



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
**FACULTAD DE INGENIERÍA**

**APUNTES DE PUENTES.**

**CURSO DEL MAESTRO ING. J.M. PONTON**

**ING. LUIS CHAVELAS J.**  
**EDITOR ROBERTO AVELAR L.**

L.

Estos apuntes se publican merced al generoso consentimiento del Ing. José Mariano Pontón quien imparte la cátedra de Puentes en la Escuela Nacional de Ingenieros.

Se trata de una versión tomada en clase por el alumno Luis Chavelas Jiménez, y como tal, es indudable que adolece de errores, tanto de interpretación como de forma; éstos son imputables únicamente al autor de la transcripción, mas de ninguna manera al maestro Ing. José Mariano Pontón. Por la premura con que se preparó esta edición sólo se hizo una revisión superficial. Posteriormente se procurará enmendar todas las deficiencias que se adviertan y las que se sirvan señalar los Sres. estudiantes.

Los temas que aquí se tratan representan sólo una parte del curso, tal vez la menos divulgada. La materia es tan amplia, que los libros de consulta que se recomiendan a los estudiantes del curso de Puentes, son como mínimo 7, todos ellos en inglés.

Se reconoce y aprecia la valiosa cooperación en este trabajo, de los Sres. Ing. Ignacio Devesa, Manuel Mena y Victor Pastrana.

PROGRAMA DE LA CLASE DE PUENTES

CAPITULO I.- GENERALIDADES.

- a).- Definición de puente.
- b).- Necesidad de su construcción.
- c).- Términos generales.
- d).- División general.
- e).- Fuerzas que intervienen.

CAPITULO II.- ESTUDIOS DE CAMPO.

- a).- Factores determinantes para la elección de un buen cruce.
- b).- Reconocimiento de la corriente.
- c).- Recomendaciones especiales
- d).- Informes previos.
- e).- Informes definitivos.

CAPITULO III.- ESTUDIOS DE GABINETE.

- a).- Determinación de la altura de la resaca
- b).- Determinación de la longitud de las luces.
- c).- Determinación de la longitud total del puente.
- d).- Relación de las terracerías de acceso y el puente.
- e).- Examen de los diversos trazos con los diversos cruces.
- f).- Elección del tipo de puente.

CAPITULO IV.- PROYECTO DETALLADO.

- a).- Nomenclatura.
- b).- Cargas diversas y su distribución.
- c).- Empuje de tierras.
- d).- Fatigas en los cimientos
- e).- Muros de sostenimiento.
- f).- Arcos y apoyos.
- g).- Losas, estribos y pilas.
- h).- Superestructuras diversas.

### Definición de Puesto:

Puesto es una estructura en una vía de comunicación, que sirve para salvar un curso de agua, una depresión del terreno u otra vía de comunicación.

Por curso de agua entendemos cualquier arroyo, río, pantano, lago, brazo de mar, estero, bahía, etc.

Los puentes pueden construirse con materiales muy diversos: madera rolliza, madera labrada, mampostería (piedra, tabique, concreto simple, concreto ciclópeo), concreto armado, fierro estructural y cables metálicos.

Los puentes de claro menor de 6 m., se pueden considerar como alcantarillas. En realidad una alcantarilla es una estructura que permite el paso transversal del agua por debajo de una terracería.

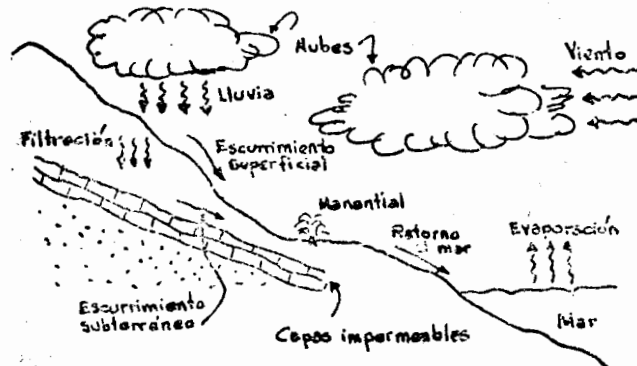


Figura 1.

La Ingeniería Civil, en su ramo de Estudio, Proyecto y Construcción de Puentes, afronta problemas relacionados con varias materias: Topografía, Dibujo, Geología, Hidráulica, Mecánica, Estabilidad, Resistencia de Materiales, Procedimientos de Construcción, Economía, etc.

### NECESIDAD DE LA CONSTRUCCION DE LOS PUENTES.

¿Por qué es necesario construir un puente?

En la Naturaleza el agua está sometida al movimiento continuo que esquemáticamente se indica en la figura 1.

El proceso se denomina "ciclo hidrológico". Siempre que un camino se cruce con un curso de agua (caso más general), será necesario construir un puente.

### Términos generales.

En la figura 2 se indican los nombres de los diversos elementos de un puente.

Se ha supuesto un puente sencillo, hecho de viguetas I con una losa de concreto armado.

Las partes principales de un puente son:

- a).- Superestructura
- b).- Subestructura
- c).- Infraestructura
- d).- Elementos de protección:
  - 1).- Farapetos
  - 2).- Terrapienes de acceso
  - 3).- Zampados.

DE PUENTES

ión de un buen cruce.

te  
es.  
puente.  
el puente.  
diversos cruces.

0

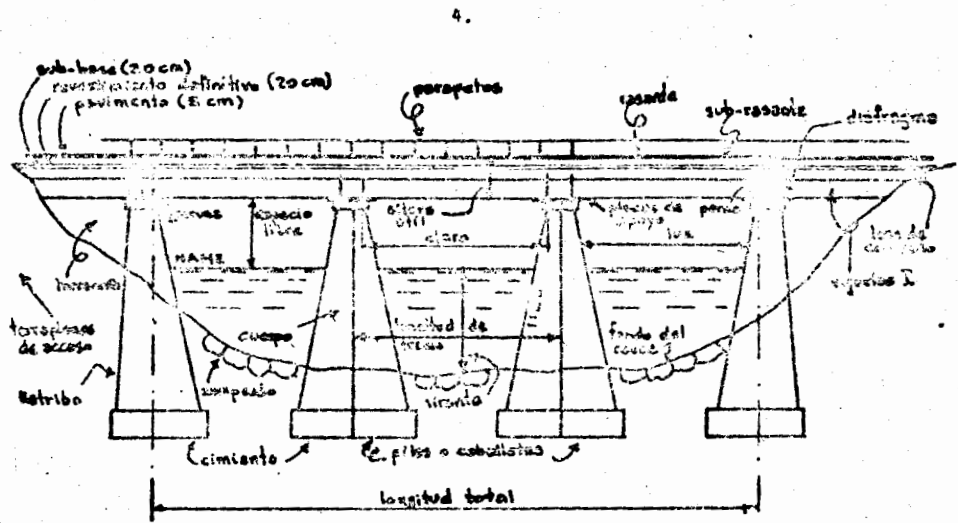


Figura 2.

Se llama superestructura a todo lo que queda de las placas de apoyo hacia arriba.

Los pernos de anclaje unen la subestructura con la infraestructura.

La subestructura son los apoyos en sí.

Cada apoyo se compone de tres partes: corona, cuerpo y cimiento.

Claro es la distancia entre dos pernos de anclaje.

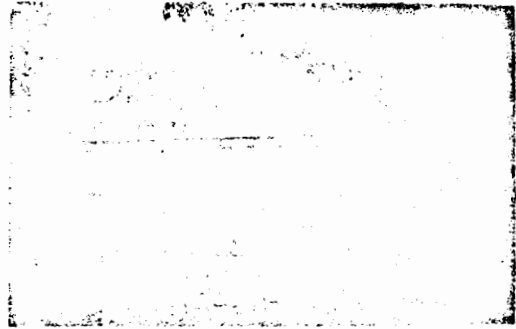
Se llama luz a la distancia de paramento a paramento.

El pavimento constituye la superficie de rodamiento; generalmente se construye a base de mezclas asfálticas.

Las sub-bases se hacen de gravas, tepetates, areniscas, tobas, etc.

Los zapados no son propiamente mamposterías; se forman con piedras de 30 a 40 cm. de tamaño, unidas con morteros pobres. El zapado tiene el objeto de evitar la socavación y generalmente lleva un dentellón hacia el lado de aguas arriba.

Los parapetos sirven de protección tanto para los vehículos como para los peatones.



Puente en el cruce de la carretera Oaxaca - Cuautémoc, con el río Tapanatepec, 104 Km. adelante de Juchitán. -Losa sobre traves de concreto.

El diafragma contiene la terracería y sirve a la vez como contraventeo.

Las guarniciones son pequeños escalones que evitan la salida de los vehículos. Miden 30 cm. de alto por 50 cm. de ancho. Deben colarse monolíticamente con la losa.

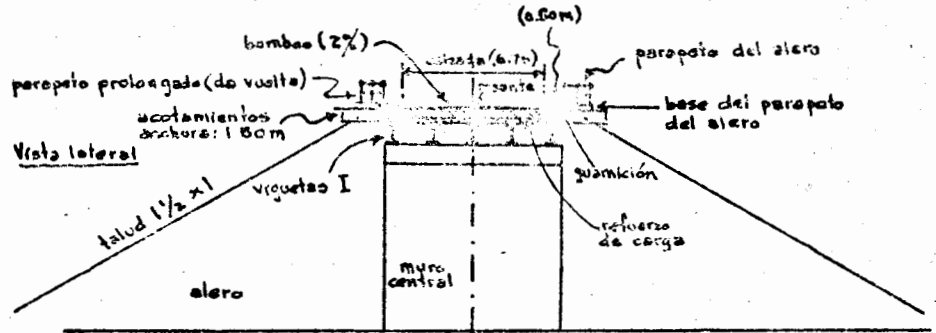
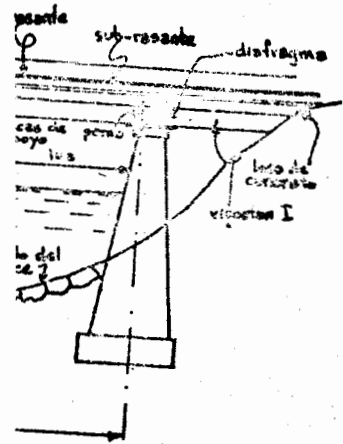


Figura 3.

**Tipos de secciones en caminos:**

Esencialmente son tres, según se construya el camino en montaña, en terreno ondulado o en terreno plano.

**Terraplén (sólo hay relleno; se construye mediante préstamos).**

El acotamiento protege al camino contra la erosión. Además, sirve para que los vehículos se detengan fuera de la faja de tránsito y para que por ahí caminen peatones y animales.

En cualquier caso, el factor esencial para tener un buen camino es que haya un buen drenaje. Si hay una buena circulación del agua la conservación es mejor.

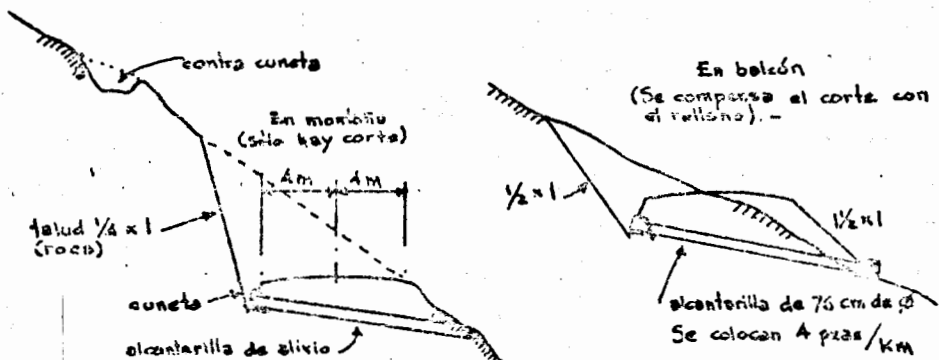
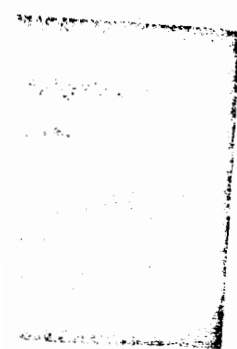


Figura 4.

casas de apoyo hacia  
reestructura.

cimiento.

normalmente se construye a-



retera Orizaba.-Ciudad  
tepec, 104 Km. adelante-  
s de concreto.

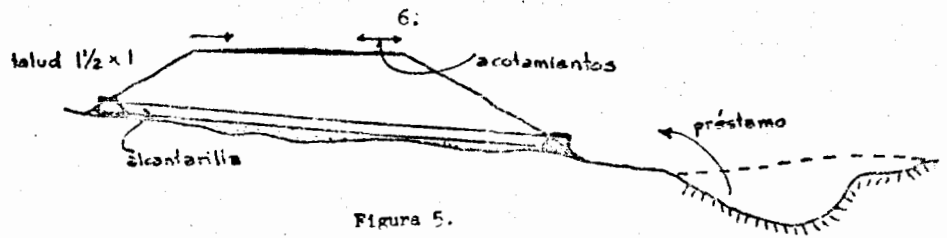


Figura 5.

En terreno montañoso es conveniente hacer - primero las alcantarillas y después las terracerías. - (por ejemplo, al cruzar una barranca).

Salvo el caso anterior el camino debe hacer - se antes y hasta después las alcantarillas, ya que, -- de lo contrario, se tendrían que hacer cortes muy -- grandes previamente y enseguida, al hacer el camino, -- las alcantarillas se romperían fácilmente con las vi- -- braciones de la dinamita y la maquinaria.

Provisionalmente, un puente puede sustituir - irse con las siguientes estructuras:

Vado (con o sin desvío)

Fuente provisional (idem)

Chalán (idem)

Fuente flotante (pontón)

Cualquiera de las siguientes estructuras - puede sustituir a un puente en forma definitiva: te- -- rraplén con alcantarillado; túnel debajo del río, -- cortina de una presa.

Vado.- Primero será necesario decidir el - sitio en que debe hacerse.

Camino destruido en septiembre de 1955. Carretera México.-Teziutlán-Nautla.-

Tramo Perote.- Altotonga.- Véase tremenda erosión causada por los ciclos -- nes.- Donde había una pequeña alcanta- -- rilla, que salvaba una corriente insign- -- nificante, quedó una barranca de 30 m. -- de profundidad por 30 m. de anchura, - aproximadamente.

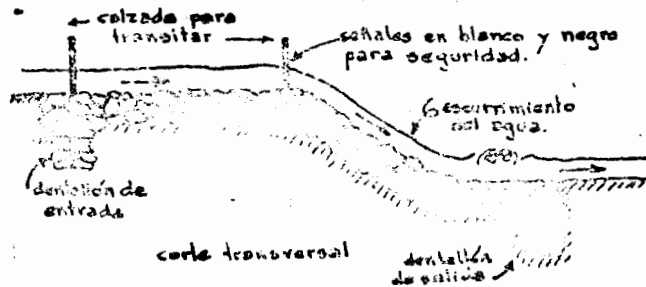
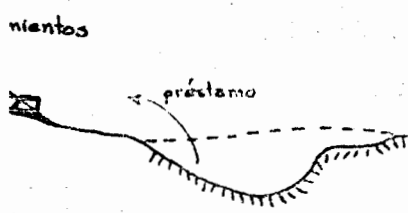
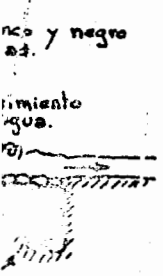


Figura 6.



no destruido en septiembre de 1955.  
 terna México.-Teziutlán-Nautla.-  
 o Perote.- Altotonga.- Véase tre--  
 a erosión causada por los ciclo --  
 - Donde había una pequeña alcanta--  
 a, que salvaba una corriente insigni--  
 ficante, quedó una barranca de 30 m.  
 de profundidad por 30 m. de anchura, -  
 chadamente.



7.

El vado puede construirse con o sin alcantarillas.

Si hay escurrimiento de estiaje y el tránsito es intenso, inclusive puede llegar a hacerse un vado de concreto con alcantarillas, para tener seguridad en el paso.

Puente Provisional:

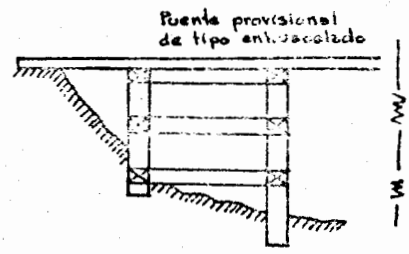
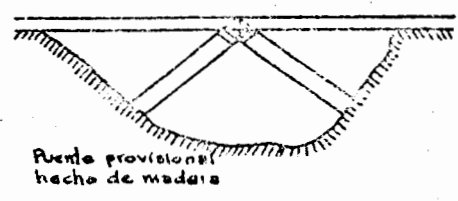


Figura 7.

Debe estudiarse cuidadosamente donde hay que construirlo. En general, las obras provisionales se hacen aguas abajo, para evitar que una avenida arrastre la obra provisional y arruine la obra definitiva en construcción.

Chalán:

Se usa en épocas de escurrimiento reducido. Puede ser de diversos tipos, según la corriente y anchura del río, duración del chalán, dinero disponible, etc.

Para moverlo se aprovecha el impulso de la corriente de agua, orientando el chalán adecuadamente respecto a la dirección del escurrimiento y los puntos de embarque y desembarque.

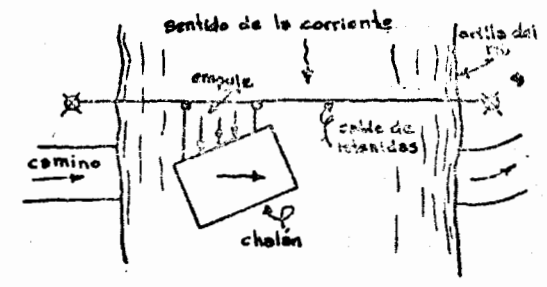


Figura 8.

Pontón:

Está constituido por una cubierta flexible apoyada sobre cuerpos flotantes que se mantienen fijos mediante un sistema de cables.

En caso de una creciente hay que recoger el conjunto para que no sea arrastrado.

Se sueltan los cables principales de una orilla y se jalan desde la otra.

Túneles.- En cuanto a estos sustitutos de los puentes podemos decir que tienen varias ventajas:

- a).- No estorban la navegación.
  - b).- Pueden construirse de cualquier longitud
  - c).- Tienen un gran valor estratégico en caso de guerra
  - d).- Se pagan indemnizaciones mínimas
- Sus desventajas son las siguientes:
- a).- Costo elevado
  - b).- Construcción difícil y lenta
  - c).- Conservación costosa
  - d).- La ventilación e iluminación constituyen serios problemas.



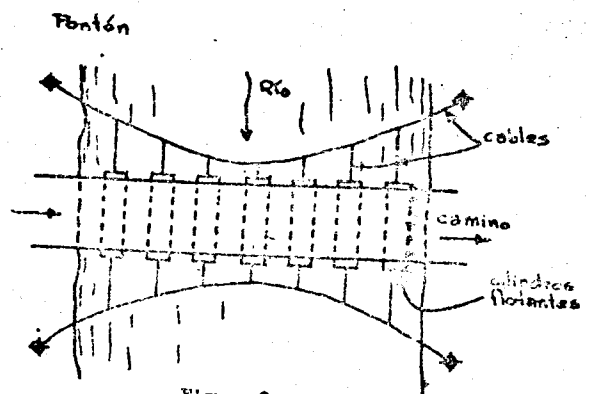


Figura 9.

**DIVISION GENERAL DE LOS PUENTES.**

Según el aspecto que se considere, resultan varias clasificaciones:

- 1o.- Por la forma de efectuar el cruce: a).- Cruce normal.
- b).- Cruce esviado.

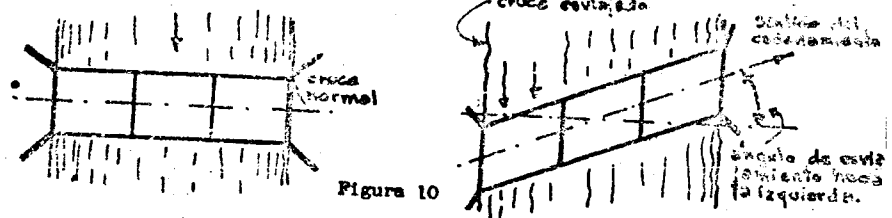


Figura 10

Como su nombre lo indica, el cruce normal es perpendicular a la dirección de la corriente.

En el cruce esviado se tienen claros más largos y las pilas y los estribos también son mayores. En general resultan más costosos, pero a pesar de ello hay veces que es necesario recurrir al cruce esviado.

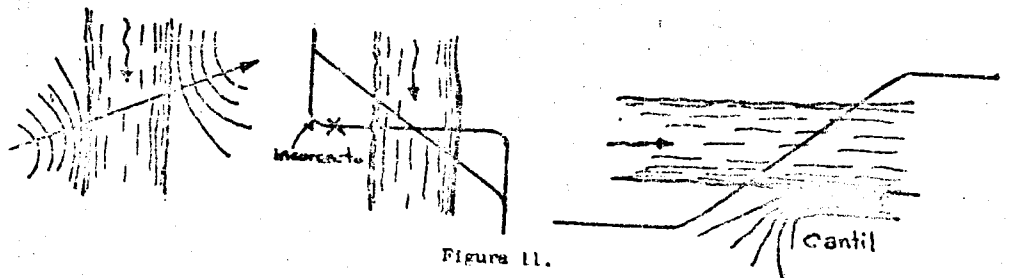


Figura 11.

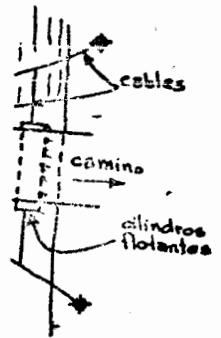
El esviamiento puede ser hacia la derecha o hacia la izquierda, según el sentido del cadenasamiento del camino.

Quando el alineamiento no se puede modificar, debido a la topografía y al curso del río, no queda otro recurso que hacer un cruce esviamado.

Antiguamente si una vía o camino corría paralelamente a un río y era necesario cruzarlo, se prefería hacer un cruce normal. Esto resulta muy peligroso debido a la poca visibilidad. Es preferible hacer un cruce esviamado. (Ver figura 11).

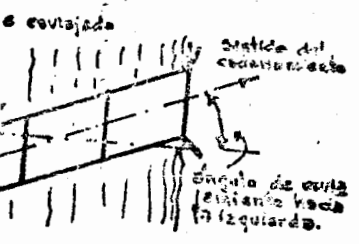
Si un camino corre paralelamente a un río y se encuentra un cantil muy largo, de manera que resulte antieconómico hacer un tajo, se pasa el camino a la otra orilla mediante un cruce esviamado. Si los cantiles se van alternando en una y otra margen, se les evade mediante cruces esviamados sucesivos.

- 2o).- Por su alineamiento: En tangente
- En curva: vertical
- horizontal
- En pendiente



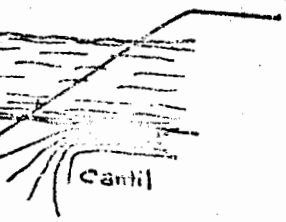
clasificaciones:

- normal.
- esviamado.



cular a la dirección de la -

as pilas y los estribos tam-  
r de ello hay veces que es--



En general se prefiere que los puentes queden en tangente y a nivel; esto no excluye que a veces sea necesario construirlos en curva con pendiente, con características combinadas, etc.

2o).- Según el material empleado:

- De madera
- Mampostería: Piedra
- Tabique
- Concreto simple.
- Concreto armado.
- Concreto armado
- Fierro estructural
- Cables metálicos.

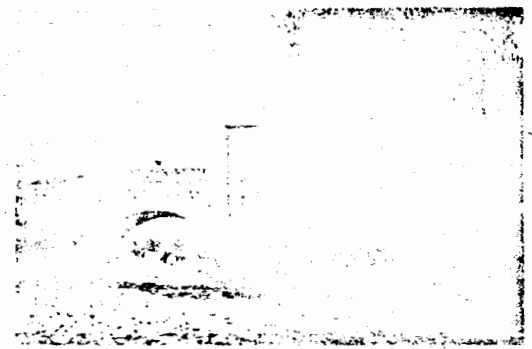
Si se trata de obras provisionales, los puentes deberán hacerse con los materiales disponibles en el lugar, para evitar costos de acarreo.

Los puentes provisionales de madera se deben hacer para una sola línea de tránsito, y que posea señales adecuadas, para evitar colisiones. La madera se encuentra en el mismo desmonte del terreno; si es creosotada, el puente dura de 5 a 8 años.

La estructura usual de los puentes de mampostería son los arcos (hay arcos de medio punto y arcos rebajados).- Ver fotos páginas 9 y 11.

Los arcos requieren costosos, porque la obra falsa es complicada y su construcción es lenta. Se requiere mano de obra especializada.

Ya construido, el puente tiene el defecto de represar la corriente, por la palizada de los objetos que se atoran en los arcos durante las avenidas.



Fuente de mampostería.- Doble arco de medio punto.- Radio de intradós: 2.50 m. aproximadamente.- Camino vecinal al poblado de Mexitepec, Méx.- Cruce con el río Játitepec, afluente del Lerma.- Vista hacia aguas abajo.

En una serie de arcos, si falla uno se pueden caer todos los demás debido al efecto fuerte. La combinación de arcos en una pilastra da una resultante vertical. Si falla un arco la resultante puede salirse de la base.

Para evitarlo se construyen pilas robustas, capaces de admitir un solo arco. - Esto último, naturalmente, repercute en el costo.

Hay sitios, como en Tabasco, en que se carece de piedra y de grava; luego, pueden hacerse puentes de tabique o ladrillo.

El concreto ciclópeo se emplea en las obras bastas, como pilas y estribos. Más o menos lleva un 30 % de piedra, ya que el concreto debe envolver completamente cada piedra.

Con el concreto armado se salvan claros más grandes y se pueden construir traveses muy largos.

Los cables metálicos se usan en puentes colgantes de grandes claros. Su empleo resuelve muchos problemas de tránsito.

4c).- Según su tamaño: alcantarillas  
puentes  
viaductos

La alcantarilla es un puente pequeño, con un claro no mayor de 6 m. Se construye debajo de un terraplén, para dar paso al agua. A veces, la losa de la alcantarilla coincide con la rasante (no lleva relleno).

Hay alcantarillas simples y múltiples, y es frecuente el empleo de arcos como alcantarillas.

Otro tipo de alcantarillas, formadas por cajones de concreto armado, se construyen en terrenos fangosos. Están constituidas por pilas y estribos de concreto armado y llevan una losa inferior y otra superior, formando un cajón.

La figura 12 representa la sección típica de una losa de concreto armado para alcantarilla, empleada cuando el claro es menor de 6 m.

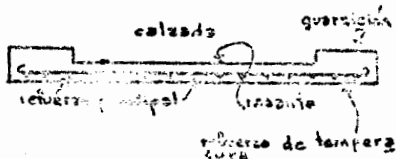


Figura 12.

Los puentes son estructuras con claro mayor de 6 m. Como se está viendo en esta exposición, hay una gran variedad de tipos.

Los viaductos son estructuras colosales, de grandes claros y gran altura, --

Puente sobre el río Tequisistlán, Oax., Carretera Oaxaca, Cd. Cuautémoc, 38 km. antes de Tehuantepec. Vista desde la margen derecha. Tiene 15 claros con una luz de 14 m. cada uno.

er todos los demás debido al co  
una resultante vertical. Si fa

exclusivamente para ferrocarriles.

Antes se construían viaductos de madera con caballetes de madera. Ya no se hacen más porque están muy expuestos a incendiarse.

507.- Por su altura: altos  
medianos  
bajos.

ces de admitir un solo coceo. -

pedra y de grava; luego, pue -

as, como pilas y estribos. Más  
olver completamente cada pie

es y se pueden construir tra -

de grandes claros. Su empleo -

no mayor de 6 m. Se constru-  
a losa de la alcantarilla

te el empleo de arcos como -

concreto armado, se constru-



Camino vecinal Toluca.- Otzolotepec.- Cruce con el río Lerma.- Vista desde la margen derecha y hacia aguas arriba.- Al frente se tiene un elemento claro de un puente bajo.- Construída recientemente, la obra permite que en avenidas el agua pase por encima del puente de concreto. El tránsito regular se realiza por el puente viejo de mampostería que se ve al fondo, formado por dos arcos rebajados.

Los puentes altos y los medianos se construyen así por uno de estos dos motivos:

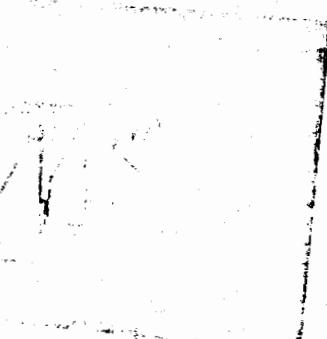
- a).- Necesidad de cruzar una depresión profunda del terreno
- b).- Necesidad de elevar la rasante para dar paso a las embarcaciones (návicas navegables).

En los puentes bajos solamente se da el espacio libre necesario para el paso de cuerpos flotantes.

60).- De acuerdo con la posición del piso en la superestructura los puentes pueden ser: de paso inferior, de paso a través o de paso superior.

La mayoría de las veces, sobre todo en los puentes pequeños, se tiene el tipo de paso superior.

La sección más sencilla es una losa de concreto armado, con sus guarniciones, que se emplea en claros de 1 a 6 m.- Ver figura 12.



Tequisistlán, Oax.- Carretera  
100, 36 km. antes de Tehuante-  
margen derecha. Tiene 15 cla-  
4 m. cada uno.

La siguiente sección es una losa de concreto apoyada sobre viguetas I. Aquí la losa trabaja en sentido normal al eje mayor de las viguetas. Deben ponerse dos parrillas de refuerzo principal para simplificar y no tener que doblar el fierro en los tramos de momento negativo. Este diseño es útil en claros de 5 a 15 m.

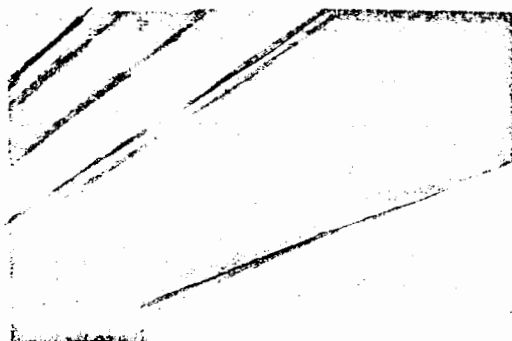
Viene después la losa de concreto apoyada sobre traves de concreto, que se emplea en claros de unos 6 a 20 metros.

En la fotografía se distinguen claramente los siguientes elementos: parapeto, parte inferior de la guarnición, losa de concreto, tres traves de concreto, diafragma de concreto para contraventeo, corona de la pila y parte superior del cuerpo de la pila de mampostería.



Figura 13

Las tres secciones citadas son de paso superior. Veamos ahora una de paso inferior.



Consiste de una losa de concreto, con refuerzo principal paralelo al eje longitudinal del puente. Esta losa va apoyada sobre una serie de viguetas I que se llaman piezas de puente.

Los extremos de las piezas de puente, a su vez, van remachados, mediante ángulos, el alma de los traves remachados que constituyen el apoyo final de este conjunto.

La guarnición es un poco más chica que en las secciones anteriores.

El refuerzo de temperatura va en la masa de

concreto, o sea en medio de la losa.

Como el sistema de paso ocupa la parte inferior del puente, en relación con la superestructura, se le llama puente de paso inferior.

En puentes para ferrocarril se tiene una sección equivalente, según se ve en la figura 15.

Los durmientes se colocan encima de los largueros, y estos se apoyan en las piezas de puente.

El guardarriel es una pieza de madera de 6" x 6", que corre a lo largo de las cabezas de los durmientes; cada durmiente va sujeto al guardarriel por medio de un perno, que lleva su tuerca y su arandela; se forma así una parrilla rígida, que no se mueve ni se afloja con la vibración.

Los contrarrieles son otros rieles, que se ponen en la parte inferior de la vía, para evitar que se zafen las ruedas y el tren se vaya al abismo.

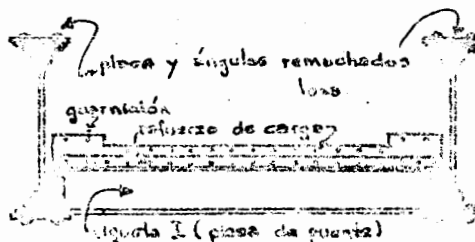


Figura 14.

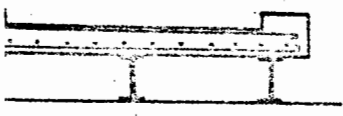


Figura 13

quientes elementos: parapeto, parte de concreto, diafragma de concreto-- cuerpo de la pila de mampostería. Secciones citadas son de paso superior ahora una de paso inferior.

de una losa de concreto, con re-- principal paralelo al eje longitudinal. Esta losa va apoyada sobre viguetas I que se llaman pie-- mente.

mos de las piezas de puente, a su-- remachados, mediante ángulos, el -- as traves remachadas que constitu-- oyo final de este conjunto.

ción es un poco más chica que en -- ones anteriores.

zo de temperatura va en la masa de

el puente, en relación con la su--

equivalente, según se ve en la fi--

, y estos se apoyen en las piezas--

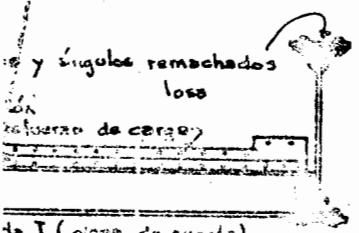
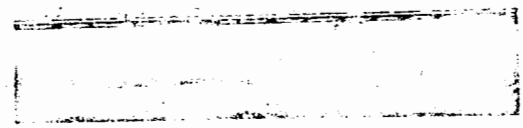


Figura 14.

Para claros mayores las traves remachadas se sustituyen -- por armaduras completas. Para -- que estas armaduras resulten eco-- nomicas, se ha visto que el peralte debe ser de  $1/5$  a  $1/9$  del claro, de manera que hay ocasiones en -- que la limitación impide contra -- poner las armaduras en la parte -- superior, pues se impediría el pa -- sado de los vehículos carga -- dos o de los vagones.

Así pues, el contraven -- teo se hace en el plano inferior, a la altura del cordón inferior -- de la armadura.

Se utiliza para ello una serie de ángulos colocados diagonalmente; su eficacia es mediana. -- Véase foto.



Puente en el cruce de la carretera Oaxaca-Tuxtla Gu -- tierrez, con el río Chicapa. -- La longitud de tramo -- es de 15 m. y el peralte de las armaduras de 2 m. -- Debido a esto, es imposible contraventearlas por la -- parte superior. El contraventeo inferior se distin -- gue claramente.

Otra disposición que puede tener un puente carrete -- ro de paso superior es la de -- una losa de concreto armado -- apoyada sobre traves remacha -- das. Estas traves deben ir con -- traventeadas tanto transversal -- mente como horizontalmente. -- Véase figura 17.

13.

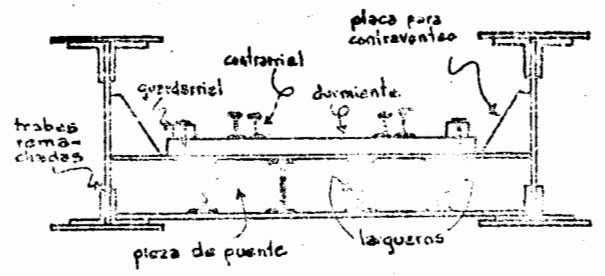


Figura 15.

Si el claro es mayor el peralte aumen -- ta y se rebasa el tamaño del vehícu -- lo, con lo que ya es posible poner -- el contraventeo en la parte de arri -- ba.

Los tableros del centro llevan doble diagonal para que trabajen sólo a la tensión, pues la armadura invierte -- los esfuerzos.

Cuando los claros son muy grandes es posible tener el diseño de paso a tra -- vés, tanto en puentes carreteros como en puentes de ferrocarril, cuando se -- emplean armaduras en la superestructu -- ra.

En esencia, las dos secciones son se -- mejantes, constituidas por las armad -- ras, las piezas de puente y los con -- traventeos y largueros.

Lo que cambia es el sistema de piso: -- durmientes, rieles y contrarrieles en el caso del ferrocarril y losa de concreto, guarnicio -- nes y pavimento en el caso del puente carretero.

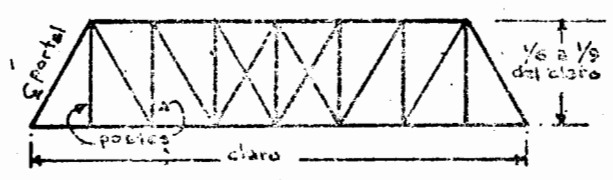
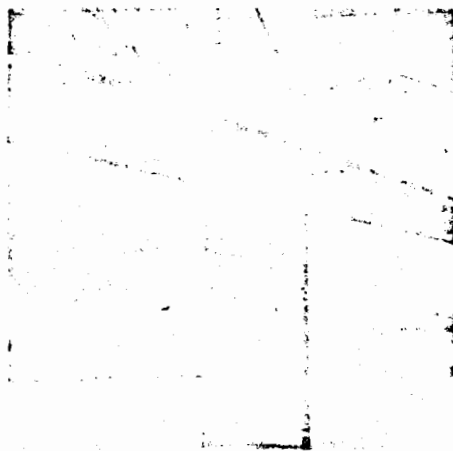


Figura 16.

Puente El Capomal, en el cruce de la carretera Tepic-Mazatlán, con el río Santiago. - Tiene 300 m. de longitud total. - La distancia entre pilas es de 56 m. y la separación entre postes de 7 m. - Consta de 5 armaduras y de dos tramos de acceso de paso superior.

Nótense el contraventeo superior de las armaduras, los parapetos, las guarniciones, etc.

En la segunda vista de este mismo puente se perciben claramente: el parapeto, la losa de concreto, las piezas de puente, los largueros y el



Su disposición es semejante a la de la figura 17, pero las traveses dan más juntas y, por supuesto, el sistema de piso es distinto (durmientes, rieles, contrarrieles y guardarrieles).

El contraventeo transversal de las traveses remachadas es indispensable, ya que, como su patín es muy chico, están expuestas a voltearse con una vibración algo fuerte.

Véase en seguida un puente para ferrocarril, de paso superior, apoyado sobre armaduras.

-14-



contraventeo del plano inferior. Véase que a cada nudo inferior de las armaduras corresponde una pieza de puente.

La losa es recibida por las traveses remachadas y queda sujeta a momentos positivos y negativos. Como los momentos y fuerzas cortantes son fuertes se doblan las varillas de refuerzo.

Las traveses remachadas están formadas por un gran palastro, ángulos y cubreplacas.

También se debe mencionar el puente de ferrocarril, de paso superior, con traveses remachadas.

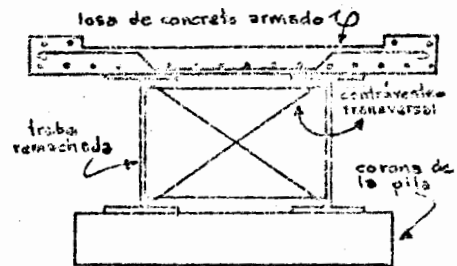
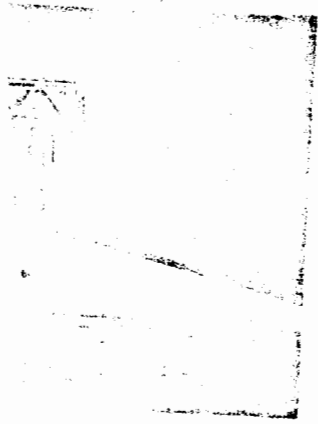


Figura 17



Ferrocarril Tepic-Mazatlán.- Puen-  
te Yago, sobre el río Santiago.-  
Paso superior, sobre traveses rema-  
chados.-  
Las rayitas que se ven sobre el -  
balastro son las sombras de las -  
cabezas de los durmientes.- Se ve  
también el contraventeo transver-  
sal en el plano inferior.- Las pi-  
llas son de concreto y una de e-  
llas ha empezado a fallar.- Para  
protegerla se aisló con ataguías  
de acero y se puso además un apo-  
yo auxiliar de pilotes de madera.  
Este puente tiene una longitud --  
total de 798 m.- Al fondo, a la  
izquierda se ven unas armaduras -  
que son las mismas que aparecen -

en la foto de la página 25.

no inferior. Véase que a -  
las armaduras corresponde-

ida por las traveses remacha-  
momentos positivos y nega-  
tivos y fuerzas cortantes -  
en las varillas de refuer-

adas están formadas por un  
s y cubreplacas.

encionar el puente de fe -  
perior, con traveses remacha

En este caso, el contraventeo --  
transversal cubre en el plano in-  
ferior y la pieza de puente va -  
arriba.

Las cuerdas de la armadura están  
formadas por dos canales y cubre  
placas.

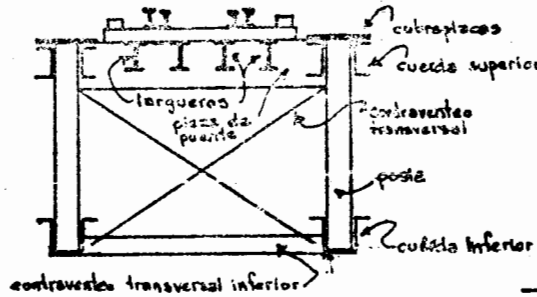


Figura 18

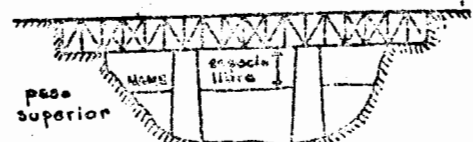
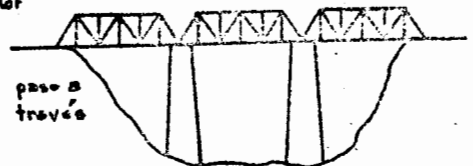


Figura 19

Excepto el sistema de piso, la disposi-  
ción es la misma que para un puente carretero de--  
paso superior apoyado sobre armaduras.

Ya se dijo que una armadura de claro pe-  
queño tiene un peralte también pequeño y el contra-  
viento no se puede hacer por arriba. En este caso,  
se puede emplear un puente de paso superior. Se re-  
bajan los cantiles, para formar un escalón que de-  
un buen apoyo al puente.

La comparación de las dos soluciones da-  
das en la figura 19, indica que si una barranca es  
muy ancha debe preferirse, por económico, el puente  
de paso superior, a condición de que el espacio -

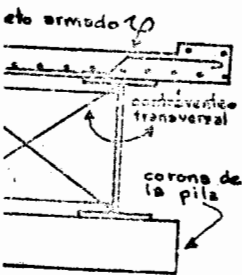


Figura 17



16.

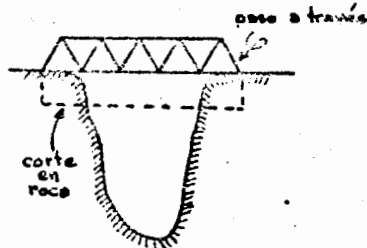


Figura 20

libre que deje sea satisfactorio.- La razón de esto es que las pilas resultan más chicas.

En una barranca angosta en terreno rocoso no nos vendría el puente de paso superior, pues el corte en roca resultaría muy caro. Luego, preferiríamos el puente de paso a través.

A propósito de economía, es conveniente mencionar aquí, aunque sea brevemente, la forma en que se elige el número de tramos que debe tener un puente. En general, dicha elección depende del renglón costo.

Se comprende que a mayor número de tramos, la superestructura resulta más liviana por cubrir claros menores, y en consecuencia cuesta menos.

Contrariamente, se tendrá un mayor número de apoyos y el precio de la infraestructura aumentará. En general, el costo unitario de pilas y estribos es más o menos constante

Así, se puede hacer una estimación de costos separados, para salvar una misma anchura de barranca, considerando un número de tramos variable. Los resultados obtenidos se llevan después a una gráfica como la de la figura 21.

La curva que da el costo total nos indicará, en su punto inferior, el número de tramos que debe tener el puente para que su costo sea mínimo.

Si una barranca es profunda las pilas resultarán muy altas y convendrá poner pocas; esto indica que se tendrán claros grandes. Por el contrario, en una barranca plana y muy ancha no importará mucho poner algunas pilas más y por tanto se tendrán claros chicos. Así pues, cuando una infraestructura resulta muy costosa, por alta, por gran excavación, etc., se prefieren los tramos grandes, aunque a su vez aumente el costo de la superestructura.

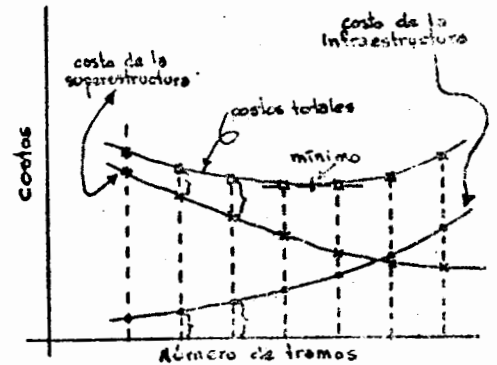


Figura 21

En la práctica se presenta con frecuencia el cruce de un cauce lenticular, con un gran tirante en el centro, que va reduciéndose hacia las márgenes del río. En el centro se construye una armadura de paso a través, o varias si la zona honda es muy ancha. Como se ve, lleva traveses remachados en el

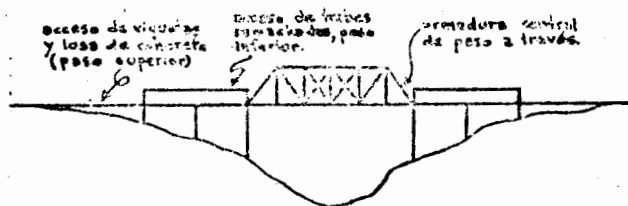


Figura 22.

so inferior y en las orillas losa de concreto sobre vigueta.

En el tramo central el claro o claros son grandes; hacia los extremos se reduce el claro, la importancia y el costo de las estructuras.

es satisfactorio.- La razón de estos resultados son más chicas.

angosta en terreno rocoso no nos conviene de paso superior, pues el corte es muy caro. Luego, preferiríamos el paso a través.

onomía, es conveniente mencionar brevemente, la forma en que se elige los que debe tener un puente. En general depende del renglón costo.

superestructura resulta más liviana, los apoyos y el precio de la infraestructura es más o menos constante.

parados, para salvar una misma anchura.

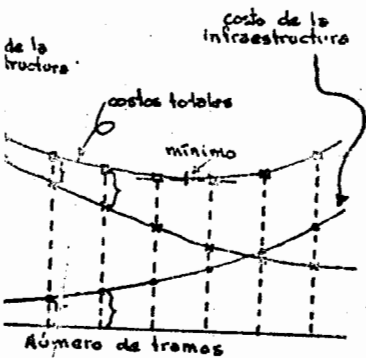
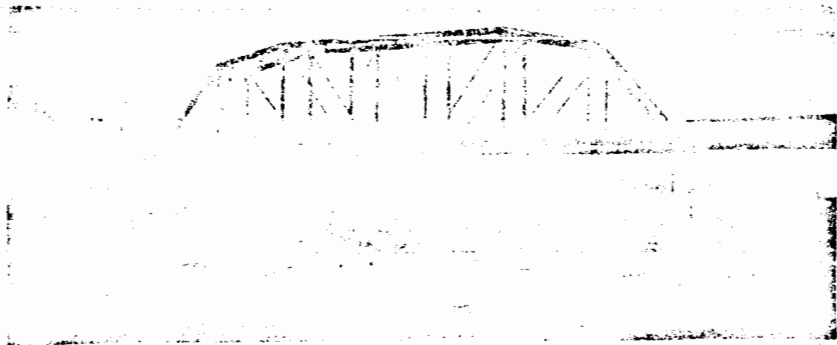


Figura 21

de un cauce lentiginoso, con un régimen del río. En el centro se encuentra la zona más profunda y en los extremos es muy ancha. Como accesos se llevan traveses remachados de paso inferior y en las orillas se construyen losas de concreto sobre viguetas.

En el tramo central el claro o claros son grandes; hacia los extremos se reduce el claro, la importancia y el costo de las estructuras.



Fuente de Villa Cardel, Ver.-Cruce del Ferrocarril con el río de La Antigua, Vista desde la margen derecha, hacia aguas arriba. Luz entre el estribo izquierdo y la pila: 18 m.- Distancia de centro a centro de pilas: 65 m.- Es un ejemplo de puente con accesos de traveses remachados y armadura central de paso a través.- Atrás de la pila derecha se ven los restos de la antigua superestructura, que fué dinamitada en la época revolucionaria.

Para cruzar una barranca en forma de embudo se acostumbra emplear sólo secciones de paso superior, pues resultaría antiestético que hubiera declives de paso inferior a superior, o viceversa.

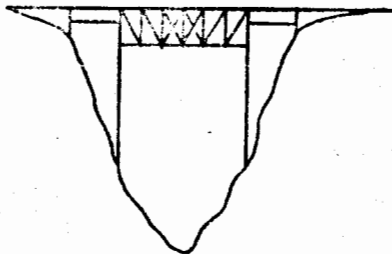


Figura 23.

Los claros, los peraltes de las superestructuras y los costos son variables.

Prosigamos con la clasificación de los puentes.

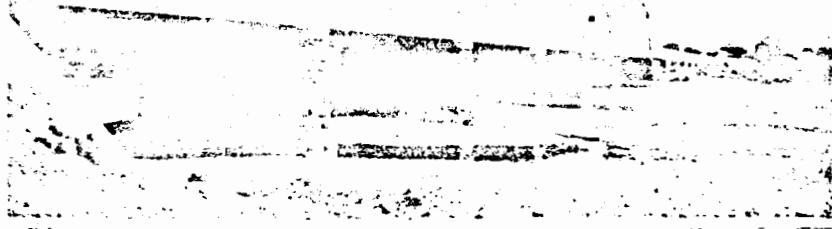
- 7).- Por su uso: para caminos  
para ferrocarriles  
puentes mixtos (para caminos y ferrocarriles)  
puentes canales  
puentes para peatones (a veces banquetas en voladizo)

Los puentes mixtos sirven para caminos y para ferrocarril. Si cada uno tiene su propia línea de paso el puente resulta más ancho y costoso.

Cuando el tránsito de ferrocarriles es muy escaso (uno o dos por día) se puede usar un puente de ferrocarril para caminos, protegiendo el paso con guardavías y poniendo señales.- Todo puente cercano a sitios habitados debe llevar paso para peatones, especialmente cerca de ciudades grandes.

- 8).- Por su duración: provisionales  
definitivos.

Un puente provisional se hace con materiales de la región y da un paso elemental a la vía que se está construyendo.



Puente definitivo.- Km. 647 de la carretera México-Ciudad Victoria.- Sobre el río Guayalejo.- Apoyado en 2 estribos y 16 pilas de mampostería. 16 claros están cubiertos con traveses remachados y en el central se tiene una estructura de paso a través.

90).- Por su condición: Puentes fijos: provisionales o definitivos  
 Puentes móviles: basculantes  
 giratorios  
 levadizos  
 sumergibles  
 Puentes desmontables: enhuacalados  
 de caballetes  
 con flotadores  
 traveses de celosía  
 tipo Bailey

En los puentes fijos, que pueden ser provisionales o definitivos, la superficie -- de rodamiento es inmóvil.

Hay ocasiones en las que un camino tiene que salvar un curso de agua con tránsito de embarcaciones. Si este tránsito es muy intenso hay que dar paso permanente a los barcos; se construyen rampas de acceso para elevar la rasante del camino y un puente definitivo de altura conveniente.

Si el tránsito fluvial es reducido la solución es instalar un puente móvil, de los que hay varios tipos.

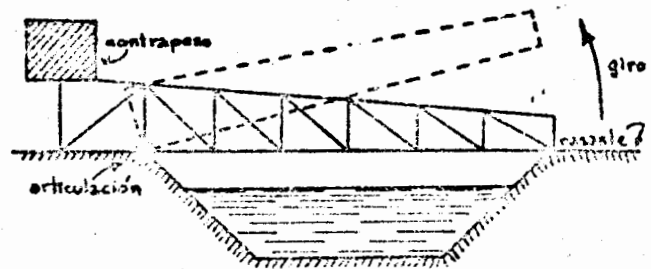


Figura 24.

da un paso elemental-

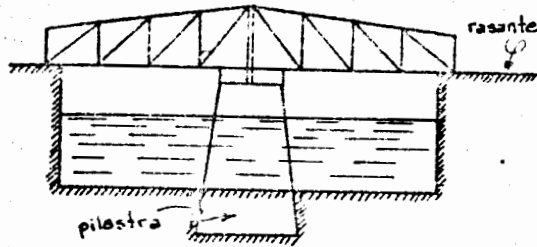


Figura 25

a).- **Basculante.**- Puede ser de una o de dos hojas, según sea el ancho del puente. Cada hoja tiene una articulación y un contrapeso. Para dar paso a las embarcaciones no es necesario levantarlo totalmente, sino de acuerdo con el tamaño del buque que vaya a pasar.

b).- **Giratorio.**- El puente giratorio tiene en el centro una gran pilastra, que le sirve de apoyo y de eje de giro.

Está indicado cuando se tienen claros grandes. Gira 90° en un plano horizontal, y los barcos pasan a uno y otro lado de la

pila, cuya sección recta es circular.

Tiene el inconveniente de que, aunque sólo vaya a ocuparse un lado del río para que pase una embarcación, necesita girar 90° de todos modos. Además, como la pila central es una mole enorme, constituye un obstáculo y un peligro; llegan a ocurrir accidentes, por choque de los buques contra la pilastra.

c).- **Levadizo.**- Consiste de una trabe remachada, con gúfas en sus extremos. Sobre ella se apoya el sistema de piso y el conjunto se puede levantar o bajar a voluntad, según se vaya a dar paso por el río o por el camino.

El sistema para mover el puente es complicado. Se requieren grandes torres, cables, grúas, etc.

d).- **Sumergibles.**- En lo esencial es muy semejante al levadizo, sólo que al dar paso a los barcos el puente se hunde en el agua en vez de quedar suspendido en el aire. Esto es un inconveniente, porque no se puede saber qué material de arrastre lleven las aguas.

Su valor estratégico es bueno, pues se sumerge, se disfrazan los accesos y queda protegido contra los bombardeos, para efectuar el tránsito por la noche.

En general todos estos puentes son muy costosos y se requieren grandes maquinarias para moverlos. En realidad es más maquinaria que puente.

Los puentes desmontables enhuacalados están constituidos por durmientes y travesas. Se arman rápidamente, se les usa un corto tiempo y después se desmontan y se llevan a otra parte.

Los de caballetes generalmente son metálicos, pero también hay de madera; tienen una base y una corredera. Se pueden emplear en cualquier sitio y en cualquier cauce.

Los puentes con flotadores están formados por grandes cajas de madera u otro material, con un cabe

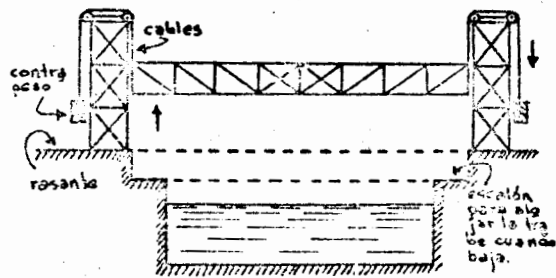
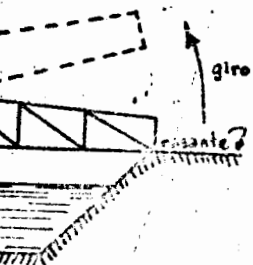


Figura 26.

lad Victo  
16 pilas  
machadas  
is.

ivos, la superficie --



zal para apoyo de los largueros. El tránsito se hace con cierta lentitud. Al venir una crecienta se recogen desde una orilla. (Ver Página 8.).

El puente de celosía no requiere excavación, y se puede montar con grúa.

El Puente tipo Bailey se le ocurrió a un militar "al abrir una caja de cerillos". Está formado por una serie de tableros, que tienen pernos para poner las piezas de puente. El sistema de piso es de madera.

Se va armando en una orilla y se lanza a la opuesta por medio de grúas, cables y contrapesos.

Se monta sobre rodillos y se procura que al llegar a la orilla que se pretende al canzar quede un poco más alto de lo necesario; se quitan entonces los contrapesos, bascula alrededor de los rodillos y cae y se acomoda en la orilla.

Y para finalizar con la clasificación de los puentes:

10).- Según su anchura e importancia: para una vía de comunicación  
para varias vías de comunicación.

Generalmente los puentes provisionales se hacen para una sola línea.

En caminos importantes y sobre todo cerca de ciudades importantes el puente da cabida a varias vías; tranvías, ferrocarriles, peatones, etc.

Algunos puentes se aprovechan para apoyar conductos especiales en donde van cables telefónicos, tuberías de petróleo, etc.

#### PASOS A DESNIVEL.

Actualmente, sólo en caminos de segundo orden se hacen pasos a nivel.

Si dos vías de comunicación se cruzan, para evitar accidentes y pérdida de tiempo, debe construirse un "paso a desnivel". Para ello hay que tener en cuenta a la vía que tenga prioridad de paso.

Si se trata de dos ferrocarriles se emplea la luz roja y descarriladores, o bien se construye una rampa que libre la vía inferior.

Si una carretera tiene que cruzar una ferrovía ya construída casi siempre se tiene que hacer mediante un paso superior.

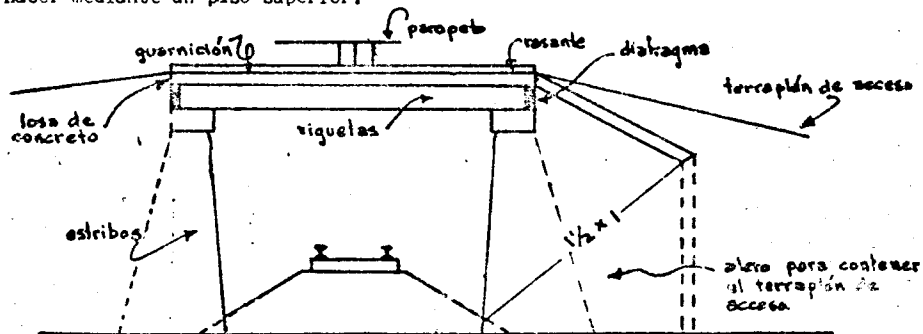


Figura 27.

La figura 27 muestra un paso a desnivel de un solo claro. Tiene el inconveniente que le resta mucha visibilidad al maquinista del ferrocarril.

El cimbrado de la losa de concreto tiene que hacerse de manera que no se estorbe el tránsito de los trenes.

Se advierte que si el terraplén del ferrocarril fuera muy alto este arreglo sería imposible; en tal caso el camino tendría que pasar por debajo de la vía.

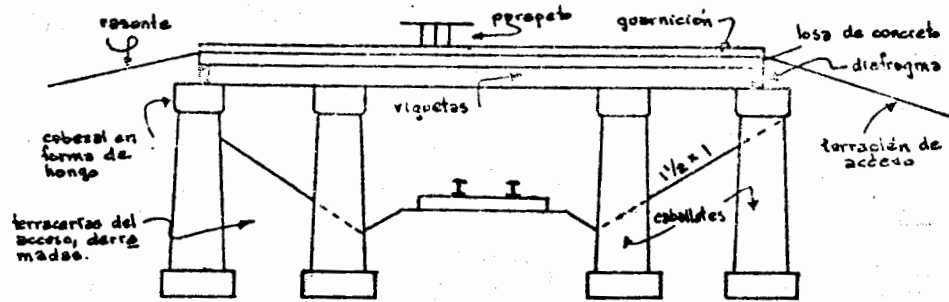


Figura 28.

Este es un paso a desnivel de tres claros; permite una visibilidad mejor y es más estético que el anterior. Las terracerías de acceso se derraman, formando un cono, hasta encontrar al terraplén de la vía férrea.

En general es más económico que el camino pase por encima del ferrocarril; sin embargo, cada problema debe resolverse según sus condiciones.

Cuando se trata del cruce de dos caminos, se busca que la faja de ida y la de vuelta de uno de ellos se crucen libremente con las fajas del otro.

Esto se logra con varios arreglos, de los cuales los más conocidos son el trébol de cuatro hojas y el cruce en Y. Con ellos no sólo se consigue un cruzamiento directo seguro y sin interrupciones, sino una gran cantidad de combinaciones en la circulación.

VIADUCTOS.

Al hablar de la división de los puentes según su tamaño se mencionaron los viaductos, que son estructuras colosales, de grandes claros y gran altura.

Pueden ser de madera, mampostería, concreto o fierro.

Los de madera se apoyan en torres y caballetes, con claros de 5 a 7 m., según la longitud de la madera disponible.

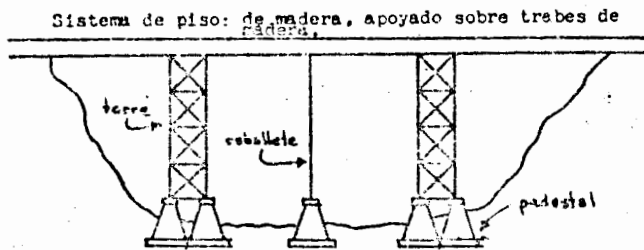


Figura 29.

Al venir una cre-  
ntar con grúa.

una caja de cerillos".  
las piezas de puente.

edio de grúas, cables y-

illa que se pretende al  
s contrapesos, bascula-

unicación  
comunicación.

ola línea.

rtantes el puente da ca

ales en donde van ca --

os a nivel.

tes y pérdida de tiem  
n cuenta a la vía que

escarriladores, o bien-

da casi siempre se tie-

na  
terraplén de acceso

alito para contener  
el terraplén de  
acceso

Recomendación: no poner nunca un apoyo en el centro, porque se ve muy feo. Excepto en barrancas anchas, debe procurarse que el número de tramos sea non.

Como en el fondo de las barrancas hay humedad, debido a filtraciones, etc., las torres y caballetes se deben recibir en pequeñas pilas, llamadas pedestales. Como estos pedestales están anclados, sirven de contrapeso a las torres.

Los caballetes son dos o más columnas, ligadas con travesaños.

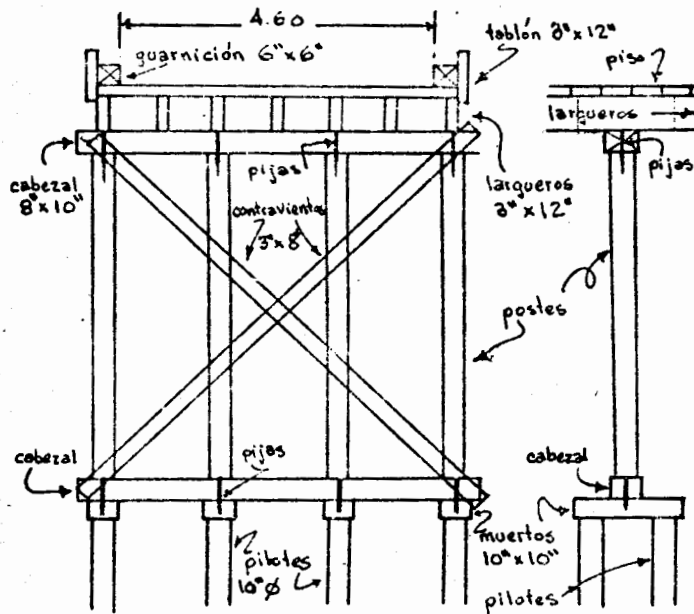


Figura 30

poste; se hacen algo más largos de lo necesario, para que queden pasados.

En la figura 31 se ve otro tipo de caballete, formado exclusivamente por pilotes y contraviento transversal.

Con estos caballetes se tiene la ventaja de que se evita el contraviento longitudinal. Se rellenan, objeto no entren cuerpos flotantes.

En la figura 32, se ha dibujado la vista lateral del apoyo extremo para obra falsa. Caso sencillo de apoyo sobre el piso, mediante un cajón sobre la ladera.

Después, tenemos un estribo de madera completo. Los tabloncillos para retener la terracería son-

Las torres están -- formadas por dos caballetes unidos con contravientos.

Tradicionalmente se ha acostumbrado apoyar el viaducto en torres y caballetes colocados alternadamente; en la actualidad se atreven a poner puros caballetes.

La figura 30 muestra detalladamente un caballete de madera, apoyado sobre muerlos y pilotes.

La cimentación también puede hacerse sobre pilastras de mampostería de pequeña altura (0.50 a 1.00 m); no es conveniente que sean muy altas por que resultarían empujes de tierra algo fuertes.

Por cada pareja de pilotes y su muelto se pondría una pilastro.

Los contravientos -- deben aperrnarse en cada

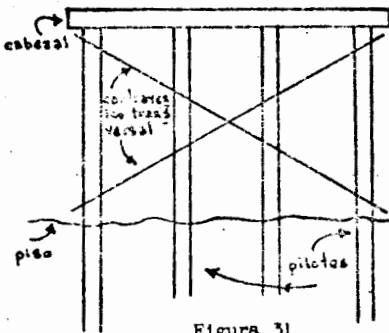


Figura 31

orque se ve muy feo. Excepto non.

filtraciones, etc., las to destales. Como estos pedes.

esaños.

Las torres están -- formadas por dos caballetes unidos con contravientos.

Tradicionalmente se ha acostumbrado apoyar el viaducto en torres y caballetes colocados alternadamente; en la actualidad se atreven a poner puros caballetes.

La figura 30 muestra detalladamente un caballete de madera, apoyado sobre muerlos y pilotes.

La cimentación también puede hacerse sobre pilastras de mampostería de pequeña altura (0.50 a 1.00 m); no es conveniente que sean muy altas por que resultarían empujes de tierra algo fuertes.

Por cada pareja de pilotes y su muerto se pondría una pilastra.

Los contravientos -- deben aperrnarse en cada

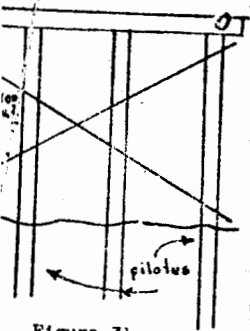
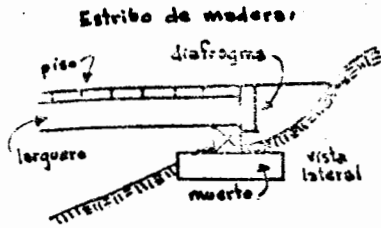


Figura 31



de 3" x 12"; se colocan algo separadas uno de otro, para que la tarima que forman no se pandee en caso de que subinchén con la humedad. Igual se hace con los del piso. (La guarnición da vuelta, de preferencia con un ángulo mayor de 90° para evitar aspecto de tope al entrar al puente).

El estribo queda sometido a un fuerte empuje de tierras; para absorberlo se instalan varios cables de acero y se anclan en un muerto.

Para un estribo de este tipo se necesita mucha madera; para economizar una poca se puede prolongar la superestructura hacia la orilla lo más que se puede.

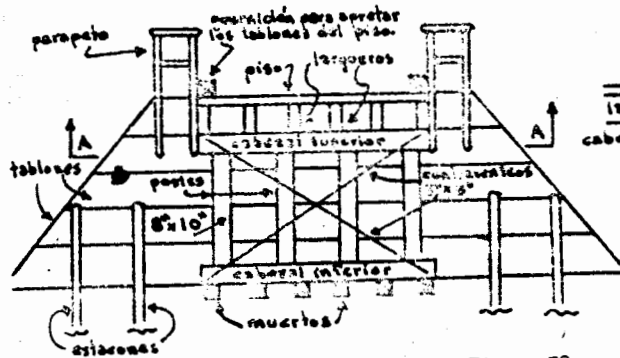
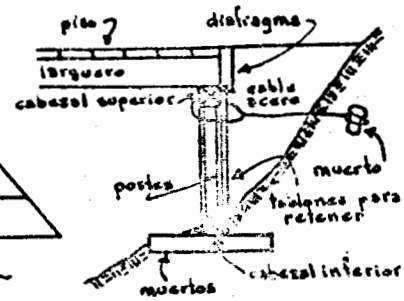


Figura 32



da y entonces instalar un apoyo reducido.

El apoyo reducido comprende del cabezal superior hacia arriba, como se indica con flechas A-A en la figura 32. Va apoyado directamente sobre los muerlos de madera.

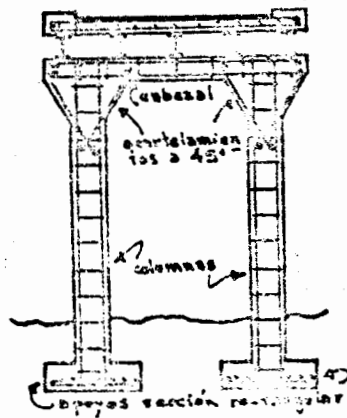


Figura 33

Mencionaremos enseguida los caballetes de concreto.

