UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

División de Ingeniería Mecánica y Eléctrica

ANÁLISIS Y SÍNTESIS CINEMÁTICOS DE SISTEMAS MECÁNICOS

Ing. Jorge Ángeles Álvarez.

P R O L O G O

Los avances recientes que ha logrado la Ingeniería en sus diversas ramas se han incorporado, por lo general, en un tiempo relativamente corto a los currícula de licenciatura a través de los libros de texto. En el caso de la Ingeniería Mecánica, y particularmente dentro del área de los mecanismos, esta incorporación no ha sido tan expedita y así vemos que, mientras la producción de artículos técnicos es sorprendente en todo el mundo (véase, por ejemplo, el Journal of Mechanism and Machine Theory, de la IFT o MM*), en la presente década (y fines de la anterior) los textos nuevos de mecanismos que se han publicado no llegan a una decena. Dentro de estos sobresalen los de Prentis [2.9]**, Martin***, Suh [3.11] y Soni [3.2]. Del libro de Mabie y Ocvirck+ se acaba de publicar una tercera edición con algunas novedades.

El objeto del presente libro es salvar esa distancia entre las tendencias modernas en la investigación y los currícula de licenciatura, incorporando a estos un enfoque actualizado, que utiliza modernas técnicas de análisis y de síntesis. Se contempla a los mecanismos como sistemas, susceptibles de ser modelados matemáticamente y, una vez que se ha conseguido establecer los modelos adecuados, se puede proceder con ellos a simularlos (analógica o digitalmente), sintetizarlos y optimizarlos.

En el Cap. 1 se establecen los términos y teoremas básicos de la Cinemática plana de los cuerpos rígidos, que se utilizan a lo largo del texto. En el Cap. 2 se esboza una amplia gama de técnicas de análisis de mecanismos de pares inferiores; se presentan las rutinas SALIDA Y CURVAS que permiten analizar mecanismos RRRR* tanto para obtener relaciones entrada-salida como para obtener trayectorias de puntos sobre el eslabón acoplador.

En el Cap. 3 se presenta un panorama amplio del problema de síntesis de mecanismos de eslabones articulados para generación de función, conducción de cuerpo rígido y generación de trayectoria. El tratamiento de este problema es original y no se encuentra, en esta forma, en ninguna otra parte. En [3.11] Suh trata estos problemas extensamente dentro del contexto de mecanismos espaciales. Aquí se establecen las simplificaciones adecuadas a un curso de licenciatura, y se establecen las bases para la solución numérica del problema. En este capítulo se hace una breve mención a tópicos tales como: círculo de inflexión, cúbica de curvatura estacionaria, ecuación de Euler-Savary, Teorema de Roberts-Chebyshev y mecanismos cognados. Para una discusión rigurosa de estos temas se refiere al lector a la obra de Denavit y Hartenberg [3.3].

---

*International Federation for the Theory of Machines and Mechanisms.

**Los números entre paréntesis indican referencias por capítulo.

***G. H. Martin, Kinematics and Dynamics of Machines, McGraw-Hill Book Company, N. York (1969)

+ H. H. Mabie y F. W. Ocvirck, Mechanisms and Dynamics of Machinery, 3rd. ed., John Wiley and Sons, Inc. N. York (1975)

*Ver Cap. 2 para entender este término

El proceso de diseño por medio de computadora digital se ilustra con un ejemplo en el anexo A, donde se obtiene el mecanismo RRRR que conduce un cuerpo rígido por cinco configuraciones. El diseño conduce a un sistema algebraico no lineal de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas, cuyas raíces se obtienen por el método de Newton-Raphson.
En el Cap. 4 se trata ampliamente el problema de análisis y síntesis de mecanismos de pares superiores (levas). Nuevamente, el enfoque es original, pues los métodos de Newton-Raphson y de Runge-Kutta para análisis y síntesis de levas no se encuentran en ninguna otra parte. Soni presenta en [3.2] un método analítico de diseño de levas, usando teoría de envolventes; pero este método es independiente de los presentados en el presente trabajo. Los métodos del Cap. 4 son fácilmente realizables en computadora analógica o digital, y conducen inmediatamente a algoritmos para obtener diseños óptimos. En el Apéndice B se presenta en todo detalle el diseño óptimo de una leva cilíndrica con seguidor de cara plana, por el método de Runge-Kutta.
En los Caps. 5 y 6 se trata el tema relativo a engranes y trenes de engranes. El Cap. 5 es más bien descriptivo. Presenta la terminología básica y los diferentes tipos de engranes. En este capítulo se incluye la subrutina INVINV, que permite calcular el argumento de una función involuta* dada y que puede necesitarse en cálculos de engranes con dientes de involuta. En este mismo capítulo se presenta un método analítico para diseñar las superficies de paso de engranes hiperbólicos, mediante un proceso de optimización que consiste en minimizar la magnitud de la velocidad de deslizamiento entre las superficies de paso. Este tratamiento no se encuentra en ninguna otra parte. El Cap. 6 introduce los métodos de análisis de trenes de engranes. Respecto a los trenes planetarios, se presenta un análisis riguroso de su funcionamiento y se deduce el método tabular. Otras obras sobre mecanismos describen este método pero generalmente no lo presentan en forma racional.
Puede afirmarse que la filosofía de este libro es presentar con todo el rigor posible los fundamentos del análisis y el diseño de mecanismos, sin pretender entrar demasiado en detalles que son efímeros. Se trata de enfatizar aquellos conceptos que son permanentes dentro de un campo en constante evolución.
Como sucede generalmente, esta obra no es producto del trabajo de una sola persona. Fueron muchos los que intervinieron en su desarrollo realizando trabajos de computación, edición, dibujo, mecanografía y lectura. Particularmente se da crédito al Ing. Francisco Barrera, ayudante de la Sección de Ingeniería Mecánica en la DESFI* por casi dos años, a la fecha, quien pacientemente elaboró la mayor parte de los progra

*Ver Cap. 5 para una definición de este término

*División de Estudios Superiores de la Facultad de Ingeniería

mas que aquí aparecen. Pepe Sánchez, del Instituto de Ingeniería, hizo un trabajo excelente de corrección (¿o corrupción?) de estilo y edición. Oscar Domínguez, también del Instituto, cuidó que sus mejores dibujantes se encargaran de gran parte del trabajo de dibujo. La Sra. Ana Lilia Nava realizó el 70% del trabajo de mecanografía.

Continuar la lista de contribuyentes a este trabajo sería una tarea interminable, por lo que en este punto el autor se disculpa por las omisiones que involuntariamente se ve obligado a cometer; pero quiere hacer patente que este proyecto contó con el apoyo decidido de autoridades de la Facultad de Ingeniería, entre quienes cabe mencionar a los Dres. Javier Salazar Resines y Octavio Rascón Chávez, bajo cuya jefatura en la DESFI el autor pudo realizar este proyecto. El Dr. Víctor Gerez Greiser, Jefe del Departamento de Ingeniería Mecánica y Eléctrica y el Ing. Alberto Camacho Sánchez, Jefe de la Sección de Ingeniería Mecánica de ese mismo Departamento, proporcionaron entusiastamente los ayudantes y el material que se hizo necesario para llevar a feliz término este proyecto.

Desde luego, la inspiración de Patricia, la hija del autor, estuvo presente a lo largo de todo este trabajo.

Cd. Universitaria, agosto de 1975

1 CINEMATICA DEL CUERPO RIGIDO

INTRODUCCION

El análisis y diseño de maquinaria y, en general, de sistemas que contienen elementos mecánicos requieren un conocimiento sólido de la mecánica del movimiento. La primera etapa en el diseño consiste, generalmente, en el dimensionamiento de los miembros de las máquinas utilizadas para transformar el movimiento proveniente de una fuente de energía (motor) en el movimiento requerido para realizar una tarea específica (en una imprenta, por ejemplo, dicha tarea puede consistir en alimentar una hoja de papel en blanco cada cierto tiempo).

Los elementos de máquinas se diseñan para resistir las cargas de operación de manera que las deformaciones que presenten, en condiciones normales, sean lo más pequeñas posible, dentro de los límites de espacio, costo y factibilidad de manufactura.

El análisis de esfuerzo y deformación se estudia en los cursos de mecánica de materiales, por lo que en estas notas no se presta atención

a esta fase del diseño. Dado que los desplazamientos producidos por la deformabilidad de los materiales son de un orden de magnitud mucho más pequeño que los desplazamientos útiles, se supone en el análisis cinemático que los elementos en estudio son cuerpos rígidos. Por esta razón se dedica este capítulo al estudio de la cinemática de cuerpos rígidos y de sus acoplamientos.

1.1 Rapidez de cambio de un vector con magnitud constante

Sea $\bar{a} = \bar{a}(t)$ un vector cuyos componentes son funciones continuas del tiempo. Si $\bar{a}$ cambia de manera que su magnitud permanezca constante, su rapidez de cambio, denotada por $\dot{\bar{a}}(t)$, es un vector normal a $\bar{a}(t)$. En efecto, puesto que $||\bar{a}||$ es constante, se tiene

$$||\bar{a}||^2 \equiv \bar{a}.\bar{a} = \text{cte} \qquad (1.1.1)$$

por lo que

$$\frac{d}{dt}||\bar{a}||^2 = 0$$

o sea

$$\dot{\bar{a}}.\bar{a} + \bar{a}.\dot{\bar{a}} = 0 \qquad (1.1.2)$$

pero

$$\dot{\bar{a}}.\bar{a} = \bar{a}.\dot{\bar{a}}$$

por la conmutatividad del producto escalar. Así, la ec 1.1.2 se reduce a

$$\dot{\bar{a}}.\bar{a} = 0 \qquad (1.1.3)$$

lo cual establece que $\dot{\bar{a}}$ es perpendicular a $\bar{a}$.

En el mecanismo biela-manivela (fig 1.1.1), si $\bar{a}(t)$ representa al vector que une a los puntos A y B, este constituye claramente un vector cuya magnitud es constante. Cinemáticamente, $\bar{a}(t)$ es el vector de posición del punto B, por lo que $\dot{\bar{a}}(t)$ es la velocidad de dicho punto. Por la ec 1.1.3, se desprende que la velocidad de B es perpendicular a su vector de posición.

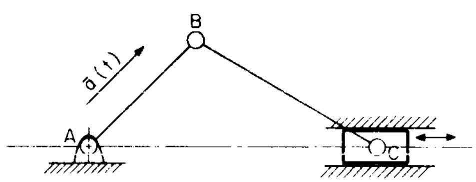


Fig 1.1.1 Mecanismo biela-manivela

1.2 Rapidez de cambio de un vector con dirección constante

Análogamente, se tiene el siguiente resultado: La rapidez de cambio de un vector cuya dirección es constante es un vector paralelo al primero. La demostración de este hecho es muy sencilla y se deja como ejercicio al lector.

Como consecuencia de los dos resultados anteriores, es claro que si un vector cambia, tanto en magnitud como en dirección, su rapidez de cambio es un vector que tiene un componente a lo largo del vector en cuestión y otro normal a este, como se demuestra a continuación.

1.3 Rapidez de cambio de un vector con magnitud y dirección variables

Sea $\bar{r} = \bar{r}(t)$ un vector arbitrario, cuyos componentes son funciones continuas de t. Entonces, es claro que $\bar{r}(t)$ se puede escribir como

$$\bar{r}(t) = r(t)\bar{e}(t)$$

donde $r(t)$ es un escalar que denota la magnitud de $\bar{r}(t)$ y $\bar{e}(t)$ es un vector unitario. Entonces, derivando con respecto a t ambos miembros de la ec 1.4 se tiene

$$\dot{\bar{r}}(t) = \dot{r}(t)\bar{e}(t) + r(t)\dot{\bar{e}}(t)$$

Es claro que el primer término del segundo miembro de la ecuación anterior es paralelo a $\bar{r}(t)$, mientras que el segundo término es perpendicular al mismo vector $\bar{r}(t)$, como se quería demostrar.

Así como la interpretación geométrica de la derivada de una función escalar de una variable escalar es la pendiente de la tangente geométrica a la curva que representa a esa función, la derivada de $\bar{r}(t)$ con respecto a t es un vector tangente a la trayectoria Γ, donde Γ es el conjunto de puntos cuyo vector de posición es $\bar{r}(t)$, $t > 0$. Claro que si $\bar{r}(t)$ es una función continua de t, Γ es una curva continua también. Si $\bar{r}(t)$ es el vector de posición de un punto P al tiempo t, Γ es la "trayectoria de P". Sobre la trayectoria Γ, selecciónese un punto cualquiera como el origen 0 de la coordenada curvilínea $s(t)$, donde $s(t)$ es la longitud de arco de 0 a P en el instante t (fig 1.3.1)

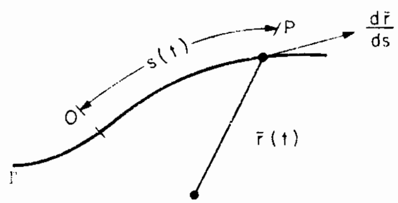


Fig 1.3.1 Derivada de una función vectorial de variable escalar

Es claro que $\bar{r} = \bar{r}(s)$. En seguida se enuncia, sin demostrar, el siguiente Teorema:

"La derivada de $\bar{r}$ con respecto a s es un vector tangente a Γ". (fig 1.3.1) Para una demostración, consultar ref 1.1, o algún otro libro de Cálculo Avanzado.

Como una aplicación del teorema 1.2.1 se obtiene a continuación la derivada con respecto a t, de los vectores unitarios en coordenadas polares y en coordenadas esféricas.

Sean $\bar{e}_r$, $\bar{e}_\theta$, $\bar{e}_z$ los vectores unitarios en coordenadas cilíndricas, (fig 1.3.2)

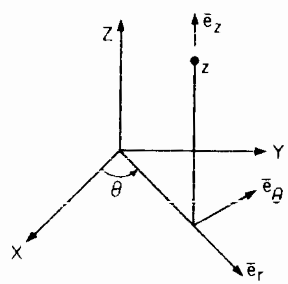


Fig 1.3.2 Vectores unitarios en coordenadas cilíndricas

Ya que los vectores $\bar{e}_r$ y $\bar{e}_\theta$ permanecen en el plano X - Y en todo momento, se pueden analizar en este plano sin pérdida de generalidad, como se muestra en la fig 1.3.3.

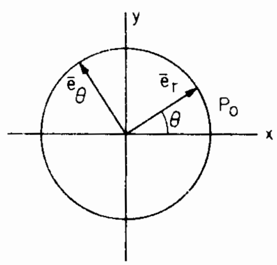


Fig 1.3.3 Vectores radial y tangencial de las coodenadas cilíndricas

Es claro que los vectores $\bar{e}_r$ y $\bar{e}_\theta$ describen una trayectoria circular de radio unitario alrededor del origen, en el plano X - Y. El vector $\bar{e}_r$ describe una trayectoria, cuya longitud de arco es

$$s = \theta$$

Así

$$\frac{d\bar{e}_r}{ds} = \frac{d\bar{e}_r}{d\theta} = \bar{e}_\theta \qquad (1.3.4)$$

pues el vector $\bar{e}_\theta$ es normal a la trayectoria y está dirigido en el sentido en que θ se incrementa, y por eso, en el sentido en que aumenta s.

Además

$$\dot{\bar{e}}_r = \frac{d\bar{e}_r}{dt} = \frac{d\bar{e}_r}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} \qquad (1.3.5)$$

de acuerdo con "la regla de la cadena". Sustituyendo la ec 1.3.4 en la ec 1.3.5

$$\dot{\bar{e}}_r = \dot{\theta}\bar{e}_\theta \qquad (1.3.6)$$

Análogamente, se obtiene

$$\dot{\bar{e}}_\theta = - \dot{\theta}\bar{e}_r \qquad (1.3.7)$$

Ejercicio 1.3.1. Demuestre que para los vectores unitarios de las coordenadas esféricas mostradas en la fig 1.3.4, se tiene

$$\begin{aligned} \dot{\bar{e}}_r &= \dot{\theta}e_\theta + \dot{\phi}\text{ sen }\theta\bar{e}_\phi \\ \dot{\bar{e}}_\theta &= -\dot{\theta}\bar{e}_r + \dot{\phi}\cos\theta\bar{e}_\phi \\ \dot{\bar{e}}_\phi &= -\dot{\phi}(\text{sen }\theta\bar{e}_r + \cos\theta\bar{e}_\theta). \end{aligned} \qquad (1.3.8)$$

Ya que el curso se limitará al análisis y síntesis de mecanismos planos, en lo sucesivo se discutira únicamente el movimiento plano.

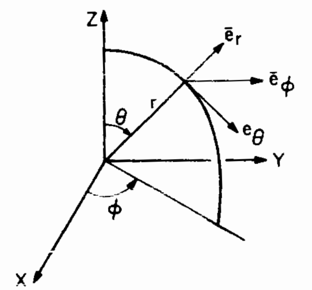


Fig 1.3.4 Vectores unitarios en coordenadas esféricas

1.4 Movimiento plano de un cuerpo rígido

Un cuerpo rígido está animado de movimiento plano cuando todos sus puntos describen trayectorias contenidas en un plano fijo. Por ejemplo, la carrocería de un automóvil que viaja por una carretera con desniveles, pero sin curvas, es un ejemplo de un cuerpo rígido con movimiento plano.

Considérese ahora un cuerpo rígido (en movimiento plano) en el cual se fijan los ejes X - Y. Si se le imprime a este cuerpo una rotación de + θ° alrededor de un eje perpendicular al plano X - Y, los ejes pasan de la posición X_1 - Y_1 a la posición X_2 - Y_2 (fig 1.4.1)

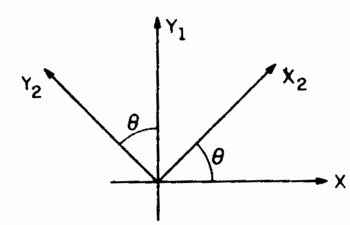


Fig 1.4.1 Rotación de ejes coordenados

Es claro que*

$$\bar{x}_2 = \cos\theta\bar{x}_1 + \operatorname{sen}\theta\bar{y}_1$$

$$\bar{y}_2 = -\operatorname{sen}\theta\bar{x}_1 + \cos\theta\bar{y}_1 \qquad (1.4.1)$$

Recordando el Teorema de representación matricial de una transformación lineal (ref 1.2): "La representación matricial de una transformación lineal, respecto a una base vectorial B es una matriz cuya $i^{\underline{a}}$ columna contiene los componentes de la imagen (ref 1.2) del $i^{\underline{o}}$ vector de la base, bajo la transformación en cuestión, referida (esa imagen) a la base B ".

Así, la transformación 1.4.1 tiene la representación matricial, en la base $\bar{x}_1$, $\bar{y}_1$

$$\left[Q\right]_1 = \begin{bmatrix} C\theta & -S\theta \\ S\theta & C\theta \end{bmatrix} \qquad (1.4.2)$$

La matriz $\left[Q\right]_1$ es ortogonal, es decir, su inversa es idéntica a su traspuesta. Para otras propiedades interesantes de las matrices ortogonales se pueden consultar las ref 1.2 a 1.4.

Ejercicio 1.4.1. Demuestre que efectivamente la matriz $\left[Q\right]_1$, como aparece en la ec 1.4.2, es ortogonal

Considérese ahora que el cuerpo en cuestión (al que se han fijado los ejes X - Y) sufre un desplazamiento tal que el origen de coordenadas, O, permanece fijo. Entonces, cualquier punto P del cuerpo, bajo una rotación $+\theta°$ pasa a la posición P'. Denotando $\bar{p}$ y $\bar{p}'$ los vectores de posición de

* $\bar{x}_i$, $\bar{y}_i$ son vectores unitarios paralelos a los ejes X_i, Y_i, respectivamente

P y P', respectivamente, ambos referidos a la misma base X_1, Y_1 , se tiene

$$\left[p'\right]_1 = \left[Q\right]_1 \left[\bar{p}\right]_1 \qquad (1.4.3)$$

que es una expresión en virtud de la cual se determina la posición de *un punto dado del cuerpo rígido* al final de una rotación.

Demostración de la expresión 1.4.3. Sean (α, β) las coordenadas de P referidas a $\bar{x}_1$, $\bar{y}_1$, esto es,

$$\bar{p} = \alpha\bar{x}_1 + \beta\bar{y}_1 \qquad (1.4.4)$$

Entonces

$$Q\bar{p} = \alpha Q\bar{x}_1 + \beta Q\bar{y}_1 = \alpha\bar{x}_2 + \beta\bar{y}_2;$$

pero, de la ec 1.4.1

$$\bar{p}' = Q\bar{p} = \alpha(C\theta\bar{x}_1 + S\theta\bar{y}_1) + \beta(-S\theta\bar{x}_1 + C\theta\bar{y}_1) =$$

$$= (\alpha C\theta - \beta S\theta)\bar{x}_1 + (\alpha S\theta + \beta C\theta)\bar{y}_1$$

$$\left[\bar{p}'\right]_1 = \begin{bmatrix} \alpha C\theta - \beta S\theta \\ \alpha\Sigma\theta + \beta C\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\theta & -S\theta \\ S\theta & C\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \left[Q\right]_1 \left[\bar{p}\right]_1 \qquad \text{q.e.d.}$$

1.5 *Cuerpo rígido*

Un cuerpo rígido es, por definición, aquel que bajo cualquier movimiento conserva ***inalterable la distancia entre dos cualesquiera*** de sus puntos. Así, si se llama $\bar{r}_1$ y $\bar{r}_2$ al vector que une los puntos A y B de un cuerpo rígido antes y después de que este sufra un desplazamiento, respectivamente (fig 1.5.1)

$$||\bar{r}_2|| = ||\bar{r}_1||$$

o bien, llamando $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{b}_1$, $\bar{b}_2$ a los vectores de posición de A y de B antes y después del desplazamiento, respectivamente

$$||\bar{a}_2 - \bar{b}_2|| = ||\bar{a}_1 - \bar{b}_1|| \qquad (1.5.1)$$

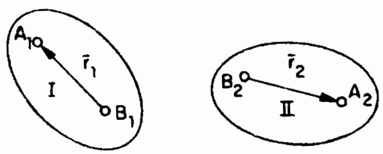


Fig 1.5.1 Desplazamiento de cuerpo rígido

1.6 Velocidad y aceleración de los puntos de un cuerpo rígido que gira alrededor de un punto

Considérese el caso del cuerpo rígido de la Sec. 1.4, es decir, que sufre un desplazamiento tal que uno de sus puntos, O, permanece fijo. La posición de uno de sus puntos, P, al cabo de la rotación Q, dada por la ec 1.4.3 es función de $[Q]_1$ y de $[\bar{p}]_1$. Derivando ambos miembros de la ec 1.4.3 con respecto a t, se obtiene $\bar{v}_p$, la velocidad de $\bar{p}$, dada por

$$[\bar{v}_p]_1 = [\dot{Q}]_1 [\bar{p}]_1 \; , \qquad (1.6.1)$$

Obsérvese que en la ec 1.6.1 $[\bar{v}_p]_1$ está dada en términos de $[\bar{p}]_1$, el vector de posición original de P. Ya que al hacer una medición de una variable lo que se obtiene es el valor *instantáneo* de ésta, y no sus valores pasados, es conveniente expresar $[\bar{v}_p]_1$ en términos del vector de posición *actual* de P, $[\bar{p}']_1$; pero de la ec 1.4.3 y del hecho de que $[Q]_1$ es ortogonal ,

$$[\bar{p}]_1 = [Q^T]_1 [\bar{p}']_1 \qquad (1.6.2)$$

sustituyendo la ec 1.6.2 en la 1.6.1

$$[\bar{v}_p]_1 = [\dot{Q}]_1 [Q^T]_1 [\bar{p}']_1 = \qquad (1.6.3)$$

$$= [\Omega]_1 [\bar{p}']_1$$

donde $[\Omega]_1$ es *la matriz de velocidad angular* del cuerpo rígido. Es fácil demostrar que

$$[\Omega]_1 = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\theta} \\ \dot{\theta} & 0 \end{bmatrix} \qquad (1.6.4)$$

Ejercicio 1.6.1. Demostrar la ec 1.6.4

Derivando nuevamente, con respecto a t ambos miembros de la ec 1.6.3, se obtiene la aceleración de P, referida a $\bar{x}_1$, $\bar{y}_1$, o sea,

$$[\bar{a}_p]_1 = [\dot{\Omega}]_1 [\bar{p}']_1 + [\Omega]_1 [\dot{\bar{p}}']_1$$

donde, de la ec 1.4.3

$$\left[\dot{\bar{p}}'\right]_1 = \left[\dot{Q}\right]_1 \left[\bar{p}\right]_1 .$$

Sustituyendo la última expresión en el valor de $\left[\bar{a}_p\right]_1$, se obtiene

$$\left[\bar{a}_p\right]_1 = \left[\dot{\Omega}\right]_1 \left[\bar{p}'\right]_1 + \left[\Omega\right]_1 \left[\dot{Q}\right]_1 \left[\bar{p}\right]_1 \qquad (1.6.5a)$$

pero, en virtud de la ec 1.4.3, 1.6.5a se puede expresar como

$$\left[\bar{a}_p\right]_1 = \left[\dot{\Omega}\right]_1 \left[\bar{p}'\right]_1 + \left[\Omega\right]_1 \left[\dot{Q}\right]_1 \left[Q'\right]_1 \left[\bar{p}'\right]_1 =$$

$$= \left[\dot{\Omega}\right]_1 \left[\bar{p}'\right]_1 + \left[\Omega^2\right]_1 \left[\bar{p}'\right]_1 \qquad (1.6.5b)$$

La primera componente de la ec 1.6.5b es la "aceleración tangencial" y es paralela a la velocidad mientras que la segunda es la "aceleración normal", y es normal a la velocidad. En efecto, denotando por (α', β') las componentes de $\left[\bar{p}'\right]_1$, la velocidad dada por la ec 1.6.3 es

$$\left[\bar{v}_p\right]_1 = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\theta} \\ \dot{\theta} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{bmatrix} = \dot{\theta} \begin{bmatrix} -\beta' \\ \alpha' \end{bmatrix} \qquad (1.6.6a)$$

mientras que

$$\left[\dot{\Omega}\right]_1 \left[\bar{p}'\right]_1 = \begin{bmatrix} 0 & -\ddot{\theta} \\ \ddot{\theta} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{bmatrix} = \ddot{\theta} \begin{bmatrix} -\beta' \\ \alpha' \end{bmatrix} \qquad (1.6.6b)$$

de las ecs 1.6.6a y 1.6.6b

$$\left[\dot{\Omega}\right]_1 \left[\bar{p}'\right]_1 = \frac{\ddot{\theta}}{\theta} \left[\bar{v}_p\right]_1$$

demostrándose así que, efectivamente, la aceleración tangencial es paralela a la velocidad. Ahora hágase el producto escalar de la velocidad por la aceleración normal:

$$\left[\bar{v}_p\right]_1^T \left[\Omega^2\right]_1 \left[\bar{p}'\right]_1 = \left[\bar{p}'\right]_1^T \left[\Omega\right]_1^T \left[\Omega^2\right]_1 \left[\bar{p}'\right]_1 =$$

$$= \left[\alpha', \beta'\right] \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\theta}^3 \\ \dot{\theta}^3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{bmatrix} = 0 \qquad \text{q.e.d.}$$

Ejercicio 1.6.2. Un eslabón de un mecanismo oscila de manera que una recta OA de dicho eslabón forma un ángulo θ con la recta fija OB, (fig 1.6.1). Si $\theta = \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{2} t$, determine la posición, velocidad y aceleración del punto A, expresadas con respecto a una base adecuada, para t = 0, 1, 2, 3 seg.

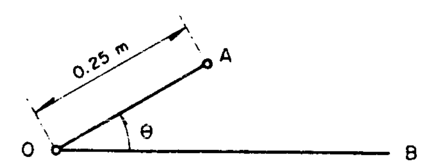


Fig 1.6.1 Eslabón con movimiento oscilatorio

1.7 *Movimiento plano general de un cuerpo rígido*

En la sección anterior se estudió el movimiento de un cuerpo rígido cuando uno de los puntos de este permanece fijo durante el movimiento. Ahora se estudiará el caso en que el cuerpo rígido sufre un movimiento plano, sin que tenga necesariamente un punto que permanezca fijo. Así, si el cuerpo rígido se desplaza de la configuración I a la II (fig 1.5.1) se puede pensar que este cuerpo ocupó la configuración II mediante la composición de dos movimientos: un movimiento lo lleva de la configuración I a la III donde $\bar{b}_3 = \bar{b}_2$ y $\bar{a}_3 - \bar{b}_3 = \bar{a}_1 - \bar{b}_1$ como se muestra en la fig 1.7.1, y el otro lo lleva de la III a la II por medio de una rotación alrededor de B_3.

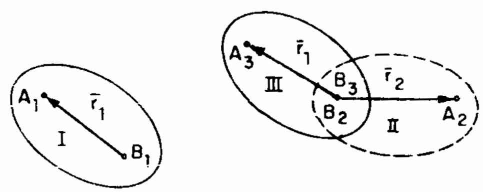


Fig 1.7.1 Movimiento plano general de un cuerpo rígido

Es claro que

$$\bar{a}_2 = \bar{b}_2 + \bar{r}_2$$

pero

$$\bar{r}_2 = Q\bar{r}_1 = Q(\bar{a}_1 - \bar{b}_1)$$

por lo que

$$\bar{a}_2 = \bar{b}_2 + Q(\bar{a}_1 - \bar{b}_1) \qquad (1.7.1)$$

Esta expresión determina la posición final, $\bar{a}_2$, de un punto de un cuerpo rígido a partir de su posición inicial, $\bar{a}_1$, de la rotación Q y de las posiciones inicial, $\bar{b}_1$, y final, $\bar{b}_2$ de un punto "base" B.

Se observará que la ec 1.7.1a es de gran utilidad en la síntesis de mecanismos.

Refiriendo los vectores y las matrices que aparecen en la ec 1.7.1a a una misma base, esta expresión se convierte en

$$\left[\bar{a}_2\right]_1 = \left[\bar{b}_2\right]_1 + \left[Q\right]_1 \left[\bar{a}_1 - \bar{b}_1\right]_1 \qquad (1.7.b)$$

Para obtener la velocidad de A, se derivan ambos miembros de la ec 1.7.1 con respecto a t:

$$\bar{v}_A = \bar{v}_B + \dot{Q}(\bar{a}_1 - \bar{b}_1) \qquad (1.7.2)$$

pero es claro que

$$\bar{a}_2 - \bar{b}_2 = Q(\bar{a}_1 - \bar{b}_1)$$

o bien,

$$\bar{a}_1 - \bar{b}_1 = Q^T(\bar{a}_2 - \bar{b}_2) \qquad (1.7.3)$$

Sustituyendo la ec 1.7.3 en la 1.7.2 se tiene

$$\bar{v}_A = \bar{v}_B + \Omega(\bar{a}_2 - \bar{b}_2) \qquad (1.7.4)$$

que es semejante a la ec 1.6.3 excepto por el término $\bar{v}_B$. Ω tiene el mismo sentido que en la ec 1.6.3.

La aceleración de A, $\bar{a}_A$, se obtiene ahora derivando ambos miembros de la ec 1.7.4 con respecto a t:

$$\bar{a}_A = \bar{a}_B + \dot{\Omega}(\bar{a}_2 - \bar{b}_2) + \Omega(\dot{\bar{a}}_2 - \dot{\bar{b}}_2) =$$

$$= \bar{a}_B + \dot{\Omega}(\bar{a}_2 - \bar{b}_2) + \Omega(\bar{v}_A - \bar{v}_B) \qquad (1.7.5)$$

pero, de la ec 1.7.4

$$\bar{v}_A - \bar{v}_B = \Omega(\bar{a}_2 - \bar{b}_2) \qquad (1.7.6)$$

Sustituyendo la ec 1.7.6 en la 1.7.5

$$a_A = a_B + \dot{\Omega}(\bar{a}_2 - \bar{b}_2) + \Omega^2(\bar{a}_2 - \bar{b}_2) \qquad (1.7.7)$$

Nuevamente, $\dot{\Omega}(\bar{a}_2 - \bar{b}_2)$ es la aceleración tangencial, y $\Omega^2(\bar{a}_2 - \bar{b}_2)$ es la aceleración normal.

1.8 Descripción del movimiento de un punto a traves de sistemas de referencia auxiliares

En ocasiones no es posible hacer mediciones de variables cinemáticas directamente, sino a través de sistemas de referencia móviles. Por ejemplo, un avión meteorológico no mide directamente la velocidad del viento con respecto a tierra, sino con respecto al avión mismo. Así, es necesario adicionar términos a la variable medida para obtener la variable deseada. Cómo agregar estos términos es objeto de estudio en esta sección.

Considérese que se desean obtener las variables cinemáticas de P con respecto al sistema de referencia $X_1 - Y_1$ pero son más fáciles de medir en $X_2 - Y_2$, que se mueve con respecto al primer sistema coordenado (fig 1.8.1)

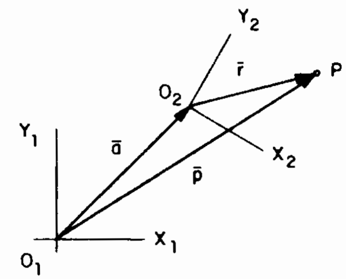


Fig 1.8.1 Sistema coordenado auxiliar móvil

Es claro que

$$\bar{p} = \bar{a} + \bar{r},$$

o bien, refiriendo estas variables al sistema $X_1 - Y_1$

$$[\bar{p}]_1 = [\bar{a}]_1 + [\bar{r}]_1 \qquad (1.8.1)$$

Puesto que P no es accesible al observador situado (fijo) en $X_1 - Y_1$, $[\bar{r}]_1$ no se obtiene directamente, sino a través de $[\bar{r}]_2$ según la relación

$$[\bar{r}]_1 = [Q]_1 [\bar{r}]_2 \qquad (1.8.2)$$

donde $\left[Q\right]_1$ es la matriz que gira los ejes de la posición 1 a la 2. Así, la ec 1.8.1 se convierte en

$$\left[\bar{p}\right]_1 = \left[\bar{a}\right]_1 + \left[Q\right]_1 \left[\bar{r}\right]_2 \qquad (1.8.3)$$

La velocidad de P, $\bar{v}_p$, se obtiene derivando ambos miembros de la ec 1.8.3 con respecto a t, y sustituyendo la ec 1.8.2 a la expresión resultante. Así

$$\begin{aligned}\left[\bar{v}_p\right]_1 &= \left[\bar{v}_o\right]_1 + \left[\dot{Q}\right]_1 \left[\bar{r}\right]_2 + \left[Q\right]_1 \left[\dot{\bar{r}}\right]_2 = \\ &= \left[\bar{v}_o\right]_1 + \left[\dot{Q}\right]_1 \left[Q'\right]_1 \left[Q\right]_1 \left[\bar{r}\right]_2 + \left[Q\right]_1 \left[\dot{\bar{r}}\right]_2 = \\ &= \left[\bar{v}_o\right]_1 + \left[\Omega\right]_1 \left[Q\right]_1 \left[\bar{r}\right]_2 + \left[Q\right]_1 \left[\dot{\bar{r}}\right]_2 \qquad (1.8.4)\end{aligned}$$

donde se observa que la velocidad del punto P es igual a la suma de la velocidad que tendría P si este fuera un punto del cuerpo rígido definido por $X_2 - Y_2$ + la velocidad de P relativa a $X_2 - Y_2$ ($\left[Q\right]_1 \left[\dot{\bar{r}}\right]_2$).

Para obtener la aceleración de P, se deriva la ec 1.8.4 con respecto a t

$$\begin{aligned}\left[\bar{a}_p\right]_1 &= \left[\bar{a}_o\right]_1 + \left[\dot{\Omega}\right]_1 \left[Q\right]_1 \left[\bar{r}\right]_2 + \left[\Omega\right]_1 \left[\dot{Q}\right]_1 \left[\bar{r}\right]_2 + \\ &+ \left[\Omega\right]_1 \left[Q\right]_1 \left[\dot{\bar{r}}\right]_2 + \left[\dot{Q}\right]_1 \left[\dot{\bar{r}}\right]_2 + \left[Q\right]_1 \left[\ddot{\bar{r}}\right]_2 = \\ &= \left[a_o\right]_1 + \left[\dot{\Omega}\right]_1 \left[Q\right]_1 \left[\bar{r}\right]_2 + \left[\Omega^2\right]_1 \left[Q\right]_1 \left[\bar{r}\right]_2 + \\ &+ 2\left[\Omega\right]_1 \left[Q\right]_1 \left[\dot{\bar{r}}\right]_2 + \left[Q\right]_1 \left[\ddot{\bar{r}}\right]_2 \qquad (1.8.5)\end{aligned}$$

Ejercicio 1.8.1 Demuestre la ec 1.8.5

Los tres primeros términos de la ec 1.8.5 corresponden a la aceleración que tendría P si este fuera un punto del cuerpo rígido determinado por $X_2 - Y_2$. El cuarto término recibe el nombre de "aceleración de Coriolis" y el último es la aceleración de P medida en $X_2 - Y_2$.

Las ecs (1.8.4) y (1.8.5) se pueden expresar en notación de Gibbs, esto es, en la notación para vectores cartesianos que se estudia en los cursos elementales de Matemáticas en las escuelas de Ingeniería. La razón por la que no se usó la notación de Gibbs en estas notas hasta ahora es que esta no expresa de manera explícita el sistema de referencia en el que se están describiendo los vectores; p. ej., $\left[Q\right]_1 \left[\bar{r}\right]_2$ y $\left[\bar{r}\right]_1$, aparecen sencillamente como $\bar{r}$. En la inteligencia de que todos los vectores en cuestión se expresan en el sistema 1, se procede a representar esas ecuaciones -(1.8.4) y (1.8.5)- en notación de Gibbs. En primer término, conviene aclarar que el producto de una matriz de velocidad o de aceleración angular - Ω u $\dot{\Omega}$- por un vector, $\bar{r}$, se puede expresar como un producto vectorial. En efecto, sean

$$\left[\Omega\right]_1 = \dot{\theta} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad (1.8.6)$$

y

$$\left[\bar{r}\right]_1 = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad (1.8.7)$$

una matriz de velocidad angular y un vector, respectivamente, ambos expresados con respecto a un sistema coordenado fijo X_1-Y_1

Entonces,

$$\left[\Omega\right]_1 \left[\bar{r}\right]_1 = \dot{\theta} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\theta} y \\ \dot{\theta} x \end{bmatrix} \qquad (1.8.8)$$

El producto $\left[\Omega\right]_1 \left[\bar{r}\right]_1$ se puede expresar en notación de Gibbs definiendo al vector $\bar{\omega}$ como

$$\bar{\omega} = \dot{\theta}\, \bar{e}_z \,,$$

donde $\bar{e}_z$ es un vector unitario paralelo al eje Z_1. Entonces, multiplicando $\bar{\omega}$ vectorialmente por el vector $\bar{r} = x\,\bar{e}_x + y\,\bar{e}_y$, donde $\bar{e}_x$ y $\bar{e}_y$ son vectores paralelos a los ejes X_1 y Y_1 , respectivamente, se tiene

$$\bar{\omega} \times \bar{r} = \dot{\theta}\,\bar{e}_z \times (x\,\bar{e}_x + y\,\bar{e}_y) = -\dot{\theta} y\,\bar{e}_x + \dot{\theta} x\,\bar{e}_y, \qquad (1.8.9)$$

que tiene los mismos componentes que el vector $\left[\Omega\right]_1 \left[\bar{r}\right]_1$ calculado en (1.8.8)

Ejercicio 1.8.2. Demuestre que el producto $\left[\dot{\Omega}\right]_1 \left[\bar{r}\right]_1$ se puede expresar en notación de Gibbs como el producto $\dot{\bar{\omega}} \times \bar{r}$, definiendo $\dot{\bar{\omega}}$ adecuadamente.

Ejercicio 1.8.3. Exprese el producto $\left[\Omega\right]_1 \left[\dot{\bar{r}}\right]_1$ en notación de Gibbs.

Con estos antecedentes, la ec (1.8.4) resulta expresada en notación de Gibbs como

$$\bar{v}_P = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r} + \frac{D\,\bar{r}}{D\,t} \,, \qquad (1.8.10)$$

donde el operador $\frac{D}{D\,t}$ indica derivación con respecto al tiempo considerando a los vectores unitarios $\bar{e}_{x2}$, $\bar{e}_{y2}$, $\bar{e}_{z2}$-fijos a los ejes X_2, Y_2 y Z_2, respectivamente-como constantes en magnitud y dirección.

La ec (1.8.5), por su parte, puede expresarse entonces como

$$\bar{a}_P = \bar{a}_0 + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) + 2\,\bar{\omega} \times \frac{D\,\bar{r}}{D\,t} + \frac{D^2\bar{r}}{D\,t^2} \qquad (1.8.11)$$

El término $\frac{D\,\bar{r}}{D\,t}$ tiene el significado físico siguiente: es la velocidad (del punto localizado por $\bar{r}$) que mediría un observador fijo al sistema móvil X_2 - Y_2 - Z_2. Análogamente, el término $\frac{D^2\bar{r}}{D\,t^2}$ significa la aceleración (del punto localizado por $\bar{r}$) que mediría un observador fijo al sistema móvil X_2 - Y_2 - Z_2. Se representan comúnmente como:

$$\frac{D\,\bar{r}}{D\,t} = \bar{v}_{P/2} \qquad (1.8.12)$$

y

$$\frac{D^2\bar{r}}{Dt^2} = \bar{a}_{P/2} \qquad (1.8.13)$$

Las ecs (1.8.10) y (1.8.11) quedan representadas, entonces, como

$$\bar{v}_P = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r} + \bar{v}_{P/2} \qquad (1.8.14)$$

y

$$\bar{a}_P = \bar{a}_0 + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) + 2\,\bar{\omega} \times \bar{v}_{P/2} + \bar{a}_{P/2} \qquad (1.8.15)$$

Nótese en la ec (1.8.14) que los dos primeros términos del lado derecho corresponden a la velocidad que tendría un punto del sistema 2 -fijo con respecto a 2- coincidente con P. Llamese, por esta razón, a esta velocidad, $\bar{v}_{P2}$, esto es

$$\bar{v}_{P2} = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r}$$

por lo que la ec (1.8.14) se expresa ahora como

$$\bar{v}_P = \bar{v}_{P2} + \bar{v}_{P/2} \qquad (1.8.14a)$$

Asimismo, los tres primeros términos del miembro derecho corresponden a la aceleración que tendría un punto del sistema 2 coincidente con P. Llámese, igualmente, $\bar{a}_{P2}$ a esta aceleración, esto es,

$$\bar{a}_{P2} = \bar{a}_0 + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r})$$

por lo que la ec (1.8.15) queda ahora expresada como

$$\bar{a}_P = \bar{a}_{P2} + 2\,\bar{\omega} \times \bar{v}_{P/2} + \bar{a}_{P/2} \qquad (1.8.15a)$$

La aplicación de las ecuaciones anteriores se ilustra con un ejemplo a continuación.

Ejemplo 1.8.1. La pala mecánica de la Fig 1.8.2 consiste de: un brazo fijo con respecto a los demás elementos de la máquina, que no se muestran (el brazo y esos elementos están marcados con el número 1), un elemento telescópico AC compuesto por los cuerpos 2 y 3 que pueden deslizar uno con respecto al otro a lo largo de la

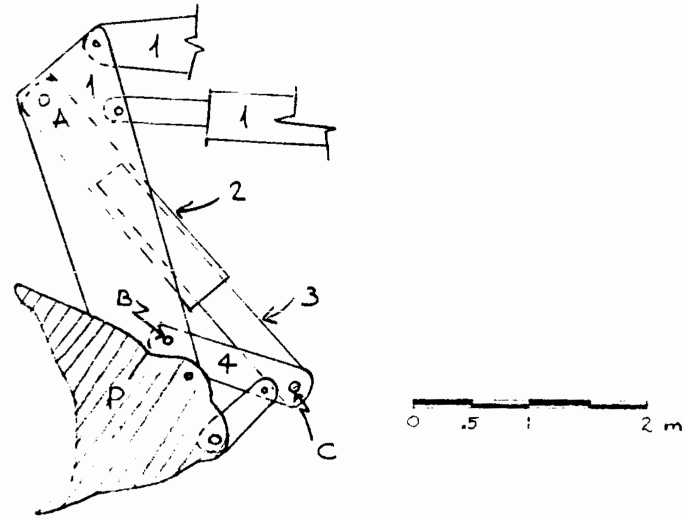


Fig 1.8.2 Mecanismo accionador de la cuchara de una pala mecánica.

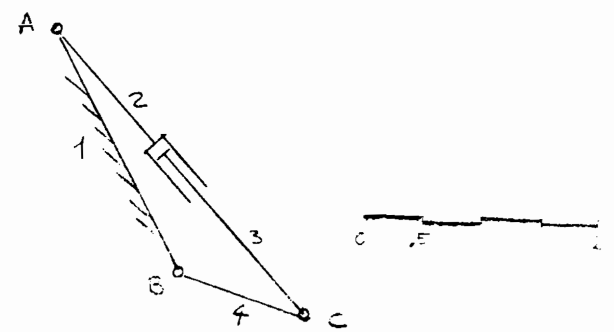


Fig 1.8.3 Modelo cinemático del mecanismo de la Fig 1.8.2.

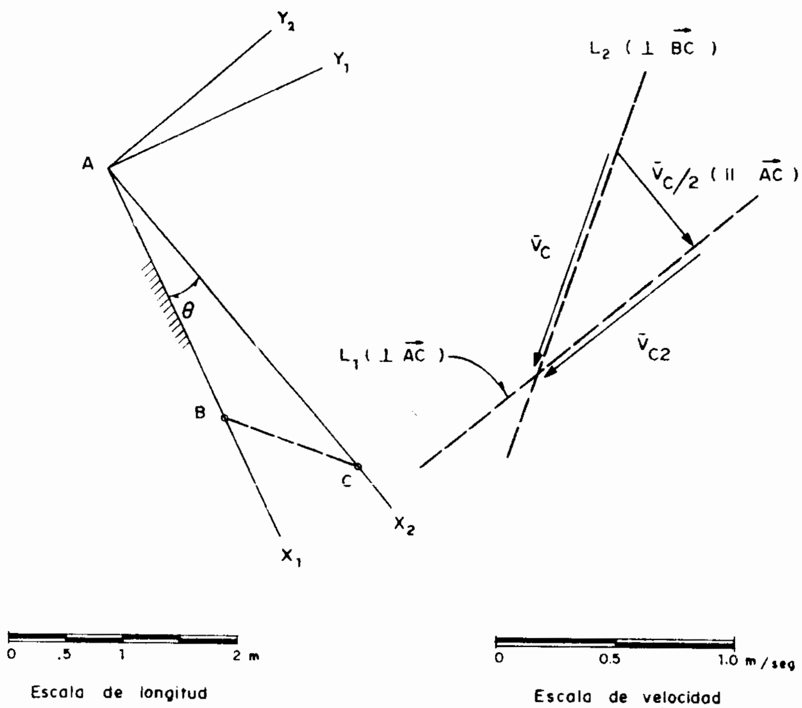


Fig 1.8.4 Diagrama de velocidad del mecanismo de la fig. 1.8.2

línea AC, y un eslabón 4 que gira la pala P. A esta disposición corresponde el modelo cinemático de la Fig 1.8.3. Para la configuración mostrada, suponga que el cuerpo 3 desliza con respecto al 2 con una velocidad constante (de A a C) de 0.5 m/seg. Determine la velocidad angular de los eslabones AC y BC así como la aceleración angular de BC.

Solución. La velocidad del punto C puede expresarse en términos del sistema coordenado $X_2 - Y_2$, móvil con respecto al sistema $X_1 - Y_1$, como se muestra en la Fig 1.8.4. Así, usando la ec (1.8.14a),

$$\bar{v}_C = \bar{v}_{C2} + \bar{v}_{C/2} \tag{1.8.16}$$

donde

$$\bar{v}_{C2} = \bar{\omega}_2 \times \bar{r} \tag{1.8.17}$$

siendo $\bar{r}$ el vector de posición de C, esto es,

$$\bar{r} = \vec{AC} \qquad (1.8.18)^*$$

El término $\bar{v}_{C/2}$ es la velocidad del punto C observada desde el sistema $X_2 - Y_2$, esto es, una velocidad de magnitud 0.5 m/seg paralela al eje X_2, como se muestra en la Fig 1.8.4. Para calcular $\bar{v}_{C2}$ no se conoce $\bar{\omega}_2$; pero se sabe que $\bar{v}_{C2}$ es perpendicular a $\vec{AC}$, esto es, se conoce la dirección de $\bar{v}_{C2}$, aunque no su magnitud. Sin embargo, se sabe también que la velocidad del punto C es perpendicular al vector $\vec{BC}$. De esta manera, el vector $\bar{v}_{C2}$ se determina de

* AC = vector que va de A a C.

acuerdo con la intersección de las líneas L_1 y L_2, normales a $\vec{AC}$ y a $\vec{BC}$, respectivamente, como aparece en la Fig 1.8.4. Midiendo la magnitud del vector $\bar{v}_{C2}$ y considerando la escala utilizada, se obtiene

$$||\bar{v}_{C2}|| = 0.86 \text{ m/seg.}$$

De la ec (1.8.17) se tiene que

$$||\bar{v}_{C2}|| = ||\bar{\omega}_2||\ \overline{AC} ,$$

de donde

$$||\bar{\omega}_2|| = \frac{||\bar{v}_{C2}||}{\overline{AC}} = \frac{0.86}{3.30} = 0.261 \text{ rad/seg}$$

en el sentido de las manecillas del reloj.

Para el análisis de aceleración se utiliza la ec (1.8.15a), esto es,

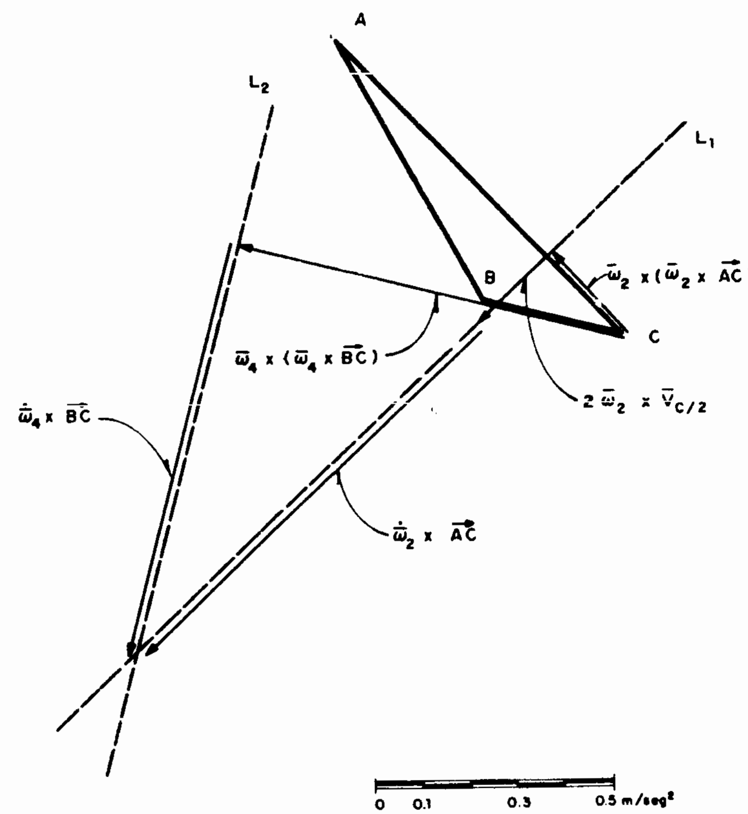
$$\bar{a}_C = \bar{a}_{C2} + 2\bar{\omega}_2 \times \bar{v}_{C/2} + \bar{a}_{C/2} \qquad (1.8.19)$$

donde

$$\bar{a}_{C2} = \dot{\bar{\omega}}_2 \times \bar{r} + \bar{\omega}_2 \times (\bar{\omega}_2 \times \bar{r}) \qquad (1.8.20)$$

en la cual aparece $\bar{r}$, que ya se definió en (1.8.18).

En la ec (1.8.20) el vector $\dot{\bar{\omega}}_2$ no se conoce en magnitud; pero se sabe que el producto $\dot{\bar{\omega}}_2 \times \bar{r}$ es perpendicular a $\bar{r}$, es decir, a $\vec{AC}$, y está en el plano del dibujo. Es un vector paralelo a la -



Escala de aceleración

Fig 1.8.5 Diagrama de aceleración del mecanismo de la Fig 1.8.2

línea L_1 de la Fig 1.8.5.

El vector $\bar{\omega}_2 \times (\bar{\omega}_2 \times \bar{r})$ es normal a $\bar{\omega}_2$ y a $\bar{\omega}_2 \times \bar{r}$, es decir, es paralelo a $\vec{AC}$ y, por "la regla de la mano derecha" del producto vectorial, está dirigido de C a A. Su magnitud es* $\omega_2^2\,\overline{AC}$, o sea, $0.068 \times 3.30 = 0.225$ m/seg^2. Se muestra en la Fig 1.8.5.

El vector $2\,\bar{\omega}_2 \times \bar{v}_{C/2}$ es perpendicular a $\bar{v}_{C/2}$, está en el plano del dibujo, orientado como se muestra en la Fig 1.8.5 según "la regla de la mano derecha", y es de magnitud $2\omega_2\, ||\bar{v}_{C/2}|| = 2 \times 0.210 \times 0.5 = 0.210$ m/seg^2.

Puesto que el pistón que acopla a las secciones 2 y 3 del elemento telescópico AC desliza con respecto a su alojamiento con velocidad constante, un observador fijo al sistema coordenado 2 mide una aceleración nula del punto C. De esta manera, entonces, el término $\bar{a}_{C/2}$ de la ec (1.8.19) se anula.

Por otra parte, la aceleración de C también puede obtenerse considerándolo como punto del cuerpo 4. Así,

$$\bar{a}_C = \dot{\bar{\omega}}_4 \times \vec{BC} + \bar{\omega}_4 \times (\bar{\omega}_4 \times \vec{BC}) \qquad (1.8.21)$$

donde el vector $\dot{\bar{\omega}}_4$ no se conoce en magnitud; pero se sabe que el vector $\dot{\bar{\omega}}_4 \times \vec{BC}$ es normal a $\vec{BC}$ y está en el plano del dibujo. Es un vector paralelo a la línea L_2 de la Fig 1.8.5.

El término $\bar{\omega}_4 \times (\bar{\omega}_4 \times \vec{BC})$ es un vector normal a $\bar{\omega}_4$ y a $\bar{\omega}_4 \times \vec{BC}$, esto es, paralelo a $\vec{BC}$ y dirigido de C a B. Además, es de magnitud $\omega_4^2\,\overline{BC}$, estando dada ω_4 por la relación

$$\omega_4 = \frac{||\bar{v}_C||}{\overline{BC}} = \frac{1.00}{1.20} = 0.832 \text{ rad/seg}$$

* ω = magnitud de $\bar{\omega}$

Así,

$$||\bar{\omega}_4 \times (\bar{\omega}_4 \times \vec{BC})|| = 0.832^2 \times 1.20 = 0.830 \text{ m/seg}^2$$

Los términos $\dot{\bar{\omega}}_2 \times \vec{AC}$ y $\dot{\bar{\omega}}_4 \times \vec{BC}$ se determinan de la intersección de las líneas L_1 y L_2 de la Fig 1.8.5. De esta manera

$$\dot{\omega}_2 = \frac{||\dot{\bar{\omega}}_2 \times \vec{AC}||}{\overline{AC}} = \frac{0.98}{3.30} = 0.298 \text{ m/seg}^2$$

en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj.

Análogamente,

$$\omega_4 = \frac{||\dot{\bar{\omega}}_4 \times \vec{BC}||}{\overline{BC}} = \frac{0.89}{1.20} = 0.742 \text{ m/seg}^2$$

en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj.

1.9 Velocidad relativa

Dados los puntos A y B, con velocidad $\bar{v}_A$ y $\bar{v}_B$ respectivamente, la velocidad relativa de B con respecto a A, denotada por $\bar{v}_{B/A}$ es, por definición

$$\bar{v}_{B/A} = \bar{v}_B - \bar{v}_A$$

Nótese que la velocidad relativa de B con respecto a A es igual a la velocidad que tendría B si A estuviera fijo, con respecto al observador en cuestión.

Ahora supóngase que dos cuerpos rígidos, A y B, están animados de velocidades angulares Ω_A y Ω_B, respectivamente, con respecto a cierto observador. La velocidad angular relativa de B con respecto a A, representada por $\Omega_{B/A}$, es

$$\Omega_{B/A} = \Omega_B - \Omega_A \qquad (1.9.1)$$

de manera semejante a como se definió $\bar{v}_{B/A}$, excepto que esta última ($\bar{v}_{B/A}$) es la velocidad relativa de *un punto con respecto a otro*, en tanto que en la ec 1.9.1 se define la velocidad angular relativa *de un cuerpo con respecto a otro cuerpo*.

1.10 Teoremas relativos a la cinemática de los cuerpos rígidos

A continuación se demuestran algunos teoremas de cinemática de los cuerpos rígidos, que resultan de gran utilidad en el análisis de mecanismos.

Teorema 1.10.1. Dados dos puntos, A y B, de un cuerpo rígido, la velocidad relativa de A con respecto B es normal a la recta AB.

Demostración:

De la ec 1.7.4

$$\bar{v}_{A/B} = \Omega(\bar{a}_2 - \bar{b}_2)$$

El vector $\bar{a}_2 - \bar{b}_2$ es claramente paralelo a la recta AB. Entonces,

$$(\bar{a}_2 - \bar{b}_2).\bar{v}_{A/B} = (\bar{a}_2 - \bar{b}_2).\Omega(\bar{a}_2 - \bar{b}_2),$$

donde es muy fácil demostrar que el producto escalar del miembro derecho de la última ecuación es idénticamente nulo.

Ejercicio 1.10.1. Demuestre que dado cualquier vector $\bar{r}$ y cualquier matriz Ω, como la que aparece en la ec 1.6.4, el producto escalar $\bar{r}.\Omega\bar{r}$ es nulo. Recíprocamente, si $\bar{r}.\Omega\bar{s}$ se anula, necesariamente se tiene que $\bar{s} = \alpha\bar{r}$, donde α es un escalar.

Dados dos cuerpos rígidos en movimiento, *si existe* un conjunto de puntos de ambos cuerpos para los cuales la velocidad relativa se anule, ese conjunto es una recta y recibe el nombre de "eje instantáneo de rotación de un cuerpo con respecto al otro". La condición necesaria y suficiente para la existencia de dicho eje puede verse en la ref 1.5. De la demostración dada en esta referencia, se infiere que si dos cuerpos rígidos están animados de movimiento plano, el eje instantáneo de rotación siempre existe y es normal al plano del movimiento. A la intersección del eje instantáneo con el plano del movimiento se le conoce como "centro instantáneo de rotación de un cuerpo con respecto al otro".

Teorema 1.10.2. (Aronhold-Kennedy). Dados dos cuerpos rígidos en movimiento plano, con respecto a un observador fijo, los tres centros instantáneos de rotación existentes son colineales.

Demostración: Sean A y B dos cuerpos rígidos en movimiento plano con respecto a un observador fijo en el plano del dibujo (fig 1.10.1). Sean C_A y C_B los centros instantáneos de rotación de A y de B, respectivamente, con respecto al plano de dibujo. Además, sea, P el centro instantáneo de rotación de B con respecto a A, es decir

$$\bar{v}_P = \Omega_A\bar{a} = \Omega_B\bar{b} \qquad (1.10.1)$$

Ahora multiplíquense ambos miembros de la ec 1.10.1 escalarmente por $\bar{b}$, obteniéndose así

$$\bar{b}.\Omega_A\bar{a} = \bar{b}.\Omega_B\bar{b},$$

donde, en virtud del ejercicio 1.9.1, el segundo miembro se anula. Es decir,

$$\bar{b}.\Omega_A\bar{a} = 0$$

pero, en virtud del ejercicio 1.10.1;

$$\bar{a} = \alpha\bar{b}$$

siendo α un escalar, por lo que $\bar{a}$ y $\bar{b}$ son paralelos; entonces, necesariamente $\bar{a}$ y $\bar{b}$ son linealmente dependientes, lo cual es equivalente a que P sea colineal con C_A y C_B.

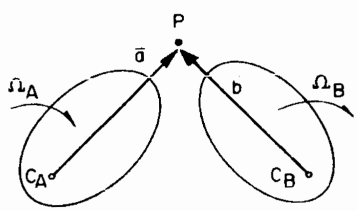


Fig 1.10.1 Movimiento relativo de dos cuerpos rígidos

1.11 Uso de números complejos en el análisis del movimiento plano de los cuerpos rígidos

Ya que, excepto la velocidad angular, todos los vectores que intervienen en el análisis en consideración están contenidos en el plano del movimiento, el tercer componente de estos vectores se anula (excepto para la velocidad angular, por supuesto), por lo que los vectores en cuestión pueden ser sustituidos con ventaja por números complejos. El lector que no esté

muy familiarizado con el álgebra de estos números puede consultar la ref 1.6.

Supóngase que el plano del movimiento es el complejo. Entonces, a cada punto del plano le corresponde un número complejo, y solo uno. En seguida se demuestra algunos resultados útiles.

Teorema 1.11.1. El efecto de multiplicar cualquier número complejo $z_1 = re^{i\phi}$ por el número $e^{i\theta}$ es girar z_1 un ángulo θ.

Demostración:

$$z_2 = e^{i\theta} z_1$$

o bien, desarrollando esta última expresión

$$z_2 = e^{i\theta} re^{i\phi} = re^{i(\phi + \theta)} \qquad \text{q.e.d.}$$

Del resultado anterior se observa que se puede evitar el uso de las matrices para representar una rotación, simplificando así la notación.

Es claro que el desplazamiento del cuerpo rígido de la fig 1.11.1 puede representarse con números complejos de la siguiente forma:

$$a_2 = b_2 + e^{i\theta} z_1$$

Fig 11.1 Desplazamiento de un cuerpo rígido

donde a_2 y b_2 son los números complejos asociados a los puntos A_2 y B_2 del plano complejo. Es claro que

$$z_1 = a_1 - b_1$$

Así, la expresión anterior para a_2 toma la forma

$$a_2 = b_2 + e^{i\theta}(a_1 - b_1) \qquad (1.7.1a)$$

que es equivalente a la ec 1.7.1. La velocidad de A, v_A, se obtiene entonces derivando la ec 1.7.1a con respecto a t:

$$v_A = v_B + i\dot{\theta}e^{i\theta}(a_1 - b_1)$$

pero, de la ec 1.7.1a

$$a_1 - b_1 = e^{-i\theta}(a_2 - b_2)$$

Sustituyendo esta expresión en el valor anterior de v_A, se obtiene

$$v_A = v_B + i\dot{\theta}\,(a_2 - b_2) \qquad (1.7.4)$$

que es equivalente a la ec 1.7.4. Derivando ahora esta ecuación con respecto a t, se obtiene la aceleración de A:

$$a_A = a_B + i\ddot{\theta}\,(a_2 - b_2) + i\dot{\theta}\,(\dot{a}_2 - \dot{b}_2)$$

pero, de la ec 1.7.1a

$$\dot{a}_2 - \dot{b}_2 = i\dot{\theta}e^{i\theta}\,(a_1 - b_1) = i\dot{\theta}(a_2 - b_2)$$

Sustituyendo este valor en la penúltima ecuación, se obtiene

$$a_A = a_B + i\ddot{\theta}(a_2 - b_2) - \dot{\theta}^2\,(a_2 - b_2) \qquad (1.7.7a)$$

que es equivalente a la ec 1.7.7

Ejercicio 1.11.1. En la ec 1.7.7a, identifique los términos que corresponden a los componentes normal y tangencial de $a_A - a_B$. Usando el álgebra de los complejos, demuestre que la aceleración normal es perpendicular a $v_A - v_B$.

Para analizar el movimiento referido a sistemas coordenados auxiliares, como en la sec 1.8, los números complejos no son muy útiles, sin embargo.

REFERENCIAS

1.1 L. Brand, Advanced Calculus, *John Wiley & Sons, Inc.*, Nueva York (1965)

1.2 S. Lang, Linear Algebra, *Addison-Wesley, Publishing Co.*, (1966)

1.3 D. Finkbeiner, Introduction to Matrices and Linear Transformations, *W. H. Freeman and Co.* (1966)

1.4 J. Hummel, Introduction to Vector functions, *Addision-Wesley Publishing Co.* (1967)

1.5 J. Angeles, Diseño y Manufactura de un Diferencial para la Industria Automotriz. Tesis Profesional, *Facultad de Ingeniería*, UNAM (1969)

1.6 R. V. Churchill, Complex Variables and Applications, *McGraw-Hill Book Co. Inc.*, Nueva York (1960)

2. ANALISIS DE MECANISMOS CON PARES INFERIORES

INTRODUCCION

Un mecanismo es un acoplamiento de elementos que se utiliza para trasmitir potencia o información, o para realizar operaciones matemáticas. Nótese que en el concepto anterior no interviene la idea de conversión de energía, inherente a las máquinas. Así, máquina y mecanismo son conceptos diferentes, aun cuando están relacionados por el hecho de que todo mecanismo es un elemento de una máquina. La idea subyacente en el concepto de mecanismo es la de transformación del movimiento. La junta universal, por ejemplo, convierte la velocidad uniforme de una flecha vertical en otra velocidad cuya magnitud cambia con el tiempo, y está inclinada con respecto a la vertical. Este mecanismo trasmite la potencia de un motor a una carga. También es ejemplo de mecanismo el regulador de Watt (fig 2.I.1).

