

PROCESAMIENTO DIGITAL DE SEÑALES

PRIMERA PARTE

FILTROS DIGITALES

BOHUMIL PŠENIČKA

UNAM DIEEC
FACULTAD DE INGENIERIA

MEXICO 1994.

Prólogo

En las últimas décadas, los sistemas que han trabajado con circuitos analógicos son reemplazados por sistemas digitales. El objetivo de este libro de texto es enseñar a los estudiantes el diseño de los filtros digitales que se utilizan en las aplicaciones de procesamiento digital de imágenes, procesamiento digital de voz, procesamiento digital de las señales biomédicas etcétera.

El libro de texto está escrito para los estudiantes de las carreras de: electrónica, telecomunicaciones, computación y la carrera de control. El autor espera que los estudiantes que realizan sus proyectos o preparan su tesis profesional o de maestría, encuentren en esta materia, algunas ideas interesantes.

Este libro está dividido en nueve capítulos. En los primeros tres, se presenta la clasificación de las señales y de los sistemas. Además dichos capítulos cuentan con ejercicios para la transformada z , la convolución y la correlación. En los capítulos cuarto y quinto se explican las transformadas de Fourier y la transformada de Fourier rápida. En los capítulos 6 y 8 el estudiante encuentra bastantes ejemplos para diseñar los filtros digitales. En el capítulo noveno (Análisis de los filtros digitales) se expone un método nuevo no conocido en otras publicaciones, que utiliza un análisis matricial basado en el diagrama de flujo de señales.

El autor quiere manifestar su agradecimiento a la UNAM y la Facultad de Ingeniería. Pero muy especialmente al Sr. Ing. José Manuel Covarrubias, director de la Facultad quien apoyó ampliamente la pronta publicación de este libro. Quiero agradecer a los profesores Larry H. Escobar Salguero, Enrique Gabino García y a la secretaria Raquel Palmeros que me señalaron algunos errores tipográficos.

Ciudad Universitaria
Mayo 1995
Dr. Ing. Bohumil Pšenička

Contenido



FACULTAD INGENIERIA

1	Clasificación de las señales y sistemas	3
1.1	Clasificación de las señales	3
1.1.1	Las señales continuas	3
1.1.2	Las señales discretas	6
1.2	Sistemas discretos en el tiempo	8
2	La transformada-z	13
2.1	Definiciones de la transformada-z directa y inversa	13
2.1.1	Propiedades de la transformada-z	15
2.1.2	La transformada-z inversa	19
3	Correlación	23
4	Transformada discreta de Fourier	27
4.1	Simetría de la transformada Fourier	28
4.2	Propiedades de la transformada Fourier	32
4.3	La transformada Fourier de una señal discreta y periódica	37
4.4	Las propiedades de la DFT	38
5	La transformada rápida Fourier	45
5.1	El algoritmo "Decimación en el tiempo"	46
5.2	El algoritmo "Decimación en la frecuencia"	53
6	Filtros digitales con respuesta infinita	59
6.1	La estructura cascada de un filtro digital	61
6.2	La estructura paralela de un filtro digital	62
6.3	Filtros digitales con la respuesta finita al impulso -FIR	65
6.4	Síntesis de los filtros IIR	67
6.5	Diseño de los filtros desde la respuesta al Dirac	74
6.6	Síntesis de los circuitos discretos con la ayuda de las matrices circulares	76
7	Filtros digitales con la respuesta finita FIR	79
7.1	Diseño del Filtro FIR	82
7.2	La influencia de las ventanas a la respuesta del filtro	84
8	La Función de transferencia de los sistemas	89
8.1	La función de transferencia de los sistemas analógicas	89
8.2	Análisis de circuitos discretos en la frecuencia	94
9	Análisis de filtros digitales	101
9.1	Ejemplos	103



Capítulo 1

Clasificación de las señales y sistemas

1.1 Clasificación de las señales

Tipo de las señales en el tiempo:

- 1.) Continuas
- 2.) Discretas

1.1.1 Las señales continuas

Las señales continuas las clasificamos en señales periódicas y no periódicas. Estas señales podemos ver en la figura 1.1.

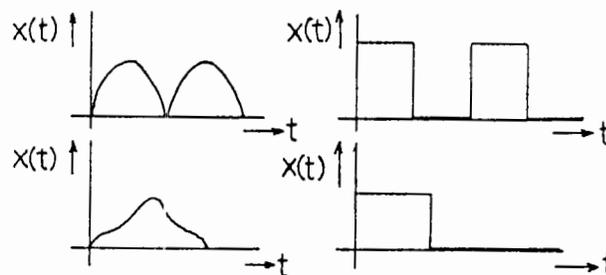


Figura 1.1: Las señales continuas periódicas y no periódicas

La transformación más conocida de las funciones $x(t)$ en el tiempo, a funciones $X(\omega)$ en la frecuencia, es la transformada de Fourier, definida por la ecuación

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \quad (1.1)$$

y la transformada inversa de Fourier

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t} d\omega \quad (1.2)$$

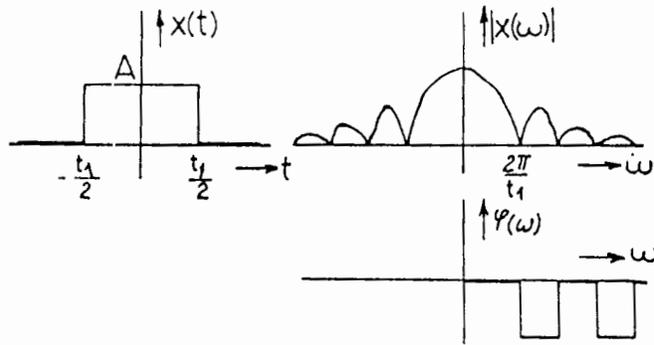


Figura 1.2: Señal $x(t)$ y su espectro

El espectro de la señal continua y no periódica es continuo y no periódico

Ejemplo:

Qué espectro tiene una señal $x(t)$ no periódica en la ecuación 1.3

$$x(t) = \begin{cases} A & -\frac{t_1}{2} \leq t \leq \frac{t_1}{2} \\ 0 & |t| > \frac{t_1}{2} \end{cases} \quad (1.3)$$

Si utilizámos la transformada de Fourier directa ecuación 1.1 obtenémos

$$X(j\omega) = \int_{-\frac{t_1}{2}}^{\frac{t_1}{2}} A e^{-j\omega t} dt = A t_1 \frac{\text{sen} \frac{\omega t_1}{2}}{\frac{\omega t_1}{2}} \quad (1.4)$$

La gráfica del espectro es en la figura 1.2.

Si desplazamos la señal en la figura 1.2 a la derecha como se ve en la figura 1.3, obtenemos una señal sin ningún valor para $t < 0$. Esta función se llama impulso causal.

El espectro de un impulso de Dirac es constante como se ve en la figura 1.4.

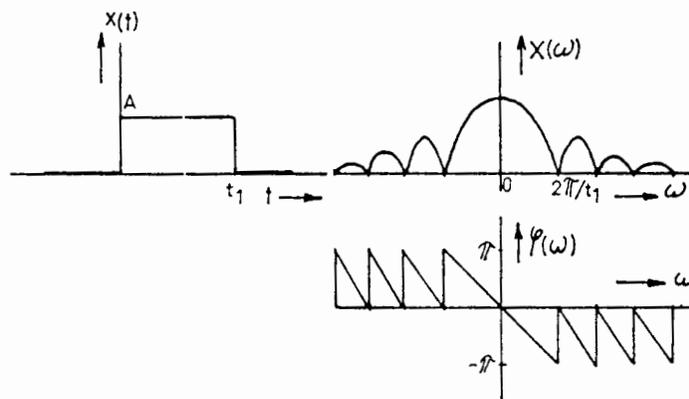


Figura 1.3: Señal $x(t)$ y su espectro

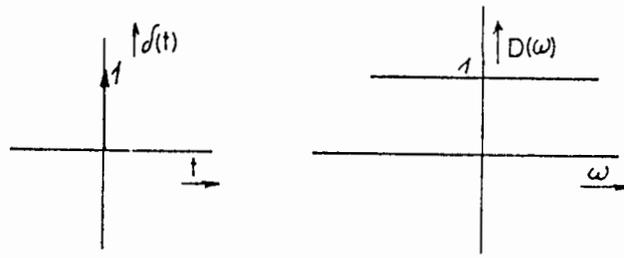


Figura 1.4: Impulso de Dirac y su espectro

$$D(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-j\omega t} dt = 1 \quad (1.5)$$

Condición de existencia de la transformada de Fourier:

Para que exista $F\{x(t)\}$, debe cumplirse que $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$. Las funciones periódicas no cumplen la condición

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty \quad (1.6)$$

y por eso no existe la integral

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \quad (1.7)$$

Entonces no podemos calcular el espectro via la transformada de Fourier. Los espectros de las señales periodicos se calculan por medio de las series de Fourier

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \cos(k\omega_0 t) + b_k \cdot \text{sen}(k\omega_0 t)$$

$$a_k = \frac{2}{T_s} \int_{T_s} x(t) \cdot \cos(k\omega_0 t) dt \quad (1.8)$$

$$b_k = \frac{2}{T_s} \int_{T_s} x(t) \cdot \text{sen}(k\omega_0 t) dt$$

o en la forma exponencial

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \quad (1.9)$$

donde

$$c_k = \frac{1}{T_s} \int_{T_s} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad (1.10)$$

Ejemplo:

Calcule el espectro de la señal analógica continua por partes y periódica de la figura 1.5

$$c_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{\frac{1}{2}T_0} A e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{A}{2\pi k} (e^{-jk\pi} - 1) \quad (1.11)$$

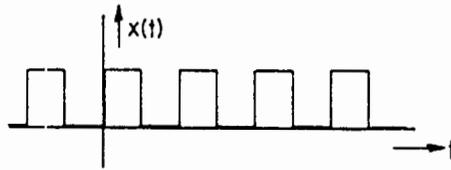


Figura 1.5: Señal continua por partes y periódica

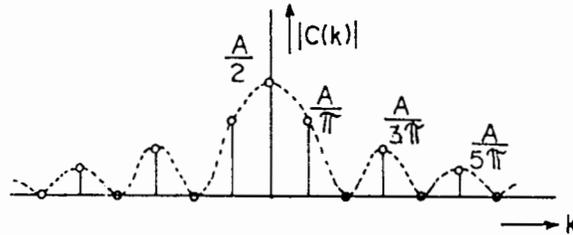


Figura 1.6: Espectro de un tren de impulsos

$$c_k = \begin{cases} \frac{A}{1} & \text{para } k = 0 \\ \frac{A}{k\pi} & \text{para } k = 1, 3, 5, 7, \dots \\ 0 & \text{para } k = 2, 4, 6, 8, \dots \end{cases} \quad (1.12)$$

El espectro es discreto y se ve en la figura 1.6

El espectro de la señal analógico y periódico es discreto y no periódico.

1.1.2 Las señales discretas

Las señales discretas las podemos dividir también en

- a.) Señales periódicas
- b.) Señales no periódicas

La señal discreta periódica está en la figura 1.7a y la señal discreta no periódica es en la figura 1.7b.

El espectro de una señal discreta y periódica se puede determinar por la transformada discreta de Fourier que está definida por la ecuación

$$X_p(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_p(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}n.k} \quad (1.13)$$

$$x_p(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X_p(k) e^{j\frac{2\pi}{N}n.k} \quad (1.14)$$

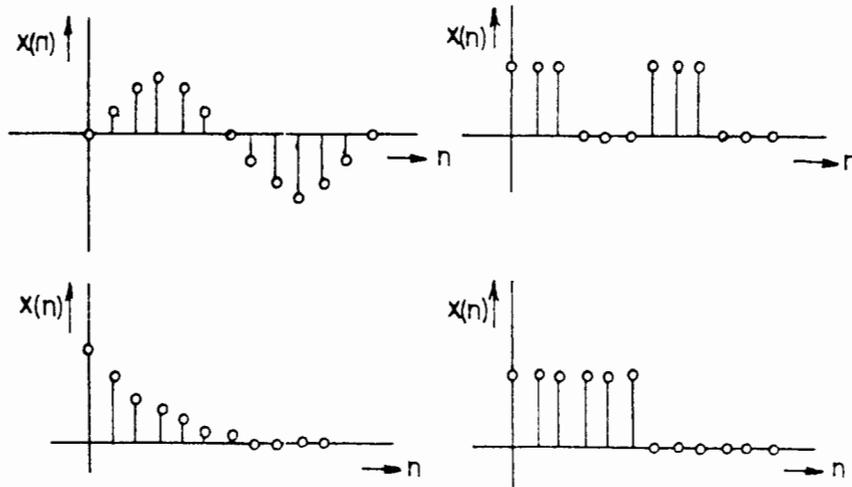


Figura 1.7: Las señales discretas periódicas y no periódicas

El espectro de una señal discreta y periódica es discreto y periódico.

Esta situación es mostrada en la figura 1.8

El espectro de una señal discreta y no periódica se calcula usando las ecuaciones

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(j\omega) e^{jn\omega T} d\omega \quad (1.15)$$

$$X(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-jn\omega T} \quad (1.16)$$

La señal en el dominio del tiempo y su espectro son mostradas en la figura 1.9

El espectro de una señal discreta y no periódica es analógico y periódico.

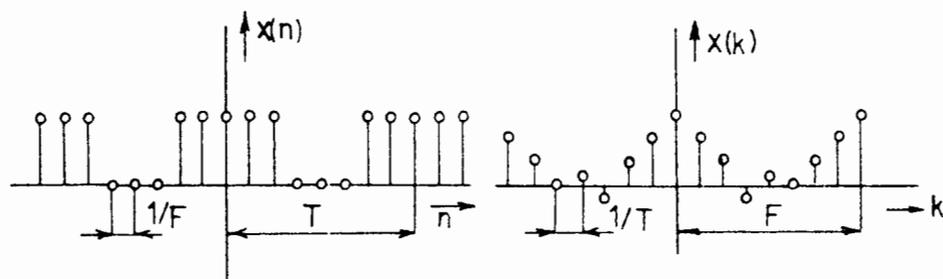


Figura 1.8: El espectro de una señal discreta y periódica

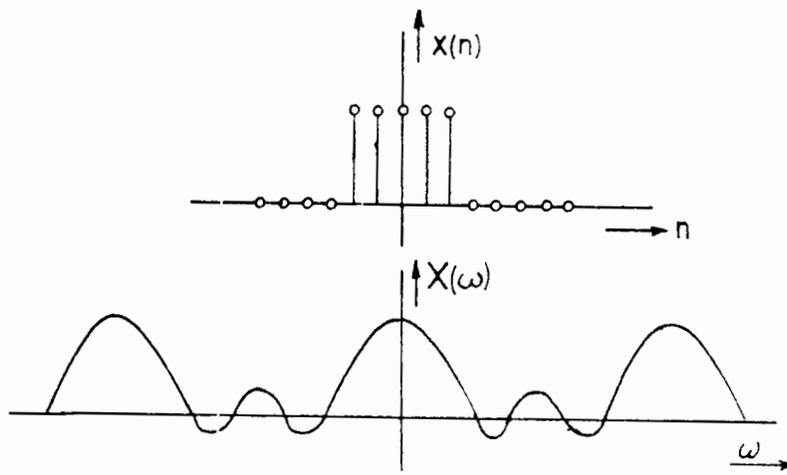


Figura 1.9: El espectro de una señal discreta y no periódica

1.2 Sistemas discretos en el tiempo

Sistema invariante en el tiempo

Sistema invariante en el tiempo es el sistema que cumple las condiciones:

$$x(n) \xrightarrow{H} y(n)$$

$$x(n - k) \xrightarrow{H} y(n - k)$$

Si la señal $x(n)$ en la entrada está retardada acerca de tiempo k , y si la señal en la salida está retardada también de lo mismo tiempo k luego el sistema es invariante en el tiempo (SIT).

Sistema lineal

El sistema es lineal, si cumple para cualquiera señal $x_1(n)$ y $x_2(n)$ las condiciones:

$$H[a_1x_1(n) + a_2x_2(n)] = a_1H[x_1(n)] + a_2H[x_2(n)]$$

El sistema causal

El sistema es causal si la señal en la salida $y(n)$ es dependiente solo en la señal de entrada $x(n)$ y en las señales retardadas $x(n - 1), x(n - 2), \dots, x(n - k)$ y no depende a las señales $x(n + 1), x(n + 2), \dots, x(n + k)$.

La sistema estable

La sistema estable es el sistema que cumple las condiciones

$$|h(n)| < \infty$$

donde $h(n)$ es la respuesta al impulso

Un sistema discreto tiene una salida y una entrada, como se ve en la figura 1.10, donde:

$x(n)$ es la señal de entrada en el dominio de tiempo.

$X(j\omega)$ es la señal de entrada en el dominio de la frecuencia.

$y(n)$ es la señal de salida en el dominio de tiempo.

$Y(j\omega)$ es la señal de salida en el dominio de la frecuencia.

$H(j\omega)$ es la función de transferencia definida por la ecuación 1.17

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} \quad (1.17)$$

$y(n)$ es la respuesta del sistema y se determina por la convolución de $x(n)$ y $h(n)$. Entonces en el dominio del tiempo se calcula la respuesta del sistema por la ecuación

$$y(n) = x(n) * h(n) = h(n) * x(n)$$

y en el dominio de la frecuencia

$$Y(j\omega) = X(j\omega) \times H(j\omega)$$

La convolución discreta está definida por la ecuación

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) \quad (1.18)$$

pero para calcularlo necesitamos muchas operaciones. Por lo tanto transformamos la señal $x(n)$ a $X(j\omega)$ y calculamos $Y(j\omega)$ como producto de $X(j\omega)$ y $H(j\omega)$. El resultado $Y(j\omega)$ lo transformamos con la transformada inversa para obtener $y(n)$.

Para transformar una señal en el dominio del tiempo a una señal en el dominio de las frecuencias utilizamos la transformada de z o la transformada de Fourier. La transformada z está definida por la ecuación 1.19

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n).z^{-n} \quad (1.19)$$

donde la relación entre el dominio de s y z queda establecida por la ecuación

$$z = e^{sT} \quad (1.20)$$

T es el intervalo entre dos muestras (Intervalo de muestreo)

La señal $x(nT)$ que se también escribe $x(n)$, se puede escribir como una serie de números en la siguiente forma

$$x(nT) = x(n) = \{0.1 \ 0.2 \ 0.2 \ 0.1 \ 0.3 \ 0.4 \ 0.1 \ 0.0 \ 0.0 \ 0.0\} \quad (1.21)$$

Ejemplo

Determine la convolución de las señales $x(n)$ y $h(n)$

$$x(n) = \{1/4 \ 1/2 \ 1 \ 1/4\} \quad h(n) = \{1 \ 1 \ 1/2 \ 1/2\}$$

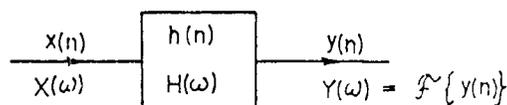


Figura 1 10: Sistema discreto en el tiempo

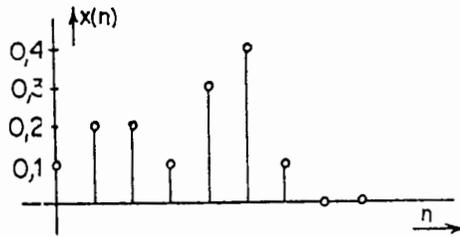


Figura 1.11: La señal discreta en el dominio de tiempo

Podemos substituir esos números en la ecuación

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \cdot h(n-k) \quad (1.22)$$

Pero eso necesita escribir muchas ecuaciones. El mismo resultado se obtiene más fácil usando la convolución matricial

$$\mathbf{y(n)} = \text{cykl } \mathbf{h(n)} \cdot \mathbf{x(n)} \quad (1.23)$$

o gráficamente

El método gráfico

$\begin{array}{cccc} & 1/4 & 1/2 & 1 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 & 1 & 1 & \\ & 1/2 & 1/2 & 1 & 1 \\ & & 1/2 & 1/2 & 1 & 1 \\ & & & 1/2 & 1/2 & 1 & 1 \\ & & & & 1/2 & 1/2 & 1 & 1 \end{array}$	$\begin{aligned} y(0) &= 1 \cdot (1/4) = 1/4 \\ y(1) &= 1 \cdot (1/2) + 1 \cdot (1/4) = 3/4 \\ y(2) &= 1 + 1/2 + (1/2) \cdot 1/4 = 13/8 \\ y(3) &= 13/8 \\ y(4) &= 1 \\ y(5) &= 5/8 \end{aligned}$
--	--

$$\mathbf{y(n)} = \{1/4 \quad 3/4 \quad 13/8 \quad 13/8 \quad 15/8 \quad 1/8\}$$

$$\mathbf{y(n)} = \{0.25 \quad 0.75 \quad 1.625 \quad 1.625 \quad 1.875 \quad 0.125\}$$

La convolución matricial

$$\mathbf{y(n)} = \text{cykl } \mathbf{x(n)} \times \mathbf{h(n)}$$

$$\mathbf{y(n)} = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1 & 1/2 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 1 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.75 \\ 1.625 \\ 1.625 \\ 1 \\ 0.625 \\ 1.125 \\ 0 \end{bmatrix}$$

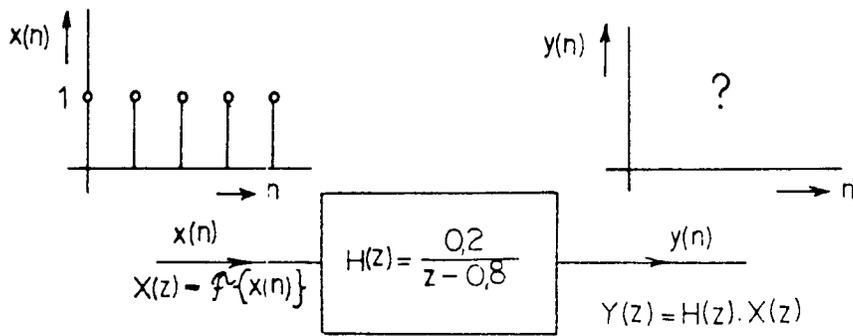


Figura 1.12: Sistema discreto alimentado con un tren de impulsos

Se obtiene el mismo resultado.

Ejemplo

Determine la respuesta de un circuito a un tren de impulsos. La función de transferencia es

$$H(z) = \frac{0.2}{z - 0.8}$$

Primero determinamos con la ayuda de transformada de z inversa $h(n)$ usando la ecuación $h(n) = z^{-1} \{H(z)\}$. Podemos utilizar la tabla de transformada- z , o dividir del numerador $H(z)$ entre denominador de $H(z)$. Entonces obtenemos

$$0.2 : z - 0.8 = 0.2z^{-1} + 0.16z^{-2} + 0.128z^{-3} + 0.1024z^{-4} + \dots$$

Los coeficientes de la serie $h(n)$ son los coeficientes de las potencias de z .

Entonces

$$h(n) = \{0 \ 0.2 \ 0.16 \ 0.128 \ 0.1024 \ \dots\}$$

Ahora calculamos la convolución de dos secuencias $x(n)$ y $h(n)$ mediante la convolución circular (matricial). La señal $x(n)$ es el tren de impulsos unitarios.

$$y(n) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0.2 \\ 0.16 \\ 0.128 \\ 0.1024 \\ \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.2 \\ 0.36 \\ 0.488 \\ 0.5904 \end{bmatrix} \quad (1.24)$$

La gráfica de la respuesta a un tren de impulsos es en la figura 1.13.

Hasta ahora hemos analizado el circuito en el dominio de tiempo. Aplicando la transformada z a la función $x(n)$ obtenemos $X(z)$.

$$X(z) = z \{x(n)\}$$

La respuesta en el dominio de frecuencia es

$$Y(z) = X(z) \cdot H(z)$$

Para el mismo ejemplo calculamos ahora $X(z)$ usando la transformada de z .

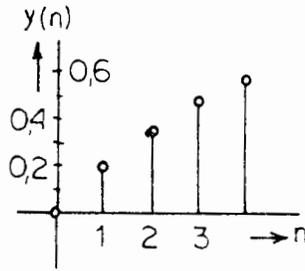


Figura 1.13: La respuesta de la sistema a un tren de impulsos

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

donde $x(n)$ es

$$x(n) = \{1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ \dots\}$$

$$X(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + z^{-4} + z^{-5} + \dots \quad /multiplicando \ por \ z^{-1}$$

$$X(z) \cdot z^{-1} = z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + z^{-4} + z^{-5} + \dots$$

Si sustraemos estas dos ecuaciones obtenemos

$$X(z) - X(z)z^{-1} = 1 \implies X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

Este resultado lo podemos escribir también en esta forma

$$X(z) = z \{1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ \dots\} = \frac{z}{z + 1}$$

La respuesta del circuito en el dominio de z está dado por:

$$Y(z) = \frac{z}{z - 1} \times \frac{0.2}{z - 0.8} = \frac{0.2z}{z^2 - 1.8z + 0.8}$$

La respuesta de la sistema en el dominio del tiempo se calcula mediante la transformada z inversa $y(n) = z^{-1} \{Y(z)\}$

Dividiendo el denominador entre numerador de la función de transferencia $H(z)$ obtenemos el mismo resultado que anterior.

$$0.2z : z^2 - 1.8z + 0.8 = 0.2z^{-1} + 0.36z^{-2} + 0.36z^{-3} + 0.59z^{-4} + \dots$$

Entonces

$$y(n) = \{0 \ 0.2 \ 0.36 \ 0.488 \ 0.59 \ \dots\}$$

Capítulo 2

La transformada-z

2.1 Definiciones de la transformada-z directa y inversa

La transformada-z está definida por la ecuación:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \quad (2.1)$$

si las muestras $x(n)$ son iguales a cero para $n < 0$ podemos utilizar la ecuación:

$$x(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} \quad (2.2)$$

Esta transformación se llama transformada-z directa, y transforma una señal $x(n)$ desde el dominio de tiempo en la señal $X(z)$ en el dominio de la frecuencia $z = e^{j\omega T}$. Esa relación se puede escribir en la forma

$$X(z) \equiv z \{x(n)\} \quad x(n) \xleftrightarrow{z} X(z)$$

La transformada z inversa se calcula usando la formula

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint X(z)z^{n-1} dz \quad (2.3)$$

Pero esta fórmula en la práctica no se utiliza, porque los funciones de transferencia son quebrados de dos polinomios.

Ejemplos

Determinar la transformada-z de las siguientes señales:

a.)

$$x_1(n) = \{1 \ 2 \ 5 \ 7 \ 0 \ 1\}$$

$$X_1(z) = 1 + 2z^{-1} + 5z^{-2} + 7z^{-3} + z^{-5}$$

b)

$$x_2(n) = \{0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 5\}$$

$$X_2(z) = 0.z^0 + 0.z^{-1} + 1.z^{-2} + 2.z^{-3} + 5.z^{-4} = \frac{z^2 + 2z + 5}{z^4}$$

usando la transformada-z inversa obtenemos el resultado original

$$z^2 + 2.z + 5 : z^4 = z^{-2} + 2z^{-3} + 5z^{-4} + \dots$$

donde:

$$x_0 = 0 \quad x_1 = 0 \quad x_2 = 1 \quad x_3 = 2 \quad x_4 = 5$$

$$x(n) = \{0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 5 \}$$

Los coeficientes x_i son los coeficientes que se multiplican con el factor z^{-i}

c.)

$$x_4(n) = \left\{ 2 \ 4 \ \frac{1}{5} \ 7 \ 0 \ 1 \right\}$$

$$X_4(z) = 2z^2 + 4z + 5 + 7z^{-1} + z^{-3}$$

$$X_4(z) = \frac{2z^5 + 4z^4 + 5z^3 + 7z^{-2} + 1}{z^3}$$

d.)

$$x_5(n) = \delta(n - 4)$$

$$x_5(n) = \{0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ \dots\}$$

$$X_5(z) = 1.z^{-4}$$

La función delta de Dirac o tren de impulsos es muy importante para el análisis de sistemas:

Determinar la transformada-z de un tren de impulsos.

$$x(n) = \{1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \dots\}$$

Usando la ecuación 2.4

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n} \tag{2.4}$$

obtenemos

$$X(z) = 1 + 1z^{-1} + 1z^{-2} + 1z^{-3} + 1z^{-4} + 1z^{-5} + \dots$$

multiplicando la ecuación por z^{-1} obtenemos

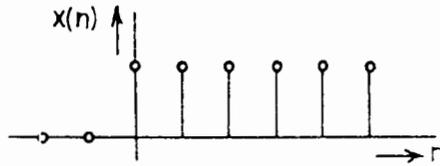


Figura 2.1: Tren de impulsos

$$z^{-1}X(z) = z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + z^{-4} + z^{-5} + \dots$$

Si las ecuaciones anteriores las sustraemos nos da

$$X(z) - z^{-1}X(z) = 1 \implies X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}$$

2.1.1 Propiedades de la transformada-z

Linealidad:

Si existen las transformadas

$$x_1(n) \xleftrightarrow{z} X_1(z) \quad x_2(n) \xleftrightarrow{z} X_2(z)$$

entonces se cumple

$$a_1x_1(n) + a_2x_2(n) \xleftrightarrow{z} a_1X_1(z) + a_2X_2(z) \quad (2.5)$$

Ejemplo:

Determina $X(z)$ de la señal

$$x(n) = \{3 \cdot (2)^n - 4 \cdot (3)^n\}$$

$$x_1(n) = \{2^n\} \quad x_2(n) = \{3^n\}$$

$$x(n) = 3x_1(n) - 4x_2(n)$$

Si escribimos $x_1(n)$ y $x_2(n)$ por una secuencia de los números obtenemos

$$x_1(n) = \{1 \quad 2 \quad 2^2 \quad 2^3 + \dots\}$$

$$x_2(n) = \{1 \quad 3 \quad 3^2 \quad 3^3 + \dots\}$$

Con el mismo procesamiento que en el ejemplo anterior obtenemos

$$X_1(z) = \frac{1}{1 - 2z^{-1}}$$

$$X_2(z) = \frac{1}{1 - 3z^{-1}}$$

Y el resultado es

$$X(z) = \frac{3}{1 - 2z^{-1}} - \frac{4}{1 - 3z^{-1}}$$

Desplazamiento en el tiempo:

Si existe la transformada

$$x(n) \xleftrightarrow{z} X(z)$$

entonces

$$x(n - k) \xleftrightarrow{z} z^{-k} X(z) \tag{2.6}$$

Ejemplo

Calcular $x_1(n - 2)$ y $x_1(n + 2)$ si conocemos la secuencia $x_1(n)$

$$x_1(n) = \{1 \ 2 \ 5 \ 7 \ 0\}$$

La transformada-z de una señal $x_1(n)$ es:

$$X_1(z) = 1 + 2z^{-1} + 5z^{-2} + 7z^{-3}$$

Si utilizamos la ecuación (2.6) obtenemos

$$x(n - 2) \xleftrightarrow{z} z^{-2} X_1(z) = z^{-2} + 2z^{-3} + 5z^{-4} + 7z^{-5}$$

entonces:

$$x_1(n - 2) = \{0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 5 \ 7 \ 0\}$$

similarmente

$$x(n + 2) \xleftrightarrow{z} z^2 X_1(z) = z^2 + 2z + 5 + 7z^{-1}$$

entonces:

$$x_1(n + 2) = \{1 \ 2 \ 5 \ 7 \ 0\}$$

En la figura 2.2 se ve cómo se desplaza el señal $x_1(n)$

Convolución de dos series:

Si existen las transformadas

$$x_1(n) \xleftrightarrow{z} X_1(z) \quad x_2(n) \xleftrightarrow{z} X_2(z)$$

entonces existe $x(n)$ tal que:

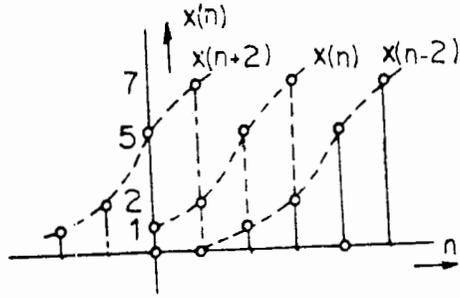


Figura 2.2: Desplazamiento del señal $x_1(n)$ a la derecha y a la izquierda.

$$x(n) = x_1(n) * x_2(n) \xleftrightarrow{z} X_1(z).X_2(z) = X(z) \quad (2.7)$$

La convolución está definida por la ecuación

$$x'(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k).x_2(n-k) \quad (2.8)$$

Ejemplo:

Calcular la convolución de las señales $x_1(n)$ y $x_2(n)$.

$$\text{Si } x_1(n) = \{1 \quad -2 \quad 1 \}$$

$$x_2(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq 5 \\ 0 & \text{para el resto de } n \end{cases}$$

Las señales en el dominio de z son

$$X_1(z) = 1 - 2z^{-1} + z^{-2}$$

$$X_2(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + z^{-4} + z^{-5}$$

Si multiplicámos estas dos señales obtenemos el producto

$$X(z) = X_1(z).X_2(z) = 1 - z^{-1} - z^{-6} + z^{-7}$$

Y la señal en el dominio de tiempo es

$$x(n) = \{1 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -1 \quad 1\}$$

Reversión del tiempo:

Si existe

$$x(n) \xleftrightarrow{z} X(z)$$

entonces

$$x(-n) \xleftrightarrow{z} X(z^{-1}) \quad (2.9)$$

Ejemplo:

Determinar la transformada del la señal

$$x(n) = u(-n)$$

$$u(n) \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

Usando la ecuación (2.9) obtenemos

$$X(z) = \frac{1}{1 - z}$$

Diferenciación en el dominio de z:

Si existe

$$x(n) \xleftrightarrow{z} X(z)$$

entonces existe

$$n.x(n) \xleftrightarrow{z} -z \frac{dX(z)}{dz} \quad (2.10)$$

Ejemplo:

Determinar la transformada-z de la señal

$$x(n) = \{n.a^n\}$$

Conocemos la transformada-z de la señal $\{a^n\}$

$$x_1(n) = \{a^n\} \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1 - az^{-1}} = X_1(z)$$

Usando la ecuación (2.10) obtenemos

$$X(z) = -z \frac{dX_1(z)}{dz} = \frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$$

Correlación de dos series:

Si existe

$$x_1(n) \xleftrightarrow{z} X_1(z) \quad x_2(n) \xleftrightarrow{z} X_2(z)$$

entonces la correlación de $x_1(n)$ con $x_2(n)$ se define:

$$r_{x_1x_2}(l) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n)x_2(n-l) \xleftrightarrow{z} R_{x_1x_2}(l) = X_1(z).X_2(z^{-1}) \quad (2.11)$$

Ejemplo:

Determina la autocorrelación de la señal

$$x(n) = \{a^n\}$$

$$\{a^n\} \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1 - az^{-1}}$$

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}$$

$$X(z^{-1}) = \frac{1}{1 - az}$$

$$R_{xx} = \frac{1}{1 - az^{-1}} \times \frac{1}{1 - az} = \frac{1}{1 - a.(z + z^{-1}) + a^2}$$

2.1.2 La transformada-z inversa

La transformada-z inversa se calcula dividiendo el numerador entre el denominador, o con la ayuda de tablas de la transformada-z.

Ejemplo:

Determinar $x(n)$ de :

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}}$$

$$1 : 1 - \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2} = 1 + \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{7}{4}z^{-2} + \frac{15}{8}z^{-3} + \frac{31}{16}z^{-4} + \dots$$

Los coeficientes de la serie componen la señal $x(n)$ en el dominio de tiempo.

$$x(n) = \left\{ 1 \quad \frac{3}{2} \quad \frac{7}{4} \quad \frac{15}{8} \quad \frac{31}{16} \quad \dots \right\}$$

Ejemplo:

Determina la transformada-z inversa de la función

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - az^{-1}}$$

$$\frac{1}{1 - az^{-1}} \xleftrightarrow{z} a^n$$

a.) para $a = \frac{1}{2}$ obtenemos la secuencia

$$h(n) = \left\{ 1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{8} \quad \dots \right\}$$

Si ponemos en la entrada un impulso de Dirac, entonces $h(n) = y(n)$ y si la señal en la salida converge a cero, como se ve en la figura 2.3, entonces la función de transferencia es la función de un sistema estable.

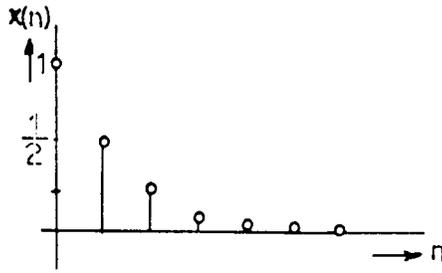


Figura 2.3: La respuesta de una sistema estable

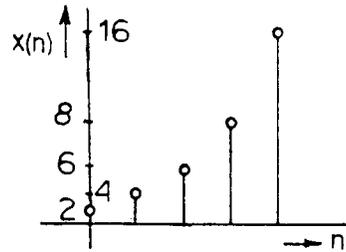


Figura 2.4: La respuesta de una sistema no estable

b.) para $a=2$ obtenemos la secuencia

$$h(n) = \{1 \ 2 \ 4 \ 8 \ \dots\}$$

En este caso la señal no converge, entonces para $a = 2$ la función de transferencia $H(z)$ es la función de una sistema que es inestable.

$$H(z) = \frac{1}{1 - 2z^{-1}}$$

La gráfica de la respuesta es en la figura 2.4

c.) Para $a=1$ obtenemos la secuencia

$$h(n) := y(n) = \{1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ \dots\}$$

$$H(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

En este caso el sistema es cuasiestable. La gráfica de la respuesta es en la figura 2.5

d.) Para $a=-1$ obtenemos las muestras de la salida

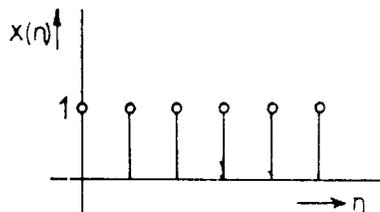


Figura 2.5: La respuesta de un sistema cuasiestable

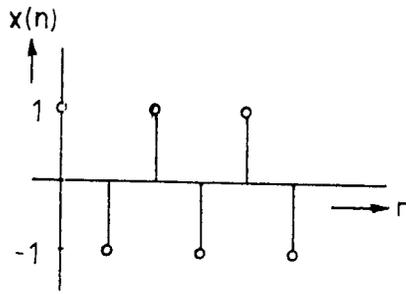


Figura 2.6: La respuesta de un sistema cuasiestable

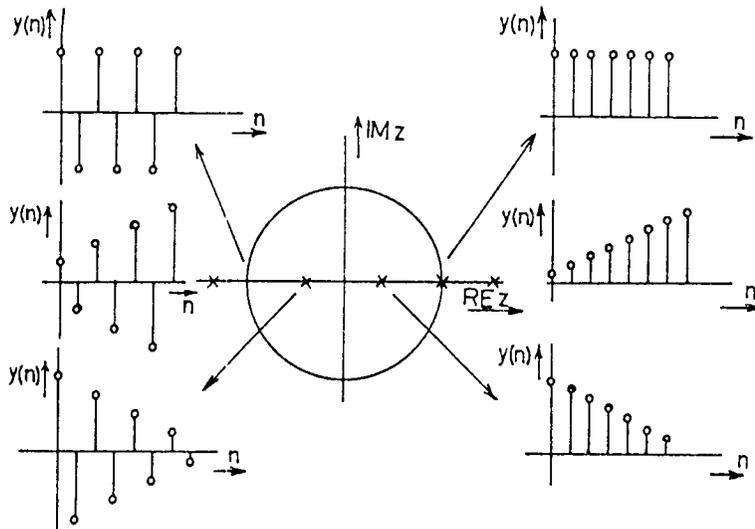


Figura 2.7: Localización de los polos de la función de transferencia y su respuesta

$$h(n) = y(n) = \{1 \quad -1 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \quad -1 \quad \dots\}$$

$$H(z) = \frac{1}{1 + z^{-1}}$$

La gráfica de la respuesta es en la figura 2.6

En la figura 2.7 son mostrados los polos de la función de transferencia en el dominio de z y su respuesta.

Ejemplo

Determine $X(z)$ con la ayuda de la transformada- z , si se conoce la señal $x(n)$

$$x(n) := \{\cos \omega_0 n\}$$

Usando la formula de Euler obtenemos

$$x(n) = \left\{ \frac{e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n}}{2} \right\}$$

$$x_1(n) = \left\{ \frac{e^{j\omega_0 n}}{2} \right\}$$

$$x_2(n) = \left\{ \frac{e^{-j\omega_0 n}}{2} \right\}$$

sustituyendo : $a = j\omega_0 n$

$$e^a \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1 - az^{-1}}$$

entonces

$$e^{j\omega_0 n} \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1 - e^{j\omega_0 n} z^{-1}}$$

$$e^{-j\omega_0 n} \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1 - e^{-j\omega_0 n} z^{-1}}$$

$$\cos(\omega_0 n) \xleftrightarrow{z} \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1 - e^{j\omega_0 n} z^{-1}} + \frac{1}{1 - e^{-j\omega_0 n} z^{-1}} \right] = \frac{1 - z^{-1} \cos \omega_0}{1 - 2z^{-1} \cos \omega_0 + z^{-2}}$$

Capítulo 3

Correlación

La operación matemáticamente parecida a convolución es la correlación. Como en el caso de la convolución trabajamos también con dos secuencias de números $x(n)$ y $y(n)$. Pero en el caso de la correlación examinamos si las secuencias son parecidas. La correlación se utiliza en las telecomunicaciones, en la técnica de radar y geología etc.

Si tenemos dos señales $x(n)$ y $y(n)$ que queremos comparar, la señal $x(n)$ es la señal que transmitimos y la señal $y(n)$ es la señal recibida que se rebotó de un objeto, la señal $y(n)$ es prácticamente la señal $x(n)$ transmitida, pero retardado sobre un factor D , disminuido con el factor α y deformada por un ruido. Esa señal reflejada la podemos expresar por una ecuación

$$y(n) = \alpha \cdot x(n - D) + w(n) \quad (3.1)$$

Esta situación está representada por la figura 3.1

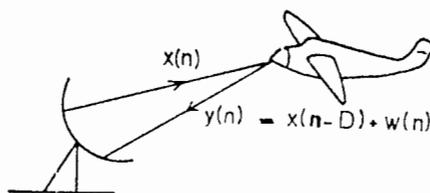


Figura 3.1: La señal transmitida $x(n)$ y reflejada $y(n)$

Nuestro problema es comparar las señales $x(n)$ y $y(n)$ y de esa manera identificar la presencia del objeto y determinar D , si conocemos el retardo D podemos calcular la distancia de objeto. Esta información muy importante la podemos obtener con la ayuda de la correlación.

