UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA de MÉXICO

FACULTAD INGENIERÍA

FILTRADO DE SEÑALES ANALÓGICAS

(FILTROS PASIVOS E ACTIVOS)

FACULTAD DE INGENIERIA

BOHUMIL PŠENIČKA

DIVISIÓN DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

DEPARTAMENTO DE TELECOMUNICACIONES

PRESENTACIÓN

La Facultad de Ingeniería ha decidido realizar una serie de ediciones provisionales de obras recientemente elaboradas por académicos de la institución, como material de apoyo para sus clases, de manera que puedan se aprovechadas de inmediato por alumnos y profesores. Tal es el caso de la obra *Filtrado de señales analógicas*.

Se invita a los estudiantes y profesores a que comuniquen a los autores las observaciones y sugerencias que mejoren el contenido de la obra, con el fin de que se incorporen en una futura edición definitiva.

PRÓLOGO

La gran cantidad de aplicaciones que tiene el filtrado incluye áreas, tales como: radar, voz, comunicaciones, telefonía, medicina, control, sismología, imágenes, etc. Las personas a quienes va dirigida esta obra tienen alrededor de 25 años de edad y tienen buenas bases de matematica lo que es muy importante para entender como se diseñan los filtros.

El amplio crecimiento que ha tenido la industria digital y analógica se debe en gran medida al desarrollo de algoritmos para el procesamiento de señales. Las áreas antes mencionadas requieren aplicaciones, tales como filtrado, compresión, análisis y síntesis de los circuitos en el dominio de las frecuencias.

Lo que se pretende es convencer al estudiante de que el análisis, síntesis, aproximación de las plantillas y realización de los circuitos es muy divertido y es útil no solo en la área de telecomunicaciones. Es necesario decir que 80 por ciento de los sistemas tienen uno o mas filtros. Se espera, que con este texto los estudiantes pueden aprender por sí mismo síntesis y análisis de los filtros. Cada capítulo de este libro tiene bastantes ejemplos que son muy ilustrativos y ayudan a entender la teoría.

El propósito de este libro es presentar, a los alumnos de las carreras de Ingeniería en Telecomunicaciones, Electrónica y Computación de la Facultad de Ingeniería de la UNAM, como se calculan los filtros pasivos, activos, electromecánicos y de cristal. Una gran variedad de ejemplos se incluyen en cada capítulo con el fin de que el alumno aplique los conocimientos teóricos de la materia de forma práctica a través de simulaciones en la computadora. El libro tiene 13 capítulos y al final una bibliografía para qe el estudiante pueda profundizar sus conociemientos.

En el capítulo primero el estudiante aprende como se calcula la función de transferencia carácteristica y de manejo, las funciones circuitales, por ejemplo los parámetros de impedancia, de admitancia o de cascada de los circuitos. El segundo capítulo comienza con la realización de los circuitos LRC mediante el método de Foster y Cauer. El tercero y cuarto capítulo introduce la transformación y la aproximación de las plantillas con el método de Butterworth, Chebychev, Chebychev inverso y de Bessel. A la aproximación de los filtros elípticos llamados Cauer se dedica el capítulo cinco. En el sexto capítulo se presentan las tablas para el diseño de los filtros de Butterworth, Chebychev y chebychev inverso. En el sexto y septimo capítulo se explica el diseño de los filtros RC pasivo y activo. En los ultimos cuatro capítulos se presenta el diseño de los filtros de

cristal, electromecánicos, filtros con capacitores conmutados, ecualizadores y circuitos de retardo.

Este libro representa un gran esfuerzo del autor para contribuir a que los alumnos tengan un material para aprender como se diseñan los filtros. El deseo del autor es que los alumnos encuentren en este material una motivación para el estudio de análisis y procesamiento digital de señales. Se agradece el apoyo a la Facultad de Ingeniería de la UNAM y a las personas que colaboraron en el proceso para la publicación de esta obra.

Dr. Bohumil Pšenička

Profesor de la Facultad
de Ingeniería de la UNAM

FACULTAD DE INGENIERIA

APUNTE
203-A

2001
G.- 612363

FACULTAD DE INGENIERIA UNAM.
612363

Contenido

G-612363

1 Circuitos de dos puertas **9**

1.1 Funciones Circuitales 9

1.2 Función de transferencia 15

1.3 Ecuación característica 19

2 Realización de circuitos LRC **23**

2.1 Los polos y ceros de la impedancia Z(p) 24

2.1.1 Realización de Z(p) mediante el método de Foster I 26

2.1.2 Realización Y(p) mediante el método de Foster II 32

2.1.3 Realización Z(p) mediante el método de Cauer I 35

2.1.4 Realización Z(p) mediante el método de Cauer II 37

2.2 Realización de circuitos bipuertas 40

3 Transformación de las plantillas. **51**

4 Aproximación de las plantillas **65**

4.1 Aproximación de Butterworth 66

4.2 Aproximación Chebychev 75

4.3 Aproximación Chebychev inverso 81

4.4 Aproximación de Bessel 88

5 Aproximación de Cauer **93**

5.1 Filtro elíptico con el método de Rumpelt 95

5.2 Filtro elíptico según Darlington 99

5.3 Filtro elíptico según Skwirzinski 102

6 Diseño de los filtros mediante tablas **107**

6.1 Las tablas del filtro Butterworth. 107

6.2 Las tablas del filtro Chebychev 110

6.3 Las tablas de filtro Chebychev inversa 115

7 Filtros pasivos RC **121**
7.1 Los filtros PRC elementales. 121
7.2 Cascada de los RC filtros elementales 124
7.3 La cascada de los circuitos progresivos 127
7.4 La cascada de los bipuertos RC con divisor 130
7.5 El Filtro RC con la admitancia en paralelo 133

8 Filtros activos con amplificador. **137**
8.1 Filtros activos de segundo orden con FTCT 137
8.1.1 Filtro activo pasa bajas. 137
8.1.2 Filtro activo pasa altas. 140
8.1.3 Filtro activo paso banda. 142
8.2 Filtros activos de primer orden 144
8.2.1 Filtro pasa altas 144
8.2.2 Filtro pasa bajas. 145
8.2.3 Filtro paso banda. 146
8.3 Filtros con retroalimentación múltiple 148
8.3.1 pasa bajas. 148
8.3.2 Paso altas. 149
8.3.3 Paso banda. 150
8.4 Filtros diseñados mediante las tablas 151
8.5 Filtro Butterworth pasa bajas de sexto orden 154
8.6 Diseño de los filtros con girador 156
8.6.1 El girador. 156

9 Filtros de cristal **167**
9.1 El resonador piezoelétrico 167
9.2 Atenuación del filtro forma cruz. 168
9.3 Filtro paso de banda en la forma cruz 170

10 Filtros diseñados mediante acoplamiento **175**
10.1 Filtros electromecánicos 177

11 Filtros con los capacitores conmutados. **185**
11.1 Filtro SC de segundo orden. 187
11.2 Análisis los circuitos SCF. 191
11.3 Análisis general de los circuitos RC conmutados. 198

12 Ecualizadores **207**
12.1 Ecualizador de atenuación 207
12.2 Ecualizador de la fase 209

13 Circuitos de retardo **213**

Índice analítico

A

acoplamiento perfecto, 14
Análisis de los filtros SC, 191
Aproximación
de Butterworth, 66
de Chebychev, 75
de Chebychev inverso, 81
de Bessel, 88
de Cauer, 93
El método Rumpelt, 95
El método Darlington, 99
El método Skwirzinski, 102

C

Ceros de la función transferencia
de Butterworth, 69
de Chebychev, 79
de Chebychev inverso, 85

E

Ecuación carácteristica, 19
Ecualizadores
de atenuación, 207
de fase, 209

F

Función carácteristica, 19
Función de transferencia
de espejo, 16
de manejo, 17,19
Filtros RC activos
de segundo orden, 137
pasa altas, 140
paso banda, 142
de primer orden, 144
pasa altas, 144
pasa bajas, 145
paso banda, 146
con retroalimentación, 148
con gyrador, 156
Filtros RC pasivos
en cascada, 124
en casacada progresivos, 127
en cascada con divisor, 129
con Y en paralelo, 133
electromecánicos, 177
con capacidores Conmutados, 185

I

Impedancias
carácteristica, 14
de entrada, 16
LC, 26

P

Polos y ceros de la impedancia
Z_{LC}, 24
Z_{RC}, 25
Z_{LR}, 25

R

Realización de las impedancias
Cauer I, 35
Cauer II, 37
Foster 1, 24
Foster II, 32
de bipuertas, 40

T

Tablas de los filtros
activos, 152
de Butterworth, 107
de Chebychev, 110
de Chebychev inverso, 115

M

Las matrices
de impedancia, 10
de admitancia, 11
de cascada, 12

Capítulo 1

Circuitos de dos puertas

1.1 Funciones Circuitales

En este capítulo trataremos la síntesis de los circuitos bi-puertos sin pérdidas que son implementados considerando inductancias y capacitancias de carácter ideal. En este caso la estructura transversal clásica utilizada puede constituir un modelo apropriado para ser aplicado en otras técnicas para la realización de filtros, como es el caso de los circuitos activos RC, configuraciones con capacitores de contacto y sistemas piezoeléctricos o electromecánicos. Originalmente, la teoría clásica de filtros aparte de los **parámetros imagen**, de manera que se presuponía un acoplamieno perfecto de bi-puerto.

Los parámetros de imágen se utilizan clásicamente en la síntesis de redes fasadoras, circuitos correctores RLC y en filtros resonadores de cristal. Los problemas de acoplamiento fueron originalmente resueltos por Cauer y Darlington.

Un bi-puerto de carácter general trabaja entre las impedancias de la fuente Z_1 y la carga Z_2, como se ilustra en la figura 1.1

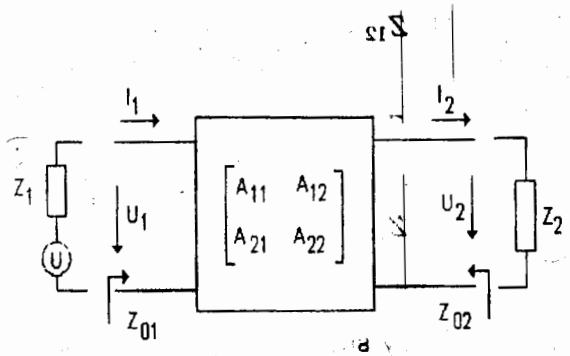


Figura 1.1. El circuito de dos puertas

Las ecuaciones (1.1) que caracterizan el circuito de dos puertas, donde los parámetros A_{ij} se llaman los parémetros de cascada son

$$U_1 = A_{11}.U_2 + A_{12}.I_2$$
$$I_1 = A_{21}.U_2 + A_{22}.I_2 \tag{1.1}$$

Si en la salida el circuito está abierto entonces $I_2 = 0$, por lo que A_{11} es la función de transferencia definida

$$A_{11} = \frac{U_1}{U_2} \tag{1.2}$$

Si en la salida el circuito está en corto, entonces $U_2 = 0$ y la función de transferencia de coriente se define mediante la ecuación (1.3)

$$A_{22} = \frac{I_1}{I_2} \tag{1.3}$$

Si se conocen los parámetros Z_{ij} del circuito, entonces el circuito de bi-puerto está definido mediante las ecuaciones

$$U_1 = Z_{11}.I_1 + Z_{12}.I_2$$
$$U_2 = Z_{21}.I_1 + Z_{22}.I_2 \tag{1.4}$$

El parámetro Z_{11} es la impedancia de entrada del circuito si la puerta en la salida está abierta y Z_{22} es la impedancia de salida si la puerta en entrada está abierta. Z_{12} es la impedancia de transferencia si $I_1 = 0$ y Z_{21} es la impedancia de transferencia si la puerta de salida está abierta.

$$Z_{11} = \frac{U_1}{I_1}\Big|_{I_2=0}$$
$$Z_{12} = \frac{U_1}{I_1}\Big|_{I_1=0}$$
$$Z_{21} = \frac{U_2}{I_1}\Big|_{I_2=0}$$
$$Z_{22} = \frac{U_2}{I_2}\Big|_{I_1=0} \tag{1.5}$$

El circuito de bi-puertas es simétrico si $Z_{11} = Z_{22}$ y es pasivo si contiene solo los elementos R,L,C y transformadores, y si $Z_{12} = Z_{21}$. Si se conocen los parámetros Y_{ij} del circuito, entonces el circuito de bi-puerto está definido mediante las ecuaciones

$$I_2 = Y_{21}.U_1 + Y_{22}.U_2 \qquad I_1 = Y_{11}.U_1 + Y_{12}.U_2 \tag{1.6}$$

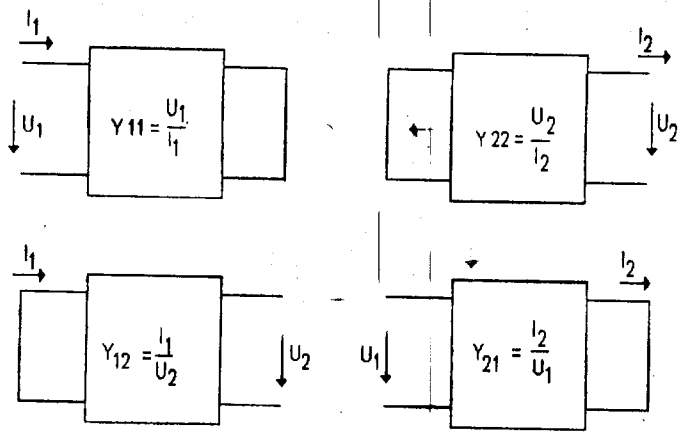


Figura 1.2. Los parámetros de la matriz de admitancia

El parámetro Y_{11} es la admitancia de entrada del circuito si la puerta en la salida está en corto y Y_{22} es la admitancia de salida si la puerta en entrada está en corto. Y_{12} es la admitancia de transferencia si $U_1 = 0$ y Y_{21} es la admitancia de transferencia si $U_2 = 0$ (la puerta de salida está en corto):

$$Y_{11} = \frac{I_1}{U_1}_{|U_2=0}$$

$$Y_{12} = \frac{I_1}{U_2}_{|U_1=0}$$

$$Y_{21} = \frac{I_2}{U_1}_{|U_2=0}$$

$$Y_{22} = \frac{I_2}{U_2}_{|U_1=0} \tag{1.7}$$

El circuito de bi-puertas es simétrico si $Y_{11} = Y_{22}$ y es pasivo si contiene solo los elementos R,L,C y transformadores y si $Y_{12} = Y_{21}$. En la figura 1.2 se muestran los parametros de la matriz $\mathbf{Y}$. Los ecuaciones (1.1), (1.4) y (1.6) se pueden escribir en la forma matricial:

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix} \tag{1.8}$$

En el caso de las ecuaciones de cascada (1.1) el circuito es simétrico si $A_{11} = A_{22}$ y pasivo si $det\mathbf{A} = 1$.

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \tag{1.9}$$

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} \tag{1.10}$$

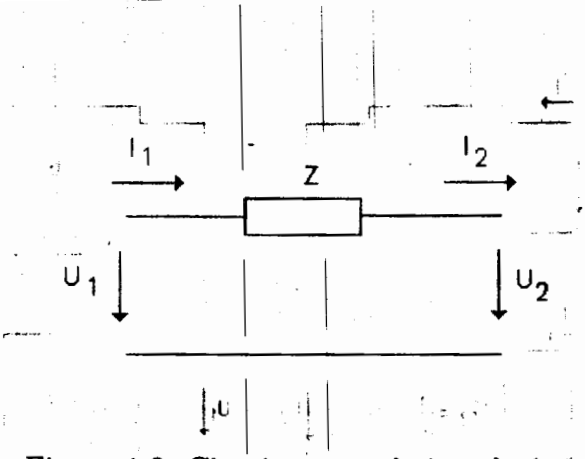


Figura 1.3. Circuito para el ejemplo 1

Utilizando las ecuaciones de cascada la **impedancia de entrada** Z_{in} se puede expresar en la forma

$$Z_{in} = \frac{U_1}{I_1} = \frac{A_{11}U_2 + A_{12}I_2}{A_{21}U_2 + A_{22}I_2} \tag{1.11}$$

Considerando la ecuación (1.11), la impedancia en circuito abierto $I_2 = 0$ está dada por

$$Z_{\infty 1} = \frac{A_{11}}{A_{21}} \tag{1.12}$$

Alternativamente, la impedancia en corto $U_2 = 0$ se puede expresar en la forma

$$Z_{s1} = \frac{A_{12}}{A_{22}} \tag{1.13}$$

De acuerdo a las expresiónes anteriores, la impedancia Imagen (Característica) de entrada de la configuración correspondiente a la figura 1.1 está dada por la ecuación

$$Z_{01} = \sqrt{Z_{\infty 1} Z_{s1}} = \sqrt{\frac{A_{11}A_{12}}{A_{21}A_{22}}} \tag{1.14}$$

La impedancia de Imagen (Característica) de salida Z_{02} se puede calcular mediante la ecuación (1.15)

$$Z_{02} = \sqrt{Z_{\infty 2} Z_{s2}} = \sqrt{\frac{A_{22}A_{12}}{A_{21}A_{11}}} \tag{1.15}$$

Ejemplo 1.

Calcular la matriz de cascada **A** del circuito en la figura 1.3. Para el circuito en la figura 1.3 podemos escribir las siguientes ecuaciones

$$U_1 = 1.U_2 + Z.I_2$$
$$I_1 = 0.U_2 + 1.I_2$$

Y la la ecuación matricial de cascada está dada por

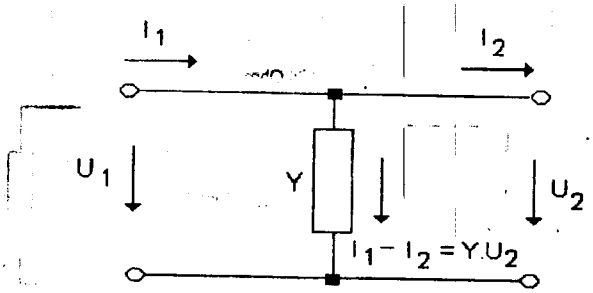


Figura 1.4. Circuito para el ejemplo 2

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}$$

Ejemplo 2.

Calcular la matriz de cascada **A** del circuito en la figura 1.4. Para el circuito en la figura 1.4 podemos escribir las siguientes ecuaciones

$$U_1 = 1.U_2 + 0.I_2$$

$$I_1 = Y.U_2 + 1.I_2$$

Y la ecuación matricial de cascada está dada por

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Y & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 3.

Calcular la matriz **A** de cascada del circuito en la figura 1.5, y verificar si el circuito es pasivo y simétrico. El circuito en la figura 1.5 es la conección en cascada de los circuitos en las figuras 1.3 y 1.4 . Por eso la matriz **A** del circuito en la figura 1.5 se obtiene como la multiplicación de los matrices $\mathbf{A_1}.\mathbf{A_2}$

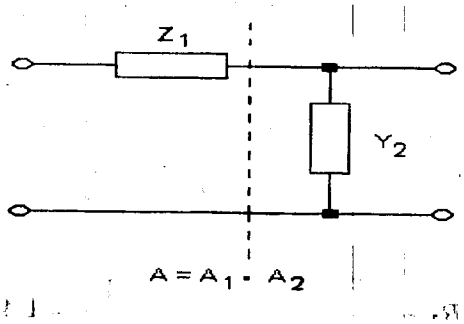


Figura 1.5. Circuito para el ejemplo 3

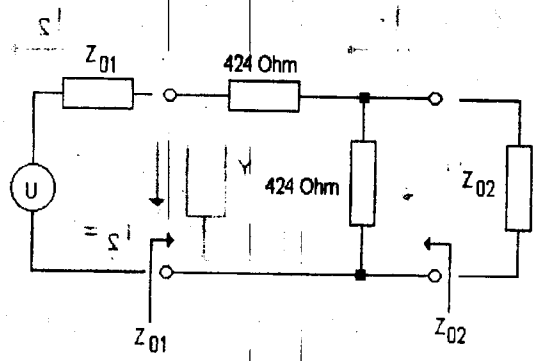


Figura 1.6. Circuito para el ejemplo 4

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & Z_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Y_2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + Z_1Y_2 & Z_1 \\ Y_2 & 1 \end{bmatrix}$$

$A_{11} \neq A_{22}$, entonces el circuito no es simétrico y $det\mathbf{A} = 1(1 + Z_1Y_2) - Z_1Y_2 = 1$ y por lo que el circuito es pasivo.

Ejemplo 4.

Calcular las impedancias características (imagen) del circuito en la figura 1.6. Del ejemplo anterior los Parametros A_{ij} del circuito son

$$A_{11} = 1 + Z_1/Z_2 = 2 \qquad A_{12} = Z_1 = 424$$

$$A_{21} = 1/Z_2 = 1/424 \qquad A_{22} = Z_1/Z_2 = 1$$

Sustituyendo los valores del A_{ij} en las ecuaciones (1.14) y (1.15) se obtiene

$$Z_{01} = \sqrt{2.424.424} = 424\sqrt{2} = 600\ \Omega$$

$$Z_{02} = \sqrt{\frac{424.424}{2}} = \frac{424}{\sqrt{2}} = 300\ \Omega$$

El acoplamiento perfecto se ve en la figura 1.6. En este caso no se refleja nada en las puertas de entrada y de salida.

Ejemplo 5.

Calcular las impedancias características (imagen) del circuito en la figura 1.7. Primeramente calculamos los parámetros A_{ij}

$$A_{11} = 1 + \frac{R_1}{R_2} = 1 + \frac{199}{804} = 1.247 = A_{22}$$

$$A_{12} = 2R_1 + \frac{R_1^2}{R_2} = 2.199 + 199^2\frac{1}{804} = 1.4725$$

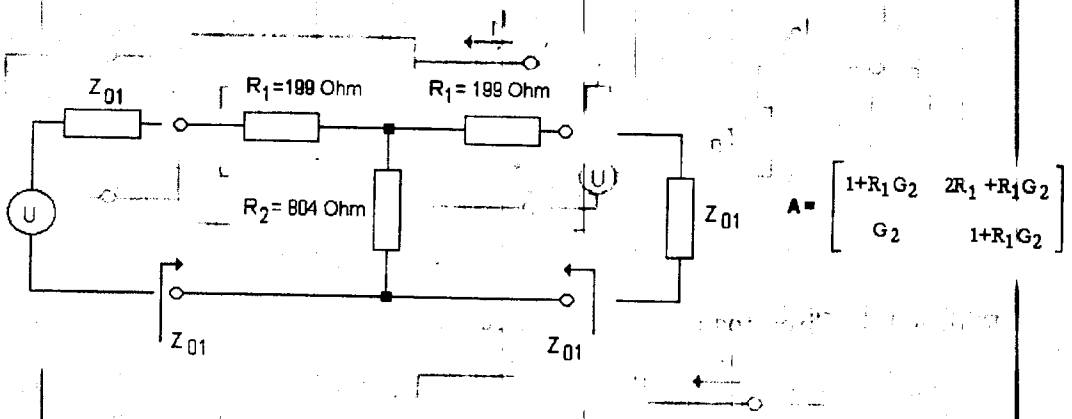


Figura 1.7. Circuito para el ejemplo 5

$$A_{21} = \frac{1}{R_2} = \frac{1}{804} = 1.24378.10^{-3}$$

Las impedancias de imágen se obtienen si se sustituye A_{ij} en (1.14) y (1.15)

$$Z_{01} = Z_{02} = \sqrt{\frac{447,5}{1,24378.10^{-3}}} = 599,657\ \Omega$$

1.2 Función de transferencia

La función de transferencia de manejo se define mediante la relación

$$G_m = \sqrt{\frac{U_0 I_0}{U_2 I_2}} \tag{1.16}$$

Los voltajes U_0, U_2 y las corientes I_0, I_2 están representadas en la figura 1.8. La ecuación (1.16) y el circuito en la figura 1.8 definen la función de transferencia de manejo. La función de transferencia de manejo es la raíz cuadrada de la potencia que el generador con la impedancia Z_0 suministra a la misma impedancia Z_0, entre la potencia que el mismo generador suministra a la salida del circuito acoplado con la impedancia Z_2.

La función de transferencia de espejo (característica) se define mediante la relación

$$G_0 = \sqrt{\frac{U_1 I_1}{U_2 I_2}} \tag{1.17}$$

Los voltajes U_1, U_2 y las corientes I_1, I_2 están representadas en la figura 1.8

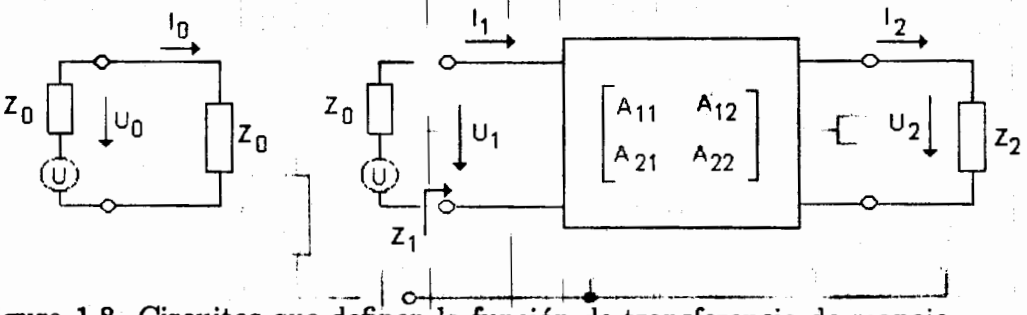


Figura 1.8. Circuitos que definen la función de transferencia de manejo

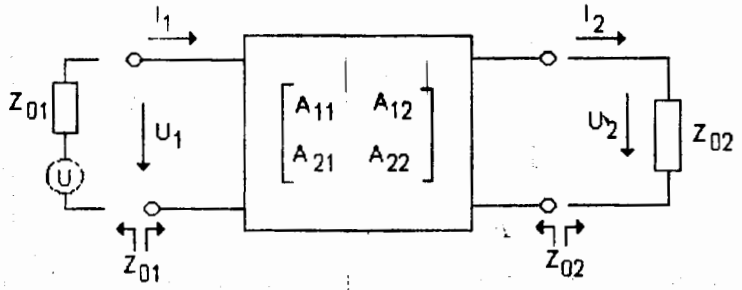


Figura 1.9. Circuito que define la función de transferencia de espejo

En este caso la entrada y la salida del circuito están perfectamente acopladas y en la entrada como en la salida no se refleja nada. La ecuación (1.17) y el circuito en la figura 1.9 definen la función de transferencia de espejo. La función de transferencia de espejo es la 2^{da} raíz de potencia en la entrada entre la potencia de salida de un circuito bien acoplado. De la figura 1.8 se pueden escribir las siguientes ecuaciones

$$U_2 = Z_2 I_2 \tag{1.18}$$

$$U_0 = \frac{E}{2} = \frac{Z_0 + Z_1}{2} I_1 = \frac{1}{2}(Z_0 I_1 + U_1) \tag{1.19}$$

Si se expresa el voltaje y el coriente usando las ecuaciones de cascada

$$\begin{aligned} U_1 &= A_{11}U_2 + A_{12}I_2 \\ I_1 &= A_{21}U_2 + A_{22}I_2 \end{aligned} \tag{1.20}$$

sustituyendo en las ecuaciones (1.18) y (1.19) se obtiene

$$\begin{aligned} U_0 &= \frac{1}{2}\left[A_{11} + \frac{A_{12}}{Z_2} + A_{21}Z_0 + A_{22}\frac{Z_0}{Z_2}\right] U_2 \\ I_0 = \frac{U_0}{Z_0} &= \frac{Z_2}{2Z_0}\left[A_{11} + \frac{A_{12}}{Z_2} + A_{21}Z_0 + A_{22}\frac{Z_0}{Z_2}\right] I_2 \end{aligned} \tag{1.21}$$

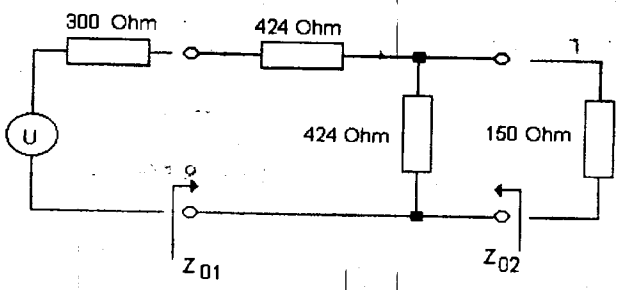


Figura 1.10. Circuito para el ejemplo 6

La ecuación (1.21) se puede escribir en la forma

$$\frac{U_0}{U_2} = \frac{1}{2}\left[A_{11} + \frac{A_{12}}{Z_2} + A_{21}Z_0 + A_{22}\frac{Z_0}{Z_2}\right]$$

$$\frac{I_0}{I_2} = \frac{U_0}{Z_0} = \frac{Z_2}{2Z_0}\left[A_{11} + \frac{A_{12}}{Z_2} + A_{21}Z_0 + A_{22}\frac{Z_0}{Z_2}\right] \tag{1.22}$$

La función de transferencia de manejo expresada mediante los parámetros de cascada y las impedancias de entrada y de salida toma la forma

$$G_m = \sqrt{\frac{U_0 I_0}{U_2 I_2}} = \frac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{Z_2}{Z_0}}A_{11} + \frac{A_{12}}{\sqrt{Z_0 Z_2}} + A_{21}\sqrt{Z_0 Z_2} + A_{22}\sqrt{\frac{Z_0}{Z_2}}\right] \tag{1.23}$$

Para el circuito normalizado $Z_0 = Z_2 = 1$ la función de transferencia (1.23) toma la forma

$$G_m = \frac{1}{2}\left[A_{11} + A_{12} + A_{21} + A_{22}\right] \tag{1.24}$$

Ejemplo 6.

Calcular la atenuación del circuito en la figura 1.10. Primeramente calculamos las impedancias de espejo Z_{01} y Z_{02}.

$$Z_{01} = \sqrt{2.424.424} = 600\Omega$$

$$Z_{02} = \sqrt{424\frac{424}{2}} = 300\Omega$$

Tanto en la entrada como en la salida el circuito no está bien acoplado. Por eso en las puertas de entrada y salida se reflejan las olas de corriente y de voltaje. Ahora calculamos los elementos de la matriz de cascada A_{ij}

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 424 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{424} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 424 \\ \frac{1}{424} & 1 \end{bmatrix}$$

Si se sustituyen los parámetros A_{ij}, Z_2 y Z_0 en la ecuación (1.23) se obtiene

$$G = \frac{1}{2}\left[2\sqrt{\frac{150}{300}} + \frac{424}{\sqrt{150.300}} + \frac{\sqrt{150.300}}{424} + \sqrt{\frac{300}{150}}\right] = 2.663$$

$$a = 20.log(2,663) = 8.506\ dB$$

Ejemplo 7.

Calcular la atenuación en dB del ejemplo anterior, si las puertas están bien acopladas, si $Z_0 = 600\ \Omega$ y $Z_2 = 300\ \Omega$. En este caso en las puertas no se refleja nada, porque las puerta están bien acopladas. Entonces se calcula la atenuación característica.

$$G = \frac{1}{2}\left[2\sqrt{\frac{300}{600}} + \frac{424}{\sqrt{600.300}} + \frac{\sqrt{600.300}}{424} + \sqrt{\frac{600}{300}}\right] = 2,414$$

$$a = 20.log(2,414) = 7,65\ dB$$

El mismo resultado obtenemos si se utiliza la ecuación para calcular atenuación de los circuitos perfectamente acoplados (1.25)

$$G_0 = \sqrt{A_{11}.A_{22}} + \sqrt{A_{12}.A_{21}} \tag{1.25}$$

$$G_0 = \sqrt{2.1} + \sqrt{424.\frac{1}{424}} = 2.414$$

$$a = 20.log(2,414) = 7,65\ dB$$

La atenuación se puede calcular tambien mediante la ecuación (1.26). De la ecuación (1.26) el primer término es la función de transferencia de espejo, el segundo y tercero término son las funciones de reflexión en las puertas de entrada y de salida. Si $Z_0 = Z_{01}$, no se refleja en la puerta de entrada nada. Si $Z_2 = Z_{02}$ no se refleja en la puerta de salida nada. Si $Z_0 = Z_{01}$ y $Z_2 = Z_{02}$ la función de transferencia de manejo es igual a función de transferencia de espejo. Los términos sexto y séptimo se llaman el coeficiente de contacto.

$$G_m(p) = G_0 \frac{Z_0 + Z_{01}}{2\sqrt{Z_0 Z_{01}}} \frac{Z_2 + Z_{02}}{2\sqrt{Z_2 Z_{02}}} \left[1 - \frac{Z_0 - Z_{01}}{Z_0 + Z_{01}} \frac{Z_2 - Z_{02}}{Z_2 + Z_{02}} \frac{1}{G_0^2}\right] \tag{1.26}$$

Ejemplo 8.

Calcular mediante la ecuación (1.26) la atenuación del circuito en la figura 1.11. Primeramente se calcula la función de transferencia de espejo G_0 para $A_{11} = 2$, $A_{12} = 424$, $A_{21} = \frac{1}{424}$ y $A_{22} = 1$

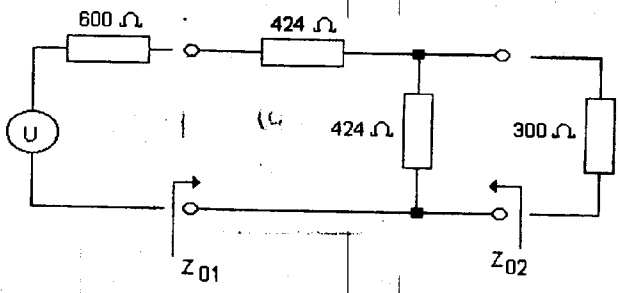


Figura 1.11. Circuito para el ejemplo 8

$$G_0 = \sqrt{2.1} + \sqrt{424\frac{1}{424}} = 2.414$$

Utilizando la ecuación (1.26) sustituyendo por $Z_0 = 300$, $Z_{01} = 600$, $Z_{02} = 300$, $Z_0 = 150$ y $Z_2 = 150$ se obtiene

$$G_m = 2.414\frac{300+600}{2\sqrt{300.600}}\frac{150+300}{2\sqrt{150.300}}\left[1 - \frac{300-600}{300+600}\frac{150-300}{150+300}\frac{1}{2.414^2}\right] = 2.663$$

$$a = 20.log(2,663) = 8.506\ dB$$

Obtuvimos el mismo resultado del ejemplo 6.

1.3 Ecuación característica

De las ecuaciones de cascada (1.1), si la impedancia $Z_2 = 1$, se pueden escribir las siguientes ecuaciones

$$Q(p) = \frac{U_1}{U_2} = A_{11} + A_{12}$$

$$N(p) = \frac{I_1}{I_2} = A_{21} + A_{22} \tag{1.27}$$

La función de transferencia G(p) se puede escribir en la forma

$$G(p) = \frac{1}{2}\left[Q(p) + N(p)\right] \tag{1.28}$$

Si se escribe la ecuación característica (1.29),

$$G(p)G(-p) = 1 + \varphi(p)\varphi(-p) \tag{1.29}$$

se puede calcular la función característica $\varphi(p)$

$$\varphi(p) = \frac{1}{2}\left[Q(p) - N(p)\right] \tag{1.30}$$

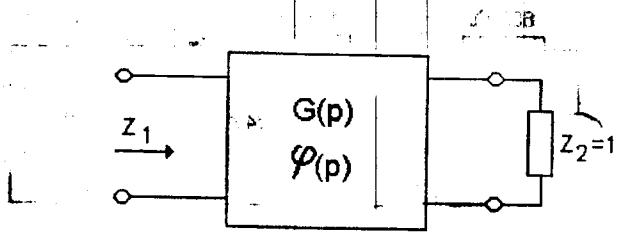


Figura 1.12. La impedancia del circuito definida mediante G(p)

Si se suman y restan las ecuaciones (1.28) y (1.30) se obtiene

$$G(p) + \varphi(p) = Q(p) = \frac{U_1}{U_2}$$

$$G(p) - \varphi(p) = Q(p) = \frac{I_1}{I_2} \tag{1.31}$$

Si se dividen estas dos ecuaciones se obtiene para $Z_2 = 1$, $U_2 = I_2$

$$Z_1 = \frac{U_1}{I_1}\frac{I_2}{U_2} = \frac{G(p) + \varphi(p)}{G(p) - \varphi(p)} \tag{1.32}$$

Z_1 es la impedancia de entrada de un bi-puerto si la impedancia en la salida es $Z_2 = 1$ como se ve en la figura 1.12

Ejemplo 9.

Calcular G(p) $\varphi(p)$ y $Z_2(p)$ del circuito en la figura 1.13
Primeramente se calculan los parámetros de la matriz de cascada A_j

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & p \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2p & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & p \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2p^2 & 2p+2p^3 \\ 2p & 1+2p^2 \end{bmatrix}$$

La función de transferencia toma la forma

$$G(p) = \frac{1}{2}\left[1 + 2p^2 + 2p + 2p^3 + 2p + 1 + 2p^2\right] = p^3 + 2p^2 + 2p + 1$$

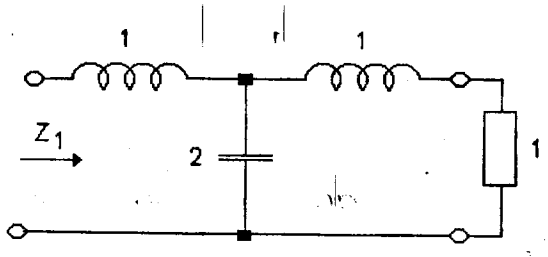


Figura 1.13. La impedancia del circuito definida mediante G(p) y $\varphi(p)$

La función característica toma la forma

$$\varphi(p) = \frac{1}{2}\left[1 + 2p^2 + 2p + 2p^3 - 2p - 1 - 2p^2\right] = p^3$$

La impedancia de entrada del circuito en la figura 1.13 es

$$Z_1 = \frac{2p^3 + 2p^2 + 2p + 1}{2p^2 + 2p + 1}$$

Capítulo 2

Realización de circuitos LRC

En este capítulo trataremos de realizar los circuitos de una puerta si se conoce la impedancia del circuito LC, LR ó RC. Existen los métodos de Cauer y de Foster. La realización de Cauer utiliza circuitos de cadena y en el método de Foster circuitos básicos se conectan en serie o en paralelo (depende si se realiza la impedancia o la admitancia del circuito). La impedancia del circito se representa como la función de la relación de dos polinomios.

$$Z(p) = \frac{a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + a_3 p^3 + ... + a_n p^n}{b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + b_3 p^3 + ... + b_n p^n} \tag{2.1}$$

La impedancia del circuito $Z(p)$ en la ecuación (2.1) se puede desarrollar en la forma de quebrado, ecuación (2.2). Este tipo de realización se llama la realización de Cauer.

$$Z(p) = Z_0 + \frac{1}{Y_1 + \frac{1}{Z_2 + \frac{1}{Y_3}}} \tag{2.2}$$

La ecuación (2.2) se realiza mediante el circuito en la figura 2.1. Si la impedancia Z(p) se desarrolla como suma de los quebrados parciales (2.3) obtenemos el circuito que se muestra en la figura 2.2, que es el caso del circuito RC realizado con el método de Foster.

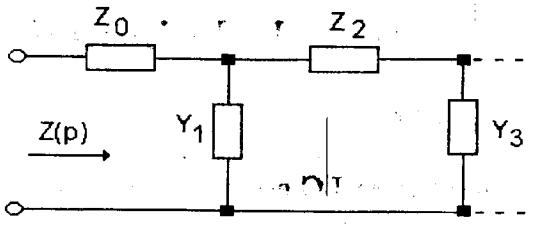


Figura 2.1. Circuito en la forma de escalera (Cauer)

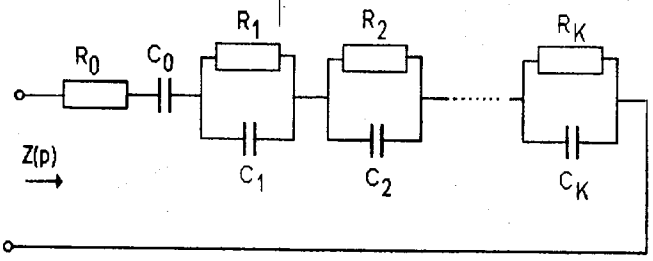


Figura 2.2. Circuito RC en la forma de Foster I

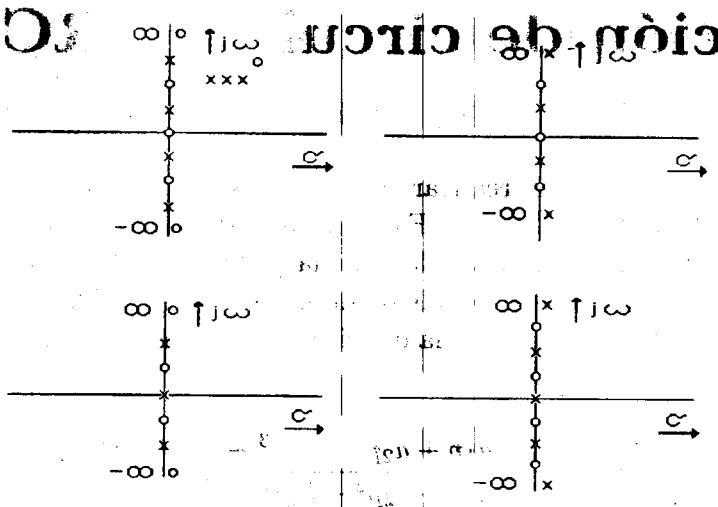


Figura 2.3. Ubicación de los polos y ceros de la impedancia $Z(p)_{LC}$

Si la impedancia Z(p) se desarrolla como suma de los quebrados parciales (2.3) obtenemos el circuito que se muestra en la figura 2.2, que es el caso del circuito RC realizado con el métode de Foster.

$$Z(p) = \frac{1}{pc_0} + R_0 + \sum_{i=1}^{k} \frac{A_i}{p + \omega_i} \tag{2.3}$$

2.1 Los polos y ceros de la impedancia Z(p)

Polos y ceros del circuito LC.

Los polos y ceros de la impedancia LC están ubicados en el eje imaginario. Los polos se alternan con los ceros. En el origen del plano Z(p) debe estar un polo o un cero. También en el infinito del plano Z(p) está un polo o un cero. Las cuatro posibilidades de ubicación de polos y ceros se muestran en la figura 2.3.

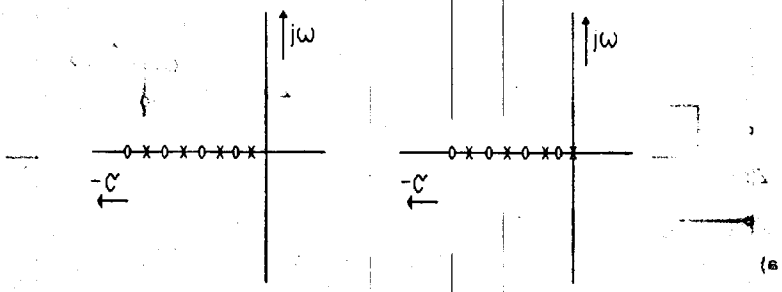


Figura 2.4. Los polos y ceros de la impedancia RC

Polos y ceros del circuito RC.

Los polos y ceros de la impedancia RC están ubicados en el eje real y en la parte izquierda del plano Z(p). Los polos se alternan con los ceros. En origen del plano Z(p) o cerca del origen debe estar un polo. Las dos posibilidades de ubicación de polos y ceros para el circuito RC se muestran en la figura 2.4.

Polos y ceros del circuito LR.

Los polos y ceros de la impedancia LR están ubicados en el eje real y en la parte izquierda del plano Z(p). Los polos se alternan con los ceros. En el origen del plano Z(p) o cerca del origen debe estar un cero. Las dos posibilidades de dislocación de polos y ceros para el circuito LR se muestran en la figura 2.5.

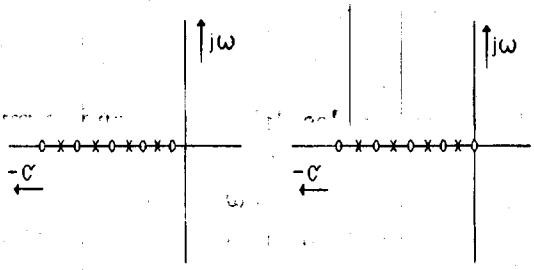


Figura 2.5. Los polos y ceros de la impedancia LR

Ejemplo 1.

Dibujar la ubicación de los ceros y polos del circuito que se muestra en la figura 2.6a La ubicacióón de los polos y ceros del circuito en la figura 2.6a se muestra en la figura 2.6b. La impedancia Z(p) es igual a cero para $\omega = 0$ y por eso en el origen existe un

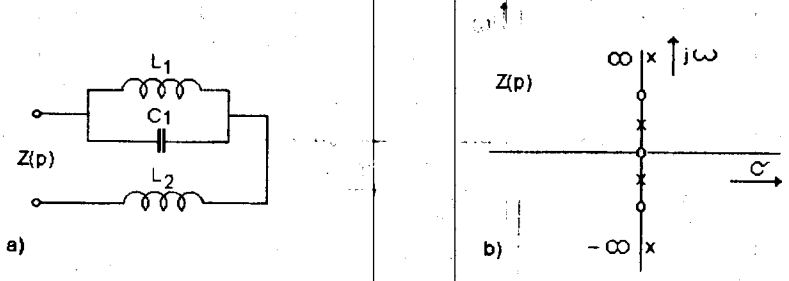


Figura 2.6. Circuito LC y la ubicación de los ceros y polos en el plano Z(p)

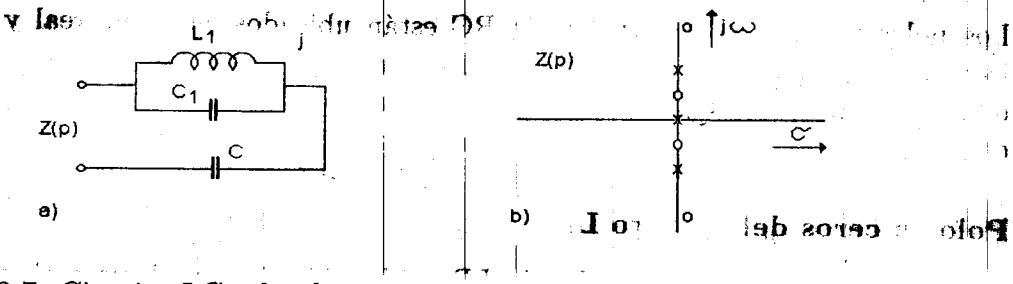


Figura 2.7. Circuito LC y la ubicación de los polos y ceros en el plano Z(p)

cero. La impedancia Z(p) es igual a ∞ para la frecuencia de resonancia del circuito paralelo y por eso sigue un polo. Para la frecuencia $\omega = \infty$ la impedancia del circuito es infinita y por eso en $\omega = \infty$ tenemos un polo. El segundo cero en la figura 2.6 pertenece a la frecuencia de resonancia del circuito serie.

Ejemplo 2.

Dibujar la ubicación de los ceros y polos del circuito que se muestra en la figura 2.7a. La ubicación de los polos y ceros del circuito en la figura 2.7a se muestra en la figura 2.7b. La impedancia Z(p) es igual a ∞ para $\omega = 0$ y por eso en el origen hay un polo. La impedancia Z(p) es igual a cero para la frecuencia de resonancia serie del circuito y por eso sigue un cero. Para la frecuencia $\omega = \infty$ la impedancia del circuito es cero y por eso en $\omega = \infty$ tenemos un cero. El polo en la figura 2.7 b) partenece a la frecuencia de resonancia paralela.

2.1.1 Realización de Z(p) mediante el método de Foster I

Impedancias LC

La impedancia del circuito LC en la ecuación (2.4)

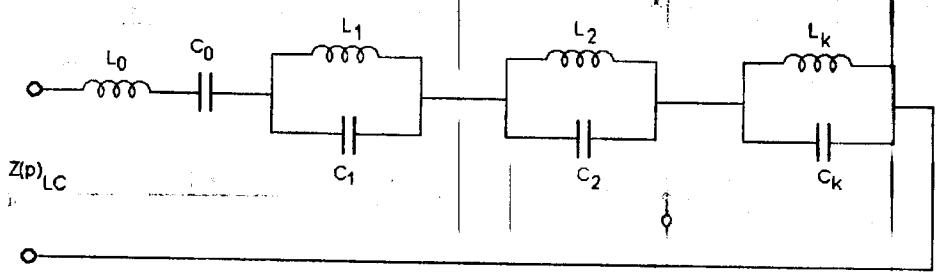


Figura 2.8. Circuito LC en la forma Foster

$$Z(p) = pL_0 + \frac{1}{pC_0} + \sum_{i=0}^{k} \frac{pA_1}{p^2 + \omega_i^2} \tag{2.4}$$

donde

$$A_i = \frac{1}{C_i} \qquad \omega_i^2 = \frac{1}{L_i C_i}$$

se realiza mediante el circuito en la forma de Foster que se muestra en la figura 2.8

Ejemplo 3.

Mediante el método Foster realizar la impedancia

$$Z(p) = \frac{p^4 + 4p^2 + 3}{p^3 + 2p}$$

El numerador es un polinomio de grado par y el denominador es un polinomio de grado impar. La impedancia puede ser la impedancia de un circuito LC. Esta ecuación se puede escribir en la forma

$$Z(p) = \frac{(p^2 + 1)(p^2 + 3)}{p(p^2 + 2)}$$

Los ceros y los polos están en el eje imaginario. En $\omega = 0$ está un polo y en $\omega = \infty$ la impedancia de Z(p) es infinita, entonces en $\omega = \infty$ hay un polo etc. El polo está en $\omega = \sqrt{2}$ y los ceros en $\omega = 1$ y $\omega = \sqrt{3}$. La ubicación de los polos y ceros se muestra en la figura 2.9a. La ecuación anterior se puede desarrollar en fracciones parciales

$$Z(p) = \frac{(p^2 + 1)(p^2 + 3)}{p(p^2 + 2)} = \frac{A}{p} + \frac{Bp}{p^2 + 2} + C.p$$

Para realizar la impedancia con un circuito es necesario calcular los coeficientes A, B y C.

$$A = \frac{(p^2 + 1)(p^2 + 3)}{(p^2 + 2)}\Big|_{p=0} = \frac{3}{2}$$

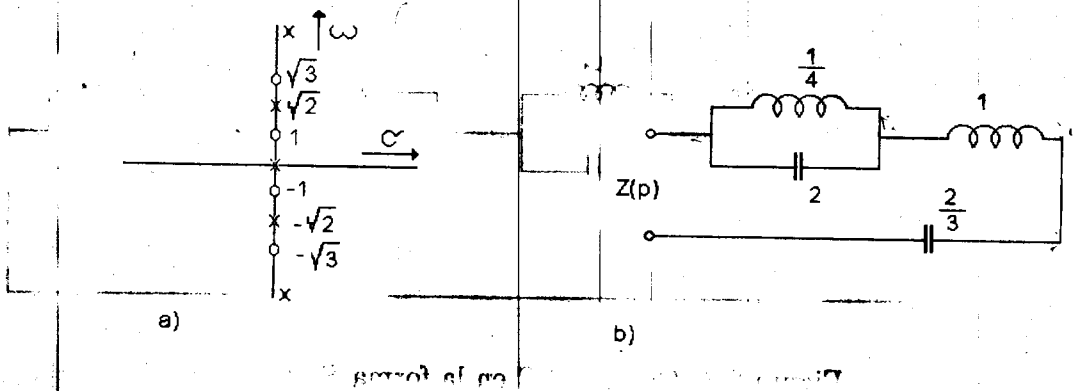


Figura 2.9. ubicación de los polos y ceros de $Z(p)_{LC}$

$$B = \frac{(p^2+1)(p^2+3)}{p^2}\Big|_{p=-2} = \frac{1}{2}$$

$$C = \frac{(p^2+1)(p^2+3)}{(p^2+2)p^2}\Big|_{p=\infty} = 1$$

Sustituyendo por A, B y C Z(p) toma la forma

$$Z(p) = \frac{(p^2+1)(p^3+1)}{p(p^2+2)} = \frac{\frac{3}{2}}{p} + \frac{\frac{1}{2}p}{p^2+2} + p$$

La realización de esta ecuación se muestra en la figura 2.9b

Impedancias RC

La impedancia del circuito RC en la ecuación (2.5)

$$Z(p) = R_0 + \frac{1}{pC_0} + \sum_{i=0}^{k} \frac{A_i}{p+\omega_i} \tag{2.5}$$

donde

$$A_i = \frac{1}{C_i} \qquad \omega_i = \frac{1}{C_i R_i}$$

se realiza mediante el circuito en la forma de Foster que se muestra en la figura 2.10

Ejemplo 4.

Mediante el método de Foster realizar la impedancia

$$Z(p) = \frac{p+2}{p^2+4p+3}$$

En el numerador y en el denominador hay polinomios. En estos polinomios no falta ninguna potencia de p y por eso el circuito puede ser LR o RC. Esta ecuación se puede escribir de la forma

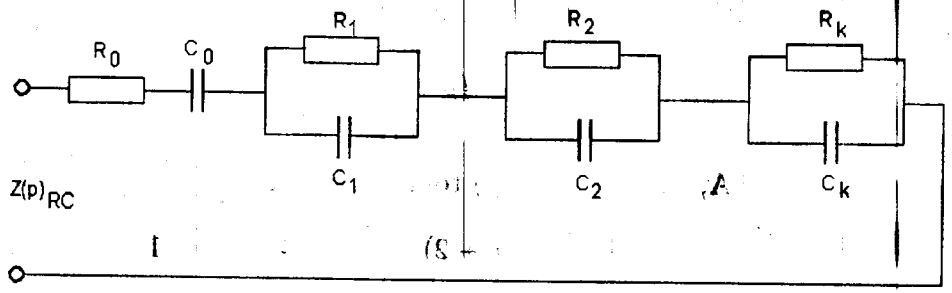


Figura 2.10. Circuito RC en la forma de Foster

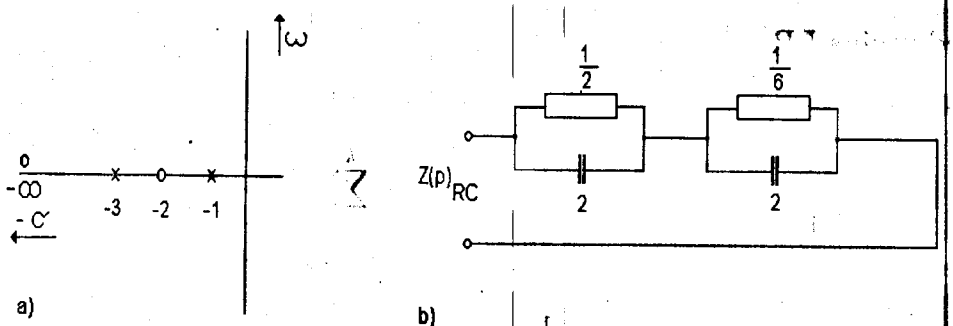


Figura 2.11. La ubicación de los polos y ceros de $Z(p)_{RC}$

$$Z(p) = \frac{(p+2)}{(p+1)(p+3)}$$

Cerca del origen hay un polo y por eso la impedancia Z(p) es la impedancia de un circuito RC. Los polos se alternan con los ceros. La ubicación de los polos y ceros se muestra en la figura 2.11 a).
La ecuación anterior se puede desarrollar de la forma

$$Z(p) = \frac{(p+2)}{(p+1)(p+3)} = R_0 + \frac{A}{p} + \frac{B}{p+1} + \frac{C}{(p+3)}$$

Para realizar la impedancia con un circuito es necesario calcular los coeficientes A, B, C y R_0.

$$A = \frac{p(p+2)}{(p+1)(p+3)}|_{p=0} = 0$$

$$R_0 = \frac{(p+2)}{(p+1)(p+3)}|_{p=\infty} = 0$$

$$B = \frac{(p+2)}{(p+3)}|_{p=-1} = \frac{1}{2}$$

$$C = \frac{(p+2)}{(p+1)}\Big|_{p=-3} = \frac{1}{2}$$

Sustituyendo por A, B, R_0 y C, Z(p) toma la forma

$$Z(p) = \frac{(p+2)}{(p+1)(p+3)} = \frac{1}{2p+2} + \frac{1}{2p+6}$$

La realización de esta ecuación se muestra en la figura 2.11b.

Impedancias LR

La impedancia del circuito LR en la ecuación (2.6)

$$Z(p) = R_0 + pL_0 + \sum_{i=0}^{k} \frac{pA_i}{p+\omega_i} \tag{2.6}$$

donde

$$A_i = \frac{1}{R_i} \qquad \omega_i^2 = \frac{1}{L_i R_i}$$

se realiza mediante el circuito de la forma de Foster I que se muestra en la figura 2.12

Ejemplo 5.

Mediante el método de Foster realizar la impedancia

$$Z(p) = \frac{p^2+2p}{p^2+4p+3}$$

En el numerador y denominador hay polinomios. En estos polinomios no falta ninguna potencia de p y por eso el circuito puede ser LR o RC. Esta ecuación se puede escribir en la forma

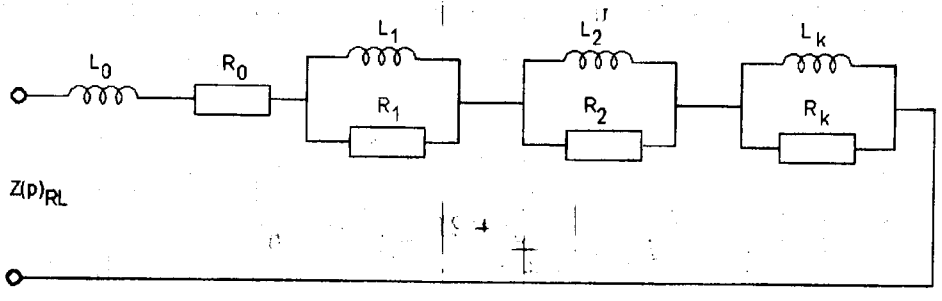


Figura 2.12. Circuito RL en la forma Foster I

$$Z(p) = \frac{p(p+2)}{(p+1)(p+3)}$$

Cerca de origen hay un cero y por eso la impedancia Z(p) es la impedancia de un circuito LR. Los polos se alternan con los ceros. La ubicación de los polos y ceros se muestra en la figura 2.13a. La ecuación anterior se puede desarrollar en la forma

$$Z(p) = \frac{p(p+2)}{(p+1)(p+3)} = R_0 + pL_0 + \frac{Ap}{p+1} + \frac{Bp}{(p+3)}$$

Para realizar la impedancia con un circuito es necesario calcular los coeficientes R_0, L_0, A y B.

$$R_0 = \frac{p(p+2)}{(p+1)(p+3)}|_{p=0} = 0$$

$$L_0 = \frac{(p+2)}{(p+1)(p+3)}|_{p=\infty} = 0$$

$$A = \frac{(p+2)}{(p+3)}|_{p=-1} = \frac{1}{2}$$

$$C = \frac{(p+2)}{(p+1)}|_{p=-3} = \frac{1}{2}$$

Sustituyendo por A, B, R_0 y L_0, la Z(p) toma la forma

$$Z(p) = \frac{p(p+2)}{(p+1)(p+3)} = \frac{1}{2 + \frac{2}{p}} + \frac{1}{2 + \frac{6}{p}}$$

La realización de esta ecuación se muestra en la figura 2.13b.

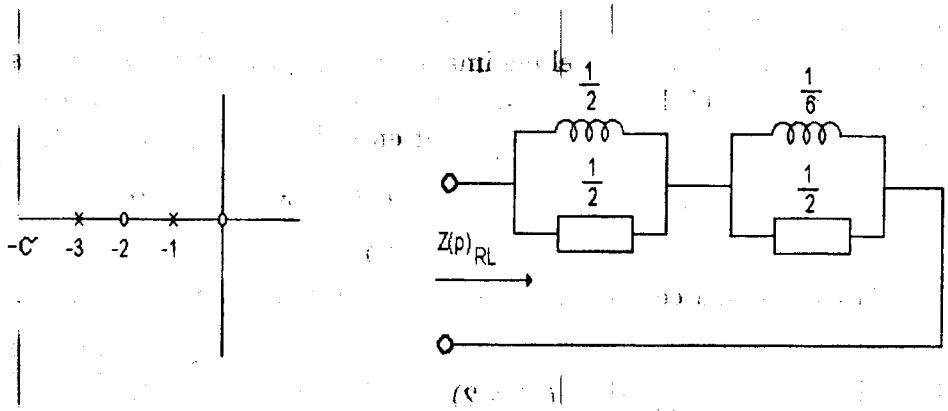


Figura 2.13. La ubicación de los polos y ceros de Z(p) en el ejemplo 4

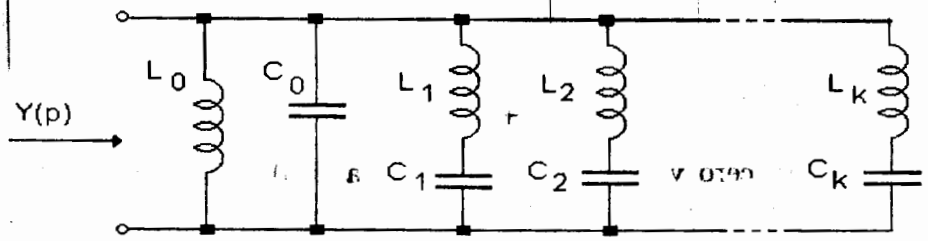


Figura 2.14. Circuito LC en la forma Foster II

2.1.2 Realización Y(p) mediante el método de Foster II

Admitancias LC

La admitancia del circuito LC en la ecuación (2.7)

$$Y(p) = pC_0 + \frac{1}{pL_0} + \sum_{i=0}^{k} \frac{A_i p}{p^2 + \omega_i^2} \tag{2.7}$$

se realiza mediante el circuito en la forma de Foster I que se muestra en la figura 2.14

Ejemplo 6.

