



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA

División de Ingeniería Mecánica y Eléctrica

**ANÁLISIS DE MECANISMOS CON PARES
INFERIORES**

FACULTAD DE INGENIERIA

2. ANALISIS DE MECANISMOS CON PARES INFERIORES



FACULTAD DE INGENIERIA

605547

INTRODUCCION

Un mecanismo es un acoplamiento de elementos que se utiliza para transmitir potencia o información, o para realizar operaciones matemáticas. Nótese que en el concepto anterior no interviene la idea de conversión de energía, inherente a las máquinas. Así, máquina y mecanismo son conceptos diferentes, aun cuando están relacionados por el hecho de que todo mecanismo es un elemento de una máquina. La idea subyacente en el concepto de mecanismo es la de transformación del movimiento. La junta universal, por ejemplo, convierte la velocidad uniforme de una flecha vertical en otra velocidad cuya magnitud cambia con el tiempo, y está inclinada con respecto a la vertical. Este mecanismo transmite la potencia de un motor a una carga. También es ejemplo de mecanismo el regulador de Watt (fig 2.1.1).

Pájaro

APUNTE 152

FACULTAD DE INGENIERIA UNAM.



605547

G.- 605547

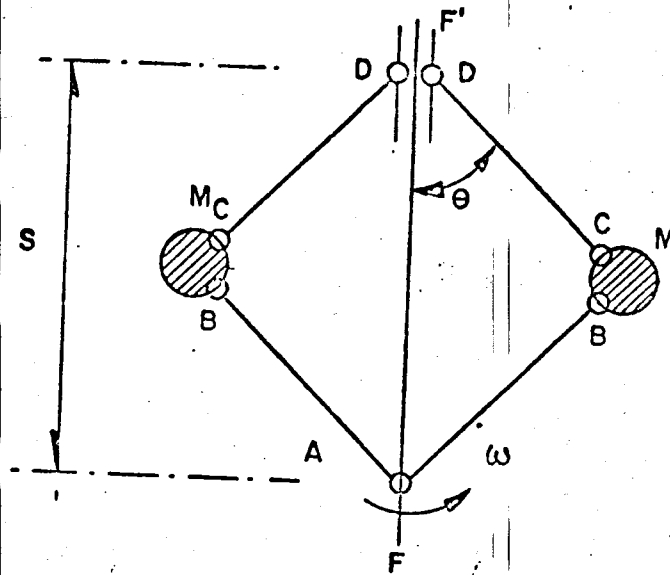


Fig 2.1.1 Regulador de Watt

G- 605547

La flecha FF' (fig 2.1.1) gira a una velocidad proporcional a la del árbol motor de una máquina de vapor cuya velocidad se desea regular, es decir, se desea que el árbol motor de esta máquina no se desvíe una cantidad apreciable de cierta velocidad nominal. Debido a la fuerza de inercia de las masas M, si la velocidad en consideración sufre un cambio considerable, el ángulo θ varía y, en consecuencia, también la distancia s. Estos cambios son proporcionales a la abertura de una válvula por la que se alimenta vapor a la máquina; de esta manera, los cambios en la velocidad nominal son suprimidos. Este mecanismo, claramente, transmite información más que potencia.

Por último, se verá que ciertos mecanismos, como el diferencial de un vehículo, ejecutan operaciones matemáticas. Un diferencial ejecuta la sustracción algebraica de las velocidades angulares de las dos secciones del eje motor de un vehículo (cuando este toma una curva ambas son diferentes).

2.1 Grado de libertad de un mecanismo de eslabones rígidos

Pares Inferiores

El grado de libertad de un acoplamiento de cuerpos rígidos es el número mínimo de variables que se requiere para especificar de manera única la configuración de este acoplamiento. El grado de libertad del mecanismo de la fig 2.I.1, por ejemplo, es 1, pues una sola variable (θ o s , pero no ambas) determina de manera única su configuración. Los mecanismos de computación que ejecutan operaciones binarias-suma, multiplicación, por ejemplo-tienen un grado de libertad doble (admiten dos entradas).

El grado de libertad de un cuerpo rígido sin restricciones es seis, pues se requieren tres coordenadas para especificar la posición de uno de sus puntos y tres ángulos para especificar su orientación. Si el cuerpo rígido se restringe a movimiento plano, su grado de libertad es tres, pues se requieren dos coordenadas para especificar la posición de uno de sus puntos y un ángulo para especificar su orientación.

En los mecanismos planos el acoplamiento entre dos eslabones rígidos elimina un doble grado de libertad del movimiento relativo entre ambos, dejando un grado de libertad simple (igual a 1) para el acoplamiento. Un eslabón puede estar -- acoplado a otros, pero el número mínimo es dos; en este caso, el eslabón se llama binario, o de orden dos. Si está acoplado a -- tres, se llama ternario, o de orden tres, y así sucesivamente. Cada acoplamiento puede ser un par de revolución o prismático -- (ref 2.8). El par de revolución, representado por R, permite rotación de un eslabón con respecto al otro, mientras que el prismático, representado por P, permite traslación de un eslabón -- con respecto al otro, en una sola dirección.

2-4

Entonces, cada par del mecanismo elimina un doble grado de libertad. Así, si el mecanismo consta de n eslabones, el grado de libertad del conjunto de eslabones antes del acoplamiento es $3(n - 1)$, pues uno de los eslabones (cualquiera) se considera fijo al observador en cuestión, ya que es de interés el movimiento relativo de los eslabones del mecanismo con respecto a uno cualquiera de estos eslabones. Siendo a el número total de pares, resulta que el grado de libertad del mecanismo, l , es

$$l = 3(n - 1) - 2a \quad (2.1.1)$$

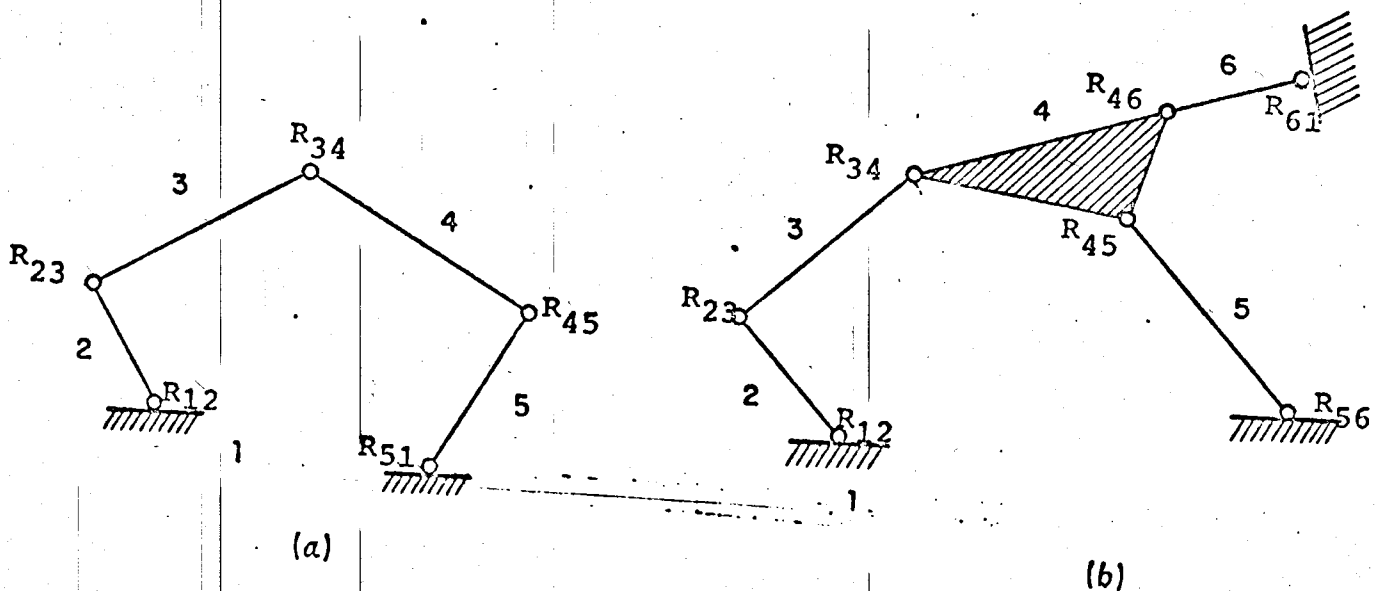
$\rightarrow = \text{eslabones.}$

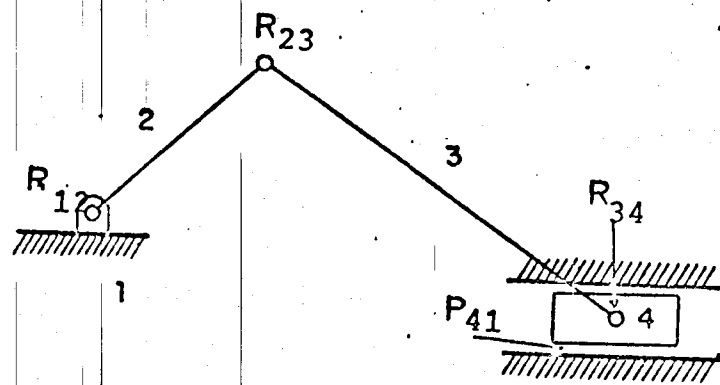
donde

$$a = \sum_{j=1}^m j a_j \quad (2.1.2)$$

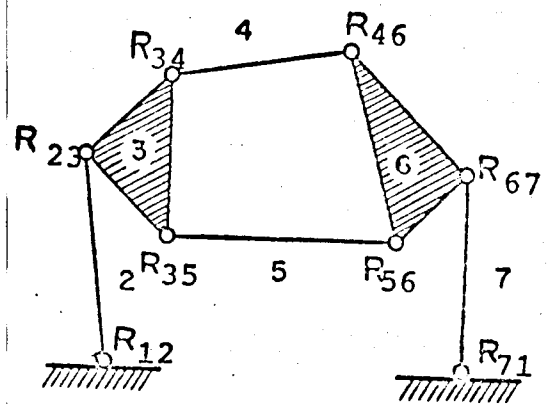
en que a_j es el número de eslabones de orden j del mecanismo. La ec 2.1.1 recibe el nombre de *fórmula de Grübler*.

Ejercicio 2.1.1 Determine el grado de libertad de los siguientes mecanismos





(c)



(d)

Fig 2.1.1 Mecanismos planos de eslabones rígidos

Todos los pares R de la fig 2.1.1 son cinemáticamente equivalentes, esto es, pueden estar físicamente contruidos de maneras muy diferentes; por ejemplo, pueden ser rodamientos de bolas, rodamientos cónicos, bujes, manguillos, etc, pero el acoplamiento entre los eslabones que unen se realiza en todos los casos de la misma forma, es decir, mediante estas articulaciones un eslabón *envuelve* a otro.* Esta característica de envolución define a la clase de pares llamada de *pares inferiores*, en contraposición con los acoplamientos que se estudiarán en el cap 4.

2.2 Análisis entrada-salida de los mecanismos de eslabones rígidos

El movimiento del eslabón mediante el cual se acciona un mecanismo recibe el nombre de *entrada* del mecanismo. Por analogía, el movimiento del eslabón mediante el cual se obtiene el movimiento transformado por el mecanismo, recibe el nombre de *salida* del mecanismo. Una y otra son desplazamientos lineales o angulares.

*Igual sucede con los pares P .

Considérese por ejemplo, el conjunto pistón-biela-cigüeñal de una máquina de combustión interna. En este caso, el mecanismo se acciona por medio del movimiento del pistón, que tiene un desplazamiento lineal, que en la fig 2.2.1 se representa por $s(t)$. Esta variable constituye la entrada de este mecanismo. Por otra parte, el movimiento que se utiliza para la locomoción se toma directamente del cigüeñal OA , cuyo movimiento está determinado por el ángulo $\theta(t)$, que constituye la salida de este mecanismo.

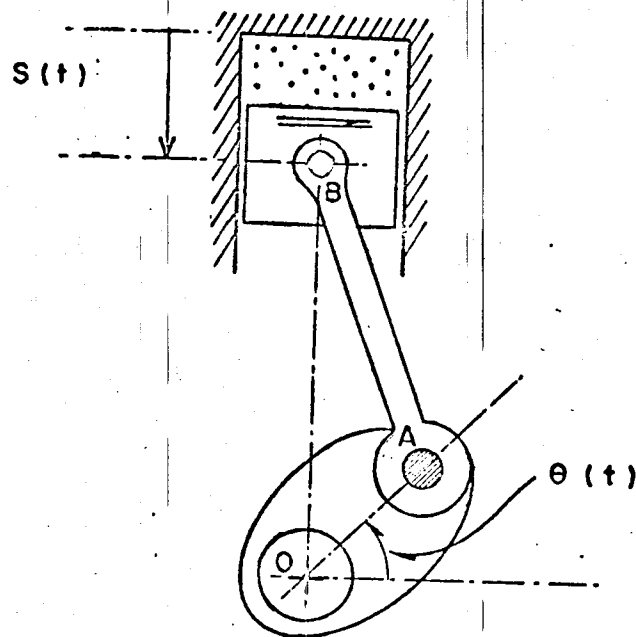


Fig 2.2.1 Mecanismo pistón-biela-cigüeñal de una máquina de combustión interna

El mecanismo mediante el cual se obtiene aire comprimido (de múltiples aplicaciones en las industrias manufacturera y de la construcción) es esencialmente el mismo de la fig 2.2.1, con la variante de que este mecanismo se acciona con el movimiento de la manivela OA , que no es otra cosa que el movimiento giratorio del árbol motor de una máquina eléctrica o térmica. En este caso, la entrada del mecanismo es el ángulo $\theta(t)$ y la salida la variable $s(t)$.

El análisis de los mecanismos consiste, entre otras cosas, en obtener una relación funcional entre la entrada y la salida *para un mecanismo dado*. Otros tipos de análisis se verán en otras secciones de este capítulo.

Resulta curioso que aun tratándose de mecanismos sencillos, como el mostrado en la fig 2.2.2, la relación funcional entre la entrada $\psi(t)$ y la salida $\phi(t)$ no es una función explícita, sino implícita, de la forma

$$F(\phi, \psi) = 0 \quad (2.2.1)$$

Para obtener un conjunto de valores de ψ para todos los valores de ϕ , se recurre a varios medios: la solución numérica (en computadora digital) de la ec 2.2.1 para todos los valores deseados de ψ , o bien, al uso de simuladores analógicos, en los que esa ecuación se simula con un diagrama de alambrado en una computadora analógica, o con simuladores analógicos que realizan el diagrama de alambrado mediante subrutinas construidas en programas para computadora digital. Un ejemplo de estos últimos es el SAS (simulador analógico en series), creado por Enrique Chicurel, investigador del Instituto de Ingeniería.

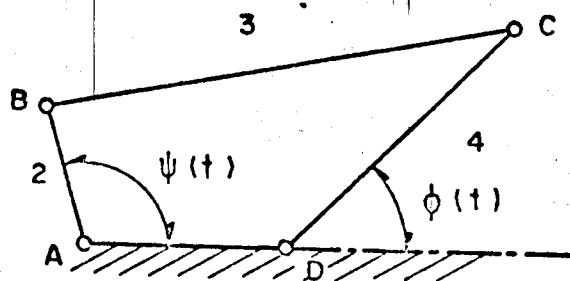


Fig 2.2.2 Mecanismo plano de cuatro eslabones

Para el análisis entrada-salida del mecanismo de la fig 2.2.2, colóquese el origen del plano complejo en el punto A y llámese b , c , d a los números complejos que representan las coordenadas de los puntos B, C y D, respectivamente. Más aún, llámese f y g a los números complejos

$$f = c - b, \quad g = d - c \quad (2.2.2)$$

Se tiene entonces la siguiente disposición de vectores (representaciones geométricas de los números complejos en consideración).

