impedancia constante. El modelo de potencia constante es el que generalmente resulta en el punto de colapso de voltaje más pesimista en un análisis P-V. La representación de la carga como potencia constante considera satisfactoriamente la acción de los dispositivos de regulación de voltaje del sistema de distribución y por lo tanto, puede ser utilizada sin problema a menos que se conozca la información necesaria para una representación más detallada de la carga. En caso de que se utilicen representaciones detalladas de la carga, éstas deben ser modeladas en el lado de baja tensión de los transformadores de entrega. Deben modelarse también con detalle los reguladores de voltaje en los transformadores agregados a la simulación. En los casos que se considere necesario, se puede también agregar una representación más detallada del sistema de distribución [7].

3.4.1.2.3 Métodos para generar las curva P - V

Una curva P-V puede ser generada mediante dos métodos:

El primero método consiste en ir incrementando las cargas en la región de estudio al mismo tiempo que se va incrementando la generación externa a dicha región.

El segundo método se realiza incrementando el flujo a través de una interface o enlace entre la región en estudio y el Sistema externo (intercambiando paulatinamente generación interna por generación externa). En áreas externas que tienen restricciones de generación es permitido agregar algún generador ficticio con el único propósito de establecer el margen de potencia. En este caso, se requiere de un buen criterio del ingeniero para ubicar adecuadamente el generador ficticio el cual, no debe suministrar potencia reactiva.

3.4.1.3 Curvas V - Q

Al igual que en las curvas P-V, el análisis por medio de las curvas V-Q representa una técnica eficiente para visualizar la factibilidad de que se presente un colapso de voltaje durante el periodo post-transitorio dentro de los primeros minutos después de ocurrido una o varias contingencias.

En caso de que en un área del SEP, existan insuficientes o inefectivos dispositivos de control de tensión o voltaje para poder soportar altos niveles de transmisión de potencia o fuertes incrementos en la carga durante condiciones normales de operación o ante contingencias, los voltajes en esa área podrían colapsarse de tal forma que den lugar a un fuerte problema de inestabilidad de voltaje representado por los conocidos apagones o cortes de energía.

Este tipo de curvas son obtenidas mediante una serie de simulaciones de flujos de potencia. Las curvas V-Q grafican en un nodo crítico o de prueba, el voltaje o tensión contra la potencia reactiva en el mismo nodo. La inyección de potencia reactiva es representada por medio de un condensador síncrono ubicado en el nodo de prueba. En los programas comerciales de software, el nodo de prueba es convertido a un nodo *tipo PV* sin límites de potencia reactiva. Los cálculos de flujos de potencia son efectuados para una serie de magnitudes de voltaje asignados al

condensador síncrono y, de esta forma, la potencia reactiva entregada por el condensador es graficada contra los voltajes asignados. En estas curvas, el voltaje es la variable independiente y se ubica en el eje de las abscisas. La potencia reactiva capacitiva es graficada en la dirección positiva del eje vertical. Sin la aplicación de compensación reactiva en derivación en el nodo de prueba, el punto de operación se encuentra en el valor cero del eje vertical (cero reactivos) lo cual, corresponde a remover o eliminar el condensador síncrono ficticio.

Con frecuencia, estas curvas son conocidas como curvas Q-V sin embargo, es importante señalar que al emplear la terminología V-Q se hace énfasis en que la variable independiente es el voltaje.

La seguridad de voltaje está íntimamente relacionada a la potencia reactiva y por medio de las curvas V-Q se obtiene el margen de potencia reactiva en el nodo de prueba. En este caso, el margen de potencia reactiva es la distancia en MVar desde el punto de operación hasta el fondo (rodilla) de la curva (ver figura 3.10a) o bien, hasta un punto donde la característica del voltaje de un banco de capacitores aplicado, es tangente a la curva V-Q (ver figura 3.10b). Cuando el nodo de prueba es seleccionado basándose en un criterio acertado, este nodo puede ser representativo de todos los nodos que se encuentran dentro de un área de control de voltaje (un área donde las magnitudes de voltaje son coherentes)