Si tenemos las señales $x(n)$ y $y(n)$ entonces la cros-correlación de la señal $x(n)$ y $y(n)$ es la secuencia de los números $r_{xy}(l)$ y está definida por las ecuaciones:

$$r_{xy}(l) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y(n-l) \quad l = 0 \pm 1, \pm 2 \dots \quad (3.2)$$

$$r_{xy}(l) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n+l)y(n) \quad l = 0 \pm 1, \pm 2 \dots \quad (3.3)$$

Si cambiamos $x(n)$ por $y(n)$ podemos expresar la crosacorrelación por las ecuaciones (3.4) y (3.5)

$$r_{yx} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n).x(n-l) \quad l = 0 \pm 1, \pm 2 \dots \quad (3.4)$$

$$r_{yx} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n+l).x(n) \quad l = 0 \pm 1, \pm 2 \dots \quad (3.5)$$

Ejemplo

Determinar la crosacorrelación $r_{xy}(l)$ de las secuencias

$$x(n) = \{ \dots 0 \quad 2 \quad -1 \quad 3 \quad 7 \quad \frac{1}{4} \quad 2 \quad -3 \quad 0 \quad 0 \}$$

$$y(n) = \{ \dots 0 \quad 0 \quad 1 \quad -1 \quad 2 \quad -2 \quad \frac{1}{4} \quad 1 \quad -2 \quad 5 \quad 0 \quad 0 \}$$

para $l > 0$

$$\{ 0 \quad 2 \quad -1 \quad 3 \quad 7 \quad \frac{1}{4} \quad 2 \quad -3 \quad 0 \quad 0 \}$$

$$\{ 0 \quad 1 \quad -1 \quad 2 \quad -2 \quad \frac{1}{4} \quad 1 \quad -2 \quad 5 \quad 0 \}$$

Afectuando la suma de los productos de $x(i)$ y $y(i)$

$$r_{xy}(0) = \sum_{i=-l}^l x(i)y(i)$$

entonces $r_{xy}(0) = 7$. Para $l = 1$ obtenemos

$$\{ 0 \quad 2 \quad -1 \quad 3 \quad 7 \quad \frac{1}{4} \quad 2 \quad -3 \quad 0 \quad 0 \}$$

$$\{ 0 \quad 1 \quad -1 \quad 2 \quad -2 \quad \frac{1}{4} \quad 1 \quad -2 \quad 5 \quad 0 \}$$

Con el mismo procedimiento obtenemos las series para

$$r_{xy}(1) = 13$$

Para $l = 2, 3, 4, 5, 6$ y 7 obtenemos:

$$r_{xy}(2) = -18 \quad r_{xy}(3) = 16 \quad r_{xy}(4) = -7 \quad r_{xy}(5) = 5 \quad r_{xy}(6) = -3 \quad r_{xy}(7) = 0$$

para $l < 0$

$$\{ 0 \quad 2 \quad -1 \quad 3 \quad 7 \quad \frac{1}{4} \quad 2 \quad -3 \quad 0 \quad 0 \}$$

$$\{ 0 \quad 1 \quad -1 \quad 2 \quad -2 \quad \frac{1}{4} \quad 1 \quad -2 \quad 5 \quad 0 \}$$

Si multiplicamos y sumamos los términos obtenemos:

$$r_{xy}(-1) = 0$$

Y similarmente para $l = -2$ obtenemos las series

$$\left\{ \begin{array}{cccccccccc} 0 & 0 & 2 & -1 & 3 & 7 & \frac{1}{4} & 2 & -3 & 0 & 0 \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{cccccccccc} 1 & -1 & 2 & -2 & \frac{1}{4} & 1 & -2 & 5 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\}$$

$$r_{xy}(-2) = 33$$

Para $l = (-2, -3, -4, -5, -6, -7, -8)$ obtenemos

$$r_{xy}(-3) = -14; \quad r_{xy}(-4) = 36; \quad r_{xy}(-5) = 19$$

$$r_{xy}(-6) = -9; \quad r_{xy}(-7) = 10; \quad r_{xy}(-8) = 0$$

La crosacorrelación de las secuencias $x(n)$ y $y(n)$ es la secuencia $r_{xy}(l)$

$$r_{xy}(l) = \{ \dots 0 \quad 0 \quad 10 \quad -9 \quad 19 \quad 36 \quad -14 \quad 33 \quad 0 \quad 7 \quad 3 \quad -18 \quad 16 \quad -7 \quad 5 \quad -3 \quad 0 \quad \dots \}$$

En el caso especial, si $x(n) = y(n)$ hablamos de la autocorrelación de la secuencia $x(n)$

$$r_{xx}(l) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(n) \cdot x(n-l) \quad (3.6)$$

$$r_{xx} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(n+l) \cdot x(n) \quad (3.7)$$

La autocorrelación normalizada está definida por la ecuación

$$\rho_{xx} = \frac{r_{xx}(l)}{r_{xx}(0)} \quad (3.8)$$

de manera semejante la crosacorrelación normalizada por ecuación 3.8

$$\rho_{xy}(l) = \frac{r_{xy}(l)}{\sqrt{r_{xx}(0) \cdot r_{yy}(0)}} \quad (3.9)$$

En ejemplos prácticos usamos la correlación para descubrir la señal periódica en la señal destruida por el ruido, en la que el periodo no es evidente.

Si tenemos una señal $x(n)$ deformada con el ruido w_n entonces obtenemos la secuencia de los números en la forma

$$y(n) = x(n) + w(n) \quad (3.10)$$

Si utilizamos el factor M para la normalización es la autocorrelación r_{yy}

$$r_{yy} = \frac{1}{M} \sum_n y(n)y(n-l) \quad (3.11)$$

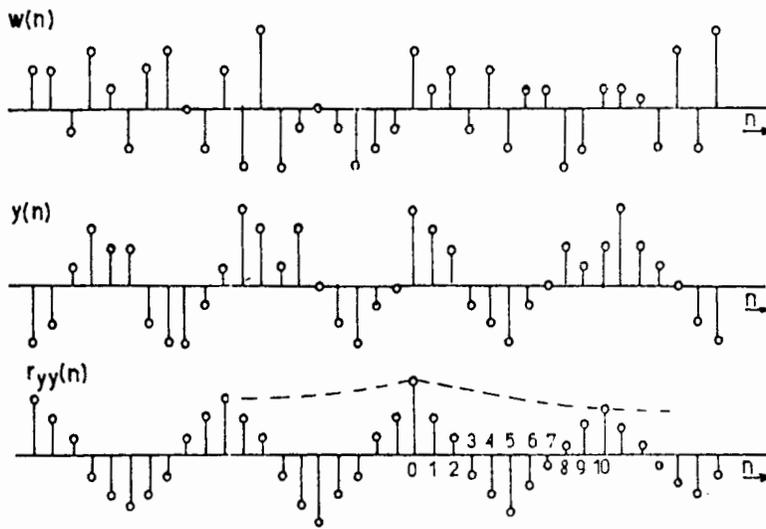


Figura 3.2: autocorrelacion de una señal $y(n)$

Si sustituimos por $y(n)$ y $y(n-l)$ obtenemos

$$r_{yy}(l) = \frac{1}{M} \sum_n [x(n) + w(n)][x(n-l) + w(n-l)] \quad (3.12)$$

$$r_{yy}(l) = \frac{1}{M} \left[\sum_n x(n)x(n-l) + \sum_n x(n)w(n-l) + \sum_n w(n)x(n-l) + \sum_n w(n)w(n-l) \right] \quad (3.13)$$

El primer termino a la derecha es la autocorrelación de la secuencia $x(n)$

$$r_{xx}(l) = \frac{1}{M} \sum_n x(n).x(n-l) \quad (3.14)$$

Debido que la secuencia $x(n)$ es periódica la autocorrelación $r_{xx}(l)$ de la señal $x(n)$ es también periódica. Tiene sus máximas en $l = 0, N, 2N, 3N, \dots$. Los máximas se disminuyen, porque la secuencia tiene número de término finito. La crosscorrelación entre la señal y ruido es muy pequeña.

$$r_{xw}(l) = \frac{1}{M} \sum_n x(n).w(n-l) \quad (3.15)$$

$$r_{wx}(l) = \frac{1}{M} \sum_n w(n).x(n-l) \quad (3.16)$$

Al fin la autocorrelación del ruido va a tener su máximo en el $l = 0$. Y la autocorrelación va a converger a cero.

$$r_{ww}(l) = \frac{1}{M} \sum_n w(n).w(n-l) \quad (3.17)$$

Esa cualidad nos permite descubrir la señal periódico $x(n)$ en la señal $y(n)$. En la figura 3.2 se presenta esa idea.

De la autocorrelación podemos ver el período del señal $x(n)$. El período es en este caso $N = 10$. Los máximos se disminuyen por no tener secuencia infinita.

Capitulo 4

Transformada discreta de Fourier

La transformada de Fourier de una señal discreta no periodica está definida por la ecuación

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega nT} dt \quad (4.1)$$

y para la transformada inversa de Fourier podemos escribir

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) \cdot e^{j\omega nT} d\omega \quad (4.2)$$

Esas dos ecuaciones las expresamos simbólicamente $x(n) \xleftrightarrow{F} X(\omega)$

Ejemplo

Determinar el espectro de una señal $x(n)$ definida por la ecuación

$$x(n) = \begin{cases} A & -M \leq n \leq M \\ 0 & \text{para todas otras } n \end{cases}$$

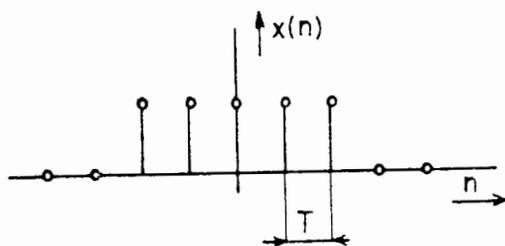


Figura 4.1: La señal discreta

$$X(\omega) = \sum_{n=-M}^M A \cdot e^{-j\omega nT} = A \left(1 + 2 \cdot \sum_{n=1}^M \cos \omega n \right)_{T=1} \quad (4.3)$$

$$X(\omega) = A \cdot \frac{\text{sen} \left(M + \frac{1}{2} \right) \omega}{\text{sen} \frac{\omega}{2}}$$

$$|X(\omega)| = \left| A \cdot \frac{\text{sen} \left(M + \frac{1}{2} \right) \omega}{\text{sen} \frac{\omega}{2}} \right|$$

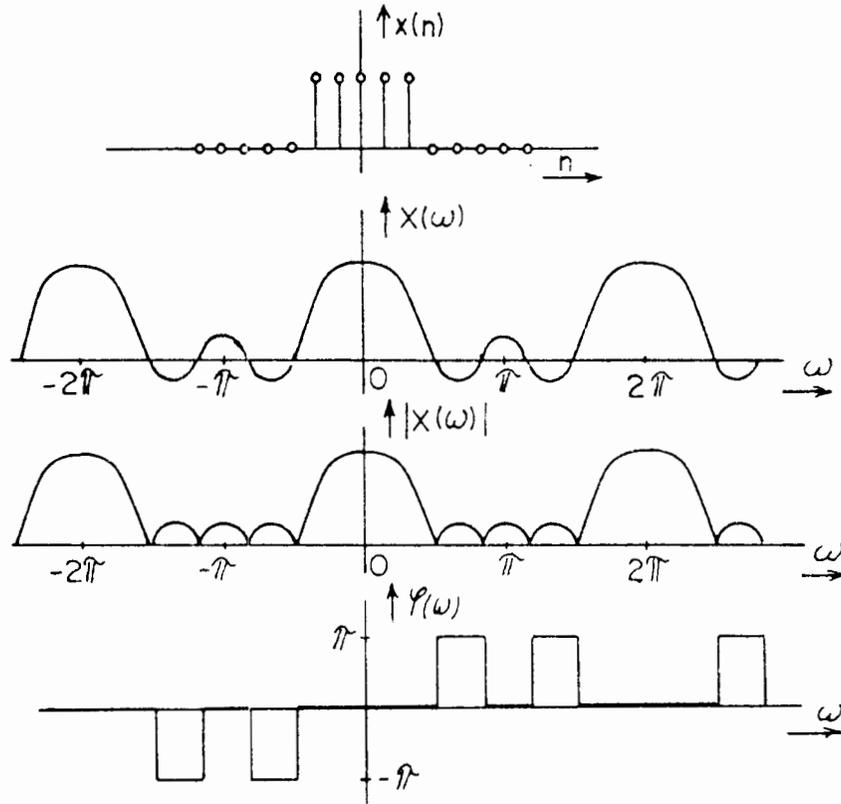


Figura 4.2: La señal discreta no periódica y su espectro continuo y periódico

$$\angle X(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{para } X(\omega) > 0 \\ \pi & \text{para } X(\omega) < 0 \end{cases}$$

La gráfica de un señal $x(n)$ y su espectro se muestran en la figura 4.2.

4.1 Simetría de la transformada Fourier

Supongamos que la señal en el tiempo $x(n)$ y su espectro son complejos. Entonces las podemos expresar en la forma rectangular como

$$x(n) = x_R(n) + jx_I(n) \quad (4.4)$$

$$X(\omega) = X_R(\omega) + jX_I(\omega) \quad (4.5)$$

Si sustituimos esas ecuaciones y $e^{-j\omega} = \cos \omega - j \operatorname{sen} \omega$ en las ecuaciones (4.6) y (4.7)

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) e^{j\omega n T} d\omega \quad (4.6)$$

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n T} \quad (4.7)$$

obtenemos las partes real y imaginaria de las señales $x(n)$ y $X(\omega)$

$$X_R(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [x_R(n) \cos \omega n + x_I(n) \text{sen } \omega n] \quad (4.8)$$

$$X_I(\omega) = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} [x_R(n) \text{sen } \omega n - x_I(n) \cos \omega n] \quad (4.9)$$

$$x_R(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} [X_R(\omega) \cos \omega n - X_I(\omega) \text{sen } \omega n] d\omega \quad (4.10)$$

$$x_I(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} [X_R(\omega) \text{sen } \omega n + X_I(\omega) \cos \omega n] d\omega \quad (4.11)$$

Ahora vamos a investigar algunos casos especiales:

A. La señal real

Si la señal $x(n)$ es real entonces vale

$$x_R(n) = x(n) \quad x_I(n) = 0$$

y las ecuaciones para el espectro toman la forma

$$X_R(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cdot \cos \omega n \quad (4.12)$$

$$X_I(\omega) = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cdot \text{sen } \omega n \quad (4.13)$$

de estas ecuaciones podemos escribir

$$X_R(-\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cdot \cos(-\omega n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cos \omega n \quad (4.14)$$

Entonces la parte real de la señal es par $X_R(-\omega) = X_R(\omega)$. La transformada inversa Fourier y señal real se calcula con la ayuda de la ecuación (4.15)

$$x(n) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [X_R(\omega) \cos \omega n - X_I(\omega) \text{sen } \omega n] d\omega \quad (4.15)$$

El módulo y la fase de espectro lo podemos calcular para señales reales de las ecuaciones

$$|X(\omega)| = \sqrt{X_R^2(\omega) + X_I^2(\omega)} \quad (4.16)$$

$$\angle X(\omega) = \arctan \frac{X_I(\omega)}{X_R(\omega)} \quad (4.17)$$

B. La señal real y par

Si la señal $x(n)$ es real y par vale $x(n) = x(-n)$ y de las ecuaciones

$$X_R(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cos \omega n \quad (4.18)$$

$$X_I(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \operatorname{sen} \omega n \quad (4.19)$$

obtenemos

$$X_R(\omega) = x(0) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} x(n) \cos \omega n \quad (4.20)$$

$$X_I(\omega) = 0$$

$$x(n) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} X_R(\omega) \cos \omega n d\omega \quad (4.21)$$

La señal par y real tiene su espectro real que es la función par de ω

C. La señal real e impar

Si la señal $x(n)$ es real e impar $x(-n) = -x(n)$ entonces

$$x(n) \cos \omega n \text{ es impar y } x(n) \operatorname{sen} \omega n \text{ es par}$$

y de la ecuación (4.22) y (4.23)

$$X_R(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cos \omega n \quad (4.22)$$

$$X_I(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \operatorname{sen} \omega n \quad (4.23)$$

$$x(n) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [X_R(\omega) \cos \omega n - X_I(\omega) \operatorname{sen} \omega n] d\omega$$

obtenemos

$$X_R(\omega) = 0$$

$$X_I(\omega) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} x(n) \operatorname{sen} \omega n \quad (4.24)$$

$$x(n) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} X_I(\omega) \operatorname{sen} \omega n d\omega \quad (4.25)$$

Si la señal $x(n)$ es real impar su espectro es función impar de ω

D. Las señales imaginarias

Para las señales puras imaginarias podemos escribir $x_R = 0$ y $x(n) = jx(n)$ y las funciones

$$X_R(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [x_R(n) \cos \omega n + x_I(n) \text{sen } \omega n]$$

$$X_I(\omega) = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} [x_R(n) \text{sen } \omega n + x_I(n) \cos \omega n]$$

$$x_I(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} [X_R(\omega) \text{sen } \omega n + X_I(\omega) \cos \omega n] d\omega$$

se reducen a:

$$X_R(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_I(n) \text{sen } \omega n \quad (4.26)$$

$$X_I(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_I(n) \cos \omega n \quad (4.27)$$

$$x_I(n) = \int_0^{\pi} [X_R(\omega) \text{sen } \omega n + X_I(\omega) \cos \omega n] d\omega \quad (4.28)$$

Si $x_I(n)$ es impar $-x_I(n) = x_I(-n)$ entonces

$$X_R(\omega) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} x_I(n) \text{sen } \omega n \quad (4.29)$$

$$X_I(\omega) = 0 \quad (4.30)$$

$$x_I(n) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} X_R(\omega) \text{sen } \omega n d\omega \quad (4.31)$$

Si $x_I(n)$ es par $x_I(n) = x_I(-n)$ obtenemos

$$X_R(\omega) = 0 \quad (4.32)$$

$$X_I(\omega) = x_I(0) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} x_I(n) \cos \omega n \quad (4.33)$$

$$x_I(n) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} X_I(\omega) \cos \omega n d\omega \quad (4.34)$$

Estas propiedades de la simetría nos simplifican los cálculos

4.2 Propiedades de la transformada Fourier

Linealidad

Si existen $x_1(n) \xleftrightarrow{F} X_1(\omega)$ y $x_2(n) \xleftrightarrow{F} X_2(\omega)$ entonces

$$a_1x_1(n) + a_2x_2(n) \xleftrightarrow{F} a_1X_1(\omega) + a_2X_2(\omega) \quad (4.35)$$

Ejemplo

Determinar la transformada Fourier discreta de la señal

$$x(n) = a^{|n|} \quad -1 < a < 1$$

La señal $x(n)$ podemos expresarla como la suma de dos señales $x(n) = x_1(n) + x_2(n)$, donde

$$x_1(n) = \begin{cases} a^n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

y

$$x_2(n) = \begin{cases} a^{-n} & n < 0 \\ 0 & n \geq 0 \end{cases}$$

La transformada de Fourier de la señal $x_1(n)$ es

$$X_1(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{-j\omega})^n$$

$$X_1(\omega) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$$

Esa función converge para $|ae^{-j\omega}| = |a| \cdot |e^{-j\omega n}| = |a| < 1$

Similarmente para el señal $x_2(n)$ obtenemos

$$X_2(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} a^{-n} e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} (ae^{j\omega})^{-n} = \sum_{k=1}^{\infty} (ae^{j\omega})^k$$

$$X_2(\omega) = \frac{ae^{j\omega}}{1 - ae^{j\omega}}$$

Si sustituímos en las siquier tes ecuaciones

$$X(\omega) = X_1(\omega) + X_2(\omega)$$

obtenemos el resultado

$$X(\omega) = \frac{1 - a^2}{1 - 2a \cos \omega + a^2}$$

Gráfica de la señal $x(n) = a^{|n|}$ y su espectro está en la figura 4.3

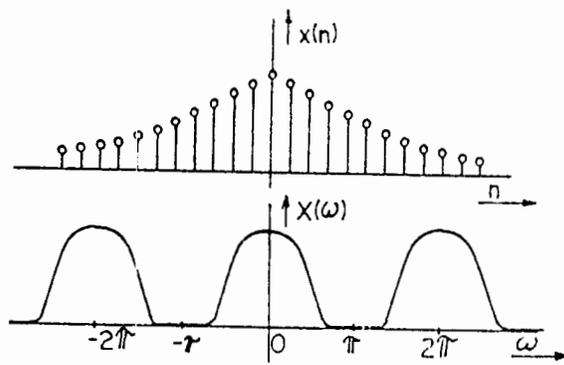


Figura 4.3: Gráfica de la señal $x(n) = a^{|n|}$ y su espectro

Desplazamiento en el tiempo

Si existe $x(n) \xleftrightarrow{F} X(\omega)$ entonces

$$x(n - k) \xleftrightarrow{F} e^{-j\omega k} X(\omega) \quad (4.36)$$

Reversión del tiempo

Si existe $x(n) \xleftrightarrow{F} X(\omega)$
 entonces $x(-n) \xleftrightarrow{F} X(-\omega)$

La convolución

Si existen $x_1(n) \xleftrightarrow{F} X_1(\omega)$ $x_2(n) \xleftrightarrow{F} X_2(\omega)$
 entonces existe la transformación

$$x_1(n) * x_2(n) \xleftrightarrow{F} X_1(\omega) \cdot X_2(\omega) \quad (4.37)$$

Ejemplo

Determine la convolución de dos señales $x_1(n)$ y $x_2(n)$

$$x_1(n) = x_2(n) = \left\{ 1 \quad \begin{array}{c} \downarrow \\ 1 \\ \downarrow \\ 1 \end{array} \right\}$$

La señal es real y par como se ve de la figura 4.4

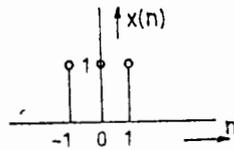


Figura 4.4: La señal real y par

y por eso utilizamos la ecuación:

$$X_R(\omega) = x(0) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} x(n) \cos \omega n$$

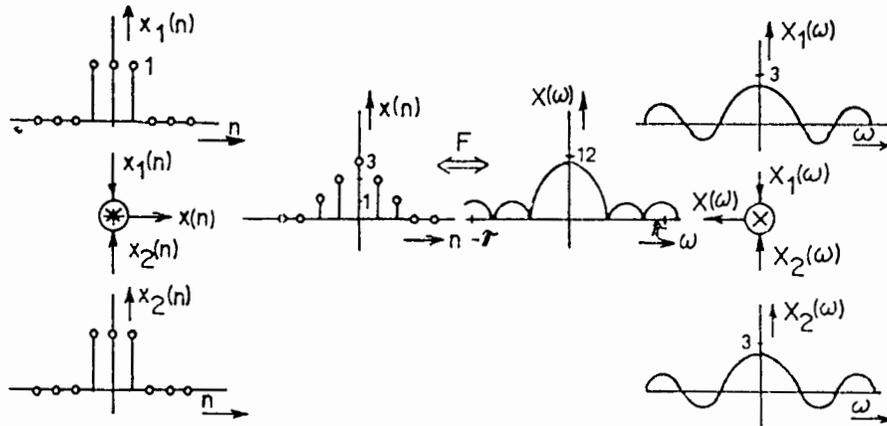


Figura 4.5: La grafica de convolucion de dos señales

entonces

$$X_1(\omega) = X_2(\omega) = 1 + 2 \cdot \cos \omega$$

Si multiplicamos $X_1(\omega)$ por $X_2(\omega)$ obtenemos el espectro:

$$X(\omega) = 3 + 4 \cos \omega + 2 \cos 2\omega = 3 + 2(e^{j\omega} + e^{-j\omega}) + (e^{2j\omega} + e^{-2j\omega})$$

Si calculamos la transformada Fourier inversa $x(n) = F^{-1}\{X(\omega)\}$ obtenemos

$$x(n) = \left\{ 1 \quad 2 \quad 3 \quad 2 \quad 1 \right\}$$

La figura 4.5 muestra la convolución gráfica de dos señales.

Correlación de dos señales

Si existen las transformadas de Fourier de

$$x_1(n) \xleftrightarrow{F} X_1(\omega) \qquad x_2(n) \xleftrightarrow{F} X_2(\omega)$$

entonces la relación (4.38) define la correlación

$$r_{x_1 x_2}(l) \xleftrightarrow{F} X_1(\omega) \cdot X_2(-\omega) = S_{x_1 x_2}(l) \tag{4.38}$$

$S_{x_1 x_2}(\omega)$ es la densidad de espectro

Ejemplo:

Determine la densidad de espectro de la señal $x(n) = a^n \quad -1 < a < 1$

Para $l > 0$ obtenemos

$$r_{xx}(l) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) \cdot x(n-l) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n a^{n-l} = a^{-l} \sum_{n=l}^{\infty} (a^2)^n$$

$$r_{xx}(l) = \frac{1}{1-a^2} a^l \qquad l \geq 0$$

para $l \leq 0$ obtenemos

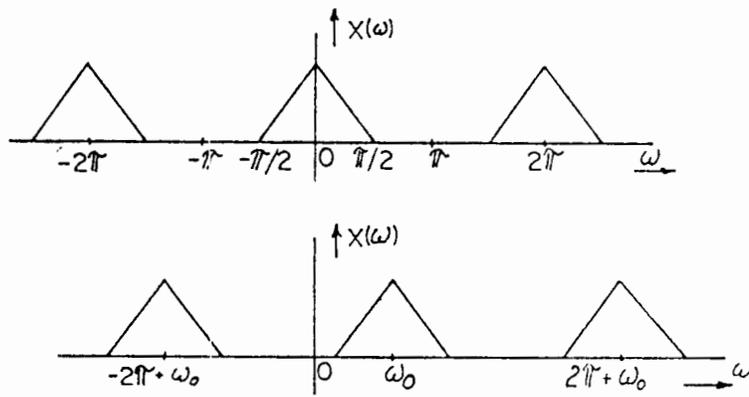


Figura 4.6: Desplazamiento de la frecuencia

$$r_{xx}(l) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) \cdot x(n-l) = a^{-l} \sum_{n=0}^{\infty} (a^2)^n = \frac{1}{1-a^2} a^{-l}$$

las dos ecuaciones las podemos escribir en la forma

$$r_{xx}(l) = \frac{1}{1-a^2} a^{|l|}$$

Si utilizamos del resultado de ejemplo anterior

$$x(n) = a^{|n|} \xleftrightarrow{F} X(\omega) = \frac{1-a^2}{1-2a \cos \omega + a^2}$$

obtenemos la densidad del espectro

$$F \{r_{xx}(l)\} = \frac{1}{1-a^2} F \{a^{|l|}\} = S_{xx}(\omega)$$

$$S_{xx}(\omega) = \frac{1}{1-2a \cos \omega + a^2}$$

Desplazamiento de la frecuencia

Si existe la transformada de Fourier de la señal $x(n) \xleftrightarrow{F} X(\omega)$ entonces

$$e^{-j\omega_0 n} x(n) \xleftrightarrow{F} X(\omega - \omega_0) \quad (4.39)$$

El desplazamiento de la frecuencia está mostrado en la figura 4.6

El teorema de modulación

Si existe la transformada Fourier de la señal $x(n) \xleftrightarrow{F} X(\omega)$ entonces

$$x(n) \cdot \cos \omega_0 n \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2} X(\omega + \omega_0) + \frac{1}{2} X(\omega - \omega_0) \quad (4.40)$$

demostración

Si multiplicamos $x(n)$ por

$$\cos \omega_0 n = \frac{1}{2} (e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n})$$

y utilizámos las propiedades de desplazamiento de la frecuencia obtenémos

$$x(n) = \frac{1}{2} (e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n}) = \frac{x(n)}{2} e^{j\omega_0 n} + \frac{x(n)}{2} e^{-j\omega_0 n}$$

$$\frac{x(n)}{2} e^{j\omega_0 n} + \frac{x(n)}{2} e^{-j\omega_0 n} \xleftrightarrow{F} \frac{X(\omega + \omega_0)}{2} + \frac{X(\omega - \omega_0)}{2}$$

El ejemplo de modulación está dado por $y_2(n) = x(n) \cos \pi n$ en la figura 4.7

$$y(n) := x(n) \cdot \cos \pi n = \frac{x(n)}{2} [e^{j\pi} + e^{-j\pi}]$$

$$Y(\omega) = F\{y(n)\} = \frac{X(\omega + \pi)}{2} + \frac{X(\omega - \pi)}{2}$$

Diferenciación en el dominio de frecuencia

Si existe la transformada Fourier de la señal $x(n)$ $x(n) \xleftrightarrow{F} X(\omega)$ entonces

$$n \cdot x(n) \xleftrightarrow{F} j \frac{dX(\omega)}{d\omega} \quad (4.41)$$

Demostración

$$\frac{dX(\omega)}{d\omega} = \frac{d}{d\omega} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n} \right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \frac{d e^{-j\omega n}}{d\omega} = -j \sum_{n=-\infty}^{\infty} n x(n) e^{-j\omega n}$$

Ejemplo

Determine las muestras en la salida de un circuito que tiene la respuesta a impulso $h(n) = \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^n \right\}$ si en la entrada es la señal

$$x(n) = A \cdot e^{j\frac{\pi n}{2}} \quad (\omega = \pi/2)$$

Primero calculamos la transformada de Fourier de la respuesta a impulso

$$H(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n e^{-j\omega n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} e^{-j\omega}}$$

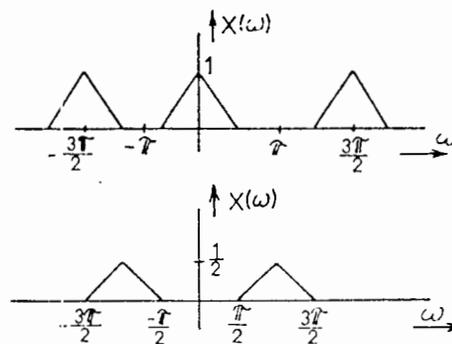


Figura 4.7: La modulación de señal $x(n)$

Para $\omega = \pi/2$ obtenemos

$$H(\pi/2) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}}} = \frac{1}{1 + j\frac{1}{2}}$$

$$H(\pi/2) = \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot e^{-j\arctan\frac{1/2}{1}} = \frac{2}{\sqrt{5}} e^{-j26.6^\circ}$$

y las muestras en la salida del circuito son

$$y(n) = A \left(\frac{2}{\sqrt{5}} e^{-j26.6^\circ} \right) e^{j\frac{\pi n}{2}} = A \frac{2}{\sqrt{5}} e^{j(90^\circ n - 26.6^\circ)}$$

Ejemplo

Para un sistema lineal e invariante en el tiempo determine la respuesta de la magnitud y la fase. El sistema está definido por la ecuación de diferencias

$$y(n) = ay(n-1) + bx(n)$$

$$Y(\omega) = ae^{-j\omega}Y(\omega) + bX(\omega)$$

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{b}{1 - ae^{-j\omega}} = \frac{1}{1 - a \cos \omega + ja \cdot \text{sen } \omega}$$

$$|H(\omega)| = \frac{|b|}{\sqrt{1 - 2a \cdot \cos \omega + a^2}}$$

$$\angle H(\omega) = -\arctan \frac{a \cdot \text{sen } \omega}{1 - a \cos \omega}$$

4.3 La transformada Fourier de una señal discreta y periódica

La transformada discreta de Fourier DFT de una señal discreta y periódica está definida por la ecuación (4.42)

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{kn} \quad (4.42)$$

La transformada inversa de Fourier está definida por la ecuación (4.43)

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)W_N^{-kn} \quad (4.43)$$

donde

$$W_N = e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)} \quad (4.44)$$

La relación entre la señal en el dominio de tiempo y frecuencia lo escribimos simbólicamente

$$x(n) \xleftrightarrow{DFT} X(k)$$

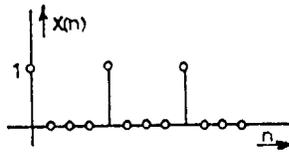


Figura 4.8: Señal discreta y periódica

Ejemplo

Transformar la señal discreta periódica $x(n)$ usando la transformada discreta de Fourier

$$x(n) = \begin{cases} 1 & \text{para } n = 4l \quad l = 0 \pm 1 \pm 2 \dots \\ 0 & \text{para otras } n \end{cases}$$

La gráfica de ésta señal discreta y periódica está mostrada en la figura 4.8
Usando la ecuación

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi kn}{N}}$$

obtenemos para $N = 4$

$$X(k) = \sum_{n=0}^3 x(n)e^{-j\frac{\pi kn}{2}}$$

para $n = 0$ es $x(n) = 1$ obtenemos

$$X(k) = \sum_{n=0}^3 e^{-j\frac{\pi k}{2} \cdot 0} = 1$$

Entonces $X(0) = X(1) = X(2) = X(3) = 1$

En la figura 4.9 tenemos la señal discreta y periódica y su espectro

4.4 Las propiedades de la DFT

Periodicidad

Si $x(n)$ y $Y(k)$ es el par de N-punto de DFT después vale

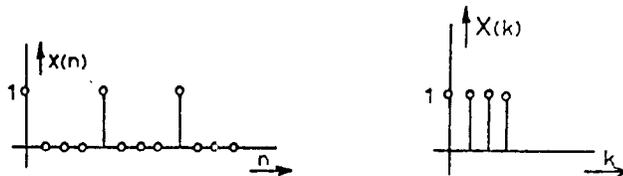


Figura 4.9: Señal discreta y periódica y su espectro

$$x(n + N) = x(n) \text{ para todos } n$$

$$X(k + N) = X(k) \text{ para todos } k$$

Linealidad

Si existen las transformadas discretas de Fourier de las señales $x_1(n)$ $x_2(n)$

$$x_1(n) \xleftrightarrow{DFT} X_1(k) \qquad x_2(n) \xleftrightarrow{DFT} X_2(k)$$

entonces para los valores reales o complejos a_1, a_2 vale

$$a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n) \xleftrightarrow{DFT} a_1 X_1(k) + a_2 X_2(k) \quad (4.45)$$

Convolucion circular en el tiempo

Si existen las transformadas discretas de Fourier de las señales $x_1(n)$ $x_2(n)$

$$x_1(n) \xleftrightarrow{DFT} X_1(k) \qquad x_2(n) \xleftrightarrow{DFT} X_2(k)$$

entonces la convolución circular está definida por la ecuación

$$x_1(n) \overset{N}{*} x_2(n) \xleftrightarrow{DFT} X_1(k) \cdot X_2(k) \quad (4.46)$$

Ejemplo

Determine la convolución de las señales discretas periodicas

$$x_1(n) = \{2 \ 1 \ 2 \ 1\}$$

$$x_2(n) = \{1 \ 2 \ 3 \ 4\}$$

Primero determinamos la transformada discreta de Fourier de $x_1(n)$ y $x_2(n)$

$$X_1(k) = \sum_0^3 x_1(n) e^{-j \frac{2\pi n k}{4}} \qquad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$X_1(k) = 2 + e^{-j \frac{\pi k}{2}} + 2e^{-j \pi k} + e^{-j \frac{3\pi k}{2}}$$

para $k=0,1,2,3$ obtenemos

$$X_1(0) = 6$$

$$X_1(1) = 2 + \cos \frac{\pi}{2} - j \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} + 2 \cos \pi - 2j \operatorname{sen} \pi + \cos \frac{3\pi}{2} - j \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} = 2 - j - 2 - 0 + 0 + j$$

$$X_1(1) = 0$$

$$X_1(2) = 2 + \cos \pi - j \operatorname{sen} \pi + 2 \cos 2\pi - 2j \operatorname{sen} 2\pi + \cos 3\pi - j \operatorname{sen} 3\pi = 2 - 1 - 0 + 2 - 0 - 1 - 0$$

$$X_1(2) = 2$$

$$X_1(3) = 2 + \cos \frac{3\pi}{2} - j \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} + 2 \cos 3\pi - 2j \operatorname{sen} 3\pi + \cos \frac{9\pi}{2} - j \operatorname{sen} \frac{9\pi}{2} = 2 + 0 + j - 2 - 0 + 0 - j$$

$$X_1(3) = 0$$

La transformada discreta de Fourier de la señal $x_2(n)$ es

$$X_2(k) = \sum_{n=0}^3 x_2(n) e^{-\frac{2\pi nk}{4}}$$

Similarmente obtenemos

$$X_2(0) = 10 \quad X_2(1) = -2 + 2j \quad X_2(2) = -2 \quad X_2(3) = -2 - 2j$$

El resultado lo obtenemos calculando la ecuación

$$X_3(K) = X_1(k) \cdot X_2(k)$$

$$X_3(0) = X_2(0) \cdot X_1(0) = 60$$

$$X_3(1) = X_2(1) \cdot X_1(1) = 0$$

$$X_3(2) = X_2(2) \cdot X_1(2) = -4$$

$$X_3(3) = X_2(3) \cdot X_1(3) = 0$$

Usando la transformada Fourier inversa *IDFT*

$$F^{-1}\{X_3(k)\} = x_3(n)$$

obtenemos

$$x_3(n) = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 X_3(k) e^{j\frac{2\pi kn}{4}}$$

$$x_3(n) = \frac{1}{4} (60 - 4e^{j\pi n})$$

para $n = 0, 1, 2, 3$ obtenemos

$$\begin{aligned} x_3(0) &= 14 & x_3(1) &= \frac{1}{4}(60 + 4) = 16 \\ x_3(2) &= \frac{1}{4}(60 - 4) = 14 & x_3(3) &= \frac{1}{4}(60 + 4) = 16 \end{aligned}$$

entonces

$$x_3(n) = \{14 \quad 16 \quad 14 \quad 16\}$$

El mismo resultado lo obtenemos con la matriz circular

$$\mathbf{x}_3(\mathbf{n}) = \text{circ } \mathbf{x}_2(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{x}_1(\mathbf{k})$$

$$\begin{bmatrix} x_3(0) \\ x_3(1) \\ x_3(2) \\ x_3(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 16 \\ 14 \\ 16 \end{bmatrix}$$

Desplazamiento circular de la señal en el dominio de tiempo

Si existe $x(n) \xleftrightarrow{DFT} X(k)$ entonces

$$x(n-l)_N \xleftrightarrow{DFT} X(k)e^{-j\frac{2\pi kl}{N}} \quad (4.47)$$

Desplazamiento circular de la señal en el dominio de la frecuencia

Si existe $x(n) \xleftrightarrow{DFT} X(k)$ entonces

$$x(n)e^{j\frac{2\pi nl}{N}} \xleftrightarrow{DFT} X(k-l)_N \quad (4.48)$$

La correlación circular

Si existe la transformada discreta de Fourier de las señales $x(n)$ y $y(n)$

$$x(n) \xleftrightarrow{DFT} X(k) \quad y(n) \xleftrightarrow{DFT} Y(k)$$

entonces

$$r_{xy}(l) \xleftrightarrow{DFT} X(k)Y^*(k) \quad (4.49)$$

donde $r_{xy}(l)$ es la cros correlación circular definida por la ecuacion

$$r_{xy}(l) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)y^*(n-l)_N \quad (4.50)$$

Para la autocorrelación vale

$$r_{xx}(l) \xleftrightarrow{DFT} |X(k)|^2 \quad (4.51)$$

Multiplicación de dos señales en el tiempo

Si existen

$$x_1(n) \xleftrightarrow{DFT} X_1(k) \quad x_2(n) \xleftrightarrow{DFT} X_2(k)$$

entonces

$$x_1(n)x_2(n) \xleftrightarrow{DFT} \frac{1}{N} X_1(k) * X_2(k) \quad (4.52)$$

la multiplicación de dos señales en el tiempo corresponde a la convolución circular de las señales $X_1(k)$ y $X_2(k)$

El teorema de Parseval

Para la sucesión $x(n)$ y $y(n)$ si existe la transformada discreta de Fourier $x(n) \xleftrightarrow{DFT} X(k)$; $y(n) \xleftrightarrow{DFT} Y(k)$ entonces:

$$\sum_{n=0}^{N-1} x(n)y^*(n) \xleftrightarrow{DFT} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)Y^*(k) \quad (4.53)$$

para $y(n) = x(n)$, la última ecuación se reduce a

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2 \quad (4.54)$$

Esa ecuación le presenta la energía de la sucesión $x(n)$

Ejemplo

Usando *DFT* e *IDFT* determine la respuesta de un filtro FIR que tiene la respuesta a impulso $h(n)$

$$h(n) = \{1 \ 2 \ 3\}$$

si en la entrada es la señal

$$x(n) = \{1 \ 2 \ 2 \ 1\}$$

La respuesta al impulso tiene tres muestras $M = 3$ y la señal en la entrada tiene cuatro muestras $L = 4$. Esas dos secuencias establecen una secuencia de longitud

$$N = M + L - 1 = 6$$

La longitud de la *DFT* tiene que ser mínimo 6. Para nuestro caso elegimos ocho-punto *DFT*, porque el algoritmo más conocido, la transformada rápida de Fourier *FFT* es elaborada para la longitud N , que es la potencia de dos. Entonces ocho-punto *DFT* de la señal $x(n)$ es

$$X(k) = \sum_{n=0}^7 x(n) \cdot e^{-j \frac{2\pi kn}{8}}$$

$$X(k) = 1 + 2e^{-j \frac{\pi k}{4}} + 2e^{-j \frac{\pi k}{2}} + e^{-j \frac{3\pi k}{4}}$$

Si sustituimos por $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ obtenemos

$$\begin{aligned} X(0) &= 6 & X(1) &= \frac{2+\sqrt{2}}{2} - j \frac{4+3\sqrt{2}}{2} \\ X(2) &= -1 - j & X(3) &= \frac{2-\sqrt{2}}{2} + j \frac{4-3\sqrt{2}}{2} \\ X(4) &= 0 & X(5) &= \frac{2-\sqrt{2}}{2} - j \frac{4-3\sqrt{2}}{2} \\ X(6) &= -1 + j & X(6) &= \frac{2+\sqrt{2}}{2} + j \frac{4+3\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

Ocho puntos de la *DFT* de la señal $h(n)$ es

$$H(k) = \sum_{n=0}^7 h(n) e^{-j \frac{2\pi kn}{8}}$$

$$H(k) = 1 + 2e^{-j \frac{k\pi}{4}} + 3e^{-j \frac{k\pi}{2}}$$

entonces

$$\begin{aligned} H(0) &= 6 & H(1) &= 1 + \sqrt{2} - j(3 + \sqrt{2}) \\ H(2) &= -2 - 2j & H(3) &= 1 - \sqrt{2} + j(3 - \sqrt{2}) \\ H(4) &= 2 & H(5) &= 1 - \sqrt{2} - j(3 - \sqrt{2}) \\ H(6) &= -2 + 2j & H(7) &= 1 + \sqrt{2} + j(3 + \sqrt{2}) \end{aligned}$$

Solucionando la ecuación $Y(k) = H(k).X(k)$ obtenemos el resultado

$$\begin{aligned} Y(0) &= 6.6 = 36 & Y(1) &= -14.07 - j17.48 \\ Y(2) &= j4 & Y(3) &= 0.07 + j0.515 \\ Y(4) &= 0 & Y(5) &= 0.07 - j0.515 \\ Y(6) &= -j4 & Y(7) &= -14.07 + j17.48 \end{aligned}$$

Al fin usando ocho punto *IDFT*

$$y(n) = \frac{1}{8} \sum_{k=0}^7 Y(k)e^{j\frac{2\pi kn}{8}}$$

obtenemos el resultado

$$y(n) = \{1 \ 4 \ 9 \ 11 \ 8 \ 3 \ 0 \ 0\}$$

$$y(0) = \frac{1}{8} [36 - 14.07 - j14.07 + j4 + 0.07 + j0.51 + 0.07 - j0.51 - j4 - 14.07 + j17.48] = 1$$

De este ejemplo hemos visto que necesitamos muchísimas operaciones. Eso influye en el tiempo del cálculo. Por eso algunos autores diseñaron el algoritmo que se llama la transformada Fourier rápida (FFT).

