



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

**DIVISIÓN DE INGENIERÍA CIVIL, TOPOGRAFÍA Y
GEODESICA.**

**APUNTES DE MECANICA DE MATERIALES
(SEGUNDO CURSO).**

APUNTES DE
MECANICA DE MATERIALES
(SEGUNDO CURSO)



FACULTAD DE INGENIERIA

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
FACULTAD DE INGENIERIA
DIVISION DE INGENIERIA CIVIL, TOPOGRAFICA Y GEODESICA
DEPARTAMENTO DE ESTRUCTURAS



(5)
G-610791

INDICE

FACULTAD DE INGENIERIA

TEMA I

ESFUERZO CORTANTE	Tomás Sánchez R.	1
Cortante directo		2
Flujo de cortante		4
Separación de conectores en vigas		16
Esfuerzo cortante en secciones circulares		22
Esfuerzo cortante en secciones T e I		25
Problemas resueltos		32
Problemas propuestos		43

TEMA II

ESTADO PLANO DE ESFUERZOS	M. Alvarez Solís	
Introducción		47
Esfuerzos en un elemento (una barra) sometida a fuerza axial		50
Ejemplos		55
Problemas		59
Ecuaciones para la transformación de un estado de esfuerzo plano		60
Ejemplos		66
Problemas		76
Círculo de Mohr para transformación de esfuerzos		78
Construcción del círculo de Mohr para esfuerzos		80
Ejemplos		82
Problemas		88
Problemas de análisis de esfuerzos		89
Ejemplos		92
Problemas		99
Bibliografía		101
Problemas		102

TEMA III

DIMENSIONAMIENTO DE VIGAS Y LOSAS DE CONCRETO REFORZADO

Adaptado por: Fco. Robles F. V.
Marco A. Alvarez S.
Carlos J. Mendoza E.

1. Observaciones preliminares		109
2. Resistencia a flexión de secciones de concreto reforzado		
2.1 Consideraciones generales		112
2.2 Secciones balanceadas, subreforzadas y sobre-reforzadas		117
2.3 Vigas rectangulares simplemente armadas		118
2.4 Vigas rectangulares doblemente armadas		123
2.5 Vigas T		125
2.6 Vigas de sección simétrica de forma cualquiera		126

3. Revisión de esfuerzos bajo condiciones de servicio		127
4. Resistencia a fuerza cortante		
4.1 Vigas		130
4.2 Losas y zapatas		135
5. Concepto de anclaje		137
6. Cálculo de deflexiones		140
7. Estimación del ancho de grietas		143
8. Dimensionamiento de secciones sujetas a flexión		146
8.1 Vigas rectangulares simplemente armadas		146
8.2 Secciones rectangulares doblemente armadas		147
8.3 Secciones T		147
9. Corte y doblado de varillas		148
10. Dimensionamiento de losas apoyadas en lados opuestos		151
10.1 Peralte mínimo		151
10.2 Recomendaciones sobre refuerzo		152
11. Dimensionamiento de vigas		155
11.1 Peralte mínimo		155
11.2 Recomendaciones sobre refuerzo principal		156
12. Dimensionamiento de losas perimetralmente apoyadas		157
12.1 Análisis		160
12.2 Peralte mínimo		160
12.3 Recomendaciones sobre refuerzo		160
12.4 Losas con relación de lado corto a lado largo ≤ 5		162
13. Dimensionamiento de zapatas		
13.1 Zapatas para muros		163
13.2 Zapatas para columnas aisladas		166
14. Ejemplos		168
Referencias		246
Ejemplos		247

TEMA IV

ELEMENTOS CORTOS SUJETOS A FLEXION Y CARGA AXIAL COMBINADAS

	Arturo Soto Juárez Carlos J. Mendoza E. Corregido y aumentado por José Luis Esquivel A.	
1. Introducción		262
2. Flexotensión y flexocompresión en el intervalo elástico		263
Limitaciones del principio de superposición		
Ejemplo		267
3. Determinación de diagramas de esfuerzos en flexión biaxial y fuerza normal combinadas		268

Ejemplos	270
4. Núcleo central de una sección transversal	276
Ejemplos	277
5. Zapatas rígidas cargadas excéntricamente	285
6. Muros de retención	288
6.1 Elementos que intervienen en la construcción de los muros de retención	288
6.2 Fuerzas que intervienen en el cálculo de los muros de retención. Teoría de Rankine. Teoría de Coulomb. Método de Terzaghi	289
6.3 Cálculo de estabilidad de muros de retención	298
Ejemplos	300
7. Referencias	317
Apéndice A: Método de Culmann	318
Apéndice B: Cálculo de K_A en la teoría de Rankine	322

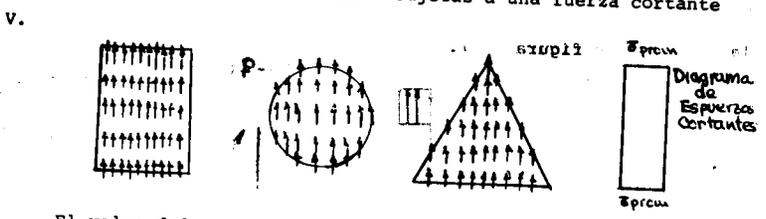
TEMA I q sup oñeupz estebue...
ESFUERZO CORTANTE PROMEDIO
 Tomás Sánchez R.

El esfuerzo cortante promedio en una sección transversal --
 cualquiera se obtiene basándose en la hipótesis de que la distri-
 bución de esfuerzos cortantes, en el área que resiste cortante,
 es uniforme.

Por tanto para valuar el esfuerzo cortante promedio en una
 sección transversal bastará dividir la fuerza cortante actuante
 entre el área de la sección transversal de la pieza.

$\tau_{prom} = \frac{V}{A}$

Distribución supuesta de esfuerzos cortantes para diversas
 secciones transversales de área A sujetas a una fuerza cortante



El valor del esfuerzo cortante promedio en una sección trans-
 versal es muy sencillo de valuar, pero su utilización en proble-
 mas prácticos se encuentra bastante limitado. Esto ocurre porque,
 tanto teórica como experimentalmente, se ha demostrado que la hi-

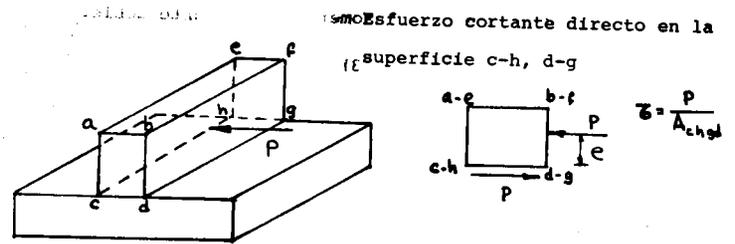
$0 = Mb - M - M + \int_0^x \frac{dx}{2} \times b \times p$

esto que (x) es despreciable por ser muy pequeño
 $x \times V = Mb$

hipótesis de distribución uniforme de esfuerzos en el área de la -
 sección transversal no es, en la mayoría de los casos, razonable-
 mente congruente con los resultados teóricos y experimentales ob-
 tenidos. (Por ejemplo en vigas, el valor del cortante promedio
 se dispara de los valores teóricos y experimentales obtenidos).

Cortante directo

Para la valuación de esfuerzos cortantes directos es útil -
 la expresión del esfuerzo cortante promedio. Los esfuerzos cor-
 tantes directos se generan cuando las fuerzas cortantes se trans-
 miten de una parte de un cuerpo a otro, ya sea directamente o a
 través de pernos o remaches como se muestra a continuación en --
 las figuras 1, 2 y 3.



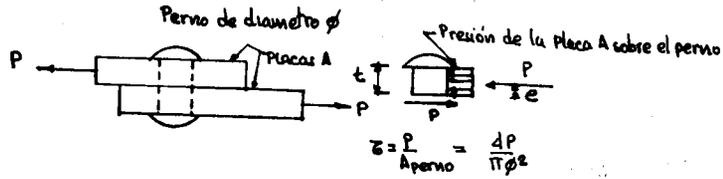
En los casos de las figuras (1), (2) y (3) el esfuerzo cortante directo en la superficie c-h, d-g

Fuerza cortante por contacto directo entre dos placas

Se considera que la distancia a-c y b-d es pequeña.

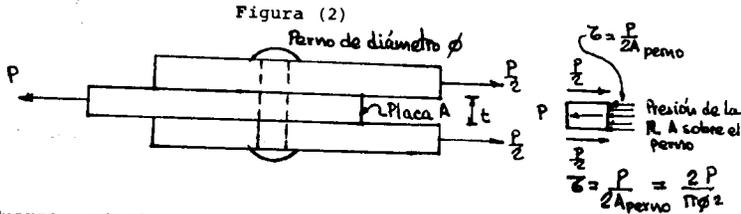
Se considera que la distancia a-c y b-d es pequeña.

Figura (1)



Fuerza cortante en la sección central de un perno

Figura (2)



Fuerza cortante en un perno sometido a cortante doble.

Figura (3)

En los casos de las figuras (1), (2) y (3) para determinar los esfuerzos que se presentan en los planos de transmisión, se hacen secciones en los planos de contacto y se analiza el equilibrio del cuerpo libre resultante. En los casos mostrados en las figuras (1) y (2) el hecho de que las fuerzas no sean colineales conduce a la presencia de un momento flexionante no equilibrado Pxe ,

suficientemente pequeño que puede ser despreciado. En los tres casos antes mencionados, las fuerzas se transmiten a través de las superficies del elemento que mantienen unidas a las piezas.
Flujo de Cortante

Para encontrar las ecuaciones que permitan determinar el flujo de cortante en diversas secciones de una viga, es necesario establecer primeramente, en forma clara, que el momento flexionante y la fuerza cortante se encuentran relacionadas por medio de la expresión siguiente :

$$dM = V dx$$

Esta ecuación establece que la variación del momento flexionante en una viga, entre dos secciones adyacentes separadas entre si una distancia dx se encuentra dada por el producto Vdx y donde V es el cortante actuante en la sección izquierda de la pieza. (Ver figura (4)).

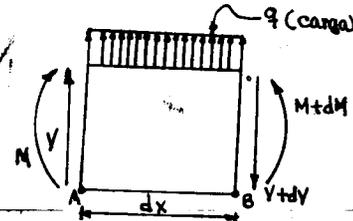


Figura (4)

Por equilibrio

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \sum F_y &= 0 & dV &= q \\
 (+) \quad (2) \quad \sum M_B &= 0 & qdx \frac{dx}{2} + Vdx + M - M - dM &= 0
 \end{aligned}$$

Puesto que $(dx)^2$ es despreciable por ser muy pequeño

$$dM = V dx$$

Por tanto cuando el cortante en una sección de viga es $V = 0$, se tiene que $dM = 0$, y en consecuencia el valor del momento flexionante en la sección derecha del elemento de viga es igual al momento flexionante en la sección izquierda del elemento de viga analizado. Esto es, cuando el diagrama de fuerza cortante vale cero en una sección de viga, el momento flexionante en esa zona mantiene un valor constante (no necesariamente nulo).

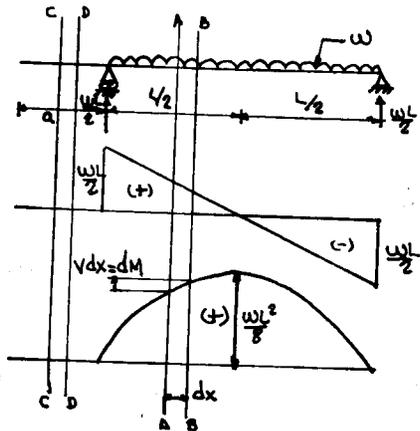
Para comprender mejor la significación de la expresión $dM = Vdx$, se analizarán los ejemplos siguientes:

Ejemplo

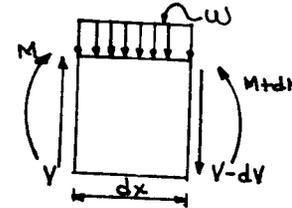
Viga

Diagrama de
Fuerza Cortante

Diagrama de
Momento Flexionante



El elemento de viga que queda comprendido entre las secciones A y B, se encuentra sometido a las acciones que se indican.



Del equilibrio

$$\sum M_B = 0 \quad (+) \quad M + Vdx - \frac{w}{2} dx^2 - M - dM = 0$$

Operando, se encuentra que $dM = Vdx$ es el incremento en momento flexionante entre las secciones A y B.

Entre las secciones C y D el cortante es nulo y por tanto $dM = 0$; como el momento en el extremo volado es cero, este momento no se modifica hasta más allá del apoyo con rodillos en donde el cortante ya tiene valor y $dM = Vdx$.

En el ejemplo siguiente se observa que en la zona donde el diagrama de fuerza cortante es nulo el valor del momento flexionante se mantiene constante (no nulo como en el ejemplo anterior).

Ejemplo
Viga

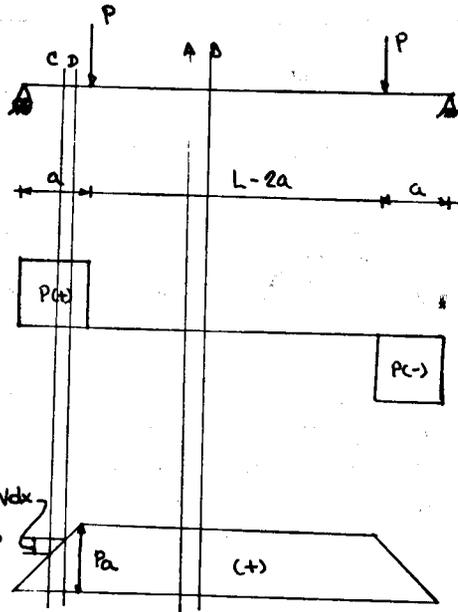


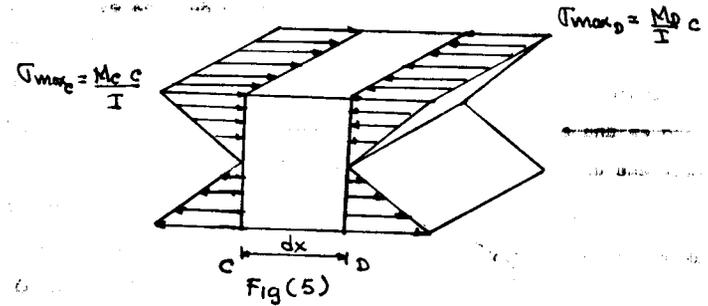
Diagrama de
Fuerza Cortante

Diagrama de Momento
flexionante.

En dos secciones adyacentes tales como A y B no existe fuerza cortante y por tanto el momento flexionante entre ellas se mantiene constante ($dM=0$). Entre las secciones C y D la fuerza cortante tiene valor distinto de cero y existe variación del valor del momento flexionante.

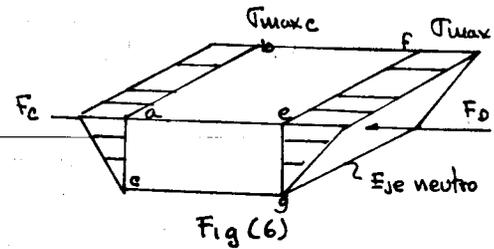
Para ilustrar el efecto del momento flexionante en el cálculo del flujo de cortante en una viga, es necesario considerar un segmento de la viga del ejemplo anterior y suponer, por simplicidad, que dicha viga tiene una sección transversal rectangular. Aislando el segmento de viga comprendido entre las seccio

nes C y D tendremos que el estado de esfuerzos debidos únicamente a flexión es el mostrado a continuación :



Dado que el momento en D es superior en valor al momento en C, entonces el $\sigma_{max_C} < \sigma_{max_D}$. Como este segmento está en equilibrio cualquier segmento que de él se aisle también estará en equilibrio. Si se separa la porción situada encima del eje neutro de la de abajo, las ecuaciones de equilibrio deberán satisfacerse en cualquiera de las dos secciones.

Tomando solamente la sección superior se tiene :



$$\sigma_{max_C} < \sigma_{max_D}$$

Verificando la condición de equilibrio $\sum F_x = 0$ se observa que la resultante de los esfuerzos de compresión que actúan en el área abcd es la fuerza F_C y la resultante de los esfuerzos de compresión que actúan en el área efgh es la fuerza F_D . Como $\sigma_{\max C} < \sigma_{\max D}$ y ambas distribuciones de esfuerzo varían de esos valores a cero en el eje neutro, entonces es posible --- afirmar que $F_C < F_D$.

Para que cualquier sección de la viga esté en equilibrio es necesario que la diferencia, $F_D - F_C$ sea tomada por el área cdgh (para vigas homogéneas de una sola pieza). Se define como flujo de cortante la fuerza ($F_D - F_C$) que se toma por unidad de longitud de viga y se identifica con la letra q .

$$q = \frac{F_D - F_C}{dx} = \frac{dF}{dx}$$

Para ejemplificar claramente el efecto del flujo de cortante en una viga es conveniente analizar el experimento siguiente :

Tómense dos piezas de igual sección transversal (rectangulares) de peralte $h/2$ y colóquense una encima de la otra sobre apoyos que produzcan la condición de viga simplemente apoyada como se muestra en la figura siguiente :

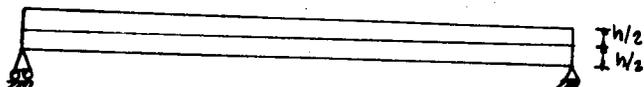


Fig. (7)

Se aplica enseguida una carga concentrada P al centro de la viga y se observa (sin considerar fricción entre las piezas) que la flexión de las dos piezas ocurre independientemente debido a que el flujo de cortante que se presenta en la superficie de contacto vale cero porque no hay fuerza horizontal en ella que impida el deslizamiento de una pieza respecto a la otra. Y la configuración deformada de la pieza es la mostrada a continuación.

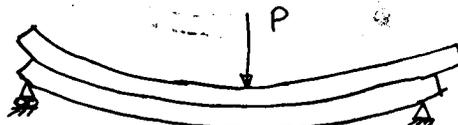


Fig. (8)

En el caso de la figura anterior en cada una de las piezas existirán esfuerzos de compresión en la parte superior y de tensión en la parte inferior y las fibras longitudinales inferiores de la pieza superior deslizarán respecto a las fibras superiores de la pieza inferior.

Ahora bien, considérese que se desea que la viga del ejemplo anterior trabaje como si estuviese hecha de una sola pieza, entonces deberá haber una fuerza cortante a lo largo del plano neutro de tal magnitud que restrinja el deslizamiento de una pieza respecto a la otra. Dicha fuerza cortante horizontal puede ser tomada por clavos (conectores entre las piezas), tornillos, -

pegamento, etc.

Trabajando como una sola pieza se tiene para la viga - anterior que

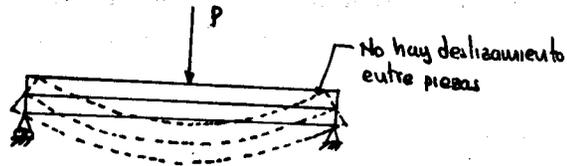
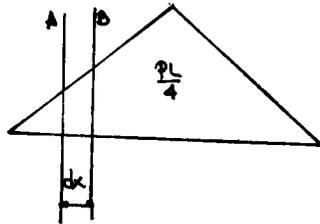


Fig. (9)

y el diagrama de momentos flexionantes será :



Un segmento de esta viga, aislado por medio de dos secciones paralelas (A y B) perpendiculares al eje de la misma, está sujeto a momentos flexionantes M_A y M_B en las secciones A y B respectivamente.

Debido a la presencia de estos dos momentos se desarro-

llarán esfuerzos normales en A y B, los cuales variarán desde un valor cero en el eje neutro (unión de ambas piezas en nuestro caso) hasta alcanzar sus valores máximos en las fibras extremas. - Por la fórmula de la escuadría se sabe que el esfuerzo en la sección A en cualquier fibra viene dado por $\sigma_A = \frac{M_A Y}{I}$ y en la sección B en cualquier fibra $\sigma_B = \frac{M_B Y}{I}$, donde en ambos casos Y es la distancia del eje neutro a la fibra en que se desea conocer el esfuerzo.

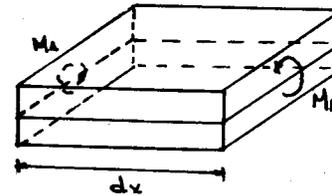


Fig. (10)

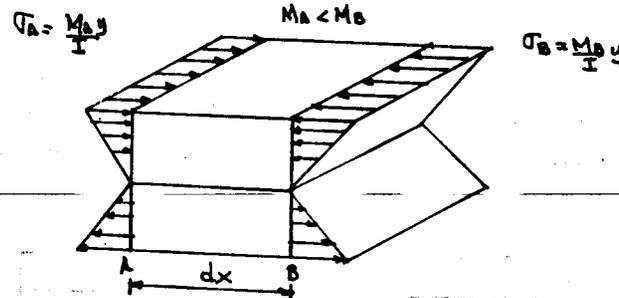


Fig. (11)

Tomándose la placa superior de la viga antes mencionada, se pueden determinar las fuerzas perpendiculares que están actuando en los extremos A y B de este segmento, integrando los esfuerzos sobre el área en que actúan.

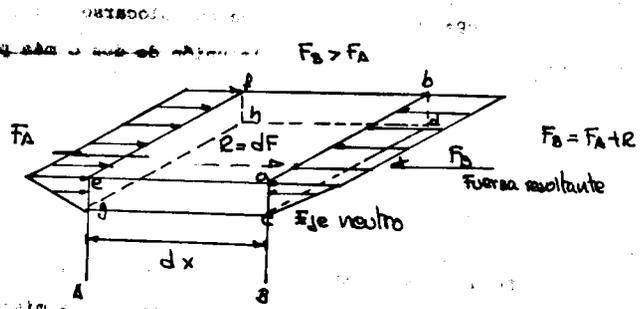


Fig. (12)

En el extremo B la fuerza que actúa en el elemento dA situado a una distancia y del eje neutro será igual a $\frac{M_B}{I} y dA$, y la fuerza que actúa sobre el área abcd es la integral de las fuerzas elementales que actúan sobre esa área. Por lo tanto se tiene que :

$$F_B = \int_{\text{área abcd}} \frac{M_B}{I} y dA$$

Como M_B e I son constantes para la sección M_B

$$F_B = \frac{M_B}{I} \int y dA = \frac{M_B}{I} Q$$

donde

$$Q = \int_{\text{área abcd}} y dA = \text{Area abcd} \bar{y}$$

Donde \bar{y} es la distancia entre el centroide del área a b c d y el eje neutro. A Q se le conoce como el momento estático del área con respecto al eje neutro, que por definición es igual al área por la distancia del centroide de esta área al eje neutro.

Siguiendo un razonamiento semejante al anterior, se obtiene que la fuerza que actúa en el extremo A del elemento es :

$$F_A = \frac{M_A}{I} \int_{\text{área e f g h}} y dA = \frac{M_{AQ}}{I}$$

Si los momentos M_A y M_B fuesen iguales la fuerza F_A sería igual a la F_B y los pernos que mantienen unidas las placas no desempeñarían ninguna función ya que la fuerza cortante resultante sería nula. Pero como $M_A \neq M_B$ y esto sucede cuando existen fuerzas cortantes en dos secciones adyacentes, entonces $F_A \neq F_B$ y la fuerza resultante horizontal R debe ser tomada por sujetadores o pegamento para mantener unidas las piezas evitando deslizamiento entre ellas.

En este caso como $M_A < M_B$ y la sección A está a una distancia dx de la sección B, los momentos flexionantes M_A y M_B diferirán en una cantidad infinitesimal y $M_B = M_A + dM$ y en consecuencia las fuerzas F_A y F_B diferirán también en una cantidad diferencial, ésto es :

$$F_A = F_B - dF$$

De tal forma que :

$$dF = F_B - F_A = \frac{M_B Q}{I} - \frac{M_A Q}{I}$$

Substituyendo $M_B = M_A + dM$

$$dF = \frac{(M_A + dM)Q}{I} - \frac{M_A Q}{I} = (dM) \frac{Q}{I}$$

Como se conoce que para una viga $dM = yqdx$, substituyendo este valor se obtiene :

$$dF = Vdx \frac{Q}{I}$$

En vez de trabajar con una fuerza actuando en una longitud dx , es más importante encontrar el valor de la fuerza por unidad de longitud, por lo tanto dividiendo d entre dx se obtiene :

$$q = \frac{dF}{dx} = \frac{VQ}{I} \quad (a)$$

Que es precisamente el flujo de cortante. Es el valor de la fuerza cortante horizontal por unidad de longitud que re-

quiere ser soportada para evitar el deslizamiento entre piezas y lograr que el elemento (viga de dos piezas) trabaje como una sola pieza.

Separación de Conectores en Vigas.

La separación a la cual deben colocarse los clavos o conectores de una viga formada por la unión de dos o más piezas, está dada por la expresión.

$$s = \frac{V_{HC}}{q} \quad (b)$$

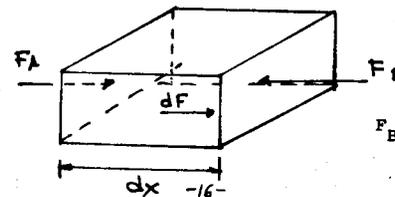
Donde : V_{HC} es la capacidad resistente al cortante horizontal de todos los conectores que actúan en una misma sección transversal de la viga.

s es la separación a la cual deben colocarse los conectores.

q es el flujo de cortante en la sección de viga en estudio.

Esfuerzos Cortantes en Vigas.

Los esfuerzos cortantes en vigas se determinan a partir del flujo de cortante, al considerar que la distribución de esfuerzos en el ancho de la viga es uniforme. Si para una viga de sección rectangular se aísla la mitad superior (del eje neutro hasta el borde superior) se tiene :



$$F_B > F_A \quad F_B - F_A = dF$$

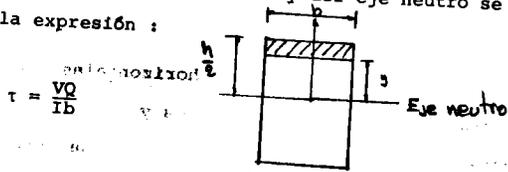
$$q = \frac{dF}{dx} = \frac{VQ}{I}$$

Donde V es el cortante actuante, Q es el momento estático del área $\frac{h}{2} b$ con respecto al eje neutro y el momento de inercia I es el de la sección completa $(\frac{bh^3}{12})$

Si se desea conocer la magnitud del esfuerzo cortante horizontal existente en el área $b dx$ del eje neutro, bastará dividir el valor de q en el eje neutro entre el ancho b de la pieza

$$\tau = \frac{q}{b} = \frac{VQ}{Ib} \quad (c)$$

Para una sección cualquiera de una viga rectangular el esfuerzo cortante a una distancia y del eje neutro se puede evaluar con la expresión :



$$\tau = \frac{VQ}{Ib}$$

Donde $Q = b \left[\left(\frac{h}{2} - y\right) \left(\frac{\frac{h}{2} - y}{2} + y\right) \right] = b \left(\frac{h}{2} - y\right) \left(\frac{h}{4} + \frac{y}{2}\right)$

operando se llega a :

$$Q = \frac{b}{2} \left[\left(\frac{h}{2}\right)^2 - y^2 \right]$$

Substituyendo este valor en la expresión del esfuerzo cortante se obtiene que para una viga de sección rectangular :

$$\tau = \frac{Vb}{2} \left| \frac{\left(\frac{h}{2}\right)^2 - y^2}{2 Ib} \right| = \frac{\left(\frac{h}{2}\right)^2 - y^2}{2I}$$

Esta ecuación indica que para un valor dado de V y de I, el valor del esfuerzo horizontal en el plano situado a una distancia Y del eje neutro es una función de Y^2 , esto es, los esfuerzos horizontales varían parabólicamente en su distribución con respecto a la distancia del plano de aplicación del esfuerzo al eje neutro.

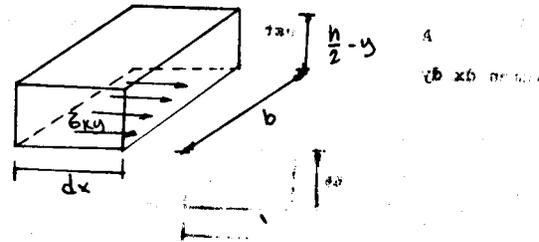
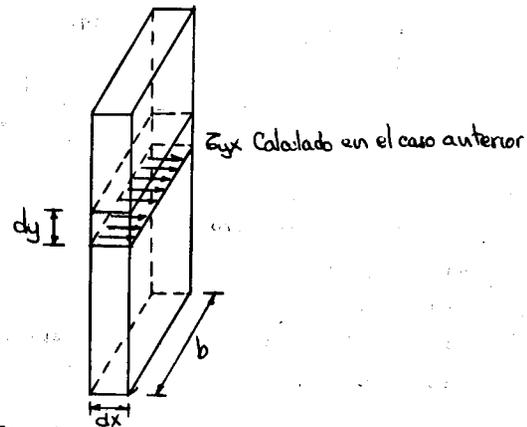


Fig. (13)

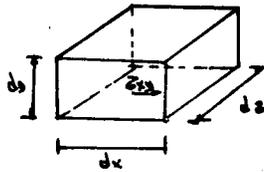
Ahora bien, se puede demostrar que los esfuerzos horizontales τ_{xy} van siempre acompañados de esfuerzos planos verticales τ_{yx} y que en cualquier punto ambos son de la misma magnitud.

