FACULTAD DE INGENIERÍA UNAM
DIVISIÓN DE EDUCACIÓN CONTINUA

CURSOS ABIERTOS

DIPLOMADO DE MATEMÁTICAS

TEMA

CA 486

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS Y DE ORDEN SUPERIOR

APUNTES GENERALES

INSTRUCTOR: M. EN I. ABEL VALDEZ RAMÍREZ
DEL 4 AL 18 DE FEBRERO 2006
PALACIO DE MINERÍA

ÍNDICE

De respuesta gráfica

Las pruebas de respuesta gráfica, miden las respuestas a determinados estímulos. La prueba del polígrafo o detector de mentiras es la mas común.

Flexibilidad

Incluso cuando se dispone de una batería de pruebas y resultados evidentemente la conveniencia de suministrarlas a los solicitantes de un puesto es importante mantener una actitud flexible.

PASO 3: ENTREVISTA DE SELECCIÓN

La entrevista de selección consiste en una plática formal y en profundidad, conducida para evaluar la idoneidad para el puesto que tenga el solicitante. El entrevistador se fija como objetivo responder a dos preguntas generales: ¿ Puede el candidato desempeñar el puesto? ¿Cómo se compara con respecto a otras personas que han solicitado el puesto?

Aunque las entrevistas poseen grandes ventajas, también muestran aspectos negativos , especialmente en cuanto a confiabilidad y validez. Para que los resultados de la entrevista sean confiables es necesario que sus conclusiones no varíen de entrevistador a entrevistador aunque es común que diferentes entrevistadores expresen diferentes opiniones. La validez es cuestionable porque son pocos los departamentos de personal que llevan a cabo estudios de validación sobre los resultados de sus entrevistas.

Tipos de entrevista.

Las entrevistas comúnmente se llevan a cabo entre un solo representante de la empresa y un solo solicitante. Sin embargo, también se pueden realizar en grupo, ya sea reuniendo al solicitante con dos o más entrevistadores, o bien, a dos o más solicitantes con un solo entrevistador.

No estructuradas. Permite que el entrevistador formule preguntas no previstas durante la conversión. El entrevistador inquiere sobre diferentes tema a medida que se presentan, en forma de una plática común.

ECUACIONES DIFERENCIALES

ORDINARIAS

Además de ser válidas las pruebas deben ser confiables. Por confiabilidad se entiende que la prueba tenga la característica de que cada vez que se aplique al mismo individuo, se obtendrán resultados similares.

El propósito exacto de una prueba, su diseño, las directrices para suministrarla y sus aplicaciones se registran en el manual de cada prueba, que debe consultarse antes de emplearla. Ahí mismo se instruye también sobre la confiabilidad de la prueba y los resultados de validación obtenidos por el diseñador.

Instrumentos para la administración de exámenes

El propósito especifico de cada examen, su diseño, las instrucciones para administrarlo y sus aplicaciones se registran en el manual que suele acompañar a todo paquete de exámenes. Antes de administrar cualquier prueba es necesario consultar el instructivo y comprenderlo a cabalidad.

Diversos tipos de pruebas

Psicológicas

Las pruebas psicológicas se enfocan en la personalidad. Se cuentan entre las menos confiables. Su validez es discutible, por que la relación entre personalidad y desempeño con frecuencia es muy vaga y subjetiva.

De conocimiento

Las pruebas de conocimiento son mas confiables, porque determina información o conocimientos que posee el examinado.

De desempeño

La pruebas de desempeño miden la habilidad de los candidatos para ejecutar ciertas funciones de su puesto; por ejemplo, un cocinero puede ser sometido a un examen de habilidad para hornear un pastel.

Problema 1

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x^2}{y(1+x^3)}$$

Separando las variables, se obtiene

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x^2}{y(1+x^3)}\Rightarrow ydy=\frac{x^2}{(1+x^3)}dx\Rightarrow\int ydy=\int\frac{x^2}{(1+x^3)}dx$$

Integrando en forma inmediata

$$u=1+x^3 \quad du=3x^2dx \quad \int ydy=\int\frac{x^2}{1+x^3}dx\Rightarrow \quad \frac{y^2}{2}=\frac{1}{3}\ln\left|1+x^3\right|+c$$

$$y^2=\frac{2}{3}\ln\left|1+x^3\right|+2c$$

Respuesta. $\frac{1}{3}\ln(1+x^3)-\frac{y^2}{2}=C$

Problema 2

$$y'=\cos^2 x\cos^2 2y$$

Separando las variables e integrando en forma inmediata

$$y'=\frac{dy}{dx}=\cos^2 x\cos^2 2y\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=\cos^2 x\cos^2 2y\Rightarrow \quad \frac{dy}{\cos^2 2y}=\cos^2 xdx$$

$$u=2y$$

$$du=2dy \quad \int\sec^2 2ydy=\int\cos^2 xdx\Rightarrow\frac{1}{2}\int\sec^2 2y(2dy)=\frac{1}{2}\tan 2y$$

$$\int\cos^2 xdx=\int\frac{1+\cos 2x}{2}dx=\int\frac{1}{2}dx+\int\frac{1}{2}\cos 2xdx=\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int\cos 2x\,2dx$$

$$=\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}\tan 2y=\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x$$

Respuesta $\frac{1}{2}\tan 2y-(\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\operatorname{sen}2x)=C$

Problema 3

$$ydx+(1-x)dy=0$$

Separando las variables e integrando en forma inmediata

$$\int\frac{dx}{(1-x)}+\int\frac{dy}{y}=0$$

$$u=1-x$$

$$du=-dx$$

$$-\ln(1-x)+\ln y=C \qquad \ln\frac{y}{(1-x)}=C$$

Respuesta $\frac{y}{1-x}=C$

Problema 4

$(3x^2y-x^2)dx+dy=0$

Factorizando el primer sumando, separando las variables e integrando en forma inmediata

$x^2(3y-1)dx+dy=0 \Rightarrow \quad \int x^2dx+\int\frac{dy}{(3y-1)}=0$

Cálculo integral

$$\int x^2dx=\frac{1}{2}\int x^2dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}x^3=\frac{x^3}{3},u=x^2,du=2xdx$$

$$\int\frac{dy}{(3y-1)}=\frac{1}{3}\int\frac{3dy}{(3y-1)}=\frac{1}{3}ln(3y-1),v=(3y-1),dv=3dy$$

Respuesta $\frac{x^3}{3}+\frac{1}{3}ln(3y-1)=C$

Problema 5

$(y-1)dx=(yx^2-yx)dy$

Separando las variables y efectuando el cálculo integral

$$(y-1)dx=y(x^2-x)dy \Rightarrow \frac{dx}{(x^2-x)}=\frac{ydy}{(y-1)}$$

Cálculo integral, realizando la división entre polinomios, o bien restando y sumando el número 1

$$\int\frac{ydy}{(y-1)}=\int\frac{y-1+1}{(y-1)}dy=\int\left(1+\frac{1}{(y-1)}\right)dy=\int dy+\int\frac{dy}{(y-1)}=y+ln(y-1)$$

Haciendo la descomposición en fracciones parciales, tomando el caso 1, se tiene

$$\int\frac{dx}{(x^2-x)}=\int\frac{dx}{x(x-1)}=\int\left(\frac{A}{x}+\frac{B}{(x-1)}\right)dx$$

$$\Rightarrow 1=A(x-1)+Bx \Rightarrow x=1,x=0 \therefore B=1,A=-1$$

$$\Rightarrow -\int\frac{dx}{x}+\int\frac{dx}{x-1}=-ln\,x+ln(x-1)=ln\frac{(x-1)}{x}$$

Respuesta $ln\frac{(x-1)}{x}=y\,ln(y-1)+C$

Problema 6

$(x+xseny)dx=(x^2-4x+4)cos\,ydy$

Factorizando y separando las variables

$$x(1+seny)dx=(x^2-4x+4)cos\,ydy \quad \frac{x}{(x^2-4x+4)}dx=\frac{cos\,ydy}{(1+seny)}$$

Cálculo integral, Haciendo una descomposición en fracciones parciales, se tiene

$$\int \frac{x}{(x^2-4x+4)}dx = \int \frac{x}{(x-2)(x-2)}dx = \int \frac{x}{(x-2)^2}dx = \int \frac{A}{(x-2)}dx + \int \frac{B}{(x-2)^2}dx$$

$$x = A(x-2)+B \Rightarrow \quad x = \underbrace{A}_{=1}x + \underbrace{(-2A+B)}_{=0} \Rightarrow A = 1, \quad -2A+B=0 \quad \Rightarrow \quad B = 2$$

$$\int \frac{x}{(x^2-4x+4)}dx = \int \frac{dx}{(x-2)} + 2\int \frac{dx}{(x-2)^2} = \ln(x-2) - \frac{2}{(x-2)}$$

Integrando en forma inmediata $u = (1+\operatorname{sen}y), du = \cos y dy$

$$\int \frac{\cos y dy}{(1+\operatorname{sen}y)} = \ln(1+\operatorname{sen}y)$$

Respuesta $\ln(x-2) - \frac{2}{(x-2)} = \ln(1+\operatorname{sen}y) + C$

Problema 7

$$(x^4y+5x^2y+4y)dy = 3(y^2+1)dx$$

Factorizando y separando las variables, se tiene

$$y(x^4+5x^2+4)dy = 3(y^2+1)dx \Rightarrow \frac{ydy}{(y^2+1)} = \frac{3dx}{(x^4+5x^2+4)}$$

Efectuando el cálculo integral de forma inmediata $u = y^2+1 \quad du = 2ydy$

$$\int \frac{ydy}{(y^2+1)} = \frac{1}{2}\int \frac{2ydy}{(y^2+1)} = \frac{1}{2}\ln\left|y^2+1\right|$$

Mientras que la segunda integral se hace por medio de una descomposición en fracciones parciales, tercer caso

$$\int \frac{3}{(x^4+5x^2+4)}dx = \int \frac{3}{(x^2+4)(x^2+1)}dx = \int \frac{Ax+B}{(x^2+4)} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)}dx$$

$$3 = (Ax+B)(x^2+1) + (Cx+D)(x^2+4)$$

$$3 = (Ax^3+Bx^2+Ax+B) + (Cx^3+4Cx+Dx^2+4D)$$

$$3 = x^3\underbrace{(A+C)}_{=0} + x^2\underbrace{(B+D)}_{=0} + x\underbrace{(A+4C)}_{0} + \underbrace{(B+4D)}_{=3}$$

$$\Rightarrow 0 = A+C \qquad 0 = B+D \qquad 0 = A+4C \qquad 3 = B+4D \therefore A = 0, B = -1, C = 0, D$$

$$-\int \frac{dx}{(x^2+4)} + \int \frac{dx}{(x^2+1)} = \int \frac{dx}{(x^2+1)} - \int \frac{dx}{(x^2+4)} = \int \frac{dx}{x^2+1^2} - \int \frac{dx}{x^2+2^2}$$

$$= \frac{1}{1}\arctan\left(\frac{x}{1}\right) - \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right) + c = \arctan x - \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right) + c$$

Respuesta $\frac{1}{2}\ln(y^2+1) = \arctan x - \frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2} + c$

Problema 8

$$yx^2dx = (x^4 + 2x^2 + 1)dy$$

Separando las variables, integrando en forma inmediata para y, mientras que para la variable x , se integra por sustitución trigonométrica o bien usando una fórmula de reducción.

$$\frac{x^2 dx}{(x^4 + 2x^2 + 1)} = \frac{dy}{y}$$

Cálculo integral

$$\int \frac{dy}{y} = ln|y|$$

$$\int \frac{x^2dx}{(x^4 + 2x^2 + 1)} = \int \frac{x^2dx}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2(x^2)(2-1)}\left[\frac{x}{x^2+1} + [2(2)-3]\frac{dx}{x^2+1}\right]$$

$$\frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2}arctan(x) + c = ln|y|$$

<u>***RESPUESTA***</u> $ln|y| = \frac{1}{2}arctan\,x - \frac{x}{2(x^2+1)} + C$

<u>*Problema 9*</u>

$$\frac{dy}{dx} - \frac{x^2y + 2y + x^2 + 2}{x^2y + y - x^2 - 1} = 0$$

Factorizando por agrupación el cociente, separando las variables, mientras que el cálculo integral se efectúa realizando la división entre polinomios o bien sumando y restando una cantidad adecuada definida por el denominador respectivo

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y(x^2+2) + (x^2+2)}{x^2(y-1) + (y-1)} = 0 \quad \frac{dy}{dx} - \frac{(x^2+2)(y+1)}{(y-1)(x^2+1)} = 0 \quad \frac{dy}{dx} = \frac{(x^2+2)(y+1)}{(y-1)(x^2+1)}$$

$$\frac{(y-1)}{(y+1)}dy = \frac{(x^2+2)}{(x^2+1)}dx \Rightarrow \int\frac{(y-1)}{(y+1)}dy = \int\frac{(x^2+2)}{(x^2+1)}dx$$

Cálculo Integral

$$\int\frac{y-1+1-1}{(y+1)}dy = \int\frac{y+1-1-1}{(y+1)} = \int\frac{(y+1)dy}{(y+1)} - 2\int\frac{dy}{(y+1)} = \int dy - 2\int\frac{dy}{(y+1)}$$

$$= y - 2\,ln|y+1|$$

$$\int\frac{(x^2+2)}{(x^2+1)}dx = \int\frac{x^2dx}{(x^2+1)} + 2\int\frac{dx}{(x^2+1)} = \int\frac{x^2+1-1}{(x^2+1)}dx + 2\int\frac{dx}{(x^2+1)}dx =$$

$$\int\frac{(x^2+1)}{(x^2+1)}dx - \int\frac{dx}{(x^2+1)} + 2\int\frac{dx}{(x^2+1)} = \int dx + \int\frac{dx}{x^2+1^2} = x + \frac{1}{1}arctan\frac{x}{1} + C$$

$$y - 2\,ln|y+1| = x + arctan(x) + c_1$$

<u>***Respuesta***</u> $y - 2\,ln|y+1| - x - arctan(\ x\ ) = C$

Funciones Homogéneas

Definición: Sea $F = F(x,y)$; una función de dos variables, se dice que $F(x,y)$ es una función homogénea de grado n si:

$$F(tx,ty) = t^n F(x,y)$$

Es evidente, como consecuencia de la definición, que si una función no satisface la expresión anterior entonces no es homogénea.

Ejemplos:

1) la función $F(x,y) = x^2 - 3y^2$; es homogénea de grado 2 porque:

$$F(tx,ty) = (tx)^2 - 3(ty)^2 = t^2x^2 - 3t^2y^2 = t^2(x^2 - 3y^2) = t^2 f(x,y)$$

Deberá notar que si agregamos una constante o le sumamos alguna función como por ejemplo:
$x^n + y^m \quad n \neq m \quad \ln(xy), \arctan(y/x), \ldots\ldots etc$ la función se vuelve no homogénea.

2) La función $F(x,y) = y + x + \sqrt{x^3 + y^3}$ no es homogénea porqué:

$$F(tx,ty) = ty + tx + \sqrt{(tx)^3 + (ty)^3} = ty + tx + \sqrt{t^3x^3 + t^3y^3} = ty + tx + t^{\frac{3}{2}}\sqrt{x^3 + y^3}$$
$$= t(x+y) + t^{\frac{3}{2}}\sqrt{x^3 + y^3}$$

No pudiendo factorizarse más, para satisfacer la definición, aunque si consideramos las funciones $f_1(x,y) = y + x \quad f_2(x,y) = \sqrt{x^3 + y^3}$ por separado, serán homogéneas de grado $n = 1$ y $n = \frac{3}{2}$ respectivamente.

Consideraciones

1) Si se suma una constante a una función homogénea, se pierde la homogeneidad, a menos que el grado de la función homogénea sea cero.

2) Generalmente la homogeneidad se reconoce examinando el grado total de cada término.
Por ejemplo: $f(x,y) = x^2y^2 + 3xy^3 + x^3y$ es de grado 4 porque $2 + 2 = 1 + 3 = 3 + 1 = 4$

Ecuaciones Diferenciales Homogéneas:

Definición: La ecuación diferencial de primer orden $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$; se llama homogénea, si cuando se escribe en la forma de derivada $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$, Existe una función g tal que $f(x,y)$ se puede expresar en la forma $g(y/x)$; o bien si la ecuación diferencial en forma de derivada es $\frac{dx}{dy} = f(x,y)$, entonces la función $f(x,y)$ se puede expresar en la forma $g(x/y)$.

Esta definición es equivalente a decir que la ecuación diferencial es homogénea cuando los coeficientes son homogéneos y del mismo grado, es decir:

$$M(tx,ty) = t^m M(x,y), \quad N(tx,ty) = t^n N(x,y), \quad m = n$$

Ejemplo: La Ecuación diferencial $(x^2 - 3y^2)dx + 2xydy = 0$ es homogénea de grado 2 porqué:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x^2 - 3y^2}{2xy} = -\frac{x}{2y} + \frac{3}{2}\frac{y}{x} = -\frac{1}{2\frac{y}{x}} + \frac{3}{2}\frac{y}{x}$$

Entonces. $g(y/x) = -\frac{1}{2\frac{y}{x}} + \frac{3}{2}\frac{y}{x}$

Si la intención es simplemente reconocer a la ecuación diferencial homogénea, bastará con observar los coeficientes y determinar si son homogéneos y del mismo grado, entonces la ecuación diferencial es homogénea y del mismo grado que el de los coeficientes, del ejemplo anterior $M(x,y) = x^2 - 3y^2$ y $N(x,y) = 2xy$ son funciones homogéneas de grado $n = 2$.

Solución de Una Ecuación Diferencial Homogénea.

Si $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ es una ecuación diferencial homogénea entonces el cambio de variable. $y = ux$ ó $x = vy$; donde u ó v son nuevas variables dependientes (según sea el cambio), dependientes de x ó y respectivamente, transforma la ecuación diferencial homogénea en una ecuación de **variables separables.**

Matemáticas Superiores
ECUACIONES DIFERENCIALES HOMOGÉNEAS

Solución general: si $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ es homogénea, entonces

$$\frac{dy}{dx} = g(y/x)$$

Haciendo $y = ux \Rightarrow \frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx} \Rightarrow u + x\frac{du}{dx} = g(u)$

Después de sustituir separamos las variables

$$x\frac{du}{dx} = g(u) - u$$

$$\frac{du}{g(u)-u} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{dx}{x} - \frac{du}{g(u)-u} = 0$$

Entonces: $\int\frac{dx}{x} - \int\frac{du}{g(u)-u} = c$ que se encuentra lista para la integración.

PROBLEMAS

Problema 1

$(x^2 - 3y^2)dx + 2xydy = 0$ *(Ecuación 1)*

La ecuación es homogénea de grado $n = 2$

Haciendo $y = ux$ *(ecuación 2)* entonces $\frac{dy}{dx} = u + \frac{du}{dx} \Rightarrow dy = udx + xdu$ *(ecuación 3)*

Sustituyendo: 2 y 3 en 1

$$(x^2 - 3(ux)^2)dx + 2x(ux)(udx + xdu) = 0$$

Simplificando:

$$(x^2 - 3u^2x^2)dx + 2ux^2(udx + xdu) = 0$$
$$(x^2 - 3u^2x^2 + 2u^2x^2)dx + 2ux^3du = 0$$
$$(x^2 - u^2x^2)dx + 2ux^3du = 0$$

Separando variables

$$x^2(1-u^2)dx + 2ux^3du = 0 \Rightarrow \frac{1}{x^3(1-u^2)}\left[x^2(1-u^2)dx + 2ux^3du = 0\right]$$

Obteniendo $\frac{dx}{x} + \frac{2u}{(1-u^2)}du = 0$

Integrando $v = 1 - u^2, dv = -2udu$ se tiene.