Mediante el método Foster II realizar la admitancia

$$Y(p) = \frac{p^3 + 2p}{p^4 + 5p^2 + 4}$$

En el numerador hay un polinomio de grado impar y en el denominador hay un polinomio de grado par, y por eso el circuito puede ser LC, depende si los polos alternan con los ceros. Esta ecuación se puede escribir en la forma

$$Y(p) = \frac{p(p^2 + 2)}{(p^2 + 1)(p^2 + 4)}$$

Los polos y ceros están ubicados en el eje imaginario y se alternan; por eso esta admitancia es de un circuito LC. La ubicación de los polos y ceros se muestra en la figura 2.15a. La ecuación anterior se puede desarrollar en la forma

$$Y(p) = \frac{p(p^2 + 2)}{(p^2 + 1)(p^2 + 4)} = pC_0 + \frac{1}{pL_0} + \frac{Ap}{p^2 + 1} + \frac{B}{(p^2 + 4)}$$

Para realizar la admitancia con un circuito es necesario calcular los valores C_0, L_0, A, y B.

$$C = \frac{(p^2 + 2)}{(p^2 + 1)(p^2 + 4)}\Big|_{p=\infty} = 0$$

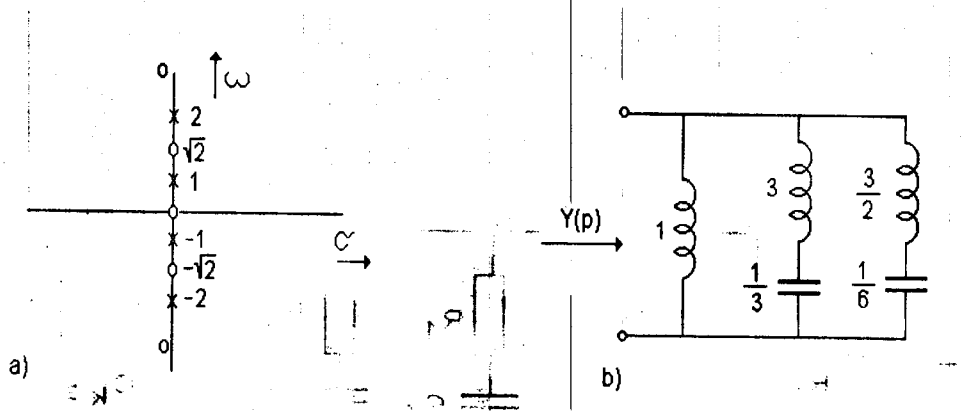


Figura 2.15. Ubicación de los polos y ceros de $Z(p)_{LC}$

$$\frac{1}{L_0} = \frac{p(p^2+2)}{(p^2+1)(p^2+4)}|_{p=0} = 1$$

$$A = \frac{(p^2+2)}{(p^2+1)}|_{p=-1} = \frac{1}{3}$$

$$B = \frac{(p^2+2)}{(p^2+1)}|_{p^2=-4} = \frac{2}{3}$$

Sustituyendo por A, B, L_0 y C_0 la admitancia Y(p) toma la forma

$$Y(p) = \frac{p(p^2+2)}{(p^2+1)(p^2+4)} = \frac{1}{p} + \frac{\frac{1}{3}}{p^2+1} + \frac{\frac{2}{3}}{p^2+4}$$

La realización de esta ecuación se muestra en la figura 2.15b.

Admitancias RC

La admitancia del circuito RC en la figura 2.16 se puede expresar mediante la ecuación (2.8)

$$Y(p) = \frac{1}{R_0} + pC_0 + \sum_{i=0}^{k} \frac{A_i p}{p+\omega_i} \qquad (2.8)$$

se realiza mediante el circuito de la forma de Foster que se muestra en la figura 2.14

Ejemplo 7.

Mediante el método Foster II realizar la admitancia

$$Y(p) = \frac{p^3+3p}{p^2+5p+4}$$

La admitancia tiene en el origen un cero, los polos se alternan con los ceros y por eso la admitancia tiene carácter del circuito RC. Esta ecuación se puede escribir en la forma

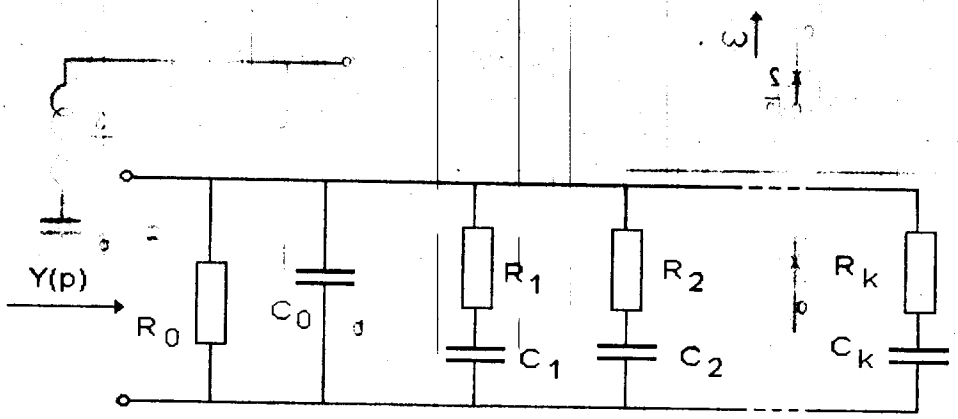


Figura 2.16. Circuito LC en la forma de Foster II

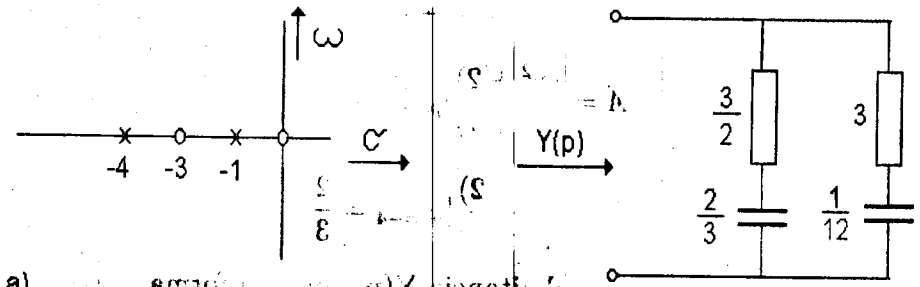


Figura 2.17. La ubicación de los polos y ceros de $Z(p)_{RC}$

$$Y(p) = \frac{p(p+3)}{(p+1)(p+4)}$$

Los polos y ceros están ubicados en el eje real, como se ve en la figura 2.17a. La ecuación anterior se puede desarrollar en la forma

$$Y(p) = \frac{p(p+3)}{(p+1)(p+4)} = \frac{1}{R_0} + pC_0 + \frac{Ap}{p+1} + \frac{Bp}{p+4}$$

Para realizar Y(p) con un circuito es necesario calcular los valores R_0, C_0, A, y B.

$$\frac{1}{R_0} = \frac{p(p+3)}{(p+1)(p+4)}\Big|_{p=0} = 0$$

$$C_0 = \frac{(p+3)}{(p+1)(p+4)}\Big|_{p=\infty} = 0$$

$$A = \frac{(p+3)}{(p+4)}\Big|_{p=-1} = \frac{2}{3}$$

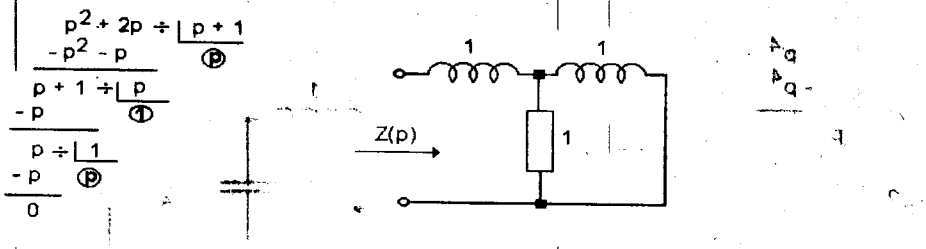


Figura 2.18. Circuito LR en la forma escalera (Cauer I)

$$B = \frac{(p+3)}{(p+1)}|_{p=-4} = \frac{1}{3}$$

Sustituyendo por A, B, R_0 y C_0, la admitancia Y(p) toma la forma y la realización de esta ecuación se muestra en la figura 2.17b.

$$Y(p) = \frac{p(p+3)}{(p+1)(p+4)} = \frac{\frac{2p}{3}}{p+1} + \frac{\frac{p}{3}}{p+4}$$

2.1.3 Realización Z(p) mediante el método de Cauer I

Ejemplo 8.

Realizar mediante el método de Cauer I la impedancia

$$Z(p) = \frac{p^2+2p}{p+1}$$

Es necesario desarrollar la impedancia Z(p) en quebrado de escalera. Como el cero está en el origen, el circuito es de la forma RL. Como la impedancia Z(p) se desarrolla en el quebrado de escalera se ve en la figura 2.18. La impedancia Z(p) toma la forma.

$$Z(p) = \frac{p^2+2p}{p+1} = p + \frac{1}{1+\frac{1}{p}}$$

Este quebrado de escalera se realiza mediante la forma que se muestra en la figura 2.18

Ejemplo 9.

Realizar mediante el método de Cauer la impedancia

$$Z(p) = \frac{p^4+5p^2+4}{p^3+3p}$$

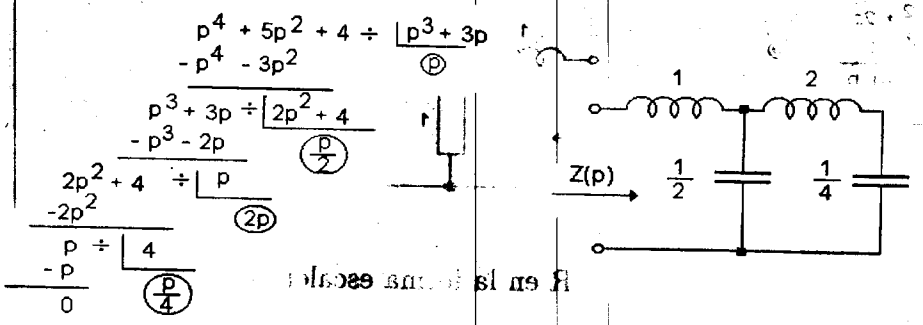


Figura 2.19. Circuito LC en la forma escalera (Cauer I)

Es necesario desarrollar la impedancia Z(p) en quebrado de escalera. Los ceros y los polos están en el eje imaginaro y se alternan. El circuito tiene inductancias y capacitores. Se desarrolla la impedancia Z(p) en el quebrado de escalera como se puede ver en la figura 2.19 Z(p) desarrollada en el quebrado de escalera toma la forma:

$$Z(p) = \frac{p^4 + 5p^2 + 4}{p^3 + 3p} = Z(p) = p + \frac{1}{\frac{p}{2} + \frac{1}{2p + \frac{1}{\frac{p}{4}}}}$$

Este quebrado de escalera se realiza mediante la forma escalera que se muestra en la figura 2.19

Ejemplo 10.

Realizar mediante el método de Cauer la impedancia

$$Z(p) = \frac{p^2 + 4p + 3}{p^2 + 6p + 8}$$

Es necesario desarrollar en quebrado de escalera la impedancia Z(p). Los ceros y los polos están en el eje real y se alternan. Cerca de origen está un cero. Entonces el circuito contiene resistencias y capacitores. Se se desarrolla la impedancia Z(p) en el quebrado de escalera como se puede ver en la figura 2.20. Z(p) toma la forma:

$$Z(p) = \frac{1}{\frac{p^2+6p+8}{p^2+4p+3}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{p}{2} + \frac{1}{\frac{4}{3} + \frac{1}{\frac{3p}{2} + \frac{1}{3}}}}}$$

Este quebrado de escalera se realiza mediante el circuito mostrado en la figura 2.20

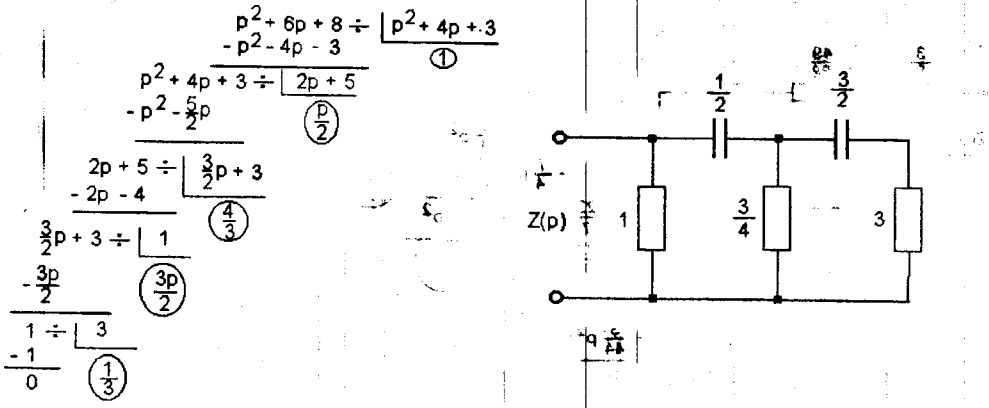


Figura 2.20. Circuito LC en la forma escalera (Cauer)

2.1.4 Realización Z(p) mediante el método de Cauer II

Ejemplo 11.

Realizar mediante el método de Cauer II la impedancia

$$Z(p) = \frac{3+4p+p^2}{8+6p+p^2}$$

Es necesario desarrollar en quebrado de escalera la impedancia Z(p), pero antes es necesario reordenar los polinomios en el numerador y denominador en la forma ascendente. Los ceros y los polos están en el eje real y se alternan. Cerca del origen está un cero. Entonces el circuito va a tener resistores y capacitores. Se desarrolla la impedancia Z(p) en el quebrado de escalera.

$$Z(p) = \frac{3+4p+p^2}{8+6p+p^2} = \frac{3}{8} + \cfrac{1}{1+\cfrac{8.4}{7p}+\cfrac{1}{\cfrac{7.7}{22.4}+\cfrac{1}{\cfrac{44.22}{3.7p}+\cfrac{1}{\frac{3}{44}}}}}$$

Este quebrado de escalera se realiza mediante el circuito en la forma escalera que se muestra en la figura 2.21.

Ejemplo 12.

Calcular la impedancia Z(p) y realizarla por el método de Cauer, si se conoce la parte real y la parte imaginaria de la impedancia de un cable que se muestra en la figura 2.22. La impedancia de primer orden se puede escribir en la forma:

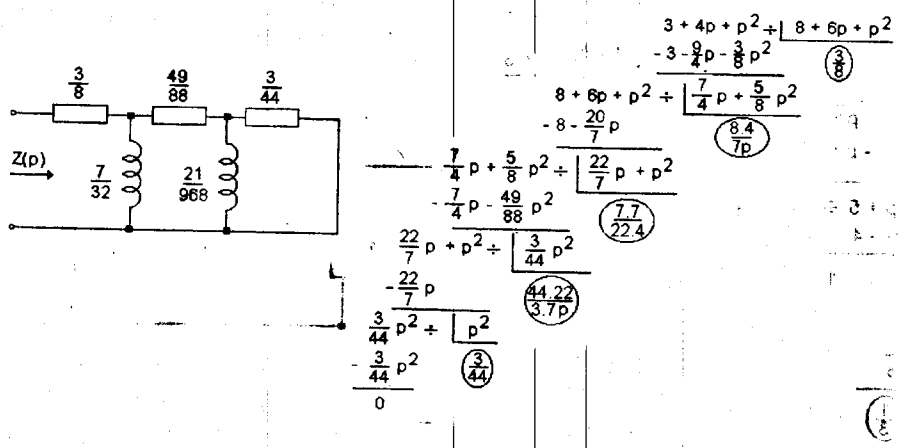


Figura 2.21. Circuito LC en la forma escalera (Cauer)

$$Z(p) = \frac{a_0 + a_1 p}{b_0 + b_1 p}$$

Si se divide el numerador y el denominador entre b_0 se obtiene la ecuación 2.9

$$Z(p) = \frac{\frac{a_0}{b_0} + \frac{1}{b_0} p}{1 + \frac{b_1}{b_0} p} = \frac{A_0 + A_1 p}{1 + B_1 p} \qquad (2.9)$$

La impedancia se puede desarrollar en parte real e imaginaria

$$Z(j\omega) = X + jY = \frac{A_0 + j\omega A_1}{1 + j\omega B_1}$$

Si se multiplica la ecuación anterior por $(1 + j\omega B_1)$ se obtiene

$$X + j\omega X B_1 + jY - \omega B_1 = A_0 + j\omega A_1$$

si se comparan las partes imaginarias y reales se obtiene

$$X - \omega Y B_1 = A_0$$

$$\omega X B_1 + Y = \omega A_1 \qquad (2.10)$$

En el ejemplo de la figura 2.22, para $\omega_1 = 6000$, la parte real de la impedancia es $X_1 = 400$ y la parte imaginaria $Y_1 = -300$. Para $\omega = \infty$ tenemos $X_2 = 100$ y $Y_2 = 0$. Si se sustituyen los valores en las ecuaciones 2.10 obtenemos

$$400 + 6000.300.B_1 = A_0$$

$$6000.400.B_1 - 300 = 6000.B_1$$

$$100.B_1 = A_1$$

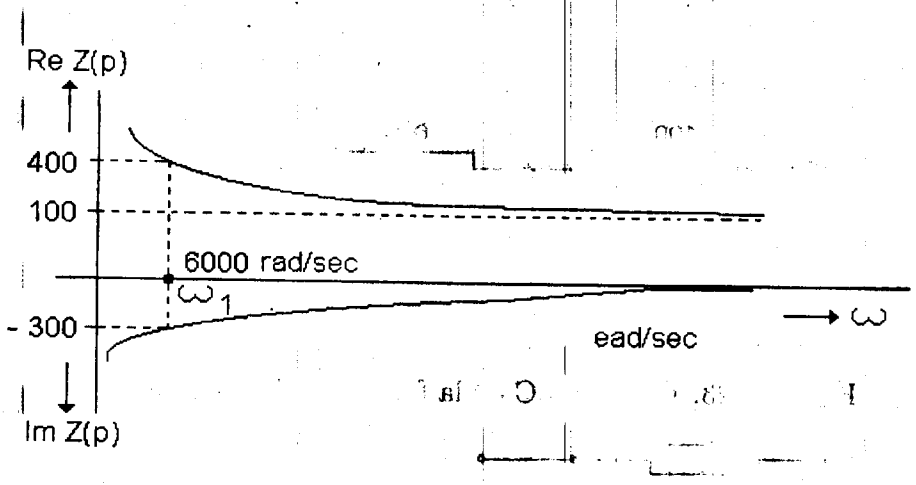


Figura 2.22. La parte real e imaginaria del Z(s)

Estas ecuaciones podemos escribirlas en la forma matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -18.10^5 \\ 0 & 6.10^3 & -24.10^5 \\ 0 & 1 & -10^2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ B_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 400 \\ -300 \\ 0 \end{bmatrix}$$

De esta ecuación matricial se pueden calcular los valores de A_0, A_1 y B_1

$$\begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ B_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -18.10^5 \\ 0 & 6.10^3 & -24.10^5 \\ 0 & 1 & -10^2 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} 400 \\ -300 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 700 \\ 0.01666 \\ 1.6666.10^{-4} \end{bmatrix}$$

Los coeficientes de la impedancia Z(p) (2.9) son

$$A_0 = 700 \qquad A_1 = 0,0166666 \qquad B_1 = 1,66666.10^{-4}$$

y la impedancia

$$Z(p) = \frac{700 + 0,016666p}{1 + 1,6666.10^{-4}p}$$

El cero p_0 y el polo p_∞ tienen los valores:

$$p_0 = -\frac{700}{0.0166} = -42000,168$$

$$p_\infty = -\frac{1}{1,6666.10^{-4}} = -6000.024$$

Z(p) es una impedancia del circuito RC, porque un polo está cerca del origen. Si la impedancia Z(p) se desarrolla en el quebrado de escalera obtenemos

$$Z(p) = 99,639 + \frac{1}{5,042.10^{-7}p + \frac{1}{600}}$$

El circuito se observa en la figura 2.23

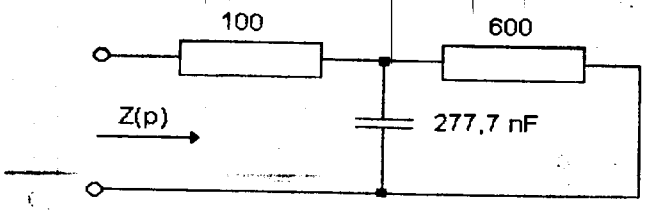


Figura 2.23. Circuito LC en la forma escalera (Cauer)

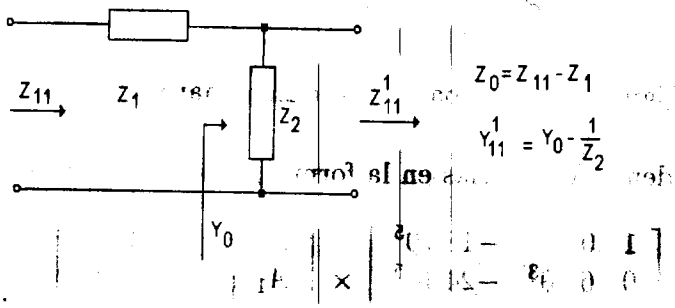


Figura 2.24. Circuito para realizar los parametros Z_{ij}

2.2 Realización de circuitos bipuertas

Para realizar el circuito de dos puertas necesitamos conocer dos parámetros, para el caso de un circuito pasivo y simétrico, por ejemplo Z_{11} y Z_{12} o Y_{11} y Y_{12}. De la impedancia Z_{11} o admitancia Y_{22} podemos ver, si la impedancia del bi-puerto es la impedancia del circuito RL, LC o RC. El procedimiento de la realización es el siguiente. Primeramente para el circuito en la figura 2.24 es necesario escribir las ecuaciones siguientes:

$$Z_0 = Z_{11} - Z_1$$

$$\frac{1}{Z_{11}^1} = Y_0 - \frac{1}{Z_2} \tag{2.11}$$

La impedancia Z_{11} se conoce y la queremos desarrollar en un circuito. No se conoce la impedancia Z_1, pero se puede calcular. Si por ejemplo Z_2 es el circuito serial, su impedancia es igual a cero para la frecuencia de resonancia serial $f_{res.serial}$. Eso significa, que en lugar de Z_2 tenemos un corto circuito y se puede escribir la ecuación

$$Z_1 = Z_{11}|_{f=fres.serial} \tag{2.12}$$

En el caso de que el circuito empieze con la admitancia Y_1, como se ve en la figura 2.25 se pueden escribir las ecuaciones siguientes:

$$Y_0 = Y_{22} - Y_1$$

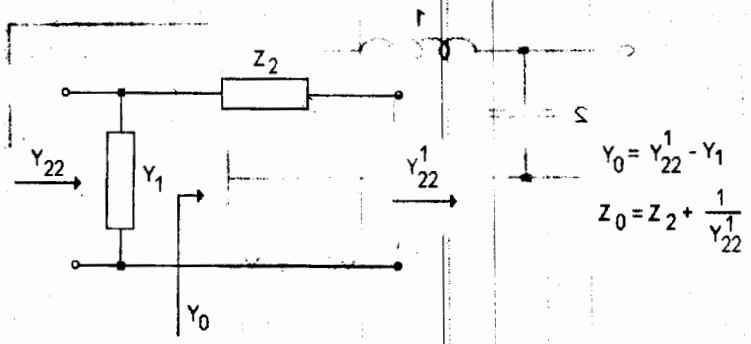


Figura 2.25. Circuito para realizar los parametros Y_{ij}

$$Z_0 = Z_2 + \frac{1}{Y_{22}^1} \tag{2.13}$$

La admitancia Y_{11} se conoce y la queremos desarrollar en un circuito. No se conoce la admitancia Y_1, pero se puede calcular. Si por ejemplo Z_2 es un circuito en paralelo, su impedancia es igual a infinito para la frecuencia de resonancia paralela $f_{res.paralela}$. Eso significa, que en lugar de Z_2 tenemos un circuito abierto y se puede escribir la ecuación

$$Y_1 = Y_{22}|_{f=fres.paralela} \tag{2.14}$$

Los valores ω_1, ω_2, ... son las frecuencias de resonancia y se obtienen de la impedancia de transferencia Z_{12} o Y_{12}, en la ecuación (2.15).

$$Z_{12} = \frac{(p^2+\omega_1)(p^2+\omega_2)....}{a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + ...} \tag{2.15}$$

En los siguientes ejemplos se muestra como se realizan los circuitos de bipuertos.

Ejemplo 13.

Realizar el circuito si se conocen las admitancias Y_{22} y Y_{21}

$$Y_{21} = \frac{p^2+1}{6p^3+3p}$$

$$Y_{22} = \frac{12p^4+12p^2+1}{6p^3+3p}$$

Los denominadores de los Y_{21} y Y_{22} son iguales. Entonces si se realiza el denominador Y_{22} tambien se realiza el denominador de parametro Y_{21}. Los ceros del parámetro Y_{21} son en $p^2 = -1$ y en $p = \infty$ y no coinciden con los ceros del parámetro Y_{22}. Si queremos realizar el parámetro Y_{22} se necesita realizarlo de tal manera que tengamos en el circuito los ceros de Y_{21}. Los ceros del Y_{21} son distintos de los ceros Y_{22}. Los ceros de

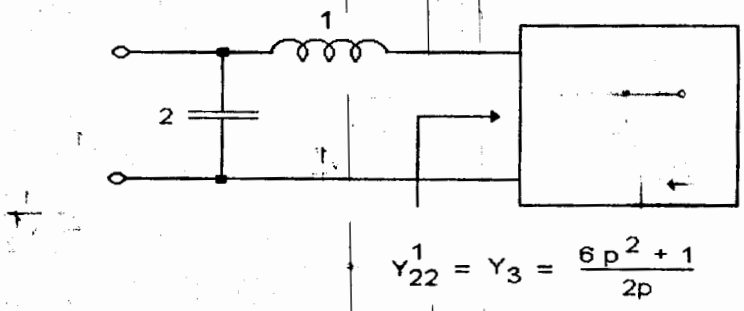


Figura 2.26. Circuito de dos puertas para realizar los parámetros Y_{ij}

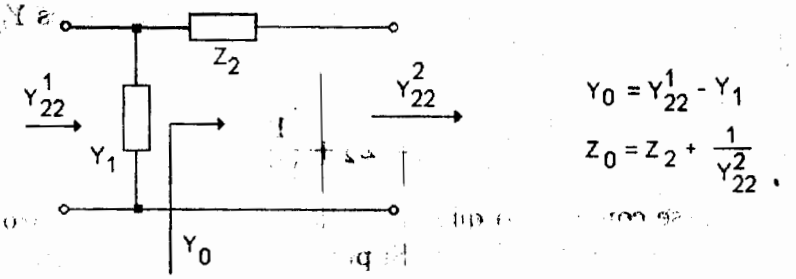


Figura 2.27. Circuito para realizar el cero de Y_{21} en $\omega = 1$

Y_{21} expresan la atenuación infinita del circuito. Eso significa, que no se transfiere nada desde la entrada a la salida. Primeramente vamos a realizar el polo de la atenuación (cero de la Y_{21}) en $p = \infty$ y despues en $p^2 = -1$. El polo en ∞ se realiza mediante la realización Cauer I. La realización parcial se muestra en el circuito en la figura 2.26

$$Y_{22} = \frac{12p^4 + 12p^2 + 1}{6p^3 + 3p} = 2p + \frac{1}{p + \frac{1}{\frac{6p^2+1}{2p}}}$$

Del circuito en la figura 2.26 se puede ver, que para $\omega = \infty$ la atenuación es infinita y esto significa que la transferencia es igual a cero, como se ve en la ecuación (2.16).

$$Y_{21} = \frac{p^2 + 1}{6p^3 + 3p}|_{p=\infty} = 0 \tag{2.16}$$

Con el circuito en la figura 2.26 se realizó el primer cero en $p = \infty$. Ahora tenemos que realizar el cero de la admitancia de trasferencia Y_{21} en $p = \pm j$, $\omega = \pm 1$. El cero en $\omega = \pm 1$ se realiza mediante el circuito de la figura 2.27.

$$Y_1 = Y_{22}^1|_{p^2=-1} = \frac{6p^2 + 1}{2p} = p\frac{5}{2}$$

Entonces la admitancia Y_1 es el capacitor con el valor cinco medios, $C_1 = \frac{5}{2}$. La realización parcial está mostrada en la figura 2.28. Ahora necesitamos calcular la admitancia Y_0.

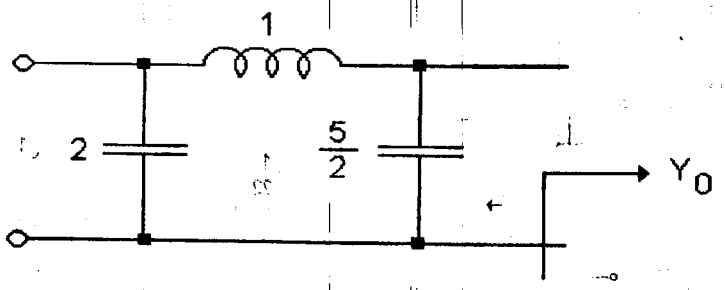


Figura 2.28. Circuito parcial que realiza las admitancias Y_{22} y Y_{21}

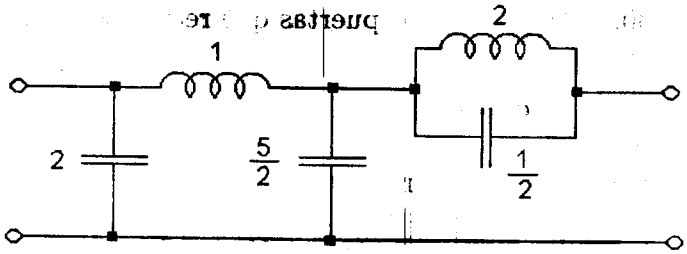


Figura 2.29. Circuito de dos puertas que realiza las admitancias Y_{22} y Y_{21}

$$Y_0 = \frac{6p^2+1}{2p} - \frac{5p}{2} = \frac{p^2+1}{2p}$$

$$Z_0 = \frac{2p}{p^2+1} = \frac{1}{\frac{p}{2}+\frac{1}{2p}}$$

La impedancia Z_0 se realiza mediante el circuito LC paralelo con los valores $C_4 = \frac{1}{2}$ y $L_4 = 2$. La estructura completa que realiza los parametros Y_{21} y Y_{22} se muestra en la figura 2.29. De este circuito podemos ver que el polo de transferencia en $\omega = 1$ está realizado mediante el circuito paralelo, mientras el polo de transferencia en $\omega = \infty$ se realiza con la inductancia. La impedancia de la inductancia para $\omega = \infty$ es infinita y se trata como el circuito abierto para $\omega = \infty$, entonces de entrada a salida no se transfiere nada.

vspace3mm **Ejemplo 14.**

Realizar el circuito de dos puertas si se conocen los parámetros

$$Z_{12} = \frac{(p^2+1)(p^2+2)}{8p^p + 15p^3 + 6p}$$

$$Z_{22} = \frac{5p^4 + 8p^2 + 2}{8p^5 + 15p^3 + 6p}$$

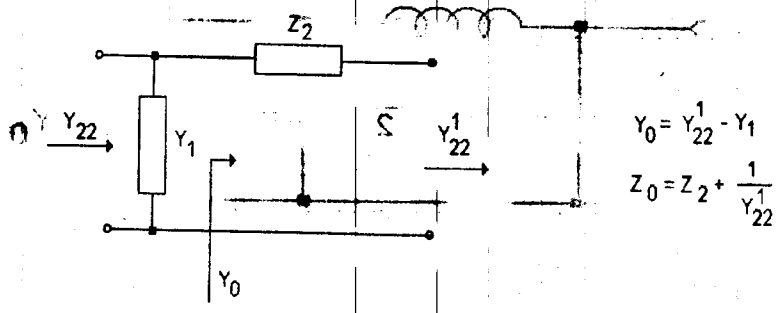


Figura 2.30. Circuito de dos puertas que realiza los parámetros Y_{ij}

Los ceros de la impedancia de transferencia (polos de la atenuación) están en $\omega = \pm 1$, $\omega = \pm\sqrt{2}$ y en $\omega = \infty$. Primero vamos a realizar el cero en $\omega = \pm 1$. Se calcula la admitancia Y_1 del circuito en la figura 2.30 mediante la ecuación

$$Y_1 = \frac{1}{Z_{22}}|_{p^2=1} = \frac{p(8p^4 + 15p^2 + 6)}{5p^4 + 8p^2 + 2}|_{p^2=1} = p$$

La admitancia Y_1 es el capacitor $c_1 = 1$. Ahora se calcula la admitancia Y_0 y después Z_0.

$$Y_0 = \frac{8p^5 + 15p^3 + 6p}{5p^4 + 8p^2 + 2} - p = \frac{(p^2+1)(3p^3+4p)}{5p^4 + 8p^2 + 2}$$

$$Z_0 = \frac{5p^4 + 8p^2 + 2}{(p^2+1)(3p^3+4p)} = \frac{Ap}{p^2+1} + Z_{22}^1 = Z_2 + Z_{22}^1$$

Se calcula la constante A:

$$A = \frac{5p^4 + 8p^2 + 2}{3p^4 + 4p^2}|_{p^2-1} = 1$$

La impedancia Z_2 toma la forma:

$$Z_2 = \frac{p}{p^2+1} = \frac{1}{p + \frac{1}{p}}$$

La impedancia Z_2 es el circuito paralelo LC con los valores $l_2 = 1$ y $c_2 = 1$. El circuito que realizamos está en la figura 2.31. Ahora es necesario calcular Z_{22}^1, el procedimiento de realización es el mismo, pero para realizar el otro cero de la impedancia Z_{21}:

$$Z_{11}^1 = \frac{5p^4 + 8p^2 + 2}{(p^2+1)(3p^3+4p)} - \frac{p}{p^2+1} = \frac{(p^2+1)(2p^2+2)}{p^2+1)(3p^3+4p)}$$

El término $(p^2 + 1)$ en el numerador y en el denominador se elimina y la impedancia Z_{11} toma la forma:

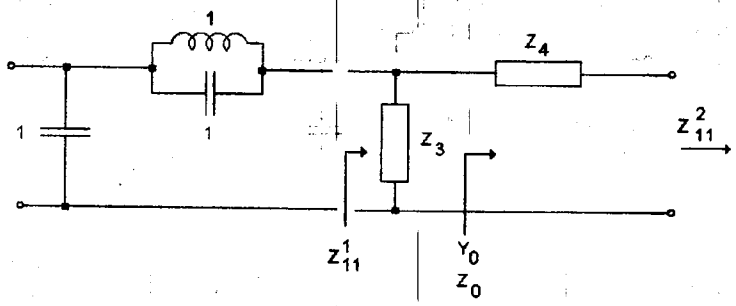


Figura 2.31. Circuito de dos puertas que realiza las admitancias Z_{11} y Z_{12}

$$Z_{11}^1 = \frac{2p^2+2}{3p^3+4p}$$

La impedancia Z_3 se obtiene mediante la siguiente ecuación:

$$Y_3 = \frac{1}{Z_{11}^1}|_{p^2=-2}$$

$$Y_3 = \frac{p(3p^2+4}{2p^2+2}|_{p^2=-2} = p$$

Entonces la impedancia Z_3 es un capacitor con el valor 1. Seguimos calculando la admitancia Y_0

$$Y_0 = \frac{1}{Z_{11}^1} - Y_3 = \frac{3p^3-4p}{2p^2+2} - p = \frac{p^3+2p}{2p^2+2}$$

$$Z_0 = \frac{2p^2+2}{p(p^2+2)} = \frac{Ap}{p^2+2} + Z_{11}^2 = Z_4 + Z_{11}^2$$

Calculando la constante A obtenemos Z_4

$$A = \frac{2p^2+2}{p^2}|_{p^2=-2} = 1$$

$$Z_4 = \frac{p}{p^2+2} = \frac{1}{p+\frac{2}{p}}$$

La impedancia Z_4 es el circuito paralelo LC con los valores $l = \frac{1}{2}$ y $c = 1$. El circuito se ve en la figura 2.32. Nos queda calcular el último elemento Z_{11}^2

$$Z_{11}^2 = Z_0 - Z_4 = \frac{2p^2+2}{p(p^2+2)} - \frac{p}{p^2+2} = \frac{1}{p}$$

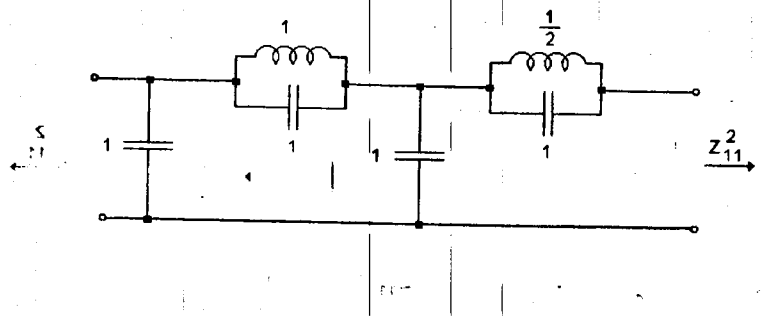


Figura 2.32. Circuito de dos puertas que realiza las admitancias Z_{11} y Z_{12}

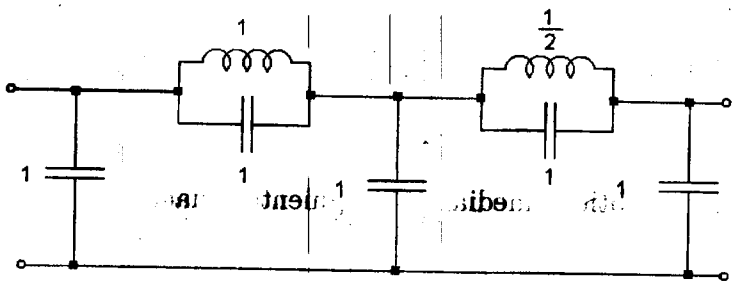


Figura 2.33. Circuito de dos puertas que realiza las admitancias Z_{11} y Z_{12}

El último elemento es el capacitor y la realización completa de las impedancias Z_{11} y Z_{12} se muestra en la figura 2.33. Los circuitos paralelos realizan los ceros en $\omega = 1$ y en $\omega = \sqrt{2}$. Los capacitores que son conectados a tierra realizan el cero en $\omega = \infty$.

Ejemplo 15.

Realizar con el circuito de dos puertas los parámetros

$$Z_{12} = \frac{(p^2+1)(p^2+2)}{8p^p + 15p^3 + 6p}$$

$$Z_{11} = \frac{5p^4 + 8p^2 + 2}{8p^5 + 15p^3 + 6p}$$

Los ceros de la impedancia de transferencia (polos de la atenuación) están en $\omega = \pm 1$, $\omega = \pm\sqrt{2}$ y en $\omega = \infty$. En este ejemplo vamos a realizar el cero de Y_{12} en ∞ despues en $\omega = \pm 1$ y a final el cero de Y_{12} en $\omega = \sqrt{2}$. La impedancia Z_{11} se desarrolla en quebrado de escalera y se hace solo una vez, como se ve en la ecuación.

$$Z_{11} = \cfrac{1}{\frac{8p}{5} + \cfrac{1}{\frac{5p^4+8p^2+2}{\frac{11p^3}{5}+\frac{14p}{5}}}}$$

La impedancia Z_{11}^1 es el último término en el quebrado de escalera y toma la forma:

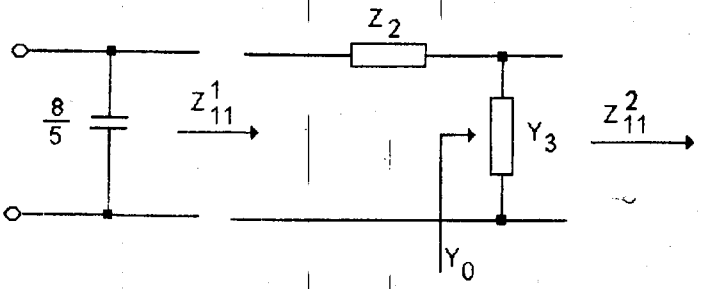


Figura 2.34. Circuito de dos puertas que realiza las admitancias Z_{11} y Z_{12}

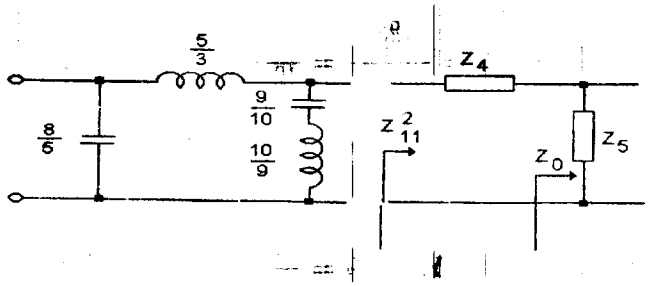


Figura 2.35. Circuito de dos puertas que realiza las admitancias Z_{11} y Z_{12}

$$Z_{11}^1 = \frac{25p^4 + 40p^2 + 10}{11p^3 + 14p}$$

La realización no completa se muestra en la figura 2.34. Ahora vamos a realizar el cero de Z_{12} en $p^2 = -1$ y se obtiene la impedancia Z_2.

$$Z_{11}|_{p^2-1} = Z_2 = \frac{1}{p}\frac{25p^4 + 40p^2 + 10}{11p^3 + 14p}|_{p^2=-1} = \frac{-5}{3p} = \frac{p}{p^2}\frac{-5}{3}|_{p^2=-1} = \frac{5p}{3}$$

La impedancia Z_2 es el inductor que tiene el valor $\frac{5}{3}$. Ahora podemos calcular la impedancia Z_0.

$$Z_0 = Z_{11} - Z_2 = \frac{25p^4 + 40p^2 + 10}{11p^3 + 14p} - \frac{5p}{3} = \frac{20p^4 + 50p^2 + 30}{33p^3 + 42p}$$

$$Y_0 = \frac{33p^3 + 42p}{(p^2+1)(20p^2+30)} = \frac{Ap}{p^2+1} + Y_{11}^2 = Y_3 + Y_{11}^2$$

Si se calcula el constante A se puede desarrollar la admitancia Y_3. La admitancia Y_3 es el circuito LC en serie. La inductancia l_3 tiene el valor $\frac{10}{9}$ y el capacitor $c_3 = \frac{9}{10}$. El circuito se muestra en la figura 2.35 y queda realizar mediante las impedancias Z_4 y Z_5 el último cero de la impedancia Z_{12} en $p = -\sqrt{2}$.

$$A = \frac{33p^2 + 42}{20p^2 + 30}|_{p^2-1} = \frac{9}{10}$$

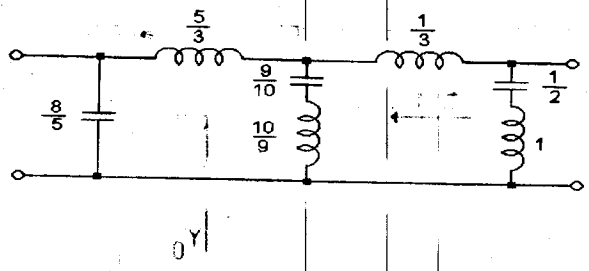


Figura 2.36. Circuito de dos puertas que realiza las admitancias Z_{11} y Z_{12}

$$Y_3 = \frac{\frac{9p}{10}}{p^2+1} = \frac{1}{\frac{10p}{9} + \frac{10}{9p}}$$

La admitancia Y_3 se realiza con un circuito LC en la forma serial. Si se conoce Y_3 se puede calcular Z_{11}^2 mediante la ecuación

$$Y_0 - Y_3 = \frac{1}{Z_{11}^2}$$

$$\frac{1}{Z_{11}^2} = \frac{33p^3+42p}{(p^2+1)(20p^2+30)} - \frac{\frac{9p}{10}}{p^2+1} = \frac{15p(p^2+1)}{(p^2+1)(20p^3+30)}$$

$$Z_{11}^2 = \frac{20p^2+30}{15p}$$

Nos queda realizar el último cero de la impedancia de transferencia Z_{12} en $p^2 = -1$

$$Z_4 = Z_{11}^2|_{p^2=-2} = \frac{1}{p}\frac{-40+30}{15} = \frac{-10}{15p} = \frac{-10p}{15p^2}|_{p^2=-2} = \frac{p}{3}$$

La impedancia Z_4 se realiza mediante una inductancia con el valor $\frac{1}{3}$. Todavía es necesario calcular la impedancia Z_5, pero primeramente se calcula la impedancia Z_0.

$$Z_0 = Z_{11}^2 - Z_4 = \frac{15p^2+30}{15p} - \frac{p}{3} = Z_5 = p + \frac{2}{p}$$

La impedancia $Z_0 = Z_5$ es el circuito LC serial. La inductancia tiene el valor 1 H y el condensador 0.5 F. El circuito completo se muestra en la figura 2.36.

Ejemplo 16.

Realizar el circuito de dos puertas si se conocen los parámetros Z_{11} y Z_{21}.

$$Z_{21} = \frac{1}{(p+1)(p+3)} \qquad Z_{11} = \frac{(p+2)(p+5)}{(p+1)(p+3)}$$

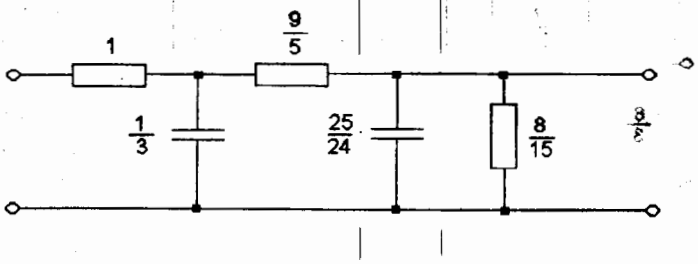


Figura 2.37. Circuito de dos puertas que realiza las admitancias Z_{11} y Z_{12}

Cerca de origen hay un polo y por eso el circuito es RC. Todos los ceros son en ∞ y por eso la impedancia Z_{11} se desarrolla en cadena de escalera.

$$Z_11 = \frac{p^2+7p+10}{p^2+4p+3} = 1 + \cfrac{1}{\frac{s}{3} + \cfrac{1}{\frac{9}{5} + \cfrac{1}{\frac{25s}{24} + \cfrac{1}{\frac{8}{15}}}}}$$

El circuito se muestra en la figura 2.37.

Ejemplo 17.

Realizar el circuito de dos puertas, si se conocen los parámetros Z_{11} y Z_{21}.

$$Z_{21} = \frac{p^2}{(p+1)(p+3)} \qquad Z_{11} = \frac{(p+2)(p+4)}{(p+1)(p+3)}$$

Cerca del origen hay un polo y por eso el circuito es RC. Todos los ceros son en ω=0 y por eso la impedancia Z_{11} se desarrolla en cadena de escalera, pero ahora el grado de p en los polinomios es en forma ascendente.

$$Z_{11} = \frac{10+7p+p^2}{3+4p+p^2} = \frac{1}{\frac{10+7p+p^2}{3+4p+p^2}} = \cfrac{1}{\frac{3}{8} + \cfrac{1}{\frac{32}{7p} + \cfrac{1}{\frac{49}{88} + \cfrac{1}{\frac{968}{21p} + \frac{1}{\frac{1}{44}}}}}}$$

El circuito se muestra en la figura 2.38. Podemos ver en la figura, que el cero de transferencia es para $\omega = 0$. El capacitor para $\omega = 0$ es un circuito bierto y la señal con la frecuencia cero no se transfiere de entrada a salida. Para $\omega = 0$ el capacitor tiene impedancia infinita $Z_c = \frac{1}{j\omega c}|_{\omega=0} = \infty$.

Ejemplo 18.

Realizar el circuito de dos puertas, si se conocen los parámetros Z_{11} y Z_{21}.

$$Z_{21} = \frac{p}{(p+1)(p+3)} \qquad Z_{11} = \frac{(p+2)(p+4)}{(p+1)(p+3)}$$

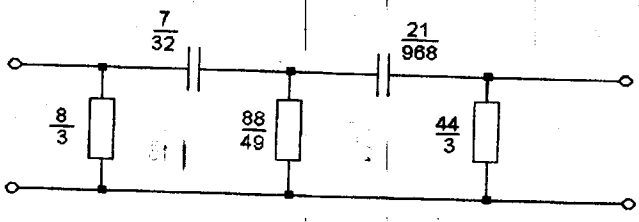


Figura 2.38. Circuito de dos puertas que realiza las admitancias Z_{11} y Z_{12}

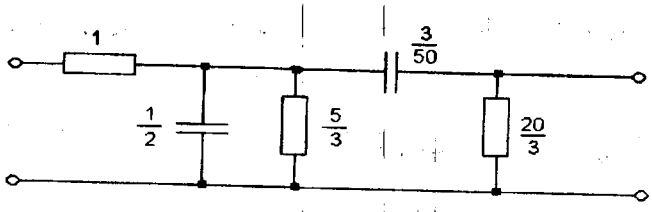


Figura 2.39. Circuito de dos puertas que realiza las admitancias Z_{11} y Z_{12}

Cerca del origen esta un polo y por eso el circuito es RC. Un cero de Z_{21} está en ω=0 y el otro cero está en $\omega = \infty$ y por eso la impedancia Z_{11} se desarrolla en cadena de escalera, pero ahora se desarrolla Z_{11} primero como Cauer I y después como Cauer II.

$$Z_{11} = \frac{p^2+6p+8}{p^2+4p+3} = 1 + \cfrac{1}{\frac{s}{2} + \frac{3}{5} + \cfrac{1}{\frac{50}{3s} + \frac{1}{20}}}$$

El circuito se muestra en la figura 2.39. Podemos ver en la figura, que el cero de transferencia es para $\omega = 0$ y tambien para $\omega = \infty$. El segundo capacitor en el circuito para $\omega = 0$ es abierto y la señal con la frecuencia cero no se transfiere de entrada a salida. El primer capacitor para $\omega = \infty$ está en corto y las señales con frecuencias infinitas tampoco se transfieren de entrada a salida. Entonces el circuito realiza el cero para $\omega = \infty$ y para $\omega = 0$.

Capítulo 3

Transformación de las plantillas.

Los factores que alteran las señales son:

- Distorsión
- Interferencia
- Ruido
- Atenuación

Para eliminar esos factores se necesitan filtros que dejen pasar las señales que nos interesan y que no permiten el paso de las señales inútiles. El ruido, por ejemplo, puede ser en las frecuencias altas o también en las frecuencias bajas. Para eliminar el ruido en las frecuencias altas se utilizan los filtros pasa bajas y los filtros pasa altas se utilizan para eliminar el ruido en las frecuencias bajas. Si el ruido se encuentra en las frecuencia altas y bajas, se utilizan para quitar el ruido y dejar pasar por ejemplo la voz, el filtro pasa banda. Si queremos limitar la influencia de interferencia entonces se utiliza supresor de banda o un filtro adaptable, que cambia los valores de los elementos, dependiendo de como se cambia la frecuencia de la señal de interferencia. Las plantillas de los filtros de pasa bajas PBF, pasa altas PA, paso banda PB y supresor de banda SB se muestra en la figura 3.1.

Todos los tipos de filtros se pueden transformar en la pasa bajas normalizado (PBFN). Los pasa bajas normalizados tiene la frecuencia de corte en $\Omega_1 = 1$. La ecuación que nos transforma pasa bajas a pasa bajas normalizado es

$$\Omega = \frac{\omega_1}{\omega}$$

Pasa altas se transforman a pasa bajas normalizado mediante la ecuación

$$\Omega = -\frac{\omega_{-1}}{\omega}$$

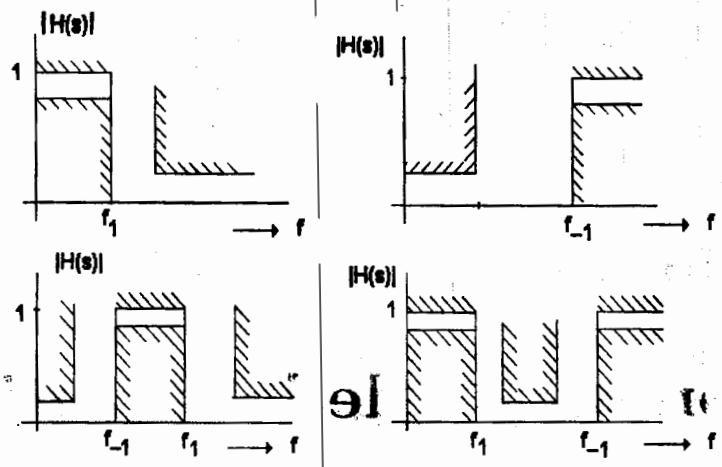


Figura 3.1. Las plantillas de pasa bajas, pasa altas, paso banda y supresor de banda

Paso banda se transforma a pasa bajas normalizado mediante la ecuación

$$\Omega = \frac{\omega^2 - \omega_1\omega_{-1}}{\omega(\omega_1 - \omega_{-1})}$$

Supresor de banda se transforma a pasa bajas normalizado como

$$\Omega = \frac{\omega(\omega_1 - \omega_{-1})}{\omega^2 - \omega_1\omega_{-1}}$$

En la figura 3.2 se puede ver como se transforman las plantillas de los filtros a uno pasa bajas normalizado. En los ejemplos se muestra la transformación de todos tipos de plantillas a la plantilla pasa bajas normalizado.

Ejemplo 1.

Transformar la plantilla de pasa bajas de la figura a la plantilla de pasa bajas normalizado.

Solución:

Primero se calcula la frecuencia del corte normalizada Ω_1 y después Ω_2

$$\Omega_1 = \frac{3400}{3400} = 1$$

$$\Omega_2 = \frac{4700}{3400} = 1.382$$

pasa bajas normalizado se muestra en la figura 3.3 b).

Ejemplo 2.

Transformar la plantilla de pasa altas de la figura 3.4a a la plantilla de pasa bajas normalizado.

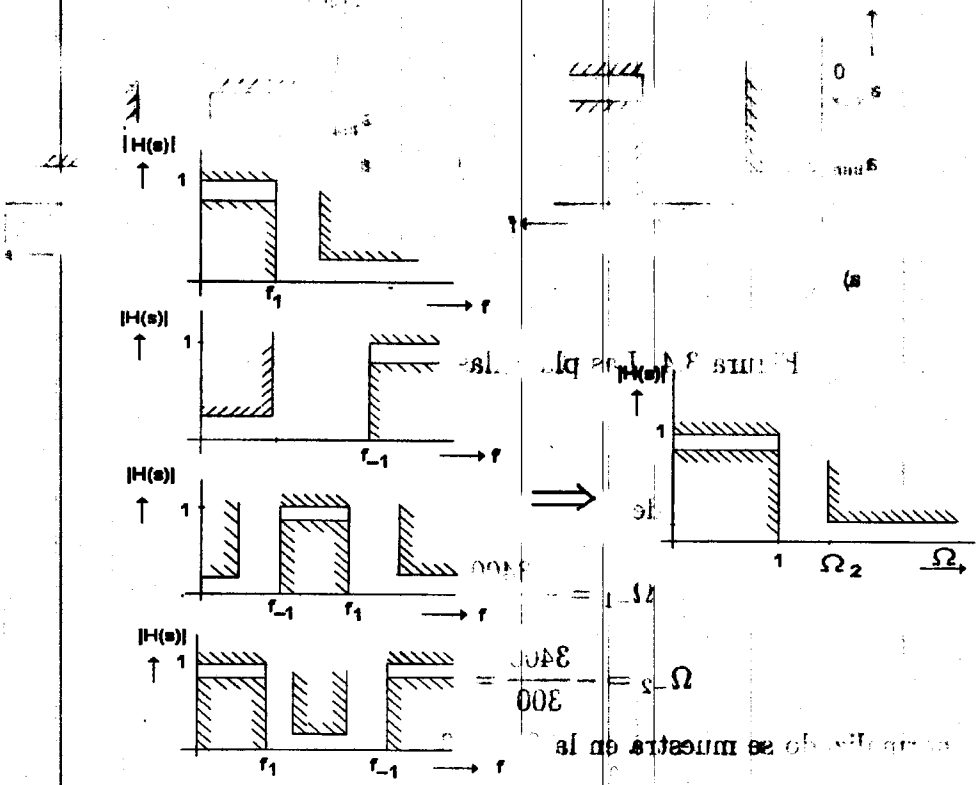


Figura 3.2. La transformación de las plantillas PBF, PA, PB y SB a PBFN

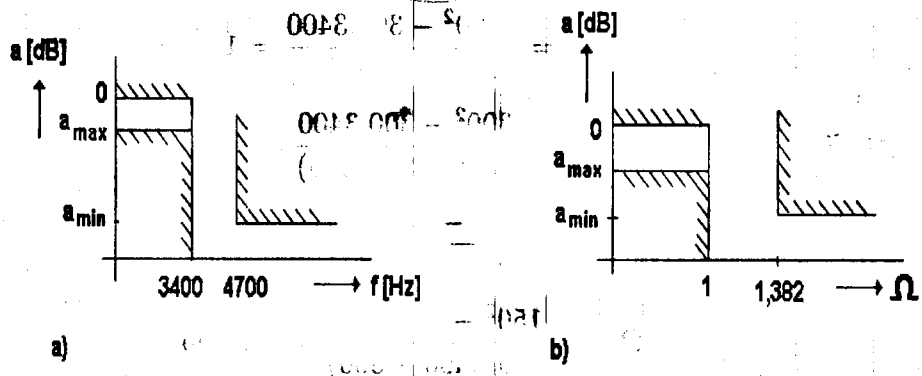


Figura 3.3. Las plantillas de PBF y PBFN

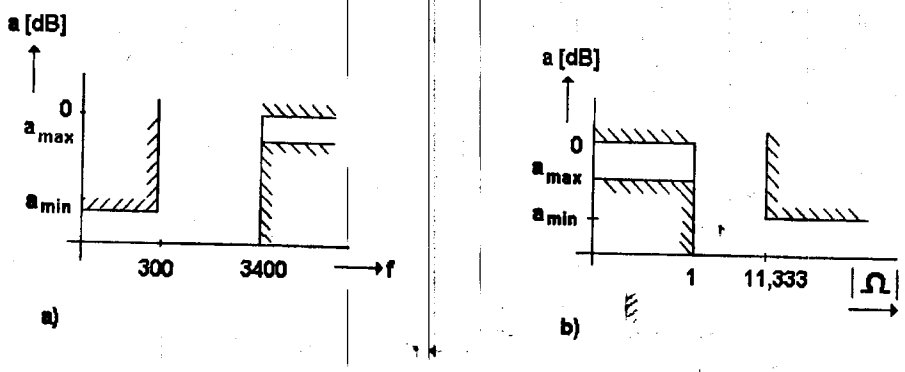


Figura 3.4. Las plantillas de PA y PBFN

Solución:

Primero se calcula la frecuencia de corte normalizado Ω_{-1} y después Ω_{-2}

$$\Omega_{-1} = -\frac{3400}{3400} = -1$$

$$\Omega_{-2} = -\frac{3400}{300} = -11,333$$

pasa bajas normalizado se muestra en la figura 3.3b

Ejemplo 3.

Transformar la plantilla de paso banda de la figura 3.5a a la plantilla de pasa bajas normalizado.

Solución:

Primero se calcula la frecuencia de corte normalizado Ω_1, Ω_{-1} y después Ω_{-2}, Ω_2

$$\Omega_1 = \frac{3400^2 - 300.3400}{3400(3400 - 300)} = 1$$

$$\Omega_{-1} = \frac{300^2 - 300.3400}{300(3400 - 300)} = -1$$

$$\Omega_2 = \frac{4700^2 - 3400.300}{4700(3400 - 300)} = 1,446$$

$$\Omega_{-2} = \frac{150^2 - 3400.300}{150(3400 - 300)} = -2,145$$

pasa bajas normalizado se muestra en la figura 3.5b

Ejemplo 4.

Transformar la plantilla de supresor de banda de la figura 3.6a) a la plantilla de pasa bajas normalizado.

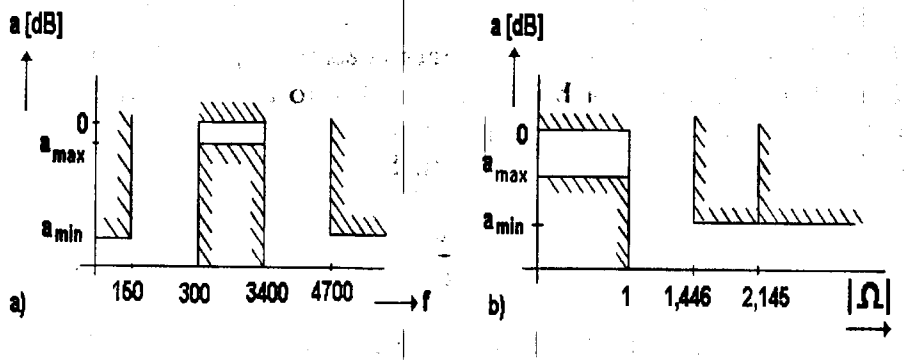


Figura 3.5. Las plantillas de PB y PBFN

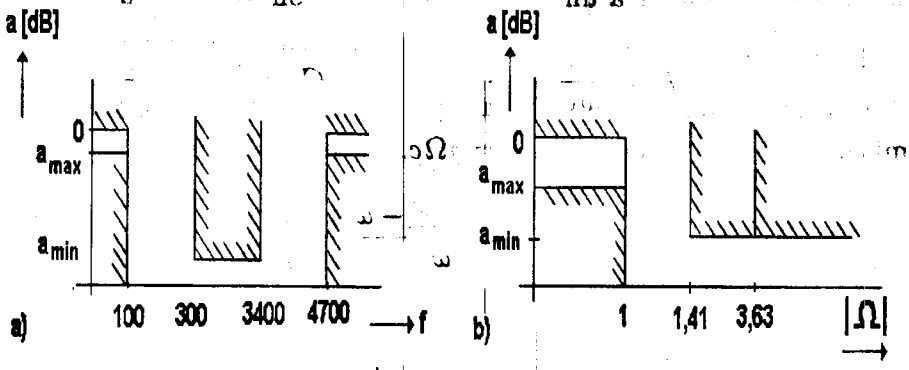


Figura 3.6. Las plantillas de SB y PBFN

Solución:

Primero se calcula la frecuencia del corte normalizada Ω_1, Ω_{-1} y después Ω_{-2}, Ω_2. El pasa bajas normalizado se muestra en la figura 3.6b

$$\Omega_1 = \frac{100(100-4700)}{100^2 + 100.4700} = 1$$

$$\Omega_{-1} = \frac{4700(100-4700)}{4700^2 - 100.4700} = -1$$

$$\Omega_2 = \frac{300(100-4700)}{300^2 - 100.4700} = 3,63$$

$$\Omega_{-2} = \frac{3400(100-4700)}{3400^2 - 100.4700} = -1,41$$

En los catálogos de filtros se encuentran las estructuras de un filtro pasa bajas normalizados. Para cumplir los especificaciones de la plantilla es necesario transformar la estructura normalizado a una estructura denormalizada PBF, PA, PB o SB. A continuación se muestra como se obtiene una estructura denormalizada paso banda si se conoce pasa bajas normalizado.

