UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

PRÁCTICAS DE SIMULACIÓN

ING. VICTOR FLORES ZAVALA

P R E F A C I O .-

Las siguientes prácticas surgieron a partir del tema que me fué asignado en el concurso de oposición para ocupar la plaza de -- Profesor Asociado en el área de Investigación de Operaciones. Se pretende que sirvan como material de trabajo en el laboratorio de la materia de Investigación de Operaciones. Han sido diseñadas con objeto de que el alumno comprenda los principios básicos involucrados en la simulación.

Cada práctica consta de una introducción teórica y un -- ejercicio que se debe realizar en una sesión de dos horas por grupos - de hasta cinco alumnos. Para profundizar en algunos de los aspectos se recomienda consultar la Bibliografía.

Agradezco la invitación del Ing. Enrique Galván Arévalo Jefe del Departamento de Ingeniería Industrial e Investigación de Operaciones para publicar estas prácticas, a la Sra. Rosa Ma. Torres Torija de Flores Zavala por su paciencia para mecanografiarlas, y a todos los alumnos que con sus valiosos comentarios las han enriquecido. Espero que sean una buena ayuda para los estudiantes en la comprensión de esta técnica.

Ing. Víctor Flores Zavala Torres Torija
Ciudad Universitaria, D.F., Agosto de 1983

I N D I C E

I N T R O D U C C I O N.- Un examen de los orígenes de cualquier campo científico, sea Astronomía, Física o Psicología, indica que la disciplina comenzó como una masa de observaciones y experimentos. Es natural, entonces, que los primeros pasos en cuantificar la materia deban involucrar la colección, presentación y tratamiento de datos. Consecuentemente, el estudio de la Estadística ha jugado un papel dominante en la preparación matemática de estudiantes que trabajan en las áreas cuantitativas de las Ciencias Sociales y de la vida. Un tratamiento estadístico de los datos puede ser muy elemental, involucrando un poco más que listado, selección y unos pocos cálculos. Puede ser también muy sofisticado, involucrando complicadas ideas matemáticas y problemas delicados de diseño de experimentos.

El problema original casi siempre se presenta en el mundo real, algunas veces en las condiciones relativamente controladas de un laboratorio y algunas veces en el menos entendible ambiente de todos los días. Por ejemplo, un ingeniero observa el número de artículos defectuosos producidos por cierta máquina, un genetista anota los resultados de un experimento de hibridización o un economista registra el volumen de transacciones internacionales bajo ciertas políticas de tarifas, y entonces, conjeturan ciertas razones para sus observaciones. Estas conjeturas pueden estar basadas completamente en la intuición, pero más a menudo son el resultado de un estudio detallado y del reconocimiento de ciertas similitudes con otras situaciones que se entienden mejor.

El siguiente paso es un intento de hacer al problema tan preciso como sea posible. Esto quiere decir un entendimiento claro y definido de las palabras y conceptos usados. Un aspecto importante en este paso es el intento de identificar y seleccionar aquellos conceptos que se consideren básicos en el estudio. El propósito es eliminar información innecesaria y simplificar la que se conserva tanto como sea posible. Este paso de identificación, aproximación e idealización se conoce como construcción del modelo real. Por ejemplo, en el caso del ingeniero, él puede construir un modelo real en el cual todos los artículos se puedan clasificar como defectuosos o no defectuosos y nunca estén en un nivel intermedio.

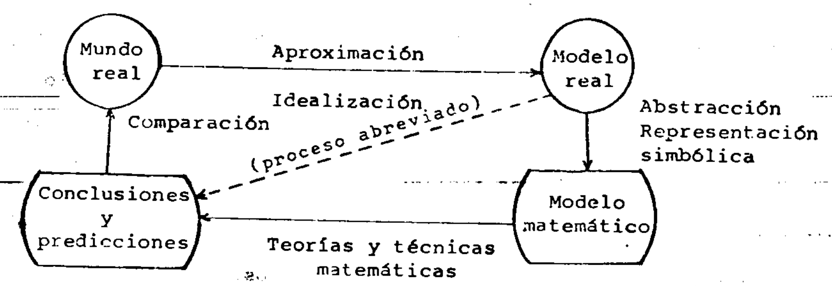
En el siguiente paso después del estudio y formación del modelo real, uno ve este modelo e intenta identificar el proceso operativo. La meta es expresar la situación entera en términos simbólicos. Entonces el modelo real se convierte en un modelo matemático, en donde las cantidades reales y los procesos se reemplazan por símbolos y operaciones matemáticas. A menudo mucho del valor del estudio se pierde en este paso, debido a que una identificación inapropiada entre el mundo real y el mundo matemático no puede llevar a resultados útiles.

Después de que el problema ha sido transformado en términos simbólicos, el sistema matemático resultante se estudia usando técnicas e ideas matemáticas apropiadas. Los resultados del estudio matemático son teoremas, desde el punto de vista matemático,

y predicciones desde el punto de vista empírico. La motivación para el estudio matemático no es producir nuevas matemáticas, es decir, nuevas ideas abstractas o nuevos teoremas, aunque ésto puede suceder, sino más importante, producir nueva información acerca de la situación estudiada.

El paso final en el proceso de construcción del modelo es la comparación de los resultados predichos en base al trabajo matemático, con el mundo real.

El proceso anterior se puede representar de la siguiente manera:



Uno de los primeros aspectos que se deben determinar acerca de una situación es si se debe modelar más apropiadamente en términos determinísticos o estocásticos. Un modelo se dice que es determinístico si dada suficiente información en un instante de tiempo o en una etapa, entonces se puede determinar exactamente el comportamiento futuro del sistema. Por ejemplo, se puede escoger modelar el crecimiento de una población en términos determinísticos. La hipótesis es entonces que el crecimiento de la población se conoce y que se dá el tamaño de ella en un instante de tiempo, de manera que se puede determinar exactamente el tamaño de la población para todos los tiempos futuros.

Por otro lado, un modelo estocástico sí incorpora el comportamiento probabilístico. Para estos modelos las prediccíónes son de tal naturaleza, que no importa cuánto se conozca del sistema en un instante de tiempo, es imposible determinar con certeza absoluta el estado del sistema en el futuro.

Muchos de los modelos más útiles en las Ciencias Sociales y de la vida, son modelos cuya descripción matemática involucra la incertidumbre, y ésto es de esperarse, ya que aunque el mundo real es un sistema determinístico, la imperfección de los medios que tenemos para percibirlo y lo limitado de nuestros sentidos, nos lo presentan como un sistema estocástico.

Una de las técnicas más fáciles y adecuadas para obtener resultados de estos sistemas y modelos, es la simulación, por lo que se impone una buena comprensión de sus conceptos.

PRACTICA N°1: Simulación de la caminata aleatoria.

Definición: La simulación se puede definir como una técnica para resolver problemas efectuando experimentos en un modelo del sistema. En esta definición se pueden destacar dos puntos importantes. El primero es la naturaleza experimental de la técnica. El segundo es la utilización de modelos. La naturaleza experimental obliga a utilizar herramientas estadísticas, tanto para el manejo de los datos de entrada, como para la interpretación de los resultados y el diseño de los experimentos. La utilización de modelos ès metodología propia de la investigación de operaciones, lo cual implica conocer el comportamiento del sistema que se va a modelar y que, el modelo, refleja en forma más o menos exacta este comportamiento.

Propósito de la simulación: el propósito de simular un sistema puede ser:

Describir el comportamiento del sistema
Construir teorías o hipótesis que expliquen el comportamiento observado.
Usar estas teorías para predecir el comportamiento futuro.
Predecir efectos que se producirán por cambios en el sistema.

Aplicaciones: Algunas de las aplicaciones de la simulación son:

En mercadotecnia para decidir si se lanza o nó, al mercado, un producto.
En educación para la planeación de carreras.
En Ciencias Sociales para estudiar la interacción de grupos.
En Ciencias del Comportamiento para estudios de migración.
En transportes para estudiar la ampliación de sistemas de transporte.
En la industria para efectuar balanceo de líneas, decidir políticas de inventarios, etc.

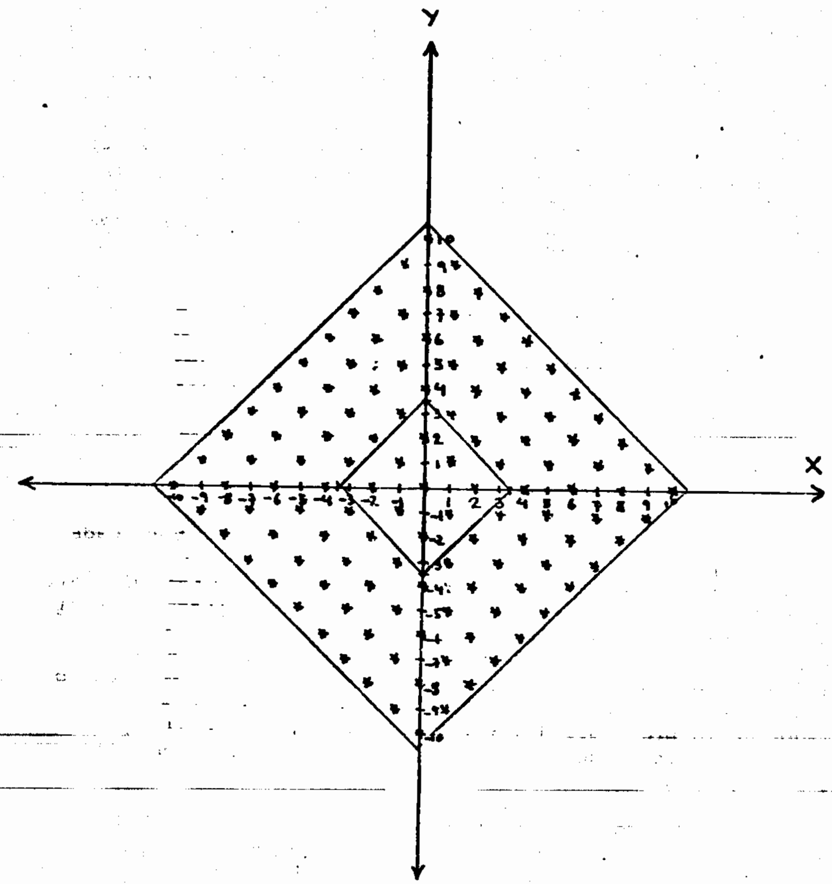
Ventajas y desventajas de la simulación: Dos son las principales ventajas de la simulación. 1) su rango de aplicación y 2) la simplicidad de ejecución. La simulación se puede aplicar a problemas de gran complejidad para los que no existen ninguna otra técnica de solución. En particular a problemas con un grán número de componentes, con patrones de interacción y comportamiento complejos. Además usar la simulación requiere muy poco entrenamiento formal.

Las desventajas de la simulación son. 1) Es una técnica experimental y cualquier recomendación o inferencia que se tome de este estudio se debe derivar estadísticamente y, 2) su falta de generalidad al quedar los datos resumidos en forma estadística y no en una fórmula matemática.

Modelos de simulación: los modelos que se utilizan en simulación se pueden clasificar en forma general como: 1) discretos o contínuos y 2) determinísticos o estocásticos. Un sistema cuyas variables cambian continuamente con el tiempo es un sistema contínuo y se modelará cómo un modelo contínuo. Un sistema discreto es un sistema cuyas variables cambian sólo en puntos específicos del tiempo y se ajustará a un modelo discreto. Los modelos estocásticos involucran cierto grado de aleatoriedad o incertidumbre. Un modelo determinístico está completamente determinado por la estructura del modelo y por sus condiciones iniciales. Prácticamente todos los modelos que se tratan en este Curso son modelos discretos-estocásticos, por ser los más frecuentes desde el punto de vista industrial.

Problema: Considera la siguiente situación. El centro de la ciudad de México tiene una estructura más o menos regular, el trazado de sus calles es de tipo ortogonal. Entre los lugares de más tradición en esta zona se encuentran varias cantinas. Una de estas cantinas se encuentra ubicada justo en una esquina del centro de la ciudad. El problema consiste en que, uno de sus clientes habituales sale en un estado tal, que no sabe donde se encuentra su casa y está totalmente desorientado, de manera que cada vez que llega a una esquina tiene igual probabilidad de irse al norte, al sur al este o al oeste. Si en total el señor camina diez cuadras, ¿cuál es la probabilidad de que quede a tres cuadras o menos de la cantina?

Solución: como se puede apreciar esta es una situación discreta y probabilística, que se puede modelar de la siguiente forma. Por el trazado ortogonal de las calles, la posición del borracho se puede indicar en un eje coordenado con la cantina localizada en el origen. Cada movimiento al norte o al sur equivale a desplazarse en el eje Y, y cada movimiento al este o al oeste equivale a desplazarse en el eje X. Si en total camina diez cuadras, las posiciones factibles se indican en la siguiente gráfica



Los puntos encerrados en el rombo pequeño dan las posiciones en las que el borracho se encuentra a tres cuadras o menos de la cantina.

Para poder simular este problema se tiene que definir en qué consiste, para su situación particular, un experimento. Un experimento será una caminata aleatoria de diez cuadras. En cada experimento se verá si el borracho queda o nó dentro de la zona de interés. Con objeto de dar una estimación de la probabilidad requerida, se deben realizar varios experimentos, mientras más, mejor será la estimación. El siguiente problema consiste en generar, al azar, una caminata. Una forma posible es lanzar dos monedas, si las monedas son legales, cada posible resultado (águila-águila, águila-sol, sol-águila y sol-sol) tiene la misma probabilidad de ocurrencia, es decir, 1/4 para cada uno, de manera que se puede asignar una dirección a cada resultado. Por ejemplo

Resultado lanzamiento	P(X)	Dirección
AA	0.25	N
AS	0.25	S
SA	0.25	E
SS	0.25	W

Otra forma posible de generar direcciones al azar es lanzando dos dados, los eventos de interés serán: número par en el dado 1 y número par en el dado 2; número par en el dado 1 y nón en el dado 2; nón en el dado 1 y par en el 2; nón en ambos dados. Cada evento tiene probabilidad de 1/4.

Cada tirada del par de dados equivale a una caminata al azar, de una cuadra, en la dirección indicada. De forma que cada experimento consiste en tirar diez veces el par de dados e identificar la trayectoria en cada tirada. Al finalizar se comprueba si se terminó o nó dentro de la zona de interés. Si se encuentra dentro de ella, el experimento se registra como un éxito. Para dar un estimador de la probabilidad se tienen que realizar diez experimentos como mínimo, y se divide el número total de éxitos entre diez. Por ejemplo

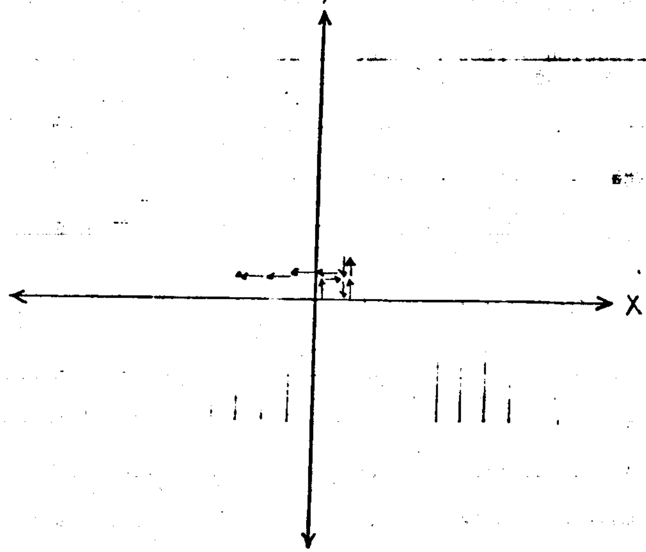
Tirada #	Resultado dado 1	dado 2	Dirección
1	par	par	N
2	non	par	E
3	par	non	S
4	par	par	N
5	par	par	N
6	par	non	S
7	non	non	W
8	non	non	W
9	non	non	W
10	non	non	W

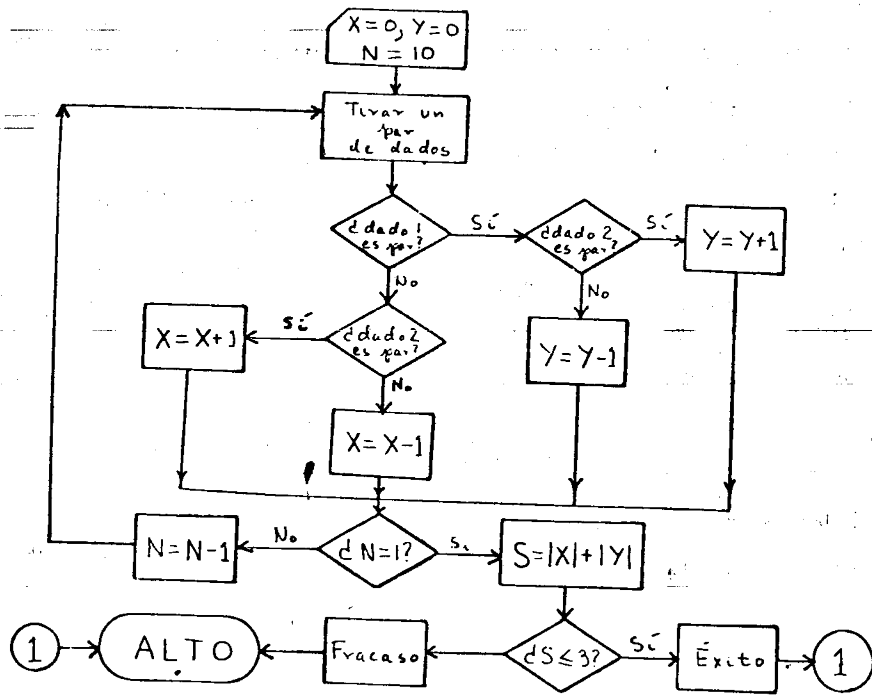
En este caso el resultado fue que el borracho quedó a cuatro cuadras de la cantina, es decir, se registra como un fracaso. No es necesario efectuar la representación gráfica, en cada experimento, para saber si fue éxito o fracaso. Con sólo aumentar o disminuir una unidad en la dirección Y si el resultado fue norte o sur respectivamente, y en la dirección X si el resultado fue este u oeste. Al final se suma el valor absoluto de X y el valor absoluto de Y, si la suma es menor o igual que tres, se registra un éxito, en caso contrario, un fracaso. El diagrama de flujo para cada experimento se muestra en la figura.