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{2u}{(1-u^2)}du = \int 0$$

$$\ln x - \ln(1-u^2) = c \Rightarrow \ln\left(\frac{x}{1-u^2}\right) = c \Rightarrow \frac{x}{1-u^2} = c \Rightarrow x = c(1-u^2)$$

Al cambiara la variable $x = c(1 - \frac{y^2}{x^2})$ se obtiene la respuesta

Respuesta. $x = c\left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right)$

Problema 2

$2x^3 ydx + (x^4 + y^4)dy = 0$ *(Ecuación 1)*

Dividiendo entre y^4 la *(ecuación 1)*. $2\frac{x^3}{y^3}dx + \left(\frac{x^4}{y^4} + 1\right)dy = 0$

Haciendo $x = uy$ *(ecuación 2)* $dx = udy + ydu$ *(ecuación 3,*

Sustituyendo las ecuaciones *2* y *3* en *1* y reacomodando para separar las variables se tiene

$$2u^3(udy + ydu) + (u^4 + 1)dy = 0$$
$$2u^4dy + 2yu^3du + (u^4 + 1)dy = 0$$
$$(2u^4 + u^4 + 1)dy + 2yu^3du = 0$$
$$(3u^4 + 1)\frac{dy}{y} + 2u^3du = 0$$
$$\Rightarrow \int \frac{dy}{y} + \int \frac{2u^3}{3u^4 + 1}du = \int 0$$

Cálculo integral

$\int \frac{dy}{y} = \ln y,\quad \int \frac{2u^3}{3u^4 + 1}du = \frac{1}{6}\int \frac{12u^3}{3u^4 + 1}du:\quad z = 3u^4 + 1 \Rightarrow dz = 12u^3du$

Entonces

$$\ln y + \frac{1}{6}\ln|3u^4 + 1| + c = 0 \Rightarrow 6\ln y + \ln|3u^4 + 1| = 6c \Rightarrow \ln|y^6| + \ln|3u^4 + 1| = c \Rightarrow y^6(3u^4 + 1) = c$$

$$y^6\left(3\frac{x^4}{y^4} + 1\right) = c \Rightarrow 3x^4y^2 + y^6 = c$$

Respuesta $y^2(3x^4 + y^4) = C$

Problema 3

$$(x^2 + y^2)dx = (x^2 + 2xy)dy$$

despejando a la derivada

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + 2xy} = \frac{x^2\left[1 + (\frac{y}{x})^2\right]}{x^2\left[1 + 2(\frac{y}{x})\right]} \text{ (ecuación 1)}$$

Haciendo $y = vx$ *(ecuación 2)*, entonces $\frac{dy}{dx} = x\frac{dv}{dx} + v$ *(ecuación 3)*

sustituyendo *2* y *3* en *1*

$$x\frac{dv}{dx} + v = \frac{1 + v^2}{1 + 2v}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{-v^2 - v + 1}{1 + 2v}$$

Separando las variables e integrando en forma inmediata

$$-\frac{(2v + 1)dv}{v^2 + v - 1} = \frac{dx}{x} \Rightarrow -\int\frac{(2v + 1)dv}{v^2 + v - 1} = \int\frac{dx}{x}$$

$$-\ln|v^2 - v - 1| = \ln|x| + c$$

Regresando a las variables originales $-\ln\left[(\frac{y}{x})^2 + (\frac{y}{x}) - 1\right] = \ln|x| + c$

Simplificando $\ln\left(x\left(\frac{y^2}{x^2}\right) + x\left(\frac{y}{x}\right) - x\right) = c \Rightarrow \frac{y^2}{x} + y - x = c$

Respuesta $y^2 + xy - x^2 = cx$

Método IDI (Integrar-Derivar-Igualar)

Desarrollo: Búsqueda de $F(x,y)$ se conoce como la función potencial

Integrando: $$F(x,y) = \int \frac{\partial F}{\partial x} dx + \varphi(y) = \int M(x,y)dx + \varphi(y)$$

$$F(x,y) = g(x,y) + \varphi(y)$$

Derivando: $$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial g(x,y)}{\partial y} + \varphi'(y)$$

Igualando: como $\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y) \Rightarrow \dfrac{\partial g(x,y)}{\partial y} + \varphi'(y) = N(x,y)$

$\varphi'(y) = N(x,y) - \dfrac{\partial}{\partial y} g(x,y)$ {Función exclusiva de y}

$\varphi(y) = \displaystyle\int\left(N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y} g(x,y)\right)dy$ Por lo

que $F(x,y) = g(x,y) + \displaystyle\int\left(N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y} g(x,y)\right)dy$

En consecuencia $$g(x,y) + \int\left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y} g(x,y)\right]dy = C$$

Así $$\int M(x,y) + \int\left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\right]dy = C$$

Es la fórmula general para resolver las ecuaciones diferenciales exactas

Método directo (Uniendo soluciones)

Desarrollo: integrando directamente los coeficientes diferenciales y uniendo las soluciones, se obtiene

$$f_x = \int M(x,y)dx + k_1(y) = \int \frac{\partial F(x,y)}{\partial x} dx$$

$$f_y = \int N(x,y)dy + k_2(x) = \int \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} dy$$

Entonces $F(x,y) = f_x \cup f_y \Rightarrow f_x \cup f_y = c$ será la solución

Diferencial total:

Definición: Sea F una función de dos variables $F = F(x, y)$; tal que F tiene primeras derivadas parciales continuas en un dominio D. La diferencial total DF de una función F se define como:

$$DF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy \quad \forall (x, y) \in D$$

Definición: La expresión $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ se llama diferencial exacta ; si existe una función $F = F(x, y)$; tal que ésta sea la diferencial total DF, es decir:

$$M(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad N(x, y) = \frac{\partial F}{\partial y}$$

en consecuencia si $M(x, y)dx + N(x, y)dy$; es una diferencial total $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$; será una ecuación diferencial exacta.

Teorema: La ecuación $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ será exacta si; $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

Demostración: Si $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ es exacta entonces existe una función

$F(x, y)$; tal que $M(x, y) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial x}$ $\qquad N(x, y) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial y}$

Entonces: $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$

Llegando a una igualdad: $\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$

Solución de Una Ecuación Diferencial Ordinaria Exacta:

Si la ecuación $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ es exacta entonces existe una función F tal que:

$M = \frac{\partial F}{\partial x}$ y $N = \frac{\partial F}{\partial y}$ por lo que la ecuación exácta se puede escribir como: $\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = 0$

entonces: $\int DF(x, y) = \int 0$ por lo tanto $F(x, y) = C$ que es la solución.

PROBLEMAS

Problema 1:

Obtenga la diferencial total de la función. $F(x,y) = xy^2 + 2x^3 y$

Respuesta. $DF = (y^2 + 6x^2 y)dx + (2xy + 2x^3)dy$

-Sea la función $F(x,y) = y^2 \cos x + \cos x$ Muestre que $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$

Respuesta. $\dfrac{\partial F}{\partial x} = -y^2 senx - senx$, $\dfrac{\partial F}{\partial y} = 2y\cos x$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-y^2 senx - senx\right) = -2ysenx$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(2y\cos x\right) = -2ysenx$$

Problema 2.-

$$(3 - x^2 y)\frac{dy}{dx} = xy^2 + 4$$

Reacomodando la ecuación diferencial, para identificar los coeficientes

$$(xy^2 + 4)dx - (3 - x^2 y)dy = 0 \Rightarrow (xy^2 + 4)dx + (-3 + x^2 y)dy = 0$$

Haciendo la prueba de la exactitud.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2xy, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2xy$$

Aplicando el método IDI:

$$F(x,y) = \int (xy^2 + 4)dx + \varphi(y) = \frac{x^2 y^2}{2} + 4x + \varphi(y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x^2 y + \varphi'(y) = -3 + x^2 y \Rightarrow \varphi'(y) = -3 \Rightarrow \varphi(y) = -3y$$

Por lo que $F(x,y) = \dfrac{x^2 y^2}{2} + 4x - 3y$

Aplicando el método directo.

$$f_x = \int (xy^2 + 4)dx + k_1(y) = \frac{x^2y^2}{2} + 4x$$

$$f_y = \int (-3 + x^2y)dy + k_2(x) = -3y + \frac{x^2y^2}{2}$$

Por lo que $F(x,y) = f_x \cup f_y = \left(\frac{x^2y^2}{2} + 4x\right) \cup \left(-3y + \frac{x^2y^2}{2}\right) = \frac{x^2y^2}{2} + 4x - 3y$

También se puede resolver por la fórmula general

$$F(x,y) = \int M(x,y)dx + \int \left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x,y)dx \right] dy$$

$$F(x,y) = \int (xy^2 + 4)dx + \int \left[(x^2y - 3) - \frac{\partial}{\partial y} \int (xy^2 + 4)dx \right] dy$$

$$F(x,y) = \frac{x^2y^2}{2} + 4x + \int \left[x^2y - 3 - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2y^2}{2} + 4x \right) \right] dy$$

$$F(x,y) = \frac{x^2y^2}{2} + 4x + \int [x^2y - 3 - x^2y] dy$$

$$F(x,y) = \frac{x^2y^2}{2} + 4x + \int -3dy$$

$$F(x,y) = \frac{x^2y^2}{2} + 4x - 3y$$

Respuesta. $\frac{x^2y^2}{2} + 4x - 3y = c$

Problema 3

$$(2y^2x - 3)dx + (2yx^2 + 4)dy = 0$$

Prueba de exactitud

$$M(x,y) = 2xy^2 - 3 \Rightarrow \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 4xy$$

$$N(x,y) = 2x^2y + 4 \Rightarrow \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 4xy$$

$$F(x,y) = \int M(x,y)dx + \varphi(y) = \int (2xy^2 - 3)dx + \varphi(y) = 2y^2 \int xdx - 3\int dx = x^2y^2 - 3x + \varphi$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = 2x^2y + \varphi'(y) \Rightarrow 2x^2y + \varphi'(y) = 2x^2y + 4 \quad \Rightarrow \quad \varphi'(y) = 4 \quad \Rightarrow \quad \int \varphi'(y)dy = \int$$

$$\varphi(y) = 4y + c \quad \Rightarrow F(x,y) = x^2y^2 - 3x + 4y + c$$

Respuesta $x^2y^2 - 3x + 4y = c$

Matemáticas Superiores
ECUACIONES DIFERENCIALES EXACTAS

Problema 4.

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{ax+by}{bx+cy}$$

Reacomodando la ecuación diferencial

$$(ax+by)dx+(bx+cy)dy=0$$

Prueba de exactitud

$$M(x,y)=ax+by\Rightarrow \quad \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=b$$

$$N(x,y)=bx+cy \quad \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=b$$

Resolviendo con el método directo

$$f_x=\int M(x,y)dx+k_1(y)=\int(ax+by)dx+k_1(y)=a\int xdx+by\int dx=\frac{a}{2}x^2+byx+k_1(y)$$

$$f_y=\int N(x,y)dy+k_2(y)=\int(bx+cy)dy+k_2(x)=bx\int dy+c\int ydy=bxy+c\frac{y^2}{2}+k_2(x)$$

$$\Rightarrow F(x,y)=f_x\cup f_y=\frac{a}{2}x^2+byx+\frac{c}{2}y^2$$

Respuesta. $\frac{a}{2}x^2+byx+\frac{c}{2}y^2=c$

Problema 5

$$\left(-\frac{-1+y(senx)x-x}{x}\right)dx+\left(\frac{1+y\cos x}{y}\right)dy=0$$

Prueba de exactitud

$$M(x,y)=\frac{1-y(senx)x+x}{x}=\frac{1}{x}-ysenx+1\Rightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial y}=-senx$$

$$N(x,y)=\frac{1+y\cos x}{y}=\frac{1}{y}+\cos x\Rightarrow \quad \frac{\partial N}{\partial x}=-senx$$

Entonces, resolviendo con el método IDI. Integrando

$$F(x,y)=\int\left[\frac{1}{x}-ysenx+1\right]dx+\varphi(y)$$

$$F(x,y)=\int\frac{1}{x}dx-y\int senxdx+\int dx+\varphi(y)$$

$$F(x,y)=\ln x+y\cos x+x+\varphi(y)$$

$$\Rightarrow\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}=\cos x+\frac{d\varphi(y)}{dy}=\frac{1}{y}+\cos x\Rightarrow\frac{d\varphi(y)}{dy}=\frac{1}{y}\Rightarrow\varphi(y)=\int\frac{dy}{y}=\ln y+c_1$$

$$F(x,y)=\ln x+y\cos x+\ln y+c_1$$

$$F(x,y)=\ln(xy)+y\cos x+x+c_1$$

Respuesta $\ln(xy)+y\cos x+x=c$

Problema 6

$$\left(\frac{x^2 - y^2 + x^2 y}{x^2 y}\right)dx + \left(-\frac{x^2 - y^2}{y^2 x}\right)dy = 0$$

Prueba de exactitud

$$M(x,y) = \frac{x^2 - y^2 + x^2 y}{x^2 y} = \frac{1}{y} - \frac{y}{x^2} + 1 \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2}$$

$$N(x,y) = -\frac{x^2 - y^2}{y^2 x} = -\frac{x}{y^2} + \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2}$$

Resolviendo con el método IDI

$$F(x,y) = \int\left(\frac{x^2 - y^2 + x^2 y}{x^2 y}\right)dx$$

$$F(x,y) = \int \frac{1}{y}\,dx - \int \frac{y}{x^2}\,dx + \int dx + \varphi(y)$$

$$F(x,y) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + x + \varphi(y)$$ 2

Derivando e igualando

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} + \frac{1}{x} + \frac{d\varphi(y)}{dy} = -\frac{x}{y^2} + \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{d\varphi(y)}{dy} = 0$$

$$\Rightarrow \varphi(y) = \int 0\,dy = c_1$$

$$F(x,y) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + x + c_1$$

Respuesta. $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + x = C$

Problema 7

$$\left[y^3 + y + y\tan^2(xy)\right]dx + \left[3xy^2 + x + x\tan^2(xy)\right]dy = 0$$

Prueba de exactitud

$$M(x,y) = y^3 + y + y\tan^2(xy),$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3y^2 + 1 + 2xy\tan(xy)\sec^2(xy) + \tan^2(xy)$$

$$N(x,y) = 3xy^2 + x + x\tan^2(xy)$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 3y^2 + 1 + 2xy\tan(xy)\sec^2(xy) + \tan^2(xy)$$

Integrando con respecto a x

$$F(x,y)=\int[y^3+y+y\tan^2(xy)]\,dx+\varphi(y)$$

$$F(x,y)=\int y^3dx+\int y\,dx+\int y\ \tan^2(xy)\,dx+\varphi(y)$$

$$F(x,y)=y^3\int dx+y\int dx+y\int[\sec^2(xy)-1]\,dx+\varphi(y)$$

$$F(x,y)=y^3\int dx+y\int dx+y\int\sec^2(xy)dx-y\int dx+\varphi(y)$$

$$F(x,y)=y^3\int dx+y\int\sec^2(xy)dx+\varphi(y)$$

$$F(x,y)=y^3x+\frac{y}{y}\int\sec^2(xy)\,y\,dx+\varphi(y)$$

$$F(x,y)=y^3x+\tan(xy)+\varphi(y)$$

Derivando con respecto a y e igualando a N

$$\frac{\partial F}{\partial y}=3y^2x+x\sec^2(xy)+\frac{d\varphi(y)}{dy}=3y^2x+x+x\tan^2(xy)$$

$$\Rightarrow\frac{d\varphi(y)}{dy}=-x\sec^2(xy)+x+x\tan^2(xy)$$

$$\frac{d\varphi(y)}{dy}=x[\tan^2(xy)-\sec^2(xy)]+x=x[\tan^2(xy)-\tan^2(xy)-1]+x=x[-1]+x=0$$

$$\varphi(y)=c_1$$

$$\Rightarrow F(x,y)=y^3x+\tan(xy)+c_1$$

<u>*Respuesta*</u> $y^3x+\tan(xy)=c$

Ecuaciones no exactas

Ddefinición: Una ecuación diferencial de la forma $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ en la cual se encuentra que $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ se dice que no es exacta, existiendo la posibilidad en algunas ocasiones que se tenga un factor de integración $\mu(x)$ ó $\mu(y)$ que al multiplicar por la ecuación diferencial permita reducirla a exacta.

Desarrollo

Dada la ecuación diferencial $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ en donde $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$.

consideremos el factor de integración $\mu(x)$ entonces al multiplicar, para encontrar la expresión que debe tener $\mu(x)$, se tiene:

$$\mu(x)M(x,y)dx + \mu(x)N(x,y)dy = 0$$

Una ecuación diferencial exacta. Donde $\frac{\partial \mu M}{\partial y} = \frac{\partial \mu N}{\partial x}$ haciendo las derivadas de los productos y resolviendo la ecuación diferencial resultante, para encontrar el factor de integración.

$$\mu \frac{\partial M}{\partial y} + M\frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu\frac{\partial N}{\partial x} + N\frac{\partial \mu}{\partial x}$$

Simplificándose, debido a que $\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{d\mu}{dx}$ así que se obtiene:

$$\mu\frac{\partial M}{\partial y} + M\,.\,0 = \mu\frac{\partial N}{\partial x} + N\frac{d\mu}{dx}$$

$$\Rightarrow N\frac{d\mu}{dx} = \mu\frac{\partial M}{\partial y} - \mu\frac{\partial N}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dx} = \frac{1}{N}\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{d\mu}{\mu} = \frac{1}{N}\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right]dx$$

Integrando $\int\frac{d\mu}{\mu} = \int\frac{1}{N}\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right]dx \Rightarrow \ln\mu = \int\frac{1}{N}\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right]dx \therefore \mu(x) = e^{\int\frac{1}{N}\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right]dx}$

De una manera semejante se puede obtener el factor de integración $\mu(y)$, para el cual ahora se tendrá una simplificación debida a que $\frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{d\mu}{dy}$, $\frac{\partial \mu}{\partial x} = 0$ obteniéndose que:

$$\mu(y) = e^{\int\frac{1}{M}\left[\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right]dy}$$

es decir:

$\mu(x) = e^{\int f(x)dx}$ donde $f(x) = \dfrac{1}{N}\left[\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}\right]$ deberá ser una función exclusiva de x.

$\mu(y) = e^{\int f(y)dy}$ donde $f(y) = \dfrac{1}{M}\left[\dfrac{\partial N}{\partial x} - \dfrac{\partial M}{\partial y}\right]$ deberá ser una función exclusiva de y.

solución de la ecuación

Después de reducirla a exacta, la ecuación se resuelve con alguno de los métodos vistos anteriormente, método IDI ó directo ó usando la solución general.

PROBLEMAS

Problema 1.-

$\left[3x^2+y^2\right]dx+\left[-2xy\right]dy=0$

Prueba de exactitud.

$$M(x,y)=3x^2+y^2 \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}=2y$$

$$N(x,y)=-2xy \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x}=-2y$$

Como no es exacta se busca el factor de integración

$$\mu(x)=e^{\int\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}}=e^{\int\frac{2y-(-2y)}{-2xy}}$$

$$\mu(x)=e^{\int\left(\frac{4y}{-2xy}\right)dx}=e^{\int\left(\frac{-2}{x}\right)dx}=e^{-2\int\frac{dx}{x}}=e^{-2\ln x}=e^{\ln x^{-2}}=x^{-2}=\frac{1}{x^2}$$

Multiplicando por el factor de integración y resolviendo como exacta por el método IDI, notará que se escribe la constante de integración como $c_{(y)}$ que es igual a $\varphi(y)$, entonces:

$$\frac{1}{x^2}\left[3x^2+y^2\right]dx+\frac{1}{x^2}\left[-2xy\right]dy=0 \Rightarrow \left[3+\frac{y^2}{x^2}\right]dx+\left[\frac{-2y}{x}\right]dy=0$$

$$M(x,y)=3+\frac{y^2}{x^2} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}=\frac{2y}{x^2}$$

$$N(x,y)=-\frac{2y}{x} \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x}=\frac{2y}{x^2}$$

Resolviendo como exacta

$$F(x,y)=\int\left(3+\frac{y^2}{x^2}\right)dx+c_{(y)}$$

$$F(x,y)=3\int dx+y^2\int\frac{1}{x^2}dx+c_{(y)}$$

$$F(x,y)=3x+y^2\int x^{-2}dx+c_{(y)}$$

$$F(x,y)=3x-\frac{y^2}{x}+c_{(y)}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=-\frac{2y}{x}+\frac{dc_{(y)}}{dy}=-\frac{2y}{x} \Rightarrow \frac{dc_{(y)}}{dy}=0 \Rightarrow c_{(y)}=0+c$$

$$F(x,y)=3x-\frac{y^2}{x}$$

<u>*Respuesta.*</u> $3x-\frac{y^2}{x}=c$

Problema 2.

$$\left[3e^{y}+\frac{2y^{3}}{x}\right]dx+\left[3y^{2}+xe^{y}\right]dy=0$$

Prueba de exactitud.

$$M(x,y)=3e^{y}+\frac{2y^{3}}{x}\Rightarrow\frac{\partial M}{\partial y}=3e^{y}+\frac{6y^{2}}{x}$$

$$N(x,y)=3y^{2}+xe^{y}\Rightarrow\frac{\partial N}{\partial x}=e^{y}$$

Como no es exacta se busca el factor de integración

$$f(x)=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=\frac{\frac{6y^{2}}{x}+2e^{y}}{3y^{2}+xe^{y}}=\frac{\frac{2}{x}(3y^{2}+xe^{y})}{3y^{2}+xe^{y}}=\frac{2}{x}$$

$$\Rightarrow\mu(x)=e^{\int f(x)dx}=e^{\int\frac{2}{x}dx0}=e^{2\ln x}=e^{\ln x^{2}}=x^{2}$$