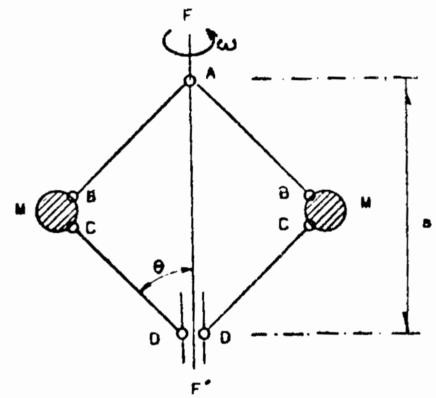


Fig 2.I.1 Regulador de Watt

La flecha FF' (fig 2.I.1) gira a una velocidad proporcional a la del árbol motor de una máquina de vapor cuya velocidad se desea regular, es decir, se desea que el árbol motor de esta máquina no se desvíe una cantidad apreciable de cierta velocidad nominal. Debido a la fuerza de inercia de las masas M, si la velocidad en consideración sufre un cambio considerable, el ángulo θ varía y, en consecuencia, también la distancia s. Estos cambios son proporcionales a la abertura de una válvula por la que se alimenta vapor a la máquina; de esta manera, los cambios en la velocidad nominal son suprimidos. Este mecanismo, claramente, trasmite información más que potencia.

Por último, se verá que ciertos mecanismos, como el diferencial de un vehículo, ejecutan operaciones matemáticas. Un diferencial ejecuta la sustracción algebraica de las velocidades angulares de las dos secciones del eje motor de un vehículo (cuando este toma una curva ambas son diferentes)

2.1 *Grado de libertad de un mecanismo de eslabones rígidos*

Pares inferiores

El grado de libertad de un acoplamiento de cuerpos rígidos es el número mínimo de variables que se requiere para especificar de manera única la configuración de este acoplamiento. El grado de libertad del mecanismo de la fig 2.I.1, por ejemplo, es 1, pues una sola variable (θ o s, pero no ambas) determina de manera única su configuración. Los mecanismos de computación que ejecutan operaciones binarias-suma, multiplicación, por ejemplo-tienen un grado de libertad doble (admiten dos entradas).

El grado de libertad de un cuerpo rígido sin restricciones es seis, pues se requieren tres coordenadas para especificar la posición de uno de sus puntos y tres ángulos para especificar su orientación. Si el cuerpo rígido se restringe a movimiento plano, su grado de libertad es tres, pues se requieren dos coordenadas para especificar la posición de uno de sus puntos y un ángulo para especificar su orientación.

En los mecanismos planos el acoplamiento entre dos eslabones rígidos elimina un doble grado de libertad del movimiento relativo entre ambos, dejando un grado de libertad simple (igual a 1) para el acoplamiento. Un eslabón puede estar -- acoplado a otros, pero el número mínimo es dos; en este caso, el eslabón se llama binario, o de orden dos. Si está acoplado a -- tres, se llama ternario, o de orden tres, y así sucesivamente. Cada acoplamiento puede ser un par de revolución o prismático -- (ref 2.8). El par de revolución, representado por R, permite rotación de un eslabón con respecto al otro, mientras que el prismático, representado por P, permite traslación de un eslabón -- con respecto al otro, en una sola dirección.

Entonces, cada par del mecanismo elimina un doble grado de libertad. Así, si el mecanismo consta de n eslabones, el grado de libertad del conjunto de eslabones antes del acoplamiento es -- $3(n-1)$, pues uno de los eslabones (cualquiera) se considera - fijo al observador en cuestión, ya que es de interés el movimiento relativo de los eslabones del mecanismo con respecto a uno -- cualquiera de estos eslabones. Siendo a el número total de pares, resulta que el grado de libertad del mecanismo, ℓ , es

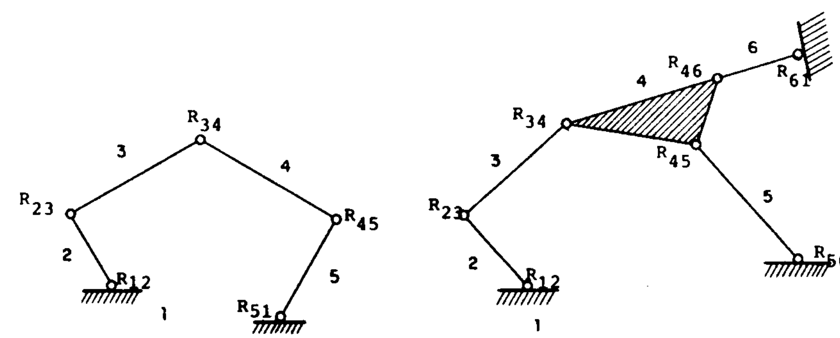
$$\ell = 3(n-1) - 2a \qquad (2.1.1)$$

donde

$$a = \sum_{1}^{m} j a_j \qquad (2.1.2)$$

en que a_j es el número de eslabones de orden j del mecanismo. La ec 2.1.1 recibe el nombre de *fórmula de Grübler*.

Ejercicio 2.1.1 Determine el grado de libertad de los siguientes mecanismos



(a) (b)

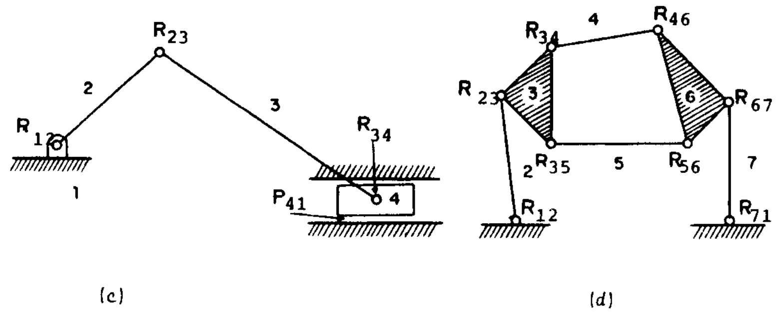


Fig 2.1.1 Mecanismos planos de eslabones rígidos

Todos los pares R de la fig 2.1.1 son cinemáticamente equivalentes, esto es, pueden estar físicamente construidos de maneras muy diferentes; por ejemplo, pueden ser rodamientos de bolas, rodamientos cónicos, bujes, manguillos, etc, pero el acoplamiento entre los eslabones que unen se realiza en todos los casos de la misma forma, es decir, mediante estas articulaciones un eslabón *envuelve* a otro.* Esta característica de envolución define a la clase de pares llamada de ***pares inferiores***, en contraposición con los acoplamientos que se estudiarán en el cap 4.

2.2 *Análisis entrada-salida de los mecanismos de eslabones rígidos*

El movimiento del eslabón mediante el cual se acciona un mecanismo recibe el nombre de *entrada* del mecanismo. Por analogía, el movimiento del eslabón mediante el cual se obtiene el movimiento transformado por el mecanismo, recibe el nombre de *salida* del mecanismo. Una y otra son desplazamientos lineales o angulares.

---

*Igual sucede con los pares P

Considérese por ejemplo, el conjunto pistón-biela-cigüeñal de una máquina de combustión interna. En este caso, el mecanismo se acciona por medio del movimiento del pistón, que tiene un ***desplazamiento lineal***, que en la fig 2.2.1 se representa por $s(t)$. Esta variable constituye la *entrada* de este mecanismo. Por otra parte, el movimiento que se utiliza para la locomoción se toma directamente del cigüeñal OA, cuyo movimiento está determinado por el ángulo $\theta(t)$, que constituye la *salida* de este mecanismo.

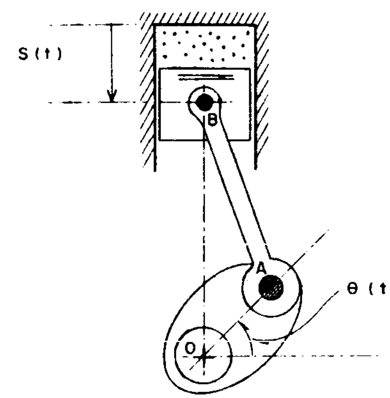


Fig 2.2.1 Mecanismo pistón-biela-cigüeñal de una máquina de combustión interna

El mecanismo mediante el cual se obtiene aire comprimido (de múltiples aplicaciones en las industrias manufacturera y de la construcción) es esencialmente el mismo de la fig 2.2.1, con la variante de que este mecanismo se acciona con el movimiento de la manivela OA, que no es otra cosa que el movimiento giratorio del árbol motor de una máquina eléctrica o térmica. En este caso, la entrada del mecanismo es el ángulo $\theta(t)$ y la salida la variable $s(t)$.

El análisis de los mecanismos consiste, entre otras cosas, en obtener una relación funcional entre la entrada y la salida *para un mecanismo dado*. Otros tipos de análisis se verán en otras secciones de este capítulo.

Resulta curioso que aun tratándose de mecanismos sencillos, como el mostrado en la fig 2.2.2, la relación funcional entre la entrada $\psi(t)$ y la salida $\phi(t)$ no es una función explícita, sino implícita, de la forma

$$F(\phi, \psi) = 0 \qquad (2.2.1)$$

Para obtener un conjunto de valores de ψ para todos los valores de ϕ, se recurre a varios medios: la solución numérica (en computadora digital) de la ec 2.2.1 para todos los valores deseados de ψ, o bien, al uso de simuladores analógicos, en los que esa ecuación se simula con un diagrama de alambrado en una computadora análogica, o con simuladores analógicos que realizan el diagrama de alambrado mediante subrutinas construidas en programas para computadora digital. Un ejemplo de estos últimos es el SAS (simulador analógico en series), creado por Enrique Chicurel, investigador del Instituto de Ingeniería.

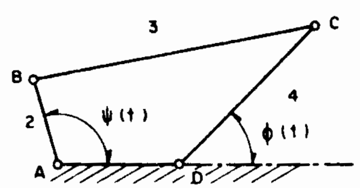


Fig 2.2.2 Mecanismo plano de cuatro eslabones

Para el análisis entrada-salida del mecanismos de la fig 2.2.2, colóquese el origen del plano complejo en el punto A y llámese b, c, d a los números complejos que representan las coordenadas de los puntos B, C y D, respectivamente. Más aún, llámese f y g a los números complejos

$$f = c - b,\; g = d - c \qquad (2.2.2)$$

Se tiene entonces la siguiente disposición de vectores (representaciones geométricas de los números complejos en consideración).

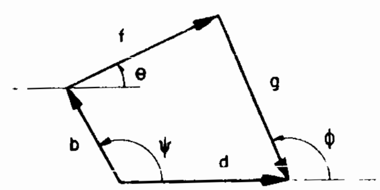


Fig 2.2.3 Vectores asociados al mecanismo de la fig 2.2.2

Así

$$b + f + g = d \qquad (2.2.3)$$

donde

$$\begin{aligned} b &= a_2 e^{i\psi} \\ f &= a_3 e^{i\theta} \\ g &= a_4 e^{i(\pi + \phi)} \\ d &= a_1 e^{i0} \end{aligned} \qquad (2.2.4)$$

La ec 2.2.3 toma entonces la forma

$$a_2e^{i\psi} + a_3e^{i\theta} + a_4e^{i(\pi + \phi)} = a_1e^{i0} \qquad (2.2.5)$$

donde a_i es la longitud de la i-ésima barra.

Despéjese el término que contiene a θ, que es una variable que no interesa en este análisis:

$$a_3e^{i\theta} = a_1e^{i0} - a_4e^{i(\pi + \phi)} - a_2e^{i\psi} \qquad (2.2.6a)$$

Tomando el complejo conjugado de ambos miembros de la ec 2.2.6a, se tiene

$$a_3e^{-i\theta} = a_1e^{i0} - a_4e^{-i(\pi + \phi)} - a_2e^{-i\psi} \qquad (2.2.6b)$$

Multiplicando miembro a miembro las ecs 2.2.6a y b, se llega a

$$a_3^2 = a_1^2 + a_4^2 + a_2^2 - a_1a_4e^{-i(\pi + \phi)} - a_1a_2e^{-i\psi}$$

$$- a_4a_1e^{i(\pi + \phi)} + a_4a_2e^{i(\pi + \phi - \psi)} - a_2a_1e^{i\psi}$$

$$+ a_2a_4e^{i(\psi - \pi - \phi)} =$$

$$= a_1^2 + a_4^2 + a_2^2 - 2a_1a_4\mathrm{Re}\left[e^{i(\pi + \phi)}\right]$$

$$- 2a_1a_2\mathrm{Re}\left[e^{i\psi}\right] + 2a_2a_4\mathrm{Re}\left[e^{i(\pi + \phi - \psi)}\right] =$$

$$= a_1^2 + a_2^2 + a_4^2 - 2a_1a_4\cos(\pi + \phi) - 2a_1a_2\cos\psi$$

$$+ 2a_2a_4 \cos(\pi + \phi - \psi)$$

Así,

$$a_3^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_4^2 + 2a_1a_4 \cos\phi - 2a_1a_2 \cos\psi$$

$$- 2a_2a_4 \cos(\phi - \psi).$$

Llamando

$$\frac{a_3^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_4^2}{2a_2a_4} = K_1, \quad \frac{a_1}{a_2} = k_2, \quad \frac{a_1}{a_4} = K_3 \qquad (2.2.6c)$$

la última ecuación se convierte en

$$K_1 - K_2 \cos\phi + K_3 \cos\psi + \cos(\phi - \psi) = 0 \qquad (2.2.7)$$

que es la llamada *ecuación de Freudenstein* (ref 2.1)

La ec 2.2.7 define una función implícita de ψ, y es de la forma de la ec 2.2.1. La salida, ϕ, en términos de la entrada, ψ, se puede obtener de la ec 2.2.7 despejando cos ϕ. Esto se consigue desarrollando el término cos $(\phi - \psi)$ y sustituyendo sen ϕ por $\sqrt{1 - \cos^2\phi}$, lo cual conduce a una ecuación cuadrática en cos ϕ que, cuando se resuelve sustituyendo en ella los valores de ψ: $0 \leq \psi \leq 2\pi$, y se invierte el valor resultante (es decir, se obtiene el ángulo cuyo coseno es ϕ), se llega a los valores deseados de la salida, ϕ. Este proceso en realidad no es muy eficiente, pues requiere la solución de una ecuación cuadrática para cada valor de ψ comprendido en el inter valo de interés, lo cual es claro que tiene que hacerse en una computadora digital, introduciéndose así, inevitablemente, cierto error de redondeo. Ya que el resultado obtenido está afectado por ese error, parece preferible obtener la salida, ϕ, numéricamente a partir de la ec 2.2.7, calculando el valor de ϕ que corresponde a cada valor de ψ, por medio de algún método numérico para la solución de una ecuación algebraica no lineal, como lo proponen James, Smith y Wolford (ref 2.2), que presentan un programa en Fortran IV donde, por el método de Newton-Raphson, resuelven una ecuación algebraica no lineal.

Una desventaja que tiene el programa de los autores mencionados es la siguiente: Dado que la ecuación de Freudenstein se puede transformar en una ecuación cuadrática en cos ϕ (¡Compruébelo!), para cada valor de ψ hay dos valores de ϕ que la satisfacen. A esos dos valores de ϕ corresponden dos configuraciones diferentes del mecanismo, llamadas *conjugadas* (fig 2.2.4).

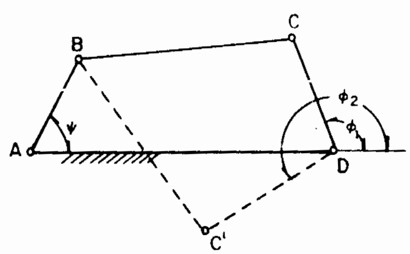


Fig 2.2.4 Configuraciones conjugadas de un mecanismo plano de cuatro eslabones

En la misma figura, para el valor dado de ψ, existen dos valores de ϕ : ϕ_1 y ϕ_2, correspondientes a las dos configuraciones, ABCD y ABC'D, conjugadas. En ese programa todas las iteraciones de Newton-Raphson, para un conjunto de valores de ψ comprendidos entre 0 y 2π, se inician con el mismo valor. En estas condiciones, existe el peligro de que el programa comience a obtener una configuración y termine obteniendo la conjugada. Esta situación se evita en la subrutina SALIDA, elaborada por Cándido Palacios (ref.2.3). En la fig 2.2.5 se presenta dicha subrutina; en la tabla 2.2.1 y en la fig 2.2.7 se muestran los resultados, numéricos y gráficos, del análisis cinemático de un mecanismo de barras articuladas con las siguientes dimensiones:

$$a_1 = 0.200 \qquad a_2 = 0.080 \qquad a_3 = 0.200 \qquad a_4 = 0.240$$

En la subrutina SALIDA se emplea otra, la DYDX, que aparece en la fig 2.2.6, y que calcula numéricamente la derivada de una función periódica. Con esta subrutina se calcularon la velocidad y la aceleración del eslabón de salida.

Ejercicio 2.2.1. Por el método de Newton-Raphson obtenga la salida $\phi(t)$ a intervalos de $\Delta\psi = 0.01$, cuando $\psi(t) = t$, para las siguientes longitudes de las barras

a) $a_1 = a_3 = 2a_2 = a_4 = 1$

b) $a_1 = a_2 = a_3 = 1$, $a_4 = 2$

```
      SUBROUTINE SALIDA(A,PSI,PHI,OMEGA,ALFA,EPSIL,MAX,ITER,F,DF,R,N,M,
     *OMEG2)
C     ESTA SUBRUTINA CALCULA LA RESPUESTA CINEMATICA DE UN MECANISMO
C     PLANO RRRR, POR EL METODO DE NEWTON-RAPHSON, APLICADO A LA ECUACION
C     DE FREUDENSTEIN, PARA UNA VELOCIDAD ANGULAR CONSTANTE DEL ESLABON 2.
C     EN ESTE PROGRAMA ITER ES UN VECTOR QUE INDICA EL NUMERO DE
C     ITERACIONES NECESARIAS PARA LLEGAR A LA CONVERGENCIA, DESPUES DE
C     CADA VALOR CALCULADO DE PHI. EL VALOR CALCULADO DE PHI ES EL VALOR
C     SUPUESTO INICIAL PARA LA SIGUIENTE ITERACION.
C     OMEGA ES LA VELOCIDAD ANGULAR DE LA BARRA DE SALIDA 4
C     EN REVOLUCIONES POR MINUTO. ESTA VELOCIDAD ANGULAR SE CALCULA
C     A PARTIR DE PHI POR MEDIO DE LA SUBRUTINA DYDX.
C     A(1),A(2),A(3),A(4), SON LAS LONGITUDES DE LOS ESLABONES.
C     1 ES EL ESLABON FIJO.
C     2 ES EL ESLABON DE ENTRADA.
C     3 ES EL ESLABON ACOPLADOR.
C     4 ES EL ESLABON DE SALIDA.
C     EL PROGRAMA FUNCIONA SI LA BARRA ACOPLADORA GIRA 360 GRADOS.
C     EN CASO CONTRARIO, MANDA UN MENSAJE Y PARA.
C     PSI=ANGULO DE ENTRADA.
C     PHI=ANGULO DE SALIDA.
C     LOS RESULTADOS SE IMPRIMEN CADA N-DECIMAS DE GRADO.
C     LA RESPUESTA CINEMATICA SE CALCULA CADA DECIMA DE GRADO.
C     R, ES UN VECTOR QUE INDICA LA RELACION ENTRE LAS MAGNITUDES DE LOS
C     ESLABONES. SUS COMPONENTES SON CONSTANTES.
C     N, ES UN NUMERO DADO POR EL USUARIO QUE INDICA CUANTAS DECIMAS DE
C     GRADO SE ESCRIBIRAN LOS RESULTADOS.
C     M, ES EL NUMERO DE RAICES DE PHI PARA LA BARRA ACOPLADORA EN UN
C     CICLO COMPLETO DE ESTA.
C     DELTA, CORRESPONDE A UNA DECIMA DE GRADO DE ENTRADA EN LA BARRA DOS
C     Y ES EL VALOR ARBITRARIO INICIAL PARA CADA ITERACION.
C     EL VALOR INICIAL DE PHI PARA LAS ITERACIONES SIGUIENTES A PHI(1) ES
C     LA 'RAIZ' CALCULADA DE PHI ANTERIORMENTE.
C     F=FREU, ES EL NOMBRE DE LA FUNCION DE FREUDENSTEIN PARA EL MECANISMO
C     DE CUATRO ESLABONES.
C     DF=DFREU, ES LA DERIVADA DE LA FUNCION DE FREUDENSTEIN CON RESPECTO
C     A PHI.
          DIMENSION A(5),R(3)
          DIMENSION OMEGA(361),ALFA(361),ITER(361),PHI(361)
C
C     CONDICIONES PARA QUE LA BARRA CONDUCTORA GIRE 360GRADOS.
          B=A(3)+A(4)
          IF(A(1)-A(2)) 2,1,3
    2     IF(B-(A(1)-A(2))) 4,4,5
    1     IF(A(3)-A(4)) 4,5,4
    3     IF(B-(A(2)-A(1))) 4,4,5
    4     WRITE(3,601)
          CALL EXIT
C
C
C     CALCULO DE LOS PARAMETROS DE LA SUBRUTINA SALIDA.
    5     R(1)=(A(3)*A(3)-A(1)*A(1)-A(2)*A(2)-A(4)*A(4))/(2.*A(2)*A(4))
          R(2)=A(1)/A(2)
          R(3)=A(1)/A(4)
          PI=4.*ATAN(1.0)
          DOSPI=2.*PI
          DELTA=PI/180.
C
C     CICLO ITERATIVO DE NEWTON-RAPHSON.
```

Fig 2.2.5 Listado de la Subrutina SALIDA


```
          DO 20 K=1,M
          ITER(K)=0
          IF(K-1) 7,6,7
    6     PHIVI=PHI(K)
          GO TO 8
    7     PHIVI=PHI(K-1)
    8     F=FREU(R,PSI,PHIVI)
          DF=DFREU(R,PSI,PHIVI)
          PHI(K)=PHIVI-F/DF
          IF(ABS(PHI(K)-PHIVI)-EPSIL) 12,12,9
    9     PHIVI=PHI(K)
          IF(ITER(K)-MAX) 10,10,11
   10     ITER(K)=ITER(K)+1
          GO TO 8
   11     WRITE(3,602)
          CALL EXIT
C     EN LA SIGUIENTE PROPOSICION LA RUTINA DE BIBLIOTECA MODULO SE
C     SE LLAMA PARA ?TIRAR? EL NUMERO DE VUELTAS QUE SEA MULTIPLO DE DOSPI
C     Y DEJAR SOLO EL RESIDUO.
C     SI EL RESIDUO LLEGARA A SER NEGATIVO LE SUMAMOS DOSPI PARA TENER
C     EL ANGULO MEDIDO EN SENTIDO HORARIO.
   12     PHI(K)=AMOD(PHI(K),DOSPI)
          IF(PHI(K)) 13,14,14
   13     PHI(K)=PHI(K)+DOSPI
   14     IF(PSI-DOSPI) 15,20,20
   15     PSI=PSI+DELTA
   20     CONTINUE
C
C     CALCULO DE LA VELOCIDAD ANGULAR OMEGA EN R.P.M.
          CALL DYDX(DELTA,PHI,OMEGA,N,OMEG2)
C     CALCULO DE LA ACELFRACION ANGULAR ALFA EN R.P.M./SEG
          P=OMEG2/60.
          CALL DYDX(DELTA,OMEGA,ALFA,N,P)
C
  601 FORMAT(45X,?LA BARRA CONDUCTORA NO GIRA 360 GRADOS?)
  602 FORMAT(///50X,?DEMASIADAS ITERACIONES?///)
      RETURN
      END
```

Fig 2.2.5 (CONTINUACION)

```
      SUBROUTINE DYDX(DELTA,Y,DY,N,P)
C     ESTA SUBROUTINA CALCULA LA DERIVADA DE LA FUNCION PERIODICA Y,
C     EN UN PERIODO,POR SEGUNDAS DIFERENCIAS CENTRALES.LA DERIVADA
C     CALCULADA ES DY.P ES UN PARAMETRO UTIL PARA EL USUARIO.
      DIMENSION Y(3601),DY(3601)
      M=N-1
      DO 100 I=1,M
      IP2=I+2
      IP1=I+1
      IL1=I-1
      IL2=I-2
      IF(I-2) 5,10,15
 5    IL1=M-1
      IL2=M-2
      GO TO 99
 10   IL2=M-1
 15   CONTINUE
      IF(I-M)99,30,40
 30   IP2=2
      GO TO 99
 40   IP2=3
      IP1=2
 99   DY(I)=(-Y(IP2)+8.*Y(IP1)-8.*Y(IL1)+Y(IL2))
 100  DY(I)=P*DY(I)/(12.*DELTA)
    RETURN
    END
```

Fig 2.2.6 Listado de la Subrutina DYDX

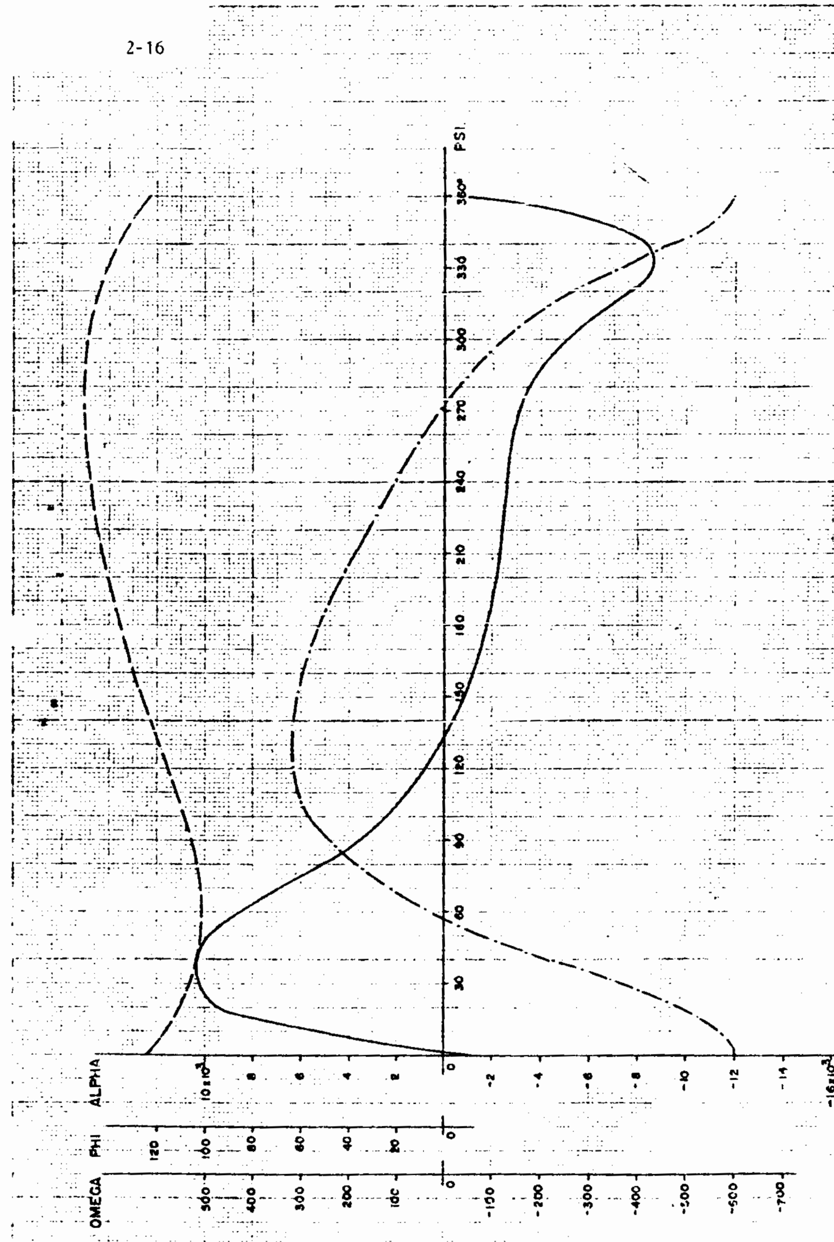


Fig 2.2.7 Curvas de desplazamiento, velocidad y aceleración angulares de un mecanismo plano RRRR

TABLA 2.2.1. RESPUESTA CINEMATICA DE UN MECANISMO PLANO RRRR*

LONGITUDES DE LAS BARRAS

A(1)	A(2)	A(3)	A(4)
0.200000	0.080000	0.200000	0.240000

PARAMETROS DEL PROGRAMA

PSI	PHI	EPSIL	OMEG2	N	MAX	M
0.000000	1.570790	0.000001	900.	361	10	10

ITER	PSI (GRADOS)	PHI (GRADOS)	OMEGA (R. P. M.)	ALFA (R.P.M.)/SEG.
3	0.	.123749E+03	-.600000E+03	-.100222E+04
2	.100000E+02	.117153E+03	-.575064E+03	.525822E+04
2	.200000E+02	.111220E+03	-.483409E+03	.100822E+05
2	.300000E+02	.106560E+03	-.351448E+03	.121350E+05
2	.400000E+02	.103444E+03	-.210119E+03	.118597E+05
1	.500000E+02	.101847E+03	-.802188E+02	.103465E+05
1	.600000E+02	.101584E+03	.292218E+02	.844919E+04
2	.700000E+02	.102415E+03	.116679E+03	.661391E+04
2	.800000E+02	.104103E+03	.184038E+03	.500720E+04
2	.900000E+02	.106441E+03	.234202E+03	.365682E+04
2	.100000E+03	.109254E+03	.270023E+03	.253560E+04
2	.110000E+03	.112397E+03	.293942E+03	.160399E+04
2	.120000E+03	.115749E+03	.307938E+03	.824503E+03
2	.130000E+03	.119209E+03	.313605E+03	.167999E+03
2	.140000E+03	.122692E+03	.312245E+03	-.385975E+03
2	.150000E+03	.126126E+03	.304969E+03	-.850624E+03
2	.160000E+03	.129451E+03	.292764E+03	-.123415E+04
2	.170000E+03	.132617E+03	.276541E+03	-.154232E+04
2	.180000E+03	.135585E+03	.257143E+03	-.178088E+04
2	.190000E+03	.138323E+03	.235338E+03	-.195753E+04
2	.200000E+03	.140808E+03	.211788E+03	-.208312E+04
2	.210000E+03	.143024E+03	.187005E+03	-.217194E+04
2	.220000E+03	.144960E+03	.161320E+03	-.224136E+04
2	.230000E+03	.146606E+03	.134844E+03	-.231129E+04
2	.240000E+03	.147953E+03	.107446E+03	-.240388E+04
2	.250000E+03	.148989E+03	.787203E+02	-.254366E+04
1	.260000E+03	.149695E+03	.479544E+02	-.275970E+04
1	.270000E+03	.150043E+03	.140742E+02	-.308530E+04
1	.280000E+03	.149991E+03	-.244294E+02	-.356188E+04
1	.290000E+03	.149476E+03	-.695827E+02	-.423648E+04
2	.300000E+03	.148411E+03	-.123959E+03	-.515293E+04
2	.310000E+03	.146676E+03	-.190477E+03	-.631836E+04
2	.320000E+03	.144124E+03	-.271550E+03	-.761787E+04
2	.330000E+03	.140569E+03	-.366773E+03	-.864789E+04
2	.340000E+03	.135944E+03	-.468416E+03	-.853484E+04
2	.350000E+03	.130229E+03	-.556354E+03	-.611615E+04
2	.360000E+03	.123749E+03	-.600000E+03	-.100222E+04

* RRRR significa cuatro articulaciones o pares de revolución

c) $a_1 = a_3 = 1$, $a_2 = 2$, $a_4 = 3$

d) $a_1 = 2$, $a_2 = a_3 = a_4 = 1$

e) $a_1 = a_2 = a_4 = 1$, $a_3 = 2$

¿Qué observa usted en sus resultados?

Ejercicio 2.2.2. Obtenga una relación entrada-salida, semejante a la ec 2.2.7, para los siguientes mecanismos.

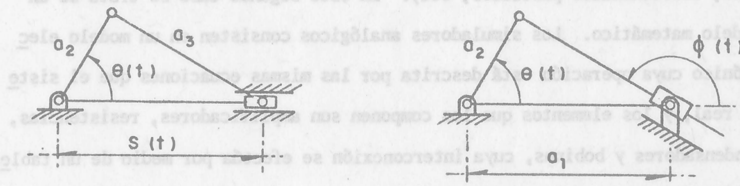


Fig 2.2.8 Mecanismos planos que contienen un "par prismático"

2.3 *Uso de simuladores analógicos en el análisis de mecanismos*

Una alternativa para resolver la ecuación de Freudenstein* para obtener la relación entrada-salida es utilizando simuladores analógicos. Para tener idea de lo que es un simulador, es necesario introducir un concepto preliminar, el de sistema. La palabra sistema tiene diferentes significados. Cada persona usa esta palabra para referirse a distintos objetos, pero lo que aquí se quiere dar a entender por sistema es la idea de Shigley (ref. 2.4): "una combinación de elementos, algunos de ellos muy elusivos (como los

* O cualquier otra ecuación semejante, como las que surgen del ejercicio 2.2.2.

canales de comunicación), arreglados de manera específica en forma tal que diferentes excitaciones o perturbaciones provocan respuestas determinadas."*

La simulación, como lo apunta Shigley, se refiere a dos sistemas -uno real y un modelo de él-, donde por sistema real ha de entenderse algo que exista físicamente, por ejemplo, una máquina de combustión interna o una refinería de petróleo. El modelo al que se hace mención puede ser diferentes cosas, ya sea otro modelo físico (por ejemplo, un circuito electrónico) o un sistema de ecuaciones (algebraicas, diferenciales ordinarias, diferenciales parciales, etc). En este segundo caso se trata de un modelo matemático. Los simuladores analógicos consisten en un modelo electrónico cuya operación está descrita por las mismas ecuaciones que el sistema real, y los elementos que los componen son amplificadores, resistencias, condensadores y bobinas, cuya interconexión se efectúa por medio de un tablero, con su alambrado correspondiente.

Un dispositivo como el descrito en el párrafo anterior se conoce también con el nombre de *computadora analógica*, porque realiza operaciones de computación por medio de analogías físicas. Otro tipo de simulador analógico es aquel que funciona formalmente de manera idéntica a la computadora analógica, pero internamente se diferencia de esta en que las operaciones las realiza no por analogías físicas, sino por medio de computación digital. En la UNAM existe el SAS (refs 2.5 y 2.6), que es el usado en estas notas.

Este simulador comprende las ventajas de la computadora analógica y de la digital, pues, además de que no se requiere tener conocimientos de programación ni de métodos numéricos para su uso, realiza las operaciones

---

* Desde luego esta definición no comprende a ciertos sistemas como los estocásticos.

con la rapidez de una computadora digital.

Para resolver la ecuación de Freudestein en el SAS II, derívense sus dos miembros con respecto a t, obteniendo:

$$\dot{\phi} = \frac{K_3 \text{ sen } \psi + \text{sen } (\psi - \phi)}{K_2 \text{ sen } \phi + \text{sen } (\psi - \phi)} \dot{\psi} \qquad (2.3.1)$$

cuyo diagrama de alambrado para simulación analógica es el de la fig 2.3.1.

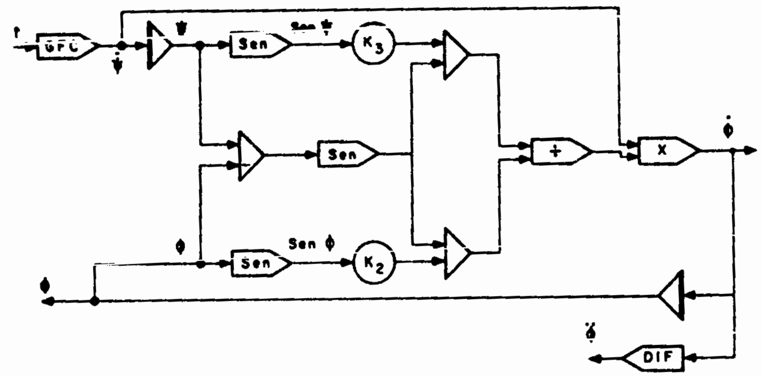


Fig 2.3.1 Realización analógica de la ec 2.3.1

Nótese que este diagrama requiere la especificación del valor inicial ψ_0, el cual se obtiene haciendo $\phi = 0$ en la ec 2.2.7, es decir

$$\psi_0 = \cos^{-1} \frac{K_2 - K_1}{K_3 + 1}$$

% MECANISMO DE CUATRO BARRAS.

ALAMBRADO

NUM/BL	TIPO	ENT 1	ENT 2	ENT 3	ENT 4	ENT 5	ENT 6	ENT
22	TIE	0	0	0	0	0	0	0
12	SEN	22	0	0	0	0	0	0
15	SUM	22	-23	0	0	0	0	0
24	SEN	23	0	0	0	0	0	0
10	SEN	15	0	0	0	0	0	0
9	POT	5	0	0	0	0	0	0
18	POT	12	0	0	0	0	0	0
19	POT	24	0	0	0	0	0	0
13	SUM	10	18	0	0	0	0	0
17	SUM	10	19	0	0	0	0	0
5	DIV	13	17	0	0	0	0	0
23	INT	9	0	0	0	0	0	0
25	DIF	20	0	0	0	0	0	0
20	POT	9	0	0	0	0	0	0
21	POT	23	0	0	0	0	0	0

BLOQUE NUM.	DATOS
9	1.00000000
18	0.50000000
19	0.50000000
23	0.82303369
20	0.10471976
21	57.29577951

PARAMETROS DE CONTROL

LIM= 4

CONVG= 1.00000000

TCERO= 0.00000000

INVALO= 0.01745329

NOINVALO= 1

NOINCRE= 360

MAGNITUD DEL INCREMENTO= 0.01745329

RESULTADO

BLOQUE NUM.	COEF.	NUMERICO	GRAFICO	ESCALA	ESCTIE	PUNTOS
21	0	1	1	1	0	1
20	0	1	1	2	0	1
25	0	1	1	3	0	1

Fig 2.3.2 Programa SAS II *que implementa el diagrama de la fig 2.3.1*

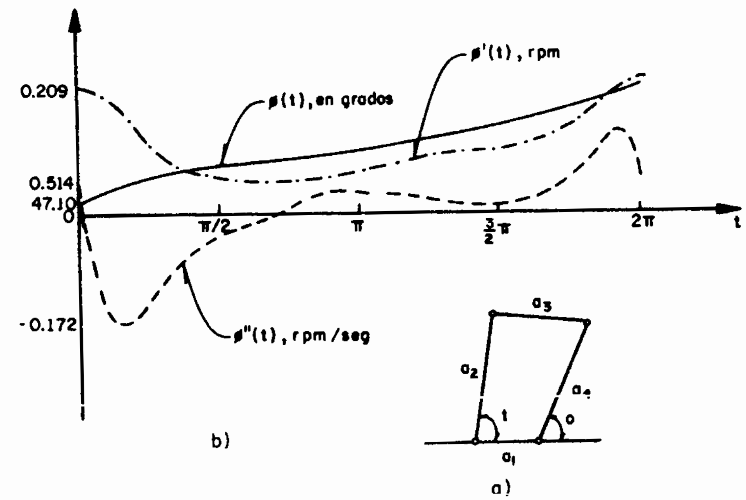


Fig 2.3.3 Curvas de desplazamiento, velocidad y aceleración angulares de un mecanismo de cuatro eslabones

En la fig 2.3.2 se muestra el programa SAS II que analiza el mecanismo para el cual

$a_1 = 1.00 \qquad a_2 = 2.00 \qquad a_3 = 1.500 \quad y \quad a_4 = 2.00$

En la fig 2.3.3 aparecen el mecanismo y las curvas de desplazamiento, velocidad y aceleración angulares que se obtuvieron con el SAS II.

2.4 Trayectorias de los puntos de la barra acopladora

En el mecanismo de cuatro barras de la fig 2.2.2, la barra 2, con la cual se acciona el mecanismo, recibe el nombre de barra motriz o conductora, mientras que la barra 4, que es de la cual se toma la salida, recibe el nombre de barra movida o conducida. La barra 3, que acopla la conductora con la conducida, por razones obvias recibe el nombre de barra acopladora.

En múltiples aplicaciones, no es el movimiento mismo de la barra conducida lo que interesa, sino el de la barra acopladora. Por ejemplo, en el mecanismo de seis eslabones de la Fig 2.4.1, donde el eslabón conductor 2 acciona al eslabón 6 a través del movimiento del punto P del eslabón 3. Si se desea que el eslabón 6 - tenga un intervalo finito de reposo (el tiempo que tarda un obrero en quitar una pieza manufacturada de una máquina y - poner una nueva por manufacturar, por ejemplo), es necesario que el punto P describa una trayectoria que contenga un arco de círculo pues, al recorrer P esa sección de su trayectoria, el punto Q permanecerá quieto y, en consecuencia, también el eslabón 6.

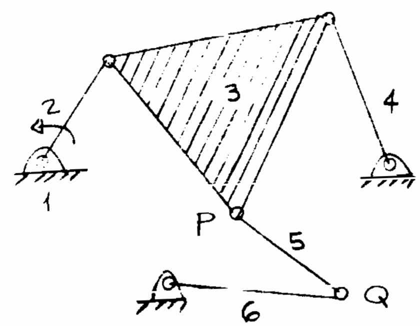


Fig 2.4.1 Mecanismo de seis eslabones articulados

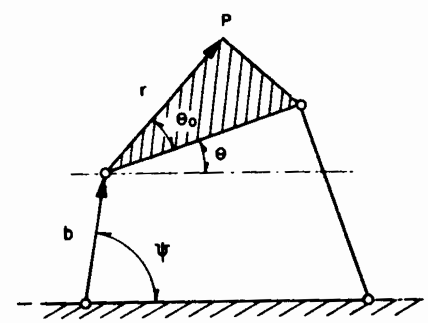


Fig 2.4.2 Localización de un punto de la barra acopladora

Haciendo referencia a la ec 2.2.5, despéjese en ella el término que contiene a ϕ (la salida, que ahora no interesa) y escríbase la ecuación que resulta al tomar el complejo conjugado de ambos miembros de la ec 2.2.5, obteniéndose:

$$a_4 e^{i(\pi + \phi)} = a_1 e^{i0} - a_2 e^{i\psi} - a_3 e^{i\theta} \qquad (2.4.1a)$$

$$a_4 e^{-i(\pi + \phi)} = a_1 e^{i0} - a_2 e^{-i\psi} - a_3 e^{-i\theta} \qquad (2.4.1b)$$

Multiplíquense ambas ecuaciones miembro a miembro, y redúzcase la ecuación resultante en la forma que se hizo con la ecuación de Freudenstein, obteniéndose:

$$L_1 + L_2 \cos \psi + L_3 \cos \theta - \cos (\psi - \theta) = 0 \qquad (2.4.2)$$

donde

$$L_1 = \frac{a_4^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2}{2a_2 a_3}, \quad L_2 = \frac{a_1}{a_3}, \quad L_3 = \frac{a_1}{a_2} \qquad (2.4.2a)$$

Obsérvese que la ec 2.4.2 es formalmente idéntica a la de Freudenstein; por tanto, todo lo que se dijo referente a esta, se aplica a la ec 2.4.2. Ahora bien, supóngase que se desea obtener la trayectoria del punto P de la barra acopladora del mecanismo de la fig 2.4.2.

Llamando p al número complejo cuyos componentes son idénticos a las coordenadas de P, se tiene

$$p = b + r \qquad (2.4.3)$$

donde

$$b = a_2 e^{i\psi} \qquad (2.4.4a)$$

$$r = |r| e^{i(\theta + \theta_0)} \qquad (2.4.4b)$$

Así, de la ec 2.4.3

$$p = a_2 e^{i\psi} + |r| e^{i(\theta + \theta_0)} \qquad (2.4.5)$$

donde a_2, $|r|$ y θ_0 son constantes y θ se obtiene de la ec 2.4.2. Nótese que la velocidad y la aceleración del punto P se pueden obtener derivando ambos miembros de la ec 2.4.5.

Con las trayectorias de diferentes puntos de la barra acopladora para diferentes mecanismos, Hrones y Nelson (ref 2.8) han construido un atlas, mediante el cual el diseño de mecanismos se reduce a una simple selección de aquel que contenga el punto cuya trayectoria satisface mejor la necesidad del diseñador. Sin embargo, en esta sección se presenta un método racional de análisis de un mecanismo, sin tener que recurrir al atlas citado.

La subrutina CURVAS (fig 2.4.3), escrita también por el ingeniero Palacios (ref. 2.3), es útil para obtener la trayectoria de los puntos de la barra acopladora; en la tabla 2.4.1 y en la fig 2.4.4 se presentan los resultados numéricos y gráficos del programa escrito para este objeto.

```
      SUBROUTINE CURVAS(A,PSI,THETA, MAX,EPSIL,ITER,XO,YO,R,N,
     * M,DELTA,F,DF,BETA)
C     ESTA SUBRUTINA CALCULA LA TRAYECTORIA DE LOS PUNTOS DE LA BARRA
C     ACOPLADORA POR EL METODO DE NEWTON-RAPHSON,APLICADO A LA ECUACION
C     DE FREUDENSTEIN.
C     A(1),A(2),A(3),A(4) SON LAS LONGITUDES DE LOS ESLABONES.
C     A(5) ES LA MAGNITUD DEL VECTOR QUE VA DEL PAR B QUE FORMAN
C     LAS BARRAS DOS Y TRES,FORMANDO BETA GRADOS CON LA BARRA TRES,
C     MEDIDO EN SENTIDO CONTRARIO A LAS MANECILLAS DEL RELOJ.
C     1 ES EL ESLABON FIJO.
C     2 ES EL ESLABON DE ENTRADA.
C     3 ES EL ESLABON ACOPLADOR
C     4 ES EL ESLABON DE SALIDA.
C     EL PROGRAMA FUNCIONA SI LA BARRA CONDUCTORA GIRA 360 GRADOS.
C     EN CASO CONTRARIO,MANDA UN MENSAJE Y PARA.
C     PSI =ANGULO DE ENTRADA.
C     THETA ANGULO DE SALIDA.
C     BETA  =ANGULO QUE FORMA EL VECTOR DE MAGNITUD A(5) CON LA BARRA
C     ACOPLADORA.
C     THETA   =ANGULO QUE FORMA LA BARRA ACOPLADORA CON LA HORIZONTAL
C     LOS RESULTADOS SE IMPRIMEN CADA M DECIMAS DE GRADO.
C     ITER  ES UN VECTOR QUE CONTIENE EL NUMERO DE ITERACIONES HECHAS
C     PARA LLEGAR A CADA CONVERGENCIA.
C     R ES UN VECTOR QUE CONTIENE LA RELACION ENTRE LAS MAGNITUDES DE
C     LOS ESLABONES.SUS COMPONENTES SON CONSTANTES.
C     M ES UN NUMERO DADO POR EL USUARIO QUE INDICA CADA CUANTAS DECIMAS
C     DE GRADO SE ESCRIBIRAN LOS RESULTADOS.
C     N ES EL NUMERO DADO DE INCREMENTOS DELTA.
C     DELTA  CORRESPONDE A UNA DECIMA DE GRADO DE ENTRADA EN LA BARRA
C     DOS.
C     XO ES LA ABCISA DEL PUNTO O EN UNIDADES DE LONGITUD.
C     YO  ES LA ORDENADA DEL PUNTO O EN UNIDADES DE LONGITUD.
C     EL VALOR INICIAL DE THETA PARA LAS ITERACIONES SIGUIENTES A
C     THETA(1) ES EL VALOR  CALCULADO DE THETA ANTERIORMENTE.
C     F=FREU  ES EL NOMBRE DE LA FUNCION DE FREUDENSTEIN PARA EL
C     MECANISMO DE CUATRO ESLABONES.
C     DF=DFREU ES LA DERIVADA DE LA FUNCION DE FREUDENSTEIN CON RESPECTO
C     A THETA.
      DIMENSION A(5),THETA(3601),ITER(3601),XO(3601),YO(3601),R(3)
      COMMON PI
C
      LOGICAL L1,L2,L3
      L1=.FALSE.
      L2=.FALSE.
      L3=.FALSE.
C
C     CONDICIONES PARA QUE LA BARRA CONDUCTORA GIRE 360 GRADOS.
      IF(A(2).LT.A(1).AND.(A(3)+A(4)).GT.(A(1)-A(2)))L1=.TRUE.
      IF(A(2).GT.A(1).AND.(A(3)+A(4)).GT.(A(2)-A(1)))L2=.TRUE.
      IF((A(3)+A(4)).GT.(A(1)+A(2)))L3=.TRUE.
      IF((L1.OR.L2).AND.L3) GO TO 1
      IF(A(1).EQ.A(2).AND.A(3).EQ.A(4))GO TO 1
      WRITE(6,601)
      CALL EXIT
```

Fig 2.4.3 Listado de la Subrutina CURVAS


```
C
C     CALCULO DE LOS PARAMETROS DE ESTA SUBRUTINA.
    1 R(1)=-((A(4)*A(4)-A(1)*A(1)-A(2)*A(2)-A(3)*A(3))/
     * (2.*A(2)*A(3)))
      R(2)=A(1)/A(2)
      R(3)=-(A(1)/A(3))
      PI=4.0*ATAN(1.0)
      DOSPI=2.*PI
      DELTA=PI/1800.
C
C     CICLO ITERATIVO DE NEWTON-RAPHSON.
      DO 8 K=1,N
            ITER(K)=0
            IF(K.EQ.1)THETAV=THETA(K)
            IF(K.NE.1)THETAV=THETA(K-1)
    2       F=FREU(R,PSI,THETAV)
            DF=DFREU(R,PSI,THETAV)
            THETA(K)=THETAV-F/DF
            IF(ABS(THETA(K)-THETAV)-EPSIL)3,3,4
    3       IF(ABS(R(1)-R(2)*COS(THETA(K))+R(3)*COS(PSI)+
     *      COS(PSI-THETA(K)))-EPSIL)7,7,4
    4       THETAV=THETA(K)
            IF(ITER(K)-MAX)5,5,6
    5       ITER(K)=ITER(K)+1
            GO TO 2
    6       WRITE(6,602)
            CALL EXIT
C     EN LA SIGUIENTE PROPOSICION LA RUTINA DE BIBLIOTECA MODULO SE
C     LLAMA PARA EVITAR ANGULOS MAYORES DE 360 GRADOS.
C     SI EL RESIDUO LLEGARA A SER NEGATIVO SE LE SUMA DOSPI PARA TENER
C     UN ANGULO POSITIVO.
    7       THETA(K)=AMOD(THETA(K),DOSPI)
            IF(THETA(K).LT.0.) THETA(K)=THETA(K)+DOSPI
C
C     CALCULO DE LAS COORDENADAS DEL PUNTO O CON ORIGEN EN LA UNION DE
C     LA BARRA FIJA Y LA MANIVELA.EL EJE HORIZONTAL HACIA LA DERECHA Y
C     EL EJE VERTICAL HACIA ARRIBA COMO POSITIVOS.
            XO(K)=A(2)*COS(PSI)+A(5)*COS(THETA(K)+BETA)
            YO(K)=A(2)*SIN(PSI)+A(5)*SIN(THETA(K)+BETA)
            PSI=PSI+DELTA
    8  CONTINUE
C
  601  FORMAT(45X,'LA BARRA CONDUCTORA NO GIRA 360 GRADOS')
  602  FORMAT(///50X, 'DEMASIADAS ITERACIONES'//)
      RETURN
      END
```

Fig 2.4.3 Listado de la subrutina CURVAS (CONTINUACION)

TABLA 2.4.1 TRAYECTORIA DE UN PUNTO DE LA BARRA ACOPLADORA DE UN MECANISMO PLANO R-R-R-R

LONGITUDES DE LAS BARRAS

A(1)	A(2)	A(3)	A(4)	A(5)	BETA
0.200000	0.080000	0.200000	0.240000	0.215600	0.523600

PARAMETROS DEL PROGRAMA

PSI	THETA	EPSIL	N	MAX	I
0.000000	1.570790	0.000001	3601	10	100

ITER	PSI (GRADOS)	THETA (GRADOS)	XQ (UNIDADES DE LONGITUD)	YQ (UNIDADES DE LONGITUD)
2	0.	.938226E+02	-.400081E-01	.179113E+00
1	.100000E+02	.866499E+02	-.179203E-01	.206587E+00
1	.200000E+02	.790302E+02	.476862E-02	.231142E+00
1	.300000E+02	.718465E+02	.250211E-01	.251008E+00
1	.400000E+02	.655060E+02	.405966E-01	.266028E+00
1	.500000E+02	.602295E+02	.505530E-01	.276882E+00
1	.600000E+02	.560112E+02	.549972E-01	.284360E+00
1	.700000E+02	.527550E+02	.545479E-01	.289055E+00
1	.800000E+02	.503459E+02	.500478E-01	.291331E+00
1	.900000E+02	.486716E+02	.423507E-01	.291400E+00
1	.100000E+03	.476426E+02	.322482E-01	.289390E+00
1	.110000E+03	.471392E+02	.204437E-01	.285409E+00
1	.120000E+03	.472594E+02	.754743E-02	.279574E+00
1	.130000E+03	.478161E+02	-.592081E-02	.272027E+00
1	.140000E+03	.488322E+02	-.195259E-01	.262941E+00
1	.150000E+03	.502879E+02	-.329109E-01	.252510E+00
1	.160000E+03	.521661E+02	-.457872E-01	.240950E+00
1	.170000E+03	.544505E+02	-.579350E-01	.228481E+00
1	.180000E+03	.571217E+02	-.691738E-01	.215328E+00
1	.190000E+03	.601558E+02	-.793713E-01	.201707E+00
1	.200000E+03	.635230E+02	-.884242E-01	.187831E+00
1	.210000E+03	.671861E+02	-.962522E-01	.173906E+00
1	.220000E+03	.711003E+02	-.102793E+00	.160143E+00
1	.230000E+03	.752132E+02	-.107999E+00	.146761E+00
1	.240000E+03	.794637E+02	-.111840E+00	.133997E+00
1	.250000E+03	.837813E+02	-.114302E+00	.122118E+00
1	.260000E+03	.880840E+02	-.115389E+00	.111430E+00
1	.270000E+03	.922744E+02	-.115125E+00	.102290E+00
1	.280000E+03	.962344E+02	-.113547E+00	.951195E-01
1	.290000E+03	.998173E+02	-.110696E+00	.904246E-01
1	.300000E+03	.102838E+03	-.106592E+00	.888137E-01
1	.310000E+03	.105059E+03	-.101136E+00	.910117E-01
1	.320000E+03	.106186E+03	-.942918E-01	.978407E-01
1	.330000E+03	.105375E+03	-.854306E-01	.110106E+00
1	.340000E+03	.103788E+03	-.740172E-01	.128282E+00
1	.350000E+03	.997258E+02	-.590072E-01	.151929E+00
1	.360000E+03	.938226E+02	-.400081E-01	.179113E+00

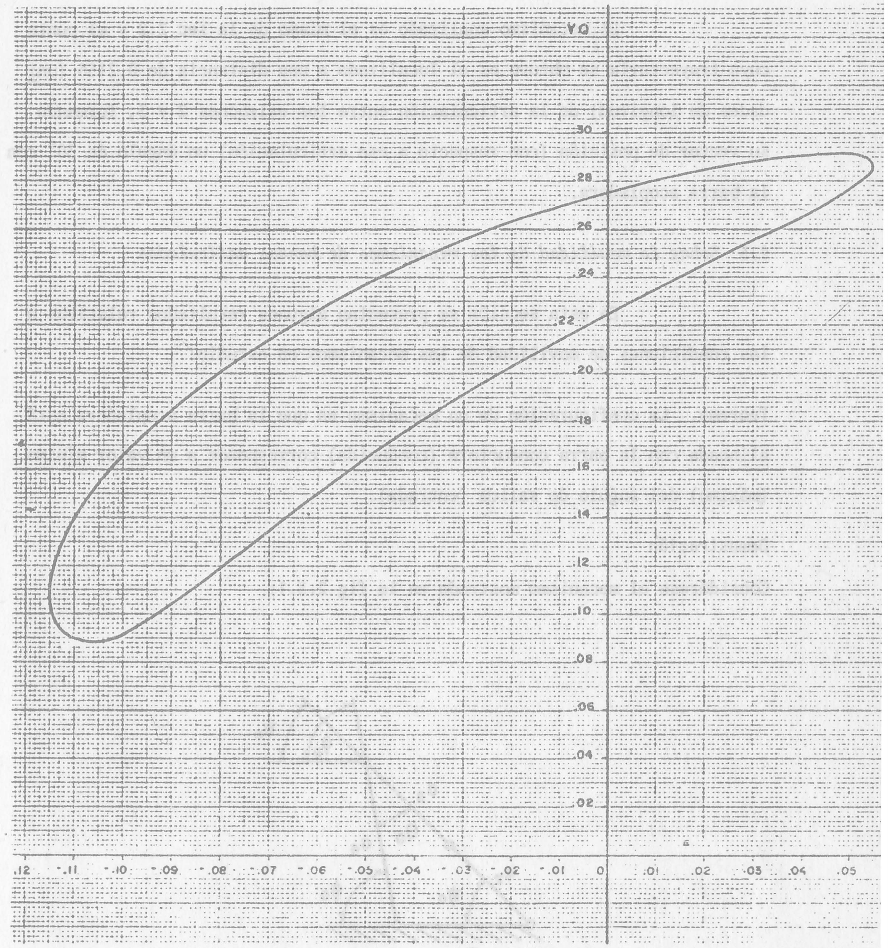


Fig 2.4.4 Trayectoria de un punto de la barra acopladora de un mecanismo plano de cuatro eslabones

El mecanismo analizado es el mismo de la sec 2.2 y el punto cuya trayectoria se obtuvo es el localizado a una distancia de 0.2156 (unidades de longitud) de la articulación entre los eslabones 2 y 3, formando su vector de posición (con respecto a esa articulación) un ángulo de 30° con la barra acopladora.

2.5 *Sobre la movilidad de los mecanismos de barras articuladas*

En esta sección se presentan algunos resultados relativos a las condiciones de movilidad de los mecanismos en estudio.

Teorema. La configuración de un mecanismo en que la barra acopladora está alineada con la barra conductora (conducida) corresponde a un valor mínimo (máximo) del ángulo de salida (entrada).

Demostración

Considérese el mecanismo mostrado en la fig 2.5.1:

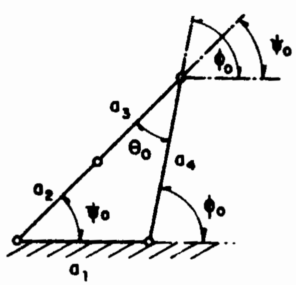


Fig 2.5.1 Configuración de un mecanismo plano correspondiente a un valor mínimo del ángulo de salida

De la ec 2.3.1

$$\dot{\phi} = \frac{K_3 \text{ sen } \psi + \text{sen } (\psi - \phi)}{K_2 \text{ sen } \phi + \text{sen } (\psi - \phi)} \dot{\psi}$$

Llámese N al numerador del coeficiente de $\dot{\psi}$. De la fig 2.5.1:

$$\theta_0 = \phi_0 - \psi_0$$

Así, para la configuración mostrada

$$N_0 = K_3 \text{ sen } \psi_0 - \text{sen } \theta_0$$

Además, de la misma figura

$$\frac{\text{sen } \theta_0}{a_1} = \frac{\text{sen } \psi_0}{a_4}$$

de donde

$$\text{sen } \theta_0 = \frac{a_1}{a_4} \text{ sen } \psi_0 = K_3 \text{ sen } \psi_0$$

y así

$$N_0 = 0$$

de donde

$$\dot{\phi}_0 = 0 \qquad \text{q.e.d.}$$

Ejercicio 2.5.1. Demuestre el teorema anterior cambiando "conducida" por "conductora", "mínimo" por "máximo" y "salida por "entrada".

Ahora se estudian las condiciones para que los eslabones de entrada y de salida de un mecanismo RRRR giren una revolución completa.

Sea el mecanismo mostrado en la fig 2.5.2.

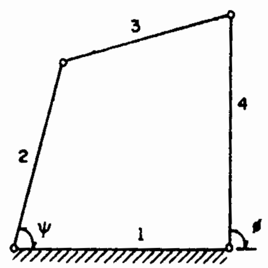


Fig 2.5.2 Mecanismo RRRR plano

Supóngase que $a_2 > a_1$, y $a_4 > a_1$, entonces:

i) Para que ϕ adquiera el valor cero, se debe tener la configuración de la fig 2.5.3, en la que se observa la relación

$$a_4 + a_1 < a_2 + a_3$$

o bien

$$a_4 < a_3 + (a_2 - a_1) \qquad (2.5.1)$$

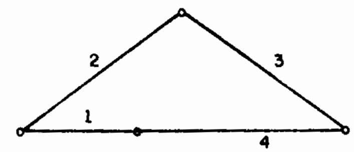


Fig 2.5.3 Configuración para $\phi = 0$

En la fig 2.5.4 se representa la relación 2.5.1 en el plano $a_3 - a_4$, donde la zona achurada representa el conjunto de puntos en los que se satisface dicha relación.

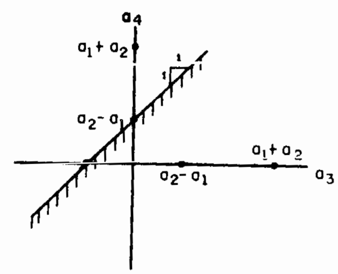


Fig 2.5.4 Representación geométrica de la relación 2.5.1

ii) Para que ϕ adquiera el valor π debe ser posible la configuración de la figura 2.5.5

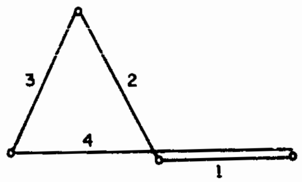


Fig 2.5.5 Configuración para $\phi = \pi$

De esa figura, se tiene la siguiente relación:

$$a_3 < a_2 + (a_4 - a_1)$$

o bien

$$a_4 > a_3 - (a_2 - a_1) \qquad (2.5.2)$$

La relación 2.5.2 se representa gráficamente en la fig 2.5.6.

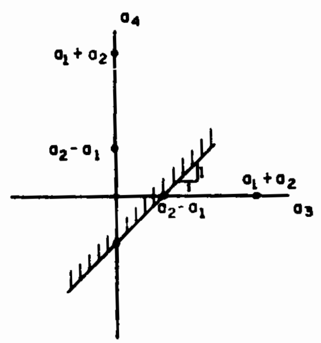


Fig 2.5.6 Representación geométrica de la relación 2.5.2

iii) Para que ψ sea nulo debe ser posible la configuración de la figura 2.5.7

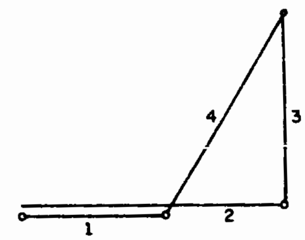


Fig 2.5.7 Configuración para $\psi = 0$

de la que

$$a_3 + a_4 > a_2 - a_1$$

o bien

$$a_4 > -a_3 + (a_2 - a_1) \qquad (2.5.3)$$

la cual se ilustra en la fig 2.5.8

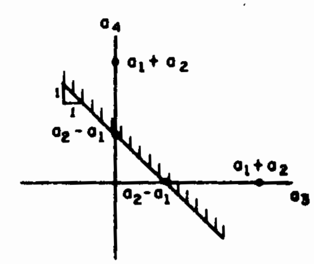


Fig 2.5.8 Representación geométrica de la relación 2.5.3

(v) Para que ψ adquiera el valor π debe ser posible la configuración que se muestra en la fig 2.5.9

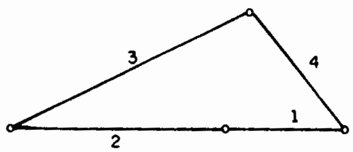


Fig 2.5.9 Configuración para $\psi = \pi$

De dicha figura

$$a_1 + a_2 < a_3 + a_4$$

o bien

$$a_4 > - a_3 + (a_1 + a_2) \qquad (2.5.4)$$

que se representa gráficamente en la fig 2.5.10

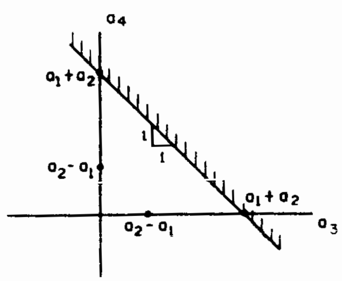


Fig 2.5.10 Representación geométrica de la relación 2.5.4

Finalmente, la región en la que se satisfacen simultáneamente las relaciones 2.5.1 a 2.5.4 es la intersección (fig 2.5.11) de las zonas achuradas de las figs 2.5.4, 2.5.6, 2.5.8 y 2.5.10.

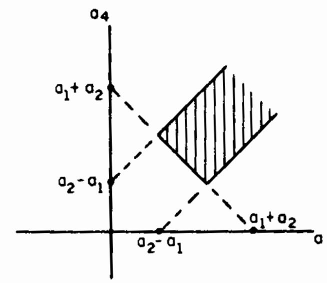


Fig 2.5.11 Condición de movilidad para que las barras de entrada y salida giren 360°, en el plano a_3 - a_4

Otras condiciones de movilidad se pueden encontrar en la ref 2.9.

Ejercicio 2.5.2. Demuestre que las configuraciones de las figs 2.5.5 y 2.5.6 evitan que $\phi = \pi$ y $\psi = 0$ sean estacionarias.

Sugerencia: Demuestre que, para estas configuraciones, el numerador del coeficiente de $\dot{\psi}$ en la ec 2.5.1 no se anula.