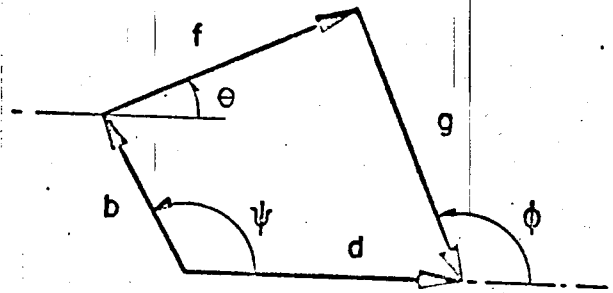


Fig 2.2.3 Vectores asociados al mecanismo de la fig 2.2.2

Así

$$b + f + g = d \quad (2.2.3)$$

donde

$$\begin{aligned} b &= a_2 e^{i\psi} \\ f &= a_3 e^{i\theta} \\ g &= a_4 e^{i(\pi + \phi)} \\ d &= a_1 e^{i0} \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

La ec 2.2.3 toma entonces la forma

$$a_2 e^{i\psi} + a_3 e^{i\theta} + a_4 e^{i(\pi + \phi)} = a_1 e^{i\theta} \quad (2.2.5)$$

donde a_i es la longitud de la i -ésima barra.

Despéjese el término que contiene a θ , que es una variable que no interesa en este análisis:

$$a_3 e^{i\theta} = a_1 e^{i\theta} - a_4 e^{i(\pi + \phi)} - a_2 e^{i\psi} \quad (2.2.6a)$$

Tomando el complejo conjugado de ambos miembros de la ec 2.2.6a, se tiene

$$a_3 e^{-i\theta} = a_1 e^{-i\theta} - a_4 e^{-i(\pi + \phi)} - a_2 e^{-i\psi} \quad (2.2.6b)$$

Multiplicando miembro a miembro las ecs 2.2.6a y b, se llega a

$$\begin{aligned} a_3^2 &= a_1^2 + a_4^2 + a_2^2 - a_1 a_4 e^{-i(\pi + \phi)} - a_1 a_2 e^{-i\psi} \\ &\quad - a_4 a_1 e^{i(\pi + \phi)} + a_4 a_2 e^{i(\pi + \phi - \psi)} - a_2 a_1 e^{i\psi} \\ &\quad + a_2 a_4 e^{i(\psi - \pi - \phi)} \\ &= a_1^2 + a_4^2 + a_2^2 - 2a_1 a_4 \operatorname{Re} [e^{i(\pi + \phi)}] \\ &\quad - 2a_1 a_2 \operatorname{Re} [e^{i\psi}] + 2a_2 a_4 \operatorname{Re} [e^{i(\pi + \phi - \psi)}] \\ &= a_1^2 + a_2^2 + a_4^2 - 2a_1 a_4 \cos(\pi + \phi) - 2a_1 a_2 \cos\psi \\ &\quad + 2a_2 a_4 \cos(\pi + \phi - \psi) \end{aligned}$$

Así,

$$a_3^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_4^2 + 2a_1a_4 \cos \phi - 2a_1a_2 \cos \psi - 2a_2a_4 \cos (\phi - \psi).$$

Llamando

$$\frac{a_3^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_4^2}{2a_2a_4} = K_1, \quad \frac{a_1}{a_2} = K_2, \quad \frac{a_1}{a_4} = K_3 \quad (2.2.6c)$$

la última ecuación se convierte en

$$K_1 - K_2 \cos \phi + K_3 \cos \psi + \cos (\phi - \psi) = 0 \quad (2.2.7)$$

que es la llamada *ecuación de Freudenstein* (ref 2.1)

La ec 2.2.7 define una función implícita de ψ , y es de la forma de la ec 2.2.1. La salida, ϕ , en términos de la entrada, ψ , se puede obtener de la ec 2.2.7 despejando $\cos \phi$. Esto se consigue desarrollando el término $\cos (\phi - \psi)$ y sustituyendo $\sin \phi$ por $\sqrt{1 - \cos^2 \phi}$, lo cual conduce a una ecuación cuadrática en $\cos \phi$ que, cuando se resuelve sustituyendo en ella los valores de ψ : $0 \leq \psi \leq 2\pi$, y se invierte el valor resultante (es decir, se obtiene el ángulo cuyo coseno es ϕ), se llega a los valores deseados de la salida, ϕ . Este proceso en realidad no es muy eficiente, pues requiere la solución de una ecuación cuadrática para cada valor de ψ comprendido en el inter

valo de interés, lo cual es claro que tiene que hacerse en una computadora digital, introduciéndose así, inevitablemente, cierto error de redondeo. Ya que el resultado obtenido está afectado por ese error, parece preferible obtener la salida, ϕ , numéricamente a partir de la ec 2.2.7, calculando el valor de ϕ que corresponde a cada valor de ψ , por medio de algún método numérico para la solución de una ecuación algebraica no lineal, como lo proponen James, Smith y Wolford (ref 2.2), que presentan un programa en Fortran IV donde, por el método de Newton-Raphson, resuelven una ecuación algebraica no lineal.

Una desventaja que tiene el programa de los autores mencionados es la siguiente: Dado que la ecuación de Freudenstein se puede transformar en una ecuación cuadrática en $\cos \phi$ (¡Compruébelo!), para cada valor de ψ hay dos valores de ϕ que la satisfacen. A esos dos valores de ϕ corresponden dos configuraciones diferentes del mecanismo, llamadas *conjugadas* (fig 2.2.4).

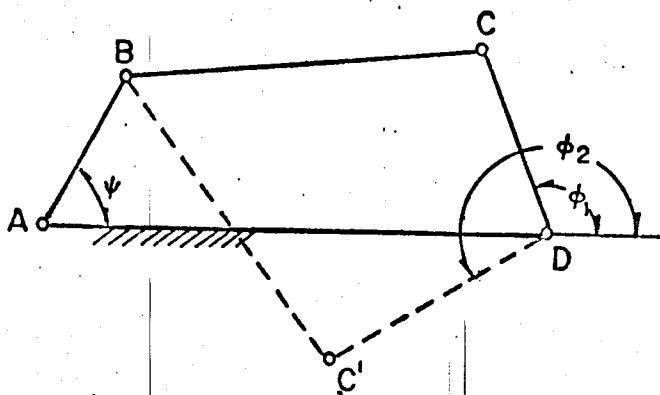


Fig 2.2.4 Configuraciones conjugadas de un mecanismo plano de cuatro eslabones

En la misma figura, para el valor dado de ψ , existen dos valores de ϕ : ϕ_1 y ϕ_2 , correspondientes a las dos configuraciones, ABCD y ABC'D, conjugadas. En ese programa todas las iteraciones de Newton-Raphson, para un conjunto de valores de ψ comprendidos entre 0 y 2π , se inician con el mismo valor. En estas condiciones, existe el peligro de que el programa comience a obtener una configuración y termine obteniendo la conjugada. Esta situación se evita en la subrutina SALIDA, elaborada por Cándido Palacios, para su tesis* de Maestro en Ciencias, de la ESIME**. En la fig 2.2.5 se presenta dicha subrutina; en la tabla 2.2.1 y en la fig 2.2.7 se muestran los resultados, numéricos y gráficos, del análisis cinemático de un mecanismo de barras articuladas con las siguientes dimensiones:

$$a_1 = 0.200 \quad a_2 = 0.080 \quad a_3 = 0.200 \quad a_4 = 0.240$$

En la subrutina SALIDA se emplea otra, la DYDX, que aparece en la fig 2.2.6, y que calcula numéricamente la derivada de una función periódica. Con esta subrutina se calcularon la velocidad y la aceleración del eslabón de salida.

Ejercicio 2.2.1. Por el método de Newton-Raphson obtenga la salida $\phi(t)$ a intervalos de $\Delta\psi = 0.01$, cuando $\psi(t) = t$, para las siguientes longitudes de las barras

$$a) \quad a_1 = a_3 = 2a_2 = a_4 = 1$$

$$b) \quad a_1 = a_2 = a_3 = 1, \quad a_4 = 2$$

* En elaboración

** Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, Instituto Politécnico Nacional

SUBROUTINE SALIDACA,PSI,PHI,OMEGA,ALFA,EPSIL,MAX,ITER,F,DF,R,H,N,
*OMEG2)

```

C ESTA SUBROUTINA CALCULA LA RESPUESTA CINEMATICA DE UN MECANISMO
C PLANO RRRR, POR EL METODO DE NEWTON-RAPHSON, APLICADO A LA ECUACION
C DE FREUDENSTEIN, PARA UNA VELOCIDAD ANGULAR CONSTANTE DEL ESABON 2.
C EN ESTE PROGRAMA ITER ES UN VECTOR QUE INDICA EL NUMERO DE
C ITERACIONES NECESARIAS PARA LLEGAR A LA CONVERGENCIA, DESPUES DE
C CADA VALOR CALCULADO DE PHI. EL VALOR CALCULADO DE PHI ES EL VALOR
C SUPUESTO INICIAL PARA LA SIGUIENTE ITERACION.
C OMEGA ES LA VELOCIDAD ANGULAR DE LA BARRA DE SALIDA 4
C EN REVOLUCIONES POR MINUTO. ESTA VELOCIDAD ANGULAR SE CALCULA
C A PARTIR DE PHI POR MEDIO DE LA SUBROUTINA DYDX.
C A(1),A(2),A(3),A(4), SON LAS LONGITUDES DE LOS ESABONES.
C 1 ES EL ESABON FIJO.
C 2 ES EL ESABON DE ENTRADA.
C 3 ES EL ESABON ACOPLADOR.
C 4 ES EL ESABON DE SALIDA.
C EL PROGRAMA FUNCIONA SI LA BARRA ACOPLADORA GIRA 360 GRADOS.
C EN CASO CONTRARIO, MANDA UN MENSAJE Y PARA.
C PSI=ANGULO DE ENTRADA.
C PHI=ANGULO DE SALIDA.
C LOS RESULTADOS SE IMPRIMEN CADA H-DECIMAS DE GRADO.
C LA RESPUESTA CINEMATICA SE CALCULA CADA DECIMA DE GRADO.
C R, ES UN VECTOR QUE INDICA LA RELACION ENTRE LAS MAGNITUDES DE LOS
C ESABONES. SUS COMPONENTES SON CONSTANTES.
C H, ES UN NUMERO DADO POR EL USUARIO QUE INDICA CUANTAS DECIMAS DE
C GRADO SE ESCRIBIRAN LOS RESULTADOS.
C N, ES EL NUMERO DE RAICES DE PHI PARA LA BARRA ACOPLADORA EN UN
C CICLO COMPLETO DE ESTA.
C DELTA, CORRESPONDE A UNA DECIMA DE GRADO DE ENTRADA EN LA BARRA DOS
C Y ES EL VALOR ARBITRARIO INICIAL PARA CADA ITERACION.
C EL VALOR INICIAL DE PHI PARA LAS ITERACIONES SIGUIENTES. A PHI(1) ES
C LA 'RAIZ' CALCULADA DE PHI ANTERIORMENTE.
C F=FREU, ES EL NUMERO DE LA FUNCION DE FREUDENSTEIN PARA EL MECANISMO
C DE CUATRO ESABONES.
C DF=DFREU, ES LA DERIVADA DE LA FUNCION DE FREUDENSTEIN CON RESPECTO
C A PHI.
C DIMENSION A(5),R(3)
C DIMENSION OMEGA(361),ALFA(361),ITER(361),PHI(361)
C
C CONDICIONES PARA QUE LA BARRA CONDUCTORA GIRE 360GRADOS.
C B=A(3)+A(4)
C IF(A(1)-A(2)) 2,1,3
C 2 IF(B-(A(1)-A(2))) 4,4,5
C 1 IF(A(3)-A(4)) 4,5,4
C 3 IF(B-(A(2)-A(1))) 4,4,5
C 4 WRITE(3,601)
C CALL EXIT
C
C CALCULO DE LOS PARAMETROS DE LA SUBROUTINA SALIDA.
C 5 R(1)=(A(3)*A(3)-A(1)*A(1)-A(2)*A(2)-A(4)*A(4))/(2.*A(2)*A(4))
C R(2)=A(1)/A(2)
C R(3)=A(1)/A(4)
C PI=4.*ATAN(1.0)
C DGSP1=2.*PI
C DELTA=PI/100.
C
C CICLO ITERATIVO DE NEWTON-RAPHSON.

```

```

DO 20 K=1,N
ITER(K)=0
IF(K-1) 7,6,7
6  PHIVI=PHI(K)
   GO TO 8
7  PHIVI=PHI(K-1)
8  F=FREU(R,PSI,PHIVI)
   DF=DFREU(R,PSI,PHIVI)
   PHI(K)=PHIVI-F/DF
9  IF(ABS(PHI(K)-PHIVI)-EPSIL) 12,12,9
   PHIVI=PHI(K)
   IF(ITER(K)-MAX) 10,10,11
10  ITER(K)=ITER(K)+1
   GO TO 8
11  WRITE(3,602)
   CALL EXIT

```

C EN LA SIGUIENTE PROPOSICION LA RUTINA DE BIBLIOTECA MODULO SE
C SE LLAMA PARA TIRAR EL NUMERO DE VUELTAS QUE SEA MULTIPLO DE DOSPI
C Y DEJAR SOLO EL RESIDUO.
C SI EL RESIDUO LLEGARA A SER NEGATIVO LE SUMAMOS DOSPI PARA TENER
C EL ANGULO MEDIDO EN SENTIDO HORARIO.

```

12  PHI(K)=AMOD(PHI(K),DOSPI)
    IF(PHI(K)) 13,14,14
13  PHI(K)=PHI(K)+DOSPI
14  IF(PSI-DOSPI) 15,20,20
15  PSI=PSI+DELTA
20  CONTINUE

```

C CALCULO DE LA VELOCIDAD ANGULAR OMEGA EN R.P.M.
CALL DYDX(DELTA,PHI,OMEGA,N,OMEG2)
C CALCULO DE LA ACELFRACION ANGULAR ALFA EN R.P.M./SEG
P=OMEG2/60.
CALL DYDX(DELTA,OMEGA,ALFA,N,P)

```

601 FORMAT(45X,'LA BARRA CONDUCTORA NO GIRA 360 GRADOS?')
602 FORMAT(///50X,'DEMASIADAS ITERACIONES?///')
RETURN
END

```

CENTRO DE SERVICIO


```

SUBROUTINE DYDX(Delta,Y,DY,N,P)
  DIMENSION Y(361),DY(361)
C  CALCULADA ES DY. P ES UN PARÁMETRO ÚTIL PARA EL USUARIO,
      M=N-1
      DO 100 I=1,N
        IP2=I+2
        IP1=I+1
        IL1=I-1
        IL2=I-2
        IF(I-2) 5,10,15
      5  IL1=N-1
        IL2=N-2
        GO TO 99
     10  IL2=N-1
     15  CONTINUE
        IF(I-M) 99,30,40
     30  IP2=2
        GO TO 99
     40  IP2=3
        IP1=2
     99  DY(I)=(-Y(IP2)+8.*Y(IP1)-8.*Y(IL1)+Y(IL2))
    100  DY(I)=P*DY(I)/(12.*DELTA)
        RETURN
      END

