



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

**FACULTAD DE INGENIERÍA**

**FLEXIÓN Y CARGA AXIAL DE MECÁNICA DE  
MATERIALES II**

**ARTURO SOTO JUÁREZ**

## INDICE

1. INTRODUCCION
  2. FLEXOTENSION Y FLEXOCOMPRESION  
Ejemplo 1
  3. CONCEPTO DE INTERACCION
    - 3.1 Diagrama de interacción
    - 3.2 Traza de diagramas de interacción
      - 3.2.1 Diagrama de interacción para el inicio de la fluencia
      - 3.2.2 Diagrama de Interacción para la resistencia última  
Ejemplo 2
  4. FLEXION BIAXIAL CON CARGAS AXIALES  
Ejemplo 3  
Ejemplo 4
  5. NUCLEO CENTRAL DE UNA SECCION TRANSVERSAL  
Ejemplo 5
  6. MUROS DE RETENCION
    - 6.1 Elementos que intervienen en la construcción de los muros de retención
    - 6.2 Fuerzas que intervienen en el cálculo de los muros de retención
    - 6.3 Cálculo de estabilidad de muros de retención  
Ejemplo 6  
Ejemplo 7
- REFERENCIAS
- ANEXO (1) Cálculo de volúmenes de esfuerzo y de sus centros de gravedad

605545

APUNTE 147

FACULTAD DE INGENIERIA UNAM.



605545

G.- 605545

## MIEMBROS SUJETOS A FLEXION Y CARGA AXIAL

### 1. INTRODUCCION

En los capítulos anteriores se analizó la acción de las cargas axiales, fuerzas cortantes, momentos flexionantes y momentos torsionantes actuando en forma independiente. Se establecieron las expresiones que permiten calcular los esfuerzos producidos por estas acciones al actuar en elementos estructurales tales como columnas, vigas, muros, etc., para materiales con comportamiento elástico lineal. Las expresiones empleadas se indican a continuación:

$$\text{Esfuerzo axial} \quad f = \frac{P}{A}$$

$$\text{Esfuerzo cortante} \quad v = \frac{VQ}{I t}$$

$$\text{Esfuerzo normal debido a flexión} \quad f = \frac{M_y}{I}$$

$$\text{Esfuerzo cortante debido a torsión} \quad \tau = \frac{T_c}{J}$$

En este capítulo se le dará especial atención a la acción de la carga axial y el momento flexionante cuando estos se presentan simultáneamente en una sección de un elemento estructural cualquiera. La carga axial podrá ser de tensión o compresión y el momento flexionante podrá actuar alrededor de uno o de ambos planos de simetría de la sección. Asimismo se presentan los conceptos de núcleo central y de interacción y como una aplicación de los conceptos antes expuestos se ilustra la forma de revisar y dimensionar muros de retención.

605545

## 2. FLEXOTENSION Y FLEXOCOMPRESION

Para ilustrar el efecto de la acción combinada de la carga axial y del momento flexionante considérese la viga en voladizo mostrada en la fig 1-a en la que actúa una fuerza inclinada  $F$ .

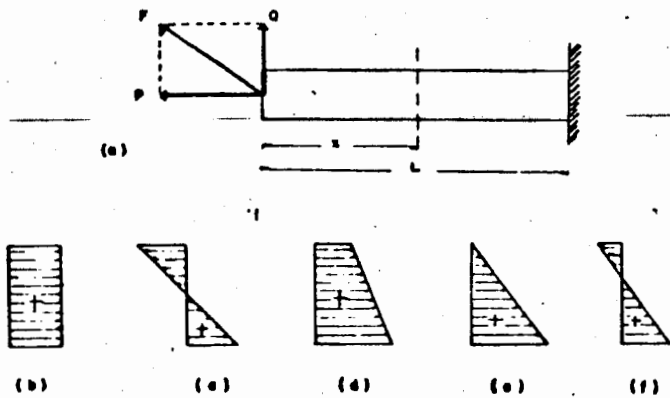


fig. 1

Esta carga se puede descomponer en una fuerza transversal  $Q$ , y una fuerza axial de tensión  $P$ .

Para determinar las esfuerzos producidos en la viga por estas fuerzas es necesario distinguir entre dos posibilidades: 1) La viga puede ser de longitud corta en relación con su altura, por lo que resulta relativamente rígida a la flexión. En este caso las deformaciones por flexión serán pequeñas y solo producirán un cambio insignificante en la línea de acción de la fuerza axial,  $P$ . Para estos casos los esfuerzos debidos a  $P$  y a  $Q$  se calculan independientemente y luego se superponen. 2) La viga puede ser relativamente delgada y flexible, en cuyo caso las deformaciones por flexión pueden ser suficientemente grandes para producir un cambio en la línea de acción de la carga axial  $P$ . Esta fuerza producirá entonces momentos flexionantes adicionales en la viga que hacen que la superposición de los efectos de la carga axial y del momento flexionante, calculados en forma independiente, no sea válida.

En este capítulo solo se estudiarán barras que sean relativamente rígidas y cumplan con las condiciones descritas en 1). Los elementos estructurales cuyo comportamiento cumple con las condiciones descritas en 2). Se estudiarán en el capítulo efectos de esbeltez.

Los efectos resultantes en una sección recta de la viga de la fig 1-a, situada a una distancia  $X$  del extremo libre se obtiene superponiendo los esfuerzos axiales debidos a  $P$  y los de flexión debidos a  $Q$ , cuya distribución de esfuerzos es muestra en forma separada en la fig 1-b y 1-c respectivamente. Los esfuerzos finales, indicados en la fig 1-d se hallan con la siguiente ecuación:

$$f = \frac{P}{A} \pm \frac{M}{I} \quad (1)$$

donde  $P$  es la carga axial y  $M$  el momento flexionante en la sección considerada. Para la viga cantiléver mostrada se tiene que  $M = Q ( x )$ .

Obsérvese que para la viga de la fig 1-a, la carga axial es de tensión, por lo tanto, y de acuerdo con la convención de signos escogida, los esfuerzos que originan serán positivos fig 1-b, por otra parte el momento flexionante producido por carga  $Q$  también será positivo por lo que originará esfuerzos de compresión, negativos, en la parte superior de la sección y de tensión, positivos, en la parte inferior de la misma, fig 1-c.

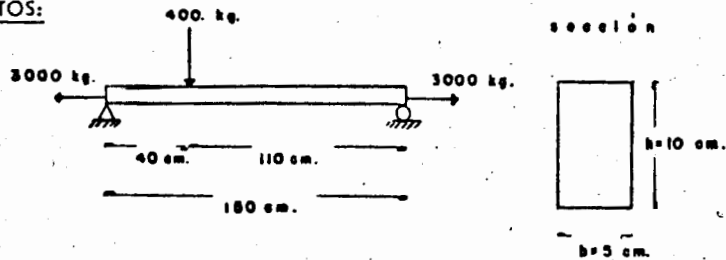
La distribución final de esfuerzos dependerá de los valores algebraicos relativos de los términos de la ecuación. La distribución puede ser tal que toda la sección esté en tensión como se muestra en la fig 1-d; o puede ser dicha distribución triangular, fig 1-e; o bien la sección puede estar una parte en tensión y otra en compresión, fig 1-f. En todos los casos de flexión y carga axial combinadas es claro que el eje neutro de la sección recta (es decir la línea de esfuerzo cero) ya no pasa por el centroide, y aún puede quedar fuera de la sección.

#### EJEMPLO 1 Combinación de esfuerzos

En este ejemplo se enfatiza el método de superposición de efectos el cual es válido cuando el material está en el rango elástico, la viga que se presenta esta sujeta a la acción de un sistema de fuerzas formado por una carga axial, de tensión, en la dirección del eje longitudinal de la viga, y una carga transversal a dicho eje. Estas cargas originan esfuerzos normales; siendo la distribución de esfuerzos debidos a carga axial uniforme a lo largo de la viga, los esfuerzos normales máximos se presentan en la sección donde ocurra el momento flexionante máximo. En el ejemplo se presenta la distribución de esfuerzos normales en la sección transversal debidos a cada una de las cargas, así como la acción conjunta de las mismas.

**EJEMPLO 1** Cálculo de esfuerzos combinados en una sección, de una viga simplemente apoyada, sometida a carga axial y momento flexionante.

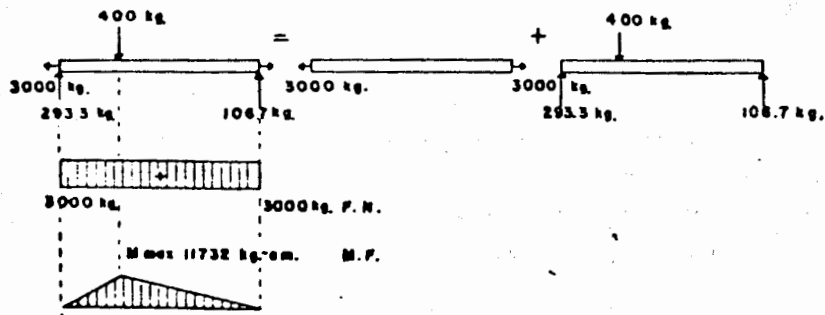
**DATOS:**



- Encontrar los esfuerzos máximos de tensión y compresión, debidos a la acción simultánea de la flexión y carga axial
- Diagrama de esfuerzos combinados

**SOLUCION:**

Diagramas de fuerza normal y momento flexionante



**EJEMPLO 1** (Continuación)

Momento de inercia de la sección transversal

$$I = \frac{b \times h^3}{12} = \frac{5 \times 10^3}{12} = 416.7 \text{ cm}^4$$

Módulo de sección

$$S = \frac{I}{C} = \frac{416.7}{5} = 83.34 \text{ cm}^3$$

Cálculo de esfuerzos

Esfuerzo normal debido a la carga axial

$$f_a = \frac{P}{A} = \frac{3000}{5 \times 10} = 60.0 \text{ kg/cm}^2 \text{ (Tensión)}$$

Esfuerzo normal máximo debido a flexión

$$f_f = \pm \frac{M}{S} = \frac{11732.0}{83.34} = \pm 104.8 \text{ kg/cm}^2$$

Combinación de esfuerzos

Esfuerzo máximo de tensión:

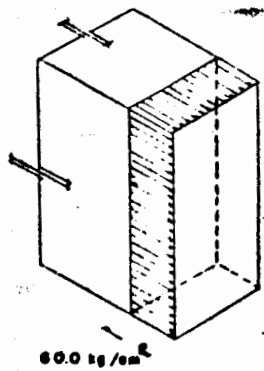
$$f_{\text{máx}_t} = \frac{P}{S} + \frac{M}{S} = 60.0 + 104.8 = 164.8 \text{ kg/cm}^2$$

Esfuerzo máximo de compresión

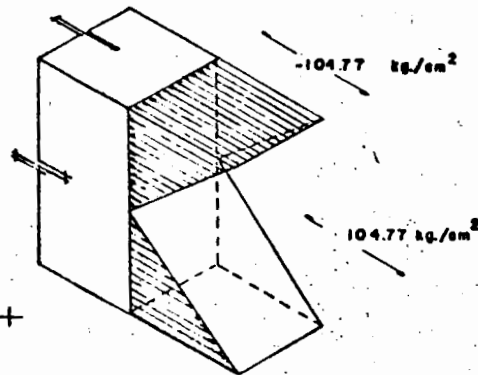
$$f_{\text{máx}_c} = \frac{P}{A} - \frac{M}{S} = 60.0 - 104.8 = -44.8 \text{ kg/cm}^2$$

**EJEMPLO 1** (Continuación)

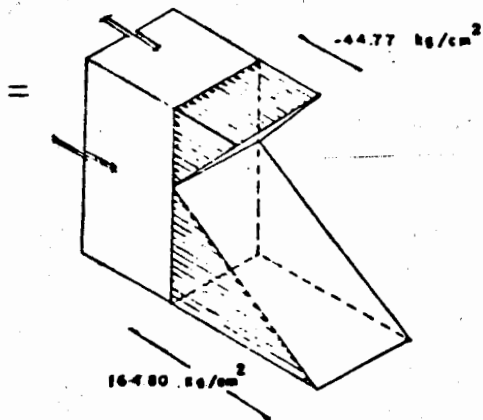
a) Esfuerzo normal debido a cargo axial.



b) Esfuerzo normal debido a la flexión.



c) Combinación de esfuerzos



**3. CONCEPTO DE INTERACCION**

Si se considera el problema general de encontrar la resistencia de un elemento de un material cualquiera sujeto a la acción combinada de una carga axial y un momento flexionante, se encontrará que dicha resistencia dependerá del valor relativo de estas dos acciones y del comportamiento del material bajo los esfuerzos originados.

La acción conjunta de la carga axial y el momento flexionante, que se presentan en la fig 2-a, es equivalente a la acción de una fuerza  $P$ , de la misma magnitud tal que el producto  $P_e$  sea igual al momento  $M$ , fig 2-b.

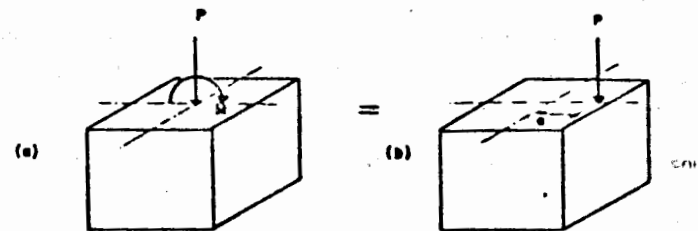


fig. 2 flexocompresión

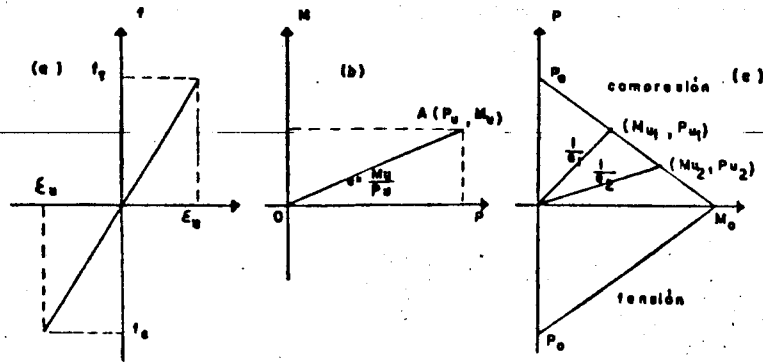


fig. 3 concepto de interacción

Para una excentricidad constante,  $e_1$  y para un material elástico, fig 3-a, el valor del momento será proporcional al de la carga y la historia de carga de un elemento cualquiera está representada, en un plano limitado por ejes coordenados  $P - M$ , por la línea  $O - A$  desde una carga y momento iguales a cero en  $O$  hasta un punto  $A$  para el cual la combinación de la carga axial  $P_u$  y el momento flexionante  $M_u$ , hacen que se alcance la capacidad última del material, fig 3-b.

La resistencia del elemento en cuestión se puede alcanzar por una infinidad de combinaciones de carga axial y momento flexionante cuyos valores dependerá de la excentricidad que se tenga: Desde una carga axial máxima  $P_0$  y un momento flexionante nulo y por lo tanto una excentricidad igual a cero, hasta una carga axial nula y un momento flexionante máximo  $M_0$  que corresponde a una excentricidad infinita, fig 3-c.

### 3.1 Diagrama de Interacción

Diagrama de Interacción de un elemento estructural cualquiera sujeto a flexión

y carga axial es el lugar geométrico de los combinaciones de carga axial y momento flexionante que permite alcanzar un estado de esfuerzos determinado, que por lo general es su resistencia última.

Dado que la carga axial puede ser de tensión o de compresión los diagramas de interacción deberán de representar el comportamiento del elemento bajo ambas acciones.

### 3.2 Trazo de diagramas de interacción

Para ilustrar la forma de calcular y trazar un diagrama de interacción de un elemento estructural sujeta a flexocompresión, considérese una sección rectangular de un material elastoplástico y con comportamiento similar en tensión y compresión. Primero se determinará el diagrama de interacción para un estado tal que la fibra más esforzada de la sección alcance el esfuerzo de fluencia (comportamiento elástico lineal) y posteriormente el diagrama de interacción cuando la sección se encuentra totalmente plastificada.