Si la superestructura está constituida por una losa de concreto apoyada sobre viguetas I puede ser satisfactorio el arreglo que esquemáticamente se muestra en la figura 33.

Para alturas de 3 a 9 m. y claros de 4 a 10 m.

En la figura 34 se muestran otros dos tipos de caballetes de concreto, (ver la siguiente página).

Uno de ellos es para superestructura formada por losa sobre traveses de concreto.



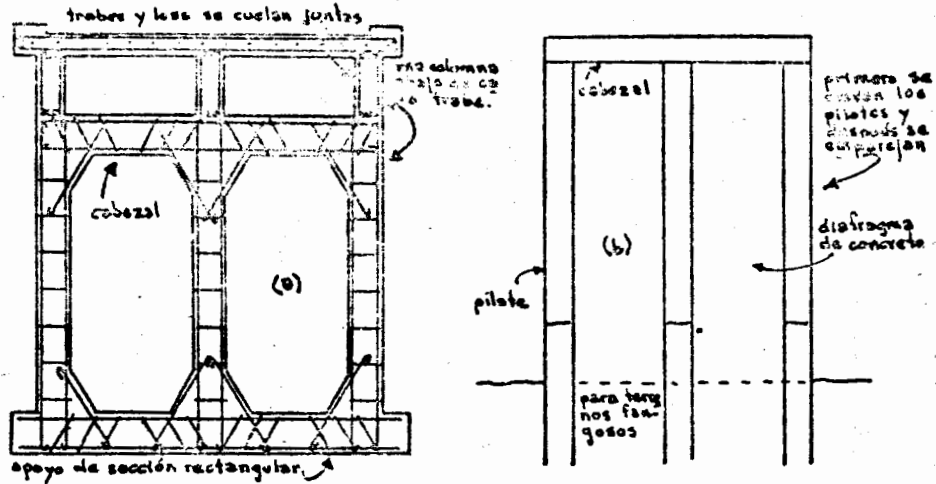


Figura 34.

El otro está formado por pilotes de concreto; requiere contraventeo transversal, - que se logra mediante un diafragma de concreto que va de poste a poste; así, cualquier cuerpo flotante que arrastre una avenida no se atora entré los pilotes y por tanto no daña el ca- ballete.

Otro tipo de caballete es el que se hace con cilindros de palastro soldados. Se emplean cuando hay que soportar grandes car- gas.



Puente de ferrocarril en Cd. Ixtepec, Oax.- Río de los Ferros, desde la margen izquierda y hacia aguas arriba.- A la derecha, apo- yo de cilindros de palastro.- Detalles impor- tantes: en curva horizontal y con voladizo- para peatones hacia el lado de aguas abajo.

Se hincan en el terreno siguiendo el - procedimiento de los pozos indios. Debe cui- darse que queden perfectamente verticales, - ya que después es muy difícil enderezarlos.- Al hacer la excavación el cilindro debe es- tar lleno de agua, para evitar presiones hi- drostáticas y porque sirve como lubricante.

Pueden trabajar como pilotes, por fric- ción contra el terreno; por apoyo directo -- contra una capa resistente o combiadamente.

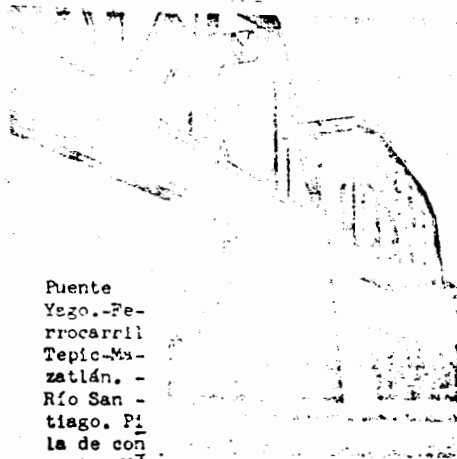
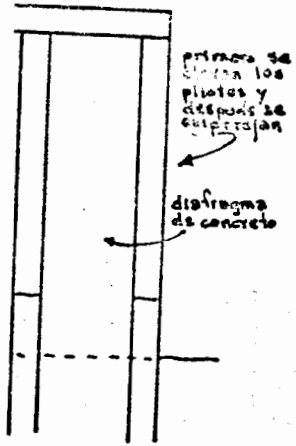
Una vez terminado el hincado del cilin- dro se rellena de concreto y se tapa.

dibujo

cales;

emboli  
cenas  
m. d.

pi  
radio  
ter



Puente  
Yago.-Pe-  
rrocarril  
Tepic-Ma-  
zatlán. -  
Río San -  
tiago. Pi-  
la de con-  
creto. No  
tese que esta pila no tiene corona.  
Se ven claramente los dos tallameres.

contraventeo transversal, -  
poste; así, cualquier cuer-  
s y por tanto no daña el ca-

de palastro soldados. Se -  
que soportar grandes car-

el terreno siguiendo el -  
los pozos indios. Debe cui-  
perfectamente verticales, -  
muy difícil enderezarlos. -  
ción el cilindro debe es-  
para evitar presiones hi-  
que sirve como lubricante.

ar, como pilotes, por fric-  
reno; por apoyo directo -  
sistente o combinadamente.

nado el hincado del cilin-  
concreto y se tapa.

PILAS.-

Se llama así a los apoyos intermedios de los puentes. En la hoja 45 se tiene el dibujo detallado de una pila de mampostería.- Consta de corona, cuerpo y cimiento.

Los taludes de los paramentos normales a la dirección del tránsito son casi verticales; generalmente de 1:10 a 1:20.

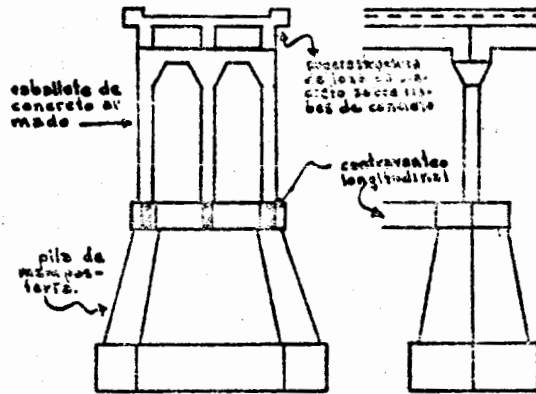


Figura 35.

Sobre la corona se colocan unas placas de apoyo, cuyo objeto es transmitir las cargas en mejores condiciones.

Es esencial que la pila tenga sus tallameres. Son dos quillas, que sirven para abrir las aguas (la de arriba); la otra es para cerrar las aguas.

En el caso de tener que salvar grandes alturas puede emplearse una estructura combinada que resulta económica. Consiste de caballetes de concreto (Figura 35), apoyados sobre pilas de mampostería. (Véase figura 53).

Veamos otro tipo de palastro usada en viaductos; se trata de una torre formada por dos caballetes y cada -

uno va anclado en una pile de mampostería.

Las pilas, con una altura de 4 a 5 m. dominan el nivel de aguas máximas. El peso de estas moles impide que el empuje del viento y el cabeceo por tránsito de los trenes -- volteen la torre.

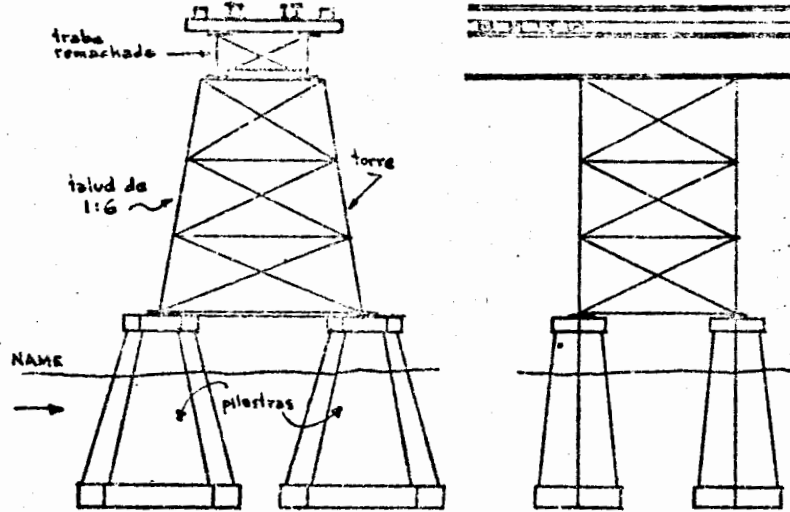


Figura 36

**ESTRIBOS:**

Se llama así a los apoyos extremos de los puentes.

Hay varios tipos de estribos: enterrados en T con aleros en U (mampostería o concreto armado) huecos.

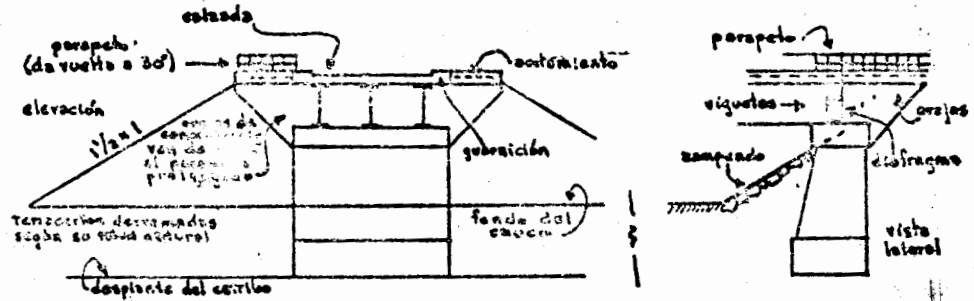


Figura 37

**Estribo enterrado.** - Se le llama así porque no tiene aleros y queda materialmente cubierto por la terracería; por eso es útil en pisos falsos. - Se usa mucho en canales, o en secciones en las que no es posible reducir el área hidráulica.

Para cerrar la salida de la tierra se ponen orejas y sobre ellas se prolonga el parapeto, dándole vuelta a 30°. En general el fondo del cauce queda más alto que el despien

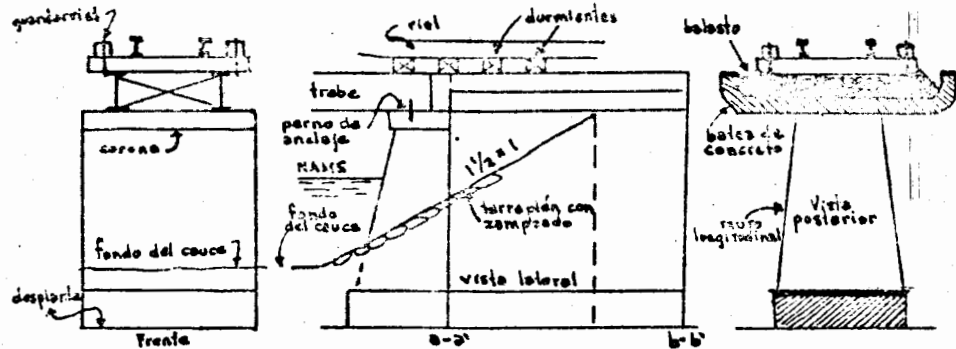
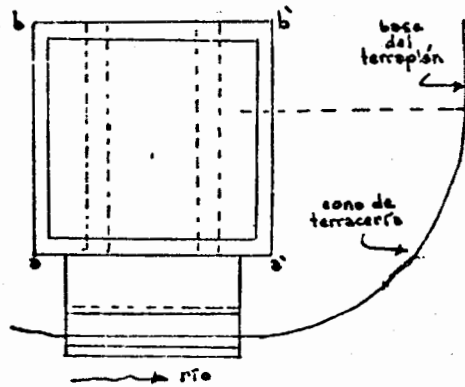


Figura 38

Los estribos T se usan principalmente en ferrocarriles. En planta semejan una letra T.

Al terminar las traveses sigue una batea de concreto armado, que detiene el balasto de la vía y los durmientes. Este balasto va apoyado sobre un muro longitudinal de mampostería o concreto (muro paralelo a los rieles).



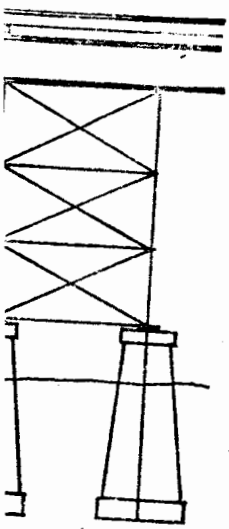
Estribos con aleros.

El cuerpo central del estribo se prolonga hacia aguas arriba y hacia aguas abajo. - Estas prolongaciones están constituidas por muros, cuyo objeto es contener la terracería; se les llama aleros.

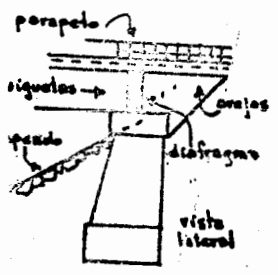
Los aleros forman ángulos de 30° con respecto a la dirección de la corriente.

Arroyo El Guamanero.-Camino vecinal Yago.-El Capomal. Estribos de mampostería con aleros.

l de aguas máximas. El peso  
e tránsito de los trenes --



ito armado)



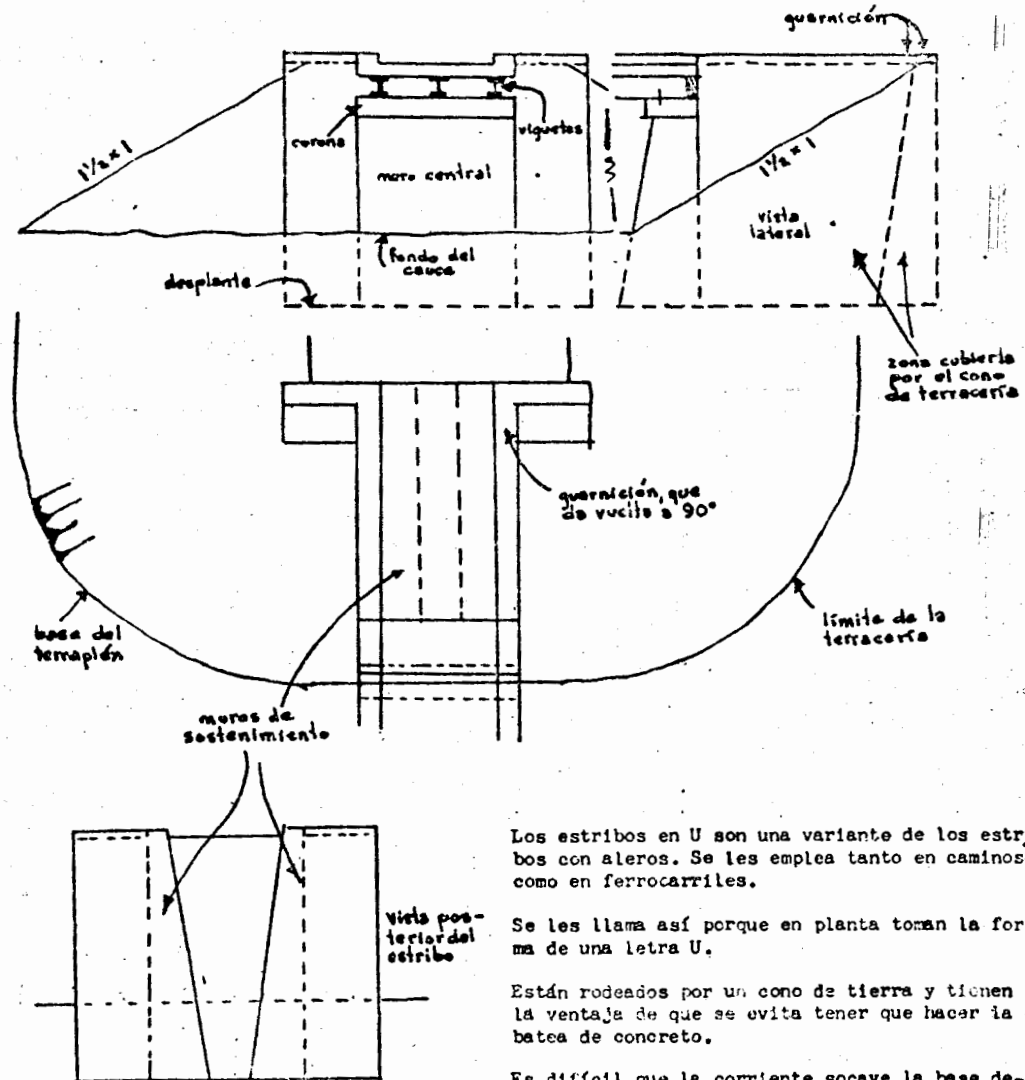


Figura 39

Los estribos en U son una variante de los estribos con aleros. Se les emplea tanto en caminos como en ferrocarriles.

Se les llama así porque en planta toman la forma de una letra U.

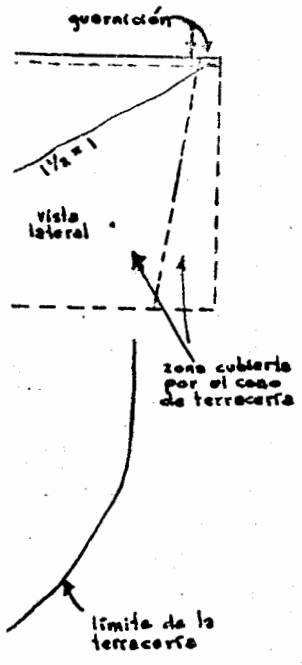
Están rodeados por un cono de tierra y tienen la ventaja de que se evita tener que hacer la batea de concreto.

Es difícil que la corriente socave la base de estos estribos.

Estos estribos deben tener sus paramentos exteriores rigurosamente a plomo; si no fuera así se verían muy mal.

Todos los estribos mencionados hasta aquí trabajan por gravedad y resultan muy anchos y costosos. Estudiaremos enseguida un estribo especial de concreto armado, con tirantes--

que ya entra dentro de la clasificación de:



**Estribos huecos.**

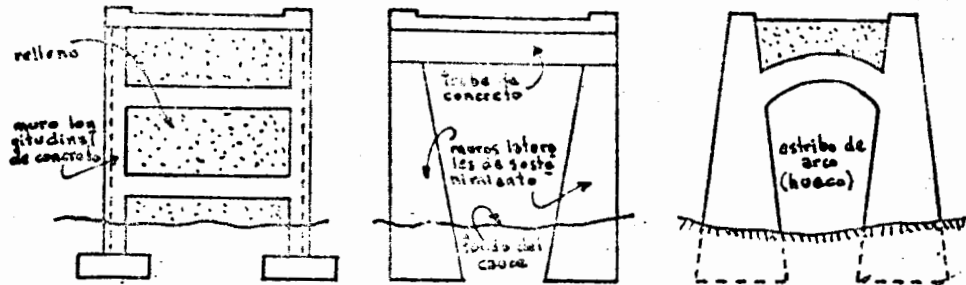


Figura 40

Con los estribos huecos se evita que el relleno se apoye sobre los muros, puesto que no lo hay. Así, no existe el empuje ni el volteo tan temido.

En la figura se ven varios tipos. El primero es una losa de concreto apoyada sobre dos muros verticales longitudinales. El segundo es más económico y consiste de una losa más ligera, apoyada sobre una serie de traves de concreto. Finalmente se ve un estribo hueco en arco, de mampostería.

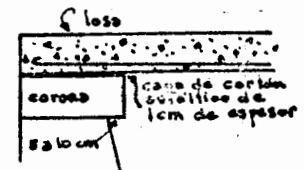


Figura 41

**APOYOS.**

Los apoyos constituyen lo que se llama la subestructura.

La superestructura es la parte resistente que recibe las cargas móviles. Con la subestructura (apoyos) se recibe a la superestructura y se transmiten las cargas a las pilas o estribos.

Según lo ya visto (tipos de superestructuras),

- habrá varios tipos de apoyo: Para viguetas  
Para traves de concreto,  
Para armaduras.

Apoyo de una losa de concreto.

La losa se apoya en la corona a través de una placa o capa de cartón asfáltico de 1 cm. de espesor. (Figura 41)

Apoyo de una superestructura formada por losa de concreto y viguetas:

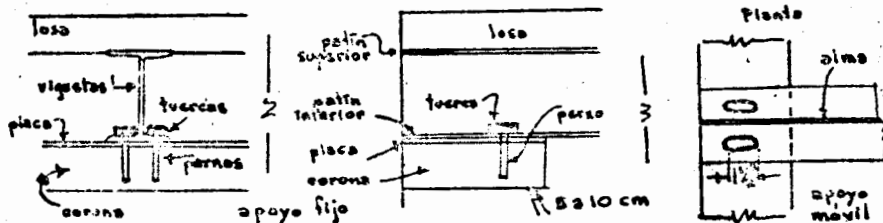
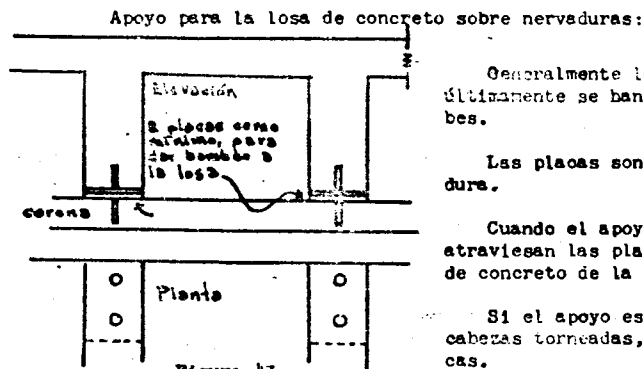


Figura 42.

una variante de los estribos emplea tanto en caminos.  
que en planta toman la forma de cono de tierra y tienen - evita tener que hacer la - riente socave la base de - tener sus paramentos exte - a plomo; si no fuera así - vedad y resultan muy an - eto armado, con tirantes--

El apoyo se hace mediante una placa cepillada que va entre la vigueta y la corona. El anclaje se consigue con pernos de  $7/8"$  p, que llevan tuercas y arandela o roscas; su largo es de 25 cm., de manera que el perno casi atraviesa el espesor de la corona.

Para absorber las dilataciones debidas a los cambios de temperatura cada vigueta-- debe tener un apoyo fijo y otro móvil. El apoyo móvil se logra dando un juego de  $1/2"$  a la placa y a la vigueta.



Generalmente la losa se apoya en 3 o 4 trabes; - últimamente se han hecho proyectos con sólo dos trabes.

Las placas son de un ancho igual al de la nervadura.

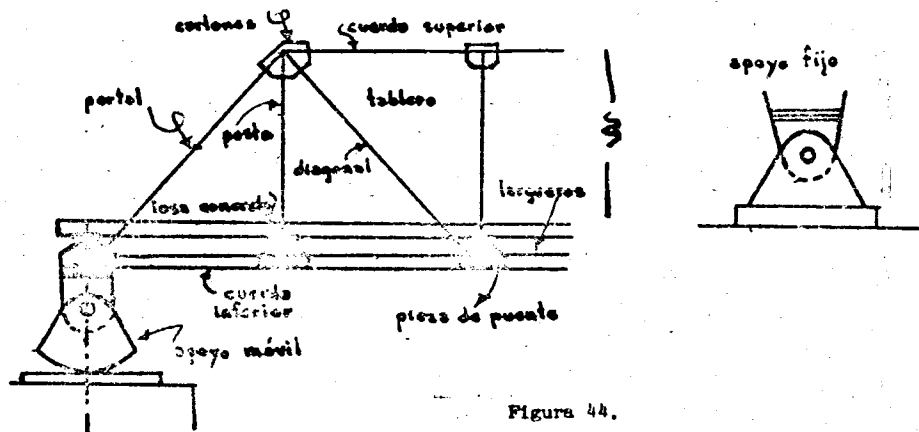
Cuando el apoyo es fijo los pernos de anclaje -- atraviesan las placas y quedan ahogados en la masa - de concreto de la trabe y de la corona.

Si el apoyo es móvil se hace un avellanado con - cabezas torneadas, que quedan embutidas en las pla-- cas.

Las placas se pulen con cepillo hasta darles un acabado perfecto. El sentido del cepillado de una placa debe quedar a  $90^\circ$  con el de la si -- guiente, pues si se ponen en el mismo sentido se traban; en cambio a  $90^\circ$  deslizan.

El apoyo de mecedora produce menos esfuerzo y se usa en estructuras pesadas, como armaduras por ejemplo.

Supongamos que se tiene una armadura tipo Pratt, de paso a través.



entre la vigueta y la corona.  
 arandela o rondana; su lar-  
 r de la corona.

temperatura cada vigueta--  
 ando un juego de 1 1/2" a la

se apoya en 3 o 4 trabes; -  
 proyectos con sólo dos tra-

ancho igual al de la nerva-

Jo los pernos de anclaje --  
 quedan ahogados en la masa -  
 de la corona.

se hace un avellanado con -  
 edan embutidas en las pla--

on cepillo hasta darles un-  
 ar a 90° con el de la si --  
 o a 90° deslizan.

estructuras pesadas, como-

o a través.

Recordemos que debe tener sus piezas de puente, remachadas en la parte inferior -  
 de las columnas o postes. Son grandes viguetas doble T.

Los largueros son vigas de menor peralte que las piezas de puente y se remachan -  
 a las almas de estas.

Los cartones son las placas de palastro que sirven para hacer los nudos. Deben ro-  
 dear tanto al poste como a la pieza de puente y en general tienen la forma de un trapecio.

El objeto de la mecedora es lograr que el movimiento de dilatación se efectúe con  
 el menor esfuerzo posible.

La carga (reacción) se concentra en el pasador, que la transmite a una placa y es-  
 ta a su vez la transmite a la pila.

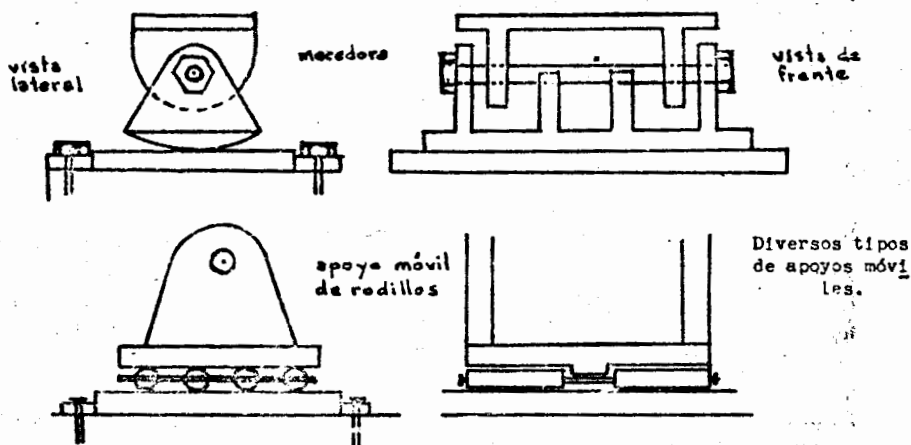
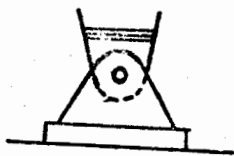


Figura 45.

apoyo fijo





## FUERZAS QUE INTERVIENEN EN UN PUENTE

Un paso importante en el cálculo de un puente consiste en analizar las fuerzas que intervienen en él.

Dichas fuerzas se pueden clasificar según la parte del puente sobre la que actúan.

a).- Fuerzas en la superestructura.

- P<sub>1</sub> peso propio de la superestructura
- P<sub>2</sub> carga viva
- P<sub>3</sub> carga por impacto
- P<sub>4</sub> viento sobre la superestructura, transversal y longitudinalmente.
- P<sub>5</sub> carga por cabeceo.
- P<sub>6</sub> carga por arranque y frenaje
- P<sub>7</sub> fuerza sísmica (en arcos preferentemente)
- P<sub>8</sub> fuerza centrífuga
- P<sub>9</sub> viento sobre la carga viva, en sentido normal y paralelo al puente.
- P<sub>10</sub> carga por cambios de temperatura.

El peso propio de la superestructura depende del tipo de ésta y de los materiales que la constituyan. Por ejemplo, si se tratara de una losa de concreto apoyada sobre viguetas doble T, tendríamos que cuantificar separadamente el peso de la losa (su sección, por su longitud y por 2 400 Kg/m<sup>3</sup>), que es el peso volumétrico del concreto) y el peso de las viguetas, que para tamaños comunes o comerciales viene especificado en los manuales.- Lógicamente, P<sub>1</sub> se determina a partir de un anteproyecto.

En una trabe remachada tendríamos en cuenta que el peso del fierro estructural es de 7850 Kg/m<sup>3</sup>.- Hay puentes chicos, arcos y marcos rígidos que llevan relleno de terracería.

El peso de las armaduras se calcula empíricamente, según su tipo y su peralte.

En fin, de algún modo es necesario calcular el peso de la superestructura en sí.

La carga viva depende del tipo de vehículos que vayan a transitar por el puente. Esto puede ser tan variable que va desde un ferrocarril con n vagones hasta una bicicleta. Todas estas cargas están tabuladas.

En caminos se usa con frecuencia la carga H-15 que corresponde a un camión tipo- con peso de 13 640 Kg.- Ver hoja 88 , figura 116.

La carga por impacto sólo se toma en cuenta cuando se calcula la corona; en los demás elementos ya no, porque la masa de la pila lo absorbe.

En ferrocarriles se considera que el impacto es un 100% de la carga viva, o sea- que se duplica la carga viva por este concepto.- En caminos carreteros, por especificación debe tomarse un impacto igual al 30% de la carga viva, (a veces hasta un 50%).

El impacto es una consecuencia de la carga viva, que se presenta de improviso en el puente. La vibración se supone que es una consecuencia del impacto y sus efectos ya están previstos en los porcentajes citados.

Por especificaciones, el empuje del viento se calcula como una presión unitaria de  $150 \text{ Kg/m}^2$ , sobre el área de la superestructura y por el coeficiente 1.5 (presión normal). En realidad debería tomarse el doble, en vez de 1.5, ya que los filetes de aire después de chocar contra una estructura se cierran y vuelven a chocar contra la otra.

La presión longitudinal se toma como un 50% de la normal, aunque hay casos en que no se presenta (por ejemplo en el caso de losa apoyada sobre viguetas)

El cabeceo se origina por los bandazos que va dando el ferrocarril a uno y otro costado; se toma el 10% de la carga viva.

En caminos el cabeceo está dado por cierto número de kilogramos.

El frenaje está especificado como un porcentaje de la carga viva.- Tanto en ferrocarriles como en caminos es de 10 %.

La fuerza sísmica sí debería tomarse en cuenta, pero en México nunca se han calculado los puentes previendo el efecto de los temblores y jamás se ha caído un puente por esta omisión. La razón es que nunca se presentan todas las fuerzas que estamos mencionando en forma simultánea.

La fuerza centrífuga ocurre cuando un puente está localizado en curva.

El viento sobre la carga viva, en sentido transversal, es igual que sobre la superestructura (área de la carga viva  $\times 150 \text{ Kg/m}^2$ .) pero sin el coeficiente 1.5.

En sentido longitudinal no se toma en cuenta ningún empuje de viento sobre la carga viva, ya que el área de ésta es muy reducida.

La carga por temperatura es importante en sus efectos, al transmitirse a la infraestructura.

#### b).- Fuerzas en la infraestructura:

- $P_1$  reacción que corresponde a la carga muerta de la superestructura.
- $P_2$  reacción que corresponde a la carga viva
- $P_3$  impacto (únicamente en la corona)
- $P_4$  arranque y frenaje (línea de acción a 1.50 m. arriba de la rasante)
- $P_5$  cabeceo.
- $P_6$  viento sobre la superestructura (normal y longitudinal)
- $P_7$  viento sobre la carga viva (transversal únicamente)
- $P_8$  carga por variaciones de temperatura.
- $P_9$  fuerza centrífuga.

en analizar las fuerzas que  
puente sobre la que actúan.

longitudinalmente.

paralelo al puente.

ésta y de los materiales  
eto apoyada sobre vigue-  
losa (su sección, por ..  
reto) y el peso de las ..  
en los manuales.- Lógi-

el fierro estructural -  
levan relleno de terra-

su tipo y su peralte.

superestructura en sí.

ansitar por el puente.  
s hasta una bicicleta.

onde a un camión tipo-

ula la corona; en los-

la carga viva, o sea-  
os, por especificación  
(un 50%).

Todas estas son las fuerzas que se transmiten de la superestructura a la infraestructura.

Vienen enseguida las fuerzas que corresponden exclusivamente a la infraestructura:

- P<sub>10</sub> peso propio de la pila o estribo.
- P<sub>11</sub> viento sobre la pila, normal y longitudinal (ya sea a río seco o con agua)
- F<sub>12</sub> empuje del agua (dinámico)
- P<sub>13</sub> peso del agua y rellenos sobre taludes y cimiento
- P<sub>14</sub> subpresión.

Estas fuerzas se presentan tanto en las pilas como en los estribos.

Aún hay dos que sólo ocurren en los estribos y son:

- P<sub>15</sub> peso del relleno y de la sobrecarga sobre la parte posterior del estribo, según el tipo de estribo.
- P<sub>16</sub> empuje horizontal de la terracería.

La carga que se transmite por temperatura depende de la clase de apoyo.

Si se trata de placas cepilladas se toma el 25% de la reacción (reacción debida al peso de la superestructura más la carga viva).

En apoyos de rodillos o mecedoras el efecto es menor y sólo se toma el 5% de la reacción. Supongamos que una pila recibe dos tramos desiguales; por ejemplo P<sub>2</sub> se puede deber a una armadura y P<sub>1</sub> a un tramo de acceso de menor categoría. Entonces, la fuerza por temperatura se obtiene con la fórmula siguiente:

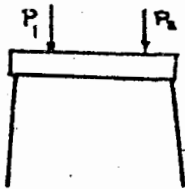


Figura 46.

$$P_8 = P_2 (f_2 + 0.05) - P_1 f_1$$

f<sub>1</sub> y f<sub>2</sub> son coeficientes de fricción y el de la carga mayor se aumenta en 0.05.

Si f<sub>1</sub> = f<sub>2</sub> y P<sub>1</sub> = P<sub>2</sub> quiere decir que los dos claros son iguales y por tanto.

$$P_8 = 0.05 P_2 \text{ (equivalente a un rodillo).}$$

El peso propio de una pila o de un estribo se calcula multiplicando el volumen por el peso volumétrico del material que la forme. Por simetría, se supone que actúa en el centro de la gravedad del cuerpo.

El viento normal y el longitudinal sobre la pila se calcula en igual forma que para la superestructura, a razón de 150 Kg/m<sup>2</sup>.

En puentes chicos sólo se toma en cuenta el viento normal a la pila.

Emp

El con la proficie que en e traes.

Le cio de la p

Le

P

W

A

V

C

S

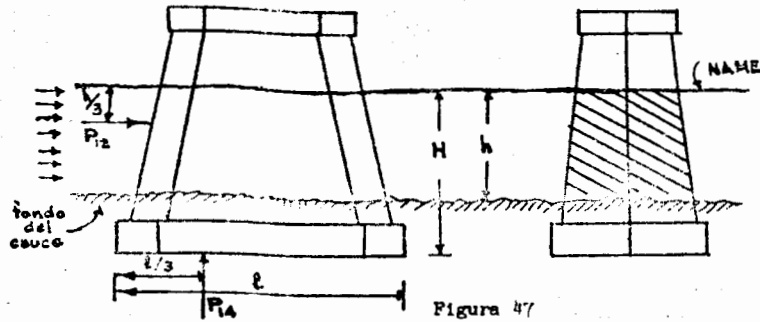
(

(

hay tajama

miento del

Empuje dinámico del agua.



El cuerpo de la pila recibe el golpe del agua. Como la velocidad de esta varía con la profundidad, queda sometida a presiones unitarias diferentes, mayores en la superficie que en el fondo.- Como  $P_{12}$  depende directamente del área, será mayor en las pilas centrales.

La resultante de los empujes dinámicos elementales se supone que actúa a un tercio de la profundidad, medido a partir de la superficie.

La intensidad de la fuerza se calcula con la fórmula:

$$P_{12} = \frac{\omega C_1 A V^2}{2g} \text{ en la que:}$$

$\omega$  = peso volumétrico del agua (1000 kg/m<sup>3</sup>)

$A$  = área sobre la que golpea el agua (m<sup>2</sup>).- Está sombreada en la figura 47.

$V$  = velocidad (media) de la corriente en m/s.

$C_1$  = es un coeficiente que depende de la agudeza del tajamar.

Se acostumbra tomar como valor medio  $C_1 = 1$

$C_1$  para tajamar rectangular = 1.30

$C_1$  para tajamar triangular, con flecha de 90° = 0.75

$C_1$  en caso de tajamar redondo = 0.66

$C_1$  para tajamar triangular; con flecha aguda de 30° = 0.50

Se ve que  $C_1$  aumenta mientras más chato es el tajamar; si  $C_1 = 1.30$  propiamente no hay tajamar.

El peso del agua y rellenos sobre los taludes se calcula por cubicación y conocimiento del peso volumétrico.

La subpresión obra de abajo hacia arriba; es una fuerza que se debe a la infiltración del agua. El valor de la fuerza depende del material en que se descante la estructura y aumenta mientras más permeable es el terreno. Si el terreno fuera rigurosamente impermeable  $P_{14}$  valdría cero.

$$P_{14} = \omega C_2 A H$$

El valor de  $C_2$  varía según la siguiente tabla:

Roca sana y sin grietas	0.00
Materiales impermeables, como arcillas:	0.25
Arenas y gravas:	0.50
Boleos y materiales permeables:	0.75

No puede haber  $C_2 = 1.00$  porque la pila no es un barco y forzosamente tiene que apoyarse en algunos puntos que por lo menos deben representar el 25% de la sección de apoyo.

De acuerdo con las especificaciones, la resultante de las subpresiones se considera aplicada a un tercio de la base del cimiento, medido de aguas arriba hacia aguas abajo.

Las fuerzas  $P_{15}$  y  $P_{16}$  se estudiarán con detalle en clases posteriores.

#### ESTUDIOS DE CAMPO

- a).- Reconocimiento de la corriente.
- b).- Factores determinantes para la elección de un buen cruce.
- c).- Informes previos.
- d).- Informes definitivos.

Procedimientos de transporte.-

Los accidentes en carretera se deben a causas diversas. Por ejemplo:

- Por alcance
- Por mala operación
- Por rebasar en curva

Se ha comprobado que la mayor cantidad de productos se transportan a una velocidad de 40 Km/hora.

Arzones:

Enganchadas, para carga, con rendilas

De balancín

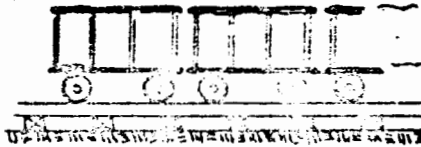


Figura 48.

na fuerza que se debe a la infiltración en que se desplanta la estructura terreno fuera rigurosamente imper-

Es conveniente acondicionar los arzones con rendijas, para que no se caigan las -  
armas. El maneral se debe quitar, para evitar accidentes.

El accidente más común en los arzones es atropellar a los animales.

Estos vehículos deben conducirse a una velocidad constante.

#### Ferrocarril.-

El transporte de cargas grandes a largas distancias se debe hacer por ferrocarril. El transporte de pasajeros es incosteable para los ferrocarriles.

En viajes cortos debe emplearse el ferrocarril; es aconsejable contratar una camión, porque en las camión bajas transportan enfermos, son más caras, y hay otras inconveniencias.

#### Avión:

Los viajes nocturnos son los mejores. Hay que observar las siguientes reglas:

No comer mucho

Sujetarse el cinturón.

Sentarse "por la cola", que es el lugar más seguro.

A caballo:

No debe ser ni muy manso ni muy brioso.

Para sentarse hay que poner una hamaca.

Es aconsejable recorrer algunos tramos a pie, y luego montarse nuevamente.

El caballo no se debe prestar.

A pie:

El calzado debe ser, de preferencia, bota y esta no será ni muy vieja ni muy nueva.

Hay que llevar atlas y brújula, y debe caminarse a un paso constante.

Es conveniente ir comiendo durante el recorrido (sal, chocolate, dulces, etc.) para reponer energías.

#### DÁTOS HIDRAULICOS PARA EL PROYECTO Y CONSTRUCCION DE UN PUENTE

a).- Sección del cauce, a una escala no mayor de 1:200

b).- Nivel de aguas mínimas.

c).- Nivel de aguas máximas ordinarias.

d).- Nivel de aguas máximas extraordinarias.

De balancín



MEMORIA DE CÁLCULOS Y DISEÑO

- e).- Pendiente media de la superficie del agua o de la del fondo del cauce en caso de que el río este seco.
- f).- Coeficiente de rugosidad del cauce para el cálculo del caudal.
- g).- Velocidad media del agua en m/s.
- h).- Caudal en m<sup>3</sup>/s.
- i).- Velocidad superficial y nivel de aguas para el que se midió.
- j).- Método empleado para medir la velocidad superficial.
- k).- Frecuencia, duración y época del año en que ocurren las crecientes máximas--  
extraordinarias.
- l).- Caracteres generales y dimensiones aproximadas de los materiales de arras --  
tre.
- ll).- Investigar si el cauce es estable o tiene tendencia a divagar.
- m).- Investigar si la tendencia general es de socavar o de depositar.
- n).- Ver si el remanso que provoca el puente puede perjudicar obras vecinas.
- o).- Claro mínimo que deberán tener los tramos para permitir el paso de cuerpos.
- p).- Espacio mínimo que debe haber entre el nivel de aguas máximas extraordinarias --  
y la parte inferior de la superestructura, para el paso libre de cuer--  
pos flotantes.
- q).- Si existen puentes construídos cerca del cruce, informar sobre el número, --  
la longitud y la altura de los tramos.
- r).- Area hidráulica bajo el puente, en m<sup>2</sup>.
- s).- Area libre bajo el puente, en m<sup>2</sup>.
- t).- Aclarar si esa área es suficiente, insuficiente o excesiva.
- u).- Informar si hay indicaciones de socavación en las pilas y terraplenes de --  
acceso.

La sección de cruce se determina topográficamente y en ella se indica el nivel de altas aguas.

El nivel de aguas mínimas corresponde al estiaje, época en la que se inicia la --  
construcción del puente.

El N.A.M.E. es necesario para el proyecto final.

Para determinar el nivel de altas aguas se emplean procedimientos empíricos y es--  
tadísticos. El mejor es el procedimiento directo.

Fórmula de Talbot para nivel de altas aguas:

$$a = 0.183 C \sqrt[4]{A^3}$$

$a$  = área hidráulica de la corriente en  $m^2$ .

$A$  = superficie por drenar en hectáreas.

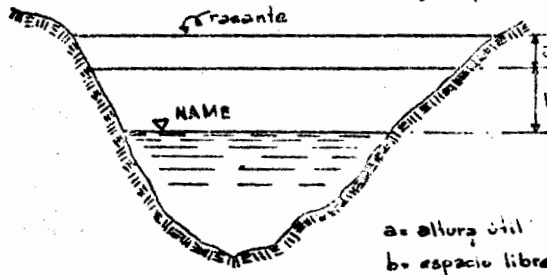
$C$  = coeficiente que depende de las condiciones del terreno, y que puede tener los valores siguientes:

- 1.00, para terreno montañoso y escarpado (es el que da mayor cantidad de agua.)
- 0.80, terrenos con mucho lomerío.
- 0.50, terreno muy ondulado.
- 0.40, terreno poco ondulado.
- 0.30, terreno casi plano.
- 0.20, terreno plano.

Para deducir su fórmula Talbot supuso una precipitación de 10 minutos de dura -- ción y una velocidad de 10 m/s.

Hay otras fórmulas para este objeto, cuya estructura es más o menos diferente de la de Talbot. Por ejemplo, tenemos la de Burkly-Ziegler, que se estudia detenidamente en -- alcantarillado, clase de Ingeniería Sanitaria.

Para conocer el NAME en la sección, se procede así:



- 1c).- Se calcula  $a$  con la fórmula de Talbot.
- 2o).- Se calcula, en la sección, una serie de valores  $a$  correspondientes a distintos niveles.
- 3o).- Se comparan estos valores con la  $a$  calculada. La que resulte igual corresponde al nivel de aguas máximas extraordinarias.

Para evitar el tener -- que hacer muchos tanteos es conveniente dibujar una curva de Áreas-Niveles; a veces estas curvas resultan con -- quiebres.

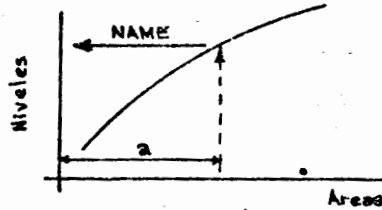


Figura 49

Sobre el eje de las áreas se lleva el  $a$  calculada con la fórmula y la curva nos da directamente el nivel buscado.

Una vez encontrado el NAME, es imprescindible dejar un espacio libre entre aquél y la parte inferior de la superestructura. La altura de la rasante queda determinada por las dimensiones de la superestructura.

Un procedimiento, más preciso que el de Talbot, para determinar el NAME consiste en medir el caudal máximo que pasa por el cauce. Esta medición puede obtenerse por información, por métodos indirectos o por observación directa.

Cálculo del caudal de una corriente:

$0.183 C \sqrt[4]{A^3}$



$$Q = AV$$

V = Velocidad en m/s.

A = área en m<sup>2</sup>.

Q = caudal en m<sup>3</sup>/s.

La velocidad, según Manning, es:

$$V = \frac{1}{n} r^{2/3} s^{1/2}$$

n = coeficiente de rugosidad; (su valor aproximado oscila entre 0,025 y 0,050)

r = radio hidráulico en metros

s = pendiente hidráulica.

Se deben sacar varias secciones y varias pendientes parciales, para calcular varios caudales, cuyos valores deben ser sensiblemente iguales.

Dado el caudal, determinar el NAME en el cruce.

El problema es semejante al anterior y se resuelve con la ayuda de tablas.

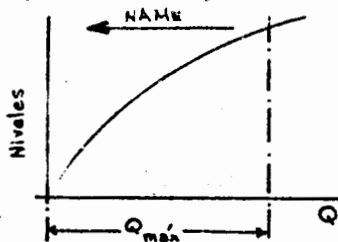


Figura 50

Se calculan los gastos correspondientes a distintos niveles y con esos valores se dibuja una curva gastos-niveles.

Con el gasto máximo extraordinario de diseño se obtiene de la curva el NAME correspondiente.

Para obtener el radio hidráulico primero calculamos el área, con un planímetro o dividiéndola en trapecios y rectángulos parciales.

El perímetro mojado se mide directamente, con un curvímetro, con un compás de puntas o con un doble decímetro.

n se determina por inspección del cauce y consulta de tablas o bien se despeja de la fórmula de Manning:  $n = \frac{r^{2/3} s^{1/2}}{V}$ .

Se ha observado que en una sección dada la velocidad media es aproximadamente igual al 80% de la velocidad superficial.

Para calcular la velocidad superficial se emplean cuerpos flotantes o molinetes.

Socavación.- Hay que saber a que profundidad socava el río cuando lleva su caudal máximo. Para conocer esa profundidad, se acostumbra hacer pozos de reconocimiento.

Cálculo del resancho en un puente.

En la mayor parte de los casos, se procura que la construcción de un puente no modifique las condiciones del cauce.

Si la corriente se estrangula con pilas y terraplenes de acceso, el tirante se levanta y se perjudican las propiedades vecinas.

Se conoce el caudal Q y sabemos que:

$$Q = A_1 v_1$$

A<sub>1</sub> es el área hidráulica de la corriente sin estrangularla

v<sub>1</sub> es la velocidad media del río sin estrangularlo.

Al área hidráulica disponible una vez hechos los estrangulamientos la llamaremos



Como resultado de esta nueva área se tendrá una nueva velocidad  $v_2 = \frac{Q}{A_2}$ . v<sub>2</sub> representa la velocidad media de la corriente ya estrangulada.

Figura 51

La disminución de área ocasiona que el nivel de aguas máximas extraordinarias se sobreleve. El incremento de nivel se llama Δh y es igual a la diferencia de cargas de velocidad.

$$\Delta h = \frac{v_2^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g}$$

El remanso es mayor a medida que el estrangulamiento es mayor.

Si el área se reduce en forma excesiva, la velocidad aumenta demasiado y el agua erosiona y socava los materiales, por lo que el puente puede quedar sembrado a media corriente. Así pues, se debe tener cuidado de no reducir el área hidráulica en forma imprudente.

Además, la diferencia de nivel aguas arriba del puente y aguas abajo de él, da lugar a filtraciones que pueden terminar por llevarse las terracerías de acceso.

Siempre que en el curso natural de una corriente se interpone un obstáculo se producen remolinos y como consecuencia de estos, hay socavación.

Datos geológicos

Para la cimentación.

En muchas ocasiones, el tipo de puente y el costo de éste dependen de las características geológicas del cruce.

El estudio geológico debe comprender los puntos que siguen:

- 1o).- Características generales de los materiales que constituyen el fondo y las márgenes.
- 2o).- Corte geológico transversal a la corriente, a lo largo del eje longitudinal del puente. Debe indicar los materiales que forman el subsuelo y el nivel de las aguas freáticas y acompañarse de muestras representativas de las diversas formaciones del subsuelo.
- 3o).- Método que se empleó para hacer los sondeos.
- 4o).- Cargas de trabajo que se proponen para los lechos de cimentación.

oscila entre 0,025 y 0,050) parciales, para calcular va--

on la ayuda de tablas. astos correspondientes a dis-- con esos valores se dibuja -- niveles.

mo extraordinario de diseño-- curva el NAME correspondien --

adio hidráulico primero calcu -- un planímetro o dividiendo -- rectángulos parciales.

ímetro, con un compás de pun --

tablas o bien se despeja de --

media es aproximadamente --

pos flotantes o molinetes.

l río cuando lleva su caudal -- de reconocimiento.

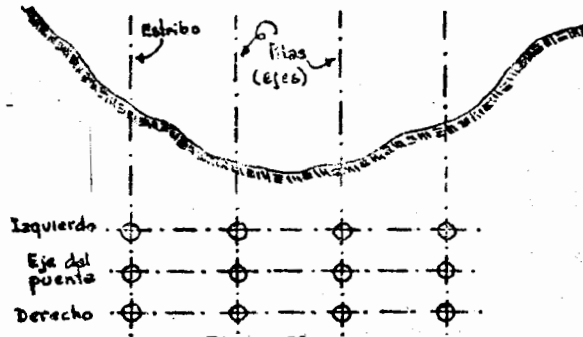
trucción de un puente no mo --

de acceso, el tirante se le --

5).- Procedimiento que se empleó para determinar dichas cargas.

6).- Indicar si para hacer las excavaciones habrá necesidad de emplear ataguías, ademes, etc., o si hay posibilidad de desviar el curso del río.

7).- Si hay puentes cercanos, indíquese la clase de cimentación que tienen.



**SONDEOS.-**

Los más simples se hacen con una cruceta, que consiste en una barrera con un gavilán en la punta. Hay de varios tamaños.

Se opera con una pareja de peones: uno que golpea y el otro, que detiene y bornea.

De acuerdo con la facilidad o dificultad para penetrar se conoce qué tipo de materiales va atravesando la barrera.

rrena. Si hay grava o pizarra se atora continuamente.

En cambio, si es roca, la cruceta rebota.

Este tipo de sondeo es rudimentario. Los detritus se tienen que estar sacando a cada rato, para que la capa de material suelto no absorba los golpes e impida la penetración.

Los sondeos se deben hacer en los lugares donde el ingeniero cree que van a quedar las pilas o detalles del puente.

En puentes ya de cierta importancia se hacen sondeos a lo largo de dos y hasta tres ejes.

**Barretón:** Se usa para sondeos de mayor profundidad. Se deja caer con un cable -- que se manipula con un malacate. En el extremo lleva un depósito para el material.

**Máquinas cálix.-** Consisten en un tubo, con el cual se extrae un corazón. Se emplean en materiales suaves. De acuerdo con la dureza de las capas llevan en el extremo dientes, o municiones o diamante.

Para hacer el sondeo cuando en el cauce hay agua se construye un pequeño temple -- te, con su plataforma. Luego se hínca un tubo de acero, que sirve de ademe para el sondeo.

Si el tirante es muy grande se hacen verdaderas embarcaciones, que se contraven -- tean desde la orilla. La dirección y la distancia se controlan con tránsitos.

Al hacer el sondeo se van anotando las profundidades a las que se encuentran las -- distintas capas de materiales. El corte geológico muestra estos resultados en forma gráf -- ca.

El mejor sistema de sondeo es mediante pozos a cielo abierto. Sin embargo, tie -- nen sus desventajas: hay que ademarlos; el trabajo es lento y pesado y resultan algo caros.

Cuando el río lleva un caudal pequeño se puede trabajar en seco poniendo un tablaes -- tacado.

el cual  
verdad  
quinari

que  
si  
barras,  
el  
vicio  
y

chas cargas.  
necesidad de emplear ataguías,  
el curso del río.

cimentación que tienen.

SONDEOS.-

Los más simples se hacen con una cruceta, que consiste en una barrena con un gavilán en la punta. Hay de varios tamaños.

Se opera con una pareja de peones: uno que golpea y el otro, que detiene y borrea.

De acuerdo con la facilidad o dificultad para penetrar se conoce qué tipo de materiales va atravesando la ba-

tienen que estar sacando a golpes e impida la penetra-

geniero cree que van a que-

a lo largo de dos y hasta -

e deja caer con un cable -- to para el material.

extrae un corazón. Se em- as llevan en el extremo dien

onstruye un pequeño temple - ve de ademe para el sondeo.

aciones, que se contraven - con tránsitos.

a las que se encuentran las - resultados en forma gráfi -

abierto. Sin embargo, tie -- sado y resultan algo caros.

ir en seco poniendo un tablaes

En ríos angostos y poco profundos se puede construir una especie de muelle desde el cual se trabaja. En cambio, si el río es ancho y profundo es necesario construir una -- mada isla de trabajo y con embarcaciones se moviliza y transporta al personal, la ma- quinaría y los materiales.

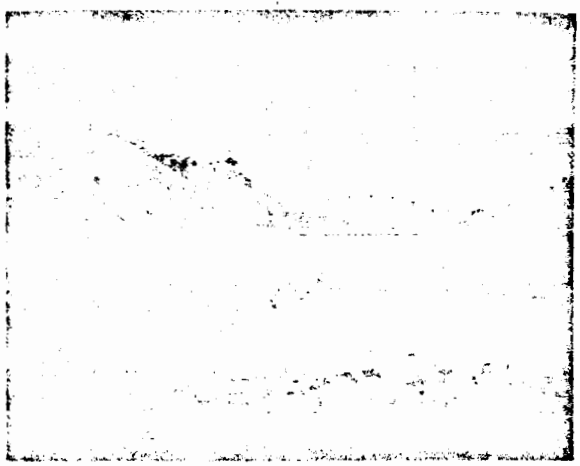
Datos de construcción: Debe tenerse una información amplia acerca de los materia- les de construcción que se pueden encontrar cerca de la -- obra; es importante el costo y la ubicación de esos mate- riales.

Materiales principales: Cemento, cal, revestimientos, grava, arena, piedra, agua potable, madera de la., madera de Za., madera rolliza, - fierro estructural, fierro de refuerzo, etc.

Otros datos que deben conocerse a fondo: Salarios de las diferentes categorías - de trabajadores.  
Costo de mano de obra por diferentes -- conceptos.  
Clima dominante de la región.

Datos de tránsito: Ancho de la calzada  
Cargas para las que debe proyectarse el puente.  
Si requiere banquetas, de qué anchura deben ser.  
Estadística de tránsito. Autos, camiones, etc., que diaria -- mente cruzan el río.

Por último, fotografías que muestran el cruce y los sitios cercanos a él.



Puente carretero sobre el río Verde, camino Yahualica - Tepetitlán.- Arriba del - arco se ve un cable, vfa y a la izquierda una canastilla, equipo que forma parte de la esta- ción hidrométrica La Guña y que, en rigor, también constituye un puente elemental.- Sin em- bargo, la utilidad máxima que presta una estación de aforos operada por varios años, desde el punto de vista de la construcción de un puente es: a).- Observación directa de los nive- les máximos del agua, para hacer la obra en mejores condiciones de seguridad. Ya se ha da- do el caso de que puentes costosísimos sean destruidos por avenidas extraordinarias no pre- vistas.- b).- Información completa sobre tirantes y velocidades, para preparar el programa y el procedimiento de construcción convenientes.

**CONDICIONES DE ESTABILIDAD  
DE ESTRIBOS Y PILAS.**

Tanto los estribos como las pilas están sujetos a fuerzas que actúan a lo largo de los dos ejes de simetría. En los estribos, las que actúan normalmente al eje menor, son menores que en las pilas. Además, una pila sirve de apoyo a dos tramos contiguos del puente. Sin embargo, de una manera general, hasta en los estribos es necesario tomar en cuenta todas las fuerzas que actúan, en las dos direcciones, longitudinal y normalmente al puente.

Imaginemos una pila o un estribo. ¿Cuál es la forma en que puede fallar?

- 1o).- Por fricción en la parte más baja o desplante, en la forma de un deslizamiento. (Hay que tener en cuenta que en algunos casos, la base del desplante en el fondo del cauce ha llegado a desaparecer por socavación).
- 2o).- Por compresión (fatiga).
- 3o).- Por volteo.- Por ejemplo, una estructura muy alta, que reciba la acción de una fuerza horizontal con un brazo de palanca muy grande, medido respecto a la base, en general, antes de deslizarse se voltea. Esto dependerá de que la resultante se saiga o no de la base. Si cae en la base se trata de un problema de núcleo central, y por la posición de dicha resultante respecto a la base se obtendremos los esfuerzos, máximos por un lado y mínimos por el opuesto.

Para evitar el volteo existe una condición que no se debe exceder, como veremos más adelante.

Luego, las condiciones de estabilidad de una pila o estribo son tres:

- 1o).- Condición de volteo.
- 2o).- Condición de fatiga.
- 3o).- Condición de deslizamiento.

Se tiene una pila, con su corona, su cimiento y las fuerzas que actúan sobre ella. Sometidos a estas fuerzas, tanto los estribos como las pilas tienden a voltearse. Es de esperarse que la pila tienda a girar alrededor del eje x-x o de la arista ab. (Figura 53)

Para contrarrestar todas las fuerzas volteantes sólo se dispone del peso propio de la pila más el peso propio de la superestructura, transmitido a través de sus apoyos. Desde luego, el estudio completo debe incluir el análisis de las condiciones más desfavorables. -- Por ejemplo, si se toma el empuje del viento en el sentido transversal, en el sentido longitudinal ya no se considera; si la pila está cubierta de agua, el empuje del viento sobre ella es nulo; etc. Inclusive hay veces en que un puente está en condiciones menos favorables cuando el río está seco que cuando lleva un gran caudal, pues la presión del viento puede -- resultar mayor que el empuje del agua, tomando ya en cuenta la velocidad que esta tenga.

Generalmente sólo se analizan dos secciones, pero cuando las pilas son muy altas -- es necesario estudiar varias secciones intermedias.

- 1o).- Los momentos de los dos sistemas de fuerzas, verticales y horizontales, respecto a los ejes de volteo citados antes pueden tener los siguientes valores:

zas que actúan a lo largo de mente al eje menor, son meno los contiguos del puente. Sin lo tomar en cuenta todas las lmente al puente.

que puede fallar?

la forma de un deslizamien s, la base del desplante en socavación).

, que reciba la acción de y grande, medido respecto a a. Esto dependerá de que la base se trata de un proble resultante respecto a la ba y mínimos por el opuesto.

de exceder, como veremos --

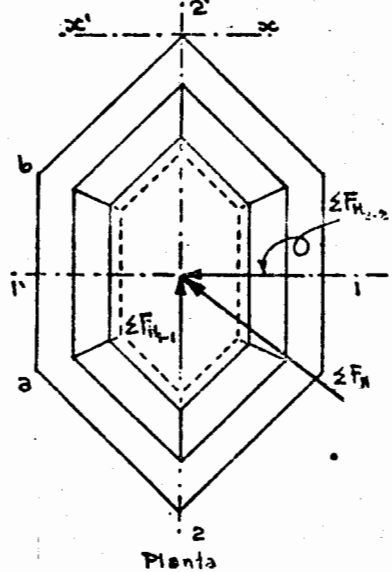
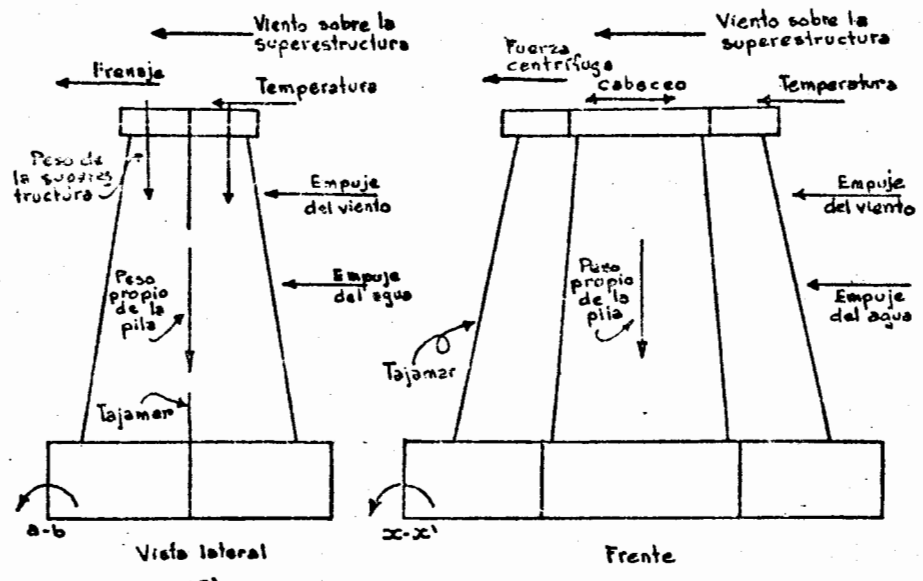
lbo son tres:

zas que actúan sobre ella. en a voltearse. Es de espe sta a). (Figura 53)

dispone del peso propio de ivés de sus apoyos. Desde nes más desfavorables. -- en el sentido longi sal) en el sentido longi puja del viento sobre -- dición menos favo bles sión del viento puede -- ciedad que esta tenga.

las pilas son muy altas -

ales y horizontales, res- er los siguientes valo --



Esquema de una pila con algunas fuer zas que intervienen.

Figura 53.

- a).-  $\sum M_v = \sum M_H$  (La resultante corta al eje de volteo).
- b).-  $\sum M_H > \sum M_v$  (La pila se voltea).
- c).-  $\sum M_H < \sum M_v$  (La resultante pasa por la base de la pila).

Luego, vemos que la condición que garantiza - que la resultante caiga en la base es:

$$\sum M_v > \sum M_H$$

Ahora bien, ¿qué tanto debe ser mayor  $\sum M_v$  que  $\sum M_H$ ?

Se ha visto que basta con que  $\sum M_v$  sea el - duple de  $\sum M_H$ , o sea que el coeficiente de segu ridad es 2.

∴ la condición de volteo es:  $\frac{\sum M_v}{\sum M_H} \geq 2$ , que - debe satisfacerse para cada uno de los ejes de volteo.

(El maestro, Ing. José Mariano Pontón, indicó - que ha experimentado ya un coeficiente de 1.5 - ton muy buenos resultados, por lo que se puede tener la seguridad de que la pila no se voltea si  $\frac{\sum M_v}{\sum M_H} \geq 1.5$ , a condición de que se ha - yan determinado y calculado cuidadosamente los pesos volumétricos de los materiales).

2o).- Para la condición de deslizamiento, los manuales dicen que los sistemas de fuerzas horizontales se deben considerar separadamente, pero al maestro le parece más lógico y razonable que se tome la resultante. Así,  $\sum F_{H2-2}$  es la suma de las fuerzas horizontales normales al eje 2-2;  $\sum F_{H1-1}$  se define en forma similar. De acuerdo con la figura, se tiene que

$$\sum F_H = \sqrt{\sum F_{H1-1}^2 + \sum F_{H2-2}^2}$$

resultante que será a la que nos referiremos al establecer nuestra condición de deslizamiento.

Ahora bien, si recordamos la clase de Mecánica, ya sabemos que en un cuerpo que esté a punto de resbalar, figura 54, el coeficiente de fricción estática  $\mu$  es, por definición (relación entre la fricción límite y la fuerza normal correspondiente).

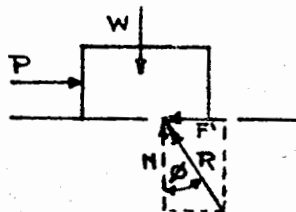


Figura 54.

El ángulo de fricción estática  $\phi$ , también por definición, está formado por la reacción total R y la fuerza normal N. Luego como  $\tan \phi = \frac{F'}{N}$ , resulta que  $\mu = \tan \phi$

Esta circunstancia se aprovecha precisamente para valuar  $\mu$ , colocando un cuerpo dado sobre un plano que va inclinándose gradualmente; (Fig. 55). En el momento en que el cuerpo empieza a resbalar  $\alpha = \phi$  y por tanto:  $\tan \alpha = \tan \phi = \mu$

En la figura 54, el valor de P es tal que el cuerpo está a punto de resbalar. Si se aumenta ligeramente, el cuerpo desliza.

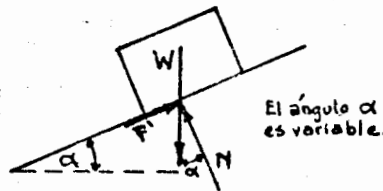


Figura 55.

Ahora bien, si volvemos al caso de la pila en estudio.

$$W = N = \sum F_v \text{ y } P = F' = \sum F_H = \sqrt{(\sum F_{H11})^2 + (\sum F_{H22})^2}$$

y como  $\mu = \frac{F'}{N}$

$$\mu = \frac{\sqrt{(\sum F_{H11})^2 + (\sum F_{H22})^2}}{\sum F_v}$$

es la expresión que indica que la pila está a punto de deslizar.

Sin embargo, lo que nos interesa no es la situación límite, sino aquella en que se puede asegurar que el cuerpo no desliza, ¿qué se necesita para ello?

Desde luego  $F'$  debe ser bastante mayor que P o sea, ya para la pila:

$$\mu \sum F_v > \sqrt{(\sum F_{H11})^2 + (\sum F_{H22})^2}$$

de desl.

vert

les dicen que los sistemas de radamente, pero al maestro le resultante. Así,  $\sum F_{H2-2}$  es al eje 2-2;  $\sum F_{H1-1}$  se define e tiene que

il establecer muestra condi --

sabremos que en un cuerpo que es estática  $\mu$  es, por definición

ndiente). El ángulo de fric- stática  $\phi$ , también por defini está formado por la reacción y la fuerza normal N. Luego  $\tan \phi = \frac{F}{N}$ , resulta que  $\mu = \tan \phi$

reunancia se aprovecha pre- ite para valuar  $\mu$ , colocando po dado sobre un plano que va ndose gradualmente; (Fig. 55). omento en que el cuerpo empie sbalar  $\alpha = \phi$  y por tanto:  $\tan \phi = \mu$

igura 54, el valor de P es -- el cuerpo está a punto de res. Si se aumenta ligeramente, el desliza.

ien, si volvemos al caso de la estudio.

$$u = \frac{\sum F_v}{\sqrt{(\sum F_{H11})^2 + (\sum F_{H22})^2}}$$

es la ón que indica que la pila es- to de deslizar.

argo, lo que nos interesa no- que el cuerpo no desliza. ---

ra para la pila:

El coeficiente de seguridad que suele tomarse es de 2 y por tanto, la condición de deslizamiento es:

$$\frac{\mu \sum F_v}{\sqrt{(\sum F_{H11})^2 + (\sum F_{H22})^2}} \geq 2$$

Coefficientes de fricción recomendados para algunos materiales. (Valores de  $\mu$ ).

Mampostería sobre arcilla mojada	0.3
Mampostería sobre arena	0.4
Mampostería sobre grava	0.5
Mampostería sobre mampostería o roca	0.7

30).- La pila está sujeta a un sistema de fuerzas verticales y a otros dos siste- mas de fuerzas horizontales, que actúan según los ejes de simetría. Las fati- gas son calculables con la fórmula de la escuadría:

$$f = \frac{\sum F_v}{A} + \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x$$

Los esfuerzos máximos se producen en las aristas más exteriores de la sección.

De las tres condiciones estudiadas la de deslizamiento es la más noble; la mayor parte de las veces se impone la condición de fatiga o la de volteo. Esta es la razón por la que se utilizan materiales malos, como mamposterías de Ja., etc., en la construcción de las pilas y estribos.

