UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
FACULTAD DE INGENIERIA

APUNTES DE METODOS NUMERICOS

RAFAEL IRIARTE V. BALDERRAMA
HUGO E. BORRAS GARCIA
ROSSYNELA DURAN CUEVAS

DIVISION DE CIENCIAS BASICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS APLICADAS

FI/DCB/85 022

PROLOGO

Los Métodos Numéricos han adquirido en la actualidad gran importancia, debido al desarrollo de las computadoras digitales y las calculadoras de bolsillo, las cuales han permitido aplicar métodos de una manera sencilla, obteniendo soluciones en los problemas matemáticos con muy buenas aproximaciones, dependiendo desde luego del número de dígitos con los que cuente el dispositivo electrónico de cálculo del que se disponga.

Dentro de los planes de estudio de las carreras que ofrece la Facultad de Ingeniería de la U.N.A.M., se contempla un curso sobre Métodos Numéricos, el cual tiene como objetivo proporcionar al estudiante los elementos que le permitan obtener soluciones aproximadas de modelos matemáticos usuales en la ingeniería.

La elaboración de este trabajo se realizó con el objeto de que los estudiantes de la asignatura citada contaran con apuntes para un mejor desarrollo del curso.

El contenido temático de esta obra comprende siete capítulos, los cuales tratan los Métodos Numéricos básicos para resolver ecuaciones algebraicas y trascendentes, sistemas de ecuaciones algebraicas lineales, aproximación de funciones por polinomios, derivación e integración, solución de ecuaciones diferenciales ordinarias y en derivadas parciales, incluyendo además un apéndice sobre Análisis Combinatorio.

Es conveniente señalar que el lector no debe limitarse al estudio de este material, por lo que se recomienda consultar ampliamente la bibliografía que se encuentra al final de la obra, con el fin de que se profundice y amplíe en los diversos tópicos del contenido.

Agradecemos la valiosa participación del Ing. Salvador García Burgos quien colaboró entusiastamente en la primera versión de este material. Asimismo a la Lic. Irma Hinojosa Félix por la adaptación pedagógica.

También queremos hacer patente nuestro reconocimiento a todas aquellas personas que de alguna manera colaboraron en la realización de este trabajo.

ING. RAFAEL IRIARTE V. BALDERRAMA

ING. HUGO E. BORRAS GARCIA

ACT. ROSSYNELA DURAN CUEVAS

CONTENIDO

CAPITULO VII SOLUCION NUMERICA DE ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES

APENDICE: ANALISIS COMBINATORIO Y TEOREMA DEL BINOMIO

CAPITULO I APROXIMACION NUMERICA Y ERRORES

NTRODUCCION

En este capítulo, se estudiarán los diferentes tipos de error que se presentan al realizar operaciones aritméticas en la aplicación de los métodos numéricos que se expondrán en capítulos posteriores. Se tratará también, el concepto de aproximación numérica, las principales fuentes que originan los errores y la forma en que éstos se propagan.

.1 CONCEPTO DE APROXIMACION NUMERICA

En el campo de la ingeniería, existen infinidad de fenómenos físicos que necesitan representarse mediante modelos matemáticos.

Consideremos por ejemplo el siguiente circuito:

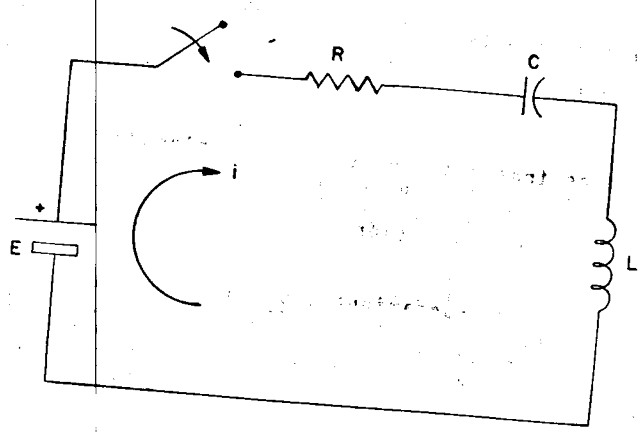


Figura I.1

La corriente que circulará a través del circuito al cerrar el interruptor, se puede representar por la siguiente función:

$$f(t) = k_1\, e^{m_1 t} + k_2\, e^{m_2 t}$$

donde k_1, k_2, m_1 y m_2 son constantes que dependen de R, C, L y de las condiciones iniciales del circuito, siendo $m_1 \neq m_2$. La variable independiente t, representará el tiempo transcurrido a partir del momento en que el interruptor es cerrado.

La función $f(t)$ es el resultado de haber obtenido la solución del modelo matemático, que representa el comportamiento del fenómeno eléctrico mostrado en la figura I.1.

Los métodos matemáticos para obtener la solución del modelo, representan en muchos casos, una imposibilidad para resolverse, es aquí, donde los métodos numéricos proporcionan (utilizando procedimientos aritméticos sencillos) una *aproximación numérica* a la solución del problema, esta aproximación se debe a que dichos métodos, para realizar los cálculos, se auxilian de las computadoras digitales, que al trabajar con un número determinado de cifras, producen inevitablemente *errores*.

I.2 ERRORES

Dependiendo de la fuente que los produzca, los errores en los que se incurre al utilizar computadoras digitales para resolver problemas, pueden clasificarse en alguno de los siguientes tipos:

- Errores inherentes.
- Errores por truncamiento.
- Errores por redondeo.

Los errores inherentes o errores propios de los datos, son aquellos que se producen al leer en algun dispositivo de medición una magnitud, al transmitirla o al reproducirla, debido a la imprecisión en los instrumentos o por errores humanos.

Los errores por truncamiento, son aquellos que se presentan al utilizar series en los cálculos; como por ejemplo las series de las funciones trigonométricas $\operatorname{sen}(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$, etc. Estas series tienen un número infinito de términos y al hacer algún cálculo con ellas, se utiliza un número determinado de términos, truncando los demás. Este tipo de errores se presenta también, cuando se utilizan números irracionales tales como $\sqrt{2}$, π, e, etc.

Por último, los errores por redondeo se deben a la imposibilidad de manejar en operaciones como multiplicación o división, todos los dígitos resultantes que involucran estas operaciones. En este caso, el resultado se redondea o aproxima al número máximo de dígitos con los que se dispone para trabajar.

La magnitud del error generado por alguna de las fuentes mencionadas anteriormente, se puede medir con ayuda del *error absoluto* o *el error relativo*. El error absoluto se define como la diferencia en valor absoluto entre una cantidad cualquiera x y una aproximación a esta cantidad representada por x_1:

$$\boxed{e_a = |x - x_1|} \quad \dots (1)$$

El error relativo se define como el cociente, en valor absoluto, del error absoluto entre x. Generalmente el error relativo se expresa en porciento, por lo cual:

$$\boxed{e_r = \left|\frac{x - x_1}{x}\right| \times 100} \quad \dots (2)$$

Ejemplo I.1

El número e, con cinco cifras decimales, es igual a 2.71828; calcular el error absoluto y el error relativo en el que se incurre al tomar hasta el primero, segundo, tercero o cuarto términos de la serie:

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

Solución:

Tomando hasta el primer término de la serie:

$$e = \sum_{k=0}^{0} \frac{1}{k!} = \frac{1}{0!} = 1$$

el error absoluto es:

$$e_a = |x - x_1|$$

donde:

$$x = 2.71828$$

$$x_1 = 1$$

sustituyendo:

$$e_a = |2.71828 - 1.00000| = 1.71828$$

y el error relativo:

$$e_r = \left| \frac{x - x_1}{x} \right|$$

sustituyendo:

$$e_r = \left| \frac{2.71828 - 1.00000}{2.71828} \right| = \frac{1.71828}{2.71828} = 0.63212$$

lo que implica que el error en el que se incurre es del 63.21 %.

Tomando hasta el segundo término de la serie:

$$e = \sum_{k=0}^{1} \frac{1}{k!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} = 2$$

procediendo de igual forma se obtiene:

$$e_a = |2.71828 - 2.00000| = 0.71828$$

y el error relativo:

$$e_r = \frac{0.71828}{2.71828} = 0.2642$$

Tomando hasta el tercer término de la serie:

$$e = \sum_{k=0}^{2} \frac{1}{k!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} = 2.5$$

procediendo de igual forma se obtiene:

error absoluto:

$$e_a = |2.71828 - 2.50000| = 0.21828$$

error relativo:

$$e_r = \frac{0.21828}{2.71828} = 0.08030$$

en este caso, el error en el que se incurre es del 8.03%.

Por último, tomando hasta el cuarto término de la serie y procediendo de igual forma:

$$x_1 = e = \sum_{k=0}^{3} \frac{1}{k!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} = 2.66667$$

(se ha realizado un redondeo superior en la última cifra decimal de x_1).

Error absoluto:

$$e_a = |2.71828 - 2.66667| = 0.05161$$

Error relativo:

$$e_r = \frac{0.05161}{2.71828} = 0.01898$$

de aquí se concluye que tomando cuatro términos de la serie el error en el que se incurre es del 1.9%.

I.3 CONCEPTO DE ESTABILIDAD Y CONVERGENCIA DE UN METODO NUMERICO

Para facilitar el estudio de las características de los métodos numéricos, se debe considerar que en general parten de uno o varios datos de entrada y mediante la aplicación de un algoritmo, proporcionan aproximaciones a la solución de un modelo matemático, es decir, que se pueden considerar como un sistema formado por datos de entrada, un algoritmo y una salida que es la aproximación a la solución.

I.3.1 ESTABILIDAD

Cuando en un sistema cualquiera existen variaciones pequeñas en la salida que corresponden a pequeñas variaciones en la entrada, se dice que dicho sistema es estable.

En el caso de un método numérico, si la función f(n) representa el error en la salida de un algoritmo después de haber realizado n operaciones y f(n) aumenta linealmente conforme aumenta n, entonces se dice que el método es estable.

En caso de que f(n) aumente exponencialmente, se considera que el método es inestable.

En la figura I.2 se muestra el comportamiento de un sistema estable, cuyo error en la salida es $f(n) = k_1 n \varepsilon$, donde k_1 es una constante y ε es el error en los datos de entrada. La otra curva corresponde a un método, cuyo error en la salida es de la forma $f(n) = k_2^n \varepsilon$ donde k_2 es una constante mayor que la unidad.

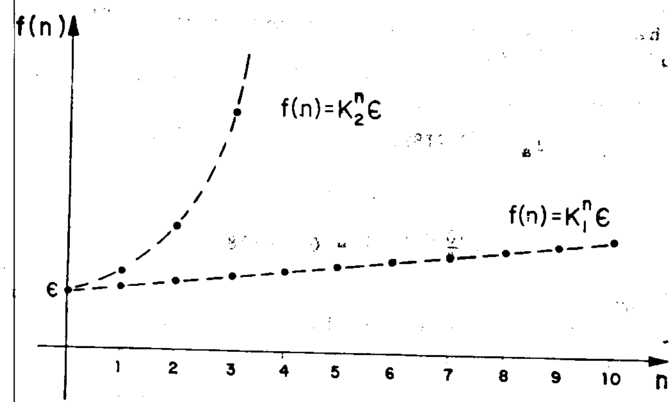


Figura I.2

El crecimiento lineal de un error es usualmente inevitable. Cuando k_1 y ε son pequeños los resultados que se obtienen en la solución de un problema son por lo general aceptables. En cambio, el crecimiento exponencial de un error se debe evitar, ya que el factor k_2^n crece rápidamente aun para valores relativamente pequeños de n por lo cual, los resultados que se obtienen en la solución de un problema llegan a ser inaceptables.

I.3.2 CONVERGENCIA

El cálculo y generalmente el análisis están basados en la noción de convergencia. Los conceptos básicos tales como derivada, integral y continuidad se definen en términos de sucesiones convergentes. Las funciones elementales como $\mathrm{Ln}(x)$ o $\mathrm{sen}\ (x)$ se definen también por medio de series convergentes. En la ingeniería no se requieren respuestas numéricas exactas, más bien, se busca una aproximación a la respuesta, *hasta un cierto número de cifras decimales* o precisas dentro de una tolerancia.

En muchos métodos numéricos para hallar la respuesta x a un problema, se producen los primeros n términos de una sucesión $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ (soluciones aproximadas), para observar la posible convergencia a la respuesta.

Recordando que una sucesión $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ de números converge a un valor x, si para todo $\varepsilon > 0$ existe un entero m, tal que para todo $n > m$, se cumple que:

$$|x - x_n| < \varepsilon$$

Para determinar la convergencia de un método numérico no es posible aplicar la definición anterior, debido a que no se conoce de antemano el valor de x. Sin embargo se puede demostrar que si el método converge, la diferencia en valor absoluto de las dos últimas aproximaciones es menor que la diferencia, en valor absoluto, entre la penúltima y antepenúltima aproximación, es decir que:

$$|x_n - x_{n-1}| < |x_{n-1} - x_{n-2}|$$

Este criterio es válido únicamente en el intervalo de x_{n-1} a x_n, sin embargo al cumplirse con los primeros valores de n, puede esperarse que la convergencia continúe. También se puede demostrar que si un método es convergente, la diferencia entre las últimas dos aproximaciones es mayor o igual que el error absoluto, es decir, que esta diferencia es una cota del error absoluto, con lo cual se puede escribir:

$$|x_n - x_{n-1}| \geq e_a$$

entonces, si tenemos un método numérico que produzca una sucesión $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, que converja a la respuesta buscada, se podrá obtener x con cualquier exactitud dada, determinando adecuadamente el valor de n.

Resumiendo los resultados del ejemplo I.1, se obtiene lo siguiente:

Número de Términos	Aproximación del número e	Error Absoluto	Diferencias sucesivas
n	e_n	e_a	$\lvert e_n - e_{n-1} \rvert$
1	1	1.71828	-
2	2	0.71828	1
3	2.5	0.21828	0.5
4	2.66667	0.01898	0.16667

Como se puede observar en los resultados anteriores, los valores de la última columna disminuyen a medida que n aumenta y en todos los casos $|e_n - e_{n-1}| > e_a$, lo cual verifica los criterios establecidos.

INTRODUCCION

El problema de obtener las soluciones o ráices de una ecuación algebraica o trascendente de la forma $F(x) = 0$, es un problema que se presenta frecuentemente dendro del campo de la ingeniería. Debido a ello, el desarrollo de métodos que nos permiten solucionarlos es amplio. En este capítulo se presentan algunos métodos para determinar las raíces reales o complejas de ecuaciones de este tipo.

II.1 CARACTERISTICAS DE LOS METODOS DE APROXIMACIONES SUCESIVAS

Los métodos de aproximaciones sucesivas son aquellos en los que a partir de una *primera aproximación* a la solución de una ecuación y mediante la aplicación de una fórmula de recurrencia, que consiste en una función que relaciona dos o más elementos de una sucesión particular de números, se obtiene una *mejor aproximación* a la solución.

Es importante hacer notar que aunque reciban el nombre de métodos aproximados, cuando la solución *converge* es tan satisfactoria como la obtenida por métodos exactos, siendo la única limitación la *exactitud* proporcionada por el número de dígitos empleados durante el cálculo, o sea, el error por redondeo o truncamiento.

De todos los métodos de aproximaciones sucesivas existentes, citaremos algunos con los cuales se ilustrarán las características anteriores.

II.2 METODO DE BISECCION

Este método parte de un intervalo $[x_1, x_2]$ en el cual se encuentra una de las raíces, es decir que $F(x_1)$ y $F(x_2)$ tienen signos contrarios. El método consiste en valuar la función $F(x)$, continua y derivable, en el punto medio del intervalo x_1, x_2 (ver figura II.1). Si $F(x_M)$ y $F(x_1)$ tienen signos contrarios, se reducirá el intervalo de x_1 a x_M, ya que dentro de este nuevo intervalo se encuentra la raíz buscada. Al repetir este proceso hasta lograr que el intervalo sea más pequeño que una tolerancia prefijada, el último valor x_M será una buena aproximación de la raíz.

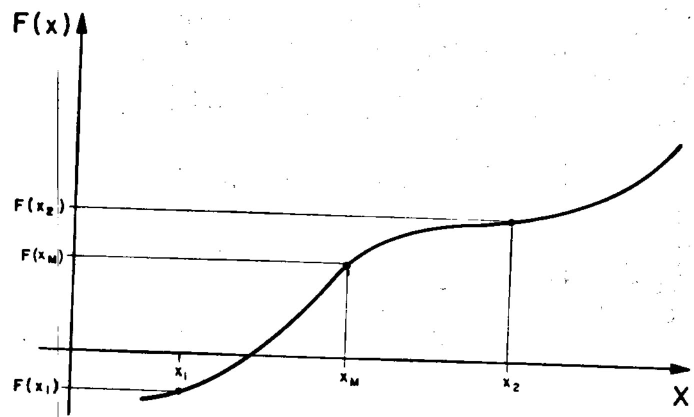


Figura II.1

Ejemplo II.1

Determinar la raíz real positiva de la siguiente ecuación con dos cifras decimales exactas:

$$x^3 - x - 1 = 0$$

Tabulando para valores positivos:

x	F(x)
1.000	- 1.000
2.000	5.000

se observa que la raíz se encuentra entre $1 < x < 2$

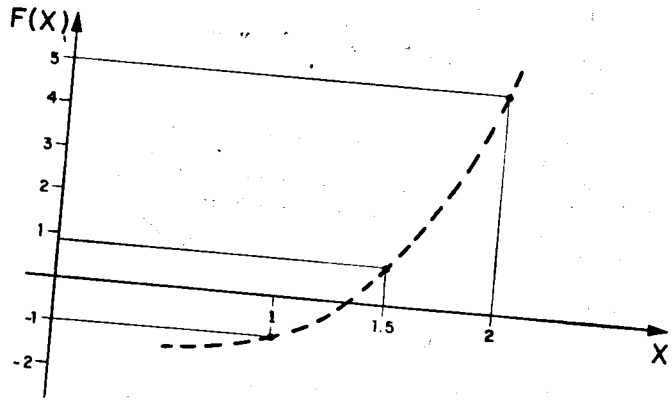


Figura II.2

El punto medio x_M de este intervalo es:

$$x_M = \frac{1 + 2}{2} = 1.5$$

y su ordenada:

$$F(x_M) = (1.5)^3 - 1.5 - 1 = 0.875$$

como este valor es positivo y $F(x_1)$ es negativo, implica que la raíz se encuentra entre 1 y 1.5, por lo tanto se elimina el punto $x_2 = 2$ quedando el nuevo intervalo comprendido entre $1.0 < x < 1.5$

x	F(x)
1.000	- 1.000
1.500	0.875

procediendo de igual forma el punto medio del nuevo intervalo es:

$$x_M = \frac{1.000 + 1.500}{2} = 1.250$$

y:

$$F(x_M) = (1.25)^3 - 1.25 - 1 = -0.297$$

ahora se elimina el punto $x_1 = 1$ y el siguiente intervalo queda:

x	F(x)
1.250	- 0.297
1.500	0.875

procediendo reiteradamente en esta forma se obtiene:

x	F(x)
1.250	- 0.297
1.375	0.225

x	F(x)
1.313	- 0.049
1.375	0.225

x	F(x)
1.313	- 0.049
1.344	0.084

x	F(x)
1.313	- 0.049
1.329	0.018

x	F(x)
1.321	- 0.016
1.329	0.018

x	F(x)
1.321	- 0.016
1.325	0.001

de aquí se puede afirmar que la raíz buscada es:

$$R = 1.32$$

con dos cifras decimales exactas.

II.3 METODO DE APROXIMACIONES SUCESIVAS

Sea una ecuación algebráica o trascendente cualquiera:

$$F(x) = 0 \quad \ldots (1)$$

sumando x en ambos miembros se obtiene:

$$F(x) + x = x \quad \ldots (2)$$

cuyo miembro izquierdo es otra función de x que se define como:

$$G(x) = F(x) + x \quad \ldots (3)$$

sustituyendo la expresión (3) en la (2) se obtiene:

$$x = G(x) \quad \ldots (4)$$

obsérvese que cualquier ecuación puede presentarse en esta forma, siguiendo el procedimiento anterior.

Si $x = a$ es una raíz de la ecuación (1), implica que:

$$F(a) = 0$$

o bien, sustituyendo en la expresión (4):

$$a = G(a) \quad \ldots (5)$$

El método de aproximaciones sucesivas consiste en sustituir un *valor inicial* (x_0) aproximado a la raíz, en el segundo miembro de la expresión (4). Si el valor inicial proporcionado es la raíz, se deberá cumplir la expresión (5), esto es:

$$x_0 = G(x_0)$$

En realidad esto es difícil de que ocurra, ya que el valor inicial proporcionado x_0 es solamente un valor cercano a la raíz, entonces:

$$x_0 \neq G(x_0) \quad \text{o bien,} \quad x_1 = G(x_0)$$

donde x_1 será la nueva aproximación de la raíz a. Sustituyendo x_1 en el segundo miembro de la expresión (4), se obtiene el siguiente valor:

$$x_2 = G(x_1)$$

Procediendo reiteradamente en esta forma, la n-ésima aproximación es:

$$\boxed{\begin{array}{l} x_n = G(x_{n-1}) \\ n = 1, 2, 3, \ldots \end{array}} \qquad \ldots (6)$$

De acuerdo con lo visto en el capítulo anterior, puede afirmarse que si el método converge, la diferencia en valor absoluto entre los valores proporcionados en dos iteraciones sucesivas será cada vez más pequeña a medida que n aumente y con esto se tendrá un criterio para saber cuándo terminar la aplicación del método.

Ejemplo II.2

Obtener la raíz negativa de la siguiente ecuación algebraica, utilizando el método de aproximaciones sucesivas.

$$e^x \operatorname{sen} x - \frac{1}{2} x = 0$$

La función $F(x)$ es:

$$F(x) = e^x \operatorname{sen} x - \frac{1}{2} x$$

y la función $G(x)$, definida en la expresión (3) es:

$$G(x) = e^x \operatorname{sen} x + \frac{1}{2} x$$

utilizando la expresión (6), tendremos la ecuación de recurrencia:

$$x_n = e^{x_n} \operatorname{sen} x_n + \frac{1}{2} x_n \qquad \ldots (a)$$

$$n = 1, 2, 3, \ldots$$

aplicándola para $n = 1$ se obtiene:

$$x_1 = G(x_0) = e^{x_0} \operatorname{sen} x_0 + \frac{1}{2} x_0 \quad \cdots \text{(b)}$$

para determinar el valor inicial x_0 se puede tabular la función $F(x)$, para diferentes valores de x cercanos al origen como sigue:

x	F(x)
0.0	0.000
-0.2	-0.063
-0.4	-0.061
-0.6	-0.010
-0.8	0.078
-1.0	0.190

De la tabla se observa que $x = 0$ es una raíz de la ecuación, dado que $F(0) = 0$ (solución trivial), pero se puede ver que existe una raíz negativa entre -0.6 y -0.8, por lo tanto un valor inicial x_0 aproximado a esta raíz se puede estimar con el promedio:

$$x_0 = \frac{-0.6 - 0.8}{2} = -0.7$$

Otro procedimiento para obtener x_0 es reescribir la ecuación como sigue:

$$e^x \operatorname{sen} x - \frac{1}{2} x = 0$$

$$e^x \operatorname{sen} x = \frac{1}{2} x$$

que equivale al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} y = e^x \operatorname{sen} x \\ y = \frac{1}{2} x \end{array} \right. \quad \cdots \text{(c)}$$

graficando (c) se obtiene:

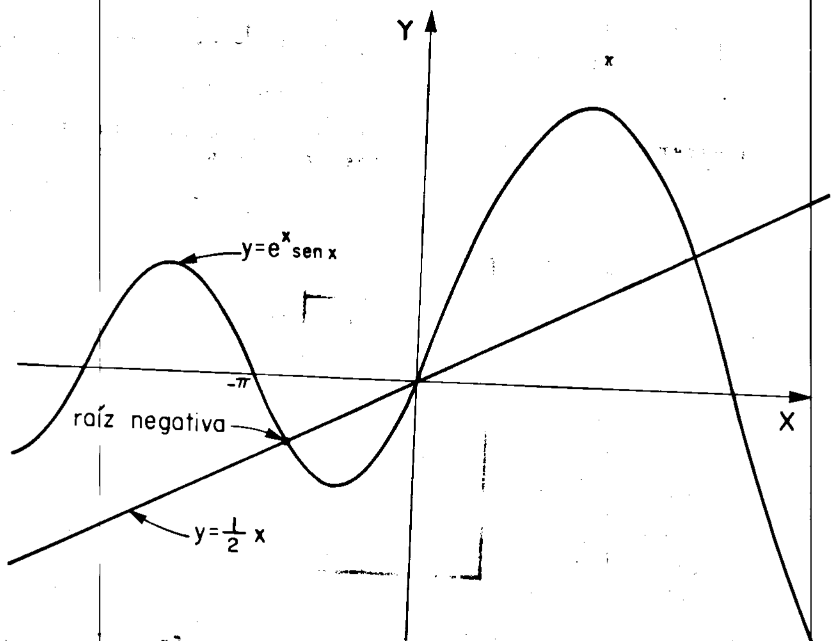


Figura II.3

De la gráfica se aprecia que la raíz negativa se encuentra en o y $-\pi$, de aquí que el ~~valor~~ x_0 se estima como la parte media del intervalo:

$$x_0 = -\frac{\pi}{2} = -1.571$$

obsérvese que este valor difiere del valor inicial x_0 que se obtuvo al tabular la función, pero cualquiera de los dos es correcto, ya que son solamente una primera aproximación a la raíz. Para el desarrollo del presente ejemplo se sustituirá el valor $x_0 = -0.7$ en la ecuación (b), por lo que la siguiente aproximación a la raíz es:

$$x_1 = e^{-0.7}\,\text{sen}\,(-0.7) + \frac{1}{2}\,(-0.7)$$

$$x_1 = -0.670$$

Aplicando la ecuación de recurrencia (a) reiteradamente se obtiene:

$n = 2$; $x_2 = e^{-0.670}$ sen(-0.670) + 0.5(-0.670) = -0.653

$n = 3$; $x_3 = e^{-0.653}$ sen(-0.653) + 0.5(-0.653) = -0.643

$n = 4$; $x_4 = e^{-0.643}$ sen(-0.643) + 0.5(-0.643) = -0.636

$n = 5$; $x_5 = e^{-0.636}$ sen(-0.636) + 0.5(-0.636) = -0.633

$n = 6$; $x_6 = e^{-0.633}$ sen(-0.633) + 0.5(-0.633) = -0.630

$n = 7$; $x_7 = e^{-0.630}$ sen(-0.630) + 0.5(-0.630) = -0.629

$n = 8$; $x_8 = e^{-0.629}$ sen(-0.629) + 0.5(-0.629) = -0.628

$n = 9$; $x_9 = e^{-0.628}$ sen(-0.628) + 0.5(-0.628) = -0.628

$n = 10$; $x_{10} = e^{-0.628}$ sen(-0.628) + 0.5(-0.628) = -0.627

$n = 11$; $x_{11} = e^{-0.627}$ sen(-0.627) + 0.5(-0.627) = -0.627

$n = 12$; $x_{12} = e^{-0.627}$ sen(-0.627) + 0.5(-0.627) = -0.627

de estas iteraciones se puede observar que conforme "n" crece, los valores que se obtienen son muy semejantes entre sí; lo que significa que el método va siendo convergente al valor -0.627 que es la raíz buscada.

I.3.1 CONVERGENCIA DEL METODO DE APROXIMACIONES SUCESIVAS

Para hacer un análisis de la convergencia de este método partiremos de las expresiones (5) y (6). Restándolas miembro a miembro se obtiene:

$$a - x_n = G(a) - G(x_{n-1})$$

multiplicando el segundo miembro de la ecuación por:

$$\frac{a - x_{n-1}}{a - x_{n-1}}$$

$$a - x_n = \left[\frac{G(a) - G(x_{n-1})}{a - x_{n-1}}\right] (a - x_{n-1})$$

aplicando el *teorema del valor medio del cálculo diferencial*:

$$a - x_n = G'(\tau)\ (a - x_{n-1});\quad x_{n-1} < \tau < a$$

despejando $G'(\tau)$:

$$G'(\tau) = \frac{a - x_n}{a - x_{n-1}}\ ;\quad x_{n-1} < \tau < a \qquad \ldots (7)$$

sustituyendo n por k, donde k será una iteración cualquiera, comprendida entre la primera y la n-ésima, y analizando el segundo miembro de la ecuación se puede ver que para que el cociente sea menor que la unidad, se debe cumplir lo siguiente:

$$\left|a - x_k\right| < \left|a - x_{k-1}\right| \qquad \ldots (8)$$

esto quiere decir que la diferencia en valor absoluto entre el valor de la raíz a y el último valor aproximado calculado x_k, es menor que la diferencia en valor absoluto entre el valor de la raíz y el penúltimo valor calculado x_{k-1}, lo cual implica que el valor x_k está más cerca de la raíz que el valor x_{k-1}, por lo tanto, se puede afirmar que en la k-ésima iteración el método se está aproximando a la raíz, o está siendo convergente a la raíz.

La expresión (8) se puede escribir como:

$$\left|\frac{a - x_k}{a - x_{k-1}}\right| < 1; \quad x_{k-1} < \tau < a$$

por último, sustituyendo en la expresión (7):

$$\boxed{\begin{matrix} |G'(\tau)| < 1 \\ x_{k-1} < x < a \end{matrix}} \qquad \ldots (9)$$

lo cual significa que el método converge cuando la derivada de $G(x)$ en cualquier punto del intervalo (x_{k-1}, a) es menor que la unidad.

Por otra parte el método será divergente cuando:

$$|a - x_k| > |a - x_{k-1}| \text{ ó } |G'(x)| > 1$$

esto implica que el último valor calculado x_k está más lejano de la raíz a que la penúltima aproximación x_{k-1}.

Cuando suceda que $|a - x_k| = |a - x_{k-1}|$ implicará una condición de estancamiento, ya que la penúltima aproximación es igual a la última, esto quiere decir que el método no avanza hacia la raíz, aunque en este caso tampoco se aleja.

I.3.2 INTERPRETACION GEOMETRICA DEL METODO DE APROXIMACIONES SUCESIVAS

Para interpretar geométricamente el método, se expresa la ecuación $x = G(x)$ como sigue:

$$\begin{aligned} y &= x \\ y &= G(x) \end{aligned} \qquad \ldots (10)$$

Las figuras II.4.a y II.4.b., muestran el comportamiento geométrico del método cuando $|G'(x)| < 1$ en las cuales se observa que el método converge a la raíz.

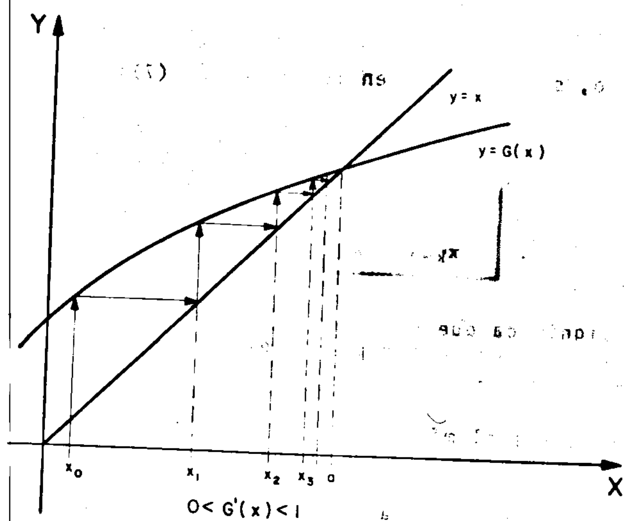


Figura II.4.a

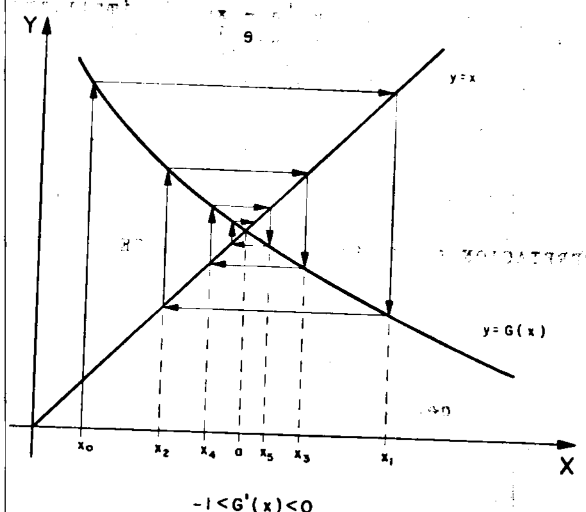


Figura II.4.b

Cuando $|G'(x)| > 1$ el método diverge y el comportamiento geométrico de éste se muestra en las figuras II.5.a y II.5.b.

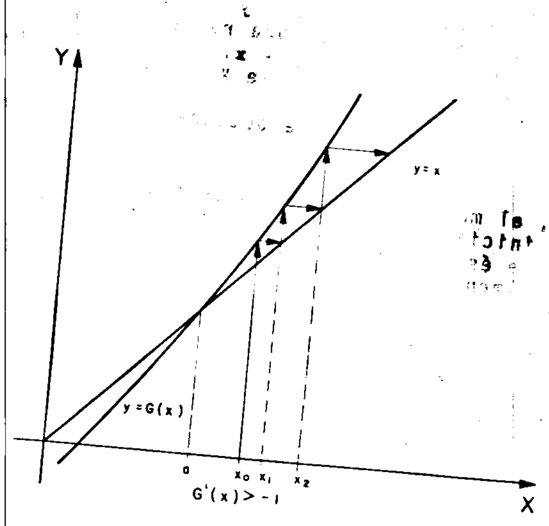


Figura II.5.a

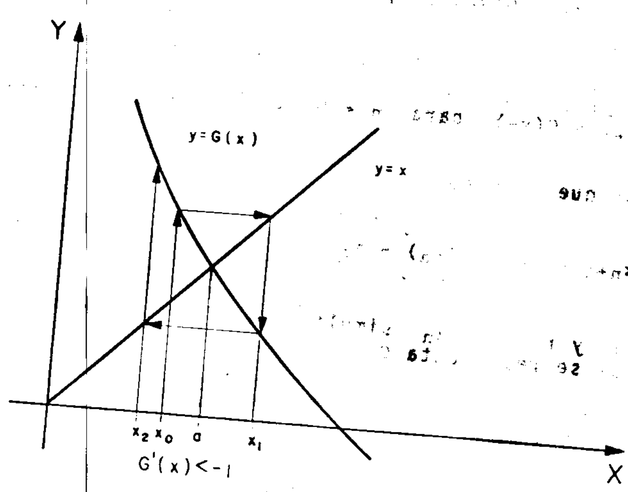


Figura II.5.b

Este método iterativo considera un valor inicial x_0 aproximado a la raíz; toma como siguiente aproximación $x_1 = G(x_0)$, que geométricamente equivale a trazar una recta vertical desde x_0 hasta $G(x_0)$, y el hecho de igualar x_1 con $G(x_0)$ equivale a trazar una recta horizontal que va desde $G(x_0)$ hasta la recta $y = x$. Finalmente, la proyección de este punto sobre el eje X representa el valor x_1. Repitiendo el proceso a partir de la abscisa x_1 se obtiene x_2, y a partir de x_2 se obtiene x_3, etcétera.

Resumiendo, el método consiste en lo siguiente: a partir de un valor inicial x_0, dirigirse verticalmente a la curva $y = G(x)$ de ésta, horizontalmente a la recta $y = x$, de nueve verticalmente a la curva, horizontalmente a la recta, etcétera.

II.4 METODO DE NEWTON - RAPHSON

Partiendo de la ecuación de recurrencia del método de aproximaciones sucesivas:

$$x_n = G(x_{n-1}) \quad \text{para} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

o bien:

$$x_{n+1} = G(x_n) \quad \text{para} \quad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad \ldots (11)$$

ecuación que se puede escribir en la forma:

$$x_{n+1} = x_n + G(x_n) - x_n \quad \text{para} \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

al sumar y restar x_n simultáneamente en el segundo miembro y si se representa $G(x_n) - x_n$ con Δx_n se obtiene:

$$x_{n+1} = x_n + \Delta x_n \qquad \ldots (12)$$

El método de Newton - Raphson consiste en afectar el incremento Δx_n en la expresión (12) con un factor de peso α obteniéndose la siguiente ecuación de recurrencia:

$$x_{n+1} = x_n + \alpha \Delta x_n \qquad \ldots (13)$$

α se determinará en forma tal, que en vez de dirigirse horizontalmente de la curva a la recta (ver figuras II.4.a y II.4.b), se vaya por la tangente en el punto de coordenadas (x_n, $G(x_n)$) mostrada en la siguiente figura.

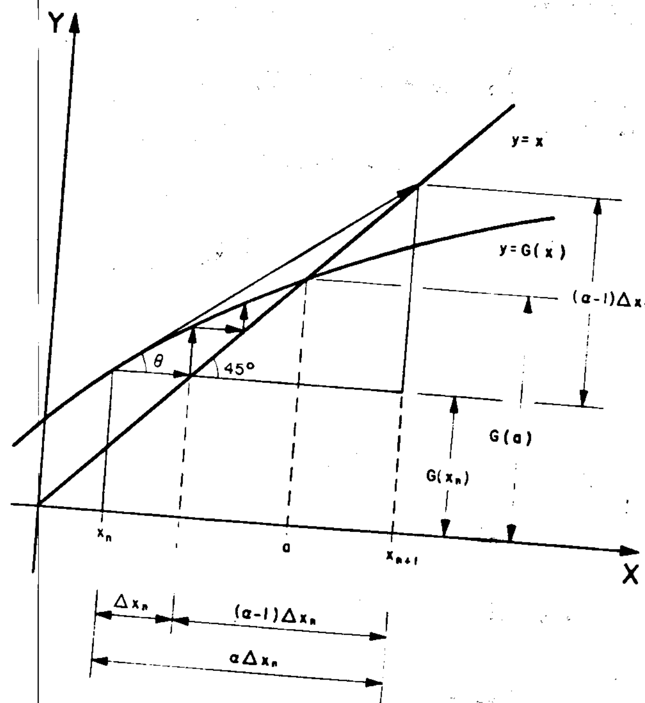


Figura II.6

A partir de los datos que proporciona la figura anterior, se puede conocer el valor de α efectuando el siguiente razonamiento, se observa que:

$$\tan\ \theta = \frac{(\alpha - 1)\ \Delta\ x_n}{\alpha\ \Delta\ x_n}$$

pero también:

$$\tan\ \theta = G'(x_n)$$

por lo tanto:

$$G'(x_n) = \frac{\alpha - 1}{\alpha}$$

despejando el valor de α:

$$\alpha = \frac{1}{1 - G'(x_n)}$$

sustituyendo en la expresión (13):

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{1 - G'(x_n)} \Delta x_n \qquad \ldots (14)$$

pero:

$$\Delta x_n = G(x_n) - x_n$$

y:

$$G(x_n) = F(x_n) + x_n \qquad \ldots (15)$$

con lo que se obtiene:

$$\Delta x_n = F(x_n) + x_n - x_n \qquad \ldots (16)$$

derivando la expresión (15):

$$G'(x_n) = F'(x_n) + 1 \qquad \ldots (17)$$

sustituyendo las expresiones (16) y (17) en la expresión (14):

$$x_{n+1} = x_n + \frac{F(x_n)}{1 - (F'(x_n) + 1)}$$

finalmente, simplificando:

$$\boxed{\begin{array}{l} x_{n+1} = x_n - \dfrac{F(x_n)}{F'(x_n)} \\ n = 0, 1, 2, \ldots \end{array}} \qquad \ldots (18)$$

Esta expresión es la ecuación de recurrencia del método de Newton - Raphson conocido también como *método de las tangentes.*

Ejemplo II.3

Obtener la raíz positiva de la siguiente ecuación trascendente, con tres cifras decimales exactas:

$$2 \cos x - e^x = 0$$

la función $F(x)$ es:

$$F(x) = 2 \cos x - e^x$$

y su derivada:

$$F'(x) = - 2 \operatorname{sen} x - e^x$$

sustituyendo en la expresión (18) se obtiene la siguiente ecuación de recurrencia:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(2 \cos x_n - e^{x_n})}{(- 2 \operatorname{sen} x_n - e^{x_n})} \qquad \ldots (a)$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots$$

para proporcionar un valor inicial x_0 se puede tabular la función $F(x)$ para valores positivos, o bien, en este caso se puede reescribir la ecuación de la siguiente manera:

$$2 \cos x = e^x$$

ahora en forma paramétrica:

$$y = 2 \cos x$$

$$y = e^x$$

Graficando estas dos funciones en un plano (x, y) la raíz se encontrará en la intersección de las curvas.

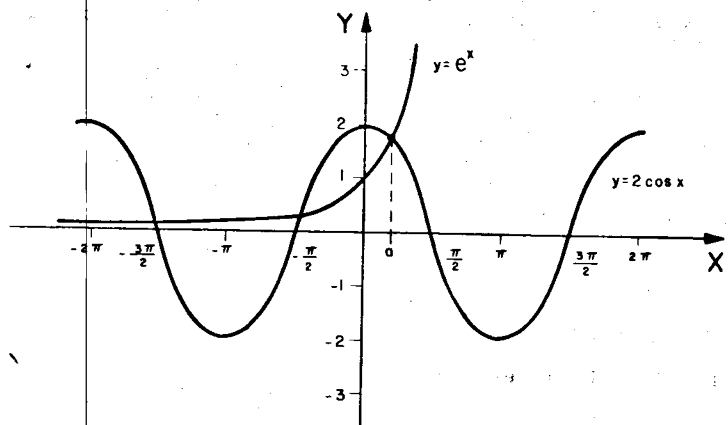


Figura II.7

De la figura II.7, se observa que la ecuación tiene un número infinito de raíces negativas y sólo una positiva, además se puede afirmar que la raíz positiva se encuentra entre 0 y $\pi/2$ por lo que un valor inicial x_0 apropiado será el punto medio del intervalo.

$$x_0 = \frac{0 + \frac{\pi}{2}}{2} = \frac{\pi}{4} = 0.785$$

Luego, aplicando reiteradamente la fórmula de recurrencia (a) se obtiene:

$n = 0;$

$$x_1 = x_0 - \frac{(2 \cos x_0 - e^{x_0})}{(- 2 \operatorname{sen} x_0 - e^{x_0})}$$

$$x_1 = 0.785 - \frac{(2 \cos (0.785) - e^{0.785})}{(-2 \text{ sen } (0.785) - e^{0.785})}$$

$$x_1 = 0.569$$

Cabe aclarar que los argumentos de las funciones trigonométricas se expresan en radianes.

$n = 1;$

$$x_2 = x_1 - \frac{(2 \cos x_1 - e^{x_1})}{(-2 \text{ sen } x_1 - e^{x_1})}$$

$$x_2 = 0.569 - \frac{(2 \cos (0.569) - e^{0.569})}{(-2 \text{ sen } (0.569) - e^{0.569})}$$

$$x_2 = 0.540$$

$n = 2;$

$$x_3 = x_2 - \frac{(2 \cos x_2 - e^{x_2})}{(-2 \text{ sen } x_2 - e^{x_2})}$$

$$x_3 = 0.540 - \frac{(2 \cos (0.540) - e^{0.540})}{(-2 \text{ sen } (0.540) - e^{0.540})}$$

$$x_3 = 0.540$$

como $x_2 = x_3$, **se** puede considerar que **la raíz es:**

$$\boxed{R = 0.540}$$

con tres cifras decimales exactas.

II.4.1 CONVERGENCIA DEL METODO DE **NEWTON** - RAPHSON

Para determinar en qué casos converge este método, se partirá de la comparación de las expresiones (9) y (11). La expresión que define al método de Newton - Raphson se puede escribir como:

$$x_{n+1} = G(x_n)$$

donde en este caso $G(x)$ se define de la siguiente forma:

$$G(x) = x - \frac{F(x)}{F'(x)}$$

si se sabe que el método de aproximaciones sucesivas converge siempre que $|G'(\tau)| < 1$ para $x_{k-1} < \tau < a$, entonces derivando $G(x)$:

$$G'(x) = 1 - \frac{(F'(x))^2 - F(x)\ F''(x)}{(F'(x))^2}$$

simplificando:

$$G'(x) = 1 - \frac{(F'(x))^2}{(F'(x))^2} + \frac{F(x)\ F''(x)}{(F'(x))^2}$$

y por analogía con el método de aproximaciones sucesivas el método será convergente siempre que:

$$\boxed{\begin{array}{l} \left|\dfrac{F(\tau)\ F''(\tau)}{(F'(\tau))^2}\right| < 1 \\ x_{k-1} < \tau < a \end{array}}$$

II.4.2 INTERPRETACION GEOMETRICA DEL METODO DE NEWTON - RAPHSON

El comportamiento del método para las diferentes pendientes de $G(x)$, se muestra en las figuras II.8.a y II.8.b.