#### 3.2.1 Diagrama de interacción para el inicio de la fluencia

En la fig 4 se muestra la parte del comportamiento elástico del material, así como la sección rectangular de ancho  $b$  y peralte  $h$  la cual está sujeta a la acción de una carga axial  $P_1$  de tensión y un momento flexionante positivo  $M_1$ , tales que la fibra más esforzada alcanza el esfuerzo de fluencia.



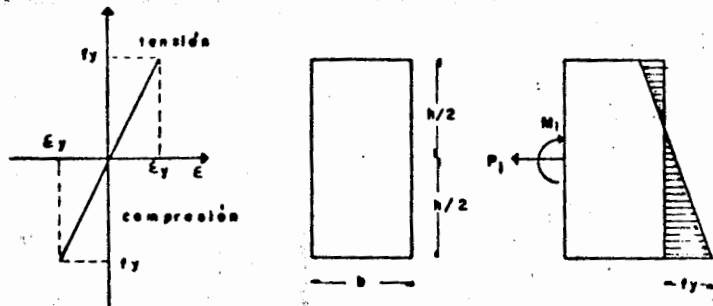


Fig. 4 elemento sujeto a flexotensión, rango elástico

El esfuerzo máximo que se presenta en la sección se puede calcular con la expresión:

$$f_{\text{máx}} = f_y = \frac{P_1}{A} + \frac{M_1}{I} c \quad (2)$$

Si la carga axial actuará sola la fuerza  $P$  que originaría la fluencia sería

$P_y = A f_y$ ; si el momento fuese la única acción, el momento que inicia la fluencia sería  $M_y = \frac{I}{c} f_y$ . Si se divide ambos miembros de la ecuación (2) entre  $f_y$  se tendría

$$\frac{f_y}{f_y} = \frac{P_1}{A f_y} + \frac{M_1}{\frac{I}{c} f_y} \quad (3)$$

Sustituyendo en (3) los valores equivalentes se llega a la expresión

$$\frac{P_1}{P_y} + \frac{M_1}{M_y} = 1 \quad (4)$$

Esta ecuación establece la relación entre  $P_1$  y  $M_1$  que hace que se alcance el esfuerzo de fluencia en la fibra más esforzada de la sección. Como se puede observar la ecuación representa a una recta y el trazo de la misma constituye la parte del diagrama de interacción de un elemento sujeto a flexo-tensión, fig 5.

Si la carga axial fuese de compresión la expresión (4) se transformaría a:

$$-\frac{P_1}{P_y} + \frac{M_1}{M_y} = 1 \quad (5)$$

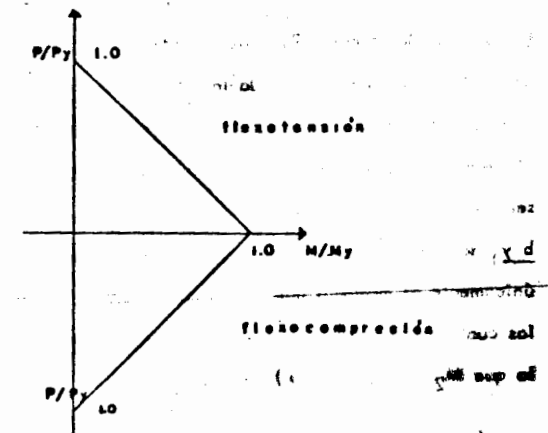


Fig. 5 diagrama de interacción de una sección rectangular de un material elástico lineal

### 3.2.2 Diagrama de interacción para la resistencia última

En la fig 6 se presenta el comportamiento elastoplástico del material; también se presenta la sección de ancho  $b$  y peralte  $h$  y la acción de una carga axial de

tensión  $P_2$  y de un momento flexionante positivo  $M_2$ , tales que la sección se encuentra totalmente plastificada.

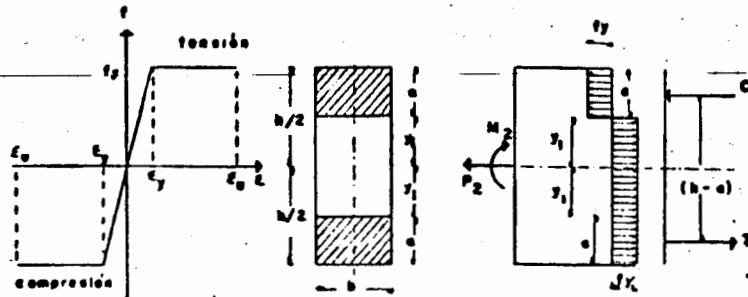


fig. 6 elemento sujeto a flexotensión, rango elástico

Los valores de la carga  $P_2$  y del momento  $M_2$  que actúan en la sección se pueden determinar fácilmente dada la simetría de la sección así  $P_2 = 2y_1 bfy$ , ya que la fuerza que se produce al actuar el esfuerzo  $f_y$  sobre el área sombreada  $ab$  será igual y de sentido contrario a la originada en la parte inferior de la sección. Por otra parte los momentos originados por las fuerzas de las áreas  $b y_1$  son iguales y de sentido contrario por lo que el momento  $M_2$  será igual únicamente al momento que producen las fuerzas de las áreas  $ab = (\frac{h}{2} - y_1) b$  las cuales serán  $C = T = abfy$  y el brazo de este momento igual a  $\frac{h-a}{2}$ , por lo que  $M_2 = abfy(h-a)$

$$\text{siendo } P_2 = 2y_1 bfy \quad y_1 = \frac{P_2}{2 bfy}$$

$$y \quad a = \frac{h}{2} - y_1$$

$$M_2 = \left(\frac{h}{2} - y_1\right) bfy \left(h - \left(\frac{h}{2} - y_1\right)\right) = bfy \left(\frac{h^2}{2} - y_1^2\right)$$

$$M_2 = \frac{b h^2}{4} fy - b y_1^2 fy$$

Cuando en una sección rectangular actúa únicamente la flexión, fig 7, el momento último de un material con comportamiento elastoplástico es igual a

$$M_p = \frac{b h^2}{4} fy$$

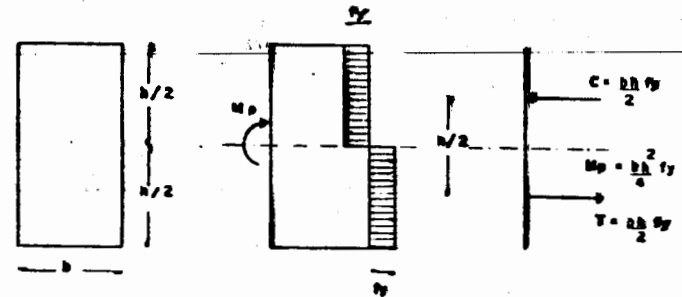


fig. 7 elemento rectangular sujeto a flexión, sección totalmente plastificada

$$\text{por lo que } M_p = \frac{3}{2} M_y$$

$$\text{y } M_2 = \frac{3}{2} M_y - b y_1^2 fy$$

Sustituyendo el valor de  $y_1$

$$M_2 = \frac{3}{2} M_y - b fy \frac{P_2^2}{4 b^2 fy^2} = \frac{3}{2} M_y - \frac{P_2^2}{4 b fy}$$

Dividiendo entre  $M_p = \frac{3}{2} M_y = \frac{b h^2}{4} fy$  y teniendo en cuenta que

$$P_y = b hfy \text{ se tiene}$$

$$\frac{M_2}{\frac{3}{2} M_y} = 1 - \frac{P_2^2}{b^2 h^2 fy^2} = 1 - \frac{P_2^2}{P_y^2}$$

por lo que

$$\frac{2 M_2}{3 M_y} + \left(\frac{P_2}{P_y}\right)^2 = 1$$

Como se puede observar la ecuación es de segundo orden y su trazo representa el diagrama de interacción correspondiente, fig 8.

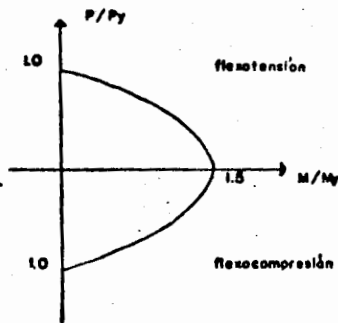


fig. 8 diagrama de interacción de una sección rectangular de un material elasto-plástico

### EJEMPLO 2 Diagrama de interacción

En este ejemplo se trata de encontrar los diagramas de interacción, tanto en el rango elástico como en el plástico, para una sección triangular de acero con comportamiento elasto-plástico y un esfuerzo de fluencia de  $f_y = 4000 \text{ kg/cm}^2$ , a tensión y a compresión.

Para encontrar el diagrama correspondiente al rango elástico se considera la posición del eje neutro en un punto cualquiera, como el situado a una distancia  $c$  del vértice. Siendo lineal la variación de esfuerzos, al actuar la distribución triangular sobre el área total de la sección, se generan dos volúmenes, uno representa la fuerza de compresión y el otro la de tensión, ( $F_1$  y  $F_2$  respectivamente para este ejemplo) la diferencia entre ellas es la fuerza equilibrante (carga axial).

Para determinar el momento actuante es necesario encontrar la posición de estas fuerzas, con respecto al eje centroidal: la fuerza equilibrante debido a que pasa por el centroide no producirá momento. La forma de calcular los vo-

lúmenes generados así como la posición de los centroides de los mismos, para la determinación de  $F_1$ ,  $F_2$ , y  $M$  respectivamente, se presenta en el anexo 1. Haciendo variar la posición del eje neutro se obtendrán diferentes combinaciones de momento y carga axial que conducen a la condición de esfuerzos buscada, que en este caso es el inicio de la fluencia ya sea en tensión o en compresión. Como puntos característicos del diagrama se pueden señalar el punto 1 correspondiente a una carga axial de tensión y por tanto se calculará como tal, el punto 2 para una carga axial de compresión, el punto 3, cuando la carga axial es nula y solo existe momento flexionante (flexión pura) y el punto 4 correspondiente a la combinación de carga axial y momento que permite alcanzar el máximo momento flexionante aplicable y que no coincide con el caso en que la carga axial es nula.

Debe observarse que no obstante que la sección es triangular la variación de las combinaciones de carga axial y momento es lineal.

El diagrama de interacción en el rango plástico, se obtiene de forma similar. La distribución de esfuerzos que en este caso es uniforme genera volúmenes de esfuerzo, cuya valuación y determinación de los centroides correspondientes es mucho más sencilla que para el rango elástico, ya que los volúmenes son dos prismas, uno triangular y otro trapecial más fáciles de calcular.

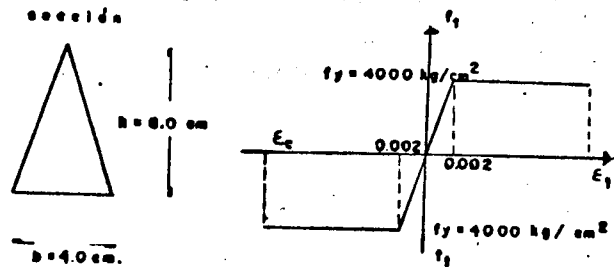
En forma similar al diagrama de interacción elástico la fuerza axial será la equilibrante de las fuerzas generadas por los volúmenes de esfuerzo y el momento último aplicable puede calcularse tomando momentos de las fuerzas respecto a un eje que pase por el centroide.

El diagrama de interacción correspondiente mostrado en la misma figura presenta una variación no lineal, obsérvese que tanto la carga axial de tensión como la de compresión coincide con las correspondientes del rango elástico y que el mo-

mento máximo que se puede aplicar no corresponde al caso en el que no existe carga axial.

EJEMPLO 2 Obtención del diagrama de Interacción para una sección de un material elastoplástico

DATOS:



SE PIDE

- Encontrar el diagrama de Interacción, cuando el material se encuentra en el rango elástico
- Determinar el diagrama de Interacción correspondiente al material totalmente plastificado

SOLUCION

a) Rango elástico

Punto 1)

— Con carga axial de tensión y momento flexionante igual a cero

$$P_{yt} = f_{yt} \cdot A = 4000 \times (6 \times 4/2) = 48000 \text{ kg}$$

Punto 2)

— Con carga axial de compresión y momento flexionante igual a cero

$$P_{yc} = f_{yc} \cdot A = 4000 \times (6 \times 4/2) = 48000 \text{ kg}$$

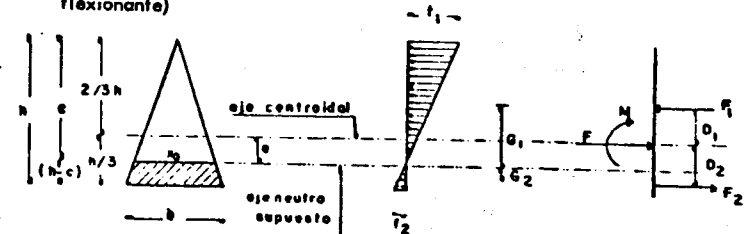
EJEMPLO 2 (Continuación)

Punto 3

— Con momento flexionante de fluencia y carga axial igual a cero (flexión pura)

$$M_y = f_y \frac{I}{C} = f_y \left( \frac{b \times h^3}{36} \right) / (2/3h) \\ = \frac{4000 \times 4 \times 6^2 \times 3}{36 \times 2} = 24000 \text{ kg-cm.}$$

— Para cualquier posición del eje neutro (con carga axial y momento flexionante)



$$F_1 = \frac{f_1 X_0}{6} c$$

$$F_2 = \frac{f_2 (h-c)}{6} (2b + X_0)$$

$$G_1 = \frac{c}{2}$$

$$G_2 = (h-c) - (h-c) \frac{(X_0 + b)}{2(X_0 + 2b)}$$

$$D_1 = G_1 \pm e$$

$$D_2 = G_2 \pm e$$

$$F = F_1 - F_2$$

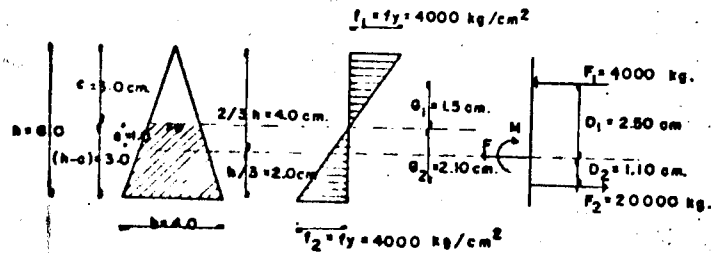
$$M = F_1 D_1 + F_2 D_2$$

(Para la deducción de estas expresiones ver el anexo 1)

EJEMPLO 2 (Continuación)

Punto 4

Supóngase el eje neutro a  $h/2 = 3.00$  cm



$$\frac{X_o}{b} = \frac{c}{h} \quad \therefore \quad X_o = \frac{b}{h} c = \frac{4.0}{6.0} \times 3.0 = 2.0 \text{ cm}$$

$$F_1 = \frac{(4000)(2.0)}{6} (3.0) = 4000 \text{ kg}$$

$$F_2 = \frac{(4000)(2.0)}{6} ((2)(4) + 2.0) = 20000 \text{ kg}$$

$$F = F_1 - F_2 = -4000.0 + 20000.0 = 16000 \text{ (tensión)}$$

$$G_1 = \frac{3.0}{2} = 1.5 \text{ cm}$$

$$G_2 = (3.0) - (3.0) \frac{(2.0 + 4.0)}{2(2.0 + 2.0(4.0))} = 2.10 \text{ cm}$$

$$D_1 = G_1 + e = 1.50 + 1.0 = 2.50 \text{ cm}$$

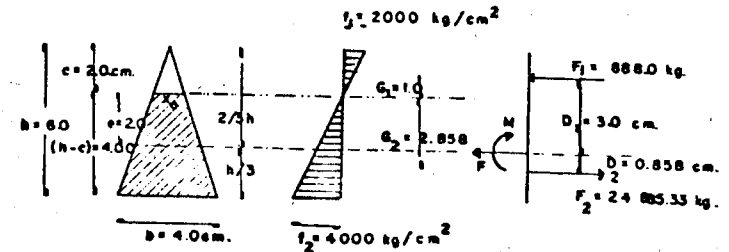
EJEMPLO 2 (Continuación)

$$D_2 = G_2 - e = 2.10 - 1.0 = 1.0 \text{ cm}$$

$$M = F_1 D_1 + F_2 D_2 = 4000 \times 2.50 + 20000 \times 1.10 = 32000.00 \text{ kg-cm}$$