- **Transformación pasa bajas normalizado a paso banda.**

La impedancia de inductancia es $z = j\Omega l$. Si se systituye por Ω

$$\Omega = \frac{\omega^2 - \omega_1\omega_{-1}}{\omega(\omega_1 - \omega_{-1})}$$

se obtiene

$$Z(j\omega) = j\omega\frac{l}{\omega_1 - \omega_{-1}} + \frac{1}{j\omega\frac{1}{\frac{\omega_1-\omega_{-1}}{l\omega_1\omega_{-1}}}} = pL_1 + \frac{1}{pC_1}$$

El inductor se transforma a un circuito serie LC con los valores

$$L_1 = \frac{l}{\omega_1 - \omega_{-1}} \qquad C_1 = \frac{\omega_1 - \omega_{-1}}{l\omega_1\omega_{-1}}$$

La admitancia de un capacitor es $y = j\Omega c$. Si se sustituye por Ω

$$\Omega = \frac{\omega^2 - \omega_1\omega_{-1}}{\omega(\omega_1 - \omega_{-1})}$$

se obtiene

$$Y(j\omega) = j\omega\frac{c}{\omega_1 - \omega_{-1}} + \frac{1}{j\omega\frac{1}{\frac{\omega_1-\omega_{-1}}{c\omega_1\omega_{-1}}}} = pC_2 + \frac{1}{pL_2}$$

El capacitor se transforma a un circuito paralelo LC con los valores

$$C_2 = \frac{c}{\omega_1 - \omega_{-1}} \qquad L_2 = \frac{\omega_1 - \omega_{-1}}{c\omega_1\omega_{-1}}$$

En la figura 3.7 se muestra la transformación de pasa bajas normalizado a paso banda.

- **Transformación pasa bajas normalizado a supresor de banda.**

La impedancia de inductancia es $z = j\Omega l$. Si se sustituye por Ω

$$\Omega = -\frac{\omega(\omega_1 - \omega_{-1})}{\omega^2 - \omega_1\omega_{-1}}$$

obtenemos

$$Z = j\Omega l = -jl\frac{\omega(\omega_1 - \omega_{-1})}{\omega^2 - \omega_1\omega_{-1}} = \frac{1}{\frac{j\omega}{l(\omega_1-\omega_{-1})} + \frac{\omega_1\omega_{-1}}{j\omega l(\omega_1-\omega_{-1})}}$$

El inductor se transforma a un circuito paralelo LC con los valores

$$L_1 = \frac{l(\omega_1 - \omega_{-1})}{\omega_1\omega_{-1}} \qquad C_1 = \frac{1}{l(\omega_1 - \omega_{-1})}$$

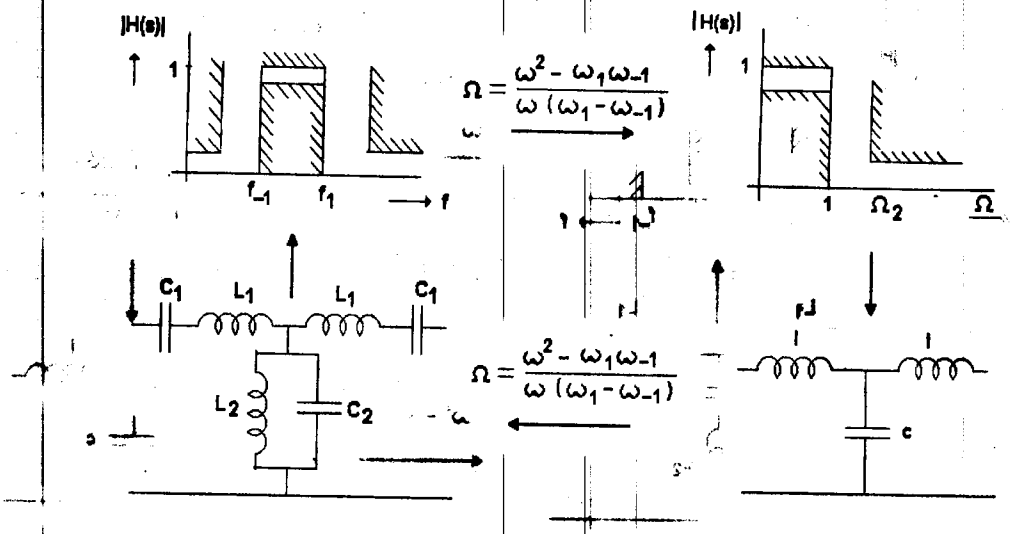


Figura 3.7. Transformación PBF a PB

La impedancia normalizada de un capacitor es $z = \frac{1}{j\Omega c}$. Si se sustituye por Ω

$$\Omega = -\frac{\omega(\omega_1 - \omega_{-1})}{\omega^2 - \omega_1.\omega_{-1}}$$

obtenemos

$$Z(j\omega) = \frac{-1}{jc}\frac{\omega^2 - \omega_1\omega_{-1}}{\omega(\omega_1 - \omega_{-1})} = \frac{j\omega}{(\omega_1 - \omega_{-1})} + \frac{\omega_1\omega_{-1}}{j\omega c(\omega_1 - \omega_{-1})}$$

El inductor se transforma a un circuito serie LC con los valores

$$C_2 = \frac{c(\omega_1 - \omega_{-1})}{\omega_1\omega_{-1}} \qquad L_2 = \frac{1}{c(\omega_1 - \omega_{-1})}$$

En la figura 3.8 se muestra la transformación de pasa bajas normalizado a supresor de banda.

- **Transformación de pasa bajas normalizado a pasa bajas.**

La impedancia del inductor normalizado es $z = j\Omega l$ y se transforma con la ecuación

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_1}$$

a un inductor

$$Z = \frac{j\omega}{\omega_1} l = pL_1$$

con el valor

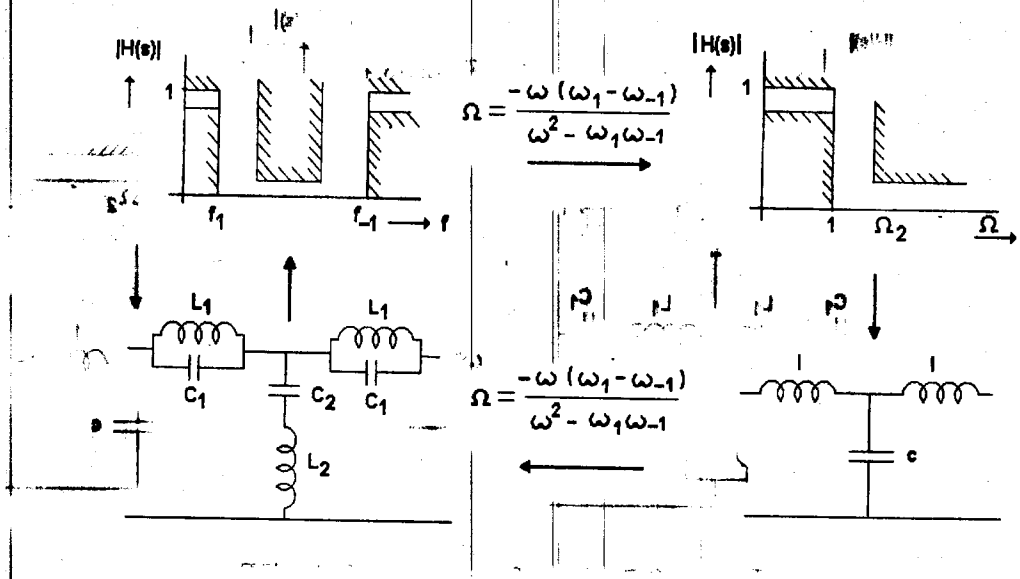


Figura 3.8. Transformación PBF a SB

$$L_1 = \frac{l}{\omega_1}$$

La admitancia del capacitor normalizado es $y = j\Omega c$ y se transforma con la ecuación

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_1}$$

a un capacitor

$$Y = \frac{j\omega}{\omega_1} c = pC_2$$

con el valor

$$C_2 = \frac{c}{\omega_1}$$

En la figura 3.9 se muestra la transformación de pasa bajas normalizado al pasa bajas original.

- **Transformación pasa bajas normalizado a pasa altas.**

La impedancia del inductor normalizado es $z = j\Omega l$ y se transforma con la ecuación

$$\Omega = \frac{-\omega_{-1}}{\omega}$$

a un capacitor C_1

$$Z = \frac{\omega_{-1} l}{j\omega_1} = \frac{1}{pC_1}$$

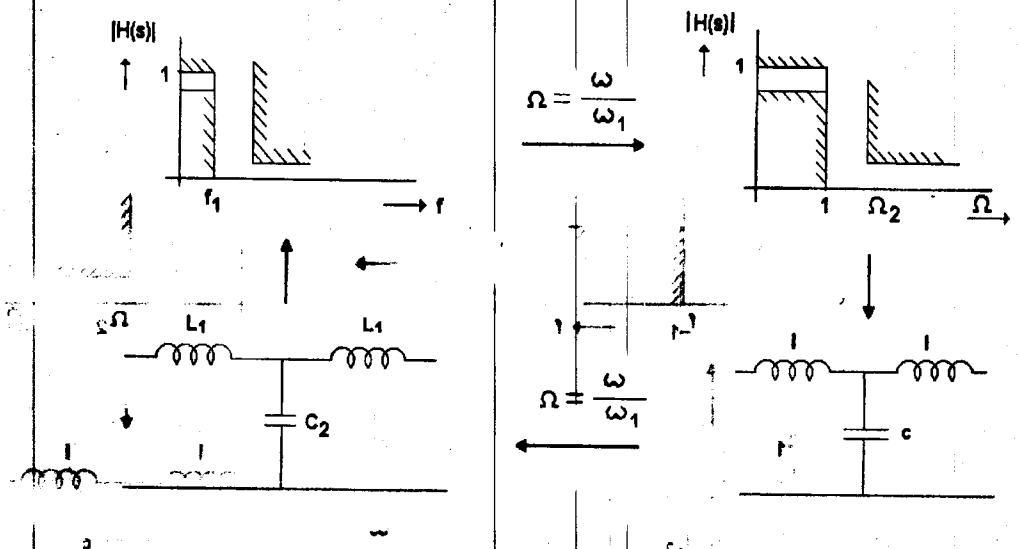


Figura 3.9. Transformación PBF a SB

con el valor

$$C_1 = \frac{1}{\omega_1 l}$$

La admitancia del capacitor normalizado es $y = j\Omega c$ y se transforma con la ecuación

$$\Omega = \frac{-\omega_{-1}}{\omega}$$

a un inductor

$$Y = j\Omega c = \frac{\omega_1}{j\omega} c = \frac{1}{j\omega L_2}$$

con el valor

$$L_2 = \frac{1}{c\omega_1}$$

En la figura 3.10 se muestra la transformación del circuito pasa bajas normalizado a circuito pasa altas denormalizado.

Ejemplo 5.

Calcular el filtro paso banda si el orden del filtro es n=2 y la impedancia en la salida y entrada conectada es $R_0 = 600\ Ohm$. Las especificaciones de la plantilla del filtro están en la figura 3.11a

La estructura normalizada de segundo orden de Butterworth se muestra en la figura 3.11c. Los valores de pasa bajas normalizados son $l_1 = \sqrt{2}$ y $c_2 = \sqrt{2}$. Si se utilizan las ecuaciones para la transformación pasa bajas normalizado a paso banda, el inductor se transforma a circuito serie LC con L_1, C_1.

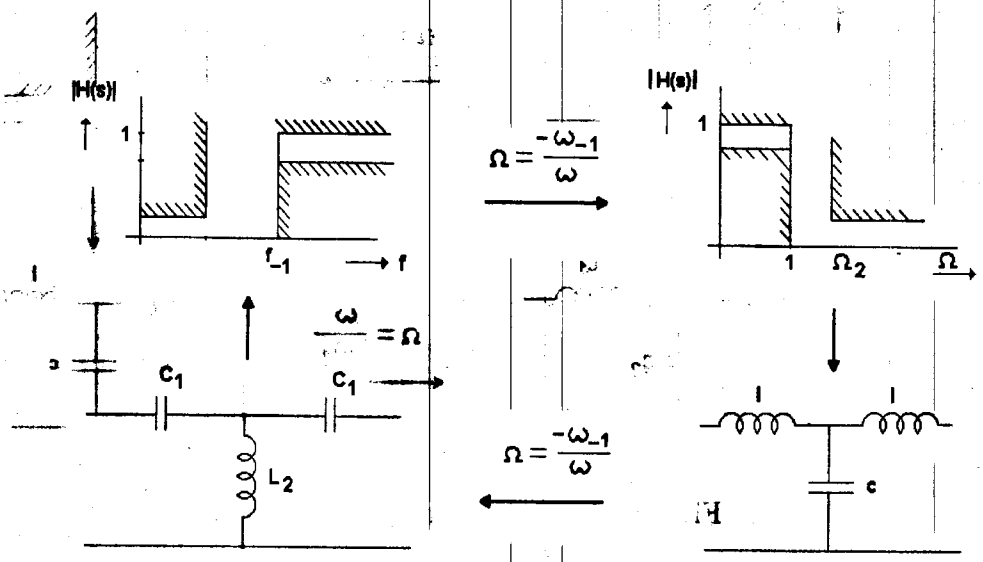


Figura 3.10. Transformación PBF y SB

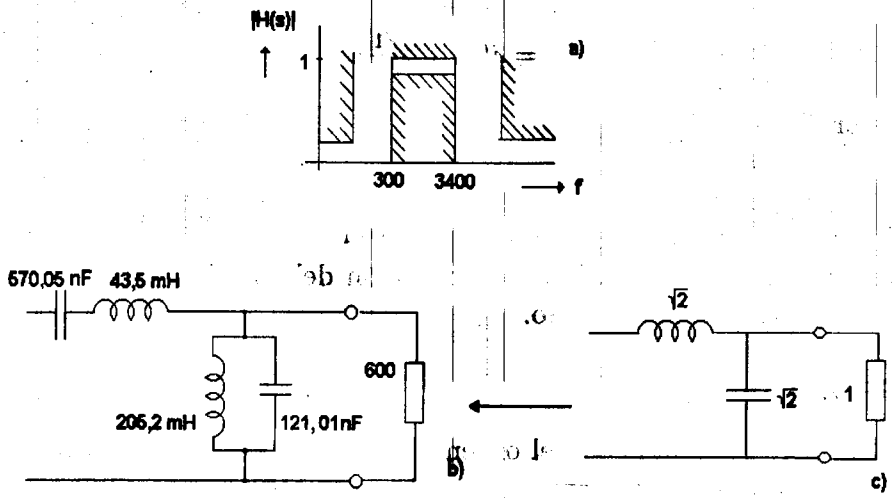


Figura 3.11. Transformación PBF y PB

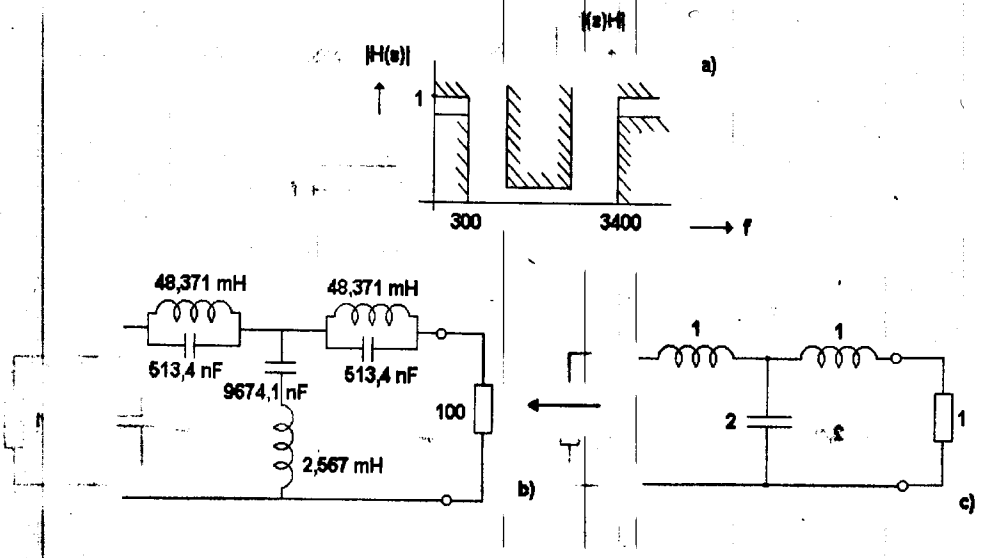


Figura 3.12. Transformación PBF a PB

$$L_1 = \frac{l_1 R_0}{2\pi.(f_1 - f_{-1})} = \frac{1}{2.\pi(3400 - 300)} = 0,0453\ H$$

$$C_1 = \frac{(f_1 - f_{-1})}{2.\pi R_0 l_1 f_1 f_{-1}} = \frac{3400 - 300}{2\pi 600.\sqrt{2}.300.3400} = 570,05\ nF$$

y el capacitor se transforma a un circuito paralelo LC con L_2, C_2

$$L_2 = \frac{R_0(f_1 - f_{-1})}{2.\pi c_2 f_1 f_{-1}} = \frac{600(3400 - 300)}{2\pi.\sqrt{2}.300.3400} = 205,2\ mH$$

$$C_2 = \frac{c_2}{2\pi.R_0.(f_1 - f_{-1})} = \frac{\sqrt{2}}{2.\pi.600(3400 - 300)} = 121,01\ nF$$

La estructura de paso banda que cumple las especificaciones de la plantilla figura 3.11a se muestra en la figura 3.11b.

Ejemplo 6.

Calcular el filtro supresor de banda si el orden del filtro es n=3 y la impedancia en la salida y entrada conectada es $R_0 = 100\ Ohm$. Las especificaciones de la plantilla del filtro están en la figura 3.12a. La estructura de tercer orden normalizada de Butterworth se muestra en la figura 3.12c. Los valores de pasa bajas normalizados son $l_1 = l_3 = 1$ y $c_2 = 2$. Si se utilizan las ecuaciones para la transformación pasa bajas normalizado a supresor de banda, el inductor se transforma a un circuito paralelo LC con L_1, C_1.

$$L_1 = \frac{l_1 R_0(f_1 - f_{-1})}{2\pi.f_1.f_{-1}} = \frac{1.100(3400 - 300)}{2.\pi 3400.300} = 48.371\ mH$$

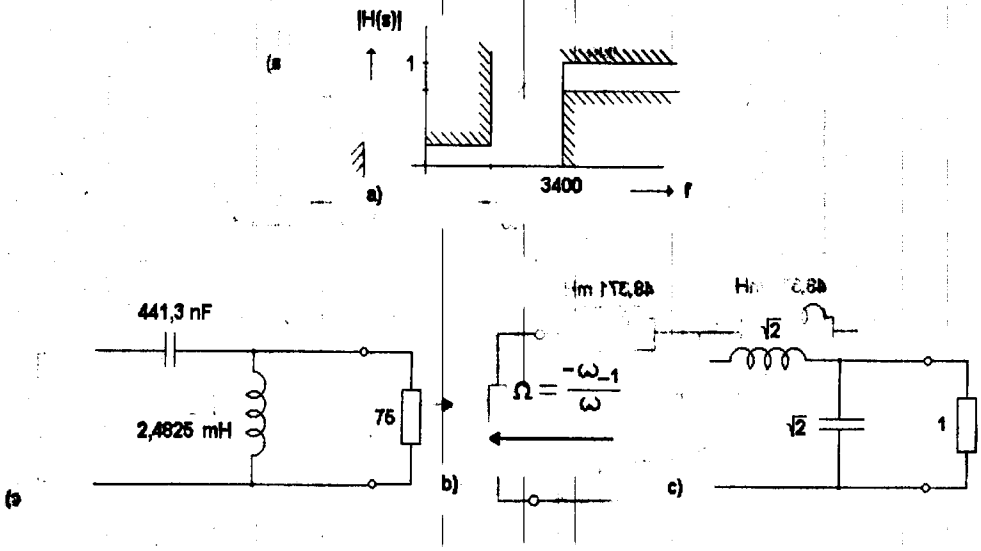


Figura 3.13. Transformación PBF a PB

$$C_1 = \frac{1}{l_1 R_0(f_1 - f_{-1})} = \frac{1}{1.100.2.\pi(3400 - 300)} = 513,4\ nF$$

y el capacitor c_2 se transforma a un circuito serie LC con L_2, C_2

$$L_2 = \frac{R_0}{c_2.\pi(f_1 - f_{-1})} = \frac{100}{2.2\pi.(3400 - 300)} = 2,567\ mH$$

$$C_2 = \frac{c_2(f_1 - f_{-1})}{2\pi f_1.f_{-1}} = \frac{2(3400 - 300)}{2\pi 100.300.3400} = 9674,1\ nF$$

La estructura de supresor de banda que cumple las especificaciones de la plantilla figura 3.12a se muestra en la figura 3.12b.

Ejemplo 7.

Calcular el filtro pasa altas si el orden del filtro es n=2 y la impedancia en la salida y entrada conectada es $R_0 = 75\ Ohm$. Las especificaciones de la plantilla del filtro están en la figura 3.13a. La estructura de segundo orden normalizado de Butterworth se muestra en la figura 3.13c. Los valores de pasa bajas normalizado son $l_1 = \sqrt{2}$ y $c_2 = \sqrt{2}$. Si se utilizan las ecuaciones para la transformación baso bajas normalizado a pasa altas, el capacitor se transforma en inductor L_1.

$$L_1 = \frac{R_0}{cf_1} = \frac{75}{2.\pi 3400.\sqrt{2}} = 2,482\ mH$$

y el inductor l_2 se transforma en capacitor C_2

$$C_2 = \frac{1}{l_2.2.\pi f_1} = \frac{1}{2.\sqrt{2}\pi 3400.75} = 441,33\ nF$$

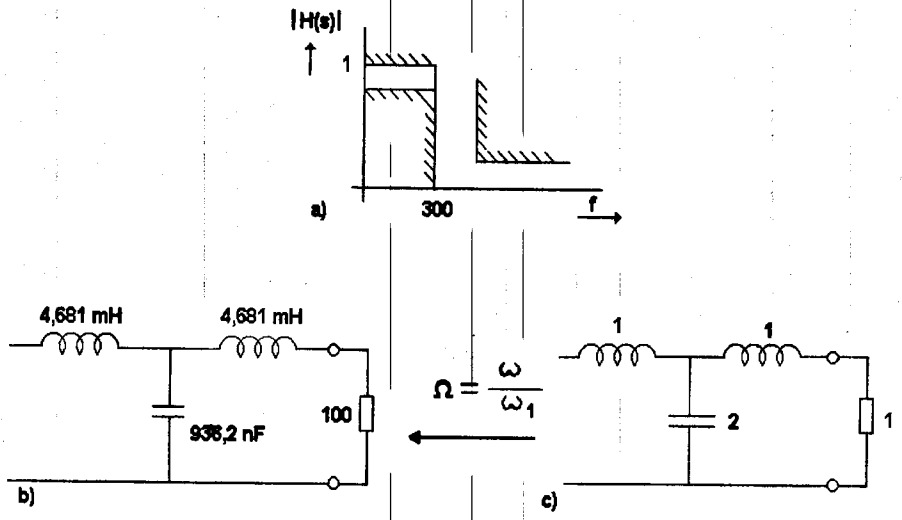


Figura 3.14. Transformación PBF a PB

La estructura pasa bajas que cumple las especificaciones de la plantilla figura 3.13a se muestra en la figura 3.13b.

Ejemplo 8.

Calcular el filtro pasa bajas si el orden del filtro es n=3 y la impedancia en la salida y entrada conectada es $R_0 = 150\ Ohm$. Las especificaciones de la plantilla del filtro están en la figura 3.14a.
La estructura de segundo orden normalizada se muestra en la figura 3.13c. Los valores de pasa bajas normalizado son $l_1 = l_3 = 1$ y $c_2 = 2$. Si se utilizan las ecuaciones para la transformación pasa bajas normalizado a pasa bajas, el capacitor c_2 se transforma en capacitor C_2.

$$C_2 = \frac{c_2}{R_0.2.\pi f_1} = \frac{2}{2.\pi.100.3400} = 936,2\ nF$$

y el inductor l_1 se transforma en inductor $L_1 = L_3$

$$L_1 = L_3 = \frac{l_1.R_0}{2.\pi f_1} = \frac{100}{2.\pi 3400} = 4,681\ mH$$

La estructura pasa bajas que cumple las especificaciones de la plantilla figura 3.13a se muestra en la figura 3.14b.

Capítulo 4

Aproximación de las plantillas

La aproximación de las especificaciones de la plantilla consiste en encontrar la función de transferencia G(s) que cumple las especificaciones de esta. Para la aproximación de las plantillas se usa la ecuación característica (4.1).

$$G(s)G(-s) = 1 + \phi(s)\phi(-s) \tag{4.1}$$

G(s) es la función de transferencia definida por la ecuación (4.2) y también en capítulo 1:

$$G(s) = \sqrt{\frac{U_1 I_1}{U_2 I_2}} \tag{4.2}$$

La función $\phi(s)$ es la función característica a elegir cumpliendo solo una condición. La función característica puede ser cualquier función positiva. La función de transferencia debe cumplir las siguientes condiciones:

- El numerador de G(s) debe ser un polinomio Hurwitz. Eso significa que los ceros deben estar en el lado izguierdo del plano complejo de s.
- Para todas las frecuencias ω la función de transferencia G(s) debe cumplir la condición $|G(j\omega)| \geq 1$

La prueba de G(s) como una función de transferencia válida, no es facil, pero si $\phi(s)$ es una función positiva podemos ver de (4.1) que se cumple la condición $|G(j\omega)| \geq 1$. Si se eligen los ceros de la ecuación de transferencia en el lado izquierdo del plano complejo de G(s) entonces se cumplen las dos condiciones necesarias.

Ejemplo 1.

Compruebe, si G(s) es una función de transferencia válida.

$$G(s) = \frac{s^3 + 5s^2 + 9s + 5}{s^2 - 4}$$

Los ceros de G(s) son en la parte izquierda del plano, como se ve de la siguiente ecuación

$$s^3 + 5s^2 + 9s + 5 = (s+1)(s+2+j)(s+2-j).$$

El numerador de G(s) es un polinomio de Hurwitz, entonces se cumple la primera condición . Ahora vamos a calcular $|G(j\omega)|$

$$|G(j\omega)|^2 = 1 + \frac{16\omega^6 + 96\omega^4 + 488\omega^2 + 399}{16\omega^4 + 8\omega^2 + 1} > 1$$

Para cualquier ω, tiene $|G(j\omega)|$ que ser mayor a uno, entonces se cumple también la segunda condición y la función G(s) es una función de transferencia válida y se puede realizar con elementos LRC positivos. Esto significa que es fisicamente realizable.

4.1 Aproximación de Butterworth

Para la aproximación de Butterworth se elige la función característica $\phi(s) = \epsilon s^n$. La ecuación característica (4.1) para la aproximación de Butterworth toma la forma (4.3) o (4.4).

$$G(s)G(-s) = 1 + (-1)^n \epsilon^2 s^{2n} \tag{4.3}$$

$$|G(\Omega)|^2 = G(j\Omega)G(-j\Omega) = 1 + (-1)^n \epsilon^2 \Omega^{2n} \tag{4.4}$$

El orden del filtro

Para calcular el orden del filtro normalizado en la figura 4.1 necesitamos conocer la atenuación máxima a_{max} en Ω_1 y la atenuación mínima a_{min} en Ω_2.

Para $\Omega = \Omega_1 \triangleq 1$ es la atenuación $a = a_{max}$ y de (4.4) se puede escribir

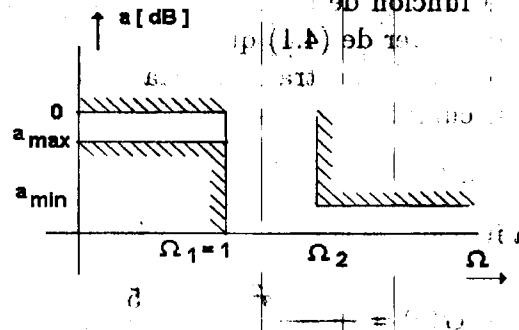


Figura 4.1. La plantilla normalizada de paso bajas

$$e^{2a_{max}} = 1 + \epsilon^2 \qquad 10^{\frac{a_{max}}{10}} = 1 + \epsilon^2$$

y calcular ϵ

$$\epsilon = \sqrt{e^{2a_{max}} - 1} \qquad \epsilon = \sqrt{10^{\frac{a_{max}}{10}} - 1}$$

Para $\Omega = \Omega_2$ es la atenuación $a = a_{min}$ y de (4.4) se puede calcular n.

$$e^{2a_{min}} = 1 + \epsilon^2 \Omega_2^{2n} \qquad 10^{\frac{a_{min}}{10}} = 1 + \epsilon^2 \Omega_2^{2n}$$

Despejando por logaritmos ambos lados de las ecuaciones anteriores obtenemos la ecuación para calcular el orden del filtro Butterworth (4.5) y (4.7).

$$n > \frac{ln\frac{e^{2a_{min}}-1}{e^{2a_{max}}-1}}{2\ln\Omega_2} \tag{4.5}$$

En la ecuación (4.5) la atenuación tiene unidades de Neperes. Para sustituir la atenuación en Decibeles se utilizan las ecuaciones (4.6) o (4.7).

$$n > \frac{ln\frac{e^{0.23a_{min}}-1}{e^{0.23a_{max}}-1}}{2\ln\Omega_2} \tag{4.6}$$

$$n > \frac{log\frac{10^{\frac{a_{min}}{10}}-1}{10^{\frac{a_{max}}{10}}-1}}{2\log\Omega_2} \tag{4.7}$$

Ceros de la función de transferencia.

Para calcular la función de transferencia G(s) se calculan los ceros de la ecuación

$$G(s)G(-s) = 1 + (-1)^n \epsilon^2 s^{2n} = 0 \tag{4.8}$$

Para el orden par de n obtenemos:

$$1 + \epsilon^2 s^{2n} = 0$$

Si $\epsilon = 1$, los ceros de la función de transferencia G(s) para el orden n par se calculan mediante la ecuación (4.9) y se ubican en el círculo unitario.

$$s_k = e^{j\frac{\pi+2\pi k}{2n}} = \cos\frac{\pi + 2k\pi}{2n} + j\sin\frac{\pi + 2k\pi}{2n} \tag{4.9}$$

Para el orden impar de n obtenemos:

$$1 - \epsilon^2 s^{2n} = 0$$

Si $\epsilon = 1$, los ceros de la función de transferencia G(s) para el orden n impar se calculan mediante la ecuación (4.10) y se ubican en el círculo unitario. Es necesario decir que

los ceros no están ubicados en ningun caso en el eje imaginario. El numerador de la función de transferencia debe ser un polinomio de Hurwitz.

$$s_k = e^{j\frac{\pi k}{n}} = \cos\frac{k\pi}{n} + j\sin\frac{k\pi}{n} \tag{4.10}$$

Ejemplo 2.

Calcular la función de transferencia de un filtro de Butterworth para el orden n=2.

Solución:

El orden de filtro es par y por eso se utiliza la ecuación (4.9). Los ceros de la función de transferencia son:

$$s_0 = \cos\frac{\pi}{4} + j\sin\frac{\pi}{4} = 0,707 + j0,707$$

$$s_1 = \cos\frac{3\pi}{4} + j\sin\frac{3\pi}{4} = -0.707 + j0,707$$

Los ceros de G(s) y G(-s) se muestran en la figura 4.2

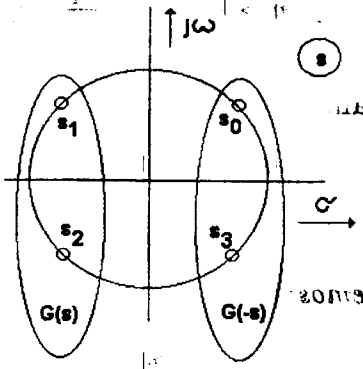


Figura 4.2. Los ceros de la función de transferencia de Butterworth para n=2

La función de transferencia debe tener los ceros en la parte izquierda del plano s.

$$G(s) = (s + 0,707 - j0,707)(s + 0,707 + j0,707) = s^2 + \sqrt{2}s + 1$$

Ejemplo 3.

Calcular la función de transferencia de un filtro de Butterworth para el orden n=3.

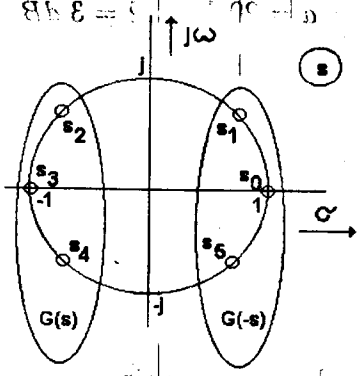


Figura 4.3. Los ceros de la función de transferencia de Butterworth para n=3

Solución:

El orden de filtro es impar y por eso se utiliza la ecuación (4.10). Los ceros de la función de transferencia son:

$$s_0 = \cos 0 + j \sin 0 = 1$$

$$s_1 = \cos \frac{\pi}{3} + j \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$s_2 = \cos \frac{2\pi}{3} + j \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Los otros ceros de (4.8) no es necesario calcularlos, porque son conjugados y están ubicados también en el círculo unitario. Los ceros de G(s) y G(-s) se muestran en la figura 4.3. La función de transferencia debe tener los ceros en la parte izquierda del plano s.

$$G(s) = (s - s_2)(s - s_3)(s - s_4)$$

entonces

$$G(s) = (s + \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2})(s + \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2})(s + 1)$$

$$G(s) = s^3 + 2s^2 + 2s + 1$$

La atenuación de 3 dB del filtro Butterworth de tercer orden debe ser en la frecuencia angular $\omega = 1$, porque se elegió $\epsilon = 1$. Calculando obtenemos

$$G(j) = -j - 2 + 2j + 1 = -1 + j$$

$$a = 20.\log\sqrt{2} = 3\ dB$$

En general todos los filtros normalizados de tipo Butterworth en la frecuencia del corte $\omega_1 = 1$ tienen la atenuación 3 dB para cualquier orden del filtro.

Ejemplo 4.

Calcular la impedancia de entrada para el filtro Butterworth si el orden del filtro es 3.

Solución:

De ejemplo anterior la función de transferencia es $G(s) = s^3 + 2s^2 + 2s + 1$ y la función característica $\phi(s) = \epsilon s^n = s^3$. Sustituyendo por G(s) y $\phi(s)$ a la ecuación (4.11)

$$Z_{entrada}(s) = \frac{G(s) + \phi(s)}{G(s) - \phi(s)} \tag{4.11}$$

obtenemos

$$Z_{entrada} = \frac{2s^3 + 2s^2 + 2s + 1}{2s^2 + 2s + 1}$$

Si la última ecuación se desarrolla con un quebrado de escalera se obtiene el filtro Butterworth de tercer orden

$$Z_{entrada} = s + \frac{1}{2s + \frac{1}{s + \frac{1}{1}}}$$

El filtro de Butterworth de tercer orden se muestra en la figura 4.4a. Está terminado en la puerta de salida con una resistencia de 1 Ohm y en una frecuencia de corte $\omega_1 = 1$ tiene la atenuación 3 dB. Los elementos del circuito normalizado de Butterworth se pueden calcular directamente. Los valores de los elementos z_k en el circuito en la figura 4.4b se pueden calcular mediante la ecuación (4.12).

$$z_k = 2\sin\frac{(2k+1)\pi}{2n} \tag{4.12}$$

Ejemplo 5.

Calcular los elementos del filtro Butterworth para el orden n=4.

Solución:

$$z_0 = 2\sin\frac{\pi}{8} = 0,765 \qquad z_1 = 2\sin\frac{3\pi}{8} = 1,847$$

$$z_2 = 2\sin\frac{5\pi}{8} = 1,847 \qquad z_3 = 2\sin\frac{7\pi}{8} = 0,765$$

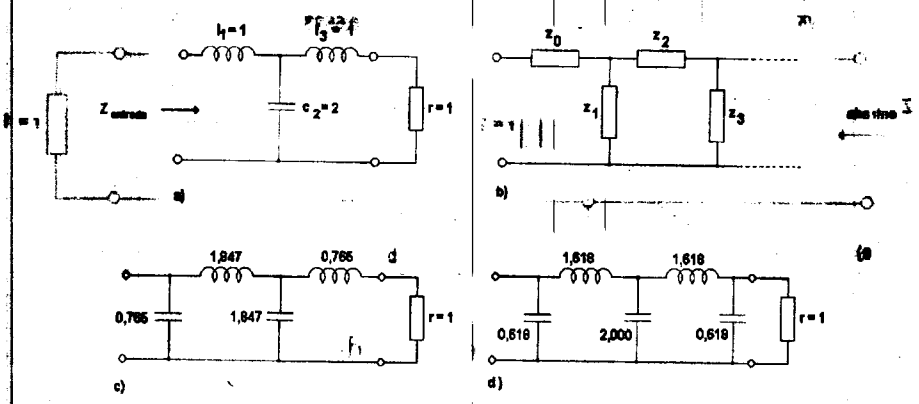


Figura 4.4. Los filtros de Butterworth de 4 y 5 orden

El filtro paso bajas normalizado con respecto a $r_{salida} = 1$ y $\omega_1 = 1$ se muestra en la figura 4.4c.

Ejemplo 6.

Calcular los elementos del filtro Butterworth para el orden n=5.

Solución:

$$z_0 = 2\sin\frac{\pi}{10} = 0,618 \qquad z_1 = 2\sin\frac{3\pi}{10} = 1,618$$

$$z_2 = 2\sin\frac{5\pi}{10} = 2,000 \qquad z_3 = 2\sin\frac{7\pi}{10} = 0,1,618$$

$$z_4 = 2\sin\frac{9\pi}{10} = 0,618$$

El filtro paso bajas de orden 5, normalizado con respecto a $r_{salida} = 1$ y $\omega_1 = 1$ se muestra en la figura 4.4d. Si se necesita que un filtro tenga otra atenuación en la frecuencia de corte, es necesario multiplicar cada elemento del circuito por un constante K, donde:

$$K = \sqrt[2n]{e^{0,23a_{max}} - 1}$$

Ejemplo 7.

Calcular los elementos del filtro Butterworth para el orden n=2 y $a_{max} = 0,1dB$.

Solución:

Los elementos del filtro de segundo orden normalizados con respecto a $a_{max} = 3\ dB$ se obtienen mediante la ecuación (4.12). Calculando se obtiene $l_1 = c_2 = \sqrt{2}$. El filtro se muestra en la figura 4.5a. Cada valor obtenido se multiplica por

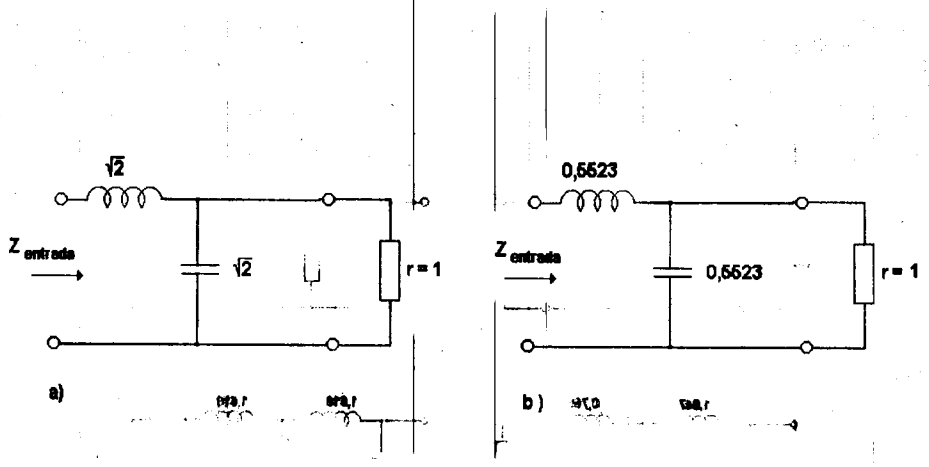


Figura 4.5. El filtro Butterworth de segundo orden

$$K = \sqrt[4]{e^{0,235.0,1} - 1} = 0.390557$$

Los valores nuevos del filtro Butterworth con atenuación 0,1 dB en ω_{-1} son

$$l_1 = c_2 = \sqrt{2}.0,390557 = 0,55233$$

Para comprobar si el filtro en la figura 4.5b atenua 0,1 dB en $\omega_1 = 1$ es necesario calcular primero la impedancia Z(s) y después $G(s)$. La estructura del filtro en la figura 4.5b es de escalera y por eso

$$Z(s) = 0.55233s + \frac{1}{0.55233s + \frac{1}{1}} = \frac{0,3050689s^2 + 0.55233s + 1}{0,55233s + 1}$$

Calculando G(s) y $\phi(s)$ obtenemos

$$G(s) + \phi(s) = 0,3050689s^2 + 0,55233s + 1$$

$$G(s) - \phi(s) = 0.55233s + 1$$

Si se suman esas ecuaciones se obtiene

$$G(s) = 0,1525342s^2 + 0,55233s + 1$$

La función de transferencia para $\omega_1 = 1$ toma la forma

$$G(1) = 0,8474676 + j0,55233$$

y la atenuación en $\omega = 1$ se obtiene calculando la ecuación $a = 20.\log|G(1)|$

$$a = 20\log\sqrt{0.8474676^2 + 0,55233^2} = 0,1\ dB$$

En las tablas de Butterworth 4.1, 4.2 y 4.3 se muestran los coeficientes de la función de transferencia, los elementos del filtro y los ceros de la función de transferencia calculados para $a_{max} = 3dB$. Si es necesario calcular la función de transferencia para otras a_{max} es necesario sustituir en la función transferencia G(s) por s (4.13).

$$s = \sqrt[2n]{e^{0,23a_{max}} - 1}p \tag{4.13}$$

En el ejemplo siguiente se muestra como se calcula la función de transferencia para otras a_{max}.

Ejemplo 8.

Calcular la función de transferencia del filtro Butterworth para $a_{max} = 0,1dB$ y orden n=3.

Solución:

La función de transferencia obtenida mediante la tabla 4.2 toma la forma

$$G(s) = s^3 + 2s^2 + 2s + 1$$

Ahora se calcula nueva variable s

$$s = \sqrt[6]{e^{0,23.0,1} - 1}.p = 0,5343043p$$

La función de transferencia de filtro que atenua 0,1 dB en la frecuencia del corte $\omega_1 = 1$ toma la forma

$$G(p) = 0,5343043^3p^3 + 2.0,5343043^2p^2 + 2.0,5343043p + 1$$

$$G(p) = 0,1525338p^3 + 0,5709622p^2 + 1,06860868p + 1$$

Si la atenuación en la frecuencia del corte es 0,1 dB se comprueba calculando G(j)

$$G(j) = -j0,1525338 - 0,5709622 + j1,06860868 + 1 = 0,4290378 + j0,9160748$$

$$a = 20\log\sqrt{0,4290378^2 + 0,9160748^2} = 0,1\ dB$$

Ejemplo 9.

Calcular el filtro Butterworth de cuarto orden pasa bajas para $a_{max} = 2$ dB, $f_1 = 3400$ Hz si las puertas de salida y de entrada están conectadas con un resistor de 2000 Ω.

Solución:

Los valores normalizados del filtro Butterworth para $a_{max} = 3$ dB se obtienen de la tabla 4.1

n	l_1	c_2	l_3	c_4	l_5	c_6	l_7
1	2,00000						
2	1,41421	1,41421					
3	1,00000	2,00000					
4	0,76536	1,84775	1,84775	0,76536			
5	0,61803	1,61803	2,00000	1,61803	0,61803		
6	0,51763	1,41421	1,93185	1,93185	1,41421	0,51763	
7	0,44504	1,24697	1,80193	2,00000	1,80193	1,24697	0,44504
n	c_1	l_2	c_3	l_4	c_5	l_6	c_7

Tabla 4.1. Los elementos del filtro Butterworth para $a_{max} = 3\ dB\ r_1 = r_2 = 1$

n	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
1	1,00000						
2	1,41421	1,00000					
3	2,00000	1,00000	1,00000				
4	2,61312	3,41421	2,61312	1,00000			
5	3,23606	5,23606	5,23606	3,23606	1,00000		
6	3,86370	7,46410	9,14162	7,46410	3,86370	1,00000	
7	4,49396	10,0978	14,5918	14,5918	10,0978	4,49396	1,00000

Tabla 4.2. Los coeficientes de la función de transferencia del filtro Butterworth para $a_{max} = 3\ dB\ r_1 = r_2 = 1$ y $b_0 = 1$ G(s)=$b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + ...$

n	1	2	3	4	5	6	7
s_1	-1,00000		-1,00000		-1,00000		-1,00000
s_2, s_3		-0,70710 ± j0,707	-0,50000 ± j0,866	-0,38268 ± j0,924	-0,30901 ± j0,951	-0,25882 ± j0,966	-0,22252 ± j0,975
s_4, s_5				-0,92388 ± j0,383	-0,80902 ± j0,588	-0,70710 ± j0,707	-0,62489 ± j0,782
s_6, s_7						-0,96592 ± j0,259	-0,90097 ± j0,434

Tabla 4.3. Ceros de la función de transferencia del filtro Butterworth para $a_{max} = 3\ dB$ $r_1 = r_2 = 1$

$$l_1 = c_4 = 0,76536 \qquad l_3 = c_2 = 1,84775$$

Para obtener el filtro que atenua en ω_1 2 dB es necesario multiplicar cada elemento por el constante K

$$K = \sqrt[2n]{e^{0,13.a_{max}} - 1} = \sqrt[8]{e^{0,23.2} - 1} = 0,93499$$

Los valores desnormalizados con respecto a la atenuación son

$$l_1 = c_4 = 0,715603 \qquad l_3 = c_2 = 1,727627$$

Ahora los elementos se desnormalizan con respecto a la frecuencia de corte ω_1 y a la impedancia $R_0 = 2000\Omega$. Calculando se obtiene

$$L_1 = \frac{l_1.R_0}{2.\pi.f_1} = \frac{0,715603.2000}{2.\pi.3400} = 66,995\ mH$$

$$C_1 = \frac{c_2}{2.\pi.f_1.R_0} = \frac{1,727627}{2.\pi.3400.2000} = 40,435\ nF$$

$$L_3 = \frac{l_3.R_0}{2.\pi.f_1} = \frac{1,727627.2000}{2.\pi.3400} = 161,741\ mH$$

$$C_4 = \frac{c_4}{2.\pi.f_1.R_0} = \frac{0,715603}{2.\pi.3400.2000} = 16,748\ nF$$

El filtro pasa bajas de Butterworth se muestra en la figura 4.6

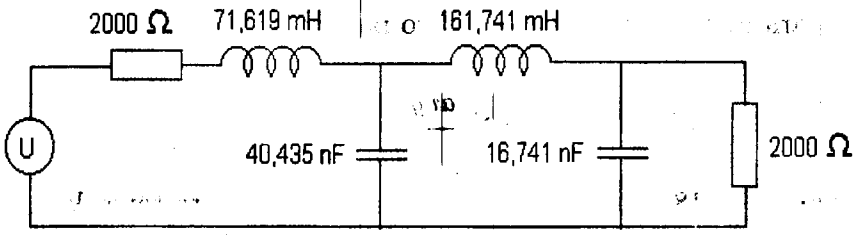


Figura 4.6. El filtro Butterworth de segundo orden

4.2 Aproximación Chebychev

La función característica para la aproximación de Chebychev es de la forma

$$\phi(\Omega) = \cos(n.arc\cos(\Omega)) \quad para\ \ \Omega \leq 1 \qquad (4.14)$$

$$\phi(\Omega) = \cosh(n.arg\cosh(\Omega)) \qquad para \;\; \Omega \geq 1 \tag{4.15}$$

La ecuación característica toma la forma

$$G(\Omega)G(-\Omega) = 1 + \epsilon^2 \cos^2(n.arg\cosh(\Omega)) \tag{4.16}$$

$$G(\Omega)G(-\Omega) = 1 + \epsilon^2 \cos^2 h(n.arg\cosh(\Omega)) \tag{4.17}$$

El orden del filtro

Igual como en el caso de la aproximación de Butterworth se puede derivar el orden del filtro para la aproximación de Chebychev. Para $\Omega = \Omega_1 = 1$ es la atenuación $a = a_{max}$ y de (4.17) se puede escribir

$$e^{2a_{max}} = 1 + \epsilon^2 cos^2(n.argcosh(1))$$

y calculando ϵ

$$\epsilon = \sqrt{e^{2a_{max}} - 1}$$

Para $\Omega = \Omega_2 = 1$ es la atenuación $a = a_{min}$ y de (4.17) se puede calcular n.

$$e^{2a_{min}} = 1 + \epsilon^2 cos^2 h(n.argcosh(\Omega_2))$$

Si se calcula el logaritmo natural de ambos lados de la ecuación anterior obtenemos la ecuación para calcular el orden del filtro para la aproximación de Chebychev (4.18).

$$n \geq \frac{argcosh\sqrt{\frac{e^{2a_{min}}-1}{e^{2a_{max}}-1}}}{argcosh(\Omega_2)} \tag{4.18}$$

En la ecuación (4.18) la atenuación está en Nepers. Para tener la atenuación en Decibeles es necesario utilizar las ecuaciones (4.19) o (4.20).

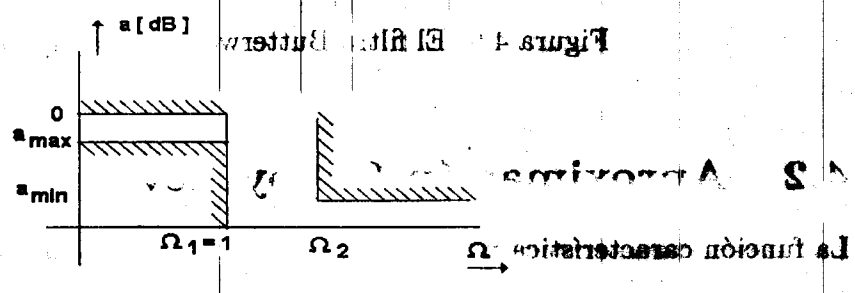


Figura 4.7. La plantilla normalizada de paso bajas

$$n \geq \frac{argcosh\sqrt{\frac{e^{0.23a_{min}}-1}{e^{0.23a_{max}}-1}}}{argcosh(\Omega_2)} \tag{4.19}$$

$$n \geq \frac{argcosh\sqrt{\frac{10^{\frac{a_{min}}{10}}-1}{10^{\frac{a_{max}}{10}}-1}}}{argcosh(\Omega_2)} \tag{4.20}$$

Ceros de la función de transferencia

Para calcular la función de transferencia G(s) se calculan los ceros de la ecuación

$$G(\Omega)G(-\Omega) = 1 + \epsilon^2 \cos^2(narccos(\Omega)) \tag{4.21}$$

Si se hace la sustitución

$$\arccos(\Omega) = \theta_1 + j\theta_2$$

se obtiene

$$\Omega = cos(\theta_1 + j\theta_2) = cos(\theta_1).cosh(\theta_2) + jsen(\theta_1).senh(\theta_2) \tag{4.22}$$

De la ecuación (4.21) se obtiene

$$\cos(n\theta_1 + jn\theta_2) = \frac{j}{\epsilon}$$

Si se desarrolla la función trigonométrica se obtiene

$$\cos(n\theta_1).cosh(n\theta_2) + jsen(n\theta_1).senh(n\theta_2) = \frac{j}{\epsilon}$$

De esta ecuación es posible obtener dos ecuaciones. Si se comparan las partes reales e imaginaras de ambos lados de la ecuación anterior

$$\cos(n\theta_1)cosh(n\theta_2) = 0 \tag{4.23}$$

$$sen(n\theta_1)senh(n\theta_2) = \frac{1}{\epsilon} \tag{4.24}$$

La función $\cosh(n\theta_2)$ para ningún $n\theta_2$ es igual a cero. Entonces es el primer término en la primera ecuación el que debe ser igual a cero ($cos(n\theta_1) = 0$). Esta ecuación es igual a cero para

$$\theta_1 = \frac{(2k+1)}{2\ \Omega}\pi \tag{4.25}$$

Si se sustituye (4.25) en (4.24) tenemos

$$sen(\frac{(2k+1)}{2n}\pi)senh(n\theta_2) = \frac{1}{\epsilon}$$

pero $sen(\frac{(2k+1)\pi}{2n}) = 1$ y la ecuación anterior toma la forma

$$\theta_2 = \frac{1}{n} argsenh(\frac{1}{\epsilon}) \tag{4.26}$$

De la ecuación (4.22) se obtiene la ecuación 4.27 para calcular los ceros de la función de transferencia del filtro Chebychev para cualquier orden del filtro y cualqier atenuación a_{max}

$$s_k = j\Omega_k = -sen(\theta_1).senh(\theta_2) \pm jcos(\theta_1).cos(\theta_2) \tag{4.27}$$

Mediante las ecuaciones (4.26), (4.25) y (4.27) se puede calcular la función de transferencia G(s) del filtro Chebychev. Los ceros del filtro Chebychev son ubicados en la elipse y en la parte izquierda del plano s. En el siguiente ejemplo se muestra como se calcula la función de transferencia de un filtro de tercer orden.

Ejemplo 10.

Calcular la función de transferencia de Chebychev para $a_{max} = 2$ dB y el orden del filtro n=3.

Solución:

Primero se calcula ϵ:

$$\epsilon = \sqrt{10^{a_{max}/10} - 1} = \sqrt{10^{2/10} - 1} = 0,764$$

$$\theta_2 = \frac{1}{3} argsenh(\frac{1}{0,764}) = 0,358$$

$$cosh(0,358) = 1,06 \qquad senh(0,358) = 0,366$$

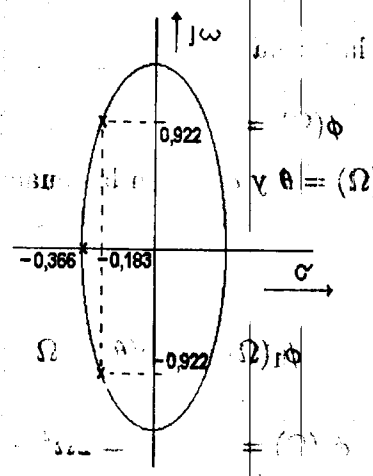
y los ceros de la función de transferencia son

$$s_0 = -0,366.sen(\frac{\pi}{6}) \pm j1,065.cos(\frac{\pi}{6}) = -0,183 \pm j0,922$$

$$s_1 = -0,366.sen(\frac{3\pi}{6}) \pm j1,065.cos(\frac{3\pi}{6}) = -0,366$$

Los demás ceros no es necesario calcularlos, porque son conjugados y están ubicados en la elipse, como se ve de la figura 4.8. La función de transferencia es

$$G(s) = (s + 0,366)(s + 0,183 + j0,922)(s + 0,183 - j0,922)$$



BIBLIOTECA NACIONAL DE MEXICO
FACULTAD DE INGENIERIA

Figura 4.8. Ubicación de los polos del filtro Chebychev

$$G(s) = s^3 + 0,73329s^2 + 1,01859s + 0,324665$$

A primera vista se ve, que para $\omega = 0$ la atenuación no es igual a cero. Falta calcular la constante K. Para $s = 0$ debe ser G(s)=1. La constante se obtiene de la ecuación siguiente

$$G(s)|_{s=0} = K(s^3 + 0,73392s^2 + 1,01859s + 0,324665)|_{s=0} = 1$$

entonces

$$K = \frac{1}{0,324066} = 3,0857855$$

G- 612363

La función de transferencia toma la forma

$$G(s) = 3,085588855s^3 + 2,261678s^2 + 3,1431724s + 1$$

Para $\omega = 1$ la atenuación debe ser igual a 2 [dB].

$$G(j) = -j3,0855855 - 2,2616 + 3,14317j + 1 = -1,2616 + j0,05758$$

$$a = 20.log\sqrt{1,2616^2 + 0,0575869^2} = 2,03\ [dB]$$

Para calcular la impedancia de entrada (4.28) de un filtro de Chebychev es necesario calcular la función característica $\phi(s)$ en la forma polinomial. La función característica en la forma trigonométrica no se puede utilizar.

$$Z_{entrada} = \frac{G(s) \pm \phi(s)}{G(s) \mp \phi(s)} \qquad (4.28)$$

Función característica toma la forma

$$\phi(\Omega) = \epsilon.cos(narccos(\Omega))$$

Si se se sustituye por $arcos(\Omega) = \theta$ y $\epsilon = 1$ en la ecuación anterior se obtiene

$$\phi(\Omega) = cos(n\theta)$$

para n=1

$$\phi_1(\Omega) = cos(\theta) = \Omega$$

para n=2

$$\phi_2(\Omega) = cos(2\theta) = 2\Omega^2 + 1$$

para n=3

$$\phi_3(\Omega) = cos(3\theta) = 4\Omega^3 - 3\Omega$$

Ejemplo 11.

Calcular la impedancia de entrada de Chebychev para $a_{max} = 2$ dB y el orden de filtro n=3.

Solución:

La función de transferencia fue calculada en el ejemplo 9 y es de la forma

$$G(s) = 3,085588855s^3 + 2,261678s^2 + 3,1431724s + 1$$

La función de característica $\phi(\omega)$ para n=3 es

$$\phi_3(s) = \sqrt{e^{0,23a_{max}} - 1}(4s^3 + 3s)$$

$$\phi_3(s) = \sqrt{e^{0,23.2} - 1}(4s^3 + 3s) = 3,0855855s^3 + 2,3141892s$$

Y la impedancia de entrada del filtro de Chebychev es

$$Z_{entr}(s) = \frac{G(s) + \phi(s)}{G(s) - \phi(s)} = \frac{6,171s^3 + 2,2616s^2 + 5,457s + 1}{2,2616s^2 + 0,8289s + 1}$$

Si se desarrolla la impedancia $Z(s)$ en el quebrado de escalera, se obtiene el circuito que se muestra en la figura 4.9

$$Z(s) = 2,728s + \frac{1}{0,8289s + \frac{1}{2,728s + \frac{1}{1}}}$$

Si se necesita que el filtro tenga en la salida impedancia infinita, se calcula la impedancia del filtro mediante la ecuación (4.29)

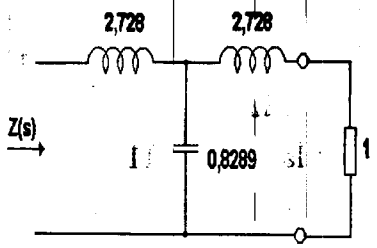


Figura 4.9. Filtro Chebychev de tercer orden.

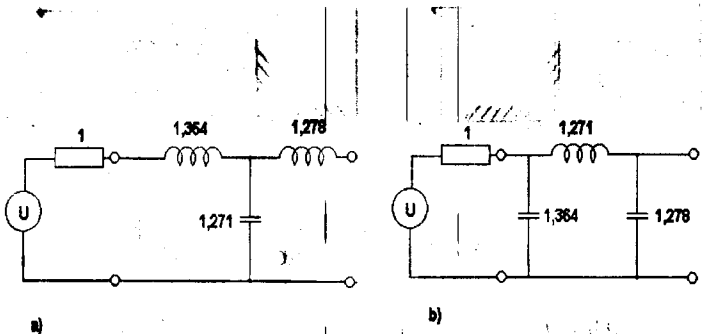


Figura 4.10. Filtro Chebychev de tercer orden.

$$Z(s)_{entr} = \frac{\text{parte impar de G(s)}}{\text{parte par de G(s)}} \tag{4.29}$$

$$Z_{entr}(s) = \frac{3,08558s^3 + 3,14317s}{2,2116s^2 + 1}$$

$$Z_{entr} = 1,36429s + \cfrac{1}{1,2714s + \cfrac{1}{1,2788s}}$$

El circuito que trabaja con la salida abierta está se muestra en la figura 4.10b. El circuito en la figura 4.10a no se puede utilizar, porque la última inductancia no influye la función de transferencia y es necesario utilizar el circuito dual que se muestra en la figura 4.10b.

4.3 Aproximación Chebychev inverso

La aproximación Chebychev inversa se obtiene de la aproximación Chebychev normal mediante las transformaciones

$$\Omega = \frac{1}{\Omega} \qquad \phi = \frac{1}{\phi}$$

La transformación se muestra en la figura 4.11

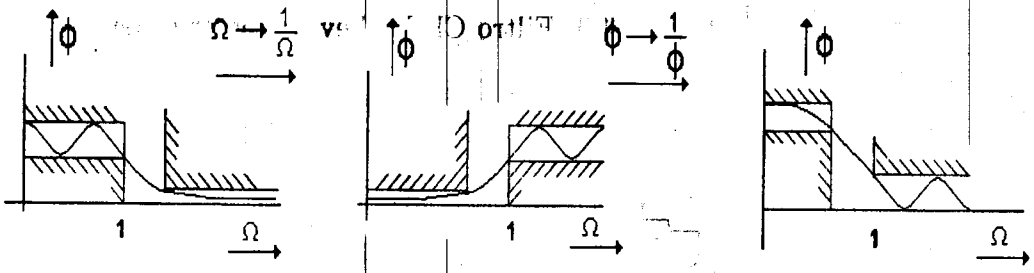


Figura 4.11. La transformación de las plantillas.

La ecuación característica (4.14) con estas transformaciones cambia y se obtiene

$$G(s)G(-s) = 1 + \frac{1}{\phi(\frac{1}{s})\phi(\frac{-1}{s})} \tag{4.30}$$

$$G(\Omega)G(-\Omega) = 1 + \frac{1}{\epsilon^2 cos^2(n.arccos(\frac{1}{\Omega}))} \qquad \Omega \leq 1 \tag{4.31}$$

$$G(\Omega)G(-\Omega) = 1 + \frac{1}{\epsilon^2 cosh^2(n.argcosh(\frac{1}{\Omega}))} \qquad \Omega \geq 1 \tag{4.32}$$

$$G(\Omega)G(-\Omega) = \frac{1 + \epsilon^2.cos^2(n.arccos(\frac{1}{\Omega}))}{\epsilon^2 cos^2(n.arccos(\frac{1}{\Omega}))} \tag{4.33}$$

$$G(\Omega)G(-\Omega) = \frac{1 + \epsilon^2.cosh^2(n.argcosh(\frac{1}{\Omega}))}{\epsilon^2 cosh^2(n.argcosh(\frac{1}{\Omega}))} \tag{4.34}$$

Como en el caso de la aproximación de Chebychev, se pueden obtener de manera semejante las ecuaciones para calcular los ceros de la función de transferencia. Los ceros de la función de transferencia del filtro Chebychev inversa se calculan mediante las ecuaciones (4.35) (4.36) (4.37) y (4.38)

$$\epsilon = \frac{1}{\sqrt{e^{0,23a_{min}} - 1}} \tag{4.35}$$

$$\phi_2 = \frac{1}{n} argsenh \frac{1}{\epsilon} \tag{4.36}$$

$$\phi_1 = \frac{2k+1}{2n}\pi \tag{4.37}$$

$$s(k) = \frac{1}{-sin(\phi 1)sinh(\phi_2) \pm jcos(\phi_1)cosh(\phi_2)} \tag{4.38}$$

Los polos de la función de transferencia G(s) son en las frecuencias Ω_k. Los polos de la atenuación se calculan igualando el denominador (4.33) a cero como se ve en (4.39).

$$\epsilon^2.cos^2(n.arccos\frac{1}{\Omega}) = 0 \tag{4.39}$$

los polos de función de transferencia se calculan mediante la ecuación (4.40)

$$\Omega_k = \frac{1}{cos\frac{2k+1}{2n}\pi} \tag{4.40}$$

Ejemplo 12.

Calcular los polos de la función de transferencia de Chebychev inversa para el orden del filtro n=2.