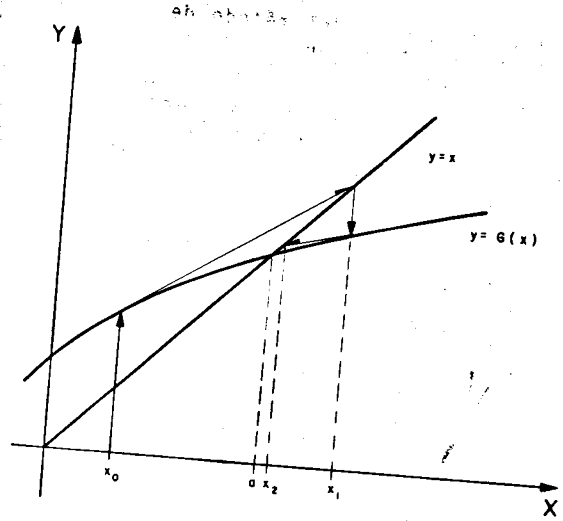


Figura II.8.a

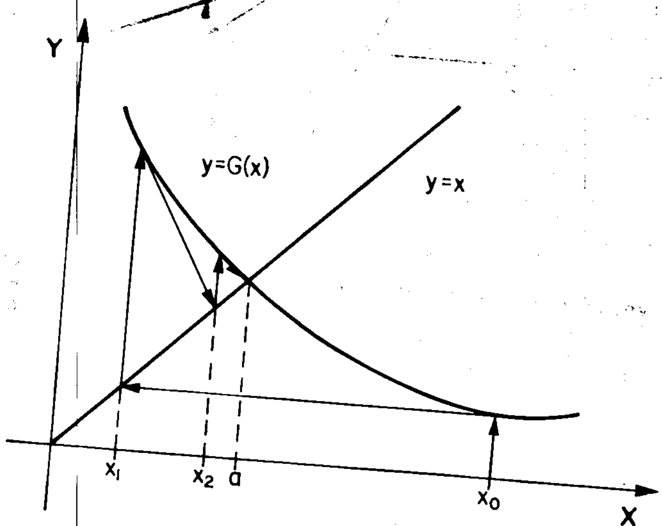


Figura II.8.b

Método de Newton-Raphson para $y = G(x)$.

Debido a que la deducción del método de Newton - Raphson se hizo a partir del método de aproximaciones sucesivas, en las figuras II.8.a y II.8.b se graficaron en un plano x y, las ecuaciones $y = G(x)$ y $y = x$ con el fin de explicar su comportamiento geométrico; pero como este método trabaja directamente con la función $F(x)$, en la figura II.9 se presenta el comportamiento geométrico del método graficando las ecuaciones $y = F(x)$ y $y = 0$.

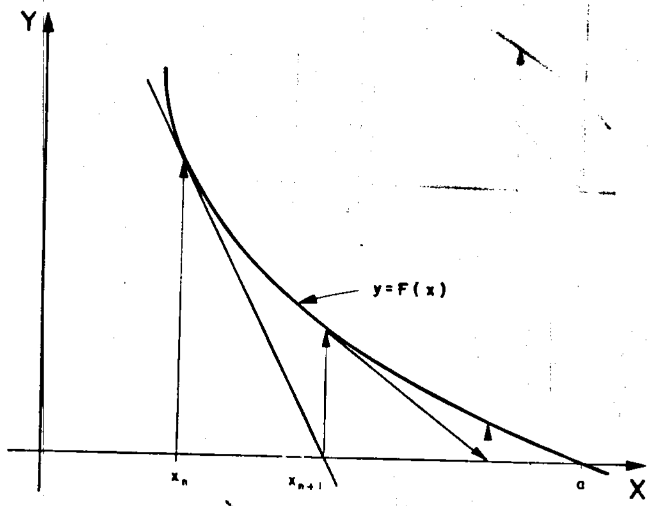


Figura II.9

Para verificar que lo anterior es correcto, basta con obtener la ecuación de la recta tangente que pasa por el punto de coordenadas $[x_n, F(x_n)]$ y tiene a $F'(x_n)$ como pendiente, partiendo de la forma general de una recta:

$$(y - y_0) = m(x - x_0)$$

siendo en este caso:

$$y_0 = F(x_n)$$

$$x_0 = x_n$$

$$m = F'(x_n)$$

sustituyendo en la forma general se obtiene:

$$(y - F(x_n)) = F'(x_n)(x - x_n) \qquad \dots (19)$$

si se desea conocer el valor de la abscisa en el punto de intersección de esta recta con el eje X, se podrá lograr sustituyendo el valor de su ordenada en ese punto, que es cero, en la expresión (19), despejando el valor de x:

$$(0 - F(x_n)) = F'(x_n)(x - x_n)$$

$$- F(x_n) = F'(x_n)\, x - F'(x_n)\, x_n$$

$$F'(x_n)\, x_n - F(x_n) = F'(x_n)\, x$$

$$x = \frac{F'(x_n)}{F'(x_n)}\, x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)}$$

$$x = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)}$$

esto indica que x es el valor de la nueva aproximación x_{n+1} de acuerdo con el método de Newton - Raphson.

II.5 METODO DE LA DOBLE DIVISION SINTETICA

El método de la doble división sintética es una aplicación directa del método de Newton-Raphson para resolver exclusivamente ecuaciones algebraicas.

Debido a que este método sólo es aplicable cuando F(x) es un polinomio, la expresión (18) se puede representar como:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{P(x_n)}{P'(x_n)} \qquad \dots (20)$$

donde $P(x)$ es un polinomio de la forma:

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$$

el valor de $P(x)$ valuado para cuando $x = x_n$ puede determinarse considerando el residuo R que resulta de dividir $P(x)$ entre $(x - x_n)$:

$$P(x) = (x - x_n)\ Q(x) + R \qquad \ldots (21)$$

y haciendo $x = x_n$ se obtiene:

$$P(x_n) = R \qquad \ldots (22)$$

para obtener el denominador $P'(x_n)$, se deriva la expresión (21):

$$P'(x) = (x - x_n)\ Q'(x) + Q(x)$$

haciendo $x = x_n$:

$$P'(x_n) = Q(x_n)$$

donde $Q(x_n)$ puede determinarse como el residuo que resulta de dividir $Q(x)$ entre $(x - x_n)$, ya que:

$$Q(x) = (x - x_n)\ S(x) + R^*$$

haciendo $x = x_n$:

$$Q(x_n) = R^* \qquad \ldots (23)$$

sustituyendo las expresiones (22) y (23) en (20):

$$\boxed{\begin{array}{l} X_{n+1} = X_n - \dfrac{R_n}{R_n^*} \\ n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \end{array}} \qquad \ldots (24)$$

Esta última ecuación de recurrencia es el método de Newton-Raphson para resolver ecuaciones algebraicas, donde R_n representa el residuo que resulta de dividir $P(x)$ entre $(x - x_n)$ en la n-ésima iteración y, R^*_n representa el residuo que resulta de dividir $Q(x)$ entre $(x - x_n)$ también en la n-ésima iteración.

Ejemplo II.4

Obtener la raíz positiva de la siguiente ecuación algebraica con dos cifras decimales exactas:

$$x^4 + 2x^3 + x^2 - x - 6 = 0$$

aplicando la regla de los signos de Descartes:

RAICES	I	II
positivas	1	1
negativas	3	1
complejas	0	2
Total	4	4

dado que el polinomio de la ecuación tiene coeficientes enteros se puede aplicar el teorema sobre posibles raíces racionales, con lo que se obtiene:

$\frac{b}{c}$ donde b será factor de $a_n = |6|$
c será factor de $a_0 = 1$

por lo que las posibles raíces racionales son:

$$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$$

probando por división sintética, para valores positivos:

1	1	2	1	-1	-6
		1	3	4	3
	1	3	4	3	$\boxed{-3}$

2	1	2	1	-1	-6
		2	8	18	34
	1	4	9	17	$\boxed{28}$

debido a que se presenta un cambio de signo, se puede asegurar que la raíz positiva de la ecuación algebraica es irracional y se encuentra entre 1 y 2, para obtenerla se utilizará el método de la doble división sintética. El valor inicial x_0 será la media del intervalo en el cual se encuentra la raíz:

$$x_0 = \frac{1 + 2}{2} = 1.5$$

utilizando la expresión (24) para $n = 0$:

$$x_1 = x_0 - \frac{R_0}{R_0^*}$$

realizando la doble división sintética:

1.50	1.00	2.00	1.00	-1.00	-6.00	
		1.50	5.25	9.38	12.57	
	1.00	3.50	6.25	8.38	$\boxed{6.57}$	R_0
		1.50	7.50	20.63		
	1.00	5.00	13.75	$\boxed{29.01}$	R_0^*	

sustituyendo:

$$x_1 = 1.50 - \frac{6.57}{29.01} = 1.27$$

$$x_1 = 1.27$$

aplicando reiteradamente la ecuación de recurrencia (24) se obtiene:

$n = 1;$

$$x_2 = x_1 - \frac{R_1}{R_1^*}$$

1.27	1.00	2.00	1.00	-1.00	-6.00	
		1.27	4.15	6.54	7.04	
	1.00	3.27	5.15	5.54	$\boxed{1.04}$	R_1
		1.27	5.76	13.86		
	1.00	4.54	10.91	$\boxed{19.40}$	R_1^*	

$$x_2 = 1.27 - \frac{1.04}{19.40} = 1.21$$

$$x_2 = 1.21$$

$n = 2;$

$x_3 = x_2 - \frac{R_2}{R_2^*}$

1.21	1.00	2.00	1.00	-1.00	-6.00	
		1.21	3.88	5.90	5.93	
	1.00	3.21	4.88	4.90	$\boxed{-0.07}$	R_2
		1.21	5.34	12.37		
	1.00	4.42	10.22	$\boxed{17.27}$		R_2^*

$$x_3 = 1.21 - \frac{(-0.07)}{(17.27)} = 1.21$$

como $x_2 = x_3$ se puede considerar que la raíz real positiva es:

$R_q = 1.21$

con dos cifras decimales exactas.

II.6 METODO DE LOS FACTORES CUADRATICOS

Al igual que el de la doble división sintética, este método es aplicable para resolver solamente ecuaciones algebraicas.

El método de los factores cuadráticos o método de Lin tiene la ventaja de obtener las raíces complejas de una ecuación algebraica, aunque es igual de eficiente para obtener las raíces reales.

Si se tiene una ecuación algebraica $P(x) = 0$ donde $P(x)$ es:

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots, + a_{n-1}x + a_n \qquad (25)$$

de este polinomio se puede obtener un factor cuadrático de la forma:

$$x^2 + px + q$$

con lo que la expresión (25) se puede expresar como:

$$P(x) = (x^2+px+q)\ (b_0x^{n-2} + b_1x^{n-3} + b_2x^{n-4} + \ldots + b_{n-3}x + b_{n-2}) + Rx + S \qquad (26)$$

efectuando la multiplicación:

$$P(x) = b_0x^n+b_0px^{n-1}+b_0qx^{n-2}+b_1x^{n-1}+pb_1x^{n-2}+qb_1x^{n-3}+b_2x^{n-2}+pb_2x^{n-3}+$$

$$+ qb_2x^{n-4}+\ldots+b_{n-3}x^3+pb_{n-3}x^2+qb_{n-3}x+b_{n-2}x^2+pb_{n-2}x+qb_{n-2}+Rx+S \qquad (27)$$

igualando coeficientes de las mismas potencias en los segundos miembros de (25) y (27) y despejando los coeficientes del polinomio reducido:

$$\left.\begin{array}{ll}
a_0 = b_0 & b_0 = a_0 \\
a_1 = b_1 + pb_0 & b_1 = a_1 - pb_0 \\
a_2 = b_2 + pb_1 + qb_0 & b_2 = a_2 - pb_1 - qb_0 \\
\vdots & \vdots \\
a_{n-1} = R + pb_{n-2} + qb_{n-3} & R = a_{n-1} - pb_{n-2} - qb_{n-3} \\
a_n = S + qb_{n-2} & S = a_n - pb_{n-2}
\end{array}\right\} \ldots(28)$$

en general, los coeficientes del polinomio reducido están dados por:

$$\boxed{\begin{array}{l} b_k = a_k - pb_{k-1} - qb_{k-2} \\ k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ (n-2) \\ b_{-1} = b_{-2} = 0 \end{array}} \quad \ldots\ (29)$$

y los coeficientes del residuo R y S, se calculan directamente con:

$$\boxed{\begin{aligned} R &= a_{n-1} - pb_{n-2} - qb_{n-3} \\ S &= a_n - qb_{n-2} \end{aligned}} \qquad \ldots (30)$$

Ahora bien, analizando la expresión (26) para que $x^2 + px + q$ sea un factor del polinomio $P(x)$, se requiere que R y S sean iguales a cero, por lo tanto:

$$R \equiv 0 = a_{n-1} - pb_{n-2} - qb_{n-3} \qquad \ldots (31)$$

$$S \equiv 0 = a_n - qb_{n-2} \qquad \ldots (32)$$

despejando p y q de las expresiones (30):

$$p = \frac{a_{n-1} - qb_{n-3}}{b_{n-2}} \qquad \ldots (33)$$

$$q = \frac{a_n}{b_{n-2}} \qquad \ldots (34)$$

los coeficientes $b_0, b_1, b_2 \ldots b_{n-2}$ del polinomio reducido, se podrían obtener de la expresión (29) siempre y cuando se conozcan los valores de p y q.

A partir de valores iniciales para p y q y mediante un procedimiento iterativo, se pueden llegar a determinar estos valores con la precisión que se requiera. Para ello se definen los incrementos Δp y Δq como:

$$\Delta p = p^* - p; \qquad \Delta q = q^* - q \qquad \ldots (35)$$

donde p^* y q^* son los nuevos valores calculados. Considerando que estos valores están dados por (33) y (34) respectivamente se tiene:

$$p^* = \frac{a_{n-1} - qb_{n-3}}{b_{n-2}} \quad ; \quad q^* = \frac{a_n}{b_{n-2}}$$

sustituyendo en la expresión (35):

$$\Delta p = \frac{a_{n-1} - qb_{n-3}}{b_{n-2}} - p$$

y:

$$\Delta q = \frac{a_n}{b_{n-2}} - q$$

simplificando:

$$\Delta p = \frac{a_{n-1} - pb_{n-2} - qb_{n-3}}{b_{n-2}} \quad ; \quad \Delta q = \frac{a_n - qb_{n-2}}{b_{n-2}}$$

como el numerador de estas ecuaciones corresponde a las expresiones (30), entonces:

$$\boxed{\Delta p = \frac{R}{b_{n-2}}} \quad ; \quad \boxed{\Delta q = \frac{S}{b_{n-2}}} \qquad \ldots (36)$$

las expresiones (29), (30) y (36) definen el método de Lin. Para facilitar su aplicación se utilizará la siguiente tabla:

$p =$ $q =$								
a_0		b_0						
a_1		b_1						
a_2		b_2						
$\vdots$		$\vdots$						
a_{n-1}		R						
a_n		S						
$\Delta p =$ $\Delta q =$								

Tabla II.1

Ejemplo II.5

Obtener las raíces complejas de la siguiente ecuación algebraica con dos cifras decimales exactas:

$$x^4 - x^3 + 6x^2 - 3x + 4 = 0$$

factorizando P(x) según (26):

$$x^4 - x^3 + 6x^2 - 3x + 4 = (x^2 + px + q)(b_0x^2 + b_1x + b_2) + Rx + S = 0 \qquad (a)$$

tomando como valores iniciales de p y q:

$$p = 0; \quad q = 0$$

b_0, b_1 y b_2 se pueden obtener de la expresión (29) para k = 0, 1 y 2 respectivamente:

$$b_0 = a_0 \qquad = 1$$

$$b_1 = a_1 - pb_0 \qquad = -1$$

$$b_2 = a_2 - pb_1 - qb_0 \qquad = 6$$

R y S se obtienen con las expresiones (30):

$$R = a_3 - pb_2 - qb_1 = -3$$

$$S = a_4 - qb_2 \qquad = 4$$

por último Δp y Δq se obtienen con la expresión (36):

$$\Delta p = \frac{R}{b_2} = \frac{-3}{6} = -0.50; \quad \Delta q = \frac{S}{b_2} = \frac{4}{6} = 0.67$$

por lo tanto, p^* y q^* se obtienen despejándolos de la expresión (35):

$$p^* = p + \Delta p = 0.00 - 0.50 = -0.50$$

$$q^* = q + \Delta q = 0.00 + 0.67 = 0.67$$

sustituyendo esta primera iteración en la tabla (II.1).

<table>
<tr><td colspan="2">p =
q =</td><td colspan="2">0
0</td><td>-0.50
0.67</td></tr>
<tr><td>a_0</td><td>1</td><td>b_0</td><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td>a_1</td><td>-1</td><td>b_1</td><td>-1</td><td></td></tr>
<tr><td>a_2</td><td>6</td><td>b_2</td><td>6</td><td></td></tr>
<tr><td>a_3</td><td>-3</td><td>R</td><td>-3</td><td></td></tr>
<tr><td>a_4</td><td>4</td><td>S</td><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Δp =
Δq =</td><td colspan="2">-0.50
0.67</td><td></td></tr>
</table>

Tabla II.2

Procediendo en forma similar, si el método converge, R y S tenderán a cero, así como Δp y Δq. El método se terminará de aplicar cuando la diferencia en valor absoluto entre los dos últimos valores calculados de p, así como los de q, sean menores o iguales que una tolerancia prefijada.

$$b_0 = 1$$

$$b_1 = -1 - (-0.50)(1) = -0.50$$

$$b_2 = 6 - (-0.50)(-0.50) - 0.67(1) = 5.08$$

$$R = -3 - (-0.50)(5.08) - 0.67(-0.50) = -0.13$$

$$S = 4 - (0.67)(5.08) = 0.60$$

$$\Delta p = \frac{-0.13}{5.08} = -0.02; \quad p^* = -0.50 - 0.02 = -0.52$$

$$\Delta q = \frac{0.60}{5.08} = 0.11; \quad q^* = 0.67 + 0.11 = 0.78$$

Prosiguiendo en forma análoga, finalmente se obtiene la siguiente tabla:

p =			0	-0.50	-0.52	-0.53	-0.53	-0.53
q =			0	0.67	0.78	0.80	0.81	0.81
a_0	1	b_0	1	1.00	1.00	1.00	1.00	
a_1	-1	b_1	-1	-0.50	-0.48	-0.47	-0.47	
a_2	6	b_2	6	5.08	4.97	4.95	4.94	
a_3	-3	R	-3	-0.13	-0.04	0.00	0.00	
a_4	4	S	4	0.60	0.12	0.04	0.02	
Δp =			-0.50	-0.02	-0.01	0.00	0.00	
Δq =			0.67	0.11	0.02	0.01	0.00	

TABLA II.3

donde $p = -0.53$ y $q = 0.81$ con dos cifras decimales exactas.

Sustituyendo los últimos valores de p, q, b_0, b_1, b_2, R y S en (a):

$$x^4 - x^3 + 6x^2 - 3x + 4 = (x^2 - 0.53x + 0.81)(x^2 - 0.47x + 4.94) + (0)\,x + 0.02 = 0$$

despreciando el residuo:

$$(x^2 - 0.53x + 0.81)(x^2 - 0.47x + 4.94) = 0$$

utilizando la fórmula para resolver ecuaciones cuadráticas:

$$R_{1,2} = \frac{0.53 \pm \sqrt{(-0.53)^2 - 4(1)(0.81)}}{2(1)}$$

por lo tanto:

$$R_1 = 0.27 + 0.86i$$

$$R_2 = 0.27 - 0.86i$$

y:

$$R_{3,4} = \frac{0.47 \pm \sqrt{(-0.47)^2 - 4(1)(4.94)}}{2(1)}$$

por lo tanto:

$$R_3 = 0.24 + 2.21i$$

$$R_4 = 0.24 - 2.21i$$

II.7 APLICACIONES

Como se mencionó al principio del capítulo, el problema de obtener las raíces de una ecuación de la forma $F(x) = 0$, se presenta frecuentemente dentro del estudio de problemas relacionados con la ingeniería. A continuación se presenta un ejemplo para ilustrar una aplicación de los métodos vistos en el presente capítulo a un problema real.

Ejemplo II.6

El modelo de crecimiento de una cierta población se puede representar por la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d}{dt} P(t) = \lambda P(t) + I$$

donde:

$P(t)$ Es una función que nos proporciona el tamaño de la población para un tiempo dado.

λ Es la constante del crecimiento de la población por nacimiento en un período de tiempo.

I Es la constante de crecimiento de la población por inmigración en un período de tiempo.

La solución de la ecuación diferencial es:

$$P(t) = P_0 e^{\lambda t} + \frac{I}{\lambda} (e^{\lambda t} - 1) \qquad \ldots (a)$$

donde:

P_0 es el tamaño inicial de la población.

Suponiendo que el tamaño de la población que habitaba la Ciudad de México en enero de 1981, era de 13 millones de habitantes y un año después, (en enero de 1982), se contaba con 13 millones 838 mil, habiendo ingresado a la ciudad durante ese año 500 mil personas provenientes de la provincia o del extranjero. La tasa de crecimiento de la población por nacimientos durante el año de 1981, se puede determinar al resolver la ecuación (a) sustituyendo en ella los valores de P_0, t, I esto es:

$$13.838 \times 10^6 = 13 \times 10^6 e^{\lambda} + \frac{0.5 \times 10^6}{\lambda} (e^{\lambda} - 1)$$

Para obtener la solución de esta ecuación trascendente, se pueden utilizar cualquiera de los métodos vistos en este capítulo. A continuación se presenta un programa de computadora del método de bisección escrito en lenguaje BASIC en un equipo TRS-80-II.

***** METODO DE BISECCION *****

```
10  REM
20  REM
30  DEFDBL A-Z
40  DEF FNF(X)=13E+6*EXP(X)+(0.5E+6/X*(EXP(X)-1))-13.838E+6
50  CLS
60  INPUT " Cuales son los parametros A,B";A,B
70  LPRINT"Cuales son los parametros  A,B  ";A,B
80  INPUT " y la tolerancia";TL
90  LPRINT"y la tolerancia  ";TL
100  X0=(A+B)/2
110  CLS
120 LPRINT TAB(17);"METODO DE BISECCION"
130 LPRINT TAB(2);"Iteración"
140 LPRINT TAB(15);"Error                Aproximacion"
150 Y1=Y1+1
160 FX=FNF(X0)
170 FA=FNF(A)
180 FB=FNF(B)
190 Y=FX*FA
200 IF Y>0 THEN 230
210 B=X0
220 GOTO 240
230 A=X0
240 XN=(A+B)/2
250 D=ABS(X0-XN)
260 IF D<=TL THEN END
270 X0=XN
280 LPRINT USING "    ###";Y1;
290 LPRINT USING"    ###.##########";D;X0
300 GOTO 150
310 END
```

Las aproximaciones a la raíz que proporciona el programa son las siguientes:

METODO DE BISECCION

Iteracion	Error	Aproximacion
1	0.2499750000	0.2500750000
2	0.1249875000	0.1250875000
3	0.0624937500	0.0625937500
4	0.0312468750	0.0313468750
5	0.0156234375	0.0157234375
6	0.0078117188	0.0235351563
7	0.0039058594	0.0274410156
8	0.0019529297	0.0254880859
9	0.0009764648	0.0245116211
10	0.0004882324	0.0249998535
11	0.0002441162	0.0252439697
12	0.0001220581	0.0251219116
13	0.0000610291	0.0251829407
14	0.0000305145	0.0252134552
15	0.0000152573	0.0251981979
16	0.0000076286	0.0251905693
17	0.0000038143	0.0251943836
18	0.0000019072	0.0251924765
19	0.0000009536	0.0251915229
20	0.0000004768	0.0251910461
21	0.0000002384	0.0251912845
22	0.0000001192	0.0251914037

Con lo anterior se puede afirmar que la tasa de crecimiento de la población por nacimientos, es de 2.5191% con cuatro cifras decimales exactas.

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Utilizando el método de bisección, encontrar una solución de las siguientes ecuaciones:

   a) $e^{x-1} - 1.5x = 0$

   b) $e^{1/x} = x$

   c) $\cos x - 2x + 1 = 0$

   d) $\cos^2 x = 2 \operatorname{sen} x$

   e) $x e^x = 1$

2. Obtener una solución en cada una de las siguientes ecuaciones, aplicando el método de aproximaciones sucesivas:

   a) $e^{-x} - x = 0$

   b) $e^x = 3x$

   c) $x^3 = -e^{-x}$

   d) $\cos x - \frac{1}{2}x + 1 = 0$

3. Resolver, utilizando el método de Newton - Raphson, las siguientes ecuaciones:

   a) $\cos x - x^2 = 0$

   b) $4 \operatorname{sen} x = e^x$

   c) $2x^2 + 1 - e^x = 0$

   d) $x \tan x = 1$

   e) $4x - \tan x = 0$

   f) $2x + e^x = e^{2x}$

   g) $\operatorname{sen} x + 1 - x^2 = 0$

   h) $2 \operatorname{sen} hx = \cos hx$

   i) $e^{-x+1} \operatorname{sen} x = -1$

4. **Resolver los incisos de la pregunta 2, utilizando el método de Newton - Raphson. Comparar el procedimiento y el resultado obtenido.**

5. **Resolver los incisos de la pregunta 3, utilizando el método de aproximaciones sucesivas. Comparar el procedimiento y el resultado obtenido.**

6. **Obtener las raíces reales de las siguientes ecuaciones algebraicas, utilizando el método de la doble división sintética:**

   a) $x^3 + 3x - 1 = 0$

   b) $2x^3 - 3x + 4 = 0$

   c) $x^3 + 12.1x^2 + 13.1x + 22.2 = 0$

   d) $x^3 + 6.6x^2 - 29.05x + 22.64 = 0$

   e) $x^4 - x^3 - 2x^2 - 6x - 4 = 0$

   f) $x^4 + x^3 + 0.56x^2 - 1.44x - 2.88 = 0$

   g) $x^5 - 9x^4 + 25x^3 - 5x^2 - 26x + 24 = 0$

7. **Obtener todas las raíces de las siguientes ecuaciones algebraicas, utilizando el método de Lin:**

   a) $x^3 - 20x^2 + 10x + 30 = 0$

   b) $x^3 - x^2 - 4x - 6 = 0$

   c) $x^3 - 20x^2 + 15x + 50 = 0$

   d) $x^4 - 2x^3 + 35x^2 + 30x + 72 = 0$

   e) $x^4 - 2x^3 + 85x^2 - 60x + 40 = 0$

CAPITULO III SOLUCION NUMERICA DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

INTRODUCCION

Muchos problemas relacionados con el campo de la ingeniería se pueden expresar en términos de sistemas de ecuaciones algebraicas lineales. Debido a ello, el presente capítulo se dedicará al estudio de algunos de los métodos más usados para resolver sistemas de este tipo.

III.1 SISTEMAS DE ECUACIONES ALGEBRAICAS LINEALES

Un sistema de ecuaciones algebraicas lineales es un conjunto de ecuaciones de la forma:

$$
\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n = b_3 \\
\quad\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n = b_n
\end{array}
$$

o bien, en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{bmatrix}$$

que a su vez se puede representar como:

$$A\,\overline{x} = \overline{b}$$

donde A es la matriz de coeficientes, $\overline{x}$ el vector de incógnitas y $\overline{b}$ el vector de términos independientes, por último la matriz $(A, \overline{b})$ de orden $n \times (n+1)$, se conoce como la *matriz ampliada del sistema*.

La solución del sistema de ecuaciones es un conjunto de n valores $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ que satisfacen simultáneamente a todas las ecuaciones.

En la solución de estos sistemas pueden presentarse tres casos:

Primer caso.- Que su solución sea única; se dice entonces que el sistema es compatible y determinado.

Segundo caso.- Que admita más de una solución; entonces el sistema es compatible pero indeterminado.

Tercer caso.- Que no admita solución; entonces el sistema es incompatible.

I.2 METODO DE ELIMINACION COMPLETA DE GAUSS-JORDAN

Un método útil y sencillo para encontrar la solución de un sistema de ecuaciones lineales, es el de *eliminación completa*. Este método consiste en obtener sistemas equivalentes, a partir del sistema original dado, utilizando las operaciones elementales sobre los renglones de la matriz ampliada del sistema, que son:

a) Intercambiar un renglón por otro, esto equivale a reordenar las ecuaciones del sistema.

b) Multiplicar todos los elementos de un renglón por un escalar diferente de cero, operación que es equivalente a multiplicar una ecuación por una constante.

c) Sumar término a término dos renglones, que es equivalente a sumar dos de las ecuaciones del sistema.

El método de Gauss-Jordan consiste en sistematizar la obtención de sistemas equivalentes hasta obtener uno, en el cual la matriz del sistema se convierta en la matriz identidad [I], a partir de este último sistema se podrá observar su solución directamente.

Los pasos a seguir para la obtención de sistemas equivalentes en el método de Gauss-Jordan son:

1. Seleccionar un elemento diferente de cero como pivote; éste debe ser algún elemento de la matriz de coeficientes.

2. Convertir en uno el elemento pivote mediante operaciones elementales.

3. Convertir en ceros todos los elementos de la columna donde se encuentre el elemento pivote.

4. Seleccionar un nuevo pivote, el cual no debe estar ni en el renglón, ni en la columna donde se encontraba(n) el (los) pivote(s) anterior(es).

5. Repetir los pasos anteriores hasta obtener una matriz de coeficientes formada solamente con unos y ceros, en caso necesario intercambiar renglones para obtener la matriz identidad.

Ejemplo III.1

Resolver el siguiente sistema, utilizando el método de Gauss-Jordan:

$$3x_1 - 6x_2 + 7x_3 = 4$$

$$8x_1 \qquad - 5x_3 = 19$$

$$x_1 - 2x_2 + 6x_3 = 5$$

la matriz ampliada del sistema és:

$$(A,\bar{b}) = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -6 & 7 & 4 \\ 8 & 0 & -5 & 19 \\ 1 & -2 & 6 & 5 \end{array}\right]$$

seleccionando el elemento $a_{21} = 8$ como pivote y dividiendo todos los elementos del segundo renglón entre 8, se obtiene el siguiente sistema equivalente:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3.000 & -6.000 & 7.000 & 4.000 \\ 1.000 & 0.000 & -0.625 & 2.375 \\ 1.000 & -2.000 & 6.000 & 5.000 \end{array}\right]$$

Ahora se requiere convertir en ceros los elementos a_{11} y a_{31}, puesto que son los que están en la columna donde se encuentra el pivote. Para lograrlo, se multiplicarán los elementos del segundo renglón de la matriz ampliada del sistema por la constante -3 y se sumarán con sus respectivos elementos del primer renglón, lo anterior se puede expresar como $(-3)(2^{do}\ R) + (1^{er}\ R)$ con lo que se obtiene:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0.000 & -6.000 & 8.875 & -3.125 \\ 1.000 & 0.000 & -0.625 & 2.375 \\ 1.000 & -2.000 & 6.000 & 5.000 \end{array}\right] (-3)(2^{do}\ R) + (1^{er}\ R)$$

para convertir en cero el elemento a_{31}, se hará lo siguiente:

$$(-1)(2^{do}\ R) + (3^{er}\ R)$$

significa que todos los elementos del segundo renglón se multiplicarán por la constante -1 y se sumarán con sus respectivos elementos del tercer renglón:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0.000 & -6.000 & 8.875 & -3.125 \\ 1.000 & 0.000 & -0.625 & 2.375 \\ 0.000 & -2.000 & 6.625 & 2.625 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ \\ (-1)(2^{do}\ R) + (3^{er}\ R) \end{array}$$

El siguiente paso es seleccionar un nuevo pivote, el cual no debe estar en la primera columna, ni en el segundo renglón, por lo que éste puede ser alguno de los elementos a_{12}, a_{13}, a_{32}, ó a_{33}. Se seleccionará el elemento $a_{13} = 8.875$, ahora dividiendo todos los elementos del primer renglón entre 8.875 se obtiene:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0.000 & -0.676 & 1.000 & -0.352 \\ 1.000 & 0.000 & -0.625 & 2.375 \\ 0.000 & -2.000 & 6.625 & 2.625 \end{array}\right]\begin{array}{l} (1^{er}\ R)(1/8.875) \\ \\ \\ \end{array}$$

multiplicando el primer renglón por 0.625 y sumándolo al segundo y a su vez, multiplicando el primer renglón por -6.625 y sumándolo al tercero, se obtiene el siguiente sistema equivalente:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0.000 & -0.676 & 1.000 & -0.352 \\ 1.000 & -0.423 & 0.000 & 2.155 \\ 0.000 & 2.479 & 0.000 & 4.957 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ (0.625)(1^{er}\ R) + (2^{do}\ R) \\ (-6.625)(1^{er}\ R) + (3^{er}\ R) \end{array}$$

por último, el tercer pivote seleccionado debe ser el elemento $a_{32} = 2.479$. Procediendo en forma similar se obtiene:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0.000 & 0.000 & 1.000 & 1.000 \\ 1.000 & 0.000 & 0.000 & 3.001 \\ 0.000 & 1.000 & 0.000 & 2.000 \end{array}\right]\begin{array}{l} (0.676)(3^{er}\ R) + (1^{er}\ R) \\ (0.423)(3^{er}\ R) + (2^{do}\ R) \\ (3^{er}\ R)(1/2.479) \end{array}$$

reacomodando:

$$\begin{bmatrix} 1.000 & 0.000 & 0.000 & | & 3.001 \\ 0.000 & 1.000 & 0.000 & | & 2.000 \\ 0.000 & 0.000 & 1.000 & | & 1.000 \end{bmatrix}$$

por lo que la solución es:

$$x_1 = 3.001$$
$$x_2 = 2.000$$
$$x_3 = 1.000$$

III.2.1 ERRORES EN EL METODO DE GAUSS-JORDAN

El método de Gauss-Jordan no es un método de aproximaciones sucesivas, por lo tanto su solución debería ser exacta, pero no lo es, debido a los errores que se presentan en el desarrollo del mismo.

La solución del ejemplo III.1, es en realidad $x_1 = 3$, $x_2 = 2$ y $x_3 = 1$, que difiere de los resultados obtenidos, debido a que al efectuar las operaciones se trabajó redondeando a tres cifras decimales, incurriéndose en un error de 0.001 en el valor de x_1. Este problema se presenta al resolver sistemas lineales en computadoras digitales, ya que éstas tienen siempre un límite con respecto al número de dígitos en las constantes con las que trabajan. Para reducir el error por redondeo, se puede demostrar que si se selecciona como pivote el mayor elemento en valor absoluto de la matriz del sistema, se minimiza el error por redondeo.

I.3 METODO DE JACOBI

A diferencia del método de Gauss-Jordan, el de Jacobi es un método de aproximaciones sucesivas. Al igual que los métodos estudiados en el capítulo anterior, éste es iterativo, y cuando converge, se aproximará a la solución en cada iteración partiendo de un valor inicial.

Supóngase que en el sistema:

$$A\,\overline{x} = \overline{b} \qquad \ldots (1)$$

la matriz A se sustituye por:

$$A = D + R$$

donde D es una matriz diagonal, es decir una matriz cuadrada cuyos elementos sobre la diagonal principal son los únicos diferentes de cero. R es otra matriz que contiene ceros en su diagonal principal y los restantes elementos de A, en sus demás elementos. Sustituyendo en la expresión (1):

$$(D + R)\,\overline{x} = \overline{b}$$

$$D\overline{x} + R\,\overline{x} = \overline{b}$$

$$D\overline{x} = \overline{b} - R\,\overline{x}$$

premultiplicando por D^{-1}:

$$\overline{x} = D^{-1}\,\overline{b} - D^{-1}\,R\,\overline{x}$$

ecuación que puede manejarse como fórmula de recurrencia de la siguiente forma:

$$\boxed{\begin{array}{l} \overline{x}^{(k+1)} = D^{-1}\,\overline{b} - D^{-1}\,R\,\overline{x}^{(k)} \\ k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \end{array}} \qquad \ldots (2)$$

El método de **Jacobi**, definido por la fórmula matricial de recurrencia (2), significa que dado el sistema (1) se despeje x_1 de la primera ecuación, x_2 de la segunda, x_3 de la tercera, etc., quedando:

$$\left.\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{11}} (b_1 - a_{12}\, x_2^{(k)} - a_{13}\, x_3^{(k)} - \ldots - a_{1n}\, x_n^{(k)}) \\
x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{22}} (b_2 - a_{21}\, x_1^{(k)} - a_{23}\, x_3^{(k)} - \ldots - a_{2n}\, x_n^{(k)}) \\
x_3^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{33}} (b_3 - a_{31}\, x_1^{(k)} - a_{32}\, x_2^{(k)} - \ldots - a_{3n}\, x_n^{(k)}) \\
&\;\;\vdots \\
x_n^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{nn}} (b_n - a_{n1}\, x_1^{(k)} - a_{n2}\, x_2^{(k)} - \ldots - a_{n(n-1)}\, x_{n-1}^{(k)}) \\
k &= 0, 1, 2, \ldots
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (3)$$

partiendo de una primera aproximación:

$$\overline{x}^{(0)} = \left[x_1^{(0)},\ x_2^{(0)},\ x_3^{(0)},\ \ldots\ ,\ x_n^{(0)}\right]^T$$

se sustituirá en los segundos miembros de las ecuaciones (3) para obtener la nueva aproximación:

$$\overline{x}^{(1)} = \left[x_1^{(1)},\ x_2^{(1)},\ x_3^{(1)},\ \ldots\ ,\ x_n^{(1)}\right]^T$$

a su vez, sustituyendo $\mathbf{x}^{(1)}$, se obtendrá:

$$\overline{x}^{(2)} = \left[x_1^{(2)},\ x_2^{(2)},\ x_3^{(2)},\ \ldots\ ,\ x_n^{(2)}\right]^T$$

y así sucesivamente. Se considerará una buena aproximación a la solución del sistema aquella que cumpla con la condición:

$$\left| \bar{x}^{(n+1)} - \bar{x}^{(n)} \right| \leq \bar{\varepsilon}$$

donde $\bar{\varepsilon}$ es un vector de tolerancia preestablecido.

Sustituyendo el vector inicial $\bar{x}^{(0)} = \{0, 0, 0, \ldots, 0\}^T$ en los segundos miembros de las ecuaciones de la expresión (3), se obtendrá una nueva aproximación que estará dada por:

$$\bar{x} = \left[\frac{b_1}{a_{11}}, \frac{b_2}{a_{22}}, \frac{b_3}{a_{33}}, \ldots, \frac{b_n}{a_{nn}} \right]^T$$

este último vector $\bar{x}$, se utiliza generalmente como vector inicial $\bar{x}^{(0)}$ en la solución de sistemas por el método de Jacobi.

II.3.1 CONVERGENCIA DEL METODO DE JACOBI

El método de Jacobi *tiene la desventaja de que no siempre converge* a la solución del sistema y algunas veces lo hace pero lentamente.

La condición necesaria para que el método converja consiste en que cada uno de los elementos que se encuentran en la diagonal principal de la matriz de coeficientes sean mayores en valor absoluto, que los demás elementos del renglón correspondiente. Con esta condición no se garantiza que el método converge, sin embargo si no se cumple, sí se puede asegurar la no convergencia del método.

La condición suficiente para la convergencia consiste en que los coeficientes de la diagonal principal sean mayores, en valor absoluto, que la *suma* de los demás elementos del renglón. Cuando esta condición se cumple puede asegurarse que el método converge y, en caso contrario, no es posible asegurar nada.

En algunas ocasiones se presentan sistemas en los que se cumplen las condiciones anteriores solamente en algunas de las ecuaciones y, en tal caso, no se puede afirmar nada sobre la convergencia.

A manera de ilustrar lo anterior, consideremos el sistema de ecuaciones del ejemplo III.2, en el que se ve que el coeficiente de x_1 es dominante en la primera ecuación y los coeficientes de x_2 y x_3 son dominantes en la segunda y tercera ecuaciones respectivamente.

Ejemplo III.2

Resolver por el método de Jacobi el siguiente sistema de ecuaciones algebraicas lineales:

$$6x_1 + 2x_2 + x_3 = 22$$
$$-x_1 + 8x_2 + 2x_3 = 30$$
$$x_1 - x_2 + 6x_3 = 23$$

despejando x_1 de la primera ecuación, x_2 de la segunda y x_3 de la tercera:

$$x_1 = \frac{1}{6}(22 - 2x_2 - x_3)$$
$$x_2 = \frac{1}{8}(30 + x_1 - 2x_3)$$
$$x_3 = \frac{1}{6}(23 - x_1 + x_2)$$

haciendo recursivo este sistema, según la expresión (3):

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{6}(22 - 2x_2^{(k)} - x_3^{(k)}) \qquad \ldots (a)$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{8}(30 + x_1^{(k)} - 2x_3^{(k)}) \qquad \ldots (b)$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{1}{6}(23 - x_1^{(k)} + x_2^{(k)}) \qquad \ldots (c)$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots$$

tomando el vector inicial $\overline{x}^{(0)} = \left[\frac{22}{6}, \frac{30}{8}, \frac{23}{6}\right]^T$ y sustituyendo $k = 0$ en las ecuaciones de recurrencia (a), (b) y (c) se obtiene:

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{6}\left(22 - 2x_2^{(0)} - x_3^{(0)}\right)$$

$$x_2^{(1)} = \frac{1}{8}\left(30 + x_1^{(0)} - 2x_3^{(0)}\right)$$

$$x_3^{(1)} = \frac{1}{6}\left(23 - x_1^{(0)} + x_2^{(0)}\right)$$

sustituyendo valores:

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{6}\left(22 - 2\left(\frac{30}{8}\right) - \frac{23}{6}\right) = 1.778$$

$$x_2^{(1)} = \frac{1}{8}\left(30 + \frac{22}{6} - 2\left(\frac{23}{6}\right)\right) = 3.250$$

$$x_3^{(1)} = \frac{1}{6}\left(23 - \frac{22}{6} + \frac{30}{8}\right) = 3.847$$

obteniéndose:

$$\overline{x}^{(1)} = \left[1.778 \quad 3.250 \quad 3.847\right]^T$$

sustituyendo $k = 1$ en (a), (b) y (c):

$$x_1^{(2)} = \frac{1}{6}\left(22 - 2(3.250) - 3.847\right) = 1.942$$

$$x_2^{(2)} = \frac{1}{8}\left(30 + 1.778 - 2(3.847)\right) = 3.011$$

$$x_3^{(2)} = \frac{1}{6}\left(23 - 1.778 + 3.250\right) = 4.079$$

por lo tanto:

$$\bar{x}^{(2)} = [1.942 \quad 3.011 \quad 4.079]^T$$

procediendo reiteradamente en forma similar se obtiene:

$$k = 2; \quad \bar{x}^{(3)} = [1.983 \quad 2.973 \quad 4.012]^T$$
$$k = 3; \quad x^{(4)} = [2.007 \quad 2.995 \quad 3.998]^T$$
$$k = 4; \quad x^{(5)} = [2.002 \quad 3.001 \quad 3.998]^T$$
$$k = 5; \quad x^{(6)} = [2.000 \quad 3.001 \quad 4.000]^T$$
$$k = 6; \quad x^{(7)} = [2.000 \quad 3.000 \quad 4.000]^T$$

finalmente, **la solución del sistema es:**

$$x_1 = 2.000$$
$$x_2 = 3.000$$
$$x_3 = 4.000$$

con tres cifras decimales **exactas.**

III.4 METODO DE GAUSS-SEIDEL

Este método es prácticamente idéntico al de Jacobi, la única diferencia estriba en que el método de Gauss-Seidel se acerca más rápido a la solución cuando el método converge, debido a que una vez que calcula la componente $x_i^{(k+1)}$ la utiliza inmediatamente en la misma iteración, esto es:

$$
\left.\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{11}} (b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \ldots - a_{1n}\, x_n^{(k)}) \\
x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{22}} (b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)} - \ldots - a_{2n}\, x_n^{(k)}) \\
x_3^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{33}} (b_3 - a_{31}x_1^{(k+1)} - a_{32}x_2^{(k+1)} - \ldots - a_{3n}\, x_n^{(k)}) \\
&\;\vdots \\
x_n^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{nn}} (b_n - a_{n1}x_1^{(k+1)} - a_{n2}x_2^{(k+1)} - \ldots - a_{n(n-1)}x_{n-1}^{(k+1)}) \\
k &= 0, 1, 2, \ldots
\end{aligned}\right\} \ldots (4)
$$

El criterio de convergencia de este método es el mismo que el de Jacobi.

Ejemplo III.3

Resolver el sistema del ejemplo III.2 utilizando el método de Gauss-Seidel.

Las ecuaciones de la expresión (4) se reducen a:

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{6} (22 - 2x_2^{(k)} - x_3^{(k)}) \qquad \ldots (a)$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{8} (30 + x_1^{(k+1)} - 2x_3^{(k)}) \qquad \ldots (b)$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{1}{6} (23 - x_1^{(k+1)} + x_2^{(k+1)}) \qquad \ldots (c)$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots$$

tomando el mismo vector inicial (véase ejemplo III.2) y sustituyendo k = 0 en las ecuaciones a, b y c:

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{6} (22 - 2x_2^{(0)} - x_3^{(0)})$$

$$x_2^{(1)} = \frac{1}{8} (30 + x_1^{(1)} - 2x_3^{(0)})$$

$$x_3^{(1)} = \frac{1}{6} (23 - x_1^{(1)} + x_2^{(1)})$$

sustituyendo valores:

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{6}\left(22 - 2\left(\frac{30}{8}\right) - \frac{23}{6}\right) = 1.778$$

$$x_2^{(1)} = \frac{1}{8}\left(30 + 1.778 - 2\left(\frac{23}{6}\right)\right) = 3.014$$

$$x_3^{(1)} = \frac{1}{6}(23 - 1.778 + 3.014) = 4.039$$

se obtiene:

$$\overline{x}^{(1)} = \{1.778 \quad 3.014 \quad 4.039\}^T$$

procediendo reiteradamente en forma similar, las siguientes iteraciones resultan:

$$k = 1; \quad \overline{x}^{(2)} = [1.989 \quad 2.989 \quad 4.000]^T$$

$$k = 2; \quad \overline{x}^{(3)} = [2.004 \quad 3.001 \quad 4.000]^T$$

$$k = 3; \quad \overline{x}^{(4)} = [2.000 \quad 3.000 \quad 4.000]^T$$

por lo tanto la solución es:

$$x_1 = 2.000$$

$$x_2 = 3.000$$

$$x_3 = 4.000$$

que es la misma solución que proporciona el método de Jacobi con la ventaja que éste, la obtiene en tres iteraciones menos.