Punto 5

Supóngase el eje neutro a 4.00 cm de la base



$$\frac{X_o}{b} = \frac{c}{h} \quad \therefore \quad X_o = \frac{c}{h} b = \frac{2.0}{6.0} (4.0) = 1.333 \text{ cm}$$

$$\frac{f_1}{2.0} = \frac{4000}{4.0} \quad \therefore \quad f_1 = \frac{2.0 \times 4000}{4.0} = 2000 \text{ kg/cm}^2$$

$$F_1 = \frac{(2000)(1.33)}{6} (2.0) = 888.0 \text{ kg}$$

$$F_2 = \frac{(4000)(4.0)}{6} ((2.0)(4.0) + 1.33) = 24885.33 \text{ kg}$$

## EJEMPLO 2 (Continuación)

$$F = F_1 - F_2 = -888.00 + 24885.33 = + 23997.33 \text{ (Tensión)}$$

$$G_1 = \frac{2.0}{2} = 1.0 \text{ cm}$$

$$G_2 = 4.0 - \frac{4.0 (1.33 + 4.0)}{2 (1.33 + 2 (4.0))} = 2.86 \text{ cm}$$

$$D_1 = G_1 + e = 1.0 + 2.0 = 3.0 \text{ cm}$$

$$D_2 = G_2 - e = 2.858 - 2.0 = 0.86 \text{ cm}$$

$$M = F_1 D_1 + F_2 D_2 = 888.00 \times 3.0 + 24885.33 \times 0.86 = 24015.61 \text{ kg-cm}$$

## EJEMPLO 2 (Continuación)

## b) Rango plástico

## Punto 1

— Con carga axial de tensión y momento flexionante igual a cero

$$P_{yt} = f_{yt} A = 4000 \times (6 \times 4/2) = 48000 \text{ kg}$$

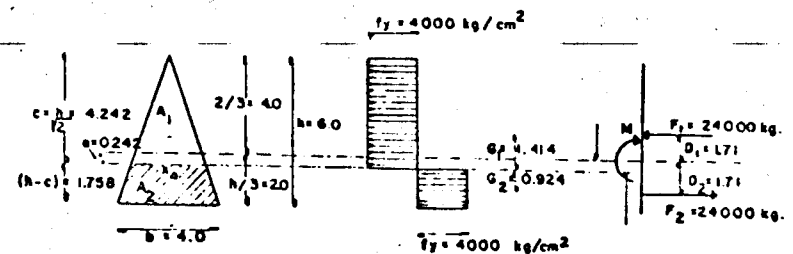
## Punto 2

— Con carga axial de compresión y momento flexionante igual a cero

$$P_{yc} = f_{yc} A = 4000 \times (6 \times 4/2) = 48000 \text{ kg}$$

## Punto 3

— Con el momento flexionante de plastificación y carga axial igual a cero.  
(con el eje neutro supuesto a  $h/\sqrt{2}$  (\*))



(\*) Esta distancia a partir del vertice superior es la que hace que el área total de la sección quede dividida en dos partes iguales que conducen al equilibrio de las fuerzas de tensión y compresión originados.

## EJEMPLO 2 (Continuación)

$$A_1 = (2.827) (4.242) \frac{1}{2} = 6.00 \text{ cm}^2$$

$$A_2 = (2.827 + 4.0) (1.758) \frac{1}{2} = 6.00 \text{ cm}^2$$

$$F_1 = f_y A_1 = 4000 \times 6.0 = 24000 \text{ kg}$$

$$F_2 = f_y A_2 = 4000 \times 6.0 = 24000 \text{ kg}$$

$$F = F_1 - F_2 = 24000.0 - 24000.0 = 0.0$$

$$G_1 = \frac{1}{3} (4.242) = 1.414 \text{ cm}$$

$$G_2 = \frac{1.758 (2 \times 4.0 + 2.827)}{3 (4.0 + 2.827)} = 0.929 \text{ cm}$$

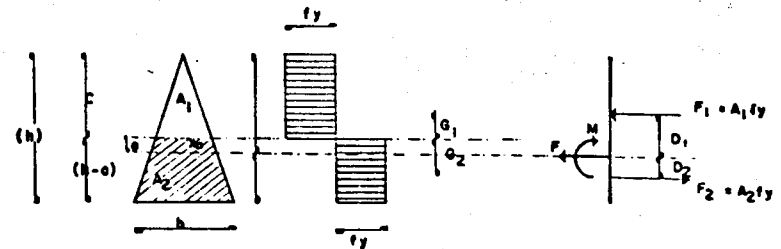
$$D_1 = 1.414 - 0.242 = 1.172 \text{ cm}$$

$$D_2 = 0.929 + 0.242 = 1.171 \text{ cm}$$

$$M = 24000.0 \times 1.172 + 24000.0 \times 1.171 = 56232.0 \text{ kg-cm}$$

## EJEMPLO 2 (Continuación)

— Para cualquier posición del eje neutro (con carga axial y momento flexionante)



$$F_1 = \left( \frac{X_0 \times c}{2} \right) f_y = f_y A_1$$

$$F_2 = \left( \frac{(X_0 + b) (h - c)}{2} \right) f_y = f_y A_2$$

$$G_1 = \frac{c}{3}$$

$$G_2 = \frac{(h - c) (2b + X_0)}{3 (b + X_0)}$$

$$D_1 = G_1 \pm \bullet$$

$$D_2 = G_2 \pm \bullet$$

$$F = F_1 - F_2$$

$$M = F_1 D_1 + F_2 D_2$$

NOTA:

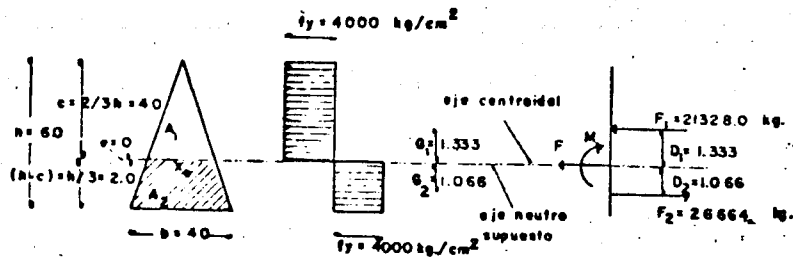
Estas expresiones pueden ser deducidas en la misma forma que se hizo para las expresiones en el rango elástico, pero por ser muy usuales, se encuentran en cualquier tabla de áreas y centroides.



## EJEMPLO 2 (Continuación)

## Punto 4

Supóngase el eje neutro a  $h/3 = 2.0$  cm de la base (eje neutro supuesto = eje centroidal)



$$\frac{X_o}{b} = \frac{4.0}{6.0} \quad \therefore X_o = \frac{4.0}{6.0} (4.0) = 2.666 \text{ cm}$$

$$A_1 = (2.666 \times 4.0) \frac{1}{2} = 5.332 \text{ cm}^2$$

$$A_2 = (4.0 + 2.666) \frac{2.0}{2.0} = 6.666 \text{ cm}^2$$

$$F_1 = 4000.0 \times 5.332 = 21328.0 \text{ kg}$$

$$F_2 = 4000.0 \times 6.666 = 26.664.0 \text{ kg}$$

$$F = F_1 - F_2 = 21328.0 + 26664.0 = 5336.0 \text{ kg (Tensión)}$$

## EJEMPLO 2 (Continuación)

$$G_1 = \frac{1}{3} (4.0) = 1.333 \text{ cm}$$

$$G_2 = \frac{2.00 (2 \times 4.0 + 2.666)}{3 (4.00 + 2.66)} = 1.066 \text{ cm}$$

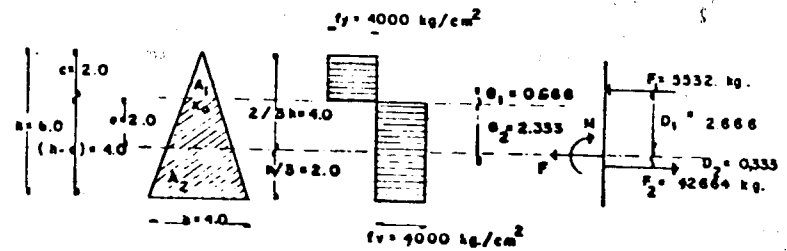
$$D_1 = G_1 = 1.333 \text{ cm}$$

$$D_2 = G_2 = 1.066 \text{ cm}$$

$$M = 21328.0 \times 1.333 + 26664.0 \times 1.066 = 56854.04 \text{ kg - cm}$$

## Punto 5

Supóngase el eje neutro a 4.0 cm de la base



$$\frac{X_o}{4.0} = \frac{2.0}{6.0} \quad \therefore X_o = \frac{2.0}{6.0} \times 4.0 = 1.333 \text{ cm}$$

$$A_1 = (1.333 \times 2.00) \frac{1}{2} = 1.333 \text{ cm}^2$$

$$A_2 = \frac{(4.00 + 1.333) \times 4.00}{2} = 10.666 \text{ cm}^2$$

## EJEMPLO 2 (Continuación)

$$F_1 = 4000 \times 1.333 = 5332.0 \text{ kg}$$

$$F_2 = 4000.0 \times 10.66 = 42664.0 \text{ kg}$$

$$F = F_1 - F_2 = 5332.0 - 42664.0 = \underline{37332.0 \text{ kg (Tensión)}}$$

$$G_1 = \frac{1}{3} (2.00) = 0.666 \text{ cm}$$

$$G_2 = \frac{4.00 (2 \times 4.00 + 1.333)}{3 (4.0 + 1.333)} = 2.333 \text{ cm}$$

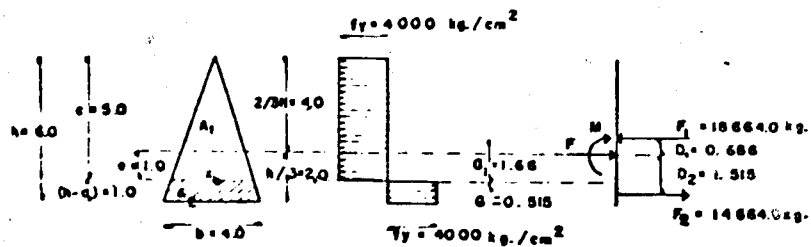
$$D_1 = 0.666 + 2.0 = 2.666 \text{ cm}$$

$$D_2 = 2.333 - 2.0 = 0.333 \text{ cm}$$

$$M = 5332.0 \times 2.666 + 42664.0 \times 0.333 = \underline{28422.224 \text{ kg-cm}}$$

## Punto 6

Supóngase el eje neutro a 1.0 cm de la base



$$\frac{X_o}{4.0} = \frac{5.0}{6.0} \quad \therefore \quad X_o = \frac{4.0 \times 5.0}{6.0} = 3.333 \text{ cm}$$

$$A_1 = \frac{5.0 \times 3.333}{2} = 8.332 \text{ cm}^2$$

$$A_2 = \frac{(3.333 + 4.0) (1.0)}{2} = 3.666 \text{ cm}^2$$

$$F_1 = 4000 \times 8.332 = 33328.0 \text{ kg}$$

$$F_2 = 4000 \times 3.666 = 14664.0 \text{ kg}$$

$$F = F_1 - F_2 = 33328.0 - 14664.0 = \underline{18664.0 \text{ (Compresión)}}$$

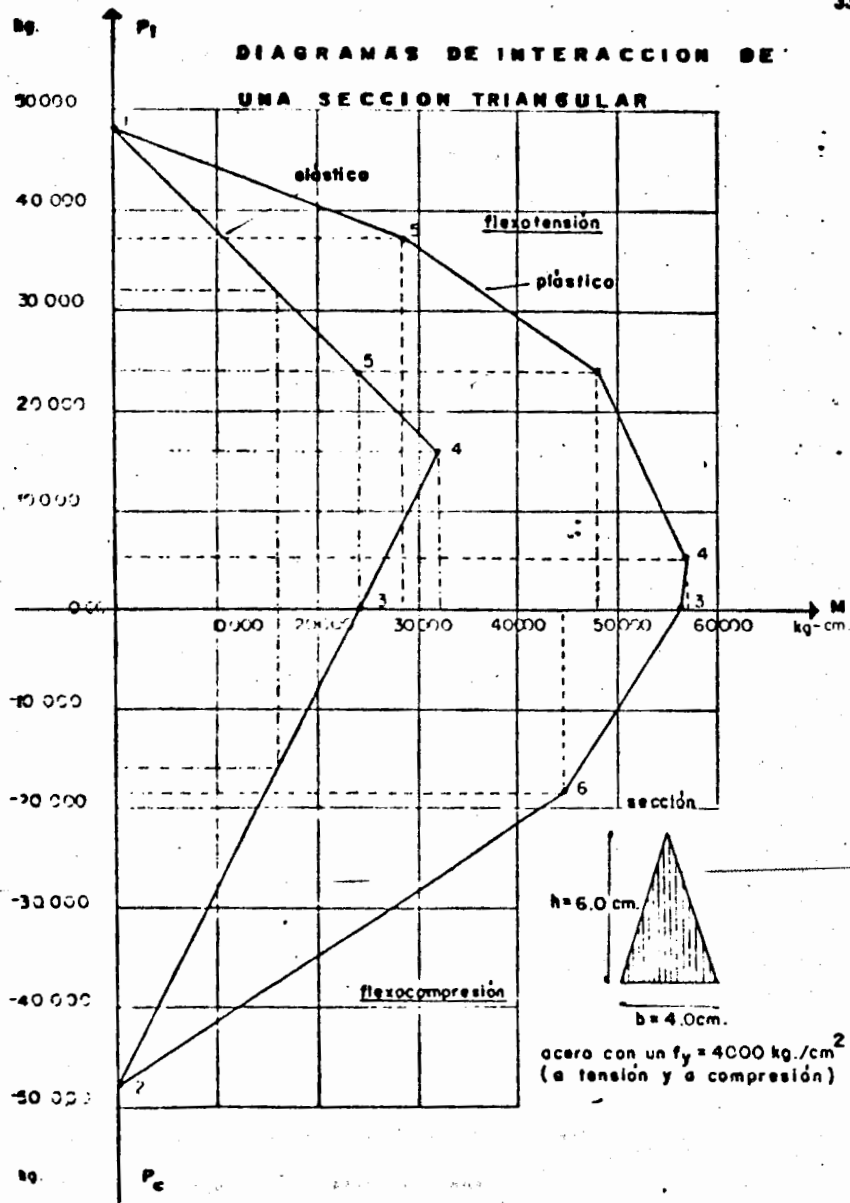
$$G_1 = \frac{1}{3} (5.0) = 1.666 \text{ cm}$$

$$G_2 = \frac{(1.0) (2 \times 4.0 + 3.333)}{3 (4.0 + 3.333)} = 0.515 \text{ cm}$$

$$D_1 = 1.666 - 1.0 = 0.66 \text{ cm}$$

$$D_2 = 0.515 + 1.0 = 1.515 \text{ cm}$$

$$M = 33328.0 \times 0.66 + 14664.0 \times 1.515 = \underline{44212.44 \text{ kg-cm}}$$



**4. FLEXION BIAXIAL CON CARGAS AXIALES.**

Un caso especial de interés práctico ocurre cuando en un elemento estructural actúa una fuerza paralela a su eje longitudinal pero fuera de los ejes principales de la sección, fig 9-a.

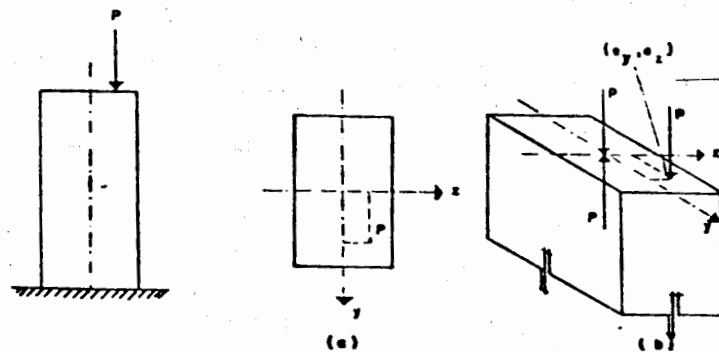


fig. 9 flexión biaxial con cargas axiales

La acción de la fuerza excéntrica es equivalente a la de una fuerza axial  $P$  que pasa por el centroide de la sección y a un momento flexionante  $Pe$ , fig 9-b.