```

Fig 2.2.6 Listado de la Subrutina DYDX

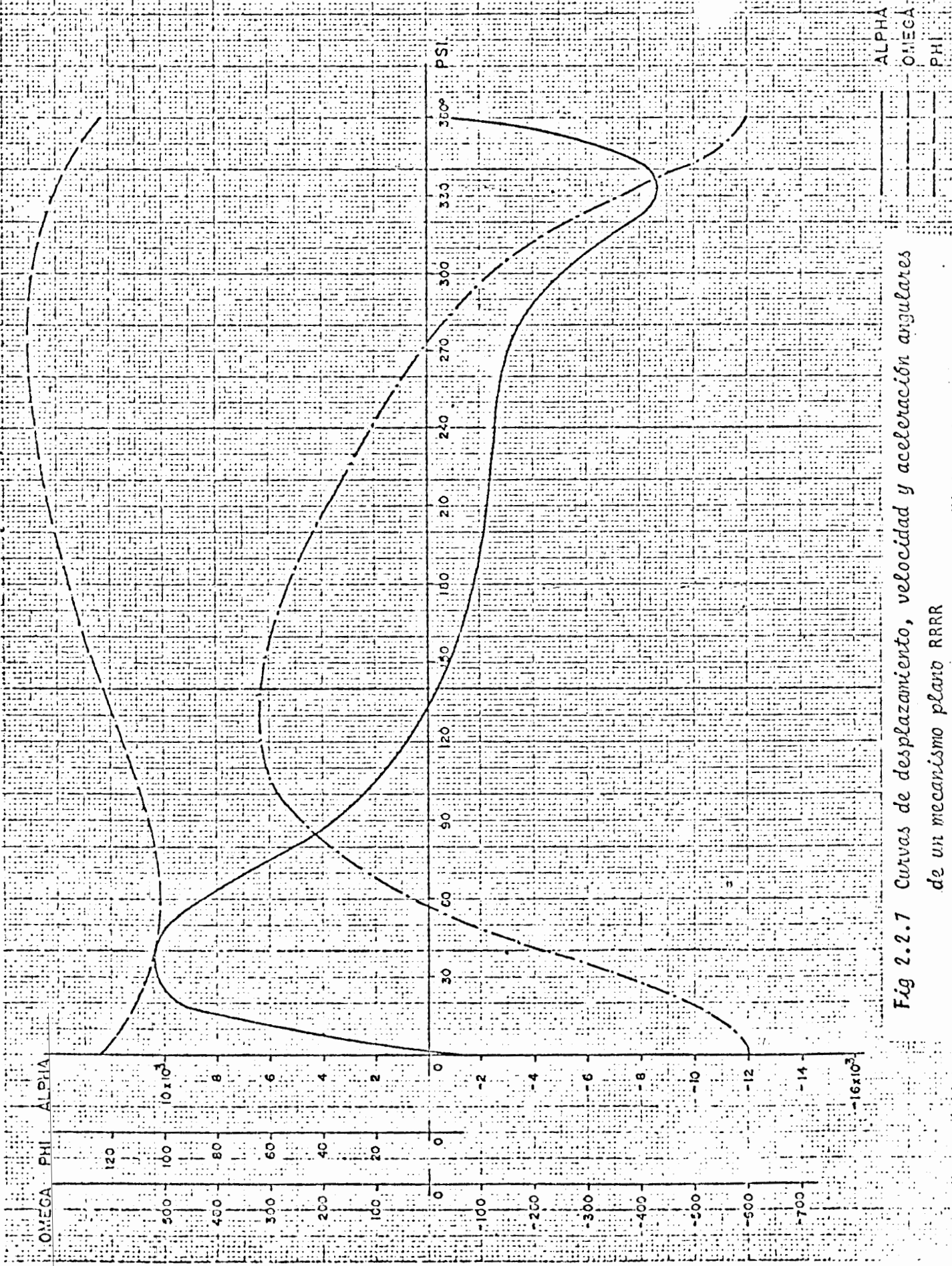


Fig 2.2.7 Curvas de desplazamiento, velocidad y aceleración angulares de un mecanismo plano RRRR

TABLA 2.2.1. RESPUESTA CINEMATICA DE UN MECANISMO PLANO RRRR*

LONGITUDES DE LAS BARRAS

A(1)	A(2)	A(3)	A(4)
200000	0.080000	0.200000	0.240000

PARAMETROS DEL PROGRAMA

PSI	PHI	EPSIL	OMEG2	N	MAX	M
.000000	1.570790	0.000001	900.	361	10	10

TER	PSI (GRADOS)	PHI (GRADOS)	OMEGA (R. P. M.)	ALFA (R.P.M.)/SEG.
3	0.	.123749E+03	-.600000E+03	-.100222E+04
2	.100000E+02	.117153E+03	-.575064E+03	.525822E+04
2	.200000E+02	.111220E+03	-.483409E+03	.100822E+05
2	.300000E+02	.106560E+03	-.351448E+03	.121350E+05
2	.400000E+02	.103444E+03	-.210119E+03	.118547E+05
1	.500000E+02	.101847E+03	-.802188E+02	.103465E+05
1	.600000E+02	.101584E+03	.292218E+02	.844919E+04
2	.700000E+02	.102415E+03	.116679E+03	.661391E+04
2	.800000E+02	.104103E+03	.184038E+03	.500720E+04
2	.900000E+02	.106441E+03	.234202E+03	.365662E+04
2	.100000E+03	.109254E+03	.270023E+03	.253560E+04
2	.110000E+03	.112397E+03	.293942E+03	.160399E+04
2	.120000E+03	.115749E+03	.307938E+03	.824503E+03
2	.130000E+03	.119209E+03	.313605E+03	.167999E+03
2	.140000E+03	.122692E+03	.312245E+03	-.385975E+03
2	.150000E+03	.126126E+03	.304967E+03	-.850624E+03
2	.160000E+03	.129451E+03	.292764E+03	-.123415E+04
2	.170000E+03	.132617E+03	.276541E+03	-.154232E+04
2	.180000E+03	.135585E+03	.257143E+03	-.178086E+04
2	.190000E+03	.138323E+03	.235338E+03	-.195753E+04
2	.200000E+03	.140808E+03	.211788E+03	-.208312E+04
2	.210000E+03	.143024E+03	.187005E+03	-.217194E+04
2	.220000E+03	.144960E+03	.161320E+03	-.224136E+04
2	.230000E+03	.146606E+03	.134844E+03	-.231129E+04
2	.240000E+03	.147953E+03	.107446E+03	-.240388E+04
2	.250000E+03	.148989E+03	.787203E+02	-.254386E+04
1	.260000E+03	.149695E+03	.479544E+02	-.275970E+04
1	.270000E+03	.150043E+03	.140742E+02	-.308536E+04
1	.280000E+03	.149991E+03	-.244294E+02	-.356188E+04
1	.290000E+03	.149476E+03	-.695827E+02	-.423648E+04
2	.300000E+03	.148411E+03	-.123959E+03	-.515293E+04
2	.310000E+03	.146676E+03	-.190477E+03	-.631836E+04
2	.320000E+03	.144124E+03	-.271550E+03	-.761787E+04
2	.330000E+03	.140589E+03	-.366773E+03	-.864789E+04
2	.340000E+03	.135948E+03	-.468416E+03	-.853484E+04
2	.350000E+03	.130229E+03	-.556354E+03	-.611615E+04
2	.360000E+03	.123749E+03	-.600000E+03	-.100222E+04

* RRRR significa cuatro articulaciones o pares de revolución

c) $a_1 = a_3 = 1, a_2 = 2, a_4 = 3$

d) $a_1 = 2, a_2 = a_3 = a_4 = 1$

e) $a_1 = a_2 = a_4 = 1, a_3 = 2$

¿Qué observa usted en sus resultados?

Ejercicio 2.2.2. Obtenga una relación entrada-salida, semejante a la ec 2.2.7, para los siguientes mecanismos.

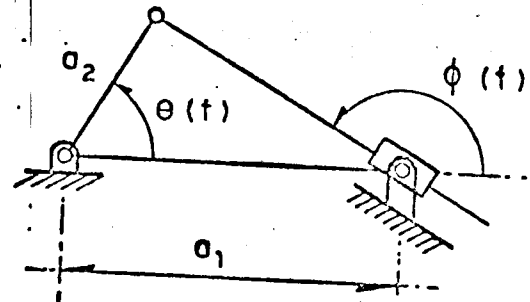
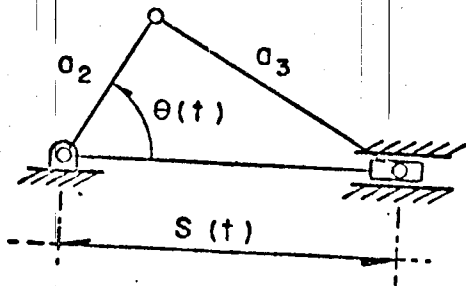


Fig 2.2.8 Mecanismos planos que contienen un "par prismático"

2.3 Uso de simuladores analógicos en el análisis de mecanismos

Una alternativa para resolver la ecuación de Freudenstein* para obtener la relación entrada-salida es utilizando simuladores analógicos. Para tener idea de lo que es un simulador, es necesario introducir un concepto preliminar, el de sistema. La palabra sistema tiene diferentes significados. Cada persona usa esta palabra para referirse a distintos objetos, pero lo que aquí se quiere dar a entender por sistema es la idea de Shigley (ref. 3): "una combinación de elementos, algunos de ellos muy elusivos (como los

* O cualquier otra ecuación semejante, como las que surgen del ejercicio 2.2.2.

canales de comunicación), arreglados de manera específica en forma tal que diferentes excitaciones o perturbaciones provocan respuestas determinadas."*

La simulación, como lo apunta Shigley, se refiere a dos sistemas -uno real y un modelo de él-, donde por sistema real ha de entenderse algo que exista físicamente, por ejemplo, una máquina de combustión interna o una refinería de petróleo. El modelo al que se hace mención puede ser diferentes cosas, ya sea otro modelo físico (por ejemplo, un circuito electrónico) o un sistema de ecuaciones (algebraicas, diferenciales ordinarias, diferenciales parciales, etc). En este segundo caso se trata de un modelo matemático. Los simuladores analógicos consisten en un modelo electrónico cuya operación está descrita por las mismas ecuaciones que el sistema real, y los elementos que los componen son amplificadores, resistencias, condensadores y bobinas, cuya interconexión se efectúa por medio de un tablero, con su alambrado correspondiente.

Un dispositivo como el descrito en el párrafo anterior se conoce también con el nombre de *computadora analógica*, porque realiza operaciones de computación por medio de analogías físicas. Otro tipo de simulador analógico es aquel que funciona formalmente de manera idéntica a la computadora analógica, pero internamente se diferencia de esta en que las operaciones las realiza no por analogías físicas, sino por medio de computación digital. En la UNAM existe el SAS (refs 2.4 y 2.5), que es el usado en estas notas.

Este simulador comprende las ventajas de la computadora analógica y de la digital, pues, además de que no se requiere tener conocimientos de programación ni de métodos numéricos para su uso, realiza las operaciones

* Desde luego esta definición no comprende a ciertos sistemas como los estocásticos.

con la rapidez de una computadora digital.

Para resolver la ecuación de Freudestein en el SAS II, derívense sus dos miembros con respecto a t , obteniendo:

$$\dot{\phi} = \frac{K_3 \cdot \text{sen } \psi + \text{sen } (\psi - \phi)}{K_2 \text{ sen } \phi + \text{sen } (\psi - \phi)} \psi \quad (2.3.1)$$

cuyo diagrama de alambrado para simulación analógica es el de la fig 2.3.1.

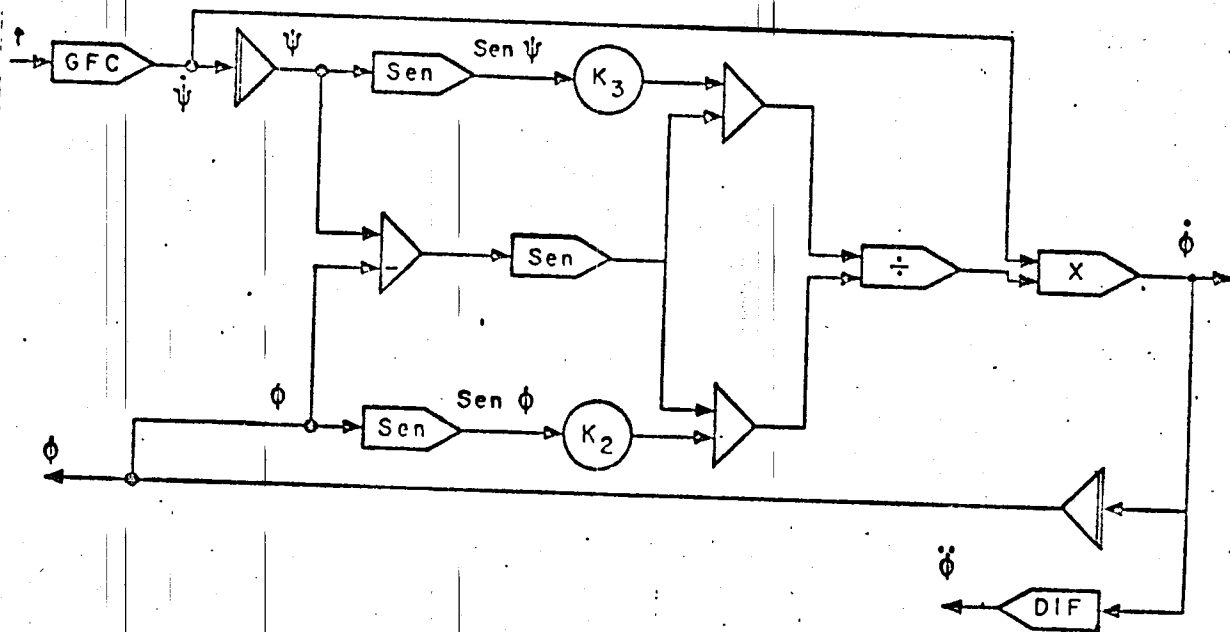


Fig 2.3.1 Realización analógica de la ec 2.3.1

Nótese que este diagrama requiere la especificación del valor inicial ψ_0 , el cual se obtiene haciendo $\phi = 0$ en la ec 2.2.7, es decir

$$\psi_0 = \cos^{-1} \frac{K_2 - K_1}{K_3 + 1}$$

* MECANISMO DE CUATRO BARRAS.

ALAMBRADO

NUM/BL	TIPO	ENT 1	ENT 2	ENT 3	ENT 4	ENT 5	ENT 6	ENT
22	TIE	0	0	0	0	0	0	0
12	SEN	22	0	0	0	0	0	0
15	SUM	22	-23	0	0	0	0	0
24	SEN	23	0	0	0	0	0	0
10	SEN	15	0	0	0	0	0	0
9	PUT	5	0	0	0	0	0	0
18	PUT	12	0	0	0	0	0	0
19	PUT	24	0	0	0	0	0	0
13	SUM	10	18	0	0	0	0	0
17	SUM	10	19	0	0	0	0	0
5	DIV	13	17	0	0	0	0	0
23	INT	9	0	0	0	0	0	0
25	DIF	20	0	0	0	0	0	0
20	PUT	9	0	0	0	0	0	0
21	PUT	23	0	0	0	0	0	0

INGENIERIA

BLOQUE NUM.