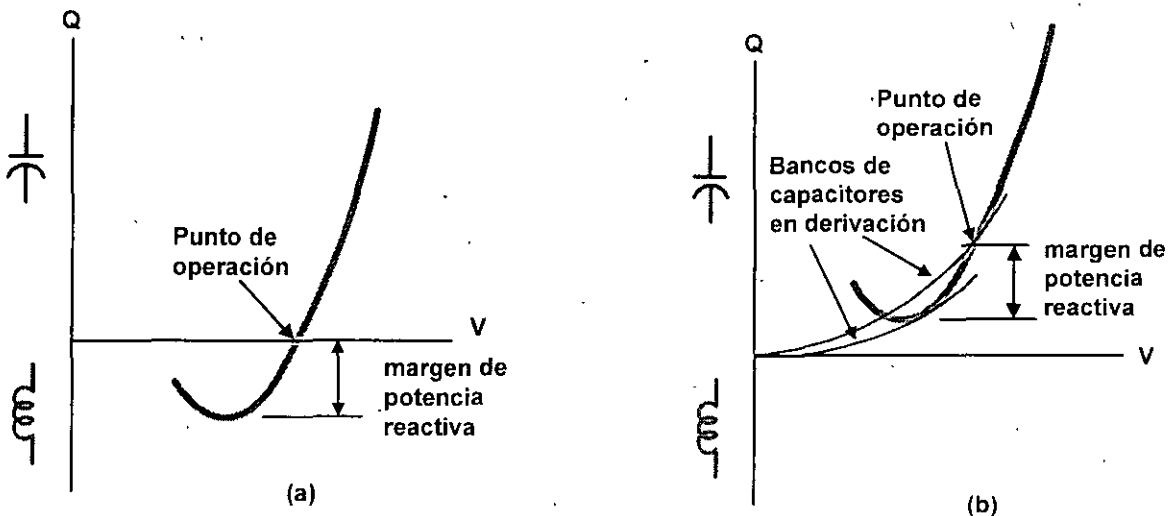


Figura 3.10 Márgenes de potencia reactiva a través del uso de curvas V - Q.

Entre las ventajas que presentan las curvas V-Q se pueden mencionar las siguientes:

- *Las curvas V-Q pueden ser calculadas en diferentes puntos a lo largo de una curva P-V para analizar la robustez del Sistema.*
- *Pueden ser graficadas directamente sobre la curva V-Q, las características de compensación reactiva en derivación instalada en el nodo de prueba (bancos de capacitores, compensadores estáticos de Vars, o condensadores síncronos). El punto de operación en este caso, es la intersección de la característica V-Q del Sistema y la característica de la compensación reactiva (ver figura 3.10b). Este aspecto es muy útil ya que la compensación reactiva es con frecuencia, una buena solución a los problemas de estabilidad de voltaje.*
- *La pendiente (inclinación) de la curva V-Q indica la robustez del nodo de prueba (el ΔV para un ΔQ).*

3.4.1.3.1 Margen de Potencia Reactiva

De ser posible, además de tener disponibles suficientes dispositivos de control de voltaje para soportar las contingencias más severas con probabilidad de ocurrir, es recomendable tener un margen de seguridad suficiente que tome en cuenta variaciones en las condiciones operativas del Sistema tales como:

- 1) *No tener disponible a un importante componente el cual generalmente está en operación. Por ejemplo un banco de capacitores serie estratégico o un compensador estático de potencia reactiva.*
- 2) *La presencia de un flujo de potencia más alto que el esperado en un enlace crítico*
- 3) *Una demanda en la carga del área o región más alta que la pronosticada para ese día (un día extremadamente caluroso o demasiado frío, por ejemplo)*

Los efectos de las variaciones mencionadas anteriormente deben considerarse en la determinación del margen de potencia reactiva requerido.

En la realización de estudios V-Q, el mínimo margen de potencia reactiva será específico para cada una de las condiciones de operación analizadas. Esto se realiza encontrando el máximo cambio en el margen de potencia reactiva en el nodo más crítico del área de estudio como se indica a continuación:

- a) *Determinar para el área de estudio la contingencia más crítica. Esto puede ser efectuado mediante la realización de varias contingencias que involucren grandes disturbios ante las condiciones más severas del caso (como la carga pico o el nivel máximo de importación de energía).*
- b) *Desarrollar una curva V-Q para la contingencia sencilla identificada como más crítica.*
- c) *Incrementar en un 5% la carga del área de estudio o el flujo en la interface crítica seleccionada y desarrollar la correspondiente curva V-Q.*

Nota: El valor de 5% u otro es determinado para cada área o región del SEP. Depende de las características de cada Sistema.