Cuando la fuerza  $P$  no está aplicada sobre uno de los ejes principales de la sección transversal, habrá flexión simultánea con respecto a ambos ejes principales. Representando las coordenadas del punto de aplicación de  $P$  por  $e_y$  y  $e_z$  - fig 9-b, se ve que los momentos flexionantes respecto a los ejes  $y$  y  $z$  son numéricamente iguales a  $M_y = Pe_z$  y  $M_z = Pe_y$ .

Si el material del elemento tiene un comportamiento elástico y las deflexiones originadas por la flexión no son significativas los esfuerzos normales,  $f$ , originados por la carga axial y la flexión alrededor de los dos ejes de simetría podrán calcularse con la expresión

$$f = \frac{P}{A} \pm \frac{My}{I_y} z \pm \frac{Mz}{I_z} y \quad (6)$$

donde  $I_y$  e  $I_z$  son los momentos de inercia respecto a los ejes  $y$  y  $z$  respectivamente.

La carga axial  $P$  será positiva si es de tensión y negativa cuando es de compresión; los momentos  $M_y$  y  $M_z$  son positivos cuando originen tensiones en las zonas donde  $z$  y  $y$ , respectivamente, sean positivos, y negativos en caso contrario, fig 10.

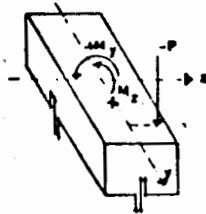


fig 10 convención de signos para cargas y momentos.

Dada a que el eje neutro representa el lugar geométrico donde los esfuerzos normales son nulos, la posición del mismo podrá encontrarse igualando a cero la ecuación 6.

$$\frac{P}{A} \pm \frac{My}{I_y} z \pm \frac{Mz}{I_z} y = 0 \quad (7)$$

Como podrá observarse esta ecuación representa una recta que no pasa por el origen y que podrá cortar o no la sección transversal, lo que dependerá de la forma de ésta y de la posición y magnitud de la carga axial  $P$ . Las coordenadas en el origen del eje neutro, o sea, los puntos en que el eje neutro intercepta a los ejes coordenados  $y$  y  $z$  se hallan haciendo  $z$  y  $y$ , respectivamente iguales a cero en la ecuación (7) y despejando la coordenada no anulada. Nótese que el eje neutro pasa por el cuadrante opuesto al que se encuentra aplicada la carga y que si la excentricidad  $e$  se reduce, el eje neutro se alejará del centroide, y si  $e$  aumenta dicho eje se acercará al mismo, fig 11.

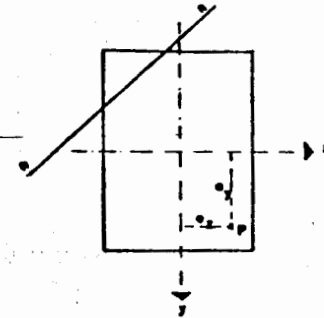


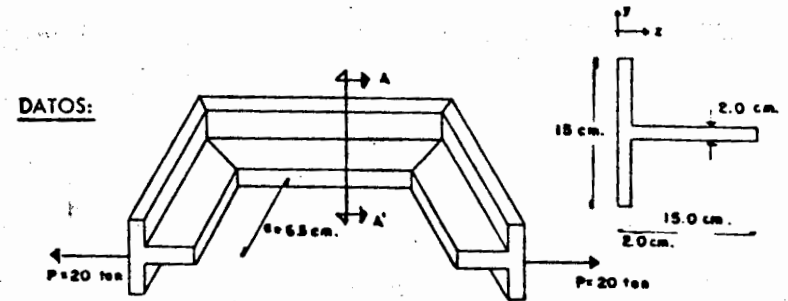
fig. 11 fuerza axial excéntrica que produce flexión con respecto a ambos ejes principales

### EJEMPLO 3 CARGA APLICADA EXCÉNTRICAMENTE

En este ejemplo se tiene el codo de una conexión, sujeta a la acción de una fuerza de tensión  $P$ , aplicada en uno de sus extremos, la cual es excéntrica con respecto a uno de sus ejes produciendo la acción combinada de una carga axial y un momento flexionante. Los esfuerzos máximos de tensión y compresión que se presentan en la sección  $A-A'$  de la pieza, se pueden calcular superponiendo la acción de la carga axial y del momento flexionante, ya que el material de que está formada la pieza tiene un comportamiento elástico, la carga axial que actúa en la sección produce esfuerzos de tensión, en tanto que el momento flexionante produce esfuerzos de tensión en la mayor parte del alma y de compresión en el patín de la sección. La fuerza no produce momento al rededor del eje  $z$ .

Se ilustra la forma de calcular el centroide de la sección, así como el momento de inercia centroidal, el cálculo de la excentricidad de la fuerza actuante, así como la determinación de los esfuerzos que se presentan en las fibras más esforzadas a tensión y compresión.

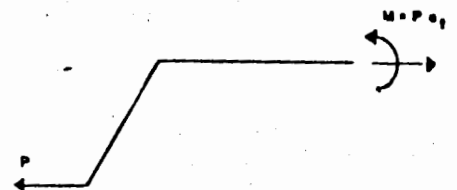
**EJEMPLO 3** Cálculo de esfuerzos combinados (axial y de flexión) producidos por la aplicación de una carga excéntrica



Se pide encontrar el máximo esfuerzo normal en la sección  $A-A'$

**SOLUCION:**

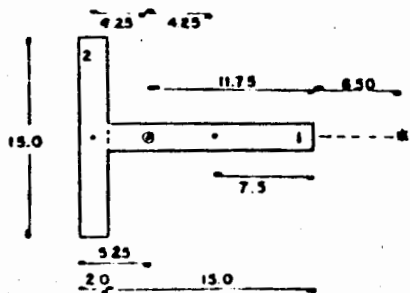
Diagrama de cuerpo libre



## EJEMPLO 3 (Continuación)

Determinación del centroide y del momento de inercia centroidal de la sección

| Sec. | Area | z    | Az    | d    | d <sup>2</sup> | Ad <sup>2</sup> | $I = \frac{bh^3}{12}$ |
|------|------|------|-------|------|----------------|-----------------|-----------------------|
| 1    | 30   | 9.50 | 285.0 | 4.25 | 18.062         | 541.875         | 562.5                 |
| 2    | 30   | 1.00 | 30.0  | 4.25 | 18.062         | 541.875         | 10.0                  |
|      | 60   |      | 315   |      |                | 1083.75         | 572.50                |



$$Z = \frac{315}{60} = 5.25 \text{ cm}$$

Momento de inercia centroidal

$$I_G = I_{CG} + Ad^2$$

$$= 572.50 + 1083.75 = 1656.25 \text{ cm}^2$$

Excentricidad total

$$e_f = 6.5 + 11.75 = 18.25 \text{ cm}$$

## EJEMPLO 3 (Continuación)

Cálculo de esfuerzos

aplicando la ecuación  $f = \frac{P}{A} \pm \frac{M}{I} c$

donde:

$$P = 20000 \text{ kg}$$

$$A = 60 \text{ cm}^2$$

$$e_f = 18.25 \text{ cm}$$

$$M = P \times e_f = 20000 \times 18.25 = 365000 \text{ kg-cm}$$

$$c_1 = 11.75 \text{ cm}$$

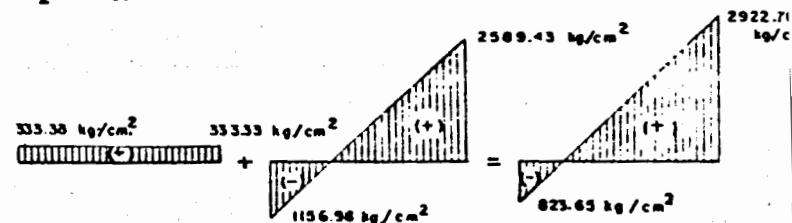
$$c_2 = 5.25 \text{ cm}$$

Esfuerzo máximo de tensión

$$f_1 = \frac{20000}{60} + \frac{365000}{1656.25} (11.75) = 2922.76 \text{ kg/cm}^2$$

Esfuerzo máximo de compresión

$$f_2 = \frac{20000}{60} - \frac{365000}{1656.25} (5.25) = -823.65 \text{ kg/cm}^2$$



#### EJEMPLO 4 FLEXION BIAIXIAL PRODUCIDA POR UNA CARGA EXCENTRICA

Se trata de encontrar los esfuerzos producidos por una carga excéntrica, en los extremos de una sección rectangular, así como la localización del eje neutro.

Dado que el material del elemento tiene un comportamiento elástico, para encontrar los esfuerzos se aplicó la ecuación  $f = \frac{P}{A} + \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z$  en donde los momentos  $M_z$  y  $M_y$  son los producidos por la carga  $P$ , actuando con una excentricidad  $e_y$  y  $e_z$  respectivamente, los efectos que producen estos momentos aunado al que produce la carga axial se superponen obteniéndose la distribución mostrada en el inciso c) del problema.

Si el momento  $M_z = Pe_y$  actuara solo, se produciría una flexión tal que para los valores positivos de  $y$  la sección estaría sujeta a un esfuerzo de compresión, y a un esfuerzo de tensión donde  $y$  sea negativo.

En forma similar si únicamente existiera el momento  $M_y = Pe_z$ , la flexión produciría compresiones en la zona donde los valores de  $z$  sean positivos y tensiones donde sean negativos.

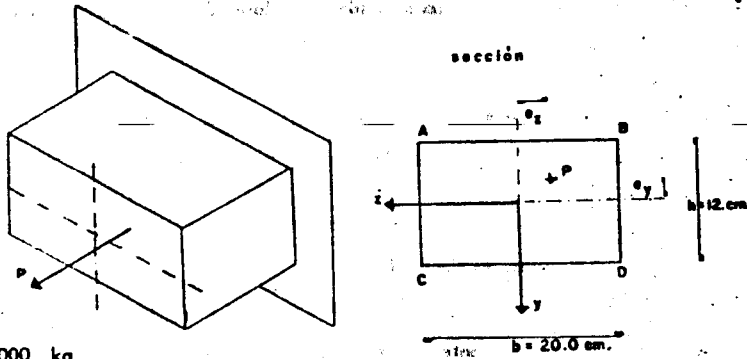
Tomando en cuenta el razonamiento anterior se determinaron los signos de los términos que toman en cuenta la flexión.

Para encontrar la posición, del eje neutro se determina el lugar geométrico de los esfuerzos nulos, es decir  $f = \frac{P}{A} + \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z = 0$ . Esta ecuación representa una recta con dos incógnitas  $y$  y  $z$  de la forma  $ay + bz + c = 0$ ; haciendo alternativamente  $y$  y  $z$  iguales a cero se determina las intersecciones con el eje  $y$  y con el eje  $z$  respectivamente, con las cuales se puede trazar la línea de esfuerzos nulos (eje neutro).

Dado que la carga está aplicada en el cuadrante negativo ( $z$  y  $y$  negativos) el eje neutro estará localizado en el cuadrante positivo, los signos de la ecuación se pueden obtener de una inspección del comportamiento físico de la sección, observando de que lado se producen tensiones o compresiones.

**EJEMPLO 4** Flexión biaxial producida por una carga excéntrica

**DATOS:**



$P = 1000 \text{ kg}$   
 $e_z = 2.0 \text{ cm}$   
 $e_y = 3.0 \text{ cm}$

- Calcular el esfuerzo normal en los puntos A, B, C y D
- Determinar la posición del eje neutro
- Dibujar el estado de esfuerzos

**SOLUCION:**

Esfuerzo normal  $f = \frac{P}{A} \pm \frac{M_z}{I_z} y \pm \frac{M_y}{I_y} z$

donde  $M_z = P(e_y)$  ;  $M_y = P(e_z)$

Momentos de inercia

$$I_z = \frac{b \times h^3}{12} = \frac{20 \times 12^3}{12} = 2880 \text{ cm}^4$$

$$I_y = \frac{h \times b^3}{12} = \frac{12 \times 20^3}{12} = 8000 \text{ cm}^4$$

a) Cálculo de esfuerzos

$$f_a = \frac{1000}{12 \times 20} + \frac{(1000 \times 3.0)}{2880}(6.0) - \frac{(1000 \times 2.0)}{8000}(10.0) = 7.91 \text{ kg/cm}^2 \text{ (tensión)}$$

$$f_b = \frac{1000}{12 \times 20} + \frac{(1000 \times 3.0)}{2880}(6.0) + \frac{(1000 \times 2.0)}{8000}(10.0) = 12.91 \text{ kg/cm}^2 \text{ (tensión)}$$

$$f_c = \frac{1000}{12 \times 20} - \frac{(1000 \times 3.0)}{2880}(6.0) - \frac{(1000 \times 2.0)}{8000}(10.0) = -4.59 \text{ kg/cm}^2 \text{ (compresión)}$$

$$f_d = \frac{1000}{12 \times 20} - \frac{(1000 \times 3.0)}{2880}(6.0) + \frac{(1000 \times 2.0)}{8000}(10.0) = 0.42 \text{ kg/cm}^2 \text{ (compresión)}$$

b) Posición del eje neutro

Usando la ecuación  $f = \frac{P}{A} \pm \frac{M_z}{I_z} y \pm \frac{M_y}{I_y} z = 0$

$$f = \frac{1000}{12 \times 20} - \frac{(1000 \times 3.0)}{2880} y - \frac{(1000 \times 2.0)}{8000} z = 0$$

ecuación de una recta de forma  $ay + bz + c = 0$

donde:

$$a = \frac{1000 \times 3.0}{2880} = -1.04$$

$$b = \frac{1000 \times 2.0}{8000} = -0.25$$

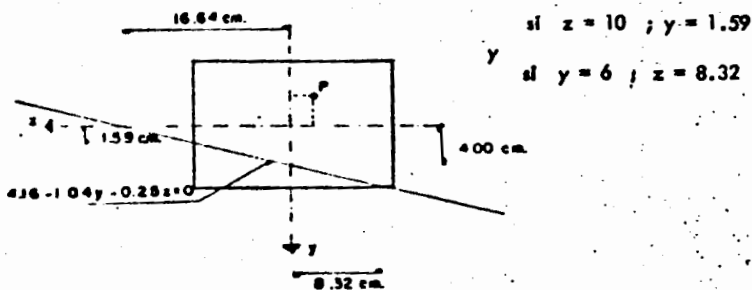
$$c = \frac{1000}{12 \times 20} = 4.16$$

Las intersecciones con los ejes coordenados se obtienen

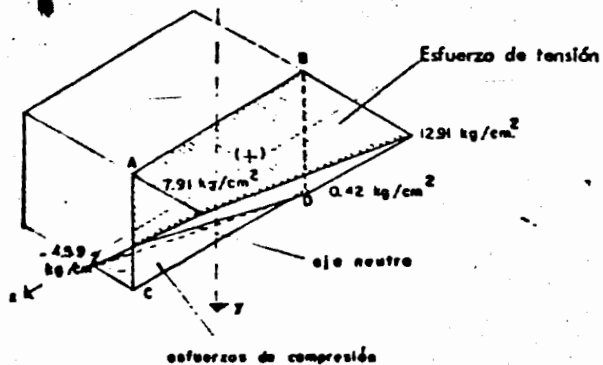


Si  $y = 0$  ;  $z = \frac{c}{b}$   $\therefore z = \frac{4.16}{(-0.25)} = 16.64 \text{ cm}$   
 y Si  $z = 0$  ;  $y = \frac{c}{a}$   $\therefore y = \frac{4.16}{(-1.04)} = 4.0 \text{ cm}$

Por lo que el eje neutro queda localizado como lo muestra la siguiente figura:



c) Estado de esfuerzos



5. NUCLEO CENTRAL DE UNA SECCION TRANSVERSAL

Cuando la excentricidad de la carga axial aplicada P sea pequeña, el eje neutro quedará fuera de la sección transversal. Esto significa que los esfuerzos normales tendrán el mismo signo en toda la sección. Una condición de esta naturaleza es a menudo importante cuando una carga de compresión actúa sobre un material que es muy débil a la tensión, tal como el concreto; en este caso puede ser necesario asegurarse de que la carga no produce tensión en ningún punto de la sección transversal. Habrá una pequeña región alrededor del centroide tal que una carga de compresión, P, que actúe dentro de ella producirá compresión sobre toda la sección transversal. Tal región se llama núcleo central de la sección.