Solución

$$\Omega_k = \frac{1}{cos\frac{2k+1}{6}\pi}$$

$$\Omega_0 = \frac{1}{cos\frac{\pi}{6}} = 1,1547$$

$$\Omega_1 = \frac{1}{cos\frac{3\pi}{6}} = \infty$$

La atenuación tiene dos polos en la frecuencia $\Omega_0 = 1,1547$ y en $\Omega_1 = \infty$. La atenuación se muestra en la figura 4.12a y la estructura del filtro en la figura 4.12b.

Ejemplo 13.

Calcular los polos de la función de transferencia de Chebychev inversa para el orden del filtro n=5.

Solución

los polos de atenuación se calculan mediante la ecuación

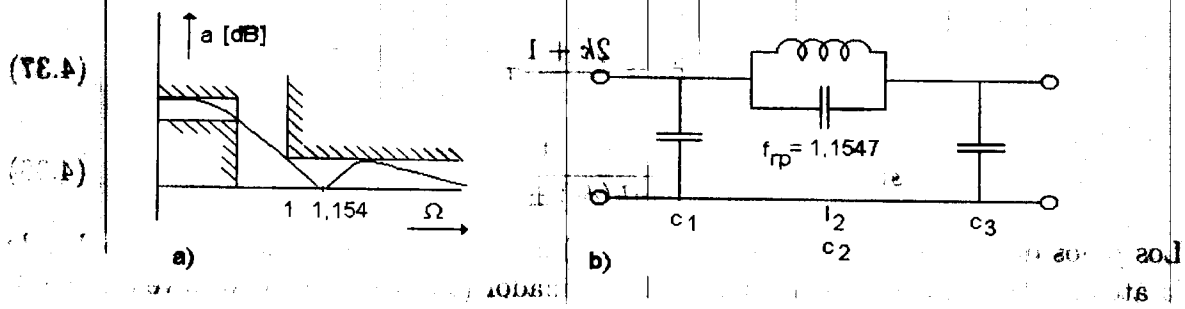


Figura 4.12. La atenuación y la estructura del filtro Chebychev inverso para n=3.

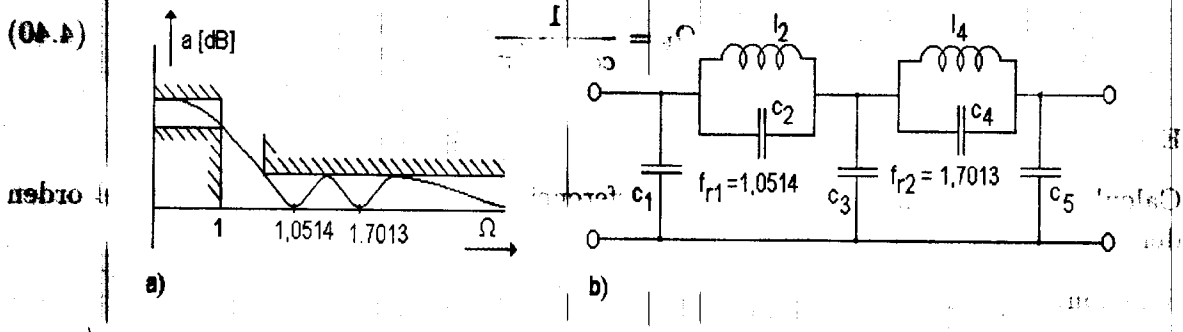


Figura 4.13. La atenuación y la estructura del filtro Chebychev inverso para n=5.

$$\Omega_k = \frac{1}{cos\frac{2k+1}{6}\pi}$$

$$\Omega_0 = \frac{1}{cos\frac{\pi}{10}} = 1,0514$$

$$\Omega_1 = \frac{1}{cos\frac{3\pi}{10}} = 1,7013$$

$$\Omega_2 = \frac{1}{cos\frac{5\pi}{10}} = \infty$$

La atenuación tiene tres polos en la frecuencia $\Omega_0 = 1,0514$, $\Omega_2 = 1,7013$ y en $\Omega = \infty$. La atenuación se muestra en la figura 4.13a y la estructura en la figura 4.13b.

Ejemplo 14.

Calcular la función de transferencia para la aproximación de Chebychev inversa, si n=3, $a_{min} = 4,338\ [dB]$.

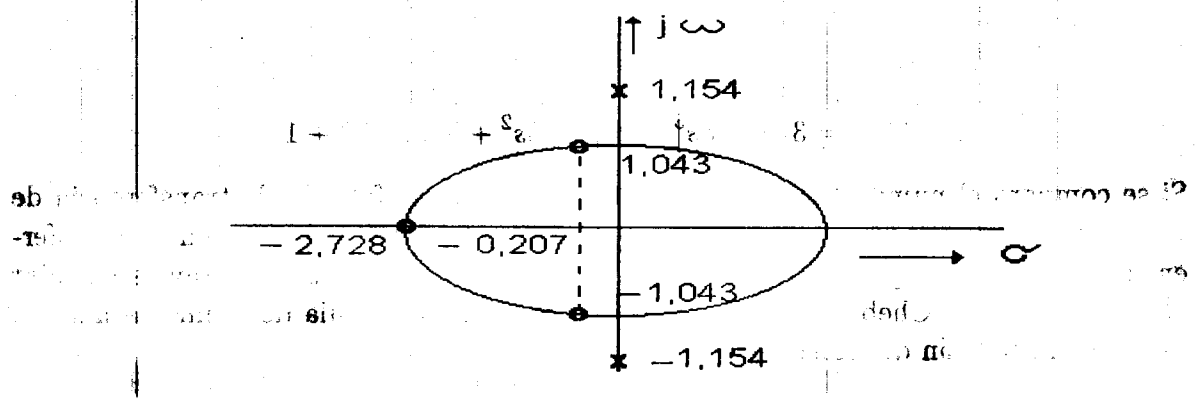


Figura 4.14. Ceros y polos de la función de transferencia de Chebychev inverso para n=3.

Solución:

Primero se calcula ϵ, ϕ_2, $cosh(\phi_2)$ y $senh(\phi 2)$.

$$\epsilon = \frac{1}{\sqrt{e^{0,23a_{min}} - 1}} = \frac{1}{\sqrt{e^{0,23.4,338} - 1}} = 0,764247$$

$$\phi_2 = \frac{1}{3} argsenh \frac{1}{0,764247} = 0,358724$$

$$cosh(\phi_2) = cosh(0,358724) = 1,06503$$

$$senh(\phi_2) = senh(0,358724) = 0,36646$$

Si se sustituye por k= 0,1 en la ecuación (4.38) se obtiene

$$S_0 = \frac{1}{-0,3664.sen\frac{\pi}{6} \pm j1,06503.cos\frac{\pi}{6}} = 0,207 \pm j1,043$$

$$S_1 = \frac{1}{-0,3664.sen\frac{3\pi}{6} \pm j1,06503.cos\frac{3\pi}{6}} = 2,7287$$

Los ceros son complejos y conjugados y por eso no es necesario calcularlos a tódos. Los ceros de la función de transferencia están ubicados como en la figura 4.14. En este caso los ceros de la función de transferencia de Chebychev inversa están en un ovalo y los polos en el eje imaginario. La función de transferencia se obtiene si se multiplican los ceros de la función de transferencia. El polo de la función de transferencia se ha calculado en ejemplo 11 y tiene el valor $\Omega_0 = 1,154$

$$G(s) = K\frac{[(s+0,2072)^2 + 1,04302^2](s+2,7287)}{s^2 + 1,154^2}$$

$$G(s) = K\frac{s^3 + 3,14317s^2 + 2,26168s + 3,08578}{s^2 + 1,154^2}$$

Si se calcula la función de transferencia de Chebychev para el mismo ϵ se obtiene

$$G(s) = 3,08578s^3 + 2,26168s^2 + 3,143173 + 1$$

Si se compara el numerador de Chebychev inverso con la función de transferencia de Chebychev podemos ver que la relación entre los coeficientes de la función de transferencia de Chebychev y Chebychev inversa es $a_i = a_{n-i}$. Todavía necesitamos calcular el constante K de Chebychev inverso. El konstante K se calcula de la misma manera para que la función de transferencia $G(0) = 1$.

$$K\frac{3,08578}{1,1547^2} = 1$$

$$K = 0,4320885$$

La función de transferencia G(s) que cumple las especificaciones es de la forma

$$\frac{0,432s^3 + 1,358s^2 + 0,977s + 1,333}{s^2 + 1,1547^2}$$

Vamos ahora a comprobar si en $\omega = 1$ es la atenuación 4.3379 [dB].

$$G(j) = \frac{-j0,432 - 1,358 + j0,977 + 1,333}{-1 + 1,333} = -0,07438 + j1,63547$$

$$a = 20.log\sqrt{0,07438^2 + 1,63547^2} \sim 4.3\ [dB]$$

Si es necesario realizar el circuito no se puede calcular la impedancia de entrada como en el caso de Butterworth o Chebychev, porque la función de transferencia no es solo un polinomio, sino el quebrado de dos polinomios. También tenemos los polos en las frecuencias Ω_k. Esto significa que para realizar el circuito necesitamos dos parámetros, uno de la impedancia de entrada Z_{11} y otro de la impedancia de transferencia Z_{12}. Las impedancias mencionadas se pueden calcular mediante las ecuaciones (4.41) y (4.42),

$$Z_{11} = \frac{g_{impar} + f_{impar}}{g_{par} + f_{par}} \tag{4.41}$$

$$Z_{12} = \frac{k(s)}{g_{par} + f_{par}} \tag{4.42}$$

donde g(s) es el numerador del polinomio G(s), f(s) es el numerador del polinomio $\phi(s)$ y k(s) es el denominador de $\phi(s)$. El $g_{par}(s)$ es la parte par del numerador de polinomio G(s).

En siguiente ejemplo vamos a realizar un filtro Chebychev inverso si se conocen G(s) y $\phi(s)$.

Ejemplo 15.

Realizar el filtro Chebychev inverso del ejemplo anterior.

Solución:

La función de transferencia del filtro Chebychev inverso del ejemplo anterior es de la forma

$$G(s) = \frac{0,432s^3 + 1,358s^2 + 0,977s + 1,333}{s^2 + 1,1547^2}$$

Entonces la parte par e impar de g(s) son respectivamente

$$g_{par}(s) = 1,358s^2 + 1,333 \qquad g_{imp}(s) = 0,432s^3 + 0,977s$$

Todavía es necesario calcular $\phi(s)$.

$$\phi(s) = \epsilon\frac{s^3}{4 + 3s^2} = \epsilon\frac{0,333s^3}{s^2 + 1,154^2}$$

Para $\epsilon = 0,76424$ del ejemplo anterior la función característica es de la forma

$$\phi(s) = \frac{0,4320885s^3}{s^2 + 1,154^2}$$

De la última ecuación se puede escribir

$$f_{par} = 0 \qquad f_{imp} = 0,432s^3 \qquad k(s) = s^2 + 1,154^2$$

Y las impedencias de entrada Z_{11} y de transferencia Z_{12} son de la forma

$$Z_{11} = \frac{0,864s^2 + 0,977s}{1,358s^2 + 1,333} \qquad Z_{12} = \frac{s^2 + 1,154^2}{1,358s^2 + 1,333}$$

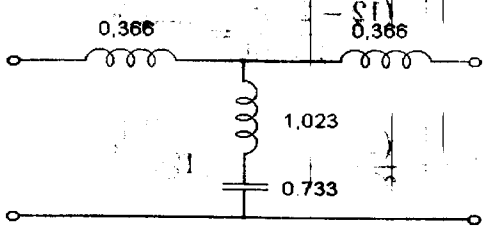


Figura 4.15. Circuito Chebychev inverso de los ejemplos 13 y 14.

Es necesario realizar ambos parámetros para obtener el circuito. Los denominadores de Z_{11} y Z_{12} son iguales y si se realiza el denominador de Z_{11} se realiza también el denominador de Z_{12}. Los ceros de Z_{12} son en ∞ y en $s = -1,333$. Si se realizan los ceros en orden ∞, $s = -1,333$ se obtiene el circuito que se muestra en la figura 4.15. Si se calcula la frecuencia de resonancia del circuito en serie se obtiene $\omega_{res} = 1,154$. Este valor coincide con el polo de la función característica,, pero también con el cero de la impedancia Z_{12}.

4.4 Aproximación de Bessel

La función de transferencia del este filtro es un polinomio de Bessel. El polinomio de Bessel se calcula mediante la ecuación (4.43)

$$y_n(s) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(2n-k)!s^k}{2^{n-k}k!(n-k)!} \qquad (4.43)$$

Los filtros de Bessel necesitan más elementos que la aproximación Butterworth con las mismas especificaciones, pero la ventaja es, que la fase en la banda de paso puede ser lineal, eso significa, que todas las frecuencias en la banda de paso son retardadas sobre el mismo tiempo. Eso es necesario por ejemplo si se transmiten señales de video.

Ejemplo 16.

Calcular la función de transferencia del filtro Bessel para el orden del filtro n=6.

Solución:

para k=0

$$y_0(s) = \frac{(12-0)!s^0}{2^6 0!(6-0)!} = 10395$$

para k=1

$$y_1(s) = \frac{(12-1)!s^1}{2^5 1!(6-1)!} = 10395s$$

para k=2

$$y_2(s) = \frac{(12-2)!s^2}{2^4 2!(6-2)!} = 4725s^2$$

para k=3

$$y_3(s) = \frac{(12-3)!s^3}{2^3 3!(6-3)!} = 1260s^3$$

para k=4

$$y_4(s) = \frac{(12-4)!s^4}{2^2 4!(6-4)!} = 210s^4$$

n	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4
1	1				
2	3	3			
3	15	15	6		
4	105	105	45	10	
5	945	945	420	105	15

Tabla 4.4. La tabla de los coeficientes del polinomio de Bessel

para k=5

$$y_5(s) = \frac{(12-5)!s^5}{2^5 5!(6-5)!} = 21s^5$$

para k=6

$$y_6(s) = \frac{(12-6)!s^6}{2^0 6!(6-6)!} = 1s^6$$

El polinomio de Bessel para n=6 toma la forma:

$$y_6(s) = s^6 + 21s^5 + 210s^4 + 1260s^3 + 4725s^2 + 10395s + 10395$$

La función de transferencia debe cumplir la condición $|G(0)| = 1$. Es necesario calcular el coeficiente en el denominador de la función de transferencia. Para nuestro ejemplo el coeficiente K es 10395. (4.44)

$$G(s) = \frac{s^6 + 21s^5 + 210s^4 + 1260s^3 + 4725s^2 + 10395s + 10395}{10395} \qquad (4.44)$$

Los coeficientes de la función de transferencia del filtro Bessel se muestran en la tabla 4.4. El filtro Butterworth tiene en la frecuencia de corte $\omega = 1$ la atenuación 3 [dB]. Vamos a calcular que atenuación tiene el filtro de Bessel en la misma frecuencia del corte.

Ejemplo 17.

Calcular la atenuación del filtro Bessel de orden n=3 para $\omega = 1$.

Solución:

La función de transferencia del filtro de Bessel para n=3 se obtiene de las tablas 4.4

$$G_3(s) = \frac{15 + 15s + 6s^2 + s^3}{15}$$

Para $\omega = 0$ tenemos $|G_3(0)| = \frac{15}{15} = 1$ y la atenuación $a_{max} = 20.log(1) = 0$. En $\omega = 1$ la función de transferencia G(j) es

n	$r_1 \pm i_1$	$r_2 \pm i_2$	$r_3 \pm i_3$
1	-1		
2	$-1,5 \pm j0,866$		
3	-2,322	$-1,838 \pm j1,754$	
4	$-2,896 \pm j0,867$	$-2,103 \pm j2,657$	
5	-3,646	$-3,351 \pm j1,742$	$-2,324 \pm j3,572$
6	$-4,248 \pm j0,867$	$-3,735 \pm j2,626$	$-2,515 \pm j4,492$

Tabla 4.5. La tabla del los ceros de polinomio de Bessel

$$G(j) = \frac{15 + 15j - 6 - j}{15} = 0,6 + j0,9333$$

y la atenuación en la $\omega = 1$ tiene el valor

$$a = 20.log\sqrt{(0,6^2 + 0,9333^2)} = 0,902\ [dB]$$

Se pueden encontrar los ceros de la función de Bessel en la tabla 4.5.

Ejemplo 18.

Calcular un filtro digital paso bajas de Bessel en cascada de sexto orden si la frecuencia del corte es $f_1 = 3400$ Hz y la frecuencia de muestreo es de 24000 Hz.

Solución:

La función de transferencia se obtiene de las tablas.

$$G(s) = [(s + 4,248)^2 + 0,867^2][(s + 3,375)^2 + 2,626^2][(s + 2,515)^2 + 4,492^2]$$

$$H(s) = \frac{K_1}{s^2 + 8,496s + 18,797} \frac{K_2}{s^2 + 5,03s + 26,503} \frac{K_3}{s^2 + 7,47s + 20,846}$$

Cada función de transferencia parcial tiene que cumplir $H_i(0) = 1$ y por esta razón elegimos las constantes

$$K_1 = 18,797 \qquad K_2 = 26,503 \qquad K_3 = 20,846$$

Para obtener la función de transferencia en la forma discreta es necesario utilizar la transformada z bilineal

$$s = c\frac{z-1}{z+1} \qquad c = cotg\frac{\pi f_1}{f_m} = cotg\frac{\pi 3400}{24000} = 2,096$$

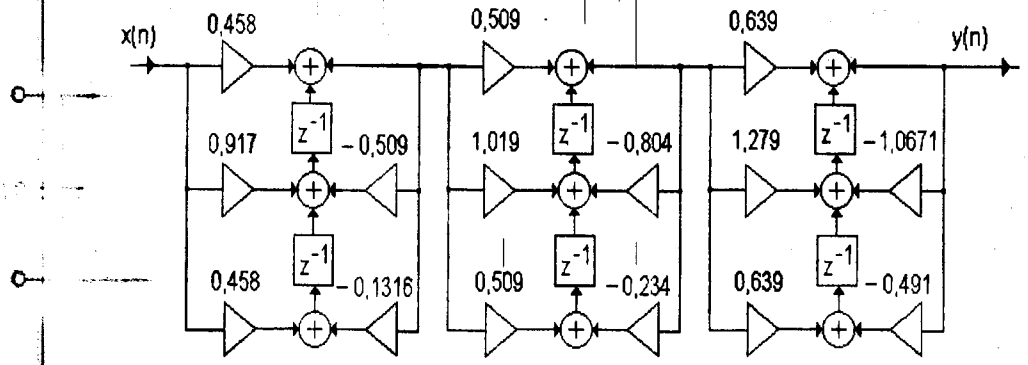


Figura 4.16. El filtro digital de Bessel de sexto orden

Si se sustituye en H(s) por $s = 2,096\frac{z-1}{z+1}$ se obtiene

$$H_1(z) = \frac{0,458 + 0,917z^{-1} + 0,458z^{-2}}{1 + 0.509z^{-1} + 0,1316z^{-2}}$$

$$H_2(z) = \frac{0,509 + 1,109z^{-1} + 0,509z^{-2}}{1 + 0,804z^{-1} + 0,234z^{-2}}$$

$$H_3(z) = \frac{0,639 + 1,279z^{-1} + 0,639z^{-2}}{1 + 1,0671z^{-1} + 0,491z^{-2}}$$

Los circuitos parciales se conectan en cascada, porque $H(z) = H_1(z).H_2(z).H_3(z)$. El filtro de Bessel de sexto orden se muestra en la figura 4.16

Ejemplo 19.

Calcular un filtro LC paso bajas de Bessel y de tercer orden en la forma normalizada, si en la salida está conectado un circuito electrónico con impedancia infinita.

Solución:

La función de transferencia G(s) se obtiene de las tabla 4.5.

$$y(s) = (s + 2,322)[(s + 1,838)^2 + 1,754^2)] = s^3 + 6s^2 + 15s + 15$$

$$G(s) = \frac{s^3 + 6s^2 + 15s + 15}{15} = 0,0666s^3 + 0,4s^2 + s + 1$$

Si el circuito trabaja con la puerta de salida abierta la imedancia del circuito es

$$Z(s) = \frac{G_{impar}}{G_{par}} = \frac{0,0666s^3 + s}{0,4s^2 + 1}$$

Si la impedancia Z(s) se desarrolla en el quebrado de escalera se obtiene

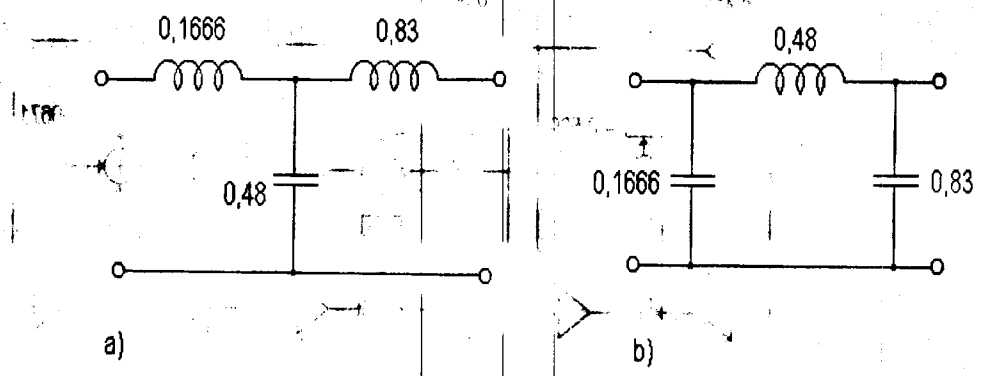


Figura 4.17. El circuito Bessel de tercer orden en las formas T y π

$$Z(s) = 0,1666s + \frac{1}{0,48s + \frac{1}{0,83s}}$$

El circuito LC en la figura 4.17a) no se puede utilizar, porque la ultima inductancia está volando y no sirve como elemento del filtro, (la salida está abierta). Es necesario utilizar el circuito dual en la forma π que se muestra en la figura 4.17b).

Capítulo 5

Aproximación de Cauer

La aproximación de las especificasiones de la plantilla consiste en encontrar la función de transferencia G(s) que cumple con dichas especificacionesn. Para la aproximación de las plantillas se usa la ecuación característica (5.1).

$$G(s)G(-s) = 1 + \phi(s)\phi(-s) \tag{5.1}$$

G(s) es la función de transferencia definida por la ecuación (5.2)

$$G(s) = \sqrt{\frac{U_1 I_1}{U_2 I_2}} \tag{5.2}$$

La función $\phi(s)$ es la función característica a elegir que cumple solo una condición. La función característica puede ser cualquier función positiva. La función de transferencia debe cumplir las siguientes condiciones:

- El numerador de G(s) debe ser un polinomio Hurwitz. Eso significa que los ceros deben estar en el lado izquierdo del plano complejo de G(s).
- Para todas las frecuencias ω la función de transferencia G(s) debe cumplir la condición $|G(j\omega)| \geq 1$.

La prueba de G(s) como una función de transferencia válida, no es fácil, pero si $\phi(s)$ es una función positiva podemos ver de (5.1) que se cumple la condición $|G(j\omega)| \geq 1$. Si se eligen los ceros de la ecuación de transferencia en el lado izquierdo del plano complejo de G(s) entonces se cumplen las dos condiciones necesarias. En el caso de aproximación elíptica la función característica se elige como se muestra en la ecuación (5.3)

$$\phi(s) = s\frac{b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \ldots}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \ldots} = s\frac{\prod_{i=1}^{i=n}(s^2 - s_{01}^2)}{\prod_{i=1}^{i=n}(s - s_{\infty 1})} \tag{5.3}$$

En la ecuación (5.3) s_{0i} y $s_{\infty i}$ son los ceros y polos respectivos como se muestra en la figura 5.1. Los polos de la función característica $\phi(s)$ son también los polos de la

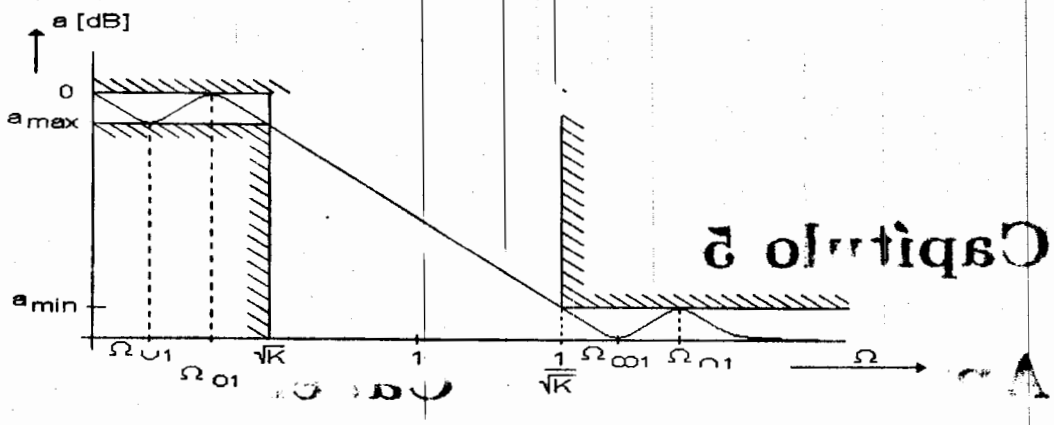


Figura 5.1. Atenuación del filtro de Cauer

función de transferencia G(s). Los polos de la función transferencia G(s) y los ceros de la misma son recíprocos.

El filtro elíptico tiene la atenuación que se muestra en la figura 5.1. La atenuación tiene las oscilaciones en la banda de paso y también en la banda de supresión. Calcular la función de transferencia no es fácil, es necesario utilizar integrales elípticas. En este apuntes se van a utilizar las series para calcular los ceros de la función de transferencia.

Generalmente existen por los menos cuatro métodos para obtener la función de transferencia de los filtros elípticos:

- de Rumpelt
- de Darlington
- de Cauer
- de Skwirzinski

El primer método es muy fácil de enseñar y también de aprender. Este método es gráfico y tiene la ventaja que se puede aproximar la plantilla muy complicada. Con otras palabras, la plantilla que tiene más especificaciones en la banda de paso y de supresión, como se muestra en la figura 5.2

En el método propusto por Darlington, se utilizan los filtros mk de Zobel que se muestran en la figura 5.3. Para utilizar este método no se necesita conocer las integrales elípticas y es muy fácil de enseñar y también de aprender. Pero antes de aprender es necesario aprender la teoría del filtro de Zobel.

El método que propuso Wilhelm Cauer está basado en el conocimiento de las integrales elípticas y resulta difícil de aprender para los estudiantes de licenciatura.

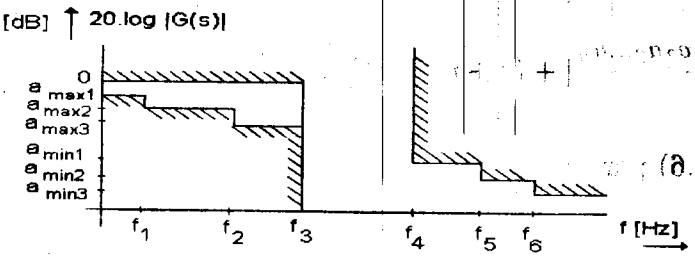


Figura 5.2. Los especificaciones a una paso bajas.

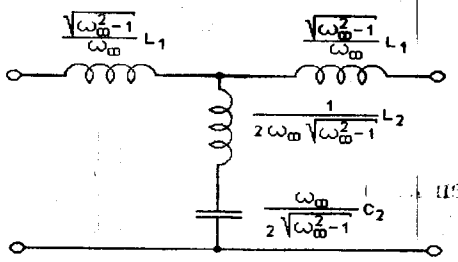


Figura 5.3. Filtro mk Zobel.

Lo mismo se puede decir sobre el método que propuso Skwirzinskij, el cual aproxima las integrales elípticas con las series. Con este método al fin se calcula el filtro de tercer orden.

5.1 Filtro elíptico con el método de Rumpelt

La función característica en la ecuación (5.1) de un filtro elíptico se puede escribir como un quebrado de dos polinomios:

$$\phi(s) = cs^r \frac{(s^2+a_1^2)(s^2+a_2^2)...(s^2+a_n^2)}{(s^2+b_1^2)(s^2+b_2^2)...(s^2+b_m^2)} \tag{5.4}$$

Este polinomio se puede arreglar en la siguiente forma

$$\phi(s) = cs^{r+n-m} \frac{a_1 a_2 ... a_n}{b_1 b_2 ... b_m} \frac{(\frac{s}{a_1}+\frac{a_1}{s})(\frac{s}{a_2}+\frac{a_2}{s})...(\frac{s}{a_n}+\frac{a_n}{s})}{(\frac{s}{b_1}+\frac{b_1}{s})(\frac{s}{b_2}+\frac{b_2}{s})...(\frac{s}{b_n}+\frac{b_n}{s})} \tag{5.5}$$

Si se en 5.5 sustituye $s = j\omega$, después del logaritmo natural de la parte derecha e izquierda se obtiene:

$$\ln|\phi(j\omega)| = \ln|c\frac{a_1a_2...a_n}{b_1b_2...b_n}| + (r+n-m)\ln\omega + \sum_{i=1}^{n}|\frac{\omega}{a_i} - \frac{a_i}{\omega}| - \sum_{i=1}^{m}|\frac{\omega}{b_i} - \frac{b_i}{\omega}| \quad (5.6)$$

Si se sustituye en (5.6) por

$$|c\frac{a_1a_2...a_n}{b_1b_2...b_m}| = e^k \quad (5.7)$$

$$\omega = e^{\gamma}, \qquad a_i = e^{\gamma a_i} \quad y \quad b_i = e^{\gamma b_i} \quad (5.8)$$

se obtiene la relación (5.9):

$$a_\phi = \ln|\phi(\omega)| = k + (r+n-m)\gamma + \sum_{i=1}^{n}\ln|e^{\gamma-\gamma_{a_i}} - e^{-(\gamma-\gamma_{a_i})}| - \sum_{i=1}^{m}\ln|e^{\gamma-\gamma_{b_i}} - e^{-(\gamma-\gamma_{b_i})}| \quad (5.9)$$

Que se pede escribir también en la forma siguiente

$$a_\phi = k + (r+n-m)\gamma + \sum_{i=1}^{n}\ln(2\ senh|\gamma-\gamma_{a_i}|) - \sum_{i=1}^{m}\ln(2\ senh|\gamma-\gamma_{b_i}|) \quad (5.10)$$

La ecuación (5.10) se puede graficar. La constante k se grafica como una recta paralela con el eje γ. El término $(r+n-m)\gamma$ es también una recta con la pendiente $(r+n-m)$, como se ve en la figura 5.4. Los últimos dos términos es el grafo para realizar los polos y ceros de la función característica $\phi(s)$. Si todas las componentes se suman se obtiene la función característica $\phi(s)$ y después mediante la ecuación característica (5.1) la función de transferencia $G(s)$. En el siguiente ejemplo se mostrará como se obtiene la función de transferencia del filtro elíptico mediante el método de Rumpelt.

Ejemplo 1

En este ejemplo se realiza el filtro elíptico si se conocen los especificaciones de la plantilla en la figura 5.5. Para transformar el filtro de la variable ω a variable γ, se utilizan las ecuaciones (5.7) y (5.8). La atenuación a_ϕ se transforma mediante la ecuación

$$e^{a_\phi} = \frac{1}{2}\ln|e^{0,23a} - 1|$$

entonces la atenuación $a_{max} = 0.869$ se transforma a un valor -0.754 y $a_{min} = 21,784$ se transforma a 2,496.

$$e^{a\phi_{max}} = \frac{1}{2}\ln|e^{0,23.0,869} - 1| = -0,754$$

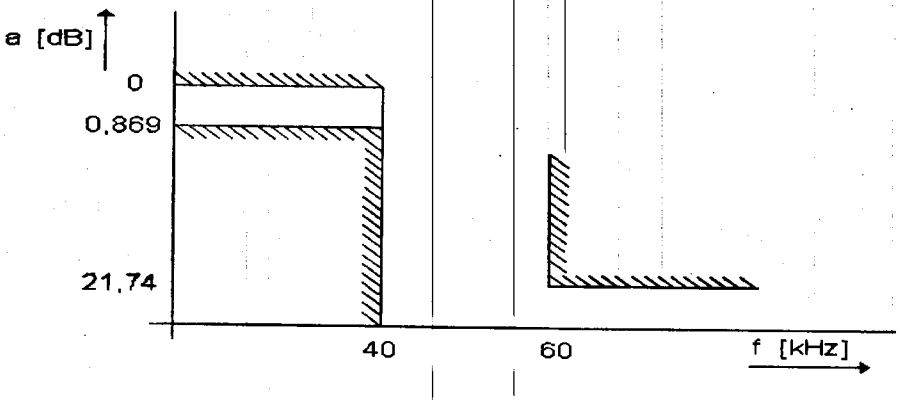


Figura 5.5. Especificaciones para paso bajas.

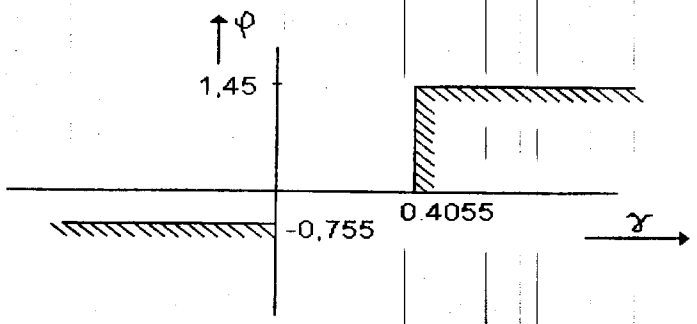


Figura 5.6. Los especificaciones para paso bajas en el dominio de γ.

$$e^{a\phi_{min}} = \frac{1}{2}\ln|e^{0,23.21,74} - 1| = 2,496$$

La frecuencia del corte f_1 y la frecuencia f_2 en el dominio de γ toman los valores

$$\gamma_1 = \ln 1 = 0$$

$$\gamma_2 = \ln \frac{60}{40} = 0,405$$

Los especificaciones de la plantilla en el dominio de γ se muestran en la figura 5.6. Estas especificaciones se grafican posteriormente en un papel transparente, para obtener la constante k.

En otro papel se grafica, mediante los patrones en la figura 5.4, los polos en la parte derecha del dominio γ y los ceros en la parte izquierda. Los polos están ubicados en $\gamma_{b1} = 0,5$ y $\gamma_{b2} = 1$, mientras los ceros en $\gamma_{a1} = -1$ y $\gamma_{a2} = -2$. Si todas las gráficas interrumpidas se suman se obtiene como resultado la línea no interrumpida, como se ve en la figura 5.7. Ahora, mediante la plantilla en el papel transparente buscamos si

la atenuación cumple las especificaciones y calculamos la constante k. La konstante k es la distancia entre γ en el papel transparente y γ de la plantilla. Los máximos y mínimos de los ceros y polos tienen el mismo nivel, como se aprecia de la figura 5.7.

Si se utilizan los ecuaciones (5.7) y (5.8) se obtienen los coeficientes de la función característica $\phi(\omega)$.

$$a_1 = e^{\gamma_{a_1}} = 0,37 \qquad a_2 = e^{\gamma_{a_2}} = 0,14$$
$$b_1 = e^{\gamma_{b_1}} = 1,65 \qquad b_2 = e^{\gamma_{b_2}} = 2,72$$

La función característica, sustituyendo la ecuación (5.4), toma la forma

$$\phi(s) = ks\frac{(s^2+0,37^2)(s^2+0,14^2)}{(s^2+1,65^2)(s^2+2,72^2)}$$

La función de transferencia $G(s)$ se calcula mediante la ecuación (5.1).

5.2 Filtro elíptico según Darlington

Darlington en su trabajo elegió la función característica en la forma:

Para los filtros simétricos:

$$\phi(j\omega) = \sqrt{e^{0,23a_{max}} - 1}\ \ cosh(g_{0m}) \tag{5.11}$$

Para los filtros asimétricos:

$$\phi(j\omega) = \sqrt{e^{0,23a_{max}} - 1}\ \ senh(g_{0m}) \tag{5.12}$$

De los filtros mk de Zobel, figura 5.3, se obtiene:

$$cosh(g_{0m}) = \frac{m^2s^2 + s^2 + 1}{\frac{s^2}{\Omega_\infty^2} + 1} \tag{5.13}$$

y para $senh(g_{0m})$

$$senh(g_{0m}) = \frac{2ms\sqrt{s^2+1}}{\frac{s^2}{\Omega_\infty^2} + 1} \tag{5.14}$$

Para obtener la función característica primeramente se calcula $e^{g_{0m}}$ y $e^{-g_{0m}}$.

$$e^{g_{0m}} = cosh\ \ g_{om} + senh\ \ g_{0m} = \frac{(ms + \sqrt{s^2+1})^2}{\frac{s^2}{\Omega_\infty^2} + 1}$$

$$e^{-g_{0m}} = cosh\ \ g_{om} - senh\ \ g_{0m} = \frac{(ms - \sqrt{s^2+1})^2}{\frac{s^2}{\Omega_\infty^2} + 1}$$

Si los filtros de Zobel se conectan en cascada las constantes de propagación se suman $g_0 + g_{01} + g_{02} + ... + g_{0m}$ y, después de un largo cálculo, se obtiene:

$$cosh\ g_{0m} = \frac{1}{2}\frac{(m_1 s + \sqrt{s^2+1})^2 ... (m_\sigma s + \sqrt{s^2+1})^2 + (m_1 s - \sqrt{s^2+1})^2 ... (m_\sigma s - \sqrt{s^2+1})^2}{(\frac{s^2}{\Omega^2_{\infty 1}} + 1) ... (\frac{s^2}{\Omega^2_{\infty 2}} + 1)}$$

y la función característica de un filtro elíptico y simétrico toma la forma:

$$\phi(j\omega) = \sqrt{e^{0,23 a_{max}} - 1} cosh\ g_0 = \sqrt{e^{0,23 a_{max}} - 1} \frac{1 + a_2 s^2 + a_4 s^4 + ... + a_{2\sigma} s^{2\sigma}}{(\frac{s^2}{\Omega^2_{\infty 1}} + 1) ... (\frac{s^2}{\Omega^2_{\infty 2}} + 1)} \quad (5.15)$$

donde los coeficientes a_i para varios σ se calculan mediante las ecuaciones

$$\begin{aligned}
&\sigma = 1 \quad a_2 = 1 + m_1^2 \\
&\sigma = 2 \quad a_2 = 2\alpha_1^2 + 2\alpha_2 \\
&\qquad\quad a_4 = 1 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 2\alpha_2 \\
&\sigma = 3 \quad a_2 = 3 + \alpha_1^2 + 2\alpha_2 \\
&\qquad\quad a_4 = 3 + 2\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 4\alpha_2 + 2\alpha_1\alpha_3 \\
&\qquad\quad a_6 = 1 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_2^3 + 2\alpha_2 + 2\alpha_1\alpha_3 \\
&\alpha_1 \quad = m_1 + m_2 + ... m_\sigma \\
&\alpha_2 \quad = m_1 m_2 + m_1 m_3 + ... + m_2 m_3 + ... + m_{\sigma-a} m_\sigma \\
&\alpha_3 \quad = m_1 m_2 m_3 + ... + m_{\sigma-2} m_{\sigma-1} m_\sigma \\
&..... \quad .....\\
&\alpha\sigma \quad = m_1 m_2 ... m_\sigma
\end{aligned}$$

Para los filtros antimétricos se calcula $senh\ g_0$

$$senh\ g_0 = \frac{1}{2}\frac{(m_1 s + \sqrt{s^2+1})^2 ... (m_\sigma s + \sqrt{s^2+1})^2 (s + \sqrt{s^2+1})}{(\frac{s^2}{\Omega^2_{01}} + 1) ... (\frac{s^2}{\Omega^2_{01}} + 1)} +$$

$$+ \frac{(m_1 s - \sqrt{s^2+1})^2 ... (m_\sigma s - \sqrt{s^2+1})^2 (s - \sqrt{s^2+1})}{(\frac{s^2}{\Omega^2_{01}} + 1) ... (\frac{s^2}{\Omega^2_{01}} + 1)}$$

y la función caracteríistica $\phi(s)$ toma la forma:

$$\phi(j\omega) = \sqrt{e^{0,23 a_{max}} - 1} senh\ g_0 = \sqrt{e^{0,23 a_{max}} - 1} s \frac{1 + 2\alpha_1 + b_2 s^2 + b_4 s^4 + ... + b_{2\sigma} s^{2\sigma}}{(\frac{s^2}{\Omega^2_{\infty 1}} + 1) ... (\frac{s^2}{\Omega^2_{\infty 2}} + 1)} \quad (5.16)$$

los coeficientes de la función característica se calculan mediante siguientes ecuaciones:

$$\sigma = 1 \quad b_2 = 1 + m_1^2 + 2m_1$$

$$\sigma = 2 \quad b_2 = a_2 + 4\alpha_1 + 2\alpha_1\alpha_2$$
$$b_4 = a_4 + 2\alpha_1 + 2\alpha_1\alpha_2$$

$$\sigma = 3 \quad b_2 = a_2 + 6\alpha_1 + 2\alpha_3 + 2\alpha 1\alpha_2$$
$$b_4 = a_4 + 6\alpha_1 + 4\alpha_3 + 4\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_2\alpha_3$$
$$b_6 = a_6 + 2\alpha_1 + 2\alpha_3 + 2\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_2\alpha_3$$

5.3 Filtro elíptico según Skwirzinski

En la figura 5.1 se calkula la constante K

$$K = \frac{\omega_1}{\omega_2}$$

donde ω_1 es la frecuencia del corte y ω_2 es la frecuencia de supresión. En el caso del filtro elíptico las frecuencias de la atenuación mínima y máxima están relacionadas mediante las ecuaciones

$$\Omega_{0s} = \frac{1}{\Omega_{\infty s}} \qquad \Omega_{us} = \frac{1}{\Omega_{ns}}$$

El orden del filtro se puede calcular mediante la ecuación (5.17).

$$n = \frac{ln(e^{0,23a_{max}} - 1) - 0,23a_{min} - 2,77}{ln(q)} \tag{5.17}$$

donde

$$q = \frac{K}{16}\left[1 + 2\left(\frac{K}{4}\right)^2 + 15\left(\frac{K}{4}\right)^4 + 150\left(\frac{K}{4}\right)^6\right]^4 \tag{5.18}$$

Los ceros de la función característica ω_{0s} se calculan para n impar mediante la ecuación (5.19).

$$\Omega_{0s} = 2q^{\frac{1}{4}} \frac{sen(\frac{2s}{2n}\pi) - q^2 sen(\frac{6s}{2n}\pi) + q^6 sen(\frac{10s}{2n}\pi)}{1 - 2qcos(\frac{2s}{n}\pi) + 2q^4 cos(\frac{4s}{n}\pi)} \tag{5.19}$$

Los polos de la función característica ω_{us} se calculan mediante la ecuación (5.20).

$$\Omega_{us} = 2q^{\frac{1}{4}} \frac{sen(\frac{2s+1}{2n}\pi) - q^2 sen(\frac{3(2s+1)}{2n}\pi) + q^6 sen(\frac{5(2s+1)}{2n}\pi)}{1 - 2qcos(\frac{2s-1}{n}\pi) + 2q^4 cos(\frac{2(2s-1)}{n}\pi)} \tag{5.20}$$

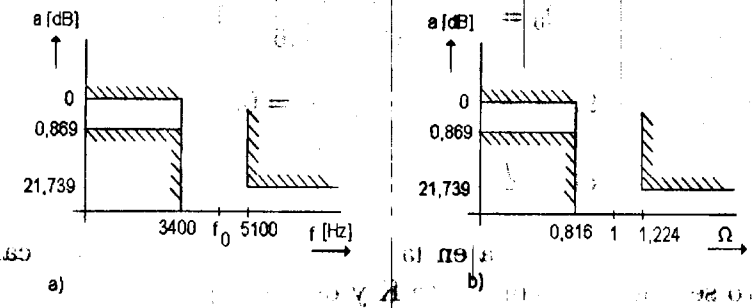


Figura 5.8. Especificaciones de la plantilla y la plantilla normalizada

Los ceros de la función de transferencia se calculan mediante los ecuaciones (5.21), (5.22) y (5.23). Primero es necesario calcular w

$$w = \frac{1}{2n}\left[ln\left|\frac{2}{0,115a_{max}}\right| + \frac{(0,115a_{max})^2}{12} + ...\right] \tag{5.21}$$

El cero real de la función de transferencia se calcula mediante (5.22).

$$\alpha_0 = 2q^{\frac{1}{4}}\frac{senh(w) - q^2 senh(3w) + q^6 senh(5w)}{1 - 2qcosh(2w) + 2q^4 cosh(4w)} \tag{5.22}$$

La parte real del cero complejo se calcula usando la ecuación (5.23).

$$\alpha_s = \frac{\alpha_0\sqrt{1 - \Omega_{0s}^2\left(K + \frac{1}{K} - \Omega_{0s}^2\right)}}{1 + \alpha_0^2\Omega_{0s}^2} \tag{5.23}$$

La parte imaginaria del cero complejo se calcula mediante la siguiente ecuación:

$$\beta_s = \pm\frac{\Omega_{0s}\sqrt{1 - \alpha_0^2\left(K + \frac{1}{K} + \alpha_0^2\right)}}{1 + \alpha_0^2\Omega_{0s}^2} \tag{5.24}$$

Las ecuaciones anteriores se pueden utilizar para calcular el filtro de Cauer sólo para el orden del filtro impar. En el siguiente ejemplo se explica cómo se calculan los filtros de Cauer.

Ejemplo 2

Calcule el filtro Cauer para las especificaciones que se muestran en la figura 5.8a. Es necesario normalizar la plantilla de las especificaciones.

$$f_0 = \sqrt{3400.5100} = 4164,1326$$

$$\Omega_0 = \frac{f_0}{f_0} = \frac{4164,1326}{4164,1326} = 1$$

$$\Omega_1 = \frac{f_1}{f_0} = \frac{3400}{4164,1326} = 0,816$$

$$\Omega_0 = \frac{f_2}{f_0} = \frac{5100}{4164,1326} = 1,224$$

La plantilla normalizada se muestra en la figura 5.8b. Es necesario calcular el orden del filtro. Primero se calcula la constante K y después q.

$$K = \frac{0,816}{1,224} = 0,6666$$

$$q = \frac{0,4444}{16}\left[1 + 2\left(\frac{0,666}{4}\right)^2 + 15\left(\frac{0,666}{4}\right)^4 + 150\left(\frac{0,666}{4}\right)^6\right]^4 = 0,0364579$$

$$n \geq \frac{-1,50777 - 5 - 2,77}{-3,311159} = 2,8$$

El orden del filtro debe ser un número entero y por eso se elige n=3.

La frecuencia normalizada de atenuación mínima en la banda de paso.

$$\Omega_{01} = 2.0,0364^{\frac{1}{4}}\frac{sen(\frac{2}{6}\pi) - 0,0364^2 sen(\frac{6}{6}\pi) + 0,0364^6 sen(\frac{10}{6}\pi)}{1 - 2.0,0364 cos(\frac{2}{3}\pi) + 2.0,0364^4 cos(\frac{4}{3}\pi)}$$

$$\Omega_{01} = \frac{0,7292548}{1,0364561} = 0,730226$$

La frecuencia normalizada de atenuación máxima en la banda de paso.

$$\Omega_{u1} = 2.0,0364^{\frac{1}{4}}\frac{sen(\frac{1}{6}\pi) - 0,0364^2 sen(\frac{3}{6}\pi) + 0,0364^6 sen(\frac{5}{6}\pi)}{1 - 2.0,0364 cos(\frac{1}{3}\pi) + 2.0,0364^4 cos(\frac{2}{3}\pi)}$$

$$\Omega_{u1} = 0,8739\frac{0,5 - 0.0013 + 2,348.10^{-9}.0,5}{1 - 0.036957 - 0,0000018} = 0,4535$$

El polo de la atenuación y la frecuencia mínima normalizada en la banda de supresión se calculan como el valor inverso de Ω_{01} y Ω_{u1}. Calculando, obtenemos:

$$\Omega_\infty = \frac{1}{0,73022} = 1,369 \qquad \Omega_{n1} = \frac{1}{0,4535} = 2,205$$

Antes de calcular los ceros de la función de transferencia se calcula el coeficiente w

$$w = \frac{1}{6}\left[ln\left|\frac{2}{0,115.0,869}\right| + \frac{(0,115.0,8699)^2}{12} + ...\right] = 0,499$$

El cero real de la función de transferencia.

$$\alpha_0 = 2.0,0364^{\frac{1}{4}} \frac{senh(0,499) - 0,0364^2 senh(3.0,499) + 0,0364^6 senh(5.0,499)}{1 - 2.0,0364 cosh(2.0,499) + 2.0,0364^4 cosh(4.0,499)} = 0,5096$$

La parte real del cero complejo de la función de transferencia.

$$\alpha_1 = \frac{0,5096\sqrt{1 - 0,732022^2\left(0,666 + \frac{1}{0,666} - 0,73022^2\right)}}{1 + 0,5096^2.0,73022^2} = 0,160769$$

La parte imaginaria del cero complejo de la función de transferencia.

$$\beta_1 = \pm\frac{0,73022\sqrt{1 - 0,5096^2\left(0,6666 + \frac{1}{0,6666} + 0,5096^2\right)}}{1 + 0,5096^2.0,7302268^2} = 0,8189$$

La función de transferencia del filtro Cauer es de la forma

$$G(s) = C.(s + 0,5096)\frac{[(s + 0,1607)^2 + 0,8189^2]}{s^2.0,73022^2 + 1}$$

$$G(s) = 5,358\frac{s^3 + 0,83s^2 + 0,865s + 0,35}{s^2 + 1,87536} \tag{5.25}$$

Y la función de característica toma la forma

$$\phi(s) = 5,358\frac{s^3 + 0,533s}{s^2 + 1,87} \tag{5.26}$$

Ejemplo 3.

Realice el filtro de Cauer del ejemplo anterior. La impedancia Z_{11} y Z_{11} del filtro de Cauer se calcula mediante la ecuación (5.27)

$$Z_{11} = \frac{g_{impar} + f_{impar}}{g_{par} + f_{par}} \quad Z_{12} = \frac{k(p)}{g_{par} + f_{par}} \tag{5.27}$$

Sustituyendo por $g_{impar}, g_{par}, f_{par}, f_{impar}$ y por k(p) en (5.27), obtenemos:

$$Z_{11} = \frac{2s^3 + 1,398s}{083s^2 + 0,35} \quad Z_{12} = \frac{s^2 + 1,875}{0,83s^2 + 0,35} \tag{5.28}$$

Los ceros de la impedancia de transferencia son $s = \infty$ y $s = \sqrt{1,875}$. Vamos a realizar el cero en $s = -\sqrt{1,875}$ mediante el circuito particular de la figura 5.9a. Primero es necesario calcular Z_1.

$$Z_1 = s\frac{2s^2 + 1,398}{0,83s^2 + 0,35}\Big|_{s^2=-1,87} = 1,948s$$

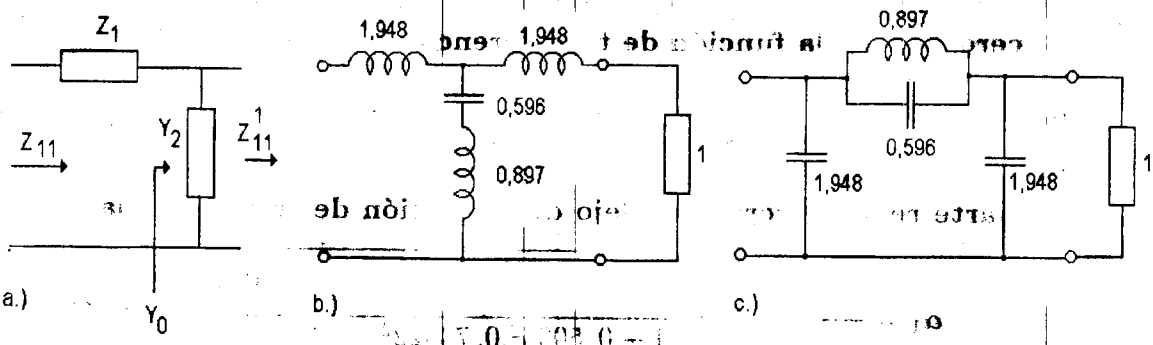


Figura 5.9. Filtro Cauer de tercer orden

La impedancia Z_1 es la inductancia $L_1 = 1,948$. Ahora se conocen las impedancias Z_{11} y Z_1 y se puede calcular Z_0 de la figura 5.9a.

$$Z_0 = Z_{11} - 1,948s = \frac{2s^3 + 1,398s}{0,83s^2 + 0,35} - 1,948s = \frac{0,38316s^3 + 0,7162s}{0,83s^2 + 0,35}$$

$$Y_0 = \frac{0,83s^2 + 0,35}{0,38316s(s^2 + 1,87)} = \frac{As}{s^2 + 1,87} + \frac{1}{Z_{11}^1}$$

Si se calcula la constante A, entonces se conocen todos valores de los elementos del circuito en serie LC.

$$A = \frac{0,83s^2 + 0,35}{s^2.0,38316}|_{s^2=-1,87} = 1,6777$$

El circuito serie LC tiene los valores de la inductancia $L_2 = 0,596$ y la capacitancia $C_2 = 0,897$. El circuito se muestra la figura 5.9 b.

$$Y_2 = \frac{1,6777s}{s^2 + 1,87} = \frac{1}{0,596s + \frac{1}{0,897s}}$$

Todavía falta calcular el último elemento Z_{11}^1

$$\frac{1}{Z_{11}^1} = \frac{0,83s^2 + 0,35}{0,38316s(s^2 + 1,87)} - \frac{1,6777s}{s^2 + 1,87}$$

$$\frac{1}{Z_{11}^1} = \frac{0,18718s^2 + 1,87}{0,38316s(s^2 + 1,87)} = 2,047s$$

El circuito completo se muestra en la figura 5.9b, pero necesita tres inductancias y por eso físicamente es más fácil realizar el filtro dual con una inductancia, la cual se muestra en la figura 5.9c.

Capítulo 6

Diseño de los filtros mediante tablas

6.1 Las tablas del filtro Butterworth.

Los ceros de la función de transferencia de filtro de Butterworth, los coeficientes de la función de transferencia y los valores de los elementos del filtro se encuentran en los libros [?], [?] y [?]. En este libro en la tabla 6.1 se muestran los polos de la función de transferencia del filtro Butterworth hasta el orden n=7. En la tabla 6.2 se encuentran los coeficientes de la función de transferencia y en la tabla 6.3 se encuentran los valores de los elementos del filtro Butterworth. En todas las tablas los valores son para los filtros con la atenuación máxima de tres Decibeles en la frecuencia de corte $\omega_1 = 1$.

Ejemplo 1.

Calcular la función de transferencia de Butterworth que tiene en la frecuencia de corte 100 Hz la atenuación 0,1 dB. El orden del filtro es n=3. De la tabla 6.2 para n=3 y $a_{max} = 3dB$ se obtiene la función de transferencia

$$G(s) = s^3 + 2s^2 + 2s + 1$$

Para obtener G(s) que tiene en ω_1 la atenuación 0,1 dB necesitamos sustituir por

$$s = \sqrt[6]{e^{0,23.0,2} - 1}p = 0,600893p$$

Sustituyendo por s=0,600893p se obtiene

$$G(p) = 0,21696638p^3 + 0,72214479p^2 + 1,201786p + 1$$

Para obtener en la frecuencia del corte $\omega_1 = 100$ rad/sec la atenuación $a_{max} = 0,2$ dB necesitamos hacer la sustitución $p = \frac{p}{\omega_1} = \frac{p}{100}$. La función de transferencia que atenua 0,2 dB en la frecuencia del corte $\omega_1 = 100$ rad/sec toma la forma

n	1	2	3	4	5	6	7
$-\alpha_1$	1,00000	0,707107	1,00000	0,38268	1,00000	0,25882	1,00000
$\pm j\beta_1$	0,00000	0,707107	0,00000	0,92388	0,00000	0,96593	0,00000
$-\alpha_2$			0,50000	0,92388	0,30902	0,70711	0,22252
$\pm j\beta_2$			0,86602	0,38268	0,95106	0,70711	0,97493
$-\alpha_3$					0-80902	0,96592	0,62489
$\pm j\beta_3$					0,58778	0,25882	0,78183
$-\alpha_4$							0,90097
$\pm j\beta_4$							0,43388

Tabla 6.1. Los ceros de la función de transferencia del filtro Butterworth

n	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6
1	1,00000						
2	1,41421	1,00000					
3	2,00000	2,00000	1,00000				
4	2,61312	3,41421	2,61312	1,00000			
5	3,23606	5,23606	5,23606	3,23606	1,00000		
6	3,86370	7,46410	9,14162	7,46410	3,86370	1,00000	
7	4,49396	10,0978	14,5917	14,5917	10,0978	4,49395	1,00000

Tabla 6.2. Los valores de la función de transferencia del filtro Butterworth

$$G(p) = 2,1696638.10^{-7}p^3 + 7,2214479.10^{-5}p^2 + 0,01201786p + 1$$

Ejemplo 2.

Calcular la función de transferencia del filtro paso bajas de Butterworth para el orden del filtro n=3 y $a_{max} = 0,5$ dB. La fracuencia del corte que sea $f_1 = 100$ Hz.

Solución:

Para $a_{max} = 3$ dB y la frecuencia del corte $\omega = 1$ de la tabla 6.2 la función de transferencia es

$$H(s) = s^3 + 2s^2 + 2s + 1$$

Para desnormalizarla con respecto a $f_1 = 100$ Hz y $a_{max} = 0,5$ dB es necesario sustituir en H(s) por s

n	l_1	c_2	l_3	c_4	l_5	c_6	l_7
1	1						
2	1,41421	1,41421					
3	1,00000	2,00000	1,00000				
4	0,76536	1,84775	1,84775	0,76536			
5	0,61803	1,61803	2,00000	1,61803	0,61083		
6	0,51763	1,41421	1,93185	1,93185	1,41421	0,51763	
7	0,44504	1,24697	1,80193	2,00000	1,80193	1,24697	0,44504
n	c_1	l_2	c_3	l_4	c_5	l_6	c_7

Tabla 6.3. Los valores del circuito LC del filtro Butterworth

$$s = \sqrt[6]{10^{\frac{0,5}{10}} - 1}p = 0,704267p$$

$$p = \frac{p}{\omega_1}$$

Si se desnormaliza la función de transferencia con respecto a $a_{max} = 0,5$ dB se obtiene

$$H(p) = 0,704267^3p^3+2.0,704267^2p^2+2.0,704267p+1 = 0,3493p^3+0,99195p^2+1,408534p+1$$

La función de transferencia resultante despues de desnormalización también en respecto de la frecuencia del corte $f_1 = 100\ Hz$ toma la forma

$$H(p) = 1,40818.10^{-9}p^3 + 2,536805.10^{-6} + 2,2417515.10^{-3} + 1$$

Ejemplo 3.

Calcular los elementos del filtro Butterworth paso bajas de orden n=7 si en la salida y la entrada hay un resistor de 75 Ω. La atenuación en la frecuencia del corte $f_1 = 3400$ Hz es de 0,5 dB. Los elementos normalizados del filtro Butterworth de la tabla 6.3 son:

$$c_1 = c_7 = 0,44504 \qquad l_2 = l_6 = 1,24697 \qquad c_3 = c_5 = 1,80193 \qquad l_4 = 2,0000$$

El filtro normalizado está en la figura 6.1a). Para desnormalizar los elementos del filtro con respecto a la atenuación de 0,5 dB necesitamos multiplicar cada elemento por una constante K.

$$K = \sqrt[14]{e^{0,23.0,5} - 1} = 0,86041$$

Los nuevos elementos desnormalizados con respecto a la atenuación 0,5 dB son:

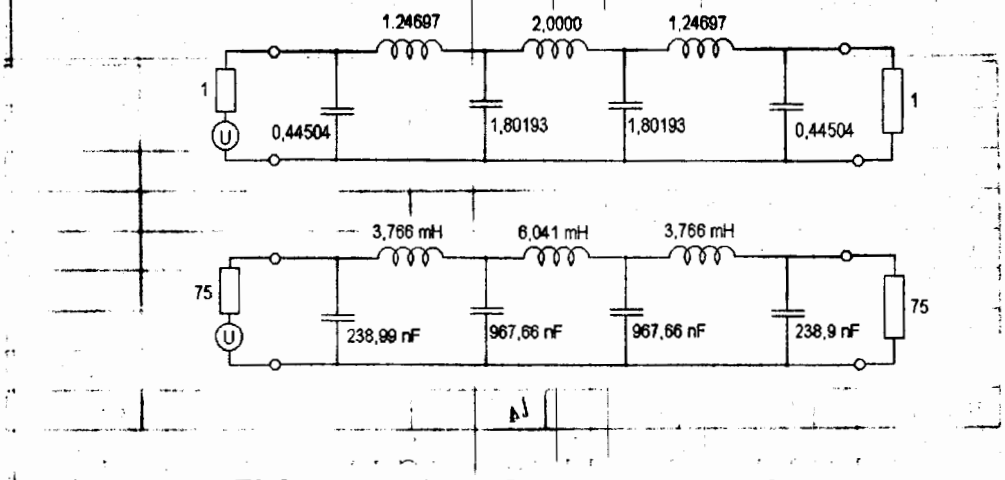


Figura 6.1. El filtro paso bajas Butterworth para el orden n=7

$c_1 = c_7 = 0,382916 \qquad l_2 = l_6 = 1,072905 \qquad c_3 = c_5 = 1,550398 \qquad l_4 = 1,72082$

Para desnormalizar los elementos del filtro con respecto a la frecuencia $f_1 = 3400$ Hz y a la impedancia 75 Ω se utilizan las ecuaciones:

$$C_1 = C_7 = \frac{c_1}{\omega_1.R_0} = \frac{0,382916}{2.\pi.3400.75} = 238,99\ nF$$

$$C_3 = C_5 = \frac{c_3}{\omega_1.R_0} = \frac{1,550398}{2.\pi.3400.75} = 967,66\ nF$$

$$L_2 = L_6 = \frac{l_2.R_0}{\omega_1} = \frac{1.072905.75}{2.\pi.3400} = 3,766\ mH$$

$$L_4 = \frac{l_4.R_0}{\omega_1} = \frac{1,72082.75}{2.\pi.3400} = 6,041\ mH$$

El circuito paso bajas desnormalizado se muestra en la figura 6.1b.

6.2 Las tablas del filtro Chebychev

Los polos de la función de transferencia, del filtro Chebychev para el orden n=1 hasta n=7 se encuentran en las tablas 6.4 - 6.7. Los valores de los elementos del filtro Chebychev para varios atenuación en dB se encuentran en las tablas 6.8 - 6.11.

Ejemplo 4.