Por ejemplo, considerar la curva V-Q para las condiciones N-0 como se muestra en la figura 3.11. Asumir que la curva V-Q para la contingencia N-1 más crítica resulta en una reducción del margen de 500 MVar. Además, se considera que la carga base (potencias de carga activa y reactiva) se incrementan en un 5% y la curva V-Q es generada para el caso N-1 más severo. Suponer que esto resulta en una reducción adicional de 300 MVar en la reserva de potencia reactiva medida en el punto nariz de la curva y comparada con la curva V-Q para el peor caso N-1 con carga base.

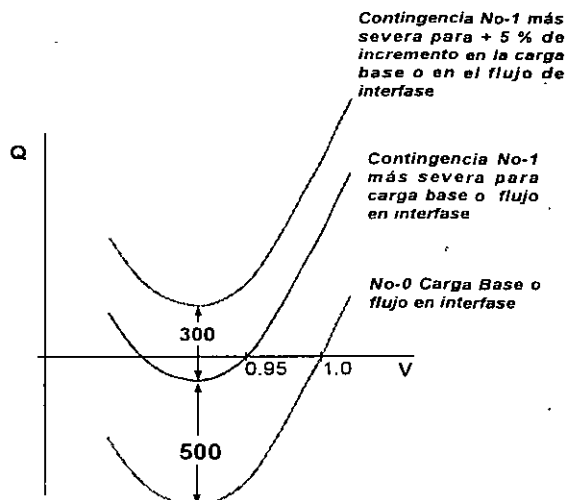


Figura 3.11 Curvas V – Q de prueba para determinación del margen de potencia reactiva

De acuerdo a lo descrito, el margen total requerido es de 300 MVar para la contingencia sencilla más severa sin ajustes en el área o región. Esto implica que después de que ocurre la contingencia N-1 más crítica, se deben tener disponibles al menos 300 MVar de margen. Se observa que el área o región en estudio es claramente deficiente en potencia reactiva y es potencialmente propensa al colapso de voltaje. Después de instalar soporte de potencia reactiva, deben ser generadas nuevamente las curvas V-Q para verificar que exista un margen positivo como se muestra en la figura 3.12.

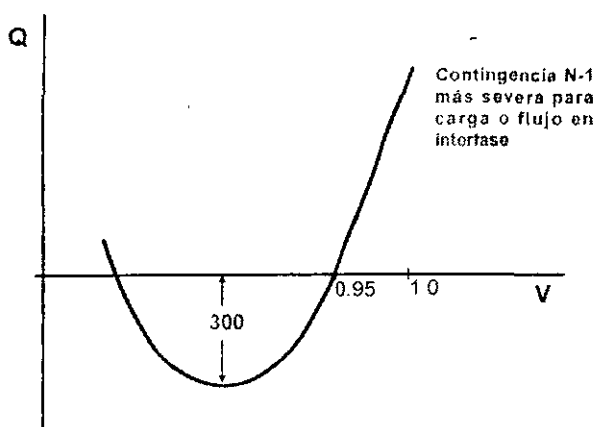


Figura 3.12 Curva V – Q en el que se muestra un margen de 300 MVar

3.4.1.4 Análisis Modal

En los últimos años han sido propuestas en la literatura algunas técnicas especiales para realizar el análisis de estabilidad de voltaje utilizando procedimientos en estado estable. Una de las técnicas más utilizadas es el análisis modal. Con esta técnica, además de saber en forma inmediata si el Sistema es o no estable, también es posible obtener útil información relacionada con el *mecanismo* de la inestabilidad de voltaje [6].

La técnica de análisis modal/eigenvalor involucra el cálculo de los eigenvalores y eigenvectores asociados de una matriz Jacobiana reducida generada a partir de un SEP en estado estable

$$\Delta V = J_R^{-1} \Delta Q \quad (3.8)$$

La matriz J_R^{-1} es el Jacobiano V-Q reducido. Su $i^{\text{ésimo}}$ elemento diagonal es la sensibilidad V-Q en el nodo i .

Esta matriz reducida contiene la relación V-Q en la red y en ella se incluyen las características apropiadas de generadores, cargas, dispositivos de compensación de potencia reactiva, entre otros. Mediante el uso de la matriz Jacobiana reducida, es posible examinar la relación que se presenta entre el cambio incremental en el voltaje del nodo y el cambio incremental en la inyección de potencia reactiva en el mismo.

Los eigenvalores de la matriz Jacobiana reducida identifican los diferentes modos a través de los cuales, el Sistema podría llegar a presentar una inestabilidad de voltaje. La magnitud de los eigenvalores proporciona una medida relativa de la proximidad a la inestabilidad. Los eigenvalores por otro lado, proporcionan valiosa información relacionada con el mecanismo de la pérdida de estabilidad de voltaje.