DATOS

9	1.00000000
18	0.50000000
19	0.50000000
23	0.82303369
20	0.10471976
21	57.29577951

PARAMETROS DE CONTROL

LIM=	4
CONVG=	1.00000000
TCERO=	0.00000000
INVALID=	0.01745329
NOINVALID=	1
NOINCRE=	360
MAGNITUD DEL INCREMENTO=	0.01745329

BLOQUE

R E S U L T A D O

NUM.	COEF.	NUMERICO	GRAFICO	ESCALA	ESCTIE	PUNTOS
21	0	1	1	1	0	1
20	0	1	1	2	0	1
25	0	1	1	3	0	1

Fig 2.3.2 Programa SAS II que implementa el diagrama de la fig 2.3.1

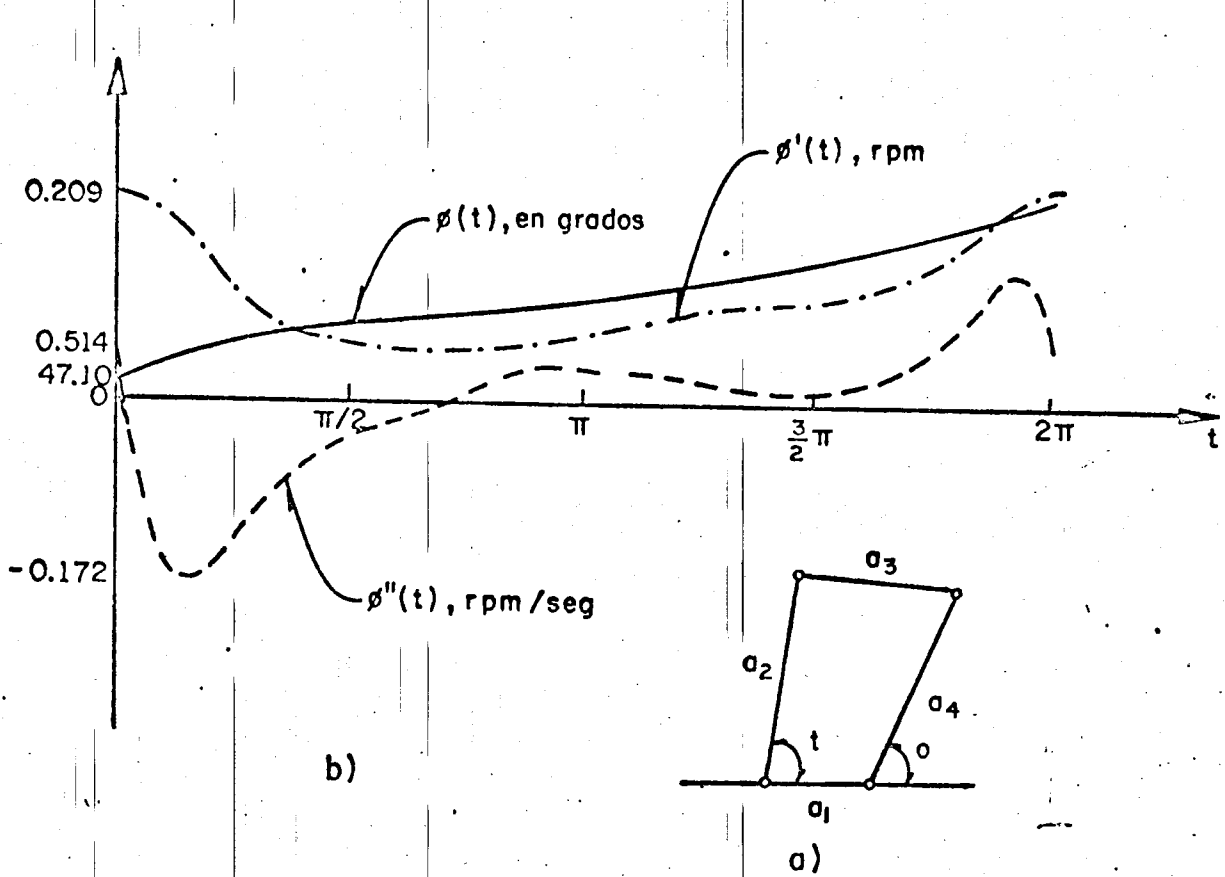


Fig 2.3.3 Curvas de desplazamiento, velocidad y aceleración angulares de un mecanismo de cuatro eslabones

En la fig 2.3.2 se muestra el programa SAS II que analiza el mecanismo para el cual

$$a_1 = 1.00$$

$$a_2 = 2.00$$

$$a_3 = 1.500 \text{ y } a_4 = 2.00$$

En la fig 2.3.3 aparecen el mecanismo y las curvas de desplazamiento, velocidad y aceleración angulares que se obtuvieron con el SAS II.

2.4 Trayectorias de los puntos de la barra acopladora

En el mecanismo de cuatro barras de la fig 2.2.2, la barra 2, con la cual se acciona el mecanismo, recibe el nombre de barra motriz o conductora, mientras que la barra 4, que es de la cual se toma la salida, recibe el nombre de barra movida o conducida. La barra 3, que acopla la conductora con la conducida, por razones obvias recibe el nombre de barra acopladora.

En múltiples aplicaciones, no es el movimiento mismo de la barra conducida lo que interesa, sino el de la barra acopladora. Por ejemplo, en el mecanismo que mueve el toldo de un automóvil convertible (fig 2.4.1 y ref 2.6), el toldo se mueve a través de la barra acopladora 6. En este caso interesa seguir el movimiento de esta barra, para lo cual se presenta a continuación un método análogo al utilizado en la obtención de la ecuación de Freudenstein.

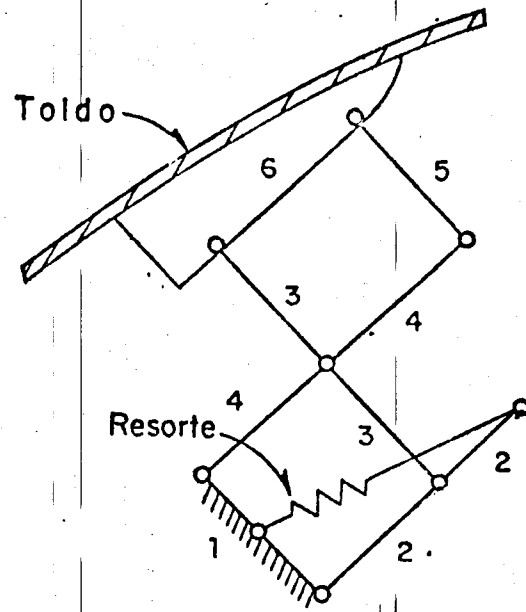


Fig 2.4.1 Mecanismo que acciona el toldo de un automóvil

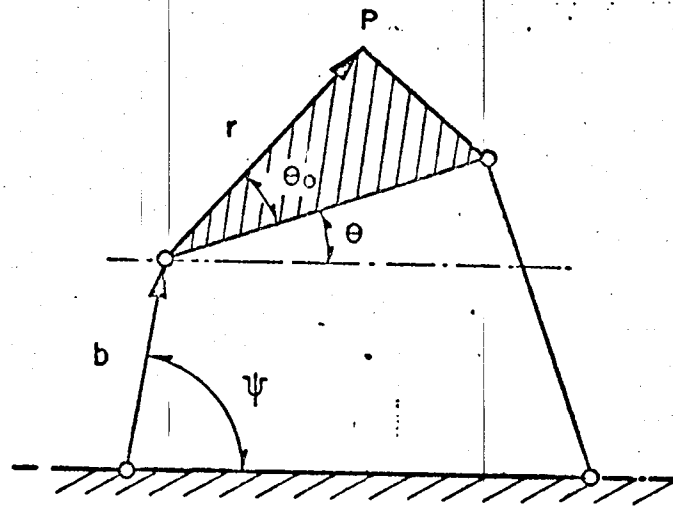


Fig 2.4.2 Localización de un punto de la barra acopladora

Haciendo referencia a la ec 2.2.5, despéjese en ella el término que contiene a ϕ (la salida, que ahora no interesa) y escríbase la ecuación que resulta al tomar el complejo conjugado de ambos miembros de la ec 2.2.5, obteniéndose:

$$a_4 e^{i(\pi + \phi)} = a_1 e^{i0} - a_2 e^{i\psi} - a_3 e^{i\theta} \quad (2.4.1a)$$

$$a_4 e^{-i(\pi + \phi)} = a_1 e^{i0} - a_2 e^{-i\psi} - a_3 e^{-i\theta} \quad (2.4.1b)$$

Multiplíquense ambas ecuaciones miembro a miembro, y redúzcase la ecuación resultante en la forma que se hizo con la ecuación de Freudenstein, obteniéndose:

$$L_1 + L_2 \cos \psi + L_3 \cos \theta - \cos(\psi - \theta) = 0 \quad (2.4.2)$$

donde

$$L_1 = \frac{a_4^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2}{2a_2a_3}, \quad L_2 = \frac{a_1}{a_3}, \quad L_3 = \frac{a_1}{a_2} \quad (2.4.2a)$$

Obsérvese que la ec 2.4.2 es formalmente idéntica a la de Freudenstein; por tanto, todo lo que se dijo referente a esta, se aplica a la ec 2.4.2. Ahora bien, supóngase que se desea obtener la trayectoria del punto P de la barra acopladora del mecanismo de la fig 2.4.2.

Llamando p al número complejo cuyos componentes son idénticos a las coordenadas de P , se tiene

$$p = b + r \quad (2.4.3)$$

donde

$$b = a_2 e^{i\psi} \quad (2.4.4a)$$

$$r = |r| e^{i(\theta + \theta_0)} \quad (2.4.4b)$$

Así, de la ec 2.4.3

$$p = a_2 e^{i\psi} + |r| e^{i(\theta + \theta_0)} \quad (2.4.5)$$

donde a_2 , $|r|$ y θ_0 son constantes y θ se obtiene de la ec 2.4.2. Nótese que la velocidad y la aceleración del punto P se pueden obtener derivando ambos miembros de la ec 2.4.5.

Con las trayectorias de diferentes puntos de la barra acopladora para diferentes mecanismos, Hrones y Nelson (ref 2.7) han construido un atlas, mediante el cual el diseño de mecanismos se reduce a una simple selección de aquel que contenga el punto cuya trayectoria satisface mejor la necesidad del diseñador. Sin embargo, en esta sección se presenta un método racional de análisis de un mecanismo, sin tener que recurrir al atlas citado.

La subrutina CURVAS (fig 2.4.3), escrita también por el ingeniero Palacios para su tesis de maestría, es útil para obtener la trayectoria de los puntos de la barra acopladora; en la tabla 2.4.1 y en la fig 2.4.4 se presentan los resultados numéricos y gráficos del programa escrito para este objeto.

SUBROUTINE CURVAS(A,PSI,THETA,MAX,EPSIL,ITER,X0,Y0,R,N,
M,DELTA,F,DF,BETA)

ESTA SUBROUTINA CALCULA LA TRAYECTORIA DE LOS PUNTOS DE LA BARRA
ACOPLADORA POR EL METODO DE NEWTON-RAPHSON, APLICADO A LA ECUACION
DE FREUDENSTEIN.
A(1), A(2), A(3), A(4) SON LAS LONGITUDES DE LOS ES LABONES.
A(5) ES LA MAGNITUD DEL VECTOR QUE VA DEL PAR R QUE FORMAN
LAS BARRAS DOS Y TRES, FORMANDO BETA GRADOS CON LA BARRA TRES,
MENTADO EN SENTIDO CONTRARIO A LAS MANECILLAS DEL RELOJ.
1 ES EL ES LABON FIJO.
2 ES EL ES LABON DE ENTRADA.
3 ES EL ES LABON ACOPLADOR
4 ES EL ES LABON DE SALIDA.
EL PROGRAMA FUNCIONA SI LA BARRA CONDUCTORA GIRA 360 GRADOS.
EN CASO CONTRARIO, MANDA UN MENSAJE Y PARA.
PSI = ANGULO DE ENTRADA.
THETA = ANGULO DE SALIDA.
BETA = ANGULO QUE FORMA EL VECTOR DE MAGNITUD A(5) CON LA BARRA
ACOPLADORA.
THETA = ANGULO QUE FORMA LA BARRA ACOPLADORA CON LA HORIZONTAL.
LOS RESULTADOS SE IMPRIMEN CADA M DECIMAS DE GRADO.
ITER ES UN VECTOR QUE CONTIENE EL NUMERO DE ITERACIONES HECHAS
PARA LLEGAR A CADA CONVERGENCIA.
R ES UN VECTOR QUE CONTIENE LA RELACION ENTRE LAS MAGNITUDES DE
LOS ES LABONES. SUS COMPONENTES SON CONSTANTES.
M ES UN NUMERO DADO POR EL USUARIO QUE INDICA CADA CUANTAS DECIMAS
DE GRADO SE ESCRIBIRAN LOS RESULTADOS.
N ES EL NUMERO DADO DE INCREMENTOS DELTA.
DELTA CORRESPONDE A UNA DECIMA DE GRADO DE ENTRADA EN LA BARRA
DOS.
X0 ES LA ABSCISA DEL PUNTO O EN UNIDADES DE LONGITUD.
Y0 ES LA ORDENADA DEL PUNTO O EN UNIDADES DE LONGITUD.
EL VALOR INICIAL DE THETA PARA LAS ITERACIONES SIGUIENTES A
THETA(1) ES EL VALOR CALCULADO DE THETA ANTERIORMENTE.
F=RFREU ES EL NOMBRE DE LA FUNCION DE FREUDENSTEIN PARA EL
MECANISMO DE CUATRO ES LABONES.
DF=DFREU ES LA DERIVADA DE LA FUNCION DE FREUDENSTEIN CON RESPECTO
A THETA.
DIMENSION A(5), THETA(3601), ITER(3601), XQ(3601), YQ(3601), R(3)
COMMON PT

LOGICAL L1, L2, L3
L1=.FALSE.
L2=.FALSE.
L3=.FALSE.

CONDICIONES PARA QUE LA BARRA CONDUCTORA GIRE 360 GRADOS.
IF(A(2).LT.A(1).AND.(A(3)+A(4)).GT.(A(1)-A(2)))L1=.TRUE.
IF(A(2).GT.A(1).AND.(A(3)+A(4)).GT.(A(2)-A(1)))L2=.TRUE.
IF((A(3)+A(4)).GT.(A(1)+A(2)))L3=.TRUE.
IF((L1.OR.L2).AND.L3) GO TO 1
IF(A(1).EQ.A(2).AND.A(3).EQ.A(4))GO TO 1
WRITE(6,301)
CALL EXIT

Fig 2.4.3 Listado de la Subrutina CURVAS

C
C

CALCULO DE LOS PARAMETROS DE ESTA SUBROUTINA.

```

1 R(1)=-((A(4)*A(4)-A(1)*A(1)-A(2)*A(2)-A(3)*A(3))/
* (2.*1(2)*A(3)))
R(2)=A(1)/A(2)
R(3)=-A(1)/A(3)
PI=4.0*ATAN(1.0)
DOSPI=2.*PI
DELTA=PI/1800.