2.6 Análisis gráfico de mecanismos con pares inferiores

En esta sección es necesario recurrir a los siguientes teoremas que se basan en el cap 1:

Teorema 2.6.1. La velocidad de un punto A de un cuerpo rígido, que gira alrededor de un punto fijo 0, en movimiento plano, tiene una representación compleja tal que está dirigido a $+\,\mathrm{sgn}(\dot{\theta})\frac{\pi}{2}$ rad* del vector dirigido de 0 a A.

Demostración:

De la sección 1.11 el vector de posición de un punto A de un cuerpo rígido que gira alrededor de 0 es, después de un giro de $+\,\theta$,

$$a_2 = e^{i\theta}a_1 \qquad (2.6.1)$$

donde a_1 y a_2 son vectores de posición del punto A en las configuraciones original y desplazada, respectivamente (fig 2.6.1).

Derivando ambos miembros de la ec 2.6.1 con respecto a t:

$$\dot{a}_2 \equiv v_A = ie^{i\theta}a_1\dot{\theta} \qquad (2.6.2a)$$

De la ec 2.6.1

$$a_1 = e^{-i\theta}a_2 \qquad (2.6.2b)$$

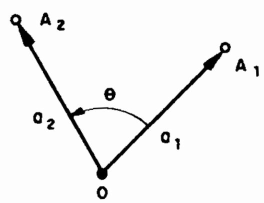


Fig 2.6.1 Rotación de un vector en movimiento plano

$$^{*}\quad \mathrm{Sgn}\ (x) = \begin{cases} +1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

Sustituyendo la ec 2.6.1 en la 2.6.2a

$$v_A = ia_2\dot{\theta} = e^{i\pi/2}a_2\dot{\theta} \qquad (2.6.3)$$

de donde

$$\arg\,(v_A) - \arg\,(a_2) \equiv \arg\frac{v_A}{a_2} = \frac{\pi}{2}$$

Ejercicio 2.6.1. Complete la demostración del teorema 2.6.1.

Teorema 2.6.2. La aceleración normal de un punto A de un cuerpo rígido que gira alrededor de un punto 0 es un vector paralelo a la línea 0A y está dirigido de A a 0.

Demostración:

Derívese la ec 2.6.3 con respecto a t:

$$\dot{v}_A = a_A = iv_A\dot{\theta} + ia_2\ddot{\theta} = -a_2\dot{\theta}^2 + ia_2\ddot{\theta} \qquad (2.6.4)$$

La aceleración normal es el término $-a_2\dot{\theta}^2$, como ya se discutió en la sec 1.11. Este término es el vector a_2 multiplicado por un real negativo; así se completa la demostración de este teorema.

Corolario 2.6.1. La aceleración tangencial forma un ángulo de $+\,\mathrm{sgn}(\ddot{\theta})\frac{\pi}{2}$ con el vector que une los puntos 0 y A.

Ejercicio 2.6.2. Demuestre el corolario 2.6.1.

Teorema 2.6.3. Si A y B son dos puntos de un cuerpo rígido animado de una velocidad angular $\dot{\theta}$, la velocidad relativa de B con respecto a A está orientada a + sgn($\dot{\theta}$)$\frac{\pi}{2}$ del vector $\vec{AB}$.

Teorema 2.6.4. La aceleración normal relativa de B con respecto a A (donde A y B son puntos de un cuerpo rígido) es un vector orientado de B a A.

Corolario 2.6.2. La aceleración normal de B con respecto a A tiene una magnitud igual al segmento $\overline{BD}$ de la fig 2.6.2, donde $\vec{BC}$ es el vector de velocidad de B con respecto a A. Evidentemente, la escala de aceleración depende de las escalas geométrica y de velocidad.

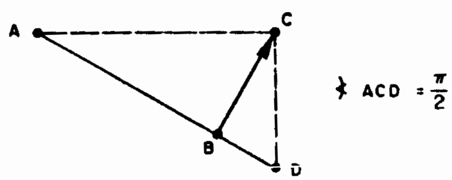


Fig 2.6.2 Aceleración normal relativa entre dos puntos de un mismo cuerpo rígido

Ejercicio 2.6.3. Demuestre el corolario 2.6.2.

Teorema 2.6.5. La aceleración tangencial de B con respecto a A es un vector orientado a + sgn($\ddot{\theta}$)$\frac{\pi}{2}$ de la línea AB y tiene una magnitud de $||\vec{AB}||\ddot{\theta}$.

Los teoremas 2.6.3 a 2.6.5 son consecuencia inmediata de lo expuesto en el cap 1, por lo que sus demostraciones quedan como ejercicio.

Con estos antecedentes ya se puede proceder al análisis gráfico de mecanismos. Este método de análisis se ilustra con un ejemplo.

Ejemplo 2.6.1. Análisis cinemático de un mecanismo de 4 barras articuladas.

Considérese el mecanismo de la fig 2.6.3 con $\dot{\theta}_2$, $\ddot{\theta}_2$ como datos. Determínense $\dot{\theta}_4$, $\ddot{\theta}_4$.

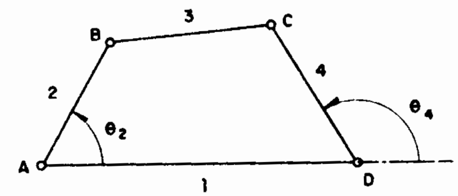


Fig 2.6.3 Mecanismo plano de cuatro barras articuladas

i) Trácese $\bar{v}_B$ a escala. La dirección de este vector está dada por el teorema 2.6.1.

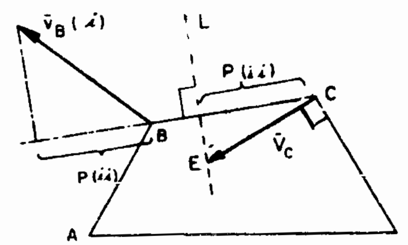


Fig 2.6.4 Determinación de la velocidad de la barra de salida

ii) Mídase la proyección de $\bar{v}_B$ sobre BC. Esta es la proyección de $\bar{v}_C$ sobre BC, según el teorema 1.10.1

iii) Como C es un punto de la barra 4, $\bar{v}_C$ es normal a CD. Trácese, entonces, una perpendicular a CD y llámese E a su intersección con la línea L. $\overline{CE}$ es la velocidad de C.

iv) $\dot{\theta}_4 = \dfrac{||\bar{v}_C||}{\ell_4}$, $\ell_4 \equiv$ longitud de la barra 4

Análisis de aceleración

v) Conociendo $\bar{v}_B$ determine $\bar{a}_B^N$ usando el corolario 2.5.2.

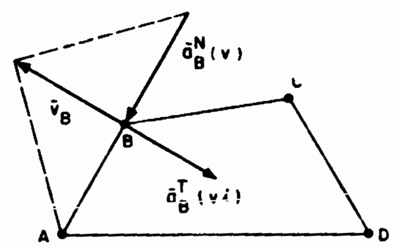


Fig 2.6.5 Determinación de la aceleración normal del punto B

vi) Determínese ahora la aceleración tangencial $\bar{a}_B^T$, usando el teorema 2.6.5.

De la ec 1.7.7, por una parte

$$\bar{a}_C = \bar{a}_B + \bar{a}_{C/B}^N + \bar{a}_{C/B}^T \qquad (2.6.5)$$

y por otra

$$\bar{a}_C = \bar{a}_C^N + \bar{a}_C^T \qquad (2.6.6)$$

vii) De los incisos *v* y *vi*, determínese a_B.

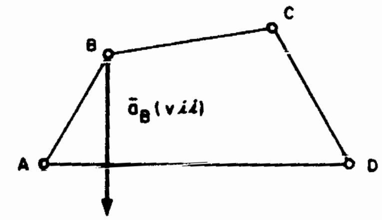


Fig 2.6.6 Aceleración total del punto B

viii) Conociendo $\bar{v}_B$ y $\bar{v}_C$, determínese $\bar{v}_{C/B}$ y, del teorema 2.6.4, determínese $\bar{a}_{C/B}^N$

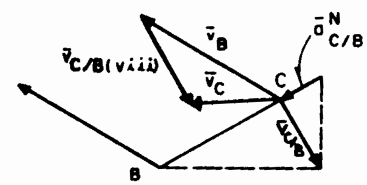


Fig 2.6.7 Aceleración normal de C con respecto a B

Hasta aquí se conocen los dos primeros términos de la ec 2.6.5. Del tercer término únicamente se sabe que es normal a $\bar{a}_{C/B}^N$, por lo que se conoce el lugar geométrico de la punta del vector $\bar{a}_{C/B}^T$ (fig 2.6.8).

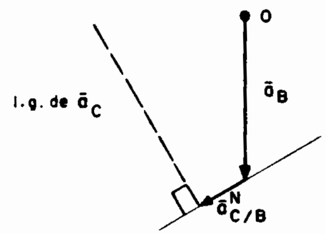


Fig 2.6.8 Lugar geométrico del extremo del vector de aceleración del punto C

ix) Ahora, del teorema 2.6.4, determínese el primer término del miembro derecho de la ec 2.6.6.

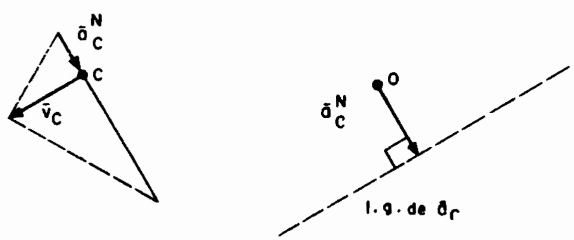


Fig 2.6.9 Determinación de la aceleración normal del punto C

De $\bar{a}_C^T$ se conoce su dirección (fig 2.6.9b), por lo que se conoce el lugar geométrico de la punta del vector $\bar{a}_C$. Superponiendo las figs 2.6.8 y 2.6.9b de manera que coincidan los puntos O, se obtiene la punta de $\bar{a}_C$ como la intersección de ambos lugares geométricos (punto P)

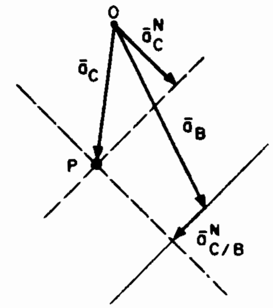


Fig 2.6.10 Aceleración total del punto C

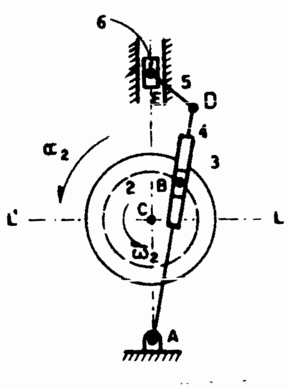
x) De la fig 2.6.10 mídase $\bar{a}_C^T$ y determínese $|\ddot{\theta}_4|$ como

$$|\ddot{\theta}_4| = \frac{||\bar{a}_C^T||}{\ell_4}$$

El signo de $\ddot{\theta}_4$ se determina por inspección, como en el caso de $\dot{\theta}_4$. En este ejemplo, $\ddot{\theta}_4$ resulta positiva.

Ejemplo 2.6.2. Análisis cinemático de un mecanismo de 6 barras articuladas.

Considérese el mecanismo de la fig 2.6.11, de barras articuladas. Aplicándole la ecuación de Grübler, se obtiene que este mecanismo es de libertad igual a uno. Obténganse la velocidad y la aceleración de la corredera 6, en términos de ω_2 y α_2.



Datos :

ω_2 , α_2

Incógnitas :

v_5 , a_5

Fig 2.6.11 Mecanismo de seis eslabones articulados

Algoritmo:

i) Con ω_2 conocida, determínese $\bar{v}_{B2}$, o sea la velocidad del punto B de la rueda (fig 2.6.12).

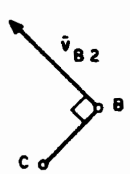
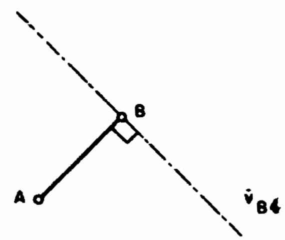


Fig 2.6.12 Velocidad del punto B del cuerpo 2

Fig 2.6.13 Lugar geométrico de la velocidad del punto B del cuerpo 4



ii) Sabiendo que C^*_{14} es A, se conoce la dirección de $\bar{v}_{B2}$, que es la velocidad de B como punto de la manivela 4 ; dicha velocidad es perpendicular a la línea AB (fig 2.6.13).

iii) La velocidad relativa de B2 con respecto a B4 es paralela a la línea AB, es decir, a la guía de la manivela 4; pero

$$\bar{v}_{B4} = \bar{v}_{B2} + \bar{v}_{B4/B2} = \bar{v}_{B2} - \bar{v}_{B2/B4} \qquad (2.6.7)$$

Trácese, entonces, paralelamente a $\overline{AB}$, la ~~dirección de~~ $\bar{v}_{B2/B4}$ (fig 2.6.14).

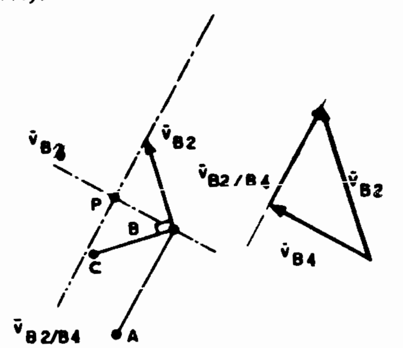


Fig 2.6.14 Velocidad relativa de B2 con respecto a B4

Como se debe satisfacer la ec 2.6.7, es claro que el vector $\bar{v}_{B4}$ está dirigido de B a P (fig 2.6.14).

iv) Conociendo $\bar{v}_{B4}$, trácese $\bar{v}_D$, determinando $||\bar{v}_D||$ por triángulos semejantes (fig 2.6.15).

* El centro instantáneo de 1 con respecto a 4

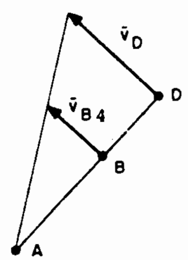


Fig 2.6.15 Velocidad del punto D

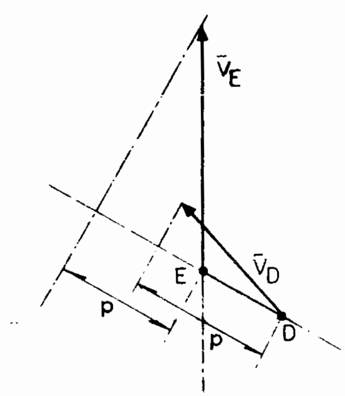


Fig 2.6.16 Construcción de la velocidad del punto E

v) Puesto que D y E son puntos de la biela **6**, determínese $\bar{v}_E$ con su dirección (paralela a la dirección de la carrera del pistón) y su proyección sobre DE, que es idéntica a la proyección (sobre DE, también) de $\bar{v}_D$ (fig 2.6.16). Llámese p a esta proyección.

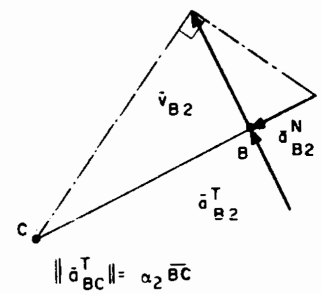


Fig 2.6.17 Aceleración de B2

El análisis de aceleración se realiza ahora a través de la aceleración de los puntos de la manivela **4**; sin embargo, esta aceleración no se puede determinar directamente, pero sí a través de la ec 1.8.5. Para esto, exprésese la aceleración del punto B2, $\bar{a}_{B2}$, a través de un observador fijo en la manivela **4**. Llámese $\bar{a}_{B4}$ a los tres primeros términos de la ec 1.8.5, es decir, $\bar{a}_{B4}$ es la aceleración del punto de **4** que instantáneamente coincide con B2. Represénte se la aceleración de Coriolis (4° término de la ec 1.8.5) en la forma $2\bar{\omega}_4 \times \bar{v}_{B2/4}$, donde $\bar{v}_{B2/4}$ es la velocidad del punto B2 observada desde el cuerpo 3. Nótese que $\bar{v}_{B2/4} = \bar{v}_{B2/B4}$.

Represéntese el último término de la ec 1.8.5 con $\bar{a}_{B2/4}$, que es la aceleración del punto B2 medida desde el observador 4. Así, la ec 1.8.5 toma la forma siguiente, en notación de Gibbs

$$\bar{a}_{B2} = \bar{a}_{B4} + 2\bar{\omega}_4 \times \bar{v}_{B2/4} + \bar{a}_{B2/4} \qquad (2.6.8)$$

de donde

$$\bar{a}_{B4} = \bar{a}_{B2} - 2\bar{\omega}_4 \times \bar{v}_{B2/4} - \bar{a}_{B2/4} \qquad (2.6.9)$$

vi) Conociendo $\bar{v}_{B2}$ determínese $\bar{a}^N_{B2}$, y conociendo α_2 determínese $\bar{a}^T_{B2}$ (fig 2.6.17). La suma de estos dos vectores es, entonces, $\bar{a}_{B2}$, el primer término del miembro derecho de la ec 2.6.9.

vii) Conociendo $\bar{v}_{B4}$ se conoce $\bar{\omega}_4$. Con este vector y $\bar{v}_{B2/4}$, determínese la aceleración de Coriolis $2\bar{\omega}_4 \times \bar{v}_{B2/4}$. Este vector está dirigido normalmente a $\bar{v}_{B2/4}$ y su orientación, según la *regla de la mano derecha* del producto vectorial, es tal que $2\bar{\omega}_4 \times \bar{v}_{B2/4}$ forma un ángulo de $-90°$ con $\bar{v}_{B2/4}$ si ω_4 está orientado hacia adentro del plano del dibujo. De lo contrario forma un ángulo de $-90°$ con ese mismo vector (fig 2.6.18).

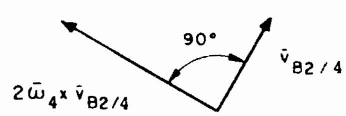


Fig 2.6.18 Construcción de la aceleración de Coriolis de B2

viii) Del último término del miembro derecho de la ec 2.6.9 se conoce únicamente su dirección -obviamente la trayectoria de B2, observada desde 4, es una recta paralela a la guía de este cuerpo (3)- y tanto $\bar{v}_{B2/4}$ como $\bar{a}_{B2/4}$ son paralelos a la línea $\overline{AB}$. La magnitud de $\bar{a}_{B2/4}$ es una incógnita.

ix) Por otra parte, del miembro izquierdo de la ec 2.6.9 se conoce únicamente su componente normal, $\bar{a}^N_{B4}$; en cuanto a su componente tangencial solo se conoce su ~~dirección~~, ~~normal~~ a la línea $\overline{AB}$. La ec 2.6.9 es, por tanto, un sistema de dos ecuaciones escalares (una para cada dimensión del plano del dibujo) con dos incógnitas escalares. En la fig 2.6.19 se resuelve en forma gráfica dicha ecuación. El punto S es la solución.

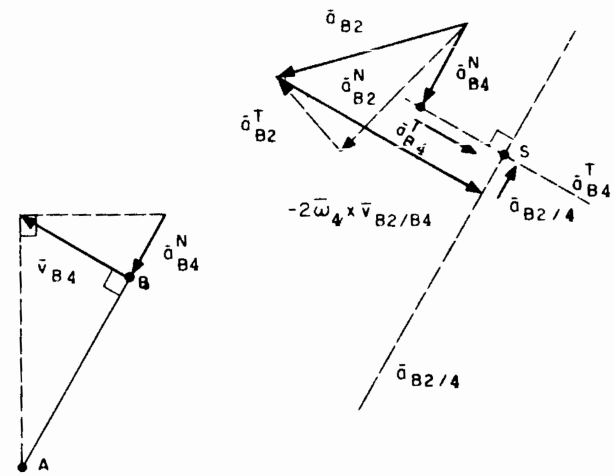


Fig 2.6.19 Solución gráfica de la ec 2.6.9

x) Conociendo $\bar{a}_{B4}^{T}$ se determina $\bar{a}_{D}^{T}$ por triángulos semejantes, con el triángulo de la fig 2.6.20.

Nota: Obsérvese que, en general, $\bar{a}_{B2/4}$ es diferente de $\bar{a}_{B2/B4}$.

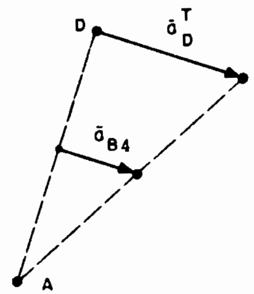


Fig 2.6.20 Construcción de la aceleración tangencial del punto D

xi) Con $\bar{v}_D$ conocida, determínese $\bar{a}_{D}^{N}$ y con la suma de $\bar{a}_{D}^{T}$ y $\bar{a}_{D}^{N}$ determínese $\bar{a}_D$ (fig 2.6.21).

xii) La aceleración de E, $\bar{a}_E$, se determina mediante la relación

$$\bar{a}_E = \bar{a}_D + \bar{a}_{E/D} \qquad (2.6.10)$$

donde $\bar{a}_D$ se conoce y $\bar{a}_{E/D}^{N}$ se determina conociendo $\bar{v}_{E/D}$. De $\bar{a}_{E/D}^{T}$ solo se conoce su dirección (normal a $\overline{DE}$) y de $\bar{a}_E$ también se conoce su dirección. La ec 2.6.10, entonces, representa un sistema de dos ecuaciones escalares con dos incógnitas escalares $||\bar{a}_{E/D}^{T}||$

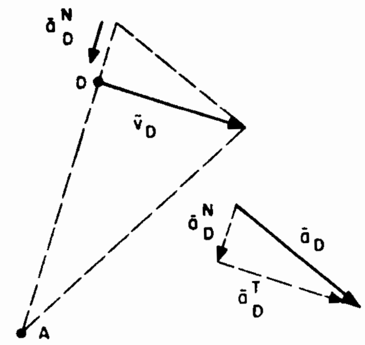


Fig 2.6.21 Construcción de la aceleración total del punto D

y $||\bar{a}_E||$. En la fig 2.6.22 se resuelve esta ecuación en forma gráfica. El punto T es la solución.

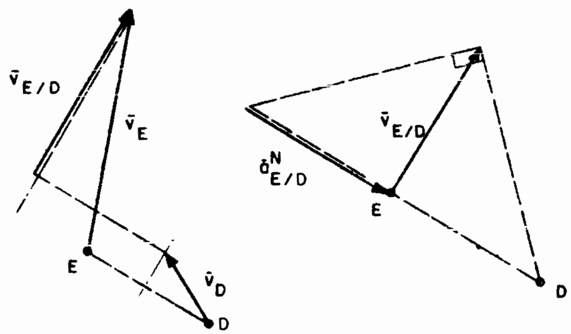


Fig. 2.6.22a

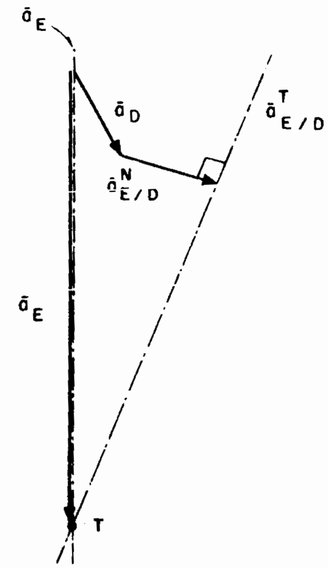


Fig 2.6.22 Solución gráfica de la ec 2.6.10

Nota: Las figuras aparecen a diferentes escalas con objeto de que los trazos no queden fuera de la hoja.

Si se desea determinar la relación entrada-salida de un mecanismo como el de la fig 2.6.11, para cada grado del ángulo de entrada, ¡se tendría que repetir el procedimiento anterior ¡360 veces!. Esto, desde luego, es impráctico, y el autor lo que aconseja es dejar este trabajo a una máquina, por lo que se sugiere trabajar en el siguiente problema.

Ejercicio 2.6.3. En el mecanismo de la fig 2.6.11, defínanse las siguientes variables:

$$\widehat{LCB} = \psi,\ \overline{AD} = a,\ \overline{DE} = b,\ \overline{AC} = d,$$

$$AE = s(\psi),\ CB = e,\ EAD = \phi$$

i) Utilizando números complejos, obtenga la función $s = s(\psi)$. Derive $s(\psi)$ con respecto al tiempo suponiendo que la rueda dos gira a razón de 1 500 rpm. La expresión así obtenida, derívela nuevamente con respecto a t, para obtener así el desplazamiento, la velocidad y la aceleración del pistón 5 en función del tiempo. Suponga que ω_2 es constante.

ii) Evalúe $s(t)$, $\dot{s}(t)$, $\ddot{s}(t)$ para valores de ψ de 0° a 360°, cada grado. Es claro que esto lo tiene que hacer en computadora digital.

iii) Ya que las expresiones para $\dot{s}(t)$ y $\ddot{s}(t)$ son muy largas y por esto requieren demasiado tiempo para su cálculo, una alternativa para obtener $s(t)$ y $\ddot{s}(t)$ es derivar $s(t)$ numéricamente, para lo cual es necesario que construya un programa de computadora semejante al del subcap 5.4 de la ref 2.2. Compare los resultados de ambos in cisos *i*) y *ii*) y comente las diferencias observadas. Antes de escribir su programa y de correrlo en la máquina, es conveniente leer el subcap 5.4 de la referencia mencionada. Una alternativa sería usar la subrutina DFDX de la fig 2.2.6.

Ejercicio 2.6.4. Una *inversión* del mecanismo de la fig 2.6.11 es el mecanismo de la fig 2.6.23.

Haga un análisis cinemático completo de este mecanismo, es decir, determine $\bar{v}_E$ y $\bar{a}_E$ conociendo ω_1 y α_1, para la configuración mostrada. El análisis tiene que ser *gráfico*.

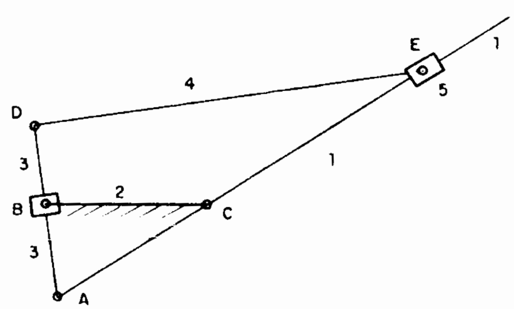


Fig 2.6.23 Inversión del mecanismo de la fig 2.6.11

Ejercicio 2.6.5. Obtenga la trayectoria del punto P del mecanismo de la fig. 2.6.24. Obtenga, además, las curvas ϕ (t) vs.t , --- $\dot{\phi}$ (t) vs.t y $\ddot{\phi}$ (t) vs.t .

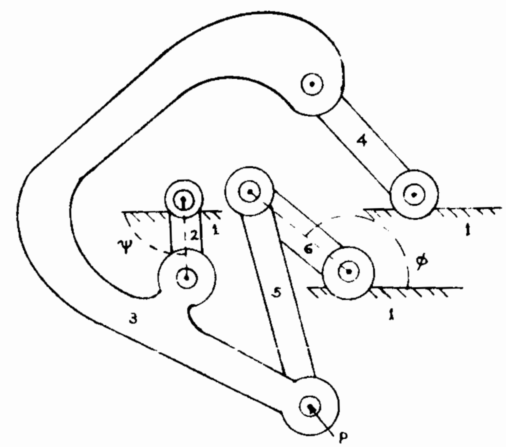


Fig. 2.6.24. Mecanismo de seis eslabones articulados.

REFERENCIAS

2.1 F. Freudenstein, Approximate Synthesis of Four-Bar Linkages, Trans. ASME, Vol 77, (ago 1955)

2.2 James, Smith y Wolford, Applied Numerical Methods with Fortran Programming, International Textbook., (1967)

2.3 C. Palacios, Métodos Digitales para el Análisis y Síntesis de Mecanismos, Tesis de Maestría, Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, Instituto Politécnico Nacional, México, D.F., 1975.

2.4 J.E. Shigley, Simulation of Mechanical Systems: An Introduction, McGraw-Hill Book Co., Nueva York (1967)

2.5 E. Chicurel y L. Legarreta, Manual para el uso del simulador Analógico SAS II, Instituto de Ingeniería, UNAM, México, D.F., (1971)

2.6 A. Castillo, Desarrollo del Lenguaje de Simulación Analógica Digital SAS III, Tesis Profesional, Facultad de Ingeniería, UNAM, México, D.F. (1973)

2.7 D.C. Tao, Fundamentals of Applied Kinematics, Addison Wesley Publishing Co., Nueva York (1967)

2.8 J.A. Hrones y G.L. Nelson, Analysis of the Four-Bar Linkage, The MIT Press and John Wiley (1951)

2.9 J.M. Prentis, Dynamics of Mechanical Systems, Longman Group Ltd., Londres (1970)

3. SINTESIS DE MECANISMOS DE PARES INFERIORES

INTRODUCCION

En este capítulo se estudia el procedimiento para obtener las ecuaciones del diseño de mecanismos con barras articuladas que produzcan un movimiento deseado. Se pone especial atención a los métodos numéricos de síntesis, Los métodos gráficos (que son los usados tradicionalmente) no se presentan con todo detalle, por considerar que ya existe una amplia bibliografía que los trata. Se remite al lector interesado en el tema de diseño por métodos gráficos a las refs 3.1, 3.2 y 3.3.

Tomando en cuenta que los parámetros a determinar en un mecanismo con barras articuladas forman un conjunto finito, las ecuaciones obtenidas son de carácter algebraico, a diferencia del caso del diseño de mecanismos con pares superiores -levas- en que el conjunto de parámetros a determinar es un continuo, por lo que las ecuaciones de diseño de levas pueden ser diferenciales (cap. 4). Debido al carácter algebraico de estas ecuaciones, no son aplicables los métodos analógicos del análisis. Se recurre, entonces, a los métodos numéricos como herramienta universal para la solución de las ecuaciones de diseño, cuando estas no se puedan resolver "a mano".

3.1 *Síntesis de mecanismos de barras articuladas. Generación de funciones de una variable*

En esta sección se estudia el método de selección de las longitudes de los eslabones de un mecanismo con objeto de que la variable de salida sea una función *específica* de la variable de entrada. Sin embargo, obsérvese que el número de parámetros a seleccionar en esta clase de mecanismos es finito -de hecho es tres, o sea los parámetros K_1, K_2 y K_3 que aparecen en la ecuación de Freudestein-, y entonces resulta imposible generar una función continua de la entrada. Por esta razón, la discusión se limita a la generación de funciones discretas, es decir, se trata de dimensionar un mecanismo para el cual la salida adquiera valores predeterminados en valores también predeterminados de la entrada.

Es claro que el número de relaciones $\phi_i = f_i(\psi_i)$ que se podrá satisfacer en tres, es decir i = 1, 2, 3.

El método es muy sencillo y consiste en los siguiente:

i) Sustitúyase cada par de valores (ψ_i, ϕ_i) en la ecuación de Freudenstein, obteniéndose así un sistema de tres ecuaciones lineales en las tres incógnitas K_1, K_2 y K_3.

ii) Si el sistema tiene solución*, sustitúyase esta en las expresiones (2.2.6c) y obténgase los valores correspondientes para a_1, a_2, a_3 y a_4. Es claro que una de estas longitudes tendrá que asignarse según las posibilidades y los requerimientos del problema específico de diseño, pues solo se tiene tres relaciones y cuatro parámetros por dimensionar.

iii) Analícese el mecanismo obtenido empleando los métodos de la sec 2.5 y compruébese que el diseño es correcto.

Observaciones

1) Los mecanismos planos de eslabones rígidos pueden usarse para generar funciones de dos variables o más (ref 3.4) pero en este caso se requiere que dichos mecanismos posean un grado múltiple de libertad. Por ejemplo, si la función que se desea generar es $f(x, y) = x + y$, se estaría diseñando un mecanismo sumador, y este tendría que tener un doble grado de libertad.

2) Si en el mecanismo de la Fig. 3.1.1 los ángulos ψ y ϕ no se miden a partir de la orientación del eslabón fijo, sino a partir de rectas A y B, que forman ángulos α y β (no conocidos) con el eslabón fijo, el número de parámetros de diseño se eleva a cinco, a saber, k_1, k_2, k_3, α y β, por lo que es posible satisfacer cinco condiciones de la forma $\phi_i = \phi(\psi_i)$. Sin embargo, el sistema de ecuaciones que ahora resulta es no lineal, y tiene que resolverse empleando el método de Newton-Raphson presentado en la sección 3.4.

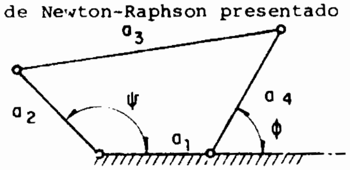


Fig 3.1.1 Mecanismo plano de cuatro eslabones, generador de función

* Es claro que el sistema puede carecer de solución o puede tener múltiples soluciones, lo cual es un hecho muy conocido del álgebra.

Ejercicio 3.1.1. Determine las dimensiones del mecanismo de la Fig. 3.1.1 para generar la función $\phi = e^{\psi}$, con puntos de precisión en los siguientes valores de ψ: 0, $\pi/6$ y $\pi/4$

Ejercicio 3.1.2. Repita el ejercicio 3.1.1, pero ahora añada el valor de $\psi = \pi/12$

Ejercicio 3.1.3. Repita el ejercicio 3.1.2, pero ahora añada el valor de $\psi = \pi/5$

3.2 *Síntesis de mecanismos para satisfacción de condiciones de velocidad y aceleración*

Es posible que en algún problema de diseño sea necesario satisfacer condiciones de velocidad y aceleración, más que solo de desplazamiento. En estos casos, el diseño se efectúa en forma similar a lo expuesto en la sec 3.1, pues una condición de velocidad, para una de desplazamiento dada, es el caso límite de dos condiciones de desplazamiento arbitrariamente próximas. Análogamente, una condición de aceleración es el caso límite de tres de desplazamiento arbitrariamente próximas. Las ecuaciones de diseño se obtienen al derivar ambos miembros de la ecuación de Freudenstein (ec 2.3.7) con respecto al tiempo. Así, al derivar una vez, se obtiene

$$\dot{\phi}K_2 \text{ sen } \phi - \dot{\psi}K_3 \text{ sen } \psi - (\dot{\phi} - \dot{\psi}) \text{ sen } (\phi - \psi) = 0 \qquad (3.2.1a)$$

y al derivar nuevamente

$$\ddot{\phi}K_2 \text{ sen } \phi + \dot{\phi}^2K_2 \cos \phi - \ddot{\psi}K_3 \text{ sen } \psi - \dot{\psi}^2K_3 \cos \psi -$$

$$- (\ddot{\phi} - \ddot{\psi}) \text{ sen } (\phi - \psi) - (\dot{\phi} - \dot{\psi})^2 \cos (\phi - \psi) = 0 \qquad (3.2.1b)$$

Las ecs 3.2.1a y b, junto con la ec 2.3.7, constituyen las ecuaciones de diseño para satisfacer condiciones de desplazamiento, velocidad y aceleración.

Obsérvese que si la condición de desplazamiento dada es en (ψ_1, ϕ_1) las condiciones de velocidad y aceleración tienen que darse también para (ψ_1, ϕ_1), pues en las ecs 3.2.1a y b aparecen las variables ψ y ϕ. Análogamente, la condición de aceleración debe darse para (ψ_1 y ϕ_1), con la condición de velocidad en $(\dot{\psi}_1, \dot{\phi}_1)$, pues en la ec 3.1.1b aparecen las variables $\dot{\psi}$ y $\dot{\phi}$ además de ψ y ϕ.

Es posible, sin embargo, tener una condición de velocidad $(\dot{\psi}_1, \dot{\phi}_1)$ en (ψ_1, ϕ_1), y además una de desplazamiento en (ψ_2, ϕ_2). No obstante, dado que las ecuaciones de diseño son tres, ya no es posible, en estas condiciones, imponer una condición de velocidad adicional en (ψ_2, ϕ_2), pues entonces se tendría 4 ecuaciones para solamente 3 incógnitas. En caso de que surja un problema en el que se desee satisfacer 4 o más condiciones, si bien no es posible satisfacerlas todas con precisión, sí lo es con el mínimo error posible, lo cual constituye un problema de optimación, que queda fuera del objetivo de estas notas, y por eso no se trata.

Ejemplo 3.2.1. Se requiere diseñar un mecanismo de barras articuladas que satisfaga las condiciones

$$\psi_1 = 0,\ \phi_1 = 90°;\ \dot{\psi}_1 = -10 \text{ rad/seg},\ \dot{\phi}_1 = 1 \text{ rad/seg}$$

$$\psi_2 = 90°,\ \phi_2 = 135°$$

Determine las dimensiones de los eslabones.

Solución: Sustituyendo los datos del problema en las ecs 2.3.7 y 3.2.1a, se tiene las ecuaciones de diseño:

$$K_1 + K_3 = 0 \tag{3.2.2}$$

$$K_2 - 11 = 0 \tag{3.2.3}$$

$$K_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} K_2 + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \tag{3.2.4}$$

Así, de la ec 3.2.3

$$K_2 = 11 \tag{3.2.5}$$

de las ecs 3.2.4 y 3.2.5

$$K_1 = -6\sqrt{2} \tag{3.2.6}$$

de las ecs 3.2.6 y 3.2.2

$$K_3 = 6\sqrt{2} \tag{3.2.7}$$

De las ecs 2.3.6c, 3.2.5, 3.2.6 y 3.2.7, con $a_1 = 1$, se tiene

$$a_2 = \frac{1}{11},\quad a_3 = \sqrt{\frac{7\ 321}{8\ 712}},\quad a_4 = \frac{1}{6\sqrt{2}}$$

o bien

$$a_1 = 1.0,\ a_2 = 0.091,\ a_3 = 0.917,\ a_4 = 0.118$$

donde no es necesario especificar las unidades porque las cantidades de interés son los *valores relativos* de las longitudes de las barras.

Ejercicio 3.2.1. Resuelva el problema anterior cambiando la segunda condición de desplazamiento por la siguiente de aceleración:

$$\ddot{\psi}_1 = 0, \quad \ddot{\phi}_1 = 10 \text{ rad/seg}^2$$

3.3 *Síntesis de mecanismos para conducción de cuerpos rígidos*

Tanto esta sección como la siguiente son una versión simplificada de un artículo de Suh y Radcliffe (ref 3.3), que forma parte de una serie sobre síntesis de mecanismos.

Considérese el problema de diseñar un mecanismo que conduzca al cuerpo rígido de la fig 3.3.1, por n configuraciones sucesivas, como la mostrada, a partir de cierta configuración que se llamará original.

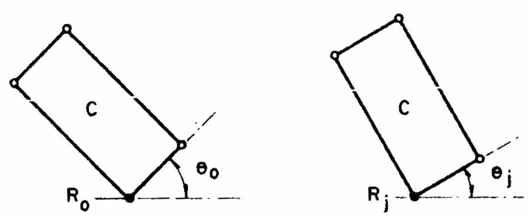


Fig 3.3.1 Conducción de un cuerpo rígido

Si se desea efectuar esta conducción con un mecanismo de barras articuladas, es claro que este mecanismo se construirá usando el cuerpo C como barra acopladora. Las articulaciones de esta barra con las de entrada y de salida se situarán, entonces, en aquellos puntos de C que describan trayecto-

rias circulares; dichos puntos se llaman, por tanto, *puntos circulares*, y se representan por A. El centro de cada una de estas trayectorias se representa por B y recibe el nombre de *punto central*. En la fig 3.3.2 se muestran estos puntos y los números complejos asociados a ellos.

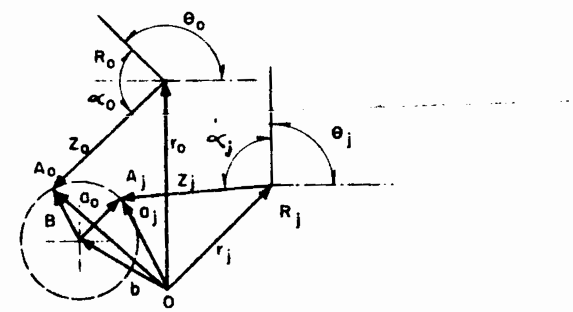


Fig 3.3.2 Puntos circulares y punto central de un mecanismo

De la figura se tienen las siguientes relaciones:

$$||z_j|| = ||z_0|| \; ; \; j = 1,2,\ldots,n \qquad (3.3.1)$$

que son la condición de cuerpo rígido, esto es, los puntos A y R, siendo de un mismo cuerpo rígido, permanecen a la misma distancia para cualquier configuración del cuerpo. Además

$$z_j = e^{i(\theta_j - \theta_0)} z_0 \qquad (3.3.2)$$

que es una consecuencia del hecho de que el ángulo α permanece constante para cualquier configuración del cuerpo, es decir, $\alpha_j = \alpha_0$. La ec 3.3.2 es consecuencia, también, del teorema 1.11.1.

Pero

$$z_0 = a_0 - r_0 \; ; \; z_j = a_j - r_j \tag{3.3.3}$$

y, puesto que los puntos A_j, A_0 están sobre una circunferencia

$$||a_j - b|| = ||a_0 - b|| \tag{3.3.4}$$

De las ecs 3.3.2 y 3.3.3

$$a_j = r_j + z_j = r_j + e^{i(\theta_j - \theta_0)}(a_0 - r_0) \tag{3.3.5}$$

Sustituyendo esta última en la ec 3.3.4

$$||r_j + e^{i(\theta_j - \theta_0)}(a_0 - r_0) - b|| = ||a_0 - b|| \tag{3.3.6}$$

que es la ecuación de diseño que permite determinar los números complejos b y a_0. Obsérvese que b es el número complejo que designa al punto *base*, B, que es aquel en el que se articula la barra de entrada con la barra fija, mientras que el punto A es en el que se articula la barra de entrada con la barra acopladora, es decir la distancia $||a_0 - b||$ es la longitud de la barra de entrada.

Sin embargo recuérdese que la ec 3.3.6, tal como aparece, implica la extracción de una raíz cuadrada, pues la magnitud del número complejo $z = u + iv$ es

$$||z|| = \sqrt{u^2 + v^2}$$

Es claro, entonces, que una forma conveniente de escribir esta ecuación -la 3.3.6- es elevando ambos miembros al cuadrado, obteniéndose así,

$$||r_j + e^{i(\theta_j - \theta_0)}(a_0 - r_0) - b||^2 = ||a_0 - b||^2 \tag{3.3.6a}$$

Ejemplo 3.3.1. Diseño de un limpiador de parabrisas. Sea P el cuerpo rígido que representa un limpiador de parabrisas y se desea que ocupe las posiciones mostradas. Diseñe el mecanismo que ejecute esta operación.

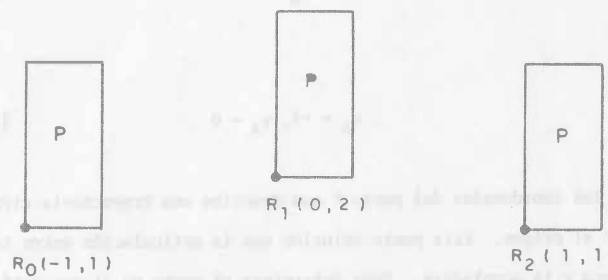


Fig 3.3.3 Conducción de un limpiador de parabrisas

Solución: En la ec 3.3.6a sean

$$a_0 = x_A + iy_A \;, \quad b = x_B + iy_B \tag{3.3.7}$$

Se tiene, además

$$r_0 = -1 + i1, \quad r_1 = 0 + i2, \quad r_2 = 1 + i1 \qquad (3.3.8a)$$

Como se tienen dos configuraciones especificadas además de la original se cuenta con dos ecuaciones de diseño, por lo que se pueden especificar dos incógnitas de la ec 3.3.6a. Háganse, en la ec 3.3.7

$$x_B = 0, \quad y_B = 0 \qquad (3.3.8b)$$

Así las ecs 3.3.6a se transforman en

$$x_A + y_A + 1 = 0 \qquad (3.3.9a)$$

$$x_A + 1 = 0 \qquad (3.3.9b)$$

Así,

$$x_A = -1, \quad y_A = 0 \qquad (3.3.9c)$$

que son las coordenadas del punto P que describe una trayectoria circular con radio en el origen. Este punto coincide con la articulación entre la barra conductora y la acopladora. Para determinar el punto en el que está alojada la articulación entre la barra acopladora y la barra conducida, supóngase ahora

$$b = 1 - i1 \qquad (3.3.10)$$

Así, las ecs 3.3.6a son

$$x_A + y_A + 1 = 0 \qquad (3.3.10a)$$

$$x_A = 0 \qquad (3.3.10b)$$

por lo que la solución es

$$x_A = 0, \quad y_A = -1 \qquad (3.3.10c)$$

El mecanismo diseñado se muestra en la fig 3.3.4, donde se observa que el mecanismo es un paralelogramo, conocido por su propiedad de tener su barra acopladora animada de traslación pura, como se deseaba.

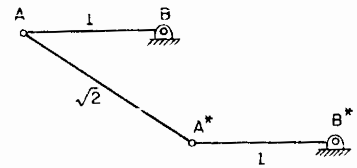


Fig 3.3.4 Mecanismo conductor de un limpiador de parabrisas

Ejemplo 3.3.2. Se desea que el triángulo rectángulo RST (fig 3.3.5) pase por las tres posiciones mostradas, mediante un mecanismo que esté articulado *a tierra* en los puntos B (-1,1), y $B^*(1,1)$. Determine las coordenadas de las otras articulaciones, $A_0(x_A, y_A)$, $A_0^*(x_A^*, y_A^*)$ en la configuración original 0.

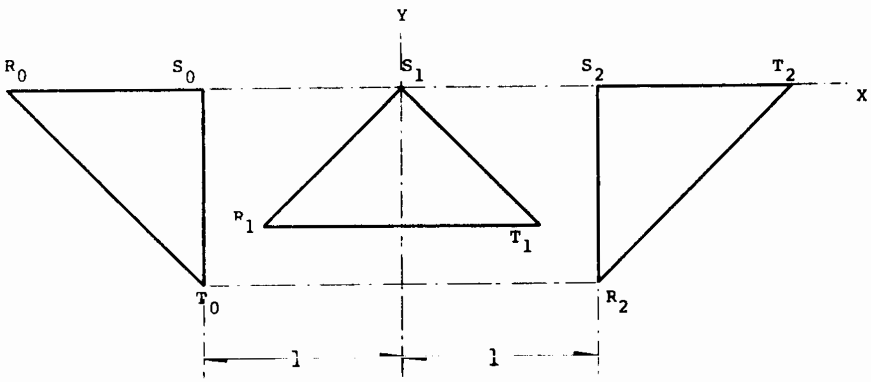


Fig 3.3.5 Conducción de un cuerpo rígido por tres configuraciones sucesivas

Solución: Usando la notación de la sec 3.3., los datos del problema son:

$$r_0 = -1 + i0, \quad r_1 = 0 + i0, \quad r_2 = 1 + i0$$

$$b = -1 + i1, \quad b^* = 1 + i1, \quad \theta_0 = 0, \ \theta_1 = \frac{\pi}{4}, \ \theta_2 = \frac{\pi}{2}$$

y las incógnitas son:

$$a_0 = x_A + iy_A \quad , \quad a_0^* = x_A^* + iy_A^*$$

donde r_0, r_1, r_2 son los números complejos asociados a las posiciones 0, 1 y 2, del punto S. Obsérvese la conveniencia de escoger este punto como referencia, porque se mueve a lo largo del eje X; así, el componente imaginario de su vector de posición es nulo en las tres posiciones.

Efectuando las sustituciones correspondientes en la ec 3.3.6, se llega a las siguientes ecuaciones de diseño

Para

$$j = 1, \ x_A^2 + y_A^2 + 2x_A - 2\sqrt{2}\, y_A + 3 = x_A^2 + 2x_A + y_A^2 + 2y_A + 2$$

o bien

$$2(1 - \sqrt{2})\, y_A + 1 = 0 \qquad (3.3.11)$$

Para

$$j = 2, \ x_A^2 + y_A^2 - 4y_A + 4 = x_A^2 + 2x_A + y_A^2 - 2y_A + 2$$

o bien

$$2x_A + 2y_A - 2 = 0 \qquad (3.3.12)$$

La solución del sistema de ecs 3.3.11, 3.3.12 es, con tres cifras significativas

$$x_A = -0.21 \quad ; \quad y_A = 1.21$$

Así

$$a_0 = -0.21 + i(1.21) \qquad (3.3.14)$$

Procediendo en forma análoga con los puntos B^* y A_0^*:

Para

$$j = 1,\ x_A^{*2} + 2(1-\sqrt{2})x_A^* + y_A^{*2} + 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right) = x_A^{*2} - 2x_A^* + y_A^{*2} - 2y_A^* + 2$$

o bien

$$2(2 - \sqrt{2})x_A^* + 2y_A^* + 1 - 2\sqrt{2} = 0 \qquad (3.3.15)$$

Para

$$j = 2,\ x_A^{*2} + y_A^{*2} = x_A^{*2} - 2x_A^* + y_A^{*2} - 2y_A^{*2} + 2$$

o bien

$$x_A^* + y_A^* - 1 = 0 \qquad (3.3.16)$$

La solución del sistema de ecs 3.3.15, 3.3.16 es, con tres cifras significativas

$$x_A^* = 0.207 \ ; \quad y_A^* = 0.793 \qquad (3.3.17)$$

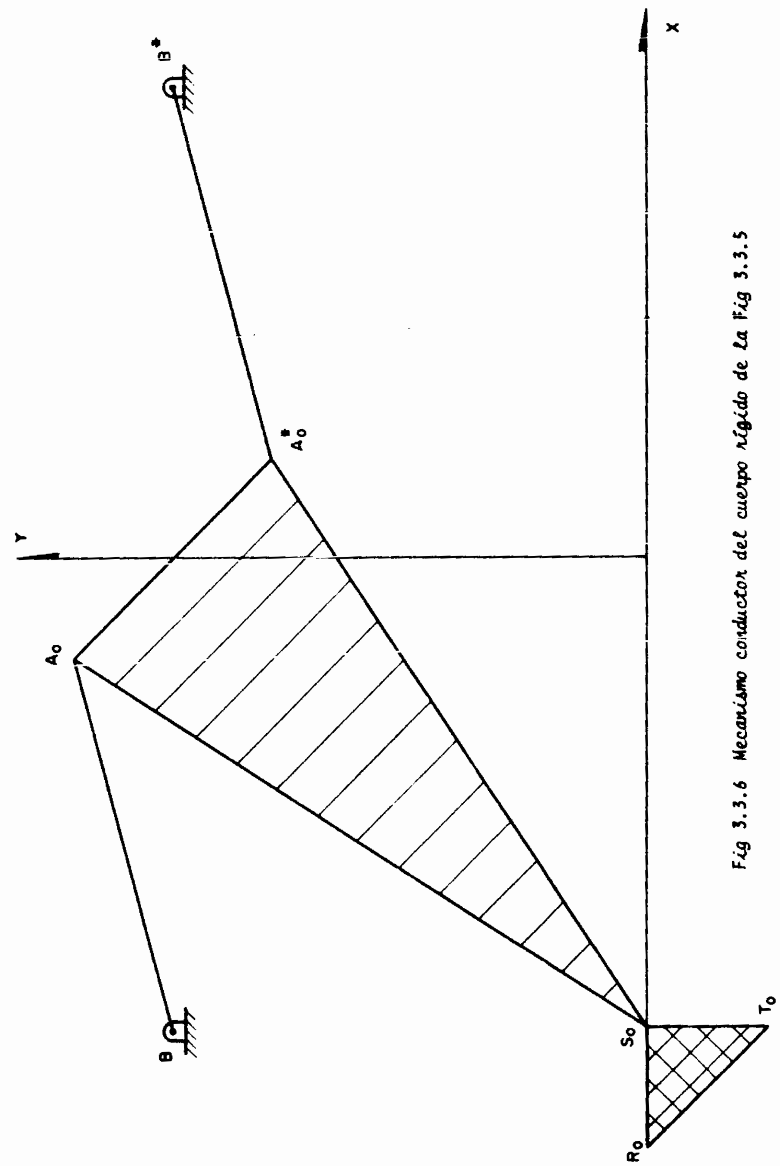


Fig 3.3.6 Mecanismo conductor del cuerpo rígido de la Fig 3.3.5

Así

$$a_0^* = 0.207+i0.793 \qquad (3.3.18)$$

El mecanismo diseñado se muestra en la fig 3.3.6.

Ejercicio 3.3.1. Conducción de una herramienta para maquinar un perfil dado.

Diseñe el mecanismo que conduzca el cuerpo rígido de la fig 3.3.7 por las cuatro configuraciones mostradas

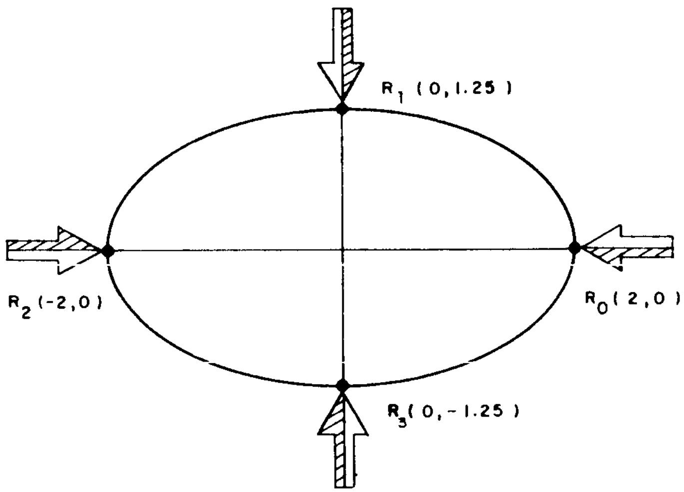


Fig 3.3.7 Conducción de una herramienta

3.4 *Síntesis de mecanismos para generación de trayectorias*

Si para realizar cierta función lo que interesa es la trayectoria de un punto de la barra acopladora, como las que aparecen en el atlas de Hrones y Nelson (ref 3.6), el problema se resuelve de manera semejante a como se discutió en la sec 3.3. Así, en la fig 3.3.1 interesa hacer pa

sar el punto R por las n posiciones sucesivas R_j, a partir de una posición inicial R_0. En estas condiciones, los ángulos θ_0, θ_j ($j = 1,2,\dots,n$) no están especificados, razón por la cual pasan a ser incógnitas y, al aumentarse el número de estas, es posible incrementar el de ecuaciones, por lo que el número de puntos por los que se desea que pase la trayectoria, también aumenta.

Obsérvese que si en la ec 3.3.6a no se prescriben ni a_0 ni b el número de incógnitas presente, para $n + 1$ configuraciones especificadas por r_0, r_j, θ_0, θ_j ($j = 1,2,\dots,n$) es $5 + n$. Sin embargo, el valor θ_0 es solo una referencia y se le puede asignar cualquier valor, por lo que el número de incógnitas es $4 + n$.

En estas condiciones, si se prescriben los puntos centrales B y B^*, se obtienen dos sistemas de n ecuaciones cada uno. Cada sistema, además, tiene $2 + n$ incógnitas -las dos coordenadas de A_0(o A_0^*) y los n valores θ_j ($j = 1,2,\dots,n$)-, pero n de estas incógnitas son comunes a los dos sistemas, por lo que el número total de incógnitas es $2(2 + n) - n = n + 4$, como en el caso anterior. Si se desea que el número de ecuaciones sea idéntico al número de incógnitas, se debe tener

$$2n = n + 4, \text{ o sea } n = 4$$

Otra posible combinación de datos e incógnitas es la siguiente: especifíquense el punto central B y el punto circular A_0, con lo que se obtiene un sistema de n ecuaciones en n incógnitas -los n valores de θ-, por un lado, y por otro, especifíquese el punto central B^*, con lo que se obtiene un sistema de n ecuaciones en $2 + n$ incógnitas -las dos coordenadas del punto circular A_0^* y los n valores de θ- teniéndose así en total 2 + 2n incógnitas; pero como de estas hay n incógnitas comunes -los n valores de θ- realmente se tienen 2 + n incógnitas. Con objeto de igualar el número de incógnitas al de ecuaciones, basta hacer

$$2 + n = 2n, \text{ o sea } n = 2$$

Esta combinación de datos e incógnitas se ilustra en seguida con el diseño de una grúa.

Ejemplo 3.4.1. Diseñe una grúa que transporte una carga por los puntos R_0, R_1, R_2, (fig 3.4.1), de manera que el eslabón de entrada (BA_0) tenga la configuración inicial mostrada y el eslabón de salida esté articulado en B^*. El problema consiste, entonces, en determinar la posición del punto central A_0^*, junto con los tres valores del ángulo θ. Obsérvese que hay cuatro incógnitas, pero también se cuenta con cuatro ecuaciones

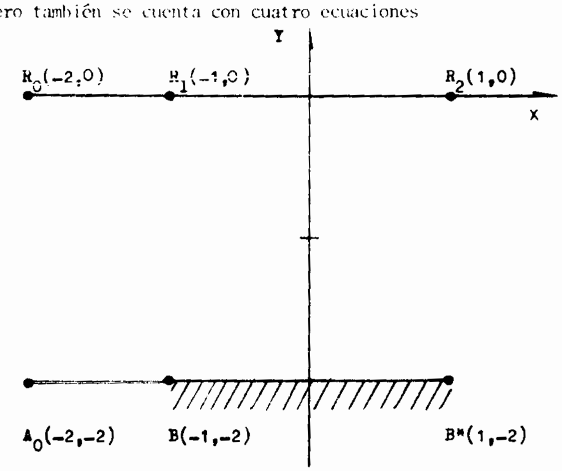


Fig 3.4.1 Conducción de una carga por tres puntos alineados

Sustituyendo los valores numéricos de este problema en las ecs 3.3.6a, se obtiene:

i) Ecuaciones referentes al eslabón A_0B

$$||a_0 - b||^2 = 1$$

Para j = 1

$$||r_1 + e^{i(\theta_1 - \theta_0)}(a_0 - r_0) - b||^2 = -8 \cos (\theta_1 - \theta_0) + 8$$

Si se hace $\theta_i - \theta_0 = \theta_i'$ $(i = 1, 2)$, la ecuación anterior se reduce a

$$8 \cos \theta_1' - 7 = 0 \qquad (3.4.1)$$

Para j = 2

$$||r_2 + e^{i(\theta_2 - \theta_0)}(a_0 - r_0) - b||^2 = 8 \text{ sen } (\theta_2 - \theta_0) -$$

$$- 8 \cos (\theta_2 - \theta_0) + 12 = 8 \text{ sen } \theta_2' - 8 \cos \theta_2' + 12$$

con lo cual se llega a

$$8 \text{ sen } \theta_2' - 8 \cos \theta_2' + 11 = 0 \qquad (3.4.2)$$

ii) Ecuaciones referentes al eslabón $A_0^*B^*$

Llámense x_A^* y y_A^* a las coordenadas de A_0^*. Como $b^* = 1 - 2i$, se tiene

$$||a_0^* - b^*|| = x_A^{*2} - 2x_A^* + 4y_A^* + y_A^{*2} + 5$$

Para j = 1

$$||r_1 + e^{i(\theta_1 - \theta_0)}(a_0^* - r) - b^*||^2 = x_A^* + 4x_A^* + y_A^{*2} + 4y_A^* \text{ sen } (\theta_1 - \theta_0) +$$

$$+ 4(x_A^* + 2) \text{ sen } (\theta_1 - \theta_0) + 4y_A^* \cos (\theta_1 - \theta_0)$$

$$- 4(x_A^* + 2) \cos (\theta_1 - \theta_0) + 12$$

$$= x_A^{*2} + 4y_A^* + y_A^{*2} + 4y_A^* \text{ sen } \theta_1' + 4(x_A^* + 2) \text{ sen } \theta_1'$$

$$+ 4y_A^* \cos \theta_1' - 4(x_A^* + 2) \cos \theta_1' + 12$$

Así, se tiene la tercera ecuación,

$$(6 + 4 \text{ sen } \theta_1' - 4 \cos \theta_1)\, x_A^* + 4(\text{sen } \theta_1' + \cos \theta_1' - 1)\, y_A^* +$$

$$+ 8\, (\text{sen } \theta_1' - \cos \theta_1') + 7 = 0 \qquad (3.4.3)$$

Para j = 2

$$||r_2 + e^{i(\theta_2 - \theta_0)}\, (a_0^* - r_0) - b^*||^2 = x_A^{*2} + 4x_A^* + 4(x_A^* + 2) \text{ sen } (\theta_2 - \theta_0) +$$

$$+ 4y_A^* \cos (\theta_2 - \theta_0) + y_A^{*2} + 8$$

$$= x_A^{*2} + 4\, (\text{sen } \theta_2' + 1)\, x_A^* + 4y_A^* \cos \theta_2' + y_A^{*2} + 8(\text{sen } \theta_2' + 1)$$

La última ecuación es, entonces

$$(4 \text{ sen } \theta_2' + 6)\, x_A^* + 4\, (\cos \theta_2' - 1)\, y_A^* + 8 \text{ sen } \theta_2' + 3 = 0 \qquad (3.4.4)$$

El sistema de ecs 3.4.1 a 3.4.4 constituye el conjunto de ecuaciones de diseño de la grúa propuesta. Aunque generalmente los sistemas de ecuaciones que surgen del diseño de mecanismos son no lineales y fuertemente acoplados, en este caso se pueden resolver sin auxilio de computadora; la solución obtenida con regla de cálculo, es

$$\theta_1' = 29° \qquad (3.4.5a)$$

$$\theta_2' = -31.3° \qquad (3.4.5b)$$

$$x_A^* = -\ 0.07 \qquad (3.4.6a)$$

$$y_A^* = -\ 2.47 \qquad (3.4.6b)$$

En general, el diseño de mecanismos conduce a sistemas algebraicos de ecuaciones no lineales, cuya solución requiere la aplicación de un método numérico en computadora digital.

El método numérico más efectivo para resolver un sistema algebraico no lineal de la forma

$$\overline{f}(\overline{x}) = \overline{0} \qquad (3.4.7)$$

donde $\overline{f}$, $\overline{x}$ y $\overline{0}$ son vectores de dimensión n, es el de Newton-Raphson (ref 3.7), cuyo esquema iterativo para hallar las raíces *aproximadas* del sistema de ecs 3.4.7 es:

$$\overline{x}_{k+1} = \overline{x}_k - \underline{J}^{-1}(\overline{x}_k)\overline{f}(\overline{x}_k) \qquad (3.4.8)$$

donde $\bar{x}_k$ es la k-ésima aproximación a la raíz buscada de $\bar{f}(\bar{x})$, y J la matriz Jacobiana de $\bar{f}$; esto es, el elemento ℓ,m de J, representado por $J_{\ell m}$, está dado por

$$J_{\ell m} = \frac{\partial f_\ell}{\partial x_m} \qquad (3.4.9)$$

El cálculo del incremento $\Delta\bar{x}_k$ en la ec 3.4.8, dado por

$$\Delta\bar{x}_k = - \underline{J}^{-1}(\bar{x}_k)\bar{f}(\bar{x}_k) \qquad (3.4.10)$$

debe calcularse resolviendo el sistema

$$\underline{J}(\bar{x}_k)\ \Delta\bar{x}_k = - \bar{f}(\bar{x}_k) \qquad (3.4.11)$$

que es un sistema algebraico lineal de la forma

$$\underline{A}\bar{x} = \bar{b} \qquad (3.4.12)$$

donde x y b son vectores de la misma dimensión, n, y A es, entonces, una matriz cuadrada de orden n. Existen varios métodos para resolver el sistema 3.4.12, pero cualquiera de ellos cae dentro de uno de los dos tipos más generales de métodos, a saber: *i*) directos; *ii*) iterativos. De los primeros, el más popular y efectivo es el de descomposición de Gauss, que consiste en factorizar la matriz A en el producto

$$\underline{A} = \underline{L}\underline{U} \qquad (3.4.13)$$

donde $\underline{L}$ es una matriz triangular inferior con la unidad sobre su diagonal, y $\underline{U}$ es una matriz triangular superior (no necesariamente tiene la unidad sobre su diagonal). La matriz $\underline{L}$ es fácilmente invertible y el sistema 3.14.12 equivale a

$$\underline{U}\bar{x} = \bar{c} \qquad (3.4.14)$$

con

$$\bar{c} = \underline{L}^{-1}\bar{b} \qquad (3.4.15)$$

En realidad, el algoritmo de Gauss no requiere invertir la matriz $\underline{L}$ en forma directa, como se puede ver en la ref 3.8, en la cual aparecen dos subrutinas, DECOMP y SOLVE, que resuelven el sistema 3.4.12 en dos pasos: en el primero, DECOMP descompone la matriz $\underline{A}$ en el producto $\underline{LU}$, mientras que en el segundo SOLVE resuelve el sistema 3.4.14. DECOMP utiliza pivoteo parcial con objeto de garantizar un efecto mínimo del error de redondeo.

Dentro de los métodos iterativos, el de Gauss-Seidel con relajación es de los más efectivos (ref 3.9). Sin embargo, los métodos iterativos no se pueden aplicar a cualquier tipo de sistema, quedando reducido su uso a casos en que los elementos de la matriz $\underline{A}$ siguen una pauta sencilla. Estos tipos de matrices surgen, por ejemplo, en la solución de ecuaciones diferenciales parciales, cuando se utilizan métodos de diferencias finitas.