La utilización de esta técnica requiere el uso de software especializado.

3.4.1.5 Conclusiones sobre la aplicación de las técnicas descritas

- El análisis de flujos de potencia es de suma importancia ya que permite establecer las condiciones operativas previas a la realización de otros análisis ya sean en estado estable o en estado dinámico. Mediante el análisis de sus resultados es posible detectar condiciones de riesgo en las que puede incurrir el SEP.
- Uno de los beneficios más importantes de las curvas P –V es que proporcionan una indicación directa de la proximidad al colapso de voltaje a lo largo de un rango de niveles de carga o flujos en enlaces para la topología y condiciones específicas de operación del SEP estudiado.
- Las curvas V – Q proporcionan información del margen de reserva de potencia reactiva en un nodo representativo de un área o región para una condición operativa específica. El detalle radica en la determinación de los nodos representativos o críticos del área o región a estudiar.
- La técnica de análisis modal además de proporcionar un estudio más global y completo de la estabilidad de voltaje, se puede complementar con algunas de las curvas V- Q calculadas en los nodos con factores de participación mas altos para un modo i en particular

- El análisis modal para el estudio de estabilidad de voltaje proporciona información importante con respecto a la proximidad al colapso de voltaje y, al mecanismo que presenta dicha inestabilidad de voltaje cuando ésta ocurre.
- El análisis del mecanismo de la inestabilidad de voltaje indica cuales son los factores clave que contribuyen a la pérdida de estabilidad y también, cuáles son las áreas más involucradas y los nodos con un soporte de voltaje más débil dentro de esas áreas críticas.

Resumen:

- Por medio de la utilización de técnicas de estado estable es posible determinar la cargabilidad de una o de un conjunto de líneas de transmisión. Generalmente los resultados obtenidos deben ser confirmados mediante un análisis de estabilidad dinámica
- Dependiendo de las características del SEP a estudiar será el grado de profundidad y complejidad de los análisis que deben ser efectuados, así como del software requerido.

3.4.2 Análisis Dinámico

En un Sistema Eléctrico de Potencia existen muchos modos de oscilación entre máquinas síncronas y/o grupos de máquinas síncronas. Estos modos generalmente cambian con las condiciones de carga y con las modificaciones en la configuración o topología del Sistema. Por otra parte, las oscilaciones o variaciones que presentan las señales eléctricas y mecánicas de la máquina síncrona poseen un grado de amortiguamiento el cual puede ser aceptable o inaceptable.

En este tipo de análisis son contemplados los modelos y ajustes de los sistemas de regulación de tensión y velocidad. Dependiendo del alcance del estudio podría ser necesario incluir relevadores de protección (distancia, tensión, frecuencia, etc.). Adicionalmente se contempla la dependencia de la cargas de la tensión y/o frecuencia.

Este tipo de análisis se puede efectuar en el dominio del tiempo o en el dominio de la frecuencia. Dependerá del alcance del estudio y complejidad del mismo.

En el caso particular de la transferencia de potencia activa a través de una o de un conjunto de líneas de transmisión, podrían ser necesarios considerar los siguientes análisis:

- Estabilidad angular
- Estabilidad ante pequeña señal
- Estabilidad de tensión

De manera simplificada se indica a continuación la finalidad de cada uno de dichos análisis:

a) Estabilidad Angular

Este tipo de análisis se efectúa en el dominio del tiempo y las variables de interés generalmente son las asociadas a la máquina síncrona. El propósito es determinar si alguna o algunas máquinas síncronas (unidades generadoras) permanecen en sincronismo ante la ocurrencia de la pérdida de uno o mas elementos del Sistema.

b) Estabilidad ante pequeña señal

Su propósito es identificar modos de oscilación locales o entre áreas que sean pobremente amortiguados con respecto a la estabilidad angular. A partir del análisis de los resultados se recomiendan las mejores alternativas para mejorar el amortiguamiento de esos modos (ajustes en controles de tensión, velocidad y de estabilizadores de potencia). Este tipo de análisis se efectúa en el dominio de la frecuencia.

c) Estabilidad de tensión

Su propósito es identificar las áreas susceptibles a la inestabilidad de tensión o de voltaje y proporcionar información para mejorar de una manera más efectiva la estabilidad de tensión de un SEP. Mediante el análisis de la información obtenida es posible cuantificar la magnitud y ubicación óptima de la compensación capacitiva y/o inductiva.

