

# ***ELECTROMAGNETISMO\****

POR:

*M.I. LARRY H. ESCOBAR SALGUERO*

Febrero 2001.

*\*Tomado de Fundamentos de Teoria Teoria Electromagnetica, México D. F., 2001,  
Facultad de Ingeniería, UNAM. Del mismo autor.*

# INDICE

## ELECTROMAGNETISMO

CAMPO ELÉCTRICO.....	1
Líneas de Fuerza .....	2
Campo Eléctrico en un Punto "P" Debido a una Distribución Discreta de Cargas.....	3
Campo Eléctrico Debido a una Distribución Continua de Carga.....	3
Campo Eléctrico Debido a una Distribución Lineal de Carga.....	3
Campo Eléctrico en un Punto "P" Debido a una Superficie de Carga .....	4
Campo Eléctrico en un Punto "P" Debido a un Volumen de Carga .....	4
Flujo Eléctrico.....	4
Densidad de Flujo Eléctrico "D" .....	5
LEY DE GAUSS .....	5
Resultados Prácticos de la Evaluación de la Ley de Gauss .....	6
Aplicaciones de la Ley de Gauss .....	6
Divergencia.....	6
Potencial Eléctrico, Diferencia de Potencial o Voltaje.....	7
Potencial Absoluto de un Punto Dado, Debido a una Carga Q.....	7
Potencial $V_p$ Debido a Distribución de Carga.....	8
Gradiente de Potencial V.....	8
Líneas y Superficies Equipotenciales.....	8
Propiedades de los Campos Eléctricos, Mapas de Campo y Voltaje .....	9
Capacitor o Condensador .....	9
Corriente Eléctrica y Densidad de Corriente .....	9
Resistencia Eléctrica y Ley de Ohm.....	10
Ley de Ohm en un Punto .....	11
CAMPOS MAGNÉTICOS ESTACIONARIOS .....	13
Fuerza de un Campo "B" sobre un Conductor.....	13
Permeabilidad .....	13
Ley de Biot-Savart .....	14
Flujo Magnético y Densidad de Flujo Magnético .....	14
Fuerza de Lorentz.....	14
Ley de Ampere.....	15
Para Campos Variantes en el Tiempo .....	16
LEY DE FARADAY.....	16
Ley de Lenz .....	17
El Rotacional del Campo H.....	18
Forma Diferencial de la Ley de Faraday .....	18
Condición Necesaria pero no Suficiente para que exista Rotacional .....	18
Ley de Continuidad de Flujo Magnético .....	19
Corriente de Desplazamiento.....	20
Ecuaciones de Maxwell en Forma Integral.....	24
Ecuaciones de Maxwell en Forma Diferencial .....	25

## ONDAS

ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS .....	26
Ecuaciones de Onda Electromagnética Transversal (T.E.M.) en Dielectricos .....	26
Impedancia Intrínseca .....	30
Impedancia Característica.....	30
Impedancia de Onda.....	31
O.E.M. en Medios Conductores.....	31
Clasificación Arbitraria de los Medios.....	33
Resumen de Constantes en los Medios .....	35
Potencia y Vector de Poynting.....	36
Polarización .....	40
Polarización Lineal.....	41
Polarización Circular.....	43
Polarización Elíptica .....	44
Incidencia Normal.....	46
Onda Estacionaria .....	46
Impedancia de Entrada entre Medios .....	50
BIBLIOGRAFÍA .....	54

## CAMPO ELÉCTRICO

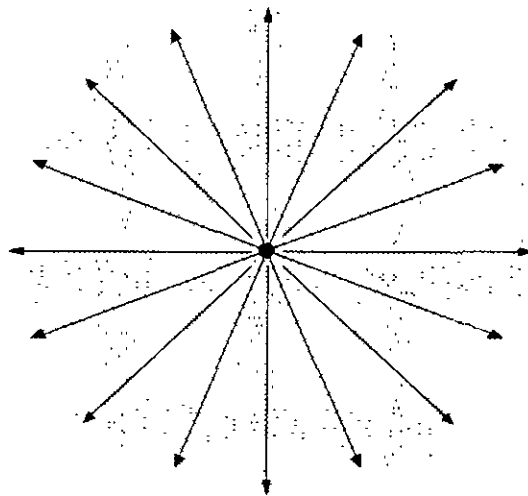
Si tenemos una carga puntual  $+Q$  y colocamos en cualquier punto cercano una carga de prueba  $+q$ , por la ley de Coulomb sabemos que existe una fuerza de repulsión sobre la carga  $+q$  debida a la carga  $+Q$ , esto es,  $(F_{qQ})$ . Si ahora movemos en cualquier sentido la carga  $+q$ , y de nuevo dibujamos la fuerza sobre  $+q$ , y si continuamos así, vamos obteniendo varios vectores, los cuales generan una gráfica de las líneas de fuerza que actuarían sobre  $+q$ . Este dibujo o gráfico es una herramienta que sirve para visualizar el campo de acción debido a la carga  $+Q$ .

El campo Eléctrico se define como el límite de la fuerza eléctrica sobre una carga testigo colocada en un punto. También, se define como la fuerza por unidad de carga en un punto cercano a una carga dada en dicho punto. La carga  $q \rightarrow 0$ , ya que su presencia no debe de afectar la distribución de campo eléctrico producida por una carga  $Q$ .

$$\vec{E} \triangleq \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\vec{F}_c}{q}$$

ó

$$\vec{E} \triangleq \frac{\vec{F}_c}{q}$$



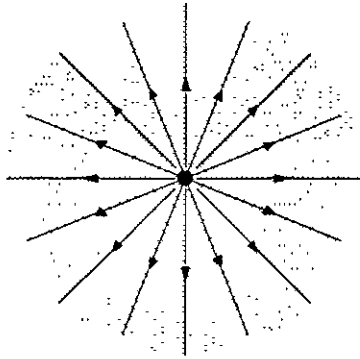
### Líneas de Fuerza.

Son líneas imaginarias trazadas de tal forma, que su dirección y sentido en cualquier punto sirven para representar o modelar un campo vectorial o mapa de campo.

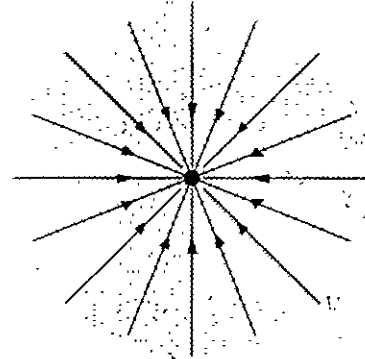
Características de las líneas de campo eléctrico:

1. En una carga positiva se dibujan saliendo (se tiene una fuente), en una carga negativa se dibujan entrando (se tiene un sumidero).
2. Toda tangente a una de las líneas es la dirección del campo.

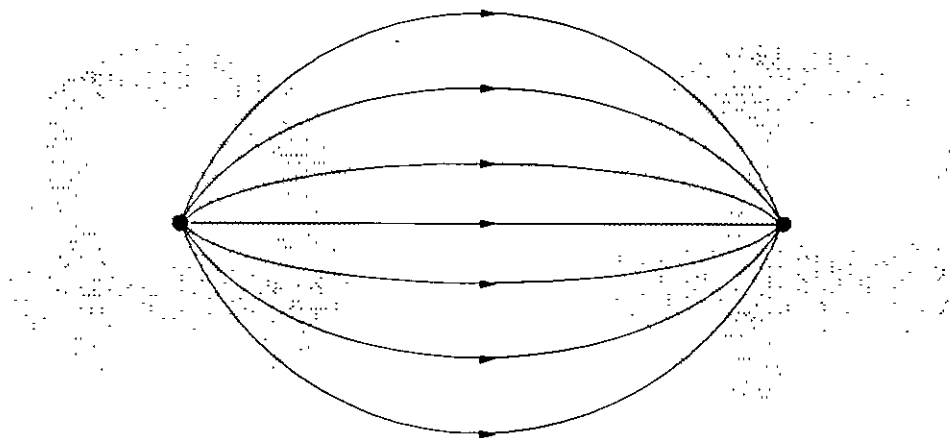
3. El número de líneas que se dibuja es proporcional a la magnitud del campo, es decir, son más cercanas entre sí en las regiones donde el campo es más intenso.
4. No se cruzan entre sí.



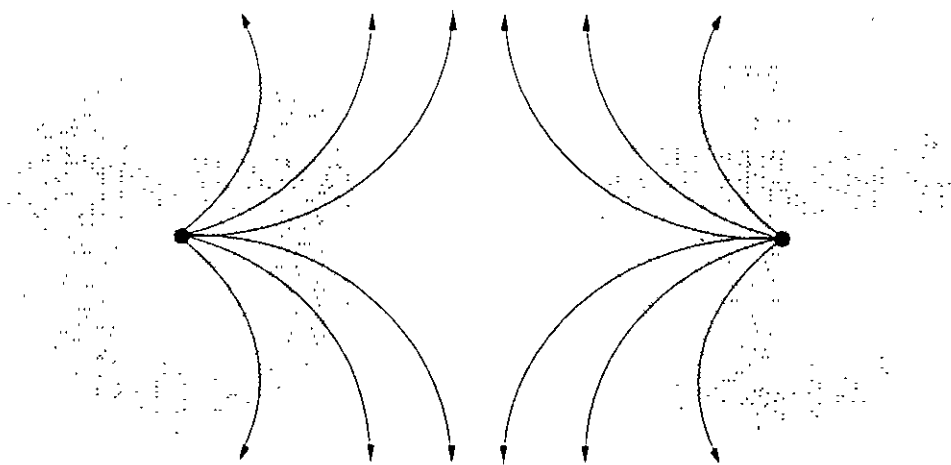
Campo eléctrico de una carga positiva individual



Campo eléctrico de una carga negativa individual.



Campo eléctrico entre dos cargas eléctricas diferentes.

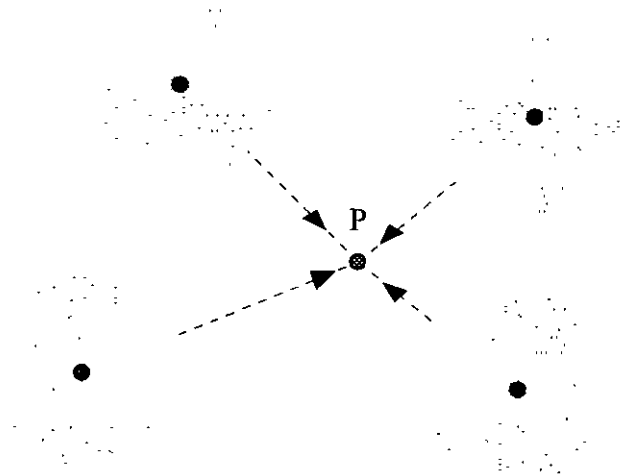


Campo eléctrico entre dos cargas eléctricas iguales

Una pequeña carga de prueba situada en cualquier punto dentro del campo y que esté libre para moverse, se acelerará en la dirección de la línea de fuerza que pasa por el punto. Una similitud ocurre en el flujo de un fluido con un campo que corresponde a la distribución de velocidades, si se coloca una pequeña partícula con masa ideal, ésta se movería describiendo el comportamiento de las líneas de fuerza.

**Campo eléctrico en un punto "P" debido a una distribución discreta de cargas.**

El campo que actúa sobre un punto es la resultante de la acción que ejerce el campo eléctrico de cada carga sobre ese punto, luego se efectúa la suma vectorial para encontrar la resultante. El campo generado por una carga no afecta a la partícula misma.



$$\vec{E}_p = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{r_i^2} \hat{a}_{r_i}$$

**Campo eléctrico debido a una distribución continua de carga.**

En este caso la carga eléctrica se encuentra uniformemente distribuida en la región correspondiente.

**Campo eléctrico debido a una distribución lineal de carga.**

El campo eléctrico en el punto P está dado por la suma de los efectos del campo diferencial de cada diferencial de carga

$$\vec{E}_p = \sum \Delta \vec{E}_p$$

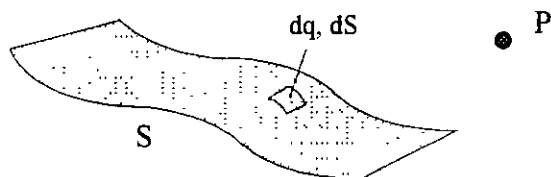
en el límite se tiene que:

$$\Delta \vec{E}_p = d\vec{E}_p$$



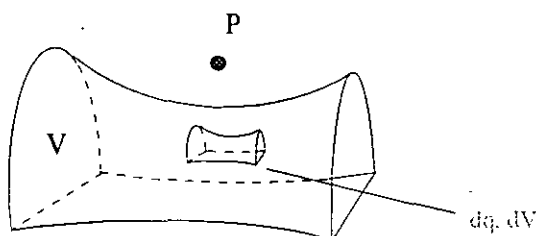
$$\vec{E}_p = \int \vec{dE}_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho_l}{r_i^2} dl \hat{a}_{r_i}$$

**Campo eléctrico en un punto "P" debido a una superficie de carga.**



$$\vec{E}_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\rho_s}{r_i^2} dS \hat{a}_r$$

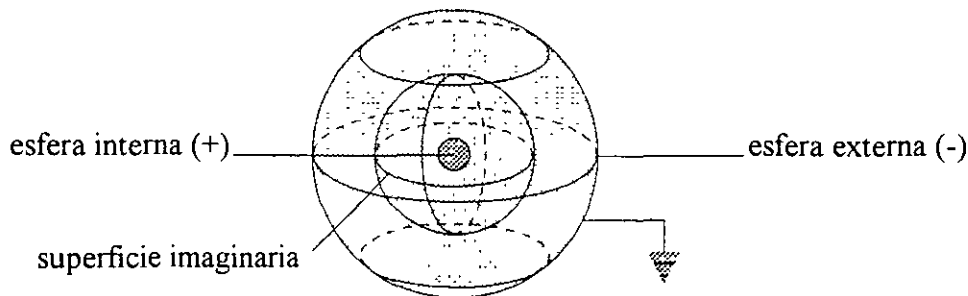
**Campo eléctrico en un punto "P" debido a un volumen de carga.**



$$\vec{E}_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho}{r_i^2} dV \hat{a}_r$$

**Flujo Eléctrico.**

Faraday concluyó que al colocar dos esferas concéntricas, cargando positivamente (+) la esfera interna, existe un flujo de cargas de la esfera interior a la exterior, el cual es independiente del medio y sólo depende de la carga Q, es decir, la esfera exterior adquiere carga negativa (-). Por definición, el flujo eléctrico se origina en las cargas positivas y termina en las cargas negativas y es igual a la magnitud de carga que los produce, por lo que el flujo eléctrico es igual a la Carga. El flujo es una propiedad de cualquier campo vectorial, y atraviesa una superficie hipotética, la cual puede ser abierta o cerrada. En un campo eléctrico E, el flujo eléctrico se mide por el número de líneas de fuerza que pasa a través de una superficie hipotética seleccionada convenientemente.



**Densidad de flujo eléctrico "D".**

Si alrededor de un punto P, las líneas de flujo tienen la dirección de un vector unitario  $\hat{a}_n$  y si la cantidad de flujo  $d\psi$  cruza el área diferencial  $ds$ , la densidad de flujo eléctrico en P queda definida por.

$$\bar{D} = \frac{d\psi}{dS} \hat{a}_n \quad \text{ó} \quad \bar{D} = \frac{\psi}{A} = \frac{Q}{A} \left[ \frac{C}{m^2} \right]$$

Para una esfera, se tiene:

$$\bar{D} = \frac{Q}{4\pi r^2} \hat{a}_r \left[ \frac{C}{m^2} \right]$$

Nótese que si "D" no depende del medio, entonces "D" se relaciona con "E" por  $D = \epsilon_0 E$  para el caso del espacio libre; esto es válido únicamente en los medios isotrópicos, lineales y homogéneos. "D" es la misma que la densidad superficial de carga sobre la esfera, como si la carga Q estuviese distribuida uniformemente sobre la esfera.

**LEY DE GAUSS**

Ésta expresa que el flujo eléctrico a través de cualquier superficie cerrada es igual a la carga encerrada por la superficie.

$$Q = \oint_S \bar{D} \cdot d\bar{S} = \epsilon_0 \oint_S \bar{E} \cdot d\bar{S}$$

"Q" es la carga total encerrada por la superficie "S".

La Ley de Gauss facilita la solución de problemas que involucran campo eléctrico. Para aplicarla se debe usar superficies "simétricas" al campo, es decir:

1.  $\bar{E} \perp d\bar{S} \Rightarrow \bar{E} \cdot d\bar{S} = 0$
2.  $\bar{E} \parallel d\bar{S} \Rightarrow \bar{E} \cdot d\bar{S} = |\bar{E}| |d\bar{S}| \cos(0^\circ) = |\bar{E}| |d\bar{S}|$
3.  $\bar{E} \angle 180^\circ d\bar{S} \Rightarrow \bar{E} \cdot d\bar{S} = |\bar{E}| |d\bar{S}| \cos(180^\circ) = -|\bar{E}| |d\bar{S}|$

En las expresiones (2) y (3) E generalmente es constante en todo el ds.

Para campos estáticos la Ley de Gauss permite comprobar que la carga total Q en un conductor se distribuye en toda la superficie.

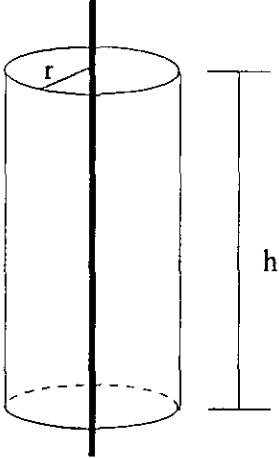
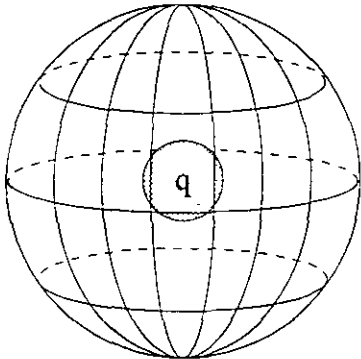


**Resultados prácticos de la evaluación de la Ley de Gauss**

1. Facilidad de evaluar el campo eléctrico E en superficies cerradas, buscando una superficie lo más simétrica al campo E para que  $E \parallel dS = ES$ , y  $E \perp dS = 0$ .
2. La carga neta de un conductor residen en la superficie.

El campo E dentro de la superficie del conductor se anula, es decir, que el único lugar donde puede estar la carga es en la superficie del conductor. En un conductor, los portadores de carga tienen la libertad de moverse respondiendo a campos eléctricos infinitesimales, los electrones se mueven hasta que hallen posiciones en las que no experimenten fuerza neta. En reposo, el interior del conductor debe ser una región desprovista de campo eléctrico. En condiciones estáticas el campo eléctrico en el interior de un conductor se anula.

**Aplicaciones de la Ley de Gauss**

$\epsilon_0 \oint E \cdot dS = q$ $\epsilon_0 E (2\pi r h) = \lambda h$ $\bar{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{a}_r$		$\epsilon_0 \oint E \cdot dS = q$ $\epsilon_0 E (4\pi r^2) = q$ $\bar{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{a}_r$	
Línea de Carga		Esfera de Carga	

**Divergencia.**

Para que un campo tenga divergencia, es condición necesaria pero no suficiente que el campo varíe en magnitud a lo largo de una línea que tenga la misma dirección de dicho campo. Se puede comprobar que el campo eléctrico tiene divergencia:

de la definición de densidad de carga  $\rho = \frac{dq}{dV} \Rightarrow q = \int_V \rho dV$

por ley de Gauss

$$q_{\text{encerrada}} = \int_V \rho dV = \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \epsilon_0 \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

por el teorema de la divergencia

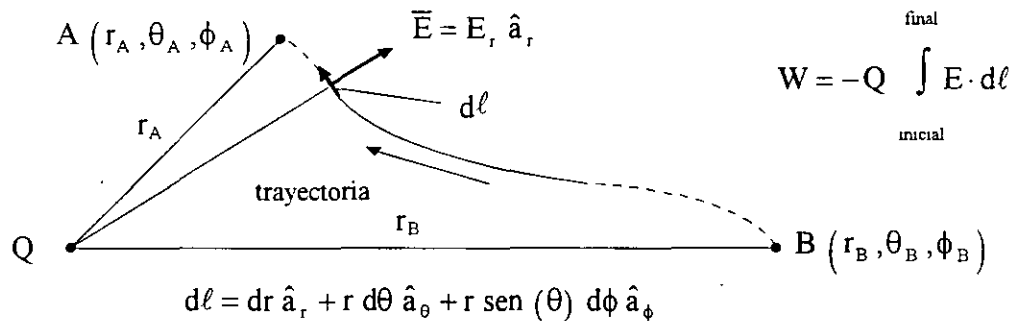
$$\int_V \rho dV = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{D} dV = \epsilon_0 \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV$$

entonces, para un volumen arbitrario

$$\rho = \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \vec{\nabla} \cdot \epsilon_0 \vec{E}$$

### Potencial Eléctrico, Diferencia de Potencial o Voltaje.

Si el rotacional de un vector se anula, quiere decir que el vector puede expresarse como el gradiente de un escalar. Para mover una carga eléctrica dentro de un campo eléctrico  $E$  se requiere una fuerza, la cual va ejercer un trabajo sobre la carga:



El potencial eléctrico, se define entonces, como el trabajo por unidad de carga que hay que realizar sobre una carga puntual para moverla en un campo eléctrico.

**Diferencia de Potencial:** es el trabajo o energía por unidad de carga que se requiere para transportar una carga de prueba de B a A en el campo donde  $V_A > V_B$ .

### Potencial absoluto de un punto dado, debido a una carga Q.

Cuando se realiza la integral de línea no importa la trayectoria de integración, esto quiere decir que la diferencia de potencial está determinada únicamente por la diferencia de potencial entre los puntos en consideración

Para dos puntos en una superficie equipotencial la diferencia de potencial es cero, es decir que el campo es conservativo; ésta es una propiedad del campo electrostático. El signo (-) de la integral significa que el aumento de potencial es siempre en dirección opuesta al campo  $E$ .

Por el principio de conservación de energía se cumple:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = 0$$

### Potencial $V_p$ debido a distribuciones de carga.

Para "n" cargas puntuales discretas: el potencial en un punto "P" es igual a la suma algebraica de los potenciales absolutos de cada carga en el punto P debidos a cada carga.

$$V_p = \frac{1}{4\pi\epsilon} \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{r_i}$$

Para una línea de carga:

$$V_p = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{\ell} \frac{\rho_{\ell}}{r} d\ell$$

Para una superficie de carga:

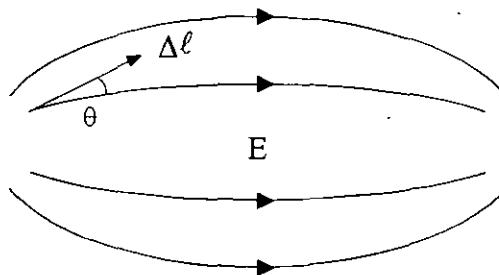
$$V_p = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_s \frac{\rho_s}{r} dS$$

Para un volumen de carga.

$$V_p = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_v \frac{\rho}{r} dV$$

### Gradiente de Potencial V.

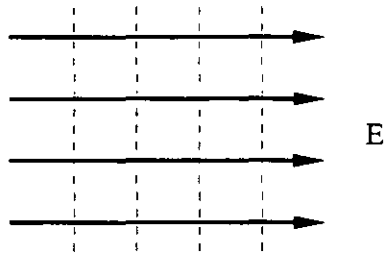
La dirección del gradiente es opuesta al campo E, es decir, ocurre un aumento de potencial cuando se mueve una carga "q" en contra del campo E.



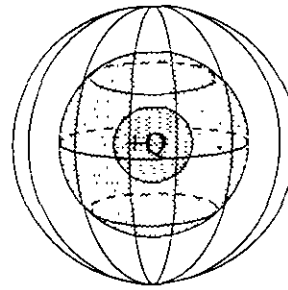
$$\mathbf{E} = -\nabla V$$

### Líneas y Superficies Equipotenciales.

Las líneas y superficies equipotenciales son el lugar geométrico de todos aquellos puntos que tienen el mismo potencial eléctrico, es decir, el potencial se mantiene constante. El trabajo sobre una carga "q" para desplazarla sobre una superficie equipotencial es cero.



líneas equipotenciales



superficies equipotenciales

### Propiedades de los Campos Eléctricos, Mapas de Campo y Voltaje.

1. Las líneas de E y de potencial se intersecan en ángulos de 90°, excepto en puntos singulares, como una esquina.
2. La superficie de un conductor es una superficie equipotencial  $V = \text{cte}$ .
3. El campo corta perpendicularmente una superficie conductora o equipotencial.
4. En un campo uniforme el potencial varía linealmente con la distancia.
5. Un tubo de flujo es paralelo al campo E (línea de campo) y el punto de flujo eléctrico es constante en cualquier sección transversal de un tubo de flujo.
6. Un tubo de flujo inicia en +Q y termina en -Q.

### Capacitor o Condensador.

Es un dispositivo eléctrico que almacena energía. Por definición, la capacitancia está dada por la carga entre la unidad de voltaje

$$C = \frac{\Delta Q}{V}$$

Esto implica que se requiere un trabajo para cargar desde carga cero hasta una carga Q a un condensador. La energía se almacena en el volumen de las placas que almacena el campo E, sin embargo, no es necesario que exista un medio material para que la energía quede almacenada por el campo E, por lo que existe energía aun en el vacío, si se coloca un dieléctrico la energía aumenta en proporción a la permitividad del material

### Corriente Eléctrica y Densidad de Corriente.

Si en una superficie cerrada "S" se encuentra una carga "Q" que disminuye con el tiempo, esta disminución estará relacionada con la existencia de una corriente que fluye desde el volumen acotado por la superficie.

$$I = \oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{dQ_i}{dt}$$

Donde la corriente está relacionada a la densidad de corriente como  $J = I/A$ , por lo que se puede llegar a la "ecuación de continuidad":

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Si la densidad de carga no varía con el tiempo, la integral de superficie es igual a cero, lo que determina el carácter cerrado de las líneas de densidad de corriente.

En un campo eléctrico, toda carga "q" experimentará una fuerza  $F = qE$ , que implica una aceleración  $a = F/m$  y una velocidad  $v = at$ , entonces se obtiene:

$$v = \frac{F}{m} t = \frac{qE}{m} t$$

El resultado anterior implica que la velocidad aumentará indefinidamente conforme transcurra el tiempo, sin embargo, las cargas cuando se mueven experimentan choques arbitrarios perdiendo parte de su energía y ocasionando cambios aleatorios en la dirección de su movimiento. En un medio homogéneo el efecto neto de los choques es limitar a la partícula cargada a una velocidad promedio constante que se llama "velocidad de arrastre o velocidad de deriva" ( $v_d$ ), que tiene la misma dirección del campo  $E$ , y se relaciona con éste por una constante llamada "movilidad del electrón"  $\mu_e$ , esto implica que.

$$v_d = \mu_e E \quad \left[ \frac{m}{s} \right]$$

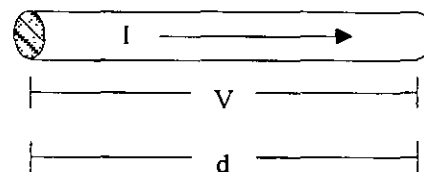
donde  $I = v_d \cdot \rho$  y  $A = \frac{Q}{s}$ , entonces  $J = \frac{I}{A} = v_d \cdot \rho$ .

### Resistencia Eléctrica y Ley de Ohm.

En 1826, Georg Simon Ohm realizó experimentos con las relaciones entre la tensión o voltaje  $V$  sobre un conductor y la corriente  $I$  que pasa por él, en términos de un parámetro característico del conductor, este parámetro se denomina resistencia  $R$ , que se define como la razón de la tensión o voltaje  $V$  aplicado al conductor a la corriente  $I$  que pasa por él.

$$R = \frac{V}{I} \quad \text{ó} \quad V = RI$$

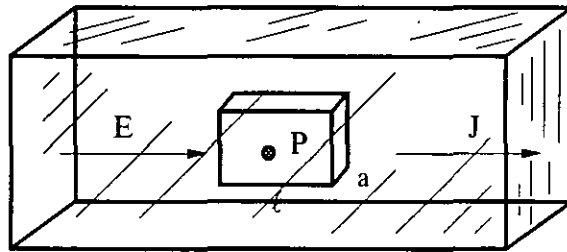
$R$  depende de las dimensiones del conductor y del material del mismo.



Se supone que la resistencia  $R$  es independiente de la corriente  $I$ ; es decir, la resistencia  $R$  es una constante. Recíprocamente, se dice que una resistencia así, obedece la ley de Ohm. Existen, sin embargo, elementos de circuito, como los rectificadores, cuya resistencia no es una constante. Se dice que tales elementos son no lineales y se requiere un diagrama  $V$  contra  $I$  para determinar su comportamiento. Aún, se define la resistencia  $R$  por medio de la ecuación anterior, pero no es independiente de la corriente  $I$  y la resistencia no obedece la ley de Ohm.

### Ley de Ohm en un punto.

Considérese un bloque de material conductor y constrúyase una pequeña celda cúbica imaginaria de longitud  $\ell$  y sección transversal "a" alrededor de un punto  $P$  en el interior del bloque siendo  $a$  normal a  $J$ , como se indica en la siguiente figura.



Entonces, al aplicar la ley de Ohm a esta celda se tiene  $V = RI$  donde  $V$  es la diferencia de potencial entre los extremos de la celda. Pero  $V = E\ell$  e  $I = J \cdot a$ ; así que  $E\ell = J \cdot a \cdot R$ , de lo que se obtiene:

$$J = \frac{\ell}{aR} E$$

Haciendo que la celda sea tan pequeña como se quiera, se puede aplicar esta relación en el punto  $P$ , y se escribe.

$$J = \sigma E$$

Esta ecuación es la ley de Ohm en un punto y relaciona la densidad de corriente " $J$ " en un punto con el campo total " $E$ " en el punto y la conductividad  $\sigma$  del material.

En este análisis se ha supuesto que el material conductor es homogéneo (el mismo material en todo el volumen), es isotrópico (la resistencia entre las caras opuestas del cubo es independiente del par de caras que se escoja), y que es lineal (la resistencia es independiente de la corriente).

De la expresión anterior se tiene que la conductividad es la relación de la densidad de corriente  $J$  al campo aplicado  $E$ .

$$\sigma = \frac{J}{E} \quad \left( \frac{\text{mhos}}{\text{m}} \right)$$

Pero, anteriormente se vio que la densidad de corriente es el producto de la velocidad de deriva o de arrastre  $v_d$  y la densidad de carga  $\rho$ .

$$J = \rho \cdot v_d$$

Entonces, la conductividad queda expresada como:

$$\sigma = \rho \frac{v_d}{E} = \rho \cdot \mu_e \quad \left[ \frac{\text{mhos}}{\text{m}} \right]$$

$\rho$  = densidad de carga,  $\text{C m}^{-3}$

$\mu_e$  = movilidad,  $\text{m}^2 \text{V}^{-1} \text{s}^{-1}$

### Relaciones de Frontera para Campos Eléctricos Estáticos

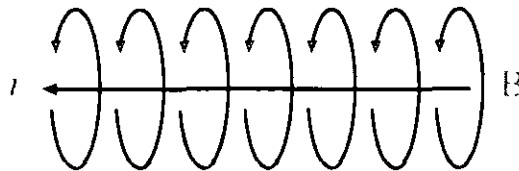
	Componente de Campo	Condiciones de Frontera	Condición
(1)	Tangencial	$E_{t_1} = E_{t_2}$	Dos medios cualesquiera.
(2)	Tangencial	$E_{t_1} = 0$	El medio 1 es un dieléctrico y el medio 2 es un conductor.
(3)	Normal	$D_{n_1} - D_{n_2} = \rho_s$	Dos medios cualesquiera con carga en la frontera
(4)	Normal	$D_{n_1} = D_{n_2}$	Dos medios cualesquiera sin carga en la frontera.
(5)	Normal	$D_{n_1} = \rho_s$	El medio 1 es un dieléctrico y el medio 2 es un conductor con cargas superficial.

Las relaciones (1), (3) y (4) se aplican en la presencia de corrientes y también para campos que varían con el tiempo.

Las relaciones (2) y (5) también se aplican para situaciones que cambian con el tiempo puesto que  $\sigma_2 \rightarrow 0$ .

### CAMPOS MAGNÉTICOS ESTACIONARIOS

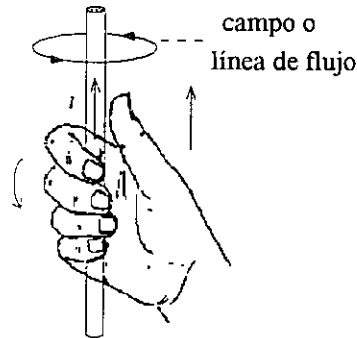
Una carga móvil constituye una corriente eléctrica I, donde I genera un Campo Magnético B, que forma espiras circulares concéntricas y cerradas al rededor del conductor, la dirección del campo B está dada por la ley de la mano derecha. Las líneas de campo magnético siempre son cerradas, por lo que no existen polos magnéticos positivos o negativos independientes.



#### Fuerza de un Campo "B" sobre un conductor.

Un conductor eléctrico con una corriente I, en un campo magnético B, experimenta una fuerza magnética  $F_m$  dada por la siguiente expresión:

$$F_m = \ell \, i \times B$$



$\ell$  = longitudde l conductor , m

$i$  = corriente en el conductor, A

$B$  = densidad de flujo magnético, Teslas ó Web/m<sup>2</sup>

La fuerza magnética ( $F_m$ ) describe el principio básico de funcionamiento de los motores eléctricos.

#### Permeabilidad.

Es una constante que relaciona la densidad de flujo magnético "B" con la intensidad de campo magnético "H".

$$B = \mu H$$

Para el vacío se tiene:

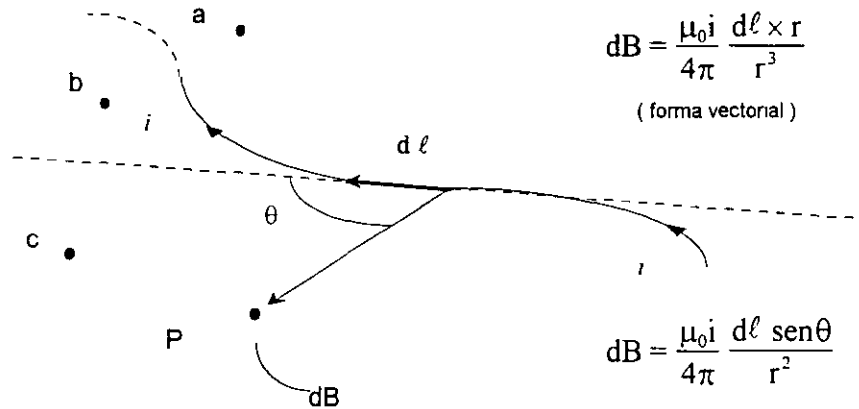
$$B = \mu_0 H$$

donde  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \left[ \frac{H}{m} \right]$



### Ley de Biot-Savart.

Considere la siguiente figura. Si se tiene un elemento diferencial de corriente  $i \cdot d\ell$ , para calcular el campo magnético diferencial  $dB$  en un punto  $P$  asociado al elemento de corriente se tiene:



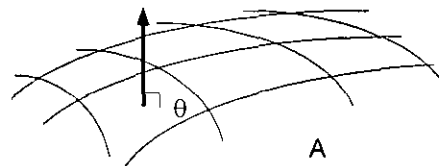
donde la dirección del elemento diferencial de densidad de campo magnético ( $dB$ ) está dada por el producto cruz  $d\ell \times r$ . Esta ley sirve para el cálculo de  $B$  en cualquier distribución arbitraria de corriente.

### Flujo Magnético y Densidad de Flujo Magnético.

Considerando la siguiente figura, se tiene un flujo continuo, es decir, no existen fuentes ni sumideros, y las líneas de flujo magnético son perpendiculares al área  $A$ . Entonces, el flujo magnético es.

$$B = \frac{\phi}{A}$$

$$\phi = |A| |B| \cos(90^\circ) = A \cdot B$$



### Fuerza de Lorentz.

La fuerza sobre una partícula en movimiento debida a campos eléctricos y magnéticos combinados se obtienen fácilmente por superposición.

$$F = q (E + v \times B)$$

Esta ecuación se conoce como la ecuación de la fuerza de Lorentz, que junto con la segunda ley de Newton es básica para la determinación de los cálculos del movimiento de partículas aceleradas en un Tubo de Rayos Catódicos CRT, las órbitas del electrón en el magnetrón, las trayectorias del protón en el ciclotrón, las características del plasma en el generador magnetohidrodinámico (MHD) o en general, en el movimiento de la partícula cargada en campos eléctricos y magnéticos combinados.

### Ley de Ampère.

La densidad de flujo B a una distancia R a lo largo de un conductor recto está dada por:

$$B = \frac{\mu I}{2\pi R}$$

Donde I es la corriente en el conductor y  $\mu$  es la permeabilidad del medio.

Si B es integrado alrededor de una trayectoria cerrada de radio R encerrando un conductor, entonces se tiene:

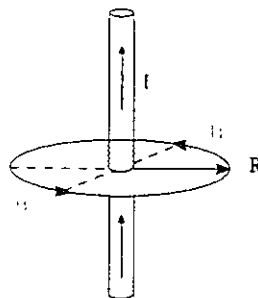
$$\oint B \cdot d\ell = \frac{\mu I}{2\pi R} \oint d\ell = \frac{\mu I}{2\pi R} 2\pi R = \mu I$$

$$\text{si se define } H = \frac{B}{\mu} \text{ entonces } \oint H \cdot d\ell = I$$

Esta ecuación es conocida como ley de Ampère o ley circuital de Ampère, y expresada en palabras dice:

"La integral de línea de H sobre cualquier trayectoria cerrada es igual a la corriente constante encerrada por dicha trayectoria"

Es obvio que los vectores H y B tienen la misma dirección, esto es verdad para todo medio isotrópico. Esta integral puede ser independiente del medio.



**Para campos Variantes en el Tiempo.**

a) En forma integral se tiene.

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\ell = \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} + \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

La curva C encierra a la superficie S.

b) Forma diferencial aplicando el Teorema de Stokes.

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\ell = \int_S (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S}$$

por ser la superficie S arbitraria (pero estática), y factorizando del lado derecho de la igualdad, o aplicando la linealidad de la integral, entonces se tiene en ambos lados de la ecuación una integral de superficie, por lo que se deduce que las funciones a integrar son las mismas.

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}$$

Nótese que las fuentes para H son las siguientes

Corriente de conducción (Ley de Ohm en forma puntual)

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_c = \sigma \mathbf{E} \quad \left[ \frac{\text{Amp}}{\text{m}^2} \right]$$

Corriente de desplazamiento.

$$\mathbf{J}_d = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad \left[ \frac{\text{Amp}}{\text{m}^2} \right]$$

**LEY DE FARADAY**

Un campo magnético que varía con el tiempo produce una fuerza electromotriz (fem) que puede producir una corriente en un circuito cerrado. Una fem no es otra cosa que un voltaje procedente de los conductores que se mueven en un campo magnético o campos magnéticos variables, entonces:

$$\text{fem} = - \frac{d\Psi}{dt} \quad \text{volts} \quad (1)$$

Esta ecuación implica una trayectoria cerrada (aunque no necesariamente una trayectoria conductora cerrada), por ejemplo, la trayectoria cerrada podría incluir un capacitor o podría ser una línea puramente imaginaria en el espacio. El flujo magnético es el flujo que cruza a través de cualquier superficie cuyo perímetro sea una trayectoria cerrada y  $d\Psi/dt$  es la variación del flujo con respecto al tiempo. Un valor diferente de cero de  $d\Psi/dt$  puede ser el resultado de cualquiera de las siguientes situaciones:

- a) Un flujo que cambia con el tiempo circundando una trayectoria cerrada fija.
- b) El movimiento relativo entre un flujo estable y una trayectoria cerrada.
- c) Una combinación de los dos casos anteriores.

El signo menos indica que la fem tiene una dirección tal que produce una corriente, cuyo flujo, si se suma al flujo original, reduciría la magnitud de la fem. Este enunciado que establece que el voltaje inducido actúa para producir un flujo opuesto es conocido como la ley de Lenz. Si la trayectoria cerrada es un filamento conductor enrollado de  $N$  vueltas, generalmente es suficientemente preciso considerar las  $N$  vueltas como coincidentes y establecer entonces:

$$\text{fem} = -N \frac{d\Psi}{dt}$$

$\Psi$  es el flujo que pasa a través de cualquiera de las  $N$  trayectorias coincidentes.

La fem es un escalar y se define como el voltaje a lo largo de una trayectoria cerrada específica, esto es:

$$V = \text{fem} = \oint \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell}$$

Al sustituir  $\Psi$  en (1) por la integral de superficie de  $B$ , se tiene:

$$\text{fem} = \oint \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = - \frac{d}{dt} \int_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$$

Los dedos de la mano derecha indican la dirección de la trayectoria cerrada y el pulgar la dirección  $ds$ . Una densidad de flujo  $B$  en la dirección de  $ds$  que aumenta con el tiempo produce un valor promedio de  $E$  que es opuesto a la dirección positiva en que se recorre la trayectoria cerrada.

### Ley de Lenz.

Expresa el principio de conservación de la energía, y dice que el voltaje inducido por un flujo de campo  $B$  variable tiene una polaridad tal que la corriente establecida en una trayectoria cerrada da

lugar a un flujo que se opone al cambio del flujo del campo  $B$ . En un conductor que se mueve a través de un campo estacionario  $B$ , la polaridad de la Ley de Lenz siempre será tal que el conductor experimenta fuerzas magnéticas que se oponen al movimiento.

### El Rotacional del Campo $H$ .

Es una relación puntual que puede considerarse como una extensión de la ley de Ampère aplicada en un punto. Integrando en la periferia de un área  $A$  se tiene:

$$(\text{rot } H)_N = \lim_{\Delta S_N \rightarrow 0} \frac{\oint H \cdot d\ell}{\Delta S_N}$$

expresando en forma de determinante:

$$\text{rot } H = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix}$$

y en términos del operador vectorial se expresa como  $\text{rot } H = \nabla \times H$ .

### Forma diferencial de la Ley de Faraday.

Partiendo de la forma integral

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\ell = - \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$$

y utilizando el teorema de Stokes

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\ell = \int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{s}$$

entonces, para una superficie fija

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{s} = - \int_S \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$$

si  $S$  es arbitraria y por igualdad de integrales

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}$$

### Condición necesaria pero no suficiente para que exista rotacional.

El campo debe de variar en magnitud a lo largo de una línea normal a la dirección del campo.

La divergencia del rotacional de una función vectorial es cero si la divergencia de la función vectorial es cero, entonces la función vectorial debe de ser el rotacional de alguna otra función vectorial.

El rotacional del gradiente de una función escalar es cero cuando cualquier función vectorial que sea el gradiente de una función escalar no tiene rotacional.

### Ley de Continuidad de Flujo Magnético.

#### a) Forma integral.

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S \mu_0 \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

La ecuación expresa lo siguiente:

"las líneas de flujo magnético entran y salen en igual número a una superficie cerrada".

A diferencia de las líneas de campo D, que terminan en cargas eléctricas, las del campo B son continuas y forman curvas cerradas.

#### b) Forma diferencial aplicando el teorema de la divergencia.

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{B}) dV = 0$$

y como V es arbitrario:

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{B}) = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

Esto indica que el flujo magnético que entra en un punto es igual al que sale de él, es decir, el flujo magnético es continuo y no existen fuentes ni sumideros, desde el punto de vista de la divergencia.

De las ecuaciones de Maxwell, se deduce la ecuación de la continuidad:

De la Ley de Gauss.

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

De la Ley de Ampère:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}_c$$

Ya que la divergencia del rotacional es cero, se concluye que:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

o bien:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = \lim_{V_r \rightarrow 0} \frac{1}{V} \int_{S_r} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

La ecuación de continuidad manifiesta que:

"El cambio en la densidad de carga es igual al flujo neto de corriente".

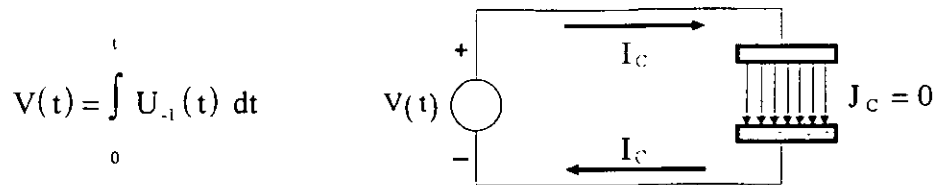
Es decir, la corriente que sale de un pequeño volumen por unidad de volumen es igual a la razón de cambio de la carga que decrece con el tiempo por unidad de volumen en cada punto.

Nota: Cuando se procede en forma rigurosa, primero se da la demostración matemática de los Teoremas de Gauss y Stokes, y luego su interpretación física.

Si bien  $-\partial \mathbf{B} / \partial t$  es una fuente para el campo eléctrico  $\mathbf{E}$  y  $\partial \mathbf{D} / \partial t$  es una fuente para el campo  $\mathbf{H}$ , las fuentes primarias de los campos electromagnéticos son  $\mathbf{J}$  y  $\rho$ . Para campos que varían con el tiempo es posible derivar todos los campos electromagnéticos que varían con el tiempo exclusivamente a partir del conocimiento de  $\mathbf{J}$ , ya que la ecuación de continuidad relaciona a  $\rho$  y  $\mathbf{J}$ .

### Corriente de Desplazamiento.

Al suministrar corriente alterna a las placas de un condensador, por el circuito del condensador pasará una corriente que creará un campo magnético de la misma manera que una corriente de conducción. Este fue uno de los grandes méritos de Maxwell de haber introducido este concepto además de la corriente de conducción. La corriente de desplazamiento permite mantener la noción de que la corriente es continua en las placas de un capacitor, la corriente de conducción no es continua a través de la separación de las placas debido a que no existe transporte de carga a través de ellas, esto implica que existe una corriente  $I_d = I$  en ese espacio del dieléctrico para que se satisfaga el principio de continuidad. Es imposible imaginarse la corriente continua sin un campo  $\mathbf{H}$ . La corriente de desplazamiento en el dieléctrico aparece como resultado del proceso de polarización, es decir, que al agregar un dieléctrico entre las placas de un condensador, en éste aparecerá una corriente de desplazamiento capaz de crear un campo magnético. Experimentalmente se demuestra que el campo  $\mathbf{B}$  también se genera en el caso que entre las placas exista el vacío, en este caso la corriente  $I_d$  la crean los fotones. Considere una fuente de voltaje que genera una rampa que se aplica a un capacitor de placas paralelas.