Ejemplo

Usando la convolución circular calcule la respuesta $y(n) = h(n) * x(n)$ si conoce las señales:

$$h(n) = \{1 \ 2 \ 3\}$$

$$x(n) = \{1 \ 2 \ 2 \ 1\}$$

Si utilizamos la convolución circular $y(n) = \text{cyclic } h(n).x(n)$ obtenemos

$$y(n) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 7 \\ 9 \\ 11 \end{bmatrix}$$

Y la respuesta es

$$y_1(n) = \{9 \ 7 \ 9 \ 11\}$$

Si completamos las señales con uno cero

$$h(n) = \{1 \ 2 \ 3 \ 0 \ 0\}$$

$$x(n) = \{1 \ 2 \ 2 \ 1 \ 0\}$$

es la convolución circular

$$y(n) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 9 \\ 11 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Y la respuesta es

$$y_2(n) = \{4 \ 4 \ 9 \ 11 \ 8\}$$

Si complementamos los señales $h(n)$ y $x(n)$ con dos ceros

$$h(n) = \{1 \ 2 \ 3 \ 0 \ 0 \ 0\}$$

$$x(n) = \{1 \ 2 \ 2 \ 1 \ 0 \ 0\}$$

la convolución circular toma la forma

$$y(n) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \\ 11 \\ 8 \\ 3 \end{bmatrix}$$

y la respuesta en el dominio del tiempo es

$$y(n) = \{1 \ 4 \ 9 \ 11 \ 8 \ 3\}$$

La respuesta $y_3(n)$ es la misma que obtuvimos en el ejemplo anterior. Las respuestas $y_1(n)$ y $y_2(n)$ no son correctos, porque en éstas casos ocurrió "aliasing".

Capítulo 5

La transformada rápida Fourier

La transformada Fourier discreta está definida por la ecuación 5.1

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{kn} \quad (5.1)$$

donde $W = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$

Para $N = 4$ se pueden escribir las ecuaciones

$$\begin{aligned} X(0) &= x(0)W^0 + x(1)W^0 + x(2)W^0 + x(3)W^0 \\ X(1) &= x(0)W^0 + x(1)W^1 + x(2)W^2 + x(3)W^3 \\ X(2) &= x(0)W^0 + x(1)W^2 + x(2)W^4 + x(3)W^6 \\ X(3) &= x(0)W^0 + x(1)W^3 + x(2)W^6 + x(3)W^9 \end{aligned}$$

o en la forma matricial

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W^1 & W^2 & W^3 \\ 1 & W^2 & W^4 & W^6 \\ 1 & W^3 & W^6 & W^9 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \end{bmatrix}$$

Si sustituimos en la ecuación matricial por $W = e^{-j\frac{2\pi}{4}}$ obtenemos la ecuación matricial:

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \end{bmatrix}$$

que se puede escribir en la forma $\mathbf{X}(\mathbf{k}) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{x}(\mathbf{n})$ donde \mathbf{F} es la matriz Fourier. Desde la ecuación matricial podemos dibujar la mariposa básica para $FFT - 4$.

Podemos ver, que tenemos 12 sumas y cuatro multiplicaciones.

La Matriz Fourier se puede dividir en dos matrices y obtenemos la ecuación matricial

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -j \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & j \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \end{bmatrix}$$

Esa ecuación matricial la podemos escribir en dos ecuaciones

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -j \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & j \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_1(1) \\ x_1(2) \\ x_1(3) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_1(1) \\ x_1(2) \\ x_1(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \end{bmatrix}$$

De estas ecuaciones matriciales podemos escribir las ocho ecuaciones siguientes

$$\begin{aligned} X(0) &= x_1(0) + x_1(2) & x_1(0) &= x(0) + x(2) \\ X(1) &= x_1(1) - jx_1(3) & x_1(1) &= x(0) - x(2) \\ X(2) &= x_1(0) - x_1(2) & x_1(2) &= x(1) + x(3) \\ X(3) &= x_1(1) + jx_1(3) & x_1(3) &= x(1) - x(3), \end{aligned}$$

en las que podemos dibujar la mariposa mostrada en la figura 5.2. invirtiendo los bits de entrada.

Desde las ecuaciones anteriores podemos ver, que necesitamos ocho adiciones. La suma se reduce a $N \log_2 N$. La figura 5.3 muestra la dependencia del número de operaciones para *DFT* y *FFT* en N .

5.1 El algoritmo "Decimación en el tiempo"

La secuencia de datos $x(n)$ en la entrada de un circuito discreto lo podemos dividir en dos secuencias par $x(2n)$ e impar $x(2n + 1)$.

$$x(n) = x(2n) + x(2n + 1) \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, \frac{N}{2} - 1 \quad (5.2)$$

$$x(2n) = \{x(0) \ x(2) \ x(4) \ \dots\} \quad x(2n + 1) = \{x(1) \ x(3) \ x(5) \ \dots\}$$

la secuencia $x(2n)$ se compone de los datos par de $x(n)$ y la secuencia $x(2n + 1)$ tiene los datos impar de $x(n)$. La transformada Fourier se puede escribir cómo

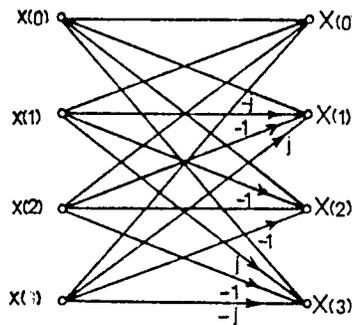


Figura 5.1: Mariposa básica para 4-FFT

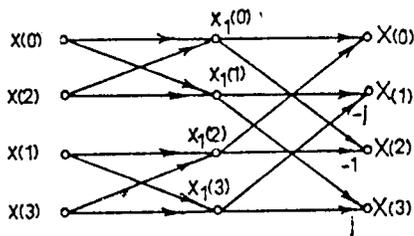


Figura 5.2: Mariposa para FFT-4

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{kn} \quad (5.3)$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n)W_N^{2kn} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n+1)W_N^{k(2n+1)} \quad (5.4)$$

El término W_N está definido por la ecuación

$$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}} \quad (5.5)$$

que es periódico y vale

$$W_N^{k+\frac{N}{2}} = -W_N^k \quad W_N^{n(k+\frac{N}{2})} = W_N^{nk}$$

y también podemos escribir

$$X(k) = X(k + \frac{N}{2})$$

Si aplicamos las condiciones periódicas a la ecuación 5.4 obtenemos

$$X(k) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n)W_N^{nk} + W_N^k \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n+1)W_N^{kn} \quad (5.6)$$

$$W_N^{2nk} = W_N^{nk}$$

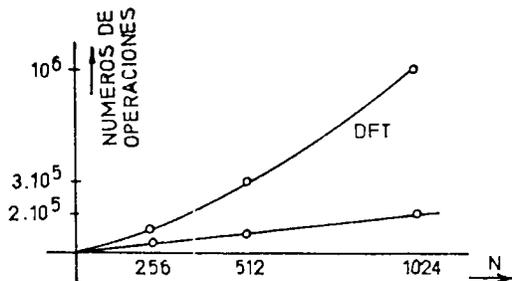


Figura 5.3: La dependencia de los números de operaciones para *DFT* y *FFT*

Cada término en el lado derecho de la ecuación (5.6) es la transformada directa de Fourier y entonces la ecuación (5.6) la podemos escribir en la forma

$$\begin{aligned} X(k) &= X_1(k) + W_N^k X_2(k) \\ X(k + \frac{N}{2}) &= X_1(k) + W_N^{k+\frac{N}{2}} X_2(k) \end{aligned} \quad (5.7)$$

Si sustituimos por $W_N^{k+\frac{N}{2}} = -W_N^k$ obtenemos las ecuaciones

$$\begin{aligned} X(k) &= X_1(k) + W_N^k X_2(k) \\ X(k + \frac{N}{2}) &= X_1(k) - W_N^k X_2(k) \end{aligned} \quad (5.8)$$

De estas ecuaciones podemos dibujar una gráfica de las señales figura 5.4.

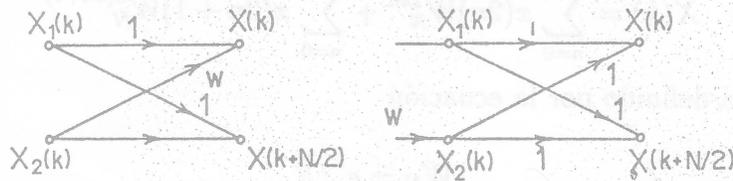


Figura 5.4: Mariposa de FFT

Esa gráfica es muy conocida y la llamamos mariposa (butterfly), necesita dos sumas y dos multiplicaciones de números complejos. Esta gráfica de señales se puede simplificar y obtenemos la mariposa nueva que necesita sólo una multiplicación figure 5.4b.

Para $N = 8$ podemos escribir las ecuaciones (5.8) en la serie de ecuaciones $k = 0, 1, 2, \dots, 7$

$$\begin{aligned} X(0) &= X_1(0) + W_N^0 X_2(0) & X(4) &= X_1(0) - W_N^0 X_2(0) \\ X(1) &= X_1(1) + W_N^1 X_2(1) & X(5) &= X_1(1) - W_N^1 X_2(1) \\ X(2) &= X_1(2) + W_N^2 X_2(2) & X(6) &= X_1(2) - W_N^2 X_2(2) \\ X(3) &= X_1(3) + W_N^3 X_2(3) & X(7) &= X_1(3) - W_N^3 X_2(3) \end{aligned}$$

De estas ecuaciones dibujamos la gráfica mostrada en la figura 5.5

De la gráfica podemos ver que necesitamos en vez de N multiplicaciones sólo $\frac{N}{2}$ multiplicaciones. El mismo procedimiento lo aplicamos a la función $X_1(k)$ y $X_2(k)$ $k = 0, 1, \dots, 4$ De la ecuación (5.7) tenemos

$$X_2(k) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_2(n) W_N^{nk} \quad (5.9)$$

$$X_1(k) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_1(n) W_N^{nk} \quad (5.10)$$

La secuencia $x_1(n)$ se puede separar en una secuencia par e impar como lo anterior. Entonces escribimos

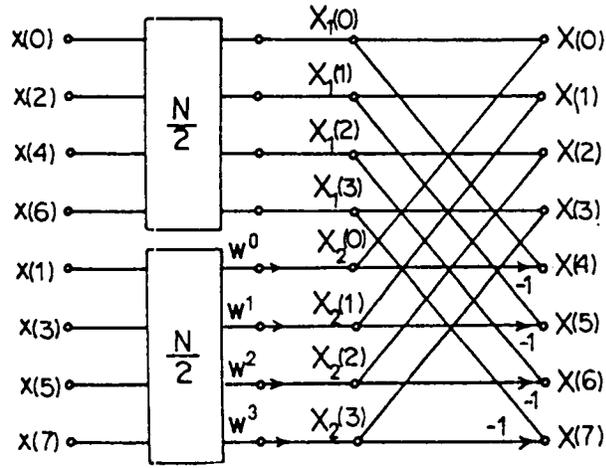


Figura 5.5: Mariposa para FFT-8

$$X_1(k) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{4}-1} x_1(2n)W_{\frac{N}{2}}^{2nk} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{4}-1} x_1(2n+1)W_{\frac{N}{2}}^{k(2n+1)} \quad (5.11)$$

$$X_1(k) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{4}-1} x_1(2n)W_{\frac{N}{4}}^{nk} + W_{\frac{N}{2}}^k \sum_{n=0}^{\frac{N}{4}-1} x_1(2n+1)W_{\frac{N}{4}}^{kn} \quad (5.12)$$

Esa última ecuación se puede escribir como la anterior, en dos ecuaciones generales

$$\begin{aligned} X_1(k) &= X_{11}(k) + W_{\frac{N}{2}}^{2k} X_{12}(k) \\ X_1(k + \frac{N}{4}) &= X_{11}(k) + W_{\frac{N}{2}}^{2k} X_{12}(k) \end{aligned} \quad (5.13)$$

Lo mismo podemos obtener para $X_2(k)$

$$\begin{aligned} X_2(k) &= X_{21}(k) + W_{\frac{N}{2}}^{2k} X_{22}(k) \\ X_2(k + \frac{N}{4}) &= X_{21}(k) + W_{\frac{N}{2}}^{2k} X_{22}(k) \end{aligned} \quad (5.14)$$

La periodicidad es $\frac{N}{4}$. De estas ecuaciones obtenemos la serie de las ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned} X_1(0) &= X_{11}(0) + W_{\frac{N}{2}}^0 X_{12}(0) & X_2(0) &= X_{21}(0) + W_{\frac{N}{2}}^0 X_{22}(0) \\ X_1(1) &= X_{11}(1) + W_{\frac{N}{2}}^2 X_{12}(1) & X_2(1) &= X_{21}(1) + W_{\frac{N}{2}}^2 X_{22}(1) \\ X_1(2) &= X_{11}(0) + W_{\frac{N}{2}}^4 X_{12}(0) & X_2(2) &= X_{21}(0) + W_{\frac{N}{2}}^4 X_{22}(0) \\ X_1(3) &= X_{11}(1) + W_{\frac{N}{2}}^6 X_{12}(1) & X_2(3) &= X_{21}(1) + W_{\frac{N}{2}}^6 X_{22}(1) \end{aligned}$$

Pero $W_{\frac{N}{2}}^0 = -W_{\frac{N}{2}}^4$ $W_{\frac{N}{2}}^2 = -W_{\frac{N}{2}}^6$ y entonces las ecuaciones toman la forma:

$$\begin{aligned} X_1(0) &= X_{11}(0) + W_{\frac{N}{2}}^0 X_{12}(0) & X_2(0) &= X_{21}(0) + W_{\frac{N}{2}}^0 X_{22}(0) \\ X_1(1) &= X_{11}(1) + W_{\frac{N}{2}}^2 X_{12}(1) & X_2(1) &= X_{21}(1) + W_{\frac{N}{2}}^2 X_{22}(1) \\ X_1(2) &= X_{11}(0) - W_{\frac{N}{2}}^0 X_{12}(0) & X_2(2) &= X_{21}(0) - W_{\frac{N}{2}}^0 X_{22}(0) \\ X_1(3) &= X_{11}(1) - W_{\frac{N}{2}}^2 X_{12}(1) & X_2(3) &= X_{21}(1) - W_{\frac{N}{2}}^2 X_{22}(1) \end{aligned}$$

De estas ecuaciones podemos dibujar la otra parte de la gráfica del algoritmo FFT.

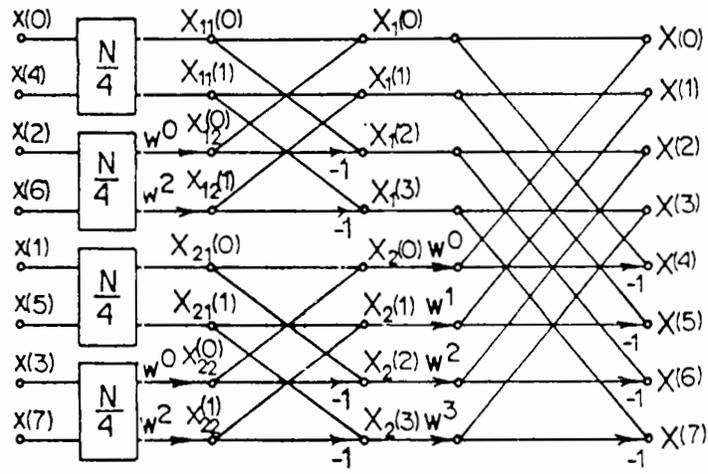


Figura 5.6: La gráfica del algoritmo FFT para N=8

De la misma manera que la anterior podemos escribir

$$X_{11}(k) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{4}-1} x_{11}(n) W_{\frac{N}{4}}^{kn} \quad (5.15)$$

$$X_{12}(k) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{4}-1} x_{12}(n) W_{\frac{N}{4}}^{kn} \quad (5.16)$$

$$X_{21}(k) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{4}-1} x_{21}(n) W_{\frac{N}{4}}^{kn} \quad (5.17)$$

$$X_{22}(k) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{4}-1} x_{22}(n) W_{\frac{N}{4}}^{kn} \quad (5.18)$$

Separando las ecuaciones $x_{ij}(n)$ en las secuencias par e impar obtenemos

$$X_{11}(k) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{8}-1} x_{11}(2n) W_{\frac{N}{4}}^{2nk} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{8}-1} x_{11}(2n+1) W_{\frac{N}{4}}^{(2n+1)k} \quad (5.19)$$

Si tomamos en cuenta el periodicidad $W_{\frac{N}{4}}^2 = W_{\frac{N}{8}}$ $X_{ij}(k) = X_{ij}(k + \frac{N}{8})$ podemos escribir la ecuación:

$$X_{11}(k) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{8}-1} x_{11}(2n) W_{\frac{N}{8}}^{nk} + W_{\frac{N}{4}}^k \sum_{n=0}^{\frac{N}{8}-1} x_{11}(2n+1) W_{\frac{N}{8}}^{nk} \quad (5.20)$$

$$X_{11}(k) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{8}-1} x_{11}(2n) W_{\frac{N}{8}}^{nk} + W_{\frac{N}{4}}^{4k} \sum_{n=0}^{\frac{N}{8}-1} x_{11}(2n+1) W_{\frac{N}{8}}^{nk} \quad (5.21)$$

esa última ecuación se puede escribir en la manera

$$X_{11}(k) = X_{111}(k) + W_{\frac{N}{4}}^{4k} X_{112}(k)$$

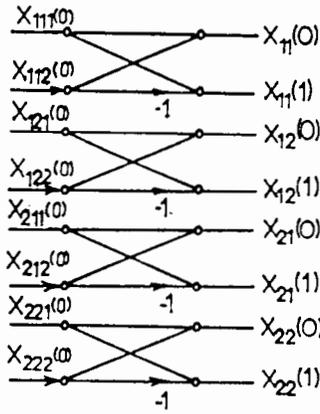


Figura 5.7: La gráfica parcial de FFT para $n = 8$

$$X_{11}(k + \frac{N}{8}) = X_{111}(k) + W_N^{4(k + \frac{N}{8})} X_{112}(k) \quad (5.22)$$

Igualmente obtenemos

$$\begin{aligned} X_{12}(k) &= X_{121}(k) + W_N^{4k} X_{122}(k) \\ X_{12}(k + \frac{N}{8}) &= X_{121}(k) + W_N^{4(k + \frac{N}{8})} X_{122}(k) \\ X_{21}(k) &= X_{211}(k) + W_N^{4k} X_{212}(k) \\ X_{21}(k + \frac{N}{8}) &= X_{211}(k) + W_N^{4(k + \frac{N}{8})} X_{212}(k) \\ X_{22}(k) &= X_{221}(k) + W_N^{4k} X_{222}(k) \\ X_{22}(k + \frac{N}{8}) &= X_{221}(k) + W_N^{4(k + \frac{N}{8})} X_{222}(k) \end{aligned}$$

Para $k = 0$ obtenemos una serie de los ecuaciones

$$\begin{aligned} X_{11}(0) &= X_{111}(0) + W_N^0 X_{112}(0) & X_{21}(0) &= X_{211}(0) + W_N^0 X_{212}(0) \\ X_{11}(1) &= X_{111}(0) + W_N^4 X_{112}(0) & X_{21}(1) &= X_{211}(0) + W_N^4 X_{212}(0) \\ X_{12}(0) &= X_{121}(0) + W_N^0 X_{122}(0) & X_{22}(0) &= X_{221}(0) + W_N^0 X_{222}(0) \\ X_{12}(1) &= X_{121}(0) + W_N^4 X_{122}(0) & X_{22}(1) &= X_{221}(0) + W_N^4 X_{222}(0) \end{aligned}$$

pero $W_N^4 = -W_N^0$. La gráfica de señales que representan las ecuaciones anteriores está mostrada en la figura 5.8

La gráfica completa de algoritmo FFT está mostrada en la figura 5.7

Pero las señales en la entrada están en desorden. La primera decimación transforma la secuencia de las señales de la entrada a la secuencia

$$x(0) \ x(2) \ x(4) \ x(6) \ x(1) \ x(3) \ x(5) \ x(7)$$

La segunda decimación transforma la secuencia de las señales a la secuencia

$$x(0) \ x(4) \ x(2) \ x(6) \ x(1) \ x(5) \ x(3) \ x(7)$$

Si expresamos este cambio en bits obtenemos la tabla 5.1

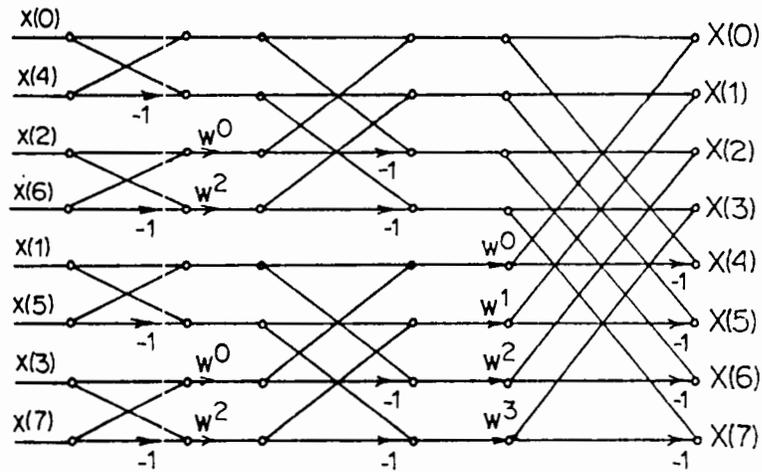


Figura 5.8: La gráfica completa de algoritmo FFT para $n = 8$

	$n_2 n_1 n_0$		$n_0 n_1 n_2$
0	000	0	000
1	001	4	100
2	010	2	010
3	011	6	110
4	100	1	001
5	101	5	101
6	110	3	011
7	111	7	111

Tabla 5.1: El cambio de la secuencia en la entrada en bits

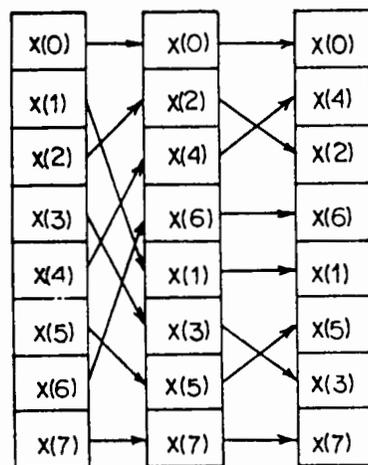


Figura 5.9: La influencia de la primera y segunda decimación en la entrada del algoritmo

En la figura 5.9 se muestra el cambio de señales después de la primera y segunda decimación

Otro algoritmo muy importante es la decimación en la frecuencia

5.2 El algoritmo "Decimación en la frecuencia"

El algoritmo "decimación en la frecuencia" es muy semejante al algoritmo de "decimación en el tiempo". Se deduce de la transformada discreta de Fourier que escribimos en la forma

$$X(k) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(n)W_N^{nk} + \sum_{n=\frac{N}{2}}^{N-1} x(n)W_N^{nk} \quad (5.23)$$

Esta ecuación se puede escribir como

$$X(k) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(n)W_N^{nk} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(n + \frac{N}{2})W_N^{\frac{N}{2}k}W_N^{nk} \quad (5.24)$$

ó

$$X(k) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(n)W_N^{nk} + W_N^{\frac{N}{2}k} \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(n + \frac{N}{2})W_N^{nk} \quad (5.25)$$

$W_N^{\frac{N}{2}k}$ no es dependiente de n y por eso este término lo podemos escribir delante de la suma. También podemos sustituir por $(W_N^{\frac{N}{2}})^k = (-1)^k$

$$\left(W_N^{\frac{N}{2}}\right)^k = (e^{-j\pi})^k = (-1)^k \quad (5.26)$$

y obtenemos

$$X(k) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \left[x(n) + (-1)^k x(n + \frac{N}{2}) \right] W_N^{2kn} \quad (5.27)$$

Ahora tomamos en cuenta las muestras en la frecuencia par e impar. La última ecuación se divide en dos ecuaciones par $k = 2r$ e impar $k = 2r + 1$

$$X(2r) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \left[x(n) + x(n + \frac{N}{2}) \right] W_N^{2rn} \quad (5.28)$$

$$X(2r + 1) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \left[x(n) - x(n + \frac{N}{2}) \right] W_N^{n(2r+1)} \quad (5.29)$$

Aplicando a estas ecuaciones las propiedades de la simetría $W_N^{2rn} = W_N^{\frac{r}{2}n}$ obtenemos las ecuaciones

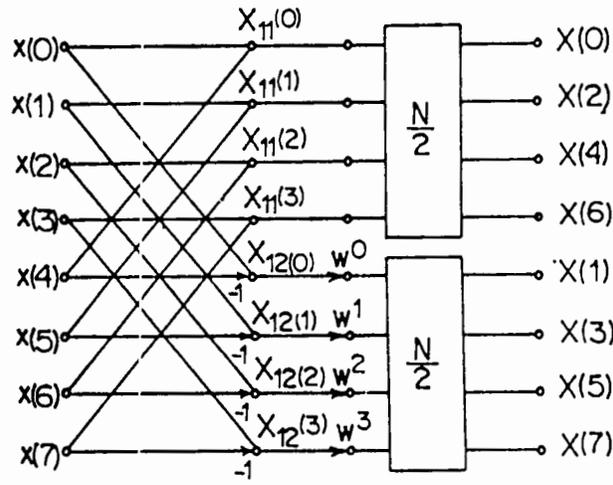


Figura 5.10: El grafo del algoritmo FFT con decimación en la frecuencia

$$X(2r) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \left[x(n) + x\left(n + \frac{N}{2}\right) \right] W_{\frac{N}{2}}^{rn} \quad (5.30)$$

$$X(2r+1) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \left[x(n) - x\left(n + \frac{N}{2}\right) \right] W_N^n \cdot W_{\frac{N}{2}}^{rn} \quad (5.31)$$

De estas dos ecuaciones podemos escribir

$$\begin{aligned} X_{11}(n) &= x(n) + x\left(n + \frac{N}{2}\right) \\ X_{12}(n) &= \left[x(n) - x\left(n + \frac{N}{2}\right) \right] W_N^n \end{aligned} \quad (5.32)$$

Para $N = 8$ de estas ecuaciones escribimos la serie de ecuaciones siguientes

$$\begin{aligned} X_{11}(0) &= x(0) + x(4) & X_{12}(0) &= x(0)W_8^0 - x(4)W_8^0 \\ X_{11}(1) &= x(1) + x(5) & X_{12}(1) &= x(1)W_8^1 - x(5)W_8^1 \\ X_{11}(2) &= x(2) + x(6) & X_{12}(2) &= x(2)W_8^2 - x(6)W_8^2 \\ X_{11}(3) &= x(3) + x(7) & X_{12}(3) &= x(3)W_8^3 - x(7)W_8^3 \end{aligned}$$

De estas ecuaciones podemos dibujar la gráfica mostrada en la figura 5.10

Si aplicamos el mismo procedimiento en las otras escalas obtenemos el algoritmo completo de la decimación en las frecuencias. El algoritmo completo está en la figura 5.11

Ejemplo:

Usando la transformada rápida de Fourier y la gráfica de algoritmo decimación en el tiempo para $N = 8$ transformar la señal de la figura 5.12

Si utilizamos la gráfica del algoritmo FFT de decimación en el tiempo figure 5.13 podemos escribir las siguientes ecuaciones:

$$X(3) = x(0) + x(2).W_8^2(-1) + x(3).W_8^2(-1).W_8^3 + x(1).W_8^3$$

Si sustituimos en esta ecuación

$$W_8^2 = (e^{-j\frac{2\pi}{8}})^2 = -j \quad W_8^1 = e^{-j\frac{\pi}{4}} = 0.7071 - j0.7071 \quad W_8^3 = e^{-j\frac{6\pi}{8}} = -0.7071 - j0.7071$$

obtenemos

$$X(3) = 0.5 + 0.5(-j)(-1) + 0.5(-j)(-1)(-0.707 - j0.707) + 0.5(-0.707 - j0.707)$$

$$X(3) = 0.5 - j0.207$$

$$X(0) = x(0) + x(2)W_8^0 + x(1)W_8^0 + x(3)W_8^0 = 0.5 + 0.5 + 0.5 + 0.5 = 2$$

$$X(1) = x(0) + x(2)W_8^2 + x(1)W_8^1 + x(3)W_8^2W_8^1$$

$$X(1) = 0.5 - j0.5 + 0.3535 - j0.3535 - j0.3535 - 0.3535 = 0.5 - j1.207$$

$$X(2) = -0.5 + 0.5 - 0.5W_8^0.W_8^2 + 0.5W_8^2 = 0$$

similarmente

$$X(4) = 0 \quad X(5) = 0.5 + j0.207$$

$$X(6) = 0 \quad X(7) = 0.5 + j0.207$$

El valor absoluto de $X(k)$ es:

$$|X(0)| = 2 \quad |X(1)| = \sqrt{0.5^2 + 1.207^2} = 1.306$$

$$|X(2)| = 0 \quad |X(3)| = \sqrt{0.5^2 + 0.207^2} = 0.54$$

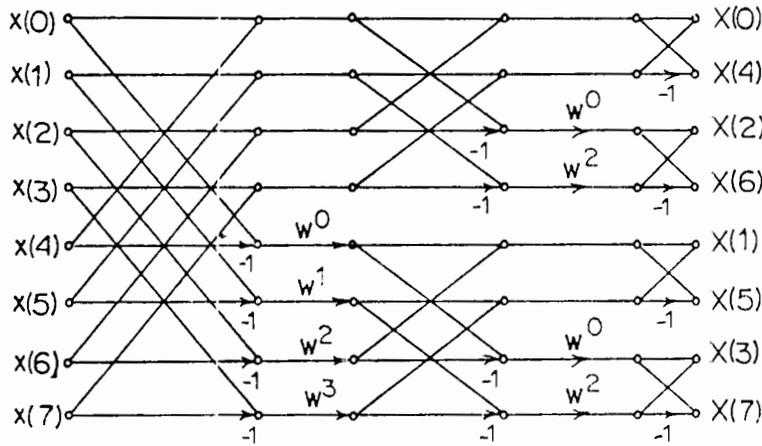


Figura 5.11: El algoritmo completo de la transformada rápida de Fourier de la decimación en la frecuencia

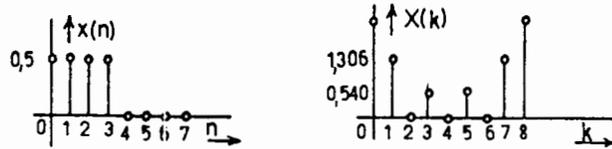


Figura 5.12: La señal discreta en el dominio de tiempo

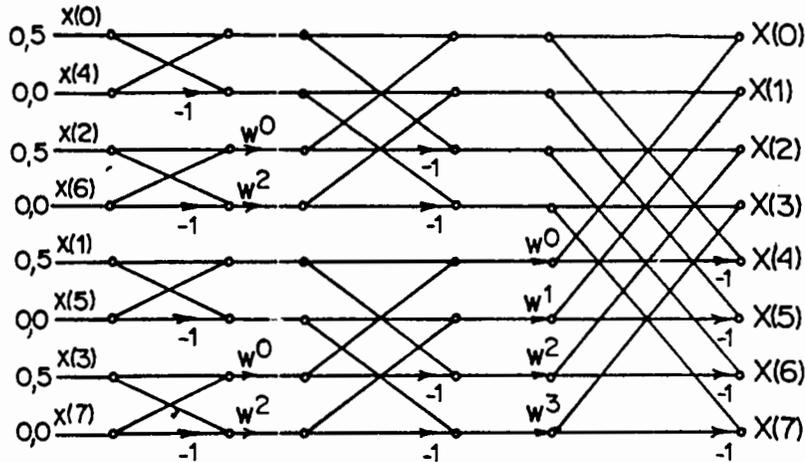


Figura 5.13: Algoritmo de FFT completo para ejemplo

$$\begin{aligned}
 |X(4)| &= 0 & |X(5)| &= \sqrt{0.5^2 + 0.207^2} = 0.54 \\
 |X(6)| &= 0 & |X(7)| &= \sqrt{0.5^2 + 1.207^2} = 1.306
 \end{aligned}$$

La gráfica de la respuesta está en la figura 5.12 b

Ejemplo

Determine la matriz de Fourier para $N = 8$

Primero calculamos la simetría de la matriz Fourier F :

$$\begin{aligned}
 W_8^8 &= W_8^{8 \text{ modulo } 8} = W_8^0 \\
 W_8^9 &= W_8^{9 \text{ modulo } 8} = W_8^1 \\
 W_8^{10} &= W_8^{10 \text{ modulo } 8} = W_8^2 \dots \text{etcetera}
 \end{aligned}$$

La simetría de la matriz de Fourier está mostrada en la figura 5.14

La matriz Fourier tiene la forma

$$F_8 = \begin{bmatrix}
 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 1 & W & W^2 & W^3 & W^4 & W^5 & W^6 & W^7 \\
 1 & W^2 & W^4 & W^6 & W^0 & W^2 & W^4 & W^6 \\
 1 & W^3 & W^6 & W^1 & W^4 & W^7 & W^2 & W^5 \\
 1 & W^4 & W^0 & W^4 & W^0 & W^4 & W^0 & W^4 \\
 1 & W^5 & W^2 & W^7 & W^4 & W^1 & W^6 & W^3 \\
 1 & W^6 & W^4 & W^2 & W^0 & W^6 & W^4 & W^2 \\
 1 & W^7 & W^6 & W^5 & W^4 & W^3 & W^2 & W^1
 \end{bmatrix}$$

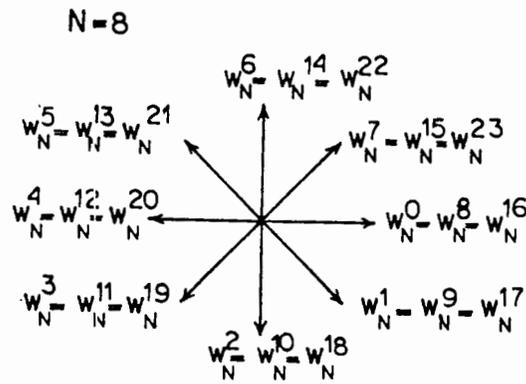


Figura 5.14: La simetría de la matriz Fourier $N=8$

Si sustituimos en la matriz $W = e^{-j\frac{2\pi}{8}}$

$$\begin{aligned} W^1 &= 0.7 - j0.7 & W^5 &= -0.7 + j0.7 \\ W^2 &= -j & W^6 &= j \\ W^3 &= -0.7 - j0.7 & W^7 &= 0.7 + j0.7 \\ W^4 &= -1 \end{aligned}$$

la matriz Fourier tiene la forma:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0.7 - j0.7 & -j & -0.7 - j0.7 & -1 & -0.7 + j0.7 & j & 0.7 + j0.7 \\ 1 & -j & -1 & j & 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -0.7 - j0.7 & j & 0.7 - j0.7 & -1 & 0.7 + j0.7 & -j & -0.7 + j0.7 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -0.7 + j0.7 & -j & +0.7 + j0.7 & -1 & 0.7 - j0.7 & j & -0.7 - j0.7 \\ 1 & j & -1 & -j & 1 & j & -1 & -j \\ 1 & 0.7 + j0.7 & j & -0.7 + j0.7 & -1 & -0.7 - j0.7 & -j & 0.7 - j0.7 \end{bmatrix}$$

La matriz inversa de Fourier se calcula simplemente usando la ecuación

$$\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{W}) = \frac{1}{N}\mathbf{F}\left(\frac{\mathbf{1}}{N}\right)$$

No necesitamos calcular un determinante. Esto es una ventaja muy grande.

Ejemplo:

Calcular la matriz inversa de Fourier para $N = 4$

Si sustituimos en la matriz Fourier para $N = 4$ el término $W = e^{-j\frac{2\pi}{4}}$ obtenemos

$$\begin{aligned} W_4^0 &= \cos 0 + j \sin 0 = 1 & W_4^1 &= \cos \frac{2\pi}{4} - j \sin \frac{2\pi}{4} = -j \\ W_4^2 &= \cos \pi - j \sin \pi = -1 & W_4^3 &= \cos \frac{6\pi}{4} - j \sin \frac{6\pi}{4} = j \\ W_4^4 &= W_4^0 = 1 \end{aligned}$$

La matriz Fourier es

$$\mathbf{F}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix}$$

y entonces la matriz Fourier inversa

$$\mathbf{F}_4^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & -1 & -j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -j & -1 & j \end{bmatrix}$$

Ejemplo:

Calcule la matriz diagonal, desde la matriz circular \mathbf{h}

Para la diagonalización de la matriz circular utilizamos la ecuación

$$Diag\mathbf{H} = \mathbf{F} \cdot circ \mathbf{h} \cdot \mathbf{F}^{-1}$$

$$Diag\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} h_0 & h_3 & h_2 & h_1 \\ h_1 & h_0 & h_3 & h_2 \\ h_2 & h_1 & h_0 & h_3 \\ h_3 & h_2 & h_1 & h_0 \end{bmatrix} \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & -1 & -j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -j & -1 & j \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} h_0 + h_1 + h_2 + h_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_0 - jh_1 - h_2 + jh_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_0 - h_1 + h_2 - h_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_0 + jh_1 + h_2 - jh_3 \end{bmatrix}$$

Si aplicamos a la ecuación circular la transformada Fourier

$$\mathbf{y} = circ \mathbf{h} \cdot \mathbf{x}$$

$$F\mathbf{y} = F circ \mathbf{h} F^{-1} \cdot F\mathbf{x}$$

calculamos el espectro utilizando la ecuación

$$\mathbf{Y} = Diag \mathbf{H} \cdot \mathbf{X}$$

Capítulo 6

Filtros digitales con respuesta infinita

La función de transferencia de los filtros digitales con la respuesta infinita IIR se puede escribir en la forma

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + \dots + b_kz^{-k}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + \dots + a_kz^{-k}} = \frac{\sum_{i=0}^k b_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^k a_i z^{-i}} \quad (6.1)$$

Utilizando la transformada-z inversa podemos expresar la ecuación de diferencias

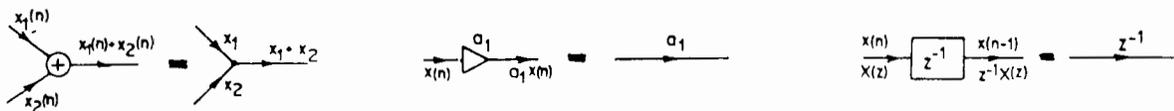
$$y(n) = \sum_{i=0}^k b_i x(n-i) - \sum_{i=1}^k a_i y(n-i) \quad (6.2)$$

Para realizar esa función de diferencias necesitamos

a.) sumador

b.) multiplicador

d.) elemento de retardo



De la función de diferencias se puede dibujar directamente el filtro digital que se llama forma directa no canónica, como se muestra en la figura 6.1

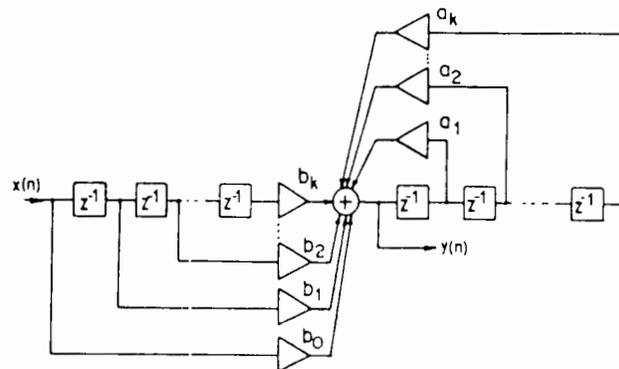


Figura 6.1: El filtro digital no canónico de forma directa

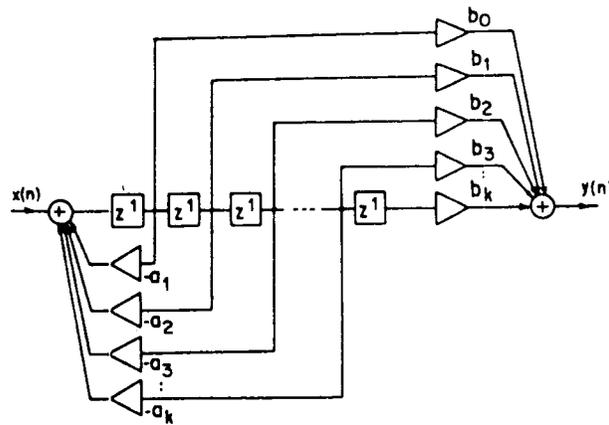


Figura 6.2: El filtro digital canónico de la segunda forma

Esta forma del filtro digital no es canónica, porque tiene $2k$ elementos de retardo mientras el orden de la función de transferencia es k . La forma del filtro digital directa se puede diseñar en la forma canónica. En otras palabras la forma canónica tiene tantos elementos de retardo como el orden de la función de transferencia. Esa estructura está en la figura 6.2

La estructura canónica de la primera forma se obtiene desde la estructura canónica de la segunda forma bajo las siguientes condiciones:

1.) Convertimos los sumadores por nudos y nudos por sumadores y cambiamos las direcciones de la corriente de las señales. Cambiamos las direcciones de las flechas, figura 6.3



Figura 6.3: Las reglas para convertir el circuito de una forma a la otra

2.) Cambiamos las direcciones de los amplificadores como se ve en la figura 6.4

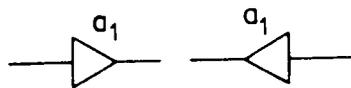


Figura 6.4: Cambio de dirección de los amplificadores

y cambiamos en la estructura de salida por entrada y entrada por salida.