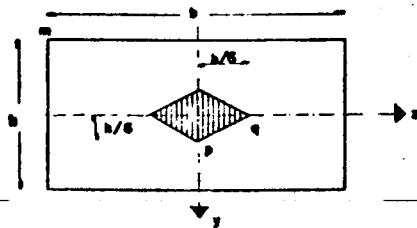


Fig 12 Núcleo central de una sección rectangular

El núcleo central de una sección rectangular se halla del siguiente modo:

Si la carga está a lo largo de la parte positiva del eje  $y$ , fig 12, el eje neutro coincidirá con el borde superior de la sección cuando la carga esté en el punto  $p$ , a una distancia  $e_1$  del centroide. La distancia  $e_1$ , se determina con la ecuación ( 7 ) en la que

$$M_y = 0 \quad M_z = -P \times e_1 \quad y = -\frac{h}{2}, \quad I = \frac{bh^3}{12} \quad y \quad A = bh$$

$$\frac{-P}{bh} + \frac{-P e_1}{\frac{bh^3}{12}} \times \frac{h}{2} = 0 \quad e_1 = \frac{h}{6}$$

por lo que  $e_1 = \frac{h}{6}$  como se indica en la figura. De igual manera, el eje neutro coincide con el borde izquierda de la sección cuando la carga  $P$  actúa sobre la parte positiva del eje  $z$  en el punto  $q$ , a una distancia  $b/6$  del centroide. A medida que la carga se mueve a lo largo de una recta entre los puntos  $p$  y  $q$ , el eje neutro girará alrededor del punto  $m$  en el vértice de la sección triangular. Por consiguiente, la recta  $\overline{pq}$  es uno de los lados del núcleo. Los otros tres lados pueden localizarse por simetría y se ve que el núcleo central es un rombo con diagonales  $b/3$  y  $h/3$ . En tanto el punto de aplicación de

una carga de compresión,  $P$ , quede dentro de este rombo, el eje neutro no cortará a la sección transversal y toda ella estará en compresión.

### EJEMPLO 5 NUCLEO CENTRAL

Con este ejemplo se desea ilustrar una forma de encontrar el núcleo central de una sección transversal en forma de "T". Para determinarlo se supondrá la acción de una carga excéntrica de compresión actuando primero sobre uno de los ejes y luego sobre el otro, de forma que solo se presente flexión en una dirección en cada caso.

Si las cargas actúan sobre el eje de los  $y$ , las excentricidades  $e_y$  que hacen que los esfuerzos de tensión sean nulos en el extremo más alejado del centroide, se pueden encontrar haciendo igual a cero la ecuación que da el valor de los esfuerzos:  $f = -\frac{P}{A} + \frac{M}{I}$  y en donde  $M = P e_y$ .

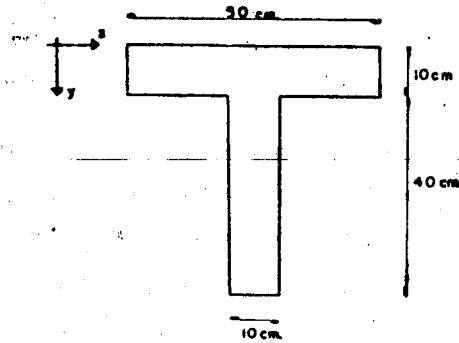
En forma similar si solo existe excentricidad en la dirección del eje  $z$ , se pueden encontrar los valores de  $e_z$  que hacen que los esfuerzos de tensión sean igual a cero en los extremos de la sección, igualando a cero la ecuación que da el valor de los esfuerzos cuando existe carga axial y flexión alrededor del eje  $y$ .

Conocidos los valores de  $e_{y1}$ ,  $e_{y2}$ ,  $e_{z1}$  y  $e_{z2}$ , el núcleo central se puede determinar uniendo estos cuatro puntos situados sobre los ejes coordenados.

Cualquier carga de compresión que caiga dentro del núcleo central producirá efectos de compresión en toda la sección y si la carga actúa en un punto fuera de él, la sección tendrá tanto esfuerzos de tensión como de compresión.

## EJEMPLO 5 Cálculo del núcleo central de una sección T

DATOS:



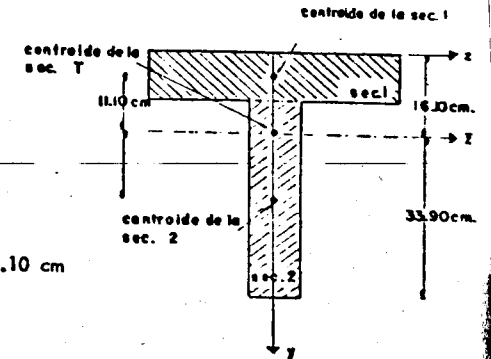
a) Encontrar el lugar geométrico que ocupa el núcleo central de la sección dada.

SOLUCION:

Cálculo del centroide y de los momentos de inercia

| Sec.     | Area | y  | $A_y$ | d    | $d^2$ | $Ad^2$   | $I_g = \frac{b \times h^3}{12}$ |
|----------|------|----|-------|------|-------|----------|---------------------------------|
| 1        | 500  | 5  | 2500  | 11.1 | 123.4 | 61716.0  | 4166.66                         |
| 2        | 400  | 30 | 12000 | 13.9 | 192.9 | 77172.8  | 53333.33                        |
| $\Sigma$ | 900  |    | 14500 |      |       | 138888.8 | 574999.99                       |

## EJEMPLO 5 (Continuación)



$$\text{centroide } \bar{y} = \frac{14500}{900} = 16.10 \text{ cm}$$

Momento de inercia centroidal  $I_z$ 

$$I_z = 138888.84 + 57199.99 = 196388.83 \text{ cm}^4$$

Momento de inercia centroidal

$$I_y = \frac{40 \times 10^3}{12} + \frac{10 \times 50^3}{12} = 107500 \text{ cm}^4$$

Cálculo de las excentricidades  $e_y$ 

$$\text{Si } e_z = 0$$

La excentricidad  $e_y$  producirá esfuerzos nulos en los extremos de la sección para los siguientes valores:

$$f_y = 0 = -\frac{P}{A} - \frac{M_z}{I_z} y \dots (1)$$

$$M_z = P \times e_y$$

## EJEMPLO 5 (Continuación)

sustituyendo M en (1)

$$f = -\frac{P}{A} - \frac{P \times e_y}{I_z} \quad y = 0$$

despejando  $e_y$ 

$$e_y = -\frac{1}{A} \frac{I_z}{y} \quad (2)$$

El extremo de la sección situada a una distancia  $y = 33.90$  cm, tendrá un esfuerzo nulo cuando:

$$e_{y1} = -\frac{196338.83}{900 \times 33.90} = -6.43 \text{ cm}$$

El extremo de la sección situada a una distancia  $y = 16.10$  cm, tendrá esfuerzos nulos cuando

$$e_{y2} = -\frac{196388.83}{900 \times (-16.10)} = 13.55 \text{ cm}$$

Cálculo de las excentricidades  $e_z$ 

Los esfuerzos en las fibras más alejadas del eje  $y$  serán nulos cuando se cumpla la siguiente igualdad:

$$f = -\frac{P}{A} - \frac{P \times e_y}{I_y} \quad z = 0$$

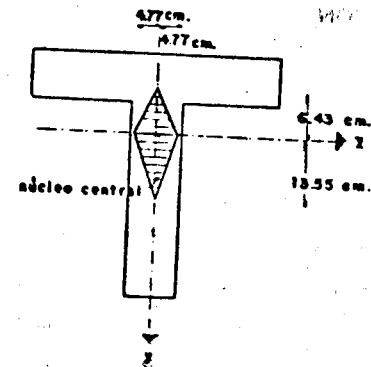
## EJEMPLO 5 (Continuación)

Para el extremo de la sección situado a una distancia  $z = 25$  cm

$$e_{z1} = -\frac{1}{A} \frac{I_y}{z} = -\frac{1}{900} \frac{107500}{25.0} = -4.77 \text{ cm}$$

y para  $z = -25.0$  cm

$$e_{z2} = -\frac{1}{900} \frac{107500}{(-25.0)} = 4.77 \text{ cm}$$



## 6. MUROS DE RETENCION

Los muros de retención son estructuras comúnmente prismáticas construidos con mampostería, de piedras naturales o artificiales unidas con mortero o con concreto, cuya función principal es la de mantener una diferencia de elevación del terreno de un lado o otro del mismo. Pueden utilizarse para retener materiales sólidos, como granos en el caso de silos o tierra en el caso de muros de retención de taludes, en los que se desea una inclinación mayor que el talud natural del terreno. También son usadas en estructuras hidráulicas para formar bordos o parte de los vasos para almacenamiento de agua. Cuando su estabilidad depende de su propio peso se llama muro de gravedad.

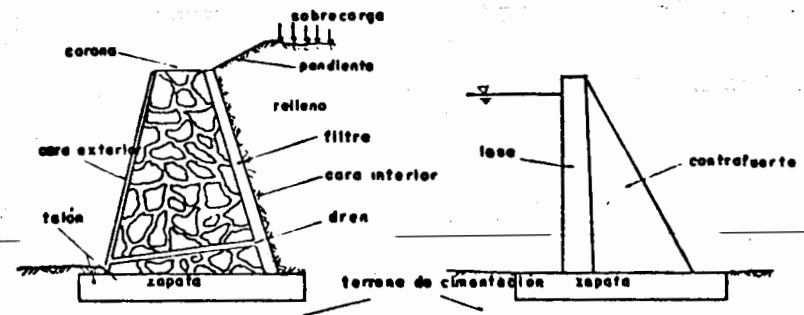


fig. 13 nomenclatura usual en muros

### 6.1 Elementos que intervienen en la construcción de los muros de retención.

Los elementos que intervienen en la construcción de muros de retención son tres: el terreno de cimentación, el relleno o carga que actúa contra el muro y la mampostería o concreto que forma el muro propiamente dicho.

**Terreno de cimentación.** Las principales propiedades del terreno de cimentación son: su resistencia al esfuerzo cortante, su compresibilidad y su permeabilidad. La propiedad de la resistencia al esfuerzo cortante es la propiedad que determina la capacidad de carga del terreno. Con respecto a la compresibilidad se supone aquí que no existen posibilidades de asentamientos peligrosos. La permeabilidad del terreno es determinante para el cálculo de la supresión en la base del muro.

**Material de relleno.** La función primordial de los muros de retención es contener el relleno que se halla tras ellos. El empuje que ejerce el relleno sobre una estructura depende de su peso volumétrico.

**Mampostería.** El material por usarse debe estar sano, ser poco alterable y preferentemente de alto peso volumétrico.

## 6.2 Fuerzas que intervienen en el cálculo de un muro de retención.

Las fuerzas que actúan contra un muro de retención, de sección transversal, pueden calcularse para un segmento de muro de un metro de longitud, en la dirección normal al plano del papel.

Cuando se analiza un muro con contrafuertes por lo general los cálculos se refieren al segmento de muro comprendido entre dos planos normales trazados en el centro de los mencionados elementos.

Las fuerzas que deben tomarse en cuenta en el cálculo de un muro, que por simplicidad se supone trapecial (ver fig 14) son:

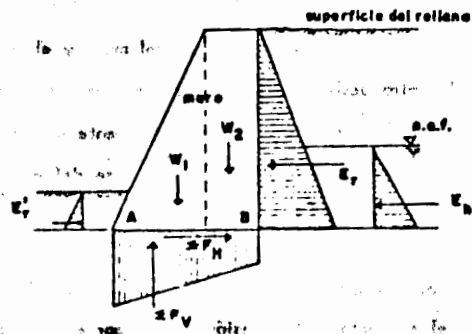


Fig. 14 fuerzas que actúan en un muro

- a) El peso propio del muro. Esta fuerza actúa en el centro de gravedad de la sección y puede calcularse fácilmente dividiendo dicha sección en áreas de forma simple y será:

$$W_p = A_p \times 1.0 \times \gamma_m$$

donde  $A_p$  = área total de la sección transversal  
 $1.0$  = longitud unitaria (1.0 m)  
 $\gamma_m$  = peso volumétrico de la mampostería o concreto

Para la fig 14  $W_t = W_1 + W_2$

- b) La presión contra la cara interior del muro con su correspondiente intensidad y distribución ( $E_r$  en la fig 14 es el empuje resultante de tal presión).
- c) La presión hidrostática. Si se permite la acumulación de agua en la cara interior del muro se formarán sobre el presiones hidrostáticas; esta debe evitarse instalando un sistema de drenaje adecuado que elimine el exceso de agua ( $E_h$ , en la fig 14, es su resultante).
- d) La presión de la tierra contra el frente del muro. El desplante de un muro de retención debe colocarse en un nivel que garantice la adecuada capacidad de carga del terreno. Si la tierra colocada en el frente del muro ejerce una resistencia, la fuerza resultante se determinará para tomarla en cuenta en los cálculos ( $E'_r$  en la fig 14, es su resultante). Esta fuerza suele omitirse en los cálculos aumentando con esto el coeficiente de seguridad.
- e) La componente normal de las presiones en la cimentación. La presión en la cimentación se considera linealmente distribuida a lo largo de la base, líneas  $\overline{AB}$ , dando lugar a su diagrama trapecial, ( $\Sigma F_v$  en la fig 14 es su resultante).
- f) La componente horizontal de las presiones en la cimentación, (la resultante de éstos efectos horizontales se representa como  $\Sigma F_H$  en la fig 14).

- g) Las supresiones. Cuando el drenaje bajo el muro no es correcto, el agua puede fluir por debajo de él y originar supresiones contra los materiales constituyentes del muro.

Conviene hacer notar que existen algunos factores, cuya acción puede incrementar notablemente la magnitud de los empujes, tales como, las heladas, la expansión de los materiales de relleno, sismos, vibraciones y procesos de compactación.

### 6.3 Cálculo de estabilidad en muros de retención.

En la estabilidad de muros de retención influyen muchos factores que aquí, dada la finalidad de este trabajo no son considerados, como son las características del terreno de cimentación y del relleno.

Desde el punto de vista del terreno de cimentación, el buen funcionamiento de una obra se logra cuando se tiene una capacidad de carga mayor que la presión impuesta al nivel de desplante y cuando las deformaciones en el terreno causadas por dicha presión producen asentamientos despreciables.

Considerando al muro como monolítico, las condiciones de estabilidad que deben cumplirse son:

- 1) Que sea imposible la rotación o volteo alrededor del punto A (fig 15). Se entiende por factor de seguridad contra volteamiento, el número por el cual debe multiplicarse la fuerza resultante actuando en la cara interior del muro para producir volteamiento, este número debe estar comprendido entre 1.5 y 2.0.

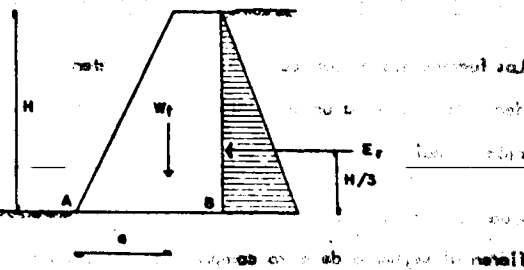


fig. 15

De la fig 15 se tiene:

$$F. S. \text{ volteo} = \frac{M \text{ resistente}}{M \text{ actuante}} = \frac{W_f (a)}{E_r \left( \frac{1}{3} H \right)}$$

- 2) No debe producirse deslizamiento entre la base del muro y el terreno, el factor de seguridad contra deslizamiento es el número por el cual hoy que multiplicar el empuje horizontal, para que no se presente deslizamiento a lo largo de la cara de contacto entre el terreno y la base del muro. El número calculado no debe ser menor que 1.5.