Calcular la función de transferencia del filtro Chebychev para la síntesis de los circuitos activos en cascada, si $a_{max} = 0,1$ dB y el orden del filtro n=5.

n	1	2	3	4	5	6	7
$-\alpha_1$	1,00000	0,67434	0,42334	0,28009	0,19556	0,14296	0,10850
$\pm j\beta_1$	0,00000	0,70750	0,86631	0,92407	0.95120	0,96603	0,97501
$-\alpha_2$			0,84668	0,67620	0,51199	0,39057	0,30401
$\pm j\beta_2$			0,00000	0,38276	0,58787	0,70718	0,78189
$-\alpha_3$					0,63285	0,53353	0,43931
$\pm j\beta_3$					0,00000	0,25885	0,43392
$-\alpha_4$							0,48760
$\pm j\beta_4$							0,00000

Tabla 6.4. Polos de H(s) del filtro Chebychev para $a_{max} = 0,01\ dB$

n	1	2	3	4	5	6	7
$-\alpha_1$	1,00000	0,61042	0,34896	0,21775	0,14676	0,10494	0,07850
$\pm j\beta_1$	0,00000	0,71065	0,86837	0,92541	0.95211	0,96668	0,97550
$-\alpha_2$			0,69792	0,52570	0,28670	0,28670	0,21996
$\pm j\beta_2$			0,00000	0,38332	0,58843	0,70766	0,78229
$-\alpha_3$					0,47493	0,39165	0,31785
$\pm j\beta_3$					0,00000	0,25902	0,43414
$-\alpha_4$							0,35279
$\pm j\beta_4$							0,00000

Tabla 6.5. Polos de H(s) del filtro Chebychev para $a_{max} = 0,1\ dB$

n	1	2	3	4	5	6	7
$-\alpha_1$	1,00000	0,56212	0,30618	0,18646	0,12402	0,08799	0,06550
$\pm j\beta_1$	0,00000	0,71536	0,87122	0,92719	0.95330	0,96754	0,97613
$-\alpha_2$			0,61236	0,45015	0,32469	0,24040	0,18354
$\pm j\beta_2$			0,00000	0,38405	0,58917	0,70829	0,78280
$-\alpha_3$					0,40134	0,32840	0,26522
$\pm j\beta_3$					0,00000	0,25925	0,43442
$-\alpha_4$							0,29437
$\pm j\beta_4$							0,00000

Tabla 6.6. Polos de H(s) del filtro Chebychev para $a_{max} = 0,25\ dB$

Solución:

Para n=5 y $a_{max} = 0,1$ dB se obtinen de la tabla 6.5 la real parte α y la parte imaginaria β de los polos de H(s)

$$\alpha_1 = -0,14676 \quad \beta_1 = \pm 0,95211$$
$$\alpha_2 = -0,38423 \quad \beta_2 = \pm 0,58843$$
$$\alpha_3 = -0,47493$$

La función de transferencia del filtro Chebychev para la síntesis del filtro en cascada toma la forma

$$H(s) = \frac{k_1}{(s+0,14676)^2 + 0.95211^2} \frac{k_2}{(s+0,38423)^2 + 0,58843^2} \frac{k_3}{s+0,47493}$$

Los constantes k_1, k_2 y k_3 se calculan de tal manera para que se cumpla la condición H(0)=1.

$$k_1 = 0,9285 \qquad k_2 = 0,49388 \qquad k_3 = 0,47493$$

Ejemplo 5.

Calcular el filtro Chebychev paso bajas, si se conocen los especificaciones del filtro 6.2. El filtro que trabaje entre las impedancias de 1000 Ω.

Solución:

Primero es necesario calcular el orden del filtro:

n	1	2	3	4	5	6	7
$-\alpha_1$	1,00000	0,51291	0,26829	0,16042	0,10570	0,07459	0,05534
$\pm j\beta_1$	0,00000	0,72247	0,87532	0,92970	0.95497	0,96871	0,97701
$-\alpha_2$			0,53659	0,38728	0,27672	0,20378	0,15505
$\pm j\beta_2$			0,00000	0,38509	0,59020	0,70915	0,78350
$-\alpha_3$					0,34205	0,27837	0,22406
$\pm j\beta_3$					0,00000	0,25957	0,43481
$-\alpha_4$							0,24869
$\pm j\beta_4$							0,00000

Tabla 6.7. Polos del H(s) del filtro Chebychev para $a_{max} = 0,5\ dB$

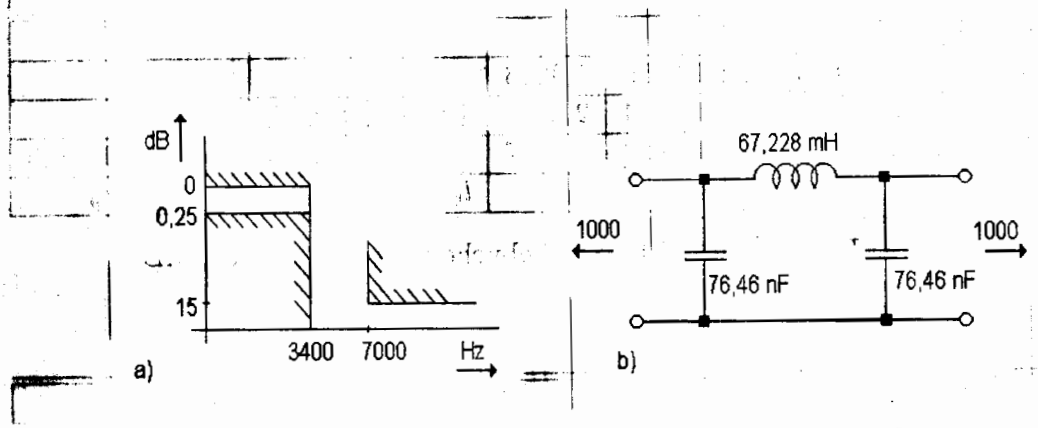


Figura 6.2. Los especificaciones para el filtro de Chebychev y la estructura.

$$n \geq \frac{argcosh\sqrt{\frac{10^{\frac{15}{10}}-1}{10^{\frac{0,25}{10}}-1}}}{argcosh(2,0588)} = 2,825$$

Tenemos que elegir n=3. De las tablas 6.10 para n=3 y $a_{max} = 0,25\ dB$ se obtienen los valores normalizados del filtro paso bajas

$$c_1 = 1,6331 \qquad l_2 = 1,4362 \qquad c_3 = 1,6332$$

Los valores desnormalizados se calculan mediante las ecuaciones siguientes

$$C_1 = C_3 = \frac{1,6331}{2.3,1415.3400.1000} = 76,460\ nF$$

$$L_2 = \frac{1,4362.1000}{2.\pi.3400} = 20,418\ mH$$

El circuito paso bajas se muestra en la figura 6.2b

n	l_1	c_2	l_3	c_4	l_5	c_6	l_7	c_8	l_9
3	1,1811	1,8214	1,1811						
5	0,9766	1,6849	2,0366	1,6849	0,9766				
7	0,9127	1,5947	2,0020	1,8703	2,0020	1,5947	0,9127		
9	0,8854	1,5513	1,9615	1,8616	2,0717	1,8616	1,9615	1,5513	0,8854
n	c_1	l_2	c_3	l_4	c_5	l_6	c_7	l_8	c_9

Tabla 6.8. Los valores del filtro Chebychev para $a_{max} = 0,01$ dB.

n	l_1	c_2	l_3	c_4	l_5	c_6	l_7	c_8	l_9
3	1,4328	1,5937	1,4328						
5	1,3013	1,5559	2,2411	1,5559	1,3013				
7	1,2615	1,5195	2,2393	1,6804	2,2393	1,5195	1,2615		
9	1,2446	1,5017	2,2220	1,6829	2,2957	1,6829	2,2220	1,5017	1,2446
n	c_1	l_2	c_3	l_4	c_5	l_6	c_7	l_8	c_9

Tabla 6.9. Los valores del filtro Chebychev para $a_{max} = 0,1$ dB.

n	l_1	c_2	l_3	c_4	l_5	c_6	l_7	c_8	l_9
3	1,6331	1,4362	1,6331						
5	1,5400	1,4349	2.4403	1,4349	1,5400				
7	1,5119	1,4169	2,4531	1,5349	2,4531	1,4169	1,5119		
9	1,5000	1,4705	2,4446	1,5406	2,5077	1,5406	2,4446	1,4705	1,5000
n	c_1	l_2	c_3	l_4	c_5	l_6	c_7	l_8	c_9

Tabla 6.10. Los valores del filtro Chebychev para $a_{max} = 0,25dB$.

n	l_1	c_2	l_3	c_4	l_5	c_6	l_7	c_8	l_9
3	1,8637	1,2804	1,8637						
5	1,8069	1,3025	2,6914	1,3025	1,8069				
7	1,7896	1,2961	2,7177	1,3848	2,7177	1,2961	1,7896		
9	1,7823	1,2921	2,7163	1,3921	2,7734	1,3921	2,7163	1,2921	1,7823
n	c_1	l_2	c_3	l_4	c_5	l_6	c_7	l_8	c_9

Tabla 6.11. Los valores del filtro Chebychev para $a_{max} = 0,5$ dB.

n	l_1	c_2	l_3	c_4	l_5	c_6	l_7	c_8	l_9
3	2,2156	1,0884	2,2156						
5	2,2071	1,1279	3,1025	1,1279	2,2071				
7	2,2040	1,1306	3,1469	1,1397	3,1469	1,1306	2,2039		
9	2,2024	1,1308	3,1540	1,2020	3,2072	1,1020	3,1540	1,1308	2,2024
n	c_1	l_2	c_3	l_4	c_5	l_6	c_7	l_8	c_9

Tabla 6.12. Los valores del filtro Chebychev para $a_{max} = 1,0dB$.

6.3 Las tablas de filtro Chebychev inversa

Los ceros del filtro Chebychev inversa, (ceros de la función de transferencia H(s)) se encuentran en la tabla 6.13. Los ceros del filtro Chebychev inversa son los polos de la atenuación. Los polos del filtro Chebychev inversa son reciprocos a los polos del filtro Chebyhcev $s_i = \frac{1}{s_i}$ y se pueden obtener de las tablas 6.4 - 6.7. Para la atenuación 20 dB, 30 dB y 40 dB en la frecuencia de supresión, los polos del filtro Chebychev inversa se encuentran en las tablas 6.14, 6.15 y 6.16.

Ejemplo 6.

Calcular la función de transferencia H(s) para el filtro Chebychev Inversa de cinco orden para que en la frecuencia de supresión $\omega_2 = 1$ la atenuación es $a_{min} = 30$ dB.

Solución:

De las tablas 6.13 y 6.15 para n=5 y $a_{min} = 30$ dB se obtiene

$$H(s) = K\frac{(s^2 + 1,05146^2)(s^2 + 1,70130^2)}{(s + 1,07787)[(s + 0,16241)^2 + 0,73493^2][(s + 0,62225)^2 + 0,66471^2]}$$

$$H(s) = K\frac{(s^2 + 1,05146^2)(s^2 + 1,70130^2)}{(s + 1,07787)(s^2 + 0,32482s + 0,56649)(s^2 + 1,2445s + 0,829034)}$$

El constante K se calcula de la condición H(0)=1.

$$H(0) = K\frac{1,05146^2.1,7013^2}{1,07787.0,566648.0,829034} = 1$$

$$K = 0,158236$$

La atenuación en la frecuencia normalizada de supresión $\omega_2 = 1$ se calcula mediante la expresión $20.log|G(1)|$, donde $G(1) = 1/H(1)$

n	$\Omega_{\infty 1}$	$\Omega_{\infty 2}$	$\Omega_{\infty 3}$	$\Omega_{\infty 4}$
2	1,41421			
3	1,15470			
4	1,08239	2,61313		
5	1,05146	1,70130		
6	1,03528	1,41421	3,86370	
7	1,02572	1,27905	2,30477	
8	1,01959	1,20269	1,79995	5,12583

Tabla 6.13. Ceros de H(s)-Polos de la atenuación del Chebychev inversa.

n	2	3	4	5	6	7	8
$-\alpha_1$	0,30000	0,27597	0,20565	0,15005	0,11182	0,08568	0,06739
$\pm j\beta_1$	0,33166	0,62840	0,78291	0,86147	0,90476	0,93071	0,94737
$-\alpha_2$		0,85345	0,92509	0,68614	0,47723	0,34115	0,25388
$\pm j\beta_2$			0,60426	0,92991	1,03469	1,06068	1,06249
$-\alpha_3$				1,57469	1,48905	1,03813	0,69933
$\pm j\beta_3$					0,86506	1,23957	1,30663
$-\alpha_4$						2,26884	2,03342
$\pm j\beta_4$							1,13102

Tabla 6.14. Polos de H(s) del filtro de Chebychev inversa para $a_{min} = 20\ dB$

$$G(1) = 31,59999\frac{(j+1,07787).(-0,43351+j0,32482)(-0,170966+j1,2445)}{(-1+1,05146^2)(-1+1,7013^2)}$$

$$G(1) = -31,59999(-0,239228+j0,971468)$$

$$a_{min} = 20.log\ 31,6154 = 29,997\ dB$$

Si se requiere que 30 dB es en la frecuencia 3400 Hz es necesario sustituir el la función de transferencia por s la nueva variable $s = \frac{p}{2.\pi.3400}$.

Ejemplo 7.

Calcular el filtro paso altas de Chebychev inversa para las especificaciones de la plantilla 6.3a. El filtro que trabaje entre los resistores 75 Ω.

n	2	3	4	5	6	7	8
$-\alpha_1$	0,17499	0,22043	0,19879	0,16241	0,12969	0,10389	0,08420
$\pm j\beta_1$	0,18062	0,43315	0,61798	0,73493	0,80842	0,85616	0,88846
$-\alpha_2$		0,53578	0,68363	0,62225	0,49923	0,38931	0,30564
$\pm j\beta_2$			0,36464	0,66471	0,83385	0,91829	0,96013
$-\alpha_3$				1,07787	1,15390	0,97130	0,74807
$\pm j\beta_3$					0,51642	0,87987	1,04916
$-\alpha_4$						1,59322	1,60230
$\pm j\beta_4$							0,66898

Tabla 6.15. Polos de H(s) del filtro Chebychev inversa para $a_{min} = 30\ dB$

n	2	3	4	5	6	7	8
$-\alpha_1$	0,09950	0,16115	0,17116	0,15592	0,13388	0,11269	0,09456
$\pm j\beta_1$	0,10050	0,29593	0,47610	0,61087	0,70579	0,77234	0,81975
$-\alpha_2$		0,35230	0,50454	0,52480	0,47103	0,39799	0,33009
$\pm j\beta_2$			0,24079	0,48539	0,66535	0,78070	0,85193
$-\alpha_3$				0,78777	0,90341	0,85179	0,72591
$\pm j\beta_3$					0,34193	0,64169	0,83644
$-\alpha_4$						1,20298	1,28166
$\pm j\beta_4$							0,43964

Tabla 6.16. Polos de H(s) del filtro Chebychev inversa para $a_{min} = 40\ dB$

n	c_1	c_2 l_2	c_3	c_4 l_4	c_5	l_6
3	0,76162	0,20803 1,52324	0,76162			
4	0,39649	0,40753 1,21732	1,53955			
6	0,05947	0,48265 0,75761	1,27903	0,93651 0,78414	0,63648	0,43328

Tabla 6.17. Los elementos del filtro Chebychev inversa para $a_{min} = 20$ dB.

n	c_1	c_2 l_2	c_3	c_4 l_4	c_5	c_6 l_6	c_7	c_8 l_8
3	0,88157	0,09490 1,76315	0,88157					
4	0,57065	0,21595 1,5230	1,71479	0,76245				
5	0,423037	1,14457 1,28450	1,63337	0,53040 0,91659	0,14736	0,43328		
6	0,19029	0,31931 0,93256	1,43027	0,54080 1,10124	0,87389	0,46067		
8	0,04238	0,35045 0,62053	0,92416	0,84673 0,87687	1,16705	0,68946 0,76148	0,45019	0,32491

Tabla 6.18. Los elementos del filtro Chebychev inversa para $a_{min} = 30$ dB.

n	c_1	c_2 l_2	c_3	c_4 l_4	c_5	c_6 l_6	c_7	c_8 l_8
3	0,94320	0.04390 1,88641	0,94320					
4	0,67795	0,11893 1,71867	1,83035	0,78962				
5	0,31706	0,30173 1,14795	1,73949	0,09490 1,39408	0,48549			
6	0,03875	0,58800 0,78742	1,66700	0,14145 1,63660	1,19950	0,48188		
8	0,11801	0,26022 0,71751	1,08035	0,57551 1,10767	1,30591	0,47819 0,94266	0,60325	0,33988

Tabla 6.19. Los elementos del filtro Chebychev inversa para $a_{min} = 40$ dB.

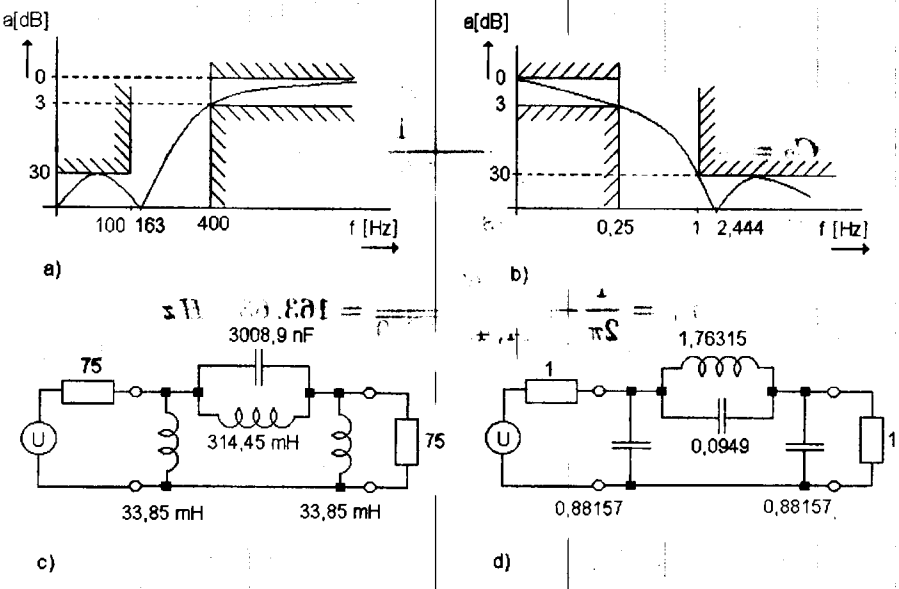


Figura 6.3. Los especificaciones para el filtro de Chebychev y la estructura.

Solución:

Primero se transforma la plantilla paso altas a paso bajas normalizada. Para el filtro Chebychev inversa la frecuencia de normalización es $f_0 = 400$ Hz. La paso bajas normalizada se muestra en la figura 6.3b. El orden del filtro se calcula mediante la ecuación siguiente. El orden del filtro es 2,0105 y por eso se elige como numero entero n=3.

$$n \geq \frac{argcosh\sqrt{\frac{10^{\frac{30}{10}}-1}{10^{\frac{3}{10}}-1}}}{argcosh\frac{1}{0,25}} = 2,0105$$

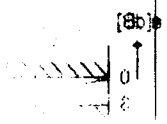
De las tablas para $a_{min} = 30$ dB y n=3 los valores normalizados de paso bajas son

$$c_1 = c_3 = 0,88157 \qquad c_2 = 0,0949 \qquad l_2 = 1,76315$$

El filtro paso bajas normalizado se muestra en la figura 6.3d. Es necesario el circuito paso bajas normalizada transformar a paso altas y desnormalizarlo al respecto de $R_0 = 75\ \Omega$ y $f_0 = 4000$ Hz. El inductor se transforma a capacitor y el capacitor normalizado a un iductor. El filtro paso altas desnormalizado se muestra en la figura 6.3c y los valores desnormalizados del filtro se obtienen como se muestra adelante

$$L_3 = L_1 = \frac{R_0}{c_1.2.\pi.f_0} = \frac{75}{0,88157.2.\pi.400} = 33,85\ mH$$

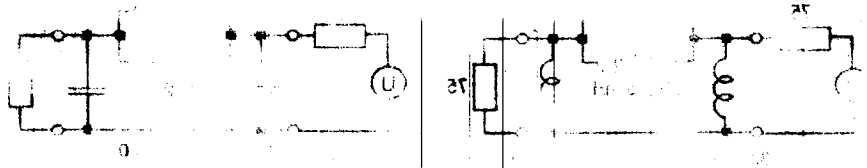
$$L_2 = \frac{R_0}{c_2.2.\pi.f_0} = \frac{75}{0,0949.2.\pi.400} = 314,45\ mH$$



$$C_2 = \frac{1}{c_1.2.\pi.f_0.R_0} = \frac{1}{1,76315.2.\pi.400.75} = 30008,91 \ nF$$

La frecuencia del polo de atenuación es

$$f_\infty = \frac{1}{2\pi} \frac{10^6}{\sqrt{314,4.3008,9}} = 163,634 \ Hz$$



Capítulo 7

Filtros pasivos RC

Los filtros pasivos RC se utilizan si los exigencias para la atenuación no son tan riguroso. Las ventajas de los filtros pasivos RC es que no necesitan las fuentes de los voltajes y se componen de los elementos cencillos, capacitores y rezistores. Los filtros RC se pueden fabricar en la forma integrada. La desventaja de los filtros RC es, que no se pueden realizar los polos complejos de la función de transferencia H(s). Si se calculan los filtros pasivos RC habitualmente se eligen los valores de los capacitores y se calculan las resistores. El valor de las resistores de los filtros pasivos RC (PRC) depende en el capacitor C que se elije y en la frecuencia del corte ω_1 del filtro.

7.1 Los filtros PRC elementales.

PASA BAJAS.

El filtro PRC elemental de pasa bajas (PBF) se muestra en la figura 7.1 y tiene la función de transferencia (7.1). Donde ω_1 es la frecuencia del corte de la carácteristica asimptótica. El capacitor se puede elejir y el resistor se calcula mediante la ecuación $R = \frac{1}{C\omega_1}$.

$$H(s) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{1}{1 + sCR} = \frac{1}{1 + \frac{s}{\omega_1}} \tag{7.1}$$

PASA ALTAS.

En la figura 7.2 se muestra el circuito RC pasivo PRC. La función de transferencia pasa altas PRC del circuito 7.2 toma la forma (7.2), donde ω_{-1} es la frecuencia del corte de pasa altas . Como en el caso pasa bajas, el condensator se elije y se calcula el resistor. $R = \frac{1}{C\omega_{-1}}$.

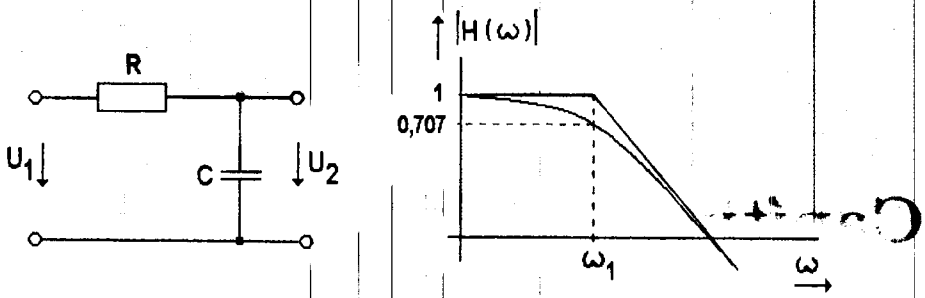


Figura 7.1. El filtro PBF elemental y la atenuación

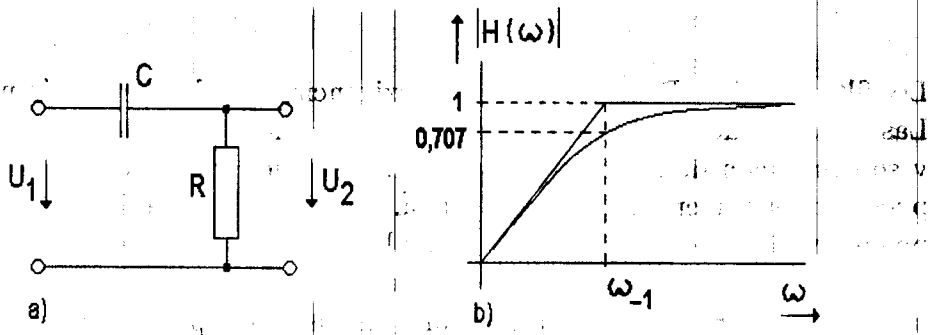


Figura 7.2. El filtro PA elemental y la atenuación

$$H(s) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{sCR}{1+sCR} = \frac{\frac{s}{\omega_{-1}}}{1+\frac{s}{\omega_{-1}}} \tag{7.2}$$

PASO BANDA

Paso banda (PB) se muestra en la figura 7.3. El circuito paso banda se obtiene si se conectan en la cascada el filtro PBF y PA. La función de transferencia paso banda H(s) obtenida de los circuitos 7.3a y 7.3b toma la forma

$$H(s) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{sC_aR_a}{s^2R_1C_1R_2C_2 + s(R_1C_1 + R_1C_2 + R_2C_2) + 1} \tag{7.3}$$

Para el circuito en la figura 7.3a es $R_a = R_2$ y $C_a = C_2$ y para el circuito en 7.3b los valores R_a y C_a son $R_a = R_1$ y $C_a = C_1$.

BANDA DE SUPRESIÓN

La banda de supresión elemental BSE se realiza mediante el circuito que se muestra en la figura 7.4a y 7.4b. La función de transferencia del filtro supresión de banda toma la forma

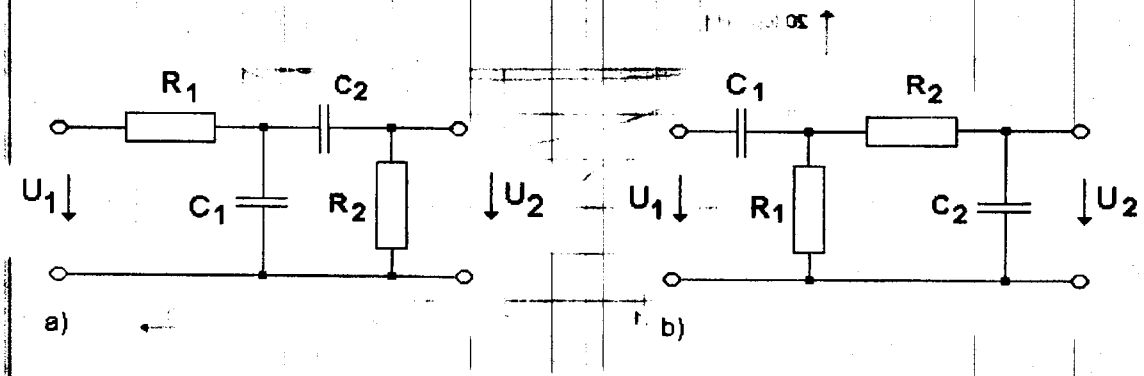


Figura 7.3. El filtro PB elemental.

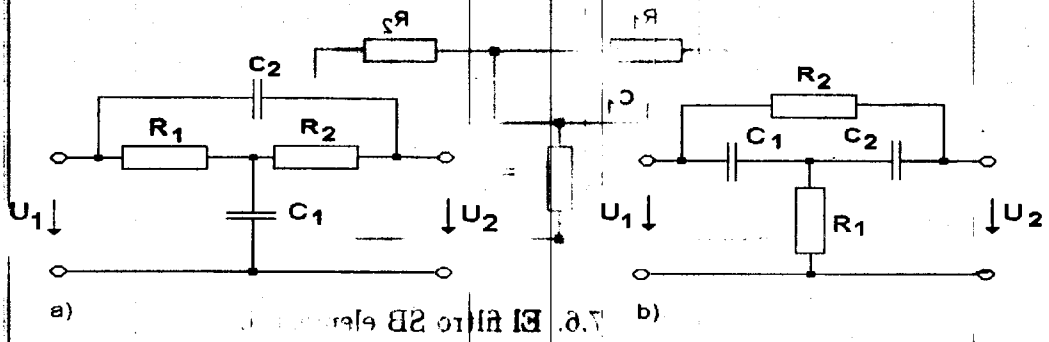


Figura 7.4. El filtro SB elemental.

$$H(s) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{sR^2C^2 + s\frac{2RC}{\alpha} + 1}{s^2R^2C^2 + sRC\left(\frac{\alpha^2+2}{\alpha}\right) + 1} \tag{7.4}$$

Los polos $p_{1,2}$ y los ceros $c_{1,2}$ de la función de transferencia (7.4) se calculan mediante las expresiones (7.5) y (7.6).

$$p_{1,2} = -\left(\frac{1}{\alpha RC} + \frac{\alpha}{2RC}\right) \pm \sqrt{\frac{1}{\alpha^2R^2C^2} + \frac{\alpha^2}{4R^2C^2}} \tag{7.5}$$

$$c_{1,2} = -\frac{1}{\alpha RC} \pm \sqrt{\frac{1}{\alpha^2R^2C^2} + \frac{\alpha^2}{4R^2C^2}} \tag{7.6}$$

De las ecuaciones (7.5) y (7.6) se ve, que los polos pueden ser solamente reales, y negativos, mientras los ceros pueden ser reales y complejos, si $\alpha > 1$ o reales distintas, si $\alpha < 1$ o reales dobles, si $\alpha = 1$. En la figura 7.5 se muestra el transcurso de atenuación en decibeles para varias constantes de α. El supresor de banda se también puede realizar mediante el circuito que se muestra en la figura 7.6

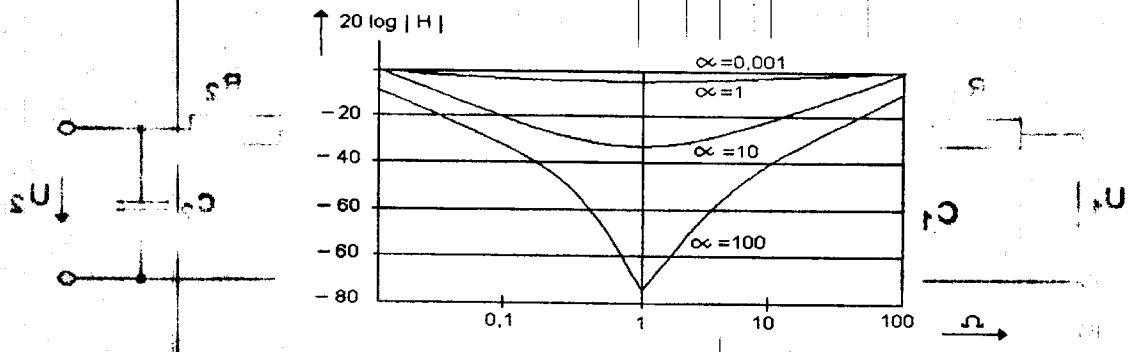


Figura 7.5. Atenuación de supresor de banda para varias α.

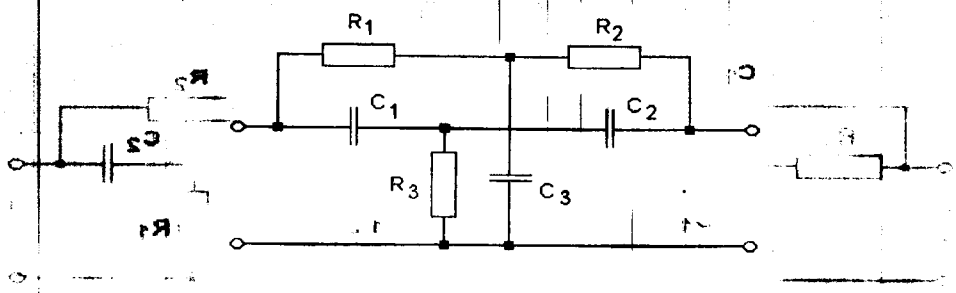


Figura 7.6. El filtro SB elemental.

Para las condiciones

$$\frac{C_1 + C_2}{R_1 R_2} = R_3(R_1 + R_2) \tag{7.7}$$

$$R_1 = \frac{R}{\alpha} \qquad R_2 = R \qquad R_3 = \frac{R}{\alpha + 1} \tag{7.8}$$

$$C_1 = \alpha.C \qquad C_2 = C \qquad C_3 = C(\alpha + 1) \tag{7.9}$$

la función de transferencia del filtro en la figura 7.6 toma la forma

$$H(s) = \frac{s^3R^3C^3 + s^2R^2C^2 + sRC + 1}{s^3R^3C^3 + s^2R^2C^2\frac{3\alpha+2}{\alpha} + sRC\frac{3\alpha^2+5\alpha+2}{\alpha(\alpha+1)} + 1} \tag{7.10}$$

7.2 Cascada de los RC filtros elementales

La cascada de los filtros elementales se muestra en la figura 7.7. Si se realiza PBF, los elementos Z_1 son resistores y Y_2 capacitores. Si se realiza PA los elementos Z_1 son capacitores y Y_2 resistores como se ve en la figura 7.8. La matriz de cascada **A** para el circuito en la figura 7.7 toma la forma

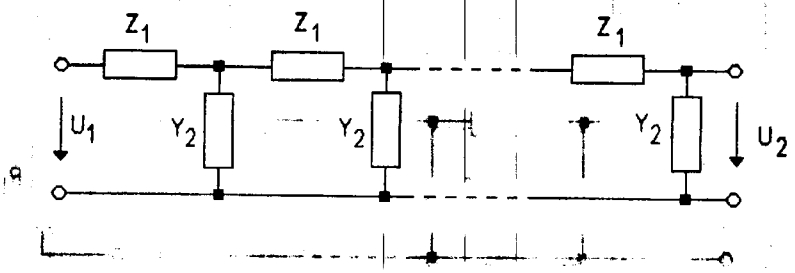


Figura 7.7. La cascada de los filtros elementales.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} B_n(\Omega) & Z_1 Q_n(\Omega) \\ Y_2 Q_n(\Omega) & B_{n-1}(\Omega) \end{bmatrix} \tag{7.11}$$

donde

$$B_n(\Omega) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(n+k)!}{(n-k)!(2k)!}(j\Omega)^k \tag{7.12}$$

$$B_n(\Omega) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k)!}{(n-k-1)!(2k+1)!}(j\Omega)^k \tag{7.13}$$

Si se realiza el filtro pasa bajas es necesario conectar el circuito en la salida con un resistor, como se muestra en la figura 7.8. El valor de un resistor en la salida se puede expresar mediante la ecuación

$$R_L = \frac{R}{\alpha} \qquad \alpha > 0$$

y la función de transferencia si la salida está terminada con un resistor R se puede expresar en la forma

$$G(\Omega) = \frac{U_1}{U_2} = B_n(j\Omega) + \alpha_n(j\Omega) \tag{7.14}$$

La atenuación se puede calcular mediante la ecuación (7.15)

$$a = 20log|B_n(j\Omega) + \alpha Q_n(j\Omega)| \tag{7.15}$$

En el caso si el circuito en la salida está abierta $\alpha = 0$, se puede calcular la atenuación usando (7.16). Las gráficas para varias ordenes del filtro se muestra en la figura 7.9

$$a = 20log|B_n(j\Omega)| \tag{7.16}$$

Si se elije R, se calcula C

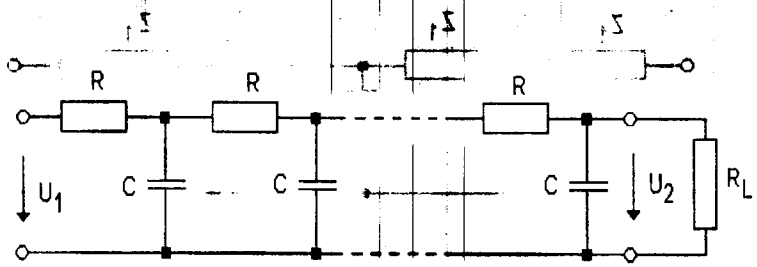


Figura 7.8. Filtro PBF como cascada de los filtros elementales.

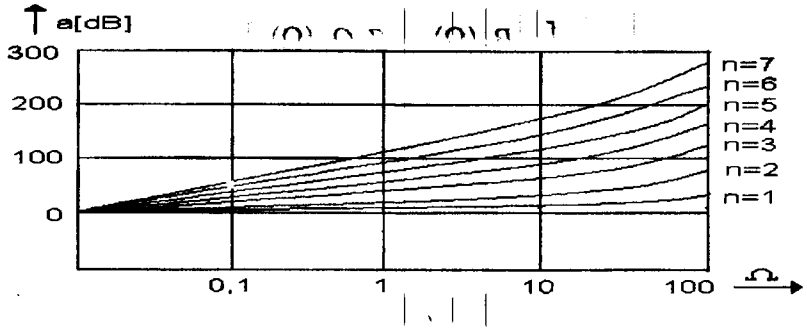


Figura 7.9. Atenuación de los filtros para varios n.

$$C = \frac{1}{\omega_1 R}$$

Si se elige C, se calcula R

$$R = \frac{1}{\omega_1 C}$$

Ejemplo 1.

Calcular el filtro RC pasa bajas para las especificaciones:

a_{max}= 3 dB para f=0 hasta 4kHz y a_{min}= 40 dB para f 64 kHz

Solución:

Las frecuencias del corte y de supresión es necesario normalizar

$$\Omega_1 = \frac{4.10^3}{4.10^3} = 1 \qquad \Omega_2 = \frac{64.10^3}{4.10^3} = 16$$

La pendiente de la atenuación es mayor que 20 dB/dec y por eso se eliqe n=3. Si se calcula el filtro en la salida abierto se obtiene mediante las ecuaciones (7.16) y (7.12) la ecuación (7.17)

$$G_3(j\Omega) = B_3(j\Omega) = \sum_{k=0}^{3} \frac{(3+k)!}{(3-k)!(2k)!}(j\Omega)^k \tag{7.17}$$

Calculando para n=0,1,2,3 se obtiene

$$G_3(j\Omega) = 1 + 6j\Omega - 5\Omega^2 - j\Omega^3 \tag{7.18}$$

La atenuación en $\Omega_1 = 1$ debe ser 3 dB. De la ecuación (7.18) es necesario calcular la función del corte normalizada Ω_1 para la atenuación 3 dB.

$$|G(j\Omega)|^2 = 10^{\frac{3}{10}} = (1 - 5\Omega_1^2)^2 + \Omega_1^2(6 - \Omega_1^2)^2$$

$$\Omega_1^6 + 13\Omega_1^4 + 26\Omega_1^2 - 0,995 = 0$$

La ecuación se cumple para $\Omega_{1N} = 0,194$ y ese valor es la frecuencia de corte normalizada, donde la atenuación alcanza 3 dB. La nueva frecuencia normalizada de supresión toma el valor

$$f_N = f_1\frac{\Omega_1}{\Omega_{1N}} = 4\frac{1}{0,194} = 20,62$$

$$\Omega_2 = \frac{f_2}{f_N} = \frac{64}{20,62} = 3,104$$

Ahora se puede calcular la atenuación mínima a_{min}

$$a_{min} = 20.log|G_3(j\Omega_2)| = 33,7\ dB$$

Si se elije el capacitor C=33 nF se obtiene el resistor

$$R = \frac{1}{2.\pi f_N C} = \frac{\Omega_{1N}}{2\pi\Omega_1 C} = \frac{0,194}{2\pi 4.10^3.3,3.10^{-9}} = 2339,1\ \Omega$$

La estructura del filtro RC se muestra en la figura 7.10.

7.3 La cascada de los circuitos progresivos

El calculo del filtro con los circuitos de bipuertas progresivos es parecido como en el caso anterior. El filtro con los circuitos de bipuertas progresivos se muestra en la figura 7.4. La matriz de cascada RC progresiva en la figura 7.11 toma la forma

$$\mathbf{A_n} = \begin{bmatrix} a_{11}(\alpha, j\Omega) & Z_1 a_{12}(\alpha, j\Omega) \\ Y_2 a_{21}(\alpha, j\Omega) & a_{22}(\alpha, j\Omega) \end{bmatrix} \tag{7.19}$$

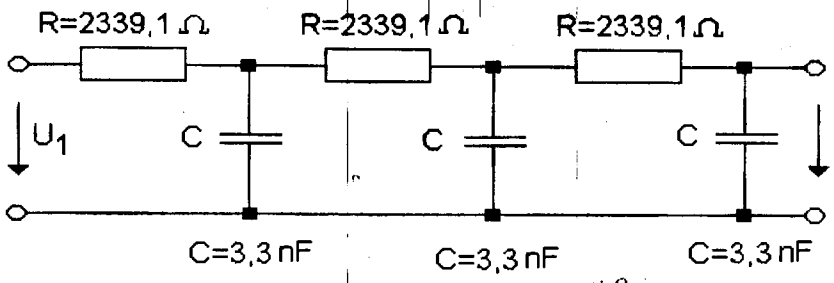


Figura 7.10. El filtro pasa bajas con tres circuitos elementales en cascada.

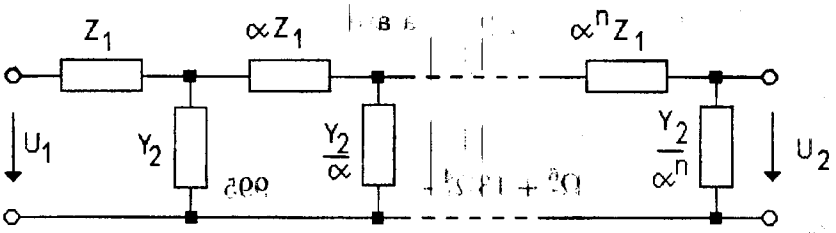


Figura 7.11. El filtro con bipuertas progresivos en cascada.

donde

$$a_{11}(\alpha, j\Omega) = \sum_{i=0}^{n} K_{11_{ni}} (j\Omega)^i \tag{7.20}$$

$$K_{11_{ni}} = \alpha^{(-n+1)} \sum_{j=0}^{n-i} \binom{n-1-j}{i-1} \binom{i+j}{i} \alpha^j \tag{7.21}$$

$$K_{11_{n0}} = 1 \qquad K_{11_{nn}} = 1$$

Para el filtro PBF en la salida abierta figura 7.12 la atenuación se calcula madiante la ecuación

$$a = 20lo|a_{11}(\alpha, j\Omega)|$$

Ejemplo 2.

Calcular el filtro pasa bajas con los circuitos progresivos para las especificaciones:

a_{max}= 3 dB para f=0 hasta 4kHz y a_{min}= 40 dB para f 64 kHz

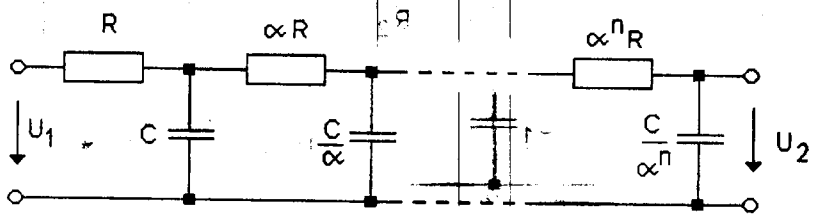


Figura 7.12. El filtro PBF RC con los circuitos progresivos.

Solución:

Como en el ejemplo anterior se elije el capacidor C=3,3 nF. El valor de la constante α se elije de tal manera para obtener los otros capacitores catalogizados. Entonces se elije $\alpha = 2,2$. El segundo capacitor en el circuito en la figura 7.12 tiene el valor 3,3/2,2=1,5 nF y el último capacitor en el circuito es 1,5/2,2=0,68 nF. Para calcular los resistores se necesita calcular nueva frecuencia normalizada del corte. Para calcular $G_3(j\Omega)$ es necesario calcular los valores $K_{11_{31}}$ y $K_{11_{32}}$. Esas coeficientes se calculan mediante las ecuaciones (7.20) y (7.21).

$$K_{11_{31}} = \frac{\binom{2}{0}\binom{1}{1} + \binom{1}{0}\binom{1}{2}\alpha + \binom{0}{0}\binom{1}{3}\alpha^2}{\alpha^2} = 4,32$$

$$K_{11_{32}} = \frac{\binom{1}{2}\binom{2}{2} + \binom{1}{1}\binom{2}{3}\alpha}{\alpha} = 3,91$$

$$G_3(j\Omega) = 1 + 4,32j\Omega - 3,91\Omega^2 - j\Omega^3$$

De esta ecuación se calcula la nueva frecuencia del corte para $a_{max} = 3\ dB$

$$\Omega_{1N}^6 + 6,65\Omega_{1N}^4 + 10,84\Omega_{1N}^2 - 0,995 = 0$$

La ecuación tiene resultado para el rais Ω_{1N}=0,2950 que es la frecuencia del corte normalizada. Para el valor del capacitor C=3,3 nF se obtiene el resistor

$$R = \frac{1}{2\pi f_N C} = \frac{\Omega_{1N}}{2\pi f_1 C} = \frac{0,295}{2\pi 4.10^3.3,3.10^{-9}} = 3556,8\ \Omega.$$

Los valores del filtro PBF que se muestra en la figura 7.13 son

$$R_1 = 3556,8\ \Omega \quad C_1 = 3,3\ nF$$
$$R_2 = 7824,9\ \Omega \quad C_2 = 1,5\ nF$$
$$R_3 = 17214,9\ \Omega \quad C_3 = 0,682\ nF$$

Para las mismas especificaciones se realiza el filtro de orden n=4. La ecuación (7.22) para n=4 toma la forma

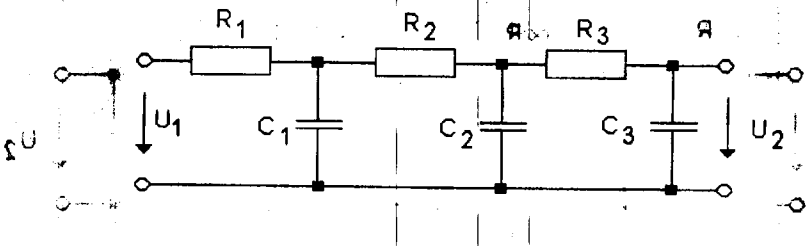


Figura 7.13. El filtro PBF RC.

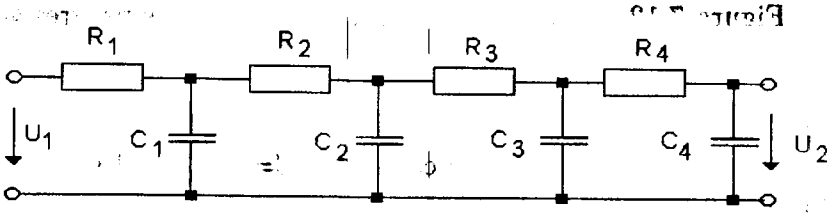


Figura 7.14. El filtro pasa bajas para n=4.

$$G_4(j\Omega) = 1 + 5,96j\Omega - 9,35\Omega^2 - 5,36j\Omega^3 + \Omega^4$$

El raís de la ecuación siguiente es la frecuencia del corte del filtro pasa bajas normalizada

$$\Omega^8 + 10,07\Omega^6 + 26,93\Omega^4 + 15,77\Omega^2 - 0,995 = 0$$

La ecuación tiene el resultado para el raís $\Omega_{1N} = 0,239$. La frecuencia del corte normalizada es 0,239. Si se elije el valor del capacitor como en el ejemplo anterior $C = 3,3$ nF se obtiene el primer resistor del circuito

$$R = \frac{1}{2\pi f_N C} = \frac{\Omega_{1N}}{2\pi f_1 C} = \frac{0,239}{2\pi 4.10^3.3,3.10^{-9}} = 2881,67\Omega.$$

El filtro PBF para n=4 se muestra en la figura 7.13 y los elementos del filtro tienen los valores:

$$\begin{array}{ll} R_1 = 2881,67\ \Omega & C_1 = 3,3\ nF \\ R_2 = 6339,67\ \Omega & C_2 = 1,5\ nF \\ R_3 = 13942,28\ \Omega & C_3 = 682\ pF \\ R_4 = 30684,02\ \Omega & C_4 = 330\ pF \end{array}$$

7.4 La cascada de los bipuertos RC con divisor

La estructura del filtro RC con el divisor se muestra en la figura 7.15. Está conectado con la admitancia Y_1 y la impedancia Z_2. La matriz de impedacia **Z** del circuito resultante toma la forma

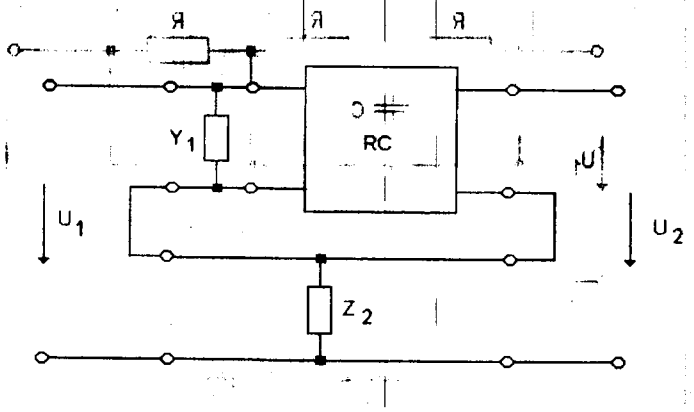


Figura 7.15. El circuito RC con el divisor.

$$\mathbf{A_n} = \begin{bmatrix} Z_2 + \frac{a_{11}}{Y_1 a_{11} + a_{21}} & Z_2 + \frac{1}{Y_1 a_{11} + a_{21}} \\ Z_2 + \frac{a_{11}}{Y_1 a_{11} + a_{21}} & Z_2 + \frac{Y_1 a_{12} + a_{22}}{Y_1 a_{11} + a_{21}} \end{bmatrix} \tag{7.22}$$

En la ecuación (7.22) a_{ij} son los elementos de la matriz RC del circuito en la figura 7.15, i=1,2; j=1,2. De la ecuación (7.22) se puede calcular la función de transferencia del voltaje inverza, si la salida del circuito está abierta.

$$G = \frac{U_1}{U_2} = \frac{Z_{11}}{Z_{21}} = \frac{a_{11}(1 + Z_2 Y_1) + a_{21} Z_2}{a_{11} Z_2 Y_1 + a_{21} Z_2 + 1} \tag{7.23}$$

Para el filtro pasa bajas la impedancia Z_2 y admitanci Y_1 en el circuito 7.15 toma la forma

$$Y_1 = j\omega C_1 \qquad Z_2 = \frac{1}{j\omega C_2} \tag{7.24}$$

De la ecuación (7.11) se obtiene

$$a_{11} = B_n(j\Omega), \qquad a_{21} = j\omega C Q_n(j\Omega) \tag{7.25}$$

Si se sustituye en (7.23) la ecuación (7.25), se obtiene la función de transferencia inverza

$$G = \frac{U_1}{U_2} = \frac{B_n(j\Omega)\left(1 + \frac{C_1}{C_2}\right) + \frac{C}{C_2} Q_n(j\Omega)}{B_n(j\Omega)\frac{C_1}{C_2} + \frac{C}{C_2} Q_n(j\Omega) + 1} = \frac{B_n(j\Omega)(C_1 + C_2) + C Q_n(j\Omega)}{B_n(j\Omega) C_1 + C Q_n(j\Omega) + C_2} \tag{7.26}$$

Las raíces del denominador (7.26) son polos de la atenuación del circuito. Si se sustituye en el denominador de la ecuación (7.26) por $B_3(j\Omega)$ y $Q_3(j\Omega)$ y si el denominador se iguala a cero obtenemos para la parte real e imaginaria dos ecuaciones

$$\Omega_p = \sqrt{6 + 4\frac{C}{C_1}} \tag{7.27}$$

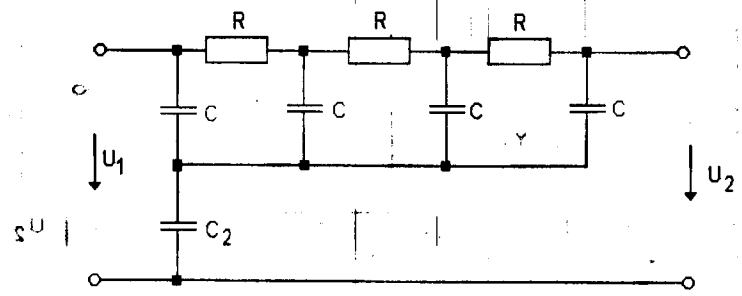


Figura 7.16. El filtro pasa bajas.

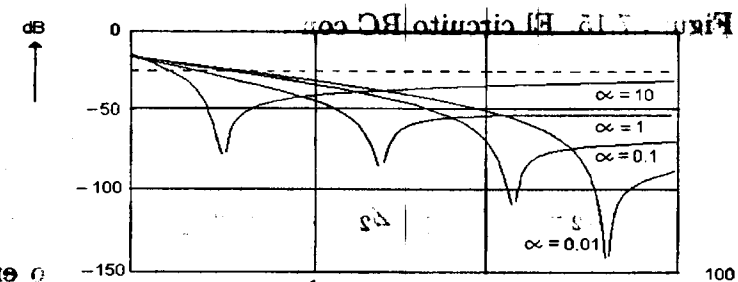


Figura 7.17. La atenuación de PBF para el filtro con divisor y n=3.

$$C_2 = 23C + 29C_1 + 4\frac{C^2}{C_1} \tag{7.28}$$

La atenuación mínima en $\Omega = \infty$ se puede calcular mediante la ecuación (7.29)

$$a_{min} = 20log\frac{C_1 + C_2}{C_1} \tag{7.29}$$

De la ecuación (7.27) se puede ver, que la frecuencia del polo de atenuación se puede elegir mediante la proporción C/C_1. En la figura 7.17 se muestra la atenuación de los filtros PBF para varias $\alpha = C_1/C$. La atenuación mínima del filtro se obtiene calculando la ecuación (7.29)

Ejemplo 3.

Calcular el filtro RC pasa bajas con el divisor para el orden del filtro n=3 y las especificaciones del ejemplo anterior.

Solución:

En este caso se puede elejir la frecuencia del polo de atenuación. Si se elije la frecuencia del polo de atenuación, también se influye la atenuación mínima. La frecuencia del polo depende en la ecuación (7.27). Si se elije la frecuencia del polo Ω_p, la atenuación mínima

está dependiente a la ecuación (7.29). Si se sustituye por $C_1 = \alpha C$ y por C_2 en (7.29) se obtiene (7.30)

$$a_{min} = 40 = 20log\frac{\alpha C + 23C + 29\alpha C + 4\frac{C}{\alpha}}{\alpha C} \tag{7.30}$$

$$2 = log\left(1 + \frac{23}{\alpha} + 29 + \frac{4}{\alpha^2}\right) \tag{7.31}$$

$$70\alpha^2 - 23\alpha - 4 = 0 \tag{7.32}$$

El raìz de la ecuación (7.31) es $\alpha = 0,45$. Entonces

$$C_2 = 23C + 290,45C + 4\frac{C}{0,45} = 44,94C$$

Ahora se va a calcular $B_3(j\Omega)$ y $Q_3(j\Omega)$

$$B_3(j\Omega) = 1 - 5\Omega^2 + j\Omega(6 - \Omega^2)$$

$$Q_3(j\Omega) = 3 - \Omega^2 + j4\Omega$$

$$G_3 = \frac{B_3(0,45C + 44,94C) + CQ_3}{0,45CB_3 + CQ_3 + 44,94C} = \frac{45,39B_3 + Q_3}{0,45B_3 + Q_3 + 44,94}$$

Si se calcula $|G_3(j\Omega)|^2 = 10^{\frac{a_{max}}{10}}$ se obtiene la ecuación

$$-2329,884 + 54840,736\Omega^2 + 26867,95\Omega^4 + 2059,848\Omega^6 = 0$$

Un de las raízes de la ecuación anterior es $\Omega_1 = 0,204$. Si se elige como en los ejemplos anteriores el condensator C=3,3 nF, se obtienen los valores del filtro que se muestra en la figura 7.16

$$\begin{aligned} R &= \frac{0,204}{2\pi 4.10^3.3,3.10^{-9}} = 2459,67\ \Omega \\ C_1 &= 0,45.3,4 = 1,485\ nF \\ C_2 &= 23.3,3 + 29.1,485 + 4\frac{3,3}{0,45} = 148,3\ nF \end{aligned}$$

7.5 El Filtro RC con la admitancia en paralelo

El polo de la atenuación se puede realizar también con el circuito en la figura 7.18. El circuito de bipuertas con la admitancia Y_p está conectado con el circuito de bipuertas RC en paralelo. La matriz de admitancia del circuito es la suma de la matriz de admitancia del circuito RC y del circuito que tiene en la rama serial la admitancia Y_p. Para el cicuito en la figura 7.18 si está conectado en la salida con la admitancia Y_L se obtiene la función de transferencia

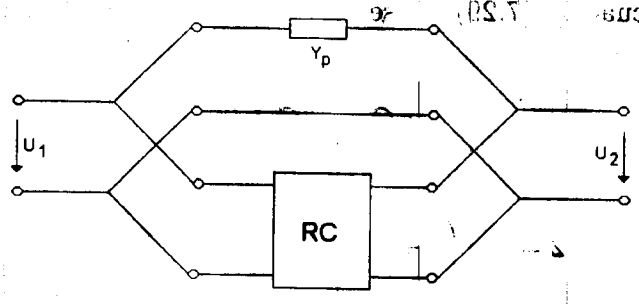


Figura 7.18. El circuito RCP con la admitancia Y_p conectada en paralelo con RC.

$$G = \frac{U_1}{U_2} = -\frac{y_{22} + Y_L}{y_{21}} = \frac{(Y_p + Y_L)a_{12} + a_{11}}{Y_p a_{12} + 1} \tag{7.33}$$

Los parámetros y_{22} y y_{21} son los elementos de la matriz de admitancia del circuito completo y la admitancia Y_L es la admitancia de carga. Los parámetros a_{11} y a_{12} son los elementos de la matriz de cascada del Circuito RC. La ubicación de los polos se puede calcular calculando las raíces del numerador de la ecuación (7.33). Para n=3 y Y(s)=$j\omega C_p$ se obtiene

$$j\omega C_p R(\Omega^2 + 4\Omega + 3) + 1 = 0$$

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega 0} \rightarrow \omega = \Omega\omega_0 = \Omega\frac{1}{RC}$$

$$j\Omega\frac{C_p}{C}\left(j\Omega\right)^2 + 4j\Omega + 3\Big) + 1 = 0$$

$$\left(1 - 4\Omega^2\frac{C_p}{C}\right) + j\Omega\frac{C_p}{C}\left(3 - \Omega^2\right) = 0$$

$$3 - \Omega^2 = 0 \rightarrow \Omega = \sqrt{3}$$

$$1 - 4\left(\sqrt{3}\right)^2\frac{C_p}{C} = 0 \rightarrow C_p = \frac{C}{12}$$

En este caso la ubicación del polo depende solo en el número de los circuitos básicos del circuito RC y no se puede elegir como hemos visto en el circuito RC con divisor. Si se toma en cuenta el circuito abierto en la salida se puede calcular la atenuación mínima a_{min} mediante la ecuación

$$G(s) = \frac{U_1}{U_2} = \frac{Y_p a_{12} + a_{11}}{Y_p a_{12} + 1} = 1 + \frac{a_{11}}{a_{12}}\frac{1}{Y_p} = 1 + \frac{B_n}{RQ_n Y_p}$$

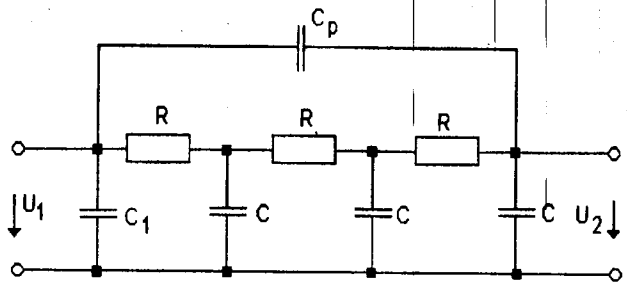


Figura 7.19. La atenuación de PBF para el filtro con divisor y n=3.

$$a_{min} = \lim_{\Omega \to \infty} G = 1 + \frac{(j\omega CR)^{n-1}}{(j\omega CR)^{n-1}} \frac{j\omega CR}{j\omega C_p R} = 1 + \frac{C}{C_p}$$

Para n=3 se obtiene la atenuación mínima

$$a_{min} = 20\ log\left(1 + \frac{C}{C_p}\right) = 20\ log\left(1 + \frac{12C}{C}\right) = 20\ log 13 = 22,28\ dB$$

Ejemplo 4.

Realizar el filtro RC que se muestra en la figura 7.19 con el capacitor en paralelo, si la salida del filtro está abierta, entonces $Y_L = 0$. Para $Y_p = j\omega C_p$ se obtiene con la ayuda de la ecuación (7.11)

$$G_3 = \frac{j\omega C_p Q_3 R + B_3}{j\omega C_p Q_3 R + 1}$$

La ubicación del polo en $\Omega_3 = \sqrt{3}$ y el valor del capacitor $C_p = \frac{C}{12}$ son en este caso fijos y no se pueden elegir. El valor C_p y la ubicación del polo dependen a el grado del filtro. Como en los ejemplos anteriores se obtiene la ecuación

$$-0,995 + 29,6\Omega^2 + 15,175\Omega^4 + 0,176\Omega^6 = 0$$

De las raíces de la ecuación anterior conviene el raíz $\Omega_1 = 0,182$. Si se elige como en las ejemplos anteriores el capacitor $C = 3,3\ nF$ se obtiene

$$R = \frac{0,182}{2\pi 4.10^3.3,3.10^{-9}} = 2194,41\ \Omega$$

$$C_p = \frac{C}{12} = 0,275\ nF$$

En la figura 7.19 se muestra la estructura del filtro.

Capítulo 8

Filtros activos con amplificador.

Los filtros activos son muy importantes al menos por dos razones. No incluyen inductancias, que no se pueden miniaturizar. Los filtros pasivos LCR no se pueden producir en la forma integrada por la presencia de iductores.

Por otro lado si la frecuencia de corte de un filtro deseado es muy baja, por ejemplo 20 Hz, en el circuito LRC se obtienen los valores que no se pueden realizar. Eso significa, que los filtros pasivos no se pueden utilizar para señales biomédicas o sísmicas, donde las frecuencias que nos interesan son alrededor de 10 Hz. En este caso se utilizan los filtros activos que nos permiten realizar un filtro con la frecuencia del corte a menos de 10 Hz. Además el filtro activo se puede construir con una ganancia deseada.

8.1 Filtros activos de segundo orden con FTCT

8.1.1 Filtro activo pasa bajas.

El filtro activo pasa bajas de segundo orden se muestra en la figura 8.1.

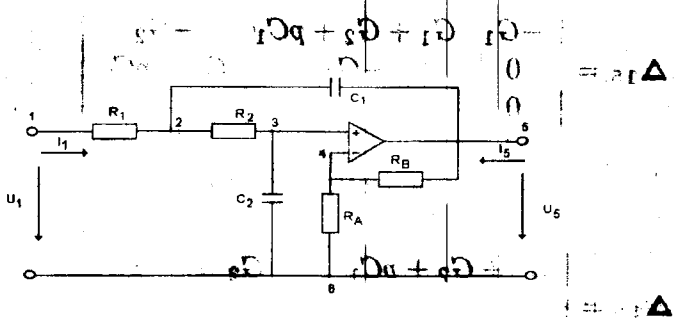


Figura 8.1. Filtro pasa bajas con amplificador.