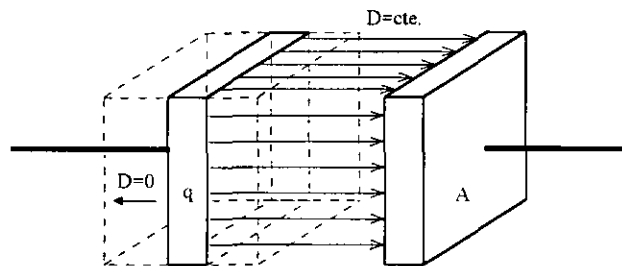


$I_c$  es la corriente de conducción y es nula en el capacitor, por lo que al aplicar la Ley de Corrientes de Kirchhoff no se cumpliría

La corriente de conducción es  $I_c = \frac{dq}{dt}$

La corriente de desplazamiento es  $I_d = \int_s \frac{\partial D}{\partial t} \cdot dS = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{q}{A} \right) A = I_c$

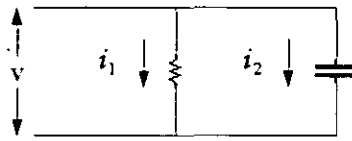
Esto es, en el aislante la corriente de conducción se continua con la corriente de desplazamiento, y así no se viola la Ley de Kirchhoff. Se obtuvo  $D$  aplicando la Ley de Gauss con una superficie que encierra a una de las placas del capacitor.



La Corriente de Desplazamiento es una de las grandes contribuciones de Maxwell a la Teoría Electromagnética. Ésta nos describe que la circulación de la intensidad de campo magnético  $H$  por un contorno arbitrario  $\ell$  es igual a la corriente total que pasa por cualquier superficie que se apoya en dicho contorno. La corriente de desplazamiento permite tener la noción de continuidad de la corriente, con lo cual la validez de ley de corrientes de Kirchhoff no se altera. El concepto de corriente de desplazamiento o densidad de corriente de desplazamiento fue introducido por James Clerk Maxwell para explicar la producción de campos magnéticos en el espacio vacío, en el que la corriente de conducción es cero y los campos magnéticos se deben exclusivamente a corrientes de desplazamiento.

**Ejemplo.** Considere la siguiente figura en la que se aplica una tensión a un resistor y a un capacitor en paralelo.





La naturaleza del flujo de corriente a través del resistor es diferente del flujo del capacitor. Si se tiene una tensión constante, se tendrá una corriente constante a través del resistor, y sólo se tendrá corriente a través del capacitor si se tiene una tensión que esté cambiando. Para los elementos de la figura se tiene:

$$\begin{array}{l} \text{corriente para el resistor} \quad i_1 = \frac{V}{R} \quad \text{corriente para el capacitor} \\ i_2 = \frac{dQ}{dt} = C \frac{dV}{dt} \end{array}$$

La carga instantánea  $Q$  en el capacitor está dada por  $Q = CV$ .

La corriente a través del resistor es una *corriente de conducción*, mientras que la corriente "entre terminales" del capacitor puede llamarse *corriente de desplazamiento*. Aunque la corriente no fluye por el capacitor, el efecto hacia el exterior es como si lo hiciese, puesto que la misma corriente que sale por una de las placas es la misma que fluye hacia adentro por la otra placa.

Dentro de cada elemento el campo eléctrico  $E$  es igual a la tensión  $V$  entre terminales del elemento, dividido entre su longitud  $d$ , es decir,  $E = V/d$ . De acuerdo a la ley de Ohm en un punto

( $J = \sigma E$ ) la densidad de corriente  $J_1$  en el interior del resistor es igual al producto del campo eléctrico y la conductividad  $\sigma$  del medio dentro del elemento resistor, que también es igual a  $i_1$  dividida entre el área de la sección transversal  $A$ , esto es:

$$J_1 = E\sigma = \frac{i_1}{A} \quad \text{dimensionalmente} \quad \frac{\text{Amperes}}{\text{metros}^2} = \frac{\text{volts}}{\text{metro}} \times \frac{\text{mhos}}{\text{metro}}$$

Para el capacitor se tiene que su capacitancia es  $C = \epsilon A/d$ , donde  $A$  es el área de las placas y  $d$  es el espaciado entre ellas. Sustituyendo este valor para  $C$ , y  $V = Ed$  en  $i_2$  se tiene:

$$i_2 = \frac{\epsilon A d}{d} \frac{dE}{dt} = \epsilon A \frac{dE}{dt}$$

Al dividir entre el área  $A$  se tiene la relación en que la densidad de corriente  $J_2$ , dentro del capacitor, es igual a la permitividad del medio no conductor que llena el elemento capacitor multiplicada por la rapidez de cambio del campo eléctrico, esto es:

$$\frac{i_2}{A} = \epsilon \frac{dE}{dt} = J_2 \quad \text{dimensionalmente} \quad \frac{\text{Amperes}}{\text{metros}^2} = \frac{\text{farads}}{\text{metro}} \times \frac{\text{volt / metro}}{\text{segundo}}$$

$$\text{Recordando que } D = \epsilon E \text{ la expresión anterior queda } J_2 = \frac{dD}{dt}$$

Para este ejemplo, se tiene que  $J_1$  es una densidad de corriente de conducción  $J_{\text{cond}}$ , mientras que  $J_2$  es una densidad de corriente de desplazamiento  $J_{\text{desp}}$ ; como la densidad de corriente  $\mathbf{J}$ , el desplazamiento eléctrico  $\mathbf{D}$  y la intensidad de campo eléctrico  $\mathbf{E}$  realmente son vectores espaciales con la misma dirección en medios isotrópicos, entonces  $J_1$  y  $J_2$  pueden expresarse en forma más general, como se indica a continuación.

$$\mathbf{J}_{\text{cond}} = \sigma \mathbf{E} \quad \text{y} \quad \mathbf{J}_{\text{desp}} = \epsilon \frac{d\mathbf{E}}{dt} = \frac{d\mathbf{D}}{dt}$$

Si en vez de tenerse dos elementos separados en paralelo, se tiene un solo elemento con resistencia y capacitancia, se tiene entonces un capacitor con un dieléctrico conductor, de modo que se presenta tanto corriente de conducción como corriente de desplazamiento; se tiene entonces que la corriente total está dada por:

$$\mathbf{J}_{\text{total}} = \mathbf{J}_{\text{cond}} + \mathbf{J}_{\text{desp}}$$

ECUACIONES DE MAXWELL EN FORMA INTEGRAL.

Caso	Ley De Ampère	Ley De Faraday	Ley De Gauss	
	fmm, [A]	fem, [V]	Flujo eléctrico, [C]	Flujo magnético, [Wb]
General	$fmm = \oint H \cdot d\ell = \int_s \left( J + \frac{\partial D}{\partial t} \right) \cdot dS = I_{total}$	$fem = \oint E \cdot d\ell = - \int_s \frac{\partial B}{\partial t} \cdot dS$	$\psi = \oint_s D \cdot dS = \int_v \rho \, dV$	$\psi_m = \oint_s B \cdot dS = 0$
Espacio Libre	$fmm = \oint H \cdot d\ell = \int_s \frac{\partial D}{\partial t} \cdot dS = I_{dosp}$	$fem = \oint E \cdot d\ell = - \int_s \frac{\partial B}{\partial t} \cdot dS$	$\psi = \oint_s D \cdot dS = 0$	$\psi_m = \oint_s B \cdot dS = 0$
Variación Armónica	$fmm = \oint H \cdot d\ell = (\sigma + j\omega\epsilon) \int_s E \cdot dS = I_{total}$	$fem = \oint E \cdot d\ell = - j\omega\mu \int_s H \cdot dS$	$\psi = \oint_s D \cdot dS = \int_v \rho \, dV$	$\psi_m = \oint_s B \cdot dS = 0$
Estacionario	$fmm = \oint H \cdot d\ell = \int_s J \cdot dS = I_{cond}$	$V = \oint E \cdot d\ell = 0$	$\psi = \oint_s D \cdot dS = \int_v \rho \, dV$	$\psi_m = \oint_s B \cdot dS = 0$
Estático	$U = \oint H \cdot d\ell = 0$	$V = \oint E \cdot d\ell = 0$	$\psi = \oint_s D \cdot dS = \int_v \rho \, dV$	$\psi_m = \oint_s B \cdot dS = 0$

## ECUACIONES DE MAXWELL EN FORMA DIFERENCIAL.

Caso	Ley De Ampère	Ley De Faraday	Ley De Gauss	
	Corriente Eléctrica / Área	Potencial Eléctrico / Área	Flujo Eléctrico / Volumen	Flujo Magnético / Volumen
General	$\nabla \times H = J + \frac{\partial D}{\partial t}$	$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$	$\nabla \cdot D = \rho$	$\nabla \cdot B = 0$
Espacio Libre	$\nabla \times H = \frac{\partial D}{\partial t}$	$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$	$\nabla \cdot D = 0$	$\nabla \cdot B = 0$
Variación Armónica	$\nabla \times H = (\sigma + j\omega\epsilon) E$	$\nabla \times E = -j\omega\mu H$	$\nabla \cdot D = \rho$	$\nabla \cdot B = 0$
Estacionario	$\nabla \times H = J$	$\nabla \times E = 0$	$\nabla \cdot D = \rho$	$\nabla \cdot B = 0$
Estático	$\nabla \times H = 0$	$\nabla \times E = 0$	$\nabla \cdot D = \rho$	$\nabla \cdot B = 0$



## ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

### Ecuaciones de la Onda Electromagnética Transversal (T.E.M.) en Dieléctricos.

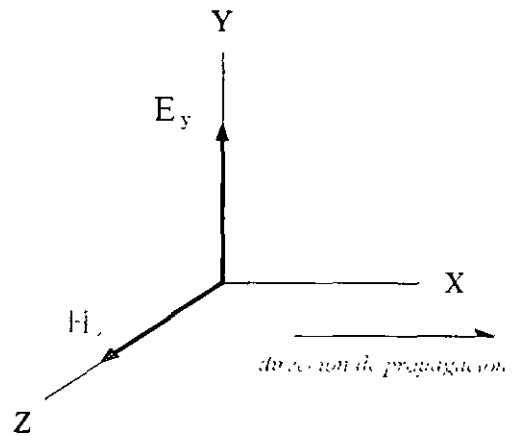
Para una onda plana uniforme  $E$  y  $H$  están en un mismo plano y tienen los mismos valores en todas partes del plano, por lo tanto los campos  $E$  y  $H$  son transversales a la dirección de propagación. Supóngase que se tiene una onda viajera en la dirección del eje  $X$ , el campo  $E$  tiene sólo componente  $E_y$  y  $H$  sólo tiene componente  $H_z$ , entonces la onda está polarizada en la dirección  $Y$ , y la densidad de corriente de conducción es  $J_c = 0$ , para un medio no conductor. Las ecuaciones de Maxwell que describen el comportamiento (movimiento) de las O.E.M. en el espacio libre pueden escribirse en términos de los campos  $E$  y  $H$  únicamente, de la siguiente manera:

$$\nabla \times H = \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$$

$$\nabla \times E = -\mu_0 \frac{\partial H}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot E = 0$$

$$\nabla \cdot H = 0$$



onda en el espacio libre

Partiendo de las ecuaciones de Maxwell y del diagrama anterior se deducen las ecuaciones de onda para  $D = \epsilon E$  y  $B = \mu H$ , y considerando también  $E = 0\hat{i} + E_y\hat{j} + 0\hat{k}$  y  $H = 0\hat{i} + 0\hat{j} + H_z\hat{k}$ .

La 1ª Ecuación de D'Alembert o Ecuación de Onda del Campo  $H$ :

$$\boxed{\frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon\mu} \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2}}$$

La 2ª ecuación de D'Alembert o Ecuación de Onda del Campo  $E$ .

$$\boxed{\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu\epsilon} \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2}}$$

Estas son las ecuaciones de D'Alembert para un medio donde  $\sigma = 0$  (el vacío), que relaciona la variación en el espacio y el tiempo de una magnitud escalar  $H_z$  ó  $E_y$ , también es la forma más simple de la ecuación de onda escalar.

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu\epsilon} \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} \quad \text{ecuación de onda en } H_z$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu\epsilon} \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} \quad \text{ecuación de onda en } E_y$$

$E_y$  representa la magnitud escalar de la intensidad de campo eléctrico de una onda electromagnética plana que se propaga en la dirección X.

$$\text{En general si } v^2 = \frac{1}{\mu\epsilon} \quad \Leftrightarrow \quad v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = c \cong 3 \times 10^8 \left[ \frac{m}{s} \right]$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} \quad \Rightarrow \quad \left[ \frac{\text{volt}}{m \cdot s^2} \right] = v^2 \left[ \frac{\text{volt}}{m \cdot m^2} \right] \quad \Leftrightarrow \quad v = \left[ \frac{m}{s} \right]$$

Al encontrar  $E_y$  para la ecuación anterior se puede considerar la solución siguiente:

$$E_y = \text{sen } \beta(x + kt)$$

donde  $\beta$  es la constante de propagación o constante de fase, y además si se tiene que:

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$$

donde  $\lambda$  es la longitud de onda,  $t$  es el tiempo,  $k$  es una constante por determinar,  $\beta$  es el número de radianes que recorre la onda por unidad de longitud, y si se sabe que:

$$\beta = \omega \sqrt{\mu\epsilon}$$

y recordando

$$V = C = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$$

entonces

$$\beta = \frac{\omega}{c}$$

y se llega a que el valor buscado de la constante sea  $k = \pm c = \pm v$  una solución más general es:

$$E_y = \text{sen } \beta(x + kt) + \text{sen } \beta(x - kt)$$

donde cada término separado es una solución para la ecuación de D'Alembert. Si consideramos la afirmación anterior:

$$E_y = \text{sen} (\beta x + \beta v t) + \text{sen} (\beta x - \beta v t)$$

sabemos que

$$V = f \lambda \text{ y } \beta = \frac{2\pi}{\lambda}$$

entonces

$$\beta V = \frac{2\pi}{\lambda} f \lambda = 2\pi f = \omega$$

de donde

$$E_y = \text{sen} (\beta x + \omega t) + \text{sen} (\beta x - \omega t)$$

En esta última ecuación de onda se observa que el primer término representa una onda viajera en la dirección negativa del eje "x" y el segundo término representa una onda viajera en el sentido positivo del eje "x". Empleando esta ecuación se puede comprobar que  $\beta = \omega/c$  al obtener la segunda derivada parcial con respecto al tiempo y con respecto al desplazamiento, tal y como se muestra:

$$E(x, t) = E_y = \text{sen} (\beta x - \omega t) + \text{sen} (\beta x + \omega t)$$

donde se puede considerar sólo un término:

$$E_y = \text{sen} (\beta x - \omega t)$$

derivando:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = \omega^2 \text{sen} (\beta x - \omega t) \quad \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \beta^2 \text{sen} (\beta x - \omega t)$$

ecuación (a) ecuación (b)

empleando la segunda ecuación de D'Alembert se iguala (a) y (b).

$$\omega^2 \text{sen} (\beta x - \omega t) = \frac{1}{\mu \epsilon} \beta^2 \text{sen} (\beta x - \omega t)$$

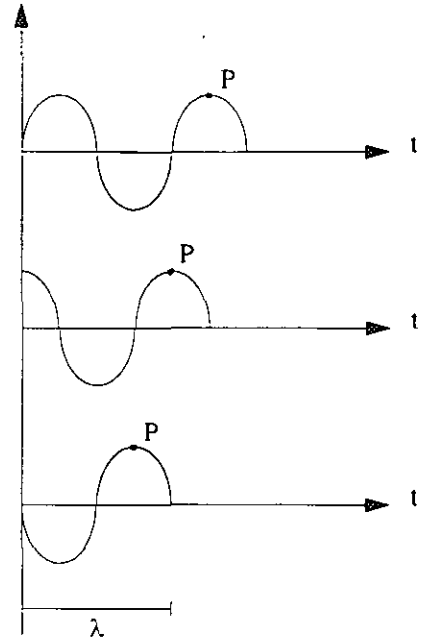
$$\omega^2 = \frac{\beta^2}{\mu \epsilon} \quad \Leftrightarrow \quad \beta = \omega \sqrt{\mu \epsilon} = \frac{\omega}{v} = \frac{\omega}{c}$$

Verificando el viaje de la onda, se gráfica  $E_y = \text{sen} (\beta (x + vt))$  manteniendo "x" constante y dando valores para "t", tal y como se muestra a continuación.

$$t = 0 \Rightarrow \beta vt = \omega t = 2\pi f(0) \Rightarrow E_y = \text{sen}(\beta x)$$

$$t = \frac{T}{4} \Rightarrow \beta vt = \omega t = 2\pi f\left(\frac{T}{4}\right) \Rightarrow E_y = \text{sen}\left(\beta x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$t = \frac{T}{2} \Rightarrow \beta vt = \omega t = 2\pi f\left(\frac{T}{2}\right) \Rightarrow E_y = \text{sen}(\beta x + \pi)$$



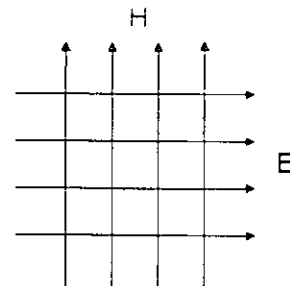
Conforme transcurre el tiempo, la perturbación correspondiente y el punto "P" se mueve a la izquierda, es decir, la onda  $E_y = \text{sen}(\beta(x+vt))$  se desplaza hacia la izquierda en la dirección negativa del eje "x". Por lo tanto, un punto "P" de fase constante se caracteriza por la siguiente condición:

$$\omega t + \beta x = \text{cte.} \Rightarrow \frac{d}{dt}(\omega t + \beta x) = 0 \Rightarrow \omega + \beta \frac{dx}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = -\frac{\omega}{\beta} = -\frac{\omega}{\omega \sqrt{\mu\epsilon}} = -\frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = -v$$

$dx/dt$  es la rapidez de cambio de la distancia respecto al tiempo o velocidad de un punto de fase constante, conocida como velocidad de fase o velocidad con que se mueven los planos de fase constante de la O.E.M.

*Frente de onda, viéndose de frente el eje de propagación.*

*Para una fase constante se tiene una O.E.M. de un plano de magnitud constante.*



Para  $E_y = \text{sen}(\beta(x-vt))$  se tiene que  $dx/dt = v$ , es decir, que la O.E.M. se desplaza en la dirección positiva del eje "x". Entonces en la constante  $(\beta \pm \omega t)$  el signo está asociado con el sentido en que viaja la onda. Otras formas equivalentes de la ecuación de onda son:



$$E_y = \text{sen}(\beta x \pm \omega t) \quad E_y = \cos(\beta x \pm \omega t) \quad E_y = \text{sen}(\omega t \pm \beta x) \quad E_y = \cos(\omega t \pm \beta x)$$

para una amplitud máxima  $E_0$  se tiene, por ejemplo:

$$E_y = E_0 \cos(\omega t \pm \beta x) + E_0 \cos(\omega t \mp \beta x)$$

en forma exponencial:

$$E_y = E_0 e^{j(\omega t \pm \beta x)}$$

#### IMPEDANCIA INTRÍNSECA.

Es la razón de los campos fasoriales  $E$  y  $H$ , para una onda plana electromagnética transversal (TEM) en un medio no limitado.

Para un medio con  $\mu$  y  $\epsilon$  complejas:

$$Z = \frac{E}{H} = \sqrt{\frac{\omega\mu'' + j\omega\mu'}{\sigma + j\omega(\epsilon' - j\epsilon'')}} \quad [\Omega]$$

Para un medio conductor con  $\mu$  y  $\epsilon$  reales:

$$Z = \frac{E}{H} = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}} \quad [\Omega]$$

Para un medio no conductor con  $\mu$  y  $\epsilon$  reales:

$$Z_d = \frac{E}{H} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad [\Omega]$$

Para el espacio libre:

$$Z_0 = \frac{E}{H} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 376.7 \quad [\Omega]$$

Para un buen conductor ( $\sigma \gg \omega\epsilon$ ):

$$Z_d = \frac{E}{H} = \sqrt{\frac{\mu\omega}{\sigma}} \angle 45^\circ \quad [\Omega]$$

#### IMPEDANCIA CARACTERÍSTICA.

Ésta es la razón del fasor de tensión o voltaje  $V$ , al fasor de corriente  $I$  en una línea de transmisión infinita de dos conductores, siendo la tensión  $V$  igual a la integral del campo eléctrico  $E$  a lo largo de una trayectoria o camino entre conductores, mientras que la corriente  $I$  es igual a la integral del campo  $H$  alrededor de uno de los conductores (Ley de Ampère). Para una celda de línea de transmisión la impedancia característica  $V/I$  es igual a la impedancia intrínseca  $E/H$ . La

impedancia característica de una línea de dos conductores también puede expresarse en términos de su resistencia serie  $R$ , de su inductancia serie  $L$ , su conductancia  $G$  en derivación y su capacitancia  $C$  en paralelo. Para una línea de dos conductores se tiene:

$$Z_0 = \frac{V}{I} = \frac{\int \mathbf{E} \cdot d\ell}{\int \mathbf{H} \cdot d\ell} = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} \quad [\Omega]$$

#### IMPEDANCIA DE ONDA.

Es la razón de una componente de campo eléctrico  $E$  a una componente de campo magnético  $H$  en el mismo punto de la onda. Para una onda electromagnética transversal (TEM) la impedancia de onda es la misma que la impedancia intrínseca, pero para modos de orden superior, como en una guía de onda hueca de un solo conductor puede haber tantas impedancias de onda como componentes haya de campos eléctricos y campos magnéticos. Para un modo TE en una guía de onda rectangular con componentes transversales a la dirección "x" de propagación de la onda ( $E_y$  y  $H_z$ ), se tiene que la impedancia de onda transversal es:

$$Z_{yz} = \frac{E_y}{H_z} \quad [\Omega]$$

En una guía de onda cilíndrica la impedancia de onda transversal es igual a:  $Z_{r\phi} = \frac{E_r}{H_\phi} \quad [\Omega]$

La impedancia de onda transversal de una guía de onda es una función de la impedancia intrínseca del medio que llena la guía y de las dimensiones de la misma guía. Conforme las dimensiones transversales se hacen muy grandes en comparación con la longitud de onda, la impedancia de onda transversal de la guía tiende a ser la impedancia intrínseca del medio.

**NOTA:** Mientras que la impedancia característica es básicamente una cantidad de circuito ( $V/I$ ), la impedancia intrínseca y la impedancia de onda son cantidades de campo o cantidades de onda que incluyen las razones de campos eléctricos a magnéticos.

#### O.E.M. EN MEDIOS CONDUCTORES.

Los medios conductores poseen una elevada conductividad  $\sigma$ , esto implica que en las ecuaciones de Maxwell el término  $\mathbf{J}_c = \sigma \mathbf{E}$  no se anula, es decir, hay grandes corrientes de conducción. Entonces, la onda en el conductor va a sufrir un amortiguamiento (la ecuación de onda presenta un término de amortiguamiento) implicando que en la ecuación de onda existe un término de primer orden. Un buen conductor, llamado simplemente conductor, es un medio

con pérdidas ( $\sigma$  es finita) ya que la presencia del campo  $E$  en el conductor provoca una pérdida de energía por efecto Joule.

Ecuación de Onda en un Medio Conductor:

$$\nabla^2 E = \mu\sigma \frac{\partial E}{\partial t} + \mu\epsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

similarmente se encuentra:

$$\nabla^2 H = \mu\sigma \frac{\partial H}{\partial t} + \mu\epsilon \frac{\partial^2 H}{\partial t^2}$$

Estas son las ecuaciones de onda para un medio conductor y son conocidas como ecuaciones de Helmholtz. Éstas se pueden expresar en forma fasorial, lo que conduce a que los campos pueden ser expresados en una magnitud por un factor exponencial complejo en función del tiempo o la frecuencia, además, sabemos que la primera derivada parcial de cualquier cantidad de campo con respecto al tiempo es equivalente a multiplicar el fasor correspondiente por el factor  $j\omega$ , y la segunda derivada parcial con respecto al tiempo equivale a multiplicar el fasor correspondiente por el factor  $(j\omega)^2$ . Entonces:

$$E(x, t) = \dot{E} e^{j\omega t} \quad H(x, t) = \dot{H} e^{j\omega t}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} E(x, t) = j\omega \dot{E} e^{j\omega t} \quad \frac{\partial}{\partial t} H(x, t) = j\omega \dot{H} e^{j\omega t}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} E(x, t) = -\omega^2 \dot{E} e^{j\omega t} \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} H(x, t) = -\omega^2 \dot{H} e^{j\omega t}$$

al sustituir en las ecuaciones de Helmholtz:

$$\nabla^2 \dot{E} e^{j\omega t} = j\omega\mu\sigma \dot{E} e^{j\omega t} - \omega^2 \mu\epsilon \dot{E} e^{j\omega t} \quad \nabla^2 \dot{H} e^{j\omega t} = j\omega\mu\sigma \dot{H} e^{j\omega t} - \omega^2 \mu\epsilon \dot{H} e^{j\omega t}$$

$$\nabla^2 \dot{E} = j\omega\mu\sigma \dot{E} - \omega^2 \mu\epsilon \dot{E} \quad \nabla^2 \dot{H} = j\omega\mu\sigma \dot{H} - \omega^2 \mu\epsilon \dot{H}$$

$$\nabla^2 \dot{E} = (j\omega\mu\sigma - \omega^2 \mu\epsilon) \dot{E} \quad \nabla^2 \dot{H} = (j\omega\mu\sigma - \omega^2 \mu\epsilon) \dot{H}$$

sabemos que:

$$\gamma^2 = (j\omega\mu\sigma - \omega^2 \mu\epsilon)$$

entonces:

$$\nabla^2 \dot{E} = \gamma^2 \dot{E} \quad \nabla^2 \dot{H} = \gamma^2 \dot{H}$$

Por otra parte, al desarrollar la siguiente expresión:

$$\gamma^2 = (j\omega\mu\sigma - \omega^2\mu\epsilon) \equiv (\alpha + j\beta)^2 = \alpha^2 + 2j\alpha\beta - \beta^2$$

se obtienen los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$ :

$$\alpha^2 - \beta^2 = -\omega^2\mu\epsilon \quad 2j\alpha\beta = j\omega\mu\sigma \Leftrightarrow 2\alpha\beta = \omega\mu\sigma$$

haciendo simultáneas estas ecuaciones:

$$\alpha^2 - \left(\frac{\omega\mu\sigma}{2\alpha}\right)^2 + \omega^2\mu\epsilon = 0$$

$$\left(\frac{\omega\mu\sigma}{2\beta}\right)^2 - \beta^2 + \omega^2\mu\epsilon = 0$$

$$\alpha = \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \left[ \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2} - 1 \right]}$$

$$\beta = \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \left[ \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2} + 1 \right]}$$

El desarrollo de estas ecuaciones se deja al lector como ejercicio, para lo cual se recomienda consultar el tema de raíces de números complejos en cualquier texto de Álgebra Superior.

Para medios muy buenos conductores se tiene que  $\sigma/\omega\epsilon \gg 100$ , esto implica que  $(\sigma/\omega\epsilon)^2 \gg 1$ . Por lo tanto, las ecuaciones anteriores se simplifican y quedan de la siguiente forma:

$$\alpha = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}$$

$$\beta = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}$$

Las unidades de  $\alpha$  y  $\beta$  son  $[m^{-1}]$ , sin embargo, los términos artificiales y adimensionales de neper y radian son empleados para hacer hincapié en su significado de atenuación y fase, respectivamente.

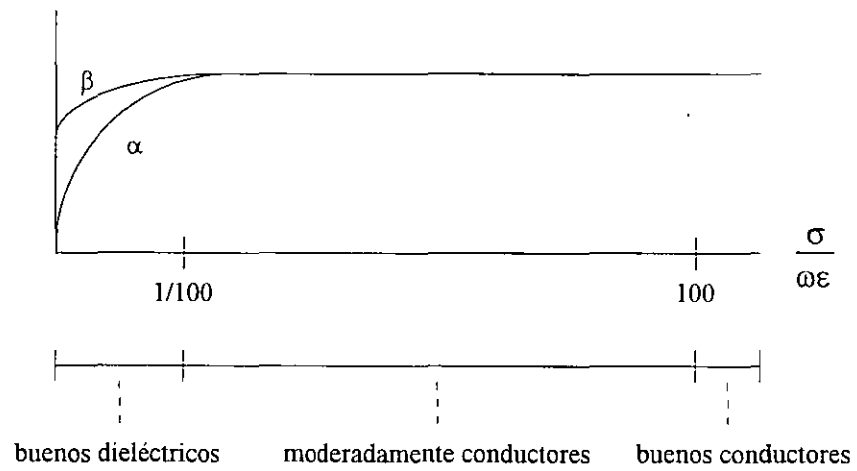
#### CLASIFICACIÓN ARBITRARIA DE LOS MEDIOS.

Con base a la relación entre la densidad de corriente de desplazamiento y densidad de corriente de conducción, se hace la siguiente clasificación.

Dieléctrico  $0 < \frac{\sigma}{\omega\epsilon} < \frac{1}{100} \Rightarrow \sigma \ll \omega\epsilon \Rightarrow J_d > J_c$

Cuasi Conductor  $\frac{1}{100} < \frac{\sigma}{\omega\epsilon} < 100 \Rightarrow \sigma \approx \omega\epsilon \Rightarrow J_d \approx J_c$

Conductor  $100 < \frac{\sigma}{\omega\epsilon} \Rightarrow \sigma \gg \omega\epsilon \Rightarrow J_d < J_c$



## RESUMEN DE CONSTANTES EN LOS MEDIOS.

Para todos los medios se tienen constantes primarias: ( $\mu$ ,  $\epsilon$ ,  $\sigma$ ) y constantes secundarias ( $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\eta$ ).

Para medios no magnéticos:

$$\mu_r = 1 \text{ y } \epsilon_r \neq 1$$

Para el espacio libre (vacío):

$$\mu_r = 1, \epsilon_r = \text{ y } \sigma = 0$$

$$\alpha = 0 \quad \beta = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \quad \eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi \approx 377$$

Dieléctrico perfecto:

$$\mu_r = 1, \epsilon_r = \text{ y } \sigma = 0$$

$$\alpha = 0 \quad \beta = \omega \sqrt{\mu \epsilon} \quad \eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

Dieléctricos disipativos:

$$\mu_r = 1, \epsilon_r = \text{ y } \sigma \neq 0$$

$$\alpha \doteq \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad \beta \doteq \omega \sqrt{\mu \epsilon} \quad \eta \doteq \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \left[ 1 + j \frac{\sigma}{2\omega \epsilon} \right]$$

Medios conductores:

$$\mu_r \neq 1, \epsilon_r \neq 1 \text{ y } \sigma \neq 0$$

$$\alpha = \omega \sqrt{\frac{\mu \epsilon}{2} \left[ \sqrt{1 + \left( \frac{\sigma}{\omega \epsilon} \right)^2} - 1 \right]} \quad \beta = \omega \sqrt{\frac{\mu \epsilon}{2} \left[ \sqrt{1 + \left( \frac{\sigma}{\omega \epsilon} \right)^2} + 1 \right]} \quad \eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \left[ \frac{1}{\sqrt{1 - j \frac{\sigma}{\omega \epsilon}}} \right]$$

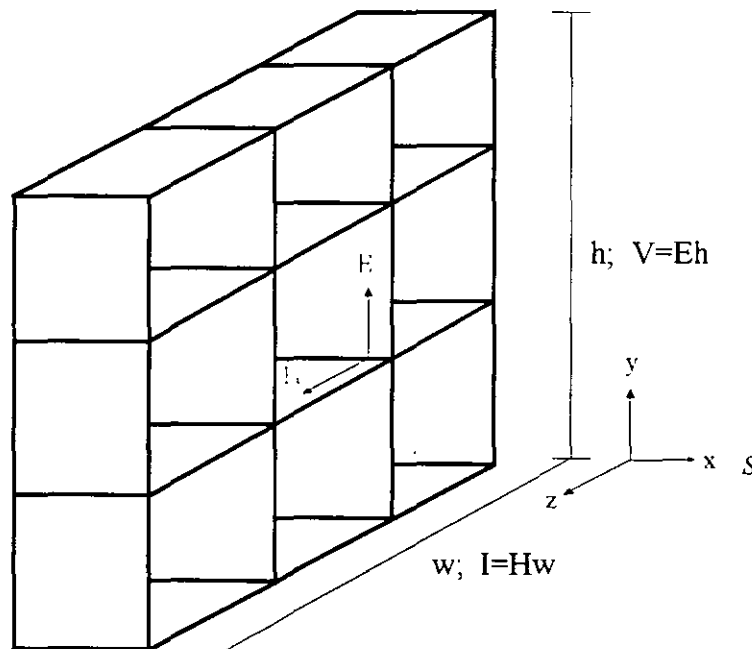
La frecuencia es un factor importante para determinar si un medio actúa como dieléctrico o como conductor. Las propiedades de los dieléctricos se dan en general por la tangente de pérdida que es un factor de disipación de energía.

## POTENCIA Y VECTOR DE POYNTING.

Considérese en el espacio una región de celdas de campo, de altura  $h$  y ancho  $w$ , y una onda plana que viaja en la dirección  $+x$  con componentes  $E_y$  y  $H_z$ . Entonces, por medio de un análisis dimensional se encuentra la tensión total y la corriente total para ésta región. Si  $h$  y  $w$  tienen unidades de longitud (m),  $E$  tiene unidades de potencial por unidad de longitud (V/m) y  $H$  tiene unidades de corriente por unidad de longitud (A/m), entonces, la potencia entregada es  $P = VI = (Eh)(Hw) = EH(hw) = EHA$  ( $A$  es el área de este arreglo de celdas). De esto se obtiene la densidad superficial de potencia llamada vector de Poynting, y da el flujo de potencia a través de cualquier superficie en una región ocupada por una O.E.M. que se obtiene integrando en la superficie la cantidad instantánea  $S = E \times H$ .

$$S = \frac{P}{A} = E H \left[ \frac{\text{watt}}{\text{m}^2} \right]$$

El flujo de potencia es perpendicular a  $E$  y  $H$ , lo que implica la posibilidad de demostrar que  $S = E \times H$ , como se hará más adelante.



Con el propósito de encontrar la potencia de una onda plana uniforme, fue necesario desarrollar un teorema de potencia para el campo electromagnético conocido como teorema de Poynting. Éste fue postulado originalmente por el físico inglés John H. Poynting.

aplicando el teorema de la divergencia se tiene:

$$-\oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} = \int_{\text{vol}} \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \, dv + \frac{\partial}{\partial t} \int_{\text{vol}} \left( \frac{\epsilon \mathbf{E}^2}{2} + \frac{\mu \mathbf{H}^2}{2} \right) dv$$

Suponiendo que no existen fuentes dentro del volumen, entonces, la primera integral de la derecha es la potencia óhmica total (e instantánea) disipada dentro del volumen. Si hay fuentes dentro del volumen, entonces, el resultado de la integral sobre el volumen de la fuente será positivo si la potencia está siendo suministrada a la fuente, pero será negativa si la potencia es suministrada por la fuente.

La integral en el segundo término de la derecha es la energía total almacenada en los campos eléctrico y magnético, y las derivadas parciales con respecto al tiempo provocan que este término sea la razón de cambio con respecto al tiempo de la energía (velocidad de energía) almacenada dentro de ese volumen, o sea, la potencia instantánea que hará que la energía almacenada dentro de este volumen aumente.

Por lo tanto, la suma de las dos integrales de la derecha debe ser la potencia total que fluye hacia el volumen, en consecuencia, la potencia total que fluye fuera del volumen es:

$$\oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S}$$

La integral es sobre la superficie cerrada que rodea el volumen.

El producto  $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$  es conocido como el vector de Poynting:

$$\mathcal{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$$

que se interpreta como una densidad de potencia instantánea medida en watts por metro cuadrado ( $\text{W}/\text{m}^2$ ). Esta interpretación está sujeta a las mismas consideraciones filosóficas como en el caso de  $\mathbf{W} / \text{m}^2$  ó  $(1/2) \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} = (1/2) \mu \mathbf{H}^2$  como densidades de energía.

En un dieléctrico perfecto ( $\sigma=0$ ,  $\mathbf{J}_c=0$ ), estos campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$  están dados por:

$$E_y = E_{y0} \cos(\omega t - \beta x) \quad H_z = \frac{E_{y0}}{\eta} \cos(\omega t - \beta x)$$

y por tanto:

$$\mathcal{P}_x = \frac{E_{y0}^2}{\eta} \cos^2(\omega t - \beta x)$$



Para encontrar la densidad de potencia promedio en el tiempo, se integra sobre un ciclo y se divide entre el periodo  $T=1/f$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{x \text{ prom}} &= f \int_0^{1/f} \frac{E_{y0}^2}{\eta} \cos^2(\omega t - \beta x) dt \\ \mathcal{P}_{x \text{ prom}} &= \frac{f}{2} \frac{E_{y0}^2}{\eta} \int_0^{1/f} [1 - \cos(2\omega t - 2\beta x)] dt \\ \mathcal{P}_{x \text{ prom}} &= \frac{f}{2} \frac{E_{y0}^2}{\eta} \left[ t - \frac{1}{2\omega} \cos(2\omega t - 2\beta x) \right] \Bigg|_0^{1/f} \end{aligned}$$

$$\mathcal{P}_{x \text{ prom}} = \frac{1}{2} \frac{E_{y0}^2}{\eta} \left[ \frac{w}{m^2} \right]$$

Si se usan valores de raíz cuadrática media (R.M.S.) en lugar de amplitudes pico, podría no aparecer el término  $\frac{1}{2}$ . Finalmente, la potencia promedio que fluye a través de cualquier área  $S$  normal al eje  $x$  es:

$$\mathcal{P}_{x \text{ prom}} = \frac{1}{2} \frac{E_{x0}^2}{\eta} S \quad [w]$$

En el caso de un dieléctrico disipativo  $E_y$  y  $H_z$  no están en fase, se tiene:

$$E_y = E_{y0} e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x)$$

si,

$$\eta = \eta_m \angle \theta_\eta$$

entonces, se puede escribir la intensidad de campo magnético como:

$$H_z = \frac{E_{y0}}{\eta_m} e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x - \theta_\eta)$$

entonces:

$$\mathcal{P}_x = E_y H_z = \frac{E_{y0}^2}{\eta_m} e^{-2\alpha x} \cos(\omega t - \beta x) \cos(\omega t - \beta x - \theta_\eta)$$

usando la identidad trigonométrica:

$$\cos(A) \cos(B) = \cos(A+B) + \frac{1}{2} \cos(A-B)$$

se tiene que:

$$\mathcal{P}_x = E_y H_z = \frac{E_{y0}^2}{\eta_m} e^{-2\alpha x} \left[ \cos(2\omega t - 2\beta x - \theta_\eta) \cos(\theta_\eta) \right]$$

Se encuentra que la densidad de potencia tiene sólo una componente de segunda armónica y una componente de CD. Puesto que el primer término tiene un valor promedio cero sobre un número entero de periodos, el valor promedio en tiempo del vector de Poynting es:

$$\mathcal{P}_{x \text{ prom}} = \frac{1}{2} \frac{E_{y0}^2}{\eta_m} e^{-2\alpha x} \cos(\theta_\eta)$$

Obsérvese que la densidad de potencia se atenúa con un factor  $e^{-2\alpha x}$ , mientras que  $E_y$  y  $H_z$  decaen con un factor  $e^{-\alpha x}$ .

La densidad de energía eléctrica y la densidad de energía magnética en un punto, son respectivamente:

$$W_e = \frac{1}{2} \epsilon E^2 \quad W_m = \frac{1}{2} \mu H^2$$

para un medio sin pérdidas:

$$\eta = \frac{E}{H} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

se comprueba que  $W_e \equiv W_m$ :

$$W_e = \frac{1}{2} \epsilon E^2 = \frac{1}{2} \epsilon (\eta H)^2 = \frac{1}{2} \epsilon \frac{\mu}{\epsilon} H^2 = \frac{1}{2} \mu H^2 = W_m$$

$$W_m = \frac{1}{2} \mu H^2 = \frac{1}{2} \mu \left( \frac{E}{\eta} \right)^2 = \frac{1}{2} \mu \frac{\epsilon}{\mu} E^2 = \frac{1}{2} \epsilon E^2 = W_e$$

$$W_e \equiv W_m$$

Se concluye que la densidad de energía magnética y la densidad de energía eléctrica en una onda viajera plana son iguales, esto implica que la densidad de energía total es:

$$W_{\text{total}} = W_e + W_m = \frac{1}{2} \epsilon E^2 + \frac{1}{2} \mu H^2 = \epsilon E^2 = \mu H^2$$

Considerando un medio dieléctrico perfecto ( $\sigma = 0$ ,  $J = 0$ ) se tiene:

$$\left| \oint_S \mathcal{P} \cdot dS \right| = \int_V \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\mu}{2} H^2 + \frac{\epsilon}{2} E^2 \right] dv$$

como las densidades de energía eléctrica y magnética son iguales se tiene que:

$$W_e + W_m = 2W_e = 2W_m = W$$

entonces, dividiendo el vector de Poynting entre la densidad total de energía se obtiene la velocidad de energía:

$$v_{\text{energía}} = \frac{\mathcal{P}}{W_{\text{total}}} = \left[ \frac{\frac{\text{watt}}{\text{m}^2}}{\frac{\text{joule}}{\text{m}^3}} \right] = \left[ \frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$$

en un medio sin pérdidas:

$$v_{\text{energía}} = \frac{\mathcal{P}}{W_{\text{total}}} = \frac{EH}{\mu H^2} = \frac{1}{\mu} \frac{E}{H} = \frac{1}{\mu} \eta = \frac{1}{\mu} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}}$$

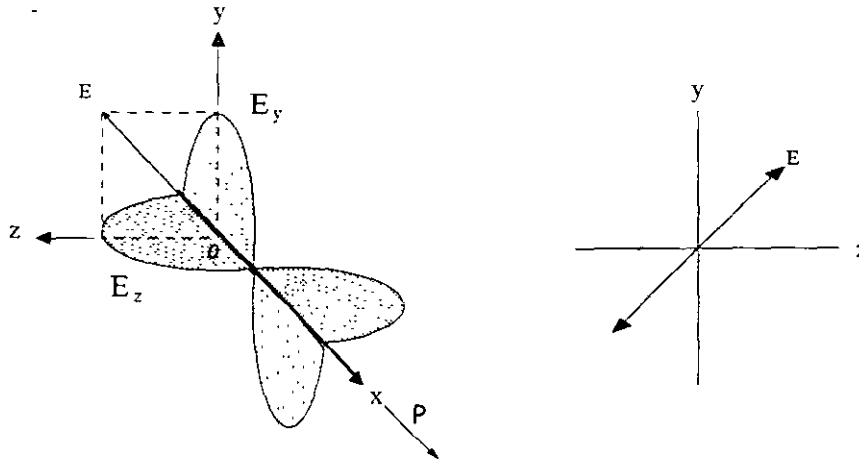
$$v_{\text{energía}} = \frac{\mathcal{P}}{W_{\text{total}}} = \frac{EH}{\epsilon E^2} = \frac{1}{\epsilon} \frac{H}{E} = \frac{1}{\epsilon} \frac{1}{\eta} = \frac{1}{\epsilon} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}}$$

de esto se concluye que la velocidad de energía es igual a la velocidad de fase.

#### POLARIZACIÓN.

La polarización de una onda electromagnética es el lugar geométrico que describe la punta del vector de campo eléctrico (E) al ser proyectado en un plano de fase constante. En otras palabras, es el comportamiento del vector intensidad de campo eléctrico E, con respecto al tiempo en un plano de fase constante y fijo del espacio.

El campo eléctrico es considerado como la perturbación óptica y reside en lo que se conoce como plano de vibración, éste plano de vibración contiene tanto al vector de campo E como al vector de propagación P (vector de Poynting en la dirección de movimiento).



$$E_y(x,t) = E_{m_1} \cos(\omega t - \beta x) \hat{j}$$

$$E_z(x,t) = E_{m_2} \cos(\omega t - \beta x) \hat{k}$$

En el plano YZ el campo E se ve como una recta con pendiente "m" en el origen, entonces:

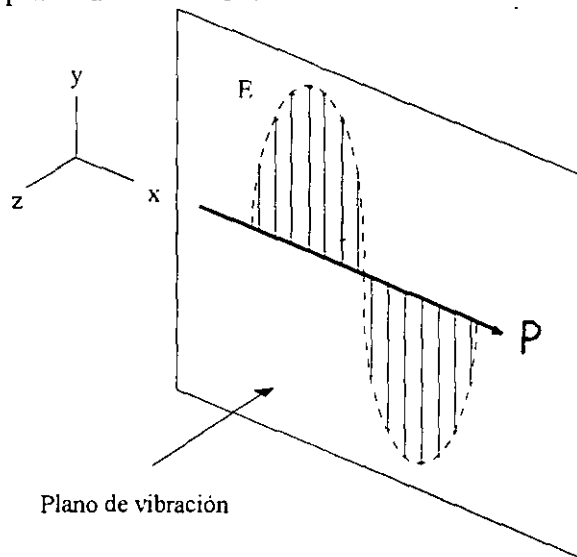
$$m = \frac{E_y}{E_z} = \frac{E_{m_1} \cos(\omega t - \beta x)}{E_{m_2} \cos(\omega t - \beta x)}$$

de donde:

$$E_y = \frac{E_{m_1}}{E_{m_2}} E_z = m E_z$$

**POLARIZACIÓN LINEAL.**

Para una onda plana polarizada linealmente las vibraciones del vector E son paralelas entre sí en todos los puntos de la onda. En cualquier punto el vector E y la dirección de propagación forman un plano llamado plano de vibración.