Para demostrar la igualdad en valor absoluto de τ_{yx} y τ_{xy} considérense sus efectos sobre un elemento diferencial cuales

quiera que se separe de una viga, tal como el que se muestra a continuación :



Aislado de este segmento de viga un diferencial de volumen $dx dy dz$



Por equilibrio horizontal de fuerzas el τ_{yx} en la cara inferior requiere otro igual y de sentido contrario en la cara superior), las fuerzas que dan lugar a estos esfuerzos forman un par que necesita otro igual pero de sentido contrario para conseguir el equilibrio de momentos. Las fuerzas de este par equilibrante dan origen al esfuerzo cortante τ_{xy} en las caras vertica-

les del elemento, tal como se muestra a continuación

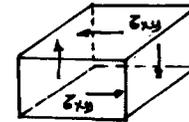
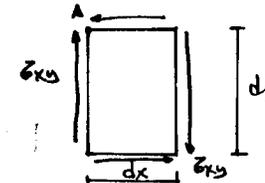


Fig. (14)

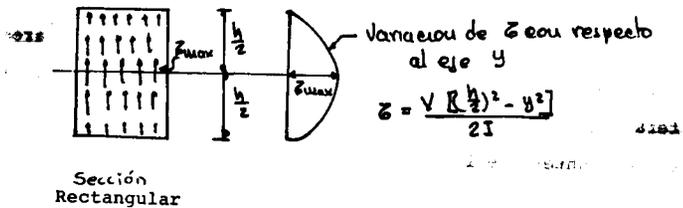
Viendo el elemento por la cara $dx dy$ se tiene :



Tomando momentos con respecto al punto A se tiene que :

$$\begin{aligned} (+) \sum M_A = 0 \quad \tau_{xy} (dy dz) dx - \tau_{yx} (dx dz) dy = 0 \\ \tau_{xy} = \tau_{yx} \end{aligned}$$

Como los esfuerzos cortantes horizontales son de igual valor a los esfuerzos cortantes verticales y aparecen simultáneamente, entonces para la sección rectangular que se está estudiando, la cual presenta una variación de esfuerzos cortantes horizontales función de Y^2 , se tiene para los esfuerzos cortantes verticales la misma variación. Por lo tanto, la distribución de esfuerzos que se presenta en dicha sección transversal es :



El valor de τ max para la viga de sección rectangular se presenta al nivel del eje neutro ya que derivando la expresión $\tau = \frac{V}{2I} [(\frac{h}{2})^2 - y^2]$ e igualando a cero se encuentra que τ max se presenta para $y = 0$.

Luego :

$$\tau_{\max} = \frac{V}{2I} \left(\frac{h}{2}\right)^2$$

Substituyendo τ_{\max} $I = \frac{bh^3}{12}$

$$\tau_{\max} = \frac{Vh^2}{8I} = \frac{Vh^2}{8bh^3} \quad (12) = \frac{3}{2} \frac{V}{bh}$$

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \frac{V}{A}$$

Donde A es el área de la sección transversal. Obsérvese que $\tau_{\max} = 1.5 \tau_{\text{prom}}$ para una sección transversal rectangular. La expresión (c) es aplicable para determinar los esfuerzos cortantes verticales en secciones transversales rectangulares. En

secciones T y I y circulares presenta ciertas limitaciones que a continuación discutiremos; no obstante, la expresión (c) permite calcular los esfuerzos cortantes máximos en dichas secciones y se le emplea regularmente.

Esfuerzo Cortante en Secciones Circulares.

Estas secciones difieren de la rectangular principalmente porque el ancho b de la sección no se mantiene constante y depende de la distancia Y .

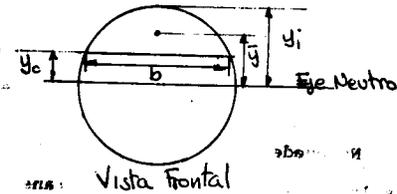


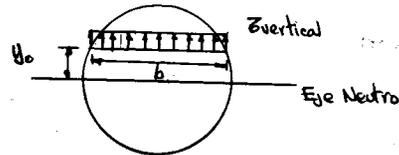
Fig. (15)

Supóngase que se desea conocer el esfuerzo cortante horizontal que actúa en el nivel de ancho b de la viga, aplicando la expresión ya conocida.

$$\tau = \frac{Q}{b} = \frac{V}{Ib} \int_{y_0}^{y_1} y_1 \, y \, dA = \frac{VQ}{Ib}$$

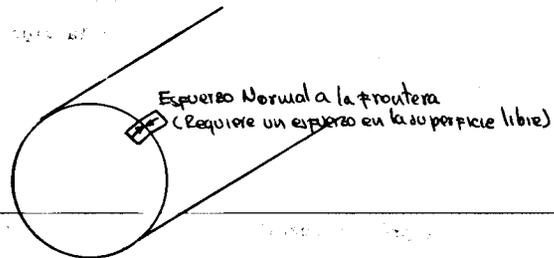
La expresión resultante es la misma, pero al momento de transferir los esfuerzos a las caras verticales frontal y posterior se hace evidente el problema siguiente :

Si se hace exactamente lo mismo que se hizo para la -- sección rectangular, la distribución de esfuerzos quedaría como :



Nótese que en la frontera de la sección hay un esfuerzo vertical, el cual al resolverse en sus componentes normal y tangencial lleva a la incongruencia siguiente :

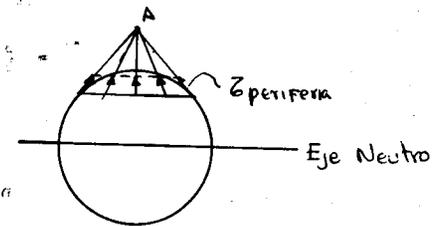
No puede existir un componente de esfuerzo cortante -- normal a la frontera de la sección transversal debido a que a -- ese esfuerzo debe estar asociado otro en la superficie libre envolvente, la cual, es evidente, no está solicitada por esfuerzo alguno.



La componente tangencial a la frontera no representa in congruencia puesto que ésta no requiere de esfuerzo alguno en la superficie libre del elemento para equilibrarse.

Cabe aclarar entonces, que en secciones circulares no puede haber esfuerzos normales a la superficie libre en la frontera y que solo pueden existir esfuerzos cortantes tangenciales en la frontera de la sección.

Dado que la ecuación $\tau = \frac{VQ}{Ib}$ aplicada a la sección circular se refiere a la componente vertical del esfuerzo cortante y dado que es posible agregar una componente horizontal a la sección, sin alterar el equilibrio, entonces, se agrega ésta para lograr que el esfuerzo cortante en la periferia se haga tangencial y se tenga la distribución de esfuerzos mostrada a continuación:



Distribución de Esfuerzos

Fig. (16)

El punto A es la intersección de la tangente a la superficie en el nivel, estudiado y el eje vertical de la pieza. El punto A varía con respecto a la sección que se analice (respecto a Y).

Ahora bien τ vert = $\frac{VQ}{Ib}$

$$Q = \int_{y_0}^{y_1} y dA = \int_{y_0}^{y_1} y (2 \sqrt{y_1^2 - y^2}) dy = \int_{y_0}^{y_1} 2y \sqrt{y_1^2 - y^2} dy$$

$$= -\frac{(y_1^2 - y^2)^{3/2}}{3/2} \Big|_{y_0}^{y_1} \quad Q = \frac{2}{3} (y_1^2 - y_0^2)^{3/2}$$

$$\tau = \frac{V}{Ib} \frac{2}{3} (y_1^2 - y_0^2)^{3/2} = \frac{4V \frac{2}{3} (y_1^2 - y_0^2)^{3/2}}{2 \sqrt{y_1^2 - y_0^2} \pi y_1^4}$$

$$\tau = \frac{4}{3} \frac{V}{\pi y_1^2} \left(1 - \frac{y_0^2}{y_1^2}\right)$$

Como $\frac{\tau_{\text{total frontera}}}{\tau_{\text{vert}}} = \frac{y_1}{\sqrt{y_1^2 - y_0^2}} = \left(1 - \frac{y_0^2}{y_1^2}\right)^{-1/2}$

$$\tau_{\text{total frontera}} = \frac{4}{3} \frac{V}{\pi y_1^2} \sqrt{1 - \frac{y_0^2}{y_1^2}}$$

Esfuerzo Cortante en Secciones T e I

Aplicando la expresión (c) para valuar el esfuerzo cortante en secciones T e I se obtienen distribuciones de esfuerzos cortantes verticales como las mostradas a continuación:

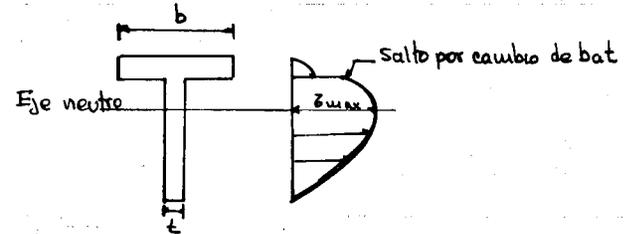


Fig. (17)

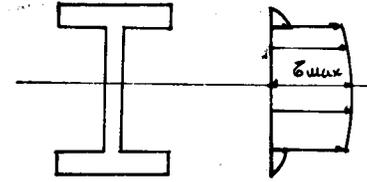
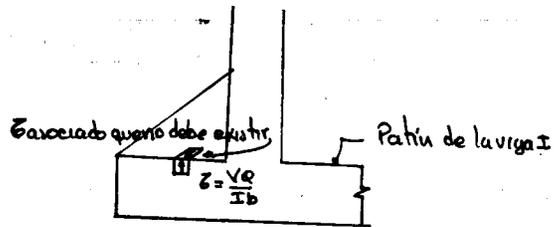


Fig. (18)

En ambos casos la inconsistencia que se presenta para calcular la distribución de esfuerzos con la expresión (c) $\tau = \frac{VQ}{Ib}$ estriba en que en las zonas de salto del diagrama de esfuerzos -- hay esfuerzos verticales, que hemos asociado esfuerzos cortantes horizontales en la superficie libre interior del patín, siendo -- que esta superficie se encuentra libre de esfuerzos.



Centro de Cortante

En cualquier sección de una viga, como se dijo anteriormente, siempre que se tenga un momento flexionante variable, existirá cortante. Los esfuerzos cortantes al actuar sobre sus respectivas áreas, dan lugar a una fuerza cortante interna o resistente cuya resultante deberá ser igual, opuesta y colineal con la fuerza cortante exterior. Si esto no ocurre, la fuerza cortante interna y la fuerza externa producen un momento torsionante en la viga.

Para que no exista momento torsionante se requiere que la resultante de las fuerzas cortantes exteriores pase por el -- llamado centro de cortante o también centro de torsión. El centro de cortante es un punto en la sección transversal por el que debe de pasar el plano que contiene las fuerzas exteriores que producen la flexión, para que la viga se flexione sin torsión.

Para ilustrar la determinación de la posición del cen-

tro de cortante, considérese la viga de sección canal mostrada.

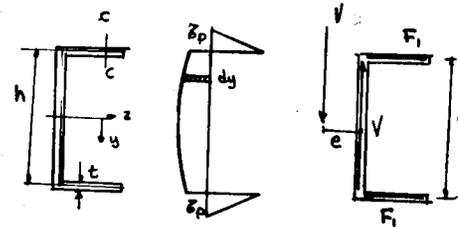


Fig. (19)

Se supone que las paredes de esta sección canal son lo suficientemente delgadas para que todos los cálculos puedan basarse en la hipótesis de que el área está concentrada en la línea media del espesor. La flexión de esta canal se presenta alrededor de su eje horizontal y aunque esta sección no tiene un eje vertical de simetría se supone que los esfuerzos de flexión pueden calcularse con la fórmula de la escuadría. Suponiendo -- además que en esta canal actúa una fuerza cortante vertical, el momento flexionante variará de una sección a otra a lo largo de la viga. Haciendo un corte arbitrario e - c (ver figura anterior) los valores del flujo de cortante y el esfuerzo cortante pueden encontrarse en la forma usual. A lo largo de los patines horizontales de esta canal, estas cantidades variarán linealmente desde un valor cero en el extremo libre del patín hasta un valor determinado q y τ en la intersección con el alma. A lo largo del alma, la variación de q y τ es parabólica (Fig. 19).

La fuerza F_1 en el patín es igual al valor

$$F_1 = \frac{1P}{2} A_{\text{patín}} = \frac{1P}{2} \frac{bt}{2}$$

Y la suma de los esfuerzos cortantes verticales en el alma es aproximadamente igual al cortante (considerando despreciable la contribución de los patines)

$$V = \int_{-h}^h \tau dy$$

Estas fuerzas se presentan en la figura (19) y dan lugar a un par $F_1 h$ y a una fuerza vertical V . El par $F_1 h$ tenderá a torcer la sección canal alrededor de su eje longitudinal. Para evitar el giro y así conservar válida la distribución de los esfuerzos de flexión supuesta inicialmente, es necesario aplicar la fuerza externa P de tal forma que equilibre el par interno $F_1 h$. Para ésto, es necesario que se cumpla lo siguiente :

$$F_1 h = P e$$

De donde despejando e se tiene :

$$\frac{F_1 h}{P} = \frac{\frac{1P}{2} bth}{P} = \frac{bth}{2P} \frac{VQ_{\text{patín}}}{I_t} = \frac{bth}{2P} \frac{V bt (\frac{h}{2})}{I_t}$$

Como $V = P$

$$e = \frac{b^2 h^2 t}{4I_t}$$

Debe hacerse notar que la distancia e es una propiedad de la geometría de la sección transversal de una viga y es independiente de la magnitud de la fuerza aplicada P , así como de no localización a lo largo de la viga.

Un procedimiento totalmente similar al anterior puede efectuarse para localizar el plano en el cual deben aplicarse las fuerzas horizontales para equilibrar la torsión de la canal

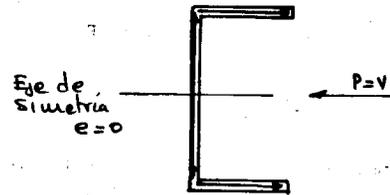


Fig. (20)

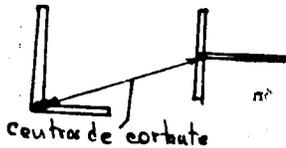
Para la canal, por simetría puede verse que este plano coincide con el plano neutro por flexión respecto al eje horizontal. La intersección del plano de aplicación de P para el primer y segundo caso (Figuras 19 y 20) localizan para una sección transversal el centro de cortante.

Para cualquier sección transversal con un eje de simetría el centro de cortante estará localizado sobre dicho eje. Si

tiene la sección transversal dos ejes de simetría el centro de cortante coincidirá con el centroide de la sección. Para secciones asimétricas de paredes gruesas, la localización exacta del centro de cortante es difícil de obtener (puesto que no son despreciables las contribuciones de los elementos horizontales respecto a la fuerza cortante en la dirección analizada).

Si el espesor de las paredes es pequeño como se supuso para el ejemplo de la canal, entonces como se puede observar, el procedimiento para localizar el centro de cortante es sencillo y consiste en determinar las fuerzas cortantes tales como F_1 y V en el ejemplo de la canal y luego buscar la posición de la fuerza externa $P = V$ necesaria para mantener el equilibrio.

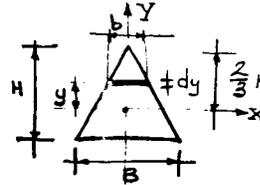
Es particularmente importante hacer notar que para secciones cruciformes el centro de cortante se localiza en la intersección de las piezas componentes.



PROBLEMAS RESUELTOS

N.º 1 UNA VIGA TIENE UN ÁREA TRANSVERSAL EN FORMA DE TRIANGULO. UTILIZANDO EL CÁLCULO INFINITESIMAL Y LA FÓRMULA COMÚN DE ANÁLISIS DE ESFUERZOS, DETERMINE LA LOCALIZACIÓN DEL ESFUERZO CORTANTE MÁXIMO PRODUCIDO POR UNA FUERZA CORTANTE VERTICAL "V" Y ADENAS:

SI $B = 7.5\text{cm}$, $H = 15\text{cm}$ y $\tau_{\text{máx}} = 8\text{kg/cm}^2$ ¿QUE FUERZA CORTANTE VERTICAL MÁXIMA "V" PUEDE RESISTIR ESTA SECCIÓN?



Sabemos que:

$$Q = \int_A y dA$$

$$\rightarrow Q = \int_0^{\frac{2}{3}H} y dA \quad \text{donde } dA = b dy$$

$$Q = \int_0^{\frac{2}{3}H} y b dy$$

POR TRIANGULOS SEMEJANTES:

$$\frac{B}{H} = \frac{b}{\frac{2}{3}H - y} \rightarrow b = \left(\frac{2}{3}H - y\right) \frac{B}{H}$$

$$\rightarrow Q = \int_0^{\frac{2}{3}H} y \left(\frac{2}{3}H - y\right) \frac{B}{H} dy = \left[\frac{2}{3} \frac{B}{H} \frac{y^2}{2} - \frac{B}{H} \frac{y^3}{3} \right]_0^{\frac{2}{3}H}$$

$$\Rightarrow Q = \left(\frac{B}{3} \frac{4H^2}{9} - \frac{B}{3H} \frac{8H^3}{27} \right) - \left(\frac{B}{3} y^2 - \frac{B}{3H} y^3 \right)$$

$$Q = \frac{4BH^2}{27} - \frac{8BH^2}{3 \times 27} - \frac{B}{3} y^2 + \frac{By^3}{3H} = \frac{4BH^2}{81} - \frac{B}{3} \left(y^2 - \frac{y^3}{H} \right)$$

y como sabemos que:

$$I = \frac{BH^3}{36}$$

y ademas:

$$\tau = \frac{VQ}{It} = \frac{V}{BH^3} \left[\frac{4BH^2}{81} - \frac{B}{3} \left(y^2 - \frac{y^3}{H} \right) \right] \frac{1}{\left(\frac{2}{3}H - y\right) \frac{B}{H}}$$

Nº1 (continuación)

Para maximizar la función derivamos e igualamos a cero de lo que finalmente para:

y = 1/6 H tenemos que:

$$z = \frac{36V}{BH^3} \left[\frac{1}{81} BH^2 - \frac{B}{3} \left(\frac{H^2}{36} - \frac{H^3}{216H} \right) \right] \frac{1}{\left(\frac{2}{3}H - \frac{H}{6} \right) \frac{B}{H}}$$

$$z = \frac{36V}{BH^3} \left[\frac{1}{81} BH^2 - \frac{B}{3} \left(\frac{5BH^2}{648} \right) \right] \frac{1}{\frac{1}{2} \frac{H}{H}}$$

$$z = \frac{36V}{BH^3} \left(\frac{27BH^2}{648} \right) \frac{2}{B} = \frac{3V}{BH}$$

FINALMENTE: $z = \frac{3}{2} \frac{V}{BH} = \frac{3}{2} \frac{V}{A}$

ENTONCES: DESDE LA BASE $y = 1/2 H$ ES DONDE SE ENCUENTRA EL ESFUERZO MAXIMO, O, DESDE EL CENTRO DE GRAVEDAD $y = 1/6 H$

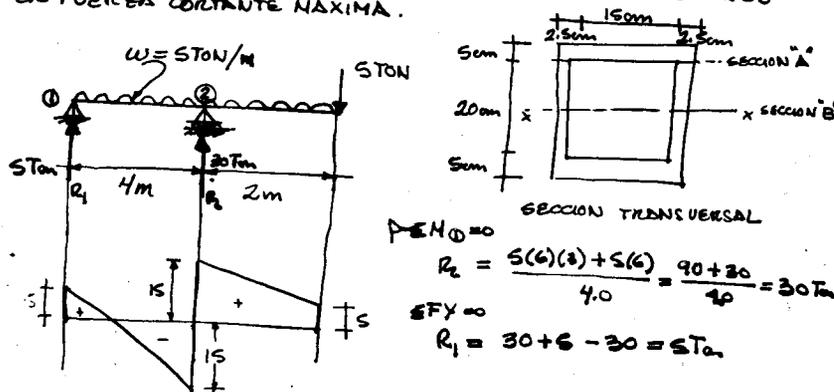
AHORA:

CON $B = 7.5 \text{ cm}$, $H = 15 \text{ cm}$, $z = 8 \text{ kg/cm}^2 \Rightarrow V = ? \text{ (kg)}$

4) $z = \frac{3}{2} \frac{V}{A} \Rightarrow V = \frac{2zA}{3} = \frac{2(8) \left(\frac{7.5 \times 15}{2} \right)}{3} = 300 \text{ kg}$

$\therefore V_{\text{max}} = 300 \text{ kg}$

Nº2 PARA LA VIGA Y SECCION MOSTRADAS CALCULE Y DIBUJE EL DIAGRAMA DE ESFUERZOS CORTANTES, CONSIDERANDO LA FUERZA CORTANTE MAXIMA.



SECCION TRANSVERSAL

$$P \Rightarrow H_0 = 0$$

$$R_2 = \frac{5(6)(3) + 5(6)}{4.0} = \frac{90 + 30}{4} = 30 \text{ Ton}$$

$$F_{Y=0}$$

$$R_1 = 30 + 5 - 20 = 5 \text{ Ton}$$

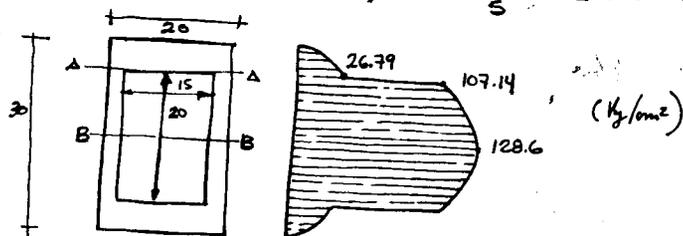
$V_{\text{max}} = 15 \text{ STON}$

$$I_{x-x} = \frac{20(30)^3}{12} - \frac{15(20)^3}{12} = 35,000 \text{ cm}^4$$

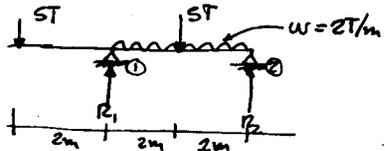
$$z_A (\text{ARREDO}) = \frac{15,000 (20 \times 5 \times 12.5)}{35,000 \times 20} = 26.79 \text{ kg/cm}^2$$

$$z_A (\text{ARREDO}) = \frac{15,000 (20 \times 5 \times 12.5)}{35,000 \times 5} = 107.14 \text{ kg/cm}^2$$

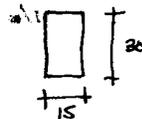
$$z_B (\text{MAX.}) = 107.14 + \frac{15,000 (5 \times 10 \times 5)}{35,000 \times 5} = 128.57 \text{ kg/cm}^2$$



Nº3 OBTENGA EL VALOR MAXIMO QUE ALCANZA EL ESFUERZO CORTANTE EN LA VIGA, ASI COMO LA DISTRIBUCION DE ESFUERZOS CORTANTES EN ESA MISMA SECCION.



SECCION TRANSVERSAL

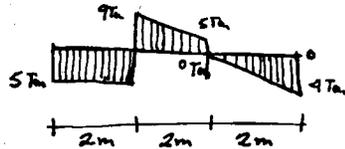


$\sum M_0 = 0$

$$R_2 = \frac{10 - 10 + 8(2)}{4} = 4 \text{ Ton}$$

$\sum F_y = 0$

$$Q = 5 + 5 + 8 - 4 = 18 - 4 = 14 \text{ Ton}$$

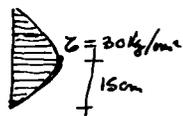
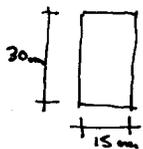


$V_{max} = 9 \text{ ton}$

$$z = \frac{VQ}{It} = \frac{9000 Q}{It}$$

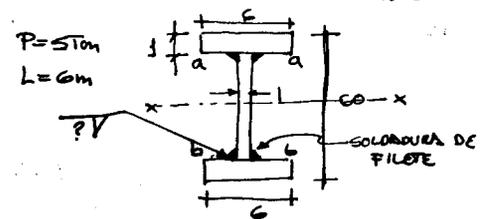
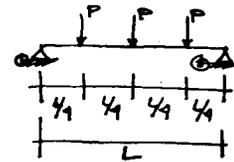
$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{15(30)^3}{12} = 33750 \text{ cm}^4 \quad Q_{h=\frac{1}{2}} = 15(15)(7.5) = 1687.5$$

$$\Rightarrow z_{max} = \frac{9000(1687.5)}{33750(15)} = 30 \text{ kg/cm}^2$$



VARIACION PARABOLICA

Nº4 PARA LA VIGA "I" CON LAS CONDICIONES DE CARGA MOSTRADAS CALCULAR LA CAPACIDAD QUE DEBE TENER LA SOLDADURA DE FILETE PARA QUE LAS TRES PLACAS FUNCIONEN COMO UNA UNIDAD



$R_1 = R_2 = \frac{3}{2} P$



$V_{mix} = \frac{3}{2}(5) = 7.5 \text{ Ton} = 7500 \text{ kg}$

$$I_{xx} = \frac{6(60)^3 - (5)(50)^3}{12} = 26703.83 \text{ cm}^4$$

$$q_{tan} = \frac{V_{mix} Q_a}{I_{xx} t}$$

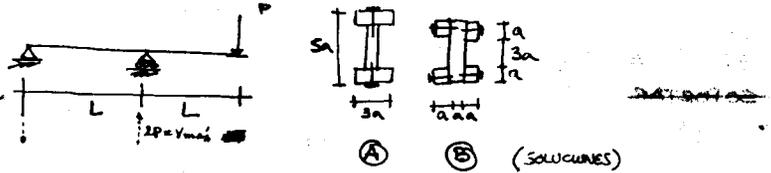
$Q_a = (6)(1)(29.5) = 177$

$\therefore q_{tan} = \frac{7500 \times 177}{26703.83 \times 1} = 49.71 \text{ kg/cm}$

\Rightarrow cada cordón debe resistir $\frac{49.71}{2} = 24.86 \text{ kg/cm}$

NOTA - AUNQUE ESTE EJEMPLO ES SOLO UNA REVISION EN EL TALLADO DE LA SOLDADURA INTERVIENEN OTROS FACTORES. (BASTO)

Nº5 PARA LA VIGA DE LA FIGURA SE HAN PROPUESTO LAS SOLUCIONES MOSTRADAS.
 ¿CUAL OCUPA MENOS CLAVOS? JUSTIFIQUE SU RESPUESTA VALUANDO EL FLUJO DE CORTANTE EN CADA CASO.



$$q = \frac{VQ}{I}$$

Nº de clavos = $\frac{\text{Longitud}}{\text{separación}}$ por hilera

$S = \text{separación} = \frac{F' = \text{RESISTENCIA DEL CLAVO}}{q = \text{FLUJO DE CORTE EN kg/cm}}$

$$\Rightarrow n = \frac{Lq}{F'} = \frac{L V Q}{F' I} = K Q \text{ donde } K = \frac{L V}{F' I}$$

PARA LA SECCION A $Q = 3a \cdot a \cdot 2a$ con 2 hilera de clavos
 Nº de clavos = $2 \times 6a^3 K = 12a^3 K$

PARA LA SECCION B $Q = a \cdot a \cdot 2a$ con 4 hilera de clavos
 Nº de clavos = $4 \times 2a^3 K = 8a^3 K$

LA SOLUCIÓN B OCUPA SOLO $\frac{2}{3}$ PARTES DEL NÚMERO DE CLAVOS QUE OCUPA LA SOLUCIÓN A.

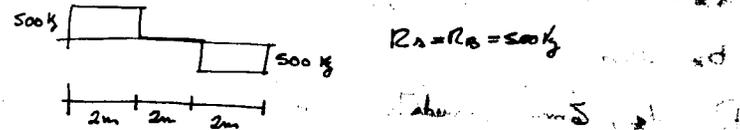
Nº6 ENCUENTRE LA SEPARACION A LA QUE DEBERÁN COLOCARSE LOS CLAVOS PARA LOGRAR QUE LA SECCION COMPUESTA POR DOS TABLONES, MOSTRADA EN LA FIGURA, TRABAJE COMO UNIDAD. CONSIDERESE QUE LOS CLAVOS USADOS PUEDEN TRABAJAR A UNA FUERZA CONSTANTE DE 70 kg



$$q = \frac{VQ}{I}$$

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{30(20)^3}{12} = 20,000 \text{ cm}^4$$

$$Q = bh \cdot \frac{h}{2} = 30 \frac{(10)^2}{2} = 1500 \text{ cm}^3$$



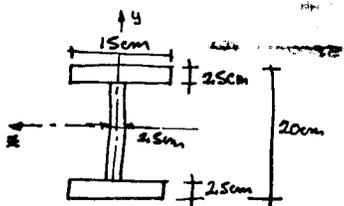
$$q = \frac{500 \times 1500}{20000} = 37.5 \text{ kg/cm}$$

$$S = \frac{Vr}{q} = \frac{70}{37.5} = 1.866 \text{ cm}$$

$Vr = \text{CONSTANTE DEL CLAVO (RESISTENTE)}$

COLOCAR CLAVOS @ 19cm en lo Tramo $0 < x < 2m$ y $4 < x < 6m$
 y NO COLOCAR EN EL TRAMO $2 < x < 4m$

Nº 7 UNA VIGA I TIENE UNA SECCION COMO SE VE EN LA FIGURA. EN SERVICIO TAL VIGA PUEDE QUEDAR SOMETIDA A FUERZAS CORTANTES EN LAS DIRECCIONES "y" y "z", O SEA, NO SIMULTANEAMENTE EN AMBAS DIRECCIONES. EN LA HIPOTESIS DE COMPORTAMIENTO LINEALMENTE ELASTICO, COMPARE LA CAPACIDAD AL CORTE DE LA VIGA EN UNA Y OTRA DIRECCION



$$I_x = \frac{15(20)^3 - 12.5(15)^3}{12} = 6484.38 \text{ cm}^4$$

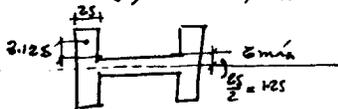
$$I_y = 2 \left[\frac{2.5(15)^3}{12} \right] + \frac{15(2.5)^3}{12} = 1425.78 \text{ cm}^4$$

Para V_y , $z_{\text{máx}}$ en el eje neutro

$$Q_z = 15 \times 2.5 \times 8.75 + 7.5 \times 2.5 \times 3.75 = 398.44 \text{ cm}^3$$

$$b_z = 25 \text{ cm}$$

Para V_z , $z_{\text{máx}}$, inmediatamente antes del alma.