Mediante el análisis de los resultados de estos estudios se podrán establecer las transferencias de potencia activa entre áreas con sus respectivos márgenes tanto de potencia activa como de potencia reactiva. Como se ha comentado, para la realización de este tipo de análisis se requiere de software especializado

Con la finalidad de ilustrar el comportamiento dinámico de variables eléctricas, se incluyen las figuras 3.13 y 3.14 - 3.16.

En la figura 3.13 se muestra el comportamiento de la frecuencia en dos nodos de 230 kV ante la pérdida de 250 MW.

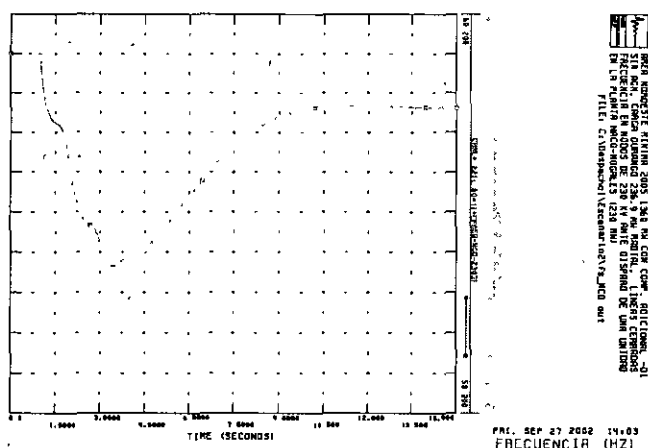


Figura 3.13 Comportamiento de la frecuencia ante la desconexión del ciclo combinado xxxxx. Considerando compensación inductiva adicional (cuatro reactores de 30.0 MVar), Despacho 1, Escenario 2 (1360 MW)

En la figura 3.14 se grafican las características transitorias $\bar{P}_e - \delta''$, para condiciones de prefalla, falla y una fase abierta. En operación de estado estable, la unidad estaba generando 85 MW (0.85 pu) con un desplazamiento angular del rotor de 35° respecto del nodo o bus infinito, punto "f" en la figura 3.14. Ocurre una falla transitoria de fase a tierra cerca del nodo de envío, que abate el voltaje de este nodo y provoca que el punto de operación de la potencia eléctrica generada por la unidad, pase del punto "f" al punto "a" sobre la curva $\bar{P}_e - \delta''$ de falla. Se presenta una aceleración positiva y el ángulo δ'' se incrementa. Después de 6 ciclos se libera la falla y se abre la fase en los dos extremos. Este instante corresponde a un valor del ángulo $\delta'' = \delta_c = 40.8^\circ$. La potencia eléctrica cambia del punto "b" al punto "c". Para este momento del periodo transitorio aún \bar{P}_{mo} es mayor que \bar{P}_e , de tal forma que, la máquina síncrona sigue acumulando energía acelerante y el ángulo continúa aumentando. Del punto "c" al "d" la aceleración es positiva y la potencia eléctrica va en aumento. En el punto "d", $\bar{P}_{mo} = \bar{P}_e$, pero el desplazamiento angular seguirá incrementándose para tratar de disipar la energía acelerante. En el primer periodo de desaceleración, área A2, la energía acelerante acumulada en el área A1 no se disipa, así que, el ángulo del rotor sigue creciendo.

Después del punto "e" la potencia mecánica es mayor que la eléctrica y la máquina se acelera positivamente por segunda ocasión, área A3. En el punto "g", después de 36 ciclos de abierta una fase, ésta se cierra y la línea se normaliza. La potencia eléctrica pasa de "g" a "i" sobre la curva de prefalla. Durante el segundo periodo de desaceleración, área A4, parte de la energía acelerante del área A1 y la energía acelerante del área A3 son disipadas. El ángulo máximo que se alcanza es de 137° . Una vez que se alcanza este valor, el ángulo del rotor disminuye y oscila alrededor del punto inicial de operación, punto "f". El sistema es estable.