```

C
C

CICLO ITERATIVO DE NEWTON-RAPHSON.

```

DO 8 K=1,N
  ITER(K)=0
  IF(K.EQ.1) THETA=THETA(K)
  IF(K.NE.1) THETA=THETA(K-1)
2 F=FREU(R,PSI,THETA)
  DF=DFREU(R,PSI,THETA)
  THETA(K)=THETA-F/DF
3 IF(ABS(THETA(K)-THETA)-EPSIL)3,3,4
  IF(ABS(R(1)-R(2)*COS(THETA(K))+R(3)*COS(PSI)+
* COS(PSI-THETA(K)))-EPSIL)7,7,4
4 THETA=THETA(K)
5 IF(ITER(K)-MAX)5,5,6
  ITER(K)=ITER(K)+1
6 WRITE(6,602)
  CALL EXIT

```

C
C
C
C

EN LA SIGUIENTE PROPOSICION LA ROUTINA DE BIBLIOTECA MODULO SE LLAMA PARA EVITAR ANGULOS MAYORES DE 360 GRADOS. SI EL RESIDUO LLEGARA A SER NEGATIVO SE LE SUMA DOSPI PARA TENER UN ANGULO POSITIVO.

```

7 THETA(K)=AMOD(THETA(K),DOSPI)
  IF(THETA(K).LT.0.) THETA(K)=THETA(K)+DOSPI

```

C
C
C
C

CALCULO DE LAS COORDENADAS DEL PUNTO Q CON ORIGEN EN LA UNION DE LA BARRA FIJA Y LA MANIVELA. EL EJE HORIZONTAL HACIA LA DERECHA Y EL EJE VERTICAL HACIA ARRIBA COMO POSITIVOS.

```

XQ(K)=A(2)*COS(PSI)+A(5)*COS(THETA(K)+BETA)
YQ(K)=A(2)*SIN(PSI)+A(5)*SIN(THETA(K)+BETA)
PSI=PSI+DELTA
8 CONTINUE

```

C

```

501 FORMAT(45X,'LA BARRA CONDUCTORA NO GIRA 360 GRADOS')
602 FORMAT(//50X,'DEMASIADAS ITERACIONES'//)
RETURN
END

```

Fig 2.4.3 Listado de la subrutina CURVAS (CONTINUACION)

TABLA 2.4.1 TRAYECTORIA DE UN PUNTO DE LA BARRA ACOPLADORA DE UN MECANISMO PLANO R-R-R-R

LONGITUDES DE LAS BARRAS

A(1) A(2) A(3) A(4) A(5) DELTA
 0.200000 0.090000 0.200000 0.240000 0.215600 0.523600

PARAMETROS DEL PROGRAMA

PSI THETA EPSIL N MAX M
 0.000000 1.570790 0.000001 3601 10 100

ITER	PSI (GRADOS)	THETA (GRADOS)	X0 (UNIDADES DE LONGITUD)	Y0 (UNIDADES DE LONGITUD)
2	0.	.939224E+02	-.400031E-01	.179113E+00
1	.100000E+02	.866490E+02	-.179203E-01	.206587E+00
1	.200000E+02	.790602E+02	.476862E-02	.231142E+00
1	.300000E+02	.719465E+02	.250211E-01	.251008E+00
1	.400000E+02	.655060E+02	.405966E-01	.266023E+00
1	.500000E+02	.602225E+02	.505520E-01	.276832E+00
1	.600000E+02	.560112E+02	.549972E-01	.284360E+00
1	.700000E+02	.527550E+02	.545479E-01	.289055E+00
1	.800000E+02	.503450E+02	.500478E-01	.291331E+00
1	.900000E+02	.486714E+02	.423507E-01	.291400E+00
1	.100000E+03	.476424E+02	.322482E-01	.289390E+00
1	.110000E+03	.471392E+02	.204437E-01	.285409E+00
1	.120000E+03	.472594E+02	.754743E-02	.279574E+00
1	.130000E+03	.478161E+02	-.592031E-02	.272027E+00
1	.140000E+03	.488325E+02	-.195259E-01	.262941E+00
1	.150000E+03	.502670E+02	-.329109E-01	.252510E+00
1	.160000E+03	.521061E+02	-.457822E-01	.240950E+00
1	.170000E+03	.544505E+02	-.579350E-01	.228481E+00
1	.180000E+03	.571217E+02	-.691738E-01	.215328E+00
1	.190000E+03	.601354E+02	-.793713E-01	.201707E+00
1	.200000E+03	.635230E+02	-.884232E-01	.187831E+00
1	.210000E+03	.671361E+02	-.962522E-01	.173906E+00
1	.220000E+03	.711003E+02	-.102723E+00	.160143E+00
1	.230000E+03	.752132E+02	-.107999E+00	.146761E+00
1	.240000E+03	.794637E+02	-.111840E+00	.133997E+00
1	.250000E+03	.837813E+02	-.114302E+00	.122118E+00
1	.260000E+03	.880340E+02	-.115389E+00	.111430E+00
1	.270000E+03	.922744E+02	-.115125E+00	.102290E+00
1	.280000E+03	.962344E+02	-.113547E+00	.951195E-01
1	.290000E+03	.999173E+02	-.110698E+00	.904246E-01
1	.300000E+03	.102634E+03	-.106522E+00	.868137E-01
1	.310000E+03	.105050E+03	-.101138E+00	.910117E-01
1	.320000E+03	.106186E+03	-.942918E-01	.978407E-01
1	.330000E+03	.105875E+03	-.854306E-01	.110106E+00
1	.340000E+03	.103734E+03	-.740172E-01	.128282E+00
1	.350000E+03	.997254E+02	-.590072E-01	.151929E+00
1	.360000E+03	.938224E+02	-.400031E-01	.179113E+00

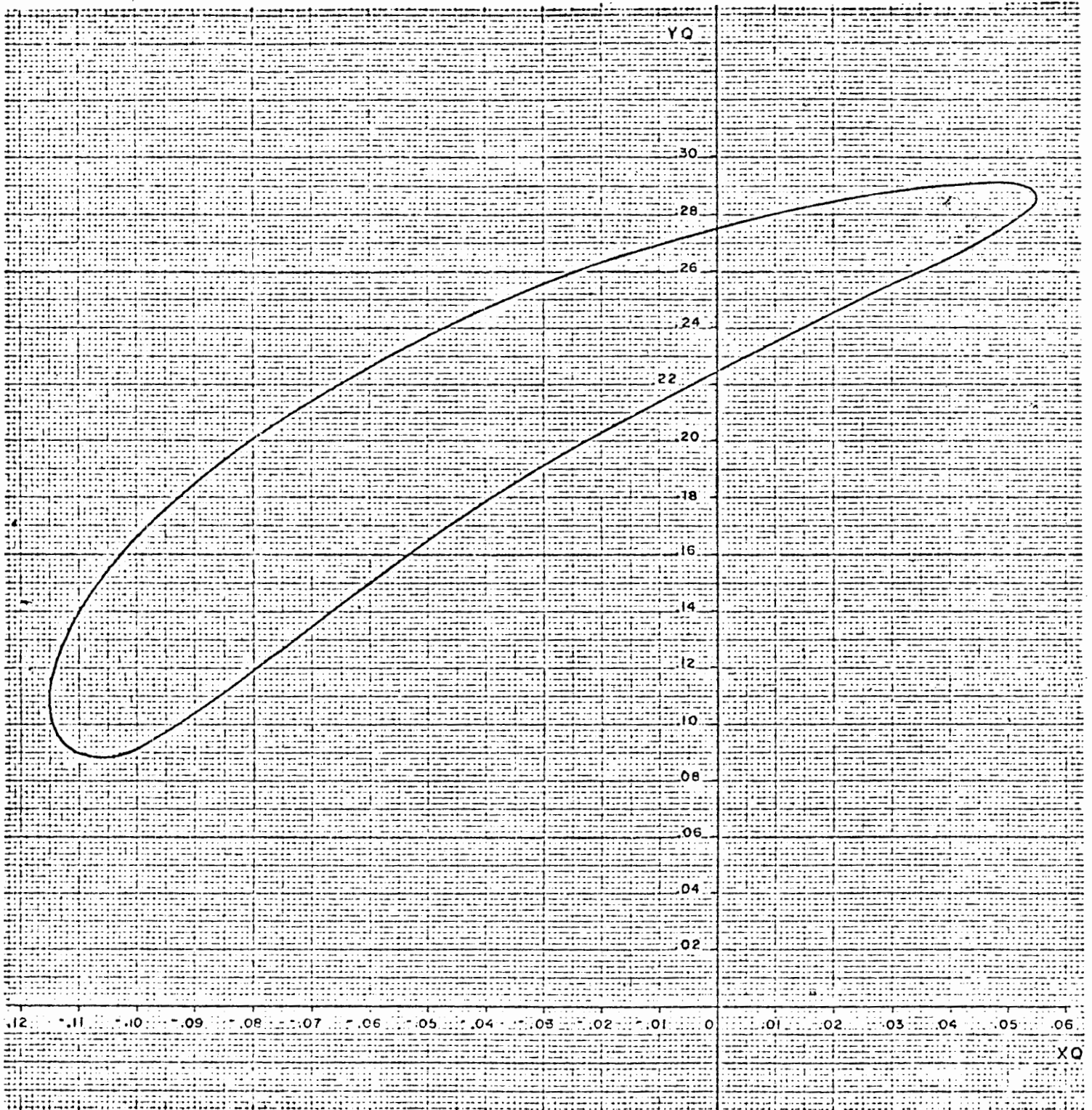


Fig 2.4.4 Trayectoria de un punto de la barra acopladora de un mecanismo plano de cuatro eslabones

El mecanismo analizado es el mismo de la sec 2.2 y el punto cuya trayectoria se obtuvo es el localizado a una distancia de 0.2156 (unidades de longitud) de la articulación entre los eslabones 2 y 3, formando su vector de posición (con respecto a esa articulación) un ángulo de 30° con la barra acopladora.

2.5 Sobre la movilidad de los mecanismos de barras articuladas

En esta sección se presentan algunos resultados relativos a las condiciones de movilidad de los mecanismos en estudio.

Teorema. La configuración de un mecanismo en que la barra acopladora está alineada con la barra conductora (conducida) corresponde a un valor mínimo (máximo) del ángulo de salida (entrada).

Demostración

Considérese el mecanismo mostrado en la fig 2.5.1:

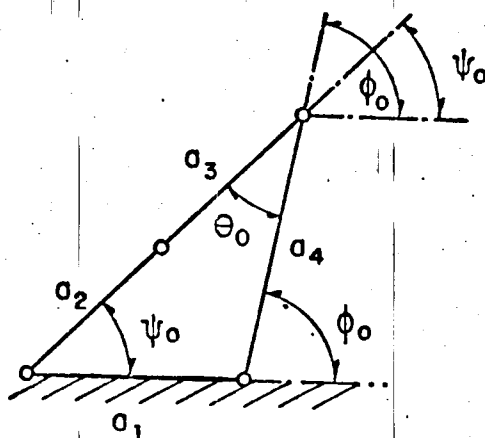


Fig 2.5.1 Configuración de un mecanismo plano correspondiente a un valor mínimo del ángulo de salida

De la ec 2.3.1

$$\dot{\phi} = \frac{K_3 \operatorname{sen} \psi + \operatorname{sen} (\psi - \phi)}{K_2 \operatorname{sen} \phi + \operatorname{sen} (\psi - \phi)} \dot{\psi}$$

Llámesse N al numerador del coeficiente de $\dot{\psi}$. De la fig 2.5.1:

$$\theta_0 = \phi_0 - \psi_0$$

Así, para la configuración mostrada

$$N_0 = K_3 \operatorname{sen} \psi_0 - \operatorname{sen} \theta_0$$

Además, de la misma figura

$$\frac{\operatorname{sen} \theta_0}{a_1} = \frac{\operatorname{sen} \psi_0}{a_4}$$

de donde

$$\operatorname{sen} \theta_0 = \frac{a_1}{a_4} \operatorname{sen} \psi_0 = K_3 \operatorname{sen} \psi_0$$

y así

$$N_0 = 0$$

de donde

$$\dot{\phi}_0 = 0$$

q.e.d.

Ejercicio 2.5.1. Demuestre el teorema anterior cambiando "conducida" por "conductora", "mínimo" por "máximo" y "salida por "entrada".

Ahora se estudian las condiciones para que los eslabones de entrada y de salida de un mecanismo RRRR giren una revolución completa.

Sea el mecanismo mostrado en la fig 2.5.2.

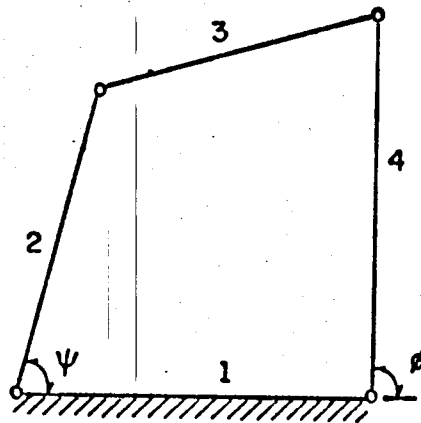


Fig 2.5.2 Mecanismo RRRR plano

Supóngase que $a_2 > a_1$, y $a_4 > a_1$, entonces:

- ¿) Para que ϕ adquiera el valor cero, se debe tener la configuración de la fig 2.5.3, en la que se observa la relación

$$a_4 + a_1 < a_2 + a_3$$

o bien

$$a_4 < a_3 + (a_2 - a_1) \quad (2.5.1)$$

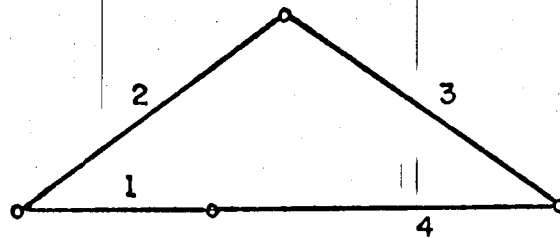


Fig 2.5.3 Configuración para $\phi = 0$

En la fig 2.5.4 se representa la relación 2.5.1 en el plano $a_3 - a_4$, donde la zona achurada representa el conjunto de puntos en los que se satisface dicha relación.

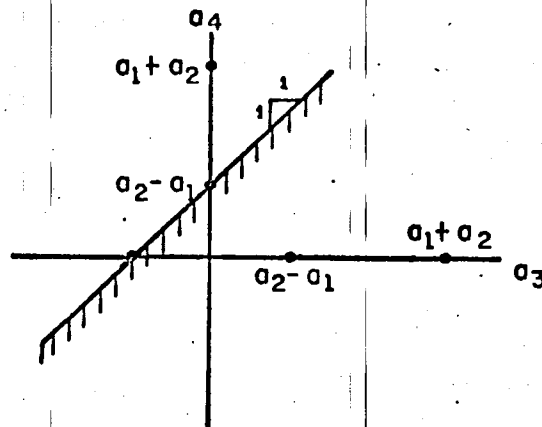


Fig 2.5.4 Representación geométrica de la relación 2.5.1

- ii) Para que ϕ adquiera el valor π debe ser posible la configuración de la figura 2.5.5

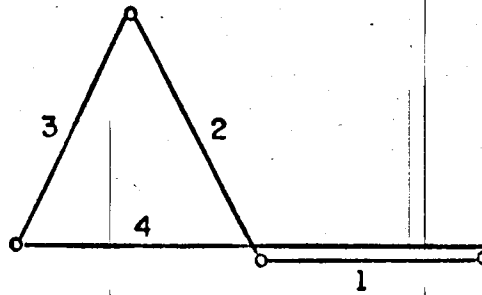


Fig 2.5.5 Configuración para $\phi = \pi$

De esa figura, se tiene la siguiente relación:

$$a_3 < a_2 + (a_4 - a_1)$$

o bien

$$a_4 > a_3 - (a_2 - a_1) \quad (2.5.2)$$

La relación 2.5.2 se representa gráficamente en la fig 2.5.6.