En la fig 3.4.2 se presenta el listado de la subrutina NEWRAP, que resuelve el sistema algebraico no lineal 3.4.7 por el método de Newton-Raphson. En dicha subrutina se llama a las subrutinas DECOMP y SOLVE, que son una versión mejorada de las de la ref 3.8. Si no se dispone de esta referencia puede emplearse alguna otra subrutina para el mismo fin, como el programa que aparece en la ref 3.10. En la ref 3.11 aparece un

```
      SUBROUTINE NEWRAP(X,FUN,DFDX,ESCRIB,P,TOL,ERROR,N,ITER,MAX)
ESTA SUBRUTINA CALCULA LAS RAICES DE UN SISTEMA ALGEBRAICO NO LINEAL
DE ORDEN N, POR EL METODO DE NEWTON-RAPHSON (ISAACSON E. Y KELLER H.
B., ANALYSIS OF NUMERICAL METHODS, JOHN WILEY AND SONS, INC., NEW
YORK, 1966, PP.85-123)
LOS PARAMETROS DE LA SUBRUTINA SON
X, UN VECTOR DE DIMENSION N CUYAS COMPONENTES SON LAS INCOGNITAS.
FUN, UNA SUBRUTINA EXTERNA QUE CALCULA EL VECTOR F, QUE CONTIENE
LAS FUNCIONES CUYAS RAICES SE TRATA DE OBTENER. DFDX. UNA SUBRUTINA
EXTERNA QUE CALCULA LA MATRIZ JACOBIANA DEL VECTOR F CON RESPECTO AL
VECTOR X. ESCRIB, UNA SUBRUTINA EXTERNA QUE IMPRIME LOS RESULTADOS.
FUN, DFDX Y ESCRIB SON PROPORCIONADAS POR EL USUARIO.
P ES UN VECTOR DE LA DIMENSION QUE EL USUARIO NECESITE. CONTIENE
LOS PARAMETROS QUE CADA PROBLEMA PUEDA REQUERIR.
TOL. UN ESCALAR POSITIVO, LA TOLERANCIA IMPUESTA EN LA APROXIMACION.
ERROR ES UN ESCALAR POSITIVO CUYO VALOR ES LA MAGNITUD DEL ERROR
ENTRE DOS ITERACIONES SUCESIVAS.  ITER ES EL NUMERO DE ITERACIONES
EJECUTADAS. MAX ES EL MAXIMO NUMERO DE ITERACIONES PERMITIDAS.
LAS SUBRUTINAS DECOMP Y SOLVE RESUELVEN EL SISTEMA ALGEBRAICO LINEAL
DE ORDEN N DF(X)*F(X)=DELTA, SIENDO DELTA LA CORRECCION A LA K-SIMA
ITERACION. EL METODO QUE USAN ES EL DE DESCOMPOSICION LU(MOLER C. B.
MATRIX COMPUTATIONS WITH FORTRAN AND PAGING. COMMUNICATIONS OF THE
ACM, VOLUME 15, NUMBER 4, APRIL 1972.).

      REAL X(5),F(4),DF(4,4),DELTA(4),P(20),A(4,4),B(4),IP(4)
      ITER=0
1     ITER=ITER+1
      IF(ITER.GT.MAX) GO TO 5
      CALL FUN(X,F,P,N)

      CALL DFDX(X,DF,P,N)

      CALL DECOMP(N,DF,F,IP)
SI LA MATRIZ JACOBIANA ES SINGULAR, REGRESA AL PROGRAMA PRINCIPAL.
      IF(IP(N).EQ.0) GO TO 6
      CALL SOLVE(N,DF,F,IP,DELTA)
      ERROR=0.
      DO 2 I=1,N
2     ERROR = ERROR+ABS(DELTA(I))
      ERROR=ERROR/N
      IF(ERROR.LE.TOL) GO TO 4
      DO 3 I=1,N
3     X(I)=X(I)-DELTA(I)
      CALL ESCRIB(ITER,X,ERROR,MAX,N)

      GO TO 1
4     WRITE(6,101)
      CALL ESCRIB(ITER,X,ERROR,MAX,N)

      RETURN
5     WRITE(6,102)
      RETURN
6     WRITE(6,103)
      RETURN
1 FORMAT(////10X,? VIENE EL RESULTADO FINAL?//)
2 FORMAT(//,10X,"NO HAY CONVERGENCIA"//)
3 FORMAT(//,10X,"LA MATRIZ JACOBIANA ES SINGULAR",//)
      END
```

Fig 3.4.2 Listado de la subrutina NEWRAP

programa, DESIGN, que resuelve un sistema algebraico no lineal como el 3.4.7 por el método de Newton-Raphson. Ese programa fue escrito ex profeso para resolver ecuaciones del tipo de las que surgen en el diseño de mecanismos.

Ejercicio 3.4.1. Resuelva el sistema de ecs 3.4.1-3.4.4 y dibuje el mecanismo obtenido. Construya este mecanismo con cartón y compruebe que efectivamente su punto R pasa por los puntos especificados.

Ejercicio 3.4.2. Suponiendo que el mecanismo obtenido en el ejemplo 3.4.1 y en el ejercicio 3.4.1 es accionado por un segundo mecanismo cuya barra de salida es el eslabón A_0B del primero y la barra de entrada gira a una velocidad angular constante de 4 rpm diseñe este segundo mecanismo de manera que la carga se mueva de R_0 a R_2 en 10 seg. Dibuje el sistema mecánico compuesto por estos dos mecanismos.

Ejercicio 3.4.3. Obtenga las ecuaciones de diseño del mecanismo que genere la trayectoria de la fig 3.4.3. Resuelva estas ecuaciones usando la subrutina NEWRAP y construya físicamente el mecanismo que resulte.

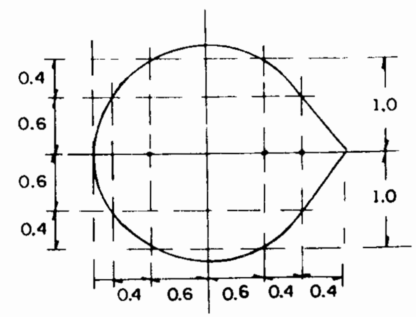


Fig 3.4.3 Generación de trayectoria con nueve puntos de precisión

3.5 Uso de trayectorias de los puntos de la barra acopladora en la síntesis de mecanismos.

Debido a la continuidad de la ecuación de Freudeustein, ec. 2.2.7, la barra de salida en un mecanismo de cuatro eslabones solo puede alcanzar un estado estacionario instantáneamente cuando la barra de entrada gira sin interrupción.

Algunas aplicaciones industriales, sin embargo, requieren en algunas máquinas que un elemento de estas permanezca estacionario durante intervalos finitos, como en el caso de una prensa que realiza un doblez en una lámina metálica, con alimentación mecánica de la lámina. En este caso, el elemento de la máquina que transporta la lámina hacia la prensa antes del doblez y desde ella después de efectuado el trabajo, debe permanecer estacionario durante el tiempo de trabajo de la prensa.

En estos casos se procede como sigue:

i) Diséñese un mecanismo como el de la Fig. 3.5.1, uno de cuyos puntos de su barra acopladora describa el arco de círculo AB de su trayectoria, lo cual puede conseguirse con el método de la Sec. 3.4. Alternativamente se puede seleccionar tal mecanismo del atlas de Hrones y Nelson (ref. 3.6)

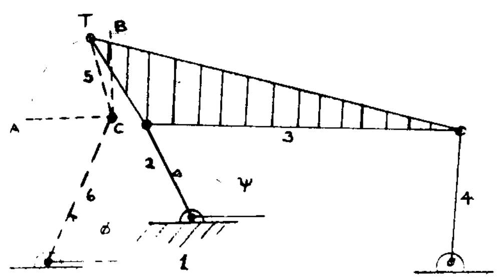


Fig. 3.5.1 Mecanismo de cuatro eslabones con un punto que describe un arco de círculo.

ii) Determínese el centro C del arco AB

iii) Conéctese los puntos T y C mediante un quinto eslabón rígido.

iv) Conéctese el punto C con un punto D, adecuado, mediante un sexto eslabón rígido.

El mecanismo así obtenido, de seis eslabones, tiene un grado de libertad simple, como puede comprobarse con la ecuación de Grübler (ec. 2.1.1). Además, mientras el punto T describe el arco AB, el eslabón CD permanece estacionario.

La gráfica ϕ vs. ψ correspondiente se muestra en la Fig. 3.5.2

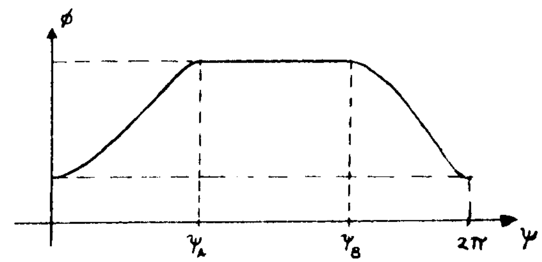


Fig. 3.5.2 Respuesta cinemática de un mecanismo de seis eslabones con reposo durante un intervalo finito.

Para el mismo objeto anterior se puede utilizar una trayectoria con una sección recta, obteniendo el mecanismo RRRRRPR de la Fig. 3.5.3

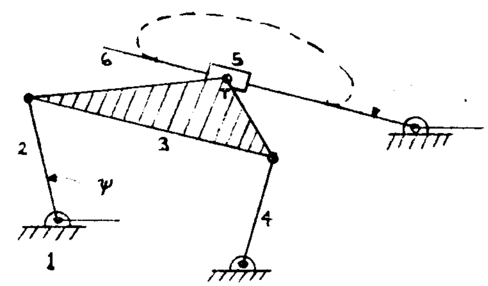


Fig. 3.5.3 Mecanismo de seis eslabones con eslabón de salida estacionario durante un intervalo finito.

El eslabón 6 del mecanismo de la Fig. 3.5.3 permanece estacionario mientras el punto T describe la recta AB.

Ejercicio 3.5.1 Enumere y bosqueje todos los mecanismos posibles que contengan pares R y P, de seis eslabones, con grado de libertad simple.

Una segunda aplicación de las trayectorias de puntos sobre la barra acopladora consiste en obtener dos oscilaciones de la barra de salida por cada revolución de la de entrada.

En la Fig. 3.5.4 se muestra un mecanismo RRRRRRR en el que, mientras el punto T describe el segmento ABC, el eslabón 6 completa una oscilación y, cuando ese punto describe el segmento CDA, el mismo eslabón 6 completa una segunda oscilación. Nótese que al cerrar el punto T su trayectoria en A, el eslabón de entrada completa una revolución.

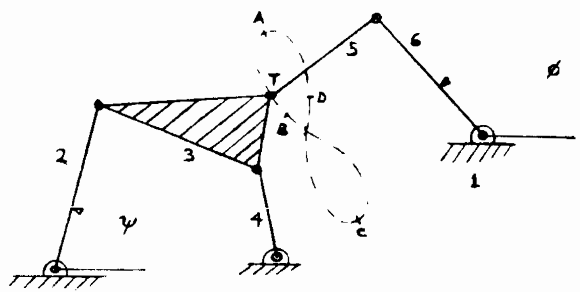


Fig. 3.5.4 Mecanismo RRRRRRR que produce doble oscilación en el eslabón 6 por cada revolución del eslabón 2.

La gráfica ø vs. ψ del mecanismo anterior se muestra en la Fig. 3.5.5

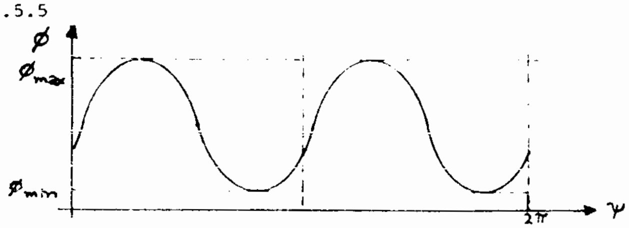


Fig. 3.5.5 Gráfica de desplazamiento del mecanismo de la Fig. 3.5.4

Ejercicio 3.5.2 Bosqueje un mecanismo RRRRPRP que produzca la respuesta cinemática de la Fig. 3.5.6

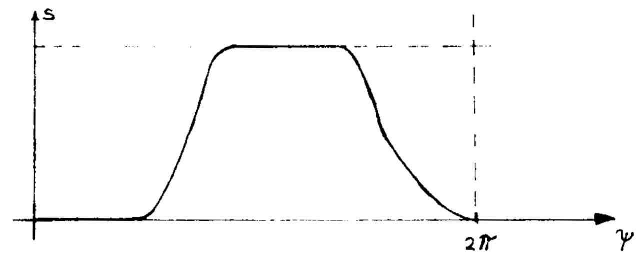


Fig. 3.5.6 Respuesta cinemática de un mecanismo RRRRPRP con dos intervalos finitos de reposo.

Una tercera aplicación se encuentra cuando se desea obtener doble vuelta completa del eslabón de salida por cada revolución del de entrada. Una última aplicación que se puede mencionar es la de obtener un movimiento con velocidad constante durante un intervalo finito, en el movimiento del eslabón de salida. Todas estas aplicaciones aparecen descritas con todo detalle en la ref. 3.2.

Ejercicio 3.5.3 Dibuje la curva ø vs. ψ del mecanismo de la Fig. 3.5.7, donde ABC y CDA son arcos de círculo con centro en E y F, respectivamente.

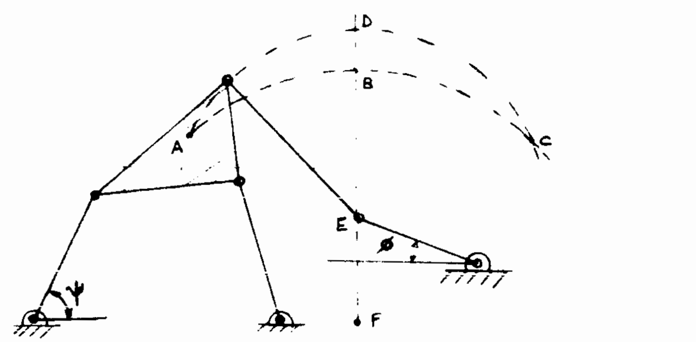


Fig. 3.5.7 Mecanismo RRRRRRR con dos arcos de círculo como trayectoria de un punto de su barra acopladora.

3.6 Ecuación de Euler-Savary, círculo de inflexión y cúbica de curvatura estacionaria.

Los resultados que se presentan en esta sección no se deducen, sino solo se enuncian. El lector interesado puede consultar la referencia 3.3, que contiene una excelente exposición del tema.

Antes de entrar en materia se introduce un concepto de suma importancia: la centroda*. Considérense dos cuerpos, A y B, en movimiento plano. Por el teorema de Aronhold-Kennedy (Sec. 1.10), para cada instante existe un punto P_A de A y un punto P_B de B, ambos coincidentes, cuya velocidad relativa es nula; a este punto se le llama "centro instantáneo" - C_i - (de rotación) de A con respecto a B (o de B con respecto a A). La trayectoria que describe el C_i en A es, desde luego, diferente a aquella que describe en B. Esta trayectoria, ya sea en A o en B, recibe el nombre de "centroda".

Ejercicio 3.6.1 Describa las centrodas de los siguientes sistemas de cuerpos rígidos en movimiento plano
i) Un cilindro que rueda sin deslizar sobre una superficie plana.
ii) Dos cilindros en contacto que ruedan sin deslizar.

En este punto, recuérdese que en la Sec. 3.5. se evidenció la utilidad de las trayectorias de puntos de la barra acopladora que tienen tramos rectos o circulares. Se mencionó también que estas trayectorias pueden obtenerse del atlas de Hrones y Nelson (ref. 3.6). Lo que no se dijo en esa sección fue cómo determinar sistemáticamente los puntos sobre la barra acopladora que describen esas trayectorias de interés.

Como se demuestra en la ref. 3.3, el lugar geométrico de los puntos sobre la barra acopladora que localmente tienen curvatura infinita (de ahí que constituyan una buena aproximación a una trayectoria recta) es un círculo tangente a la centroda de la barra acopladora, siendo el C_i correspondiente el punto de tangencia, como se muestra en la Fig. 3.6.1

---

* centrum = centro; oda = trayectória (etimología griega)

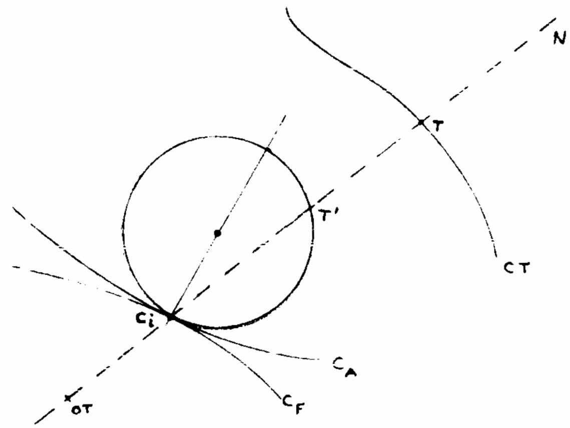


Fig. 3.6.1 Círculo de inflexión sobre la barra acopladora.

En esa figura, C_A y C_F son las centrodas sobre la barra acopladora y sobre la barra fija, respectivamente. T es un punto cualquiera de la barra acopladora, que describe sobre la barra fija la trayectoria C_T, siendo N la normal a C_T, para la posición mostrada de T, O_T es el centro de curvatura de C_T correspondiente y T' es la intersección de la normal O_TN con el círculo de inflexión.

La posición de los puntos O_T, C_i, T y T' está dada por la Ecuación de Euler-Savary* (ref. 3.3)

$$\overline{O_T T} = \frac{\overline{C_i T}^2}{\overline{T'T}} \qquad 3.6.1$$

En la determinación del círculo de inflexión de un mecanismo de cuatro eslabones como el de la Fig. 3.6.2, se sabe de antemano que las articulaciones R_{23} y R_{34} describen trayectorias circulares y son puntos de la barra acopladora, siendo sus radios de curvatura las longitudes a_2 y a_4, respectivamente.

---

* Euler L. (1765) y Savary (ca. 1836)

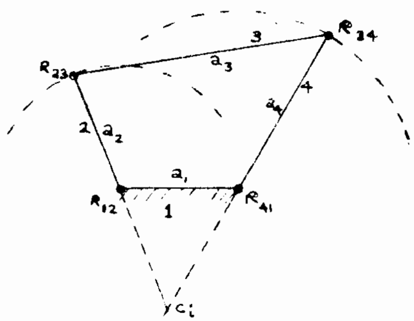


Fig. 3.6.2 Mecanismo de cuatro eslabones articulados, con dos trayectorias circulares.

Con la Ecuación de Euler-Savary se determinan los puntos R'_{23} y R'_{34}, contenidos en el círculo de inflexión. Estos puntos están dados por las relaciones

$$\overline{R'_{23}R_{23}} = \frac{\overline{C_iR_{23}}^2}{\overline{R_{12}R_{23}}} \quad , \quad \overline{R'_{34}R_{34}} = \frac{\overline{C_iR_{34}}^2}{\overline{R_{41}R_{34}}} \qquad (3.6.2)$$

donde todos los puntos que aparecen en el miembro derecho de las dos ecuaciones anteriores son conocidos*.

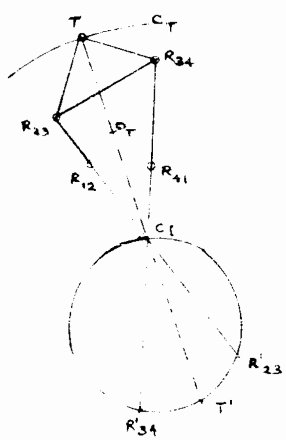


Fig. 3.6.3 Construcción del círculo de inflexión.

* Los puntos C_i, R'_{23} y R'_{34} determinan el círculo de inflexión

Una vez determinado el círculo de inflexión, se puede determinar el radio de curvatura de cualquier punto de la barra acopladora, como el punto T mostrado en la Fig. 3.6.3, por medio de la Ecuación de Euler-Savary, tal como aparece en la expresión 3.6.1. Nótese, además, que los puntos sobre el círculo de inflexión ya determinado describen trayectorias que localmente se aproximan a una recta, debido a que tienen, también localmente, un radio de curvatura infinito*.

Otro lugar geométrico de interés es la <u>cúbica de curvatura estacionaria</u> (CCE), que contiene todos los puntos de la barra acopladora que describen trayectorias con la propiedad de que la intersección de esas trayectorias con la CCE corresponden a un punto de curvatura máxima o mínima, esto es, estacionaria. El nombre de este lugar geométrico surge del hecho de estar descrito por una ecuación de tercer grado, a saber (ref. 3.3)

$$(x^2+y^2)\left(\frac{x}{M} + \frac{y}{N}\right) - xy = 0 \qquad (3.6.3)$$

donde

$$\frac{1}{M} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{D}\right) \quad , \quad \frac{1}{N} = -\frac{1}{3}\left(\frac{dD}{d\sigma}\,\frac{1}{D}\right) \qquad (3.6.4)$$

siendo R_2 el radio de curvatura de la centroda en la barra acopladora, D el diámetro del círculo de inflexión, y σ la coordenada del C_i a lo largo de la centroda mencionada. Nótese que la curva 3.6.3 está fija en la barra acopladora, y los parámetros 1/M y 1/N se pueden calcular sin necesidad de conocer los valores de los paréntesis de las ecs. (3.6.4), pues se sabe que las articulaciones R_{23} y R_{34} describen trayectorias circulares, esto es, de curvatura estacionaria y por esta razón están alojados sobre la CCE. Conocidas las coordenadas de estos puntos, al sustituirlas en la ec (3.6.3) se obtienen M y N. Al definir los ejes X-Y sobre la barra acopladora, el origen se localiza en C_i y el eje X a lo largo de la tangente a las dos centrodas en el punto de contacto de las mismas, siendo positivo en la dirección de la velocidad del C_i. El eje Y queda determinado con la condición de que sea perpendicular a X y ambos formen un sistema derecho.

Puesto que la ec. (3.6.3) es homogénea y el origen de coordenadas es el C_i, este es también un punto de la CCE. En este punto, sin embargo, la trayectoria en cuestión no es de curvatura estacionaria, sino que tiene un pico, como se muestra en la Fig. 3.6.4

* Para esos puntos la distancia $\overline{T'T}$ de la ecuación 3.6.1 es nula

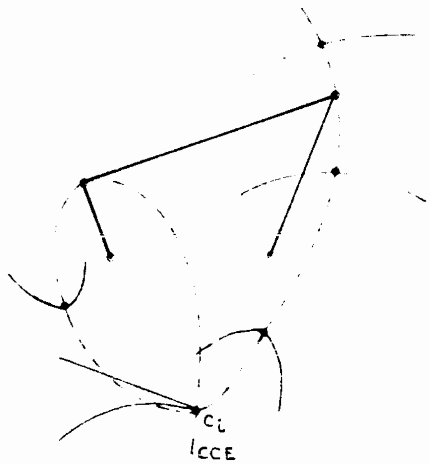


Fig. 3.6.4 Cúbica de curvatura estacionaria de la barra acopladora de un mecanismo RRRR.

Una vez obtenida la CCE, el diseñador puede seleccionar sobre ella el punto de la barra acopladora que describa una trayectoria que mejor aproxime a un círculo, para los efectos de diseño de la sec. 3.5.

3.7 El Teorema de Roberts-Chebyshev y sus aplicaciones. Mecanismos cognados.

Casi simultáneamente, Roberts (1875) y Chebyshev (1878) publicaron un resultado de gran importancia en la síntesis de mecanismos. Este es el "Teorema de Roberts-Chebyshev".

"Dado un mecanismo plano de cuatro barras, RRRR, y un punto de su eslabón acoplador que describe una trayectoria dada, existen otros dos mecanismos de la misma clase que tienen un punto de su barra acopladora que describe esa misma trayectoria".

Los tres mecanismos en consideración son llamados "cognados", y la obtención de dos de ellos dado uno, que se llamará "original", se describe en seguida:

Considérese el mecanismo original RRRR plano de la Fig. 3.7.1, y el punto T sobre su eslabón acoplador, que describe la trayectoria C_T mostrada.

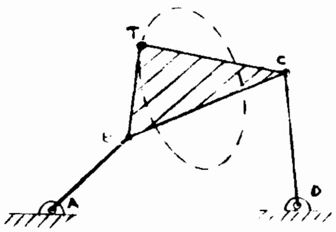


Fig. 3.7.1 Mecanismo plano RRRR y la trayectoria de un punto de su eslabón acoplador.

i) A partir de los puntos A, B y T, constrúyase el paralelogramo ABTB' (Fig. 3.7.2)

ii) Con el lado TB' de ese paralelogramo como base constrúyase el triángulo TB'T', semejante al BCT, de manera que (Fig. 3.7.2)

$$\frac{\overline{TB'}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{T'T}}{\overline{TC}}$$

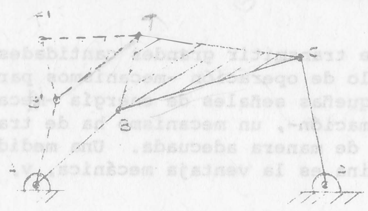


Fig. 3.7.2 Pasos i y ii para la construcción de un mecanismo cognado del mecanismo ABCD

iii) De manera análoga a los pasos i y ii, constrúyanse el paralelogramo DCTC' y el triángulo TC'T", de manera que (Fig. 3.7.3)

$$\frac{TC'}{BC} = \frac{TT''}{BT}$$

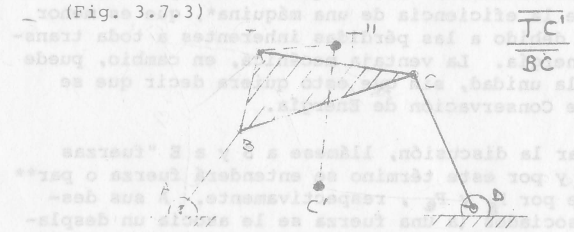


Fig. 3.7.3 Tercer paso en la construcción de un mecanismo ABCD.

iv) A partir de los puntos T',T,T", obténgase el paralelogramo T'TT"E de la Fig. 3.7.4

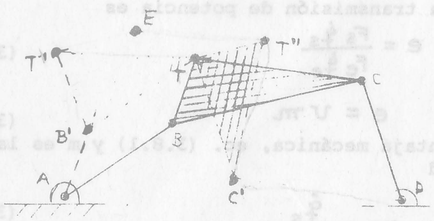


Fig. 3.7.4 Construcción de los mecanismos cognados del mecanismo ABCD.

En la ref. 3.3 se demuestra que el punto E de la construcción anterior permanece fijo durante el movimiento del mecanismo original, si se permite que los paralelogramos construidos se deformen, por lo que se obtienen dos mecanismos, el AB' T' E y el DC' T" E, cuya barra acopladora contiene un punto, T, que describe la misma trayectoria que el punto T del mecanismo original (Figs. 3.7.5 a y 3.7.5b)

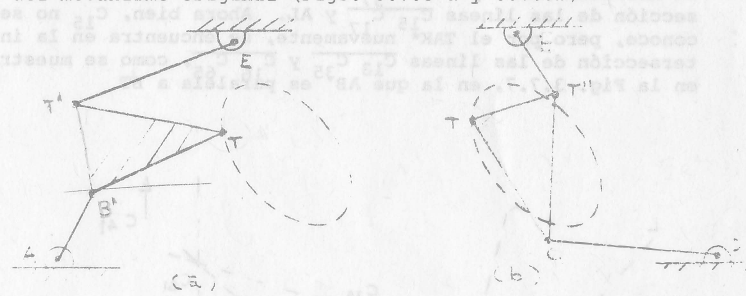


Fig. 3.7.5 Mecanismos cognados del mecanismo de la Fig. 3.7.1

La primera aplicación de los mecanismos cognados es obvia: Puesto que los eslabones de los cognados tienen longitudes diferentes que los del mecanismo original, un mecanismo dado que interese por la trayectoria que describa uno de los puntos de su barra acopladora (con un tramo recto o un tramo circular, por ejemplo), se puede sustituir con ventaja por uno de sus cognados si este último resulta ocupar menos espacio que el original.

Otra aplicación de los mecanismos cognados es la posibilidad que presentan de producir un movimiento de traslación sin rotación en uno de los eslabones de un mecanismo de seis barras articuladas, como se demuestra en la ref. 3.2

Un mecanismo RRRP tiene un solo mecanismo cognado, también RRRP, cuya construcción se muestra en la Fig. 3.7.6

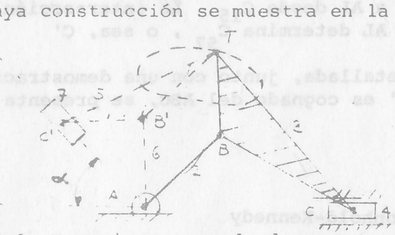


Fig. 3.7.6 Mecanismo cognado de un mecanismo RRRP

En esa figura, el ángulo α es el sumplementario del ángulo TBC. El punto C' se determina como sigue:

Puesto que el punto C' es el centro instantáneo de 5 con respecto a 7, basta determinar este centro para localizar a C' Esto se realiza mediante la aplicación del Teorema de Aronhold-Kennedy: El C_{57} está localizado en la intersección de las líneas $\overline{C_{15}\ C_{17}}$ y AL. Ahora bien, C_{15} no se conoce, pero por el TAK* nuevamente, se encuentra en la intersección de las líneas $\overline{C_{13}\ C_{35}}$ y $\overline{C_{16}\ C_{65}}$, como se muestra en la Fig. 3.7.7, en la que AB' es paralela a BT

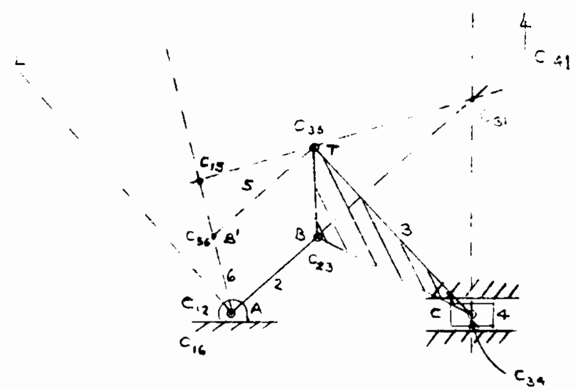


Fig. 3.7.7 Localización de C_{15}

Ahora bien, puesto que la corredera 7 tiene un movimiento de traslación pura con respecto al bastidor fijo, C_{17} está localizado en el infinito, y así, C_{57} se obtiene trazando una perpendicular a AL desde C_{15}. La intersección de esa perpendicular con AL determina C_{57}, o sea, C'

Una descripción detallada, junto con una demostración de que el mecanismo AB'C' es cognado del ABC, se presenta en la ref. 3.3

* Teorema de Aronhold-Kennedy

3.8 Restricciones en el diseño de mecanismos con pares inferiores.

Ya sea que se trate de transmitir grandes cantidades de energía en el intervalo de operación -mecanismos para transmitir potencia-, o pequeñas señales de energía -mecanismos para transmitir información-, un mecanismo ha de transmitir esa potencia mecánica de manera adecuada. Una medida de la operación de una máquina es la ventaja mecánica, v, definida como

$$v = \frac{S}{E} \qquad (3.8.1)$$

donde S es la fuerza (o el par) obtenida (o) a la salida, mientras que E es la fuerza (o el par) alimentada (o) a la máquina. Es un número adimensional, y por esto E y S deben tener las mismas unidades. Nótese que la ventaja mecánica es diferente de la eficiencia de una máquina*, que es menor que la unidad, debido a las pérdidas inherentes a toda transformación de energía. La ventaja mecánica, en cambio, puede ser mayor que la unidad, sin que esto quiera decir que se viole la Ley de Conservación de Energía.

Para simplificar la discusión, llámese a S y a E "fuerzas generalizadas" y por este término se entenderá fuerza o par** y represéntense por F_s y F_e, respectivamente. A sus desplazamientos asociados (a una fuerza se le asocia un desplazamiento lineal, mientras que a un par se le asocia un desplazamiento angular) llámeseles "coordenadas generalizadas", q_s y q_e, respectivamente. Representando por un punto sobre la variable una derivada de esta con respecto al tiempo, las velocidades asociadas son $\dot{q}_s$ y $\dot{q}_e$, respectivamente. Así, la potencia a la entrada y a la salida está dada por $F_s \dot{q}_s$ y $F_e \dot{q}_e$, respectivamente. De esta manera, la eficiencia e, de una transmisión de potencia es

$$e = \frac{F_s \dot{q}_s}{F_e \dot{q}_e} \qquad (3.8.2)$$

o bien,

$$e = v\,m \qquad (3.8.3)$$

donde v es la ventaja mecánica, ec. (3.8.1) y m es la relación de velocidad

$$m = \frac{\dot{q}_s}{\dot{q}_e} \qquad (3.8.4)$$

* Esta última se define como el cociente de la potencia obtenida entre la suministrada

** En contextos más amplios, una "fuerza generalizada" puede ser inclusive un voltaje, una corriente eléctrica, o alguna otra manifestación de la energía

Por la Ley de la Conservación de la Energía, la potencia obtenida de la transmisión no puede ser mayor que la suministrada y solo son iguales cuando se desprecian las pérdidas, esto es, en una máquina ideal. Así, $e \lesssim 1$, pero como m puede ser mayor o igual que 1, v puede también serlo, como se sostuvo antes.

Ejemplo 3.8.1 <u>Determine la ventaja mecánica de un mecanismo RRRR</u>.

Para simplificar el análisis, supóngase que la inercia de los eslabones del mecanismo es despreciable y que igualmente lo son las pérdidas por fricción. Llámese M_ψ y M_ϕ a los pares que actúan sobre el eslabón conductor y el conducido, respectivamente (Fig. 3.8.1)

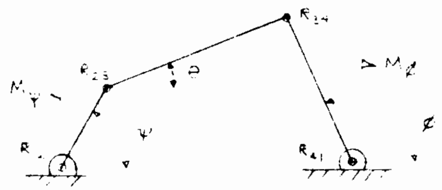


Fig. 3.8.1 Mecanismo RRRR y pares que actúan sobre él.

Notando que el eslabón acoplador está sujeto a solo dos fuerzas, las que actúan en las articulaciones R_{23} y R_{24}, el diagrama de cuerpo libre de l eslabón conductor resulta ser el mostrado en la Fig. 3.8.2 (a)

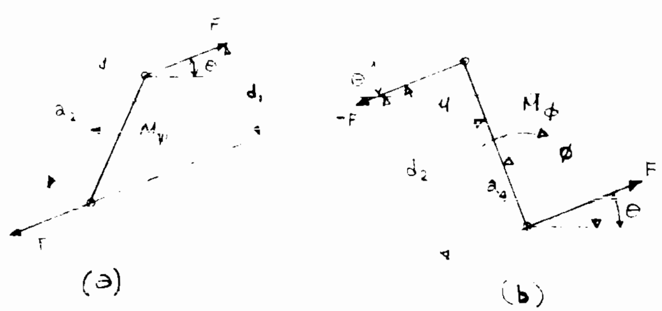


Fig. 3.8.2 Diagramas de cuerpo libre de los eslabones conducido y conductor.

En esa figura, F y -F son las fuerzas coaxiales que actúan sobre el eslabón acoplador. Así, del equilibrio estático del eslabón conductor,

$$F = \frac{M_\psi}{a_2 \operatorname{sen}(\psi - \theta)} \qquad (3.8.5)$$

y, del equilibrio del eslabón conducido,

$$M_\phi = F a_4 \operatorname{sen}(\phi - \theta) \qquad (3.8.6)$$

De las ecs. 3.8.5 y 3.8.6 se obtiene

$$v = \frac{M_\phi}{M_\psi} = \frac{a_4 \operatorname{sen}(\phi - \theta)}{a_2 \operatorname{sen}(\psi - \theta)} \qquad (3.8.7)$$

como la expresión deseada para la ventaja mecánica en cuestión. El ángulo $\phi - \theta$ es llamado convencionalmente "ángulo de transmisión" y se representa por μ. Recordando las definiciones 2.2.6 c, la ec. 3.8.7 se convierte en

$$v = \frac{K_2 \operatorname{sen} \mu}{K_3 \operatorname{sen}(\psi - \theta)} \qquad (3.8.8)$$

Obsérvese lo siguiente:

Ya que ϕ y θ cambian a lo largo de una revolución completa del eslabón conductor, μ también cambia, por lo que el segundo cociente del miembro derecho de la ec. 3.8.8 tiene un numerador que puede cambiar entre -1 y +1, continuamente. Cuando $\mu = 0$ o $\mu = 180°$, la ventaja mecánica se anula, dando como resultado que, teóricamente, por más pequeña que sea una carga, esta no se pueda accionar con un par M_ψ, por más grande que este sea. Se tiene entonces un llamado "punto muerto". Si realmente un mecanismo no se queda trabado cada vez que pasa por un "punto muerto" se debe a la inercia de sus eslabones, que aunque posiblemente despreciable, siempre existe. El uso de volantes almacenadores de energía cinética también previene el que el mecanismo se trabe. En todo caso, un "ángulo de transmisión" nulo es indeseable, y por esto los diseñadores han acordado mantenerlo entre 40° y 140°.

Ejercicio 3.8.1 Dé una definición para el "angulo de transmisión" de un mecanismo RRRP

Ejercicio 3.8.2 Dé una definición para el "ángulo de transmisión" de un mecanismo PRRP

Ejercicio 3.8.3 Despreciando las pérdidas en la transmisión del mecanismo de la Fig. 3.8.1, su eficiencia resulta ser la unidad. Con esta información y la ec. 2.3.1, que da la relación de velocidad del mismo mecanismo, obtenga la ventaja mecánica de la expresión (3.8.8), sin recurrir al análisis de fuerzas.

REFERENCIAS

3.1 D. C. Tao, Applied Linkage Synthesis, Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Palo Alto, Cal. (1964)

3.2 A. H. Soni, Mechanism Synthesis and Analysis, Mc Graw-Hill Book Co., N. York, 1974.

3.3 J. Denavit y R. Hartenberg, Kinematic Synthesis of Linkages, McGraw-Hill Book Co., Inc., Nueva York (1964).

3.4 K. Laksminarayana, A simplified approach to two-freedom linkages, -- Journal of Engineering for Industry, Trans., ASME, Vol 95, Serie B, No. 2 (may 1973).

3.5 C. H. Suh y C. W. Radcliffe, Synthesis of plane linkages with use of the displacement matrix, *Journal of Engineering for Industry, Trans.*, ASME (may 1967)

3.6 J. A. Hrones y G. L. Nelson, Analysis of the Four-Bar Linkage, *The MIT Press and John Wiley & Sons Inc.*, Nueva York (1951)

3.7 E. Isaacson y H. B. Keller, Analysis of Numerical Methods, *John Wiley and Sons, Inc.*, Nueva York (2966) pp 85-123

3.8 G. Forsythe y C. B. Moler, Computer Solution of Linear Algebraic Systems, *Prentice-Hall, Inc.*, Englewood Cliffs, Nueva Jersey (1967), pp 27-76

3.9 R. S. Varga, Matrix Iterative Analysis, *Prentice-Hall, Inc.*, Englewood Cliffs (1962), pp 56-61

3.10 M. L. James et al, Applied Numerical Methods for Digital Computations with Fortran, *International Textbook Company*, Scranton, Penn (1967), pp 86-198

3.11 C. H. Suh, Computer Aided Design of Mechanisms, *University of Colorado*, Boulder (1973)

4. ANALISIS Y SINTESIS DE MECANISMOS QUE CONTIENEN PARES SUPERIORES

INTRODUCCION

Un acoplamiento mediante un par superior existe cuando los elementos acoplados están en contacto no por una superficie, como en el caso de los pares inferiores, sino por medio de un punto o una recta. Una esfera o un cilindro que ruedan sobre un plano constituyen ejemplos de acoplamiento mediante un par superior. En el caso de la esfera, dicho acoplamiento se realiza a través de un punto y en el caso del cilindro, a través de una recta, que resulta ser una generatriz de este.

Los mecanismos más comúnmente utilizados en ingeniería mecánica que contienen pares superiores se encuentran dentro de dos tipos generales: levas y engranes. Las primeras se estudian en este capítulo desde el punto de vista tanto del análisis como de la síntesis.

Contrariamente a la práctica común de utilizar como únicos medios de análisis y de síntesis los métodos gráficos (refs 4.1 a 4.4) aquí se sigue la filosofía del cap 2 y se presentan métodos de tipo analítico, obteniendo las ecuaciones entrada-salida en el caso del análisis y las ecuaciones de diseño en el caso de la síntesis. Análogamente al capítulo señalado, en este se incluye una sección con métodos gráficos, por considerar que, aun en esta era de la computadora digital, el ingeniero debe saber manejar los instrumentos de dibujo como herramienta básica de trabajo.

Antes de proceder al análisis del primer tipo de estos mecanismos -las levas- es conveniente apuntar que su cinématica es más compleja de analizar que la de los mecanismos con pares inferiores, porque el acoplamiento entre los eslabones de entrada y de salida se realiza por una combinación de rodamiento y deslizamiento. Por esta razón los métodos gráficos presentados en el cap 2 no son directamente aplicables a las levas.

4.1 *Análisis cinemático de las levas*

Una *leva* es un cuerpo rígido que tiene una forma determinada, de tal manera que cuando gira alrededor de un eje le imprime a otro cuerpo rígido, llamado *seguidor*, un movimiento periódico, ya sea de rotación o de traslación, con respecto a un marco fijo*. El perfil de la leva depende del movimiento que se desea trasmitir al seguidor.

En la fig 4.1.1 se muestran ejemplos típicos de levas cuyo seguidor está animado de traslación

* Esta definición corresponde a una leva de rotación; pero existen levas de traslación y aun de una combinación de ambos tipos de movimiento.

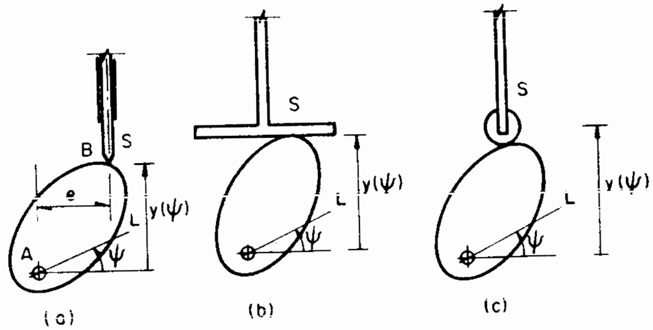


Fig 4.1.1 Diferentes tipos de levas con seguidor traslacional

En la fig 4.1.1a se trata de un seguidor *de punta*, en la b de un seguidor *de cara plana*, y en la c de un seguidor *de carretilla*. En los tres casos se evidencia que la salida es $y(\psi)$, siendo ψ la entrada. $y(\psi)$ es la variable que determina la posición del seguidor, S, mientras que ψ es el ángulo que forma una recta de la leva, L, con una recta M del marco fijo.

En la fig 4.1.2 se muestran tres tipos de levas que son la contraparte de los de la figura anterior, sólo que ahora el seguidor tiene un movimiento de rotación.

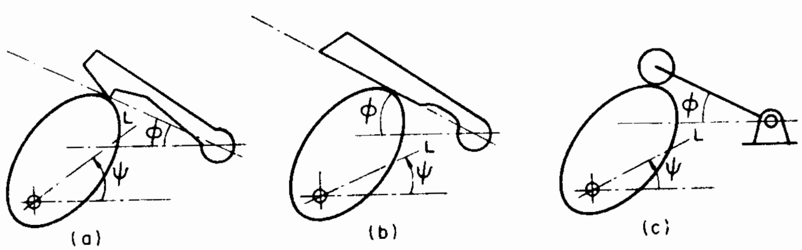


Fig 4.1.2 Diferentes tipos de levas con seguidor rotatorio

Obsérvese en las figuras anteriores, que una condición para el funcionamiento de las levas con seguidor de cara plana es que el perfil de la leva sea convexo.

El seguidor de punta presenta la desventaja obvia de que ocasiona un desgaste excesivo, por lo que su uso queda restringido a los casos en que la carga es pequeña. Los seguidores de cara plana y de carretilla ocasionan menos desgaste, pero requieren más espacio. Qué tipo de seguidor emplear es una cuestión que se decide según las condiciones específicas de operación. Ocasionalmente se emplea un tipo más de seguidor, como se muestra en la fig 4.1.3.

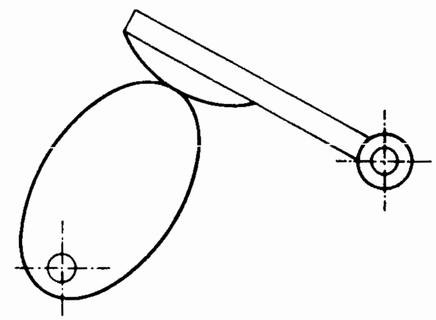


Fig 4.1.3 Leva con seguidor rotatorio de cara curva

4.2 *Análisis de levas*

Considérese primero la leva con seguidor de punta (fig 4.1.1a). En la fig 4.2.1 aparece nuevamente dicha leva; M es una línea fija al marco donde se encuentra alojado el mecanismo y L es una línea fija a la leva. Más aún, ψ es el ángulo que gira la leva y $\rho(\theta)$ es el perfil de esta.

Llámese A al centro de rotación de la leva (con respecto al marco fijo) y B al punto de contacto entre la leva y el seguidor.

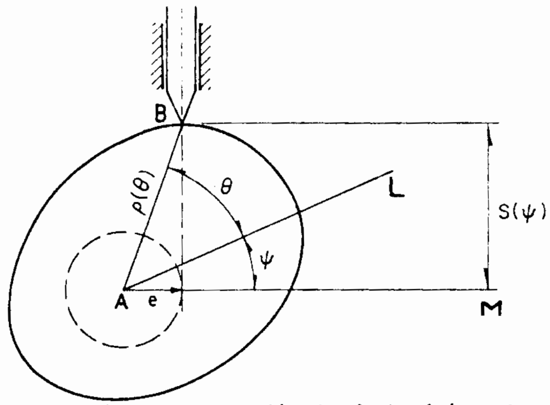


Fig 4.2.1 Leva con seguidor traslacional de punta

En el proceso de análisis se supone que la leva es *dada*, esto es, la ecuación $\rho = \rho(\theta)$ se supone conocida. El problema es determinar la salida $s = s(\psi)$. Así, de la fig 4.2.1

$$s = \rho \text{ sen } (\theta + \psi) \qquad (4.2.1)$$

que, sin embargo, es una función de dos argumentos, ψ y θ. En realidad, ψ y θ no son variables independientes, pues existe una relación funcional entre ambas, como se observa en la fig 4.2.1, en la que

$$e = \rho(\theta) \cos (\theta + \psi) \qquad (4.2.2)$$

donde e es la excentricidad del seguidor, un parámetro del mecanismo *dado* y, por tanto, una constante conocida.

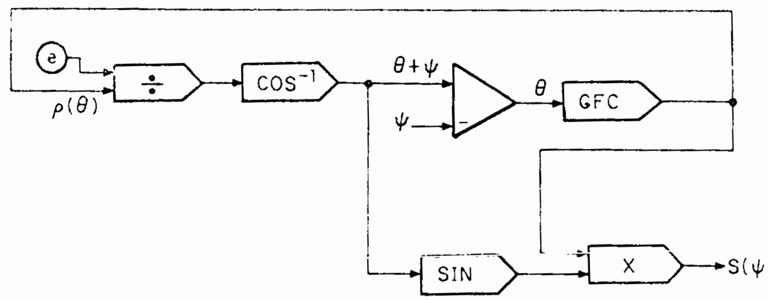


Fig 4,2.2 Realización analógica de las ecs 4.2.1 y 4.2.2

Las ecs 4.2.1 y 4.2.2 son fácilmente realizables en el diagrama de alambrado para computadora analógica de la fig 4.2.2. Obsérvese que con dicho diagrama es factible recurrir a la simulación digital de esas ecuaciones (4.2.1 y 4.2.2) mediante un simulador como el SAS III (ref 4.5). La salida $s(\psi)$ del diagrama es la función que se desea obtener en el análisis de este mecanismo.

Las ecs 4.2.1 y 4.2.2 también pueden resolverse numéricamente mediante la aplicación de un método para computadora digital. En efecto, bajo ciertas condiciones (ref 4.6), la ec 4.2.2 escrita en la forma

$$f(\psi,\theta) = \rho(\theta)\cos(\theta + \psi) - e = 0 \qquad (4.2.3)$$

define implícitamente a θ como función de ψ. Si se supone que se dan esas condiciones de existencia de la función implícita en cuestión, para cada valor, por ejemplo $\tilde{\psi}$, de ψ el correspondiente valor $\tilde{\theta}$, de θ, se puede obtener resolviendo numéricamente la ecuación algebraica no lineal

$$f(\tilde{\psi}, \tilde{\theta}) = \rho(\tilde{\theta})\cos(\tilde{\theta} + \tilde{\psi}) - e = 0 \qquad (4.2.3a)$$

Existen varios métodos (ref 4.7) para resolver una ecuación algebraica no lineal; pero, como en los caps 2 y 3, el que se adopta ahora es el de Newton-Raphson. Partiendo de un valor $\tilde{\theta}_0$ arbitrario, el proceso iterativo en cuestión es el siguiente:

$$\tilde{\theta}_{K+1} = \tilde{\theta}_K - \frac{\rho(\tilde{\theta}_k)\cos(\tilde{\theta}_k - \tilde{\psi}) - e}{\rho'(\tilde{\theta}_K)\cos(\tilde{\theta}_k + \psi) - \rho(\tilde{\theta}_k)\,\mathrm{sen}\,(\tilde{\theta}_k - \tilde{\psi})} \qquad (4.2.4)$$

Dicho proceso se detiene cuando

$$|\tilde{\theta}_{k+1} - \tilde{\theta}_k| \leq \varepsilon|\tilde{\theta}_k| \qquad (4.2.5)$$

siendo ε una cantidad (adimensional) tan pequeña como lo permita la máquina con la que se realicen los cálculos y según la precisión deseada*. Si a medida que se incrementa k, el cociente

$$\left|\frac{\tilde{\theta}_{k+1} - \tilde{\theta}_k}{\tilde{\theta}_k}\right|$$

aumenta también, el proceso diverge, por lo que hay que detenerlo y reiniciarlo con un valor diferente de $\tilde{\theta}_0$.

Llámese $\tilde{\theta}$ al valor para el cual se obtiene la convergencia 4.2.5. La salida $\tilde{s} = s(\tilde{\psi})$ deseada es, entonces, de 4.2.1,

$$\tilde{s} = \rho(\tilde{\theta})\,\mathrm{sen}\,(\tilde{\theta} + \tilde{\psi}) \qquad (4.2.1a)$$

Nuevamente, como en el cap 2, supóngase un conjunto ψ^i de valores de ψ contenidos en $\left[0,\ 2\pi\right]$, ordenados según

$$\psi^{i+1} > \psi^i$$

Sea $\tilde{\theta}^i$ el valor para el cual se tiene convergencia, con el valor ψ^i. Entonces, para acelerar la convergencia del método para todos los valores $\left\{\psi^i\right\}$,

* En IBM 1130 o Burroughs 6500, para simple precisión, un valor adecuado de ε es 10^{-6}

```
C    ESTE PROGRAMA RESUELVE LAS ECUACIONES DE ANALISIS DE UNA LEVA
C    CON SEGUIDOR DE PUNTA, POR EL METODO DE NEWTON-RAPHSON.
C    PSI ES EL ANGULO QUE GIRA LA LEVA.
C    EL PERFIL DE LA LEVA ESTA DADO POR LA FUNCION  RHO = RHO(THETA)
C    RHO Y THETA SON LAS COORDENADAS POLARES DE LOS PUNTOS DEL PERFIL
C    DE LA LEVA. DERRHO ES UNA FUNCION QUE EVALUA LA DERIVADA DE RHO
C    CON RESPECTO A THETA. LA VARIABLE S(PSI) ES EL DESPLAZAMIENTO
C         DEL SEGUIDOR.  TAM ES EL TAMAÑO DEL ERROR.
         READ(5,21) E, EPSI
C    DEFINICION DE PARAMETROS.
         DOSPI=8.*ATAN(1.)
         DOSPIN=DOSPI+EPSI
         DELTA=DOSPI/360.
         THETA=2.*ATAN(1.0)
         THETAN=THETA/DELTA
C    INICIALIZACION.
         S=0
         PSI=0.
         PSI1=PSI
         S1=S
         THETA1=THETAN
C    IMPRESION DE TITULOS.
         WRITE(6,11)
         WRITE(6,12) PSI1,S1,THETA1
         WRITE(6,13)
C    SE INICIA EL PROCEDIMIENTO.
         ITER=0
  1      VIEJA = THETA
         ITER=ITER+1
         IF(ITER.GT.20) STOP
         R=RHO(THETA)
         DR=DERRHO(THETA)
         A=R*COS(THETA+PSI)-E
         B=DR*COS(THETA+PSI)-R*SIN(THETA+PSI)
         THETA=THETA-A/B
         TAM=ABS(THETA-VIEJA)
         IF(TAM.GT.EPSI) GO TO 1
         THETAN=THETA/DELTA
         S=RHO(THETA)*SIN(THETA+PSI)
C    IMPRESION DE RESULTADOS.
         PSIN=PSI/DELTA
         WRITE(6,14) PSIN,THETAN,S,TAM,ITER
         PSI=PSI+DELTA*10.
         IF(PSI.GT.DOSPIN) STOP
         ITER=0
         GO TO 1
         CALL EXIT
   11 FORMAT(1H1,15X,"ANALISIS DE UNA LEVA CON SEGUIDOR DE PUNTA",/)
   12 FORMAT(/,25X,"VALORES INICIALES",//,
     *7X,"PSI =",E11.4,5X,"S =",E10.3,5X,"THETA =",E10.3,//,
     *15X,"LA VARIABLE TAM ES LA MAGNITUD DEL ERROR",//)
   13 FORMAT(//,9X,"PSI",12X,"THETA",13X,"S",14X,"TAM",6X,"ITER",/
     *6X,"(GRADOS)",6X,"(GRADOS)",3X,"U. DE LONGITUD)",2X,
     *"(ADIMENSIONAL)",//)
   14 FORMAT(4E15.6,I6)
   21 FORMAT(2F15.5)
         END
```

Fig 4.2.3 Programa de computadora digital que analiza el movimiento del seguidor de punta de una leva

Tabla 4.2.1. ANALISIS DE UNA LEVA CON SEGUIDOR DE PUNTA

VALORES INICIALES

PSI = 0.   S = 0.   THETA = .900E+02

LA VARIABLE TAN ES LA MAGNITUD DEL ERROR

PSI (GRADOS)	THETA (GRADOS)	S U. DE LONGITUD)	TAN ADIMENSIONAL)	ITER
0.	.729688E+02	.163224E+01	0.	5
.100000E+02	.606638E+02	.142469E+01	.511180E-06	4
.200000E+02	.479131E+02	.123216E+01	.722019E-06	4
.300000E+02	.349340E+02	.106904E+01	.434302E-06	4
.400000E+02	.222710E+02	.951190E+00	.522305E-07	4
.500000E+02	.105482E+02	.885465E+00	.438376E-09	4
.600000E+02	-.362028E-09	.866025E+00	.566727E-07	3
.700000E+02	-.954804E+01	.881968E+00	.304641E-06	3
.800000E+02	-.184032E+02	.924607E+00	.545697E-11	4
.900000E+02	-.268333E+02	.988406E+00	.345608E-10	4
.100000E+03	-.350415E+02	.107023E+01	.100044E-09	4
.110000E+03	-.431716E+02	.116819E+01	.198270E-09	4
.120000E+03	-.513226E+02	.128094E+01	.314685E-09	4
.130000E+03	-.595610E+02	.140719E+01	.422006E-09	4
.140000E+03	-.679289E+02	.154537E+01	.494765E-09	4
.150000E+03	-.764407E+02	.169343E+01	.494765E-09	4
.160000E+03	-.851330E+02	.184875E+01	.436557E-09	4
.170000E+03	-.939317E+02	.200813E+01	.320142E-09	4
.180000E+03	-.102985E+03	.216763E+01	.189175E-09	4
.190000E+03	-.112143E+03	.232374E+01	.101863E-09	4
.200000E+03	-.121437E+03	.247149E+01	.291038E-10	4
.210000E+03	-.130856E+03	.260667E+01	.145519E-10	4
.220000E+03	-.140397E+03	.272499E+01	0.	4
.230000E+03	-.150046E+03	.282248E+01	0.	4
.240000E+03	-.159797E+03	.289562E+01	.147847E-07	3
.250000E+03	-.169647E+03	.294153E+01	.184940E-06	3
.260000E+03	-.179594E+03	.295801E+01	.417640E-08	3
.270000E+03	-.189640E+03	.294372E+01	.419110E-06	3
.280000E+03	-.199789E+03	.289613E+01	0.	4
.290000E+03	-.210049E+03	.282164E+01	.145519E-10	4
.300000E+03	-.220433E+03	.271552E+01	.160071E-09	4
.310000E+03	-.230966E+03	.258169E+01	.785803E-09	4
.320000E+03	-.241656E+03	.242372E+01	.312866E-08	4
.330000E+03	-.252557E+03	.224474E+01	.108121E-07	4
.340000E+03	-.263711E+03	.204944E+01	.336149E-07	4
.350000E+03	-.275178E+03	.184514E+01	.953587E-07	4
.360000E+03	-.287031E+03	.163224E+01	.242668E-06	4

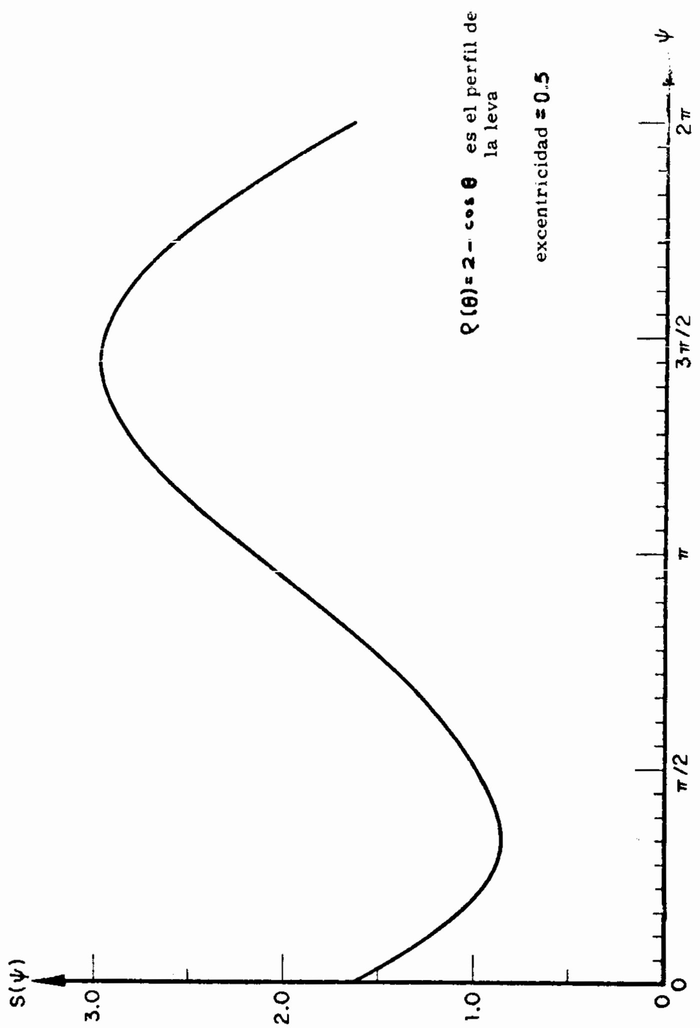


Fig. 4.2.4 Análisis de una leva con seguidor de punta

úsese como valor inicial $\tilde{\theta}_0^{i+1}$, o sea al que convirgió $\tilde{\theta}$ en $\psi = \psi^i$, es decir, hágase

$$\tilde{\theta}_0^{i+1} = \tilde{\theta}^i$$

En la fig 4.2.3 se muestra un programa para computadora digital que analiza una leva con seguidor de punta, cuyo perfil se proporciona en el subprograma RHO (THETA). El subprograma DERRHO (THETA) evalúa la derivada de ρ con respecto a θ. En la tabla 4.2.1 y en la fig 4.2.4 se presentan los resultados del análisis de una leva cuyo perfil es la cardioide $\rho(\theta) = 2 - \cos\theta$.

Ejercicio 4.2.1. Obtenga una ecuación entrada-salida para la leva con seguidor de cara plana (fig 4.2.5). Debe obtener las relaciones

$$\psi = \pi - \theta - \tan^{-1}\frac{\rho(\theta)}{\rho'(\theta)} \qquad (4.2.6)$$

$$s(\psi) = \rho(\theta)\ \text{sen}\ (\theta + \psi) \qquad (4.2.7)$$

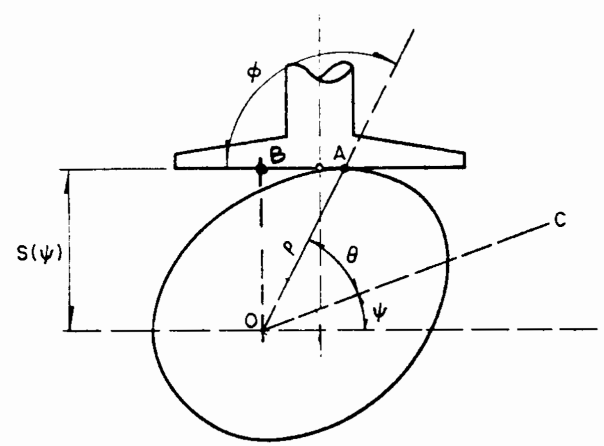


Fig 4.2.5 Leva con seguidor traslacional de cara plana

A continuación se desarrolla el análisis del mecanismo de leva con seguidor de carretilla (fig 4.2.6)

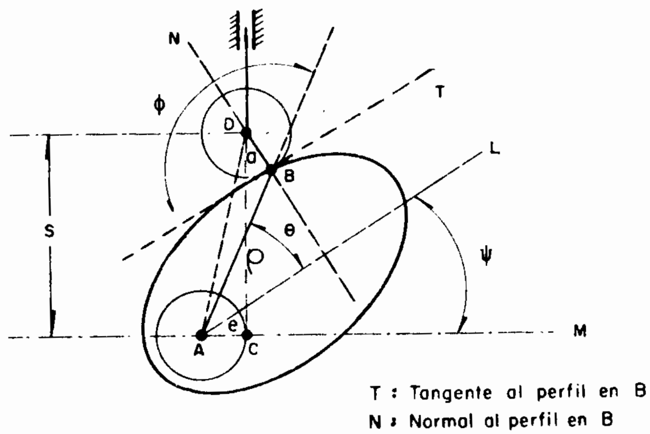


Fig 4.2.6 Leva de disco con seguidor de carretilla

En esa figura, a es el radio de la carretilla y e la excentricidad de la trayectoria del seguidor, en forma análoga a como se definió en el caso de la leva con seguidor de punta. Asimismo, se observa que

$$s = \rho \text{ sen } (\psi + \theta) - a \cos (\psi + \theta + \phi) \qquad (4.2.8)$$

Es necesario conocer $\theta = \theta(\psi)$ y $\phi = \phi(\psi)$ a fin de obtener s como función de ψ, que es la solución. Esto se determina en seguida. Observe que

$$e = \rho \cos (\psi + \theta) + a \text{ sen } (\psi + \theta + \phi) \qquad (4.2.9)$$

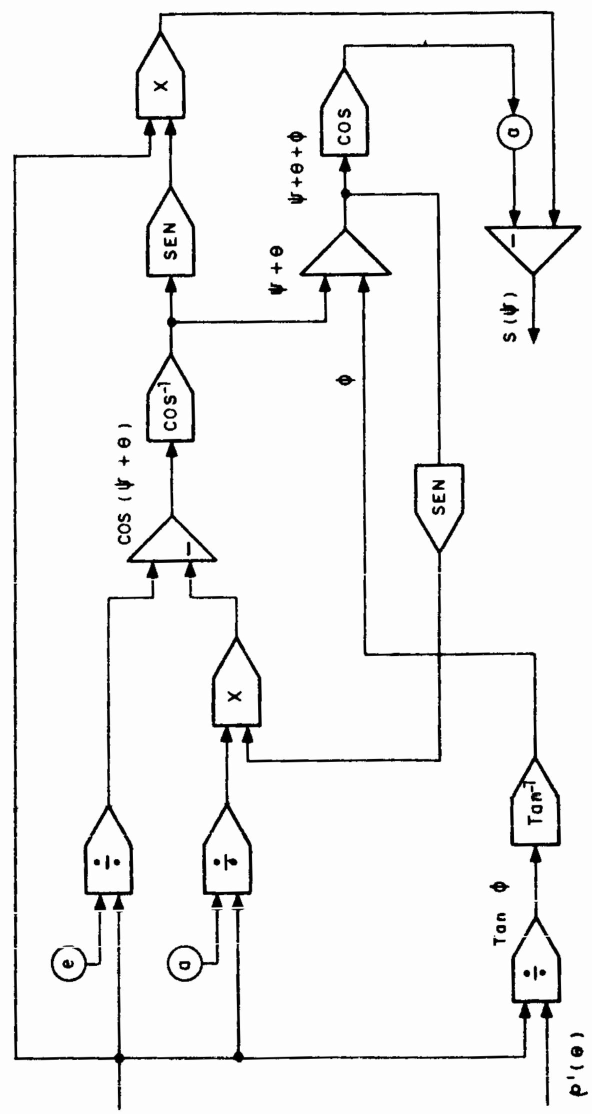


Fig 4.2.7 Diagrama de alambrado para las ecs 4.2.8, 4.2.9 y 4.2.10

Las ecs 4.2.8 y 4.2.9, junto con la relación

$$\frac{\rho(\theta)}{\rho'(\theta)} = \tan \phi \qquad (4.2.10)$$

son suficientes para obtener $s = s(\psi)$, mediante computadora analógica, como se muestra en el diagrama de alambrado de la fig 4.2.7.