Ejemplo:

Escribir la función de transferencia de un filtro digital de orden $n = 2$ y diseñar la estructura. De la función general para $k = 2$ obtenemos:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

$$Y(z) = X(z)b_0 + X(z)b_1 z^{-1} + X(z)b_2 z^{-2} - a_1 Y(z)z^{-1} - a_2 X(z)z^{-2}$$

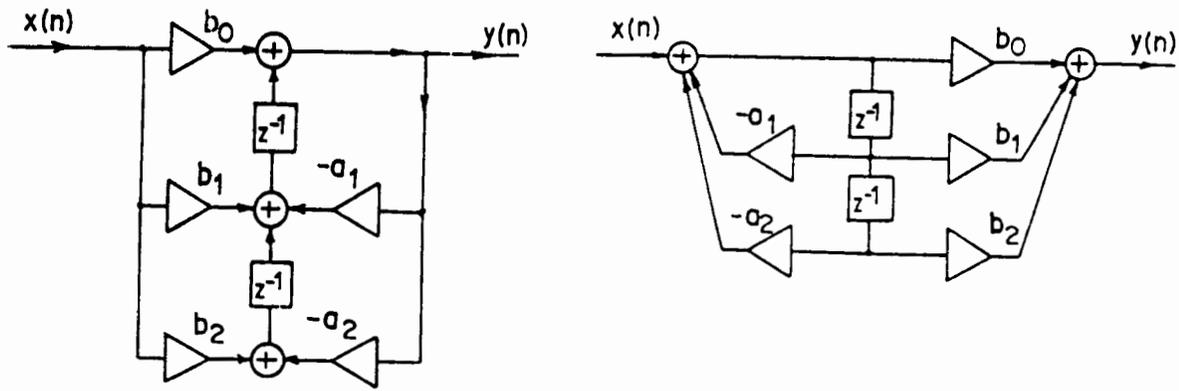


Figura 6.5: Filtro digital de la primera forma de segundo orden

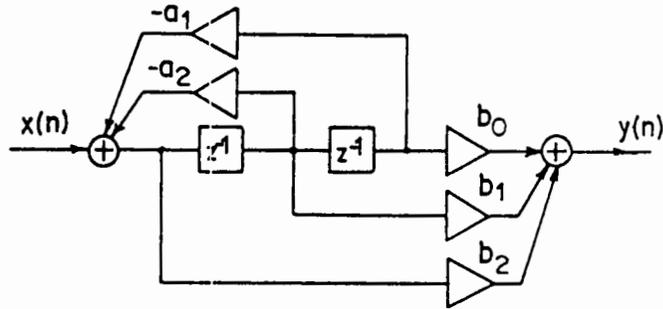


Figura 6.6: Filtro digital de la primera forma de segundo orden

Si utilizamos la transformada z indirecta obtenemos

$$y(n) = x(n)b_0 + b_1x(n-1) + b_2x(n-2) - a_1y(n-1) - a_2y(n-2)$$

De esta ecuación en diferencias el filtro digital de segundo orden tiene la forma en figura 6.5a. Para obtener la estructura de la forma canónica a otro tipo, convertimos nudos por sumadores y los sumadores por nudos y cambiamos las direcciones de los multiplicadores. La gráfica del filtro canónico de la forma segunda es mostrada en la figura 6.5b. Algunos autores dibujan este filtro en la forma mostrada en la figura 6.6

6.1 La estructura cascada de un filtro digital

Para realizar el filtro digital en la forma de cascada es necesario arreglar la función de transferencia en la forma

$$H(z) = H_1(z).H_2(z).H_3(z).\dots H_i(z) \quad (6.3)$$

donde las funciones parciales $H_i(z)$ se pueden expresar en la forma

$$H_i^{(1)}(z) = \frac{1 + b_{i1}z^{-1}}{1 + a_{i1}z^{-1}} \quad H_i^{(2)}(z) = \frac{1 + b_{i1}z^{-1} + b_{i2}(z)z^{-2}}{1 + a_{i1}z^{-1} + a_{i2}z^{-2}} \quad (6.4)$$

Las estructuras correspondientes están en la figura 6.7 y tienen las funciones de diferencias:

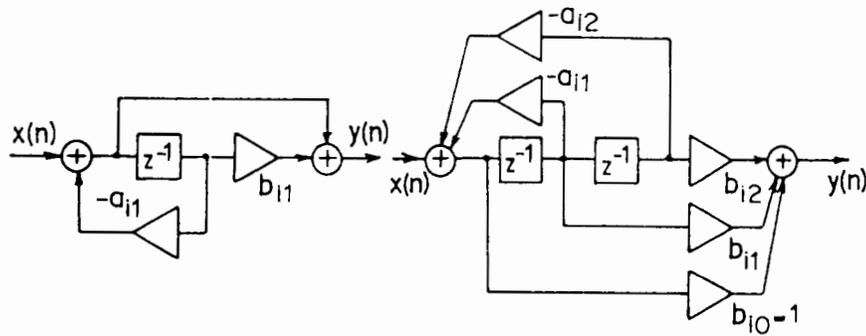


Figura 6.7: Filtro digital de primero y segundo orden para la estructura cascada

$$y(n) = x(n) + b_{i1}x(n-1) - a_{i1}y(n-1)$$

$$y(n) = x(n) + b_{i1}x(n-1) + b_{i2}x(n-2) - a_{i1}y(n-1) - a_{i2}y(n-2)$$

6.2 La estructura paralela de un filtro digital

Para realizar un filtro digital en forma paralela es necesario ajustar la función de transferencia en la ecuación (6.5)

$$H(z) = H_1(z) + H_2(z) + H_3(z) + \dots + H_i(z) \quad (6.5)$$

Las funciones de transferencia parciales $H_i(z)$ las podemos expresar

$$H_i^{(1)}(z) = \frac{b_{i0}}{1 + a_{i1}z^{-1}} \quad H_i^{(2)}(z) = \frac{b_{i0} + b_{i1}z^{-1}}{1 + a_{i1}z^{-1} + a_{i2}z^{-2}} \quad (6.6)$$

Las ecuaciones de diferencias correspondientes a las funciones de transferencias anteriores son

$$y(n) = b_{i0}x(n) - a_{i1}y(n-1)$$

$$y(n) = b_{i0}x(n) + b_{i1}x(n-1) - a_{i1}y(n-1) - a_{i2}y(n-2)$$

Las estructuras de los filtros digitales correspondientes a las ecuaciones de diferencias son mostradas en la figura 6.8

La estructura general está construida de estructuras conectada en paralelo como se ve de la figura 6.9

Ejemplo

Diseñar un filtro digital que realiza la función de transferencia

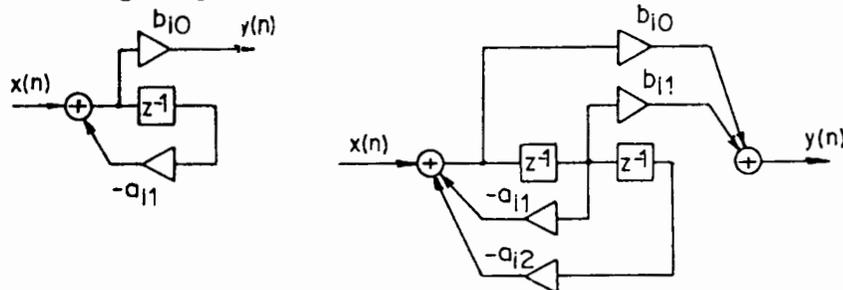


Figura 6.8: Las estructuras para el filtro paralelo de primero y segundo orden

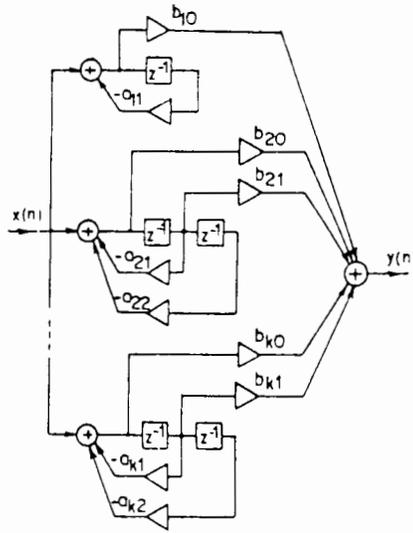


Figura 6.9: La estructura en paralelo del filtro digital

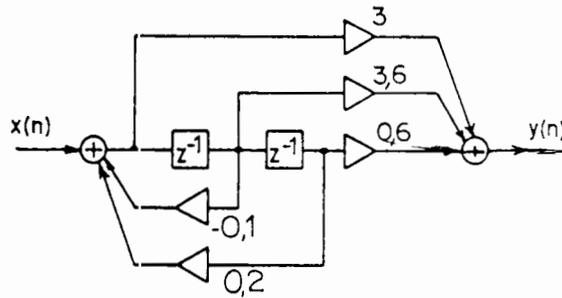


Figura 6.10: Filtro digital de segundo orden

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{3 + 3.6z^{-1} + 0.6z^{-2}}{1 + 0.1z^{-1} - 0.2z^{-2}}$$

De esta función de transferencia podemos escribir

$$Y(z) = 3X(z) + 3.6z^{-1}X(z) + 0.6z^{-2}X(z) - 0.1z^{-1}Y(z) + 0.2z^{-2}Y(z)$$

Usando la transformada z inversa, la función de diferencias se puede escribir en la forma

$$y(n) = 3x(n) + 3.6x(n-1) + 0.6x(n-2) - 0.1y(n-1) + 0.2y(n-2)$$

Al filtro digital lo podemos dibujar de la ecuación de diferencias. El filtro digital está mostrado en la figura 6.10

Ejemplo:

Diseñar un filtro digital en cascada si el filtro digital tiene la función de transferencia

$$H(z) = \frac{3 + 3.6z^{-1} + 0.6z^{-2}}{1 + 0.1z^{-1} - 0.2z^{-2}}$$

La función de transferencia la tenemos que repartir en las funciones de transferencias $H_1(z) \cdot H_2(z) \cdot H_3(z)$

$$H(z) = 3 \times \frac{1 + z^{-1}}{1 + 0.5z^{-1}} \times \frac{1 + 0.2z^{-1}}{1 - 0.4z^{-1}}$$

entonces

$$H_1(z) = 3 \quad H_2(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 + 0.5z^{-1}} \quad H_3(z) = \frac{1 + 0.2z^{-1}}{1 - 0.4z^{-1}}$$

Las funciones en diferencias son

$$y_1(n) = 3x_1(n) \quad y_2(n) = x_2(n) + x_2(n-1) - 0.5y_2(n-2)$$

$$y_3(n) = x_3(n) + 0.2x_3(n-1) + 0.4y_3(n-1)$$

Las estructuras correspondientes a las ecuaciones de diferencias se muestran en la figura 6.11

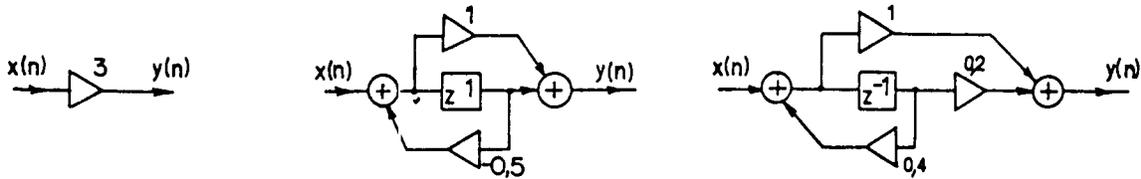


Figura 6.11: Las estructuras parciales de un filtro digital

La estructura final que realiza la función de transferencia total está en la figura 6.12

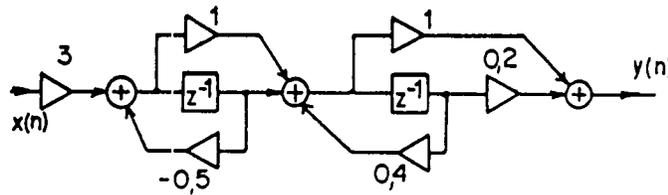


Figura 6.12: La estructura final de un filtro digital

Ejemplo

Diseñar un filtro digital en forma paralela con función de transferencia

$$H(z) = \frac{3(z+1)(z+0.2)}{(z+0.5)(z-0.4)}$$

Si este quebrado lo descomponemos en fracciones parciales

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{3(z+1)(z+0.2)}{z(z+0.5)(z-0.4)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z+0.5} + \frac{C}{z-0.4}$$

y calculamos las constantes A , B y C

$$A = \frac{3(z+1)(z+0.2)}{(z+0.5)(z-0.4)} \Big|_{z=0} = -3$$

$$B = \frac{3(z+1)(z+0.2)}{z(z-0.4)} \Big|_{z=-0.5} = -1$$

$$C = \frac{3(z+1)(z+0.2)}{z(z+0.5)} \Big|_{z=0.4} = 7$$

obtenemos

$$\frac{H(z)}{z} = -\frac{3}{z} - \frac{1}{z+0.5} + \frac{7}{z-0.4}$$

$$H(z) = -3 - \frac{z}{z+0.5} + \frac{7z}{z-0.4} = -3 - \frac{1}{1+0.5z^{-1}} + \frac{7}{1-0.4z^{-1}}$$

Las funciones de transferencia parciales son

$$H_1(z) = -3 \quad H_2 = \frac{-1}{1+0.5z^{-1}} \quad H_3(z) = \frac{7}{1-0.4z^{-1}}$$

y las ecuaciones de diferencias las podemos escribir en la forma

$$y_1(n) = -3x_1(n) \quad y_2(n) = -x_2(n) - 0.5y_2(n-1) \quad y_3(n) = 7x_3(n) + 0.4y_3(n-1)$$

De estas ecuaciones de diferencias construimos el filtro digital de la forma paralela. figura 6.13

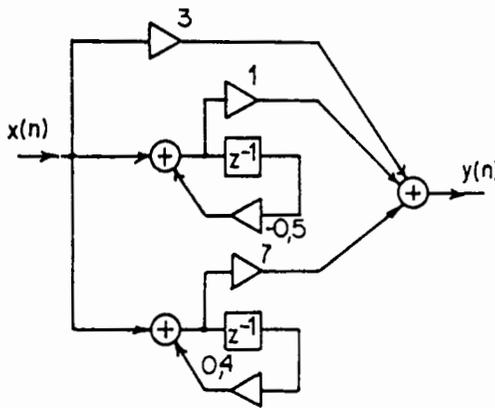


Figura 6.13: La estructura del filtro digital en la forma paralela

6.3 Filtros digitales con la respuesta finita al impulso -FIR

La función de transferencia de los filtros digitales con la respuesta finita FIR tiene la siguiente forma

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + \dots + b_kz^{-k} \quad (6.7)$$

$$H(z) = \sum_{i=0}^k b_i z^{-i} \quad (6.8)$$

Si utilizamos la transformada z inversa en la ecuación anterior obtenemos la ecuación de diferencias

$$y(n) = \sum_{i=0}^k b_i x(n-i) \quad (6.9)$$

De esta función podemos dibujar la estructura directa del filtro FIR

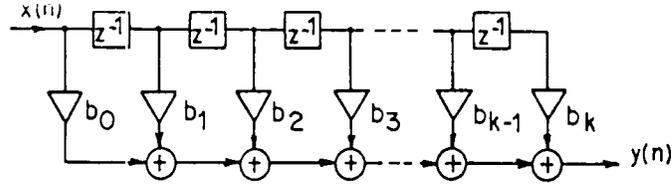


Figura 6.14: La estructura directa del filtro FIR

o una gráfica de filtro no recursivo de la primera forma canónica figura 6.15

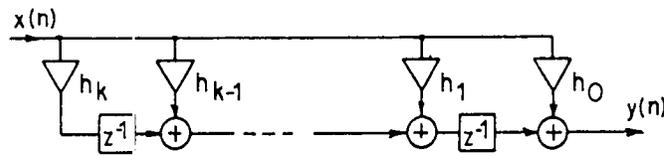


Figura 6.15: La estructura del filtro FIR de la primera forma

De la función de transferencias, ecuación (6.9) está claro, que los coeficientes de la función de transferencia son simultáneamente las muestras de la respuesta al impulso de Dirac.

Ejemplo:

Escribir la función de transferencia de un filtro FIR de orden cinco. Mostrando dónde están los ceros y polos en el plano de z.

$$H_5(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3} + b_4 z^{-4} + b_5 z^{-5}$$

$$H(z) = \frac{b_0 z^5 + b_1 z^4 + b_2 z^3 + b_3 z^2 + b_4 z + b_5}{z^5}$$

Los polos están todos en el centro y por eso los filtros FIR son siempre estables. Si los coeficientes b_i de la función de transferencia son simétricos, vale

$$b_0 = b_5 \quad b_1 = b_4 \quad b_2 = b_3$$

luego los ceros están situados como se ve en la figura 6.16 y la fase es lineal en todo el dominio de frecuencias.

Las ventajas del filtro FIR

- Los filtros con la respuesta finita son siempre estables
- La fase de la función de transferencia es lineal en todo dominio de frecuencias

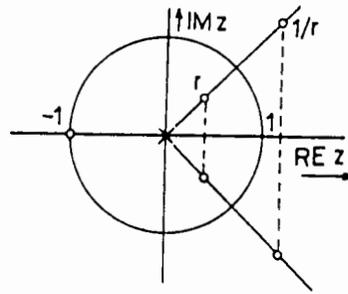


Figura 6.16: Los polos y seros en el dominio de z

- Las muestras de la salida son dependientes sólo del muestreo en la entrada y de las muestras de entrada retrasadas. Por eso no son tan sensibles a errores de redondeo como los filtros con la respuesta infinita.

Desventajas del filtro FIR

- Para cumplir las especificaciones de la plantilla se necesitan muchos sumadores, amplificadores y elementos de retardo en comparación con los filtros IIR.
- El retraso de las señales es mayor que en los filtros con la respuesta infinita IIR.

6.4 Síntesis de los filtros IIR

La función de transferencia en el dominio z puede ser obtenida aplicando la fórmula

$$z = e^{sT} \quad (6.10)$$

La relación entre el dominio s y z queda establecida por esa ecuación. Para nuestro propósito expresamos la ecuación en la forma

$$s = \frac{1}{T} \ln z \quad (6.11)$$

Si expresamos $\ln(z)$ en forma de serie obtenemos

$$s = \frac{2}{T} \left[\frac{z-1}{z+1} + \frac{1}{3} \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^5 \dots \right] \quad (6.12)$$

$$s = \frac{1}{T} \left[\frac{z-1}{z} + \frac{1}{2} \left(\frac{z-1}{z} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{z-1}{z} \right)^3 \dots \right] \quad (6.13)$$

La primera serie converge en la región $z \sim 1$ muy rápido. Entonces podemos sin el primer término despreciar todos los términos. Entonces obtenemos en el primer caso la transformación bilineal

$$s = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1} \quad (6.14)$$

y en el segundo caso la transformación

$$s = \frac{1}{T} \frac{z - 1}{z} \quad (6.15)$$

La transformada bilineal en esta forma se utiliza para transformar la función de transferencia $H(s)$ (no normalizada) a la función $H(z)$. Pero en las tablas están las funciones de transferencias normalizadas y por nuestro objetivo escribimos la transformada bilineal en la forma:

$$s = c \frac{z - 1}{z + 1}, \quad (6.16)$$

donde c es una constante que nos corrige la distorsión del eje de la frecuencia. Para calcular la constante c sustituimos en la ecuación por $s = j\omega_A$ y $z = e^{j\omega_D T}$, donde ω_A es la frecuencia analógica y ω_D es la frecuencia digital.

$$j\omega_A = c \frac{e^{j\omega_D T} - 1}{e^{j\omega_D T} + 1}$$

Multiplicamos el denominador y numerador por el término $e^{-j\frac{\omega_D T}{2}}$ y obtenemos

$$j\omega_A = c \frac{\frac{e^{j\frac{\omega_D T}{2}} - e^{-j\frac{\omega_D T}{2}}}{2}}{\frac{e^{j\frac{\omega_D T}{2}} + e^{-j\frac{\omega_D T}{2}}}{2}}$$

$$j\omega_A = c \frac{j \sin \frac{\omega_D T}{2}}{\cos \frac{\omega_D T}{2}}$$

En las tablas de filtros están las funciones de transferencias normalizadas. Las frecuencias del corte en el filtro analógico es $\omega_A = 1$. Si arreglamos la última ecuación obtenemos la constante c .

$$c = \cot \frac{\omega_{1D} T}{2} \quad (6.17)$$

donde ω_{1D} es la frecuencia de corte del filtro digital $\omega_{1D} = 2\pi f_{1D}$. Si sustituimos por $T = \frac{1}{f_m}$ f_m en la frecuencia de muestreo obtenemos

$$c = \cot \frac{\pi f_{1D}}{f_m} \quad (6.18)$$

La figura nos muestra cómo se deforman los ejes de frecuencias gracias a omitir los términos en la serie.

La transformada bilineal sirve sólo si transformamos la función de transferencia $H(s)$ de paso baja a la función de transferencia discreta también paso baja. Si queremos transformar la función de transferencia $H(s)$ paso baja a una función de transferencia discreta paso alta con la frecuencia de corte ω_{-1D} tenemos que utilizar las ecuaciones

$$s = c' \frac{z + 1}{z - 1} \quad (6.19)$$

$$c' = \tan \frac{\pi f_{-1D}}{f_m} \quad (6.20)$$

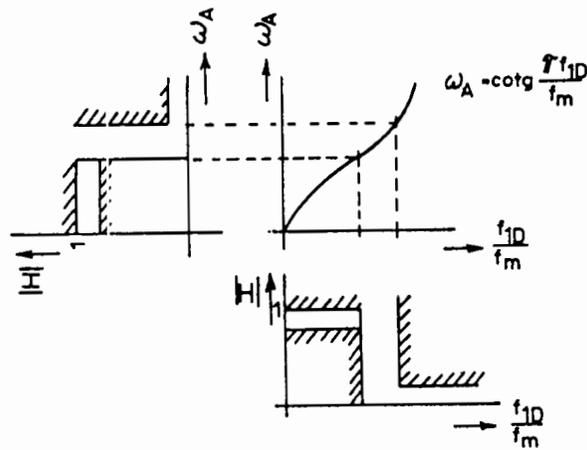


Figura 6.17: La deformación de los ejes en el dominio de frecuencias

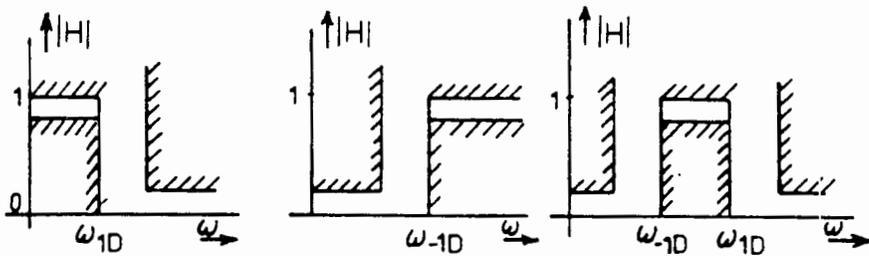


Figura 6.18: La plantilla de los filtros pasa baja, pasa alta y pasa banda

Si queremos transformar una función de transferencia analógica de paso baja a una función de transferencia discreta de paso banda tenemos que utilizar las ecuaciones

$$s = c \frac{z-1}{z+1} + c' \frac{z+1}{z-1} \quad (6.21)$$

$$c = \cot \frac{\pi f_{1D}}{f_m} \quad (6.22)$$

$$c' = \tan \frac{\pi f_{-1D}}{f_m} \quad (6.23)$$

f_{1D} y f_{-1D} son las frecuencias del corte de paso banda como es mostrado en la figura 6.18

Ejemplo:

Diseñar un filtro paso baja, cuyas especificaciones están en la plantilla 6.19

Si elegimos la aproximación de Butterworth tenemos que calcular el orden del filtro de acuerdo con la siguiente ecuación

$$n \geq \frac{\ln \frac{e^{0.23 a_{\min}} - 1}{e^{0.23 a_{\max}} - 1}}{2 \ln \frac{f_2}{f_{1D}}}$$

$$n \geq \frac{\ln \frac{e^{0.23(12)} - 1}{e^{0.23(3)} - 1}}{2 \ln \frac{8500}{3400}} = 1.4738$$

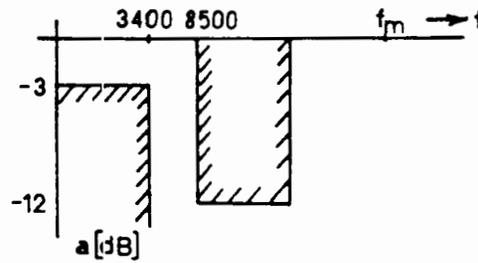


Figura 6.19: Las especificaciones del filtro paso baja

n	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4
1	1	1			
2	1	$\sqrt{2}$	1		
3	1	2	2	1	
4	1	2.61315	3.41423	2.61315	1

Tabla 6.1: Los coeficientes de la función de transferencia de Butterworth

Elegimos $n = 2$. De una tabla para los filtros Butterworth determinamos la función de transferencia de un filtro analógico

$$G(s) = a_0 + a_1s + a_2s^2 + a_3s^3 + \dots + a_ns^n$$

Usando la tabla 6.1 la función de transferencia $H(s)$ para $n=2$ es

$$H(s) = \frac{1}{G(s)} = \frac{1}{1 + \sqrt{2}s + s^2}$$

En la función de transferencia $H(s)$ sustituimos por s la transformación bilineal

$$s = c \frac{z-1}{z+1} \quad c = \cot \frac{\pi f_{1D}}{f_m}$$

Para $f_{1D} = 3400$ y $f_m = 24000$ es la constante

$$c = \cot \frac{\pi 3400}{24000} = 2.096,$$

y la transformación bilineal es

$$s = 2.096 \frac{z-1}{z+1}$$

Si sustituimos en la función de transferencia $H(s)$ por s obtenemos

$$H(z) = \frac{1}{1 + \sqrt{2} \cdot (2.096) \frac{z-1}{z+1} + 2.096^2 \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2}$$

$$H(z) = \frac{z^2 + 2z + 1}{8.357z^2 - 6.786z + 2.429} = \frac{0.1196 + 0.2393z^{-1} + 0.1196z^{-2}}{1 - 0.8120z^{-1} + 0.2906z^{-2}}$$

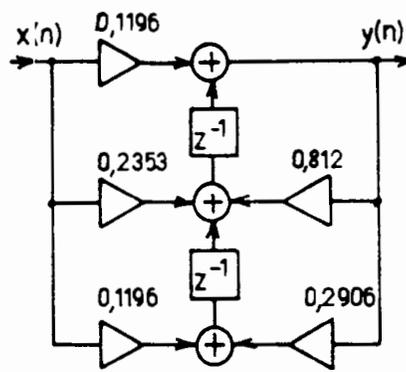


Figura 6.20: Filtro paso baja de segundo orden

De la función de transferencia obtenemos usando la z-transformada inversa la ecuación de diferencias

$$y(n) = 0.1196x(n) + 0.2393x(n - 1) + 0.1196x(n - 2) + 0.812y(n - 1) - 0.2906y(n - 2)$$

Esta ecuación de diferencias es realizada por el circuito en la figura 6.20

Ejemplo

Diseñar un filtro paso alta según las especificaciones en la plantilla 6.21

Elegimos la aproximación de Butterworth. El orden del filtro es:

$$n \geq \frac{\ln \frac{e^{(0.23) \cdot 12} - 1}{e^{(0.23) \cdot 3} - 1}}{2 \ln \frac{3400}{1360}} = \frac{2.70029}{1.83258} = 1.4734$$

Elegimos $n = 2$. La función de transferencia de un filtro analógico de segundo orden es

$$H(s) = \frac{1}{1 + \sqrt{2}s + s^2}$$

Para transformar la función paso baja analógica en la función de transferencia discreta paso alta utilizamos la transformación

$$s = c' \frac{z + 1}{z - 1} \quad c' = \tan \frac{\pi f_{-1D}}{f_m}$$

Para $f_{-1D} = 3400$ y $f_m = 16000$ obtenemos la constante c'

$$c' = \tan \frac{\pi 3400}{16000} = 0.7883$$

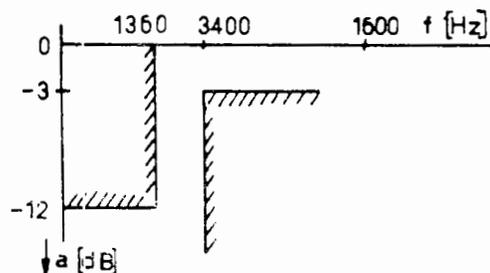


Figura 6.21: Las especificaciones de un filtro pasa alta

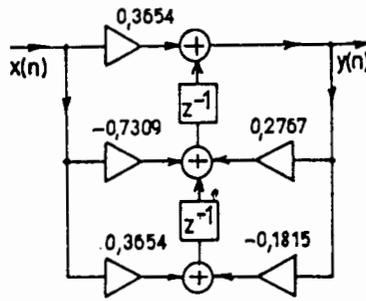


Figura 6.22: Filtro paso alta de segundo orden

y la transformación bilineal es

$$s = 0.7883 \frac{z + 1}{z - 1}$$

Si sustituimos en la función de transferencia $H(s)$ por $s = 0.7883 \frac{z+1}{z-1}$ la función de transferencia $H(z)$ toma la forma

$$H(z) = \frac{1}{1 + \sqrt{2} \cdot 0.7883 \frac{z+1}{z-1} + 0.7883^2 \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2} = \frac{0.3654 - 0.7309z^{-1} + 0.3654z^{-2}}{1 - 0.2767z^{-1} + 0.1851z^{-2}}$$

Obtenemos la ecuación de diferencias usando la transformada-z inversa

$$y(n) = 0.3654x(n) - 0.7309x(n-1) + 0.3654x(n-2) + 0.2767y(n-1) - 0.1851y(n-2)$$

El circuito en la figura 6.22 realiza la ecuación de diferencias

Ejemplo:

Diseñar un filtro paso banda cuyas especificaciones están en la figura 6.23

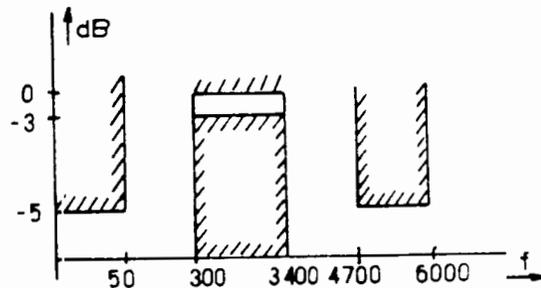


Figura 6.23: Especificaciones del filtro paso banda

Elegimos la frecuencia de muestreo $f_m = 2 \cdot f_{max} = 2 \cdot (6000) = 12000 \text{ Hz}$

Primeramente tenemos que determinar la frecuencia del corte paso baja normalizada.

Aplicamos la transformación de frecuencias

$$\Omega_{\pm\alpha} = \frac{\omega_{\pm\alpha}^2 - \omega_1\omega_{-1}}{\omega_{\pm\alpha}(\omega_1 - \omega_{-1})}$$

$$\Omega_1 = \frac{\omega_1^2 - \omega_1\omega_{-1}}{\omega_{-1}(\omega_1 - \omega_{-1})} = 1$$

$$\Omega_{-1} = \frac{\omega_{-1}^2 - \omega_1\omega_{-1}}{\omega_{-1}(\omega_1 - \omega_{-1})} = -1$$

$$\Omega_2 = \frac{\omega_2^2 - \omega_1\omega_{-1}}{\omega_2(\omega_1 - \omega_{-1})} = \frac{4700^2 - 300 \cdot (3400)}{4700(3400 - 300)} = 1.446$$

$$\Omega_{-2} = \frac{\omega_{-2}^2 - \omega_1\omega_{-1}}{\omega_{-2}(\omega_1 - \omega_{-1})} = \frac{50^2 - 300 \cdot (3400)}{50(3400 - 300)} = -6.564$$

Las especificaciones del filtro paso baja normalizada están en la figura 6.24a

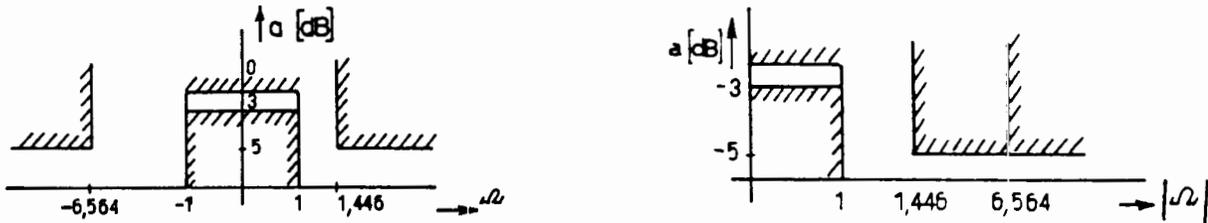


Figura 6.24: La especificación normalizada del filtro paso banda

Esa plantilla de especificaciones la podemos dibujar en otra forma, figure 6.24b. En esta plantilla podemos ver dos pasos bajas. Elegimos el paso baja con las condiciones rigurosas para cumplir las ganancias en ambas frecuencias del corte de paso banda. Ahora calculamos el orden del filtro Butterworth

$$n \geq \frac{\ln \frac{e^{(0.23) \cdot 5} - 1}{e^{(0.23) \cdot 3} - 1}}{2 \ln \frac{1.446}{1}} = 1.05$$

Para cumplir las especificaciones de plantilla es necesario escoger el orden del filtro $n = 2$. La función de transferencia de Butterworth es

$$H(s) = \frac{1}{1 + \sqrt{2}s + s^2}$$

La transformada bilineal para transformar la función de transferencia normalizada paso baja, a la función de transferencia discreta paso banda desnormalizada es

$$s = c \frac{z-1}{z+1} + c' \frac{z+1}{z-1}$$

$$c = \cot \frac{\pi f_{1D}}{f_m} \quad c' = \tan \frac{\pi f_{-1D}}{f_m}$$

Entonces

$$c = \cot \frac{3400\pi}{12000} = 0.809784 \quad c' = \tan \frac{300\pi}{12000} = 0.0787$$

la transformada bilineal tiene la forma

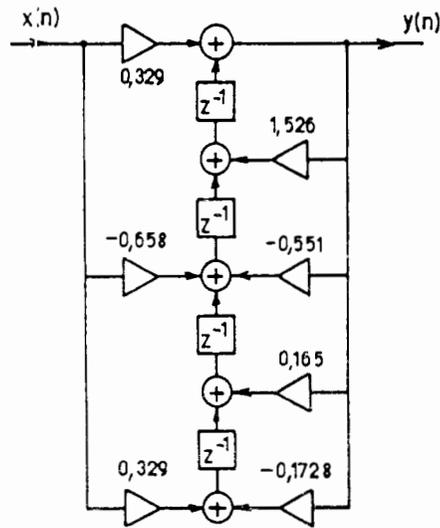


Figura 6.25: Filtro paso banda de cuarto orden

$$s = 0,8097 \frac{z - 1}{z + 1} + 0,0787 \frac{z + 1}{z - 1} = 0,8884 \frac{z^2 - 1,645z + 1}{z^2 - 1}$$

Si sustituimos en la función de transferencia $H(s)$ por $s = 0,8884 \frac{z^2 - 1,645z + 1}{z^2 - 1}$ obtenemos:

$$H(z) = \frac{1}{1 + \sqrt{2} \cdot (0,8884) \frac{z^2 - 1,645z + 1}{z^2 - 1} + 0,8884^2 \left(\frac{z^2 - 1,645z + 1}{z^2 - 1} \right)^2}$$

Si arreglamos la función de transferencia con el fin de realización resulta la forma:

$$H(z) = \frac{0,329 - 0,658z^{-2} + 0,329z^{-4}}{1 - 1,526z^{-1} + 0,551z^{-2} - 0,165z^{-3} + 0,1728z^{-4}}$$

Si realizamos la función de transferencia obtenemos un circuito mostrado en la figura 6.25

6.5 Diseño de los filtros desde la respuesta al Dirac

Hasta ahora diseñamos los filtros digitales desde las especificaciones en la plantilla. Podemos también diseñar los filtros si tenemos exigencias a la respuesta al impulso. En otras palabras buscamos una función de transferencia discreta de un filtro digital que tiene la misma respuesta de impulso que un circuito analógico. La respuesta de un circuito analógico es continua y para nuestro propósito es necesario conseguir las muestras como se ve en la figura 6.26.

Este método se llama "impulse Invariance" Invariancia de impulsos. Si conocemos la forma analítica de la respuesta a un impulso la transformación se puede llevar a cabo usando la transformada zeta.

$$H(z) = z \{f(t)\}$$

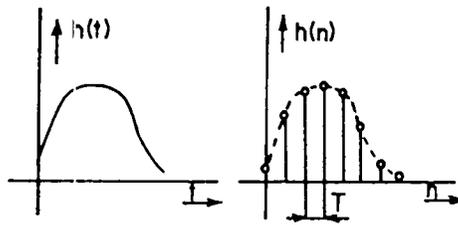


Figura 6.26: La respuesta de circuito analógico a un Dirac y sus muestras

Ejemplo

Diseñar el filtro digital cuyas respuesta a impulso es igual a la respuesta del circuito de la figura 6.27. Elige la frecuencia de muestreo $f_m = 800 \text{ Hz}$.

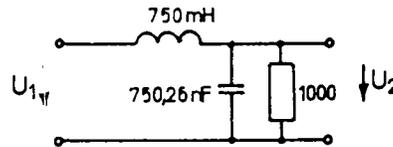


Figura 6.27: Filtro paso baja RLC

Calculamos primeramente la función de transferencia de circuito en la figura 6.27.

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{\frac{R}{1+sRC}}{sL + \frac{R}{1+sCR}} = \frac{R}{s^2 LCR + sL + R} = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + s\frac{1}{CR} + \frac{1}{LC}}$$

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{1.777 \cdot 10^6}{s^2 + 1.3329 \cdot 10^3 s + 1.777 \cdot 10^6}$$

Si la última ecuación la arreglamos en la siguiente forma

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{1.777 \cdot 10^6}{(s + 666.45)^2 + 1.3328 \cdot 10^6} = \frac{1.5392 \cdot 10^3 \cdot (1.1545 \cdot 10^3)}{(s + 666.45)^2 + (1.1545 \cdot 10^3)^2}$$

entonces usando la transformada Laplace inversa a esa ecuación obtenemos la respuesta al impulso:

$$L^{-1} \left\{ \frac{U_2}{U_1} \right\} = h(t) = 1.5392 \cdot 10^3 e^{-666.45t} \cdot \text{sen}(1154.5t)$$

La respuesta al impulso de un circuito discreto es

$$h(n) = 1.5392 \cdot 10^3 e^{-\frac{666.45}{800}n} \sin \frac{1154.5}{800}n = 1.53924 \cdot 10^3 e^{-0.83304n} \text{sen } 1.443208n$$

de una tabla de la transformada-z podemos escribir las siguiente transformaciones

$$\text{sen } naT \xleftrightarrow{z} \frac{z \text{sen } aT}{z^2 - 2z \cos aT + 1}$$

$$e^{-naT} \xleftrightarrow{z} X(e^{aT} \cdot z)$$

Usando estas transformaciones obtenemos

$$Z \{ \sin 1.443208n \} = \frac{z \operatorname{sen} 1.443208}{z^2 - 2z \cos 1.443208 + 1} = \frac{0.9918z}{z^2 - 0.2544z + 1}$$

Si sustituimos por z

$$z = ze^{0.83304} = 2.3003z$$

obtenemos

$$H(z) = Z \{ h(n) \} = \frac{0.9918 \cdot (2.3003)z \cdot \frac{1.5392 \cdot 10^3}{800}}{(2.3003z)^2 - 0.2544 \cdot (2.3003)z + 1} = \frac{0.8296z^{-1}}{1 - 0.11063z^{-1} + 0.18898z^{-2}}$$

El circuito que realiza esta función de transferencia y tiene la misma respuesta al impulso está mostrada en la figura 6.28

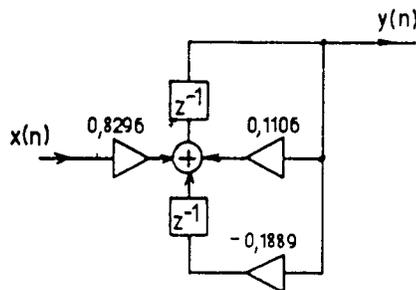


Figura 6.28: Filtro digital de segundo orden

6.6 Síntesis de los circuitos discretos con la ayuda de las matrices circulares

Los coeficientes a_i y b_i de la función de transferencia de un sistema discreto se pueden calcular con la ayuda de las matrices circulares. Si diseñamos los filtros IIR con la respuesta infinita tenemos que suponer, que las muestras de la respuesta en la salida se translapanán. Los coeficientes de la función de transferencia se calculan usando la ecuación

$$cykl \mathbf{h} \times \mathbf{a} = \mathbf{b}$$

La ecuación se puede escribir en la forma matricial

$$\begin{bmatrix} h_0 & h_{N-1} & h_{N-2} & \cdots & h_{N-n} & \cdots \\ h_1 & h_0 & h_{N-1} & \cdots & h_{N-n+1} & \cdots \\ h_2 & h_1 & h_0 & \cdots & h_{N-n+2} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ h_n & h_{n-1} & h_{n-2} & \cdots & h_0 & \cdots \\ h_{n+1} & h_n & h_{n-1} & \cdots & h_1 & \cdots \\ h_{n+2} & h_{n+1} & h_n & \cdots & h_2 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ h_{2n} & h_{2n-1} & h_{2n-2} & \cdots & h_n & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ h_{N-1} & h_{N-2} & h_{N-3} & \cdots & h_{N-n-1} & \cdots \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ a_n \\ 0 \\ 0 \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ 0 \\ \cdots \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ b_n \\ 0 \\ 0 \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ 0 \\ \cdots \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.24)$$

La ecuación matricial (6.24) la podemos dividir en dos ecuaciones matricial (6.25) y (6.26)

$$\begin{bmatrix} h_0 & h_{N-1} & h_{N-2} & \cdots & h_{N-n} \\ h_1 & h_0 & h_{N-1} & \cdots & h_{N-n+1} \\ h_2 & h_1 & h_0 & \cdots & h_{N-n+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ h_n & h_{n-1} & h_{n-2} & \cdots & h_0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad (6.25)$$

$$\begin{bmatrix} h_{n+1} \\ h_{n+2} \\ h_{n+3} \\ \cdots \\ \cdots \\ h_{2n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_n & h_{n-1} & \cdots & h_1 \\ h_{n+1} & h_n & \cdots & h_2 \\ h_{n+2} & h_{n+1} & \cdots & h_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ h_{2n-1} & h_{2n-2} & \cdots & h_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \cdots \\ \cdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdots \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.26)$$

Si arreglamos la ecuación (6.25) obtenemos la ecuación matricial (6.27). De esta ecuación matricial podemos calcular el vector \mathbf{a} , si conocemos los coeficientes de la respuesta al impulso h_1 hasta h_{2n}

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \cdots \\ \cdots \\ a_n \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} h_n & h_{n-1} & \cdots & h_1 \\ h_{n+1} & h_n & \cdots & h_2 \\ h_{n+2} & h_{n+1} & \cdots & h_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ h_{2n-1} & h_{2n-2} & \cdots & h_n \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} h_{n+1} \\ h_{n+2} \\ h_{n+3} \\ \cdots \\ \cdots \\ h_{2n} \end{bmatrix} \quad (6.27)$$

Los coeficientes de la respuesta al impulso h_{2n+1} hasta h_{N-1} no los podemos prescribir, pero los podemos calcular con la ayuda de la ecuación (6.28)

$$h_k = - \sum_{i=1}^n h_{k-i} a_i \quad (6.28)$$

Si queremos calcular los coeficientes de la función de transferencia tenemos que conocer $2n + 1$ términos de la respuesta al impulso. Estos impulsos se llaman impulsos relevantes. Los impulsos restantes los vamos a llamar impulsos redundantes. Desde los coeficientes $2n + 1$ relevantes de la respuesta h obtenemos los coeficientes $2n + 1$ de vector \mathbf{a} y \mathbf{b} . Para calcular el vector \mathbf{b} primeramente tenemos que determinar los coeficientes redundantes de la respuesta a un impulso $h(n)$. La síntesis no es unívoca y por eso no podemos prescribir para cierto sistema cualquiera respuesta al impulso, si queremos realizar el sistema con mínimos elementos.