Conclusiones: con este experimento quedan bien marcadas algunas de las ventajas y desventajas de la simulación. También su naturaleza experimental. La simulación planteada es muy fácil de efectuar y prácticamente no requiere de entrenamiento matemático previo. Sin embargo, para dar un estimador de la probabilidad solicitada, se requiere efectuar un gran número de experimentos. Mientras más experimentos, es mejor la estimación, pero se consume mucho tiempo. Por otro lado, la generación de los eventos al azar se hizo por un método totalmente aleatorio, como es el lanzamiento de un par de dados. Se podrían haber utilizado otros, como lanzar cuatro monedas o girar una ruleta. Todos ellos son métodos totalmente aleatorios que garantizan el azar en los resultados. Sin embargo desde el punto de vista práctico de la simulación, consumen mucho tiempo. Otra forma de generar los eventos es utilizar una tabla de números aleatorios, como la que se anexa. Estos números están uniformemente distribuidos entre 0.0000 y 0.9999, lo cual equivaldría a lanzar un dado con 10,000 caras, cada una numerada del 0.0000 al 0.9999, de manera que cada número en este rango tiene la misma probabilidad de aparecer. La forma de utilizar estas tablas es seleccionar un renglón o una columna, y leer los números hasta agotarla y proseguir con la siguiente. En este caso la asignación de los eventos sería:

Número aleatorio	Dirección
0.0000 a 0.2499	N
0.2500 a 0.4999	S
0.5000 a 0.7499	E
0.7500 a 0.9999	W

Esta forma de generar eventos al azar se conoce como generación pseudoaleatoria. Tiene la ventaja de que, especificando la selección de los números aleatorios, se pueden repetir todas las ocurrencias de un experimento; son fáciles y rápidas de manejar pero pueden llegar a agotarse y, al repetirse una secuencia, se pierde la aleatoreidad de los eventos, de aquí su nombre de pseudoaleatorios. Una tabla de números aleatorios lo suficientemente grande como para satisfacer una simulación complicada, puede consumir una cantidad excesiva de memoria en la computadora.





PRACTICA N°2: Selección aleatoria de números.

· Introducción: Los modelos de simulación deben reflejar en forma más o menos exacta, el comportamiento del sistema. Un estudio detallado de él, permite observar dónde está presente la incertidumbre y obtener la distribución de frecuencia relativa del evento. Con esta distribución se desea comprobar si los eventos aleatorios se pueden ajustar a una distribución específica, teórica o arbitraria. Este paso es el primero, tanto en estudios de simulación, como para aplicar las técnicas analíticas de la investigación de operaciones. La forma de decidir si los datos siguen esta distribución, es por medio de las pruebas de bondad de ajuste.

PRUEBAS DE BONDAD DE AJUSTE.

Estas pruebas sirven para efectuar inferencias acerca de la distribución de la población. Se toma una muestra y se prueba la hipótesis nula de la forma general:

H_0: la muestra corresponde a una distribución dada.

Se puede probar cualquier distribución sin importar si es bien conocida (binomial, Poisson, normal, etc.) o es arbitraria. La hipótesis alternativa es siempre de la forma:

H_1: la muestra no corresponde a la distribución dada.

Una prueba de H_0 contra H_1, se llama prueba de bondad de ajuste. Hay dos pruebas utilizadas para evaluar la bondad de ajuste.

1.- La prueba χ^2, que está basada en un estadígrafo χ^2 aproximado.

2.- La prueba de Kolmogorov-Smirnov (K-S). Esta es una prueba no paramétrica, ya que usa un estadígrafo prueba que no requiere suposiciones acerca de la distribución.

La prueba χ^2 (chi-cuadrada) es la mejor para probar una distribución discreta, y la prueba K-S es la mejor para distribuciones contínuas en donde los valores de los parámetros se especifican independientemente de los datos de la muestra. Para determinar cuál usar, hay que contestar las siguientes preguntas:

1.- ¿Es la distribución discreta o contínua?

2.- ¿Se especifican los parámetros de la distribución? Si no se especifican se deben estimar de la muestra.

PRUEBAS APROPIADAS PARA BONDAD DE AJUSTE

¿Es la distribución discreta o contínua?	¿Los parámetros se especifican o se estiman?	Prueba a usarse
discreta	especificados	χ^2
discreta	estimados	χ^2
contínua	especificados	K-S
contínua	estimados	χ^2

Hay que tener presente que una prueba de bondad de ajuste no se puede usar para seleccionar la mejor distribución, sino que después de que se escogió la distribución, la prueba utiliza los datos observados para determinar, estadísticamente, si la selección fue buena.

PRUEBA DE AJUSTE χ^2 (CHI-CUADRADA) PARA DISTRIBUCIONES DISCRETAS.

La prueba chi-cuadrada usa un estadígrafo prueba que tiene una distribución χ^2 aproximada. Es una medida de la diferencia relativa entre los valores de frecuencia, observados y esperados, para cada valor de la variable.

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

donde k=número de valores diferentes de la variable

O_i=valor observado de la frecuencia

E_i=valor esperado teórico de la frecuencia

Los valores E_i son el producto del tamaño de la muestra y la probabilidad de la distribución hipotetizada.

$$E_i = nP_i$$

Los grados de libertad para leer el nivel crítico en las tablas de la distribución chi-cuadrada se calculan por:

$$\nu = k - r - 1$$

donde r es el número de parámetros de la distribución que se estiman a partir de los datos.

SECUENCIA PARA LAS PRUEBAS.

La secuencia para las pruebas de bondad de ajuste es:

1.- Establezca las hipótesis. Desarrolle las formas exactas de H_0 y H_1.

2.- Seleccione el nivel de significancia α. El valor más común es $\alpha = 0.05$

3.- Estime los parámetros necesarios a partir de los datos.

4.- Calcule el estadígrafo prueba.

5.- Determine las regiones de aceptación y de rechazo por medio de los valores leídos en las tablas de la distribución adecuada.

6.- Rechace o no rechace H_0. Si el estadígrafo prueba cae en la región de aceptación, no rechace H_0. Si cae en la región de rechazo, también llamada región crítica, rechace H_0.

Las pruebas de bondad de ajuste siempre son de una sola rama, de manera que la región de aceptación de H_0 es para todos los valores del estadígrafo prueba menores que el valor crítico leído en las tablas.

EJEMPLO: Se verá un ejemplo de la prueba chi-cuadrada para ajustar una distribución teórica discreta

Un gerente de producción cree que el número de artículos defectuosos en un lote de tamaño fijo, de un proceso de producción, tiene distribución binomial. Para investigar esta suposición, tomó muestras de 20 artículos repetidamente, y registró el número de artículos defectuosos. Esto lo hizo 80 veces con los siguientes resultados:

Nº de artículos defectuosos	frecuencia
0	33
1	25
2	13
3	7
4	2

Comente la aplicabilidad del modelo binomial a esta situación.

SOLUCION: Aplicando la secuencia establecida se tiene

1.- H_0: el número de artículos defectuosos en lotes de tamaño 20 tiene distribución binomial.

H_1: el número de artículos defectuosos en lotes de tamaño 20 no tiene distribución binomial.

2.- $\alpha = 0.05$ (nivel de significancia)

3.- n = 20; p = 80/1600 = 0.05 (parámetros estimados para la distribución binomial).

4.-

Nº de artículos defectuosos	O_i	P_i	$E_i = nP_i$
0	33	0.3585	28.68
1	25	0.3774	30.19
2	13	0.1887	15.09
3	7 } 9	0.0596	4.78 } 5.84
4	2	0.0133	1.06

Aplicando la fórmula de la prueba chi-cuadrada y con los valores de la tabla anterior, el estadígrafo prueba $X^2 = 3.5438$.

Nota importante: en la prueba chi-cuadrada, todos los valores esperados de la frecuencia E_i deben tener un valor mínimo de 5, para que la aproximación sea adecuada. Si es necesario, se deben combinar valores de E_i y de O_i adyacentes para garantizar que todas las $E_i \geq 5$. Esta adición se debe hacer de forma tal que la combinación sea realista.

En la tabla anterior, para garantizar esta condición, se agruparon los valores 3 y 4 ya que en ellos el valor de E_i era menor que 5. Esta reducción también se debe tomar en cuenta al determinar el número de grados de libertad que se requieren para leer el valor crítico de las tablas.

5.- De la tabla de la distribución chi-cuadrada con $\alpha = 0.05$ y $\nu = 4 - 1 - 1 = 2$ grados de libertad, el nivel crítico es de $\chi^2_c = 5.99$.

6.- Ya que el valor del estadígrafo prueba es menor que el del nivel crítico, es decir cae en la región de aceptación, se acepta H_0, de manera que se puede concluir que el número de artículos defectuosos en un lote de tamaño 20 tiene distribución binomial con parámetro p = 0.05.

EJEMPLO: aplicación de la prueba chi-cuadrada para ajustar una distribución arbitraria.

El administrador de un colegio necesita predecir el tamaño de la población estudiantil de primer ingreso para el próximo semestre. Se conoce el número de alumnos aceptados, pero nó cuántos

de éstos se inscribirán. Una muestra aleatoria de los registros de años pasados muestra el siguiente resultado: de 200 individuos aceptados, se inscribieron 140. Por otro lado, un colega del administrador, dice que el 80% de los alumnos aceptados se inscribirán. Pruebe la hipótesis del colega del administrador.

SOLUCION: aplicando la secuencia establecida

1.- H_0: el porciento de los alumnos aceptados que se inscriben es 80.

H_1: el porciento de los alumnos aceptados que se inscriben es distinto de 80.

2.- $\alpha = 0.05$ (nivel de significancia).

3.- No se requiere estimar ningún parámetro.

4.- Para calcular el estadígrafo prueba se construye la siguiente tabla:

	Observado en los datos O_i	Según la hipótesis del colega E_i
alumnos aceptados que se inscriben	140	160
alumnos aceptados que no se inscriben	60	40

El estadígrafo prueba se calcula aplicando la fórmula:

$$\chi^2 = \frac{(140 - 160)^2}{160} + \frac{(60 - 40)^2}{40} = 12.5$$

5.- De la tabla de la distribución chi-cuadrada con el nivel de significancia establecido y $\nu = 2 - 1 = 1$ grado de libertad, el nivel crítico es de 3.841.

6.- El estadígrafo prueba 12.5 cae en la región de rechazo de H_0, de manera que no hay bases estadísticas para aceptar la hipótesis del colega del administrador.

LA PRUEBA CHI-CUADRADA PARA DISTRIBUCIONES CONTINUAS.

El procedimiento para probar cualquier distribución continua es idéntico al anterior, excepto que los datos se deben agrupar en k celdas, antes de calcular E_i para la distribución hipotetizada. Debe haber cuando menos cinco celdas, y la probabilidad P_i de que la variable esté en la celda i se usa para calcular E_i. Se debe de garantizar también que el número de observaciones esperadas por celda sea mayor o igual que cinco.

EJEMPLO: Se registró el tiempo entre llegadas de 200 clientes a una taquilla.

Tiempo min.	1	2	3	4	5	6	7
frecuencia	60	30	40	30	20	10	10

¿Se ajustan los datos a una distribución exponencial?

SOLUCION: aplicando la secuencia establecida:

1.- H_0: el tiempo entre llegadas tiene distribución exponencial.

H_1: el tiempo entre llegadas no tiene distribución exponencial.

2.- $\alpha = 0.05$ (nivel de significancia).

3.- Para poder calcular las probabilidades de cada celda de acuerdo a la distribución exponencial, es necesario calcular el parámetro β, que corresponde a la media de la distribución. $\beta = 2.45$ min.

4.- Para calcular el estadígrafo prueba se construye la siguiente tabla:

Celda	O_i	P_i	$E_i = nP_i$	$(O_i - E_i)^2/E_i$
0 - 1	60	0.3351	67.026	0.7365
1 - 2	30	0.2228	44.564	4.7597
2 - 3	40	0.1481	29.629	3.6301
3 - 4	30	0.0985	19.699	5.3866
4 - 5	20	0.0655	13.098	3.6370
5 - 6	10	0.0435	8.708	0.1917
6 - 7	10	0.0289	5.789	3.0631
				21.4048

El estadígrafo prueba $\chi^2 = 21.4048$.

5.- De la tabla de la distribución chi-cuadrada con un nivel de significancia del 5% y $\nu = 7 - 1 - 1 = 5$ grados de libertad, se tiene que el nivel crítico $\chi^2_c = 11.07$.

6.- Ya que el estadígrafo prueba cae en la región de rechazo por ser mayor que el nivel crítico, se rechaza H_0, es decir, el tiempo entre llegadas de clientes a una taquilla no tiene distribución exponencial.

LA PRUEBA DE KOLMOGOROV-SMIRNOV.

Esta prueba se usa para determinar si la muestra proviene de una población que tiene una distribución continua cuando se especifican sus parámetros. Es una prueba exacta para cualquier tamaño de muestra, y para efectuarla se debe de determinar la función de distribución acumulada (función de probabilidad acumulada) de los datos observados, y la función de distribución acumulada de la distribución estipulada en H_0. El estadígrafo prueba d, es la máxima diferencia absoluta entre las dos funciones de distribución acumuladas, para todos los valores observados. El rango de d es $0 \leq d \leq 1$, y la fórmula es:

$$d = \max_x |S(x) - F(x)|$$

donde x = cada valor observado

S(x) = función de distribución acumulada para los datos observados

F(x) = función de distribución acumulada teórica

Para calcular el nivel crítico de esta prueba, se proporciona una tabla con niveles de significancia de 0.10, 0.05 y 0.01. Si el estadígrafo prueba calculado no excede el nivel crítico obtenido de la tabla, se acepta la hipótesis nula.

Para calcular el estadígrafo prueba d, se deben seguir los pasos mostrados a continuación, los cuales se deben colocar en el paso 4 de la secuencia de las pruebas de hipótesis mencionada anteriormente.

a) Ordene la muestra de menor a mayor

$$x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$$

b) Calcule la función de distribución acumulada observada para cada x: $S(x) = i/n$

c) Use la expresión matemática para calcular F(x) según la distribución teórica hipotetizada.

d) Calcule las diferencias $|S(x) - F(x)|$

e) Calcule $d = \max_x |S(x) - F(x)|$

EJEMPLO: El taller mecánico para reparar las camionetas del servicio de agua, se diseñó de manera que el tiempo de inspección tuviera una distribución uniforme con límites de 10 y 15 minutos. Se tomó una muestra de la duración de 10 tiempos de inspección, con los siguientes resultados: 11.3, 10.4, 9.8, 12.6, 14.8, 13

14.3, 13.3, 11.5 y 13.6.

¿Corresponde la muestra a una distribución uniforme?

Solución. De acuerdo a la secuencia establecida se tiene

1.- H_0: la muestra corresponde a una población con distribución uniforme entre 10 y 15 minutos.

H_1: la muestra no corresponde a una población con distribución uniforme.

2.- $\alpha = 0.05$ (nivel de significancia).

3.- Se especifican los parámetros.

4.- Los pasos establecidos para calcular el estadígrafo prueba d dan origen a la siguiente tabla:

i	x	S(x)	F(x)	|S(x) - F(x)|
1	9.8	0.1	0.00	0.10
2	10.4	0.2	0.08	0.12
3	11.3	0.3	0.26	0.04
4	11.5	0.4	0.30	0.10
5	12.6	0.5	0.52	0.02
6	13.0	0.6	0.60	0.00
7	13.3	0.7	0.66	0.04
8	13.6	0.8	0.72	0.08
9	14.3	0.9	0.86	0.04
10	14.8	1.0	0.96	0.04

Recordamos que para calcular la función de distribución acumulada de la distribución uniforme se tiene la fórmula

$$F(x) = (x-a)/(b-a) = (x-10)/5$$

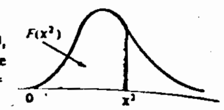
El estadígrafo prueba es simplemente el valor máximo de la última columna, es decir, d = 0.12.

5.- De la tabla de la prueba de Kolmogorov-Smirnov, con un nivel de significancia del 5% y un tamaño de muestra n = 10, el nivel crítico d = 0.41.

6.- Como el estadígrafo prueba es menor que el nivel crítico, es decir, cae dentro de la región de aceptación, se acepta H_0, o sea que la muestra proviene de una población con distribución uniforme entre 10 y 15 minutos.

Table III. Fractiles of the χ^2 Distribution

This table gives the .005, .01, .025, .05, .10, .25, .50, .75, .90, .95, .975, .99, .995, and .999 fractiles of the χ^2 distribution with ν degrees of freedom for ν = 1(1)30(10)100.



Example: For ν = 14, the .025 fractile is 5.62872.