III.5 ECUACION CARACTERISTICA

Los valores característicos desempeñan un papel importante en muchos problemas físicos. La estabilidad de un avión, por ejemplo, se determina por la localización de valores característicos en una cierta matriz en el plano complejo. Las frecuencias naturales de las vibraciones de una viga, son realmente valores característicos de una matriz. Esto hace que el cálculo de valores y vectores característicos sea un problema importante.

El problema es entonces, la determinación de los valores característicos λ en $A\bar{x} = \lambda\bar{x}$, tales que proporcionen soluciones diferentes a la trivial en el sistema planteado. Las soluciones de este sistema serán los vectores característicos de A.

Para obtener los valores y vectores característicos de una matriz, es necesario determinar la ecuación característica. La obtención de esta ecuación para matrices de orden superior a tres es generalmente complicada por los métodos tradicionales; uno de los métodos numéricos, útil en estos casos, es el siguiente.

III.5.1 METODO DE KRYLOV

Este método se basa en el teorema de Cayley-Hamilton que establece: *Toda matriz* **A** *verifica su propia ecuación característica.*

$$P(A) = 0$$

sea:

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \qquad \ldots (5)$$

la ecuación característica de la matriz A de orden n.

Dado que el orden de A es n, esta ecuación es de grado n y entonces $a_0 \neq 0$, dividiendo (5) entre a_0 se obtiene:

$$\lambda^n + b_1\lambda^{n-1} + b_2\lambda^{n-2} + \ldots + b_{n-1}\lambda + b_n = 0 \qquad \ldots (6)$$

$$\text{donde} \quad b_i = \frac{a_i}{a_0}$$

$$i = 1, \ldots, n$$

Aplicando el teorema de Cayley-Hamilton:

$$A^n + b_1A^{n-1} + b_2A^{n-2} + \ldots + b_{n-1}A + b_nI = 0 \qquad \ldots (7)$$

Los términos de la ecuación anterior son matrices de orden $n \times n$ y la suma de ellas forma un sistema de ecuaciones algebraicas lineales, cuyas incógnitas son $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n$. Para sumar vectores en lugar de matrices, se multiplicará por un vector cualquiera $\overline{y}$, compatible con A y diferente de cero, con lo cual:

$$A^n\overline{y} + b_1A^{n-1}\overline{y} + b_2A^{n-2}\overline{y} + \ldots + b_{n-1}A\overline{y} + b_n\overline{y} = 0 \quad \ldots (8)$$

al resolver este sistema se obtienen los coeficientes de la ecuación característica, los cuales se sustituyen en la expresión (6).

Ejemplo III.4

Obtener la ecuación característica de la siguiente matriz utilizando el método de Krylov.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

La ecuación característica está dada por la expresión (6), en este caso para $n = 3$ que corresponde al orden del sistema, esto es:

$$\lambda^3 + b_1\lambda^2 + b_2\lambda + b_3 = 0 \qquad \dots (a)$$

y el sistema de ecuaciones para conocer los valores de b_1, b_2, b_3, se obtiene de la expresión (8):

$$A^3\overline{y} + b_1A^2\overline{y} + b_2A\overline{y} + b_3\overline{y} = 0 \qquad \dots (b)$$

utilizando el vector:

$$\overline{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

se tiene:

$$A\overline{y} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$A^2y = A(Ay) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A^3y = A(A^2y) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -6 \\ -5 \end{bmatrix}$$

sustituyendo en (b):

$$\begin{bmatrix} 11 \\ -6 \\ -5 \end{bmatrix} + b_1 \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix} + b_2 \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} + b_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

simplificando se llega al sistema:

$$5b_1 + 3b_2 + b_3 = -11$$
$$-4b_1 - 2b_2 = 6$$
$$-b_2 = 5$$

resolviéndolo:

$$b_1 = 1; \qquad b_2 = -5; \qquad b_3 = -1$$

por último, sustituyendo en (a) se obtiene la ecuación característica:

$$\lambda^3 + \lambda^2 - 5\lambda - 1 = 0$$

III.6 METODOS ITERATIVOS PARA DETERMINAR VALORES CARACTERISTICOS

Estos métodos son utilizados comúnmente cuando se desea conocer de una matriz el valor característico de mayor o menor valor absoluto. Una ventaja de estos métodos es la obtención simultánea del correspondiente vector característico asociado.

III.6.1 METODO DE LAS POTENCIAS

El procedimiento consiste en utilizar la expresión:

$$A\,\overline{x} = \lambda\,\overline{x} \qquad \ldots (9)$$

como fórmula de recurrencia, tomando un vector inicial $x_{(0)} \neq \overline{0}$ de la forma:

$$\overline{x}_{(0)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}$$

sustituyendo este vector en el primer miembro de la expresión (9) y efectuando la multiplicación indicada se obtiene una primera aproximación en el segundo miembro, esto es:

$$A\,\overline{x}_{(0)} = \lambda_{(1)}\,\overline{x}_{(1)}$$

donde:

$$\lambda_{(1)}\,\overline{x}_{(1)} = \lambda_{(1)} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}$$

es el vector del producto realizado.

El siguiente paso consiste en seleccionar el mayor elemento de este vector y tomarlo como λ, posteriormente se *normaliza* el vector del producto, lo cual consiste en dividir dicho vector entre $\lambda_{(1)}$. El factor de normalización será una aproximación al mayor valor característico* λ y el vector $\overline{x}_{(1)}$ será una aproximación a su vector asociado.

Si tomamos ahora la primera aproximación del vector característico $\overline{x}_{(1)}$ y lo multiplicamos por la matriz de coeficientes se tiene:

$$A\,\overline{x}_{(1)} = \lambda_{(2)}\,\overline{x}_{(2)}$$

en donde $\lambda_{(2)}$ será una nueva aproximación al valor característico y $\overline{x}_{(2)}$ a su correspondiente vector.

Iterando sucesivamente se obtiene:

$$A\,\overline{x}_{(2)} = \lambda_{(3)}\,\overline{x}_{(3)}$$

$$A\,\overline{x}_{(3)} = \lambda_{(4)}\,\overline{x}_{(4)}$$

$$\cdot$$
$$\cdot$$

* La demostración se encuentra en Numerical Analysis de F. Sheid serie Schaum's.

en general, podemos escribir:

$$\boxed{\begin{array}{l} A\ \bar{x}_{(k-1)} = \lambda_{(k)}\ \bar{x}_{(k)} \\ k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots \end{array}} \qquad \ldots (10)$$

Este proceso se repetirá hasta que la diferencia, en valor absoluto, entre los valores característicos obtenidos en dos iteraciones sucesivas sea menor que una tolerancia preestablecida.

Cabe hacer la aclaración que el vector inicial $\bar{x}_{(0)}$ puede ser cualquiera diferente de cero; por ejemplo:

$$\bar{x}_{(0)} = [1\ 0\ 0\ \ldots\ 0]^T$$

o bien:

$$\bar{x}_{(0)} = [1\ 1\ 1\ \ldots\ 1]^T$$

Ejemplo III.5

Sea el sistema:

$$2x_1 + 4x_2 = 0$$
$$x_1 + 3x_2 = 0$$

obtener de la matriz de coeficientes, el mayor valor característico y su correspondiente vector por el método de aproximaciones sucesivas, utilizando como vector inicial $x_{(0)} = [1\ 1]^T$

El sistema expresado en la forma de la ecuación (9) queda:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

utilizando la expresión (10) para k = 1:

$$A\overline{x}_0 = \lambda_{(1)}\ \overline{x}_{(1)}$$

sustituyendo valores:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$$

normalizando se tiene:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} 1.000 \\ 0.667 \end{bmatrix}$$

por lo tanto:

$$\lambda_{(1)} = 6 \quad y \quad \overline{x}_{(1)} = \begin{bmatrix} 1.000 \\ 0.667 \end{bmatrix}$$

utilizando la expresión (10) para k = 2:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.000 \\ 0.667 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.668 \\ 3.001 \end{bmatrix}$$

normalizando se obtiene:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.000 \\ 0.667 \end{bmatrix} = 4.668 \begin{bmatrix} 1.000 \\ 0.643 \end{bmatrix}$$

por lo tanto:

$$\lambda_{(2)} = 4.668 \quad y \quad \overline{x}_{(2)} = \begin{bmatrix} 1.000 \\ 0.643 \end{bmatrix}$$

para k = 3; $\lambda_{(3)} = 4.572$ y $\overline{x}_{(3)} = \begin{bmatrix} 1.000 \\ 0.641 \end{bmatrix}$

prosiguiendo reiteradamente y en forma similar se obtiene:

para k = 4; $\lambda_{(4)} = 4.564$ y $\overline{x}_{(4)} = \begin{bmatrix} 1.000 \\ 0.640 \end{bmatrix}$

para k = 5: $\lambda_{(5)} = 4.560$ y $\overline{x}_{(5)} = \begin{bmatrix} 1.000 \\ 0.640 \end{bmatrix}$

para k = 6; $\lambda_{(6)} = 4.560$ y $\overline{x}_{(6)} = \begin{bmatrix} 1.000 \\ 0.640 \end{bmatrix}$

por lo tanto el mayor valor característico con tres cifras decimales exactas es:

$$\lambda = 4.560$$

y su vector asociado:

$$\overline{x} = \begin{bmatrix} 1.000 & 0.640 \end{bmatrix}^T$$

Para la obtención del menor valor característico premultipliquemos la expresión (9) por la inversa de A:

$$A^{-1} A \overline{x} = A^{-1} \lambda \overline{x}$$

$$\overline{x} = \lambda A^{-1} \overline{x} \qquad \ldots (11)$$

Dividiendo (11) entre λ y haciéndola recursiva queda:

$$\boxed{\begin{array}{l} A^{-1} \overline{x}_{(k-1)} = \left(\frac{1}{\lambda}\right)_{(k)} \overline{x}_{(k)} \\ k = 1, 2, 3, \ldots \end{array}} \qquad \ldots (12)$$

esta ecuación es similar a la que se obtuvo para determinar el mayor valor característico, utilizando en esta ocasión la inversa de la matriz de coeficientes y el recíproco de λ.

Ejemplo III.6

Obtener de la siguiente matriz, el menor valor característico y su correspondiente vector:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 13 \end{bmatrix}$$

cuya inversa es:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0.928 & -0.286 \\ -0.214 & 0.143 \end{bmatrix}$$

aplicando la expresión (12) para $k = 1$:

$$A^{-1}\ \overline{x}_{(0)} = \left(\frac{1}{\lambda}\right)_{(1)} \overline{x}_{(1)}$$

sustituyendo valores y utilizando el mismo vector inicial que en el ejemplo III.5, tenemos:

$$\begin{bmatrix} 0.928 & -0.286 \\ -0.214 & 0.143 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.642 \\ -0.071 \end{bmatrix}$$

normalizando:

$$\begin{bmatrix} 0.928 & -0.286 \\ -0.214 & 0.143 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0.642 \begin{bmatrix} 1.000 \\ -0.111 \end{bmatrix}$$

por lo tanto:

$$\lambda_{(1)} = \frac{1}{0.642} = 1.558 \quad y \quad \overline{x}_{(1)} = \begin{bmatrix} 1.000 \\ -0.111 \end{bmatrix}$$

utilizando la expresión (12) para $k = 2$:

$$\begin{bmatrix} 0.928 & -0.286 \\ -0.214 & 0.143 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.000 \\ -0.111 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.960 \\ -0.230 \end{bmatrix}$$

normalizando:

$$\begin{bmatrix} 0.928 & -0.286 \\ -0.214 & 0.143 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.000 \\ -0.111 \end{bmatrix} = 0.960 \begin{bmatrix} 1.000 \\ -0.240 \end{bmatrix}$$

por lo tanto:

$$\lambda_{(2)} = \frac{1}{0.960} = 1.042 \quad \text{y} \quad \bar{x}_{(2)} = \begin{bmatrix} 1.000 \\ -0.240 \end{bmatrix}$$

prosiguiendo en forma similar se obtiene:

para $k = 3$; $\lambda_{(3)} = 1.003$ y $\bar{x}_{(3)} = \begin{bmatrix} 1.000 \\ -0.249 \end{bmatrix}$

para $k = 4$; $\lambda_{(4)} = 1.001$ y $\bar{x}_{(4)} = \begin{bmatrix} 1.000 \\ -0.250 \end{bmatrix}$

para $k = 5$; $\lambda_{(5)} = 1.000$ y $\bar{x}_{(5)} \begin{bmatrix} 1.000 \\ -0.250 \end{bmatrix}$

para $k = 6$; $\lambda_{(6)} = 1.000$ y $\bar{x}_{(6)} = \begin{bmatrix} 1.000 \\ -0.250 \end{bmatrix}$

por lo que, el menor valor característico con tres cifras decimales exactas es:

$$\lambda = 1.000$$

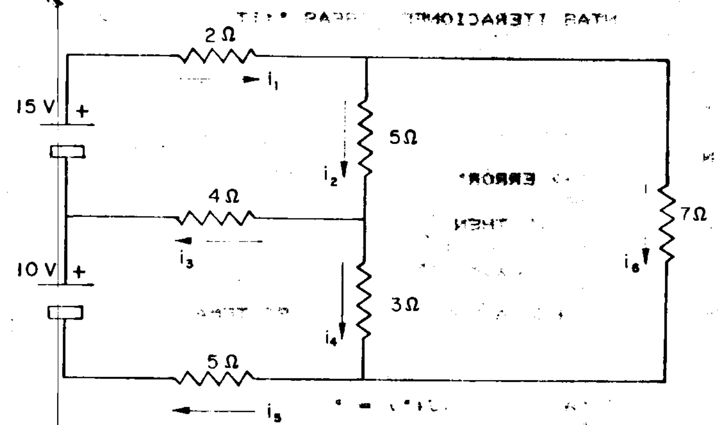
y su vector asociado:

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} 1.000 & -0.250 \end{bmatrix}^T$$

I.7 APLICACIONES

Para ejemplificar la utilidad de los métodos vistos en este capítulo consideremos el siguiente problema de Ingeniería Eléctrica.

Sea el siguiente circuito eléctrico:



del cual se desea conocer la corriente que fluye a través de cada rama. Con ayuda de las leyes de Kirchhoff estas corrientes se pueden conocer al resolver el siguiente sistema de ecuaciones algebraicas lineales:

$$
\begin{array}{rrrrrrcl}
11i_1 & & & & -4i_5 & -5i_6 & = & 10 \\
i_1 & -i_2 & & & & -i_6 & = & 0 \\
i_1 & & -i_3 & & -i_5 & & = & 0 \\
 & & & -i_4 & i_5 & -i_6 & = & 0 \\
-4i_1 & & & & 12i_5 & -3i_6 & = & 15 \\
-5i_1 & & & & -3i_5 & 15i_6 & = & 0
\end{array}
$$

aplicando el método de Gauss-Seidel y con ayuda del siguiente programa:

```
100 'GSEIDEL/MN
110 '
120 'M E T O D O   D E   G A U S S - S E I D E L
130 'VERSION 1.1
140 '
150 DEFINT I-N
160 DIM A(15,15),B(15),X(15)
170 CLS
180 PRINT TAB(15) "M E T O D O   D E   G A U S S - S E I D E L"
190 PRINT
200 TL = 0
210 INPUT "QUE TOLERANCIA DESEAS ";TL
220 IF TL <= 0 THEN
      TL = 0.00001:
      PRINT ">> TOLERANCIA = 0.00001"
230 IT = 0
240 INPUT "CUANTAS ITERACIONES DESEAS ";IT
250 IF IT < 1 THEN
       IT = 1000:
       PRINT ">> ITERACIONES = 1000"
260 'LECTURA DE DATOS
270 INPUT "ORDEN DEL SISTEMA ";N
280 IF N < 1 THEN
         PRINT ">> ERROR":
         GOTO 270
      ELSE IF N > 15 THEN
         PRINT ">> ERROR":
         PRINT ">> MAXIMO 15":
         GOTO 270
290 PRINT "AHORA TECLEA LOS DATOS DEL SISTEMA:"
300 PRINT
310 FOR I = 1 TO N
320    FOR J = 1 TO N
330       PRINT "A(";I;",";J;") = ";
340       INPUT A(I,J)
350    NEXT J
360    PRINT "B(";I;") = ";
370    INPUT B(I)
380    X(I) = 0
390 NEXT I
400 'DESPLIEGE DE DATOS
410 CLS
420 PRINT "S I S T E M A   O R I G I N A L:"
430 'DESPLIEGE DE DATOS LEIDOS
440 GOSUB 2000
450 'ORDENAMIENTO DEL SISTEMA
460 GOSUB 3000
470 'DESPLIEGE DE DATOS ORDENADOS
480 GOSUB 1000
490 PRINT "S I S T E M A   O R D E N A D O:"
500 GOSUB 2000
510 'SOLUCION AL SISTEMA
520 K = 0
530 FOR J = 1 TO N
540    S = 0
550    M = 0
560    FOR I = 1 TO N
570       IF I <> J THEN
             S = S+A(J,I)*X(I)
580    NEXT I
```

```
590      XP = (B(J)-S)/A(J,J)
600      IF ABS(XP-X(J)) > TL THEN
            M = M+1
610      X(J) = XP
620 NEXT J
630 K = K+1
640 IF K > IT THEN
         PRINT:
         PRINT ">> EL METODO NO CONVERGE EN ";IT;"ITERACIONES CON
    UNA TOLERANCIA DE ";TL:
         GOTO 750
650 IF M <> 0 THEN
         GOTO 530
660 'DESPLIEGE DE RESULTADOS
670 PRINT "S O L U C I O N   D E L   S I S T E M A :"
680 PRINT
690 FOR I = 1 TO N
700      PRINT TAB(10) "X(";I;") = ";
710      PRINT TAB(10) USING "#######.######";X(I)
720 NEXT I
730 PRINT
740 PRINT "EL METODO CONVERGE EN:";K;" ITERACIONES"
750 'SOLUCION PARA OTROS SISTEMAS DE ECUACIONES
760 INPUT "DESEAS RESOLVER OTRO SISTEMA DE ECUACIONES (S/N) ";Q$
770 IF Q$ = "S" THEN
            GOTO 170
        ELSE IF Q$ <> "N" THEN
            PRINT ">> ERROR":
            GOTO 760
780 END
1000 'SUBRUTINA PARA CONTROL DE BORRADO DE PANTALLA
1010 PRINT
1020 PRINT "OPRIME 'ENTER' PARA CONTINUAR"
1030 YY$ = INKEY$
1040 IF YY$ <> CHR$(13) THEN
          GOTO 1030
1050 CLS
1060 PRINT TAB(15) "M E T O D O   D E   G A U S S - S E I D E L"
1070 PRINT
1080 RETURN
1090 END
2000 'SUBRUTINA PARA DESPLEGAR DATOS EN PANTALLA
2010 PRINT
2020 FOR I = 1 TO N
2030      FOR J = 1 TO N
2040           PRINT USING "#######.####";A(I,J);
2050      NEXT J
2060      PRINT USING "  =  #######.####";B(I)
2070      PRINT
2080 NEXT I
2090 RETURN
2100 END
3000 'SUBRUTINA PARA ORDENAR EL SISTEMA DE ECUACIONES
3010 FOR J = 1 TO N-1
3020      MAX = ABS(A(1,J))
3030      IC = J
3040      FOR I = 2 TO N
3050           IF ABS(A(I,J)) > MAX THEN
                    MAX = ABS(A(I,J)):
                    IC = I
3060      NEXT I
```

```
3070     IF IC = J THEN
            GOTO 3160
3080     FOR K = 1 TO N
3090        AT = A(J,K)
3100        A(J,K) = A(IC,K)
3110        A(IC,K) = AT
3120     NEXT K
3130     AT = B(J)
3140     B(J) = B(IC)
3150     B(IC) = AT
3160 NEXT J
3170 RETURN
3180 END
```

se obtienen los siguientes resultados:

vector inicial

$\bar{x}^{(0)}$	$\bar{x}^{(1)}$	$\bar{x}^{(2)}$	$\bar{x}^{(3)}$
0.9091	1.5151	1.9364	2.1613
0.0000	1.5151	1.0803	1.0939
0.0000	-0.1515	0.1813	0.0518
0.0000	1.6667	0.8989	1.0421
1.6667	1.7550	2.1094	2.2372
0.0000	0.8560	1.0673	1.1679

$\bar{x}^{(4)}$	$\bar{x}^{(5)}$	$\bar{x}^{(6)}$	$\bar{x}^{(7)}$
2.2535	2.2928	2.3095	2.3164
1.0856	1.0830	1.0819	1.0814
0.0162	0.0002	0.0071	-0.0101
1.0693	1.0834	1.0891	1.0915
2.2931	2.3167	2.3267	2.3310
1.2098	1.2276	1.2352	1.2384

$\bar{x}^{(8)}$	$\bar{x}^{(9)}$	$\bar{x}^{(10)}$	$\bar{x}^{(11)}$
2.3196	2.3209	2.3214	2.3217
1.0812	1.0811	1.0811	1.0810
-0.0113	-0.0118	-0.0121	-0.0122
1.0926	1.0930	1.0932	1.0933
2.3328	2.3335	2.3339	2.3340
1.2397	1.2403	1.2406	1.2407

$$\begin{bmatrix} 2.3218 \\ 1.0810 \\ -0.0122 \\ 1.0933 \\ 2.3341 \\ 1.2407 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2.3218 \\ 1.0810 \\ -0.0122 \\ 1.0933 \\ 2.3341 \\ 1.2407 \end{bmatrix}$$

$$\bar{x}^{(12)} \qquad \bar{x}^{(13)}$$

por lo tanto, la solución es:

$$\begin{aligned} i_1 &= 2.3218 \text{ amp.} \\ i_2 &= 1.0810 \text{ amp.} \\ i_3 &= -0.0122 \text{ amp.} \\ i_4 &= 1.0933 \text{ amp.} \\ i_5 &= 2.3341 \text{ amp.} \\ i_6 &= 1.2407 \text{ amp.} \end{aligned}$$

con cuatro cifras decimales exactas.

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. **Resolver por el método de Gauss - Jordan los siguientes sistemas de ecuaciones:**

a)
$$\begin{aligned} 2x_1 + 6x_2 - x_3 &= -12 \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 &= 29 \\ -3x_1 - 4x_2 + x_3 &= 5 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 5x_3 &= 13 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 20 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 &= 10 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} 5x_1 - 2x_2 \qquad &= 1 \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 5 \\ x_2 + x_3 &= -3 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} 8.4x_1 - 2.6x_2 + 3x_3 &= 5.3 \\ -3.9x_1 - 0.7x_2 + 2.3x_3 &= -10.54 \\ 1.07x_1 + 1.2x_2 - 0.5x_3 &= 5.08 \end{aligned}$$

2. Obtener la solución de los siguientes sistemas de ecuaciones, utilizando el método de Gauss - Seidel:

a)
$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + x_3 &= 19 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 18 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 &= 6 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x_1 + 10x_2 + 9x_3 &= 7 \\ 2x_1 - 7x_2 - 10x_3 &= -17 \\ 10x_1 + 2x_2 + 6x_3 &= 28 \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} 4.71x_1 - 1.72x_2 - 0.21x_3 &= 4.03 \\ 0.73x_1 \qquad\qquad - 6.3x_3 &= 8.06 \\ -2.1x_1 + 5.6x_2 + 2.3x_3 &= 13.67 \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} 5.6x_1 + 1.1x_2 - 3.4x_3 &= 8.28 \\ 1.7x_1 + 4.3x_2 + 7.3x_3 &= 1.37 \\ 0.3x_1 + 5.7x_2 + 3.3x_3 &= -6.75 \end{aligned}$$

3. Obtener la ecuación característica de las siguientes matrices aplicando el método de Krylov:

a) $$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

b) $$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -10 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

c) $$\begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & -6 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

d) $$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

4. Utilizando el método iterativo de las potencias, obtener el mayor y el menor valor característico con sus correspondientes vectores asociados de las siguientes matrices:

a)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

b)

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ -5 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

c)

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -10 & -1 & 2 \\ -2 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

d)

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -10 & -1 & 2 \\ -2 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

CAPITULO IV FORMULA DE TAYLOR CON RESIDUO

NTRODUCCION

Las funciones más sencillas que se utilizan dentro del análisis numérico son las funciones algebraicas o polinomios.

Realizar cálculos con polinomios, así como obtener sus derivadas o integrales no es complicado, la determinación de las raíces o soluciones de una ecuación algebraica resulta ser más fácil que en una ecuación trascendente.

Para facilitar los cálculos que se tengan que realizar con una función cualquiera, existen diversos métodos para aproximar la función a través de un polinomio. En este capítulo se verá cómo obtener un polinomio $P(x)$ que coincida con una función cualquiera $f(x)$ y con sus n primeras derivadas, así como la estimación del error que se comete al aproximar la función por el polinomio.

V.1 POLINOMIOS DE TAYLOR GENERADOS POR UNA FUNCION

Si una función $f(x)$ posee derivadas continuas hasta de orden n en el punto $x = 0$, siendo $n \geq 1$, se tratará de encontrar un polinomio $P(x)$ que coincida con $f(x)$ y con sus n primeras derivadas en $x = 0$, esto es:

$$\begin{aligned} P(0) &= f(0) \\ P'(0) &= f'(0) \\ P''(0) &= f''(0) \\ &\vdots \\ P^{(n)}(0) &= f^{(n)}(0) \end{aligned}$$

el polinomio buscado deberá ser cuando menos de n-ésimo grado para que pueda contar con **n** derivadas diferentes de cero, este polinomio se expresa de la siguiente forma:

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_n x^n \qquad \ldots (1)$$

El problema ahora **es, determinar los** $n + 1$ coeficientes $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$. Para obtenerlos se procederá de la siguiente forma:

sustituyendo $x = 0$ en el polinomio de la expresión (1) se obtiene:

$$P(0) = a_0 \;; \quad \therefore \quad a_0 = f(0)$$

derivando $P(x)$:

$$P'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots + n\, a_n\, x^{n-1}$$

valuando en $x = 0$:

$$P'(0) = a_1 \;; \quad \therefore \quad a_1 = f'(0)$$

derivando nuevamente:

$$P''(x) = 2a_2 + 3\cdot 2a_3x + \ldots + n(n-1)\, a_n\, x^{n-2}$$

valuando en $x = 0$:

$$P''(0) = 2a_2 \;; \quad \therefore \quad a_2 = \frac{f''(0)}{2}$$

volviendo a derivar:

$$P'''(x) = 3\cdot 2\, a_3 + \ldots + n(n-1)(n-2)\, a_n\, x^{n-3}$$

valuando en $x = 0$:

$$P'''(x) = 3\cdot 2\; a_3 \;; \quad \therefore \quad a_3 = \frac{f'''(0)}{3!}$$

en general:

$$P^{(k)}(0) = k!\; a_k \;; \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n$$

despejando a_k:

$$\boxed{\begin{array}{l} a_k = \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!} \\ k = 0, 1, 2, \ldots, n \end{array}} \qquad \ldots (2)$$

sustituyendo estos valores en la expresión (1) se obtiene:

$$P(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

polinomio que se puede expresar como:

$$\boxed{P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0)} \qquad \ldots (3)$$

Sí se requiere que el polinomio $P(x)$ sea igual a la función $f(x)$ y a sus n primeras derivadas, en el punto $x = a$, esto es:

$$\begin{aligned} P(a) &= f(a) \\ P'(a) &= f'(a) \\ P''(a) &= f''(a) \\ &\vdots \\ P^{(n)}(a) &= f^{(n)}(a) \end{aligned}$$

entonces, se trasladará el polinomio a unidades en el sentido positivo del eje de las abscisas, el argumento del polinomio expresado en (1) será $(x - a)$ y la expreción (3) quedará como:

$$\boxed{P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)} \qquad \ldots (4)$$

Esta última expresión recibe el nombre de *polinomio de Taylor de grado* n generado por $f(x)$ en el punto a. Para representarlo se establecerá la notación siguiente:

$$P(x) = T_n \left[f(x\,;\,a)\right]$$

donde T se denomina el operador de Taylor y significa que el polinomio de Taylor de n-ésimo grado de la función $f(x)$ en el entorno del punto $x = a$ es $P(x)$.

Ejemplo IV.1

Obtener los polinomios de Taylor de primer y tercer grado de la función:

$$f(x) = \cos x$$

en el punto $x = \frac{\pi}{2}$.

El polinomio de Taylor de primer grado es:

$$P(x) = T_1\left[f(x; \frac{\pi}{2})\right] = \sum_{k=0}^{1} \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^k}{k!} f^{(k)}(\pi/2) \qquad \ldots(a)$$

desarrollando la sumatoria:

$$P(x) = \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^0}{0!} f(\pi/2) + \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^1}{1!} f'(\pi/2)$$

donde:

$$f(x) = \cos x \; ; \qquad f(\pi/2) = \cos \pi/2 = 0$$

y

$$f'(x) = -\operatorname{sen} x \; ; \qquad f'(\pi/2) = -\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = -1$$

sustituyendo:

$$P(x) = \left(x - \frac{\pi}{2}\right)(-1) = -x + \frac{\pi}{2}$$

agregando dos términos más en la expresión (a) se obtiene el polinomio de Taylor de tercer grado:

$$P(x) = T_3\left[f(x\; ; \frac{\pi}{2})\right] = \sum_{k=0}^{3} \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^k}{k!} f^{(k)}(\pi/2)$$

desarrollando la sumatoria:

$$P(x) = \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^0}{0!} f(\pi/2) + \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^1}{1!} f'(\pi/2) + \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2}{2!} f''(\pi/2) + \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3}{3!} f'''(\pi/2)$$

donde:

$$f(x) = \cos x \; ; \qquad f(\pi/2) = 0$$

$$f'(x) = -\operatorname{sen} x \; ; \qquad f'(\pi/2) = -1$$

$$f''(x) = -\cos x \; ; \qquad f''(\pi/2) = 0$$

$$f'''(x) = \operatorname{sen} x \; ; \qquad f'''(\pi/2) = 1$$

sustituyendo:

$$P(x) = 1(0) + \left(x - \frac{\pi}{2} \right) (-1) + \frac{\left(x - \frac{\pi}{2} \right)^2}{2} (0) + \frac{\left(x - \frac{\pi}{2} \right)^3}{6} (1)$$

simplificando se obtiene:

$$P(x) = 0.167\, x^3 - 0.785\, x^2 + 0.234\, x + 0.925$$

En la figura siguiente se puede apreciar la aproximación que presentan los polinomios de primer y tercer grado obtenidos en este ejemplo a la función $f(x) = \cos x$ en una vecindad del punto $x = \pi/2$.

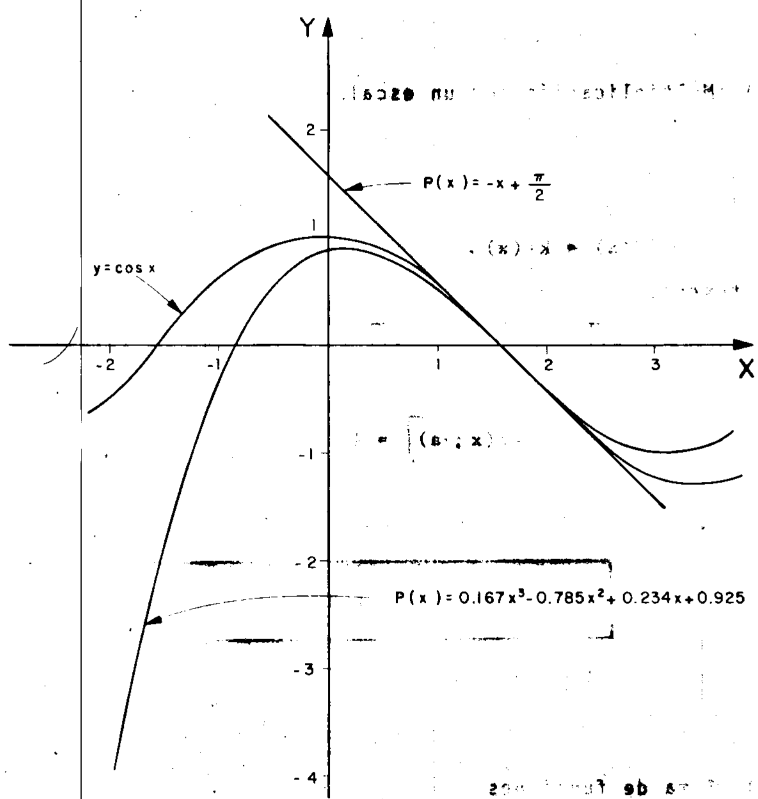


FIGURA IV.1

IV.2 CALCULO CON POLINOMIOS DE TAYLOR

Para obtener el polinomio de Taylor de grado n de una función cualquiera en el punto $x = a$, es necesario conocer las n primeras derivadas de la función $f(x)$, (véase expresión (4)). El cálculo de éstas, resulta ser en ocasiones una tarea complicada.

Las siguientes *propiedades del operador* (T_n) serán de utilidad para obtener polinomios de Taylor a partir de otros ya conocidos, éstas son:

a) Multiplicación por un escalar

Si:

$$F(x) = kf(x)$$

entonces:

$$T_n\left[F(x\ ;\ a)\right] = T_n\left[kf(x\ ;\ a)\right] = \sum_{k=0}^{n} \frac{kf^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

$$T_n\left[F(x;\ a)\right] = T_n\left[kf(x;\ a)\right] = k\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

$$\boxed{T_n\left[k\ f(x;\ a)\right] = k\ T_n\left[f(x\ ;\ a)\right]}$$

b) Suma de funciones

Si:

$$F(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

entonces:

$$T_n\left[F(x)\,;\,a)\right] = T_n\left[f_1(x\,;\,a) + f(x\,;\,a)\right] =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f_1^{(k)}(a) + f_2^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

$$T_n\left[f_1(x\,;\,a) + f(x\,;\,a)\right] =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f_1^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \sum_{k=0}^{n} \frac{f_2^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

$$\boxed{T_n\left[f_1(x\,;\,a) + f_2(x\,;\,a)\right] = T_n\left[f_1(x\,;\,a)\right] + T_n\left[f_2(x\,;\,a)\right]}$$

c) Derivación

$$\frac{d}{dx} T_n\left[f(x\,;\,a)\right] = \frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

$$\frac{d}{dx} T_n\left[f(x\,;\,a)\right] = \sum_{k-1=0}^{n} \frac{\left.\frac{d}{dx} f^{(k-1)}(x)\right|_{x=a}}{(k-1)!}(x-a)^{k-1}$$

$$\frac{d}{dx} T_n\left[f(x\,;\,a)\right] = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\left.\frac{d}{dx} f^{(k)}(x)\right|_{x=a}}{k!}(x-a)^k$$

$$\boxed{\frac{d}{dx} T_n\left[f(x\,;\,a)\right] = T_{n-1}\left[\frac{d}{dx} f(x\,;\,a)\right]}$$

d) Integración

$$\int T_n\left[f(x\,;a)\right]dx = \sum_{k=0}^{n}\int \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\,dx$$

$$\int T_n\left[f(x\,;a)\right]dx = \sum_{k+1=0}^{n}\frac{\int f^{(k+1)}(x)dx\Big|_{x=a}}{(k+1)!}(x-a)^{k+1}$$

$$\int T_n\left[f(x\,;a)\right]dx = \sum_{k=0}^{n+1}\frac{\int f^{(k)}(x)dx\Big|_{x=a}}{k!}(x-a)^{k}$$

$$\boxed{\int T_n\left[f(x\,;a)\right]dx = T_{n+1}\left[\int f(x\,;a)dx\right]}$$

e) Sustitución

Si:

$F(x) = f(cx)$ donde $c = cte$

entonces:

$$T_n\left[F(x\,;a)\right] = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(ca)}{k!}(x-a)^k$$

$$T_n\left[F(x\,;a)\right] = f(ca) + cf'(ca)(x-a) + \frac{c^2f''(ca)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{c^nf^{(n)}(ca)}{n!}(x-a)$$

$$T_n\left[F(x\,;a)\right] = f(ca) + f'(ca)(cx-ca) + \frac{f''(ca)}{2!}(cx-ca)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(ca)}{n!}(cx-ca)$$

$$\boxed{T_n\left[F(x\,;a)\right] = T_n\left[f(cx\,;ca)\right]}$$

Para ilustrar la utilidad de estas propiedades considere mos:

$$f_1(x) = e^x$$

el polinomio de Taylor de grado n de la función en el punto $x = 0$ es:

$$P(x) = T_n\left[e^x\right] = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 +$$

$$+ \frac{f'''(0)}{3!} x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^k$$

donde:

$$f(x) = e^x \quad ; \quad f(0) = 1$$

$$f'(x) = e^x \quad ; \quad f'(0) = 1$$

$$f''(x) = e^x \quad ; \quad f''(0) = 1$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$f^{(n)}(x) = e^x \quad ; \quad f^{(n)}(0) = 1$$

sustituyendo:

$$P(x) = T_n\left[e^x\right] = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$$

$$P(x) = T_n\left[e^x\right] = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \qquad \ldots (5)$$

El polinomio de Taylor de esta función multiplicada por $\frac{1}{2}$, denotada como:

$$f_2(x) = \frac{1}{2} e^x$$

se obtiene aplicando la propiedad de multiplicación por un escalar:

$$P(x) = T_n\left[f_2(x)\right] = \frac{1}{2} T_n\left[e^x\right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x + \frac{x^2}{2\cdot 2!} + \frac{x^3}{2\cdot 3!} + \ldots + \frac{x^n}{2\cdot n!}$$

$$P(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

Si se desea obtener el polinomio de Taylor de grado n de la función:

$$f_3(x) = \frac{1}{2} e^{-x}$$

se aplica la propiedad de sustitución del operador de Taylor en la expresión (5). Reemplazando el argumento x por -x se obtiene:

$$P(x) = T_n\left[e^{-x}\right] = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-x)^k}{K!} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^n}{n!}$$

ahora, si definimos:

$$f_4(x) = \frac{1}{2} e^x + \frac{1}{2} e^{-x} = \cos h\, x$$

aplicando la propiedad de suma de funciones del operador de Taylor, el polinomio de esta función será:

$$T_n\left[f(x)\right] = \frac{1}{2} T_n\left[e^x\right] + \frac{1}{2} T_n\left[e^{-x}\right]$$

$$T_n\left[f(x)\right] = \frac{1}{2}\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^n}{n!}\right)$$

$$T_n\left[\cos h\, x\right] = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

como este polinomio sólo tiene términos con exponente par se puede escribir:

$$T_{2m}\left[\cos h\, x\right] = \sum_{k=0}^{m} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

donde:

$$m = \frac{n}{2}$$

mediante la propiedad de derivación, se puede obtener el polinomio de Taylor de grado $2m-1$ de la función $\operatorname{sen} h\, x$, a partir de $T_{2m}\left[\cos h\, x\right]$; de esta manera:

$$T_{2m-1}\left[\operatorname{sen} h\, x\right] = \frac{d}{dx} T_{2m}\left[\cos h\, x\right]$$

$$T_{2m-1}\left[\operatorname{sen} h\, x\right] = \frac{d}{dx}\left[1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2m}}{(2m)!}\right]$$

$$T_{2m-1}\left[\operatorname{sen} h\, x\right] = \frac{2x}{2!} + \frac{4x^3}{4!} + \ldots + \frac{2nx^{2n-1}}{(2n)!}$$

$$T_{2m-1}\left[\operatorname{sen} h\, x\right] = x + \frac{x}{3!} + \ldots + \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}$$

$$T_{2m-1}\left[\operatorname{sen} h\, x\right] = \sum_{k=0}^{m} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}$$

Para ilustrar la propiedad de integración, consideremos una función definida como sigue:

$$f_5(x) = \frac{1}{1-x}$$

el polinomio de Taylor de grado n de esta función, en el punto $x = 0$, es:

$$T_n\left[\frac{1}{1-x}\right] = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 +$$

$$+ \frac{f'''(0)}{3!} x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \qquad \ldots (6)$$

donde:

$$f(x) = \frac{1}{1 - x} \; ; \qquad f(0) = 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{(1 - x)^2} \; ; \qquad f'(0) = 1$$

$$f''(x) = \frac{2}{(1 - x)^3} \; ; \qquad f''(0) = 2$$

$$f'''(x) = \frac{6}{(1 - x)^4} \; ; \qquad f'''(0) = 6$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1 - x)^{n+1}} \; ; \qquad f^{(n)}(0) = n!$$

sustituyendo en la expresión (6) se obtiene:

$$T_n\left[\frac{1}{1 - x}\right] = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n$$

$$T_n\left[\frac{1}{1 - x}\right] = \sum_{k=0}^{n} x^k$$

integrando esta última expresión:

$$\int T_n\left[\frac{1}{1 - x}\right] dx = \int \sum_{k=0}^{n} x^k \, dx$$

$$\int T_n\left[\frac{1}{1 - x}\right] dx = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{k+1}}{k + 1}$$

como:

$$\int \frac{1}{1 - x} \, dx = - \operatorname{Ln}(1 - x)$$

se puede concluir, de acuerdo con la propiedad de integración que:

$$T_{n+1}\left[-\operatorname{Ln}(1-x)\right] = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{k+1}}{k+1}$$

reemplazando x por $(1-x)$ se obtiene:

$$T_{n+1}\left[-\operatorname{Ln}(1-(1-x))\right] = \sum_{k=0}^{n} \frac{(1-x)^{k+1}}{k+1}$$

$$T_{n+1}\left[\operatorname{Ln}(x)\right] = -\sum_{k=0}^{n} \frac{(1-x)^{k+1}}{k+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k}\,(x-1)^{k+1}}{k+1}$$

IV.3 RESIDUO EN EL POLINOMIO DE TAYLOR

Al aproximar una función cualquiera $f(x)$, mediante un polinomio de Taylor $T_n\left[f(x\,;\,a)\right]$, la función y el polinomio coinciden en el punto $x = a$ y se separan conforme x se aleja de dicho punto tal como se observa en la figura IV. 1, por lo tanto se puede escribir:

$$f(x) \doteq T_n\left[f(x\,;\,a)\right]$$

o bien:

$$\boxed{f(x) = T_n\left[f(x\,;\,a)\right] + E_n(x)} \qquad \ldots\ (7)$$

donde $E_n(x)$ es el error que se comete al efectuar la aproximación, la expresión (7) se denomina *fórmula de Taylor con residuo*. Para determinar la magnitud de $E_n(x)$ considérese primero el error que se comete al utilizar un polinomio de primer grado:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + E_1(x)$$

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + E_1(x)$$

despejando $E_1(x)$:

$$E_1(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)$$

$$E_1(x) = \int_a^x f'(t)dt - f'(a)\int_a^x dt$$

$$E_1(x) = \int_a^x (f'(t) - f'(a))dt$$

integrando por partes:

$$u = f'(t) - f'(a) \quad ; \quad du = f''(t)dt$$

$$dv = dt \quad ; \quad v = t$$

sustituyendo:

$$E_1(x) = [f'(t) - f'(a)]\, t \Big|_a^x - \int_a^x t\, f''(t)dt$$

$$E_1(x) = [f'(x) - f'(a)]\, x - [f'(a) - f'(a)]\, a - \int_a^x t\, f''(t)\, dt$$

$$E_1(x) = x\int_a^x f''(t)dt - \int_a^x t\, f''(t)\, dt$$

$$E_1(x) = \int_a^x (x-t)\, f''(t)\, dt$$

Si la función se aproxima a través de un polinomio de segundo grado se obtiene:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{2} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k + E_2(x)$$

mediante un proceso análogo al que se hizo con una aproximación lineal, se llega a que $E_2(x)$ es:

$$E_2(x) = \frac{1}{2!} \int_a^x (x - t)^2 f'''(t)dt$$

A partir de estos resultados, se puede demostrar por inducción matemática que cuando $f(x)$ tiene derivadas continuas hasta de orden $n + 1$ en el entorno del punto a; entonces para toda x en ese entorno, el error $E_n(x)$ está dado por:

$$\boxed{E_n(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x (x - t)^n f^{(n+1)}(t)\, dt} \qquad \dots (8)$$

IV.4 ESTIMACION DEL ERROR EN LA FORMULA DE TAYLOR

Calcular el error que se comete al utilizar un polinomio de Taylor con la expresión (8), no es una tarea sencilla debido a que la función que se integra está formada por el producto de una potencia de t y la $(n+1)$-ésima derivada de la función original. Por este motivo se presenta a continuación una forma de estimar dicho error mediante la fijación de cotas.