Ya se dijo antes que en los estribos las fuerzas que obran normalmente al eje menor de ellos (es decir, en sentido perpendicular al camino) son comparativamente pequeñas. Por otra parte, debe tenerse en cuenta que el momento de inercia de la sección de una pila o estribo, respecto al eje que hemos llamado 1-1 es una magnitud colosal. (Esto es todavía más notable en los estribos de aleros).- Por lo anterior, el término  $\frac{\sum M_{11} u}{I_{11}}$  se puede despreciar, con lo que la fórmula del esfuerzo pierde un término y queda en forma más sencilla.

Debe recordarse que en desplantes de mampostería de Ja., sobre roca sana, se pueden aceptar tensiones de 1 kg/cm<sup>2</sup>, y hasta de 2 kg/cm<sup>2</sup>, si el junteado es con mortero de cemento. En cambio, si el junteado es con cal, debe tomarse 1 kg/cm<sup>2</sup>, o mejor aún: 0.5 kg/cm<sup>2</sup>. Empero, en desplantes sobre arcilla o arena no se puede tolerar ninguna tensión.

En resumen, las condiciones de estabilidad son:

- 1o).- Condición de volteo:  $\frac{\sum M_v}{\sum M_H} \geq 2$
- 2o).- Condición de deslizamiento:  $\mu \frac{\sum F_v}{\sum F_H} \geq 2$
- 3o).- Condición de fatiga:  $f = \frac{\sum F_v}{A} + \frac{\sum M_{22}}{I_{22}} y_{22}$

De estas condiciones la más digna de estudiarse ampliamente es la tercera y a ella dedicaremos nuestra atención.

ANÁLISIS DETALLADO DE LA CONDICIÓN DE FATIGA.

Sea un muro de sección rectangular, con una carga aplicada a lo largo de su eje vertical de simetría. Está apoyado en el suelo; el eje mayor es vertical. Llamaremos B a su-



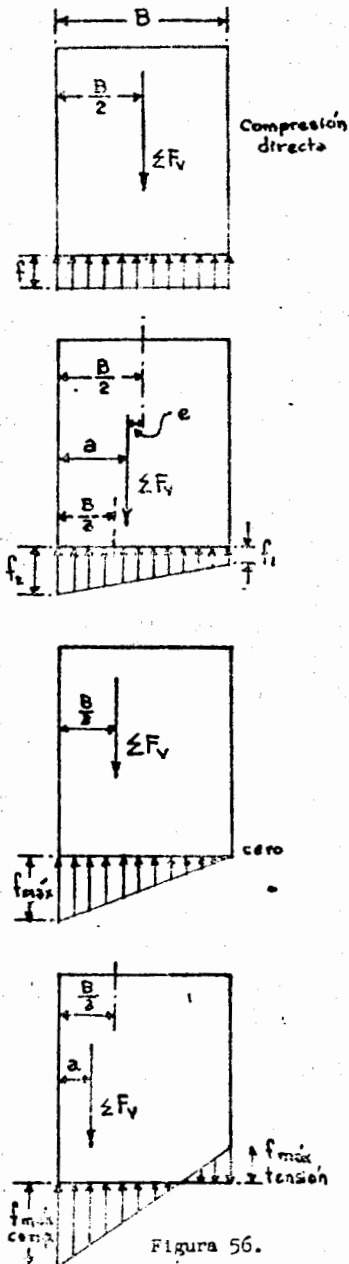


Figura 56.

anchura y su profundidad se considerará unitaria.

La reacción del terreno es a base de esfuerzos unitarios de igual tamaño, o sea una carga uniformemente-repartida.

Ahora, a un muro igual, apliquémosle la misma carga, pero ligeramente corrida hacia un lado, una distancia  $e$  (excentricidad) menor que  $B/3$ . La carga así situada está dentro del tercio medio. La respuesta del terreno es una serie de esfuerzos que adoptan una forma trapecial.

Si la carga se corre más aún, llevándola al límite del tercio medio, el terreno responde con una ley triangular, en donde las fatigas extremas son máxima y cero.

Sea, por último, un cuarto caso, en el que  $\sum F_v$  actúa francamente fuera del tercio central. En este caso ya aparecen tensiones hacia el lado opuesto al de aplicación de la carga.

De acuerdo con lo anterior, tratemos de valorar las fatigas en cada caso. Para ello, recuérdese que la carga exterior es igual con el volumen de esfuerzos a que da lugar.

1o).-  $\sum F_v = f_1 \cdot A = f_1 \cdot B \cdot 1$ ;  $\therefore f_1 = \frac{\sum F_v}{B}$

2o).-  $\sum F_v = \left(\frac{f_1 + f_2}{2}\right) A = (f_1 + f_2) \frac{B}{2}$   
o bien:  $(f_1 + f_2) = \frac{2 \sum F_v}{B}$

Ahora bien; es interesante valorar separadamente tanto el esfuerzo  $f_1$  como el  $f_2$ . Para ello emplearemos la fórmula de la escudría.

$a$  es la distancia del paramento más cercano a la línea de acción de la resultante  $\sum F_v$ , que llamaremos  $P$ . En la figura se observa que la excentricidad  $e = \frac{B}{2} - a$

Recordemos que:  $f = \frac{P}{A} + \frac{My}{I_y} \propto$

$P$  se supone que es dato

$A = B \times 1 = B$

$My = Pe = P \left(\frac{B}{2} - a\right)$

$I_y = \frac{1}{12} B^3 \times 1 = \frac{B^3}{12}$

plirse co  
Si  $a = \frac{B}{2}$   
Si  $a =$   
la expe

bién ser  
do P cas

to es t

signo f  
negativ

se considerará unitaria.  
 es a base de esfuerzos unita  
 sea una carga uniformemente-  
 ual, apliquémosle la misma -  
 corrida hacia un lado, una -  
 ad) menor que  $B/6$ . La carga  
 del tercio medio. La respues  
 rie de esfuerzos que adoptan  
 aún, llevándola al límite -  
 eno responde con una ley --  
 fatigas extremas son máxima  
 o caso, en el que  $\Sigma F_v$  actúa  
 cio central. En este caso -  
 ia el lado opuesto al de --

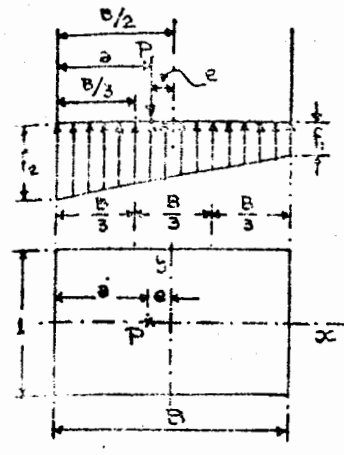


Figura 57

X varía según el punto en que se quiera calcular el esfuerzo; nos interesan los valores máximo y mínimo; de manera que

$$\therefore f = \frac{P}{B} + \left[ \frac{P(B/2 - a)}{B^2} \right] = \frac{P}{B} \left[ 1 + \frac{(3B - 6a)}{B} \right]$$

$$f_2 = \frac{P}{B} + \left[ \frac{2P(B/2 - a)}{B^2} \right] = \frac{P}{B} \left[ 1 + \frac{(3B - 6a)}{B} \right]$$

Si se toma el signo (+) tendremos  $f_2$ , esfuerzo máximo:

$$f_2 = \frac{P}{B} \left[ \frac{B + 3B - 6a}{B} \right]; \quad f_2 = \frac{P}{B} (4B - 6a)$$

En cambio, con el signo (-) se tiene la fatiga mínima  $f_1$ :

$$f_1 = \frac{P}{B} \left[ \frac{B - 3B + 6a}{B} \right]; \quad f_1 = \frac{P}{B} (6a - 2B)$$

Veamos si la fórmula de  $f_2$  es correcta para los distintos valores particulares que puede tener a. Si  $a = B/2$ :

$$f_2 = \frac{P}{B^2} (4B - 6a) = \frac{P}{B^2} (4B - 6 \cdot \frac{B}{2}) = \frac{P}{B^2} (4B - 3B) = \frac{P}{B} \quad \checkmark$$

Si  $a = B/3$ , resultante en el límite del tercio medio:

$$f_2 = \frac{P}{B^2} (4B - 6 \cdot \frac{B}{3}) = \frac{P}{B^2} (4B - 2B) = \frac{2P}{B} \quad \checkmark$$

Como se verá después (punto 3o), este valor también es correcto. Lo mismo debe cumplirse con la fórmula de  $f_1$ :

Si  $a = \frac{B}{2}$ ;  $f_1 = \frac{P}{B^2} (6a - 2B) = \frac{P}{B^2} (6 \cdot \frac{B}{2} - 2B) = \frac{P}{B} \quad (\text{correcto})$

Si  $a = \frac{B}{3}$ ;  $f_1 = \frac{P}{B^2} (6a - 2B) = \frac{P}{B^2} (6 \cdot \frac{B}{3} - 2B) = \text{cero} \quad (\text{correcto})$

Es claro que los valores generales encontrados de  $f_1$  y  $f_2$  también deben satisfacer la expresión general establecida al principio:  $(f_1 + f_2) = \frac{2 \Sigma F_v}{B}$ , como se ve enseguida:

$$f_1 + f_2 = \frac{P}{B^2} (6a - 2B) + \frac{P}{B^2} (4B - 6a) = \frac{P}{B^2} (6a - 2B + 4B - 6a)$$

$$= \frac{P}{B^2} (2B) = \frac{2P}{B} = \frac{2 \Sigma F_v}{B}$$

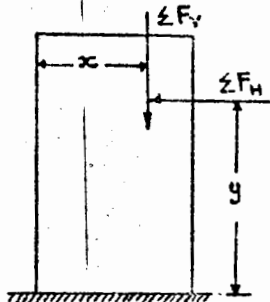
Por último, como las fórmulas fueron establecidas en forma general, la de  $f_1$  también será válida para obtener el esfuerzo  $f_1$  de tensión que ocurre en casos como el 4o, cuando P cae fuera del tercio medio. Es interesante comprobar si

$f_1 = \frac{P}{B^2} (6a - 2B) < 0$ , lo que indicará que el esfuerzo cambió de signo y por lo tanto es tensión.

En efecto, si  $a < B/3$ ,  $6a < 6B/3$ , o sea que  $6a < 2B$ , por tanto dominará el signo (-) del término  $2B$  del paréntesis, lo que a fin de cuentas se traduce en que  $f_1$  será negativo.

Para terminar con este asunto, estudiemos la forma de valuar la distancia a.

tr, tratemos de valuar las -  
 a ello, recuérdese que la -  
 on el volumen de esfuerzos-  
 $3 \times 1$ ;  $\therefore f = \frac{\Sigma F_v}{B}$   
 e  $(f_1 + f_2) \frac{B}{2}$   
 $\frac{2 \Sigma F_v}{B}$   
 esante valuar separadamente  
 como el  $f_2$ . Para ello -  
 la de la escuadría.  
 l paramento más cercano a -  
 e la resultante  $\Sigma F_v$ , que -  
 figura se observa que la --  
 $\frac{M_x}{I_y} \propto$



En la generalidad de los casos, un muro puede estar sujeto a un sistema de fuerzas verticales que darán una resultante que llamaremos  $\Sigma F_v$  y a otro sistema de fuerzas, horizontales, cuya resultante  $\Sigma F_h$  tendrá un brazo de palanca y, medido respecto a la base del muro. Si combinamos  $\Sigma F_v$  y  $\Sigma F_h$  se obtendrá la resultante general del sistema, R, cuya línea de acción, prolongada, corta a la base en un punto C, que dista del eje de volteo  $OO'$  una distancia  $a$  que es precisamente la que queremos valorar.

Si en el punto C volvemos a descomponer a R en sus componentes  $\Sigma F_v$  y  $\Sigma F_h$ , por un teorema elemental de Mecánica, el de Varignon, tendremos que, si se toman momentos respecto al eje de volteo  $OO'$

$$\Sigma F_v x - \Sigma F_h y = M_{OO'} R = \Sigma F_v a + \text{cero}$$

$$a = \frac{\Sigma F_v x - \Sigma F_h y}{\Sigma F_v}, \quad \Sigma F_v x = \Sigma M_v \text{ y } \Sigma F_h y = \Sigma M_h$$

resulta que:

$$a = \frac{\Sigma M_v - \Sigma M_h}{\Sigma F_v}$$

3o).- Para la carga aplicada en el límite del tercio medio:

$$\Sigma F_v = \frac{1}{2} f A = \frac{1}{2} f \times B \times l; \quad \therefore f_{\text{máx}} = \frac{2 \Sigma F_v}{B}$$

Si se compara este último valor con el del caso 1o), vemos que  $f_{\text{máx}} = 2f$ , o sea que la fatiga es el doble.

4o).- El cuarto caso, que ya quedó analizado cuidadosamente con la fórmula de la escuadría al estudiar el punto 2o), también es interesante porque como ya ocurren tensiones, en algunos problemas esto es enteramente inadmisibles, dadas las condiciones de apoyo del muro.

Por eso, es conveniente estudiar lo que se llama reducción de sección. Para ello se supone que hay una parte del terreno que no sólo no trabaja a la tensión, sino ni siquiera a la compresión.

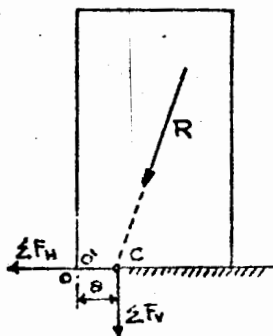


Figura 58.

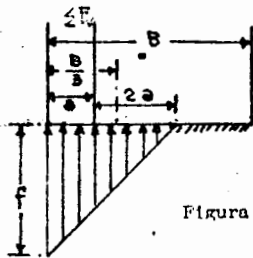


Figura 59.

Si se llama  $a$  la distancia de  $\Sigma F_v$  al paramento del muro más cercano, se supone que del ancho total B del muro sólo trabaja a la compresión una parte, que es tres veces  $a$ ; luego, se está aceptando que la resultante  $\Sigma F_v$  actúa en el límite del tercio medio de la zona cuya anchura es  $3a$ . Por ello, la respuesta es triangular y según lo ya visto  $f$  valdrá:

$$\Sigma F_v = \frac{1}{2} \times f \times A = \frac{1}{2} \times f \times 3a \times l; \quad \therefore f = \frac{2 \Sigma F_v}{3a}$$

**SUPERESTRUCTURA PLANA Y SUPERESTRUCTURA EN ARCO. COMPARACION DE SUS APOYOS.**

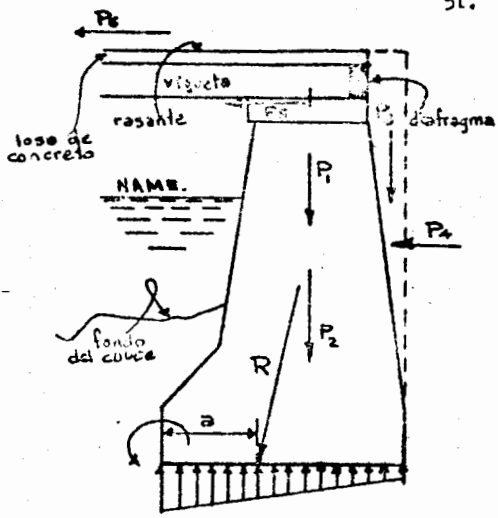
Si la superestructura consiste de losa y traveses y soporta además un gran colchón, los esfuerzos cortantes que resultan son muy grandes.

los con

que abar... coincide... (tradós) y... terior)... ir deter... siones a

se obtene... auxilio... rá defini... H<sub>1</sub>, ten... apoyo; el... co traza...

yo. Llame



- $P_1$  , peso de la superestructura.
- $P_2$  , peso de la subestructura.
- $P_3$  , peso de la terracería
- $P_4$  , empuje de la terracería
- $P_5$  , fuerza por cambio de temperatura
- $P_6$  , frenaje.

Figura 60

no del arco es de 0.60 m.

El cálculo del arco puede hacerse dividiéndolo en dovelas y trazando un funicular que abarque desde la clave hasta el apoyo. Por razones elásticas, la línea de presiones no coincide con el eje geométrico; en la clave se sube (pasa más cerca del extradós que del intradós) y en el apoyo se baja (queda más cerca del paramento interior del apoyo que del exterior). Habría que aplicar la ley del tercio medio y aunque sea a base de tanteos se podría ir determinando el espesor de las dovelas necesario para obligar siempre a la línea de presiones a pasar por el tercio medio.

Obsérvese la figura 61. La resultante de  $P_1$  y de  $P_2$  puede combinarse con  $P_3$  y se obtendrá así otra resultante  $R$ , perfectamente definida en valor y dirección, con el auxilio de un polígono funicular y un dinámico. Un punto de su línea de acción también estará definido. Si se prolonga esta resultante hasta su intersección con la línea de acción de  $H_1$ , tendremos un punto de la línea de acción de la fuerza  $H_2$  que el arco transmite al apoyo; el valor y dirección de esta fuerza pueden obtenerse con cierta facilidad del dinámico trazado con  $H_1$ ,  $R$  y la equilibrante de ellas  $+H_2$ .

Así pues, se tiene ya bien definida la fuerza  $H_2$  que el arco comunica al apoyo. Llamaremos  $\theta$  al ángulo que  $H_2$  forma con la horizontal.

Por otra parte, para contrarrestar el empuje de la terracería  $P_4$ , sólo se dispone del recurso auxiliar de construir una ampliación interior al cimientto, con la que ya se satisfaga la condición de que la resultante  $R$  no salga del tercio central de la base.

En cuanto a los arcos, empezaremos por citar unas cuantas generalidades.

Así como en el caso de la superestructura horizontal se distingue claramente a aquella del apoyo, en el arco también hay una zona que constituye al arco propiamente dicho y otra que ya es apoyo.

Estas partes están delimitadas por lo que se llama junta de ruptura, que en la figura 61 se ha supuesto queda definida por la línea  $AB$ , que forma un ángulo  $\theta$  con el eje vertical del arco.

Hay dos tipos de arcos, el de medio punto y el arco rebajado. Es costumbre que el radio del arco se refiera siempre al intradós o superficie interior del arco. La superficie exterior se llama extradós o simplemente trasdós. Pues bien, en el arco de medio punto el intradós es una media circunferencia. En cambio, en el arco rebajado el intradós subtende un ángulo en el centro menor de  $180^\circ$ .

En general el espesor mínimo del relleno

En casos, un muro puede estar sometido a fuerzas verticales que darán lugar a momentos  $\sum F_v$  y a otro sistema de fuerzas, cuya resultante  $\sum F_H$  tendrá un efecto respecto a la base del muro.  $\sum F_v$  y  $\sum F_H$  se obtendrá la resultante  $R$ , cuya línea de acción, que pasa por un punto  $C$ , que dista una distancia  $a$  que es preciso calcular.

Para descomponer a  $R$  en sus componentes, por un teorema elemental de la estática, tendremos que, si se toman como eje de volteo  $OO'$

$$\sum M_{O'} R = \sum F_v a + \text{cero}$$

$$\sum F_v x = \sum M_v \text{ y } \sum F_H y = \sum M_H$$

$$\frac{\sum M_H}{\sum F_v}$$

cada en el límite del tercio

$$B_{\text{máx}} = \frac{f_{\text{máx}} \sum F_v}{B}$$

último valor con el del caso  $f_{\text{máx}} = 2f$ , o sea que la fuerza

ya quedó analizado con cuidado la fórmula de la escuadría al estudio también es interesante por las tensiones, en algunos casos, a veces inadmisibles, dadas por el apoyo del muro.

Para estudiar lo que se llama acción. Para ello se supone un terreno que no sólo no es horizontal, sino ni siquiera a la

lo más cercano, se supone en parte, que es tres veces a; del tercio medio de la zona ya visto f valdrá:

ACTURA

además un gran colchón,

Estudieemos ahora el apoyo; para éste  $H_2$  se considera como fuerza exterior y conviene resolverla en sus componentes horizontal ( $P_7$ ) y vertical ( $P_8$ ).

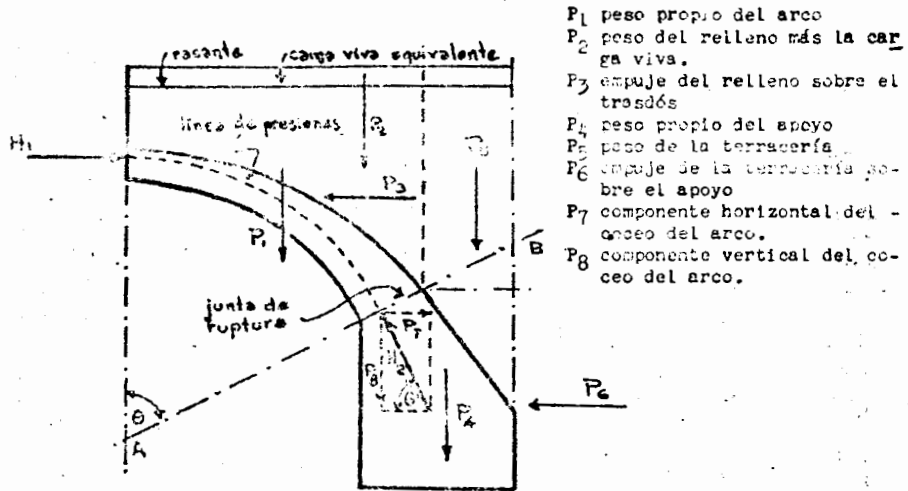


Figura 61

Nótese que la componente horizontal  $P_7$  se opone al empuje de la terracería ( $P_6$ ), lo que representa una ventaja del arco sobre la superestructura plana.

Un arco puede soportar colchones enormes de terracería y resulta económico, pero para ello se necesita una cimentación mayor y que el apoyo no falle por deslizamiento.

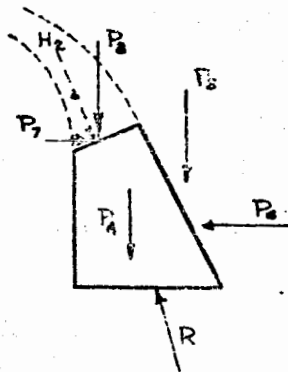


Figura 62.

Bajo las fuerzas indicadas en la figura 62, el apoyo del arco debe estar en equilibrio.

Estudieemos que sucede si se supone que el apoyo tenga dimensiones variables.

1o).- Supongamos el caso de un apoyo pequeño, de tal manera -- que  $P_7 < P_6$ .

La combinación de las cinco -- fuerzas que actúan sobre el apoyo determina una equilibrante -- (reacción del terreno), como la --  $R$ , inclinada hacia la izquierda.

2o).- Se pueden aumentar las dimensiones del apoyo hasta tal -- punto que se logre que  $P_7 = P_6$ . -- Cómo varían las demás fuerzas? -- Desde luego  $P_7$  y  $P_8$  no varian-

remos algu  
dencia cor  
en cada se  
coincide

Si el ar  
de apo.

so y por

se faci

ra como fuerza exterior y con el ( $P_8$ ).

- $P_1$  peso propio del arco
- $P_2$  peso del relleno más la carga viva.
- $P_3$  empuje del relleno sobre el trasdós
- $P_4$  peso propio del apoyo
- $P_5$  peso de la terracería
- $P_6$  empuje de la terracería sobre el apoyo
- $P_7$  componente horizontal del coceo del arco.
- $P_8$  componente vertical del coceo del arco.

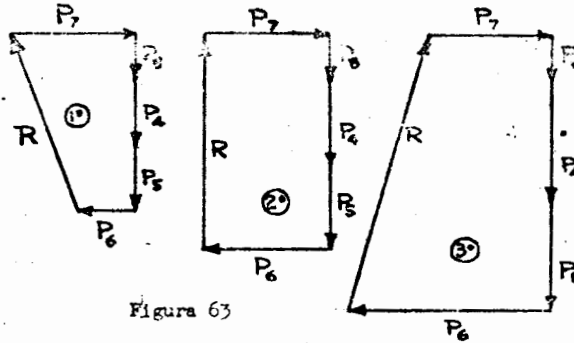
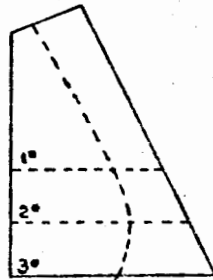


Figura 63

y  $P_4$ ,  $P_5$  y  $P_6$  aumentan respecto a su valor en el caso primero. El diagrama indica que la equilibrante es vertical y mayor que en el caso anterior.

3o).- Finalmente, aumentemos el apoyo, hasta lograr un empuje de terracería  $P_6 > P_7$ ; por lo ya explicado antes, conseguiremos que la equilibrante  $R$  aumente de tamaño y quede inclinada hacia la derecha.

Si estos resultados se llevan a una misma figura, tendremos la línea de presiones del apoyo, según indica el croquis. Se ve pues que la dirección, posición y tamaño de las reacciones pueden ser controlados mediante la modificación de las di-

$P_6$

mpuje de la terracería ( $P_6$ ), a plana.

ía y resulta económico, pero falle por deslizamiento.

ajo las fuerzas indicadas en la figura 62, el apoyo del arco debe estar en equilibrio.

studiemos que sucede si se supone que el apoyo tenga dimensiones variables.

Supongamos el caso de un apoyo pequeño, de tal manera que  $P_7 < P_6$ .

combinación de las cinco fuerzas que actúan sobre el apoyo determina una equilibrante (reacción del terreno), como la inclinada hacia la izquierda.

Se pueden aumentar las dimensiones del apoyo hasta tal punto que se logre que  $P_7 = P_6$ . Como varían las demás fuerzas? Desde luego  $P_7$  y  $P_8$  no varían

mensiones del apoyo.

La línea de presiones es algo muy importante en los arcos, de manera que estudiaremos algunos puntos más, relacionados con este tema. Como ya se dijo, no debe ir en colinealidad con el eje del arco, sino que se va apegando a la posición conveniente que deba tener en cada sección. En la clave, empieza en el límite superior del tercio medio y en el apoyo coincide con el límite interior del tercio medio.

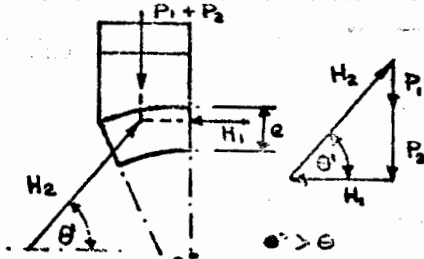


Figura 64.

Sea una sección del arco por estudiar tal como la mostrada en el dibujo, limitada por un pequeño ángulo  $\theta$  en el centro. Estará sujeta a un sistema de fuerzas que deben mantenerla en equilibrio. Dichas fuerzas son:

$H_1$  en el plano de la clave, normal a la cara de corte y a una profundidad  $e/3$ .

$P_1$  peso propio del arco y  $P_2$  peso propio del relleno más la altura de terraplén equivalente a la carga viva.

Si el ángulo  $\theta$  es suficientemente pequeño  $P_1$  y  $P_2$  son sensiblemente colineales y su línea de acción quedará el centro.

$P_3$ , empuje horizontal de la terracería sobre el trasdós es muy pequeña en este caso y podemos despreciarla.

Por último, la equilibrante  $H_2$ , sobre el otro plano de corte, que puede calcularse fácilmente por medio de la Estática.

54.

Se ha visto que el ángulo  $\theta'$  que  $H_2$  forma con la horizontal resulta mayor que  $\theta$  cuando  $\theta < 40^\circ$  (Figura 64).

Véase ahora un segundo caso, en el que  $\theta > 40^\circ$ .  $H_1$ ,  $R_1$  y  $P_2$  aumentan de valor y ahora si ya  $P_3$  tiene un valor apreciable que debe tomarse en cuenta.

Se ve que la posición de  $H_2$  y el valor de  $\theta'$  cambian. En forma semejante, se ha determinado que si  $\theta > 40^\circ$  resulta  $\theta' < \theta$ .

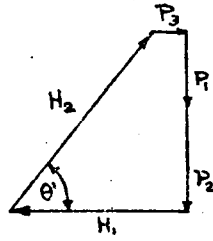
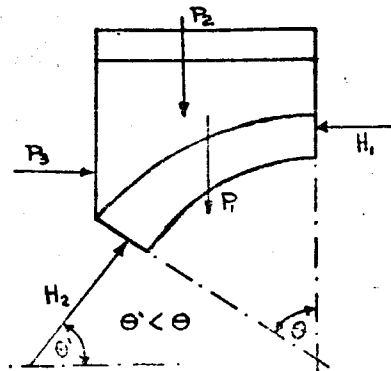


Figura 65.



Ahora bien; hay una sección en la que  $\theta = \theta'$ . Para ello, se requiere que  $H_2$  sea normal a la sección. Véase:

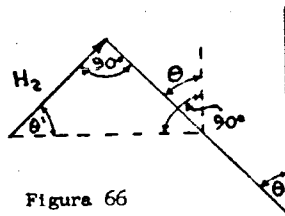


Figura 66

$$\theta' + 90^\circ + (90^\circ - \theta) = 180^\circ$$

$$\theta' + 180^\circ - \theta = 180^\circ$$

$$\therefore \theta' = \theta$$

A esta sección se le llama junta de ruptura y separa lo que debe considerarse como arco de lo que es apoyo. Es una sección crítica.

El caso extremo sería que el arco llegara a nivel con el centro del intradós.

Aquí, como  $\theta = 90^\circ > 40^\circ$  se tendría, desde luego, que  $\theta' < \theta$

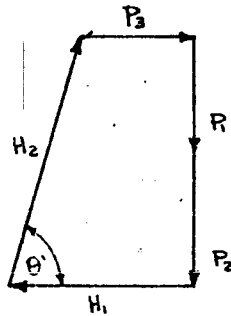
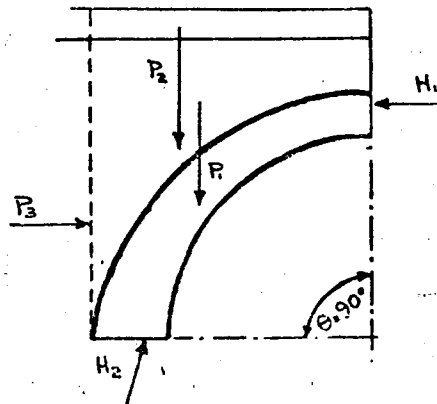


Figura 67.

En se apoya un material es su  
 (el ángulo zamiento,  
 límite so  
 de tierras  
 yo Q se ve  
 ción, el  
 mal a dis  
 brio.  
 te H debe

ESTUDIO DEL EMPUJE DE TIERRAS.

En la figura, la línea horizontal inferior representa el piso natural sobre el cual se apoya un muro vertical que detiene una terracería. Desde luego, se comprende que si el material es suelto tenderá a disgregarse y por tanto ejerce un empuje sobre el muro. Si suponemos que no hubiera muro, el material, por decirlo así, "se cue" y quedaría amontonado más o menos como indica el dibujo.

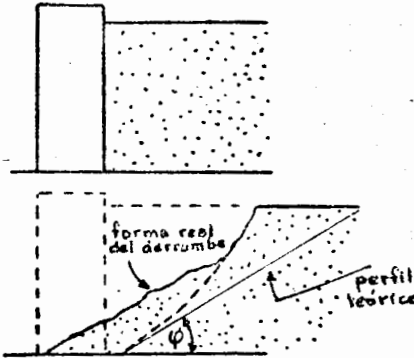


Figura 68

- a).- Conocer la intensidad máxima del empuje.
- b).- Determinar la posición de la resultante de todos los empujes unitarios.

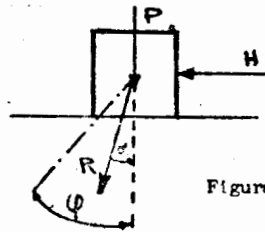


Figura 69

La cantidad de material que desliza es un prisma determinado por un ángulo mayor que  $\phi$ .

El problema del empuje de tierras ha sido estudiado por muchos físicos y matemáticos, pero hasta el momento no ha habido quien encuentre mejores resultados que los obtenidos por Rankine.

Dos son los aspectos más importantes que nos interesan a nosotros en relación con este asunto:

Imaginemos un cuerpo cúbico de peso P apoyado en el terreno natural, sobre el cual se aplica una fuerza horizontal H.

La combinación de la fuerza que tiende a hacerlo deslizar (H) y el peso del cuerpo produce una resultante R. Si se va aumentando progresivamente la intensidad de la fuerza horizontal, la resultante se va inclinando

(el ángulo  $\alpha$  aumenta), hasta que llegará el momento en que esté a punto de ocurrir el deslizamiento, cuando el ángulo  $\alpha$  sea igual al ángulo de fricción límite.

Se ve pues que para que el cuerpo no deslice la resultante R no se debe salir del límite señalado.

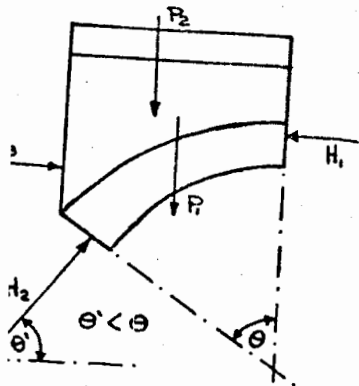
Estas ideas sobre la fricción son las que nos servirán para el estudio del empuje de tierras.

Véase ahora el mismo fenómeno, pero referido a un plano inclinado. El plano de apoyo Q se va a hacer girar alrededor de la bisagra O.

Desde luego, en el caso hipotético de dos superficies en las que no hubiera fricción, el cuerpo resbalaría con cualquier inclinación, por pequeña que esta fuera.

Ahora bien, puesto que no hay fricción, la reacción del plano inclinado será normal a dicho plano y se requerirá una fuerza horizontal H para que el cuerpo esté en equilibrio.

Si se dibujan los dinámicos correspondientes, se advertirá que la fuerza equilibrante H debe ser cada vez mayor, a medida que aumenta el valor del ángulo  $\phi$ . (Ver figura 70).



ello, se requiere que  $H_2$  sea  $90^\circ - \theta = 180^\circ - \theta = 180^\circ$

ón se le llama junta de ruptura lo que debe considerarse como que es apoyo. Es una sección -

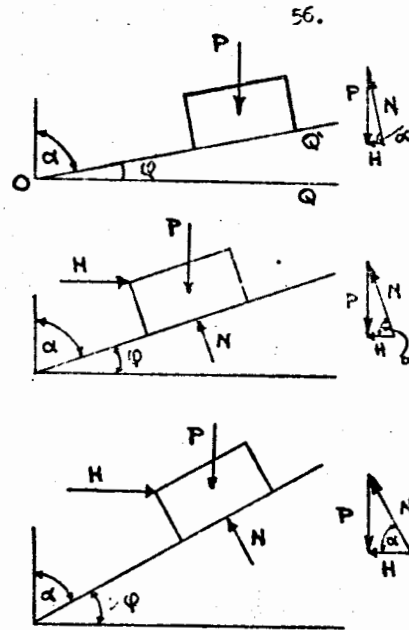
omo sería que el arco llegara el centro del intradós.

Aquí, como  $\theta = 90^\circ > 40^\circ$  se tendría, desde luego, que  $\theta' < \theta$



0





Se observa que en cualquier caso:

$$\tan \alpha = \frac{P}{H} \text{ y } \therefore H = \frac{P}{\tan \alpha}$$

$$\therefore H = P \cot \alpha$$

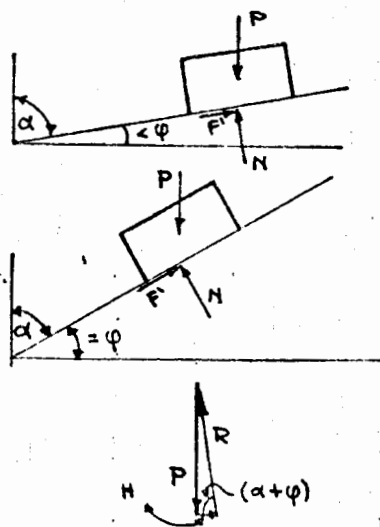
fricci  
-  
existe  
del p  
tario,  
que la

de a

cuando

Figura 70

Supongamos ahora que sí hay fricción entre las superficies. Hay que recordar que según la posición de la resultante respecto al cono de fricción el cuerpo estará en equilibrio o no.



En un primer caso, si la inclinación es menor que  $\varphi$  el cuerpo no resbalará y no será necesaria ninguna fuerza horizontal H para detener el cuerpo. La fricción desarrollada entre las superficies mantendrá el reposo.

Ahora hagamos que el ángulo de inclinación sea igual a  $\varphi$ . El equilibrio será inestable y el cuerpo estará a punto de deslizar. La fuerza de

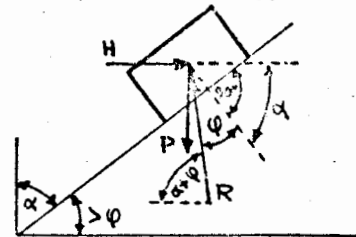


Figura 71

mayor

la fr  
resu

Se observa que en cualquier caso:

$$\tan \alpha = \frac{P}{H} \quad \therefore H = \frac{P}{\tan \alpha}$$

$$H = P \cot \alpha$$

fricción desarrollada es la límite.

Veamos un tercer caso, en el que se tenga una inclinación mayor que  $\varphi$ . Si no existe la fuerza  $H$ , la fricción límite será superada y el cuerpo resbalará. La componente del peso del cuerpo respecto al plano inclinado está provocando ese deslizamiento. Para evitarlo, es interesante valuar el valor mínimo de la  $H$  necesaria. Este valor es el que hace que la resultante de  $P$  y  $H$  coincida precisamente con la generatriz del cono de fricción.

$$\text{Del dinámico se obtiene que: } \tan(\alpha + \varphi) = \frac{P}{H}; \quad \therefore H = P \cot(\alpha + \varphi)$$

Este valor de  $H$  es el empuje activo "que hay que comunicar al cuerpo para que esté a punto de resbalar.

Puesto que  $\alpha < (\alpha + \varphi)$

$$\cot \alpha > \cot(\alpha + \varphi); \quad \therefore P \cot \alpha > P \cot(\alpha + \varphi)$$

Luego, vemos que el valor de  $H$  es menor en el caso en que sí hay fricción que cuando no la hay. Quiere decir que la fricción ayuda al sostenimiento del prisma.

Inicio. Hay que recordar que el cuerpo estará en equilibrio...

primer caso, si la inclinación es menor que  $\varphi$  el cuerpo no resbalará y no será necesaria ninguna fuerza horizontal  $H$  para detenerlo. La fricción desarrollada en las superficies mantendrá el...

hagamos que el ángulo de inclinación sea igual a  $\varphi$ . El equilibrio será inestable y el cuerpo está a punto de deslizarse. La fuerza de...

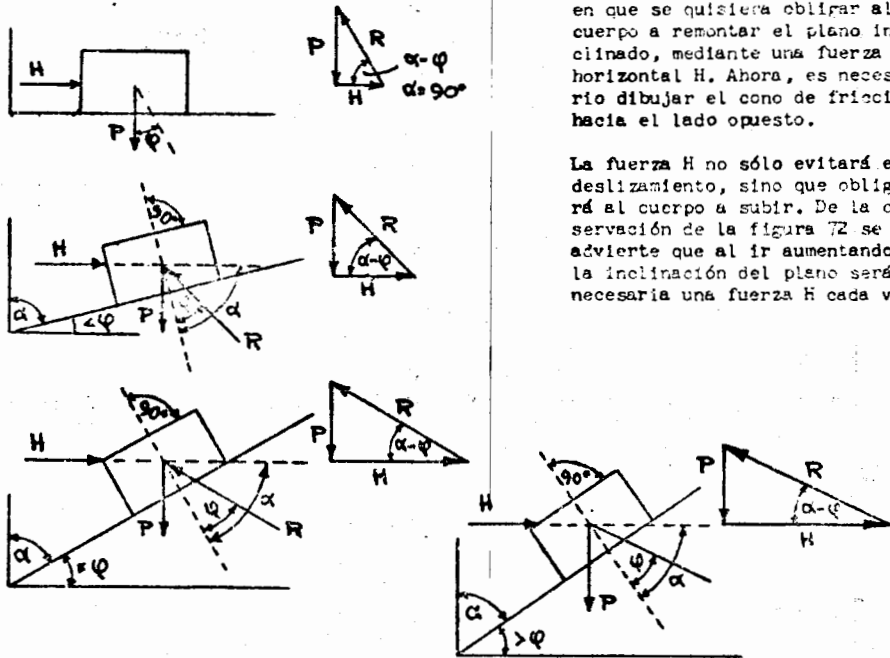
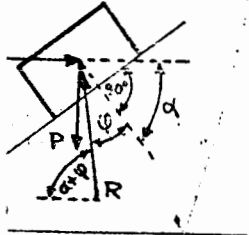


Figura 72.

Estudieemos por último el caso en que se quisiera obligar al cuerpo a remontar el plano inclinado, mediante una fuerza horizontal  $H$ . Ahora, es necesario dibujar el cono de fricción hacia el lado opuesto.

La fuerza  $H$  no sólo evitará el deslizamiento, sino que obligará al cuerpo a subir. De la observación de la figura 72 se advierte que al ir aumentando la inclinación del plano será necesaria una fuerza  $H$  cada vez...

mayor para cumplir con nuestro deseo de que el cuerpo remonte.

En la condición última, cuando la inclinación es mayor que  $\varphi$ , nos interesa valuar la fuerza  $H$  necesaria para que esté a punto de remontar. Otra vez, si se hace coincidir la resultante de  $H$  y  $P$  con la generatriz del cono de fricción el esquema nos indica que:

$$\tan(\alpha - \varphi) = \frac{P}{H}; \quad H = \frac{P}{\tan(\alpha - \varphi)}; \quad H = P \cot(\alpha - \varphi)$$

H recibe el nombre de "resistencia pasiva" y se advierte que su valor es mayor que el del empuje activo. Como era de esperarse, la fuerza necesaria para hacer que el cuerpo remonte es mayor que la que se requiere para impedir el deslizamiento.

¿Por qué es posible obligar al cuerpo a remontar el plano inclinado?

La respuesta es que la resultante de P y H tiene una componente respecto al plano inclinado que alcanza a vencer a la fricción. Sin embargo, cuando  $\alpha$  sea igual con  $\varphi$ , se necesitaría que R fuese horizontal y es claro que por muy grande que sea H, al combinarla con P nunca podrá obtenerse una resultante horizontal. Luego, no hay fuerza alguna con la que sea posible hacer que el cuerpo remonte a partir de un ángulo  $\alpha$  menor que  $\varphi$ .

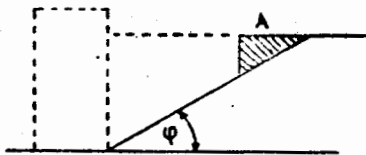


Figura 73.

Un cuerpo colocado en A, aún siendo sólido, estaría apenas a punto de deslizarse. Si fuera del mismo material, se disgregaría la parte superior y se acomodaría por sí sola sobre el talud.

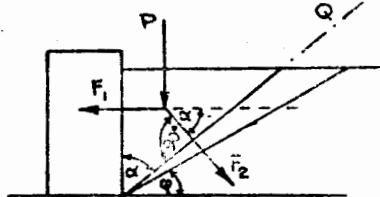


Figura 74.

Supongamos que se está haciendo una terracería, con camiones que acarrean el material y lo voltean para que este tome su talud natural. La terracería irá creciendo hasta quedar como indica la figura.

Nuestro problema consiste ahora en rellenar con ese mismo material el espacio que ha quedado entre el talud y el muro, apenas a punto de deslizarse. Si fuera del mismo material, se disgregaría la parte superior y se acomodaría por sí sola sobre el talud.

En cambio, el material comprendido entre el muro y un plano Q, definido por un ángulo que llamaremos  $\alpha$ , si deslizara sobre este plano Q, ya que  $(90^\circ - \alpha) > \varphi$ .

El peso del material que constituye esta cuña que si desliza puede descomponerse en dos fuerzas, una de ellas normal al muro ( $F_1$ ) y otra ( $F_2$ ) normal al plano de deslizamiento Q.

NOTA: Aún cuando entre la terracería y el muro también puede haber fricción, no la tomaremos en cuenta ya que se elimina, por construcción, mediante la colocación de drenes adecuados; la humedad hace las veces de un lubricante e impide la fricción.

Aclarado lo anterior, diremos que la teoría de Rankine supone que los empujes sobre el muro son horizontales. Su resultante es precisamente la fuerza  $F_1$ , que es la que queremos determinar.

Adviértase que la normal al plano de deslizamiento y la horizontal forman un ángulo igual con  $\alpha$ .

Si recordamos lo que acaba de estudiarse sobre fricción, nos será fácil determinar el valor de  $F_1$  necesario para que la cuña no deslice sobre el plano Q.

na deberá (racería), con la gen

en cada c ( $\alpha + \varphi$ ).

ta al aus cot ( $\alpha + \varphi$ ) lo  $\alpha$  que

0° como

$\lambda(\alpha - \varphi)$

... que su valor es mayor ...  
... sería para hacer que el cuer-  
... zamiento.

... plano inclinado?

... componente respecto al plano-  
... do  $\alpha$  sea igual con  $\varphi$ , se nece-  
... e sea H, al combinarla con P  
... fuerza alguna con la que sea  
... enor que  $\varphi$ .

... que se está haciendo una ti-  
... on camiones que acarrean el-  
... lo voltean para que este tome  
... tural. La terracería irá cre-  
... a quedar como indica la figu-

... blema consiste ahora en rell-  
... mismo material el espacio --  
... ado entre el talud y el muro,  
... nto de deslizar. Si fuera del  
... a por sí sola sobre el talud.

... el material comprendido entre  
... n plano Q, definido por un án-  
... amaremos  $\alpha$ , si deslizaría so-  
... ano Q, ya que  $(90^\circ - \alpha) > \varphi$ .

... material que constituye esta  
... desliza puede descomponerse-  
... zas, una de ellas normal al -  
... otra ( $F_2$ ) normal al plano de  
... to Q.

... n puede haber fricción, no -  
... onstrucción, mediante la co-  
... as veces de un lubricante e-

... e supone que los empujes so-  
... fuerza  $F_1$ , que es la que --

... la horizontal forman un án-

... ón, nos será fácil determi-  
... el plano Q.

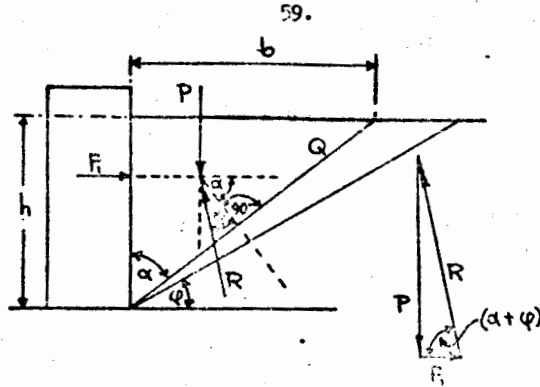


Figura 75

En efecto, se lleva a partir de la normal a Q un ángulo igual a  $\varphi$  y entonces la cuña deberá estar en equilibrio bajo la acción de las fuerzas  $F_1$  (empuje del muro sobre la terracería), P (peso propio de la cuña) y R (reacción del plano sobre la cuña, en coincidencia con la generatriz del cono de fricción).

El dinámico nos indica que para que ese equilibrio exista se necesita que

$$\cot(\alpha + \varphi) = \frac{F_1}{P} \quad \text{y} \quad \therefore F_1 = P \cot(\alpha + \varphi)$$

Luego, para conocer  $F_1$ , es necesario valuar P.

Si se toma una longitud unitaria normalmente a la sección del muro se tiene:

$$P = \frac{1}{2} b h w, \quad \text{y como } b = h \tan \alpha \text{ resulta que } P = \frac{1}{2} w h^2 \tan \alpha$$

$$\therefore F_1 = \frac{1}{2} w h^2 \tan \alpha \cot(\alpha + \varphi)$$

Esta fórmula se puede considerar dividida en tres partes: una cantidad constante en cada caso particular, que es  $w h^2 / 2$ ; el valor de  $\tan \alpha$  y, por último, la cotangente de  $(\alpha + \varphi)$ .

¿Como varía  $F_1$  si se considera que  $\alpha$  es variable? Pues, por una parte,  $F_1$  aumenta al aumentar el valor de la tangente de  $\alpha$ ; pero por otra disminuye al ser menor el factor  $\cot(\alpha + \varphi)$ . Por lo anterior, inmediatamente nos damos cuenta de que habrá un valor del ángulo  $\alpha$  que haga máximo el empuje  $F_1$ .

Para ver cuál es ese valor podríamos seguir varios métodos:

a).- Dar valores al ángulo  $\alpha$  y ver cuántos grados debe medir para que el factor  $\tan \alpha \cot(\alpha + \varphi)$  sea máximo, como se ve a continuación:

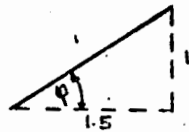


Figura 76.

El talud más común de las terracerías es de 1.5 a 1, que corresponde a un ángulo cuya tangente vale  $1/1.5 = 0.667$

$$\therefore \text{ang tan } 0.667 = 33^\circ 42'$$

Esto quiere decir que para un talud de 1.5:1 sólo es interesante que  $\alpha$  varíe desde

$0^\circ$  como mínimo hasta  $(90^\circ - 33^\circ 42') = 56^\circ 18'$  como valor máximo.

Formaremos una tabla para mayor claridad:

Valores de $\alpha$	$\tan \alpha$	Valor de $(\alpha + \varphi)$	$\cot(\alpha + \varphi)$	$\tan \alpha \cot(\alpha + \varphi)$
$0^\circ$	0	$33^\circ 42'$	1.499	0
$10^\circ$	0.1763	$43^\circ 42'$	1.046	0.1845
$20^\circ$	0.3640	$53^\circ 42'$	0.7346	0.267
$30^\circ$	0.5774	$63^\circ 42'$	0.4942	0.284
$40^\circ$	0.8391	$73^\circ 42'$	0.2924	0.245
$50^\circ$	1.192	$83^\circ 42'$	0.1104	0.131
$56^\circ 18'$	1.499	$90^\circ$	0	0

Estos resultados corresponden a la realidad física puesto que, cuando  $\alpha = 0^\circ$  el prisma reduce su base a cero y lógicamente no puede dar empuje alguno. Si  $\alpha = 56^\circ 18'$  se trata de la cuña completa, apoyada sobre el talud natural, que ya vimos que tampoco da ningún empuje, porque apenas está a punto de resbalar.

Vemos también que el valor máximo de  $F_1$  debe ocurrir para un ángulo  $\alpha$  muy cercano a  $30^\circ$ . Matemáticamente se ha comprobado que si  $\alpha = \frac{90^\circ - \varphi}{2}$ , es máximo  $F_1$ .

En efecto, si  $\alpha = \frac{56^\circ 18'}{2} = 28^\circ 09'$  resulta:

$$(\alpha + \varphi) = 28^\circ 09' + 33^\circ 42' = 61^\circ 51' \quad \text{y por tanto:}$$

$$\left. \begin{aligned} \tan \alpha &= \tan 28^\circ 09' = 0.5351 \\ \cot(\alpha + \varphi) &= \cot 61^\circ 51' = 0.5351 \end{aligned} \right\} \therefore \tan \alpha \cot(\alpha + \varphi) = 0.286 > 0.284$$

b).- Derivar el valor de  $F_1$ , igualar con cero, y obtener de la expresión resultante el valor de  $\alpha$  que hace máxima la fuerza  $F_1$ . Véase:

$$\frac{dF_1}{d\alpha} = \left[ \frac{wh^2}{2} \right] \left[ \tan \alpha \langle -\csc^2(\alpha + \varphi) \rangle + \cot(\alpha + \varphi) \sec^2 \alpha \right] = 0$$

$$\cot(\alpha + \varphi) \sec^2 \alpha = \csc^2(\alpha + \varphi) \tan \alpha; \quad \frac{\cos(\alpha + \varphi)}{\sin(\alpha + \varphi)} \frac{1}{\sin^2(\alpha + \varphi)} = \frac{\sec \alpha \cos^2 \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\sin(\alpha + \varphi) \cos(\alpha + \varphi) = \sin \alpha \cos \alpha; \quad \text{Recuérdese: } \sin A \cos A = \frac{1}{2} \sin 2A$$

$$\frac{1}{2} \sin 2(\alpha + \varphi) = \frac{1}{2} \sin 2\alpha;$$

$$\sin 2(\alpha + \varphi) - \sin 2\alpha = 0; \quad \text{Recuérdese: } \sin A - \sin B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$$

$$\therefore 2 \cos \left( \frac{2\alpha + 2\varphi + 2\alpha}{2} \right) \sin \left( \frac{2\alpha + 2\varphi - 2\alpha}{2} \right) = 0$$

$$2 \cos(2\alpha + \varphi) \sin \varphi = 0, \quad \text{igualdad que se satisface si } \sin \varphi = 0$$

$$\text{y también si } \cos(2\alpha + \varphi) = 0$$

Para que  $\sin \varphi = 0$ , se necesita que  $\varphi = 0^\circ$ . El caso sería el de un material que no se sostuviera por sí mismo con ningún ángulo de reposo, como el agua. Efectivamente, el agua y en general los líquidos ejercen empujes máximos.

Según la otra alternativa:

$$\cos(2\alpha + \varphi) = 0^\circ$$

(El coseno es nulo cuando el ángulo vale  $90^\circ$ )

$$\therefore 2\alpha + \varphi = 90^\circ$$

y finalmente:

$$\alpha = \frac{90^\circ - \varphi}{2}$$

que es el mismo valor al que llegamos antes con el cálculo aproximado.

Así pues, se ha demostrado que  $F_1$  es máximo cuando  $\alpha = \frac{90^\circ - \varphi}{2}$ .

$(\alpha + \varphi)$	$\tan \alpha \cot (\alpha + \varphi)$
.499	0
.046	0.1845
.7346	0.267
.4942	0.284
.2924	0.245
.1104	0.131
0	0

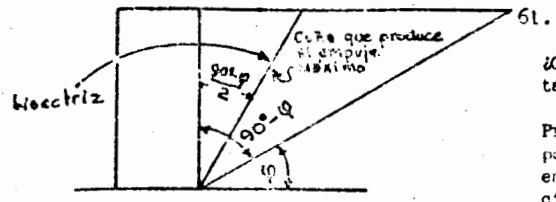


Figura 77

¿Cuál es la interpretación de este resultado?

Primero.- Aunque toda la cufa limitada por el ángulo  $(90^\circ - \varphi)$  interviene en el empuje, el valor máximo de este es producido por un prisma menor.

Segundo.- Este prisma, que es el que da el empuje máximo, se obtiene restándole  $90^\circ$  el ángulo  $\varphi$  y bisectando después el ángulo que queda.

Por último, si en la fórmula general del empuje se sustituye el valor encontrado para  $\alpha$  obtendremos la expresión del empuje máximo:

$$F_{i \max} = \frac{\omega h^2}{2} \tan \left( \frac{90^\circ - \varphi}{2} \right) \cot \left( \frac{90^\circ - \varphi}{2} + \varphi \right)$$

$$= \frac{\omega h^2}{2} \tan \left( 45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) \cot \left( 45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) = \frac{\omega h^2}{2} \frac{\sin \left( 45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) \cos \left( 45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right)}{\cos \left( 45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) \sin \left( 45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right)}$$

$$= \frac{\omega h^2}{2} \frac{\sin 45^\circ \cos \frac{\varphi}{2} - \cos 45^\circ \sin \frac{\varphi}{2}}{\cos 45^\circ \cos \frac{\varphi}{2} + \sin 45^\circ \sin \frac{\varphi}{2}} \frac{\cos 45^\circ \cos \frac{\varphi}{2} - \sin 45^\circ \sin \frac{\varphi}{2}}{\sin 45^\circ \cos \frac{\varphi}{2} + \cos 45^\circ \sin \frac{\varphi}{2}}$$

$$F_{i \max} = \frac{\omega h^2}{2} \frac{(\cos \frac{\varphi}{2} - \sin \frac{\varphi}{2})(\cos \frac{\varphi}{2} - \sin \frac{\varphi}{2})}{(\cos \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{\varphi}{2})(\cos \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{\varphi}{2})} = \frac{\omega h^2}{2} \frac{(\cos \frac{\varphi}{2} - \sin \frac{\varphi}{2})^2}{(\cos \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{\varphi}{2})^2}$$

$$F_{i \max} = \frac{\omega h^2}{2} \frac{\cos^2 \frac{\varphi}{2} - 2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} + \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{\cos^2 \frac{\varphi}{2} + 2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} + \sin^2 \frac{\varphi}{2}} = \frac{1 - 2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}}{1 + 2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}}$$

y como  $\sin \varphi = \sin \left( \frac{\varphi}{2} + \frac{\varphi}{2} \right) = \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} + \cos \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi}{2} = 2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}$

$$F_{i \max} = \frac{\omega h^2}{2} \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi}$$

expresión conocida con el nombre de Fórmula de Rankine.

Claro está que la expresión  $\frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi}$  debe satisfacer el resultado numérico encontrado antes.- En efecto:

$$\frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} = \frac{1 - \sin 33^\circ 42'}{1 + \sin 33^\circ 42'} = \frac{1 - 0.5548}{1 + 0.5548} = \frac{0.4452}{1.5548} = 0.286$$

Si se toma el valor usual de  $\omega = 1600 \text{ kg/m}^3$ .

$$F_i = \frac{1600}{2} h^2 \times 0.286 = 229 h^2$$

Nos conviene ahora estudiar el segundo aspecto del problema, relativo a la posición de la resultante de todos los empujes.

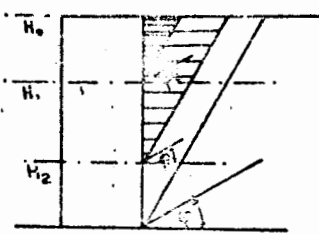


Figura 78.

Si se supone que el muro estuviese limitado por un plano  $H_1$  cercano a la superficie, y puesto que hemos aceptado que el valor del empuje se debe al peso del material que forma la cufa de empuje máximo, en este caso dicho empuje tendría un valor relativamente pequeño.

Para un plano  $H_2$  a mayor profundidad la cufa correspondiente aumenta de volumen y consecuentemente producirá un empuje mayor.

uesto que, cuando  $\alpha = 0^\circ$  el prisma no da empuje. Si  $\alpha = 55^\circ 18'$  se trata de un prisma que tampoco da ningún empuje.

Ir para un ángulo  $\alpha$  muy cercano al máximo  $F_i$ .

$$0.286 > 0.284$$

obtener de la expresión resultante. Véase:

$$\varphi) \sec^2 \alpha = 0$$

$$\frac{\varphi}{\varphi} \sin^2(\alpha + \varphi) = \frac{\sin \alpha \cos^2 \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\text{cuadrada: } \sin A \cos A = \frac{1}{2} \sin 2A$$

$$\sin A - \sin B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$$

satisface si  $\sin \varphi = 0$

$$\sin(2\alpha + \varphi) = 0$$

el caso sería el de un material en ángulo de reposo, como el agua, que no ejerce empujes máximos.

es nulo cuando el ángulo vale  $90^\circ$

ismo valor al que llegamos antes uo aproximado.

$$\alpha = \frac{90^\circ - \varphi}{2}$$

Para el plano  $H_0$ , coincidente con la superficie del terreno, puede afirmarse que el empuje es nulo, puesto que no hay material que lo produzca. De esto, se puede concluir que los empujes elementales son variables con la profundidad; empiezan con un valor nulo en la superficie, van aumentando a medida que la profundidad es mayor y acaban con un valor máximo en la base del muro.



Figura 79.

Sin embargo, mientras no se demuestre otra cosa, esto no autoriza para decir que su variación sea lineal, puesto que con igual razón podría ser circular, arbitraria, etc. (Figura 79).

Se tratará de llegar a la conclusión de que los empujes elementales efectivamente varían según una línea recta. Supongamos que a una profundidad  $h_1$  el empuje elemental tenga un valor que llamaremos  $f_1$ .

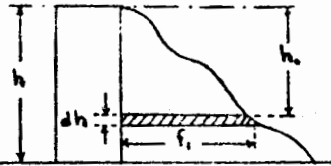


Figura 80

Como sabemos que el volumen de esfuerzos es igual con la fuerza externa -- que les da origen, resulta que:

$$dh \times f_1 \times 1 = dF, \therefore f_1 = \frac{dF}{dh}$$

O sea que el esfuerzo  $f_1$  a una profundidad cualquiera  $h_1$  es igual a la derivada de la expresión general del empuje total respecto a  $h$ .

Como  $F = \frac{wh^2}{2} \frac{1 - \text{sen } \varphi}{1 + \text{sen } \varphi}$

$$\frac{dF}{dh} = \frac{2wh}{2} \frac{1 - \text{sen } \varphi}{1 + \text{sen } \varphi} = w \left( \frac{1 - \text{sen } \varphi}{1 + \text{sen } \varphi} \right) h.$$

Es decir, que los empujes elementales varían según una línea recta o, en otras palabras, la distribución es triangular.

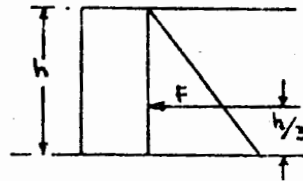


Figura 81

Ya es bien sabido que en este caso, la resultante  $F$  de los empujes unitarios se encuentra a un tercio de la altura, medido a partir de la base.

Con esto, quedan resueltos los dos problemas que inicialmente nos propusimos estudiar sobre el empuje de tierras.

Detalles constructivos.- Es necesario que el muro lleve sus drenes y que se coloque un relleno de piedra quebrada entre la tierra y el muro, con el fin de dar salida a la humedad y evitar que  $\varphi$  disminuya. El caso límite sería cuando  $\varphi = 0^\circ$  y por tanto el quebrado  $\frac{1 - \text{sen } \varphi}{1 + \text{sen } \varphi} = 1$ .

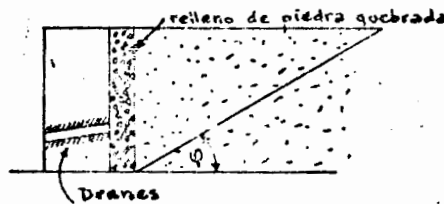


Figura 82.

De este modo, la fórmula da el empuje del agua:  $F = \frac{wh^2}{2}$ , empuje que es mucho mayor que el de la tierra, puesto que ya vimos que para  $\varphi = 33^\circ 42'$  el quebrado  $\frac{1 - \text{sen } \varphi}{1 + \text{sen } \varphi} = 0.286$

$$\frac{1 - \text{sen } \varphi}{1 + \text{sen } \varphi} = 0.286$$

terreno, puede afirmarse que De esto, se puede concluir. empiezan con un valor nulo en mayor y acaban con un valor --

rgo, mientras no se demuestre a, esto no autoriza para de... su variación sea lineal, pues on igual razón podría ser cir rbitraria, etc. (Figura 79).

rá de llegar a la conclusión línea recta. Supongamos que a aremos  $f_1$ .

mos que el volumen de esfuer gual con la fuerza externa -- a origen, resulta que:

$$\delta = dF, \therefore f_1 = \frac{dF}{dh}$$

el esfuerzo  $f_1$  a una profun ral del empuje total respec-

que los empujes elementales ón es triangular.

n sabido que en este caso, ente  $F$  de los empujes unita encuentra a un tercio de la edido a partir de la base.

quedan resueltos los dos -- que inicialmente nos propu udial sobre el empuje de tie

constructivos. - Es necesario dra quebrada entre la terra l muro, con el fin de dar sa humedad y evitar que  $\phi$  dis l caso límite sería cuando lamente agua, para la cual por tanto el quebrado

do, la fórmula da el empuje  $F = \frac{wh^2}{2}$ , empuje que es ma -- que el de la tierra, puesto os que para  $\phi = 33^\circ 42'$  el --

$$\frac{1 - \text{sen } \phi}{1 + \text{sen } \phi} = 0.286$$

### CALCULO DE VERIFICACION DE LA ESTABILIDAD DE UN MURO DE SOSTENIMIENTO.

Supongamos un muro de sostenimiento como el indicado en la figura.

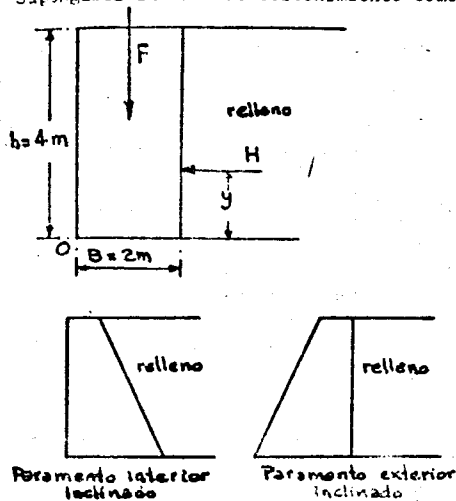


Figura 83.

Desde luego, tenemos que decir que la sección es antieconómica, pero la estudiaremos sólo en plan ilustrativo.

Las secciones trapezoidales son más económicas. (Figura 83).

Los manuales emplean una nomenclatura especial en la que el empuje horizontal de la terracería se llama  $H$ . El peso del muro será  $F$ .

El cálculo consistirá en lo que sigue:

- Suponer dimensiones.
- Determinar las fuerzas que intervienen.
- Revisión de los esfuerzos y de las condiciones de estabilidad, y
- Revisar dimensiones del muro (si resultó ancho se reduce o viceversa).

lo).- Condición de volteo: (Que la resultante caiga dentro de la base).

Ya sabemos que hay que valorar el momento, respecto al punto  $O$ , de las fuerzas que intervienen. De acuerdo con la condición establecida en la pág. 45

$$\frac{\sum M_v}{\sum M_H} > 2$$

Si  $\sum M_v = \sum M_H$  se está en la condición crítica y la resultante pasa por la arista de volteo. Al hecho de duplicar el valor de  $\sum M_H$  se le llama mayorar; de este modo, se tiene la seguridad de que  $R$  cae en la base.

$$\sum M_v = P \times \frac{B}{2} = B \times h \times \Delta \times \frac{B}{2} = \frac{\Delta}{2} B^2 h$$

$$\sum M_v = \frac{2200}{2} \times 4 \times 4 = 17600 \text{ kgm}$$

$$\sum M_H = Hy = \frac{wh^2}{2} \frac{1 - \text{sen } \phi}{1 + \text{sen } \phi} \frac{h}{3} = \frac{wh^3}{6} \frac{1 - \text{sen } \phi}{1 + \text{sen } \phi}$$

$$\therefore \sum M_H = \frac{1600 \times 4^3}{6} \frac{1 - \text{sen } 33^\circ 42'}{1 + \text{sen } 33^\circ 42'}$$

$$\sum M_H = \frac{1600 \times 64}{6} \times 0.286 = 4900 \text{ kgm}$$

$$\therefore \frac{\sum M_v}{\sum M_H} = \frac{17600}{4900} = 3.6 > 2$$

Luego, por lo que toca a la condición de volteo el muro está muy sobrado.

(Peso volumétrico de la mampostería:  $\Delta = 2200 \text{ kg/m}^3$ ).

(El talud será de  $1\frac{1}{2}:1$ , que corresponde a un ángulo  $\phi = 33^\circ 42'$ .)

Peso volumétrico del relleno:  $w = 1600 \text{ kg/m}^3$ .



20).- Condición de deslizamiento:

Si se cumple con la igualdad  $\sum F_H = \mu \sum F_V$  el muro está a punto de deslizarse; lo indicado, entonces, es mayor también esta condición:  
 $\therefore 2 \sum F_H = \mu \sum F_V$  (Supondremos que  $\mu = 0.5$ )

$$\mu \sum F_V = 0.5 \times \Delta \times B \times h \times 1 = 0.5 \times 2200 \times 4 \times 2 = 8800 \text{ kg}$$

$$\sum F_H = \frac{wh^2}{2} \frac{1 - \text{sen} \varphi}{1 + \text{sen} \varphi} = \frac{1600 \times 16}{2} \times 0.286 = 3650 \text{ kg.}$$

$$\frac{\mu \sum F_V}{\sum F_H} = \frac{8800}{3650} = 2.41 > 2$$

y por tanto el muro también está en buenas condiciones por lo que toca a deslizamiento.