En general, dos perturbaciones ópticas o de campo E ortogonales entre sí de la forma:

$$E_y(x, t) = E_{m_1} \cos(\omega t + \beta x + \xi) \hat{j} \quad E_z(x, t) = E_{m_2} \cos(\omega t + \beta x) \hat{k}$$

donde  $\xi$  es la diferencia de fase relativa entre las ondas, ambas viajando en la dirección x, entonces, la perturbación resultante es simplemente:

$$E(x, t) = E_y(x, t) + E_z(x, t)$$

Si  $\xi$  es cero o un entero múltiplo de  $\pm 2\pi$ , se dice que las ondas están en fase, y las ecuaciones anteriores quedan:

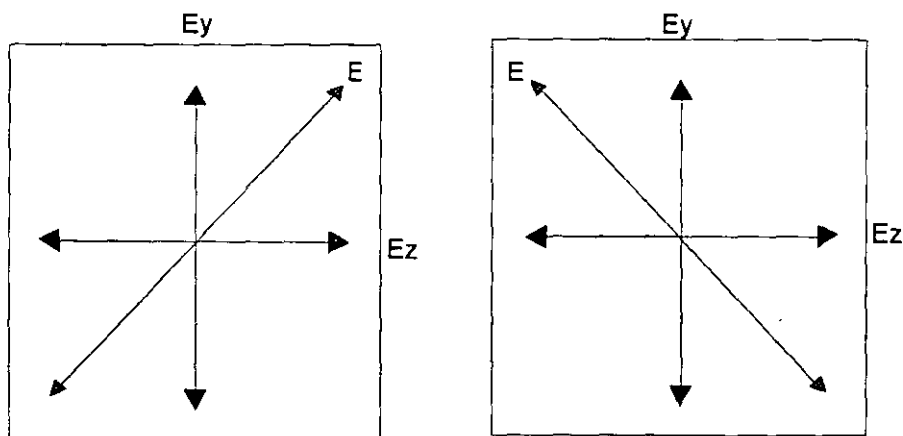
$$E = (E_{m_1} \hat{j} + E_{m_2} \hat{k}) \cos(\omega t + \beta x)$$

Ésta es una onda linealmente polarizada. Este proceso se puede llevar igualmente a cabo a la inversa, es decir, podemos resolver cualquier onda linealmente polarizada en dos componentes ortogonales.

Supóngase ahora que  $\xi$  es un entero impar, múltiplo de  $\pm\pi$ ; se dice que las dos ondas están  $180^\circ$  fuera de fase y

$$E = (-E_{m_1} \hat{j} + E_{m_2} \hat{k}) \cos(\omega t + \beta x)$$

Esta onda está de nuevo linealmente polarizada pero el plano de vibración ha sido rotado  $45^\circ$ . Nótese que la onda puede descomponerse en componentes que no sean ortogonales.



## POLARIZACIÓN CIRCULAR.

Otro caso especial de particular interés aparece cuando ambas ondas constitutivas tienen igual amplitud, es decir:

$$E_{m_1} = E_{m_2} = E_0$$

y además, su diferencia de fase relativa es:

$$\xi = -\frac{\pi}{2} + 2m\pi$$

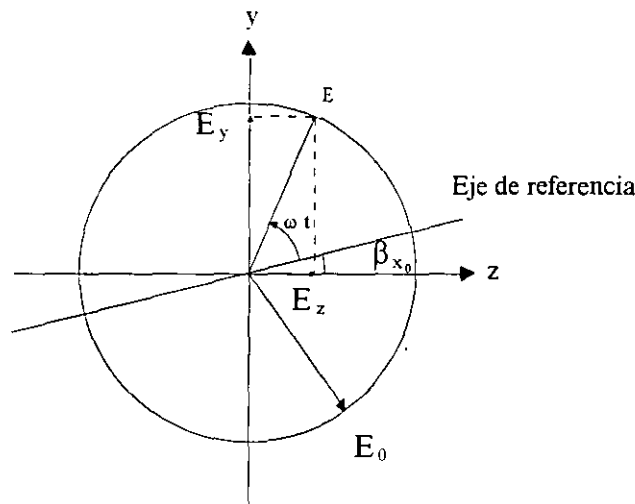
donde  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

por lo tanto:  $E_y(x, t) = E_{m_1} \sin(\omega t + \beta x) \hat{j}$        $E_z(x, t) = E_{m_2} \cos(\omega t + \beta x) \hat{k}$

la onda queda:  $E = E_0 \left[ \sin(\omega t + \beta x) \hat{j} + \cos(\omega t + \beta x) \hat{k} \right]$

Obsérvese que en este caso la amplitud escalar de "E", la cual es igual a  $E_0$ , es una constante. Pero la dirección de "E" es variable con el tiempo y no está restringida como antes a un solo plano.

La figura siguiente muestra lo que está sucediendo en algún punto arbitrario  $X_0$  en el eje. En  $t=0$  "E" cae a lo largo del eje de referencia en la figura, y así:



$$E_y = \hat{j} E_0 \sin(\beta x_0) \quad E_z = \hat{k} E_0 \cos(\beta x_0)$$

Un tiempo  $t = ((2\pi - \beta x_0) / \omega)$  más tarde,  $E_y = 0$ ,  $E_z = E_0 \hat{k}$  y "E" están a lo largo del eje "z". El vector campo eléctrico resultante E está rotando en la dirección opuesta de las manecillas del

reloj con una frecuencia  $\omega$  visto por un observador hacia quien la onda se está moviendo (es decir, viendo hacia la fuente). Tal onda tiene polarización circular izquierda y se hace referencia a ella simplemente como luz circular izquierda. El vector  $E$  hace una rotación completa cuando la onda avanza una longitud de onda. En comparación, si  $\xi = -\pi/2, -5\pi/2, -9\pi/2$ , etc., es decir,  $\xi = (-\pi/2) + (2m\pi)$  donde  $m = 0, \pm 2, \pm 3, \dots$ , entonces

$$E = E_0 \left[ -\text{sen} (\omega t + \beta x) \hat{j} + \text{cos} (\omega t + \beta x) \hat{k} \right]$$

La amplitud no se ve afectada, pero ahora  $E$  gira en el sentido de las manecillas del reloj y la onda tiene polarización circular derecha.

Una onda linealmente polarizada se puede sintetizar con dos ondas con polarización circular opuesta de igual amplitud. En particular si usamos las ondas circulares descritas anteriormente, se tiene:

$$E = 2 E_0 \hat{k} \cos (\omega t + \beta x_0)$$

el cual es un vector de amplitud constante  $2E_0 \hat{k}$ , donde el vector  $\hat{k}$  indica que se encuentra en un solo plano (en este caso en el "YZ"), y por lo tanto es linealmente polarizado.

#### POLARIZACIÓN ELÍPTICA.

En cuanto a la descripción matemática se refiere, tanto una onda electromagnética polarizada linealmente como una onda electromagnética polarizada circularmente se pueden considerar como casos especiales de una onda electromagnética polarizada elípticamente. Entonces, el vector campo eléctrico resultante rotará y cambiará su magnitud. En tales casos el extremo  $E$  trazará una elipse en un plano fijo perpendicular a " $\hat{i}$ ", cuando la onda avanza. Por medio de una expresión matemática para la curva trazada por la punta  $E$ . Recordando que:

$$E_y (x, t) = E_{m_1} \cos (\omega t + \beta x + \xi) \hat{j} \quad E_z (x, t) = E_{m_2} \cos (\omega t + \beta x) \hat{k}$$

La ecuación de polarización que se busca no debe depender de la posición ni del tiempo, es decir, se debe eliminar la dependencia de  $(\omega t + \beta x)$ .

La ecuación general de polarización de una O.E.M.:

$$\left( \frac{E_y}{E_{m_1}} \right)^2 + \left( \frac{E_z}{E_{m_2}} \right)^2 - 2 \frac{E_y E_z}{E_{m_1} E_{m_2}} \cos (\xi) = \text{sen}^2 (\xi)$$

La última expresión es la ecuación de una elipse que hace un ángulo  $\alpha$  con el sistema coordenado

$(E_y, E_z)$ , tal que:

$$\tan(2\alpha) = \frac{2E_{m_1} E_{m_2} \cos(\xi)}{E_{m_2}^2 - E_{m_1}^2}$$

Si los ejes de la elipse se alinean con los ejes coordenados, es decir,  $\alpha=0$  o equivalentemente  $\xi = \pm\pi/2, \pm3\pi/2, \pm5\pi/2, \dots$ , entonces se tiene:

$$\left(\frac{E_y}{E_{m_1}}\right)^2 + \left(\frac{E_z}{E_{m_2}}\right)^2 = 1$$

si  $E_{m_1} = E_{m_2} = E_0$ , entonces:

$$E_y^2 + E_z^2 = 1$$

que de acuerdo a resultados anteriores, es un círculo. Si  $\xi$  es un múltiplo par de  $\pi$ , la ecuación que resulta es:

$$E_y = \frac{E_{m_1}}{E_{m_2}} E_z$$

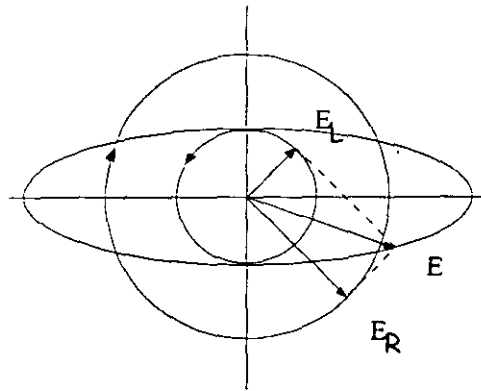
similarmente, para múltiplos impares:

$$E_y = -\frac{E_{m_1}}{E_{m_2}} E_z$$

Ambas son líneas rectas, es decir, se tiene polarización lineal en este punto.

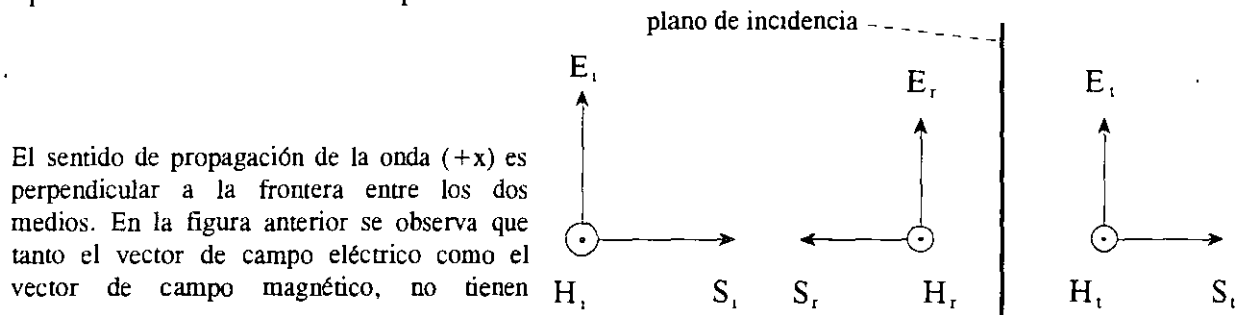
En algunos textos de óptica se hace referencia a una onda de luz particular en términos de su estado específico de polarización. Se dice que la luz lineal o polarizada en un plano tiene un estado P, mientras que la luz circular derecha o izquierda está en un estado R o L (según corresponda), y para la condición de polarización elíptica se dice que está en un estado E. Se ha demostrado que un estado P se puede representar como una superposición de estados R y L, y lo mismo se cumple para un estado E. En este caso se ve en la figura como las amplitudes de las dos ondas circulares son diferentes.





INCIDENCIA NORMAL.

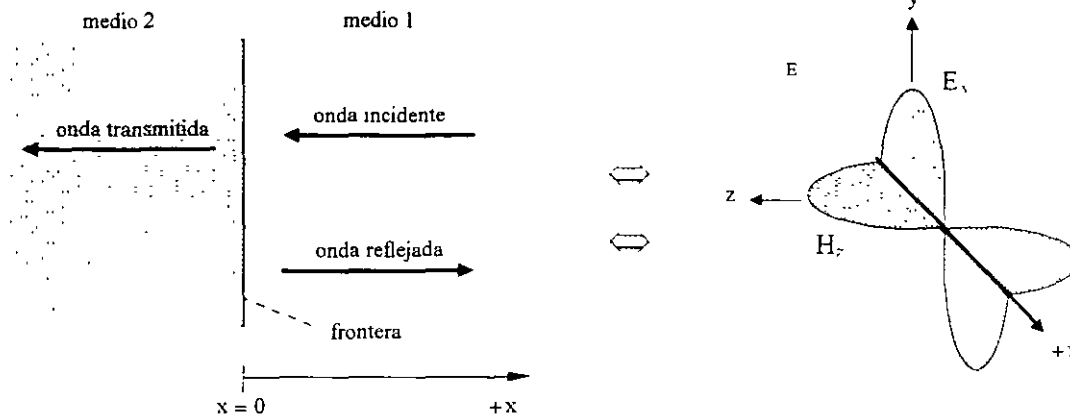
Una O.E.M. presenta incidencia normal cuando choca de un medio 1 a un medio 2 en forma perpendicular a la frontera o superficie de incidencia.



El sentido de propagación de la onda (+x) es perpendicular a la frontera entre los dos medios. En la figura anterior se observa que tanto el vector de campo eléctrico como el vector de campo magnético, no tienen

ONDA ESTACIONARIA.

Al pasar una onda de un medio a otro, puede o no presentarse un fenómeno de reflexión en la frontera de los dos medios, es decir, parte la onda viajera incidente es absorbida hacia el nuevo medio y parte es rechazada. Hasta el momento se ha realizado el análisis de una sola onda viajera, ya sea en sentido positivo o negativo. Para hacer el estudio de la onda estacionaria, se debe considerar el caso de dos ondas que viajan en la misma dirección, pero en sentidos opuestos. Supóngase el caso de dos ondas son de la misma frecuencia y de forma senoidal, este par de condiciones se satisface si una de las ondas es la reflexión de la otra, es decir, permanecen en el mismo medio.



De la figura anterior se puede establecer fácilmente la ecuación de la onda incidente ( $E_{y0}$ ) y la de la onda reflejada ( $E_{y1}$ ):

$$E_{y0}(x, t) = E_0 e^{j(\omega t + \beta x)} \qquad E_{y1}(x, t) = E_1 e^{j(\omega t - \beta x + \delta)}$$

$E_0$  y  $E_1$  son las amplitudes de la onda incidente y de la onda reflejada, respectivamente;  $\delta$  es el adelanto de fase en el tiempo de ( $E_{y1}$ ) respecto a ( $E_{y0}$ ) en  $x = 0$ , es decir,  $\delta$  es el corrimiento de fase en el punto de reflexión. El campo eléctrico total está dado por:

$$E_y = E_{y0} + E_{y1}$$

El valor instantáneo se obtiene considerando la parte real o la parte imaginaria, por ejemplo, considerando la parte imaginaria:

$$E_y = E_0 \sin(\omega t + \beta x) + E_1 \sin(\omega t - \beta x + \delta)$$

Si  $\delta = 0$  ó  $180^\circ$  y recordando la identidad trigonométrica  $\sin(a \pm b) = \sin(a) \cos(b) \pm \cos(a) \sin(b)$  la ecuación anterior puede desarrollarse de la siguiente forma:

$$E_y = E_0 \sin(\omega t) \cos(\beta x) + E_0 \cos(\omega t) \sin(\beta x) + E_1 \sin(\omega t) \cos(\beta x) - E_1 \cos(\omega t) \sin(\beta x)$$

$$E_y = (E_0 + E_1) \sin(\omega t) \cos(\beta x) + (E_0 - E_1) \cos(\omega t) \sin(\beta x)$$

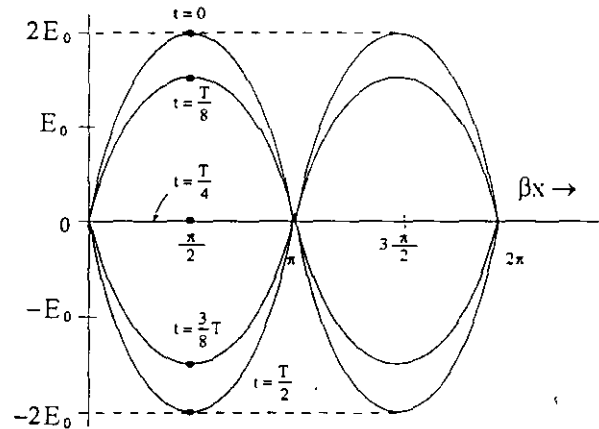
Si el medio 2 es un conductor perfecto, la onda reflejada es igual en magnitud a la onda incidente. En  $x = 0$  se considera la relación de frontera para la componente tangencial de campo  $E$ , entonces  $E_y = 0$  lo que implica que  $E_1 = -E_0$  cuando  $\delta = 180^\circ$ . Finalmente se tiene que:

$$E_y = 2E_0 \cos(\omega t) \sin(\beta x)$$

Esta ecuación es la representación matemática de una onda estacionaria en el espacio. Obsérvese cuidadosamente que los valores de  $E_y$  en un instante particular son una función coseno de "x", mientras que los valores instantáneos en un punto particular son función cosenoidal de "t", el valor pico de la onda es la suma de los valores pico de la onda reflejada y de la onda incidente. Una onda estacionaria de este tipo se le denomina onda estacionaria pura y se caracteriza porque  $|E_1| = |E_0|$ .

En la figura se muestran las variaciones de  $E_y$  en el espacio y en el tiempo para una onda estacionaria pura. Obsérvese que un punto de fase constante como el punto P, no se mueve en la dirección de "x", permanece en una posición fija conforme transcurre el tiempo.

¿Qué sucede cuando la onda reflejada es menor que la onda incidente?



Por ejemplo, si la onda reflejada fuera la mitad de la onda incidente, entonces  $E_1 = -0.5E_0$ . Al evaluar  $E_y$  para cuatro instantes del tiempo se obtienen las curvas de la siguiente figura que muestran los valores de  $E_y$  en función de  $\beta x$ .

Los valores pico en función de "x" en un intervalo de tiempo mayor a un ciclo corresponden a la envolvente, ésta permanece estacionaria, pero el interés está en el punto "P" de fase constante. Obsérvese que la onda instantánea total viaja hacia la izquierda y que la velocidad con la que se mueve el punto "P" no es constante.

La velocidad promedio del punto de fase constante es la misma que para la onda viajera pura, pero su magnitud instantánea varía.

Entonces se tienen dos ondas  $E_y$  que viajen en sentidos opuestos en la dirección de "x", la que viaja en sentido positivo tiene la mitad de la amplitud de la que viaja a la izquierda, estas dos ondas se refuerzan mutuamente en algunos puntos y en otros se anulan entre sí, la onda resultante viaja en el sentido positivo de "x".

En cualquier posición  $\beta x$  es valor máximo del campo en algún momento durante el ciclo es igual al valor de la ordenada de la envolvente. Ahora se determina el valor de la envolvente de la onda estacionaria.

Partiendo  $E_y$ :

$$E_y = (E_0 + E_1) \sin(\omega t) \cos(\beta x) + (E_0 - E_1) \cos(\omega t) \sin(\beta x)$$

se hace:

$$A = (E_0 + E_1) \cos(\beta x) \quad B = (E_0 - E_1) \sin(\beta x)$$

que conduce a:

$$E_y = \sin(\omega t + \beta x) \sqrt{A^2 + B^2}$$

sustituyendo A y B:

$$E_y = \sin(\omega t + \beta x) \sqrt{(E_0 + E_1)^2 \cos^2(\beta x) + (E_0 - E_1)^2 \sin^2(\beta x)}$$

Cuando  $\sin(\omega t + \beta x) = 1$  se alcanza el valor máximo de  $E_y$  en alguna posición  $\beta x$  dentro de un intervalo de al menos un periodo; entonces:

$$E_{y \text{ máx}} = \sqrt{(E_0 + E_1)^2 \cos^2(\beta x) + (E_0 - E_1)^2 \sin^2(\beta x)}$$

La forma de la envolvente de la onda estacionaria no es de mucho interés, pero la razón de los valores mínimo al máximo de ésta sí, ya que proporciona más información.

A este cociente se le conoce como *relación o razón de onda estacionaria* (ROE) en inglés *standing wave ratio* (SWR). La tensión o potencial a cualquier distancia "x" será proporcional al campo, en ese caso la ROE se puede manejar como *razón de onda estacionaria de tensión* (ROET) cuyas siglas en inglés son VSWR. El valor máximo de la envolvente corresponde a  $(E_0 + E_1)$  y el mínimo a  $(E_0 - E_1)$ , esta información permite determinar la porción de onda reflejada y transmitida, también permite determinar las condiciones del punto de reflexión.

$$\text{ROET } \text{ ó } \text{ VSWR} = \frac{E_{\text{máx}}}{E_{\text{mín}}} = \frac{E_0 + E_1}{E_0 - E_1}$$

De la ecuación es claro que si no existe onda reflejada ( $E_1 = 0$ ) entonces la relación de onda estacionaria será igual a la unidad ( $\text{VSWR} = 1$ ), pero si  $E_1 = E_0$  entonces la razón de onda

estacionaria será infinita ( $VSWR \rightarrow \infty$ ). por lo tanto, todos los valores intermedios de la ROET se encuentran en el intervalo de uno a infinito  $[1, \infty)$ .

En la frontera o punto de reflexión ( $x = 0$ ) y en el instante  $t = 0$  el coeficiente de reflexión está dado por la razón de la onda reflejada a la onda incidente:

$$\rho = \frac{E_{y1}}{E_{y0}} = \frac{E_1 e^{j\delta}}{E_0} = \frac{E_1 \angle \delta}{E_0} = \rho \angle \delta$$

La magnitud de  $\rho$  va de 0 a 1 con ángulos de fase entre  $0^\circ$  y  $\pm 180^\circ$ .

Con estas consideraciones se puede expresar el VSWR en función de  $\rho$ :

$$VSWR = \frac{1 + \frac{E_1}{E_0}}{1 - \frac{E_1}{E_0}} = \frac{1 + |\rho|}{1 - |\rho|}$$

También se puede tener a  $\rho$  expresado en términos del VSWR:

$$|\rho| = \frac{VSWR - 1}{VSWR + 1}$$

Todo lo que se ha explicado del VSWR no sólo es aplicable a ondas sino también a ondas en líneas de transmisión, sólo siendo necesario reemplazar el campo E por la tensión de la línea de transmisión V.

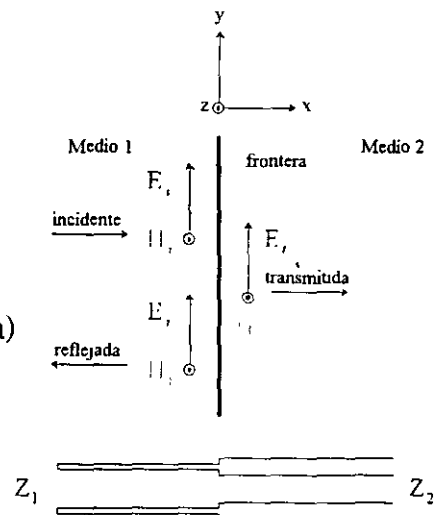
IMPEDANCIA DE ENTRADA ENTRE MEDIOS.

La figura muestra una onda plana que incide perpendicularmente en la frontera de dos medios y una línea de transmisión análoga.

Por la continuidad de las componentes tangenciales de campo en la frontera, se tiene:

$$E_i + E_r = E_t \qquad H_i + H_r = H_t \qquad (a)$$

Por medio de la impedancia intrínseca se pueden relacionar los campos eléctrico y magnético:



$$Z_1 = \frac{E_i}{H_i} \quad -Z_1 = \frac{E_r}{H_r} \quad Z_2 = \frac{E_t}{H_t} \quad (b)$$

La impedancia de la onda reflejada se toma como negativa por viajar en sentido negativo de las "x":

$$H_t = \frac{E_t}{Z_2} = \frac{E_i}{Z_1} - \frac{E_r}{Z_1} \quad E_t = \frac{Z_2}{Z_1} E_i - \frac{Z_2}{Z_1} E_r \quad (c)$$

Multiplicando la expresión para el campo eléctrico de la ecuación (a) por  $Z_2/Z_1$ , se tiene:

$$\frac{Z_2}{Z_1} (E_i + E_r) = \frac{Z_2}{Z_1} E_t \quad \Rightarrow \quad \frac{Z_2}{Z_1} E_t = \frac{Z_2}{Z_1} E_i + \frac{Z_2}{Z_1} E_r \quad (d)$$

Sumando (c) y (d):

$$E_t = \frac{Z_2}{Z_1} E_i - \frac{Z_2}{Z_1} E_r \quad \left] + \left[ \frac{Z_2}{Z_1} E_t = \frac{Z_2}{Z_1} E_i + \frac{Z_2}{Z_1} E_r \right] = \quad (e)$$

$$E_t \left( 1 + \frac{Z_2}{Z_1} \right) = 2 \frac{Z_2}{Z_1} E_i \quad (f)$$

$$E_t = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2} E_i = TE_i \quad (g)$$

"T" es el coeficiente de transmisión, esto se verifica fácilmente:

$$T = \frac{E_t}{E_i} = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad (h)$$

Restando (c) de (d), se tiene:

$$E_t \left( \frac{Z_2}{Z_1} - 1 \right) = 2 \frac{Z_2}{Z_1} E_r \quad (i)$$

Si se sustituye  $E_t$  de la ecuación (g) en la ecuación (i), y despejando  $E_r$ , se tiene:

$$E_r = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} E_i = RE_i \quad (j)$$

"R" es el coeficiente de reflexión, y se verifica fácilmente:

$$R = \frac{E_r}{E_i} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \quad (k)$$

De lo anterior se obtiene fácilmente que  $T = R + 1$ , esto se deja al lector como ejercicio.

**Caso 1.** Suponiendo que el medio 1 es el aire y el medio 2 es un conductor, de modo que  $Z_1 \gg Z_2$ , de la ecuación (g) se tiene la relación aproximada:

$$E_t \approx 2 \frac{Z_2}{Z_1} E_i$$

Pero de la ecuación (b) se tiene que:

$$H_t Z_2 \approx 2 \frac{Z_2}{Z_1} H_i Z_1 \quad \Rightarrow \quad H_t \approx 2 H_i$$

Se concluye entonces que cuando una onda plana en el aire que incide perpendicularmente en un medio conductor, se obtiene en la frontera un campo magnético casi del doble en intensidad. También se encuentra que  $H_r \approx H_i$ , de manera que a la izquierda de la frontera existe una onda estacionaria casi pura.

**Caso 2.** Suponiendo que el medio 1 es el conductor y el medio 2 es el aire, de modo que ahora  $Z_1 \ll Z_2$ , de la ecuación (g) se tiene la relación aproximada:

$$E_t \approx 2 E_i$$

De esto se concluye que para una onda plana que deja un conductor, el campo eléctrico casi se duplica en la frontera. Se obtiene que  $E_r \approx E_i$ , de manera que existe una onda estacionaria casi pura (ROET =  $\infty$ ) en el medio 1). No obstante, debido a la atenuación de las ondas en el medio 1 la ROET disminuye rápidamente al alejarse de la frontera (hacia la izquierda).

**Caso 3.** Suponiendo  $Z_1 \gg Z_2$  y considerando el medio 1 el aire, y el medio 2 es un conductor perfecto ( $Z_2 = 0$ ), en consecuencia de la expresión (k)  $R = -1$  y por la expresión  $T = R + 1$  el coeficiente de transmisión es cero  $T = 0$ . Por lo tanto, la onda es totalmente reflejada y no se transmite campo al segundo medio, por lo que el campo en la frontera se duplica exactamente al alejarse de la frontera ( $E_r = -E_i$  y  $H_r = H_i$ ), esto es análogo a una línea de transmisión en corto circuito.

**Caso 4.** Suponiendo  $Z_1 \ll Z_2$  y considerando que  $Z_2$  es infinita, de la ecuación (k)  $R = +1$  y por la expresión  $T = R + 1$  el coeficiente de transmisión es cero  $T = 2$ . Por lo tanto, hay reflexión total de la onda, pero  $E_r = +E_i$ , esto indica que en la frontera la intensidad de campo eléctrico se duplica exactamente, esto es análogo a una línea de transmisión en circuito abierto.

**Caso 5.** Suponiendo que los dos medios son dieléctricos ferromagnéticos sin pérdidas ( $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$ ), de las ecuaciones (k) y (h) se deduce, respectivamente:

$$R = \frac{\sqrt{\epsilon_1 \epsilon_2} - 1}{\sqrt{\epsilon_1 / \epsilon_2} + 1} \qquad T = \frac{2}{1 + \sqrt{\epsilon_2 / \epsilon_1}}$$

**Caso 6.** Si  $Z_1 = Z_2$ , entonces  $R = 0$  y  $T = 1$  lo que indica que la onda se propaga en el medio 2 sin reflejarse, esto es semejante a una línea de transmisión continua con una impedancia característica uniforme.

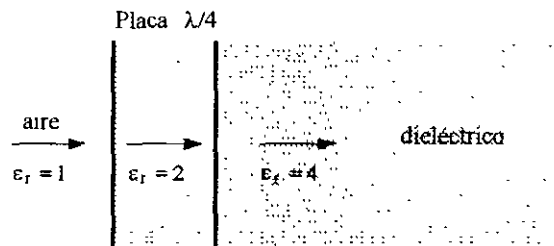
**Placa  $\lambda/4$ .** Es una capa que elimina reflejos en lentes y prismas en cámaras, binoculares, telescopios y otros dispositivos ópticos para mejorar su eficiencia.

La impedancia intrínseca de la placa está dad por:

$$Z_1 = \sqrt{Z_0 Z_2}$$

$Z_0$  es la impedancia intrínseca del aire.

$Z_2$  es la impedancia intrínseca del dieléctrico.



En el presente caso:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 376.7 \Omega$$

$$Z_2 = \frac{Z_0}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{376.7}{\sqrt{4}} = 188$$

$$Z_1 = \sqrt{Z_0 Z_2} = 266 \Omega$$

$$\epsilon_r = \frac{Z_0}{Z_2} = 2$$



## **BIBLIOGRAFIA**

1. EDMINISTER, J.A. *Electromagnetismo*. Shaum's Mc Graw-Hill
2. BALANIS, Constantine A. *Advanced Engineering Electromagnetics*. Ed. John Wiley & Sons
3. CHENG, David K. *Field and Wave electromagnetics*. Ed Addison-Wesley Publishing Company
4. CHIPMAN R. *Líneas de Transmisión*. Shaum's McGraw-Hill.
5. ESCOBAR S., L. *Apuntes de Teoría Electromagnética*. 1996 (inédito).
6. FIÓDOROV, N.N. *Fundamentos de Electrodinámica*. Ed. Mir. Moscú, 1982.
7. HAYT, William H. *Engineering Electromagnetics. International Student Edition*. Ed Mc. Graw Hill Novaro
8. JOHNK C. *Engineering Electromagnetic Fields and Waves*. Ed. John Wiley & Sons U.S.A 1988.
9. KRAUSS, John D. *Electromagnetics*. Ed. Mc. Graw Hill, México 1998.
10. MARSHALL, DUBROFF & SKITEK. *Electromagnetismo, Conceptos y Aplicaciones*. Ed Prentice-Hall
11. NIKOLSKI, V.V. *Electrodinámica y Propagación de Ondas de Radio*. Ed. Mir Moscú, 1985.
12. REITZ, John R.; MILFORD, F.J y Robert W. CHRISTY, R W *Fundamentos de la Teoría Electromagnética*. Ed Addison-Wesley Iberoamericana
13. REYES GUERRA, Bernardo. *El fenómeno Electromagnético. Introducción al Estudio de la Transmisión de Información*. Ed. Noriega Editores
14. SADIKU M *Elementos de Electromagnetismo*. Editorial CECSA, 2ª Ed., México 1998.
15. SERWAY, R.A *Física*. Ed Mc Graw Hill
16. SOSA PEDROZA, Jorge y ORTEGA LARA, Lizbeth. *Líneas de Transmisión y Guías de Onda*. Ed. Limusa.
17. WYLIE, C.R *Matemáticas Superiores para Ingeniería*. Mc Graw-Hill. Méxio 1994.

# **Líneas de Transmisión**

---

JOSÉ ISMAEL MARTÍNEZ LÓPEZ

JORGE RODRÍGUEZ CUEVAS

# Líneas de Transmisión

En muchas formas las líneas de transmisión son el enlace entre el análisis de campo y la teoría básica de circuitos, de esta manera representan una excelente herramienta para el análisis de redes de microondas. El fenómeno de propagación de onda en las líneas de transmisión puede ser aproximado ya sea de la extensión de la teoría de circuitos o de una especialización de las ecuaciones de Maxwell.

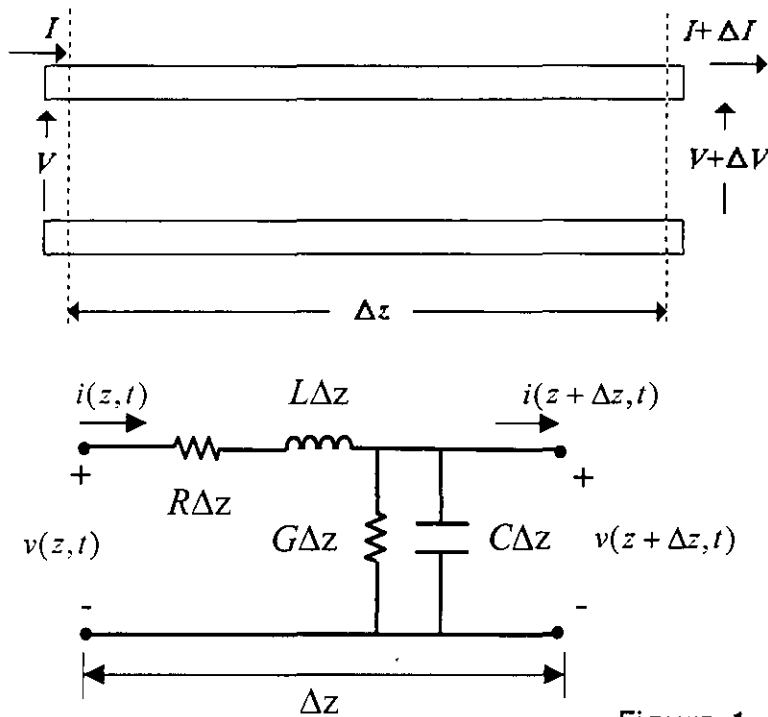
La diferencia principal entre la teoría básica de circuitos y la teoría de líneas de transmisión es el tamaño eléctrico. El análisis de circuitos asume que las dimensiones físicas de la red son mucho más pequeñas que la longitud de onda eléctrica, mientras que las líneas de transmisión pueden ser una fracción considerable de una longitud de onda o muchas longitudes de onda, en tamaño. Por lo que una línea de transmisión debe ser considerada como una red de parámetros distribuidos, donde los voltajes y corrientes pueden variar en magnitud y fase a lo largo de la longitud.

Una línea de transmisión a menudo es representada esquemáticamente como una línea de dos alambres, ya que las líneas de transmisión (para onda de propagación TEM) tienen al menos dos conductores. Un pedazo de línea de longitud  $\Delta z$  figura 1a, puede ser modelada como un circuito de parámetros concentrados como se muestra en la figura 1b.

La inductancia serie **L** representa la autoinductancia total de los dos conductores, y la capacitancia en derivación **C** es debida a la proximidad de los dos conductores. La resistencia serie **R** representa la resistencia debida a la conductividad finita de los conductores, y la conductancia en derivación **G** es debida a las pérdidas del dielectrico del material entre los dos conductores. Por lo que tanto **R** como **G** representan pérdidas.

Una línea de longitud finita puede ser vista como una sección en cascada de circuitos como los mostrados en la figura 1b.

# Líneas de Transmisión



**R**, Resistencia en serie por unidad de longitud, para ambos conductores, en  $\Omega/m$

**L**, Inductancia en serie por unidad de longitud, para ambos conductores, en H/m

**G**, Conductancia en derivación por unidad de longitud en S/m

**C**, Capacitancia en derivación por unidad de longitud en F/m

Figura 1

Aplicando leyes de Kirchoff,

$$v(z,t) - R \Delta z i(z,t) - L \Delta z \frac{\partial i(z,t)}{\partial t} - v(z + \Delta z, t) = 0 \quad (1)$$

$$i(z,t) - G \Delta z v(z + \Delta z, t) - C \Delta z \frac{\partial v(z + \Delta z, t)}{\partial t} - i(z + \Delta z, t) = 0$$

Dividiendo ambas ecuaciones por  $\Delta z$  y tomando el límite cuando  $\Delta z$  tiende a 0, se tiene:

$$\frac{\partial v(z,t)}{\partial z} = -R i(z,t) - L \frac{\partial i(z,t)}{\partial t} \quad (2)$$

$$\frac{\partial i(z,t)}{\partial z} = -G v(z,t) - C \frac{\partial v(z,t)}{\partial t}$$

Para la condición sinusoidal de estado estable:

$$\frac{dV(z)}{dz} = -(R + j\omega L)I(z) \quad (3a)$$

$$\frac{dI(z)}{dz} = -(G + j\omega C)V(z) \quad (3b)$$

# Propagación de onda

Tomando la derivada de la ecuación (3a) y sustituyendo en la ecuación (3b) se tiene:

$$\frac{d^2V(z)}{dz} = -(R + j\omega L) \frac{dI(z)}{dz}$$

$$\frac{d^2V(z)}{dz^2} = -(R + j\omega L)[-(G + j\omega C)V(z)] \quad 4(a)$$

De manera similar para la ecuación (3b) se tiene:

$$\frac{d^2I(z)}{dz^2} = (G + j\omega C)(R + j\omega L)I(z) \quad 4(b)$$

Arreglando las ecuaciones 4(a) y 4(b) para  $V(z)$  e  $I(z)$ , tenemos:

$$\frac{d^2V(z)}{dz^2} - \gamma^2 V(z) = 0 \quad (5a)$$

$$\frac{d^2I(z)}{dz^2} - \gamma^2 I(z) = 0 \quad (5b)$$

**Donde  $\gamma$  es la constante compleja de propagación y está dada por:**

$$\gamma = \sqrt{ZY} = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} = \alpha + j\beta \quad (6)$$

# Propagación de onda

La constante de atenuación  $\alpha$  está dada en nepers por unidad de longitud y la constante de fase  $\beta$  en radianes por unidad de longitud.

Para la solución de las ecuaciones (5), se propone la ecuación característica

$$P^2 - \gamma^2 P^0 = 0, \Rightarrow P_{1,2} = \pm \gamma$$

Por lo que las soluciones generales a las ecuaciones anteriores son:

$$V(z) = V_0^+ e^{-\gamma z} + V_0^- e^{\gamma z} \quad (7a)$$

$$I(z) = I_0^+ e^{-\gamma z} + I_0^- e^{\gamma z} \quad (7b)$$

donde los términos  $e^{-\gamma z}$  y  $e^{\gamma z}$  representan la propagación de la ondas en la dirección  $+z$  y  $-z$ , respectivamente.

Convirtiendo al dominio del tiempo, por ejemplo la forma de onda del voltaje puede ser expresado como:

$$v(z, t) = \text{Re} \left( V(z) e^{j\omega t} \right)$$

Osea

$$v(z, t) = |V_0^+| \cos(\omega t - \beta z + \phi^+) e^{-\alpha z} + |V_0^-| \cos(\omega t + \beta z + \phi^-) e^{\alpha z}$$

Donde  $\phi^{\pm}$  Es el ángulo de fase del voltaje complejo  $V_0^{\pm}$

# Impedancia característica

Aplicando la ecuaciones (3a) a la ecuación de voltaje (7a), obtenemos la corriente de la línea, la cual está dado por:

$$I(z) = \frac{\gamma}{R + j\omega L} [V_0^+ e^{-\gamma z} - V_0^- e^{\gamma z}] \quad (8)$$

De donde

$$\frac{V^+(z)}{I^+(z)} = \frac{V_0^+(z) e^{-\gamma z}}{\frac{\gamma}{R + j\omega L} V_0^+ e^{-\gamma z}}$$

Finalmente la impedancia característica de la línea de transmisión está dada por:

$$Z_0 = \frac{V_0^+}{I_0^+} = -\frac{V_0^-}{I_0^-}$$

O bien:

$$Z_0 = \frac{R + j\omega L}{\gamma} = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} \quad (9)$$

Rescribiendo la ecuación de la corriente:

$$I(z) = \frac{V_0^+}{Z_0} e^{-\gamma z} - \frac{V_0^-}{Z_0} e^{\gamma z} \quad (10)$$

**La longitud de onda está dada por:**

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$$

**y la velocidad de fase es:**

$$v_p = \frac{\omega}{\beta}$$

# La línea de Transmisión sin Pérdidas

Haciendo  $R = G = 0$  se tiene:

$$\gamma = \alpha + j\beta = j\omega\sqrt{LC}$$

por lo que la constante de fase es:

$$\beta = \omega\sqrt{LC}$$

y la constante de atenuación:

$$\alpha = 0$$

La impedancia característica se reduce a:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Las soluciones generales para el voltaje y la corriente de una línea sin pérdidas pueden escribirse como:

$$V(z) = V_0^+ e^{-j\beta z} + V_0^- e^{j\beta z}$$

$$I(z) = \frac{V_0^+}{Z_0} e^{-j\beta z} - \frac{V_0^-}{Z_0} e^{j\beta z}$$

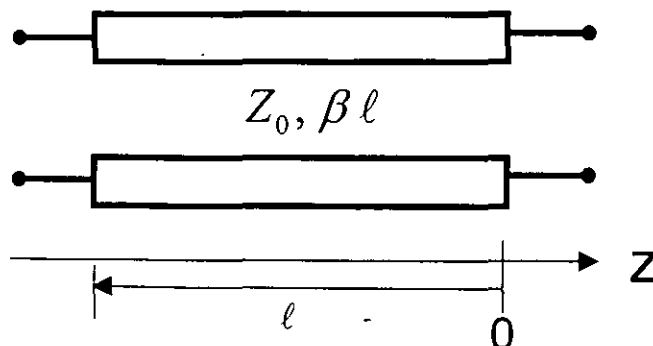
La longitud de onda está dada por:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{LC}}$$

y la velocidad de fase por:

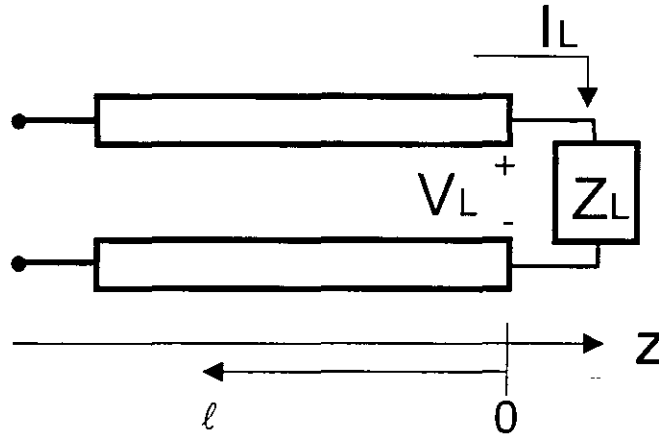
$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Esquemáticamente podemos representar la línea sin pérdidas como:





# Línea de Transmisión sin pérdidas con carga



En el punto  $z=0$  debe de cumplirse que:

$$Z_L = \frac{V(0)}{I(0)} = \frac{V_0^+ + V_0^-}{V_0^+ - V_0^-} Z_0$$

Resolviendo para  $V_0^-$  se tiene:

$$V_0^- = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} V_0^+$$

## Coeficiente de Reflexión $\Gamma$

La relación entre las ondas de voltaje reflejada e incidente es definida como el coeficiente de reflexión  $\Gamma$ .

$$\Gamma = \frac{V_0^-}{V_0^+} = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$$

En el caso general:

$$\Gamma = |\Gamma| e^{j\theta}$$

por lo que:

$$0 \leq |\Gamma| \leq 1$$

para obtener la condición de acoplamiento:

$$Z_L = Z_0$$

$$\Gamma = 0$$

# Ondas Estacionarias

Reescribiendo el voltaje en términos de  $\Gamma$ :

$$V(z) = V_0^+ \left[ e^{-j\beta z} + \Gamma e^{j\beta z} \right]$$

Obteniendo su valor absoluto:

$$|V(z)| = |V_0^+| \left| 1 + \Gamma e^{j2\beta z} \right|$$

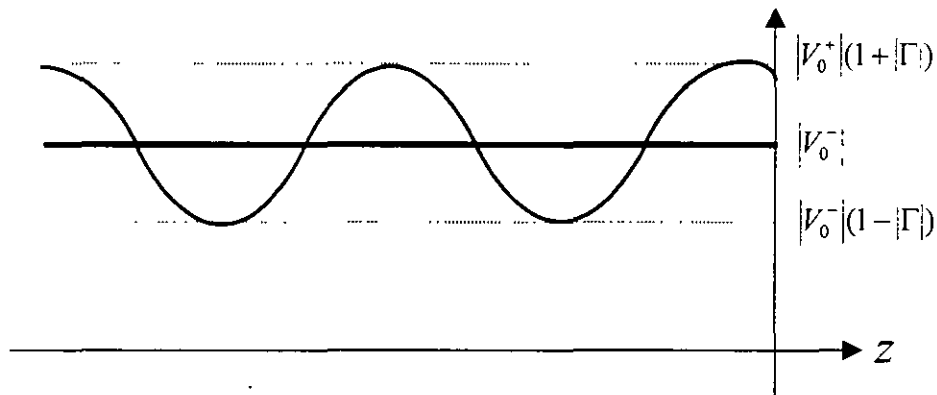
Sustituyendo la expresión de  $\Gamma$  en términos de su magnitud y fase:

$$|V(z)| = |V_0^+| \left| 1 + |\Gamma| e^{(\theta - j2\beta \ell)} \right|$$

Donde  $\ell = -z$  es la distancia medida desde la carga en  $z=0$

Los valores máximo y mínimo ocurren cuando los términos de fase son, respectivamente:

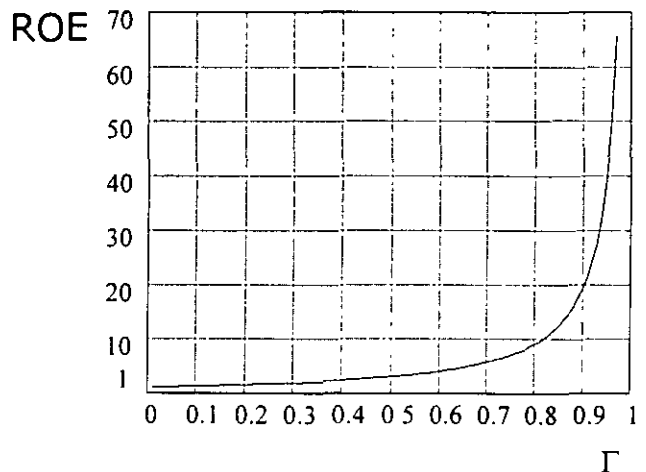
$$\begin{array}{l}
 \text{y} \\
 e^{(\theta - 2\beta \ell)} = 1 \qquad V_{\max} = |V_0^+| (1 + |\Gamma|) \\
 e^{(\theta - 2\beta \ell)} = -1 \qquad V_{\min} = |V_0^+| (1 - |\Gamma|)
 \end{array}$$



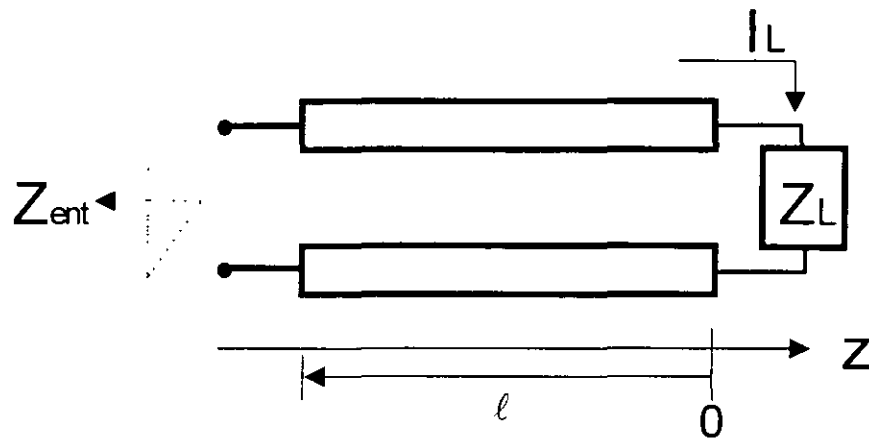
## Relación de Onda Estacionaria (ROE)

$$ROE = \frac{V_{\max}}{V_{\min}} = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|}$$

$$1 \leq ROE < \infty$$



# Impedancia de entrada en una Línea de Transmisión



Puede encontrarse el valor de  $\Gamma$  en cualquier punto de la línea:

$$\Gamma(\ell) = \frac{V_0^- e^{-j\beta\ell}}{V_0^+ e^{j\beta\ell}} = \Gamma(0) e^{-2j\beta\ell}$$

y el valor de la impedancia de entrada:

$$Z_{ent} = \frac{V(-\ell)}{I(-\ell)} = \frac{1 + \Gamma e^{-2j\beta\ell}}{1 - \Gamma e^{-2j\beta\ell}} Z_0$$

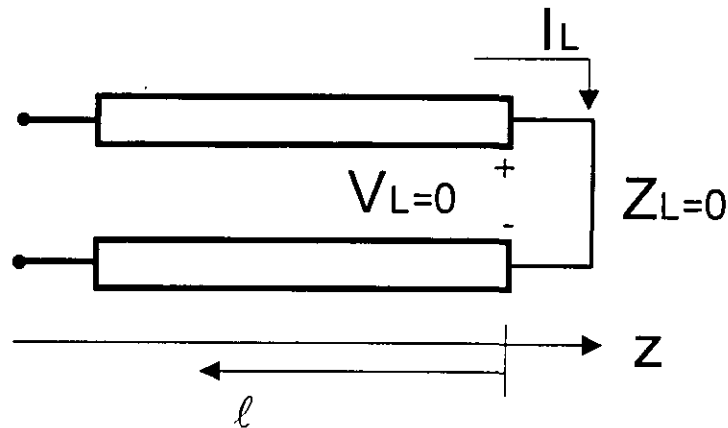
Otra forma muy útil de la ecuación de impedancia de entrada es:

$$Z_{ent} = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan \beta \ell}{Z_0 + jZ_L \tan \beta \ell}$$

## Casos especiales de terminación

$$\left\{ \begin{array}{l} Z_L = 0 \\ Z_L = \infty \end{array} \right.$$

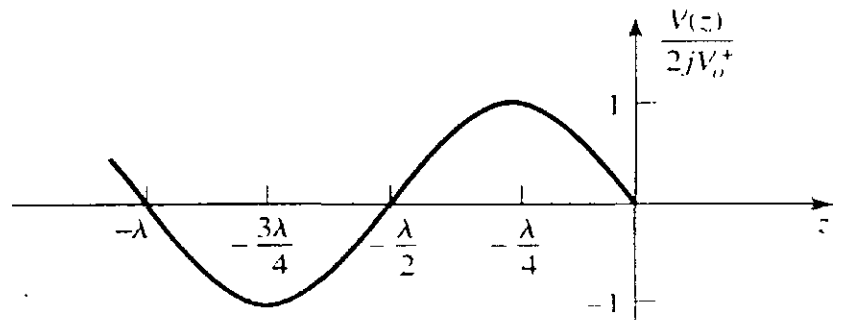
# Terminación en Corto Circuito



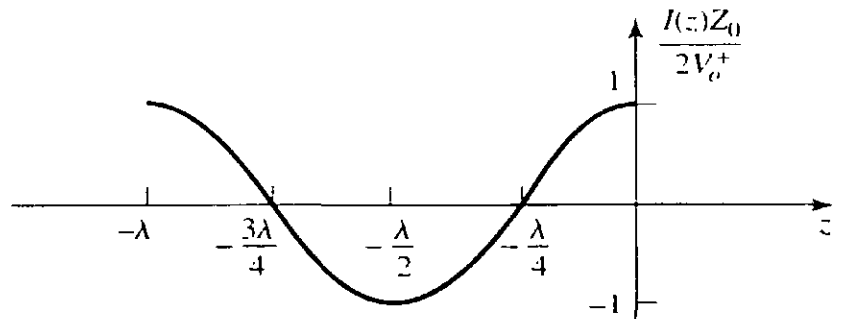
$$\Gamma = 1$$

$$Z_{ent} = jZ_0 \tan \beta l$$

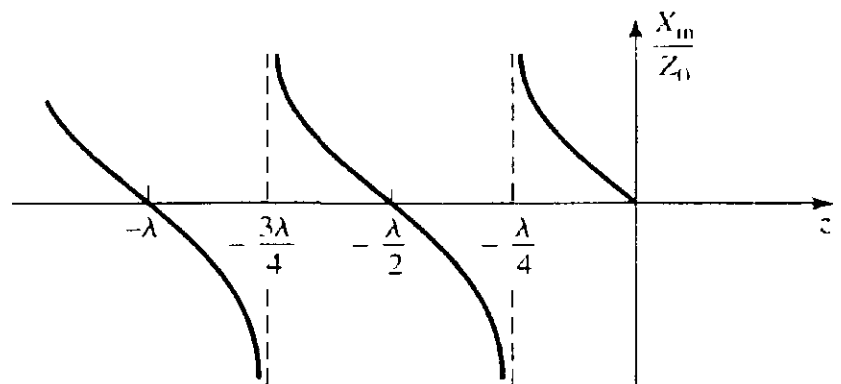
Variaciones a lo largo de la línea terminada en corto circuito, del voltaje (a); de la corriente (b) y de la impedancia (c).



(a)



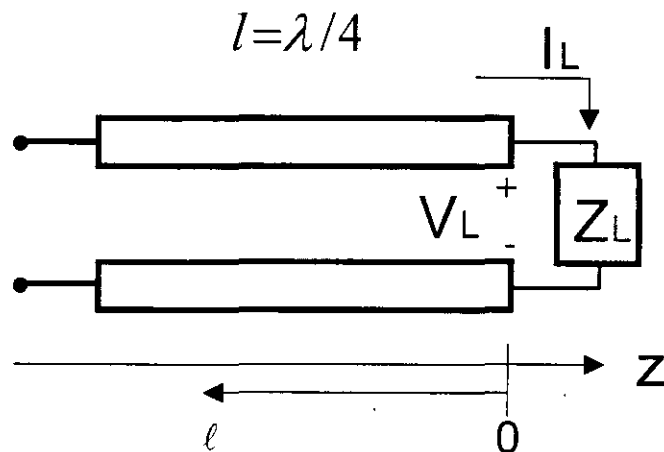
(b)



(c)

Stub Cerrado

## Transformador de longitud $\lambda/4$



Como:

$$\beta l = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right) \left(\frac{\lambda}{4}\right) = \frac{\pi}{2} \quad \text{y} \quad \tan \frac{\pi}{2} \rightarrow \infty$$

$$Z_{ent} = Z_0 \frac{Z_L + j Z_0 \tan \frac{\pi}{2}}{Z_0 + j Z_L \tan \frac{\pi}{2}} = \frac{Z_0^2}{Z_L}$$

## Transformador de longitud $\lambda/2$

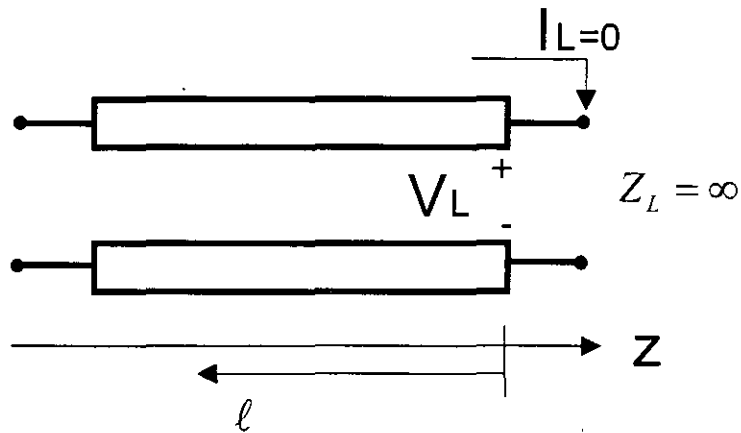
En este caso  $l = \lambda/2$  y  $\beta l = \pi$

Por lo que  $\tan \pi \rightarrow 0$

finalmente

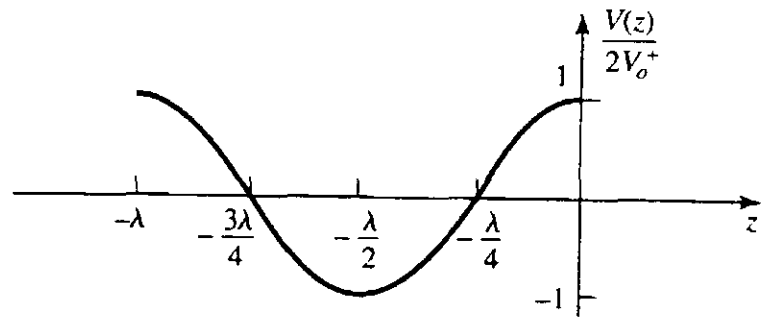
$$Z_{ent} = Z_0 \frac{Z_L + j Z_0 \tan \frac{\pi}{2}}{Z_0 + j Z_L \tan \frac{\pi}{2}} = Z_L$$

# Terminación en Circuito Abierto

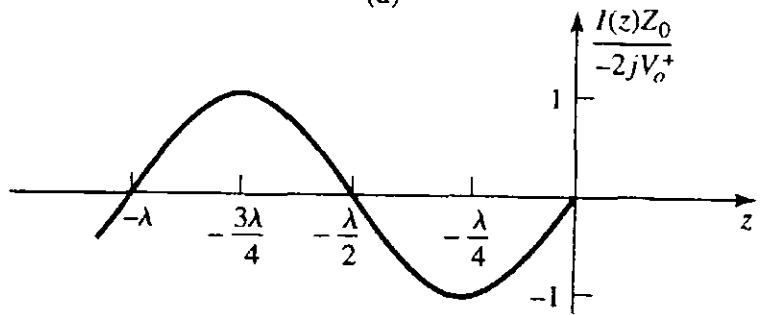


$$\Gamma = -1$$

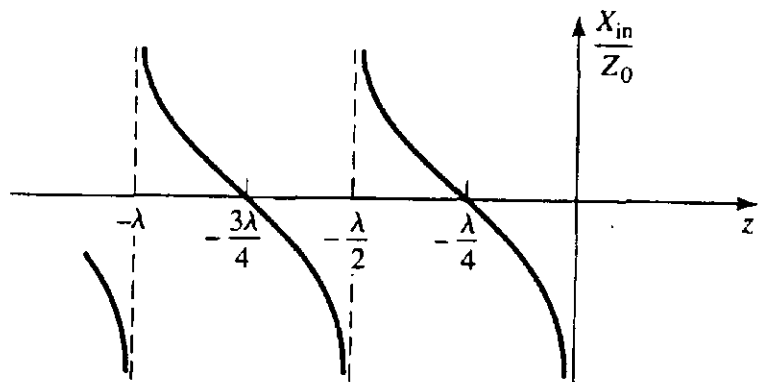
$$Z_{ent} = -jZ_0 \cot \beta \ell$$



(a)



(b)



(c)

Variaciones a lo largo de la línea terminada en circuito abierto, del voltaje (a); de la corriente (b) y de la impedancia (c).

*Stub* Abierto

# Carta Smith

La Carta Smith es una ayuda gráfica la cual es muy utilizada en problemas de líneas de transmisión. Aunque existen otras cartas de impedancia y de coeficientes de reflexión, la Carta Smith es probablemente la más conocida y la más ampliamente utilizada. Esta fue desarrollada en 1939 por P. Smith en los Laboratorios Bell.

A primera vista, la Carta Smith puede parecer demasiado compleja, sin embargo la clave para entenderla es verla como una gráfica polar del coeficiente de reflexión,  $\Gamma$ .

Si expresamos el coeficiente de reflexión en forma polar, se tiene:  $\Gamma = |\Gamma| e^{j\theta}$ , entonces la magnitud del coeficiente es graficada como un radio del centro de la carta ( $|\Gamma| \leq 1$ ) y el ángulo  $\theta$  ( $-180^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ ) será medido del lado a mano derecho del diámetro horizontal.

La utilidad real de la Carta Smith, radica en el hecho de que esta puede ser utilizada para convertir el coeficiente de reflexión a una impedancia normalizada (o admitancia), y viceversa utilizando los círculos de impedancia (o admitancia) en la carta.

Cuando se trabaja con la Carta Smith normalmente se utilizan cantidades normalizadas, las cuales se denotan con letras minúsculas. La constante de normalización usualmente es la impedancia característica de la línea, por lo que  $z = Z/Z_0$  representa la versión normalizada de la impedancia  $Z$ .

Si una línea sin pérdidas con impedancia característica  $Z_0$  es terminada con una impedancia de carga  $Z_L$ , el coeficiente de reflexión en la carga puede ser escrito como

$$\Gamma = \frac{z_L - 1}{z_L + 1} = |\Gamma| e^{j\theta}$$

Resolviendo para  $z_L$ , se tiene:

$$z_L = \frac{1 + |\Gamma| e^{j\theta}}{1 - |\Gamma| e^{j\theta}}$$

Como se trata de una expresión compleja, podemos representarla tomando en cuenta que:

$$z_L = r_L + jx_L \quad \Gamma = \Gamma_r + j\Gamma_i$$

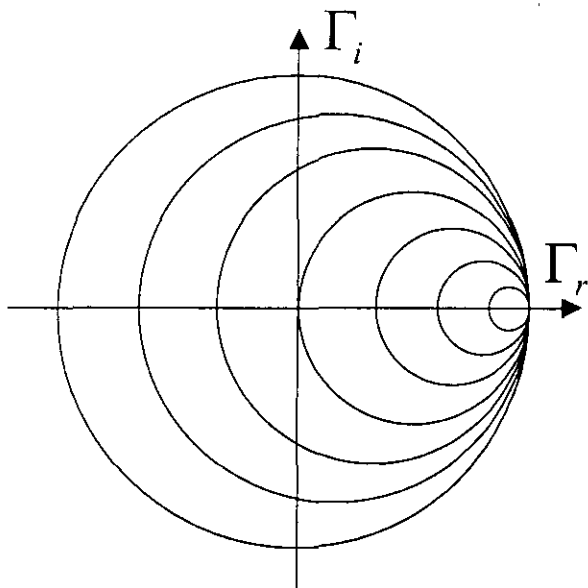
# Carta Smith

Por lo que:  $r_L + jx_L = \frac{(1 + \Gamma_r) + j\Gamma_i}{(1 - \Gamma_r) - j\Gamma_i}$  De donde

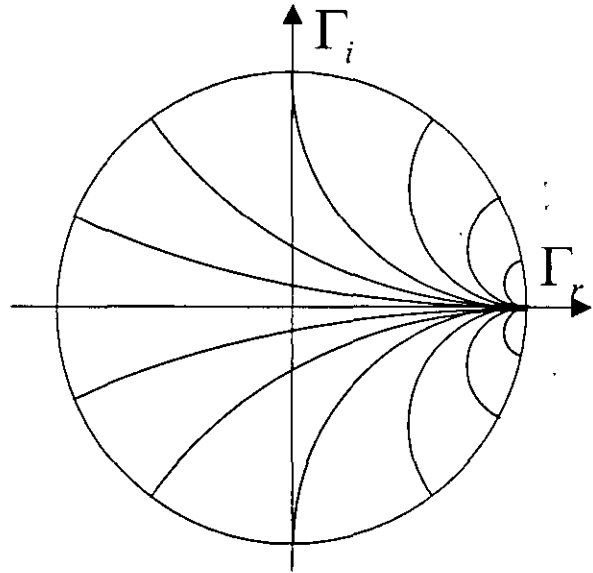
$$r_L = \frac{1 - \Gamma_r^2 - \Gamma_i^2}{(1 - \Gamma_r)^2 + \Gamma_i^2} \quad \text{y} \quad x_L = \frac{2\Gamma_i}{(1 - \Gamma_r)^2 + \Gamma_i^2}$$

$$\left(\Gamma_r - \frac{r_L}{1+r_L}\right)^2 + \Gamma_i^2 = \left(\frac{1}{1+r_L}\right)^2$$

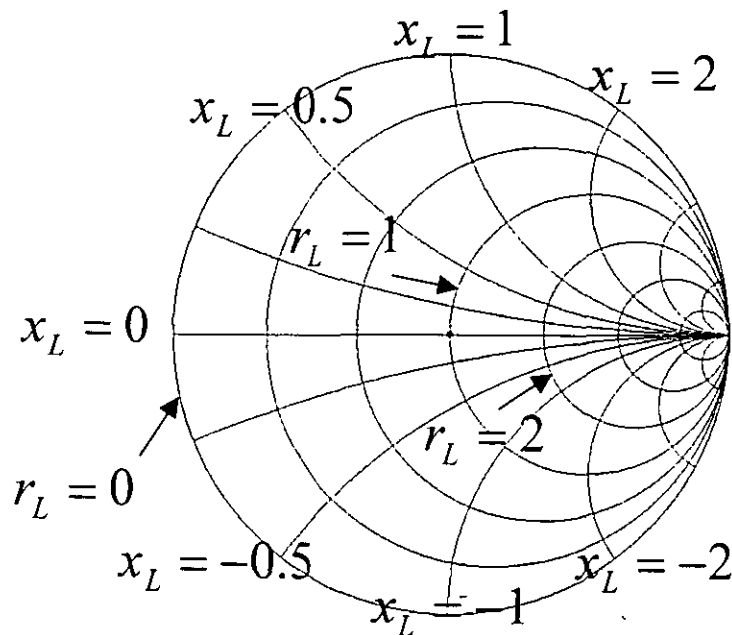
$$(\Gamma_r - 1)^2 + \left(\Gamma_i - \frac{1}{x_L}\right)^2 = \left(\frac{1}{x_L}\right)^2$$



Círculos de Resistencia constante



Círculos de Reactancia constante





# Carta Smith

## Ejemplos

Los siguientes ejemplos, son para demostrar la utilidad de la Carta Smith, en problemas de líneas de transmisión, su solución se encontrara en las siguientes páginas.

Ejemplo 1. Sea una línea de transmisión terminada en carga, con  $Z_0 = 100 \Omega$ , el coeficiente de reflexión en el punto de carga es de  $0.56 + j0.214$ . ¿Determinar Cual es la carga?

Ejemplo 2. La línea de transmisión tiene una impedancia característica de  $50 \Omega$ , la carga es de  $80 - j40 \Omega$ . ¿ Determinar tanto el coeficiente de reflexión como la relación de onda estacionaria ROE?

Ejemplo 3. Se tiene una línea de transmisión coaxial con las siguientes características:  $Z_0 = 75 \Omega$ , una longitud de  $2 \text{ cm}$ , la permitividad del dieléctrico es de  $2.56$ , la frecuencia de operación es de  $3 \text{ GHz}$  y la impedancia de carga es de  $Z_c = 37.5 + j75 \Omega$ , ¿Determinar la impedancia  $Z_{in}$  y ROE.

NAME	TITLE <i>Ejemplo 1.</i>	DWG. NO
SMITH CHART FORM 82-BSPR(9-66)	ANALOG INSTRUMENTS COMPANY, NEW PROVIDENCE, N.J. 07974	DATE

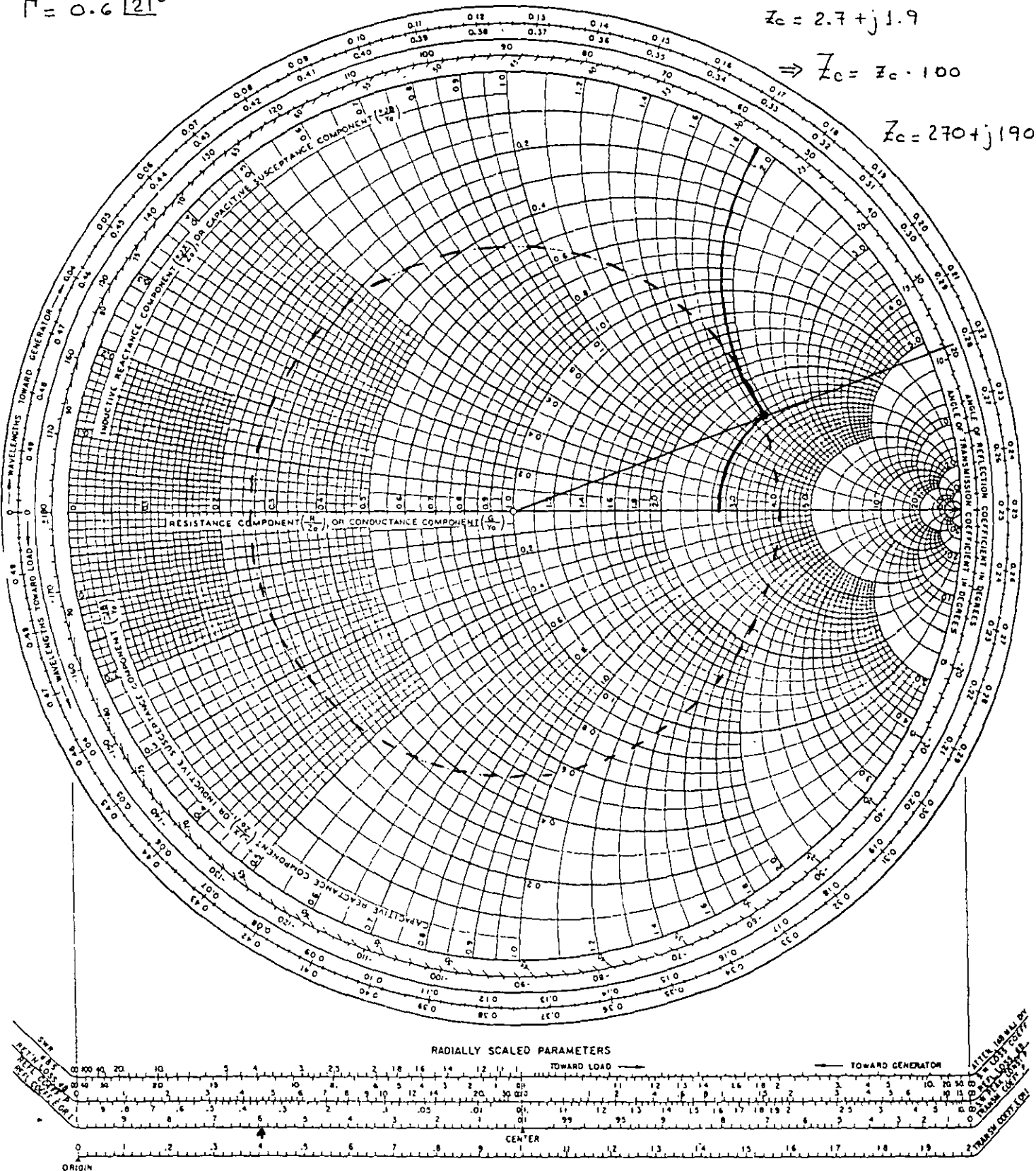
IMPEDANCE OR ADMITTANCE COORDINATES

$\Gamma = 0.6 \angle 21^\circ$

$Z_c = 2.7 + j1.9$

$\Rightarrow Z_c = Z_c \cdot 100$

$Z_c = 270 + j190$



NAME	TITLE	DWG. NO.
SMITH CHART FORM 82-BSPR(9-66)	Ejemplo 2. ANALOG INSTRUMENTS COMPANY, NEW PROVIDENCE, N.J. 07974	DATE

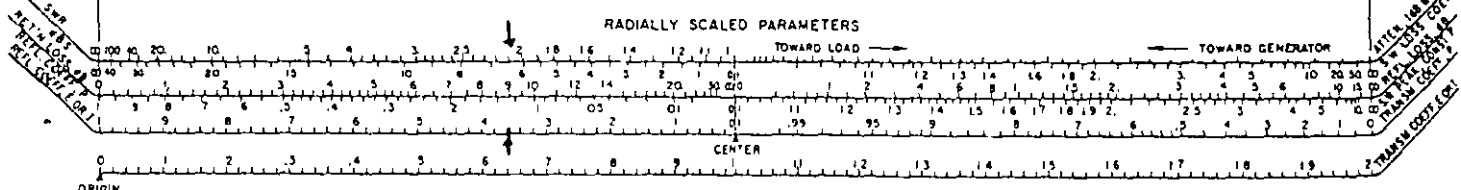
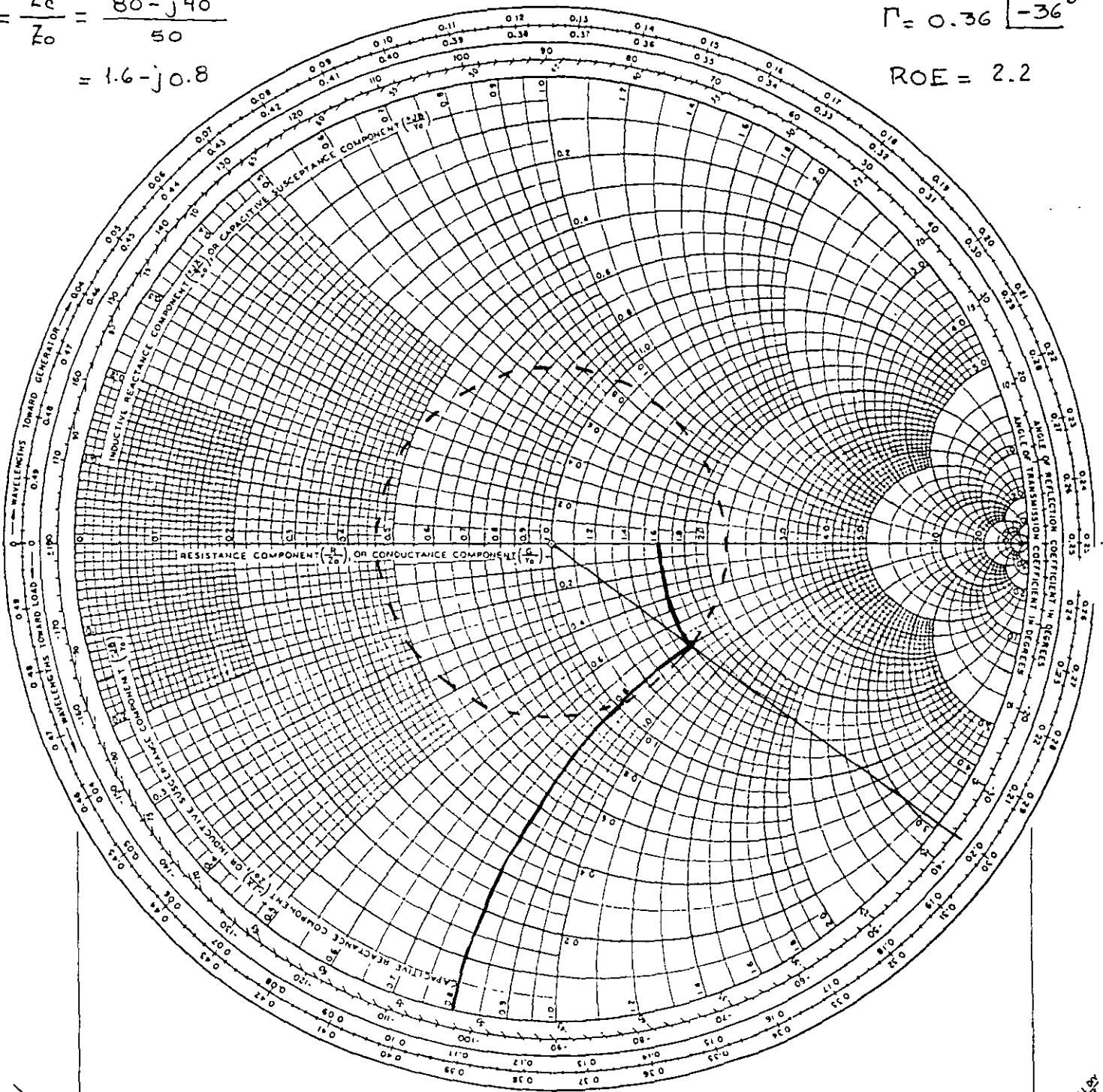
IMPEDANCE OR ADMITTANCE COORDINATES

$$Z_L = \frac{Z_c}{Z_0} = \frac{80 - j40}{50}$$

$$= 1.6 - j0.8$$

$$\Gamma = 0.36 \angle -36^\circ$$

$$ROE = 2.2$$



NAME	TITLE <b>Ejemplo 3</b>	DWG. NO
SMITH CHART FORM 82-BSPR 19-661	ANALOG INSTRUMENTS COMPANY, NEW PROVIDENCE, N.J. 07974	DATE

IMPEDANCE OR ADMITTANCE COORDINATES

0.135λ

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{3 \cdot 10^9} = 0.1 \text{ m}$$

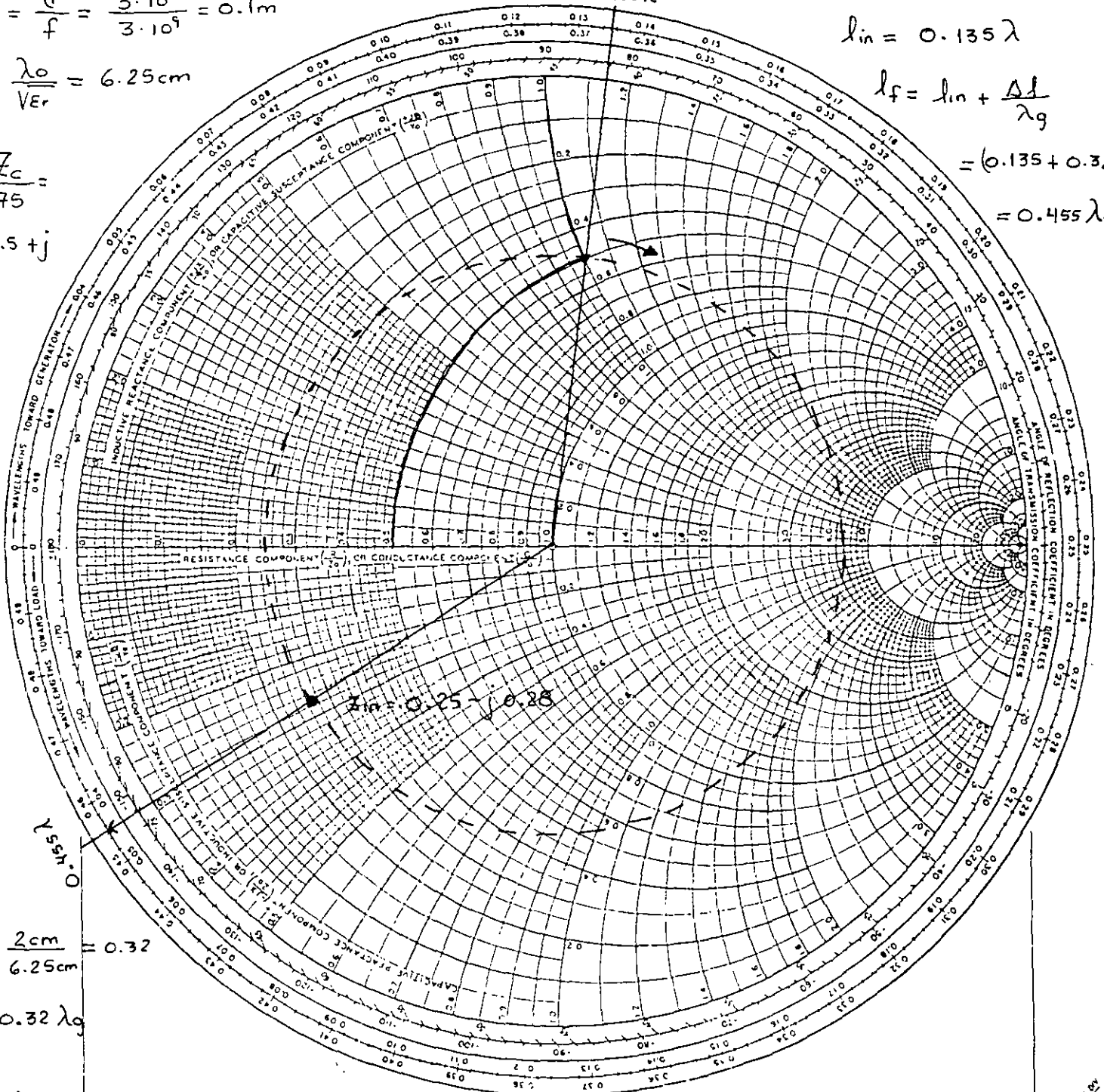
$$\lambda_g = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\epsilon_r}} = 6.25 \text{ cm}$$

$$l_{in} = 0.135 \lambda$$

$$l_f = l_{in} + \frac{\Delta l}{\lambda_g} = (0.135 + 0.32) \lambda_g = 0.455 \lambda_g$$

$$Z_c = \frac{Z_0}{75} = 0.5 + j$$

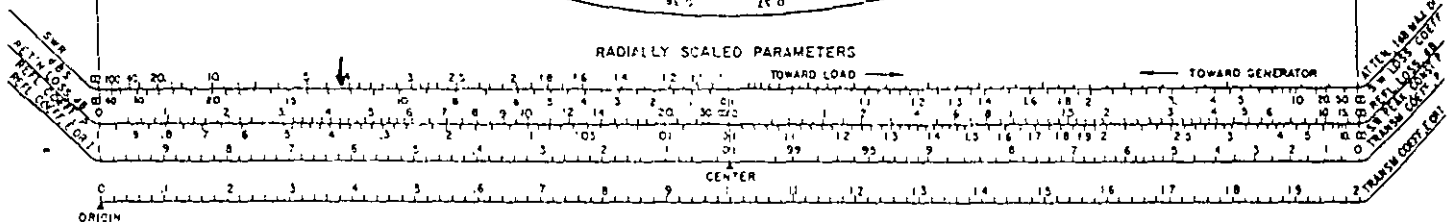
$$Z_c = 0.5 + j$$



$$\frac{\Delta l}{\lambda_g} = \frac{2 \text{ cm}}{6.25 \text{ cm}} = 0.32$$

$$\Delta l = 0.32 \lambda_g$$

RADIALLY SCALED PARAMETERS



$$Z_{in} = 18.75 - j21, \text{ ROE} = 4.2$$

# Líneas de transmisión y Guías de onda

## SOLUCIÓN GENERAL PARA ONDAS TEM, TE Y TM

En esta sección se encontrará la solución general a las ecuaciones de Maxwell para casos específicos de propagación de onda TEM, TE y TM en líneas de transmisión o guías de onda, como la mostrada en la siguiente figura:

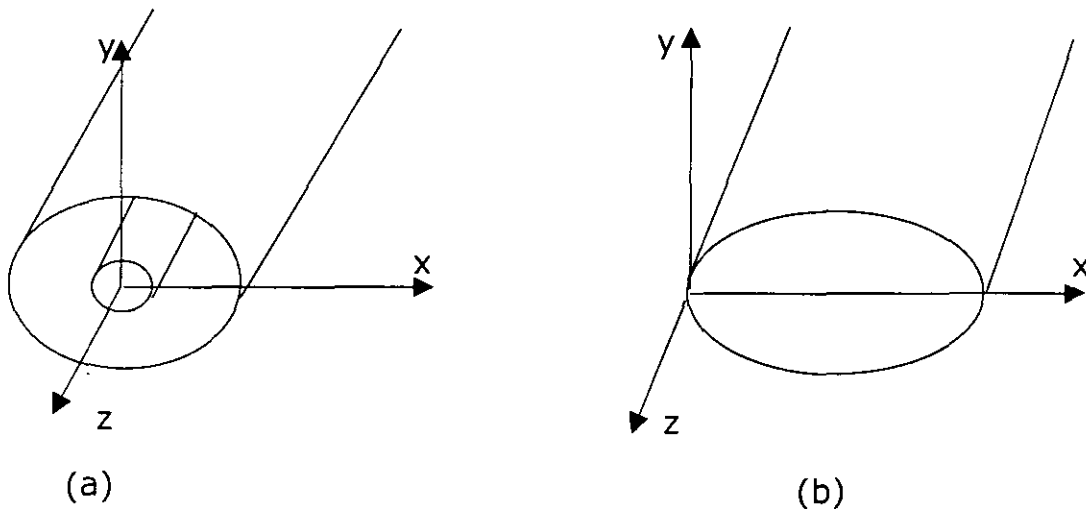


Figura 1. (a) línea de transmisión y (b) guía de onda cerrada

La estructura de la figura 1, se asume que es uniforme en la dirección "z" e infinitamente larga

siguientes expresiones Además se asume que la variación armónica de los campos es de la forma  $e^{j\omega t}$  y que la propagación de onda es en la dirección de "z". Por lo que los campos pueden ser representados por las :

$$\vec{E}(x, y, z) = (\vec{e}_{\perp} + \vec{e}_z) e^{-j\beta z} \quad (2.1a)$$

$$\vec{H}(x, y, z) = (\vec{h}_{\perp} + \vec{h}_z) e^{-j\beta z} \quad (2.1b)$$

Donde

$\vec{e}_{\perp}$  y  $\vec{h}_{\perp}$  son las componentes transversales de los campos,

y  $\vec{e}_z$  y  $\vec{h}_z$  representan las componentes longitudinales

# Líneas y Guías de onda

y  $\beta$ : Es la constante de propagación

Que en el caso en que existan pérdidas en el conductor o en el dieléctrico, esta constante será una constante de propagación compleja y el término  $j\beta$  debe ser reemplazado por  $\gamma = \alpha + j\beta$

Asumiendo que la región de la línea o de la guía de onda está libre de cargas, las ecuaciones de Maxwell pueden ser escritas como:

$$\nabla \times E = -j\omega \mu H \quad \text{y} \quad \nabla \times H = j\omega \epsilon E \quad (2.2)$$

Considerando la dependencia con respecto a "z"  $e^{-j\beta z}$ , y desarrollando el rotacional de cada una de las ecuaciones anteriores, las tres componentes de cada una de las ecuaciones vectoriales se reducen a:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} + j\beta E_y = -j\omega \mu H_x,$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} + j\beta E_x = j\omega \mu H_y, \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -j\omega \mu H_z,$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} + j\beta H_y = j\omega \epsilon E_x,$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} + j\beta H_x = -j\omega \epsilon E_y, \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = j\omega \epsilon E_z$$

Estas seis ecuaciones pueden resolverse para las cuatro componentes transversales de los campos, en términos de las componentes longitudinales  $E_z$  y  $H_z$ . Quedando de la siguiente manera

# Líneas y Guías de onda

$$\begin{aligned}H_x &= \frac{j}{k^2 - \beta^2} \left( \omega \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial y} - \beta \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \\H_y &= \frac{-j}{k^2 - \beta^2} \left( \omega \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial x} + \beta \frac{\partial H_z}{\partial y} \right) \\E_x &= \frac{-j}{k^2 - \beta^2} \left( \beta \frac{\partial E_z}{\partial x} + \omega \mu \frac{\partial H_z}{\partial y} \right) \\E_y &= \frac{j}{k^2 - \beta^2} \left( -\beta \frac{\partial E_z}{\partial y} + \omega \mu \frac{\partial H_z}{\partial x} \right)\end{aligned} \tag{2.5}$$

donde

$$k_c^2 = k^2 - \beta^2 \quad \text{Que ha sido definido como el número de onda de corte} \tag{2.6}$$

$$k = \omega \sqrt{\mu \varepsilon} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{El número de onda del material de relleno de la LT o GO} \tag{2.7}$$

Las ecuaciones (2.5), representan resultados muy útiles que pueden ser aplicados a una gran variedad de tipos de líneas de transmisión o de guías de onda. Ahora aplicaremos estos resultados para casos específicos de tipos de onda.

## Ondas TEM

Las ondas transversales electromagnéticas (TEM) se caracterizan porque  $E_z = H_z = 0$ . Las ecuaciones (2.5) serían igual a cero a menos que  $k_c^2 = 0$  en cuyo caso se tendría una indeterminación, y en consecuencia

$$k = \beta \Rightarrow v_f = \frac{3 \times 10^8}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}} \tag{2.8}$$

# Líneas y Guías de onda

Ahora la ecuación de onda de Helmholtz para el campo  $E_x$  es:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) E_x = 0 \quad (2.9)$$

Como existe una dependencia con respecto de "z" de la forma  $e^{-j\beta z}$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} E_x = -\beta^2 E_x = k^2 E_x$$

Por lo que

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) E_x = 0 \quad (2.10)$$

La cual nos muestra que el campo eléctrico transversal de una onda TEM satisface la ecuación de Laplace. De manera similar se puede demostrar que el campo magnético transversal también satisface la ecuación de Laplace.

En el caso electrostático se sabe que el campo eléctrico puede ser expresado como el gradiente de un potencial escalar, y este a su vez satisface la ecuación de Laplace, esto es:

$$\vec{e}(x, y) = -\nabla_t \Phi(x, y) \quad (2.11)$$

$$\nabla_t^2 \Phi(x, y) = 0 \quad (2.12)$$

De esta manera podemos observar que los campos transversales de una onda TEM son similares a los campos estáticos que pueden existir entre dos conductores. Por lo que se concluye que las ondas TEM pueden existir solo cuando dos o más conductores están presentes

La impedancia de onda del modo TEM, se puede encontrar como la relación de los campos transversales eléctrico y magnético, esto es:

$$Z_{TEM} = \frac{E_x}{H_y} = -\frac{E_y}{H_x} = \frac{\omega \mu}{\beta} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \eta \quad (2.13)$$

Combinando resultados, también se tiene la siguiente expresión general para los campos transversales

$$\vec{h}_\perp(x, y) = \frac{1}{Z_{TEM}} \hat{z} \times \vec{e}_\perp(x, y) \quad (2.14)$$



# Líneas y Guías de onda

Por lo tanto un procedimiento para analizar líneas TEM puede resumirse como sigue:

1. Resolver la ecuación de Laplace, (2.12) para  $\Phi(x, y)$ . La solución puede contener varias constantes desconocidas
2. Encontrar las constantes aplicando condiciones de frontera para voltajes conocidos en los conductores.
3. Obtener  $\vec{e}$  y  $\vec{E}$  de (2.11) y (2.1a). Y  $\vec{h}$  y  $\vec{H}$  de (2.14) y (2.1b).
4. Con los campos se puede obtener  $V$  e  $I$  y con estos la impedancia característica.

## Ondas TE

Las ondas transversal eléctrica (TE), (también conocidas como ondas H). Se caracterizan porque  $E_z = 0$  y  $H_z \neq 0$ . Por lo que las ecuaciones (2.5) se reducen a:

$$\begin{aligned}H_x &= \frac{-j\beta}{k_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial x}, \\H_y &= \frac{-j\beta}{k_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial y}, \\E_x &= \frac{-j\omega\mu}{k_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial y}, \\E_y &= \frac{j\omega\mu}{k_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial x}\end{aligned}\tag{2.15}$$

En este caso  $k_c \neq 0$ , y la constante de propagación  $\beta = \sqrt{k^2 - k_c^2}$  es generalmente una función de la frecuencia y de la geometría de la línea o de la guía. Para aplicar (2.15), debemos primero encontrar  $H_z$  de la ecuación de onda de Helmholtz,

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) H_z = 0\tag{2.16}$$

# Líneas y Guías de onda

Como existe una dependencia con respecto de "z" de la forma  $e^{-j\beta z}$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} H_z = -\beta^2 H_z \quad (2.17)$$

Por lo que

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_c^2 \right) H_z = 0 \quad (2.18)$$

Esta ecuación debe ser resuelta sujeta a condiciones de frontera respecto de la geometría de una línea o guía específica.

Se debe observar que como  $\beta^2 = k^2 - k_c^2$

para  $k^2 > k_c^2 \Rightarrow \beta$  real  $\Rightarrow$  propagación

$k^2 < k_c^2 \Rightarrow \beta$  imaginaria  $\Rightarrow$  no hay propagación

La impedancia de la onda TE puede ser encontrada como:

$$Z_{TE} = \frac{E_x}{H_y} = -\frac{E_y}{H_x} = \frac{\omega \mu}{\beta} = \frac{k \eta}{\beta} \quad (2.19)$$

y

$$\vec{h}_\perp(x, y) = \frac{1}{Z_{TE}} \hat{z} \times \vec{e}_\perp(x, y) \quad (2.20)$$

La onda TE se dice ser más universal ya que puede existir en un conductor cerrado o abierto, con dos o más conductores, pero hay que tener en cuenta su número de onda de corte.