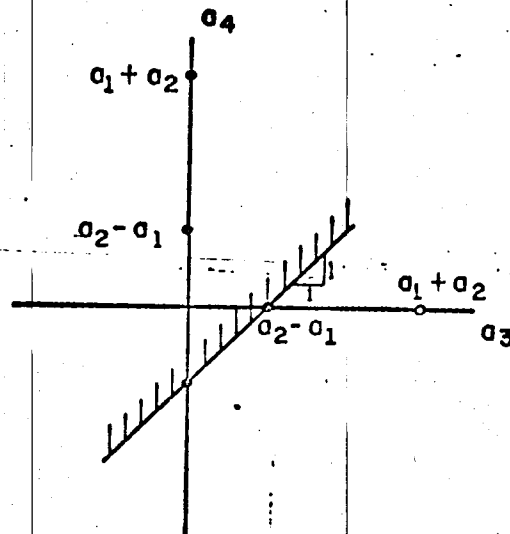


Fig 2.5.6 Representación geométrica de la relación 2.5.2

iii) Para que ψ sea nulo debe ser posible la configuración de la figura 2.5.7

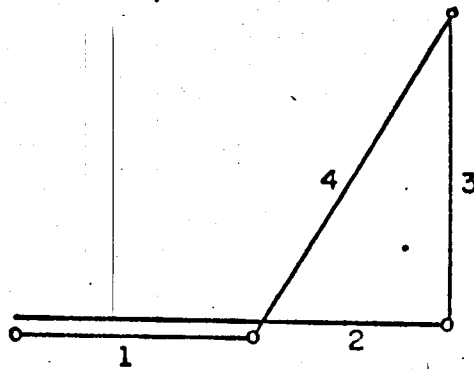


Fig 2.5.7 Configuración para $\psi = 0$

de la que

$$a_3 + a_4 > a_2 - a_1$$

o bien

$$a_4 > -a_3 + (a_2 - a_1) \quad (2.5.3)$$

la cual se ilustra en la fig 2.5.8

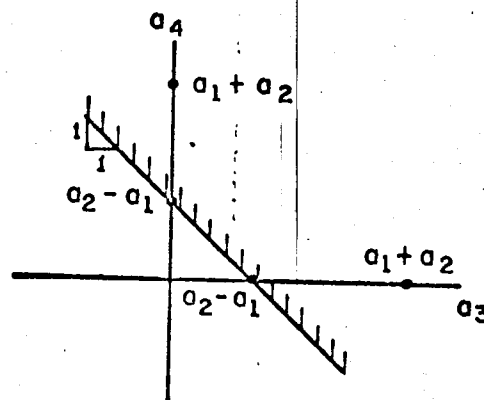


Fig 2.5.8 Representación geométrica de la relación 2.5.3

lv) Para que ψ adquiera el valor π debe ser posible la configuración que se muestra en la fig 2.5.9

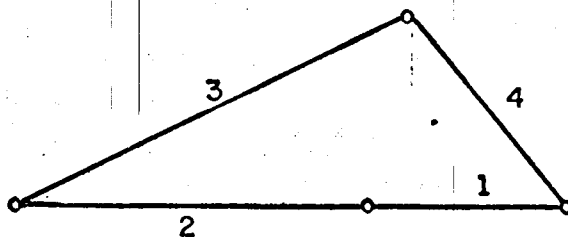


Fig 2.5.9 Configuración para $\psi = \pi$

De dicha figura

$$a_1 + a_2 < a_3 + a_4$$

o bien

$$a_4 > -a_3 + (a_1 + a_2) \quad (2.5.4)$$

que se representa gráficamente en la fig 2.5.10

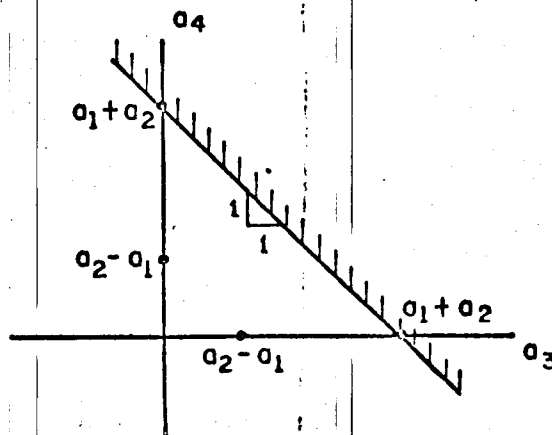


Fig 2.5.10 Representación geométrica de la relación 2.5.4

Finalmente, la región en la que se satisfacen simultáneamente las relaciones 2.5.1 a 2.5.4 es la intersección (fig 2.5.11) de las zonas achuradas de las figs 2.5.4, 2.5.6, 2.5.8 y 2.5.10.

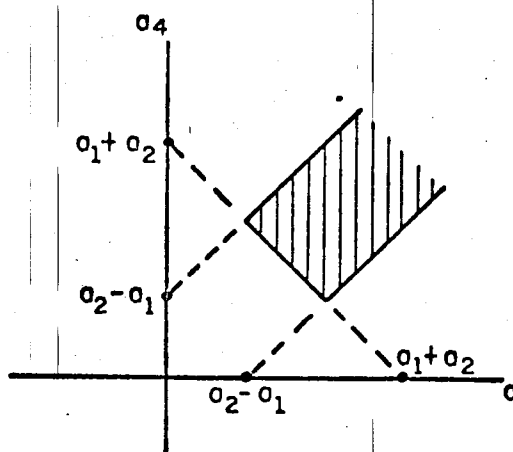


Fig 2.5.11 Condición de movilidad para que las barras de entrada y salida giren 360° , en el plano $a_3 - a_4$.

Otras condiciones de movilidad se pueden encontrar en la ref 2.9.

Ejercicio 2.5.2. Demuestre que las configuraciones de las figs 2.5.5 y 2.5.6 evitan que $\phi = \pi$ y $\psi = 0$ sean estacionarias.

Sugerencia: Demuestre que, para estas configuraciones, el numerador del coeficiente de ψ en la ec 2.5.1 no se anula.

2.6 Análisis gráfico de mecanismos con pares inferiores

En esta sección es necesario recurrir a los siguientes teoremas que se basan en el cap 1:

Teorema 2.6.1. La velocidad de un punto A de un cuerpo rígido, que gira alrededor de un punto fijo O, en movimiento plano, tiene una representación compleja tal que está dirigido a $+\operatorname{sgn}(\dot{\theta})\frac{\pi}{2}$ rad* del vector dirigido de O a A.

Demostración:

De la sección 1.11 el vector de posición de un punto A de un cuerpo rígido que gira alrededor de O es, después de un giro de $+\theta$,

$$a_2 = e^{i\theta} a_1 \quad (2.6.1)$$

donde a_1 y a_2 son vectores de posición del punto A en las configuraciones original y desplazada, respectivamente (fig 2.6.1).

Derivando ambos miembros de la ec 2.6.1 con respecto a t:

$$\dot{a}_2 = v_A = i e^{i\theta} a_1 \dot{\theta} \quad (2.6.2a)$$

De la ec 2.6.1

$$a_1 = e^{-i\theta} a_2 \quad (2.6.2b)$$

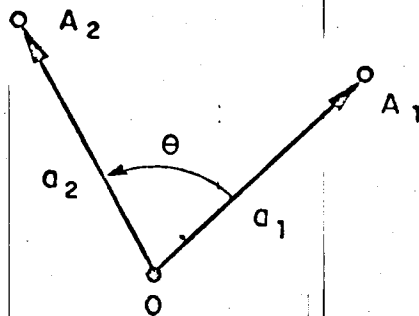


Fig 2.6.1 Rotación de un vector en movimiento plano

$$* \operatorname{Sgn}(x) = \begin{cases} +1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

Sustituyendo la ec 2.6.1 en la 2.6.2a

$$v_A = ia_2\dot{\theta} = e^{i\pi/2} a_2\dot{\theta} \quad (2.6.3)$$

de donde

$$\arg(v_A) - \arg(a_2) \equiv \arg\frac{v_A}{a_2} = \frac{\pi}{2}$$

Ejercicio 2.6.1. Complete la demostración del teorema 2.6.1.

Teorema 2.6.2. La aceleración normal de un punto A de un cuerpo rígido que gira alrededor de un punto O es un vector paralelo a la línea OA y está dirigido de A a O.

Demostración:

Derívese la ec 2.6.3 con respecto a t:

$$\dot{v}_A = a_A = iv_A\dot{\theta} + ia_2\ddot{\theta} = -a_2\dot{\theta}^2 + ia_2\ddot{\theta} \quad (2.6.4)$$

La aceleración normal es el término $-a_2\dot{\theta}^2$, como ya se discutió en la sec 1.11. Este término es el vector a_2 multiplicado por un real negativo; así se completa la demostración de este teorema.

Corolario 2.6.1. La aceleración tangencial forma un ángulo de $+\operatorname{sgn}(\ddot{\theta})\frac{\pi}{2}$ con el vector que une los puntos O y A.

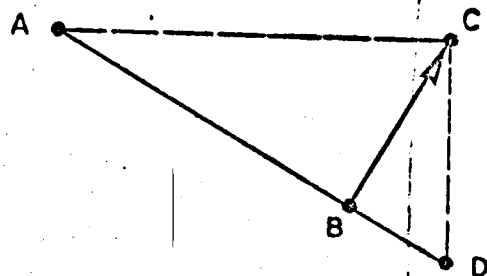
Ejercicio 2.6.2. Demuestre el corolario 2.6.1.

Teorema 2.6.3. Si A y B son dos puntos de un cuerpo rígido animado de una velocidad angular $\dot{\theta}$, la velocidad relativa de B con respecto a A está orientada

tada a $+\operatorname{sgn}(\dot{\theta})\frac{\pi}{2}$ del vector \vec{AB} .

Teorema 2.6.4. La aceleración normal relativa de B con respecto a A (donde A y B son puntos de un cuerpo rígido) es un vector orientado de B a A.

Corolario 2.6.2. La aceleración normal de B con respecto a A tiene una magnitud igual al segmento \overline{BD} de la fig 2.6.2, donde \vec{BC} es el vector de velocidad de B con respecto a A. Evidentemente, la escala de aceleración depende de las escalas geométrica y de velocidad.



$$\angle ACD = \frac{\pi}{2}$$

Fig 2.6.2 Aceleración normal relativa entre dos puntos de un mismo cuerpo rígido

Ejercicio 2.6.3. Demuestre el corolario 2.6.2.

Teorema 2.6.5. La aceleración tangencial de B con respecto a A es un vector orientado a $+\operatorname{sgn}(\ddot{\theta})\frac{\pi}{2}$ de la línea AB y tiene una magnitud de $|\vec{AB}|\ddot{\theta}$.

Los teoremas 2.6.3 a 2.6.5 son consecuencia inmediata de lo expuesto en el cap 1, por lo que sus demostraciones quedan como ejercicio.

Con estos antecedentes ya se puede proceder al análisis gráfico de mecanismos. Este método de análisis se ilustra con un ejemplo.

Ejemplo 2.6.1. Análisis cinemático de un mecanismo de 4 barras articuladas.

Considérese el mecanismo de la fig 2.6.3 con $\dot{\theta}_2, \ddot{\theta}_2$ como datos. Determinéense $\dot{\theta}_4, \ddot{\theta}_4$.

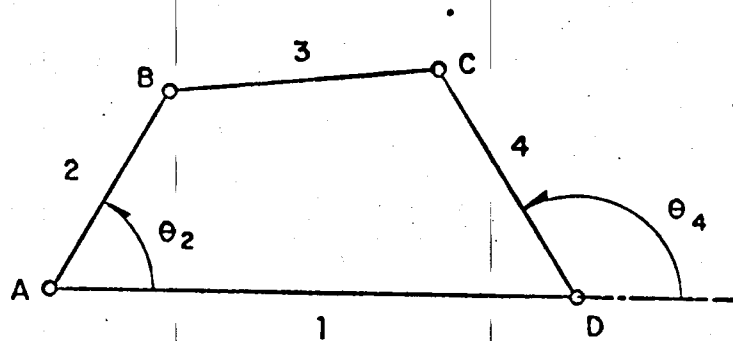


Fig 2.6.3 Mecanismo plano de cuatro barras articuladas

- 1) Trácese \vec{v}_B a escala. La dirección de este vector está dada por el teorema 2.6.1.

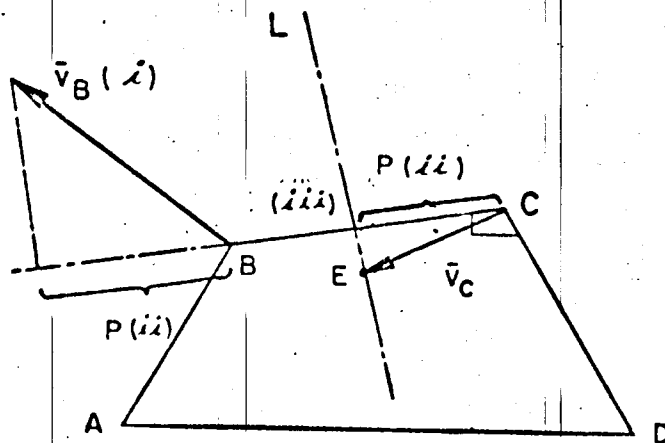


Fig 2.6.4 Determinación de la velocidad de la barra de salida

- ii) Mídase la proyección de \bar{v}_B sobre BC. Esta es la proyección de \bar{v}_C sobre BC, según el teorema 1.10.1
- iii) Como C es un punto de la barra 4, \bar{v}_C es normal a CD. Trácese, entonces, una perpendicular a CD y llámese E a su intersección con la línea L. \bar{CE} es la velocidad de C.
- iv) $\theta_4 = \frac{||\bar{v}_C||}{l_4}$, $l_4 \equiv$ longitud de la barra 4

Análisis de aceleración

- v) Conociendo \bar{v}_B determine \bar{a}_B^N usando el corolario 2.5.2.

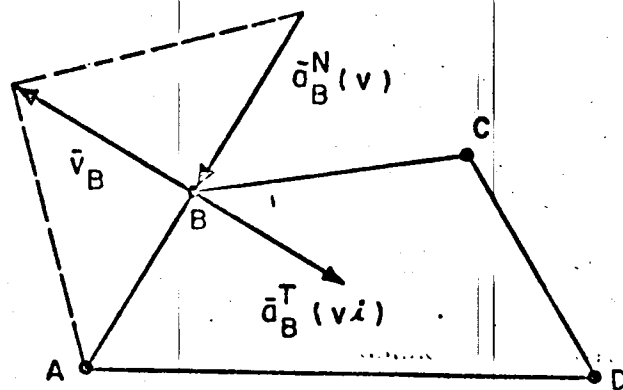


Fig 2.6.5 Determinación de la aceleración normal del punto B

- vi) Determinése ahora la aceleración tangencial \bar{a}_B^T , usando el teorema 2.6.5.

De la ec 1.7.7, por una parte

$$\bar{a}_C = \bar{a}_B + \bar{a}_{C/B}^N + \bar{a}_{C/B}^T \quad (2.6.5)$$

y por otra

$$\bar{a}_C = \bar{a}_C^N + \bar{a}_C^T \quad (2.6.6)$$

vii) De los incisos v y vi, determínese \bar{a}_B .

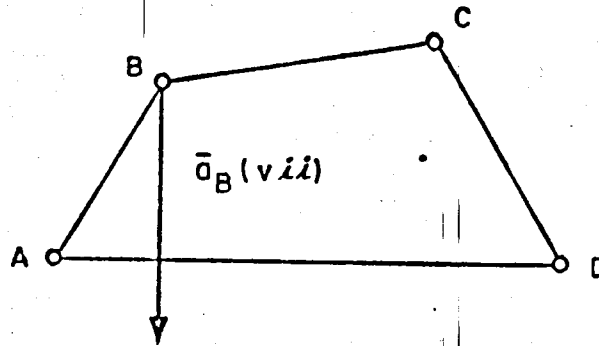


Fig 2.6.6 Aceleración total del punto B

viii) Conociendo \bar{v}_B y \bar{v}_C , determínese $\bar{v}_{C/B}$ y, del teorema 2.6.4, determínese $\bar{a}_{C/B}^N$.

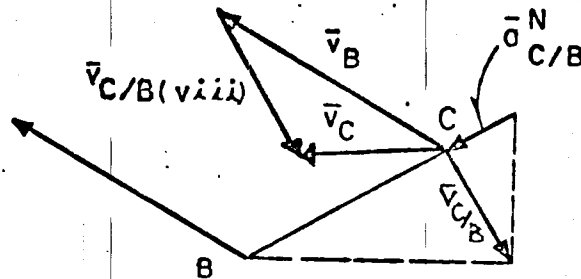


Fig 2.6.7 Aceleración normal de C con respecto a B

Hasta aquí se conocen los dos primeros términos de la ec 2.6.5.

Del tercer término únicamente se sabe que es normal a $\bar{a}_{C/B}^N$, por lo que se conoce el lugar geométrico de la punta del vector $\bar{a}_{C/B}^T$ (fig 2.6.8).