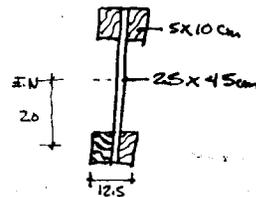
$$Q_y = 2.5 \times 6.25 \times (3.125 + 1.25) = 68.36 \text{ cm}^3$$

$$b_y = (2.5 \text{ cm}) \quad \tau = \frac{VQ}{Ib} \rightarrow V = \frac{\tau I b}{Q}$$

$$\Rightarrow \frac{V_y}{V_z} = \frac{\tau I_x b_z / Q_z}{\tau I_y b_y / Q_y} = \frac{I_x b_z Q_y}{I_y b_y Q_z} = 0.7803$$

$$\therefore V_y = 0.780 V_z$$

Nº 8 UNA VIGA DE CIERTA CLASE DE MADERA ESTÁ FORMADA POR CUATRO TABLAS DE 5 CM POR 10 CM PEGADAS A OTRA DE MADERA LAMINAR (TRUPLY) DE 2.5 CM POR 45 CM QUE SERVIRÁ DE ALMA, COMO SE MUESTRA EN LA FIGURA. DETERMINE LA FUERZA CORTANTE MÁXIMA PERMISIBLE Y EL MOMENTO FLEXIONANTE MÁXIMO PERMISIBLE QUE TAL SECCIÓN PUEDE SOPORTAR SI EL ESFUERZO POR FLEXIÓN ADMISIBLE ES DE 105 kg/cm^2 Y EL ESFUERZO CORTANTE ADMISIBLE ES DE 3.0 kg/cm^2 EN LAS JUNTAS PEGADAS Y DE 6.5 kg/cm^2 EN LA MADERA



$$\tau_{\text{perm flex}} = 105 \text{ kg/cm}^2$$

$$\tau_{\text{perm}} = 6.5 \text{ kg/cm}^2$$

$$\tau_{\text{perm}} = 3 \text{ kg/cm}^2$$

$$I = \frac{12.5(45)^3}{12} - \frac{10(25)^3}{12} = 81901.04 \text{ cm}^4$$

$$M_{\text{máx}} = \frac{\tau I}{y} = \frac{105(81901.04)}{22.5} = 382204.86 \text{ kg-cm}$$

$$M_{\text{máx}} = 3.82 \text{ Tm}$$

Para la madera, $z_{\text{máx}}$ en el E.N.

$$Q = 2(5 \times 10 \times 20) + 22.5(2.5)(11.25) = 2632.81 \text{ cm}^3$$

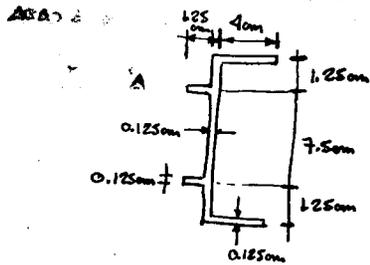
$$V = \frac{\tau I b}{Q} = \frac{(6.5)(81901)(2.5)}{2632.81} = 427.7 \text{ kg} = 0.43 \text{ Tm} \leftarrow \text{RGE}$$

Para las juntas:

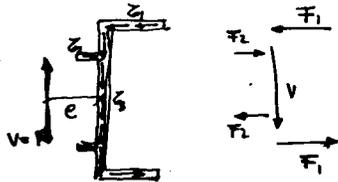
$$Q = 5 \times 10 \times 20 = 1000 \text{ cm}^3 \text{ (en cada junta)}$$

$$V = \frac{\tau I b}{Q} = \frac{(3)(81901)(10)}{1000} = 2457.03 \text{ kg} = 2.5 \text{ Tm}$$

Nº 9 DETERMINE LA LOCALIZACIÓN DEL CENTRO DE CORTANTE DE LA FIGURA SIGUIENTE:



$$I = \frac{0.125 \times 10^3}{12} + 2 \left[4 \times 0.125 \times 5^2 + 1.25 \times 0.125 \times 3.75^2 \right] = 39.81 \text{ cm}^4$$



$$\Rightarrow V_e = F_1(10) - F_2(7.5)$$

$$F_1 = z_1(4 \times 0.125) / 2, \quad F_2 = z_2(1.25 \times 0.125) / 2$$

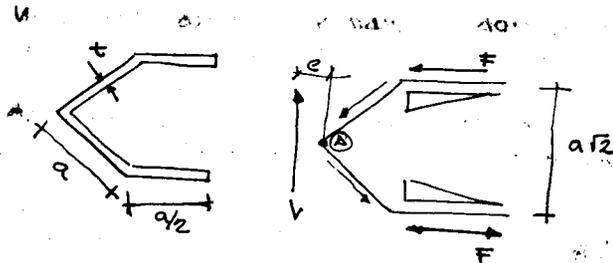
$$z_1 = \frac{VQ_1}{Ib_1} = \frac{V(4 \times 0.125 \times 5)}{I(0.125)}$$

$$z_2 = \frac{VQ_2}{Ib_2} = \frac{V(1.25 \times 0.125 \times 3.75)}{I(0.125)}$$

$$V_e = 10 \frac{V(4 \times 0.125 \times 5)}{0.125 I} - \frac{(4 \times 0.125)}{2} \frac{V(1.25 \times 0.125 \times 3.75)}{0.125 I} - \frac{(1.25 \times 0.125)}{2} \frac{V(1.25 \times 0.125)}{2} 7.5$$

$$e = \frac{0.125}{2I} (10 \times 4 \times 5 \times 4 - 1.25 \times 3.75 \times 1.25 \times 7.5) = \underline{\underline{1.17 \text{ cm}}}$$

Nº 10 ENCUENTRE EL CENTRO DE CORTANTE DE LA SECCIÓN MOSTRADA.

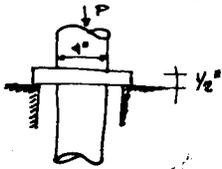


$$I = \frac{5}{6} t a^3, \quad F = \frac{1}{2} \frac{at}{2} \frac{V}{IE} \frac{at}{2} \frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$F = \frac{3}{20\sqrt{2}} V \quad \therefore \Sigma M_0 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{e = \frac{3}{20} a}}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

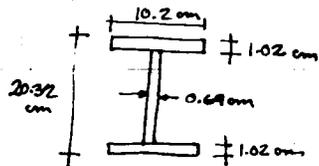
- 1.- UNA FLECHA SÓLIDA CIRCULAR Y UN ANILLO FORMAN UN CONJUNTO TAL COMO MUESTRA LA FIGURA. SI EL MÁXIMO ESFUERZO PERMISIBLE EN CORTE ES DE $3T/m^2$. ¿CUAL ES LA CARGA MÁS GRANDE QUE PUEDE SOPORTAR LA FLECHA Y CUAL ES EL ESFUERZO EN ESE CASO?



Solución: $P = 18.85 \text{ Ton}$ y $\tau = 3T/m^2$

- 2.- UNA VIGA "I" ESTANDAR, SOPORTA UNA CARGA TOTAL DE 8060 kg/m DISTRIBUIDA UNIFORMEMENTE A LO LARGO DE UN CLOPO, SIMPLEMENTE APOYADA. DETERMINE LO SIGUIENTE:

- a).- EL ESFUERZO MÁXIMO CORTANTE EN LA VIGA
b).- LA DISTRIBUCIÓN DEL ESFUERZO CORTANTE EN LA SECCIÓN TRANSV.

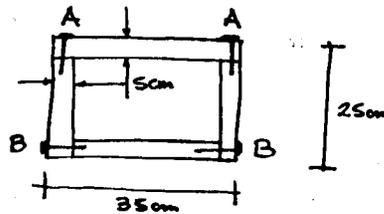


Solución:

$\tau_{máx} = 250.17 \text{ kg/cm}^2$ anal. E.N.

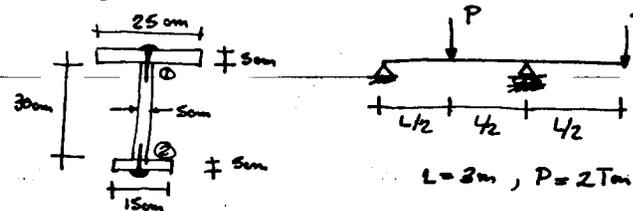
- 3.- CUAL ES LA FUERZA CORTANTE HORIZONTAL MÁXIMA QUE PUEDE SOPORTAR LA SECCIÓN MOSTRADA SI LOS CLAVOS "A" ESTÁN SEPARADOS A CADA 20 CM Y LOS CLAVOS "B" ESTÁN A CADA 30 cm.

LA RESISTENCIA DE CADA CLAVO ES 25 kg Y ASEA "A" O "B".



Solución: $V_{máx} = V_B = 62 \text{ kg}$

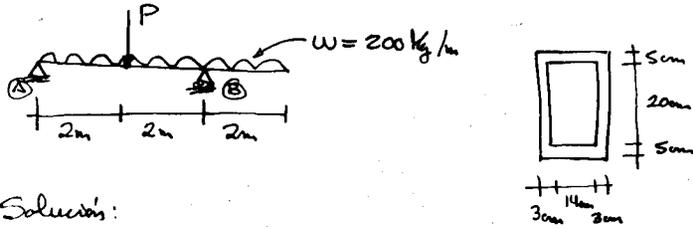
- 4.- CALCULE LA SEPARACIÓN DE LOS CLAVOS EN LA VIGA DE MADERA DE LA FIGURA, SI LA RESISTENCIA DE CADA CLAVO ES DE 50 kg .



Solución:

clavos ① $S_1 = 5.7 \text{ cm}$
clavos ② $S_2 = 9.4 \text{ cm}$

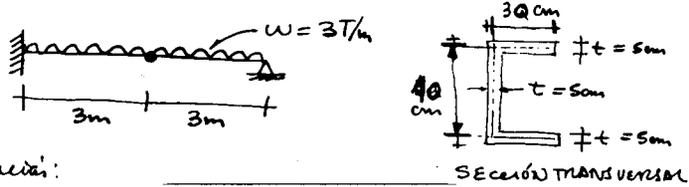
5.- UNA VIGA DE SECCIÓN TRANSVERSAL EN CAJÓN COMO LA MOSTRADA SOPORTA UNA CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA DE 200 kg/m Y UNA FUERZA CONCENTRADA "P" CONSIDERANDO ÚNICAMENTE LA ACCIÓN DE LA FUERZA CORTANTE, DETERMINE EL MÁXIMO VALOR DE "P" QUE PUEDE SER APLICADA SI EL ESFUERZO CORTANTE ADMISIBLE ES $\tau_p = 30 \text{ kg/cm}^2$



Solución:

$P = 7204 \text{ kg}$

6.- DETERMINE EL VALOR MÁXIMO QUE ALCANZA EL ESFUERZO CORTANTE EN LA VIGA, ASÍ COMO LA DISTRIBUCIÓN DE ESFUERZOS CORTANTES EN ESA MISMA SECCIÓN.

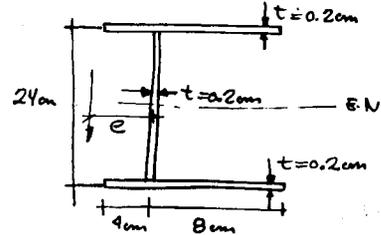


Solución:

$V_{máx} = 13,500 \text{ kg}$

$\tau_{máx} = 72.7 \text{ kg/cm}^2$

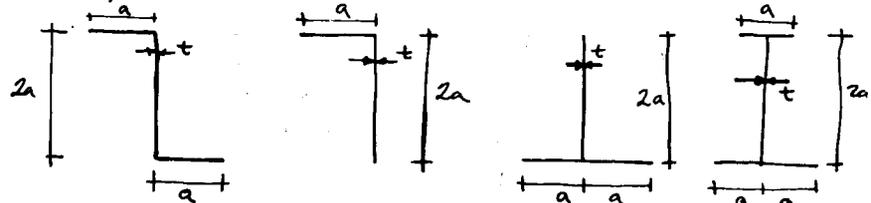
7.- SI LA FUERZA CORTANTE VERTICAL A QUE QUEDA SOMETIDA LA SECCIÓN MOSTRADA ES DE 800 kg , DIBUJAR EL DIAGRAMA DE FLUJO DE CORTANTE Y SITUAR EL CENTRO DE CORTANTE



Solución:

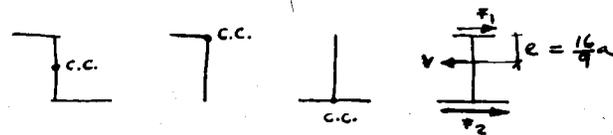
c. CONTARTE EJENUTRO Y $e \approx 1.5 \text{ cm}$

8.- LOCALICE EL CENTRO DE CORTANTE DE LAS SECCIONES DE LA FIGURA.



DONDE $t \ll a$

Solución:



MARCO
ANTONIO
ALVAREZ
SOLIS

MECANICA DE MATERIALES II

TEMA II

ESTADO PLANO DE ESFUERZOS

INTRODUCCION.- En el curso de Mecánica de Materiales I se definió el esfuerzo en un punto de un cuerpo material como fuerza por unidad de área. Pero esta definición es algo ambigua, ya que depende de qué área se considere en el punto. Para aclarar esto, considérese un punto q en el interior del cuerpo mostrado en la figura 1.1(a). Si se elige un sistema rectangular cartesiano de coordenadas x, y, z y se hace pasar un plano de corte por dicho punto q, perpendicular al eje x, como se indica en la figura 1.1(b). Si da es el "área en el punto q", y se aplica la definición de esfuerzo ($\sigma = dP/da$), la fuerza en el punto q puede expresarse en función de sus componentes rectangulares como

$$dP_x = da \sigma_x \quad dP_y = da \tau_{xy} \quad dP_z = da \tau_{xz} \quad (1.1a)$$

donde el subíndice x indica que el área en cuestión es perpendicular a el eje x, y el segundo subíndice en el símbolo de esfuerzo cortante indica la dirección del vector fuerza cortante.

De manera similar, al hacer pasar otro plano de corte por el punto q perpendicular al eje y, como se ilustra en la figura 1.1(c), las fuerzas componentes correspondientes serán

$$dP_x = da \tau_{yx} \quad dP_y = da \sigma_y \quad dP_z = da \tau_{yz} \quad (1.1b)$$

donde una vez más el primer subíndice, y, indica el plano del área y el segundo la dirección de la fuerza.

Finalmente, al hacer pasar un plano de corte perpendicular al eje z, figura 1.1(d), se tiene

$$dP_x = da \tau_{zx} \quad dP_y = da \tau_{zy} \quad dP_z = da \sigma_z \quad (1.1c)$$

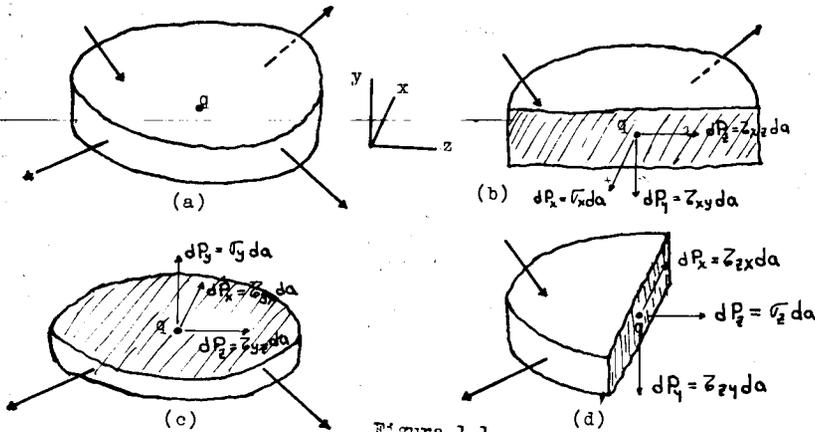


Figura 1.1

Ahora es muy probable que cada una de las nueve componentes dP de las figuras 1.1(b)-(d) tenga un valor distinto, y en consecuencia que cada uno de los nueve esfuerzos $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yx}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ y τ_{zy} tendrá también un valor diferente. De manera que, ¿cuál es el esfuerzo en el punto q? Existen por lo menos nueve valores a elegir!. Por lo tanto no existe cosa tal como el esfuerzo en el punto q, sino más bien una combinación de esfuerzos o estado de esfuerzo en dicho punto. Conviene representar un estado de esfuerzo como se indica en la figura 1.2, en la que los esfuerzos en tres planos mutuamente perpendiculares se han designado en la forma descrita antes.

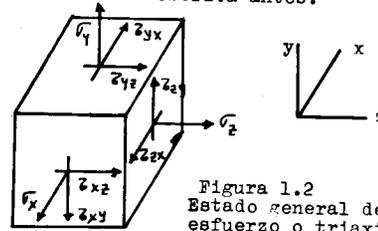


Figura 1.2
Estado general de estado de esfuerzo en un punto; esfuerzo o triaxiales decir, cómo calcular los valores de $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ y así sucesivamente;

El estado de esfuerzo representado en la figura 1.2 recibe el nombre de estado general de esfuerzo o triaxial, el cual puede existir en todo punto del interior de un cuerpo cargado. Al tratar con estados de esfuerzo el ingeniero se enfrenta a dos problemas.

- 1.- Primero, ¿cómo determinar el estado de esfuerzo en un punto; esfuerzo o triaxiales decir, cómo calcular los valores de $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ y así sucesivamente;
- 2.- Segundo, ¿cómo determinar el valor máximo del esfuerzo (normal o cortante) en un punto q. Después de todo, los ejes x, y, z se eligieron arbitrariamente y los esfuerzos correspondientes $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{xz}$ etc., pueden no ser los valores máximos posibles de los esfuerzos en el punto dado.

La respuesta a la primera pregunta ya ha sido dada en el primer curso de Mecánica de Materiales, ahí se llegaron a determinar expresiones que permiten determinar el esfuerzo en un punto de un cuerpo sometido a la acción única y exclusiva de fuerza axial, momento flexionante, fuerza cortante o momento torsionante. Esas expresiones o fórmulas son las siguientes:

esfuerzo normal debido a fuerza axial

$$\sigma = \frac{P}{A}$$

esfuerzo normal debido a momento flexionante

$$\sigma = \frac{M}{I} y$$

esfuerzo cortante debido a fuerza cortante

$$\tau = \frac{VQ}{Ib}$$

$$(1.2)$$

esfuerzo cortante debido a momento torsionante (sección circular)

$$\tau = \frac{T}{J} r$$

Como es sabido, el símbolo σ es utilizado para representar a el esfuerzo normal y τ para representar el esfuerzo cortante o tangencial. El significado de las literales P, A, M, I, y, V, Q, b, T, J y r es también conocido del primer curso de mecánica de materiales. En este capítulo se tratarán los casos en que actúan simultáneamente dos o más de estos esfuerzos.

La respuesta a la segunda pregunta es dada por la teoría del algebra lineal y no se tratará en toda su generalidad, sino que sólo se analizará una situación más simple y enteramente práctica.

Las combinaciones de esfuerzos que puedan presentarse en un punto de un elemento dependerán de las sollicitaciones a que éste sea sometido. Por ejemplo, un elemento típico A de un miembro sometido a fuerzas axiales y transversales, como el que se muestra en la figura 1.3(a), experimenta un esfuerzo normal σ_x debido a la suma algebraica de los efectos de la fuerza axial y del momento flexionante, y también un esfuerzo cortante τ_{xy} debido a la fuerza cortante. Empleando los procedimientos desarrollados hasta ahora, se deben tomar los planos que aislan este elemento, paralela y/o perpendicularmente a los ejes del miembro.

En muchas ocasiones es suficiente, para fines de diseño estructural, considerar por separado el efecto de los distintos tipos de esfuerzo. Por ejemplo, las vigas suelen dimensionarse para flexión y para fuerza cortante por separado, sin considerar la acción combinada de ambas. Sin embargo, en algunos casos el efecto combinado de los esfuerzos normales y cortantes es más desfavorable que el de cada uno en forma aislada y es necesario entonces considerarlos en conjunto para poder, así, juzgar plenamente sobre la resistencia del material, para ello es necesario saber describir y calcular el estado de esfuerzo en un punto en términos de los esfuerzos que actúan en un plano inclinado, como se indica en la figura 1.3(c). Tales esfuerzos son descripciones equivalentes del estado de esfuerzo en un punto, ya que los mismos, independientemente de los planos en que actúan, mantienen el equilibrio del elemento. Las leyes para transformar esfuerzos dados en esfuerzos equivalentes que actúan en un plano inclinado que pasa por un punto dado constituyen la parte principal de este capítulo. Recibirán especial atención los planos en que los esfuerzos normales y/o cortantes alcanzan su máxima intensidad, ya que los esfuerzos asociados a estos planos tienen un efecto particularmente significativo en los materiales.

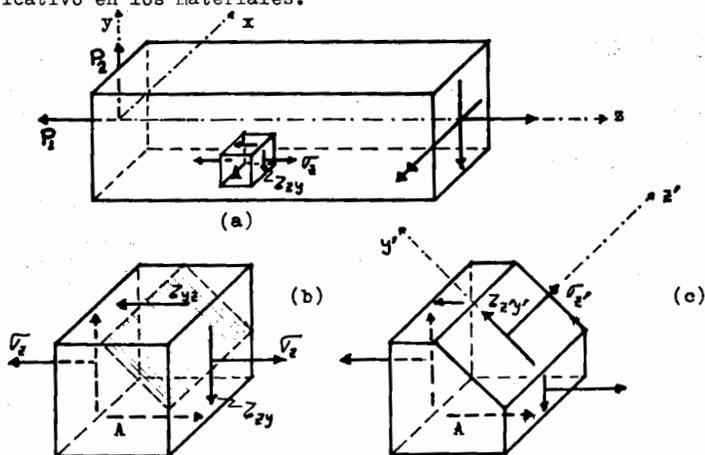


Figura 1.3.- Estado de esfuerzo en un punto sobre planos diferentes

En este capítulo se estudian dos casos sencillos de esfuerzos combinados. Uno es el que se presenta en elementos sometidos a cargas axiales cuando se analizan secciones que no son perpendiculares a el eje longitudinal del elemento. El otro caso es del efecto combinado del momento flexionante y de la fuerza cortante en una viga. Un elemento cualquiera A, de una viga bajo la acción de flexión y cortante está sometido a esfuerzos normales, σ , producidos por la flexión y a esfuerzos cortantes, τ , producidos por la fuerza cortante, como se indica en la figura 1.3(b). Se verá posteriormente que la acción combinada de estos esfuerzos produce, en algunos puntos de la viga y en secciones inclinadas respecto a su eje longitudinal, esfuerzos normales mayores que los esfuerzos σ mostrados en la figura 1.3(b).

ESTADO PLANO DE ESFUERZOS.- Existen estados de esfuerzos combinados más complicados que los mencionados anteriormente. Por ejemplo en la figura 1.2 se muestra un elemento sometido simultáneamente a esfuerzos nor-

males y esfuerzos cortantes en tres direcciones (estado general de esfuerzo), y en la figura 1.4(a) un elemento con esfuerzos normales y cortantes en dos direcciones. Aquí, como se anotó anteriormente, se evitará la completa generalidad en la deducción de las leyes de transformación del esfuerzo en un punto. En vez de tratar un estado tridimensional general de esfuerzo, como el que se muestra en la figura 1.2, se considerarán elementos con esfuerzos en la forma que se indica en las figuras 1.4(a)-(b)-(c) y (d) que son particularmente significativos en aplicaciones prácticas. Para simplificar, los esfuerzos sobre tales elementos se mostrarán como en la figura 1.4(e).

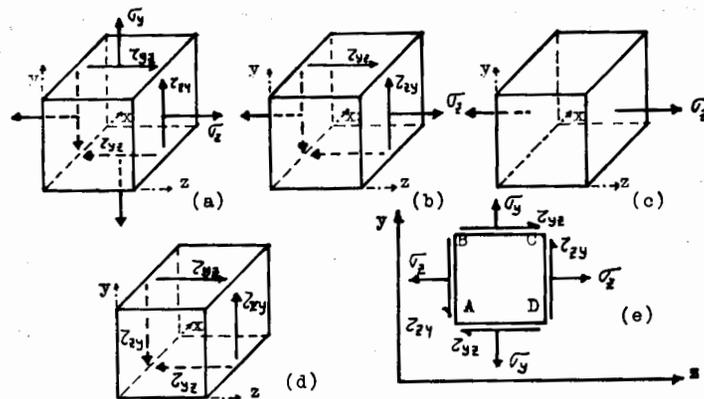


Figura 1.4.- Representación de los esfuerzos que actúan en un elemento. Cuando el elemento se considera en un plano y no existen esfuerzos normales en dirección perpendicular al plano del elemento, como en las figuras 1.4(a)-(b)-(c) y (d), el estado de esfuerzos se denomina ESTADO PLANO DE ESFUERZOS.

Como se sabe las leyes de la adición vectorial no se aplican a los esfuerzos. Sin embargo, es posible multiplicar esfuerzos por las respectivas áreas en que actúan para obtener fuerzas, las cuales son vectores y en consecuencia se pueden sumar o restar vectorialmente. De esta manera es como se resuelve el problema de combinar esfuerzos normales con esfuerzos cortantes. El establecer el equilibrio de un cierto punto de un elemento a través del cual pasa un plano inclinado permite obtener relaciones algebraicas para una transformación de esfuerzos, que permitan la obtención de esfuerzos en un plano inclinado a partir de cierto estado de esfuerzo. Los métodos empleados para obtener estas relaciones no involucran a las propiedades del material. Por consiguiente, siempre que se conocen los esfuerzos iniciales, las relaciones deducidas son aplicables si el material se comporta elástico o plásticamente.

CONVENCIÓN DE SIGNOS.- Los esfuerzos normales de tensión son positivos, y los de compresión negativos. El esfuerzo cortante positivo se define como el que actúa hacia arriba sobre la cara derecha CD del elemento y negativo en caso contrario como se muestra en la figura 1.5.

ESFUERZOS EN UN ELEMENTO DE UNA BARRA SOMETIDA A FUERZA AXIAL.