ν	$F(\chi^2)$ .005	.01	.025	.05	.10	.25	.50
1	392704·10⁻¹⁰	157088·10⁻⁹	982069·10⁻⁹	393214·10⁻⁸	0.0157908	0.1015308	0.454937
2	0.0100251	0.0201007	0.0506356	0.102587	0.210720	0.575364	1.38629
3	0.0717212	0.114832	0.215795	0.351846	0.584375	1.212534	2.36597
4	0.206990	0.297110	0.484419	0.710721	1.063623	1.92255	3.35670
5	0.411740	0.554300	0.831211	1.145476	1.61031	2.67460	4.35146
6	0.675727	0.872085	1.237347	1.63539	2.20413	3.45460	5.34812
7	0.989265	1.239043	1.68987	2.16735	2.83311	4.25485	6.34581
8	1.344419	1.646482	2.17973	2.73264	3.48954	5.07064	7.34412
9	1.734926	2.087912	2.70039	3.32511	4.16816	5.89883	8.34283
10	2.15585	2.55821	3.24697	3.94030	4.86518	6.73720	9.34182
11	2.60321	3.05347	3.81575	4.57481	5.57779	7.58412	10.3410
12	3.07382	3.57056	4.40379	5.22603	6.30380	8.43842	11.3403
13	3.56503	4.10691	5.00874	5.89186	7.04150	9.29906	12.3398
14	4.07468	4.66043	5.62872	6.57063	7.78953	10.1653	13.3393
15	4.60094	5.22935	6.26214	7.26094	8.54675	11.0365	14.3389
16	5.14224	5.81221	6.90766	7.96164	9.31223	11.9122	15.3385
17	5.69724	6.40776	7.56418	8.67176	10.0852	12.7919	16.3381
18	6.26481	7.01491	8.23075	9.39046	10.8649	13.6753	17.3379
19	6.84398	7.63273	8.90655	10.1170	11.6509	14.5620	18.3376
20	7.43386	8.26040	9.59083	10.8508	12.4426	15.4518	19.3374
21	8.03366	8.89720	10.28293	11.5913	13.2396	16.3444	20.3372
22	8.64272	9.54249	10.9823	12.3380	14.0415	17.2396	21.3370
23	9.26042	10.19567	11.6885	13.0905	14.8479	18.1373	22.3369
24	9.88623	10.8564	12.4011	13.8484	15.6587	19.0372	23.3367
25	10.5197	11.5240	13.1197	14.6114	16.4734	19.9393	24.3366
26	11.1603	12.1981	13.8439	15.3791	17.2919	20.8434	25.3364
27	11.8076	12.8786	14.5733	16.1513	18.1138	21.7494	26.3363
28	12.4613	13.5648	15.3079	16.9279	18.9392	22.6572	27.3363
29	13.1211	14.2565	16.0471	17.7083	19.7677	23.5666	28.3362
30	13.7867	14.9535	16.7908	18.4926	20.5992	24.4776	29.3360
40	20.7065	22.1643	24.4331	26.5093	29.0505	33.6603	39.3354
50	27.9907	29.7067	32.3574	34.7642	37.6886	42.9421	49.3349
60	35.5346	37.4848	40.4817	43.1879	46.4589	52.2938	59.3347
70	43.2752	45.4418	48.7576	51.7393	55.3290	61.6983	69.3344
80	51.1720	53.5400	57.1532	60.3915	64.2778	71.1445	79.3343
90	59.1963	61.7541	65.6466	69.1260	73.2912	80.6247	89.3342
100	67.3276	70.0648	74.2219	77.9295	82.3581	90.1332	99.3341

Table III (continued)

ν	$F(\chi^2)$ .75	.90	.95	.975	.99	.995	.999
1	1.32330	2.70554	3.84146	5.02389	6.63490	7.87944	10.828
2	2.77259	4.60517	5.99147	7.37776	9.21034	10.5966	13.816
3	4.10835	6.25139	7.81473	9.34840	11.3449	12.8381	16.266
4	5.38527	7.77944	9.48773	11.1433	13.2767	14.8602	18.467
5	6.62568	9.23635	11.0705	12.8325	15.0863	16.7496	20.515
6	7.84080	10.6446	12.5916	14.4494	16.8119	18.5476	22.458
7	9.03715	12.0170	14.0671	16.0128	18.4753	20.2777	24.322
8	10.2188	13.3616	15.5073	17.5346	20.0902	21.9550	26.125
9	11.3887	14.6837	16.9190	19.0228	21.6660	23.5893	27.877
10	12.5489	15.9871	18.3070	20.4831	23.2093	25.1882	29.588
11	13.7007	17.2750	19.6751	21.9200	24.7250	26.7569	31.264
12	14.8454	18.5494	21.0261	23.3367	26.2170	28.2995	32.909
13	15.9833	19.8119	22.3621	24.7356	27.6883	29.8194	34.528
14	17.1170	21.0642	23.6848	26.1190	29.1413	31.3193	36.123
15	18.2451	22.3072	24.9958	27.4884	30.5779	32.8013	37.697
16	19.3688	23.5418	26.2962	28.8454	31.9999	34.2672	39.252
17	20.4887	24.7690	27.5871	30.1910	33.4087	35.7185	40.790
18	21.6049	25.9894	28.8693	31.5264	34.8053	37.1564	42.312
19	22.7178	27.2036	30.1435	32.8523	36.1908	38.5822	43.820
20	23.8277	28.4120	31.4104	34.1696	37.5662	39.9968	45.315
21	24.9348	29.6151	32.6705	35.4789	38.9321	41.4010	46.797
22	26.0393	30.8133	33.9244	36.7807	40.2894	42.7956	48.268
23	27.1413	32.0069	35.1725	38.0757	41.6384	44.1813	49.728
24	28.2412	33.1963	36.4151	39.3641	42.9798	45.5585	51.179
25	29.3389	34.3816	37.6525	40.6465	44.3141	46.9278	52.620
26	30.4345	35.5631	38.8852	41.9232	45.6417	48.2899	54.052
27	31.5284	36.7412	40.1133	43.1944	46.9630	49.6449	55.476
28	32.6205	37.9159	41.3372	44.4607	48.2782	50.9933	56.892
29	33.7109	39.0875	42.5569	45.7222	49.5879	52.3356	58.302
30	34.7998	40.2560	43.7729	46.9792	50.8922	53.6720	59.703
40	45.6160	51.8050	55.7585	59.3417	63.6907	66.7659	73.402
50	56.3336	63.1671	67.5048	71.4202	76.1539	79.4900	86.661
60	66.9814	74.3970	79.0819	83.2976	88.3794	91.9517	99.607
70	77.5766	85.5271	90.5312	95.0231	100.425	104.215	112.317
80	88.1303	96.5782	101.879	106.629	112.329	116.321	124.839
90	98.6499	107.565	113.145	118.136	124.116	128.299	137.208
100	109.141	118.498	124.342	129.561	135.807	140.169	149.449

This table is taken from Table 8 of the *Biometrika Tables for Statisticians*, Vol. 1, by Pearson and Hartley, and is reproduced with the kind permission of E. S. Pearson and the trustees of *Biometrika*.

Table XI. Fractiles of D in the Kolmogorov-Smirnov One-Sample Test

n	$F(D)$ .80	.85	.90	.95	.99
1	[illegible]	.925	.950	.975	.995
2	[illegible]	.726	.776	.842	.929
3	.565	.597	.642	.708	.828
4	.494	.525	.564	.624	.733
5	.446	.474	.510	.565	.669
6	.410	.436	.470	.521	.618
7	.381	.405	.438	.486	.577
8	.358	.381	.411	.457	.543
9	.339	.360	.388	.432	.514
10	[illegible]	.342	.368	.410	.490
11	.307	.326	.352	.391	.468
12	.295	.313	.338	[illegible]	.450
13	.284	.302	.325	[illegible]	.433
14	.274	.292	.314	.349	.418
15	.266	.283	.304	.338	.404
16	.258	.274	.295	.328	.392
17	.250	.266	.280	.318	.381
18	.244	.259	.278	309	.371
19	.237	.252	.272	301	.363
20	.231	.246	.264	294	.356
25	.21	.22	.24	.27	.32
30	.19	.20	.22	.24	.29
35	.18	.19	.21	.23	.27
Over 35	$1.07/\sqrt{n}$	$1.14/\sqrt{n}$	$1.22/\sqrt{n}$	$1.36/\sqrt{n}$	$1.63/\sqrt{n}$

This table is reproduced by permission, adapted from F. J. Massey, "The Kolmogorov-Smirnov Test for Goodness of Fit," *Journal of the American Statistical Association*, 46, 70 (1951).

Para mostrar cómo estas pruebas permiten efectuar inferencias sobre el mundo real, se realizará el siguiente ejercicio.

Ejercicio: se pide a cada alumno que seleccione, en forma aleatoria, tres de los siguientes veinte números: 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29 y 30. Si la selección fue completamente aleatoria, cada una de las siguientes hipótesis debe ser cierta:

1) Los 20 números son igualmente probables.

2) Los 10 números pares juntos son tan probables como los 10 números nones juntos.

3) Los 6 números primos juntos tienen probabilidad de 0.3 y los otros números juntos tienen probabilidad de 0.7

Se deben probar estas hipótesis utilizando el método adecuado.

PRACTICA N°3: Simulación para decidir si se lanza o nó, al mercado, un producto.

Introducción: en la simulación se deben generar datos o eventos aleatorios que están presentes en el comportamiento del sistema. Una técnica para hacerlo es el método de Monte Carlo, en el cual los números aleatorios uniformes entre 0 y 1, se usan para producir una corriente de variables aleatoreizadas, que duplican la experiencia esperada que produciría la distribución de probabilidad especificada.

El método Monte Carlo. El método consiste de los siguientes pasos:

1) Se grafican o tabulan los datos de interés (no los números aleatorios) como una función de distribución de probabilidad acumulada, con los valores de la variable en el eje X, y las probabilidades de 0 a 1 en el eje Y.

2) Se selecciona un número aleatorio entre 0 y 1.

3) Se proyecta horizontalmente el punto en el eje Y, correspondiente a este número aleatorio, hasta que se intercepte la curva.

4) Se proyecta hacia abajo el punto de intersección en la curva al eje X.

5) El valor de X que se lee en el eje, se utiliza como valor de la muestra.

6) Se repite la secuencia hasta obtener el número necesario de observaciones.

Para ilustrar la aplicación de esta técnica, se resolverá el siguiente ejemplo.

Problema: una compañía está considerando lanzar al mercado un nuevo producto. Se sabe con confianza razonable que el costo fijo será de $250,000.00 y el precio de venta debe ser de $50.00 por razones competitivas. La compañía desea alcanzar, cuando menos, el punto de equilibrio en el primer año de ventas. El problema surge porque existe incertidumbre en los costos variables, los cuales pueden ser cualquier valor en el intervalo de $23.75 a $26.~~25~~. La demanda parece que dependerá de la reacción de la competencia. Si ésta reacciona fuertemente durante el primer año, las ventas esperadas serán de 8,000, 9,000 o 10,000 unidades. Si la reacción no es fuerte las ventas pueden ser de 10,000, 11,000 o 12,000 unidades. La compañía cree que existe un 60% de probabilidad de que sus competidores reaccionen fuertemente. El gerente de esta compañía quiere saber si con todos estos riesgos debe lanzar el producto al mercado, quiere tener una idea de la probabilidad que existe de alcanzar el punto de equilibrio.

Solución: la ecuación básica del modelo es la que proporciona el beneficio en función del precio de venta, los costos fijo y variable y la demanda. La ecuación es la siguiente:

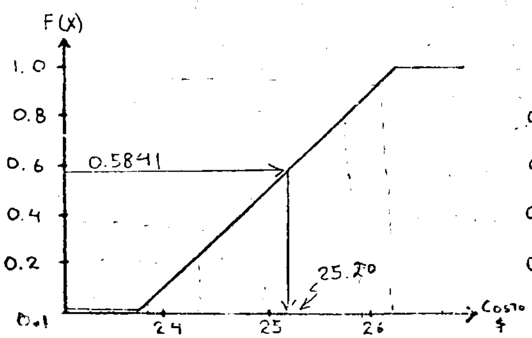
beneficio = (precio de venta - costo variable)(demanda) - costo fijo

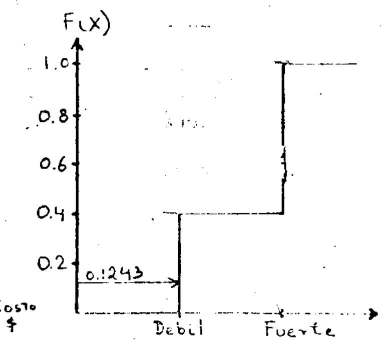
Sustituyendo las cantidades conocidas con certeza, la ecuación queda.

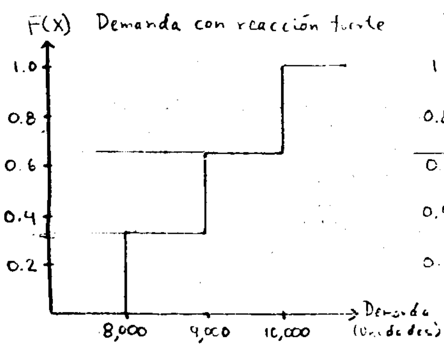
beneficio = (50 - costo variable)(demanda) - 250,000

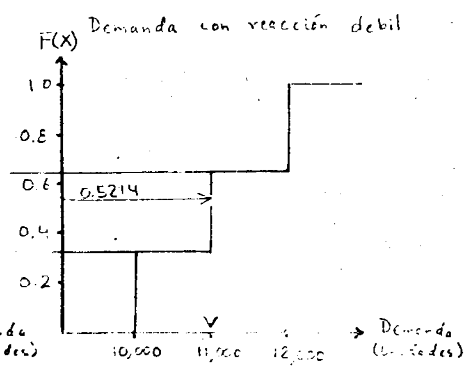
Aquí, cada experimento consistirá en calcular un beneficio, para lo cual hay que calcular: 1) el costo variable, 2) la reacción de la competencia y, 3) en función de la reacción de la competencia, la demanda. Todos los cálculos se harán por medio del método de Monte Carlo.

1) Gráficas de la distribución de probabilidad acumulada para el costo variable, para la reacción de la competencia y para la demanda.









2) Se requieren, para cada experimento, tres números aleatorios uniformes entre 0 y 1. El primero nos sirve para determinar el costo variable. El segundo sirve para determinar si la reación de la competencia es fuerte o débil. Dependiendo de este resultado, el tercero nos sirve para determinar la demanda.

Los puntos 3), 4) y 5) se ilustran con el siguiente ejemplo:

Experimento #	Número Aleatorio	Costo Variable	Número Aleatorio	Reacción	Número Aleatorio	Demanda
1	0.5841	25.20	0.1243	débil	0.5214	11000

Sustituyendo el costo variable de $25.20 y la demanda de 11,000 unidades que se obtiene por una reacción débil de la competencia, en la ecuación básica del modelo, el beneficio es de $22,800.00.

6) Se prosigue de esta manera hasta obtener, cuando menos, 20 beneficios. Si el beneficio es una cantidad positiva, se sobrepasó el punto de equilibrio. Si es una cantidad negativa, se quedó por debajo del punto de equilibrio.

Para obtener un estimador de la probabilidad de sobrepasar el punto de equilibrio, hay que contar cuántas veces se quedó por arriba de él, y dividir este número entre el total de experimentos.

Conclusiones: En esta práctica se puede apreciar que, para aplicar el método de Monte Carlo es necesario obtener la función de distribución de probabilidad para los eventos aleatorios del sistema. Se puede aplicar el método tanto si la distribución es teórica o arbitraria, o las variables son contínuas o discretas. Este método se puede implementar en una computadora usando comparaciones lógicas en vez de las gráficas o tablas del paso 1) del método de Monte Carlo.

$y = 0.4x - 9.5$

$x - 2.5y \; 23.75$

$y = \frac{x - 23.75}{2.5}$

PRACTICA N°4: Simulación de incendios.

Introducción: para generar los eventos aleatorios en los experimentos de una simulación, se pueden utilizar métodos totalmente aleatorios como puede ser lanzar un par de dados, lanzar monedas, girar una ruleta, etc. También se pueden usar métodos pseudoaleatorios como es la tabla de números aleatorios. Dentro de estos métodos existen fórmulas matemáticas para generar números aleatorios con las principales distribuciones de probabilidad teóricas. La base para su generación son los números pseudoaleatorios uniformemente distribuidos entre 0 y 1.

a) Números pseudoaleatorios uniformes (0,1).

El algoritmo más común para generar números aleatorios produce una secuencia no aleatoria de números, cada número está completamente determinado por su predecesor y, en consecuencia, todos los números están determinados por el número inicial.

El generador tiene la forma:

$$Z_{i+1} \equiv aZ_i + c(\text{mod } m) \qquad i = 1,\ldots,n$$

Z_0 es el número inicialmente especificado o semilla, y el símbolo congruencial $\equiv$ y la operación módulo (mod n) significan que

$$Z_{i+1} = aZ_i + c - \left[\frac{aZ_i + c}{m}\right] m$$

donde los paréntesis [ ] indican que se toma el mayor entero que exista en la cantidad dentro de ellos.

Ejemplo: con a = 4, c = 0, m = 5 y Z_0 = 3

i		Z	u
0		3	0.6
1	(4)(3) + 0 −	[((4)(3) + 0)/5] 5 = 2	0.4
2	(4)(2) + 0 −	[((4)(2) + 0)/5] 5 = 3	0.6

Los valores Z_i no pueden ser mayores que m, de manera que los números pseudoaleatorios en el intervalo (0,1) se obtienen por:

$$U_i = Z_i/m$$

Esta forma de generar números pseudoaleatorios se conoce como método de generación lineal congruencial. Cuando c = 0 se conoce como congruencial multiplicativo, si c ≠ 0 se llama congruencial mixto. Tiene las siguientes ventajas: 1) requiere de muy poca memoria en una calculadora, 2) cuando a, c y m se escogen de acuerdo a las características de la computadora o calculadora, se pueden producir los números en forma muy eficiente, 3) dando la misma semilla se pueden reproducir las secuencias, 4) se puede interrumpir y restablecer el orden de la secuencia simplemente conservando el último número.