La resistencia a fuerza rozante entre la base del muro y un material no cohesivo puede calcularse como el producto de la presión normal por el coeficiente de fricción  $\mu$ , que puede considerarse según los siguientes valores, para mampuesto o concreto en contacto con estos materiales:

|                   |      |
|-------------------|------|
| Roca sana         | 0.60 |
| Material compacto | 0.55 |
| Concreto          | 0.65 |



Se tiene entonces que:

$$F. S. \text{ deslizamiento} = \frac{\sum F_v}{\sum F_H}$$

siendo

$\sum F_v$  = la suma de las fuerzas verticales

$\sum F_H$  = la suma de las fuerzas horizontales

- 3) La resultante de las presiones sobre el terreno en la base del muro deben estar sobre el tercio central del muro para que solo se presenten esfuerzos de compresión. Estas presiones o esfuerzos se calculan con la teoría de la flexión.
- 4) En ningún punto del muro deben excederse los esfuerzos permisibles de los materiales utilizados. Esta debe verificarse en un plano cualquiera paralelo a la base del muro o en una hilada cualquiera, ya sea el muro de concreto o de mampostería.

En la tabla siguiente se muestran algunos esfuerzos permisibles típicos

Tabla de esfuerzos permisibles típicos, kg/cm<sup>2</sup>

| Materiales                                      | Cortante          | Compresión  | Tensión           |
|---|-------------------|-------------|-------------------|
| Mampostería de Ja.<br>con mortero de cal        | 1.0               | 4.5         | 0.35              |
| Mampostería de Ja.<br>con mortero de<br>cemento | 2.0               | 9.0         | 0.75              |
| Concreto simple                                 | $0.3 \sqrt{f'_c}$ | $0.45 f'_c$ | $0.4 \sqrt{f'_c}$ |

#### EJEMPLO 6 MUROS DE RETENCION

En este ejemplo se presenta la revisión de un muro de retención de agua.

La única fuerza que actúa contra él es la debida al empuje hidrostático dada por la expresión  $E_h = \frac{\gamma}{2} H^2/2$ , oponiéndose a dicha acción la fuerza que se origina por la fricción entre suelo-muro ( $\mu \sum F_v$ ) y el peso propio del muro. Estas fuerzas provocan momentos actuantes que tienden a voltear al muro alrededor del punto A, y momentos resistentes que se oponen a ello, fuerzas actuantes también tratan de hacer que el muro deslice sobre la base del muro (línea  $\overline{AB}$ ), acción que se contrarresta con la fuerza originada por la fricción suelo-muro. Es necesario para la estabilidad del muro que no ocurra ni volteo ni deslizamiento y tener la certeza de que se tiene un margen de protección el cual se le denomina factor de seguridad. Para el caso de volteo, el factor de seguridad resulta ser la relación momento resistente entre momento actuante y para el caso de deslizamiento, el cociente de la fuerza de fricción entre la fuerza horizontal actuante, este factor de seguridad debe ser mayor o al me-

nos igual a un valor previamente establecido.

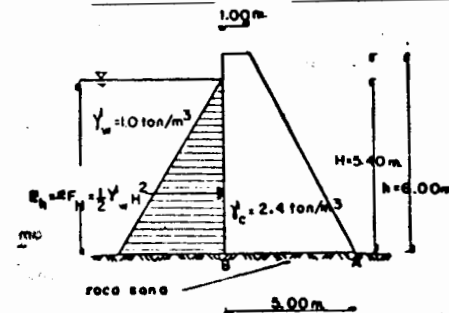
De la suma algebraica del momento resistente y el momento actuante, se tiene el momento neto, que actúa sobre la base del muro alrededor de su eje centroidal ( $\overline{AB} / 2$ ), este momento es equivalente a una fuerza (componente vertical de la resultante) por una excentricidad (distancia del centroide de la base, al punto de aplicación de la resultante sobre la base); si esta excentricidad se localiza dentro del tercio medio, únicamente se presentarán esfuerzos de compresión en la base.

La magnitud de la resultante, se obtiene al aplicar el principio del paralelogramo para sumar sus fuerzas componentes ( $\Sigma F_H$  y  $\Sigma F_V$ ), siendo el ángulo que forma la resultante con la horizontal, el ángulo cuya tangente es el valor  $\frac{\Sigma F_V}{\Sigma F_H}$

Finalmente para encontrar los esfuerzos en la base del muro se hace uso de la teoría de la flexión aplicando la expresión  $f = -\frac{P}{A} \pm \frac{M}{I}$  y, comprobándose se que solamente se presentan esfuerzos de compresión y que la magnitud de estos esfuerzos son menores que la capacidad del terreno en que está desplantando el muro.

### EJEMPLO 6 Análisis de un muro de contención

#### DATOS:



coeficiente de fricción  
suelo-muro  $\mu = 0,60$

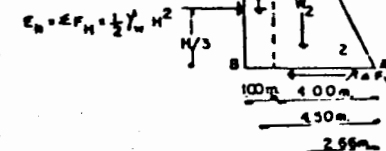
Nota:  
considérese que no hay  
efecto de supresión.

#### Se pide:

- Encenar los factores de seguridad contra volteo y contra deslizamiento
- La posición y magnitud de la resultante, así como el ángulo que forma con la horizontal
- El diagrama de esfuerzos normales bajo la base del muro

#### SOLUCION:

Posición y magnitud de las fuerzas actuantes



## EJEMPLO 6 (Continuación)

## Características geométricas de la base

$$A = 5.00 \times 1.00 = 5.00 \text{ m}^2$$

vered. en esta

$$c = \frac{5.00}{2} = 2.50 \text{ m}$$

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{1.0 \times (5.0)^3}{12} = 10.41 \text{ m}^4$$

$$i = \frac{I}{A} = \frac{10.41}{5.00} = 2.08 \text{ m}$$

## a) 1. Factor de seguridad contra volteo

Cálculo de fuerzas verticales ( $\Sigma F_v$ ) y momento resistente ( $M_R$ )

| Sección | WI = Fvi  | brazo b: | Fvi x di       |
|---------|---|----------|----------------|
| 1       | $(1.00 \times 2.00 \times 1.0) (2.4) = 14.40$       | 4.50     | 64.80          |
| 2       | $(4.00 \times 6.00 \times 1.0) (0.5) (2.4) = 28.80$ | 2.66     | 76.60          |
|         | $\Sigma F_v = 43.32$                                |          | $M_R = 141.40$ |

Suma de fuerzas horizontales ( $\Sigma F_H$ )

$$F_H = E_h = \frac{1}{2} \gamma_w H^2 = \frac{1}{2} (1.0) (5.40)^2 = 14.58 \text{ ton}$$

## EJEMPLO 6 (continuación)

Momento actuante o de volteamiento

$$M_A = (E_h) \left(\frac{1}{3} H\right) = (14.58) \left(\frac{5.40}{3}\right) = 26.24 \text{ ton}$$

$$F.S. \text{ volt.} = \frac{M_R}{M_A} = \frac{141.40}{26.24} = 5.38 > 1.5$$

## e) 2. Factor de seguridad contra deslizamiento

Fuerza opoente al movimiento

$$M \Sigma F_v = 0.60 \times 43.68 = 26.208 \text{ ton}$$

$$F.S. \text{ dez.} = \frac{M \Sigma F_v}{F_H} = \frac{26.208}{14.58} = 1.79 > 1.5$$

## b) 1. Posición de la resultante, de las fuerzas verticales y horizontales

$$\text{Momento neto} = M_R - M_A = 141.40 - 26.24 = 115.16 \text{ ton-m.}$$

$$X_{AR} = \frac{M_n}{F_v} = \frac{115.16}{43.32} = 2.66 \text{ m (a la izquierda de A)}$$

distancia al centroide de la base

$$e = \frac{AB}{2} - X_{AR} = 2.50 - 2.66 = -0.16 \text{ m (ver figura)}$$

Por lo que cae dentro del tercio medio de la sección transversal y solo habrá esfuerzos de compresión en la base

**EJEMPLO 6 (Continuación)**

**b) 2. Magnitud de la resultante**

$$Q = \sqrt{F_v^2 + F_H^2} = \sqrt{(43.32)^2 + (14.58)^2} = \sqrt{2089.19} =$$

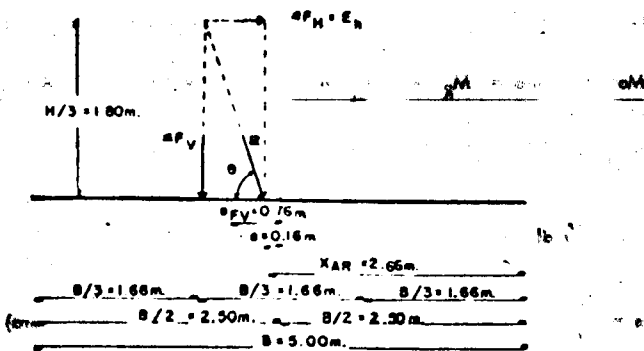
$$R = 45.708 \text{ ton}$$

**b) 3. Angulo de la resultante con la horizontal**

$$\theta = \text{ang tang } \frac{\sum F_v}{\sum F_H} = \text{ang tang } \frac{43.32}{14.58} = \text{ang tang } 2.971 =$$

$$\theta = 71^\circ 24'$$

Las fuerzas y sus puntos de aplicación se muestran en la siguiente figura:



**EJEMPLO 6 (Continuación)**

**c) Diagrama de los esfuerzos bajo la base**

Aplicando la fórmula de la flexión  $f = -\frac{P}{A} \pm \frac{M}{S}$  y  $\frac{D_{max}}{S}$

en donde:

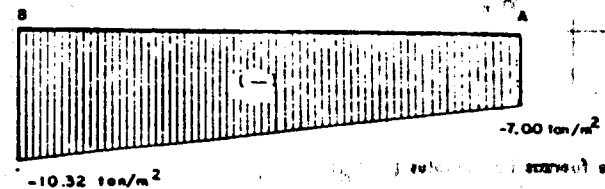
$$M = F_v \times e = 43.32 \times 0.16 = 6.93 \text{ ton-m}$$

sustituyendo valores

$$f = -\frac{43.32}{4.00} \pm \frac{6.93}{4.16} = -8.66 \pm 1.66$$

$$f_A = -7.00 \text{ ton/m}^2 \quad f_B = -10.32 \text{ ton/m}^2$$

el diagrama de esfuerzos queda finalmente como sigue:



### EJEMPLO 7 MUROS DE RETENCION

En este ejemplo se presentan un muro de retención de agua, pero a diferencia del anterior, existen otras fuerzas además del empuje hidrostático actuando sobre él, estas fuerzas son:

- a) La supresión bajo la base del muro y
- b) La producida por materiales azolvados

El análisis se hace en la misma forma que en el ejemplo 6, pero considerando que estas fuerzas adicionales contribuyen al momento de volteo, la fuerza que produce el momento resistente, es el peso propio del muro, el cual se descompone en los pesos de dos volúmenes más sencillos, fáciles de calcular.

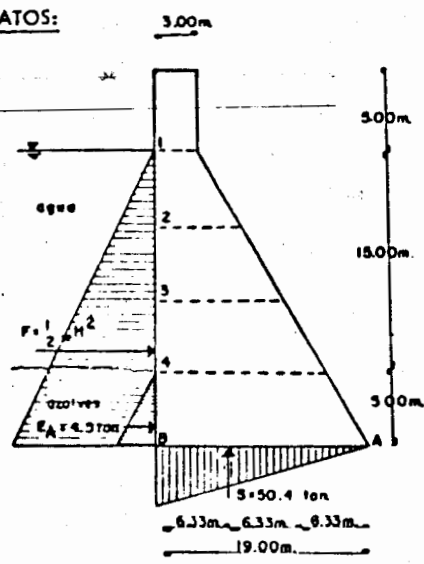
El conocer la posición y magnitud de las fuerzas actuantes y resistentes conduce a la obtención de los factores de seguridad que muestran la estabilidad del muro contra volteo y deslizamiento, se comprueba que la aplicación de la resultante esté sobre el tercio medio de la base para provocar únicamente esfuer

zos de compresión en la base, esfuerzos que resultan ser menores que la capacidad del terreno.

En el cálculo de los esfuerzos en diferentes secciones del muro, se comprueba que los valores alcanzados debidos al empuje hidrostático y el peso propio del muro, a partir del nivel que se analiza, son menores que el esfuerzo permisible para el material ( $f_c = 90 \text{ kg/cm}^2$ ) siendo todos ellos esfuerzos de compresión.

**EJEMPLO 7** Cálculo de la estabilidad de un muro de retención

**DATOS:**



$$f_c = 200 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_c = 0.45 f_c' = 90 \text{ kg/cm}^2$$

$$c = 2.2 \text{ ton/m}^3$$

$$\gamma_w = 1.0 \text{ ton/m}^3$$

$$\mu_{s.m.} = 0.60$$

$$\mu_{c.c.} = 0.65$$

Nota: El muro está sujeta a una supresión de 50.4 ton y a un empuje del material azolvado además del empuje hidrostático. La capacidad del terreno es de 40 ton/m<sup>2</sup>

- Se pide:
- Encontrar la posición y magnitud de la resultante y ángulo que forma con la horizontal.
  - Encontrar los factores de seguridad contra volteo y deslizamiento.
  - Encontrar el esfuerzo en la base.
  - Encontrar los esfuerzos en el muro a cada 5 metros a partir de la base hasta los 20.0 m de altura.

**EJEMPLO 7** (Continuación)

**SOLUCION:**

Cálculo de la magnitud y posición de las fuerzas actuantes

$$\text{Peso propio } W_{p.p.} = W_1 + W_2 = (3.0 \times 25.0 \times 2.4) + (16.00 \times 20.0/2) (2.4)$$

$$(0.5) = 180.00 + 384.00 = 564.00 \text{ ton.}$$

Fuerzas verticales

| Carga ton.                     | brazo m. | Momentos con respecto a A        |
|--------------------------------|----------|----------------------------------|
|                                |          | Momento $\curvearrowright$ ton-m |
| $W_1 = 180.00$                 | 17.50 m  | - 3150.00                        |
| $W_2 = 384.00$                 | 10.66 m  | - 4093.44                        |
| $S = -50.40$                   | 12.67 m  | + 638.56                         |
| $\Sigma = 513.60 \text{ ton.}$ |          | - 6604.88 ton-m                  |

$$e_{VA} = \frac{6604.88}{513.60} = 12.86 \text{ m (a la izquierda de A)}$$

## EJEMPLO 7 (Continuación)

## Fuerzas horizontales

| Carga ton.   | brazo m. | Momento con respecto a A         |
|--|----------|----------------------------------|
|  |          | Momento $\curvearrowright$ ton-m |
| Empuje hidrostática = $F = \gamma_w \frac{H^2}{2}$<br>$F = 1.00 \times 20.0^2/2 = 200.0$ | 6.67     | 1 334.00                         |
| Empuje de azolvés<br>EA = 4.50   | 1.67     | 7.52                             |
| $\Sigma$ 204.50  |          | 1 341.52 ton-m                   |

$$e_{HA} = \frac{1341.52}{204.50} = 6.56 \text{ m (sobre A)}$$

## a) 1. Posición de la resultante de las fuerzas verticales y horizontales

$$\text{Momento neto} = M_A = -6604.88 + 1341.52 = -5263.36 \text{ ton-m}$$

$$x_{AR} = \frac{M_n}{F_v} = \frac{5263.36}{513.60} = 10.24 \text{ m (a la izquierda de A)}$$

$$\frac{\overline{AB}}{3} = 6.33 < 10.24 < \frac{2}{3} \overline{AB} = 12.66 \quad \therefore \text{ la resultante cae en el tercio medio}$$

y la distancia al centroide de la base es

$$e = \frac{B}{2} - x_{AR} = \frac{19.00}{2} - 10.24 = 0.74 \text{ m (a la izquierda de } \overline{AB}/2)$$

## EJEMPLO 7 (Continuación)

## a) 2. Magnitud de la resultante

$$R = \sqrt{F_H^2 + F_V^2} = \sqrt{(204.50)^2 + (513.60)^2} = 552.82 \text{ ton}$$

$$R = 552.82 \text{ ton}$$

$$= 0.1 \times 00.$$

## a) 3. Angulo de la resultante con la horizontal

$$\theta = \text{ang tang} \frac{F_v}{F_H} = \text{ang tang} \frac{513.60}{204.50} = \text{ang tang} 2.511$$

$$\theta = 68^\circ 17'$$

## b) 1. Factor de seguridad contra volteamiento

$$F.S._{\text{volt}} = \frac{MR}{MA} = \frac{3150.00 + 4093.44}{638.56 + 1341.52} = 3.66 > 2.0 \quad \checkmark$$