## Ondas TM

Las ondas transversal magnética (TM), (también conocidas como ondas E). Se caracterizan porque  $E_z \neq 0$  y  $H_z = 0$ . Por lo que las ecuaciones (2.5) se reducen a:

# Líneas y Guías de onda

$$\begin{aligned}H_x &= \frac{j\omega\varepsilon}{k_c^2} \frac{\partial E_z}{\partial y}, \\H_y &= \frac{-j\omega\varepsilon}{k_c^2} \frac{\partial E_z}{\partial x}, \\E_x &= \frac{-j\beta}{k_c^2} \frac{\partial E_z}{\partial x}, \\E_y &= \frac{-j\beta}{k_c^2} \frac{\partial E_z}{\partial y}\end{aligned}\tag{2.21}$$

En este caso  $k_c \neq 0$ , y la constante de propagación  $\beta = \sqrt{k^2 - k_c^2}$  es generalmente una función de la frecuencia y de la geometría de la línea o de la guía. Para aplicar (2.21), debemos primero encontrar  $E_z$  de la ecuación de onda de Helmholtz,

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) E_z = 0\tag{2.22}$$

Tomando en cuenta la dependencia con respecto de "z", se tiene:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_c^2 \right) E_z = 0\tag{2.23}$$

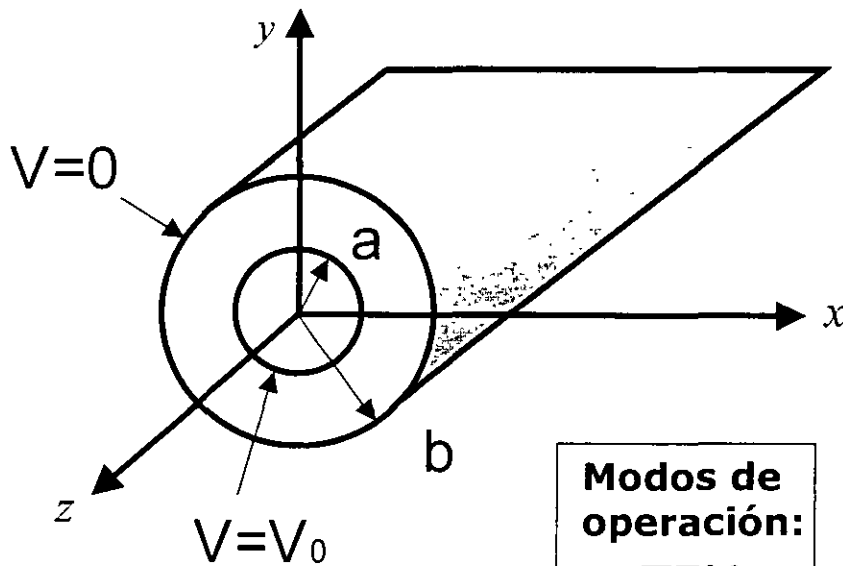
Esta ecuación debe ser resuelta sujeta a condiciones de frontera respecto de la geometría de una línea o guía específica.

Finalmente, de manera similar, la impedancia de la onda TE puede ser encontrada como:

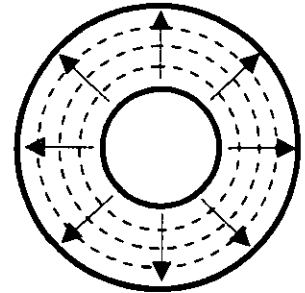
$$Z_{TE} = \frac{E_x}{H_y} = -\frac{E_y}{H_x} = \frac{\beta}{\omega\varepsilon} = \frac{\beta\eta}{k}\tag{2.24}$$

# Tipos de Líneas de Transmisión

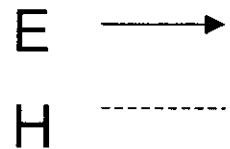
## Línea Coaxial



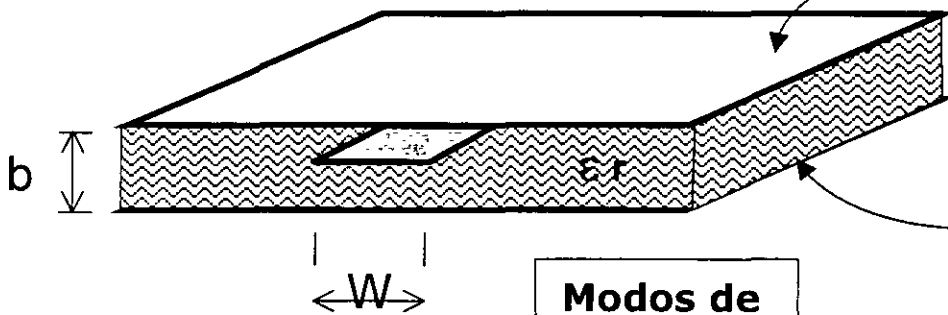
Distribución de campos eléctrico y magnético



**Modos de operación:**  
 TEM  
 TE  
 TM

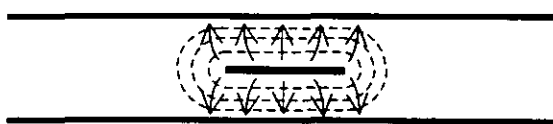


## Línea Cinta



Planos de Tierra

Distribución de campos eléctrico y magnético

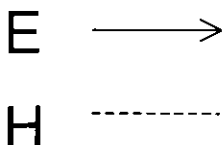


**Modos de operación:**  
 TEM  
 TE  
 TM

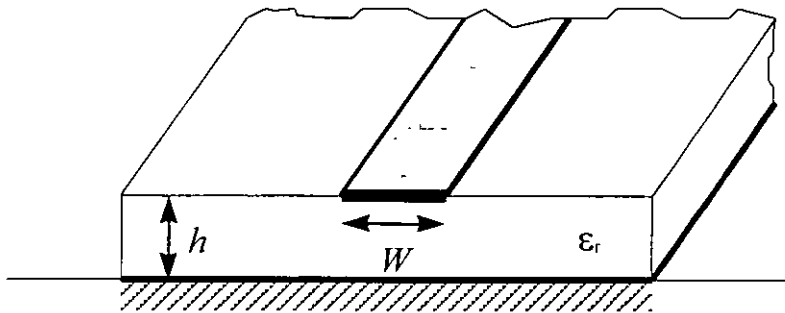
$$Z_0 = \frac{30\pi}{\sqrt{\epsilon_r}} \frac{b}{W_e + 0.441b}$$

Donde:

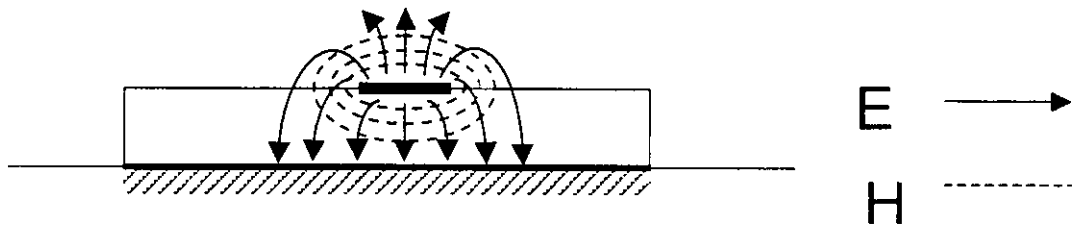
$$\frac{W_e}{b} = \frac{W}{b} \begin{cases} 0 & \text{para } \frac{W}{b} \geq 0.35 \\ (0.35 - W/b)^2 & \text{para } \frac{W}{b} < 0.35 \end{cases}$$



# Línea Microcinta



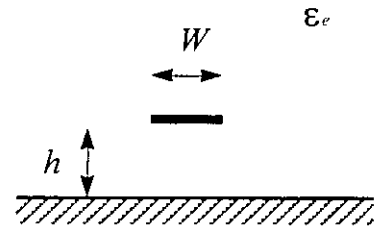
Cuasi TEM  
TE  
TM



$$v_p = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_e}}$$

$$1 < \epsilon_e < \epsilon_r$$

$$\beta_0 = k_0 \sqrt{\epsilon_e} \quad \epsilon_e = \frac{\epsilon_r + 1}{2} + \frac{\epsilon_r - 1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + 12h/W}}$$

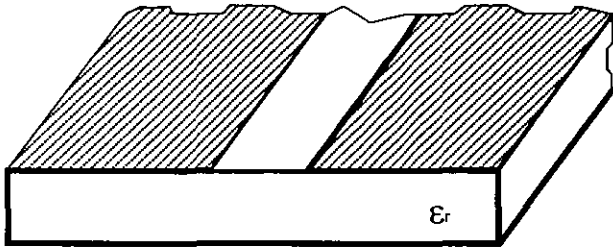


$$Z_0 = \begin{cases} \frac{60}{\sqrt{\epsilon_e}} \ln\left(\frac{8h}{W} + \frac{W}{4h}\right) & \text{para } W/h \leq 1 \\ \frac{120\pi}{\sqrt{\epsilon_e} [W/h + 1.393 + 0.667 \ln(W/h + 1.444)]} & \text{para } W/h > 1 \end{cases}$$

para  $W/h \leq 1$

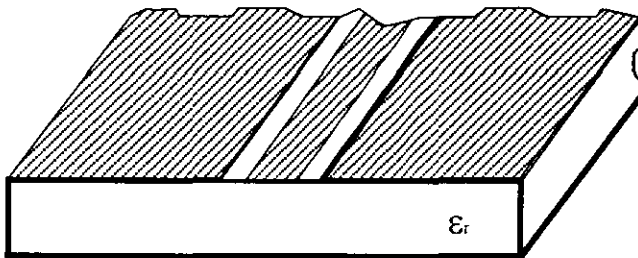
para  $W/h > 1$

## Línea ranurada



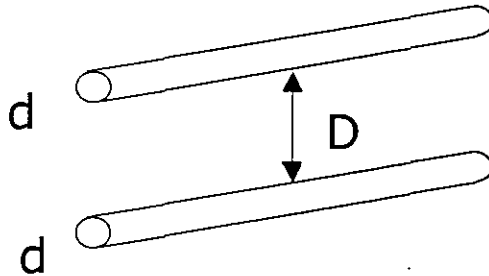
$$Z_0 = 75 \dots 200 \, \Omega$$

## Línea coplanar



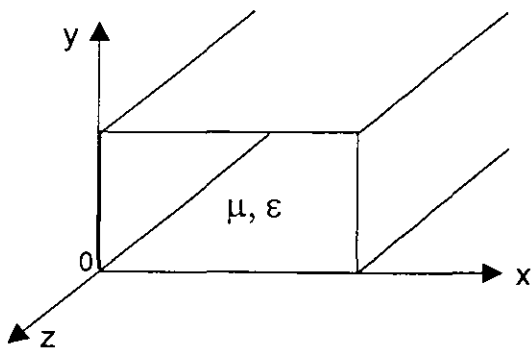
$$Z_0 = 50 \dots 150 \, \Omega$$

## Línea de dos conductores

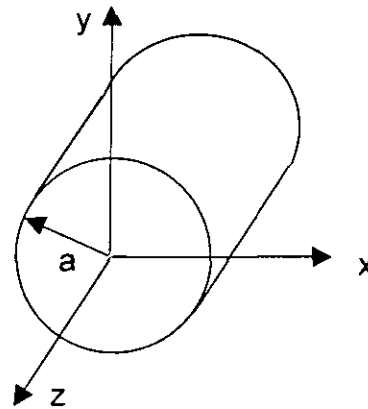


$$Z_0 = 200 \dots 600 \, \Omega$$

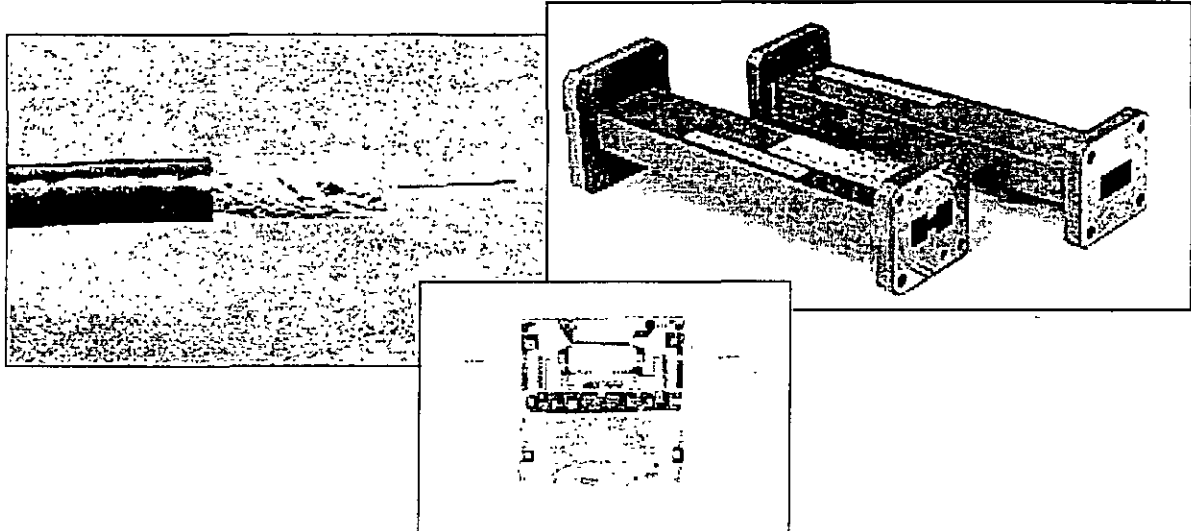
## Guías de onda Rectangular y Circular



Modos de operación:  $\left\{ \begin{array}{l} \text{TE} \\ \text{TM} \end{array} \right.$



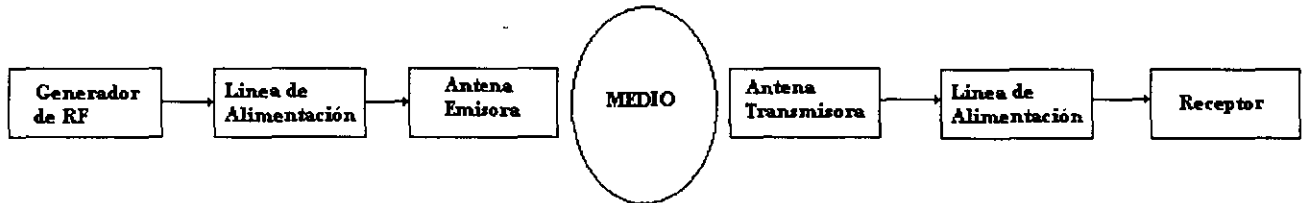
# Comparación entre distintos tipos de Líneas de Transmisión y Guías de Onda



Característica	Coaxial	Guía de Onda	Cinta	Microcinta
Modo dominante	TEM	TE <sub>10</sub> (rectangular) TE <sub>11</sub> (circular)	TEM	Cuasi TEM
Modos secundarios	TE, TM	TE, TM	TE, TM	TE, TM (Híbridos)
Dispersión	No	Media	No	Baja
Ancho de banda	Alta	Baja	Alta	Alta
Pérdidas	Media	Baja	Alta	Alta
Capacidad de potencia	Media	Alta	Baja	Baja
Tamaño físico	Grande	Grande	Medio	Pequeño
Facilidad de fabricación	Media	Media	Alta	Alta
Integración con otros componentes	Difícil	Difícil	Prome- dio	Fácil

# ANTENAS

## ESQUEMA CONVENCIONAL DE UN SISTEMA DE RF.



*La Antena Emisora o Transmisora* tiene como objetivo transformar las ondas electromagnéticas que se mueven desde el generador, por la línea de alimentación hacia la entrada de la antena, en ondas electromagnéticas que divergen en el espacio libre.

*La Antena Receptora* transforma las ondas libres que inciden en ella, en ondas dirigidas al alimentador, la cual suministra la potencia recibida a la entrada del receptor.

Gracias al principio de reciprocidad de las antenas, cualquier antena emisora puede utilizarse para la recepción de ondas electromagnéticas, y viceversa. O sea, que una misma antena (pasiva) cumple con las funciones de emisión y recepción de ondas electromagnéticas.

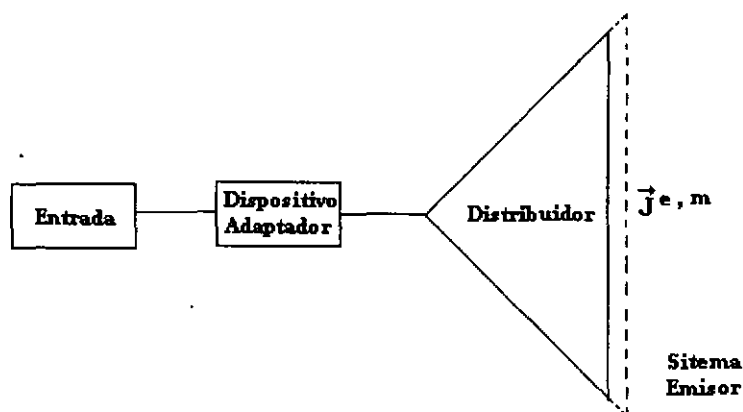
*Requisitos necesarios para el funcionamiento eficaz de las antenas:*

1. La antena debe distribuir la potencia electromagnética en el espacio (o reaccionar al campo electromagnético incidente) por una ley determinada. La antena debe tener la característica de emisión dada.
2. La emisión o recepción de las ondas electromagnéticas no debe ir acompañada por el consumo inútil de energía de alta frecuencia en pérdidas ohmicas. La antena debe tener el más alto rendimiento posible.

*La línea de alimentación* canaliza la energía electromagnética y asegura la conexión entre la entrada y salida del transmisor y receptor.



## ESQUEMA ESTRUCTURAL DE LA ANTENA.



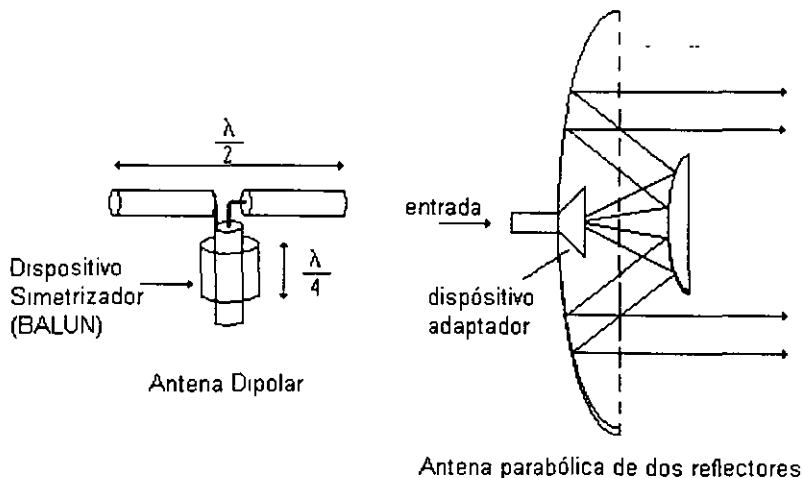
La entrada de la antena es la sección de cualquier línea de transmisión con un solo tipo de onda propagada.

El Dispositivo de alimentación asegura la distribución homogénea de la corriente en el distribuidor (dispositivo de simetrización) en toda la banda de frecuencia de trabajo de la antena.

El distribuidor de la antena es la construcción de conductores y dieléctricos, destinados a obtener la ley de distribución de corriente en los límites de la antena.

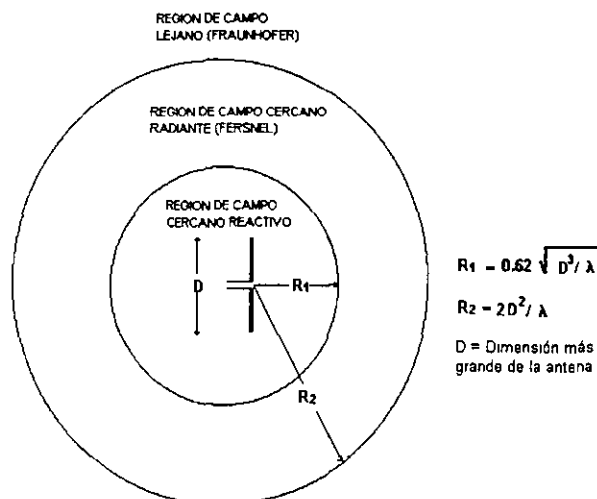
Sistema emisor es la región en el espacio llena de corrientes que excitan las ondas electromagnéticas.

La separación espacial del distribuidor y del sistema emisor se debe a la concepción tradicional de dividir en dos partes el cálculo de la antena: “*el problema interior*”, que consiste en hallar las funciones de distribución de las corrientes de alta frecuencia por el sistema emisor. Y “*el problema exterior*”, una vez conocida la distribución de corriente se determina el campo electromagnético de radiación de la antena y también sus características numéricas como la anchura del haz, el nivel de los lóbulos laterales, la directividad, etc.



## REGIONES DE CAMPO.

El espacio que rodea una antena es usualmente subdividido dentro de tres regiones: (a) Campo cercano reactivo, (b) Campo cercano radiante (Fresnel) y (c) Campo lejano (Fraunhofer). Estas regiones son diseñadas para identificar la estructura de campo en cada una de ellas. Sin embargo los cambios más abruptos son notados en el cruce de las fronteras. Las fronteras que separan esas regiones no son únicas, sin embargo varios criterios han sido establecidos y son comúnmente usados para identificar las regiones.



## PARÁMETROS DE LAS ANTENAS.

Los sistemas de antenas se caracterizan por un gran número de diferentes parámetros, que permite estimar las antenas y compararlas entre sí. Los parámetros de las antenas pueden ser divididos en dos categorías: *parámetros primarios* y *parámetros secundarios*. Los parámetros primarios de las antenas son: Curva característica de emisión (diagrama direccional) vectorial compleja, la resistencia de radiación, el factor de reflexión de la entrada (o impedancia de entrada) y la potencia máxima. El papel de los parámetros secundarios se reduce a detallar las características particulares de las antenas. Entre ellos se encuentran la anchura del lóbulo principal del diagrama direccional, el nivel de los lóbulos secundarios, Directividad, etc.

### *Curva característica de emisión vectorial compleja de la antena*

Propiedades de Amplitud, polarización y fase del campo de radiación.

Uno de los parámetros más importantes de una antena, es su curva característica de emisión (diagrama direccional) vectorial compleja normalizada  $\vec{F}(\theta, \varphi)$ , que determina completamente la distribución angular, polarización y fase del campo electromagnético radiado en la zona lejana de la antena.

En el caso más general la curva característica de emisión vectorial compleja se compone del producto de tres factores:

$$\vec{F}(\theta, \varphi) = F(\theta, \varphi) \vec{p}(\theta, \varphi) \exp[j\Phi(\theta, \varphi)]$$

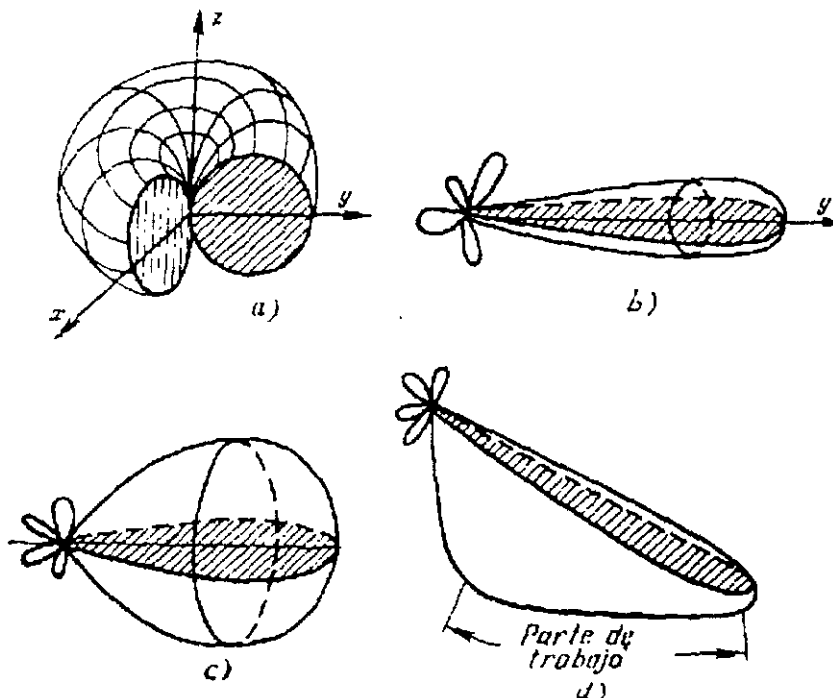
que define la estructuras de amplitud, polarización y fase respectivamente, del campo lejano de una antena.

### *Característica de Magnitud (Patrón de Radiación).*

El factor positivo  $F(\theta, \varphi)$  es la curva característica de emisión (diagrama direccional) de magnitud del campo eléctrico normalizado, de tal manera que  $\text{máx.}[F(\theta, \varphi)] = 1$ . La función  $F(\theta, \varphi)$  describe la distribución angular normalizada del vector total del campo eléctrico en la zona lejana de la antena. Si elevamos al cuadrado la función  $F(\theta, \varphi)$ , se transforma automáticamente en la curva característica de emisión (diagrama direccional) normalizada por potencia (Intensidad de Radiación)  $F^2(\theta, \varphi)$ . La función  $F^2(\theta, \varphi)$ , describe la distribución angular normalizada del vector total de Poynting en la zona lejana de la antena.

Para la representación de la curva característica de emisión de amplitud se utilizan distintos métodos de construcción gráfica; frecuentemente se utilizan superficies que une los extremos de los vectores radiales, que salen del origen de coordenadas y que tienen en cada dirección una longitud igual a la magnitud de la función  $F(\theta, \varphi)$  en una escala dada.

Los diagramas direccionales que con mayor frecuencia se encuentran en la práctica son los toroidales (a), filiforme (b), haz en abanico (c) y cosecante (d).



*Toroidal:* La radiación es casi uniforme en el plano perpendicular al toroide. El campo de aplicación es la radiocomunicación, la radionavegación y radiodifusión.

*Filiforme (haz en forma de lápiz):* El lóbulo principal es bien expresado, casi de igual anchura en todos los planos que pasan por la dirección de máxima radiación.

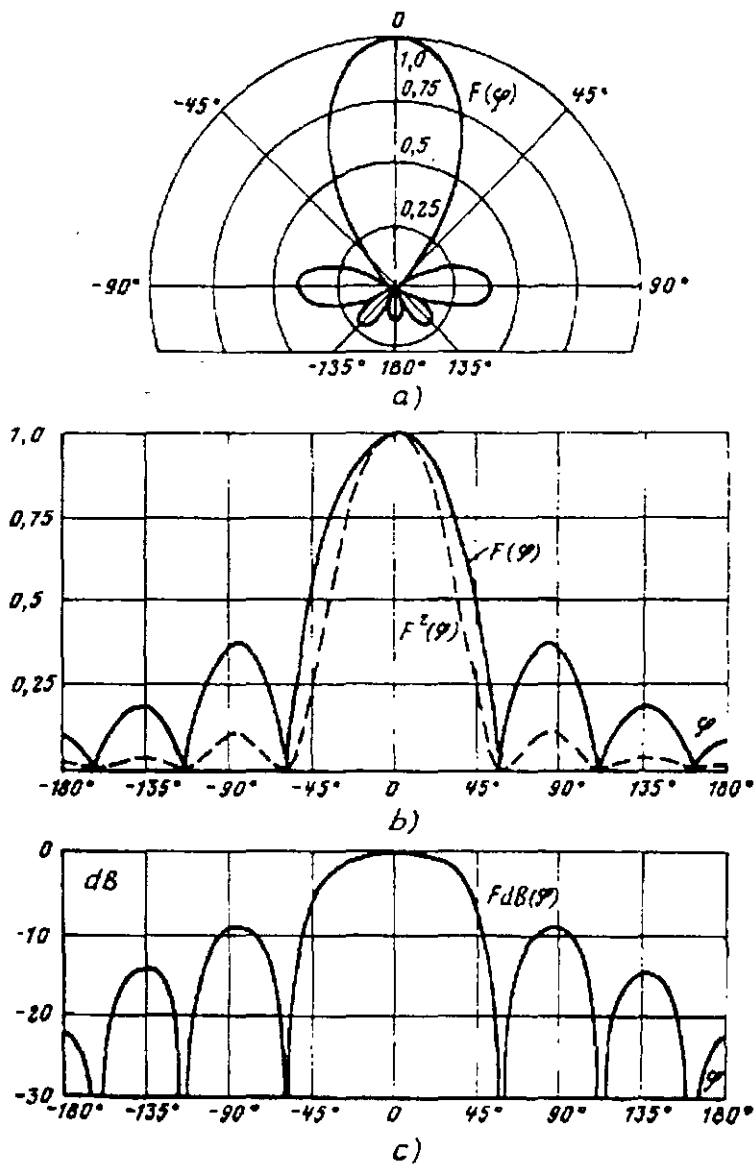
*Haz en abanico:* La anchura del haz en dos planos mutuamente perpendiculares se diferencia bruscamente entre sí. El campo de aplicación de diagramas filiforme y haz en abanico es el de los radares.

*Cosecante:* el haz tiene forma asimétrica. Su porción de trabajo en uno de dos planos (generalmente vertical) se determina por la ecuación  $F(\theta) = \csc\theta$ , mientras en el otro plano (horizontal) el haz es simétrico y tiene poca anchura. Su campo de aplicación son los radares aerotransportados para la observación de la superficie terrestre.

Sin embargo, esta forma de representación es bastante compleja. Por ello la forma del diagrama direccional se realiza por sus secciones en los planos escogidos.

Para las antenas débilmente dirigidas se utilizan las secciones principales del sistema de coordenadas esféricas: el plano ecuatorial y meridional. Para los diagramas de haz filiforme y de haz en abanico se utiliza frecuentemente pares de secciones perpendiculares, que pasan por el sentido de radiación máxima.

Para la presentar las secciones de los diagramas direccionales se emplean las coordenadas polares o las catersianas, así como las distintas escalas de amplitud: a) lineal(por campo), b) cuadrática (por potencia) y c) logarítmica (escala dB).



## POLARIZACION.

La polarización de una antena en una dirección dada es definida como la polarización de la onda radiada, cuando la antena es excitada y la máxima potencia es disponible en las terminales de la antena.

La polarización de una onda radiada es definida como esta propiedad de una onda electromagnética radiada que describe su dirección en el tiempo y la magnitud relativa del vector de campo eléctrico en un punto fijo en el espacio.

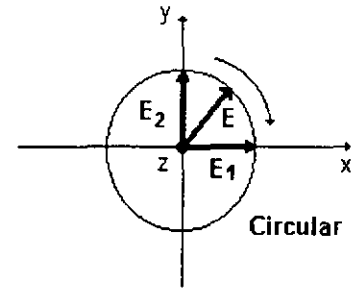
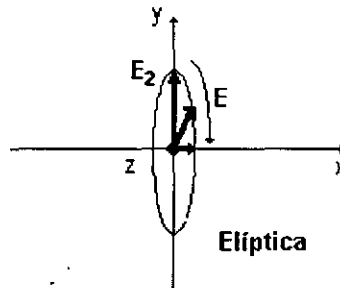
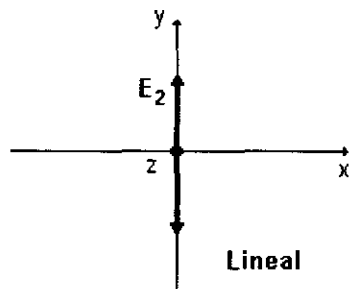
Por ejemplo, si la onda esta viajando en la dirección  $z$  positiva (saliendo de la página), las componentes del campo eléctrico en la dirección  $x$  y  $y$  son

$$E_x = E_1 \cos(\omega t - \beta z) \quad , \quad E_y = E_2 \cos(\omega t - \beta z + \delta)$$

donde  $E_1$  = amplitud de la onda de polarización lineal en la dirección  $x$ .

$E_2$  = amplitud de la onda de polarización lineal en la dirección  $y$ .

$\delta$  = ángulo de fase por el cual  $E_y$  esta adelantada a  $E_x$



$$\begin{aligned} \text{Polarización elíptica } (E_1 \neq E_2 \neq 0) & \begin{cases} \text{Derecha} & \delta = -\frac{\pi}{2} \\ \text{Izquierda} & \delta = \frac{\pi}{2} \end{cases} \\ \text{Polarización Circular } (E_1 = E_2 \neq 0) & \begin{cases} \text{Derecha} & \delta = -\frac{\pi}{2} \\ \text{Izquierda} & \delta = \frac{\pi}{2} \end{cases} \\ \text{Polarización lineal} & \begin{cases} \text{vertical si } E_1 = 0 \\ \text{horizontal si } E_2 = 0 \\ \text{inclinada si } E_1 = E_2 \neq 0 \text{ y } \delta = 0^\circ \end{cases} \end{aligned}$$

*Propiedades de polarización.*

El factor vectorial  $\vec{p}(\theta, \varphi)$  es un vector unitario de polarización con dos componentes orientadas según las direcciones de los vectores básicos del sistema de coordenadas esféricas  $\vec{i}_\theta$  y  $\vec{i}_\varphi$ :

$$\vec{p}(\theta, \varphi) = \vec{i}_\theta p_\theta(\theta, \varphi) + \vec{i}_\varphi p_\varphi(\theta, \varphi)$$

El módulo del vector  $\vec{p}$  siempre es igual a la unidad independientemente de las direcciones  $\theta$  y  $\varphi$ , es decir,

$$|p_\theta|^2 + |p_\varphi|^2 = 1$$

Las componentes  $p_\theta$  y  $p_\varphi$  indican el contenido relativo de las componentes azimutal y meridional del vector de intensidad del campo eléctrico en la zona lejana de la antena, para cada dirección  $\theta$ ,  $\varphi$ , así como del desfaseamiento entre ellas.

#### *Factor de pérdidas de polarización.*

En general, la polarización de la antena receptora podría no ser la misma polarización de la onda incidente. Esto es comúnmente establecido como “acoplamiento de polarización”. La cantidad de la potencia extraída por la antena de la señal incidente podría no ser la máxima debido a las pérdidas de polarización. Suponiendo que el campo eléctrico de la onda incidente puede ser escrita como  $E_i = \rho_w E_i$ , donde  $\rho_w$  es el vector unitario de polarización de la onda y la polarización del campo eléctrico de la antena receptora puede ser expresado como  $E_a = \rho_a E_a$ , donde  $\rho_a$  es su vector unitario. Las pérdidas de polarización pueden ser introducidas como un *factor de pérdidas de polarización* (PLF). Esto es definido como

$$PLF = |\rho_w \cdot \rho_a^*|^2 = |\cos \psi_p|^2 \quad (\text{adimensional})$$

donde  $\psi_p$  es el ángulo entre los dos vectores unitarios.

#### DIAGRAMA DIRECCIONAL DE FASES DE UNA ANTENA.

El exponente imaginario  $\Phi(\theta, \varphi)$  en el tercer factor de la fórmula, se llama diagrama (curva característica) direccional de fases de una antena de acuerdo a la polarización principal de radiación. La función  $\Phi(\theta, \varphi)$  caracteriza la variación del desfaseamiento en la componente de la polarización principal cuando el punto de observación se desplaza por la superficie de la esfera de radio R con respecto al sistema de coordenadas elegido (y por lo tanto depende esencialmente de la posición del origen de coordenadas).

#### DIRECTIVIDAD Y OTROS PARÁMETROS RELACIONADOS CON EL DIAGRAMA DIRECCIONAL DE MAGNITUD.

*Directividad.* Indica el grado de concentración de la potencia radiada en una dirección dada y puede ser definida como una relación de la magnitud del vector de Poynting en el punto de observación a la magnitud media del vector de Poynting en la superficie de una esfera, que abarca la antena y que pasa por el punto de observación. A esta definición le corresponde la siguiente fórmula:

$$D_{\max} = \frac{\left| \vec{S}_{\max} \right|}{\left| \vec{S}_m \right|} = \frac{\frac{\left| \vec{E}_{\max} \right|^2}{2Z_0}}{\frac{P_{\Sigma}}{4\pi R^2}} = \frac{\left| \vec{E}_{\max} \right|^2 2\pi R^2}{Z_0 P_{\Sigma}}$$

donde  $\left| \vec{S}_{\max} \right|$  es el módulo del vector de Poynting en el sentido de máxima radiación a la distancia R,  $\left| \vec{S}_m \right|$  es el módulo promedio del vector de Poynting a la distancia R,  $\left| \vec{E}_{\max} \right|$  es el módulo del vector total de intensidad de campo en el sentido de máxima radiación a la distancia R;  $P_{\Sigma}$  es la potencia radiada;  $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$  es la impedancia característica del medio.

Existe también otra definición de la directividad completamente equivalente a la primera. De acuerdo con esta definición la directividad de una antena, indica cuantas veces debe ser aumentada la potencia radiada al sustituir una antena direccional (dirigida) por una antena isotrópica absolutamente omnidireccional (no dirigida) hipotética, con la condición de mantener constante la magnitud del módulo del vector de Poynting en el punto de recepción. Por consiguiente, de aquí se recalca el hecho de que el aumento de la directividad es equivalente aparentemente al crecimiento de la potencia del transmisor. La potencia radiada por una antena direccional es proporcional al valor de la siguiente integral:

$$P_{\Sigma} = A \oint_{\Omega=4\pi} F^2(\theta, \varphi) d\Omega$$

$$d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$$

donde A es el coeficiente de proporcionalidad y se integra entre los límites del ángulo sólido total  $\Omega = 4\pi$ , es decir, desde 0 hasta  $2\pi$  respecto de  $\varphi$  y desde 0 hasta  $\pi$  respecto a  $\theta$ . Si la antena es un radiador isotrópico hipotético con diagrama de direccionalidad  $F^2(\theta, \varphi) = 1$ , su potencia de radiación será igual a:

$$P_{\Sigma_{isotr}} = A \oint_{\Omega=4\pi} d\Omega = 4\pi A$$

Usando la segunda definición de la ganancia de antena dirigida, para el sentido de máxima radiación obtenemos:

$$D_{\max} = \frac{P_{\Sigma_{isotr}}}{P_{\Sigma}} = \frac{4\pi}{\oint_{\Omega=4\pi} F^2(\theta, \varphi) d\Omega}$$

En adelante la directividad de la antena se determinará siempre para el sentido de máxima radiación y para abreviar la escritura eliminaremos el subíndice "max". Para todos los otros sentidos de radiación la magnitud de la directividad será igual a:

$$D(\theta, \varphi) = D_{\max} F^2(\theta, \varphi) = DF^2(\theta, \varphi)$$



### *Anchura de haz y nivel de los lóbulos laterales.*

Además de la directividad, las propiedades direccionales de una antena se estiman también por la magnitud de ángulo de apertura del lóbulo principal del diagrama direccional o curva característica de radiación en cualquier plano y en nivel dado de intensidad o potencia del campo. La magnitud de este ángulo se llama anchura del haz en el plano correspondiente. Con mucha frecuencia se determina la anchura del haz  $\Delta\theta$  en el nivel de la potencia promedio (nivel 0.707 por campo, o bien  $-3\text{dB}$ ) con respecto al máximo principal de radiación.

A parte de la anchura del haz, es muy importante el parámetro secundario conocido como el nivel de los lóbulos laterales de la antena. Este nivel caracteriza por magnitud del máximo del lóbulo lateral mayor en comparación con la magnitud del máximo principal (en escala logarítmica, lineal o cuadrática).

La anchura del haz y el nivel de los lóbulos laterales son parámetros que determinan el poder resolutivo y la protección contra los ruidos de los sistemas de radiofrecuencias. Por ello en los requisitos técnicos para la elaboración de las antenas a estos parámetros se les da gran importancia.

### *Directividad en función de la anchura del haz y del nivel de los lóbulos laterales.*

Para las antenas de haz filiforme o de haz en abanico en la práctica tiene amplia difusión la valoración aproximada de la directividad por la fórmula:

$$D = \frac{32000 \text{ a } 36000}{\Delta\theta^0 \Delta\varphi^0}$$

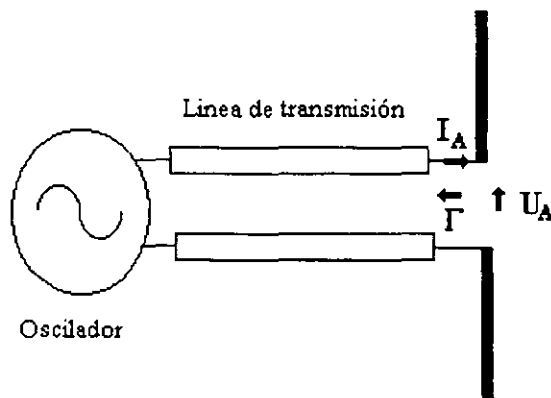
donde  $\Delta\theta^0, \Delta\varphi^0$  son los valores de la anchura del lóbulo principal del diagrama direccional real en el nivel de potencia promedio.

### **Impedancia de entrada y resistencia de radiación.**

Una antena conectada a una línea de transmisión puede ser considerada como un dispositivo eléctrico con una entrada. Entonces, podemos definir la impedancia de entrada de la antena como:

$$Z_A = \frac{U_A}{I_A} = Z_0 \frac{1+\Gamma}{1-\Gamma} = R_A + jX_A$$

donde  $U_A, I_A$  es voltaje y corriente en la entrada de la antena,  $Z_0$  es la impedancia característica de la línea,  $\Gamma$  es el coeficiente de reflexión,  $R_A$  es la parte real de la impedancia de entrada de la antena,  $X_A$  es la parte imaginaria de la impedancia de entrada de la antena.



Ahora podemos calcular la potencia total consumida por la antena:

$$P_{tot} = \frac{1}{2} |I_A|^2 R_A$$

la parte de la potencia de alta frecuencia suministrada a la antena se pierde en el calentamiento de conductores y dieléctricos no ideales. El resto de la potencia suministrada se convierte en las ondas electromagnéticas progresivas en el espacio. Por lo tanto,

$$P_{tot} = P_{\Sigma} + P_p = \frac{1}{2} |I_A|^2 R_{\Sigma} + \frac{1}{2} |I_A|^2 R_p = \frac{1}{2} |I_A|^2 (R_{\Sigma} + R_p)$$

donde  $P_{\Sigma}$  es la potencia de radiación o potencia emitida y  $P_p$  es la potencia de pérdidas ohmicas en la antena. Por su parte,  $R_p$  es la resistencia de pérdidas y  $R_{\Sigma}$  es la *resistencia de radiación*.

La resistencia de radiación es una resistencia equivalente la cual consume la misma potencia emitida por la antena cuando la corriente que pasa por la resistencia mencionada es igual a la corriente en la entrada de la antena.

Podemos ver que la impedancia de entrada de la antena es igual a la suma de la resistencia de pérdidas y la resistencia de radiación.

La relación entre la potencia de radiación y la potencia suministrada a la antena se llama el rendimiento de la antena:

$$\eta = \frac{P_{\Sigma}}{P_{tot}} = \frac{P_{\Sigma}}{P_{\Sigma} + P_p} = \frac{R_{\Sigma}}{R_{\Sigma} + R_p}$$

El producto de directividad por rendimiento se llama ganancia de la antena:

$$G = \eta D$$

La ganancia indica cuantas veces debe ser aumentada la potencia de entrada al sustituir una antena dirigida real con pérdidas por una antena isotrópica hipotética absolutamente no direccional sin pérdidas con la condición de mantener constante el vector de Poynting en el punto de observación.

### Eficiencia total.

La eficiencia total  $e_t$  es usada para tomar en cuenta las pérdidas en las terminales de entrada y dentro de la estructura de la antena. Dichas pérdidas pueden ser debido a las,

1. Reflexiones por el desacoplamiento entre la línea de transmisión y la antena.
2. pérdidas (conductivas y dieléctricas)  $I^2R$

En general la eficiencia puede escribirse como

$$e_t = e_r e_c e_d$$

donde

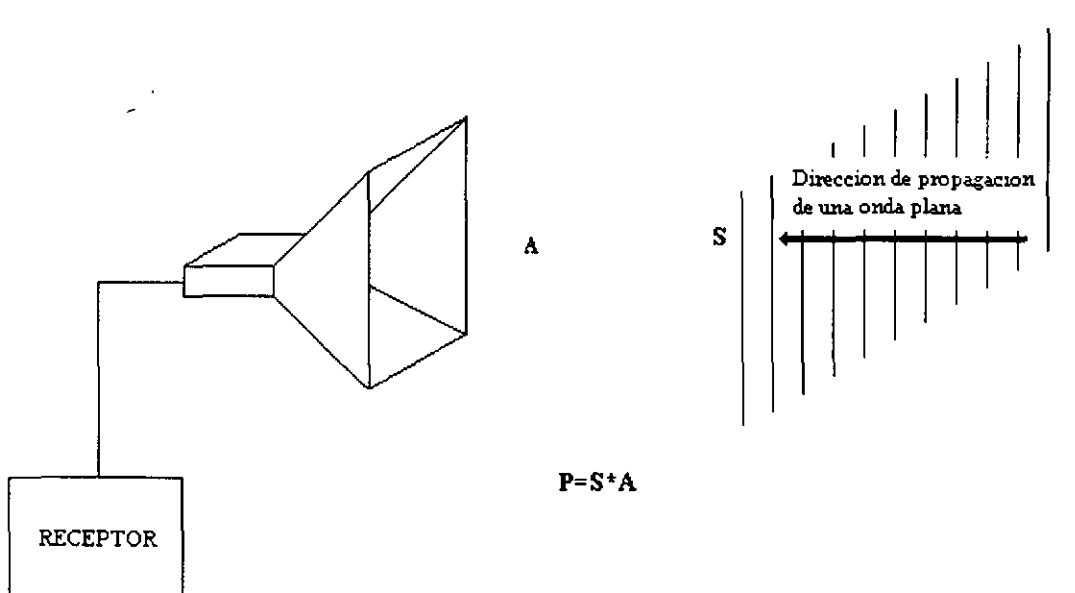
- |   |                |
|---|----------------|
| $e_t$ = la eficiencia total   | (adimensional) |
| $e_r$ = eficiencia de reflexión (acoplamiento) = $(1 -  \Gamma ^2)$ | (adimensional) |
| $e_c$ = eficiencia de conducción ( $\eta$ )                         | (adimensional) |
| $e_d$ = eficiencia dieléctrica                                      | (adimensional) |

$\Gamma$  = coeficiente de reflexión en las terminales de entrada de la antena [ $\Gamma = \frac{Z_{in} - Z_0}{Z_{in} + Z_0}$  donde

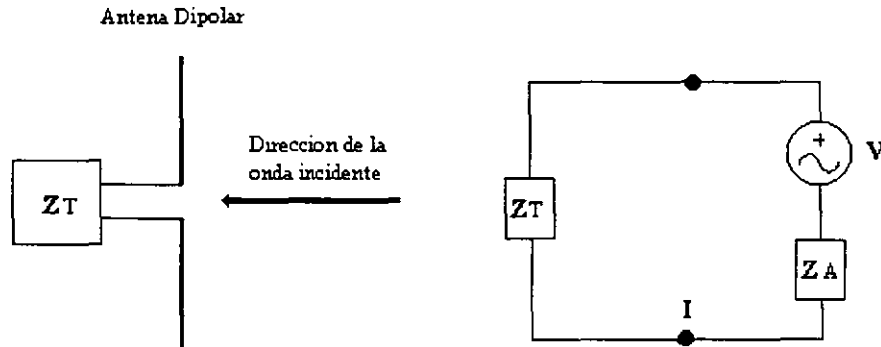
$Z_{in}$  = impedancia de entrada de la antena,  $Z_0$  = impedancia característica de la línea de alimentación]

### Superficie efectiva y longitud efectiva.

Supongamos que la antena receptora (bocina) con área  $A$  esta sometida en el campo de una onda plana con densidad de flujo de la potencia electromagnética  $S$ , bien, módulo del vector de Poynting igual a  $|S|$  watts por metro cuadrado. En el caso cuando la bocina extrae toda la potencia del área  $A$ , la potencia absorbida de la onda será:  $P = SA$ .