30).- Condición de fatiga:

Empezaremos por calcular la distancia que llamamos  $a$  (hoja 50.)

$$a = \frac{\sum M_V - \sum M_H}{\sum F_V} = \frac{17600 - 4900}{17600} = \frac{12700}{17600} = 0.72 \text{ m, resultado que indica que la resultante cae dentro del tercio medio. Luego, el diagrama es trapecial y}$$

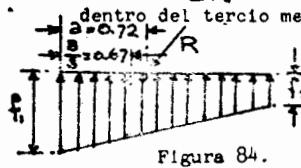


Figura 84.

$$f_1 = \frac{\sum F_V}{B^2} (4B - 6a) = \frac{17600}{4} (8.00 - 4.32)$$

$$f_1 = \frac{17600 \times 3.68}{4} = 16200 \text{ kg/m}^2 = 1.62 \text{ kg/cm}^2$$

La fatiga en el otro extremo es:

$$f_2 = \frac{\sum F_V}{B^2} (6a - 2B) = \frac{17600 (4.32 - 8.00)}{4} = 1410 \text{ kg/m}^2 = 0.141 \text{ kg/cm}^2$$

Si estos esfuerzos los soporta el terreno, queda comprobado que el muro cumple todas las condiciones de estabilidad satisfactoriamente.

Sin embargo, es poco elegante diseñar una estructura por medio de tanteos, sin que esto quiera decir que a veces no haya necesidad de hacer revisiones.

Para diseñar, lo indicado es encontrar las expresiones de las dimensiones mínimas, de acuerdo con las condiciones de estabilidad y los esfuerzos de trabajo de los materiales.

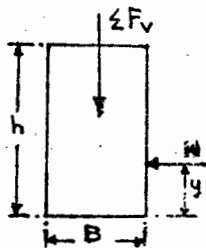


Figura 85.

CALCULO DIRECTO DE UN MURO DE SOSTENIMIENTO.

10).- Condición de volteo:

$$\frac{\sum M_V}{\sum M_H} = 2$$

$$\sum M_V = 2 \sum M_H$$

$$\sum M_V = \sum F_V \times \frac{B}{2}$$

$$\sum M_H = Hy = \frac{wh^2}{2} \frac{1 - \text{sen} \varphi}{1 + \text{sen} \varphi} \times \frac{h}{3} = \frac{wh^3}{6} \frac{1 - \text{sen} \varphi}{1 + \text{sen} \varphi}$$

$$\sum M_H = \frac{1600}{6} \times 0.286 h^3 = 76 h^3$$

$$\sum F_V \times \frac{B}{2} = 2 \times 76 h^3 \Rightarrow \Delta B h = \frac{B}{2} = 152 h^3 \Rightarrow B^2 = \frac{204 h^2}{\Delta} = \frac{204 h^2}{2200} = 0.138 h^2$$

$$\therefore B = 0.373 h;$$

Relación necesaria entre B y h para que el muro no se volteo.

; aquí no tiene caso el signo "mayor que", pues por economía buscamos dimensiones mínimas.

to a la d  
ndéticos  
teo.

Vemos que para el muro de 4.00 m. de altura hubiera bastado con una  $B = 1.5$  m.

2c).- Condición de deslizamiento:

Haremos un estudio semejante:

Si  $\sum F_H = \mu \sum F_v$  el muro estará a punto de deslizarse. Para poner la estructura en condiciones de seguridad hay que mejorar el empuje horizontal.

$$\mu \sum F_v = ? \sum F_H,$$

símbolos que substituiremos por sus valores correspondientes de acuerdo con los datos del problema. Tomaremos un valor de

$$\mu = 0.66$$

$$\sum F_v = \Delta B h$$

$$\sum F_H = H = \frac{w h^2}{2} \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} = \frac{1600}{2} \times 0.286 h^2 = 230 h^2; \therefore \Delta B h = 460 h^2$$

$$B = 0.315 h$$

Recuérdese que, por la condición de volteo  $B = 0.373 h$ . Luego, es necesario una base mayor para cumplir con el requisito de que el muro no voltee.

Sin embargo, si tomáramos  $\mu = 0.50$ , se tendría que:

$$B = 0.315 h \left(\frac{66}{50}\right); \quad B = 0.414 h > 0.373 h$$

Quiere decir que habrá algunos casos en que se imponga la condición de deslizamiento a la de volteo. A pesar de esto, el 0.66 es el coeficiente más frecuente en los problemas prácticos, de manera que "casi siempre" el tamaño de la base lo determina la condición de volteo.

3).- Condición de fatiga.

Conocido ya el tamaño de la base que fuera necesaria, según que domine la condición de volteo o la de deslizamiento, las fatigas podrían calcularse -- por simple revisión, tomando en cuenta el valor obtenido de  $B$ . Sin embargo -- puesto que se trata de proyectar, es más indicado obtener una fórmula general que nos sirva para calcular los esfuerzos en un caso cualquiera.

Brevemente, recordemos lo establecido al estudiar los distintos casos del análisis de fatigas:

a).- Carga axial, respuesta uniforme:  $f_1 = \frac{\sum F_v}{B}$

b).- Carga dentro del tercio medio, respuesta trapecial:  $f_1 = \frac{\sum F_v}{3B} (4B - 6a)$   
y  $f_2 = \frac{\sum F_v}{3B} (6a - 2B)$

c).- Carga en el límite del tercio medio, respuesta triangular:  $f_1 = 0$   
y  $f_2 = \frac{2 \sum F_v}{B}$

d).- Carga fuera del tercio medio; aparecen tensiones. Pueden aplicarse las fórmulas dadas en b).-

e).- Si las tensiones son inadmisibles, modificación del caso c).-

por reducción de sección:  $f = \frac{2 \sum F_v}{3a}$

el muro está a punto de deslizarse en esta condición: (tomemos que  $\mu = 0.5$ )

$$4 \times 2 = 8800 \text{ kg}$$

$$= 3650 \text{ kg.}$$

tanto el muro también está en condiciones por lo que toca a su asiento.

a (hoja 50.)

0.72, resultado que indica que la resultante cae en la trapecial y

$$6a) \frac{17600}{4} (8.00 - 4.32)$$

$$\frac{68}{m^2} = 16200 \text{ kg/m}^2 = 1.62 \text{ kg/cm}^2$$

$$0.141 \text{ kg/cm}^2$$

probado que el muro cumple ante.

a por medio de tanteos, sin revisiones.

es de las dimensiones mínimas, de trabajo de los materiales.

ión de volteo:

aquí no tiene caso el signo "mayor que", pues por economía buscamos dimensiones mínimas.

$$\frac{h}{3} = \frac{w h^3}{6} \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi}$$

$$76 h^2 = \frac{0.4 h^3}{2.200} = 0.138 h^2$$

h para que el muro no se voltee

Por la variedad de casos que se pueden presentar, es indicado establecer una fórmula general para la condición límite, teniendo en cuenta, como ya se dijo, que no está permitida la existencia de tensiones. Luego, buscaremos una expresión que nos de el ancho B del muro cuando la resultante esté aplicada en el límite del tercio-medio precisamente.

De este modo, si la fatiga admisible se sobrepasa, el muro deberá hacerse más ancho, la resultante se correrá hacia el centro y los nuevos esfuerzos serán calculables con las fórmulas dadas en b).- Por el contrario, si la fatiga resulta pequeña, el muro estará sobrado y la base B se podrá reducir, pero entonces la resultante se saldrá del tercio central. Se aplicará después la fórmula dada en e).-

Empezaremos por encontrar el valor de a, a partir de la condición de igualdad de momentos:

$$a \times \frac{\sum M_v - \sum M_H}{\sum F_v}$$

, y como queremos saber, con una sola fórmula, cuál es el valor de la fatiga, obligaremos a que a sea igual con  $\frac{B}{3}$  para que, como ya dijimos, la resultante caiga en el límite del tercio medio.

$$\frac{B}{3} = \frac{\sum M_v - \sum M_H}{\sum F_v}$$

$$\sum M_v = \frac{B}{2} \sum F_v = \frac{B}{2} \times B \times h \times 1 \times \Delta = \frac{\Delta B^2 h}{2} = \frac{2200}{2} B^2 h = 1100 B^2 h$$

$$\sum M_H = H \times \frac{h}{3} = \frac{wh^3}{6} \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} = \frac{1600}{6} \times 0.286 h^3 = 77 h^3$$

$$\sum F_v = B \times h \times 1 \times \Delta = 2200 B h \quad ; \text{ sustituyendo valores:}$$

$$\frac{B}{3} = \frac{1100 B^2 h - 77 h^3}{2200 B h}$$

$$2200 B^2 h = 3300 B^2 h - 231 h^3 ; \quad 1100 B^2 = 231 h^2$$

$$\therefore B^2 = \frac{231 h^2}{1100} = 0.209 h^2$$

y finalmente:

$$B = 0.46 h$$

Esta relación demuestra que efectivamente la condición de tercio medio domina a las otras dos (la de volteo y la de deslizamiento) y por tanto el ancho B del muro estará determinado por esta última ecuación. De paso, nótese que la base del muro casi debe ser igual a la mitad de la altura.

La fatiga correspondiente a una resultante aplicada en el límite del tercio central es:

$$f = \frac{2 \sum F_v}{3B}$$

, mas como hemos obligado a que a sea igual con  $\frac{B}{3}$

$$f = \frac{2 \times 2200 B h}{3 \times \frac{B}{3}} = 4400 h$$

$\therefore f = 4400 h$  es la expresión que da el valor de la fatiga, en función de la altura, cuando la resultante actúa en el límite del tercio medio.

Si se aplicaran al problema anterior estas ideas, resultaría que a partir de  $h = 4$  m. obtenemos que:

$$f = 4400 \times 4 = 17600 \text{ Kg/m}^2 = 1.76 \text{ Kg/cm}^2.$$

Inmediatamente se comparará esta fatiga con la máxima admisible de los materiales en cuestión. Suponiendo que fuera aceptable, lo que procede es calcular enseguida el valor de B, tuesto que para que se produzca la fatiga de  $1.76 \text{ kg/cm}^2$  es necesario que:

$B = 0.46 h = 0.46 \times 4 = 1.84 \text{ m}$ . Con esto, el problema quedaría resuelto, pues ya sabemos que las condiciones de volteo y deslizamiento resultan ampliamente cubiertas.

Supongamos ahora que la fatiga encontrada (en el caso concreto en estudio los  $1.76 \text{ kg/cm}^2$ ) sea muy baja. Lo indicado será aumentarla, para tener un mejor aprovechamiento de las resistencias de los materiales.

Entonces, lo procedente es calcular la base con la condición de volteo:

$B = 0.373 h$  (En el problema ilustrativo,  $B = 0.373 \times 4.00 = 1.492 \text{ m} \approx 1.5 \text{ m}$ ).

Sólo que ahora, con una base menor, la resultante se sale del tercio medio; puesto que con  $B = 1.84 \text{ m}$ , estaba en el límite, con  $B = 1.50 \text{ m}$ , necesariamente quedará en el tercio exterior. Luego, será necesario encontrar la fatiga correspondiente a la condición de volteo, y además con el requisito de que no se produzcan tensiones.

La fórmula por aplicar será la de reducción de sección:  $f = \frac{2 \sum F_v}{3a}$

Es necesario calcular el nuevo valor de a:

$$a = \frac{\sum M_v - \sum M_H}{\sum F_v}$$

$\sum M_v = \frac{B}{2} \sum F_v = \frac{B}{2} 9h\Delta = \frac{AB^2h}{2} = 1100 B^2 h$ ; pero  $B = 0.373 h = 1.50 \text{ m}$ , en este caso:

$$\sum M_v = 1100 \times 1.5^2 \times 4 = 9900 \text{ km}$$

$$\sum M_H \text{ no cambia de valor: } \sum M_H = \frac{wh^3}{6} \frac{1-\sin^2\phi}{1+\sin^2\phi} = 77 h^3$$

Para el problema numérico:  $\sum M_H = 77 \times 4^3 = 4930 \text{ km}$ .

Por último:  $\sum F_v = Bh\Delta = 1.50 \times 4 \times 2200 = 13200 \text{ kg}$

$$\text{Finalmente, } a = \frac{9900 - 4930}{13200} = \frac{4970}{13200} = 0.377 = 0.38 \text{ m}$$

Ya que  $B = 1.50 \text{ m}$ ,  $\frac{B}{3} = 0.50 \text{ m}$ , y como  $0.38 < 0.50$  se comprueba que la resultante se ha salido del núcleo central.

$$\text{Finalmente, como } f = \frac{2 \sum F_v}{3a} = \frac{2 \times 13200}{3 \times 0.38} = 23200 \text{ kg/m}^2 = 2.32 \text{ kg/cm}^2$$

Si este valor de la fatiga es admisible, el muro ya estará bien, puesto que satisface la condición de volteo y excede la de deslizamiento.

Resumiendo lo establecido en la clase anterior se tiene:

$$\text{Condición de volteo: } \frac{\sum M_v}{\sum M_H} = 2; \longrightarrow B = 0.373 h$$

$$\text{Condición de deslizamiento: } \frac{\sum F_v}{\sum M_H} = 2; \longrightarrow \begin{cases} B = 0.315 h & (\mu = 0.66) \\ B = 0.414 h & (\mu = 0.50) \end{cases}$$

$$\text{Condición de tercio medio: } \frac{\sum M_v - \sum M_H}{\sum F_v} = \frac{B}{3} \longrightarrow B = 0.46 h$$

icado establecer una fórmula como ya se dijo, que nos dé una expresión que nos dé en el límite del tercio-

no deberá hacerse más análisis los esfuerzos serán calculados si la fatiga resulta pequeña pero entonces la resultante dada en e).

condición de igualdad de

una sola fórmula, cuál obligaremos a que sea ya dijimos, la resultante del tercio medio.

$$h = 1100 B^2 h$$

es:

h<sup>2</sup>

que efectivamente la de deslizamiento y la de volteo en esta última ecuación. De la mitad de la altura.

límite del tercio cen --

$$\text{al con } \frac{B}{3}$$

en, en función de la mitad del tercio me --

que a partir de ----

Por lo anterior, se concluye que la condición de tercio medio nos da un muro una base mayor; es decir, si se construye un muro que satisfaga la condición de tercio medio, el volteo y el deslizamiento quedan cubiertos.

Pero puede darse el caso de un muro hecho con muy buenos materiales, hacer B = 0.6 h la base resulte tan ancha que las fatigas sean muy pequeñas, con lo que se desperdicia material.

Entonces, habrá que proporcionar el ancho B con la condición de fatigas que resulten son admisibles el muro quedará bien. En otras palabras, de volteo satisface la de fatiga, con mayor razón satisfará la de deslizamiento, el ancho del muro estará correcto.

En este caso, la resultante se sale del tercio medio. La fórmula de la sección reducida. Trataremos de establecer una fórmula para el problema en estudio.

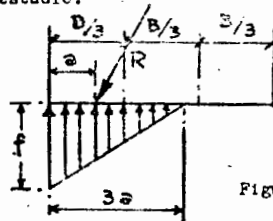


Figura 86.

Puesto que  $\sum F_v = \frac{1}{2} \times f \times \dots$

Nótese que si se pone una base por la condición de tercio medio, da por la condición de volteo, precisamente que la resultante se sale del tercio medio.

Si  $a < \frac{B}{3}$ , calcular  $f = \frac{2 \sum M_v}{3a}$

En general, el valor de  $a$  está dado por:  $a = \frac{\sum M_v - \sum M_h}{\sum F_v}$

La condición de volteo obliga a que  $\frac{\sum M_v}{\sum M_h} = 2$  y  $\therefore \sum M_h = \frac{\sum M_v}{2}$

Si se sustituye este último valor en la fórmula general de  $a$ ,

$a = \frac{\sum M_v - \frac{\sum M_v}{2}}{\sum F_v} = \frac{\frac{\sum M_v}{2}}{\sum F_v} \therefore a = \frac{0.5 \sum M_v}{\sum F_v}$

Ahora bien, el quebrado  $\frac{\sum M_v}{\sum F_v}$  tiene el significado físico de un brazo de palanca respecto a la arista de volteo el valor de ese brazo de palanca es justamente

$\sum F_v \times \frac{B}{2} = \sum M_v \therefore a = 0.5 \frac{B}{2}$ , es decir, que:  $a = 0.25 B$

Para obtener la fatiga que corresponde a este caso, haremos las siguientes:

$f = \frac{2 \sum F_v}{3a} = \frac{2 \Delta h}{3 \times 0.25 B} = \frac{2}{3} \frac{\Delta h}{0.25 B} = \frac{2}{3} \times 220ch$

$f = 5860 h$

Apliquemos esta fórmula al problema anterior:

$h = 4 \text{ m.} - \text{Condición de volteo: } B = 0.373 h = 0.373 \times 4 = 1.49 \text{ m.}$

$a = 0.25B = 0.25 \times 1.50 = 0.375$

$\therefore f = 5860 \times 4 = 23440 \text{ kg/m}^2 = 2.34 \text{ kg/cm}^2$  (resultado igual, 3)

Supongamos que este esfuerzo resulte grande y no pueda admitirse, podría resolverse ampliando el cimiento hacia la zona peligrosa, formando una base, con lo que conseguiríamos centrar la resultante.

rolo medio nos obliga a dar al -  
 tífaga la condición de fatiga,-

uenos materiales, en el que al-  
 an muy pequeñas, con el consi --

condición de volteo y si las fa-  
 tras palabras, si la condición--  
 a de deslizamiento y por tanto--

o. La fatiga se calcula con la -  
 fórmula general para este proble

$$x f x 3a, f = \frac{2 \sum F_v}{3a}$$

una base menor que la dada ---  
 tercio medio, por ejemplo, la da  
 le volteo, lo que sucede es pre-  
 ltante se saca del tercio me --

icularemos la fatiga con

$$\frac{\sum M_H}{F_v} = \frac{\sum M_v}{2}$$

ral de a, resulta:

físico de un brazo de palanca y  
 es justamente  $B/2$ , ya que  
 $B = 0.25 B$

haremos las siguientes sustitu

$$4 = 1.49 \text{ m.}$$

$$50 = 0.375 \text{ m} < \frac{B}{3} = 0.50 \text{ m}$$

do igual, hoja-67)

Se admitirse. El problema pe --  
 formando una especie de zapata -

Lo indicado sería llevar, a partir de  $\sum F_v$  y hacia la izquierda, una longitud igual  
 a  $(1.50 - e) = 1.12 \text{ m.}$ , para que  $\sum F_v$  actuara sensiblemente en el centro de la base.

Si se proporciona la base en esta forma y se prescinde del peso de la ampliación, -  
 el esfuerzo sería:

$$f = \frac{1.50 \times 4.10 \times 2200}{2.24} = 5900 \text{ kg/m}^2.$$

que aproximadamente es un valor cuatro veces me-  
 nor que el encontrado antes.

La aplicación de la fórmula de la esquadria nos-  
 permitirá obtener exactamente cuánto debe medir-  
 e para que el pequeño cantiliver añadido esté en  
 condiciones de seguridad.

$$f = \frac{M}{I} \text{ y } ; \frac{I}{y} = \frac{M}{f}$$

$$M = \frac{w l^3}{2} \text{ (por ser cantiliver)}$$

$$w = \text{reacción del piso} = 5900 \text{ kg/m}$$

$$\therefore M = \frac{5900 \times 0.74^3}{2} = 1620 \text{ kgm}$$

$$I = \frac{1}{12} \times 1 \times e^3 = \frac{e^3}{12}$$

$$y = \frac{e}{2}$$

A f se le puede asignar un valor de  $1 \text{ kg/cm}^2$

$$= 10\,000 \text{ kg/m}^2$$

$$\therefore \frac{I}{y} = \frac{e^3}{12} \times \frac{2}{e} = \frac{e^2}{6} \quad \left. \vphantom{\frac{I}{y}} \right\} \therefore \frac{e^2}{6} = 0.162$$

$$\frac{M}{f} = \frac{1620}{10\,000} = 0.162$$

$$\text{Finalmente, despejando e : } e = \sqrt{6 \times 0.162} = \sqrt{0.972} = 0.99 \text{ m}$$

$$\therefore e = 1.00 \text{ m.}$$

Todavía nos haría falta revisar por esfuerzo cortante la junta hipotética entre el  
 muro y la zapata.

$$f = \frac{P}{A} ; \therefore e = \frac{P}{f}$$

$$P = w \times 0.74 = 0.74 \times 5900$$

f puede tomarse como  $0.5 \text{ kg/cm}^2$ , o sea la mitad de la fatiga admisible a la ten-  
 sión.

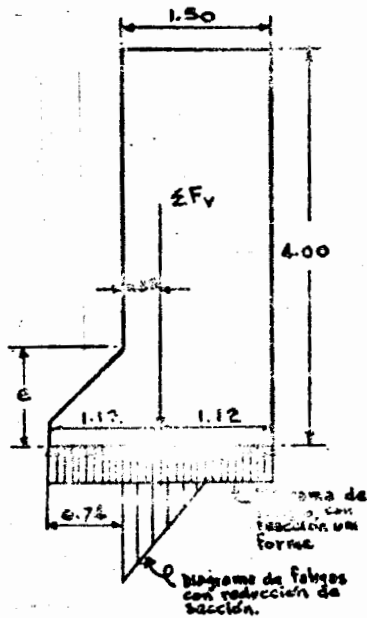


Figura 87.

$$e = \frac{0.74 \times 5000}{0.5 \times 10^6} = 0.69 \text{ m}$$

Como domina el esfuerzo de flexión el espesor  $e$  deberá ser de 1.00 m.

Los muros rectangulares se emplean con ventaja en ciertos casos, sobre todo cuando la base  $B$  resulta pequeña.

La figura muestra una serie de muros en cuya construcción se emplean cantidades iguales de material. Todos tienen la misma altura.

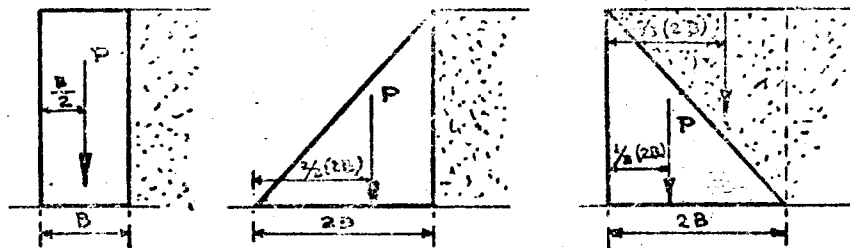


Figura 88.

El segundo, resulta más estable que el rectangular, pero el tercero, con la terrajería sobre el paramento inclinado, es el mejor de los tres.

En efecto, en el primer caso:  $\sum M_v = P \times \frac{B}{2}$ ;  $\sum M_v = 0.5 PB$

En el segundo caso:  $\sum M_v = P \times \frac{2}{3} (2B) = \frac{4}{3} PB$ ;  $\sum M_v = 1.33 PB$

Pero, en el último caso, son dos los prismas triangulares que contribuyen a la estabilidad del muro.

$$\sum M_v = P \times \frac{1}{3} (2B) + P \left( \frac{2}{3} \right) \times \frac{2}{3} (2B) = 0.66 PB + 0.97 PB = 1.63 PB$$

Como  $1.63 PB > 1.33 PB > 0.5 PB$ , el tercer caso es el que proporciona mayores ventajas respecto al volteo.

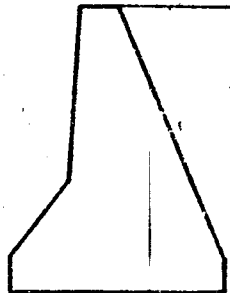


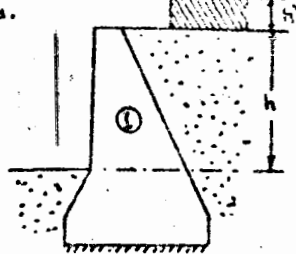
Figura 89

Por todo lo anterior, se deduce que la sección tipo o sección ideal para un muro de sostenimiento será como la indicada en la figura 89, con un talud muy pequeño en el paramento exterior.

#### MUROS DE SOSTENIMIENTO CON SOBRECARGA

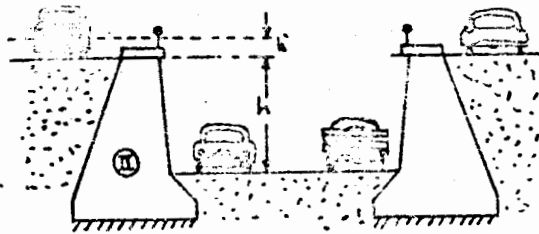
Hasta ahora hemos estudiado el empuje de tierras cuando el relleno no sobrepasa la corona. Sin embargo, es claro que pueden presentarse muchos casos en los que el muro de sostenimiento quede sujeto al empuje del relleno y además a la acción de una sobrecarga colocada encima de dicho relleno.

Veremos a continuación algunos casos prácticos de muros de sostenimiento con sobrecarga.

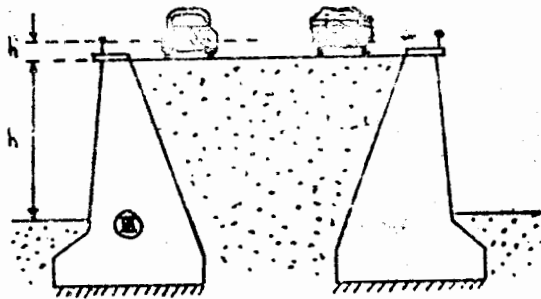


① Sobrecarga constituida por alguna carga permanente, como una construcción una bodega, etc.  $h'$  nos representa la altura de terraplén equivalente a dicha sobrecarga.

② Una calzada limitada por dos muros de sostenimiento y a cada uno de sus lados dos vías de comunicación en planos superiores;  $h'$  representa el peso del vehículo, sustituido por la altura equivalente de terraplén.



③ El arreglo contrario también es posible, con una calzada central superior y dos laterales inferiores. En dos estos tipos de vías de comunicación se emplean en las grandes ciudades modernas, donde se trata de evitar al máximo los cruces a nivel.



④ También en el estribo de un puente se presenta el empuje de tierras con sobrecarga, esta última ocasionada por los vehículos que entran o que salen del puente. El valor de  $h$  puede aumentar en el caso de que haya socavación.

⑤ En una alcantarilla de losa de concreto y con relleno, también se presenta la sobrecarga. Nótese que el valor del empuje dependerá de la sección del estribo que se considere, ya que esta sección puede tomarse en

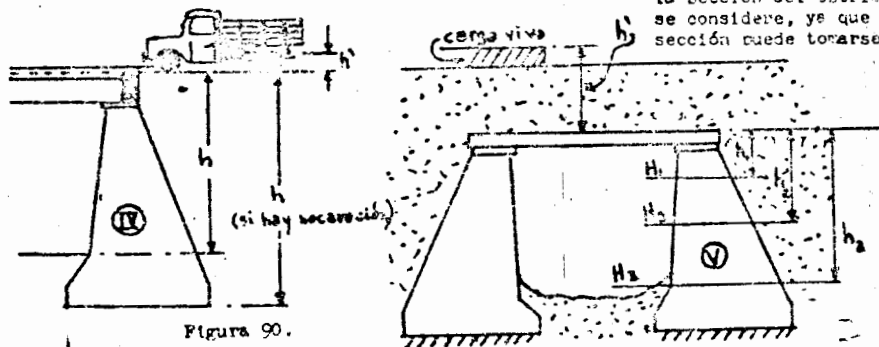
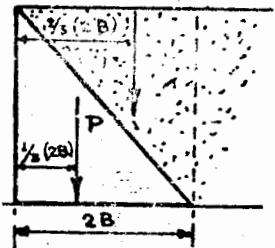


Figura 90.

ará ser de 1.00 m.  
ertos casos, sobre todo cuando  
cción se emplean cantidades 1



pero el tercero, con la terrac  
 $\frac{1}{3} = 0.5 PB$   
 $\frac{1}{3} = 1.33 PB$   
lares que contribuyen a la esta  
 $0.97 PB = 1.63 PB$   
que proporciona mayores venta-

r, se deduce que la sección tí-  
para un muro de sostenimiento--  
da en la figura 89, con un ta-  
el paramento exterior.

TENIMIENTO CON SOBRE CARGA  
studiado el empuje de tierras  
o sobrepasa la corona. Sin em-  
pueden presentarse muchos ca-  
uro de sostenimiento quede su-  
lleno y además a la acción de  
cada encima de dicho relleno.



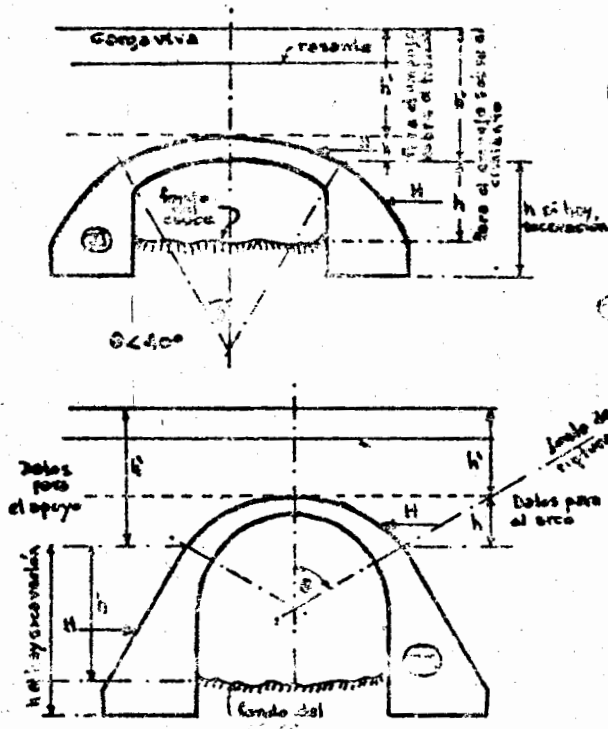


Figura 91.

prisma total indicado en la figura, a pesar de la sobrecarga  $h'$  sobre el muro, puesto que apenas está a punto de deslizar. Otro prisma definido por un ángulo  $\alpha < (\phi - \alpha)$  ya no se sostiene, si desliza y por tanto produce un empuje que es el que trataremos de valorar.

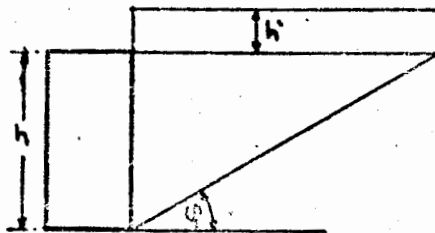


Figura 92.

cualquier plano, desde la coronación hasta el desplante (datos  $H_1, H_2, H_3$ , etc.)

En un arco rebajado es necesario calcular las presiones horizontales  $H$ , aplicadas en el trasdós del arco y en el apoyo. Determinada la junta de ruptura es fácil fijar las alturas de relleno que corresponden a uno y otro elemento.

Supongamos un arco de medio punto que tenga un colchón muy grueso y con sobrecarga. La observación de la figura nos indica que, a partir de ciertas alturas la sobrecarga puede resultar despreciable.

**EMPUJE ACTIVO CON SOBRECARGA.**

Veamos en que forma se puede transformar la expresión fundamental del empuje para obtener otra fórmula que tome en cuenta la sobrecarga.

Sea un muro de altura  $h$ , que sostiene una terracería sobre la que actúa una sobrecarga que puede convertirse a una altura de relleno equivalente  $h'$ . Si el ángulo de reposo del material es  $\phi$  el

mos P.

del ángulo

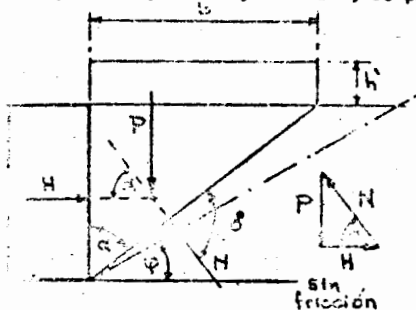
que tiene transfer

da por

cualquier plano, desde la corona hasta el desplante (cotas  $H_1, H_2, H_3$  etc.)

la resultante del peso de la cuña y de la sobrecarga correspondiente le llamare -

Suponemos que no hay fricción, el prisma estará en equilibrio bajo la acción de la fuerza P, el empuje del muro H y la reacción del plano definido por el ángulo  $\alpha$ ; tal reacción es normal a dicho plano.



Del dinámico:  $H = P \cot \alpha$

En cambio, si existe fricción, se desarrolla esa fuerza rasante en coincidencia con el plano considerado (el definido por  $\alpha$ ); la reacción ya no es normal a este plano y el prisma estará a punto de deslizar cuando la nueva equilibrante R coincida con la generatriz del cono de fricción.

Para esto, se necesita que:

$$\cot(\alpha + \varphi) = \frac{H}{P}$$

$$H = P \cot(\alpha + \varphi)$$

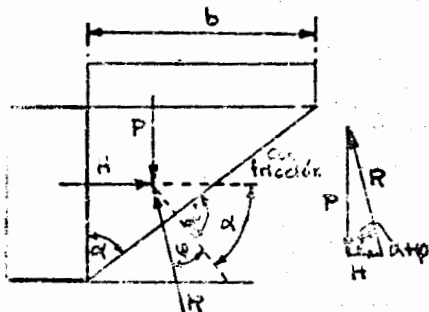
Como  $\cot \alpha > \cot(\alpha + \varphi)$ , H en este caso resulta menor que cuando no hay fricción.

Hagamos las siguientes sustituciones:

$P =$  peso prisma + peso sobrecarga:

$$P = \frac{1}{2} b h w + b h' w, \text{ y como } b = h \tan \alpha$$

Figura 93.



$$P = \frac{1}{2} (w b h \tan \alpha + w h' h \tan \alpha) = \frac{w}{2} \tan \alpha (h + 2 h')$$

$\therefore H = \frac{w h}{2} (h + 2 h') \tan \alpha \cot(\alpha + \varphi)$ , fórmula general que da el valor total del empuje sobre el muro, para cualquier valor  $\alpha$ .

La expresión variable  $\tan \alpha \cot(\alpha + \varphi)$  ya fue analizada detenidamente; sabemos - máximo cuando  $\alpha = \frac{90^\circ - \varphi}{2}$  y que si se cumple este valor la expresión citada se reduce a  $\frac{1 - \tan \varphi}{1 + \tan \varphi}$ .

Por tanto, el valor máximo del empuje es:

$$\max H = \frac{w h}{2} (h + 2 h') \frac{1 - \tan \varphi}{1 + \tan \varphi}$$

fórmula general que da el empuje máximo sobre el muro cuando además de la terracería hay una sobrecarga  $h'$ .

Hacemos que  $h'$  valga cero:

$$\max H = \frac{w h^2}{2} \frac{1 - \tan \varphi}{1 + \tan \varphi}$$

, que es la expresión, ya conocida, del empuje cuando no hay sobrecarga.

Estos resultados se deduce que la cuña que produce el empuje máximo está definida por el ángulo  $(90^\circ - \varphi)$

En un arco rebajado es necesario calcular las presiones horizontales H, aplicadas en el trasdós del arco y en el apoyo. Determinada la junta de ruptura es fácil fijar las alturas de relleno que corresponden a uno y otro elemento.

Supongamos un arco de medio punto que termina en un medio vano grueso y con sobrecarga. La observación de la figura nos indica que, a partir de ciertas alturas de sobrecarga puede resultar despreciable.

**EMPUJE ACTIVO CON SOBRECARGA.**

Veamos en que forma se puede transformar la expresión fundamental del empuje para obtener otra fórmula que tome en cuenta la sobrecarga.

Sea un muro de altura h, que sostiene una terracería sobre la que actúa una sobrecarga que puede convertirse a una altura de relleno equivalente  $h'$ . Si el ángulo de reposo del material es  $\varphi$  el prisma definido por un ángulo  $\alpha$  produce ningún empuje que es el que tratare-

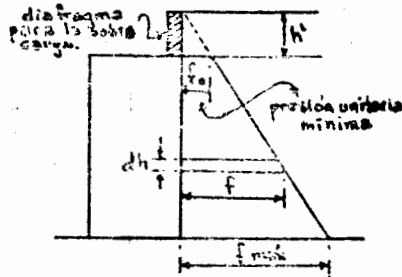


Figura 94.

74.

Vamos a demostrar que la variación de las presiones o empujes elementales sigue una ley lineal.

Convendremos en medir las profundidades  $h$  a partir del plano definido por la corona y hacia-abajo.

Sabemos que el volumen de esfuerzos es igual a la fuerza externa que los origina:

$$\therefore dH = f dh, \text{ o sea que } f = \frac{dH}{dh}$$

y como:

$$\frac{dH}{dh} = \frac{\omega (1 - \operatorname{sen} \varphi)}{2 (1 + \operatorname{sen} \varphi)} (2h + 2h')$$

resulta que:

$f = \omega \frac{1 - \operatorname{sen} \varphi}{1 + \operatorname{sen} \varphi} (h + h')$ , ecuación de la forma  $y = A + Bx$ , que corresponde a una línea recta.

Casos particulares:

Si  $h = 0$ , se tiene el empuje unitario a la altura de la corona:  $f_c = \omega h' \frac{1 - \operatorname{sen} \varphi}{1 + \operatorname{sen} \varphi}$

Si  $h = h_{\max}$ , se tiene el empuje máximo, que ocurre en el despiante del muro:

$$f_{\max} = \omega (h_{\max} + h') \frac{1 - \operatorname{sen} \varphi}{1 + \operatorname{sen} \varphi}$$

Finalmente, si  $h = -h'$  se obtendrá el esfuerzo a nivel con la parte superior del diáfragma, que debe resultar nulo:  $f_{\min} = \omega \frac{1 - \operatorname{sen} \varphi}{1 + \operatorname{sen} \varphi} \times 0 = \text{cero}$ .

Ahora es necesario encontrar el brazo de palanca, respecto al despiante, de la resultante de las presiones que obran exclusivamente sobre el muro ya que las que produciría la sobrecarga sobre el diáfragma en realidad no tienen ningún significado físico. (La sobrecarga es una convención, no un material).

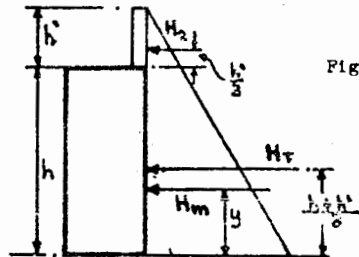


Figura 95.

Se tomarán momentos respecto al eje de -- volteo. Es evidente que:

$$H_1 \left( \frac{h+h'}{2} \right) + H_2 \left( h + \frac{h'}{3} \right) + H_m y$$

$$H_m y = H_1 \left( \frac{h+h'}{3} \right) - H_2 \left( h + \frac{h'}{3} \right)$$

Primero tendremos que evaluar los tres empujes que intervienen en la fórmula anterior:  $H_m = \frac{\omega h}{2} (h+2h') \frac{1 - \operatorname{sen} \varphi}{1 + \operatorname{sen} \varphi}$

$$H_1 = \frac{\omega (h+h')^2}{2} \frac{1 - \operatorname{sen} \varphi}{1 + \operatorname{sen} \varphi} \text{ y } H_2 = \frac{\omega h'^2}{2} \frac{1 + 3 \operatorname{sen} \varphi}{1 + \operatorname{sen} \varphi}$$

Como el factor  $\frac{\omega (1 - \operatorname{sen} \varphi)}{2 (1 + \operatorname{sen} \varphi)}$  es común a los tres términos, desde un principio no lo tomamos en cuenta, ya que se eliminará:  $h(h+2h')y = (h+h')^2 \left( \frac{h+h'}{3} \right) - (h')^2 \left( h + \frac{h'}{3} \right)$

$$3h(h+2h')y = (h+h')^2 - (h')^2 (3h+k) = h^3 + 3h^2h' + 3hh'^2 + h'^3 - 3hh'^2 - h'^3$$

$$\therefore y = \frac{h^3 + 3h^2h'}{3h(h+2h')} \text{ y finalmente: } y = \frac{h^2 + 3hh'}{3(h+2h')}$$

strar que la variación de las presio  
elementales sigue una ley lineal.

emos en medir las profundidades h a  
no definido por la corona y hacia--

que el volumen de esfuerzos es ---  
rza externa que los origina:

$f = \int dh$ , o sea que  $f = \frac{dH}{dh}$

$\frac{\text{sen } \varphi}{1 + \text{sen } \varphi} (2h + 2h')$

A + Bx, que corresponde a una lf.

de la corona:  $f_c = wh' \frac{1 - \text{sen } \varphi}{1 + \text{sen } \varphi}$

re en el desplante del muro:

nivel con la parte superior del  
ero.

respecto al desplante, de la re-  
muro ya que las que produciría -  
gún significado físico. (La sobre

án momentos respecto al eje de --  
Es evidente que:

$M_1 = H_2(h + \frac{h}{3}) + Hm_y$

$H_2(\frac{h+h'}{3}) - H_2(h + \frac{h'}{3})$

tendremos que valuar los tres su-  
intervienen en la fórmula ante-

$H_2 = \frac{wh}{2}(h+2h') \frac{1 - \text{sen } \varphi}{1 + \text{sen } \varphi}$

$\frac{\text{sen } \varphi}{1 + \text{sen } \varphi}$  y  $H_2 = \frac{wh^2}{2} \frac{1 - \text{sen } \varphi}{1 + \text{sen } \varphi}$

s, desde un principio no lo toma-

$\frac{h+h'}{3} - (h')^2(h + \frac{h'}{3})$   
 $\frac{h^2}{2} + h^2 - \frac{3}{2}hh^2 - \frac{h^3}{2}$

Casos particulares,

Si  $h' = 0$ , no hay sobrecarga y  $\therefore y = \frac{h^2 + 0}{3(h+0)} = \frac{h}{3}$  (valor correcto)

Si  $h'$  es muy grande respecto a  $h$ , es decir, si la sobrecarga es muy grande compara  
da con el relleno, se puede despreciar tanto el valor de  $h$  como el de  $h^2$  y queda:

$y = \frac{3hh'}{3 \times 2h} = \frac{h'}{2}$ , o sea que el empuje total sobre el muro puede considerarse  
que actúa a la mitad de la altura de relleno.

Todos los empujes estudiados hasta aquí son empujes activos.

Son los empujes que ejercen las terracerías sobre los elementos que las sostienen.

EMPUJE PASIVO SIN SOBRECARGA.

Estudiaremos ahora los prismas de resistencia pasiva, que dan lugar a los empujes-  
pasivos. Cuando se tiene un anclaje o un muerto, la resistencia pasiva del terreno impide-  
que se zafe.

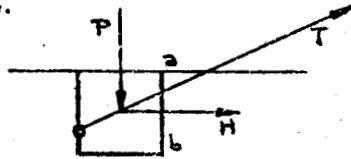


Figura 96.

Imaginemos un gran cubo de mampostería enclava-  
do en un terreno suelto, al que, mediante un  
cable, se aplica una tensión T.

Si el cubo no se zafa, su equilibrio se deberá  
a la fuerza T, a su peso propio P y a las reac-  
ciones del relleno sobre la cara ab del cubo.

Se ve que la combinación de P y T produce una resultante que consideraremos ho-  
rizontal H. (Aún cuando no fuera horizontal, lo que interesa de esta fuerza es su componente  
horizontal, que actúa directamente sobre el relleno.)

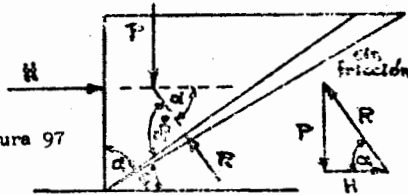


Figura 97.

Se tiene pues una fuerza H sobre la terracería  
y una cufa que pesa P kg. Si no hay fricción,  
ya sabemos que la reacción R es normal al pla-  
no de deslizamiento y que el valor de H se ob-  
tiene del dinámico:

$\text{cot } \alpha = \frac{H}{P}$ ;  $\therefore H = P \text{cot } \alpha$

Cualquier valor de H ligeramente mayor que ---  
 $P \text{cot } \alpha$  haría que la cufa se saliera.

Imaginemos ahora que sí hay fric-  
ción y que tratamos de saber el empuje máxi-  
mo que podemos aplicar a la terracería sin  
que esta se salga.

Desde luego, debe considerarse un-  
prisma menor que el definido por el ángulo -  
 $\varphi$ , ya que éste está apenas a punto de deslizarse.  
Supongamos que ese prisma sea el limitado por

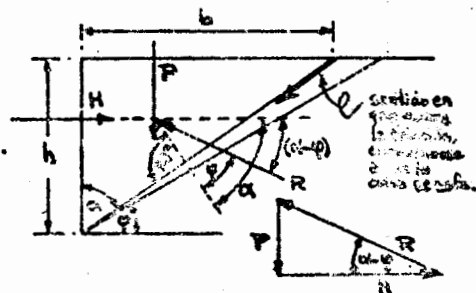


Figura 98.

Señalar en  
este diagrama  
la reacción  
de la cufa  
sobre el cubo.

el ángulo  $\alpha$ .

Para que el prisma citado esté a punto de remontar el plano inclinado, será necesario que la resultante  $R$  coincida con la generatriz del cono de fricción. (Debe tenerse en cuenta que ahora el ángulo  $\phi$  debe medirse hacia la parte superior del plano inclinado).

Ya sabemos, del dinámico, que  $H = P \cot(\alpha - \phi)$

$$\left. \begin{aligned} P &= \frac{1}{2} bhw \\ b &= h \tan \alpha \end{aligned} \right\} \therefore P = \frac{1}{2} wh^2 \tan \alpha$$

Sustituyendo arriba:  $H = \frac{wh^2}{2} \tan \alpha \cot(\alpha - \phi)$

Esta fórmula general nos da el empuje que puede admitir una cufa de resistencia pasiva para distintos valores de los ángulos  $\alpha$  y  $\phi$ .

La parte variable de la fórmula es  $\tan \alpha \cot(\alpha - \phi)$ ; lo que nos interesa es el valor mínimo que pueda tener. Es claro que para valores de  $H$  mayores que el mínimo que vamos a buscar, la cufa se zafará.

Para ello, supondremos que  $\phi$  tiene el valor usual de  $33^\circ 42'$  (terraceras con talud de 1.5:1). Por claridad, haremos la tabla siguiente:

Valores de $\alpha$	$\tan \alpha$	Valor de $(\alpha - \phi)$	$\cot(\alpha - \phi)$	$\tan \alpha \cot(\alpha - \phi)$
$0^\circ$		Negativo	-	-
$10^\circ$		Negativo	-	-
$20^\circ$		Negativo	-	-
$33^\circ 42'$	0.6669	$0^\circ$	$\infty$	$\infty$
$40^\circ$	0.8391	$6^\circ 18'$	9.058	7.6
$50^\circ$	1.192	$16^\circ 18'$	3.420	4.07
$61^\circ 51'$	1.869	$28^\circ 09'$	1.869	3.49 Mínimo
$70^\circ$	2.748	$36^\circ 18'$	1.361	3.74
$80^\circ$	5.671	$46^\circ 18'$	0.9556	5.40
$90^\circ$	$\infty$	$56^\circ 18'$	0.6669	$\infty$

La observación de esta tabla nos indica que para ángulos  $\alpha$  menores de  $33^\circ 42'$ , si se traza la normal al plano que definen y a partir de dicha normal se mide el ángulo  $\phi$ , se obtiene una resultante que para hacer subir la cufa tendría que actuar de abajo hacia arriba. Ante la imposibilidad física de que al combinar una fuerza horizontal con otra vertical hacia abajo se obtenga una resultante que actúe de abajo hacia arriba, no tiene sentido analizar prismas definidos por ángulos  $\alpha$  menores que  $\phi$ .

Se ve también que si  $\alpha = 33^\circ 42'$  el empuje  $H$  y la reacción hipotética  $R$  deberían ser colineales y opuestas. Esto no es posible, a pesar de lo grande que sea  $H$ , debido a que  $P$  actúa de arriba hacia abajo.

Cuando  $\alpha = 90^\circ$  el prisma es infinito y para moverlo haría falta una fuerza también infinita. - Hagamos ahora a lo que realmente nos interesa:

Como ya se dijo al estudiar el empuje activo, es posible obtener por derivación e igualando a cero, el valor de  $\alpha$  que hace mínimo el empuje pasivo, mediante un proceso en todo análogo al seguido en página 60.

Con la tabla anterior, lo hemos obtenido numéricamente y resulta:

$$\alpha = 61^\circ 51' = \frac{90^\circ + \phi}{2} = \frac{90^\circ + 33^\circ 42'}{2} = 61^\circ 51'$$

Si este valor se sustituye en la fórmula general  $H = \frac{wh^2}{2} \tan \alpha \cot(\alpha - \phi)$  y se hacen las sustituciones del caso se obtiene que el empuje pasivo mínimo es:

$$H = \frac{wh^2}{2} \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi} \quad (\text{la deducción es muy parecida a la de la hoja 66})$$

Claro que para  $\phi = 33^\circ 42'$  el quebrado  $\frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi}$  debe ser igual a 3.49

Veamos.

$$\frac{1 + \sin 33^\circ 42'}{1 - \sin 33^\circ 42'} = \frac{1 + 0.5548}{1 - 0.5548} = \frac{1.5548}{0.4452} = 3.49$$

La fórmula que acabamos de obtener es en todo semejante a la del empuje activo, sólo que el quebrado en que interviene el  $\sin \phi$  es inverso.

Descartado el caso en que  $\phi = 0^\circ$  y  $\therefore \sin \phi = 0$ , se tiene:

$$1 - \sin \phi < 1 \quad \text{y} \quad 1 + \sin \phi > 1 \quad \therefore \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi} > 1 \quad \text{y} \quad \text{también} \quad \frac{1 - \sin \phi}{1 + \sin \phi} < 1$$

Esto quiere decir que para un relleno de h dada el prisma de resistencia pasiva es capaz de absorber una carga mayor que el empuje que ocasiona el prisma de empuje activo.

La expresión  $H = \frac{wh^2}{2} \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi}$  indica que la resistencia pasiva total varía con el cuadrado de la profundidad. Luego, las resistencias pasivas unitarias también irán siendo mayores a medida que h aumente. Por analogía, es de esperarse que varían linealmente.

$$\text{En efecto: } f dh = dH ; \therefore f = \frac{dH}{dh}$$

$$\text{Pero: } \frac{dH}{dh} = \frac{w}{2} \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi} \quad (2h) = \frac{wh(1 + \sin \phi)}{1 - \sin \phi}$$

$$\therefore f = \frac{wh}{1 - \sin \phi} \quad \text{condición que manifiesta la varia}$$

ción lineal de los empujes pasivos elementales y de donde se concluye que el brazo de palanca del empuje total H es  $\frac{h}{3}$  medido a partir del fondo. (Figura 99).

Para  $h = 0$ ,  $f_0 = 0$ ; el empuje pasivo unitario en el tocho superior es nulo.

El empuje pasivo unitario máximo ocurre en el fondo y vale  $f_{\text{máx}} = \frac{wh}{1 - \sin \phi}$

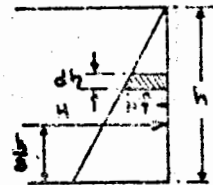


Figura 99.

plano inclinado, será necesaria la dirección. (Debe tenerse en cuenta el plano inclinado).

una cufia de resistencia pa

lo que nos interesa es mayores que el mínimo que va

33°42' (terracerías con ta-

φ) tan α cot(α - φ)

-
-
-
∞
7.6
4.07
3.49 Mínimo
3.74
5.40
∞

∞ menores de 33°42', si se mide el ángulo φ, se va de abajo hacia arriba. Si con otra vertical ha - no tiene sentido anali-

potética R deberfan ser sea H, debido a que P ac

El plano que proporciona la resistencia pasiva mínima forma con la vertical un ángulo de  $\frac{90^\circ + \varphi}{2}$  y determina la cuña que tiende a zafarse bajo la acción de una carga H. Dicho plano siempre forma un ángulo de  $90^\circ$  con el que limita al prisma de empuje activo, puesto que:  $\frac{90^\circ - \varphi}{2} + \frac{90^\circ + \varphi}{2} = \frac{1}{2}(180^\circ) = 90^\circ$ .

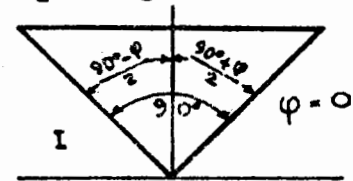
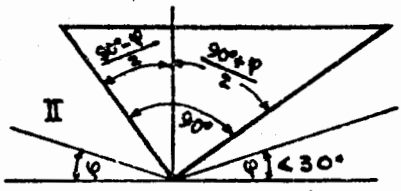


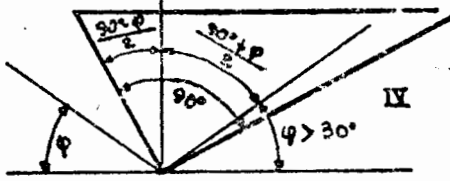
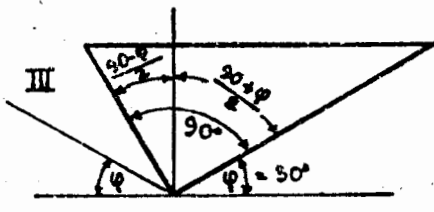
Figura 100

Los dos prismas quedan uno frente al otro y se les llama prismas conjugados.



A continuación se exponen los cinco casos que se pueden presentar; en ellos se ve que la posición relativa de la cuña de empuje pasivo respecto al plano de reposo del material es variable, según el valor del ángulo  $\varphi$ .

Caso I.- Cuando  $\varphi = 0^\circ$ . Sería un material como el agua, que no se sostiene por sí mismo con ningún ángulo. Este es el único caso en que los dos empujes resultan iguales. El empuje activo es máximo.



Caso II.- Si  $\varphi < 30^\circ$ . Aquí, como en todos los demás: empuje pasivo > empuje activo. El prisma de empuje pasivo no alcanza al talud natural del material.

Caso III.-  $\varphi = 30^\circ$ .- El prisma de empuje pasivo coincide exactamente con el plano definido por el talud natural del material.

Caso IV.-  $\varphi > 30^\circ$ .- En terracerías con talud de 1.5:1,  $\varphi = 33^\circ 42'$  y ya caen dentro de este grupo. Véase que el prisma de empuje pasivo sobrepasa el ángulo de reposo del material, lo que aparentemente es un contrasentido pues parecería como si la cuña de resistencia pasiva, como máximo, pudiera estar limitada, por el ángulo  $(90^\circ - \varphi)$ . Para tratar de explicarnos esto, pensemos en un ejemplo extremo, como el

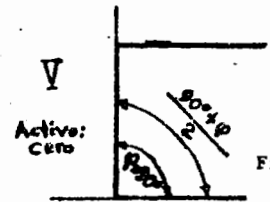


Figura 101

Caso V.- En el que  $\varphi = 90^\circ$ ; no es descabellada imaginárselo, ya que corresponde a un material que pueda admitir taludes verticales, como varias clases de calizas, tepetates, etc. Se observa que el empuje activo se reduce a cero, como efectivamente sucede puesto que el material se sostiene por sí solo con taludes verticales. En cambio, la resistencia pasiva es máxima y el prisma correspondiente ya no es sólo una cuña, sino que está constituido por todo el material.

Intuitivamente cree uno que así debe ser, de manera que el resultado matemático está de acuerdo con la experiencia.

pasiva con  
ma podrís  
ruado en  
bre él. 3  
a propor

tar  
una

frag

Con esto, pues, parece justificarse que si  $\varphi > 30^\circ$  los prismas de resistencia pasiva sobrepasen el plano de reposo natural del material de que se trate.

EMPUJE PASIVO CON SOBRECARGA

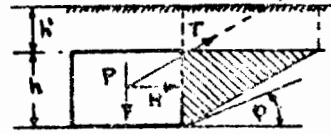


Figura 102

Ahora pasaremos al estudio de la resistencia pasiva con sobrecarga. Un caso concreto de este problema podría consistir en un muro de mampostería enterrado en el piso, de manera que quede un relleno  $h'$  sobre él. Supongamos que la cuña sombreada sea la que va a proporcionar la resistencia pasiva, de manera que sobre la citada cuña obra la sobrecarga  $h'$ .

For todo lo que se ha visto anteriormente, ya sabemos que:

$$H = P \cot(\alpha - \varphi)$$

$$P_{\text{carga}} = \frac{1}{2} w b h$$

$$P_{\text{sobrecarga}} = w b h'$$

$$P = w \left( \frac{b h}{2} + b h' \right)$$

$$b = h \tan \alpha$$

$$\therefore P = w h \tan \alpha \left( \frac{h}{2} + h' \right) \text{ y finalmente:}$$

$$H = w h \left( \frac{h}{2} + h' \right) \tan \alpha \cot(\alpha - \varphi)$$

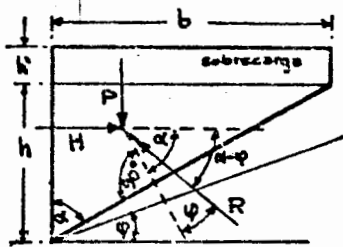
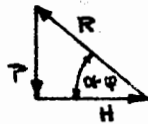


Figura 103



El valor mínimo de H ocurre cuando  $\alpha = \frac{90^\circ + \varphi}{2}$  (Ver hoja 76.)

Si  $\alpha = \frac{90^\circ + \varphi}{2}$ , resulta que  $\tan \alpha \cot(\alpha - \varphi) = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi}$  (Ver hoja 61)

$$\therefore H = \frac{w h}{2} (h + 2h') \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \text{ , valor mínimo de la resistencia pasiva total cuando hay sobrecarga.}$$

Por analogía con los problemas anteriores podemos asentar que la variación de los empujes pasivos elementales es lineal.

Además, se puede deducir fácilmente que el empuje pasivo tiene un brazo de palanca

$$y = \frac{h^2 + 3h h'}{3(h + 2h')} \text{ , medido a partir del desplante.}$$

DETERMINACION DE LA FATIGA QUE PUEDE ADMITIR UN CIMIENTO.

Supongamos que se hace una excavación de profundidad  $h'$ , en donde se va a desplantar un cimiento que a través de los miembros de la estructura de que se trate, va a recibir una carga P.

Estudiaremos los prismas conjugados que se presentan, suponiendo que exista un diafragma en el plano vertical que los limita.

Podemos considerar que el cimiento está apoyado sobre un prisma de empuje activo y

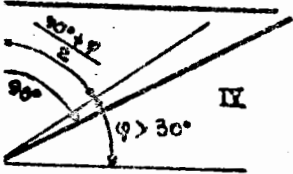
una forma con la vertical un ángulo  $\varphi$ . La acción de una carga H. Dicho

una forma de empuje activo, puesto

los dos prismas quedan uno frente a otro y se les llama prismas conjugados.

En la continuación se exponen los cinco casos que se pueden presentar; en los que se ve que la posición relativa de la cuña de empuje pasivo respecto al plano de reposo del material es variable, según el valor del ángulo  $\varphi$ .

>  $30^\circ$ . Cuando  $\varphi = 0^\circ$ : Se trata de un material como el agua, que se sostiene por sí mismo con ningún ángulo. Este es el único caso en que los dos empujes resultan iguales. El empuje activo es máximo.



<  $30^\circ$ . Aquí, como en todos los demás: empuje pasivo > empuje activo. El prisma de empuje pasivo alcanza al talud natural del material.

$30^\circ$ . El prisma de empuje pasivo coincide exactamente con el plano limitado por el talud natural del material.

>  $30^\circ$ . En terracerías con taludes que el prisma de empuje pasivo tiene un contrasentido pasivo que estaría limitado, por el ejemplo extremo, como el

talud, ya que corresponde a varias clases de taludes, que varían desde un talud que conduce a cero, como efectivamente ocurre con taludes verticales. En tal caso correspondiente ya no es sólo el

resultado matemático es-



por tanto, junto a él, habrá otro prisma, el conjugado, que será de resistencia pasiva. -- (Ver figura 105).

Por último, aceptemos que el valor de la carga transmitida P sea tal que de origen a una sobrecarga equivalente a una altura de terraplén h'.

Después nos conviene dibujar los diagramas de variación de los empujes elementales.

Como el empuje activo total está dado por la fórmula

$$H_A = \frac{wh}{2} \frac{1-\sin\phi}{1+\sin\phi} (h+2h)$$

y el empuje elemental se obtiene derivando a H respecto a h, resulta:

$$\frac{dH_A}{dh} = \frac{w}{2} \frac{1-\sin\phi}{1+\sin\phi} (2h+2h)$$

$$\therefore f_A = w(h+h) \frac{1-\sin\phi}{1+\sin\phi}$$

Analicemos en forma semejante la resistencia pasiva:

$$H_P = \frac{wh}{2} \frac{1+\sin\phi}{1-\sin\phi} (h+2h)$$

$$\frac{dH_P}{dh} = \frac{w}{2} \frac{1+\sin\phi}{1-\sin\phi} (2h+2h)$$

$$f_P = w(h+h) \frac{1+\sin\phi}{1-\sin\phi}$$

Finalmente, como  $\frac{1+\sin\phi}{1-\sin\phi} > \frac{1-\sin\phi}{1+\sin\phi}$

se concluye que:  $f_P > f_A$

Por tanto, nuestra figura de empujes unitarios es correcta ya que con lo anterior se demuestra que los empujes pasivos varían más rápidamente que los activos.

Se concluye que con una sobrecarga de -- terminada que esté sobre el prisma de resistencia pasiva es posible equilibrar una sobrecarga mayor que se encuentre sobre el prisma de empuje activo.

O dicho en otras palabras: con un aumento de la resistencia pasiva unitaria se puede admitir un gran aumento de la sobrecarga sobre el prisma de empuje activo.

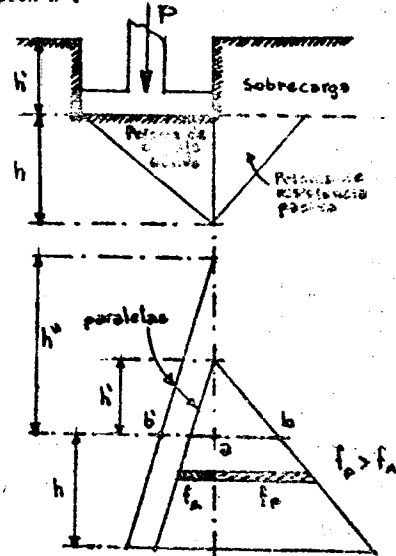
Para evitar que el cimiento se suma y que el terreno "se lufe" es necesario que las presiones unitarias activa y pasiva en el desplante del cimiento sean iguales.

Esta condición garantiza que el material que se encuentra inmediatamente abajo del cimiento no se desalojará hacia los lados.

Gráficamente, esto quiere decir que ab debe ser igual con ab'.

Ahora bien, para que a nivel con el desplante del cimiento el prisma de empuje activo produzca un empuje elemental de magnitud ab' es necesario que sobre él actúe una sobrecarga h" mayor que la h' originalmente considerada.

¿Cuánto debe valer esa sobrecarga h"?



$f_A$  empuje elemental debido al prisma de empuje activo con sobrecarga h'.  
 $f_P$  empuje elemental debido al prisma de resistencia pasiva con sobrecarga h".

Figura 105

debe exi

brecal

$\frac{f}{w}$

jar

con

puj  
es  
ran

Su valuación es fácil si se tiene en cuenta la igualdad de presiones unitarias que debe existir en el desplante y se observa que a esa profundidad h es igual con cero.

$$\therefore f_A = \omega(h+h') \frac{1 - \text{sen } \varphi}{1 + \text{sen } \varphi} ; \text{ pero } h' \text{ debe valer } h'' \text{ y } h = \text{cero}$$

$$\therefore f_A = \omega h'' \frac{1 - \text{sen } \varphi}{1 + \text{sen } \varphi}$$

En forma semejante:

$$f_P = \omega(h+h') \frac{1 + \text{sen } \varphi}{1 - \text{sen } \varphi} ; h' \text{ conserva su valor y } h = \text{cero}$$

$$\therefore f_P = \omega h' \frac{1 + \text{sen } \varphi}{1 - \text{sen } \varphi}$$

Como  $f_A = f_P$  resulta:  $\omega h'' \frac{1 - \text{sen } \varphi}{1 + \text{sen } \varphi} = \omega h' \frac{1 + \text{sen } \varphi}{1 - \text{sen } \varphi}$ ,

y finalmente:

$$h'' = \frac{(1 + \text{sen } \varphi)^2}{(1 - \text{sen } \varphi)^2} h'$$

fórmula que nos indica la sobrecarga  $h''$  que puede admitir el prisma de empuje activo, cuando se conoce la sobrecarga  $h'$  que actúa sobre el prisma de resistencia pasiva.

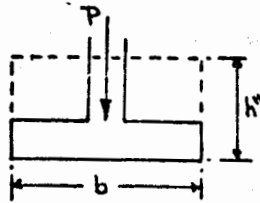


Figura 106.

Puesto que  $h''$  es una altura de relleno de peso volumétrico  $\omega$  produce una fatiga que a continuación calcularemos. Llamemos  $b$  a la base del cimiento.

La fatiga  $f$  a que está sujeto el desplante es:  $f = \frac{P}{b \times 1}$

pero  $P = b \times 1 \times h'' \times \omega$

$$\therefore f = \frac{b h'' \omega}{b} = \omega h'' \quad \text{y también: } h'' = \frac{f}{\omega}$$

Sustituyase este valor en la fórmula encontrada:

$$\frac{f}{\omega} = \frac{(1 + \text{sen } \varphi)^2}{(1 - \text{sen } \varphi)^2} h' ; \therefore f = \omega h' \frac{(1 + \text{sen } \varphi)^2}{(1 - \text{sen } \varphi)^2}$$

, que era precisamente lo que nos proponíamos, o sea: encontrar la fatiga  $f$  a que debe trabajar un cimiento que se vaya a desplantar a una profundidad  $h'$ .

Si se presenta esta expresión en la forma siguiente:

$$h' = \frac{f}{\omega} \frac{(1 - \text{sen } \varphi)^2}{(1 + \text{sen } \varphi)^2}$$

Se puede resolver el problema recíproco a saber: a qué profundidad  $h'$  se debe desplantar un cimiento cuando se conoce la fatiga  $f$  a la que va a trabajar.

Sin embargo, estas fórmulas no son de aplicación directa, porque los prismas de empuje activo y de resistencia pasiva, tal como se han considerado, están por deslizarse. Luego es necesario considerar un coeficiente de seguridad, para que ya se puedan aplicar a problemas prácticos.

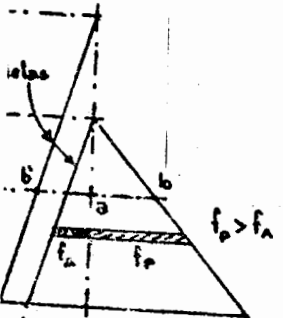
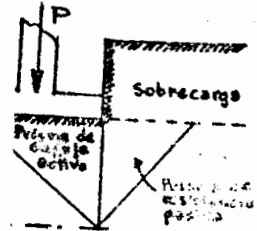
Por la deducción hecha advertimos que la fatiga:

$$f = \omega h' \frac{(1 + \text{sen } \varphi)^2}{(1 - \text{sen } \varphi)^2}$$

, tal como se obtuvo, se debe o es producida por una sobrecarga  $h'' > h'$ .

e resistencia pasiva. --

de P sea tal que de ori-



ental debido al prisma de empuje activo  $h'$ .  
tal debido al prisma de resistencia pasiva  $h''$ .

Figura 105

equilibrar una sobrecarga

la pasiva unitaria se puede empuje activo.

hufe" es necesario que las sean iguales.

inmediatamente abajo del-

ab'.

o el prisma de empuje ac - sobre él actúa una sobre -

Si no hubiera cemento, la fatiga natural  $f''$  a una profundidad  $h'$  sería:

$$f'' = \frac{wb \times l \times h'}{bxl} = wh', \text{ que evidentemente será menor que } f'.$$

El coeficiente de seguridad que se acostumbra tomar consiste en considerar como fatiga de trabajo el promedio de los valores anteriores, es decir:

$$f = \frac{f' + f''}{2}; \text{ si se sustituyen valores queda:}$$

$$f = \frac{wh^2 + wh' \frac{(1 + \operatorname{sen} \varphi)^2}{(1 - \operatorname{sen} \varphi)^2}}{2} = \frac{wh^2}{2} \left[ 1 + \frac{(1 + \operatorname{sen} \varphi)^2}{(1 - \operatorname{sen} \varphi)^2} \right]$$

$$f = \frac{wh^2}{2} \left[ \frac{(1 - \operatorname{sen} \varphi)^2 + (1 + \operatorname{sen} \varphi)^2}{(1 - \operatorname{sen} \varphi)^2} \right] = \frac{wh^2}{2} \frac{1 - 2 \operatorname{sen} \varphi + \operatorname{sen}^2 \varphi + 1 + 2 \operatorname{sen} \varphi + \operatorname{sen}^2 \varphi}{(1 - \operatorname{sen} \varphi)^2}$$

$$f = \frac{wh^2}{2} \frac{2 + 2 \operatorname{sen}^2 \varphi}{(1 - \operatorname{sen} \varphi)^2} \text{ y finalmente:}$$

$$f = \frac{wh^2 (1 + \operatorname{sen}^2 \varphi)}{(1 - \operatorname{sen} \varphi)^2}$$

$$h' = \frac{f (1 - \operatorname{sen} \varphi)^2}{w (1 + \operatorname{sen}^2 \varphi)}$$

Esta fórmula nos da la fatiga de trabajo de un cimiento excavado a una profundidad  $h'$ . La otra expresión nos permite encontrar la profundidad  $h'$  a que debe desplantarse un cimiento cuando se conoce la fatiga  $f$  a que debe trabajar, para que no haya peligro de desplazamientos.