Para ello se parte del conocimiento de dos valores m y M, tales que:

$$m \le f^{(n+1)}(t) \le M \qquad \dots (9)$$

donde las constantes m y M son las cotas (mínima y máxima) de un cierto intervalo que contenga a. Considerando que $x > a$, entonces la integración de $E_n(x)$ deberá efectuarse en el intervalo $[a, x]$, para cada t en este intervalo se tiene que $(x - t)^n \geq 0$, con esto la desigualdad (9) multiplicada por:

$$\frac{(x - t)^n}{n!}$$

queda:

$$m \frac{(x - t)^n}{n!} \leq \frac{(x - t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) \leq M \frac{(x - t)^n}{n!}$$

integrando entre a y x tenemos:

$$\frac{m}{n!} \int_a^x (x - t)^n \, dt \leq E_n(x) \leq \frac{M}{n!} \int_a^x (x - t)^n \, dt \qquad \ldots (10)$$

efectuando el cambio de variable:

$$u = x - t$$

entonces:

$$du = - dt$$

sustituyendo en la integral:

$$\int_a^x (x - t)^n \, dt = \int_0^{x-a} u^n \, du = \frac{(x - a)^{n+1}}{n + 1}$$

con lo que la expresión (10) se reduce a:

$$\boxed{m \frac{(x - a)^{n+1}}{(n + 1)!} \leq E_n(x) \leq M \frac{(x - a)^{n+1}}{(n + 1)!} \; ; \quad \text{si} \quad x > a} \qquad \ldots (11)$$

si consideramos que $x < a$ la integración deberá efectuarse entre x y a, por lo tanto multiplicando la desigualdad (9) por el factor no negativo:

$$\frac{(-1)^n (x - t)^n}{n!}$$

Obtener:

a) El polinomio de Taylor de séptimo grado que representa a la función f(t) en el entorno del punto a = 0.

b) El polinomio de Taylor de sexto grado que representa la velocidad de la partícula.

4. Obtener el área bajo la curva de la siguiente función:

$$f(x) = \frac{4 \text{ sen } x^2}{x}$$

en el intervalo $\left[0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \right]$, utilizando un polinomio de Taylor de grado catorce, en la vecindad del punto a = 0.

5. Evaluar la integral de probabilidad:

$$\int_{-3}^{3} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} \, dt$$

utilizando un polinomio de Taylor de grado 30, en el entorno del punto a = 0.

6. Determinar el error que se comete en la solución de los problemas cuatro y cinco.

ya que en el intervalo de 1 a 3 se encuentra el valor 2.71. Sustituyendo en la expresión (13):

$$\frac{1}{(n+1)!} \leq E_n(1) \leq \frac{3}{(n+1)!}$$

tabulando para polinomios de Taylor de primero, segundo, tercero, ..., grados se obtiene:

$$0.500000 \leq E_1(1) \leq 1.500000$$
$$0.166667 \leq E_2(1) \leq 0.500000$$
$$0.041667 \leq E_3(1) \leq 0.125000$$
$$0.008333 \leq E_4(1) \leq 0.025000$$
$$0.001389 \leq E_5(1) \leq 0.004167$$
$$0.000198 \leq E_6(1) \leq 0.000595$$
$$0.000025 \leq E_7(1) \leq 0.000074$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. **Obtener el polinomio de Taylor de cada una de las siguientes funciones:**

   a) $T_n\left[(2 - x)^{-1} \right] =$ en $a = 1$

   b) $T_n\left[(1 + x)^{1/2} \right] =$ en $a = 2$

   c) $T_n\left[\text{arc tan } x \right] =$ en $a = 0$

2. El departamento de producción de la compañía ALFA ha determinado que el pronóstico de ventas de uno de sus productos en el mercado se comporta de acuerdo a la siguiente función:

$$f(t) = 10^6 \text{ Ln} \left| \frac{1}{2} + t \right| \qquad \left[\text{pesos} \right]$$

donde la variable t representa el tiempo en años.

Determinar:

   a) El polinomio de Taylor de grado cinco de la función, en el entorno del punto $a = \frac{1}{2}$ año.

   b) Las ventas para $t = 9$ meses, utilizando la función $f(t)$.

   c) Las ventas para $t = 9$ meses, utilizando el polinomio de Taylor del inciso (a).

3. **Una partícula dentro de un fluido describe una trayectoria dada por la función:**

$$f(t) = \text{sen } \frac{1}{2} t + \cos \frac{1}{2} t$$

e integrando se obtiene:

$$\boxed{m \frac{(a-x)^{n+1}}{(n+1)!} \leq (-1)^{n+1} E_n(x) \leq M \frac{(a-x)^{n+1}}{(n+1)!} \quad ; \quad si \quad x < a} \quad \cdots (12)$$

Ejemplo IV.2

Calcular el error que se comete al valuar la función $f(x) = e^x$ en $x = 1$, utilizando el polinomio de Taylor de esta función en $a = 0$.

Sabiendo que:

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + E_n(x)$$

Como la $(n+1)$-ésima derivada de la función e^x es e^x y esta función es monótona creciente, se satisface la desigualdad:

$$m \leq f^{(n+1)}(t) \leq M$$

y utilizando la expresión (11) se obtiene:

$$m \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \leq E_n(x) \leq M \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

haciendo $x = 1$:

$$\frac{m}{(n+1)!} \leq E_n(1) \leq \frac{M}{(n+1)!} \quad \cdots (13)$$

como se sabe que:

$$f(x = 1) = e^1 = 2.71$$

considerando:

$$m = 1 \quad y \quad M = 3$$

CAPITULO V INTERPOLACION, DERIVACION E INTEGRACION NUMERICA

INTRODUCCION

En cursos de cálculo diferencial e integral se estudió cómo obtener las derivadas o integrales de una función F(x). Se vio que el problema de integración presenta serias dificultades, ya que fuera de algunos casos sencillos, el problema en matemáticas no tiene solución, algunos ejemplos son:

$$\int_a^b e^{-x^2}\, dx \;; \qquad \int_a^b \frac{\text{sen}\, x}{x}\, dx \;; \qquad \int_a^b e^{\text{sen}\, x}\, dx$$

En este capítulo se estudiarán los métodos con los que cuenta el análisis numérico para derivar o integrar funciones definidas en forma tabular, ya sea obtenidas como resultado de algún experimento o simplemente tabulando la función que se desea integrar o derivar.

Una ventaja adicional que presentan los métodos numéricos es que son fácilmente programables en cualquier equipo de cómputo, desde una calculadora de bolsillo hasta una computadora de gran capacidad.

V.1 DIFERENCIAS Y POLINOMIO DE NEWTON DE UNA FUNCION TABULAR

Dada una función continua y diferenciable en el intervalo $x_0 \le x \le x_n$, de la cual, para nuestro estudio, sólo se conocen algunos puntos tabulados como los que se muestran a continuación:

x	y = F(x)
x_0	y_0
x_1	y_1
x_2	y_2
.	.
.	.
.	.
x_n	y_n

Tabla V.1

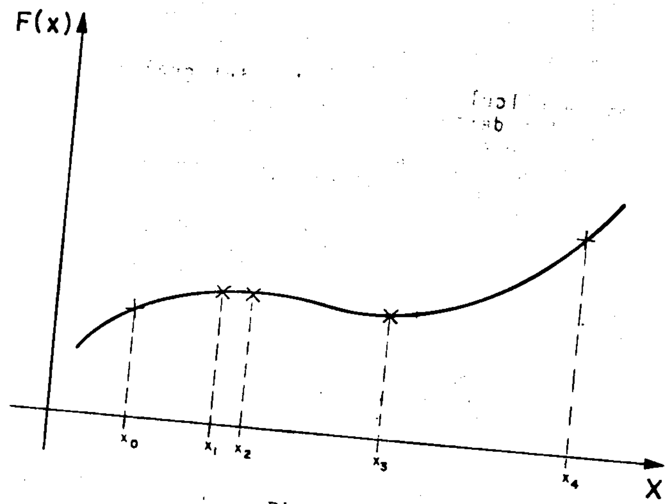


Figura V.1

Un concepto importante en el desarrollo de este capítulo es el de *diferencias hacia adelante* o *diferencias finitas*.

Las primeras diferencias hacia adelante se definen como:

$$\boxed{\Delta y_i \equiv y_{i+1} - y_i \quad \text{para} \quad i = 0, 1, 2, \dots} \qquad \dots (1)$$

Las segundas diferencias hacia adelante están dadas por:

$$\boxed{\Delta^2 y_i \equiv \Delta y_{i+1} - \Delta y_i \quad \text{para} \quad i = 0, 1, 2, \dots} \qquad \dots (2)$$

En general, para valores de k mayores que la unidad las k - ésimas diferencias hacia adelante se definen como:

$$\boxed{\begin{array}{l} \Delta^k y_i \equiv \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i \quad \text{para} \quad i = 0, 1, 2, \ldots \\ k = 1, 2, 3 \ldots n \end{array}} \qquad \ldots (3)$$

donde Δ es el operador diferencia

considerando $i = 0$ en la expresión (1), se obtiene:

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0$$

despejando y_1:

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0 \qquad \ldots (A)$$

considerando $i = 1$ en (1):

$$\Delta y_1 = y_2 - y_1$$

despejando y_2:

$$y_2 = y_1 + \Delta y_1 \qquad \ldots (4)$$

considerando $i = 0$ en (2):

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0$$

despejando Δy_1:

$$\Delta y_1 = \Delta^2 y_0 + \Delta y_0 \qquad \ldots (5)$$

sustituyendo las expresiones (5) y (A) en (4):

$$y_2 = (y_0 + \Delta y_0) + (\Delta^2 y_0 + \Delta y_0)$$

simplificando se tiene:

$$y_2 = y_0 + 2\Delta y_0 + \Delta^2 y_0 \qquad \ldots (B)$$

considerando $i = 2$ en (1), se obtiene:

$$\Delta y_2 = y_3 - y_2$$

despejando y_3:

$$y_3 = y_2 + \Delta y_2 \qquad \ldots (6)$$

considerando $i = 1$ en (2):

$$\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1$$

despejando Δy_2:

$$\Delta y_2 = \Delta^2 y_1 + \Delta y_1 \qquad \ldots (7)$$

sustituyendo $i = 0$ y $k = 3$ en (3):

$$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0$$

despejando $\Delta^2 y_1$:

$$\Delta^2 y_1 = \Delta^2 y_0 + \Delta^3 y_0 \qquad \ldots (8)$$

sustituyendo las expresiones (5) y (8) en (7), se obtiene:

$$\Delta y_2 = (\Delta^2 y_0 + \Delta^3 y_0) + (\Delta^2 y_0 + \Delta y_0) \qquad \ldots (9)$$

a su vez, sustituyendo las expresiones (B) y (9) en (6), se obtiene:

$$y_3 = (y_0 + 2\Delta y_0 + \Delta^2 y_0) + (\Delta^2 y_0 + \Delta^3 y_0) + (\Delta^2 y_0 + \Delta y_0)$$

por último, simplificando:

$$y_3 = y_0 + 3\Delta y_0 + 3\Delta^2 y_0 + \Delta^3 y_0 \qquad \ldots (C)$$

Utilizando el operador Δ las expresiones (A), (B) y (C) se pueden escribir como:

$$y_1 = (1 + \Delta)\, y_0$$
$$y_2 = (1 + \Delta)^2\, y_0$$
$$y_3 = (1 + \Delta)^3\, y_0$$

generalizando:

$$y_k = (1 + \Delta)^k\, y_0$$
$$k = 1, 2, 3, \ldots, n$$

o bien, desarrollando el binomio:

$$y_k = y_0 + \binom{k}{1} \Delta y_0 + \binom{k}{2} \Delta^2 y_0 + \ldots + \binom{k}{k} \Delta^k\, y_0 \qquad \ldots (10)$$
$$k = 1, 2, 3, \ldots, n$$

Si se toma un valor j cualquiera, menor que k y si las j - ésimas diferencias son constantes, entonces todas las diferencias de orden superior a j serán cero, por lo que la expresión (10) queda:

$$= y + \binom{k}{1} \Delta y_0 + \binom{k}{2} \Delta^2 y_0 + \ldots + \binom{k}{j} \Delta^j y_0 + \binom{k}{j+1}(0) + \ldots + \binom{k}{k}(0) \quad \ldots (11)$$

sabiendo que:

$$\binom{k}{j} = \frac{k!}{j!(k-j)!} = \frac{k(k-1)(k-2)\ldots(k-j+1)}{j!}$$

esta expresión nos dice que $\binom{k}{j}$ es un polinomio en k de grado j, por lo que y_k se puede expresar en la forma:

$$y_k = a_0 + a_1 k + a_2 k^2 + \ldots + a_j k^j \quad \ldots (12)$$

considerando que la función de la tabla V.1, se obtuvo para valores de x con un mismo espaciamiento h:

x	$y = F(x)$
x_0	y_0
$x_1 = x_0 + h$	y_1
$x_2 = x_0 + 2h$	y_2
$\vdots$	$\vdots$
$x_k = x_0 + kh$	y_k
$\vdots$	$\vdots$
$x_n = x_0 + nh$	y_n

Tabla V.2

entonces:

$$x_1 - x_0 = h$$
$$x_2 - x_0 = 2h$$
$$\vdots$$
$$x_k - x_0 = kh$$
$$\vdots$$
$$x_n - x_0 = nh$$

por lo tanto:

$$k = \frac{x_k - x_0}{h} \qquad \ldots \quad (13)$$

sustituyendo k por $\frac{x_k - x_0}{h}$ en el segundo miembro de la expresión (12), se obtendrá un polinomio en x_k de grado j de la forma:

$$y_k = b_0 + b_1 x_k + b_2 x_k^2 + \ldots + b_j x_k^j \qquad \ldots \quad (14)$$

De este análisis se concluye que si las j - ésimas diferencias de los puntos de una función tabulada con espaciamientos constantes son iguales, entonces dichos datos corresponden a un polinomio de grado j.

Cuando las diferencias de una función tabulada no se hacen constantes en ningún momento, pero en la j - ésima etapa son muy semejantes, se puede utilizar el polinomio como una aproximación de la función.

Al polinomio obtenido mediante la expresión (11) se le denomina polinomio de Newton con espaciamientos constantes.

Ejemplo V.1

Obtener las diferencias hacia adelante de la siguiente función definida en forma tabular:

x	y = F(x)
0	-5
1	1
2	9
3	25
4	55
5	105

Las primeras diferencias son, según la expresión (1):

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0 = 1 - (-5) = 6$$

$$\Delta y_1 = y_2 - y_1 = 9 - 1 = 8$$

$$\Delta y_2 = y_3 - y_2 = 25 - 9 = 16$$

$$\Delta y_3 = y_4 - y_3 = 55 - 25 = 30$$

$$\Delta y_4 = y_5 - y_4 = 105 - 55 = 50$$

Las segundas diferencias son, según la expresión (2):

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = 8 - 6 = 2$$

$$\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1 = 16 - 8 = 8$$

$$\Delta^2 y_2 = \Delta y_3 - \Delta y_2 = 30 - 16 = 14$$

$$\Delta^2 y_3 = \Delta y_4 - \Delta y_3 = 50 - 30 = 20$$

Las terceras diferencias, según la expresión (3):

$$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0 = 8 - 2 = 6$$

$$\Delta^3 y_1 = \Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_1 = 14 - 8 = 6$$

$$\Delta^3 y_2 = \Delta^2 y_3 - \Delta^2 y_2 = 20 - 14 = 6$$

ordenándolas en una *tabla de diferencias:*

x	y = F(x)	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y_0$
0	-5				
		6			
1	1		2		
		8		6	
2	9		8		0
		16		6	
3	25		14		0
		30		6	
4	55		20		
		50			
5	105				

Debido a que las terceras diferencias son constantes, todas las demás diferencias hacia adelante serán cero y se puede concluir, que la función tabulada corresponde con un polinomio de tercer grado de la forma:

$$y = F(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3$$

Ejemplo V.2

Obtener las diferencias hacia adelante de la siguiente función definida en forma tabular:

x	y = sen x
0	0.000
π/8	0.383
π/4	0.707
3π/8	0.924
π/2	1.000
5π/8	0.924
3π/4	0.707
7π/8	0.383
π	0.000

procediendo de igual manera que en el ejemplo anterior, se obtiene:

x	$y = \text{sen } x$	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
0	0.000					
		0.383				
$\frac{\pi}{8}$	0.383		-0.059			
		0.324		-0.048		
$\frac{\pi}{4}$	0.707		-0.107		0.014	
		0.217		-0.034		0.009
$\frac{3\pi}{8}$	0.924		-0.141		0.023	
		0.076		-0.011		-0.001
$\frac{\pi}{2}$	1.000		-0.152		0.022	
		-0.076		0.011		0.001
$\frac{5\pi}{8}$	0.924		-0.141		0.023	
		-0.217		0.034		-0.009
$\frac{3\pi}{4}$	0.707		-0.107		0.014	
		-0.324		0.048		
$\frac{7\pi}{8}$	0.383		-0.059			
		-0.383				
π	0.000					

En este caso las diferencias no se hacen constantes, pero tienden a serlo conforme avanzan las diferencias hacia adelante. Si redondeamos a una cifra decimal, las segundas diferencias serán prácticamente constantes y las terceras diferencias serán cero excepto dos, por lo que la función $y = \text{sen } x$ se puede representar *aproximadamente* por un polinomio de segundo grado de la forma:

$$y = \text{sen } x \doteq b_0 + b_1 x + b_2 x^2$$

.2 INTERPOLACION

El problema de interpolación consiste en encontrar el valor de la función $F(x)$, de la cual sólo se conocen algunos puntos, para un valor de x que se encuentre entre dos valores consecutivos conocidos.

V.2.1 INTERPOLACION CON ESPACIOS IGUALES

Considérese el primer intervalo de la tabla V.2, se tiene:

x	y = F(x)
x_0	y_0
$x_1 = x_0 + h$	y_1

Tabla V.2.1

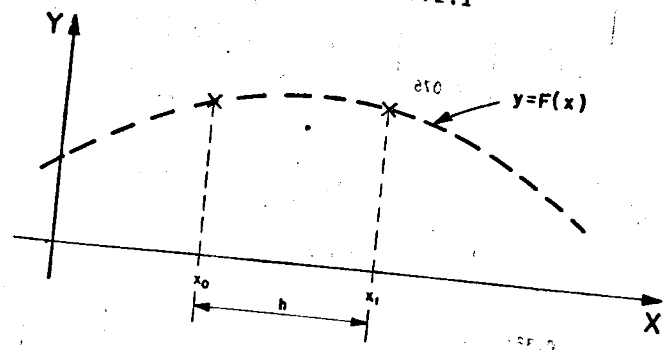


Figura V.2

Se trata de valuar la función $F(x)$ en un punto intermedio x_k:

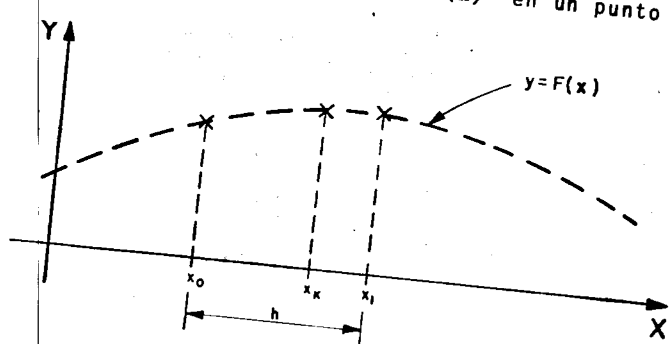


Figura V.3

x	y = F(x)
x_0	y_0
$x_k = x_0 + kh$	$y_k = ?$
$x_1 = x_0 + h$	y_1

Tabla V.2.2

Sin embargo, debido a que la función $F(x)$ se conoce únicamente en dos puntos, se pueden unir mediante una recta, como se muestra en la figura siguiente:

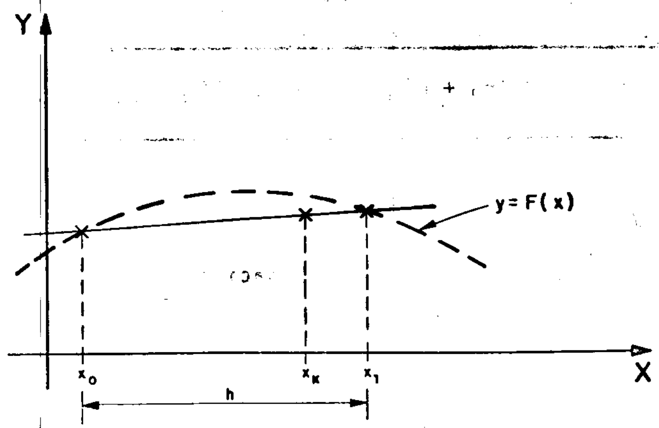


Figura V.4

Evaluando la recta en el punto x_k se tendrá una buena aproximación de $F(x_k)$. La ecuación de la recta puede obtenerse mediante el polinomio de Newton, haciendo $j = 1$ en la expresión (11):

$$y_k = y_0 + \binom{k}{1} \Delta y_0 + \binom{k}{2} (0) + \ldots + \binom{k}{k} (0)$$

simplificando:

$$y_k = y_0 + k\Delta y_0$$

Sustituyendo k por $(x_k - x_0)/h$

$$y_k = y_0 + \frac{x_k - x_0}{h} \Delta y_0$$

que es el polinomio de primer grado que se aproxima a $F(x)$.

Debe tomarse en cuenta que el polinomio de Newton fue desarrollado considerando a k como un número entero positivo y en la interpolación k es normalmente un valor fraccionario. Esto, sin embargo, no limita la aplicación del polinomio:

$$\boxed{y_k = y_0 + \binom{k}{1} \Delta y_0 + \binom{k}{2} \Delta^2 y_0 + \ldots + \binom{k}{j} \Delta^j y_0} \quad \ldots (15)$$

debido a que si se define la combinación $\binom{k}{i}$ como:

$$\binom{k}{i} = \frac{(k-0)(k-1)(k-2)\ \ldots\ (k-i+1)}{i!} \quad \text{donde } i = 1,2,\ldots,j$$

no hay inconveniente en que k sea un número fraccionario.

En general, si se cuenta con una mayor cantidad de puntos, se puede utilizar el polinomio de Newton que más se aproxime a la función, considerando que el grado del polinomio puede ser hasta de $n - 1$, donde n es el número de datos.

Cuando se desea obtener la interpolación entre dos puntos de $F(x)$, no es indispensable determinar el polinomio de Newton en función de x_k. Basta con calcular el valor de k con la expresión (13) y sustituirla en (15).

Ejemplo V.3

Dada la tabla del ejemplo V.1, encontrar el valor de $F(x)$ para $x = 1.5$

Al obtener sus diferencias hacia adelante, se forma la siguiente tabla:

$x_k = 1.5$

x	y = F(x)	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
0	-5				
		6			
1	1		2		
		8		6	
2	9		8		0
		16		6	
3	25		14		0
		30		6	
4	55		20		
		50			
5	105				

Como las terceras diferencias son constantes, se debe utilizar un polinomio de Newton de tercer grado, de esta manera, por la expresión (15):

$$y_k = y_0 + \binom{k}{1} \Delta y_0 + \binom{k}{2} \Delta^2 y_0 + \binom{k}{3} \Delta^3 y_0$$

considerando $x_0 = 1$ y $y_0 = 1$, se obtienen:

$\Delta y_0 = 8; \quad \Delta^2 y_0 = 8; \quad \Delta^3 y_0 = 6$

sustituyendo:

$$y_k = 1 + \binom{k}{1} 8 + \binom{k}{2} 8 + \binom{k}{3} 6 \qquad \ldots \text{(a)}$$

donde el valor de k está dado por la expresión (13):

$$k = \frac{x_k - x_0}{h} = \frac{1.5 - 1}{1} = 0.5$$

sustituyendo:

$$y_{0.5} = 1 + \binom{0.5}{1} 8 + \binom{0.5}{2} 8 + \binom{0.5}{3} 6$$

efectuando operaciones:

$$y_{0.5} = 1 + 0.5\ (8) + \frac{0.5\ (0.5-1)}{2}\ 8 + \frac{0.5\ (0.5-1)(0.5-2)}{6}\ 6$$

$$y_{0.5} = 1 + 4 - 1 + 0.375 = 4.375$$

por lo tanto:

$$F(1.5) = 4.375$$

Si se desea obtener la expresión de la función $F(x)$ definida en forma tabular, se puede hacer interpolando para un valor $x_k = x$, al sustituir este valor en la expresión (13) se obtiene:

$$k = \frac{x_k - 1}{1} = x - 1$$

a su vez, sustituyendo k en la expresión (a):

$$y = F(x) = 1 + \binom{x-1}{1} 8 + \binom{x-1}{2} 8 + \binom{x-1}{3} 6$$

efectuando operaciones:

$$F(x) = 1 + 8\,(x-1) + \frac{(x-1)(x-2)}{2}\,8 + \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{6}\,6$$

$$F(x) = 1 + 8x - 8 + 4x^2 - 8x - 4x + 8 + x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

simplificando:

$$F(x) = x^3 - 2x^2 + 7x - 5$$

Ejemplo V.4

De la siguiente función tabulada:

a) Obtener el valor de y para $x = 7.1$

x	y = F(x)
-5	0
-2	15
1	18
4	15
7	12
10	15

La tabla de diferencias de la función es:

$x_k = 7.1$

x	y = F(x)	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
-5	0				
		15			
-2	15		-12		
		3		6	
1	18		- 6		0
		-3		6	
4	15		0		0
		-3		6	
7	12		6		
		3			
10	15				

En este caso no es conveniente considerar $x_0 = -5$ y $y_0 = 0$, debido a que si se utiliza un polinomio de tercer grado, los puntos que se toman en cuenta para ajustar el polinomio de Newton son los primeros cuatro; es decir, que el ajuste cubre el intervalo de -5 a 4 y no cubre el valor que se desea interpolar.

Por esta razón es más conveniente considerar $x_0 = 1$ y $y_0 = 18$, con lo cual:

$$F(7.1) \doteq y_k = 18 + \binom{k}{1}(-3) + \binom{k}{2} 0 + \binom{k}{3} 6$$

de la expresión (13):

$$k = \frac{x_k - x_0}{h} = \frac{7.1 - 1}{3} = 2.033$$

sustituyendo:

$$y_{2.033} = 18 + \left(\frac{2.033}{1}\right)(-3) + \left(\frac{2.033}{2!}\right) 0 + \left(\frac{2.033}{!}\right) 6$$

efectuando operaciones:

$$y_{2.033} = 12.109$$

b) El valor de y para x = 10.4

Se ha calculado el valor de y para una x dada entre dos valores de x_k de la tabla que define a la función. Ahora se trata de calcular el valor de y para una x fuera del rango de los valores x_k de la tabla. A este problema se le conoce como *extrapolación*. Como para x = 13 no se tienen definidas las diferencias de la función, habrá que determinarlas aceptando que las terceras diferencias son constantes e iguales a 6. A partir de la tercera diferencia se puede determinar la segunda; con la segunda la primera y con esta última el valor de la función para x = 13. En la siguiente tabla se han marcado con un asterisco los valores encontrados con este procedimiento:

$x_k = 10.4$ →

x	y = F(x)	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
13	30*				
		-15*			
10	15		12*		
		-3		-6*	
7	12		6		0*
		3		-6	
4	15		0		0
		3		-6	
1	18		-6		0
		-3		-6	
-2	15		-12		
		-15			
-5	0				

interpolando:

$$k = \frac{10.4 - 13}{-3} = 0.867$$

luego:

$$y_{0.867} = 30 + \binom{0.867}{1}(-15) + \binom{0.867}{2}(12) + \binom{0.867}{3}(-6)$$

efectuando operaciones:

$$y = 30 - 13.005 - 0.692 - 0.131 = 16.172$$

por lo tanto:

$$F(10.4) = 16.172$$

.2.2 INTERPOLACION CON ESPACIOS VARIABLES

Si se presenta una función tabulada en la forma:

x	$y = F(x)$
x_0	y_0
$x_1 = x_0 + h_0$	y_1
$x_2 = x_1 + h_1$	y_2
$\vdots$	$\vdots$
$x_n = x_{n-1} + h_{n-1}$	y_n

Tabla V.3

donde:

$$h_0 = x_1 - x_0$$

$$h_1 = x_2 - x_1$$

$$\vdots$$

$$h_{n-1} = x_n - x_{n-1}$$

y no necesariamente se debe cumplir que:

$$h_0 = h_1 = \ldots = h_n$$

entonces, el polinomio de grado n que pasa por los $n+1$ puntos será:

$$y = b_0x^n + b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} + \ldots + b_{n-1}x + b_n$$

o bien como:

$$
\left.
\begin{aligned}
y = {} & a_0(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \ldots (x - x_n) + \\
& + a_1(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3) \ldots (x - x_n) + \\
& + a_2(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3) \ldots (x - x_n) + \\
& \qquad \vdots \\
& + a_n(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_{n-1})
\end{aligned}
\right\} \ldots (16)
$$

Los coeficientes a_0, a_1, a_2, ... a_n se determinarán de tal forma, que el polinomio pase por todos y cada uno de los puntos conocidos de la función, entonces si se valúa la expresión (16), para $x = x_0$ se obtendrá:

$$y_0 = a_0(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3) \ldots (x_0 - x_n)$$

despejando a_0:

$$a_0 = \frac{y_0}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3) \ldots (x_0 - x_n)}$$

valuando para $x = x_1$ se obtendrá y_1:

$$y_1 = a_1(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \ldots (x_1 - x_n)$$

y por lo tanto:

$$a_1 = \frac{y_1}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \ldots (x_1 - x_n)}$$

Procediendo en forma análoga, se obtienen los demás coeficientes de la expresión (16), el último de ellos se obtendrá valuando esta expresión para $x = x_n$ con lo que a_n será:

$$a_n = \frac{y_n}{(x_n - x_0)(x_n - x_1)(x_n - x_2) \ldots (x_n - x_{n-1})}$$

sustituyendo los valores de $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$ en la expresión(16)se obtiene:

$$\boxed{\begin{aligned} y = {} & \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \ldots (x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3) \ldots (x_0 - x_n)} y_0 + \\ + {} & \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3) \ldots (x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \ldots (x_1 - x_n)} y_1 + \\ + {} & \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3) \ldots (x - x_n)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3) \ldots (x_2 - x_n)} y_2 + \\ & \quad \vdots \\ + {} & \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_{n-1})}{(x_n - x_0)(x_n - x_1)(x_n - x_2) \ldots (x_n - x_{n-1})} y_n \end{aligned}} \quad \ldots (17)$$

Esta expresión recibe el nombre de *fórmula de interpolación de Lagrange* y es aplicable para cualquier valor de x cuando la función $F(x)$ se encuentra tabulada según la tabla V.3.

La expresión (17) se puede expresar de la siguiente forma:

$$\boxed{y = \sum_{i=0}^{n} \left[\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \right] y_i} \quad \ldots (18)$$

Ejemplo V.5

Dada la función definida por la siguiente tabla, encontrar el valor de la función para $x = 3$

x	y = F(x)
0	5
1	7
2	9
5	15

$x = 3 \longrightarrow$

utilizando la expresión (18) se obtiene:

$$y = F(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} y_0 +$$

$$+ \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} y_1 +$$

$$+ \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} y_2 +$$

$$+ \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} y_3$$

sustituyendo valores para $x = 3$:

$$y = F(3) = \frac{(3 - 1)(3 - 2)(3 - 5)}{(0 - 1)(0 - 2)(0 - 5)} (5) +$$

$$+ \frac{(3 - 0)(3 - 2)(3 - 5)}{(1 - 0)(1 - 2)(1 - 5)} (7) +$$

$$+ \frac{(3 - 0)(3 - 1)(3 - 5)}{(2 - 0)(2 - 1)(2 - 5)} (9) +$$

$$+ \frac{(3 - 0)(3 - 1)(3 - 2)}{(5 - 0)(5 - 1)(5 - 2)} (15)$$

efectuando operaciones:

$$F(3) = 2 - 10.5 + 18 + 1.5 = 11$$

V.2.3 INTERPOLACION INVERSA

Como se ha visto, la interpolación consiste en determinar el valor de la función $F(x)$, dado el valor de la variable independiente x.

La interpolación inversa consiste en determinar el valor de x dado el valor de la variable dependiente $F(x)$.

El problema se resuelve fácilmente por medio de la fórmula de interpolación de Lagrange, formando una tabla con los valores de la variable dependiente como valores de x y los de la variable independiente como los de y.

Para poder realizar una interpolación inversa, la única condición que se debe verificar es que la variable x sea una función de y : es decir, que a cada valor de y corresponda un solo valor de x.

En el siguiente ejemplo se presenta una aplicación de la interpolación inversa para resolver ecuaciones.

Ejemplo V.6

Obtener la raíz real positiva de la ecuación:

$$x^3 + 3x^2 + 2x - 2 = 0$$

utilizando interpolación inversa.

Tabulando el polinomio para valores positivos de x:

x	P(x)
0.2	- 1.472
0.4	- 0.656
0.6	0.496

Se observa que existe una raíz real positiva que se encuentra en el intervalo (0.4, 0.6), para determinarla se puede hacer una interpolación inversa, buscando un valor de x tal que haga que la función P(x) sea cero, esto es:

$P(x) = 0 \rightarrow$

P(x)	x
- 1.472	0.2
- 0.656	0.4
0.496	0.6
x	y

sustituyendo en la fórmula de interpolación de Lagrange:

$$y = \frac{(0.000 + 0.656)\,(0.000 - 0.496)}{(-1.472 + 0.656)(-1.472 - 0.496)}\,(0.2) +$$

$$+ \frac{(0.000 + 1.472)\,(0.000 - 0.496)}{(-0.656 + 1.472)(-0.656 - 0.496)}\,(0.4) +$$

$$+ \frac{(0.000 + 1.472)\,(0.000 + 0.656)}{(0.496 + 1.472)\,(0.496 + 0.656)}\,(0.6)$$

efectuando operaciones:

$$y = -\,0.0405 + 0.3106 + 0.2555$$

$$y = 0.5256$$

por lo tanto el valor de x que hace que $P(x) = 0$ es $x = 0.5256$.

Como la función $P(x)$ es un polinomio, al invertir la tabla, la función que se obtiene ya no es del mismo tipo, por lo tanto la interpolación inversa de Lagrange, sólo dará resultados aproximados. Se aceptará como raíz el valor $x = 0.5256$, el cual se obtuvo con un polinomio de segundo grado.

V.3 DERIVACION NUMERICA

El problema de la derivación numérica consiste en obtener el valor de las derivadas de una función tabulada en algunos de sus puntos:

$$x = x_0,\ x_1,\ x_2\ \ldots\ x_n$$

Partiendo de que la función que se desea derivar, está tabulada con espaciamientos constantes, según la tabla V.2, y aceptando que ésta se puede aproximar por un polinomio de grado j dado por la expresión (15), entonces:

$$F(x) \doteq y_0 + \binom{k}{1}\Delta y_0 + \binom{k}{2}\Delta^2 y_0 + \binom{k}{3}\Delta^3 y_0 + \ldots + \binom{k}{j}\Delta^j y_0 \quad \ldots (19)$$

su primera derivada es:

$$\frac{d}{dx}F(x) \doteq \frac{d}{dx}\left[y_0 + \binom{k}{1}\Delta y_0 + \binom{k}{2}\Delta^2 y_0 + \binom{k}{3}\Delta^3 y_0 + \ldots + \binom{k}{j}\Delta^j y_0\right]$$

Como el polinomio está en función de K y no de x, la derivada de F(x) con respecto a x, equivale a obtener la derivada del polinomio de Newton con respecto a K y multiplicarlo por la derivada de K con respecto a x, de esta manera:

$$\frac{d}{dx} F(x) \doteq \frac{d}{dk} \left[y_0 + \binom{k}{1} \Delta y_0 + \binom{k}{2} \Delta^2 y_0 + \binom{k}{3} \Delta^3 y_0 + \ldots + \binom{k}{j} \Delta^j y_0 \right] \frac{dk}{dx} \quad \ldots \quad (20)$$

teniendo en cuenta que:

$$k = \frac{x_k - x_0}{h}$$

entonces su derivada es:

$$\frac{dk}{dx} = \frac{1}{h} \quad \ldots \quad (21)$$

sustituyendo en la expresión (20):

$$\frac{d}{dx} F(x) \doteq \frac{1}{h} \frac{d}{dk} \left[y_0 + k\Delta y_0 + \frac{k(k-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} \Delta^3 y_0 + \ldots \binom{k}{j} \Delta^j y_0 \right]$$

derivando:

$$\boxed{\frac{d}{dx} F(x) \doteq \frac{1}{h} \left[\Delta y_0 + \frac{2k-1}{2} \Delta^2 y_0 + \frac{3k^2-6k+2}{6} \Delta^3 y_0 + \ldots + \frac{d}{dk} \binom{k}{j} \Delta^j y_0 \right]} \quad \ldots \quad (22)$$

derivando nuevamente:

$$\frac{d^2}{dx^2} F(x) \doteq \frac{1}{h} \frac{d}{dk} \left[\Delta y_0 + \frac{2k-1}{2} \Delta^2 y_0 + \frac{3k^2-6k+2}{6} \Delta^3 y_0 + \ldots + \frac{d}{dk} \binom{k}{j} \Delta^j y_0 \right] \frac{dk}{dx}$$

como $\frac{dk}{dx} = \frac{1}{h}$, la segunda derivada es:

$$\boxed{\frac{d^2}{dx^2} F(x) \doteq \frac{1}{h^2} \left[\Delta^2 y_0 + (k-1) \Delta^3 y_0 + \ldots + \frac{d^2}{dk^2} \binom{k}{j} \Delta^j y_0 \right]} \quad \ldots \quad (23)$$

derivando la expresión (23) y utilizando la expresión (21) se obtiene la tercera derivada:

$$\boxed{\frac{d^3}{dx^3} F(x) \doteq \frac{1}{h^3}\left[\Delta^3 y_0 + \ldots + \frac{d^3}{dk^3}\binom{k}{j} \Delta^j y_0\right]}$$

Considerando un polinomio de Newton de primer grado se obtiene a partir de la expresión (22) que la primera derivada de $F(x)$ se puede aproximar por:

$$\frac{d}{dx} F(x) \doteq \frac{1}{h}\left[\Delta y_0\right] \qquad \ldots (24)$$

lo cual equivale a:

$$\frac{d}{dx} F(x) = \frac{1}{h}\left[\Delta y_0\right] + e_r$$

donde e_r es el error en el que se incurre al aproximar la derivada de la función $F(x)$ como lo indica la expresión (24). Sustituyendo Δy_0 por $(y_1 - y_0)$ y valuando la derivada para $x = x_0$ se obtiene:

$$\left.\frac{d}{dx} F(x)\right|_{x = x_0} = \frac{1}{h}(-y_0 + y_1) + e_r$$

Expresión que se representa con la siguiente notación:

$$y'_0 = \frac{1}{h}\{-1 \quad 1\} + e_r$$

Geométricamente, lo anterior equivale a tomar como primera derivada a la pendiente de la recta que une los dos puntos considerados de la curva:

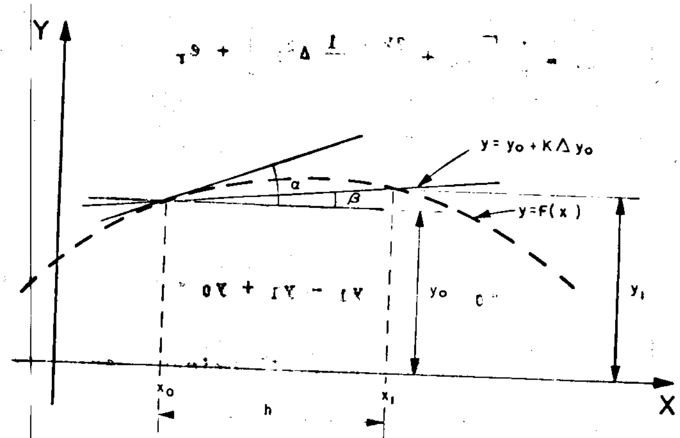


Figura V.5

donde:

$$\tan\alpha = \frac{d}{dx}F(x)\Big|_{x = x_0}$$

$$\tan\beta = \frac{y_1 - y_0}{h} = \frac{1}{h}(\Delta y_0)$$

con lo cual se puede concluir que:

$$\frac{d}{dx}F(x)\Big|_{x = x_0} = \tan\beta + e_r$$

Al coeficiente de la ordenada y_i que corresponde con la ordenada del punto en el cual se realiza la derivación, se le denomina *pivote de la fórmula*. Para identificarlo en la fórmula se subraya dicho coeficiente, como por ejemplo:

$$y_0' = \frac{1}{h}\{-\underline{1} \quad 1\} + e_r$$

Considerando un polinomio de segundo grado, la expresión (22) se reduce a:

$$\frac{d}{dx} F(x) = \frac{1}{h}\left[\Delta y_0 + \frac{2k-1}{2}\Delta^2 y_0\right] + e_r \qquad \ldots (25)$$

donde:

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0$$

y:

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = y_2 - y_1 - y_1 + y_0 = y_2 - 2y_1 + y_0$$

Si por ejemplo, se desea obtener la primera derivada de $F(x)$ en $x = x_1$ implica que $k = 1$, según la tabla V.2, ya que $x_1 = x_0 + (1)\ h$; por lo que sustituyendo:

$$\frac{d}{dx} F(x)\Big|_{x = x_1} = \frac{1}{h}\left[y_1 - y_0 + \frac{2-1}{2}(y_2 - 2y_1 + y_0)\right] + e_r$$

simplificando:

$$y'_1 = \frac{1}{2h}(-y_0 + y_2) + e_r$$

según la notación establecida, esta fórmula se representa como:

$$y'_1 = \frac{1}{2h}\{-1 \quad \underline{0} \quad 1\} + e_r \qquad \ldots (26)$$

Mediante un procedimiento similar es posible obtener también fórmulas de derivación para $F'(x_0)$ y $F'(x_2)$ con un polinomio de segundo grado, sustituyendo $k = 0$ y $k = 2$ respectivamente en la expresión (25), con lo cual:

$$y'_0 = \frac{1}{2h}\{\underline{-3} \quad 4 \quad -1\} + e_r \qquad \ldots (27)$$

$$y'_2 = \frac{1}{2h}\{1 \quad -4 \quad \underline{3}\} + e_r \qquad \ldots (28)$$

Con un polinomio de tercer grado y siguiendo un procedimiento semejante, se obtienen las siguientes fórmulas para la primera y segunda derivada:

$$y_0' = \frac{1}{6h}\{\underline{-11} \quad 18 \quad -9 \quad 2\} + e_r \qquad \ldots (29)$$

$$y_1' = \frac{1}{6h}\{-2 \quad \underline{-3} \quad 6 \quad -1\} + e_r \qquad \ldots (30)$$

$$y_2' = \frac{1}{6h}\{1 \quad -6 \quad \underline{3} \quad 2\} + e_r \qquad \ldots (31)$$

$$y_3' = \frac{1}{6h}\{-2 \quad 9 \quad -18 \quad \underline{11}\} + e_r \qquad \ldots (32)$$

$$y_0'' = \frac{1}{h^2}\{\underline{2} \quad -5 \quad 4 \quad -1\} + e_r \qquad \ldots (33)$$

$$y_1'' = \frac{1}{h^2}\{1 \quad \underline{-2} \quad 1 \quad 0\} + e_r \qquad \ldots (34)$$

$$y_2'' = \frac{1}{h^2}\{0 \quad 1 \quad \underline{-2} \quad 1\} + e_r \qquad \ldots (35)$$

$$y_3'' = \frac{1}{h^2}\{-1 \quad 4 \quad -5 \quad \underline{2}\} + e_r \qquad \ldots (36)$$

Además de las fórmulas anteriores se pueden desarrollar otras a partir de polinomios de grado superior a tres.

Ejemplo V.7

Para la función definida en la siguiente tabla:

x	y = cos x
0	1.000
$\frac{\pi}{8}$	0.924
$\frac{\pi}{4}$	0.707
$\frac{3\pi}{8}$	0.383
$\frac{\pi}{2}$	0.000

Calcular:

a) La primera derivada en $x = \frac{\pi}{8}$ utilizando las fórmulas de derivación obtenidas de un polinomio de segundo y tercer grado.

b) . **Comparar los resultados del inciso anterior** con el valor exacto de la derivada.

c) La primera derivada en $x = \frac{\pi}{2}$ utilizando las fórmulas de derivación obtenidas de un polinomio de tercer grado.

Solución:

a) Utilizando la expresión (26) que corresponde a un polinomio de segundo grado, se obtiene un valor aproximado a la primera derivada de la función:

$$y_1' = \frac{1}{2h}\{-1 \quad \underline{0} \quad 1\} + e_r$$

sustituyendo:

$$y_1' = \frac{1}{2\left(\frac{\pi}{8}\right)}\left[-1(1.000) + 0(0.924) + 1(0.707)\right] + e_r$$

$$y_1' \doteq -0.373$$

utilizando la expresión (30) que corresponde a un polinomio de tercer grado:

$$y_1' = \frac{1}{6\left(\frac{\pi}{8}\right)}\left[-2(1.000) - 3(0.924) + 6(0.707) - 1(0.383)\right] + e_r$$

$$y_1' \doteq -0.387$$

b) Comparando los resultados aproximados en el inciso anterior con el valor exacto que es:

$$\frac{d}{dx}\cos x \Big|_{x=\frac{\pi}{8}} = -\text{sen}\,\frac{\pi}{8} = -0.383$$

Se observa que el error relativo en el cual se incurre al aproximar la derivada con una fórmula limitada a las segundas diferencias es:

$$e_r = \left|\frac{x - x_1}{x}\right| = \left|\frac{-0.387 + 0.373}{-0.383}\right| = 2.6\%$$

mientras que al utilizar la expresión (30), **el error** relativo es solamente:

$$e_r = \left|\frac{-0.383 + 0.387}{-0.383}\right| = 1\%$$

c) Utilizando la expresión (32) y considerando $y_0 = 0.924$

$$y_3' = \frac{1}{6\left(\frac{\pi}{8}\right)}\left(-2(0.924) + 9(0.707) - 18(0.383) + 11(0.000)\right) + e_r$$

$$y_3' \doteq -1.010$$

Comparando las fórmulas de derivación numérica, (expresiones (27) a (36)), se observa que las de orden impar son antisimétricas con respecto al pivote, siendo éste el punto en el cual se obtiene la derivada, mientras que las de orden par son simétricas. Compárese (27) con (28) y (29) con (32) que son antisimétricas o (33) con (36) que son simétricas.