La antena receptora recoge potencia de la onda plana y entrega a la impedancia  $Z_T$ , conectada a la entrada de la antena. La antena en este caso puede ser sustituida por el generador de voltaje  $V$ , con impedancia interna  $Z_A$ . El voltaje  $V$  se induce debido a la existencia de la onda electromagnética y, por su parte esto produce una corriente  $I$ :



$$I = \frac{V}{Z_T + Z_A} = \frac{V}{R_T + R_p + R_\Sigma + j(X_A + X_T)}$$

La potencia entregada por la antena a la carga (impedancia  $Z_T$ ) será evaluada por la ecuación siguiente:

$$P = \frac{1}{2} |I|^2 R_T = \frac{1}{2} \frac{|V|^2 R_T}{(R_T + R_p + R_\Sigma)^2 + (X_A + X_T)^2} = AS$$

Supongamos que  $V$  es el voltaje inducido cuando la antena esta orientada para obtener máxima respuesta y la onda plana tiene la misma polarización como la antena, la expresión anterior ser escrita como sigue:

$$A = \frac{1}{2} \frac{|V|^2 R_T}{[(R_T + R_p + R_\Sigma)^2 + (X_A + X_T)^2] S}$$

En el caso cuando la impedancia de la carga sea el complejo conjugado de la impedancia de la antena, tenemos la máxima transferencia de la potencia a la carga:

$$A_e = \frac{|V|^2}{8S(R_\Sigma + R_p)}$$

$A_e$  es la superficie efectiva de la antena.

Si la antena es de bajas pérdidas ( $R_p = 0$ ), obtenemos la superficie efectiva máxima  $A_{em}$  de la antena. Esto es

$$A_{em} = \frac{|V|^2}{4SR_\Sigma}$$

Si dividimos  $A_e$  entre  $A_{em}$ , tenemos lo siguiente,

$$\eta = \frac{A_e}{A_{em}}$$

*Longitud efectiva.*

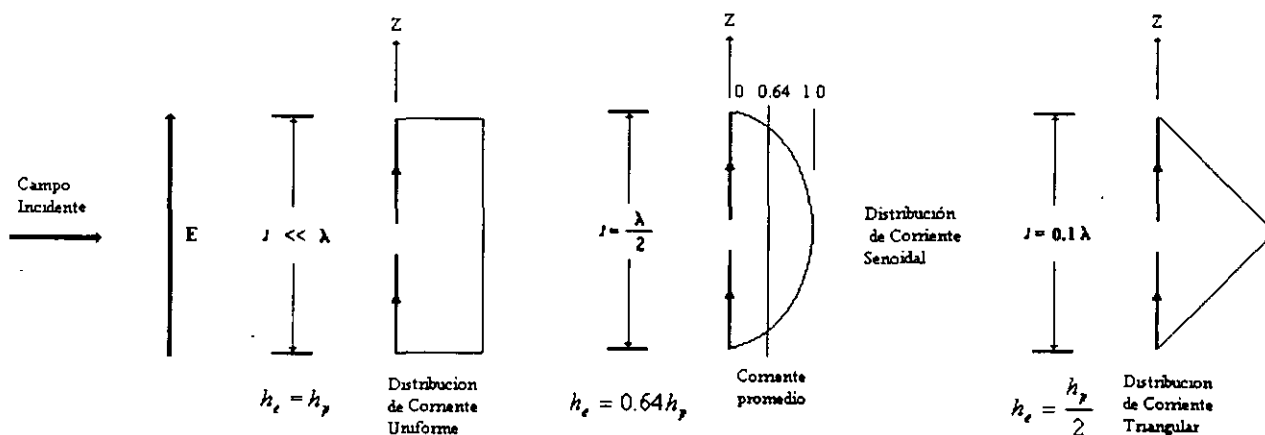
La longitud efectiva puede ser definida como la relación entre el voltaje inducido y la intensidad del campo eléctrico  $\vec{E}$ :

$$h_e = \frac{V}{|\vec{E}|}$$

La otra posibilidad de definir la longitud efectiva de la antena es tomar en consideración el caso de transmisión e igualar la longitud efectiva a la longitud física multiplicada por el valor promedio normalizado de la corriente:

$$h_e = \frac{1}{I_0} \int_0^{h_p} I(z) dz = \frac{I_{av}}{I_0} h_p$$

donde  $h_p$  es la longitud física,  $I_{av}$  es el valor promedio de la corriente.



Para una antena de resistencia de radiación  $R_\Sigma$  acoplada a su carga, la potencia entregada a la carga es igual a,

$$P_L = \frac{1}{4} \frac{V^2}{R_\Sigma} = \frac{h_e^2 E^2}{4 R_\Sigma}, \quad P_L = S A_e = \frac{E^2 A_e}{Z_0}$$

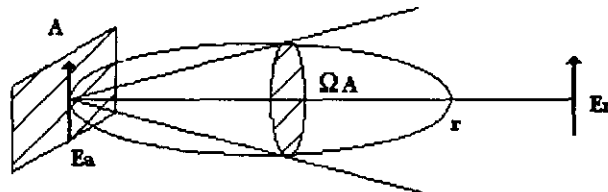
Igualando ambas ecuaciones, obtenemos la relación entre área y longitud efectiva es obtenida en función de la resistencia de radiación y la impedancia intrínseca del espacio ( $Z_0$ ):

$$h_e = 2 \sqrt{\frac{R_\Sigma A_e}{Z_0}}, \quad A_e = \frac{h_e^2 Z_0}{4 R_\Sigma}$$

### Area Efectiva y Directividad.

Hay una importante relación entre área efectiva y directividad de todas las antenas como se muestra continuación.

Considere el campo eléctrico  $E_r$  a una distancia grande. Si la intensidad de campo en la apertura es constante e igual a  $E_a$  (volts por metro), la potencia de radiación es dada por



$$P_{\Sigma A} = \frac{|E_a|^2}{Z_0} A \quad (1)$$

donde:

A - área física

$Z_0$  - impedancia intrínseca

La potencia de radiación puede ser expresada en términos de la intensidad de campo  $E_r$  (volts por metro) a una distancia  $r$  por

$$P_{\Sigma r} = \frac{|E_r|^2}{Z_0} r^2 \Omega_A \quad (2)$$

donde:  $\Omega_A$  es el ángulo sólido de la antena [sr]

Las intensidades de campo  $E_r$  y  $E_a$  están relacionadas por

$$|E_r| = \frac{|E_a| A}{r \lambda} \quad (3)$$

donde:  $\lambda$  es la longitud de onda [m].

Sustituyendo (3) en (2), e igualando con (1), obtenemos:

$$\boxed{\lambda^2 = A \Omega_A}$$

si suponemos que no hay pérdidas ohmicas  $\Rightarrow A = A_{cm}$

Como  $D = \frac{4\pi}{\Omega_A}$ , por lo tanto  $D = \frac{4\pi}{\lambda^2} A_{cm}$

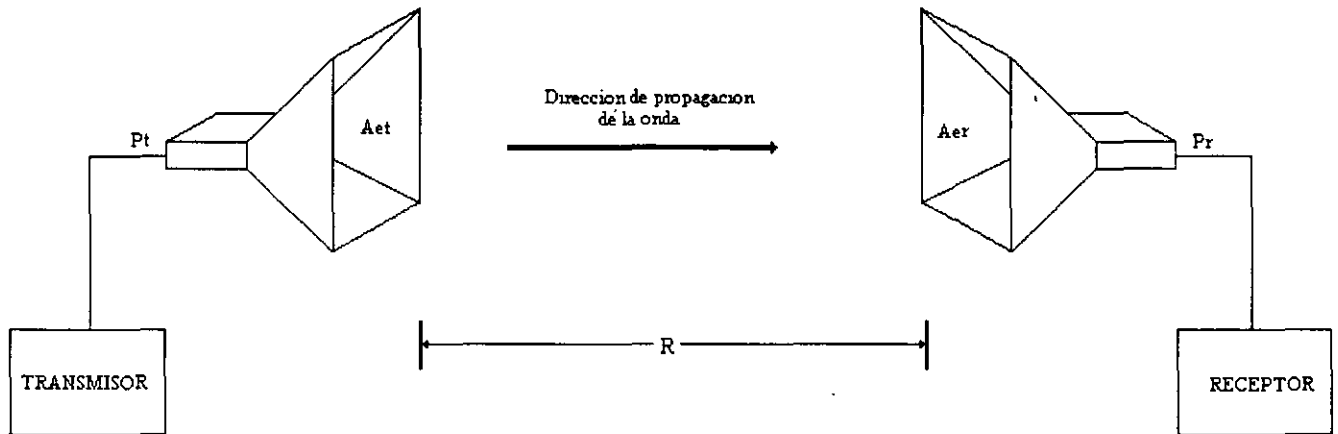
Además, dado que  $G = \eta D$

$$G = \frac{4\pi}{\lambda^2} A_e$$

donde  $A_e = \eta A_{em}$

### Formula de transmisión de Friis.

La utilidad del concepto de apertura puede ser ilustrado, usando este para derivar la importante *fórmula de transmisión de Friis*. Esta fórmula da la potencia recibida sobre un circuito de radio comunicaciones.



Supongamos que la potencia del transmisor  $P_t$  es la que alimenta la antena transmisora de área efectiva  $A_{et}$ . A una distancia  $r$  una antena receptora de área efectiva  $A_{er}$  intercepta algo de la potencia radiada por la antena transmisora y la entrega al receptor. Si suponemos por un momento que la antena transmisora es isotrópica, la potencia por unidad de área en la antena receptora es:

$$S_r = \frac{P_t}{4\pi R^2}$$

Si la antena tiene ganancia  $G_t$ , la potencia por unidad de área en la antena receptora sería incrementada en proporción dada por:

$$S_r = \frac{P_t G_t}{4\pi R^2}$$

Ahora la potencia recolectada por la antena receptora de apertura efectiva  $A_{er}$  es

$$P_r = S_r A_{er} = \frac{P_t G_t A_{er}}{4\pi R^2} \quad (4)$$

Por otro lado, la ganancia de la antena transmisora puede ser expresada como

$$G_t = \frac{4\pi A_{et}}{\lambda^2}$$

Sustituyendo esto dentro de (4) obtenemos la *fórmula de transmisión de Friis*.

$$P_r = P_t \frac{A_{et} A_{er}}{R^2 \lambda^2}$$

donde:

$P_r$  – potencia recibida, en Watts.

$P_t$  – potencia transmitida en Watts.

$A_{et}$  – área efectiva de la antena transmisora, en  $m^2$ .

$A_{er}$  – área efectiva de la antena receptora, en  $m^2$ .

$r$  – distancia entre las antenas, en m.

$\lambda$  - longitud de onda, en m.

$$P_r = P_t \left( \frac{\lambda}{4\pi R} \right)^2 D_t D_r$$

Considerando pérdidas (conductivas y ohmicas), polarización, acoplamiento de impedancia (reflexión) y alineación de la antena, obtenemos la siguiente expresión que contempla todos estos factores.

$$P_r = P_t \left( \frac{\lambda}{4\pi R} \right)^2 e_c e_d (1 - |\Gamma_t|^2) (1 - |\Gamma_r|^2) D_t(\theta_t, \vartheta_t) D_r(\theta_r, \vartheta_r) |\rho_t \cdot \rho_r^*|^2$$

### **Banda de frecuencia de trabajo y Potencia máxima.**

La banda de trabajo de una antena se encuentra en cuyos límites los parámetros de la misma, no exceden los límites establecidos por los requisitos técnicos. Convencionalmente se consideran antenas de.

- Bandas estrechas  $< 10\% f_T$ .
- Banda ancha  $10\% - 50\% f_T$ .
- Antenas de sintonización múltiple varias octavas.
- Antenas independientes de la frecuencia relación del límite inferior y superior de  $f_T$ .5:1

La *Potencia Máxima* es aquella que se puede aplicar a la entrada de la antena sin peligrar su deterioro o ruptura del medio ambiente y rigidez dieléctrica de la antena.



## DIPOLO DE HERTZ.

### *Potenciales Vectoriales auxiliares.*

En la práctica es común que en el análisis de problemas electromagnéticos para evaluar las condiciones en la frontera, usar auxiliares potenciales vectoriales como ayuda en la obtención de soluciones del campo eléctrico ( $\mathbf{E}$ ) y el campo magnético ( $\mathbf{H}$ ). Las funciones potenciales vectoriales más comunes son el potencial vectorial eléctrico  $\mathbf{A}$  y el potencial vectorial magnético  $\mathbf{F}$ . Estos son ampliamente usados en la solución de problemas de radiación en antenas.

Para densidades de corrientes  $\mathbf{J}$  (eléctricas) y  $\mathbf{M}$  (magnéticas), estos vectores se calculan de la siguiente forma:

$$A(x, y, z) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V J(x', y', z') \frac{e^{-j\beta R}}{R} dv' \quad (5)$$

$$F(x, y, z) = \frac{\epsilon}{4\pi} \iiint_V M(x', y', z') \frac{e^{-j\beta R}}{R} dv'$$

Si  $\mathbf{J}$  y  $\mathbf{M}$  representan densidades lineales, las ecuaciones anteriores se reducen a:

$$A(x, y, z) = \frac{\mu}{4\pi} \iint_S J_s(x', y', z') \frac{e^{-j\beta R}}{R} ds' \quad (6)$$

$$F(x, y, z) = \frac{\epsilon}{4\pi} \iint_S M_s(x', y', z') \frac{e^{-j\beta R}}{R} ds'$$

Para corrientes eléctricas y magnéticas  $I_e$  e  $I_m$  estas expresiones se reducen a:

$$A(x, y, z) = \frac{\mu}{4\pi} \int_C I_e(x', y', z') \frac{e^{-j\beta R}}{R} dl' \quad (7)$$

$$F(x, y, z) = \frac{\epsilon}{4\pi} \int_C I_m(x', y', z') \frac{e^{-j\beta R}}{R} dl'$$

donde las primeras coordenadas representan la fuente y las segundas coordenadas (') representan el punto de observación y  $R$  representa la distancia de cualquier punto de la fuente al punto de observación.

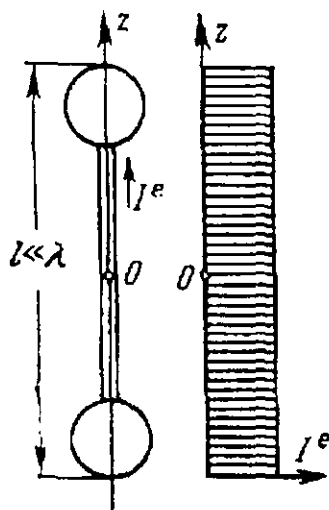
Una vez encontrado estos potenciales auxiliares, el paso que sigue es encontrar los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$ , como sigue

$$E = E_A + E_F = \frac{1}{j\omega\epsilon} \nabla_x H_A - \frac{1}{\epsilon} \nabla_x F \quad (8)$$
$$H = H_A + H_F = \frac{1}{\mu} \nabla_x A - j\omega F - j \frac{1}{\omega\mu\epsilon} \nabla(\nabla \cdot F)$$

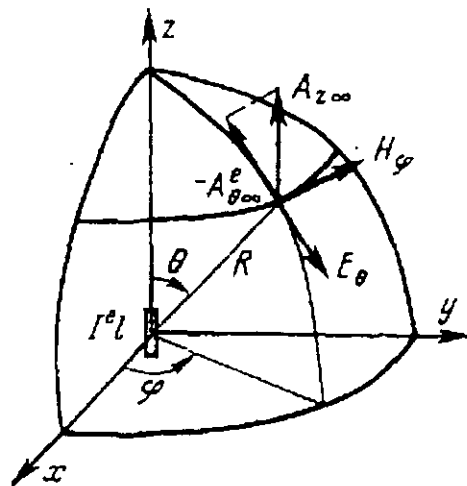
### Dipolo de Hertz y sus parámetros.

El dipolo eléctrico de Hertz es un radiador elemental. Representa el modelo ideal de una antena real en forma de trozos de conductor de longitud  $\ell$ , pequeña en comparación con la longitud de onda, terminando en los extremos con esferas metálicas. Debido a la pequeñez de  $\ell$ , la distribución de la corriente eléctrica a lo largo del conductor se toma constante e igual a  $I_e$ . A pesar de que en la práctica no se utiliza esta antena, el estudio de sus propiedades resulta útil puesto que la mayoría de las antenas complejas de conductores puede ser representada por superposición de una serie de elementos cortos, cada uno de los cuales es un dipolo elemental.

Coloquemos el dipolo en el origen del sistema de coordenadas esféricas y calculemos su campo electromagnético radiado en la zona lejana por las fórmulas (7) y (8). Debido a la simetría, el campo electromagnético del dipolo de Hertz no depende de  $\varphi$ .



Dipolo de Hertz.



Sistema de coordenadas esféricas.

El potencial vectorial de las corrientes eléctricas del dipolo tendrá una única componente  $A_z$  e igual a

$$A_z = \frac{\mu I_e e^{-j\beta R}}{4\pi R} \int_{-\ell/2}^{\ell/2} dz' = \frac{\mu I_e \ell e^{-j\beta R}}{4\pi R}$$

Transformando el vector potencial  $A$  de coordenadas rectangulares a esféricas, obtenemos

$$A_r = A_z \cos\theta = \frac{\mu I_e \ell e^{-j\beta R}}{4\pi R} \cos\theta$$

$$A_\theta = -A_z \sin\theta = \frac{\mu I_e \ell e^{-j\beta R}}{4\pi R} \sin\theta$$

$$A_\varphi = 0$$

Sustituyendo este resultado en la expresión (8) obtenemos,

$$H = H_\varphi = \frac{1}{\mu r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right]$$

Lo cual se reduce a,

$$\begin{aligned} H_\theta = H_r &= 0 \\ H_\varphi &= j \frac{\beta I_e \ell \sin \theta}{4\pi R} \left( 1 + \frac{1}{j\beta r} \right) e^{-j\beta R} \end{aligned} \quad (9)$$

El campo eléctrico puede ser encontrado usando la ecuación (8):

$$\begin{aligned} E_r &= \eta \frac{I_e \ell \cos \theta}{2\pi R^2} \left( 1 + \frac{1}{j\beta r} \right) e^{-j\beta R} \\ E_\theta &= j\eta \frac{\beta I_e \ell \sin \theta}{4\pi R} \left( 1 + \frac{1}{j\beta r} - \frac{1}{(\beta r)^2} \right) e^{-j\beta R} \\ E_\varphi &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

Por las condiciones de campo lejano las ecuaciones (9) y (10), se reducen a

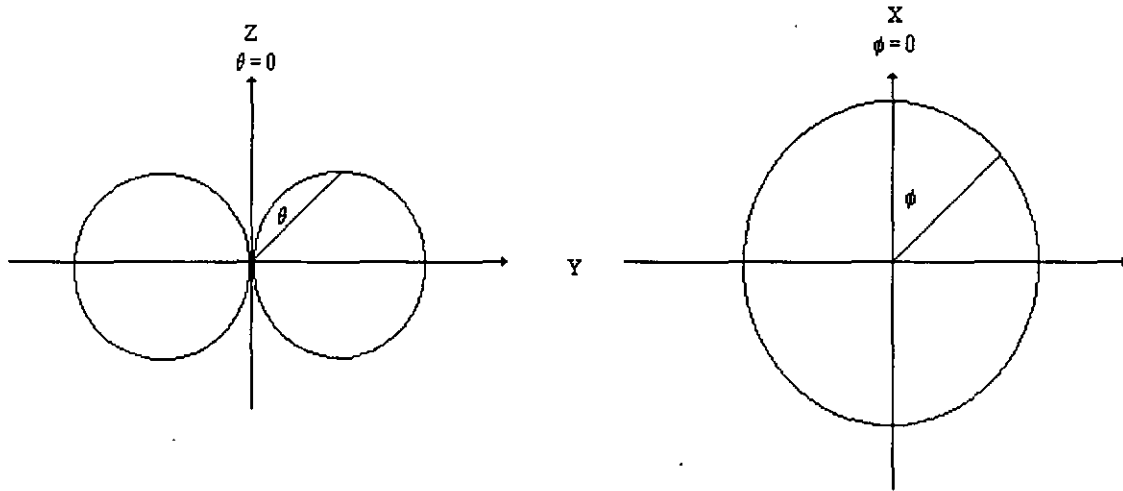
$$\begin{aligned} H_\varphi &= j \frac{\beta I_e \ell \sin \theta}{4\pi R} e^{-j\beta R} = \frac{j I_e \ell}{2 \lambda} \sin \theta \frac{e^{-j\beta R}}{R} \\ E_\theta &= j\eta \frac{\beta I_e \ell \sin \theta}{4\pi R} e^{-j\beta R} = \frac{j I_e \eta \ell}{2 \lambda} \sin \theta \frac{e^{-j\beta R}}{R} \\ H_\theta = H_r &= 0 \\ E_r = E_\varphi &= 0 \\ \text{donde } \beta &= \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \eta = 120\pi \end{aligned} \quad (11)$$

de la ecuación (11), podemos concluir que:

- 1) El dipolo de Hertz emite ondas progresivas, que se alejan al infinito a la velocidad de la luz.
- 2) El vector E se encuentra en el plano meridional, que pasa por el eje del dipolo, y el vector H en el plano azimutal. Por lo tanto, el dipolo emite ondas de polarización lineal.

Las magnitudes de la directividad de los campos eléctricos y magnéticos dependen del ángulo de observación  $\theta$ . Debido a la simetría axial el campo no depende del ángulo  $\varphi$ . En el plano meridional el diagrama de radiación del dipolo es un "ocho". En el plano azimutal el diagrama de radiación del dipolo una circunferencia. Por lo tanto, el dipolo de Hertz radia el máximo de

energía en dirección perpendicular a su eje, en tanto que a lo largo del eje de la antena la radiación es igual a cero.



### Potencia y Resistencia de radiación.

La potencia emitida por el dipolo de Hertz se determina integrando el vector de Poynting por la superficie de una esfera arbitraria en la zona lejana:

$$P_{\Sigma} = \frac{1}{2} \oint_A [EXH] dA = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{|E_{\theta}|^2}{Z_0} r^2 \sin\theta d\theta d\phi = 30\pi^2 |I_e|^2 \left(\frac{\ell}{\lambda}\right)^2 \int_0^{\pi} \sin^3\theta d\theta = 40\pi^2 |I_e|^2 \left(\frac{\ell}{\lambda}\right)^2$$

por otro lado

$$P_{\Sigma} = \frac{1}{2} |I_e|^2 R_{\Sigma} \Rightarrow R_{\Sigma} = \frac{2P_{\Sigma}}{|I_e|^2} = 80\pi^2 \left(\frac{\ell}{\lambda}\right)^2$$

### Rendimiento

$$\eta = \frac{P_{\Sigma}}{P_{\Sigma} + P_P} = \frac{R_{\Sigma}}{R_{\Sigma} + R_P} = \frac{\left(\frac{\ell}{\lambda}\right)^2 80\pi^2}{\left(\frac{\ell}{\lambda}\right)^2 80\pi^2 + R_1 \ell}$$

donde:

$R_1$  = es la resistencia del alambre por unidad de longitud.

### Directividad

$$D_{\max} = \frac{S_{\max}}{S_{\text{med}}}, S_{\text{med}} = \frac{P_{\Sigma}}{4\pi r^2}, S_{\max} = \frac{|E_{\max}|^2}{240\pi} \Rightarrow D_{\max} = \frac{|E_{\max}|^2 r^2}{60\pi P_{\Sigma}}$$

sustituyendo,  $|E_{\max}| = \frac{60I_e \ell}{r \lambda}$

obtenemos,  $D_{\max} = 1.5$

Por definición:

$$D_{\max} = \frac{S_{\max}}{S_{\text{med}}} = \frac{4\pi}{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi F^2(\theta, \varphi) \sin\theta d\theta d\varphi}, F^2(\theta, \varphi) = \sin^2\theta$$

obtenemos el mismo resultado.

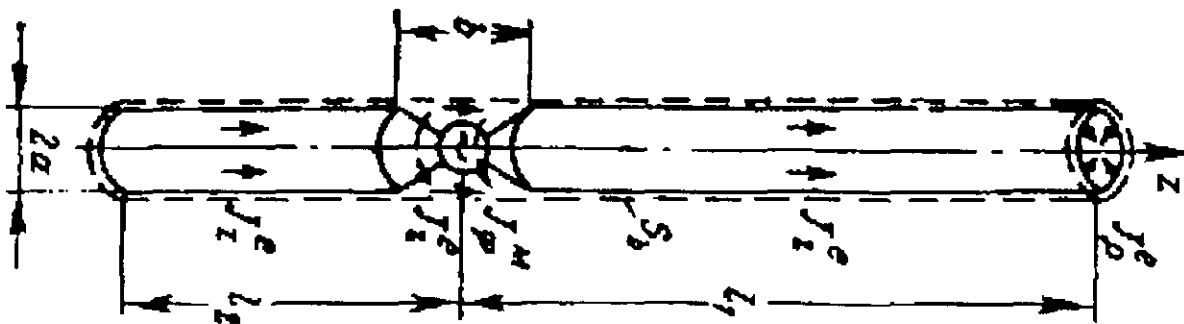
Por lo tanto, la directividad es realmente la medida de las propiedades direccionales y depende solo de la forma de su curva característica de radiación.

### Dipolo Eléctrico

El dipolo eléctrico es un conductor cilíndrico de longitud  $\ell_1 + \ell_2$  y de radio  $a$ , alimentado en los puntos de corte por los generadores de alta frecuencia. Cuando la longitud de los brazos son iguales,  $\ell_1 = \ell_2$ , el dipolo se llama simétrico. El generador se puede acoplar al dipolo por distintos métodos constructivos.

Bajo la acción del generador, en el dipolo aparecen corrientes eléctricas, que se distribuyen por su superficie de manera que el campo electromagnético excitado por ellas satisface las ecuaciones de Maxwell. Las condiciones en la frontera sobre la superficie del conductor y la condición de radiación al infinito.

Las funciones de distribución de las corrientes eléctricas no se conocen de antemano y deben ser previamente determinadas, esto consiste en el problema interior de la teoría del dipolo.



*Distribución de la corriente a lo largo del dipolo.* . . . . .

Una primera aproximación de la distribución de corriente en un dipolo delgado, puede ser expresada por las siguientes fórmulas:

$$I_z(z) = I_0 \frac{\text{sen}k(\ell_1 - z)}{\text{sen}k\ell_1} \quad \text{para } z > 0$$
$$I_z(z) = I_0 \frac{\text{sen}k(\ell_2 + z)}{\text{sen}k\ell_2} \quad \text{para } z < 0$$

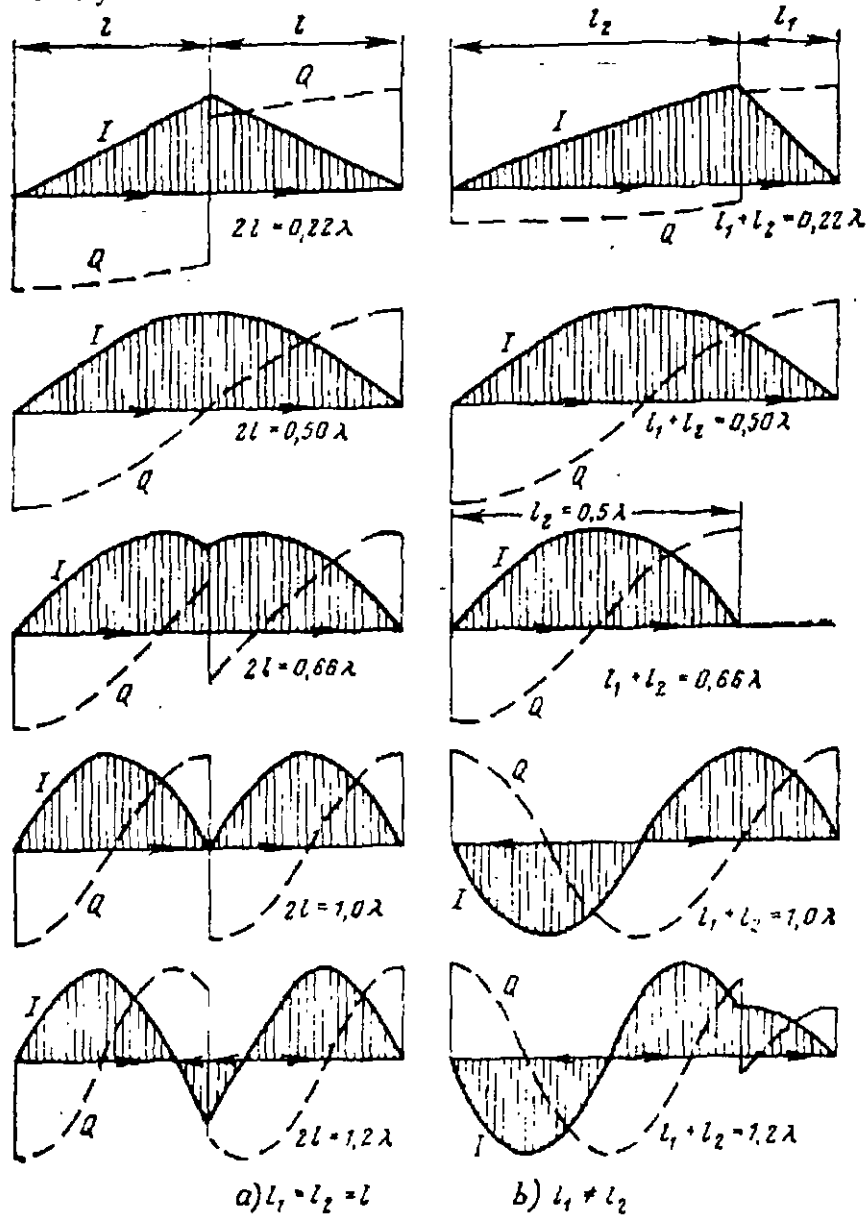
donde  $I_0$  es la magnitud de la corriente en el punto de alimentación.

Para el dipolo simétrico la distribución de corriente resulta simétrica con respecto al centro:

$$I_z(z) = I_0 \frac{\text{sen}k(\ell - |z|)}{\text{sen}k\ell}$$

Por consiguiente, en un dipolo delgado la corriente se distribuye aproximadamente por la ley del seno circular.

A continuación se muestran varios casos típicos de distribución de corriente a lo largo de los dipolos simétricos y no simétricos.



Distribución de corriente y carga en un dipolo eléctrico.

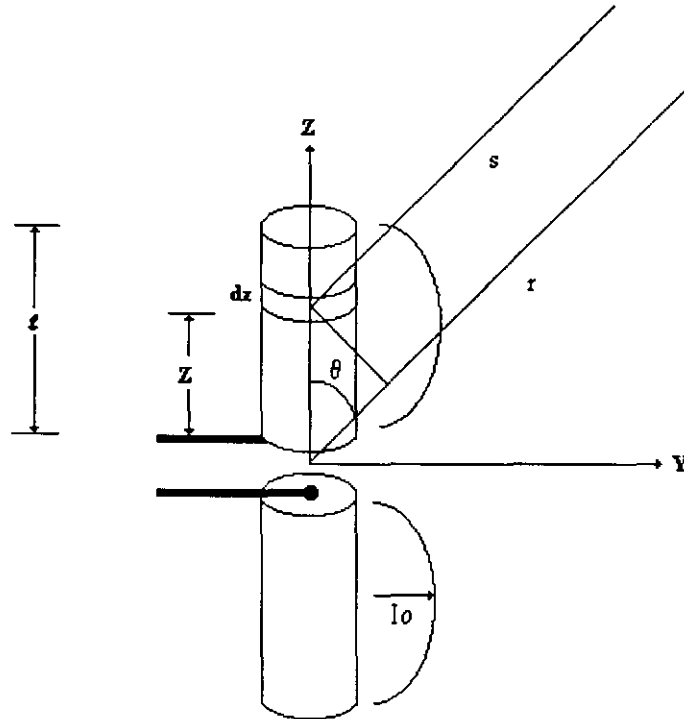
Aquí se presenta especial interés en el dipolo de media onda, que es el más difundido en la práctica, cuya longitud total es igual a  $\frac{\lambda}{2}$ . Su particularidad importante es que la función de distribución de corriente en él, no depende considerablemente del punto de conexión del generador. En todos los demás casos, la distribución de corriente depende considerablemente de la disposición del punto de alimentación a lo largo del dipolo.

Las Particularidades de la distribución de corriente en los dipolos delgados se pueden resumir en forma de las siguientes reglas prácticas:

- en los extremos del dipolo siempre se establecen nodos de corrientes.
- A la distancia de  $\frac{\lambda}{4}$  de los extremos del dipolo se forman máximos de corrientes.
- La fase de la corriente cambia a lo largo del dipolo a saltos de  $180^\circ$  al pasar por cero.
- En los puntos de alimentación del dipolo se establece un máximo, un nodo o un valor intermedio de la corriente según sea la relación entre la longitud del brazo dado y la longitud de onda.
- Para el dipolo los máximos de ambos brazos son idénticos.

*Diagrama de radiación, resistencia de radiación y directividad de un dipolo.*

Campos de una antena lineal delgada



El campo eléctrico lejano  $dE_\theta$  a una distancia  $s$  de el dipolo infinitesimal  $dz$  es:

$$dE_\theta = \frac{j60\pi I_e}{\lambda} \text{sen}\theta \frac{e^{-j\beta s}}{s} dz$$

El valor del campo eléctrico para  $E_\theta$  para la antena total es la integral sobre la longitud de la antena. Esto es

$$E_\theta = \int_{-l}^l dE_\theta$$



Para distancias grandes, la diferencia entre  $s$  y  $r$  puede ser despreciado, en sus efectos sobre la amplitud, sin embargo sus efectos sobre la fase debe ser considerado por sustituir  $s = r - z \cos \theta$ .

Tomando lo anterior en cuenta y sustituyendo el valor de  $E_\theta$  obtenemos,

$$E_\theta = \frac{j60\pi I_0 \text{sen}\theta}{\lambda \text{sen}k\ell} \frac{e^{-j\beta r}}{r} \left[ \int_0^\ell \text{sen}k(\ell - z)e^{jkz \cos\theta} dz + \int_{-\ell}^0 \text{sen}k(\ell + z)e^{jkz \cos\theta} dz \right]$$

la integrales son de la forma

$$\int \text{sen}(ax + b)e^{cx} dx = \frac{e^{cx}}{a^2 + b^2} [c \text{sen}(ax + b) - a \cos(ax + b)]$$

donde para la primera integral

$$a = jk \cos\theta$$

$$b = k$$

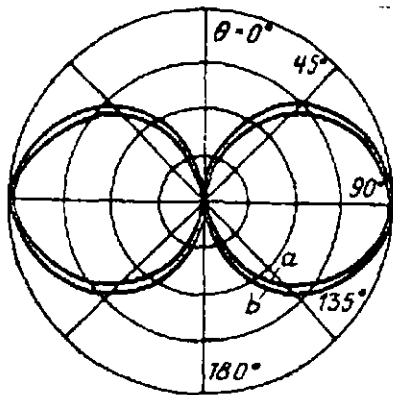
$$c = k\ell$$

Para la segunda integral  $a$  y  $c$  son las mismas como en la primera integral. Pero  $b = -k$ .

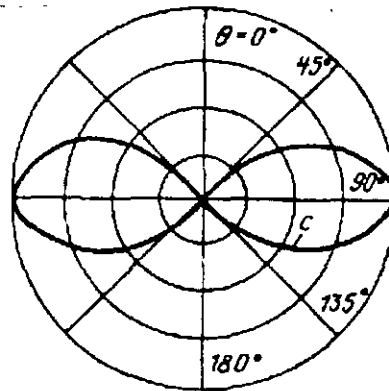
Resolviendo nos da

$$E_\theta = \frac{j60I_0}{\text{sen}k\ell} \frac{\cos(k\ell \cos\theta) - \cos k\ell}{\text{sen}\theta} \frac{e^{-jkr}}{r}$$

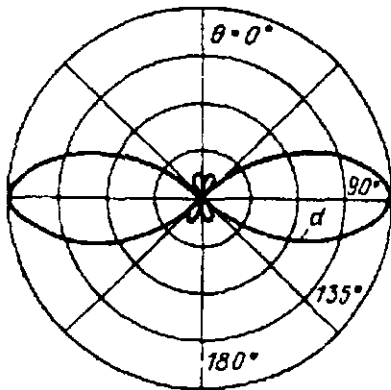
Algunos diagramas de radiación se muestran para diferentes longitudes.



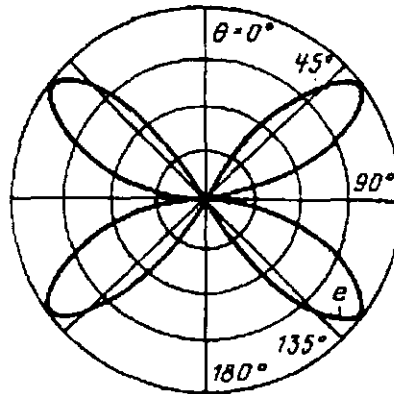
a)  $l = \lambda; \Delta\theta = 90^\circ$   
 b)  $l = 0,25\lambda; \Delta\theta = 80^\circ$



c)  $l = 0,5\lambda; \Delta\theta = 50^\circ$



d)  $l = 0,55\lambda; \Delta\theta = 44^\circ$



e)  $l = \lambda$

Diagramas direccionales de un dipolo simétrico.

Ahora calcularemos la potencia radiada por el dipolo. Para ello integramos el vector de Poynting sobre una esfera en cuyo centro se encuentra el dipolo. Si el dipolo está orientado a lo largo del eje  $z$ , la potencia total radiada será:

$$P_{\Sigma} = \frac{1}{2} \oint_A [EXH] dA = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{|E_{\theta}|^2}{Z_0} r^2 \sin\theta d\theta d\varphi$$

donde  $r^2 \sin\theta d\theta d\varphi$  es la magnitud del área elemental de la superficie de la esfera de radio  $R$ . Sustituyendo  $E_{\theta}$ , llegamos a la siguiente relación

$$P_{\Sigma} = \frac{30I_0^2}{4\pi \sin^2 kl} \int_0^{\pi} \frac{[\cos(kl \cos\theta) - \cos kl]^2}{\sin\theta} d\theta$$

Cabe hacer notar que la expresión de la potencia radiada mediante la magnitud de la corriente en los puntos de alimentación no es del todo acertada, pues en el caso en el que  $\sin kl = 0$ , esta magnitud resulta indefinida, dado que con la ley senoidal aproximada de distribución de corriente no se puede estimar el valor exacto de la corriente en los nodos. Por ello,

suele determinarse la resistencia de radiación del dipolo simétrico en la teoría de antenas con la relación:

$$R_{\Sigma} = \frac{2P_{\Sigma}}{I_v^2}, \text{ donde } I_v = \frac{I_0}{\text{sen}kl}$$

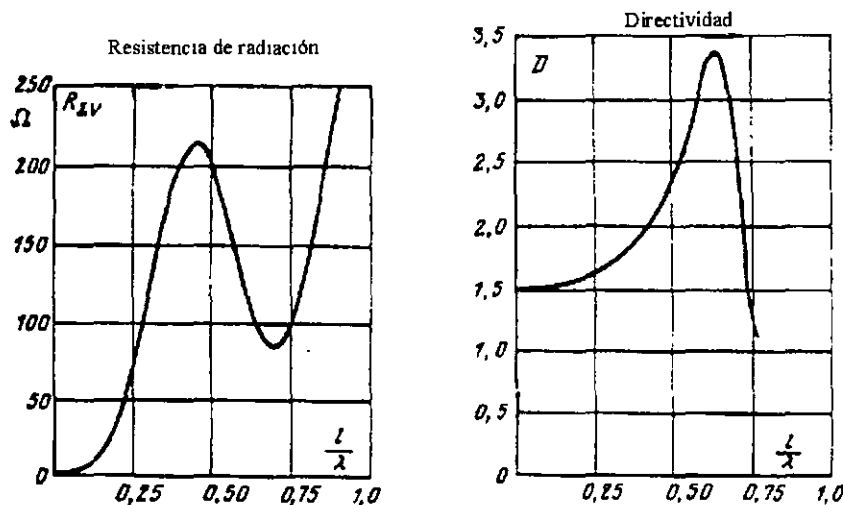
El cálculo de la integral, da lugar a la siguiente fórmula para la resistencia de radiación del dipolo:

$$R_{\Sigma} = \frac{Z_0}{4\pi} \{2[C + \ln 2kl - Ci2kl] + \cos 2kl[C + \ln kl + Ci4kl - 2Ci2kl] + \text{sen}2kl[Si4kl - 2Si2kl]\}$$

donde  $C = 0.5772\dots$  constante de Euler

$$\text{Si } x = \int_0^x \frac{\text{sen } u}{u} du = \text{seno integral}, \text{ Ci } x = \int_x^{\infty} \frac{\cos u}{u} du = \text{coseno integral}$$

Los resultados del cálculo de la resistencia de radiación se dan en la siguiente figura.



Conociendo la potencia de radiación, se puede determinar fácilmente la directividad del dipolo simétrico, esto es

$$D(\theta) = \frac{|E_{\theta}(\theta)|^2 2\pi R^2}{Z_0 P_{\Sigma}}$$

Para  $\theta = \frac{\pi}{2}$  (cuando  $\frac{l}{\lambda} < 0.64$  este será el sentido de radiación máxima) la intensidad del campo eléctrico será

$$E_{\theta}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{jI_{0z_0}}{2\pi \text{sen}kl} \frac{1 - \cos kl}{R} e^{-jkr}$$

La magnitud de la potencia radiada podemos expresarla como sigue:

$$P_{\Sigma} = \frac{1}{2} R_{\Sigma} I_v^2 = \frac{1}{2} R_{\Sigma} \frac{I_0^2}{\text{sen}^2 kl}$$

Con estas dos ultimas ecuaciones obtenemos la expresión para la directividad:

$$D\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{Z_0}{\pi R_\Sigma} [1 - \cos k\ell]^2$$

La gráfica de arriba, muestra la curva de la variación de la directividad en función de la relación  $\frac{\ell}{\lambda}$ .

Conclusiones.

1. La directividad de un dipolo de media onda simétrico es igual a 1.64
2. La directividad de un dipolo de onda completa es igual a 2.41
3. para  $\frac{\ell}{\lambda} > 0.625$ , la directividad disminuye, debido a el crecimiento de los lóbulos secundarios.

**Cálculo aproximado de la impedancia de entrada de un dipolo por el método de los circuitos equivalentes.**

*Parámetros del circuito equivalente:*

- a) La longitud de la línea de transmisión.
- b) Impedancia característica  $Z_{0l}$ .
- c) Constante de propagación compleja  $\gamma = \alpha + j\beta$

Donde:

$$\beta = k k_1 = \frac{2\pi}{\lambda} k_1, \text{ es el número de onda equivalente,}$$

$k_1$  = factor de corrección.

$$\alpha = \frac{R_1}{Z_{0l}}, \text{ factor de atenuación equivalente.}$$

$R_1$  = resistencia pura lineal del conductor.

*Condiciones de equivalencia:*

- 1) La longitud de la línea de transmisión se supone igual a la longitud del brazo del dipolo.
- 2) La potencia total del circuito equivalente de figura 1 y la potencia radiación del dipolo en todas las frecuencias se suponen iguales entre sí.
- 3) La impedancia característica de la línea equivalente de es igual a:

$$Z_{0l} = \frac{Z_0}{\pi} \left( \ln \frac{l}{a} - 1 \right)$$

donde  $a$  es el radio del dipolo

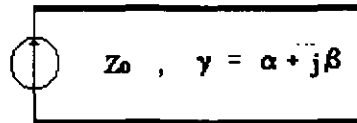


FIGURA 1

- 4) La constante de propagación equivalente  $\beta = k k_1$  se toma algo mayor que la constante de propagación  $k$  en el medio ambiente del dipolo en la magnitud del factor de corrección  $k_1$ , determinado por los datos experimentales de la figura 2.

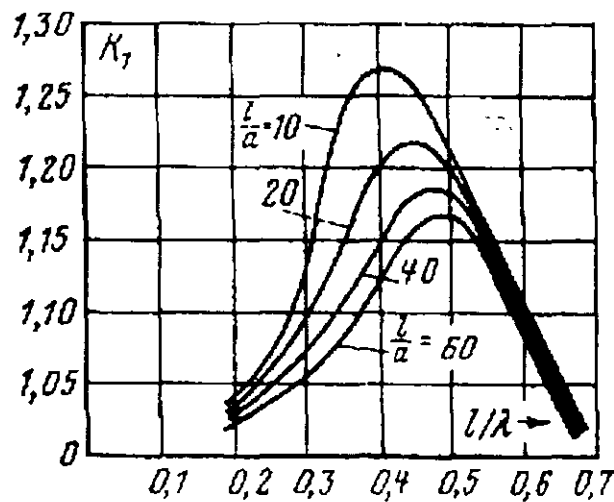


FIGURA 2 Factor de Corrección  $k_1$

Analizando la 2da. Condición de equivalencia, se puede escribir en la forma:

$$\frac{I_v^2 R_{\Sigma v}}{2} = 2 \int_0^{\ell} \frac{I_z^2 R_1}{2} dz$$

2do. Término indica la potencia total disipada por la línea de transmisión por unidad de longitud.