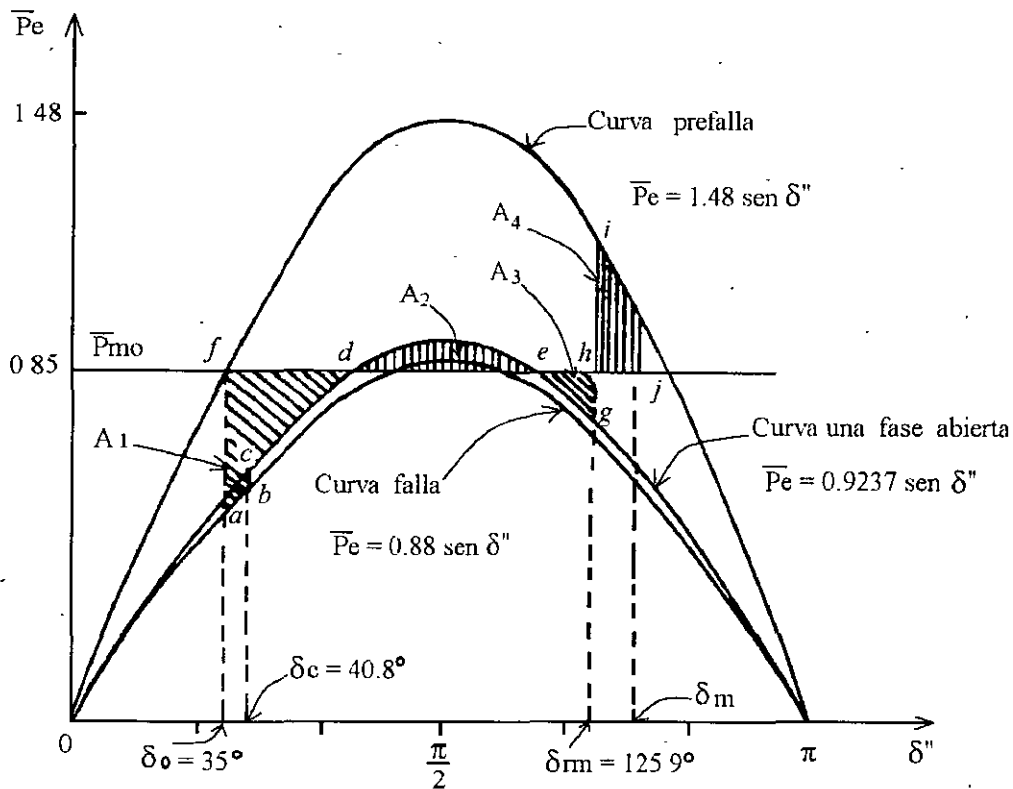


Figura 3.14 Método-gráfico para analizar la estabilidad de una máquina síncrona - bus infinito ante una la operación exitosa del recierre monopolar.

En la figura 3.15 se muestra, que en el momento que el ángulo del rotor alcanza su valor máximo ($\delta'' = \delta_m = 137^\circ$) \bar{P}_e es mayor que \bar{P}_{mo} , presentándose una fuerza restauradora. La máquina se desacelera y el ángulo del rotor disminuye para permanecer oscilando alrededor del punto "f". La energía desacelerante del área B es compensada por una cantidad igual de energía acelerante representada por el área A. Obsérvese que por la severidad de la contingencia, en el regreso de la oscilación del rotor, el desplazamiento angular alcanza un ángulo de -22° y la potencia eléctrica se invierte. El generador se "motoriza" durante un pequeño intervalo de tiempo. Sin embargo, las protecciones deberán de coordinarse para no desconectar la máquina síncrona durante motorizaciones momentáneas.