Ejemplo

Calcular los coeficientes de la función de transferencia $H(z)$ del orden $n = 2$ si conoce usted los coeficientes de la respuesta a un impulso y la longitud del period. $N = 6$

$$\begin{aligned} h_0 &= 0.23408792 & h_1 &= 0.52158126 & h_2 &= 0.32765012 \\ h_3 &= -0.0060618 & h_4 &= -0.06228814 \end{aligned}$$

Primeramente calculamos con la ayuda de los $2n + 1$ elementos relevantes de la respuesta a un impulso h_0 hasta h_4 los coeficientes a_1 y a_2 . Entonces

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.32765016 & 0.52158126 \\ 0.00606108 & 0.32765016 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} -0.0060618 \\ -0.06228814 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.276 \\ 0.185 \end{bmatrix}$$

Usando la ecuación (6.28) podemos calcular el coeficiente redundante de la respuesta a un impulso h_5 . No podría ser elegido, si queremos calcular la función de transferencia de segundo orden.

$$h_5 = -h_4 a_1 - h_3 a_2 = -0.06228 \times 0.276 + 0.00606 \times 0.185 = -0.0160702$$

Ahora podemos ya calcular los coeficientes b_i de la función de transferencia $H(z)$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} h_0 & h_5 & h_4 \\ h_1 & h_0 & h_5 \\ h_2 & h_1 & h_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0.234087 & -0.016070 & -0.062288 \\ 0.521581 & 0.234087 & -0.016070 \\ 0.327650 & 0.521581 & 0.234087 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ -0.276 \\ 0.185 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0.227 \\ 0.454 \\ 0.227 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ya que conocemos todos los coeficientes de la función de transferencia $H(z)$, es

$$H(z) = \frac{0.227 + 0.454z^{-1} + 0.227z^{-2}}{1 - 0.276z^{-1} + 0.185z^{-2}}$$



FACULTAD DE INGENIERIA

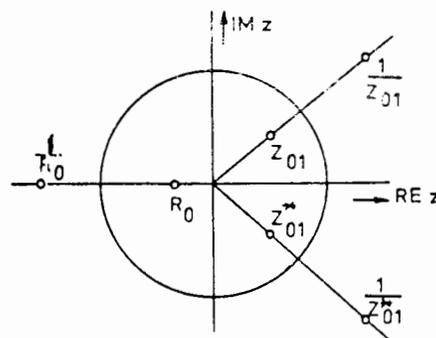
Capitulo 7

Filtros digitales con la respuesta finita FIR

La función de transferencia de un filtro con la respuesta finita es

$$H(z) = \sum_{i=0}^K b_i z^{-i} \quad (7.1)$$

Con una aproximación conveniente podemos obtener los coeficientes b_i simétricos. Los polos de la función de transferencia $H(z)$ simétrica se muestran en la figura 7.1



G.- 611447

Figura 7.1: Localización de los polos en el dominio de z

Los polos de la función de transferencia que no están situados sobre el círculo de radio unitario deben ser recíprocos $1/z_i$. Entonces podemos escribir la función de transferencia en la forma

$$H(z) = H(0) \frac{1}{z^k} (z-1)(z+1)^b \prod_{i=1}^c (z-z_{0i}) \left(z, z \frac{1}{z_{0i}}\right) \quad (7.2)$$

La respuesta al impulso puede ser dividida en cuatro grupos, como podemos ver de la figura 7.2

- En la figura 7.2a el número de impulsos es impar, pero la simetría con respecto al punto M es par, y por eso podemos expresar la función de transferencia en la ecuación (7.3)

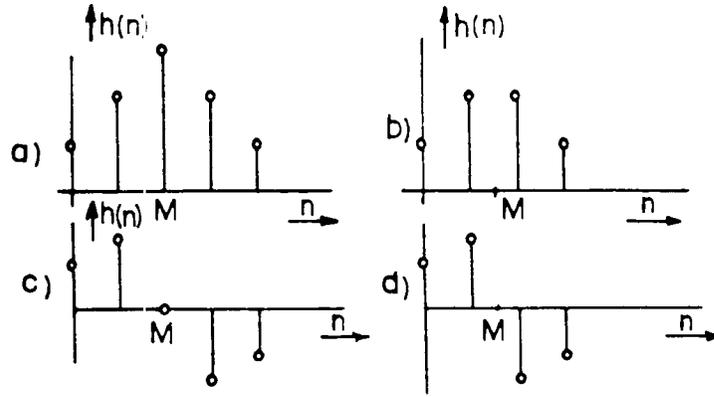


Figura 7.2: Cuatro posibilidades de la respuesta a un impulso

$$H(\omega)^{IP} = h\left(\frac{n}{2}\right) + \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} 2h(i) \cos\left(\frac{n}{2} - i\right)\omega \quad (7.3)$$

- En la figura 7.2b el número de los impulsos es par y la simetría con respecto al punto M es también par. La función de transferencia es en la ecuación 7.4

$$H(\omega)^{PP} = \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} 2h(i) \cos\left(n - 2i\right)\frac{\omega}{2} \quad (7.4)$$

- En la figura 7.2c el número de los impulsos es impar y la simetría con respecto al punto M es también impar. La función de transferencia se puede expresar en la ecuación (7.5)

$$H(\omega)^{II} = \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} 2h(i) \sin\left(\frac{n - 2i}{2}\right)\omega \quad (7.5)$$

- En la figura 7.2d el número de los impulsos es par pero la simetría con respecto al punto M es impar. La función de transferencia se puede expresar en la ecuación (7.6)

$$H(\omega)^{PI} = \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} 2h(i) \sin\left(\frac{n}{2} - i\right)\omega \quad (7.6)$$

Ejemplo

Hallar la función de transferencia $H(\omega)$ de un filtro *FIR* con la respuesta a un impulso mostrado en la figura 7.3

El número de los impulsos es impar pero la simetría de los impulsos es par. Entonces podemos escribir la función de transferencia $H(\omega)$ de la ecuación (7.7)

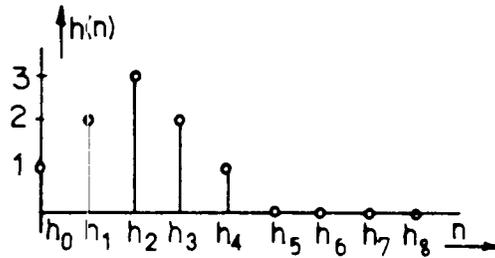


Figura 7.3: La respuesta de un filtro FIR a un impulso

$$H^{IP}(\omega) = h\left(\frac{n}{2}\right) + \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} 2h(i) \cos\left(\frac{n}{2} - i\right)\omega \quad (7.7)$$

Si sustituimos en la ecuación (7.7) por

$$n = 4 \quad h_0 = h_4 = 1 \quad h_1 = h_3 = 2 \quad h_2 = 3$$

obtenemos

$$H^{IP}(\omega) = h(2) + 2h(0) \cos 2\omega + 2h(1) \cos \omega = 3 + 2 \cos 2\omega + 4 \cos \omega$$

Ejemplo

Hallar la función de transferencia en el dominio de z y de ω de un filtro *FIR* que tiene la función de diferencias

$$y(n) = 3x(n) + 2x(n-1) + 2x(n-2) + 3x(n-3)$$

Utilizando la transformada de z obtenemos

$$Y(z) = 3X(z) + 2z^{-1}X(z) + 2z^{-2}X(z) + 3z^{-3}X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = 3 + 2z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3}$$

La respuesta del sistema a un impulso está en la figura 7.4

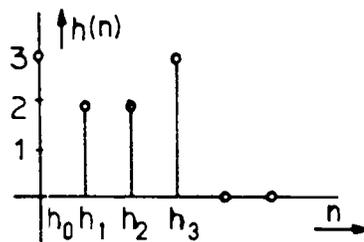


Figura 7.4: La respuesta del sistema a un impulso

El número de los impulsos es par y la simetría de los impulsos es también par. La función de transferencia en el dominio de ω se puede escribir por la ecuación (7.8)

$$H^{PP}(\omega) = \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} 2h(i) \cos(n-2i)\frac{\omega}{2} \quad (7.8)$$

Si sustituimos los valores:

$$n = 3 \quad h(0) = h(3) = 3 \quad h(1) = h(2) = 2$$

en la ecuación (7.8) obtendremos

$$H(\omega) = 2h(0) \cos \frac{3\omega}{2} + 2h(1) \cos \frac{\omega}{2} = 2 \left(3 \cos \frac{3\omega}{2} + 4 \cos \frac{\omega}{2} \right)$$

Las respuestas de los cuatro tipos de filtro *FIR* está en la figura 7.5

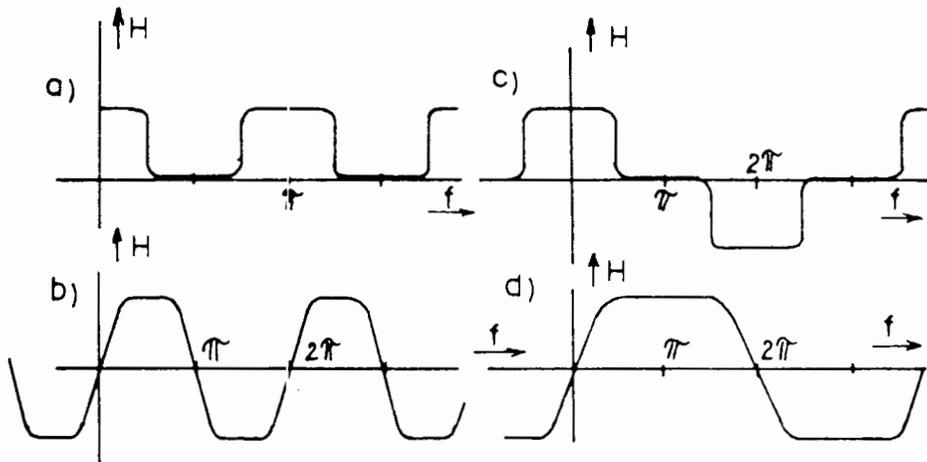


Figura 7.5: Las respuestas de cuatro tipos de filtro FIR

7.1 Diseño del Filtro FIR

Aproximamos la característica en la figura 7.5a o en la figura 7.6 de la serie de Fourier

$$|H| = A(f) = \sum_{m=-M}^M c_m e^{j2\pi f m T} \quad (7.9)$$

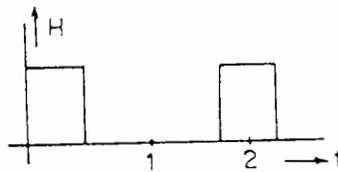


Figura 7.6: Las especificaciones de un filtro paso baja

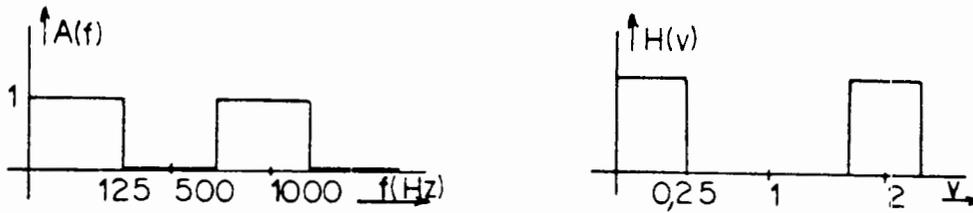


Figura 7.7: Especificaciones para un filtro FIR

donde las constantes c_m y c_{-m} las podemos calcular mediante la ecuación (7.10)

$$c_m = c_{-m} = \frac{2}{f_m} \int_0^{\frac{f_m}{2}} A(f) \cos 2\pi f T m df \quad (7.10)$$

Si sustituimos en la ecuación (7.9) por $e^{j2\pi f T} = z$ obtenemos

$$H_1(z) = \sum_{m=-M}^M c_m z^m \quad (7.11)$$

Esa función es la función de transferencia de un sistema no causal. Para $a_i = c_{M-i}$ la última ecuación se puede escribir en la forma

$$H(z) = \sum_{i=0}^{2M} a_i z^{-i} \quad (7.12)$$

Esta función es una función de transferencia de un filtro causal *FIR*. El término $2M$ significa que el filtro *FIR* tiene $2M$ elementos de retardo. Si la frecuencia de muestreo normalizada es 2, los coeficientes c_m se calculan por medio de la ecuación (7.13)

$$c_m = \int_0^1 \cos m\pi f df \quad (7.13)$$

Ejemplo

Diseñar un filtro paso baja con la respuesta finita al impulso. Con las especificaciones

$$A(f) = \begin{cases} 1 & 0 \leq f \leq 125 \text{ Hz} \\ 0 & \text{en todas otras frecuencias} \end{cases}$$

La frecuencia de muestreo es $f_m = 1 \text{ kHz}$. La respuesta al impulso tiene veinte muestras. Antes de normalizar las especificaciones de la plantilla dibujamos las especificaciones en la figura 7.7a. Pero la frecuencia normalizada de muestreo es 2. Por eso elegimos

$$\frac{f_m}{f_0} = 2 \quad f_0 = \frac{f_m}{2} = \frac{1000}{2} = 500$$

Ahora podemos dibujar la plantilla normalizada. Está en la figura 7.7b Usando la ecuación (7.14)

$$c_m = \int_0^{\frac{Lm}{2}} |H| \cos m\pi f df \quad (7.14)$$

podemos determinar los coeficientes c_m

$$c_m = \int_0^{0,25} 1 \cdot \cos m\pi v dv \quad (7.15)$$

$$c_m = \frac{\sin 0,25m\pi}{m\pi} \quad (7.16)$$

$$\begin{array}{cccc} c_0 = 0,25 & c_3 = 0,075 & c_6 = -0,053 & c_9 = 0,025 \\ c_1 = 0,225 & c_4 = 0,000 & c_7 = -0,032 & c_{10} = 0,032 \\ c_2 = 0,159 & c_5 = -0,045 & c_8 = 0,000 & \end{array}$$

Porque vale $a_i = c_{M-i}$ será

$$\begin{array}{cccc} a_{20} = a_0 = c_{10} = 0,032 & a_{16} = a_4 = c_6 = -0,053 & a_{12} = a_8 = c_2 = 0,159 \\ a_{19} = a_1 = c_9 = 0,0025 & a_{15} = a_5 = c_5 = -0,045 & a_{11} = a_9 = c_1 = 0,225 \\ a_{18} = a_2 = c_8 = 0,000 & a_{14} = a_6 = c_4 = 0,000 & a_{10} = a_{10} = c_0 = 0,25 \\ a_{17} = a_3 = c_7 = -0,032 & a_{13} = a_7 = c_3 = 0,075 & \end{array}$$

Estructura de un filtro FIR está en la figura 7.8 y la función de transferencia se puede escribir en la forma

$$H(z) = 0,032 + 0,025z^{-1} - 0,032z^{-3} - \dots - 0,032z^{-18} + 0,025z^{-19} + 0,032z^{-20}$$

7.2 La influencia de las ventanas a la respuesta del filtro

Para mejorar la respuesta del filtro a una señal se utilizan varias ventanas, las más conocidas ventanas son

- la ventana rectangular - la ventana de triangular
- la ventana de Hamming - la ventana de Von Hann

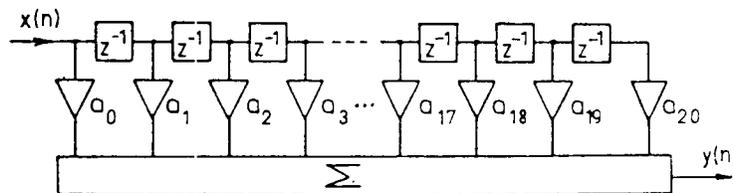


Figura 7.8: Filtro FIR de orden veinte

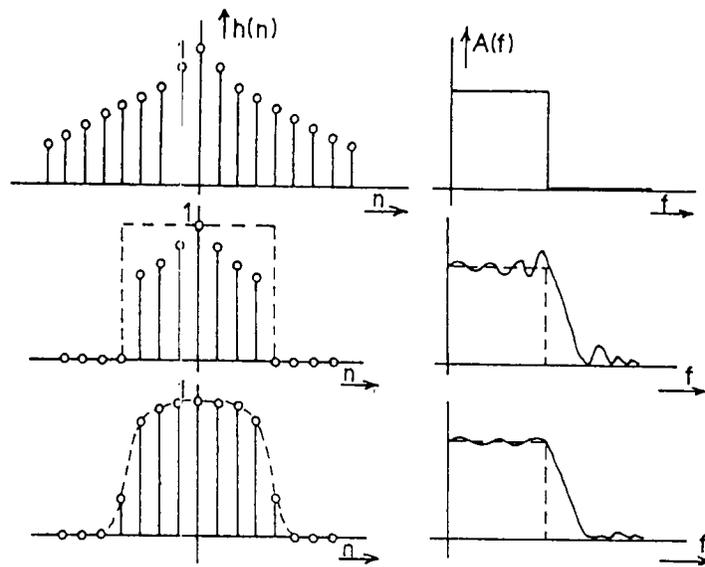


Figura 7.9: La influencia de la ventana a la respuesta del filtro

- la ventana de Kaiser - la ventana de Poisson
- la ventana de Cauchy - la ventana de Bohman

En la figura 7.9 podemos ver la influencia de las ventanas a la respuesta del filtro. En primera imagen podemos ver, si tenemos número infinito de los coeficientes de la función de transferencia obtenemos la respuesta del filtro ideal. Pero esos filtros no los podemos realizar. Y por eso limitamos el número de los coeficientes con una ventana. Si utilizamos una ventana rectangular obtenemos la respuesta de un filtro que es mostrada en la figura 7.9 b. La amplitud de la respuesta no es buena, su oscilación es muy grande en el banda de paso. Si utilizamos la ventana que propuso Hamming, Von Hann o Kaiser, las oscilaciones de la amplitud se disminuyen. La ventana rectangular limita sólo el número de los coeficientes (muestras). Pero la ventana Hamming, Von Hann o Kaiser limita no sólo el número de los coeficientes (muestras), sino también la magnitud de las muestras (coeficientes de la función de transferencia)

Los coeficientes nuevos se determinan usando la ecuación (7.17)

$$c'_m = w_m \cdot c_m \quad (7.17)$$

donde w_m son los coeficientes de la ventana

La ventana de Hamming

La ventana de Hamming está definida por la ecuación (7.18)

$$w_i = 0,54 + 0,46 \cos \frac{2\pi i}{M} \quad (7.18)$$

para $M = 20$ obtenemos los coeficientes de la ventana de Hamming

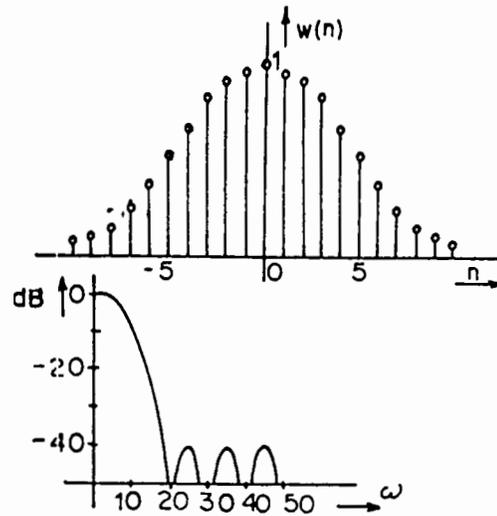


Figura 7.10: Ventana de Hamming y su espectro

$$w_0^H := 1$$

$$W_1^H = 0,54 + 0,46 \cos \frac{2\pi}{20} = 0,977486$$

$$W_2^H = 0,54 + 0,46 \cos \frac{4\pi}{20} = 0,9121478$$

$$W_3^H = 0,54 + 0,46 \cos \frac{6\pi}{20} = 0,8103812$$

$$W_4^H = 0,54 + 0,46 \cos \frac{8\pi}{20} = 0,6821478$$

$$W_5^H = 0,54 + 0,46 \cos \frac{10\pi}{20} = 0,5233846$$

$$W_6^H = 0,54 + 0,46 \cos \frac{12\pi}{20} = 0,3978522$$

$$W_7^H = 0,54 + 0,46 \cos \frac{14\pi}{20} = 0,2696188$$

$$W_8^H = 0,54 + 0,46 \cos \frac{16\pi}{20} = 0,1678522$$

$$W_9^H = 0,54 + 0,46 \cos \frac{18\pi}{20} = 0,102524$$

$$W_{10}^H = 0,54 + 0,46 \cos \frac{20\pi}{20} = 0,08$$

Si transformamos la ecuación (7.18) en el dominio de las frecuencias obtenemos

$$W(f) = \frac{M \cos(\pi f M)}{\pi f M} \left[\frac{0,54 - 0,08(f M)^2}{1 - (f M)^2} \right] \quad (7.19)$$

El espectro de la ventana de Hamming está en la figura 7.10 b. De esta gráfica podemos ver, que la ganancia en [dB] no cae bajo 43 [dB]. La ventana de Hamming está mostrada en la figura 7.10a.

Ejemplo

Del ejemplo anterior utilizar la ventana de Hamming y determinar los nuevos coeficientes de filtro. En el ejemplo anterior determinamos para filtro paso baja los coeficientes c_m

$$\begin{array}{llll} c_0 = 0,25 & c_3 = 0,075 & c_6 = -0,053 & c_9 = 0,025 \\ c_1 = 0,225 & c_4 = 0,000 & c_7 = -0,032 & c_{10} = 0,032 \\ c_2 = 0,159 & c_5 = -0,045 & c_8 = 0,000 & \end{array}$$

Usando la ventana de Hamming calculamos los nuevos coeficientes del filtro usando la ecuación (7.17)

$$a_{10} = c_0 \cdot w_0^H = 0,25 \cdot 1 = 0,25$$

$$a_9 = a_{11} = c_1 \cdot w_1^H = 0,225 \cdot 0,977486 = 0,220$$

$$a_8 = a_{12} = c_2 \cdot w_2^H = 0,159 \cdot 0,9121478 = 0,145$$

$$a_7 = a_{13} = c_3 \cdot w_3^H = 0,075 \cdot 0,8103812 = 0,0607$$

$$a_6 = a_{14} = c_4 \cdot w_4^H = 0$$

$$a_5 = a_{15} = c_5 \cdot w_5^H = -0,045 \cdot 0,5233846 = -0,0235$$

$$a_4 = a_{16} = c_6 \cdot w_6^H = -0,0211$$

$$a_3 = a_{17} = c_7 \cdot w_7^H = 0,0086$$

$$a_2 = a_{18} = c_8 \cdot w_8^H = 0,0000$$

$$a_1 = a_{19} = c_9 \cdot w_9^H = 0,0026$$

$$a_0 = a_{20} = c_{10} \cdot w_{10}^H = 0,0025$$

Para completar escribimos otras ventanas interesantes

Ventana de Bohman

$$w_i = \left(1 - \frac{2i}{M}\right) \cos \frac{2\pi i}{M} + \frac{1}{\pi} \sin \frac{2\pi i}{M} \quad (7.20)$$

Ventana de Blackman

$$w_i = \sum_{i=0}^k (-1)^i a_i \cos \frac{2\pi i}{M} \quad (7.21)$$

para los parametros $a_0 = 0,42323$, $a_1 = 0,49755$ y $a_2 = 0,07922$ la ganancia no cae bajo $-70,83$ dB.

Ventana parabólica

$$w_i = 1 - \left(\frac{2i}{M}\right)^2 \quad (7.22)$$

Ventana de Poisson

$$w_i = e^{-\frac{2\alpha i}{M}} \quad (7.23)$$

Ventana de Von Hann

$$w_i = 0,5 \left[1 + \cos \frac{2\pi i}{M}\right] \quad (7.24)$$

Ventana de Cauchy

$$w_i = \left(1 + \left[\frac{2\alpha i}{M}\right]^2\right)^{-1} \quad (7.25)$$

Ventana de Kaiser

$$w_i = \frac{I_0 \left[\theta \sqrt{1 - \left(\frac{2i}{M}\right)^2} \right]}{I_0(\theta)} \quad (7.26)$$

donde I_0 es la función de Bessel

Capítulo 8

La Función de transferencia de los sistemas

8.1 La función de transferencia de los sistemas analógicos

Para el circuito *RLC* de la figura 8.1

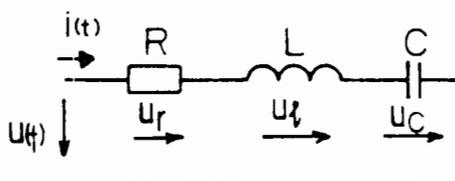


Figura 8.1: Circuito RLC

podemos escribir la ecuación que modela al sistema:

$$u(t) = R \cdot i(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int i(t) dt \quad (8.1)$$

$$\frac{du(t)}{dt} = R \cdot \frac{di(t)}{dt} + L \frac{d^2 i(t)}{dt^2} + \frac{1}{C} i(t) dt \quad (8.2)$$

Si utilizáramos la transformación de Laplace obtenemos

$$sU = RsI + Ls^2I + \frac{I}{C} \quad | \text{ dividiendo entre } s$$

$$U = R \cdot I + sL \cdot I + \frac{I}{sC}$$

entonces la impedancia de circuito RLC es

$$Z = \frac{U}{I} = R + sL + \frac{1}{sC} \quad (8.3)$$

En general para un circuito de dos puertos podemos escribir la ecuación de diferencial

$$b^n \frac{d^n x}{dt^n} + b_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 = a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 \quad (8.4)$$

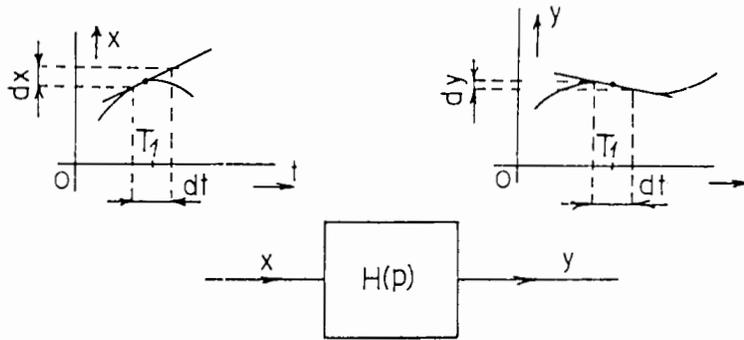


Figura 8.2: El sistema analógico, las señales de entrada y salida con las derivaciones en punto T_1

$x(t)$ es la señal de entrada
 $y(t)$ es la señal de salida

Si aplicamos a la ecuación (3.4) la transformación de Laplace obtenemos

$$Xb_n s^n + Xb_{n-1} s^{n-1} + \dots + Xb_1 s + Xb_0 = Ya_n s^n + Ya_{n-1} s^{n-1} + \dots + Ya_1 s + Ya_0 \quad (8.5)$$

y la función de transferencia de $H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$ es

$$H(s) = \frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (8.6)$$

Si conocemos la derivada de la señal de entrada $\frac{dx}{dt}$ y de salida $\frac{dy}{dt}$ en varios instantes del tiempo, podemos obtener la función de transferencia $H(p)$ y construir el circuito.

En la entrada del circuito discreto tenemos una señal en la forma discreta. Y en la salida obtenemos los muestros. Esto es representado en la figura 8.3

En este caso, no podemos construir en el tiempo discreto una derivada $\frac{dx}{dt}$, pero si podemos calcular una diferencia entre las dos muestros.

$$\frac{\Delta y}{\Delta T} = \frac{y_1 - y_2}{\Delta T} \quad y \quad \frac{\Delta x}{\Delta T} = \frac{x_1 - x_2}{\Delta T} \quad (8.7)$$

Igual como en el caso de los circuitos analógicos podemos escribir la ecuación de diferencias

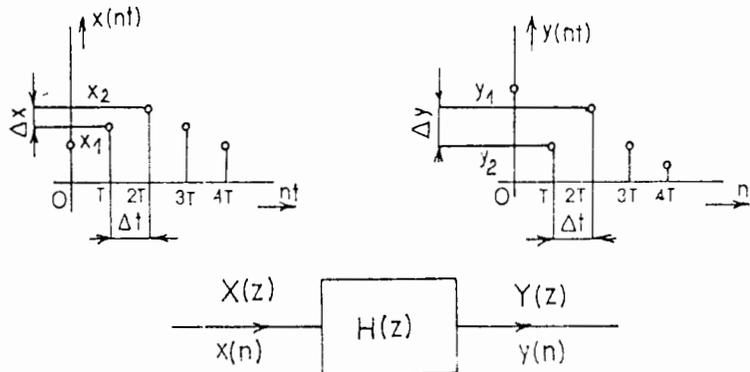


Figura 8.3: Sistema discreto y las señales en la entrada y salida

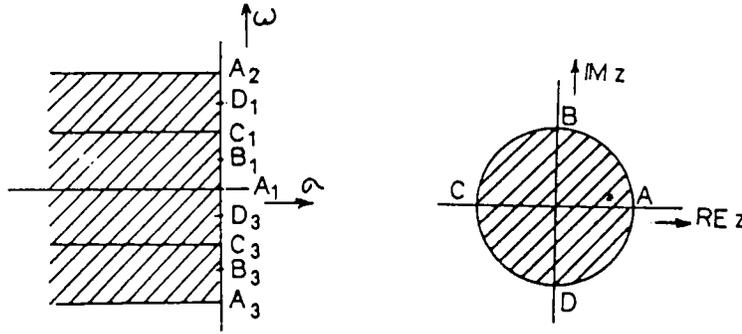


Figura 8.4: Transformación del plano del dominio de s al plano de dominio de z .

$$b_n \frac{\Delta^n x}{\Delta T^n} + b_{n-1} \frac{\Delta^{n-1} x}{\Delta T^{n-1}} + \dots + b_1 \frac{\Delta x}{\Delta T} + b_0 = a_n \frac{\Delta^n y}{\Delta T^n} + a_{n-1} \frac{\Delta^{n-1} y}{\Delta T^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{\Delta y}{\Delta T} + a_0 \quad (8.8)$$

Esta ecuación se puede escribir en la forma

$$b_n x(n) + b_{n-1} x(n-1) + \dots + b_1 x(1) + b_0 = a_n y(n) + a_{n-1} y(n-1) + \dots + a_1 y(1) + a_0 \quad (8.9)$$

Usando la transformada-z

$$z \{b_n x(n)\} \xleftrightarrow{z} b_n X z^n \quad (8.10)$$

obtenemos

$$b_n X z^n + b_{n-1} X z^{n-1} + \dots + b_1 X z + X b_0 = a_n Y z^n + a_{n-1} Y z^{n-1} + \dots + a_1 Y z + Y a_0 \quad (8.11)$$

La función de transferencia es:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \dots + b_1 z + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0} \quad (8.12)$$

Algunos autores escriben la función de transferencia en la forma causal

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}} \quad (8.13)$$

La relación entre el dominio de s y z queda establecida por la ecuación

$$z = e^{sT} \quad (8.14)$$

T es el intervalo entre dos muestras. La ecuación $z = e^{sT}$ nos transforma el eje imaginario del dominio s al círculo unitario en el dominio de z , figura 8.4

El lado izquierdo del plano s se transforma dentro del círculo en plano z . y el lado derecho del plano s se transforma fuera de círculo en plano de z . Entonces los polos de un filtro analógico que es estable están en el lado izquierdo del plano s y se transforman dentro

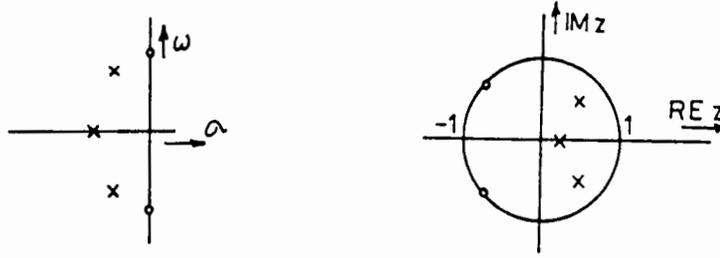


Figura 8.5: Los polos y ceros del filtro Cauer de orden $n=3$

de círculo en el plano de z . Para una aproximación de Cauer y $n = 3$ polos y ceros de la función de transferencia de acuerdo con la figura 8.5

Ejemplo:

Determinar la función de transferencia de un circuito donde la ecuación de diferencias es:

$$y(n) = \frac{1}{2}y(n-1) + 2x(n) \quad (8.15)$$

Si aplicamos la transformada-z obtenemos

$$Y(z) = \frac{1}{2}z^{-1}Y(z) + 2X(z)$$

$$Y(z) \cdot \left[1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right] = 2X(z)$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{2}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{2z}{z - \frac{1}{2}} \quad (8.16)$$

El polo y el cero están dibujados en la figura 8.6

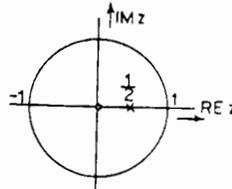


Figura 8.6: Los polos y ceros de la función de transferencia en el plano de z

Ejemplo:

Determine la función de transferencia de un sistema definido por la ecuación de diferencias

$$y(n) = \frac{5}{6}y(n-1) - \frac{1}{6}y(n-2) + x(n) \quad (8.17)$$

Usando la transformada-z obtenemos

$$Y(z) = \frac{5}{6}Y(z)z^{-1} - \frac{1}{6}Y(z)z^{-2} + X(z)$$

$$Y(z) \cdot \left[-\frac{5}{6}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2} + 1\right] = X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2}}$$

$$H(z) = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)} \quad (8.18)$$

Los polos y ceros de la función (8.19) son localizados en el plano z , figura 8.7

$$\frac{z^2}{\left(z - \frac{1}{2}\right) \left(z - \frac{1}{3}\right)} \quad (8.19)$$

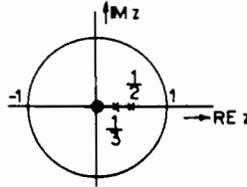


Figura 8.7: Los polos y ceros de la función de transferencia $H(z)$

Ejemplo:

Calcular la respuesta a un tren de impulso de un circuito que está definido por ecuación de diferencias

$$y(n) = y(n-1) + x(n) \quad (8.20)$$

Usando la transformada- z obtenemos

$$Y(z) - z^{-1}Y(z) = X(z)$$

la función de transferencia del sistema es

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - z^{-1}} \quad (8.21)$$

Entonces la respuesta en el dominio de la frecuencia es

$$Y(z) = X(z) \frac{1}{1 - z^{-1}} \quad (8.22)$$

La transformada- z de un tren de impulsos es

$$X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} \quad (8.23)$$

Entonces

$$Y(z) = \frac{1}{(1 - z^{-1})^2} \quad (8.24)$$

La transformada- z inversa es

$$1 : 1 - 2z^{-1} + z^{-2} = 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + 4z^{-3} + 5z^{-4} + \dots$$

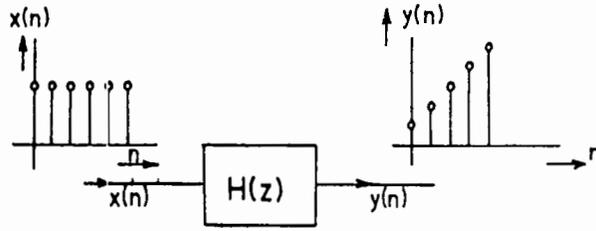


Figura 8.8: El sistema discreto inestable

$$y(n) = \{1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ \dots\}$$

Esta serie de muestras diverge a pesar de que la señal en la entrada es limitada. Por eso el sistema no es estable, figura 8.8.

8.2 Análisis de circuitos discretos en la frecuencia

La función de transferencia se puede escribir en la forma

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^M a_k z^{-k}} \quad (8.25)$$

si sustituimos en la ecuación por $z = e^{j\omega}$ obtenemos

$$H(e^{j\omega}) = H(\omega) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k e^{-j\omega k}}{1 + \sum_{k=1}^M a_k e^{-j\omega k}} \quad (8.26)$$

Pero el módulo de H lo podemos determinar como

$$|H(\omega)| = H(\omega) \cdot H(-\omega) = H(z) \cdot H(z^{-1}) \quad (8.27)$$

pero

$$\begin{aligned} e^{2a} &= |H(\omega)|^2 \\ a &= \frac{1}{2} \ln |H| \quad [Np] \\ a &= 10 \log |H| \quad [dB] \end{aligned}$$

El procedimiento de análisis es explicado en el siguiente ejemplo.

Ejemplo:

Para el sistema con la ecuación en diferencias

$$y(n) = -0.1y(n-1) + 0.2y(n-2) + x(n) + x(n-1) \quad (8.28)$$

determine el módulo de la función de transferencia $H(z)$

$$Y(z) + 0.1Y(z)z^{-1} - 0.2Y(z)z^{-2} = X(z) + X(z)z^{-1}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + z^{-1}}{1 + 0.1z^{-1} - 0.2z^{-2}} \quad (8.29)$$

$$|H(z)|^2 = H(z) \cdot H(z^{-1}) = \frac{1 + z^{-1}}{1 + 0.1z^{-1} - 0.2z^{-2}} \times \frac{1 + z}{1 + 0.1z - 0.2z^2}$$

$$|H(z)|^2 = \frac{1 + z + z^{-1} + 1}{1 + 0.1z - 0.2z^2 + 0.1z^{-1} + 0.01 - 0.02z - 0.2z^{-2} - 0.02z^{-1} + 0.04}$$

$$|H(z)|^2 = \frac{2 + z + z^{-1}}{1.05 + 0.08(z + z^{-1}) - 0.2(z^2 + z^{-2})} \quad (8.30)$$

En la última ecuación sustituimos por z

$$\begin{aligned} z &= e^{j\omega} & z^{-1} &= e^{-j\omega} \\ z^2 &= e^{2j\omega} & z^{-2} &= e^{-2j\omega} \end{aligned}$$

obtenemos

$$|H| = \frac{2 + 2 \left(\frac{e^{j\omega} + e^{-j\omega}}{2} \right)}{1.05 + 0.08(2) \left(\frac{e^{j\omega} + e^{-j\omega}}{2} \right) - 0.2(2) \left(\frac{e^{2j\omega} + e^{-2j\omega}}{2} \right)} \quad (8.31)$$

$$|H| = \frac{2 + 2 \cos \omega}{1.05 + 0.16 \cos \omega - 0.4 \cos 2\omega} \quad (8.32)$$

Ejemplo

Para el sistema analógico definido por la función de transferencia

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1} \quad (8.33)$$

determine a_{min} en dB para $\omega = 1$ y $\omega = 3$.

$$H(s) \cdot H(-s) = \frac{1}{(s^2 + \sqrt{2}s + 1) \cdot (s^2 - \sqrt{2}s + 1)} \quad (8.34)$$

$$H(s) \cdot H(-s) = \frac{1}{1 + s^4}$$

$$H(j\omega) \cdot H(-j\omega) = \frac{1}{1 + \omega^4}$$

$$|H|_{\omega=1} = \frac{1}{2} = 10^{\frac{a_{dB}}{20}}$$

entonces

$$a_{dB} = 10 \log \frac{1}{2} = -3 \text{ dB}$$

para $\omega = 3$ obtenemos

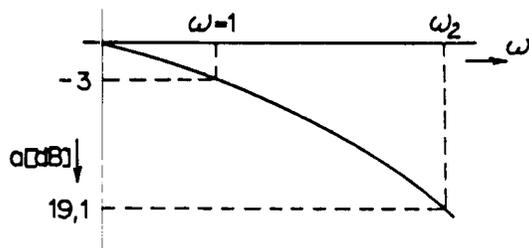


Figura 8.9: La respuesta del filtro Butterworth

$$|H|_{\omega=3}^2 = \frac{1}{1 + 81} = \frac{1}{82}$$

$$a_{dB} = 10 \log \frac{1}{82} = -19.138 \text{ dB}$$

La gráfica de la respuesta está en la figura 8.9

Ejemplo:

En el sistema muestreado de figura 8.10 determine la función de transferencia $H(z)$, si conocemos:

$$h_1(n) = \{2^n\}$$

$$h_2(n) = \{1^n\}$$

$$h_3(n) = \{(-1)^n\}$$

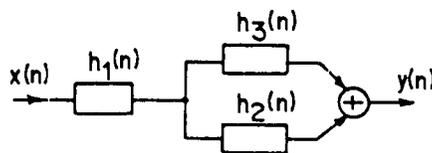


Figura 8.10: La estructura de un circuito discreto

De tablas, la transformada- z vale

$$h(r_n) = \{a^n\} \xleftrightarrow{z} H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} \tag{8.35}$$

entonces

$$\{2^n\} \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1 - 2z^{-1}} = H_1(z)$$

$$\{1^n\} \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1 - z^{-1}} = H_2(z)$$

$$\{(-1)^n\} \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1 + z^{-1}} = H_3(z)$$

la función de transferencia del sistema en la figura 8.10 es

$$H(z) = H_1(z) \cdot [H_2(z) + H_3(z)]$$

$$H(z) = \frac{1}{1 - 2z^{-1}} \left[\frac{1}{1 - z^{-1}} + \frac{1}{1 + z^{-1}} \right] \quad (8.36)$$

$$H(z) = \frac{2}{1 - 2z^{-1} - z^{-2} + 2z^{-3}} \quad (8.37)$$

Si aplicamos la transformada-z inversa

$$2 : 1 - 2z^{-1} - z^{-2} + 2z^{-3} = 2 + 4z^{-1} + 10z^{-2} + 20z^{-3} + \dots$$

es la respuesta de Dirac

$$y(n) = h(n) = \{2 \ 4 \ 10 \ 20 \ \dots\} \quad (8.38)$$

Si analizamos el circuito en el dominio de tiempo, obtenemos el mismo resultado.

$$h(n) = h_1(n) * [h_2(n) + h_3(n)] \quad (8.39)$$

$$h_1(n) = \{2^n\} = \{1 \ 2 \ 4 \ 8 \ 16 \ 32 \ \dots\}$$

$$h_2(n) = \{1^n\} = \{1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ \dots\}$$

$$h_3(n) = \{(-1)^n\} = \{1 \ -1 \ 1 \ -1 \ 1 \ -1 \ \dots\}$$

$$h(n) = \{1 \ 2 \ 4 \ 8 \ 16 \ 32 \ \dots\} * \{2 \ 0 \ 2 \ 0 \ 2 \ 0 \ \dots\}$$

$$h(n) = \{2 \ 4 \ 10 \ 20 \ \dots\}$$

Los dos resultados son iguales y como se ve los muestros divergen y por eso el sistema no es estable.