Sustituyendo la distribución senoidal de corriente en el dipolo  $I_z = I_v \text{sen} k_1 k (\ell - z)$ , obtenemos

$$R_{\Sigma v} = 2 R_1 \int \text{sen}^2 [k_1 k (\ell - z)] dz$$

Integrando

$$R_1 = \frac{R_{\Sigma v}}{\left(1 - \frac{\text{sen} 2k_1 k \ell}{2k_1 k \ell}\right)}$$

por otro lado la impedancia característica de la línea de transmisión

$$Z_{0l}^i = \sqrt{\frac{2R_1 + j\omega L_1}{j\omega C_1}} = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} \sqrt{1 - j \frac{2R_1}{\omega L_1}} \approx Z_{0l} \left( 1 - j \frac{R_1}{\omega L_1} \right)$$

donde  $L_1$  y  $C_1$  son la inductancia y capacitancia por unidad de longitud de la línea equivalente.

Por otro lado

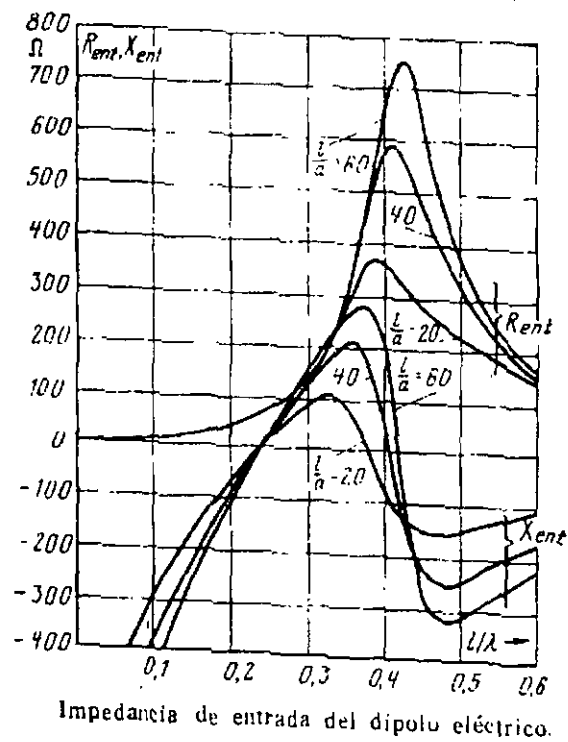
$$\frac{R_1}{\omega L_1} = \frac{\alpha Z_{0l}}{\omega L_1} = \frac{\alpha}{\omega \sqrt{L_1 C_1}} = \frac{\alpha}{k}$$

por lo tanto

$$Z_{0l}^i \approx Z_{0l} \left( 1 - j \frac{\alpha}{k} \right)$$

Si usamos las fórmulas de teoría de líneas de transmisión con pérdidas:

$$Z_{in} = Z_{0l} \left( 1 - j \frac{\alpha}{k} \right) \operatorname{ctg}(\alpha l + j\beta l)$$



Conclusiones:

- 1) al variar la relación  $\frac{\ell}{\lambda}$  entre los límites de cero a 0.6 la impedancia de entrada del dipolo tiene dos secciones de resonancia. La primera resonancia en serie tiene lugar en la vecindad del valor  $\frac{\ell}{\lambda} \approx 0.25$  y la segunda resonancia en paralelo para valores de  $\frac{\ell}{\lambda}$  algo menores que 0.5. Cuando  $\frac{\ell}{\lambda} < 0.25$  la parte reactiva de la impedancia de entrada es negativa. Al engrosar el conductor del dipolo los valores de resonancia de la relación  $\frac{\ell}{\lambda}$  disminuyen, especialmente para la resonancia en paralelo.
- 2) La de la frecuencia de la impedancia de entrada del dipolo es tanto más débil, cuando más grueso es el dipolo. Por consiguiente al trabajar en una amplia gama de frecuencias conviene utilizar dipolos gruesos a fin de compensar las variaciones de la impedancia de entrada a distintas frecuencias.

# Antenas de arreglos de fase

## 1. Introducción

El uso de las antenas para determinar la dirección a la fuente de radiación y para investigar la distribución de muchas fuentes en el espacio circundante así como para la comunicación con los objetos móviles plantea el problema de control operativo de la forma del diagrama direccional y, en particular, el problema de exploración, es decir, el desplazamiento del haz de la antena en el espacio.

La exploración (desplazamiento del haz de la antena en el espacio) puede realizarse por tres métodos: 1) mecánico, 2) electromecánico y 3) eléctrico.

El primer método se realiza girando toda la antena y se caracteriza por la inercia máxima. Con el segundo método se desplazan mecánicamente uno o varios elementos de la antena mediante motores eléctricos, lo que da lugar a la inclinación de la superficie equifásica del campo en la abertura fija. Un ejemplo clásico es el mando de la posición del haz de la antena parabólica con el desplazamiento lateral del excitador. El segundo método es más rápido ya que los elementos móviles tienen pequeña masa en comparación con la masa de toda la antena. Sin embargo, ninguno de estos dos primeros métodos satisface las necesidades modernas de velocidad de exploración del espacio ni permite seguir simultáneamente los desplazamientos de varios objetos que se mueven rápidamente.

Solo el tercer método de exploración; el eléctrico, puede garantizar la velocidad máxima del desplazamiento del haz. Con este método la distribución de amplitud-fase de excitación en la abertura fija de antena se regula mediante dispositivos de mando electrónico; por ejemplo, mediante desfazadores o conmutadores de fase basados en semiconductores. La rapidez de exploración se limita en este caso por la inercia, vinculada con las constantes de tiempo de los circuitos eléctricos; siendo esta inercia varios ordenes menor que la inercia mecánica.

En la inmensa mayoría de los casos la exploración eléctrica se realiza en los sistemas de antenas de elementos múltiples; llamados antenas de arreglos de fase.

La existencia de elementos múltiples en los sistemas de antenas dio lugar al crecimiento sustancial de número de problemas a resolver por los sistemas radio electrónicos y motivo la aparición de una serie de nuevos principios en radiocomunicación, radiolocalización y radioastronomía. Enumeremos los problemas más importantes, cuya resolución ha sido posible debido al uso de las antenas de arreglos de fase.

1. La exploración eléctrica en un amplio sector de ángulos.
2. La obtención de diagramas direccionales de la forma deseada regulando las magnitudes y fases de excitación de los radiadores individuales.
3. La posibilidad de adición coherente en un haz de las potencias de muchos generadores (o amplificadores) de oscilaciones de frecuencias superelevadas, lo que permite obtener valores muy grandes de la potencia radiada, inalcanzables en las antenas ordinarias debido a la rigidez eléctrica limitada.
4. La posibilidad de adición cofásica de las señales, recibidas por el sistema de grandes antenas, lo que permite obtener una superficie efectiva muy grande durante la recepción.



5. La extracción mas completa de información de las ondas electromagnéticas que llegan a la antena debido a aplicación de métodos complejos de tratamiento conjunto y paralelo de las señales recibidas por los elementos individuales del sistema de antenas.
6. La elevación de fiabilidad del sistema debido a la acción paralela de muchos elementos.
7. Mediante las redes de antenas se puede controlar la superficie reflectora efectiva de distintos objetos.

Sin embargo, el funcionamiento normal de las antenas de arreglos de fase se complica por una serie de dificultades suplementarias. Entre los factores obstaculizadores se clasifican: la aparición de errores de fase en la abertura debido a la acción inexacta de los dispositivos de mando, a causa del carácter discreto de la puesta en fase, debido a la desadaptación e interrelación de los elementos durante la exploración; la aparición de pérdidas suplementarias de potencia de frecuencias superelevadas en los dispositivos de mando; y la relativa estrechez de banda.

### 1.1. Ejemplos del uso de las antenas de arreglos de fase en comunicaciones satelitales modernos

Sistemas satelitales de orbita baja de ordinario involucran un gran numero de antenas de arreglos de fase. En Tabla 1 están presentados los datos acerca de los sistemas satelitales de orbita baja más conocidos: Globalstar y IRIDIUM:

Tabla I-I

Sistema	Frecuencia	Numero de satélites por constelación	Numero de módulos por antena	Numero de módulos por constelación
IRIDIUM	1.6GHz	66	>100	>19300
Globalstar		48		
Régimen transmisión	2.5GHz		91	4368
Régimen recepción	1.GHz		61	2928

Ambos sistemas utilizan la tecnología de módulos recepción-transmisión basados en circuitos integrados monolíticos.

**LA constelación IRIDIUM** esta compuesta de 66 satélites ubicados en seis orbitas circulares de altura 700km. Cada satélite tiene tres antenas apuntadas hacia tierra para tiene una cobertura completa. Las antenas son arreglos de fase activos que están operando en la banda L. Cada antena esta compuesta de 100 módulos de recepción-transmisión. Los elementos radiadores son antenas de parche. Como resultado están usados 20000 módulos de recepción- transmisión por constelación. El usuario utiliza el teléfono muy parecido al teléfono celular. Este teléfono transmite la señal directamente a uno de los satélites. El satélite retransmite señal a otros satélites con el fin de bajar la hacia el otro usuario.

**La constelación Globalstar** esta utilizando aproximadamente 7300 módulos de recepción y transmisión.

**Sistema Teledesic** es un sistema de nueva generación que asegura alta velocidad de transmisión de los datos digitales (1Mbps) para comunicación de computadora a computadora o comunicación videoconferencia. Sistema Teledesic utiliza 840 satélites de orbita baja. En cada satélite estarán instalados 60 arreglos de fase como antenas

transmisoras operando en la frecuencia 20GHz y 60 arreglos de fase como antenas receptoras operando en la frecuencia 30GHz. Cada antena estará compuesta por 400 módulos recepción-transmisión.

## 2. Los bases teóricos para el diseño de las antenas de arreglos de fase

### 2.1. Dos dipolos idénticos como arreglo de fase elemental. Teorema de multiplicación

Supongamos que los dipolos tienen iguales dimensiones y están ubicados en el plano yz paralelamente al eje z a la distancia  $d$  uno del otro (fig.2.1) simétricamente con respecto al origen de coordenadas.

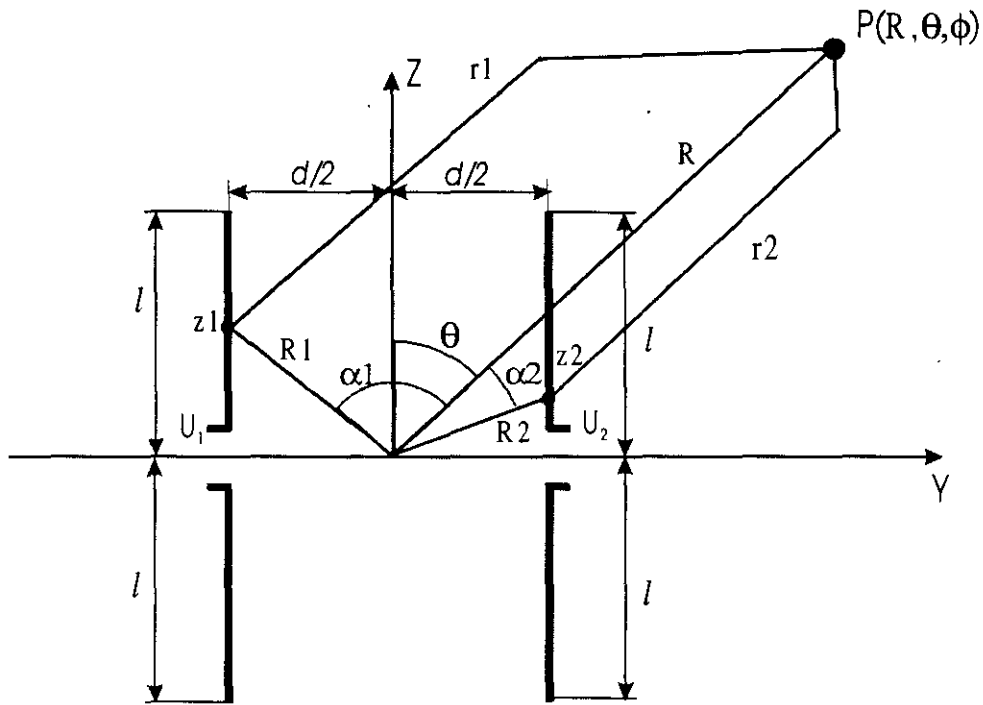


Fig.2.1. Dos dipolos- antena de arreglos de fase elemental

Apliquemos al primer dipolo el voltaje  $U_1$  de frecuencia  $\omega$  y al segundo dipolo, el voltaje  $U_2$  de igual frecuencia. En los dipolos se originan corrientes eléctricas, cuyas amplitudes complejas en los puntos de alimentación del primer dipolo se designa por  $I_{01}$ , y en los puntos de alimentación del segundo dipolo, por  $I_{02}$ . Se puede suponer que la corriente a lo largo del dipolo se distribuye de acuerdo con la ley senoidal:

$$I_{z_{1,2}} = I_{0_{1,2}} \frac{\sin k(l - |z_{1,2}|)}{\sin kl} \quad (2.1)$$

Puesto que las corrientes circulan en los dipolos en dirección del eje  $z$ , potencial vectorial de las corrientes eléctricas tendrá solamente la componente  $z$ . El potencial vectorial total en la zona lejana es la suma de los potenciales vectoriales de las corrientes eléctricas, creados por cada dipolo:

$$A_{z_{\infty}}^{\Sigma} = \frac{\exp(-jkR)}{R} \times \left[ \int_{-l}^l I_{01} \frac{\sin k(l-|z_1|)}{\sin kl} \exp(jkR_1 \cos \alpha_1) dz_1 + \int_{-l}^l I_{02} \frac{\sin k(l-|z_2|)}{\sin kl} \exp(jkR_2 \cos \alpha_2) dz_2 \right] \quad (2.2)$$

donde  $R_1 \cos \alpha_1$  y  $R_2 \cos \alpha_2$  son las diferencias de recorrido de los rayos desde los puntos dados de integración en los ejes de los dipolos primero y segundo al punto de observación  $P(R, \theta, \varphi)$ . Estos diferencias de recorrido son iguales a:

$$\begin{aligned} R_1 \cos \alpha_1 &= -\frac{d}{2} \sin \theta \sin \varphi + z_1 \cos \theta \\ R_2 \cos \alpha_2 &= -\frac{d}{2} \sin \theta \sin \varphi + z_2 \cos \theta \end{aligned} \quad (2.3)$$

Sustituyendo las ecuaciones (3) en la ecuación (2) y pasando del potencial vectorial de las corrientes eléctricas a la intensidad del campo eléctrico  $\vec{E}_z$ , obtenemos:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \left\{ \vec{\theta}_0 \frac{jI_{01} Z_0 \sin \theta}{2\lambda \sin kl} \frac{\exp(-jkR)}{R} \int_{-l}^l \sin k(l-|z|) \exp(jkz \cos \theta) dz \right\}_{\Sigma} \times \\ &\times \left[ \exp\left(\frac{-jkd \sin \theta \sin \varphi}{2}\right) + \frac{I_{02}}{I_{01}} \exp\left(\frac{jkd \sin \theta \sin \varphi}{2}\right) \right] = \\ &= \frac{Z_0 I_{01}}{2\pi} \vec{f}_1(\theta) f_{\Sigma}(\theta, \varphi) \frac{\exp(-jkR)}{R} \end{aligned} \quad (2.4)$$

donde  $\vec{\theta}_0$  es un vector unitario del sistema de coordenadas esféricas en dirección  $\theta$ . Se establece fácilmente que el primer factor entre llaves de la expresión (4) representa la intensidad del campo de radiación del dipolo eléctrico aislado con distribución senoidal de corriente y su centro en el origen de coordenadas. En adelante llamaremos este factor característica de emisión del elemento del sistema.

El segundo factor de la expresión (4) entre corchetes:

$$f_{\Sigma}(\theta, \varphi) = \exp\left(\frac{-jkd \sin \theta \sin \varphi}{2}\right) + \frac{I_{02}}{I_{01}} \exp\left(\frac{jkd \sin \theta \sin \varphi}{2}\right) \quad (2.5)$$

es una función escalar dependiente de las magnitudes complejas de las corrientes en las entradas de los dipolos y de la diferencia de recorrido  $kd \sin \theta \sin \phi$ , calculada con respecto a los centros de los dipolos. Este factor considera la interferencia de los campos en el sistema de dos dipolos y en realidad es la función del diagrama direccional de dos fuentes puntuales isótropas hipotéticas de radiación coherente, situados en los puntos  $\pm d/2$  sobre el eje  $y$ . La función  $f_z(\theta, \phi)$  la llamaremos factor de direccionalidad del sistema (algunos la llamen también factor de combinación, factor de interferencia o factor del a red).

Así pues, el campo de radiación de un sistema de dos dipolos idénticos esta representado en forma de producto de la característica de emisión del elemento por el factor de direccionalidad del sistema.

Esta representación del campo total puede ser fácilmente generalizada a un sistema de cualquier numero de radiadores idénticos, situados en el espacio de manera ordenada, precisamente de tal modo que todo radiador puede coincidir con cualquier otro radiador solamente mediante un desplazamiento paralelo en el espacio sin rotación. Esta generalización se formula mediante el siguiente teorema de multiplicación.

En un sistema de  $N$  radiadores idénticos igualmente dirigidos con funciones coincidentes de distribución de corriente el campo electromagnético total de radiación es proporcional al producto de la característica vectorial de emisión de un elemento individual por el factor escalar de direccionalidad del sistema de  $N$  radiadores puntuales isótropos hipotéticos; además, el factor del sistema considera completamente tanto la disposición de los elementos en el espacio, como la distribución de las amplitudes complejas de las corrientes por sus entradas.

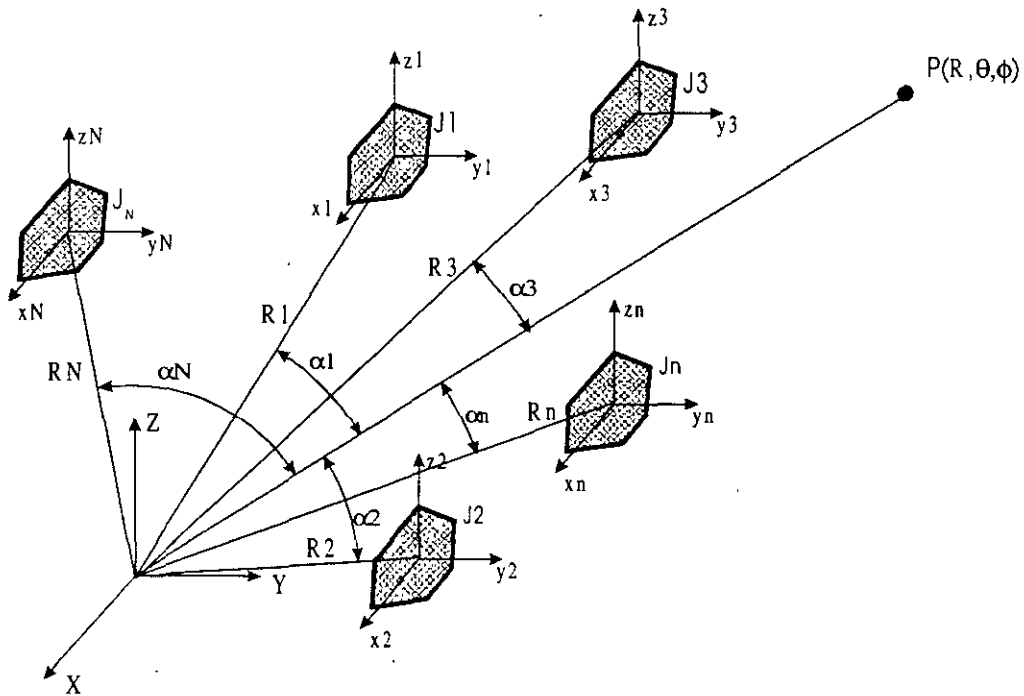
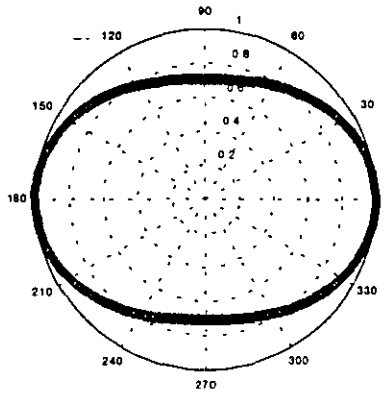
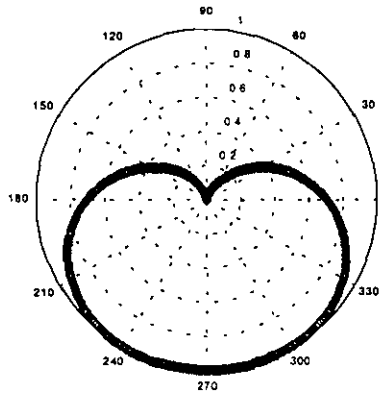


Fig. 2.2. Sistema de fuentes de radiación idénticas

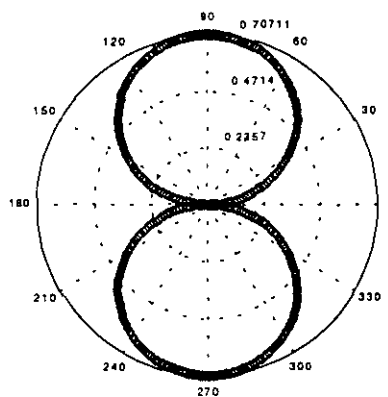
Utilizando las designaciones de la **fig. 2.2**, podemos obtener fácilmente la expresión general para el factor de direccionalidad del sistema:



**Fig. 2.3(a).** Característica de magnitud del sistema de dos dipolos en el plano azimutal  
 $(d = \lambda/4, \Phi = 0)$



**Fig. 2.3(b).** Característica de magnitud del sistema de dos dipolos en el plano azimutal  
 $(d = \lambda/4, \Phi = \pi/2)$



**Fig. 2.3(c).** Característica de magnitud del sistema de dos dipolos en el plano azimutal  
 $(d = \lambda/4, \Phi = \pi)$

En este caso el segundo dipolo, que refleja la energía hacia el primer dipolo, se llama reflector activo.

$$f_{\Sigma}(\theta, \varphi) = \sum_{n=1}^N I_{0n} \exp(jkR_n \cos \alpha_n) \quad (2.6)$$

donde  $R_n$  es un segmento que une el origen del sistema de coordenadas general  $x, y, z$  con el origen del sistema de coordenadas local  $x_n, y_n, z_n$  para el radiador numero  $n$ ;  $\alpha_n$  es el angulo entre la dirección al punto de observación y el segmento  $R_n$ , y, por ultimo,  $I_{0n}$  es la magnitud compleja de corriente en la entrada del  $n$ -esimo radiador.

## 2.2. Análisis del diagrama direccional de un sistema de dos dipolos

Analizaremos el diagrama de direccionalidad del sistema de dos dipolos en el plano  $xy$ . En este plano cada dipolo presenta radiación uniforme y el diagrama direccional total coincide con el factor de direccionalidad del sistema. De acuerdo con la (5) este factor tiene la forma:

$$f_{\Sigma}(\varphi) = \exp j \left( -\frac{kd \sin \varphi}{2} \right) + m \exp j \left( \frac{kd \sin \varphi}{2} + \Phi \right) \quad (2.7)$$

En la ecuación (7) la relación de las corrientes en las entradas de los radiadores esta presentada en forma compleja:

$$\frac{I_{02}}{I_{01}} = m \exp(j\Phi) \quad (2.8)$$

y se considera previamente dada. La magnitud  $m$  es la relación de las amplitudes de las corrientes y la magnitud  $\Phi$ , la diferencia de fase.

La formula (8) fácilmente puede ser presentada en siguiente forma:

$$f_{\Sigma}(\varphi) = \exp j \left( \frac{\Phi}{2} \right) \left\{ (1+m) \cos \frac{\Psi}{2} - j(1-m) \sin \frac{\Psi}{2} \right\} \quad (2.9)$$

En la ecuación (9) se ha introducido una nueva designación de la variable angular generalizada:

$$\Psi = kd \sin \varphi + \Phi$$

Para pequeños valores de la distancia entre los dipolos ( $d \leq \lambda$ ) el factor de direccionalidad del sistema de dos fuentes tiene una forma relativamente simple con un numero de lóbulos no mayor de cuatro. El caso típico que tiene lugar para las corrientes de igual magnitud se muestran en la **fig.2.3**. Para alimentación en cuadratura  $\Phi = \pi/2$  y  $d = \lambda/4$ , el diagrama direccional tiene la forma de una cardioide con el máximo dirigido hacia el primer dipolo.

Analizando el sistema de dos dipolos, podemos llegar a una conclusión importante: podemos controlar característica de radiación cambiando la fase de excitación de los dipolos.

### 3. Sistema radiador lineal como modelo para las antenas de arreglos de fase

Por sistema radiador lineal entenderemos la distribución continua o discreta de fuentes idénticas de un campo electromagnético (llamados elementos) a lo largo de una dirección dada en el espacio. Como ejemplo de antena de sistema radiador lineal puede darse el conductor largo rectilíneo por el que circula la corriente eléctrica.

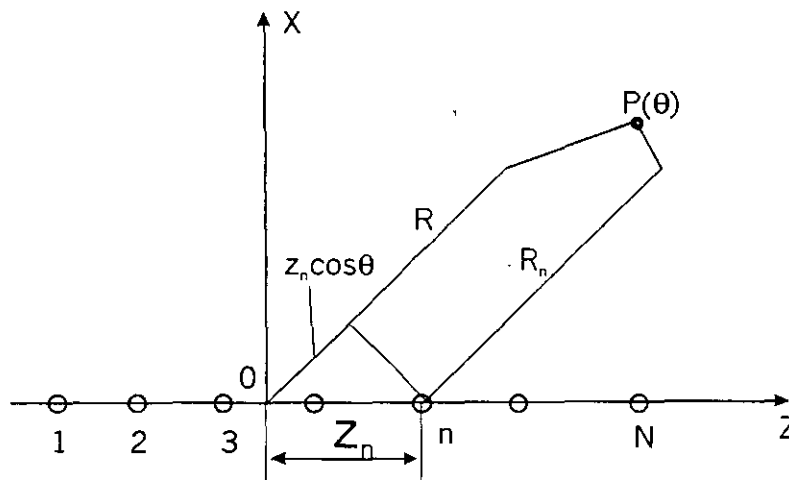


Fig.3.1 Radiador lineal discreto

La dimensión longitudinal de un sistema de radiador lineal puede ser arbitraria; en tanto que las dimensiones transversales son de ordinario pequeñas comparando con la longitud de onda. Vamos a suponer conocida la curva característica de radiación vectorial compleja de un elemento del sistema  $\vec{F}_1(\theta, \varphi)$  en su sistema de coordenadas esféricas locales propio cuyo eje coincide con el eje del sistema de radiador lineal y el centro se encuentra en un punto arbitrario dentro del elemento.

El propio sistema radiador lineal se determina completamente por la ley de disposición de los centros de los elementos a lo largo del eje y la ley de distribución de amplitudes complejas de excitación por los elementos individuales (la llamada distribución de amplitud-fase por longitud del sistema).

De acuerdo con el teorema de la multiplicación el campo electromagnético en la zona lejana para un sistema radiador lineal se puede presentar en forma de producto:

$$\vec{E}(R, \theta, \varphi) = A \vec{F}_1(\theta, \varphi) f_\Sigma(\theta, \varphi) \frac{\exp(-jkR)}{R} \quad (3.1)$$

donde  $A$  es un factor de amplitud dependiente de la potencia suministrada a la antena,  $\vec{F}_1(\theta, \varphi)$  es la característica compleja vectorial del elemento que determina la polarización de radiación, y  $f_z(\theta, \varphi)$  es un factor complejo escalar de direccionalidad del sistema de radiadores isótropos, situados en los puntos de disposición de los centros de los elementos a lo largo del eje del sistema.

Para un sistema discreto de radiadores ubicados en  $N$  puntos dados  $z_n$  sobre el eje  $z$ , es decir, para la red de antenas lineal (fig.3.1) el factor de direccionalidad puede ser escrito en la forma:

$$f_z(\theta, \varphi) = \sum_{n=1}^N I_n \exp(jkz_n \cos\theta) \quad (3.2)$$

donde  $I_n = |I_n| \exp(j\Phi_n)$  es la amplitud compleja de excitación de radiador con número  $n$ ;  $z_n \cos\theta$  es la diferencia de recorridos de los rayos al punto de observación  $P$ , trazados desde el origen del sistema de coordenadas común y desde el punto de ubicación del radiador número  $n$ .

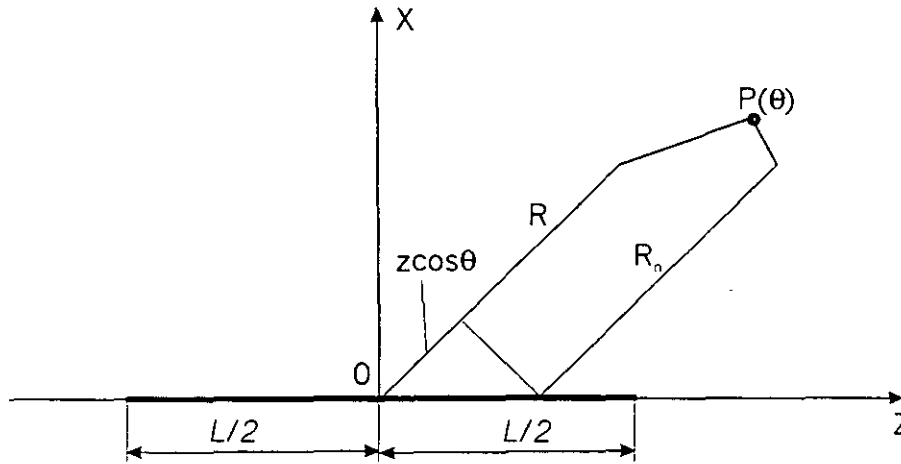


Fig.3.2 Radiador lineal ideal continuo

El sistema de radiador lineal continuo, o, simplemente el radiador lineal (fig.3.2) puede considerarse como un caso límite de la red de antenas lineal con un número de elementos, en el intervalo desde  $-L/2$  hasta  $L/2$ , tendiente al infinito. En tal caso la suma de (2) se sustituye por la integración y el factor de direccionalidad del radiador lineal adquiere la forma:

$$f(\theta) = \int_{-L/2}^{L/2} I(z) \exp(jkz \cos\theta) dz \quad (3.3)$$

donde  $I(z) = |I(z)| \exp[j\Phi(z)]$  es la función de distribución de excitación por la longitud de radiador (distribución amplitud-fase), y  $z \cos\theta$ , la diferencia de recorrido de los rayos. Los



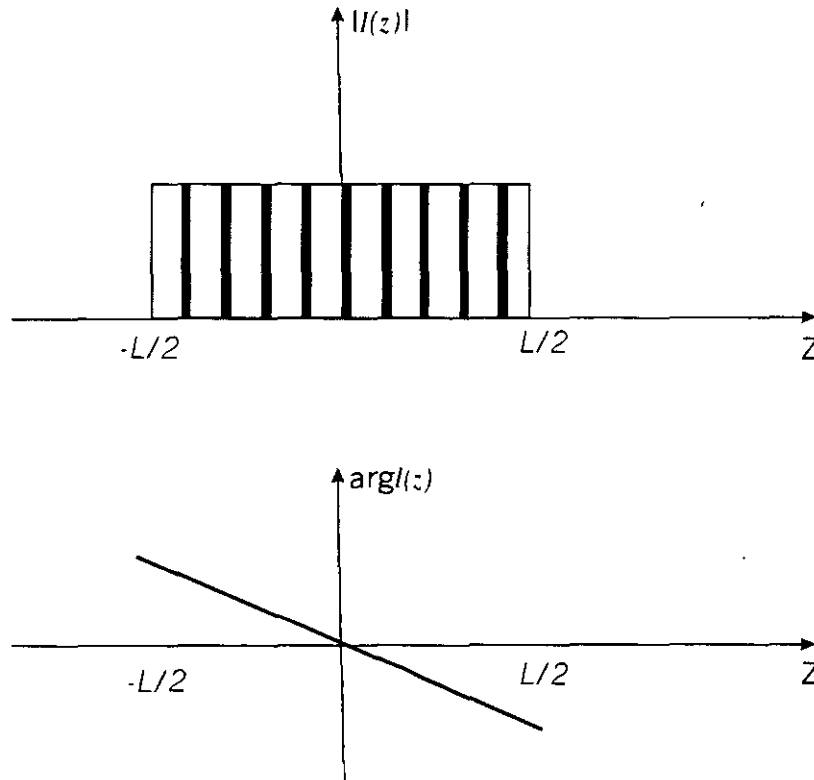
factores de direccionalidad de los sistemas radiadores discreto y continuo no dependen de la coordenada  $\varphi$ , y, por eso, los diagramas direccionales definidos por ellos tienen simetría de rotación alrededor del eje  $z$ .

### 3.1. Diagrama direccional del radiador lineal ideal. Regímenes de radiación. Anchura del haz.

La distribución de amplitud-fase elemental de excitación de un radiador lineal, que frecuentemente se encuentra en muchos tipos de antenas reales, tiene la forma:

$$\begin{cases} I_0 \exp(-jk\xi z), & -L/2 \leq z \leq L/2 \\ 0 & |z| > L/2 \end{cases} \quad (3.4)$$

De acuerdo con la ley (4), la magnitud de excitación en los límites de la longitud del radiador no depende de la coordenada  $z$  y es igual a la magnitud constante  $I_0$  (**fig.3.3**).



*Fig. 3.3. Distribución uniforme de amplitud y distribución lineal de fase en un radiador lineal idea*

La fase de excitación varía a lo largo del radiador por una ley lineal (**fig.3.3**), característica para la onda progresiva (móvil), que se propaga en dirección de los valores positivos de la coordenada  $z$ . La magnitud adimensional  $\xi = c/v$  en (4) caracteriza la velocidad de fase de la onda de excitación y puede ser llamada coeficiente de deceleración. Cuando  $\xi = 0$  la

fase de excitación es constante a lo largo de la antena, lo que corresponde a la velocidad de propagación infinita de excitación, y tendremos el caso llamado radiador cofasico ideal. Para  $|\xi| < 1$  la velocidad de fase de excitación supera la velocidad de la luz en el espacio. Si  $|\xi| = 1$  la velocidad de fase de excitación es exactamente igual a la velocidad de fase de la luz, y, por ultimo, cuando  $|\xi| > 1$  tiene lugar el caso de excitación de la fuente lineal ideal por la onda progresiva decelerada.

El radiador lineal con distribución de la excitación por la ley (4) puede ser llamado radiador lineal ideal.

Calcularemos el factor de direccionalidad del radiador lineal ideal. Sustituyendo la (4) en la (3) e integrando, tendremos:

$$\begin{aligned}
 f_{\theta} &= I_0 \int_{-L/2}^{L/2} \exp[jkz(\cos\theta - \xi)] dz = I_0 \frac{\exp[jkz(\cos\theta - \xi)]^{L/2}}{jk(\cos\theta - \xi)} \Big|_{-L/2}^{L/2} = \\
 &= I_0 L \frac{\sin \frac{kL}{2}(\cos\theta - \xi)}{\frac{kL}{2}(\cos\theta - \xi)} \qquad (3.5)
 \end{aligned}$$

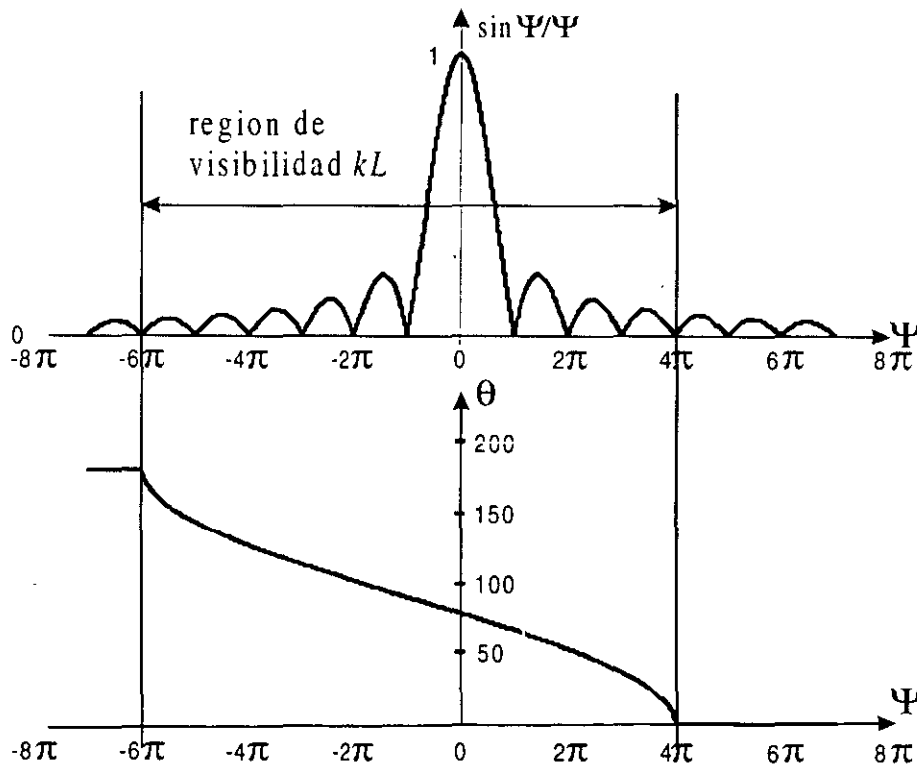


Fig. 3.4. Análisis del factor de direccionalidad

Por conveniencia del análisis, el resultado obtenido se representara en la forma:

$$f(\theta) = \frac{\sin \Psi}{\Psi} \quad (3.6)$$

donde se ha introducido una nueva variable angular generalizada:

$$\Psi = \frac{kL}{2}(\cos \theta - \xi) \quad (3.7)$$

Pasemos al análisis de la curva característica de amplitud del radiador lineal ideal. Para ello veamos la **fig.3.4**, en cuya mitad superior se ha trazado la grafica del modulo de la función  $\sin \Psi / \Psi$  en relación con la variable angular generalizada  $\Psi$ .

Esta función tiene un lóbulo principal de magnitud unitaria para  $\Psi = 0$  y una serie de lóbulos laterales (secundarios), dispuestos simétricamente a ambos lados del lóbulo principal. En escala de la variable el lóbulo principal ocupa la anchura por los ceros de  $2\pi$ , y cada lóbulo lateral tiene una anchura dos veces menor por los ceros, es decir,  $\pi$ . Los ceros de radiación se disponen por el eje  $\Psi$  exactamente en los puntos  $\Psi_{n \text{ min}} = n\pi, n = \pm 1, \pm 2, \dots$ . El nivel del primer lóbulo lateral más grande es aproximadamente igual a 0.21.

Veamos ahora como se pasa de la variable generalizada  $\Psi$  al ángulo físico de observación  $\theta$ . Para ello en la mitad inferior de la **fig.3.4** se ha construido la curva de la magnitud  $\frac{kL}{2}(\cos \theta - \xi)$  en función del ángulo  $\theta$ , siendo fijados los valores de la longitud de la fuente  $L$  y del coeficiente de deceleración  $\xi$ .

Los valores máximo y mínimo de la función  $\Psi(\theta)$ , iguales respectivamente a  $\Psi_{\text{max}} = \frac{kL}{2}(1 - \xi)$  y  $\Psi_{\text{min}} = -\frac{kL}{2}(1 + \xi)$  limitan la porción de trabajo de la función  $|\sin \Psi / \Psi|$ , que influye en la formación del factor de direccionalidad. La extensión total de esta porción es igual a  $\Psi_{\text{max}} - \Psi_{\text{min}} = kL$  y se determina solo por la longitud física de la antena. Cuanto más larga la antena con respecto a la longitud de onda de las oscilaciones, tanto más lóbulos de la función  $|\sin \Psi / \Psi|$  caen dentro de la porción de trabajo. La porción de trabajo del factor de direccionalidad sobre el eje de la variable  $\Psi$  se suele llamar región de ángulos de observación reales. Esta denominación se debe a que a los valores de  $\Psi$  fuera de la porción de trabajo deben corresponder los valores de  $\cos \theta$  mayores a uno, que se pueden interpretar como cósenos de ángulos "imaginarios".

### ***Regímenes de radiación de una antena lineal***

La posición angular del máximo principal de radiación  $\theta_0$  se determinara de la condicion evidente:

$$\Psi_0 = \frac{kL}{2}(\cos \theta_0 - \xi) = 0 \quad (3.9)$$

que lleva a las formulas de calculo:

$$\cos \theta_0 = \xi \text{ o } \theta_0 = \arccos \xi, |\xi| \leq 1 \quad (3.10)$$

Cuando  $\xi = 0$ , es decir, para la excitación cofásica, la posición angular del máximo principal  $\theta_0 = \pi/2$  es perpendicular al eje de la antena y tiene lugar el **régimen de radiación transversal**.

Para  $0 < \xi < 1$ , el lóbulo principal del factor de direccionalidad se desvía de la normal al eje de la antena hacia el lado del movimiento de la onda de excitación. Este es llamado **régimen de radiación inclinada**. El cambio de posición del lóbulo principal en el espacio se llama exploración. Por consiguiente, al variar el coeficiente de deceleración en los límites del intervalo de  $-1$  a  $1$  el lóbulo principal del diagrama de direccionalidad explora en los límites de  $180$  hasta  $0$  grados.

Cuando la magnitud  $|\xi|$  se aproxima a la unidad, el lóbulo principal comienza a “salir” del límite de la región de visibilidad y para  $|\xi| = 1$  el máximo principal resulta orientado exactamente en dirección del eje de la antena. Este es el régimen de radiación axial, observado para la velocidad de fase de excitación igual a la velocidad de la luz.

Si  $|\xi| > 1$ , el máximo principal resulta ya fuera de los límites de la región de ángulos reales.

Aquí para valores de  $|\xi|$  próximos a la unidad, al principio se conserva el régimen de radiación axial con velocidad de fase decelerada, mientras la parte del lóbulo principal que queda en la región de visibilidad supera en magnitud el nivel del primer lóbulo lateral. Con el aumento posterior de  $|\xi|$  en la región de ángulos reales quedan solo los lóbulos laterales.

#### ***Anchura del haz de una antena lineal ideal.***

En el régimen de radiación inclinada para estimar la anchura del lóbulo principal por el nivel  $0.5$ :

$$\Delta\theta = \frac{51^\circ \lambda}{\sin\theta_0 L} \quad (3.11)$$

El lóbulo resulta tanto más estrecho, cuanto mayor es la longitud de antena  $L/\lambda$  y cuanto más próximo es el sentido de radiación a la posición ecuatorial.

De un modo análogo se puede apreciar la anchura de los lóbulos por ceros. Para el lóbulo principal:

$$\Delta\theta \approx \frac{114^\circ \lambda}{\sin\theta_0 L} \quad (3.12)$$

Las formulas (11) y (12) son aproximadas y se realizan con mejor precisión para grandes valores  $L/\lambda$  y para los sentidos de radiación no muy próximos al eje de la antena.

La anchura del haz de la antena lineal para la radiación axial es igual a:

$$|\Delta\theta|_{|\xi|=1} \approx 107^\circ \sqrt{\frac{\lambda}{L}} \quad (3.13)$$

es decir, bastante más ancha, que para la radiación transversal. En la radiación axial el lóbulo principal se puede estrechar sensiblemente, si se pasa al régimen de deceleración con

$|\xi| > 1$ . En este caso la ganancia de antena dirigida al principio se aumenta debido a estrechamiento del lóbulo principal y después se disminuye debido al crecimiento de los lóbulos laterales.

### 3.2. Ganancia de antena dirigida de un radiador lineal ideal.

La expresión definitiva para la ganancia de antena dirigida de una antena ideal tiene la siguiente forma:

$$D = \frac{kL f^2(\theta_0)}{\left[ \frac{\sin^2 \Psi_{\min}}{\Psi_{\min}} \right] - \frac{\sin^2 \Psi_{\max}}{\Psi_{\max}} + \text{Si}(2\Psi_{\max}) - \text{Si}(2\Psi_{\min})}, \quad (3.14)$$

donde

$$\Psi_{\max} = \frac{kL}{2}(1 - \xi) \quad (3.15)$$

$$\Psi_{\min} = -\frac{kL}{2}(1 + \xi)$$

$$f^2(\theta_0) = \begin{cases} 1, & |\xi| < 1 \\ \frac{\sin^2 \Psi(\theta_0)}{\Psi^2(\theta_0)}, & |\xi| > 1 \end{cases} \quad (3.16)$$

Examinemos mas detenidamente la ganancia de antena dirigida en función de coeficiente de deceleración  $\xi$ . En régimen de radiación transversal o inclinada, cuando se satisface la condición  $\frac{kL}{2}(1 - |\xi|) \geq \pi$ , o bien, lo que es lo mismo:

$$|\xi| < 1 - \frac{\lambda}{L} \quad (3.17)$$

el lóbulo principal del factor de direccionalidad se sitúa totalmente en la región de visibilidad (**fig.3.4**) y esta limitado por los valores de  $\Psi = \pm\pi$ . Sustituyendo estos valores de los limites del lóbulo principal en la formula (14), hallamos la ganancia de antena dirigida del radiador lineal:

$$D \approx \frac{2L}{\lambda} \quad (3.18)$$

Al aumentar el coeficiente de deceleración  $\xi$  desde el valor  $1 - \frac{\lambda}{L}$  dado por la formula (17) hasta la unidad, el lóbulo principal se acerca suavemente al eje de la antena y la ganancia de antena dirigida crece. Para  $|\xi| = 1$ , la valoración de la ganancia de antena dirigida resulta la siguiente:

$$D \approx \frac{4L}{\lambda} \quad (3.19)$$

Por consiguiente, en régimen de radiación axial con velocidad de fase de excitación igual a la velocidad de la luz, la ganancia de antena dirigida estándar de una antena lineal es dos veces mayor que la ganancia de antena dirigida en régimen de radiación inclinada.