Para calcular la función de transferencia del filtro en la figura 8.1 primeramente se

calcula la matriz de admitancia de la red pasiva sin tomar en cuenta el amplificador. La matriz de admitancia de la red pasiva está en la ecuación (8.1).

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} G_1 & -G_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -G_1 & G_1+G_2+pC_1 & -G_2 & 0 & -pC_1 & 0 \\ 0 & -G_2 & G_2+pC_2 & 0 & 0 & -pC_2 \\ 0 & 0 & 0 & G_A+G_B & -G_B & -G_A \\ 0 & -pC_1 & 0 & -G_B & pC_1+G_B & 0 \\ 0 & 0 & -pC_2 & -G_A & 0 & G_A+pC_2 \end{bmatrix} \tag{8.1}$$

En la matriz de admitancia (8.1) si está bien escrita, las sumas de todos elementos en cada columna y renglon deben ser igual a cero. Si se conecta el nodo 6 con la tierra se puede cancelar el sexto renglón y la sexta columna. La matriz (8.1) se va a cambiar si vamos a tomar en cuenta el amplificador. Los nodos 3 y 4 en la entrada del amplificador están al mismo potencial ($U_3 = U_4$), eso significa que en la matriz (8.1) se pueden sumar la tercera y cuatra columna. Si en la salida del filtro se conecta un circuito con impedancia infinita, entonces $I_5 = 0$ y se puede cancelar el quinto renglón. La matriz nueva del circuito activo con la tiera conectada en el sexto nodo está en la ecuación (8.2)

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} G_1 & -G_1 & 0 & 0 \\ -G_1 & G_1+G_2+pC_1 & -G_2 & -pC_1 \\ 0 & -G_2 & G_2+pC_2 & 0 \\ 0 & 0 & G_A+G_B & -G_B \end{bmatrix} \tag{8.2}$$

La función de transferencia H(s) se puede calcular mediante la ecuación (8.3)

$$H(p) = \frac{U_5}{U_1} = \frac{\Delta_{15}}{\Delta_{11}} \tag{8.3}$$

Δ_{11} y Δ_{15} son los subdeterminantes de la matriz (8.2) que toman la forma

$$\mathbf{\Delta_{15}} = \begin{vmatrix} -G_1 & G_1+G_2+pC_1 & -G_2 \\ 0 & -G_2 & G_2+pC_2 \\ 0 & 0 & G_A+G_B \end{vmatrix} \tag{8.4}$$

$$\mathbf{\Delta_{15}} = G_1G_2(G_A+G_B)$$

$$\mathbf{\Delta_{11}} = \begin{vmatrix} G_1+G_2+pC_1 & -G_2 & -pC_1 \\ -G_2 & G_2+pC_2 & 0 \\ 0 & G_A+G_B & -G_B \end{vmatrix} \tag{8.5}$$

$$\mathbf{\Delta_{11}} = -G_B[G_1G_2 + p(G_1C_2 + G_2C_2 - G_2C_1\frac{G_a}{G_b}) + p^2C_1C_2]$$

La función de transferencia H(p) se obtiene, si se sustituye en la ecuación (8.3) por la Δ_{15} y Δ_{11} y $K = \frac{G_A+G_B}{G_B}$.

$$\frac{U_5}{U_1} = H(p) = \frac{K.G_1G_2}{p^2C_1C_2 + p[C_2G_1 + C_2G_2 - C_1G_2(K-1)] + G_1G_2} \tag{8.6}$$

La ecuación (8.6) es la función de transferencia de un filtro pasa bajas de segundo orden. Si esta función de transferencia se compara con la función de transferencia del filtro Butterworth desnormalizado de segundo orden (8.7)

$$H(p) = \frac{\omega_0^2}{p^2 + p\sqrt{2}\omega_0 + \omega_0^2} \tag{8.7}$$

se obtienen las ecuaciones para calcular el filtro pasa bajas de segundo order si $a_{max} = 3\ dB$

$b = C_1\omega_0$ El condensador C_1 se elige y se calcula b

$m = \frac{a^2}{4} + K - 1$ Para Butterworth $a_{max} = 3$ dB es $a = \sqrt{2}$

$$C_2 = mC_1 \qquad R_1 = \frac{2}{a.b} \qquad R_2 = \frac{a}{2.m.b}$$

Ejemplo 1.

Calcular el filtro de segundo orden si los especificaciones están en la figura 8.2

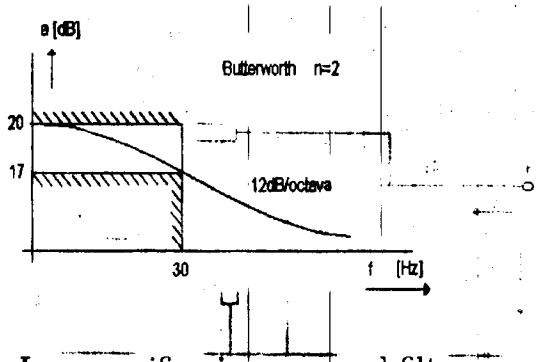


Figura 8.2. Las especificaciones para el filtro pasa bajas.

Solución:

Primero se calcula la ganancia K, porque se quiere que el filtro tenga en $\omega = 0$ una ganancia de 20 dB.

20.log K = 20 log K=1 K=10

Se elige $C_1 = 0,1 \times 10^{-6}\ F$ y se calcula b, m, C_2, R_1 y R_2

$$b = 0,1.10^{-6}.2.\pi.30 = 1,885.10^{-5}$$

$$m = \frac{2}{4} + (10 - 1) = 9,5$$

$$C_2 = 9,5.0,1.10^{-6} = 0,95.10^{-6}\ F$$

$$R_1 = \frac{2}{(\sqrt{2}(.(1,885.10^{-5})} = 75\ k\Omega$$

$$R_2 = \frac{\sqrt{2}}{2.(9,5).(1,885.10^{-5})} = 3,94\ k\Omega$$

Todavía falta calcular los resistores R_A y R_B. Si se elige un potenciometro de 100 $k\Omega$ para ajustar la ganancia, entonces $R_A + R_B = 100\ k\Omega$. De la ecuación $R_A + R_A(K-1) = 100\ k\Omega$ se calcula $R_A = \frac{100000}{10} = 10\ k\Omega$ y $R_B = 10000(10-1) = 90\ k\Omega$

8.1.2 Filtro activo pasa altas.

La estructura de filtro pasa altas de segundo orden se muestra en la figura 8.3. Para calcular la función de transferencia del filtro pasa altas es necesario calcular la matriz de admitancia. La matriz de admitancia de circuito activo se muestra en la ecuación (8.8)

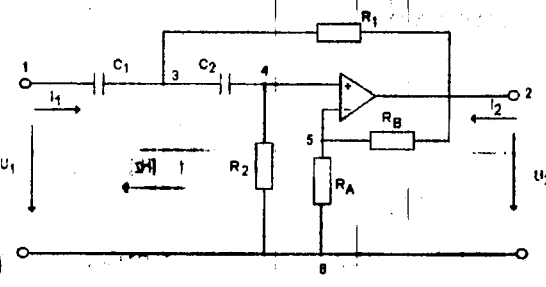


Figura 8.3. La estructura del filtro pasa altas.

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} pC_1 & 0 & -pC_1 & 0 \\ -pC_1 & -G_1 & G_1 + pC_1 + pC_2 & -pC_2 \\ 0 & 0 & -pC_2 & G_2 + pC_2 \\ 0 & -G_B & 0 & G_A + G_B \end{bmatrix} \tag{8.8}$$

La función de transferencia $H(p) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{\Delta_{12}}{\Delta_{11}}$ toma la forma

$$\frac{U_2}{U_1} = H(p) = \frac{K.p^2C_1C_2}{p^2C_1C_2 + p[C_1G_2 + C_2G_2 - C_2G_1(K-1)] + G_1G_2} \tag{8.9}$$

La ecuación (8.9) es la función de transferencia de un filtro pasa altas de segundo orden. Si esta función de transferencia se compara con la función de transferencia del filtro Butterworth desnormalizado de segundo orden pasa altas (8.10)

$$H(p) = \frac{p^2\omega_0^2}{p^2 + \sqrt{2}\omega_0 + \omega_0^2} \tag{8.10}$$

se obtienen las ecuaciones para calcular el filtro activo pasa altas de segundo orden, en el caso si $a_{max} = 3\ dB$. Es necesario elegir $C_1 = C_2$. El condensador C_1 se elige y se calcula b, R_1 y R_2.

$$b = C_1\omega_0$$

$$R_1 = \frac{a + \sqrt{a^2 + 8(K-1)}}{4.b} \tag{8.11}$$

$$R_2 = \frac{1}{R_1.b^2} \tag{8.12}$$

Ejemplo 2

Calcular el filtro pasa altas de segundo orden para las especificaciones del filtro de la figura 8.4

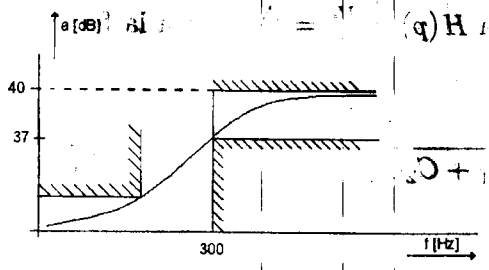


Figura 8.4. Los especificaciones para el filtro pasa altas.

Solución:

Primero se calcula la ganancia K, porque se quiere que el filtro tenga en $\omega = 0$ la ganancia de 40 dB.

20.log K = 40 log K=2 $K = 10^2 = 100$

Se elige $C_1 = C_2 = 100\ nF$ y se calcula b, R_1 y R_2

$$b = 2.\pi.300.100.10^{-9} = 1,885.10^{-4}$$

$$R_1 = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2 + 8(100-1)}}{4.1,885.10^{-4}} = 39,24\ k\Omega$$

$$R_2 = \frac{1}{39,24.10^3.(1,885.10^{-4})^2} = 717\ \Omega$$

Todavía falta calcular los resistores R_A y R_B. Si se elije un potenciometro de 100 $k\Omega$ entonces $R_A + R_B = 100\ k\Omega$, y de la ecuación $R_A + R_A(K-1) = 100\ k\Omega$ se calcula $R_A = \frac{100000}{10} = 10\ k\Omega$ y $R_B = 10000(10-1) = 90\ k\Omega$

8.1.3 Filtro activo paso banda.

La estructura de filtro paso banda de segundo orden se muestra en la figura 8.5. Para calcular la función de transferencia del filtro paso banda es necesario calcular la matriz de admitancia. La matriz de admitancia de circuito activo se muestra en la ecuación (8.13).

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} G_1 & -G_1 & 0 & 0 \\ -G_1 & G_1 + pC_2 + G_3 & -pC_2 & -G_3 \\ 0 & -pC_2 & pC_2 + G_4 + pC_5 & 0 \\ 0 & 0 & G_A + G_B & 0 \end{bmatrix} \tag{8.13}$$

La función de transferencia $H(p) = \frac{U_5}{U_1} = \frac{\Delta_{15}}{\Delta_{11}}$ toma la forma

$$H(p) = \frac{K.G_1pC_2}{p^2C_2C_5 + p[C_5G_1 + C_2G_4 + C_5G_3 + C_2G_1 + C_2G_3(1-K)] + G_4(G_1+G_3)} \tag{8.14}$$

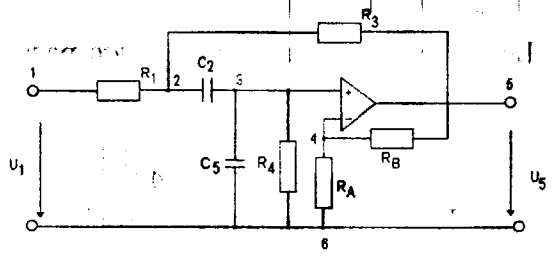


Figura 8.5. La estructura del filtro paso banda.

La ecuación (8.14) es la función de transferencia de un filtro paso banda de segundo orden. Si esta función de transferencia se compara con la función de transferencia del filtro Butterworth desnormalizado de segundo orden paso banda (8.15)

$$H(p) = \frac{p\omega_0}{p^2 + p\sqrt{2}\omega_0 + \omega_0^2} \tag{8.15}$$

se obtienen las ecuaciones para calcular el filtro activo paso banda de segundo orden si $a_{max} = 3\ dB$. Se elije el condensador C_2 y se calcula k, Q, K, C_5, R_1, R_3 y R_4.

$$k = 2.\pi.f_0.C_2 \qquad Q = \frac{Ancho\ de\ banda}{Frecuencia\ central} \qquad K = \frac{1}{3}(6,5 - \frac{1}{Q}) \tag{8.16}$$

$$C_5 = \frac{C_1}{2} \qquad R_1 = \frac{2}{k} \qquad R_3 = \frac{R_1}{3} \qquad R_4 = 2.R_1 \tag{8.17}$$

Ejemplo 3.

Calcular el filtro paso banda de segundo orden si las especificaciones del filtro están en la figura 8.6

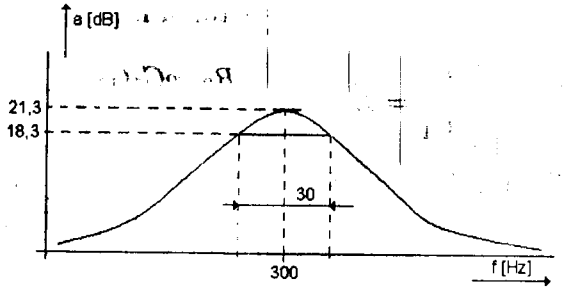


Figura 8.6. Las especificaciones para el filtro paso banda.

Solución:

Se elige $C_2 = 0,02.10^{-6}\ F$ y los valores del filtro paso banda se calculan

$$C_4 = 0,5.0,02.10^{-6} = 0,01\ \mu F \qquad k = 0,02.10^{-6}.2.\pi.300 = 3,769.10^{-5}$$

$$R_1 = \frac{2}{3,769.10^{-5}} = 53,05\ k\Omega \qquad R_3 = \frac{53,05.10^3}{3} = 17,684\ k\Omega$$

$$R_4 = 2.53,05.10^3 = 106\ k\Omega \qquad K = \frac{1}{3}(6,5 - \frac{1}{10}) = 2,1333$$

$$A_0 = K.Q = 2,13333.10 = 21,333 \quad 20.log21,3333 = 26,579\ dB$$

El valor de la ganancia K=2,13333 es necesario ajustarlo con un potenciometro por ejemplo de 100 $k\Omega$

$$R_A = \frac{100\ k\Omega}{10} = 10\ k\Omega \qquad R_B = 10(10-1) = 90\ k\Omega$$

8.2 Filtros activos de primer orden

8.2.1 Filtro pasa altas

La estructura del filtro pasa altas de primer orden con la ganancia infinita de amplificador se muestra en la figura 8.7. La matriz de admitancia de filtro pasa altas en la figura 8.7 se muestra en la ecuación (8.18)

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} pC_1 & 0 & -pC_1 \\ -pC_1 & 0 & G_1 + pC_1 \\ 0 & -G_2 & -G_1 \end{bmatrix} \tag{8.18}$$

La función de transferencia $H(p) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{\Delta_{12}}{\Delta_{11}}$ toma la forma

$$\frac{U_2}{U_1} = H(p) = -\frac{R_2}{R_1}\frac{pC_1G_1}{p + \frac{1}{R_1C_1}} \tag{8.19}$$

La ecuación (8.19) es la función de transferencia de un filtro pasa altas de primer orden. De la ecuación (8.19) se pueden escribir dos ecuaciones. La ganancia del filtro K y la frecuencia del corte del filtro pasa altas toman la forma:

$$para\ \omega = \infty \qquad K = -\frac{R_2}{R_1} \qquad \omega_0 = \frac{1}{R_1C_1}$$

Si se elige el capacidor C_1 podemos calcular el resistor R_1 y para la ganancia K conocida de la ecuación anterior se calcula R_2.

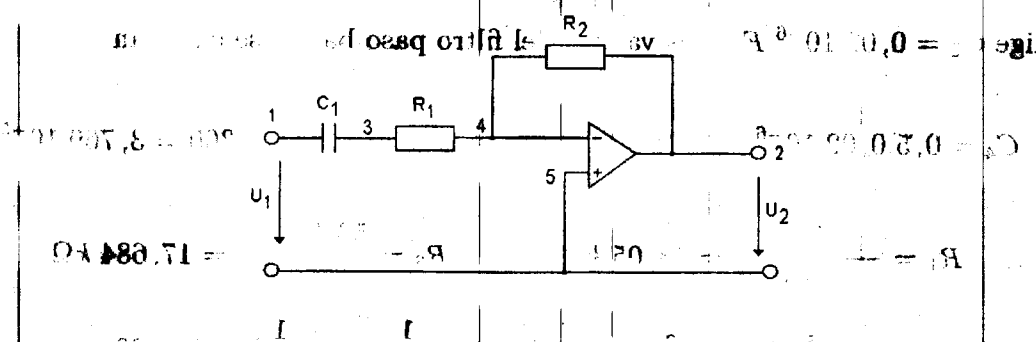


Figura 8.7. La estructura del filtro pasa altas de primer orden.

Ejemplo 4.

Calcular el filtro pasa altas para las especificaciones que se muestran en la plantilla 8.8. Se elige el valor del condensador $C_1 = 10000\,pF$ y se calcula R_1 y despues R_2.

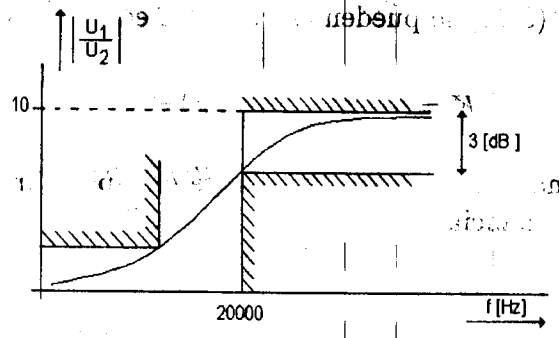


Figura 8.8. Las especificaciones para el filtro pasa altas.

$$R_1 = \frac{1}{2.\pi.20.10^3.10000.10^{-12}} = 7957\ \Omega$$

$$R_2 = 10.7957 = 79570\ \Omega$$

8.2.2 Filtro pasa bajas.

La estructura del filtro pasa bajas de primer orden con la ganancia infinita de amplificador se muestra en la figura 8.9. La matriz de admitancia de filtro pasa bajas en la figura 8.9 es en la ecuación (8.20).

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} G_1 & 0 & -G_1 \\ 0 & G_2 + pC_2 & -G_2 - pC_2 \\ -G_1 & -G_2 - pC_2 & G_1 + G_2 + pC_2 \end{bmatrix} \tag{8.20}$$

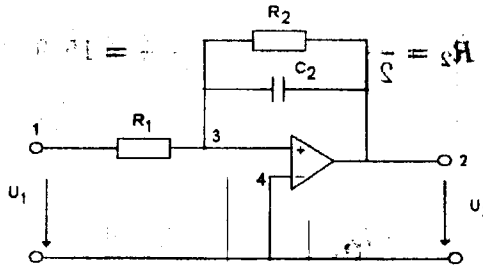


Figura 8.9. La estructura del filtro pasa bajas de primer orden.

La función de transferencia $H(p) = \frac{\Delta_{12}}{\Delta_{11}}$ toma la forma

$$\frac{U_2}{U_1} = H(p) = -\frac{1}{R_1 C_2 p + \frac{1}{R_2 C_2}} \tag{8.21}$$

La ecuación (8.21) es la función de transferencia de un filtro pasa bajas de primer orden. De la ecuación (8.21) se pueden escribir dos ecuaciones.

$$K = \frac{R_2}{R_1} \qquad \omega_1 = \frac{1}{R_2 C_2}$$

Para $\omega = \omega_0$ es la ganancia $K = \frac{R_2}{R_1}$. Si se elige el capacidor C_2 podemos calcular el resistor R_2 y para la ganancia K conocida de la ecuación anterior se calcula R_1.

Ejemplo 5.

Calcular el filtro pasa bajas para las especificaciones que se muestran en la plantilla 8.10. Se elige el valor del capacitor $C_1 = 0,01\ \mu F$ y se calcula R_2 y después R_1

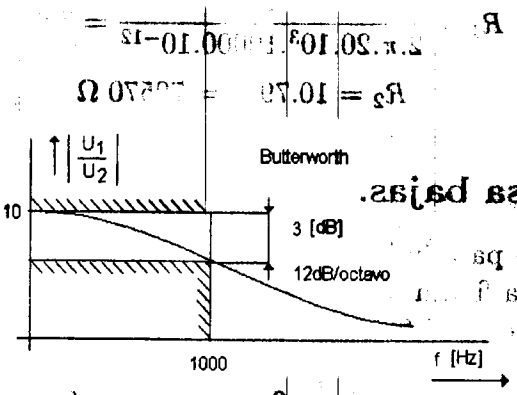


Figura 8.10. Las especificaciones para el filtro pasa bajas.

$$R_2 = \frac{1}{2.\pi.1000.0,01.10^{-6}} = 15,9\ k\Omega$$

$$R_1 = \frac{15,9.10^3}{10} = 1,59\ k\Omega$$

8.2.3 Filtro paso banda.

La estructura del filtro paso banda de primer orden con la ganancia infinita de amplificador se muestra en la figura 8.11. La matriz de admitancia de filtro paso banda en la

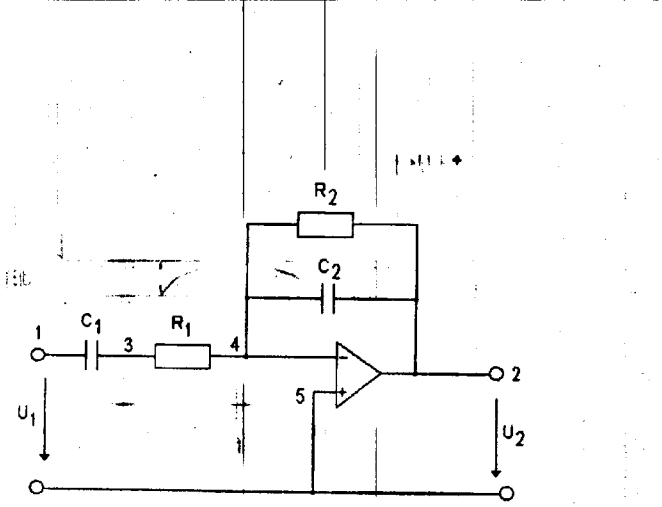


Figura 8.11. La estructura del filtro paso banda de primer orden.

figura 8.11 se muestra en la ecuación (8.22). La función de transferencia $H(p) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{\Delta_{12}}{\Delta_{11}}$ toma la forma

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} pC_1 & 0 & -pC_1 \\ -pC_1 & 0 & G_1 + pC_1 \\ 0 & -G_2 - pC_2 & -G_1 \end{bmatrix} \tag{8.22}$$

$$\frac{U_2}{U_1} = H(p) = \frac{p\frac{G_1}{C_2}}{(p + \frac{1}{R_1C_1}).(p + \frac{1}{R_2C_2})} \tag{8.23}$$

La ecuación (8.23) es la función de transferencia de un filtro paso banda de primer orden. De la ecuación (8.23) se pueden escribir tres ecuaciones.

$$K = \frac{R_2}{R_1} \qquad \omega_{-1} = \frac{1}{R_2C_2} \qquad \omega_1 = \frac{1}{R_1C_1}$$

Para $\omega = 0$ la ganancia es $K = \frac{R_2}{R_1}$. Si se elige el capacitor C_2 podemos calcular el resistor R_2 y para la ganancia K conocida de la ecuación anterior se calcula R_1.

Ejemplo 6.

Calcular el filtro paso banda para las especificaciones de la plantilla 8.12. La ganancia que sea K=5. Se elige el valor del condensador $C_2 = 0,01\ \mu F$ y se calcula R_2 y después R_1.

$$R_2 = \frac{1}{2.\pi.5000.0,01.10^{-6}} = 3183\ \Omega$$

$$R_1 = \frac{3183}{5} = 636\ \Omega$$

$$C_1 = \frac{1}{2.\pi.2000.363} = 125\ nF$$

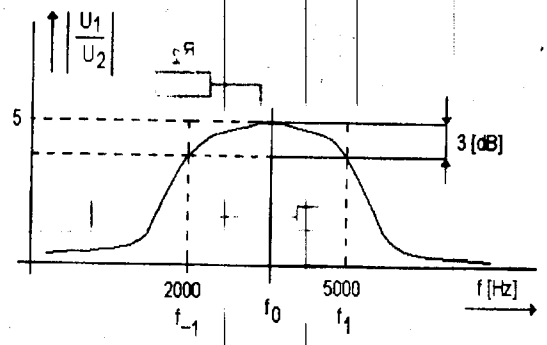


Figura 8.12. Las especificaciones para el filtro paso banda.

8.3 Filtros con retroalimentación múltiple

8.3.1 pasa bajas.

La estructura pasa bajas de un filtro activo con un amplificador de ganancia infinita se muestra en la figura 8.13. La ecuación (8.24) es la función de transferencia del filtro activo pasa bajas.

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{G_1 G_3}{p^2 C_2 C_5 + p C_5 (G_1 + G_3 + G_4) + G_3 G_4} \tag{8.24}$$

Mediante las ecuaciones siguientes se pueden calcular los valores de los elementos del filtro pasa bajas.

$$C_5 = \frac{k}{2.\pi.f_0} \qquad C_2 = \frac{4}{a^2}(H+1)\frac{k}{2.\pi.f_0}$$

$$R_1 = \frac{a}{2.H.k} \qquad R_3 = \frac{a}{2.(H+1)k} \qquad R_4 = \frac{a}{2.k}$$

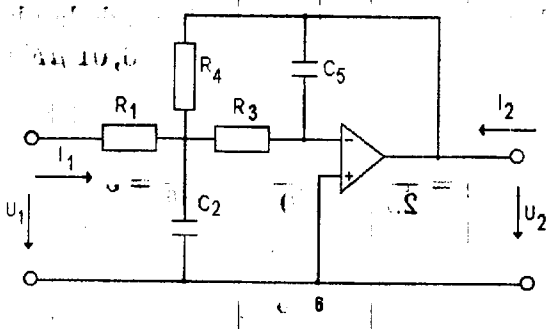


Figura 8.13. El filtro pasa bajas.

Ejemplo 7.

Calcular los elementos del filtro pasa bajas, para la frecuencia del corte $f_0 = 100\ Hz$, el orden del filtro n=2, la atenuación máxima 3 dB y la aproximación de Butterworth. La ganancia del filtro que sea 20 dB.

Solución:

El capacitor C_5 se elige y se calcula la constante k y los elementos del filtro. Para Butterworth si $a_{max} = 3\ dB$ es $a = \sqrt{2}$

$$C_5 = 0,1\ \mu F \qquad k = 2.\pi.100.0,1.10^{-6} = 6,28.10^{-5}$$

$$C_2 = \frac{4}{2}(10+1)\frac{6,28.10^{-5}}{2.6,28.100} = 0,1\ \mu F \qquad R_1 = \frac{\sqrt{2}}{2.10.6,28.10^{-5}} = 1125\ \Omega$$

$$R_3 = \frac{\sqrt{2}}{2.(10+1).6,28.10^{-5}} = 1020\ \Omega \qquad R_4 = \frac{\sqrt{2}}{2.6,28.10-5} = 11,26\ k\Omega$$

8.3.2 Paso altas.

La estructura pasa altas de un filtro activo con un amplificador de ganancia infinita se muestra en la figura 8.14. La función de transferencia de filtro activo pasa altas se muestra en la ecuación (8.25).

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{p^2 C_1 C_3}{p^2 C_3 C_4 + pG_5(C_1 + C_3 + C_5) + G_2 G_5} \tag{8.25}$$

Las ecuaciones para calcular los valores de los elementos del filtro pasa altas toman la forma:

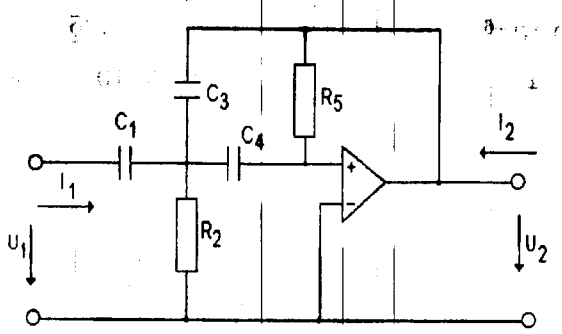


Figura 8.14. Paso altas con la retroalimentación múltiple de amplificador.

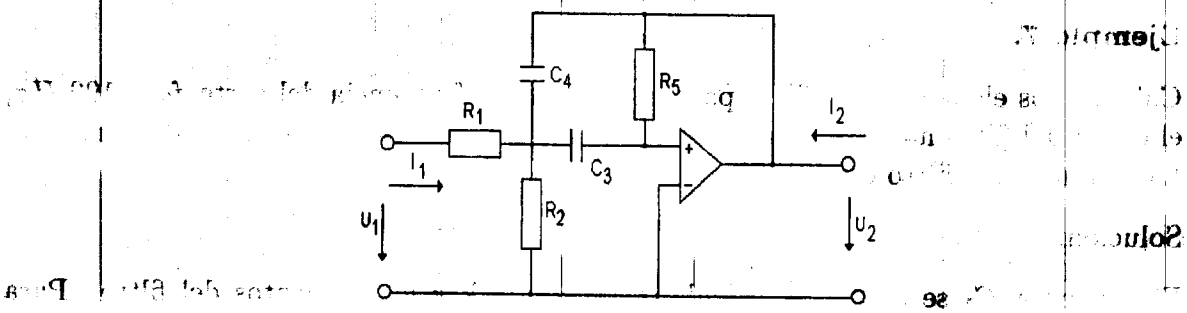


Figura 8.15. Paso banda con la retroalimentación múltiple de amplificador.

$$C_1 = C_3 = \frac{k}{2.\pi.f_0} \qquad C_4 = \frac{C_1}{H}$$

$$R_2 = \frac{a}{k(2+\frac{1}{H})} \qquad R_5 = \frac{H(2+\frac{1}{H})}{a.k}$$

Ejemplo 8.

Calcular los elementos del filtro pasa altas, para la frecuencia del corte $f_0 = 0,1\ Hz$, el orden del filtro n=2, la atenuación máxima 3 dB y la aproximación de Butterworth. La ganancia del filtro que sea 0 dB, (H(0)=1).

Solución:

El capacitor $C_1 = C_3$ se elige y se calcula k y los elementos del filtro. Para Butterworth si $a_{max} = 3\ dB$ es $a = \sqrt{2}$

$$C_1 = C_3 = 10\ \mu F \qquad k = 2.\pi.0,1.10.10^{-6} = 6,28.10^{-6}$$

$$C_4 = \frac{10.10^{-6}}{1} = 10\ \mu F \qquad R_2 = \frac{\sqrt{2}}{6,28.10^{-6}(2+\frac{1}{1})} = 75\ k\Omega$$

$$R_5 = \frac{1(2+\frac{1}{1})}{2.6,28.10^{-6}} = 337,78\ k\Omega$$

8.3.3 Paso banda.

La estructura paso banda de un filtro activo con un amplificador de ganancia infinita es en la figura 8.15. La función de transferencia del filtro activo paso banda se muestra en la ecuación (8.26).

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{pG_1C_3}{p^2C_3C_4 + pG_5(C_3 + C_4) + G_5(G_1 + G_2} \tag{8.26}$$

Si se compara la ecuación (8.26) con la ecuación general de paso banda (8.27), obtenemos ecuaciones para calcular los valores de los elementos del filtro paso banda. Se eligen los capacitores C_3 y C_4 y se calcula el coeficiente k.

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{H\omega_0 p}{p^2 + p\omega_0 a + \omega_0^2} \tag{8.27}$$

$$C_3 = C_4 = \frac{k}{2.\pi.f_0} \qquad H = \frac{A_0}{Q}$$

$$R_1 = \frac{1}{k.H} \qquad R_2 = \frac{1}{(2.Q - H)k} \qquad R_5 = \frac{2.Q}{k}$$

Ejemplo 9.

Calcular los elementos del filtro paso banda, para la frecuencia central $f_0 = 1,6\ Hz$, el orden del filtro n=2, la atenuación máxima 3 dB y la aprovimación de Butterworth. La ganancia del filtro que sea $H = A_0 = 10.$ (20)dB, y la calidad Q=10.

Solución:

El condensador C_3 se elige y se calcula la constante k. Para Butterworth $a_{max} = 3\ dB$ es $a = \sqrt{2}$

$$C_3 = C_4 = 10\ \mu F \qquad k = 2.\pi.1,6.10^{-5} = 1.10^{-4} \qquad H = \frac{10}{10} = 1$$

$$R_1 = \frac{1}{10^{-4}} = 10\ k\Omega \qquad R_2 = \frac{1}{(20-1).10^{-4}} = 527\ \Omega \qquad R_5 = \frac{2.10}{10^{-4}} = 200\ k\Omega$$

8.4 Filtros diseñados mediante las tablas

Ejemplo 10.

Calcular el filtro Chebychev pasa bajas mediante las tablas para n=2, $a_{max} = 0,5$ dB, frecuencia del corte $f_1 = 5000$ Hz, y la ganancia K=3.

Solución:

Los elememtos normalizados de nuestro filtro para la ganancia K=3 son

$$r_1 = r_4 = 1 \qquad r_3 = 1,97863 \qquad c_2 = 1,75741 \qquad c_5 = 0,18967$$

Si se elige el resistor $R_0 = 10\ k\Omega$ para desnormalizar los valores de los elementos se obtienen los valores desnormalizados del filtro Chebychev:

$$R_1 = R_4 = r1.R_0 = 10\ k\Omega \qquad R_3 = r_3.R_0 = 19,70\ k\Omega$$

$$C_2 = \frac{c_2}{2.\pi.f_0.R_0} = \frac{1,75741}{2.\pi.5000.10000} = 559\ pF$$

$$C_5 = \frac{c_5}{2.\pi.f_0.R_0} = \frac{0,18967}{2.\pi.5000.10000} = 603,7\ pF$$

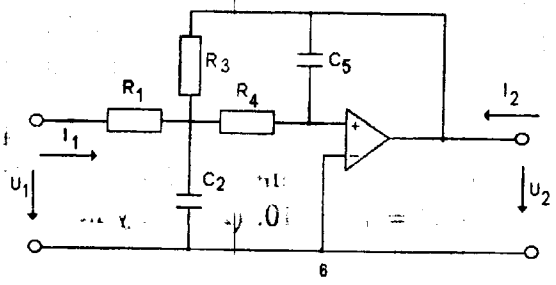


Figura 8.16. Pasa bajas con doble retroalimentación del amplificador.

Ejemplo 11.

Calcular el filtro Butterworth pasa bajas de segundo orden mediante las tablas 8.2 para $a_{max} = 0,5$ dB, frecuencia del corte $f_1 = 1500$ Hz, y la ganancia K=2.

Solución:

Los elementos normalizados de filtro Butterworth pasa bajas para la ganancia K=2 son

$$r_1 = r_2 = 1 \qquad c_1 = 0,8740 \qquad c_2 = 1,14412$$

Si se elige el resistor $R_0 = 100\ k\Omega$ para desnormalizar los valores de los elementos se obtienen los valores desnormalizados del filtro Butterworth.

$$R_1 = r1.R_0 = 100\ k\Omega \qquad R_2 = r2.R_0 = 100\ k\Omega$$

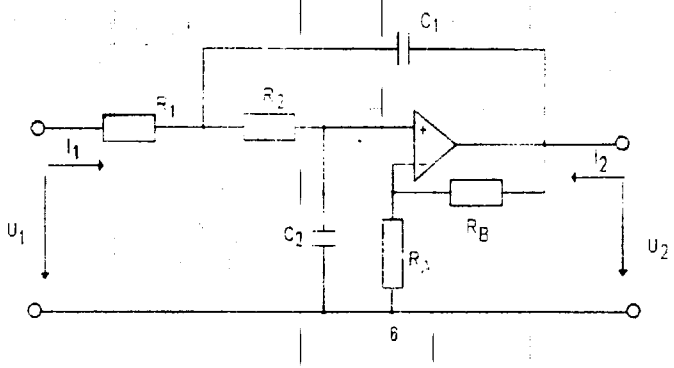


Figura 8.17. pasa bajas de Butterworth.

$$C_1 = \frac{c_1}{2.\pi.f_1.R_0} = \frac{0,87403}{2.\pi.1500.10^5} = 927,37\ pF$$

$$C_2 = \frac{c_2}{2.\pi.f_1.R_0} = \frac{1,14412}{2.\pi.1500.10^5} = 1213,9\ pF$$

Ejemplo 12.

Calcular el filtro Butterworth paso banda de segundo orden mediante las tablas 8.3 para la frecuencia $f_0 = 10\ kHz$, la ganancia K=2 y la calidad Q=5.

Solución:

Los elementos normalizados de filtro Butterworth paso banda para la ganancia K=2 y la calidad Q=5 son

$$r_1 = 1 \qquad r_2 = 0,6344 \qquad r_3 = 2,5763$$

$$c_1 = 1,0000 \qquad c_2 = 1,0000$$

Se elige el resistor $R_0 = 10^4\ \Omega$. para desnormalizar los valores de los elementos en circuito normalizado. Los valores desnormalizados del filtro Butterworth que se muestra en la figura 8.18 son:

$$R_1 = r1.R_0 = 10\ k\Omega \qquad R_2 = r2.R_0 = 634\ \Omega \qquad R_3 = r3.R_0 = 25,763\ k\Omega$$

$$C_1 = \frac{c_1}{2.\pi.f.R_0} = \frac{1,000}{2.\pi.10^4.10^4} = 1591,5\ pF$$

$$C_2 = \frac{c_2}{2.\pi.f_1.R_0} = \frac{1,000}{2.\pi.10^4.10^4} = 1591,5\ pF$$

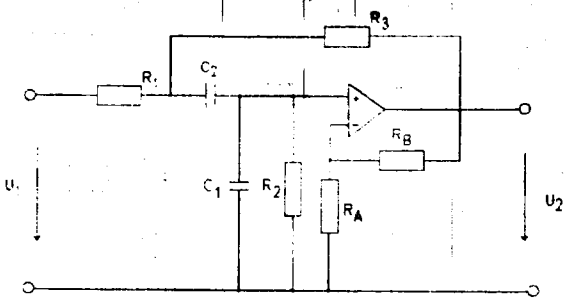


Figura 8.18. El filtro activo pasa bajas.

8.5 Filtro Butterworth pasa bajas de sexto orden

La función de transferencia del circuito de segundo orden pasa bajas en la figura 8.19 toma la forma (8.28)

$$H(p) = \frac{K\frac{G_1G_2}{C_1C_2}}{p^2 + p\left[\frac{1}{R_1C_1} + \frac{1}{C_1R_2} + \frac{1-K}{R_2C_2}\right] + \frac{1}{R_1R_2C_1C_2}} \tag{8.28}$$

Si se compara la función de transferencia (8.28) con la función de transferencia pasa bajas de Butterworth (8.29)

$$H(p) = \frac{H}{p^2 + a_1.p + a_0} \tag{8.29}$$

se obtienen dos ecuaciones

$$a_1 = \frac{1}{R_1C_1} + \frac{1}{C_1R_2} + \frac{1-K}{R_2C_2} \tag{8.30}$$

$$a_0 = \frac{1}{R_1R_2C_1C_2} \tag{8.31}$$

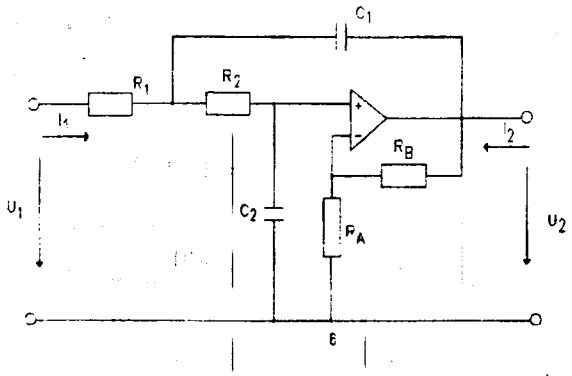


Figura 8.19. El filtro activo pasa bajas.

Tenemos dos ecuaciones pero cinco elementos que se calculan. Entonces se pueden elegir tres elementos y los demás se calculan. Elegimos

$$R_1 = R_2 = C_1 = 1$$

De la ecuación (8.30) y (8.31) sustituyendo por R_1, R_2 y C_1 se obtiene

$$C_2 = \frac{1}{a_0} \tag{8.32}$$

$$K = 3 - a_1 \tag{8.33}$$

Ejemplo 13.

Calcular el filtro Butterworth pasa bajas de sexto orden si $a_{max} = 3\ dB$ y la frecuencia del corte que sea $f_1 = 4000$ Hz. La función de transferencia del filtro Butterworth que se puede obtener de la tabla toma es:

$$H(p) = \frac{1}{(p^2 + 1,9318p + 1)} \frac{1}{(p^2 + 1,4142p + 1)} \frac{1}{(p^2 + 0,5176p + 1)}$$

Se conectan tres filtros en cascada con la función de transferencias

$$H_1(p) = \frac{1}{p^2 + 1,9318p + 1} \qquad H_2(p) = \frac{1}{p^2 + 1,4142p + 1}$$

$$H_3(p) = \frac{1}{p^2 + 0,5176p + 1}$$

Los valores del primer bloque.

Si se utiliza la impedancia para desnormalizar los valores $R_0 = 10^4\ \Omega$ se obtiene

$$R_1 = R_2 = 10\ k\Omega \qquad C_1 = C_2 = \frac{1}{2.\pi.10^4.4.10^3} = 3979\ pF$$

y la ganancia del primer bloque es

$$K_1 = 3 - 1,9318 = 1,0682 \qquad R_{A1} = 10\ k\Omega \qquad R_{B1} = 682\ \Omega$$

Los valores del segundo bloque.

Los valores C_1, C_2, R_1 y R_2 son iguales para todos bloques. Es necesario calcular las ganancias de segundo y tercer bloque.

$$K_2 = 3 - 1,4142 = 1,5858 \qquad R_{A2} = 10\ k\Omega \qquad R_{B2} = 5858\ \Omega$$

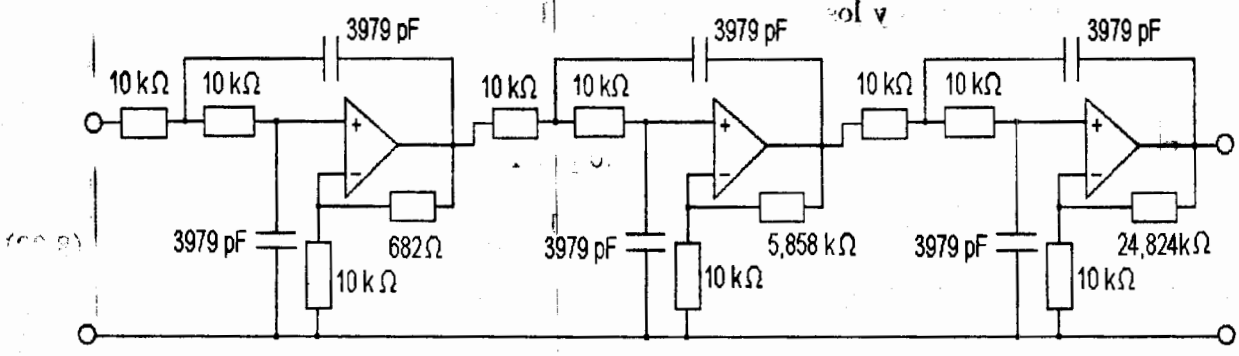


Figura 8.20. El filtro activo pasa bajas.

Los valores del tercer bloque.

$$K_3 = 3 - 0,5176 = 2,4824 \qquad R_{A3} = 10\ k\Omega \qquad R_{B3} = 24,824\ k\Omega$$

El circuito de Butterworth de sexto orden se muestra en la figura 8.20

8.6 Diseño de los filtros con girador

El inductor se realiza, si el girador en su puerta de salida se conecta con un capacitor. El girador se realiza mediante dos amplificadores, entonces el filtro no tiene resistores, que en la forma integrada ocupan mucho espacio y además son muy sensible a la variación de la temperatura. El circuito contiene solo los amplificadores y capacitores que no ocupan tanto espacio en la forma integrada como los filtros activos con resistores, capacitores y amplificadores.

8.6.1 El girador.

El girador se realiza con dos amplificadores. Para diseñar el girador primeramente se calcula la matriz de admitancia de un amplificador real (no ideal), que se muestra en la figura 8.21. En la figura 8.21a está el bloque funcional de amplificador y en la figura 8.21b se muestra la estructura de un amplificador real con los resistores R_1 y R_2. De los circuitos en la figura 8.21 se pueden escribir las siguientes ecuaciones

$$I_k + I_i = 0 \qquad U_{ik} = U_{i0} - U_{k0}$$
$$I_s + I_b = 0 \qquad U_{sb} = U_{s0} - U_{b0}$$
$$I_i = G_1(U_{i0} - U_{k0}) \qquad I_s = s(U_{i0} - U_{k0}) + G_2(U_{s0} - U_{b0})$$
$$I_k = -G_1(U_{i0} - U_{k0}) \qquad I_b = -s(U_{i0} - U_{k0}) - G_2(U_{s0} - U_{b0})$$

Estas ecuaciones se pueden escribir en la forma matricial

$$\begin{bmatrix} I_i \\ I_s \\ I_k \\ I_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 & 0 & -G_1 & 0 \\ S & G_2 & -S & -G_2 \\ -G_1 & 0 & G_1 & 0 \\ -S & -G_2 & S & G_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} U_{i0} \\ U_{s0} \\ U_{k0} \\ U_{b0} \end{bmatrix}$$

La matriz de admitancia del amplificador real toma la forma

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} G_1 & 0 & -G_1 & 0 \\ S & G_2 & -S & -G_2 \\ -G_1 & 0 & G_1 & 0 \\ -S & -G_2 & S & G_2 \end{bmatrix}$$

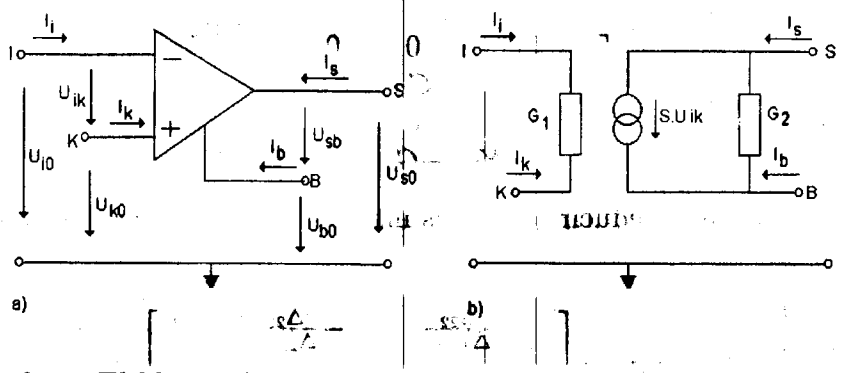


Figura 8.21. El bloque funcional y la estructura del amplificador real.

Ejemplo 1.

Calcular la matriz de admitancia del circuito con el amplificador real de la figura 8.22
Primero se calcula la matriz de la red pasiva.

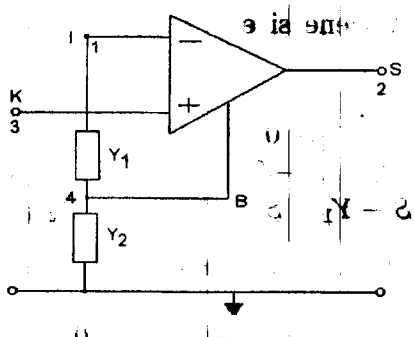


Figura 8.22. Circuito con amplificador real.

$$\mathbf{Y^{Pas}} = \begin{bmatrix} Y_1 & 0 & 0 & -Y_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -Y_1 & 0 & 0 & Y_1+Y_2 \end{bmatrix}$$

Para obtener la matriz de admitancia el circuito activo es necesario sumar la matriz de la red pasiva con la matriz de amplificador real.

$$\mathbf{Y^{Cir}} = \begin{bmatrix} Y_1+G_1 & 0 & -G_1 & -Y_1 \\ S & G_2 & -S & -G_2 \\ -G_1 & 0 & G_1 & 0 \\ -S-Y_1 & -G_2 & S & G_2+Y_1+Y_2 \end{bmatrix}$$

Adelante se va a idealizar el amplificador. Primero que sea la rezistencia del amplificador en la entrada igual a infinito. $R_1 = \infty$, $G_1 = 0$. La matriz anterior se modifica

$$\mathbf{Y^{Cir}} = \begin{bmatrix} Y_1 & 0 & 0 & -Y_1 \\ S & G_2 & -S & -G_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -S-Y_1 & -G_2 & S & G_2+Y_1+Y_2 \end{bmatrix}$$

En esta matriz se van a reducir los nodos internos 1 y 4 (I y B) y se calcula la matriz siguiente

$$[\mathbf{Y}] = \begin{bmatrix} \frac{\Delta_{22}}{\Delta_{22,33}} & -\frac{\Delta_{23}}{\Delta_{22,33}}(-1)^5 \\ -\frac{\Delta_{32}}{\Delta_{22,33}}(-1)^6 & \frac{\Delta_{33}}{\Delta_{22,33}} \end{bmatrix}$$

El subdeterminante $\Delta_{22,33}$ se obtiene si en la matriz se eliminan el segundo y tercer renglón y la segunda y tercera columna.

$$\Delta_{22,33} = \begin{vmatrix} Y_1 & -Y_1 \\ -S-Y_1 & G_2+Y_1+Y_2 \end{vmatrix} = Y_1(G_2 - S + Y_2)$$

El subdeterminante Δ_{32} se obtiene si en la matriz se elimina el tercer renglón y la segunda columna.

$$\Delta_{32} = \begin{vmatrix} Y_1 & 0 & -Y_1 \\ S & -S & -G_2 \\ -S-Y_1 & S & Y_1+Y_2+G_2 \end{vmatrix} = -S.Y_1.Y_2$$

Si se calculan los otros subdeterminantes se obtiene la matriz del circuito activo

$$[\mathbf{Y}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{SY_2}{Y_2+G_2-S} & \frac{Y_2G_2}{Y_2+G_2-S} \end{bmatrix}$$

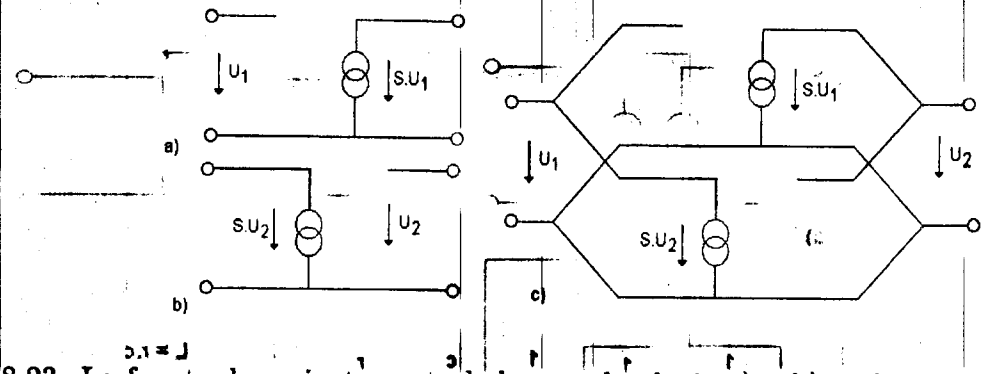


Figura 8.23. La fuente de coriente controlada por el voltaje a) y b) y el girador c).

Si se toma en cuenta que el amlificador es ideal, entonces la ganancia $S = \infty$ y se obtiene de la matriz anterior la matriz de admitancia

$$[\mathbf{Y}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ Y_2 & 0 \end{bmatrix}$$

De la última matriz se pueden escribir dos ecuaciones

$$I_1 = 0 \qquad I_2 = Y_2.U_1$$

De estas ecuaciones se puede ver que el circuito resultante es la fuente de coriente controlada con voltaje en la entrada. El circuito se muestra en la figura 8.23a. La matriz de admitancia del circuito en la figura 8.23b toma la forma

$$[\mathbf{Y}] = \begin{bmatrix} 0 & Y_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Si se conectan los circuitos en la figura 8.23a y 8.23b en paralelo se obtiene un girador que se muestra en la figura 8.23c. La matriz de adnmitancia de un girador toma la forma

$$[\mathbf{Y}] = \begin{bmatrix} 0 & Y_2 \\ Y_2 & 0 \end{bmatrix}$$

La estructura y el símbolo de un girador se muestra en la figura 8.24. En la figura 8.24c) se muestra como se realiza físicamente el inductor mediante un girador y un capacidor.

Ejemplo 2.

Calcular el circuito equivalente que se obtiene si se conectan dos giradores en cascada. Un girador tiene la impedancia de gyración R_1 y el otro R_2. Primero es necesario calcular la matriz de cascada del girador. De las ecuaciones lineales del girador se obtiene

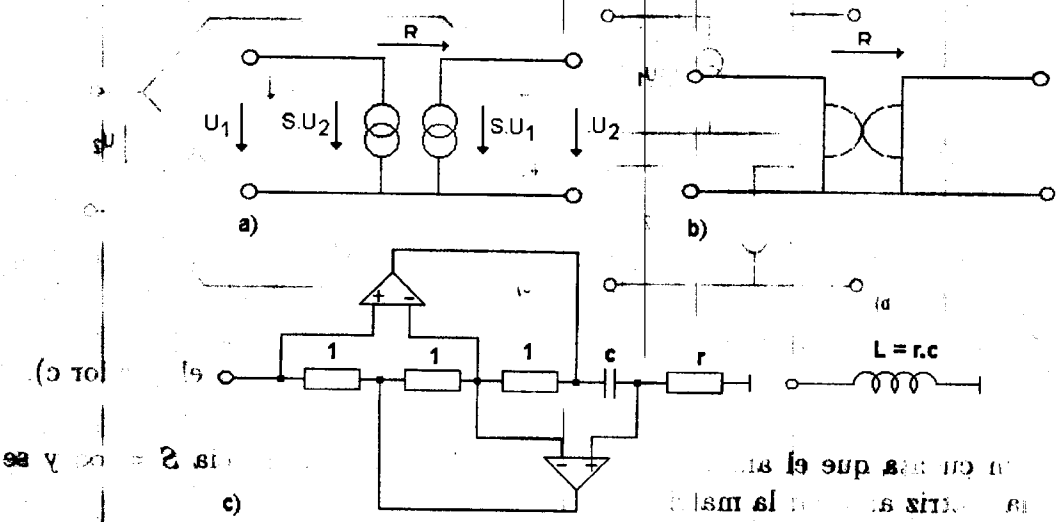


Figura 8.24. girador, el símbolo de girador y la realización física de una inductancia.

$$U_1 = R_1.I_2 \qquad I_1 = \frac{U_2}{R_1}$$

La matriz de cascada del primer girador es

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & R_1 \\ \frac{1}{R_1} & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

La ecuación matricial de cascada para segundo girador con el resistor de giración R_2 toma la forma

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & R_2 \\ \frac{1}{R_2} & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

Para dos giradores conectados en cascada como se muestra en la figura 8.25, las matrices de cascada se multiplican. La matriz resultante en la ecuación (8.34) es la matriz de un transformador con $n = \frac{R_1}{R_2}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & R_1 \\ \frac{1}{R_1} & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & R_2 \\ \frac{1}{R_2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{R_1}{R_2} & 0 \\ 0 & \frac{R_2}{R_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & \frac{1}{n} \end{bmatrix} \tag{8.34}$$

Ejemplo 3.

Calcular la impedancia de entrada de un girador con un capacitor conectado en la salida como se muestra en la figura 8.26. De las ecuaciónes del girador

$$U_1 = R.I_2 \qquad I_1 = \frac{1}{R}U_2$$

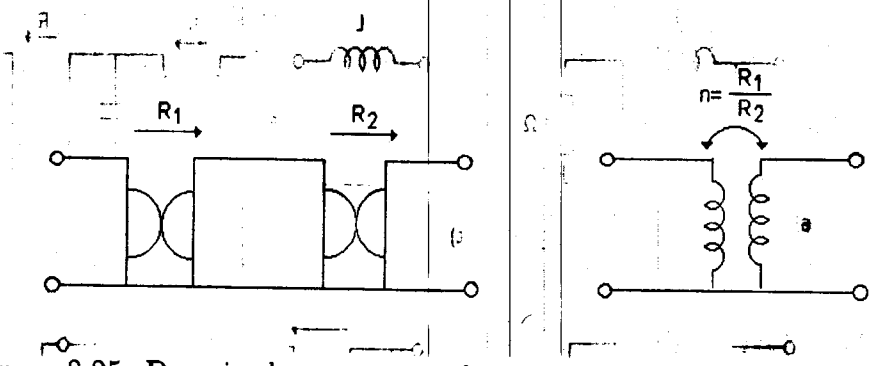


Figura 8.25. Dos giradores en cascada equivale a un transformador.

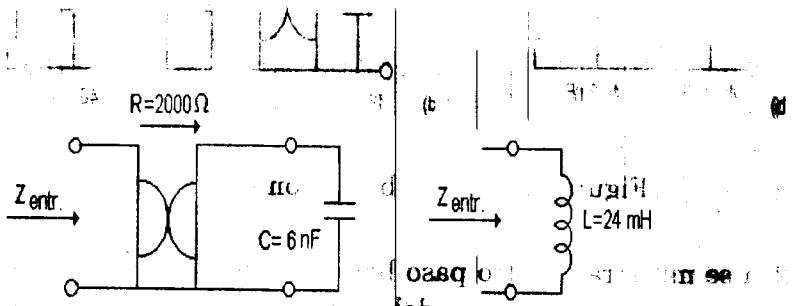


Figura 8.26. El girador terminado con un capacitor en la salida.

se puede calcular la ecuación (8.35) si en la salida del girador se conecta el capacitor C_2. De la ecuación (8.35) se ve que la impedancia de entrada Z_1 es la impedancia del inductor. Esto significa que el inductor se simula mediante un girador y capacitor conectado en la puerta de salida.

$$Z_1 = \frac{R^2}{Z_2} = R^2.j\omega C_2 \tag{8.35}$$

Utilizando la ecuación (8.35) la inductancia L_2 que simula el girador con el capacitor de 6 nF conectado en su salida tiene 24 mH.

$$L = R^2.C_2 = 2000^2.6.10^{-9} = 0.024$$

Ejemplo 4.

Calcular el filtro de Butterworth paso bajas de tercer orden, si la frecuencia del corte $f_1 = 3400$ Hz y la atenuación máxima es $a_{max} = 3$ dB. El filtro en su salida se conecta con la impedancia de$R_2 = 1000\ \Omega$.

Solución:

Los elementos del filtro Butterworth normalizado es $c_1 = c_3 = 1$ y la inductancia $l_2 = 2$.

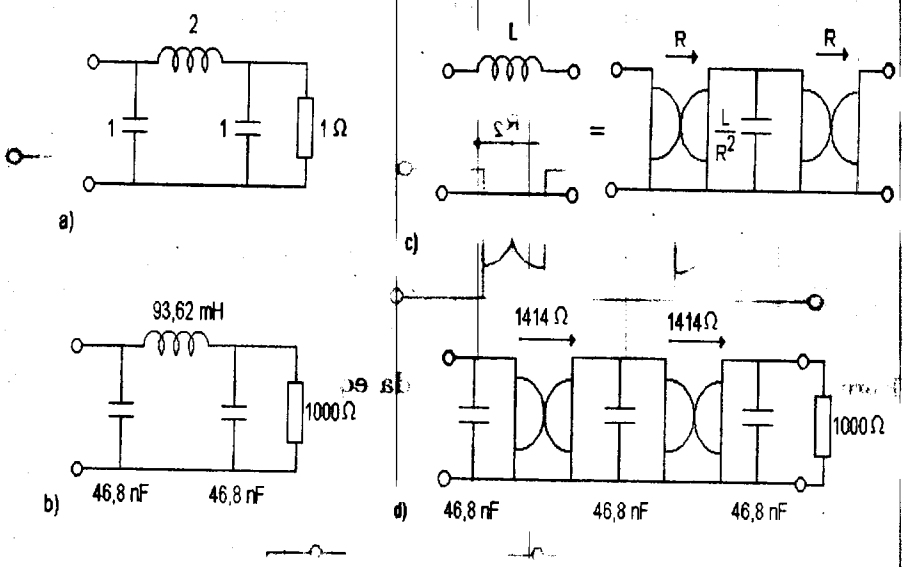


Figura 8.27. Paso bajas con girador.

En la figura 8.27a se muestra el filtro paso bajas normalizado. Para desnormalizar los valores con el respecto a la frecuencia del corte y con la impedancia de 1000 Ω se utilizan los ecuaciones

$$C = \frac{c}{2.\pi.f_1.R_2} \qquad L = \frac{l.R_2}{2.\pi.f_1}$$

Los elementos del filtro desnormalizados son:

$$C_1 = C_3 = \frac{1}{2.\pi.3400.1000} = 46,8\ nF$$

$$L_2 = \frac{2.1000}{2.\pi.3400} = 93,62\ mH$$

En la figura 8.27c se muestra el circuito que simula el inductor en la rama serial. El capacitor que simula el inductor con dos giradores se calcula mediante la relación $C = L/R^2$. Si se elige el resistor de giración R=1,4144 $k\Omega$ obtenemos el valor de capacitor 46,8 nF. Del circuito en la figura 8.27d podemos ver, que los valores de los capacitores en el circuito son iguales. Si se construyen muchos filtros de este tipo, la fabricación en serie es más barata. Además podemos ver, que el circuito no contiene rezistores, que requieren en la fabricación de integración mucho espacio.

$$C_2 = \frac{L_2}{R^2} = \frac{93,62.10^{-3}}{(1,4144.10^3)^2} = 46,8\ nF$$

Ejemplo 5.

Calcular el filtro de Butterworth paso altas de tercer orden, si la frecuencia del corte $f_1 = 30$ Hz y la atenuación máxima es $a_{max} = 3$ dB. El filtro en su salida se conecta

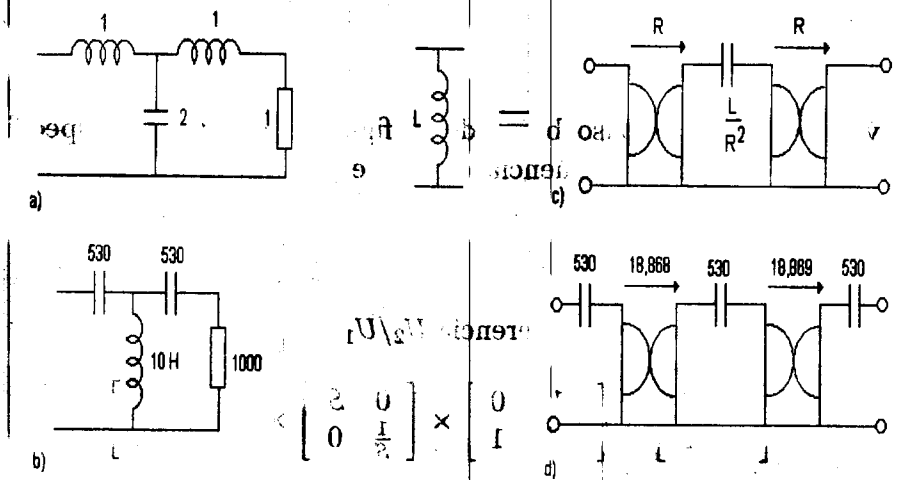


Figura 8.28. Paso altas con girador.

con la impedancia de $R_2 = 1000\ \Omega$.