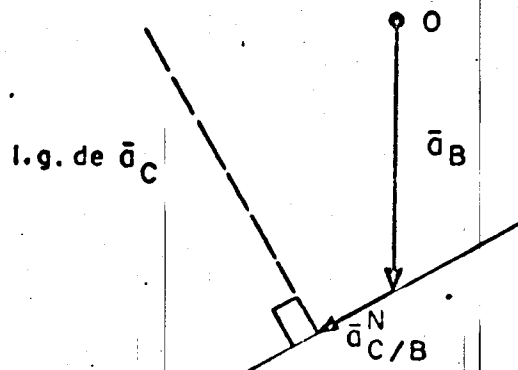


Fig 2.6.8 Lugar geométrico del extremo del vector de aceleración del punto C

ix) Ahora, del teorema 2.6.4, determínese el primer término del miembro derecho de la ec 2.6.6.

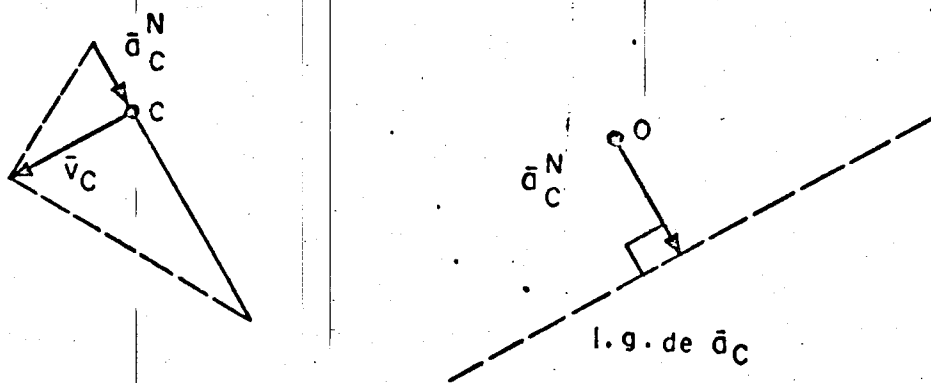


Fig 2.6.9 Determinación de la aceleración normal del punto C

De \bar{a}_C^T se conoce su dirección (fig 2.6.9b), por lo que se conoce el lugar geométrico de la punta del vector \bar{a}_C . Superponiendo las figs 2.6.8 y 2.6.9b de manera que coincidan los puntos O, se obtiene la punta de \bar{a}_C como la intersección de ambos lugares geométricos (punto P)

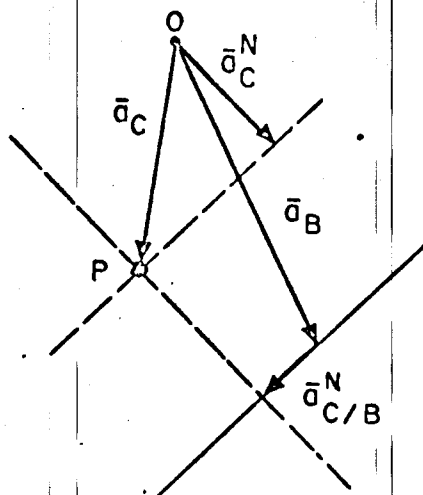


Fig 2.6.10 Aceleración total del punto C

x) De la fig 2.6.10 mídase \bar{a}_C^T y determínese $|\ddot{\theta}_4|$ como

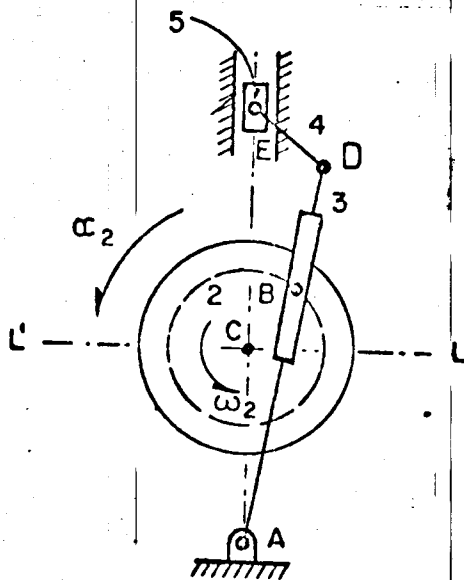
$$|\ddot{\theta}_4| = \frac{||\bar{a}_C^T||}{l_4}$$

El signo de $\ddot{\theta}_4$ se determina por inspección, como en el caso de $\dot{\theta}_4$.

En este ejemplo, $\ddot{\theta}_4$ resulta positiva.

Ejemplo 2.6.2. Análisis cinemático de un mecanismo de 5 barras articuladas.

Considérese el mecanismo de la fig 2.6.11, de 5 barras articuladas. Aplicándole la ecuación de Grübler y notando que el par 3-2 suprime un grado de libertad simple (igual en 1), se obtiene que este mecanismo es de libertad igual a uno. Obténganse la velocidad y la aceleración de la corredera 5, en términos de ω_2 y α_2 .



Datos :

$$\omega_2 \leftarrow \alpha_2$$

Incógnitas :

$$v_5, \alpha_5$$

Fig 2.6.11 Mecanismo de cinco eslabones articulados

Algoritmo:

- i) Con ω_2 conocida, determínese \vec{v}_{B2} , o sea la velocidad del punto B de la rueda (fig 2.6.12).

Fig 2.6.13 Lugar geométrico de la velocidad del punto B del cuerpo 3

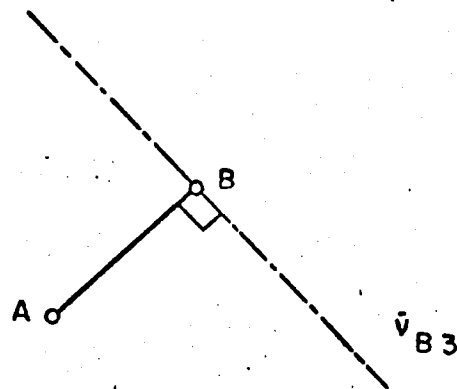
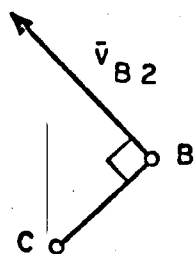


Fig 2.6.12 Velocidad del punto B del cuerpo 2

- ii) Sabiendo que C_{13}^* es A, se conoce la dirección de \bar{v}_{B3} , que es la velocidad de B como punto de la manivela 3; dicha velocidad es perpendicular a la línea AB (fig 2.6.13).
- iii) La velocidad relativa de B2 con respecto a B3 es paralela a la línea AB, es decir, a la guía de la manivela 3; pero

$$\bar{v}_{B3} = \bar{v}_{B2} + \bar{v}_{B3/B2} = \bar{v}_{B2} - \bar{v}_{B2/B3} \quad (2.6.7)$$

Trácese, entonces, paralelamente a \overline{AB} , la dirección de $\bar{v}_{B2/B3}$ (fig 2.6.14).

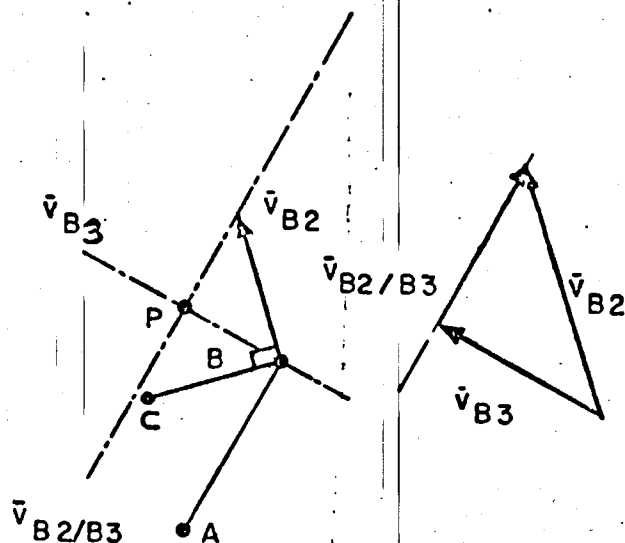


Fig 2.6.14 Velocidad relativa de B2 con respecto a B3

Como se debe satisfacer la ec 2.6.7, es claro que el vector \bar{v}_{B3} está dirigido de B a P (fig 2.6.14).

- iv) Conociendo \bar{v}_{B3} , trácese \bar{v}_D , determinando $||\bar{v}_D||$ por triángulos semejantes (fig 2.6.15).

* El centro instantáneo de 1 con respecto a 3.

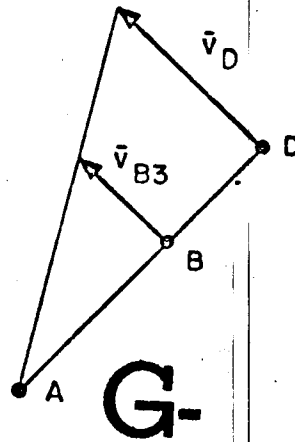
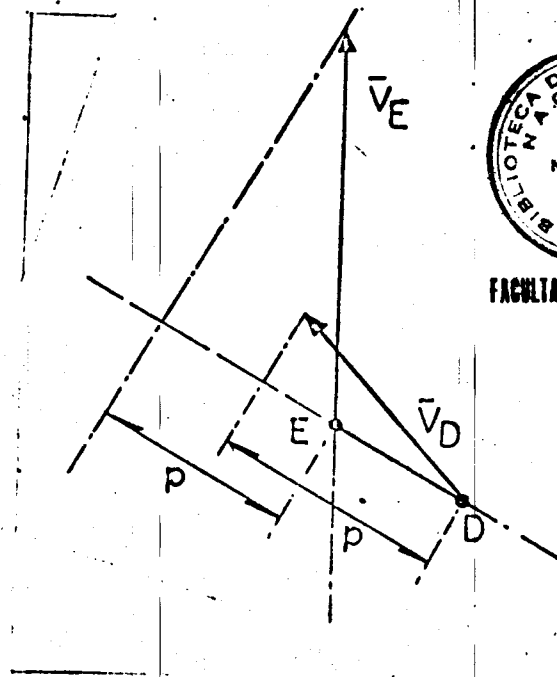


Fig 2.6.15 Velocidad del punto D



FACULTAD DE INGENIERIA

Fig 2.6.16 Construcción de la velocidad del punto E

- v) Puesto que D y E son puntos de la biela 4, determínese \bar{v}_E con su dirección (paralela a la dirección de la carrera del pistón) y su proyección sobre DE, que es idéntica a la proyección (sobre DE, también) de \bar{v}_D (fig 2.6.16). Llámese p a esta proyección.

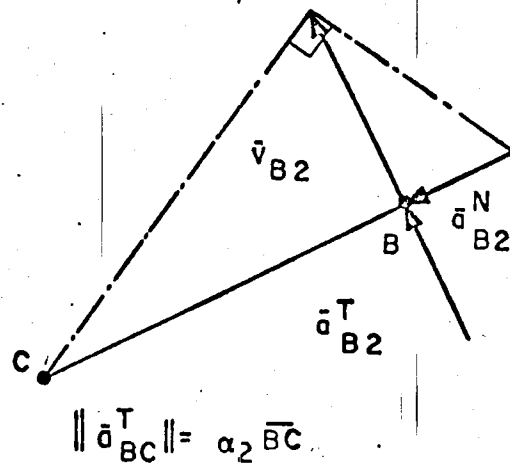


Fig 2.6.17 Aceleración de B2

El análisis de aceleración se realiza ahora a través de la aceleración de los puntos de la manivela 3; sin embargo, esta aceleración no se puede determinar directamente, pero sí a través de la ec 1.8.5. Para esto, exprese la aceleración del punto B2, \bar{a}_{B2} , a través de un observador fijo en la manivela 3. Llámese \bar{a}_{B3} a los tres primeros términos de la ec 1.8.5, es decir, \bar{a}_{B3} es la aceleración del punto de 3 que instantáneamente coincide con B2. Re

preséntese la aceleración de Coriolis (4° término de la ec 1.8.5) en la forma $2\bar{\omega}_3 \times \bar{v}_{B2/3}$, donde $\bar{v}_{B2/3}$ es la velocidad del punto B2 observada desde el cuerpo 3. Nótese que $\bar{v}_{B2/3} = \bar{v}_{B2/B3}$.

Representétese el último término de la ec 1.8.5 con $\bar{a}_{B2/3}$, que es la aceleración del punto B2 medida desde el observador 3. Así, la ec 1.8.5 toma la forma siguiente, en notación de Gibbs

$$\bar{a}_{B2} = \bar{a}_{B3} + 2\bar{\omega}_3 \times \bar{v}_{B2/3} + \bar{a}_{B2/3} \quad (2.6.8)$$

de donde

$$\bar{a}_{B3} = \bar{a}_{B2} - 2\bar{\omega}_3 \times \bar{v}_{B2/3} - \bar{a}_{B2/3} \quad (2.6.9)$$

- vi) Conociendo \bar{v}_{B2} determínese \bar{a}_{B2}^N , y conociendo α_2 determínese \bar{a}_{B2}^T (fig 2.6.17). La suma de estos dos vectores es, entonces, \bar{a}_{B2} , el primer término del miembro derecho de la ec 2.6.9.
- vii) Conociendo \bar{v}_{B3} se conoce $\bar{\omega}_3$. Con este vector y $\bar{v}_{B2/3}$, determínese la aceleración de Coriolis $2\bar{\omega}_3 \times \bar{v}_{B2/3}$. Este vector está dirigido normalmente a $\bar{v}_{B2/3}$ y su orientación, según la regla de la mano derecha del producto vectorial, es tal que $2\bar{\omega}_3 \times \bar{v}_{B2/3}$ forma un ángulo de $+90^\circ$ con $\bar{v}_{B2/3}$ si ω_3 está orientado hacia adentro del plano del dibujo. De lo contrario forma un ángulo de -90° con ese mismo vector (fig 2.6.18).

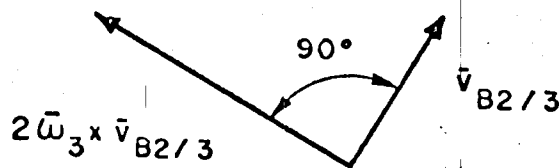


Fig 2.6.18 Construcción de la aceleración de Coriolis de B2

viii) Del último término del miembro derecho de la ec 2.6.9 se conoce únicamente su dirección -obviamente la trayectoria de B2, observada desde 3, es una recta paralela a la guía de este cuerpo (3)-y tanto $\bar{v}_{B2/3}$ como $\bar{a}_{B2/3}$ son paralelos a la línea \overline{AB} . La magnitud de $\bar{a}_{B2/3}$ es una incógnita.

ix) Por otra parte, del miembro izquierdo de la ec 2.6.9 se conoce únicamente su componente normal, \bar{a}_{B3}^N ; en cuanto a su componente tangencial solo se conoce su dirección, normal a la línea \overline{AB} . La ec 2.6.9 es, por tanto, un sistema de dos ecuaciones escalares (una para cada dimensión del plano del dibujo) con dos incógnitas escalares. En la fig 2.6.19 se resuelve en forma gráfica dicha ecuación. El punto S es la solución.