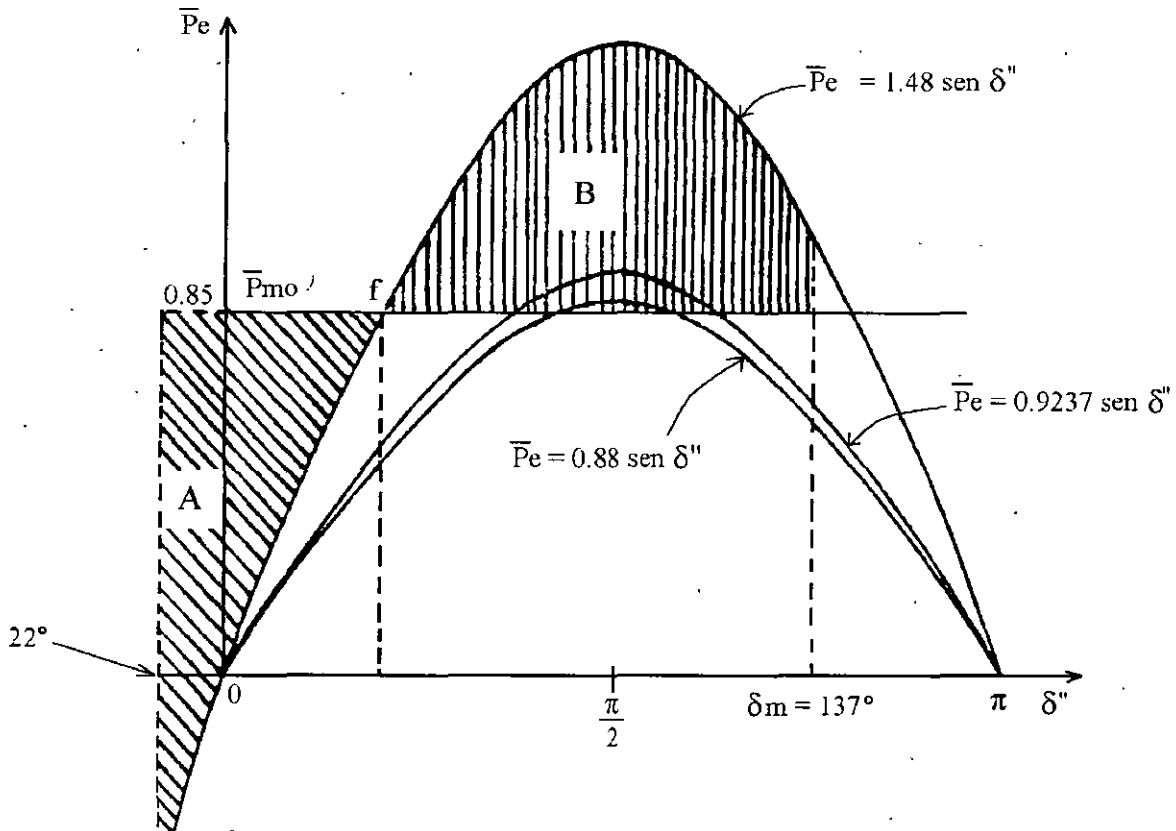


Figura 3.15 Oscilación del ángulo del rotor después de alcanzar su valor máximo, $\delta_{\text{máx}} = 137^\circ$, considerando una operación exitosa del disparo monopolar.

Este ejemplo también fue resuelto de manera digital. En la figura 3.16 se muestra el comportamiento de la posición de rotor y de la potencia eléctrica generada por la máquina síncrona. Se observa que los desbalances instantáneos entre la potencia eléctrica y mecánica son más severos en el momento de la aplicación de la falla y del recierre. El comportamiento del ángulo del rotor y de la potencia eléctrica de la figura 3.16 se puede explicar siguiendo las trayectorias de estas dos variables en las curvas que se muestran en la figura 3.14. Por ejemplo, obsérvese que el valor máximo de la potencia eléctrica en la primera oscilación (en aproximadamente 1.2 segundos) es 148 MW. Este es el valor pico de la potencia eléctrica que genera la máquina síncrona que se observa sobre la curva de pretalla en la figura 3.14.