4.3 *Análisis de levas con seguidor oscilante*

En esta sección se analizan levas del tipo de la fig 4.1.2, esto es, el seguidor ejecuta un movimiento periódico de rotación. Considere primero la leva de la fig 4.1.2b, cuyo seguidor es de cara plana. Esta se reproduce en la fig 4.3.1.

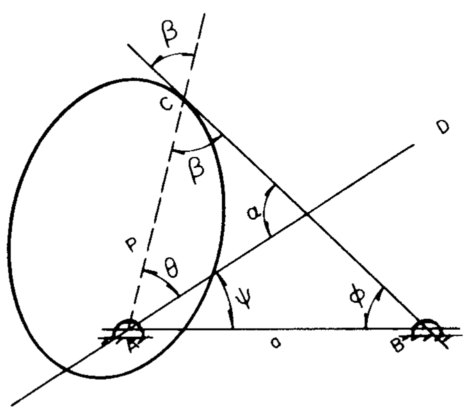


Fig 4.3.1 Leva con seguidor oscilante de cara plana

En este análisis surge una limitación que no implica pérdida de generalidad: la cara plana del seguidor pasa por el punto B. Nótese que en los mecanismos en que dicha condición no se cumple, basta establecer un análisis adecuado a la geometría correspondiente. Finalmente, la línea AD está fija a la leva, cuyo perfil, como en la sección 4.2, está dado por

$$\rho = \rho(\theta) \qquad (4.3.1)$$

Obsérvese que de la fig 4.3.1

$$\alpha = \psi + \phi \qquad (4.3.2)$$

Además

$$\alpha + \beta + \theta = \pi \qquad (4.3.3)$$

por lo que

$$\beta = \pi - (\theta + \phi + \psi)$$

y así

$$\tan \beta = -\tan (\theta + \phi + \psi) \qquad (4.3.4)$$

pero β es el ángulo que forma el radio vector $\overline{AC}$ con la tangente $\overline{BC}$; por tanto

$$\tan \beta = \frac{\rho(\theta)}{\rho'(\theta)} \qquad (4.3.5)$$

Así

$$\frac{\rho(\theta)}{\rho'(\theta)} = -\tan (\theta + \phi + \psi) \qquad (4.3.6)$$

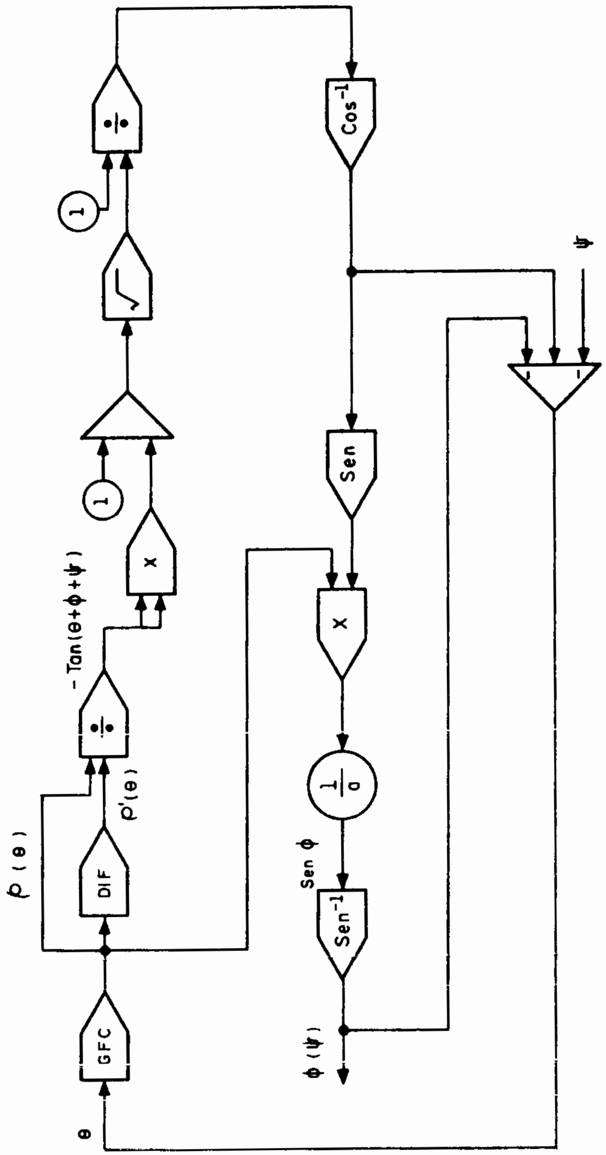


Fig 4.3.2 Diagrama de alambrado de las ecs 4.3.5 y 4.3.7

Por otra parte, de la misma figura

$$\frac{\rho}{\text{sen } \phi} = \frac{a}{\text{sen } \beta}$$

de donde

$$\text{sen } \phi = \frac{\rho(\theta)}{a} \text{ sen } (\theta + \phi + \psi) \qquad (4.3.7)$$

en que se ha usado la ec 4.3.5.

En la fig 4.3.2 se muestra un diagrama de alambrado para computadora analógica que tiene como salida el ángulo $\phi(\psi)$. La variable de entrada es ψ.

En seguida se presenta el análisis de una leva con seguidor de carretilla como el mecanismo de la fig 4.1.2c, y se muestra en la fig 4.3.3, donde $\rho(\theta)$ es el perfil de la leva, a el radio de la carretilla, TT' y BG son la tangente y la normal al perfil, respectivamente. La línea BF es paralela a AD. Finalmente, la longitud del brazo del seguidor es c.

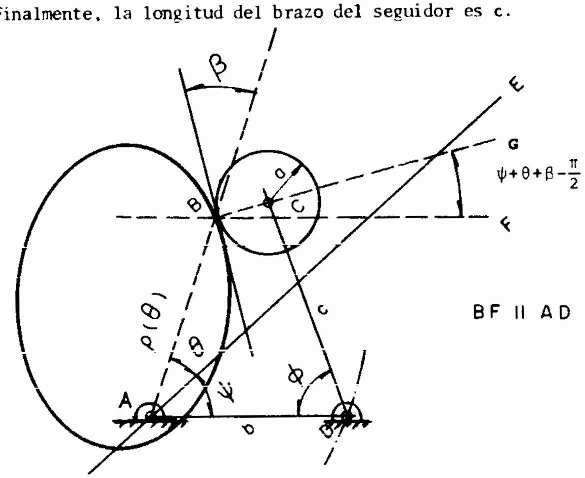


Fig 4.3.3 Leva con seguidor oscilante de carretilla

En esa figura, D es el punto alrededor del cual oscila el seguidor, y la posición de este está dada por el ángulo ϕ.

De la geometría de la figura,

$$\rho(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta+\psi)+a\,\mathrm{sen}(\psi+\theta+\beta-\tfrac{\pi}{2}) = c\,\mathrm{sen}\phi \qquad (4.3.8)$$

$$\tan\beta = \rho(\theta)/\rho'(\theta) \qquad (4.3.9)$$

$$\overline{AC}^2 = \rho^2+a^2 - 2a\rho\cos(\beta+\tfrac{\pi}{2}) \qquad (4.3.10)$$

$$\overline{AC}^2 = b^2+c^2 - 2bc^2\cos\phi \qquad (4.3.11)$$

De la ecs 4.3.9 y 4.3.10

$$\cos\phi = \frac{b^2 + c^2 - a^2 - 2a\rho\,\mathrm{sen}\beta}{2bc} \qquad (4.3.12)$$

Ejercicio 4.3.1 Construya un diagramade alambrado para las ecs 4.3.8, 4.3.9 y 4.3.12 que tenga ψ como entrada y $\phi(\psi)$ como salida.

4.4 Síntesis de levas

En esta parte se estudia el problema inverso que se presenta en las secciones 4.2 a 4.3, esto es, se trata de obtener el perfil de una leva, $\rho=\rho(\theta)$, tal que produzca una salida $y=y(\psi)$, conocida, donde y puede ser un desplazamiento lineal o angular y ψ el ángulo que gira la leva con respecto a un oberservador fijo (al plano del dibujo).

Considérese primero el caso de la leve con seguidor de punta.

Las ecs 4.2.1 son suficientes para diseñar dicha leva, como se muestra en el diagramade alambrado de la fig 4.4.1, donde se generan las funciones $\theta(\psi)$ y $\rho(\psi)$, de donde se obtiene el perfil $\rho(\theta)$.

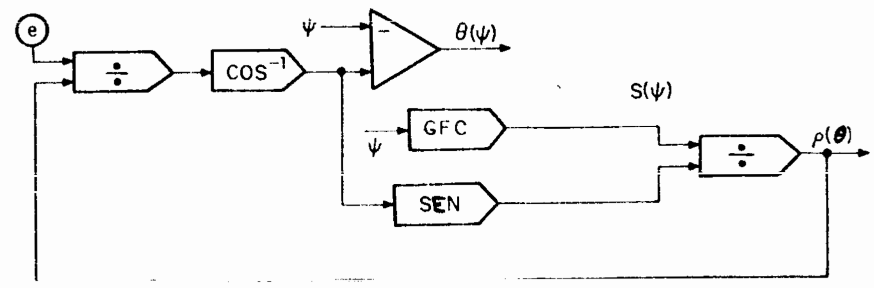


Fig 4.4.1 Realización de las ecs 4.2.1 y 4.2.2

Como siguiente ejemplo considérese la síntesis de una leva con seguidor de carretilla, como el mecanismo de la fig 4.1.1c. Las ecuaciones de este mecanismo son las ecs 4.2.8, 4.2.9 y 4.2.10. Escribiendo estas ecuaciones en la forma

$$\mathrm{sen}\,(\psi + \theta) = \frac{s}{\rho} + \frac{a}{\rho}\cos\,(\psi + \theta + \phi) \qquad (4.4.1)$$

$$\mathrm{sen}\,(\psi + \theta + \phi) = -\frac{\rho}{a}\cos\,(\psi + \theta) + \frac{e}{a} \qquad (4.4.2)$$

y

$$\rho(\theta) = \rho'(\theta)\,\tan\phi \qquad (4.4.3)$$

se obtiene inmediatamente la siguiente realización (fig 4.4.2).

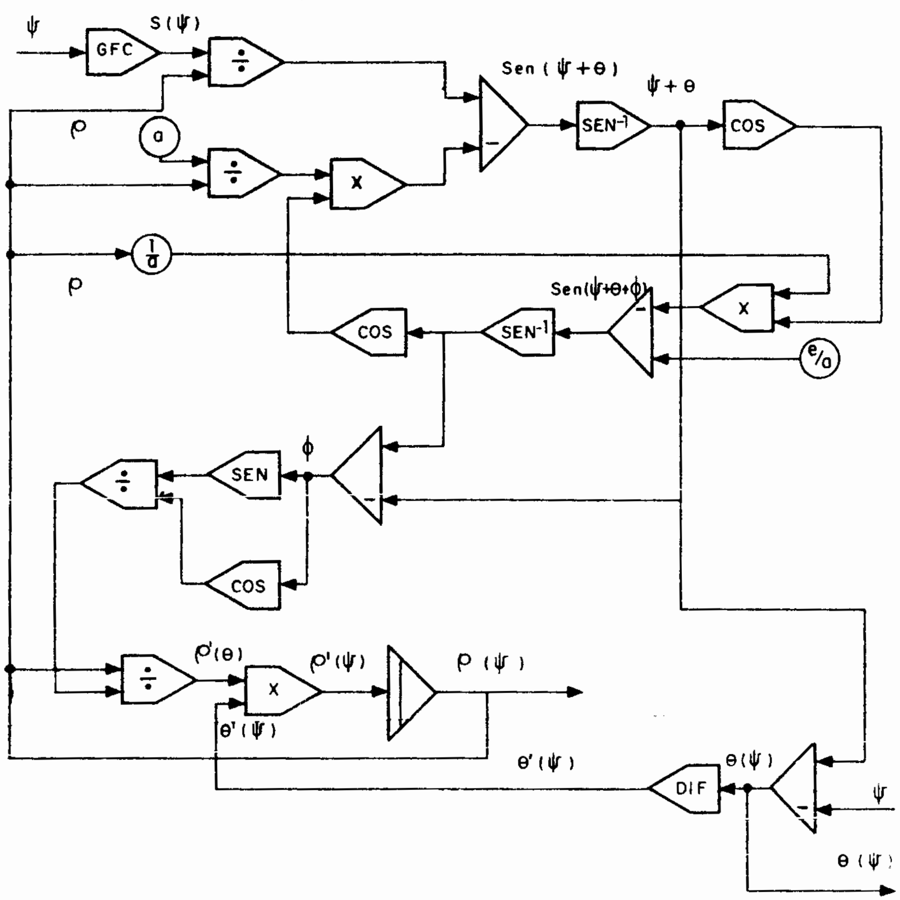


Fig 4.4.2 Realización de las ecs 4.4.1 a 4.4.3

Ejercicio 4.4.1. Obtenga una realización para la síntesis de una leva con seguidor oscilante de cara plana, como el mecanismo que se analiza en la sec. 4.3. Escriba enseguida un programa para computadora digital, para el mismo objeto.

Ejercicio 4.4.2. Obtenga una realización para la síntesis de una leva con seguidor oscilante de carretilla. Escriba asimismo un programa para computadora digital, para el mismo objeto.

4.5 Restricciones en el diseño de levas

El problema de síntesis presentado en la sec 4.4 hasta ahora se ha discutido únicamente en su aspecto matemático; es decir, a partir de una relación entrada-salida se ha obtenido el conjunto de ecuaciones necesarias y suficientes para poder obtener el perfil $\rho = \rho(\theta)$. Esta discusión no agota el tema relacionado con el diseño de levas, pues es posible hallar situaciones en que la solución matemática del problema no corresponda a una realidad física, o bien, aunque sí corresponda, dicha realización puede ser impráctica por diversos motivos que se discuten enseguida.

Supóngase, por ejemplo, que la solución de las ecuaciones de la síntesis de una leva está dada por las curvas $\rho = \rho(\theta)$ (fig 4.5.1)

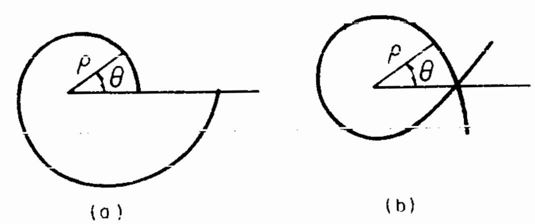


Fig 4.5.1 Curvas inadmisibles como perfiles de levas

Las dos curvas de la figura anterior son irrealizables como perfiles de una leva, pues es evidente que dicho perfil esté determinado por una curva cerrada. Matemáticamente, esta condición equivale a que ρ sea una función periódica de θ, de periodo 2π. Situaciones como las de la fig 4.5.1 pueden surgir cuando la función de salida deseada no es, a su vez, una función periódica de ψ, el ángulo de giro de la leva, con periodo 2π. Más aún, curvas como las de esa figura son posibles incluso cuando la salida sea una función periódica del ángulo ψ, de periodo 2π; en este caso, el diseño así obtenido se rechaza; sin embargo, esto no quiere decir que el problema propuesto no tenga solución. Para remediar esta situación basta aumentar $\rho(\psi_0) = \rho_0$, el valor inicial de ρ. (En curvas como la de la fig 4.5.1b se dice, en inglés, que existe *undercutting*.)

Otra posibilidad de tener un diseño insatisfactorio se presenta cuando la curvatura de la leva en ciertos puntos es mucho mayor que en otros, esto es, se tiene una leva desproporcionada. Esta situación se corrige aumentando ρ_0. como en el caso del párrafo anterior.

Por otra parte, sin embargo, el valor ρ_0 no se puede cambiar sin restricción, pues valores muy grandes (en comparación con los desplazamientos deseados del seguidor) de ρ_0 dan lugar a levas muy voluminosas que son por esta razón ineficientes. Por regla general el diseño óptimo de una leva se obtiene cuando ésta es de peso mínimo.

Un parámetro más que debe cuidarse en el diseño de levas es el llamado *ángulo de presión*, que se discute a continuación.

4.6 Angulo de presión

Este parámetro es propio de las levas con seguidor de punta o de carretilla, y tiene interés por razones de carácter dinámico, pues está ligado a la trasmisión de potencia.

Para simplificar la discusión supóngase que en un mecanismo de leva y seguidor de punta las fuerzas de fricción son despreciables comparadas con las otras. Considérese la leva con seguidor de punta (fig 4.6.1a). El diagrama de cuerpo libre del seguidor se muestra en la fig 4.6.1b.

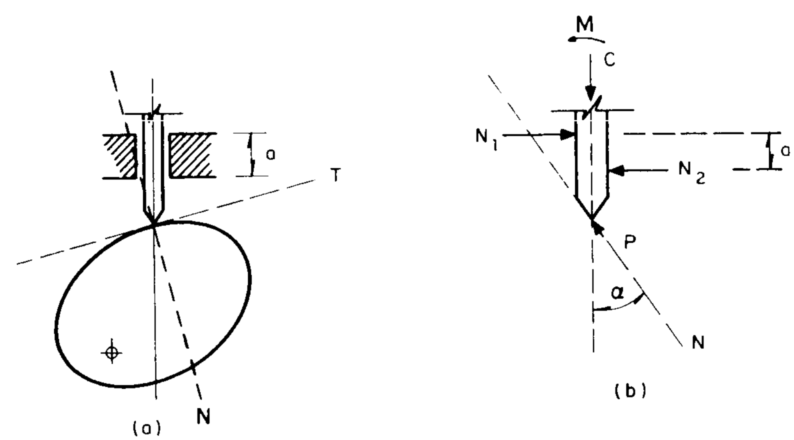


Fig 4.6.1. Fuerzas que actúan sobre el seguidor de punta de una leva

En la figura anterior, N y T son las direcciones normal y tangencial al perfil de la leva en el punto de contacto. Ya que se han despreciado las fuerzas de fricción, la fuerza de contacto entre la leva y el seguidor actúa en la dirección de N. Llámese P a la fuerza que ejerce la leva sobre el seguidor, y C y M a la fuerza y al momento resultantes de la carga aplicada al seguidor, la fuerza de gravedad y la fuerza de inercia del mismo. N_1 y N_2 son las fuerzas que ejerce la guía del seguidor sobre este. Debido al huelgo entre guía y seguidor estas fuerzas están aplicadas en los extremos de esta guía, de ancho a.

Para tener equilibrio dinámico se debe cumplir

$$P \cos \alpha = C \tag{4.6.1}$$

de donde se observa que la fuerza P requerida para mover una carga y vencer la inercia del seguidor y el peso de este, es inversamente proporcional a cos α, que es variable para cada punto del perfil, o sea, $\alpha = \alpha(\theta)$. Si $\alpha = \pi/2$, no es posible accionar ninguna carga ni mover el seguidor, por más grande que sea el valor de la fuerza aplicada, P; es decir, la ventaja mecánica es nula. Para $\alpha = 0$ se tiene el valor mínimo de P que puede accionar una carga y mover al seguidor, esto es, se tiene una ventaja mecánica máxima.

Ya que la potencia disponible en el motor que acciona la leva es directamente proporcional a la fuerza P, es necesario evitar que el ángulo α adquiera valores cercanos a $\pi/2$. Como regla, en todo diseño se procura mantener α por abajo de $\pi/6$.

Ejercicio 4.6.1. Demuestre que, para una leva con seguidor de punta, el ángulo de presión α está dado por

$$\alpha = \left| -\frac{\pi}{2} + \phi + \operatorname{sen}^{-1} \frac{e}{\rho} \right| \tag{4.6.2}$$

donde ϕ es el ángulo entre el radio vector de longitud ρ y la tangente a la leva ($\tan \phi = \frac{\rho(\theta)}{\rho'(\theta)}$), y e la excentricidad del seguidor.

Si en un diseño resulta que α es demasiado grande (muy próximo a $\pi/2$), la manera de corregirlo es aumentar ρ_0. En efecto, de la ec 4.6.2 puede observarse que mientras mayor es ρ, el tercer término del miembro derecho es mucho más pequeño que los otros, y entonces α es más pequeño mientras ϕ - ángulo entre el radio vector y la tangente a la leva- se aproxima más a $\pi/2$, o sea mientras la leva adquiere una forma más próxima a una circunferencia.

Otra restricción que debe cuidarse al diseñar levas con seguidores de cara plana, es la máxima excentricidad que adquiere el punto de contacto con respecto al eje de rotación de la leva. La razón de que esta variable no adquiera valores demasiado grandes (con respecto a cierta longitud constante del mecanismo, desde luego) se expone a continuación.

Considérese el mecanismo de la fig 4.6.2, donde se muestra el diagrama de cuerpo libre del seguidor. Las fuerzas C, P, N_1 y N_2 tienen idéntico significado que en la fig 4.6.1.*

---

* Nótese que, en este caso, la fuerza y el par que actúan como carga para el seguidor se pueden absorber con la fuerza C solamente, considerándola que actúa a una distancia adecuada d del punto B (Fig 4.6.2 b).

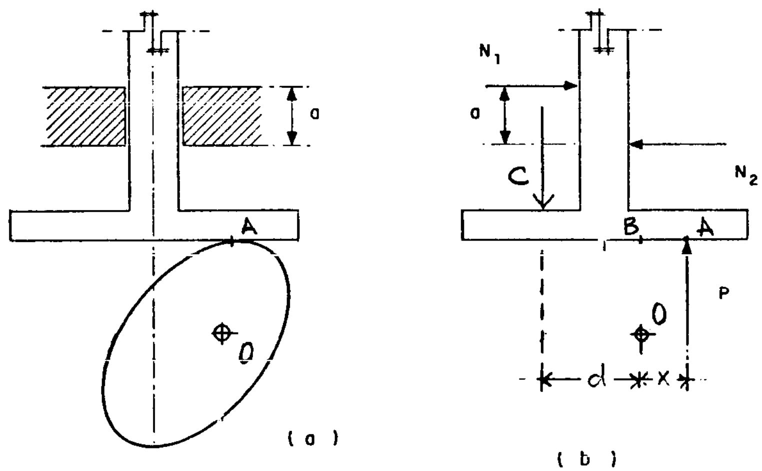


Fig 4.6.2. Fuerzas que actúan sobre el seguidor de cara plana de una leva

Del equilibrio dinámico del seguidor de la fig 4.6.2b, se tiene

$$N_1 = N_2 \tag{4.6.3}$$

$$C = P \tag{4.6.4}$$

$$Cd + Px = N_1\ a \tag{4.6.5}$$

De (4.6.4) se observa que la ventaja mecánica de este mecanismo tiene un valor de la unidad para cualquier posición de la leva; pero el momento que transmite el seguidor a la leva es proporcional a la distancia x, llamada excentricidad del punto de contacto, por lo que es recomendable mantener el valor de x debajo

de cierto límite, cuyo valor aconsejable, en la generalidad de los casos es algo más complicado de establecer que para el ángulo de presión. En todo caso, debe determinarse según las condiciones de operación.

Ejercicio 4.6.2. Para el mecanismo de la fig 4.6.2, demuestre que

$$x = \frac{\dot{s}}{\dot{\psi}} \tag{4.6.4}$$

donde $\dot{s}$ es la velocidad del seguidor y $\dot{\psi}$ la velocidad angular de la leva.

Ejercicio 4.6.3. ¿Cómo define usted el ángulo de presión para una leva con seguidor oscilante de carretilla? Dé razones por las que esta variable sea de importancia e indique la forma de calcularla en términos de los parámetros del mecanismo.

Ejercicio 4.6.4. ¿Cuál es la variable análoga a x de la fig 4.6.2 para un mecanismo de leva con seguidor oscilante de cara plana? Dé usted razones por las que considere que esta variable sea de interés e indique cómo calcularla en términos de los parámetros del mecanismo.

4.7 *Observaciones concernientes al diseño de levas*

Como ya se dijo en la sec 4.5, una condición que debe cumplir toda función de salida $y(\psi)$, ya sea que se trate de un desplazamiento lineal o de un desplazamiento angular, es que $y(\psi)$ sea una función *continua* de ψ en $\left[0, 2\pi\right]$ y además

$$y(\psi) = y(\psi + 2\pi) \tag{4.7.1}$$

De hecho, se da por descontado que toda función $y(\psi)$ que surja de una necesidad real que se puede satisfacer con una leva, cumple las condiciones de continuidad y periodicidad.

Existen casos, sin embargo, en los que no es de tanto interés el desplazamiento de salida mismo, pero sí la velocidad o la aceleración. La condición a satisfacer en estos casos no es muy difícil de establecer, dada la hipótesis de continuidad y periodicidad de la salida. En efecto, de la condición de periodicidad, se tiene

$$y(0) = y(2\pi)$$

o bien

$$y(2\pi) - y(0) = 0 \qquad (4.7.2)$$

Pero de la condición de continuidad

$$\int_0^{2\pi} y'(\psi)d\psi = 0 \qquad (4.7.3)$$

Como además $\dot{\psi}$ es constante, y

$$\dot{y}(t) = y'(\psi)\dot{\psi}$$

se tiene que la integral antegral anterior se transforma en

$$\int_0^T \dot{y}(t)dt = 0 \quad , \; T \equiv \frac{2\pi}{\dot{\psi}} \qquad (4.7.4)$$

o sea, el área bajo la curva velocidad-tiempo se anula. Si lo que interesa es la aceleración a la salida, $\ddot{y}(t)$, una condición semejante a la ec 4.7.4 se puede establecer como

$$\int_0^T \ddot{y}(t)dt = 0 \qquad (4.7.5)$$

Finalmente, cabe hacer una comparación de mecanismos de barras articuladas con los de leva-seguidor. Nótese que, salvo errores de redondeo -si el diseño se realizó en computadora digital- o errores de medición -si se realizo en computadora analógica-, con un mecanismo leva-seguidor se puede producir una salida $y(\psi)$ *con toda precisión*, a diferencia de lo que sucede con los mecanismos de barras articuladas, para los cuales una salida $y(\psi)$ se puede producir con precisión únicamente en un conjunto finito de puntos. Esto no es ninguna sorpresa, puesto que en el caso de los mecanismos de barras articuladas los parámetros de diseño -las longitudes de las barras- forman un conjunto finito, mientras que en el caso de las levas los parámetros de diseño no solo forman un conjunto infinito, sino *un continuo*. Este continuo está dado por la totalidad de valores $\rho(\theta)$, $\theta\varepsilon\left[0,\ 2\pi\right]$.

Los mecanismos discutidos en este capítulo no constituyen el único tipo dentro de los que contienen pares superiores. Existen otros con esta clase de pares -superiores-, que son los engranes, cuya operación es esencialmente el de las levas, solo que tienen ciertas peculiaridades que los hacen merecedores a un capítulo aparte (caps 5 y 6).

4.8 Análisis gráfico de levas

En esta sección se demuestra que, *para cada configuración dada* de un acoplamiento de leva y seguidor, existe un mecanismo de barras articuladas -es decir, que contiene únicamente pares inferiores- que es cinemáticamente equivalente al mecanismo de leva y seguidor. Por cinemáticamente equivalente se entiende que, para la configuración en cuestión, ambos mecanismos tienen la propiedad de que el desplazamiento y la velocidad son iguales si tienen igual entrada.

Considérese la leva 2 de la fig 4.8.1, con su seguidor oscilante, 4. Sean N y T la normal y la tangente a los dos perfiles en el punto de contacto C, y sean $\bar{\rho}_2$ y $\bar{\rho}_4$ los vectores de posición, con respecto a C, de los centros de curvatura de cada uno de los dos perfiles.

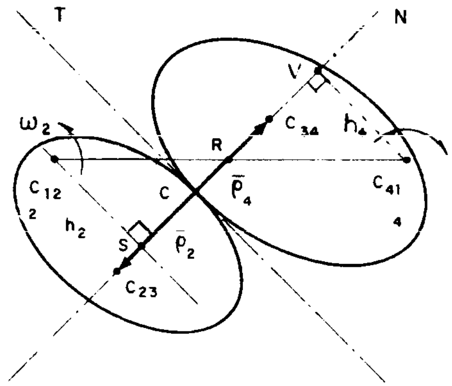


Fig 4.8.1 Acoplamiento entre una leva y su seguidor oscilante

A continuación se demuestra el siguiente resultado:

Teorema 4.8.1. El centro instantáneo de rotación de la leva 2, con respecto al seguidor 4 -denotado por C_{24}- se encuentra en la intersección de la línea que une los centros C_{12} y C_{41} con la normal N. Además,

$$\left|\frac{\omega_4}{\omega_2}\right| = \frac{\overline{C_{12}C_{24}}}{\overline{C_{24}C_{41}}} \qquad (4.8.1)$$

En efecto, sean C2 y C4 los puntos de 2 y 4, respectivamente, que coinciden con C; la velocidad de C2 es conocida, puesto que se conoce ω_2 y, obviamente, la posición de C2. La velocidad de C4 se determina por las dos condiciones siguientes:

i) $\bar{v}_{C4}$ es normal a la línea $\overline{C_{41}C4}$.

ii) El componente de $\bar{v}_{C4}$ sobre N es igual al de v_{C2} sobre N. Si así no fuera, habría penetración de un cuerpo sobre el otro, o bien, el contacto se perdería.

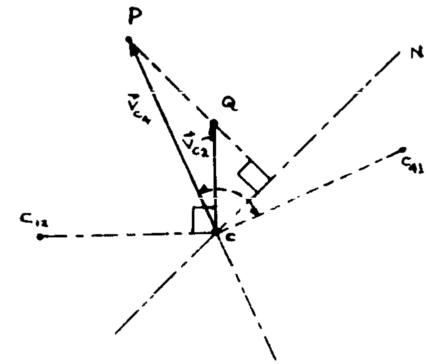


Fig 4.8.2. Determinación de la velocidad de los puntos del seguidor oscilante de una leva

En la fig 4.8.2 se determina $\bar{v}_{C4}$. En esa figura, el vector que une a los puntos C y P es $\bar{v}_{C4}$. Así nótese que

$$\bar{v}_{C4/C2} = \bar{v}_{C4} - \bar{v}_{C2} = \vec{QP}$$

pero la línea $\overline{QP}$ es perpendicular a la recta N. Como $\bar{v}_{C4/C2}$ es la velocidad que tendría C4 si C2 tuviera velocidad nula y en este caso el cuerpo 2 estaría fijo, entonces el centro instantáneo de 4 con respecto a 2 se encuentra alojado sobre N.* Por otro lado, del teorema de Aronhold-Kennedy (Teorema 1.10.1), el centro instantáneo C_{24} se encuentra alojado sobre la recta $\overline{C_{12}C_{41}}$. La intersección de ambos lugares geométricos (punto R, fig 4.8.1), es C_{24}.

*Esto se desprende del resultado de la Sec. 1.1

De lo anterior se tiene

$$\overline{v}_{R2} = \overline{v}_{R4} \qquad (4.8.2)$$

pero

$$||\overline{v}_{R2}|| = |\omega_2|\overline{C_{12}R} = |\omega_2|\overline{C_{12}C_{24}}$$

y

$$||v_{R4}|| = |\omega_4|\overline{RC_{41}} = |\omega_4|\overline{C_{24}C_{41}}$$

por lo que

$$|\omega_2|\overline{C_{12}C_{24}} = |\omega_4|\overline{C_{24}C_{41}}$$

y, finalmente, la relación 4.8.1 se hace evidente, como se quedaría demostrar.

Como resultado del teorema anterior, se tiene el teorema que se enuncia en seguida.

Teorema 4.8.2. En la fig 4.8.1, el componente, sobre la línea N, de $\overline{v}_{C34}$ es igual al de $\overline{v}_{C23}$ sobre la misma línea.

En efecto, sea $\overline{e}$ el vector unitario normal al plano del dibujo en la fig 4.8.1, y supóngase que apunta hacia fuera de este dibujo. Entonces,

$$\overline{v}_{C23} = \omega_2\overline{e} \times \overline{a} \qquad (4.8.3)$$

donde

$$\overline{a} \equiv \overrightarrow{C_{12}C_{23}}$$

y

$$\overline{v}_{C34} = -\,\omega_4\overline{e} \times \overline{b} \qquad (4.8.4)$$

donde

$$\overline{b} \equiv \overrightarrow{C_{41}C_{34}}$$

El componente de $\overline{v}_{C23}$ sobre N se obtiene haciendo el producto escalar $\overline{v}_{C23}.(\overline{\rho}_4 - \overline{\rho}_2)$ y dividiendo este entre $||\overline{\rho}_4 - \overline{\rho}_2||$. Dicho producto es

$$\overline{v}_{C23}.(\overline{\rho}_4 - \overline{\rho}_2) = \omega_2(\overline{e} \times \overline{a}).(\overline{\rho}_4 - \overline{\rho}_2) = \omega_2\overline{e}.\ \overline{a} \times (\overline{\rho}_4 - \overline{\rho}_2) \qquad (4.8.5)$$

donde se ha usado la propiedad del doble producto mixto que permite intercambiar la cruz y el punto. Nótese que el vector $\overline{a} \times (\overline{\rho}_4 - \overline{\rho}_2)$ es paralelo a $\overline{e}$ y tiene el sentido de este; su magnitud es el doble del área del triángulo $C_{12}\ C_{13}\ C_{34}$. Sea A_2 esta área, entonces

$$\overline{a} \times (\overline{\rho}_4 - \overline{\rho}_2) = 2\ A_2\overline{e} \qquad (4.8.6)$$

Sustituyendo la ec 4.8.6 en la 4.8.5, se tiene

$$\overline{v}_{C23}.(\overline{\rho}_4 - \overline{\rho}_2) = \omega_2\overline{e}.2A_2\overline{e} = 2\omega_2A_2 \qquad (4.8.7)$$

Por otra parte

$$\bar{v}_{C34} = -\omega_4\bar{e}\times\bar{b}$$

por lo que

$$\bar{v}_{C34}\cdot(\bar{\rho}_4-\bar{\rho}_2) = -\omega_4(\bar{e}\times\bar{b})\cdot(\bar{\rho}_4-\bar{\rho}_2) =$$

$$= -\omega_4\bar{e}\cdot\ \bar{b}\times(\bar{\rho}_4-\bar{\rho}_2) \qquad (4.8.8)$$

donde nuevamente se han intercambiado la cruz y el punto.

El vector $\bar{b}\times(\bar{\rho}_4-\bar{\rho}_2)$ es paralelo y de sentido contrario a $\bar{e}$; su magnitud es, además, el doble del área del triángulo $C_{41}\ C_{23}\ C_{34}$. Llamando A_4 a esta área se tiene

$$\bar{b}\times(\bar{\rho}_4-\bar{P}_2) = -2A_4\bar{e} \qquad (4.8.9)$$

Sustituyendo la ec 4.8.9 en la 4.8.8, se tiene

$$\bar{v}_{C34}\cdot(\bar{\rho}_4-\bar{\rho}_2) = -\omega_4\bar{e}\cdot(-2A_4\bar{e}) = 2\omega_4A_4 \qquad (4.8.10)$$

En seguida trácense las rectas $C_{12}S$ y $C_{41}V$, normales ambas a $\overline{C_{23}\ C_{34}}$. Llámense h_2 y h_4 a cada uno de los segmentos determinados sobre ellas por los puntos C_{12} y C_{41} con las intersecciones S y V sobre la recta $\overline{C_{23}\ C_{34}}$. Así,

$$A_2 = \frac{1}{2}h_2\ \overline{C_{23}C_{34}} \qquad (4.8.11)$$

$$A_4 = \frac{1}{2}h_4\overline{C_{23}C_{34}} \qquad (4.8.12)$$

pero de la semejanza de los triángulos $C_{12}SR$ y $C_{41}VR$, se tiene

$$\frac{h_2}{h_4} = \frac{\overline{C_{12}R}}{\overline{RC_{41}}} = \frac{\overline{C_{12}C_{24}}}{\overline{C_{24}C_{41}}}$$

que, en virtud de la ec 4.8.1, se convierte en

$$\frac{h_2}{h_4} = \frac{\omega_4}{\omega_2} \qquad (4.8.13)$$

donde ω_2 y ω_4 son ambos números positivos, por lo que la barra del símbolo del valor absoluto desaparece. Por otra parte, de la ec 4.8.7

$$\bar{v}_{C23}\cdot(\bar{\rho}_4-\bar{\rho}_2) = \omega_2h_2\overline{C_{23}C_{34}} \qquad (4.8.14)$$

y, de la ec 4.8.10

$$\bar{v}_{C34}\cdot(\bar{\rho}_4-\bar{\rho}_2) = \omega_4h_4\overline{C_{23}C_{34}} \qquad (4.8.15)$$

Pero, de la ec 4.8.13

$$\omega_4h_4 = \omega_2h_2$$

por lo que la ec 4.8.15 se convierte en

$$\bar{v}_{C34}\cdot(\bar{\rho}_4-\bar{\rho}_2) = \omega_2h\ \overline{C_{23}C_{34}} \qquad (4.8.16)$$

De las ecs 4.8.14 y 4.8.16, se tiene

$$\bar{v}_{C23}\cdot(\bar{\rho}_4 - \bar{\rho}_2) = \bar{v}_{C34}\cdot(\bar{\rho}_4 - \bar{\rho}_2), \text{ q. e. d.}$$

En virtud del resultado anterior, los puntos C_{23} y C_{34} actúan como las articulaciones -de un mecanismo de pares inferiores- que unen a la barra acopladora con los eslabones de entrada y de salida, respectivamente. El mecanismo de barras articuladas equivalente al mecanismo de la fig 4.6.1. es, entonces, el mostrado en la fig 4.8.3

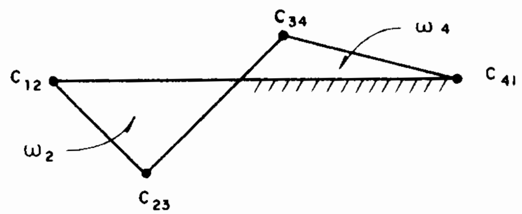


Fig 4.8.3. Mecanismo de pares inferiores equivalente a un acoplamiento de leva y seguidor

Nótese que para cada configuración del mecanismo original existe un mecanismo equivalente diferente. Por esta razón, aun cuando ambos mecanismos tienen el mismo desplazamiento y la misma velocidad a la salida, no ~~sucede esto con la aceleración~~.

Existen algunos acoplamientos de leva y seguidor en los que el mecanismo de barras articuladas no es tan obvio, como se discute a continuación.

Caso I. Leva con seguidor oscilante de cara plana. En este caso el centro de curvatura del perfil del seguidor está alojado en el infinito, como se ilustra en la fig 4.8.4a. El mecanismo equivalente se muestra en la fig 4.8.4b.

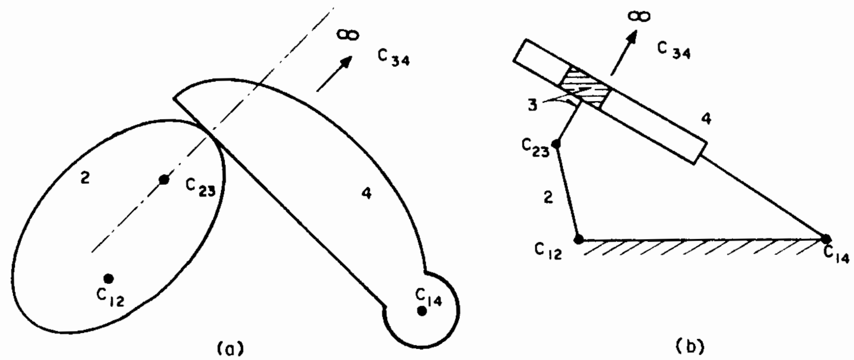


Fig 4.8.4. Leva con seguidor oscilante de cara plana y su mecanismo equivalente de pares inferiores

Caso II. Leva con seguidor traslacional. En este caso, el centro instantáneo C_{14} se encuentra en el infinito. En la fig 4.8.5a se muestra este acoplamiento de leva y seguidor y en la fig 4.8.5b se muestra su mecanismo equivalente.

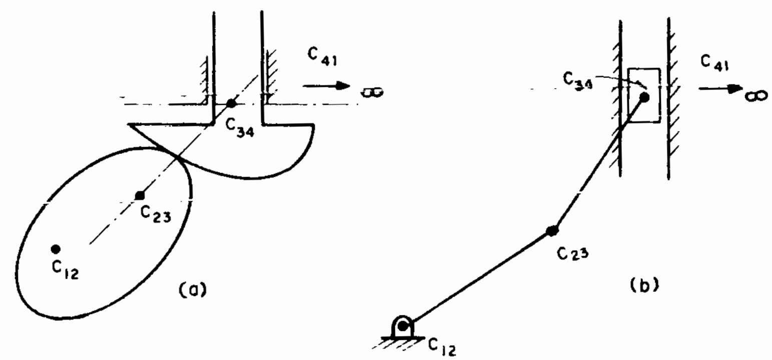


Fig 4.8.5. Leva con seguidor traslacional de cara curva y su mecanismo equivalente de pares inferiores

Caso III. Leva con seguidor traslacional de cara plana. En este caso los centros C_{34} y C_{41} se encuentran en el infinito. En la fig 4.8.6a se muestra este acoplamiento de leva y seguidor y en la fig 4.8.6b se muestra su mecanismo equivalente.

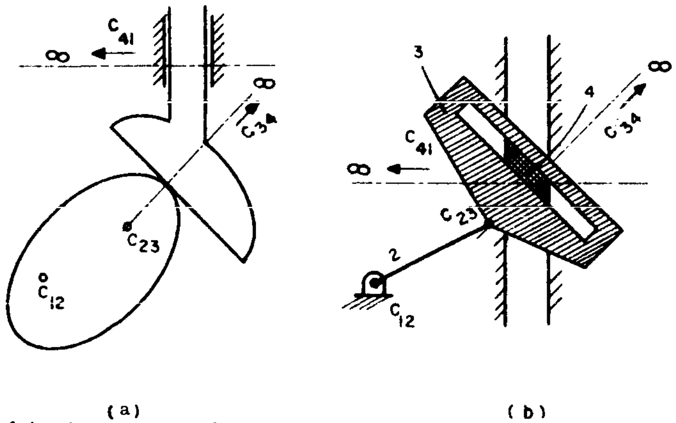


Fig 4.8.6. Leva con seguidor traslacional de cara plana y su mecanismo equivalente de pares inferiores

Caso IV. Leva con seguidor de punta. Este es un caso extremo en el que el radio de curvatura del perfil del seguidor se reduce a cero (fig 4.8.7).

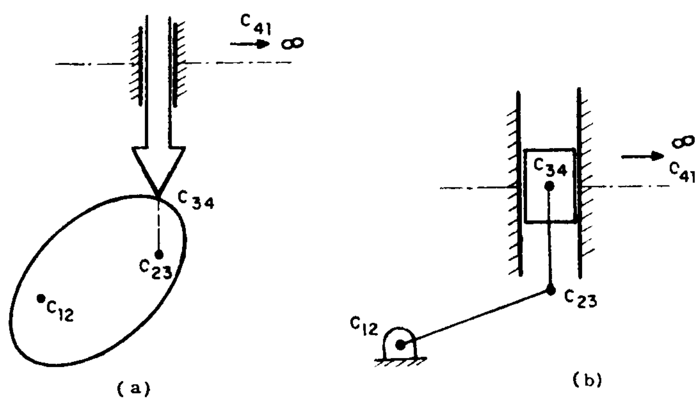


Fig 4.8.7. Leva con seguidor de punta y su mecanismo equivalente de pares inferiores

En conclusión, se ha demostrado que a todo acoplamiento de leva y seguidor corresponde un mecanismo equivalente de pares inferiores para cada configuración del acoplamiento original. La importancia de este resultado estriba en que, por medio del mecanismo equivalente, es posible calcular la velocidad del punto de contacto y, de ahí, la aceleración de los puntos del seguidor.

Obsérvese, además, que en todos los casos el punto de contacto C entre la leva y el seguidor es un punto de la barra acopladora 3. Por esta razón, en realidad no es necesario determinar el mecanismo equivalente para obtener $\bar{v}_C$. Basta obtener C_{31}, como se muestra en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 4.8.1. Determine la velocidad del punto de contacto entre la leva de la fig 4.8.8 y su seguidor de cara plana.

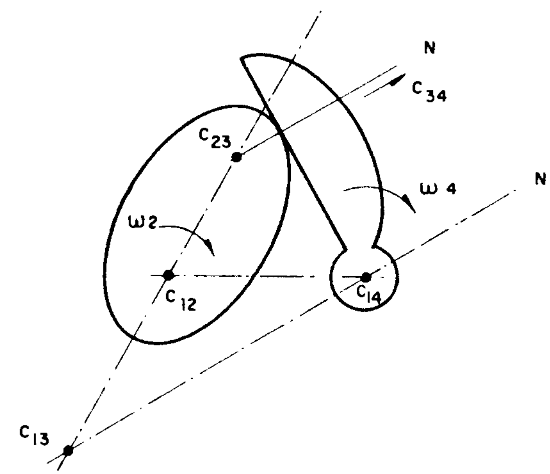


Fig 4.8.8. Leva con seguidor oscilante de cara plana

En la fig 4.8.8 se determina primero C_{23} de la geometría de la leva y luego C_{13}, conociendo C_{12}, C_{23}, C_{14} y C_{34}, aplicando el Teorema de Aronhold-Kennedy. Ahora bien, conociendo ω_2, se determina $\bar{v}_{C2}$, que es la velocidad del punto de la leva (cuerpo 2) que instantáneamente coincide con C. La velocidad de C4, punto del seguidor (cuerpo 4) que instantáneamente coincide con C, se determina de acuerdo al Teorema 4.8.1, lo cual se muestra en la fig 4.8.9.

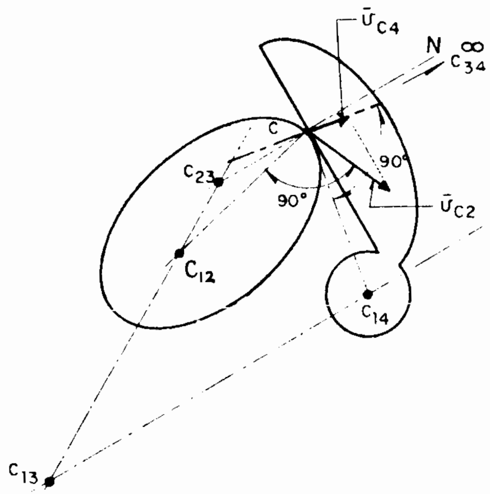


Fig 4.8.9. Análisis de velocidad de un mecanismo de leva y seguidor oscilante de cara plana

Ahora bien, nótese que C es un punto del eslabón acoplador 3. Por esta razón $\underset{\sim}{v}_C-\underset{\sim}{v}_{C2}$ y $\underset{\sim}{v}_C-\underset{\sim}{v}_{C4}$ son vectores paralelos a T

Esto es, las diferencias $\bar{v}_C - \bar{v}_{C2}$ y $\bar{v}_C - \bar{v}_{C4}$ son perpendiculares a la recta N. Como además $\bar{v}_C$ es perpendicular a la recta $\overline{C_{13}C}$ * , la velocidad de C resulta como se muestra en la fig 4.8.10.

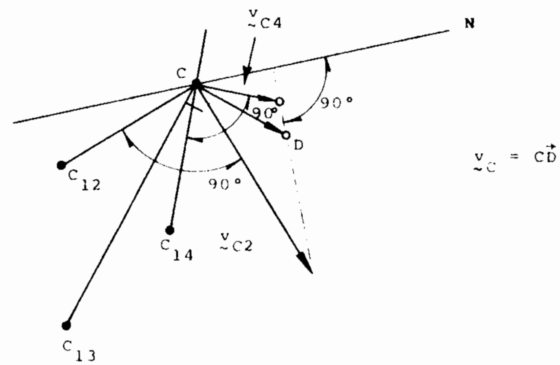


Fig 4.8.10. Determinación de la velocidad del punto de contacto entre una leva y su seguidor oscilante de cara plana

En la fig 4.8.11a se muestran las aceleraciones de los puntos de interés que pueden obtenerse, o bien de los datos ω_2 y α_2, o de las velocidades determinadas en la fig 4.8.10.

Sin pérdida de generalidad, supóngase $\alpha_2 = 0$. α_4 se determina resolviendo gráficamente el sistema de ecuaciones:

$$\bar{a}_C = \bar{a}_{C2} + 2\bar{\omega}_2 \times \bar{v}_{C/2} + \bar{a}_{C/2} \tag{4.8.17}$$

$$\bar{a}_C = \bar{a}_{C4} + 2\bar{\omega}_4 \times \bar{v}_{C/4} + \bar{a}_{C/4} \tag{4.9.18}$$

---

* Como consecuencia del resultado de la Sec. 1.1

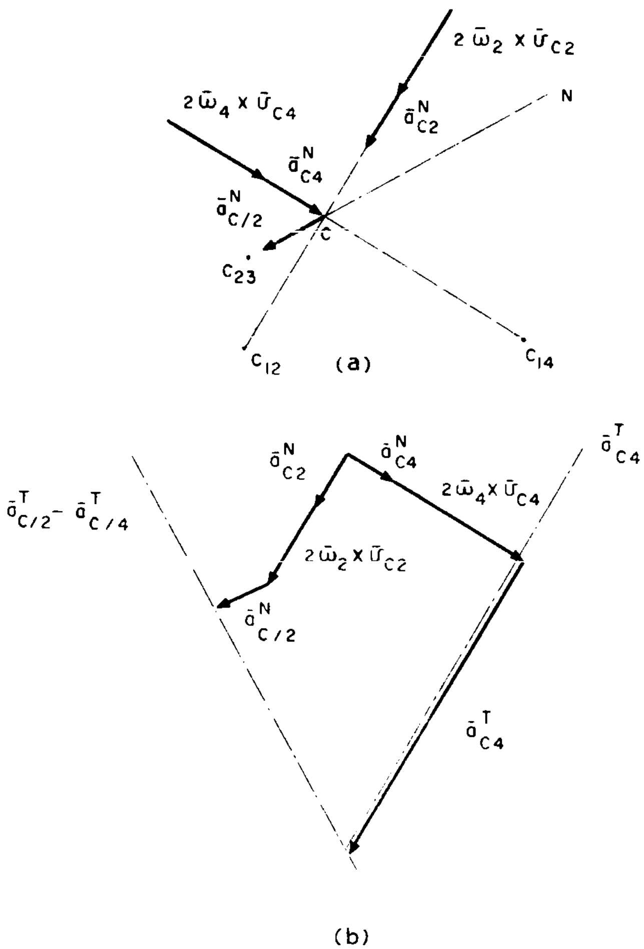


*Fig 4.8.11. Análisis de aceleración del seguidor oscilante de cara plana de una leva**

*Puesto que C_{34} está en el infinito, el punto C(de3) tiene traslación pura con respecto a 4. Así, $\underset{\sim}{a}^N_{C/4}=\underset{\sim}{0}$, y no aparece en la Fig. 4.8.11

que se obtiene expresando la aceleración del punto de contacto a través de observadores fijos en la leva 2 y en el seguidor 4, respectivamente, haciendo uso de la ec 1.3.4 en notación de Gibbs, como se obtuvo en la ec 2.9.8. Igualando los segundos miembros de las ecs 4.8.17 y 4.8.18, se tiene

$$\bar{a}_{C2} + 2\bar{\omega}_2 \times \bar{v}_{C/2} + \bar{a}_{C/2} = \bar{a}_{C4} + 2\bar{\omega}_4 \times \bar{v}_{C/4} + \bar{a}_{C/4} \qquad (4.8.19)$$

donde se desconocen los componentes tangenciales de $\bar{a}_{C/2}$, $\bar{a}_{C4}$ y $\bar{a}_{C/4}$.

Aparentemente se tiene, entonces, una ecuación vectorial de dimensión 2 para despejar 3 incógnitas, a saber: $\bar{a}^T_{C/2}$, $\bar{a}^T_{C4}$ y $\bar{a}^T_{C/4}$. Sin embargo, para determinar la aceleración angular del seguidor sólo interesa $\bar{a}^T_{C4}$, y las dos primeras - $\bar{a}^T_{C/2}$ y $\bar{a}^T_{C/4}$ -, siendo linealmente dependientes (puesto que ambas son perpendiculares a N) se pueden englobar en una sola incógnita. En virtud de lo anterior, entonces, aunque la ecuación (4.8.19) no tiene una solución única para las tres incógnitas, es posible despejar de manera *única* a la incógnita de interés, a^T_{C4}. La indeterminación de la ecuación se manifiesta únicamente en el hecho de que es imposible despejar $\bar{a}^T_{C/2}$ y $\bar{a}^T_{C/4}$, separadamente. Sólo es posible obtener su diferencia $\bar{a}^T_{C/2} - \bar{a}^T_{C/4}$. La solución gráfica de (4.8.19) se muestra en la fig 4.8.11.

Ejercicio 4.8.1. Determine gráficamente la aceleración del seguidor de la leva de la figura 4.8.12. La leva es un disco circular que gira alrededor del punto 0, que se encuentra a una distancia **a** de su centroide C, con velocidad angular uniforme.

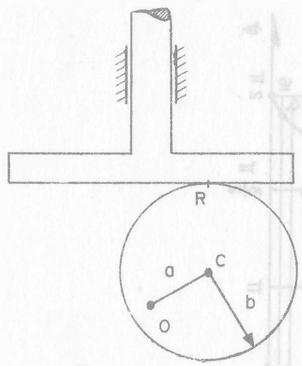


Fig 4.8.12. Leva circular excéntrica con seguidor traslacional de cara plana

4.9 Diseño geométrico de levas

El diseño geométrico de levas se realiza mediante una inversión del acoplamiento leva-seguidor. Sean (fig 4.9.1): 1, marco fijo, 2, leva y 3 seguidor.

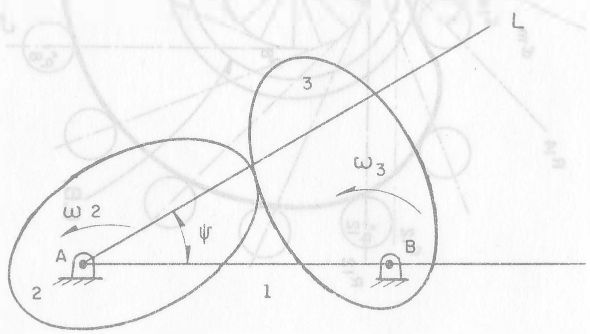


Fig 4.9.1. Acoplamiento de leva y seguidor oscilante

La recta L está fija a la leva (fig 4.9.1) y forma un ángulo ψ con la recta AB, fija a 1. Si ω_2 es la velocidad angular de la leva, es evidente que la recta L gira también a una velocidad ω_2 es decir, $\dot{\psi} = \omega_2$.

La inversión para el diseño consiste en fijar 2 y girar 1 a una velocidad angular $-\dot{\psi}$ (fig 4.9.2).

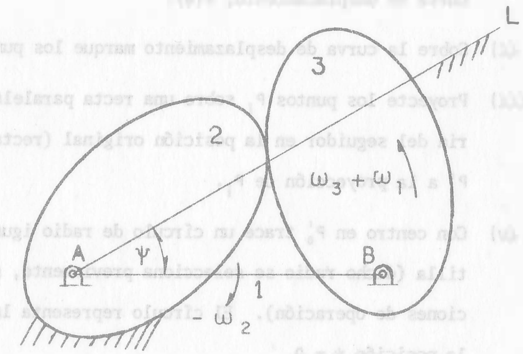


Fig 4.9.2. Inversión de un mecanismo de leva y seguidor oscilante

En esa figura, la barra AB (marco fijo de la fig 4.9.1) gira a una velocidad angular $\omega_1 = -\omega_2$. La velocidad angular de 3 con respecto a 2 en la fig 4.9.1 es $\omega_3 - \omega_2$, por lo que la velocidad de 3 en la fig 4.9.2 es $\omega_3 + \omega_1$.

El procedimiento de diseño se ilustra en los ejemplos siguientes.

Ejemplo 4.9.1. Diseñe la leva con seguidor de carretilla que tenga la salida $s(\psi)$ mostrada en la fig 4.9.3. Suponga que el seguidor tiene una excentricidad de 1.5 cm.

Procedimiento:

i) A una escala adecuada a las dimensiones del papel, dibuje la curva de desplazamiento, $s(\psi)$.

ii) Sobre la curva de desplazamiento marque los puntos P_i

iii) Proyecte los puntos P_i sobre una recta paralela a la trayectoria del seguidor en la posición original (recta Q_0R_0). Llame P_i' a la proyección de P_i.

iv) Con centro en P_0' trace un círculo de radio igual al de la carretilla (dicho radio se selecciona previamente, según las condiciones de operación). El círculo representa la carretilla en la posición $\psi = 0$.

v) A una distancia e (excentricidad) de la recta R_0 localice el centro 0 del círculo de excentricidad, CE.

vi) Trace los radios OQ_i sobre CE, correspondientes a los puntos P_i, en sentido contrario al movimiento de la leva. En este ejemplo se supone que la leva gira en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj.

vii) Trace las tangentes Q_iR_i a CE. Estas tangentes representan la guía del seguidor.

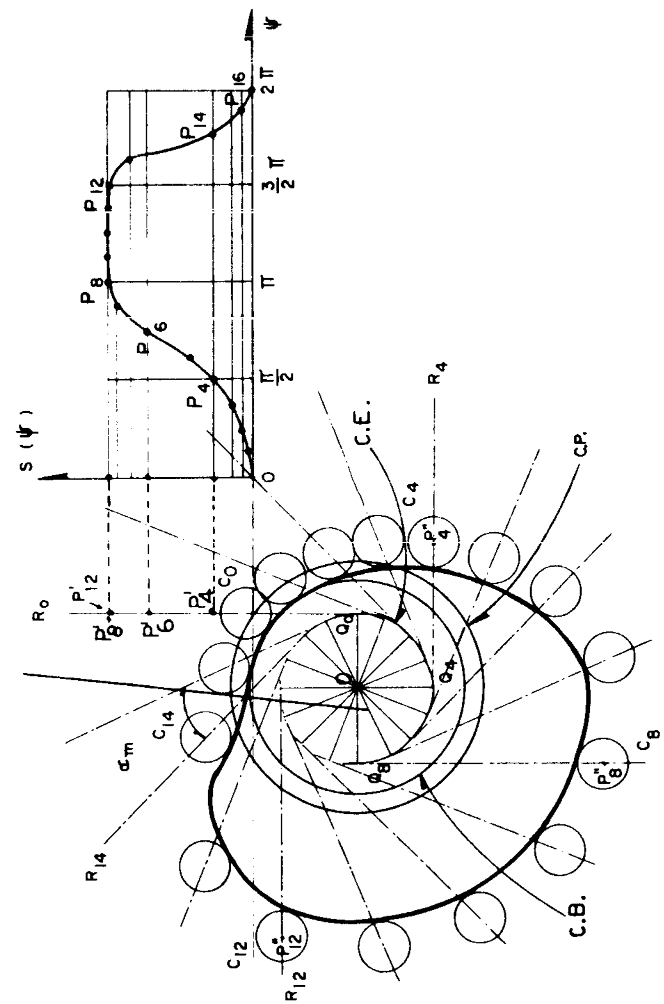


Fig 4.9.3 Diseño de una leva con seguidor traslacional de carretilla

viii) Sobre la recta Q_iR_i marque el punto P_i'' a una distancia Q_iP_i'' igual a Q_oP_i'. Estos puntos representan la posición del centro de la carretilla en el punto P_i de la curva de desplazamiento.

ix) Con centro en P_i'' trace los círculos C_i, que representan la carretilla en sus diferentes posiciones.

x) Trace una curva suave (esto es, que tenga una tangente definida en todos sus puntos) envolvente a todos los círculos C_i. Esta curva es el perfil de la leva buscado.

xi) Mida el máximo valor del ángulo de presión para verificar que no sea muy grande. Si es mayor de 30°, use un círculo base, CB, de mayor radio. En este ejemplo particular, se observa que el ángulo de presión máximo es mayor de 45°, por lo que se requiere aumentar el círculo base.

En caso de requerir un seguidor de cara plana, el perfil de la leva se determina por la envolvente a todas las posiciones de la cara plana del seguidor. En este caso no existe el círculo primitivo y el ángulo de presión es en todo momento 0°. Sin embargo, es necesario controlar el valor máximo que adquiere el parámetro x de la ec 4.6.3. Nótese que para el caso de un seguidor de cara plana, la leva tiene que ser convexa en todos sus puntos, por tanto, no es recomendable utilizar este tipo de seguidor en casos en los que la curva de desplazamiento tiene una pendiente muy grande. A continuación se presenta otro ejemplo para ilustrar el método gráfico de diseño de levas con seguidor oscilante.

Ejemplo 4.9.2. Diseñe una leva con seguidor oscilante, de cara plana, cuya salida $\phi(\psi)$ es la mostrada en la fig 4.9.4.

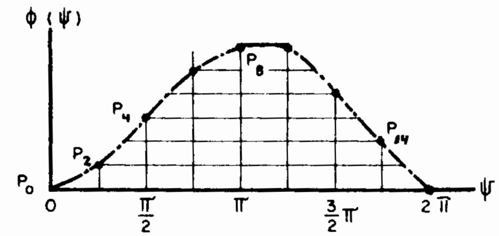


Fig 4.9.4. Curva de desplazamiento del seguidor oscilante de cara plana de una leva

Procedimiento (Ver fig 4.9.5):

i) Dibuje la configuración original del seguidor A_oP_o'.

ii) Trace los ángulos OA_oP_i', iguales a la ordenada en el punto P_i (fig 4.9.4)

iii) Al invertir el mecanismo, el punto A_o, del acoplamiento entre el seguidor y el marco fijo, pasa a las posiciones A_1, A_2,..., etc, alojadas sobre un círculo con centro en O y con radio OA_o

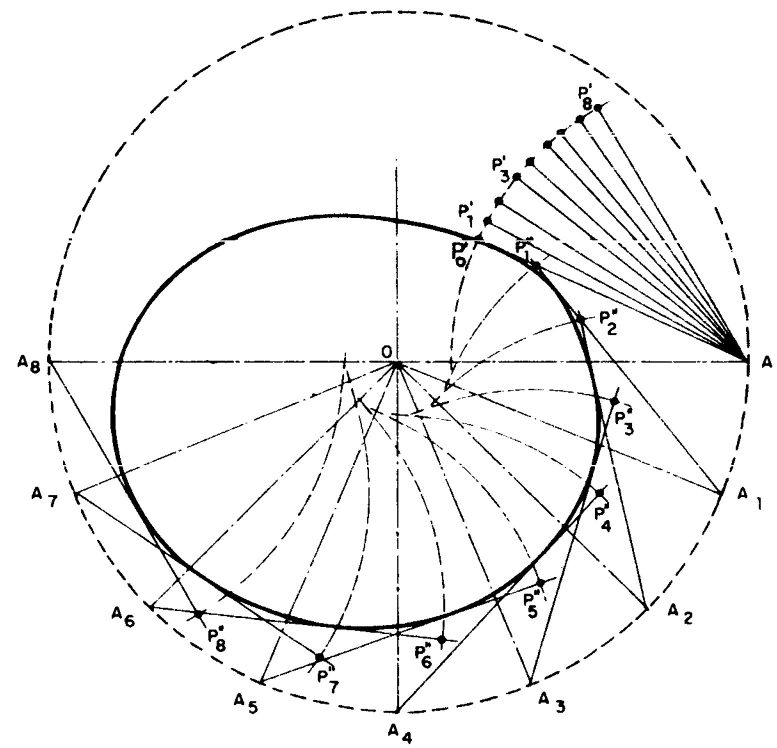
iv) Trasfiera los puntos P_i' del mecanismo sin invertir, a los puntos P_i'' del mecanismo invertido, localizándolos mediante las distancias OP_i' y A_oP_i', desde los puntos O y A_i respectivamente.

v) Trace las rectas A_iP_i'', que representan la cara plana del seguidor.

vi) Trace una curva suave, envolvente a las rectas A_iP_i''. Esta curva es el perfil de la leva.

Ejercicio 4.9.1. Repita el diseño de la fig 4.9.3 con seguidor de punta

Ejercicio 4.9.2. Diseñe una leva con seguidor oscilante de carretilla cuya salida sea la indicada en la fig 4.9.4.



$\measuredangle\ O\ A_0 P_i' = \measuredangle\ O\ A_i\ P_i''$

Fig 4.9.5. Diseño geométrico de una leva para un seguidor oscilante de cara plana

REFERENCIAS

4.1 J. M. Prentis, Dynamics of Mechanical Systems, *Longman Group Ltd.*, Londres (1970)

4.2 D. C. Tao, Fundamentals of Applied Kinematics, *Addison-Wesley Publishing Co.*, Palo Alto, Cal (1967)

4.3 S. Molian, The Design of Cam Mechanisms and Linkages, *Constable and Company, Ltd.*, Londres (1968)

4.4 J. Shigley, Theory of Machines, *McGraw-Hill Book Co.*, Nueva York (1961)

4.5 Castillo Lanz Carpizo L., Desarrollo del Lenguaje de Simulación Analógica Digital SAS III, Tesis Profesional, *Facultad de Ingeniería, UNAM* (1973)

4.6 L. Brand, Advanced Calculus, *John Wiley and Sons, Inc.*, Nueva York (1955)

4.7 M. L. James et al, Applied Numerical Methods for Digital Computation with Fortran, *International Textbook Co.*, Scranton, Penn (1967)

5 ENGRANES

INTRODUCCION. Un tren de engranes es un acoplamiento que se utiliza para transmitir potencia mecánica proveniente de una flecha de entrada, a una flecha de salida. Llamando ω_e y ω_s a la velocidad angular a la entrada y a la salida, respectivamente, la reducción (en caso de que ω_s sea menor que ω_e) se define como el cociente $m = \omega_e/\omega_s$. En la mayoría de las aplicaciones, los motores proporcionan potencia mecánica a una velocidad angular demasiado alta (la velocidad angular proporcionada por una turbina de gas es del orden de 15000 r.p.m.) para poder ser utilizada directamente, razón por la cual es necesario utilizar un tren de engranes para efectuar la reducción correspondiente. A menos que se indique algo en contrario, se entiende que la reducción m es el cociente de la velocidad a la salida entre la velocidad a la entrada.