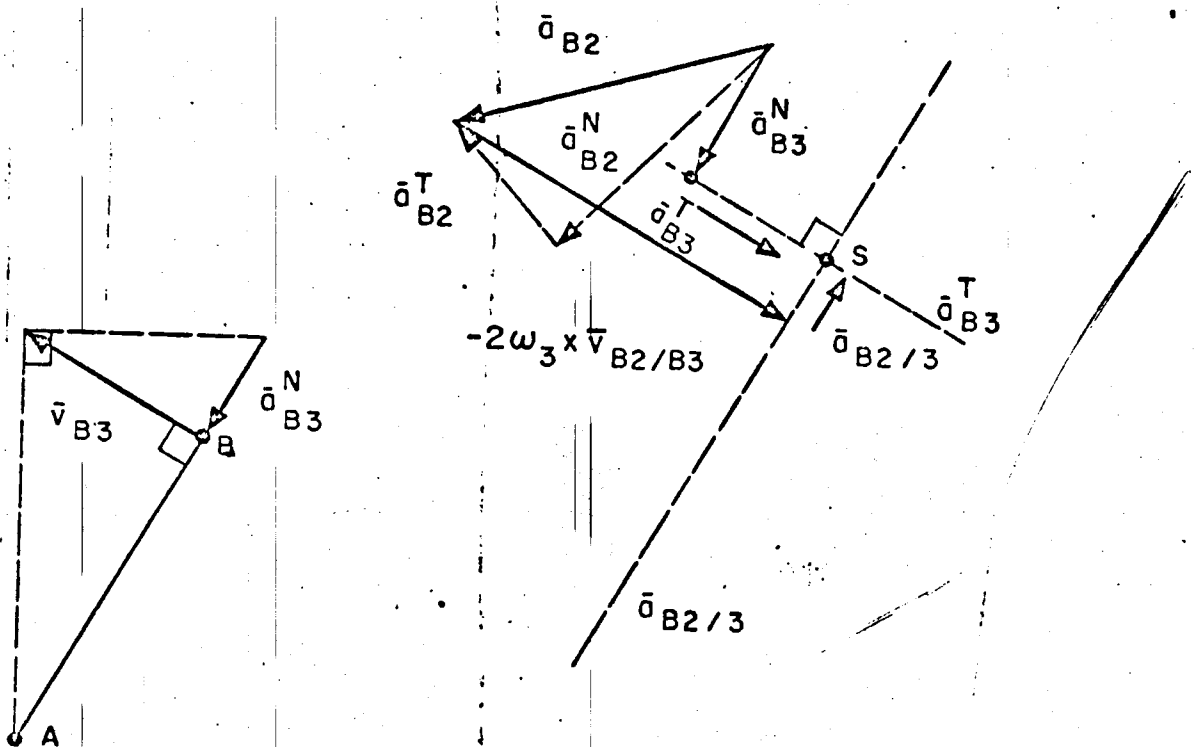


Fig 2.6.19 Solución gráfica de la ec 2.6.9

- x) Conociendo \bar{a}_{B3}^T se determina \bar{a}_D^T por triángulos semejantes, con el triángulo de la fig 2.6.20.

Nota: Obsérvese que, en general, $\bar{a}_{B2/3}$ es diferente de $\bar{a}_{B2/B3}$.

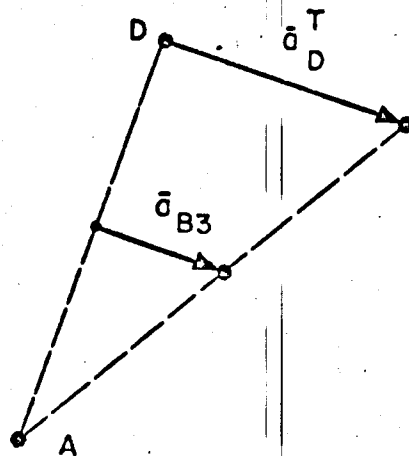


Fig 2.6.20 Construcción de la aceleración tangencial del punto D

- xi) Con \bar{v}_D conocida, determínese \bar{a}_D^N y con la suma de \bar{a}_D^T y \bar{a}_D^N determínese \bar{a}_D (fig 2.6.21).
- xii) La aceleración de E, \bar{a}_E , se determina mediante la relación

$$\bar{a}_E = \bar{a}_D + \bar{a}_{E/D} \quad (2.6.10)$$

donde \bar{a}_D se conoce y $\bar{a}_{E/D}^N$ se determina conociendo $\bar{v}_{E/D}$. De $\bar{a}_{E/D}^T$ solo se conoce su dirección (normal a \overline{DE}) y de \bar{a}_E también se conoce su dirección. La ec 2.6.10, entonces, representa un sistema de dos ecuaciones escalares con dos incógnitas escalares $\|\bar{a}_{E/D}^T\|$

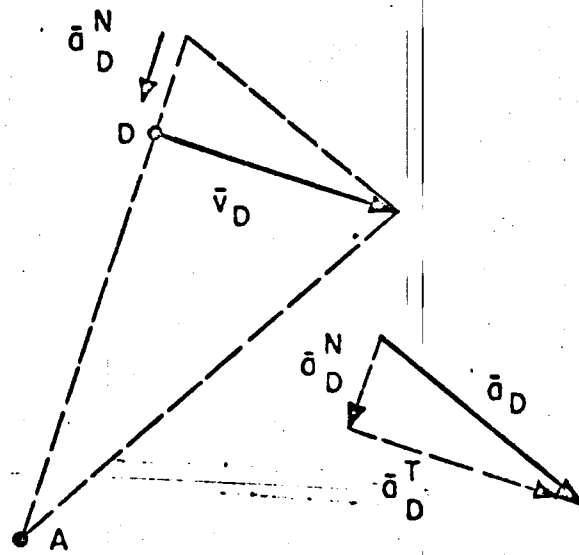


Fig 2.6.21 Construcción de la aceleración total del punto D

y $\|\bar{a}_E\|$. En la fig 2.6.22 se resuelve esta ecuación en forma gráfica. El punto T es la solución.

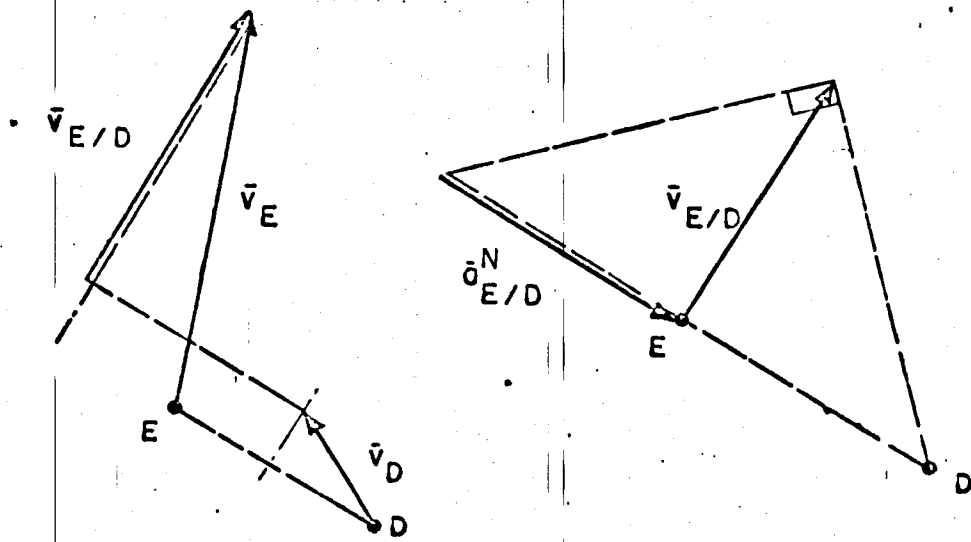


Fig. 2.6.22a

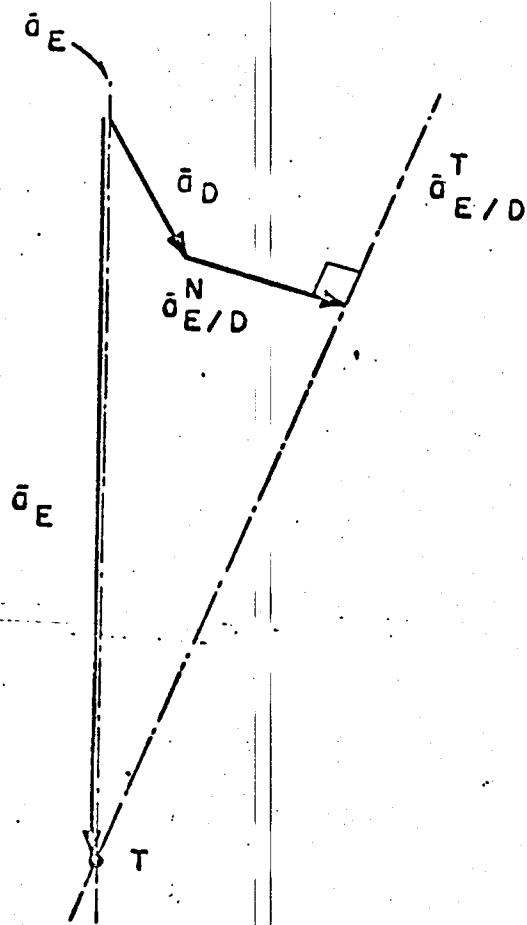


Fig 2.6.22 Solución gráfica de la ec 2.6.10

Nota: Las figuras aparecen a diferentes escalas con objeto de que los trazos no queden fuera de la hoja.

Si se desea determinar la relación entrada-salida de un mecanismo como el de la fig 2.6.11, para cada grado del ángulo de entrada, ¡se tendría que repetir el procedimiento anterior 360 veces!. Esto, desde luego, es impráctico, y el autor lo que aconseja es dejar este trabajo a una máquina, por lo que se sugiere trabajar en el siguiente problema.

Ejercicio 2.6.3. En el mecanismo de la fig 2.6.11, defínanse las siguientes variables:

$$\widehat{LCB} = \psi, \overline{AD} = a, \overline{DE} = b, \overline{AC} = d,$$

$$AE = s(\psi), CB = e, EAD = \phi$$

- i) Utilizando números complejos, obtenga la función $s = s(\psi)$. Derive $s(\psi)$ con respecto al tiempo suponiendo que la rueda dos gira a razón de 1 500 rpm. La expresión así obtenida, dérvela nuevamente con respecto a t , para obtener así el desplazamiento, la velocidad y la aceleración del pistón 5 en función del tiempo. Suponga que ω_2 es constante.
- ii) Evalúe $s(t)$, $\dot{s}(t)$, $\ddot{s}(t)$ para valores de ψ de 0° a 360° , cada grado. Es claro que esto lo tiene que hacer en computadora digital.
- iii) Ya que las expresiones para $\dot{s}(t)$ y $\ddot{s}(t)$ son muy largas y por esto requieren demasiado tiempo para su cálculo, una alternativa para obtener $\dot{s}(t)$ y $\ddot{s}(t)$ es derivar $s(t)$ numéricamente, para lo cual es necesario que construya un programa de computadora semejante al del subcap 5.4 de la ref 2.2. Compare los resultados de ambos in

cisos *i)* y *ii)* y comente las diferencias observadas. Antes de escribir su programa y de correrlo en la máquina, es conveniente leer el subcap 5.4 de la referencia mencionada. Una alternativa sería usar la subrutina DFDX de la fig 2.2.6.

Ejercicio 2.6.4. Una *inversión* del mecanismo de la fig 2.6.11 es el mecanismo de la fig 2.6.23.

Haga un análisis cinemático completo de este mecanismo, es decir, determine \bar{v}_E y \bar{a}_E conociendo ω_1 y α_1 , para la configuración mostrada.

El análisis tiene que ser *gráfico*.

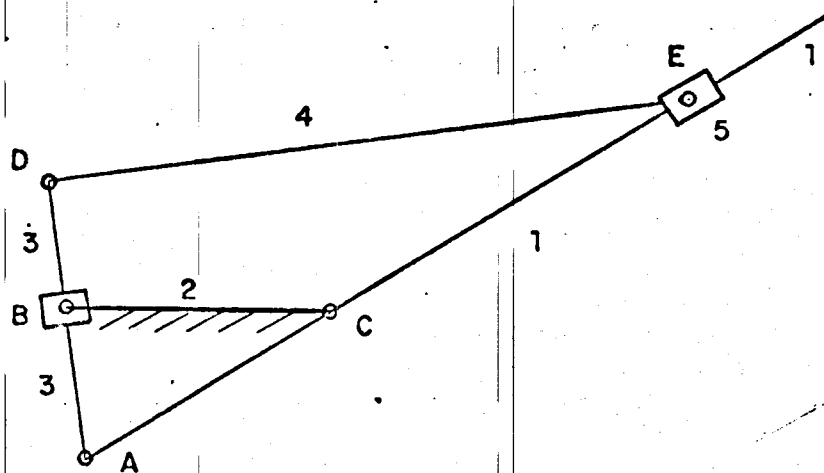


Fig 2.6.23 Inversión del mecanismo de la fig 2.6.11

Ejercicio 2.6.5. Obtenga la trayectoria del punto P del mecanismo de la fig. 2.6.24. Obtenga, además, las curvas $\phi(t)$ vs. t , $\dot{\phi}(t)$ vs. t y $\ddot{\phi}(t)$ vs. t .

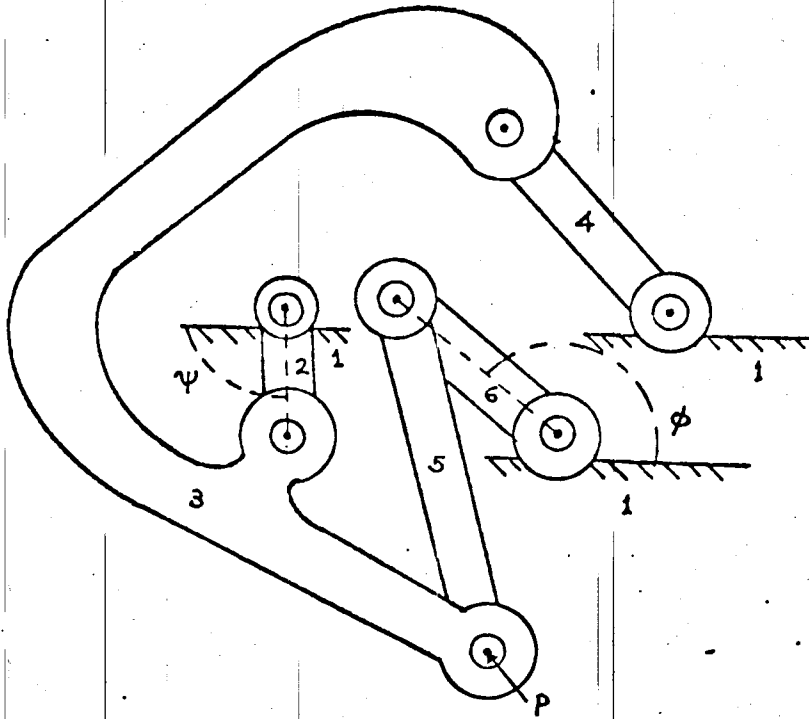


Fig. 2.6.24. Mecanismo de seis eslabones articulados.

REFERENCIAS

- 2.1 F. Freudenstein, Approximate Synthesis of Four-bar Linkages, *Trans. ASME*, Vol 77, (ago 1955)
- 2.2 James, Smith y Wolford, Applied Numerical Methods with Fortran Programming, *International Textbook.*, (1967)
- 2.3 J. E. Shigley, Simulation of Mechanical Systems: An Introduction, *McGraw-Hill Book Co.*, Nueva York (1967)
- 2.4 E. Chicurel y L. Legarreta, Manual para el uso del simulador analógico SAS II, *Instituto de Ingeniería, UNAM, México, D. F.* (1971)
- 2.5 A. Castillo, Desarrollo del lenguaje de simulación analógica-digital SAS III, Tesis profesional, *Facultad de Ingeniería, UNAM, México, D. F.* (1973)
- 2.6 D. C. Tao, Fundamentals of Applied Kinematics, *Addison Wesley Publishing Co.*, Nueva York (1967)
- 2.7 J. A. Hrones y G. L. Nelson, Analysis of the Four-Bar Linkage, *The MIT Press and John Wiley* (1951)
- 2.8 J. Angeles, Análisis y síntesis de mecanismos, *División de estudios superiores, Facultad de Ingeniería, UNAM* (en elaboración)
- 2.9 J. M. Prentis, Dynamics of mechanical systems, *Longman Group Ltd.*, Londres (1970)

FACULTAD DE INGE.