Se ha visto anteriormente que si se hace un corte normal a el eje longitudinal de una barra sujeta a carga axial, figura 1.6(a) se obtiene

un estado de esfuerzos uniforme cuya magnitud puede calcularse con la expresión $\sigma_z = P/A$, donde σ_z es el esfuerzo paralelo al eje de la barra, P es la carga axial aplicada y A es el área de la sección transversal, perpendicular a el eje longitudinal de la pieza. Si el corte se hace de tal manera que no sea perpendicular a el eje de la barra, como el corte a-a de la figura 1.6(a), el estado de esfuerzos en la sección transversal es el indicado en la figura 1.6(c). Debido a que las deformaciones unitarias son iguales en cualquier punto de la barra, los esfuerzos en la sección a-a tienen que ser también iguales. La resultante de los esfuerzos en la sección a-a es la fuerza $P_{zz} = P$ indicada en la figura 1.6(d), ($P_{zz} = P$ por equilibrio del tramo de la barra situado a la izquierda del corte a-a). La fuerza P_{zz} puede descomponerse en dos fuerzas P_{zz} y P_{zz}' , perpendicular y paralela respectivamente a la sección a-a, figura 1.6(d). Teniendo en cuenta que $P_{zz} = P$, las fuerzas P_{zz} y P_{zz}' tienen los siguientes valores:

$$P_{zz} = P \cos \theta \quad P_{zz}' = P \sin \theta$$

donde θ es el ángulo que forma la perpendicular a la sección a-a con el eje longitudinal de la barra. El área de la sección a-a en la cual actúan las fuerzas P_{zz} y P_{zz}' es

$$A' = A / \cos \theta$$

Denominando σ_z' al esfuerzo normal que produce la fuerza P_{zz} y τ_{zz}' al esfuerzo cortante o tangencial que produce la fuerza P_{zz}' , ambos sobre el área A' , la magnitud de estos esfuerzos puede calcularse con las siguientes ecuaciones:

$$\sigma_z' = \frac{P_{zz}}{A'} = \frac{P \cos \theta}{A \cos \theta} = \frac{P}{A} \cos^2 \theta = \sigma_z \cos^2 \theta \quad (1.3)$$

$$\tau_{zz}' = \frac{P_{zz}'}{A'} = \frac{P \sin \theta}{A \cos \theta} = -\frac{P}{A} \sin \theta \cos \theta = -\sigma_z \sin \theta \cos \theta \quad (1.4)$$

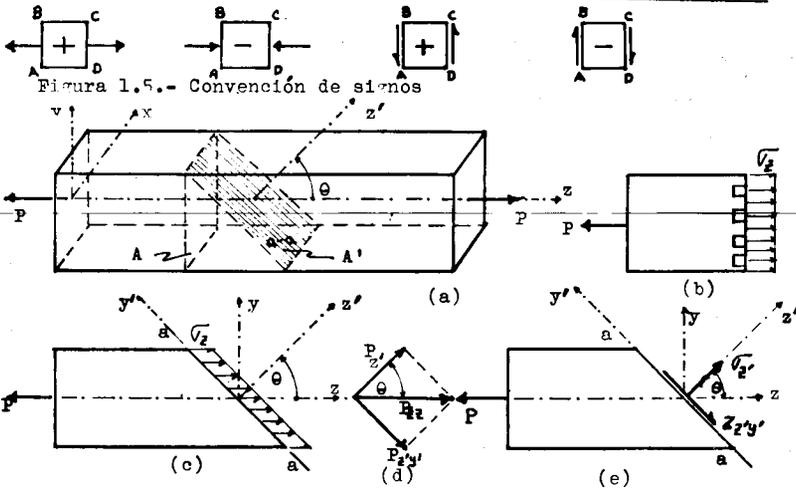


Figura 1.6.- Esfuerzos en un plano inclinado de una barra sometida a una fuerza axial de tensión

Las ecuaciones (1.3) y (1.4) permiten calcular el esfuerzo normal y el esfuerzo cortante respectivamente en cualquier sección de una barra sometida a fuerza axial. Obsérvese que cuando $\theta = 0^\circ$, o sea, en una sección normal al eje longitudinal de la barra, $\sigma_z' = \sigma_z$ y $\tau_{zz}' = 0$, lo cual coincide con el estado de esfuerzos estudiado anteriormente para elementos sometidos a cargas axiales.

Para determinar el estado de esfuerzos en un elemento A, con una orientación cualquiera, de una barra sujeta a tensión, figura 1.7(a), se aplican las ecuaciones (1.3) y (1.4) a las cuatro caras del elemento, figura 1.7 (b), como se presenta a continuación y considerando que el ángulo θ se mide siempre a partir del eje z hacia el eje y y se considera positivo cuando se mide en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

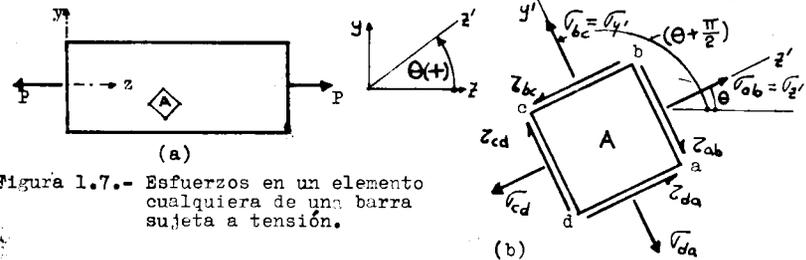


Figura 1.7.- Esfuerzos en un elemento cualquiera de una barra sujeta a tensión.

La cara ab tiene la misma inclinación θ que el corte a-a de la figura 1.6(c); por lo tanto, los esfuerzos en dicha cara son:

$$\sigma_{ab}' = \sigma_{ab} = \sigma_z \cos^2 \theta \quad (1.3a)$$

$$\tau_{ab}' = -\sigma_z \sin \theta \cos \theta \quad (1.4a)$$

La perpendicular a la cara bc forma un ángulo $(\theta + \pi/2)$ con el eje z. Para encontrar los esfuerzos en esta cara se substituye $(\theta + \pi/2)$ por θ en las ecuaciones (1.3) y (1.4) y se obtiene:

$$\sigma_{bc}' = \sigma_z \cos^2 (\theta + \pi/2) \quad \text{donde } \cos(\theta + \pi/2) = -\sin \theta \text{ y } \sin(\theta + \pi/2) = \cos \theta$$

$$\text{entonces } \sigma_{bc}' = \sigma_z \sin^2 \theta = \sigma_{bc} \quad (1.5)$$

$$\text{y } \tau_{bc}' = -\sigma_z \sin(\theta + \pi/2) \cos(\theta + \pi/2) = -\sigma_z (\cos \theta) (-\sin \theta)$$

$$\text{entonces } \tau_{bc}' = \sigma_z \sin \theta \cos \theta \quad (1.6)$$

En la cara cd los esfuerzos tienen que ser iguales y de sentido contrario a los esfuerzos en la cara ab, por equilibrio del elemento. Esto puede corroborarse, substituyendo un ángulo igual a $(\theta + \pi)$ en las ecuaciones (1.3) y (1.4), con lo que se obtiene:

$$\sigma_{cd}' = \sigma_z \cos^2 (\theta + \pi) = \sigma_z \cos^2 \theta \quad (1.7)$$

$$\tau_{cd}' = -\sigma_z \sin(\theta + \pi) \cos(\theta + \pi) = -\sigma_z \sin \theta \cos \theta \quad (1.8)$$

De la misma manera pueden calcularse los esfuerzos en la cara da, los cuales resultan iguales y de sentido contrario a los esfuerzos en la cara bc.

Si se denominan a los esfuerzos σ_{ab} como σ_θ , τ_{bc} como $\tau_{\theta+\pi/2}$, τ_{ab} igual a τ_θ y τ_{bc} igual a $\tau_{\theta+\pi/2}$ al analizar los resultados obtenidos con las expresiones (1.3a), (1.4a), (1.5) y (1.6), se observa que: primero

$$\sigma_\theta + \tau_{\theta+\pi/2} = \sigma_z \cos^2 \theta + \tau_z \sin^2 \theta = \sigma_z (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)$$

donde $(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = 1$, entonces $\sigma_\theta + \tau_{\theta+\pi/2} = \sigma_z$ (1.9)

es decir, que la suma de los esfuerzos normales en dos planos ortogonales entre sí es constante e igual a el esfuerzo principal σ_z ; y segundo,

$$\tau_\theta = -\tau_{\theta+\pi/2} \quad (1.10)$$

es decir, en dos planos ortogonales entre sí actúan esfuerzos cortantes de igual valor y de signo contrario (Ley de reciprocidad de los esfuerzos cortantes).

De lo anotado anteriormente se desprende que, para un mismo punto de un sólido sometido a un estado de esfuerzo (en esta caso uniaxial), los esfuerzos varían según la orientación del elemento diferencial que se considere en dicho punto. Esto es muy importante y lo que se persigue es determinar en que planos se presentan los esfuerzos máximos y calcular sus valores.

Para encontrar la inclinación de los planos en los cuales se presentan los esfuerzos normales y cortantes máximos considérense las expresiones (1.3) y (1.4) y derívense con respecto a θ e igualése a cero esta derivada y así se encontrarán los valores del ángulo θ para los que el esfuerzo normal será máximo y para el que el esfuerzo cortante será máximo también, entonces, analizando primeramente la ecuación (1.3)

$$\sigma_\theta = \sigma_z' = \sigma_z \cos^2 \theta \quad (1.3)$$

$$\frac{d\sigma_z'}{d\theta} = \sigma_z (2 \cos \theta)(-\sin \theta) \quad \text{donde } 2 \cos \theta \sin \theta = \sin 2\theta$$

$$\text{entonces } \frac{d\sigma_z'}{d\theta} = -\sigma_z (\sin 2\theta) = 0$$

como σ_z no es igual a cero, debe necesariamente satisfacerse que

$$\sin 2\theta = 0$$

esto se cumple siempre que θ sea igual a $\theta = (0^\circ + n\pi/2)$ donde $n=0,1,2,\dots$ siendo el primer valor, 0, el que nos interesa y se puede concluir entonces que;

+ a) El esfuerzo normal σ_z' , alcanza su valor máximo cuando el ángulo θ es igual a cero, ya que en este caso $\cos \theta = 1$ y

$$\sigma_z'_{\max} = \sigma_z = \sigma \quad (1.11)$$

esto indica que el esfuerzo normal es máximo (principal) en una cara perpendicular al eje longitudinal del elemento.

Si se sustituye el valor $\theta = 0^\circ$ en la ecuación (1.4) se tiene la siguiente importante observación

$$+ b) \tau_{z'y'} = -\tau_z (\sin 0^\circ)(\cos 0^\circ) = -\tau_z (0)(1) = 0 \quad (1.12)$$

esto es, que en las caras de esfuerzo normal máximo no existen esfuerzos cortantes.

Analizando a continuación la ecuación (1.4) se tiene:

$$\tau_{z'y'} = -\tau_z \sin \theta \cos \theta \quad (1.4)$$

$$\frac{d\tau_{z'y'}}{d\theta} = +\tau_z (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) \quad \text{donde } (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) = -\cos 2\theta$$

$$\text{entonces } \frac{d\tau_{z'y'}}{d\theta} = -\tau_z \cos 2\theta = 0$$

como $\tau_z \neq 0$ entonces $\cos 2\theta$ debe ser igual a cero, esto se cumple siempre que

$$\theta = (45^\circ + n\pi/2) \quad \text{donde } n=0,1,2,3,\dots$$

siendo otra vez el valor 0 el que nos interesa, de acuerdo con lo anterior, otra observación importante es

+ c) El valor máximo del esfuerzo cortante se presenta cuando $\theta = 45^\circ$ y su valor se obtiene sustituyendo en la ecuación (1.4) el valor $\theta = 45^\circ$ y

$$\text{entonces } \tau_{z'y'}_{\max} = -\tau_z (\sin 45^\circ)(\cos 45^\circ) = -\tau_z \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\text{luego, } \tau_{z'y'}_{\max} = \frac{-\tau_z}{2} = \tau_{\max} \quad (1.13)$$

Las ecuaciones (1.3) y (1.4) son las ecuaciones de transformación de esfuerzos de un sistema de ejes coordenados a otro girado un cierto ángulo θ . Nótese que en particular el esfuerzo σ_z' es un esfuerzo conocido inicialmente y calculado con la expresión $\sigma_z = P/A$. Si las expresiones (1.3) y (1.4) no se tienen a la mano o no se recuerdan para obtener los esfuerzos que actúan en un plano inclinado, estos esfuerzos pueden ser obtenidos al plantear el equilibrio del elemento como se hará más adelante con los ejemplos (conocido como método de análisis de la "cuña").

Otra forma de visualizar la variación de los esfuerzos al variar el ángulo de inclinación del plano se muestra en la figura 1.8 obtenida de normalizar las ecuaciones (1.3) y (1.4) al dividir las entre σ_z , dando por resultado que

$$\frac{\sigma_z'}{\sigma_z} = \cos^2 \theta \quad \text{y} \quad \frac{\tau_{z'y'}}{\sigma_z} = -\sin \theta \cos \theta$$

NOTA: A los esfuerzos σ_z' y $\tau_{z'y'}$ se acostumbra también escribirlos como σ_θ y τ_θ para indicar que actúan en un plano inclinado un cierto ángulo θ .

Debe advertirse que el material no está enterado de lo que se ha denominado eje X, eje Y y eje Z. Es decir, el material tiene que resistir las cargas sin que importe el nombre dado a los ejes o si estos son horizontales, verticales o de otra clase. Además, el material se romperá cuando la intensidad de las fuerzas llegue a ser demasiado grande, cualquiera que sea la forma en que se considere el cuerpo. Se ve así pues, que uno de los problemas fundamentales en el diseño de ingeniería consiste en determinar el esfuerzo normal máximo o el esfuerzo cortante máximo en un punto particular de un cuerpo.

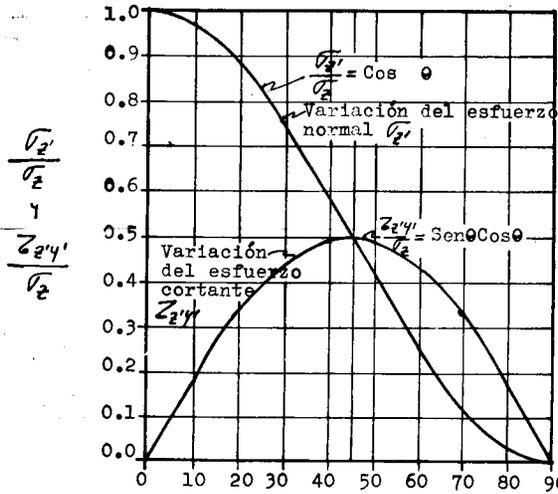
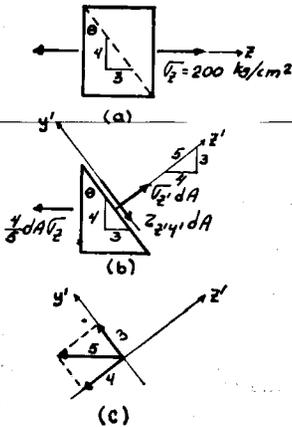


Figura 1.8.- Variación de los esfuerzos normal y cortante con el ángulo en un elemento sometido a carga uniaxial. (normalizados con respecto a $\sqrt{2}$)

EJEMPLOS

Ejemplo 1.- Utilizando el método de análisis de la "cuña", sin recurrir a las ecuaciones de transformación, determine la magnitud de los esfuerzos normal y cortante en el plano indicado en la figura (a).



Solución.- Para determinar la magnitud de los esfuerzos normal y cortante en el plano definido por el ángulo $\theta = \text{ang Sen } 3/5 = 36.87^\circ$ se aísla la "cuña" mostrada en la figura (b), si se considera que esta cuña tiene un espesor unitario y que el área del plano inclinado es igual a dA , entonces las áreas de los planos vertical y horizontal son iguales a $4/5dA$ y $3/5dA$ respectivamente. Al multiplicar los esfuerzos por las áreas de los planos en que actúan se obtienen las fuerzas que actúan en esos planos y al plantear el equilibrio con respecto a los ejes normal y paralelo al plano inclinado se llega a;

$$\sum F_x = 0;$$

$$\sqrt{2}' dA - \frac{4}{5} \sqrt{2} dA \left(\frac{4}{5}\right) = 0$$

$$\sqrt{2}' = \frac{16}{25} \sqrt{2} = \frac{16}{25} (200) = 128 \text{ kg/cm}^2$$

entonces $\sqrt{2}' = 128 \text{ kg/cm}^2$
 y de $\sum F_y = 0;$
 $-\tau_{21}' dA + \frac{4}{5} dA \sqrt{2} \left(\frac{3}{5}\right) = 0$

$$\tau_{21}' = \frac{12}{25} \sqrt{2} = \frac{12}{25} (200) = 96 \text{ kg/cm}^2$$

entonces $\tau_{21}' = 96 \text{ kg/cm}^2$

esto indica que la suposición hecha, inicialmente con respecto a la dirección (sentido) del esfuerzo cortante τ_{21}' (figura b) es correcta, esto es, τ_{21}' actúa en dirección contraria a el eje y' .

El mismo resultado puede ser obtenido aplicando directamente las expresiones (1.3) y (1.4).

$$\sqrt{2}' = \sqrt{2} \text{Cos}^2 \theta \text{ (1.3)} \text{ y } \tau_{21}' = -\sqrt{2} \text{Sen} \theta \text{Cos} \theta \text{ (1.4)}$$

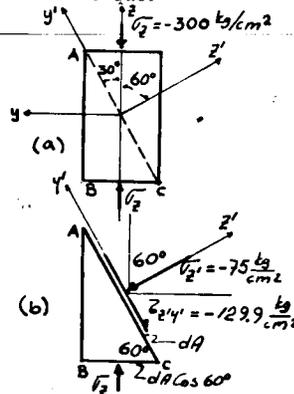
para este caso particular $\text{Sen} \theta = 3/5$ y $\text{Cos} \theta = 4/5$, entonces;

$$\sqrt{2}' = 200 \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 128 \text{ kg/cm}^2 \text{ y } \tau_{21}' = -200 \left(\frac{3}{5}\right) \left(\frac{4}{5}\right) = -96 \text{ kg/cm}^2$$

Entonces, en el plano inclinado actúan el esfuerzo normal de tensión $\sqrt{2}' = 128 \text{ kg/cm}^2$ y el esfuerzo cortante $\tau_{21}' = -96 \text{ kg/cm}^2$ como se muestran en la figura (b).

Ejemplo 2.- Un cilindro de concreto probado en posición vertical falló a un esfuerzo de compresión de 360 kg/cm^2 , La falla ocurrió sobre un plano inclinado 30° respecto a la vertical. Sobre un esquema claro muestre los esfuerzos normal y cortante que se presentaron sobre el plano de falla.

Solución.- En la figura (a) se muestra un esquema del cilindro en el momento de la falla. Aislado la cuña ABC se observa que la rotación del plano de falla es de -60° (ya que es en dirección de las manecillas de el reloj) y planteando el equilibrio de fuerzas según los ejes z y y se obtiene que:



de $\sum F_z = 0;$
 $-\sqrt{2}' dA + \sqrt{2} dA \text{Cos} 60^\circ (\text{Cos} 60^\circ) = 0$

$$\sqrt{2}' = \sqrt{2} \text{Cos}^2 60^\circ \text{ donde } \text{Cos} 60^\circ = 0.5$$

$$\text{luego } \sqrt{2}' = 300 (0.5)^2 = 75 \text{ kg/cm}^2$$

como la dirección supuesta en la figura (b) es correcta $\sqrt{2}' = -75 \text{ kg/cm}^2$

$$\text{y de } \sum F_y = 0;$$

$$-\tau_{21}' dA + \sqrt{2} dA \text{Cos} 60^\circ (\text{Sen} 60^\circ) = 0$$

$$\tau_{z_1y_1} = \tau_z \cos 60^\circ (\sin 60^\circ) \quad \text{donde } \sin 60^\circ = \sqrt{3}/2$$

$$\text{luego } \tau_{z_1y_1} = 300(1/2)(\sqrt{3}/2) = 75\sqrt{3} = 129.904 \text{ kg/cm}^2$$

como la dirección supuesta en la figura (b) es correcta

$$\tau_{z_1y_1} = -129.904 \text{ kg/cm}^2$$

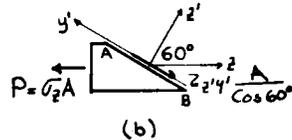
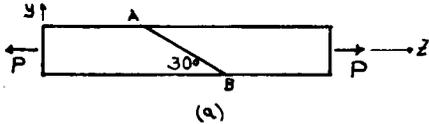
El problema puede también ser resuelto empleando directamente las fórmulas (1.3) y (1.4) sustituyendo en ellas el valor del esfuerzo y el ángulo θ correspondiente. Para este caso $\theta = -60^\circ$ y $\tau_z = -300 \text{ kg/cm}^2$, además se tiene que $\cos(-60^\circ) = \cos 60^\circ$ y $\sin(-60^\circ) = -\sin 60^\circ$, entonces:

$$\tau_{z_1y_1} = -300(0.5)^2 = -75 \text{ kg/cm}^2 \quad \text{y}$$

$$\tau_{z_1y_1} = -(300)(0.5)(-\sqrt{3}/2) = -129.904 \text{ kg/cm}^2$$

El esquema indicando los esfuerzos normal y cortante que se presentarán sobre el plano de falla es el mostrado en la figura (b).

Ejemplo 3.- Dos piezas de madera, de 5x10 cm de sección transversal, están unidas por un pegamento a lo largo de la junta AB como se muestra en la figura (a). Si el esfuerzo cortante permisible a lo largo de la junta es de 30 kg/cm², calcular la magnitud de la fuerza axial de tensión, P, que puede aplicarse a el conjunto.



Solución.- Se conoce que la expresión para calcular la magnitud del esfuerzo cortante que se presenta en un plano definido por un cierto ángulo θ es;

$$\tau_{z_1y_1} = -\tau_z \sin \theta \cos \theta$$

Para este problema, de acuerdo con la figura (b)

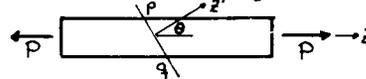
$$\theta = 60^\circ \text{ entonces } \sin 60^\circ = \sqrt{3}/2 \text{ y } \cos 60^\circ = 1/2$$

$$\text{y } \tau_{z_1y_1} = 30 \text{ kg/cm}^2 \quad ; \quad \tau_z = P/A$$

$$\text{luego, } -30 = \frac{-P}{A} (\sqrt{3}/2)(1/2) \text{ entonces } P = \frac{30(4)(5)(10)}{\sqrt{3}}$$

$$\text{finalmente } P = 3464.1 \text{ kg}$$

Ejemplo 4.- Los esfuerzos en un plano inclinado pq de una barra en tensión (ver figura) son $\sigma_\theta = 840 \text{ kg/cm}^2$ y $\tau_\theta = 280 \text{ kg/cm}^2$. Encuéntrense el valor del esfuerzo σ_z y el ángulo θ .



Solución.- Se sabe que:

$$\sigma_\theta = \sigma_z \cos^2 \theta \quad (a)$$

$$\tau_\theta = -\tau_z \sin \theta \cos \theta \quad (b)$$

despejando τ_z de (a) y (b)

$$\tau_z = \tau_\theta / \cos \theta \quad (a') \quad \tau_z = [-\tau_\theta / (\sin \theta \cos \theta)] \quad (b')$$

igualando (a') y (b') y sustituyendo los valores conocidos de τ_θ y τ_z se tiene;

$$\frac{840}{\cos^2 \theta} = \frac{-280}{\sin \theta \cos \theta}$$

entonces

$$\frac{\sin \theta \cos \theta}{\cos^3 \theta} = \frac{-280}{840} \quad \text{y } \tan \theta = -\frac{1}{3}$$

$$\text{y } \theta = \text{ang tan}(1/3) = -18.43495^\circ = -18^\circ 26' 5''$$

y τ_z es entonces igual a;

$$\tau_z = \frac{840}{\cos^2(18.43495^\circ)} = \frac{840}{0.9}$$

$$\tau_z = 933.332 \text{ kg/cm}^2$$

Ejemplo 5.- En una partícula de una barra sometida a compresión se obtuvieron por medio de dispositivos de medición los siguientes valores de esfuerzos: $\sigma_z = \tau_z = -1000 \text{ kg/cm}^2$ y $\sigma_\theta = \tau_\theta = -600 \text{ kg/cm}^2$. Encuéntrense, a) la inclinación del plano donde se presenta τ_z , b) la magnitud de σ_z , c) la magnitud de τ_z y d) la magnitud de σ_θ .

Solución.-

a) Los esfuerzos $\sigma_\theta = \tau_\theta$ y $\sigma_\theta + \tau_\theta = \tau_\theta$ se calculan con las expresiones (1.3) y (1.5) respectivamente!

$$\tau_z = \tau_z \cos^2 \theta \quad (1.3) \quad \tau_\theta = \tau_z \sin^2 \theta \quad (1.5)$$

despejando de ambas expresiones a τ_z se tiene

$$\tau_z = \tau_z / \cos^2 \theta \quad \text{y } \tau_z = \tau_\theta / \sin^2 \theta$$

e igualando

$$\frac{\tau_z}{\cos^2 \theta} = \frac{\tau_\theta}{\sin^2 \theta} \text{ entonces } \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{\tau_\theta}{\tau_z}$$

$$\text{luego } \tan^2 \theta = \frac{-600}{-1000} = 0.6$$

$$\tan \theta = \sqrt{0.6} \quad \text{y} \quad \theta = \text{ang } \tan(\sqrt{0.6}) = 37.76^\circ$$

$$\theta = 37^\circ 45' 40'' = 37.76^\circ$$

b) De acuerdo con la expresión (1.9), $(\sqrt{\sigma_x + \sigma_y + 2\tau_{xy}}) = \sqrt{\sigma_2}$, esto es, la suma de los esfuerzos normales en dos planos ortogonales entre sí es constante e igual al esfuerzo principal $\sqrt{\sigma_2}$.

$$\text{Entonces } \sqrt{\sigma_2} = -1000 + (-600) = -1600 \text{ kg/cm}^2$$

c) Conocidos el esfuerzo $\sqrt{\sigma_2}$ y el ángulo θ $\tau_{21'}$ se calcula como:

$$\tau_{21'} = -\sqrt{\sigma_2} \text{ Sen } \theta \text{ Cos } \theta = -(-1600)(\text{Sen } 37.76^\circ)(\text{Cos } 37.76^\circ) =$$

$$\tau_{21'} = 1600(0.612372)(0.790569) = 774.595 \text{ kg/cm}^2$$

$$\tau_{21'} = 774.595 \text{ kg/cm}^2$$

d) De la expresión (1.13)

$$\tau_{\text{máx}} = -\frac{\sqrt{\sigma_2}}{2} = -\frac{-1600}{2} = 800 \text{ kg/cm}^2$$

$$\tau_{\text{máx}} = 800 \text{ kg/cm}^2$$

PROBLEMAS

1.- ¿Cuál es el esfuerzo cortante máximo en una ^{barra} circular de 3 cm de diámetro sometida a una carga axial de tensión $P = 10\,000 \text{ kg}$?

2.- Encuentre la carga máxima permisible de tensión P en una barra de acero de sección cuadrada de 3 por 3 cm, si el esfuerzo normal permisible a la tensión es de $1\,400 \text{ kg/cm}^2$ y el esfuerzo cortante permisible de 900 kg/cm^2 .

3.- Una barra de sección rectangular de 5 por 8 cm y 80 cm de longitud transmite una fuerza de tensión de 20 ton en la dirección del eje longitudinal. Encuentre los valores de los esfuerzos normal y cortante en tres secciones diferentes que están "cortadas" a $\theta = 30^\circ, 45^\circ$ y 60° respectivamente (utilice primero el método de análisis de la cuña y luego las fórmulas)

4.- Un miembro sujeto a tensión está compuesto de dos trozos de material pegados según la recta pq (ver figura del ejemplo 4). Por razones prácticas el ángulo θ está limitado al intervalo de 0° a 60° . El esfuerzo cortante permisible en la junta pegada es $3/4$ del esfuerzo permisible de tensión, ¿cuál debe ser el valor del ángulo θ para que la barra soporte la carga máxima P ? (Supóngase que la resistencia de la junta pegada controla el diseño).

5.- Resuelva el problema anterior si $\tau_p = 80 \text{ kg/cm}^2$ y $\sigma_p = 160 \text{ kg/cm}^2$. Asimismo determine la máxima carga permisible, P , si el área transversal de la barra es de 12 cm^2 .

ECUACIONES PARA LA TRANSFORMACION DE UN ESTADO DE ESFUERZO PLANO

Hasta ahora se han obtenido expresiones algebraicas para transformar un estado de esfuerzo como el mostrado en la figura 1.4c al correspondiente a otra orientación. A continuación se analizará un partícula sometida a un estado general plano de esfuerzo como el mostrado en la figura 1.4a que, como se anotó, puede ser esquematizado como se muestra en la figura 1.4e, los esfuerzos indicados ahí $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{yz}$ y τ_{zy} son esfuerzos conocidos inicialmente y por el momento no nos preocuparemos por indicar su procedencia, y se desarrollarán ecuaciones algebraicas para determinar los esfuerzos en planos inclinados. Las expresiones algebraicas desarrolladas para un estado general plano de esfuerzo (figura 1.4a) pueden ser también empleadas para un estado de esfuerzo plano como el mostrado en la figura 1.4b, este último estado de esfuerzo tiene una importancia particular para el diseño de ingeniería y a él se le dedicará una especial atención más adelante.

Entonces, considérese un elemento en estado de esfuerzo plano general, figura 1.9a, la convención de signos sigue siendo la misma empleada con anterioridad, y haciendo pasar un plano BC normal al eje Z' a través del elemento, se aísla la cuña de la figura 1.9b, de ancho unitario medido perpendicularmente a el papel. La sección plana BC forma un ángulo θ con el eje vertical Y, si esa sección tiene un área dA , las áreas de las caras AC y AB serán $dA \text{ Cos } \theta$ y $dA \text{ Sen } \theta$, respectivamente. Multiplicando los esfuerzos por las áreas respectivas se puede construir un diagrama con las fuerzas que actúan en la "cuña", figura 1.9c. Luego, aplicando las ecuaciones de equilibrio estático a las fuerzas que actúan en la cuña respecto a los ejes girados Z' y Y' se obtienen los esfuerzos $\sigma_{2'}$ y $\tau_{21'}$.