V.4 INTEGRACION NUMERICA

Para obtener un valor aproximado de la integral de $F(x)$ en el intervalo $x_0 \leq x \leq x_n$ se partirá de la fórmula de interpolación de Newton.

$$F(x) \doteq y_0 + \binom{k}{1}\Delta y_0 + \binom{k}{2}\Delta^2 y_0 + \binom{k}{3}\Delta^3 y_0 + \ldots + \binom{k}{j}\Delta^j y_0$$

integrando:

$$\int_{x_0}^{x_n} F(x)\,dx \doteq \int_{x_0}^{x_n}\left(y_0 + \binom{k}{1}\Delta y_0 + \binom{k}{2}\Delta^2 y_0 + \binom{k}{3}\Delta^3 y_0 + \ldots + \binom{k}{j}\Delta^j y_0\right) dx$$

de la expresión (21):

$$dx = h\,dk$$

y de la tabla V.2 si:

$$x_0 = x_0 + (0)h \qquad \text{entonces} \qquad k = 0$$

y si:

$$x_n = x_0 + nh \qquad \text{entonces} \qquad k = n$$

sustituyendo:

$$\int_{x_0}^{x_n} F(x)\,dx \doteq \int_0^n \left(y_0+k\Delta y_0+\frac{k(k-1)}{2!}\Delta^2 y_0+\frac{k(k-1)(k-2)}{3!}\Delta^3 y_0+\dots+\binom{k}{j}\Delta^j y_0\right) h\,dk$$

integrando:

$$\int_{x_0}^{x_n} F(x)\,dx \doteq h\left(ky_0+\frac{k^2}{2}\Delta y_0+\left(\frac{k^3}{6}-\frac{k^2}{4}\right)\Delta^2 y_0+\left(\frac{k^4}{24}-\frac{k^3}{6}+\frac{k^2}{6}\right)\Delta^3 y_0+\right.$$

$$\left.+\dots\Big|_0^n+\int_0^n \binom{k}{j}\Delta^j y_0\,dk\right)$$

sustituyendo límites:

$$\boxed{\int_{x_0}^{x_n} F(x)\,dx \doteq h\left(ny_0+\frac{n^2}{2}\Delta y_0+\left(\frac{n^3}{6}-\frac{n^2}{4}\right)\Delta^2 y_0+\left(\frac{n^4}{24}-\frac{n^3}{6}+\frac{n^2}{6}\right)\Delta^3 y_0+\dots+\int_0^n \binom{k}{j}\Delta^j y_0\,dk\right)} \quad (37)$$

Considerando hasta las primeras diferencias:

$$\int_{x_0}^{x_n} F(x)\,dx = h\left[ny_0+\frac{n^2}{2}\Delta y_0\right]+e_r$$

la integral sólo se calculará entre los dos primeros valores de la tabla (V.2), es decir, entre x_0 y x_1

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x)\,dx = h\left[y_0+\frac{1}{2}\Delta y_0\right]+e_r$$

pero:

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0$$

sustituyendo y simplificando:

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x)\,dx = \frac{h}{2}\left[y_0+y_1\right]+e_r$$

La expresión anterior es igual al área bajo la curva entre los puntos de coordenadas (x_0, y_0) y (x_1, y_1). Ambos unidos por una recta definida por la expresión:

$$y = y_0 + k \Delta y_0$$

y su interpretación geométrica es:

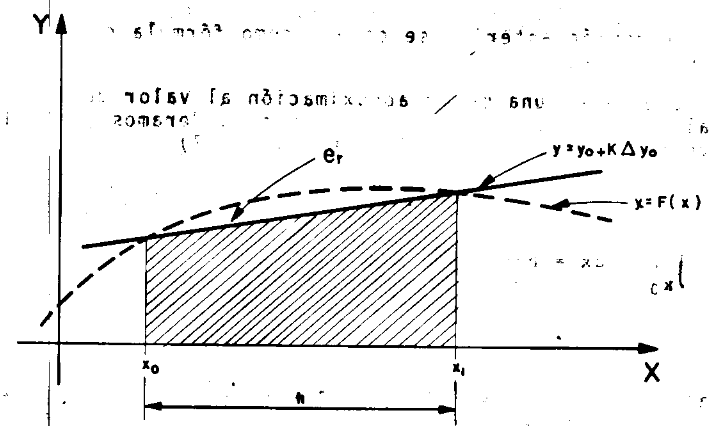


Figura V.6

En la misma forma, integrando entre x_1 y x_2, se obtiene.

$$\int_{x_1}^{x_2} F(x)\,dx = \frac{h}{2}(y_1 + y_2) + e_r$$

y sucesivamente hasta:

$$\int_{x_{n-1}}^{x_n} F(x)\,dx = \frac{h}{2}(y_{n-1} + y_n) + e_r$$

por lo que:

$$\int_{x_0}^{x_n} F(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} F(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} F(x)\,dx + \ldots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} F(x)\,dx$$

$$\int_{x_0}^{x_n} F(x)\,dx = \frac{h}{2}(y_0 + y_1) + e_r + \frac{h}{2}(y_1 + y_2) + e_r + \ldots + \frac{h}{2}(y_{n-1} + y_n) + e_r$$

suponiendo que e_r tiene la misma magnitud en cada integración parcial y simplificando se obtiene:

$$\boxed{\int_{x_0}^{x_n} F(x)\,dx = \frac{h}{2}\left[y_0 + y_n + 2\sum_{i=1}^{n-1} y_i\right] + e_r} \quad \ldots (38)$$

La expresión anterior se conoce como fórmula de *integración trapecial.*

Para obtener una mejor aproximación al valor de la integral definida entre x_0 y x_n de $F(x)$, consideramos hasta las segundas diferencias en la expresión (37)

$$\int_{x_0}^{x_n} F(x)\,dx = h\left[ny_0 + \frac{n^2}{2}\,\Delta y_0 + \left(\frac{n^3}{6} - \frac{n^2}{4}\right)\Delta^2 y_0\right] + e_r$$

Calculando la integral entre los tres primeros valores de la función definida según la tabla (V.2) se obtiene:

$$\int_{x_0}^{x_2} F(x)\,dx = h\left[2y_0 + \frac{4}{2}\,\Delta y_0 + \left(\frac{8}{6} - \frac{4}{4}\right)\Delta^2 y_0\right] + e_r \quad \ldots (39)$$

donde:

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0$$

y:

$$\Delta^2 y_0 = y_2 - 2y_1 + y_0$$

sustituyendo en la expresión (39) y simplificando:

$$\int_{x_0}^{x_2} F(x)\,dx = h\left[2y_0 + 2(y_1 - y_0) + \frac{2}{3}\,(y_2 - 2y_1 + y_0)\right] + e_r$$

$$\int_{x_0}^{x_2} F(x)\,dx = \frac{h}{3}\,(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

siendo su interpretación geométrica:

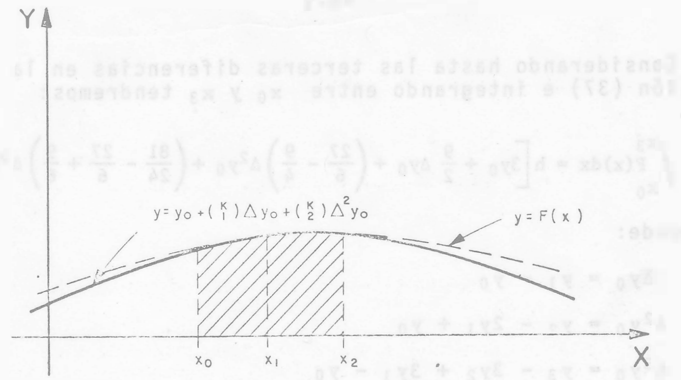


Figura V.7

En forma similar, integrando entre x_2 y x_4 se obtiene:

$$\int_{x_2}^{x_4} F(x)dx = \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4) + e_r$$

y así sucesivamente las últimas integrales son:

$$\int_{x_{n-2}}^{x_n} F(x)dx = \frac{h}{3}(y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n) + e_r$$

por lo tanto:

$$\int_{x_0}^{x_n} F(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} F(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} F(x)dx + \ldots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} F(x)dx$$

$$= \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) + e_r + \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4) + e_r +$$

$$+ \ldots + \frac{h}{3}(y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n) + e_r$$

suponiendo que e_r tiene la misma magnitud en cada integración parcial y simplificando se obtiene:

$$\boxed{\int_{x_0}^{x_n} F(x)dx = \frac{h}{3}\left[y_0 + y_n + 4\sum \begin{matrix}\text{ordenadas de}\\ \text{orden impar}\end{matrix} + 2\sum \begin{matrix}\text{ordenadas de}\\ \text{orden par}\end{matrix}\right] + e_r} \quad \ldots (40)$$

expresión conocida como fórmula de *integración de Simpson 1/3*. A diferencia de la fórmula de integración trapecial, la expresión (40) es aplicable solamente para valores pares de n, ya que de lo contrario, no se podrá obtener el valor de la última integral:

$$\int_{x_{n-2}}^{x_n} F(x)\,dx$$

Considerando hasta las terceras diferencias en la expresión (37) e integrando entre x_0 y x_3 tendremos:

$$\int_{x_0}^{x_3} F(x)\,dx = h\left[3y_0 + \frac{9}{2}\Delta y_0 + \left(\frac{27}{6} - \frac{9}{4}\right)\Delta^2 y_0 + \left(\frac{81}{24} - \frac{27}{6} + \frac{9}{6}\right)\Delta^3 y_0\right] + e_r$$

donde:

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0$$

$$\Delta^2 y_0 = y_2 - 2y_1 + y_0$$

$$\Delta^3 y_0 = y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0$$

sustituyendo y simplificando:

$$\int_{x_0}^{x_3} F(x)\,dx = h\left[3y_0 + \frac{9}{2}(y_1 - y_0) + \frac{9}{4}(y_2 - 2y_1 + y_0) + \right.$$

$$\left. + \frac{3}{8}(y_3 - 3y_2 + 3y_1 + y_0)\right] + e_r$$

$$\int_{x_0}^{x_3} F(x)\,dx = \frac{3}{8}h\left[y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3\right] + e_r$$

y su interpretación geométrica es:

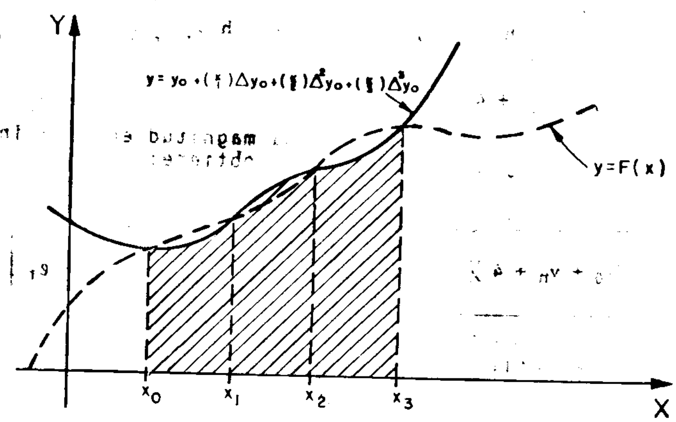


Figura V.8

por lo que:

$$\int_{x_0}^{x_n} F(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_3} F(x)\,dx + \int_{x_3}^{x_6} F(x)\,dx + \ldots + \int_{x_{n-3}}^{x_n} F(x)\,dx$$

sustituyendo:

$$\int_{x_0}^{x_n} F(x)\,dx = \frac{3}{8}\,h\left[y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3\right] + e_r + \frac{3}{8}\,h\left[y_3 + 3y_4 + 3y_5 + y_6\right] +$$

$$+ e_r + \ldots + \frac{3}{8}\,h\left[y_{n-3} + 3y_{n-2} + 3y_{n-1} + y_n\right] + e_r$$

suponiendo que e_r tiene la misma magnitud en cada integración y simplificando, se obtiene:

$$\int_{x_0}^{x_n} F(x)\,dx = \frac{3}{8}\,h\left[y_0 + y_n + 2\sum \begin{matrix}\text{ordenadas de}\\ \text{orden múltiplo de 3}\end{matrix} + 3\sum \begin{matrix}\text{resto de}\\ \text{ordenadas}\end{matrix}\right] + e_r \quad \ldots (41)$$

esta expresión se conoce como fórmula de *integración de Simpson* 3/8 y es aplicable para valores de n múltiplos de tres.

Ejemplo V.8

A partir de los siguientes datos:

i	x_i	$y_i = F(x_i)$
0	1	-4
1	2	6
2	3	18
3	4	32
4	5	48
5	6	66
6	7	86
7	8	108
8	9	132

encontrar el valor de la integral de la función en los siguientes intervalos:

a) $1 \le x \le 9$

b) $1 \le x \le 6$

Solución:

a) Como **n** es igual a ocho y éste es par, se puede utilizar la fórmula de Simpson 1/3, gráficamente:

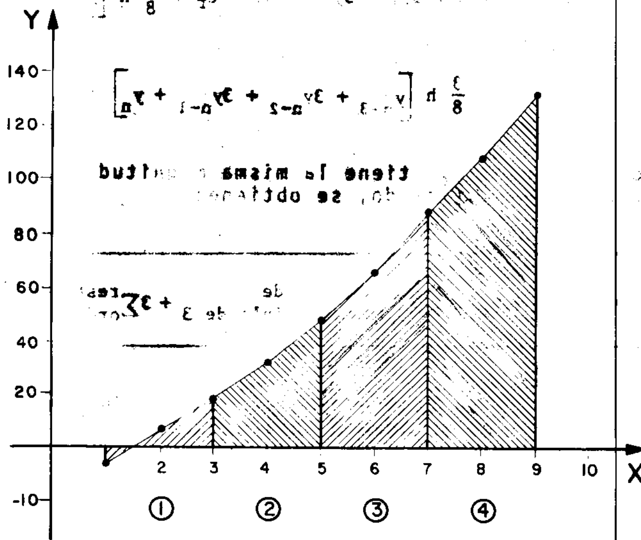


Figura V.9

entonces:

$$\int_1^9 F(x)\,dx = \frac{h}{3}\left[y_0 + y_8 + 2\sum \begin{matrix}\text{ordenadas de}\\ \text{orden par}\end{matrix} + 4\sum \begin{matrix}\text{ordenadas de}\\ \text{orden impar}\end{matrix}\right] + e_r$$

$$\int_1^9 F(x)\,dx = \frac{h}{3}\left[y_0 + y_8 + 2(y_2 + y_4 + y_6) + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7)\right] + e_r$$

sustituyendo valores:

$$\int_1^9 F(x)\,dx = \frac{1}{3}\left[-4 + 132 + 2(18 + 48 + 86) + 4(6 + 32 + 66 + 108)\right] + e_r$$

efectuando operaciones y despreciando el error:

$$\int_1^9 F(x)\,dx \doteq 426.667\ u^2$$

si utilizamos la fórmula trapecial para valuar la misma integral:

$$\int_1^9 F(x)\,dx = \frac{h}{2}\left[y_0 + y_8 + 2\sum \begin{matrix}\text{resto de}\\ \text{ordenadas}\end{matrix}\right] + e_r$$

$$\int_1^9 F(x)\,dx = \frac{1}{2}\left[y_0 + y_8 + 2(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7)\right] + e_r$$

sustituyendo valores:

$$\int_1^9 F(x)\,dx = \frac{1}{2}\left[-4 + 132 + 2\,(6 + 18 + 32 + 48 + 66 + 86 + 108)\right] + e_r$$

efectuando operaciones y despreciando el error:

$$\int_1^9 F(x)\,dx \doteq 428.000\ u^2$$

La diferencia en los resultados obtenidos utilizando la fórmula de Simpson 1/3 o la fórmula trapecial, se debe a la magnitud del error, que por ahora se está despreciando.

La función definida en este ejemplo se obtuvo al tabular el siguiente polinomio:

$$P(x) = x^2 + 7x - 12$$

cuya integral es:

$$\int_1^9 (x^2 + 7x - 12)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{7}{2}x^2 - 12x\right]_1^9 = 418.5 - (-8.167) = 426.667\ u^2$$

Obsérvese que con la fórmula de Simpson 1/3 se llega al valor exacto, existiendo un error relativo al utilizar la fórmula trapecial de:

$$e_r = \left|\frac{x - x_1}{x}\right| = \left|\frac{426.667 - 428.000}{426.667}\right| = 0.312\ \%$$

b) En este caso n = 5, por lo tanto no es par, ni múltiplo de 3, por lo que no se pueden utilizar las fórmulas de Simpson 1/3 ó 3/8, a menos que se divida el intervalo de integración, de 1 a 4 en el que se integrará con Simpson 3/8 y de 4 a 6 integrando con Simpson 1/3. La suma de los resultados nos dará el área total dentro del intervalo pedido.

	i	x	y = F(x)
	0	1	-4
	1	2	6
	2	3	18
0	3	4	32
1		5	48
2		6	66

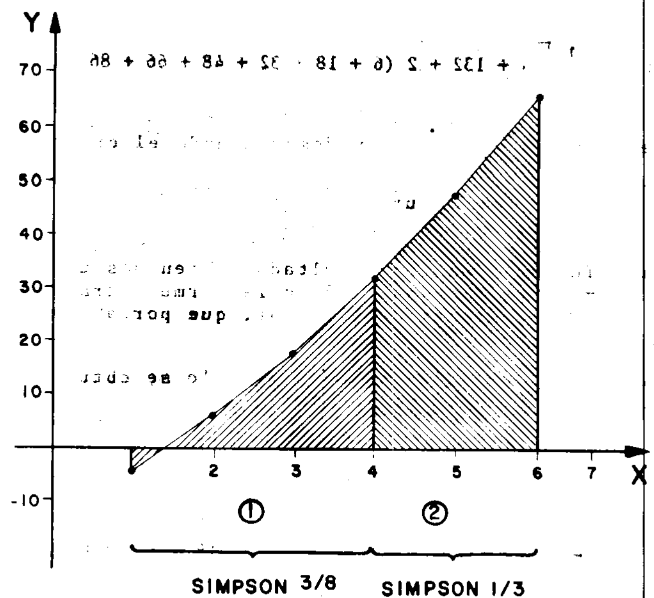


Figura V.10

utilizando Simpson $\frac{3}{8}$:

$$\int_1^4 F(x)dx = \frac{3}{8} h \left[y_0 + y_3 + 2\,\Sigma \begin{matrix}\text{ordenadas de}\\ \text{orden múltiplo de 3}\end{matrix} + 3\,\Sigma \begin{matrix}\text{resto de}\\ \text{ordenadas}\end{matrix} \right] + e_r$$

$$\int_1^4 F(x)dx = \frac{3}{8} h \left[y_0 + y_3 + 2\ (--) + 3\ (y_1 + y_2) \right] + e_r$$

sustituyendo valores:

$$\int_1^4 F(x)dx = \frac{3}{8} \left[-4 + 32 + 2\ (--) + 3\ (6 + 18) \right] + e_r$$

efectuando operaciones y despreciando el error:

$$\int_1^4 F(x)dx \doteq 37.5 \ u^2$$

utilizando Simpson $\frac{1}{3}$:

$$\int_4^6 F(x)dx = \frac{h}{3}\left[y_0 + y_2 + 2\,\Sigma \begin{array}{c}\text{ordenadas}\\ \text{de orden par}\end{array} + 4\,\Sigma \begin{array}{c}\text{ordenadas de}\\ \text{orden impar}\end{array}\right] + e_r$$

$$\int_4^6 F(x)dx = \frac{h}{3}\left[y_0 + y_2 + 2\,(--) + 4\,(y_1)\right] + e_r$$

sustituyendo valores:

$$\int_4^6 F(x)dx = \frac{1}{3}\left[32 + 66 + 2\,(--) + 4\,(48)\right] + e_r$$

efectuando operaciones y despreciando el error:

$$\int_4^6 F(x)dx \doteq 96.667 \ u^2$$

por lo que el área total es:

$$\int_1^6 F(x)dx = \int_1^4 F(x)dx + \int_4^6 F(x)dx \doteq 37.5 + 96.667 \doteq 134.167 \ u^2$$

siendo el valor exacto de la integral:

$$\int_1^6 F(x)dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{7x^2}{2} - 12x\right]_1^6 = 126 - (-8.167) = 134.167 \ u^2$$

por lo tanto, el error en este caso es igual a cero.

V.5 ANALISIS DEL ERROR EN LAS FORMULAS DE DERIVACION E INTEGRACION NUMERICA

Por medio de la *serie de Taylor* se pueden obtener las fórmulas de derivación o de integración numéricas, permitiendo además, determinar el orden del error que se comete al utilizarlas en una aproximación.

Considerando que existen las n primeras derivadas de la función y desarrollando la serie de Taylor en el entorno al punto x_0 se tiene que:

$$F(x) = F(x_0) + (x - x_0)\,F'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!}\,F''(x_0) + \\ + \frac{(x - x_0)^3}{3!}\,F'''(x_0) + \ldots \quad (42)$$

valuando esta expresión para $x = x_1 = x_0 + h$

$$F(x_1) = y_1 = y_0(x_1 - x_0)\, y_0' + \frac{(x_1 - x_0)^2}{2!}\, y_0'' + \frac{(x_1 - x_0)^3}{3!}\, y_0''' + \ldots$$

pero:

$x_1 - x_0 = h$

por lo que:

$$y_1 = y_0 + hy_0' + \frac{h^2}{2!}\, y_0'' + \frac{h^3}{3!}\, y_0''' + \ldots \qquad \ldots (43)$$

valuando la expresión (42) para $x = x_2 = x_0 + 2h$, se obtiene:

$$F(x_2) = y_2 = y_0 + (x_2 - x_0)\, y_0' + \frac{(x_2 - x_0)^2}{2!}\, y_0'' + \frac{(x_2 - x_0)^3}{3!}\, y_0''' + \ldots$$

pero:

$x_2 - x_0 = 2h$

por lo que:

$$y_2 = y_0 + 2h\, y_0' + \frac{4h^2}{2!}\, y_0'' + \frac{8h^3}{3!}\, y_0''' + \ldots \qquad \ldots (44)$$

en forma similar valuando la expresión (42) para $x = x_{-1} = x_0 - h$ se obtiene:

$$y_{-1} = y_0 - hy_0' + \frac{h^2}{2!}\, y_0'' - \frac{h^3}{3!}\, y_0''' + \ldots \qquad \ldots (45)$$

y para $x = x_{-2} = x_0 - 2h$:

$$y_{-2} = y_0 - 2hy_0' + \frac{4h^2}{2!}\, y_0'' - \frac{8h^3}{3!}\, y_0''' + \ldots \qquad \ldots (46)$$

despejando y_0 de la expresión (43):

$$y_0' = \frac{1}{h}\,(-y_0 + y_1) - \frac{h}{2}\, y_0'' - \frac{h^2}{6}\, y_0''' - \ldots \qquad \ldots (47)$$

Siendo esta expresión una fórmula de derivación para obtener la primera derivada con un polinomio de primer grado, que se representa como:

$$y_0' = \frac{1}{h}\,\{\underline{-1}\quad 1\} + e_r$$

donde el error es:

$$e_r = -\frac{h}{2}\, y_0'' - \frac{h^2}{6}\, y_0''' - \ldots$$

Calcular exactamente el valor de e_r resulta imposible, debido a que la serie que lo forma es infinita y además no tiene sentido que para calcular el error que se comete en la primera derivada se requiera de las derivadas de orden superior a uno.

Como en general h es un número fraccionario y el denominador de cada término de e_r aumenta considerablemente en los términos consecutivos, entonces se tiene que el primero de los términos es en buena medida el que determina el valor de e_r.

Como no se conoce y_0'', se concluye que puede esperarse que el error sea del orden de h. En la fórmula esto puede representarse como:

$$y_0' = \frac{1}{h}\{-\underline{\underline{1}} \quad 1\} + (0)h$$

Para encontrar el orden de error de la fórmula de la primera derivada en $x = x_1$, considerando un polinomio de grado dos, se parte de restar cuatro veces la expresión (43) de la (44), esto es:

$$y_2 - 4y_1 = -3y_0 - 2hy_0' + \frac{4h^3}{3!}y''' + \ldots$$

despejando y_0':

$$y_0' = \frac{1}{2h}(-3y_0 + 4y_1 - y_2) + \frac{h^2}{3}y_0''' + \ldots$$

se obtiene:

$$y_0' = \frac{1}{2h}\{-\underline{\underline{3}} \quad 4 \quad -1\} + e_r \qquad \ldots (48)$$

donde:

$$e_r = \frac{h^2}{3}y_0''' + \ldots \qquad \ldots (49)$$

por la expresión (49) se observa que la fórmula tiene un error del orden de h^2, con lo cual:

$$y_0' = \frac{1}{2h}\{-\underline{\underline{3}} \quad 4 \quad -1\} + (0)\,h^2$$

restando la expresión (45) de la (43):

$$y_1 - y_{-1} = 2hy_0' + \frac{2h^3}{3!}y_0''' + \ldots$$

despejando y_0':

$$y_0' = \frac{1}{2h}(-y_{-1} + y_1) - \frac{h^2}{6}y_0''' + \ldots$$

se obtiene:

$$y_0' = \frac{1}{2h}\{-1 \quad \underline{\underline{0}} \quad 1\} + (0)\,h^2$$

De la misma manera se pueden obtener las demás fórmulas de derivación numérica donde se podrán observar los diferentes órdenes del error. Sumando las expresiones (43) y (45) se obtiene otra de las fórmulas de derivación:

$$y_1 + y_{-1} = 2y_0 + 2\,\frac{h^2}{2!}\,y''_0 + 2\,\frac{h^4}{4!}\,y_0^{(IV)} + \ldots$$

y despejando y''_0:

$$y''_0 = \frac{1}{h^2}\,(y_{-1} - 2y_0 + y_1) - \frac{1}{12}\,h^2\,y_0^{(IV)} - \ldots \qquad \ldots (50)$$

se llega a una fórmula para obtener la segunda derivada con interpolación limitada a segundas diferencias:

$$y''_0 = \frac{1}{h^2}\,\{1 \quad \underline{\underline{-2}} \quad 1\} + (0)\,h^2$$

en este caso el error de esta fórmula es del orden de h^2.

Los errores en las fórmulas de integración pueden obtenerse en forma análoga a las de derivación. Si integramos la expresión (42) en el intervalo $x_0 \le x \le x_1$, se tiene:

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} (y_0 + (x - x_0)\,y'_0 + \frac{(x - x_0)^2}{2!}\,y''_0 + $$

$$+ \frac{(x - x_0)^3}{3!}\,y'''_0 + \ldots)\,dx \qquad \ldots (51)$$

haciendo:

$$z = x - x_0$$

entonces:

$$dz = dx$$

y si:

$x = x_0$ entonces $z = 0$

y

$x = x_1 = x_0 + h$ entonces $z = h$

por lo que la expresión (51) queda:

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x)\,dx = \int_0^h (y_0 + z\,y'_0 + \frac{z^2}{2!}\,y''_0 + \frac{z^3}{3!}\,y'''_0 + \ldots)\,dz$$

integrando:

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x)\,dx = \left[z\, y_0 + \frac{z^2}{2!} y_0' + \frac{z^3}{3!} y_0'' + \frac{z^4}{4!} y_0''' + \ldots \right]_0^h$$

sustituyendo límites:

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x)\,dx = hy_0 + \frac{h^2}{2!} y_0' + \frac{h^3}{3!} y_0'' + \frac{h^4}{4!} y_0''' + \ldots$$

sustituyendo en el miembro de la derecha y_0' por la expresión (47) se obtiene:

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x)\,dx = hy_0 + \frac{h^2}{2!} \left(\frac{1}{h} (-y_0 + y_1) - \frac{h}{2} y_0'' - \frac{h^2}{3!} y_0''' - \ldots \right) + \frac{h^3}{3!} y_0'' + \frac{h^4}{4!} y_0''' + \ldots$$

simplificando:

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x)\,dx = \frac{h}{2} (y_0 + y_1) - \frac{h^3}{12} y_0'' - \frac{h^4}{24} y_0''' - \ldots$$

de la misma forma:

$$\int_{x_1}^{x_2} F(x)\,dx = \frac{h}{2} (y_1 + y_2) - \frac{h^3}{12} y_1'' - \frac{h^4}{24} y_1''' - \ldots$$

$$\vdots$$

$$\int_{x_{n-1}}^{x_n} F(x)\,dx = \frac{h}{2} (y_{n-1} + y_n) - \frac{h^3}{12} y_{n-1}'' - \frac{h^4}{24} y_{n-1}''' - \ldots$$

y sumando las integrales:

$$\int_{x_0}^{x_n} F(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} F(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} F(x)\,dx + \ldots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} F(x)\,dx$$

sustituyendo y simplificando:

$$\int_{x_0}^{x_n} F(x)\,dx = \frac{h}{2} \left[y_0 + y_n + 2 \sum \begin{matrix}\text{resto de}\\ \text{ordenadas}\end{matrix} \right] + e_r$$

donde:

$$e_r = -\frac{h^3}{12} (y_0'' + y_1'' + y_2'' + \ldots + y_{n-1}'') - \ldots$$

Considerando y" como un promedio de las segundas derivadas, entonces:

$$e_r = -\frac{h^3}{12}(n\,y'') \quad \ldots \qquad (52)$$

y dado que:

$$x_n = x_0 + nh$$

entonces:

$$n = \frac{x_n - x_0}{h}$$

sustituyendo en la expresión (52):

$$e_r = -\frac{h^3}{12}\left[\frac{x_n - x_0}{h}\right] y'' - \ldots$$

y por último:

$$e_r = -\frac{h^2}{12}\left[(x_n - x_0)\,y''\right] - \ldots$$

por lo que se concluye que la fórmula de integración trapecial tiene un error del orden de h^2.

De la misma forma en que se obtuvo la fórmula trapecial y su error a partir de la expresión (42) se pueden obtener las fórmulas de integración de Simpson 1/3 y 3/8 las cuales tienen un error del orden de h^4.

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Aplicando la interpolación de Newton calcular de la siguiente función tabulada:

x	y = F(x)
-3	-51
-1	-11
1	-11
3	- 3
5	61

a) El valor de y para x = 0.5

b) El valor de y para x = 4

c) El valor de y para x = -3.4

d) El polinomio al cual corresponde la función tabular.

2. Obtener los valores de y para x = 3 y x = 6 respectivamente para la función tabulada en la siguiente tabla:

x	y = F(x)
0	5
1	7
2	9
5	15
7	19

3. **Para la función definida por la siguiente tabla:**

x	y = F(x)
0.2	0.938
0.4	0.864
0.6	0.832
0.8	0.867
1.0	1.000
1.2	1.300

calcular:

a) La **primera derivada** en el punto $x = 0.2$ utilizando fórmulas de derivación limitadas a primeras, segundas y terceras diferencias.

b) La segunda derivada en el punto $x = 0.6$ utilizando fórmulas de derivación limitadas a terceras diferencias.

c) Comparar los resultados obtenidos en los incisos anteriores al derivar directamente la función $F(x) = x^{x^2}$

4. **La trayectoria de un electrón está** definida por la siguiente tabla. Calcular la pendiente de la trayectoria cuando el electrón se encuentra a 2, 4 y 5 micras de distancia.

x [μ]	y = F(x) [μ]
1	1.00
2	1.26
3	1.44
4	1.59
5	1.71

5. **En la siguiente tabla se muestran los valores de** la velocidad de un tren que frena al llegar a una estación. Calcular la aceleración para los tiempos t = 15 y t = 20 segundos.

t [s]	v(t) [m/s]
5	6.6328
10	4.7590
15	3.6741
20	2.9164
25	2.3412
30	1.8842

6. **Los datos de la siguiente tabla fueron obtenidos** directamente efectuando mediciones sobre un circuito eléctrico. Si t es el tiempo y q la carga, calcular la corriente i que fluye por el circuito, teniendo en cuenta que la corriente i es la variación de la carga respecto del tiempo.

t [s]	q [coul]
0	0.000
1	2.379
2	4.532
3	6.480
4	8.242
5	9.837

7. Valuar las siguientes integrales utilizando la fórmula de integración trapecial:

a) $$\int_{3}^{7} x^2 \log x \, dx$$

b) $$\int_{0}^{\pi/2} e^{\cos x} \, dx$$

c) $$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \, dx$$

8. Valuar la integral de probabilidad:

$$\int_{-3}^{3} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \, dx$$

combinando las fórmulas de Simpson 1/3 y 3/8.

9. Un vehículo parte de la ciudad de México hacia el puerto de Acapulco, el cual se encuentra a 400 km. de distancia. La siguiente tabla muestra la velocidad del vehículo desde el momento que partió de la ciudad de México.

t [hrs]	v(t) [km/hr]
0.0	85
0.5	100
1.0	120
1.5	100
2.0	95
2.5	90
3.0	110
3.5	100

determinar:

a) Si al cabo de tres horas y media de viaje el vehículo ya arribó al puerto de Acapulco.

b) Qué velocidad llevaba en $t = 1.7$ horas.

10. La siguiente tabla muestra la producción en toneladas de ácido sulfúrico en México, encontrar la producción para los años de 1953 y 1958.

t [años]	producción [Tn]
1950	43.374
1951	56.667
1954	109.962
1956	186.203
1960	248.828
1961	275.984

CAPITULO VI SOLUCION NUMERICA DE ECUACIONES DIFERENCIALES

RODUCCION

En el capítulo I se mencionó que los fenómenos físicos que estudia la ingeniería, se pueden representar mediante modelos matemáticos; éstos en algunos casos se reducen a una ecuación diferencial, siendo su solución una función que representa el comportamiento del fenómeno.

La solución de ecuaciones diferenciales no es un problema sencillo, una forma de resolverlas, es a través de los métodos numéricos que permiten la utilización de la computadora digital.

En este capítulo se estudiarán los métodos numéricos básicos para obtener la solución de ecuaciones diferenciales.

.1 CONCEPTOS BASICOS SOBRE ECUACIONES DIFERENCIALES

Se entiende por *ecuación diferencial*, aquella que relaciona dos o más variables en términos de derivadas o diferenciales. Para su estudio conviene mencionar las siguientes definiciones acerca de estas ecuaciones:

a) *Ecuación diferencial ordinaria*.- Es aquella en la que existe solamente una variable independiente, por lo tanto sus derivadas serán totales.

b) *Ecuación diferencial parcial*.- Es aquella en la que existen dos o más variables independientes, por lo que sus derivadas serán parciales.

c) *Orden de una ecuación diferencial*.- El orden de una ecuación diferencial es el de la derivada de mayor orden que aparece en la ecuación.

d) *Grado de una ecuación diferencial*.- Es el grado algebraico de la derivada de mayor orden que aparece en la ecuación.

e) *Ecuación diferencial lineal.*- Una ecuación diferencial es lineal, si en ella no aparecen potencias de la variable dependiente y sus derivadas, ni productos de la variable dependiente por sus derivadas o productos entre derivadas.

VI.2 SOLUCION DE UNA ECUACION DIFERENCIAL

La solución de una ecuación diferencial, es una función que no debe incluir derivadas o integrales de funciones y que verifica idénticamente la ecuación diferencial. Por ejemplo, la relación funcional que satisface a la siguiente ecuación diferencial:

$$y'(x) - \text{sen } x = 0$$

es:

$$y(x) = -\cos x + c$$

ya que esta relación verifica idénticamente a la ecuación diferencial. Nótese que esta solución resulta ser una familia de curvas, las cuales son:

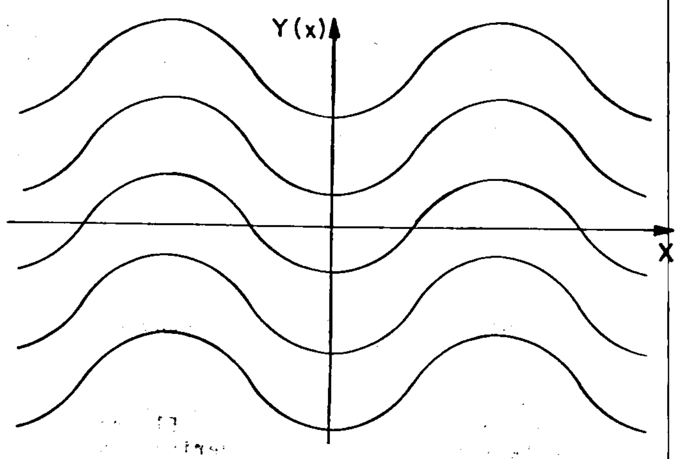


Figura VI.1

Para determinar una solución particular, será necesaria una *condición inicial* del problema:

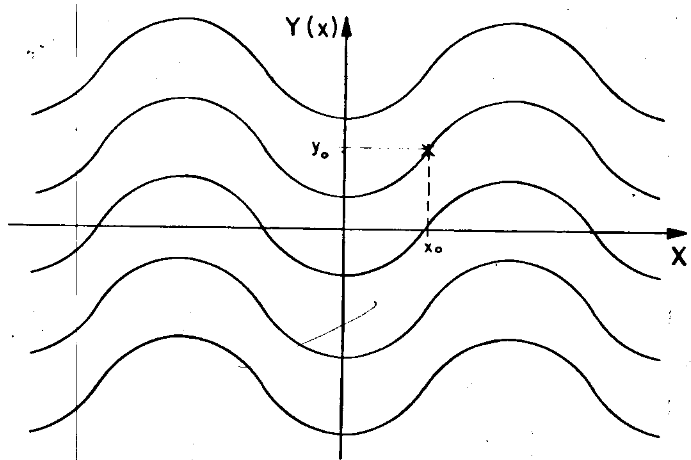


Figura VI.2

con la cual será posible seleccionar una sola curva que se considerará como una solución de la ecuación diferencial:

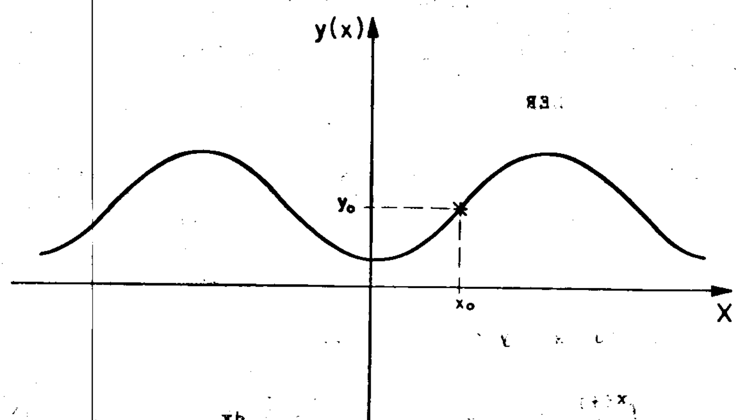


Figura VI.3

VI.3 METODOS NUMERICOS PARA RESOLVER ECUACIONES DIFERENCIALES

Los métodos numéricos que se estudiarán a continuación para resolver ecuaciones diferenciales con *condiciones iniciales*, se denominan métodos de solución paso a paso, ya que a partir de uno o varios puntos conocidos calculan el siguiente, una vez calculado se apoyan en éste y en los anteriores para calcular uno más y así sucesivamente, esto es:

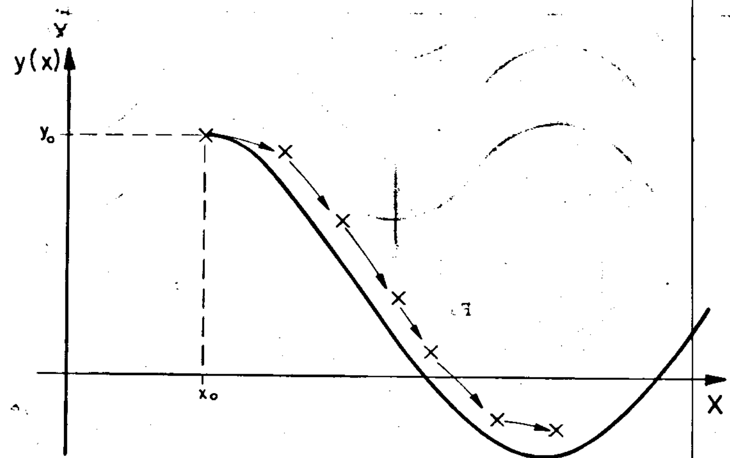


Figura VI.4

VI.3.1 METODO DE EULER

Uno de los métodos más sencillos para resolver ecuaciones diferenciales de primer orden con condiciones iniciales, es el método de Euler. Este consiste en integrar la siguiente ecuación diferencial:

$$y'(x) = f(x, y)$$

entre un punto x_i y el siguiente:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} y'(x)\, dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x_i, y_i)\, dx \qquad \ldots (1)$$

integrando el miembro de la izquierda de la expresión (1):

$$y(x) \Big|_{x_i}^{x_{i+1}} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x_i, y_i)\, dx$$

$$y_{i+1} - y_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x_i, y_i)\, dx$$

Para integrar el miembro de la derecha en la expresión (1), se aplica la integración numérica, estudiada en el capítulo V.

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\, dx = h \left[ny_0 + \frac{n^2}{2} \Delta y_0 + \left(\frac{n^3}{6} - \frac{n^4}{4}\right) \Delta^2 y_0 + \dots \right] \qquad \dots (2)$$

Integrando entre el punto x_0 y x_1 se obtiene:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\, dx = h \left[y_0 + \frac{1}{2} \Delta y_0 - \frac{1}{12} \Delta^2 y_0 + \dots \right]$$

donde:

$$y_0 = f(x_0)$$

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0 = f(x_1) - f(x_0)$$

$$\Delta^2 y_0 = y_2 - 2y_1 + y_0 = f(x_2) - 2f(x_1) + f(x_0)$$

.

.

.

sustituyendo $f(x)$ por una función de dos variables $f(x, y)$ e integrando entre un punto cualquiera x_i y x_{i+1} se obtiene:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y)\, dx = h \left[f(x_i, y_i) + \frac{1}{2} (f(x_{i+1}, y_{i+1}) - f(x_i, y_i)) + \dots \right] \qquad \dots (3)$$

El método de Euler consiste en integrar el segundo miembro de la expresión (1), considerando únicamente el primer sumando de la expresión anterior con su correspondiente error:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y)\, dx = h\, f(x_i, y_i) + e_r$$

Despreciando el error y sustituyendo esta última ecuación en la expresión (1) se obtiene:

$$y_{i+1} - y_i = h\ f(x_i,\ y_i)$$

y despejando y_{i+1}

$$\boxed{\begin{array}{c} y_{i+1} = y_i + h\ f(x_i,\ y_i) \\ i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \end{array}} \qquad \ldots\ (4)$$

Ejemplo VI.1

Resolver la siguiente ecuación diferencial $y' - 2xy = x$ con condición inicial $y(0.5) = 1$ utilizando el método de Euler, en el intervalo $0.5 \leq x \leq 1.0$ considerando $h = 0.1$.

El método de Euler se desarrolló, a partir de la ecuación diferencial de primer orden:

$$y'(x) = f(x,\ y)$$

por lo que:

$$f(x,\ y) = x + 2xy$$

utilizando la expresión (4) para $i = 0$, se obtiene que:

$$y_1 = y_0 + h\ f(x_0,\ y_0)$$

donde:

$$y_0 = 1 \qquad \text{condición inicial}$$

$$h = 0.1$$

$$f(x_0,\ y_0) = x_0 + 2x_0y_0 = 0.5 + 2(0.5)(1) = 1.5$$

sustituyendo valores:

$$y_1 = 1 + 0.1\ (1.5) = 1.15000$$

gráficamente:

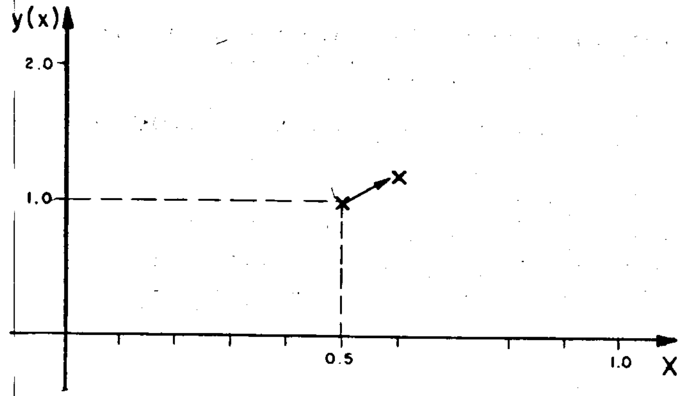


Figura VI.5

Repitiendo el proceso considerando $i = 1$ en la expresión (4):

$$y_2 = y_1 + h\ f(x_1,\ y_1)$$

donde:

$$y_1 = 1.15000$$

$$h = 0.1$$

$$f(x_1,\ y_1) = x_1 + 2x_1y_1 = 0.6 + 2(0.6)(1.15000) = 1.98000$$

sustituyendo valores:

$$y_2 = 1.15000 + 0.1\ (1.98) = 1.34800$$

gráficamente:

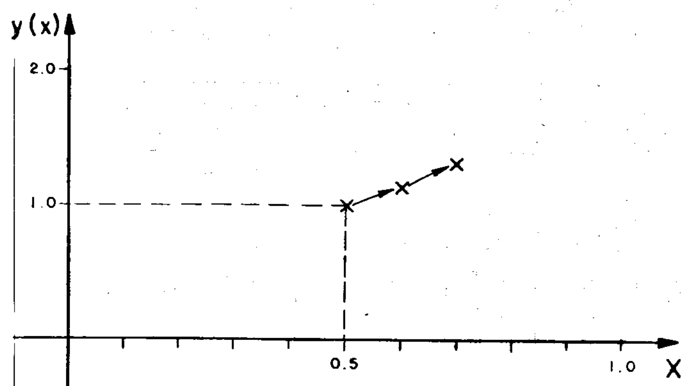


Figura VI.6

Procediendo en forma similar:

$i = 2 ;\quad y_3 = y_2 + h\ f(x_2,\ y_2)$

$y_3 = 1.34800 + 0.1\ (0.7 + 2(0.7)(1.34800)) = 1.60672$

$i = 3 ;\quad y_4 = y_3 + h\ f(x_3,\ y_3)$

$y_4 = 1.60672 + 0.1\ (0.8 + 2(0.8)(1.60672)) = 1.94380$

$i = 4 ;\quad y_5 = y_4 + h\ f(x_4,\ y_4)$

$y_5 = 1.94380 + 0.1(0.9 + 2(0.9)(1.94380)) = 2.38368$

por lo que la solución de la ecuación diferencial en el intervalo $0.5 \leq x \leq 1.0$ es:

x	y(x)
0.5	1.00000
0.6	1.15000
0.7	1.34800
0.8	1.60672
0.9	1.94380
1.0	2.38368

Si se resuelve la ecuación diferencial de este ejemplo por un método directo, se obtiene la siguiente solución.*

$$y(x) = 1.16820\ e^{-x^2} - \frac{1}{2}$$

Tabulando la solución en el intervalo $0.5 \leq x \leq 1.0$ y comparándola con la que proporciona el método de Euler, se obtiene:

x	Euler y(x)	Exacta y(x)
0.5	1.00000	1.00000
0.6	1.15000	1.17442
0.7	1.34800	1.40687
0.8	1.60672	1.71547
0.9	1.94380	2.12601
1.0	2.38368	2.67550

* Consultar el libro de Ecuaciones Diferenciales y en Diferencias, Facultad de Ingeniería, U.N.A.M.