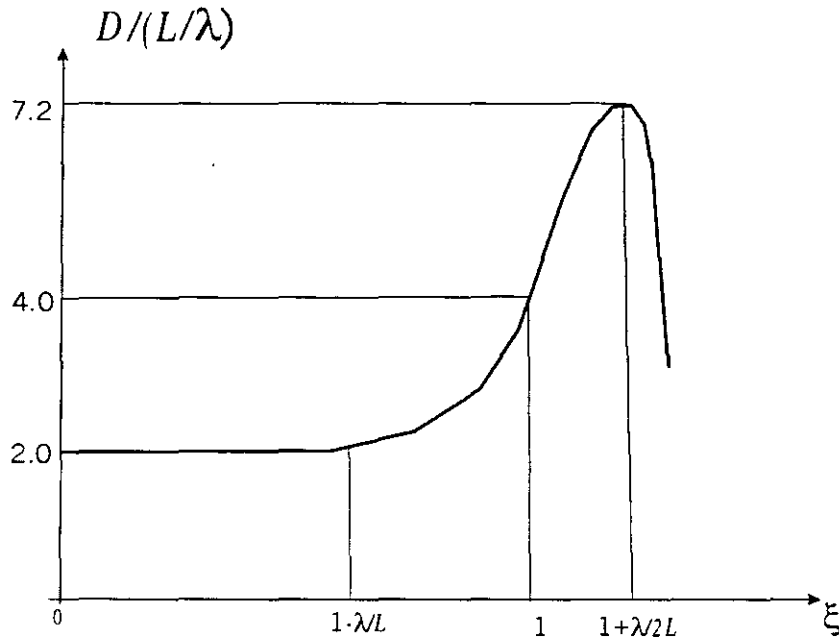


Fig. 3.5. Directividad de un radiador lineal ideal

Cuando el valor de  $|\xi|$  se hace mayor que la unidad, la ganancia de antena dirigida de una antena lineal al principio crece debido al estrechamiento del lóbulo principal. Sin embargo, al incrementar  $|\xi|$  aumenta el nivel de los lóbulos laterales, lo que da lugar a la saturación de la ganancia de antena dirigida y su posterior caída. En tal caso la fórmula de la ganancia de antena dirigida se reduce a la forma:

$$D_{\xi > 1} = \frac{kL \left( \frac{\sin \Psi_{\max}}{\Psi_{\max}} \right)^2}{\left[ \frac{\pi}{2} + Si(2\Psi_{\max}) - \frac{\sin^2 \Psi_{\max}}{\Psi_{\max}} \right]} \quad (3.20)$$

La dependencia  $D(\xi)$  está trazada en la **fig.3.5**, veamos que al principio la ganancia de antena dirigida crece bruscamente gracias al estrechamiento del lóbulo principal; sin embargo este proceso va acompañado por el aumento de los lóbulos laterales. El resultado óptimo se logra cuando:

$$\xi = \xi_{opt} = 1 + \frac{\lambda}{2L} \quad (3.21)$$

En el punto óptimo la magnitud de la ganancia de antena dirigida total de una antena lineal es:

$$D_{opt} \approx 7.2 \frac{L}{\lambda}$$

Los resultados obtenidos corresponden a la antena de elementos omnidireccional. La directividad intrínseca del elemento puede alterar la magnitud de la ganancia de antena

dirigida. Por ejemplo, para la antena lineal de corrientes longitudinales eléctricas el cero de radiación del elemento esta orientado por el eje de la antena y el régimen de radiación axial en principio es imposible.

### 3.3. Influencia de la forma de la distribución de amplitud sobre los parámetros de una antena lineal.

Las antenas lineales de distribución de amplitud uniforme tienen un nivel suficientemente alto de lóbulos laterales, -13.2dB, a veces inadmisibles en la práctica. Resulta que la reducción del nivel de radiación lateral se puede conseguir utilizando una distribución de amplitud irregular, que decae hacia los extremos de la antena.

El paso a la distribución de amplitud decreciente da lugar a la reducción de la ganancia de antena dirigida, y por la disminución del nivel de los lóbulos laterales se hace necesario no solo retribuir con el ensanche del haz, sino también con determinada pérdida de la ganancia de antena dirigida. La magnitud de la disminución relativa de la ganancia de antena dirigida, en nuestro caso  $D/D_0$  ( $D_0$  es la ganancia de antena dirigida de un radiador ideal de gran longitud con distribución de amplitud uniforme) en la teoría de las antenas lleva el nombre de factor de utilización de la superficie.

Las antenas lineales de alimentación en fase con distribución de amplitud uniforme tienen una magnitud máxima de la ganancia de antena dirigida en comparación con cualquier otra distribución de amplitud. En la tabla III-I se dan para algunas de distribuciones de excitación las formulas del factor de direccionalidad y los valores característicos de los parámetros.

Tabla III-I

Distribución de amplitud $I(z)$	Formula para el diagrama de direccionalidad $f(\Psi), \Psi = \frac{kL}{2} \cos(\theta)$	$\Delta$	CEH	NLL	FUS
$(1-\Delta) + \Delta \cos\left(\frac{\pi z}{L}\right)$ "coseno extendido en pedestal"	$(1-\Delta) \frac{\sin \Psi}{\Psi} + \Delta \frac{2 \cos \Psi}{\pi \left(1 - \frac{4\Psi^2}{\pi^2}\right)}$	0 0.33 1.0	1 1.12 1.35	-13.2 -20.5 -23.5	1 0.932 0.810
$1 - (1-\Delta) \frac{4z^2}{L^2}$ "parábola en pedestal"	$\frac{\sin \Psi}{\Psi} + (1-\Delta) \frac{d^2}{d\Psi^2} \left(\frac{\sin \Psi}{\Psi}\right)$	0.8 0.5 0	1.04 1.09 1.29	-15.8 -17.1 -20.5	0.994 0.97 0.833

*CEH-coeficiente de expansión del haz*  $CEH = \frac{\Delta \theta}{51 \frac{\lambda}{L}}$

*NLL- nivel de los lóbulos laterales*

*FUS-factor de utilización de la superficie*  $FUS = \frac{D}{D_0}$ , donde  $D_0$  es la directividad de la antena con distribución uniforme de la amplitud.

Asimismo, en la teoría de las antenas se conocen también distintos tipos de distribuciones de amplitud llamadas optimas y casi optimas, por ejemplo, que garantizan la anchura mínima del haz para un nivel dado de los lóbulos laterales o que condicionan la ley determinada de reducción de los lóbulos laterales al alejarse del máximo principal. Estas distribuciones se hallan por los métodos de la teoría de la síntesis de las antenas y se dan en las guías o manuales de diseño de las antenas.

### 3.4 Influencia de las distorsiones de fase sobre los parámetros de la antena lineal.

En la practica, debido a la imperfección de la construcción del distribuidor, así como por los errores de producción de elementos individuales del sistema de antenas la linealidad de la distribución de fase de excitación resulta alterada, lo que da lugar a la distorsión de la forma del diagrama direccional y la disminución de la ganancia de antena dirigida.

La distribución de los errores de fase determinados se representa en forma de una serie exponencial:

$$I(z) = |I(z)| \exp[j(\Phi(z) - \xi kz)]$$

$$\Phi(z) = \Phi_1 \left( \frac{2z}{L} \right) + \Phi_2 \left( \frac{2z}{L} \right)^2 + \Phi_3 \left( \frac{2z}{L} \right)^3 + \dots \quad (3.22)$$

donde  $|I(z)|$  es la distribución de amplitud;  $\exp(-jk\xi z)$ , es la distribución de fase dada previamente, que asegura la exploración;  $\Phi(z)$  es la distribución del error de fase de excitación.

Las magnitudes de  $\Phi_i, i=1,2,\dots$  son los valores máximos del error de fase de grado  $i$  en el extremo de la antena.

**Distorsiones de fase lineales.** La existencia de distorsiones de fase lineales no altera la ley lineal general de distribución de fase de excitación, sino solo varia la magnitud del coeficiente de deceleración. El desfasaje lineal parásito de la magnitud  $\Phi_1$  en el extremo de la antena da lugar al desplazamiento de la curva característica de radiación a lo largo del eje  $\Psi$  en la magnitud  $-\Phi_1$ . Entonces, tiene lugar la desviación del haz en el espacio en cierto ángulo  $\delta\theta$  (hacia el extremo de la antena que ha obtenido un retardo suplementario). Es conveniente medir una pequeña desviación parásita del máximo en las anchuras del haz por semipotencia:

$$\frac{\delta\theta}{\Delta\theta} = -\frac{\Phi_1}{158^\circ} \quad (3.23)$$

**Distorsiones de fase cuadráticas.** Habiendo distorsiones de fase cuadráticas el factor de direccionalidad de una antena lineal puede ser calculado por la formula:

$$f(\theta) = \int_{-L/2}^{L/2} I(z) \exp j \left[ kz(\cos\theta - \xi) + \Phi_2 \left( \frac{2z}{L} \right)^2 \right] dz \quad (3.24)$$

Analicemos los resultados del calculo numérico realizados de acuerdo con la formula (24), mostrados en la **fig.3.6**.



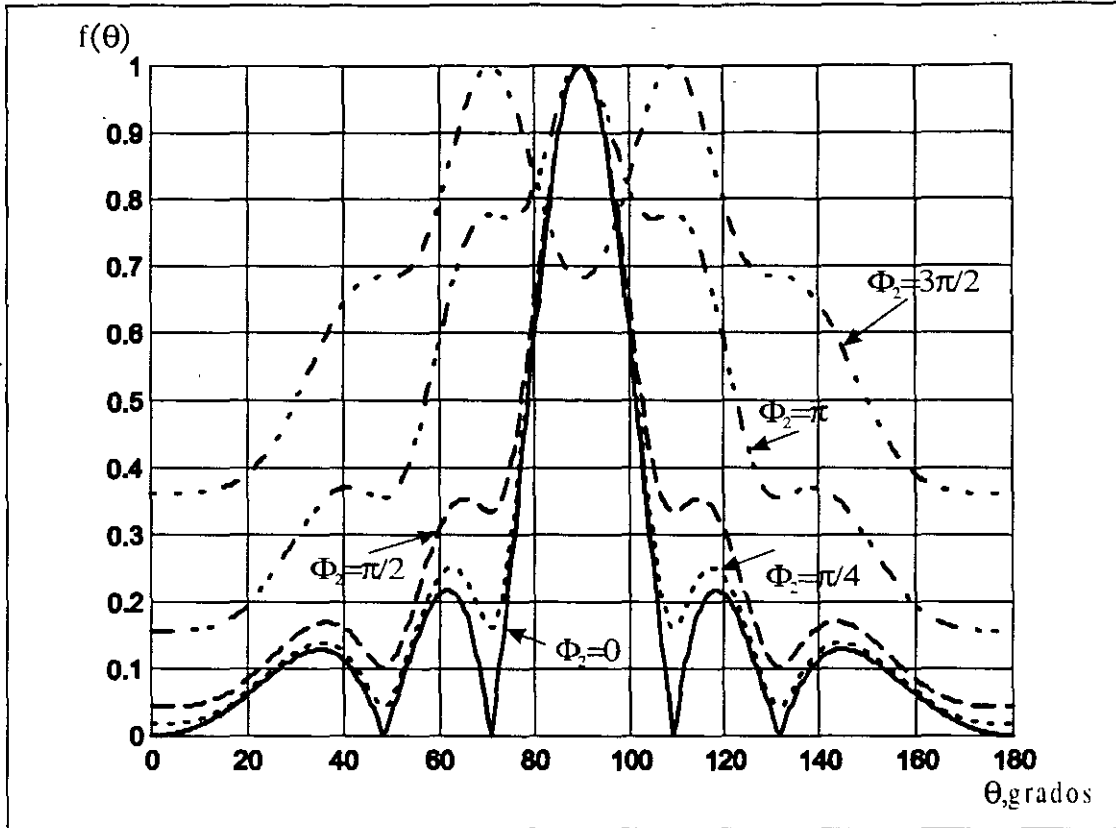


Fig.3.6. Influencia de los errores de fase cuadráticos

Como se aprecia de esta figura, las distorsiones de fase cuadráticas no provocan el desplazamiento del máximo del factor de direccionalidad, sin embargo, dan lugar a la expansión del lóbulo principal y al "cubrimiento" de los mínimos de radiación.

Las distorsiones de fase cuadráticas se manifiestan de manera mas fuerte en el caso de la distribución de amplitud uniforme.

Las distorsiones de fase cuadráticas se encuentran con mayor frecuencia en las antenas cortas en cono invertido y en las antenas de reflector parabólico para el desplazamiento axial del radiador del foco del paraboloide. Por eso estas distorsiones se llaman error de enfoque o simplemente desenfoque.

La alteración de la forma del diagrama direccional durante las distorsiones de fase cuadráticas da lugar a la pérdida de la ganancia de antena dirigida (directividad), es decir, a la disminución del factor de utilización de la superficie.

**Distorsiones de fase cúbicas.** El calculo de la integral para el diagrama direccional durante las distorsiones de fase cúbicas:

$$f(\theta) = \int_{-L/2}^{L/2} I(z) \exp j \left[ kz(\cos\theta - \xi) + \Phi_3 \left( \frac{2z}{L} \right)^3 \right] dz \quad (3.25)$$

en forma general es dificultoso y por eso hay que recurrir a su investigación numérica. Los resultados de los cálculos se muestran en la fig.3.7. Aquí hay que recalcar en primer lugar

el desplazamiento del máximo del diagrama direccional hacia el extremo de la antena con retardo suplementario de fase.

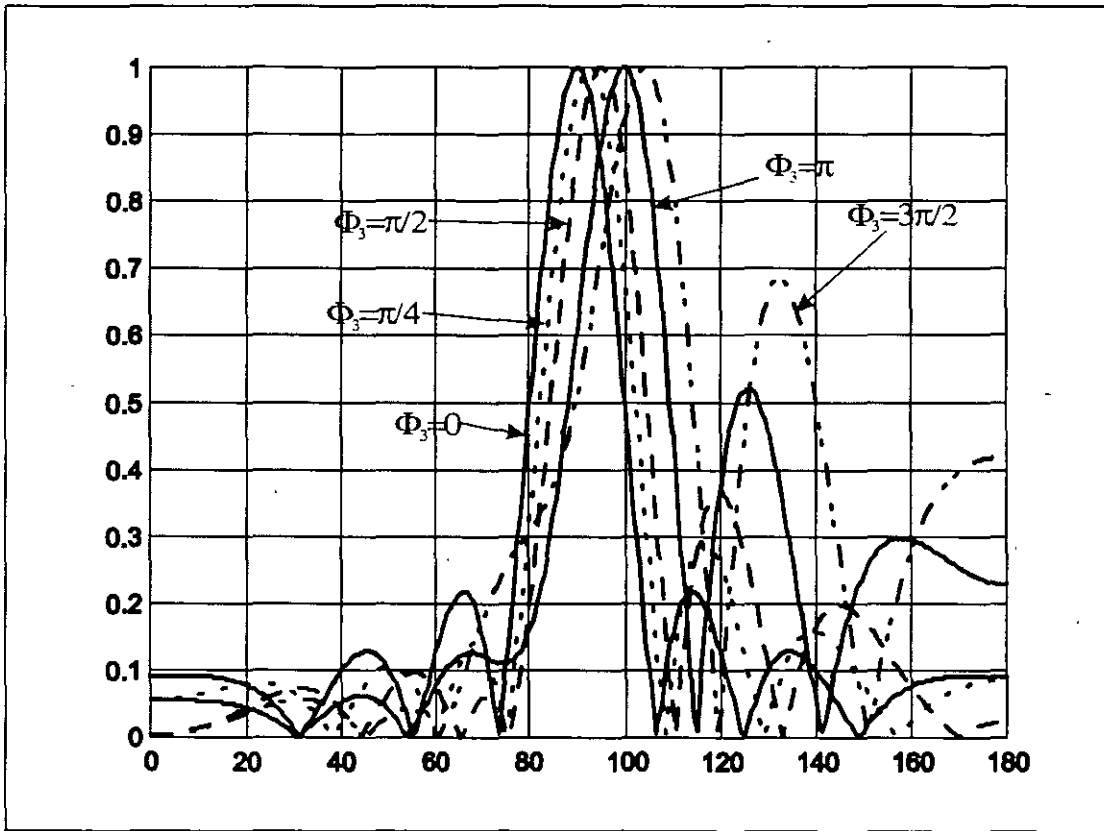


Fig.3.7. Influencia de los errores de fase cúbicas

Para pequeños  $\Phi_3$  la magnitud del desplazamiento del máximo de radiación con respecto a la anchura del haz del diagrama direccional no distorsionado se da por la formula:

$$\frac{\delta\theta}{\Delta\theta} = -\frac{\Phi_3^0}{266^0} \quad (3.26)$$

La distorsión de la forma del diagrama direccional consiste en que el lóbulo principal se ensancha y se hace asimétrico, el nivel de los lóbulos laterales por un lado del lóbulo principal aumenta, y por el otro lado disminuye; además, se observan un crecimiento por aquel lado, hacia el cual se desplaza el máximo principal de radiación. Si en la antena se utiliza una distribución de amplitud decreciente hacia los extremos, la influencia del error de fase cúbico sobre la forma del diagrama direccional se disminuye bruscamente, ya que disminuye el aporte al campo radiado de las porciones extremas mas desfasadas de la antena.

### 3.5 Curva característica de radiación de una red de antenas lineal uniforme. Máximos principales secundarios y métodos de su supresión.

Examinaremos las particularidades de radiación de ondas electromagnéticas por un sistema de fuentes discreto. Supongamos que el primer radiador de este sistema se encuentra en el punto  $z=0$ , los radiadores siguientes se disponen a un paso constante  $d$  en los puntos  $z_n = (n-1)d$ , donde  $n$  es el número del radiador (fig.3.8)

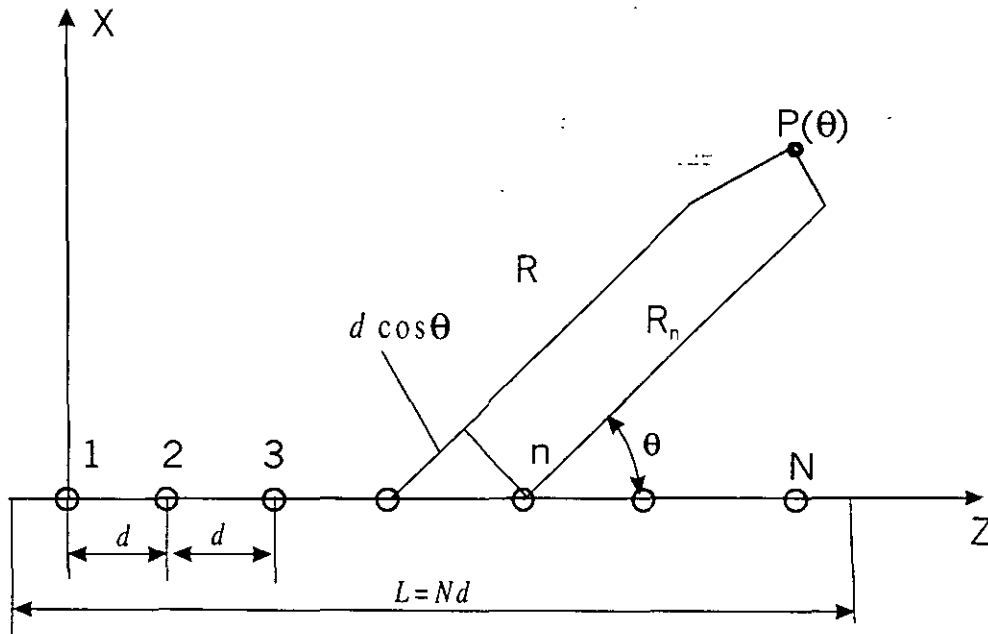


Fig.3.8. Red de antenas lineal uniforme

Supongamos también que los radiadores se excitan por las corrientes de igual amplitud con defasaje creciente linealmente a lo largo de la red:

$$I_n = I_0 \exp[-j(n-1)\Delta\Phi] \quad (3.27)$$

donde  $\Delta$  es la diferencia de fase entre los radiadores contiguos. Este sistema emisor tiene el nombre de red de antenas lineal uniforme o equidistante y es un análogo discreto del radiador lineal ideal.

El coeficiente de deceleración de la velocidad de fase de excitación en la red uniforme se determina por correlación evidente:

$$\xi = \frac{\Delta\Phi}{kd}, \quad (3.28)$$

donde  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ .

De acuerdo con la formula (2) la expresión para el factor de direccionalidad de la red equidistante tiene la forma:

$$f_N(\theta) = \sum_{n=1}^N I_0 \exp[j(n-1)(kd \cos \theta - \Delta \Phi)] = I_0 \sum_{n=1}^N q^{n-1} \quad (3.29)$$

donde  $q = \exp[jkd(\cos \theta - \xi)]$ . Utilizando la formula de la suma de  $N$  términos de la progresión geométrica  $\sum_{n=1}^N q^{n-1} = \frac{1-q^N}{1-q}$ , se puede simplificar la ecuación (29) del siguiente modo:

$$\begin{aligned} f_N(\theta) &= I_0 \frac{1 - \exp[jNkd(\cos \theta - \xi)]}{1 - \exp[jkd(\cos \theta - \xi)]} = \\ &= I_0 \frac{\exp\left[j\frac{Nkd}{2}(\cos \theta - \xi)\right]}{\exp\left[j\frac{kd}{2}(\cos \theta - \xi)\right]} \times \frac{\exp\left[j\frac{kd}{2}(\cos \theta - \xi)\right]}{\sin\left[\frac{kd}{2}(\cos \theta - \xi)\right]} \end{aligned} \quad (3.30)$$

El diagrama direccional de amplitud de una red lineal se da por el modulo del ultimo factor de la formula (30). Este factor conviene representarlo en forma de una función de variable angular generalizada:

$$\Psi = \frac{Nkd}{2}(\cos \theta - \xi) = \frac{kL}{2}(\cos \theta - \xi) \quad (3.31)$$

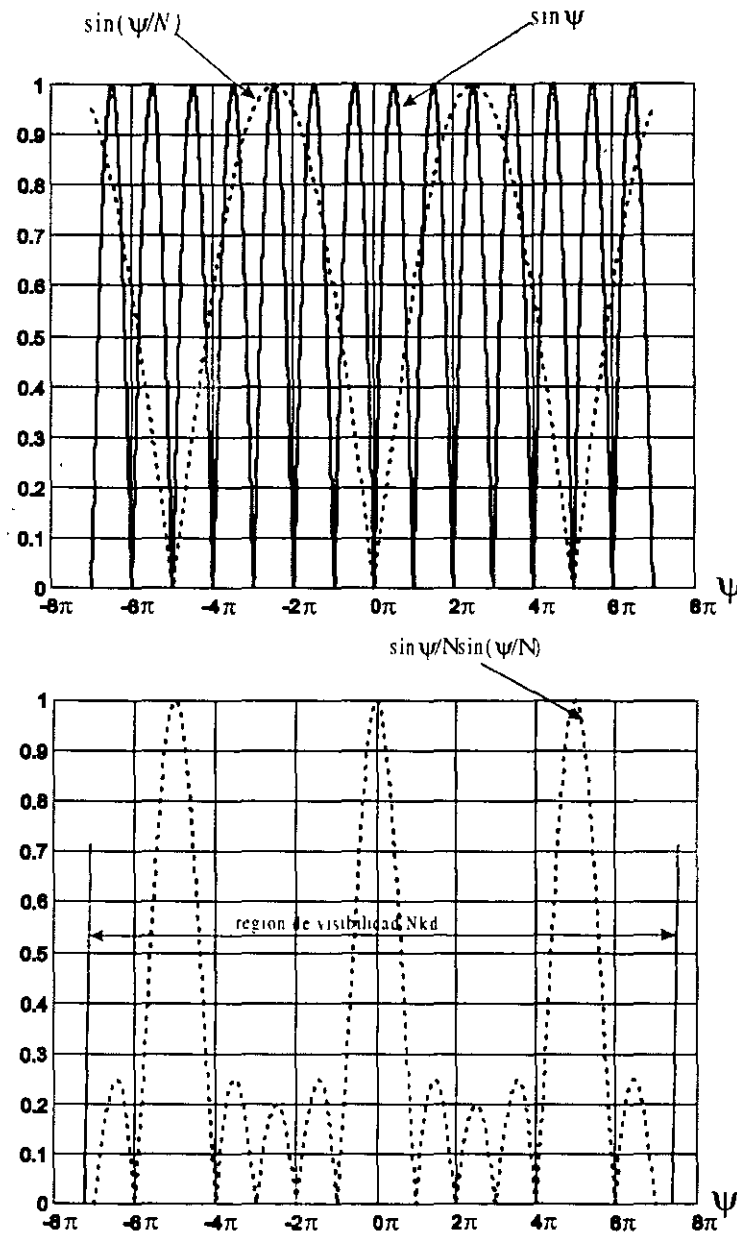
La variable (31) es completamente equivalente a la variable angular generalizada para el radiador lineal, y esto facilita el problema de comparar los diagramas direccionales del radiador continuo y de la red. Teniendo en cuenta (31) el diagrama direccional normado de la red de antenas uniforme de igual amplitud se reduce a la forma:

$$f_N(\Psi) = \left| \frac{\sin \Psi}{N \sin \frac{\Psi}{N}} \right| \quad (3.32)$$

La diferencia del comportamiento de las funciones  $f(\theta) = \frac{\sin \Psi}{\Psi}$  y  $f_N(\theta) = \frac{\sin \Psi}{N \sin \frac{\Psi}{N}}$  se

debe a que la segunda de estas funciones es periódica con el periodo  $N\pi$  y para los valores del argumento  $\Psi_M/N = M\pi, M = \pm 1, \pm 2, \dots$  que hacen el denominador igual a cero,  $f_N(\Psi_M)$  tiene máximos de nivel unitario. Esto significa que en el diagrama direccional de la red de antenas, además del lóbulo principal fundamental existen lóbulos principales

secundarios de orden  $M$  con máximos en los puntos  $\Psi_M = MN\pi$ . La formación de los lóbulos principales secundarios (llamados también máximos de difracción de orden  $M$ ) se aclara en la **fig.3.9**



**Fig.3.9.** Esquema para el análisis del factor de direccionalidad de la red

Nuevamente notamos la existencia de la región de ángulos reales (región de visibilidad) con los límites  $\Psi_{\max} = \frac{kL}{2}(1-\xi)$  y  $\Psi_{\min} = -\frac{kL}{2}(1+\xi)$ . La extensión total de la región de visibilidad  $\Psi_{\max} - \Psi_{\min} = kNd = kL$  depende solo de la longitud de la red, en tanto que la posición del centro de la región de visibilidad a lo largo del eje  $\Psi$  se puede regular por la magnitud del coeficiente de deceleración de la velocidad de fase de excitación  $\xi = \Delta\Phi/kd$ .

La dirección del máximo de radiación principal, como en el caso de una antena ideal, esta dada por la correlación evidente  $\cos\theta_0 = \xi$ .

En el caso de la **fig.3.9**, además del lóbulo principal de la función  $f_N(\theta)$  en la región de visibilidad caen dos máximos de difracción laterales mas de primer orden. En la practica esta situación de ordinario es intolerable, ya que debido a la distribución de la potencia radiada por varios lóbulos principales empeora la ganancia de antena dirigida, aparece la ambigüedad de localización del blanco y decrece la protección contra los ruidos del sistema de radio. Examinemos tres métodos posibles de supresión de los máximos principales secundarios:

- 1) limitación de la magnitud del paso de la red;
- 2) el uso de los elementos dirigidos;
- 3) el uso de una disposición no uniforme de los radiadores.

**Limitación del paso de la red  $d/\lambda$ .** Se puede escoger un intervalo de cambio de la variable angular generalizada

$$-(N-1)\pi \leq \Psi \leq (N-1)\pi \quad (3.33)$$

donde faltan los máximos principales secundarios y el nivel de los lóbulos laterales no es mayor que la magnitud del primer lóbulo lateral, más cercano al máximo principal.

Si los limites de la región de visibilidad para un numero de elementos  $N$  elegido no salen fuera de este intervalo, es decir, si

$$\begin{aligned} \Psi_{\min} &= \frac{Nkd}{2}(-1-\xi) > -(N-1)\pi \\ \Psi_{\max} &= \frac{Nkd}{2}(1-\xi) > (N-1)\pi \end{aligned} \quad (3.34)$$

la aparición de los lóbulos de difracción en la región de ángulos reales  $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  es imposible. Las desigualdades (8.34) son equivalentes a una condición:

$$\frac{d}{\lambda} \leq \frac{N-1}{N} \frac{1}{1+|\xi|} \quad (3.35)$$

De aquí, en régimen de radiación transversal cuando  $\xi = 0$  la distancia admisible entre radiadores contiguos resulta igual a  $d_{\max} = \frac{N-1}{N} \lambda$ , es decir, algo menor que la longitud de onda. Al explorar el sector de los ángulos desde  $\theta_0$  hasta  $\pi - \theta_0$ , el coeficiente de deceleración varia entre los limites de  $-\cos\theta_0 \leq \xi \leq \cos\theta_0$  y la distancia admisible entre radiadores se reduce hasta:

$$d_{\max} = \frac{N-1}{N} \frac{\lambda}{1+|\cos\theta_0|} \quad (3.36)$$

**Uso de elementos dirigidos.** La idea de este método de supresión de los máximos de difracción es simple. De acuerdo con el teorema de multiplicación la curva característica total de radiación de la red de antenas es el producto de la característica de radiación de un elemento por el factor de direccionalidad de la red. Por eso si un elemento tiene una radiación insignificante en dirección al máximo de difracción de la red, este ultimo resulta suprimido.

**Disposición no uniforme de radiadores.** La aparición de máximos principales secundarios en las redes con elementos uniformemente espaciados y dispuestos a gran distancia entre si,

desde el punto de vista físico se explica por el hecho de que la adición cofásica de las oscilaciones radiadas desde cualquier par de elementos contiguos es posible para una serie de direcciones.

Si se altera la constancia del paso de la red, pero se conserva invariable el valor de la velocidad de fase de excitación, la dirección del máximo principal para cualquier par de elementos se mantiene invariable, en tanto que las direcciones de los máximos de difracción secundarios resultan diferentes para distintos pares de elementos contiguos y tiene lugar el “esparcimiento” de los lóbulos de difracción de la red por una zona de ángulos bastante amplia. Por consiguiente surge la idea de la red de antenas de elementos desigualmente espaciados, en la cual las posiciones de los elementos individuales no obedecen a una ley periódica. El problema de determinar las posiciones óptimas de los elementos radiadores, que conducen a un “esparcimiento” óptimo de los máximos secundarios, resulta muy complejo y se resuelve de ordinario mediante algoritmos especiales de búsqueda en computadoras.

### 3.6. Ganancia de antena dirigida de una red de antenas lineal.

Basándonos en la equivalencia de la red lineal de radiadores isótropos y de la antena lineal continua, se puede valorar con la seguridad la ganancia de antena dirigida de las redes lineales por las correspondientes formulas de las antenas continuas mediante la sustitución de la longitud  $L$  por la magnitud equivalente  $Nd$ , donde  $N$  es el número de elementos, y  $d$  es el paso de la red. Podemos obtener las siguientes formulas para la ganancia de antena dirigida de las redes de antenas:

a) en régimen de radiación inclinada y transversal:

$$D \approx \frac{2L}{\lambda} = 2N \frac{d}{\lambda}; |\xi| = \frac{|\Delta\Phi|}{kd} < 1 - \frac{\lambda}{Nd} \quad (3.37)$$

b) en régimen de radiación axial con velocidad de fase de excitación igual a la velocidad de la luz:

$$D \approx \frac{4L}{\lambda} = 4N \frac{d}{\lambda}; |\xi| = 1 \quad (3.38)$$

c) en régimen de radiación axial con velocidad de fase de excitación óptimamente decelerada:

$$D \approx \frac{7.2L}{\lambda} = 7.2N \frac{d}{\lambda}; |\xi_{opt}| = 1 + \frac{\lambda}{2Nd} \quad (3.39)$$

La condición evidente de aplicabilidad de las formulas 37-40 es el cumplimiento de la desigualdad (35) que garantiza la falta de máximos de difracción de orden superior en la región de visibilidad.

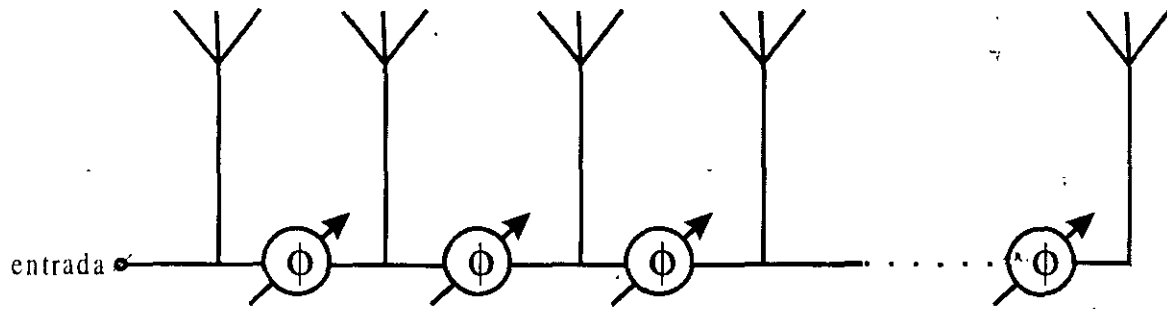
## 4. Antenas de arreglos de fase pasivas

Antenas de arreglos de fase pasivas se excitan por una fuente común mediante un distribuidor de potencia y un sistema de desfasadores.

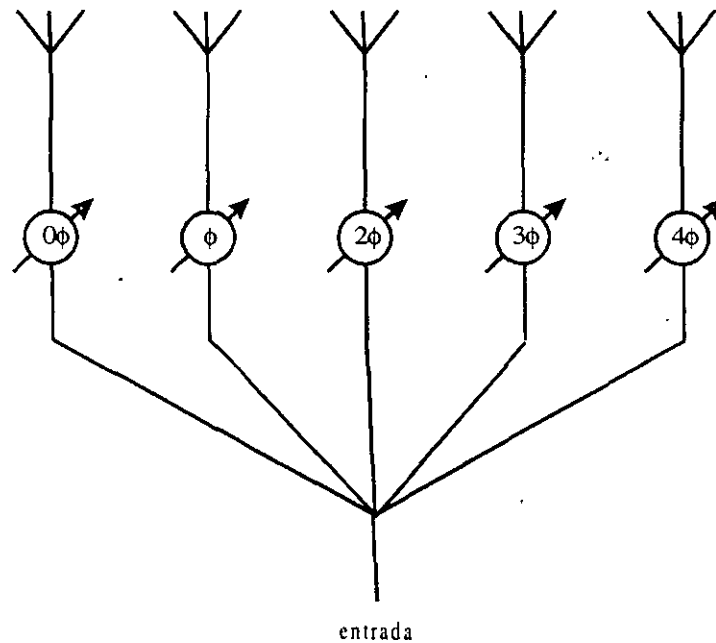
*Distribuidores de circuito cerrado.*

La distribución de la potencia de frecuencias superelevadas a los radiadores de red se realiza en los distribuidores de este tipo mediante múltiplos pasivos; compuestos de trozos de líneas de alimentación, uniones en T, puentes, acopladores direccionales. Se distinguen dos clases de circuitos: de alimentación en serie y en paralelo.

El circuito clásico de alimentación en serie de una red lineal con elementos uniformemente espaciados se muestra en la **fig.4.1**. La potencia se deriva paso a paso a cada radiador desde el alimentador general; y los desfases de paso idénticos de tipo analógico se conectan al alimentador general entre las derivaciones a los radiadores contiguos.



*Fig.4.1. Circuito de alimentación en serie de radiadores.*



*Fig.4.1. Circuito de alimentación en paralelo de radiadores.*

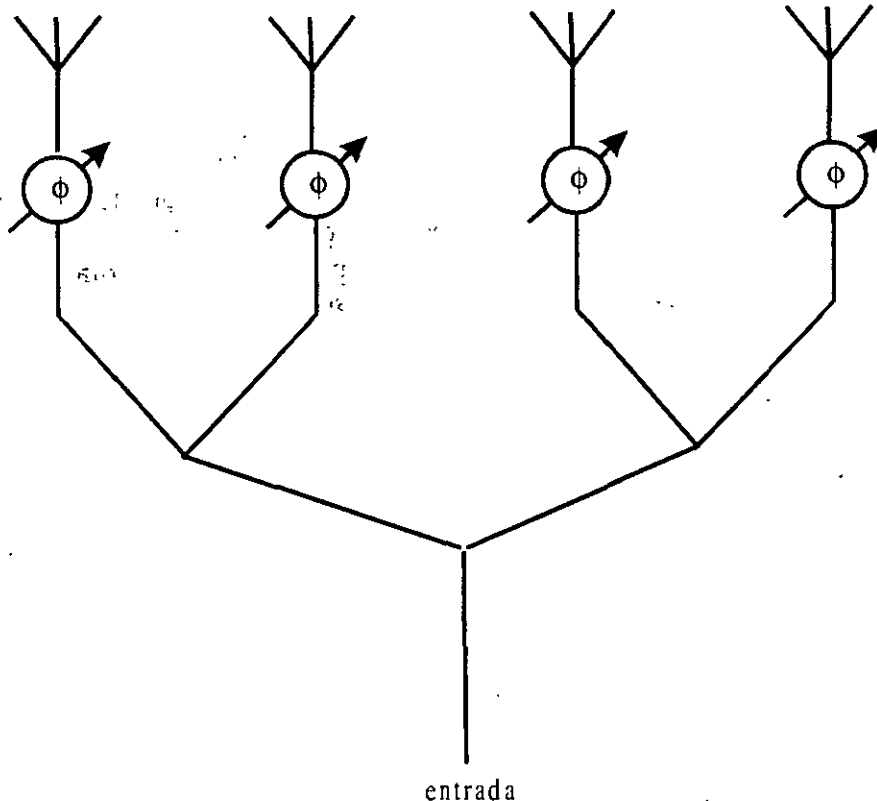
El circuito se distingue por la compacidad, además, todos los desfases se controlan por una misma ley; ya que para desviar el haz en un ángulo determinado el desfase entre radiadores contiguos deba ser idéntico a lo largo de la red. Debido a esto se simplifica el sistema de mando de los desfases. Sin embargo, el circuito en serie tiene una serie de desventajas importantes. En primer lugar, en él se observa la acumulación y el crecimiento de los errores de fase y las pérdidas de inserción al final de la antena; debido a lo cual se admite solo el uso de desfases precisos con muy pequeñas pérdidas. En segundo lugar, por el desfase giratorio cercano a la entrada pasa casi toda la potencia radiada, y, por



consiguiente, se necesitan desfasadores de elevada rigidez eléctrica. En tercer lugar las longitudes eléctricas de los trayectos de las señales desde la entrada común hasta cada radiador resultan bastante diferentes, y esto puede dar lugar a desfase indeseable de la red en los extremos de la banda de frecuencias de trabajo.

El circuito de alimentación en paralelo de la red de  $N$  elementos esta representado en la **fig.4.2**. Este circuito tiene una serie de importantes ventajas. En primer lugar, pueden utilizarse desfasadores de potencia relativamente pequeña, ya que por cada uno de ellos pasa solo  $1/N$  porción de la potencia radiada. En segundo lugar, las pérdidas totales de potencia en los dispositivos de mando se determinan por la magnitud de las pérdidas de inserción solo de un desfasador, y por eso pueden utilizarse desfasadores con una magnitud de pérdidas bastante grande. Una ventaja importante del circuito en paralelo es la falta de acumulación de los errores de fase a lo largo de la abertura y la posibilidad de igualar las longitudes de los canales individuales para asegurar el funcionamiento en banda ancha.

La desventaja del circuito en paralelo es la complejidad del sistema de mando, ya que los desfases, en general, son distintos en cada desfasador. Además, existen dificultades en asegurar una buena adaptación de la entrada para la división simultanea de la potencia por gran numero de canales.

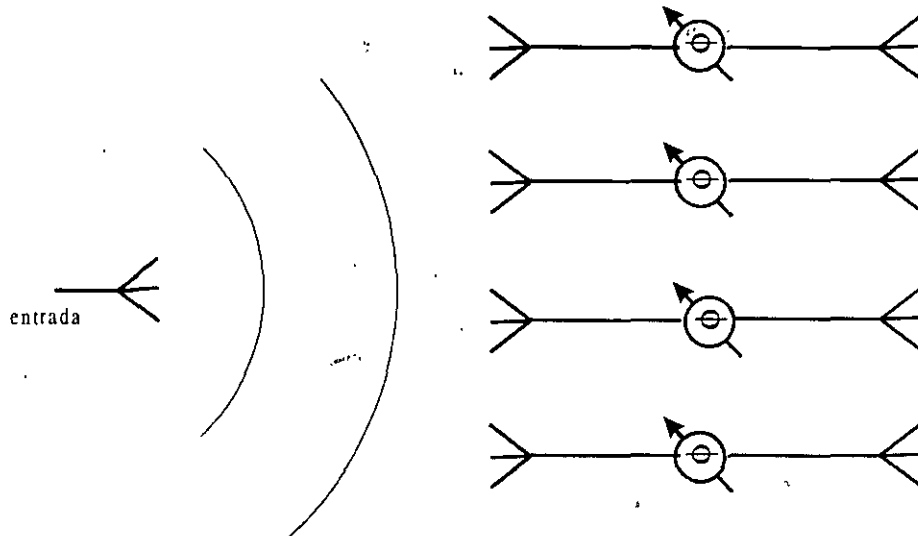


**Fig 4.3. Circuito-árbol de alimentación de los radiadores**

Un caso especial del circuito de alimentación en paralelo, mostrado en la **fig.4.3**, es el circuito de paso binario de tipo "árbol", en cada nudo del cual tiene lugar la división en cascada de la potencia en dos partes. Una propiedad positiva del "árbol" es la igualdad de las longitudes eléctricas de todos los canales, siendo su desventaja la relativa voluminosidad. Al utilizar el "árbol" se puede simplificar el circuito de mando de la red, si se conectan desfasadores a cada piso del "árbol".

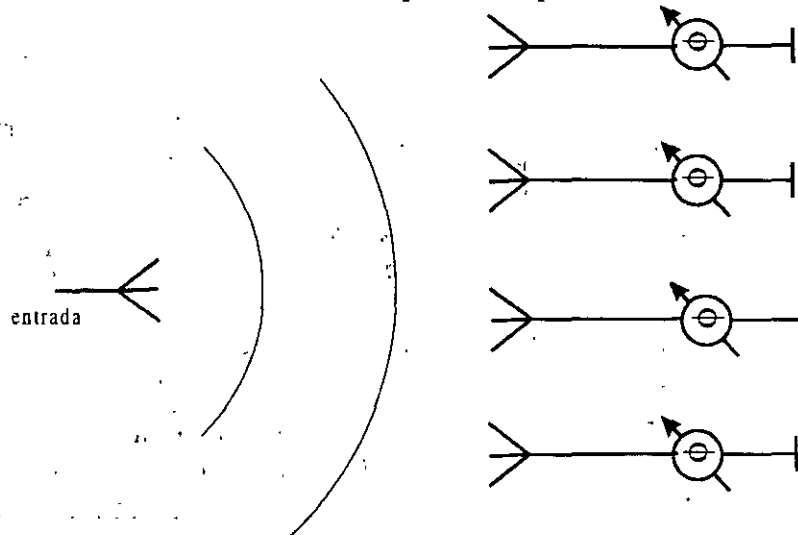
**Distribuidores del tipo óptico.** Existen dos variedades de circuitos de alimentación óptica de las redes: el circuito de tránsito y el circuito de reflexión.

En las antenas de arreglos de fase, producidos por el circuito de tránsito (fig.4.4), un excitador especial dirige la potencia radiada a la red de antenas colectora de elementos receptores. La potencia recibida pasa por el sistema de desfasadores de paso y después de la puesta en fase se radia en la dirección necesaria por otra red de elementos radiadores.



*Fig.4.4. Circuito de tránsito de alimentación óptica de los radiadores*

La antena de arreglo de fase, producida por el circuito de reflexión (fig.4.5), esta compuesta de un excitador y de la red de emisión-recepción, cada elemento de la cual esta provisto de un desfasador de reflexión. En la antena de arreglos de fase de reflexión los radiadores de la red cumplen una doble función: 1) recoleccionan la potencia que va del excitador; 2) la vuelven a radiar en la dirección necesaria después de la puesta en fase.



*Fig.4.5. Circuito de reflexión de alimentación óptica de los radiadores*

Entre las ventajas de ambos circuitos de alimentación óptica podemos citar la relativa sencillez con un numero grande de elementos de la red, la conveniente posibilidad de mando de la forma de distribución de amplitud en la abertura eligiéndola forma del

diagrama direccional del excitador. El inconveniente común de los circuitos de alimentación óptica es el aumento de las dimensiones en comparación con los de canal cerrado. Además, en los circuitos ópticos parte de la potencia del excitador no es interceptada por la red receptora, lo que da lugar al crecimiento de la radiación lateral.

Por razones constructivas la red reflectora tiene una serie de ventajas con respecto a la de tránsito: hay un acceso a cualquier desfasador de la parte de atrás de la red, lo que simplifica el montaje y la explotación, y, además los desfasadores de reflexión son del diseño más simple que los de tránsito.

Por otro lado, la red de tránsito tiene ventajas en cuanto a las características eléctricas, y precisamente: 1) es posible la optimización separada de las redes colectora y radiadora en el sentido del uso de los elementos de distinto tipo y disposición (por ejemplo, a fin de hacer una elección óptima de la distribución de amplitud, así como e debilitamiento de la influencia de la interconexión durante la exploración); 2) no hay ensombrecimiento de la abertura por el excitador y reacción de la red al excitador.

**Literatura:**

1. G. Markov, D. Sazonov "Antenas", editorial Mir, Moscú
2. Robert Mailloux "Phased array antenna handbook," Artech House, Boston, London.