Solución:

Los elementos del filtro Butterworth normalizado paso bajas son $c_1 = c_3 = 1$ y la inductancia $l_2 = 2$. En la figura 8.28a se muestra el filtro Butterworth paso bajas normalizado. Para desnormalizar los valores con el respecto a la frecuencia del corte $f_{-1} = 30\ Hz$ y la impedancia de la salida $1000\ \Omega$ se utilizan los ecuaciones

$$C = \frac{l}{2.\pi.f_{-1}.R_2} \qquad L = \frac{c.R_2}{2.\pi.f_{-1}}$$

Los elementos del filtro desnormalizados son:

$$C_1 = C_3 = \frac{1}{2.\pi.30.1000} = 530\ \mu F$$

$$L_2 = \frac{2.1000}{2.\pi.30} = 10\ H$$

En la figura 8.27c se muestra el circuito que simula el inductor en la rama paralela. El capacitor que simula el inductor con dos giradores se calcula mediante la relación $C = L/R^2$. Si se elije el el capacitor entre los dos giradores $530\ \mu F$ se obtiene el valor de constante de giración 137,36 Ω. Del circuito en la figura 8.28d se puede ver, que los valores de los capacitores en el circuito son iguales.

$$S^2 = \sqrt{\frac{L_2}{C_2}} = \sqrt{\frac{10}{(530.10^{-6})}} = 137,36$$

Ejemplo 6.

Calcular los valores del filtro paso bajas de la figura 8.29 para las especificaciones: Aproximación de Butterworth, frecuencia del corte $f_1 = 10$ kHz, R=1000 Ω, H=10, $a_{max} = 3$ dB.

Solución:

Primero se calcula la función de transferencia U_2/U_1

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & R \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ pC_1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & S \\ \frac{1}{S} & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ pC_2 & 1 \end{bmatrix} \tag{8.36}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} SpC_2 + p^2RC_1C_2S + \frac{1}{S} & S(1 + RpC_1S) \\ Sp^2C_1C_2 + \frac{1}{S} & pC_1S \end{bmatrix} \tag{8.37}$$

$$\frac{1}{A_{11}} = \frac{U_2}{U_1} = \frac{S}{p^2RC_1C_2S^2 + pC_2S^2 + R} \tag{8.38}$$

Si se sustituye en la ecuación (8.38) los términos $D = \frac{1}{S}$, $S_1 = \frac{1}{C_1}$ y $S_2 = \frac{1}{C_2}$ se obtiene la función de transferencia

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{DGS_1S_2}{p^2 + pS_1G + S_1S_2D^2} \tag{8.39}$$

La ecuación (8.39) es una función de transferencia del filtro paso bajas. En el caso de Butterworth la función de transferencia desormalizada toma la forma

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{H\omega_0^2}{p^2 + pa\omega_0 + \omega_0^2} \tag{8.40}$$

Si se comparan (8.39) con (8.40) se obtienen tres ecuaciones

$$H\omega_0^2 = D.G.S_1.S_2$$

$$B\omega_0^2 = S_1.S_2.D^2$$

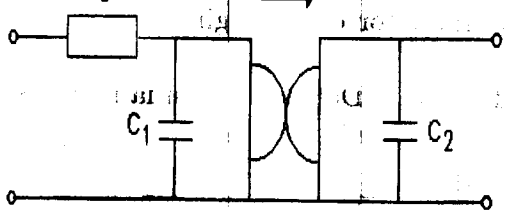


Figura 8.29. Paso bajas con girador.

$$S_1.G = a.\omega_0$$

Si se conoce el valor de la resistencia R podemos calcular el condensador C_1, D y C_2 mediante las ecuaciones

$$C_1 = \frac{1}{a.R.\omega_0} \qquad D = \frac{b}{R.H} \qquad C_2 = \frac{D^2}{C_1.\omega^2}$$

$$C_1 = \frac{1}{1000.\sqrt{2}.2.\pi.10^4} = 11,253953\ nF$$

$$D = \frac{1}{1000.10} = 10^{-4}$$

$$C_2 = \frac{10^{-8}}{11,253953.4.\pi^2.10^8} = 225,079.10^{-12}\ F$$

El circuito paso bajas se muestra en la figura 8.29

Chebychev	K	r_1	r_4	r_3	c_2	c_5
0,5 dB	1	1,000	1,000	0,65954	2,46644	0,40544
	3	1,000	1,000	1,97863	1,75741	0,18967
	5	1,000	1,000	3,29771	1,61560	0,12379

Tabla 8.1. Los elementos del filtro activo pasa bajas.

	K	r_1	r_2	c_1	c_2
Chebychev	2	1,000	1,000	0,77088	0,855557
0,5 dB	1	1,000	1,000	1,4026	047013
	1,892	0,812	0,812	1,0000	1,0000
Butterworth	2	1,000	1,000	0,8740	1,14412
0,5 dB	1	1,000	1,000	1,4142	0,7071
	1,585	1,000	1,000	1,0000	1,0000

Tabla 8.2. Los elementos del filtro activo pasa bajas con la ganancia finita del amplificador

	Q	r_1	r_2	r_3	c_1	c_2	K
Butterworth	2	1,4142	1,4142	1,4142	1,0000	1,0000	3,2928
		1,0000	0,7403	2,3508	1,0000	1,0000	2,0000
	5	1,4142	1,4142	1,4142	1,0000	1,0000	3,7172
		1,0000	0,6344	2,5763	1,0000	1,0000	2,0000

Tabla 8.3. Los elementos del filtro activo paso banda con la ganancia finita del amplificador

Capítulo 9

Filtros de cristal

9.1 El resonador piezoelétrico

El bloque del piezoresonador y el circuito LRC del resonador piezoeléctrico se muestra en la figura 9.1a) y el circuito equivalente se muestra en la figura 9.1b).
La impedancia del circuito de un puerto de la figura 9.1 toma la forma

$$Z(s) = \frac{1 + s^2 L_1 C_1}{s\left[(C_0 + C_1) + s^2 L_1 C_1 C_0\right]} = \frac{1}{C_0} \frac{s^2 + \frac{1}{L_1 C_1}}{s(s^2 + \frac{C_0 + C_1}{L_1 C_0 C_1})} \tag{9.1}$$

Los polos y ceros de la impedancia Z(s) están en las frecuencias

$$\omega_1^2 = \frac{1}{L_1 C_1} \tag{9.2}$$

$$\omega_2^2 = \frac{1}{L_1 \frac{C_1 C_0}{C_1 + C_0}} \tag{9.3}$$

El diagrama de la reactancia del resonador piezoelétrico se puede obtener de la ecuación (9.1) y se muestra en la figura 9.2. Desde la figura 9.2 se puede ver que las frecuencias de

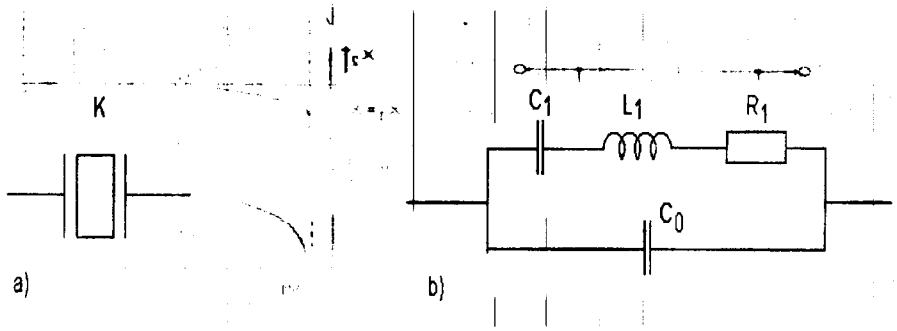


Figura 9.1. El resonador piezoeléctrico y su LRC circuito.

[b]

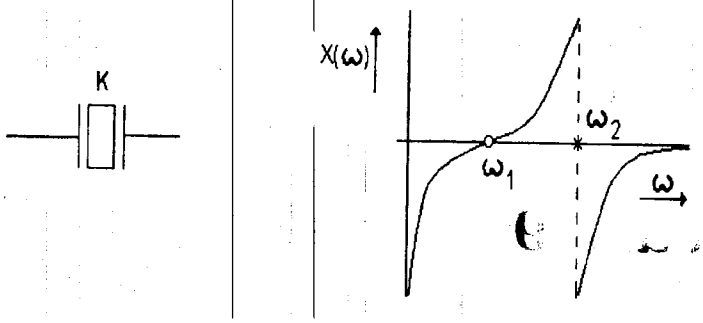


Figura 9.2. El diagrama de reactancia del resonador piezoeléctrico.

los polos y ceros se alternan. La impedancia se puede expresar mediante las frecuencias de los polos y ceros. Si se sustituye en (9.1) las ecuaciones (9.3) y (9.2) se obtiene

$$Z(p) = \frac{1}{j\omega C_0} \times \frac{\omega_1^2 - \omega^2}{\omega_2^2 - \omega^2} \tag{9.4}$$

9.2 Atenuación del filtro forma cruz.

El filtro paso banda con cristales se muestra en la figura 9.3a. Para que el filtro sea paso banda es necesario que en las ramas de serie hay un cristal K_1 y en las ramas que se cruzan esté el cristal K_2. El cristal K_2 debe tener un cero en las frecuencias donde el cristal K_1 tiene un polo. Si todos cristales son iguales, la atenuación es infinita para todas las frecuencias y el circuito no funciona como filtro. Los filtros paso banda de cristal tienen la banda de paso muy estrecha. En la figura 9.3b se muestran las reactancias de los kristales K_1 y K_2 y la atenuación del filtro en la forma cruz.

En el caso del circuito en la forma cruz con las impedancias Z_1 y Z_2 en la rama de

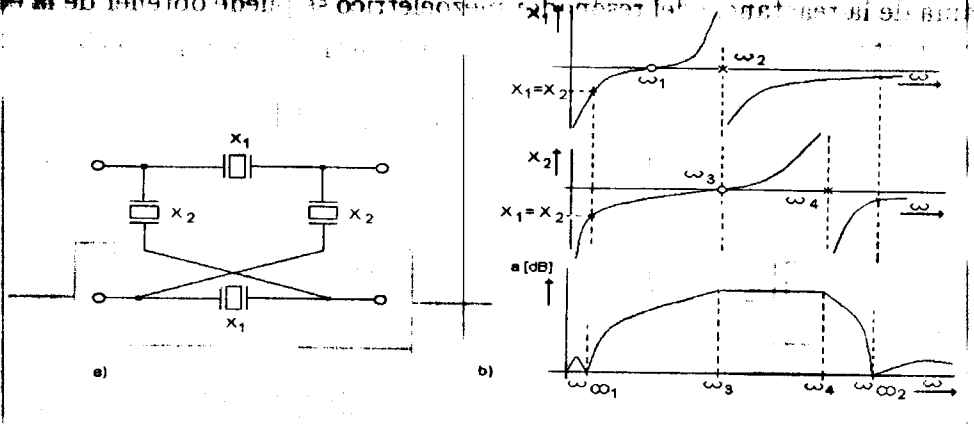


Figura 9.3. El diagrama de reactancia del filtro PB piezoeléctrico.

serie y cruz se puede escribir la ecuación (9.5), donde a_0 es la atenuación y b_0 es la fase de la función de transferencia del circuito.

$$tg\ h\ \frac{a_0 + jb_0}{2} = \sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}} \tag{9.5}$$

- Si el carácter de ambas impedancias Z_1 y Z_2 sea inductiva o capacitiva, el circuito atenua y en la frecuencia donde $Z_1 = Z_2$ obtenemos el polo de atenuación. En el caso si $Z_1 = Z_2$ se obtiene de la ecuación (9.5) la ecuación (9.6)

$$tg\ h\ \frac{a_0}{2} = 1 \rightarrow a_0 = \infty \tag{9.6}$$

De la ecuación (9.6) se ve que la atenuación es infinita si $Z_1 = Z_2$. Si las impedancias Z_1 y Z_2 tienen el mismo carácter en la banda de las frecuencias, eso significa que en esta banda el filtro atenua. Si en la frecuencia f_2, $Z_1 = Z_2$ el polo de atenuación es en la frecuencia f_2.

- Si en la banda de las frecuencias la impedancia Z_1 tiene carácter inductivo y en la misma banda de frecuencias Z_2 tiene carácter capacitivo se puede obtener de la ecuación (9.5)

$$\frac{senh\ a_0}{cosh\ a_0 + cos\ b_0} + j\frac{sen\ b_0}{cosh\ a_0 + cos\ b_0} = j \times \sqrt{\frac{X_1}{X_2}} \tag{9.7}$$

Si se comparan las partes imaginarias y reales de ambos lados de la ecuación (9.7) se obtiene

$$\frac{senh\ a_0}{cosh\ a_0 + cos\ b_0} = 0 \qquad \rightarrow \qquad a_0 = 0 \tag{9.8}$$

$$\frac{sen\ b_0}{cosh\ a_0 + cos\ b_0} = \frac{sen\ b_0}{1 + cos\ b_0} = tg\frac{b_0}{2} = \sqrt{\frac{X_1}{X_2}} \tag{9.9}$$

La fase de la función de transferencia en la banda de paso se puede calcular mediante la ecuación (9.10). De la ecuación (9.8) se ve que la atenuación del circuito es cero ($a_0 = 0$) en la banda de frecuencias donde las reactancias de los cristales tienen el carácter opuesto.

$$b_0 = 2.arctg\sqrt{\frac{X_1}{X_2}} \tag{9.10}$$

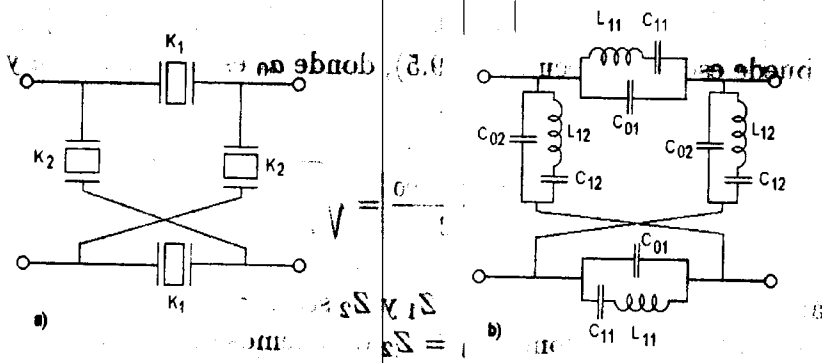


Figura 9.4. El filtro paso banda en la forma cruz.

9.3 Filtro paso de banda en la forma cruz

El filtro paso banda en la forma cruz figura 9.4a tiene en las ramas de serie el cristal K_1 y en las ramas que se cruzan el cristal K_2. En la figura 9.4b en las ramas se muestran ahora los circuitos ecuivalentes a un cristal piezoeléctrico. Para cada circuito LC se calculan las impedancias $Z_1(j\omega)$ y $Z_2(j\omega)$. Para obtener un filtro es necesario elegir el polo de cristal K_2 en la misma frecuencia donde está el cero del cristal K_1. Entonces en el denominador de $Z_1(j\omega)$ y en el numerador de $Z_2(j\omega)$ se encuentra ω_2^2, como se ve de las ecuaciones (9.11) y (9.13).

$$Z_1(j\omega) = \frac{1}{j\omega C_{01}} \times \frac{\omega_1^2 - \omega^2}{\omega_2^2 - \omega^2} \tag{9.11}$$

$$Z_1(j\omega) = \frac{1}{j\omega C_{02}} \times \frac{\omega_2^2 - \omega^2}{\omega_3^2 - \omega^2} \tag{9.12}$$

En la ecuación (9.11) el cero es de la forma

$$\omega_1^2 = \frac{1}{L_{11}C_{11}} \tag{9.13}$$

y el polo ω_2^2 toma la forma:

$$\omega_2^2 = \frac{1}{L_{12}\frac{C_{12}C_{02}}{C_{11}+C_{02}}} = \frac{1}{L_{12}C_{12}} = \omega_1^2\left(1 + \frac{C_{11}}{C_{01}}\right) \tag{9.14}$$

El polo de $Z_2(j\omega)$ se obtiene de manera similar

$$\omega_3^2 = \frac{1}{L_{12}\frac{C_{12}C_{02}}{C_{12}+C_{02}}} = \omega_2^2\left(1 + \frac{C_{12}}{C_{02}}\right) \tag{9.15}$$

Es necesario calcular la impedancia característica del filtro en la forma cruz. La gráfica de la impedancia característica se muestra en la figura 9.5. En la banda de paso la

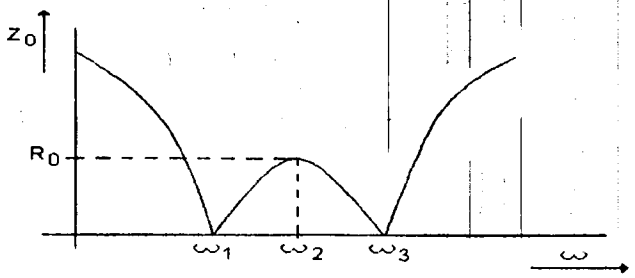


Figura 9.5. El diagrama de la impedancia carácteristica.

impedancia característica es real y en la banda de supresión la impedancia característica tiene carácter imaginario. Las frecuencias ω_1 y ω_3 son las frecuencias del corte de paso banda. En la frecuencia $\omega_2 = \sqrt{\omega_1.\omega_3}$ la impedancia característica alcanza el valor R_0. La impedancia característica Z_0 se calcula mediante la ecuación $Z_0 = \sqrt{Z_1.Z_2}$.

$$Z_0 = \frac{1}{j\omega\sqrt{C_{01}C_{02}}} \times \sqrt{\frac{\omega_1^2 - \omega^2}{\omega_3^2 - \omega^2}} \tag{9.16}$$

para $\omega = \omega_2 = \sqrt{\omega_1.\omega_3}$ se obtiene la ecuación

$$Z_0 = R_0 = \frac{1}{\omega_3\sqrt{C_{01}C_{02}}} \tag{9.17}$$

Si se conocen los polos de atenuación se obtiene la ecuación.

$$tgh\frac{a_0 + jb_0}{2} = \sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}} = \sqrt{\frac{C_{02}}{C_{01}}} \times \sqrt{\frac{(\omega_1^2 - \omega^2)(\omega_3^2 - \omega^2)}{(\omega_2^2 - \omega^2)^2}} = 1 \tag{9.18}$$

También los polos de la atenuación son simétricos $\omega_2 = \sqrt{\omega_{\infty 1}.\omega_{\infty 2}}$. Si se toma en cuenta esta propiedad se obtiene la ecuación (9.19)

$$\sqrt{\frac{C_{01}}{C_{02}}} = m = \sqrt{\frac{(\omega_1^2 - \omega_{\infty 1}^2)(\omega_3^2 - \omega_{\infty 1}^2)}{(\omega_2^2 - \omega_{\infty 1}^2)^2}} = 1 \tag{9.19}$$

Si se conoce la impedancia R_0, las frecuencias de corte f_1 y f_3, y la frecuencia del polo de atenuación $f_{\infty 1}$, se pueden calcular los elementos del filtro C_{01}, C_{02}, C_{11}, L_{11}, C_{12} y L_{12} y con estos valores es posible producir el cristal. En el siguiente ejemplo se ve como se calcula el filtro de cristal paso banda.

Ejemplo 1.

Calcular el filtro de cristal paso banda si se conocen los especificaciones de la plantilla en la figura 9.6

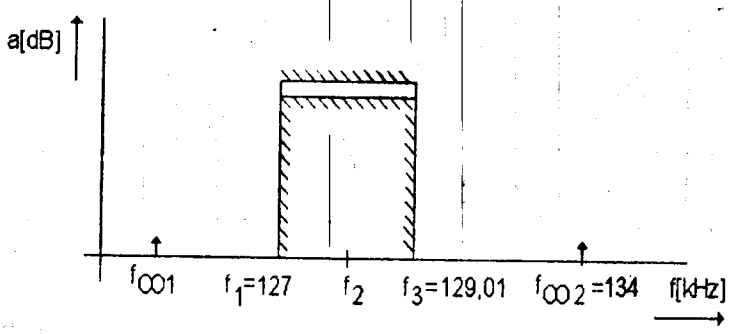


Figura 9.6. Las especificaciones del filtro cristal paso banda.

Primero se calcula la frecuencia f_2 y la frecuencia del polo $f_{\infty 1}$. Si se conocen las frecuencias de los polos de la función de transferencia se puede calcular la constante m que depende a los capacitores C_{01} y C_{02}.

$$f_2 = \sqrt{127.10^3.129,01.10^3} = 128.10^3$$

$$f_{\infty 1} = \frac{(128.10^3)^2}{134.10^3} = 122,27.19^3$$

$$m = \sqrt{\frac{C_{01}}{C_{02}}} = \frac{\sqrt{(127^2 - 122,27^2)(129,01^2 - 122,27^2)}}{128^2 - 122,27^2} = 0,9854$$

$$C_{01} = C_{02}.0,9854^2$$

De la ecuación (9.14) se calcula C_{02}

$$C_{02} = \frac{10^{-3}}{129,01.0,9854.1000.2\pi} = 1,259.10^{-9}$$

$$C_{01} = 1,259.10^{-9}.0,9854^2 = 1,2157.10^{-9}$$

De la ecuación 9.14 se obtiene la ecuación para calcular C_{11}.

$$C_{11} = C_{01}\left(\frac{\omega_2^2}{\omega_1^2} - 1\right) = 1,2157.10^{-9}\left(\frac{128^2}{127^2} - 1\right) = 19,22.10^{-12}$$

$$L_{11} = \frac{1}{\omega_1^2.C_{11}} = \frac{1}{4.\pi^2.127^2.19.22.10^{-12}.10^6} = 8.17.10^{-2}$$

La ecuación para calcular C_{12} se obtiene mediante 9.15.

$$C_{12} = C_{01}\left(\frac{\omega_3^2}{\omega_2^2} - 1\right) = 1,259.10^{-9}\left(\frac{129,01^2}{128^2} - 1\right) = 19,947.10^{-12}$$

$$L_{12} = \frac{1}{\omega_2^2.C_{12}} = \frac{1}{19,947.10^{12}.4.\pi^2.128^2.10^6} = 7,75.10^{-2}$$

Los valores de todos elementos en el circuito de la figura 9.4 entonces son conocidos y de estos valores se puede diseñar el piezoresonador.

Ejemplo 2.

Que tipo de filtro es en la figura 9.7.

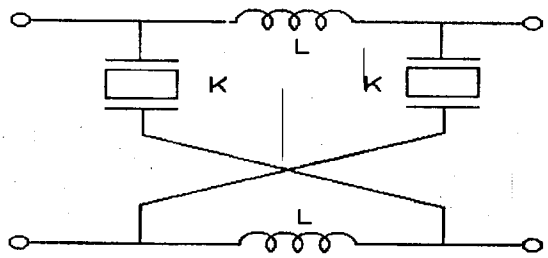


Figura 9.7. El filtro en la forma cruz.

Solución:

Para saber que tipo del filtro es en la figura 9.7 es necesario escribir en una diagrama las reactancias del cristal y de inductancia. La gráfica de las reactancias del cristal y de la inductancia se muestra en la figura 9.8. Las reactancias de la inductancia y del cristal tienen el carácter de oposición hasta la frecuencia del cero del cristal. Entonces en esta banda de frecuencias el filtro no atenua. La reactancia X_L y la reactancia del cristal X_K entre las frecuencias del cero y polo tienen el mismo carácter, eso significa, que en esta banda de frecuencias el circuito de cruz atenua. En la frecuencia f_∞ las reactancias del cristal y la reactancia de la inductancia son iguales $X_L = X_K$. Por eso la atenuación en la frecuencia f_∞ es infinita, eso significa que en la frecuencia f_∞ tenemos el polo de atenuación. El filtro en la figura 9.7 es un supresor de banda. La atenuación del filtro se muestra en la figura 9.8

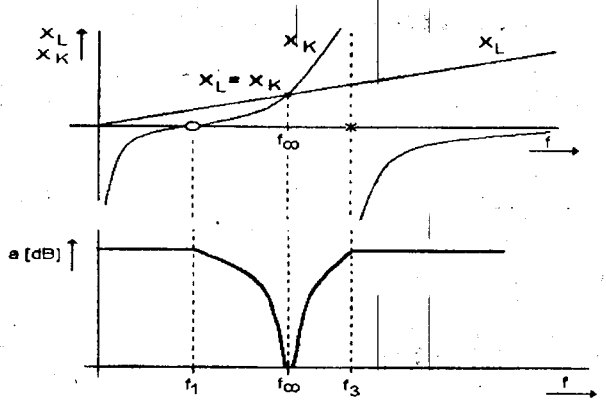


Figura 9.8. Las reactancias del cristal y de la inductancia y la atenuación del filtro.

Capítulo 10

Filtros diseñados mediante acoplamiento

El filtro paso banda que se muestra en la figura 10.1a se puede diseñar tambien con los circuitos que se calculan mediante los coeficientes de acoplamiento. Se conoce el acoplamiento capacitivo figura 10.1b, inductivo figura 10.1c y acoplamiento mezclado figura 10.1d.

Los coeficientes de acoplamiento normalizados se calculan directamente de un circuito normalizado por ejemplo de Butterworth y después los elementos se desnormalizan mediante la ecuación

$$K_{ij} = k_{ij}\frac{\Delta f}{f_0} \tag{10.1}$$

Donde K_{ij} es el coeficiente de acoplamiento de paso banda desnormalizado, k_{ij} es el coeficiente de acoplamiento de pasa bajas normalizado obtenido del circuito pasa bajas normalizado, Δ f es la banda de paso del filtro paso banda y f_0 es la frecuencia central de paso banda $f_0 = \sqrt{f_1 \cdot f_{-1}}$.

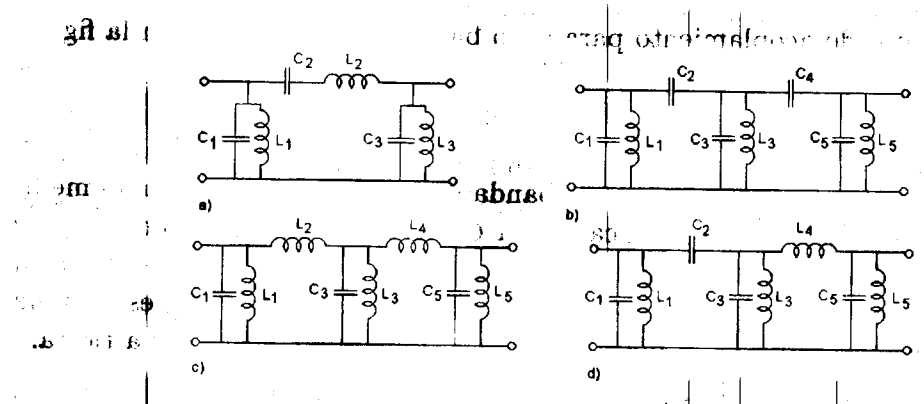


Figura 10.1. Filtro paso banda a.) y la realización con acoplamientos.

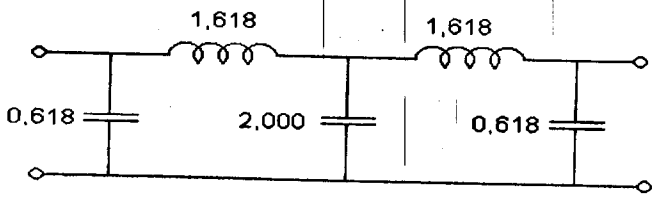


Figura 10.2. Filtro pasa bajas Butterworth de orden 5.

Ejemplo 1.

Calcular los coeficientes de acoplamiento para el filtro de orden 5, aproximación de Butterworth si Δf=3400 Hz y $f_0 = 108$ kHz.

Solución:

El filtro de orden 5 en la forma normalizada se muestra en la figura 10.2. Los valores del circuito fueron obtenidos mediante la tabla 4.1 en la página 61. El coeficiente del acoplamiento se calculan mediante la ecuación (10.2).

$$k_{ij} = \sqrt{\frac{c_i}{l_j}} \qquad 1 \geq k_{ij} \tag{10.2}$$

$$k_{12} = k_{45} = \sqrt{\frac{0,618}{1,618}} = 0,6618 \qquad k_{23} = k_{34} = \sqrt{\frac{1,618}{2,000}} = 0,899$$

Los coeficientes de acoplamiento desnormalizados se obtienen mediante la ecuación (10.1)

$$K_{12} = K_{45} = 0,6618\frac{3,4}{108} = 0,0208 \qquad K_{23} = K_{34} = 0.899\frac{3,4}{108} = 0,0283$$

Ejemplo 2.

Calcular los coeficientes de acoplamiento para paso banda que se muestra en la figura 10.3.

Solución:

Los coeficientes de acoplamiento del filtro paso banda desnormalizado se calculan mediante la ecuación (10.3). En la ecuación el capacitor C_{ij} es el capacitor conectado entre el nodo i y j, el capacitor C_i es la suma de los valores de los capacitores conectados en el nodo i si otros nodos del circuito son conectados a tierra. El capacitor C_j es la suma de todos capacitores conectados en el nodo j, si otros nodos son conectados a tierra.

$$K_{ij} = \frac{C_{ij}}{\sqrt{C_i.C_j}} \tag{10.3}$$

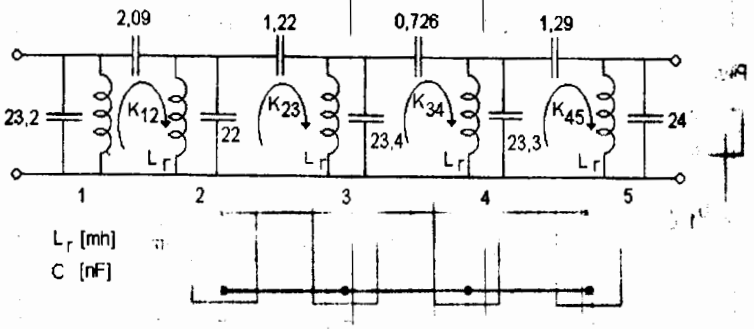


Figura 10.3. Filtro paso banda con acoplamiento capacitivo.

$$K_{12} = \frac{2,09}{\sqrt{(23,2+2,09)(2,09+22+1,22)}} = 0.0826$$

$$K_{23} = \frac{1,22}{\sqrt{(22+2,09+1,22)(23,4+1,22+0,726)}} = 0.04816$$

$$K_{34} = \frac{0,726}{\sqrt{(1,22+23,4+0,726)(0,726+23,3+1,29)}} = 0,0286$$

$$K_{45} = \frac{1,29}{\sqrt{(0,726+23,3+1,29)(1,29+24,4)}} = 0.05058$$

10.1 Filtros electromecánicos

Los filtros electromecánicos alcanzan la calidad hasta de Q=10 000. En comparación con los filtros LC donde se alcanza la calidad del filtro entre 50 hasta 300, los filtros electromecánicos se diseñan en el caso de bandas de paso muy estrechas. Los filtros electromecánicos pueden trabajan en temperaturas muy extremas desde -50 hasta 50 grados centígrados. Los primeros filtros electromecánicos se realizaron en telecomunicaciones como los usados para canales telefónicos desde 60 kHz hasta 108 kHz. Los filtros electromecánicos por su buena calidad se utilizan en los aparatos de medición y algunos aparatos muy finos de audio. El filtro electromecánico se muestra en la figura 10.4.

Los cilindros que tienen el diámetro 4,5 mm son conectados mediante un alambre aproximadamente de diámetro 0,14 hasta 0,5 mm. El diámetro del alambre depende del coeficiente de acoplamiento. Los cilindros resuenan de modo torsional y el alambre de modo longitudinal. El primer y el último cilindro se conecta con un convertidor piezocerámico. El primer convertidor produce vibraciones longitudinales si se conecta con la fuente. El último convertidor piezocerámico convierte los vibraciones longitudinales a la señal eléctrica. Ambos finales del cilindro vibran en oposición y por eso

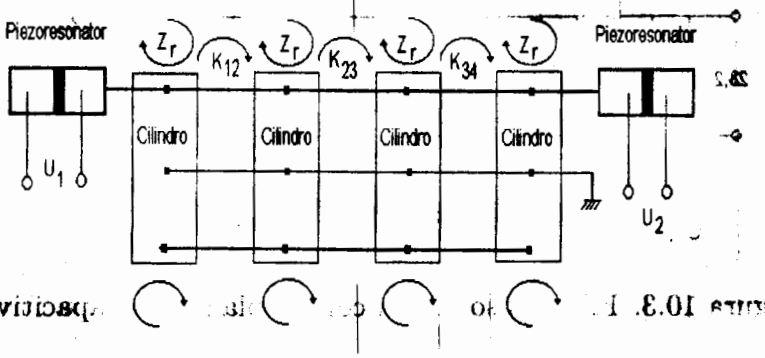


Figura 10.4. Filtro paso banda electromecánico.

en el centro del cilindro no hay vibraciones y se puede por medio de un alambre más grueso conectar a tierra. Más adelante se muestra como se sustituye un cilindro por un circuito LC y el alambre por un circuito de dos puertas. La teoría está basada en la teoría de las líneas eléctricas. Para las líneas eléctricas se pueden escribir las ecuaciones

$$U_1 = U_2 cos(al) \quad + \quad I_2 j Z_0 sen(al)$$

$$I_1 = \frac{U_2}{jZ_0} sen(al) \quad + \quad I_2 cos(al) \tag{10.4}$$

Estas ecuaciones se pueden escribir en la forma matricial

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos(al) & jZ_0 sen(al) \\ \frac{1}{jZ_0} sen(al) & cos(al) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix} \tag{10.5}$$

Para las líneas mecánicas se puede escribir las ecuaciones analógas. En la figura 10.5 se muestran los cilindros que vibran de modo torsional y longitudinal. F_1 es la fuerza que se aplica en el principio del cilindro y v_1 es la velocidad de vibración de los elementos de acero en el principio del cilindro. F_2 es la fuerza con que vibran los elementos en el fin de cilindro y v_2 es la velocidad de vibración en el fin. De forma parecida que para el resonador que vibra de forma torsional, M_1 y M_2 es el módulo de vibración torsional y ϕ_1 y ϕ_2 es la velocidad de ángulo. W_0 es la impedancia mecánica de los resonadores y l es la longitud del cilindro.

$$F_1 = F_2 cos(al) \quad + \quad v_2 . j W_0 sen(al)$$

$$v_1 = \frac{F_2}{jW_0} sen(al) \quad + \quad v_2 cos(al) \tag{10.6}$$

Estas ecuaciones se pueden escribir en la forma matricial

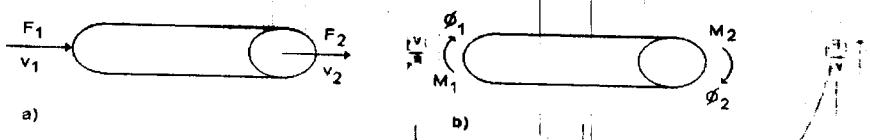


Figura 10.5. Los cilindros de metal y los modos de vibración a)longitudinal b) torsional.

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos(al) & jW_0 sen(al) \\ \frac{1}{jW_0} sen(al) & cos(al) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \tag{10.7}$$

$$M_1 = M_2 cos(al) + \phi_2 . jW_0 sen(al)$$

$$\phi_1 = \frac{M_2}{jW_0} sen(al) + \phi_2 cos(al) \tag{10.8}$$

También las ecuaciones (10.8) se pueden escribir en la forma matricial

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ \phi_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos(al) & jW_0 sen(al) \\ \frac{1}{jW_0} sen(al) & cos(al) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} M_2 \\ \phi_2 \end{bmatrix} \tag{10.9}$$

En la primera analogía $F \rightarrow U$ y $v \rightarrow I$ y en la segunda analogía $F \rightarrow I$ y $v \rightarrow U$. La impedancia en la primera analogía es

$$W_I = \frac{U_1}{I_1} \rightarrow \frac{F_1}{v_1} = jW_0 cotg \frac{2.\pi}{\lambda} l \tag{10.10}$$

En la figura 10.6a se ve la gráfica de la impedancia mecánica . Para $l = \frac{\lambda}{4}$ la impedancia tiene el valor cero y para esta frecuencia y las frecuencias mas cercanas se puede realizar con un circuito LC serie. Para la longitud del cilindro $l = \frac{\lambda}{2}$ la impedancia es infinita, entonces en $l = \frac{\lambda}{2}$ tenemos polo. Este polo para la frecuencia se puede realizar con un circuito LC paralelo.

La impedancia en la segunda analogía es

$$W_{II} = \frac{U_1}{I_1} \rightarrow \frac{v_1}{F_1} = \frac{1}{jW_0} tg \frac{2.\pi}{\lambda} l \tag{10.11}$$

En la figura 10.6b se ve la gráfica de la impedancia mecánica para la segunda analogía. Para $l = \frac{\Lambda}{4}$ tiene el valor ∞ y para esta frecuencia y las frecuencias más cercanas se puede realizar con un circuito LC paralelo. Para la longitud del cilindro $l = \frac{\lambda}{2}$ la impedancia es igual a cero, entonces en $l = \frac{\lambda}{2}$. Este cero de la impedancia se puede realizar con un circuito LC serie.

El resonador del cilindro de la longitud $\frac{\lambda}{4}$ en la segunda analogía se puede sustituir por un circuito LC en la forma paralela como se muestra en la figura 10.7a. En la primera

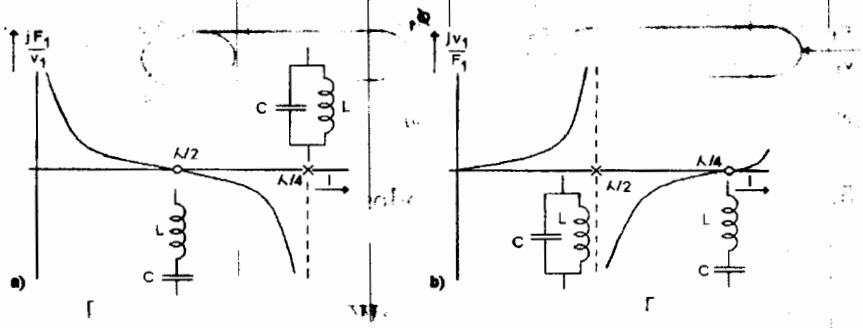


Figura 10.6. Las gráficas de las impedancias del cilindro.

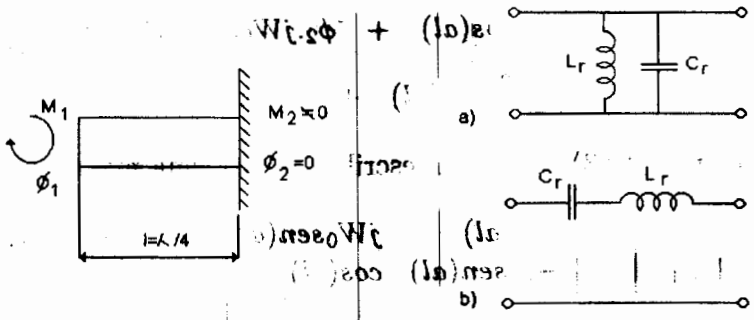


Figura 10.7. El resonador que vibra de modo torsional y su sustitución por LC.

analogía el cilindro de metal de la longitud $\frac{\lambda}{4}$ se puede sustituir por un circuito LC en la forma de serie, como se muestra en la figura 10.7b. Esta sustitución es posible solo para una banda de paso muy estrecha. Por eso estos tipos de filtros no pueden realizarse para una banda de paso muy amplia.

El alambre que contacta los cilindros en la segunda analogía se puede sustituir por un circuito de dos puertas que se muestra en la figura 10.8. El alambre vibra en el modo longitudinal. La inductancia de sustitución se calcula mediante la ecuación (10.12) y la capacitancia mediante la ecuación (10.13). En las ecuaciones l es la longitud del alambre que conecta dos cilindros contiguos, ω_0 es la frecuencia central de paso banda, W_0 es la impedancia característica de un cilindro y v es la velocidad de vibración.

$$L = \frac{W_0}{\omega_0} sen \frac{\omega_0 . l}{v} \tag{10.12}$$

$$C = \frac{1}{W_0 . \omega_0} sen \frac{\omega_0 . l}{2.v} \tag{10.13}$$

Si se elige el cilindro de 4,5 mm de un material PY-42Mo, se puede medir y calcular la impedancia del cilindro que vibra de modo torsional. La impedancia mecánica es aproximadamente

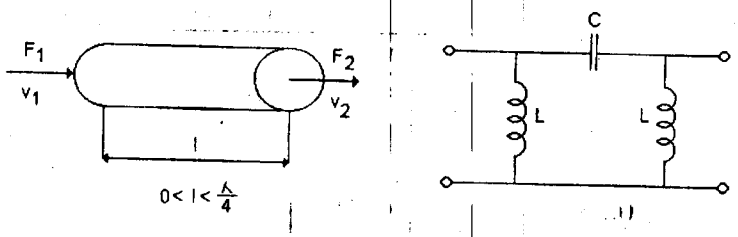


Figura 10.8. El alambre que vibra longitudinalmente y su LC sustitución.

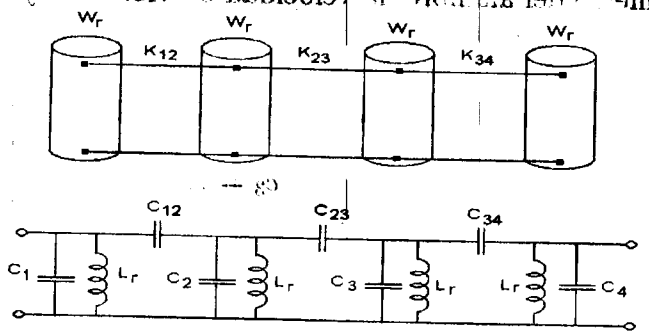


Figura 10.9. El filtro electromecánico con 4 resonadores y su sustitución LC.

$$W^{Tors.} = 184750\ [g/s.]$$

La impedancia mecánica del alambre se calcula mediante la ecuación (10.14), donde K_{ij} es el coeficiente de acoplamiento entre el resonador i y resonador j.

$$W_{ij} = K_{ij}.W^{Tors.} \tag{10.14}$$

El filtro electromecánico con 4 resonadores y su circuito de sustitución LC se muestra en la figura (10.9).

Para construir el filtro se necesita elegir el diámetro del alambre que conecta los cilindros. Para eso es necesario calcular las impedancias de los alambres de varios diámetros. Las impedancias para los alambres de diferentes diámetros se encuentran en la tabla 10.1.

Ejemplo1

Calcular el filtro electromecánico para las especificaciones $f_1 = 104$ kHz $f_{-1} = 108$ kHz. La aproximación es de Butterworth y el filtro paso banda se realiza con 4 resonadores.

Solución:

De las tablas para la aproximación de Butterworth los elementos normalizados son

Diametro [mm]	v[m/s]	W [g/s]
0,14	4791	609
0,18	4768	990
0,20	4723	1255
0,25	4631	1908
0,28	4623	2378
0,5	4696	7777

Tabla 10.1. El diámetro del alambre, la velocidad de vibración y la impedancia.

$c_1 = 0,765$ $l_2 = 1,847$ $c_3 = 1,847$ $l_4 = 0,765$

Los coeficientes normalizados de acoplamiento se calculan mediante la ecuación (10.2).

$$k_{12} = k_{34} = \sqrt{\frac{0,765}{1,847}} = 064357$$

$$k_{23} = \sqrt{\frac{1,847}{1,846}} = 1$$

Los coeficientes desnormalizados de acoplamiento para paso banda con la frecuencia central $f_0 = \sqrt{104.108}.10^3 = 105,982.10^3$ toman la forma

$$K_{12} = K_{34} = 0,64357\frac{4}{105,981.10^3} = 0,024296$$

$$K_{23} = 1.\frac{4}{105.982} = 0,03774$$

Las impedancias del alambre se calculan mediante la ecuación (10.14) y toman la forma

$$W_{12} = W_{34} = 0,024296.184750 = 4488,686\ [g/s]$$

$$W_{23} = 0,03774.184750 = 6972,465\ [g/s]$$

Si se conecta el alambre en ambos lados del fin del cilindro como se muestra en la figura 10.10 es necesario elegir el diámetro del alambre con la impedancia $4488/2 = 2244\ [g/s]$. En la tabla 10.1 la impedancia mecánica 2244 g/s se cumple con del alambre que tiene diámetro 0,28 mm. Todavía falta realizar en la mitad del filtro la impedancia 6972-4488=2484 [q/s]. Si se conecta el alambre en ambos términos del cilindro se necesita realizar adicionalmente la impedancia del alambre 2484/2=1242 [g/s] y eso se realiza con el diámetro del alambre 0,20 mm.
La longitud del cilindro es $l = \frac{l\lambda}{4}$. De la ecuación $v = \lambda.f$ se calcula

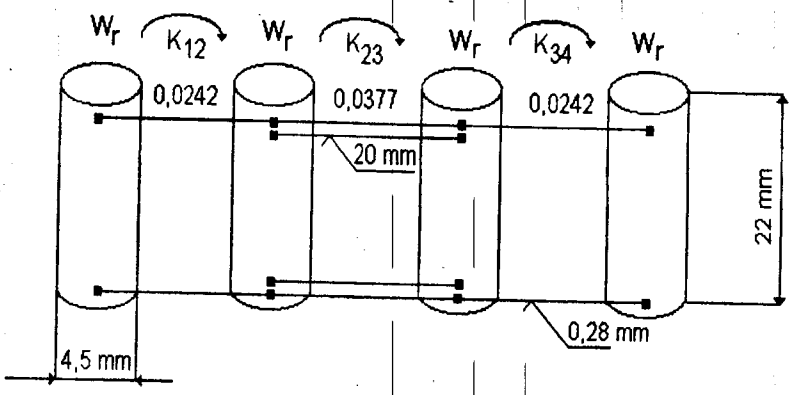


Figura 10.10. El filtro electromecánico con 4 resonadores.

$$2l = \frac{v}{2f} = \frac{4700\ [m/s]}{2.105,981.10^3} = 22,17\ mm$$

La longitud del cilindro es 22,17 mm. Si la longitud del cilindro se disminuye, la frecuencia de resonancia de cilindro se aumenta. Por ejemplo, si se realiza un filtro paso banda con la frecuencia central 500 kHz la longitud de cilindro debe ser 4,7 mm. Es muy complicado realizar el filtro paso banda en estas frecuencias, porque los cilindros son muy pequeños y es difícil armarlos.

$$2l = \frac{v}{2f} = \frac{4700\ [m/s]}{2.500.10^3} = 4,7\ mm$$

Capítulo 11

Filtros con los capacitores conmutados.

Para el filtro en la figura 11.1a podemos escribir la ecuación

$$I^c = C\frac{dU}{dT} = C\frac{U_1 - U_2}{T} \tag{11.1}$$

Para el circuito en la figura 11.1b se obtiene

$$I^r = \frac{U_1 - U_2}{R} \tag{11.2}$$

Si en ambos circuitos las corientes son iguales $I^c = I^r$ podemos escribir

$$C\frac{U_1 - U_2}{T} = \frac{U_1 - U_2}{R}$$

u el resistor se puede sustituir por un capacitor conmutado. El valor del capacitor se calcula mediante la ecuación (11.3). La manera como se calcula el filtro con los

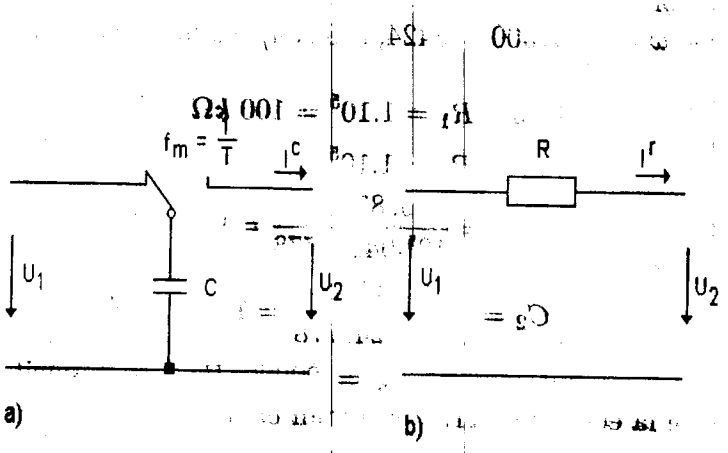


Figura 11.1. El capacitor conmutado y el resistor.

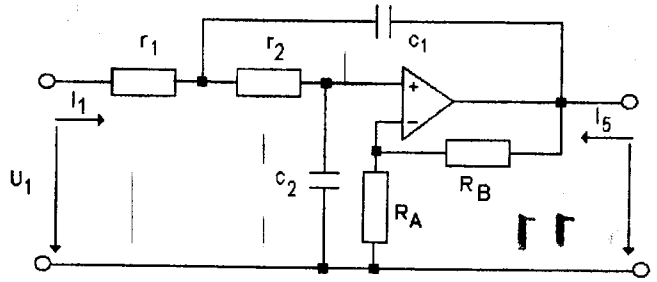


Figura 11.2. El circuito paso bajas con los capacitores conmutados.

capacitores conmutados se muestra en el ejemplo siguiente.

$$C = \frac{1}{f_m.R} \tag{11.3}$$

Ejemplo 1.

Calcular el filtro paso bajas de Butterworth con los capacitores conmutados para las especificaciones

$$K = 2 \qquad f_1 = 1500\ Hz \qquad n = 2 \qquad f_m = 20000\ Hz$$

Solución:

De un catálogo de filtros activos se obtienen los valores normalizados del filtro activo RC que se muestra en la figura 11.2

$$r_1 = r_2 = 1 \qquad c_1 = 0,87403 \qquad c_2 = 1,14412$$

Si se elije el resistor $R_0 = 10^5\ \Omega$, para la desnormalización, entonces se puede calcular para la frecuencia $\omega = 2.\pi.1500 = 9424,778\ rad/sec$ los valores desnormalizados

$$R_1 = 1.10^5 = 100\ k\Omega$$

$$R_2 = 1.10^5 = 100\ k\Omega$$

$$C_1 = \frac{0,87403}{10^5.9424,778} = 927\ pF$$

$$C_2 = \frac{1,14412}{10^5.9424,778} = 1213,9\ pF$$

Si la frecuencia de conmutación es $f_m = 20000\ Hz$, los capacitores conmutados se calculan mediante la ecuación (11.3) y toman el valor

$$C_{con1} = C_{con2} = \frac{1}{10^5.20.10^3} = 500\ pF$$

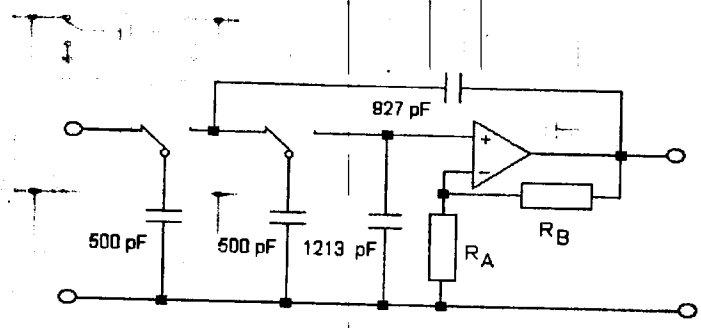


Figura 11.3. El circuito paso bajas con los capacitores conmutados.

El circuito paso bajas con los capacitores conmutados se muestra en la figura 11.3

11.1 Filtro SC de segundo orden.

En el ejemplo anterior el filtro SCF se calculo desde la estructura del filtro RC activo ACF. Otra posibilidad para realizar el filtro con los capacitores conmutados SCF es el de la función de transferencia H(z) de segundo orden (11.4)

$$H(z) = \frac{g + ez^{-1} + dz^{-2}}{1 + az^{-1} + bz^{-2}}. \tag{11.4}$$

Para el circuito de segundo orden de la figura 11.4 mediante la análisis se obtiene la función de transferencia H(z) (11.5).

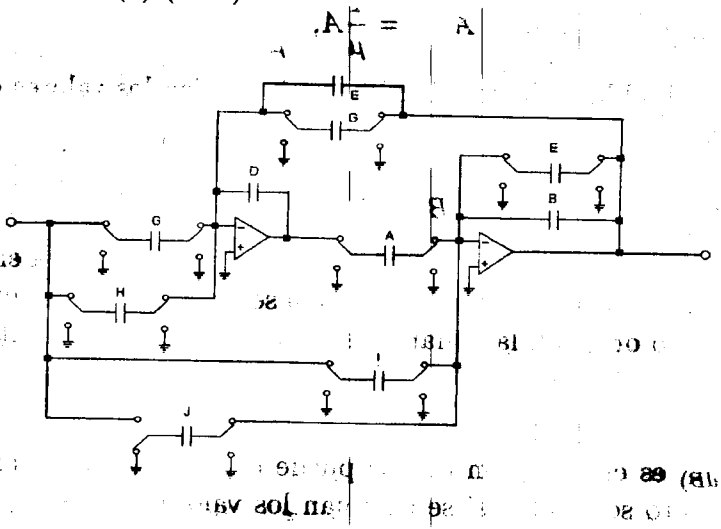


Figura 11.4. El filtro discreto con los capacitores conmutados.

$$H(z) = \frac{DI + (AG - DI - DJ)z^{-1} + (DJ - AH)z^{-2}}{D(F + B) + (AC + AE - DF - 2DB)z^{-1} + (DB - AE)z^{-2}}. \tag{11.5}$$

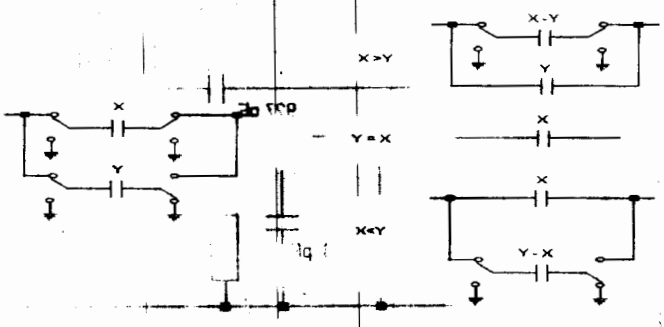


Figura 11.5. Los conmutadores para simplificar el circuito.

Desde el punto de vista práctico es necesario calcular la función de transferencia después del primer amplificador $H_0(z)$.

$$H_0(z) = \frac{CI + EI - GF - GB + (FH + BH + BG - JC - JE - IE)z^{-1} + (EJ - BH)z^{-2}}{D(F + B) + (AC + AE - DF - 2DB)z^{-1} + (DB - AE)z^{-2}} \tag{11.6}$$

Para obtener el circuito estable es necesario que la ganancia de ambos amplificadores en la frecuencia ω_0 sean iguales. Si no es así es necesario cambiar los elementos A y D por una constante que se calcula mediante las ecuaciones

$$\mu = 10^{\frac{H-H_0}{20}}. \tag{11.7}$$

$$A, D = \frac{1}{\mu}A, \quad \frac{1}{\mu}D. \tag{11.8}$$

La estructura principal la podemos simplificar si se elijen los valores del circuito mediante esta manera

$$A = B = D = 1 \quad F = 0.$$

Si se cambian en el circuito 11.4 los conmutadores como se muestra en la figura 11.5, se obtiene la nueva estructura del filtro. Además si se exige que el circuito tenga la misma ganancia del circuito original, la ganancia se puede cambiar mediante el parametro ν

$$\nu = 10^{\frac{\nu_{(dB)}}{20}}, \tag{11.9}$$

La constante $\nu_{(dB)}$ es el valor con que se puede cambiar y controlar la ganancia. La ganancia del circuito se cambia si se cambian los valores de los capacitores mediante los expresiones siguientes

$$(G, H, I, J) \longrightarrow (\nu G, \nu H, \nu I, \nu J)$$

$$(B, C, E, F) \longrightarrow (B/\nu, C/\nu, E/\nu, F/\nu).$$

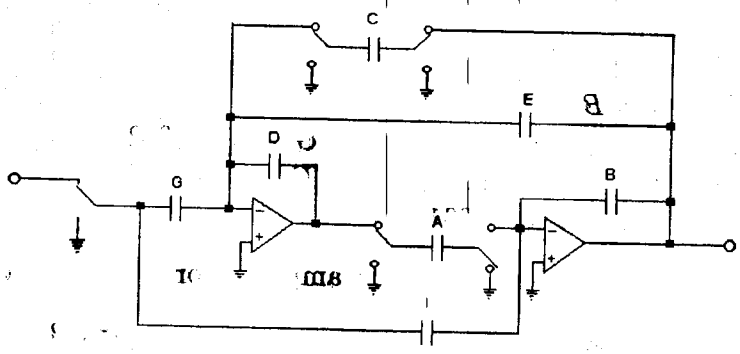


Figura 11.6. El circuito para los valores de capacitores A=B=D=1 y F=0.

Los valores de los elementos obtenidos $A, B, C, D, E, G,$ e I se normalizan en dos etapas siempre a un valor mínimo. Así se obtienen los elementos normalizados que es necesario desnormalizar. Si el filtro se realiza con un amplificador de typo MOS, es necesario calcular el valor mínimo del capacitor que se puede ocupar en el circuito

$$C_{min} = \frac{1}{f_r R_{CMOS}}$$

El valor máximo que puede alcanzar el capacitor en el circuito se calcula mediante la ecuación

$$C_{max} = \frac{1}{5 f_v . R_i}.$$

Los valores de los capacitores en el circuito se calculan mediante las ecuaciones

$$\begin{aligned} A &= B = D = 1 & F &= 0 \\ C &= 1 + a + b & E &= 1 - b \\ G &= 2g + e & H &= g - d \\ I &= J = g. \end{aligned}$$

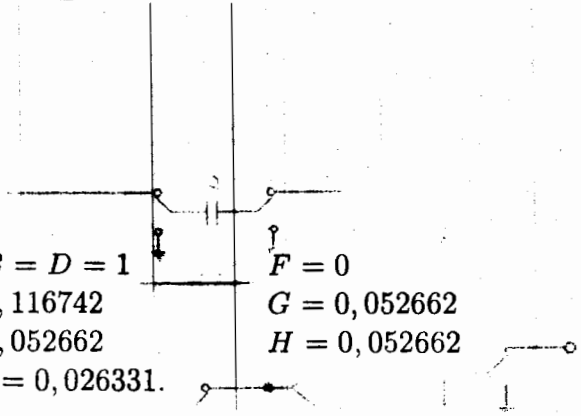
Ejemplo 2.

Calcular el filtro discreto con los capacitores conmutados si se conoce la función de transfe- rencia

$$H(z) = \frac{0,0263312 - 0,0263312 z^{-2}}{1 - 1,830595 z^{-1} + 0,947337 z^{-2}} = \frac{g + e z^{-1} + d z^{-2}}{1 + a z^{-1} + b z^{-2}}.$$

Solución:

Si se sustituyen los valores g, e, a, b, y d en los ecuaciones anteriores se obtiene



$A = B = D = 1$ $\quad F = 0$
$C = 0,116742$ $\quad G = 0,052662$
$E = 0,052662$ $\quad H = 0,052662$
$I = J = 0,026331.$

La función de transferencia después de primer amplificador $H_0(z)$ toma la forma

$$H_0(z) = \frac{-0,048202 + 0,0994272z^{-1} - 0,051275z^{-2}}{1 - 1,830594z^{-1} + 0,947337z^{-2}}.$$

Si no nos interesa la realización física del filtro el calculo ya terminó. Porque los valores de los capacitores A hasta J son conocidos. Si se va a realizar el circuito es necesario cambiar la ganancia del amplificador. Si la frecuencia de corte es f_0=1595 Hz, se calcula la ganancia $H(z)$ y $H_0(z)$ en esta frecuencia.

En la frecuencia $f_0 = 1595\ Hz$ es $|H(z)| = -0,000114$

En la frecuencia $f_0 = 1595\ Hz$ es $|H_0(z)| = -9,44469$.

La diferencia de la ganancia después del primer y segundo amplificador es muy grande. Necesitamos que la ganancia de ambos amplificadores sean iguales. Eso se obtiene mediante las ecuaciones (11.7) y (11.9).

$$\mu = 10^{\frac{-0,000114+9,444693}{20}} = 2,966394.$$

Los nuevos valores de los capacitores A y B son

$$A = \frac{A}{\mu} = 0,337109$$

$$D = \frac{D}{\mu} = 0,337109.$$

Si se calculan las nuevas funciones de transferencias $H(z)$ y $H_0(z)$, se puede ver que la función de transferencia $H(z)$ no se cambia, pero sí cambia $H_0(z)$.

$$H_0(z) = \frac{-0,142985 + 0,295090z^{-1} - 0,152104z^{-2}}{1 - 1,830595z^{-1} + 0,947337z^{-2}}.$$

La ganancia después del primer amplificador es $|H_0(1595)| = -0,00011308$. Ahora se van a normalizar los valores de los capacitores A hasta I en dos etapas.

En la primera etapa se normalizan los elementos $A = 0,337109$, $B = 1$ y $I = 0,026331$. El valor mínimo del capacitor será 1. La constante C_{norm} para normalizar los valores de los capacitores es $C_{norm} = \frac{1}{0,026331} = 37,977728$. Los valores obtenidos son

$$A = 12,802654 \qquad B = 37,977728 \qquad I = 1.$$

En la segunda etapa se normalizan los valores de los capacitores C, E, H, D, G, y F.

$$C = 2,216810 \qquad E = 1 \qquad H = 1$$
$$D = 6,4011327 \qquad G = 1 \qquad F = 0$$

Es necesario desnormalizar los valores de los capacitores. Necesitamos tomar en cuenta el valor del capacitor máximo que no se puede sobrepasar. Si se utilizan los amplificadores de tipo FET el resistor de la entrada es $R_{VST} = 2000000\ \Omega$. Si la frecuencia de conmutación es $f_v = 28800\ Hz$, entonces el valor mínimo del capacitor en el circuito en la figura 11.6 puede ser

$$C_{min} > \frac{1}{f_v R_{vst}} = \frac{1}{2.10^6.2,8810^4} = 17,361.10^{-12}.$$

La impedancia del conmutador si el conmutador está cerrado será 500 Ω. Entonces el valor máximo del capacitor puede ser

$$C_{max} = \frac{1}{5.2,88.10^4.500} = 13,88810^{-9}.$$

Si se elije el valor de capacitor mínimo 25 pF, el valor de los capacitores E, G, I es 25 pF y los demás se calculan con la misma relación.

$$A = 320,066\ pF \qquad B = 949,443\ pF$$
$$C = 55,420\ pF \qquad D = 160,0283\ pF.$$

El filtro completo se muestra en la figura 11.6.