Cada engrane está formado por un núcleo limitado por una superficie de revolución llamada "de paso", a la cual están integrados los dientes de éste, como se muestra en la Fig. 5.1.1. Los dientes del engrane de entrada se acoplan con los del engrane de salida de manera idéntico a como lo hace una leva con un seguidor oscilante. Sin embargo, existe una diferencia esencial de funcionamiento entre los engranes y las levas, que hacen que los primeros sean estudiados en un capítulo aparte; esta diferencia consiste en que la reducción de velocidad en un tren de engranes es constante, mientras que en las levas, en general, no lo es.

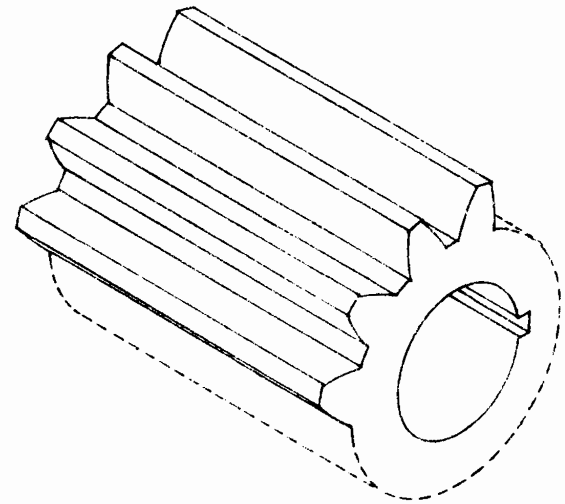


Fig. 5.1.1

Perspectiva isométrica de un engrane cilíndrico.

Según que la superficie de paso de un engrane sea un cilindro, un cono ó un hiperboloide, el engrane recibe el nombre de cilíndrico, cónico ó hiperbólico.

5.1. ENGRANES CILINDRICOS. Se utilizan para acoplar flechas paralelas y existen varios tipos de ellos, como se estudia en esta sección. En la Fig. 5.1.1 se muestra un engrane cilíndrico de diente rectos, llamado así porque su superficie de paso es cilíndrica y sus dientes son superficies regladas cuyas generatrices son paralelas al eje del cilindro. El perfil de los dientes, ó sea, la directriz de éstos - que es la curva de intersección entre el engrane y un plano normal a su -

eje - es una curva que se determina de manera que satisfaga la condición de -- acoplamiento que se estudia en seguida.

Considérense los dientes de los engranes que se muestran en la Fig.5.1.1, durante el acoplamiento. En esa figura no se muestran los engranes completos, - sólo la parte de los dientes que se acoplan.

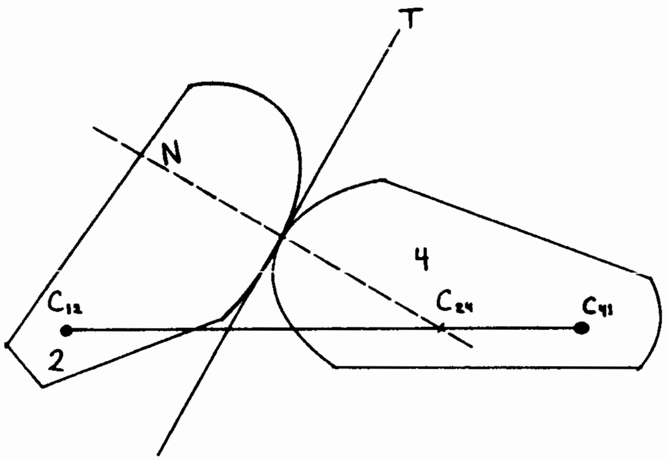


Fig. 5.1.1 Acoplamiento de dos dientes de un engrane

Haciendo referencia a la figura 5.1.1, el engrane 2 es el de entrada, el 4 el de salida, T es la tangente común a los dos perfiles y N es la normal común a los mismos. De acuerdo con el Teorema 4.8.1, el centro instantáneo de 4 -- con respecto a dos, C_{24}, se encuentra en la intersección de las líneas N y $C_{12}C_{41}$

Más aún, la reducción está dada por

$$m = \left|\frac{\omega_4}{\omega_2}\right| = \frac{\overline{C_{12}\ C_{24}}}{\overline{C_{24}\ C_{41}}} \qquad (5.1.1)$$

también según el Teorema 4.8.1.

Como resultado de lo anterior, si m es constante, el punto C_{24} permanece fijo. Esta es la condición de acoplamiento que todo par de dientes debe satisfacer para proporcionar una reducción constante. La condición de acoplamiento establece, entonces, que la normal N, durante el acoplamiento de un - par de dientes, gira alrededor del centro instantáneo de 4 con respecto a 2.

En consecuencia, el diseñador de engranes podría, en principio, utilizar una curva arbitraria para el perfil del diente del engrane de entrada y, con los métodos del Cap. IV para síntesis de levas con seguidor oscilante, determinaría el perfil del diente de su engrane compañero. Esto es impráctico porque elevaría demasiado los costos de producción. Lo que se hace es utilizar dientes cuya forma y dimensiones se encuentran estandarizados. Dado que es deseable que se puedan intercambiar los engranes con la más completa libertad, se utilizan -- dientes cuya forma es la misma para el engrane conductor (2 de la Fig. 5.1.1) que para el engrane conducido (4 de la Fig. 5.1.1). Las dos curvas más comúnmente empleadas son la involuta y la epicicloide-o la hipocicloide [5.1] . Por sus ventajas y su uso tan generalizado, se presentan en este capítulo únicamente los dientes de involuta. En [5.1] se pueden consultar lo relativo a - los dientes cicloides.

<u>LA INVOLUTA.</u> Dada una curva plana Γ como la mostrada en la Fig. 5.1.2 - el centro de curvatura de Γ en el punto P, donde la curvatura χ de Γ no es nula, está localizado por el vector [5.2]

$$\bar{r}' = \bar{r} + \rho e_n, \qquad (5.1.2)$$

donde ρ es el radio de curvatura de Γ en P y e_n es el vector normal a Γ en P.

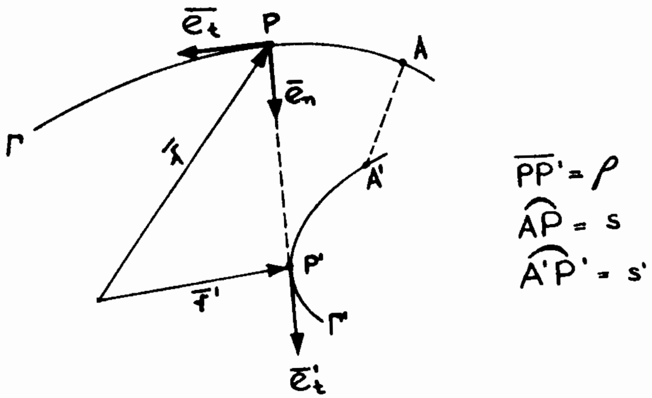


Fig. 5.1.2 Involuta de una curva

Es claro que, si $\varkappa \neq 0$, ρ está definida y para cada punto P existe un punto único P'. El lugar geométrico, Γ', de los puntos P' así definidos recibe el nombre de <u>evoluta</u> de Γ. A su vez, dada la curva Γ', la curva Γ correspondiente está definida de la siguiente manera [5.2] :

Derívense ambos miembros de la ec. (5.1.?) con respecto a s para obtener

$$\frac{d\bar{r}'}{ds} = \frac{d\bar{r}}{ds} + \frac{d\rho}{ds}\bar{e}_n + \rho\,\frac{d\bar{e}_n}{ds}, \qquad (5.1.3)$$

donde

$$\frac{d\bar{r}'}{ds} \equiv \frac{d\bar{r}'}{ds'}\,\frac{ds'}{ds}\,. \qquad (5.1.4)$$

Además [5.2],

$$\frac{d\bar{r}}{ds} = \bar{e}_t \;;\; \frac{d\bar{r}'}{ds'} = \bar{e}_t', \qquad (5.1.5)$$

es decir, la derivada del vector de posición de un punto sobre una curva es un vector unitario tangente a la misma. Más aún, de las ecuaciones de Frenet-Serret [5.2], para curvas planas (es decir, para curvas cuya torsión τ es nula),

$$\frac{d\bar{e}_n}{ds} = -\varkappa\bar{e}_t \qquad (5.1.6)$$

Haciendo las sustituciones correspondientes en (5.1.3),

$$\bar{e}_t'\,\frac{ds'}{ds} = \bar{e}_t + \frac{d\rho}{ds}\,\bar{e}_n - \rho\varkappa\bar{e}_t;$$

pero

$$\rho\varkappa = 1$$

por lo que

$$\bar{e}_t'\,\frac{ds'}{ds} = \frac{d\rho}{ds}\,\bar{e}_n\,. \qquad (5.1.7)$$

Pero, de la definición de Γ',

$$e_t' = \bar{e}_n$$

por lo que, de (5.1.7) se infiere que

$$\frac{ds'}{ds} = \frac{d\rho}{ds}\,,$$

ó bien

$$s' = \rho + c \qquad (5.1.8)$$

donde c es una constante arbitraria de integración. Para c = 0, la ec. (5.1.8) define unívocamente el radio ρ de Γ en P, para un valor de s' dado. Es decir, la curva Γ se ha determinado a partir de la curva Γ'. Γ recibe el nombre de <u>involuta</u> de Γ'. Nótese que ρ es igual a la longitud de arco s' de Γ', por lo que -

dada una curva Γ', el trazo de su involuta se puede lograr envolviendo Γ' con - una cuerda. Al desarrollar esa cuerda, su extremo traza Γ, como se puede - - observar de la Fig. 5.1.2.

Si Γ' es una circunferencia, su involuta tiene la forma de la Fig.5.1.3

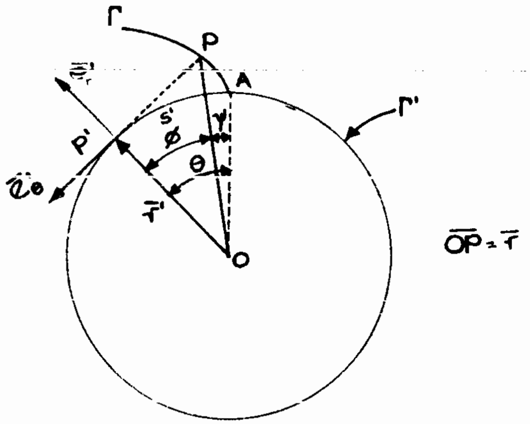


Fig. 5.1.3 Involuta de un círculo

De esa figura,

$$\bar{r} = \bar{r}' - s'\bar{e}'_\theta = a\bar{e}_r + a\theta\bar{e}'_\theta, \qquad (5.1.9)$$

que es una expresión que permite calcular las coordenadas de los puntos de la involuta. Los vectores $\bar{e}'_r$ y $\bar{e}'_\theta$ de (5.1.9) son los vectores asociados a las coordenadas polares definidas sobre el plano del dibujo, r(=a) y Θ.

La propiedad de la involuta de un círculo que hace de ésta una curva idónea para el trazo de los dientes de engranes es la siguiente:

Supónganse dos circunferencias, de radios r_1 y r_2, respectivamente, cuyos centros están alejados una distancia c, como se muestra en la Fig.5.1.4. Sea

$T_1 T_2$ la tangente común a las circunferencias.

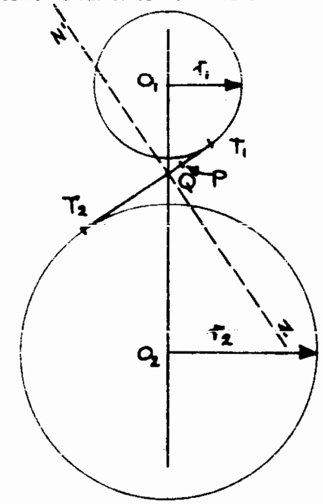


Fig. 5.1.4 Trazo de las involutas de dos círculos.

Ahora piénsese en las circunferencias anteriores como los perfiles de dos poleas cuyos ejes están articulados a un marco fijo al papel del dibujo en O_1 y O_2.

Piénsese además, que ambas poleas tienen arrollada una banda que se desplaza al girar una de ellas, ocasionando que la otra también gire. En estas condiciones, $T_1 T_2$ es un segmento de esa banda, uno de cuyos puntos, digamos P, describe la trayectoria $T_1 T_2$ al desarrollarse la banda de la polea 1 y arrollarse a la 2. La trayectoria de P en cada una de las poleas es, sin embargo, ¡ una involuta ! y, como P es un punto común a ambas, éstas resultan ser tangentes, como se muestra en la figura 5.1.5.

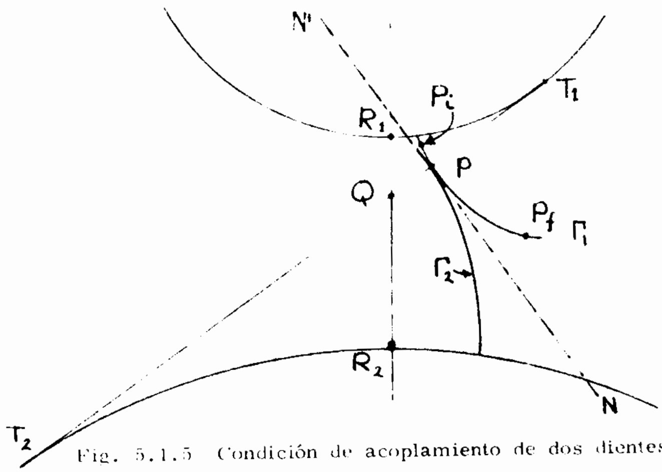


Fig. 5.1.5 Condición de acoplamiento de dos dientes de engranes

En la Fig. 5.1.5 es obvio que la recta N'N es la tangente común a ambas involutas, y $T_1 T_2$ es la normal a ellas. Más aún, los segmentos $\overline{PT_1}$ y $\overline{PT_2}$ son los radios de curvatura de las involutas Γ_1 y Γ_2, respectivamente. Pero el hecho más importante es que el punto Q de la misma figura 5.1.5 <u>tiene una posición fija, para cualquier posición del punto P</u>, garantizándose así que los engranes con estos perfiles tienen una reducción constante de velocidad.

Es claro, de la Fig. 5.1.5, que los dos dientes no pueden permanecer tangentes durante una vuelta completa de alguno de los engranes, debido a que el claro $\overline{R_1 R_2}$ es limitado. Así, el contacto se efectúa únicamente a lo largo de un segmento, digamos $\overline{P_i P_f}$.

<u>TRAZO DEL PERFIL DE UN DIENTE DE INVOLUTA.</u> De la Fig. 5.1.3, nótese que

$$\overline{OP}\cos\phi = a, \qquad (5.1.10)$$

$$\overline{OP}\,\mathrm{sen}\,\phi = a\theta, \qquad (5.1.11)$$

por lo que

$$\theta = \tan\phi, \qquad (5.1.12)$$

Además

$$\phi + \psi = \theta,$$

y así,

$$\psi = \tan\phi - \phi \equiv \mathrm{inv}\,\phi, \qquad (5.1.13)$$

ó bien,

$$\phi = \mathrm{inv}^{-1}\psi \qquad (5.1.13\,a)$$

Las coordenadas polares $\overline{OP}$, ψ, de la involuta, se calculan de las ecs. (5.1.10) y (5.1.13), por medio de la rutina INVINV de computadora digital. INVINV calcula ϕ por el método de Newton-Raphson, que resuelve la ecuación algebraica no lineal

$$f(\phi) = \tan\phi - \phi - \psi = 0, \qquad (5.1.14)$$

en que ψ es dada (es el valor de la involuta cuyo argumento se desea calcular).

El algoritmo de Newton-Raphson [5.3] para una sola ecuación algebraica no lineal es :

$$\phi_{k+1} = \phi_k - \frac{f(\phi_k)}{f'(\phi_k)}, \qquad (5.1.15)$$

con ϕ_0 dado. La subrutina INVINV aparece en la Fig. 5.1.6. Con el valor $\mathrm{inv}^{-1}\psi$, obtenido de INVINV, se calcula $\overline{OP}$ como

$$OP = \frac{a}{\cos(\mathrm{inv}^{-1}\psi)}, \qquad (5.1.16)$$

como es obvio de las ecs. (5.1.10) y (5.1.13a). La función $\overline{OP}(\psi)$ es el perfil del diente deseado. En la tabla 5.1.1 se muestran valores de $\mathrm{inv}^{-1}(\phi)$.

```
      SUBROUTINE INVINV(PSI,PHI,TOL,MAX,ERROR)
C
C     OBJETO. DETERMINAR EL ANGULO PHI CUYA INVOLUTA ES PSI.
C     METODO. NEWTON-RAPHSON (HENRICI P. ELEMENTS OF NUMERICAL ANALYSIS,
C     JOHN WILEY AND SONS, INC., NEW YORK, 1964, PP. 77-81).
C     PARAMETROS.
C     PSI. INVOLUTA DE PHI. LO DA EL USUARIO EN RADIANES.
C     PHI. ANGULO CUYA INVOLUTA ES PSI. SU VALOR DE ENTRADA A LA SUBRUTINA
C     LO DA EL USUARIO, EN RADIANES. ESTE ES EL VALOR CON EL QUE SE
C     INICIAN LAS ITERACIONES.
C     EL VALOR QUE REGRESA INVINV, EN RADIANES, ES EL ARGUMENTO CUYA
C     INVOLUTA ES PSI.
C     TOL ES LA TOLERANCIA ACEPTADA POR EL USUARIO.
C     MAX. ES EL MAXIMO DE ITERACIONES PERMITIDO POR EL USUARIO.
C     ERROR. ES EL VALOR ABSOLUTO DE LA DIFERENCIA ENTRE DOS ITERACIONES
C     SUCESIVAS. ES UN PARAMETRO DE SALIDA.
      COMMON/UNO/PI
      COMMON/TRES/ITER
      ITER=0
      IF(PHI.NE.0..AND.PSI.NE.0.) GO TO 1
      IF(PHI.NE.0..AND.PSI.EQ.0.) GO TO 2
      IF(PHI.EQ.0..AND.PSI.EQ.0.) GO TO 2
      GO TO 2
    1 PHII=PHI
      IF(SIN(PHI).EQ.0.) GO TO 3
C     SE INICIA EL METODO DE NEWTON-RAPHSON.
      COT=COS(PHI)/SIN(PHI)
      PAR=PSI*COT-1.
      SENC=SIN(PHI)*SIN(PHI)
      PHI=PHI/SENC+COT*PAR
      ERROR=ABS(PHI-PHII)
      IF(ERROR.LT.TOL) RETURN
      ITER=ITER+1
      IF(ITER.LE.MAX) GO TO 1
    2 PHI=0.
      RETURN
    3 WRITE(6,4)
    4 FORMAT(/,10X,"VALOR INICIAL INADMISIBLE")
      RETURN
      END
```

Fig 5.1.6 Listado de la subrutina INVINV

TABLA 5.1.1 VALORES DE PHI = ARG(INV(PSI))

PSI (GRADOS)	PHI (GRADOS)	ERROR (ADIMENSIONAL)	ITER (NUM)
0.	0.	0.	0
.100000E+02	.424977E+02	.163709E-10	12
.200000E+02	.511601E+02	.126274E-07	4
.300000E+02	.564717E+02	.145519E-10	4
.400000E+02	.602510E+02	.159169E-06	3
.500000E+02	.631421E+02	.278815E-07	3
.600000E+02	.654534E+02	.704313E-08	3
.700000E+02	.673576E+02	.224099E-08	3
.800000E+02	.689615E+02	.844011E-09	3
.900000E+02	.703357E+02	.349246E-09	3
.100000E+03	.715292E+02	.160071E-09	3
.110000E+03	.725773E+02	.727596E-10	3
.120000E+03	.735064E+02	.582077E-10	3
.130000E+03	.743366E+02	.145519E-10	3
.140000E+03	.750835E+02	0.	3
.150000E+03	.757595E+02	0.	3
.160000E+03	.763746E+02	0.	3
.170000E+03	.769370E+02	.875036E-06	2
.180000E+03	.774534E+02	.695582E-06	2
.190000E+03	.779893E+02	.559201E-06	2
.200000E+03	.783694E+02	.454223E-06	2
.210000E+03	.787778E+02	.372384E-06	2
.220000E+03	.791578E+02	.307860E-06	2
.230000E+03	.795123E+02	.256478E-06	2
.240000E+03	.798439E+02	.215179E-06	2
.250000E+03	.801548E+02	.181710E-06	2
.260000E+03	.804469E+02	.154367E-06	2
.270000E+03	.807218E+02	.131869E-06	2
.280000E+03	.809811E+02	.113243E-06	2
.290000E+03	.812261E+02	.977161E-07	2
.300000E+03	.814579E+02	.846776E-07	2
.310000E+03	.816776E+02	.737346E-07	2
.320000E+03	.818862E+02	.644359E-07	2
.330000E+03	.820844E+02	.565196E-07	2
.340000E+03	.822731E+02	.497530E-07	2
.350000E+03	.824528E+02	.439468E-07	2
.360000E+03	.826243E+02	.389409E-07	2

TERMINOLOGIA DE LOS ENGRANES. En la Fig. 5.1.7 se muestran los parámetros de un engrane, y a continuación se presenta una lista de términos propios de la tecnología de este elemento.

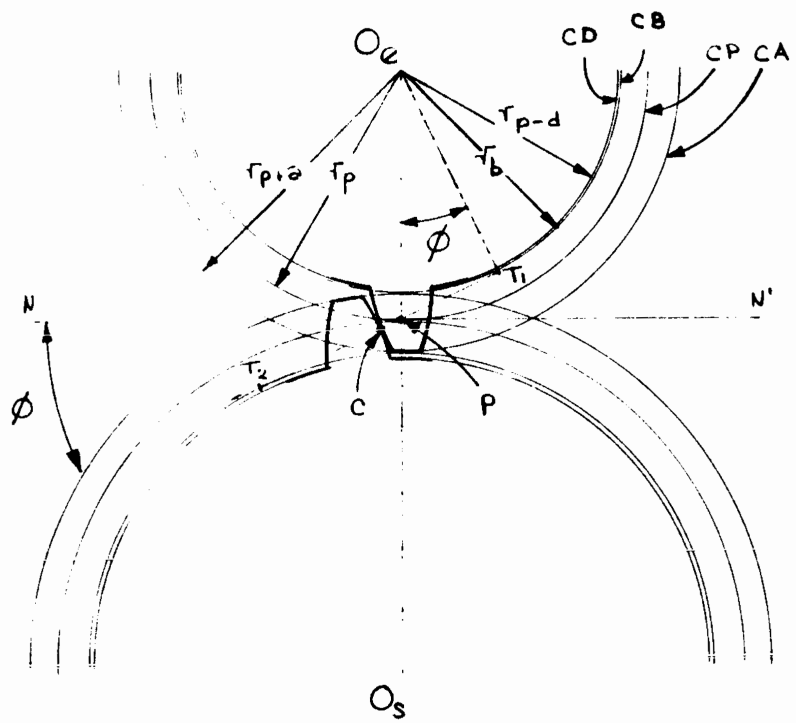


Fig. 5.1.7 Terminología de los engranes

CB : Círculo base. El círculo cuya involuta es el perfil del diente. Tiene un radio r_b

C : Punto de contacto (entre los dos dientes)

$O_e O_s$: Línea de los centros.

$T_1 T_2$: Trayectoria del punto de contacto.

P : Punto de paso. Intersección de la trayectorio del punto de contacto y la línea de los centros.

CP : Círculo de paso. Contiene al punto de paso, de radio r_p

CD : Círculo de dedendo, de radio $r_d = r_p - d$, donde d es el dedendo*

CA : Círculo de adendo, de radio $r_a = r_p + a$, donde a es el adendo*

ϕ : Angulo de presión*. Comprendido entre la normal común a las dos perfiles (T_1 T_2) y la normal N N' a la línea de los centros .

Observaciones

i) Los dos engranes giran uno con respecto al otro de una manera semejante a como lo harían dos discos de fricción de radio igual al radio de paso de cada engrane, cuyo contacto se realizara en el punto P.

ii) Cuando el punto de contacto ~~ocupa la posición del punto de paso~~, ~~la fuer~~za que ejerce un engrane sobre el otro (que es normal a ambos perfiles, si se desprecia la fricción entre ambos dientes) tiene una inclinación de un angulo ϕ con respecto a la línea N'N. Es decir, si F es la magnitud de esta fuerza, el par que ejerce un engrane sobre el otro, con respecto al centroide de este último, digamos O_e , está dado por $Fr_p \cos \phi$. Por lo tanto, conviene asignar al angulo ϕ un valor muy bajo y, en virtud de esto, los valores universalmente especificados de ϕ son 20 y 25° (Valores de ϕ = 14.5° se encuentran todavía con rela

*Estas dimensiones se encuentran estandarizadas, según la tabla 5.1.2

tiva frecuencia)

iii) Aunque los dos engranes tienen diferentes radios de paso, el ángulo de - presión tiene el mismo valor en ambos.

iv) Excepto para la posición en la que el punto de contacto coincide con el punto de paso, siempre existe deslizamiento de un diente con respecto al otro, lo que ocasiona pérdidas por fricción, y ruido en la operación.

TERMINOLOGIA DE LOS DIENTES DE UN ENGRANE. Haciendo referencia a la Fig. 5.1.8, se tienen las siguientes definiciones :

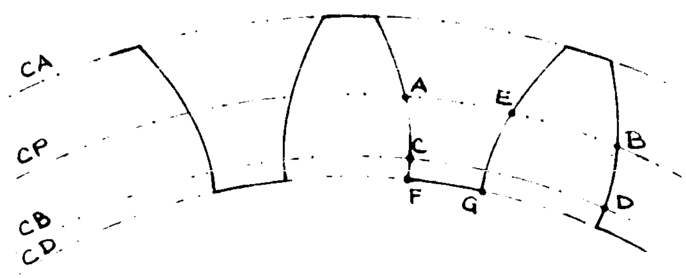


Fig. 5.1.8 Terminología de los dientes de un engrane

arco A B : paso circular

arco C D : paso de la base

arco A E : espaciamiento

arco E B : ancho del diente

arco F G : raíz del diente.

Otros parámetros de importancia son, el claro c, el paso diametral P_d y el módulo m, definidos a continuación :

$$c = d - a \qquad (5.1.17)$$

$$P_d = \frac{N}{2r_p} \quad (\text{pulgadas}^{-1}) \qquad (5.1.18)$$

$$m = \frac{2r_p}{N} \quad (\text{m m}) \qquad (5.1.19)$$

Nótese que el dedendo es mayor que el adendo, con el objeto de que el engrane aloje el diente de su compañero sin que éste toque la raíz del otro. La diferencia entre el adendo y el dedendo recibe el nombre de claro.

El adendo, el dedendo y el claro son funciones del paso diametral, P_d definido por el cociente.

$$P_d = \frac{N}{d_p}, \qquad (5.1.20)$$

donde N es el número de dientes. Así, el paso diametral indica cuántos dientes tiene un engrane por cada pulgada de diámetro de paso. Mientras mayor - es este cociente, menor es el diente, como se puede apreciar en la Fig. 5.1.9.

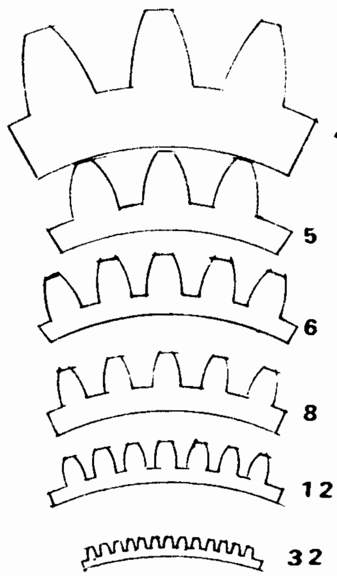


Fig. 5.1.9 Dientes de engrane de involuta con idénticos diámetros de paso y diferente paso diametral.

Ya sea que el diente tenga un ángulo de presión de 20° o de 25° y según que sea normal o escotado, las dimensiones del adendo, el dedendo y el claro están estandarizadas de acuerdo con los valores de la Tabla 5.1.2.

TABLA 5.1.2

Diente normal :

$a = 1.00\ m$

$d = 1.25\ m$

Diente escotado (o corto) :

$a = 0.75\ m$

$d = 1.00\ m$

(Especificaciones basadas en el módulo m.)

El diente escotado es más robusto que el normal, y se utiliza cuando las cargas son muy altas.

ENGRANES CON DIENTES HELICOIDALES. De acuerdo con la observación iv) de párrafos anteriores, lo ideal sería que dos dientes sólo estuvieran en contacto cuando el punto C pasa por P, y al siguiente instante el contacto se realizara entre otros dos dientes, ligeramente desfasados con respecto a los primeros, situados esos dientes en un plano diferente, pero paralelo al de los primeros. Un arreglo de dientes en estas condiciones se vería como en la Fig. 5.1.10, donde la línea

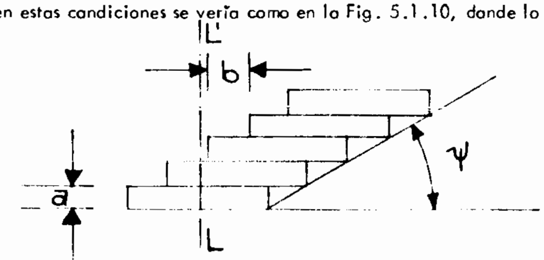


Fig. 5.1.10 Montaje de engranes desfasados para reducir la fricción

L'L es el eje de la superficie cilíndrica de paso. El ancho de cada diente es a y el desfasamiento entre dos dientes es b. Este arreglo, sin embargo, no eliminaría el deslizamiento totalmente, aunque sí lo reduciría de manera considerable. Evidentemente, la forma de anular el deslizamiento es haciendo que $a \longrightarrow 0$ y $b \longrightarrow 0$, manteniendo constante el cociente

$$\frac{a}{b} = \tan \psi . \qquad (5.1.21)$$

La configuración correspondiente sería ahora la de la Fig. 5.1.11.

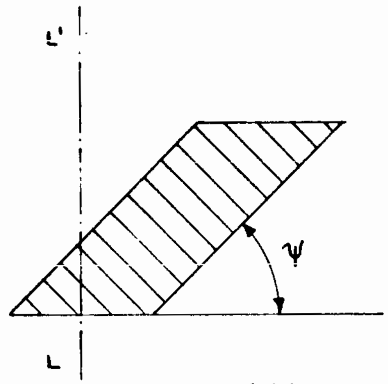


Fig. 5.1.11 Diente helicoidal de un engrane cilíndrico

La superficie del diente sigue siendo una superficie reglada, pero sus generatrices son ahora hélices con eje L'L, el eje de la superficie de paso. Por esta razón estos engranes se llaman helicoidales. El ángulo ψ es el ángulo de la hélice.

En la Fig. 5.1.12 se muestra la perspectiva de un engrane helicoidal.

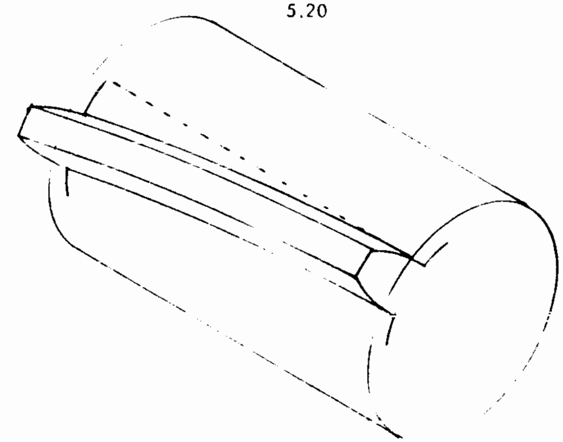


Fig. 5.1.12 Perspectiva isométrica de un engrane cilíndrico de dientes helicoidales

Si bien los engranes helicoidales tienen una operación más silenciosa y más eficiente que los de dientes rectos, introducen el siguiente problema: Sea F la componente de la fuerza de contacto entre dos dientes, contenida en un plano tangente a la superficie de paso (véase la Fig. 5.1.13). Esta fuerza tiene una componente normal a L'L, como en el caso de los engranes de dientes rectos; pero, además, tiene una componente axial a L'L, F_a.

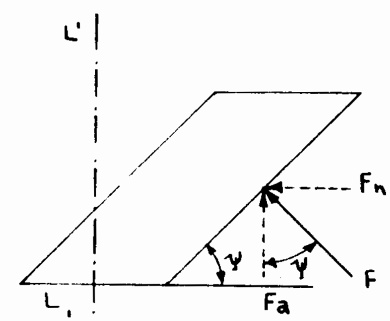


Fig. 5.1.13 Fuerzas que actúan sobre un diente helicoidal

La magnitud de la componente axial es, de la Fig. 5.1.13,

$$F_a = F \cos \psi.$$

La existencia de esta componente obliga a emplear cojinetes especiales, que soporten cargas axiales. Es claro que una carga axial F_a muy grande puede ocasionar un desgaste excesivo en los cojinetes, lo cual es indeseable. La forma de anular la componenete axial es construir engranes helicoidales que tengan dos hélices encontradas, como se muestra en la Fig. 5.1.14

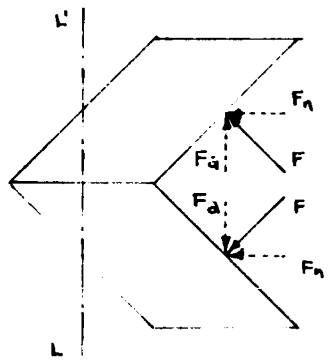


Fig. 5.1.14 Montaje de dos engranes de dientes helicoidales para anular la carga axial

Nótese que ahora la carga axial sobre una sección del diente anula a la carga axial sobre la otra, anulando así virtualmente la carga axial sobre los cojinetes. Un engrane con dientes construídos de esta manera recibe el nombre de "doble helicoidal" y se muestra en forma esquemática en la Fig. 5.1.15.

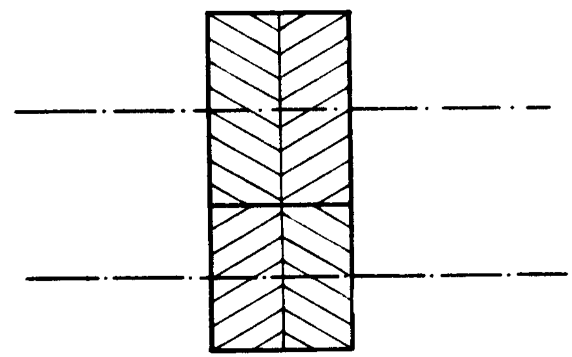


Fig. 5.1.15 Acoplamiento de engranes **doble helicoidales.**

Los parámetros del diente de un engrane helicoidal se miden sobre un plano perpendicular a la hélice, que se muestra en la Fig. 5.1.16, de canto, PP'

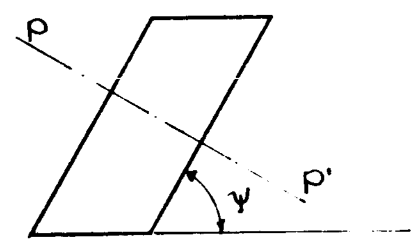


Fig. 5.1.16 Plano transversal de un diente helicoidal

Todo lo que se ha dicho acerca de los engranes cilíndricos se aplica a los cónicos, con algunas modificaciones, como se verá en la Sección 5.2. Para terminar esta sección se advierte que las especificaciones de los dientes varían según que se trabaje en el sistema inglés o en el sistema métrico. Mientras que en el sistema inglés el paso diametral P_d es el parámetro que determina las dimensiones del diente, en el sistema métrico es el módulo, m, que mide la cantidad de milímetros del diámetro de paso por diente del engrane. Así, pues, el producto del paso diametral por el módulo es igual al cociente entre una longitud de una pulgada y una de un milímetro. Esto es

$$m \; P_d = 25.4 \qquad (5.1.21)$$

Los valores estandarizados de paso diametral y módulo son los siguientes [5.4] :

m = 1, 1.25, 1.50, 2, 2.50, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 16, 20.

P_d = 2, $2\frac{1}{4}$, $2\frac{1}{2}$, 3, 6, 8, 10, 12, 16, 20, 24, 32, 40, 48, 64, 80, 96, 120, 150, 200.

Las dimensiones estandarizadas para dientes en el sistema inglés [5.4] para ángulos de presión de 20° y de 25° aparecen en la Tabla 5.1.3.

TABLA 5.1.3

normales :

$$a = \frac{1.000}{P_d}$$

$$d = \frac{1.250}{P_d}$$

cortos (o escotados) :

$$a = \frac{0.8}{P_d} \; , \quad d = \frac{1.0}{P_d}$$

5.2. ENGRANES CONICOS. Se utilizan para acoplar flechas no paralelas, que se intersecan. En virtud del Teorema de Aronhold-Kennedy [5.5], dados dos cuerpos, A y B, en movimiento con respecto a un tercero, C, existe el eje instantáneo de rotación de A con respecto a B si, y sólo si, existen los ejes de A y de B con respecto a C, y estos se intersecan. En la Fig. 5.2.1, sean A y B dos flechas montadas sobre un marco C.

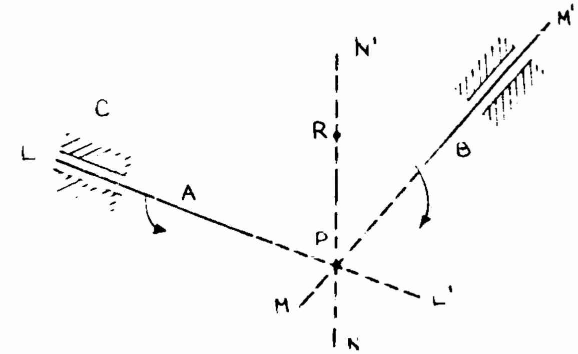


Fig. 5.2.1 Acoplamiento de flechas no paralelas que se intersecan

En esa figura, es claro que los ejes instantáneas de rotación de A y de B con respecto a C son las líneas LL' y MM', respectivamente. Si estos ejes se intersecan, en un punto P por ejemplo, es posible - en virtud del Teorema de Aronhold - Kennedy- hallar una línea NN', que pase por P, a lo largo de la cual los puntos en contacto de A y B tienen una velocidad relativa nula, esto es, para un punto de NN', como R, se tiene

$$\bar{v}_{RA} = \bar{v}_{RB},$$

es decir, la velocidad de R, como punto de A, es idéntica a la velocidad de R como punto de B. En estas condiciones, es obvio que las flechas A y B tengan -

que acoplarse por medio de superficies tales que los puntos de contacto de ambas queden sobre la línea N'N. Claramente, estas superficies son conos de revolución, cuyos ejes de simetría son las líneas LL' y MM', como se muestra en la Fig. 5.2.2.

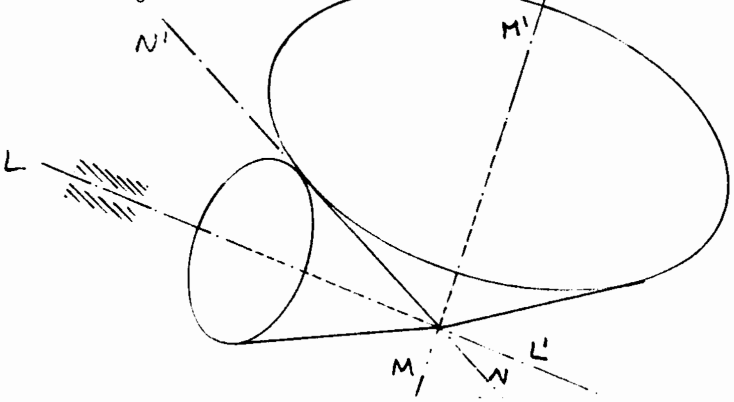


Fig. 5.2.2 Acoplamiento de dos flechas que se intersecan por medio de superficies cónicas

Los conos de esa figura son las superficies de paso de los engranes que acoplan a las dos flechas. Los dientes de estos engranes son superficies regladas cónicas.

En la Fig. 5.2.3 se muestra un corte, según el plano axial (determinado por los ejes LL' y MM' de la Fig. 5.2.2), de un acoplamiento de engranes cónicos.

Dado el cono de paso con eje LL', su <u>cono posterior</u> se define como el cono con el mismo eje LL'; pero normal al primero.

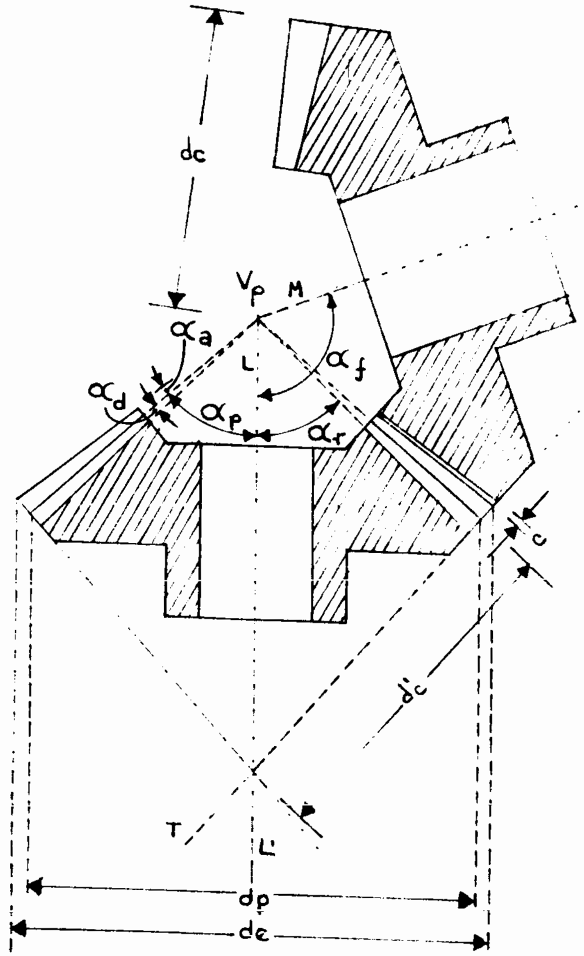


Fig. 5.2.3 Terminología de los engranes cónicos

Terminología :

d_p = diámetro de paso

d_e = diámetro exterior

d_c = distancia cónica

d'_c = distancia cónica posterior

c = claro (uniforme a lo largo del diente)

α_p = ángulo de paso

α_f = ~~ángulo entre flechas~~

α_a = ángulo de adendo

α_d = ángulo de dedendo

α_r = ángulo de la raíz del diente

V_p : vértice de paso

TT' : visto de canto del plano transversal, tangente a los dos conos posteriores.

Por la misma razón que se expuso en relación con los engranes cilíndricos de dientes rectos, los engranes cónicos de dientes rectos ruedan sin deslizar uno con respecto al otro solo cuando el contacto se efectúa sobre la generatriz común a las superficies de paso, lo cual sucede instantáneamente. Cuando la carga que actúa sobre el diente es alta, las pérdidas por fricción al producirse deslizamiento son de consideración y entonces se hace necesario un modo de operación más eficiente. Esto se consigue, análogamente al caso de los engranes cilíndricos, con engranes cónicos de dientes espirales. Las superficies de estos dientes son --

una sucesión de espirales contenidas en superficies cónicas cuyo eje y cuyo vértice coinciden con los de la superficie de paso. En la Fig. 5.2.4 se muestra una vista de esta clase de engranes.

Una variante de los engranes cónicos de dientes espirales son los engranes Zerol*, llamados así porque el valor medio de su ángulo espiral es cero (en inglés, zero). En la Fig. 5.2.5 se muestra un engrane Zerol.

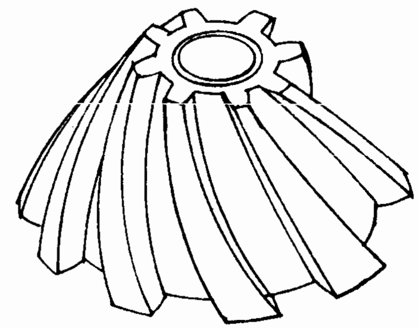


Fig. 5.2.4 Engrane cónico de dientes espirales

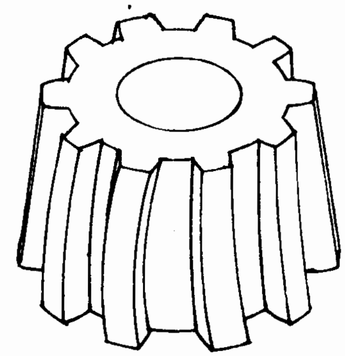


Fig. 5.2.5 Engrane Zerol

* Marca registrada por The Gleason Works, Rochester, N. Y.

Debido a la propiedad que tienen las superficies de paso de los engranes cónicos de rodar sin deslizamiento, la reducción es sencillamente el cociente de los diámetros de paso, o bien, el cociente de los números de dientes, como en el caso de los engranes cilíndricos.

El diseño de engranes cónicos es semejante al de engranes cilíndricos. De hecho, se hace en base al engrane cilíndrico equivalente, que es el que está contenido en el plano transversal, de tal suerte que en la cercanía del punto de tangencia (del plano transversal con el cono posterior) los dientes de ambos engranes coinciden. En general, el número de dientes del engrane equivalente no es entero (¿ por qué ?).

5.3 . Acoplamiento de flechas que se cruzan en el espacio . Cuando se trata de acoplar ejes que no se intersecan ni son paralelos, no se puede utilizar engranes cilíndricos ni cónicos, pues entonces no existe un eje instantáneo de rotación de una flecha con respecto a la otra [5.5] . y así, no existe una superficie de paso sobre la cual la velocidad relativa de los puntos en contacto sea nula. En este caso, se tiene que utilizar otro tipo de engranes, a saber : hiperbólicos*, corona-sinfín, helicoidales cruzados, planoides, espiroides y los llamados Helicon. Estos se describen a continuación.

Engranes hiperbólicos . Se llaman así porque sus superficies de paso son hiperboloides de revolución. Cada una de estas es una superficie reglada cuya generatriz es el eje del tornillo instantáneo [5.6 , 5.7] de una flecha con respecto a la otra, esto es, la recta a lo largo de la cual los puntos en contacto tienen una velocidad relativa con magnitud mínima, que se determina como se ilustra a continuación.

* También llamados hipoidales (del inglés "hypoid").

Supóngase que se trata de acoplar los ejes LL' y MM', de la Fig.5.3.1 por medio de engranes. Supóngase también, que estos ejes forman un ángulo de 90°, de manera que el primero coincide con el eje X y el segundo es paralelo al eje Z y está a una distancia a del primero.

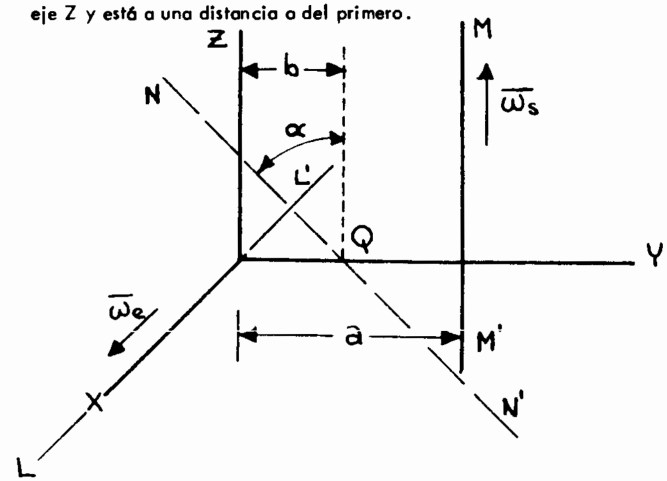


Fig. 5.3.1 Acoplamiento de ejes que se cruzan en el espacio

Sean $\overline{w}_e$ y $\overline{w}_s$ los vectores que representan la velocidad angular a la entrada y a la salida, respectivamente, y supóngase que se desea una reducción m dada por

$$m = \frac{\|\bar{\omega}_s\|}{\|\bar{\omega}_e\|}$$

El problema consiste en determinar la recta N N' que, al girar alrededor de cada eje, genera las superficies de revolución de los engranes hiperbólicos que se desea diseñar. El criterio que se utiliza para determinar la línea NN' es el de minimizar la magnit de la velocidad relativa entre los puntos de una flecha y de la otra, que establecen el contacto de las dos superficies de paso. Dentro de la teoría de la cinemática tridimensional de los cuerpos rígidos se establece [5.6], [5.7] que el lugar geométrico de esos puntos de mínima magnitud de velocidad relativa es una recta que interseca a la normal común a los dos ejes dados y es perpendicular a esa normal.

De la configuración mostrada en la Fig. 5.3.1, la normal común a los ejes LL' y MM' es el eje Y, y la recta buscada, NN', es perpendicular a Y y la interseca en el punto Q, situado a una distancia b del eje LL'. La recta NN' queda completamente determinada especificando el ángulo α que forma con el eje Z, además de la distancia b.

Sea $\mathbf{v}_e$ la velocidad del punto Q que pertenece a LL' y $\mathbf{v}_s$ la del mismo punto que pertenece a la flecha MM'. Así, definiendo

$$\bar{\omega}_e = \omega_e \bar{e}_x \, , \qquad (5.3.1a)$$

$$\bar{\omega}_s = \omega_s \bar{e}_z \, , \qquad (5.3.1b)$$

se tiene

$$\bar{v}_e = \omega_e e_x \times b \bar{e}_y = b\omega_e \bar{e}_z \, , \qquad (5.3.2)$$

y

$$\bar{v}_s = \omega_s \bar{e}_z \times \left[-(a-b)\bar{e}_y\right] = (a-b)\,\omega_s \bar{e}_x \qquad (5.3.3)$$

La velocidad relativa de ambos puntos tiene la magnitud

$$\| \bar{v}_{s/e} \| = \| (a-b)\omega_s \bar{e}_x - b\,\omega_e \bar{e}_z \| \, , \qquad (5.3.4)$$

por lo que

$$\| \bar{v}_{s/e} \|^2 = (a-b)^2 \omega_s^2 + b^2 \omega_e^2 \; ; \qquad (5.3.5)$$

pero, puesto que la reducción es m, se tiene

$$\omega_s = m\,\omega_e \, , \qquad (5.3.6)$$

transformándose así la expresión (5.3.5) en

$$\| \bar{v}_{s/e} \|^2 = \left[m^2 (a-b)^2 + b^2 \right] \omega_e^2 \, . \qquad (5.3.7)$$

Nótese que el coeficiente de $\| \bar{v}_{s/e} \|^2$ es función de b, solamente, puesto que m y a son parámetros del mecanismo. Llamando f (b) a ese coeficiente, la magnitud $\| \bar{v}_{s/e} \|^2$ alcanza un valor extremo (máximo o mínimo) cuando f' (b) se anula. Pero

$$f'(b) = -2\,m^2\,(a-b) + 2\,b,$$

por lo que f (b) tiene un extremo para

$$b = \frac{m^2 a}{m^2+1} \qquad (5.3.8)$$

Que f (b) alcanza un valor mínimo para este valor particular de b se hace evidente calculando f'' (b) y notando que es positiva para todo valor de b.

Finalmente, de la Fig. 5.3.1 es evidente que

$$\tan \alpha = \frac{\omega_s}{\omega_e} = m, \qquad (5.3.9)$$

quedando así la recta N N' totalmente determinada.

En la fig. 5.3.2 se muestra un acoplamiento de engranes hiperbólicos.

Acoplamiento corona-sinfín. Está formado por una corona dentada que transmite potencia a baja velocidad y que envuelve a un sinfín, que transmite po

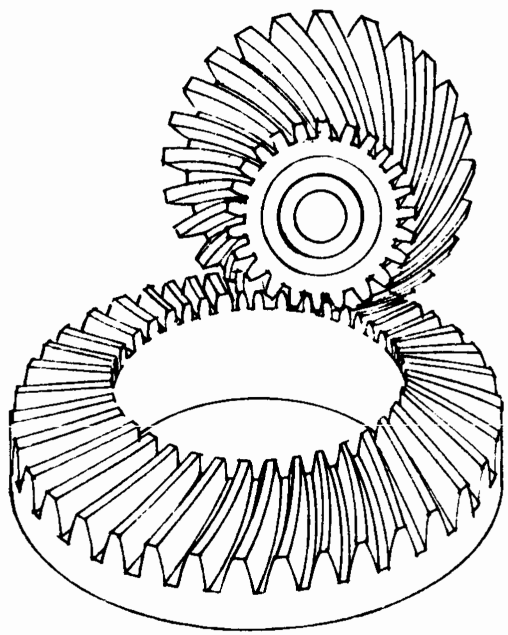


Fig. 5.3.2 Acoplamiento de engranes hiperbólicos.

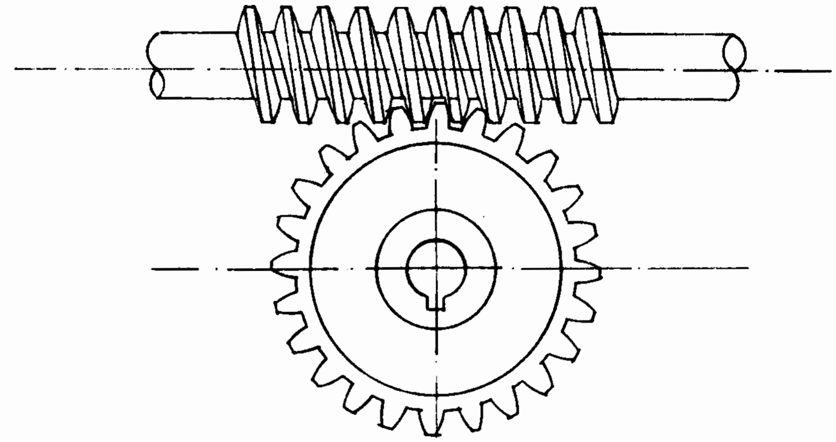


Fig. 5.3.3 Acoplamiento corona-sinfín simple envolvente

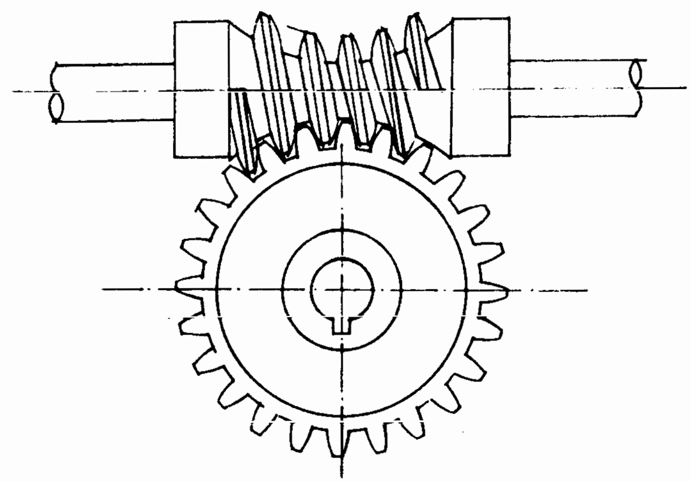


Fig. 5.3.4 Acoplamiento corona-sinfín doble envolvente

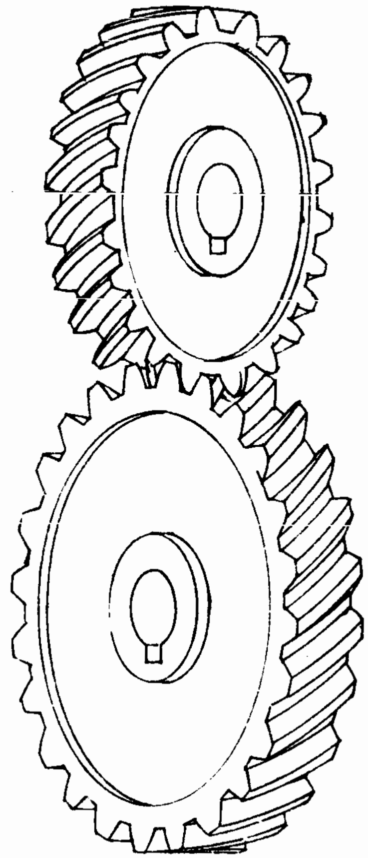


Fig. 5.3.5 Engranes helicoidales cruzados

tencia o alta velocidad. El sinfín tiene una o varias cuerdas de tornillo maquinadas en su superficie.

Este acoplamiento se utiliza cuando se requiere una reducción alta (del orden de 1/10) y se tienen también cargas muy altas. Debido al deslizamiento relativo de las superficies de paso, sin embargo, la eficiencia de acoplamiento es baja (de 50% a 92 %) y genera cantidades considerables de calor que requieren un diseño de la carcaza adecuada para radiarlo.

~~En la Fig. 5.3.3 se muestra esquemáticamente un acoplamiento corona-~~ sinfín " simple envolvente " y en la Fig. 5.3.4 se muestra uno "doble envolvente". En esas figuras aparece la terminología propia de este acoplamiento.

Si el sinfín tiene n_s cuerdas de tornillo y la corona n_c dientes, por cada vuelta del sinfín se hacen girar n_s de los n_c dientes de la corona, esto es,

$$\theta_c = \frac{n_s}{n_c}\,\theta_s$$

o bien

$$\omega_c = \frac{n_s}{n_c}\,\omega_s$$

de donde

$$\frac{\omega_c}{\omega_s} = \frac{n_s}{n_c} \qquad (5.3.10)$$

Engranes helicoidales cruzados. Se muestran en la Fig. 5.3.5 y se utilizan para acoplar flechas que no son paralelas ni se intersecan. Tienen la ventaja de que, para su montaje, no se requiere gran precisión, ya que la acción conjugada de los engranes no se afecta sensiblemente por cambios ligeros en la distancia entre-ejes.

Otros tipos de acoplamientos : Los acoplamientos de engranes Planoid*, Spiroid*

---

* Marcas registradas por Illinois Tool Works, Chicago, Ill.

y Helicon* se muestran en las Figs. 5.3.6, 5.3.7 y 5.3.8. Los Planoid se llaman así porque las superficies de los dientes son planas. Son muy fáciles de manufacturar en cualquier tipo de fresadora.

Los Spiroid son semejantes a los acoplamientos corona-sinfín, excepto que en este caso el sinfín está generado sobre una superficie de paso cónica y la corona tiene dientes espirales.

Los Helicon son semejantes a los Spiroid, excepto que no tienen la conicidad de estos. Por esta razón son más fáciles de manufacturar.

*Marca Registrada por Illinois Tool Works, Chicago, Ill.

REFERENCIAS

5.1 A. Cowie, Kinematics and Design of Mechanisms, International Textbook Co., Scranton, Pa., 1961, pp. 182-183.

5.2 L. Brand, Advanced Calculus, John Wiley & Sons, Inc., N. York, 1955, pp. 215-226.

5.3 M. L. James, G. M. Smith y J. C. Wolford, Applied Numerical Methods for Digital Computation, International Textbook Co., Scranton, Pa., 1967, pp. 139-153.

5.4 D. W. Dudley (editor), Gear Handbook, Mc. Graw-Hill Book Co., N. York, 1962.

5.5 J. Angeles, "Diseño y Manufactura de un Diferencial para la Industria Automotriz", Tesis Profesional. Facultad de Ingeniería, UNAM, 1969.

5.6 J.S.Beggs,Advanced Mechanism, The Macmillan Company, N. York, 1966, pp. 60-66.

5.7 J. Angeles, Matrix Methods in Applied Kinematics, División de Estudios Superiores de la Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México, 1977.

6 TRENES DE ENGRANES

INTRODUCCION. En el Cap. V se estudiaron los diferentes tipos de engranes empleados en los sistemas mecánicos, como elementos aislados. En este capítulo se estudian estos elementos como integrantes de esos sistemas, con cuyos otros -- elementos interactúan produciendo una acción determinada.

Los trenes de engranes contienen todo tipo de engranes como elementos integrantes de ellos. Se clasifican en : trenes simples y trenes planetarios. - Los primeros tienen un grado de libertad simple (= 1) y los segundos generalmente tienen un grado de libertad doble. Ambos tipos se estudian en este capítulo.

6.1 **TRENES SIMPLES DE ENGRANES.** Tratándose de engranes cilíndricos o cónicos, la reducción m, es sencillamente el cociente del número de dientes del ~~piñón sobre el de la corona. Efectivamente, considérese el acoplamiento corona-~~ piñón de la Fig. 6.1.1 .

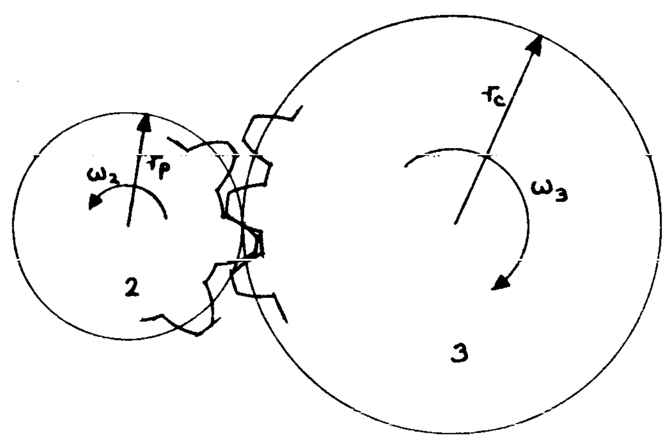


Fig. 6.1.1 Tren simple de engranes

En esa figura, sean r_p el radio del círculo de paso del piñón y r_c el de la corona. Sean N_p y N_c el número de dientes del piñón y de la corona, respectivamente.

Ya que ambos círculos de paso ruedan, uno con respecto al otro, sin deslizar, la velocidad del punto de tangencia (punto de paso) P en 2 es igual a la -- del punto P en 3 ; pero

$$v_{P2} = \omega_2 r_p \qquad (6.1.1)$$

$$v_{P3} = \omega_3 r_c \qquad (6.1.2)$$

Así,

$$\omega_2 r_p = \omega_3 r_c$$

de donde

$$m = \frac{\omega_3}{\omega_2} = \frac{r_p}{r_c} \qquad (6.1.3)$$

pero, por definición de paso diametral (Cap. V), se tiene

$$P_d = \frac{N_p}{2r_p} = \frac{N_c}{2r_c} \qquad (6.1.4)$$

De ahí que

$$\frac{r_p}{r_c} = \frac{N_p}{N_c} \qquad (6.1.5)$$

Sustituyendo (6.1.5) en (6.1.3), se tiene

$$m = \frac{N_p}{N_c} \qquad (6.1.6)$$

como se deseaba demostrar. Se tienen en seguida los siguientes resultados útiles :

R. 1 * . La reducción total de una serie de n engranes en que el i º es accionado por el (i - 1) º, y, a su vez, acciona al (i + 1) º, es igual a la reducción --- del acoplamiento del primero con el último, como si los intermedios no estuvieran presentes (Fig. 6.1.2).

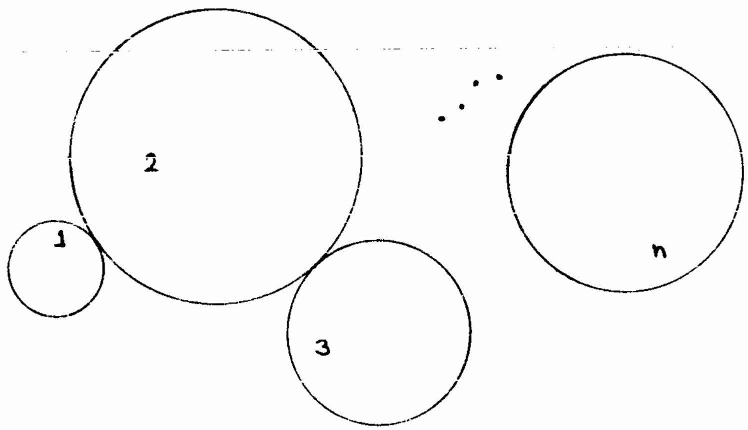


Fig. 6.1.2 Acoplamiento de n engranes en un tren simple

Ejercicio 6.1.1. Demuestre el resultado R. 1

R.2. Si en el tren de engranes anterior se acoplan rígidamente 2 engranes a una misma flecha, como se muestra en la Fig. 6.1.3, la reducción total es igual al -- producto de los números de dientes de los engranes conductores sobre el producto - de los números de dientes de los engranes conducidos, esto es, para el tren de la - Fig. 6.1.3

---

* Se restringe i a ser : $1 < i < n$

$$m = \frac{\omega_6}{\omega_1} = \frac{N_1 \times N_3 \times N_5}{N_2 \times N_4 \times N_6}$$

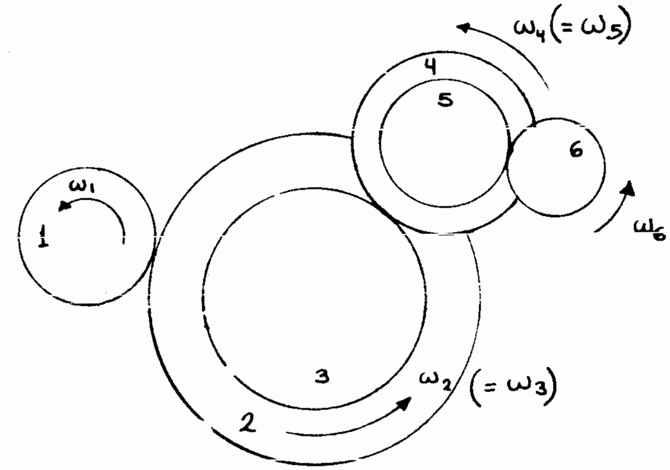


Fig. 6.1.3 Tren simple de engranes, con dos engranes de diferente paso diametral compartiendo el mismo eje

Ejercicio 6.1.2 Demuestre el resultado R. 2.