La función de transferencia de los circuitos discretos la podemos escribir en la forma

$$H(j\omega) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k e^{-j\omega k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k e^{-j\omega k}} \quad (8.40)$$

o por medio de los polos y ceros en el plano z.

$$H(j\omega) = b_0 \frac{\prod_{k=1}^m (1 - z_k e^{-j\omega k})}{\prod_{k=1}^N (1 - p_k e^{-j\omega k})} \quad (8.41)$$

Los polos de la función de transferencia deben estar dentro el círculo unitario si el circuito es estable. Los ceros pueden estar dentro del círculo o afuera, pero también en el círculo unitario. La ultima ecuación se puede escribir tambien en la forma

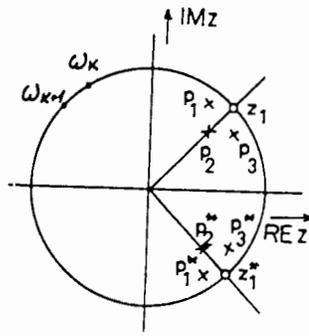


Figura 8.11: Dislocación de los polos y ceros de un filtro digital

$$H(j\omega) = b_0 e^{j\omega(N-M)} \frac{\prod_{k=1}^M (e^{j\omega} - z_k)}{\prod_{k=1}^N (e^{j\omega} - p_k)} \quad (8.42)$$

Los términos en el paréntesis los podemos expresar en forma polar

$$e^{j\omega} - z_k = V_k(\omega) e^{j\theta_k(\omega)}$$

$$e^{j\omega} - p_k = U_k(\omega) e^{j\varphi_k(\omega)} \quad (8.43)$$

donde

$$|e^{j\omega} - z_k| = V_k(\omega)$$

$$|e^{j\omega} - p_k| = U_k(\omega) \quad (8.44)$$

El valor absoluto de H es igual a producto de valores absolutos de todos los términos de la ecuación (8.42). Entonces obtenemos:

$$|H(j\omega)| = b_0 \frac{V_1(\omega) \cdot V_2(\omega) \dots V_M(\omega)}{U_1(\omega) \cdot U_2(\omega) \dots U_N(\omega)} \quad (8.45)$$

El valor absoluto de $e^{j\omega(N-M)}$ es igual 1. La fase de $H(j\omega)$ es la suma de las fases de los términos en el numerador menos la suma de las fases de los términos en denominador.

$$\angle H(j\omega) = \angle \omega(N-M) + \theta_1(\omega) + \theta_2(\omega) + \dots + \theta_M(\omega) - [\varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega) + \dots + \varphi_N(\omega)] \quad (8.46)$$

Ejemplo

Determinar el módulo de la función de transferencia $H(z)$ para la frecuencia $\omega = 0.5$

$$H(z) = \frac{(z+2)(z+4)}{(z+1)(z+3)} \quad (8.47)$$

$$|e^{j\omega} + 2|_{\omega=0.5} = |\cos 0.5 + j \operatorname{sen} 0.5 + 2| = 2.917247$$

$$|e^{j\omega} + 4|_{\omega=0.5} = |\cos 0.5 + j \operatorname{sen} 0.5 + 4| = 4.901087$$

$$|e^{j\omega} + 1|_{\omega=0.5} = |\cos 0.5 + j \operatorname{sen} 0.5 + 1| = 1.937824$$

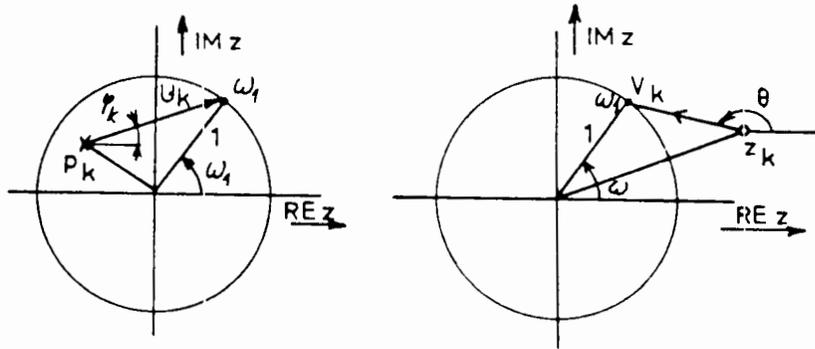


Figura 8.12: Construcción de la fase del circuito

$$|e^{j\omega} + 3|_{\omega=0.5} = |\cos 0.5 + j \operatorname{sen} 0.5 + 3| = 3.907108$$

$$|H(z)| = \frac{(2.917247)(4.9010877)}{(1.9378248)(3.9071083)} = 1.888 \quad (8.48)$$

Ejemplo:

Determinar la fase de la función 8.47 para $\omega = 0.5$

$$(e^{j\omega} + 2)_{\omega=0.5} = |\cos \omega + 2 + j \sin \omega| e^{j \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im}}{\operatorname{Re}}}$$

$$\theta_1 = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{sen} 0.5}{\cos 0.5 + 2} = 0.1650907$$

$$\theta_2 = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{sen} 0.5}{\cos 0.5 + 4} = 0.0979769$$

$$\varphi_1 = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{sen} 0.5}{\cos 0.5 + 1} = 0.25$$

$$\varphi_2 = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{sen} 0.5}{\cos 0.5 + 3} = 0.123016$$

$$\theta = \theta_1 + \theta_2 - \varphi_1 - \varphi_2 = -0.1099484$$

Ejemplo

Calcular el valor absoluto de $H(z)$ y la fase de $H(z)$ si conoce la función de transferencia en la forma:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} \right)^n + \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4} \right)^n \right] e^{-j\omega n}$$

La última ecuación se puede escribir en la forma

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}} + \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{3}{4}e^{-j\omega}}$$

Para obtener más fácil el módulo de H y la fase escribimos la última ecuación en la forma:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{e^{j\omega} (e^{j\omega} - \frac{1}{2})}{(e^{j\omega} - \frac{1}{4})(e^{j\omega} - \frac{3}{4})} \quad (8.49)$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{e^{j\omega} (\cos \omega - \frac{1}{2} + j \operatorname{sen} \omega)}{[\cos \omega - \frac{1}{4} + j \operatorname{sen} \omega] [\cos \omega - \frac{3}{4} + j \operatorname{sen} \omega]}$$

La ecuación analítica de módulo de $H(\omega)$ es

$$|H(e^{j\omega})| = \left[\frac{\frac{5}{4} - \cos \omega}{\left(\frac{17}{16} - \frac{1}{2} \cos \omega\right) \left(\frac{25}{16} - \frac{3}{2} \cos \omega\right)} \right]^{\frac{1}{2}}$$

Desde la ecuación 8.49 podemos expresar el módulo de la función de transferencia en la forma

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{|e^{j\omega} - \frac{1}{2}|}{|e^{j\omega} - \frac{1}{4}| \cdot |e^{j\omega} - \frac{3}{4}|}$$

Y la fase se puede calcular de la ecuación

$$\theta(\omega) = \omega + \operatorname{arg}(e^{j\omega} - \frac{1}{2}) - \operatorname{arg}(e^{j\omega} - \frac{1}{4}) - \operatorname{arg}(e^{j\omega} - \frac{3}{4})$$

o usando la ecuación 8.50

$$\theta(\omega) = \omega + \tan^{-1} \frac{\operatorname{sen} \omega}{\cos \omega - \frac{1}{2}} - \tan^{-1} \frac{\operatorname{sen} \omega}{\cos \omega - \frac{1}{4}} - \tan^{-1} \frac{\operatorname{sen} \omega}{\cos \omega - \frac{3}{4}} \quad (8.50)$$

Capítulo 9

Análisis de filtros digitales

Los métodos de análisis para filtros digitales se fundamentan en la teoría de los diagramas de flujo de las señales, así como en las ecuaciones de estado.

El procedimiento seguido resulta similar al utilizado en el análisis clásico de los circuitos analógicos, en el que primeramente se señalan los nudos, para luego formar la matriz de admitancia \mathbf{Y} , la cual caracterizará al circuito correspondiente.

Las señales relacionadas con los filtros digitales generalmente se clasifican en:

- señales de entrada X_i $i=1,2,3 \dots, e$
- señales de salida Y_i $i=e+1,e+2, \dots, n$
- señales internas U_i y V_i $i=n+1,n+2, \dots, m$

Las señales internas revisten una gran importancia, ya que ellas son las que determinan el estado de los circuitos. Las señales U_i a la salida de los elementos de retardo se indican en la figura 9.1, mientras que las restantes señales de la red digital están representadas por V_i .

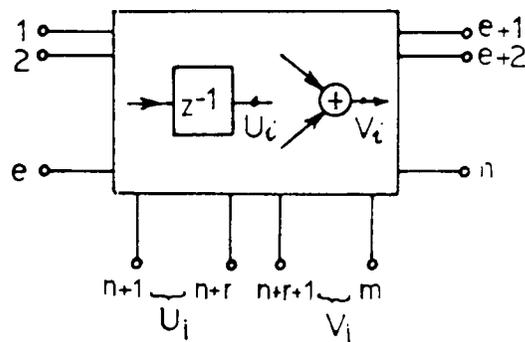


Figura 9.1: Red digital

Cada rama de la estructura de la red digital de la figura 9.1 está caracterizada por la función de transferencia definida por las respectivas señales de entrada y salida figura 9.2

De esta forma la transmisión del nudo j al nudo i se puede expresar en la forma

$$f_{i,j} = \begin{cases} k \\ z^{-1} \end{cases} \quad (9.1)$$

donde k es una constante y z^{-1} representa un elemento de retardo. Así el sistema digital puede ser formulado por las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}(z) &= \mathbf{F}_{yx}\mathbf{X}(z) + \mathbf{F}_{yu}\mathbf{U}(z) + \mathbf{F}_{yv}\mathbf{V}(z) \\ \mathbf{U}(z) &= \mathbf{F}_{ux}\mathbf{X}(z) + \mathbf{F}_{uu}\mathbf{U}(z) + \mathbf{F}_{uv}\mathbf{V}(z) \\ \mathbf{V}(z) &= \mathbf{F}_{vx}\mathbf{X}(z) + \mathbf{F}_{vu}\mathbf{U}(z) + \mathbf{F}_{vv}\mathbf{V}(z) \end{aligned} \quad (9.2)$$

donde

- $\mathbf{X}(z)$ es el vector de las señales de entrada
- $\mathbf{Y}(z)$ representa al vector de las señales de salida
- $\mathbf{U}(z)$ y $\mathbf{V}(z)$ son los vectores de las señales internas.

Por otra parte, los términos \mathbf{F} en el sistema de ecuaciones (9.2) representan a las funciones de transferencia $f_{i,j}$ y pueden ser descritas por la expresión matricial

$$\mathbf{N}_f \times \begin{bmatrix} \mathbf{X}(z) \\ \mathbf{Y}(z) \\ \mathbf{U}(z) \\ \mathbf{V}(z) \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (9.3)$$

donde

$$\mathbf{N}_f = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{yx} & -\mathbf{E} & \mathbf{F}_{yu} & \mathbf{F}(yv) \\ \mathbf{F}_{ux} & \mathbf{0} & \mathbf{F}_{uu} - \mathbf{E} & \mathbf{F}(uv) \\ \mathbf{F}_{vx} & \mathbf{0} & \mathbf{F}_{vu} & \mathbf{F}(vv) - \mathbf{E} \end{bmatrix} \quad (9.4)$$

\mathbf{N}_f viene siendo la matriz representativa del diagrama de flujo de las señales. Tal como se podrá comprobar más adelante, en el análisis, revisten suma importancia las señales $U_i(z)$ a la salida de los elementos de retardo de la red digital.

Si en la expresión (9.3) reducimos las señales $V_i(z)$ obtendremos:

$$\mathbf{N}_e \times \begin{bmatrix} \mathbf{X}(z) \\ \mathbf{Y}(z) \\ \mathbf{U}(z) \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (9.5)$$

donde

$$\mathbf{N}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{E} & \mathbf{C} \\ z^{-1}\mathbf{B} & \mathbf{0} & z^{-1}\mathbf{A} - \mathbf{E} \end{bmatrix} \quad (9.6)$$

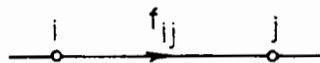


Figura 9.2: Diagrama de flujo de señal

A \mathbf{N}_e se le conoce como matriz de flujo de estado, y a los términos $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ de esta matriz se les denomina matrices de estado del sistema digital, cuyos elementos son reales.

Si se conocen las matrices de estado de una red digital, entonces el sistema de ecuaciones (9.7) tendrá solución:

$$\begin{aligned} z\mathbf{U}(z) &= \mathbf{A}\mathbf{U}(z) + \mathbf{B}\mathbf{X}(z) \\ \mathbf{Y}(z) &= \mathbf{C}\mathbf{U}(z) + \mathbf{D}\mathbf{X}(z) \end{aligned} \quad (9.7)$$

De este modo, si no se toman en cuenta a las señales $U_i(z)$ en la expresión (9.5) se obtiene

$$\mathbf{N}_T \times \begin{bmatrix} \mathbf{X}(z) \\ \mathbf{Y}(z) \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (9.8)$$

De esta forma, a la matriz de transferencia \mathbf{N}_T se puede expresar en la forma:

$$\mathbf{N}_T = [\mathbf{D} + \mathbf{C}(z\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}; \quad -\mathbf{E}] \quad (9.9)$$

En la ecuación anterior, \mathbf{E} es la matriz unitaria y el elemento n_{21} representa a la función de transferencia $H(z)$ de la red digital.

9.1 Ejemplos

Si se quiere determinar la función de transferencia de un sistema digital, se debe establecer la matriz del diagrama del flujo. Por ejemplo, para el filtro digital de la **figura 9.3**, primeramente se le asigna los números 1 y 2 a los nudos de entrada y salida. **Secuencialmente** se pueden numerar los nudos a las salidas de los bloques de retardo con los números 3 y 4 respectivamente, para asignar finalmente los números 5, 6 y 7 a los nudos donde aparecen las señales interiores V_5, V_6 y V_7 . De esta forma se obtiene el sistema de ecuaciones correspondiente a los nudos:

$$\begin{aligned} 2: Y_2 &= V_5 \\ 3: U_3 &= V_7 z^{-1} \\ 4: U_4 &= V_6 z^{-1} \\ 5: V_5 &= X_1 a_0 + U_3 \\ 6: V_6 &= X_1 a_2 - b_2 V_5 \\ 7: V_7 &= X_1 a_1 - b_1 V_5 + U_4 \end{aligned}$$

Utilizando la forma matricial se pueden expresar las ecuaciones en la forma:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & z^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & z^{-1} & 0 \\ a_0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & 0 & 0 & -b_2 & -1 & 0 \\ a_1 & 0 & 0 & 1 & -b_1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ V_5 \\ V_6 \\ V_7 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (9.10)$$

Y así se obtiene la matriz de flujo de señales del filtro digital

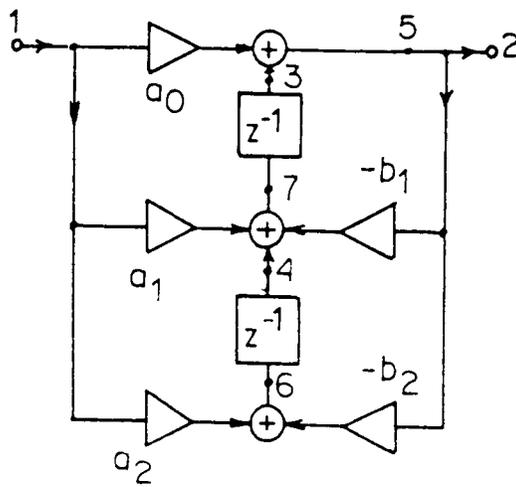


Figura 9.3: Filtro digital de segundo orden

$$\mathbf{N}^{(7)} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & z^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & z^{-1} & 0 \\ a_0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & 0 & 0 & -b_2 & -1 & 0 \\ a_1 & 0 & 0 & 1 & -b_1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (9.11)$$

Para ilustrar el procedimiento seguido en la determinación de la matriz de flujo de señales, se toma como ejemplo el elemento de retardo localizado entre los nudos 4 y 6, de modo que en la matriz $\mathbf{N}^{(7)}$, el término n_{64} correspondiente a este elemento toma el valor z^{-1} .

En forma similar, al multiplicador situado entre los nudos 5 y 7 le corresponde en la matriz de flujo $\mathbf{N}^{(7)}$ la posición del elemento n_{57} representado por la constante $-b_i$.

Con el propósito de determinar los elementos de la matriz de flujo de señales se puede aplicar la ecuación recursiva (9.12).

$$n_{34}^{(6)} = \frac{n_{34}^{(7)} \cdot n_{77}^{(7)} - n_{37}^{(7)} \cdot n_{74}^{(7)}}{n_{77}^{(7)}} = \frac{0 \cdot (-1) - 1 \cdot z^{-1}}{-1} = z^{-1} \quad (9.12)$$

Si en la expresión (9.11) se reduce el número de filas y columnas, se obtienen ecuaciones (9.13) - (9.15)

$$\mathbf{N}^{(6)} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ a_1 z^{-1} & 0 & -1 & z^{-1} & -b_1 z^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & z^{-1} \\ a_0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ a_2 & 0 & 0 & 0 & -b_2 & -1 \end{bmatrix} \quad (9.13)$$

$$\mathbf{N}^{(5)} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ a_1 z^{-1} & 0 & -1 & z^{-1} & -b_1 z^{-1} \\ a_2 z^{-1} & 0 & 0 & -1 & -b_2 z^{-1} \\ a_0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (9.14)$$

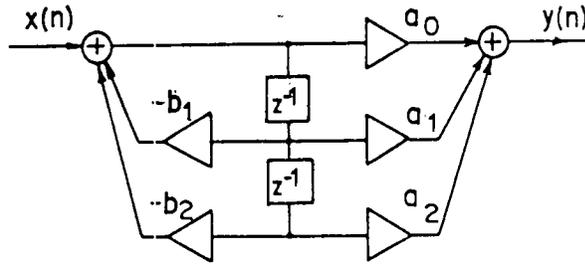


Figura 9.4: Filtro digital de segundo orden

$$\mathbf{N}^{(4)} = \left[\begin{array}{c|c|cc} a_0 & -1 & 1 & 0 \\ \hline (a_1 - a_0 b_1)z^{-1} & 0 & -1 - b_1 z^{-1} & z^{-1} \\ (a_2 - a_0 b_2)z^{-1} & 0 & b_2 z^{-1} & -1 \end{array} \right] \quad (9.15)$$

Comparando las expresiones (9.6) y (9.15) se obtienen las matrices de estado \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} , \mathbf{D} del filtro digital

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} -b_1 & 1 \\ -b_2 & 0 \end{bmatrix} & \mathbf{C} &= [1 \ 0] \\ \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} a_1 - a_0 b_1 \\ a_2 - a_0 b_2 \end{bmatrix} & \mathbf{D} &= a_0 \end{aligned} \quad (9.16)$$

Para determinar la matriz de transferencia $\mathbf{N}_T^{(2)}$ se eliminan los nudos 3 y 4 en la matriz (9.15) y así se obtiene:

$$\mathbf{N}_T^{(2)} = \left[\begin{array}{c|c} \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}} & -1 \end{array} \right] \quad (9.17)$$

Analizando la matriz de la expresión (9.17), se puede observar que el elemento $n_{21}^{(2)}$ representa la función de transferencia $H(z)$ correspondiente al filtro digital de la figura 9.3.

Si se intercambia la numeración a la salida de los elementos de retardo, se obtendrá un nuevo juego de matrices de estado \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} , \mathbf{D} como se muestran en la ecuación (9.18), de acuerdo a la configuración de la figura 9.3

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 0 & -b_2 \\ 1 & -b_1 \end{bmatrix} & \mathbf{C} &= [0 \ 1] \\ \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} a_2 - a_0 b_2 \\ a_1 - a_0 b_1 \end{bmatrix} & \mathbf{D} &= a_0 \end{aligned} \quad (9.18)$$

Secundariamente se determina la matriz de flujo de estado \mathbf{N}_e correspondiente a la configuración de un filtro digital de segundo orden, figura 9.4.

Primariamente se numeran los nudos de la red tal como se ilustra en la figura 9.4, y tomando en cuenta el procedimiento seguido en el análisis del ejemplo anterior, se determinan los elementos de la matriz de flujo de señales, la cual toma la forma:

$$\mathbf{N}^{(6)} := \begin{bmatrix} d & -1 & c_1 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & z^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & z^{-1} \\ b_1 & 0 & a_{11} & a_{12} & -1 & 0 \\ b_2 & 0 & a_{21} & a_{22} & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (9.19)$$

Si disminuye el número de filas y columnas en la matriz de la expresión (9.19), se puede obtener la matriz de flujo de estado (9.20)

$$\mathbf{N}^{(4)} = \left[\begin{array}{c|c|cc} d & -1 & c_1 & c_2 \\ \hline z^{-1}b_1 & 0 & -1 + a_{11}z^{-1} & a_{12}z^{-1} \\ \hline z^{-1}b_2 & 0 & z^{-1}a_{21} & -1 + a_{22}z^{-1} \end{array} \right] \quad (9.20)$$

Comparando las expresiones (9.6) y (9.20) se pueden obtener las matrices de estado \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} , \mathbf{D} del filtro digital de la figura 9.4, llamada estructura de flujo de estado especificada por:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} & \mathbf{B} &= [b_1 \quad b_2] \\ \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} & \mathbf{D} &= d \end{aligned} \quad (9.21)$$

Se puede observar que algunos de los elementos de las matrices de estado de la ecuación (9.21), resultarán nulos o unitarios, tal como se ilustra en la ecuación (9.16). Este comportamiento es explicable por la ausencia de algunos multiplicadores en el arreglo mostrado en la figura 9.4. Tomando en cuenta el procedimiento seguido anteriormente, el filtro digital de segundo orden de la figura 9.4 se puede optimizar hasta obtener la configuración equivalente de la figura 9.5 cuyas ecuaciones de estado se encuentran representadas por la expresión (9.16).

El método propuesto permite el análisis de redes digitales simultáneamente en el tiempo y la frecuencia, proporcionando las correspondientes matrices de estado de forma tal que para diferentes arreglos en la numeración de los nodos a la salida de los elementos de retardo se obtienen diferentes juegos de matrices de estado a los que les corresponden distintas configuraciones de carácter equivalente, pudiendo seleccionarse la que mejor converga de acuerdo a los propósitos de diseño.

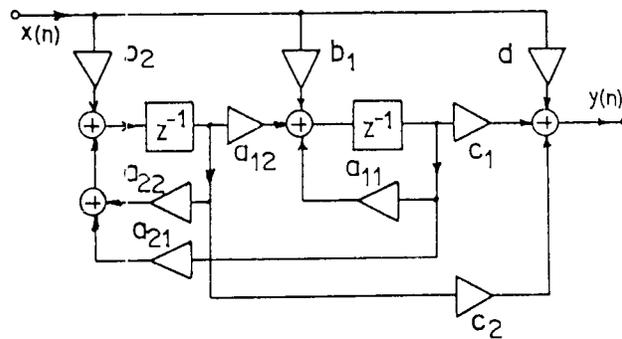


Figura 9.5: Filtro digital de estado de segundo orden.

Capitulo 10

Filtros digitales de onda

EL diseño de los filtros digitales de onda se hace desde los filtros analógicos. El filtro analógico tiene una estructura de escalera. Las estructuras de escaleras de LC tienen una pequeña sensibilidad del amplitud al cambio de valores de sus elementos. Por eso estos filtros tienen una gran importancia. Los filtros digitales de onda son diseñados usando las matrices de dispersión S . Los valores de multiplicadores de los adaptadores paralelos y en series que son terminados en un puerto con elemento de retardo se calculan desde los valores L y C del filtro analógico. Con este método podemos diseñar todo tipo de filtros.

10.1 Reemplazo de los elementos L a C por el circuito discreto

Si diseñamos el filtro digital de onda utilizamos la transformada bilineal con el tiempo de muestreo $T = 2$.

$$s = \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \quad (10.1)$$

Reemplazo del inductor

La onda transmitida A y reflectada B en la figura 10.1 está en relación con la corriente I y voltaje U en el puerto de entrada por la ecuación

$$A = U + RI \quad B = U - RI$$

Si sumamos las dos ecuaciones y sustraímos obtenemos

$$A + B = 2U \quad A - B = 2RI$$

El voltaje en la inductancia que marcamos R es $U = sRI$. Si multiplicamos ambos lados de la ecuación por 2 obtenemos

$$2U = s2RI$$

Si sustituimos por $2U = A+B$, $2RI = A-B$ y por s la transformada bilineal 10.1 obtenemos la relación

$$B = -Az^{-1}$$

La última ecuación está representada por un multiplicador de valor -1 y un elemento de retardo en serie. La realización de un inductor en la forma discreta está mostrada en la figura 10.1.

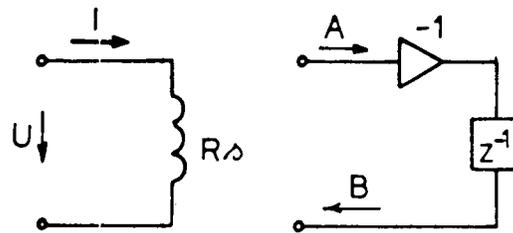


Figura 10.1: Sustitución de la inductancia por un circuito discreto

Reemplazo de un capacitor

Para el circuito en la figura 10.2 podemos escribir como en el primer caso

$$A = U + RI \quad B = U - RI$$

Si sumamos y restamos las dos ecuaciones obtenemos

$$A + B = 2U \quad A - B = 2RI$$

Si el valor de capacitancia es $C = \frac{1}{R}$ la voltaje U se puede expresar por la ecuación $U = \frac{RI}{s}$. Multiplicamos ambos lados de la ecuación por dos y obtenemos

$$2U = 2I \frac{R}{s}$$

Sustituyendo por $2U = A + B$ y por $2RI = A - B$ y por s la transformada bilineal 10.1 obtenemos la ecuación

$$A + B = (A - B) \frac{z + 1}{z - 1}$$

que se simplifica en la ecuación

$$B = Az^{-1}$$

La última ecuación está gráficamente expresada en la figura 10.2. En la gráfica es la sustitución de un capacitor por un circuito discreto.

Similarmente podemos deducir los circuitos discretos que sustituyen al transformador, girador, etc. El alumno podrá encontrar estas sustituciones de circuitos analógicos en la bibliografía FET¹

¹Fettweis, a.: Digital Filters Structures Related to Classical Filter Networks. (Arch. Elektr. Uebertragung, vol 25, pp.78-89, Feb. 1971.

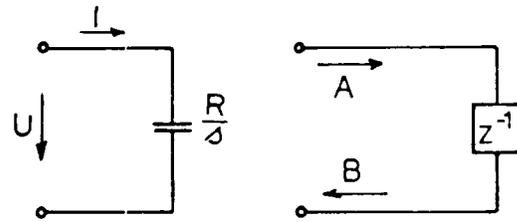


Figura 10.2: La sustitución de un capacitor por un circuito discreto

10.2 Los adaptadores

Los adaptadores son los circuitos de tres puertos no dependiente de la frecuencia. Los podemos dividir a los adaptadores de serie y de paralelo dependiente y no dependiente. Si los adaptadores son terminados en una puerta con elemento de retraso representan un capacitor o inductor.

10.2.1 Adaptador paralelo

El adaptador paralelo es un circuito de frecuencia independiente. Si conectamos a un puerto el elemento de retardo obtenemos el circuito de frecuencia dependiente, que realiza capacitancia en la rama diagonal. Utilizamos el adaptor paralelo con el fin de conectar los siguientes circuitos que están terminados en sus puertos por los resistores $R_k \quad k = 1, 2, \dots$

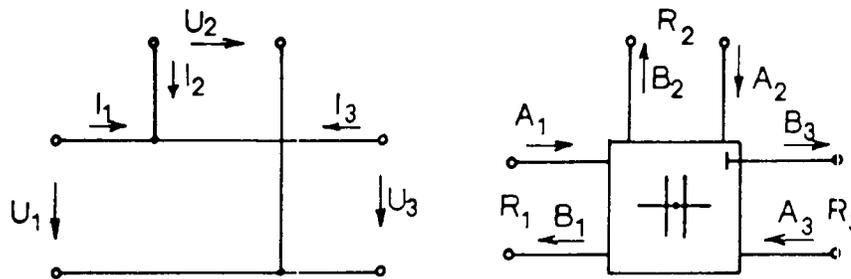


Figura 10.3: La gráfica del Bloce y simbolo del adaptor paralelo

La onda reflectada B y transmitida A en las puertas de adaptadores se obtiene desde el voltaje U y corriente I en las puertas de entrada mediante las ecuaciones

$$A = U + RI \quad B = U - RI$$

Para el adaptor paralelo se puede escribir desde la figura 10.3

$$U_1 = U_2 = U_3 \quad I_{-1} + I_2 + I_3 = 0 \quad (10.2)$$

Si supongamos que el adaptador paralelo tiene tres puertos $n = 3$ podemos escribir las ecuaciones en la forma

$$\begin{aligned}
A_1 &= U_1 + R_1 I_1 & B_1 &= U_1 - R_1 I_1 \\
A_2 &= U_2 + R_2 I_2 & B_2 &= U_2 - R_2 I_2 \\
A_3 &= U_3 + R_3 I_3 & B_3 &= U_3 - R_3 I_3
\end{aligned} \tag{10.3}$$

Ya que $U_1 = U_2 = U_3$ podemos transcribir las ecuaciones (10.3) en (10.4)

$$\begin{aligned}
A_1 &= U_1 + R_1 I_1 & B_1 &= U_1 - R_1 I_1 \\
A_2 &= U_1 + R_2 I_2 & B_2 &= U_1 - R_2 I_2 \\
A_3 &= U_1 + R_3 I_3 & B_3 &= U_1 - R_3 I_3
\end{aligned} \tag{10.4}$$

Ahora calculamos $I_1 + I_2 + I_3 = 0$ y determinamos U_1 . Entonces

$$U_1 = \frac{A_1 G_1 + A_2 G_2 + A_3 G_3}{G_1 + G_2 + G_3} \tag{10.5}$$

Ya que en las ecuaciones (10.4) vale $A_i + B_i = 2U_i$ obtenemos las ecuaciones de la gráfica de flujo del adaptor paralelo

$$\begin{aligned}
B_1 &= (\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3) - A_1 \\
B_2 &= (\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3) - A_2 \\
B_3 &= (\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3) - A_3
\end{aligned} \tag{10.6}$$

En las ecuaciones 10.6 los coeficientes α_i están expresados

$$\alpha_i = \frac{2G_i}{G_1 + G_2 + G_3} \quad kde \quad i = 1, 2, 3. \tag{10.7}$$

Bajo la condición $G_3 = G_1 + G_2$ será

$$\alpha_3 = \frac{2(G_1 + G_2)}{2(G_1 + G_2)} = 1$$

y en el circuito el multiplicador $\alpha_3 = 1$.

Para $\alpha_3 = 1$ las ecuaciones (10.6) toman la forma

$$\begin{aligned}
B_1 &= (\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + A_3) - A_1 \\
B_2 &= (\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + A_3) - A_2 \\
B_3 &= (\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + A_3) - A_3
\end{aligned} \tag{10.8}$$

De las ecuaciones 10.8 podemos diseñar la estructura, que está mostrada en la figura 10.4. Fácilmente podemos verificar que para el circuito en la figura 10.4 son cumplidos los ecuaciones 10.8.

Los coeficientes α_1 y α_2 son los coeficientes de los multiplicadores.

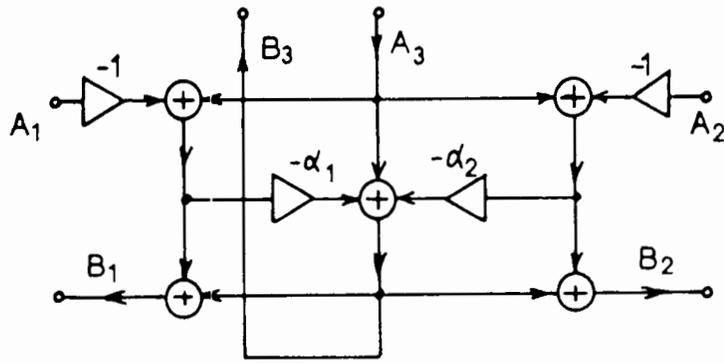


Figura 10.4: Adaptador paralelo dependiente

10.2.2 Adaptador de serie

Similarmente al anterior para el adaptador paralelo podemos deducir las ecuaciones de la gráfica de flujo orientada para el adaptador de serie 10.5 usando las ondas transmitidas y reflejadas.

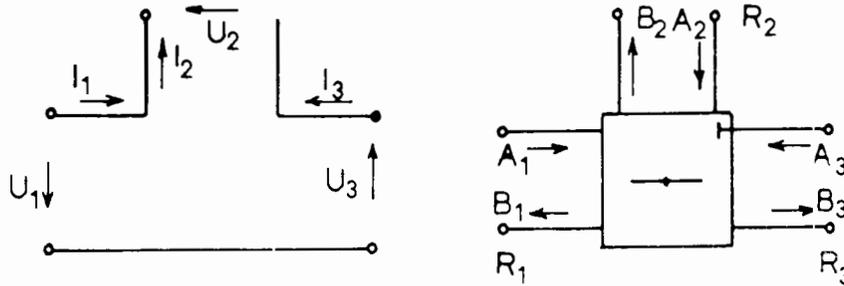


Figura 10.5: La gráfica del bloque y símbolo del adaptador de serie

En las ecuaciones (10.3) sustituimos $I_1 = I_2 = I_3$ y calculamos B_1, B_2, B_3 . Arreglando las ecuaciones, si sabemos que vale $U_1 + U_2 + U_3 = 0$ obtenemos

$$\begin{aligned} B_1 &= A_1 - \beta_1(A_1 + A_2 + A_3) \\ B_2 &= A_2 - \beta_2(A_1 + A_2 + A_3) \\ B_3 &= A_3 - \beta_3(A_1 + A_2 + A_3) \end{aligned} \quad (10.9)$$

donde los coeficientes β_i $i = 1, 2, 3$ son los coeficientes de los multiplicadores que calculamos desde la ecuación (10.10)

$$\beta_i = \frac{2R_i}{R_1 + R_2 + R_3} \quad \text{pro } i = 1, 2, 3 \quad (10.10)$$

Si vale para el circuito que $R_3 = R_1 + R_2$ luego será $\beta_3 = 1$ y $\beta_1 + \beta_2 = 1$ y en la estructura va a faltar un multiplicador β_3 y las ecuaciones 10.9 toman la forma

$$\begin{aligned} B_1 &= A_1 - \beta_1(A_1 + A_2 + A_3) \\ B_2 &= A_2 - \beta_2(A_1 + A_2 + A_3) \\ B_3 &= -A_1 - A_2 \end{aligned} \quad (10.11)$$

La estructura del adaptador de serie que cumple las ecuaciones 10.11 es en la figura 10.6

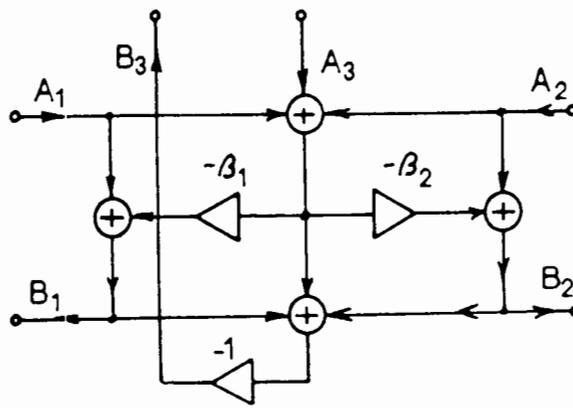


Figura 10.6: La estructura del adaptador de serie dependiente

10.2.3 Adaptadores elementales

Los adaptadores elementales son adaptadores que tienen sólo un multiplicador. Se dividen también en adaptadores de serie y paralelo. No podemos utilizarlos en el fin de los circuitos, donde la impedancia de la salida está definida. El adaptador elemental de serie está en la figura 10.7 y el coeficiente del multiplicador lo calculamos en la ecuación

$$\beta = \frac{R_1}{R_1 + Z_2(\omega_1)} \quad (10.12)$$

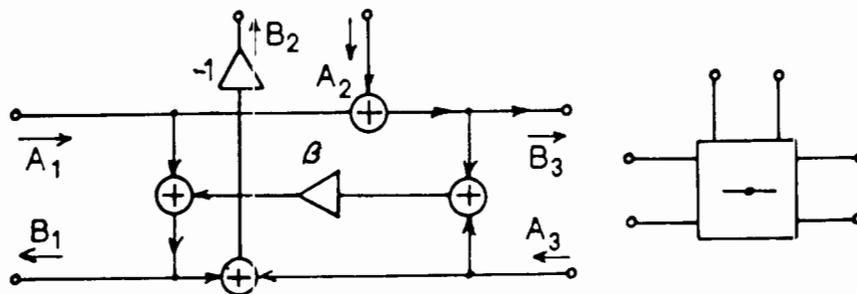


Figura 10.7: Adaptador elemental de serie

El adaptador elemental de paralelo está en la figura 10.8 y el valor del coeficiente de multiplicador se calcula usando la ecuación

$$\alpha = \frac{G_1}{G_1 + Y_2(\omega_1)} \quad (10.13)$$

Ejemplo

Proponer un filtro digital de onda de paso baja de orden $N = 2$. La ganancia debe ser 3 dB en la frecuencia $\omega = 1 \text{ rad/sec}$. Se utiliza la aproximación de Butterworth.

En el catálogo de los filtros de Butterworth encontramos los valores LC del filtro Butterworth de segundo orden. El filtro paso baja está en la figura 10.9.

Los valores del filtro paso baja son $r_0 = 1$, $l_2 = \sqrt{2}$ a $c_1 = \sqrt{2}$. De la figura 10.9 podemos ver que el circuito exige un adaptador paralelo elemental y un adaptador de serie con dos multiplicadores.

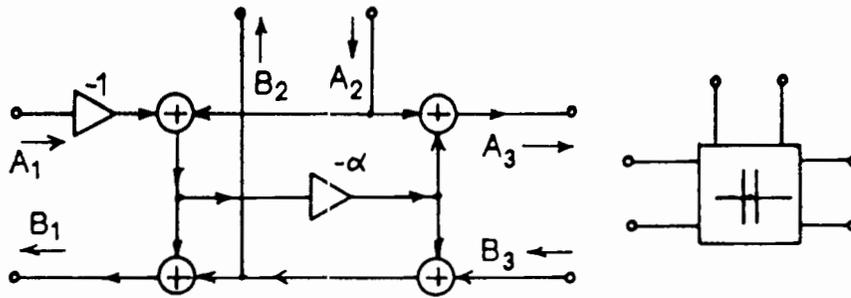


Figura 10.8: Adaptor elemental de paralelo

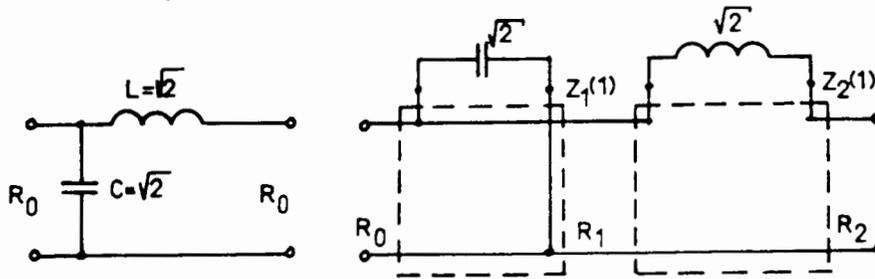


Figura 10.9: Prototipo del filtro analógico LC

El valor del multiplicador en adaptador paralelo es

$$\alpha_1 = \frac{G_0}{G_0 + Y_1(1)} = \frac{1}{1 + \sqrt{2}} = 0.414213$$

Los valores del adaptador de serie son

$$\beta_1 = \frac{2R_1}{R_1 + Z_2(1) + R_2} = \frac{2 \times 0.414213}{0.41421 + \sqrt{2} + 1} = 0.292893$$

$$\beta_2 = \frac{2R_2}{0.41423 + \sqrt{2} + 1} = 0.707106$$

De la Figura 10.9 podemos ver, que

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_0} + \frac{1}{Z_1(1)}$$

El circuito resultado de un filtro digital de onda está mostrado en la figura 10.10

El diseño de los filtros digitales de onda es muy simple, porque podemos utilizar el catálogo de los filtros *LC*. De esa manera no es necesario utilizar la transformada bilineal para construir la función de transferencia $H(z)$. Por eso el cálculo es fácil. La respuesta de estos filtros no es tan sensible a redondeo o truncamiento de los coeficientes como los filtros proyectados usando la transformada bilineal. Para representar los coeficientes alcanzamos con poco bits.