Apliquemos estas ideas a un problema práctico:

Datos:  $w = 1600 \text{ kg/m}^3$

$$\varphi = 30^\circ$$

$$f = 0.5 \text{ kg/cm}^2 = 5000 \text{ kg/m}^2$$

Calcular la profundidad a que debe desplantarse este cimiento.

Sustituyendo valores en la fórmula de  $h'$ :

$$h' = \frac{5000 (1 - 0.5)^2}{1600 (1 + 0.5^2)} = \frac{50 \times 0.25}{16 \times 1.25} = \frac{10}{16} = 0.625 \text{ m};$$

quiere decir que con sólo 0.63 m. de excavación ya se tendría la fatiga de 0.5 kg/cm<sup>2</sup>. que fija el Departamento Central.

Sin embargo, como  $w = 1600 \text{ kg/m}^3$  ya es un peso volumétrico fuerte, supongamos un segundo caso, con  $w = 1200 \text{ kg/m}^3$ .

$$h' = \frac{5000}{1200} \times \frac{0.25}{1.25} = \frac{1000}{1200} = 0.83 \text{ m} \text{ profundidad que garantiza que el cimiento no se mueva.}$$

Esta es la forma de cimentar para que no se produzcan gibas como las que se ven en muchos edificios de la Ciudad.

A veces se presentan pequeños hundimientos iniciales, que no deben atribuirse a -- fallas de esta teoría del empuje de tierras, sino que se deben al acomodamiento o compactación del material que queda debajo del cimiento. Para evitarlos es necesario consolidar el terreno de antemano, ya sea con un pisón a mano, o bien con aplanadora.

Por lo que hemos estudiado, vemos que hacer una cimentación superficial es una tontería, pues de todos modos se tendrá que seguir hasta que llegue a una profundidad en que el material ya no se deslice lateralmente.

Todo lo  
lución de divers

$$\varphi = 0^\circ$$

que a parti  
girá un poc  
nueva sobre

Lotería Na  
dad, de no  
trafr, con  
las consti

con arnad  
sobre el

go b, la

ALGUNOS PROBLEMAS RELATIVOS AL EMPUJE DE TIERRAS.

Todo lo estudiado hasta ahora sobre empuje de tierras resulta muy útil para la solución de diversos problemas.

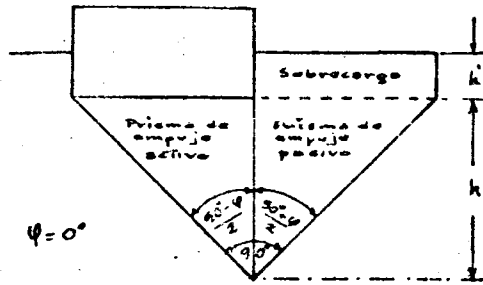


Figura 107.

Por ejemplo, investiguense el equilibrio de una embarcación en el agua.

El esquema 107 nos muestra las condiciones del caso. Como para el agua se tiene que  $\varphi = 0^\circ$ , resulta que los prismas conjugados son iguales.

Sobre el prisma de empuje activo hay una sobrecarga que equivale al peso total de la embarcación, convertido a tirante líquido equivalente. En cambio, sobre el prisma de resistencia pasiva hay una sobrecarga  $h'$  que es igual a la profundidad de sumersión. Sabemos que el equilibrio requiere la condición de que los esfuerzos unitarios activo y pasivo sean iguales.

En el plano coincidente con el fondo del cuerpo se tiene que  $h = 0$  y por tanto:

$$f_a = wh' \frac{(1 - \text{sen } \varphi)}{(1 + \text{sen } \varphi)} = wh'$$

$$f_p = wh' \frac{(1 + \text{sen } \varphi)}{(1 - \text{sen } \varphi)} = wh'$$

De donde se concluye que la sobrecarga  $h'$  sobre el prisma de empuje activo debe ser igual con  $h'$ . Esto indica que el peso de la embarcación, traducido a tirante líquido equivalente, debe ser igual con la profundidad a que el cuerpo se sumerge. En efecto, supongamos-

que a partir de una posición de equilibrio dada se aumenta la carga del buque; este se sumergirá un poco más, lo suficiente para que sobre el prisma de resistencia pasiva se tenga una nueva sobrecarga  $h'$  que equilibre el aumento de peso.

Veamos ahora el problema práctico que se presentó al construir el edificio de la Lotería Nacional. Está cimentado por flotación; se hizo una excavación de 9 m. de profundidad, de manera que el peso del material excavado fuera igual al peso del edificio por construir, con la idea de que las condiciones de carga del suelo no se alterasen ni se afectarían las construcciones vecinas.

Al hacer la excavación hubo algunos problemas; fué necesario ademar las paredes con armaduras de madera y para que el terreno no se hundiera se pusieron cargas provisionales sobre el terreno, que después de retiraron a medida que se construía el edificio.

Supongamos que  $\omega = 1600 \text{ kg/m}^3$  y  $\varphi = 30^\circ$

Sobre una área rectangular cualquiera del fondo de la excavación de ancho  $a$  y largo  $b$ , la fatiga es:  $f = \frac{\omega h a b}{ab} = \omega h$

Profundidad  $h'$  sería:

será menor que  $f'$ .

consiste en considerar como  $f'$

$$\frac{\varphi + 1 + 2\text{sen } \varphi + \text{sen}^2 \varphi}{(1 - \text{sen } \varphi)^2}$$

fatiga de trabajo de un cimiento a profundidad  $h'$ . La otra es encontrar la profundidad  $h'$  a un cimiento cuando se conoce su trabajo, para que no haya problemas.

si la profundidad a que debe enterrarse este cimiento.

tendría la fatiga de 0.5 kg/cm<sup>2</sup>

rico fuerte, supongamos un

garantiza que el cimiento

ibas como las que se ven en

de no deber atribuirse a un acomodamiento o compactación es necesario consolidar el terreno.

ción superficial es una tonada a una profundidad en que el

La idea fue pues que la fatiga resultara de:  $f = 1600 \times 9 = 14\ 400 \text{ kg/m}^2$ .

De acuerdo con la fórmula de la página 82, la profundidad necesaria  $h'$  para obtener una fatiga de  $14\ 400 \text{ kg/m}^2$  se calcula así:

$$h' = \frac{f}{\omega} \frac{(1 - \sin^2 \phi)^2}{(1 + \sin^2 \phi)} = \frac{14\ 400 (1 - 0.5)^2}{1\ 600 (1 + 0.5^2)} = \frac{14\ 400 \times 0.25}{1\ 600 \times 1.25} = 1.80 \text{ m.}$$

Se ve pues que con una excavación de 1.80 m. hubiera sido suficiente para conseguir la fatiga de  $14\ 400 \text{ kg/m}^2$ .

Esto no significa que el edificio esté cimentado en condiciones peligrosas. En realidad, los prismas de resistencia pasiva tienen una sobrecarga de 9 m. de relleno y si el peso total del edificio no es suficiente para equilibrar las resistencias pasivas, tal vez a la larga lo que suceda es que el edificio "se salga" y quede apoyado sobre una giba.)

Otro ejemplo que veremos enseguida se refiere a la cimentación de un terraplén sobre el fango. Desde luego, no conviene hacer zanjas laterales de préstamo. Es imposible levantar un terraplén a base de lodo. Es necesario traer el material para el terraplén desde otro lugar; este material deberá tener, por supuesto, un mayor peso volumétrico que el fango.

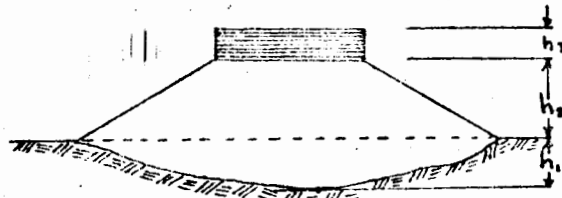


Figura 109.

que ya sea suficiente para dar la resistencia necesaria. Véase que es necesario tener como dato seguro la profundidad a que se hundirá, única forma en que se podrá calcular el material necesario para la estimación previa de los préstamos, costos de acarreo, etc.

Sean:  $\omega$  = peso volumétrico del terreno pantanoso.

$\omega'$  = peso volumétrico del material acarreado con que se construirá el terraplén.

$\phi$  = talud natural del terreno pantanoso.

$h_1$  = profundidad hasta la que se sumará el material.

$h_2$  = altura del terraplén (dato)

$h_3$  = carga viva convertida a altura de terraplén (dato)

$f$  = fatiga que puede soportar el subsuelo a una profundidad  $h_1$ .

Ya sabemos que la fatiga  $f$  que es capaz de admitir el subsuelo pantanoso a una profundidad  $h_1$  es:

$$f = \frac{\omega' (1 + \sin^2 \phi) h_2}{(1 - \sin^2 \phi)^2} h_1$$



Figura 110.

$\gamma = 14\,400 \text{ kg/m}^2$ .  
 profundidad necesaria  $h'$  para obtener suficiente para condiciones peligrosas. En un terraplén a base de arcillas pasivas, tal vez ayudado sobre una giba) necesario traer el material para el terraplén desde un lugar; este material deberá ser supuesto, un mayor peso métrico que el fango.

Estación de un terraplén soportado. Es imposible construir un terraplén a base de arcillas necesario traer el material para el terraplén desde un lugar; este material deberá ser supuesto, un mayor peso métrico que el fango.

Construyendo el terraplén, el material es más pesado y es compactado con la ayuda del terreno se hundirá a una cierta profundidad  $h_1$ , es necesario tener como un peso métrico podrá ubicar el material libreo, etc.

se construirá el terraplén.

Profundidad  $h_1$ .

Suelo pantanoso a una profundidad  $h_1$ .

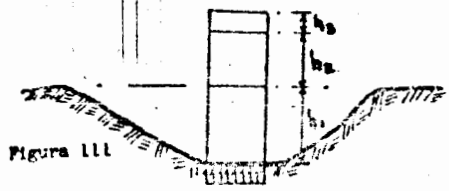


Figura III

$$w(h_1 + h_2 + h_3) = w' \frac{1 + \tan^2 \varphi}{(1 - \tan \varphi)^2} h_1$$

$$w h_1 + w(h_2 + h_3) = w' \frac{1 + \tan^2 \varphi}{(1 - \tan \varphi)^2} h_1$$

$$h_1 \left( w \frac{1 + \tan^2 \varphi}{(1 - \tan \varphi)^2} - w' \right) = w' (h_2 + h_3)$$

$$h_1 = \frac{w' (h_2 + h_3)}{w \frac{1 + \tan^2 \varphi}{(1 - \tan \varphi)^2} - w'}$$

Nótese que si  $\frac{w}{w'} \frac{1 + \tan^2 \varphi}{(1 - \tan \varphi)^2} = 1$ , el denominador del quebrado es nulo y por tanto  $h_1$  sería igual a infinito, lo que quiere decir que sería imposible construir el terraplén; cuanto material se depositara en el pantano se hundiría.

Es necesario calcular el valor mínimo que debe tener  $\varphi$  para que esto no suceda. Desde luego, habrá un valor de  $\varphi$  para cada par de valores de  $w$  y  $w'$ .

$$\frac{w}{w'} \frac{1 + \tan^2 \varphi}{(1 - \tan \varphi)^2} = 1$$

$$\frac{w}{w'} (1 + \tan^2 \varphi) = (1 - \tan \varphi)^2$$

$$\frac{w}{w'} + \frac{w}{w'} \tan^2 \varphi = 1 - 2 \tan \varphi + \tan^2 \varphi$$

$$\frac{w}{w'} = 1 - 2 \tan \varphi + \tan^2 \varphi \left(1 - \frac{w}{w'}\right)$$

$$\left(1 - \frac{w}{w'}\right) \tan^2 \varphi - 2 \tan \varphi + \left(1 - \frac{w}{w'}\right) = 0$$

Esta es una ecuación de segundo grado que puede ponerse como sigue:

De acuerdo con los valores de  $w$  y  $w'$  se podrá calcular el ángulo  $\varphi$  correspondiente.

Supongamos que

$$w = 1000 \text{ kg/m}^3 \text{ (peso aproximado del jabonillo, casi igual al del agua)}$$

$$w' = 1600 \text{ kg/m}^3$$

$$\therefore \left(1 - \frac{1000}{1600}\right) x^2 - 2 \tan \varphi + \left(1 - \frac{1000}{1600}\right) = 0 \quad \left(\frac{1-1000}{1600} = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}\right)$$

$$\tan^2 \varphi - 5.33 \tan \varphi + 1 = 0$$

$$\therefore \tan \varphi = \frac{5.33}{2} \pm \sqrt{\frac{5.33^2}{4} - 1} = 2.665 \pm \sqrt{7.10 - 1}$$

$$\tan \varphi = 2.665 \pm 2.47 = 0.195$$

$$\therefore \varphi = \text{ang sen } 0.195 = 11^\circ 15'$$

85.

Bajo la acción directa del terraplén (dividido en tres tramos  $h_1$ ,  $h_2$  y  $h_3$ ) de peso volumétrico  $w'$ , la fatiga del apoyo es:

$$f = w'(h_1 + h_2 + h_3)$$

Como esas fatigas tienen que ser iguales,

Haremos las operaciones necesarias para despejar  $h_1$ :

Luego, la primera condición para poder hacer el terraplén es que el ángulo de reposo del material que forma el pantano sea mayor que  $11^{\circ}15'$ .

Supongamos que  $\phi = 25^{\circ}$ ; ¿Cuánto debe valer  $h_1$ ?

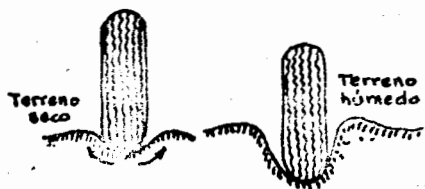
$$h_1 = \frac{h_2 + h_3}{\frac{W(1 + \sin^2 \phi)}{W'(1 - \sin^2 \phi)} - 1} = \frac{1000}{1000} \frac{1 + (0.423)^2}{(1 - 0.423)^2} - 1 = \frac{5}{8} \times \frac{1.179}{0.533} - 1$$

$$h_1 = \frac{h_2 + h_3}{2.22 - 1} = \frac{h_2 + h_3}{1.22} = 0.82(h_2 + h_3).$$

Se observa que para  $\phi = 25^{\circ}$  el terraplén necesitará estar sumido en el pantano una profundidad  $h_1$ , casi equivalente al 80% de su altura total ( $h_2 + h_3$ ).

El espesor necesario que deben tener los revestimientos de los caminos también es un problema que puede resolverse con las ideas ya vistas. Al transitar un camión por un camino de material suelto, una llanta cualquiera se hunde y el terreno se bifa hacia los lados. Si el material es húmedo, el hundimiento es todavía mayor.

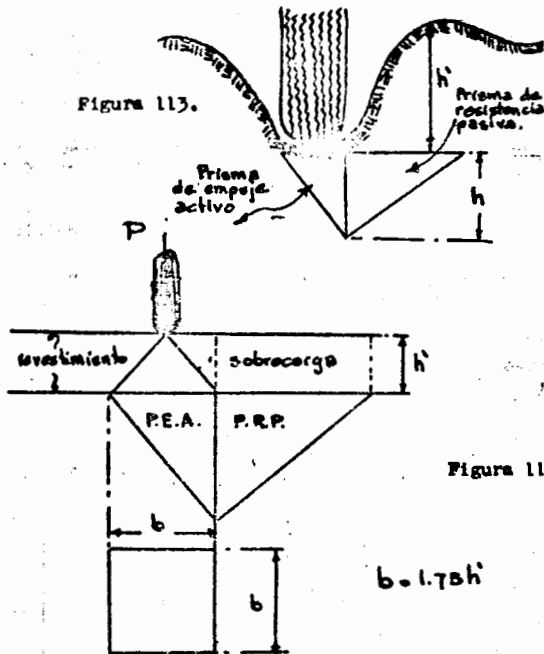
Figura 112.



En cualquier caso, la profundidad de hundimiento es tal que la rueda encuentra ya la resistencia necesaria (hasta una profundidad  $h'$ , de modo que los prismas conjugados, ambos con sobrecarga, están en equilibrio).

Es aconsejable que en un "camino" malo se transite sobre la rodada visible, pues en ella el terreno está consolidado y además tiene ya la profundidad necesaria.

Figura 113.



Propongámonos calcular el espesor que debe tener el revestimiento del camino para que la llanta no se hunda. Por especificaciones, se admite que la carga concentrada  $P$  de la llanta, se transmite formando una pirámide, de tal manera que  $b = 1.75 h'$ , siendo  $h'$  la profundidad que se considere y  $b$  la base de la pirámide citada.

La fatiga en el lecho bajo del revestimiento se compone de dos partes: la transmitida por la carga  $P$ , más la debida al peso del revestimiento. Su valor es:

$$f = \frac{P}{b^2} + wh' = \frac{P}{(1.75h')^2} + wh'$$

Figura 114.

$$b = 1.75h'$$

La y para q

ción de trasera

hunda.

Car asfo ver cie y r gas can

es es

La fatiga que puede admitirse a una profundidad  $h'$  ya sabemos que vale:  $f_2 \frac{\omega h' (1 + \sin^2 \varphi)}{(1 - \sin \varphi)^2}$  y para que haya equilibrio deben ser iguales:

$$\frac{P}{(1.75h')^2} + \omega h' = \frac{\omega h' (1 + \sin^2 \varphi)}{(1 - \sin \varphi)^2}$$

(Nótese que el valor de  $\omega$  se refiere al peso volumétrico del revestimiento).

$$\frac{P}{(1.75h')^2} = \omega h' \left[ \frac{1 + \sin^2 \varphi}{(1 - \sin \varphi)^2} - 1 \right]; \therefore (1.75h')^2 \omega h' = \frac{P}{\left[ \frac{1 + \sin^2 \varphi}{(1 - \sin \varphi)^2} - 1 \right]}$$

$$(h')^3 = \frac{P}{3.06\omega \left[ \frac{1 + \sin^2 \varphi - (1 - \sin \varphi)^2}{(1 - \sin \varphi)^2} \right]} = \frac{P(1 - \sin \varphi)^2}{3.06\omega (1 + \sin^2 \varphi - 1 + 2\sin \varphi - \sin^2 \varphi)}$$

$$h' = \sqrt[3]{\frac{P(1 - \sin \varphi)^2}{6.12\omega \sin \varphi}}$$

Aplicación:

Supongamos que se tiene un camión H-15, cuyo peso es de 13 650 kg, con una repartición de carga de 10% en cada una de las llantas delanteras y 40% en cada una de las ruedas traseras.

Tomaremos un valor de  $\omega = 1600 \text{ kg/m}^3$  y  $\varphi = 30^\circ$

Calcúlese el espesor  $h'$  que debe tener el revestimiento para que la llanta no se hunda.

Tómese la rueda más cargada:  $\therefore P = 0.4 \times 13650 = 5460 \text{ kg}$

$$h' = \sqrt[3]{\frac{P(1 - \sin \varphi)^2}{6.12\omega \sin \varphi}} = \left( \frac{5460 \times 0.5^2}{6.12 \times 1600 \times 0.5} \right)^{1/3} = 0.280^{1/3}$$

$h' = 0.65 \text{ m}$ .

Desde luego que este revestimiento no se pone todo del mismo material, porque resultaría muy costoso; por ejemplo, se pueden poner tres capas cuya calidad vaya siendo menor a medida que la capa es más profunda.

Es frecuente el tipo de revestimiento que se ve en la figura 115.

Como dato curioso, diremos que los romanos hacían sus revestimientos con un espesor de 0.90 m.

Carpeta de mezcla asfáltica; forma la verdadera superficie de rodamiento y reparte las cargas que se le aplican.

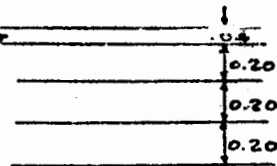


Figura 115.

**CARGA VIVA REDUCIDA A ALTURA DE TERRAPIEN.**

Dibujemos la planta, el perfil y la vista lateral de un camión tipo H-15, cuyo peso es de 13 650 kg. Considérese que el camión va sobre un terrapién y queremos saber qué sobre-carga equivalente representa.

La proporción de la carga total que toma cada rueda está indicada en la figura 116.

En es que el ángulo de repo-

$$\frac{h_2}{1.9 - 1}$$

sumido en el pantano una

e los caminos también es un r un camión por un camino - bufa hacia los lados. Si el do, el hundimiento es toda-

la profundidad de hundi- la rueda encuentra ya la- aria (hasta una profundi- ue los prismas conjugados, rga, están en equilibrio).

e en un "camino" malo se - rodada visible, pues en - stá consolidado y ademias- didad necesaria.

ular el espesor que debe- ento del camino para que- unda. Por especificació la carga concentrada P-- ransmite formando una pi- era que  $b = 1.75 h'$ , sien- i que se considere y b-- nde citada.

cho bajo del revestimien- os partes: la transmiti- más la debida al peso - Su valor es:

$$\frac{P}{(1.75h')^2} + \omega h'$$



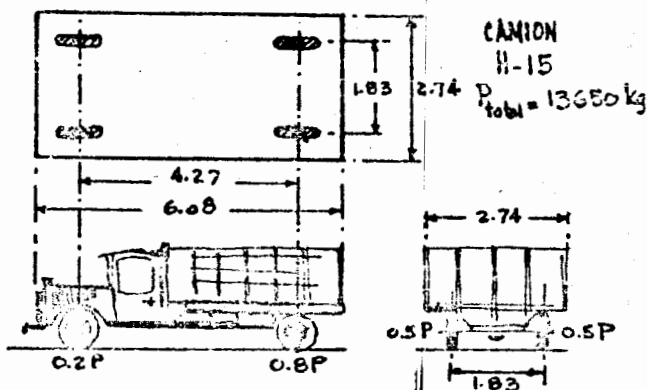


Figura 116.

En forma convencional, podemos calcular la fatiga que produce la carga total del camión sobre su área de proyección máxima, que es de  $6.08 \times 2.74 \text{ m}^2$ .

$$f = \frac{13650}{6.08 \times 2.74} = 820 \text{ kg/m}^2$$

Luego, un terraplén de grueso  $h'$ , que dé lugar a una fatiga de  $820 \text{ kg/m}^2$  en su base, será equivalente a la carga viva o camión.

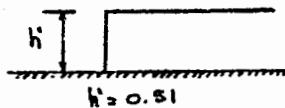


Figura 117

Trataremos de calcular el valor de  $h'$ . La fatiga que produce el terraplén imaginario es:  $f = \frac{wh' \times 1 \times 1}{1 \times 1} = wh'$

Si se igualan los dos valores de  $f$  queda:

$$wh' = 820 \text{ kg/m}^2; \therefore h' = \frac{820}{w}; \text{ si } w = 1600 \text{ kg/m}^3$$

$$h' = \frac{820}{1600} = 0.51 \text{ m.}$$

Esta altura será la que consideraremos en el cálculo de estribos. Se entiende que representa la altura de terraplén equivalente al camión.

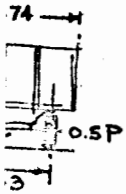
Enseguida, nos conviene estudiar cómo se distribuyen las cargas a través del terraplén.

Las fatigas que se producen, se deben a la carga transmitida por la llanta y al peso del prisma de tierra que queda abajo de la rueda.

La llanta, por efecto del peso que recibe en el eje, se aplasta y adopta una forma elíptica en vez de circular.

Las cargas se transmiten a través de un cono, de tal manera que, como la base va ampliándose, la fatiga es menor a medida que la profundidad aumenta. Sin embargo, por especificaciones, que indudablemente deben basarse en algunas experiencias, se considera que la transmisión de la carga sigue una forma piramidal y que la base de esta pirámide es cuadrada. Más aún, la relación entre la base de la pirámide con la altura es constante e igual a 1.75. Es decir:  $\frac{b}{h} = 1.75$ . (Véase figura 118).

CAMION  
H-15  
Peso = 13650 kg



produce la carga total del m<sup>2</sup>.  
 $\frac{74}{74} = 820 \text{ kg/m}^2$   
 produce el terraplén imagi-  
 valente a la carga viva o -

calcular el valor de h'.  
 $\frac{wh' \times 1 \times 1}{1 \times 1} = wh'$   
 $\frac{3}{m^2} =$

estribos. Se entiende que-  
 cargas a través del terra-  
 tida por la llanta y al pe-  
 aplasta y adopta una forma

ra que, como la base va -  
 Sin embargo, por especi-  
 s, se considera que la -  
 esta pirámide es cuadrada.  
 constante e igual a 1.75.

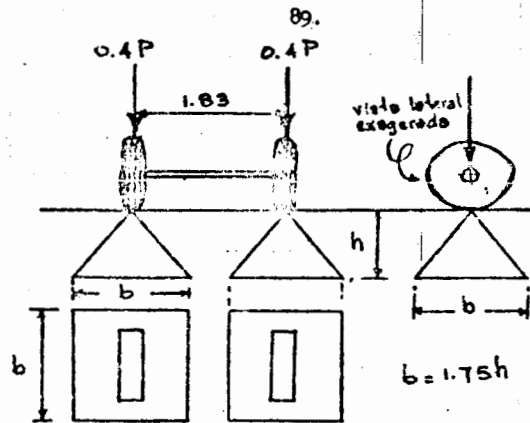


Figura 118.

Con estos datos, se tiene establecida la ley de variación de las fatigas a medida que se consideran capas más y más profundas.

Como ya se dijo, la fatiga a la que trabajará el subsuelo a una profundidad cualquiera h se debe a dos causas: 1o).- La carga del camión y

2o).- El peso de la terracería o relleno.

$$\therefore f = \frac{0.4P}{b^2} + \frac{wb^2h}{b^2} = \frac{0.4 \times 13650}{(1.75h)^2} + wh \quad \text{y si } w = 1600 \text{ kg/m}^3$$

$$f = \frac{1780}{h^2} + 1600h$$

Al aumentar h, el quebrado  $\frac{1780}{h^2}$  dismi-

nuye de valor, pero el término 1600 h aumenta. Se comprende que habrá un cierto valor de h para el cual la fatiga será mínima.

Obtenemos la primera derivada de f respecto a h:

$$\frac{df}{dh} = -\frac{1780 \times 2h}{h^3} + 1600 \quad \text{multiplicando e igualando a cero}$$

$$-\frac{3560}{h^2} + 1600 = 0 \quad ; \therefore 1600 h^2 = 3560$$

$$h = \sqrt{\frac{3560}{1600}} \quad \text{y finalmente: } h = 1.305 \text{ m.}$$

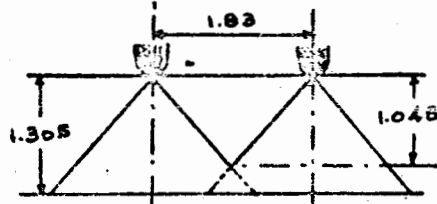


Figura 119.

Es decir, para la rueda trasera aislada, el esfuerzo mínimo se produce a una profundidad de 1.305 m.

Sin embargo, este esfuerzo no llega a presentarse porque, como son dos ruedas, cuando  $b = 1.83$  las bases de las pirámides ya se juntaron.

En efecto, la profundidad a la que las pirámides se tocan es  $h = \frac{1.83}{1.75}$

o sea cuando  $h = 1.045$  m.

La existencia de esa fatiga mínima que acabamos de encontrar es la causa por la que a algunos puentes conviene ponerles un colchón de tierra, como en los puentes de arco. Además, dicho colchón disminuye el efecto del impacto de la carga viva sobre el arco.

También se emplea el colchón de tierra en alcantarillas pequeñas con losa de concreto, digamos de unos 6 m. de largo, y tiene por objeto evitar el "tropezón" al pasar de la terracería a la losa del puente. En ciarros mayores ya no conviene usar el relleno.

La profundidad encontrada justifica el valor recomendado por especificaciones: en la realidad, el relleno debe tener una profundidad de 3 ft.

Resumiendo este primer resultado:

$$\text{Si } 0 < h < 1.05 ; f = \frac{1780}{h^2} + 1600 h$$

Si se calcula una fatiga  $f$  cualquiera para una profundidad  $h$  dada, se puede suponer que dicha fatiga se debe exclusivamente a un colchón de terracería de grueso  $h''$ , ( $f = Wh''$ ); -- y como la terracería, por sí misma, tiene físicamente un espesor  $h$ , resultará que la carga viva queda sustituida por un colchón de grueso  $h' = h'' - h$ .

Hágmoslo así, en forma de tabla, para distintos valores de  $h$ :

$h$	$1780/h^2$	$1600/h$	$f$	$h'' = f/w$ (m)	$h' = h'' - h$ (m)
Profundidad a la que se calcula la fatiga.	Fatiga debida a la carga viva.	Fatiga debida al relleno de espesor $h$	Fatiga total a una profundidad $h$	Espesor total equivalente, sin considerar carga viva.	Espesor de terracería equivalente a la carga viva.
(1)	(2)	(3)	(4) = (2)+(3)	(5) = (4)/1600	(6) = (5) - (1)
0	$\infty$	0	$\infty$	$\infty$	$\infty$
0.20	44 500	320	44 820	28.0	27.8
0.40	11 100	640	11 740	7.31	6.91
0.60	4 950	960	5 910	3.69	3.09
0.80	2 780	1 280	4 060	2.53	1.73
1.00	1 780	1 600	3 380	2.11	1.11
1.05	1 620	1 680	3 300	2.06	1.01

NOTA: La columna (6) también puede calcularse así: (6) = (2)/1600.

El análisis de esta tabla demuestra que tanto la fatiga como el espesor de terraplén equivalente a la carga viva disminuyen rápidamente con la profundidad.

Ahora bien, para calcular la fatiga por carga viva correspondiente a profundidades mayores de 1.05 m., las especificaciones indican que se divida la carga de las dos ruedas traseras entre el área que indica la figura 120. En ella se ve que a pesar de que hay una zona en que las pirámides de esfuerzo se sobreponen, no se considera que la fatiga se duplique.

... ontrar es la causa por la ...  
 ... no en los puentes de arco. ...  
 ... a viva sobre el arco.

... s pequeñas con losa de con ...  
 ... el "tropezón" al pasar de la ...  
 ... usar el relleno.

... lo por especificaciones; en -

... dad h dada, se puede suponer ...  
 ... a de grueso h", (f=Wh"); -- ...  
 ... h, resultará que la carga vi

... s de h:

(m)	$h' = h'' - h$ (m)
Total e- ... e, sin- ... r carga	Espesor de terra- cería equivalente a la carga viva.
1600	(6) = (5) - (1)
0	$\infty$ 27.8
31	6.91
69	3.09
53	1.73 $\phi$
11	1.11
x6	1.01

(6) = (2)/1600

... stiga como el espesor de ...  
 ... a profundidac.

... correspondiente a pro -  
 ... s divida la carga de --  
 ... n ella se ve que a pe -  
 ... ponen, no se considera

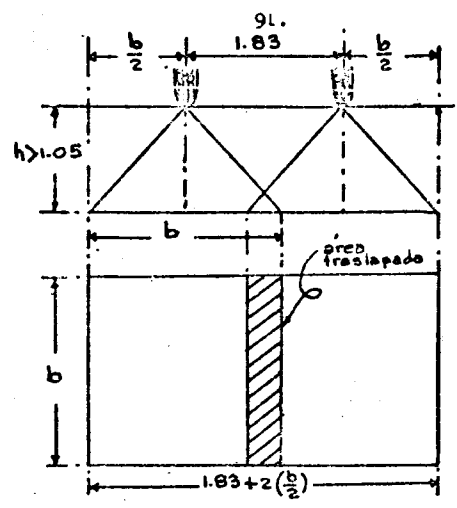


Figura 120.

Por tanto, como  $b = 1.75 h$ , resulta que el área que debe tomarse para el -

cálculo es:

$A = b (1.83 + b)$  y sustituyendo:

$A = 1.75 h (1.83 + 1.75 h)$

$\therefore f_v = \frac{2P}{A} = \frac{2 \times 0.4 \times 13550}{1.75 h (1.83 + 1.75 h)}$

y finalmente:  $f_v = \frac{10920}{3.2 h + 3.06 h^2}$

Sin embargo, esta fórmula también tiene un límite de validez, fijado por la pro-  
 fundidad a la que las pirámides de esfuerzo de la llanta delantera y de la llanta trasera  
 se sobrepone.

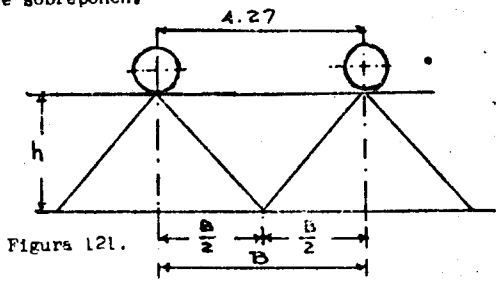


Figura 121.

Como la distancia longitudinal entre ---  
 ejes es de 4.27 m, dichas pirámides se -  
 tocan cuando  $b = 4.27$

$\therefore 1.75 h = 4.27$   
 $h = \frac{4.27}{1.75} = 2.44$  m. es la --

profundidad a la que se tocan.

Para tener la fatiga total deberá aumen-  
 tarse el término Wh debido a la carga-  
 muerta o relleno.

Luego, si  $1.05 < h < 2.44$

$f_v = \frac{10920}{3.2 h + 3.06 h^2} + 1600 h.$

Vamos a hacer otra tabla, para el cálculo de f y h' a varias profundidades.

h	3.2h	3.06h	3.2h+3.06h	$\frac{10920}{3.2h+3.06h}$	1600h	f total	h' = f/w	h'sh"-h
Profundidad a la que se calcula la fatiga.				Fatiga debida a la carga viva.	Fatiga debida al relleno de espesor h.	Fatiga total a una profundidad h.	Espesor total equivalente, sin considerar carga viva.	Espesor de terracería equivalente a la carga viva
(1)	(2)	(3)	(4)=(2)+(3)	(5) = $\frac{10920}{(4)}$	(6) = 1600x(1)	(7) = (5)+(6)	(8) = $\frac{(7)}{1600}$	(9) = (8)-(1)
1.10	3.52	3.71	7.23	1 510	1 760	3 270	2.04	0.94
1.15	3.68	4.05	7.73	1 410	1 840	3 250	2.03	0.88
1.20	3.84	4.42	8.26	1 320	1 920	3 240	2.02	0.82
1.25	4.00	4.78	8.78	1 245	2 000	3 245	2.03	0.78
1.30	4.16	5.18	9.34	1 167	2 080	3 247	2.03	0.73
1.40	4.48	6.00	10.48	1 040	2 240	3 280	2.05	0.65
1.60	5.12	7.82	12.94	845	2 560	3 405	2.13	0.53
1.80	5.76	9.93	15.69	696	2 880	3 576	2.24	0.44
2.00	6.40	12.24	18.64	586	3 200	3 786	2.36	0.36
2.20	7.04	14.8	21.84	500	3 520	4 020	2.51	0.31
2.44	7.82	18.2	26.02	420	3 910	4 330	2.70	0.26

Nota: La columna (9) también puede calcularse así: (9) = (5)/1600

Se observa que la fatiga mínima ocurre cuando h = 1.20 m. A una profundidad de 2.44 m. el camión ya sólo representa una sobrecarga de 0.26 m.

Si h > 2.44, todas las pirámides se superponen y la fatiga por carga viva deberá calcularse dividiendo la carga total del camión entre el área indicada en la figura 122.

h
2.50
3.00
3.50
4.00
5.00
6.00
8.00

las profundidades.

$h'' = f/w$	$h' = h'' - h$
Espe- sor total e- quivalen- te, sin conside- rar carga viva.	Espe- sor de te- rrace- ría e- quiva- lente a la carga viva.
(8) = (1)/1600	(9) = (8) - (1)
2.04	0.94
2.03	0.88
2.02	0.82
2.03	0.78
2.03	0.73
2.05	0.65
2.13	0.53
2.24	0.44
2.36	0.36
2.51	0.31
2.70	0.26

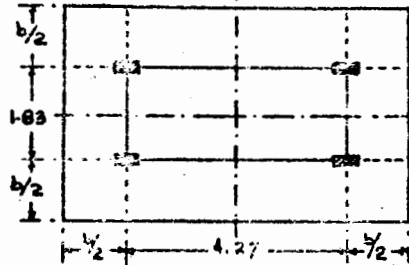


Figura 122.

$$b = 1.75h$$

$$A = (1.83 + b)(4.27 + b)$$

$$A = (1.83 + 1.75h)(4.27 + 1.75h)$$

Finalmente:

$$\text{Si } h > 2.44 \text{ m}$$

$$f = \frac{13650}{(4.27 + 1.75h)(1.83 + 1.75h)} + wh$$

Haremos una última tabla, para calcular los distintos valores de f y h'.

h	(1)	(2)	(3)	(4)	(5) = (1)A(4)	(6)	(7) = 1600x(1)	(8) = (6) + (7)	(9) = (8)/1600	(10) = (9) - (1)
Profundi- dad a la que se apli- ca la fatiga	1.75h	1.75h + 4.27	1.75h + 1.83		Fatiga de bordo a la carga viva 13650 (5) = (4)	Fatiga del da m. sobre de espesor de espesor	Fatiga total 10.375 una profun- didad h.	Espe- sor to- tal equi- valente sin conside- rar carga viva	Espe- sor de terrace- ría equiva- lente a la carga viva.	
2.50	4.38	8.65	6.21	53.7	254	4 000	4 254	2.66	0.16	
3.00	5.25	9.52	7.08	65.5	208	4 800	5 008	3.13	0.13	
3.50	6.12	10.39	7.95	82.8	165	5 600	5 765	3.60	0.10	
4.00	7.00	11.27	8.83	99.8	137	6 400	6 537	4.09	0.09	
5.00	8.75	13.02	10.58	137	100	8 000	8 100	5.06	0.06	
6.00	10.50	14.77	12.33	182	75	9 600	9 675	6.05	0.05	
8.00	14.00	18.27	15.83	289	47	12 800	12 847	8.03	0.03	

Nota: La columna (10) también puede calcularse así: (10) = (5)/1600

La fatiga total aumenta con la profundidad (Col 8) y en cambio el espesor equiva-  
lente a la carga viva disminuye hasta ser insignificante, si h es lo suficientemente grande.

Por ejemplo, a 3 m. de profundidad, la carga viva se puede sustituir por un colchón-  
cuyo espesor es sólo de 0.13 m, lo que apenas viene a ser como un 4% de la profundidad dada.

1600  
una profundidad de  
r carga viva deberá --  
en la figura 122.

ARCOS.-

Empezaremos por el problema más sencillo, que consiste en el cálculo de verificación de un arco, o sea: conocidos los datos constructivos y la condición de carga del arco, encontrar las fatigas en dos secciones cualesquiera de dicho arco.

Supongamos que las secciones en cuestión son la del apoyo y la de la clave, definidas por un ángulo en el centro igual con  $\theta$ .

Desde luego, se conocen todos los datos geométricos del arco; los datos de carga -- también son conocidos; se sabe qué materiales intervienen en el problema y se conocen sus fatigas de trabajo y sus pesos volumétricos.

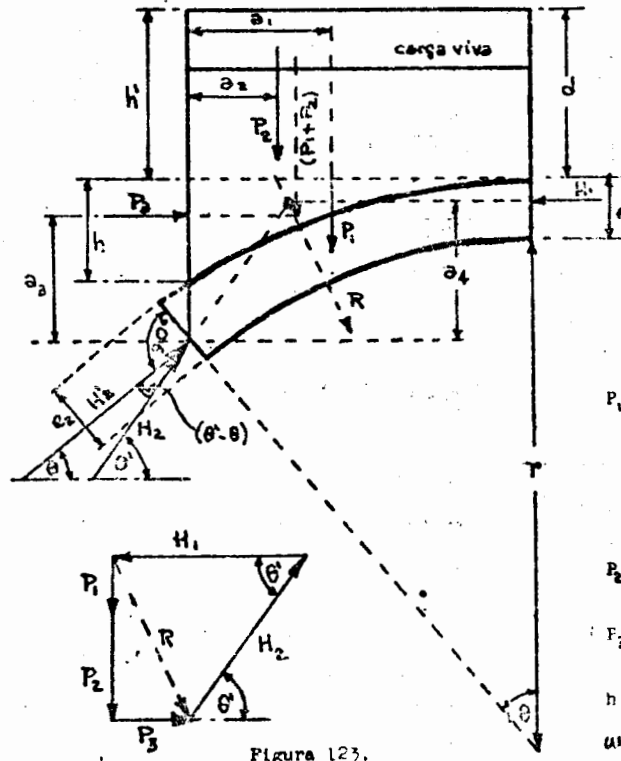


Figura 123.

- $e_1$  = espesor del arco en la clave
- $e_2$  = espesor del arco en el apoyo.

$H_1$  se puede determinar analíticamente y también por métodos gráficos. Puesto que conocemos  $P_1$ ,  $P_2$  y  $P_3$ , podemos obtener su resultante; primero combináremos  $P_1$  y  $P_2$ , con lo que obtenemos una resultante parcial ( $R_1 + P_2$ ). Esta resultante, combinada con el empuje --

Si la carga es simétrica la equilibrante en la clave es horizontal y supondremos que está aplicada en el límite superior del tercio medio; la llamaremos  $H_1$ .

En el apoyo, la reacción será  $H_2$  y formará un ángulo  $\theta'$  con la horizontal. Suponemos también que está aplicada en el límite interior del tercio central.

Sean:

- $P_1$  = peso del arco: Si es de manosteria,  $\omega = 2200 \text{ kg/m}^3$   
Si es de concreto:  $\omega = 2400 \text{ kg/m}^3$
- $P_2$  = peso del relleno más carga viva equivalente.
- $P_3$  = empuje horizontal del relleno sobre el tramo.
- $h'$  = de sobrecarga.
- $\omega'$  = peso volumétrico del relleno,  $\approx 1600 \text{ kg/m}^3$ .

$P_3$  nos da la noa de acci

$H_1$ , y como tiene eleme na de acci del apoyo).

fuézas en

fuézas de

en nuestro nente nor

tamente

al punto

$\theta$  y e

$P_3$  nos da la resultante total de las cargas ( $P_1 + P_2 + P_3$ ), definida en un punto de su línea de acción por el funicular y en dirección y magnitud por el dinámico.

La resultante  $R = (P_1 + P_2 + P_3)$  está equilibrada por las dos reacciones  $H_1$  y  $H_2$ , y como son tres fuerzas coplanares en equilibrio deberán ser concurrentes. El problema tiene elementos suficientes para resolverlo, pues se conoce una fuerza totalmente ( $R$ ), la línea de acción de  $H_1$  y un punto de la línea de acción  $H_2$  (el límite interior del tercio medio del apoyo).

Las direcciones de  $H_1$  y  $H_2$  en el funicular determinan las magnitudes de esas mismas fuerzas en el dinámico.

Así pues, conocemos ya las fuerzas  $H_1$  y  $H_2$

Para determinar la fatiga en la clave igualamos la reacción  $H_1$  con el volumen de esfuerzos correspondiente:

$$H_1 = \frac{1}{2} e_1 f_1 \quad ; \quad \therefore f_1 = \frac{2H_1}{e_1}$$

Si en el apoyo la fuerza  $H_2$  fuera normal, se tendría que  $f_2 = \frac{2H_2}{e_2}$ . Sin embargo, en nuestro caso dicha fuerza no resultó perpendicular; luego será necesario calcular su componente normal, que llamaremos  $H'_2$ .

En la figura obtuvimos que  $\theta' > \theta$ . Se ve que el ángulo que forman  $H_2$  y  $H'_2$  vale justamente  $\theta' - \theta$ . Por tanto:

$$H'_2 = H_2 \cos(\theta' - \theta)$$

$$f_2 = \frac{2H'_2}{e_2} = \frac{2H_2 \cos(\theta' - \theta)}{e_2}$$

Analicémos también podríamos calcular las fatigas. Si se toman momentos respecto al punto de aplicación de  $H_2$ :

$$P_1 a_1 + P_2 a_2 + P_3 a_3 - H_1 a_4 = 0 \quad ; \quad (H_2 \text{ no da momento})$$

$$H_1 = \frac{P_1 a_1 + P_2 a_2 + P_3 a_3}{a_4}$$

Conocido el valor de  $H_1$ , se tiene:

$$H_2 = \sqrt{(H_1 - P_3)^2 + (P_1 + P_2)^2} \quad \text{y} \quad \tan \theta' = \frac{P_1 + P_2}{H_1 - P_3}$$

Para evitar estar elevando al cuadrado y extrayendo raíz, podemos calcular primero  $\theta'$  y entonces:

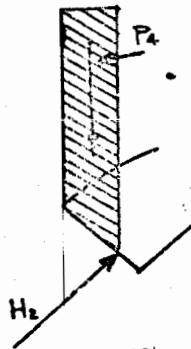


Figura 124.

$$H_2 = \frac{P_1 + P_2}{\sin \theta'} \quad \text{o bien} \quad H_2 = \frac{H_1 - P_3}{\cos \theta'}$$

Es conveniente hacer enseguida una aclaración importante.

Hemos considerado las cargas  $P_1$ ,  $P_2$  y  $P_3$  limitando la figura hasta la vertical que pasa por el punto de aplicación de la carga  $H_2$ , sin tomar en cuenta lo que queda a la izquierda.

Por otra parte, vimos que:

$$e_1 = \frac{2H_1}{f_1} \quad \text{y} \quad H_1 = \frac{P_1 a_1 + P_2 a_2 + P_3 a_3}{a_4}$$

el cálculo de verificación de carga del arco, y la de la clave, defini-

co; los datos de carga -- lema y se conocen sus fa-

Si la carga es simétrica -- la equilibrante en la cla -- ve es horizontal y supon -- dremos que está aplicada -- en el límite superior del -- tercio medio; la llama -- mos  $H_1$ .

En el apoyo, la reacción -- será  $H_2$  y formará un ángu -- lo  $\theta'$  con la horizontal. -- Supondremos también que -- está aplicada en el lími -- te interior del tercio -- central.

can: o del arco: Si es de marm -- postería,  $\omega = 2200 \text{ kg/m}^3$

Si es de -- concreto:  $\omega = 2400 \text{ kg/m}^3$

del relleno más carga -- equivalente.

Je horizontal del rell -- sobre el trasdós, bre carga.

volumétrico del relleno,  $\text{kg/m}^3$ .

ráficos. Puesto que co -- llamos  $P_1$  y  $P_2$ , con lo -- tirada con el empuje --



Ahora bien, si se toma en cuenta el prisma señalado en la figura, aumentaría ligeramente el valor de  $P_3$ , empuje de la tercerera, pero su brazo  $a_3$  disminuiría, de manera que el valor  $P_3 a_3$  sufriría una variación insignificante o tal vez nula.

En cambio el peso propio de ese prisma es considerable y respecto al centro de momentos considerado daría un momento negativo, de manera que el valor de  $H_1$  disminuiría. Si  $H_1$  disminuye el espesor  $e_1$  en la clave también se reduce.

Por lo anterior se ve que es preferible no tomar en cuenta para nada al trapecio -- que queda a la izquierda, porque el cálculo se simplifica un poco y sobre todo, se obtienen resultados del lado de la seguridad.

Habíamos obtenido que  $H_2 = \frac{H_1 - P_3}{\cos \theta}$  y también que  $f_2 = \frac{2 H_2 \cos(\theta' - \theta)}{e_2}$

De esta última expresión resulta:

$$H_2 = \frac{f_2 e_2}{2 \cos(\theta' - \theta)}, \text{ valor que igualaremos con el primero de } H_2:$$

$$\frac{H_1 - P_3}{\cos \theta} = \frac{f_2 e_2}{2 \cos(\theta' - \theta)}; \text{ despijese } e_2: e_2 = \frac{2(H_1 - P_3) \cos(\theta' - \theta)}{f_2 \cos \theta}$$

y como  $H_1 = \frac{e_1 f_1}{2}$ , resulta que:  $e_2 = \frac{2(\frac{e_1 f_1}{2} - P_3) \cos(\theta' - \theta)}{f_2 \cos \theta}$

Como todo el arco está hecho con un mismo material, y es de suponerse que esté bien proyectado,  $f_1$  deberá ser igual a  $f_2$ . A estas fatigas las llamaremos simplemente  $f$ .

$$e_2 = \frac{(e_1 - 2P_3) \cos(\theta' - \theta)}{f \cos \theta} = \frac{(e_1 - 2P_3) \cos(\theta' - \theta)}{f \cos \theta}$$

El valor  $\frac{2P_3}{f}$  se puede despreciar, pues resulta muy cercano a cero.

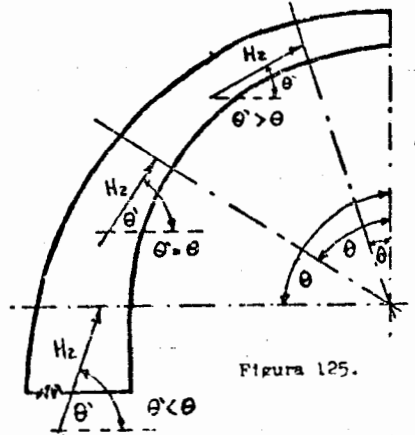
$$e_2 = \frac{e_1 \cos(\theta' - \theta)}{\cos \theta}$$

Supongamos finalmente que  $\theta' = \theta$  (reacción  $H_2$  normal al apoyo).

Entonces:  $e_2 = \frac{e_1}{\cos \theta}$

Como a  $e_2$  no se le restó el término sustractivo  $\frac{2P_3}{f \cos \theta}$  el espesor  $e_2$  encontrado es mayor de lo necesario y por tanto se está del lado de la seguridad.

En general, se ha visto que si  $\theta < 40^\circ$ ,  $\theta' > \theta$



Hay una sección en la que  $\theta' = \theta$ , para lo cual se necesita que la reacción sea perpendicular a la sección. Esta es la sección crítica y se le llama junta de ruptura.

Finalmente, si  $\theta > 40^\circ$  se obtiene que  $\theta' < \theta$ .

Por esto, se ve que las juntas de ruptura deben estar determinadas por ángulos  $\theta$  cercanos a  $40^\circ$ .

En efecto, si se obliga por construcción a que  $\theta$  sea menor de  $40^\circ$ , se tiene un arco rebajado.

Estudiemos ahora la revisión de un arco de medio punto, aquí en el que el intradós es una media circunferencia.

Lo primero que haríamos sería determinar la...

junta de ruptura. El ángulo  $\Theta$  correspondiente a esa sección crítica se puede calcular, para cualquier tipo de arco, por medio de tanteos.

Es conveniente formar una tabla como la que sigue:

$\Theta$	P. C.	$P_1 \varpi_1$	$P_2 \varpi_2$	$\varpi_4$	$H_1$	$\Theta'$
36°						
38°						
40°						
42°						
44°						
46°						

Primera columna, valores cualesquiera del ángulo  $\Theta$ , pero relativamente cercanos a 40°.

Enseguida, cálculo de las fuerzas  $P_1, P_2$ , etc., y de sus brazos de palanca  $\varpi_1, \varpi_2, \varpi_3, \dots$ , para calcular los momentos  $P_1 \varpi_1, P_2 \varpi_2$ , etc.

Después, determínese  $\varpi_4$  para, a continuación, aplicar la fórmula

$$H_1 = \frac{P_1 \varpi_1 + P_2 \varpi_2 + P_3 \varpi_3}{\varpi_4}$$

y saber la reacción en la clave para cada ángulo supuesto.

Luego, se calculará el ángulo  $\Theta'$ , por ejemplo, con la fórmula  $\tan \Theta' = \frac{P_1 + P_2}{H_1 - P_3}$  y buscaríamos el renglón en que  $\Theta = \Theta'$ . Se observará que para ese valor  $H_1$  es máxima.

Conocida ya la junta de ruptura el resto del problema es relativamente fácil.

Supongamos que sólo se conozca el espesor  $e_1$  del arco en la clave.

Esfuerzo máximo en la clave:  $\frac{1}{2} e_1 f_1 = H_1$ ;  $\therefore f_1 = \frac{2 H_1}{e_1}$

Espesor necesario en la junta de ruptura:  $e_2 = \frac{e_1}{\cos \Theta}$

Valor de la reacción  $H_2$ :  $H_2 = \frac{H_1 - P_3}{\cos \Theta}$  (da lo mismo poner  $\Theta$  que  $\Theta'$ , puesto que son iguales).

Como es junta de ruptura  $H_2$  es normal a la sección. Luego, el esfuerzo máximo en el apoyo será:  $f_2 = \frac{2 H_2}{e_2}$ .

**RESOLUCION COMPLETA DE UN ARCO REBAJADO.**

Para una mayor claridad de estas ideas vamos a resolver un problema práctico de aplicación.

Se trata del cálculo de verificación del arco indicado en la figura 12. Como  $\Theta = 30^\circ 40'$  se trata de un arco rebajado (por construcción).

Supondremos que la reacción  $H_2$  sea normal al apoyo y por tanto:

$$e_2 = \frac{e_1}{\cos \Theta} = \frac{0.71}{\cos 30^\circ 40'} = \frac{0.71}{0.866}$$

$$e_2 = 0.82 \text{ m}$$

Nuestro objetivo consiste en calcular las fatigas.

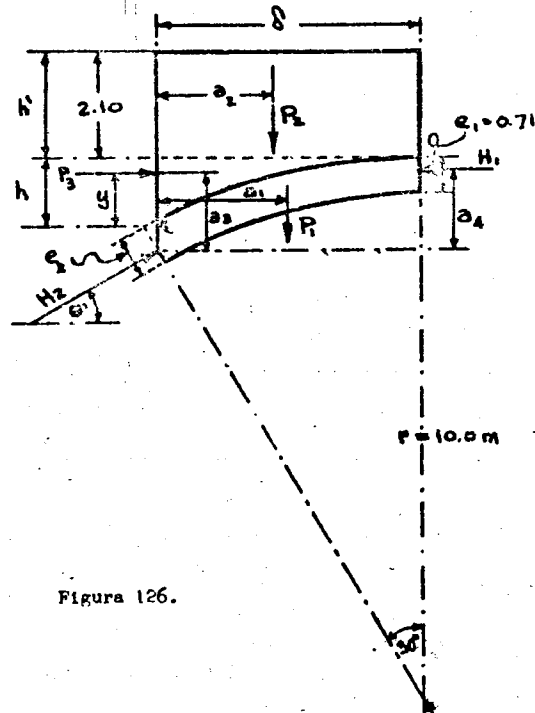


Figura 126.

la mampostería nos da el valor de \$P\_1\$.

$$P_1 = S \cdot \gamma \cdot \omega = 4.15 \cdot 2200 = 9130 \text{ kg.}$$

Cálculo de \$P\_2\$ :

Necesitamos valorar primero la distancia \$h\$ :

$$h = 10 + 3 - \left[ (10 + e_2) \cos 30^\circ \right] = 10.71 - 10.82 \times 0.866 = 10.71 - 9.37 = 1.34$$

Consideraremos la sección del relleno como si fuera un trapecio; luego, su base mayor es, muy aproximadamente, \$2.10 + 1.34 = 3.44\$ m.

$$\text{La altura } \delta \text{ del trapecio es: } \delta = \left( r + \frac{e_2}{8} \right) \sin 30^\circ = (10.00 + 0.27) \times 0.5 = 5.14 \text{ m.}$$

$$\therefore P_2 = \frac{2.10 + 3.44}{2} \times 5.14 \times 1.00 \times 1600 = 22800 \text{ kg.}$$

Cálculo de \$P\_3\$ (empuje activo con sobrecarga)

Recordemos que  $H_2 = \frac{e_1 P_1}{2}$   
 $\therefore P_1 = \frac{2 H_2}{e_1}$

También hay que recordar que de la condición: suma de momentos respecto al punto de aplicación de \$H\_2\$ - igual a cero, se obtuvo:

$$H_2 = \frac{P_1 a_1 + P_2 a_2 + P_3 a_3}{a_4}$$

Para el cálculo de \$P\_3\$ la sección del arco que origina dicha fuerza - se valda como si fuera un trapecio.

$$S = \frac{0.71 + 0.82}{2} \times a$$

\$a\$, la "altura" del trapecio, es la longitud de un arco de \$30^\circ\$ ; corresponde a la línea de los centros de todas las secciones radiales del arco.

$$a = \frac{\text{arco}}{\text{radio}} = \frac{\theta}{r}$$

$$a = \theta r$$

\$\theta\$ debe expresarse en radianes, -

$$\theta = \frac{2 \theta \times 2\pi}{360} = \frac{\pi}{6}$$

$$r = 10 + \frac{0.71}{2} = 10.36 \text{ m; } a = \theta r$$

$$\therefore S = \frac{0.71 + 0.82}{2} \times \frac{\pi}{6} \times 10.36 = 4.15 \text{ m}^2$$

Esta sección, multiplicada por \$1\$ m en el sentido del espesor del arco y por el peso volumétrico de

$$P_3 = \frac{w h}{2} \frac{1 - \sin \phi}{1 + \sin \phi} (h + 2h')$$

y para simplificar, tomaremos  $\phi = 30^\circ$

$$= \frac{1600 \times 1.24}{2} \times \frac{1 - \sin 30^\circ}{1 + \sin 30^\circ} (1.34 + 2 \times 2.10) = 800 \times 1.34 \times \frac{0.5}{1.5} \times 5.54$$

$$P_3 = 1990 \text{ kg.}$$

Los brazos de palanca los calcularemos en forma aproximada. En la práctica, se deben encontrar correctamente, mediante un dibujo hecho con toda exactitud.

$$a_1 = \frac{e_1}{2} = 2.57 \text{ m (Supuesto } P_1 \text{ el centro de } \odot)$$

$$a_2 = \rightarrow = 2.40 \text{ m (Estimado = ojo).}$$

$$a_3 = \frac{2}{3} e_2 \cos \theta + y \quad (\text{Recordar que } y = \frac{h^2 + 2hh'}{3(h+2h')}, \text{ y también } e_2 = \frac{e_1}{\cos \theta})$$

$$a_3 = \frac{2}{3} e_1 + \frac{h^2 + 2hh'}{3(h+2h')} = \frac{2 \times 0.71}{3} + \frac{1.34^2 + 2 \times 1.34 \times 2.10}{3(1.34 + 4.20)} = 0.47 + \frac{10.24}{16.62} = 0.47 + 0.62$$

$$a_3 = 1.09 \text{ m}$$

Finalmente:

$$a_4 = 10 + \frac{2}{3} e_1 - \left[ 10 + \frac{e_1}{3} \right] \cos 30^\circ = 10 + 0.667 \times 0.71 - (10 + 0.273) \times 0.866$$

$$= 10.47 - 8.89$$

$$a_4 = 1.58 \text{ m.}$$

De los resultados obtenidos se sigue que:

$$H_1 = \frac{9130 \times 2.57 + 22300 \times 2.40 + 1990 \times 1.09}{1.58} = \frac{23400 + 54800 + 2100}{1.58}$$

$$H_1 = \frac{80300}{1.58} = 51000 \text{ kg, valor que sustituido en la fórmula de la fatiga en la clavete nos da:}$$

$$f_1 = \frac{2H_1}{\sigma} = \frac{2 \times 51000}{0.71} = 144000 \text{ kg/cm}^2 = 14.4 \text{ kg/cm}^2.$$

Con estos valores, podemos construir ya un dinámico auxiliar:

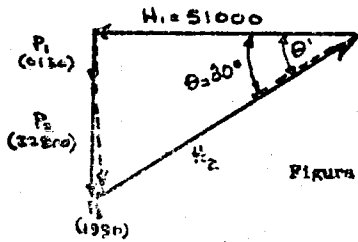


Figura 127.

Calculo de  $\theta'$

$$\tan \theta' = \frac{H_1 + P_2}{H_2 - P_1} = \frac{51000 + 3280}{51000 - 6134} = \frac{54280}{44866} = 1.209$$

$$\theta' = \arctan 1.209 = 50.6^\circ$$

Puesto que el ángulo en el centro  $\odot$ , es menor de  $40^\circ$ , el resultado que encontramos es que  $\theta' > \theta$ . (Efectivamente, observamos  $\theta' > \theta$  puesto que  $50.6^\circ > 30^\circ$ ).

$$\text{Como } H_2 = \frac{H_1 - P_2}{\cos \theta'} = \frac{49010}{\cos 50.6^\circ} = \frac{49010}{0.638} = 76800 \text{ kg, fuerza que, contra lo supuesto originalmente, no es normal a la sección.}$$

$$\text{nos que } H_1 = \frac{e_1 f_1}{2}$$

hay que recordar que de la suma de momentos respecto de aplicación de  $H_2$  - cero, se obtuvo:

$$P_1 a_1 + P_2 a_2 + P_3 a_3 = 0$$

cálculo de  $P_1$ , la sección que origina dicha fuerza como si fuera un trapecio.

$$\frac{0.82}{3} \times a$$

tura del trapecio, es la de un arco de  $30^\circ$ ; co - a la línea de los centros de las secciones radiales.

$$\frac{a}{3} = \frac{e}{r}$$

expresarse en radianes, -

$$\frac{2\theta}{3} = \frac{\pi}{6}$$

$$\frac{2}{3} = 10.26 \text{ m; } a = \theta r$$

$$\frac{0.82}{3} \times \frac{\pi}{6} \times 10.26 = 4.16 \text{ m}^2$$

ión, multiplicada por - sentido del espesor del - el peso volumétrico de

$$10.71 - 9.37 = 1.34$$

llo; luego, su base ma -

$$0.40.27) \times 0.5 = 5.14 \text{ m.}$$

Para calcular la fatiga  $f_2$  en el apoyo tendremos que valuar la componente de  $H_2$  normal a la sección. Ya sabemos que  $H'_2 = H_2 \cos(\theta - \theta')$ ; por lo tanto:

$$H'_2 = H_2 \cos 3^\circ 06' = 58500 \times 0.9985 = 58400 \text{ kg.}$$

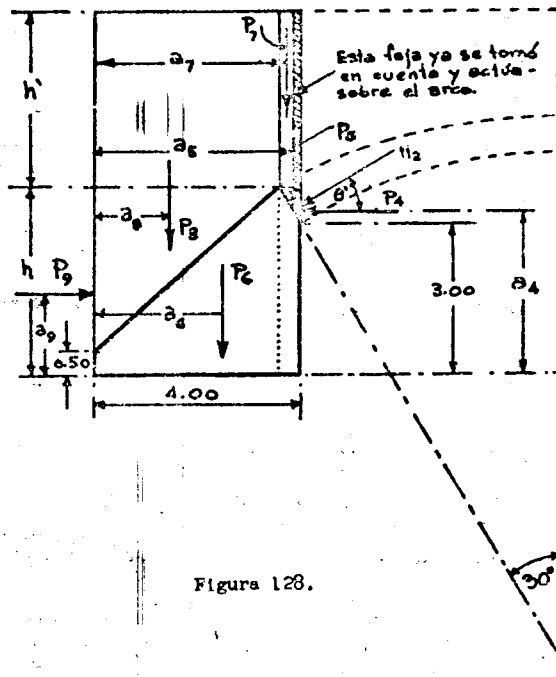
$\therefore f_2 = \frac{2H'_2}{e_2} = \frac{2 \times 58400}{0.82} = 142\,000 \text{ kg/m}^2 = 14.2 \text{ kg/cm}^2$ . Véase que esta fatiga - resultó muy ligeramente menor que la de la clave.

**CALCULO DEL APOYO**

Supondremos que su base es de 4 m, con 3 m. de altura interior y un escalón exterior de 0.50 m. El paramento inclinado del cimiento no es normal a la sección de apoyo del arco o "junta de ruptura".

Las fuerzas que intervienen son:

$P_4$  y  $P_5$ , componentes horizontal y vertical, respectivamente, de  $H_2$ .



$P_6$ , peso propio del cimiento.

$P_7$ , peso de la terracería sobre el plano en que se apoya el arco.

$P_8$ , peso de la terracería sobre el paramento exterior del apoyo y

$P_9$ , empuje activo de la terracería sobre el apoyo.

Ya sabemos que son tres las condiciones que tendremos que revisar.

Empezaremos con la condición de volteo.

I).- Condición de volteo.

Lo primero que hay que determinar es la arista alrededor de la cual tenderá a voltearse. En general, cuando el claro del arco es grande y la altura del apoyo es pequeña, el estribo tiende a voltearse hacia la izquierda debido al gran valor del coceo. En cambio, una alcantarilla con claro corto y estribo alto tenderá a voltearse hacia el cauce.

Como las dos únicas fuerzas volteantes son el coceo  $P_4$  y el empuje de la terracería  $P_9$ , es suficiente ver qué momento domina.

$$P_4 = H_2 \cos \theta' = 58500 \cos 33^\circ 06' = 58500 \times 0.838$$

$$P_4 = 49\,000 \text{ kg.}$$

$$a_4 = 3.00 + \frac{e_2}{3} \cos 30^\circ = 3.00 + \frac{0.82}{3} = 3.24 \text{ m.}$$

Figura 128.

nds  
3.71

uar la componente de  $H_2$   
nto:

Véase que esta fatiga -  
resultó muy ligeramente

erior y un escalón exte--  
a sección de apoyo del --

nte, de  $H_2$ .

pio del cimiento.

la terracería sobre el pla  
apoya el arco.

la terracería sobre el pa-  
lor del apoyo y

ctivo de la terracería so-

e son tres las condiciones  
que revisar.

on la condición de volteo.

n de volteo.

ro qué hay que determinar-  
alrededor de la cual ten-  
rse. En general, cuando el  
o es grande y la altura --  
pequeña, el estribo tiene  
acie la izquierda debido--  
de coceo. En cambio, --  
lla con claro corte y es  
nderá a voltearse hacia --

únicas fuerzas volteantes-  
 $P_4$  y el empuje de la terra-  
suficiente ver qué momen-

3500 x 0.838

3.24 m.

$$M_4 = P_4 a_4 = 49\ 000 \times 3.24 = 158\ 000 \text{ kgm.}$$

Para valuar  $P_9$  tendremos que hacer varios cálculos preliminares:

$$h = 3.00 + e_2 \cos 30^\circ = 3.00 + e_2 = 3.71 \text{ m}$$

$$h' = 2.10 + 1.34 = \longrightarrow = 3.44 \text{ m (Ver figura 126)}$$

$$P_9 = \frac{\rho h}{2} \frac{1 - \sin 30^\circ}{1 + \sin 30^\circ} (h + 2h') = 800 \times 3.71 \left( \frac{0.5}{1.5} \right) (3.71 + 6.88)$$

$$P_9 = 10\ 500 \text{ kg.}$$

$$e_9 = \frac{h^2 + 3hh'}{3(h+2h')} = \frac{3.71^2 + 3 \times 3.71 \times 3.44}{3(3.71 + 6.88)} = \frac{13.8 + 38.3}{31.79} = \frac{52.1}{31.8}$$

$$e_9 = 1.64 \text{ m}$$

$$M_9 = P_9 a_9 = 10500 \times 1.64 = 17\ 200 \text{ kgm}$$

Y como  $M_4 \gg M_9$  el eje de volteo es la arista exterior de la base del cimiento.

$$\text{Condición de volteo: } \frac{\sum M_v}{\sum M_H} \geq 2$$

De estos factores  $\sum M_H$  ya lo podemos calcular:

$$\sum M_H = M_4 - M_9 = 158\ 000 - 17\ 200 = 140\ 800 \text{ kgm.}$$

$$\text{Se tiene que: } \sum M_v = P_5 a_5 + P_6 a_6 + P_7 a_7 + P_8 a_8 = M_5 + M_6 + M_7 + M_8$$

Cálculo de  $M_5$ :

$$P_5 = H_2 \sin \theta' = 58\ 500 \sin 33^\circ 06' = 58\ 500 \times 0.546; P_5 = 31\ 800 \text{ kg}$$

$$a_8 = 4.00 - \frac{e_2}{3} \cos 60^\circ = 4.00 - 0.27 \times 0.5 = 4.00 - 0.135 = 3.86 \text{ m}$$

$$M_8 = P_8 a_8 = 31800 \times 3.86 = 123\ 000 \text{ kgm.}$$

Cálculo de  $M_6$ :

Dividiremos el apoyo en dos trapecios, mediante una vertical que pase por el punto más alto de  $e_2$ .