Multiplicando por el factor de integración y resolviendo como exacta por el mètodo IDI, notará que se escribe la constante de integración como $c_{(y)}$ que es igual a $\varphi(y)$, entonces:

$$x^{2}\left[3e^{y}+\frac{2y^{3}}{x}\right]dx+x^{2}\left[3y^{2}+xe^{y}\right]dy=0\Rightarrow\left[x^{2}3e^{y}+\frac{2x^{2}y^{3}}{x}\right]dx+\left[3x^{2}y^{2}+x^{3}e^{y}\right]dy=0$$

$$M(x,y)=3x^{2}e^{y}+\frac{2x^{2}y^{3}}{x}=3x^{2}e^{y}+2xy^{3}\Rightarrow\frac{\partial M}{\partial y}=3x^{2}e^{y}+6xy^{2}$$

$$N(x,y)=3x^{2}y^{2}+x^{3}e^{y}\Rightarrow\frac{\partial N}{\partial x}=6xy^{2}+3x^{2}e^{y}$$

Resolviendo como exacta

$$F(x,y)=\int\left(3e^{y}x^{2}+2xy^{3}\right)dx+c_{(y)}$$

$$F(x,y)=3e^{y}\int x^{2}dx+2y^{3}\int xdx+c_{(y)}$$

$$F(x,y)=e^{y}x^{3}+y^{3}x^{2}+c_{(y)}$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}=e^{y}x^{3}+3y^{2}x^{2}+\frac{dc_{(y)}}{dy}=3x^{2}y^{2}+x^{3}e^{y}\Rightarrow\frac{dc_{(y)}}{dy}=0\Rightarrow c_{(y)}=0+c$$

$$F(x,y)=e^{y}x^{3}+y^{3}x^{2}$$

Respuesta. $e^{y}x^{3}+y^{3}x^{2}=c$

PROBLEMA 3

$$dy + (y\tan x - \cos^2 x)dx = 0$$

Prueba de exactitud

$$M = y\tan x - \cos^2 x \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \tan x$$

$$N = 1 \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = 0$$

Como no es exacta se busca el factor de integración

$$f(x) = \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)$$

$$f(x) = \frac{1}{1}(\tan x - 0) = \tan x$$

$$\mu(x) = e^{\int \tan x dx} = e^{\ln(\sec x)} = \sec x$$

Multiplicando por el factor de integración y resolviendo como exacta por el método IDI, notará que se escribe la constante de integración como $c(y)$ que es igual a $\varphi(y)$, entonces:

$$\sec x dy + \sec x(y\tan x - \cos^2 x)dx = 0 \Rightarrow \sec x dy + (y\sec x\tan x - \sec x\cos^2 x)dx = 0$$

$$M = y\sec x\tan x - \cos^2 x\sec x \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \sec x\tan x$$

$$N = \sec x \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = \sec x\tan x$$

Resolviendo como exacta

$$F(x,y) = \int M\,dx + C(y) = \int y\sec x\tan x\,dx - \int \cos^2 x\sec x\,dx + c(y)$$

$$F(x,y) = y\int \sec x\tan x\,dx - \int \cos^2 x\sec x\,dx + C(y)$$

$$F(x,y) = y\int \sec x\tan x\,dx - \int \cos x\,dx + C(y)$$

$$F(x,y) = y\sec x - \operatorname{sen} x + C(y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \sec x + \frac{dC(y)}{dy} = \sec x \Rightarrow \frac{dC(y)}{dy} = 0 \Rightarrow C(y) = 0 + c$$

$$F(x,y) = y\sec x - \operatorname{sen} x + c$$

Respuesta. $y\sec x - \operatorname{sen} x = c$

Problema 4

$$x\frac{dy}{dx}+2y=senx \Rightarrow xdy+(2y-senx)dx=0$$

Prueba de exactitud.

$$M=2y-senx \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}=2$$

$$N=x \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x}=1$$

Como no es exacta se busca el factor de integración

$$f(x)=\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=\frac{1}{x}(2-1)=\frac{1}{x}$$

$$\mu(x)=e^{\int \frac{1}{x}dx}=e^{\ln x}=x$$

Multiplicando por el factor de integración y resolviendo como exacta por el método IDI, notará que se escribe la constante de integración como $c(y)$ que es igual a $\varphi(y)$, entonces:

$$xxdy+x(2y-senx)dx=0 \Rightarrow x^2dy+(2xy-xsenx)dx=0$$

$$M=2xy-xsenx \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}=2x$$

$$N=x^2 \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x}=2x$$

Resolviendo como exacta

$$F(x,y)=\int M\,dx+C(y)=\int 2xydx-\int x\,senx\,dx+C(y)$$

$$F(x,y)=2y\int x\,dx-\int x\,senx\,dx+C(y)$$

Integrando por partes

$u=x \Rightarrow du=dx, \quad dv=senxdx \Rightarrow v=-\cos x$

Se tiene $\int xsenxdx=-x\cos x+\int \cos xdx=-x\cos x+senx$

Entonces:

$$F(x,y)=yx^2+x\cos x-senx+C(y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=x^2+\frac{dC(y)}{dx}=x^2 \Rightarrow \frac{dC(y)}{dx}=0 \Rightarrow C(y)=0+c$$

$$F(x,y)=yx^2+x\cos x-senx+c$$

<u>*Respuesta.*</u> $yx^2+x\cos x-senx=c$

PROBLEMA 5

$$\left(\frac{y^3}{x}+3xy\right)dx+\left(3y^2+x^2\right)dy=0$$

Prueba de exactitud

$$M=\frac{y^3}{x}+3xy \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}=\frac{3y^2}{x}+3x$$

$$N=3y^2+x^2 \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x}=2x$$

Como no es exacta se busca el factor de integración

$$f(x)=\frac{1}{N}\left[\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right]=\frac{1}{3y^2+x^2}\left(\frac{3y^2}{x}+3x-2x\right)=\frac{1}{3y^2x+x}\left(\frac{3y^2}{x}+x\right)$$

$$f(x)=\frac{1}{3y^2+x^2}\left[\frac{3y^2+x^2}{x}\right]=\frac{1}{x}$$

$$\mu(x)=e^{\int f(x)dx}=e^{\int \frac{1}{x}dx}=e^{\ln x}=x$$

Multiplicando por el factor de integración y resolviendo como exacta por el mètodo IDI, notará que se escribe la constante de integración como $c(y)$ que es igual a $\varphi(y)$, entonces:

$$x\left(\frac{y^3}{x}+3xy\right)dx+x\left(3y^2+x^2\right)dy=0 \Rightarrow \left(y^3+3x^2y\right)dx+\left(3xy^2+x^3\right)dy=0$$

$$M=y^3+3x^2y \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}=3y^2+3x^2$$

$$N=3xy^2+x^3 \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x}=3y^2+3x^2$$

Resolviendo como exacta

$$F(x,y)=\int y^3\,dx+\int 3x^2y\,dx+C(y)$$

$$F(x,y)=y^3x+x^3y+C(y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=3xy^2+x^3+\frac{dC(y)}{dx}=3xy^2+x^3 \Rightarrow \frac{dC(y)}{dx}=0 \Rightarrow C(y)=0+c$$

$$F(x,y)=y^3x+x^3y+c$$

Respuesta. $y^3x+x^3y=c$

Matemáticas Superiores

ECUACIONES DIFERENCIALES REDUCIBLES A EXACTAS

Problema 6.

$$\left[2y^3e^{2x}+y^4\right]dx+\left[2y^2e^{2x}+3xy^3\right]dy=0$$

Prueba de exactitud.

$$M(x,y)=2y^3e^{2x}+y^4 \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}=6y^2e^{2x}+4y^3$$

$$N(x,y)=2y^2e^{2x}+3xy^3 \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x}=4y^2e^{2x}+3y^3$$

Como no es exacta se busca el factor de integración

$$f(y)=\frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{M}=\frac{4y^2e^{2x}+3y^3-6y^2e^{2x}-4y^3}{2y^3e^{2x}+y^4}=\frac{-2y^2e^{2x}-y^3}{2y^3e^{2x}+y^4}=\frac{-y^2(2e^{2x}+y)}{y^3(2e^{2x}+y)}=-\frac{1}{y}$$

$$\mu(y)=e^{\int f(y)dy}=e^{-\int\frac{1}{y}dy}=e^{-\ln y}=e^{\ln y^{-1}}=y^{-1}=\frac{1}{y}$$

Multiplicando por el factor de integración y resolviendo como exacta por el método directo, entonces:

$$\frac{1}{y}\left[2y^3e^{2x}+y^4\right]dx+\frac{1}{y}\left[2y^2e^{2x}+3xy^3\right]dy=0 \Rightarrow \left[2y^2e^{2x}+y^3\right]dx+\left[2ye^{2x}+3xy^2\right]dy=0$$

$$M(x,y)=2y^2e^{2x}+y^3 \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}=4ye^{2x}+3y^2$$

$$N(x,y)=2ye^{2x}+3xy^2 \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x}=4ye^{2x}+3y^2$$

$$f_x=\int Mdx+c_{(y)}=\int\left(2y^2e^{2x}+y^3\right)dx+c_{(y)}=2y^2\int e^{2x}dx+y^3\int dx+c_{(y)}=y^2e^{2x}+xy^3+c_{(y)}$$

$$f_y=\int Ndy+c_{(x)}=\int(2ye^{2x}+3xy^2)dy+c_{(x)}=2e^{2x}\int ydy+3x\int y^2dy+c_{(x)}=y^2e^{2x}+xy^3+c_{(x)}$$

$$\Rightarrow F(x,y)=f_x\cup f_y=(y^2e^{2x}+xy^3+c_{(y)})\cup(y^2e^{2x}+xy^3+c_{(x)})=y^2e^{2x}+xy^3$$

Respuesta $y^2e^{2x}+xy^3=c$

PROBLEMA 7.

$$\left[\frac{1+2xy}{y}\right]dx+\left[\frac{-2x-x^2y}{y^2}\right]dy=0$$

Prueba de exactitud.

$$M(x,y)=\frac{1+2xy}{y}=\frac{1}{y}+2x\Rightarrow\frac{\partial M}{\partial y}=-\frac{1}{y^2}$$

$$N(x,y)=\frac{-2x-x^2y}{y^2}=-\frac{2x}{y^2}-\frac{x^2}{y}\Rightarrow\frac{\partial N}{\partial x}=-\frac{2}{y^2}-\frac{2x}{y}$$

Como no es exacta se busca el factor de integración

$$f(y)=\frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{M}=\frac{-\frac{2}{y^2}-\frac{2x}{y}+\frac{1}{y^2}}{\frac{1+2xy}{y}}=\frac{y}{1+2xy}\left(-\frac{1}{y^2}-\frac{2x}{y}\right)=\frac{y}{1+2xy}\left(\frac{-1-2xy}{y^2}\right)=-\frac{1}{y}$$

$$\mu(y)=e^{\int f(y)dy}=e^{-\int\frac{dy}{y}}=e^{-\ln y}=e^{\ln y^{-1}}=y^{-1}=\frac{1}{y}$$

Multiplicando por el factor de integración y resolviendo como exacta por el método directo, entonces:

$$\frac{1}{y}\left[\frac{1+2xy}{y}\right]dx+\frac{1}{y}\left[\frac{-2x-x^2y}{y^2}\right]dy=0\Rightarrow\left[\frac{1+2xy}{y^2}\right]dx+\left[\frac{-2x-x^2y}{y^3}\right]dy=0$$

$$M(x,y)=\frac{1+2xy}{y^2}=\frac{1}{y^2}+\frac{2x}{y}\Rightarrow\frac{\partial M}{\partial y}=-\frac{2}{y^3}-\frac{2x}{y^2}$$

$$N(x,y)=\frac{-2x-x^2y}{y^3}=-\frac{2x}{y^3}-\frac{x^2}{y^2}\Rightarrow\frac{\partial N}{\partial x}=-\frac{2}{y^3}-\frac{2x}{y^2}$$

$$f_x=\int Mdx+c(y)=\int\left[\frac{1+2xy}{y^2}\right]dx+c(y)=\int\frac{1}{y^2}dx+\int\frac{2x}{y}dx+c(y)=\frac{1}{y^2}x+\frac{x^2}{y}+c(y)$$

$$f_y=\int Ndy+c(x)=\int\left[\frac{-2x-x^2y}{y^3}\right]dy+c(x)=-\int\frac{2x}{y^3}dy-x^2\int\frac{1}{y^2}dy+c(x)=\frac{1}{y^2}x+\frac{x^2}{y}+c(x)$$

$$F(x,y)=f_x\cup f_y=\left(\frac{1}{y^2}x+\frac{x^2}{y}+c(y)\right)\cup\left(\frac{1}{y^2}x+\frac{x^2}{y}+c(x)\right)=\frac{1}{y^2}x+\frac{x^2}{y}$$

Respuesta $\frac{1}{y^2}x+\frac{x^2}{y}=c$

Matemáticas Superiores
ECUACIONES DIFERENCIALES REDUCIBLES A EXACTAS

Problema 8
$$\left[4x^2y^3+3xe^{2y}\right]dx+\left[3x^3y^2+2x^2e^{2y}\right]dy=0$$

Prueba de exactitud.

$$M(x,y)=4x^2y^3+3xe^{2y}\Rightarrow\frac{\partial M}{\partial y}=12x^2y^2+6xe^{2y}$$
$$N(x,y)=3x^3y^2+2x^2e^{2y}\Rightarrow\frac{\partial N}{\partial x}=9x^2y^2+4xe^{2y}$$

Como no es exacta se busca el factor de integración

$$f(x)=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=\frac{12x^2y^2+6xe^{2y}-9x^2y^2-4xe^{2y}}{3x^3y^2+2x^2e^{2y}}=\frac{3x^2y^2+2xe^{2y}}{3x^3y^2+2x^2e^{2y}}=\frac{3x^2y^2+2xe^{2y}}{x(3x^2y^2+2xe^{2y})}=\frac{1}{x}$$
$$\mu(x)=e^{\int f(x)dx}=e^{\ln x}=x$$

Multiplicando por el factor de integración y resolviendo como exacta por el método IDI, entonces:

$$x\left[4x^2y^3+3xe^{2y}\right]dx+x\left[3x^3y^2+2x^2e^{2y}\right]dy=0\Rightarrow\left[4x^3y^3+3x^2e^{2y}\right]dx+\left[3x^4y^2+2x^3e^{2y}\right]dy=0$$
$$M(x,y)=4x^3y^3+3x^2e^{2y}\Rightarrow\frac{\partial M}{\partial y}=12x^3y^2+6x^2e^{2y}$$
$$N(x,y)=3x^4y^2+2x^3e^{2y}\Rightarrow\frac{\partial N}{\partial x}=12x^3y^2+6x^2e^{2y}$$

$$f_x=\int Mdx+c(y)=\int\left(4x^3y^3+3x^2e^{2y}\right)dx+c_{(y)}=\int 4x^3y^3dx+\int 3x^2e^{2y}dx+c_{(y)}=x^4y^3+x^3e^{2y}+c_{(y)}$$
$$f_y=\int Ndy+c(x)=\int(3x^4y^2+2x^3e^{2y})dy+c_{(x)}=\int 3x^4y^2dy+\int 2x^3e^{2y}dy+c_{(x)}=x^4y^3+x^3e^{2y}+c_{(x)}$$
$$F(x,y)=\left(x^4y^3+x^3e^{2y}+c_{(y)}\right)\cup\left(x^4y^3+x^3e^{2y}+c_{(x)}\right)=x^4y^3+x^3e^{2y}$$

Respuesta $x^4y^3+x^3e^{2y}=c$

Ecuación Diferencial Ordinaria Lineal

Definición: Una ecuación diferencial ordinaria lineal de primer orden tiene la forma:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

Ó bien intercambiando las variables, se verá de la siguiente manera $\frac{dx}{dy} + p(y)x = q(y)$.

Solución De Una Ecuación Lineal

La ecuación diferencial ordinaria lineal $\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$ no es exacta puesto que al escribirla en forma diferencial $(p(x)y - q(x))dx + dy = 0$ no cumple la condición de exactitud, $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$, porque.

$$M = p(x)y - q(x) \Rightarrow \frac{\partial(p(x)y - q(x))}{\partial y} = p(x)$$

$$N = 1 \Rightarrow \frac{\partial(1)}{\partial x} = 0$$

En caso de que $p(x) = 0$ la ecuación diferencial se convierte en $\frac{dy}{dx} = q(x)$ que se resuelve directamente separando las variables, entonces al considerar $p(x) \neq 0$ se reduce a exactas usando el factor de integración $\mu(x)$, donde.

$$\mu(x) = e^{\int \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)dx} = e^{\int \frac{1}{1}(p(x) - 0)dx} = e^{\int p(x)dx}$$

Multiplicando por la ecuación original. se tiene:

$$e^{\int p(x)dx}\left\{\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)\right\}$$

$$e^{\int p(x)dx}\frac{dy}{dx} + p(x)e^{\int p(x)dx}y = q(x)e^{\int p(x)dx}$$

Debiéndose notar que en el lado izquierdo de la ecuación se tiene la derivada de un producto, así que:

$$\frac{d}{dx}\left[e^{\int p(x)dx}y\right] = q(x)e^{\int p(x)dx} \Rightarrow \frac{d}{dx}\left[\mu(x)y\right] = \mu(x)q(x)$$

Qué al separar las variables se llega a:

$$d[\mu(x)y] = \mu(x)q(x)dx \Rightarrow \int d[\mu(x)y] = \int \mu(x)q(x)dx \Rightarrow \mu(x)y = \int \mu(x)q(x)dx$$

Encontrando la solución general de las ecuaciones lineales

$$y = \frac{1}{\mu(x)}\left\{\int \mu(x)q(x)dx + c\right\} \text{ donde } \mu(x) = e^{\int p(x)dx}$$

En los ejercicios resueltos, se usa la fórmula general o bien se establece la diferencial del producto para resolver por separación de variables

PROBLEMAS

Problema 1

$$(x)\frac{dy}{dx}+\frac{2x+1}{x+1}(y)=x-1$$

Dividiendo por x

$$\frac{dy}{dx}+\frac{2x+1}{x(x+1)}(y)=\frac{x-1}{x}$$

Donde

$$p(x)=\frac{2x+1}{x(x+1)},\quad q(x)=\frac{x-1}{x}$$

Integrando para encontrar el factor de integración. $u=x^2+x\Rightarrow du=(2x+1)dx$

$$\int P(x)dx=\int\frac{2x+1}{x(x+1)}dx=\int\frac{2x+1}{x^2+x}dx=\ln x^2+x$$

Se tiene $\mu(x)=e^{\int p(x)dx}=e^{\ln(x^2+x)}=x^2+x$. entonces.

$$y=\frac{1}{x^2+x}\left\{\int(x^2+x)\left(\frac{x-1}{x}\right)dx+c\right\}$$

$$y=\frac{1}{x^2+x}\left\{\int\frac{x(x+1)(x-1)}{x}dx+c\right\}$$

$$y=\frac{1}{x^2+x}\left\{\int(x^2-1)dx+c\right\}$$

$$y=\frac{1}{x^2+x}\left[\frac{x^3}{3}-x+c\right]=\frac{1}{x^2+x}\left(c+\frac{x^3}{3}-x\right)$$

Respuesta $y=\dfrac{1}{x^2+x}\left[\dfrac{x^3}{3}-x+c\right]$

Problema 2.-

$$\frac{dy}{dx}+2xy=4x$$

Se tiene $q(x)=4x$ $\quad p(x)=2x\Rightarrow\mu(x)=e^{\int p(x)dx}=e^{\int 2x\,dx}=e^{x^2}$

Entonces

$$y=\frac{1}{e^{x^2}}\left\{\int e^{x^2}(4x)\,dx+c\right\}=e^{-x^2}\left[2\int e^{x^2}(2x)\,dx+c\right]=e^{-x^2}2e^{x^2}+e^{-x^2}(c)=2+e^{-x^2}(c)$$

Respuesta $y=2+e^{-x^2}(c)$

Problema 3.-

$$\frac{dy}{dx} - y\cot x = 2x\,senx$$

Donde $p(x) = -\cot x \quad q(x) = 2x\,senx$

Entonces el factor de integración es

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{-\int \cot x dx} = e^{-\ln(senx)} = (senx)^{-1} = \frac{1}{senx}$$

Sustituyendo

$$y = senx\left[\int \frac{2x\,senx\,dx}{senx} + c\right] = senx\left[2\int x\,dx + c\right] = senx\left[x^2 + c\right]$$

Respuesta $y = senx\left[x^2 + c\right]$

Problema 4.-

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = 2x\,e^{-x^2}$$

Donde $p(x) = 2x \quad q(x) = 2x\,e^{-x^2}$

Entonces el factor de integración es $\mu(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{\int 2xdx} = e^{x^2}$

Sustituyendo

$$y = e^{-x^2}\left[\int e^{x^2}(2x\,e^{-x^2})\,dx + c\right] = e^{-x^2}\left[\int 2x\,dx + c\right] = e^{-x^2}\left[x^2 + c\right]$$