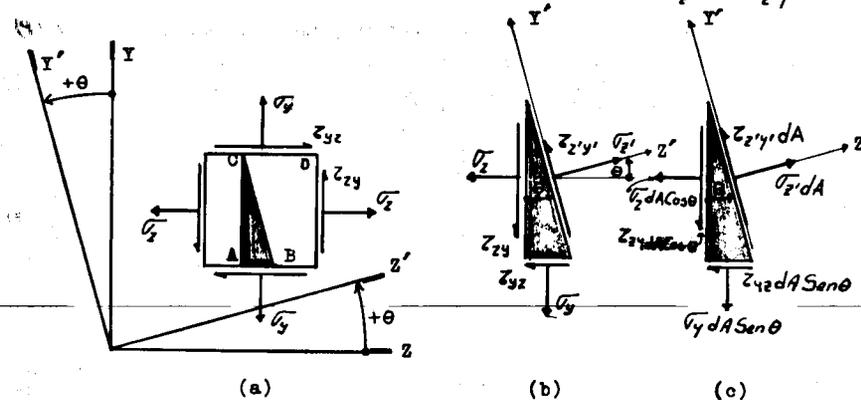


Figura 1.9.- Elementos para deducir las fórmulas de los esfuerzos en un plano inclinado.

$$\sum F_{2'} = 0;$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\sigma_2'} dA &= \sqrt{\sigma_x} dA \text{ Cos } \theta (\text{Cos } \theta) + \sqrt{\sigma_y} dA \text{ Sen } \theta (\text{Sen } \theta) + \\ &+ \tau_{yz} dA \text{ Cos } \theta (\text{Sen } \theta) + \tau_{zy} dA \text{ Sen } \theta (\text{Cos } \theta). \end{aligned}$$

Dividiendo ambos miembros entre dA y agrupando se obtiene:

$$\sqrt{\sigma'_x} = \sqrt{\sigma_x} \cos^2 \theta + \sqrt{\tau_y} \operatorname{Sen}^2 \theta + \tau_{zy} (2 \operatorname{Sen} \theta \operatorname{Cos} \theta) \quad (1.14)$$

Y haciendo uso de las relaciones trigonométricas

$$\operatorname{Cos}^2 \theta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{Cos} 2\theta; \quad \operatorname{Sen}^2 \theta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{Cos} 2\theta \quad (1.15)$$

$$y \quad 2 \operatorname{Sen} \theta \operatorname{Cos} \theta = \operatorname{Sen} 2\theta$$

la ecuación (1.14) puede escribirse como:

$$\sqrt{\sigma'_x} = \frac{\sqrt{\sigma_x} + \sqrt{\tau_y}}{2} + \frac{\sqrt{\sigma_x} - \sqrt{\tau_y}}{2} \operatorname{Cos} 2\theta + \tau_{zy} \operatorname{Sen} 2\theta \quad (1.16)$$

y de $\Sigma F_{y'} = 0$;

$$\tau_{zy} dA \theta = -\sqrt{\sigma_x} dA \operatorname{Cos} \theta (\operatorname{Sen} \theta) + \sqrt{\tau_y} dA \operatorname{Sen} \theta (\operatorname{Cos} \theta) + \tau_{zy} dA \operatorname{Cos} \theta (\operatorname{Cos} \theta) - \tau_{zy} dA \operatorname{Sen} \theta (\operatorname{Sen} \theta)$$

dividiendo ambos miembros entre dA y agrupando se obtiene

$$\tau_{zy}' = -\sqrt{\sigma_x} \operatorname{Sen} \theta \operatorname{Cos} \theta + \sqrt{\tau_y} \operatorname{Sen} \theta \operatorname{Cos} \theta + \tau_{zy} \operatorname{Cos}^2 \theta - \tau_{zy} \operatorname{Sen}^2 \theta$$

$$\tau_{zy}' = -\sqrt{\sigma_x} \operatorname{Sen} \theta \operatorname{Cos} \theta + \sqrt{\tau_y} \operatorname{Sen} \theta \operatorname{Cos} \theta + \tau_{zy} (\operatorname{Cos}^2 \theta - \operatorname{Sen}^2 \theta) \quad (1.17)$$

empleando las relaciones trigonométricas

$$\operatorname{Sen} \theta \operatorname{Cos} \theta = \frac{1}{2} \operatorname{Sen} 2\theta \quad y \quad (\operatorname{Cos}^2 \theta - \operatorname{Sen}^2 \theta) = \operatorname{Cos} 2\theta. \quad (1.18)$$

la expresión (1.17) puede escribirse como:

$$\tau_{zy}' = -\frac{\sqrt{\sigma_x} - \sqrt{\tau_y}}{2} \operatorname{Sen} 2\theta + \tau_{zy} \operatorname{Cos} 2\theta \quad (1.19)$$

Las ecuaciones (1.16) y (1.19) son las expresiones generales para determinar el esfuerzo normal y el esfuerzo cortante, respectivamente, sobre una sección plana localizada por el ángulo θ y causados por un sistema de esfuerzo conocido y permiten transformar un sistema de esfuerzos conocido de un sistema de ejes coordenados a otro. Como se anotó anteriormente $\sqrt{\sigma_x}$, $\sqrt{\tau_y}$ y τ_{zy} son esfuerzos conocidos inicialmente.

Para encontrar los esfuerzos en la cara Y del elemento se puede emplear un procedimiento similar al utilizado para encontrar los esfuerzos en la cara Z , pero es más sencillo sustituir $\theta + \pi/2$ en lugar de θ en las ecuaciones (1.16) y (1.19).

ESFUERZOS PRINCIPALES. Con frecuencia el interés se centra en la determinación del máximo esfuerzo posible según se da por las ecuaciones (1.16) y (1.19), y la inclinación de los planos en los que ocurren tales esfuerzos deberá encontrarse primero. Para localizar la inclinación de el plano donde se presenta un esfuerzo normal máximo o mínimo, la ecuación (1.16) se deriva con respecto a θ y la derivada se iguala a cero; esto es

$$\frac{d\sqrt{\sigma'_x}}{d\theta} = 0 + \left(\frac{\sqrt{\sigma_x} - \sqrt{\tau_y}}{2}\right) (-2 \operatorname{Sen} 2\theta) + 2 \tau_{zy} \operatorname{Cos} 2\theta = 0$$

$$\text{entonces } (\sqrt{\sigma_x} - \sqrt{\tau_y}) \operatorname{Sen} 2\theta = 2 \tau_{zy} \operatorname{Cos} 2\theta$$

$$\text{luego } \frac{\operatorname{Sen} 2\theta}{\operatorname{Cos} 2\theta} = \frac{2 \tau_{zy}}{\sqrt{\sigma_x} - \sqrt{\tau_y}}, \quad \text{esto es } \tan 2\theta_1 = \frac{2 \tau_{zy}}{\sqrt{\sigma_x} - \sqrt{\tau_y}} \quad (1.20)$$

donde θ_1 se utiliza para designar el ángulo que define el plano donde se presenta el esfuerzo normal máximo o mínimo. La ecuación (1.20) tiene dos raíces, puesto que el valor de la tangente de un ángulo en cuadrantes diametralmente opuestos es el mismo, como se puede ver en la figura 1.10. Tales raíces se localizan a 180° y como la ecuación (1.20) es para un ángulo doble, las raíces de θ_1 se localizan a 90° . Una de ellas localiza un plano en el que actúa el esfuerzo normal máximo; la otra raíz sitúa el plano correspondiente al esfuerzo normal mínimo. Para distinguir las dos raíces se utilizará la notación con prima para el ángulo que define el plano de esfuerzo normal máximo y con biprima para el ángulo que define al plano de esfuerzo normal mínimo.

Si se desea localizar los planos en los que no actúan esfuerzos cortantes, la ecuación (1.19) debe igualarse a cero. Esto da

$$\frac{\sqrt{\sigma_x} - \sqrt{\tau_y}}{2} \operatorname{Sen} 2\theta = \tau_{zy} \operatorname{Cos} 2\theta$$

$$\text{entonces } \frac{\operatorname{Sen} 2\theta}{\operatorname{Cos} 2\theta} = \tan 2\theta_1 = \frac{2 \tau_{zy}}{\sqrt{\sigma_x} - \sqrt{\tau_y}} \quad (1.21)$$

la relación (1.21) es la misma que la (1.20). Por lo tanto se llega a una conclusión importante: En los planos en que se presentan los esfuerzos normales máximo o mínimo no existen esfuerzos cortantes. Tales planos se denominan planos principales de esfuerzo, y los esfuerzos que actúan en ellos, los normales máximo y mínimo, se conocen como esfuerzos principales.

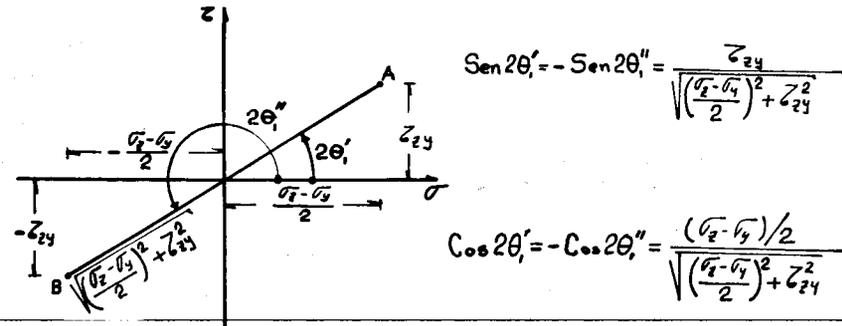


Figura 1.10.- Funciones de ángulos para esfuerzos principales.

La magnitud de los esfuerzos principales se puede obtener sustituyendo en la ecuación (1.16) los valores de las funciones Seno y Coseno correspondientes al ángulo doble dado por la ecuación (1.20). Al sustituir $\operatorname{Sen} 2\theta_1$ y $\operatorname{Cos} 2\theta_1$ se obtiene:

$$\begin{aligned} \sqrt{\sigma'_x} = \sigma'_x = & \frac{\sqrt{\sigma_x} + \sqrt{\tau_y}}{2} + \frac{\sqrt{\sigma_x} - \sqrt{\tau_y}}{2} \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\sigma_x} - \sqrt{\tau_y}}{\sqrt{(\frac{\sqrt{\sigma_x} - \sqrt{\tau_y}}{2})^2 + \tau_{zy}^2}} - \frac{\tau_y}{2} \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\sigma_x} - \sqrt{\tau_y}}{\sqrt{(\frac{\sqrt{\sigma_x} - \sqrt{\tau_y}}{2})^2 + \tau_{zy}^2}} + \\ & + \tau_{zy} \frac{\tau_{zy}}{\sqrt{(\frac{\sqrt{\sigma_x} - \sqrt{\tau_y}}{2})^2 + \tau_{zy}^2}} = \end{aligned}$$

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{1}{4} \sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{2} + \tau_{xy}^2} (\sqrt{\sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y - \sigma_y^2 + 4\tau_{xy}^2})$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}{4\sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{2} + \tau_{xy}^2}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}{2\sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{2} + \tau_{xy}^2}}$$

Finalmente

$$\sigma_{\max} = \sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{2} + \tau_{xy}^2} \quad (1.22)$$

Procediendo de manera análoga con $\text{Sen } 2\theta_1''$ y $\text{Cos } 2\theta_1''$ se obtiene

$$\sigma_{\min} = \sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{2} + \tau_{xy}^2} \quad (1.23)$$

Las expresiones (1.22) y (1.23) pueden ser condensadas en una sola de la siguiente manera:

$$\sigma_{\max/\min} = \sigma_{1/2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{2} + \tau_{xy}^2} \quad (1.24)$$

donde se debe utilizar el signo positivo antes del radical para obtener el esfuerzo normal máximo σ_1 y al negativo para el esfuerzo normal mínimo σ_2 . (σ_1 y σ_2 son denominados esfuerzos principales). Los planos en que actúan estos esfuerzos se pueden determinar mediante la ecuación (1.20). Una raíz particular de tal ecuación, sustituida en la ecuación (1.16), comprobará el resultado que se obtiene mediante la ecuación (1.24) y al mismo tiempo localizará el plano en que actúa este esfuerzo principal.

ESFUERZOS CORTANTES MÁXIMOS.— Si σ_x , σ_y , τ_{xy} y τ_{yx} son esfuerzos conocidos para una partícula (o elemento) la ecuación (1.19) nos permite encontrar la magnitud del esfuerzo cortante τ_{xy} (o τ_{yx}) en un plano definido por un ángulo θ y un estudio similar al realizado anteriormente para los esfuerzos normales se puede efectuar para el esfuerzo cortante. Por tanto, de manera semejante, para localizar los planos en los que actúan los esfuerzos cortantes máximo o mínimo se debe derivar la ecuación (1.19) con respecto a θ e igualar a cero la derivada. Luego

$$\frac{d\tau_{xy}}{d\theta} = -\frac{2}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \text{Cos } 2\theta - 2\tau_{xy} \text{Sen } 2\theta = 0$$

$$\text{entonces } -\frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2\tau_{xy}} = \frac{\text{Sen } 2\theta}{\text{Cos } 2\theta}, \text{ luego, } \tan 2\theta_2 = -\frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2\tau_{xy}} \quad (1.25)$$

donde θ_2 es el ángulo que define el plano en que el esfuerzo cortante es máximo o mínimo. A semejanza de la ecuación (1.20), la ecuación (1.25) tiene raíces, que también pueden distinguirse empleando la notación con prima y bis prima. Los dos planos definidos por esta ecuación son perpendi-

culares. Además, el valor de $\tan 2\theta_2$ dado por la ecuación (1.25) es el recíproco negativo del valor de $\tan 2\theta_1$ en la ecuación (1.20). Por tanto, las raíces para los ángulos dobles de la ecuación (1.25) están a 90° de las raíces correspondientes de la (1.20) (ver figura 1.11 para esta relación). Esto significa que los ángulos que localizan o definen los planos de esfuerzos cortantes máximo o mínimo forman ángulos de 45° con los de los esfuerzos principales. La sustitución en la ecuación (1.19) de las funciones Seno y Coseno correspondientes al ángulo doble dado por la ecuación (1.25) y determinadas de manera análoga a la de la figura (1.10) para los valores máximo y mínimo de los esfuerzos cortantes. Después de simplificar, resulta que tales esfuerzos son:

$$\tau_{\max/\min} = \pm \sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{2} + \tau_{xy}^2} \quad (1.26)$$

En consecuencia, el esfuerzo cortante máximo difiere únicamente en signo del esfuerzo cortante mínimo. Además, como las dos raíces dadas por la ecuación (1.25) localizan planos a 90° , este resultado significa también que los valores numéricos de los esfuerzos cortantes son iguales en planos mutuamente perpendiculares, como se anotó anteriormente. En esta deducción la diferencia de signo de los dos esfuerzos cortantes surge de la convención para localizar los planos en que actúan estos esfuerzos. Desde el punto de vista físico tales signos no tienen significado alguno y por esta razón al mayor esfuerzo cortante, independientemente de su signo, se le llamará esfuerzo cortante máximo.

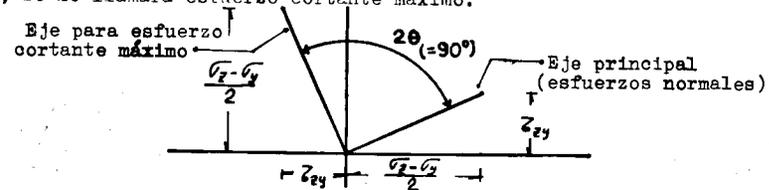


Figura 1.11.— Relación entre el eje principal y el eje de esfuerzo cortante máximo, en términos de 2θ .

A diferencia de los esfuerzos principales, en cuyos planos no existen esfuerzos cortantes, los esfuerzos cortante máximos actúan en planos que usualmente no están libres de esfuerzos normales. La sustitución de las raíces de la ecuación (1.25), θ_2' y θ_2'' , en la ecuación (1.16) da como resultado la magnitud de los esfuerzos normales que actúan en los planos de los esfuerzos cortantes máximos. Estos esfuerzos normales tienen igual signo y magnitud, y están dados por la expresión

$$\sigma' = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \quad (1.27)$$

por consiguiente, un esfuerzo normal actúa simultáneamente con el esfuerzo cortante máximo a menos que se anule $\sigma_x + \sigma_y$.

Si σ_x y σ_y de la ecuación (1.26) son los esfuerzos principales, σ_1 y σ_2 , τ_{xy} es igual a cero y la ecuación (1.26) se simplifica a lo siguiente

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \quad (1.28)$$

Si se tiene en una partícula un estado de esfuerzo cortante puro como se indica en la figura (1.12a), al aplicar la ecuación (1.24) resulta que los esfuerzos principales $\sigma_{1/2} = \pm \tau_{xy}$, esto es, σ_1 , σ_2 y τ_{xy} son numéricamente iguales, aunque σ_1 es un esfuerzo de tensión y σ_2 es uno de compresión. En este caso, de acuerdo con la ecuación (1.20) se observa que los esfuerzos principales están dados por $\tan 2\theta_1 = \infty$, es decir,

$2\theta_1 = 90^\circ$ o 270° . Por tanto $\theta_1' = 45^\circ$ y $\theta_1'' = 135^\circ$; los planos correspondientes a estos ángulos se muestran en la figura 1.12b. Sustituyendo en la ecuación (1.16) el valor de $\text{Sen } 2\theta_1 = 90^\circ$ se encuentra que $\sigma_1 = +\tau_{zy}$, y por consiguiente el esfuerzo de tensión actúa perpendicularmente al plano AB. Ambos esfuerzos principales equivalentes al esfuerzo cortante puro se indican en las figuras 1.12b y c. Por tanto, siempre que el esfuerzo cortante puro actúe en un elemento se puede considerar que produce tensión a lo largo de una de las diagonales y compresión a lo largo de la otra.

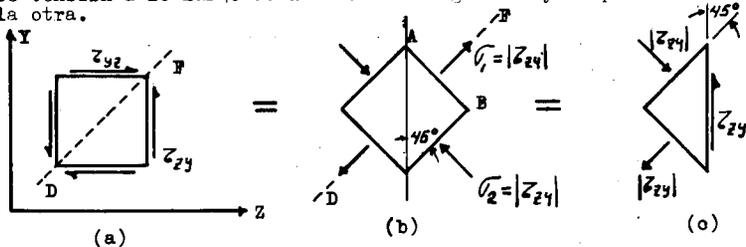


Figura 1.12.- El esfuerzo cortante puro es equivalente a esfuerzos de tensión y compresión que actúan en planos inclinados a 45° con respecto a los planos de corte.

Considérese ahora el elemento A tomado del segmento de viga de la figura 1.3a. Este elemento está sujeto a esfuerzos normales, σ_x , originados por el momento flexionante y a esfuerzos cortantes originados por la fuerza cortante, τ_{zy} . El estado de esfuerzo en esta partícula es un caso más simple que el de estado de esfuerzo plano general y su análisis tiene una gran importancia desde el punto de vista práctico ya que todo elemento de una viga estará sometido a este estado de esfuerzo, tal análisis permitirá determinar la magnitud de los esfuerzos normales y cortantes en planos inclinados y así poder decidir sobre la resistencia del material. Para efectuar ese análisis considérese el elemento genérico mostrado en la figura 1.13a y hágase pasar un plano inclinado como se muestra en la figura 1.13b y aíslese la cuña mostrada en la figura 1.13c, y háganse las mismas consideraciones que se hicieron para el análisis del estado general plano de esfuerzo.

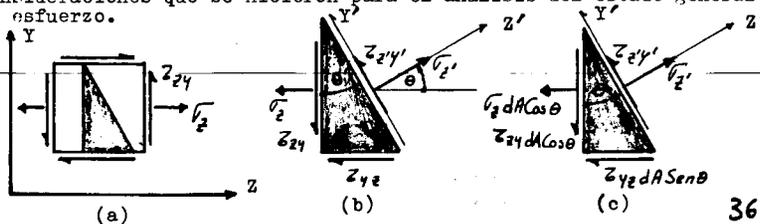


Figura 1.13.- Elemento genérico de una viga sujeta a flexión y fuerza cortante

Al realizar el análisis, después de operar algebraicamente y hacer las simplificaciones pertinentes, se llega a obtener expresiones matemáticamente iguales a las obtenidas del análisis del estado general plano de esfuerzo, en las que no aparece, por no existir en este estado de esfuerzo, el esfuerzo σ_y , estas expresiones son las siguientes:

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x}{2} + \frac{\sigma_x}{2} \cos 2\theta + \tau_{zy} \text{Sen } 2\theta \quad (1.29)$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x}{2} \text{Sen } 2\theta + \tau_{zy} \cos 2\theta \quad (1.30)$$

$$\tan 2\theta_1 = \frac{2\tau_{zy}}{\sigma_x} \quad (1.31)$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{zy}^2} \quad (1.32)$$

$$\tan 2\theta_2 = -\frac{\tau_{zy}}{\sigma_x/2} \quad (1.33)$$

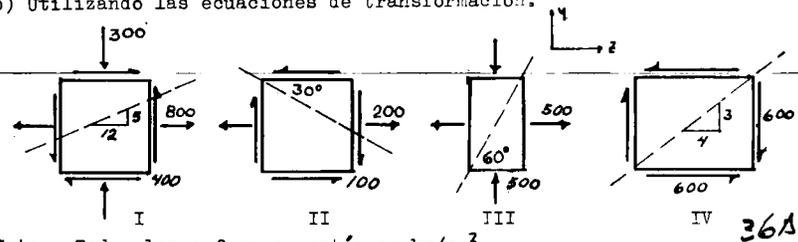
$$\sigma_{\text{máx}} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{zy}^2} \quad (1.34)$$

$$\sigma = \frac{\sigma_x}{2} \quad (1.35)$$

Por consiguiente, las expresiones deducidas para el estado general plano de esfuerzo pueden ser utilizadas para cualquier caso particular de estado plano de esfuerzo, (ver figuras 1.4a, 1.4b, 1.4c y 1.4d), eliminando de ellas el esfuerzo (o los esfuerzos) que no se presente (n) en el caso particular que se considere.

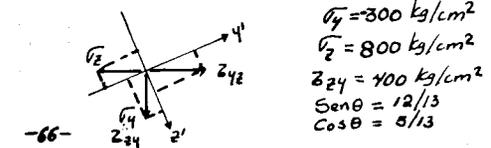
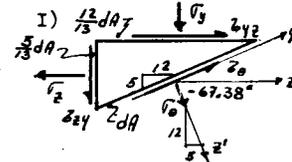
EJEMPLOS

Ejemplo 6.- Para los elementos infinitesimales que se muestran en las figuras I, II, III y IV, determinense los esfuerzos normal y cortante que actúan en los planos inclinados que se indican; a) Utilizando el método de análisis de la cuña, sin recurrir a las ecuaciones de transformación y b) Utilizando las ecuaciones de transformación.



Nota.- Todos los esfuerzos están en kg/cm^2 .

Solución.- En cada caso se aísla la cuña que nos permite trabajar más comodamente, minimizando la posibilidad de error.



$\sigma_1 = 300 \text{ kg/cm}^2$
 $\sigma_2 = 800 \text{ kg/cm}^2$
 $\tau_{zy} = 400 \text{ kg/cm}^2$
 $\text{Sen } \theta = 12/13$
 $\text{Cos } \theta = 5/13$

a) de $\Sigma F_x = 0$;

$$\bar{\sigma}_\theta dA + \bar{\sigma}_y \frac{12}{13} dA \frac{12}{13} + \bar{\sigma}_{24} \frac{5}{13} dA \frac{12}{13} + \bar{\sigma}_{42} \frac{12}{13} dA \frac{5}{13} - \bar{\sigma}_z \frac{5}{13} dA \frac{5}{13} = 0$$

$$\bar{\sigma}_\theta = \bar{\sigma}_z \left(\frac{5}{13}\right)^2 - \bar{\sigma}_y \left(\frac{12}{13}\right)^2 - 2\bar{\sigma}_{24} \left(\frac{5}{13}\right)\left(\frac{12}{13}\right)$$

$$\bar{\sigma}_\theta = 800(0.1479289) - 300(0.8520709) - 2(400)(0.3550295)$$

$$\bar{\sigma}_\theta = 118.34312 - 255.62127 - 284.0236$$

$$\text{entonces } \bar{\sigma}_\theta = -421.30175 \text{ kg/cm}^2$$

esto indica que la suposición hecha inicialmente respecto a la dirección de $\bar{\sigma}_\theta$ es incorrecta, por tanto, $\bar{\sigma}_\theta = -421.30175 \text{ kg/cm}^2$ es de compresión.

de $\Sigma F_y = 0$;

$$\bar{\sigma}_\theta dA + \bar{\sigma}_{42} \frac{12}{13} dA \frac{12}{13} - \bar{\sigma}_{24} \frac{5}{13} dA \frac{5}{13} - \bar{\sigma}_y \frac{12}{13} dA \frac{5}{13} - \bar{\sigma}_z \frac{5}{13} dA \frac{12}{13} = 0$$

$$\bar{\sigma}_\theta = (\bar{\sigma}_y + \bar{\sigma}_z) \left(\frac{60}{169}\right) - \bar{\sigma}_{24} \left(\frac{144}{169} - \frac{25}{169}\right)$$

$$\bar{\sigma}_\theta = (300 + 800)(0.3550295) - 400(0.704142)$$

$$\bar{\sigma}_\theta = 390.53245 - 281.6568$$

$$\bar{\sigma}_\theta = 108.87565 \text{ kg/cm}^2$$

esto indica que la suposición hecha inicialmente respecto a la dirección de $\bar{\sigma}_\theta$ es correcta.

b) Para aplicar las ecuaciones de transformación,

$$\bar{\sigma}_y = -300 \text{ kg/cm}^2; \bar{\sigma}_z = 800 \text{ kg/cm}^2; \bar{\sigma}_{24} = 400 \text{ kg/cm}^2$$

de acuerdo con la convención establecida, y

$$\cos \theta = \frac{5}{13} \rightarrow \text{Sen } \theta = -\frac{12}{13} \rightarrow \theta = -67.38012^\circ$$

$$\text{entonces } \cos 2\theta = -0.704142 \text{ y } \text{Sen } 2\theta = -0.710059$$

y aplicando las expresiones (1.16) y (1.19) se tiene:

$$\bar{\sigma}_{z'} = \frac{\bar{\sigma}_z + \bar{\sigma}_y}{2} + \frac{\bar{\sigma}_z - \bar{\sigma}_y}{2} \cos 2\theta + \bar{\sigma}_{24} \text{Sen } 2\theta$$

$$\bar{\sigma}_{z'} = \frac{800 + (-300)}{2} + \frac{800 - (-300)}{2} (-0.704142) + 400(-0.710059) =$$

$$\bar{\sigma}_{z'} = 250 + 550(-0.704142) + 400(-0.710059) = 250 - 387.2781 - 284.0236$$

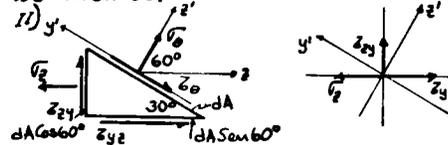
$$\text{entonces } \bar{\sigma}_{z'} = -421.3017 \text{ kg/cm}^2$$

$$\bar{\sigma}_\theta = -\frac{\bar{\sigma}_z - \bar{\sigma}_y}{2} \text{Sen } 2\theta + \bar{\sigma}_{24} \cos 2\theta$$

$$\bar{\sigma}_\theta = -\frac{800 - (-300)}{2} (-0.710059) + 400(-0.704142)$$

$$\bar{\sigma}_\theta = 390.53245 - 281.6568 = 108.87565 \text{ kg/cm}^2$$

Como puede observarse, los resultados obtenidos con el método de análisis de la cuña y las ecuaciones de transformación son los mismos.



$$\bar{\sigma}_y = 0 \text{ kg/cm}^2$$

$$\bar{\sigma}_z = 200 \text{ kg/cm}^2$$

$$\bar{\sigma}_{24} = -100 \text{ kg/cm}^2$$

$$\text{Sen } 60^\circ = \sqrt{3}/2$$

$$\text{Cos } 60^\circ = 1/2$$

a) de $\Sigma F_{x'} = 0$;

$$\bar{\sigma}_\theta dA - \bar{\sigma}_z dA \cos 60^\circ (\cos 60^\circ) + \bar{\sigma}_{42} dA \text{Sen } 60^\circ (\cos 60^\circ) + \bar{\sigma}_{24} dA \cos 60^\circ \text{Sen } 60^\circ = 0$$

$$\bar{\sigma}_\theta = \bar{\sigma}_z \cos^2 60^\circ - 2\bar{\sigma}_{42} \text{Sen } 60^\circ \cos 60^\circ = 200(1/2)^2 - 2(100)(\sqrt{3}/2)(1/2)$$

$$\bar{\sigma}_\theta = 50 - 86.60254 \text{ entonces } \bar{\sigma}_\theta = -36.60254 \text{ kg/cm}^2$$

entonces $\bar{\sigma}_\theta$ es de compresión y la suposición hecha inicialmente es incorrecta.

de $\Sigma F_{y'} = 0$

$$-\bar{\sigma}_\theta dA - \bar{\sigma}_{42} dA \text{Sen } 60^\circ \text{Sen } 60^\circ + \bar{\sigma}_{24} dA \cos 60^\circ \cos 60^\circ + \bar{\sigma}_z dA \cos 60^\circ \text{Sen } 60^\circ = 0$$

$$\bar{\sigma}_\theta = \bar{\sigma}_z \text{Sen } 60^\circ (\cos 60^\circ) + \bar{\sigma}_{24} (\cos^2 60^\circ - \text{Sen}^2 60^\circ)$$

$$\bar{\sigma}_\theta = 200(\sqrt{3}/2)(1/2) + 100(0.25 - 0.75) = 200(\sqrt{3}/4) - 100(0.50)$$

$$\bar{\sigma}_\theta = 86.60254 - 50.0 = 36.60254 \text{ kg/cm}^2$$

luego, la suposición inicial con respecto a la dirección de $\bar{\sigma}_\theta$ es correcta, entonces de acuerdo con la convención establecida $\bar{\sigma}_\theta = -36.60254 \text{ kg/cm}^2$.