Otra fórmula para generar números pseudoaleatorios uniformes (0,1) apropiada para pequeñas calculadoras es:

$$U_{i+1} = \text{parte fraccionaria } (\pi + U_i)^5$$

Se debe especificar únicamente U_0 cumpliendo con que se encuentre en el intervalo (0,1). Con esta fórmula se obtuvieron los números pseudoaleatorios de la tabla anexa.

b) Números pseudoaleatorios uniformes (a,b)

Para generar números pseudoaleatorios uniformes entre cualesquiera límites a y b (se tiene la certeza de que no ocurren números menores que a ni mayores que b) se utiliza la función de distribución de probabilidad acumulada F(X), la cual se iguala al número uniforme (0,1)

$$F(X) = (X_i - a)/(b - a) = U_i \qquad U_i \text{ es aleatorio uniforme } (0,1)$$

$$X_i = (b - a)U_i + a \qquad X_i \text{ es aleatorio uniforme } (a,b)$$

Ejemplo: para generar números aleatorios uniformes entre 23.75 y 26.25

U_i	X_i
0.5841	(2.5)(0.5841) + 23.75 = 25.20
0.1243	(2.5)(0.1243) + 23.75 = 24.06
0.5214	(2.5)(0.5214) + 23.75 = 25.05

c) Números pseudoaleatorios Poisson (λt).

Para generar números aleatorios con distribución de Poisson con media igual a λt, hay que generar números aleatorios uniformes (0,1) hasta que se cumpla la siguiente condición

$$\prod_{i=0}^{X} \geq e^{-\lambda t} > \prod_{i=0}^{X+1}$$

X es aleatorio Poisson con media λt, y es igual al número de aleatorios uniformes (0,1) menos 2, que se requirieron para que se cumpliera la condición.

Ejemplo: generar tres números aleatorios Poisson con media $\lambda t = 4$

$e^{-\lambda t} = e^{-4} = 0.0183$

Primer número

i	U_i	$\prod U_i$
0	0.6625	0.6625
1	0.4791	0.3174
2	0.5934	0.1883
3	0.1118	0.0211
4	0.5076	0.0107

Para que se cumpliera la condición, se requirieron 5 números aleatorios uniformes (0,1), de manera que el número aleatorio Poisson es 5 - 2 = 3.

Segundo número

i	U_i	$\prod U_i$
0	0.8381	0.8381
1	0.6337	0.5311
2	0.5778	0.3069
3	0.1569	0.0481
4	0.4061	0.0196
5	0.5793	0.0113

Para que se cumpliera la condición, se requirieron 6 números aleatorios uniformes (0,1), de manera que el número aleatorio Poisson es 6 - 2 = 4.

Tercer número

i	U_i	$\prod U_i$
0	0.2741	0.2741
1	0.8712	0.2388
2	0.5051	0.1206
3	0.0788	0.0095

Para que se cumpliera la condición, se requirieron 4 números aleatorios uniformes (0,1), de manera que el número aleatorio Poisson es 4 - 2 = 2.

d) Números pseudoaleatorios exponenciales $(1/\beta)$.

Para generar números pseudoaleatorios con distribución exponencial y media igual a β, se genera un número aleatorio uniforme (0,1) y se aplica la siguiente fórmula:

$X_i = -\beta \ln U_i$ $\quad U_i$ es aleatorio uniforme (0,1).

Ejemplo: generar 10 números aleatorios exponenciales con media igual a 1.5

i	U_i	X_i
1	0.3484	1.5816
2	0.0587	4.2530
3	0.0552	4.3452
4	0.8917	0.1719
5	0.3261	1.6808
6	0.9944	0.0084
7	0.2567	2.0398
8	0.8566	0.2322
9	0.5587	0.8732
10	0.1483	2.8628

e) Números pseudoaleatorios normales con media 0 y variancia 1.

Para generar números aleatorios con distribución normal, media igual a 0 y variancia igual a 1, se deben seguir los pasos que se presentan a continuación:

1.- Generar dos números aleatorios uniformes (0,1), U_1 y U_2

2.- Calcular $V_1 = 2U_1 - 1$ y $V_2 = 2U_2 - 1$

3.- Calcular $S = V_1^2 + V_2^2$

4.- Si S es mayor o igual a 1, se regresa al paso 1, si no, se continúa al paso 5.

5.- Calcular $R = \sqrt{(-2\ln S)/S}$

6.- Calcular $Z_1 = V_1 R$ y $Z_2 = V_2 R$

Z_1 y Z_2 son números aleatorios con distribución normal, media 0 y variancia 1.

Ejemplo: generar 6 números aleatorios N(0,1)

U_1	U_2	V_1	V_2	S	Z_1	Z_2
0.6418	0.1952	0.2836	-0.6096	0.4520	0.5315	-1.1426
0.8137	0.0650	0.6274	-0.8700	1.1505	-	-
0.6897	0.4770	0.3794	-0.0460	0.1461	1.9472	-0.2361
0.6817	0.9007	0.3634	0.8014	0.7743	0.2954	0.6514

Como se puede apreciar se requieren más de 6 números aleatorios uniformes (0,1) para generar 6 números aleatorios N(0,1). En promedio, para generar 100 aleatorios N(0,1) se requieren 120 uniformes (0,1).

f) Números pseudoaleatorios normales $N(\mu, \sigma)$.

Para generar números aleatorios con distribución normal, cualquier media μ y desviación estandar σ, se aplica la siguiente transformación:

$x_i = z_i \sigma + \mu$ $\qquad$ z_i es número aleatorio N(0,1).

Para ilustrar la aplicación de las fórmulas anteriores se resolverá el siguiente ejemplo:

Problema: el jefe de bomberos de cierta población, ha encontrado que el número de incendios que ocurren en un día sigue una distribución de Poisson con media de 4 fuegos. Examinando incendios anteriores el jefe encuentra que el 75% de todos ellos requieren un solo camión, y el tiempo necesario para apagarlos está normalmente distribuido con media de 3 horas y desviación estandar de 0.5 hr. El 25% restante requiere de 2 camiones y el tiempo para apagarlos está normalmente distribuido con media de 4 hr. y desviación estandar de 1 hora. Se tienen suficientes camiones para responder a la demanda. ¿Cuál es la demanda promedio diaria, en horas por día, de cada camión? Use una muestra de 10 días.

Solución: aquí un experimento es observar lo que sucede un día determinado. La secuencia de solución es como sigue:

1.- Para cada día, encontrar el número de incendios que se presentan, por medio de números aleatorios con distribución Poisson y media igual a 4.

2.- Para cada incendio del día, determinar si se requerirán 1 o 2 camiones para apagarlo.

3.- Una vez determinado el tipo de incendio, para cada uno de ellos hay que calcular el tiempo que requiere apagarlos.

4.- Terminados los 10 días, se hace el cálculo de las horas multiplicando el tiempo que se requirió para apagar el incendio por el número de camiones necesario para apagarlo. Se suman todos estos valores y se divide el resultado entre 10.

Ejemplo:

Día	Número incendios	Tipo 1 o 2 camiones	tiempo	hr-camión
1	1	1	3.69	3.69
	2	1	2.61	2.61
	3	1	2.76	2.76
	4	1	2.54	2.54
	5	2	3.11	6.22

Conclusiones: Disponer de fórmulas que permitan generar números aleatorios con las más importantes distribuciones teóricas, facilita efectuar los experimentos de la simulación en calculadoras y computadoras electrónicas, lo cual agiliza la obtención de los resultados. Se puede obtener una fórmula para generar números aleatorios para cualquier distribución contínua de la que se disponga su función de probabilidad acumulada expresada como una ecuación.

0.5841	0.8719	0.3987	0.6625	0.5793	0.2140	0.6418	0.1952	0.6890
0.1243	0.5626	0.3851	0.4791	0.2741	0.9648	0.8137	0.0650	0.0315
0.5214	0.4276	0.2494	0.5934	0.8712	0.5210	0.6897	0.4770	0.4489
0.3635	0.0695	0.4183	0.1118	0.5051	0.8735	0.6817	0.9007	0.2536
0.7063	0.5647	0.3740	0.5076	0.0788	0.3816	0.1505	0.7060	0.2769
0.0441	0.1257	0.3322	0.8381	0.2509	0.3455	0.8541	0.5229	0.8250
0.8565	0.5663	0.8578	0.6337	0.9148	0.2809	0.9412	0.5023	0.4727
0.2130	0.8034	0.4647	0.5778	0.7939	0.0245	0.7740	0.4398	0.2147
0.9642	0.7858	0.4199	0.1569	0.4628	0.3965	0.8949	0.5343	0.1744
0.0001	0.0802	0.1163	0.4061	0.9564	0.7705	0.9150	0.4844	0.7882
0.0088	0.3197	0.8231	0.3484	0.7861	0.7167	0.2582	0.1941	0.9637
0.5778	0.7774	0.4496	0.0587	0.6898	0.6378	0.1089	0.8858	0.5677
0.2645	0.4127	0.2008	0.0552	0.8767	0.6493	0.1904	0.7197	0.3413
0.1485	0.5228	0.8009	0.8917	0.3701	0.0712	0.4863	0.4326	0.3295
0.4778	0.1005	0.2055	0.3261	0.4445	0.1037	0.8540	0.3477	0.2302
0.0612	0.0232	0.5068	0.9944	0.3383	0.2992	0.8129	0.1021	0.0730
0.3895	0.9658	0.9910	0.2567	0.1989	0.9741	0.2670	0.1150	0.2554
0.3947	0.0382	0.0744	0.8566	0.6900	0.8026	0.3585	0.2880	0.4556
0.0290	0.4225	0.1384	0.5587	0.7473	0.4883	0.3343	0.4088	0.1537
0.6181	0.1811	0.0262	0.1483	0.3959	0.9339	0.5434	0.5202	0.3272
0.9751	0.2828	0.9164	0.2805	0.3096	0.6178	0.2433	0.3211	0.8485
0.3660	0.9714	0.0573	0.9314	0.9477	0.5280	0.3699	0.8644	0.7440
0.9406	0.6114	0.4933	0.4099	0.0453	0.7366	0.6595	0.4949	0.9763
0.5461	0.0190	0.4043	0.3133	0.2678	0.6335	0.0424	0.2272	0.8707
0.5849	0.6194	0.5447	0.7582	0.0209	0.3399	0.8285	0.2806	0.3569
0.6665	0.8405	0.2856	0.4630	0.4999	0.3611	0.0624	0.6314	0.5559
0.7827	0.6529	0.6289	0.2171	0.3884	0.1230	0.1056	0.0257	0.7518
0.0627	0.8197	0.3623	0.8222	0.4390	0.5657	0.6053	0.5536	0.9861
0.1206	0.4227	0.2312	0.3125	0.6338	0.0475	0.2268	0.6165	0.6356
0.4420	0.9932	0.5196	0.8571	0.3046	0.0357	0.8270	0.3832	0.0655
0.8648	0.1817	0.3869	0.7935	0.5649	0.5462	0.2733	0.3914	0.4715
0.9604	0.3597	0.2232	0.1050	0.7157	0.9557	0.7119	0.6768	0.6783
0.2966	0.4622	0.8182	0.7822	0.1060	0.2697	0.3086	0.8613	0.7715
0.6126	0.7466	0.6636	0.9218	0.6910	0.9143	0.4897	0.4274	0.0592
0.7320	0.0743	0.9670	0.5160	0.5670	0.5511	0.9678	0.8469	0.3336
0.6359	0.1799	0.2521	0.6210	0.1503	0.5507	0.8609	0.2151	0.1499
0.1616	0.2795	0.6412	0.2137	0.2824	0.6059	0.3516	0.0938	0.5119
0.6047	0.9325	0.3720	0.1346	0.4427	0.6148	0.9377	0.5661	0.6716
0.4749	0.6616	0.3121	0.9604	0.4009	0.9166	0.2325	0.3161	0.2659
0.4051	0.1672	0.6175	0.7331	0.3561	0.4638	0.3729	0.2072	0.1705

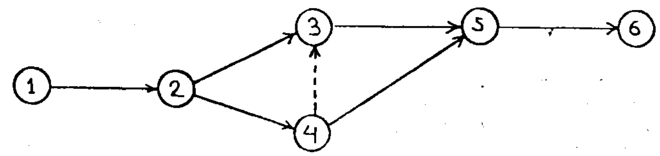
Tabla de Números Aleatorios
uniformemente distribuidos entre 0.0000 y 0.9999

Random normal numbers $\mu = 0, \sigma = 1$.

1.38	-1.73	0.33	0.24	-0.29	1.93	-1.40	0.51	0.71
-0.77	-0.69	1.32	-0.93	-1.14	-0.06	-0.35	1.04	0.10
-0.48	0.06	0.43	-0.24	2.63	0.65	-0.38	1.25	0.43
-0.92	0.53	0.51	0.65	-0.40	0.68	0.05	-0.45	-0.00
-0.89	-0.04	-0.01	1.64	1.46	-0.14	0.36	0.43	-0.08
-1.02	0.64	-0.13	0.22	-0.94	-0.64	-0.00	-0.31	0.45
1.61	0.42	1.19	-1.98	1.04	-0.69	-0.83	-0.78	-1.13
0.40	-0.38	-0.92	-1.11	-0.01	1.10	-1.83	-0.57	0.93
0.74	-1.36	-1.60	-0.35	-1.78	1.17	-0.73	-0.87	0.80
-1.96	-0.93	0.91	-0.72	0.08	-0.61	-0.89	1.04	-3.33
1.39	-0.61	-0.98	0.76	-1.22	0.99	-1.29	-0.12	-1.15
1.70	-0.83	-0.91	0.43	-1.11	0.04	-1.96	-0.06	0.47
-0.51	0.93	-0.67	0.92	-0.72	-0.47	0.15	0.30	0.71
-1.85	-0.52	-0.79	0.66	1.70	-1.02	1.82	-0.42	-0.38
-0.13	-0.13	-0.55	-0.07	-2.08	-0.35	-0.17	0.20	-0.51
-1.99	-1.14	-0.42	0.46	-0.61	-0.78	0.77	0.33	0.76
0.15	0.02	0.10	-0.33	-0.52	0.18	0.38	0.23	0.56
-0.38	0.32	0.11	-0.65	0.30	-0.36	0.54	0.33	-1.26
0.62	0.32	-1.42	1.01	0.10	-0.20	0.71	-1.25	-0.52
-1.09	-0.09	0.17	1.75	-0.86	0.93	-0.98	0.41	-0.48
1.08	0.64	-0.42	0.66	0.24	-0.08	-1.10	0.74	1.83
-0.70	0.59	-1.50	-0.13	0.81	0.43	0.21	-0.09	-0.98
1.76	-0.25	1.08	0.06	-0.50	-0.46	0.06	0.64	0.10
-1.45	0.10	2.04	-1.40	0.34	0.02	-1.94	-0.41	-0.99
-0.82	0.11	-1.78	0.23	-0.47	0.13	-0.78	1.24	0.56
-0.36	-0.14	-0.16	1.33	-0.28	-1.01	-0.63	-0.52	2.00
0.01	-0.23	-1.82	0.69	-0.12	0.51	-0.82	-0.44	0.85
-1.36	-0.20	0.92	-1.10	-0.23	1.90	-0.32	-0.21	1.08
-0.06	-0.73	1.03	-0.72	-0.10	-2.27	0.41	0.69	1.34
-2.39	-0.74	-0.84	-0.60	0.07	0.50	1.10	-1.25	-0.19
-1.40	-0.49	-0.35	-0.91	1.57	-1.08	-0.09	-0.27	-1.98
0.45	1.90	0.13	-0.90	-0.23	-1.44	0.24	-0.48	-0.89
0.38	-0.43	0.57	0.27	1.44	-0.79	1.10	0.60	1.34
-1.22	1.50	1.03	-1.71	0.50	-0.26	-1.96	-0.97	-0.88
2.36	-0.32	0.86	-0.02	-2.56	0.55	-0.33	-0.03	-0.35
0.82	0.89	0.53	-0.81	2.23	-0.48	-0.32	2.86	1.08
0.12	1.00	-1.01	0.22	0.81	0.62	1.48	-0.93	-2.71
0.26	-1.18	0.62	-0.20	0.17	0.01	-0.59	-0.85	0.18
-0.33	0.56	-0.28	-1.31	-1.06	-1.28	-0.57	-0.36	0.55
3.14	-0.20	1.54	-1.24	-2.39	-1.11	-0.52	-0.57	0.50
1.31	-0.90	-0.04	-0.29	0.25	-1.41	1.32	-0.26	0.47
0.73	-0.96	-1.38	-0.73	-1.17	-0.79	-1.02	1.53	-0.21
-1.52	0.97	0.69	0.07	0.08	0.34	-1.26	-1.34	-0.22
0.35	-0.76	1.17	-2.07	0.94	-0.07	1.71	2.44	1.45

PRACTICA N°5: Simulación para determinar el tiempo de terminación de un proyecto.

Problema: El siguiente diagrama ilustra la red de actividades de un proyecto. La duración de cada actividad es incierta, con las distribuciones de probabilidad indicadas.