Respuesta $y = e^{-x^2}\left[x^2 + c\right]$

Problema 5.-

$$\frac{dy}{dx} = x - 4y$$

Arreglando la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} + 4y = x$

Donde $p(x) = 4 \quad q(x) = x$

Entonces el factor de integración es $\mu(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{\int 4dx} = e^{4x}$

Multiplicando por el factor de integración

$$e^{4x}dy + 4e^{4x}ydx = xe^{4x}\,dx$$

$$d\left[e^{4x}y\right] = xe^{4x}dx \Rightarrow \int d\left[e^{4x}y\right] = \int xe^{4x}dx$$

Cálculo integral (integrando por partes) $u = x \Rightarrow du = dx \quad dv = e^{4x}dx \Rightarrow v = \frac{1}{4}e^{4x}$

Entonces

$$\int xe^{4x}dx = x\left(\frac{1}{4}e^{4x}\right) - \int \frac{1}{4}e^{4x}dx = \frac{1}{4}xe^{4x} - \frac{1}{4}\int e^{4x}4dx = \frac{1}{4}xe^{4x} - \frac{1}{16}e^{4x} + c$$

$$e^{4x}y = \frac{1}{4}xe^{4x} - \frac{1}{16}e^{4x} + c$$

$$y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{16} + \frac{c}{e^{4x}}$$

<u>*Respuesta*</u> $y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{16} + \frac{c}{e^{4x}}$

<u>*Problema 6.-*</u>

$$\frac{dy}{dx} + \left(-\frac{2}{x}\right)y = \frac{3}{x^2}$$

Donde $P(x) = -\frac{2}{x} \quad q(x) = \frac{3}{x^2}$

Entonces el factor de integración es

$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx} = e^{-\int \frac{2}{x}dx} = e^{-2\int \frac{dx}{x}} = e^{-2\ln x} = e^{\ln x^{-2}} = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$$

Multiplicando la ecuación diferencial por el factor de integración: $x^{-2}\frac{dy}{dx} - 2x^{-3}y = 3x^{-4}$

Separando variables: $x^{-2}dy - 2x^{-3}ydx = 3x^{-4}dx$

$$d\left[x^{-2}y\right] = 3x^{-4}dx$$

$$\int d\left[x^{-2}y\right] = \int 3x^{-4}dx$$

$$x^{-2}y = -x^{-3} + c$$

Multiplicando por x^2: $y = -\frac{1}{x} + cx^2 = \frac{-1 + cx^3}{x}$

<u>*Respuesta*</u> $y = \frac{-1 + cx^3}{x}$

<u>*Problema 7.-*</u>

$$x\frac{dy}{dx} + (x+2)y = e^x$$

Dividiendo por x: $\frac{dy}{dx} + \left(\frac{x+2}{x}\right)y = \frac{e^x}{x}$

Donde $P(x) = \frac{x+2}{x} = 1 + \frac{2}{x} \quad q(x) = \frac{e^x}{x}$

Entonces el factor de integración es

$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx} = e^{\int\left(1+\frac{2}{x}\right)dx} = e^{\int dx + \int \frac{2}{x}dx} = e^x e^{\ln x^2} = e^x x^2 = x^2 e^x$$

Multiplicando la Ecuación Diferencial por x^2e^x se

tiene $\boxed{x^2e^x\frac{dy}{dx} + x^2e^x\left(1+\frac{2}{x}\right)y = x^2e^x\frac{e^x}{x}}$

Separando variables:

$$x^2 e^x dy + x^2 e^x y dx + x e^x 2y dx = x e^{2x} dx$$
$$d\left[x^2 e^x y\right] = x^2 e^x dy + x^2 e^x y dx + e^x y 2x dx$$
$$d\left[x^2 e^x y\right] = x e^{2x} dx \Rightarrow \int d\left[x^2 e^x y\right] = \int x e^{2x} dx$$

Integrando por partes. $u = x \Rightarrow du = dx \quad dv = e^{2x} dx \Rightarrow v = \frac{1}{2} e^{2x}$

$$\int x e^{2x} dx = x \frac{1}{2} e^{2x} - \int \frac{1}{2} e^{2x} = \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + c$$

Sustituyendo e integrando directamente el lado izquierdo:

$$x^2 e^x y = \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + c$$
$$y = \frac{\frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + c}{x^2 e^x}$$

Respuesta $y = \dfrac{\frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + c}{x^2 e^x}$

Problema 8.

$$\frac{dy}{dx} + \frac{\cos x}{1 + senx} y = (1 - senx)$$

Donde $p(x) = \dfrac{\cos x}{1 + senx}, q(x) = 1 - senx$

Entonces el factor de integración es $z = 1 + senx \Rightarrow dz = \cos x dx$

$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx} = e^{\int \frac{\cos x}{1+senx} dx} = e^{\ln 1 + senx} = 1 + senx$$

Sustituyendo

$$y = \frac{1}{1 + senx}\left\{\int(1 + senx)(1 - senx)dx + c\right\}$$

$$y = \frac{1}{1 + senx}\left\{\int(1 - sen^2 x) + c\right\}$$

$$y = \frac{1}{1 + senx}\left\{\int cos^2 xdx + c\right\}$$

$$y = \frac{1}{1 + senx}\left\{\int(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}cos\,2x)dx + c\right\}$$

$$y = \frac{1}{1 + senx}\left\{\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}sen2x + c\right\}$$

$$y = \frac{1}{1 + senx}\left\{\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}2senx\cos x + c\right\}$$

Respuesta. $y = \dfrac{1}{1 + senx}\left\{\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}senx\cos x + c\right\}$

Problema 9.-

$$x\frac{dy}{dx} + y = \sqrt{x^2 + 1}$$

Poniendo la ecuación en forma diferencial $xdy + ydx = \sqrt{x^2 + 1}dx$

Por definición de la derivada del producto $d[xy] = \sqrt{x^2 + 1}dx$

Integrando. $\int d[xy] = \int\sqrt{x^2 + 1}dx$

La integral del lado izquierdo es inmediata, la del lado derecho se resuelve mediante un cambio de variable trigonométrica , que lleva a una integración por partes ó bien usando el formulario:

$$xy = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2 + 1} + ln\left|\sqrt{x^2 + 1} + x\right|\right] + c$$

$$y = \frac{\frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2 + 1} + ln\left|\sqrt{x^2 + 1} + x\right|\right] + c}{x}$$

Respuesta $y = \dfrac{\frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2 + 1} + ln\left|\sqrt{x^2 + 1} + x\right|\right] + c}{x}$

Ecuación de Bernoulli

Definición. La ecuación diferencial ordinaria de primer orden no lineal , denominada de Bernoulli tiene la forma

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)y^n$$

Donde n es grado de la ecuación de Bernoulli, $n \in \Re - \{0,1\}$
debido que sería una ecuación lineal o por separación de variables, respectivamente, una forma alternativa de la ecuación de Bernoulli se presenta cuando se intercambian las variables, es decir, se tendrá la forma $\frac{dx}{dy} + p(y)x = q(y)x^n$ ó cualquier otra combinación de variables.

Solución de la Ecuación de Bernoulli

El cambio de variable $z = y^{1-n}$ permite transformar la ecuación de Bernoulli, que es una *ecuación no lineal, en otra que si es lineal.*

Desarrollo

Sea la ecuación no lineal $\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)y^n$ ecuación 1

Haciendo $z = y^{1-n}$ ecuación 2, se tiene $\frac{dz}{dx} = (1-n)y^{1-n-1} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$ ecuación 3

Al multiplicar la ecuación 1 por y^{-n} se tiene: $y^{-n}\left\{\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)y^n\right\}$ dando como resultado: $y^{-n}\frac{dy}{dx} + p(x)y^{1-n} = q(x)$, después se sustituyen las ecuaciones 2 y 3, así:

$$\frac{1}{1-n}\frac{dz}{dx} + p(x)z = q(x)$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} + (1-n)p(x)z = (1-n)q(x)$$

Que ya es lineal, con solución: $z = \frac{1}{\mu(x)}\left\{\int \mu(x)(1-n)q(x)dx + c\right\}$

Donde el factor de integración es $\mu(x) = e^{\int (1-n)p(x)dx}$.

Los problemas ilustrados a continuación, se resuelven de alguna de las dos maneras siguientes, usando el factor de integración y sustituyendo en la fórmula general o bien haciendo paso a paso la transformación a la ecuación ordinaria lineal, usando las ecuaciones 2 y 3.

PROBLEMAS

PROBLEMA 1.-

$$\frac{dy}{dx}+\frac{y}{2x}=\frac{x}{y^3}$$

Arreglando $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{1}{2x}y=xy^{-3}$ Ecuación 1. Ecuación de Bernoulli de grado $n=-3$

Cambio de variable $z=y^{1-n}=y^4$ Ecuación 2

Derivando $\dfrac{dz}{dx}=4y^3\dfrac{dy}{dx} \quad\Rightarrow\quad \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dz}{dx}}{4y^3}$. Ecuación 3

Sustituyendo 2 y3 en 1

$$\frac{\frac{dz}{dx}}{4y^3}+\frac{1}{2x}y=xy^{-3}$$

$$\frac{dz}{dx}+\frac{1}{2x}4y^3y=4y^3\ xy^{-3}$$

$$\frac{dz}{dx}+\frac{2}{x}y^4=4x \quad\Rightarrow\quad z'+\frac{2}{x}z=4x$$

$$p(x)=\frac{2}{x},\quad q(x)=4x$$

Solución como lineal

$$\mu(x)=e^{\int p(x)dx}=e^{\int\frac{2}{x}dx}=e^{2\ln x}=e^{\ln x^2}=^{\ln x^2}=x^2$$

$$z=\frac{1}{\mu(x)}\left[\int\mu(x)\,q(x)\,dx+c\right]$$

$$z=\frac{1}{x^2}\left[\int x^2\ 4x\ dx+c\right]$$

$$z=\frac{1}{x^2}\left[4\int x^3\ dx+c\right]=\frac{1}{x^2}\left[\frac{4x^4}{4}+c\right]$$

$$z=x^2+\frac{c}{x^2}$$

$$y^4=x^2+\frac{c}{x^2}$$

RESPUESTA. $y^4=x^2+\dfrac{c}{x^2}$

Matemáticas Superiores
ECUACIONES DIFERENCIALES DE BERNOULLI

Problema 2.-

$$\frac{dy}{dx}+\frac{y}{2x}=xy^3$$

Se tiene una ecuación de Bernoulli de grado $n=3$ donde $p(x)=\frac{1}{2x}$ $q(x)=x$

Entonces el factor de integración es

$$\mu(x)=e^{\int(1-n)p(x)dx}=e^{\int(1-3)\frac{1}{2x}dx}=e^{\int(-\frac{1}{x})dx}=e^{-\int\frac{dx}{x}}=e^{-\ln x}=x^{-1}$$

Sustituyendo

$$z=\frac{1}{\mu(x)}\left[\int(1-n)\mu(x)\,q(x)\,dx\right]$$

$$z=\frac{1}{x^{-1}}\left[\int(1-3)x^{-1}\;x\,dx+c\right]$$

$$z=x\left[-2\int dx+c\right]=x\left[-2x+c\right]$$

$$z=-2x^2+cx \quad \therefore \quad y^{-2}=Cx-2x^2$$

<u>***Respuesta.***</u> $y^{-2}=Cx-2x^2$

PROBLEMA 3.-

$$\frac{dx}{dt}+\frac{t+1}{2t}x=\frac{t+1}{xt}$$

Arreglando $\frac{dx}{dt}+\frac{t+1}{2t}x=\frac{t+1}{t}x^{-1}$ es una ecuación de Bernoulli de grado $n=-1$, donde.

$$p(t)=\frac{t+1}{2t} \quad q(t)=\frac{t+1}{t}$$

Entonces el factor de integración es $\mu(t)=e^{\int(1-n)p(t)dt}=e^{\int(1+1)\frac{t+1}{2t}dt}=e^{\int dt+\int\frac{dt}{t}}=e^{t+\ln t}=te^t$

Sustituyendo

$$z=\frac{1}{\mu(x)}\left[\int(1-n)\mu(t)\,q(t)\,dt\right]$$

$$z=\frac{1}{te^t}\left[\int(1+1)te^t\,(\frac{t+1}{t})\,dt\right]$$

$$z=\frac{1}{te^t}\left[2\int e^t(t+1)dt+c\right]$$

Resolviendo por partes $u=t \quad \Rightarrow \quad du=dt\,,dv=e^t dt \quad \Rightarrow \quad v=e^t$

$$z=\frac{2}{te^t}\left[\int te^t dt+\int e^t dt+c\right]\Rightarrow z=\frac{2}{te^t}\left[te^t-\int e^t dt+\int e^t dt+c\right]$$

$$z=\frac{2}{te^t}\left[te^t+c\right]=2+\frac{c}{te^t}\Rightarrow x^2=2+\frac{C}{te^t}=2+\frac{C}{e^{t+\ln t}}$$

<u>***Respuesta.***</u> $x^2=2+\frac{C}{te^t}=2+\frac{C}{e^{t+\ln t}}$

Matemáticas Superiores
ECUACIONES DIFERENCIALES DE BERNOULLI

Problema 4.-

$$x\frac{dy}{dx}+y=(xy)^{3/2} \quad \Rightarrow \quad y'+\frac{1}{x}y=\frac{(xy)^{3/2}}{x}$$

$$n=3/2$$

$$z=y^{1-n}=y^{-1/2}$$

$$z'=-(1/2)(y^{-3/2})y' \quad \Rightarrow \quad y'=-2z'y^{3/2}$$

Transformando a una lineal

$$-2z'y^{3/2}+\frac{1}{x}y=x^{1/2}y^{3/2}$$

$$z'-\frac{1}{2x}y^{-1/2}=-\frac{x^{1/2}}{2}$$

$$z'-\frac{1}{2x}(z)=-\frac{x^{1/2}}{2}$$

$$p(x)=-\frac{1}{2x} \quad \therefore \quad q(x)=-\frac{x^{1/2}}{2}$$

Solución de la lineal, resolviendo la integral, calculando el factor de integración y manipulando la constante .

$$\int p(x)dx=\int -\frac{1}{2x}dx=-\frac{1}{2}\ln x=\ln x^{-1/2}$$

$$\Rightarrow \mu(x)=e^{\ln x^{-1/2}}=x^{-1/2}=\frac{1}{x^{1/2}}$$

$$z=\frac{1}{\mu(x)}\left[\int \mu(x)\,q(x)\,dx\right]$$

$$z=\frac{1}{x^{-1/2}}\left[\int x^{-1/2}\left(-\frac{x^{1/2}}{2}\right)dx\right]$$

$$z=x^{1/2}\left[-\frac{1}{2}\int dx\right]=x^{1/2}\left[-\frac{1}{2}(x+c)\right]$$

$$z=-\frac{x^{3/2}}{2}-\frac{cx^{1/2}}{2}$$

$$si \quad C=-c/2 \quad \Rightarrow \quad y^{-1/2}=-\frac{x^{3/2}}{2}+Cx^{1/2}$$

Respuesta. $y^{1/2}=\dfrac{1}{-\dfrac{x^{3/2}}{2}+Cx^{1/2}}$

<u>Problema 5</u>.-

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \frac{1}{xy^2} \quad \Rightarrow \quad y' + \frac{1}{x} y = \frac{1}{x} y^{-2}$$

$n = -2$

$z = y^{1-n} = y^3$

$z' = 3y^2 y' \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{z'}{3y^2}$

Transformando a una lineal

$$\frac{z'}{3y^2} + \frac{1}{x} y = \frac{1}{x} y^{-2}$$

$$z' + \frac{3}{x} y^3 = \frac{3}{x}$$

$$z' + \frac{3}{x} z = \frac{3}{x}$$

$$p(x) = \frac{3}{x} \quad , q(x) = \frac{3}{x}$$

Solución de la lineal, resolviendo la integral y calculando el factor de integración y manipulando la constante .

$$\int p(x)dx = \int \frac{3}{x} dx = 3 \ln x = \ln x^3$$

$$\mu(x) = e^{\ln x^3} = x^3$$

$$z = \frac{1}{\mu(x)} \left[\int \mu(x)\, q(x)\, dx \right]$$

$$z = \frac{1}{x^3} \left[\int x^3 \left(\frac{3}{x}\right) dx \right]$$

$$z = \frac{1}{x^3} \left[3 \int x^2 \, dx \right] = \frac{1}{x^3} \left[x^3 + 3c \right]$$

$$z = 1 + \frac{3c}{x^3}$$

$$si \quad C = 3c \quad \Rightarrow \quad y^3 = 1 + \frac{C}{x^3}$$

<u>Respuesta</u> $y^3 = 1 + \frac{C}{x^3}$

PROBLEMAS DE APLICACIÓN

2 SELECCIÓN DE PERSONAL M B. WERTHER, JR., KEITH DAVIS

Una vez que se dispone de un grupo idóneo de solicitantes obtenido mediante el reclutamiento, se da inicio al proceso de selección. Esta fase implica una serie de pasos que añaden complejidad a la decisión de contratar y consumen cierto tiempo. Estos factores pueden resultar irritantes , tanto para los candidatos, que desean iniciar de inmediato, como para los gerentes de los departamentos con vacantes.

El proceso de selección consiste en una serie de pasos específicos que se emplean para decidir que solicitantes deben ser contratados. El proceso se inicia en el momento en que una persona solicita un empleo y termina cuando se produce la decisión de contratar a uno de los solicitantes.

En muchos departamentos de personal se integran las funciones de reclutamiento y selección en una sola función que puede recibir el nombre de contratación. La función de contratar se asocia íntimamente con el departamento de personal y constituye con frecuencia la razón esencial de la existencia del mismo, ya que el proceso de selección tiene importancia radical en la administración de recursos humanos.

4.2.1 Objetivos y Desafíos de la Selección de Personal

El proceso de selección se basa en tres elementos esenciales: la información que brinda el análisis de puesto, los planes de los recursos humanos a corto y largo plazos, y finalmente, los candidatos. Estos tres elementos determinan en gran medida la efectividad del proceso de selección.

4.2.2 Selección de Personal: Panorama General

La función del administrador de recursos humanos consiste en ayudar a la organización a identificar el candidato que mejor se adecue a las necesidades generales de la organización.

MODELOS MATEMÁTICOS

Crecimiento de Poblaciones

"La velocidad con la que crece o disminuye una población es directamente proporcional a la cantidad de población presente"

como $x(t)$ es el número de pobladores y al tiempo $t = 0$ la población es x_0 entonces:

$$\frac{dx}{dt} \propto x \Rightarrow \frac{dx}{dt} = kx$$

Resolviendo la ecuación diferencial por separación de variables, se tiene

$$\frac{dx}{dt} = kx \Rightarrow dx = kxdt \Rightarrow \frac{dx}{x} = kdt \Rightarrow \int \frac{dx}{x} = \int kdt \Rightarrow \ln x = kt + c \Rightarrow x = e^{kt+c} \quad \therefore \quad x(t) = c\, e^{kt}$$

Para el cálculo de la constante de integración c y la constante de proporcionalidad k,

$$t = 0,\ x = x_0 \Rightarrow x_0 = ce^0 \Rightarrow c = x_0$$

$$t = t_1,\ x = x_1 \Rightarrow x_1 = ce^{kt_1} \Rightarrow x_1 = x_0 e^{kt_1} \Rightarrow k = \frac{1}{t_1} \ln\left(\frac{x_1}{x_0}\right)$$

La solución particular será: $x(t) = x_0\, e^{\frac{1}{t_1}\ln\left(\frac{x_1}{x_0}\right)t}$

Reacción Química Simple

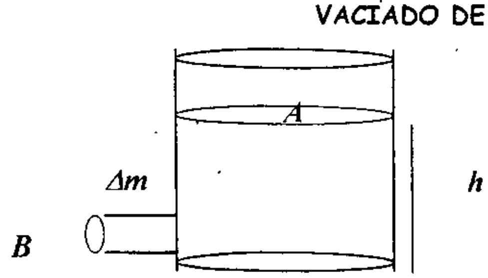
"La rapidez con que una sustancia A se convierte en una sustancia B es directamente proporcional a la cantidad de sustancia A Por transformar" $A \rightarrow B$

Sea $x(t)$ la sustancia que se va a transformar, y al tiempo $t = 0$ la sustancia por transforma es x_0 entonces:

$$\frac{dx}{dt} \propto -x \Rightarrow \frac{dx}{dt} = -kx$$

Procediendo de manera semejante al modelo anterior, note que la única diferencia es el signo negativo, se llegará a la solución $x(t) = x_0\, e^{-\frac{1}{t_1}\ln\left(\frac{x_1}{x_0}\right)t}$

VACIADO DE UN TANQUE



A = Área (sección transversal) del recipiente.
B = Área orificio.
H= Altura del solvente en el instante t.
Δh = Variación de la altura.
t = Tiempo.
Δt = Variación del tiempo.
g = 9.8 m/seg.