La base común, que es la mayor, de los dos trapecios así formados es  $h$  y mide 3.71 m.

$$P_6 = \left[ \frac{(3.71 + 0.50)}{2} (4.00 - e_2 \cos 60^\circ) + \frac{(3.71 + 3.00)}{2} e_2 \cos 60^\circ \right] \times 1 \times 2200$$

$$P_6 = (2.11 \times 3.59 + 3.36 \times 0.41) 2200 = (7.58 + 1.35) 2200$$

$$P_6 = 19600 \text{ kg}$$

$$a_6 = 2.50 \text{ m (Valor supuesto a ojo)}$$

$$M_6 = P_6 a_6 = 19\ 600 \times 2.50 = 49\ 000 \text{ kgm.}$$

Cálculo de  $M_7$ :

La sección se considera como un prisma rectangular.

$$P_7 = 3.44 \times \frac{2}{3} e_2 \cos 60^\circ \times 1 \times 1600 = 3.44 \times 0.272 \times 1600$$

$$P_7 = 1500 \text{ kg}$$

$$a_7 = 3.59 + \frac{1}{2} \left( \frac{e_2}{3} \cos 60^\circ \right) = 3.59 + \frac{e_2}{3} \times 0.5 = 3.59 + \frac{0.41}{3}$$

$$a_7 = 3.726 \text{ m.}$$

$$M_7 = P_7 \cdot a_7 = 1500 \times 3.726 = 5600 \text{ kgm.}$$

Cálculo de  $M_8$ :

$$P_8 = \left[ \frac{(h + h' - 0.50) + h'}{2} \right] \times (4.00 - 0.41) \times 1.00 \times 1600$$

$$P_8 = \frac{(6.65 + 3.44)}{2} \times 3.59 \times 1600 = 5.05 \times 3.59 \times 1600$$

$$P_8 = 29\,000 \text{ kg}$$

$$a_8 = 1.50 \text{ m. (Valor supuesto a ojo)}$$

$$M_8 = P_8 \cdot a_8 = 29\,000 \times 1.50 = 43\,500 \text{ kgm.}$$

Finalmente, ya podremos calcular  $\sum M_v$ :

$$\sum M_v = M_5 + M_6 + M_7 + M_8 = 123\,000 \text{ kg}$$

$$49\,000 \text{ kg.}$$

$$5\,600 \text{ kg.}$$

$$43\,500 \text{ kg.}$$

$$\sum M_v = 221\,100 \text{ kg.}$$

$$\frac{\sum M_v}{\sum M_H} = \frac{221\,110}{140\,800} = 1.57 < 2$$

De acuerdo con las especificaciones el apoyo resultó algo escaso, aunque de todos modos puede asegurarse que no se voltearía, puesto que:

$$\frac{\sum M_v}{\sum M_H} = 1.57 > 1$$

II).- Condición de deslizamiento:

El cimiento estará bien si  $\frac{\mu \sum F_v}{\sum F_H} \geq 2$

(Algunos valores de  $\mu$ :

Arcilla seca, talud 1 1/2 x 1  $\mu = 0.66$ )

Arcilla mojada  $\mu = 0.40$ )

Mampostería sobre arcilla  $\mu = 0.66$ )

Ya tenemos valuadas todas las fuerzas, así es que sólo nos falta aplicar la fórmula.

$$\sum F_v = P_5 + P_6 + P_7 + P_8 = 31\,800 + 19\,600 + 1\,500 + 29\,000$$

hacia el  
el coceo  
sistenci

del emp  
desarro  
 $\sum F_H$ .

tante y  
la fórm

el ci

ya

$$\sum F_v = 81\,900 \text{ kg}$$

$$\sum F_H = P_4 - P_9 = 49\,000 - 10\,500$$

$$\sum F_H = 38\,500$$

$$\therefore \frac{\mu \sum F_v}{\sum F_H} = \frac{0.66 \times 81\,900}{38\,500} = 1.41 < 2, \text{ lo que quiere decir que el cimiento est\u00e1 en caso.}$$

En los arcos rebajados los coceos son muy fuertes y hay peligro de deslizamiento hacia el exterior del cimiento, porque el empuje activo de la terracer\u00eda es mucho menor que el coceo. Para evitar el deslizamiento se le hacen escalones que proporcionan prismas de resistencia pasiva.

El c\u00e1lculo de la profundidad necesaria del escal\u00f3n se puede hacer como sigue:

$$\mu \sum F_v \text{ deber\u00eda ser igual a } 2 \sum F_H, \\ \text{pero } \mu \sum F_v \leq 2 \sum F_H$$

\(\therefore 2 \sum F\_H - \mu \sum F\_v\) deber\u00e1 ser el valor del empuje pasivo para que, sumado a la fricci\u00f3n desarrollada nos de el valor mayorado que tenga  $\sum F_H$ .

III).- Condici\u00f3n de Fatiga:

Recordemos que la posici\u00f3n de la resultante respecto a la base del cimiento est\u00e1 dada por la f\u00f3rmula:

$$a = \frac{\sum M_v - \sum M_H}{\sum F_v} = \frac{221\,100 - 140\,800}{81\,900} = \frac{80\,300}{81\,900}$$

$a = 0.98 \text{ m} < 1.33 = \frac{B}{3}$  y por tanto se sale del tercio medio.

Como no debe haber tensiones, emplearemos la f\u00f3rmula de reducci\u00f3n de secci\u00f3n:

$$\sum F_v = \frac{1}{2} \times 3 \times a \times f \quad \text{y } \therefore f = \frac{2 \sum F_v}{3a}; \text{ luego}$$

$$f = \frac{2 \times 81\,900}{3 \times 0.98} = 55\,800 \text{ kg/m}^2$$

$$f \doteq 5.6 \text{ kg/cm}^2.$$

El esfuerzo encontrado resulta algo fuerte; para resistirlo ser\u00eda necesario que el cimiento se desplantase sobre una arenisca, o un conglomerado, etc.

#### RESOLUCION COMPLETA DE UN ARCO DE MEDIO PUNTO

Estudiaremos ahora un arco de medio punto.

Este ejemplo ser\u00e1 una alcantarilla de 2 m. de claro, con un relleno de 3.18 m, que ya incluye la carga viva.

El plano vertical del apoyo (interior), es tangente al intrad\u00f3s. En el trasd\u00f3s, la

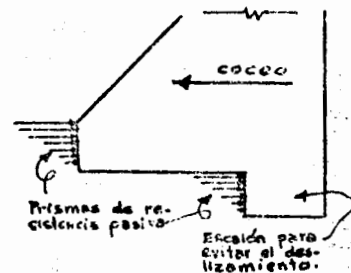


Figura 129.

caso, aunque de todos

1.57 > 1

alta aplicar la f\u00f3rmula



inclinación del segmento exterior es tangente al arco, en el punto exterior definido por la junta de ruptura.

El procedimiento de revisión, como ya se esbozó antes, consiste en estudiar varias secciones, determinar para cada una de ellas la reacción  $H_1$  en la clave y ver qué valor de  $\theta$  hace que  $H_1$  tenga su máximo valor.

Por economía de tiempo, supondremos que la junta de ruptura ocurre cuando  $\theta = 40^\circ$ ; es decir,  $H_2$  es normal a la sección cuando  $\theta = 40^\circ$ .

La fatiga en el apoyo se calcula así:

$$H_1 = \frac{1}{2} \times f_1 \times e_1 \quad \therefore \quad e_1 = \frac{2H_1}{f_1}$$

De la condición  $\sum M = 0$  aplicada al punto en que  $H_2$  incide en la junta:

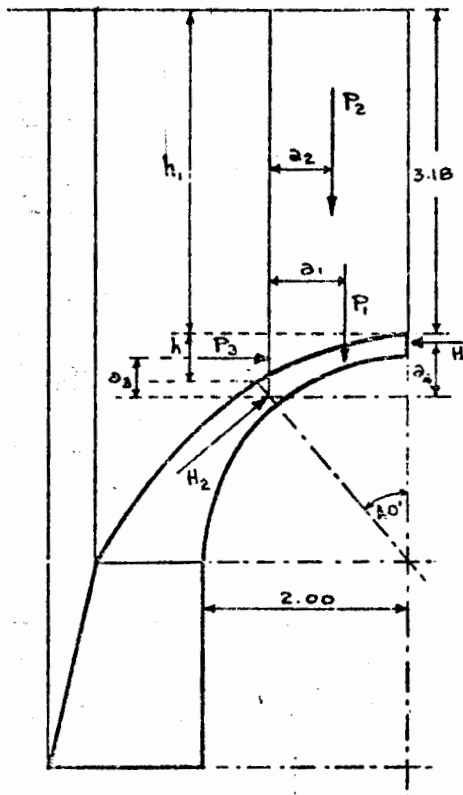


Figura 130.

$$P_1 a_1 + P_2 a_2 + P_3 a_3 - H_1 a_4 = 0$$

$$\therefore H_1 = \frac{P_1 a_1 + P_2 a_2 + P_3 a_3}{a_4}$$

Puesto que  $e_1 = 0.22$  m, el espesor en el apoyo es:

$$e_2 = \frac{e_1}{\cos \theta} = \frac{0.22}{\cos 40^\circ} = \frac{0.22}{0.766}$$

$$e_2 = 0.29 \text{ m}$$

Cálculo de  $P_1$ :

$$\text{Longitud del arco} = \frac{2\pi r \times 40^\circ}{360^\circ}$$

$$a = \frac{6.28 \times 2.11 \times 10}{90} = 1.48 \text{ m}$$

$$P_1 = \frac{0.22 + 0.29}{2} \times 1.48 \times 2200$$

$$P_1 = 830 \text{ kg}$$

Cálculo de  $P_2$ :

Se supone, por simplicidad, que el relleno tiene forma de trapecio.

Base menor del trapecio: 3.18

Calcularemos  $h$  para tener una idea del tamaño de la base mayor del trapecio:

$$h = 2.22 - (2.00 + 0.29) \cos 40^\circ$$

$$h = 2.22 - 2.29 \times 0.766$$

$$h = 0.46 \text{ m.}$$

La h que es su valo

Alto

Con

P<sub>2</sub>

Cál

Ya

P<sub>1</sub>

P<sub>3</sub>

Co

a<sub>1</sub>

a

n

a

c

(

f = 10 kg

La base mayor es un poco menor que  $h' + h = 3.18 + 0.46 = 3.64$  m. Tomaremos 3.58 m. que es su valor real medido a escala.

$$\text{Altura del trapecio: } (2.00 + \frac{0.29}{3}) \operatorname{sen} 40^\circ = 2.10 \times 0.643 = 1.35 \text{ m.}$$

Con estos elementos ya podemos calcular  $P_2$ :

$$P_2 = \frac{3.18 + 3.58}{2} \times 1.35 \times 1600 = 7300 \text{ kg.}$$

Cálculo de  $P_3$ :

Ya vimos que  $h = 0.46$  m.

$$P_3 = \frac{Wh}{2} \frac{1 - \operatorname{sen} \varphi (h + 2h')}{1 + \operatorname{sen} \varphi} = \frac{1600 \times 0.46}{2} \frac{(0.5)(0.46 + 6.36)}{(1.5)}; (\varphi = 30^\circ)$$

$$P_3 = 840 \text{ kg}$$

Consideraremos los siguientes brazos de palanca:

$$a_1 = 0.73 \text{ m (estimado)}$$

$$a_2 = 0.60 \text{ m (estimado)}$$

$$a_3 = \frac{h}{2} + \frac{2}{3} e_2 \cos \theta = 0.23 + \frac{2}{3} \times 0.29 \times 0.766 = 0.38 \text{ m}$$

$$a_4 = 2.00 + \frac{2}{3} \times 0.22 - \left(2.00 + \frac{0.29}{3}\right) \cos 40^\circ = 2.15 - 2.10 \times 0.766 = 0.54 \text{ m}$$

Con estos elementos ya podemos calcular  $H_1$ :

$$H_1 = \frac{P_1 a_1 + P_2 a_2 + P_3 a_3}{a_4} = \frac{830 \times 0.73 + 7300 \times 0.60 + 840 \times 0.38}{0.54}$$

$$H_1 = \frac{607 + 4380 + 320}{0.54} = \frac{5307}{0.54}$$

$$H_1 = 9850 \text{ kg}$$

$$\therefore f_1 = \frac{2H_1}{e_1} = \frac{2 \times 9850}{0.22} = 89600 \text{ kg/m}^2 = 8.96 \text{ kg/cm}^2$$

Si suponemos que el arco está construido con mampostería de 3ª. clase, con una  $f = 10 \text{ kg/cm}^2$ , la fatiga encontrada es perfectamente admisible.

Calculamos enseguida el ángulo  $\theta'$

$$\tan \theta' = \frac{P_1 + P_2}{H_1 - P_3}$$

$$\tan \theta' = \frac{830 + 7300}{9850 - 840}$$

$$\tan \theta' = \frac{8130}{9010} = 0.901$$

exterior definido por la  
 iste en estudiar varias.  
 ave y ver qué valor de -  
 e ocurre cuando  $\theta = 40^\circ$ ;

en la Junta:  
 $a_3 - H_1 a_4 = 0$   
 $a_2 + P_2 a_3$   
 , el espesor en el apoyo

$\frac{22}{766}$

$\frac{2 \times 40^\circ}{60^\circ}$

1.48 m

3 x 2200

lad, que el relleno t

3.18

r una idea del tamaño de

cos  $40^\circ$

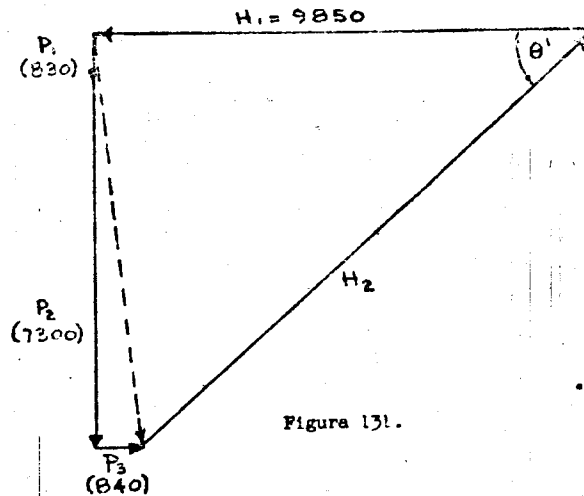


Figura 131.

$\theta' = \text{ang } \tan 0.901 = 42^\circ$ . Como tomamos  $\theta = 40^\circ$ , tuvimos una aproximación aceptable.

(Este cálculo sólo fue para asegurarnos de la posición de la junta de ruptura).

$$\cos \theta' = \frac{H_1 - P_3}{H_2} \quad ; \quad \therefore H_2 = \frac{H_1 - P_3}{\cos \theta'}$$

$$H_2 = \frac{9010}{\cos 42^\circ} = \frac{9010}{0.743} = 12100 \text{ kg}$$

$$\therefore f_2 = \frac{2H_2}{e_2} = \frac{2 \times 12100}{0.29} = 83\,600 \text{ kg/m}^2 = 8.36 \text{ kg/cm}^2$$

$f_2$  nos resultó algo menor que  $f_1$ .

Como ya conocemos  $H_2$  podemos revisar las fatigas en el apoyo.

Prácticamente, debe hacerse un buen dibujo a escala, para determinar cuidadosamente las fuerzas y las distancias.

Consideremos como apoyo la parte comprendida entre la junta de ruptura y la sección AB. Esto lo hacemos porque es conveniente verificar la sección AB, que se encuentra en el plano horizontal que pasa por el centro del arco. Después, verificaremos otra sección más abajo de la AB.

$H_2$  se descompone en sus componentes verticales  $P_4$  y horizontal  $P_5$ .

Nuevamente se toma una longitud unitaria de 1.00 m. en el sentido del cañón del arco.

$P_6$  es el peso del relleno que actúa sobre el plano en que se apoya el arco.

$P_7$  es el peso del relleno sobre el paramento inclinado exterior del apoyo.

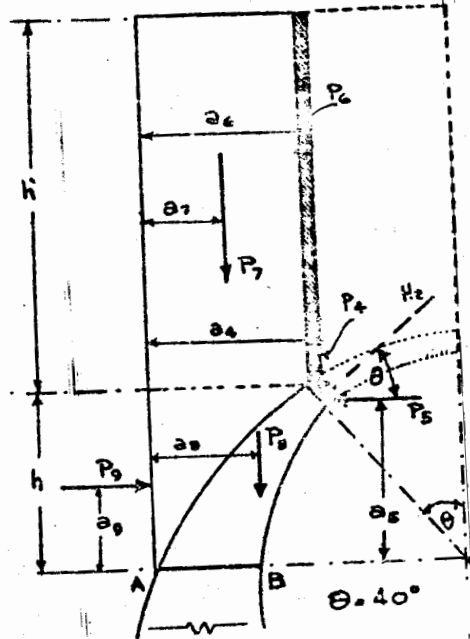


Figura 132.

$P_6$  es el peso propio del apoyo hasta la sección AB y  $P_9$  es el empuje horizontal de la terracería sobre el apoyo.

I).- Condición de volteo.

Ante todo, definamos la arista de volteo.

Cálculo de  $M_5$  :

$$P_5 = H_2 \cos 40^\circ = 12100 \times 0.766 = 9260 \text{ kg}$$

$$a_5 = (r + e_2) \cos \theta = 2.09 \times 0.766 = 1.60 \text{ m.}$$

$$\therefore M_5 = P_5 a_5 = 9260 \times 1.60 = 14800 \text{ kgm.}$$

Cálculo de  $M_9$  :

$$\text{Primero valoremos } P_9 : P_9 = \frac{1}{2} \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} (b + 2h')$$

$$h = (r + e_2) \cos \theta = (2.00 + 0.29) \cos 40^\circ = 2.29 \times 0.766 = 1.75 \text{ m.}$$

$$h' = (r + e_1 + d) - h = 2.00 + 0.22 + 3.18 - 1.75 = 3.65 \text{ m.}$$

aproximación acepta  
junta de ruptura).

minimamente cuidadosamen-

ruptura y la sección se encuentra en la otra sección más

o del cañón del arco.

ra el arco.

del apoyo.

Supondremos que  $\psi = 30^\circ$

$$P_9 = \frac{1600 \times 1.75}{2} \left( \frac{0.5}{1.5} \right) (1.75 + 7.30) = \frac{1600 \times 1.75 \times 9.05}{6}$$

$$P_9 = 4230 \text{ kg}$$

$$a_9 = \frac{h^2 + 3hh'}{3(h+2h')} = \frac{1.75^2 + 3 \times 1.75 \times 3.65}{3(1.75 + 2 \times 3.65)} = \frac{3.06 + 19.2}{3 \times 9.05} = \frac{22.26}{27.15} = 0.82 \text{ m}$$

Recordar que cuando  $h' \gg h$  el brazo de palanca del empuje simplemente se puede calcular así:  $a_9 = \frac{h}{2} = \frac{1.75}{2} = 0.87 \text{ m}$ .

Conocidos  $P_9$  y  $a_9$  tenemos:

$$M_9 = P_9 a_9 = 4230 \times 0.82 = 3470 \text{ kgm.}$$

Como  $P_5 a_5 > P_9 a_9$ , ( $14800 > 3470$ ), la arista de volteo es la exterior y respecto a ella calcularemos  $\sum M_V$  y  $\sum M_H$ .

$$\text{Condición de volteo: } \frac{\sum M_V}{\sum M_H} \geq 2$$

Supondremos que no se conoce AB y que estamos proyectando a base de tanteos; le daremos un valor de prueba de 1.05 m.

$$\sum M_V = P_4 a_4 + P_6 a_6 + P_7 a_7 + P_9 a_9 = M_4 + M_6 + M_7 + M_9$$

Cálculo de  $M_4$ :

$$P_4 = H_2 \sin \Theta = 12100 \times \sin 40^\circ = 12100 \times 0.643 = 7770 \text{ kg}$$

$$a_4 = (r + AB) - (r + \frac{e_2}{3}) \cos (90^\circ - \Theta) = (2 + 1.05) - (2 + 0.10) \cos 50^\circ$$

$$a_4 = 3.05 - 2.10 \times 0.643 = 3.05 - 1.35 = 1.70 \text{ m}$$

$$M_4 = P_4 a_4 = 7770 \times 1.70 = 13200 \text{ kg}$$

Cálculo de  $M_6$ :

$$P_6 = \omega h' \times \frac{2}{3} e_2 \sin \Theta = 1600 \times 3.65 \times 0.193 \times 0.643; \text{ (Se supone que } P_6 \text{ se debe a un prisma rectangular).}$$

$$P_6 = 725 \text{ kg}$$

$$a_6 = a_4 - \left( \frac{2}{3} e_2 \sin \Theta \right) \frac{1}{2}$$

$$a_6 = 1.70 - 0.10 \times 0.643 = 1.70 - 0.06 = 1.64 \text{ m}$$

$$M_6 = P_6 a_6 = 725 \times 1.64 = 1190 \text{ kgm.}$$

Cálculo de  $M_7$ :

$$P_7 = \omega \frac{(h+h')}{2} + h' \left[ 2.00 + 1.05 - (2 + 0.29) \cos 50^\circ \right]$$

$$P_7 = 800 (1.75 + 3.65 + 1.75) (3.05 - 2.29 \times 0.643)$$

$$P_7 = 800 \times 7.15 \times 1.58 = 9030 \text{ kg}$$

$$a_7 = \frac{1}{2} ( \langle 2 + 1.05 \rangle - \langle 2 + 0.29 \rangle \cos 50^\circ ) = \frac{1}{2} ( 3.05 - 2.29 \times 0.643 ) = \frac{1.58}{2}$$

$$a_7 = 0.79 \text{ m}$$

$$M_7 = P_7 a_7 = 9030 \times 0.79 = 7140 \text{ kg}$$

Cálculo de  $M_8$ :

$$P_8 = 2200 \left( \frac{0.29 + 1.05}{2} \right) h ; \text{ (como trapecio)}$$

$$P_8 = 1100 \times 1.34 \times 1.75 = 2580 \text{ kg}$$

$$a_8 = 1.05 \text{ m (supuesto)}$$

$$M_8 = P_8 a_8 = 2580 \times 1.05 = 2720 \text{ kg}$$

Con esto, ya podemos calcular  $\sum M_v$ :

$$\sum M_v = M_4 + M_6 + M_7 + M_8 = 13200 + 1190 + 7140 + 2720$$

$$\sum M_v = 24250 \text{ kgm.}$$

$$\sum M_H = M_5 - M_9 = 14800 - 3470 = 11330 \text{ kgm.}$$

$$\therefore \frac{\sum M_v}{\sum M_H} = \frac{24250}{11330} = 2.15 > 2$$

Lo anterior quiere decir que para la condición de volteo la dimensión de  $AB=1.05\text{m}$ . es correcta.

II).- Condición de deslizamiento:

$$\frac{\sum F_v}{\sum F_H} > 2$$

$$\sum F_v = P_4 + P_6 + P_7 + P_8 = 7770 + 725 + 9030 + 2580 = 20105 \text{ kg.}$$

$$\sum F_H = P_5 - P_9 = 9260 - 4230 = 5030 \text{ kg}$$

En forma general, supondremos que  $\mu = 0.8$  si se trata de dos superficies de mampos.

$$\therefore \frac{0.8 \times 20105}{5030} = 3.2 > 2 \text{ y quedaría bien la base } AB = 1.05 \text{ m.}$$

Supongamos que el desplante de  $AB$  fuera a hacerse sobre tierra; en ese caso  $\mu = 0.66$

$$\frac{0.66 \times 20105}{5030} = 2.64 > 2 \text{ y aún así quedaría bien.}$$

III).- Condición de fatiga:

Punto de aplicación de la resultante:

$$e = \frac{\sum M_v - \sum M_H}{\sum F_v} = \frac{24250 - 11330}{20105} = \frac{12920}{20105}$$

$$\frac{.26}{.15} = 0.82 \text{ m}$$

Implemente se puede

terior y respecto

de tanteos; le da

cos  $50^\circ$

que  $P_6$  se debe  
a rectangular).

$a = 0.65 \text{ m} > \frac{B}{3} = \frac{1.05}{3} = 0.35 \text{ m}$ ; y no sólo eso, sino que

$a > \frac{B}{2}$ , puesto que  $0.65 > 0.53$

$a' = (1.05 - 0.65) = 0.40 > 0.35$ , así es que tampoco se sale la resultante del tercio medio, por el lado interior.

Su posición se indica en el esquema, así como el diagrama de fatigas a que da lugar.

Para calcular las fatigas, partiremos de las fórmulas establecidas en la hoja 49.

$f_1 = \frac{\sum F_v}{B^2} (4B - 6a')$  nos dará la  $f$  máxima.

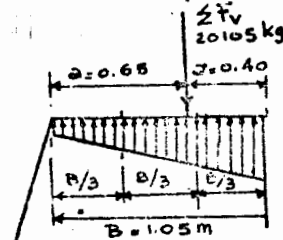


Figura 133.

Sustituyendo los valores:

$$f_1 = \frac{20105}{1.05 \times 1.05} (4 \times 1.05 - 6 \times 0.40) ; f_1 = 32300 \text{ kg/m}^2$$

Y para el esfuerzo mínimo:

$$f_2 = \frac{\sum F_v}{B^2} (6a' - 2B) = \frac{20105}{1.05 \times 1.05} (6 \times 0.40 - 2 \times 1.05) = 5450 \text{ kg/m}^2.$$

La observación de estos resultados nos indica que los valores de las fatigas son una consecuencia de la forma en que se satisfaga la condición de volteo. En efecto, si la base AB se redujera hasta llevar la condición de volteo a su valor límite (2), resultarían fatigas  $f_1$  y  $f_2$  más altas, pues las encontradas en realidad son bajas.

Añalicemos ahora otra sección más baja, como la CD, que supondremos tenga 1.50 m. de ancho y quede 2.00 m. más abajo que la AB. (Ver figura 134).

Nótese que estamos revisando las condiciones de estabilidad de todo el apoyo, desde la junta de ruptura hasta la sección CD, olvidándonos de la sección intermedia AB que ya fué revisada.

Para no repetir todo el cálculo, conservaremos con su mismo valor todas las fuerzas que se tenían para la sección AB, más tres nuevas fuerzas, que son:

$P_{10}$ , peso de la terracería sobre el talud de la parte añadida

$P_{11}$ , peso propio de la parte añadida y

$P_{12}$ , empuje de tierras sobre la parte de cimiento que se aumentó.

Se ve que en esta forma están tomadas en cuenta todas las fuerzas que intervienen en el equilibrio del cimiento hasta la sección CD.

Cálculo de  $P_{10}$ :

$$(3.18 + 0.22 + 2.00) = 5.40 \text{ m}; (\text{base menor del trapecio}) = b'$$

a resultante del tor

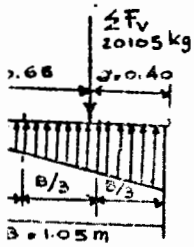


Figura 133.

50 kg/m<sup>2</sup>.

ue los valores de las  
n de volteo. En efec-  
tor límite (2), resul-  
1, jas.

emos tenga 1.50 m. --

todo el apoyo, desde  
media AB que ya fué

or todas las fuerzas

s que intervienen -

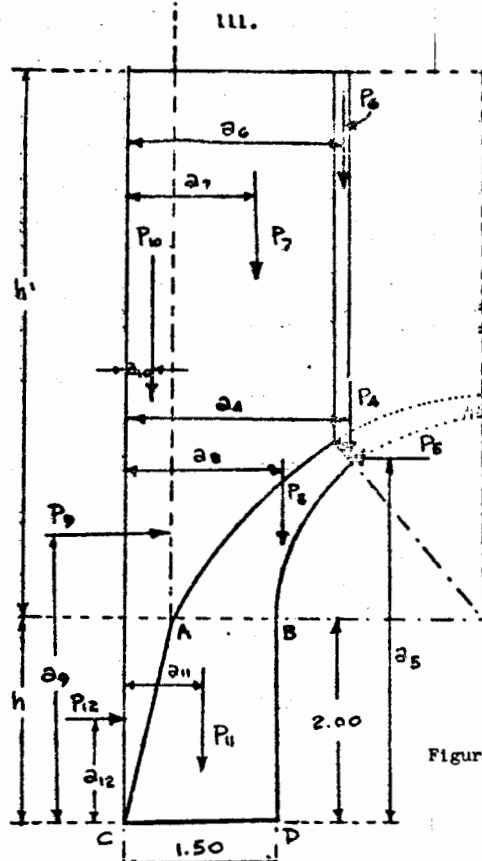


Figura 134.

$$P_{10} = 1600 \times \frac{5.40 + 7.40}{2} (1.50 - 1.05) = 800 \times 12.80 \times 0.45 = 4600 \text{ kg}$$

Cálculo de  $P_{11}$ :

$$P_{11} = 2200 \times \frac{1.05 + 1.50}{2} \times 2.00 = 2200 \times 2.55 = 5610 \text{ kg}$$

Cálculo de  $P_{12}$ :

$$P_{12} = \frac{w}{2} \frac{1 - \cos \varphi}{1 + \sin \varphi} b (h + 2h') = \frac{800}{3} h (h + 2h') = \frac{800}{3} \times 2 (2 + 2 \times 5.40) = \frac{800}{3} \times 2 \times 12.80$$

$$P_{12} = 6850 \text{ kg}$$

Ahora calcularemos los brazos de palanca

$$a_{10} = \frac{1.50 - 1.05}{2} = 0.22 \text{ m}$$

$$a_{11} = \longrightarrow 0.75 \text{ m (supuesta } P_{11} \text{ al centro)}$$



$$a_{12} = 1.00 \text{ m. (supuesta a } \frac{h}{2} \text{ porque } h' \gg h \text{)}$$

## I).- Condición de volteo

Empezaremos por ver qué sentido tiene el momento de volteo de las tres fuerzas volteantes que ahora intervienen ( $P_5$ ,  $P_9$  y  $P_{12}$ ).

$$P_5 = 9260 \text{ kg (calculada antes, no cambia)}$$

$$a_5 = \text{valor anterior de } a_5 + 2.00 = 1.60 + 2.00 = 3.60 \text{ m.}$$

$$M_5 = P_5 a_5 = 9260 \times 3.60 = 33200 \text{ kgm.}$$

$$P_9 = 4230 \text{ kg (no cambia)}$$

$$a_9 = \text{antiguo valor de } a_9 + 2.00 = 0.82 + 2.00 = 2.82 \text{ m.}$$

$$P_9 a_9 = 4230 \times 2.82 = 11900 \text{ kgm}$$

$P_{12}$  y  $a_{12}$  ya se calcularon, véase esta misma hoja, arriba, y la página anterior.

$$P_{12} a_{12} = 6850 \times 1.00 = 6850 \text{ kgm.}$$

$$\text{Momento total del empuje} = M_9 + M_{12} = 11900 + 6850 = 18750 \text{ kgm.}$$

Y como  $33200 > 18750$  la arista de volteo es la exterior, puesto que predomina el momento sobre el empuje de la terracería.

$$\text{Nuestra condición es: } \frac{\sum M_v}{\sum M_H} \geq 2$$

$$\sum M_v = P_4 a_4 + P_6 a_6 + P_7 a_7 + P_8 a_8 + P_{10} a_{10} + P_{11} a_{11} + M_4 + M_6 + M_7 + M_8 + (+M_{10} + M_{11})$$

Cálculo de  $M_4$ :

$$P_4 = 7770 \text{ kg (no cambia de valor)}$$

$$a_4 = \text{antiguo valor de } a_4 + 0.45 = 1.70 + 0.45 = 2.15 \text{ m.}$$

$$M_4 = P_4 a_4 = 7770 \times 2.15 = 16600 \text{ kgm.}$$

Cálculo de  $M_6$ :

$$P_6 = 725 \text{ kg (su valor permanece el mismo)}$$

$$a_6 = \text{valor anterior de } a_6 + 0.45 = 1.64 + 0.45 = 2.09 \text{ m.}$$

$$M_6 = P_6 a_6 = 725 \times 2.09 = 1510 \text{ kgm.}$$

Cálculo de  $M_7$ :

$$P_7 = 9030 \text{ kg (conserva su mismo valor)}$$

$$a_7 = \text{antiguo valor de } a_7 + 0.45 = 0.79 + 0.45 = 1.24 \text{ m.}$$

$$M_7 = P_7 a_7 = 9030 \times 1.24 = 11200 \text{ kgm.}$$

Cálculo de  $M_8$ :

$$P_8 = 2580 \text{ kg (no varía)}$$

$$a_8 = \text{valor anterior de } a_8 + 0.45 = 1.05 + 0.45 = 1.50 \text{ m.}$$

$$M_8 = P_8 a_8 = 2580 \times 1.50 = 3870 \text{ kgm.}$$

Cálculo de  $M_{10}$ :

$$P_{10} = 4600 \text{ kg (ver su valor en hoja 111)}$$

$$a_{10} = 0.22 \text{ m. (ver su valor en hoja 111)}$$

$$M_{10} = P_{10} a_{10} = 4600 \times 0.22 = 1010 \text{ kgm.}$$

Cálculo de  $M_{11}$ :

$$P_{11} = 5610 \text{ kg y } a_{11} = 0.75 \text{ m. (ver valores en hoja 111)}$$

$$M_{11} = P_{11} a_{11} = 5610 \times 0.75 = 4210 \text{ kgm.}$$

Por último:

$$\sum M_v = 16600 + 1510 + 11200 + 3870 + 1010 + 4210 = 38400 \text{ kgm.}$$

$$\sum M_H = M_5 - M_9 - M_{12} = 33200 - 11900 - 6850 = 14450 \text{ kgm.}$$

$$\therefore \frac{\sum M_v}{\sum M_H} = \frac{38400}{14450} \rightarrow = 2.66 > 2 \text{ y se cumple satisfactoriamente la condición de volteo.}$$

II).- Condición de deslizamiento:

$$\frac{\sum F_v}{\sum F_H} \geq 2$$

$$\sum F_v = P_4 + P_6 + P_7 + P_8 + P_{10} + P_{11} =$$

$$\sum F_v = 7770 + 725 + 9030 + 2580 + 4600 + 5610 = 30315 \text{ kg}$$

$$(0 \text{ bien: } \sum F_v = \sum F_v \text{ anterior} + P_{10} + P_{11} = 20105 + 4600 + 5610 = 30315 \text{ kg})$$

$$\sum F_H = P_5 - P_9 - P_{12} = 9260 - 4230 - 6850 = 9260 - 11080$$

$$\sum F_H = - (1820 \text{ kg})$$

Esto indica que domina el empuje de la terracería para efectos de deslizamiento; a lo que es lo mismo, el sentido del deslizamiento es de izquierda a derecha. Por efecto del empuje de tierras la resultante  $\sum F_H$  ha cambiado el sentido de su proyección. Esto quiere decir que para cierta sección entre la AB y la CD la resultante es vertical y el peligro de deslizamiento es nulo.

$$\text{Luego, } \frac{\sum F_v}{\sum F_H} = \frac{0.66 \times 30315}{1820} = 11 > 2 \text{ Esta condición queda muy sobrada.}$$

III).- Condición de fatiga.

$$a = \frac{\sum M_v - \sum M_H}{\sum F_v} = \frac{38400 - 14450}{30315} = \frac{23950}{30315} = 0.79 \text{ m.}$$

Como  $B = 1.50$ ;  $\frac{B}{3} = 0.50 < 0.79$  y la resulta:

Fatiga máxima  $f_1$ :

$$f_1 = \frac{2Fv}{B^2} (4B - 6\delta) = \frac{30315}{1.5^2 \times 1.5} (4 \times 1.5 - 6 \times 0.71)$$

$$= \frac{30315}{2.25} (6.00 - 4.26)$$

$$f_1 = 23500 \text{ kg/m}^2 = 2.35 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_2 = \frac{2Fv}{B^2} (6\delta - 2B)$$

$$f_2 = \frac{30315}{2.25} (4.26 - 3.00)$$

$$f_2 = 17000 \text{ kg/m}^2 = 1.7 \text{ kg/cm}^2.$$

Así, hemos visto dos casos completos de revilla y otro rebajado.

**CALCULO DIRECTO  
DE UN ARCO DE MEDIO PUNTO.  
METODO APROXIMADO.**

Quando se desea proyectar un arco, es posible que sólo estén en función de datos conocidos, con lo que

Por ejemplo, vamos a deducir una expresión para cualquier punto del arco, si se conocen los espesores de los materiales y las fatigas de los materiales y el radio del in-

Deduciremos primero una fórmula aproximada de la del problema.

La reacción en la clave es  $H_1 = \frac{1}{2} e, f$

$$\gamma \therefore f = \frac{2H_1}{e}$$

Si no se toma en cuenta el empuje de la te-  
rracería sobre el trasdós (suponer que  $P_2 = 0$ ), y --  
además se hace la suposición tosca de que la mampostería tiene un peso volumétrico igual al del relleno, se tendrá que, para una junta cualquiera, el equilibrio se debe a la acción combinada de las fuerzas --  
 $H_1$ ,  $P$  y  $H_2$

Del triángulo:

$$\cot \theta' = \frac{H_1}{P} \text{ y } \therefore H_1 = P \cot \theta'$$

En el caso de la junta de ruptura  $\theta = \theta'$  y por tanto  $H_1 = P \cot \theta$ , y finalmente:

$$\frac{e, f}{\gamma} = P \cot \theta$$

$P$  es el peso del material limitado por el rectángulo  $ABCD$ , menos el del sector  $DEG$  y menos el del triángulo  $CDG$ , o sea:

pro del núcleo central.

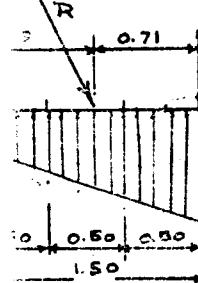


Figura 135.

... uno de medio punto y el

... las dimensiones de fórmulas--  
... los tanteos.

... ita calcular el espesor en --  
... y de la carga viva, los pe-

... después a la solución exa-

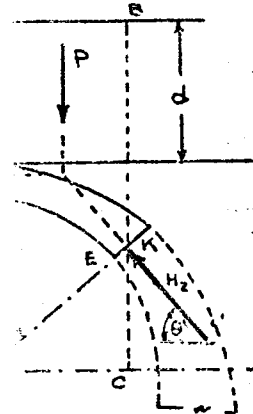


Figura 136.

Ya hemos  
para ter

solu

$$P = w \times l [ABCD - DEG - CPK]$$

$$= \frac{e_1 f}{2} \cdot w \left[ (r+d_1+d) \left( r + \frac{e_2}{3} \right) \sin \theta - \frac{\pi r^2 \theta}{360} - \frac{1}{2} \left( r + \frac{e_2}{3} \right) \sin \theta \left( r + \frac{e_2}{3} \right) \cos \theta \right] \cot \theta$$

Ya hemos visto que  $e_2 = \frac{e_1}{3 \cos \theta}$ ; si se sustituye el valor desconocido  $e_2$  por el valor  $e_1$ , para tener sólo una incógnita, queda:

$$\frac{e_1 f}{2w} = \left[ (r+d_1+d) \left( r + \frac{e_1}{3 \cos \theta} \right) \sin \theta - \frac{\pi r^2 \theta}{360} - \frac{1}{2} \left( r + \frac{e_1}{3 \cos \theta} \right)^2 \sin \theta \cos \theta \right] \cot \theta$$

$$\frac{e_1 f}{2w} = \left[ \frac{r^2}{3} + \frac{r d_1}{3 \cos \theta} + \frac{e_1 r}{3 \cos \theta} + \frac{e_1^2}{3 \cos^2 \theta} + d r + \frac{d e_1}{3 \cos \theta} \right] \sin \theta - \frac{\pi r^2 \theta}{360} - \frac{1}{2} \sin \theta \cos \theta (r^2 + \dots$$

$$+ \frac{2 r e_1}{3 \cos \theta} + \frac{e_1^2}{3 \cos^2 \theta}) \cot \theta$$

$$\frac{e_1 f}{2w \cot \theta} = \left[ r^2 \frac{\sin \theta}{3} + \frac{r d_1 \tan \theta}{3} + \frac{e_1 r \sin \theta}{3} + \frac{e_1^2 \tan \theta}{3} + d r \cos \theta + \frac{d e_1 \tan \theta}{3} - \frac{\pi r^2 \theta}{360} - \dots \right]$$

Se pasa ahora  $\frac{e_1 f}{2w \cot \theta}$  al otro miembro y se divide entre  $r^2$ :

$$\frac{\sin \theta}{3} + \frac{e_1 \tan \theta}{3r} + \frac{d \sin \theta}{r} + \frac{e_1 \tan \theta}{3r} + \frac{d e_1 \tan \theta}{3r^2} - \frac{\pi \theta}{360} - \frac{\sin \theta \cos \theta}{2} - \frac{e_1 \sin \theta}{3r} - \dots$$

$$\dots - \frac{e_1^2 \tan \theta}{18 r^2} - \frac{e_1^2}{2w r \cot \theta} = 0$$

$$\left( \frac{e_1}{r} \right)^2 \left( \frac{\tan \theta}{3} - \frac{\tan \theta}{18} \right) + \left( \frac{e_1}{r} \right) \left( \frac{\tan \theta}{3} + \sin \theta + \frac{d \tan \theta}{3r} - \frac{\sin \theta}{3} - \frac{f}{2w r \cot \theta} \right) + \sin \theta + \dots$$

$$\dots + \frac{d \sin \theta}{r} - \frac{\pi \theta}{360} - \frac{\sin \theta \cos \theta}{2} = 0$$

Si se hacen operaciones y simplificaciones, tenemos:

$$\left( \frac{e_1}{r} \right)^2 \left( \frac{5 \tan \theta}{18} \right) + \left( \frac{e_1}{r} \right) \left( \frac{\tan \theta}{3} + \frac{2 \sin \theta}{3} + \frac{d \tan \theta}{3r} - \frac{f}{2w r \cot \theta} \right) + \sin \theta \left( 1 + \frac{d}{r} - \frac{\cos \theta}{2} - \frac{\pi \theta}{360 \sin \theta} \right) = 0$$

$$\left( \frac{e_1}{r} \right)^2 + \left( \frac{e_1}{r} \right) \left( \frac{18}{18} + \frac{26 \cos \theta}{15} + \frac{12d}{15r} - \frac{10f}{10wr} \right) + \frac{18 \cos \theta}{15} \left( 1 + \frac{d}{r} - \frac{\cos \theta}{2} - \frac{\pi \theta}{360 \sin \theta} \right) = 0$$

$$\left( \frac{e_1}{r} \right)^2 + \left( \frac{e_1}{r} \right) \left( \frac{2+6}{3} \right) \left( 1 + 2 \cos \theta + \frac{d}{r} - \frac{3f}{2wr} \right) + \frac{18 \cos \theta}{5} \left( 1 + \frac{d}{r} - \frac{\cos \theta}{2} - \frac{\pi \theta}{360 \sin \theta} \right) = 0$$

$$\left( \frac{e_1}{r} \right)^2 - 2 \left( \frac{3}{5} \right) \left( \frac{3f}{2wr} - 2 \cos \theta - \frac{d}{r} - 1 \right) \left( \frac{e_1}{r} \right) + \frac{18 \cos \theta}{5} \left( 1 + \frac{d}{r} - \frac{\cos \theta}{2} - \frac{\pi \theta}{360 \sin \theta} \right) = 0$$

Esta última es una ecuación de 2º grado de la forma  $A'x^2 + B'x + C' = 0$ , cuya solución la da la fórmula  $x = \frac{-B' \pm \sqrt{B'^2 - 4A'C'}}{2A'}$

Pero  $A' = 1$ ,  $\therefore$

$$x = \frac{-B'}{2} \pm \sqrt{\frac{B'^2}{4} - \frac{4C'}{4}} = \frac{-B'}{2} \pm \sqrt{\left( \frac{B'}{2} \right)^2 - C'}$$

Si se tiene en cuenta que  $B' = -2B$ ; que  $C' = C$  y que  $x = \frac{e_1}{r}$ , resulta:  
 $\left(\frac{e_1}{r}\right) = B \pm \sqrt{B^2 - C}$ , en la que:  $B = \frac{3}{2} \left( \frac{3f}{2wr} - 2 \cos \theta - \frac{d}{r} - 1 \right)$   
 y  $C = \frac{18 \cos^2 \theta}{8} \left( 1 + \frac{d}{r} - \frac{\cos \theta}{2} - \frac{17\theta}{360 \cdot \sin \theta} \right)$

Esta fórmula nos permitirá calcular directamente el espesor que debe tener la clave ( $e_1$ ), pero para aplicarla vemos que antes es necesario conocer el ángulo  $\theta$ .

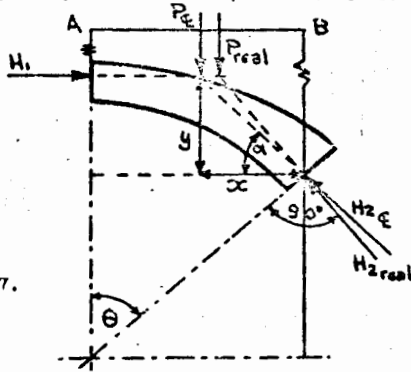
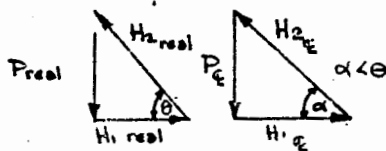


Figura 137.



Si se supone que P actúa al centro de la distancia AB (como sensiblemente ocurre en la realidad), se está del lado de la seguridad, ya que se obtiene un valor mayor de  $H_1$ ; ver figura 137. En consecuencia, el espesor necesario de la llave debe ser mayor.

Pues bien, si como decíamos P actúa al centro de la distancia AB, se tiene que:  $\tan \alpha = \frac{1}{2}$ ;  $\tan \alpha = \tan \theta$

$$\therefore \tan \theta = \frac{\left(r + \frac{2e_1}{3}\right) - \left(r + \frac{e_1}{3 \cos \theta}\right) \cos \theta}{\frac{1}{2} \left(r + \frac{e_1}{3 \cos \theta}\right) \sin \theta}$$

ecuación que despejaremos para  $\frac{e_1}{r}$ .

Hagamos operaciones y simplificaciones:

$$\frac{\tan \theta}{2} \left(r + \frac{e_1}{3 \cos \theta}\right) \sin \theta = r + \frac{2e_1}{3} - r \cos \theta - \frac{e_1}{3}$$

$$\frac{\sin^2 \theta}{2 \cos \theta} \left(r + \frac{e_1}{3 \cos \theta}\right) = r - r \cos \theta + \frac{e_1}{3}$$

$$\frac{r \sin^2 \theta}{2 \cos \theta} + \frac{e_1 \sin^2 \theta}{6 \cos^2 \theta} = r - r \cos \theta + \frac{e_1}{3}$$

$$r \left( \frac{\sin^2 \theta}{2 \cos \theta} + \cos \theta - 1 \right) = e_1 \left( \frac{1}{3} - \frac{\sin^2 \theta}{6 \cos^2 \theta} \right) \therefore \frac{e_1}{r} = \frac{\frac{\sin^2 \theta + 2 \cos^2 \theta - 2 \cos \theta}{2 \cos \theta}}{\frac{2 \cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{6 \cos^2 \theta}}$$

$$\frac{e_1}{r} = (3 \cos \theta) \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta + \cos^2 \theta - 2 \cos \theta}{2 \cos^2 \theta + (\cos^2 \theta - 1)} = (3 \cos \theta) \frac{1 - 2 \cos \theta + \cos^2 \theta}{3 \cos^2 \theta - 1}$$

$$\frac{e_1}{r} = \frac{3 \cos \theta (1 - \cos \theta)^2}{3 \cos^2 \theta - 1}$$

En esta fórmula  $\frac{e_1}{r} = 0$  cuando  $3 \cos^2 \theta - 1 = 0$

Para ello se necesita que  $\cos^2 \theta = \frac{1}{3}$  y por tanto que

$$\cos \theta = (0.333)^{1/2} = 0.577$$

$$\theta = \text{ang} \cos 0.577 = 54^\circ 44'$$

Ahora  
 giralmente nos  
 problema concreto

Aplic

Supón  
 n. de espesor,

El a

Haga

una tabla c

para distir

$\theta$	
(1)	
0°	
10°	
20°	
30°	
32°	
34°	
36°	
38°	
40°	
42°	
45°	
50°	
54° 44'	

punto de

puede ob

$x = \frac{e_1}{r}$ , resulta:  
 $\frac{e_1}{r} - 1$

$$\frac{\cos \theta}{2} - \frac{\pi \theta}{360 \cdot \sin \theta}$$

por que debe tener la cla  
 el ángulo  $\theta$ .

one que P actúa al centro  
 tancia AB (como sensible-  
 rre en la realidad), se -  
 lado de la seguridad, ya  
 tiene un valor mayor de -  
 figura 137. En consecuen-  
 spesor necesario de la -  
 ser mayor.

si como decíamos P ac -  
 tro de la distancia AB, -  
 ue:  $\tan \alpha = \frac{y}{x}$ ;  $\tan \alpha = \frac{e_1}{r} \tan \theta$   
 $\frac{2e_1}{r} - (r + \frac{e_1}{3 \cos \theta}) \cos \theta$   
 $\frac{1}{2} (r + \frac{e_1}{3 \cos \theta}) \sin \theta$   
 ue despejaremos para

Ahora si, con las dos fórmulas encontradas ya puede resolverse el problema que ori-  
 ginalmente nos propusimos. Veamos cuál es la utilidad práctica de ellas, aplicándolas a un -  
 problema concreto:

Aplicación:

Supóngase un arco de medio punto de 10 m. de radio, que soportará un relleno de 10  
 m. de espesor, con peso volumétrico de 1600 kg/m<sup>3</sup>.

El arco se hará con concreto 1:3:6, que admite una fatiga  $f$  de 300 000kg/m<sup>2</sup>.

Hagamos las sustituciones del caso en la fórmula de la hoja anterior:

$$B = \frac{1}{3} \left( \frac{3 \times 300000}{2 \times 1600 \times 10} - 2 \cos \theta - \frac{10}{10} - 1 \right)$$

$$B = \frac{1}{3} (28.125 - 2 - 2 \cos \theta) = \frac{1}{3} (26.125 - 2 \cos \theta)$$

$$B = 15.675 - 1.2 \cos \theta$$

$$C = \frac{18 \cos \theta}{3} \left( 1 + \frac{10}{10} - \frac{\cos \theta}{2} - \frac{\pi \theta}{360 \cdot \sin \theta} \right)$$

$$C = 3.6 \cos \theta \left( 2 - \frac{\cos \theta}{2} - \frac{\pi \theta}{360 \cdot \sin \theta} \right)$$

$$C = 7.2 \cos \theta - 1.8 \cos^2 \theta - 0.0314 \theta \cot \theta$$

Si se dan a  $\theta$  valores diversos y se obtienen los correspondientes de  $\frac{e_1}{r}$ , se forma  
 una tabla cuyos resultados se llevan a una gráfica como la No. 138.

Enseguida se tabulan los resultados que arroja la fórmula  $\frac{e_1}{r} = \frac{2 \cos \theta (1 - \cos \theta)^2}{3 \cos^2 \theta - 1}$   
 para distintos valores del ángulo  $\theta$

$\theta$	$\cos \theta$	$3 \cos \theta$	$3 \cos^2 \theta$	$3 \cos \theta - 1$	$1 - \cos \theta$	$(1 - \cos \theta)^2$	$\frac{e_1}{r} = \frac{2 \cos \theta (1 - \cos \theta)^2}{3 \cos^2 \theta - 1}$
(1)	(2)	(3) = 3 x (1)	(4) = (3) x (3)	(5) = (4) - 1	(6) = 1 - (2)	(7) = (6) <sup>2</sup>	(8) = (3) x (7) ÷ (4)
0°	1.000	3.000	3.000	2.000	0	0	0
10°	0.985	2.954	2.910	1.910	0.015	0.000	0.0004
20°	0.940	2.819	2.649	1.649	0.060	0.004	0.006
30°	0.866	2.598	2.250	1.250	0.134	0.018	0.037
32°	0.848	2.544	2.158	1.158	0.152	0.023	0.051
34°	0.829	2.487	2.062	1.062	0.171	0.029	0.068
36°	0.809	2.427	1.964	0.964	0.191	0.036	0.092
38°	0.788	2.364	1.863	0.863	0.212	0.045	0.123
40°	0.766	2.298	1.760	0.760	0.234	0.055	0.165
42°	0.743	2.229	1.657	0.657	0.257	0.066	0.224
45°	0.707	2.121	1.500	0.500	0.293	0.086	0.364
50°	0.643	1.928	1.240	0.240	0.357	0.128	1.027
54° 44'	0.577	1.732	1.000	0	0.423	0.179	∞

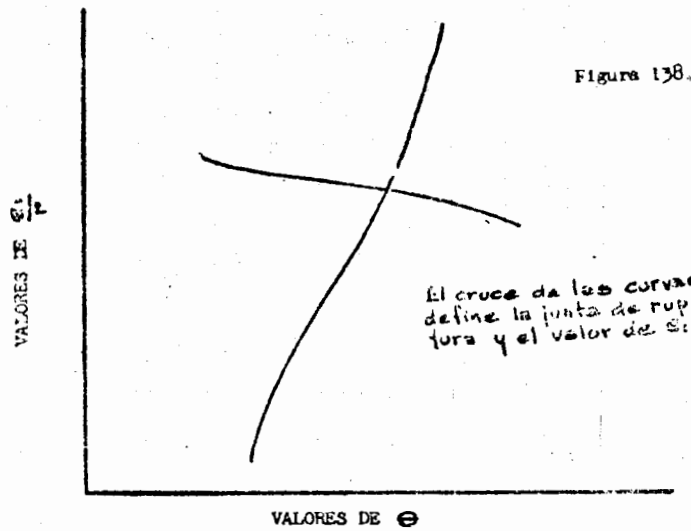
Con estos resultados, según indica la gráfica 138, vemos que las curvas tienen un  
 punto común, que da un valor de  $\frac{e_1}{r}$  y el correspondiente de  $\theta$ .

Este ángulo define la junta de ruptura. Al mismo tiempo del valor de  $\frac{e_1}{r}$  se  
 puede obtener directamente el del espesor necesario en la clave, ya que  $r$  es dato.

$$\frac{3 + 2 \cos^2 \theta - 2 \cos \theta}{2 \cos \theta}$$

$$\frac{25^2 \theta - \sin^2 \theta}{6 \cos^2 \theta}$$

$$\frac{-2 \cos \theta + \cos^2 \theta}{3 \cos^2 \theta - 1}$$



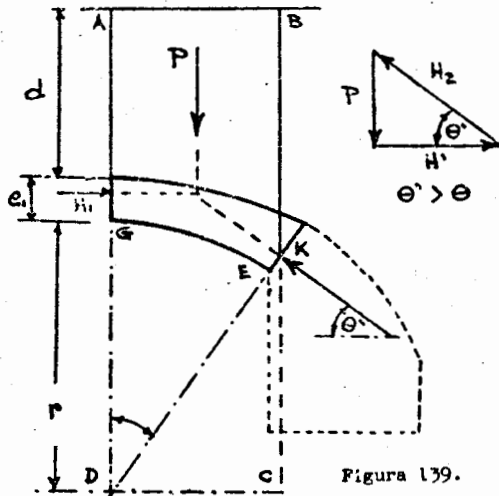
Conocido  $e$ , fácilmente vemos que  $e_2 = \frac{e}{\cos \theta}$

Ya no es necesario evaluar las fatigas, pues las fórmulas fueron deducidas en la posición de que el arco trabaja al esfuerzo máximo permisible tanto en la clave como en el apoyo.

Lo que nos interesa es determinar el valor de  $H_2$ , para que una vez conocido podamos diseñar el apoyo, que deberá cumplir con las tres condiciones de estabilidad ya establecidas (volteo, deslizamiento y fatiga).  $H_2 = \frac{C_2 \cdot e}{2}$

En forma semejante, estudiaremos a continuación la solución aproximada de un arco rebajado.

CALCULO DIRECTO  
DE UN ARCO REBAJADO  
METODO APROXIMADO.



Sea ahora un arco rebajado, en el que haremos las mismas consideraciones que en el de medio punto, a saber: no se considera el empuje de la terracería sobre el trasdós y se supone que el peso volumétrico del arco es igual al del relleno. El peso total P actúa, como antes, a la mitad de la distancia AB.

Del equilibrio de las fuerzas P, H1 y H2 se deduce que:  
 $\cot \theta' = \frac{H_1}{P}$ ;  $\therefore H_1 = P \cot \theta'$   
 y también:

$$H_1 = \frac{1}{2} e_1 f \quad \therefore \frac{1}{2} e_1 f = P \cot \theta'$$

Valuaremos separadamente a P y la componente de  $\theta'$ , para sustituirlas después en la expresión

$$\frac{e_1 f}{2} = P \cot \theta'$$

Figura 138.

las curvas  
ita de rup-  
valor de  $e_1$ .

eron deducidas en la su  
n la clave como en el -

una vez conocido poda-  
estabilidad ya estable-

aproximada de un arco-

$$\cot \theta' = \frac{\frac{1}{2} (r + \frac{e_2}{3}) \sin \theta}{(r + \frac{2}{3} e_1) - (r + \frac{e_2}{3}) \cos \theta} = \frac{\frac{\sin \theta}{2} (r + \frac{e_1}{3 \cos \theta})}{r + \frac{2e_1}{3} - (r + \frac{e_1}{3 \cos \theta}) \cos \theta} = \frac{\frac{r}{2} \sin \theta + \frac{e_1}{6} \tan \theta}{r + \frac{2e_1}{3} - r \cos \theta - \frac{e_1}{3}}$$

$$\cot \theta' = \frac{3r \sin \theta + e_1 \tan \theta}{6r + 4e_1 - 6r \cos \theta - 2e_1}$$

$$\cot \theta' = \frac{3r \sin \theta + e_1 \tan \theta}{6r + 2e_1 - 6r \cos \theta}$$

$$P = w \times l \times [ABCD - DEG - CDK]$$

$$P = w [(r + e_1 + d)(r + \frac{e_1}{3}) \sin \theta - \frac{\pi r^2 \theta}{360^\circ} - \frac{1}{2} (r + \frac{e_1}{3})^2 \sin \theta \cos \theta]$$

$$P = w [(r + e_1 + d)(r + \frac{e_1}{3 \cos \theta}) \sin \theta - \frac{\pi r^2 \theta}{360^\circ} - \frac{\sin \theta \cos \theta}{2} (r + \frac{e_1}{3 \cos \theta})^2]$$

$$P = w [(r + \frac{re_1}{3 \cos \theta} + e_1 r + \frac{e_1^2}{3 \cos \theta} + dr + \frac{de_1}{3 \cos \theta}) \sin \theta - \frac{\pi r^2 \theta}{360^\circ} - \dots]$$



$$\dots - \frac{\text{sen} \theta \cos \theta}{2} \left( r^2 + \frac{2 r e_1}{3 \cos \theta} + \frac{e_1^2}{9 \cos^2 \theta} \right)$$

$$P_2 = w \left[ r^2 \text{sen} \theta + \frac{2 r e_1 \tan \theta}{3} + e_1 \text{sen} \theta + \frac{e_1^2 \tan \theta}{3} + d r \text{sen} \theta + \frac{d e_1 \tan \theta}{3} - \frac{\pi r^2 \theta}{360^\circ} - \frac{r^2 \text{sen} \theta \cos \theta}{2} \dots \right. \\ \left. - \frac{r e_1 \text{sen} \theta}{3} - \frac{e_1^2 \tan \theta}{18} \right] \quad \text{Ya conocemos } P \text{ y } \cot \theta'; \text{ sustituimos sus va-}$$

lores en la fórmula:  $\frac{e_1 f}{2} = P \cot \theta'$

$$\frac{e_1 f}{2} = w \left[ r^2 \text{sen} \theta + \frac{2 r e_1 \tan \theta}{3} + \frac{2 r d \text{sen} \theta}{3} + \frac{5 e_1^2 \tan \theta}{18} + d r \text{sen} \theta + \frac{d e_1 \tan \theta}{3} - \frac{\pi r^2 \theta}{360^\circ} \dots \right. \\ \left. - \frac{r^2 \text{sen} \theta \cos \theta}{2} \right] \frac{(3 r \text{sen} \theta + e_1 \tan \theta)}{(r + 2 e_1 - e_1 \cos \theta)}$$

$$\frac{e_1 f (6 r + 2 e_1 - 6 r \cos \theta)}{2 w} = 3 r^3 \text{sen}^2 \theta + r^2 e_1 \text{sen} \theta \tan \theta + 2 r^2 d \text{sen}^2 \theta + \frac{5}{18} r^2 e_1^2 \text{sen} \theta \tan \theta \\ + 3 d r^2 \text{sen}^2 \theta + r d e_1 \text{sen} \theta \tan \theta - \frac{3 \pi r^2 \theta}{360^\circ} r^2 \text{sen} \theta - \frac{3}{2} r^2 \text{sen} \theta \cos \theta \\ + r^2 e_1 \text{sen} \theta \tan \theta + \frac{5 e_1^2 \tan^2 \theta}{3} + \frac{2}{3} r d e_1 \text{sen} \theta \tan \theta + \frac{2}{3} e_1^2 \tan^2 \theta \\ + d r e_1 \text{sen} \theta \tan \theta + \frac{d e_1^2 \tan^2 \theta}{3} - \frac{\pi r^2 \theta}{360^\circ} e_1 \tan \theta - \dots \\ \dots - \frac{r^2 e_1}{3} \text{sen} \theta \cos \theta \tan \theta$$

$$\frac{3 r e_1 f}{w} + \frac{e_1 f}{w} - \frac{3 r e_1 f \cos \theta}{w} = 3 r^3 \text{sen}^2 \theta + 3 d r^2 \text{sen}^2 \theta - \frac{3 \pi r^2 \theta}{360^\circ} r^2 \text{sen} \theta - \frac{3}{2} r^2 \text{sen}^2 \theta \cos \theta \\ + 2 r^2 d \text{sen} \theta + 2 r^2 e_1 \text{sen} \theta \tan \theta + 2 r d e_1 \text{sen} \theta \tan \theta \\ - \frac{\pi r^2 \theta}{360^\circ} e_1 \tan \theta - \frac{r d e_1 \text{sen}^2 \theta}{3} + \frac{2}{3} r d e_1 \text{sen} \theta \tan \theta + \frac{5 e_1^2 \tan^2 \theta}{3} \\ - \frac{d e_1^2 \tan^2 \theta}{3} + \frac{5}{18} e_1^2 \tan^2 \theta$$

Páase todo a un solo miembro y divídase entre  $r^3$ :

$$3 \text{sen}^2 \theta + 3 d \text{sen}^2 \theta - \frac{3 \pi \theta}{360^\circ} \text{sen} \theta - \frac{3}{2} \text{sen}^2 \theta \cos \theta + \frac{2}{3} \frac{e_1}{r} \text{sen}^2 \theta + 2 \frac{d}{r} \text{sen} \theta \tan \theta + \\ + 2 d \frac{e_1}{r} \text{sen} \theta \tan \theta - \frac{\pi \theta}{360^\circ} \frac{e_1 \tan \theta}{r} - \frac{e_1 f}{r w} + \frac{2 e_1 f \cos \theta}{3 r w} + \frac{2}{3} \frac{e_1}{r} \text{sen} \theta \tan \theta + \frac{5}{18} \frac{e_1^2 \tan^2 \theta}{r^2} \\ + \frac{d e_1^2 \tan^2 \theta}{3 r^2} - \frac{e_1^2 f}{w r^2} + \frac{5}{18} \frac{e_1^2 \tan^2 \theta}{r^2} = 0 \quad \therefore$$

$$\left( \frac{e_1}{r} \right)^3 \left[ \frac{3 \tan^2 \theta}{18} \right] + \left( \frac{e_1}{r} \right)^2 \left[ \frac{2}{3} \text{sen} \theta \tan \theta + \frac{\tan^2 \theta}{3} + \frac{d \tan^2 \theta}{3 r} - \frac{f}{w r} \right] + \left( \frac{e_1}{r} \right) \left[ \frac{2}{3} \text{sen}^2 \theta + 2 \text{sen} \theta \tan \theta \right. \\ \left. + \frac{2 d}{3} \text{sen} \theta \tan \theta - \frac{\pi \theta}{360^\circ} \tan \theta - \frac{3 f}{r w} + \frac{2 f \cos \theta}{r w} \right] + \left[ 3 \text{sen}^2 \theta + \frac{3 d}{r} \text{sen}^2 \theta - \frac{3 \pi \theta}{360^\circ} \text{sen} \theta - \right. \\ \left. - \frac{3}{2} \text{sen}^2 \theta \cos \theta \right] = 0$$

Si ahora se multiplica por 18 y se divide entre  $5 \tan^2 \theta$  queda:

$$\left( \frac{e_1}{r} \right)^3 + \left( \frac{e_1}{r} \right)^2 \left[ \frac{54 \text{sen} \theta \tan \theta}{10 \tan^2 \theta} + \frac{18 \tan^2 \theta}{18 \tan^2 \theta} + \frac{18 d \tan^2 \theta}{15 r \tan^2 \theta} - \frac{18 f}{5 w r \tan^2 \theta} \right] + \left( \frac{e_1}{r} \right) \left[ \frac{54 \text{sen}^2 \theta}{10 \tan^2 \theta} + \right. \\ \left. + \frac{36 \text{sen} \theta \tan \theta}{5 \tan^2 \theta} + \frac{36 d \text{sen} \theta \tan \theta}{5 r \tan^2 \theta} - \frac{18 \pi \theta \tan \theta}{5 \times 360^\circ \tan^2 \theta} - \frac{54 f}{5 w r \tan^2 \theta} + \frac{54 f \cos \theta}{5 w r \tan^2 \theta} \right] + \dots \\ + \left[ \frac{54 \text{sen}^2 \theta}{5 \tan^2 \theta} + \frac{54 d \text{sen}^2 \theta}{5 r \tan^2 \theta} - \frac{54 \pi \theta \text{sen} \theta}{5 \times 360^\circ \tan^2 \theta} - \frac{54 \text{sen}^2 \theta \cos \theta}{10 \tan^2 \theta} \right] = 0$$

Y finalmente

$$\left(\frac{e_1}{r}\right)^3 - \left(\frac{e_1}{r}\right)^2 \left[ \frac{18f}{5Wr \tan^2 \theta} - \frac{6}{5} \left(1 + \frac{d}{r}\right) - \frac{27}{5} \cos \theta \right] + \left(\frac{e_1}{r}\right) \left[ \frac{54f}{5Wr \tan^2 \theta} (\cos \theta - 1) + \frac{36 \cos \theta}{5} \left(1 + \frac{d}{r}\right) + \frac{27}{5} \cos^2 \theta - \frac{18}{5} \frac{\pi \theta}{360^\circ \tan \theta} \right] + \frac{54}{5} \cos^2 \theta \left(1 + \frac{d}{r}\right) - \frac{27}{5} \cos^3 \theta - \frac{54}{5} \frac{\pi \theta}{360^\circ} \frac{\cos^2 \theta}{\tan \theta} = 0$$

Esta es una ecuación de la forma  $\left(\frac{e_1}{r}\right)^3 - A \left(\frac{e_1}{r}\right)^2 + B \left(\frac{e_1}{r}\right) + C = 0$ , en la que:

$$A = \frac{18f}{5Wr \tan^2 \theta} - \frac{6}{5} \left(1 + \frac{d}{r}\right) - \frac{27}{5} \cos \theta$$

$$B = \frac{54f}{5Wr \tan^2 \theta} (\cos \theta - 1) + \frac{36}{5} \cos \theta \left(1 + \frac{d}{r}\right) + \frac{27}{5} \cos^2 \theta - \frac{18}{5} \frac{\pi \theta}{360^\circ \tan \theta}$$

$$C = \frac{54}{5} \cos^2 \theta \left(1 + \frac{d}{r}\right) - \frac{27}{5} \cos^3 \theta - \frac{54}{5} \frac{\pi \theta}{360^\circ} \frac{\cos^2 \theta}{\tan \theta}$$

Su aplicación práctica la podremos ver sólo con un problema práctico:

Supóngase que:

$$d = 10 \text{ m}$$

$$r = 10 \text{ m}$$

$$\theta = 30^\circ ; \tan \theta = 0.578 ; \cos \theta = 0.866$$

$$f = 300\,000 \text{ kg/m}^2$$

$$W = 1600 \text{ kg/m}^3$$

Primero calcularemos las constantes:

$$A = \frac{18 \times 300\,000}{5 \times 1600 \times 10 \times 0.578 \times 0.578} - \frac{6}{5} \left(1 + \frac{10}{10}\right) - \frac{27}{5} \times 0.866 = 202.24 - 4.7 = 194.9$$

$$B = \frac{54 \times 300\,000}{5 \times 1600 \times 10 \times 0.578 \times 0.578} (0.866 - 1.000) + \frac{36}{5} \times 0.866 \left(1 + \frac{10}{10}\right) + \frac{27}{5} \times 0.866 \times 0.866 - \frac{18}{5} \frac{3.14 \times 30^\circ}{360^\circ} \times \frac{1}{0.578} = -81.8 + 12.46 + 4.05 - 1.63 = -66.92$$

$$C = \frac{54}{5} \times 0.866 \times 0.866 \left(1 + \frac{10}{10}\right) - \frac{27}{5} \times 0.866^3 - \frac{54}{5} \frac{3.14 \times 30^\circ}{360^\circ} \times \frac{0.866 \times 0.866}{0.8} = 16.25 - 3.52 - 4.25 = 8.48$$

La ecuación por resolver queda así:

$$\left(\frac{e_1}{r}\right)^3 - 194.9 \left(\frac{e_1}{r}\right)^2 - 66.92 \left(\frac{e_1}{r}\right) + 8.48 = 0$$

Encontraremos la solución por medio de tanteos, suponiendo un valor inicial de

$$\begin{array}{r} 0.10 \\ -194.9 \quad -66.92 \quad +8.48 \\ +0.1 \quad -19.53 \quad -8.64 \\ \hline -194.8 \quad -96.40 \quad -0.16 \end{array}$$

de manera que:

; el valor resultó razonablemente aproximado,

$$\frac{e_1}{r} = 0.10 \text{ y } \therefore e_1 = 0.10r = 0.10 \times 10 = 1 \text{ m}$$

Para calcular  $\theta'$  emplearemos la fórmula  $\cot \theta' = \frac{3 \operatorname{sen} \theta + e \tan \theta}{e r + 2e_1 - 6r \cos \theta}$  deducida en la página 119.

$$\cot \theta' = \frac{3 \times 10 \times 0.5 + 1 \times 0.378}{6 \times 10 + 2 \times 1 - 6 \times 10 \times 0.866} = \frac{15.378}{60 + 2 - 51.9} = \frac{15.378}{10.1} = 1.54$$

$$\theta' = \operatorname{ang} \cot 1.54 = 32^\circ 50'$$

Como  $32^\circ 50' > 30$  se comprueba que el arco es rebajado.

$$\text{Del dinámico } H_1 = H_2 \cos \theta' ; \therefore H_2 = \frac{H_1}{\cos \theta'}$$

Y como  $H_1 = \frac{e_1 f}{2}$  resulta que

$$H_2 = \frac{e_1 f}{2 \cos \theta'} = \frac{1 \times 300000}{2 \times 0.82} = 183000 \text{ kg}$$

$$e_2 = \frac{e_1}{\cos \theta} = \frac{1.00}{0.866} = 1.15 \text{ m}$$

Sin embargo, en función de la fatiga,  $e_2$  debe medir:

$$\frac{f e_2}{2} = H_2 \cos(\theta' - \theta) ; \therefore e_2 = \frac{2 \times 183 \times \cos 2^\circ 50' \times 1000}{300 \times 1000} = \frac{366}{300} \times 0.996$$

$$e_2 = 1.21 \text{ m} \quad , \text{ que será la dimensión que efectivamente se da a } e_2.$$

#### CALCULO DIRECTO DE UN ARCO POR UN METODO MAS EXACTO.

Nos referiremos a la figura 140, en la que casi todos los elementos ya son conocidos. Los conatos términos nuevos que aparecen se irán explicando a medida que se haga la descripción. Sea pues:

$r$  = radio del intradós en m.