Tiempo (sem.)	Probabilidad para la actividad (1,2)	(2,4)	(3,5)	(4,5)
1			0.1	0.3
2	0.1	0.2	0.2	0.1
3	0.2	0.3	0.3	0.1
4	0.4	0.4	0.4	0.3
5	0.2	0.1		0.2
6	0.1			

La actividad (4,3) es una actividad ficticia con duración determinística de cero semanas. La duración de la actividad (2,3) sigue una distribución exponencial con media de 2 semanas. La duración de la actividad (5,6) sigue una distribución normal con media de 4 semanas y desviación estandar de 1 semana.

a) Utilizando las probabilidades indicadas, calcula los tiempos de duración esperados de cada actividad y determina la ruta crítica del proyecto.

b) Simula 10 veces la terminación del proyecto.

c) ¿Cuál es la duración promedio del proyecto basándote en la simulación?

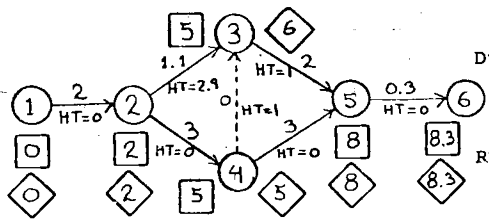
d) ¿Cuál es la probabilidad, para cada actividad de que se encuentre en la ruta crítica?

Solución: cada experimento consiste en asignar, en forma aleatoria (por medio de números aleatorios) una duración a cada actividad del proyecto. Aplicar el método de la ruta crítica y determinar así la duración total del proyecto y cuáles actividades se encuentran en la ruta crítica. Sumando los tiempos totales de duración del proyecto y dividiendo el resultado entre el número total de experimentos, se obtiene el tiempo medio de duración. Para determinar la probabilidad de que una actividad se encuentre dentro de la ruta crítica, se calcula cuántas veces estuvo en ella y se divide entre el número total de experimentos.

Experimento	# aleat.	(1,2)	# aleat.	(2,3)	# aleat.	(2,4)
1	0.0088	2	0.5778	1.1	0.2642	3
2	0.0612	2	0.3895	1.9	0.3947	3
3	0.3197	4	0.7774	0.5	0.4127	3

Experimento	# aleat.	(3,5)	# aleat.	(4,5)	# aleat.	(5,6)
1	0.1485	2	0.4778	3	-1.73	0.3
2	0.0290	1	0.6181	4	-0.69	3.3
3	0.5228	3	0.1005	1	0.06	4.1

Red del Experimento 1

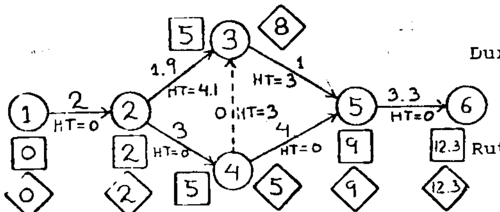


Duración 8.3 semanas = 58 días

Ruta crítica

1 → 2 → 4 → 5 → 6

Red del Experimento 2

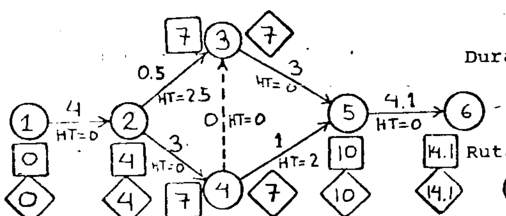


Duración 12.3 semanas = 86 días

Ruta crítica

1 → 2 → 4 → 5 → 6

Red del Experimento 3



Duración 14.1 semanas = 99 días

Ruta crítica

1 → 2 → 4 → 3 → 5 → 6

De acuerdo a esta simulación de tres experimentos, la duración promedio del proyecto es de (58 + 86 + 99)/3 = 81 días.

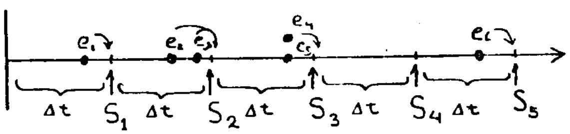
Las probabilidades de que una actividad se encuentre dentro de la ruta crítica son:

Actividad	Probabilidad
(1,2)	1
(2,3)	0
(2,4)	1
(3,5)	1/3
(4,3)	1/3
(4,5)	2/3
(5,6)	1

PRACTICA N°6: Simulación de un taller de tornos.

Introducción: Ya que la mayoría de los estudios de simulación conciernen con la operación de un sistema a lo largo de un período de tiempo, una de las consideraciones más importantes al diseñar un modelo y al seleccionar el lenguaje con el que se simulará, es la forma de llevar el tiempo de simulación. Llevar el tiempo de simulación tiene dos aspectos o funciones: el avanzar el tiempo y el preveer la sincronización delos varios elementos y ocurrencia de los eventos. Ya que las acciones de cada elemento dependen del estado y acciones de otros elementos, se deben coordinar y sincronizar en el tiempo. De manera que el modelo se debe diseñar para que el tiempo en la simulación se mueva causando que, los eventos, ocurran en el orden apropiado y con los intervalos apropiados entre eventos sucesivos. Existen dos mecanismos básicos para mover el tiempo de simulación: el incremento en intervalos constantes y el movimiento hasta el primer evento. El primer método actualiza el tiempo en el sistema, por intervalcs de tiempo de longitud fija. El segundo método actualiza el tiempo del sistema, hasta la ocurrencia de algún evento significativo, sin importar el tamaño del intervalo entre los eventos.

a) Incremento en intervalos constantes



El tiempo de simulación asume sucesivamente los valores

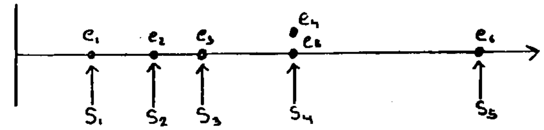
$S_1 = \Delta t \quad S_2 = 2\Delta t \quad S_3 = 3\Delta t \quad S_4 = 4\Delta t \quad S_5 = 5\Delta t$

Se puede ver que siempre se avanza la misma cantidad de tiempo Δt. Si el tiempo de simulación se fija en un valor S_K, todos los eventos con tiempos de ocurrencia e_p, e_q, e_r, ... tales que

$S_{K-1} < e_p, e_q, e_r, \ldots \leq S_K$

se procesan antes de que el tiempo de simulación avance hasta el siguiente valor S_{K+1}. De manera que el tamaño de Δt tiene una influencia crítica en la simulación, ya que la ocurrencia de todos los eventos parece suceder en el tiempo del límite superior del intervalo, es decir, e_1 parece ocurrir en S_1, e_2 y e_3 parecen ocurrir en S_2, etc. Si el tamaño del intervalo se escoge en $2\Delta t$, e_1, e_2 y e_3 parecerían ocurrir en S_2, e_3 y e_4 en S_4, y los resultados son totalmente diferentes.

b) Incremento hasta el primer evento.



Cada vez que cambia el tiempo de simulación, el reloj avanza hasta el tiempo exacto en que ocurre el evento futuro más próximo. El tiempo de simulación S_i será: S_1 = ocurrencia de e_1, S_2 = ocurrencia de e_2, S_3 = ocurrencia de e_3, S_4 = ocurrencia de e_4 y e_5, que son simultáneos, etc. Se recomienda usar este método cuando: 1) los eventos ocurren regularmente, 2) en modelos iniciales, cuando los efectos no son bien conocidos y 3) cuando la duración de los eventos es corta.

La forma de manejar el tiempo de la simulación se ilustrará en el siguiente ejemplo.

Problema: un taller que trabaja 24 horas siete días a la semana, tiene tres turnos que son el equipo más caro y mas importante. Hay una sola máquina que puede reparar los tornos y trabaja con un solo torno a la vez, está disponible las 24 horas del día. El tiempo de operación antes de cada falla tiene distribución exponencial con media de 10 horas y es independiente en cada torno. El tiempo de reparación tiene distribución exponencial con media de 1.5 horas. La idea es simular un mes de operación del taller con objeto de obtener las siguientes estadísticas: la media y desviación estandar, para cada torno, de las horas por día de operación, horas por día en reparación y horas por día en espera para reparación.

a) Solución utilizando el método de incremento en intervalos constantes.

El primer paso es determinar la longitud del intervalo Δt. Para hacerlo, hay que recordar que si la ocurrencia entre eventos tiene distribución exponencial, la ocurrencia de los eventos es Poisson. Así que, en este caso, la ocurrencia de fallas es Poisson con parámetro $\lambda = 0.1$ máquinas/hr; la ocurrencia de la terminación de composturas es también Poisson con parámetro $\lambda = 2/3$ máquinas/hr. El tamaño del intervalo Δt, se debe seleccionar de tal manera que en él sólo ocurran o una descompostura o ninguna, o una terminación de reparación o ninguna. Si la fórmula de Poisson da el número de éxitos en n intentos, en un proceso cuya intensidad es λ y en un intervalo de tamaño t, se debe buscar un Δt tal que sólo exista una probabilidad para 0 o para 1 éxito, definiendo un éxito como una descompostura o la no terminación de una reparación. Debe existir probabilidad casi cero o cero para valores mayores que los especificados.

De las tablas de la probabilidad de Poisson se tiene que, para $\lambda t = 0.1$:

$P(X=0) = 0.9048$
$P(X=1) = 0.0905$
$P(X=2) = 0.0045$
$P(X=3) = 0.0002$
$P(X\ 4) = 0.0000$

Para la ocurrencia de fallas $\lambda = 0.1$ máquinas/hr, de manera que t = 1 hr = 60 min., cumple los requisitos.

Para la terminación de reparaciones $\lambda = 2/3$ máquinas/hr , de manera que t = (0.1)(3/2) = 3/20 = 0.15 hr = 9 min., cumple con los requisitos.

De los dos valores se debe seleccionar el menor, es decir t = 9 min. = 0.15 hr , que cumplirá los requisitos en los dos casos. Con este intervalo se tiene que para fallas $\lambda t_f = 0.015$. Para reparación $\lambda t_r = 0.1$. Aplicando la fórmula de Poisson para calcular probabilidades se tiene:

X	$\lambda t_f = 0.015$	$\lambda t_r = 0.1$
0	0.9851	0.9048
1	0.0149	0.0952

La forma de proceder es la siguiente: se comienza con las tres máquinas operando, se mueve el reloj de simulación 9 min. y se calculan tres números aleatorios. Si los números se encuentran entre 0.0000 y 0.9851 la máuina sigue funcionando. Sé el número se encuentra entre 0.9852 y 0.9999, ésto implica que la máquina se descompone. Cuando una máquina se descompone sólo se cambia el rango de comparación; si el número se encuentra entre 0.0000 y 0.9048, no se termina la reparación; si se encuentra entre 0.9049 y 0.9999, se termina la reparación. Para simular un mes de 30 días de operación, se tiene que mover el reloj 4,800 veces, es decir, hay 4,800 intervalos de 9 min. en un período de 30 días. Ejemplo:

	Máquina 1		Máquina 2		Máquina 3	
Reloj	# aleatorio	estatus	# aleatorio	estatus	# aleatorio	estatus
0	-	op.	-	op.	-	op.
9	0.5841	op.	0.1243	op.	0.5214	op.
18	0.3635	op.	0.7063	op.	0.0441	op.
27	0.8565	op.	0.2130	op.	0.9642	op.
36	0.9861	desc	0.6336	op.	0.0655	op.
45	0.2733	desc	0.7119	op.	0.3086	op.
54	0.4897	desc	0.9678	op.	0.8609	op.
63	0.3516	desc	0.9377	op.	0.2325	op.
72	0.9539	op.	0.8571	op.	0.3046	op.

En los 72 min. mostrados de la simulación, sólo se descompuso la máquina 1, lo cual ocurrió en el minuto 36. La compostura de la máquina se terminó en el minuto 72, de manera que estuvo 36 min. en reparación. Esta secuencia se tiene que repetir 4,800 veces. Se requieren 14,400 números aleatorios. Con la información que muestra

una tabla como la del ejemplo, se pueden calcular las estadísticas solicitadas.

b) Solución utilizando el método de incrementar hasta el primer evento.

Con este método hay que calcular, para cada máquina, un tiempo de operación o un tiempo de reparación, según sea el caso, aplicando la fórmula para generar números aleatorios con distribución exponencial. El siguiente ejemplo muestra la forma en que se mueve el tiempo de simulación para cada uno de los eventos de las máquinas. El tiempo está expresado en horas.

	Máquina 1			Máquina 2			Máquina 3		
Reloj	op.	rep.	esp.	op.	rep.	esp.	op.	rep.	esp.
0	5.37			20.85			6.51		
5.37		5.57							
5.57	15.69								
6.51								7.37	
7.37							10.85		
10.85									

Como se puede ver, la máquina 1 es la primera en descomponerse en la hora 5.37. Su reparación termina en la hora 5.57. El siguiente evento más próximo es la descompostura de la máquina 3 en la hora 6.51, la reparación se termina en la hora 7.37. Y así sucesivamente. La forma de llevar la información es más compleja, pero más rápida y requiere de muchos menos números aleatorios.

Conclusiones: con esta práctica queda bien ejemplificada la forma de mover el reloj de una simulación, con las ventajas y desventajas de cada método, lo cual permite para un problema dado seleccionar el método más apropiado.

ANALISIS Y SIMULACION DE UN PROBLEMA DE INVENTARIOS

Un artículo simple de inventario debe solicitarse bajo un sistema de punto reorden-cantidad de pedido. La demanda y el tiempo de entrega del artículo varían aleatoriamente de acuerdo a las siguientes distribuciones:

#.Unidades demandadas	Probabilidad	
5	0.01	
6	0.03	0.04
7	0.06	0.10
8	0.11	0.21
9	0.19	0.40
10	0.31	0.71
11	0.17	0.88
12	0.07	0.95
13	0.03	0.98
14	0.02	1.00

Tiempo de Entrega (días)	Probabilidad.	
2	0.15	
3	0.20	0.35
4	0.30	0.65
5	0.20	0.85
6	0.15	1.00

En caso de que el inventario llegue a cero y exista demanda del artículo, hay cierta probabilidad de que se pierdan los pedidos, lo cual depende -- del número de días que se retrase.

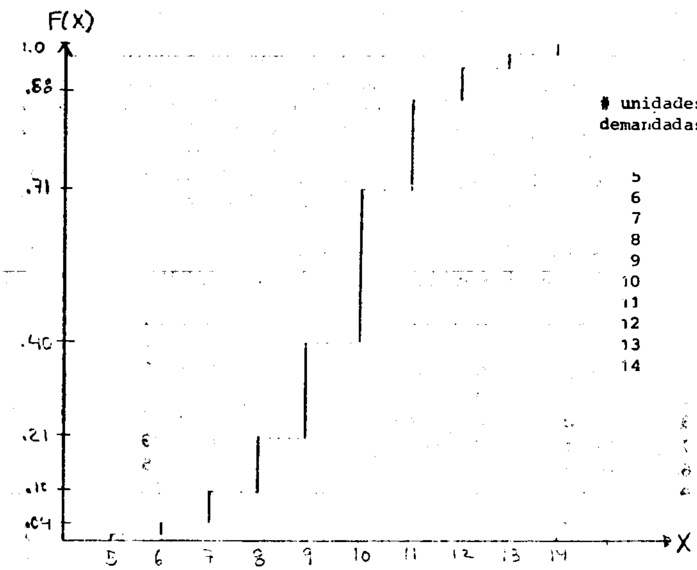
# de días de retraso.	Probabilidad de pérdida.	
0	0.3	
1	0.1	0.40
2	0.15	0.55
3	0.20	0.75
4	0.25	1.00

La tabla se interpreta de la siguiente manera. Hay una probabilidad de 0.3 de que si llega un pedido y no hay inventario con que surtirlo, éste se -- pierda. Una probabilidad de 0.1 de que si llega un pedido y no hay inventario éste espere un día y si no llega una orden a reemplazar el inventario, éste se pierda

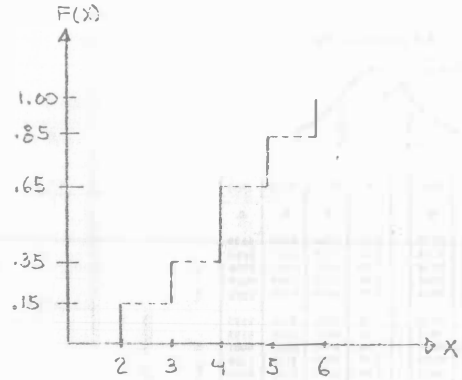
Se puede ver que ningún pedido esperará más de 4 días a que se reponga el inventario.

El artículo cuesta $500.00 la unidad para la compra, y se vende a - - $1,000.00 cada uno. Los costos de mantenimiento de inventario, son del 35% anual respecto al valor (precio de compra) del inventario promedio. El costo de pedir y recibir cada orden, es de $2,000.00 independientemente del tamaño del pedido. Cuesta $1,000.00 registrar un nuevo pedido cuando no puede surtirse la demanda y la pérdida de órdenes debido a la falta de existencias es de $500.00 por concepto de margen de beneficio unitario.

El objetivo es hallar el punto de reorden y la cantidad de pedidos que reduzcan al mínimo el costo anual total del artículo.



# unidades demandadas	F(x)
5	0.01
6	0.04
7	0.10
8	0.21
9	0.40
10	0.71
11	0.88
12	0.95
13	0.98
14	1.00



Tiempos de Entrega	F(x)
2	0.15
3	0.35
4	0.65
5	0.85
6	1.00

CONTROL DE CALIDAD

Una empresa recibe lotes de 150 artículos que va a ensamblar. Quitar una pieza defectuosa del ensamble y reemplazarla por una buena cuesta $50,00. El costo anterior podría evitarse inspeccionando totalmente el lote - pero ésto costaría $120,00 por lote más $20,00 por pieza inspeccionada. ¿Qué conviene más, inspeccionar el 100% - del lote o no inspeccionar? Hay incertidumbre en cuanto a la fracción defectuosa que trae el lote. Pero se tiene la historia de los últimos 10 lotes recibidos.