Consideraciones

La cantidad de solvente que sale por la tubería = La cantidad de solvente que desciende en el cilindro.

El volumen que bajó en el cilindro es $V = A\Delta h$

El volumen que sale por el tubo es $V = B\Delta m$. Donde Δm es la distancia que recorre el solvente durante Δt segundos, si el chorro saliera horizontalmente.

$V = \dfrac{dm}{dt}$ es la velocidad instantánea de la caída del solvente.

$v = \sqrt{2gh}$ en condiciones ideales suponiendo que no hay perdidas.

$$-A\Delta h = B\Delta m$$

Dividiendo por Δt se tiene $-A\dfrac{\Delta h}{\Delta t} = B\dfrac{\Delta m}{\Delta t}$

Tomando el límite $\Delta t \to 0$

$$-A\frac{dh}{dt} = B\frac{dm}{dt} \Rightarrow -A\frac{dh}{dt} = Bv \quad \therefore \quad -A\frac{dh}{dt} = B\sqrt{2gh}$$

Resolviendo la ecuación diferencial, por separación de variables:

$$\int\frac{dh}{\sqrt{h}} = -\frac{A}{B}\sqrt{2g}\int dt \Rightarrow 2\sqrt{h} = -\frac{A}{B}\sqrt{2g}\,t + c$$

Ley de Enfriamiento de Newton

"La rapidez con la que cambia la temperatura de un cuerpo es directamente proporcional a la diferencia de temperaturas del propio cuerpo con la del medio ambiente"

Sea T la temperatura del cuerpo y T_a la temperatura del medio ambiente, entonces

$$\frac{dT}{dt} \propto T - T_a \Rightarrow \frac{dT}{dt} = k(T - T_a)$$

Resolviendo la ecuación diferencial. Por separación de variables.

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_a) \Rightarrow dT = k(T - T_a)dt \Rightarrow \frac{dT}{T - T_a} = kdt$$

$$\Rightarrow \int\frac{dT}{T - T_a} = \int kdt \Rightarrow \ln(T - T_a) = kt + c \Rightarrow T - T_a = e^{kt+c} \quad \therefore \quad T = T_a + ce^{kt}$$

Cálculo de la constante de integración y la constante de proporcionalidad.

$$t = 0, \quad T = T_0 \Rightarrow T_0 = T_a + ce^0 \Rightarrow c = T_0 - T_a$$

$$t = t_1, \quad T = T_1 \Rightarrow T_1 = T_a + (T_0 - T_a)e^{kt_1} \Rightarrow \frac{T_1 - T_a}{T_0 - T_a} = e^{kt_1} \Rightarrow k = \frac{1}{t_1}\ln\left(\frac{T_1 - T_a}{T_0 - T_a}\right)$$

La solución particular será: $T(t) = T_a + (T_0 - T_a)e^{\frac{1}{t_1}\ln\left(\frac{T_1 - T_a}{T_0 - T_a}\right)t}$

DESINTEGRACION RADIACTIVA

"La rapidez con que se desintegra una sustancia radiactiva es directamente proporcional a la cantidad de sustancia radiactiva que falta desintegrarse"

Sea $x(t)$ la sustancia que se va a desintegrar, y al tiempo $t=0$ la sustancia que falta desintegrarse es x_0 entonces:

$$\frac{dx}{dt}\propto -x \Rightarrow \frac{dx}{dt}=-kx$$

Como el modelo es el mismo que el de una reacción química simple se tiene la solución particular

$$x(t)=x_0\, e^{-\frac{1}{t_1}ln\left(\frac{x_1}{x_0}\right)t}$$

PERIODO DE SEMIVIDA. Se define el periodo de semivida de una sustancia radiactiva como el tiempo que se tarda en desintegrar la mitad de la sustancia original. Entonces

$$x=\frac{1}{2}x_0,\quad t=t_{\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{1}{2}x_0=x_0\, e^{-\frac{1}{t_1}ln\left(\frac{x_1}{x_0}\right)t_{\frac{1}{2}}} \Rightarrow t_{\frac{1}{2}}=\frac{ln\left(\frac{1}{2}\right)}{-\frac{1}{t_1}ln\left(\frac{x_1}{x_0}\right)}$$

Problemas de Mezclas

"La rapidez de cambio de un soluto en un tanque mezclador es igual al diferencia de la entrada menos la salida"

Sea $x(t)$ la cantidad de soluto al tiempo t, entonces

$$\frac{dx}{dt}=ENTRADA-SALIDA$$

$$\frac{dx}{dt}=Q_1C_1-Q_2C_2$$

$$\frac{dx}{dt}=Q_1C_1-Q_2\frac{x}{V(t)}$$

Donde $V(t)$ es el volumen variable del tanque mezclador: $V(t)=V_0+(Q_1-Q_2)t$, entonces

$$\frac{dx}{dt}=Q_1C_1-Q_2\frac{x}{V_0+(Q_1-Q_2)t} \Rightarrow \frac{dx}{dt}+\frac{Q_2}{V_0+(Q_1-Q_2)t}x=Q_1C_1$$

Solución de la ecuación diferencial ordinaria lineal.

$$\mu(t)=e^{\int p(t)dt}=e^{\int\frac{Q_2}{V_0+(Q_1-Q_2)t}dt}$$

$$x(t)=\frac{1}{\mu(t)}\left[\int\mu(t)q(t)dt+c\right]=\frac{1}{e^{\int\frac{Q_2}{V_0+(Q_1-Q_2)t}dt}}\left[\int e^{\int\frac{Q_2}{V_0+(Q_1-Q_2)t}dt}q(t)dt+c\right]$$

Para determinar el valor de la constante de integración, se evalúa en el tiempo $t=0$, entonces $x(o)=x_0$

Ley de Fourier.

"La transferencia de calor en una superficie es directamente proporcional a la rapidez con la que cambia la temperatura"

$$Q \propto \frac{dT}{dx} \Rightarrow Q = kA\frac{dT}{dx}$$

Donde k es la permitividad térmica del material

A es el área de la sección transversal (superficie isotérmica)

Para una Pared Plana

Resolviendo por separación de variables:

$$Qdx = kAdT \Rightarrow \int Qdx = kA\int dT \Rightarrow Qx = kAT + c \therefore \begin{cases} x = \dfrac{kAT + c}{Q} \\ T = \dfrac{Qx + c}{kA} \end{cases}$$

Para calcular la constante de integración y de proporcionalidad se tienen condiciones de frontera:

$$T(0) = T_0, \quad T(L) = T_1$$

$$x = 0, T = T_0 \Rightarrow Q \times 0 = kAT_0 + c \Rightarrow c = -kAT_0$$

$$x = L, T = T_1 \Rightarrow Q \times L = kAT_1 + c \Rightarrow k = \frac{QL - c}{AT_1} \Rightarrow \begin{cases} k = \dfrac{QL + kAT_0}{AT_1} \\ Q = \dfrac{kAT_1 - kAT_0}{L} = \dfrac{kA(T_1 - T_0)}{L} \end{cases}$$

Donde L es el espesor de la pared

De esta manera, la solución particular quedará como:

$$T = \frac{Qx + c}{kA} = \frac{Q}{KA}x + \frac{c}{kA}$$

Que es una recta con pendiente $m = \dfrac{Q}{kA}$ y ordenada al origen $b = \dfrac{c}{kA}$ con los valores c y Q calculados anteriormente.

Para un Tubo Cilíndrico

Considerando el flujo de calor en un tubo de radio interior R_1 y radio exterior R_2 con temperaturas T_1 y T_2 respectivamente y longitud L, entonces el área de la superficie isotérmica será $A = 2\Pi\ r\ L$, por lo que la solución de la ecuación diferencial, por separación de variables se encuentra de la siguiente manera.

$$Q = k(2\ \Pi\ r\ L)\frac{dT}{dr} \Rightarrow \frac{Qdr}{r} = k(2\ \Pi\ L)dT \Rightarrow \int\frac{Qdr}{r} = \int k(2\ \Pi\ L)dT \Rightarrow Q\ln r = 2\Pi\ kLT + c$$

Para calcular la constante de integración y de permitividad térmica se tienen condiciones de frontera:

$$T(R_1) = T_1, \quad T(R_2) = T_2$$

Entonces.

$$r = R_1, \quad T = T_1 \Rightarrow Q\ln R_1 = 2\Pi kLT_1 + c$$
$$r = R_2, \quad T = T_2 \Rightarrow Q\ln R_2 = 2\Pi kLT_2 + c$$

Restando las 2 ecuaciones

$$Q\ln R_1 - QLnR_2 = 2\Pi kLT_1 - 2\Pi kLT_2 \Rightarrow Q(\ln R_1 - \ln R_2) = 2\Pi\ k\ L(T_1 - T_2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Q = \dfrac{2\Pi kl(T_1 - T_2)}{(\ln R_1 - \ln R_2)} = \dfrac{2\Pi kl(T_1 - T_2)}{\ln\dfrac{R_1}{R_2}} \\[2em] k = \dfrac{Q(\ln R_1 - \ln R_2)}{2\Pi\ L(T_1 - T_2)} = \dfrac{Q\ln\dfrac{R_1}{R_2}}{2\Pi\ L(T_1 - T_2)} \end{cases}$$

Sustituyendo en la primer ecuación.

De esta manera, la solución particular quedará como:

$$T = \frac{Q\ln r + c}{2\Pi kL}$$

Donde los valores c y Q son los calculados anteriormente.

PROBLEMAS

Problema 1. Un tanque de ***100 l***. Esta lleno con salmuera que contiene ***60 Kg***. de sal disuelta. Entra agua en el tanque con un gasto de ***12 l/min.*** Y la mezcla que se conserva uniforme mediante agitación, sale a la misma velocidad. ¿Cuánta sal queda en el tanque después de una hora?.

Solución de la ecuación diferencial por separación de variables

$$Vi = 12 \quad Ci = 0 \quad x(0) = 60 \quad Vs = 12 \quad Cs = \frac{x}{100}$$

$$\frac{dx}{dt} = ENT - SAL = ViCi - VsCs = 0 - 12\left(\frac{x}{100}\right)$$

$$\frac{dx}{dt} = 0 - \frac{12x}{100} = -\frac{3}{25}x \quad \Rightarrow \frac{dx}{x} = -\frac{3}{25}dt$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{x} = -\frac{3}{25}\int dt \Rightarrow \ln x = -\frac{3}{25}t + c$$

Calculo de la constante de integración

$$x(o) = 0 \Rightarrow \ln 60 = -\frac{3}{25}(0) + c \Rightarrow c = \ln 60$$

Solución particular y evaluación en $t=60$

$$\ln x = -\frac{3}{25}t + \ln 60 \quad \therefore x(t) = 60e^{-\frac{3}{25}t}$$

$$\Rightarrow x(60) = 60e^{-\frac{3}{25}(60)} = 0.44795 = 4.479 \times 10^{-2}\ Kg$$

Respuesta: $x(60) = 0.44795 = 4.479 \times 10^{-2}\ Kg$

Problema 2. Un tanque contiene ***100 l.*** de salmuera en el cual hay ***10 Kg*** de sal disuelta. Se alimenta al tanque salmuera a un gasto de ***6 l/min***. Con una concentración de ***0.5 Kg/l***; la mezcla es mantenida homogénea dentro del tanque mediante agitación y sale de él con un gasto de ***4 l/min***. Encuentre la cantidad de sal que hay en el tanque al cabo de ***30 minutos***.

Solución de la ecuación diferencial ordinaria lineal

$$\frac{dx}{dt} = (6)(0.5) - 4\left(\frac{x}{100 + 2t}\right) = 3 - \left(\frac{2x}{50 + t}\right)$$

$$\frac{dx}{dt} + \left(\frac{2}{50 + t}\right)x = 3$$

$$\mu(t) = e^{2\int \frac{dt}{50+t}} = e^{2\ln(50+t)} = e^{\ln(50+t)^2} = (50 + t)^2$$

$$x(t) = \frac{1}{\mu(t)}\left[\int \mu(t)q(t)dt + c\right] = \frac{1}{(50+t)^2}\left[3\int (50 + t)^2 dt + c\right]$$

$$x(t) = \frac{1}{(50+t)^2}\left[(50 + t)^3 + c\right] = 50 + t + c(50 + t)^{-2}$$

Cálculo de la constante de integración

$$t = 0, x = 10 \Rightarrow 10 = 50 + 0 + c(50)^{-2} \Rightarrow c = -100\,000$$

Solución particular.

$$x = 50 + t - 100000(50 + t)^{-2}$$

evaluación en $t=30$

$$t = 30 \Rightarrow x = 80 - 100000(80)^{-2} = 64.375\,Kg.$$

<u>Respuesta</u> $64.375\,Kg.$

<u>*Problema 3*</u> La sustancia A se transforma en la sustancia B. La velocidad de formación de B varía en forma directamente proporcional a la cantidad de A presente en cada instante. si inicialmente hay $20\ Kg.$ De A y en una hora hay $5\ Kg$ de B. Hallar la cantidad de B al cabo de $2\ horas$.

Solución de la ecuación diferencial por separación de variables

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x)$$

$$\int \frac{dx}{(a - x)} = k \int dt \Rightarrow -ln(a - x) = kt + c \Rightarrow a - x = e^{-kt+c}$$

$$a - x = C e^{-kt} \Rightarrow x = a - C e^{-kt}$$

Cálculo de la constante de integración y la constante de proporcionalidad, para obtener la solución particular, después se evalúa en $t=2$

$$t = 0, \quad x = 0 \Rightarrow C_1 = a$$

$$t = 1, \quad x = 5 \Rightarrow 5 = 20 - 20 e^{k} \Rightarrow k = -0.2876$$

$$t = 2 \Rightarrow x = 20(1 - e^{-0.2876(2)}) = 8.74\,Kg.$$

<u>Respuesta.</u> $8.74\,Kg.$

<u>*Problema 4*</u>. Se dispone de un tanque cilíndrico vertical que tiene un diámetro de 1.5 m y una altura de 5 m, éste tanque contiene solvente hasta un 80 % de su capacidad. Si se vacía este tanque por gravedad a través de una tubería de 0.08 m de diámetro conectada al fondo del tanque. Calcular el tiempo necesario para vaciar completamente el tanque.

de acuerdo con los datos del problema se tiene:

$$Volumen\ del\ tanque = \pi r^2 h = \pi \left(\frac{1.5}{2} \right)^2 5 = 8.83575\, m^3$$

$$Volumen\ del\ solvente = (0.8)(8.83575) = 7.0686\, m^3$$

$$Altura\ del\ solvente = \frac{V}{\pi r^2} = (7.0686)(\pi)(0.75) = 4\, m$$

Solución de la ecuación diferencial, separando las variables

$$-A\frac{dh}{dt} = B\sqrt{2gh} \quad t = 0, h = ho$$

$$\Rightarrow -A\frac{dh}{dt} = B\sqrt{2g}\sqrt{h}$$

$$\Rightarrow \int\frac{dh}{\sqrt{h}} = -\frac{A}{B}\sqrt{2g}\int dt$$

$$2\sqrt{h} = -\frac{A}{B}\sqrt{2g}t + c$$

Donde:

$$A = \pi r^2 = \pi(0.75)^2 = 1.76715m^2$$
$$B = \pi r^2 = \pi(0.04)^2 = 0.005026m^2$$

Entonces:

$$2\sqrt{h} = \frac{-0.005026}{1.76715}\sqrt{2(9.8)}t + c$$

Con el cálculo de la constante de integración, se obtiene la solución particular

$$2\sqrt{4}0 = -0.0216t + c \Rightarrow h(t) = (-0.0063t + 2)^2$$

$$h = 0 \Rightarrow t = \frac{2}{0.0063} = 317.46seg = 5.29\,min$$

<u>***Respuesta.***</u> *5.29 min*.

Problema 5. Supóngase que la temperatura de una taza de café obedece a la ley de enfriamiento de Newton. Si el café tiene una temperatura de *87 C*. y después de un minuto la temperatura es de *83 C*. Determinar el tiempo que debe transcurrir para que la temperatura del café sea de *65 C*, considerando para ello que la temperatura ambiente es de *21 C*.

Solución de la ecuación diferencial por separación de variables.

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_a)$$

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 21)$$

$$\frac{dT}{(T - 21)} = kdt$$

$$\int\frac{dT}{(T - 21)} = \int kdt$$

$$ln(T - 21) = kt \Rightarrow \qquad t - 21 = ce^{kt} \Rightarrow T = 21 + ce^{kt}$$

Cálculo de la constante de integración y la constante de proporcionalidad

$$Si\ t = 0,\ T = 87 \quad c = 87 - 21 = 66 \quad \Rightarrow \quad T = 21 + 66e^{kt}$$

$$Si\ t = 1,\ T = 83 \quad k = ln\left(\frac{83 - 21}{66}\right) = -0.06252 \quad \therefore \quad T = 21 + 66e^{-0.06252t}$$

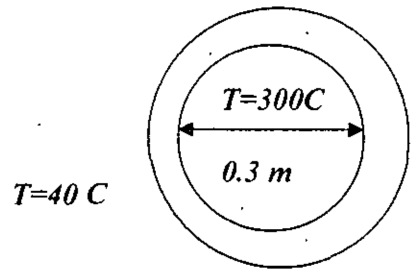
Por lo que

$$Si\ T = 65 \qquad t = \frac{ln\left(\dfrac{T-21}{66}\right)}{-0.06252} = \frac{ln\left(\dfrac{65-21}{66}\right)}{-0.06252} = 6.48\,min$$

<u>***Respuesta***</u> *6.48 min*

<u>***Problema 6***</u>. Una tubería que transporta vapor, tiene un diámetro de $0.3\ m$ y un recubrimiento de material aislante con un espesor de $0.2\ m$ y una conductividad térmica k, de 0.2 *watts/m K*. La temperatura en la pared de la tubería es de $300\ \ C$, y la temperatura de la superficie externa del recubrimiento es de $40\ °C$.

¿Cuál será la temperatura de la superficie externa del recubrimiento, sí el espesor fuera de $0.1\ m$.?



Solución de la ecuación diferencial

$$Q = kA\frac{dT}{dx} \Rightarrow Q = k\,2\pi rL\frac{dT}{dr} \Rightarrow \quad Q\frac{dr}{r} = k\,2\pi L dT$$

$$Q\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r} = k\,2\pi L\int_{T_1}^{T_2} dT$$

$$Q\,ln\,r\Big|_{r_1}^{r_2} = k\,2\pi\,LT\Big|_{T_1}^{T_2}$$

$$Q(ln\,r_2 - ln\,r_1) = k\,2\pi L(T_2 - T_1)$$

$$Q = \frac{k\,2\pi\,L(T_2 - T_1)}{ln\,r_2 - ln\,r_1}$$

Cálculo de la solución pedida.

$$Q_1 = Q_2 \Rightarrow \quad \frac{k\,2\pi\,L(T_2-T_1)}{ln\,r_2 - ln\,r_1} = \frac{k\,2\pi\,L(T_2-T_3)}{ln\,r_3 - ln\,r_1} \quad \Rightarrow \frac{(T_2-T_1)}{ln\,r_2 - ln\,r_1} = \frac{(T_2-T_3)}{ln\,r_3 - ln\,r_1}$$

$$T_3 = T_2 - \frac{(ln\,r_3 - ln\,r_1)(T_2-T_1)}{ln\,r_2 - ln\,r_1} = 573 - \frac{(ln\,0.25 - ln\,0.15)(573-313)}{ln\,0.35 - ln\,0.15} = 416.29K$$

$$T_3 = 143.29C$$

<u>***Respuesta.***</u> *143.29C*

Problema 7. El flujo de calor Q *(cal/s)* que pasa por una pared, está dado por $Q = -k\,A\dfrac{dT}{dx}$, siendo k la conductividad térmica del material *(cal/s cm C)*, A es el área de transferencia de calor de la pared cm^2, T *(C)* es la temperatura a x cm de la pared. Hallar el número de calorías por segundo que pasa por $1\ cm^2$ de la pared de una habitación frigorífica de $150\ cm$ de espesor, si la temperatura de la cara interior es de $-5°C$ y la de la cara exterior de $60\ C$.