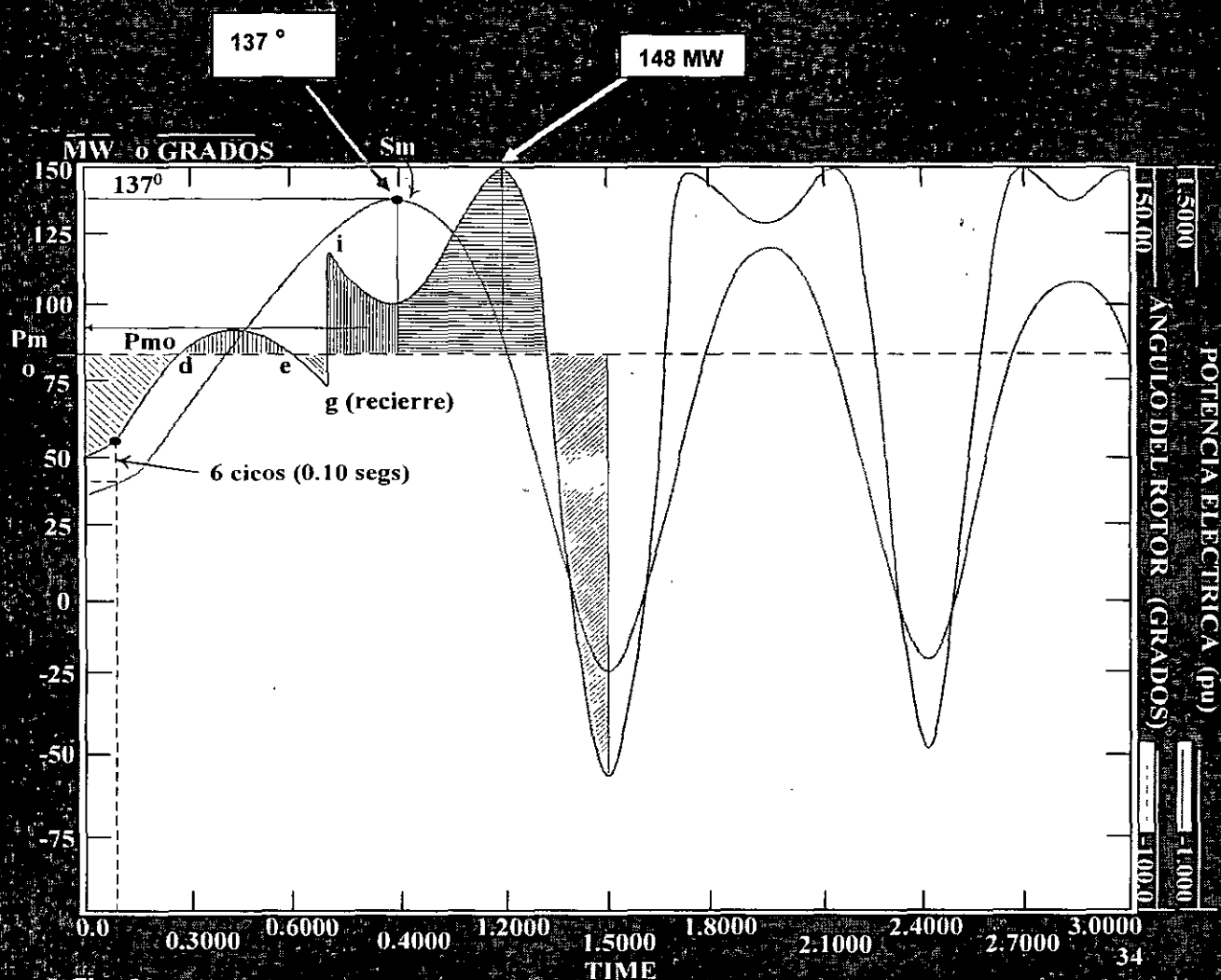


Fig. 3. 5 COMPORTAMIENTO DE POTENCIA ELÉCTRICA Y ÁNGULO DEL ROTOR DURANTE LA OPERACIÓN DEL ESQUEMA DE DISPARO MONOPOLAR

3.5 Conclusiones

Para determinar la cargabilidad de una o de un conjunto de líneas de transmisión se requiere:

- Disponer de una base de datos confiable.
- Disponer de software especializado.
- La definición de los casos base de estudio, así como de los despachos y escenarios más representativos, considerando las características y complejidad del Sistema que va a ser analizado.
- Para cada uno de los escenarios se deberán identificar las contingencias sencillas y dobles de mayor interés.
- Hacer uso de las técnicas de análisis de estado estable: curvas P-V, análisis modal y curvas V-Q para aplicarlas en los casos detectados como más críticos.
- Confirmar los resultados mediante la aplicación de las técnicas de análisis dinámico mencionadas.

3.6 Referencias

- [1] H.P.St.CLAIR, "*Practical concepts in capability and performance of Transmission lines*", AIEEE. Trans. on PAS, Vol. 72, Part III, pags. 1152-1157, Diciembre 1953.
- [2] EPRI, "*Transmission Line Reference Book*", 345 kV and Above, second edition, 1982.
- [3] R.D.DUNLOP, R. GUTMAN,P.P. MARCHENKO, "*Analytical Development of Loadability Characteristics for EHV and UHV Transmissions Lines*", IEEE. Transactions on Power Aparatus and Systems, Vol.PAS-98, No.2, March/April 1979.
- [4] T.W.KAY, P.W SAUER, R D.SHULTZ, R.A.SMITH, "*EHV and UHV line loadability dependence on VAR supply capability*", IEEE Transactions on Power Aparatus and Systems, Vol PAS-101, No.9 September 1982.
- [5] IEEE Committee Report, *Voltage Stability of Power Systems: Concepts, Analytical Tools, and Industria Experience*, IEEE publication 90TH0358-2-PWR.
- [6] Carson W. Taylor. *Power System Voltage Stability..* Mc Graw Hill, Inc. 1992.
- [7] Kundur P., "*Power System Stability and Control*", EPRI Power System Engineering Series, McGraw Hill Inc., 1994:
- [8] Estabilidad de Voltaje, CFE-UIE febrero de 2001.