$e_1$  = espesor de la clave en m.

$e_2$  = espesor en el apoyo, en m.

$\theta$  = ángulo en el centro que define la sección  $e_2$

$d$  = espesor del colchón de tierra y carga viva (m)

$P_1$  = peso propio del arco en kg

$P_2$  = peso del relleno y carga viva en kg.

$P_3$  = empuje horizontal del relleno sobre el trasdós

$H_1$  y  $H_2$ , equilibrantes de  $P_1$ ,  $P_2$  y  $P_3$  en Kg.

$\theta'$  = ángulo que forma  $H_2$  con la horizontal.

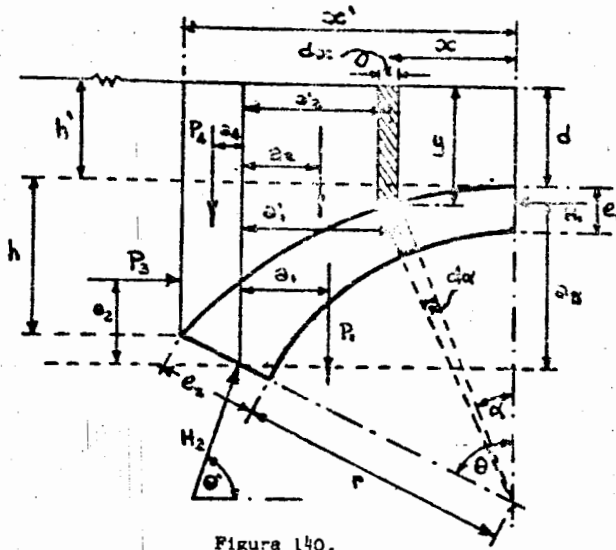
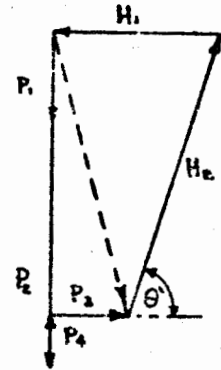


Figura 140.



Tenemos que  $H_1 = \frac{e_1 f}{2}$   
 Y como  $H_2$  no es normal a la cara  $e_2$   
 $H_2 = \cos(\theta' - \theta) \frac{e_2 f}{2}$   
 $H_2 = \frac{e_2 f}{2 \cos(\theta' - \theta)}$   
 Del dinámico:  
 $H_2 = \frac{H_1 - P_3}{\cos \theta'}$

Combinemos estas tres ecuaciones:

$$\frac{e_2 f}{2 \cos(\theta' - \theta)} = \frac{e_1 f}{2} - P_3$$

$$e_2 f_2 (e_1 f - 2P_3) \frac{\cos(\theta' - \theta)}{\cos \theta'}$$

$e_2 = (e_1 - \frac{2P_3}{f}) \frac{\cos(\theta' - \theta)}{\cos \theta'}$ ,  $\frac{2P_3}{f}$  es un valor muy pequeño, porque  $P_3$  es pequeño y  $f$  es grande. Además,  $\theta'$  es casi igual a  $\theta$  y  $\therefore \cos(\theta' - \theta) \approx 1$

En el caso de la junta de ruptura  $\cos \theta \approx \cos \theta'$  y por todo esto:

$$e_2 \approx \frac{e_1}{\cos \theta}$$

Para una sección cualquiera limitada por un ángulo  $\alpha$ ,  $e_2' = \frac{e_1}{\cos \alpha}$

ne:

$$\sum M = 0 = P_1 a_1 + P_2 a_2 + P_3 a_3 - P_4 a_4 - H_1 a_5$$

Vallemos separadamente cada uno de estos términos

$\frac{\tan \theta}{\cos \theta}$  deducida en la pá.

$$\frac{3.57 \theta}{10.1} = 1.54$$

$$= \frac{366}{800} \times 0.996$$

se de a  $e_2$ .

mentos ya son conocida que se haga la de

$$H_1 = \frac{1}{2} a_1 f_1$$

$$a_2 = r + \frac{2}{3} e_1 - (r + \frac{1}{3} e_1) \cos \theta = r + \frac{2e_1}{3} - r \cos \theta - \frac{e_1}{3} = r(1 - \cos \theta) + \frac{e_1}{3}$$

$$\therefore H_1 a_2 = \frac{1}{2} \frac{e_1}{2} \left[ r(1 - \cos \theta) + \frac{e_1}{3} \right]$$

En forma parecida seguiremos calculando todos los demás términos que intervienen en la ecuación de equilibrio.

Tomemos una sección elemental del arco, limitada por un ángulo en el centro  $d\alpha$ .

Esa sección elemental, si  $d\alpha \rightarrow 0$ , puede considerarse como rectangular y respecto al centro de momentos tendrá un brazo de palanca que llamaremos  $a_1$ ;

Así el momento total de  $P_1$  será la integral de los momentos elementales de esas pequeñas secciones mencionadas.

$$P_1 a_1 = \int_0^{\theta} a_1' dP_1$$

$$\text{Largo del rectángulo elemental: } \frac{e_1}{\cos \alpha}$$

ancho del rectángulo elemental = arco medio = ángulo subtendido x radio medio =

$$= d\alpha \left( r + \frac{1}{2} \frac{e_1}{\cos \alpha} \right)$$

profundidad del elemento de arco =  $l$

peso volumétrico del material:  $\Delta$

$$\text{brazo de palanca del elemento} = a_1' = \left( r + \frac{e_1}{3} \right) \sin \theta - \left( r + \frac{e_1}{2 \cos \alpha} \right) \sin \alpha$$

$$a_1' = \left( r + \frac{e_1}{3 \cos \alpha} \right) \sin \theta - \left( r + \frac{e_1}{2 \cos \alpha} \right) \sin \alpha$$

Sustituyanse estos valores en la fórmula de  $P_1 a_1$ :

$$P_1 a_1 = \int_0^{\theta} \frac{e_1}{\cos \alpha} \left( r + \frac{e_1}{2 \cos \alpha} \right) d\alpha \times l \times \Delta \left[ \left( r + \frac{e_1}{3 \cos \alpha} \right) \sin \theta - \left( r + \frac{e_1}{2 \cos \alpha} \right) \sin \alpha \right]$$

$$P_1 a_1 = \Delta \int_0^{\theta} \frac{e_1}{\cos \alpha} \left( r + \frac{e_1}{2 \cos \alpha} \right) \left[ r \sin \theta + \frac{e_1 \tan \theta}{3} - r \sin \alpha - \frac{e_1 \tan \alpha}{2} \right] d\alpha$$

$$P_1 a_1 = \Delta \int_0^{\theta} \left( \frac{e_1 r}{\cos \alpha} + \frac{e_1^2}{2 \cos^2 \alpha} \right) \left( r \sin \theta + \frac{e_1 \tan \theta}{3} - r \sin \alpha - \frac{e_1 \tan \alpha}{2} \right) d\alpha$$

$$\frac{P_1 a_1}{\Delta} = \int_0^{\theta} \frac{e_1 r^2 \sin \theta}{\cos \alpha} d\alpha + \int_0^{\theta} \frac{e_1^2 r \tan \theta}{3 \cos \alpha} d\alpha - \int_0^{\theta} \frac{e_1 r^2 \sin \alpha}{\cos \alpha} d\alpha - \int_0^{\theta} \frac{e_1^2 r \tan \alpha}{2 \cos \alpha} d\alpha + \int_0^{\theta} \frac{e_1^2 r \sin \theta}{2 \cos^2 \alpha} d\alpha$$

$$+ \int_0^{\theta} \frac{e_1^3 \tan \theta}{6 \cos^2 \alpha} d\alpha - \int_0^{\theta} \frac{e_1^2 r \tan \alpha}{2 \cos^2 \alpha} d\alpha - \int_0^{\theta} \frac{e_1^3 \tan \alpha}{4 \cos^2 \alpha} d\alpha$$

$$\frac{P_1 a_1}{\Delta} = \int_0^{\theta} \frac{e_1 r^2 \sin \theta}{\cos \alpha} d\alpha + \int_0^{\theta} \frac{e_1^2 r \tan \theta}{3 \cos \alpha} d\alpha - \int_0^{\theta} \frac{e_1 r^2 \sin \alpha}{\cos \alpha} d\alpha - \int_0^{\theta} \frac{e_1^2 r \tan \alpha}{2 \cos \alpha} d\alpha + \int_0^{\theta} \frac{e_1^2 r \sin \theta}{2 \cos^2 \alpha} d\alpha$$

$$+ \int_0^{\theta} \frac{e_1^3 \tan \theta}{6 \cos^2 \alpha} d\alpha - \int_0^{\theta} \frac{e_1^2 r \sin \alpha}{2 \cos^2 \alpha} d\alpha - \int_0^{\theta} \frac{e_1^3 \tan \alpha}{4 \cos^2 \alpha} d\alpha$$

Saquemos de las integrales los factores que sean constantes:

olver. En

de Pa e

$$\frac{R_2}{\Delta} = e_1 r^2 \operatorname{sen} \theta \int_0^{\alpha} \frac{d\alpha}{\cos \alpha} + \frac{e_1^2 r^2 \tan \theta}{3} \int_0^{\alpha} \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha} - e_1 r^2 \int_0^{\alpha} \tan \alpha d\alpha - \frac{e_1^2 r^2}{2} \int_0^{\alpha} \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos^2 \alpha} d\alpha$$

$$+ \frac{e_1 r^2 \operatorname{sen} \theta}{2} \int_0^{\alpha} \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{e_1^2 \tan \theta}{2} \int_0^{\alpha} \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha} - \frac{e_1^3}{4} \int_0^{\alpha} \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos^3 \alpha} d\alpha$$

Véase que sólo se tienen cinco integrales diferentes, relativamente fáciles de resolver. Empecemos con la primera:

$$\int_0^{\alpha} \frac{d\alpha}{\cos \alpha} = \int_0^{\alpha} \sec \alpha d\alpha = \log_2 (\sec \alpha + \tan \alpha) \Big|_0^{\alpha} = \log_2 (\sec \alpha + \tan \alpha) - \log_2 (\sec 0 + \tan 0)$$

$$= \log_2 (\sec \alpha + \tan \alpha) - \log_2 (1 + 0) = \log_2 (\sec \alpha + \tan \alpha)$$

Estudiamos la siguiente:

$$\int_0^{\alpha} \tan \alpha d\alpha = \log_2 (\sec \alpha) \Big|_0^{\alpha} = \log_2 (\sec \alpha) - \log_2 (\sec 0) = \log_2 \sec \alpha$$

La tercera integral que aparece es:

$$\int_0^{\alpha} \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos^2 \alpha} d\alpha = \int_0^{\alpha} (\cos \alpha)^{-2} \operatorname{sen} \alpha d\alpha = - \left[ \frac{\cos \alpha^{-1}}{-1} \right]_0^{\alpha} = \left[ \frac{1}{\cos \alpha} \right]_0^{\alpha} = \frac{1}{\cos \alpha} - 1 = \frac{1 - \cos \alpha}{\cos \alpha}$$

La cuarta integral aparece en dos términos:

$$\int_0^{\alpha} \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha} = \int_0^{\alpha} \sec^2 \alpha d\alpha = \tan(\alpha) \Big|_0^{\alpha} = \tan \alpha - \tan 0 = \tan \alpha$$

Por último,  $\int_0^{\alpha} \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos^3 \alpha} d\alpha = \int_0^{\alpha} (\cos \alpha)^{-3} \operatorname{sen} \alpha d\alpha = - \left[ \frac{(\cos \alpha)^{-2}}{-2} \right]_0^{\alpha} + \left[ \frac{1}{2 \cos^2 \alpha} \right]_0^{\alpha}$

$$= \frac{1}{2 \cos^2 \alpha} - \frac{1}{2 \cos^2 0} = \frac{1}{2 \cos^2 \alpha} - \frac{1}{2}$$

Valoradas las integrales, haremos algunas simplificaciones para obtener el valor de  $P_0$  en una forma más sencilla.

$$\frac{R_2}{\Delta} = e_1 r^2 \operatorname{sen} \theta \left[ \log_2 (\sec \alpha + \tan \alpha) \right] + \frac{e_1^2 r^2 \tan \theta}{3} \left[ \log_2 (\sec \alpha + \tan \alpha) \right] - e_1 r^2 \log_2 \sec \alpha$$

$$- e_1 r^2 \frac{(1 - \cos \theta)}{\cos \theta} + \frac{e_1^2 r^2 \operatorname{sen} \theta}{2} \tan \theta + \frac{e_1^2 r^2 \tan \theta}{2} \tan \theta - \frac{e_1^3}{4} \left( \frac{1}{2 \cos^2 \theta} - \frac{1}{2} \right)$$

$$\frac{R_2}{\Delta} = \frac{e_1^2 r^2 \tan^2 \theta}{2} - \frac{e_1^3}{8 \cos^2 \theta} + \frac{e_1^3}{2} + e_1^2 r^2 \tan \theta \left[ \frac{1}{3} \log_2 (\sec \theta + \tan \theta) - \frac{(1 - \cos \theta)}{\operatorname{sen} \theta} + \frac{\operatorname{sen} \theta}{2} \right]$$

$$+ e_1 r^2 \left[ \operatorname{sen} \theta \log_2 (\sec \theta + \tan \theta) - \log_2 \sec \theta \right]$$

$$\frac{P_2}{\Delta} = \frac{e_1^3}{24} \left( \frac{1 + \operatorname{sen}^2 \theta}{\cos^2 \theta} - \frac{3}{\cos^2 \theta} + 3 \right) + 2 e_1^2 r^2 \tan \theta \left[ \frac{1}{3} \log_2 (\sec \theta + \tan \theta) + \frac{3 \operatorname{sen}^2 \theta - 2(1 - \cos \theta)}{2 \operatorname{sen} \theta} \right]$$

$$+ e_1 r^2 \left[ \operatorname{sen} \theta \log_2 (\sec \theta + \tan \theta) - \log_2 \sec \theta \right]$$

$$\frac{P_{a_1}}{\Delta} = \frac{e_1^3}{24} \left( \frac{4 \sin^2 \theta - 3 + 3 \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} \right) + e_1^2 r \tan \theta \left[ \frac{1}{3} \log_e (\sec \theta + \tan \theta) + \frac{\sin^2 \theta - 2 + 2 \cos \theta}{2 \sin \theta} \right] + C_1' e_1, \text{ siendo } C_1' = r^2 [\sin \theta \log_e (\sec \theta + \tan \theta) - \log_e \sec \theta]$$

$$\frac{P_{a_2}}{\Delta} = \frac{e_2^3}{24} \left( \frac{3 \sin^2 \theta + \sin^2 \theta - 3 + 3 \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} \right) + e_1^2 r \tan \theta \left[ \frac{1}{3} \log_e (\sec \theta + \tan \theta) + \frac{\sin^2 \theta - 1 - \sin^2 \theta - \cos^2 \theta + 2 \cos \theta}{2 \sin \theta} \right] + C_1' e_1.$$

$$\frac{P_{a_3}}{\Delta} = \frac{e_1^3}{24} \left( \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \right) + e_1^2 r \tan \theta \left[ \frac{1}{3} \log_e (\sec \theta + \tan \theta) + \frac{(-1) - \cos^2 \theta + 2 \cos \theta}{2 \sin \theta} \right] + C_1' e_1,$$

$$\frac{P_{a_4}}{\Delta} = \frac{e_2^3}{24} \tan^2 \theta + e_1^2 r \tan \theta \left[ \frac{1}{3} \log_e (\sec \theta + \tan \theta) - \frac{1 - 2 \cos \theta + \cos^2 \theta}{2 \sin \theta} \right] + C_1' e_1.$$

Y finalmente:

$$P_{a_1} = \Delta \left\{ \frac{e_1^3}{24} \left( \frac{4 \sin^2 \theta - 3 + 3 \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} \right) + e_1^2 r \tan \theta \left[ \frac{1}{3} \log_e (\sec \theta + \tan \theta) - \frac{(1 - \cos \theta)^2}{2 \sin \theta} \right] + r^2 [\sin \theta \log_e (\sec \theta + \tan \theta) - \log_e \sec \theta] e_1 \right\}$$

Como se ve, la expresión que resulta no es tan sencilla como para aplicarla fácil- mente en problemas prácticos; sin embargo, como  $\Delta$ ,  $\theta$  y sus funciones, y el radio  $r$  son cons- tantes para un problema dado, se concluye que la expresión del momento buscado es de la si- guiente forma:

$$P_{a_1} = A_1' e_1^3 + B_1' e_1^2 + C_1' e_1,$$

Calcularemos ahora el momento del relleno, tomado como la integral del prisma dife- rencial indicado en la figura 140, por su brazo elemental  $d_2$ .

$$P_{a_2} = \int y dx d_2$$

$$y = (r + e_1 + d) - \left( r + \frac{e_1}{\cos \alpha} \right) \cos \alpha = r + e_1 + d - r \cos \alpha - e_1 = r(1 - \cos \alpha) + d$$

$$x = \left( r + \frac{e_1}{\cos \alpha} \right) \sin \alpha = r \sin \alpha + e_1 \tan \alpha$$

∴

$$dx = (r \cos \alpha + e_1 \sec^2 \alpha) d\alpha$$

$$d_2 = \left( r + \frac{e_1}{\cos \alpha} \right) \sin \alpha = \left( r + \frac{e_1}{\cos \alpha} \right) \sin \alpha = \left( r + \frac{e_1}{\cos \alpha} \right) \sin \alpha = \left( r + \frac{e_1}{\cos \alpha} \right) \sin \alpha$$

Si sustituimos estos valores:

$$P_{a_2} = \int \left[ r(1 - \cos \alpha) + d \right] (r \cos \alpha + e_1 \sec^2 \alpha) \left[ \left( r + \frac{e_1}{\cos \alpha} \right) \sin \alpha - \left( r + \frac{e_1}{\cos \alpha} \right) \sin \alpha \right] d\alpha$$

La resolución de esta igualdad es laboriosa; como el proceso de integración no tie-

aplicación:

Calc

P<sub>3</sub>

e<sub>1</sub>

P<sub>3</sub>

Por la mitad de l

P<sub>3</sub>

Si contrados en lo siguiente

(e

E<sub>1</sub>

A

P

fórmula de

bles, se do con los

valuar el

ne:

... aplicación práctica y el resultado ya se conoce, sólo la dejamos aquí indicada.

Calcularemos ahora el momento debido al empuje de la terracería.

$$P_{3a_3} = \frac{\omega}{g} \frac{1 - \sin \theta}{1 + \sin \theta} h (h + 2d) a_3$$

$$a_3 = \frac{2}{3} e_1 \cos \theta + \frac{h^2 + 3hd}{3(h + 2d)} = \frac{2e_1}{3} + \frac{h^2 + 3hd}{3(h + 2d)}$$

$$P_{3a_3} = \frac{\omega}{g} \frac{1 - \sin \theta}{2(1 + \sin \theta)} h (h + 2d) \left[ \frac{2e_1}{3} + \frac{h^2 + 3hd}{3(h + 2d)} \right]$$

Por último,  $P_4$  se debe a un trapecio, cuyo centro de gravedad queda prácticamente a la mitad de la altura. Se sabe que el valor de  $P_4 a_4$  es:

$$P_{4a_4} = \frac{2}{3} \omega \tan^2 \theta \left[ \frac{e_1^3}{3} + e_1^2 d + e_1 r (1 - \cos \theta) \right]$$

Si se resuelven las integrales que quedaron indicadas y se sustituyen los valores encontrados en la ecuación de equilibrio se obtendrá, después de hacer muchas simplificaciones, lo siguiente:

$$\left(\frac{e_1}{r}\right)^3 A_1 - \left(\frac{e_1}{r}\right)^2 \left[ \frac{f}{r} - \frac{d}{r} A_2 - A_3 \right] - \frac{e_1}{r} \left[ \frac{f}{r} A_4 - \frac{d}{r} A_5 - A_6 \right] + \frac{d}{r} A_7 + A_8 = 0$$

Esta ecuación cúbica permite resolver directamente el arco.

$A_1, A_2, A_3, \dots$  etc., son constantes cuyo valor depende de  $\Delta, \omega$  y  $\theta$

Para valores de  $\Delta$  y  $\omega$  dados (por ejemplo 2200 y 1500 kg/m<sup>3</sup>, respectivamente), la fórmula dependerá sólo de  $\theta$

Vemos como puede emplearse la ecuación encontrada. Para obtener resultados comparables, se aplicará el problema de revisión planteado en la página 97 relativo al arco rebajado con los datos siguientes:

$$d = 2,10 \text{ m}$$

$$r = 10 \text{ m. y}$$

$$\theta = 30^\circ ;$$

sólo que ahora se está proyectando y nuestra meta consiste en valorar el espesor del arco en la clave: ( $e_1$ ).

Recuérdese que la fatiga que se obtuvo fue de 144 000 kg/m<sup>2</sup>.

De tablas especiales que dan los valores de  $A_1, A_2, \dots$  en función de  $\theta$  se obtiene:

$$A_1 = 489 \quad A_6 = 1730$$

$$A_2 = 178$$

$$A_3 = 1291$$

$$A_4 = 0.4$$

$$A_5 = 1209$$

$$\frac{h \tan \theta}{2} + \frac{\sin^2 \theta - 2 + \cos \theta}{2 \sin \theta}$$

$$\frac{\theta}{2} - \log_e \sec \theta$$

$$\frac{2}{3} e_1 (\sec \theta + \tan \theta) +$$

$$\frac{\theta + 2 \cos \theta}{\theta} + C_1 e,$$

$$\frac{\cos^2 \theta}{\theta} + C_2 e,$$

como para aplicarla fácil -  
s, y el radio r son cons -  
nto buscado es de la si -

Integral del prisma dife-

$$(-\cos \alpha) + d \quad 0$$

$$+ \frac{d}{\cos \alpha} \sin \alpha$$

$$\frac{d}{\cos \alpha} \sin \alpha \int dx$$

o de integración no tie-



$A_7 = 1228$  y

$A_8 = 27$  , , valores que deben sustituirse en la ecuación cúbica

$$489\left(\frac{e_1}{r}\right)^3 - \left(\frac{e_1}{r}\right)^2 \left[ \frac{138000}{10} - \frac{2.10}{10} \times 178 - 1291 \right] - \left(\frac{e_1}{r}\right) \left[ \frac{138000}{10} \times 4 - \frac{2.10}{10} \times 1209 - 1730 \right] + \frac{2.10}{10} \times 1228 + 27 = 0$$

$489\left(\frac{e_1}{r}\right)^3 - \left(\frac{e_1}{r}\right)^2 12472 - \left(\frac{e_1}{r}\right) 3536 + 235 = 0$  , divídase entre 489 :

$\left(\frac{e_1}{r}\right)^3 - \left(\frac{e_1}{r}\right)^2 25.5 - \left(\frac{e_1}{r}\right) 7.22 + 0.583 = 0$

Esta ecuación puede resolverse de dos maneras:

A).- En forma exacta, por cálculo directo:

- 25.5	- 7.2	+ 0.58	
+ 0.7	- 1.78	- 0.63	$\frac{e_1}{r} = 0.07$
<hr/>			
- 25.43	- 8.98	- 0.05	
- 25.5	- 7.2	+ 0.58	
+ .071	- 1.8	- 0.64	$\frac{e_1}{r} = 0.071$
<hr/>			
- 25.429	- 9.0	- 0.06	
- 25.5	- 7.2	+ 0.58	
+ 0.068	- 1.73	- 0.61	$\frac{e_1}{r} = 0.068$
<hr/>			
- 25.432	- 8.93	- 0.03	
- 25.5	- 7.2	+ 0.58	
+ 0.067	- 1.7	- 0.59	$\frac{e_1}{r} = 0.067$
<hr/>			
- 25.433	- 8.9	=	

y como  $r = 10$  m,  $e_1 = 10 \times 0.067 = 0.67$  m.

(Recuérdese que  $e_1 = 0.71$  m, en el problema de revisión, en ese primer cálculo se procedió un poco toscamente, estimando las distancias a ojo, etc., etc.).

B).- En forma aproximada y siempre y cuando  $e_1 < 1.00$  m.

Como el valor de  $\frac{e_1}{r}$  es menor que la unidad, elevado al cubo resulta todavía mucho menor y puede despreciarse. En tal caso, la ecuación pierde un término y queda de segundo grado.

(Por ejemplo, en este problema  $\frac{e_1}{r} = \frac{0.67}{10} = 0.067$  y  $(\frac{e_1}{r})^3 = 0.0003$ ).

Luego, la ecuación simplificada por resolver es:

$$23.5\left(\frac{e_1}{r}\right)^3 + 7.22\left(\frac{e_1}{r}\right) - 0.583 = 0 \quad (\text{multiplicada por } (-1))$$

$$\left(\frac{e_1}{r}\right)^3 + 0.283\left(\frac{e_1}{r}\right) - 0.0228 = 0$$

$$\left(\frac{e_1}{r}\right) = \frac{-0.283 \pm \sqrt{(0.283)^2 + 0.0228}}{2} = -0.141 \pm (0.0428)^{1/2}$$

$$\left(\frac{e_1}{r}\right) = -0.141 + 0.207 = 0.066$$

(Es necesario tomar el signo más, pues to que  $e_1$  tiene que ser positivo).

Según esto,  $e_1 = 10 \times 0.066 = 0.66\text{m}$ , y resulta razonablemente aproximado.

De todos modos, como tratar con una fórmula cúbica tan complicada puede resultar poco práctico, se ha buscado la forma de obtener los resultados con un procedimiento más sencillo.

En la ecuación:  $\left(\frac{e_1}{r}\right)^3 A_1 - \left(\frac{e_1}{r}\right)^2 \left(\frac{d}{r} - \frac{d}{r} A_2 - A_3\right) - \left(\frac{e_1}{r}\right) \left(\frac{d}{r} A_4 - \frac{d}{r} A_5 - A_6\right) + \left(\frac{d}{r} A_7 + A_8\right) = 0$  Se ve que las relaciones  $\frac{d}{r}$  y  $\frac{e_1}{r}$  están a la primera potencia y se pueden despejar.

$$0 = \left(\frac{e_1}{r}\right)^3 A_1 - \left(\frac{e_1}{r}\right)^2 \left(\frac{d}{r}\right) + \left(\frac{e_1}{r}\right)^2 \left(\frac{d}{r}\right) A_2 + \left(\frac{e_1}{r}\right)^2 A_3 - \left(\frac{e_1}{r}\right) \left(\frac{d}{r}\right) A_4 + \left(\frac{e_1}{r}\right) \left(\frac{d}{r}\right) A_5 + \left(\frac{e_1}{r}\right) A_6 + \left(\frac{d}{r}\right) A_7 + A_8$$

$$\left(\frac{d}{r}\right) \left[ \left(\frac{e_1}{r}\right)^2 A_2 + \left(\frac{e_1}{r}\right) A_5 + A_7 \right] = \left(\frac{e_1}{r}\right) \left[ \left(\frac{e_1}{r}\right)^2 + \left(\frac{e_1}{r}\right) A_4 - \left[ \left(\frac{e_1}{r}\right)^3 A_1 + \left(\frac{e_1}{r}\right)^2 A_3 + \left(\frac{e_1}{r}\right) A_6 + A_8 \right] \right]$$

$$\frac{d}{r} = \frac{\frac{e_1}{r} \left[ \left(\frac{e_1}{r}\right)^2 + \left(\frac{e_1}{r}\right) A_4 \right]}{\left(\frac{e_1}{r}\right)^2 A_2 + \left(\frac{e_1}{r}\right) A_5 + A_7} - \frac{\left(\frac{e_1}{r}\right)^3 A_1 + \left(\frac{e_1}{r}\right)^2 A_3 + \left(\frac{e_1}{r}\right) A_6 + A_8}{\left(\frac{e_1}{r}\right)^2 A_2 + \left(\frac{e_1}{r}\right) A_5 + A_7}$$

O sea una ecuación de la siguiente forma :

$$\frac{d}{r} = \frac{f}{r} \left( \frac{B_1}{B_3} \right) - \left( \frac{B_2}{B_3} \right), \text{ en la que}$$

$$B_1 = \left(\frac{e_1}{r}\right)^2 + \left(\frac{e_1}{r}\right) A_4$$

$$B_2 = \left(\frac{e_1}{r}\right)^3 A_1 + \left(\frac{e_1}{r}\right)^2 A_3 + \left(\frac{e_1}{r}\right) A_6 + A_8 \quad \text{y}$$

$$B_3 = \left(\frac{e_1}{r}\right)^2 A_2 + \left(\frac{e_1}{r}\right) A_5 + A_7$$

La ecuación simplificada es de la forma  $y = Ax + B$ , o sea la de una recta.

Si se multiplica por  $r$  y se divide entre  $f$  queda:  $\frac{d}{f} = \left(\frac{B_1}{B_3}\right) - \frac{r}{f} \left(\frac{B_2}{B_3}\right)$  que también tiene por ser la ecuación de una línea recta.

Para fines prácticos se emplea un nomograma que representa esta fórmula, y que se construye de la siguiente manera:

Se eligen dos ejes verticales separados por una distancia igual con la unidad.

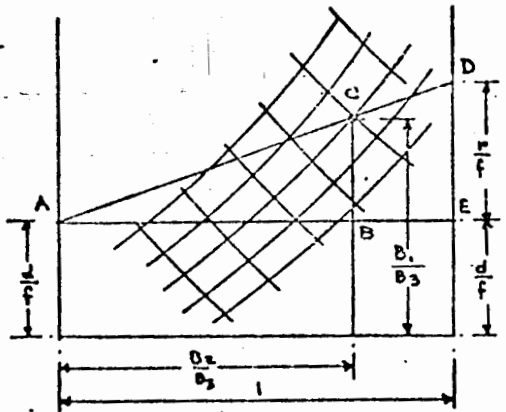


Figura 141.

A partir del valor  $d/f = 0$ , se lleva, en la escala de la izquierda, un valor igual con el de  $d/f$  que se tenga en el problema particular de que se trate. Queda así definido un punto A, por el que se traza la horizontal AE.

Sobre la escala vertical de la derecha, a partir del punto E, se lleva la magnitud  $d/f$ .

Sobre la recta AD, que se traza después, se puede tomar un punto cualquiera C, cuya abscisa conveniremos en llamar  $B_2/B_3$  y cuya ordenada llamaremos  $B_1/B_3$ .

Por comparación de los triángulos semejantes ABC y AED se tiene que:

$$\frac{DE}{EB} = \frac{AE}{AB};$$

y si sustituimos valores:

$$\left(\frac{B_1}{B_3}\right) - \left(\frac{d}{f}\right) = \left(\frac{r}{f}\right) \left(\frac{B_2}{B_3}\right) \text{ y por tanto:}$$

$$\frac{d}{f} = \left(\frac{B_1}{B_3}\right) - \left(\frac{r}{f}\right) \left(\frac{B_2}{B_3}\right)$$

; luego, un nomograma dispuesto en la forma que se indicó resuelve la fórmula que se dedujo.

Ya hemos visto que:  $\tan \theta' = \frac{P_1 + P_2 - P_4}{H_1 - P_3}$  y que  $H_1 = \frac{e \cdot f}{2}$

Entonces, por sustitución:

$$\tan \theta' = \frac{P_1 + P_2 - P_4}{\frac{e \cdot f}{2} - P_3}$$

ecuación en la que sustituiremos los valores de cada una de las literales que intervienen.

El valor exacto de  $P$  se obtiene con una integral que ya se estableció:

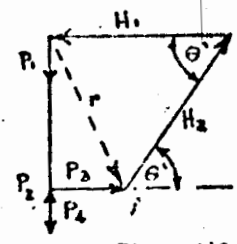


Figura 142.

De igual

$$P_1 = \frac{e \cdot f}{2}$$

$$P_2 = \frac{e \cdot f}{2}$$

El valor

$$P_3 = \frac{e \cdot f}{2}$$

Y, por

$$P_4 = \frac{e \cdot f}{2}$$

Si se simplifica raciones y simplifica

$$\tan \theta' = 2 \frac{P_1}{H_1 - P_3}$$

ruptura.

Como en los demás despejar y nos

$$\frac{d}{f} = \frac{r}{f}$$

$$B_4 = \frac{e \cdot f}{2}$$

$$B_5 = \frac{e \cdot f}{2}$$

$$B_6 = 2$$

En estas expresiones se expresan en función de lo dependen de G.

Se tenía ahora hemos obtenido

$$\frac{d}{f} = \frac{r}{f}$$

Así, de despejar la relación

De igual manera:

$$P_2 = W \int_0^{\theta} [r(1 - \cos \lambda) + d] (r \cos \lambda + e, \sec^2 \lambda) d\lambda, \text{ y su resultado es:}$$

$$P_2 = W \left\{ e, \left[ r (\tan \theta - \log_e (\sec \theta + \tan \theta)) + d \tan \theta \right] - \frac{r^2}{2} \left\langle \frac{r \theta}{180} - \sin \theta (2 - \cos \theta) \right\rangle + r d \sin \theta \right\}$$

El valor de  $P_3$  se obtiene directamente con la fórmula de Rankine:

$$P_3 = \frac{W}{2} \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} h (h + 2d)$$

Y, por último, se ha encontrado que  $P_4$  tiene el siguiente valor:

$$P_4 = \frac{e}{3} W \tan \theta \left[ \frac{e^2}{3} + e_1 d + e, r (1 - \cos \theta) \right]$$

Si se sustituyen estos valores en la fórmula de la  $\tan \theta'$ , después de hacer las operaciones y simplificaciones del caso, nos quedaría:

$$\tan \theta' = 2 \frac{\frac{e}{r} (A_9 + A_{11}) + \left(\frac{e}{r}\right)^2 A_{11} + \frac{e}{r} A_{12} + A_{13}}{\frac{e}{r} \left(\frac{e}{r}\right) - \frac{e}{r} A_{15} - A_{16}}$$

valor que es igual con la  $\tan \theta$  cuando se trata de la junta de ruptura.

Como en esta ecuación los valores  $\frac{d}{r}$  y  $\frac{f}{r}$  intervienen a la 1ª. potencia los podemos despejar y nos queda una expresión así:

$$\frac{d}{r} = \frac{f}{r} \left( \frac{B_4}{B_6} \right) - \left( \frac{B_5}{B_6} \right), \text{ en la que:}$$

$$B_4 = \frac{e}{r} A_{16}, \text{ siendo } A_{16} = \tan \theta$$

$$B_5 = 2 \left[ \left(\frac{e}{r}\right)^2 A_{11} + \left(\frac{e}{r}\right) A_{12} + A_{13} \right] + A_{15} A_{16}$$

$$B_6 = 2 \left( \frac{e}{r} A_9 + A_{10} + \frac{A_{12} A_{16}}{2} \right)$$

En estas expresiones los valores de A (y por tanto también los de B), se encuentran en función de  $\Delta$ ,  $W$  y  $\theta$ , pero como  $\Delta$  y  $W$  son constantes, en resumidas cuentas sólo dependen de  $\theta$ . Sin embargo, los valores de B también están en función de  $\frac{d}{r}$ .

Se tenía la fórmula  $\frac{d}{r} = \frac{f}{r} \frac{B_1}{B_3} - \frac{B_2}{B_3}$ , derivada de una condición de equilibrio, y ahora hemos obtenido:

$$\frac{d}{r} = \frac{f}{r} \frac{B_4}{B_6} - \frac{B_5}{B_6}, \text{ como resultado de que la junta sea de ruptura.}$$

Ambas, forman un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, de donde trataremos de despejar la relación  $\frac{f}{r}$ .

$$\frac{f}{r} \frac{B_1}{B_3} - \frac{B_2}{B_3} = \frac{f}{r} \frac{B_4}{B_6} - \frac{B_5}{B_6}$$

$$\frac{f}{r} \left( \frac{B_1}{B_3} - \frac{B_4}{B_6} \right) = \frac{B_2}{B_3} - \frac{B_5}{B_6}$$

$$\frac{f}{r} = \frac{\frac{B_2}{B_3} - \frac{B_5}{B_6}}{\frac{B_1}{B_3} - \frac{B_4}{B_6}} = \frac{B_2 B_6 - B_3 B_5}{B_1 B_6 - B_3 B_4}$$

El numerador y el denominador de este quebrado se pueden multiplicar por (-1) para que los términos mayores queden como minuendos:

$$\frac{f}{r} = \frac{B_2 B_3 - B_1 B_4}{B_3 B_4 - B_1 B_2}$$

Como  $\frac{f}{r}$  depende de los valores de las B y estas a su vez están en función de  $\frac{e_1}{r}$  y  $\theta$ , quiere decir que  $\frac{f}{r} = F(\theta, \frac{e_1}{r})$

Además,  $\frac{d}{r} = \frac{f}{r} \frac{B_1}{B_3} - \frac{B_2}{B_3}$ ; de donde se concluye que también  $\frac{d}{r} = F'(\theta, \frac{e_1}{r})$

Esta circunstancia se aprovecha para trazar otro nomograma, en el que para valores dados de  $\frac{e_1}{r}$  y de  $\theta$  se pueden obtener las relaciones  $\frac{f}{r}$  y  $\frac{d}{r}$  correspondientes.

Las dos gráficas mencionadas fueron obsequiadas por el maestro, Ing. José Mariano Pontón, quien hizo las siguientes aclaraciones:

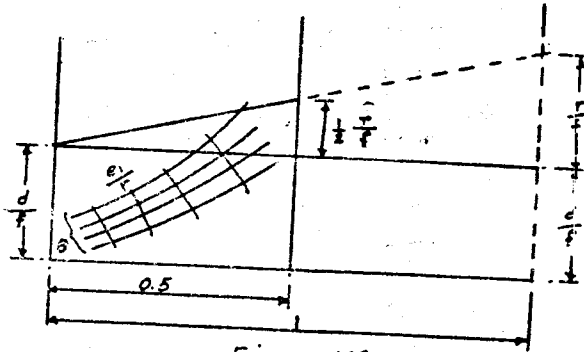


Figura 143

verticales vale 0.5 en vez de la unidad).

Apliquemos estas ideas al caso particular resuelto, por verificación, en clases pasadas.

Datos:  $d = 2.10$  m.

$r = 10$  m.

$\theta = 30$

$f = 138\ 000$  kg/m<sup>2</sup>.

Calculamos  $\frac{d}{r} = \frac{2.10}{138000} = 0.000152$

$$\frac{d}{r} + \frac{1}{2} \frac{f}{r} = 0.000152 + \frac{138}{2 \times 138000} = 0.000514$$

Se señalan estos puntos en las escalas correspondientes de la gráfica de arcos rebajados y para  $\theta = 30^\circ$  se lee:

1o). La fatiga, que en todos nuestros desarrollos hemos llamado  $f$ , en las gráficas está representado por  $R$ .

2o). Se emplearon escalas logarítmicas en vez de lineales, para lograr una anamorfosis. De otro modo, hubieran resultado curvas muy forzadas.

3o). En escala  $\frac{d}{r} + \frac{f}{r}$  se substituyó por otra escala que es  $\frac{d}{r} + \frac{1}{2} \frac{f}{r}$  pues sólo se usa la mitad de la hoja (La distancia entre ejes-

$\frac{e_1}{r} = 0.06$

(El cálculo

emplearemos bien. Es decir, hace la junta de ruptura.

Datos:  $d =$

$r =$

$f =$

Tratamos de

Nótese que para ángulos menores

Por tanto, que el problema se tie

Calculamos:

Se sitúa el to en el que se tenga

Así queda de

De donde:  $\frac{d}{r}$

Nótese que el centro es mayor y p

Veamos un e

Se tienen lo

$d = 10$  m

$r = 10$  m y

$f = 600\ 000$

$\therefore \frac{d}{r} = 1$

Con estos va de ruptura y el punto dir, la junta de ruptura problema no tiene solu

Si se quiere calcular desde el valor  $\theta = 40^\circ$ , donde se lee

$\frac{e_1}{r} = 0.075$

den multiplicar por  $(-1)$ .

si vez estén en función de  $\frac{e_1}{r}$

$$\text{también } \frac{d}{r} = F'(\theta, \frac{e_1}{r})$$

lograma, en el que para valores correspondientes.

el maestro, Ing. José Mariano-

1o).- La fatiga, que en todos nuestros desarrollos hemos llamado  $f$ , en las gráficas está representado por  $P$ .

2o).- Se emplearon escalas logarítmicas en vez de lineales, para lograr una anamorfosis. De otro modo, hubieran resultado curvas muy forzadas.

3o).- La escala  $\frac{d}{r} + \frac{f}{r}$  se sustituyó por otra escala que es  $\frac{d}{r} + \frac{f}{r}$  pues sólo se usa la mitad de la hoja (La distancia entre ejes-

por verificación, en clases pa

$$\frac{e_1}{r} = 0.069; \therefore e_1 = r \times 0.069 = 10 \times 0.069 = 0.69 \text{ m.}$$

(El cálculo de revisión dio:  $e_1 = 0.71 \text{ m.}$ , página No. 93) (Dato)

Empezaremos ahora la gráfica de arcos de medio punto, para resolver el mismo problema. Es decir, hacemos como que se ignora el valor del ángulo  $\theta$  y queremos determinar la junta de ruptura.

$$\text{Datos: } d = 2.10 \text{ m.}$$

$$r = 10 \text{ m}$$

$$f = 138 \text{ 000 kg/m}^2.$$

Tratamos de encontrar:  $\theta$  y  $\frac{e_1}{r}$ , para luego calcular  $e_1$ .

Nótese que la última curva en la que puede haber junta de ruptura es con  $\theta = 40^\circ$ ; para ángulos menores que este límite resultan valores imaginarios.

Por tanto, si la fatiga queda en la zona de ángulos menores de  $40^\circ$ , quiere decir que el problema se tiene que resolver como arco rebajado.

$$\text{Calculamos } \frac{d}{r} = \frac{2.10}{10} = 0.21$$

Se sitúa el valor de 0.21 en la gráfica y se traza una vertical limitada en un punto en el que se tenga el valor de la fatiga entre el radio, que es la ordenada.

$$\frac{f}{r} = \frac{138000}{10} = 13800$$

Así queda definido un punto para el cual  $\frac{e_1}{r} = 0.08$  y  $\theta = 52^\circ 50'$

$$\text{De donde: } \frac{e_1}{r} = 0.80 \text{ m}$$

Nótese que resulta un valor de  $e_1$  mayor que antes, pero se debe a que el ángulo en el centro es mayor y por tanto las cargas han aumentado.

Veamos un ejemplo más:

Se tienen los datos siguientes:

$$d = 10 \text{ m}$$

$$r = 10 \text{ m y}$$

$$f = 600 \text{ 000 kg/m}^2$$

$$\therefore \frac{d}{r} = 1 \text{ y } \frac{f}{r} = \frac{600 \text{ 000}}{10} = 60 \text{ 000}$$

Con estos valores como abscisa y ordenada, entramos a la gráfica de arcos con junta de ruptura y el punto que queda definido resulta dentro de la zona de arcos rebajados. Es decir, la junta de ruptura está definida por un ángulo  $\theta$  menor de  $40^\circ$  y aparentemente el problema no tiene solución como arco de medio punto.

Si se quiere resolverlo forzosamente como arco de medio punto, se baja una perpendicular desde el valor  $\frac{d}{r} = 1$ , que es constante, hasta cortar la primera curva, la de  $\theta = 40^\circ$ , donde se lee que:

$$\frac{e_1}{r} = 0.078; \therefore e_1 = 0.078 \times 10 = 0.78 \text{ m.}$$

tes de la gráfica de arcos rebaja

El punto de cruce se proyecta horizontalmente sobre la escala  $\frac{f}{r}$ , donde se lee que  $\frac{f}{r} = 42000$ ;  $\therefore f = 42000 \times 10 = 420000 \text{ kg/m}^2$ .

Esto quiere decir que se requiere un material de menor resistencia. Con la fatiga de  $600000 \text{ kg/m}^2$  el arco de medio punto resulta sobrado.

Resolvamos, por último, otro de los ejemplos estudiados anteriormente por revisión.

Datos:  $d = 3.18 \text{ m}$

$r = 2.00 \text{ m}$ .

$f = 100000 \text{ kg/m}^2$

$$\frac{d}{r} = \frac{3.18}{2.00} = 1.59 \quad \text{y} \quad \frac{f}{r} = \frac{100000}{2} = 50000$$

Deseamos saber el valor de  $\Theta$  y el de  $e$ .

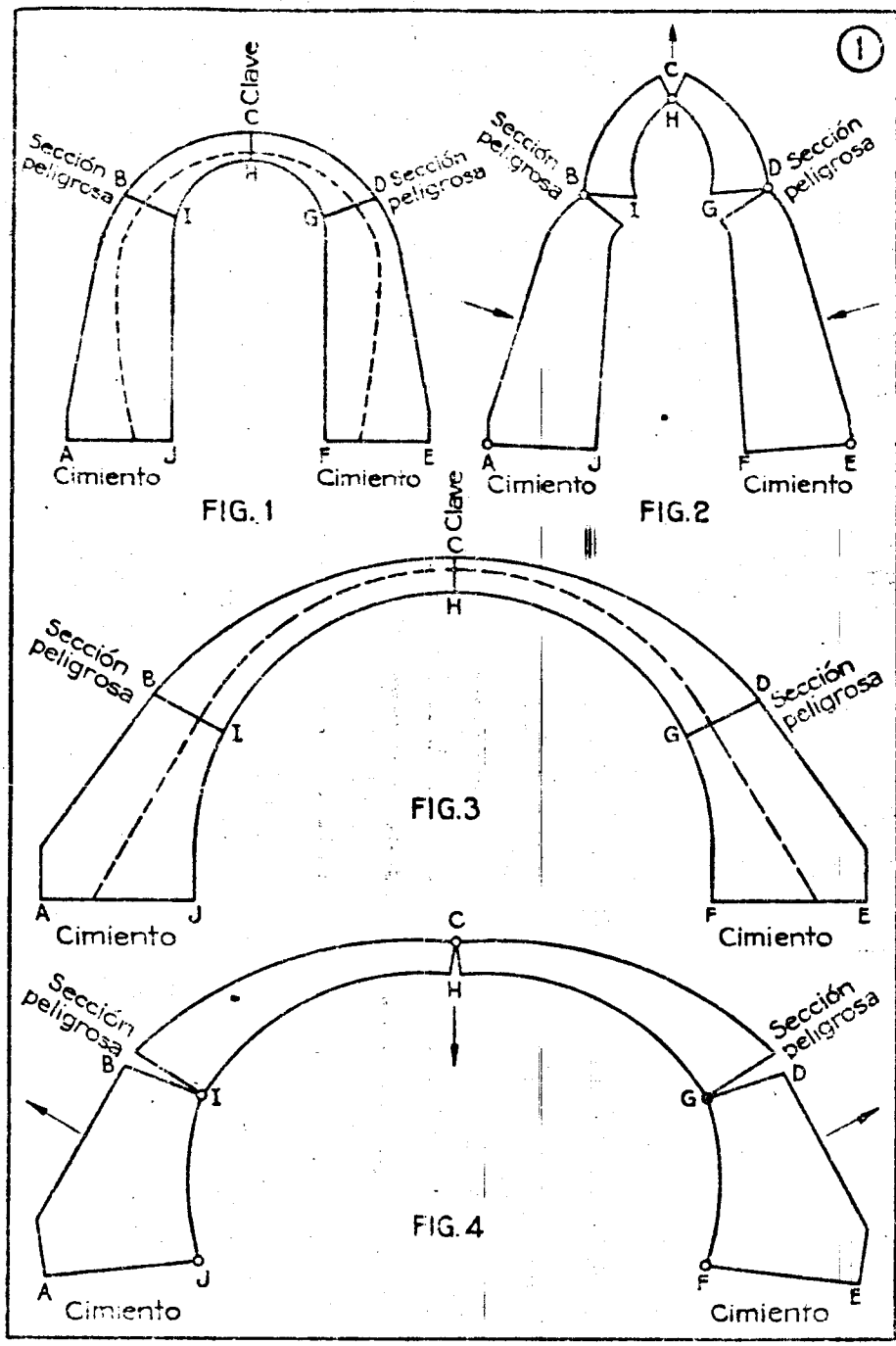
En la gráfica se encuentra:  $\Theta = 40^\circ$  y  $\frac{e}{r} = 0.10$

$$\therefore e = 0.10 \times 2 = 0.20 \text{ m.}$$

Compárense estos resultados con los obtenidos en la página 134 de estos apuntes.

a escala  $\frac{1}{4}$ , donde se lee  
 r resistencia. Con la fati-  
 os anteriormente por revi --

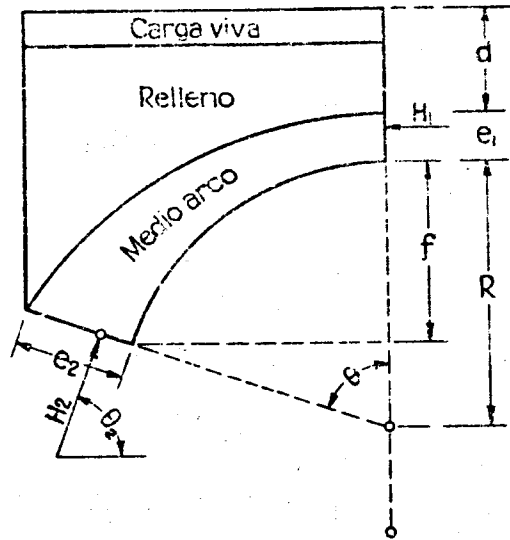
sin 104 de estos apuntes.





2

## SOLUCION ANALITICA DE UN ARCO CIRCULAR NOMENCLATURA

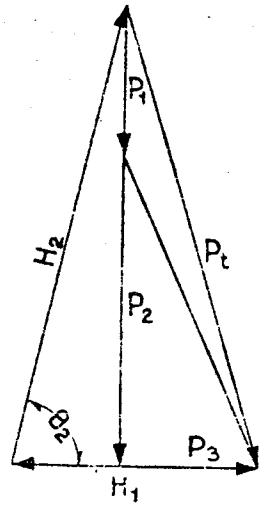
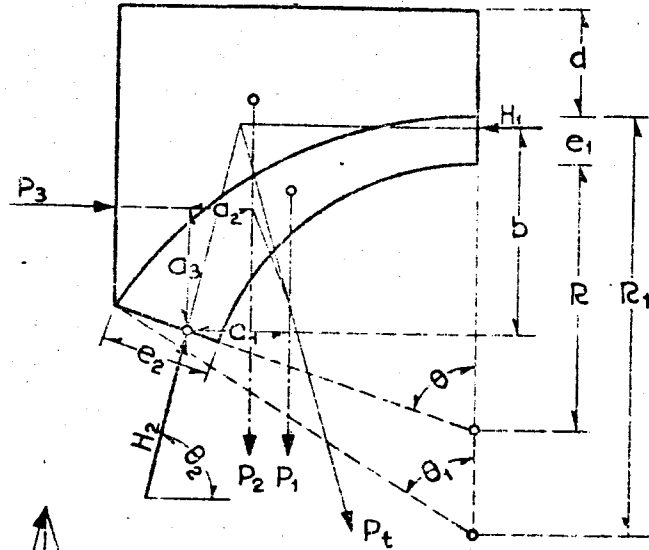


- $d$  Espesor del relleno en la clave y carga viva reducida a relleno.
- $e_1$  Espesor del arco en la clave.
- $e_2$  Espesor del arco en el apoyo.
- $R$  Radio del intrados.
- $\theta$  Angulo en el centro.
- $\theta_2$  Angulo de la reacción  $H_2$  con la horizontal.
- $f$  Flecha que define la posición de la sección  $e_2$ .
- $H_1$  Reacción en el tercio medio superior de la clave.
- $H_2$  Reacción en el tercio medio inferior del apoyo.
- $p$  Fatiga de seguridad a la compresión del material del arco.
- $\omega$  Peso volumétrico del relleno.
- $\Delta$  Peso volumétrico del material del arco.
- $V$  Volumen total del arco por metro de ancho.

Los datos son:  $d \theta R p \Delta \omega$

Las incógnitas son:  $f e_1 e_2 H_1 \theta_2 V$

### SOLUCION ANALITICA DE UN ARCO CIRCULAR FUERZAS DEL SISTEMA

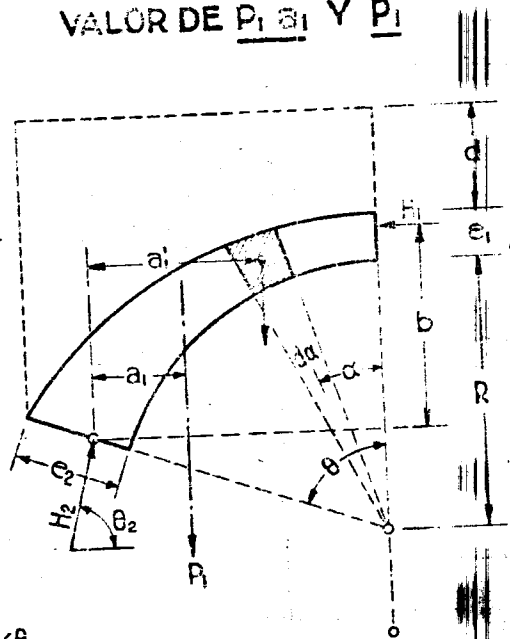


- $P_1$  = Peso del arco
  - $P_2$  = Peso del relleno
  - $P_3$  = Empuje del relleno
  - $P_t$  = Resultante de  $P_1$ ,  $P_2$  y  $P_3$
  - $H_1$  y  $H_2$  = Equilibrantes de  $P_t$
  - $a_1$  = Brazo de palanca de  $P_1$
  - $a_2$  = Brazo de palanca de  $P_2$
  - $a_3$  = Brazo de palanca de  $P_3$
  - $b$  = Brazo de palanca de  $H_1$
- Considerando momentos con relación al punto de aplicación de  $H_2$  en  $e_2$  tengo:

$$P_1 a_1 + P_2 a_2 + P_3 a_3 - H_1 b = 0$$

④

SOLUCION ANALITICA DE UN ARCO CIRCULAR  
 VALOR DE  $P_1 a_1$  Y  $P_1$



$$P_1 a_1 = \Delta \int_0^{\theta} \frac{e_1}{\cos \alpha} \left( R + \frac{e_1}{2 \cos \alpha} \right) a_1' d\alpha$$

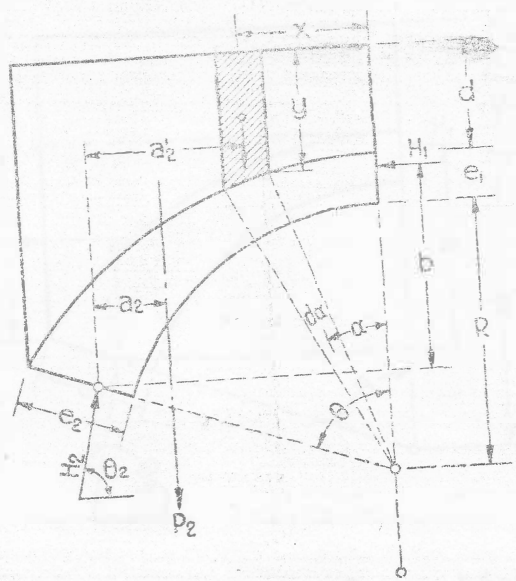
$$P_1 a_1 = \Delta \int_0^{\theta} \frac{e_1}{\cos \alpha} \left( R + \frac{e_1}{2 \cos \alpha} \right) \left[ R + \frac{e_1}{2 \cos \alpha} \right] \sin \alpha - \left( R + \frac{e_1}{2 \cos \alpha} \right) \sin \alpha d\alpha$$

$$P_1 a_1 = \Delta \left[ \frac{\text{tg}^2 \theta}{24} e_1^3 + \frac{\log_e (\sec \theta + \text{tg} \theta) - \frac{(1 - \cos \theta)^2}{2 \sin \theta}}{3} R \text{tg} \theta e_1^2 + \right. \\ \left. + \frac{\sin \theta \log_e (\sec \theta + \text{tg} \theta) - \log_e \sec \theta}{2} R^2 e_1 \right]$$

$$P_1 = \Delta \int_0^{\theta} \frac{e_1}{\cos \alpha} \left( R + \frac{e_1}{2 \cos \alpha} \right) d\alpha$$

$$P_1 = \Delta \left[ \frac{\text{tg} \theta}{2} e_1^2 + \log_e (\sec \theta + \text{tg} \theta) R e_1 \right]$$

SOLUCION ANALITICA DE UN ARCO CIRCULAR  
VALOR DE  $P_2 a_2$  Y  $P_2$



$$P_2 a_2 = \omega \int_0^x y a_2 dx \quad y = R(1 - \cos \alpha) + d \quad x = \left(R + \frac{e_1}{\cos \alpha}\right) \sin \alpha$$

$$a_2 = R(\sin \theta - \sin \alpha) + \frac{e_1}{\sin \alpha} (\operatorname{tg} \theta - 3 \operatorname{tg} \alpha)$$

$$dx = (R \cos \alpha + e_1 \sec^2 \alpha) d\alpha$$

$$P_2 a_2 = \omega \int_0^\theta [R(1 - \cos \alpha) + d] [R(\sin \theta - \sin \alpha) + \frac{e_1}{\sin \alpha} (\operatorname{tg} \theta - 3 \operatorname{tg} \alpha)] (R \cos \alpha + e_1 \sec^2 \alpha) d\alpha$$

$$P_2 a_2 = \frac{\omega e_1^2}{6} \left[ R \left[ (\sec \theta - 1)(5 - \sec \theta) - 2 \operatorname{tg} \theta \log_e (\sec \theta + \operatorname{tg} \theta) \right] - d \operatorname{tg}^2 \theta \right] -$$

$$\frac{\omega e_1}{6} \operatorname{tg} \theta \left[ R^2 \left[ \frac{\pi \theta}{180} - 2 \sin \theta (1 + \cos \theta) + 6 \cot \theta \left[ \sin \theta \log_e (\sec \theta + \operatorname{tg} \theta) - \log_e \sec \theta \right] \right] - 2R d \sin \theta \right] -$$

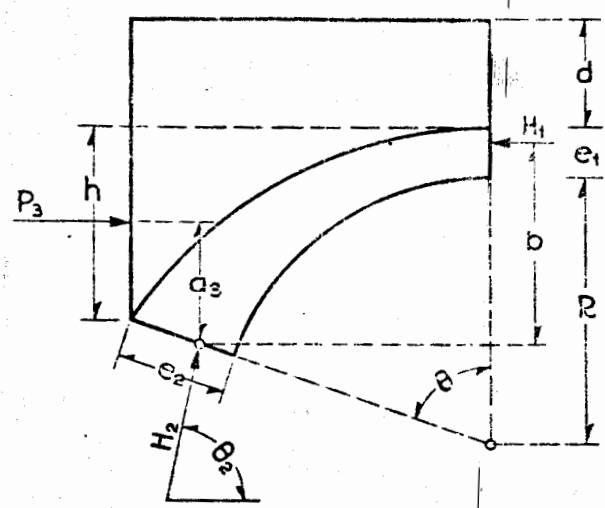
$$-\frac{\omega}{6} R^3 \left[ \sin \theta \left[ \frac{\pi \theta}{60} - \sin \theta (3 - \cos \theta) \right] - 2(1 - \cos \theta) \right] + \frac{\omega}{2} R^2 d \sin^2 \theta$$

$$P_2 = \omega \int_0^x y dx = \omega \int_0^\theta [2(1 - \cos \alpha) + d] (R \cos \alpha + e_1 \sec^2 \alpha) d\alpha$$

$$P_2 = \omega \left[ e_1 \left[ R \left[ \operatorname{tg} \theta - \log_e (\sec \theta + \operatorname{tg} \theta) \right] + d \operatorname{tg} \theta \right] - \frac{R^2}{2} \left[ \frac{\pi \theta}{180} - \sin \theta (2 - \cos \theta) \right] + R d \sin \theta \right]$$

6

SOLUCION ANALITICA DE UN ARCO CIRCULAR  
 VALOR DE  $P_3 a_3$  Y  $P_3$



$$P_3 a_3 = \frac{3}{2} h(h+2d) \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} \left[ \frac{2}{3} e_1 + \frac{h^2 + 3hd}{3(h+2d)} \right]$$

$$\varphi = 30^\circ \quad h = R(1 - \cos \theta)$$

$$P_3 a_3 = \frac{3}{9} e_1 R(1 - \cos \theta) [R(1 - \cos \theta) + 2d] + \frac{3}{18} R^2 (1 - \cos \theta)^2 [R(1 - \cos \theta) + 3d]$$

$$P_3 = \frac{3}{2} h(h+2d) \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi}$$

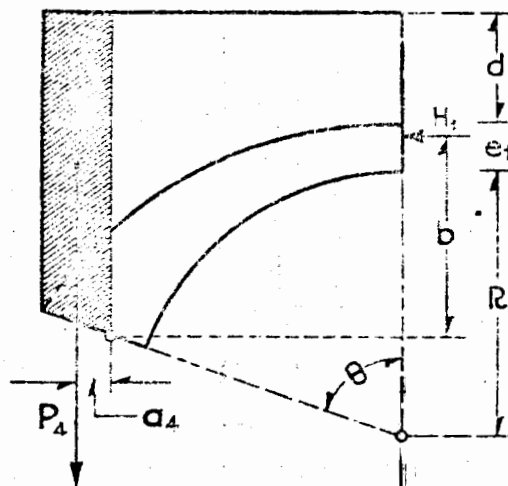
$$\varphi = 30^\circ \quad h = R(1 - \cos \theta)$$

$$P_3 = \frac{3}{6} R(1 - \cos \theta) [R(1 - \cos \theta) + 2d]$$

7

SOLUCION ANALITICA DE UN ARCO CIRCULAR

VALOR DE  $P_4$ ,  $a_4$  Y  $P_4$

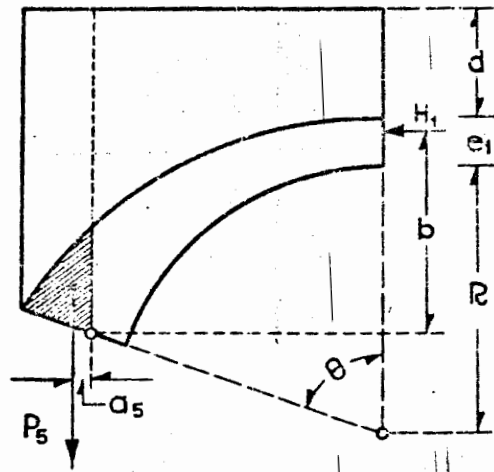


$$P_4 a_4 = \frac{2}{9} \omega t g^2 \theta \left[ \frac{e_1^3}{3} + e_1^2 d + e_1^2 R (1 - \cos \theta) \right]$$

$$P_4 = \frac{2}{3} \omega t g \theta \left[ \frac{e_1^2}{3} + e_1 d + e_1 R (1 - \cos \theta) \right]$$

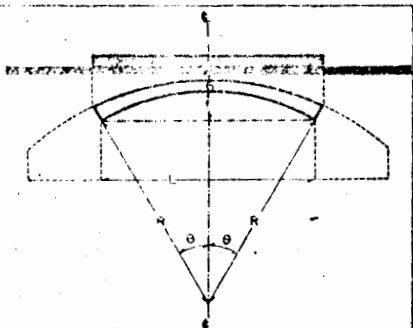
8

SOLUCION ANALITICA DE UN ARCO CIRCULAR  
VALOR DE  $P_5 a_5$  Y  $P_5$



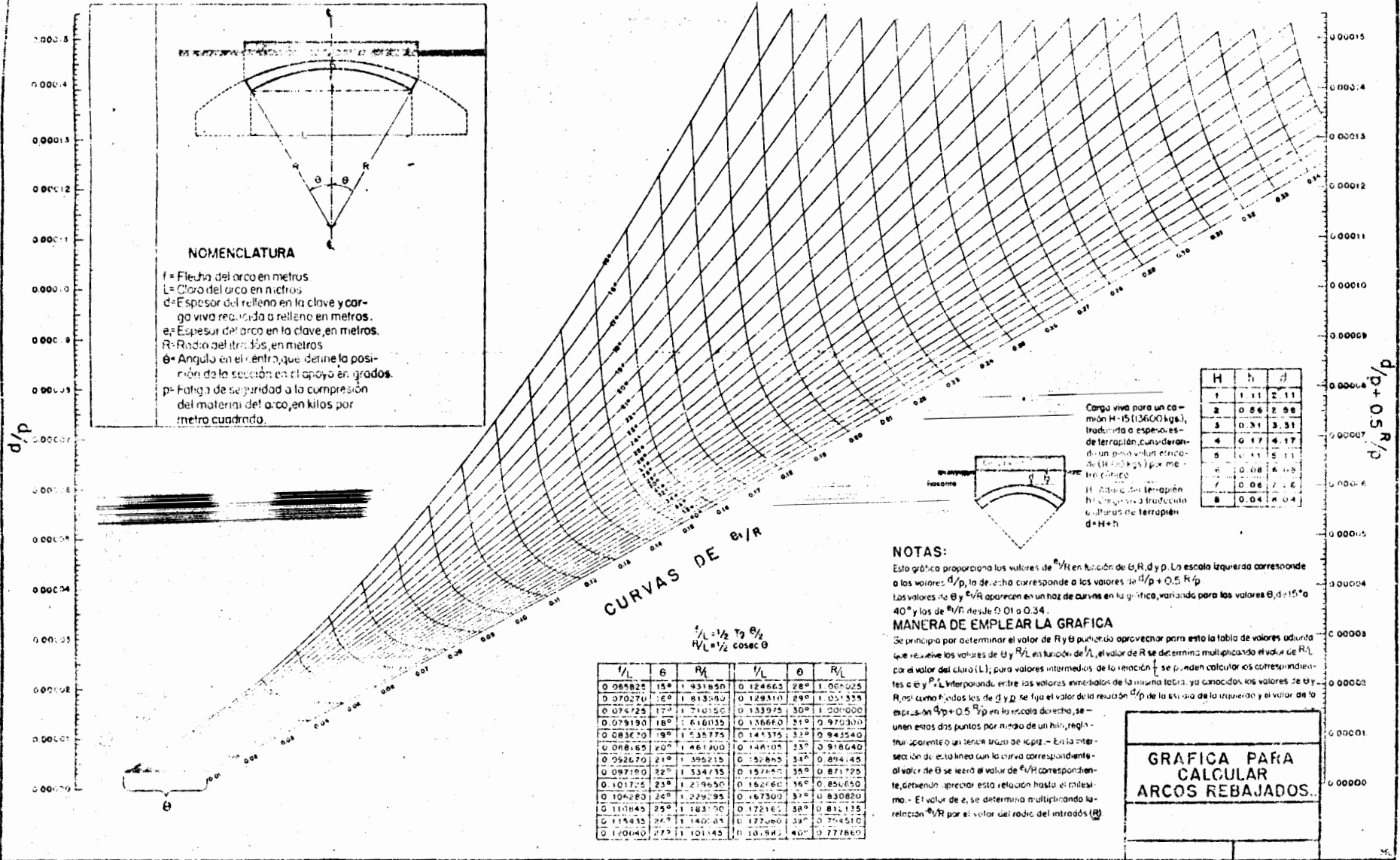
$$P_5 a_5 = \frac{4}{81} (\Delta - \omega) e_1^3 \operatorname{tg}^2 \theta \sec \theta$$

$$P_5 \doteq \frac{2}{9} (\Delta - \omega) e_1^2 \operatorname{tg} \theta \sec \theta$$



**NOMENCLATURA**

- f = Flecha del arco en metros.
- L = Claro del arco en metros.
- d = Espesor del relleno en la clave y carga viva reducida a relleno en metros.
- e = Espesor del arco en la clave, en metros.
- R = Radio del intradós, en metros.
- $\theta$  = Angulo en el centro, que define la posición de la sección en el apoyo en grados.
- p = Fatiga de seguridad a la compresión del material del arco, en kilos por metro cuadrado.