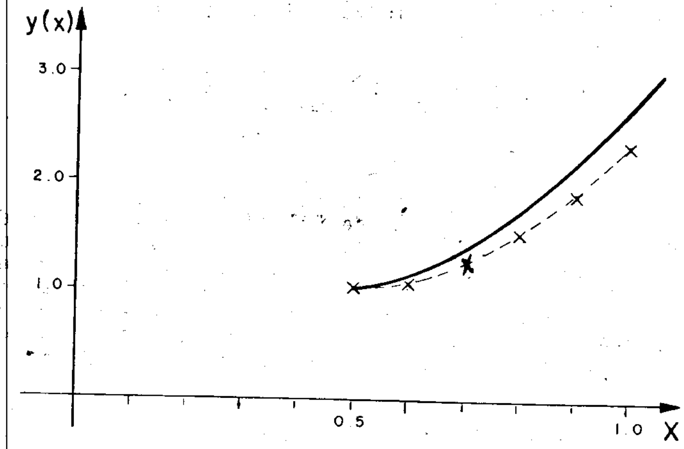


Figura VI.7

VI.3.2 METODO DE EULER-GAUSS

La aproximación que proporciona el método de Euler puede mejorarse al integrar la ecuación diferencial:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} y'(x)\, dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y)\, dx \qquad \dots (5)$$

Aplicando la fórmula trapecial, lo cual es equivalente a considerar los dos primeros sumandos de la expresión (3), se obtiene:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y)\, dx = h\left[f(x_i, y_i) + \frac{1}{2}\left(f(x_{i+1}, y_{i+1}) - f(x_i, y_i)\right)\right] + e_r$$

simplificando:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y)\, dx = \frac{h}{2}\left[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})\right] + e_r$$

sustituyendo en la expresión (4):

$$y_{i+1} - y_i = \frac{h}{2}\left[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})\right] + e_r$$

despejando y_{i+1} y despreciando el error:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, \underset{*}{\underset{\uparrow}{y_{i+1}}})\right] \quad \ldots (6)$$

A diferencia del método de Euler, con esta última expresión, no es posible conocer el valor de y_{i+1}, debido a que este valor está en función de sí mismo (ver asterisco). El problema se resuelve obteniendo el valor de y_{i+1}, a través del método de Euler, el cual se considerá solamente como una *predicción* que será sustituido en el miembro del lado derecho de la expresión (6), con lo que se obtendrá un nuevo valor *corregido* de y_{i+1}.

Por lo tanto, la expresión (4) será una ecuación predictora y la expresión (6) una ecuación correctora, esto es:

$$\boxed{\begin{aligned} & y_{i+1_p} = y_i + h\, f(x_i, y_i) \\ & y_{i+1_c} = y_i + \frac{h}{2}\left[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1_p})\right] \\ & i = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned}} \quad \ldots (7)$$

Ejemplo VI.2

Resolver la ecuación diferencial del ejemplo VI.1, utilizando el método de Euler-Gauss.

La ecuación diferencial es:

$y' = x + 2xy$ con condición inicial $y(0.5) = 1$

Para $i = 0$ se tiene que la predicción de y_1 según la expresión (7) es:

$$y_{1_p} = y_0 + h\, f(x_0, y_0) = 1 + 0.1\,(0.5 + 2(0.5)(1)) = 1.15000$$

y la corrección de este valor es:

$$y_{1_c} = y_0 + \frac{h}{2}\left[f(x_0, y_0) + f(x_1, y_{1_p})\right]$$

donde:

$f(x_0, y_0) = 1.50$

$f(x_1, y_{1_p}) = x_1 + 2x_1 y_{1_p} = 0.6 + 2(0.6)(1.15) = 1.98$

sustituyendo:

$$y_{1_c} = 1 + \frac{0.1}{2}\left[1.50 + 1.98\right] = 1.17400$$

Prosiguiendo en forma similar, se obtiene la siguiente tabla:

x	y_{i_p}	y_{i_c}	y_{exacta}
0.5	1.00000	1.00000	1.00000
0.6	1.15000	1.17400	1.17442
0.7	1.37488	1.40568	1.40687
0.8	1.67248	1.71288	1.71547
0.9	2.06694	2.12094	2.12601
1.0	2.59271	2.66610	2.67550

VI.3.3 LA SERIE DE TAYLOR COMO SOLUCION DE UNA ECUACION DIFERENCIAL

La solución de una ecuación diferencial de cualquier orden para un problema con condiciones iniciales, es una función $y(x)$ tal que verifica idénticamente a la ecuación diferencial. Esta función puede representarse por medio de la serie de Taylor como:

$$y(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{y'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \ldots \quad (8)$$

Esta solución será correcta, siempre y cuando se valúe en el entorno de $x = x_0$, y a medida que se aleje de este punto, la solución tendrá un mayor error.

Ejemplo VI.3

Resolver la ecuación diferencial del ejemplo VI.1 utilizando la serie de Taylor.

La ecuación diferencial es:

$$y' = x + 2xy \quad \text{con condición inicial} \quad y(0.5) = 1$$

la función $y(x)$ solución de esta ecuación está dada por la expresión (8), donde:

$$x_0 = 0.5$$

$$y(x_0) = 1$$

$$y'(x_0) = x_0 + 2x_0\, y(x_0) = 0.5 + 2\,(0.5)(1) = 1.50$$

$$y''(x_0) = \frac{d}{dx} y' \Big|_{x = x_0} = \frac{d}{dx} (x + 2x\, y(x)) \Big|_{x = x_0} = 1 + 2xy'(x) + 2\, y(x) \Big|_{x = x_0}$$

$$y''(x_0) = 1 + 2x_0 y'(x_0) + 2y(x_0) = 1 + 2(0.5)(1.50) + 2(1) = 4.50$$

$$y'''(x_0) = \frac{d}{dx} y'' \Big|_{x = x_0} = \frac{d}{dx} (1 + 2xy'(x) + 2y(x)) \Big|_{x = x_0} = 2xy''(x) + 4y'(x) \Big|_{x = x_0}$$

$$y'''(x_0) = 2x_0 y''(x_0) + 4y'(x_0) = 2(0.5)(4.50) + 4(1.50) = 10.50$$

sustituyendo:

$$y(x) = 1 + 1.50(x - 0.5) + \frac{4.50}{2}(x - 0.5)^2 + \frac{10.50}{6}(x - 0.5)^3 + \ldots$$

Tomando en cuenta los primeros cuatro términos de la serie de Taylor y simplificando, se obtiene:

$$y(x) = \frac{7}{4} x^3 - \frac{3}{8} x^2 + \frac{9}{16} x + \frac{19}{32}$$

tabulando la solución para $0.5 \leq x \leq 1.0$ con $h = 0.1$.

x	y(x)
0.5	1.00000
0.6	1.17425
0.7	1.40400
0.8	1.69975
0.9	2.07200
1.0	2.53125

VI.3.4 METODOS DE RUNGE-KUTTA

Para estudiar los métodos de Runge-Kutta, considérese la estructura de los métodos de Euler y Euler-Gauss:

$$y_{i+1} = y_i + h\, f\,(x_i, y_i) \qquad \text{(Euler)}$$

$i = 0, 1, 2, \ldots$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})\right] \qquad \text{(Euler-Gauss)}$$

$i = 0, 1, 2, \ldots$

ambos métodos pueden escribirse como:

$$y_{i+1} = y_i + h\Psi\,(x_i, y_i)$$

$$i = 0, 1, 2, \ldots \qquad \ldots (9)$$

donde en el método de Euler:

$$\Psi(x, y) = f(x, y)$$

y en el método de Euler-Gauss:

$$\Psi(x, y) = \frac{1}{2}\left[f(x, y) + f(x + h, y + h\,y')\right]$$

Los métodos de Runge-Kutta, consisten en obtener una ecuación similar a la expresión (9) que en forma general se escribe como:

$$y_{i+1} = y_i + (w_1 k_1 + w_2 k_2 + \ldots + w_n k_n) \qquad \ldots (10)$$

$$i = 0, 1, 2, \ldots$$

donde:

$$k_1 = h\,f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = h\,f(x_i + \alpha_1 h, y_i + \beta_{1,1} k_1)$$

$$k_3 = h\,f(x_i + \alpha_2 h, y_i + \beta_{2,1} k_1 + \beta_{2,2} k_2)$$

$$k_4 = h\,f(x_i + \alpha_3 h, y_i + \beta_{3,1} k_1 + \beta_{3,2} k_2 + \beta_{3,3} k_3)$$

$$\vdots$$

$$k_n = h\,f(x_i + \alpha_{n-1} h, y_i + \beta_{n-1,1} k_1 + \beta_{n-1,2} k_2 + \ldots + \beta_{n-1,n-1} k_{n-1}) \qquad \ldots (11)$$

siendo $w_1, w_2, \ldots w_n, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n, \beta_{1,1}, \beta_{2,2}, \ldots \beta_{n,n-1}$ constantes que deben determinarse, de tal forma que proporcionen la mayor exactitud posible a la solución de la ecuación diferencial.

La ventaja de los métodos de Runge-Kutta con respecto a los métodos de Euler y Euler-Gauss, consiste en que los primeros cuentan con un orden de error menor. Con respecto a la serie de Taylor, estos métodos tienen la ventaja de que no requieren valuar ninguna derivada, sino únicamente a la función $f(x, y)$.

METODO DE RUNGE-KUTTA DE SEGUNDO ORDEN

El método de Runge-Kutta de segundo orden consiste en considerar $n = 2$ dentro de las expresiones que definen a estos métodos, esto es:

$$y_{i+1} = y_i + (w_1 k_1 + w_2 k_2) \qquad \ldots (12)$$

$i = 0, 1, 2, \ldots$

donde:

$$k_1 = h\, f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = h\, f(x_i + \alpha_1 h,\ y_i + \beta_{1,1}\, k_1) \qquad \ldots (13)$$

Desarrollando en serie de Taylor, el miembro de la izquierda de la expresión (12) en el entorno del punto $x = x_i$ y considerando hasta los términos de orden h^3, se obtiene:

$$y_{i+1} = y(x_{i+1}) = y(x_i) + y'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + \frac{y''(x_i)}{2}(x_{i+1} - x_i)^2 + \frac{y'''(x_i)}{6}(x_{i+1} - x_i)^3 + \ldots$$

simplificando:

$$y_{i+1} = y_i + h\, y_i' + \frac{h^2}{2} y_i'' + \frac{h^3}{6} y_i''' + \ldots \qquad \ldots (14)$$

Por otra parte, desarrollando en serie de Taylor, la función de dos variables $f(x, y)$ en el entorno del punto $x = x_i$ y $y = y_i$ se tiene:

$$f(x, y) = f(x_i, y_i) + \frac{\partial}{\partial x} f(x, y)\Big|_{\substack{x = x_i \\ y = y_i}} (x - x_i) + \frac{\partial}{\partial y} f(x, y)\Big|_{\substack{x = x_i \\ y = y_i}} (y - y_i) +$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^2} f(x, y)\Big|_{\substack{x = x_i \\ y = y_i}} (x - x_i)^2 + \frac{\partial}{\partial x\, \partial y} f(x, y)\Big|_{\substack{x = x_i \\ y = y_i}} (x - x_i)(y - y_i) +$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y^2} f(x, y)\Big|_{\substack{x = x_i \\ y = y_i}} (y - y_i)^2 + \ldots \qquad \ldots (15)$$

Para simplificar la expresión anterior, se utilizará la notación siguiente:

$$f_{m\,n} = \frac{\partial}{\partial m\, \partial n} f(m, n)$$

y asumiendo que las derivadas parciales de la función se valúan en $x = x_n$ y $y = y_n$ la expresión (15) queda:

$$f(x, y) = f(x_n, y_n) + f_x(x - x_n) + f_y(y - y_n) + \frac{1}{2} f_{xx}(x - x_n)^2$$

$$+ f_{xy}(x - x_n)(y - y_n) + \frac{1}{2} f_{yy}(y - y_n)^2 + \ldots$$

valuando la función para $x = x_i + \alpha_1 h$ y $y = y_i + \beta_{1,1} k_1$ se obtiene:

$$f(x_i + \alpha_1 h, y_i + \beta_{1,1} k_1) = f(x_i, y_i) + f_x(x_i + \alpha_1 h - x_i) +$$

$$+ f_y(y_i + \beta_{1,1} k_1 - y_i) + \frac{1}{2} f_{xx}(x_i + \alpha_1 h - x_i)^2 +$$

$$+ f_{xy}(x_i + \alpha_1 h - x_i)(y_i + \beta_{1,1} k_1 - y_i) +$$

$$+ \frac{1}{2} f_{yy}(y_i + \beta_{1,1} k_1 - y_i)^2 + \ldots$$

simplificando:

$$f(x_i + \alpha_1 h, y_i + \beta_{1,1} k_1) = f(x_i, y_i) + \alpha_1 h f_x + \beta_{1,1} k_1 f_y$$

$$+ \frac{\alpha_1^2 h^2}{2} f_{xx} + \alpha_1 h \beta_{1,1} k_1 f_{xy} + \frac{\beta_{1,1}^2 k_1^2}{2} f_{yy} + \ldots$$

De las expresiones (13) se observa:

$$f(x_i + \alpha_1 h, y_i + \beta_{1,1} k_1) = \frac{k_2}{h}$$

despejando k_2:

$$k_2 = h f(x_i, y_i) + \alpha_1 h^2 f_x + \beta_{1,1} k_1 h f_y + \frac{\alpha_1^2 h^3}{2} f_{xx} +$$

$$+ \alpha_1 h^2 \beta_{1,1} k_1 f_{xy} + \frac{\beta_{1,1}^2 k_1^2 h}{2} f_{yy} + \ldots$$

Sustituyendo esta expresión y la (14) en la expresión (12) teniendo en cuenta que $k_1 = h f(x_i, y_i)$ se obtiene:

$$y_i + h y_i' + \frac{h^2}{2} y_i'' + \frac{h^3}{6} y_i''' + \ldots = y_i + w_1 h f(x_i, y_i) +$$

$$w_2(h f(x_i, y_i) + \alpha_1 h^2 f_x + \beta_{1,1} h^2 f(x_i, y_i) f_y + \frac{\alpha_1^2 h^3}{2} f_{xx} +$$

$$+ \alpha_1 h^3 \beta_{1,1} f(x_i, y_i) f_{xy} + \frac{\beta_{1,1}^2 h^3 f^2(x_i, y_i)}{2} f_{yy} + \ldots)$$

igualando potencias de h:

$$h\, y_i' = w_1 h\, f(x_i, y_i) + w_2\, h\, f(x_i, y_i)$$

y como $y_i' = f(x_i, y_i)$ entonces:

$$1 = w_1 + w_2 \qquad \ldots (16)$$

igualando potencias de h^2:

$$\frac{h^2}{2}\, y_i'' = w_2\, \alpha_1\, h^2\, f_x + w_2\, \beta_{1,1}\, h^2 f(x_i, y_i)\, f_y \qquad \ldots (17)$$

siendo:

$$y_i'' = \frac{d}{dx} f(x, y)\Big|_{\substack{x = x_i \\ y = y_i}} = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y)\Big|_{\substack{x = x_i \\ y = y_i}} + \frac{\partial}{\partial y} f(x, y)\Big|_{\substack{x = x_i \\ y = y_i}} f(x_i, y_i)$$

utilizando la notación indicada se puede escribir como:

$$y_i'' = f_x + f_y\, f(x_i, y_i)$$

sustituyendo en la expresión (17):

$$\frac{h^2}{2}\,(f_x + f_y\, f(x_i, y_i) = w_2\, \alpha_1 h^2\, f_x + w_2\, \beta_{1,1}\, h^2\, f(x_i, y_i)\, f_y$$

entonces:

$$\frac{1}{2} = w_2\, \alpha_1 = w_2\, \beta_{1,1} \qquad \ldots (18)$$

Con las expresiones (16) y (18) se forma el siguiente sistema:

$$w_1 + w_2 = 1$$

$$w_2\, \alpha_1 = \frac{1}{2}$$

$$w_2\, \beta_{1,1} = \frac{1}{2}$$

Como el sistema tiene cuatro incógnitas y solamente tres ecuaciones, éste tiene un número infinito de scluciones, una de ellas es:

$$w_1 = w_2 = \frac{1}{2}$$

$$\alpha_1 = \beta_{1,1} = 1$$

Sustituyendo en la expresión (12), se obtienen las fórmulas de recurrencia que definen al método de Runge-Kutta de segundo orden:

$$\boxed{\begin{aligned} & y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \\ & i = 0, 1, 2, \ldots \\ & \text{donde:} \\ & k_1 = h\, f(x_i, y_i) \\ & k_2 = h\, f(x_i + h, y_i + h\, f(x_i, y_i)) \end{aligned}} \qquad \ldots (19)$$

METODO DE RUNGE-KUTTA DE CUARTO ORDEN

El método de Runge-Kutta de cuarto orden se obtiene al considerar $n = 4$ en las expresiones (10) y (11) quedando:

$$y_{i+1} = y_i + (w_1k_1 + w_2k_2 + w_3k_3 + w_4k_4)$$

$$i = 0, 1, 2, \ldots$$

donde:

$$k_1 = h\, f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = h\, f(x_i + \alpha_1 h, y_i + \beta_{1,1}\, k_1)$$

$$k_3 = h\, f(x_i + \alpha_2 h, y_i + \beta_{2,1}\, k_1 + \beta_{2,2}\, k_2)$$

$$k_4 = h\, f(x_i + \alpha_3 h, y_i + b_{3,1}\, k_1 + \beta_{3,2}\, k_2 + \beta_{3,3}\, k_3)$$

Si se realiza un análisis similar al del método de Runge-Kutta de segundo orden se obtiene:

$$w_1 = \frac{1}{6} \qquad \alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}$$

$$w_2 = \frac{1}{3} \qquad \alpha_3 = 1$$

$$w_3 = \frac{1}{3} \qquad \beta_{1,1} = \beta_{2,2} = \frac{1}{2}\ ;\ \beta_{3,3} = 1$$

$$w_4 = \frac{1}{6} \qquad \beta_{2,1} = \beta_{3,1} = \beta_{3,2} = 0$$

sustituyendo:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$i = 0, 1, 2, \ldots$

donde:

$$k_1 = h\ f(x_i,\ y_i) \qquad \ldots (20)$$

$$k_2 = h\ f(x_i + \frac{1}{2}h,\ y_i + \frac{1}{2}k_1)$$

$$k_3 = h\ f(x_i + \frac{1}{2}h,\ y_i + \frac{1}{2}k_2)$$

$$k_4 = h\ f(x_i + h,\ y_i + k_3)$$

Ejemplo VI.4

Resolver la ecuación diferencial del ejemplo VI.1, utilizando el método de Runge-Kutta de cuarto orden.

La ecuación diferencial es:

$y' = x + 2xy$ con condición inicial $y(0.5) = 1$

Considerando $i = 0$ en la expresión (20):

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \qquad \ldots (a)$$

donde:

$$k_1 = h\ f(x_0,\ y_0) = 0.1(0.5 + 2(0.5)(1)) = 0.15000$$

$$k_2 = h\ f(x_0 + \frac{1}{2}h,\ y_0 + \frac{1}{2}(0.15000))$$

$$k_2 = 0.1\left[\left(0.5 + \frac{0.1}{2}\right) + 2\left(0.5 + \frac{0.1}{2}\right)\left(1 + \frac{0.15000}{2}\right)\right] = 0.17325$$

$$k_3 = h\ f(x_0 + \frac{1}{2}h,\ y_0 + \frac{1}{2}(0.17325))$$

$$k_3 = 0.1\left[\left(0.5 + \frac{0.1}{2}\right) + 2\left(0.5 + \frac{0.1}{2}\right)\left(1 + \frac{0.17325}{2}\right)\right] = 0.17453$$

$$k_4 = h\ f(x_0 + h,\ y_0 + 0.17453)$$

$$k_4 = 0.1\left[(0.5 + 0.1) + 2(0.5 + 0.1)(1 + 0.17453)\right] = 0.20094$$

sustituyendo en la expresión (a):

$$y_1 = 1 + \frac{1}{6}(0.15000 + 2(0.17325) + 2(0.17453) + 0.20094)$$

$$y_1 = 1.17442$$

Prosiguiendo en forma similar para i = 1, 2, 3 y 4 se obtiene el siguiente resultado:

x	y(x)
0.5	1.00000
0.6	1.17442
0.7	1.40688
0.8	1.71548
0.9	2.12602
1.0	2.67551

.3.5 METODO DE MILNE

Otro método de integración paso a paso, que tiene la ventaja de proporcionar un orden de error menor, comparado con los métodos vistos anteriormente, es el predictor-corrector de Milne. Este método se basa en la información de cuatro puntos para calcular el siguiente, esto es:

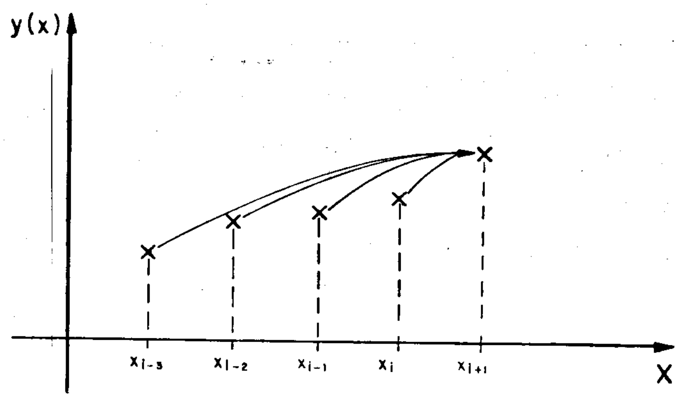


Figura VI.8

para desarrollarlo se parte de una ecuación diferencial de primer orden de la forma:

$$y'(x) = f(x, y)$$

cuya solución se obtiene integrando:

$$\int y'(x)\, dx = \int f(x, y)\, dx$$

$$y(x) = \int f(x, y)\, dx \qquad \ldots (21)$$

Para integrar el segundo miembro de la expresión (21), se representará primero a $f(x, y)$ por medio de la serie de Taylor en el entorno del punto x_0 considerando solamente a la variable x:

$$f(x,y) = f(x_0,y_0)+(x-x_0)f'(x_0,y_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0,y_0) + \frac{(x-x_0)^3}{3!} f'''(x_0,y_0) + \dots$$

sustituyendo en la expresión (21) e integrando entre $x_{-n} = x_0 - nh$ y $x_n = x_0 + nh$, se obtiene:

$$y(x) \Big|_{x_{-n}}^{x_n} = \int_{x_{-n}}^{x_n} \Big(f(x_0,y_0) + (x-x_0)\, f'(x_0,y_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0,y_0) + \frac{(x-x_0)^3}{3!} f'''(x_0,y_0) + \dots\Big)dx$$

$$y(x) \Big|_{x_{-n}}^{x_n} = x\, f(x_0,y_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f'(x_0,y_0) + \frac{(x-x_0)^3}{3!} f''(x_0,y_0) + \frac{(x-x_0)^4}{4!} f'''(x_0,y_0) + \dots \Big|_{x_0-nh}^{x_0+nh}$$

$$y(x) \Big|_{x_{-n}}^{x_n} = 2nh\, f(x_0,y_0) + \frac{n^3h^3}{3} f''(x_0,y_0) + \frac{n^5h^5}{60} f^{(IV)}(x_0,y_0) + \dots \qquad \dots (22)$$

Si se sustituye $f''(x_0,y_0)$ por la fórmula de derivación dada en la expresión (50) del capítulo V, se obtiene:

$$f''(x_0,y_0) = \frac{1}{h^2}\left(f(x_{-1},y_{-1}) - 2f(x_0, y_0) + f(x_1,y_1)\right) - \frac{1}{12} h^2 f^{IV}(x_0,y_0) - \dots$$

y sustituyendo ésta en la expresión (22) se obtiene:

$$y(x) \Big|_{x_{-n}}^{x_n} = 2nh\, f(x_0, y_0) + \frac{n^3h^3}{3}\left[\frac{1}{h^2}\left(f(x_{-1}, y_{-1}) - 2f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1)\right) - \frac{h^2}{12} f^{IV}(x_0, y_0) - \dots\right] + \frac{n^5h^5}{60} f^{IV}(x_0, y_0) + \dots$$

simplificando:

$$y(x) \Big|_{x_{-n}}^{x_n} = \frac{1}{3} n^3h\, f(x_{-1}, y_{-1}) + 2n\left(1 - \frac{n^2}{3}\right) h\, f(x_0, y_0) +$$

$$+ \frac{1}{3} n^3 h f(x_1, y_1) + \left(\frac{n^2}{60} - \frac{1}{36}\right) n^3 h^5 f^{(IV)}(x_0, y_0) + \ldots \qquad \ldots (23)$$

Como el método de Milne requiere de cinco puntos, (con cuatro primeros obtiene el siguiente), se sustituirá $n = 2$ en la expresión (23), con lo que la integral se calculará desde x_{-2} hasta x_2.

$$y(x) \Big|_{x_{-2}}^{x_2} = \frac{8}{3} h\, f(x_{-1}, y_{-1}) - \frac{4}{3} h\, f(x_0, y_0) + \frac{8}{3} h\, f(x_1, y_1) +$$

$$+ \frac{14}{45} h^5 f^{(IV)}(x_0, y_0) + \ldots$$

ecuación que se puede expresar, centrando el pivote en x_0, como:

$$y(x) \Big|_{x_{-2}}^{x_2} = \frac{4}{3} h \Big[(0)\, f(x_{-2}, y_{-2}) + (2)\, f(x_{-1}, y_{-1}) + (-1)\, f(x_0, y_0) +$$

$$+ (2)\, f(x_1, y_1) + (0)\, f(x_2, y_2)\Big] + (0)\, h^5$$

Considerando los cinco puntos mostrados en la figura (VI.8), se obtiene:

$$y(x) \Big|_{x_{i-3}}^{x_{i+1}} = \frac{4}{3} h \Big[(0)\, f(x_{i-3}, y_{i-3}) + (2)\, f(x_{i-2}, y_{i-2}) +$$

$$+ (-1)\, f(x_{i-1}, y_{i-1}) + (2)\, f(x_i, y_i) + (0)\, f(x_{i+1}, y_{i+1})\Big] + (0)\, h^5$$

simplificando:

$$y_{i+1} - y_{i-3} = \frac{4}{3} h \Big[2f(x_{i-2}, y_{i-2}) - f(x_{i-1}, y_{i-1}) + 2f(x_i, y_i)\Big] + (0)\, h^5$$

Por último, la ecuación predictora del método de Milne que proporciona un error del orden de h^5 es:

$$\boxed{\begin{array}{l} y_{i+1_p} = y_{i-3} + \frac{4}{3} h \Big[2f(x_{i-2}, y_{i-2}) - f(x_{i-1}, y_{i-1}) + 2f(x_i, y_i)\Big] \\ i = 3, 4, 5, \ldots \end{array}} \qquad (24)$$

La corrección del valor y_{i+1} que proporciona esta última expresión se obtiene integrando la ecuación diferencial de primer orden, entre x_{i-1} y x_{i+1}

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} y'(x)\, dx = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x, y)\, dx$$

$$y(x)\Big|_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x\ ,\ y)\ dx$$

a través de la fórmula de Simpson 1/3:

$$y_{i+1} - y_{i-1} = \frac{h}{3}\left[f(x_{i-1},\ y_{i-1}) + 4f(x_i,\ y_i) + f(x_{i+1},\ y_{i+1})\right] + (0)h^4$$

por lo que la ecuación correctora queda:

$$\boxed{\begin{array}{l} y_{i+1_c} = y_{i-1} + \frac{h}{3}\left[f(x_{i-1},\ y_{i-1}) + 4f(x_i,\ y_i) + f(x_{i+1},\ y_{i+1_p})\right] \\ i = 3,\ 4,\ 5,\ \ldots \end{array}} \qquad (25)$$

La desventaja que presenta este método es que requiere de los primeros cuatro puntos de la solución para poder utilizarse, esta limitación puede superarse fácilmente aplicando alguno de los métodos vistos anteriormente, en particular la serie de Taylor puede ser usada para obtener la solución de los primeros puntos, sobre soto si el valor de h con el que se trabaje es pequeño, ya que así los puntos estarán cercanos al entorno de x_0 y por lo tanto el error que se comete será pequeño.

Ejemplo VI.5

Resolver la ecuación diferencial del ejemplo VI.1, utilizando el método de Milne.

La ecuación diferencial es:

$y'(x) = x + 2x\,y$ con condición inicial $y(0.5) = 1$

Tomando la condición inicial y los primeros tres puntos obtenidos utilizando la serie de Taylor en el ejemplo VI.3:

	x	y(x)
	0.5	1.00000
1	0.6	1.17425
2	0.7	1.40400
3	0.8	1.69975
4	0.9	
	1.0	

utilizando el método de Milne para calcular la ordenada en $x = 0.9$ se obtiene de la expresión (24) para $i = 3$:

$$y_{4_p} = y_0 + \frac{4}{3} h \left[2f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2) + 2f(x_3, y_3)\right]$$

donde:

$y_0 = 1.00000$

$h = 0.1$

$f(x_1, y_1) = x_1+2x_1y_1 = 0.6 + 2(0.6)(1.17425) = 2.00910$

$f(x_2, y_2) = x_2+2x_2y_2 = 0.7 + 2(0.7)(1.40400) = 2.66560$

$f(x_3, y_3) = x_3+2x_3y_3 = 0.8 + 2(0.8)(1.69975) = 3.51960$

sustituyendo:

$$y_{4_p} = 1 + \frac{4}{3} (0.1) \left[2 (2.00910) - 2.66560 + 2(3.51960)\right]$$

$$y_{4_p} = 2.11891$$

y la corrección de este valor se hace utilizando la expresión (25) para $i = 3$:

$$y_{4_c} = y_2 + \frac{h}{3} \left[f(x_2, y_2) + 4f(x_3, y_3) + f(x_4, y_{4_p})\right]$$

donde:

$y_2 = 1.40400$

$h = 0.1$

$f(x_2, y_2) = 2.66560$

$f(x_3, y_3) = 3.51960$

$f(x_4, y_{4_p}) = 0.9 + 2(0.9)(2.11891) = 4.71404$

sustituyendo:

$$y_{4_c} = 1.40400 + \frac{0.1}{3} \left[2.66560 + 4 (3.51960) + 4.71404\right]$$

$$y_{4_c} = 2.11927$$

Procediendo en forma similar se obtiene el valor de la ordenada para $x = 1.0$, quedando finalmente la solución como:

x	y(x)
0.5	1.00000
0.6	1.17425
0.7	1.40400
0.8	1.69975
0.9	2.11927
1.0	2.65723

En la siguiente tabla se presentan los resultados obtenidos por los métodos estudiados anteriormente, con el fin de comparar los valores proporcionados por cada uno de ellos.

	METODO DE EULER	METODO DE EULER-GAUSS	METODO DE TAYLOR	METODO DE RUNGE-KUTTA (4°orden)	METODO DE MILNE	SOLUCION EXACTA
x	y(x)	y(x)	y(x)	y(x)	y(x)	y(x)
0.5	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
0.6	1.15000	1.17400	1.17425	1.17442	1.17425	1.17442
0.7	1.34800	1.40568	1.40400	1.40688	1.40400	1.40687
0.8	1.60672	1.71288	1.69975	1.71548	1.69975	1.71547
0.9	1.94380	2.12094	2.07200	2.12602	2.11927	2.12601
1.0	2.38368	2.66610	2.53125	2.67551	2.65723	2.67550

Cabe hacer notar que aún cuando el método de Milne tiene un error menor que el de Euler-Gauss, el método de Milne proporciona valores menos exactos debido al error inherente provocado sobre todo por el valor de y asociado a x = 0.8 proporcionado por Taylor que cuenta con un error grande.

VI.4 SOLUCION NUMERICA DE SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

La solución de sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden, es de gran utilidad, debido a que cualquier ecuación diferencial de orden superior se puede transformar en un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden, cuya solución numérica se puede obtener utilizando cualesquiera de los métodos de integración paso a paso estudiados en el inciso VI.3.

Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$y' = f(x, y, z)$$

$$z' = g(x, y, z)$$

en donde los valores iniciales de y y de z son:

$$y(x_0) = y_0 \quad ; \quad z(x_0) = z_0$$

Utilizando el método de Milne se pueden determinar los valores de $y_4, y_5, y_6, \ldots, y_n$ y $z_4, z_5, z_6, \ldots, z_n$ respectivamente, siendo las ecuaciones predictoras:

$$\boxed{\begin{array}{l} y_{i+1_p} = y_{i-3} + \frac{4}{3} h \left[2f_{i-2} - f_{i-1} + 2f_i\right] \\ \\ z_{i+1_p} = z_{i-3} + \frac{4}{3} h \left[2g_{i-2} - g_{i-1} + 2g_i\right] \\ \\ \quad i = 3, 4, 5, \ldots \end{array}} \quad \ldots (26)$$

y las ecuaciones correctoras:

$$\boxed{\begin{array}{l} y_{i+1_c} = y_{i-1} + \frac{h}{3} \left[f_{i-1} + 4f_i + f_{i+1}\right] \\ \\ z_{i+1_c} = z_{i-1} + \frac{h}{3} \left[g_{i-1} + 4g_i + g_{i+1}\right] \\ \\ \quad i = 3, 4, 5, \ldots \end{array}} \quad \ldots (27)$$

Ejemplo VI.6

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden, utilizando el método de Milne, para las condiciones iniciales: $y(0) = 1$; $z(0) = 1$, en el intervalo $0 \leq x \leq 1$, considerando $h = 0.2$.

$$y' = 4x - y + 1$$

$$z' = 2z - y$$

Primero se obtendrán los valores de y_1, y_2, y_3 y z_1, z_2, z_3 respectivamente, utilizando la serie de Taylor en el entorno de cada una de las condiciones iniciales, esto es:

$$y(x) = y(x_0) + (x - x_0)\, y'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!}\, y''(x_0) + \frac{(x - x_0)^3}{3!}\, y'''(x_0) + \ldots \qquad (a)$$

$$z(x) = z(x_0) + (x - x_0)\, z'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!}\, z''(x_0) + \frac{(x - x_0)^3}{3!}\, z'''(x_0) + \ldots \qquad (b)$$

considerando los primeros cuatro términos de la serie de Taylor, los valores de x_0, $y(x_0)$, $y'(x_0)$, $y''(x_0)$, $y'''(x_0)$, $z(x_0)$, $z'(x_0)$, $z''(x_0)$ y $z'''(x_0)$ serán:

$$x_0 = 0$$

$y(x_0) = y_0$	$z(x_0) = z_0$
$y(0) = 1$	$z(0) = 1$ (condiciones iniciales)
$y'(x_0) = 4x_0 - y_0 + 1$	$z'(x_0) = 2z_0 - y_0$
$y'(0) = 4(0) - 1 + 1 = 0$	$z'(0) = 2(1) - 1 = 1$
$y''(x_0) = 4 - y'_0$	$z''(x_0) = 2z'_0 - y'_0$
$y''(0) = 4 - 0 = 4$	$z''(0) = 2(1) - 0 = 2$
$y'''(x_0) = -\, y''_0$	$z'''(x_0) = 2z''_0 - y''_0$
$y'''(0) = -\,4$	$z'''(0) = 2(2) - 4 = 0$

sustituyendo en (a) y (b) respectivamente; considerando los primeros cuatro términos de la serie de Taylor:

$$y(x) = 1 + (x - 0)(0) + \frac{(x - 0)^2}{2!}(4) + \frac{(x - 0)^3}{3!}(-4)$$

$$z(x) = 1 + (x - 0)(1) + \frac{(x - 0)^2}{2!}(2) + \frac{(x - 0)^3}{3!}(0)$$

simplificando:

$$y(x) = 1 + 2x^2 - \frac{2}{3}x^3$$

$$z(x) = 1 + x + x^2$$

tabulando las soluciones para los primeros cuatro puntos:

x	y(x)
0.0	1.000
0.2	1.075
0.4	1.277
0.6	1.576

x	z(x)
0.0	1.000
0.2	1.240
0.4	1.560
0.6	1.960

Utilizando el método de Milne, las ecuaciones predictoras para calcular el siguiente punto están dadas por las expresiones (26) para i = 3:

$$y_{4_p} = y_0 + \frac{4}{3} h \left[2f_1 - f_2 + 2f_3\right]$$

$$z_{4_p} = z_0 + \frac{4}{3} h \left[2g_1 - g_2 + 2g_3\right]$$

donde:

$$h = 0.2$$

$y_0 = 1.000$ $\quad\quad$ $z_0 = 1.000$

$f_1 = 4x_1 - y_1 + 1$ $\quad\quad$ $g_1 = 2z_1 - y_1$

$f_1 = 4(0.2) - 1.075 + 1 = 0.725$ $\quad\quad$ $g_1 = 2(1.240) - 1.075 = 1.405$

$f_2 = 4x_2 - y_2 + 1$ $\quad\quad$ $g_2 = 2z_2 - y_2$

$f_2 = 4(0.4) - 1.277 + 1 = 1.323$ $\quad\quad$ $g_2 = 2(1.560) - 1.277 = 1.843$

$f_3 = 4x_3 - y_3 + 1$ $\quad\quad$ $g_3 = 2z_3 - y_3$

$f_3 = 4(0.6) - 1.576 + 1 = 1.824$ $\quad\quad$ $g_3 = 2(1.960) - 1.576 = 2.344$

sustituyendo valores:

$$y_{4_p} = 1 + \frac{4}{3}(0.2)\left[2(0.725) - 1.323 + 2(1.824)\right] = 2.007$$

$$z_{4_p} = 1 + \frac{4}{3}(0.2)\left[2(1.405) - 1.843 + 2(2.344)\right] = 2.508$$

y las ecuaciones correctoras, están dadas por las expresiones (27), para i = 3:

$$y_{4_c} = y_2 + \frac{h}{3}\left[f_2 + 4f_3 + f_4\right]$$

$$z_{4_c} = z_2 + \frac{h}{3}\left[g_2 + 4g_3 + g_4\right]$$

donde:

$$h = 0.2$$

$y_2 = 1.277$ $\qquad$ $z_2 = 1.560$

$f_2 = 1.323$ $\qquad$ $g_2 = 1.843$

$f_3 = 1.824$ $\qquad$ $g_3 = 2.344$

$f_4 = 4x - y_{4_p} + 1$ $\qquad$ $g_4 = 2z_{4_p} - y_4$

$f_4 = 4(0.8) - 2.007 + 1 = 2.193$ $\qquad$ $g_4 = 2(2.508) - 2.007 = 3.009$

sustituyendo valores se obtiene:

$$y_{4_c} = 1.277 + \frac{0.2}{3}\left[1.323 + 4(1.824) + 2.193\right] = 1.998$$

$$z_{4_c} = 1.560 + \frac{0.2}{3}\left[1.843 + 4(2.344) + 3.009\right] = 2.509$$

Procediendo en forma similar, se obtienen los valores de y_{5_p}, z_{5_p}, y_{5_c} y z_{5_c} por lo tanto, la solución final es:

x	y(x)	$y(x)_p$	$y(x)_c$
0.0	1.000		
0.2	1.075		
0.4	1.277		
0.6	1.576		
0.8		2.007	1.998
1.0		2.469	2.454

x	z(x)	$z(x)_p$	$z(x)_c$
0.0	1.000		
0.2	1.240		
0.4	1.560		
0.6	1.960		
0.8		2.508	2.509
1.0		3.209	3.183

Ejemplo VI.7

Dada la siguiente ecuación diferencial de segundo orden:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + x = 0$$

obtener su solución en el intervalo $0 \le x \le 0.3$ para las condiciones iniciales $y(0) = 0$; $y'(0) = 1$.

Esta ecuación diferencial se puede transformar en un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden, haciendo el siguiente cambio de variable:

$$u = \frac{dy}{dx} \qquad \ldots \text{(a)}$$

entonces:

$$\frac{du}{dx} - 3u + x = 0 \qquad \ldots \text{(b)}$$

Las expresiones (a) y (b) pueden expresarse como un sistema:

$$y' = u$$

$$u' = 3u - x$$

el cual puede ser resuelto por algún método de integración paso a paso. Si se selecciona el método de Euler-Gauss para resolver el sistema, las ecuaciones predictoras serán:

$$y_{i+1_p} = y_i + h\, u_i$$

$$u_{i+1_p} = u_i + h(3u_i - x_i)$$

$$i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Considerando $h = 0.1$ y simplificando las ecuaciones anteriores, se obtiene:

$$\left.\begin{aligned} y_{i+1_p} &= y_i + 0.1\, u_i \\ u_{i+1_p} &= u_i + 0.1\,(3\,u_i - x_i) = 1.3\,u_i - 0.1\,x_i \end{aligned}\right\} \ldots \text{(c)}$$

$$i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

las ecuaciones correctoras serán:

$$y_{i+1_c} = y_i + \frac{h}{2}\left[u_i + u_{i+1_p}\right]$$

$$u_{i+1_c} = u_i + \frac{h}{2}\left[3u_i - x_i + 3u_{i+1_p} - x_{i+1}\right]$$

sustituyendo $h = 0.1$ y simplificando:

$$\left.\begin{aligned} y_{i+1_c} &= y_i + 0.05(u_i + u_{i+1_p}) \\ u_{i+1_c} &= 1.15u_i - 0.05(x_i - 3u_{i+1_p} + x_{i+1}) \\ i &= 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \end{aligned}\right\} \ldots \text{(d)}$$

utilizando las ecuaciones predictoras dadas en (c) para $i = 0$, se obtiene:

$$y_{1_p} = y_0 + 0.1\, u_0$$

$$u_{1_p} = 1.3u_0 - 0.1\, x_0$$

de las condiciones iniciales del problema, se tiene:

$$x_0 = 0 \quad ; \quad y_0 = 0 \quad ; \quad u_0 = y'(0) = 1$$

por lo que:

$$y_{1_p} = 0 + 0.1\,(1) = 0.1$$

$$u_{1_p} = 1.3\,(1) - 0.1\,(0) = 1.3$$

utilizando las ecuaciones dadas en la expresión (d) para $i = 0$, los valores corregidos serán:

$$y_{1_c} = y_0 + 0.5\,(u_0 + u_{1_p})$$

$$u_{1_c} = 1.15\, u_0 - 0.05\,(x_0 - 3u_{1_p} + x_1)$$

$$y_{1_c} = 0 + 0.05\,(1 + 1.3) = 0.115$$

$$u_{1_c} = 1.15\,(1) - 0.05\,(0 - 3\,(1.3) + 0.1) = 1.340$$

Prosiguiendo en forma similar para $i = 1$ y 2 en las ecuaciones predictoras y en las ecuaciones correctoras, se obtiene:

x	$y(x)_p$	$y(x)_c$	$u(x)_p$	$u(x)_c$
0.0	0	0	1	1
0.1	0.100	0.115	1.300	1.340
0.2	0.249	0.269	1.735	1.786
0.3	0.448	0.473	2.302	2.374

siendo solución de la ecuación diferencial de segundo orden los valores corregidos $y(x)$.

VI.5 PROBLEMA DE VALORES EN LA FRONTERA

En el inciso VI.3 se desarrollaron métodos numéricos para resolver ecuaciones diferenciales de primer orden, los cuales debían satisfacer una condición inicial al principio de la integración. Consideremos ahora ecuaciones diferenciales de orden superior a uno, en las que se establezcan dos condiciones en los extremos del intervalo de integración.