## b) 2. Factor de seguridad contra deslizamiento en la base

$$F.S._{\text{des}} = \frac{\sum F_v}{F_H} = \frac{0.60 \times 513.60}{204.5} = 1.507 > 1.5$$

EJEMPLO 7 (Continuación)

c) Esfuerzos en la base

Se aplica la fórmula de la flexión  $f = -\frac{P}{A} \pm \frac{M}{I}$  y

donde:  $P = F_v = 513.60 \text{ ton}$

$A = 19.00 \times 1.0 = 19.00 \text{ m}^2$

$M = P \times e$ ;  $e = \left(\frac{M_n}{F_v} - B/2\right) = (X_{AR} - B/2) = 0.74 \text{ m}$

$M = 513.60 \times \left(\frac{5263.36}{513.60} - 19.00/2\right) = 380.06 \text{ ton-m}$

$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{1.0 \times (19.00)^3}{12} = 571.58 \text{ m}^4$

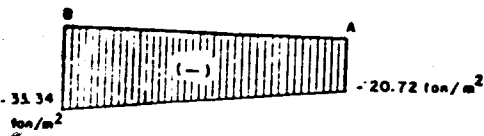
$y = 9.50 \text{ m}$

Sustituyendo valores

$f = -\frac{513.60}{19.00} \pm \frac{380.06}{571.58} (9.50) = -27.03 \pm 6.31$

$f_A = -20.72 \text{ ton/m}^2$        $f_B = -33.34 \text{ ton/m}^2$

La distribución de esfuerzos en la base es menor que la capacidad del terreno que es de  $40 \text{ ton/m}^2$ , y se muestra en la siguiente figura:

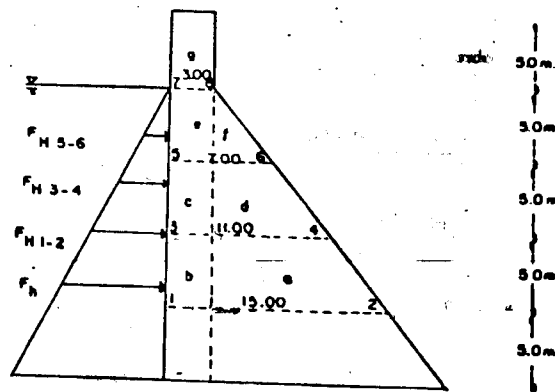


EJEMPLO 7 (Continuación)

d) Cálculo de la estabilidad en las secciones a 5, 10, 15 y 20 m sobre la base

|              |      |      |      |      |
|--------------|------|------|------|------|
| Sección      | 5 m  | 10 m | 15 m | 20 m |
| Coordenada X | 1.00 | 2.00 | 3.00 | 4.00 |
| Coordenada Y | 1.00 | 2.00 | 3.00 | 4.00 |
| Coordenada Z | 1.00 | 2.00 | 3.00 | 4.00 |

Secciones que se analizan, con sus correspondientes empujes hidrostáticos, sobre el muro.





EJEMPLO 7 (Continuación)

Tabla de cálculo de los esfuerzos en las secciones del muro @ 5.0 m.

| sec. | $F_V$<br>(ton)   | $\bar{y}$<br>(m) | $M_V$<br>(ton-m) | $F_H$<br>(ton) | $\bar{y}$<br>(m) | $M_H$<br>(ton-m) | $M_n =$<br>$M_H + M_V$ | $\theta =$<br>$M_n / F_V$ | $e$  |
|------|--|------------------|------------------|----------------|------------------|------------------|------------------------|---------------------------|------|
| 1-2  | $\frac{1}{2} A_1 \gamma_c = (30 \times 200 + 150 \times 20 / 2) 2.4 = 360.0$ | 10.20            | -3672.00         | 112.50         | 5                | 562.50           | -3109.50               | 8.63                      | 1.13 |
| 3-4  | $\frac{1}{2} A_2 \gamma_c = (30 \times 150 + 80 \times 10 / 2) 2.4 = 228.0$  | 6.74             | -1536.72         | 90.00          | 3.33             | 166.67           | -1370.05               | 8.00                      | 0.50 |
| 5-6  | $\frac{1}{2} A_3 \gamma_c = (30 \times 100 + 40 \times 5 / 2) 2.4 = 96.0$    | 4.79             | -459.84          | 12.50          | 1.67             | 20.87            | -438.97                | 4.57                      | 1.07 |
| 7-8  | $A_4 \gamma_c = (30 \times 50 \times 2.4) = 360.0$                           | 1.50             |                  |                |                  |                  |                        |                           |      |

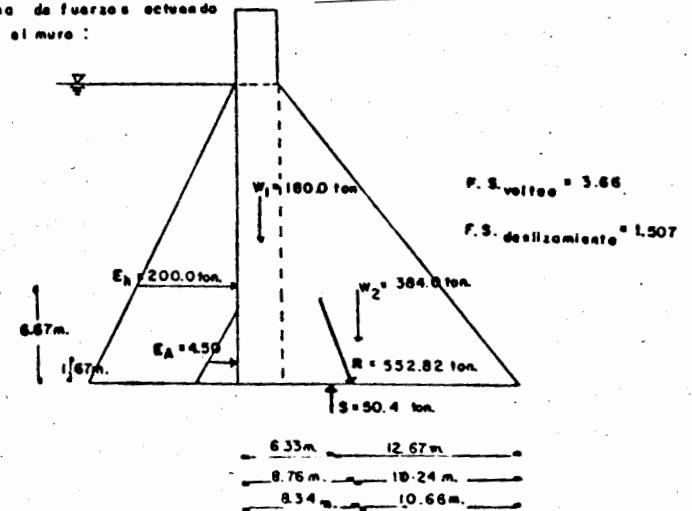
continuación

| $\mu = \frac{F_H}{F_V}$ | A   | $\frac{P}{A}$ | $M = F_V \cdot e$ | I (m <sup>4</sup> ) | $\gamma$ | $\frac{M}{I}$ | $f_n$ (ton/m <sup>2</sup> )      | $\theta = \frac{R}{F_V}$ ang. trig | conclusión |
|-------------------------|-----|---------------|-------------------|---------------------|----------|---------------|----------------------------------|------------------------------------|------------|
| 2.08                    | 150 | -24.00        | 406.80            | 281.25              | 7.50     | 10.85         | $f_1 = -34.85$<br>$f_2 = -10.15$ | 377.17<br>72° 39'                  | estable    |
| 2.96                    | 110 | -20.73        | 34.00             | 110.91              | 5.50     | 5.65          | $f_3 = -26.36$<br>$f_4 = -15.08$ | 231.26<br>77° 38'                  | estable    |
| 4.99                    | 70  | -13.71        | 102.72            | 28.68               | 5.5      | 12.58         | $f_5 = -26.29$<br>$f_6 = -1.13$  | 96.81<br>82° 35'                   | estable    |
|                         | 30  | -12.00        |                   |                     |          |               |                                  | 12.00<br>90°                       | estable    |

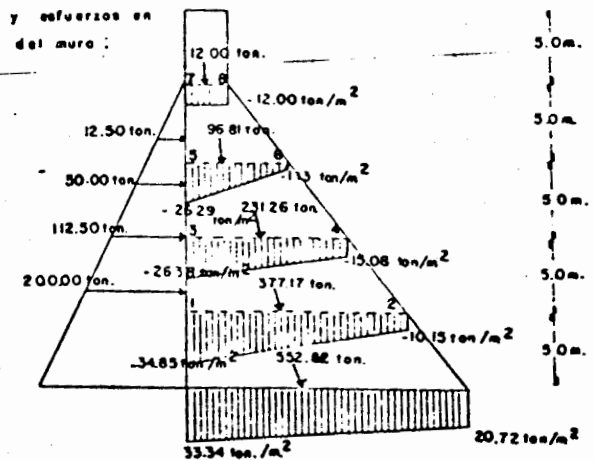
EJEMPLO 7 (Continuación)

Los resultados de este análisis se muestran en las siguientes figuras.

sistema de fuerzas actuando sobre el muro:



resultantes y esfuerzos en secciones del muro:



## REFERENCIAS

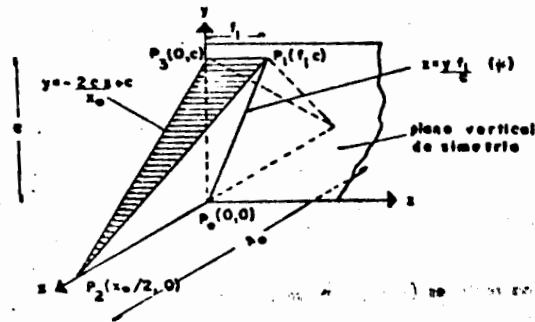
1. S. P. Timoshenko y James M. Gere, Mecánica de materiales, Uteha 1974.
2. Egor P. Popov., Introduction to Mechanics of Solids, Prentice Hall, 1968.
3. Ferdinand L.B. Singer, Resistencia de materiales, Harper and Row Latino Americana, 1971.
4. John N. Cernica, Resistencia de materiales, C.E.C.S.A., 1974.
5. Oscar M. González Cuevas, Francisco Robles F.V., Juan Casillas G. de L., Roger Díaz de Cossío, Aspectos fundamentales del concreto reforzado, Limusa, 1974.
6. Eulalio Juárez, Alfonso Rico Rodríguez, Mecánica de suelos, Limusa, 1973.
7. Jesús Alberro, Abraham Ellstein, Normas para el diseño de pequeños muros de retención, Revista Ingeniería, Julio 1969.

605545

A.2 Volumen superior

Primero se analizará el volumen superior, fig A-2, en el cual se tiene que

- C = constante (supuesto)
- $X_0 = f(c)$  (se obtiene por medio de triángulos semejantes)
- $f_1 = f_y$  si  $f_2 < f_y$
- $f_1 = f(c)$  si  $f_2 = f_y$  (se obtiene por triángulos semejantes)



(\*) Recta de intersección del plano vertical de simetría con el plano que limita la cara exterior del volumen.

Fig (A-2) Volumen superior de esfuerzos

Se escoge una región en el plano xy como se muestra en la fig (A-2) y para facilitar el proceso, ya que el volumen total presenta simetría con respecto a un plano vertical (plano yz), se analizará solo la mitad del volumen total. Si se observa la fig (A-2) se nota que los límites están dados por las rectas  $\overline{P_2P_3}$ , así como por el plano generado por la ecuación de la recta  $\overline{P_0P_1}$ , por lo que se procede a determinar dichas ecuaciones.

ANEXO

CALCULO DEL VOLUMEN DE ESFUERZOS (FUERZA NORMAL) Y CENTROIDE (POSICION DE LA FUERZA) PARA UNA DISTRIBUCION DE ESFUERZOS ELASTICA LINEAL Y UNA POSICION DEL EJE NEUTRO CUALQUIERA.

A.1 Descripción del problema

Al actuar sobre la sección triangular la variación lineal de esfuerzos se generan dos volúmenes, representando uno la fuerza de compresión y el otro la de tensión como se muestra en la figura A-1.

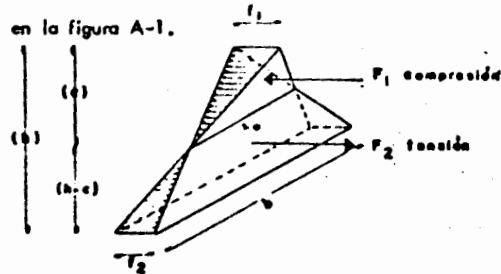


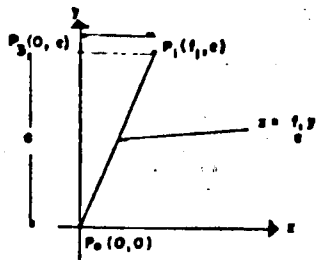
Fig. (A-1) Volúmenes generados por variación lineal de esfuerzos

A.2.1 Obtención de la recta  $\overline{P_2P_3}$ 

La ecuación general de una recta está dada por la ecuación

$$y = mx + b \quad \text{donde} \quad m = \text{pendiente} \quad y \quad b = \text{ordenada al origen.}$$

$$\therefore y = -\frac{2c}{x_0} + c$$

A.2.2 Obtención del plano generado por la recta  $\overline{P_0P_1}$ 

Otra forma de ecuación para una recta es  $(y - y_1) = m(z - z_1) + b$  por lo que al sustituir valores se tiene

$$(y - c) = \frac{c}{f_1} (z - f_1)$$

$$(y - c) = \frac{c}{f_1} z - \frac{c f_1}{f_1}$$

$$(y - c) = \frac{c}{f_1} z - c$$

$$y = \frac{c}{f_1} z \quad \therefore z = y \frac{f_1}{c}$$

por lo tanto la región que se integrará está limitada por

$$R_{xy} \left\{ 0 \leq x \leq \frac{x_0}{2}, 0 \leq y \leq -\frac{2c}{x_0} x + c, 0 \leq z \leq y \frac{f_1}{c} \right\}$$

A.2.3 Cálculo  $\frac{F_1}{2}$  (medio volumen superior) usando la integral triple

$$\frac{F_1}{2} = \int_0^{x_0/2} \int_0^{-\frac{2c}{x_0}x+c} \int_0^{y \frac{f_1}{c}} dx dy dz = \int_0^{x_0/2} \int_0^{-\frac{2c}{x_0}x+c} z \frac{y f_1}{c} dx dy =$$

$$= \int_0^{x_0/2} \int_0^{-\frac{2c}{x_0}x+c} \frac{y f_1}{c} dx dy = \int_0^{x_0/2} \left[ \frac{y f_1}{c} \frac{2}{2} \right]_0^{-\frac{2c}{x_0}x+c} dx =$$

$$= \int_0^{x_0/2} \frac{f_1}{2c} \left[ -\frac{2c}{x_0}x + c \right]^2 dx$$

Esta integral tiene la forma  $\int c u^n du$

donde

$$u = -\frac{2c}{x_0} x + c \quad \text{y} \quad du = -\frac{2c}{x_0} dx$$

como se observa en la integral anterior falta el término constante  $-\frac{2c}{x_0}$  para tener completa la diferencial.

Completando la diferencial e integrando se tiene:

$$F_1/2 = -\left(\frac{1}{2} x_0 / 2c\right) \left[ \frac{2c}{x_0} x + c \right]^{3/2} \Big|_0^{x_0/2}$$

$$F_1/2 = -\left(\frac{1}{4c^2} x_0\right) \left(\frac{1}{3}\right) \left[ \left(-\frac{2c}{x_0}\right) \left(\frac{x_0}{2}\right) + c \right]^3 - c^3 \Big|_0^{x_0/2}$$

$$F_1/2 = -\left(\frac{1}{4c^2}\right) \left(\frac{1}{3}\right) [-c^3] = (f_1 x_0 c) / 12$$

$$V_1 = F_1/2 = (f_1 x_0 c) / 12$$

(1-a)

y la fuerza total que origina el volumen superior esta dada por

$$F_1 = (f_1 x_0 c) / 6$$

(1)

A.2.4 Obtención del centroide del volumen  $\frac{F_1}{2}$  (media volumen superior) por medio de integral triple.