Observación : En los resultados anteriores las relaciones son las mismas aun si intervienen engranes cónicos. Sin embargo, para otros tipos de engranes (hi--- perbólicos, corona-sinfín, espiroides, planoides) las relaciones en cuestión son diferentes, como se puede concluir del Cap. V.

6.2 TRENES PLANETARIOS DE ENGRANES. Estos trenes están compuestos esen - cialmente por un engrane "planeta" 2, un brazo 3, un engrane "satélite" 4 y una co rona 5, como se muestra en las Figs. 6.2.1 (a) y (b).

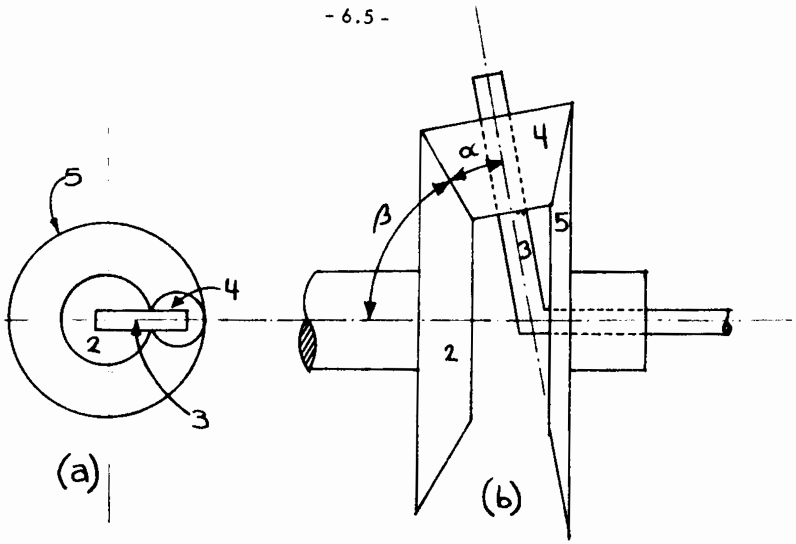


Fig. 6.2.1 Trenes planetarios

Un tren de engranes como los de la Fig. 6.2.1 tiene un grado de libertad doble, como se puede demostrar haciendo su análisis cinemático.

En efecto, considérese el tren de la Fig. 6.2.1 (a), que se repite en la Fig. 6.2.2.

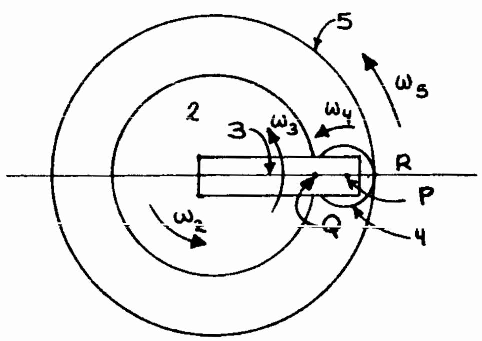


Fig. 6.2.2 Tren planetario de engranes cilíndricos

En esa figura, ya que todos los círculos de paso ruedan sin deslizar, los puntos Q en 2 (Q2) y Q en 4 (Q4) tienen la misma velocidad ; pero

$$v_{Q2} = \omega_2 r_2, \qquad (6.2.1)$$

$$v_{Q4} = v_p + v_{Q4/p} \qquad (6.2.2)$$

siendo

$$v_p = \omega_3 (r_2 + r_4) \qquad (6.2.3)$$

y

$$v_{Q4/p} = -\omega_4 r_4 \qquad (6.2.4)^*$$

Así, de las ecs. (6.2.1) a (6.2.4), se tiene, haciendo $v_{Q2} = v_{Q4}$,

$$\omega_2 r_2 - \omega_3 (r_2 + r_4) + \omega_4 r_4 = 0 \qquad (6.2.5)$$

Asimismo, la velocidad del punto R4 es igual a la del punto R5; pero

$$v_{R4} = v_p + v_{R4/p}, \qquad (6.2.6)$$

siendo

$$v_{R4/p} = \omega_4 r_4 \qquad (6.2.7)$$

y

$$v_{R5} = \omega_5 (r_2 + 2r_4). \qquad (6.2.8)$$

De las ec. (6.2.3), (6.2.6), (6.2.7) y (6.2.8) se tiene, haciendo

$$V_{R4} = V_{R5}$$

$$\omega_5 (r_2 + 2r_4) - \omega_3 (r_2 + r_4) - \omega_4 r_4 = 0 \qquad (6.2.9)$$

---

* Todas las velocidades involucradas son paralelas, y solo difieren en magnitud y sentido, por lo que pueden manejarse como escalares.

El sistema (6.2.5), (6.2.9) constituye las ecuaciones de restricción del movimiento del mecanismo en consideración, pues ya no es posible obtener otra relación entre las variables ω_2, ω_3, ω_4 y ω_5 que sea independiente de ellas.

Nótese que este sistema de ecuaciones (6.2.5) y (6.2.9) es algebraico y lineal en el conjunto $\{\omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}$. Puesto que contiene solo 2 ecuaciones para las cuatro variables en consideración, se puede satisfacer asignando a dos de las variables valores arbitrarios, lo cual evidencia que el mecanismo tiene un grado de libertad doble.

NOTA: La fórmula de Grübler, habiéndose deducido para mecanismos con pares inferiores únicamente, no se puede aplicar en este caso.

Ejercicio 6.2.1*. Obtenga las ecuaciones de restricción del mecanismo de la Fig. 6.2.1(b) que se muestran en seguida:

$$2\omega_2 r_2 - \omega_3 (r_2 + r_5) - 2\omega_4 r_4 = 0 \qquad (6.2.10)$$

$$2\omega_5 r_5 + 2\omega_4 r_4 - \omega_3 (r_2 + r_5) = 0 \qquad (6.2.11)$$

En el análisis de los trenes planetarios no se procede como se ha expuesto en esta sección, estableciendo en cada caso el sistema de ecuaciones de restricción, pues sería muy dilatado hacerlo, y además es innecesario, como se muestra a continuación. Existen dos métodos comúnmente empleados en el análisis de trenes planetarios: i) el método por tabulación y ii) el método por fórmula. Ambos se discuten en las siguientes secciones.

---

* ω_4 es la velocidad angular de 4 alrededor de su eje de simetría.

6.3 METODO DE ANALISIS POR TABULACION. Este se basa en algunas propiedades de los sistemas algebraicos lineales como (6.2.5) y (6.2.9) o (6.2.10) y (6.2.11), a saber. Un sistema lineal algebraico de dimensión n tiene la forma general.

$$A\,x = b \qquad (6.3.1)$$

donde A es una matriz de m x n, x es un vector de dimensión n y b es un vector de dimensión m. En general, m es diferente de n y, aunque siempre es posible determinar una solución x_e al sistema (6.3.1) [6.1], esta discusión se limitará al caso en el que m = n. Es bien sabido [6.2] que (6.3.1) tiene una solución única si b no es el vector nulo (esto es, si el sistema es no homogéneo) y A es invertible (esto es, si det $A \neq 0$)*. En este caso, la solución única x_u está dada por

$$x_u = A^{-1}\,b. \qquad (6.3.2)$$

Ahora bien, supóngase que $b = b_1 + b_2$ y que x_1, x_2 son las soluciones únicas de (6.3.1) para b_1 y b_2, respectivamente. Entonces, $x = x_1 + x_2$ es la solución única para $b = b_1 + b_2$.

En efecto, se tiene

$$A\,x_1 = b_1 \qquad (6.3.3\ a)$$

$$A\,x_2 = b_2 \qquad (6.3.3\ b)$$

Sumando (6.3.3 a) y (6.3.3 b) miembro a miembro,

$$Ax_1 + Ax_2 = b_1 + b_2; \qquad (6.3.4)$$

pero debido a las propiedades de las matrices [6.3],

---

* En este caso, desde luego, m = n

$$Ax_1 + Ax_2 = A\,(x_1 + x_2), \tag{6.3.5}$$

por lo que (6.3.4) se transforma en

$$A\,x = b,$$

que es lo que se quería demostrar. Esta idea tan sencilla (llamada propiedad de superposición), que es característica de los sistemas lineales, es la que se encuentra detrás del método de tabulación, como se observa en seguida. Se ilustra con un ejemplo.

Ejemplo 6.3.1. En la Fig. 6.2.1 (a) supóngase que el planeta 2 está acoplado directamente a un motor, que la corona 5 se mantiene fija (al marco del observador) y que el brazo 3 se conecta a una carga. Obtener la velocidad ω_3 en términos de ω_2.

Solución : En el sistema (6.2.5), (6.2.9), $\omega_5 = 0$ en este ejemplo, y ω_2 se supone conocida. Se pueden sustituir estos valores en el sistema mencionado para obtener la solución

$$\omega_3 = \frac{r_2}{2\,(r_2 + r_4)}\,\omega_2 \tag{6.3.6}$$

$$\omega_4 = -\frac{r_2}{2\,r_4}\,\omega_2 \tag{6.3.7}$$

Ejercicio 6.3.1 Obtenga la solución (6.3.6), 6.3.7)

Sin embargo, obtener la solución anterior para cada mecanismos no es práctico, por lo que se presenta ahora una forma rápida de obtenerla, aplicando la propiedad de superposición :

i) Háganse

$$\omega'_2 = \omega'_3, \tag{6.3.8}$$

en el sistema en cuestión. En estas condiciones, la solución es

$$\omega'_4 = \omega'_5 = \omega'_3 = \omega'_2 \tag{6.3.9}$$

Ejercicio 6.3.2 Obtenga la solución (6.3.9) con $\omega'_2 = \omega'_3$

ii) Ahora obténgase otra solución con valores diferentes de ω_2 y ω_5. Llámese ω''_2 y ω''_5 a estos nuevos valores, de manera que la solución buscada se obtenga como la suma de las dos anteriores, esto es ,

$$\omega_i = \omega'_i + \omega''_i \;,\; 2 \leq i \leq 5 \tag{6.3.9}$$

En estas condiciones, conviene hacer

$$\omega''_5 = -\omega'_5 = -\omega'_2 \tag{6.3.10}$$

pues en el problema original la corona 5 está fija. Además, como se está en posibilidad de asignar arbitrariamente una velocidad más, escójase una que haga el análisis muy simple. Por inspección se observa, de la Fig. 6.2.2, que si $\omega''_3 = 0$, esto es, si el brazo 3 está fijo, el tren de engranes en cuestión es un tren simple, cuyo análisis se reduce a la aplicación de los resultados R.1 y R.2.

Procediendo de esta forma se obtiene, al resolver las ecs. (6.2.5) y (6.2.9), los siguientes resultados :

$$\omega''_2 = \frac{r_2 + 2\,r_4}{r_2}\,\omega'_2 \qquad (6.3.11)$$

$$\omega''_4 = -\frac{r_2 + 2\,r_4}{r_4}\,\omega'_2 \qquad (6.3.12)$$

de donde,

$$\omega_2 = \omega'_2 + \omega''_2 = \left(1 + \frac{r_2 + 2\,r_4}{r_2}\right)\omega'_2$$

$$= \frac{2\,(r_2 + r_4)}{r_2}\,\omega'_2 \qquad (6.3.13)$$

y así,

$$\omega'_2 = \frac{r_2}{2\,(r_2 + r_4)}\,\omega_2 \qquad (6.3.14)$$

Igualmente,

$$\omega_4 = \omega'_4 + \omega''_4 = \left(1 - \frac{r_2 + 2\,r_4}{r_4}\right)\omega'_2 =$$

$$= -\frac{r_2 + r_4}{r_4}\,\omega'_2$$

y, de (6.3.14),

$$\omega_4 = -\frac{r_2}{2\,r_4}\,\omega_2 \qquad (6.3.15)$$

Finalmente,

$$\omega_3 = \omega'_3 + \omega''_3 = \omega'_2 + 0 = \frac{r_2}{2\,(r_2 + r_4)}\,\omega_2\,, \qquad (6.3.16)$$

que es la misma solución (6.3.6), (6.3.7) obtenida directamente.

Del ejemplo anterior se observa que el análisis se puede desarrollar en dos pasos : en el primero se considera que todos los elementos están acoplados rígidamente, o sea, que todos tienen la misma velocidad angular. En el segundo paso -- se fija el brazo 3, o sea, se hace $\omega_3 = 0$, obteniéndose un tren simple, cuyo análisis es muy sencillo. Finalmente, la solución del problema original es --- igual a la suma (algebraica, desde luego) de los resultados obtenidos en cada paso. Este algoritmo se puede realizar en forma tabular como sigue :

TABLA 6.3.1

elemento Nº / Paso	2	3	4	5
I	$*\,\omega'_2$	$*\,\omega'_2$	ω'_2	ω'_2
II	$m_1 m_2\,\omega'_2$	$*\,0$	$-m_1\,\omega'_2$	$-*\,\omega'_2$
Resultado final	$(1+m_1 m_2)\,\omega'_2$	ω'_2	$(1-m_1)\,\omega'_2$	0

En esa tabla, m_1 es la relación de velocidad del tren simple formado por los engranes 4 y 5, el 5 como entrada y el 4 como salida, ésto es, de (6.1.3),

$$m_1 = \frac{r_5}{r_4} = \frac{r_2 + 2\,r_4}{r_4} \qquad (6.3.17)$$

y m_2 es la relación de velocidad del tren simple formado por los engranes 2 y 4, donde el 4 es entrada y el 2 es salida. Así,

$$m_2 = \frac{r_4}{r_2} \qquad (6.3.18)$$

por lo que

$$m_1 m_2 = \frac{r_2 + 2\,r_4}{r_2} \qquad (6.3.19)$$

Entonces,

$$\omega_2 = (1 + m_1 m_2)\ \omega'_2 =$$

$$= (1+\frac{r_2 + 2r_4}{r_2})\ \omega'_2 = \qquad (6.3.20)$$

por lo que

$$\omega_3 = \omega'_2 = \frac{r_2}{2(r_2 + r_4)}\ \omega_2, \qquad (6.3.21)$$

que es nuevamente idéntica a la solución (6.3.6). Asimismo,

$$\omega_4 = \omega'_4 + \omega''_4 = (1 - m_1)\ \omega'_2 =$$

$$= (1 + \frac{r_2 + 2\ r_4}{r_2})\ \omega'_2$$

$$= -\frac{r_2 + r_4}{r_4}\ \frac{r_2}{2\ (r_2 + r_4)}\ \omega_2$$

$$= -\frac{r_2}{2\ r_4}\ \omega_2, \qquad (6.3.22)$$

que coincide con la solución (6.3.7)

En conclusión, el método de tabulación permite analizar trenes planetarios de engranes mediante el análisis de trenes simples.

6.4. METODO DE ANALISIS POR MEDIO DE FORMULA. Este método se basa en el siguiente resultado: Dado el tren planetario de la Fig 6.2.1 (a), para ω_2 = entrada (conocida) y $\omega_5=0$, el valor de ω_3 está dado por la ec. (6.3.6). Así, entonces, el cociente de las velocidades relativas $\omega_{5/3}$ y $\omega_{2/3}$, en estas condiciones

es, después de sustituir los valores correspondientes de ω_3 y ω_5,

$$\left.\frac{\omega_{5/3}}{\omega_{2/3}}\right|_{\omega_5=0} = -\frac{r_2}{r_2+2r_4} \qquad (6.4.1)$$

Por otro lado, el cociente de las mismas velocidades relativas, cuando ω_2 sigue siendo una entrada conocida, $\omega_3 = 0$ (se tiene, entonces, un tren simple, cuyo análisis se expuso en la Sec. - 6.1); pero $\omega_5 \neq 0$, está dado por

$$\left.\frac{\omega_{5/3}}{\omega_{2/3}}\right|_{\omega_3=0} = -\frac{r_2}{r_5} = -\frac{r_2}{r_2+2r_4} \qquad (6.4.2)$$

donde se ha introducido el signo negativo debido a que, en estas condicones, los engranes 2 y 5 giran en sentidos opuestos. En conclusión, entonces, se tiene

$$\left.\frac{\omega_{5/3}}{\omega_{2/3}}\right|_{\omega_5=0} = \left.\frac{\omega_{5/3}}{\omega_{2/3}}\right|_{\omega_3=0} \qquad (6.4.3)$$

que es la relación que constituye la base de este método. Se deja al lector como ejercicio comprobar que análogamente, se - tiene para el mismo tren (Fig. 6.2.1 (a)),

$$\left.\frac{\omega_{4/3}}{\omega_{2/3}}\right|_{\omega_4=0} = \left.\frac{\omega_{4/3}}{\omega_{2/3}}\right|_{\omega_3=0} \qquad (6.4.4)$$

Ejercicio 6.4.1. Demuestre que, para el tren de la Fig. 6.2.1 (b), se satisfacen también las relaciones (6.4.3) y (6.4.4)
La utilidad de las fórmulas anteriores, (6.4.3) y (6.4.4), es-

triba en que no es necesario resolver el sistema de ecuaciones (6.2.5) y (6.2.9) (caso de engranes cilíndricos) o el de ecuaciones (6.2.10) y (6.2.11) (caso de engranes cónicos) para obtener la relación de velocidades de un tren planetario, pues el miembro derecho de esas fórmulas permite evaluar el izquierdo mediante los métodos de análisis de trenes simples. Además, las fórmulas (6.4.3) y (6.4.4) se pueden resumir en una sola: Sea ω_s la velocidad a la salida (deseada), ω_e la velocidad a la entrada (conocida), ω_b, la velocidad del brazo portasatélite y ω_f la velocidad del engrane que se mantiene fijo (nótese que este valor es nulo solo en el miembro izquierdo de esas fórmulas; no así en el derecho). Entonces, de (6.4.3) y (6.4.4), se tiene que

$$\left.\frac{\omega_{f/b}}{\omega_{e/b}}\right|_{\omega_f=0} = \left.\frac{\omega_{f/b}}{\omega_{e/b}}\right|_{\omega_b=0} \qquad (6.4.5)$$

que es la fórmula que se utiliza en este método. ω_s puede ser ω_b, caso en el cual se obtiene directamente de (6.4.5); pero si ω_s no es ninguna de las velocidades involucradas en esa fórmula, es necesario aplicarla una vez más.

Ejemplo 6.4.1. En el tren de engranes de la Fig. 6.2.1 (b), se tiene

$$N_2=20, \; N_4=14, \; N_5=30 \qquad (6.4.6)$$

Si el piñón 2 está acoplado directamente al eje motor de una máquina y el brazo 3 a la carga, determine la reducción del tren cuando la corona 5 se mantiene fija.

Solución: En este caso,

$$f = 5, \; b=s=3, \; e=2$$

Así, la aplicación de la fórmula (6.4.5) da

$$\left.\frac{\omega_{5/3}}{\omega_{2/3}}\right|_{\omega_5=0} = \left.\frac{\omega_{5/3}}{\omega_{2/3}}\right|_{\omega_3=0} \qquad (6.4.7)$$

Pero, por un lado

$$\left.\frac{\omega_{5/3}}{\omega_{2/3}}\right|_{\omega_5=0} = \frac{0-\omega_3}{\omega_2-\omega_3} \qquad (6.4.8)$$

Por otro lado,

$$\left.\frac{\omega_{5/3}}{\omega_{2/3}}\right|_{\omega_3=0} = -\frac{N_2}{N_5} \qquad (6.4.9)$$

donde el signo menos indica que las velocidades ω_5 y ω_2, en este caso (brazo fijo), tienen sentidos opuestos. Sustituyendo (6.4.6), (6.4.8) y (6.4.9) en (6.4.7) se tiene

$$\frac{\omega_3}{\omega_2-\omega_3} = \frac{20}{30}$$

de donde

$$m = \frac{\omega_3}{\omega_2} = \frac{1}{2.5}$$

6.5 TRENES DIFERENCIALES. Los trenes planetarios, como se ha visto, poseen un grado de libertad doble; pero tienen un montaje que les impone una restricción, operando así como mecanismos con grado de libertad simple. Sin embargo, existen aplica ciones de estos trenes en las que no se impone sobre ellos restric ción alguna, y sí se aprovecha su propiedad de tener un grado de libertad doble. En estas aplicaciones, dichos trenes se utilizan como mecanismos de computación y específicamente realizan una ope ración binaria (lo cual es posible por su grado de libertad), la de sustracción de dos variables, o sea, este tipo de mecanismos ejecuta la diferencia algebraica entre dos variables independientes (sus dos entradas). De aquí el nombre de estos trenes, que encuentran aplicaciones en la ingeniería automovilística, como elementos del eje motor de diversas clases de vehículos; asimismo, se utiliza en servomecanismos, para proporcionar el error entre una posición deseada y la posición verdadera de algún elemento.

Un tren diferencial (Fig. 6.5.1) está formado básicamente por un engrane portasatélites (3), que hace las veces del brazo de los mecanismos de las Figs. 6.1.1(a) y (b), un planeta (2) y una corona (5), que generalmente es un engrane idéntico al planeta. Finalmente, los satélites 4 son idénticos, por razones dinámicas.

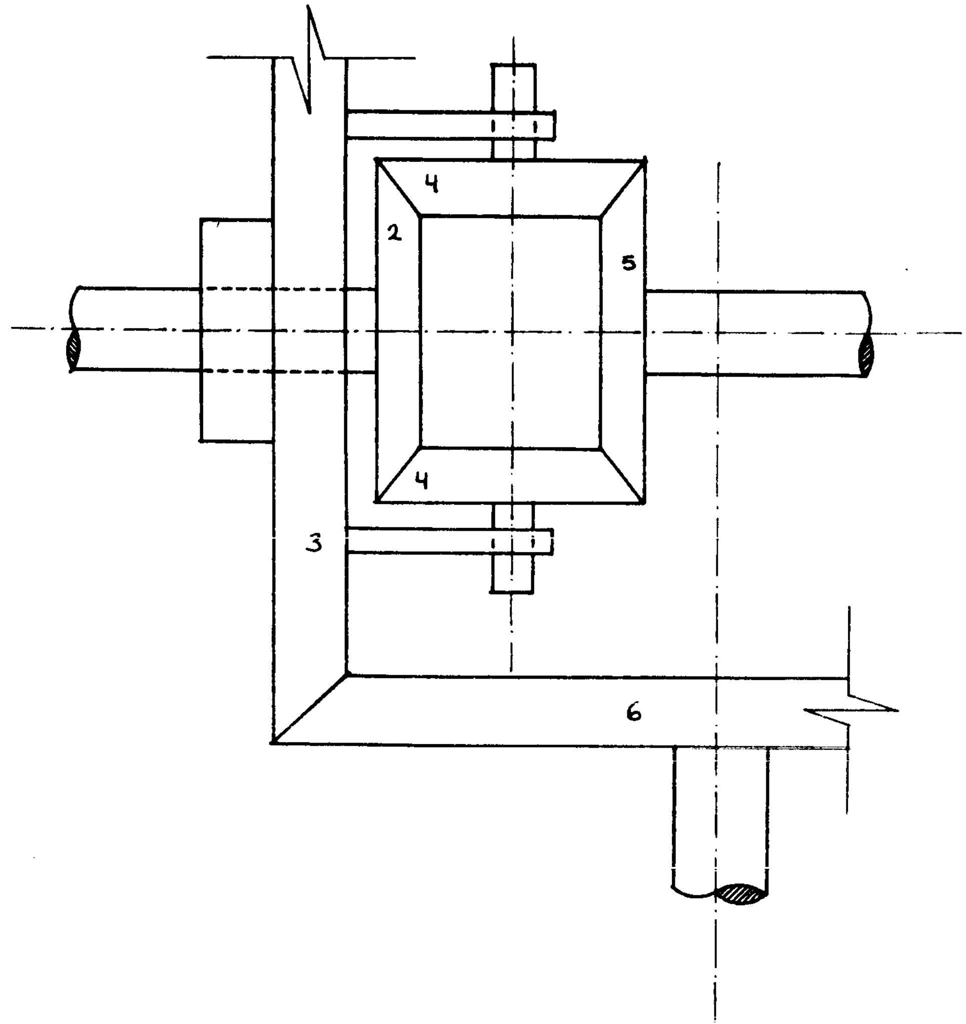


Fig. 6.5.1 Tren de engranes diferencial

En un vehículo automotor, el acoplamiento entre los engranes 3 y 6 es del tipo hiperbólico, porque, debido a razones de funcionalidad y de estabilidad, se requiere que la flecha de cardán, acoplada al piñón 6 por medio de una junta universal*, esté alojada a un nivel inferior al del eje motor. Los planetas 2 y 5 están rígidamente acoplados a las dos secciones del eje motor y, puesto que ambos tienen giros independientes, este mecanismo permite una trasmisión de potencia continuamente, aun cuando el vehículo tome una curva, caso en el que las dos secciones giran a velocidades diferentes.

El análisis del tren de la Fig. 6.5.1 es, obviamente, semejante al que corresponde al mecanismo de la Fig. 6.1.1 (b), por lo que sus ecuaciones de restricción son las ecs. (6.2.10) y (6.2.11) con $r_5 = r_2$, o sea

$$\omega_2 r_2 - \omega_3 r_2 - \omega_4 r_4 = 0, \qquad (6.5.1)$$

$$\omega_5 r_2 - \omega_3 r_2 + \omega_4 r_4 = 0 \qquad (6.5.2)$$

Eliminando ω_3 entre las ecuaciones anteriores, se obtiene

$$(\omega_2 - \omega_5)\, r_2 - 2\omega_4 r_4 = 0. \qquad (6.5.3)$$

De aquí que

$$\omega_4 = \frac{r_2}{2r_4}(\omega_2 - \omega_5), \qquad (6.5.4)$$

y así se observa que, cuando el vehículo viaja en línea recta (o sea, cuando $\omega_2 = \omega_5$), el satélite tiene una velocidad angular nula alrededor de su eje de simetría. En cambio, al tomar una curva, esa velocidad del satélite (ω_4) es proporcional a la diferencia de velocidades entre las dos secciones del eje motor.

* Este mecanismo es tridimensional, semejante a uno de 4 barras articuladas plano. Ver [6.4] y [6.5]

Ejercicio 6.5.1. En la Fig 6.5.2 se muestra el sistema de propulsión de un camión en el que D es el diferencial, situado a la mitad del eje trasero, T es la transmisión (caja de velocidades), U es una junta universal y C es la flecha de cardán. El diferencial y la transmisión se muestran en las Figs 6.5.3 y 6.5.4, respectivamente. Si el camión toma la curva a 60 Km/h en tercera (engranes 1-2-3-6 de la transmisión), determine la velocidad angular del cigüeñal (engrane 1 de la transmisión) en rpm. La distancia entre las dos flechas de la transmisión es 15 cm y todos los engranes tienen un módulo de 3 mm. Además, el engrane 1 tiene 25 dientes y el engrane 6, 28. Supóngase que la lectura del velocímetro es la velocidad del punto medio del eje trasero.

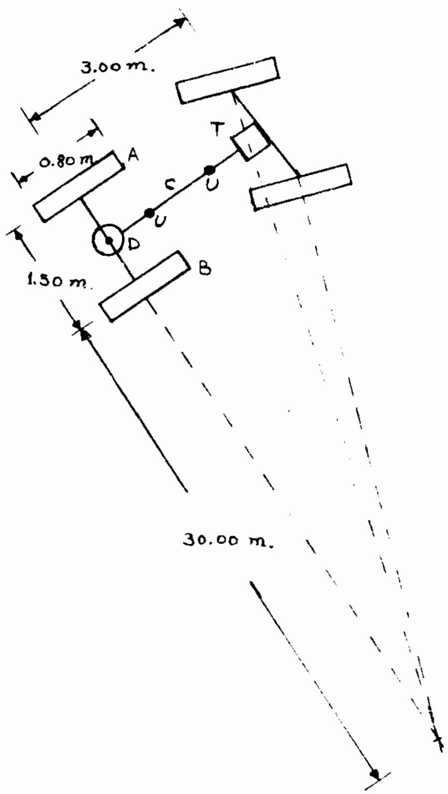


Fig 6.5.2. Sistema de propulsión de un camión

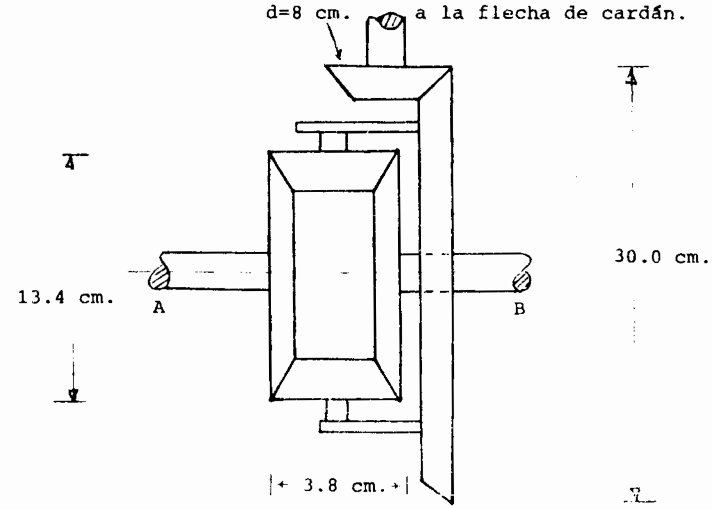


Fig. 6.5.3 Diferencial del camión de la Fig. 6.5.2

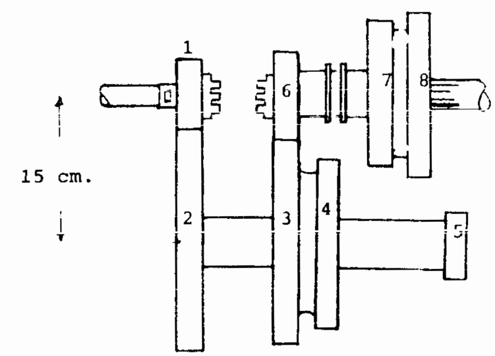


Fig. 6.5.4 Transmisión del camión de la Fig. 6.5.2

REFERENCIAS

6.1 B. Noble, Applied Linear Algebra, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1969, pp. 74-77.

6.2 B. Noble, Op. Cit., pp. 90-94

6.3 S. Lang, Linear Algebra, Addison-Wesley Publishing Company, Menlo Park, 1970, pp. 59-82

6.4 J. S. Beggs, Advanced Mechanism, The Macmillan Co., N. York, 1966.

6.5 J. Angeles, Matrix Methods in Applied Kinematics, División de Estudios Superiores de la Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México, 1977.

A P E N D I C E A

DISEÑO DE UN MECANISMO PLANO RRRR PARA CONDUCCION DE CUERPO RIGIDO, POR CINCO CONFIGURACIONES.

A .1. Planteamiento del problema. Se desea determinar las coordenadas de las cuatro articulaciones $A_O(x_A,y_A)$, $B(x_B,y_B)$ $A_O^*(x_A^*,y_A^*)$ y $B^*(x_B^*,y_B^*)$ de un mecanismo plano RRRR que conduzca a un cuerpo rígido por las cinco configuraciones especificadas a continuación, e ilustradas en la fig A .1.

$$r_0 = 10.0+i1.5, \theta_0 = -21° \quad \text{(A .1.1)}$$

$$r_1 = 6.2-i6.3, \theta_1 = -78° \quad \text{(A .1.2)}$$

$$r_2 = 3.6-i6.4, \theta_2 = 148° \quad \text{(A .1.3)}$$

$$r_3 = 2.0+i2.0, \theta_3 = -90° \quad \text{(A .1.4)}$$

$$r_4 = 5.0+i4.0, \theta_4 = 60° \quad \text{(A .1.5)}$$

A .2. Solución. Defínanse los siguientes números complejos

$$a_0 = x_A+iy_A \quad \text{(A .2.1)}$$

$$b = x_B+iy_B \quad \text{(A .2.2)}$$

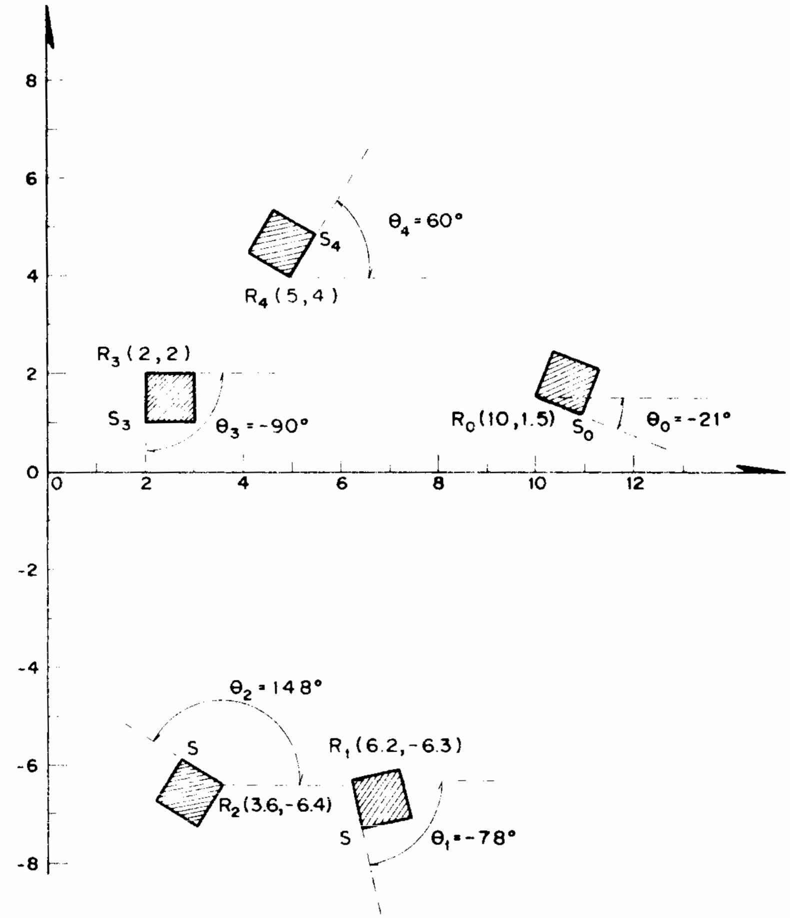


Fig. A.1 Configuraciones deseadas de un cuerpo rigido

$$a_0^* = x_A^* + iy_A^* \qquad (A\ .2.3)$$

$$b^* = x_B^* + iy_B^* \qquad (A\ .2.5)$$

$$r_j = x_j + iy_j,\ j = 1,2,3,4 \qquad (A\ .2.5)$$

y los ángulos

$$\theta_j' = \theta_j - \theta_0,\ j = 1,2,3,4 \qquad (A\ .2.6)$$

La ecuación de diseño es la 3.3.6a, que se reproduce a continuación:

$$||e^{i\theta_j'}(a_o - r_o) + r_j - b||^2 = ||a_o - b||^2 \qquad (A\ .2.7)$$

El miembro izquierdo de la ecuación anterior se evalúa enseguida:

$$||e^{i\theta_j'}(a_o - r_o) + r_j - b||^2 = ||e^{i\theta_j'}(a_o - r_o)||^2 + 2\mathrm{Re}\left[e^{i\theta_j'}(a_o - r_o)\,\overline{(r_j - b)}\right] + ||r_j - b||^2 \qquad (A\ .2.8)$$

donde $\overline{(r_j-b)}$ es el complejo conjugado de r_j-b. Evaluando cada término del miembro derecho de (A .2.8) se tiene

$$||e^{i\theta_j'}(a_o - r_o)||^2 = ||a_o - r_o||^2 = ||a_o||^2 - 2\mathrm{Re}\left[a_o\bar{r}_o\right] + ||r_o||^2$$

donde se ha empleado el Teorema 1.11.1 y el hecho de que una rotación no altera la magnitud de un complejo.

Desarrollando la última expresión,

$$||e^{i\theta_j'}(a_o - r_o)||^2 = x_A^2 + y_A^2 - 2\mathrm{Re}\left[(x_A + iy_A)(x_o - iy_o)\right] + x_o^2 + y_o^2 =$$

$$= x_A^2 + y_A^2 - 2(x_A x_o + y_A y_o) + x_o^2 + y_o^2 \qquad (A\ .2.9)$$

El segundo término del miembro derecho de la ec (A .2.8) tiene el siguiente desarrollo:

$$\mathrm{Re}\left[e^{i\theta_j'}(a_o - r_o)\,\overline{(r_j - b)}\right] = \mathrm{Re}\left[(\cos\theta_j' + i\,\mathrm{sen}\theta_j')(x_A + iy_A - x_o - iy_o)(x_j - iy_j - x_B + iy_B)\right]$$

$$= \mathrm{Re}\ \{(\cos\theta_j' + i\,\mathrm{sen}\theta_j')\left[(x_A x_j - x_A x_B - x_o x_j + x_o x_B + y_A y_j - y_A y_B - y_o y_j + y_o y_B)\right.$$

$$\left. + i(-x_A y_j + x_A y_B + y_A x_j - y_A x_B + x_o y_j - x_o y_B - y_o x_j + y_o x_B)\right]\} =$$

$$= \cos\theta_j'(x_A x_j - x_A x_B - x_o x_j + x_o x_B + y_A y_j - y_A y_B - y_o y_j + y_o y_B)$$

$$- \mathrm{sen}\theta_j'(-x_A y_j + x_A y_B + y_A x_j - y_A x_B + x_o y_j - x_o y_B - y_o x_j + y_o x_B) \qquad (A\ .2.10)$$

El desarrollo del último término del miembro derecho de (A .2.8) es

$$||r_j-b||^2 = ||r_j||^2-2\mathrm{Re}(r_j\bar{b})+||b||^2$$

donde

$$||r_j||^2 = x_j^2+y_j^2$$

$$\mathrm{Re}(r_j\bar{b}) = \mathrm{Re}\Big[(x_j+iy_j)(x_B-iy_B) \Big] = x_jx_B+y_jy_B$$

$$||b||^2 = x_B^2+y_B^2$$

Así,

$$||r_j-b||^2 = x_j+y_j^2-2(x_jx_B+y_jy_B)+x_B^2+y_B^2 \qquad \text{(A .2.11)}$$

El miembro derecho de la ec. (A .2.7) es, análogamente

$$||a_o-b||^2 = x_A^2+y_A^2-2(x_Ax_B+y_Ay_B)+x_B^2+y_B^2 \qquad \text{(A .2.12)}$$

Sustituyendo las expresiones (A .2.9) a (A .2.12) en la ec (A .2.7) se obtiene el conjunto de ecuaciones de diseño siguiente:

$$f_j = x_j^2 + y_j^2+x_o^2+y_o^2+2\Big[x_A(x_B-x_o)+y_A(y_B-y_o) - x_jx_B-y_jy_B \Big]$$

$$+2\ \mathrm{sen}\theta'_j\Big[(y_j-y_B)(x_A-x_o)-(x_j-x_B)(y_A-y_o) \Big]$$

$$+2\ \cos\theta'_j\Big[(x_j-x_B)(x_A-x_o)+(y_j-y_B)(y_A-y_o) \Big] = 0,\ j = 1,2,3,4. \qquad \text{(A .2.13)}$$

que da los valores de las cuatro componentes del vector evaluado por la subrutina FUN. Las derivadas parciales de esas cuatro componentes con respecto a las cuatro incógnitas son:

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_A} = 2\Big[x_B-x_o+(y_j-y_B)\mathrm{sen}\theta'_j+(x_j-x_B)\cos\theta'_j \Big] \qquad \text{(A .2.14)}$$

$$\frac{\partial f_j}{\partial y_A} = 2\Big[y_B-y_o-(x_j-x_B)\mathrm{sen}\theta'_j+(y_j-y_B)\cos\theta \Big] \qquad \text{(A .2.15)}$$

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_B} = 2\Big[x_A-x_j+(y_A-y_o)\mathrm{sen}\theta'_j-(x_A-x_o)\cos\theta'_j \Big] \qquad \text{(A .2.16)}$$

$$\frac{\partial f_j}{\partial y_B} = 2\Big[y_A-y_j-(x_A-x_o)\mathrm{sen}\theta'_j-(y_A-y_o)\cos\theta'_j \Big] \qquad \text{(A .2.17)}$$

que, para j = 1,2,3,4 proporciona los 16 valores de la matriz jacobiana $\partial \underline{f}/\partial \underline{x}$.

$$
\frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{x}} = \begin{bmatrix} \partial f_1/\partial x_A & \partial f_1/\partial x_B & \partial f_1/y_B & \partial f_1/\partial y_A \\ \partial f_2/\partial x_A & \partial f_2/\partial x_B & \partial f_2/\partial y_B & \partial f_2/\partial y_A \\ \partial f_3/\partial x_A & \partial f_3/\partial x_B & \partial f_3/\partial y_B & \partial f_3/\partial y_A \\ \partial f_4/\partial x_A & \partial f_4/\partial x_B & \partial f_4/\partial y_B & \partial f_4/\partial y_A \end{bmatrix} \qquad \text{(A .2.18)}
$$

que es la matriz evaluada por la subrutina DFDX.

A continuación se muestran los listados del programa principal y de las subrutinas NEWRAP, FUN, DFDX, DECOMP, SOLVE y ESCRIB, que integran toda la solucion. Se muestra, asimismo, el resultado de la computadora.

La fig A .9 muestra el mecanismo obtenido con la solución numérica aquí presentada.


```
    B6700/B7700   F O R T R A N   C O M P I L A T I O N   M A R K   2.6.000
C     ESTE PROGRAMA DISENA UN MECANISMO RRRR PLANO PARA CONDUCCION
C     DE CUERPO RIGIDO, POR EL METODO DE NEWTON-RAPHSON.
C     LAS SUBRUTINAS DECOMP Y SOLVE RESUELVEN EL SISTEMA ALGEBRAICO
C     LINEAL A * X = B, POR EL METODO DE TRIANGULARIZACION UTILIZANDO
C     ELIMINACION GAUSSIANA. DEFINICIONES
C     X(1)=XA, X(2)=XB, X(3)=YB, X(4)=YA Y X(5)=ERROR,
C     SIENDO (XA,YA) LAS COORDENADAS DE UN PUNTO CIRCULAR
C     Y (XB,YB) LAS COORDENADAS DE UN PUNTO CENTRAL.
C     SE UTILIZA LA SUBRUTINA RANDOM PARA GENERAR LOS VALORES INICIALES
C     DE LAS INCOGNITAS CON QUE SE INICIAN LAS ITERACIONES.
C     N ES EL NUMERO DE ECUACIONES.
C     TOL ES LA TOLERANCIA IMPUESTA EN LA APROXIMACION.
C     MAX  ES EL NUMERO MAXIMO DE ITERACIONES PERMITIDAS.
C     EL VECTOR P ESTA DEFINIDO EN FUN.
C     LOS ANGULOS SE LEEN EN GRADOS.
C     * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *

          EXTERNAL FUN,DFDX,ESCRIB
          REAL X(5),F(4),DF(4,4),DELTA(4),P(20)
          REAL XX(4),YY(4),THETA(4)
          READ(5,51) N,MAX,TOL

          WRITE(6,31) TOL,MAX,N

          READ(5,52) X0,Y0,(XX(I),I=1,N),(YY(I),I=1,N)
          READ(5,52) THETA0,(THETA(I),I=1,N)
          WRITE(6,53)
          WRITE(6,54) L,X0,Y0,THETA0,(I,XX(I),YY(I),THETA(I),I=1,N)
          RADIAN=180./(4.*ATAN(1.0))
          DO 1 I=1,N
    1     THETA(I)=THETA(I)/RADIAN
          THETA0=THETA0/RADIAN
          DO 2 J=1,N
          P(J+J-1)=SIN(THETA(J)-THETA0)
    2     P(J+J) = COS(THETA(J) - THETA0)
          P(9)=X0$ P(10)=Y0
          DO 3 J=1,N
          P(9+J+J)=XX(J)
    3     P(10+J+J) = YY(J)
          DO 5 K=1,5
          DO 4 I=1,N
    4     X(I)=(RANDOM(R)-0.5)*10.
          WRITE(6,32)
          WRITE(6,33) (X(I),I=1,N)
          CALL NEWRAP(X,FUN,DFDX,ESCRIB,P,TOL,ERROR,N,ITER,MAX)
    5     CONTINUE
   31 FORMAT(/, 3X,"ESTOS SON LOS PARAMETROS TOL, MAX, N EN ESTE ORDEN",
    *     //,E18.6,2I5///)
   32 FORMAT(//,3X,"ESTOS SON LOS VALORES INICIALES")
   33 FORMAT(/4E18.6/)
   51 FORMAT(2I5,2F10.4)
   52 FORMAT(8F10.4)
   53 FORMAT(//2X,"ESTAS SON LAS CONFIGURACIONES"//22X,"X",19X,"Y",17X,
    *"THETA",/)
   54 FORMAT(I9,3E20.6)
          CALL EXIT
      END
```

Fig. A .2 Listado del programa principal que resuelve el sistema de ecuaciones de diseño de un mecanismo RRRR.

```
      SUBROUTINE NEWRAP(X,FUN,DFDX,ESCRIB,P,TOL,ERROR,N,ITER,MAX)
C     ESTA SUBRUTINA CALCULA LAS RAICES DE UN SISTEMA ALGEBRAICO NO LINEAL
C     DE ORDEN N, POR EL METODO DE NEWTON-RAPHSON (ISAACSON E. Y KELLER H.
C     B., ANALYSIS OF NUMERICAL METHODS, JOHN WILEY AND SONS, INC., NEW
C     YORK, 1966, PP.85-123). LOS PARAMETROS DE LA SUBRUTINA SON
C     X, UN VECTOR DE DIMENSION N, QUE CONTIENE A LAS INCOGNITAS
C     FUN, UNA SUBRUTINA EXTERNA QUE CALCULA EL VECTOR F, QUE CONTIENE
C     LAS FUNCIONES CUYAS RAICES SE TRATA DE OBTENER. DFDX, UNA SUBRUTINA
C     EXTERNA QUE CALCULA LA MATRIZ JACOBIANA DEL VECTOR F CON RESPECTO AL
C     VECTOR X. ESCRIB, UNA SUBRUTINA EXTERNA QUE IMPRIME LOS RESULTADOS.
C     FUN, DFDX Y ESCRIB SON PROPORCIONADAS POR EL USUARIO.
C     P ES UN VECTOR DE LA DIMENSION QUE EL USUARIO NECESITE. CONTIENE
C     LOS PARAMETROS QUE CADA PROBLEMA PUEDA REQUERIR.
C     TOL, UN ESCALAR POSITIVO, LA TOLERANCIA IMPUESTA EN LA APROXIMACION.
C     ERROR ES UN ESCALAR POSITIVO CUYO VALOR ES LA MAGNITUD DEL ERROR
C     ENTRE DOS ITERACIONES SUCESIVAS.  ITER ES EL NUMERO DE ITERACIONES
C     EJECUTADAS. MAX ES EL MAXIMO NUMERO DE ITERACIONES PERMITIDAS.
C     LAS SUBRUTINAS DECOMP Y SOLVE RESUELVEN EL SISTEMA ALGEBRAICO LINEAL
C     DE ORDEN N DF(X)*F(X)=DELTA, SIENDO DELTA LA CORRECCION A LA K-SIMA
C     ITERACION. EL METODO QUE USAN ES EL DE DESCOMPOSICION LU(MOLER C. B.
C     MATRIX COMPUTATIONS WITH FORTRAN AND PAGING. COMMUNICATIONS OF THE
C     ACM. VOLUME 15. NUMBER 4. APRIL 1972.).
C
      REAL X(5),F(4),DF(4,4),DELTA(4),P(20),A(4,4),B(4),IP(4)
      ITER=0
    1 ITER=ITER+1
      IF(ITER.GT.MAX) GO TO 5
      CALL FUN(X,F,P,N)

      CALL DFDX(X,DF,P,N)

      CALL DECOMP(N,DF,F,IP)
C     SI LA MATRIZ JACOBIANA ES SINGULAR, REGRESA AL PROGRAMA PRINCIPAL.
      IF(IP(N).EQ.0) GO TO 6
      CALL SOLVE(N,DF,F,IP,DELTA)
      ERROR=0.
      DO 2 I=1,N
    2 ERROR = ERROR+ABS(DELTA(I))
      ERROR=ERROR/N
      IF(ERROR.LE.TOL) GO TO 4
      DO 3 I=1,N
    3 X(I)=X(I)-DELTA(I)
      CALL ESCRIB(ITER,X,ERROR,MAX,N)

      GO TO 1
    4 WRITE(6,101)
      CALL ESCRIB(ITER,X,ERROR,MAX,N)

      RETURN
    5 WRITE(6,102)
      RETURN
    6 WRITE(6,103)
      RETURN
  101 FORMAT(////10X,' VIENE EL RESULTADO FINAL'//)
  102 FORMAT(//,10X,"NO HAY CONVERGENCIA"//)
  103 FORMAT(//,10X,"LA MATRIZ JACOBIANA ES SINGULAR",//)
      END
```

Fig. A .3


```
      SUBROUTINE DECOMP(N,A,B,IP)
C     METODO DE TRIANGULARIZACION UTILIZANDO ELIMINACION GAUSSIANA
C
C     ENTRADA
C     ORDEN MAXIMO DE LA MATRIZ = N
C     A = MATRIZ A SER TRIANGULARIZADA
C
C     SALIDA
C     A(I,J),I.LE.J = FACTOR TRIANGULAR SUPERIOR, U.
C     A(I,J),I.GT.J = MULTIPLICADORES = FACTOR TRIANGULAR INFERIOR, I-L
C     IP(K), K.LT.N = INDICE DEL K-ESIMO RENGLON PIVOTE
C     IP(N) = (-1)**(NUMERO DE INTERCAMBIOS) O CERO
C     UTILIZA "SOLVE" PARA OBTENER LA SOLUCION DEL SISTEMA LINEAL.
C     DETERM(A) = IP(N)*A(1,1)*A(2,2)*....*A(N,N)
C     IF IP(N) = 0, A ES SINGULAR Y SOLVE DIVIDIRA ENTRE CERO.
C
      DIMENSION A(N,N),B(N),IP(N)
      IP(N)=1
      DO 6 K=1,N
      IF(K.EQ.N) GO TO 5
      KP1=K+1
      M=K
      DO 1 I=KP1,N
      IF(ABS(A(I,K)).GT.ABS(A(M,K))) M=I
    1 CONTINUE
      IP(K)=M
      IF(M.NE.K) IP(N)=-IP(N)
      T=A(M,K)
      A(M,K)=A(K,K)
      A(K,K)=T
      IF(T.EQ.0) GO TO 5
      DO 2 I=KP1,N
    2 A(I,K)=-A(I,K)/T
      DO 4 J=KP1,N
      T=A(M,J)
      A(M,J)=A(K,J)
      A(K,J)=T
      IF(T.EQ.0) GO TO 4
      DO 3 I=KP1,N
    3 A(I,J)=A(I,J)+A(I,K)*T
    4 CONTINUE
    5 IF(A(K,K).EQ.0) IP(N)=0
    6 CONTINUE
      RETURN
      END
```

Fig. A .4

```
      SUBROUTINE SOLVE(N,A,B,IP,X)
C     SOLUCION DEL SISTEMA LINEAL, A*X = B
C     ENTRADA
C     ORDEN MAXIMO DE LA MATRIZ = N
C     A = MATRIZ TRIANGULARIZADA OBTENIDA EN "DECOMP"
C     B = VECTOR DEL MIEMBRO DERECHO,
C     IP = VECTOR PIVOTE OBTENIDO EN "DECOMP"
C     NO UTILICE SOLVE SI EN DECOMP SE OBTUVO IP(N) = 0
C     SALIDA
      DIMENSION A(N,N),B(N),IP(N)
      REAL X(5)
      IF(N.EQ.1) GO TO 9
      NM1=N-1
      DO 7 K=1,NM1
      KP1=K+1
      M=IP(K)
      T=B(M)
      B(M)=B(K)
      B(K)=T
      DO 7 I=KP1,N
7     B(I)=B(I)+A(I,K)*T
      DO 8 KB=1,NM1
      KM1=N-KB
      K=KM1+1
      B(K)=B(K)/A(K,K)
      T=-B(K)
      DO 8 I=1,KM1
8     B(I)=B(I)+A(I,K)*T
9     B(1)=B(1)/A(1,1)
      DO 10 I=1,N
10    X(I)=B(I)
      RETURN
      END
```

Fig. A .5


```
      SUBROUTINE FUN(X,F,P,N)
C     ESTA SUBRUTINA CALCULA EL VECTOR F.
C     LOS PARAMETROS DE LA SUBRUTINA SON
C     P(J+J-1)=SEN(THETA(J)-THETA0)
C     P(J+J)=COS(THETA(J)-THETA0)
C     P(9)=X0
C     P(10)=Y0
C     P(9+J+J)=XX(J)
C     P(10+J+J)=YY(J)
C     DONDE J=1,2,3,4
      REAL X(5),F(4),P(20),MODO,MODJ
      MODO=P(9)*P(9)+P(10)*P(10)
      PROD=X(1)*X(2)+X(3)*X(4)-X(1)*P(9)-X(4)*P(10)
      PROD=PROD+PROD
      DO 10 J=1,N
      MODJ=P(9+J+J)*P(9+J+J)+P(10+J+J)*P(10+J+J)
      UNO=P(9+J+J)*X(2)+P(10+J+J)*X(3)
      UNO=UNO+UNO
      DOS=(P(10+J+J)-X(3))*(X(1)-P(9))
      DOS=DOS-(P(9+J+J)-X(2))*(X(4)-P(10))
      DOS=P(J+J-1)*DOS+P(J+J-1)*DOS
      TRES=(P(9+J+J)-X(2))*(X(1)-P(9))
      TRES=TRES+(P(10+J+J)-X(3))*(X(4)-P(10))
      TRES=P(J+J)*TRES+P(J+J)*TRES
      F(J)=MODO+MODJ-UNO+DOS+TRES+PROD
10    CONTINUE
      RETURN
      END
```

Fig. A .6

```
      SUBROUTINE DFDX(X,DF,P,N)
C   ESTA SUBRUTINA CALCULA LA MATRIZ JACOBIANA DEFINIDA EN NEWRAP.
C   EL VECTOR P ES EL MISMO QUE SE UTILIZA EN LA SUBRUTINA FUN.
      REAL X(5),DF(4,4),P(20)
      Q=X(2)-P(9)
      R=X(3)-P(10)
      S=P(10)-X(4)
      T=P(9)-X(1)
      DO 10 J=1,N
         UNO=(P(10+J+J)-X(3))*P(J+J-1)
         DOS=(P(9+J+J)-X(2))*P(J+J)
         UNO=Q+UNO+DOS
         DF(J,1)=UNO+UNO
         UNO = X(1) - P(9+J+J)
         DOS=S*P(J+J-1)
         TRES=T*P(J+J)
         UNO=UNO-DOS+TRES
         DF(J,2)=UNO+UNO
         UNO=X(4)-P(10+J+J)
         DOS=T*P(J+J-1)
         TRES=-S*P(J+J)
         UNO=UNO+DOS-TRES
         DF(J,3)=UNO+UNO
         UNO=(P(9+J+J)-X(2))*P(J+J-1)
         DOS=(P(10+J+J)-X(3))*P(J+J)
         UNO=R-UNO+DOS
         DF(J,4)=UNO+UNO
10    CONTINUE
      RETURN
      END
```

Fig. A .7


```
      SUBROUTINE ESCRIB(ITER,X,ERROR,MAX,N)
C   ESTE SUBRUTINA IMPRIME LOS RESULTADOS EN CADA ITERACION.
C   EL ERROR SE ALMACENA EN LA VARIABLE X(N+1) PARA COMPARARLO CON
C   EL DE LA PROXIMA ITERACION.
      REAL X(5)
      WRITE(6, 3) ERROR,ITER
      WRITE(6, 2) (I,X(I),I=1,N)
C   DETECTA LA EVOLUCION DEL ERROR. SI ESTE CRECE, REGRESA AL
C   PROGRAMA PRINCIPAL.
      IF(ITER.EQ.1.OR.ERROR.LT.X(N+1)) GO TO 1
      WRITE(6,4)
      ITER=MAX
      RETURN
1     X(N+1)=ERROR
      RETURN
2 FORMAT(10X,'X(',I3,'  ) =',E18.5)
3 FORMAT(//,10X,"ERROR =",E18.6,10X,"NO. ITER =",I5,/)
4 FORMAT(//,10X,"EL ERROR CRECE"/)
  END
```

Fig. A .8

TABLA A .1 RESULTADOS NUMERICOS DEL PROBLEMA DE DISEÑO DE UN MECANISMO RRRR

ESTOS SON LOS PARAMETROS TOL, MAX, N EN ESTE ORDEN

.100000E-05 40 4

ESTAS SON LAS CONFIGURACIONES

	X	Y	THETA
0	.100000E+02	.150000E+01	-.210000E+02
1	.620000E+01	-.650000E+01	-.780000E+02
2	.360000E+01	-.640000E+01	.148000E+03
3	.200000E+01	.200000E+01	-.900000E+02
4	.500000E+01	.400000E+01	.600000E+02

ESTOS SON LOS VALORES INICIALES

-.[illegible]675E+01 .466[illegible]2E+01 -.3[illegible]445E+01 -.223766E+01

ERROR = .111449E+02 NO. ITER = 1

X(1) = .216625E+01
X(2) = -.816668E+00
X(3) = -.136694E+01
X(4) = .170423E+01

ERROR = .600443E+01 NO. ITER = 2

X(1) = .155644E+02
X(2) = .675164E+01
X(3) = -.578557E+01
X(4) = .395140E+01

ERROR = .230553E+01 NO. ITER = 3

X(1) = .115971E+02
X(2) = .639546E+01
X(3) = -.247560E+01
X(4) = .236261E+01

ERROR = .985821E+00 NO. ITER = 4

X(1) = .101693E+02
X(2) = .575219E+01
X(3) = -.147335E+01
X(4) = .149271E+01

ERROR = .277310E+00 NO. ITER = 5

X(1) = .961140E-0[illegible]
X(2) = .543625E+01
X(3) = -.13[illegible]49[illegible]E+0[illegible]
X(4) = .115[illegible]E+0[illegible]

ERROR = .[illegible]E-01 NO. ITER = 6

X(1) = .96[illegible]E+0[illegible]
X(2) = .539[illegible]E+0[illegible]
X(3) = -.129[illegible]E+0[illegible]
X(4) = .115[illegible]E+0[illegible]

ERROR = .[illegible]2071E-0[illegible] NO. ITER = 7

X(1) = .960[illegible]E+0[illegible]
X(2) = .539[illegible]E+0[illegible]
X(3) = -.129[illegible]E+0[illegible]
X(4) = .115892E+0[illegible]

VIENE EL RESULTADO FINAL

ERROR = .265952E-07 NO. ITER = [illegible]

X(1) = .960825E+0[illegible]
X(2) = .539284E+01
X(3) = -.129209E+01
X(4) = .115892E+01

ESTOS SON LOS VALORES INICIALES

.437874E+01 -.360874E+01 .146553E+01 -.435471E+01

ERROR = .224235E+01 NO. ITER = 1

X(1) = .616395E+01
X(2) = .552664E+01
X(3) = .696992E-01
X(4) = -.291097E+01

ERROR = .102109E+01 NO. ITER = 2

X(1) = .730960E+0[illegible]
X(2) = .153412E+01
X(3) = -.431065E+00
X(4) = -.177129E+01

ERROR = .320956E+00 NO. ITER = 3

X(1) = .75[illegible]17[illegible]E+0[illegible]

```
X( 2 ) =     .232144E+01
X( 3 ) =    -.531606E+00
X( 4 ) =    -.137701E+01

ERROR =      .502921E-01        NO. ITER =  4

X( 1 ) =     .768320E+01
X( 2 ) =     .239331E+01
X( 3 ) =    -.549533E+00
X( 4 ) =    -.131749E+01

ERROR =      .122533E-02        NO. ITER =  5

X( 1 ) =     .768443E+01
X( 2 ) =     .239504E+01
X( 3 ) =    -.550310E+00
X( 4 ) =    -.131605E+01

VIENE EL RESULTADO FINAL

ERROR =      .697445E-06        NO. ITER =  6

X( 1 ) =     .768443E+01
X( 2 ) =     .239504E+01
X( 3 ) =    -.550310E+00
X( 4 ) =    -.131606E+01

ESTOS SON LOS VALORES INICIALES

 .397355E+01     .107720E+01     -.104210E+01     .161502E+01

ERROR =      .278063E+01        NO. ITER =  1

X( 1 ) =     .725596E+01
X( 2 ) =     .566292E+01
X( 3 ) =     .102167E+01
X( 4 ) =     .427401E+00

ERROR =      .516817E+01        NO. ITER =  2

X( 1 ) =     .145957E+02
X( 2 ) =     .930483E+01
X( 3 ) =    -.400648E+01
X( 4 ) =     .509127E+01

EL ERROR CRECE
```



```
NO HAY CONVERGENCIA

ESTOS SON LOS VALORES INICIALES

 -.181476E+01    -.337795E+01    -.330144E+01     .102161E+01

ERROR =      .629137E+02        NO. ITER =  1

X( 1 ) =    -.429287E+02
X( 2 ) =     .939003E+02
X( 3 ) =     .769270E+02
X( 4 ) =     .339959E+02

ERROR =      .304339E+02        NO. ITER =  2

X( 1 ) =    -.209754E+02
X( 2 ) =     .484691E+02
X( 3 ) =     .412145E+02
X( 4 ) =     .153572E+02

ERROR =      .153148E+02        NO. ITER =  3

X( 1 ) =    -.102669E+02
X( 2 ) =     .253431E+02
X( 3 ) =     .234402E+02
X( 4 ) =     .570694E+01

ERROR =      .807979E+01        NO. ITER =  4

X( 1 ) =    -.553337E+01
X( 2 ) =     .124256E+02
X( 3 ) =     .145961E+02
X( 4 ) =    -.119059E+00

ERROR =      .139324E+02        NO. ITER =  5

X( 1 ) =    -.885531E+01
X( 2 ) =    -.153960E+02
X( 3 ) =     .726509E+01
X( 4 ) =    -.173760E+02

EL ERROR CRECE

NO HAY CONVERGENCIA

ESTOS SON LOS VALORES INICIALES

 -.396415E+01    [illegible]    [illegible]    [illegible]
```

```
ERROR =            .322356E+01                    NO. ITER =    1

X(  1  ) =            .482795E+01
X(  2  ) =            .391369E+00
X(  3  ) =            .119172E+01
X(  4  ) =           -.347111E+01

ERROR =            .163644E+01                    NO. ITER =    2

X(  1  ) =            .731494E+01
X(  2  ) =            .124563E+01
X(  3  ) =           -.651687E+00
X(  4  ) =           -.210998E+01

ERROR =            .496831E+00                    NO. ITER =    3

X(  1  ) =            .754081E+01
X(  2  ) =            .220919E+01
X(  3  ) =           -.506906E+00
X(  4  ) =           -.147087E+01

ERROR =            .124166E+00                    NO. ITER =    4

X(  1  ) =            .767705E+01
X(  2  ) =            .238458E+01
X(  3  ) =           -.547754E+00
X(  4  ) =           -.132465E+01

ERROR =            .723251E-02                    NO. ITER =    5

X(  1  ) =            .768440E+01
X(  2  ) =            .239501E+01
X(  3  ) =           -.558301E+00
X(  4  ) =           -.131609E+01

ERROR =            .251589E-04                    NO. ITER =    6

X(  1  ) =            .768443E+01
X(  2  ) =            .239505E+01
X(  3  ) =           -.558310E+00
X(  4  ) =           -.131606E+01


VIENE EL RESULTADO FINAL


ERROR =            .550303E-09                    NO. ITER =    7

X(  1  ) =            .768443E+01
X(  2  ) =            .239505E+01
X(  3  ) =           -.558310E+00
X(  4  ) =           -.131606E+01
```

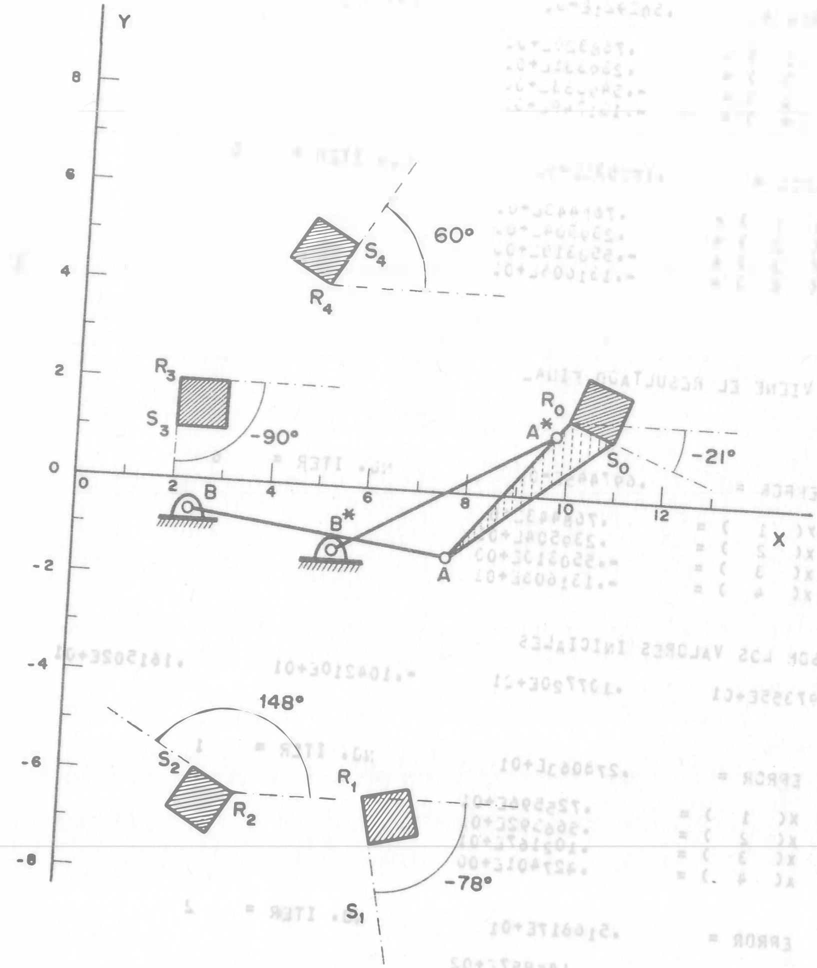



Fig A.9 Mecanismo que conduce un cuerpo rígido por cinco configuraciones especificadas.