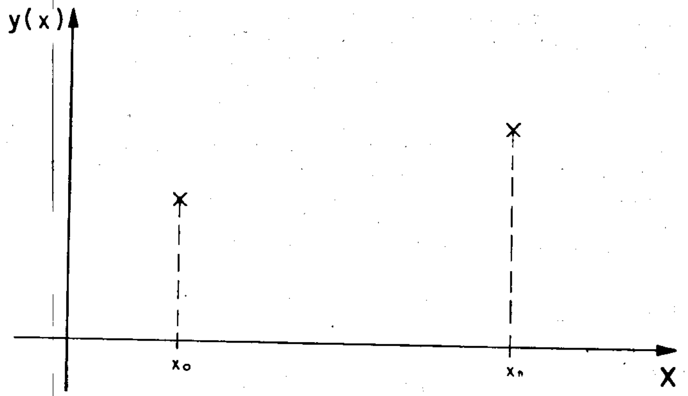


Figura 9

A este tipo de problemas se les conoce como *problemas de valores en la frontera.*

Su solución numérica es más difícil que la de los problemas con condiciones iniciales, ya que ésta debe satisfacer ambas condiciones, esto es:

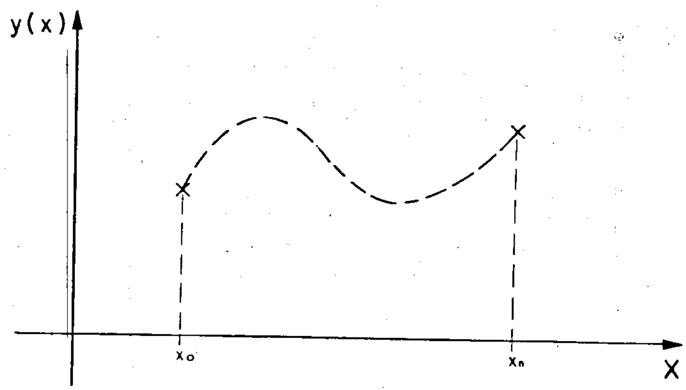


Figura VI.10

Existen en general, dos tipos de métodos para resolver estos problemas, los llamados métodos rápidos o de *tanteos* y el método de *diferencias finitas.*

El método de *diferencias finitas*, sirve para resolver ecuaciones diferenciales de cualquier orden con condiciones iniciales o condiciones de frontera, consiste en: dividir el intervalo de solución en n subintervalos llamando *pivotes* a cada uno de los puntos que definen cada subintervalo. Una vez efectuado lo anterior se sustituirán las derivadas de la ecuación diferencial por fórmulas de derivación numérica, todas ellas con el mismo orden de error y referidos al mismo pivote.

La ecuación en diferencias finitas que resulta, se puede aplicar en forma recursiva para cada uno de los puntos pivotes que forman el intervalo de solución, resolviéndose en términos de la solución previamente obtenida con el mismo procedimiento en los puntos pivotes anteriores.

Ejemplo VI.8

Resolver la siguiente ecuación diferencial de segundo orden:

$$y'' - 2y' + 5 = 0$$

con condiciones en la rrontera $y(0) = 0$; $y(1) = 2$ utilizando el método de diferencias finitas y considerando $h = 0.2$.

Dividiendo el intervalo de solución en cinco subintervalos de magnitud $h = 0.2$, se obtiene:

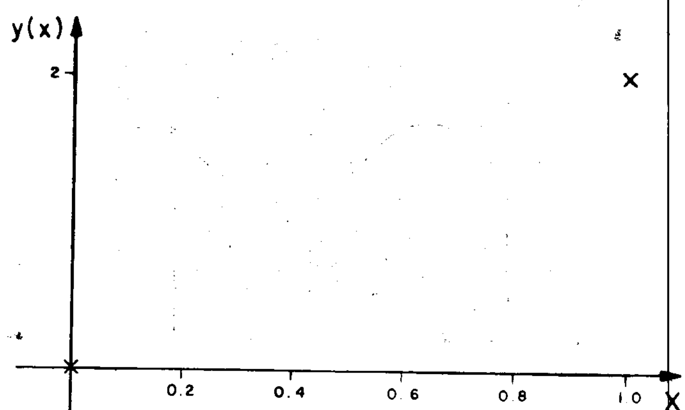


Figura VI.11

Sustituyendo y'' y y' por las siguientes fórmulas de derivación numérica:

$i-1$ i $i+1$

$$y'' \doteq \frac{1}{h^2}\left\{1 \;\; \underline{-2} \;\; 1\right\}$$

$$y' \doteq \frac{1}{2h}\left\{-1 \;\; \underline{0} \;\; 1\right\}$$

considerando el pivote en el punto y_i y sustituyendo en la ecuación diferencial, se obtiene:

$$\frac{1}{(0.2)^2}\left[y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}\right] - (2)\,\frac{1}{2(0.2)}\left[-y_{i-1} + y_{i+1}\right] + 5 = 0$$

simplificando:

$$25y_{i-1} - 50y_i + 25y_{i+1} + 5y_{i-1} - 5y_{i+1} + 5 = 0$$

$$30y_{i-1} - 50y_i + 20y_{i+1} + 5 = 0 \qquad \ldots \text{(a)}$$

despejando y_{i+1} de la expresión (a), se obtiene la siguiente ecuación de recurrencia:

$$y_{i+1} = -\,1.5y_{i-1} + 2.5y_i - 0.25 \qquad \ldots \text{(b)}$$

$$i = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

considerando $i = 1$ en la expresión anterior, se obtiene:

$$y_2 = -\,1.5\,y_0 + 2.5y_1 - 0.25 \qquad \ldots \text{(c)}$$

donde $y_0 = 0$, y_1 no se conoce pero suponiendo que la solución de la ecuación diferencial es una línea recta que pasa por los puntos establecidos en las condiciones de frontera, esto es:

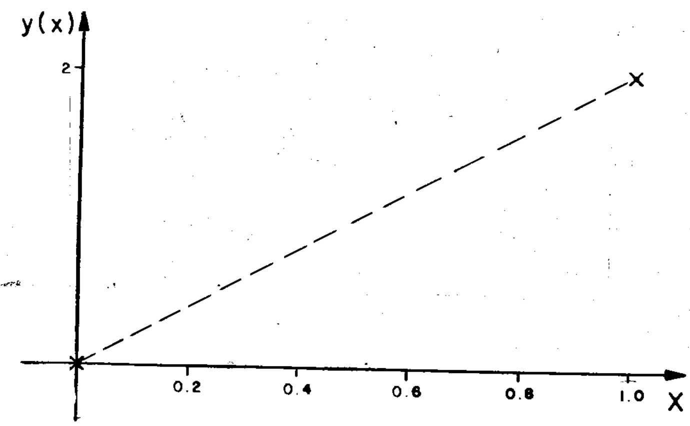


Figura VI.12

entonces el valor de y_1 será:

$$y_1 = 0.400$$

ya que la ecuación de la recta que se supone como solución es:

$$y = 2x$$

Con esta suposición se puede calcular el valor de y_2 en la expresión (c):

$$y_2 = -1.5(0) + 2.5(0.400) - 0.25 = 0.750$$

utilizando la expresión (b) para i = 2, 3 y 4 se obtiene:

$i = 2$; $y_3 = -1.5y_1 + 2.5y_2 - 0.25$

$y_3 = -1.5(0.400) + 2.5(0.750) - 0.25 = 1.025$

$i = 3$; $y_4 = -1.5y_2 + 2.5y_3 - 0.25$

$y_4 = -1.5(0.750) + 2.5(1.025) - 0.25 = 1.188$

$i = 4$; $y_5 = -1.5y_3 + 2.5y_4 - 0.25$

$y_5 = -1.5(1.025) + 2.5(1.188) - 0.25 = 1.183$

Comparando el último valor obtenido (y_5) con la condición final de frontera y(1) = 2, se observa lo siguiente:

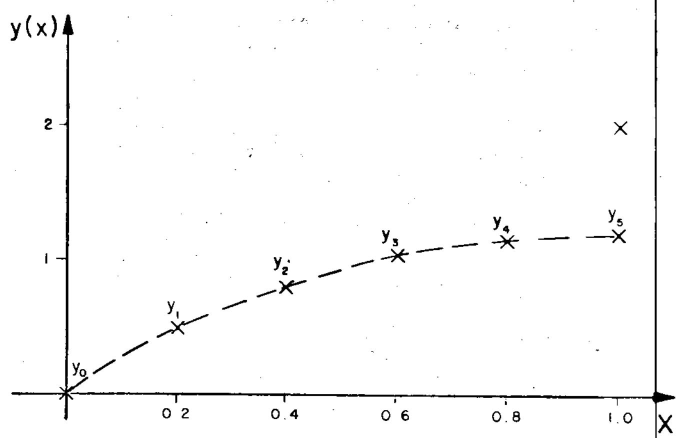


Figura VI.13

es decir, que la condición final de frontera no se satisface. Para corregir el error se supondrá:

$$y_1 = 0.500$$

Utilizando nuevamente la exprexión (b) para i = 1, 2, 3 y 4 se obtiene:

$i = 1$; $y_2 = -1.5(0) + 2.5(0.500) - 0.25 = 1.000$

$i = 2$; $y_3 = -1.5(0.500) + 2.5(1.000) - 0.25 = 1.500$

$i = 3 \;; \quad y_4 = -\,1.5(1.000) + 2.5(1.500) - 0.25 = 2.000$

$i = 4 \;; \quad y_5 = -\,1.5(1.500) + 2.5(2.000) - 0.25 = 2.500$

en este caso el valor es mayor que la condición de frontera, esto es:

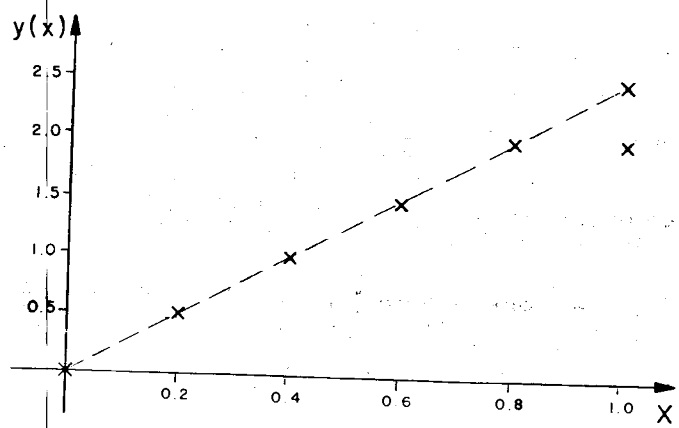


Figura VI.14

Se ha visto que la suposición $y_1 = 0.400$ hace que no se verifique la condición de frontera $y_5 = 2.000$, asimismo aumentando el valor de $y_1 (y_1 = 0.500)$, se observa que tampoco se verifica la condición de frontera. Con la información de estas dos suposiciones, se puede obtener la siguiente tabla:

y_5	y_1
1.183	0.400
2.500	0.500

interpolando linealmente para $y_5 = 2.000$, se obtiene que y_1 vale:

$$y_1 = \frac{2.000 - 2.500}{1.183 - 2.500}(0.400) + \frac{2.000 - 1.183}{2.500 - 1.183}(0.500) = 0.462$$

Utilizando nuevamente la expresión (b) para $i = 1$, 2, 3 y 4 se obtiene:

$i = 1 \;; \quad y_2 = -\,1.5(0) + 2.5(0.462) - 0.25 = 0.905$

$i = 2 \;; \quad y_3 = -\,1.5(0.462) + 2.5(0.905) - 0.25 = 1.320$

$i = 3 \;; \quad y_4 = -\,1.5(0.905) + 2.5(1.320) - 0.25 = 1.692$

$i = 4 \;; \quad y_5 = -\,1.5(1.320) + 2.5(1.693) - 0.25 = 2.002$

por lo que una aproximación a la solución de la ecuación diferencial con condiciones en la frontera es:

x	y(x)
0.0	0.000
0.2	0.462
0.4	0.905
0.6	1.320
0.8	1.692
1.0	2.002

El error que se comete al utilizar este método depende del orden de error de las fórmulas de derivación que se utilicen.

Para una ecuación diferencial de cualquier orden pero lineal, el procedimiento visto anteriormente se puede modificar obteniéndose un sistema de ecuaciones algebraicas simultáneas en lugar de suponer valores de las ordenadas. El siguiente ejemplo ilustra el procedimiento a seguir.

Ejemplo VI.9

Para resolver la ecuación diferencial con condiciones de frontera del ejemplo anterior, la expresión (a), se puede escribir como un sistema de cuatro ecuaciones algebraicas lineales siendo la primera de ellas la que se obtiene para $i = 1$ la segunda se obtiene para $i = 2$, etc., el sistema que resulta es:

$$\begin{array}{ll} i = 1\ ; & 30y_0 - 50y_1 + 20y_2 + 5 = 0 \\ i = 2\ ; & 30y_1 - 50y_2 + 20y_3 + 5 = 0 \\ i = 3\ ; & 30y_2 - 50y_3 + 20y_4 + 5 = 0 \\ i = 4\ ; & 30y_3 - 50y_4 + 20y_5 + 5 = 0 \end{array} \qquad \ldots \text{(a)}$$

donde $y_0 = 0$ y $y_5 = 2$ por las condiciones de frontera del problema. Dividiendo el sistema entre 5, despejando el vector de términos independientes y sustituyendo y_0 y y_5 se obtiene:

$$\begin{aligned} -10y_1 + 4y_2 &= -1 \\ 6y_1 - 10y_2 + 4y_3 &= -1 \\ 6y_2 - 10y_3 + 4y_4 &= -1 \\ 6y_3 - 10y_4 &= -9 \end{aligned}$$

resolviéndolo por el método de Gauss-Seidel se obtiene que:

$$y_1 = 0.462$$

$$y_2 = 0.905$$

$$y_3 = 1.320$$

$$y_4 = 1.692$$

Siendo la solución que proporciona este método idéntica a la que se obtuvo utilizando el procedimiento del ejemplo anterior.

x	y(x)
0.0	0.000
0.2	0.462
0.4	0.905
0.6	1.320
0.8	1.692
1.0	2.000

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Resolver la siguiente ecuación diferencial:

$$y' = \frac{1}{4}(5 + x)y$$

con la condición inicial $y(0) = 2$ en el intervalo $0 \leq x \leq 0.8$, considerando un incremento constante $h = 0.2$, utilizando los siguientes métodos:

a) Euler
b) Euler - Gauss
c) Taylor
d) Milne
e) Runge - Kutta de cuarto orden

2. Elaborar programas de computadora de los métodos de Euler, Euler - Gauss, Milne y Runge - Kutta de cuarto orden, verificar su correcto funcionamiento comparando los resultados obtenidos al resolver la ecuación diferencial del problema anterior.

3. El siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$T_1' = \frac{5}{6}(T_2 - T_1)$$

$$T_2' = \frac{3}{4}(T_1 - 2T_2 + 293)$$

representa el modelo matemático para obtener las temperaturas T_1 y T_2 en un condensador de superficie.

Considerar que inicialmente T_1 es de 800°K y T_2 es de 300°K. Obtener los valores de las temperaturas T_1 y T_2 durante el primer minuto de funcionamiento del equipo. Utilizar inicialmente el método de Taylor y continuar con el método de Milne.

4. En un proceso metalúrgico, se ha observado que para lograr un buen resultado, la aleación procedente del horno de fundición debe ser colada a una temperatura superior a los 1 000 °C. Si la aleación se extrae del horno a una temperatura de 1 300 °C y a partir de ese momento se enfría según la siguiente ley:

$$u' = -K(u - T)$$

donde:

u es la temperatura de la aleación

K es una constante que depende de los materiales

T es la temperatura ambiente

Investigar si se obtendrá un resultado satisfactorio considerando que la operación entre la extracción del horno y la terminación del colado requiere de 1.5 minutos. Considerar $K = 0.1567$ y $T = 35$, utilizar el método de Runge - Kutta de cuarto orden.

5. El departamento de ventas de una compañía ha determinado que la demanda de un nuevo producto se desarrollará de acuerdo a la siguiente ecuación diferencial:

$$y'' + y' = 0$$

donde y es la función que representa las ventas del producto por día.

Para que la producción sea rentable se considera necesario que al cabo de un año se deben vender cuatro mil unidades diarias. ¿Cuál debe ser la producción trimestral para lograr alcanzar la meta al finalizar el primer año?

CAPITULO VII SOLUCION NUMERICA DE ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES

INTRODUCCION

En este capítulo se estudiará la solución numérica de ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden de la forma:

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{a^2 u}{\partial x \, \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f \qquad \ldots (1)$$

en donde, generalmente, los coeficientes a, b y c son funciones de x , y y f es función de x, y, u, $\frac{\partial u}{\partial x}$ y $\frac{\partial u}{\partial y}$.

Este tipo de ecuaciones se presenta en problemas de ingeniería que se relacionan con transferencia de calor, vibraciones, elasticidad y otros.

De acuerdo con los valores de los coeficientes a, b, y c, la ecuación en derivadas parciales (1) se clasifica en:

Elíptica

Parabólica

Hiperbólica

En este capítulo se utilizará el método de diferencias finitas para encontrar una aproximación a la solución de los tres tipos de ecuaciones.

Básicamente la aplicación del método es igual que en las ecuaciones diferenciales ordinarias, la única diferencia consiste en que las ecuaciones en derivadas parciales tienen dos variables independientes y por consiguiente se requieren fórmulas de derivación parcial en lugar de las derivadas ordinarias.

VII.1 FORMULAS PARA DERIVAR PARCIALMENTE

Para obtener las fórmulas es necesario partir del conocimiento de una función de dos variables $u(x, y)$, tabulada para diferentes valores de x, y; como se muestra en la siguiente tabla.

$x \backslash y$	y_0	y_1	y_2	...	y_m
x_0	$u(x_0, y_0)$	$u(x_0, y_1)$	$u(x_0, y_2)$	...	$u(x_0, y_m)$
x_1	$u(x_1, y_0)$	$u(x_1, y_1)$	$u(x_1, y_2)$	...	$u(x_1, y_m)$
x_2	$u(x_2, y_0)$	$u(x_2, y_1)$	$u(x_2, y_2)$	...	$u(x_2, y_m)$
⋮	⋮	⋮	⋮		⋮
x_n	$u(x_n, y_0)$	$u(x_n, y_1)$	$u(x_n, y_2)$	...	$u(x_n, y_m)$

Tabla VII.1

Partiendo de las expresiones vistas en el capítulo V para derivar en forma ordinaria una función, es posible deducir las fórmulas que corresponden a las derivadas parciales, considerando que para aplicar las fórmulas de derivación ordinaria, se requiere que la diferencia entre los valores consecutivos de la variable independiente sean constantes. En las derivadas parciales se tendrá un espaciamiento constante para x, que se representa con Δx y otro espaciamiento constante para y, representado por Δy.

La derivada parcial de una función $u(x, y)$ con respecto a x, equivale a derivar en forma ordinaria la función $u(x, y)$, considerando como constante a y.

Así, para obtener la fórmula de la primera derivada parcial de $u(x, y)$ con respecto a x, en el punto (x_0, y_0), se parte de aplicar la fórmula:

$$\left.\frac{d\,y(x)}{dx}\right|_{x=x_0} = \frac{1}{h}\left[-\underline{y_0} + y_1\right]$$

sobre la función $u(x, y)$ en los puntos (x_0, y_0), (x_1, y_0); debido a que en estos puntos y permanece constante e igual a y_0, además como $h = \Delta x$, la fórmula buscada es:

$$\left.\frac{\partial u\ (x,\ y)}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}} = \frac{1}{\Delta x}\left[-\ u(x_0,\ y_0) + u(x_1,\ y_0)\right]$$

Considerando como pivote un punto cualquiera (x_i, y_j) y utilizando la notación $u_{i,j}$ en lugar de $u(x_i, y_i)$, se obtiene:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{i,j} = \frac{1}{\Delta x}\left[-\ u_{i,j} + u_{i+1,j}\right] \qquad \ldots\ (2)$$

de manera análoga:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{i,j} = \frac{1}{\Delta y}\left[-\ u_{i,j} + u_{i,j+1}\right] \qquad \ldots\ (3)$$

Para la segunda derivada parcial con respecto a x, y se puede partir de la fórmula:

$$\left.\frac{dy(x)}{dx}\right|_{x_i} = \frac{1}{2h}\left[-\ y_i + y_{i+1}\right] \qquad \ldots\ (4)$$

tomando en cuenta que:

$$\left.\frac{\partial^2\ u}{\partial x\ \partial y}\right|_{x_i,y_j} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x_i,y_j}$$

con lo cual:

$$\left.\frac{\partial^2\ u}{\partial x\ \partial y}\right|_{i,j} = \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{1}{2\Delta x}\left[-\ u_{i-1,j} + u_{i+1,j}\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{2\Delta x}\left[-\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{i-1,j} + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{i+1,j}\right]$$

aplicando nuevamente la fórmula (4), sobre $u(x, y)$ en los dos puntos marcados:

$$\left.\frac{\partial^2\ u}{\partial x\ \partial y}\right|_{i,j} = \frac{1}{2\Delta x}\left\{-\ \frac{1}{2\Delta y}\left[-\ u_{i-1,j-1} + u_{i-1,j+1})\right]\right.$$

$$\left. + \frac{1}{2\Delta y}\left[-\ u_{i+1,j-1} + u_{i+1,j+1}\right]\right\}$$

simplificando:

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x\ \partial y}\right|_{i,j} = \frac{1}{4(\Delta x)(\Delta x)}\left[u_{i-1,j-1} - u_{i-1,j+1} - u_{i+1,j-1} + u_{i+1,j+1}\right] \quad \ldots (5)$$

Mediante un procedimiento semejante, se puede obtener cualquier fórmula de derivación parcial aplicando las expresiones del capítulo V. Algunas de ellas se presentan a continuación.

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{i,j} = \frac{1}{2\Delta x}\left[-u_{i-1,j} + u_{i+1,j}\right] \quad \ldots (6)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{i,j} = \frac{1}{2\Delta y}\left[-u_{i,j-1} + u_{i,j+1}\right] \quad \ldots (7)$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{i,j} = \frac{1}{(\Delta x)^2}\left[u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}\right] \quad \ldots (8)$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{i,j} = \frac{1}{(\Delta y)^2}\left[u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}\right] \quad \ldots (9)$$

Cuando se aplican manualmente las fórmulas de derivación parcial, es conveniente ordenar los términos en forma matricial y anotar únicamente los coeficientes de las ordenadas que corresponden a cada posición. De esta manera las expresiones anteriores equivalen a lo siguiente:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{i,j} = \frac{1}{\Delta x}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{\underline{-1}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \ldots (10)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{i,j} = \frac{1}{\Delta y}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{\underline{-1}} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \ldots (11)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{i,j} = \frac{1}{2\Delta x}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & \underline{\underline{0}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \ldots (12)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{i,j} = \frac{1}{2\Delta y}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \ldots (13)$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{i,j} = \frac{1}{(\Delta x)^2}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \ldots (14)$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{i,j} = \frac{1}{(\Delta y)^2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \ldots (15)$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y}\right|_{i,j} = \frac{1}{4\Delta x\ \Delta y}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \ldots (16)$$

Obsérvese que las fórmulas de derivación parcial de x solamente varían en una columna, mientras que las parciales con respecto a y, varían en un sólo renglón.

II.2 ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES ELIPTICAS

En las ecuaciones en derivadas parciales de tipo *elíptico* se cumple que:

$$b^2 - 4ac < 0$$

siendo a, b y c los coeficientes de la ecuación (1).

Dos casos de estas ecuaciones son:

a) La ecuación de Laplace:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x, y) = 0$$

b) La ecuación de Poisson:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x, y) = f(x, y)$$

La solución de la ecuación de Laplace o ecuación de calor que representa el comportamiento de la temperatura en una placa, se puede aproximar mediante la aplicación del método de diferencias finitas, sustituyendo las expresiones (8) y (9) en la ecuación diferencial, como sigue:

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{i,j} + \left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{i,j} = \frac{1}{\Delta x^2}\left[u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}\right] + \frac{1}{\Delta y^2}\left[u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}\right] = 0$$

como $\Delta x = \Delta y = 1$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{i,j} + \left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{i,j} = \left[u_{i-1,j} - 4u_{i,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1}\right] = 0$$

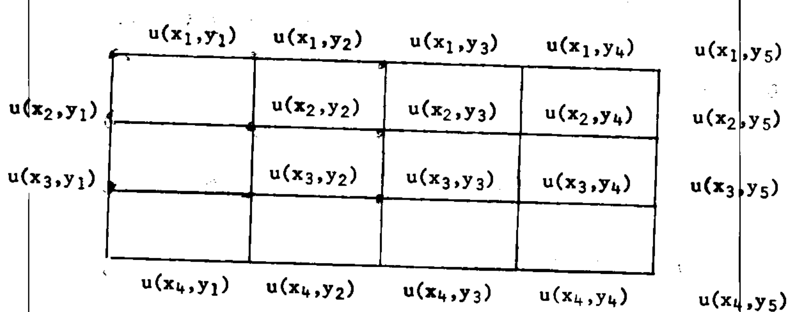
en forma matricial:

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{i,j} + \left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{i,j} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \ldots (17)$$

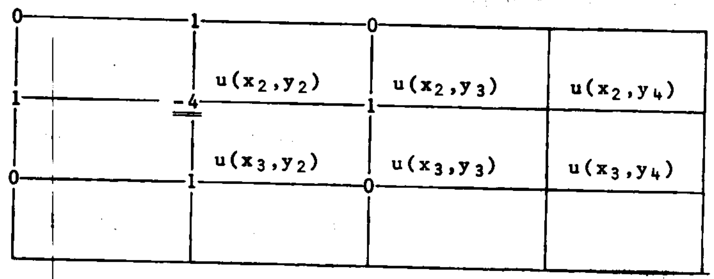
Para ilustrar la aplicación del método de diferencias finitas, considérese el siguiente problema de valores en la frontera.

Si la función $u(x, y)$ representa las temperaturas que se tienen en diferentes puntos de una placa, de la cual son conocidas las temperaturas en la frontera de la misma; entonces esta función debe satisfacer a la ecuación de Laplace, así como las condiciones de frontera en toda la periferia de la placa, cuando ésta se encuentre en equilibrio térmico.

Para conocer las temperaturas internas de la placa se sobrepondrá a ésta, una *malla* con $\Delta x = \Delta y = 1$, de la siguiente forma:



donde $u(x_1,y_1)$, $u(x_1,y_2)$, $u(x_1,y_3)$, $u(x_1,y_4)$, $u(x_1,y_5)$, $u(x_2,y_5)$, $u(x_3,y_5)$, $u(x_4,y_5)$, $u(x_4,y_4)$, $u(x_4,y_3)$, $u(x_4,y_2)$, $u(x_4,y_1)$, $u(x_3,y_1)$, y $u(x_2,y_1)$ son las temperaturas en la frontera de la placa las cuales se conocen. Lo que se desea determinar son los valores de $u(x_2,y_2)$, $u(x_2,y_3)$, $u(x_2,y_4)$, $u(x_3,y_2)$, $u(x_3,y_3)$ y $u(x_3,y_4)$ los cuales representan las temperaturas internas de la placa. Para lograrlo se aplicará el arreglo (17) a cada uno de los puntos internos. Considerando $u(x_2, y_2)$ como pivote, se obtiene:



lo cual significa que:

$$\left[u(x_2,y_1) + u(x_2,y_3) - 4u(x_2,y_2) + u(x_1,y_2) + u(x_3,y_2)\right] = 0$$

Efectuando lo mismo para los demás puntos internos:

$$\left[u(x_2,y_2) + u(x_2,y_4) - 4u(x_2,y_3) + u(x_1,y_3) + u(x_3,y_3)\right] = 0$$

$$\left[u(x_2,y_3) + u(x_2,y_5) - 4u(x_2,y_4) + u(x_1,y_4) + u(x_3,y_4)\right] = 0$$

$$\left[u(x_3,y_1) + u(x_3,y_3) - 4u(x_3,y_2) + u(x_2,y_2) + u(x_4,y_2)\right] = 0$$

$$\left[u(x_3,y_2) + u(x_3,y_4) - 4u(x_3,y_3) + u(x_2,y_3) + u(x_4,y_3)\right] = 0$$

$$\left[u(x_3,y_3) + u(x_3,y_5) - 4u(x_3,y_4) + u(x_2,y_4) + u(x_4,y_4)\right] = 0$$

suponiendo que las temperaturas en la frontera de la placa son:

$u(x_1,y_1) = 50$ $\quad u(x_4,y_5) = 70$

$u(x_1,y_2) = 5$ $\quad u(x_4,y_4) = 80$

$u(x_1,y_3) = 5$ $\quad u(x_4,y_3) = 90$

$u(x_1,y_4) = 10$ $\quad u(x_4,y_2) = 80$

$u(x_1,y_5) = 30$ $\quad u(x_4,y_1) = 70$

$u(x_2,y_5) = 40$ $\quad u(x_3,y_1) = 30$

$u(x_3,y_5) = 40$ $\quad u(x_2,y_1) = 30$

se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones algebraicas lineales:

$$30 + u(x_2,y_3) - 4u(x_2,y_2) + 5 + u(x_3,y_3) = 0$$

$$u(x_2,y_2) + u(x_2,y_4) - 4u(x_2,y_3) + 5 + u(x_3,y_3) = 0$$

$$u(x_2,y_3) + 40 - 4u(x_2,y_4) + 10 + u(x_3,y_4) = 0$$

$$30 + u(x_3,y_3) - 4u(x_3,y_2) + u(x_2,y_2) + 80 = 0$$

$$u(x_3,y_2) + u(x_3,y_4) - 4u(x_3,y_3) + u(x_2,y_3) + 90 = 0$$

$$u(x_3,y_3) + 40 - 4u(x_3,y_4) + u(x_2,y_4) + 80 = 0$$

Resolviendo el sistema por el método de Gauss-Seidel, con ayuda de una computadora digital, se obtiene que las temperaturas internas de la placa son:

$u(x_2,y_2) = 22.185$ $\quad u(x_3,y_2) = 46.481$

$u(x_2,y_3) = 27.636$ $\quad u(x_3,y_3) = 53.739$

$u(x_2,y_4) = 29.619$ $\quad u(x_3,y_4) = 50.839$

VII.3 ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES PARABOLICAS

Las ecuaciones en derivadas parciales de tipo parabólico se presentan en problemas de propagación. La relación que cumplen los coeficientes a, b y c de la ecuación (1) es:

$$b^2 - 4ac = 0$$

Para el análisis de este tipo de ecuaciones, se utilizará el problema clásico de transmisión de calor en una sola dirección; este problema se representa por la ecuación:

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t\ ,\ x) = k\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}\ u(t\ ,\ x) \qquad \ldots\ (18)$$

cuando el flujo de calor es en la dirección x, siendo t el tiempo y k una constante que depende de la conductividad térmica, densidad y calor específico del material.

Aplicando el método de diferencias finitas, las fórmulas de derivación numérica que se utilizan son:

$$\frac{\partial}{\partial t}\ u(t\ ,\ x)\Big|_{i\ ,\ j} = \frac{1}{\Delta t}\left\{(t_{i+1}\ ,\ x_j) - u(t_i\ ,\ x_j)\right\}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t\ ,\ x)\Big|_{i\ ,\ j} = \frac{1}{(\Delta x)^2}\{u(t_i,\ x_{j-1}) - 2u(t_i,\ x_j) + u(t_i,\ x_{j+1})\}$$

en donde el análisis de la temperatura se hará en el punto j en el instante i, deseándose averiguar el valor de la temperatura en ese punto en el instante i + 1.

Sustituyendo las fórmulas de derivación numérica en la ecuación diferencial (4), se obtiene:

$$\frac{u(t_{i+1},\ x_j) - u(t_i,\ x_j)}{\Delta t} = \frac{k}{\Delta x^2}\left[u(t_i,\ x_{j-1}) - 2u(t_i,\ x_j) + u(t_i,\ x_{j+1})\right]$$

despejando el punto de interés:

$$u(t_{i+1},\ x_j) = u(t_i,\ x_j) + \frac{k\Delta t}{\Delta x^2}\left[u(t_i,\ x_{j-1}) - 2u(t_i,\ x_j) + u(t_i,\ x_{j+1})\right] \quad (19)$$

para que la solución sea estable se debe cumplir que:

$$\frac{k\ \Delta\ t}{\Delta x^2} \leq 0.5$$

Considérese por ejemplo una barra delgada la cual está aislada en tres de sus lados y cuenta con una fuente de calor de 100 °C por el lado restante según se muestra en la siguiente figura:

Figura VII.1

si en el instante $t = t_0$ se suprime el aislamiento del extremo izquierdo de la barra entonces ese punto queda en contacto con el medio ambiente, consideremos esta temperatura como 20 °C. Dividiendo la barra en nueve tramos de la misma longitud se obtiene:

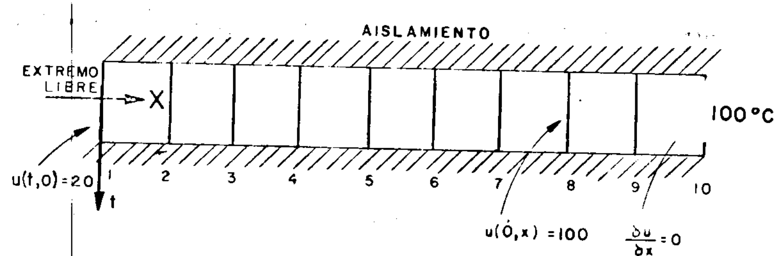


Figura VII.2

La $\frac{\partial u}{\partial x}$ es igual a cero en el extremo derecho de la barra debido a que en ese punto la temperatura permanece constante por la fuente de calor de 100 °C.

Como una simplificación, supóngase que la constante k es igual a la unidad, de donde $\Delta t = 0.5$ para que el término $k\,\Delta t/\Delta x^2 = 1(0.5)/(1)^2 = 0.5$ garantice una solución estable.

Sustituyendo este valor en (19) se obtiene:

$$u(t_{i+1}, x_j) = u(t_i, x_j) + 0.5\left[u(t_i, x_{j-1}) - 2u(t_i, x_j) + u(t_i, x_{j+1})\right]$$

simplificando:

$$u(t_{i+1}, x_j) = 0.5\left[u(t_i, x_{j-1}) + u(t_i, x_{j+1})\right] \qquad \ldots (20)$$

esta expresión indica que la temperatura en la posición j de la barra en el tiempo $i + 1$, es función de las temperaturas en el tiempo i en las posiciones $j - 1$ y $j + 1$.

Aplicando la expresión (20) a cada uno de los puntos en que se dividió la barra, se obtiene para el instante $i = 0$:

$$u(t_1, x_1) = 20$$

$$u(t_1, x_2) = 0.5\left[u(t_0, x_1) + u(t_0, x_3)\right] = 0.5(100 + 100) = 100$$

$$u(t_1, x_3) = 0.5\left[u(t_0, x_2) + u(t_0, x_4)\right] = 100$$

$$\vdots$$

$$u(t_1, x_9) = 0.5\left[u(t_0, x_8) + u(t_0, x_{10})\right] = 0.5\left[u(t_0, x_8) + u(t_0, x_8)\right] = 10$$

para el instante $i = 1$, resulta:

$$u(t_2, x_1) = 20$$

$$u(t_2, x_2) = 0.5\left[u(t_1, x_1) + u(t_1, x_3)\right] = 0.5(20 + 100) = 60$$

$$u(t_2, x_3) = 0.5\left[u(t_1, x_2) + u(t_1, x_4)\right] = 0.5(100 + 100) = 100$$

$$u(t_2, x_4) = 0.5\left[u(t_1, x_3) + u(t_1, x_5)\right] = 100$$

$$\vdots$$

$$u(t_2, x_9) = 0.5\left[u(t_1, x_8) + u(t_1, x_{10})\right] = 0.5\left[u(t_1, x_8) + u(t_1, x_8)\right] = 100$$

Este proceso se deberá continuar para i = 2, 3, 4, ..., hasta que la temperatura de la barra se estabilice en todos sus puntos. El resultado es el siguiente:

t	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
0.0	120	100	100	100	100	100	100	100	100	100
0.5	20	160	100	100	100	100	100	100	100	100
1.0	20	60	80	100	100	100	100	100	100	100
1.5	20	50	80	90	100	100	100	100	100	100
2.0	20	50	70	90	95	100	100	100	100	100
2.5	20	45	70	83	95	98	100	100	100	100
3.0	20	45	64	83	91	98	99	100	100	100
3.5	20	42	64	78	91	95	99	100	100	100
4.0	20	42	60	78	87	95	98	100	100	100
4.5	20	40	60	74	87	93	98	99	100	100
.					.					
.					.					
.					.					
19.0	20	32	44	55	65	74	82	89	95	100

I.4 ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES HIPERBOLICAS

En este tipo de ecuaciones, la relación que guardan los coeficientes a, b, y c de la ecuación (1) es la siguiente:

$$b^2 - 4ac > 0$$

La solución de una ecuación de este tipo tiene las mismas características que la de una ecuación de tipo parabólico.

Un ejemplo clásico de una ecuación en derivadas parciales de tipo hiperbólico es el siguiente:

$$k^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} y(t\,,x) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} y(t\,,x) \qquad \dots (21)$$

esta ecuación representa el movimiento de una cuerda vibrando, en donde la función $y(t\,,x)$ proporciona la distancia perpendicular a la cuerda en el instante t en la posición x, esto es:

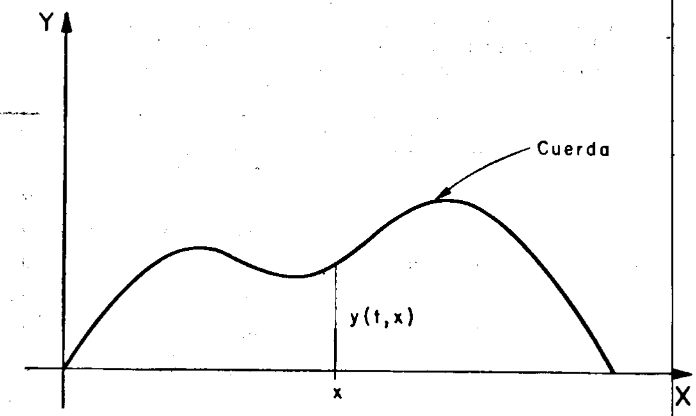


Figura VII.3

Como ejemplo ilustrativo, considérese una cuerda fija en sus extremos, de longitud unitaria, la cual se tensa 0.3 unidades en un punto situado a 0.4 unidades de su longitud. La siguiente figura muestra la cuerda dividida en 10 tramos de magnitud 0.1 cada uno.

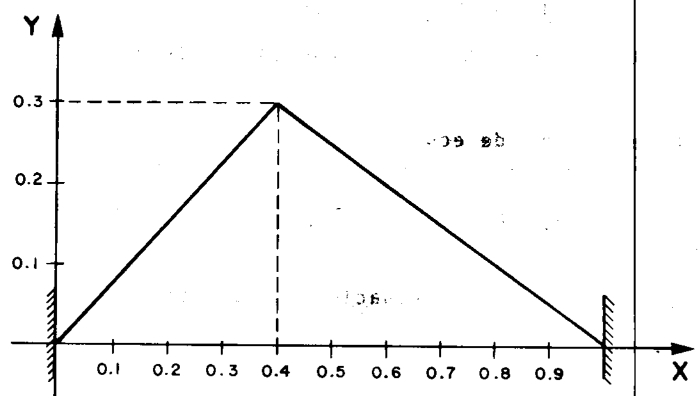


Figura VII.4

Las condiciones iniciales del problema, para $t_0 = 0$, son fáciles de obtener a partir de la figura VII.4.

$$y(0, x) = \begin{cases} \frac{3x}{4} & 0 \leq x \leq 0.4 \\ \frac{1}{2}(1 - x) & 0.4 < x \leq 1.0 \end{cases}$$

además:

$$\frac{\partial}{\partial t} y(t, x)\Big|_{t=0} = 0 \qquad .. (22)$$

debido a que la cuerda antes de soltarse parte del reposo con una velocidad nula en el instante $t_0 = 0$.

Los desplazamientos en los extremos de la cuerda son nulos, debido a que está fija, por lo tanto:

$$y(t, 0) = 0 \quad ; \quad y(t, 1) = 0$$

las fórmulas de derivación que se sustituirán en la ecuación (21) son:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} y(t, x)\Big|_{i,j} = \frac{1}{\Delta x^2}\left[y(t_i, x_{j-1}) - 2y(t_i, x_j) + y(t_i, x_{j+1})\right] \qquad (23)$$

y:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} y(t, x)\Big|_{i,j} = \frac{1}{\Delta t^2}\left[y(t_{i-1}, x_j) - 2y(t_i, x_j) + y(t_{i+1}, x_j)\right] \qquad (24)$$

siendo el valor de $y(t_i, x_j)$ el desplazamiento de la cuerda en el instante i en el punto j.

Cabe hacer la aclaración que aún cuando $y(t, x)$ es una función continua, cuando se trabaja con el método de diferencias finitas, esta función se considera discreta, obteniéndose el valor de la función sólo en los puntos de división j. En la figura VII.4 se observa que $x_0 = 0$, $x_1 = 0.1$, $x_2 = 0.2$, ..., $x_{10} = 1.0$; en general se puede expresar como:

$$x_j = \frac{j}{10} \quad \text{para} \quad j = 0, 1, 2, 3, \ldots, 10$$

Por otra parte t_i representa el tiempo en el instante i.

Sustituyendo las fórmulas de derivación (23) y (24) en la ecuación (21):

$$\frac{k^2}{\Delta x^2}\left[y(t_i, x_{j-1}) - 2y(t_i, x_j) + y(t_i, x_{j+1})\right] = \frac{1}{(\Delta t)^2}\left[y(t_{i-1}, x_j) - 2y(t_i, x_j) + y(t_{i+1}, x_j)\right]$$

despejando $y(t_{i+1}, x_j)$ que proporciona el desplazamiento de la cuerda en el punto j en el instante $i + 1$, se obtiene:

$$y(t_{i+1}, x_j) = 2y(t_i, x_j) - y(t_{i-1}, x_j) + C^2\left[y(t_i, x_{j-1}) - 2y(t_i, x_j) + \right.$$

$$\left. + y(t_i, x_{j+1})\right] \qquad \ldots \quad (25)$$

donde:

$$C^2 = \frac{k^2(\Delta t)^2}{\Delta x^2}$$

La estabilidad de la solución estará garantizada, si el valor del cuadrado de la constante k es cercano a la unidad, pero sin exceder este valor.

Para simplificar los cálculos consideremos $k = 1$, entonces si $\Delta t = 0.1$ y $\Delta x = 0.1$ se obtiene:

$$C^2 = \frac{1^2(0.1)^2}{(0.1)^2} = 1$$

con lo cual la solución será estable. Sustituyendo en la ecuación (25):

$$y(t_{i+1}, x_j) = y(t_i, x_{j-1}) + y(t_i, x_{j+1}) - y(t_{i-1}, x_j) \qquad \ldots \quad (26)$$

donde $j = 1, 2, 3, \ldots, 9$ ya que en $j = 0$ y $j = 10$ los desplazamientos son nulos.

El método para resolver la ecuación (21), implica la utilización de la ecuación (26) para los instantes $i = 0, 1, 2, \ldots$

Para $i = 0$

$$y(t_1, x_j) = y(t_0, x_{j-1}) + y(t_0, x_{j+1}) - y(t_{-1}, x_j) \qquad \ldots \quad (27)$$

$$j = 1, 2, 3, \ldots 9$$

en donde $y(t_0, x)$ se obtiene de las condiciones iniciales del problema y el último término del segundo miembro de la fórmula (27), se obtiene expresando en diferencias finitas la condición (22):

$$\frac{1}{2\,\Delta t}\left[y(t_1, x_j) - y(t_{-1}, x_j)\right] = 0$$

de donde:

$$y(t_{-1}, x_j) = y(t_1, x_j)$$

sustituyendo en la fórmula (27):

$$y(t_1, x_j) = \frac{1}{2}\left[y(t_0, x_{j-1}) + y(t_0, x_{j+1})\right] \qquad \ldots (28)$$

$$j = 1, 2, 3, \ldots, 9$$

Para $i = 1$:

$$y(t_2, x_j) = y(t_1, x_{j-1}) + y(t_1, x_{j+1}) - y(t_0, x_j) \qquad \ldots (29)$$

$$j = 1, 2, 3, \ldots, 9$$

para los instantes siguientes, $i = 2, 3, 4, \ldots$ se utiliza la fórmula (26):

Aplicando las fórmulas (28) y (26) se resuelve la ecuación (25).

Los resultados que se obtienen, con ayuda de una computadora digital son:

t	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
0.0	0.00	0.08	0.15	0.23	0.30	0.25	0.20	0.15	0.10	0.05	0.00
0.1	0.00	0.08	0.16	0.23	0.24	0.25	0.20	0.15	0.10	0.05	0.00
0.2	0.00	0.08	0.16	0.17	0.18	0.19	0.20	0.15	0.10	0.05	0.00
0.3	0.00	0.08	0.09	0.11	0.12	0.13	0.14	0.15	0.10	0.05	0.00
0.4	0.00	0.01	0.03	0.04	0.06	0.07	0.08	0.09	0.10	0.05	0.00
0.5	0.00	-0.05	-0.04	-0.02	-0.01	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.00
0.6	0.00	-0.05	-0.10	-0.09	-0.07	-0.06	-0.04	-0.03	-0.02	-0.01	0.00

Estos resultados que proporciona el método como solución de la ecuación diferencial, se pueden apreciar mejor, graficando los diferentes valores de x para cada uno de los tiempos. Con esto se observa el comportamiento de la cuerda a partir de que es soltada.

APENDICE

ANALISIS COMBINATORIO Y TEOREMA DEL BINOMIO

INTRODUCCION

Para efectuar el análisis y resolución de diversos problemas que se presentan dentro de la Ingeniería, de las ciencias Físicas, Sociales, Económicas y otras, ha ido cobrando gran importancia, el análisis combinatorio como instrumento matemático.