Datos

$$A = 1\,cm^2, \quad x_0 = 0\ cm, \quad x_1 = 150\,cm, \quad T_1 = -5\,C, \quad T_2 = 60\,C$$

Solución de la ecuación diferencial, por separación de variables.

$$Q = -kA\frac{dT}{dx} \Rightarrow \quad Qdx = -kAdT$$

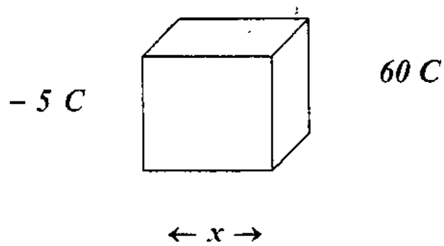
$$Q\int_{x_0}^{x_1} dx = -kA\int_{T_1}^{T_2} dT$$

$$Qx\Big|_{x_0}^{x_1} = -kAT\Big|_{T_1}^{T_2}$$

$$Q(x_1 - x_0) = -kA(T_2 - T_1)$$

$$Q = \frac{-kA(T_2 - T_1)}{x_1 - x_0} = \frac{-k(1)(60-(-5))}{150} = -k(0.433)$$

<u>*Respuesta.*</u> $Q = -\ 0.4333\ k$ *[cal/s]*



Problema 8. La rapidez de desintegración de una sustancia radiactiva es proporcional en cualquier instante, a la cantidad de sustancia radiactiva presente. Si en ***100 años*** se pierde el ***4.2 %*** de la cantidad de sustancia original. ¿Qué porcentaje se perderá al cabo de ***1600 años***? (Considere que la cantidad inicial es A_0).

Solución de la ecuación diferencial, por separación de variables

$$\frac{dA}{dt} = -kA$$

$$\int \frac{dA}{A} = -k \int dt$$

$$\ln A = -kt + c$$

$$A = ce^{-kt}$$

Cálculo de la constante de integración y la constante de proporcionalidad, para obtener la solución particular

$$t = 0\,, \quad A = A_0 \Rightarrow \quad Ao = c \quad \Rightarrow \quad A = Aoe^{-kt}$$

$$t = 100\,, \quad A = (1 - 0.042)A_0 \Rightarrow \quad (1 - 0.042)A_0 = A_0 e^{-k(100)} \Rightarrow 1 - 0.042 = e^{-kt}$$

$$\frac{\ln(1 - 0.042)}{-100} = k \Rightarrow k = 0.000429$$

$$\therefore A = A_0\, e^{-0.000429t}$$

Evaluando

$$A = Aoe^{(-0.000429)(1600)} = A_0 0.5033$$

$$\%A = (Ao - Ao0.5033) \times 100 = 49.66\%Ao$$

<u>*Respuesta*</u>. $49.66\%\ A_0$

<u>*Problema 9*</u>. Una sustancia se desintegra con una rapidez proporcional a la cantidad presente. Si la mitad de la cantidad original se desintegra en ***1600 años*** hallar la cantidad de sustancia al cabo de ***500 años.***

$$\frac{dA}{dt} = -kA \quad t = 0 \Rightarrow A = A\ o$$

$$\int \frac{dA}{A} = -k \int dt$$

$$\ln A = -Kt + c$$

$$e^{\ln A} = e^{-kt+c} \Rightarrow A = e^{-kt} \cdot e^{c} = c\, e^{-kt}$$

Cálculo de las constantes de integración

$$t = 0,\, A = Ao \Rightarrow A = A_0\, e^{-kt}$$

$$t = 1600, \quad A = \frac{A_0}{2} \Rightarrow \frac{A_0}{2} = A_0\, e^{-k(1600)} \Rightarrow e^{-1600k} = \frac{1}{2} \Rightarrow -1600k = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow k = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{-1600} = 4.3321 \times 10^{-4} \therefore A = Ao\, e^{-(4.3321 X 10^{-4})t}$$

Evaluando

$$A = Ao\, e^{-(4.3321 X 10^{-4})(500)} = 0.8052Ao$$

<u>*Respuesta.*</u> $0.8052A_0$

Problema 10. La ley de enfriamiento de Newton establece que: La velocidad de enfriamiento de un cuerpo es proporcional a la diferencia de temperaturas del cuerpo y del medio ambiente, La temperatura de una sustancia colocada en una habitación que se encuentra a $20\ C$ baja de $90\ C$ a $70°C$ en 15 **minutos**, hallar la temperatura de la sustancia al acabo de 20 **minutos**.
Solución de la ecuación diferencial, por separación de variables

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - Ta), \quad T(0) = 90C, T(15) = 70C$$

$$\int \frac{dT}{(T - Ta)} = -k\int dt$$

$$\ln(T - Ta) = -kt + c$$

$$e^{(T-Ta)} = e^{-kt+c} \Rightarrow T - Ta = Ce^{-kt} \therefore T = Ce^{-kt} + Ta$$

Cálculo de la constante de integración y la constante de proporcionalidad, para obtener la solución particular.

$$t = 0, \qquad T = 90 \Rightarrow 90 = Ce^{-k(0)} + 20 \Rightarrow C = 70 \Rightarrow \quad T = 70e^{-kt} + 20$$

$$t = 15, \quad T = 70 \Rightarrow 70 = 70e^{-k(15)} \Rightarrow \ln\left(\frac{50}{70}\right) = -k(15)$$

$$k = \frac{\ln\left(\frac{50}{70}\right)}{-15} = 202431 \times 10^{-2} \quad \therefore \quad T = 70e^{-(2.2431 X 10^{-2})t} + 20$$

Evaluando

$$T = 70e^{-(2.2431 X 10^{-2})(20)} + 20 = 64.695C$$

Respuesta $64.695\ C$

Problema 11. En un cultivo de bacterias en cada instante la rapidez de crecimiento es proporcional al número presente. Si en una hora el número original aumenta en un $75\ \%$ halle la cantidad al cabo de 2 **horas.**
Solución de la ecuación diferencial por separación de variables

$$\frac{dM}{dt} = kM \qquad M(0) = M_0$$

$$\frac{dM}{M} = kdt$$

$$\int \frac{dM}{M} = \int kdt$$

$$\ln M = kt + C \Rightarrow M = Ce^{kt}$$

Cálculo de la constante de integración y la constante de proporcionalidad

$$t = 0, M = M_0 \Rightarrow M_0 = Ce^{k(0)} \Rightarrow C = Mo \Rightarrow M = Mo\,e^{kt}$$

$$t = 1, M = 1.75M_0 \Rightarrow 1.75M_0 = M_0 e^{(1)k} \Rightarrow \ln(1.75) = k \Rightarrow k = 0.5596$$

$$\therefore M = M_0 e^{0.5596t}$$

Evaluando

$$M = M_0 e^{0.5596(2)} = (M_0)3.0625$$

Respuesta. $3.0625\,M_0$

PROBLEMA 12. Un tanque contiene ***200 litros*** de salmuera en los cuales se disuelven ***40 gramos*** de sal. Una salmuera que contiene ***0.8 gramos*** de sal por litro se bombea dentro del tanque con un gasto de ***4 litros por minuto,*** la solución mantenida homogénea mediante agitación se bombea fuera del tanque con el mismo gasto de entrada, halle la cantidad de sal dentro del tanque al cabo de ***20 minutos.***

Solución de la ecuación diferencial, como lineal.

$$\frac{dA}{dt} = G_E C_E - G_S\left[\frac{A}{Vo + (G_E - G_S)t}\right]$$

$$\frac{dA}{dt} = 4(0.8) - 4\left[\frac{A}{200 + (4-4)t}\right]$$

$$\frac{dA}{dt} + \frac{1}{50}A = 3.2$$

$$\mu(t) = e^{\int \frac{t}{50}dt} = e^{\frac{t}{50}}$$

$$A(t) = \frac{1}{\mu(t)}\left[\int \mu(t)q(t)dt + c\right] = \frac{1}{e^{\frac{t}{50}}}\left[\int e^{\frac{t}{50}}(3.2)dt + c\right] = e^{-\frac{t}{50}}\left[3.2\int e^{\frac{t}{50}}dt + c\right]$$

$$A(t) = e^{-\frac{t}{50}}\left[3.2(50)e^{\frac{t}{50}} + c\right] = 160 + Ce^{-\frac{t}{50}}$$

Cálculo de la constante de integración, para determinar la solución particular

$$t = 0, \quad A = 40 \quad \Rightarrow \quad 40 = 160 + Ce^{0} \Rightarrow C = -120$$

Evaluando

$$t = 20, \quad A = 160 - 120e^{-\frac{20}{50}} = 79.56\,gr.$$

<u>Respuesta</u> *79.56 gr.*

Problema 13. Un tanque contiene ***200 galones*** de agua. Luego se introduce salmuera ***con 0.5 libras de sal por galón*** a un gasto de ***6 galones por minuto*** y la mezcla homogénea, sale del tanque a un gasto de ***4 galones por minuto.*** Hállese la cantidad de sal en el tanque al cabo de ***30 minutos***.

$$\frac{dA}{dt} = G_E C_E - G_S\left[\frac{A}{Vo + (G_E - G_S)t}\right]$$

$$\frac{dA}{dt} = 6(0.5) - 4\left[\frac{A}{200 + (6-4)t}\right]$$

$$\frac{dA}{dt} = 3 - \frac{4A}{200 + 2t}$$

$$\frac{dA}{dt} + \frac{2A}{100+t} = 3$$

$$A(t) = e^{-\int p(t)dt}\left[\int e^{\int p(t)dt} q(t)dt + c\right]$$

$$A(t) = e^{-\int \frac{2}{100+t}dt}\left[\int e^{\int \frac{2}{100+t}dt}(3)dt + c\right] = e^{-2\ln 100+t}\left[3\int e^{2\ln 100+t}dt + c\right]$$

$$A(t) = e^{\ln(100+t)^{-2}}\left[3\int e^{\ln(100+t)^2}dt + c\right] = (100+t)^{-2}\left[3\int (100+t)^2 dt + c\right]$$

$$A(t) = (100+t)^{-2}\left[(100+t)^3 + c\right] = (100+t) + c(100+t)^{-2}$$

Cálculo de la constante

$$t = 0, A = 0 \Rightarrow 0 = 100 + 0 + C(100+t)^{-2} \Rightarrow C = 1000000$$

Evaluando

$$t = 30 \quad A = 100 + 30 - 1000000(100+30)^{-2} = 70.82\,lb.$$

<u>*RESPUESTA*</u>. ***70.82 lb.***

Problema 14. Un tanque contienen ***200 galones*** de salmuera con ***15 libras*** de sal disueltas. Se introduce salmuera que contiene ***0.5 libras*** de sal por galón a un gasto de ***1 galón por minuto*** y la mezcla homogénea mediante agitación sale del tanque a un gasto de ***2 galones por minuto***. Encuentre la cantidad de sal en el tanque al cabo de ***10 minutos***.

$$\frac{dA}{dt} = G_E C_E - G_S\left[\frac{A}{Vo + (G_E - G_S)t}\right]$$

$$\frac{dA}{dt} = 0.5(1) - 2\left[\frac{A}{200 + (1-2)t}\right]$$

$$\frac{dA}{dt} = 0.5 - \frac{2A}{200 - t}$$

$$\frac{dA}{dt} + \frac{2A}{200 - t} = 0.5$$

$$A(t) = e^{-\int p(t)dt}\left[\int e^{\int p(t)dt} q(t)dt + c\right]$$

$$A(t) = e^{-\int \frac{2}{200-t}dt}\left[\int e^{\int \frac{2}{200-t}dt}(0.5)dt + c\right] = e^{2\ln, 200-t}\left[0.5\int e^{-2\ln 200-t}dt + c\right]$$

$$A(t) = e^{\ln(200-t)^2}\left[0.5\int e^{\ln(200-t)^{-2}}dt + c\right] = (200-t)^2\left[0.5(200-t)^{-2} + c\right]$$

$$A(t) = (200-t)^2\left[0.5\left(-\frac{(200-t)^{-1}}{-1}\right) + c\right] = (200-t)^2\left[0.5(200-t)^{-1} + c\right]$$

$$\therefore A(t) = 0.5(200-t) + c(200-t)^2$$

Cálculo de la constante de integración

$$t = 0, A = 15 \Rightarrow \quad 15 = 0.5(200-0) + C(200-0)^2 \Rightarrow C = -2.12\times 10^{-3}$$

Evaluando

$$t = 10 \qquad A = 0.5(200-10) - 2.12\times 10^{-3}(200-10)^2 = 18.47 lb.$$

Respuesta. *18.47 lb*

Problema 15. La sustancia química A se transforma en el producto B la velocidad de formación el producto B varía en forma directamente proporcional a la cantidad de A presente en cada instante. Si inicialmente hay: ***10 Kilogramos*** de A y en ***2 horas 5.1 kilogramos*** se han transformado en B. Hállese la cantidad de B al cabo de ***1 hora***.

ECUACIONES DIFERENCIALES

ORDINARIAS DE

SEGUNDO ORDEN

Intercambio de información.- El proceso de entrevista se basa en una conversación, establecer confianza y adquirir información, puede empezarse la entrevista preguntando al entrevistado si tiene alguna pregunta. Es importante evitar las preguntas vagas, abiertas.

Terminación.- Cuando el entrevistador considera que ya esta terminando su lista de preguntas o que el tiempo ha expirado, se procede a cerrar la sesión, puede resumirse los siguientes pasos del proceso de selección, ya sea comunicarse después telefónicamente o concertar una nueva cita.

Evaluación.- Inmediatamente después de concluida la evaluación, el entrevistador debe registrar las respuestas específicas y sus impresiones generales sobre el candidato.

Errores del entrevistador:

Una entrevista puede ser débil por que no establece un clima de confianza, o por que omite preguntas clave. Existen diversas fuentes de errores, los que se originan en la aceptación o rechazo del candidato por factores ajenos al desempeño potencial. Existe incluso el peligro de guiar al candidato a responder de la manera que el entrevistador desea resultando en una evaluación subjetiva y sin validez.

Errores del entrevistado:

Los cinco errores más comunes cometidos por los entrevistados son: intentar técnicas distractoras, hablar en exceso, jactarse de los logros del pasado, no escuchar y no estar debidamente preparado para la entrevista.

Paso 4:

4.1.4 Verificación de Datos y Referencias.

El profesional de los recursos humanos debe desarrollar una técnica depurada que depende en gran medida de dos hechos capitales: uno, el

$$\frac{dB}{dt} = k(\alpha - B)$$

$$\frac{dB}{dt} = k(10 - B)$$

$$\frac{dB}{(10 - B)} = kdt$$

$$\int \frac{dB}{(10 - B)} = \int kdt \Rightarrow -\ln(10 - B) = kt + c \Rightarrow \quad B(t) = 10 - ce^{-kt}$$

Cálculo de la constante de integración y la constante de proporcionalidad

$B(0) = 0 \Rightarrow \quad 0 = 10 - c \quad \Rightarrow \quad c = 10$

$$B(2) = 5.1 \Rightarrow \qquad 5.1 = 10 - 10e^{k2} \Rightarrow k = \frac{\ln\left(\frac{5.1 - 10}{-10}\right)}{2} = -0.3566 \therefore B(t) = 10 - 10e^{-0.3566t}$$

Evaluando. $t = 1$ $\qquad B(t) = 10 - 10e^{(-0.3566)(1)} = 3\ kg\ de\ B.$

<u>*RESPUESTA*</u> *3 kg.*

<u>*Problema 16*</u>. Un producto químico C se produce en una reacción en que intervienen las sustancias A y B. La velocidad de producción de C varía en forma directamente proporcional al producto de las cantidades de A y B presentes en cada instante. Inicialmente hay ***60 kilogramos*** de A y ***60*** kilogramos de B y por cada ***3 kilogramos*** de A se usan ***2 kilogramos*** de B. Se observa que en ***2 horas*** se forman ***26.65 kilogramos*** de C, hállese la cantidad de C al cabo de ***1 hora.***

Solución de la ecuación diferencial, por separación de variables

$$\frac{dx}{dt} = k(x - A)(x - B)$$

$$\frac{dx}{(x - A)(x - B)} = kdt$$

$$\int \frac{dx}{(x - A)(x - B)} = \int kdt$$

La integral se resuelve por descomposición en fracciones parciales $\frac{300 - 2x}{300 - 3x} = e^{300kt}$

Cálculo de la constante k

$$x = 26.65, \quad t = 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{300 - 2(26.65)}{300 - 3(26.65)} = e^{300k(2)} \Rightarrow \frac{246.7}{220.05} = e^{600K} \therefore k = 0.0001905$$

Se obtiene la solución particular

$$\frac{300 - 2x}{300 - 3x} = e^{600(0.05716)t} \Rightarrow 300 - 2x = e^{0.05716t}(300 - 3x)$$

Evaluando en $t=1$.

$$300 - 2x = 1.0588(300 - 3x) \Rightarrow \quad x = 14.99$$

<u>*Respuesta*</u> *14.99 kg de C*

Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden.

Definición: Una ecuación diferencial de segundo orden se define como:

$$a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2}+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=F(x)$$

Donde la variable independiente es x mientras que la variable dependiente es y entonces la solución es $y=f(x)$.

Los coeficientes pueden ser variables $a_i(x)$ ó constantes $a_i(x)\in\Re$.

La función de excitación $F(x)$ puede ser igual a cero, en tal caso se denomina homogénea ó diferente de cero, donde recibe el nombre de no homogénea.

La solución total es $y(x)=y_h(x)+y_p(x)$ donde el primer sumando se llama solución homogénea ó complementaria y el segundo se denomina solución particular.

Solución Homogénea

La ecuación diferencial homogénea, con coeficientes constantes $a_2\frac{d^2y}{dx^2}+a_1\frac{dy}{dx}+a_0y=0$ tiene por solución funciones de la forma $y=e^{mx}$ y las combinaciones de elementos de esta familia, Para encontrar los valores de m, se deriva, entonces.

$$y=e^{mx},\quad \frac{dy}{dx}=me^{mx},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=m^2e^{mx}$$

Y al sustituir

$$a_2m^2e^{mx}+a_1me^{mx}+a_0e^{mx}=0$$

$$\Rightarrow e^{mx}(a_2m^2+a_1m+a_0)=0$$

Se tienen dos posibilidades de las cuales.

$$e^{mx}\neq 0$$

Por lo que.

$$a_2m^2+a_1m+a_0=0$$

Conocida como la ecuación auxiliar o característica, de la cual se consideran 3 casos, dependiendo del tipo de raíces obtenidas de la solución a la ecuación de segundo grado.

CASO 1. Raíces reales diferentes.

$$m_1\neq m_2\Rightarrow y_h(x)=c_1e^{m_1x}+c_2e^{m_2x}$$

CASO 2. Raíces reales repetidas.

$$m_1=m_2\Rightarrow y_h(x)=c_1e^{m_1x}+c_2xe^{m_2x}$$

CASO 3. Raíces complejas.

$$m_1=a+bi,\quad m_2=a-bi\Rightarrow y_h(x)=(C_1\cos bx+C_2\operatorname{sen}bx)e^{ax}$$

La razón de este último resultado se justifica al utilizar la forma de Euler de un número complejo, veamos.

Como

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$

$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\,\mathrm{sen}\,\theta$

Entonces.

$$
\begin{aligned}
y_h(x) &= c_1 e^{(a+bi)x} + c_2 e^{(a-bi)x} \\
&= \left(c_1 e^{bxi} + c_2 e^{-bxi}\right) e^{ax} \\
&= \left(c_1[\cos bx + i\,\mathrm{sen}\,bx] + c_2[\cos bx - i\,\mathrm{sen}\,bx]\right) e^{ax} \\
&= \left([c_1 + c_2]\cos bx + [c_1 - c_2] i\,\mathrm{sen}\,bx\right) e^{ax}
\end{aligned}
$$

$$C_1 = c_1 + c_2$$

$$C_2 = [c_1 - c_2]\,i$$

$$\therefore\ y_h(x) = \left(C_1 \cos bx + C_2\,\mathrm{sen}\,bx\right) e^{ax}$$

Ecuación Diferencial No Homogénea

La ecuación diferencial

$$a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = F(x)$$

Tiene como solución general

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

Donde, como se mostró anteriormente

$$y_h(x) = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

En la cual

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ \frac{dy_1}{dx} & \frac{dy_2}{dx} \end{vmatrix} \neq 0$$

El wronskiano es diferente de cero, entonces.

$$y(x) = c_1 y_1 + c_2 y_2 + y_p(x),$$

Es decir al tener la solución homogénea basta encontrar la solución particular, obtenida por alguno de los dos métodos siguientes.

Variación de Parámetros

Coeficientes Indeterminados

Variación de Parámetros.