APENDICE B

DISEÑO OPTIMO DE UNA LEVA CON SEGUIDOR DE CARA PLANA

Introducción

Considérese el mecanismo ilustrado en la fig B.1, compuesto de una leva de disco con seguidor de cara plana.

Sean C y F dos rectas tales que la primera está fija a la leva y la segunda al bastidor de la máquina. Los ángulos ψ y θ representan, el ángulo de rotación de la leva, el primero, y el segundo, el ángulo que forma el radio vector OA-que une el eje de rotación de la leva con el punto de contacto entre este y el seguidor, en A-con la línea C. El desplazamiento del seguidor está dado por la variable $s(\psi)$, siendo el ángulo ϕ el formado por el radio vector OA y la tangente al perfil de la leva en A.

B.1 Ecuaciones de diseño

A partir de la fig B.1 se obtienen las siguientes relaciones

$$s = \rho \sin(\theta + \psi), \tag{B.1}$$

$$\phi = \pi - (\theta + \psi), \tag{B.2}$$

$$\rho'(\theta) \tan \phi = \rho(\theta) \tag{B.3}$$

Sustituyendo la ecuación (B.2) en la ecuación (B.3) se obtiene

$$\rho'(\theta) \sin(\theta + \psi) + \rho(\theta) \cos(\theta + \psi) = 0. \tag{B.4}$$

Las ecuaciones (B.1) y (B.2) son las ecuaciones de restricción que

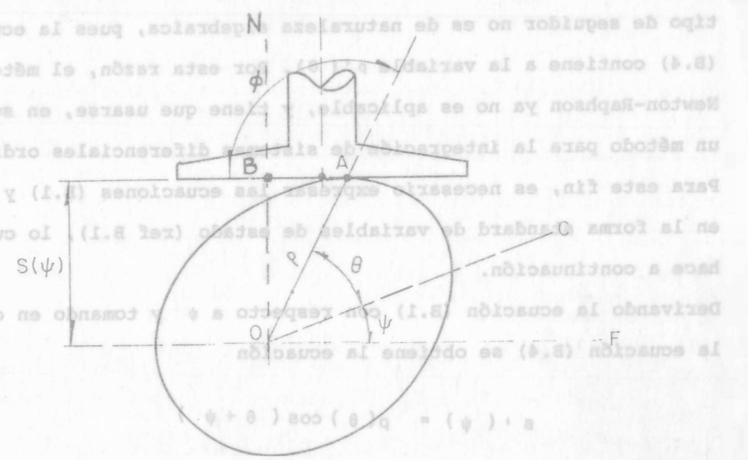


Fig. B.1 Leva con seguidor de cara plana se utilizan en el diseño.

A diferencia del proceso de síntesis de una leva con seguidor de punta, presentado en el Cap 4, el proceso de síntesis para este tipo de seguidor no es de naturaleza algebraica, pues la ecuación (B.4) contiene a la variable $\rho'(\theta)$. Por esta razón, el método de Newton-Raphson ya no es aplicable, y tiene que usarse, en su lugar, un método para la integración de sistemas diferenciales ordinarios. Para este fin, es necesario expresar las ecuaciones (B.1) y (B.4) en la forma standard de variables de estado (ref B.1), lo cual se hace a continuación.

Derivando la ecuación (B.1) con respecto a ψ y tomando en cuenta la ecuación (B.4) se obtiene la ecuación

$$s'(\psi) = \rho(\theta)\cos(\theta+\psi) \tag{B.5}$$

Derivando la última ecuación con respecto a ψ otra vez y considerando la ecuación (B.4) se obtiene la ecuación

$$\theta'(\psi) = \frac{s''(\psi) + \rho\sin(\theta+\psi)}{\rho'(\theta)\cos(\theta+\psi) - \rho\sin(\theta+\psi)} \tag{B.6}$$

De las ecuaciones (B1), (B4) y (B6),

$$\theta'(\psi) = -\frac{[s(\psi) + s''(\psi)]\sin(\theta+\psi)}{\rho(\theta)} \tag{B.7}$$

$$\rho'(\psi) = [s(\psi) + s''(\psi)]\cos(\theta+\psi). \tag{B.8}$$

Las ecuaciones (B.7) y (B.8) constituyen un sistema diferencial ordinario de dimensión 2, con los valores iniciales especificados a continuación

$$\theta_0 = \theta(\psi_0),\quad \rho_0 = \rho(\psi_0), \tag{B.9}$$

En estas condiciones, el sistema ha quedado expresado en forma adecuada para integrarse por medio de una rutina para computadora digital, o bien por medio de computadora analógica. Las ecuaciones de síntesis (B.7) y (B.8) aparecen realizadas analógicamente en la fig B.2.

El ángulo de presión para este tipo de seguidor es 0 para cualquier configuración, y así, no es una variable de consideración en el diseño. Sin embargo, el descentramiento BA (Fig B.1) entre el punto de contacto A y el eje de rotación del seguidor, debe mantenerse dentro de ciertos valores máximos, pues si esta variable es muy grande o equivalentemente, si el punto de contacto A se aleja demasiado de la normal a la cara plana, que pasa por el eje de rotación 0, la ventaja mecánica del mecanismo adquiere valores muy bajos.

Denotando entonces el descentramiento BA como x, se tiene:

$$x = \rho\cos(\theta+\psi) \tag{B.10}$$

Para obtener un diseño óptimo se requiere mantener el valor absoluto de x por abajo de cierto máximo permisible x_M, minimizando el tamaño de la leva. En este caso, si x es demasiado pequeña, la leva es de tamaño muy grande. Así el tamaño de la leva no puede disminuirse sin restricción pues si esta es muy pequeña, la excentricidad x crece demasiado. Por esta razón el diseño óptimo es aquel para el cual el máximo valor absoluto de x es "exactamente" x_M.

El procedimiento para obtener el diseño óptimo en consideración se indica en la Sec B.2.

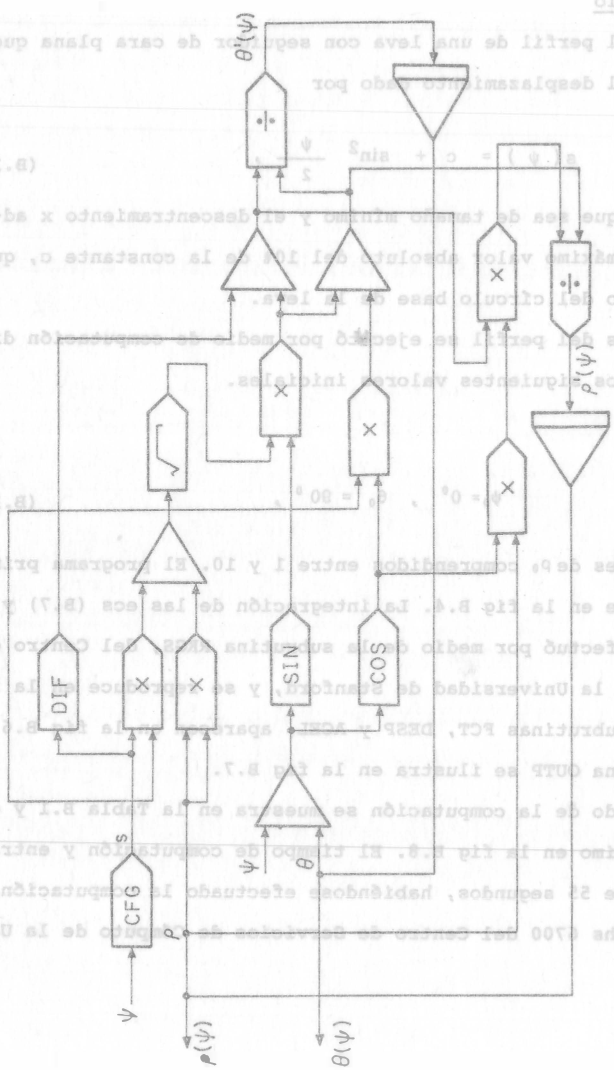


Fig B.2 Realización analógica de las ecuaciones de síntesis de una leva con seguidor de cara plana.

B.2 Algoritmo de diseño óptimo

i) Intégrese el sistema (B.7) y (B.8) con valores iniciales θ_o, ρ_o, varias veces, para n valores de ρ_o, comprendidos en el intervalo $[a_i, b_i]$.

En cada caso calcúlense el valor absoluto de x, y cuando este rebase el valor de x_M, párese la integración e iníciese otra con el siguiente valor de ρ_o.

ii) La integración se realizará completamente si, y solo si, el máximo valor absoluto de x es cuando mucho igual a x_M. Si ese valor es "exactamente" x_M, el diseño es óptimo y el procedimiento termina. Si no es así, efectúese el siguiente paso.

iii) Supóngase que en el valor d_i comprendido en a_i y b_i, se realizó una integración completa, pero el máximo valor absoluto de x es menor que x_M; en este caso, es posible disminuir el tamaño de la leva, por lo que se realiza otra serie de integraciones igual que en i), pero ahora en el intervalo $[a_{i+1}, b_{i+1}]$, donde $a_{i+1} = c_i$, siendo c_i el valor inmediatamente anterior a d_i*, y $b_{i+1} = d_i$. Divídase este intervalo igualmente en n partes iguales, y repítase el proceso hasta que el máximo valor absoluto de x sea "exactamente" igual a x_M.

El diagrama de flujo que ilustra este proceso se muestra en la fig B.3.

---

*Es decir, c_i y d_i están dentro del intervalo $[a_i, b_i]$ y observan el siguiente orden: $\{a_i, \ldots c_i, d_i, \ldots b_i\}$

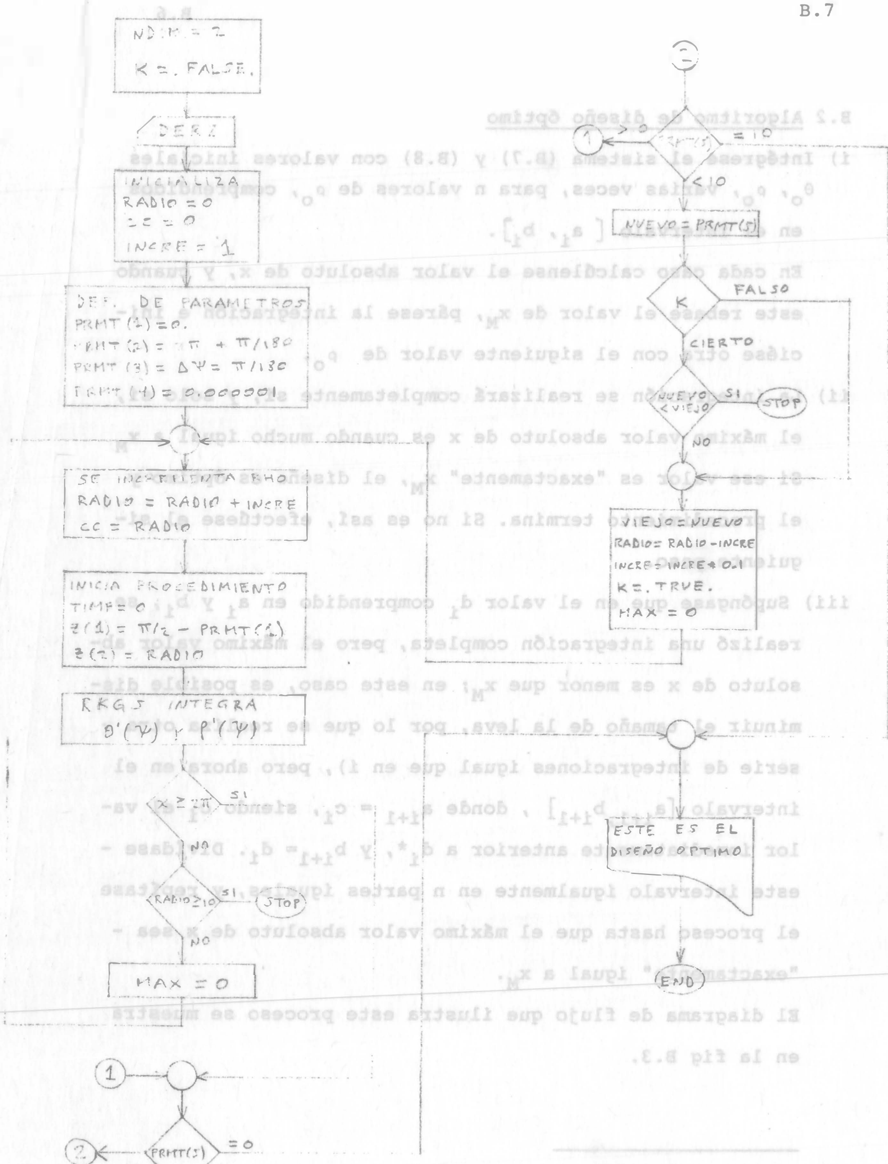


Fig B.3 Diagrama de flujo para el diseño óptimo de una leva con seguidor de cara plana.

B.3 Ejemplo

Diséñese el perfil de una leva con seguidor de cara plana que produzca el desplazamiento dado por

$$s(\psi) = c + \sin^2 \frac{\psi}{2} , \qquad (B.11)$$

de manera que sea de tamaño mínimo y el descentramiento x adquiera un máximo valor absoluto del 10% de la constante c, que es el radio del círculo base de la leva.

La síntesis del perfil se ejecutó por medio de computación digital para los siguientes valores iniciales.

$$\psi_0 = 0^0 \quad , \quad \theta_0 = 90^0 , \qquad (B.12)$$

para valores de ρ_0 comprendidos entre 1 y 10. El programa principal aparece en la fig B.4. La integración de las ecs (B.7) y (B.8) se efectuó por medio de la subrutina RKGS, del Centro de Cómputo de la Universidad de Stanford, y se reproduce en la fig B.5; las subrutinas FCT, DESP y ACEL, aparecen en la fig B.6 y la subrutina OUTP se ilustra en la fig B.7.

El resultado de la computación se muestra en la Tabla B.1 y el diseño óptimo en la fig B.8. El tiempo de computación y entrada/salida fué de 55 segundos, habiéndose efectuado la computación en la Burroughs 6700 del Centro de Servicios de Cómputo de la UNAM.

Fig B.4 Programa principal para el diseño óptimo de una leva con seguidor de cara plana

```
B6700/B7700   F O R T R A N   C O M P I L A T I O N   M A R K   2.7.000

C   ESTE PROGRAMA OPTIMIZA EL DISENO DE UNA LEVA CON SEGUIDOR TRASLACIO-
C   NAL DE CARA PLANA, INTEGRANDO LAS ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINA-
C   RIAS DE DISENO, POR EL METODO DE RUNGE-KUTTA, DE CUARTO ORDEN,
C   USANDO LA SUBRUTINA RKGS.
C   DEFINICIONES: Z(1)=THETA Y Z(2)=RHO, SIENDO THETA Y RHO
C   LAS COORDENADAS POLARES DE LOS PUNTOS DEL PERFIL DE LA LEVA.
C   NDIM ES EL NUMERO DE ECUACIONES EN EL SISTEMA.
C   LA CONSTANTE CC ES LA QUE APARECE EN LA FUNCION DE DESPLAZAMIENTO
C   Y PERMITE OPTIMIZAR EL DISENO DE LA LEVA. RADIO ES EL VALOR INICIAL
C   DE RHO. INCRE ES EL INCREMENTO DEL RADIO. LA VARIABLE DESCEN ES EL
C   DESCENTRAMIENTO DEL SEGUIDOR. LOS VECTORES PRMT Y DERZ ESTAN DEFINI-
C   DOS EN RKGS. TIMP ES UNA VARIABLE QUE SE UTILIZA PARA LA IMPRESION
C   DE RESULTADOS EN LA SUBRUTINA OUTP DEFINIDA EN RKGS.
C   EL PROGRAMA SOLO FUNCIONA CUANDO EL PUNTO MAS BAJO DE LA CARRERA
C   DEL SEGUIDOR SUCEDE EN PSI=0, SIENDO PSI EL ANGULO QUE GIRA LA LEVA,
C   DE AQUI QUE AL INICIAR EL PROCEDIMIENTO SE HAGA CC=RADIO.

       EXTERNAL FCT, OUTP
       COMMON/UNO/X
       COMMON/COMIMP/TIMP,DOSPI
       COMMON/FCTDES/CC,MAX
       REAL Z(2), DERZ(2), PRMT(5), AUX(8,2), INCRE ,MAX, NUEVO
       LOGICAL K
       NDIM=2; WRITE(6,201); READ(5,101) (DERZ(I),I=1,NDIM); K=.FALSE.


       RADIO=0; CC=0; INCRE=1; DOSPI=8.*ATAN(1.)
C   DEFINICION DE PARAMETROS.
       PRMT(1)=0.; PRMT(3)=DOSPI/360.
       PRMT(2)=DOSPI+PRMT(3); PRMT(4)=0.000001
C   SE INCREMENTA EL VALOR INICIAL DE RHO Y CC SE HACE IGUAL A RADIO.
 1     RADIO=RADIO+INCRE; CC=RADIO; WRITE(6,202) RADIO; WRITE(6,203)
C   SE INICIA EL PROCEDIMIENTO.
       TIMP=0.; Z(1)=DOSPI/4.-PRMT(1); Z(2)=RADIO
       CALL RKGS(PRMT,Z,DERZ,NDIM,IHLF,FCT,OUTP,AUX)
       IF(X.GE.(PRMT(2)-PRMT(3)))GO TO 3
 2     IF(RADIO.GE.10) STOP
       MAX=0; GO TO 1
 3     IF(PRMT(5).EQ.0.) GO TO 7
       IF(PRMT(5)-10.) 4,7,2
 4     NUEVO=PRMT(5)
       IF(K) GO TO 6
 5     VIEJO=NUEVO; WRITE(6,205)
C   SE DIVIDE EL INTERVALO DE BUSQUEDA ENTRE 10 CUANDO PRMT(5) ES MENOR
C   QUE EL PORCENTAJE FIJADO DE LA CONSTANTE DE DISENO CC.
       RADIO=RADIO-INCRE; INCRE=INCRE*0.1; K=.TRUE.; MAX=0; GO TO 1
 6     IF(NUEVO-VIEJO) 8,5,5
 7     WRITE(6,204)
 8     CALL EXIT
101 FORMAT(2F10.0)
201 FORMAT(1H1,18X,"SINTESIS DE UNA LEVA CON SEGUIDOR DE CARA PLANA"/)
202 FORMAT(//,5X,"RADIO =",F15.8//)
203 FORMAT(16X,"PSI",14X,"THETA",14X,"RHO",10X,"DESCENTRAMIENTO"/14X,"
   *(GRADOS)",10X,"(GRADOS)",5X,"(U. DE LONGITUD)",5X,"(PORCENTAJE)"/)
204 FORMAT(//,31X,"ESTE ES EL DISENO OPTIMO")
205 FORMAT(/,35X,"DISMINUYASE RADIO"//)
       END
```


Fig B.5 Subrutina RKGS

```
      SUBROUTINE RKGS(PRMT,Y,DERY,NDIM,IHLF,FCT,OUTP,AUX)
C     ...................................................................
C
C     SUBRUTINA RKGS
C
C     PROPOSITO
C        RESOLVER UN SISTEMA DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS
C        DE PRIMER ORDEN DADOS SUS VALORES INICIALES.
C
C     USO
C        CALL RKGS(PRMT,Y,DERY,NDIM,IHLF,FCT,OUTP,AUX)
C        LOS PARAMETROS FCT Y OUTP REQUIEREN UNA PROPOSICION EXTERNAL
C
C     DESCRIPCION DE LOS PARAMETROS
C        PRMT    - UN VECTOR DE ENTRADA Y SALIDA CON DIMENSION MAYOR O
C                  IGUAL A 5, QUE ESPECIFICA LOS PARAMETROS DEL INTER-
C                  VALO Y LA PRECISION Y QUE SIRVE PARA LA COMUNICA-
C                  CION ENTRE LA SUBRUTINA OUTP (SUMINISTRADA POR EL
C                  USUARIO) Y LA SUBRUTINA RKGS. EXCEPTO PRMT(5), LAS
C                  DEMAS COMPONENTES NO SON DESTRUIDAS POR LA SUBRU-
C                  TINA RKGS, Y SON
C        PRMT(1)- LIMITE INFERIOR DEL INTERVALO  (ENTRADA).
C        PRMT(2)- LIMITE SUPERIOR DEL INTERVALO  (ENTRADA).
C        PRMT(3)- INCREMENTO INICIAL DE LA VARIABLE INDEPENDIENTE
C                  (ENTRADA).
C        PRMT(4)- LIMITE SUPERIOR DEL ERROR (ENTRADA). SI EL ERROR
C                  ABSOLUTO ES MAYOR QUE PRMT(4), EL INCREMENTO SE
C                  DIVIDE A LA MITAD. SI EL INCREMENTO ES MENOR QUE
C                  PRMT(3) Y EL ERROR ABSOLUTO MENOR QUE PRMT(4)/50,
C                  EL INCREMENTO SE DOBLA. EL USUARIO PUEDE CAMBIAR
C                  PRMT(4) POR MEDIO DE SU SUBRUTINA OUTP.
C        PRMT(5)- NO ES PARAMETRO DE ENTRADA. LA SUBRUTINA RKGS LO
C                  INICIALIZA PRMT(5)=0. SI EL USUARIO DESEA TERMINAR
C                  LA SUBRUTINA RKGS EN CUALQUIER PUNTO DE SALIDA,
C                  TIENE QUE CAMBIAR PRMT(5) A UN VALOR DIFERENTE DE
C                  CERO POR MEDIO DE LA SUBRUTINA OUTP. SON FACTIBLES
C                  OTRAS COMPONENTES DEL VECTOR PRMT SI SE LE DA UNA
C                  DIMENSION MAYOR QUE 5. LA SUBRUTINA RKGS NO LAS RE-
C                  QUIERE. NO OBSTANTE, PUEDEN SER UTILES PARA MOVER
C                  VALORES DE RESULTADOS AL PROGRAMA PRINCIPAL (QUE
C                  LLAMA A RKGS), OBTENIDOS POR MANIPULACIONES ESPE-
C                  CIALES CON DATOS DE SALIDA EN LA SUBRUTINA OUTP.
C        Y       - VECTOR DE ENTRADA DE LOS VALORES INICIALES (SE DES-
C                  TRUYE). DESPUES Y PASA A SER EL VECTOR RESULTANTE
C                  DE LAS VARIABLES DEPENDIENTES CALCULADAS EN PUNTOS
C                  INTERMEDIOS X.
C        DERY    - VECTOR DE ENTRADA DE LOS PESOS DEL ERROR (SE DES-
C                  TRUYE). LA SUMA DE SUS COMPONENTES DEBE SER 1.
C                  DESPUES DERY PASA A SER EL VECTOR DE LAS DERIVADAS
C                  QUE PERTENECEN A LOS VALORES DE LA FUNCION Y EN EL
C                  PUNTO X.
C        NDIM    - UN VALOR DE ENTRADA, QUE ESPECIFICA EL NUMERO DE
C                  ECUACIONES DEL SISTEMA.
C        IHLF    - UN VALOR DE SALIDA, QUE ESPECIFICA EL NUMERO DE
C                  BISECCIONES DEL INCREMENTO INICIAL. SI IHLF SE
C                  HACE MAS GRANDE QUE 10, LA SUBRUTINA RKGS REGRESA
C                  CON EL MENSAJE DE ERROR IHLF=11 AL PROGRAMA PRINCI-
C                  PAL. EL MENSAJE DE ERROR IHLF=12 O IHLF=13 APARECE
C                  EN CASO DE QUE PRMT(3)=0 O EN CASO DE QUE
```

Fig B.5 (Continua)

```
C              STGN(PRMT(3).NE.STGN(PRMT(2)-PRMT(1)) RESPECTIVA-
C              MENTE.
C        FCT    - UNA SUBRUTINA EXTERNA. CALCULA EL LADO DERECHO DERY
C              DEL SISTEMA PARA LOS VALORES DADOS DE X E Y. SU
C              LISTA DE PARAMETROS ES X,Y,DERY. NO DEBE DESTRUIR
C              A X NI A Y.
C        OUTP   - UNA SUBRUTINA EXTERNA, SU LISTA DE PARAMETROS ES,
C              Y,DERY,IHLF,NDIM,PRMT. NINGUNO DE ESTOS PARAMETROS
C              (EXCEPTO, SI ES NECESARIO, PRMT(4),PRMT(5),..) DE-
C              BEN SER CAMBIADOS POR ESTA SUBRUTINA. SI PRMT(5) SE
C              HACE DIFERENTE DE CERO, TERMINA LA SUBRUTINA RKGS.
C        AUX    - UN ARREGLO AUXILIAR CON 8 FILAS Y NDIM COLUMNAS.
C
C     OBSERVACIONES
C        EL PROCEDIMIENTO TERMINA Y REGRESA AL PROGRAMA PRINCIPAL SI
C        (1) SE NECESITAN MAS DE 10 BISECCIONES DEL INCREMENTO INI-
C            CIAL PARA OBTENER UNA PRECISION SATISFACTORIA (EL MEN-
C            SAJE DE ERROR ES IHLF=11),
C        (2) EL INCREMENTO INICIAL ES IGUAL A 0 O TIENE SIGNO EQUI-
C            VOCADO (MENSAJES DE ERROR IHLF=12 O IHLF=13),
C        (3) SE HA COMPLETADO EL INTERVALO DE INTEGRACION
C        (4) EL VALOR DE PRMT(5) DEJA DE SER 0 EN LA SUBRUTINA OUTP.
C
C     SUBPROGRAMAS QUE SE REQUIEREN
C        LAS SUBRUTINAS FCT(X,Y,DERY) Y OUTP(X,Y,DERY,IHLF,NDIM,PRMT)
C        DEBEN SER SUMINISTRADAS POR EL USUARIO.
C
C     METODO
C        LA EVALUACION SE HACE POR MEDIO DE LAS FORMULAS DE RUNGE-
C        KUTTA EN LA MODIFICACION DEBIDA A GILL. LA PRECISION SE
C        PRUEBA COMPARANDO LOS RESULTADOS DEL PROCEDIMIENTO CON EL
C        INCREMENTO UNICO Y CON EL DOBLE.
C        LA SUBRUTINA RKGS AUTOMATICAMANTE AJUSTA EL INCREMENTO DU-
C        RANTE TODO EL CALCULO BISECTANDOLO O DOBLANDOLO. SI SE NE-
C        CESITAN MAS DE 10 BISECCIONES DEL INCREMENTO PARA OBTENER
C        UNA PRECISION SATISFACTORIA, LA SUBRUTINA REGRESA CON EL
C        MENSAJE DE ERROR IHLF=11 AL PROGRAMA PRINCIPAL.
C        PARA OBTENER FLEXIBILIDAD EN LA SALIDA, EL USUARIO DEBE
C        PROPORCIONAR UNA SUBRUTINA DE SALIDA.
C        SE SUGIERE LA REFERENCIA
C        RALSTON/WILF, MATHEMATHICAL METHODS FOR DIGITAL COMPUTERS,
C        WILEY, NEW YORK/LONDON, 1960, PP. 110-120.
C
C  .................................................................
C
C     SUBROUTINE RKGS(PRMT,Y,DERY,NDIM,IHLF,FCT,OUTP,AUX)
C
C
      COMMON/UNO/X
      COMMON/COMIMP/TIMP,DOSPI,PI2
      COMMON/FCTDES/CC,MAX
      DIMENSION Y(2),DERY(2),AUX(8,1),A(4),B(4),C(4),PRMT(5)
      DO 1 I=1,NDIM
    1 AUX(8,I)=.06666667*DERY(I)
      X=PRMT(1)
      XEND=PRMT(2)
      H=PRMT(3)
      PRMT(5)=0.
      CALL FCT(X,Y,DERY)
```


Fig B.5 (Continua)

```
C
C     PRUEBA DE ERROR
      IF(H*(XEND-X))38,37,2
C
C     PREPARACIONES PARA EL METODO DE RUNGE-KUTTA
    2 A(1)=.5
      A(2)=.2928932
      A(3)=1.707107
      A(4)=.1666667
      B(1)=2.
      B(2)=1.
      B(3)=1.
      B(4)=2.
      C(1)=.5
      C(2)=.2928932
      C(3)=1.707107
      C(4)=.5
C
C     PREPARACIONES PARA EL PRIMER PASO DE RUNGE-KUTTA
      DO 3 I=1,NDIM
      AUX(1,I)=Y(I)
      AUX(2,I)=DERY(I)
      AUX(3,I)=0.
    3 AUX(6,I)=0.
      IREC=0
      H=H+H
      IHLF=-1
      ISTEP=0
      IEND=0
C
C
C     INICIO DE UN PASO DE RUNGE-KUTTA
    4 IF((X+H-XEND)*H)7,6,5
    5 H=XEND-X
    6 IEND=1
C
C     IMPRESION DE LOS VALORES INICIALES DE ESTE PASO
    7 CALL OUTP(X,Y,DERY,IHLF,NDIM,PRMT)

      IF(PRMT(5))40,8,40
    8 ITEST=0
    9 ISTEP=ISTEP+1
C
C
C     INICIO DEL CICLO MAS INTERNO DE RUNGE-KUTTA
      J=1
   10 AJ=A(J)
      BJ=B(J)
      CJ=C(J)
      DO 11 I=1,NDIM
      R1=H*DERY(I)
      R2=AJ*(R1-BJ*AUX(6,I))
      Y(I)=Y(I)+R2
      R2=R2+R2+R2
   11 AUX(6,I)=AUX(6,I)+R2-CJ*R1
      IF(J-4)12,15,15
   12 J=J+1
      IF(J-3)13,14,13
   13 X=X+.5*H
   14 CALL FCT(X,Y,DERY)
```

Fig. 3 5 (Continúa)

```
      GOTO 10
C     FIN DEL CICLO MAS INTERNO DE RUNGE-KUTTA
C
C
C     PRUEBA DE LA PRECISION
   15 IF(ITEST)16,16,20
C
C     EN CASO DE QUE ITEST=0 NO ES POSIBLE LA PRUEBA DE LA PRECISION
   16 DO 17 I=1,NDIM
   17 AUX(4,I)=Y(I)
      ITEST=1
      ISTEP=ISTEP+ISTEP-2
   18 IHLF=IHLF+1
      X=X-H
      H=.5*H
      DO 19 I=1,NDIM
      Y(I)=AUX(1,I)
      DERY(I)=AUX(2,I)
   19 AUX(6,I)=AUX(3,I)
      GOTO 9
C
C     EN CASO DE QUE ITEST=1 SI ES POSIBLE LA PRUEBA DE LA PRECISION
   20 IMOD=ISTEP/2
      IF(ISTEP-IMOD-IMOD)21,23,21
   21 CALL FCT(X,Y,DERY)

      DO 22 I=1,NDIM
      AUX(5,I)=Y(I)
   22 AUX(7,I) = DERY(I)
      GOTO 9
C
C     CALCULO DEL VALOR DE PRUEBA DELT
   23 DELT=0.
      DO 24 I=1,NDIM
   24 DELT=DELT+AUX(8,I)*ABS(AUX(4,I)-Y(I))
      IF(DELT-PRMT(4))28,28,25
C
C     EL ERROR ES DEMASIADO GRANDE
   25 IF(IHLF-10)26,36,36
   26 DO 27 I=1,NDIM
   27 AUX(4,I)=AUX(5,I)
      ISTEP=ISTEP+ISTEP-4
      X=X-H
      IEND=0
      GOTO 18
C
C     LOS VALORES DE LOS RESULTADOS SON BUENOS
   28 CALL FCT(X,Y,DERY)

      DO 29 I=1,NDIM
      AUX(1,I)=Y(I)
      AUX(2,I)=DERY(I)
      AUX(3,I)=AUX(6,I)
      Y(I)=AUX(5,I)
   29 DERY(I)=AUX(7,I)
      CALL OUTP(X-H,Y,DERY,IHLF,NDIM,PRMT)

      IF(PRMT(5))40,30,40
   30 DO 31 I=1,NDIM
```


Fig B.5 (Continúa)

```
      Y(I)=AUX(1,I)
   31 DERY(I)=AUX(2,I)
      IREC=IHLF
      IF(IEND)32,32,39
C
C     EL INCREMENTO SE DOBLA
   32 IHLF=IHLF-1
      ISTEP=ISTEP/2
      H=H+H
      IF(IHLF)4,33,33
   33 IMOD=ISTEP/2
      IF(ISTEP-IMOD-IMOD)4,34,4
   34 IF(DELT-.02*PRMT(4))35,35,4
   35 IHLF=IHLF-1
      ISTEP=ISTEP/2
      H=H+H
      GOTO 4
C
C
C     REGRESO AL PROGRAMA PRINCIPAL
   36 IHLF=11
      CALL FCT(X,Y,DERY)

      GOTO 39
   37 IHLF=12
      GOTO 39
   38 IHLF=13
   39 CALL OUTP(X,Y,DERY,IHLF,NDIM,PRMT)

   40 RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE FCT(X,Y,DERY)
      COMMON/FCTDES/CC,MAX
      REAL Y(2),DERY(2),PRMT(5),NUM
C     ESTA SUBRUTINA CALCULA EL LADO DERECHO DE LAS ECUACIONES
C     DIFERENCIALES QUE COMPRENDE EL SISTEMA.
C     LAS FUNCIONES DESP Y ACEL SE UTILIZAN PARA CALCULAR EL
C     DESPLAZAMIENTO Y LA ACELERACION DEL SEGUIDOR RESPECTIVAMENTE,
C     EN CADA ANGULO QUE GIRA LA LEVA.
      C=COS(X+Y(1))
      S=SIN(X+Y(1))
      SUM=DESP(X)+ACEL(X)
      NUM=SUM*S
      DERY(1)=-NUM/Y(2)
      DERY(2)=SUM*C
      RETURN
      END

      FUNCTION DESP(X)
C     ESTA FUNCION CALCULA EL DESPLAZAMIENTO DEL SEGUIDOR EN CADA ANGULO
C     QUE GIRA LA LEVA.
      COMMON/FCTDES/CC,MAX
      DESP=CC+SIN(X/2.)*SIN(X/2.)
      RETURN
      END

      FUNCTION ACEL(X)
C     ESTA FUNCION CALCULA LA ACELERACION DEL SEGUIDOR EN CADA ANGULO QUE
C     GIRA LA LEVA.
      ACEL=COS(X)*(.5)
      RETURN
      END
```

Fig B.6 Subrutinas FCT, DESP y ACEL para el diseño óptimo de una leva cilíndrica con seguidor de cara plana.


```
      SUBROUTINE OUTP(X,Y,DERY,IHLF,NDIM,PRMT)
      REAL Y(2),DERY(2),PRMT(5),MAX
      COMMON/COMIMP/TIMP,DESP
      COMMON/FCTDES/CC,MAX
C     ESTA SUBRUTINA IMPRIME LOS RESULTADOS DEL CALCULO. LA IMPRESION
C     ES CONTROLADA POR TIMP.
      IF(X.LT.TIMP) RETURN
      DESCEN=100.*(X-Y(1))
      PSI=360.*X/3.1416
      RHO=Y(2)
      THETA=360.*Y(1)/3.1416
C     ESCRITURA DE RESULTADOS.
      WRITE(6,1000) PSI,THETA,RHO,DESCEN
C     TIMP SE INCREMENTA EN 10 GRADOS.
      TIMP=TIMP+DESP*X/36.
C     SE ALMACENA EN MAX EL MAXIMO VALOR ABSOLUTO DEL DESCENTRAMIENTO
C     DEL SEGUIDOR.
      IF(ABS(DESCEN).LT.MAX) GO TO
      MAX=ABS(DESCEN)
    1 IF(MAX.GT.10.) GO TO 3
      IF(PSI.GE.360.) GO TO 4
      RETURN
C     PRMT(5) REGRESA AL PROGRAMA PRINCIPAL CON UN VALOR IGUAL AL MAXIMO
C     VALOR ABSOLUTO DEL DESCENTRAMIENTO CUANDO SI ES MAYOR O IGUAL QUE
C     DOS, O CUANDO EL VALOR ABSOLUTO DEL DESCENTRAMIENTO ES MAYOR QUE
C     EL PORCENTAJE FIJADO DE LA CONSTANTE CC. AL SER DETECTADO SE
C     INCREMENTA EL VALOR INICIAL DE RHO Y SE INICIA DE NUEVO EL PROCESO.
C     EL PROCESO TERMINA CUANDO PSI ES IGUAL A 360 Y EL MAXIMO VALOR
C     ABSOLUTO DE DESCEN ES IGUAL AL PORCENTAJE FIJADO DE LA CONSTANTE CC,
C     EN ESTE CASO PRMT(5) REGRESA CON UN VALOR IGUAL A CERO.
    2 PRMT(5)=MAX
      RETURN
    3 WRITE(6,2000)
      GO TO 2
    4 IF(ABS(MAX-10.).GT.PRMT(4)) GO TO 2
      PRMT(5)=0.
      RETURN
 1000 FORMAT(5X,4F18.4)
 2000 FORMAT(//,24X,'EL DESCENTRAMIENTO ES DEMASIADO GRANDE'//)
      END
```

Fig B.7 Subrutina OUTP, que imprime los resultados del diseño óptimo de una leva cilíndrica con seguidor de cara plana.

TABLA B.1 SINTESIS DE UNA LEVA CON SEGUIDOR DE CARA PLANA

RADIO = 1.00000000

PSI (GRADOS)	THETA (GRADOS)	RHO (U. DE LONGITUD)	DESCENTRAMIENTO (PORCENTAJE)
0.	.900000E+02	.100000E+01	.256334E-09
.100000E+02	.750750E+02	.101133E+01	.868241E+01
.210000E+02	.591614E+02	.104863E+01	.179184E+02

EL DESCENTRAMIENTO ES DEMASIADO GRANDE

RADIO = 2.00000000

PSI (GRADOS)	THETA (GRADOS)	RHO (U. DE LONGITUD)	DESCENTRAMIENTO (PORCENTAJE)
0.	.900000E+02	.200000E+01	.256334E-09
.100000E+02	.775236E+02	.200947E+01	.434121E+01
.210000E+02	.639636E+02	.204109E+01	.895920E+01
.310000E+02	.519133E+02	.208736E+01	.128760E+02

EL DESCENTRAMIENTO ES DEMASIADO GRANDE

RADIO = 3.00000000

PSI (GRADOS)	THETA (GRADOS)	RHO (U. DE LONGITUD)	DESCENTRAMIENTO (PORCENTAJE)
0.	.900000E+02	.300000E+01	.256334E-09
.100000E+02	.783464E+02	.300885E+01	.269414E+01
.210000E+02	.656192E+02	.303850E+01	.597280E+01
.310000E+02	.542673E+02	.308219E+01	.858397E+01
.410000E+02	.430032E+02	.313983E+01	.109333E+02

EL DESCENTRAMIENTO ES DEMASIADO GRANDE

RADIO = 4.00000000

PSI (GRADOS)	THETA (GRADOS)	RHO (U. DE LONGITUD)	DESCENTRAMIENTO (PORCENTAJE)

0.	.900000E+02	.400000E+01	.256334E-09
.100000E+02	.787589E+02	.400854E+01	.217060E+01
.210000E+02	.664562E+02	.403719E+01	.447960E+01
.310000E+02	.553608E+02	.407955E+01	.643798E+01
.410000E+02	.444507E+02	.413567E+01	.820074E+01
.510000E+02	.336958E+02	.420334E+01	.971433E+01
.610000E+02	.231355E+02	.428000E+01	.109328E+02

EL DESCENTRAMIENTO ES DEMASIADO GRANDE

RADIO = 5.00000000

PSI (GRADOS)	THETA (GRADOS)	RHO (U. DE LONGITUD)	DESCENTRAMIENT (PORCENTAJE)
0.	.900000E+02	.500000E+01	.256334E-09
.100000E+02	.790067E+02	.500835E+01	.173648E+01
.210000E+02	.669611E+02	.503640E+01	.358368E+01
.310000E+02	.560931E+02	.507795E+01	.515038E+01
.410000E+02	.453361E+02	.513314E+01	.656060E+01
.510000E+02	.347144E+02	.519988E+01	.777147E+01
.610000E+02	.242453E+02	.527575E+01	.874620E+01
.710000E+02	.139381E+02	.535811E+01	.945519E+01
.800000E+02	.480245E+01	.543553E+01	.984808E+01
.900000E+02	-.519443E+01	.552268E+01	.100000E+02

EL DESCENTRAMIENTO ES DEMASIADO GRANDE

RADIO = 6.00000000

PSI (GRADOS)	THETA (GRADOS)	RHO (U. DE LONGITUD)	DESCENTRAMIENT (PORCENTAJE)
0.	.900000E+02	.600000E+01	.256334E-09
.100000E+02	.791720E+02	.600822E+01	.140707E+01
.210000E+02	.672988E+02	.603587E+01	.298640E+01
.310000E+02	.565713E+02	.607688E+01	.429199E+01
.410000E+02	.460332E+02	.613143E+01	.546716E+01
.510000E+02	.354053E+02	.619753E+01	.647622E+01
.610000E+02	.250024E+02	.627286E+01	.728850E+01
.710000E+02	.147336E+02	.635483E+01	.787933E+01
.800000E+02	.556048E+01	.643205E+01	.820674E+01
.900000E+02	-.439871E+01	.651920E+01	.833334E+01
.100000E+03	-.142752E+02	.660520E+01	.820674E+01
.110000E+03	-.240298E+02	.668755E+01	.783078E+01
.120000E+03	-.336705E+02	.676388E+01	.721688E+01
.130000E+03	-.432138E+02	.683214E+01	.638371E+01
.140000E+03	-.526734E+02	.689052E+01	.535657E+01
.150000E+03	-.620652E+02	.693752E+01	.416667E+01

.160000E+03	-.714655E+02	.697194E+01	.285017E+01
.170000E+03	-.807114E+02	.699294E+01	.144707E+01
.180000E+03	-.900000E+02	.700000E+01	.970695E-07
.190000E+03	-.992886E+02	.699294E+01	-.144707E+01
.200000E+03	-.108594E+03	.697194E+01	-.285017E+01
.210000E+03	-.117935E+03	.693752E+01	-.416667E+01
.220000E+03	-.127327E+03	.689052E+01	-.535657E+01
.230000E+03	-.136786E+03	.683214E+01	-.638371E+01
.240000E+03	-.146336E+03	.676388E+01	-.721688E+01
.250000E+03	-.155971E+03	.668756E+01	-.783075E+01
.260000E+03	-.165725E+03	.660520E+01	-.820674E+01
.270000E+03	-.175601E+03	.651920E+01	-.833334E+01
.280000E+03	-.185609E+03	.643205E+01	-.820674E+01
.290000E+03	-.195754E+03	.634641E+01	-.783073E+01
.300000E+03	-.206037E+03	.626498E+01	-.721688E+01
.310000E+03	-.216453E+03	.619047E+01	-.638371E+01
.320000E+03	-.226992E+03	.612542E+01	-.535657E+01
.330000E+03	-.237646E+03	.607214E+01	-.416667E+01
.340000E+03	-.248376E+03	.603256E+01	-.285017E+01
.350000E+03	-.259172E+03	.600822E+01	-.144707E+01
.360000E+03	-.270000E+03	.600000E+01	-.201163E-07

DISMINUYASE RADIO

RADIO = 5.10000000

PSI (GRADOS)	THETA (GRADOS)	RHO (U. DE LONGITUD)	DESCENTRAMIENTO (PORCENTAJE)
0.	.900000E+02	.510000E+01	.256334E-09
.100000E+02	.799261E+02	.510833E+01	.170243E+01
.210000E+02	.670008E+02	.513634E+01	.351341E+01
.310000E+02	.561492E+02	.517782E+01	.504980E+01
.410000E+02	.454065E+02	.523294E+01	.643196E+01
.510000E+02	.347952E+02	.529960E+01	.761908E+01
.610000E+02	.243336E+02	.537541E+01	.857471E+01
.710000E+02	.140307E+02	.545773E+01	.926966E+01
.800000E+02	.489622E+01	.553512E+01	.965499E+01
.900000E+02	-.510217E+01	.562226E+01	.980393E+01
.100000E+03	-.149487E+02	.570810E+01	.965499E+01
.110000E+03	-.246545E+02	.579011E+01	.921268E+01
.120000E+03	-.342333E+02	.586600E+01	.849045E+01
.130000E+03	-.437014E+02	.593377E+01	.751025E+01
.140000E+03	-.530748E+02	.599165E+01	.630184E+01
.150000E+03	-.623729E+02	.603819E+01	.490196E+01
.160000E+03	-.716138E+02	.607226E+01	.335314E+01
.170000E+03	-.808165E+02	.609302E+01	.170243E+01
.180000E+03	-.900000E+02	.610000E+01	.102997E-06
.190000E+03	-.991835E+02	.609302E+01	-.170243E+01
.200000E+03	-.108386E+03	.607226E+01	-.335314E+01
.210000E+03	-.117627E+03	.603819E+01	-.490196E+01
.220000E+03	-.126925E+03	.599165E+01	-.630184E+01
.230000E+03	-.136299E+03	.593377E+01	-.751025E+01
.240000E+03	-.145767E+03	.586600E+01	-.849045E+01
.250000E+03	-.155346E+03	.579011E+01	-.921268E+01
.260000E+03	-.165051E+03	.570810E+01	-.965499E+01

.270000E+03	-.174896E+03	.562228E+01	-.980393E+01
.280000E+03	-.184896E+03	.553512E+01	-.965499E+01
.290000E+03	-.195054E+03	.544928E+01	-.921268E+01
.300000E+03	-.205373E+03	.536749E+01	-.849045E+01
.310000E+03	-.215850E+03	.529248E+01	-.751025E+01
.320000E+03	-.226475E+03	.522687E+01	-.630184E+01
.330000E+03	-.237230E+03	.517303E+01	-.490196E+01
.340000E+03	-.248091E+03	.513300E+01	-.335314E+01
.350000E+03	-.259026E+03	.510833E+01	-.170243E+01
.360000E+03	-.270000E+03	.510000E+01	-.244819E-07

DISMINUYASE RADIO

RADIO = 5.01000000

PSI (GRADOS)	THETA (GRADOS)	RHO (U. DE LONGITUD)	DESCENTRAMIENTO (PORCENTAJE)
0.	.900000E+02	.501000E+01	.256334E-09
.100000E+02	.790087E+02	.501835E+01	.173302E+01
.210000E+02	.669651E+02	.504639E+01	.357653E+01
.310000E+02	.560988E+02	.508794E+01	.514010E+01
.410000E+02	.453432E+02	.514312E+01	.654750E+01
.510000E+02	.347227E+02	.520985E+01	.775595E+01
.610000E+02	.242542E+02	.528572E+01	.872875E+01
.710000E+02	.139475E+02	.536807E+01	.943632E+01
.800000E+02	.481198E+01	.544548E+01	.982843E+01
.900000E+02	-.518506E+01	.553264E+01	.998005E+01
.100000E+03	-.150279E+02	.561844E+01	.982843E+01
.110000E+03	-.247279E+02	.570041E+01	.937818E+01
.120000E+03	-.342992E+02	.577625E+01	.864297E+01
.130000E+03	-.437580E+02	.584396E+01	.764516E+01
.140000E+03	-.531217E+02	.590178E+01	.641505E+01
.150000E+03	-.624088E+02	.594827E+01	.499002E+01
.160000E+03	-.716381E+02	.598229E+01	.341338E+01
.170000E+03	-.808287E+02	.600303E+01	.173302E+01
.180000E+03	-.900000E+02	.601000E+01	.108538E-06
.190000E+03	-.991713E+02	.600303E+01	-.173302E+01
.200000E+03	-.108362E+03	.598229E+01	-.341338E+01
.210000E+03	-.117591E+03	.594827E+01	-.499002E+01
.220000E+03	-.126878E+03	.590178E+01	-.641505E+01
.230000E+03	-.136242E+03	.584396E+01	-.764516E+01
.240000E+03	-.145701E+03	.577625E+01	-.864297E+01
.250000E+03	-.155272E+03	.570041E+01	-.937818E+01
.260000E+03	-.164972E+03	.561844E+01	-.982843E+01
.270000E+03	-.174615E+03	.553264E+01	-.998005E+01
.280000E+03	-.184612E+03	.544548E+01	-.982843E+01
.290000E+03	-.194971E+03	.535962E+01	-.937818E+01
.300000E+03	-.205294E+03	.527779E+01	-.864297E+01
.310000E+03	-.215778E+03	.520272E+01	-.764516E+01
.320000E+03	-.226413E+03	.513704E+01	-.641505E+01
.330000E+03	-.237181E+03	.508314E+01	-.499002E+01
.340000E+03	-.248057E+03	.504305E+01	-.341338E+01
.350000E+03	-.259009E+03	.501835E+01	-.173302E+01
.360000E+03	-.270000E+03	.501000E+01	-.142956E-07

DISMINUYASE RADIO

RADIO = 5.00100000

PSI (GRADOS)	THETA (GRADOS)	RHO (U. DE LONGITUD)	DESCENTRAMIENTO (PORCENTAJE)
0.	.900000E+02	.500100E+01	.256334E-09
.100000E+02	.790069E+02	.500935E+01	.173614E+01
.210000E+02	.669615E+02	.503740E+01	.358297E+01
.310000E+02	.560937E+02	.507895E+01	.514935E+01
.410000E+02	.453368E+02	.513414E+01	.655928E+01
.510000E+02	.347153E+02	.520068E+01	.776991E+01
.610000E+02	.242462E+02	.527675E+01	.874445E+01
.710000E+02	.139390E+02	.535911E+01	.945330E+01
.800000E+02	.480340E+01	.543652E+01	.984612E+01
.900000E+02	-.519349E+01	.552368E+01	.999801E+01
.100000E+03	-.150359E+02	.560948E+01	.984612E+01
.110000E+03	-.247353E+02	.569144E+01	.939505E+01
.120000E+03	-.343059E+02	.576728E+01	.865853E+01
.130000E+03	-.437037E+02	.583498E+01	.765892E+01
.140000E+03	-.531265E+02	.589279E+01	.642660E+01
.150000E+03	-.624124E+02	.593928E+01	.499900E+01
.160000E+03	-.716406E+02	.597330E+01	.341952E+01
.170000E+03	-.808300E+02	.599463E+01	.173614E+01
.180000E+03	-.900000E+02	.600100E+01	.928547E-07
.190000E+03	-.991700E+02	.599463E+01	-.173614E+01
.200000E+03	-.108359E+03	.597330E+01	-.341952E+01
.210000E+03	-.117588E+03	.593928E+01	-.499900E+01
.220000E+03	-.126874E+03	.589279E+01	-.642660E+01
.230000E+03	-.136236E+03	.583498E+01	-.765892E+01
.240000E+03	-.145694E+03	.576728E+01	-.865853E+01
.250000E+03	-.155265E+03	.569144E+01	-.939505E+01
.260000E+03	-.164964E+03	.560948E+01	-.984612E+01
.270000E+03	-.174807E+03	.552368E+01	-.999801E+01
.280000E+03	-.184803E+03	.543652E+01	-.984612E+01
.290000E+03	-.194962E+03	.535066E+01	-.939505E+01
.300000E+03	-.205286E+03	.526602E+01	-.865853E+01
.310000E+03	-.215771E+03	.519375E+01	-.765892E+01
.320000E+03	-.226407E+03	.512866E+01	-.642660E+01
.330000E+03	-.237176E+03	.507415E+01	-.499900E+01
.340000E+03	-.248053E+03	.503406E+01	-.341952E+01
.350000E+03	-.259007E+03	.500935E+01	-.173614E+01
.360000E+03	-.270006E+03	.500100E+01	-.847481E-08

DISMINUYASE RADIO

RADIO = 5.00010000

PSI (GRADOS)	THETA (GRADOS)	RHO (U. DE LONGITUD)	DESCENTRAMIENTO (PORCENTAJE)

0.	.900000E+02	.500010E+01	.256334E-09
.100000E+02	.790067E+02	.500845E+01	.173645E+01
.210000E+02	.669612E+02	.503650E+01	.358361E+01
.310000E+02	.560932E+02	.507805E+01	.515028E+01
.410000E+02	.453361E+02	.513324E+01	.656046E+01
.510000E+02	.347145E+02	.519998E+01	.777131E+01
.610000E+02	.242454E+02	.527565E+01	.874603E+01
.710000E+02	.139382E+02	.535821E+01	.945500E+01
.800000E+02	.480255E+01	.543563E+01	.984789E+01
.900000E+02	-.519434E+01	.552278E+01	.999981E+01
.100000E+03	-.150368E+02	.560658E+01	.984789E+01
.110000E+03	-.247361E+02	.569054E+01	.939675E+01
.120000E+03	-.343065E+02	.576638E+01	.866009E+01
.130000E+03	-.437043E+02	.583408E+01	.766030E+01
.140000E+03	-.531270E+02	.589190E+01	.642775E+01
.150000E+03	-.624128E+02	.593838E+01	.499990E+01
.160000E+03	-.716406E+02	.597240E+01	.342014E+01
.170000E+03	-.808301E+02	.599313E+01	.173645E+01
.180000E+03	-.900000E+02	.600010E+01	.110320E-06
.190000E+03	-.991699E+02	.599313E+01	-.173645E+01
.200000E+03	-.108359E+03	.597240E+01	-.342014E+01
.210000E+03	-.117587E+03	.593838E+01	-.499990E+01
.220000E+03	-.126873E+03	.589190E+01	-.642775E+01
.230000E+03	-.136236E+03	.583408E+01	-.766030E+01
.240000E+03	-.145693E+03	.576638E+01	-.866009E+01
.250000E+03	-.155264E+03	.569054E+01	-.939675E+01
.260000E+03	-.164963E+03	.560658E+01	-.984789E+01
.270000E+03	-.174806E+03	.552278E+01	-.999981E+01
.280000E+03	-.184803E+03	.543563E+01	-.984789E+01
.290000E+03	-.194961E+03	.534976E+01	-.939675E+01
.300000E+03	-.205285E+03	.526793E+01	-.866009E+01
.310000E+03	-.215770E+03	.519285E+01	-.766030E+01
.320000E+03	-.226406E+03	.512716E+01	-.642775E+01
.330000E+03	-.237175E+03	.507325E+01	-.499990E+01
.340000E+03	-.248053E+03	.503316E+01	-.342014E+01
.350000E+03	-.259007E+03	.500845E+01	-.173645E+01
.360000E+03	-.270000E+03	.500010E+01	-.273923E-07

DISMINUYASE RADIO

RADIO = 5.00001000

PSI (GRADOS)	THETA (GRADOS)	RHO (U. DE LONGITUD)	DESCENTRAMIENTO (PORCENTAJE)
0.	.900000E+02	.500001E+01	.256334E-09
.100000E+02	.790067E+02	.500836E+01	.173648E+01
.210000E+02	.669611E+02	.503641E+01	.358367E+01
.310000E+02	.560931E+02	.507796E+01	.515037E+01
.410000E+02	.453361E+02	.513315E+01	.656058E+01
.510000E+02	.347145E+02	.519989E+01	.777145E+01
.610000E+02	.242453E+02	.527576E+01	.874619E+01
.710000E+02	.139381E+02	.535812E+01	.945517E+01
.800000E+02	.480246E+01	.543554E+01	.984807E+01
.900000E+02	-.519442E+01	.552269E+01	.999999E+01
.100000E+03	-.150368E+02	.560649E+01	.984807E+01

.110000E+03	-.247502E+02	.569045E+01	.939691E+01
.120000E+03	-.343606E+02	.576629E+01	.866024E+01
.130000E+03	-.437044E+02	.583399E+01	.766043E+01
.140000E+03	-.532270E+02	.589151E+01	.642787E+01
.150000E+03	-.624128E+02	.593829E+01	.499999E+01
.160000E+03	-.716401E+02	.597231E+01	.342020E+01
.170000E+03	-.808301E+02	.599304E+01	.173648E+01
.180000E+03	-.900001E+02	.600001E+01	.115559E-06
.190000E+03	-.991699E+02	.599304E+01	-.173648E+01
.200000E+03	-.108356E+03	.597231E+01	-.342020E+01
.210000E+03	-.117587E+03	.593829E+01	-.499999E+01
.220000E+03	-.126873E+03	.589151E+01	-.642787E+01
.230000E+03	-.136236E+03	.583399E+01	-.766043E+01
.240000E+03	-.145693E+03	.576629E+01	-.866024E+01
.250000E+03	-.155264E+03	.569045E+01	-.939691E+01
.260000E+03	-.164963E+03	.560849E+01	-.984807E+01
.270000E+03	-.174806E+03	.552269E+01	-.999999E+01
.280000E+03	-.184803E+03	.543554E+01	-.984807E+01
.290000E+03	-.194961E+03	.534967E+01	-.939691E+01
.300000E+03	-.205265E+03	.526784E+01	-.866024E+01
.310000E+03	-.215770E+03	.519276E+01	-.766043E+01
.320000E+03	-.226406E+03	.512707E+01	-.642787E+01
.330000E+03	-.237175E+03	.507316E+01	-.499999E+01
.340000E+03	-.248053E+03	.503307E+01	-.342020E+01
.350000E+03	-.259007E+03	.500836E+01	-.173648E+01
.360000E+03	-.270000E+03	.500001E+01	-.346683E-07

DISMINUYASE RADIO

RADIO = 5.00000100

PSI (GRADOS)	THETA (GRADOS)	RHO (U. DE LONGITUD)	DESCENTRAMIENTO (PORCENTAJE)
0.	.900000E+02	.500000E+01	.256334E-09
.100000E+02	.790067E+02	.500835E+01	.173648E+01
.210000E+02	.680111E+02	.503640E+01	.358368E+01
.310000E+02	.569931E+02	.507795E+01	.515038E+01
.410000E+02	.453361E+02	.513314E+01	.656059E+01
.510000E+02	.347147E+02	.519968E+01	.777146E+01
.610000E+02	.242453E+02	.527575E+01	.874620E+01
.710000E+02	.139381E+02	.535811E+01	.945519E+01
.800000E+02	.462245E+01	.543553E+01	.984808E+01
.900000E+02	-.519443E+01	.552268E+01	.100000E+02

EL DESCENTRAMIENTO ES DEMASIADO GRANDE

RADIO = 5.00000200

PSI (GRADOS)	THETA (GRADOS)	RHO (U. DE LONGITUD)	DESCENTRAMIENTO (PORCENTAJE)

0.	.900000E+02	.500000E+01	.256334E-09
.100000E+02	.790067E+02	.500835E+01	.173648E+01
.210000E+02	.680111E+02	.503640E+01	.358368E+01
.310000E+02	.569931E+02	.507795E+01	.515038E+01
.410000E+02	.453361E+02	.513314E+01	.656059E+01
.510000E+02	.347144E+02	.519968E+01	.777146E+01
.610000E+02	.242453E+02	.527575E+01	.874620E+01
.710000E+02	.139381E+02	.535812E+01	.945519E+01
.800000E+02	.462245E+01	.543553E+01	.984808E+01
.900000E+02	-.519443E+01	.552268E+01	.100000E+02

EL DESCENTRAMIENTO ES DEMASIADO GRANDE

RADIO = 5.00000[illegible]

PSI (GRADOS)	THETA (GRADOS)	RHO (U. DE LONGITUD)	DESCENTRAMIENTO (PORCENTAJE)
0.	.900000E+02	.500000E+01	.256334E-09
.100000E+02	.790067E+02	.500835E+01	.173648E+01
.210000E+02	.680111E+02	.503640E+01	.358368E+01
.310000E+02	.569931E+02	.507795E+01	.515038E+01
.410000E+02	.453361E+02	.513314E+01	.656059E+01
.510000E+02	.347144E+02	.519968E+01	.777146E+01
.610000E+02	.242453E+02	.527575E+01	.874620E+01
.710000E+02	.139381E+02	.535812E+01	.945519E+01
.800000E+02	.462245E+01	.543553E+01	.984808E+01
.900000E+02	-.519443E+01	.552268E+01	.100000E+02

EL DESCENTRAMIENTO ES DEMASIADO GRANDE

RADIO = 5.00000[illegible]

PSI (GRADOS)	THETA (GRADOS)	RHO (U. DE LONGITUD)	DESCENTRAMIENTO (PORCENTAJE)
0.	.900000E+02	.500000E+01	.256334E-09
.100000E+02	.790067E+02	.500835E+01	.173648E+01
.210000E+02	.680111E+02	.503640E+01	.358368E+01
.310000E+02	.569931E+02	.507795E+01	.515038E+01
.410000E+02	.453361E+02	.513314E+01	.656059E+01
.510000E+02	.347147E+02	.519968E+01	.777146E+01
.610000E+02	.242453E+02	.527576E+01	.874620E+01
.710000E+02	.139381E+02	.535812E+01	.945519E+01
.800000E+02	.462245E+01	.543553E+01	.984808E+01
.900000E+02	-.519443E+01	.552268E+01	.100000E+02
.100000E+03	-.156[illegible]E+02	.560849E+01	.984808E+01
.110000E+03	-.247502E+02	.569045E+01	.939693E+01
.120000E+03	-.343606E+02	.576629E+01	.866025E+01

.130000E+03	-.437044E+02	.583399E+01	.766044E+01
.140000E+03	-.531270E+02	.589180E+01	.642788E+01
.150000E+03	-.624129E+02	.593828E+01	.500000E+01
.160000E+03	-.716408E+02	.597230E+01	.342020E+01
.170000E+03	-.808301E+02	.599304E+01	.173648E+01
.180000E+03	-.900000E+02	.600000E+01	.105081E-06
.190000E+03	-.991699E+02	.599304E+01	-.173648E+01
.200000E+03	-.108359E+03	.597230E+01	-.342020E+01
.210000E+03	-.117587E+03	.593828E+01	-.500000E+01
.220000E+03	-.126073E+03	.589180E+01	-.642788E+01
.230000E+03	-.136236E+03	.583399E+01	-.766044E+01
.240000E+03	-.145693E+03	.576629E+01	-.866025E+01
.250000E+03	-.155264E+03	.569044E+01	-.939693E+01
.260000E+03	-.164963E+03	.560849E+01	-.984808E+01
.270000E+03	-.174806E+03	.552268E+01	-.100000E+02
.280000E+03	-.184602E+03	.543553E+01	-.984808E+01
.290000E+03	-.194961E+03	.534967E+01	-.939693E+01
.300000E+03	-.205285E+03	.526783E+01	-.866025E+01
.310000E+03	-.215770E+03	.519276E+01	-.766044E+01
.320000E+03	-.226406E+03	.512707E+01	-.642788E+01
.330000E+03	-.237175E+03	.507315E+01	-.500000E+01
.340000E+03	-.248053E+03	.503306E+01	-.342020E+01
.350000E+03	-.259007E+03	.500835E+01	-.173648E+01
.360000E+03	-.270000E+03	.500000E+01	-.556443E-08

ESTE ES EL DISENO OPTIMO

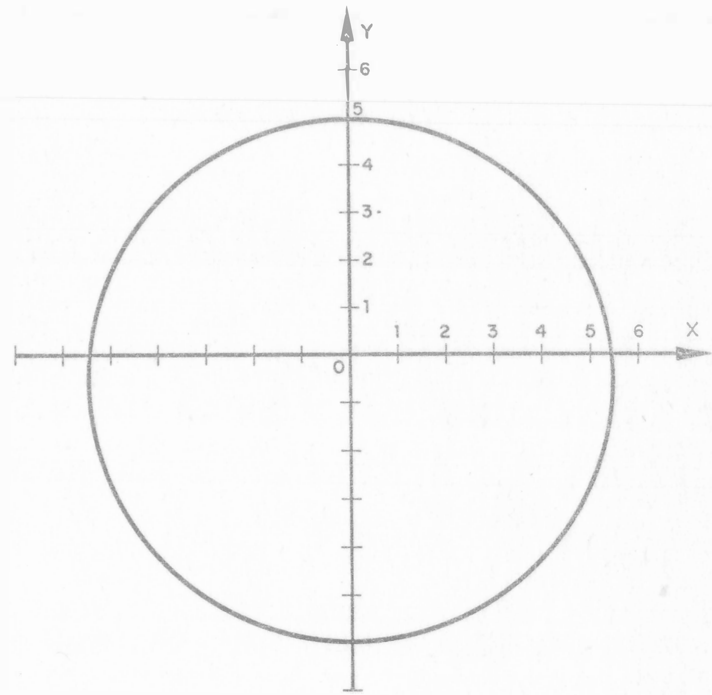


Fig B.8 Leva óptima para un seguidor de cara plana