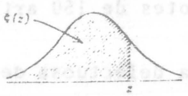
# de Lote	# de Defectuosos
1	102
2	32
3	69
4	62
5	58
6	54
7	48
8	23
9	42
10	81

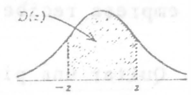
Se piensa que quizá convenga instalar un muestreo de aceptación. Se quiere determinar cuál será el tamaño óptimo de la muestra y cuál el límite de aceptación.

APENDICE

3 Distribución normal

Tabla 3a. Función de distribución (3) de la sección 8.2



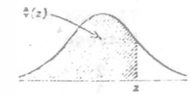


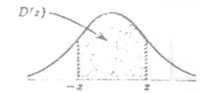
$D(z) = \Phi(z) - \Phi(-z)$
$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z), \qquad \Phi(0) = 0.5$

Tablas más extensas: National Bureau of Standards (1953), Hald (1962). Indice para tablas: Greenwood and Hartley (1961) (ver el apéndice 3).

z	Φ(−z)	Φ(z)	D(z)
	0.	0.	0.
0.01	4960	5040	0080
0.02	4920	5080	0160
0.03	4880	5120	0239
0.04	4840	5160	0319
0.05	4801	5199	0399
0.06	4761	5239	0478
0.07	4721	5279	0558
0.08	4681	5319	0638
0.09	4641	5359	0717
0.10	4602	5398	0797
0.11	4562	5438	0876
0.12	4522	5478	0955
0.13	4483	5517	1034
0.14	4443	5557	1113
0.15	4404	5596	1192
0.16	4364	5636	1271
0.17	4325	5675	1350
0.18	4286	5714	1428
0.19	4247	5753	1507
0.20	4207	5793	1585
0.21	4168	5832	1663
0.22	4129	5871	1741
0.23	4090	5910	1819
0.24	4052	5948	1897
0.25	4013	5987	1974
0.26	3974	6026	2051
0.27	3936	6064	2128
0.28	3897	6103	2205
0.29	3859	6141	2282
0.30	3821	6179	2358
0.31	3783	6217	2434
0.32	3745	6255	2510
0.33	3707	6293	2586
0.34	3669	6331	2661
0.35	3632	6368	2737
0.36	3594	6406	2812
0.37	3557	6443	2886
0.38	3520	6480	2961
0.39	3483	6517	3035
0.40	3446	6554	3108
0.41	3409	6591	3182
0.42	3372	6628	3255
0.43	3336	6664	3328
0.44	3300	6700	3401
0.45	3264	6736	3473
0.46	3228	6772	3545
0.47	3192	6808	3616
0.48	3156	6844	3688
0.49	3121	6879	3759
0.50	3085	6915	3829
0.51	3050	6950	3899
0.52	3015	6985	3969
0.53	2981	7019	4039
0.54	2946	7054	4108
0.55	2912	7088	4177
0.56	2877	7123	4245
0.57	2843	7157	4313
0.58	2810	7190	4381
0.59	2776	7224	4448
0.60	2743	7257	4515
0.61	2709	7291	4581
0.62	2676	7324	4647
0.63	2643	7357	4713
0.64	2611	7389	4778
0.65	2578	7422	4843
0.66	2546	7454	4907
0.67	2514	7486	4971
0.68	2483	7517	5035
0.69	2451	7549	5098
0.70	2420	7580	5161
0.71	2389	7611	5223
0.72	2358	7642	5285
0.73	2327	7673	5346
0.74	2296	7704	5407
0.75	2266	7734	5467
0.76	2236	7764	5527
0.77	2206	7794	5587
0.78	2177	7823	5646
0.79	2148	7852	5705
0.80	2119	7881	5763
0.81	2090	7910	5821
0.82	2061	7939	5878
0.83	2033	7967	5935
0.84	2005	7995	5991
0.85	1977	8023	6047
0.86	1949	8051	6102
0.87	1922	8078	6157
0.88	1894	8106	6211
0.89	1867	8133	6265
0.90	1841	8159	6319
0.91	1814	8186	6372
0.92	1788	8212	6424
0.93	1762	8238	6476
0.94	1736	8264	6528
0.95	1711	8289	6579
0.96	1685	8315	6629
0.97	1660	8340	6680
0.98	1635	8365	6729
0.99	1611	8389	6778
1.00	1587	8413	6827
1.01	1562	8438	6875
1.02	1539	8461	6923
1.03	1515	8485	6970
1.04	1492	8508	7017
1.05	1469	8531	7063
1.06	1446	8554	7109
1.07	1423	8577	7154
1.08	1401	8599	7199
1.09	1379	8621	7243
1.10	1357	8643	7287
1.11	1335	8665	7330
1.12	1314	8686	7373
1.13	1292	8708	7415
1.14	1271	8729	7457
1.15	1251	8749	7499
1.16	1230	8770	7540
1.17	1210	8790	7580
1.18	1190	8810	7620
1.19	1170	8830	7660
1.20	1151	8849	7699
1.21	1131	8869	7737
1.22	1112	8888	7775
1.23	1093	8907	7813
1.24	1075	8925	7850
1.25	1056	8944	7887
1.26	1038	8962	7923
1.27	1020	8980	7959
1.28	1003	8997	7995
1.29	0985	9015	8029
1.30	0968	9032	8064
1.31	0951	9049	8098
1.32	0934	9066	8132
1.33	0918	9082	8165
1.34	0901	9099	8198
1.35	0885	9115	8230
1.36	0869	9131	8262
1.37	0853	9147	8293
1.38	0838	9162	8324
1.39	0823	9177	8355
1.40	0808	9192	8385
1.41	0793	9207	8415
1.42	0778	9222	8444
1.43	0764	9236	8473
1.44	0749	9251	8501
1.45	0735	9265	8529
1.46	0721	9279	8557
1.47	0708	9292	8584
1.48	0694	9306	8611
1.49	0681	9319	8638
1.50	0668	9332	8664

Tabla 3a. Función de distribución (3) de la sección 8.2 *(continuación)*





z	Φ(−z)	Φ(z)	D(z)
	0.	0.	0.
1.51	0655	9345	8690
1.52	0643	9357	8715
1.53	0630	9370	8740
1.54	0618	9382	8764
1.55	0606	9394	8789
1.56	0594	9406	8812
1.57	0582	9418	8836
1.58	0571	9429	8859
1.59	0559	9441	8882
1.60	0548	9452	8904
1.61	0537	9463	8926
1.62	0526	9474	8948
1.63	0516	9484	8969
1.64	0505	9495	8990
1.65	0495	9505	9011
1.66	0485	9515	9031
1.67	0475	9525	9051
1.68	0465	9535	9070
1.69	0455	9545	9090
1.70	0446	9554	9109
1.71	0436	9564	9127
1.72	0427	9573	9146
1.73	0418	9582	9164
1.74	0409	9591	9181
1.75	0401	9599	9199
1.76	0392	9608	9216
1.77	0384	9616	9233
1.78	0375	9625	9249
1.79	0367	9633	9265
1.80	0359	9641	9281
1.81	0351	9649	9297
1.82	0344	9656	9312
1.83	0336	9664	9328
1.84	0329	9671	9342
1.85	0322	9678	9357
1.86	0314	9686	9371
1.87	0307	9693	9385
1.88	0301	9699	9399
1.89	0294	9706	9412
1.90	0287	9713	9426
1.91	0281	9719	9439
1.92	0274	9726	9451
1.93	0268	9732	9464
1.94	0262	9738	9476
1.95	0256	9744	9488
1.96	0250	9750	9500
1.97	0244	9756	9512
1.98	0239	9761	9523
1.99	0233	9767	9534
2.00	0228	9772	9545
2.01	0222	9778	9556
2.02	0217	9783	9566
2.03	0212	9788	9576
2.04	0207	9793	9586
2.05	0202	9798	9596
2.06	0197	9803	9606
2.07	0192	9808	9615
2.08	0188	9812	9625
2.09	0183	9817	9634
2.10	0179	9821	9643
2.11	0174	9826	9651
2.12	0170	9830	9660
2.13	0166	9834	9668
2.14	0162	9838	9676
2.15	0158	9842	9684
2.16	0154	9846	9692
2.17	0150	9850	9700
2.18	0146	9854	9707
2.19	0143	9857	9715
2.20	0139	9861	9722
2.21	0136	9864	9729
2.22	0132	9868	9736
2.23	0129	9871	9743
2.24	0125	9875	9749
2.25	0122	9878	9756
2.26	0119	9881	9762
2.27	0116	9884	9768
2.28	0113	9887	9774
2.29	0110	9890	9780
2.30	0107	9893	9786
2.31	0104	9896	9791
2.32	0102	9898	9797
2.33	0099	9901	9802
2.34	0096	9904	9807
2.35	0094	9906	9812
2.36	0091	9909	9817
2.37	0089	9911	9822
2.38	0087	9913	9827
2.39	0084	9916	9832
2.40	0082	9918	9836
2.41	0080	9920	9840
2.42	0078	9922	9845
2.43	0075	9925	9849
2.44	0073	9927	9853
2.45	0071	9929	9857
2.46	0069	9931	9861
2.47	0068	9932	9865
2.48	0066	9934	9869
2.49	0064	9936	9872
2.50	0062	9938	9876
2.51	0060	9940	9879
2.52	0059	9941	9883
2.53	0057	9943	9886
2.54	0055	9945	9889
2.55	0054	9946	9892
2.56	0052	9948	9895
2.57	0051	9949	9898
2.58	0049	9951	9901
2.59	0048	9952	9904
2.60	0047	9953	9907
2.61	0045	9955	9909
2.62	0044	9956	9912
2.63	0043	9957	9915
2.64	0041	9959	9917
2.65	0040	9960	9920
2.66	0039	9961	9922
2.67	0038	9962	9924
2.68	0037	9963	9926
2.69	0036	9964	9929
2.70	0035	9965	9931
2.71	0034	9966	9933
2.72	0033	9967	9935
2.73	0032	9968	9937
2.74	0031	9969	9939
2.75	0030	9970	9940
2.76	0029	9971	9942
2.77	0028	9972	9944
2.78	0027	9973	9946
2.79	0026	9974	9947
2.80	0026	9974	9949
2.81	0025	9975	9950
2.82	0024	9976	9952
2.83	0023	9977	9953
2.84	0023	9977	9955
2.85	0022	9978	9956
2.86	0021	9979	9958
2.87	0021	9979	9959
2.88	0020	9980	9960
2.89	0019	9981	9961
2.90	0019	9981	9963
2.91	0018	9982	9964
2.92	0018	9982	9965
2.93	0017	9983	9966
2.94	0016	9984	9967
2.95	0016	9984	9968
2.96	0015	9985	9969
2.97	0015	9985	9970
2.98	0014	9986	9971
2.99	0014	9986	9972
3.00	0013	9987	9973

Table V. Binomial Probabilities

This table gives binomial probabilities,

$$P(R = r \mid n, p) = \binom{n}{r} p^r (1 - p)^{n-r},$$

for $n = 1(1)20$, $r = 0(1)n$, and $p = .05(.05).50$. For $p > .50$, take $P(r \mid n, p) = P(n - r \mid n, 1 - p)$.

Examples: $P(R = 3 \mid n = 8, p = .25) = .2076$,
and $P(R = 2 \mid n = 5, p = .60) = P(R = 3 \mid n = 5, p = .40) = .2304$.

n	r	.05	.10	.15	.20	.25	.30	.35	.40	.45	.50
1	0	.9500	.9000	.8500	.8000	.7500	.7000	.6500	.6000	.5500	.5000
	1	.0500	.1000	.1500	.2000	.2500	.3000	.3500	.4000	.4500	.5000
2	0	.9025	.8100	.7225	.6400	.5625	.4900	.4225	.3600	.3025	.2500
	1	.0950	.1800	.2550	.3200	.3750	.4200	.4550	.4800	.4950	.5000
	2	.0025	.0100	.0225	.0400	.0625	.0900	.1225	.1600	.2025	.2500
3	0	.8574	.7290	.6141	.5120	.4219	.3430	.2746	.2160	.1664	.1250
	1	.1354	.2430	.3251	.3840	.4219	.4410	.4436	.4320	.4084	.3750
	2	.0071	.0270	.0574	.0960	.1406	.1890	.2389	.2880	.3341	.3750
	3	.0001	.0010	.0034	.0080	.0156	.0270	.0429	.0640	.0911	.1250
4	0	.8145	.6561	.5220	.4096	.3164	.2401	.1785	.1296	.0915	.0625
	1	.1715	.2916	.3685	.4096	.4219	.4116	.3845	.3456	.2995	.2500
	2	.0135	.0486	.0975	.1536	.2109	.2646	.3105	.3456	.3675	.3750
	3	.0005	.0036	.0115	.0256	.0469	.0756	.1115	.1536	.2005	.2500
	4	.0000	.0001	.0005	.0016	.0039	.0081	.0150	.0256	.0410	.0625
5	0	.7738	.5905	.4437	.3277	.2373	.1681	.1160	.0778	.0503	.0312
	1	.2036	.3280	.3915	.4096	.3955	.3602	.3124	.2592	.2059	.1562
	2	.0214	.0729	.1382	.2048	.2637	.3087	.3364	.3456	.3369	.3125
	3	.0011	.0081	.0244	.0512	.0879	.1323	.1811	.2304	.2757	.3125
	4	.0000	.0004	.0022	.0064	.0146	.0284	.0488	.0768	.1128	.1562
	5	.0000	.0000	.0001	.0003	.0010	.0024	.0053	.0102	.0185	.0312
6	0	.7351	.5314	.3771	.2621	.1780	.1176	.0754	.0467	.0277	.0156
	1	.2321	.3543	.3993	.3932	.3560	.3025	.2437	.1866	.1359	.0938
	2	.0305	.0984	.1762	.2458	.2966	.3241	.3280	.3110	.2780	.2344
	3	.0021	.0146	.0415	.0819	.1318	.1852	.2355	.2765	.3032	.3125
	4	.0001	.0012	.0055	.0154	.0330	.0595	.0951	.1382	.1861	.2344
	5	.0000	.0001	.0004	.0015	.0044	.0102	.0205	.0369	.0609	.0938
	6	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0007	.0018	.0041	.0083	.0156
7	0	.6983	.4783	.3206	.2097	.1335	.0824	.0490	.0280	.0152	.0078
	1	.2573	.3720	.3960	.3670	.3115	.2471	.1848	.1306	.0872	.0547
	2	.0406	.1240	.2097	.2753	.3115	.3177	.2985	.2613	.2140	.1641
	3	.0036	.0230	.0617	.1147	.1730	.2269	.2679	.2903	.2918	.2734
	4	.0002	.0026	.0109	.0287	.0577	.0972	.1442	.1935	.2388	.2734
	5	.0000	.0002	.0012	.0043	.0115	.0250	.0466	.0774	.1172	.1641
	6	.0000	.0000	.0001	.0004	.0013	.0036	.0084	.0172	.0320	.0547
	7	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0006	.0016	.0037	.0078

Table V (continued)

n	r	.05	.10	.15	.20	.25	.30	.35	.40	.45	.50
8	0	.6634	.4305	.2725	.1678	.1001	.0576	.0319	.0168	.0084	.0039
	1	.2793	.3826	.3847	.3355	.2760	.1977	.1373	.0896	.0548	.0312
	2	.0515	.1488	.2376	.2936	.3115	.2965	.2587	.2090	.1569	.1094
	3	.0054	.0331	.0839	.1468	.2076	.2541	.2786	.2787	.2568	.2188
	4	.0004	.0046	.0185	.0459	.0865	.1361	.1875	.2322	.2627	.2734
	5	.0000	.0004	.0026	.0092	.0231	.0467	.0808	.1239	.1719	.2188
	6	.0000	.0000	.0002	.0011	.0038	.0100	.0217	.0413	.0703	.1094
	7	.0000	.0000	.0000	.0001	.0004	.0012	.0033	.0079	.0164	.0312
	8	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0007	.0017	.0039
9	0	.6302	.3874	.2316	.1342	.0751	.0404	.0277	.0101	.0046	.0020
	1	.2985	.3874	.3679	.3020	.2253	.1556	.1004	.0605	.0339	.0176
	2	.0629	.1722	.2597	.3020	.3003	.2668	.2162	.1612	.1110	.0703
	3	.0077	.0446	.1069	.1762	.2336	.2668	.2716	.2508	.2119	.1641
	4	.0006	.0074	.0283	.0661	.1168	.1715	.2194	.2508	.2600	.2461
	5	.0000	.0008	.0050	.0165	.0389	.0735	.1181	.1672	.2128	.2461
	6	.0000	.0001	.0006	.0028	.0087	.0210	.0424	.0743	.1160	.1641
	7	.0000	.0000	.0000	.0003	.0012	.0039	.0098	.0212	.0407	.0703
	8	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0004	.0013	.0035	.0083	.0176
	9	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0008	.0020
10	0	.5987	.3487	.1969	.1074	.0563	.0282	.0135	.0060	.0025	.0010
	1	.3151	.3874	.3474	.2684	.1877	.1211	.0725	.0403	.0207	.0098
	2	.0746	.1937	.2759	.3020	.2816	.2335	.1757	.1209	.0763	.0439
	3	.0105	.0574	.1298	.2013	.2503	.2668	.2522	.2150	.1665	.1172
	4	.0010	.0112	.0401	.0881	.1460	.2001	.2377	.2508	.2384	.2051
	5	.0001	.0015	.0085	.0264	.0584	.1029	.1536	.2007	.2340	.2461
	6	.0000	.0001	.0012	.0055	.0162	.0368	.0689	.1115	.1596	.2051
	7	.0000	.0000	.0001	.0008	.0031	.0090	.0212	.0425	.0746	.1172
	8	.0000	.0000	.0000	.0001	.0004	.0014	.0043	.0106	.0229	.0439
	9	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0005	.0016	.0042	.0098
	10	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0010
11	0	.5688	.3138	.1673	.0859	.0422	.0198	.0088	.0036	.0014	.0005
	1	.3293	.3835	.3248	.2362	.1549	.0932	.0518	.0266	.0125	.0054
	2	.0867	.2131	.2866	.2953	.2581	.1998	.1395	.0887	.0513	.0269
	3	.0137	.0710	.1517	.2215	.2581	.2568	.2254	.1774	.1259	.0806
	4	.0014	.0158	.0536	.1107	.1721	.2201	.2428	.2365	.2060	.1611
	5	.0001	.0025	.0132	.0388	.0803	.1231	.1830	.2207	.2360	.2256
	6	.0000	.0003	.0023	.0097	.0268	.0566	.0985	.1471	.1931	.2256
	7	.0000	.0000	.0003	.0017	.0064	.0173	.0379	.0701	.1128	.1611
	8	.0000	.0000	.0000	.0002	.0011	.0037	.0102	.0234	.0462	.0806
	9	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0005	.0018	.0052	.0126	.0269
	10	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0007	.0021	.0054
	11	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0005
12	0	.5404	.2824	.1422	.0687	.0317	.0138	.0057	.0022	.0008	.0002
	1	.3413	.3766	.3012	.2062	.1267	.0712	.0368	.0174	.0075	.0029
	2	.0988	.2301	.2924	.2835	.2323	.1678	.1088	.0639	.0339	.0161
	3	.0173	.0852	.1720	.2362	.2581	.2397	.1954	.1419	.0923	.0537
	4	.0021	.0213	.0683	.1329	.1936	.2311	.2367	.2128	.1700	.1208
	5	.0002	.0038	.0193	.0532	.1032	.1585	.2039	.2270	.2225	.1934
	6	.0000	.0005	.0040	.0155	.0401	.0792	.1281	.1766	.2124	.2256