b) Para la aplicación de las ecuaciones de transformación

$$\cos 2\theta = -1/2 \quad \text{Sen } 2\theta = \sqrt{3}/2 \quad \text{y } \bar{\sigma}_y = 0 \text{ kg/cm}^2$$

Siendo $\bar{\sigma}_y = 0 \text{ kg/cm}^2$ la ecuación (1.16) se transforma en la ecuación (1.24) y la ecuación (1.19) en la ecuación (1.30), entonces,

$$\bar{\sigma}_{z'} = \frac{\bar{\sigma}_z + \bar{\sigma}_y}{2} + \frac{\bar{\sigma}_z - \bar{\sigma}_y}{2} \cos 2\theta + \bar{\sigma}_{24} \text{Sen } 2\theta$$

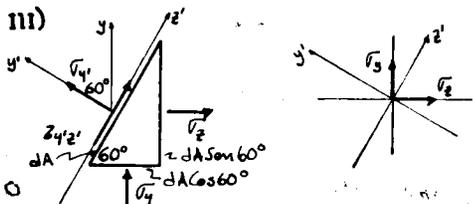
$$\sigma_{z_1'} = \frac{200}{2} + \frac{200}{2}(-1/2) - 100(\sqrt{3}/2) = 100 - 50 - 86.60254 = \sigma_{\theta}$$

$$\sigma_{z_1'} = \sigma_{\theta} = -36.60254 \text{ kg/cm}^2$$

$$\tau_{z_1'y_1'} = \tau_{\theta} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \tau_{xy} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

$$\tau_{\theta} = -(200/2)(\sqrt{3}/2) - 100(-1/2) = -86.60254 + 50 =$$

$$\tau_{\theta} = -36.60254 \text{ kg/cm}^2$$



$$\sigma_{y_2} = -500 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_{z_2} = 500 \text{ kg/cm}^2$$

$$\tau_{z_2y_2} = 0 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sin 60^\circ = \sqrt{3}/2$$

$$\cos 60^\circ = 1/2$$

Como puede verse, en este ejemplo se considera el eje y_1' normal al plano inclinado y el eje z_1' paralelo a el mismo plano, entonces.

a) de $\sum F_{z_1'} = 0$;

$$\sigma_{y_1'} dA + \sigma_{y_2} dA \cos 60^\circ \cos 60^\circ - \sigma_{z_2} dA \sin 60^\circ \sin 60^\circ = 0$$

$$\sigma_{y_1'} = \sigma_{z_2} \sin^2 60^\circ - \sigma_{y_2} \cos^2 60^\circ = 500(3/4) - 500(1/4)$$

$$\sigma_{y_1'} = 250 \text{ kg/cm}^2 \quad (\text{suposición inicial correcta}).$$

y de $\sum F_{z_1'} = 0$

$$\tau_{y_1'z_1'} dA + \sigma_{y_2} dA \cos 60^\circ \sin 60^\circ + \sigma_{z_2} dA \sin 60^\circ \cos 60^\circ = 0$$

$$\tau_{y_1'z_1'} = -(\sigma_{z_2} + \sigma_{y_2}) \sin 60^\circ \cos 60^\circ = -(500 + 500)(\sqrt{3}/2)(1/2)$$

$$\tau_{y_1'z_1'} = -433.0127 \text{ kg/cm}^2$$

donde el signo negativo indica que la suposición inicial para la dirección de $\tau_{y_1'z_1'}$ es incorrecta.

b) Para aplicar las ecuaciones de transformación y encontrar los esfuerzos en el plano inclinado se toma $\theta = (\theta + 90^\circ)$ y $\tau_{y_2z_2} = 0$, y las ecuaciones (1.16) y (1.19) se transforman en:

$$\sigma_{y_1'} = \sigma_{\theta + 90^\circ} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2(\theta + 90^\circ) \quad y$$

$$\tau_{y_1'z_1'} = \tau_{\theta + 90^\circ} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2(\theta + 90^\circ)$$

respectivamente, donde $\theta + 90^\circ = 150^\circ \Rightarrow \cos 2\theta = \cos(300^\circ) = 1/2$ y

$$\sin 2\theta = \sin 300^\circ = -\sqrt{3}/2, \text{ entonces,}$$

$$\sigma_{y_1'} = \frac{500 - 500}{2} + \frac{500 - (-500)}{2} \frac{1}{2} = 0 + 250$$

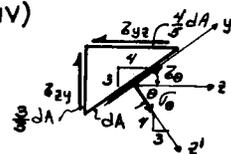
$$\text{entonces } \sigma_{y_1'} = 250 \text{ kg/cm}^2 \quad y$$

$$\tau_{y_1'z_1'} = -\frac{500 - (-500)}{2} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 433.0127 \text{ kg/cm}^2$$

$$\text{entonces } \tau_{y_1'z_1'} = \tau_{\theta + 90^\circ} = 433.0127 \text{ kg/cm}^2$$

este resultado, con signo positivo, no indica que el esfuerzo cortante actúa en la dirección del eje z_1' , sino que, de acuerdo con la convención establecida, tiende a hacer girar la partícula en dirección contraria a la de las manecillas del reloj.

IV)



$$\sigma_{y_2} = \sigma_{z_2} = 0 \text{ kg/cm}^2$$

$$\tau_{z_2y_2} = -600 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sin \theta = 4/5 = 0.8$$

$$\cos \theta = 3/5 = 0.6$$

$$\theta = -53.13^\circ$$

a) de $\sum F_{z_1'} = 0$;

$$\sigma_{\theta} dA - \tau_{z_2y_2} \frac{4}{5} dA \frac{3}{5} - \tau_{z_2y_2} \frac{3}{5} dA \frac{4}{5} = 0$$

$$\sigma_{\theta} = 2\tau_{z_2y_2} \frac{12}{25} = 2(600)(0.48) = 576 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_{\theta} = 576 \text{ kg/cm}^2$$

y de $\sum F_{y_1'} = 0$;

$$\tau_{\theta} dA + \tau_{z_2y_2} \frac{3}{5} dA \frac{3}{5} - \tau_{z_2y_2} \frac{4}{5} dA \frac{4}{5} = 0$$

$$\tau_{\theta} = \tau_{z_2y_2} \left(\frac{16}{25} - \frac{9}{25}\right) = 600(0.28) = 168 \text{ kg/cm}^2$$

$$\tau_{\theta} = 168 \text{ kg/cm}^2$$

La suposición hecha para las direcciones de σ_{θ} y τ_{θ} es correcta.

b) Siendo $\sigma_{y_2} = \sigma_{z_2} = 0$, las expresiones (1.16) y (1.19) quedan reducidas a:

$$\sigma_{z_1'} = \tau_{z_2y_2} \sin 2\theta \quad y$$

$$\tau_{z_1'y_1'} = \tau_{z_2y_2} \cos 2\theta$$

$$y \quad \sin 2\theta = -0.96 \quad y \quad \cos 2\theta = -0.28$$

entonces,

$$\sigma_{21}' = -600(-0.96) = 576 \text{ kg/cm}^2 \quad y$$

$$\tau_{21}' = -600(-0.28) = 168 \text{ kg/cm}^2.$$

Como se ha visto en el ejemplo, las expresiones deducidas para la transformación de un estado general plano de esfuerzos pueden ser empleadas para cualesquiera casos particulares de estado plano de esfuerzo.

Ejemplo 7.- Para cada uno de los estados de esfuerzo plano que se muestran en las figuras I, II, III y IV del ejemplo 6, a) determine la magnitud de los esfuerzos principales y la inclinación de los planos donde se presentan, b) determine la magnitud de los esfuerzos cortantes máximos y la inclinación de los planos donde se presentan así como la magnitud de los esfuerzos normales asociados a esos planos y c) indique los resultados de a) y b) en un elemento adecuadamente orientado.

Solución.- Para determinar la magnitud de los esfuerzos principales y la inclinación de los planos donde se presentan se emplearán las expresiones (1.24), (1.21) y (1.16), esta última para determinar la inclinación del plano donde se presenta uno de los esfuerzos principales. Para la solución al inciso b) se emplearán las expresiones (1.26), (1.25), (1.19) y (1.27). Estas expresiones son las siguientes:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad ; \quad \tan 2\theta_1 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\tau_{\max/\min} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad ; \quad \tan 2\theta_2 = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}$$

$$\tau_\theta = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \quad y \quad \sigma' = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

I) Entonces para la partícula I se tiene, de acuerdo con la convención establecida;

$$\sigma_x = -300 \text{ kg/cm}^2; \quad \sigma_y = 800 \text{ kg/cm}^2; \quad \tau_{xy} = 400 \text{ kg/cm}^2.$$

$$a) \quad \sigma_{1,2} = \frac{800 + (-300)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{800 - (-300)}{2}\right)^2 + (400)^2} = 250 \pm \sqrt{(550)^2 + (400)^2}$$

$$\sigma_{1,2} = 250 \pm (302500 + 160000)^{1/2} = 250 \pm (462500)^{1/2}$$

$$\sigma_{1,2} = 250 \pm 680.07352$$

$$\text{ luego } \sigma_1 = 250 + 680.07352 = 930.07352 \text{ kg/cm}^2 \text{ y}$$

$$\sigma_2 = 250 - 680.07352 = -430.07352 \text{ kg/cm}^2.$$

$$\tau_1 = 930.07352 \text{ kg/cm}^2 \text{ y } \tau_2 = -430.07352 \text{ kg/cm}^2.$$

$$y \quad \tan 2\theta_1 = \frac{2(400)}{800 + 300} = \frac{800}{1100} = 0.727272.$$

$$y \quad 2\theta_1 = \arctan(0.727272) = 36.03^\circ$$

$$y \quad \theta_1' = 18.015^\circ, \quad \theta_1'' = 108.015^\circ$$

$$\text{ Tomando } \theta_1' = 18.015^\circ; \quad \cos 2\theta_1' = 0.808736 \text{ y } \sin 2\theta_1' = 0.588171$$

$$y \quad \sigma_\theta = 250 + 550(0.808736) + 400(0.588171) = 250 + 444.8048 + 235.2684$$

$$\Rightarrow \sigma_\theta = 930.073 \text{ kg/cm}^2, \text{ actúa en un plano inclinado } 18.015^\circ.$$

b)

$$\tau_{\max} = 680.07352 \text{ kg/cm}^2$$

$$y \quad \tan 2\theta_2 = -\frac{1100}{800} = -1.375$$

$$y \quad 2\theta_2 = \arctan(-1.375) = -53.972^\circ$$

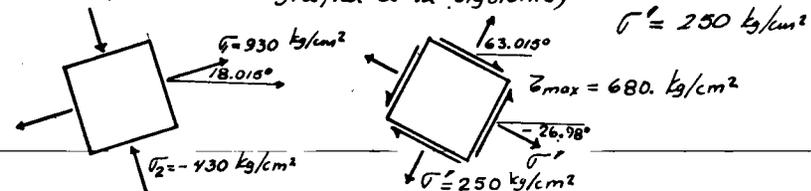
$$y \quad \theta_2' = -26.986^\circ, \quad \theta_2'' = 63.013^\circ \approx 63.015^\circ$$

$$\text{ Tomando } \theta_2'' = 63.013^\circ; \quad \cos 2\theta_2'' = -0.588172 \text{ y } \sin 2\theta_2'' = 0.808736$$

$$y \quad \sigma_\theta = -550(0.808736) + 400(-0.588172) = -444.8048 - 235.2688$$

$$\Rightarrow \sigma_\theta = -680.0735 \text{ kg/cm}^2, \text{ actúa en un plano inclinado } 63.015^\circ.$$

c) La representación gráfica es la siguiente;



Obsérvese que la dirección del esfuerzo cortante sobre el plano definido por $\theta_1' = 18.015^\circ$ tiende a hacer girar la partícula en la dirección de las manecillas del reloj, y esta representación es congruente con la convención establecida.

II) Para la partícula II se tiene;

$$\sigma_x = 0, \quad \sigma_y = 200 \text{ kg/cm}^2, \quad \tau_{xy} = -100 \text{ kg/cm}^2$$

$$a) \quad \sigma_{1,2} = \frac{200}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{200}{2}\right)^2 + (100)^2} = 100 \pm \sqrt{(100)^2 + (100)^2} = 100 \pm \sqrt{20000}$$

$$\sigma_{1,2} = 100 \pm 141.42135$$

Luego, $\sigma_1 = 100 + 141.42135 = 241.42135 \text{ kg/cm}^2$

$\sigma_2 = 100 - 141.42135 = -41.42135 \text{ kg/cm}^2$

$\sigma_1 = 241.42135 \text{ kg/cm}^2$ y $\sigma_2 = -41.42135 \text{ kg/cm}^2$

y $\tan 2\theta_1 = \frac{2(-100)}{200} = -\frac{200}{200} = -1.0$

$2\theta_1 = \text{ang tan}(-1.0) = -45^\circ$

y $\theta_1' = -22.5^\circ$ y $\theta_1'' = 67.5^\circ$

tomando $\theta_1' = -22.5^\circ$; $\cos 2\theta_1' = \sqrt{2}/2$ y $\sin 2\theta_1' = -\sqrt{2}/2$

entonces $\sigma_\theta = 100 + 100(\sqrt{2}/2) - 100(-\sqrt{2}/2) = 241.42135 \text{ kg/cm}^2$

$\Rightarrow \sigma_\theta = 241.42135 \text{ kg/cm}^2$ actúa en un plano inclinado -22.5°

b) $\tau_{\max} = 141.42135 \text{ kg/cm}^2$

y $\tan 2\theta_2 = -\frac{200}{2(-100)} = 1.0$ y $2\theta_2 = \text{ang tan}(1.0) = 45^\circ$

y $\theta_2' = 22.5^\circ$ y $\theta_2'' = 112.5^\circ$

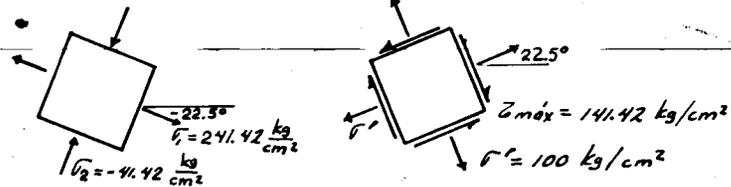
tomando $\theta_2' = 22.5^\circ$; $\cos 2\theta_2' = \sqrt{2}/2$ y $\sin 2\theta_2' = \sqrt{2}/2$

entonces $\sigma_\theta = -100\sqrt{2}/2 - 100\sqrt{2}/2 = -70.71067 - 70.71067 = -141.42134$

$\Rightarrow \sigma_\theta = -141.42135 \text{ kg/cm}^2$ actúa en un plano inclinado 22.5°

y $\tau = 100 \text{ kg/cm}^2$

c) La representación gráfica es la siguiente;



III) Para la partícula III se tiene;

$\sigma_y = -500 \text{ kg/cm}^2$, $\sigma_x = 500 \text{ kg/cm}^2$ y $\tau_{xy} = 0$

a) $\sigma_{1,2} = 0 \pm \sqrt{\frac{(500 - (-500))^2}{2}} = 0 \pm 500 \text{ kg/cm}^2$

$\sigma_1 = 500 \text{ kg/cm}^2$ y $\sigma_2 = -500 \text{ kg/cm}^2$

este resultado pudo ser también obtenido de observar la figura, en los planos en que actúan los esfuerzos normales no existen esfuerzos cortantes, por tanto, esos esfuerzos normales son los principales.

$\tan 2\theta_1 = \frac{2(0)}{1000} = 0 \Rightarrow 2\theta_1 = \text{ang tan}(0) = 0^\circ$ y $\theta_1' = 0^\circ$ y $\theta_1'' = 90^\circ$

entonces $\sigma_1 = 500 \text{ kg/cm}^2$ actúa sobre el plano definido por $\theta_1' = 0^\circ$

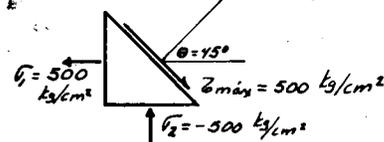
b) $\tau_{\max} = 500 \text{ kg/cm}^2$ y $\tan 2\theta_2 = -\frac{1000}{2(0)} = -\infty$

y $2\theta_2 = \text{ang tan}(-\infty) = -90^\circ$; $\theta_2' = -45^\circ$ y $\theta_2'' = 45^\circ$

tomando $\theta_2'' = 45^\circ$ $\cos 2\theta_2'' = 0$; $\sin 2\theta_2'' = 1.0$

$\Rightarrow \sigma_\theta = -500 \text{ kg/cm}^2$ actúa en el plano definido por $\theta = 45^\circ$

c) La representación gráfica es la siguiente; $\tau' = 0 \text{ kg/cm}^2$



IV) Para la partícula IV se tiene; $\sigma_y = \sigma_x = 0$ y $\tau_{xy} = -600 \text{ kg/cm}^2$

a) $\sigma_{1,2} = +600 \text{ kg/cm}^2$, $\sigma_2 = -600 \text{ kg/cm}^2$ y $\tan 2\theta_1 = \frac{2(-600)}{0} = -\infty$

y $\theta_1' = -45^\circ$ y $\theta_1'' = 45^\circ$ tomando $\theta_1'' = 45^\circ$, $\sin 2\theta_1'' = 1.0$

$\Rightarrow \sigma_\theta = -600 \text{ kg/cm}^2$ actúa en el plano definido por $\theta = 45^\circ$

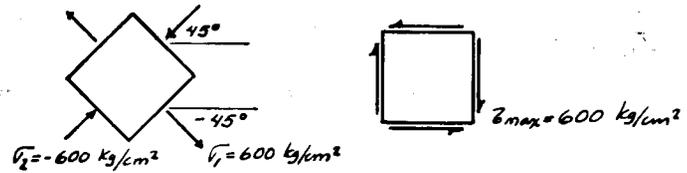
b) $\tau_{\max} = 600 \text{ kg/cm}^2$ y $\tan 2\theta_2 = -\frac{0}{2(-600)} = 0 \Rightarrow 2\theta_2 = 0^\circ$

$\theta_2' = 0^\circ$ y $\theta_2'' = 90^\circ$; tomando $\theta_2' = 0^\circ$ $\cos 2\theta_2' = 1.0$

$\Rightarrow \sigma_\theta = -600 \text{ kg/cm}^2$ actúa en un plano definido por $\theta = 0^\circ$

$\tau' = 0$

c) La representación gráfica es la mostrada a continuación;



Ejemplo 8.- En un punto de un sólido elástico sometido a un estado plano de esfuerzos, los esfuerzos principales son $\sigma_1 = 1000 \text{ kg/cm}^2$ y $\sigma_2 = -500 \text{ kg/cm}^2$. Calcular las componentes de esfuerzo σ_x y σ_y en un plano inclinado $+30^\circ$ con respecto a la cara en que actúa el esfuerzo principal σ_1 y representarlas en un elemento adecuadamente orientado y determinar el valor del esfuerzo cortante máximo en ese punto.

Solución.-

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\tau_\theta = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

para este caso $\sigma_x = \sigma_1$, $\sigma_y = \sigma_2$, $\tau_{xy} = 0$ y $2\theta = 60^\circ$

$$\text{y } \sin 2\theta = \sqrt{3}/2; \cos 2\theta = 1/2$$

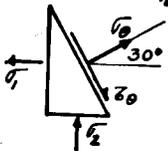
$$\text{entonces } \sigma_\theta = \frac{1000 - 500}{2} + \frac{1000 - (-500)}{2} \cdot \frac{1}{2} = 250 + 375 = 625 \text{ kg/cm}^2$$

$$\tau_\theta = -\frac{1000 - (-500)}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -375\sqrt{3} = -649.519 \text{ kg/cm}^2$$

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{1000 - (-500)}{2} = 750 \text{ kg/cm}^2$$

Resumiendo:

$$\sigma_\theta = 625 \text{ kg/cm}^2, \tau_\theta = -649.519 \text{ kg/cm}^2, \tau_{\max} = 750 \text{ kg/cm}^2$$



Ejemplo 9.- En un punto de un cuerpo sometido a un estado de esfuerzo plano, el esfuerzo cortante en la cara z es de 300 kg/cm^2 y los esfuerzos principales son $\sigma_1 = 800 \text{ kg/cm}^2$ y $\sigma_2 = -200 \text{ kg/cm}^2$. Calcular la magnitud de los esfuerzos σ_x y σ_y , así como la inclinación del plano en que se presentan los esfuerzos principales y mostrar los resultados en un elemento adecuadamente orientado.

Solución.-

$$\text{Se sabe que } \sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_x + \sigma_y + \frac{\tau}{\tau} = \sigma_x + \sigma_y = \text{cte}$$

$$\text{entonces } \sigma_x + \sigma_y = 800 - 200 = 600 \text{ kg/cm}^2 \quad (a)$$

$$\text{además } \tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{800 - (-200)}{2} = \frac{1000}{2} = 500 \text{ kg/cm}^2$$

$$\text{y } \tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \Rightarrow 500 = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + (300)^2}$$

$$\Rightarrow (500)^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + (300)^2$$

$$\text{y } \sqrt{(500)^2 - (300)^2} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}$$

$$\Rightarrow 800 = \sigma_x - \sigma_y \quad (b)$$

y resolviendo simultáneamente las ecuaciones (a) y (b) se tiene:

$$\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = 600 \quad \Rightarrow \sigma_x = \frac{1400}{2} = 700 \text{ kg/cm}^2$$

$$\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} = 800 \quad \text{y } \sigma_y = 600 - 700 = -100 \text{ kg/cm}^2$$

entonces, $\sigma_x = 700 \text{ kg/cm}^2$, $\sigma_y = -100 \text{ kg/cm}^2$ y $\tau_{xy} = 300 \text{ kg/cm}^2$.

$$\text{ahora } 2\theta = \text{ang tan } \frac{2(300)}{700 - (-100)} = \text{ang tan } (0.75) = 36.87^\circ$$

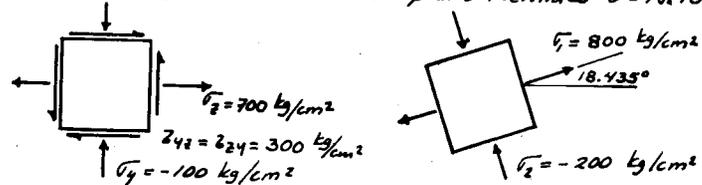
$$\theta' = 18.435^\circ \quad \theta'' = 108.435^\circ$$

$$\text{tomando } \theta' = 18.435^\circ \quad \cos 2\theta' = 0.8 \quad \sin 2\theta' = 0.6$$

$$\text{luego, } \sigma_\theta = \frac{700 - 100}{2} + \frac{700 + 100}{2} \cdot 0.8 + 300(0.6) =$$

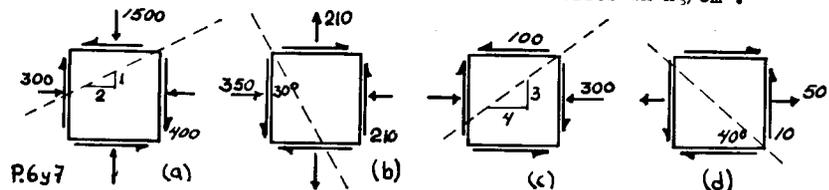
$$\sigma_\theta = 300 + 320 + 180 = 800 \text{ kg/cm}^2 = \sigma_1$$

entonces $\sigma_1 = 800 \text{ kg/cm}^2$ actúa en un plano inclinado $\theta = 18.435^\circ$



PROBLEMAS

6.- Para los elementos infinitesimales que se muestran en las figuras (a), (b), (c) y (d), determinense los esfuerzos normal y cortante que actúan en los planos inclinados que se indican; a) Utilizando el método de análisis de la cuña, sin recurrir a las ecuaciones de transformación y b) Utilizando las ecuaciones de transformación. Esfuerzos en kg/cm^2 .



7.- Para cada uno de los elementos del problema 6, a) determine la magnitud de los esfuerzos principales y la inclinación de los planos donde se presentan, b) determine la magnitud de los esfuerzos cortantes máximos y la inclinación de los planos donde se presentan así como la magnitud de

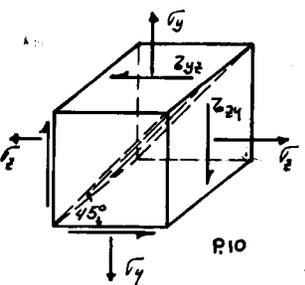
los esfuerzos normales asociados a esos planos y c) indique los resultados de a) y b) en un elemento adecuadamente orientado.

8.- En un punto de un cuerpo sometido a un estado plano de esfuerzos se tiene que $\sigma_x = 600 \text{ kg/cm}^2$, $\sigma_y = -200 \text{ kg/cm}^2$ y $\tau_{xy} = +200 \text{ kg/cm}^2$. Si $\sigma_\theta = +400 \text{ kg/cm}^2$, encuentre la magnitud de τ_θ y la inclinación, del plano donde se presentan, θ , indique los resultados en un elemento adecuadamente orientado.

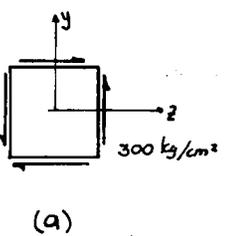
9.- En un punto de un cuerpo sometido a un estado plano de esfuerzos se tiene que $\sigma_x = -500 \text{ kg/cm}^2$, $\sigma_y = +100 \text{ kg/cm}^2$ y $\tau_{xy} = +400 \text{ kg/cm}^2$. Si $\sigma_\theta = -200 \text{ kg/cm}^2$, encuentre la magnitud de τ_θ y la inclinación, θ , del plano donde se presentan, e indique los resultados en un elemento adecuadamente orientado.

10.- Dos partes de un cierto material se han unido por medio de un pegamento formando un cubo. La junta se romperá si el esfuerzo normal de tensión sobre ella excede de 30 kg/cm^2 . ¿cuál será el valor máximo que σ_x podrá alcanzar si $\sigma_y = 16 \text{ kg/cm}^2$ y $\tau_{xy} = 10 \text{ kg/cm}^2$?

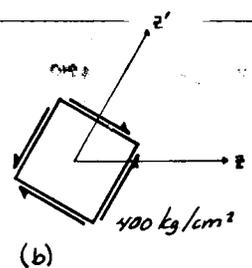
11.- El estado total de esfuerzos en un punto es el resultado de dos estados distintos de esfuerzo cortante puro, uno de 300 kg/cm^2 indicado en la figura (a) y el otro de 400 kg/cm^2 indicado en la figura (b). Determinar los esfuerzos resultantes girando el elemento en (b) hasta que sus caras coincidan con las del (a) y así poder superponer sumando directamente. Determinar después los esfuerzos principales y la inclinación de los planos donde estos se presentan para el estado combinado de esfuerzos e indique los resultados en un elemento adecuadamente orientado.



P.10



(a)



(b)

P. 11

CIRCULO DE MOHR PARA TRANSFORMACION DE ESFUERZOS

Las fórmulas establecidas con anterioridad pueden ser utilizadas para cualquier caso de estado de esfuerzo plano, pero existe una interpretación gráfica de estas fórmulas, desarrollada en el año de 1882 por el ingeniero alemán Otto Mohr, que evita el tener que recordarlas. En esta interpretación se utiliza un círculo, por lo que se le conoce como circunferencia o círculo de Mohr para transformación de esfuerzos. Realizando el dibujo a escala se pueden obtener los resultados gráficamente, aunque en general sólo suele utilizarse como esquema, y los resultados se obtienen analíticamente como se verá más adelante. Al estudiar el círculo de Mohr se persiguen dos objetivos; Primero, lograr una mejor visualización del problema general de transformación de esfuerzos por interpretación gráfica y segundo, obtener una más rápida resolución de los problemas de transformación de esfuerzos con ayuda de una construcción gráfica.

Un estudio cuidadoso de las ecuaciones (1.16) y (1.19) revelará que representan una circunferencia en forma paramétrica. Tal representación se puede ver con más claridad escribiéndolas en la forma que sigue:

$$\sigma_{x'} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \quad (1.36)$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \quad (1.37)$$

Elevando al cuadrado las ecuaciones (1.36) y (1.37) se obtiene:

$$\left[\sigma_{x'} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right]^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 \cos^2 2\theta + (\sigma_x - \sigma_y) \tau_{xy} \sin 2\theta \cos 2\theta + \tau_{xy}^2 \sin^2 2\theta \quad (1.36a)$$

$$\tau_{x'y'}^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 \sin^2 2\theta - (\sigma_x - \sigma_y) \tau_{xy} \sin 2\theta \cos 2\theta + \tau_{xy}^2 \cos^2 2\theta \quad (1.37a)$$

Sumando miembro a miembro las ecuaciones (1.36a) y (1.37a) se obtiene;

$$\left[\sigma_{x'} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right]^2 + \tau_{x'y'}^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2 \quad (1.38)$$

Hay que recordar que en todo problema dado, $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ son las 3 constantes conocidas, y $\sigma_{x'}, \tau_{x'y'}$ son las variables. Por tanto;

$$\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = a \quad \text{y} \quad \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2 = r^2 \quad \text{son constantes.}$$

Con estas sustituciones la ecuación (1.38) se transforma en

$$(\sigma_{x'} - a)^2 + \tau_{x'y'}^2 = r^2 \quad (1.38a)$$

Esta ecuación es la expresión familiar de la geometría analítica para una circunferencia de radio $r = \left[\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2 \right]^{1/2}$ cuyo centro dista $(\sigma_x + \sigma_y)/2$ del origen de coordenadas. Por tanto, si se traza la circunferencia que corresponde a esta ecuación, las coordenadas de un punto de tal circunferencia corresponden a $\sigma_{x'}$ y $\tau_{x'y'}$ para una orientación particular de un plano inclinado. La ordenada de un punto de la circunferencia es el esfuerzo cortante $\tau_{x'y'}$, y su abscisa el esfuerzo normal $\sigma_{x'}$. La circunferencia así construida se le conoce como círculo de Mohr para esfuerzos, o simplemente círculo de esfuerzos.