Por ejemplo en la Ingeniería de Tránsito (rama de Ingeniería de Sistemas), el análisis combinatorio resulta útil para la determinación, programación y control de los horarios del sistema de transporte urbano en la Ciudad de México.

Otro ejemplo de aplicación sería dentro de la Física, puesto que nos ayuda a determinar el número de formas en que se pueden distribuir los átomos que forman una molécula, siendo las propiedades de ésta, diferentes para cada combinación.

Como los ejemplos anteriores se podrían mencionar muchos otros, en los cuales el análisis combinatorio es de gran utilidad, por esto, resulta necesario su estudio.

En este apéndice se presentan a manera de introducción los elementos básicos del análisis combinatorio, así como algunos ejemplos ilustrativos.

PRINCIPIO FUNDAMENTAL DEL CONTEO

Si tenemos por ejemplo, tres objetos a, b, c y se desea determinar de cuántas maneras se pueden ordenar estos objetos tomando uno, dos o tres a la vez, podemos conocerlo obteniendo los arreglos, que son:

tomando un solo objeto:

a, b, c

tomando dos objetos a la vez:

ab, ac, ba, bc, ca, cb

tomando tres objetos a la vez:

abc, acb, bac, bca, cab, cba

Cuando se tienen tres objetos, resulta fácil enumerar cuántas ordenaciones se pueden formar tomando los objetos de uno en uno, de dos en dos o de tres en tres. Sin embargo, resulta prácticamente imposible enumerar todas las ordenaciones que se pueden formar si se cuenta no con tres objetos sino con treinta, cuarenta o más.

Un procedimiento más adecuado para averiguar el número de ordenaciones que se pueden obtener con n objetos tomando r a la vez, sería el conocer una expresión que proporcione este número sin tener que enumerar las ordenaciones. Para deducir esta expresión se partirá de las siguientes reglas, con las cuales se enuncia el *principio fundamental de conteo.*

REGLA DEL PRODUCTO.- Si un evento puede ocurrir en m distintas formas y otro evento puede ocurrir en n distintas formas, entonces existen $m \times n$ distintas formas en las que los dos eventos pueden ocurrir.

REGLA DE LA SUMA.- Si un evento puede ocurrir de m distintas formas y otro evento puede ocurrir de n distintas formas, entonces existen $m + n$ distintas formas en la que uno de esos dos eventos pueden ocurrir.

Como ejemplo para ilustrar estas dos reglas, consideremos las cinco primeras letras del alfabeto a, b, c, d, e y las tres primeras del alfabeto griego α, β y γ

$$a, b, c, d, e, \alpha, \beta, \gamma$$

Es claro que existen $5 \times 3 = 15$ distintas formas de seleccionar dos letras, una de cada alfabeto, éstas son:

$a\alpha$	$a\beta$	$a\gamma$
$b\alpha$	$b\beta$	$b\gamma$
$c\alpha$	$c\beta$	$c\gamma$
$d\alpha$	$d\beta$	$d\gamma$
$e\alpha$	$e\beta$	$e\gamma$

también es evidente que existen $5 + 3 = 8$ distintas formas de seleccionar una letra, ya sea de uno o de otro alfabeto, éstas son:

$$a, b, c, d, e, \alpha, \beta, \gamma$$

Ejemplo 1

La compañía de transportación marítima "Canguro" cuenta con 5 barcos que navegan entre las ciudades de Barcelona (España) y Génova (Italia). ¿De cuántas maneras puede una persona ir de Barcelona a Génova y regresar en un barco diferente?

Solución

Existen 5 diferentes formas de efectuar la primera travesía y con cada una de éstas, existen 4 diferentes formas de regresar (ya que la persona no puede regresar en el mismo barco); entonces el número de maneras de efectuar estas dos travesías es:

$$5 \times 4 = 20$$

Ejemplo 2

En un librero se tienen 22 libros, 5 están escritos en inglés, 7 en alemán y 10 en francés.

a) ¿De cuántas maneras se pueden seleccionar dos libros que estén escritos en idiomas diferentes?

b) ¿De cuántas maneras se pueden seleccionar dos libros sin importar el idioma en que estén?

Solución

a) Se puede obtener alguna de las siguientes combinaciones para seleccionar dos libros escritos en idiomas diferentes.

inglés, alemán

inglés, francés

alemán, francés

Existen 5 x 7 maneras de obtener un libro en inglés y otro en alemán, 5 x 10 maneras de obtener un libro en inglés y otro en francés y 7 x 10 maneras de obtener un libro en alemán y otro en francés, por lo tanto, el número total de maneras en la que se pueden obtener dos libros escritos en idioma diferente es:

$$5 \times 7 + 5 \times 10 + 7 \times 10 = 155$$

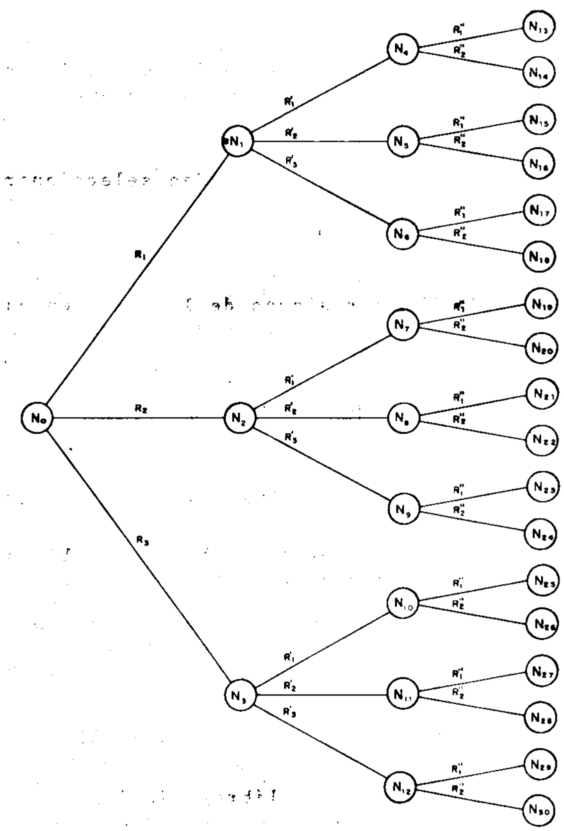
b) Para seleccionar dos libros sin importar el idioma en que estén escritos, el razonamiento es el siguiente:

Se tienen 22 maneras diferentes de seleccionar el primero; una vez seleccionado, existen 21 formas de seleccionar el segundo, por lo tanto existen 22 x 21 = 462 formas de seleccionar dos libros cualesquiera.

DIAGRAMAS DE ARBOL

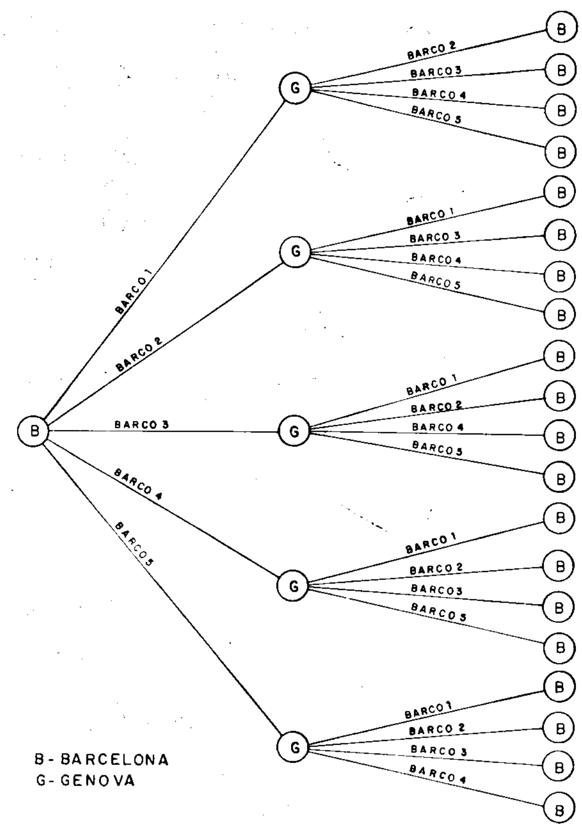
Un diagrama de árbol es una representación gráfica, que se utiliza para mostrar la secuencia en la cual ocurren ciertos eventos.

El árbol está formado por puntos o nodos que representan instantes en el tiempo o lugares en el espacio, y por líneas o ramas que representan las posibles acciones que pueden tomarse. Los nodos y ramas se encuentran unidos como se muestra en la siguiente figura:



El nodo (No) representa simplemente el inicio del árbol. Las ramas siempre están unidas por dos nodos, pero de un nodo pueden partir dos o más ramas.

Por ejemplo, el diagrama de árbol que representa el problema enunciado en el ejemplo 1 es:

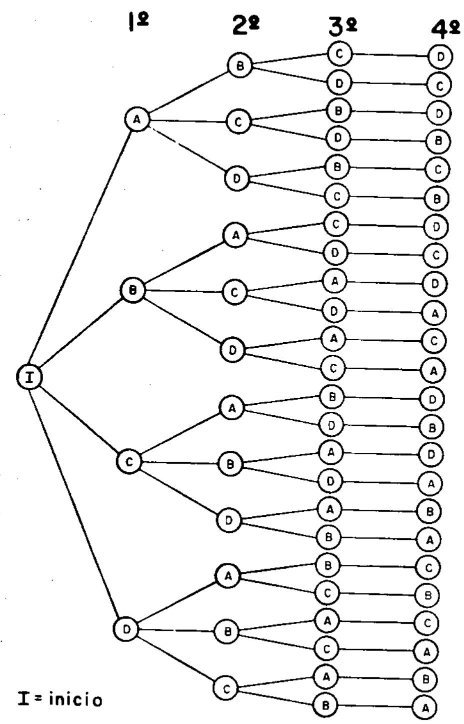


Ejemplo 3

En la fase semifinal de un torneo de tenis, se encuentran cuatro jugadores, para identificarlos llamemos A, B, C y D a cada jugador. Elaborar un diagrama de árbol que presente todas las diferentes alternativas en las que puede terminar el torneo.

Solución

El primer lugar del torneo puede ser ganado por cualquiera de los jugadores A, B, C ó D, si consideramos que gana C, entonces el segundo lugar puede ser ganado por A, B ó D, si consideramos que el segundo lugar lo obtiene A, entonces el tercer lugar podrá ser ganado por B ó D, siguiendo este razonamiento, todas las alternativas posibles se representan gráficamente como sigue:



ORDENACIONES Y PERMUTACIONES

Se debe entender por *ordenaciones de* n *objetos tomando* r *de ellos a la vez* a los diferentes grupos ordenados que se pueden formar al seleccionar r de los n objetos. Si tenemos por ejemplo 1, 2 y 3, las distintas formas en que se pueden ordenar estos números son:

tomando un solo número:

1, 2, 3

tomando dos números a la vez:

12, 13, 21, 23, 31, 32

tomando tres números a la vez:

123, 132, 213, 231, 312, 321

Sea $O(n, r)$ el número de ordenaciones de n objetos que se pueden obtener tomando r de ellos a la vez; para hallar una expresión que nos permita conocer $O(n, r)$ consideremos el siguiente análisis:

el número de formas en que se pueden ordenar r de n objetos, equivale a colocarlos en r distintas localidades. Existen n formas para llenar la primera, $n - 1$ formas de llenar la segunda, y así sucesivamente existirán $n - r + 1$ formas para llenar la r-ésima localidad.

n	$n-1$	$n-2$	...	$n-r+1$
1	2	3	...	r

aplicando la regla del producto:

$$O(n, r) = n(n - 1)(n - 2) \ldots (n - r + 1)$$

esta expresión se puede escribir como:

$$O(n, r) = \frac{1 \times 2 \times 3 \ldots (n-r-1)(n-r)(n-r+1) \ldots (n-1)\, n}{1 \times 2 \times 3 \ldots (n-r-1)(n-r)}$$

finalmente:

$$\boxed{O(n, r) = \frac{n!}{(n - r)!}} \qquad \ldots (1)$$

Ejemplo 4

Consideremos el ejemplo presentado inicialmente, en el cual se desea saber de cuántas formas se pueden ordenar los números 1, 2 y 3 tomando uno, dos o tres a la vez, esto equivale a obtener $O(3, 1)$, $O(3, 2)$ y $O(3, 3)$ respectivamente.

Solución

$$O(3, 1) = \frac{3!}{(3 - 1)!} = 3$$

estas tres ordenaciones tomando un solo elemento son:

1, 2, 3

a su vez:

$$O(3, 2) = \frac{3!}{(3 - 2)!} = 6$$

las seis ordenaciones tomando dos elementos a la vez son:

12, 13, 21, 23, 31, 32

y por último:

$$O(3,\ 3) = \frac{3!}{(3-3)!} = 6$$

las seis ordenaciones tomando tres elementos a la vez son:

123, 132, 213, 231, 312, 321

Ejemplo 5

Ocho personas entran en un autobús que cuenta con 20 asientos disponibles, ¿de cuántas maneras diferentes pueden sentarse?

Solución

La primera persona puede seleccionar 20 diferentes lugares para sentarse, la segunda 19, la tercera 18 y así sucesivamente hasta que la última persona (la número ocho), se podrá sentar en alguno de los 13 lugares disponibles que quedan. Utilizando la regla del producto, el número total de formas en las que se pueden sentar es:

$$20 \times 19 \times 18 \times \ldots \times 13 = 5{,}079{,}110{,}400$$

o bien:

$$O(20,\ 8) = \frac{20!}{(20-8)!} = 5{,}079{,}110{,}400$$

En particular, se deberá entender por *permutaciones* a las ordenaciones que se forman con n objetos considerando todos ellos a la vez, esto es:

$$O(n,\ n) = \frac{n!}{(n-n)!} = n!$$

el número de permutaciones de n objetos se representará por P_n, por lo tanto:

$$\boxed{P_n = n!}$$

así en el ejemplo 4, cuando se obtuvo el número de ordenaciones de los números 1, 2 y 3, tomando los tres a la vez, se obtuvo el número de permutaciones, esto es:

$$P_3 = O(3,\ 3) = 3! = 6$$

Las *ordenaciones con repetición* son aquellas en las cuales pueden repetirse los objetos que la forman, así por ejemplo el número de ordenaciones con repetición que se pueden formar con las letras A, B y C son:

tomando una sola letra:

A, B, C

tomando dos letras a la vez:

AA	BA	CA
AB	BB	CB
AC	BC	CC

tomando tres letras a la vez:

AAA	BAA	CAA
AAB	BAB	CAB
AAC	BAC	CAC
ABA	BBA	CBA
ABB	BBB	CBB
ABC	BBC	CBC
ACA	BCA	CCA
ACB	BCB	CCB
ACC	BCC	CCC

Sea $OR(n, r)$ el número de ordenaciones con repetición de n objetos tomando r a la vez. Una expresión que permite conocer $OR(n, r)$ es fácil de obtener utilizando el análisis que se hizo para las ordenaciones simples $O(n, r)$.

Si consideramos que tenemos r lugares disponibles para colocar n objetos, los cuales se pueden repetir, existirán n formas de llenar la primera localidad; existirán también, n formas de llenar la segunda, ya que ésta puede ser ocupada por los $n-1$ objetos restantes, o bien puede repetirse el objeto colocado en la primera localidad.

n	n	n	...	n
1	2	3		r

por lo tanto, aplicando la regla de producto

$$OR(n, r) = n \times n \times n \ldots \times n \qquad r \text{ veces}$$

$$\boxed{OR(n, r) = n^r} \qquad \ldots (2)$$

Al igual que las permutaciones simples, las *permutaciones con repetición* serán las ordenaciones con repetición de n objetos, tomando los n objetos a la vez:

$$\boxed{PR_n = OR(n, n) = n^n}$$

Ejemplo 6

Para controlar los vehículos que circulan en la República Mexicana, todos cuentan con una placa de identificación que consta de tres números y tres letras. Con este sistema ¿Cuántos vehículos como máximo se pueden controlar?

Solución

Se tienen dos conjuntos de n objetos, el primero de ellos está formado por los dígidos del 0 al 9; y el segundo son las letras del alfabeto de la A a la Z.

Analizando el primer conjunto:

$$C_1 = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 9\}$$

¿De cuántas formas se pueden ordenar los diez elementos del conjunto C_1, tomándolos de tres en tres y considerando que se pueden repetir? La respuesta a esta pregunta está dada por:

$$OR(n, r) = n^r$$

siendo en este caso $n = 10$ y $r = 3$, sustituyendo:

$$OR(10, 3) = 10^3 = 1000$$

este resultado es obvio, las ordenaciones con repetición son:

000, 001, 002, ... 998, 999

analizando el segundo conjunto:

$$C_2 = \{A, B, C, \ldots, Z\}$$

el número de ordenaciones con repetición, tomando tres elementos del conjunto C_2 está dado por:

$$OR(26, 3) = 26^3 = 17{,}576$$

Aplicando la regla del producto, el número total de ordenaciones con repetición que se pueden formar con los dos conjuntos es:

$$OR = OR(10, 3) \times OR(26, 3)$$

$$OR = (1000)(17{,}576) = 17{,}576{,}000$$

y considerando que los conjuntos pueden intercambiar su posición dando una permutación diferente, esto es:

NNN LLL

o bien:

LLL NNN

siendo N = número y L = letra, entonces el número total de vehículos que puede ser controlado es:

$$OR_T = 2 \times OR(10, 3) \times OR(26, 3) = 35{,}152{,}000$$

Ejemplo 7

Los vehículos registrados en el Distrito Federal, tienen una placa de identificación formada de la siguiente manera:

NNN LLL

a diferencia de los vehículos registrados en esta zona, todos los vehículos registrados en provincia tienen una placa de identificación formada como sigue:

LLL NNN

Cuál es el número total de vehículos que pueden registrarse en el Dsitrito Federal, si además se sabe que todo vehículo registrado en esta zona tiene una placa de identificación formada de alguna de las siguientes maneras:

$$\begin{array}{ll} NNN & \underset{\uparrow}{A}LL \\ NNN & \underset{\uparrow}{B}LL \\ NNN & \underset{\uparrow}{C}LL \\ NNN & \underset{\uparrow}{D}LL \end{array}$$

Solución

Tomando el conjunto de los números:

$$OR(10, 3) = 10 \times 10 \times 10 = 1000$$

para el conjunto de las letras la primera localidad sólo puede ser ocupada por las letras A, B, C, ó D, con lo cual tendremos entonces:

$$OR = 4 \times 26 \times 26 = 2,704$$

y utilizando la regla del producto:

$$OR_T = 1000\ (2,704) = 2,704,000$$

PERMUTACIONES CON GRUPOS DE ELEMENTOS IGUALES

Un problema diferente a los tratados anteriormente, sería averiguar de cuántas formas se pueden ordenar n objetos en donde existen $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_t$ grupos de objetos iguales.

Considérese que el número de permutaciones buscado es x, entonces si los q_1 objetos iguales fueran reemplazados por q_1 objetos diferentes, se podrían formar $q_1!$ permutaciones sin alterar la posición de ninguno de los objetos restantes, y si en cada una de las x permutaciones se hiciera este cambio, se obtendrían $xq_1!$ permutaciones. En forma similar, si los q_2 objetos iguales fueran reemplazados por q_2 objetos diferentes, el número de permutaciones que se obtendrían, sería:

$$xq_1!\,q_2!$$

generalizando este razonamiento, para $q_3, q_4, q_5, \ldots q_t$ se obtiene:

$$xq_1!\,q_2!\,q_3!\,\ldots\,q_t!$$

La expresión anterior, implica que todos los objetos son diferentes, por lo tanto admiten $n!$ permutaciones, esto es:

$$xq_1!\,q_2!\,q_3!\,!\,\ldots\,q_t! = n!$$

despejando la incógnita x:

$$x = \frac{n!}{q_1!\,q_2!\,q_3!\,\ldots\,q_t!}$$

sustituyendo x por $P(n, q_1, q_2, \ldots q_t)$, se obtiene finalmente:

$$\boxed{P(n, q_1, q_2, q_3, \ldots, q_t) = \frac{n!}{q_1!\,q_2!\,q_3!\,\ldots\,q_t!}}$$

Ejemplo 8

¿Cuántas permutaciones pueden formarse con las letras de las siguientes palabras?

a) Luz

$n = 3 \; ; \quad q_1 = 1$

$P(3,\ 1) = 3! = 6$

b) Madrid

$n = 6 \; ; \quad q_1 = 2$

$$P(6,\ 2) = \frac{6!}{2!} = (3)(4)(5)(6) = 360$$

c) Alfalfares

$n = 10 \; ; \quad q_1 = 3 \; ; \; q_2 = 2 \; ; \quad q_3 = 2$

$$P(10,\ 3,\ 2,\ 2) = \frac{10!}{3!\ 2!\ 2!} = 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 =$$

$$= 151{,}200$$

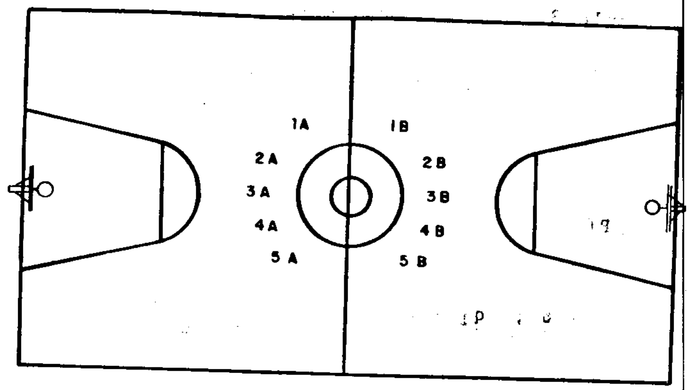
PERMUTACIONES CIRCULARES

Consideremos que se tienen n personas. ¿De cuántas maneras se pueden ordenar para formar un círculo?

Existe una diferencia entre un arreglo en línea de n objetos diferentes y un arreglo en círculo. Las ordenaciones en círculo se consideran iguales si sus elementos tienen el mismo precedente y consecuente en el sentido de las manecillas del reloj, de tal manera que si en un arreglo todos los elementos se recorren r lugares en el mismo sentido, el nuevo arreglo no se considera como una permutación diferente. Si las n personas se acomodan de tal manera que formen un círculo y se hace que una de ellas ocupe una posición fija, las restantes $n - 1$ posiciones podrán ser utilizadas por las $n - 1$ personas que quedan utilizando la posición fija de la persona seleccionada como referencia; entonces existirán $(n - 1)!$ formas de ordenar a las personas restantes.

Ejemplo 9

Antes de iniciarse el encuentro de basquetbol entre el equipo A y el equipo B, el árbitro llamó al centro de la cancha a los integrantes de ambos equipos.



¿De cuántas **maneras** se pueden colocar los diez jugadores en torno al círculo de la media cancha?

Solución

Los jugadores se pueden ordenar de $(n - 1)!$ maneras diferentes, esto es:

$$(10 - 1)! = 362,880$$

COMBINACIONES

Se debe entender por *combinaciones de* n *objetos tomando* r *de ellos a la vez*, a los diferentes grupos que pueden tomarse al seleccionar r de los n objetos, sin importar el orden de los objetos que forman cada grupo. Así por ejemplo, las diferentes maneras en que se pueden acomodar las letras a, b, c y d sin importar el orden de las mismas (número de combinaciones) tomando una, dos, tres o cuatro a la vez son:

tomando una sola letra:

a, b, c, d; (existen 4 formas)

tomando dos a la vez:

ab, ac, ad, bc, bd, cd; (existen 6 formas)

tomando tres a la vez:

abc, abd, acd, bcd; (existen 4 formas)

tomando cuatro a la vez:

abcd; (existe una forma)

Sea $C(n, r)$ el número de combinaciones de n objetos tomando r a la vez. Cada una de las $C(n, r)$ combinaciones que se pueden obtener, podrán ser ordenadas entre sí de r! formas. Por lo tanto, aplicando la regla del producto existirán $C(n, r)\, r!$ ordenaciones de n objetos tomados de r en r, esto es:

$$C(n, r)\, r! = O(n, r)$$

despejando $C(n, r)$:

$$C(n, r) = \frac{O(n, r)}{r!}$$

esta expresión se puede escribir como:

$$C(n, r) = \frac{n(n-1)(n-2)\ \ldots\ (n-r+1)}{r!}$$

multiplicando y dividiendo por $(n-r)!$ se obtiene:

$$C(n, r) = \frac{n(n-1)(n-2)\ \ldots\ (n-r+1)(n-r)!}{r!\ (n-r)!}$$

$$C(n, r) = \frac{n(n-1)(n-2)\ \ldots\ (n-r+1)(n-r)(n-r-1)\ \ldots\ \cdot 2 \cdot 1}{r!(n-r)!}$$

finalmente:

$$\boxed{C(n, r) = \frac{n!}{r!\ (n-r)!}} \qquad \ldots (4)$$

Ejemplo 10

¿De cuántas maneras se puede hacer una selección de 5 personas de un grupo de 15 de ellas?

El número de maneras en que se puede hacer la selección (número de combinaciones) es:

$$C(15, 5) = \frac{15!}{5!(15 - 5)!} = 3003$$

Ahora bien, de cuántas maneras se puede hacer una selección considerando que:

a) Una persona en particular siempre quede incluida dentro de la selección.

Si una persona queda siempre dentro de un grupo de 5 de ellas, faltará seleccionar a 4 personas de un total de 14 restantes:

$$C(14, 4) = \frac{14!}{4!\ (14 - 4)!} = 1001$$

b) Si una persona en particular siempre queda excluida de la selección.

En este caso se deberá hacer la selección de 5 personas de un total de 14:

$$C(14, 5) = \frac{14!}{5!\ (14 - 5)!} = 2002$$

Ejemplo 11

Un examen que consta de 5 preguntas se le proporciona a un estudiante para que lo resuelva. Considerando que cada pregunta tiene un valor de dos puntos. De cuántas maneras puede obtener una calificación de:

a) 8 puntos

b) 4 puntos

c) 10 ó 0 puntos

Solución

Para que el estudiante obtenga 8 de calificación, tiene que contestar correctamente cuatro de las cinco preguntas y puede equivocarse en una de ellas sin importar cual sea, esto es:

1	1. ✓	2. ✓	3. ✓	4. ✓	5. x
2	1. ✓	2. ✓	3. ✓	4. x	5. ✓
3	1. ✓	2. ✓	3. x	4. ✓	5. ✓
4	1. ✓	2. x	3. ✓	4. ✓	5. ✓
5	1. x	2. ✓	3. ✓	4. ✓	5. ✓

se observa que existen 5 diferentes formas de lograr lo anterior, este número de combinaciones está dado por:

$$C(5, 1) = \frac{5!}{1!\ (5 - 1)!} = 5$$

Para que el estudiante obtenga 4 de calificación tiene que contestar correctamente dos de las cinco preguntas, y puede equivocarse en las tres restantes, sin importar en cuáles acierta o en cuáles falla, todas las combinaciones posibles para lograr lo anterior son:

1	1. ✓ ;	2. ✓ ;	3. x ;	4. x ;	5. x
2	1. ✓ ;	2. x ;	3. ✓ ;	4. x ;	5. x
3	1. ✓ ;	2. x ;	3. x ;	4. ✓ ;	5. x
4	1. ✓ ;	2. x ;	3. x ;	4. x ;	5. ✓
5	1. x ;	2. ✓ ;	3. ✓ ;	4. x ;	5. x
6	1. x ;	2. ✓ ;	3. x ;	4. ✓ ;	5. x
7	1. x ;	2. ✓ ;	3. x ;	4. x ;	5. ✓
8	1. x ;	2. x ;	3. ✓ ;	4. ✓ ;	5. x
9	1. x ;	2. x ;	3. ✓ ;	4. x ;	5. ✓
10	1. x ;	2. x ;	3. x ;	4. ✓ ;	5. ✓

este número de combinaciones está dado por:

$$C(5,\ 3) = \frac{5!}{3!\ (5-3)!} = \frac{4 \times 5}{1 \times 2} = 10$$

por último para que el estudiante obtenga 10 ó 0 de calificación, se necesita que responda correctamente o incorrectamente a todas las preguntas, esto es:

1   1. ✓ ; 2. ✓ ; 3. ✓ ; 4. ✓ ; 5. ✓

o bien:

1   1. x ; 2. x ; 3. x ; 4. x ; 5. x

es claro que existe sólo una combinación posible en cualesquiera de los casos, la cual se obtiene como sigue:

$$C(5,\ 0) = \frac{5!}{0!(5-0)!} = 1$$ para obtener 10 de calificación

y

$$C(5,\ 5) = \frac{5!}{5!(5-5)!} = 1$$ para obtener 0 de calificación

COMBINACIONES CON REPETICION

Las *combinaciones con repetición* son aquellas en las cuales se permite repetir los objetos en una misma combinación.

El número de formas en que se pueden seleccionar r de n objetos, considerando que los objetos pueden repetirse es:

$$\boxed{CR(n,\ r) = C(n + r - 1,\ r)}$$

Obtengamos por ejemplo, el número de combinaciones con repetición que se pueden formar con los números 1, 2 y 3 tomando los tres a la vez:

1.- 1 1 1

2.- 1 1 2

3.- 1 1 3

4.- 1 2 2

5.- 1 2 3

6.- 1 3 3

7.- 2 2 2

8.- 2 2 3

9.- 2 3 3

10.- 3 3 3

este número de combinaciones está dado por:

$$CR(3,\ 3) = C(3 + 3 - 1,\ 3) = C(5,\ 3)$$

$$C(5,\ 3) = \frac{5!}{3!(5 - 3)!} = \frac{4 \times 5}{1 \times 2} = 10$$

NUMEROS COMBINATORIOS

Los números que se obtienen al variar r desde cero hasta n en la expresión:

$$\frac{n!}{r!(n - r)!}$$

reciben el nombre de *números combinatorios* y se expresan mediante la notación siguiente:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n - r)!}$$

siendo n el numerador y r el denominador del número combinatorio; estos números tienen algunas propiedades que a continuación se presentan:

a) Los números combinatorios que se obtienen para $r = 0$ y $r = n$ son iguales a la unidad, esto es:

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = 1$$

y

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!(n-n)!} = 1$$

b) Los números combinatorios que se obtienen para valores de $r = 1, 2, 3, \ldots, n-1$, son simétricos entre sí, esto es:

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

es fácil demostrar esta propiedad, a partir de la definición de número combinatorio:

$$\binom{n}{n-r} = \frac{n!}{(n-r)!\ (\cancel{n}-\cancel{n}+r)!} = \frac{n!}{r!\ (n-r)!} = \binom{n}{r}$$

c) La suma de los números combinatorios con numerador igual a n y denominador consecutivo $r = k - 1$ y $r = k$ respectivamente, es igual al número combinatorio de numerador $n = n + 1$ y denominador $r = k$, esto es:

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

Demostración:

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \frac{n!}{(k-1)!\ (n-k+1)!} + \frac{n!}{k!\ (n-k)!}$$

$$= \frac{n!\ k + n!\ (n-k+1)}{k!\ (n-k+1)!}$$

$$= \frac{n!\ (k+n-k+1)}{k!\ (n-k+1)!}$$

$$= \frac{(n+1)!}{k!\ (n+1-k)!} = \binom{n+1}{k}$$

Para ilustrar estas propiedades, obtengamos los números combinatorios de numerador $n = 10$ y denominador $r = 0, 1, 2, \ldots, 10$

$$\binom{10}{0} = 1 \qquad \binom{10}{6} = 210$$

$$\binom{10}{1} = 10 \qquad \binom{10}{7} = 120$$

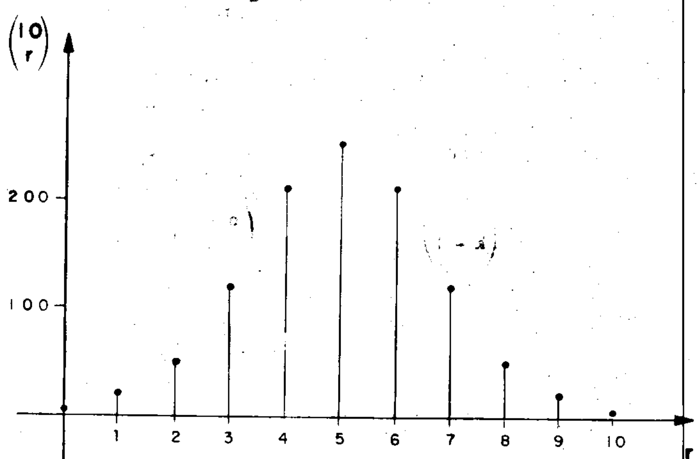
$$\binom{10}{2} = 45 \qquad \binom{10}{8} = 45$$

$$\binom{10}{3} = 120 \qquad \binom{10}{9} = 10$$

$$\binom{10}{4} = 210 \qquad \binom{10}{10} = 1$$

$$\binom{10}{5} = 252$$

gráficamente se pueden representar como:



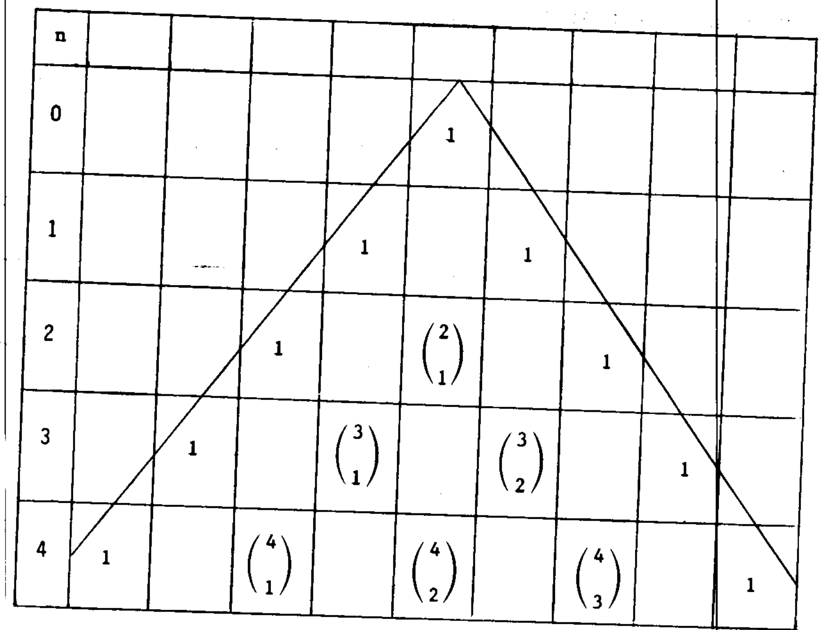
se observa que tanto el primer número combinatorio (para $r = 0$), así como el último (para $r = 10$) son iguales a la unidad, además $\binom{10}{1} = \binom{10}{9}$, $\binom{10}{2} = \binom{10}{8}$, $\binom{10}{3} = \binom{10}{7}$ y $\binom{10}{4} = \binom{10}{6}$ con lo que se ilustran las primeras dos propiedades de los números combinatorios.

TRIANGULO DE PASCAL

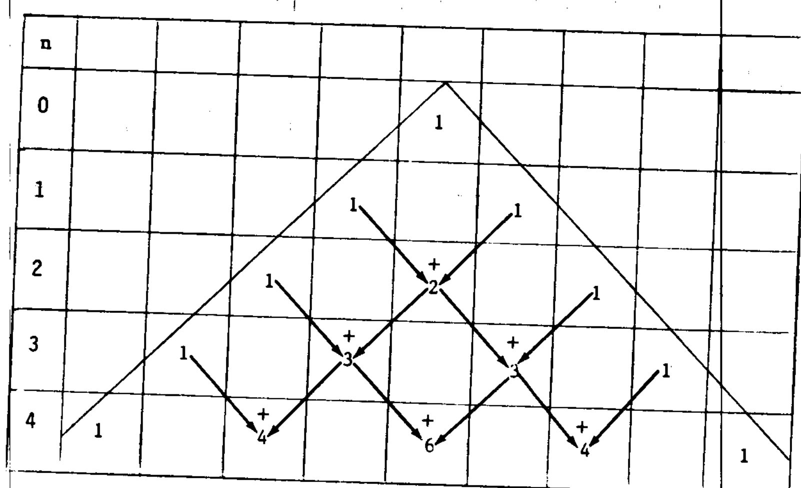
Utilizando las propiedades de los números combinatorios es posible construir el siguiente triángulo, conocido como *triángulo de Pascal.*

n									
0					$\binom{0}{0}$				
1				$\binom{1}{0}$		$\binom{1}{1}$			
2			$\binom{2}{0}$		$\binom{2}{1}$		$\binom{2}{2}$		
3		$\binom{3}{0}$		$\binom{3}{1}$		$\binom{3}{2}$		$\binom{3}{3}$	
4	$\binom{4}{0}$		$\binom{4}{1}$		$\binom{4}{2}$		$\binom{4}{3}$		$\binom{4}{4}$

Los números combinatorios de los extremos del triángulo son iguales a la unidad, según la primera propiedad, entonces:



y por último, los números combinatorios que se encuentran dentro del triángulo, se obtienen aplicando la tercera propiedad, esto es:



TEOREMA DEL BINOMIO

Este teorema establece que el desarrollo del binomio $(a + b)^n$ es igual a:

$$\boxed{(a + b)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^{n-r}\, b^r}$$

donde los números combinatorios $\binom{n}{r}$ reciben el nombre de *coeficientes binomiales*.

La demostración del teorema se realiza por inducción matemática de la siguiente forma:

el teorema es cierto para $n = 1$, ya que:

$$\sum_{r=0}^{1} \binom{1}{r} a^{1-r}\, b^r = \binom{1}{0} a^1 b^0 + \binom{1}{1} a^0 b^1 = a + b = (a + b)^1$$

suponiendo que el teorema se cumple para $(a + b)^n$, entonces deberá ser cierto para $(a + b)^{n+1}$, esto es:

$$(a + b)^{n+1} = (a + b)(a + b)^n$$

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)\left[a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \ldots + \binom{n}{r-1} a^{n-r+1}b^{r-1}\right.$$

$$\left. + \binom{n}{r} a^{n-r}b^r + \ldots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + b^n\right]$$

ahora el término del producto que contiene b^r, se obtiene de:

$$b\left[\binom{n}{r-1} a^{n-r+1}\, b^{r-1}\right] + a\left[\binom{n}{r} a^{n-r}\, b^r\right] =$$

$$= \binom{n}{r-1} a^{n-r+1} \cdot b^r + \binom{n}{r} a^{n-r+1}\, b^r$$

$$= \left[\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r}\right] a^{n-r+1}\, b^r$$

pero sabiendo que:

$$\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r}$$

se obtiene que el término que contiene b^r es:

$$\binom{n+1}{r} a^{n-r+1} b^r$$

se observa que $(a + b)(a + b)^n$ es un polinomio de grado $n + 1$ en b, por lo tanto, se puede escribir:

$$(a + b)^{n+1} = (a + b)(a + b)^n = \sum_{r=0}^{n+1} \binom{n+1}{r} a^{n-r+1} b^r$$

con lo cual se demuestra el teorema.

RESULTADOS DE ALGUNOS PROBLEMAS PROPUESTOS

CAPITULO II

1.
a) 0.34
b) 1.763
e) 0.567

2.
a) 0.567
b) 0.619
c) -1.857
d) 1.7142

3.
a) +0.824
b) .0.3705
c) 0.740
d) 3.426
e) 1.393
f) 0.4563
g) 1.410
h) 0.5492
i) -0.281

6.
a) 0.322
b) -1.647
c) -11.1
d) 2.1, - 9.8, 1.1
e) Una raíz es -0.73
f) 1.2, - 1.2
g) 1.153, 2.810, 5, -1.760, - 4.203

7.
a) 1.576, - 0.981
b) 3, - 1 ± i
c) 2.145, - 1.222, 19.076
d) 0.5 ± 1.323 i, 1.5 ± 5.809 i
e) 0.355 ± 0.594 i, 0.645 ± 9.121 i

CAPITULO III

1.

a) $x_1 = 3$
$x_2 = -2$
$x_3 = 6$

b) $x_1 = 2$
$x_2 = 2$
$x_3 = 3$

c) $x_1 = 0.5$
$x_2 = 0.75$
$x_3 = -3.75$

2.

a) $x_1 = 5$
$x_2 = 3$
$x_3 = 1$

b) $x_1 = 1.003$
$x_2 = -2.990$
$x_3 = 3.994$

c) $x_1 = 2.15$
$x_2 = 3.67$
$x_3 = -1.03$

d) $x_1 = 2.24$
$x_2 = -1.71$
$x_3 = 0.69$

3.

a) $\lambda^3 - 2\lambda^2 - 3\lambda = 0$

b) $\lambda^3 - 12\lambda^2 + 47\lambda - 60 = 0$

c) $\lambda^3 + 6\lambda^2 + 7\lambda = 0$

d) $\lambda^3 - 8\lambda^2 - 9\lambda = 0$

4.

a) $\lambda = 4$ $\quad \overline{x} = \left.\begin{matrix} \frac{2}{3} \\ \\ 1 \end{matrix}\right]$ MA

$\lambda = -1$ $\quad \overline{x} = \left.\begin{matrix} 1 \\ \\ -1 \end{matrix}\right]$ MI

b) $\lambda = 5$ $\quad \overline{x} = \left.\begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}\right]$ MA

$\lambda = 1$ $\quad \overline{x}$ $\overline{x} = \left.\begin{matrix} 0.50 \\ 0.25 \\ 1.00 \end{matrix}\right]$ MI

c) $\lambda = 6.381$ $\quad \overline{x} = \left.\begin{matrix} 0.500 \\ -0.406 \\ 1.000 \end{matrix}\right]$ MAX

$\lambda = 1.595$ $\quad \overline{x} = \left.\begin{matrix} -0.271 \\ 1.000 \\ -0.542 \end{matrix}\right]$ MIN

d) $\lambda = 3$ $\quad \overline{x} = \left.\begin{matrix} -0.355 \\ 1.00 \\ -0.782 \end{matrix}\right]$ MIN

CAPITULO IV

c) $P(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$

a) $10^6\left[0.2t^5 - 0.75t^4 + 1.33t^3 - 1.63t^2 + 1.94t - 0.69\right]$

b) \$ 223,143.55

c) \$ 223,100.00

a) $P(t) = 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{2^2\,2!} - \frac{t^3}{2^3\,3!} + \frac{t^4}{2^4\,4!} + \frac{t^5}{2^5\,5!} - \frac{t^6}{2^6\,6!} - \frac{t^7}{2^7\,7!}$

b) $v(t) = \frac{1}{2} - \frac{t}{4} - \frac{t^2}{16} + \frac{t^3}{96} + \frac{t^4}{768} - \frac{t^5}{7680} - \frac{t^6}{92160}$

. $3.539\ u^2$

. $0.9973\ u^2$

CAPITULO V

1.
   a) $y = -9.875$
   b) $y = 19$
   c) $y = -68.024$
   d) $y = x^3 - 2x^2 - x - 9$

2. $y = 11$ para $x = 3$; $y = 17$ para $x = 6$

3.
   a) -0.370 ; -0.475 ; -0.433
   b) 1.675
   c) $F'(x = 0.2) = -0.416$; $F''(x = 0.6) = 1.646$

4. 0.220 para $x = 2$; 0.135 para $x = 4$; 0.105 para $x = 5$

5. -0.1794 m/s^2 para $t = 15$ s ; -0.1285 m/s^2 para $t = 20$

7. a) 77.3 u^2

10. 102.503 T_n para 1953 ; 200 T_n para 1958

CAPITULO VI

Utilizando el método de Runge - Kutta de cuarto orden:

x	y
0.0	2.00
0.2	2.58
0.4	3.36
0.6	4.43
0.8	5.89

t [min]	T_1 [°K]	T_2 [°K]	
0.0	800	300	Taylor
0.1	761	333	
0.2	728	359	
0.3	700	379	
0.4	675	394	Milne
0.5	654	404	
0.6	636	411	
0.7	622	412	
0.8	612	409	
0.9	606	400	
1.0	606	383	

- u(t = 1.5) = 10.35 °C por lo tanto el proceso será satisfactorio.

- A los tres meses 1.402 unidades, a los seis meses 2492 unidades y a los nueve meses 3340 unidades.

BIBLIOGRAFIA

Apostol Tom M.
CALCULUS, VOL. I
Segunda edición
Editorial Reverté, S.A.
España, 1972

Burden Richard., Faires Douglas J.,
Reynolds Albert C.
NUMERICAL ANALYSIS
Editorial Wadsworth International
U.S.A., 1981

Conte S.D., Boor Carl de
ANALISIS NUMERICO
Segunda edición
Editorial McGraw Hill
México, 1974

Hildebrand F.B.
INTRODUCTION TO NUMERICAL ANALYSIS
Segunda edición
Editorial Tata McGraw Hill
India, 1974

James M.L., Smith G.M., Wolford J.C.
METODOS NUMERICOS APLICADOS A LA COMPUTACION
DIGITAL CON FORTRAN
Segunda edición Corregida
Representaciones y Servicios
de Ingeniería S.A.
México, 1970

Johnston R.L.
NUMERICAL METHODS
A Software Approach
John Wiley & Son
Canada, 1982

Luthe R., Olivera A., Schutz F.
METODOS NUMERICOS
Primera edición
Editorial Limusa
México, 1978

APENDICE

Hall H.S. Knight S. R.
ALGEBRA SUPERIOR
Editorial Uthea
México, 1980

Liu C.L.
INTRODUCTION TO COMBINATORIAL MATHEMATICS
McGraw Hill Book Company
U.S.A. 1968