El método consiste en "hacer variables las constantes", es decir en lugar de $y_h(x) = c_1y_1 + c_2y_2$ de la homogénea se tiene $y_p(x) = u_1y_1 + u_2y_2$, donde $u_1 = u_1(x)$, $u_2 = u_2(x)$ por lo que: $y(x) = c_1y_1 + c_2y_2 + u_1y_1 + u_2y_2$, para encontrar u_1, u_2 se deriva la solución particular y se sustituye en la ecuación diferencial

$$a_2\frac{d^2y_p}{dx^2} + a_1\frac{dy_p}{dx} + a_0y_p = F(x)$$

Entonces.

$$\frac{dy_p}{dx} = u_1y_1' + u_2y_2' + u_1'y_1 + u_2'y_2$$

$$\frac{d^2y_p}{dx^2} = u_1y_1'' + u_1'y_1' + u_2y_2'' + u_2'y_2' + \left(u_1'y_1 + u_2'y_2\right)'$$

Al sustituir

$$F(x) =$$

$$= a_2\left\{u_1y_1'' + u_1'y_1' + u_2y_2'' + u_2'y_2' + \left(u_1'y_1 + u_2'y_2\right)'\right\} + a_1\left\{u_1y_1' + u_2y_2' + u_1'y_1 + u_2'y_2\right\} + a_0\left\{u_1y_1 + u_2y_2\right\}$$

$$= u_1\left\{a_2y_1'' + a_1y_1' + a_0y_1\right\} + u_2\left\{a_2y_2'' + a_1y_2' + a_0y_2\right\} + a_2\left[u_1'y_1' + +u_2'y_2' + \left(u_1'y_1 + u_2'y_2\right)'\right] +$$

$$+ a_1\left[u_1'y_1 + u_2'y_2\right]$$

$$= u_1\{0\} + u_2\{0\} + a_2\left[u_1'y_1' + +u_2'y_2' + \left(u_1'y_1 + u_2'y_2\right)'\right] + a_1\left[u_1'y_1 + u_2'y_2\right]$$

Haciendo: $u_1'y_1 + u_2'y_2 = 0$ se tiene como consecuencia $\left(u_1'y_1 + u_2'y_2\right)' = 0$ así se logra tener un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, puesto que:

$$u_1\{0\} + u_2\{0\} + a_2\left[u_1'y_1' + +u_2'y_2' + 0\right] + a_1[0] = F(x)$$

Entonces.

$$u_1'y_1 + u_2'y_2 = 0 \qquad ...(1)$$

$$u_1'y_1' + +u_2'y_2' = \frac{F(x)}{a_2} \qquad ...(2)$$

Entonces se obtiene la respuesta para u_1, u_2

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ \frac{F(x)}{a_2} & y_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} \Rightarrow u_1 = \int \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ \frac{F(x)}{a_2} & y_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} dx$$

$$u_2' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & \frac{F(x)}{a_2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} \Rightarrow u_2 = \int \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & \frac{F(x)}{a_2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} dx$$

Método de los Coeficientes Indeterminados.

Una manera alternativa para el cálculo de la solución particular, consiste en proponer una solución particular que depende de la función de excitación $F(x)$, aunque la lista de posibilidades no es completa, pero si le dará una idea de cómo se pueden construir, será ilustrada a continuación, después de proponer la solución particular se deriva y sustituye en la ecuación diferencial.

$$a_2 \frac{d^2 y_p}{dx^2} + a_1 \frac{dy_p}{dx} + a_0 y_p = F(x)$$

en la cual se encuentran agrupados elementos con coeficientes constantes determinados por $A, B, C, ...$ que serán igualados con los coeficientes correspondientes de la función $F(x)$ dando lugar a un sistema de ecuaciones algebraicas lineales, cuyas incógnitas serán $A, B, C, ...$ así. Las soluciones particulares tendrán alguna de las formas siguientes:

Función de excitación $F(x)$	Solución particular y_p
Constante $\{1,2,3,...\sqrt{2},...\Pi,...\}$	$y_p = A$
Polinomio de grado 1: $2x+1$ $x-2$ $100x+3.4$ $12x-\Pi$	$y_p = Ax + C$
gradosuperior: x^2+x+1 $12x^3-6x+2$ x^4-16 $0.5x^5-3x^2-x+12$	$y_p = Ax^2+Bx+C$ $y_p = Ax^3+Bx^2+Cx+D$ $y_p = Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+C$ $y_p = Ax^5+Bx^4+Cx^3+Dx^2+Ex+F$
Exponenciales: $12e^{4x}$ $-4e^{2x}-56e^{3x}$ $4e^{-\Pi x}+xe^{-3x}$ $2x^2e^{-x}$	$y_p = Ae^{4x}$ $y_p = Ae^{2x}+Be^{3x}$ $y_p = Ae^{-\Pi x}+Be^{-3x}+Cxe^{-3x}$ $y_p = Ae^{-x}+Bxe^{-x}+Cx^2e^{-x}$
Trigonométricas: $2\cos 2x$ $3\cos(0.5x)$ $4\cos 3x+5\,sen7x$ $4\cos 3x+2\,sen3x$	$y_p = A\cos 2x + B\,sen2x$ $y_p = A\cos(0.5x)+B\,sen(0.5x)$ $y_p = A\cos 3x+B\,sen3x+C\cos 7x+D\,sen7x$ $y_p = A\cos 3x+B\,sen3x$
Combinaciones: $3e^{2x}+12$ $x\cos 2x$ $e^{9x}sen4x$ $\cos 3x-8x+e^{-x}$	$y_p = Ae^{2x}+B$ $y_p = A\cos 2x+B\,sen2x+Cx\cos 2x+D\,x\,sen2x$ $y_p = Ae^{9x}\cos 4x+Be^{9x}sen4x$ $y_p = A\cos 3x+B\,sen3x+Cx+D+Ee^{-x}$

Deberá notar de la tabla anterior que:

1.- En los polinomios no importa los conectores negativos, siempre se escribe como una suma, no importa que no aparezcan algunas potencias, siempre se definen a partir del grado del polinomio, máxima potencia, es decir se escribe como un polinomio de grado $1, 2, 3, 4, \ldots$

2.- Cuando la función exponencial o trigonométrica se encuentra multiplicado por alguna potencia de x, se construye desde la mínima hasta la máxima potencia. Es decir son raíces repetidas.

3.- Cuando se trata de funciones trigonométricas (seno ó coseno) siempre aparecen juntas, aunque en la función de excitación sea una sola, también se comportan como el producto por las exponenciales, es decir, se construye desde la mínima hasta la máxima potencia

4.- Con cualquiera de las soluciones particulares deberá considerar previamente la solución homogénea, puesto que las raíces se pueden repetir desde tal solución,

<u>TENGA CUIDADO CON LAS RAÍCES REPETIDAS</u>

Operador Anulador

Definición. Un operador diferencial se define como.

$$D = \frac{d}{dx}, \quad D^2 = \frac{d^2}{dx^2}, \quad D^3 = \frac{d^3}{dx^3}, \quad \ldots$$

Donde $D, D^2, D^3, \ldots$ son la primera, la segunda, la tercer derivada, ... un Polinomio diferencial $P(D)$ contiene a estos operadores diferenciales

Para justificar los modelos anteriores se debe recurrir al método del operador anulador, éste será necesario cuando no recuerde la forma en que actúa la función de excitación $F(x)$ entonces se tendrá que construir la solución particular de la siguiente manera.

Sea $P_A(D)$ Un polinomio diferencial de tal manera que anule a $F(x)$, es decir,

$$P_A(D)F(x) = 0$$

Entonces, para la ecuación diferencial no homogénea

$$a_2 \frac{d^2y}{dx^2} + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = F(x)$$

Se aplica el operador anulador a ambos lados de la ecuación, entonces.

$$P_A(D)\left(a_2 \frac{d^2y}{dx^2} + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y \right) = P_A(D)F(x)$$

$$P_A(D)\left(a_2 D^2 + a_1 D + a_0\right)y = 0$$

Notará la equivalencia entre la ecuación auxiliar con el operador dentro del paréntesis. Así se tiene una nueva ecuación diferencial de orden mayor qu[illegible] se resuelve como homogénea, cuya solución será la determinada por la nueva e[illegible]

Tipos de Operadores Anuladores

1.- Para anular los polinomios $\{1, x, x^2, ..., x^{n-1}\}$ $\quad P_A(D) = D^n$

2.- Para anular las exponenciales $\{e^{ax}, xe^{ax}, x^2e^{ax}, ..., x^{n-1}e^{ax}\}$ $\quad P_A(D) = (D-1)^n$

3.- para anular las funciones trigonométricas

$$\left.\begin{array}{l}\{e^{ax}\cos bx, xe^{ax}\cos bx, x^2e^{ax}\cos bx, ..., x^{n-1}e^{ax}\cos bx\} \\ \{e^{ax}senbx, xe^{ax}senbx, x^2e^{ax}senbx, ..., x^{n-1}e^{ax}senbx\}\end{array}\right. P_A(D) = \left(D^2 - 2aD + a^2 + b^2\right)^n$$

Sistemas de Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden

Definición. Un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden tiene la forma.

$$P_{11}(D)x + P_{12}(D)y = f(t)$$
$$P_{21}(D)x + P_{22}(D)y = g(t)$$

Donde los coeficientes $P_{ij}(D)$ son operadores diferenciales, actuando sobre las variables x y, estas a su vez son funciones de la variable independiente t, es decir $x(t)$ $y(t)$. La solución de este sistema de ecuaciones, se resuelve por regla de cramer, generando dos ecuaciones diferenciales ordinarias lineales.

$$\Delta x = \Delta_x \quad \Delta y = \Delta_y$$

Las cuales se resuelven por los métodos vistos anteriormente, donde.

$$\Delta = \begin{vmatrix} P_{11}(D) & P_{12}(D) \\ P_{21}(D) & P_{22}(D) \end{vmatrix} \text{ es un operador diferencial.}$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} P_{11}(D) & f(t) \\ P_{21}(D) & g(t) \end{vmatrix} \text{ es una función}$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} f(t) & P_{12}(D) \\ g(t) & P_{22}g(t) \end{vmatrix} \text{ es una función}$$

Es obvio que si $f(t) = g(t) = 0$ el sistema de ecuaciones es homogéneo y $\Delta_x = \Delta_y = 0$, dando lugar a dos ecuaciones diferenciales ordinarias homogéneas.

PROBLEMAS

Problema 1.- Determine por que los operadores siguientes son anuladores

1.1.- D^3 anula a x^2+x+1 porqué

$$\begin{aligned} D^3(x^2+x+1) &= D^2(2x+1+0) \\ &= D(2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

1.2.- (D^2+1) anula a $sen\,x$ porqué

$$\begin{aligned} (D^2+1)sen\,x &= D^2 sen\,x + sen\,x \\ &= DDsen\,x + sen\,x \\ &= D(cos\,x) + sen\,x \\ &= -sen\,x + sen\,x \\ &= 0 \end{aligned}$$

Este operador también anula a $cos\,x$ ó cualquier combinación lineal de $\{sen\,x, cos\,x\}$ por ejemplo. $(3cos\,x+2senx)$ $(10senx+10cos\,x)$ $(-2sen\;x+5cos\,x)\ldots$

Cuando se cambia el argumento entonces cambia el operador anulador, por ejemplo.
(D^2+9) anula a $2cos\,3x+3sen3x$ porqué.

$$\begin{aligned} (D^2+9)(2cos\,3x+3sen3x) &= DD(2cos\,3x+3sen3x)+9(2cos\,3x+3sen3x) \\ &= D(-2\times 3sen3x+3\times 3cos\,3x)+9(2cos\,3x+3sen3x) \\ &= -2\times 3\times 3cos\,3x-3\times 3\times 3sen3x+18cos\,3x+27sen3x \\ &= 0 \end{aligned}$$

Cuando es multiplicado por x^n también cambia el operador anulador, por ejemplo.
$(D^2+9)^2$ anula a $x\,cos\,3x$ porqué.

$$\begin{aligned} (D^2+9)^2(x\,cos\,3x) &= (D^4+18D^2+81)(x\,cos\,3x) \\ &= D^4(x\,cos\,3x)+18D^2(x\,cos\,3x)+81(x\,cos\,3x) \end{aligned}$$

Derivando, se tiene.

$$D(x\,cos\,3x) = -3x\,sen3x+cos\,3x$$

$$D^2(x\,cos\,3x) = D(-3x\,sen3x+cos\,3x) = -3(3x\,cos\,3x+sen3x)-3sen3x = -9x\,cos\,3x-6sen3x$$

$$D^3(x\,cos\,3x) = D(-9x\,cos\,3x-6sen3x) = -9(-3xsen3x+cos\,3x)-6\times 3cos\,3x$$

$$D^4(x\,cos\,3x) = D(27x\,sen3x-27cos\,3x) = 27(3x\,cos\,3x+sen3x)+27\times 3sen3x$$

Entonces.

$$\begin{aligned} &(D^2+9)^2(x\,cos\,3x) = 81x\,cos\,3x+108sen3x+18(-9x\,cos\,3x-6sen3x)+81(x\,cos\,3x) \\ &= 81x\,cos\,3x+108sen3x-162x\,cos\,3x-108sen3x+81x\,cos\,3x \\ &= 0 \end{aligned}$$

1.3. $(D-3)$ anula a e^{3x} porqué

$$\begin{aligned}(D-3)e^{3x} &= De^{3x}-3e^{3x}\\ &= 3e^{3x}-3e^{3x}\\ &= 0\end{aligned}$$

Mientras que, cuando se multiplica por x^n se modifica el operador anulador, por ejemplo.
$(D-3)^2$ anula a xe^{3x} porqué.

$$(D-3)^2\left(xe^{3x}\right)=\left(D^2-6D+9\right)\left(xe^{3x}\right)=D^2\left(xe^{3x}\right)-6D\left(xe^{3x}\right)+9\left(xe^{3x}\right)$$

Derivando se tiene.

$$D(xe^{3x})=3xe^{3x}+e^{3x}$$
$$D^2(xe^{3x})=3(3xe^{3x}+e^{3x})+3e^{3x}$$

Entonces.

$$\begin{aligned}(D-3)^2\left(xe^{3x}\right) &= 3(3xe^{3x}+e^{3x})+3e^{3x}-6(3xe^{3x}+e^{3x})+9\left(xe^{3x}\right)\\ &= 9xe^{3x}+3e^{3x}+3e^{3x}-18xe^{3x}-6e^{3x}+9xe^{3x}\\ &= 0\end{aligned}$$

Problema 2 Encuentre la solución homogénea de las siguientes ecuaciones diferenciales.

2.1.- $\dfrac{d^2y}{dx^2}+3\dfrac{dy}{dx}-4y=0$

Respuesta.

$$\text{Ecuación auxiliar}: m^2+3m-4=0 \Rightarrow (m+4)(m-1)=0\begin{cases}m_1=-4\\ m_2=1\end{cases}\Rightarrow y_h=c_1e^{-4x}+c_2e^{x}$$

Otro ejemplo del mismo caso.

2.2 $\dfrac{d^2y}{dx^2}+5\dfrac{dy}{dx}+6y=0$

Respuesta.

$$\text{Ecuación auxiliar}: m^2+5m+6=0 \Rightarrow (m+3)(m+2)=0\begin{cases}m_1=-3\\ m_2=-2\end{cases}\Rightarrow y_h=c_1e^{-3x}+c_2e^{-2x}$$

2.3.- $\dfrac{d^2y}{dx^2}+6\dfrac{dy}{dx}+9y=0$

Respuesta.

$$\text{Ecuación auxiliar}: m^2+6m+9=0 \Rightarrow (m+3)^2=0\begin{cases}m_1=-3\\ m_2=-3\end{cases}\Rightarrow y_h=c_1e^{-3x}+c_2xe^{-3x}$$

Otro ejemplo del mismo caso.

2.4.- $\dfrac{d^2y}{dx^2}-4\dfrac{dy}{dx}+4y=0$

Respuesta.

$$\text{Ecuación auxiliar}: m^2-4m+4=0 \Rightarrow (m-2)^2=0\begin{cases}m_1=2\\ m_2=2\end{cases}\Rightarrow y_h=c_1e^{2x}+c_2xe^{2x}$$

2.5.- $\frac{d^2y}{dx^2}+9y=0$

Respuesta.

$$Ecuación\ auxiliar: m^2+9=0\begin{cases} m_1=-3i \\ m_2=3i \end{cases} \Rightarrow y_h=c_1e^{-3i}+c_2e^{3i} \Rightarrow y_h=C_1\cos 3x+C_2 sen 3x$$

Otro ejemplo del mismo caso.

2.6.- $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}+y=0$

Respuesta.

$$Ecuación\ auxiliar: m^2+m+1=0 \Rightarrow m_{1,2}=\frac{-(1)\pm\sqrt{(1)^2-4(1)(1)}}{2(1)}\begin{cases} m_1=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \\ m_2=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2} \end{cases}$$

Como: $m_1=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \quad m_2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ entonces.

$$y_h=c_1e^{\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)x}+c_2e^{\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)x} \Rightarrow y_h=\left(C_1\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x+C_2 sen\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x\right)e^{-\frac{1}{2}x}$$

Problema 3.- Resuelva la siguiente ecuación diferencial de segundo orden, con el método de variación de parámetros.

$$\frac{d^2y}{dx^2}+y=\cos x$$

Solución homogénea.

$$Ecuación\ auxiliar: m^2+1=0\begin{cases} m_1=-i \\ m_2=i \end{cases} \Rightarrow y_h=c_1e^{-ix}+c_2e^{ix}=C_1\cos x+C_2 sen\, x$$

Solución particular. Variando los parámetros. $y_p=u_1\cos x+u_2 sen\, x$

Donde. $y_1=\cos x \Rightarrow y_1'=-senx$

$y_2=senx \Rightarrow y_2'=\cos x$

Entonces.

$$u_1=\int\frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ \frac{F(x)}{a_2} & y_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}}dx=\int\frac{\begin{vmatrix} 0 & sen\,x \\ \frac{\cos x}{1} & \cos x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & sen\,x \\ -sen\,x & \cos x \end{vmatrix}}dx=\int\frac{-sen\,x\cos x}{\cos^2 x+sen^2 x}dx=-\int sen\,x\cos x\,dx=-\frac{sen^2 x}{2}$$

$$u_2=\int\frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & \frac{F(x)}{a_2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}}dx=\int\frac{\begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -sen\,x & \frac{\cos x}{1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & sen\,x \\ -sen\,x & \cos x \end{vmatrix}}dx=\int\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x+sen^2 x}dx=\int\cos^2 x\,dx$$

Cálculo integral para u_2.

$$\int cos^2 x\,dx = \int\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}cos\,2x\right)dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int cos\,2x\,dx = \frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\frac{1}{2}sen2x = \frac{1}{2}x+\frac{1}{4}sen2x$$

$$= \frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\left(2sen\,x\,cos\,x\right) = \frac{1}{2}x+\frac{1}{2}sen\,x\,cos\,x$$

Entonces. $y_p = \left(-\frac{sen^2 x}{2}\right)cos\,x + \left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}sen\,x\,cos\,x\right)sen\,x = \frac{1}{2}x\,senx$

Así: $y = C_1\,cos\,x + C_2\,sen\,x + \frac{1}{2}x\,sen\,x$

<u>*Problema 4*</u>.- Resuelva la siguiente ecuación diferencial de segundo orden, con el método de coeficientes indeterminados.

$$\frac{d^2y}{dx^2}+y = cos\,x$$

Solución homogénea.

$$Ecuación\ auxiliar: m^2+1=0\begin{cases} m_1=-i \\ m_2=i\end{cases} \Rightarrow y_h = c_1e^{-ix}+c_2e^{ix} = C_1\,cos\,x + C_2\,sen\,x$$

Solución particular.

Como $F(x) = cos\,x$ entonces (D^2+1) anula a $cos\,x$ por lo que.

$(D^2+1)(D^2+1)y = 0$ es la nueva ecuación diferencial que tiene como solución.

$$Ecuación\ auxiliar: (m^2+1)(m^2+1)=0\begin{cases} m_1=-i \\ m_2=i \\ m_3=-i \\ m_4=i\end{cases}$$

Por lo que $y(x) = \underbrace{C_1\,cos\,x + C_2\,sen\,x}_{sol.\,hom\,ogenea} + \underbrace{C_3x\,cos\,x + C_4\,x\,sen\,x}_{sol\ particular}$

Teniéndose la solución particular. $y_p = Ax\,cos\,x + Bx\,sen\,x$

Debido a la repetición de las raíces, para encontrar los valores de A B.

Derivando.

$$y_p' = A(-x\,senx + cos\,x) + B(x\,cos\,x + senx)$$

$$y_p'' = A(-x\,cos\,x - sen\,x - senx) + B(-x\,sen\,x + cos\,x + cos\,x)$$

$$= A(-x\,cos\,x - 2senx) + B(-x\,senx + 2cos\,x)$$

Sustituyendo.

$$\frac{d^2 y_P}{dx^2} + y_P = \cos x$$

$$= A(-x\cos x - 2\operatorname{sen}x) + B(-x\operatorname{sen}x + 2\cos x) + Ax\cos x + Bx\operatorname{sen}x$$

$$= \underbrace{(-A+A)}_{=0}x\cos x + \underbrace{(-B+B)}_{=0}x\operatorname{sen}x + \underbrace{(-2A)}_{=0}\operatorname{sen}x + \underbrace{(2B)}_{=1}\cos x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2A = 0 \Rightarrow A = 0 \\ 2B = 1 \Rightarrow B = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Por lo que.

$$y_P = y_p = (0)x\cos x + \left(\frac{1}{2}\right)x\operatorname{sen}x \Rightarrow y = C_1\cos x + C_2\operatorname{sen}x + \frac{1}{2}x\operatorname{sen}x$$

Que es la misma solución obtenida por el método de variación de parámetros.