Un círculo de Mohr basado en la información de los esfuerzos que se dan en la figura 1.13a se ha trazado en la figura 1.13b con σ y z como ejes coordenados. Su centro se localiza en $a = (\sigma_x + \sigma_y)/2$, y su radio es igual a $r = [(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2})^2 + \tau_{xy}^2]^{1/2}$

El punto A del círculo corresponde a los esfuerzos sobre la cara derecha del elemento dado, cuando $\theta = 0^\circ$. Para este punto, $\sigma_x = \sigma_x$ y $\tau_{xy} = \tau_{xy}$. Como $AJ/CJ = 2\tau_{xy}/(\sigma_x - \sigma_y)$, de acuerdo con la ecuación (1.20), el ángulo ACJ es igual a $2\theta_1$.

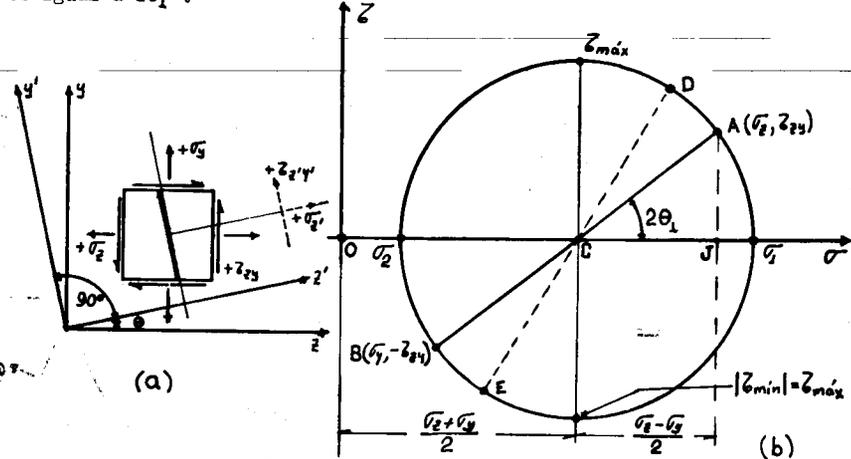


Figura 1.13.- Círculo de Mohr para esfuerzos.

Quando $\theta = 90^\circ$ el eje z' está dirigido hacia arriba y el eje y' hacia la izquierda. De esta orientación de los ejes, las coordenadas de los puntos B y A satisfacen la ecuación (1.38). El mismo razonamiento puede aplicarse a cualquier otro par de puntos como D o E. Las coordenadas de tales puntos dan los esfuerzos asociados a una orientación particular de los ejes z' y y' , los cuales definen un plano que pasa a través de un elemento punto o partícula. Todas las formas posibles para describir los esfuerzos en un elemento para diferentes valores de θ están representadas por puntos en el círculo de Mohr de esfuerzos. Por consiguiente, pueden deducirse las importantes conclusiones siguientes relativas al estado de esfuerzos en un punto:

- + a) El mayor esfuerzo normal es σ_1 ; el menor es σ_2 . No existen esfuerzos cortantes junto con uno u otro de estos esfuerzos principales.
- + b) El mayor esfuerzo cortante, $z_{m\acute{o}x}$, numéricamente igual al radio del círculo, es $(\sigma_1 - \sigma_2)/2$. Un esfuerzo normal igual a $(\sigma_1 + \sigma_2)/2$ actúa en cada uno de los planos de esfuerzo cortante máximo.
- + c) Si $\sigma_x = \sigma_y$, el círculo de Mohr degenera en un punto y ningún esfuerzo cortante se desarrolla en absoluto en el plano zy .
- + d) Si $\tau_{xy} = 0$, el centro del círculo de Mohr coincide con el origen de los ejes σ y z ; existe así el estado de esfuerzo cortante puro.
- + e) La suma de los esfuerzos normales en dos planos mutuamente perpendiculares es invariante, esto es;

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_x + \sigma_y = \sigma_\theta + \sigma_{\theta + \frac{\pi}{2}} = \sigma_1 + \sigma_2 = \text{constante.}$$

CONSTRUCCION DEL CIRCULO DE MOHR PARA ESFUERZOS

El círculo de Mohr de esfuerzos se utiliza mucho en la práctica para la transformación de esfuerzos. Para que sea de verdadero valor, el procedimiento debe ser rápido y sencillo. Como ayuda para su aplicación se recomienda el procedimiento que se describe a continuación. Todos los pasos de la construcción del círculo se deberán justificar con base en las relaciones desarrolladas anteriormente. Un círculo de Mohr típico se muestra en la figura 1.14.

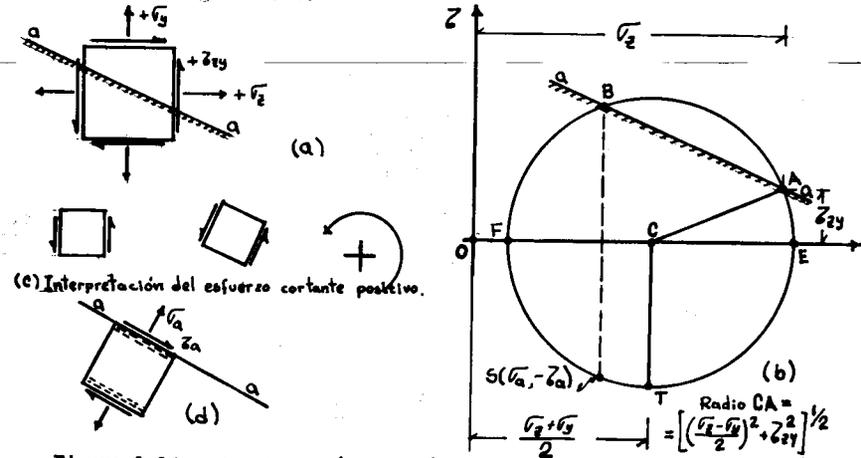


Figura 1.14.- Construcción del círculo de Mohr para esfuerzos.

- #1) Haga un croquis del elemento para el cual se conocen los esfuerzos normales y cortantes e indíquese en este elemento el sentido adecuado de los esfuerzos. En un problema real las caras del elemento deben tener una relación precisa con los ejes del miembro que se analiza.
- #2) Establezca un sistema de ejes coordenados rectangulares, cuyo eje horizontal sea el de los esfuerzos normales y cuyo eje vertical sea el de los esfuerzos cortantes. Los sentidos positivos de los ejes se toman como es usual, hacia arriba y hacia la derecha.
- #3) Localice el centro del círculo, que está sobre el eje horizontal a una distancia de $(\sigma_x + \sigma_y)/2$ del origen. Los esfuerzos de tensión son positivos y los de compresión negativos.
- #4) Del croquis del elemento dibujado en el #1) obtenga los valores de σ_x y τ_{xy} y sitúe el punto de control, A, en el círculo. Las coordenadas de este punto se miden desde el origen. El signo de σ_x es positivo si es de tensión y negativo si es de compresión; el de τ_{xy} es positivo si actúa hacia arriba sobre la cara derecha del elemento, y negativo si actúa hacia abajo.
- #5) Una el centro del círculo hallado en el #3) con el punto determinado en el #4) y determine esta distancia, la cual será el radio del círculo.

#6) Trace el círculo utilizando el radio encontrado en el #5). Si solamente son de interés las magnitudes y los signos de los esfuerzos, este paso completa la solución del problema. Las coordenadas de los puntos en el círculo proporcionan la información requerida.

#7) Para determinar la dirección y el sentido de los esfuerzos que actúan en un plano inclinado, trace por el punto A una recta paralela al plano inclinado y localícese el punto B en el círculo. Las coordenadas de el punto S situado verticalmente abajo de B en el lado opuesto del círculo, proporcionan los esfuerzos que actúan en el plano inclinado. En la figura 1.14b tales esfuerzos se indican como σ_a y τ_a . Un valor positivo de σ indica un esfuerzo de tensión, y uno negativo un esfuerzo de compresión. El sentido del esfuerzo cortante puede determinarse utilizando la interpretación de la figura 1.14c. La tendencia de los esfuerzos cortantes en dos caras opuestas de un elemento a causar una rotación en sentido contrario al de las manecillas del reloj en el mismo, está asociada a un esfuerzo cortante positivo. Con esta base, el resultado ($+\sigma_a, -\tau_a$) tiene el significado que se indica en la figura 1.14d.

#8) Procediendo en orden inverso, se puede hallar el plano en que actúan los esfuerzos correspondientes a un punto del círculo. Por tanto, trazando una recta desde A hacia E o F, esto es, de manera que el punto correspondiente a B coincida con una de tales intersecciones, se determina la inclinación del plano en que actúan los esfuerzos principales respectivos. En este caso especial la distancia BS degenera en un punto. El esfuerzo principal dado por la intersección particular (E o F) actúa normalmente a la recta que une este punto de intersección con el punto A. Como antes, los esfuerzos positivos son de tensión y los negativos de compresión.

Comenzando con el punto más alto o con el más bajo del círculo, se pueden determinar los planos en que actúan los esfuerzos cortantes máximos y los esfuerzos normales asociados a ellos. Por ejemplo, sumoniendo que el punto S se mueve hasta T, el plano en que actúan los esfuerzos en T está dado por la nueva posición de la recta BA con el punto B como punto más alto del círculo.

Para resolver problemas de transformación de esfuerzos mediante el círculo de Mohr, los procedimientos anteriores se pueden aplicar gráficamente. Sin embargo, se recomienda que se utilicen cálculos trigonométricos de los valores críticos junto con la construcción gráfica. Luego los resultados se pueden transportar a un croquis simple sin trazar a escala las distancias o los ángulos, y los resultados serán suficientemente exactos. De esta manera, el empleo del círculo de Mohr equivale a aplicar las ecuaciones básicas de transformación de esfuerzos.

En la figura 1.15 se muestra el círculo de Mohr obtenido para una cierta partícula. El punto A sobre el círculo de Mohr de coordenadas (σ_x, τ_{xy}) representa los esfuerzos que se presentan sobre la cara derecha de la partícula. Al unir el punto A con el punto M, que representa a el esfuerzo principal σ_2 , con una línea recta se obtiene la inclinación del plano donde σ_2 actúa, tal plano está definido por el ángulo θ_2' (ANM) y al unir también con una línea recta al punto A con el punto h, que representa el esfuerzo principal σ_1 , se obtiene el plano donde σ_1 actúa, este plano está definido por el ángulo θ_1' mostrado en la figura y es igual a $\theta_2' + 90^\circ$ como puede observarse. Y finalmente al unir con una línea recta el punto A con el punto T se obtiene el plano donde actúa el esfuerzo cortante máximo, plano definido por el ángulo θ_1' que es igual a $\theta_2' + 45^\circ$ como puede verse.

Existe un teorema de la geometría elemental, ~~que~~ ^{que} demuestra que: Todo ángulo inscrito en una circunferencia tiene por medida la mitad del arco comprendido entre sus lados. Este teorema es aplicado para la construcción del círculo de Mohr y es de gran ayuda para su interpretación. De acuerdo con lo anterior el ángulo ANM ($2\theta_2'$) es el doble del ángulo ANM (θ_2') los valores de estos ángulos pueden ser fácilmente determinados conociendo las magnitudes de los segmentos AJ, CJ y/o NJ. Por tanto, el ángulo θ_2' puede variar de 0° a 90° y de 0° a -90° . Por ejemplo, en la figura puede observarse que el plano donde actúa el esfuerzo principal σ_1 forma un ángulo de $+\theta_1'$ grados con el plano donde actúan los esfuerzos σ_x y τ_{xy} . La aplicación de estos conceptos será más clara con los ejemplos que se presentan más adelante.

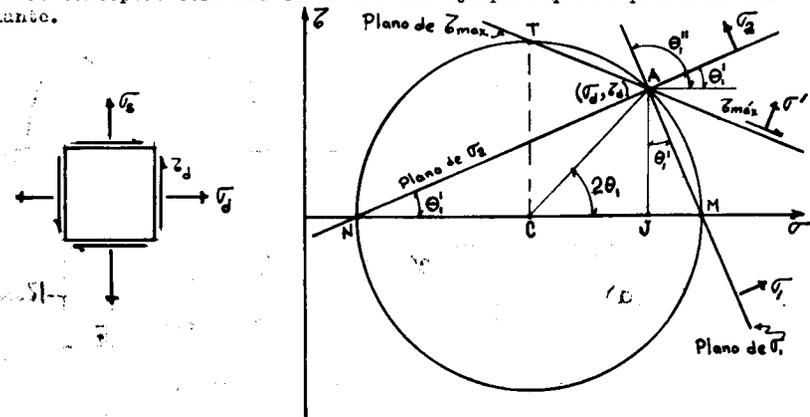
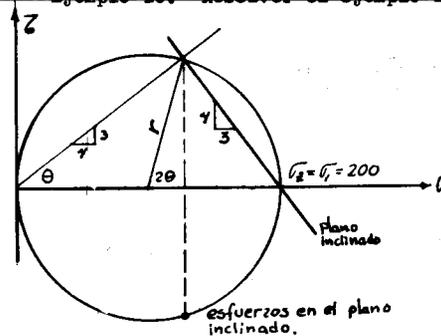


Figura 1.15.- Determinación de los planos donde se presentan los esfuerzos principales y el esfuerzo cortante máximo, interpretación geométrica.

EJEMPLOS

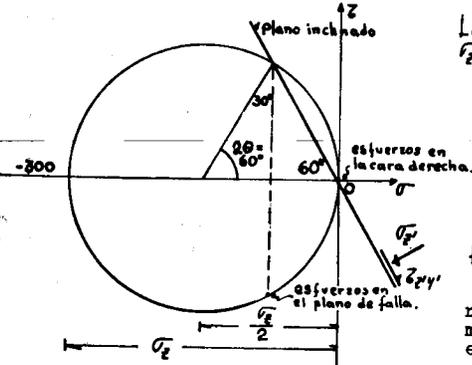
Ejemplo 10.- Resolver el ejemplo 1 utilizando el círculo de Mohr.



$$\begin{aligned} \sigma_x &= 200 \text{ kg/cm}^2 \\ \text{el centro se localiza en } \frac{\sigma_x}{2} \\ \text{esto es en } \sigma &= 100 \text{ kg/cm}^2 \\ r &= 100 \text{ kg/cm}^2 \\ \theta &= \text{angtan}\left(\frac{3}{4}\right) = 36.87^\circ \\ 2\theta &= 73.74^\circ \\ \sigma_1 &= 100 + 100 \cos 73.74^\circ = 128 \text{ kg/cm}^2 \\ \tau &= -100 \text{ Sen } 73.74^\circ = -96 \text{ kg/cm}^2 \end{aligned}$$

Ejemplo 11.- Resolver el ejemplo 2 utilizando el círculo de Mohr.

Solución.- Sobre la cara superior actúa un esfuerzo $\sigma_y = -300 \text{ kg/cm}^2$, entonces, el centro del círculo se localiza en $\sigma_x/2 = -150 \text{ kg/cm}^2$ y el radio también es igual a 150 kg/cm^2 . A continuación se muestra el círculo.



Los esfuerzos en el plano inclinado son:
 $\sigma_{21'} = -150 + 150 \cos 60^\circ = -150 + 150(0.5)$
 $\sigma_{21'} = -75 \text{ kg/cm}^2$

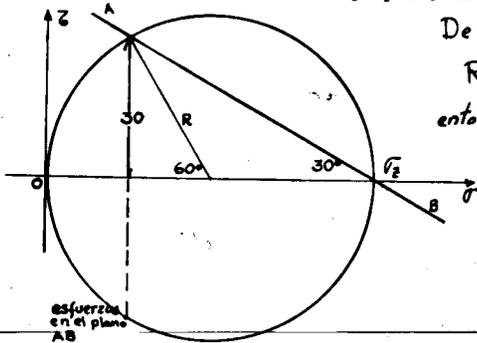
$\tau_{21'} = -150 \sin 30^\circ = -150 \sin 60^\circ$
 $\tau_{21'} = -150 \sqrt{3}/2$

$\tau_{21'} = -129.9 \text{ kg/cm}^2$

Los esfuerzos $\sigma_{21'}$ y $\tau_{21'}$ están mostrados sobre el plano de falla.

Los esfuerzos pueden determinarse también midiendo directamente con un escalímetro sobre el círculo.

Ejemplo 12.- Resolver el ejemplo 3 utilizando el círculo de Mohr.



De la figura

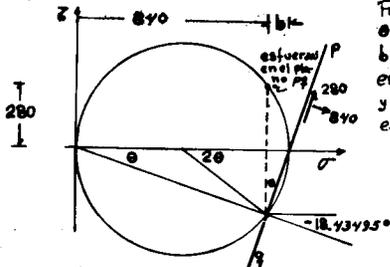
$$R = \frac{30}{\sin 60^\circ} = \frac{30(2)}{\sqrt{3}} = 34.641 \text{ kg/cm}^2$$

entonces $\sigma_2 = 2R = 69.282 \text{ kg/cm}^2$

y $P = A\sigma_2 = 50(69.282) =$

$P = 3464.1 \text{ kg}$.

Ejemplo 13.- Resolver el ejemplo 4 utilizando el círculo de Mohr.



Para localizar el centro del círculo se tiene:

$$\theta = \arctan(-280/840) = -18.43495^\circ$$

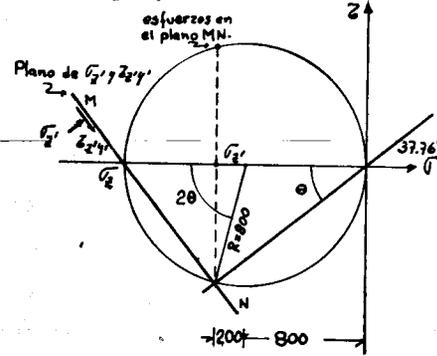
$$b = 280 \tan 18.43495^\circ = 93.33324$$

entonces $\sigma_c = 840 + b = 933.333 \text{ kg/cm}^2$

y el centro se localiza en $\sigma_c/2 = 466.66$, este valor es igual al radio.

Ejemplo 14.- Resolver el ejemplo 5 utilizando el círculo de Mohr.

Solución.- Se sabe que; $\sigma_2' + \sigma_1' = \text{cte}$, entonces $-1000 - 600 = -1600 \text{ kg/cm}^2$ es igual a σ_c , $\tau_c = 0$ y el centro del círculo se localiza en $\sigma_c = -800 \text{ kg/cm}^2$.



$$2\theta = \arccos(200/800) = 75.52249^\circ$$

entonces, $\theta = 37.761245^\circ$

y $\tau_{21'} = 800 \sin 75.52249^\circ = 774.5968$

$$\tau_{21'} = 774.5968 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_2' = -1600 \text{ kg/cm}^2$$

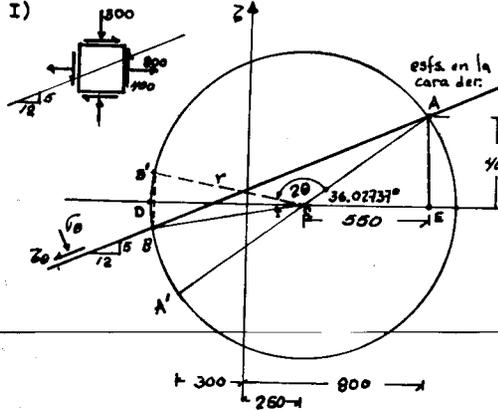
$$\theta = 37.761245^\circ$$

$$\tau_{\max} = 800 \text{ kg/cm}^2$$

$$\tau_{21'} = -800 - 800 \cos 75.52249^\circ$$

$$\tau_{21'} = -1000 \text{ kg/cm}^2 \text{ o.k.}$$

Ejemplo 15.- Resolver el ejemplo 6 utilizando el círculo de Mohr.



Por el punto cuyas coordenadas definen los esfuerzos en la cara derecha del elemento se traza una recta con tangente $\theta/2$, que define el plano de interés, el centro del círculo se localiza en $\sigma_c = (800 - 300)/2 = 250$, el radio es igual a

$$\left[\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right)^2 + \tau^2 \right]^{1/2} =$$

$$= \left[\left(\frac{800 - 300}{2} \right)^2 + 400^2 \right]^{1/2}$$

$$r = 680.07352 \text{ kg/cm}^2 = r_{\max}$$

La recta $(\theta/2)$ trazada por el punto A intersecciona a la circunferencia en el punto B y los esfuerzos que actúan en el plano AB se representan por las coordenadas del punto B.

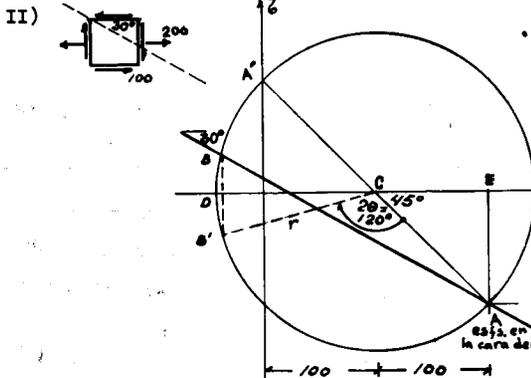
La inclinación del plano está definida por $\theta = \arctan(4/3) = 56.3099^\circ$, por tanto, hay que medir un ángulo igual a $2\theta = 112.6198^\circ$ a partir del punto A en dirección contraria a las manecillas del reloj, este ángulo es el $\angle ACB'$. Interesa ahora conocer el valor del ángulo $\angle DCB'$, si $\angle ACE = \arctan(400/850) = 36.02737^\circ$ y $\angle ACB' = 112.6198^\circ$, $\angle ACE = \angle DCA'$. Entonces, si $\angle ACA' = 180^\circ = \angle ACB' + \angle DCA' + \angle DCB'$, luego,

$$\angle DCB' = 180 - 112.6198 - 36.02737 = 31.35283^\circ$$

$$\sigma_B = 250 - 680.07352 \cos(31.35283^\circ) = -421.30 \text{ kg/cm}^2 \text{ y}$$

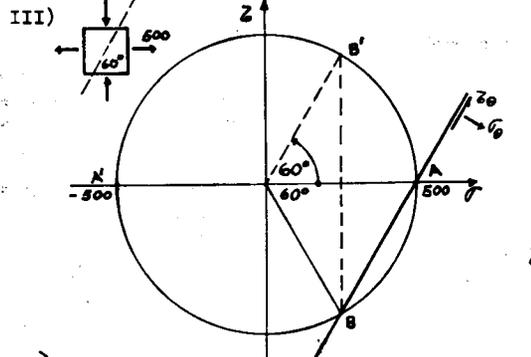
$$\tau_B = +680.07352 \sin(31.35283^\circ) = 358.875 \text{ kg/cm}^2$$

Ejemplo 15.- (continúa)



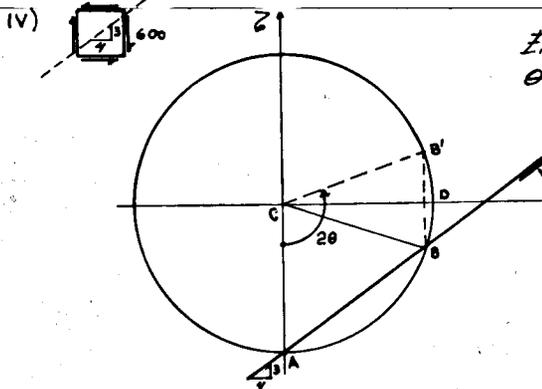
El plano está definido por $\theta = +60^\circ$, entonces se mide un ángulo $2\theta = 120^\circ$ en sentido de las manecillas del reloj a partir de el punto A.

$r = \sqrt{100^2 + 100^2} = 141.42135$
 $a = 200/2 = 100$
 El ángulo DCB' es igual a 15°
 $\sigma_1 = -141.42135 \cos 15^\circ + 100 = -96.602 \text{ kg/cm}^2$
 $\sigma_2 = -141.42135 \sin 15^\circ$
 $z_0 = -36.602 \text{ kg/cm}^2$



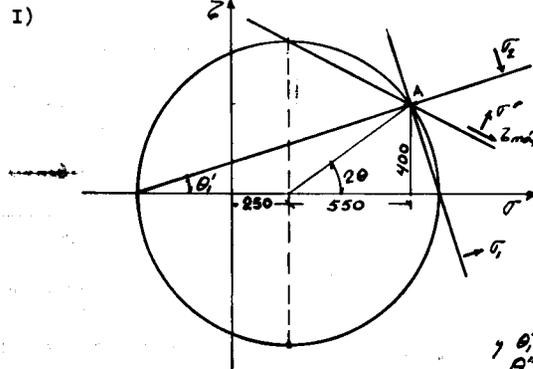
El plano está definido por $\theta = -30^\circ$. El centro se localiza en $a = (500 - 500)/2 = 0$ y $r = 500$

Entonces,
 $\sigma_1 = 500 \cos 60^\circ = 250 \text{ kg/cm}^2$
 $z_0 = 500 \sin 60^\circ = 433.01 \text{ kg/cm}^2$

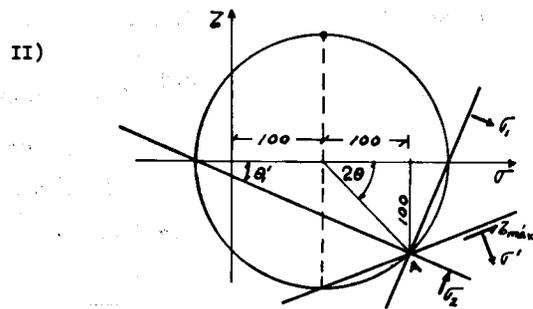


El plano está definido por $\theta = \arctan(-4/3) = -53.13^\circ$
 $2\theta = -106.26^\circ$
 y $\angle DCB' = 16.26^\circ$
 Entonces
 $\sigma_1 = 600 \cos(16.26^\circ)$
 $\sigma_1 = 576 \text{ kg/cm}^2$
 y $z_0 = 600 \sin 16.26^\circ$
 $z_0 = 168 \text{ kg/cm}^2$

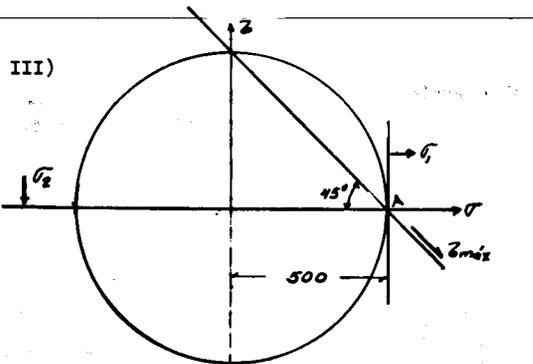
Ejemplo 16.- Resolver el ejemplo 7 utilizando el círculo de Mohr.