Table V (continued)

n	r	p .05	.10	.15	.20	.25	.30	.35	.40	.45	.50
12	7	.0000	.0000	.0006	.0033	.0115	.0291	.0591	.1009	.1489	.1934
	8	.0000	.0000	.0001	.0005	.0024	.0078	.0199	.0420	.0762	.1208
	9	.0000	.0000	.0000	.0001	.0004	.0015	.0048	.0125	.0277	.0537
	10	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0008	.0025	.0068	.0161
	11	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0010	.0029
	12	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002
13	0	.5133	.2542	.1209	.0550	.0238	.0097	.0037	.0013	.0004	.0001
	1	.3512	.3672	.2774	.1787	.1029	.0540	.0259	.0113	.0045	.0016
	2	.1109	.2448	.2937	.2680	.2059	.1388	.0836	.0453	.0220	.0095
	3	.0214	.0997	.1900	.2457	.2517	.2181	.1651	.1107	.0660	.0349
	4	.0028	.0277	.0838	.1535	.2097	.2337	.2222	.1845	.1350	.0873
	5	.0003	.0055	.0266	.0691	.1258	.1803	.2154	.2214	.1989	.1571
	6	.0000	.0008	.0063	.0230	.0559	.1030	.1546	.1968	.2169	.2095
	7	.0000	.0001	.0011	.0058	.0186	.0442	.0833	.1312	.1775	.2095
	8	.0000	.0000	.0001	.0011	.0047	.0142	.0336	.0656	.1089	.1571
	9	.0000	.0000	.0000	.0001	.0009	.0034	.0101	.0243	.0495	.0873
	10	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0006	.0022	.0065	.0162	.0349
	11	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0012	.0036	.0095
	12	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0005	.0016
	13	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001
14	0	.4877	.2288	.1028	.0440	.0178	.0068	.0024	.0008	.0002	.0001
	1	.3593	.3559	.2539	.1539	.0832	.0407	.0181	.0073	.0027	.0009
	2	.1229	.2570	.2912	.2501	.1802	.1134	.0634	.0317	.0141	.0056
	3	.0259	.1142	.2056	.2501	.2402	.1943	.1366	.0845	.0462	.0222
	4	.0037	.0349	.0998	.1720	.2202	.2290	.2022	.1549	.1040	.0611
	5	.0004	.0078	.0352	.0860	.1468	.1963	.2178	.2066	.1701	.1222
	6	.0000	.0013	.0093	.0322	.0734	.1262	.1759	.2066	.2088	.1833
	7	.0000	.0002	.0019	.0092	.0280	.0618	.1082	.1574	.1952	.2095
	8	.0000	.0000	.0003	.0020	.0082	.0232	.0510	.0918	.1398	.1833
	9	.0000	.0000	.0000	.0003	.0018	.0066	.0183	.0408	.0762	.1222
	10	.0000	.0000	.0000	.0000	.0003	.0014	.0049	.0136	.0312	.0611
	11	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0010	.0033	.0093	.0222
	12	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0005	.0019	.0056
	13	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0009
	14	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001
15	0	.4633	.2059	.0874	.0352	.0134	.0047	.0016	.0005	.0001	.0000
	1	.3658	.3432	.2312	.1319	.0668	.0305	.0126	.0047	.0016	.0005
	2	.1348	.2669	.2856	.2309	.1559	.0916	.0476	.0219	.0090	.0032
	3	.0307	.1285	.2184	.2501	.2252	.1700	.1110	.0634	.0318	.0139
	4	.0049	.0428	.1156	.1876	.2252	.2186	.1792	.1268	.0780	.0417
	5	.0006	.0105	.0449	.1032	.1651	.2061	.2123	.1859	.1404	.0916
	6	.0000	.0019	.0132	.0430	.0917	.1472	.1906	.2066	.1914	.1527
	7	.0000	.0003	.0030	.0138	.0393	.0811	.1319	.1771	.2013	.1964
	8	.0000	.0000	.0005	.0035	.0131	.0348	.0710	.1181	.1647	.1964
	9	.0000	.0000	.0001	.0007	.0034	.0116	.0298	.0612	.1048	.1527
	10	.0000	.0000	.0000	.0001	.0007	.0030	.0096	.0245	.0515	.0916
	11	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0006	.0024	.0074	.0191	.0417
	12	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0004	.0016	.0052	.0139
	13	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0010	.0032
	14	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0005
	15	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000

Table V (continued)

n	r	p .05	.10	.15	.20	.25	.30	.35	.40	.45	.50
16	0	.4401	.1853	.0743	.0281	.0100	.0033	.0010	.0003	.0001	.0000
	1	.3706	.3294	.2097	.1126	.0535	.0228	.0087	.0030	.0009	.0002
	2	.1463	.2745	.2775	.2111	.1336	.0732	.0353	.0150	.0056	.0018
	3	.0359	.1423	.2285	.2463	.2079	.1465	.0888	.0468	.0215	.0085
	4	.0061	.0514	.1311	.2001	.2252	.2040	.1553	.1014	.0572	.0278
	5	.0008	.0137	.0555	.1201	.1802	.2099	.2008	.1623	.1123	.0667
	6	.0001	.0028	.0180	.0550	.1101	.1649	.1982	.1983	.1684	.1222
	7	.0000	.0004	.0045	.0197	.0524	.1010	.1524	.1889	.1969	.1746
	8	.0000	.0001	.0009	.0055	.0197	.0487	.0923	.1417	.1812	.1964
	9	.0000	.0000	.0001	.0012	.0058	.0185	.0442	.0840	.1318	.1746
	10	.0000	.0000	.0000	.0002	.0014	.0056	.0167	.0392	.0755	.1222
	11	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0013	.0049	.0142	.0337	.0667
	12	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0011	.0040	.0115	.0278
	13	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0008	.0029	.0085
	14	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0005	.0018
	15	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002
	16	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
17	0	.4181	.1668	.0631	.0225	.0075	.0023	.0007	.0002	.0000	.0000
	1	.3741	.3150	.1893	.0957	.0426	.0169	.0060	.0019	.0005	.0001
	2	.1575	.2800	.2673	.1914	.1136	.0581	.0260	.0102	.0035	.0010
	3	.0415	.1556	.2359	.2393	.1893	.1245	.0701	.0341	.0144	.0052
	4	.0076	.0605	.1457	.2093	.2209	.1868	.1320	.0796	.0411	.0182
	5	.0010	.0175	.0668	.1361	.1914	.2081	.1849	.1379	.0875	.0472
	6	.0001	.0039	.0236	.0680	.1276	.1784	.1991	.1839	.1432	.0944
	7	.0000	.0007	.0065	.0267	.0668	.1201	.1685	.1927	.1841	.1484
	8	.0000	.0001	.0014	.0084	.0279	.0644	.1143	.1606	.1883	.1855
	9	.0000	.0000	.0003	.0021	.0093	.0276	.0611	.1070	.1540	.1855
	10	.0000	.0000	.0000	.0004	.0025	.0095	.0263	.0571	.1008	.1484
	11	.0000	.0000	.0000	.0001	.0005	.0026	.0090	.0242	.0525	.0944
	12	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0006	.0024	.0081	.0215	.0472
	13	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0005	.0021	.0068	.0182
	14	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0004	.0016	.0052
	15	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0010
	16	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001
	17	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
18	0	.3972	.1501	.0536	.0180	.0056	.0016	.0004	.0001	.0000	.0000
	1	.3763	.3002	.1704	.0811	.0338	.0126	.0042	.0012	.0003	.0001
	2	.1683	.2835	.2556	.1723	.0958	.0458	.0190	.0069	.0022	.0006
	3	.0473	.1680	.2406	.2297	.1704	.1046	.0547	.0246	.0095	.0031
	4	.0093	.0700	.1592	.2153	.2130	.1681	.1104	.0614	.0291	.0117
	5	.0014	.0218	.0787	.1507	.1988	.2017	.1664	.1146	.0666	.0327
	6	.0002	.0052	.0310	.0816	.1436	.1873	.1941	.1655	.1181	.0708
	7	.0000	.0010	.0091	.0350	.0820	.1376	.1792	.1892	.1657	.1214
	8	.0000	.0002	.0022	.0120	.0376	.0811	.1327	.1734	.1864	.1669
	9	.0000	.0000	.0004	.0033	.0139	.0386	.0794	.1284	.1694	.1855
	10	.0000	.0000	.0001	.0008	.0042	.0149	.0385	.0771	.1248	.1669
	11	.0000	.0000	.0000	.0001	.0010	.0046	.0151	.0374	.0742	.1214
	12	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0012	.0047	.0145	.0354	.0708

Table V (continued)

n	r	.05	.10	.15	.20	.25	.30	.35	.40	.45	.50
18	13	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0012	.0045	.0134	.0327
	14	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0011	.0039	.0117
	15	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0009	.0031
	16	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0006
	17	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001
	18	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
19	0	.3774	.1351	.0456	.0144	.0042	.0011	.0003	.0001	.0000	.0000
	1	.3774	.2852	.1529	.0685	.0268	.0093	.0029	.0005	.0002	.0000
	2	.1787	.2852	.2428	.1540	.0803	.0358	.0138	.0046	.0013	.0003
	3	.0533	.1796	.2428	.2182	.1517	.0869	.0422	.0175	.0062	.0018
	4	.0112	.0798	.1714	.2182	.2023	.1491	.0909	.0467	.0203	.0074
	5	.0018	.0266	.0907	.1636	.2023	.1916	.1468	.0933	.0497	.0222
	6	.0002	.0069	.0374	.0955	.1574	.1916	.1844	.1451	.0949	.0518
	7	.0000	.0014	.0122	.0443	.0974	.1525	.1844	.1797	.1443	.0961
	8	.0000	.0002	.0032	.0166	.0487	.0981	.1489	.1797	.1771	.1442
	9	.0000	.0000	.0007	.0051	.0198	.0514	.0980	.1464	.1771	.1762
	10	.0000	.0000	.0001	.0013	.0066	.0220	.0528	.0976	.1449	.1762
	11	.0000	.0000	.0000	.0003	.0018	.0077	.0233	.0532	.0970	.1442
	12	.0000	.0000	.0000	.0000	.0004	.0022	.0083	.0237	.0529	.0961
	13	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0005	.0024	.0085	.0233	.0518
	14	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0006	.0024	.0082	.0222
	15	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0005	.0022	.0074
	16	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0005	.0018
	17	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003
	18	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	19	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
20	0	.3585	.1216	.0388	.0115	.0032	.0008	.0002	.0000	.0000	.0000
	1	.3774	.2702	.1368	.0576	.0211	.0068	.0020	.0005	.0001	.0000
	2	.1887	.2852	.2293	.1369	.0669	.0278	.0100	.0031	.0008	.0002
	3	.0596	.1901	.2428	.2054	.1339	.0716	.0323	.0123	.0040	.0011
	4	.0133	.0898	.1821	.2182	.1897	.1304	.0738	.0350	.0139	.0046
	5	.0022	.0319	.1028	.1746	.2023	.1789	.1272	.0746	.0365	.0148
	6	.0003	.0089	.0454	.1091	.1686	.1916	.1712	.1244	.0746	.0370
	7	.0000	.0020	.0160	.0545	.1124	.1643	.1844	.1659	.1221	.0739
	8	.0000	.0004	.0046	.0222	.0609	.1144	.1614	.1797	.1623	.1201
	9	.0000	.0001	.0011	.0074	.0271	.0654	.1158	.1597	.1771	.1602
	10	.0000	.0000	.0002	.0020	.0099	.0308	.0686	.1171	.1593	.1762
	11	.0000	.0000	.0000	.0005	.0030	.0120	.0336	.0710	.1185	.1602
	12	.0000	.0000	.0000	.0001	.0008	.0039	.0136	.0355	.0727	.1201
	13	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0010	.0045	.0146	.0366	.0739
	14	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0012	.0049	.0150	.0370
	15	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0003	.0013	.0049	.0148
	16	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0003	.0013	.0046
	17	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0011
	18	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002
	19	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	20	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000

This table is reproduced by permission from R. S. Burington and D. C. May, *Handbook of Probability and Statistics with Tables*. McGraw-Hill Book Company, 1953.

Table VI. Poisson Probabilities

This table gives Poisson probabilities,

$$P(R = r \mid \lambda, t) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^r}{r!},$$

for $\lambda t = .1(.1)10(1)20$ and suitable values of r.

Example: $P(R = 2 \mid \lambda = 1.5, t = 5) = .0156.$

r	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0	.9048	.8187	.7408	.6703	.6065	.5488	.4966	.4493	.4066	.3679
1	.0905	.1637	.2222	.2681	.3033	.3293	.3476	.3595	.3659	.3679
2	.0045	.0164	.0333	.0536	.0758	.0988	.1217	.1438	.1647	.1839
3	.0002	.0011	.0033	.0072	.0126	.0198	.0284	.0383	.0494	.0613
4	.0000	.0001	.0002	.0007	.0016	.0030	.0050	.0077	.0111	.0153
5	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0004	.0007	.0012	.0020	.0031
6	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0003	.0005
7	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001

r	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
0	.3329	.3012	.2725	.2466	.2231	.2019	.1827	.1653	.1496	.1353
1	.3662	.3614	.3543	.3452	.3347	.3230	.3106	.2975	.2842	.2707
2	.2014	.2169	.2303	.2417	.2510	.2584	.2640	.2678	.2700	.2707
3	.0738	.0867	.0998	.1128	.1255	.1378	.1496	.1607	.1710	.1804
4	.0203	.0260	.0324	.0395	.0471	.0551	.0636	.0723	.0812	.0902
5	.0045	.0062	.0084	.0111	.0141	.0176	.0216	.0260	.0309	.0361
6	.0008	.0012	.0018	.0026	.0035	.0047	.0061	.0078	.0098	.0120
7	.0001	.0002	.0003	.0005	.0008	.0011	.0015	.0020	.0027	.0034
8	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0002	.0003	.0005	.0006	.0009
9	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0002

r	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9	3.0
0	.1225	.1108	.1003	.0907	.0821	.0743	.0672	.0608	.0550	.0498
1	.2572	.2438	.2306	.2177	.2052	.1931	.1815	.1703	.1596	.1494
2	.2700	.2681	.2652	.2613	.2565	.2510	.2450	.2384	.2314	.2240
3	.1890	.1966	.2033	.2090	.2138	.2176	.2205	.2225	.2237	.2240
4	.0992	.1082	.1169	.1254	.1336	.1414	.1488	.1557	.1622	.1680
5	.0417	.0476	.0538	.0602	.0668	.0735	.0804	.0872	.0940	.1008
6	.0146	.0174	.0206	.0241	.0278	.0319	.0362	.0407	.0455	.0540
7	.0044	.0055	.0068	.0083	.0099	.0118	.0139	.0163	.0188	.0216
8	.0011	.0015	.0019	.0025	.0031	.0038	.0047	.0057	.0068	.0081
9	.0003	.0004	.0005	.0007	.0009	.0011	.0014	.0018	.0022	.0027
10	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002	.0003	.0004	.0005	.0006	.0008
11	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002
12	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001