**CURVAS DE  $\theta/R$**

$\theta/R = \frac{1}{2} \theta$   
 $R/L = \frac{1}{2} \operatorname{cosec} \theta$

$\theta/R$	$\theta$	$R/L$	$\theta/R$	$\theta$	$R/L$
0.061825	15°	1.931830	0.124663	28°	1.067025
0.070270	16°	1.813407	0.129810	29°	1.051334
0.074725	17°	1.710156	0.133925	30°	1.037000
0.079190	18°	1.616035	0.137660	31°	1.023870
0.083670	19°	1.531775	0.141375	32°	1.011740
0.088165	20°	1.456300	0.145070	33°	0.999940
0.092670	21°	1.388515	0.148745	34°	0.988445
0.097190	22°	1.327735	0.152400	35°	0.977225
0.101725	23°	1.273650	0.156030	36°	0.966250
0.106280	24°	1.225935	0.159640	37°	0.955490
0.110845	25°	1.184370	0.163225	38°	0.944915
0.115430	26°	1.148045	0.166790	39°	0.934500
0.120040	27°	1.116445	0.170330	40°	0.924220

H	h	d
1	1.11	2.11
2	0.56	2.56
3	0.31	3.31
4	0.17	4.17
5	0.11	5.11
6	0.08	6.08
7	0.06	7.06
8	0.04	8.04

Carga viva para un camión H-15 (13600 kgs.), traducida a espesor de terrapén, considerando un peso vital estándar (1000 kgs.) por metro cúbico.  
 H: Altura del terrapén  
 h: Carga viva traducida a espesor de terrapén  
 d = H + h

**NOTAS:**

Esta gráfica proporciona los valores de  $\theta/R$  en función de  $\theta, R$  y  $d$  y  $p$ . La escala izquierda corresponde a los valores de  $d/p$ , la de la derecha corresponde a los valores de  $d/p + 0.5 R/p$ . Los valores de  $\theta$  y  $\theta/R$  aparecen en un haz de curvas en la gráfica, variando para los valores de  $d$  de 15° a 40° y los de  $\theta/R$  desde 0.01 a 0.34.

**MANERA DE EMPLEAR LA GRAFICA**

Se principia por determinar el valor de  $R$  y  $\theta$  pudiendo aprovechar para esto la tabla de valores adjunta que relaciona los valores de  $\theta$  y  $R/L$  en función de  $L$ , el valor de  $R$  se determina multiplicando el valor de  $R/L$  por el valor del claro ( $L$ ); para valores intermedios de la relación  $L$  se pueden calcular los correspondientes a  $\theta$  y  $R/L$  interpolando entre los valores inmediatos de la misma tabla; ya conocidos los valores de  $\theta$  y  $R$ , así como fijos los de  $d$  y  $p$ , se fija el valor de la relación  $d/p$  de la escala de la izquierda y el valor de la expresión  $d/p + 0.5 R/p$  en la escala derecha, se unen estos dos puntos por medio de un hilo, regla, trapalapa o un tenaz trazo de lápiz. En la intersección de esta línea con la curva correspondiente al valor de  $\theta$  se leerá el valor de  $\theta/R$  correspondiente, deteniéndose apear esta relación hasta el milésimo. El valor de  $e$ , se determina multiplicando la relación  $\theta/R$  por el valor del radio del intradós ( $R$ ).

**GRAFICA PARA CALCULAR ARCOS REBAJADOS.**



VALORES DE  $d/R$

**NOTAS:**

Valores de  $\theta/R$  y  $\theta$  en función de  $P/R$  y  $d/R$ . - Los valores de  $P/R$  y  $d/R$  son los términos conocidos y aparecen en la gráfica en los ejes vertical y horizontal respectivamente, variando la relación  $P/R$  desde 10,000 a 300,000 y la relación  $d/R$  desde 0,1 hasta 0,5. Los valores  $\theta/R$  y  $\theta$  son los términos buscados y aparecen en la gráfica sobre las curvas correspondientes, variando la relación  $d/R$  desde 0,1 hasta 0,5 y el ángulo  $\theta$  desde  $40^\circ$  a  $100^\circ$ .

Si al entrar con los términos conocidos  $P/R$  y  $d/R$  el punto de intersección cae en la zona denominada arco rebajado, se resolverá el caso con la gráfica para arcos rebajados.

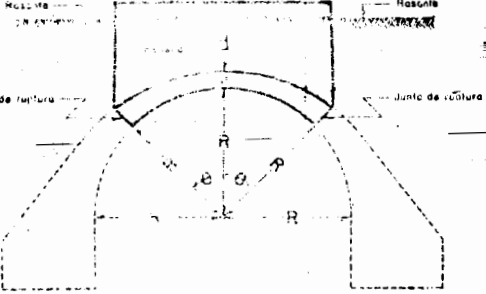
**ZONA DE ARCOS REBAJADOS**

Curvas de  $\theta/R$

GRÁFICA PARA  
CALCULAR ARCOS  
CON JUNTA DE  
RUPTURA

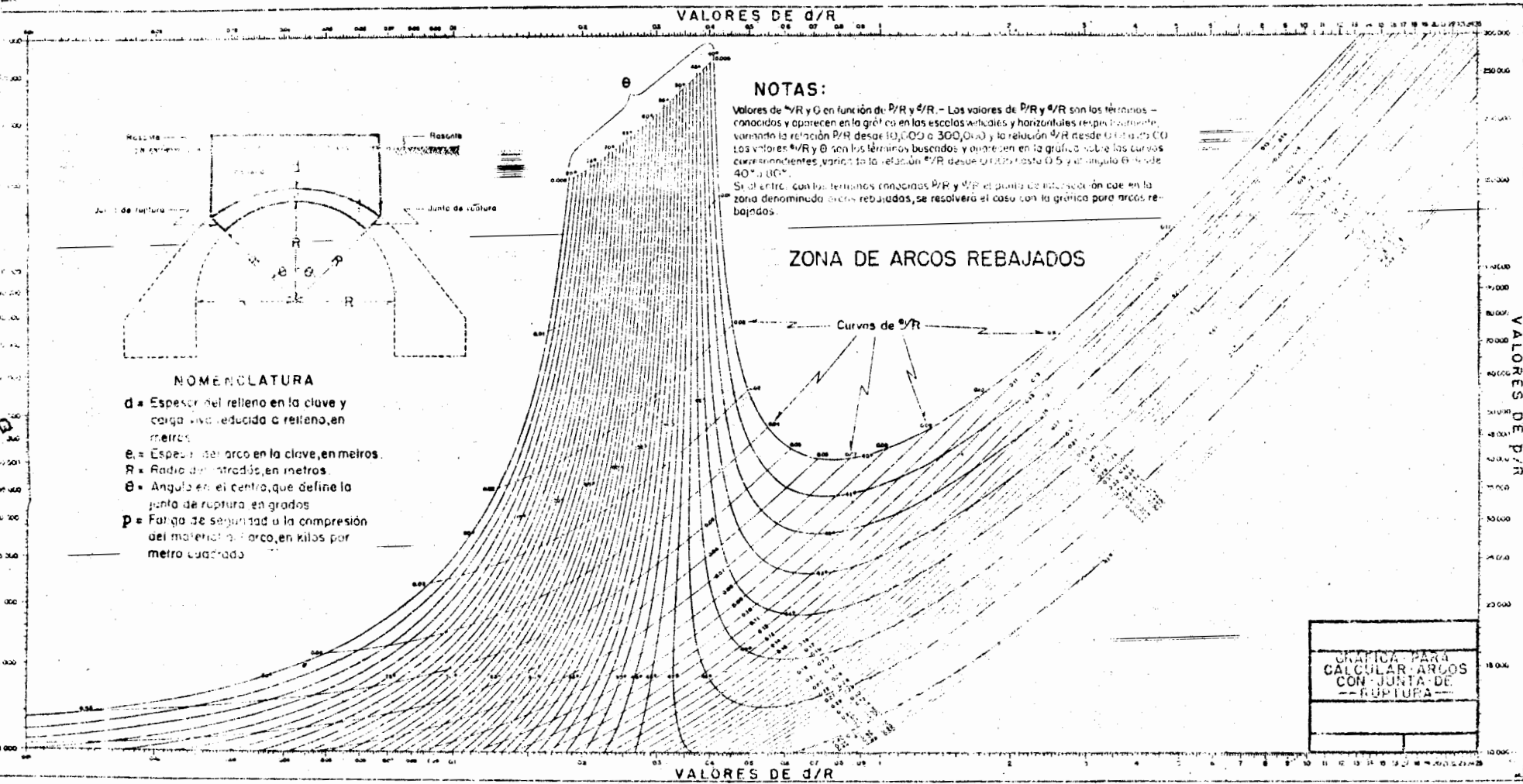
VALORES DE  $d/R$

VALORES DE  $P/R$



**NOMENCLATURA**

- d** = Espesor del relleno en la clave y carga viva reducida a relleno, en metros
- e** = Espesor del arco en la clave, en metros
- R** = Radio del intradós, en metros
- $\theta$**  = Ángulo en el centro, que define la junta de ruptura, en grados
- P** = Fatiga de seguridad a la compresión del material del arco, en kilos por metro cuadrado



## LOSAS NERVURADAS DE CONCRETO REFORZADO

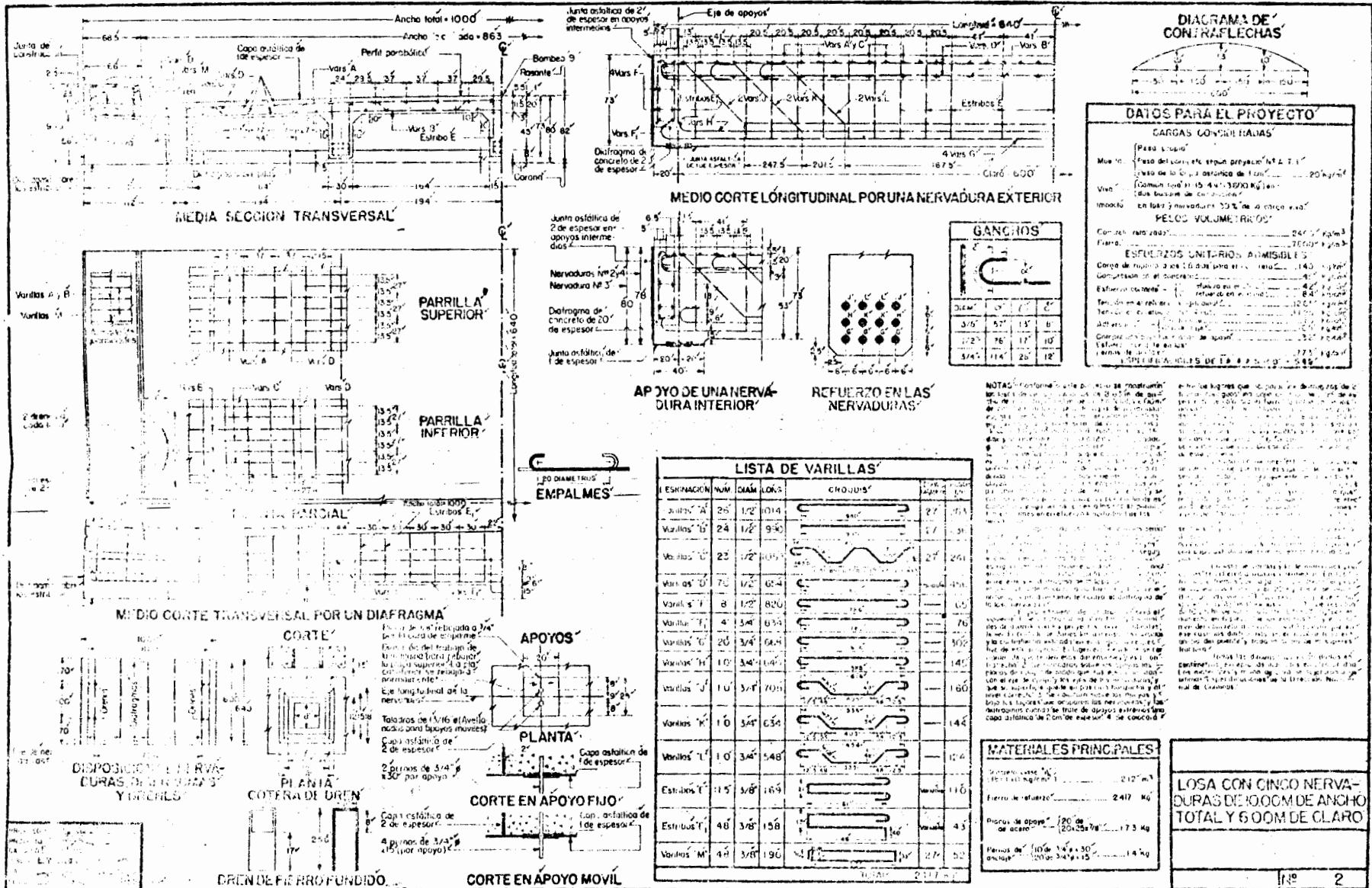
ANCHO TOTAL: 10.00 METROS.

ANCHO DE CALZADA: 8.63 METROS.

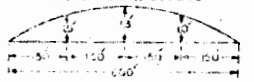
CLAROS: 6.00 A 15.00 METROS.

CARGA VIVA: H. 15.44.

ESPECIFICACIONES: A.A.S.H.O. 1949.



**DIAGRAMA DE CONTRAFLECHAS**



**DATOS PARA EL PROYECTO**

**CARGAS CONSIDERADAS**

Peso propio

Muev. 150 kg/m<sup>2</sup>

Vivo 200 kg/m<sup>2</sup>

Impacto 100 kg/m<sup>2</sup>

**PELOS VOLUMÉTRICOS**

Concreto 2400 kg/m<sup>3</sup>

Hierro 7850 kg/m<sup>3</sup>

**ESFUERZOS UNITARIOS ADMISIBLES**

Carga de ruptura 1.40 kg/cm<sup>2</sup>

Compresión en el concreto 10 kg/cm<sup>2</sup>

Tensión en el acero 18 kg/cm<sup>2</sup>

Adherencia 10 kg/cm<sup>2</sup>

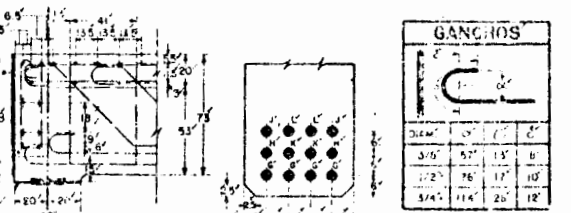
Desplazamiento 0.0025

Deflexión 1/250

Longitud de desarrollo 40d

Longitud de anclaje 15d

**MEDIO CORTE LÓNGITUDINAL POR UNA NERVA-DURA EXTERIOR**



**GANCHOS**

Clase	Longitud	Diámetro
1	15d	10
2	15d	10
3	15d	10
4	15d	10
5	15d	10

**APYO DE UNA NERVA-DURA INTERIOR**

**REFUERZO EN LAS NERVA-DURAS**



**LISTA DE VARILLAS**

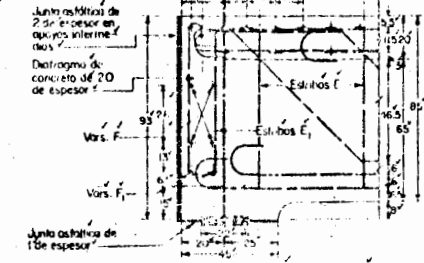
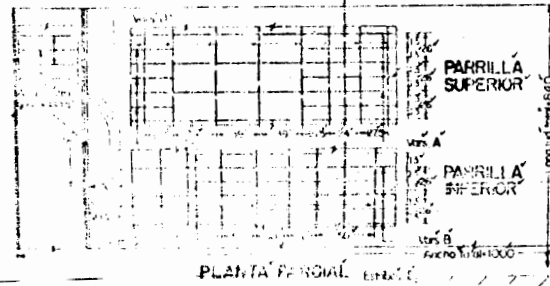
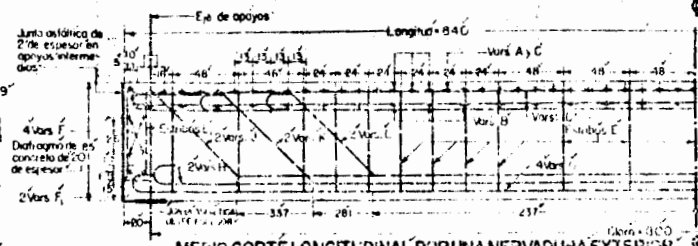
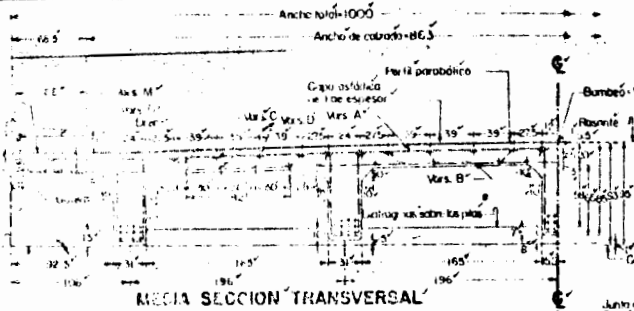
ESPECIFICACION	CANT.	DIAM.	LONG.	GRUPOS	LONG. TOTAL	PESO
Varillas A	25	1/2"	1014	1	25350	27.35
Varillas B	24	1/2"	930	1	22320	23.91
Varillas C	23	1/2"	1095	1	25215	26.91
Varillas D	70	1/2"	654	1	45780	49.14
Varillas E	8	1/2"	820	1	6560	7.05
Varillas F	4	3/4"	1334	1	5336	5.70
Varillas G	20	3/4"	664	1	13280	14.10
Varillas H	10	3/4"	1474	1	14740	15.60
Varillas I	10	3/4"	700	1	7000	7.40
Varillas J	10	3/4"	654	1	6540	6.94
Varillas K	10	3/4"	654	1	6540	6.94
Varillas L	10	3/4"	548	1	5480	5.82
Estribas T	15	3/8"	165	1	2475	2.62
Estribas U	40	3/8"	158	1	6320	6.70
Varillas M	40	3/8"	190	1	7600	8.05

**MATERIALES PRINCIPALES**

Concreto clase 150	210 m <sup>3</sup>
Hierro de refuerzo	247 kg
Proces. de apoyo	173 kg
Proces. de dren	14 kg

**LOSA CON CINCO NERVA-DURAS DE 100CM DE ANCHO TOTAL Y 600CM DE CLARO**





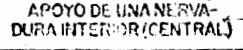
**GANCHOS**

Varilla	Longitud	Diámetro	Superficie	Peso
Var. A	1.27	7/8"	1.77	10.7
Var. B	1.04	7/8"	1.77	10.7
Var. C	1.18	7/8"	1.77	10.7

**DATOS PARA EL PROYECTO**

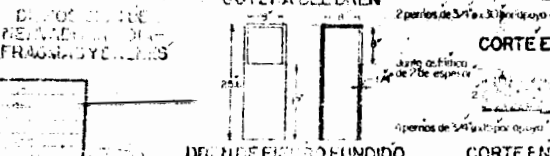
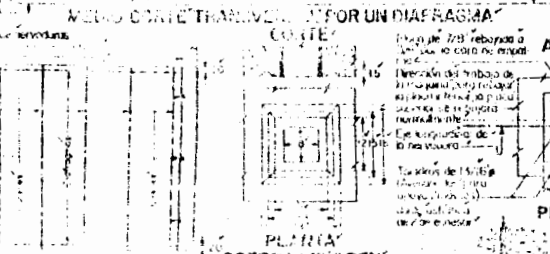
**CONDICIONES DE USO:**

**Materia:** Hierro para...  
**Vida:** 10 años...  
**Imposición:** En seco y húmedo...  
**PESOS VOLUMÉTRICOS:** ...  
**ESQUEMA DE LAS ARMADURAS:** ...



**LISTA DE VARILLAS**

DESIGNACION	LONG.	DIAM.	GRUPO	Nº	LONG.	DIAM.	GRUPO	Nº
Varilla "a"	3.47	1.12"	1.14	21	1.14	1.12"	1.14	21
Varilla "b"	2.73	1.12"	1.14	21	1.14	1.12"	1.14	21
Varilla "c"	2.13	1.12"	1.14	21	1.14	1.12"	1.14	21
Varilla "d"	1.53	1.12"	1.14	21	1.14	1.12"	1.14	21
Varilla "e"	1.13	1.12"	1.14	21	1.14	1.12"	1.14	21
Varilla "f"	0.73	1.12"	1.14	21	1.14	1.12"	1.14	21
Varilla "g"	0.33	1.12"	1.14	21	1.14	1.12"	1.14	21
Varilla "h"	0.03	1.12"	1.14	21	1.14	1.12"	1.14	21
Varilla "i"	0.03	1.12"	1.14	21	1.14	1.12"	1.14	21
Varilla "j"	0.03	1.12"	1.14	21	1.14	1.12"	1.14	21
Varilla "k"	0.03	1.12"	1.14	21	1.14	1.12"	1.14	21
Varilla "l"	0.03	1.12"	1.14	21	1.14	1.12"	1.14	21
Estrado "E"	11.5"	3/8"	1.91	12.4	50	3/8"	1.91	12.4
Estrado "E1"	4.8"	3/8"	1.91	50	3/8"	1.91	50	
Varilla "m"	6.6"	3/8"	1.91	7.1	26	3/8"	1.91	7.1



NOTAS: ...  
 1. Se debe verificar el cumplimiento de las normas vigentes para el uso de los materiales.  
 2. La longitud de las varillas debe ser la indicada en el croquis.  
 3. El espesor de la capa asfáltica debe ser de 1.5 cm.  
 4. El concreto debe ser de clase 200.  
 5. El hierro debe ser de clase 40.  
 6. El dren debe ser de fibra de vidrio.  
 7. El fraguado debe hacerse en el lugar.  
 8. Se debe verificar el cumplimiento de las normas vigentes para el uso de los materiales.

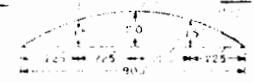
**MATERIALES PRINCIPALES**

Capa asfáltica (1.5 cm)	2.9 kg/m <sup>2</sup>
Hierro de refuerzo	3.380 kg
Placas de apoyo (20 x 20 x 3 cm)	1.9 kg
Pernos de anclaje (20 x 30 x 1.5 cm)	1.4 kg

**LOSA CON CINCO NERVADURAS DE CINGO ON DE ANCHO TOTAL Y 8.00M DE DECLARO**

Nº 7

**DIAGRAMA DE CONTRAFLECHAS**



**DATOS PARA EL PROYECTO**

**LOSAS CON BARRAS**

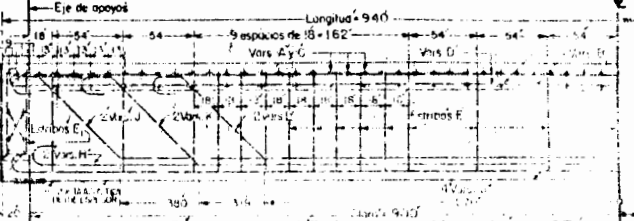
Material: **Perforado**  
 Marca: **Perforado**  
 Capacidad: **14.50 Kg/cm<sup>2</sup>**  
 Tipo: **Perforado**

**ESTRIPADO CONTINUO ADMISIBLE**

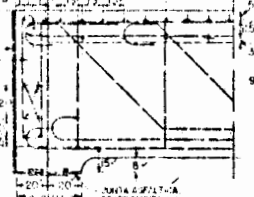
Capacidad de carga: **14.50 Kg/cm<sup>2</sup>**  
 Tipo: **Perforado**

**PERFORADO CON BARRAS**

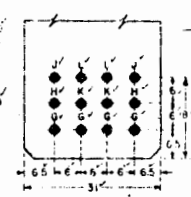
Capacidad de carga: **14.50 Kg/cm<sup>2</sup>**  
 Tipo: **Perforado**



**MEDIO CORTE LONGITUDINAL POR UNA NERVA DURA EXTERIOR**



**APOYO DE UNA NERVA DURA INTERIOR (CENTRAL)**



**REFUERZO EN LAS NERVADURAS**

**BARROS**

Varilla	Diámetro	Longitud	Cantidad	Observaciones
Vars A	10	104	10	
Vars B	10	104	10	
Vars C	10	104	10	
Vars D	10	104	10	
Vars E	10	104	10	
Vars F	10	104	10	
Vars G	10	104	10	
Vars H	10	104	10	
Vars I	10	104	10	
Vars J	10	104	10	
Vars K	10	104	10	
Vars L	10	104	10	
Vars M	10	104	10	
Vars N	10	104	10	
Vars O	10	104	10	
Vars P	10	104	10	
Vars Q	10	104	10	
Vars R	10	104	10	
Vars S	10	104	10	
Vars T	10	104	10	
Vars U	10	104	10	
Vars V	10	104	10	
Vars W	10	104	10	
Vars X	10	104	10	
Vars Y	10	104	10	
Vars Z	10	104	10	

**EMPALMES**

**LISTA DE BARRAS**

DESIGNACION	Nº	DIAM	LONG	CRUCES	VARILLAS	LONG	CRUCES	VARILLAS	
Varillas A	10	10	104	10	10	104	10	10	
Varillas B	10	10	104	10	10	104	10	10	
Varillas C	10	10	104	10	10	104	10	10	
Varillas D	10	10	104	10	10	104	10	10	
Varillas E	10	10	104	10	10	104	10	10	
Varillas F	10	10	104	10	10	104	10	10	
Varillas G	10	10	104	10	10	104	10	10	
Varillas H	10	10	104	10	10	104	10	10	
Varillas I	10	10	104	10	10	104	10	10	
Varillas J	10	10	104	10	10	104	10	10	
Varillas K	10	10	104	10	10	104	10	10	
Varillas L	10	10	104	10	10	104	10	10	
Varillas M	10	10	104	10	10	104	10	10	
Varillas N	10	10	104	10	10	104	10	10	
Varillas O	10	10	104	10	10	104	10	10	
Varillas P	10	10	104	10	10	104	10	10	
Varillas Q	10	10	104	10	10	104	10	10	
Varillas R	10	10	104	10	10	104	10	10	
Varillas S	10	10	104	10	10	104	10	10	
Varillas T	10	10	104	10	10	104	10	10	
Varillas U	10	10	104	10	10	104	10	10	
Varillas V	10	10	104	10	10	104	10	10	
Varillas W	10	10	104	10	10	104	10	10	
Varillas X	10	10	104	10	10	104	10	10	
Varillas Y	10	10	104	10	10	104	10	10	
Varillas Z	10	10	104	10	10	104	10	10	
<b>TOTAL</b>								<b>3928</b>	<b>100</b>

**NOTAS**

1. Las barras deben ser de tipo A-60.

2. El espesor de la losa es de 10 cm.

3. El concreto debe ser de tipo C-15.

4. El acero debe ser de tipo A-60.

5. El espesor de la losa es de 10 cm.

6. El concreto debe ser de tipo C-15.

7. El acero debe ser de tipo A-60.

8. El espesor de la losa es de 10 cm.

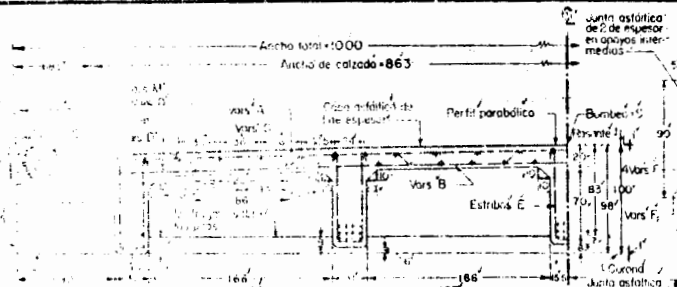
9. El concreto debe ser de tipo C-15.

10. El acero debe ser de tipo A-60.

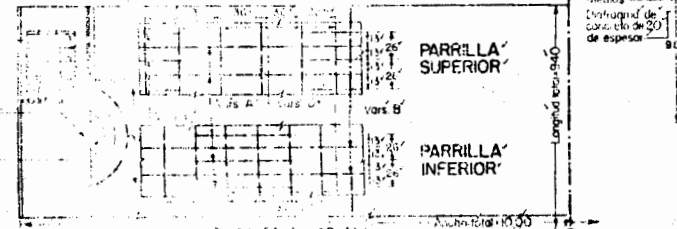
**MATERIALES PERMANENTES**

Perforado	33 m <sup>3</sup>
Perforado	3928 kg
Perforado	216 kg
Perforado	14 kg

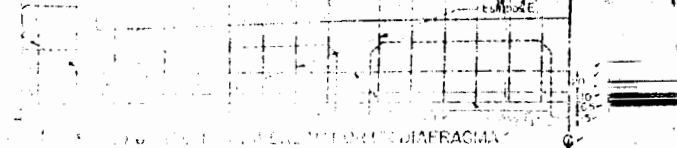
**LOSA CON CINCO NERVADURAS DE 10 CM DE ANCHO TOTAL Y 8 CM DE CLARO**



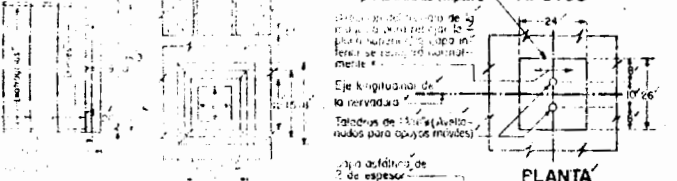
**SECCION TRANSVERSAL**



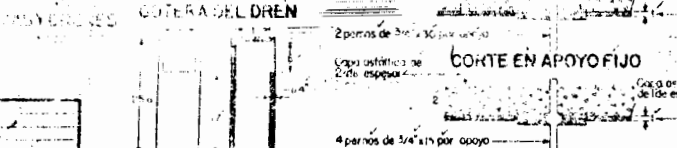
**PLANTA PARCIAL**



**PLANTA DE LA FRAGUA**



**PLANTA**



**PLANTA DE FIERRO FUNDIDO**

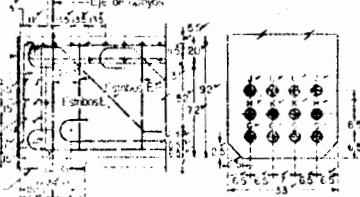
**CORTE EN APOYO FIJO**

**CORTE EN APOYO MOVIL**

**DIAGRAMA DE CONTRAFLECHAS**



**MEDIO CORTE LONGITUDINAL POR UNA NERVDURA EXTERIOR**



**REFUERZO EN LAS NERVDURAS**

**GANCHOS**

Diámetro	4"	5"	6"	8"
3/8"	1 1/2"	1 3/4"	2"	2 1/2"
1/2"	2"	2 1/4"	3"	3 1/2"
3/4"	3 1/4"	4"	5"	6"
7/8"	4 1/4"	5 1/4"	7"	8 1/4"

**DATOS PARA EL PROYECTO**

**CARGAS LONGITUDINALES**

Muerto: 20 kg/m<sup>2</sup>

Vivo: 20 kg/m<sup>2</sup>

Impacto: 20% de la carga viva

**PESOS VOLUMETRICOS**

Concreto: 2400 kg/m<sup>3</sup>

Hierro: 7850 kg/m<sup>3</sup>

**ESFUERZOS UNITARIOS ADMISIBLES**

Compresión en el concreto: 40 kg/cm<sup>2</sup>

Tensión en el acero: 1200 kg/cm<sup>2</sup>

Esfuerzo cortante en el concreto: 10 kg/cm<sup>2</sup>

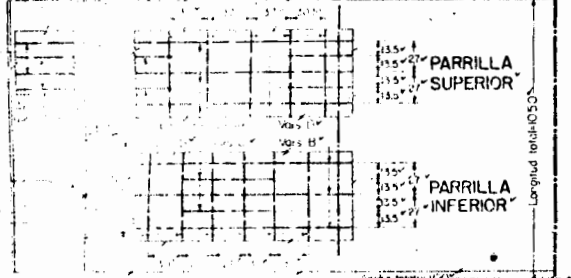
Esfuerzo cortante en el acero: 10 kg/cm<sup>2</sup>

Esfuerzo torsión en el concreto: 10 kg/cm<sup>2</sup>

Esfuerzo torsión en el acero: 10 kg/cm<sup>2</sup>

ESPEL FUNDIDA EN LA A Y B DEL AÑO DE 1949

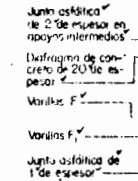
**MEDIA SECCION TRANSVERSAL**



**PARRILLA SUPERIOR**

**PARRILLA INFERIOR**

**APOYO DE UNA NERVDURA INTERIOR (CENTRAL)**



**EMPALMES**

**LISTA DE VARILLAS**

IDENTIFICACION	NUM	DIAM	LONG	CROQUIS	LONG	PES
Varillas "A"	40	1/2"	1094		43.1	40.7
Varillas "B"	38	1/2"	930		37.2	35.2
Varillas "C"	37	1/2"	1053		41.7	39.7
Varillas "D"	70	1/2"	1094		43.1	40.7
Varillas "E"	105	3/8"	813		41.0	38.6
Varillas "F"	4	3/4"	655		25.7	24.3
Varillas "G"	20	1"	1094		77.4	73.3
Varillas "H"	10	1"	1094		42.0	40.0
Varillas "J"	10	7/8"	1138		44.9	42.9
Varillas "K"	10	1"	1042		41.7	39.7
Varillas "L"	10	7/8"	813		32.1	30.1
Estribos "E"	105	3/8"	214		43.0	40.7
Estribos "L"	48	3/8"	194		18.5	17.5
Varillas "M"	62	3/8"	190		27	25.8

**MATERIALES PRINCIPALES**

Concreto (C-20): 107.7 m<sup>3</sup>

Hierro (A-20): 44.000 kg

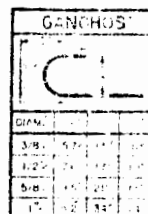
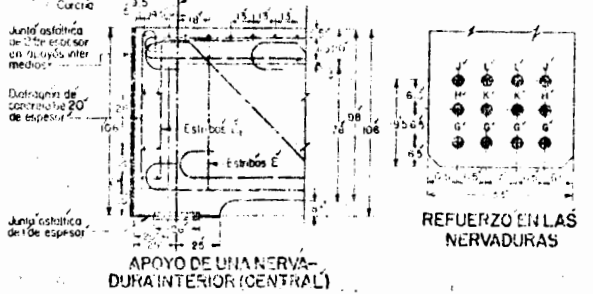
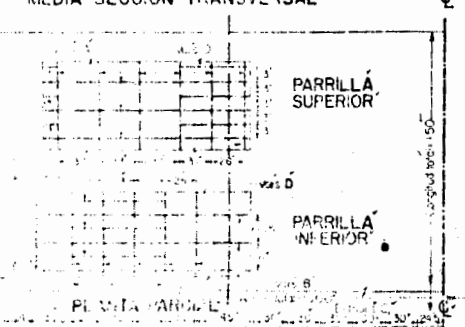
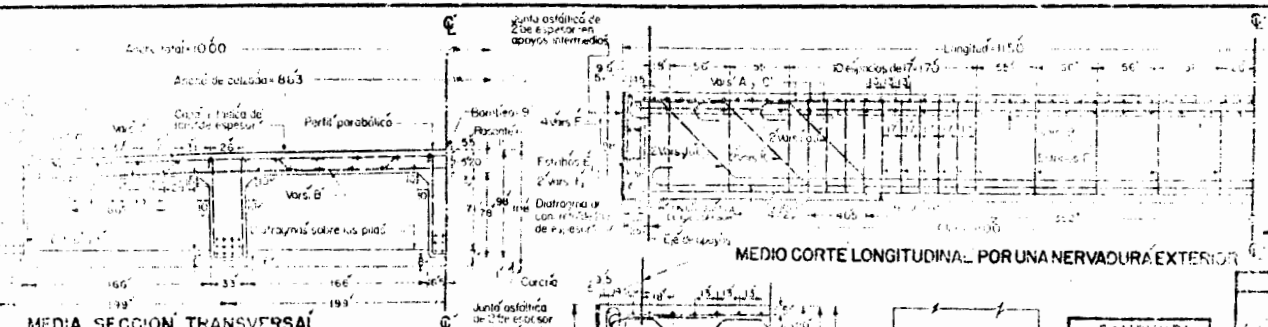
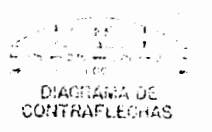
Hierro (A-25): 6.73 kg

Hierro (A-30): 20.00 kg

Hierro (A-35): 23.5 kg

Hierro (A-40): 14.00 kg

**LOSA CON CINCO NERVDURAS DE 60 CM DE ANCHO TOTAL Y 10.00 M DE CLARO**



**DATOS PARA EL PROYECTO**

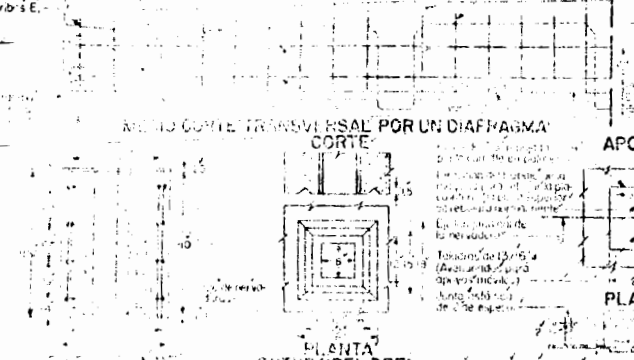
LABOR DE CONCRETO

ESPECIFICACIONES

ESPECIFICACIONES

ESPECIFICACIONES

ESPECIFICACIONES



**LISTA DE VARILLAS**

DESIGNACION	NUM	LONG	PROCESO	UNIDAD	CANTIDAD
varillas "A"	46	1004			415
varillas "B"	48	1100			415
varillas "C"	70	1004			415
varillas "D"	43	1004			415
varillas "E"	8	1004			415
varillas "F"	12	1100			415
varillas "G"	20	1100			415
varillas "H"	10	1100			415
varillas "I"	10	1100			415
varillas "J"	10	1100			415
varillas "K"	10	1100			415
varillas "L"	10	1100			415
varillas "E"	70	3/8"			11
varillas "E"	48	3/8"			57
varillas "M"	90	3/8"			97
TOTAL					4611

NOTAS:

1. El concreto debe ser de tipo normal.

2. El acero debe ser de tipo normal.

3. El espesor de la losa debe ser de 15 cm.

4. El espesor de la losa debe ser de 15 cm.

5. El espesor de la losa debe ser de 15 cm.

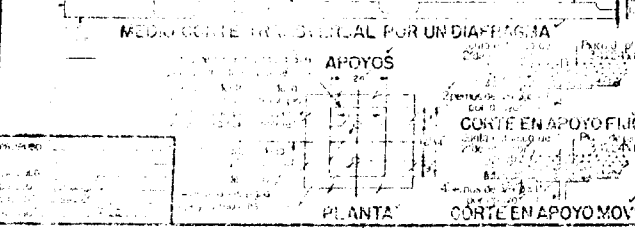
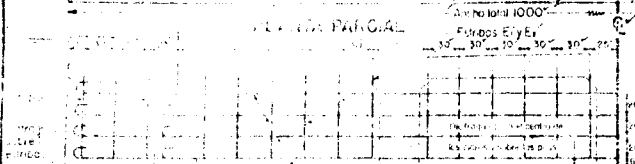
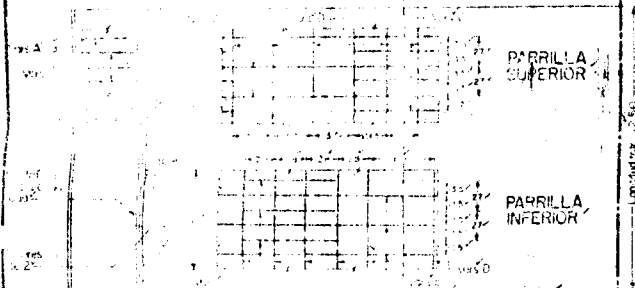
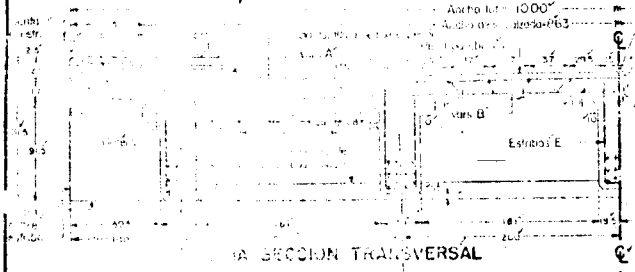
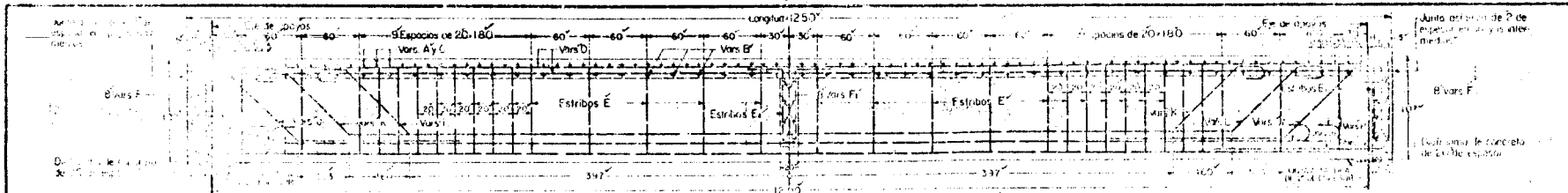


**MATERIALES PRINCIPALES**

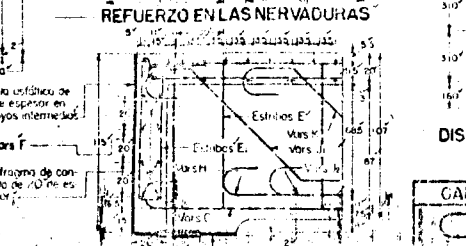
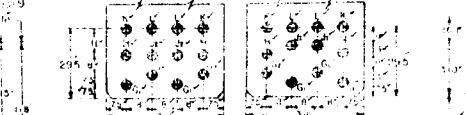
Concreto	15 cm	15 cm
Acero	3/8"	3/8"
Placas de acero	20 de	25 de
Perfiles de acero	10 de 3/4" x 3/8"	14 de

LOSA CON CINCO NERVAURAS DE 10 CM DE ANCHO TOTAL Y 11 CM DE CLARO



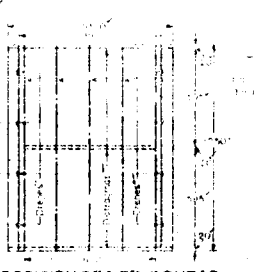


CORTE LONGITUDINAL POR UNA NERVADURA EXTERIOR



LISTA DE VARILLAS

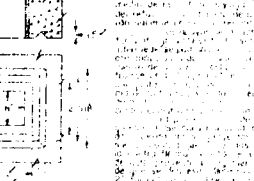
ESPECIFICACION	LONGITUD (M)	CANTIDAD	PESO (Kg)
Varillas A	1.30	27	434
Varillas B	2.20	18	285
Varillas C	1.50	27	427
Varillas D	1.50	27	427
Varillas E	1.50	27	427
Varillas F	1.50	27	427
Varillas G	1.50	27	427
Varillas H	1.50	27	427
Varillas I	1.50	27	427
Varillas J	1.50	27	427
Varillas K	1.50	27	427
Varillas L	1.50	27	427
Varillas M	1.50	27	427
Varillas N	1.50	27	427
Varillas O	1.50	27	427
Varillas P	1.50	27	427
Varillas Q	1.50	27	427
Varillas R	1.50	27	427
Varillas S	1.50	27	427
Varillas T	1.50	27	427
Varillas U	1.50	27	427
Varillas V	1.50	27	427
Varillas W	1.50	27	427
Varillas X	1.50	27	427
Varillas Y	1.50	27	427
Varillas Z	1.50	27	427
TOTAL			6591 Kg



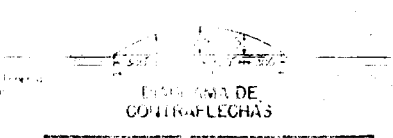
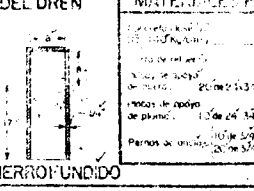
GANCHOS

ESPECIFICACION	CANTIDAD	PESO (Kg)
Ganchos	18	285

CORTE



PLANTA GOTERA DEL DREN



DATOS PARA EL PROYECTO	
CANTIDAD GENERAL	
Varillas	6591 Kg
Ganchos	285 Kg
TOTAL	6876 Kg

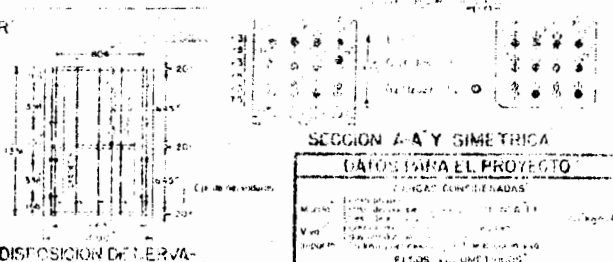
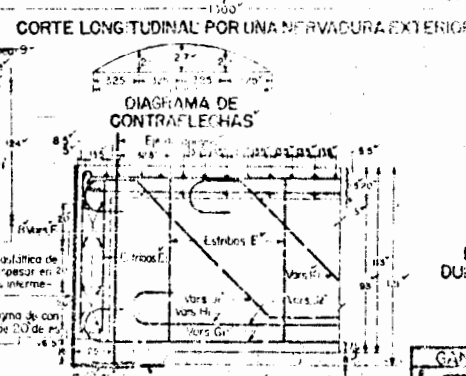
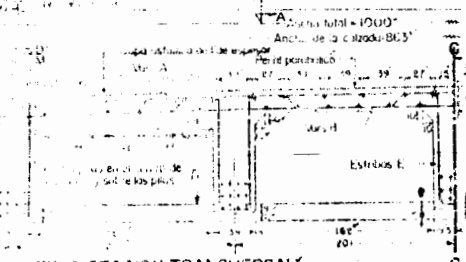
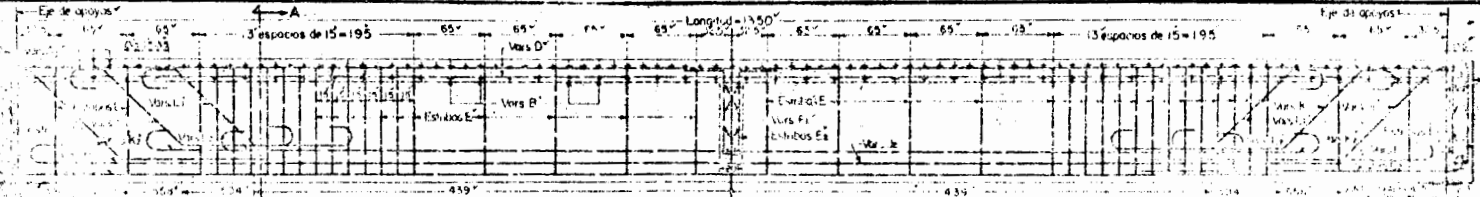
NOTAS: 1. Las varillas de refuerzo deben ser de tipo B. 2. El espesor de la losa debe ser de 12 cm. 3. El concreto debe ser de tipo C. 4. El dren debe ser de hierro fundido. 5. El acabado de la losa debe ser lizo. 6. El acabado del dren debe ser lizo. 7. El acabado de los apoyos debe ser lizo. 8. El acabado de los muros debe ser lizo. 9. El acabado de las columnas debe ser lizo. 10. El acabado de las vigas debe ser lizo. 11. El acabado de los pilares debe ser lizo. 12. El acabado de los techos debe ser lizo. 13. El acabado de las paredes debe ser lizo. 14. El acabado de los pisos debe ser lizo. 15. El acabado de los techos debe ser lizo. 16. El acabado de las paredes debe ser lizo. 17. El acabado de los pisos debe ser lizo. 18. El acabado de los techos debe ser lizo. 19. El acabado de las paredes debe ser lizo. 20. El acabado de los pisos debe ser lizo.

MATERIALES PRINCIPALES

MATERIAL	CANTIDAD	PESO (Kg)
Varillas	6591	6591
Ganchos	18	285
TOTAL		6876

LOSA CON CINCO NERVADURAS DE 10 CM DE ANCHO TOTAL Y 12.00 CM DE CLARO

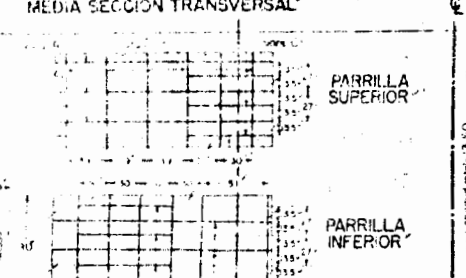
Nº 8



**DATOS PARA EL PROYECTO**

INDICAR COMPLETADAS

Materiales	...
Costos	...
...	...



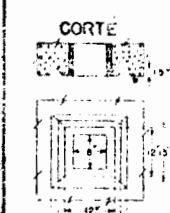
**POYO DE UNA NERVAJURA INTERIOR (CENTRAL)**

**LISTA DE MATERIAS PRIMAS**

Material	Unidad	Cantidad	Observaciones
Varillas A10	m	1.14	
Varillas B10	m	2.7	
Varillas C10	m	1.34	
Varillas D10	m	0.55	
Varillas E10	m	0.7	
Varillas F10	m	0.7	
Varillas G10	m	0.7	
Varillas H10	m	0.7	
Varillas I10	m	0.7	
Varillas J10	m	0.7	
Varillas K10	m	0.7	
Varillas L10	m	0.7	
Varillas M10	m	0.7	
<b>TOTAL</b>		<b>78.54</b>	<b>Kg</b>

**CANTIDOS**

...	...	...	...
...	...	...	...



**NOTAS**

1. El presente proyecto es de tipo preliminar y no debe utilizarse para la construcción de obras definitivas.

2. El costo de los materiales y mano de obra no incluye impuestos y gastos de transporte.

3. El costo de los materiales y mano de obra no incluye el costo de los estudios de ingeniería.

4. El costo de los materiales y mano de obra no incluye el costo de los honorarios del ingeniero.

5. El costo de los materiales y mano de obra no incluye el costo de los honorarios del arquitecto.

6. El costo de los materiales y mano de obra no incluye el costo de los honorarios del geólogo.

7. El costo de los materiales y mano de obra no incluye el costo de los honorarios del topógrafo.

8. El costo de los materiales y mano de obra no incluye el costo de los honorarios del ingeniero de caminos.

9. El costo de los materiales y mano de obra no incluye el costo de los honorarios del ingeniero de estructuras.

10. El costo de los materiales y mano de obra no incluye el costo de los honorarios del ingeniero de mecánica.

11. El costo de los materiales y mano de obra no incluye el costo de los honorarios del ingeniero de electricidad.

12. El costo de los materiales y mano de obra no incluye el costo de los honorarios del ingeniero de química.

13. El costo de los materiales y mano de obra no incluye el costo de los honorarios del ingeniero de biología.

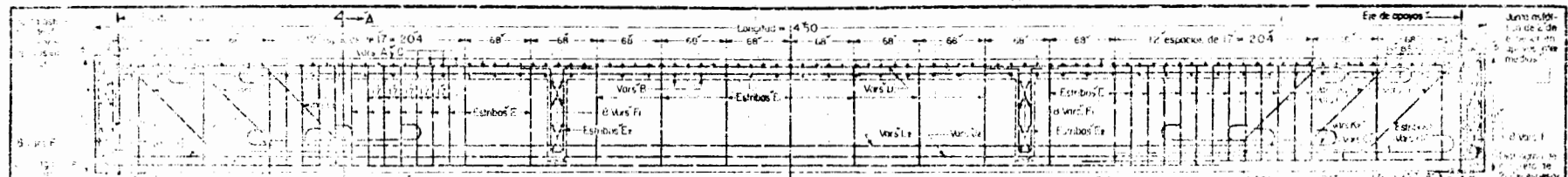
14. El costo de los materiales y mano de obra no incluye el costo de los honorarios del ingeniero de física.

15. El costo de los materiales y mano de obra no incluye el costo de los honorarios del ingeniero de matemáticas.

**MATERIALES PRINCIPALES**

...	59.54
...	78.54
...	24.54
...	97.54
...	14.54

**LOSA CON CINCO NERVAJURAS DE 10.00 M DE ANCHO TOTAL Y 13.50 M DE LARGO**



CORTE LONGITUDINAL POR UNA NERVADURA EXTERIOR

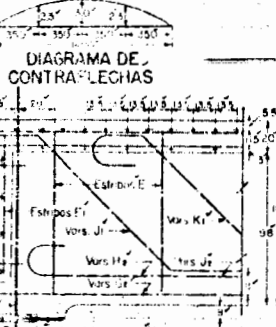


DIAGRAMA DE CONTRAFLECHAS

APOYO DE UNA NERVADURA INTERIOR (CENTRAL)

LISTA DE VANTILLAS

LISTA DE VANTILLAS	LONGITUD	ANCHO	ESPESOR	TIPO	QUANTIDAD	UNIDAD	NOTAS
VANILLA A	1.50	0.30	0.10	1	27	1540	
VANILLA B	1.50	0.30	0.10	1	27	1513	
VANILLA C	1.50	0.30	0.10	1	27	1513	
VANILLA D	1.50	0.30	0.10	1	27	1550	
VANILLA E	1.50	0.30	0.10	1	37		
VANILLA F	1.50	0.30	0.10	1	37		
VANILLA G	1.50	0.30	0.10	1	37		
VANILLA H	1.50	0.30	0.10	1	37		
VANILLA I	1.50	0.30	0.10	1	37		
VANILLA J	1.50	0.30	0.10	1	37		
VANILLA K	1.50	0.30	0.10	1	37		
VANILLA L	1.50	0.30	0.10	1	37		
VANILLA M	1.50	0.30	0.10	1	37		
TOTAL						8372	

SECCION A-A Y SIMETRICA

DATOS PARA EL PROYECTO

Material de concreto	20 kg/m <sup>3</sup>
Material de acero	20 kg/m <sup>3</sup>
Material de arena	20 kg/m <sup>3</sup>
Material de grava	20 kg/m <sup>3</sup>
Material de asfalto	20 kg/m <sup>3</sup>

DISPOSICION DE NERVADURAS, DIAFRAGMAS Y DRENES

GANCHOS

DAM	OK	C	A	Ø
31	57	3	A	Ø
32	76	17	C	Ø
33	71	19	A	Ø
34	91	44	B	Ø

EMPALMES

NOTA: Se tiene a este proyecto de ser necesario, se debe considerar el uso de los materiales de construcción de acuerdo a las especificaciones de los planos de detalle de los elementos de la estructura. Se debe considerar el uso de los materiales de construcción de acuerdo a las especificaciones de los planos de detalle de los elementos de la estructura.

CORTE



PLANTA GOTERA DEL DREN



MATERIALES PRINCIPALES

Material de concreto	20 kg/m <sup>3</sup>
Material de acero	20 kg/m <sup>3</sup>
Material de arena	20 kg/m <sup>3</sup>
Material de grava	20 kg/m <sup>3</sup>
Material de asfalto	20 kg/m <sup>3</sup>

LOSA CON CINCO NERVADURAS DE 10.00M DE ANCHO TOTAL Y 14.00M DE CLARO

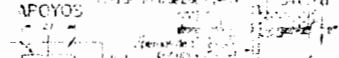
Material de concreto	20 kg/m <sup>3</sup>
Material de acero	20 kg/m <sup>3</sup>
Material de arena	20 kg/m <sup>3</sup>
Material de grava	20 kg/m <sup>3</sup>
Material de asfalto	20 kg/m <sup>3</sup>

MEDIO SECCION TRANSVERSAL



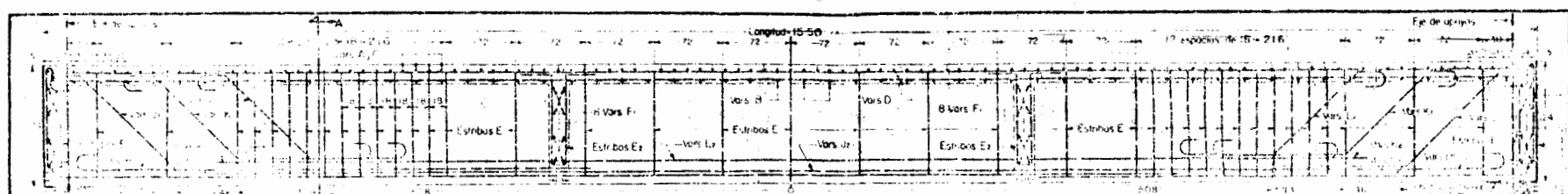
PLANTA PARCIAL

MEDIO CORTE TRANSVERSAL POR UN DIAFRAGMA



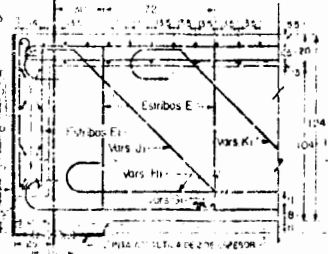
CORTE EN APOYO FIJO

CORTE EN APOYO MOVIL



CORTE LONGITUDINAL POR UNA NERVADURA EXTERIOR

DIAGRAMA DE CONTRAFLECHAS



APÓYO DE UNA NERVADURA INTERIOR (CENTRAL)

LISTA DE VARILLAS

VARILLA	LONGITUD (m)	DIÁMETRO (cm)	CANTIDAD	PESO (kg)
Vars A	15.50	1.00	27	60.7
Vars B	15.50	1.00	27	55.5
Vars C	15.50	1.00	27	51.7
Vars D	15.50	1.00	27	51.7
Vars E	15.50	1.00	27	51.7
Vars F	15.50	1.00	27	51.7
Vars G	15.50	1.00	27	51.7
Vars H	15.50	1.00	27	51.7
Vars I	15.50	1.00	27	51.7
Vars J	15.50	1.00	27	51.7
Vars K	15.50	1.00	27	51.7
Vars L	15.50	1.00	27	51.7
TOTAL				291.3

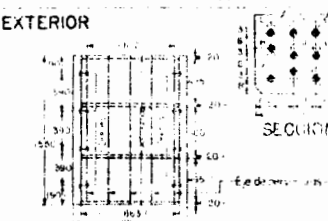
SECCION A-A Y SIMETRICA



DATOS PARA EL PROYECTO

DESCRIPCIÓN	CANTIDAD	UNIDAD
Acero	291.3	kg
Hormigón	15.50	m³
Formas	15.50	m²
Alambres	15.50	m

DISPOSICIÓN DE NERVADURAS, DIAFRAGMAS Y DRENES



GANCHOS

DIAM	ES	ES	ES	ES
1.00	2.5	1.5	1.5	1.5
1.50	4.0	2.5	2.5	2.5
2.00	5.0	4.0	4.0	4.0
3.00	7.5	6.0	6.0	6.0
4.00	10.0	8.0	8.0	8.0

EMPALMES

EMPALMES: Diagram showing the lap joints for the reinforcement bars, including the required lap length and the placement of the bars.

CORTE



PLANTA GOTERA DEL DREN

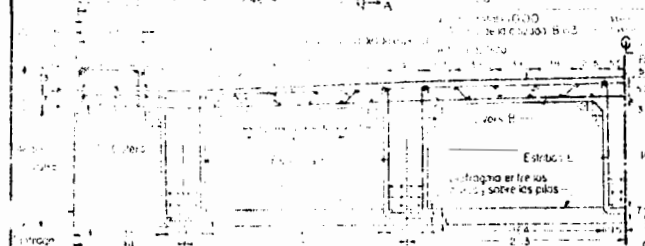


MATERIALES PRINCIPALES

MATERIAL	CANTIDAD	UNIDAD
Acero	291.3	kg
Hormigón	15.50	m³
Formas	15.50	m²
Alambres	15.50	m

LOSA CON CINCO NERVADURAS DE 10.00M DE ANCHO TOTAL Y 5.00M DE CLARO

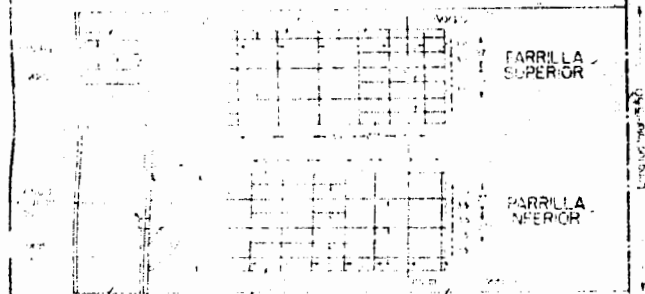
MEDIA SECCION TRANSVERSAL



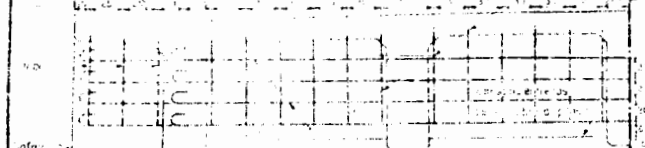
PARRILLA SUPERIOR

PARRILLA INFERIOR

PLANTA PARCIAL

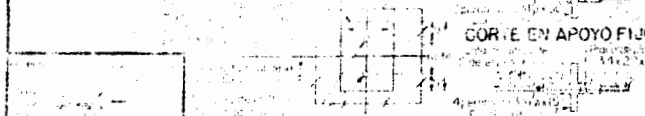


MEDIO CORTE TRANSVERSAL POR UN DIAFRAGMA



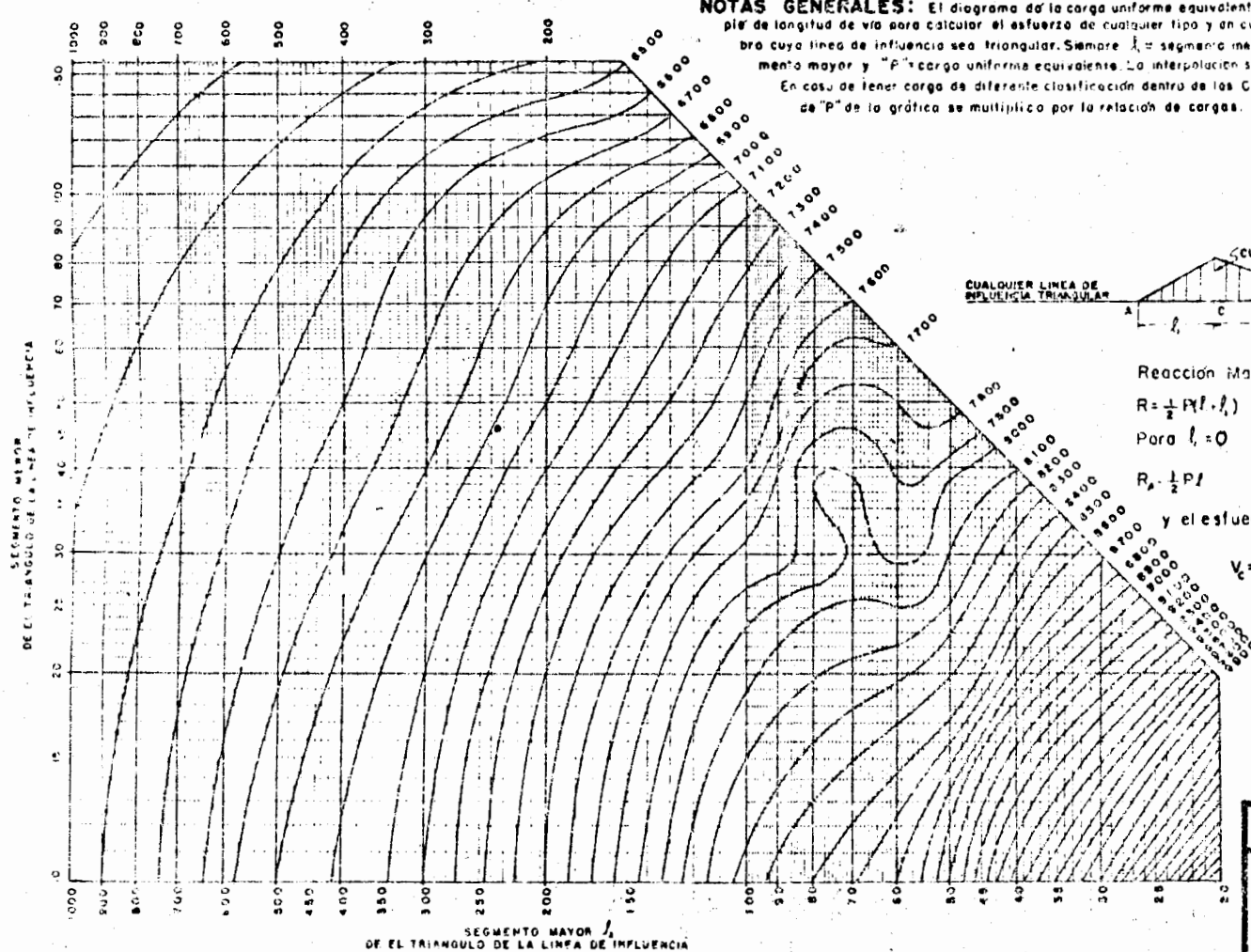
APÓYOS

CORTE EN APOYO FIJO



PLANTA CORTE EN APOYO MOVIL





**NOTAS GENERALES:** El diagrama da la carga uniforme equivalente en libras por pie de longitud de vía para calcular el esfuerzo de cualquier tipo y en cualquier miembro cuya línea de influencia sea triangular. Siempre  $l_1$  = segmento menor,  $l_2$  = segmento mayor y "P" = carga uniforme equivalente. La interpolación se hace lineal. En caso de tener carga de diferente clasificación dentro de las Cooper, el valor de "P" de la gráfica se multiplica por la relación de cargas.



Reacción Máxima Intermedia

$$R = \frac{1}{2} P l \cdot \frac{l_1}{l}$$

Para  $l_1 = 0$

$$R = \frac{1}{2} P l$$

y el esfuerzo cortante en "C":

$$V_c = \frac{1}{2} P l_1 \frac{l_1}{l}$$

CARGA UNIFORME EQUIVALENTE PARA C.V. COOPER E-60