El centroide esta dado por la expresión  $\bar{y} = \frac{\iiint y dv}{V_1}$  (2)

El término  $\iiint y dv$  se obtiene de la siguiente forma:

$$\int_0^{x_0/2} \int_0^{-\frac{2cx}{x_0} + c} \int_0^{y f_1 / c} y dx dy dz = \int_0^{x_0/2} \int_0^{-\frac{2cx}{x_0} + c} y z \Big|_0^{y f_1 / c} dx dy =$$

$$\int_0^{x_0/2} \int_0^{-\frac{2cx}{x_0} + c} y \left[ \frac{y^2 f_1}{2c} \right] dx dy = \int_0^{x_0/2} \int_0^{-\frac{2cx}{x_0} + c} y^2 \left( \frac{f_1}{c} \right) dx dy =$$

$$\int_0^{x_0/2} \frac{f_1}{c} \int_0^{-\frac{2cx}{x_0} + c} y^2 dx dy = \int_0^{x_0/2} \frac{f_1}{c} \left[ \frac{y^3}{3} \Big|_0^{-\frac{2cx}{x_0} + c} \right] dy =$$

$$\int_0^{x_0/2} \left( \frac{f_1}{c} \right) \left[ \frac{-\frac{2cx}{x_0} + c}{3} \right]^3 \frac{1}{3} dy = \left( \frac{f_1}{3c} \right) \int_0^{x_0/2} \left( -\frac{2cx}{x_0} + c \right)^3 dx =$$

completando la diferencial e integrando

$$= -\frac{f_1}{3c} \left(\frac{x_0}{2c}\right) \int_0^{2c} \left(-\frac{2c}{x_0}x + c\right)^3 dx = -\frac{f_1 x_0}{6c^2} \left[ -\frac{2c}{x_0}x + c \right]^4 \Big|_0^{2c}$$

$$= -\frac{f_1 x_0}{6c^2} \frac{(-c^4)}{4} = \frac{f_1 x_0}{24} c^2 \quad \text{tab}$$

$$\therefore \iiint y \, dv = \frac{x_0 f_1 c^2}{24} \quad (3)$$

Al sustituir los valores de (3) y (1-a) en (2)

$$\bar{y} = \frac{\iiint y \, dv}{V_1} = \frac{\frac{x_0 f_1 c^2}{24}}{\frac{x_0 f_1 c}{12}} = \frac{12 x_0 f_1 c^2}{24 x_0 f_1 c} = \frac{c}{2}$$

$$\therefore \bar{y} = \frac{c}{2} \quad (4)$$

Como se mencionó anteriormente, este centroide es de la mitad del volumen, por lo que el centroide del volumen total se obtendrá tomando momentos con respecto a la base del mismo, fig A-3.

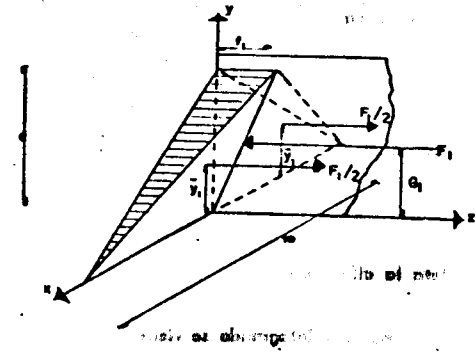


Fig A-3 Centraide del volumen superior de esfuerzos

de la fig (A-3)

$$\left(\frac{F_1}{2}\right) \bar{y} + \left(\frac{F_2}{2}\right) \bar{y} = F_1 G_1$$

$$2 \frac{F_1}{2} \left(\frac{c}{2}\right) = F_1 G_1$$

$$\therefore G_1 = \frac{c}{2}$$

(5)

es el centroide total del volumen superior de esfuerzos

### A.3 Volumen inferior

Después de analizar el volumen superior, se analizará ahora el volumen inferior  $F_2$ , que al igual que el anterior, para facilitar la integración en la obtención del volumen y centroide, se tomará solo la mitad.

La distribución de esfuerzos mostrada en la fig (A-1) indica que el volumen inferior,  $F_2$ , es una cuña triangular con base en forma de paralelogramo y caras trapeziales, como se muestra en la fig (A-4)

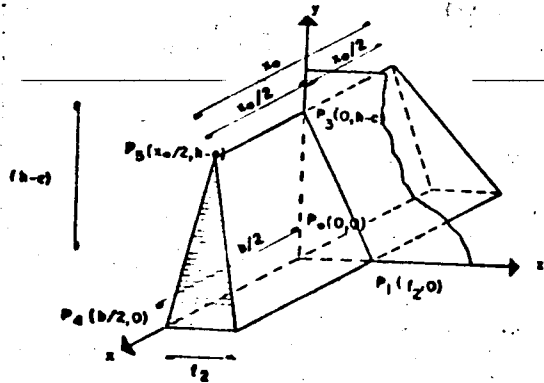
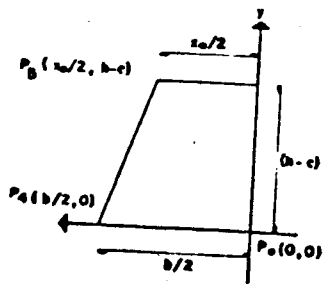


Fig (A-4) Volumen inferior de esfuerzos

Escogiendo la región en el plano yz (región y) se procede a encontrar los límites de integración.

A.3.1 Obtención de la ecuación de la recta  $\overline{P_4P_5}$



ecuación general de una recta

$$(y - y_1) = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)} (x - x_1)$$

$$y - (h-c) = \frac{(h-c) - (0)}{(x_0/2 - b/2)} (x - x_0/2)$$

de donde se despeja x

$$[y - (h-c)] [x_0/2 - b/2] = (h-c)(x - x_0/2)$$

$$[y - (h-c)] [x_0/2 - b/2] / (h-c) + x_0/2 = x$$

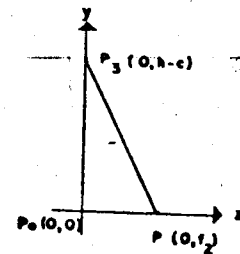
$$x = y(x_0/2)/(h-c) - by/2(h-c) - (h-c)(x_0)/(h-c)(2) +$$

$$(h-c)b/(h-c)(2) + x_0/2$$

$$x = yx_0/2(h-c) - by/2(h-c) - x_0/2 + b/2 + x_0/2$$

$$\therefore x = [yx_0 - by] / 2(h-c) + b/2$$

A.3.2 Obtención de la recta  $\overline{P_1P_3}$



$$y = mz + b$$

$$y = \frac{-(h-c)}{l_2} z + (h-c)$$

despejando z

$$y - (h-c) = -\frac{(h-c)}{l_2} z$$

$$[y - (h-c)]f_2 = -(h-c)z$$

$$z = -\frac{f_2}{(h-c)}[y - (h-c)]$$

$$z = -\frac{yf_2}{(h-c)} + \frac{f_2(h-c)}{(h-c)}$$

$$z = f_2 - \frac{yf_2}{(h-c)}$$

$$\therefore z = f_2 [1 - (y/(h-c))]$$

La región que se integrará está dada por los siguientes límites:

$$R_y \left\{ 0 \leq y \leq (h-c), \quad 0 \leq z \leq f_2 [1 - (y/(h-c))] \right\}$$

$$0 \leq x \leq \left[ \frac{1}{2}(h-c)(yx_0 - by) + b/2 \right]$$

A.3.3 Cálculo de  $\frac{F_2}{2}$  (medio volumen inferior) usando Integral doble.

$$\frac{F_2}{2} = \iint x \, dy \, dz = \int_0^{(h-c)} \int_0^{f_2(1-y/(h-c))} \left[ \frac{1}{2}(h-c)(yx_0 - by) + b/2 \right] dy \, dz =$$

$$\int_0^{(h-c)} \left[ \frac{1}{2(h-c)}(yx_0 - by) + b/2 \right] z \Big|_0^{f_2(1-y/(h-c))} dy =$$

$$\int_0^{(h-c)} \left[ \frac{1}{2(h-c)}(yx_0 - by) + b/2 \right] [f_2 - f_2y/(h-c)] dy =$$

$$\int_0^{(h-c)} \frac{f_2}{2(h-c)}(yx_0 - by) + f_2b/2 - [yf_2/(h-c)^2(2)](yx_0 - by) - \frac{b}{2} \frac{f_2y}{(h-c)} dy =$$

$$\int_0^{(h-c)} \frac{f_2}{2(h-c)}(yx_0 - by) dy + \int_0^{(h-c)} \frac{f_2b}{2} dy - \int_0^{(h-c)} \frac{yf_2}{2(h-c)}(yx_0 - by) dy - \int_0^{(h-c)} \frac{b f_2 y}{2(h-c)} dy =$$

$$\frac{f_2}{2(h-c)} \left( \frac{x_0 y^2}{2} - \frac{by^2}{2} \right) \Big|_0^{(h-c)} + \frac{f_2 b}{2} y \Big|_0^{(h-c)} - \frac{f_2}{2(h-c)^2} \left[ \frac{x_0 y^3}{3} - \frac{by^3}{3} \right] \Big|_0^{(h-c)} -$$

$$\frac{b f_2}{2(h-c)} y^2 \Big|_0^{(h-c)} =$$

$$\frac{f_2}{4(h-c)} [(h-c)^2(x_0 - b)] + \frac{f_2 b}{2}(h-c) - \frac{f_2}{2(h-c)^2} \frac{1}{3} [(h-c)^3(x_0 - b)] - \frac{b f_2 (h-c)^2}{2(h-c)^2} =$$



$$\frac{f_2(h-c)(x_0-b)}{4} + \frac{f_2(h-c)}{2} - \frac{f_2(h-c)(x_0-b)}{6} - \frac{f_2 b(h-c)}{4} =$$

$$\frac{f_2(h-c)(x_0-b)}{4} - \frac{f_2(h-c)(x_0-b)}{6} + \frac{f_2 b(h-c)}{4} = \frac{f_2 b(h-c)}{4} + \frac{f_2(h-c)(x_0-b)}{12} =$$

$$\frac{f_2 b(h-c)}{4} + \frac{f_2(h-c)x_0}{12} - \frac{f_2(h-c)b}{12} = \frac{1}{6} \frac{f_2(h-c)b}{6} + \frac{f_2(h-c)x_0}{12} =$$

$$\frac{f_2(h-c)(b+x_0)}{6} \quad \therefore \quad \boxed{\frac{F_2}{2} = \frac{f_2(h-c)}{6} b + \frac{x_0}{2}} \quad (6-a)$$

y la fuerza total

$$F_2 = \frac{f_2(h-c)(2)}{6} \left[ \frac{2b}{2} + \frac{x_0}{2} \right] =$$

$$F_2 = \frac{f_2(h-c)}{6} \frac{2}{2} (2b+x_0) =$$

$$\therefore \quad \boxed{F_2 = \frac{f_2(h-c)}{6} (2b+x_0)} \quad (6)$$

A.3.4 Obtención del centroide del volumen  $\frac{F_2}{2}$  (medio volumen inferior)

El centroide está dado por la expresión  $\bar{y} = \frac{\iiint y \, dv}{V}$

en la cual el término  $\iiint y \, dv$  resulta igual a

$$\int_0^{(h-c)} \int_0^{f_2(1-y/(h-c))} y \left[ \frac{1}{2(h-c)} (yx_0 - by) + \frac{b}{2} \right] dy \, dz = \int_0^{(h-c)} \int_0^{f_2 - f_2 y/(h-c)} \left[ \frac{y^2}{2(h-c)} (x_0 - b) + \frac{by}{2} \right] dy \, dz =$$

$$\int_0^{(h-c)} \left[ \frac{y^2}{2(h-c)} (x_0 - b) + \frac{by}{2} \right] z \Big|_0^{f_2 - f_2 y/(h-c)} dy = \int_0^{(h-c)} \left[ \frac{y^2}{2(h-c)} (x_0 - b) + \frac{by}{2} \right] \left[ f_2 - \frac{f_2 y}{(h-c)} \right] dy =$$

$$\int_0^{(h-c)} \frac{f_2 y^2}{2(h-c)} (x_0 - b) dy + \int_0^{(h-c)} \frac{by f_2}{2} dy - \int_0^{(h-c)} \frac{f_2 y^3}{2(h-c)} (x_0 - b) dy - \int_0^{(h-c)} \frac{f_2 y^2 b}{2(h-c)} dy =$$

$$\frac{f_2(h-c)^2(x_0-b)}{6} + \frac{f_2 b(h-c)^2}{4} - \frac{f_2(h-c)^2(x_0-b)}{8} - \frac{f_2 b(h-c)}{6} = f_2(h-c)^2(x_0-b) \left[ \frac{1}{6} - \frac{1}{8} \right] + f_2(h-c)^2 b \left[ \frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right]$$

$$\frac{f_2(h-c)^2 x_0}{24} - \frac{f_2(h-c)^2 b}{24} + \frac{f_2(h-c)^2 b}{12} = \frac{f_2(h-c)^2 x_0}{24} + \frac{f_2(h-c)^2 b}{24}$$

$$\therefore \quad \iiint y \, dv = \frac{f_2(h-c)^2}{24} (x_0 + b) \quad (7)$$

El centroide se obtiene al sustituir (6-a) y 7 en (2)

$$\bar{y} = \frac{\frac{f_2 (h-c)^2 (x_0 + b)}{24}}{\frac{f_2 (h-c) (x_0/2 + b)}{6}} = \frac{(h-c) (x_0 + b)}{2 (x_0 + 2b)}$$

$$\therefore y = \frac{(h-c) (x_0 + b)}{2 (x_0 + 2b)} \quad (8)$$

Al igual que en el volumen superior, el análisis se ha efectuado para la mitad del volumen inferior, por lo que el centroide se determinará tomando momentos respecto a la base, como se aprecia en la fig A-5.

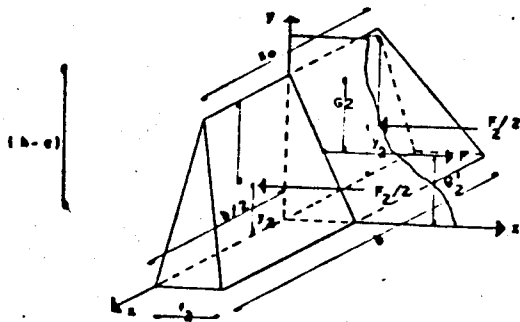


Fig A-5 Centroide del volumen inferior

así

$$\left(\frac{F_2}{2}\right) y + \left(\frac{F_2}{2}\right) y = G_2' F_2$$

$$2\left(\frac{F_2}{2}\right) y = G_2' F_2$$

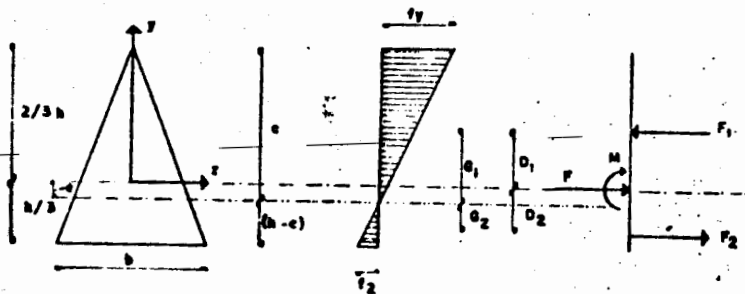
$$\therefore y = G_2' \quad (9)$$

Para referir la fuerza al eje neutro se hace:

$$G_2 = (h-c) - G_2' \quad (10)$$

Por lo que sustituyendo el valor de  $G_2'$  se tiene

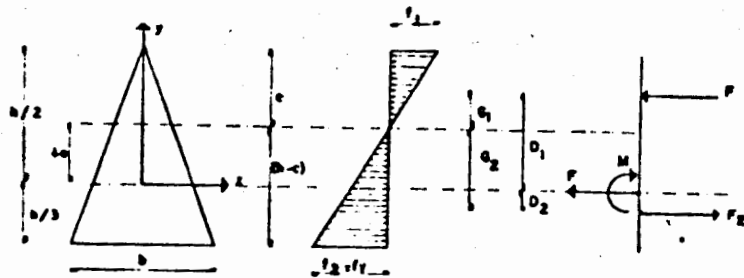
$$G_2 = (h-c) - \frac{(h-c) (x_0 + b)}{2 (x_0 + 2b)} \quad (11)$$

A.4 Obtención de  $D_1$  y  $D_2$ 

El eje neutro puede localizarse abajo del eje centroidal o sobre él por lo que:

a) si  $-(h-c) \leq -e \leq 0$

$$D_1 = G_1 - |-e| \quad \text{y} \quad D_2 = G_2 + |-e|$$



b) si  $0 \leq e \leq c$

$$D_1 = G_1 + e \quad \text{y} \quad D_2 = G_2 - e$$

NOTA: Al suponer la posición del eje neutro con respecto al eje centroidal se tiene la distancia  $e$ ; con esta distancia y la posición de los centroides de cada uno de los volúmenes de esfuerzos es posible determinar la posición de las fuerzas con respecto al eje centroidal. Generalizando se puede decir que

$$D_1 = G_1 \pm |e| \quad \text{y} \quad D_2 = G_2 \mp |e| \quad (12)$$