Table VI (continued)

r	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.7	3.8	3.9	4.0
	λt									
0	.0450	.0408	.0369	.0344	.0302	.0273	.0247	.0224	.0202	.0183
1	.1397	.1304	.1217	.1135	.1057	.0984	.0915	.0850	.0789	.0733
2	.2165	.2087	.2008	.1929	.1850	.1771	.1692	.1615	.1539	.1465
3	.2237	.2226	.2209	.2186	.2158	.2125	.2087	.2046	.2001	.1954
4	.1734	.1781	.1823	.1858	.1888	.1912	.1931	.1944	.1951	.1954
5	.1075	.1140	.1203	.1264	.1322	.1377	.1429	.1477	.1522	.1563
6	.0555	.0608	.0662	.0716	.0771	.0826	.0881	.0936	.0989	.1042
7	.0246	.0278	.0312	.0348	.0385	.0425	.0466	.0508	.0551	.0595
8	.0095	.0111	.0129	.0148	.0169	.0191	.0215	.0241	.0269	.0295
9	.0033	.0040	.0047	.0056	.0066	.0076	.0089	.0102	.0116	.0132
10	.0010	.0013	.0016	.0019	.0023	.0028	.0033	.0039	.0045	.0053
11	.0003	.0004	.0005	.0006	.0007	.0009	.0011	.0013	.0016	.0019
12	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002	.0003	.0003	.0004	.0005	.0006
13	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002
14	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001

r	4.1	4.2	4.3	4.4	4.5	4.6	4.7	4.8	4.9	5.0
	λt									
0	.0166	.0150	.0136	.0123	.0111	.0101	.0091	.0082	.0074	.0067
1	.0679	.0630	.0583	.0540	.0500	.0462	.0427	.0395	.0365	.0337
2	.1393	.1323	.1254	.1188	.1125	.1063	.1005	.0948	.0894	.0842
3	.1904	.1852	.1798	.1743	.1687	.1631	.1574	.1517	.1460	.1404
4	.1951	.1944	.1933	.1917	.1898	.1875	.1849	.1820	.1789	.1755
5	.1600	.1633	.1662	.1687	.1708	.1725	.1738	.1747	.1753	.1755
6	.1093	.1143	.1191	.1237	.1281	.1323	.1362	.1398	.1432	.1462
7	.0640	.0686	.0732	.0778	.0824	.0869	.0914	.0959	.1002	.1044
8	.0328	.0360	.0393	.0428	.0463	.0500	.0537	.0575	.0614	.0653
9	.0150	.0168	.0188	.0209	.0232	.0255	.0280	.0307	.0334	.0363
10	.0061	.0071	.0081	.0092	.0104	.0118	.0132	.0147	.0164	.0181
11	.0023	.0027	.0032	.0037	.0043	.0049	.0056	.0064	.0073	.0082
12	.0008	.0009	.0011	.0014	.0016	.0019	.0022	.0026	.0030	.0034
13	.0002	.0003	.0004	.0005	.0006	.0007	.0008	.0009	.0011	.0013
14	.0001	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002	.0003	.0003	.0004	.0005
15	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0002

r	5.1	5.2	5.3	5.4	5.5	5.6	5.7	5.8	5.9	6.0
	λt									
0	.0061	.0055	.0050	.0045	.0041	.0037	.0033	.0030	.0027	.0025
1	.0311	.0287	.0265	.0244	.0225	.0207	.0191	.0176	.0162	.0149
2	.0793	.0746	.0701	.0659	.0618	.0580	.0544	.0509	.0477	.0446
3	.1348	.1293	.1239	.1185	.1133	.1082	.1033	.0985	.0938	.0892
4	.1719	.1681	.1641	.1600	.1558	.1515	.1472	.1428	.1383	.1339
5	.1753	.1748	.1740	.1728	.1714	.1697	.1678	.1656	.1632	.1606
6	.1490	.1515	.1537	.1555	.1571	.1584	.1594	.1601	.1605	.1606
7	.1086	.1125	.1163	.1200	.1234	.1267	.1298	.1326	.1353	.1377
8	.0692	.0731	.0771	.0810	.0849	.0887	.0925	.0962	.0998	.1033
9	.0392	.0423	.0454	.0486	.0519	.0552	.0586	.0620	.0654	.0688

Table VI (continued)

r	5.1	5.2	5.3	5.4	5.5	5.6	5.7	5.8	5.9	6.0
	λt									
10	.0200	.0220	.0241	.0262	.0285	.0309	.0334	.0359	.0386	.0413
11	.0093	.0104	.0116	.0129	.0143	.0157	.0173	.0190	.0207	.0225
12	.0039	.0045	.0051	.0058	.0065	.0073	.0082	.0092	.0102	.0113
13	.0015	.0018	.0021	.0024	.0028	.0032	.0036	.0041	.0046	.0052
14	.0006	.0007	.0008	.0009	.0011	.0013	.0015	.0017	.0019	.0022
15	.0002	.0002	.0003	.0003	.0004	.0005	.0006	.0007	.0008	.0009
16	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002	.0002	.0003	.0003
17	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001

r	6.1	6.2	6.3	6.4	6.5	6.6	6.7	6.8	6.9	7.0
	λt									
0	.0022	.0020	.0018	.0017	.0015	.0014	.0012	.0011	.0010	.0009
1	.0137	.0126	.0116	.0106	.0098	.0090	.0082	.0076	.0070	.0064
2	.0417	.0390	.0364	.0340	.0318	.0296	.0276	.0258	.0240	.0223
3	.0848	.0806	.0765	.0726	.0688	.0652	.0617	.0584	.0552	.0521
4	.1294	.1249	.1205	.1162	.1118	.1076	.1034	.0992	.0952	.0912
5	.1579	.1549	.1519	.1487	.1454	.1420	.1385	.1349	.1314	.1277
6	.1605	.1601	.1595	.1586	.1575	.1562	.1546	.1529	.1511	.1490
7	.1399	.1418	.1435	.1450	.1462	.1472	.1480	.1486	.1489	.1490
8	.1066	.1099	.1130	.1160	.1188	.1215	.1240	.1263	.1284	.1304
9	.0723	.0757	.0791	.0825	.0858	.0891	.0923	.0954	.0985	.1014
10	.0441	.0469	.0498	.0528	.0558	.0588	.0618	.0649	.0679	.0710
11	.0245	.0265	.0285	.0307	.0330	.0353	.0377	.0401	.0426	.0452
12	.0124	.0137	.0150	.0164	.0179	.0194	.0210	.0227	.0245	.0264
13	.0058	.0065	.0073	.0081	.0089	.0098	.0108	.0119	.0130	.0142
14	.0025	.0029	.0033	.0037	.0041	.0046	.0052	.0058	.0064	.0071
15	.0010	.0012	.0014	.0016	.0018	.0020	.0023	.0026	.0029	.0033
16	.0004	.0005	.0005	.0006	.0007	.0008	.0010	.0011	.0013	.0014
17	.0001	.0002	.0002	.0002	.0003	.0003	.0004	.0004	.0005	.0006
18	.0000	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002	.0002
19	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001

r	7.1	7.2	7.3	7.4	7.5	7.6	7.7	7.8	7.9	8.0
	λt									
0	.0008	.0007	.0007	.0006	.0006	.0005	.0005	.0004	.0004	.0003
1	.0059	.0054	.0049	.0045	.0041	.0038	.0035	.0032	.0029	.0027
2	.0208	.0194	.0180	.0167	.0156	.0145	.0134	.0125	.0116	.0107
3	.0492	.0464	.0438	.0413	.0389	.0366	.0345	.0324	.0305	.0286
4	.0874	.0836	.0799	.0764	.0729	.0696	.0663	.0632	.0602	.0573
5	.1241	.1204	.1167	.1130	.1094	.1057	.1021	.0986	.0951	.0916
6	.1468	.1445	.1420	.1394	.1367	.1339	.1311	.1282	.1252	.1221
7	.1489	.1486	.1481	.1474	.1465	.1454	.1442	.1428	.1413	.1396
8	.1321	.1337	.1351	.1363	.1373	.1382	.1388	.1392	.1395	.1396
9	.1042	.1070	.1096	.1121	.1144	.1167	.1187	.1207	.1224	.1241
10	.0740	.0770	.0800	.0829	.0858	.0887	.0914	.0941	.0967	.0993
11	.0478	.0504	.0531	.0558	.0585	.0613	.0640	.0667	.0695	.0722

Table VI (continued)

λt

r	7.1	7.2	7.3	7.4	7.5	7.6	7.7	7.8	7.9	8.0
12	.0283	.0303	.0323	.0344	.0366	.0358	.0411	.0434	.0457	.0481
13	.0154	.0168	.0181	.0196	.0211	.0227	.0243	.0260	.0278	.0296
14	.0078	.0056	.0095	.0104	.0113	.0123	.0134	.0145	.0157	.0169
15	.0037	.0041	.0046	.0051	.0057	.0062	.0069	.0075	.0083	.0090
16	.0016	.0019	.0021	.0024	.0026	.0030	.0033	.0037	.0041	.0045
17	.0007	.0008	.0009	.0010	.0012	.0013	.0015	.0017	.0019	.0021
18	.0003	.0003	.0004	.0004	.0005	.0006	.0006	.0007	.0008	.0009
19	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002	.0002	.0003	.0003	.0003	.0004
20	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0000	.0001	.0001	.0001	.0002
21	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001

λt

r	8.1	8.2	8.3	8.4	8.5	8.6	8.7	8.8	8.9	9.0
0	.0003	.0003	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0001	.0001
1	.0025	.0023	.0021	.0019	.0017	.0016	.0014	.0013	.0012	.0011
2	.0100	.0092	.0056	.0079	.0074	.0068	.0063	.0058	.0054	.0050
3	.0269	.0252	.0237	.0222	.0208	.0195	.0183	.0171	.0160	.0150
4	.0544	.0517	.0491	.0466	.0443	.0420	.0398	.0377	.0357	.0337
5	.0882	.0849	.0816	.0784	.0752	.0722	.0692	.0653	.0635	.0607
6	.1191	.1160	.1128	.1097	.1066	.1034	.1003	.0972	.0941	.0911
7	.1378	.1358	.1338	.1317	.1294	.1271	.1247	.1222	.1197	.1171
8	.1395	.1392	.1388	.1382	.1375	.1366	.1356	.1344	.1332	.1318
9	.1256	.1269	.1280	.1290	.1299	.1306	.1311	.1315	.1317	.1318
10	.1017	.1040	.1063	.1084	.1104	.1123	.1140	.1157	.1172	.1186
11	.0749	.0776	.0802	.0828	.0853	.0878	.0902	.0925	.0948	.0970
12	.0505	.0530	.0555	.0579	.0604	.0629	.0654	.0679	.0703	.0728
13	.0315	.0334	.0354	.0374	.0395	.0416	.0438	.0459	.0481	.0504
14	.0182	.0196	.0210	.0225	.0240	.0256	.0272	.0289	.0306	.0324
15	.0098	.0107	.0116	.0126	.0136	.0147	.0158	.0169	.0182	.0194
16	.0050	.0055	.0060	.0066	.0072	.0079	.0086	.0093	.0101	.0109
17	.0024	.0026	.0029	.0033	.0036	.0040	.0044	.0048	.0053	.0058
18	.0011	.0012	.0014	.0015	.0017	.0019	.0021	.0024	.0026	.0029
19	.0005	.0005	.0006	.0007	.0008	.0009	.0010	.0011	.0012	.0014
20	.0002	.0002	.0002	.0003	.0003	.0004	.0004	.0005	.0005	.0006
21	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002	.0002	.0002	.0003
22	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001

λt

r	9.1	9.2	9.3	9.4	9.5	9.6	9.7	9.8	9.9	10
0	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0000
1	.0010	.0009	.0009	.0008	.0007	.0007	.0006	.0005	.0005	.0005
2	.0046	.0043	.0040	.0037	.0034	.0031	.0029	.0027	.0025	.0023
3	.0140	.0131	.0123	.0115	.0107	.0100	.0093	.0087	.0081	.0076
4	.0319	.0302	.0285	.0269	.0254	.0240	.0226	.0213	.0201	.0189

Table VI (continued)

λt

r	9.1	9.2	9.3	9.4	9.5	9.6	9.7	9.8	9.9	10
5	.0581	.0555	.0530	.0506	.0483	.0460	.0439	.0418	.0398	.0378
6	.0581	.0851	.0822	.0793	.0764	.0736	.0709	.0682	.0656	.0631
7	.1145	.1118	.1091	.1064	.1037	.1010	.0982	.0955	.0928	.0901
8	.1302	.1286	.1269	.1251	.1232	.1212	.1191	.1170	.1148	.1126
9	.1317	.1315	.1311	.1306	.1300	.1293	.1284	.1274	.1263	.1251
10	.1198	.1210	.1219	.1228	.1235	.1241	.1245	.1249	.1250	.1251
11	.0991	.1012	.1031	.1049	.1067	.1083	.1098	.1112	.1125	.1137
12	.0752	.0776	.0799	.0822	.0844	.0866	.0888	.0908	.0928	.0948
13	.0526	.0549	.0572	.0594	.0617	.0640	.0662	.0685	.0707	.0729
14	.0342	.0361	.0380	.0399	.0419	.0439	.0459	.0479	.0500	.0521
15	.0208	.0221	.0235	.0250	.0265	.0281	.0297	.0313	.0330	.0347
16	.0118	.0127	.0137	.0147	.0157	.0168	.0180	.0192	.0204	.0217
17	.0063	.0069	.0075	.0081	.0088	.0095	.0103	.0111	.0119	.0128
18	.0032	.0035	.0039	.0042	.0046	.0051	.0055	.0060	.0065	.0071
19	.0015	.0017	.0019	.0021	.0023	.0026	.0028	.0031	.0034	.0037
20	.0007	.0008	.0009	.0010	.0011	.0012	.0014	.0015	.0017	.0019
21	.0003	.0003	.0004	.0004	.0005	.0006	.0006	.0007	.0008	.0009
22	.0001	.0001	.0002	.0002	.0002	.0002	.0003	.0003	.0004	.0004
23	.0000	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002
24	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001

λt

r	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
1	.0002	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
2	.0010	.0004	.0002	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
3	.0037	.0018	.0008	.0004	.0002	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000
4	.0102	.0053	.0027	.0013	.0006	.0003	.0001	.0001	.0000	.0000
5	.0224	.0127	.0070	.0037	.0019	.0010	.0005	.0002	.0001	.0001
6	.0411	.0255	.0152	.0087	.0048	.0026	.0014	.0007	.0004	.0002
7	.0646	.0437	.0281	.0174	.0104	.0060	.0034	.0018	.0010	.0005
8	.0888	.0655	.0457	.0304	.0194	.0120	.0072	.0042	.0024	.0013
9	.1085	.0874	.0661	.0473	.0324	.0213	.0135	.0083	.0050	.0029
10	.1194	.1048	.0859	.0663	.0486	.0341	.0230	.0150	.0095	.0058
11	.1194	.1144	.1015	.0844	.0663	.0496	.0355	.0245	.0164	.0106
12	.1094	.1144	.1099	.0984	.0829	.0661	.0504	.0368	.0259	.0176
13	.0926	.1056	.1099	.1060	.0956	.0814	.0658	.0509	.0378	.0271
14	.0728	.0905	.1021	.1060	.1024	.0930	.0800	.0655	.0541	.0387
15	.0534	.0724	.0885	.0989	.1024	.0992	.0906	.0786	.0650	.0516
16	.0367	.0543	.0719	.0866	.0960	.0992	.0963	.0884	.0772	.0646
17	.0237	.0383	.0550	.0713	.0847	.0934	.0963	.0936	.0863	.0760
18	.0145	.0256	.0397	.0554	.0706	.0830	.0909	.0935	.0911	.0844
19	.0084	.0161	.0272	.0409	.0557	.0699	.0814	.0857	.0911	.0888
20	.0046	.0097	.0177	.0286	.0418	.0559	.0692	.0798	.0866	.0888
21	.0024	.0055	.0109	.0191	.0299	.0426	.0560	.0684	.0783	.0846
22	.0012	.0030	.0065	.0121	.0204	.0310	.0433	.0560	.0676	.0769
23	.0006	.0016	.0037	.0074	.0133	.0216	.0320	.0438	.0559	.0669
24	.0003	.0008	.0020	.0043	.0083	.0144	.0226	.0328	.0442	.0557

Table VI (continued)

r	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
25	.0001	.0004	.0010	.0024	.0050	.0092	.0154	.0237	.0336	.0446
26	.0000	.0002	.0005	.0013	.0029	.0057	.0101	.0164	.0246	.0343
27	.0000	.0001	.0002	.0007	.0016	.0034	.0063	.0109	.0173	.0254
28	.0000	.0000	.0001	.0003	.0009	.0019	.0038	.0070	.0117	.0181
29	.0000	.0000	.0001	.0002	.0004	.0011	.0023	.0044	.0077	.0125
30	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0006	.0013	.0026	.0049	.0083
31	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0007	.0015	.0030	.0054
32	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0004	.0009	.0018	.0034
33	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0005	.0010	.0020
34	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0006	.0012
35	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0007
36	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0004
37	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002
38	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001
39	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001

This table is reproduced by permission from R. S. Burington and D. C. May, *Handbook of Probability and Statistics with Tables*. McGraw-Hill Book Company, Inc., 1953.

Table VII. Standard Normal Density Function

This table gives values of the standard normal density function,

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2},$$

for $z = 0(.01)4.29$. For $z < 0$, take $f(z) = f(-z)$.

Examples: $f(2.16) = .0387$, and $f(-1.57) = f(1.57) = .1163$.

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.3989	.3989	.3989	.3988	.3986	.3984	.3982	.3980	.3977	.3973
0.1	.3970	.3965	.3961	.3956	.3951	.3945	.3939	.3932	.3925	.3918
0.2	.3910	.3902	.3894	.3885	.3876	.3867	.3857	.3847	.3836	.3825
0.3	.3814	.3802	.3790	.3778	.3765	.3752	.3739	.3725	.3712	.3697
0.4	.3683	.3668	.3653	.3637	.3621	.3605	.3589	.3572	.3555	.3538

B I B L I O G R A F I A

1.- "Simulación de sistemas". Geoffrey Gordon. Editorial Diana. 1980

2.- "System Simulation". Shanon. Editorial Prentice-Hall.

3.- "Management Science, an Introduction" . Dannenbring y Stone. Editorial Mc Graw Hill. 1981.