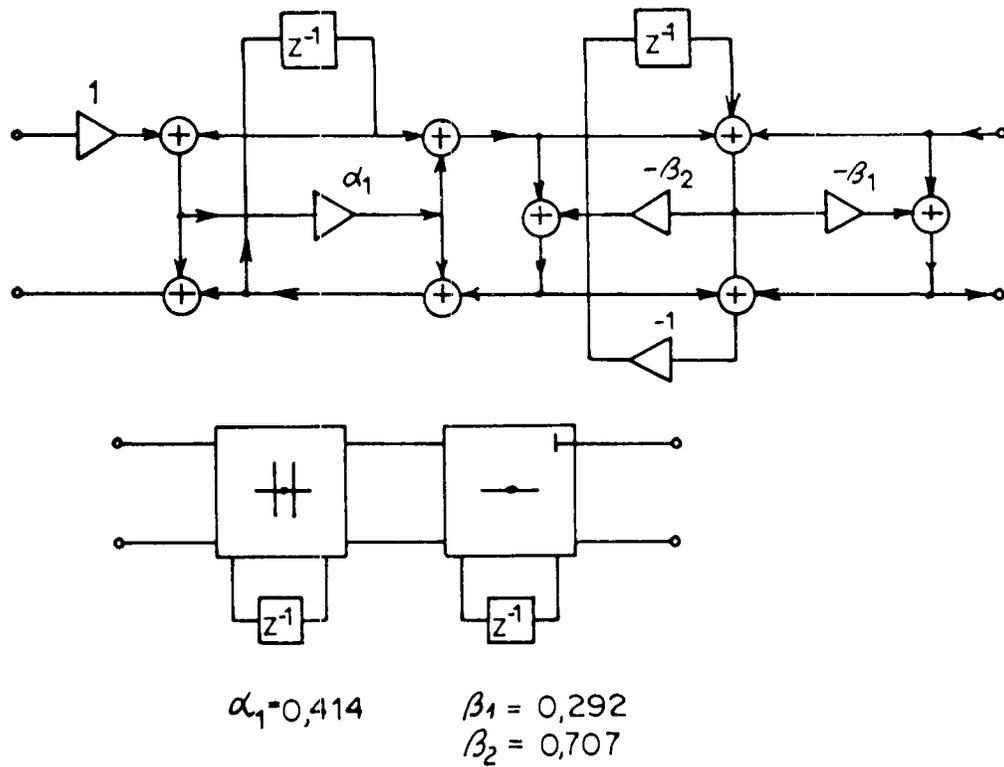


Figura 10.10: Filtro digital de onda de segundo orden

Capítulo 11

Filtros digitales de la forma cruz

11.1 Filtros con la respuesta finita al impulso

Para los filtros con la respuesta finita al impulso FIR podemos escribir la función de transferencia en la forma

$$H_m(z) = A_m(z) = 1 + \sum_{k=1}^m a_m(k)z^{-k} \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (11.1)$$

o la ecuación de diferencias

$$y(n) = x(n) + \sum_{k=1}^m a_m(k)x(n-k) \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (11.2)$$

En la figura 11.1 se muestra la estructura del filtro con la respuesta finita al impulso FIR. La estructura del filtro FIR en la figura 11.1 se puede dibujar en la forma mostrada en la figura 11.2. En la salida del filtro de la figura 11.2 se obtiene la siguiente señal

$$y(n) = x(n) - \hat{x}(n)$$

donde

$$\hat{x}(n) = - \sum_{k=1}^m a_m(k)x(n-k)$$

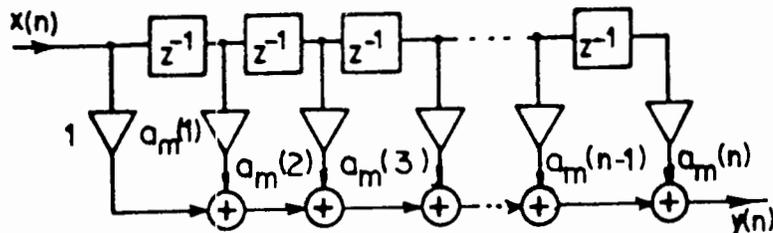


Figura 11.1: Estructura del filtro con la respuesta finita al impulso FIR

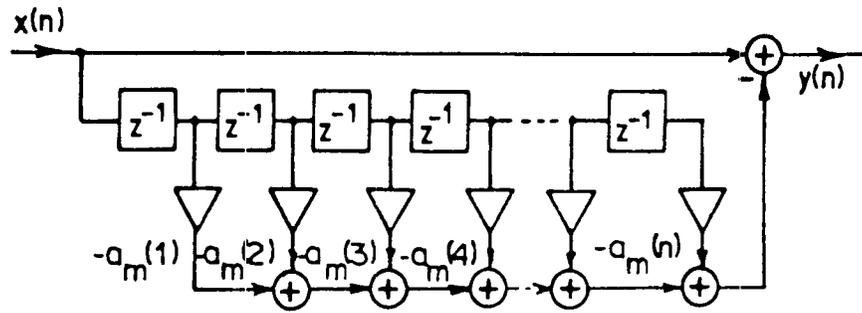


Figura 11.2: Predicción error filter

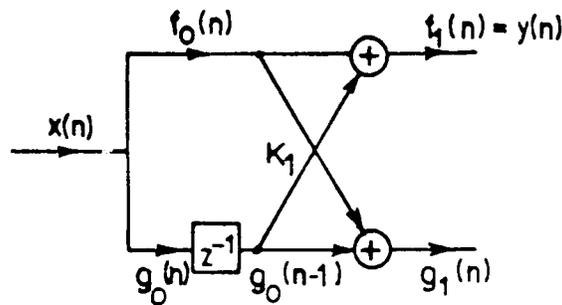


Figura 11.3: Filtro de la cruz de primer orden

es una predicción del valor $x(n)$, esta estructura se llama "predicción error filter". Vamos a suponer que tenemos un filtro FIR de primer orden. En la salida tenemos la respuesta

$$y(n) = x(n) + a_1(1)x(n-1) \quad (11.3)$$

La misma respuesta en la salida se obtiene mediante la estructura de la cruz mostrada en la figura 11.3. Si alimentamos ambas entradas de la estructura de cruz con la señal $x(n)$ obtenemos las salidas

$$f_0(n) = g_0(n) = x(n) \quad (11.4)$$

$$f_1(n) = x(n) + K_1x(n-1) \quad (11.5)$$

$$g_1(n) = K_1x(n) + x(n-1) \quad (11.6)$$

En la salida de arriba de la estructura de la forma cruz para $K_1 = a_1$ obtenemos la ecuación (11.3). El parametro K_1 se llama el coeficiente de reflexión. Ahora vamos a realizar el filtro de la forma cruz de segundo orden, que tiene la siguiente función de diferencias

$$y(n) = x(n) + a_2(1)x(n-1) + a_2(2)x(n-2) \quad (11.7)$$

Se puede ver, que la estructura en la figura 11.4 realiza la ecuación de diferencias (11.7). En la salida del primer circuito tenemos

$$f_1(n) = x(n) + K_1x(n-1)$$

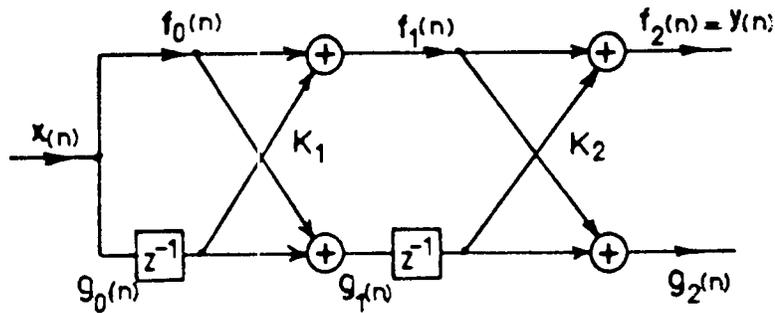


Figura 11.4: Dos circuitos de la cruz de primer orden en la cascada

$$g_1(n) = K_1 x(n) + x(n-1) \quad (11.8)$$

y en la salida del segundo circuito tenemos

$$\begin{aligned} f_2(n) &= f_1(n) + K_2 g_1(n-1) \\ g_2(n) &= K_2 f_1(n) + g_1(n-1) \end{aligned} \quad (11.9)$$

Si sustituimos $f_1(n)$ y $g_1(n)$ en las ecuaciones obtenemos

$$\begin{aligned} f_2(n) &= x(n) + K_1 x(n-1) + K_2 [K_1 x(n-1) + x(n-2)] \\ f_2(n) &= x(n) + x(n-1) K_1 (1 + K_2) + K_2 x(n-2) \end{aligned}$$

Si comparamos la última ecuación con la ecuación (11.7) obtenemos

$$K_2 = a_2(2)$$

$$K_1 (K_2 + 1) = a_2(1)$$

Y el valor del coeficiente de reflexión K_2 se obtiene calculando la ecuación (11.10)

$$K_1 = \frac{a_2(1)}{1 + a_2(2)} \quad (11.10)$$

Si conocemos los coeficientes de multiplicadores del filtro FIR $a_m(k)$ podemos calcular los coeficientes de la reflexión del filtro FIR para la estructura cruz. El vector $\{a_m\}$ de los coeficientes a_1 es

$$\{a_m\} = \{1 \ a_2(1) \ a_2(2) \ a_2(3) \ \dots\} \quad (11.11)$$

La función $f_m(n)$ de la salida de un filtro cruz se puede escribir mediante la ecuación (11.12)

$$f_m(n) = \sum_{k=0}^m a_m(k) x(n-k) \quad a_m(0) = 1 \quad (11.12)$$

En la salida de abajo del circuito cruz de la figura 11.4 obtenemos las ecuaciones

$$\begin{aligned}
g_2(n) &= K_2 f_1(n) + g_1(n-1) \\
g_2(n) &= K_2 [x(n) + K_1 x(n-1)] + K_1 x(n-1) + x(n-2) \\
g_2(n) &= K_2 x(n) + x(n-1) [K_1(1 + K_2)] + x(n-2) \\
g_2(n) &= a_2(2)x(n) + a_2(1)x(n-1) + x(n-2)
\end{aligned}$$

La respuesta en la salida de abajo del circuito 11.4 se puede calcular mediante la convolución

$$g_m(n) = \sum_{k=0}^m b_m(k)x(n-k) \quad (11.13)$$

Los coeficientes de un vector $\mathbf{g}_m(n)$ son representados en la ecuación (11.14)

$$\{g_m\} = \{\dots b_2(3) \ b_2(2) \ b_2(1) \ 1\} \quad (11.14)$$

Los coeficientes $b_m(i)$ $i = m-1, m-2, \dots, 1$ son ordenadas en orden decreciente, en comparación con la ecuación (11.11) donde son en forma ascendente, y entonces podemos escribir

$$b_m(k) = a_m(m-k) \quad (11.15)$$

Aplicando la transformada z inversa a la ecuación (11.13) obtenemos la ecuación

$$G_m(z) = B_m(z) \cdot X(z) \quad (11.16)$$

La función de transferencia $B_m(z)$ toma la forma

$$B_m(z) = \frac{G_m(z)}{X(z)} \quad (11.17)$$

y los coeficientes $b_m(k)$ son los coeficientes de la función de transferencia $B_m(z)$ que se puede expresar en la forma

$$B_m(z) = \sum_{k=0}^m b_m(k)z^{-k} \quad (11.18)$$

La relación entre los coeficientes $b_m(k)$ y $a_m(k)$ está expresada por la ecuación (11.15). En este caso se puede expresar la ecuación (11.18) en la forma

$$\begin{aligned}
B_m(z) &= \sum_{k=0}^m a_m(m-k)z^{-k} = \sum_{l=0}^m a_m(l)z^{l-m} \\
B_m(z) &= z^{-m} \sum_{l=0}^m a_m(l)z^l = z^{-m} A_m(z^{-1})
\end{aligned} \quad (11.19)$$

El polinomio $B_m(z)$ es recíproco al polinomio $A_m(z)$. Las ecuaciones (11.9) las podemos escribir en la forma general

$$f_0(n) = g_0(n) = x(n) \quad (11.20)$$

$$f_m(n) = f_{m-1}(n) + K_m g_{m-1}(n-1) \quad m = 1, 2, 3, \dots, M-1$$

$$g_m(n) = K_m f_{m-1}(n) + g_{m-1}(n-1) \quad m = 1, 2, 3, \dots, M-1$$

Y utilizando la transformada z obtenemos

$$F_0(z) = G_0(z) = X(z) \quad (11.21)$$

$$F_m(z) = F_{m-1}(z) + K_m z^{-1} G_{m-1}(z)$$

$$G_m(z) = K_m F_{m-1}(z) + z^{-1} G_{m-1}(z)$$

Si dividimos las ecuaciones (11.21) entre $X(z)$ obtenemos al final

$$A_0(z) = B_0(z) = 1 \quad (11.22)$$

$$A_m(z) = A_{m-1}(z) + K_m z^{-1} B_{m-1} \quad (11.23)$$

$$B_m(z) = K_m A_{m-1}(z) + z^{-1} B_{m-1}(z) \quad (11.24)$$

Las ecuaciones (11.23) y (11.24) se pueden presentar en la forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} A_m(z) \\ B_m(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & K_m \\ K_m & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A_{m-1}(z) \\ z^{-1} B_{m-1}(z) \end{bmatrix} \quad (11.25)$$

Ejemplo:

Calcular los coeficientes de un filtro FIR directo, si conocemos los coeficientes de reflexión de un filtro cruz.

$$K_1 = \frac{1}{2} \quad K_2 = \frac{1}{3} \quad K_3 = \frac{1}{4}$$

Usando la ecuación (11.23) obtenemos para $m=1$

$$A_1(z) = A_0(z) + K_1 B_0(z) = 1 + K_1 z^{-1}$$

$$A_1(z) = 1 + \frac{1}{2} z^{-1}$$

El polinomio $B(z)$ tiene sus coeficientes en la forma reciproca, entonces el polinomio $B(z)$ toma la forma

$$B_1(z) = \frac{1}{2} + z^{-1}$$

Sustituyendo $m=2$ en la ecuación (11.23): obtenemos

$$A_2(z) = A_1(z) + K_2 z^{-1} B_1(z) = 1 + \frac{1}{2} z^{-1} + \frac{1}{3} z^{-1} \left[\frac{1}{2} + z^{-1} \right]$$

$$A_2 = 1 + \frac{2}{3} z^{-1} + \frac{1}{3} z^{-2}$$

El polinomio $B_2(z)$ se escribe en la forma reciproca al polinomio $A_2(z)$

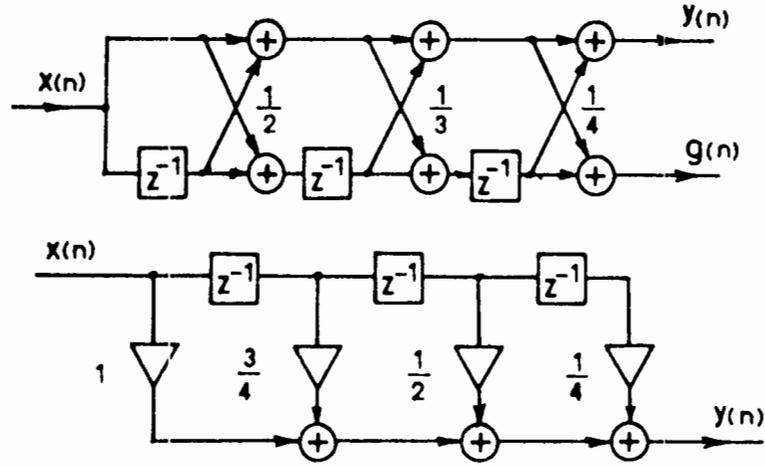


Figura 11.5: El filtro FIR de la estructura de cruz y la estructura directa

$$B_2 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}z^{-1} + z^{-2}$$

Si sustituimos en la ecuación (11.23) $m=3$ obtenemos el polinomio $A_3(z)$

$$A_3(z) = A_2(z) + K_3 z^{-1} B_2(z) = 1 + \frac{2}{3}z^{-1} + \frac{1}{3}z^{-2} + \frac{1}{4}z^{-1} \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}z^{-1} + z^{-2} \right)$$

$$A_3(z) = 1 + \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2} + \frac{1}{4}z^{-3}$$

Los coeficientes del filtro FIR de la estructura directa son

$$a_0 = 1 \quad a_1 = \frac{3}{4} \quad a_2 = \frac{1}{2} \quad a_3 = \frac{1}{4}$$

y la estructura del filtro con la respuesta finita al impulso es mostrada en la figura 11.5

Ahora vamos a transformar el filtro FIR directo a un filtro FIR de la cruz. Supongamos que tenemos los coeficientes de un filtro FIR en la forma directa o un polinomio $A_m(z)$. Para un filtro FIR de cruz de orden m , el ultimo coeficiente de reflexión es igual al ultimo coeficiente del polinomio $A_m(z)$. Entonces $K_m = a_m(m)$.

Para obtener los coeficientes de reflexión restantes K_{m-i} necesitamos calcular los polinomios $A_{m-1}, A_{m-2}, \dots, A_1$. Esos polinomios pueden calcularse usando las ecuaciones (11.23) y (11.24)

$$A_m(z) = A_{m-1}(z) + K_m z^{-1} B_{m-1}(z)$$

$$B_m(z) = K_m A_{m-1}(z) + z^{-1} B_{m-1}(z)$$

$$A_{m-1}(z) = A_m(z) - K_m z^{-1} B_{m-1}(z)$$

$$B_{m-1}(z) z^{-1} = B_m(z) - K_m A_{m-1}(z)$$

Si sustituimos a la tercera ecuación por $B_{m-1}(z)$ obtenemos

$$A_{m-1}(z) = A_m(z) - K_m B_m(z) + K_m^2 A_{m-1}(z)$$

$$A_{m-1}(z) [1 - K_m^2] = -K_m B_m(z) + A_m(z)$$

y al fin arreglando la ultima ecuación obtenemos

$$A_{m-1}(z) = \frac{A_m(z) - K_m B_m(z)}{1 - K_m^2} \quad m = M - 1, M - 2, \dots, 1 \quad (11.26)$$

Calculando la ecuación (11.26) para $m = M - 1, M - 2, \dots, 1$ obtenemos los coeficientes del polinomio $A(m)$ en forma reciproca. Estos coeficientes son los coeficientes reflexión del filtro FIR de la forma cruz.

Ejemplo:

Calcular los coeficientes de reflexión de un filtro FIR de cruz si se conoce la función de transferencia del Filtro FIR

$$A_3(z) = H(z) = 1 + \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2} + \frac{1}{4}z^{-3}$$

El primer coeficiente K_3 es el ultimo coeficiente de $A_3(z)$. Entonces $K_3 = \frac{1}{4}$. Calculamos el polinomio $B_3(z)$. Polinomio $B_3(z)$ es en la forma reciproca al polinomio $A_3(z)$.

$$B_3(z) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}z^{-1} + \frac{3}{4}z^{-2} + z^{-3}$$

Si sustituimos por $A_3(z)$, $B_3(z)$ y K_3 en la ecuación (11.26) obtenemos para $m = 3$

$$A_2(z) = \frac{A_3(z) - K_3 B_3(z)}{1 - K_3^2} = \frac{1 + \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2} + \frac{1}{4}z^{-3} - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}z^{-1} + \frac{3}{4}z^{-2} + z^{-3} \right)}{1 - \left(\frac{1}{4} \right)^2}$$

$$A_2(z) = 1 + \frac{2}{3}z^{-1} + \frac{1}{3}z^{-2}$$

y el polinomio $B_3(z)$ es

$$B_3(z) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}z^{-1} + z^{-2}$$

y el coeficiente de reflexión K_2 es

$$K_2 = \frac{1}{3}$$

Para $m = 2$ utilizando las ecuaciones (11.26) obtenemos

$$A_1(z) = \frac{A_2(z) - K_2 B_2(z)}{1 - K_2^2} = \frac{1 + \frac{2}{3}z^{-1} + \frac{1}{3}z^{-2} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}z^{-1} + z^{-2} \right)}{1 - \left(\frac{1}{3} \right)^2}$$

$$A_1(z) = \frac{1}{2}z^{-1}$$

El ultimo coeficiente de reflexión es $K_1 = \frac{1}{2}$ y el Filtro de la cruz está mostrada en la figura 11.6

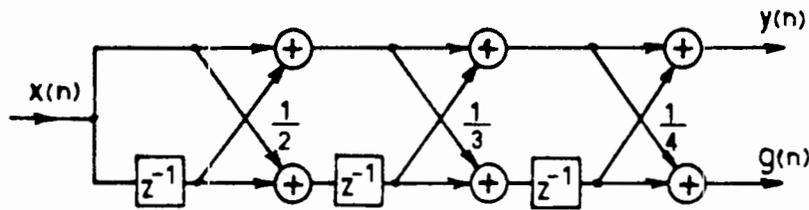


Figura 11.6: Filtro FIR de la cruz de tercer orden

11.2 Filtros con la respuesta infinita al impulso

Filtro que tiene solo los polos podemos tambien realizar con una estructura de cruz. La función de transferencia que tiene solo los polos se puede expresar en la forma

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{A(z)} = H(z) = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^N a_N(k)z^{-k}} \quad (11.27)$$

La forma transversal directa que realiza la ecuación (11.27) se muestra en la figura 11.7. La ecuación de diferencias de esta sistema es

$$y(n) = x(n) - \sum_{k=1}^N a_N(k)y(n-k) \quad (11.28)$$

Esa ecuación es la ecuación de diferencias de un filtro transversal IIR. Si cambiamos salida por entrada y entrada por salida obtenemos

$$x(n) = y(n) - \sum_{k=1}^N a_N(k)x(n-k) \quad (11.29)$$

Areglando la ecuación (11.29) en la forma siguiente

$$y(n) = x(n) + \sum_{k=1}^N a_N(k)x(n-k) \quad (11.30)$$

obtenemos la ecuación de diferencias de un filtro FIR que está definida por las ecuación $H(z) = A(z)$. La función de transferencia de un filtro IIR está definida por la ecuación

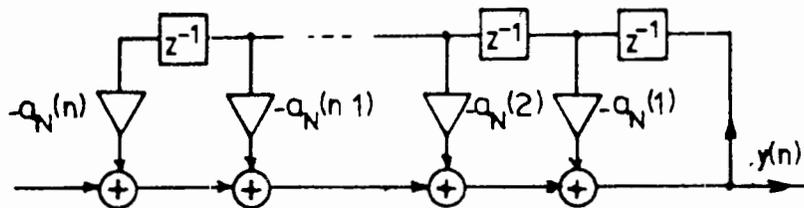


Figura 11.7: El filtro IIR transversal solo con polos

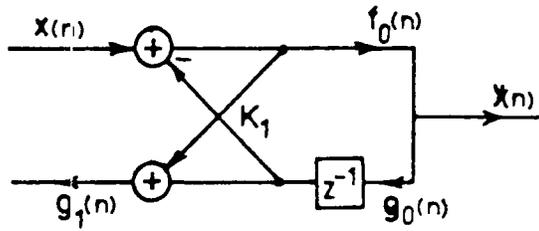


Figura 11.8: Filtro IIR de la cruz

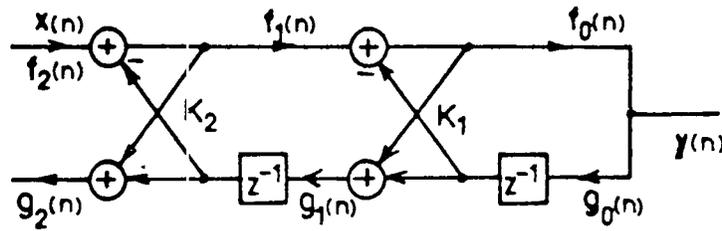


Figura 11.9: El filtro IIR de la cruz de segundo orden

$H(z) = \frac{1}{A(z)}$. Entonces un sistema se obtiene del otra si cambiamos salida por entrada. Si cambiamos salida por entrada en la figura 11.3 obtenemos un filtro IIR del primer orden de la forma cruz figura 11.8.

Desde la figura 11.8 podemos escribir las ecuaciones

$$\begin{aligned}
 x(n) &= f_1(n) \\
 f_0(n) &= f_1(n) - K_1 g_0(n-1) \\
 g_1(n) &= K_1 f_0(n) + g_0(n-1) \\
 y(n) &= f_0(n) \\
 y(n) &= x(n) - K_1 y(n-1)
 \end{aligned} \tag{11.31}$$

y similarmente para $g_1(n)$ obtenemos

$$g_1(n) = K_1 y(n) + y(n-1) \tag{11.32}$$

La ecuación (11.31) representa un filtro IIR y la ecuación (11.32) un filtro FIR. Para el filtro de segundo orden figura 11.9 obtenemos las ecuaciones

$$\begin{aligned}
 f_2(n) &= x(n) \\
 f_1(n) &= f_2(n) - K_2 g_1(n-1) \\
 g_2(n) &= K_2 f_1(n) + g_1(n-1) \\
 f_0(n) &= f_1(n) - K_1 g_0(n-1) \\
 g_1(n) &= K_1 f_0(n) + g_0(n-1) \\
 y(n) &= f_0(n) = g_0(n)
 \end{aligned} \tag{11.33}$$

Sustituyendo en estas ecuaciones y calculando $y(n)$ y $g_2(n)$ obtenemos

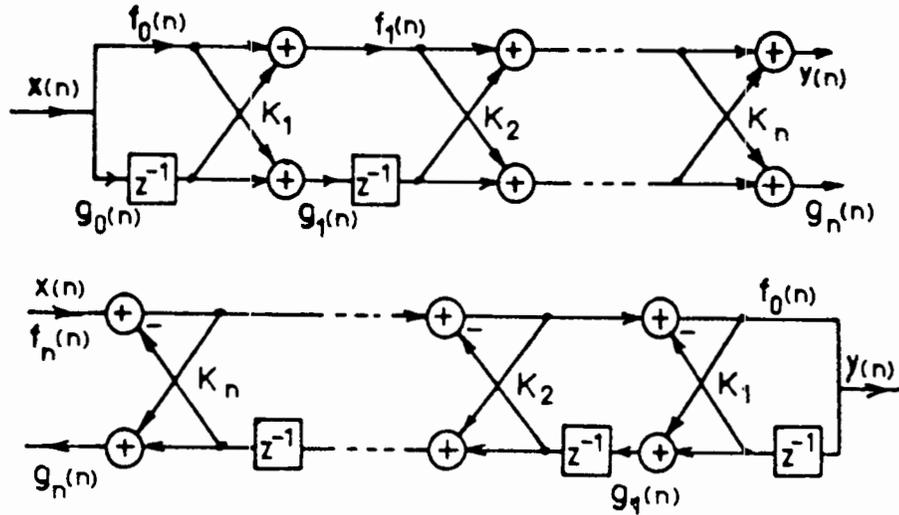


Figura 11.10: El filtro FIR e IIR de la cruz.

$$y(n) = x(n) - K_1(1 + K_2)y(n-1) - K_2y(n-2) \quad (11.34)$$

$$g_2(n) = K_2y(n) + K_1(1 + K_2)y(n-1) + y(n-2) \quad (11.35)$$

La ecuación (11.35) representa el filtro IIR con dos polos en el denominador y ecuación (11.34) representa el filtro FIR con dos ceros. La función de transferencia de filtro IIR es

$$H_a(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{F_0(z)}{F_m(z)} = \frac{1}{A_m(z)} \quad (11.36)$$

y la función de transferencia del filtro FIR es

$$H_b(z) = B_m(z) = z^{-m}A_m(z^{-1}) \quad (11.37)$$

Los coeficientes del filtro FIR son idénticos con los polos de la sistema IIR solo con la excepción que son reordenados al reverso. Los filtros IIR y FIR de la forma cruz tienen coeficientes iguales, solo la estructura es diferente como podemos ver en la figura 11.10.

Los filtros IIR de la forma cruz que tienen solo polos se utilizan para modelar el vocal de tracto.

11.3 Filtros IIR con polos y ceros

Los filtros IIR que tienen polos y ceros son expresados por la función de transferencia

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M c_m(k)z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_N(k)z^{-k}} = \frac{C_M(z)}{A_N(z)} \quad (11.38)$$

Esa ecuación se puede escribir en la forma

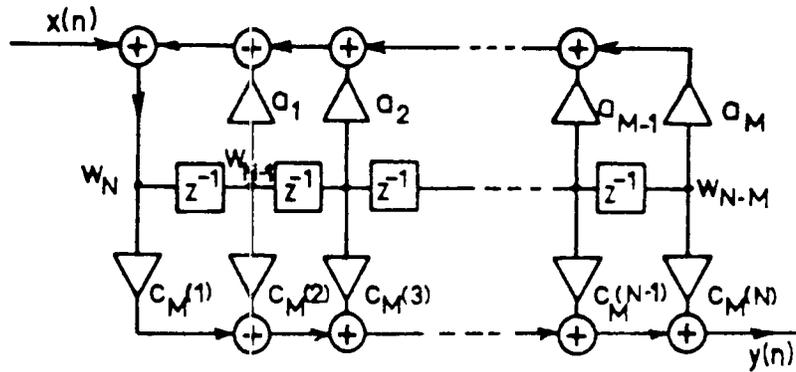


Figura 11.11: Filtro IIR la forma directa

$$\frac{1}{1 + \sum_{k=1}^N a_n(k)z^{-k}} \times \sum_{k=0}^M c_m(k)z^{-k} = \frac{Y(z)}{W(z)} = \frac{X(z)}{W(z)} \quad (11.39)$$

De esta ecuación podemos escribir dos ecuaciones de diferencias

$$\frac{X(z)}{W(z)} = 1 + \sum_{k=1}^N a_i(k)z^{-k} \quad (11.40)$$

$$\frac{Y(z)}{W(z)} = \sum_{k=0}^M a_i(k)z^{-k}$$

utilizando la transformada z inversa obtenemos

$$w(n) = x(n) - \sum_{k=1}^N a_n^{(k)}w(n - k) \quad (11.41)$$

$$y(n) = \sum_{k=0}^M c_m(k)w(n - k) \quad (11.42)$$

La ecuación de diferencias (11.41) representa la sistema IIR solo con polos y la ecuación (11.42) representa un filtro FIR. Desde la ecuación (11.42) podemos ver que la salida $y(n)$ del filtro FIR es la combinación lineal de salidas retardadas de la sistema IIR. El filtro completo se puede ver en la figura 11.11. La forma directa de un filtro IIR en la figura 11.11 puede ser dibujada con la forma de cruz y está mostrada en la figura 11.12

En la salida de la estructura 11.12 se obtiene la respuesta

$$y(n) = \sum_{m=0}^M v_m g_m(n) \quad (11.43)$$

v_m son parametros de los amplificadores de la sistema FIR.

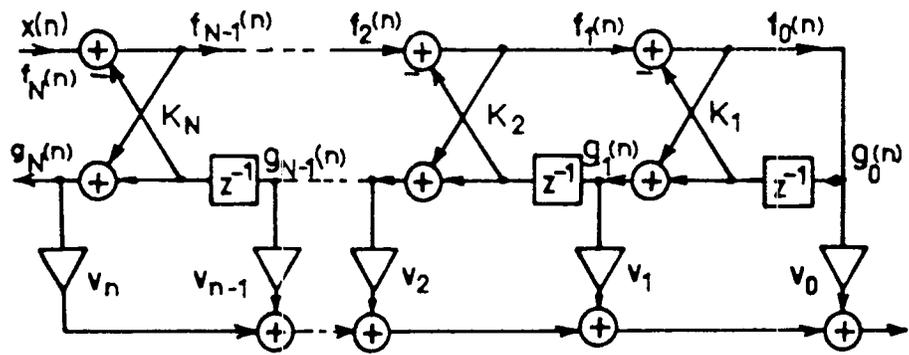


Figura 11.12: Filtro IIR la forma cruz

Capitulo 12

Los filtros digitales de dos dimensiones

La función de transferencia de los filtros de dos dimensiones con la respuesta infinita al impulso se puede escribir como

$$H(z_1, z_2) = \frac{\sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^N a_{ij} z_1^i z_2^j}{\sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^N b_{ij} z_1^i z_2^j} \quad (12.1)$$

En algunos libros o artículos se escribe la función de transferencia en la forma matricial, como se muestra a continuación

$$H(z_1, z_2) = \frac{\begin{bmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 & \dots & z_1^m \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & \dots & a_{0n} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m0} & a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ z_2 \\ z_2^2 \\ \dots \\ z_2^n \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 & \dots & z_1^m \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{00} & b_{01} & b_{02} & \dots & b_{0n} \\ b_{10} & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{20} & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m0} & b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ z_2 \\ z_2^2 \\ \dots \\ z_2^n \end{bmatrix}} \quad (12.2)$$

El elemento a_{ij} (resp. b_{ij}) es el coeficiente de polinomio de numerador, (resp. denominador) al lado de z_1^i a z_2^j . En algunos libros las variables z se escriben con las potencias negativas

$$[1 \ z_i^{-1} \ z_i^{-2} \ \dots \ z_i^{-m}]$$

Los filtros de dos dimensiones se pueden diseñar mediante dos maneras

a) Las especificaciones de la plantilla se aproxima en el dominio de dos dimensiones. Pero de esta manera la aproximación es muy exigente.

b) Las especificaciones de la plantilla se pueden aproximar en el dominio de una dimensión de variable s y después utilizando la transformación en el dominio de s , para transformar

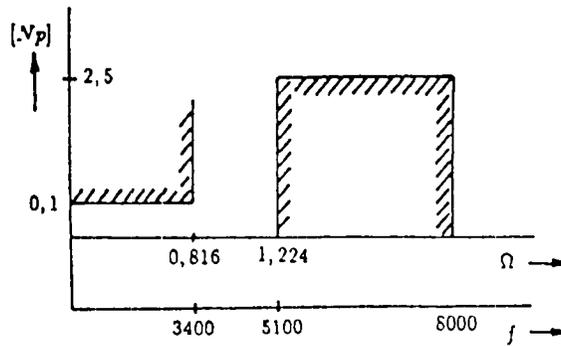


Figura 12.1: Especificaciones del filtro digital de paso bajas de una dimensión

la función de transferencia de una dimensión $H(s)$ a la función de transferencia de dos dimensiones $H(s_1, s_2)$. Posteriormente utilizando la transformada bilineal para transformar la función de transferencia desde el dominio analógico al dominio discreto obtenemos $H(z_1, z_2)$.

Vamos a utilizar esta método para diseñar los filtros digitales de dos dimensiones.

12.1 Diseño de un filtro de paso bajas

Diseñar un filtro de dos dimensiones paso bajas que cumpla las especificaciones de la plantilla según la figura 12.1. La frecuencia de muestreo en los dos ejes son iguales $f_{v1} = f_{v2} = f_v = 16000 \text{ Hz}$.

Para calcular el orden del filtro de tipo CAUER tenemos que calcular el coeficiente de selectividad k y la constante q .

$$k = \frac{f_2}{f_1} = \frac{3400}{5100} = 0,666$$

$$q = \frac{k^2}{16} \left[1 + 2 \left(\frac{k}{4} \right)^2 + 15 \left(\frac{k}{4} \right)^4 + 150 \left(\frac{k}{4} \right)^6 \dots \right]^4$$

$$q = \frac{0,666^2}{16} \left[1 + 2 \left(\frac{0,666}{4} \right)^2 + 15 \left(\frac{0,666}{4} \right)^4 + 150 \left(\frac{0,666}{4} \right)^6 \right]^4 = 0,036458.$$

Obtenemos el orden n del filtro sustituyendo en la ecuación

$$n = \frac{\ln(e^{2a_{max}} - 1) - 2a_{min} - 2,77}{\ln q}. \quad (12.3)$$

Sustituyendo $a_{max} = 0,1$, $q = 0,036458$ y $a_{min} = 2,5$ obtenemos

$$n = \frac{\ln(e^{2 \cdot 0,1} - 1) - 2 \cdot 2,5 - 2,77}{\ln 0,036458} = 2,81.$$

Elegimos $n = 3$. Las ecuaciones para calcular los ceros y los polos de la función de transferencia que escribimos en este capítulo las podemos utilizar si calculamos los filtros del orden n impar. La función de transferencia se puede calcular utilizando las tablas de las

funciones elípticas. En caso de no tener las tablas de las funciones elípticas podemos calcular la función de transferencia por medio de estas series que convergen muy rápido.

Los ceros de la función de los calculamos mediante la ecuación (12.4)

$$\Omega_{0k} = 2q^{\frac{1}{4}} \frac{\sin \frac{2k\pi}{2n} - q^2 \sin \frac{6k\pi}{2n} + q^6 \sin \frac{10k\pi}{2n}}{1 - 2q \cos \frac{2k\pi}{n} + 2q^4 \cos \frac{4k\pi}{n}}. \quad (12.4)$$

Sustituyendo $q = 0,036458$, $k = 1$ a $n = 3$ obtenemos

$$\Omega_{01} = 0,873933 \frac{0,8660254 - 2,0337 \cdot 10^{-9}}{1 + 0,036458 - 1,7667 \cdot 10^{-6}} = 0,73123.$$

Para calcular los ceros de la función de transferencia, tenemos que calcular el parámetro w

$$w = \frac{1}{2n} \left[\ln \frac{2}{a_{max}} + \frac{a_{max}^2}{12} + \dots \right]. \quad (12.5)$$

Sustituyendo n y a_{max} obtenemos

$$w = \frac{1}{6} [2,99573 + 0,00083] = 0,499427.$$

La función de transferencia es de orden impar por lo que un cero es real y otro cero es complejo. El cero real se obtiene mediante la ecuación

$$\alpha_0 = t = 2q^{\frac{1}{4}} \frac{\sinh w - q^2 \sinh 3w + q^6 \sinh 5w}{1 - 2q \cosh 2w + 2q^4 \cosh 4w}. \quad (12.6)$$

La parte real de la raíz compleja la calculamos sustituyendo en la ecuación

$$\alpha_k = \frac{t \sqrt{-\Omega_{0k}^2 (k + k^{-1} - \Omega_{0k}^2)}}{1 + t^2 \Omega_{0k}^2} \quad (12.7)$$

y la parte imaginaria de la raíz compleja se calcula sustituyendo en la ecuación

$$\pm \Omega_k = \pm \frac{\Omega_{0k} \sqrt{1 + t^2 (k + k^{-1} + t^2)}}{1 + t^2 \Omega_{0k}^2}. \quad (12.8)$$

Sustituyendo en las ecuaciones (12.5), (12.6) a (12.7) calculamos

$$t = 2,0,436466 \frac{0,520449 - 0,002825 + 1,4167 \cdot 10^{-8}}{1 - 0,112417 + 0,0000133} = 0,50908$$

$$\alpha_1 = \frac{0,50908 \sqrt{1 - 0,73023^2 (0,666 + 0,666^{-1} - 0,73023^2)}}{1 + 0,50908^2 \cdot 0,73023^2} = 0,16046$$

$$\Omega_1 = \frac{0,73023 \sqrt{1 + 0,50908^2 (0,666 + 0,666^{-1} + 0,50908^2)}}{1 + 0,50908^2 \cdot 0,73023^2} = 0,81877.$$

La función de transferencia resultante se calcula mediante

$$G(s) = K(s + t) \frac{s^2 + 2 \cdot \alpha_1 \cdot s + \alpha_1^2 + \Omega_1^2}{1 + \frac{1}{\Omega_{01}^2} s^2}. \quad (12.9)$$

La función de transferencia toma la forma

$$G(s) = K(s + 0,50908) \frac{s^2 + 0,32092s + 0,6961317}{0,5332359s^2 + 1}.$$

El constante K se calcula bajo la condición de que el módulo de la función de transferencia para $\omega = 0$ es igual a uno. Para $|G(0)| = 1$ es $K = 2,8217761$.