Problema 5.- Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales.

$$x' - 4x + y'' = t^2$$

$$x' + x + y' = 0$$

Escribiendo inicialmente el sistema usando los operadores diferenciales, se tiene.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} - 4x + \dfrac{d^2y}{dt^2} = t^2 \\ \dfrac{dx}{dt} + x + \dfrac{dy}{dt} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (D-4)x + D^2y = t^2 \\ (D+1)x + Dy = 0 \end{cases}$$

Por lo que.

$$\Delta = \begin{vmatrix} P_{11}(D) & P_{12}(D) \\ P_{21}(D) & P_{22}(D) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} D-4 & D^2 \\ D+1 & D \end{vmatrix} = D(D-4) - D^2(D+1) = D^2 - 4D - D^3 - D^2 = -D^3 - 4D$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} f(t) & P_{12}(D) \\ g(t) & P_{22}(D) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t^2 & D^2 \\ 0 & D \end{vmatrix} = D(t^2) - D^2(0) = 2t - 0 = 2t$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} P_{11}(D) & f(t) \\ P_{21}(D) & g(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} D-4 & t^2 \\ D+1 & 0 \end{vmatrix} = (D-4)(0) - (D+1)(t^2) = 0 - D(t^2) - t^2 = -2t - t^2$$

Cálculo de x

Se tiene la siguiente ecuación diferencial ordinaria de tercer orden.

$$\Delta x = \Delta_x \Rightarrow \quad (-D^3 - 4D)x = 2t \Rightarrow \quad -\frac{d^3x}{dt^3} - 4\frac{dx}{dt} = 2t$$

Solución homogénea.

$$\textit{Ecuación auxiliar}: -m^3 - 4m = -m(m^2+4) = 0 \begin{cases} m_1 = 0 \\ m_2 = -2i \Rightarrow x_h = c_1e^{0t} + c_2e^{-2it} + c_3e^{2it} \\ m_3 = 2i \end{cases}$$

Entonces. $x_h = c_1 + C_2\cos 2t + C_3\operatorname{sen}2t$

Solución particular. Usando el método de coeficientes indeterminados, se tiene que $x_p(t) = At + Bt^2$ por la repetición de raíces, entonces.

$$x_p'(t) = A + 2Bt \Rightarrow x_p''(t) = 2B \Rightarrow x_p'''(t) = 0$$

Sustituyendo.

$$-\frac{d^3x}{dt^3}-4\frac{dx}{dt}=2t$$

$$=0-4(A+2Bt)$$

$$=-4A-8Bt$$

$$=\underbrace{(-4A)}_{=0}+\underbrace{(-8B)}_{=2}t$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-4A=0\Rightarrow A=0\\ -8B=2\Rightarrow B=-\frac{2}{8}=-\frac{1}{4}\end{cases}$$

Por lo que. $x(t)=c_1+C_2\cos 2t+C_3\operatorname{sen} 2t-\frac{1}{4}t^2$

Cálculo de y

Se tiene la siguiente ecuación diferencial ordinaria de tercer orden.

$$\Delta y=\Delta_y\Rightarrow\quad(-D^3-4D)y=-2t-t^2\Rightarrow\quad-\frac{d^3y}{dt^3}-4\frac{dy}{dt}=-2t-t^2$$

Solución homogénea.

$$\textit{Ecuación auxiliar}:-m^3-4m=-m(m^2+4)=0\begin{cases}m_1=0\\ m_2=-2i\Rightarrow y_h=c_4e^{0t}+c_5e^{-2it}+c_6e^{2it}\\ m_3=2i\end{cases}$$

Entonces. $y_h=c_4+C_5\cos 2t+C_6\operatorname{sen} 2t$ Deberá notar la similitud de la solución con x_h sin embargo se requieren nuevas constantes esenciales y arbitrarias, puesto que no son las mismas.

Solución particular. Usando el método de coeficientes indeterminados, se tiene que $y_p(t)=At+Bt^2+Ct^3$ por la repetición de raíces, entonces.

$$y_p'(t)=A+2Bt+3Ct^2\Rightarrow y_p''(t)=2B+6Ct\Rightarrow y_p'''(t)=6C$$

Sustituyendo.

$$-\frac{d^3x}{dt^3}-4\frac{dx}{dt}=-2t-t^2$$

$$=-6C-4(A+2Bt+3Ct^2)$$

$$=-6C-4A-8Bt-12Ct^2$$

$$=\underbrace{(-6C-4A)}_{=0}+\underbrace{(-8B)}_{=-2}t+\underbrace{(-12C)}_{=-1}t^2$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-4A-6C=0\Rightarrow A=-\frac{6}{4}C=-\frac{6}{4}\left(\frac{1}{12}\right)=-\frac{6}{48}=-\frac{1}{8}\\ -8B=-2\Rightarrow B=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}\\ -12C=-1\Rightarrow C=\frac{1}{12}\end{cases}$$

Por lo que. $y(t)=c_4+C_5\cos 2t+C_6\operatorname{sen} 2t-\frac{1}{8}t+\frac{1}{4}t^2+\frac{1}{12}t^3$

FUNCIONES VECTORIALES

que la presión real que se experimentará con el puesto puede resultar muy diferente a la de la entrevista.

El proceso de la entrevista:

Existen cinco etapas de una entrevista:

- Preparación del entrevistador
- Creación de un ambiente de confianza
- Intercambio de información
- Terminación y evaluación

Preparación del entrevistador.- Esta preparación requiere que se desarrollen preguntas específicas. Las respuestas que se den a estas preguntas indicarán la idoneidad del candidato. Una de las metas del entrevistador es convencer a los candidatos idóneos para que acepten las ofertas de la empresa, los entrevistadores necesitan estar en posición de explicar las características y responsabilidades del puesto, los niveles de desempeño, el salario, las prestaciones y otros puntos de interés. La información recabada debe proporcionar datos sobre los intereses, actitudes y antecedentes del solicitante.

Hay una serie de temas perfectamente ajenos a la situación profesional y deben ser conscientemente evitadas, por ejemplo la afiliación religiosa o las preferencias políticas.

Creación de un ambiente de confianza.- Corresponde al entrevistador esta tarea, tiene la obligación de representar a su organización. Iniciar con preguntas sencillas, evitar interrupciones telefónicas. Es importante la actitud, asentir con la cabeza, una actitud descansada, poco tensa y sonriente.

Funciones Vectoriales

Definición. Una función vectorial de variable real $F:\Re\rightarrow\Re^n$ tiene como dominio los números reales y como imagen vectores. Su regla de correspondencia es.

$$\vec{f}(t)=\left(f_1(t),f_2(t),\cdots,f_n(t)\right)$$

Donde $f_1(t),f_2(t),\cdots,f_n(t)$ son funciones escalares $F:\Re\rightarrow\Re$ ó bien funciones reales de variable real.

Definición. Una curva ζ en el espacio tridimensional queda definida por una función vectorial de variable real $F:R\rightarrow R^3$ donde las triadas ordenadas $\left(x(t),y(t),z(t)\right)$ satisfacen las ecuaciones paramétricas.

$$x(t)=f_1(t)$$
$$y(t)=f_2(t)$$
$$z(t)=f_3(t)$$

Una función vectorial en $\Re^3$ describe el movimiento de una partícula en el espacio, donde

La **velocidad** es $\vec{v}(t)=\vec{f}\,'(t)=\left(f_1'(t),f_2'(t),f_3'(t)\right)$

La **rapidez** es $\left|\vec{v}(t)\right|=\left|\vec{f}\,'(t)\right|=\sqrt{\left[f_1'(t)\right]^2+\left[f_2'(t)\right]^2+\left[f_3'(t)\right]^2}$

La **aceleración** es $\vec{a}(t)=\vec{f}\,''(t)=\left(f_1''(t),f_2''(t),f_3''(t)\right)$

El **modulo de la aceleración** es $\left|\vec{a}(t)\right|=\left|\vec{f}\,''(t)\right|=\sqrt{\left[f_1''(t)\right]^2+\left[f_2''(t)\right]^2+\left[f_3''(t)\right]^2}$

Longitud de curva. Sea la curva ζ definida en el espacio entre 2 puntos
$A(a_1,a_2,a_3)$ $B(b_1,b_2,b_3)$ entonces la longitud de curva quedará definida como.

$$S=\int_a^b\left|\vec{f}\,'(t)\right|dt=\int_a^b\sqrt{\left[f_1'(t)\right]^2+\left[f_2'(t)\right]^2+\left[f_3'(t)\right]^2}\,dt$$

Donde $t=a$ es el tiempo en el que está ubicado el punto A, $t=b$ es el tiempo en el está ubicado el punto B.

Cuando se tiene una curva ζ en dos dimensiones definida por la función vectorial $\vec{f}(t)=\left(f_1(t),f_2(t)\right)$ el cálculo para la longitud de curva se reduce.

$$S=\int_a^b\left|\vec{f}\,'(t)\right|dt=\int_a^b\sqrt{\left[f_1'(t)\right]^2+\left[f_2'(t)\right]^2}\,dt$$

Más aún, cuando la curva se define como una función en forma explícita $y=f(x)$ se tiene.

$$S=\int_a^b\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,dx=\int_a^b\sqrt{1+\left[\frac{dy}{dx}\right]^2}\,dx \quad x\in(a,b)$$

Triedro móvil. El triedro móvil está formado por tres vectores

Vector tangente unitario $T(t)=\dfrac{\vec{f}\,'(t)}{\left\|\vec{f}\,'(t)\right\|}$

Vector normal principal $N(t)=\dfrac{T'(t)}{\left\|T'(t)\right\|}$

Vector Binormal $B=T(t)\times N(t)$

Curvatura y Radio de Curvatura. La curvatura determina la variación de la tangente unitaria con respecto de la longitud de curva que ha recorrido un cuerpo.

$$\kappa=\frac{dT}{dS}\Rightarrow\kappa=\underbrace{\frac{\dfrac{dT}{dt}}{\dfrac{dS}{dt}}}_{Re\,gla\ de\ la\ cadena}=\frac{T'(t)}{\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_a^b\left\|\vec{f}\,'(t)\right\|dt}=\frac{\left\|T'(t)\right\|}{\left\|\vec{f}\,'(t)\right\|}$$

Una manera alternativa de calcular la curvatura es, usando directamente la velocidad la aceleración y la rapidez.

$$\kappa=\frac{\left\|\vec{f}\,'(t)\times\vec{f}\,''(t)\right\|}{\left\|\vec{f}\,'(t)\right\|^{3}}$$

Para el caso de dos dimensiones la fórmula se reduce, si $\vec{f}(t)=\left(f_1(t),f_2(t)\right)$, entonces.

$$\kappa=\frac{\left|f_1'(t)f_2''(t)-f_2'(t)f_1''(t)\right|}{\left[\left[f_1'(t)\right]^2+\left[f_2'(t)\right]^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

Más aún, cuando la curva se define como una función en forma explícita $y=f(x)$ se tiene.

$$\kappa=\frac{f''(x)}{\left[1+f'(x)\right]^{\frac{3}{2}}}=\frac{\dfrac{d^2y}{dx^2}}{\left[1+\dfrac{dy}{dx}\right]^{\frac{3}{2}}}$$

Mientras que el radio de curvatura ρ es el recíproco de la curvatura, entonces. $\rho=\dfrac{1}{\kappa}$.

Componente tangencial y normal de la aceleración.

Como $COMP_{\vec{b}}\,\vec{a} = \dfrac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{|\vec{b}|}$ entonces.

La componente tangencial se obtiene con el modulo de la proyección del vector aceleración sobre el vector tangente unitario.

$$a_T = COMP_T\,\vec{a} = \frac{\vec{a} \bullet \vec{T}}{|\vec{T}|} \Rightarrow a_T = \frac{\vec{a} \bullet \vec{T}}{1} = \vec{a} \bullet \vec{T} = \vec{a} \bullet \frac{\vec{f}'(t)}{|\vec{f}'(t)|}$$

La componente normal se obtiene con el módulo de la proyección de la proyección del vector aceleración sobre el vector normal principal.

$$a_N = COMP_N\,\vec{a} = \frac{\vec{a} \bullet \vec{N}}{|\vec{N}|} \Rightarrow a_T = \frac{\vec{a} \bullet \vec{N}}{1} = \vec{a} \bullet \vec{N} = \vec{a} \bullet \frac{T'(t)}{|T'(t)|}$$

También $a_N = \dfrac{|\vec{f}'(t) \times \vec{f}''(t)|}{|\vec{f}'(t)|}$

PROBLEMAS

Problema 1.- Sea la función $F : R \to R^2$ definida por $\vec{f}(t) = (2\cos t, -3sent)$ describe el tipo de curva.

Respuesta.

Eliminando el parámetro t, elevando al cuadrado y sumando se obtiene.

$$\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = -3sent \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 4\cos^2 t \\ y^2 = 9sen^2 t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{4} = \cos^2 t \\ \dfrac{y^2}{9} = sen^2 t \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = \cos^2 t + sen^2 t \Rightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Es una elipse vertical con centro en el origen.

Problema 2.- Sea la función $F : R \to R^3$ definida por $\vec{f}(t) = \left(4sen\,t, 4\cos t, \dfrac{t}{\Pi}\right)$ describe el tipo de curva.

Respuesta.

Al eliminar el parámetro t, de la misma manera que el ejemplo anterior, se obtiene

$$\begin{cases} x = 4\cos t \\ y = 4sent \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 16\cos^2 t \\ y^2 = 16sen^2 t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{16} = \cos^2 t \\ \dfrac{y^2}{16} = sen^2 t \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{16} = \cos^2 t + sen^2 t \Rightarrow x^2 + y^2 = 16$$

Un círculo con centro en el origen y radio igual a 16, sin embargo si $t \to \infty \Rightarrow z \to \infty$ describiéndose una curva en el espacio denominada hélice o helicoidal de base circular.

Problema 3.- Representar en forma vectorial la parábola $y = x^2 + 1$.

Respuesta.

Parametrizando la curva, se tienen diferentes posibilidades de solución.

Si: $x = t \Rightarrow y = t^2 + 1 \Rightarrow \vec{f}(t) = (t, t^2 + 1)$

Si: $y = t \Rightarrow x = \sqrt{t-1} \Rightarrow \vec{f}(t) = (\sqrt{t-1}, t)$

Si: $x = \sqrt{t} \Rightarrow y = t + 1 \Rightarrow \vec{f}(t) = (\sqrt{t}, t+1)$

Problema 4.- Dada la función vectorial $\vec{f}(t)=\left(\arctan t, \frac{\sqrt{2}}{2}\ln(t^2+1),\ t-\arctan t\right)$,

determinar la velocidad, la aceleración y sus respectivas magnitudes.
Respuesta.

Velocidad

$$\begin{aligned}
\vec{v}(t)=\vec{f}\,'(t) &= \left(\frac{1}{1+t^2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{2t}{1+t^2}, 1-\frac{1}{1+t^2}\right)\\
&= \left(\frac{1}{1+t^2}, \frac{\sqrt{2}\,t}{1+t^2}, \frac{1+t^2-1}{1+t^2}\right)\\
&= \left(\frac{1}{1+t^2}, \frac{\sqrt{2}\,t}{1+t^2}, \frac{t^2}{1+t^2}\right)
\end{aligned}$$

Rapidez

$$\begin{aligned}
\left\|\vec{v}(t)\right\| = \left\|\vec{f}\,'(t)\right\| &= \sqrt{\left[\frac{1}{1+t^2}\right]^2+\left[\frac{\sqrt{2}\,t}{1+t^2}\right]^2+\left[\frac{t^2}{1+t^2}\right]^2}\\
&= \sqrt{\frac{1}{\left[1+t^2\right]^2}+\frac{2t^2}{\left[1+t^2\right]^2}+\frac{t^4}{\left[1+t^2\right]^2}}\\
&= \sqrt{\frac{1+2t^2+t^4}{\left[1+t^2\right]^2}}\\
&= \sqrt{\frac{\left[1+t^2\right]^2}{\left[1+t^2\right]^2}}\\
&= 1
\end{aligned}$$

Aceleración

Como $\vec{a}(t)=\vec{f}\,''(t)=\left(f_1''(t), f_2''(t), f_3''(t)\right)$ y la primera derivada es la velocidad

$$\vec{v}(t)=\left(\frac{1}{1+t^2}, \frac{\sqrt{2}\,t}{1+t^2}, \frac{t^2}{1+t^2}\right)=\frac{1}{1+t^2}\left(1, \sqrt{2}\,t, t^2\right)$$

Se usa la fórmula $\left(\phi\vec{f}(t)\right)'=\phi\vec{f}\,'(t)+\vec{f}(t)\phi'$ entonces.

Aceleración

$$\begin{aligned}
\vec{a}(t)=\vec{f}\,''(t) &= \frac{1}{1+t^2}\left(0, \sqrt{2}, 2t\right)+\left(1, \sqrt{2}\,t, t^2\right)\left(-\frac{2t}{(1+t^2)^2}\right)\\
&= \left(-\frac{2t}{(1+t^2)^2}, \frac{\sqrt{2}}{1+t^2}-\frac{2\sqrt{2}\,t^2}{(1+t^2)^2}, \frac{2t}{1+t^2}-\frac{2t^3}{(1+t^2)^2}\right)\\
&= \left(-\frac{2t}{(1+t^2)^2}, \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}\,t^2-2\sqrt{2}\,t^2}{(1+t^2)^2}, \frac{2t+2t^3-2t^3}{(1+t^2)^2}\right)\\
&= \left(-\frac{2t}{(1+t^2)^2}, \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}\,t^2}{(1+t^2)^2}, \frac{2t}{(1+t^2)^2}\right)
\end{aligned}$$

Para calcular la magnitud se tiene $\vec{a}(t)=\frac{1}{(1+t^2)^2}\left(-2t,\ \sqrt{2}-\sqrt{2}\,t^2, 2t\right)$ al usar la fórmula $\left|k\vec{A}\right|=|k|\left|\vec{A}\right|$ entonces.

Modulo de la aceleración
$$\left\{\begin{aligned}
\left|\vec{a}(t)\right| &= \frac{1}{(1+t^2)^2}\sqrt{[-2t]^2+\left[\sqrt{2}-\sqrt{2}\,t^2\right]^2+[2t]^2}\\
&= \frac{1}{(1+t^2)^2}\sqrt{4t^2+2-4t^2+2t^4+4t^2}\\
&= \frac{1}{(1+t^2)^2}\sqrt{2t^4+4t^2+2}\\
&= \frac{1}{(1+t^2)^2}\sqrt{2(t^4+2t^2+1)}\\
&= \frac{1}{(1+t^2)^2}\sqrt{2(t^2+1)^2}\\
&= \frac{\sqrt{2}(t^2+1)}{(1+t^2)^2}\\
&= \frac{\sqrt{2}}{1+t^2}
\end{aligned}\right.$$

__Problema 4.-__ Dada la función vectorial $\vec{f}(t)=\left(\frac{1}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}},\frac{1}{3}(1-t)^{\frac{3}{2}},\frac{1}{2}t\right)$ calcula la longitud de la curva en el intervalo $t\in(0,1)$

__Respuesta.__

Como. $S=\int_a^b\left|\vec{f}'(t)\right|dt=\int_a^b\sqrt{\left[f_1'(t)\right]^2+\left[f_2'(t)\right]^2+\left[f_3'(t)\right]^2}\,dt$ Entonces se calcula la rapidez, así.

$$\vec{f}'(t)=\left(\frac{1}{3}\frac{3}{2}(1+t)^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}},-\frac{1}{3}\frac{3}{2}(1-t)^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}},\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}(1+t)^{\frac{1}{2}},-\frac{1}{2}(1-t)^{\frac{1}{2}},\frac{1}{2}\right)=$$

Sustituyendo

$$S=\int_0^1\sqrt{\left[\frac{1}{2}(1+t)^{\frac{1}{2}}\right]^2+\left[-\frac{1}{2}(1-t)^{\frac{1}{2}}\right]^2+\left[\frac{1}{2}\right]^2}\,dt$$

$$S=\int_0^1\sqrt{\frac{1}{4}(1+t)+\frac{1}{4}(1-t)+\frac{1}{4}}\,dt$$

$$S=\int_0^1\sqrt{\frac{3}{4}}\,dt=\sqrt{\frac{3}{4}}\,t\Big|_0^1=\sqrt{\frac{3}{4}}(1)-\sqrt{\frac{3}{4}}(0)=\sqrt{\frac{3}{4}}$$

$$\therefore S=\sqrt{\frac{3}{4}}$$