11.2 Análisis los circuitos SCF.

TIEMPO CONTINUO

La carga $q(t)$ almacenada en el tiempo t se puede expresar mediante la corriente i(t) y el voltaje u(t) por la ecuación

$$q(t) = \int_o^t i(t)\ dt = Cu(t) - Cu(0) \tag{11.10}$$

donde u(0) es el voltaje en el capacitor C en el tiempo t=0. El análisis se puede generalizar a un circuito con multiple nodos que se muestra en la figura 11.7b
Para cada nodo del circuito en la figura 11.7b se puede escribir una serie de ecuaciones nodales, que se pueden expresar en la forma matricial

$$[q(t)] = \left[\int_o^t i(t)\ dt\right] = [C][u(t)] - [C][u(0)] \tag{11.11}$$

Si se describe el circuito con puros capacitores en los términos de carga y voltajes, la matriz $[C]$ contiene solo elementos reales invarientes en el tiempo.

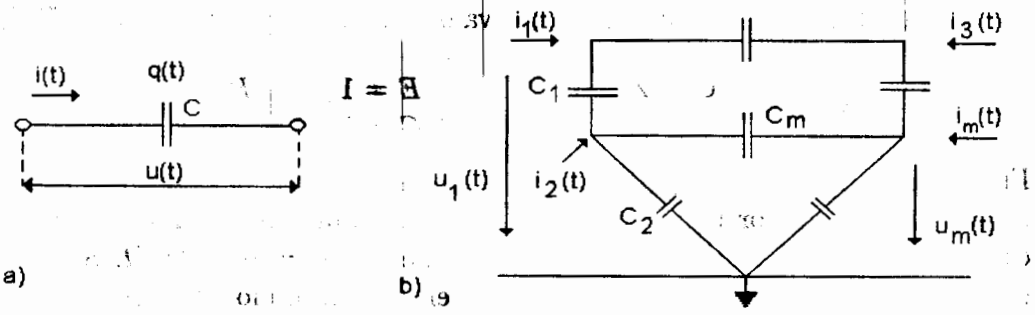


Figura 11.7. El capacitor y el circuito con multiple nodos.

TIEMPO DISCRETO

En este caso se toman en cuenta los capacitores que son cargados por cierto tiempo $n\tau$, $i(t) = i(n\tau)$. La carga se calcula mediante la ecuación

$$q(t) = \int_{-\infty}^{\infty} i(t)\delta(t - n\tau)\, dt = i(n\tau).\tau_0 \qquad \tau_0 = 1\ [s] \tag{11.12}$$

Las ecuaciones nodales de carga en el caso del tiempo discreto toman la forma

$$[q(n)] = [\tau_0.i(n)] = [C].[u(n)] - [C].[u(n-1)] \tag{11.13}$$

Esta última ecuación se puede escribir en la forma siguiente

$$\mathbf{i(n)} = \left[\frac{C}{\tau_0}\right].\mathbf{u(n)} - \left[\frac{C}{\tau_0}\right]\mathbf{u(n-1)} \tag{11.14}$$

donde $\mathbf{i(n)}$ y $\mathbf{u(n)}$ son los vectores. La ecuación matricial (11.14) coresponde a la regla de Kirchhoff para los corientes. La ecución (11.14) forma la base para el análisis de los circuitos con los capacitores conmutados. La matriz $[C/\tau_0]$ contiene solo los valores reales y los elementos que no dependen de la frecuencia. Todos los capacitores son normalizados a $\tau_0 = 1\ [s]$ y tienen la misma dimensión.

Ejemplo 3

Ahora se continúa con un ejemplo ilustrativo de cómo construir la ecuación matricial para el circuito que se muestra en la figura 11.8a.

La ecuación matricial para el circuito de dos puertos con capacitores se compone de dos matrices. En la primera matriz la admitencia y_{11} es la suma de todos capacitores conectados directamente a nodo 1. La admitancia y_{12} es la suma de los capacitores conectados entre los nodos 1 y 2 directamente con el signo negativo. En la segunda matriz se crean los elementos con la manera igual solo el vector $\mathbf{u_i(n-1)}$ representa la capacidad del capacitor sostener el carga.

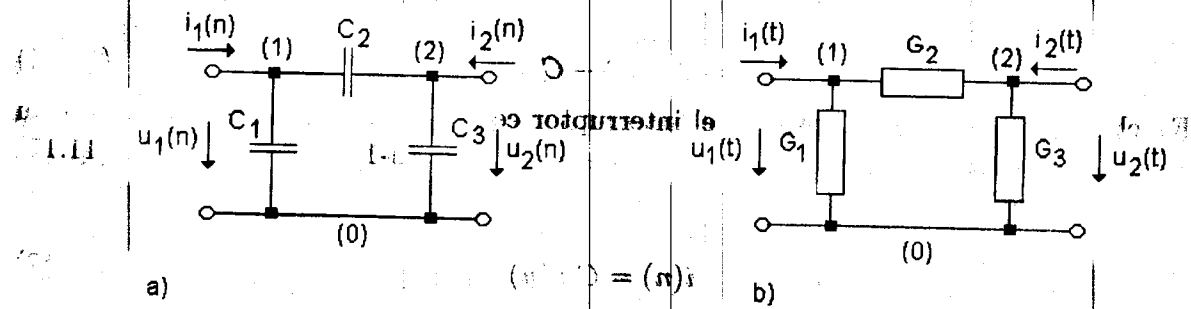


Figura 11.8. El circuito de dos puertos: a) con capacitores, b) con resistores.

$$\begin{bmatrix} i_1(n) \\ i_2(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (C_1+C_3) & -C_3 \\ -C_3 & (C_2+C_3) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1(n) \\ u_2(n) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (C_1+C_3) & -C_3 \\ -C_3 & (C_2+C_3) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1(n-1) \\ u_2(n-1) \end{bmatrix} \tag{11.15}$$

La ecuación matricial para el circuito que se compone solo de los resistores es muy parecida. Solo los parámetros de la matriz son conductancias y falta la segunda matriz. La diferencia entre estos dos circuitos es que el circuito con los capacitores tiene capacidad sostener el carga, que se representa mediante el vector $\mathbf{u_i(n-1)}$ en las ecuaciones (11.14) y (11.15).

$$\begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (G_1+G_3) & -G_3 \\ -G_3 & (G_2+G_3) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \tag{11.16}$$

En el siguiente ejemplo se van a incluir al circuito los interruptores. Se conocen básicamente dos tipos de interruptores:

1. El interruptor por encima del capacitor:

El interruptor colocado por encima del capacitor se muestra en la figura 11.9. El interruptor está cerado en un ciclo τ secundos y despues abierto en el mismo ciclo. Si se abre en el tiempo $n\tau$ se obtiene la ecuación de carga (11.17).

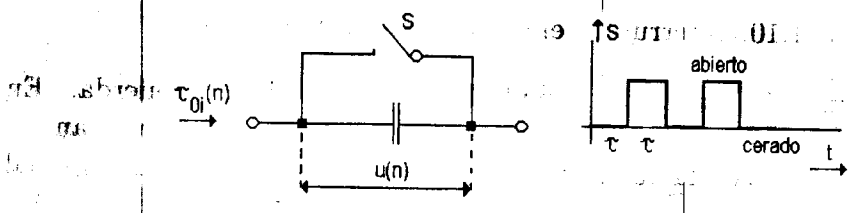


Figura 11.9. Interruptor por encima del capacitor.

$$i(n) = C.u(n) - C.u(n-1) \tag{11.17}$$

En el tiempo $(n-1)\tau$ cuanto fue el interruptor cerado, el capacitor se descargo y su capacidad de sostener la carga fue cancelada, entonces u(n-1)=0 y la ecuación (11.17) se modifica en

$$i(n) = C.u(n) \tag{11.18}$$

En comparación con la ecuación (11.16) se puede ver que, el capacitor con el interruptor encima se trata como un resistor.

$$R_{equi} = \frac{1\ [S]}{C\ [F]} \tag{11.19}$$

2. Interruptor entre los capacitores:

Si el interruptor se conecta entre los capacitores, la topología del circuito se cambia cada τ segundos, y la carga se intercambia entre los capacitores. En el circuito 11.10a son tres capacitores y un conmutador.

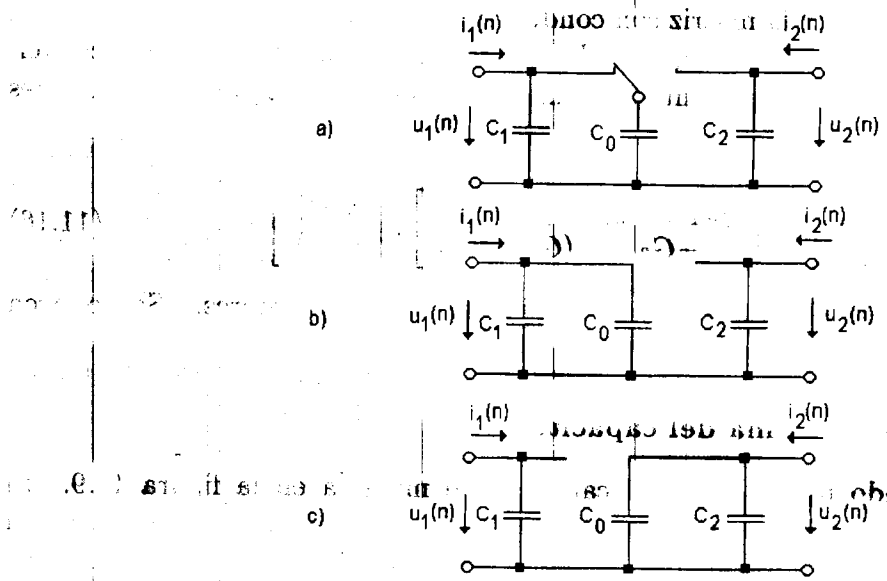


Figura 11.10. Interruptor entre dos capacitores.

Se asume, que en el tiempo impar n, el conmutador está en el lado izquierda. En este caso se obtiene el circuito que se muestra en la figura 11.10b. Si se aplican las ecuaciones de la carga a circuito en 11.10b se obtiene para n impar la ecuación matricial

$$\begin{bmatrix} i_1(n) \\ i_2(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (C_1+C_0) & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1(n) \\ u_2(n) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C_1 & C_0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1(n-1) \\ u_2(n-1) \end{bmatrix} \tag{11.20}$$

Con la manera parecida para n par se obtiene el circuito en la figura 11.10c y las ecuaciones matriciales

$$\begin{bmatrix} i_1(n) \\ i_2(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & (C_2 + C_0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1(n) \\ u_2(n) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ C_0 & C_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1(n-1) \\ u_2(n-1) \end{bmatrix} \tag{11.21}$$

Nuestro objetivo es escribir las ecuaciones matriciales (11.20) y (11.21) en una ecuación matricial general, que describe el circuito para ambos ciclos par e impar. Eso se logra mediante los interruptores dependiente al tiempo:

$$A(n)^P = \frac{1+(-1)^n}{2} = \begin{cases} 1 & \text{para n par} \\ 0 & \text{para n impar} \end{cases} \tag{11.22}$$

$$A(n)^I = \frac{1-(-1)^n}{2} = \begin{cases} 0 & \text{para n par} \\ 1 & \text{para n impar} \end{cases} \tag{11.23}$$

Con estos conmutadores dependientes del tiempo las ecuaciones (11.20) y (11.21) se pueden escribir en una sola ecuación matricial

$$\begin{bmatrix} i_1(n) \\ i_2(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 + A^I(n)C_0 & 0 \\ 0 & C_2 + A^P(n)C_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1(n) \\ u_2(n) \end{bmatrix} - \\ - \begin{bmatrix} C_1 & A^I(n)C_0 \\ A^P(n)C_0 & C_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1(n-1) \\ u_2(n-1) \end{bmatrix} \tag{11.24}$$

La ecuación matricial ahora dependiente del tiempo (11.24) describe el circuito en la figura 11.10a. La variabilidad en el tiempo está expresada mediante los conmutadores dependiente del tiempo. Para el análisis en el dominio de frecuencias necesitamos aplicar a la ecuación matricial la transformada z. En la tabla 11.1 se muestran algunos transformaciones de las secuencias. Aplicando los reglos 8-10 de la tabla 11.1 a la ecuación matricial (11.24) se obtiene

$$I_1(z) = C_1 U_1(z)(1-z^{-1}) + C_0 \frac{U_1(z) - U_1(-z)}{2} - C_0 \frac{U_2(z) + U_2(-z)}{2} z^{-1} \tag{11.25}$$

$$I_2(z) = C_2 U_2(z)(1-z^{-1}) + C_0 \frac{U_2(z) + U_2(-z)}{2} - C_0 \frac{U_1(z) - U_1(-z)}{2} z^{-1} \tag{11.26}$$

El problema es que, en las ecuaciones (11.25) y (11.26), aparecen los términos $U_i(z) \pm U_i(-z)$. Estos términos se pueden expresar mediante las ecuaciónes:

$$\frac{U_i(z) + U_i(-z)}{2} = u_0 + u_2 z^{-2} + u_4 z^{-4} + \ldots = U_i^P(z) \tag{11.27}$$

1	f(n)	$F(z) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i(n) z^{-i}$
2	$a^n f(n)$	$F(\frac{z}{a})$
3	$(-1)^n f(n)$	F(-z)
4	$(-1)^n f(n-1)$	$-z^{-1}F(-z)$
5	$(-1)^n f(n-k)$	$(-1)^k z^{-k} F(-z)$
6	$A^P(n) = \frac{1+(-1)^n}{2}$	$\frac{1}{1-z^{-2}}$
7	$A^I(n) = \frac{1-(-1)^n}{2}$	$\frac{z^{-1}}{1-z^{-2}}$
8	$A^P(n).f(n)$	$\frac{1}{1-z^{-2}} * F(z) = \frac{F(z)+F(-z)}{2}$
9	$A^I(n).f(n)$	$\frac{z^{-1}}{1-z^{-2}} * F(z) = \frac{F(z)-F(-z)}{2}$
10	$A^P(n).f(n-1)$	$\frac{F(z)-F(-z)}{2} z^{-1}$
11	$A^I(n).f(n-1)$	$\frac{F(z)+F(-z)}{2} z^{-1}$

Tabla 11.1. Transformada z de algunas secuencias.

$$\frac{U_i(z) - U_i(-z)}{2} = u_1 z^{-1} + u_3 z^{-3} + u_5 z^{-5} + ... = U_i^I(z) \tag{11.28}$$

Por medio de los areglos 1 hasta 6 y 9 de la tabla 11.2 las ecuaciones (11.25) y (11.26) se transforman en la forma

$$I_1^P + I_1^I = C_1(U_1^P + U_1^I)(1 - z^{-1}) + C_0 U_1^I - C_0 U_2^P z^{-1} \tag{11.29}$$

$$I_2^P + I_2^I = C_2(U_2^P + U_2^I)(1 - z^{-1}) + C_0 U_2^P - C_0 U_1^I z^{-1} \tag{11.30}$$

Si se separan las partes pares e impares en las ecuaciones (11.29) y(11.30) se puede escribir la ecuación matricial (11.31), que tiene cuatro renglones y cuatro columnas.

$$\begin{bmatrix} I_1^P \\ I_1^I \\ I_2^P \\ I_2^I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & -C_1 z^{-1} & 0 & 0 \\ -C_1 z^{-1} & C_1 + C_0 & -C_0 z^{-1} & 0 \\ 0 & -C_0 z^{-1} & C_2 + C_0 & -C_2 z^{-1} \\ 0 & 0 & -C_2 z^{-1} & C_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1^P \\ U_1^I \\ U_2^P \\ U_2^I \end{bmatrix} \tag{11.31}$$

1	$A^P(n)f(n)$	$\frac{F(z)+F(-z)}{2} = F^P(z)$
2	$A^I(n)f(n)$	$\frac{F(z)-F(-z)}{2} = F^I(z)$
3	$A^P(n-1)f(n-1)$	$z^{-1}F^P(z)$
4	$A^I(n-1)f(n-1)$	$z^{-1}F^I(z)$
5	$A^P(n)f(n-1) = A^I(n-1)f(n-1)$	$z^{-1}F^I(z)$
6	$A^I(n)f(n-1) = A^P(n-1)f(n-1)$	$z^{-1}F^P(z)$
7	$A^I(n) + A^P(n) = 1$	$A^P(z) + A^I(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}$
8	$A^P(n).f(n) + A^I(n).f(n) = f^P(n) + f^I(n) = f(n)$	
9	$f^P(n) + f^I(n) = f(n)$	$F^P(z) + F^I(z) = F(z)$

Tabla 11.2. Algunos relaciones usadas en el análisis de circuitos con C conmutados.

La parte par e impar de los productos fueron separados de la manera siguiente

$$Par(U_i^P + U_i^I)(1 - z^{-1}) = U_i^P - z^{-1}U_i^I \tag{11.32}$$

$$Impar(U_i^P + U_i^I)(1 - z^{-1}) = U_i^I - z^{-1}U_i^P \tag{11.33}$$

La ecuación matricial se puede interpretar como las ecuaciones de corriente de un circuito de cuatro puertas que se muestra en la figura 11.11. Eso significa que se puede escribir cuatro funciones de transferencia:

$$\frac{U_1^P}{U_2^P} \qquad \frac{U_1^P}{U_2^I} \qquad \frac{U_1^I}{U_2^P} \qquad \frac{U_1^I}{U_2^I}$$

De la matriz **Y** (11.31) podemos ver, que la matriz es simétrica, lo que significa que el circuito es recíproco-pasivo. De la matriz en la figura 11.11 se puede escribir la matriz general

$$\begin{bmatrix} I_1^P \\ I_1^I \\ I_2^P \\ I_2^I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [Y_{11}] & [Y_{12}] \\ [Y_{21}] & [Y_{22}] \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} U_1^P \\ U_1^I \\ U_2^P \\ U_2^I \end{bmatrix} \tag{11.34}$$

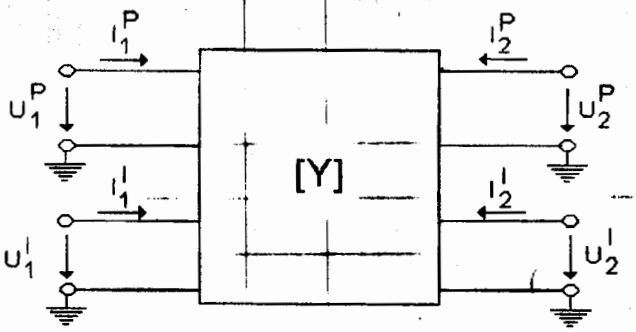


Figura 11.11. Circuito RC con cuatro puertas.

11.3 Análisis general de los circuitos RC conmutados.

El método de analizar el circuito con los capacitores conmutados se puede generalizar para el circuito de multipuertas. En la figura 11.12a para c=0 el circuito se modifica a un circuito que contiene solo los conmutadores figura 11.12b. Cada conmutador es necesario marcarlo con una letra para que se sepa en que periodo está cerado y en que periodo está abierto. Si el conmutador en periodo par está cerado lo marcamos S^P y si está abirto en el mismo periodo lo marcamos con la letra S^I, como se ve en la figura 11.12a y 11.12b. Para todos los conmutadores abiertos se obtiene un circuito que contiene sólo los capacitores figura 11.12c. El circuito que contiene solo los capacitores está definido por la ecuación

$$\mathbf{i}(n) = [C]\mathbf{u}(n) - [C]\mathbf{u}(n-1) \tag{11.35}$$

Las relaciones nodales del voltaje de un circuito con capacitores conmutados se expresan de forma separada para el tiempo par e impar. Si se elige el voltaje U_1 de referencia se pueden escribir de la figura 11.12b, para el tiempo, par las ecuaciones

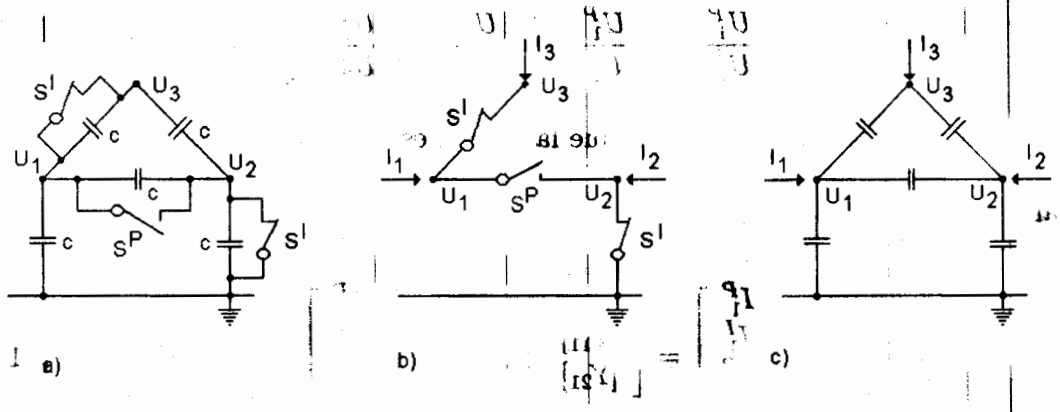


Figura 11.12. Circuito RC con los conmutadores y su modificación.

$$u_1 = u_1 \qquad u_2 = 0 \qquad u_3 = u_1$$

Estas ecuaciones se pueden escribir en la forma matricial

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \left[S^I\right] \times \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \tag{11.36}$$

Parecido para el tiempo impar se obtiene

$$u_1 = u_1 \qquad u_2 = u_1 \qquad u_3 = u_3$$

Estas ecuaciones se pueden escribir también en la forma matricial

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \left[S^P\right] \times \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \tag{11.37}$$

Si se utilizan las funciones de conmutación 11.22 y 11.23 se obtiene la relación de voltajes para n par y n impar

$$\mathbf{u}(n) = \left\{A^I(n).[S^I] + A^P(n)[S^P]\right\} \mathbf{u}(n) \tag{11.38}$$

Esta relación es válida también para el instante del tiempo n-1.

$$\mathbf{u}(n-1) = \left\{A^I(n-1).[S^I] + A^P(n-1)[S^P]\right\} \mathbf{u}(n-1) \tag{11.39}$$

Los elementos de las matrices $[S^I]$ y $[S^P]$ son sólo unos o ceros. Las matrices (11.38) y (11.39) se pueden sustituir en la ecuación (11.35) y expresar la relación de voltajes nodales en los instantes de tiempo par e impar.

$$\mathbf{i}(n) = [C] \left\{A^I(n).[S^I] + A^P(n).[S^P]\right\} \mathbf{u}(n) - [C] \left\{A^I(n-1).[S^I] + A^P(n-1).[S^P]\right\} \mathbf{u}(n-1) \tag{11.40}$$

La ventaja de este procedimiento es que la matriz C y las matrizes S^I y S^P se pueden calcular directamente de los circuitos en la figura 11.12 independientemente. Mediante las ecuaciones 1-4 en la tabla 11.2 se puede obtener la transformada z de $\mathbf{i}(n)$. La transformada z de la ecuación (11.40) toma la forma

$$\mathbf{I}(z) = [C] \left\{[S^I]\mathbf{U}(z)^I + [S^P]\mathbf{U}(Z)^P\right\} - [C] \left\{z^{-1}[S^I]\mathbf{U}(z)^I + z^{-1}[S^P]\mathbf{U}(z)^P\right\} \tag{11.41}$$

Los términos $\mathbf{I}(z)$, $\mathbf{U}(z)^I$ y $\mathbf{U}(z)^P$ son los vectores que para m nodos del circuito SC toman la forma

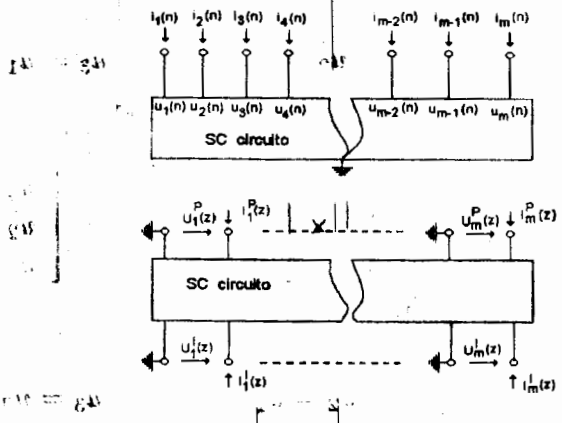


Figura 11.13. Circuito SC de multipuertas.

$$\mathbf{I}(z) = \begin{bmatrix} I_1(z) \\ I_2(z) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ I_m(z) \end{bmatrix} \qquad \mathbf{U^P}(z) = \begin{bmatrix} U_1^P(z) \\ U_2^P(z) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ U_m^P(z) \end{bmatrix} \qquad \mathbf{U^I}(z) = \begin{bmatrix} U_1^I(z) \\ U_2^I(z) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ U_m^I(z) \end{bmatrix} \tag{11.42}$$

El vector de corriente se puede también dividir en partes par e impar

$$\mathbf{I}(z) = \mathbf{I^I}(z) + \mathbf{I^P}(z) \tag{11.43}$$

La ecuación (11.41) se puede escribir en la forma matricial

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I^P}(z) \\ \mathbf{I^I}(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [C] & [0] \\ [0] & [C] \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} [S^P] & -z^{-1}[S^I] \\ -z^{-1}[S^P] & [S^I] \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mathbf{U^P}(z) \\ \mathbf{U^I}(z) \end{bmatrix} \tag{11.44}$$

La ecuación (11.44) es la ecuación general de carga nodal para el circuito SC en el dominio de z y corresponde a un circuito con m nodos y con un nodo conectado a tierra. La dimensión de la matriz es 2m × 2m. El circuito con 2m puertas se muestra en la figura 11.13.

Si dos nodos son conectados con un conmutador cerrado entonces este conmutador nos reduce dos nodos a un nodo. Eso significa que antes de cerrar un conmutador dos corientes que fueron indepediente después de cerrarlo pasan a un nodo combinado. Eso se ve en la figura 11.12. Por ejemplo en el circuito en la figura 11.12 el coriente combinada $\hat{i}$ se puede expresar como suma de los corientes i_1 y i_3.

Para n impar las ecuaciones obtenidas del circuito 11.12

$$\hat{i}_1 = i_1 + i_3 \qquad \hat{i}_2 = i_2 \qquad \hat{i}_3 = 0$$

se pueden expresar en forma matricial

$$\begin{bmatrix} \hat{i}_1 \\ \hat{i}_2 \\ \hat{i}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \left[I^I\right] \times \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} \tag{11.45}$$

Para n par las ecuaciones obtenidas del circuito 11.12

$$\hat{i}_1 = i_1 + i_2 \qquad \hat{i}_2 = 0 \qquad \hat{i}_3 = i_3$$

se pueden expresar en forma matricial

$$\begin{bmatrix} \hat{i}_1 \\ \hat{i}_2 \\ \hat{i}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \left[I^P\right] \times \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} \tag{11.46}$$

Las matrices $[I^I]$ y $[I^P]$ relacionan corrientes diferentes en los nodos antes y despues de conmutador cerrado. Las ecuaciones que relacionan los corrientes diferentes es necesario transformar en el dominio de z.

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{I}}^{\mathbf{P}}(z) \\ \hat{\mathbf{I}}^{\mathbf{I}}(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left[I^P\right] & [0] \\ [0] & \left[I^I\right] \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mathbf{I}^{\mathbf{P}}(z) \\ \mathbf{I}^{\mathbf{I}}(z) \end{bmatrix} \tag{11.47}$$

Sustituyendo la ecuación (11.47) en la ecuación (11.44) se obtiene la ecuación final que se utiliza para el análisis general de los circuitos con capacitores conmutados.

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{I}}^{\mathbf{P}}(z) \\ \hat{\mathbf{I}}^{\mathbf{I}}(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left[I^P\right] & [0] \\ [0] & \left[I^I\right] \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} [C] & [0] \\ [0] & [C] \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \left[S^P\right] & -z^{-1}\left[S^I\right] \\ -z^{-1}\left[S^P\right] & \left[S^I\right] \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mathbf{U}^{\mathbf{P}}(z) \\ \mathbf{U}^{\mathbf{I}}(z) \end{bmatrix} \tag{11.48}$$

En el ejemplo siguiente se muestra el cálculo de la matriz de admitancia mediante el método general utilizando la ecuación (11.48). Se calcula la matriz de admitancia del circuito en la figura 11.10. El circuito en la figura 11.10 se va a modificar en el circuito en la figura 11.14a. La matriz de capacitores obtenida del circuito 11.14c toma la forma

$$[C] = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_0 \end{bmatrix} \tag{11.49}$$

y del circuito que contiene sólo los conmutadores (figura 11.14b) se obtiene para:

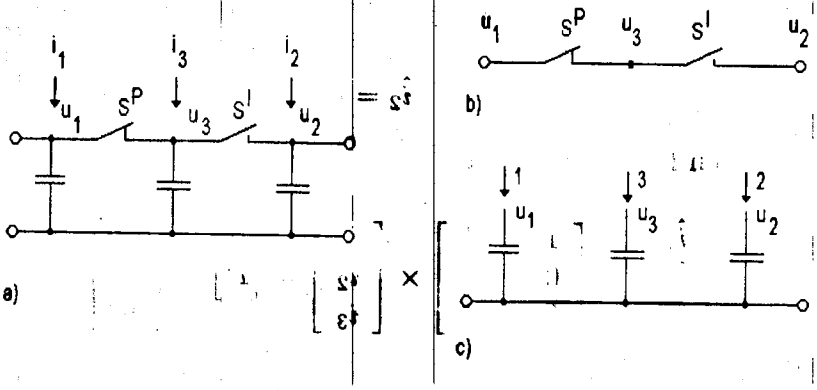


Figura 11.14. Circuito SC modificado de la figura 10.1a.

n impar

$$u_1 = u_1 \qquad u_2 = u_2 \qquad u_3 = u_1$$

$$\left[S^I\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{11.50}$$

n par

$$u_1 = u_1 \qquad u_2 = u_2 \qquad u_3 = u_2$$

$$\left[S^P\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{11.51}$$

Si se sustituyen las ecuaciones (11.49), (11.50) y (11.51) en la ecuación general (11.48) se obtiene

$$\begin{bmatrix} I_1^p \\ I_2^P \\ I_3^P \\ I_1^I \\ I_2^I \\ I_3^I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} C_1 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} & z^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ z^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} U_1^P \\ U_2^P \\ U_3^P \\ U_1^I \\ U_2^I \\ U_3^I \end{bmatrix} \tag{11.52}$$

Si las matrices se multiplican se obtiene de la ecuación (11.52) la ecuación (11.53)

$$\begin{bmatrix} I_1^P \\ I_2^P \\ I_3^P \\ I_1^I \\ I_2^I \\ I_3^I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & 0 & -C_1z^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & 0 & 0 & -C_2z^{-1} & 0 \\ 0 & C_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -C_1z^{-1} & 0 & 0 & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & -C_2z^{-1} & 0 & 0 & C_2 & 0 \\ 0 & -C_0z^{-1} & 0 & C_0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} U_1^P \\ U_2^P \\ U_3^P \\ U_1^I \\ U_2^I \\ U_3^I \end{bmatrix} \tag{11.53}$$

La relación de las corrientes para los conmutadores cerados y abiertos, se puede escribir para n par e impar en la siguiente forma:

$n = impar$	$n = par$
$\hat{i}_1 = i_1 + i_3$	$\hat{i}_1 = i_1$
$\hat{i}_2 = i_2$	$\hat{i}_2 = i_2 + i_3$
$\hat{i}_3 = 0$	$\hat{i}_3 = 0$

Es necesario transformar la relación mediante la transformada z en el dominio de zeta y escribirla en la forma matricial como se muestra en la ecuación (11.54).

$$\begin{bmatrix} \hat{I}_1^P \\ \hat{I}_2^P \\ \hat{I}_3^P \\ \hat{I}_1^I \\ \hat{I}_2^I \\ \hat{I}_3^I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_1^P \\ I_2^P \\ I_3^P \\ I_1^I \\ I_2^I \\ I_3^I \end{bmatrix} \tag{11.54}$$

Si se sustituye la ecuación (11.53) en la ecuación (11.54) se obtiene la matriz

$$\begin{bmatrix} \hat{I}_1^P \\ \hat{I}_2^P \\ \hat{I}_3^P \\ \hat{I}_1^I \\ \hat{I}_2^I \\ \hat{I}_3^I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 & -c_1z^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & c_0+c_2 & 0 & -c_0z^{-1} & -c_2z^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_1z^{-1} & -c_0z^{-1} & 0 & c_1+c_0 & 0 & 0 \\ 0 & -c_2z^{-1} & 0 & 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} U_1^P \\ U_2^P \\ U_3^P \\ U_1^I \\ U_2^I \\ U_3^I \end{bmatrix} \tag{11.55}$$

En la ecuación matricial el tercer renglón y tercera columna son sólo ceros. Lo mismo pasa con los elementos de la última columna y renglón, son todos igual a cero. Los renglones y columnas con los elementos igual a cero se pueden cancelar y se obtiene la ecuación (11.56)

$$\begin{bmatrix} \hat{I}_1^P \\ \hat{I}_2^P \\ \hat{I}_1^I \\ \hat{I}_2^I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & -c_1 z^{-1} & 0 \\ 0 & c_0 + c_2 & -c_0 z^{-1} & -c_2 z^{-1} \\ -c_1 z^{-1} & -c_0 z^{-1} & c_1 + c_0 & 0 \\ 0 & -c_2 z^{-1} & 0 & c_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} U_1^P \\ U_2^P \\ U_1^I \\ U_2^I \end{bmatrix} \tag{11.56}$$

Si la ecuación matricial (11.56) se compara con la matriz (11.31) obtenida en el ejemplo anterior, despúes de reordenar los renglones y columnas para obtener los vectores del coriente y voltage en la forma $\mathbf{I} = \left\{I_1^P,\ I_1^I,\ I_2^P,\ I_2^I\right\}$ y $\mathbf{U} = \left\{U_1^P,\ U_1^I,\ U_2^P,\ U_2^I\right\}$ se puede ver que hemos obtenido el mismo resultado. El resultado es el mismo, pero el métododе obtener la matriz de admitancia es distinto. Los matrices de admitancia $[Y_{ij}]$ obtenidas de la ecuación (11.31) tienen la forma

$$[Y_{11}] = \begin{bmatrix} c_1 & -c_1 z^{-1} \\ -c_1 z^{-1} & c_1 + c_0 \end{bmatrix}$$

$$[Y_{12}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -c_0 z^{-1} & 0 \end{bmatrix}$$

$$[Y_{21}] = \begin{bmatrix} 0 & -c_0 z^{-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[Y_{22}] = \begin{bmatrix} c_0 + c_2 & -c_2 z^{-1} \\ -c_2 z^{-1} & c_2 \end{bmatrix}$$

Para obtener la matriz de transferencia (de cascada) es necesario utilizar las relaciones entre las matrices de admitancia y de cascada.

$$\mathbf{A_{11}} = -[Y_{21}]^{-1} \cdot [Y_{22}]$$

$$\mathbf{A_{12}} = -[Y_{21}]^{-1}$$

$$\mathbf{A_{21}} = [Y_{12}] - [Y_{11}][Y_{21}]^{-1}[Y_{22}]$$

$$\mathbf{A_{22}} = -[Y_{11}] \cdot [Y_{21}]^{-1}$$

Las matrices $[Y_{12}]$ y $[Y_{21}]$ son singulares y no existe la matriz inversa. Esta dificultad se puede apartar si se conectan con las conmutadores en paralelo los capacitores c_{01} y c_{02} como se muestra en la figura 11.15. Las matrizes de admitancia $\mathbf{Yij}$ se modifican y se puede calcular la matriz inversa de $\mathbf{Y_{21}}$

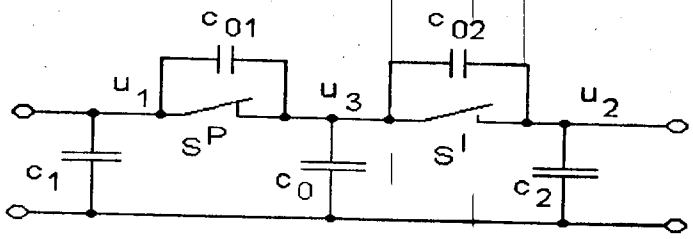


Figura 11.15. Circuito SC con capacitores en paralelo con conmutadores.

$$\mathbf{Y_{11}} = \begin{bmatrix} c_1 + c_{01} & -c_1 z^{-1} \\ -c_1 z^{-1} & c_1 + c_0 + c_{01} \end{bmatrix} \quad \mathbf{Y_{12}} = \begin{bmatrix} -c_{01} & 0 \\ -c_1 z^{-1} & -c_{02} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Y_{21}} = \begin{bmatrix} -c_{01} & -c_0 z^{-1} \\ 0 & -c_{02} \end{bmatrix} \quad \mathbf{Y_{22}} = \begin{bmatrix} c_{02} + c_0 + c_2 & -c_2 z^{-1} \\ -c_2 z^{-1} & c_2 + c_0 \end{bmatrix}$$

Capítulo 12

Ecualizadores

Los ecualizadores son circuitos que mejoran el transcurso de las gráficas de atenuación o de la fase. Si queremos que la atenuación del circuito está constante entonces se utilizan los ecualizadores de atenuación. Si queremos que la fase resultada del circuito está lineal en ciertas frecuencias se utilizan las ecualizadores de fase. Ecualizadores de fase se utilizan en el caso si quieremos que la fase es lineal en las frecuencias de nuestra interes. Si la fase es lineal en estas frecuencias, el retardo de grupos está constante. Eso sigmifica, que todas las frecuencias son retardadas sobre el mismo tiempo. Esto es muy importante en el caso si se transmite la señal de video. Un ejemplo donde el grupo de retardo es constante en todas las frecuencias son los filtros digitales con la respuesta finita, si los coeficientes de la función de transferencia son simétricos. Esos filtros no tienen el equivalente en los circuitos analógicos. En los circuitos analógicos es necesario conectar con el filtro en cascada un ecualizador de la fase para que en ciertas frecuencias de nuestro interes es la fase lineal.

12.1 Ecualizador de atenuación

Ecualizador es un circuito de dos puertas que se muestra en la figura 12.1. El ecualizador se construye con la manera que tiene la atenuación opuesto a la atenuación de la linea telefónica pare que el resultado es la atunuación de la linea telefónica con el ecualizador constante, como se ve en la figura 12.1a.
La función de transferencia de un circuito en la figura 12.1 se puede expresar en la forma

$$G(s) = e^{g_0} = e^{a_0+jb_0} = 1 + \frac{Z_1}{R_0} \tag{12.1}$$

Si en el caso que la impedancia Z_1 es la impedancia de un circuito de serie RC

$$Z_1(s) = R_1 + \frac{1}{j\omega C_1} \tag{12.2}$$

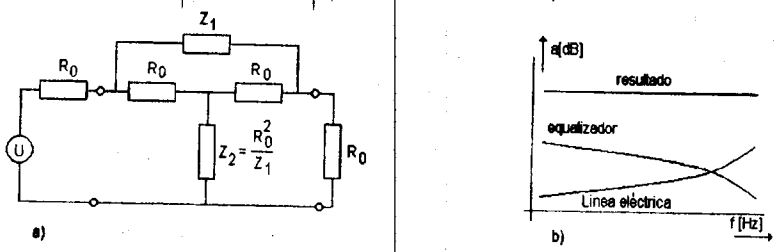


Figura 12.1. Ecualizador de la atenuación.

se obtienen de la ecuación (12.1) dos ecuaciones para las frecuencias ω_1 y ω_2

$$a^{a_{01}} = \left|1 + \frac{Z_1}{R_0}\right| = \sqrt{\left(1 + \frac{R_1}{R_0}\right)^2 + \frac{1}{(\omega_1 C_1 R_0)^2}} \tag{12.3}$$

$$a^{a_{02}} = \left|1 + \frac{Z_1}{R_0}\right| = \sqrt{\left(1 + \frac{R_1}{R_0}\right)^2 + \frac{1}{(\omega_2 C_1 R_0)^2}} \tag{12.4}$$

La atenuación a_{01} en la frecuencia ω_1 se conoce y tambien se conoce la atenuación a_{02} en la frecuencia ω_2. En las dos ecuaciones (12.3) y (12.4) son icognitos R_1 y C_1 y le podemos calcular mediante las ecuaciones (12.5) y (12.6).

$$C_1 = \frac{1}{R_0}\sqrt{\frac{\frac{1}{\omega_1^2} - \frac{1}{\omega_2^2}}{e^{2a_{01}} - e^{2a_{02}}}} \tag{12.5}$$

$$R_1 = R_0\left[\sqrt{e^{2a_{01}} - \frac{1}{(\omega_1 C_1 R_0)^2}} - 1\right] \tag{12.6}$$

En el ejemplosiguiente se muetra como se calcula el ecualizador de atenuación.

Ejemplo 1.

Calcular el ecualizador que se conecta en cascada con la linea telefónica para obtener la atenuación final 2[dB] en todas las frecuencias. La atenuación de la linea telefónica se muestra en la figura 12.2.

Solución:

Si se sustituye en la ecuación (12.5) y (12.6) la atenuación a_{01}, a_{02} y las frecuencias ω_1, ω_2 se obtienen los valores de R_1 y C_1

$$C_1 = \frac{1}{600}\sqrt{\frac{\frac{1}{3000^2} - \frac{1}{9000^2}}{e^{2.0,7} - e^{2.0,17}}} = 314\ nF$$

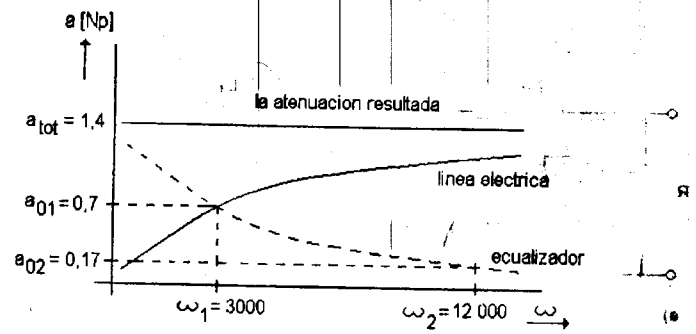


Figura 12.2. La atenuación de la linea, de ecualizador y la atenuación resultada.

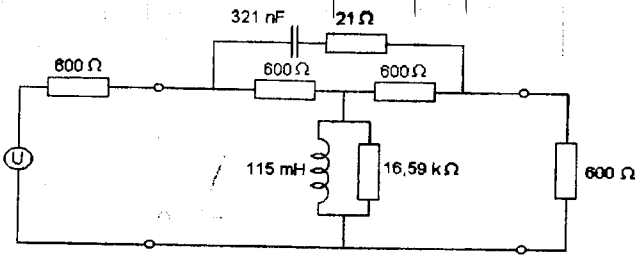


Figura 12.3. Ecualizador de la atenuación.

$$R_1 = 600\left[\sqrt{e^{2.0,7} - \frac{1}{(30000.321,74.10^{-9}.600)^2}} - 1\right] = 21,688\ \Omega$$

Es necesario calcular la impedancia Z_2.

$$Z_2 = \frac{R_0^2}{Z_1} = \frac{1}{\frac{R_0^2}{R_1 + \frac{1}{j\omega C_1}}} = \frac{1}{\frac{R_0^2}{R_1} + j\omega R_0^2.C_1}$$

La impedancia Z_2 es el circuito paralelo R_2 L_2 con los valores

$$R_2 = \frac{R_0^2}{R_1} = \frac{600^2}{21,688} = 16,599\ k\Omega \qquad L_2 = R_0^2.C_1 = 600^2.321,74.10^{-9} = 115,47\ mH$$

El ecualizador se muestra en la figura 12.3.

12.2 Ecualizador de la fase

El ecualizador de fase se realiza mediante el circuito en la forma de cruz. En la figura 12.4a es el ecualizador de fase general e en la figura 12.4b es el ecualizador de primer

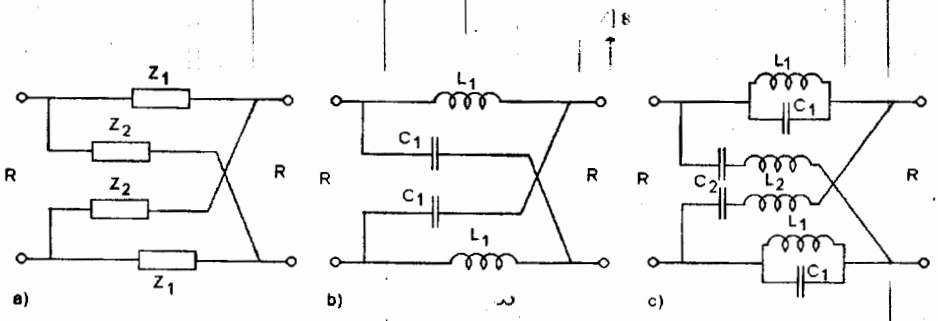


Figura 12.4. Ecualizador de la fase de primer y segundo orden.

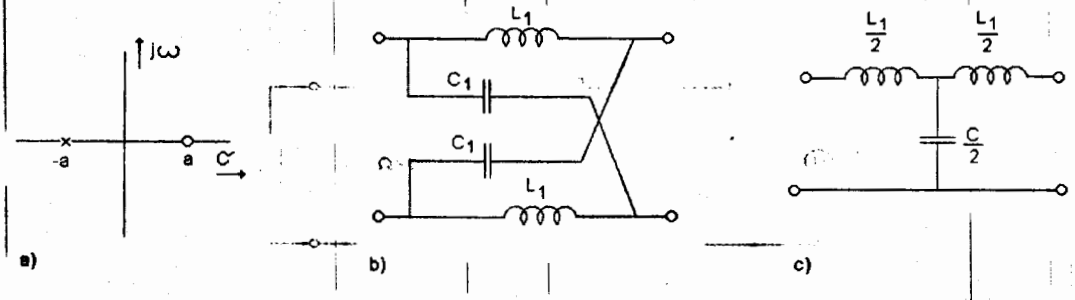


Figura 12.5. Ecualizador de la fase de primer orden y ubicación de los polos y ceros.

orden y en la figura 12.4c de segundo orden.

Ecualizador de primer orden

La función de transferencia de un ecualizador de fase de primer orden tiene la función de transferencia

$$G(s) = \frac{s+\alpha}{s-\alpha} \tag{12.7}$$

El cero y el polo de la función de transferencia se muestra en la figura 12.5a. El ecualizador en la forma cruz 12.5b necesita doble elementos que son iguales y por eso lo podemos realizar en la forma T 12.5c. Los ecualizadores del primer orden y de segundo orden podemos conectar en cascada. La impedancia carácteristika de todas circuitos es igual a $Z_0 = \sqrt{Z_1.Z_2} = R$ y eso significa que tenemos exelente acoplamiento y en las puertas no se refleja nada. Para todas ω el modulo de la función de transferencia es iqual a 1, entonces el circuito no atenua y influe solo el transcurso de la fase. La fase de todas ecualizadores conectadas en serie se suman y se obtiene la fase deseada. La fase del ecualizador y el transcurso del grupo de retraso se calculan mediante las ecuaciones (12.8) y (12.9).

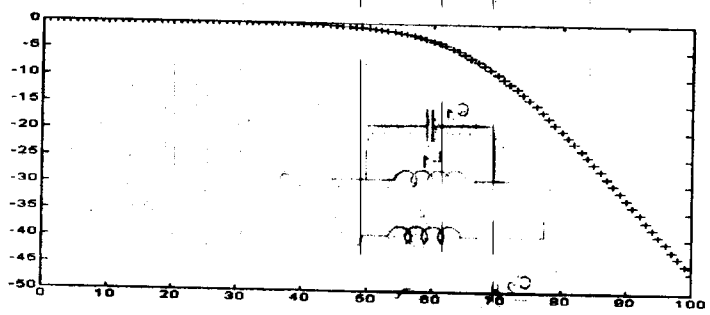


Figura 12.6. El transcurso del grupo de retardo de ecualizador de primer orden.

$$b(\omega) = -2arctan\frac{\omega}{\alpha} \tag{12.8}$$

$$\tau(\omega) = -\frac{db}{d\omega} = \frac{2\alpha}{\omega^2 + a^2} \tag{12.9}$$

El transcurso de la fase normalizada del ecualizador de primer orden para varias α se muestra en la figura 12.6

Ecualizador de segundo orden

La función de transferencia de ecualizador de fase de segundo orden es de la forma

$$H(s) = \frac{s^2 - \frac{\omega_3}{Q_r}s + \omega_r^2}{s^2 + \frac{\omega_3}{Q_r}s + \omega_r^2} \tag{12.10}$$

Los parametros ω_r y Q_r definen la ubicación de los ceros y polos complejos y son definidos mediante las ecuaciones (12.11). La fase de ecualizador de segundo orden se calcula mediante la ecuación (12.12) y el grupo de retardo mediante la ecuación (12.13).

$$\omega_r = \sqrt{2 + b^2}, \qquad Q_r = \frac{\omega_r}{2a} \tag{12.11}$$

$$b(\omega) = -2arctan\frac{\frac{\omega\omega_r}{Q_r}}{\omega_r^2 - \omega^2} \tag{12.12}$$

$$\tau(\omega) = \frac{2Q_r\omega_r(\omega^2 + \omega_r^2)}{Q_r^2(\omega^2 - \omega_r^2)^2 + \omega^2\omega_r^2} \tag{12.13}$$

La ubicación de los polos y ceros del ecualizador de fase se muestra en la figura 12.7a y en la figura 12.7b y 12.7c se muestra el ecualizador de segundo orden en la forma cruz respective en la forma T puente.

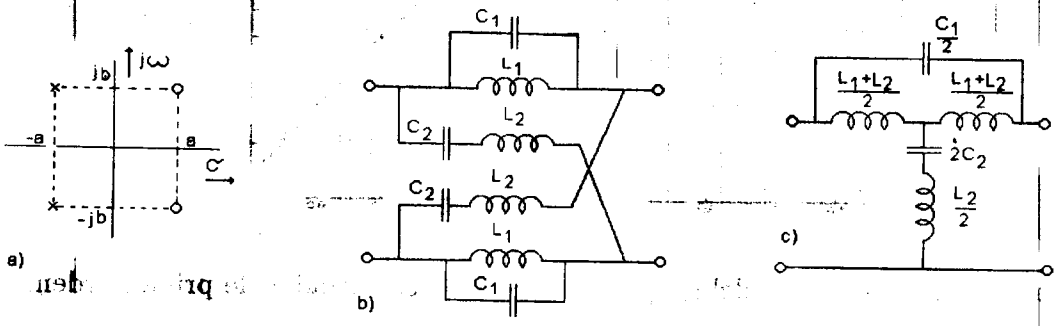


Figura 12.7. Ubicación de los polos y ceros del ecualizador de segundo orden.

Los valores de los elementos de ecualizador de fase se calculan mediante la ecuacion (12.14) en caso si se coonoce la función de transferencia del ecualizador y el rezistor R. En la figura 12.8 se muestra el transcurso del grupo de retardo para el ecualizador de fase de segundo orden y para distintos Q_r.

$$L_1 = \frac{R}{\omega_r Q_r}, \qquad C_1 = \frac{Q_r}{\omega_r R}, \qquad L_2 = \frac{RQ_r}{\omega_r}, \qquad C_2 = \frac{1}{\omega_r Q_r R} \tag{12.14}$$

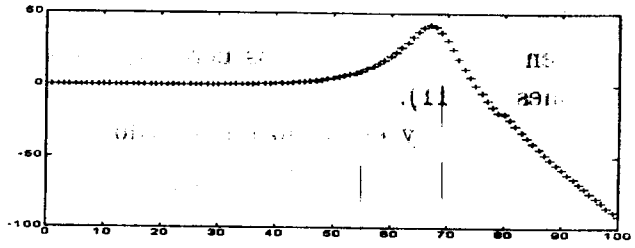


Figura 12.8. El recurso del grupo de retraso para el ecualizador de segundo orden.

Capítulo 13

Circuitos de retardo

La función de transferencia de un circuito se puede escribir en la forma

$$H(s) = \frac{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3 + ...}{b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + b_3 s^3 + ...} = \frac{N(\omega)}{M(\omega)}. \tag{13.1}$$

Si se sustituye por s $j\omega$ y se divide el numerador y denomirador a la parte real e imaginaria se obtiene

$$N_1(\omega) = a_1\omega - a_3\omega^3 + a_5\omega^5$$

$$N_2(\omega) = a_0 - a_2\omega^2 + a_4\omega^4$$

$$M_1(\omega) = b_1\omega - b_3\omega^3 + b_5\omega^5$$

$$M_2(\omega) = b_0 - b_2\omega^2 + b_4\omega^4$$

La fase se obtiene mediante la ecuación

$$\Phi(\omega) = arctan\frac{N_1(\omega)}{N_2(\omega)} - arctan\frac{M_1(\omega)}{M_2(\omega)}$$

El grupo de retardo está definido mediante la ecuación (13.2)

$$\tau = \frac{d\phi}{d\omega} = \frac{M_2M_1' - M_1M_2'}{M_1^2 + M_2^2} - \frac{N_2N_1' - N_1N_2'}{N_1^2 + N_2^2} \tag{13.2}$$

Ejemplo 1.

Calcule la función de transferencia de un circuito que tiene el grupo de retardo maximamente plano. La función de transferencia es de tercer orden, u se calculan los coeficientes a_1 y b_i.

$$H(s) = \frac{a_3}{s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3}$$

Si la función de transferencia se compara con la función de transferencia (13.1) se obtiene

$$N_1 = 0 \qquad N_2 = a_3$$
$$M_1 = a_2\omega - \omega^3 \qquad M_2 = a_3 - a_1\omega^2$$

y las derivadas

$$N_1' = 0 \qquad N_2' = 0$$
$$M_1' = a_2 - 3\omega^2 \qquad M_2' = -2a_1\omega^2$$

Si se sustituye por N y M en la ecuación (13.2) se obtiene el retardo τ

$$\tau = \frac{a_2}{a_3}\frac{1+\omega^2\left(\frac{a_1}{a_3}-\frac{3}{a_2}\right)+\omega^4\frac{a_1}{a_2a_3}}{1+\omega^2\left(\frac{a_2^2}{a_3^2}-\frac{2a_1}{a_3}\right)+\omega^4\left(\frac{a_1^2}{a_3^2}-2\frac{a_2}{a_3^2}\right)+\frac{\omega^4}{a_3^2}} \tag{13.3}$$

Para que el grupo de retardo sea para $\omega = 0$ igual a uno, el valor de τ normalizado, se necesita elegir

$$a_2 = a_3$$

Para obtener el transcurso del grupo de retardo maximamente plano es necesario elegir siguientes equivalentes

$$\frac{a_1}{a_3} - \frac{3}{a_2} = \frac{a_2^2}{a_3^2} - \frac{2a_1}{a_3}$$

$$\frac{a_1}{a_2a_3} = \frac{a_1^2}{a_3^2} - 2\frac{a_2}{a_3}$$

Estas equivalencias son cumplidos para los valores $a_1 = 6$ y $a_2 = a_3 = 15$. Sustituyendo a la ecuación (13.1) la función de transferencia del circuito con el grupo de retardo maximamente plano toma la forma (13.4). Se ve, que la función de transferencia que obtuvimos es la función de transferencia de Bessel capítulo XXX

$$H(s) = \frac{15}{s^3 + 6s^2 + 15s + 14} \tag{13.4}$$

Si se sustituye por los valores de $a_1 = 6$ y $a_2 = a_3 = 15$ en la ecuación (13.3) se obtiene el grupo de retardo τ

$$\tau = \frac{1 + 0,2\omega^2 + 0,02666\omega^4}{1 + 0,2\omega^2 + 0,02666\omega^4 + 0,0044\omega^6}$$

Para $\omega = 0$ obtenemos $\tau = 1$ y para la frecuencia del corte $\omega = 1$ se obtiene $\tau = 0,996$. El descenso del grupo de retardo es $0,4\%$.

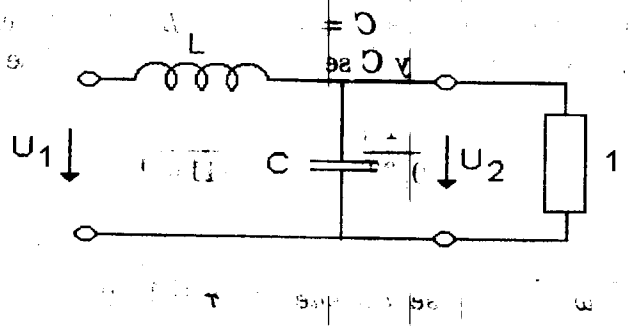


Figura 13.1. El circuito de dos puertas

Ejemplo 2.

Calcular los valores del circuito en la figura 13.1 con la manera que el grupo de retardo sea maximamente plano

Para calcular los valores del circuito que tiene el transcurso del grupo de retardo maximamente plano primero se calcula la función de transferencia de circuito en la figura 13.1

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{1}{1 + sL + s^2LC}$$

La fase del circuito es

$$\Phi(\omega) = arctan\frac{\omega L}{1 - \omega^2 LC}$$

y los parametros N, M

$$\begin{array}{lll} N_1 = 0 & M_1 = \omega L & M_1' = L \\ N_2 = 1 & M_2 = 1 - \omega^2 LC & M_2' = -2\omega LC \end{array}$$

El grupo de retardo es

$$\tau = \frac{d\phi}{d\omega} = \frac{M_2 M_1' - M_1 M_2'}{M_1^2 + M_2^2} - \frac{N_2 N_1' - N_1 N_2'}{N_1^2 + N_2^2} = L\frac{1 + \omega^2 LC}{\omega^4 L^2 C^2 - \omega^2 (L^2 - 2LC) + 1} \quad (13.5)$$

De la ecuación (13.5) se pueden escribir siguiente ecuacione, para obtener el τ maximamente plano

$$LC = L^2 - 2LC$$

Si elegimos $L = 1$ para normalizar el grupo de retardo se obtiene

$$C + 2C = 1 \qquad \rightarrow \qquad C = 0,3333$$

El circuito con los valores normalizadas $C = 0,3333$ y $L = 1$ tiene el retardo de grupo maximamente plano. Si los valores L y C se sustituyen en (13.5) se obtiene

$$\tau = \frac{1 + 0,3333\omega^2}{1 + 0,3333\omega^2 + 0,1111\omega^4}$$

Para

$\omega = 0$ *se obtiene* $\tau = 1,000$

$\omega = 1$ *se obtiene* $\tau = 0,923$

El descenso del gropo de retardo es $1 - 0,923 = 0,077 = 7,7\%$

Bibliografía

[1] C.S. BURRUS and T.W. PARKS.: *DFT / FFT and Convolution.* John Wiley and Sons, 1985.

[2] R. CHASSAING and D.W. Horning.: *Digital Signal Processing with the TMS320C25* John Wiley and Sons, Toronto1990.

[3] J.H. McCLELLAN, R.W. SCHAFER and M.A. YODER.: *DSP FIRST A Multimedia Approach.* Prentice Hall 1998.

[4] V.K. INGLE.: *Digital Signal Processing Using Matlab V.4* PWS Publishing Company. ITP. Boston 1997.

[5] S.K MITRA.: *Digital Signal Processing. A computer-Based Approach* MCGraw-Hill Companies,Inc 1998.

[6] A.V. OPPENHEIM and R.W. SCHAFER.: *Discrete – Time Signal Processing.* Prentice Hall, Inc., 1989.

[7] S.J. ORFANIDIS.: *Introduction to Signal Processing* Prentice Hall, New Jersey 1996.

[8] T.W. PARKS and C.S. BURRUS.: *Digital Filter Design.* John Wiley Sons, Inc., New York, 1987.

[9] A.W.M VAN DEN ENDEN - N.A.M VERHOECKX.:*Discrete-time Signal Processing.* Prentice Hall,1989.

[10] B. WIDROW and S.D. STEARNS.: *Adaptive Signal Processing.* Prentice–Hall, Inc., 1985.

[11] CAUER, W.: *Siebschaltungen.* V.D.I. Verlag G.m.b.H, Berlin 1951.

[12] CAUER, W.: *Synthesis of Linear Communacationn Networks (Translated from the German)* McGraw-Hill Book Company, New York 1958.

[13] CHEN, H. W.*Linear Network Design and Synthesis* McGraw-Hill Book Company, New York 1964.

[14] CHEN, H.W. *The Analysis of Linear Systems* McGraw-Hill Book Company, New York 1963.

[15] DARLINGTON, S.: *Synthesis of Reactance 4-Poles, which Produce Prescribed InsertionLoss Characteristics.* J. Math. Phys. Vol. 18, pp 257-353, September 1939.

[16] FOSTER, R.M.: *A Reactance Theorem.* Bell System Tech. Journal., vol 3, pp 259-267, April 1924.

[17] GUILLEMIN, E.A.: *Communication Networks.* Vol 4. John Wiley and Sons. New York 1935.

[18] GUILLEMIN, E.A.: *Introductory Circuit Theory.* John Wiley and Sons New York 1953.

[19] KUH E.S.: *Special Synthesis Techniques for Driwing Point Impedance Function* IRE Transactions PGCT, Vol CT2, no 4, pp, 302-308, December 1955.

[20] BUTTERWORTH, S.: *On the Theory of Filter Amplifiers*, Wireless Engr., vol 7.,pp 536-541, October 1930.

[21] SAAL, R. and E.Ulbrich.: *On the design of Filters by Synthesis.* Proc. IRE , vol. CT-5, no.4, pp 284-327, December, 1958

[22] STORCH, L.: *Synthesis of Constant-time-delay Ladder Networks Using Bessel Polynomials.* Proc. IRE, vol. 42, no. 11, pp 1666-1675, N0vember 1954.

[23] STORER, J.E.: *Relationship between the Bott-Dufin and Pantel Impedance Synthesis.* Proc. IRE, vol 42, no. 9, p. 1451, September, 1954.

[24] ZVEREV, A.I.: *Handbook of Filter Synthesis.* John Wiley and Sons, New York, 1967.

[25] Chen, W.K.: *The circuits and Filters Handbook.* CRC Press/IEEE, ISBN 0-8493-8341-2.

[26] SU, K.L.: *Analog Filters.* Chapman and Hall, ISBN 0-412-63840-1.

[27] HUELSMAN, L.P.: *Active and Pasive Anslog Filter Design.* McGraw Hill, ISBN 0-07-112519-1 New York 1993.

[28] HUMPHREYS, L.S.: *The Analysis, Design and Synthesis of Electrical Filters.* Prentice Hall, ISBN 0-13-032904-3, Toronto, 1977.

APUNTE
203-A

2001
G.- 612363

FACULTAD DE INGENIERIA UNAM.
612363

[illegible] DE INGENIERIA

Esta obra se terminó de imprimir
en mayo de 2001
en el taller de imprenta del
Departamento de Publicaciones
de la Facultad de Ingeniería,
Ciudad Universitaria, México, D.F.
C.P. 04510

Secretaría de Servicios Académicos

El tiraje consta de 300 ejemplares
más sobrantes de reposición.