Vamos a checar si las especificaciones de la plantilla se cumplen para las frecuencias $\omega = 0,816$ y $\omega = 1,224$. Para $\omega = 0,816$ obtenemos

$$G(0,816) = 2,821 \cdot (j0,816 + 0,509) \frac{0,696 - 0,816^2 + j0,3209 \cdot 0,816}{1 - 0,533 \cdot 0,816^2}$$

$$|G| = |2,302j + 1,436| \times |0,0469 + j0,406| \implies a_{max} = \ln 1,109 = 0,103 \text{ Np}.$$

Similarmente para $\omega = 1,224$ se obtiene

$$G(1,224) = 2,821 \cdot (0,509 + j1,224) \frac{0,696 - 1,224^2 + j0,3209 \cdot 1,224}{1 - 0,533 \cdot 1,224^2}$$

$$|G| = |1,436 + j3,4538| \times |-3,9879 + j1,9529|. \implies a_{min} = 2,81 \text{ Np}.$$

De esta manera verificamos, que las frecuencias de corte para las especificaciones de la plantilla se cumplen. Para transformar la función de transferencia desde el dominio unidimensional a el dominio de dos dimensiones utilizamos la transformada de Shanks.

$$s = s_2 \cos \beta - s_1 \operatorname{sen} \beta. \quad (12.10)$$

La función de transferencia $G(s)$ la escribimos como $H(s) = \frac{1}{G(z)}$, que es la relación de señal salida/entrada.

$$H(s) = 0,3543867 \frac{1}{s + 0,509908} \times \frac{1 + s^2 0,5332359}{0,6961317 + 0,32092s + s^2}.$$

La transformada de la frecuencia y la de Shanks será mostrada en la función de transferencia $H_1(s)$

$$H_1(s) = \frac{1}{s + 0,509908}.$$

Usando la transformación de frecuencias $s = s/\omega_0$, donde $\omega_0 = 2\pi 3400$ obtenemos:

$$H_1(s/\omega_0) = \frac{\omega_0}{s + \omega_0 \cdot 0,509908}.$$

Si sustituimos en la última ecuación la transformada de Shanks de dos dimensiones (12.10), obtenemos

$$H_1(s_1, s_2) = \frac{\omega_0}{s_2 \cos \beta - s_1 \operatorname{sen} \beta + \omega_0 \cdot 0,509908}.$$

Ahora transformamos la función de transferencia desde el dominio de s a dominio de z usando la transformada bilineal.

$$s_1 = \frac{2}{T} \frac{1 - z_1}{1 + z_1} \quad s_2 = \frac{2}{T} \frac{1 - z_2}{1 + z_2}.$$

Sustituyendo s_1 y s_2 la función de transferencia toma la forma de:

$$H(z) = \frac{T\omega_0(1 + z_1 + z_2 + z_1z_2)}{b_{00} + b_{21}z_1 + b_{12}z_2 + b_{22}z_1z_2},$$

donde

$$\begin{aligned} b_{21} &= 2 \cos \beta + 1 \operatorname{sen} \beta + 0,509908\omega_0 T \\ b_{12} &= -2 \cos \beta - 2 \operatorname{sen} \beta + 0,509908\omega_0 T \\ b_{22} &= -2 \cos \beta + 2 \operatorname{sen} \beta + 0,509908\omega_0 T \\ b_{00} &= 2 \cos \beta - 2 \operatorname{sen} \beta + 0,509908\omega_0 T. \end{aligned}$$

Para $\beta = 270^\circ$, $f_0 = 3400 \text{ Hz}$ y $f_v = 1/T = 16000 \text{ Hz}$ la función de transferencia toma la forma de:

$$H(z_1, z_2) = 0,493048 \frac{1 + z_1 + z_2 + z_1z_2}{1 - 0,492082z_1 + z_2 - 0,492082z_1z_2}. \quad (12.11)$$

Al igual como la función de transferencia $H_1(s)$ se calcula la función de transferencia parcial $H_2(s)$. Las circuitos con las funciones de transferencia $H_1(s)$ y $H_2(s)$ se conectan en cascada.

$$H_2(s) = \frac{1 + 0,53323s^2}{0,69613 + 0,32092s + s^2}.$$

Despues de un calculo similar como en el caso de la función de transferencia $H_1(s)$, obtenemos el siguiente resultado

$$H(z_1, z_2) = 1,3191 \frac{\begin{bmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -0,7669 & -1,5337 & -0,7669 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ z_2 \\ z_2^2 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1,2587 & -2,5173 & -1,2587 \\ 1,391 & 2,782 & 1,391 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ z_2 \\ z_2^2 \end{bmatrix}}. \quad (12.12)$$

12.2 Análisis del filtro digital de dos dimensiones

Utilizando la transformada de dos dimensiones obtenemos la función de transferencia paso bajas $H(z_1, z_2)$ representada en el dominio de las frecuencias ω_1 y ω_2 en la figura 12.2.

Si analizamos la amplitud en el plano $\omega_1 \omega_2$ de la función

$$H(z_1, z_2).H(z_1, z_2^{-1}),$$

obtenemos la respuesta de un filtro simetrico como se ve en la figura 12.3.

En el caso de la simetria de orden mayor, por ejemplo la simetria octagonal es necesario calcular el módulo de la función de transferencia

$$H(z_1, z_2).H(z_1, z_2^{-1}).H(z_1^{-1}, z_2).H(z_1^{-1}, z_2^{-1}).$$

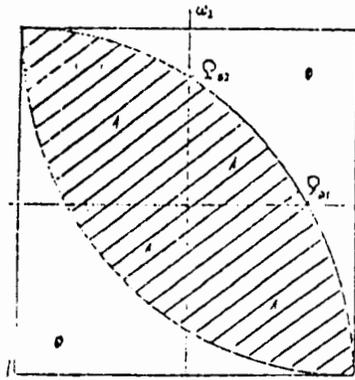


Figura 12.2: Representación de la característica del amplitud del filtro de paso baja de dos dimensiones en el plano. La banda de paso está marcada con número 1.

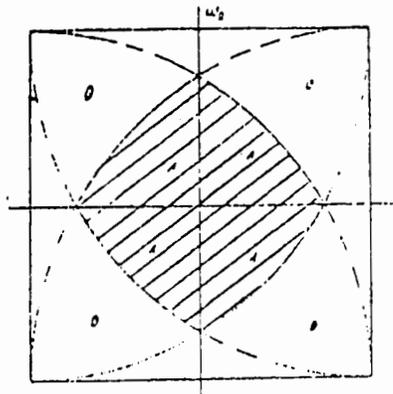


Figura 12.3: Característica de la amplitud de un filtro paso bajas simétrico

El filtro recursivo de dos dimensiones con la fase cero, lo obtenemos si conectamos en cascada los filtros simétricos en el cuadrante. Si filtramos una señal de dos dimensiones en la entrada $X(n_1, n_2)$ primeramente por medio del filtro simétrico en el primer cuadrante con la función de transferencia $H(z_1, z_2)$ y después usando el filtro en el tercer cuadrante con la función de transferencia $H(z_1^{-1}, z_2^{-1})$, obtenemos el filtro resultante con la función de transferencia

$$H_2(z_1, z_2) = H(z_1, z_2) \cdot H(z_1^{-1}, z_2^{-1}),$$

que tiene la fase cero

12.3 Diseño de filtro de paso bajas simétrico

Ejemplo

Diseñar un filtro de dos dimensiones con la característica de Butterworth de orden $n = 2$ para

$$a_{max} = 3 \text{ dB}, \Omega_0 = 1 \text{ a } \beta = \frac{\pi}{4}.$$

La función de transferencia del filtro de Butterworth de segundo orden es

$$H(p) = \frac{1}{1 + 1,41421s + s^2}.$$

Si sustituimos por s la transformada de Shanks 12.10 y en las ecuaciones para la transformada bilineal como en ejemplo anterior obtenemos la función de transferencia de dos dimensiones $H(z_1, z_2)$. Este filtro discreto de paso bajas no es simétrico. El filtro simétrico lo obtenemos calculando la ecuación

$$H_{DP}(z_1, z_2) = H(z_1, z_2) \cdot H(z_1, z_2^{-1}).$$

Usando el programa obtenemos la matriz de los coeficientes del filtro paso bajas simétrico

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ 4 & 16 & 24 & 16 & 4 \\ 6 & 24 & 36 & 24 & 6 \\ 4 & 16 & 24 & 16 & 4 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 9,219577 & 62,98387 & 158,6508 & -54,98386 & 19,57162 \\ -32,45760 & -245,6205 & -83,16479 & -440,1478 & 147,6223 \\ 96,08774 & 100,5595 & 593,0211 & -52,55957 & 435,5436 \\ -32,45760 & -245,6205 & -83,16479 & -440,1478 & 147,6223 \\ 9,219578 & 62,98387 & 158,6508 & -54,98386 & 19,57162 \end{bmatrix}$$

La característica de amplitud del filtro de paso bajas simétrico $H_{DP}(z_1, z_2)$ se muestra en la figura 12.4.

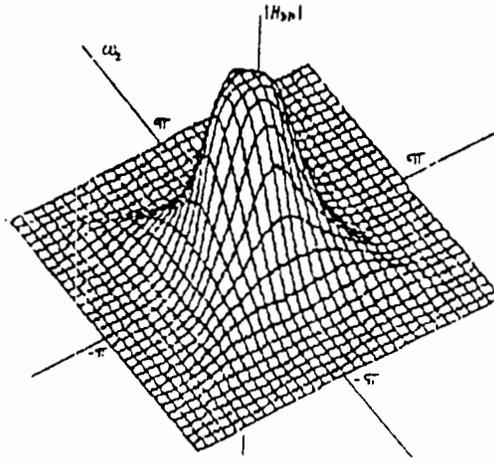


Figura 12.4: Característica de la amplitud del filtro de paso bajas simétrico

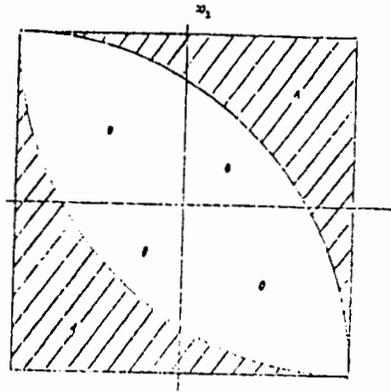


Figura 12.5: Característica del amplitud del filtro paso altas no simétrico

12.4 Diseño del filtro paso altas simétrico

Usando la transformada (12.10) en la función de transferencia de paso altas $H(s)$ obtenemos la función de transferencia discreta de filtro de paso alta $H(z_1, z_2)$. La característica de la amplitud está mostrada en la figura 12.5.

Para poder sumar las funciones de transferencia y no solo sus modulos, es necesario que tengan la fase cero. La función de transferencia con la fase cero se obtiene mediante la ecuación

$$H_{HP}(z_1, z_2) = H(z_1, z_2) \cdot H(z_1^{-1}, z_2^{-1}),$$

En esta ecuación la función de transferencia $H(z_1, z_2)$ se obtiene por medio de la transformada de Shanks.

Como ejemplo diseñamos la función de transferencia de un filtro simétrico de segundo orden con las especificaciones como en el primer ejemplo. La función de transferencia de un filtro analógico de paso alta de segundo orden es

$$H(p) = \frac{s^2}{s^2 + 1,41421s + 1}.$$

Usando la transformada de Shanks y la transformada bilineal los coeficientes de la función de transferencia de paso altas de dos dimensiones toma la forma

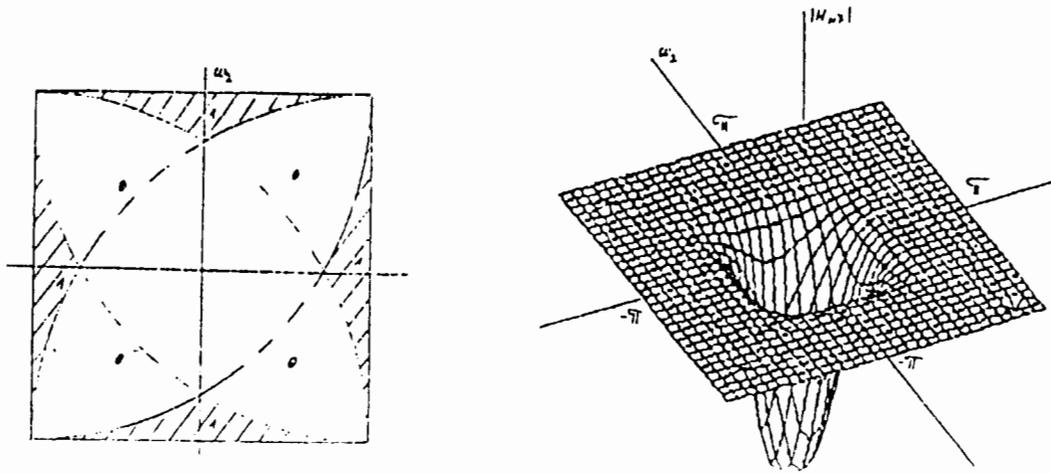


Figura 12.6: a) Característica de la amplitud del filtro paso altas en dos dimensiones b) Característica de la amplitud del filtro paso altas en tres dimensiones

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 13,39569 & 0 & 0 \\ 0 & -26,79120 & 0 \\ 0 & 0 & 13,39569 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 9,219 & -3,176021 & 1 \\ -3,17602 & -22,79120 & 7,1760215 \\ 1 & 7,176021 & 19,571620 \end{bmatrix}$$

Ahora calculamos la función de transferencia del filtro simétrico de paso altas con la fase cero. La matriz de la función de transferencia tiene 13×13 elementos y por esto razón no la escribimos. En la figura 12.6a está mostrada la característica de la amplitud del filtro simétrico de paso altas. En la figura 12.6b se muestra la característica del mismo filtro en tres dimensiones.

12.5 Diseño del filtro supresor de banda

La función de transferencia de un filtro supresor de banda se obtiene si sumamos las funciones de transferencia de un filtro paso bajas con una frecuencia del corte Ω_{01DP} y la función de transferencia de un filtro paso altas con una frecuencia del corte Ω_{01HP} . Calculamos $H_{PZ} = H_{DP} + H_{HP}$. Es necesario calcular otra vez la función de transferencia con la fase cero. Para calcular la función de transferencia de un filtro simétrico supresor de banda aprovechamos las funciones de transferencia del filtro paso bajas y paso altas desde los ejemplos anteriores. Necesitamos cambiar la frecuencia del corte del filtro paso altas para cumplir la ecuación

$$\Omega_{01DP} < \Omega_{01HP}.$$

Las características de amplitud en dos y en tres dimensiones se muestran en la figura 12.7a,b.

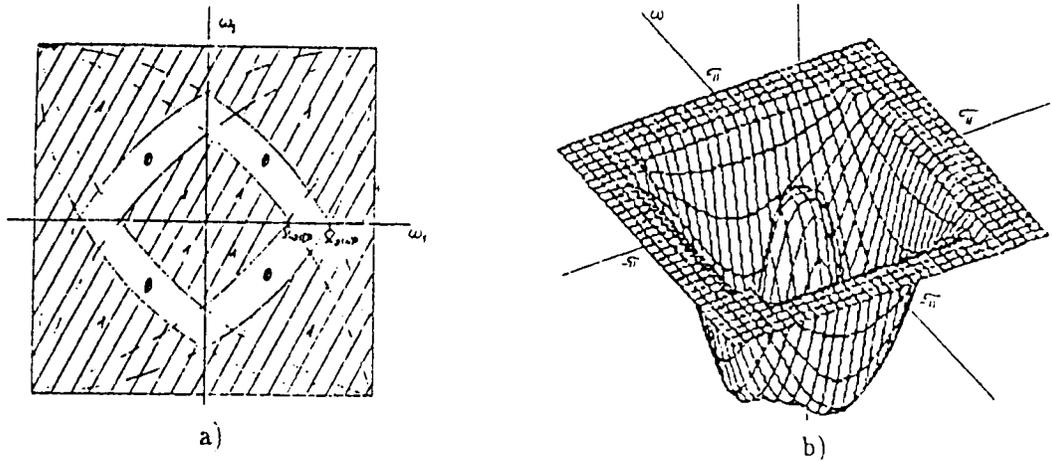


Figura 12.7: Característica de amplitud del filtro supresor de banda simétrico

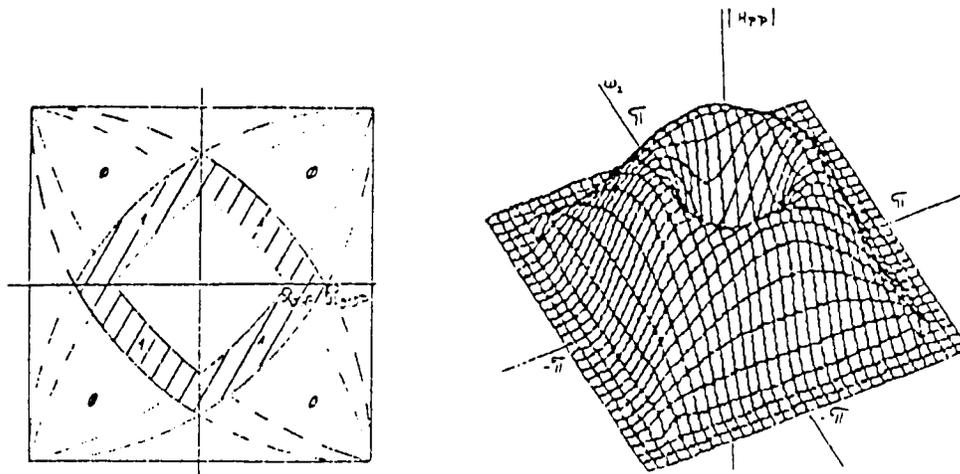


Figura 12.8: Características de la amplitud del filtro paso banda simétrico

12.6 Diseño del filtro de paso banda

La función de transferencia de un filtro paso banda se obtiene si multiplicamos las funciones de transferencia de un filtro paso bajas con frecuencia de corte Ω_{01DP} con la función de transferencia de un filtro paso altas con frecuencia del corte Ω_{01HP} . Para estas frecuencias se debe de cumplir

$$\Omega_{01DP} > \Omega_{01HP}.$$

El grafo de los niveles del filtro paso banda $H_{DP} = H_{DP} \cdot H_{HP}$ es en la figura 12.8a. La característica de la amplitud de paso banda en tres dimensiones es mostrada en la figura 12.8b.

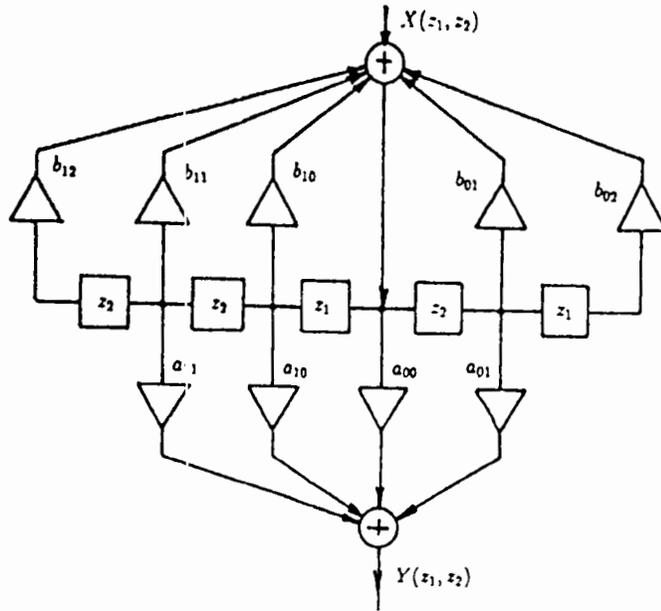


Figura 12.9: Realización directa de la función de transferencia

12.7 Realización de las funciones transferencias de dos dimensiones

La estructura del filtro de dos dimensiones con la respuesta infinita al impulso se dibuja desde las función de transferencia $H(z_1, z_2)$.

La realización directa de la función de transferencia

$$H(z_1, z_2) = \frac{a_{00} + a_{01}z_2 + a_{10}z_1 + a_{11}z_1z_2}{1 + b_{01}z_2 + b_{02}z_2^2 + b_{10}z_1 + b_{11}z_1z_2 + b_{12}z_1z_2^2} \quad (12.13)$$

está mostrada en la figura 12.9.

La estructura en la figura 12.9 contiene mucho elementos de retardo. Otra posibilidad es la realización de la función de transferencia de dos dimensiones mediante el quebrado de escalera.

La función de transferencia $H(z_1, z_2)$ se puede decomponer en el quebrado de escalera de varias maneras. Pero no todas las posibilidades físicas se pueden realizar.

Si decomponemos la función de transferencia $H(z_1^{-1}, z_2^{-1})$ en el quebrado de escalera de la siguiente manera

$$H(z_1, z_2) = C_1 + \frac{1}{A_1 z_1^{-1} + \frac{1}{C_2 + \frac{1}{B_1 z_2^{-1} + \frac{1}{\dots}}}} \quad (12.14)$$

y si los constantes $c_2, c_3, \dots, A_1, A_2, \dots, B_1, B_2$ no son iguales a cero, la estructura toma la forma mostrada en la figura 12.10.

Si descomponemos la función de transferencia $H(z_1, z_2)$ en la forma mostrada en la ecuación (12.15), obtenemos la estructura mostrada en la figura 12.11

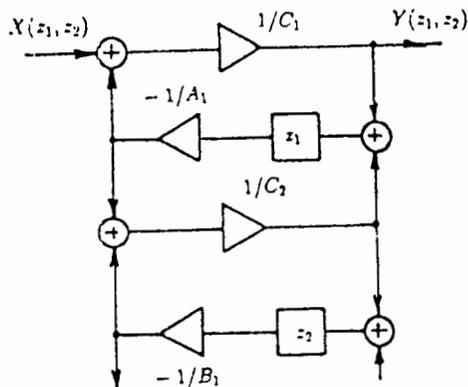


Figura 12.10: Realización $H(z_1^{-1}, z_2^{-1})$ en el quebrado de escalera

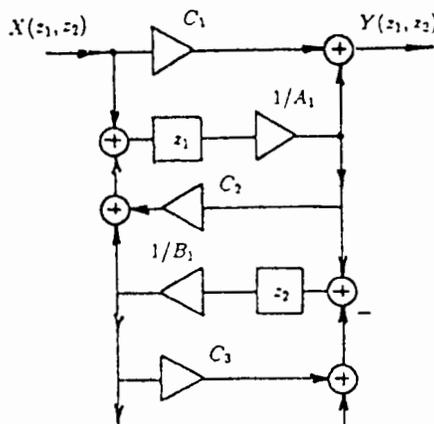


Figura 12.11: Otra posibilidad de la realización de la función de transferencia $H(z_1, z_2)$

$$H(z_1, z_2) = C_1 + \frac{1}{A_1 z_1^{-1} + C_2 + \frac{1}{B_1 z_2^{-1} + C_3 + \frac{1}{1}}}. \quad (12.15)$$

Si descomponemos la función de transferencia $H(z_1, z_2)$ en la forma de la ecuación (12.16), obtenemos la estructura mostrada en la figura 12.12.

$$H(z_1, z_2) = \frac{1}{c_1 + \frac{1}{A_1 z_1^{-1} + \frac{1}{c_2 + \frac{1}{B_1 z_2^{-1} + \frac{1}{1}}}}}. \quad (12.16)$$

Ejemplo: Realizar con el quebrado de cadena la función de transferencia de dos dimensiones

$$H(z_1, z_2) = \frac{48z_1^2 \cdot z_2 + 12z_1^2 + 144z_1 \cdot z_2 + 33z_1 + 81z_2 + 15}{48z_1^2 \cdot z_2 + 12z_1^2 + 12z_1 \cdot z_2 + 27z_2 + 2}.$$

Si descomponemos la función de transferencia en quebrado de cadena obtenemos

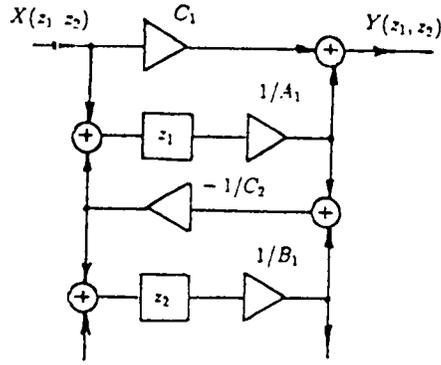


Figura 12.12: Realización de la función de transferencia $H(z_1, z_2)$ con el quebrado de escalera

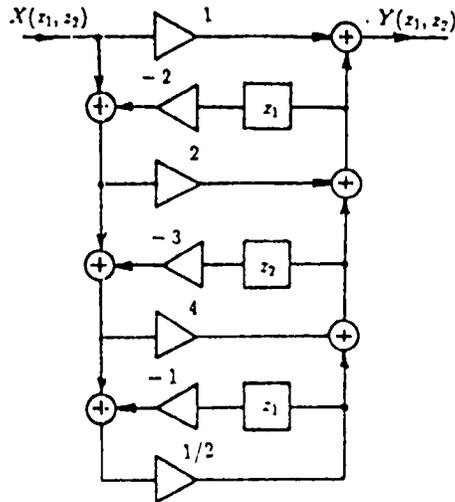


Figura 12.13: Estructura de ejemplo

$$H(z_1, z_2) = 1 + \frac{1}{2z_1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3z_2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{z_1 + 2}}}}}$$

La estructura está mostrada en la figura 12.13.

Otra posibilidad de obtener la estructura del filtro digital de dos dimensiones es mediante ampliación de las matrices similarmente como se realizo en los filtros unidimensionales.

12.8 Realización de la función de transferencia mediante ampliación de matriz

Diseñar la estructura del filtro que realiza la siguiente función de transferencia

$$H(z_1, z_2) = \frac{(1 + z_1^{-1})(1 + z_2^{-1})}{1 + az_1^{-1} + bz_2^{-2} + cz_1^{-1}z_2^{-1} + dz_1^{-1}z_2^{-2}}$$

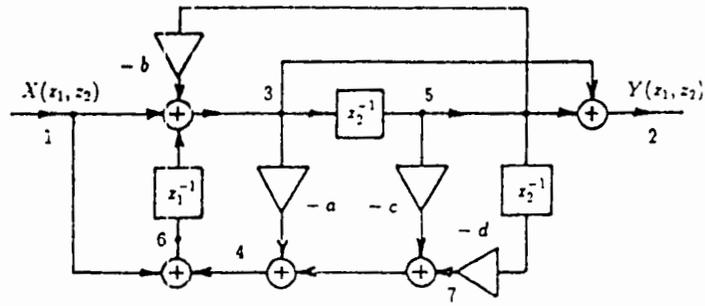


Figura 12.14: Estructura de un filtro digital de dos dimensiones

Primeramente construimos la matriz de segundo orden

$$\mathbf{N}^{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} \frac{(1+z_1^{-1})(1+z_2)}{1+az_1^{-1}+bz_2^{-1}+cz_1^{-1}z_2^{-1}+dz_1^{-1}z_2^{-2}} & -1 \end{bmatrix}.$$

Si elegimos

$$\begin{aligned} n_{23} &= 1 + z_2^{-1} & n_{31} &= 1 + z_1^{-1} \\ n_{33} &= -1 - az_1^{-1} - bz_2^{-1} - cz_1^{-1}z_2^{-1} - dz_1^{-1}z_2^{-2} & n_{32} &= 0, \end{aligned}$$

obtenemos

$$\begin{aligned} n_{21}^3 &= n_{21}^2 + \frac{n_{23}^3 \cdot n_{31}^3}{n_{33}^3} = 0 \\ n_{22}^3 &= n_{22}^2 + \frac{n_{23}^3 \cdot n_{32}^3}{n_{33}^3} = -1. \end{aligned}$$

La matriz con dos renglones y tres columnas toma la forma

$$\mathbf{N}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 + z_2^{-1} \\ 1 + z_1^{-1} & 0 & -1 - az_1^{-1} - bz_2^{-1} - cz_1^{-1}z_2^{-1} - dz_1^{-1}z_2^{-2} \end{bmatrix}.$$

Si seguimos esta procedimiento ampliando las matrices obtenemos al fin para $\mathbf{N}^{(7)}$

$$\mathbf{N}^{(7)} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -b & z_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & -a & -1 & -c & 0 & 1 \\ 0 & 0 & z_2^{-1} & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -dz_2^{-1} & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Con la matriz del flujo $\mathbf{N}^{(7)}$ se puede graficar la estructura del filtro de dos dimensiones. El orden de la función de transferencia es igual al número de elementos de la estructura. Por lo que la estructura es canónica. Si ordenamos los nudos como se ve en la figura 12.14 podemos construir la estructura del filtro.

Capitulo 13

El efecto de cuantización

En los sistemas discretos los números se representan en forma binaria. Un número x se puede expresar por la ecuación (13.1).

$$x = \sum_{n=0}^{B-1} b_n \cdot 2^n \quad (13.1)$$

El término b_n tiene valor 0 ó 1. Por eso los números se llaman números binarios. El término B dice en cuántos bits el número x está expresado.

Ejemplo

Queremos expresar el número $x = 0,236$ en la forma binaria por $B = 7$ bits.

0,236.2	
0,472.2	
0,144.2	
1,888.2	$x = 0.2^0 + 0.2^{-1} + 0.2^{-2} + 1.2^{-3} + 1.2^{-4} + 1.2^{-5} + 1.2^{-6}$
1,776.2	$x = .0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1$
1,552.2	
1,104.2	

Pero

$$x_E = 1.2^{-3} + 1.2^{-4} + 1.2^{-5} + 1.2^{-6} = 0,125 + 0,0625 + 0,03125 + 0,015625 = 0,234375$$

Como se vé expresamos el número x por un número x_E con el error $E_6 = x - x_E = 0,001625$. Ese error puede ser la causa de la inestabilidad del filtro.

Ahora expresamos el mismo número por $B = 13$ bits.

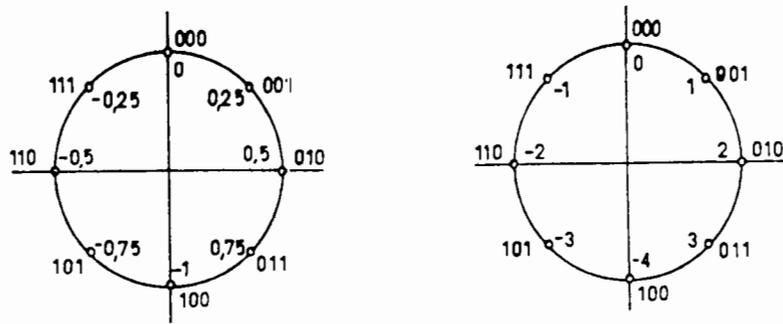


Figura 13.1: Números fraccionarios y números enteros representados por 3 bits

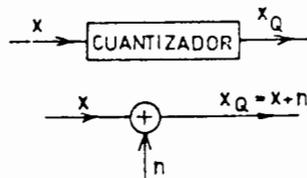


Figura 13.2: Cuantizador lineal y no lineal

Gracias al error de cuantización se realiza el número x_Q en lugar del número exacto x . La cuantización de una señal es una operación no lineal. Esa operación no requiere memoria y está mostrada en la figura 13.2

- x es un voltaje en la entrada
- x_Q es el voltaje de salida cuantizada
- n representa un ruido gracias al error de cuantización

La relación no lineal entre la señal x y la señal cuantizada x_Q depende de la aproximación de x , si utilizamos redondeo o truncamiento. La relación entre el voltaje x y su aproximación de tres bits se muestra en la figura 13.3 si aplicamos redondeo.

Si aplicamos en aproximación de los números, truncamiento, obtenemos la relación entre voltaje x y voltaje cuantizado x_Q la gráfica se muestra en la figura 13.4.

Como podemos ver de la figura 13.5 el error de cuantización para el truncamiento se encuentra entre 0 y Q y para el redondeo se encuentra entre $\frac{Q}{2}$ y $-\frac{Q}{2}$.

Q es el paso de cuantización y se calcula por la ecuación

$$Q = 2^{-B+1} \quad (13.2)$$

Para el número expresado por 3 bits $B=3$, el paso de cuantización es

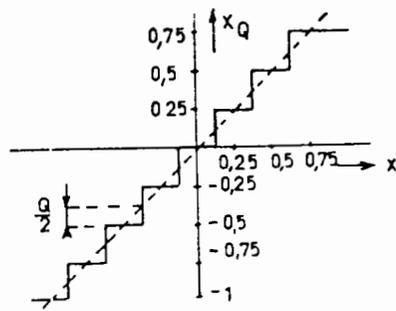


Figura 13.3: Aproximación del número expresado por tres bits usando el redondeo

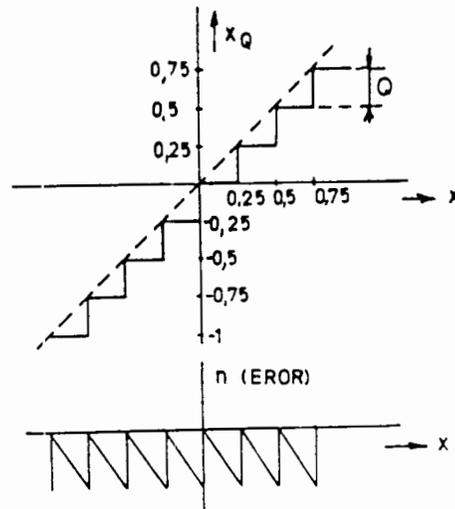


Figura 13.4: Aproximación del número expresado por tres bits usando el truncamiento

$$Q = 2^{-3+1} = 0,25$$

La varianza de truncamiento se calcula usando la ecuación

$$\rho_E^2 = \frac{1}{Q} \int_{-\frac{Q}{2}}^{\frac{Q}{2}} u^2 du \quad (13.3)$$

$$\rho_E^2 = \frac{1}{Q} \frac{u^3}{3} \Big|_{-\frac{Q}{2}}^{\frac{Q}{2}} = \frac{1}{Q} \left(\frac{\frac{Q^3}{8} + \frac{Q^3}{8}}{3} \right) = \frac{Q^2}{12}$$

si sustituimos por $Q = 2^{-B+1}$ la varianza del ruido es

$$\rho_E^2 = \frac{(2^{-B+1})^2}{12} = \frac{2^{-2B}}{3} \quad (13.4)$$

El error que se comete al convertir una señal continua en amplitud en una representación discreta se evalúa en términos de la relación señal a ruido (RSR). La señal debe ser limitada en amplitud para evitar las posibilidad de desbordamiento. Para eso utilizamos un factor de ganancia G como se muestra en la figura 13.6

Valores pequeños de G nos aseguran, que el desbordamiento nunca ocurra. Pero en este caso se reduce la relación señal a ruido (RSR). El ruido de cuantización es fijo y al bajar el valor de G (factor que nos limita la ganancia) reducimos la amplitud de la señal. Este compromiso entre el desbordamiento y el ruido de cuantización siempre lo tomamos en cuenta si utilizamos los microprocesadores, que trabajan con punto fijo.

La relación entre señal a ruido se define por la ecuación

$$RSR = 10 \log \frac{P_x}{P_n} = 10 \log \frac{P_x(G, x)}{\rho_E^2} \quad (13.5)$$

donde $P_n = \rho_E^2$ y

$$P_x = \rho_x^2 = E[x^2(n)] \quad (13.6)$$

- P_n es la potencia de ruido
- P_x es la potencia de la señal

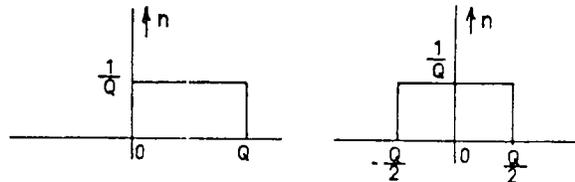


Figura 13.5: El error de cuantización para el truncamiento y redondeo

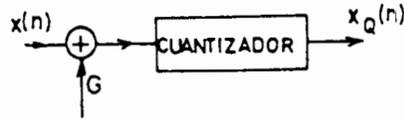


Figura 13.6: Señal $x(n)$ limitada con factor de ganancia G

Pero la potencia P_x depende del factor de ganancia G . Si $P_x(G, x) = \frac{1}{4^\rho}$ y $\rho = 4$ obtenemos

$$RSR = 10 \log \frac{1}{16} - 10 \log \frac{2^{-2B}}{3} = -12,0412 + 20.B \log 2 + 10 \log 3$$

$$RSR = 6.B - 7,27 \quad [dB]$$

Ejemplo

Calcule usted la relación señal a ruido para 8-bits cuantizador y para 16-bits cuantizador

$$RSR_8 = 8.(6) - 7,27 = 40,73 \text{ dB}$$

$$RSR_{16} = 6.(16) - 7,27 = 88,73 \text{ dB}$$

No sólo la señal en la entrada es cuantizada durante la conversión a los números. Los coeficientes de la función de transferencia deben ser cuantizados también.

13.1 Cuantización de los coeficientes

Los coeficientes de un filtro digital deben ser cuantizados con B bits. La señal en la salida del filtro con la respuesta finita se pueden expresar por la ecuación

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h_Q(k).x(n-k) \quad (13.7)$$

$h_Q(k)$ es el término, que representa los coeficientes cuantizados del filtro FIR. La Función de transferencia de un filtro con coeficientes cuantizados $\bar{H}(f)$ se pueden expresar por la ecuación

$$\bar{H}(e^{j\omega}) = \sum_{i=0}^{N-1} h(i)e^{-j\omega T} + \sum_{i=0}^{N-1} [h(i)_Q - h(i)]e^{-j\omega T} \quad (13.8)$$

$$\bar{H}(e^{j\omega T}) = H(e^{j\omega T}) + H_e(e^{j\omega T}) \quad (13.9)$$

$H_e(e^{j\omega T})$ es una función de transferencia que representa el error gracias a la cuantización de los coeficientes. El máximo error que puede alcanzar la respuesta del sistema a una amplitud está expresada por la función

$$|H_e(e^{j\omega})| \leq N \max |h_Q(i) - h(i)| \quad (13.10)$$

N es el tamaño del filtro o número de los coeficientes. Si los coeficientes son redondeados a B bits el error del sistema en amplitud es

$$|H_e(e^{j\omega})| \leq N \cdot 2^{-B} \quad (13.11)$$

y en Decibel

$$|H_e(e^{j\omega})| \leq 20 \log N - 6.02 B \quad (13.12)$$

B es el número de bits usados para representar los coeficientes del filtro.

Ejemplo

Hallar el error $H_e(e^{j\omega})$ que puede alcanzar el sistema representado con 100 coeficientes representados por 16-bits.

$$20 \log |H_e(e^{j\omega})| = 20 \log 100 - 6.02 \cdot 16 \leq -56 \text{ dB}$$

Si tenemos un filtro *FIR* con 50 coeficientes el error no es mayor que

$$20 \log |H_e(e^{j\omega})| = 20 \log 50 - 6.02 \cdot 16 = -82 \text{ dB}$$

13.2 Cuantización de los coeficientes del filtro IIR

La función de transferencia de un filtro *IIR* se puede expresar en la forma

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^M a_k z^{-k}} \quad (13.13)$$

la función de transferencia con los coeficientes cuantizados es

$$H_Q(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_{kQ} z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^M a_{kQ} z^{-k}} \quad (13.14)$$

Los coeficientes cuantizados los podemos expresar por medio de los coeficientes originales y los errores:

$$\begin{aligned} a_{kQ} &= a_k - \Delta a_k \\ b_{kQ} &= b_k - \Delta b_k \end{aligned} \quad (13.15)$$

También la posición de los polos y ceros se cambia gracias a la cuantización de los coeficientes.

$$z_{Qi} = z_i + \Delta z_i \quad (13.16)$$

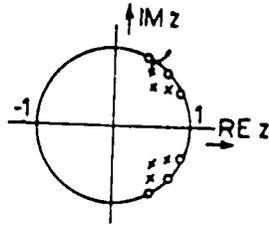


Figura 13.7: Localización de los polos y ceros de un filtro con ancho paso banda

En ciertas condiciones el sistema es estable, pero debido a la cuantización de los coeficientes puede ser inestable, como podemos observar de la figura 13.7

En la gráfica son dislocados ceros y polos de un filtro paso banda. La variación de los ceros, polos y amplitud se muestra en la figura 13.8

Algunas estructuras son muy sensibles a la cuantización de los coeficientes. Las estructuras directas del orden más grande como $n = 3$ son muy sensibles a las cuantizaciones de los coeficientes, porque la dislocación de los polos depende de muchos coeficientes de la función de transferencia. Las estructuras en cascada y las estructuras paralelas son menos sensibles.

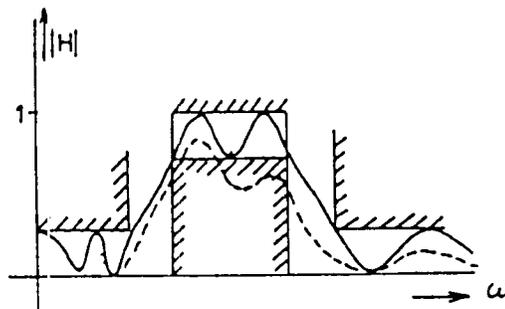


Figura 13.8: La característica de la amplitud del filtro ideal y cuantizado

Bibliography

- [1] BRIGHAM,E.O.: *The Fast Fourier Transform* Prentice-Hall,Inc.1983.
- [2] BURRUS,C.S.- PARKS,T.W.: *DFT / FFT and Convolution*. John Wiley and Sons, 1985.
- [3] CAPPELLINI, V.- EMILIANI, P. L.: *The Present and Future of Signal Processing*. Kybernetika 3, 1990, str.191-205.
- [4] ELLIOTT, D. F.- RAO, K. R.:*Fast Transforms. Algorithms, Analyses, Applications*. Academic Press, Inc., 1982.
- [5] FETTWEIS,A.: *Digital Filters Structures Related to Clasical Filter Networks*. Arch.Elek.Uebertragung,vol.25,pp.79-89,Feb.1971.
- [6] GOMEZ, S. et al: *An Application-specific FFT processor*. Electronic Engineering, No.6, June 1988, pp.99-106.
- [7] McClellan,J,H.:*The design of two-dimensional digital filter by transformation*. Proc.7th. Annu. Princenton Conf.Information Sciences and Systems, pp.247-251.1973.
- [8] MILT, L.: *Signal-Processing Circuits*. Electronic Design. No.4, February 1990, pp.101-108.
- [9] OPPENHEIM, A. V.- SCHAFFER, R. W.: *Discrete - Time Signal Processing*. Prentice Hall, Inc., 1989.
- [10] OPPENHEIM,A.V.- SCHAFFER,R.W.: *Digital Signal Processing*. Prentice Hall 1985.
- [11] PARKS, T. W.- BURRUS, C. S.: *Digital Filter Design*. John Wiley Sons, Inc., New York, 1987.
- [12] SHANKS,J.L. - TREITEL,S.: *Stability and Synthesis of Two Dimensional Recursive Filters*. IEEE Trans.Audio Electroacoustics AU-20,2, pp.115-128. 1972.
- [13] SCHAFFER, R. W.- RABINER, L. R: *Digital Representation of Speech Signal*. Proceedings of the IEEE, Vol.63, No.4, June 1975.
- [14] STANLEY,W.D.- DOUGHERTHY,G.R. - DOUGHERTY,R.:*Digital Signal Processing*. Reston Publishing corp.,1984.
- [15] LACROIX,A.-WITTE.K.H.: *Zeitdiskrete normierte Tiefpasse* Dr.Alfred Huthig Verlag.Heidelberg.1980.
- [16] LACROIX.A.:*Digitale Filter* 3.Auflage Oldenburg.Wien,Munchen-1988.

Esta obra se terminó de Imprimir
En febrero de 1995.
Departamento de Publicaciones
de la Facultad de Ingeniería
Ciudad Universitaria, México, D.F.
C.P. 04510

Secretaría de Servicios Académicos

El tiraje consta de 1000 ejemplares
más sobrantes de reposición.