Para todos los casos, el centro del círculo se localiza en $a = (\sigma_1 + \sigma_2)/2 = \sigma'$ y el radio es igual a $r = \left[\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right)^2 + z^2 \right]^{1/2} = z_{\max}$
 y $\sigma_1 = a + r$; $\sigma_2 = a - r$
 Aquí $a = 250$
 $r = 680.07352$
 $\sigma_1 = 930.07352 \text{ kg/cm}^2$
 $\sigma_2 = -430.07352 \text{ kg/cm}^2$
 $z_{\max} = 680.07352 \text{ kg/cm}^2$
 $\sigma' = 250 \text{ kg/cm}^2$
 y $\theta_1 = \arctan(400/230.0735) = 18.01368^\circ$
 $\theta_1' = \theta_1 + 90^\circ = 108.01368^\circ$
 $\theta_2' = \theta_1' + 45^\circ = 63.01368^\circ$
 $\theta_2'' = \theta_2' + 90^\circ = 153.01368^\circ$

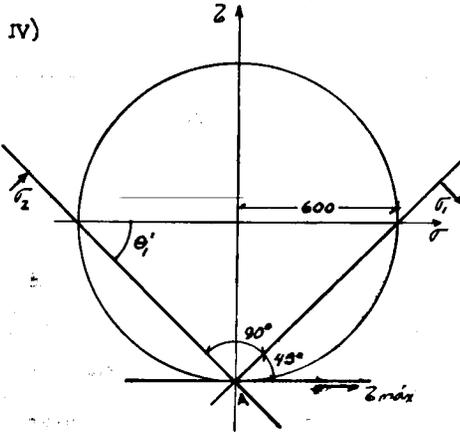


$a = 100$; $r = 141.42135$
 $\sigma_1 = 241.42135 \text{ kg/cm}^2$
 $\sigma_2 = -41.42135 \text{ kg/cm}^2$
 $z_{\max} = 141.42135 \text{ kg/cm}^2$
 $\sigma' = 100 \text{ kg/cm}^2$
 $\theta_1 = \arctan(-100/241.42135) = -22.5^\circ$
 $\theta_1' = \theta_1 + 90^\circ = 67.5^\circ$
 $\theta_2' = \theta_1' + 45^\circ = 22.5^\circ$
 $\theta_2'' = \theta_2' + 90^\circ = 112.5^\circ$



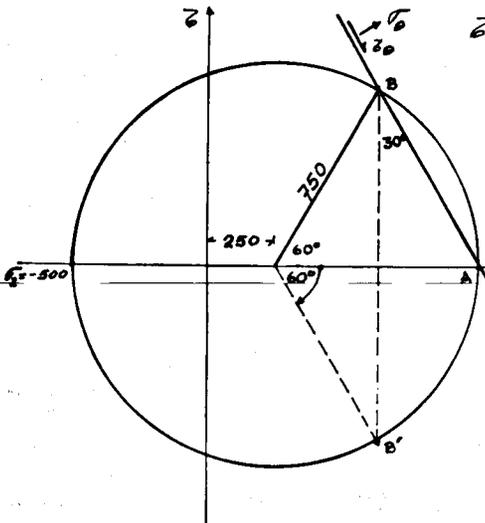
$a = 0$; $r = 500$
 $\sigma_1 = 500 \text{ kg/cm}^2$
 $\sigma_2 = -500 \text{ kg/cm}^2$
 $z_{\max} = 500 \text{ kg/cm}^2$
 $\sigma' = 0 \text{ kg/cm}^2$
 $\theta_1 = 0^\circ$
 $\theta_1' = 90^\circ$
 $\theta_2' = 45^\circ$
 $\theta_2'' = 135^\circ$

Ejemplo 16.- (continúa)



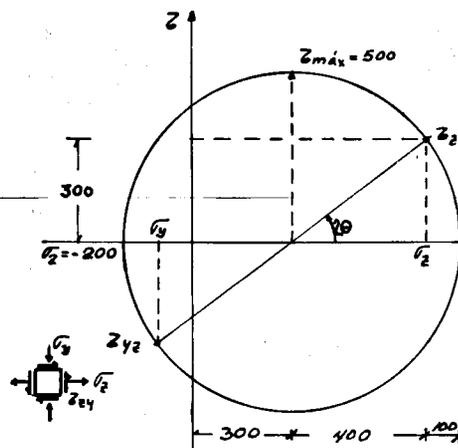
$a = 0 ; r = 600$
 $\sigma_1 = 600 \text{ kg/cm}^2$
 $\sigma_2 = -600 \text{ kg/cm}^2$
 $z_{\max} = 600 \text{ kg/cm}^2$
 $\tau = 0 \text{ kg/cm}^2$
 $\theta' = \text{ang tan}(-1) = -45^\circ$
 $\theta_1'' = \theta_1' + 90^\circ = 45^\circ$
 $\theta_2' = \theta_1' + 45^\circ = 0^\circ$
 $\theta_2'' = \theta_2' + 90^\circ = 90^\circ$

Ejemplo 17.- Resolver el ejemplo 8 utilizando el círculo de Mohr.



$z_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{1000 + 500}{2} = 750 \text{ kg/cm}^2$
 $a = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} = \frac{1000 - 500}{2} = 250$
 Sobre la cara a $+30^\circ$ actúan los esfuerzos siguientes.
 $\sigma_0 = 250 + 750 \cos 60^\circ = 250 + 750(\frac{1}{2}) = 625 \text{ kg/cm}^2$
 $\tau_0 = -750 \sin 60^\circ = -750 \frac{\sqrt{3}}{2}$
 $z_0 = -649.519 \text{ kg/cm}^2$

Ejemplo 18.- Resolver el ejemplo 9 utilizando el círculo de Mohr.



El centro se localiza en $\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} = \frac{800 - 200}{2} = 300$ y el radio, en consecuencia el esfuerzo cortante máximo, es igual a:

$\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{800 + 200}{2} = 500$

$z_{\max} = 500 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$

De la figura:
 $500 \sin \theta = 300$
 $\Rightarrow \sin \theta = \frac{3}{5}$

$2\theta = \text{ang Sen}(\frac{3}{5}) = 36.8699^\circ$
 $\theta = 18.43495^\circ$

$\sigma_2 = 300 + 500 \cos 36.8699^\circ = 300 + 500(0.8) = 700$

$\sigma_2 = 700 \text{ kg/cm}^2$

$\sigma_1 = 300 - 500 \cos(36.8699^\circ) = 300 - 400$
 $\sigma_1 = -100 \text{ kg/cm}^2$

PROBLEMAS

Problemas 12 a 22.- Resolver los problemas 1 a 11 utilizando el círculo de Mohr.

PROBLEMAS DE ANALISIS DE ESFUERZOS

Hasta ahora se han establecido las leyes de transformación de esfuerzos, a continuación se verá el análisis de esfuerzos en miembros desde un punto de vista más comprensivo. A este respecto surgen dos tipos de problemas, uno es el análisis de esfuerzos en miembros sometidos a cargas dadas, y el otro es el diseño de elementos de acuerdo con los requisitos de resistencia correspondientes a condiciones de carga dadas.

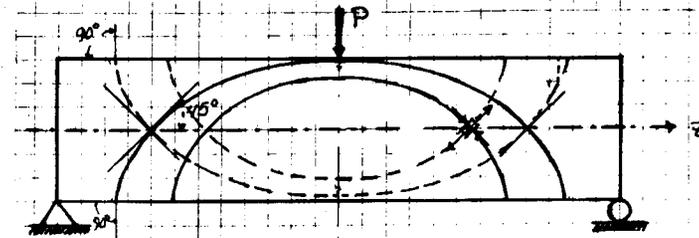
Con base en las ecuaciones de transformación de esfuerzos o en la representación del estado de esfuerzo por un círculo de Mohr, es evidente que el estado de esfuerzo en un punto se puede representar en un número infinito de modos que dependen de los planos de esfuerzos que se seleccionen. Para la resolución cuantitativa de problemas se hallan primero los esfuerzos en planos conocidos, empleando las ecuaciones deducidas anteriormente para el cálculo de esfuerzos básicos.

Al considerar los casos estáticamente determinados, en los que se limitará la atención por ahora, se hallan primero las reacciones, luego se aísla un segmento del cuerpo haciendo pasar una sección perpendicular a su eje en el punto que se va a investigar, y se determina el sistema de fuerzas necesario para mantener el equilibrio del segmento. Las magnitudes de los esfuerzos se determinan a continuación por las fórmulas convencionales. Luego, sobre un elemento (o partícula o punto) aislado del miembro, se indican los esfuerzos calculados. El sentido de estos esfuerzos se indican en tal elemento mediante flechas que concuerdan en sentido con el de las fuerzas internas en la sección. Dos lados de dicho elemento son paralelos y dos son perpendiculares al eje del miembro que se investiga. La relación definida de los lados de este elemento con el miembro real debe ser comprendida claramente por el analista. Una vez que se traza el círculo de un elemento y los esfuerzos de la misma clase se suman algebraicamente, se pueden hallar los esfuerzos en planos con cualquier orientación a través del mismo punto. Para este objeto se utilizan fórmulas analíticas o el círculo de Mohr para esfuerzos, que se han estudiado con anterioridad. Los esfuerzos principales o el esfuerzo cortante máximo suelen ser las cantidades que se buscan.

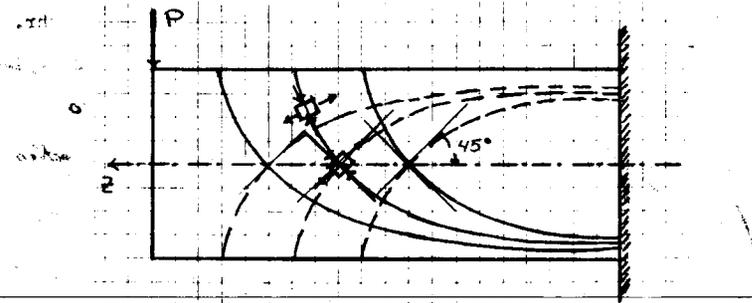
Dentro del alcance de las fórmulas que se han desarrollado antes se pueden estudiar elementos o partículas en estados planos de esfuerzo como los mostrados en las figuras (1.14), (1.15), (1.16), y esfuerzo cortante puro. Para aplicar esas fórmulas a la transformación de esfuerzos en cada uno de los casos mencionados se tomarán con valor cero las variables que no intervengan en cada caso (para 1.14 se tomarán tal como fuerzas deducidas para el 1.15, $\tau = 0$, para el 1.16, $\sigma_x = \tau_{xy} = 0$, y para cortante puro $\sigma_x = \sigma_y = 0$). Es posible investigar la magnitud, dirección y sentido de los esfuerzos principales en gran número de puntos. Luego, para estudiar el comportamiento general de los esfuerzos, es posible unir o conectar puntos seleccionados para obtener una interpretación visual de los diversos aspectos de los datos calculados.

Se puede trazar un conjunto de líneas para un cuerpo deformado en el que se conocen la magnitud y dirección de los esfuerzos principales en un gran número de puntos. Una curva cuya tangente cambia de dirección siguiendo la de los esfuerzos principales recibe el nombre de trayectoria de esfuerzo principal, las trayectorias de esfuerzo principal no unen los puntos de igual esfuerzo, sino más bien indican las direcciones de los esfuerzos principales. Como estos esfuerzos en un punto cualquiera son mutuamente

perpendiculares, las trayectorias para los dos esfuerzos principales forman una familia de curvas ortogonales. Dos ejemplos de trayectorias de esfuerzos en vigas rectangulares son mostradas en la figura 1.16. Las trayectorias de esfuerzo principal correspondientes a los esfuerzos de tensión se indican en la figura por medio de líneas discontinuas, y las de esfuerzos de compresión mediante líneas continuas. La distribución y forma general de las trayectorias (no indicada) se altera notablemente en los apoyos y en el punto de aplicación de la carga P.



a) Trayectorias de esfuerzos principales en una viga rectangular libremente apoyada con una carga concentrada en el centro del claro.



b) Trayectorias de esfuerzo principal en una viga rectangular en voladizo con una carga concentrada aplicada en el extremo libre.

Figura 1.16.- Trayectorias de esfuerzos principales.

En la figura 1.17 se muestra esquemáticamente la variación del esfuerzo principal máximo, o sea, el de tensión, en una sección transversal de una viga rectangular. También se indica la variación de los esfuerzos normales f_x (σ_x) producidos por la flexión y de los esfuerzos cortantes v_{xy} (τ_{xy}) producidos por la fuerza cortante. Se aprecia en la figura que, en algunas regiones el esfuerzo principal es mayor que el esfuerzo normal producido por la flexión, aunque el máximo valor del esfuerzo principal coincide con el esfuerzo máximo por flexión en el lecho inferior de la viga.

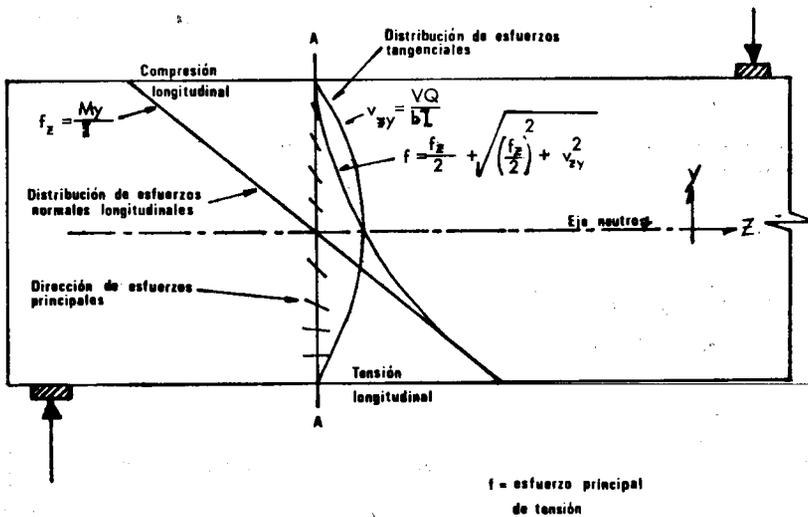
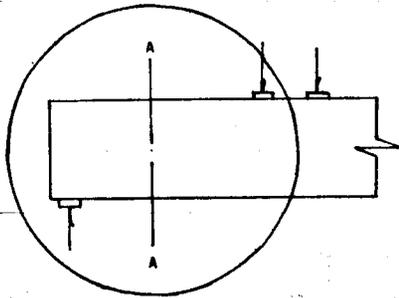
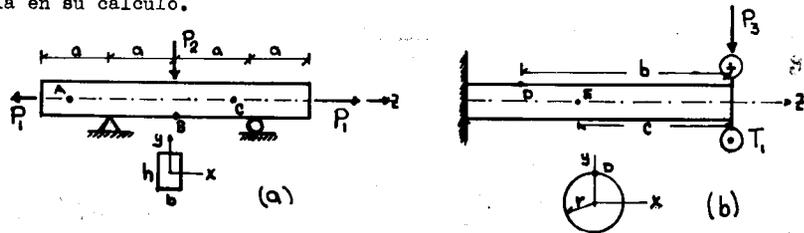


FIG. (1.17) DISTRIBUCION DE ESFUERZOS EN UNA SECCION DE UNA VIGA.

EJEMPLOS

Ejemplo 19.- Elementos infinitesimales A, B, C, D y E se indican en las figuras para dos miembros diferentes. Trace cada uno de estos elementos por separado e indique en los elementos aislados el estado de esfuerzo que actúa en cada uno. Por medio de flechas muestre claramente la dirección y el sentido de cada esfuerzo y enuncie la fórmula que se utilizaría en su cálculo.

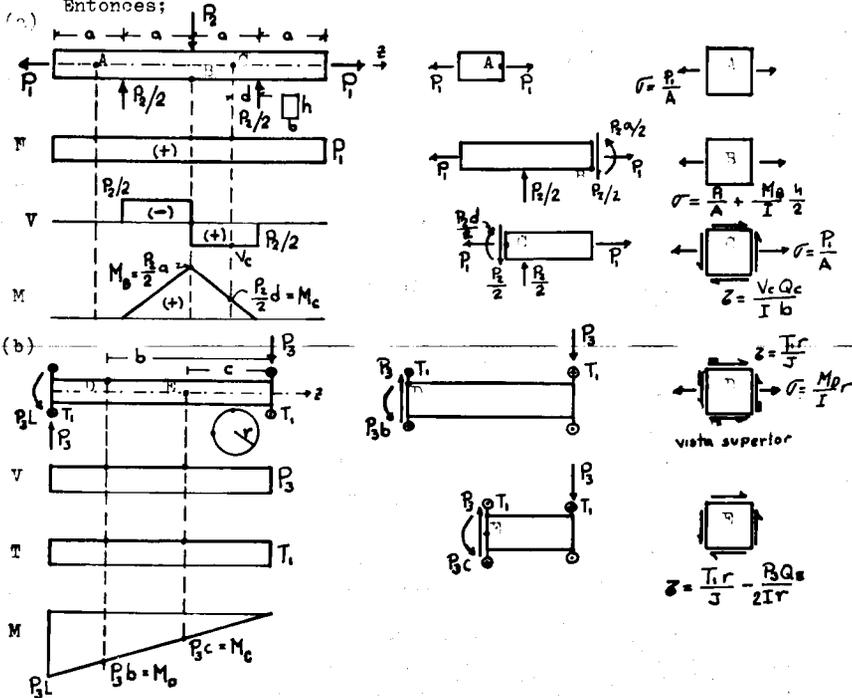


Solución.- Para los miembros (a) y (b) deben primero determinarse las reacciones en los apoyos y los diagramas de elementos mecánicos (fuerza axial, fuerza cortante, momento flexionante y momento torsionante) y luego aislarse segmentos de ellos que contengan los puntos de interés, estableciendo el equilibrio de estos segmentos se obtienen los elementos mecánicos que actúan en la sección que contiene a el punto (o puntos) de interés que permiten determinar el estado de esfuerzo en ese punto (o puntos). Los esfuerzos se calculan con las expresiones convencionales de la mecánica de materiales, esto es, los esfuerzos normales debidos a carga axial con $\sigma = P/A$, los esfuerzos normales debidos a momento flexionante con $\sigma = (M/I)y$, los esfuerzos cortantes debidos a cortante directo con $\tau = (VQ/Ib)$ y los esfuerzos cortantes debidos a momento torsionante, para el caso particular de secciones circulares, con $\tau = (T/J)r$. (Para secciones no circulares sujetas a torsión, consultar los apuntes de Mecánica de Materiales I, Miembros sujetos a Torsión, para el cálculo de esfuerzos cortantes debidos a esta acción).

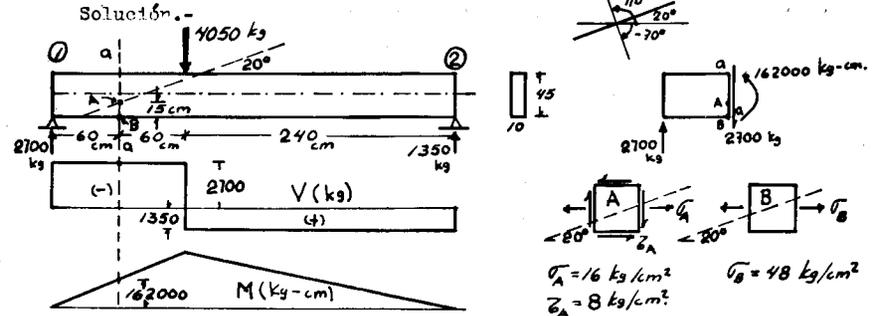
Para el miembro (a) se tiene que: $A = bh$, $I = bh^3/12$, para determinar el esfuerzo cortante en el punto C, $Q_C = (bh/2)(h/4) = bh^2/8$, para los puntos A y C, $y = 0$, y para el punto B, $y = h/2$, además $V_B = (P_2/2)a$, $M_C = (P_2/2)d$.

Para el miembro (b) se tiene que: $I = \pi r^4/4$, $J = \pi r^4/2$, $Q_D = (\pi r^2/2)x(4r/3\pi) = r^3(2/3)$, $M_D = P_3b$ y $V_D = V_B = P_3$.

Entonces;



Ejemplo 20.- Una viga de madera, con sección rectangular de 10x45 cm soporta una carga de 4050 kg como se muestra en la figura. En la sección a-a las fibras de la madera forman un ángulo de 20° con el eje longitudinal de la viga. a) En los puntos A y B encontrar la magnitud de los esfuerzos normal y cortante a lo largo de la veta de la madera, b) determinar la magnitud de los esfuerzos principales y la inclinación de los planos en que actúan, en los mismos puntos A y B, y c) determinar la magnitud de el esfuerzo cortante máximo y la inclinación del plano en que se presenta así como la magnitud del esfuerzo normal asociado a ese plano, también en los puntos A y B.



1º.- Cálculo de reacciones $R_1 = 4050 \frac{240}{360} = 2700$ kg y $R_2 = 1350$ kg.

2º.- Conocidas las reacciones se trazan los diagramas de elementos mecánicos, y se determinan sus valores en la sección de interés. En la sección a-a se tiene que; $V = 2700$ kg y $M = 162000$ kg-cm.

3º.- Cálculo de esfuerzos en los puntos A y B de la sección a-a.

$\sigma = \frac{M}{I} y$; $I = \frac{10 \times 45^3}{12} = 75937.5$ cm⁴, $y_A = 7.5$ cm, $y_B = 22.5$ cm
 $\tau = \frac{VQ}{Ib}$; $b = 10$, $Q_A = (10 \times 15)(15) = 2250$ cm³, $Q_B = 0$
 Entonces, $\sigma_A = \frac{162000}{75937.5} \cdot 7.5 = 16 \frac{kg}{cm^2}$; $\sigma_B = \frac{162000}{75937.5} \cdot 22.5 = 48 \frac{kg}{cm^2}$
 $\tau_A = \frac{2700(2250)}{75937.5(10)} = 8 \frac{kg}{cm^2}$; $\tau_B = 0 \frac{kg}{cm^2}$

El estado de esfuerzo en los puntos A y B es mostrado en la figura de arriba.

Para determinar lo pedido se pueden emplear fórmulas o el círculo de Mohr, aquí se emplearán los dos criterios.

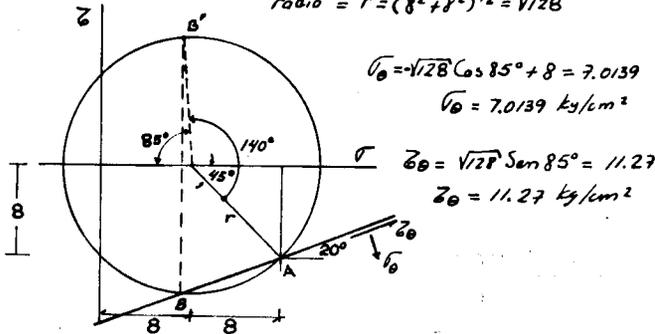
* a) El plano inclinado puede quedar definido ya sea por $\theta = -70^\circ$ o por $\theta = +110^\circ$, aquí se considerará que queda definido por $\theta = -70^\circ$.

Para la partícula A. i) Empleando fórmulas.

$$\begin{aligned} \bar{v}_\theta &= \frac{\bar{v}_A}{2} + \frac{\bar{v}_A}{2} \cos 2\theta + \bar{z}_A \sin 2\theta & \text{donde } \bar{v}_A &= +16 \text{ kg/cm}^2; \bar{z}_A = -8 \text{ kg/cm}^2 \\ \bar{z}_\theta &= -\frac{\bar{v}_A}{2} \sin 2\theta + \bar{z}_A \cos 2\theta & \theta &= -70^\circ \quad 2\theta = -140^\circ \\ & & \cos 2\theta &= -0.766044, \sin 2\theta = -0.642788 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \bar{v}_\theta &= 8 - 8(0.766044) + 8(0.642788) = 7.0139 \text{ kg/cm}^2 \\ \bar{z}_\theta &= +8(0.642788) + 8(0.766044) = 11.27 \text{ kg/cm}^2 \end{aligned}$$

ii) Empleando el círculo de Mohr. centro = $a = 16/2 = 8$, radio = $r = (8^2 + 8^2)^{1/2} = \sqrt{128}$

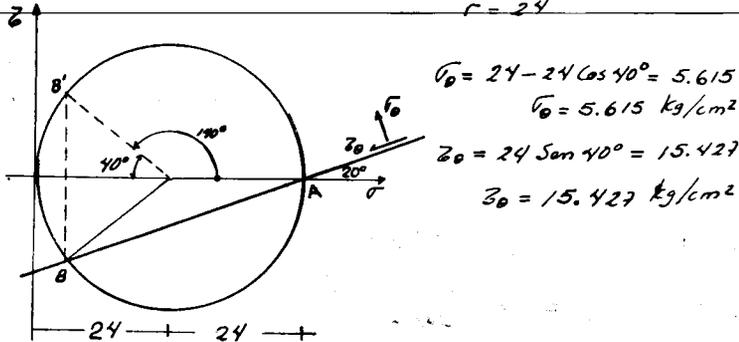


$$\begin{aligned} \bar{v}_\theta &= \sqrt{128} \cos 85^\circ + 8 = 7.0139 \\ \bar{v}_\theta &= 7.0139 \text{ kg/cm}^2 \\ \bar{z}_\theta &= \sqrt{128} \sin 85^\circ = 11.27 \\ \bar{z}_\theta &= 11.27 \text{ kg/cm}^2 \end{aligned}$$

Para la partícula B. i) Empleando fórmulas

$$\begin{aligned} \bar{v}_\theta &= \bar{v}_B \cos^2 \theta; \bar{z}_\theta = -\bar{v}_B \sin \theta \cos \theta; \gamma \cos \theta = 0.342021 \\ \bar{v}_\theta &= 48(0.342021)^2 = 5.615 \text{ kg/cm}^2 \\ \bar{z}_\theta &= +48(0.342021)(0.939692) = 15.427 \text{ kg/cm}^2 \end{aligned}$$

ii) Empleando el círculo de Mohr. centro = $a = 48/2 = 24$, $r = 24$



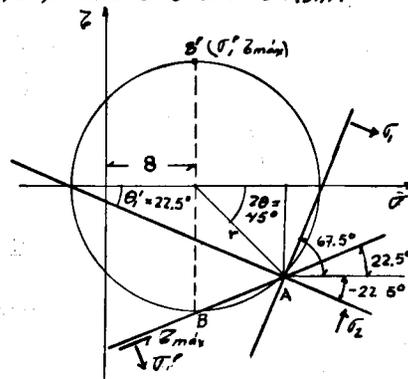
$$\begin{aligned} \bar{v}_\theta &= 24 - 24 \cos 40^\circ = 5.615 \\ \bar{v}_\theta &= 5.615 \text{ kg/cm}^2 \\ \bar{z}_\theta &= 24 \sin 40^\circ = 15.427 \\ \bar{z}_\theta &= 15.427 \text{ kg/cm}^2 \end{aligned}$$

* b) Para la partícula A. i) Empleando fórmulas

$$\begin{aligned} \bar{v}_{\theta 2} &= \frac{\bar{v}_A}{2} \pm \sqrt{(\bar{v}_A/2)^2 + \bar{z}_A^2} & \theta_1' &= \frac{1}{2} \text{ang tan} \left(\frac{2\bar{z}_A}{\bar{v}_A} \right); \bar{v}_A = +16 \text{ kg/cm}^2 \\ & & \theta_2' &= \frac{1}{2} \text{ang tan} \left(-\frac{\bar{v}_A}{2\bar{z}_A} \right); \bar{z}_A = -8 \text{ kg/cm}^2 \\ \bar{z}_{\text{máx}} &= \sqrt{(\bar{v}_A/2)^2 + \bar{z}_A^2} & \sigma' &= \bar{v}_A/2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \bar{v}_1 &= 8 + 11.313 = 19.313 \text{ kg/cm}^2; \bar{v}_2 = 8 - 11.313 = -3.313 \text{ kg/cm}^2 \\ \bar{z}_{\text{máx}} &= 11.313 \text{ kg/cm}^2; \theta_1' = -22.5^\circ, \theta_2' = 67.5^\circ; \theta_2'' = 22.5^\circ \\ \sigma' &= 8 \text{ kg/cm}^2 \end{aligned}$$

ii) Empleando el círculo de Mohr.

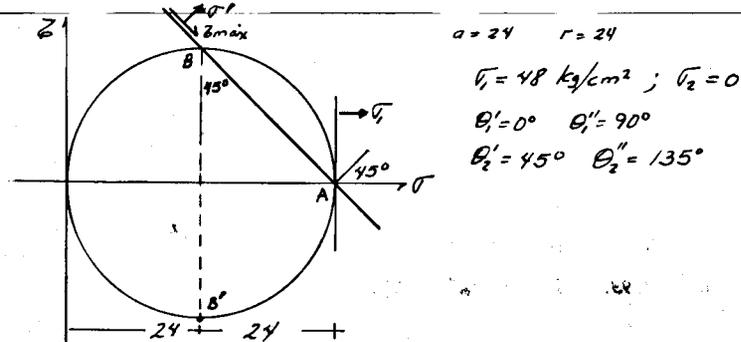


$$\begin{aligned} a &= 8; r = \sqrt{128} \\ \bar{v}_1 &= 8 + r = 19.313 \text{ kg/cm}^2 \\ \bar{v}_2 &= 8 - r = -3.313 \text{ kg/cm}^2 \\ \theta_1' &= \text{ang tan} (8/19.313) = -22.5^\circ \\ \theta_2' &= \theta_1' + 90^\circ = 67.5^\circ \\ \theta_2'' &= \theta_2' + 45^\circ = 22.5^\circ \\ \theta_2''' &= \theta_2'' + 90^\circ = 112.5^\circ \end{aligned}$$

Para la partícula B. i) Empleando fórmulas

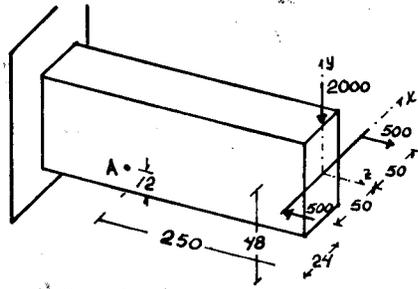
$$\begin{aligned} \bar{v}_1 &= \bar{v}_B = 48 \text{ kg/cm}^2; \bar{v}_2 = 0 \text{ kg/cm}^2; \bar{z}_{\text{máx}} = \bar{v}_B/2 = 24 \text{ kg/cm}^2 \\ \sigma' &= \bar{v}_B/2 = 24 \text{ kg/cm}^2; \theta_1' = 0^\circ, \theta_2' = 90^\circ; \theta_2'' = 45^\circ \end{aligned}$$

ii) Empleando el círculo de Mohr.



$$\begin{aligned} a &= 24; r = 24 \\ \bar{v}_1 &= 48 \text{ kg/cm}^2; \bar{v}_2 = 0 \\ \theta_1' &= 0^\circ; \theta_2' = 90^\circ \\ \theta_2'' &= 45^\circ; \theta_2''' = 135^\circ \end{aligned}$$

Ejemplo 21.- Determinar la magnitud y dirección de los esfuerzos principales y del esfuerzo cortante máximo en el punto A de la viga mostrada en la figura.



Fuerzas en kg.
Cotas en cm.

Solución.- La fuerza vertical de 2000kg origina en la sección donde se encuentra el punto A una fuerza cortante, en la dirección del eje y, de 2000 kg y un momento flexionante de 500 000 kg-cm, alrededor del eje x. Las fuerzas horizontales de 500 kg originan un momento flexionante alrededor del eje y, igual a 50 000 kg-cm.

Tanto el momento M_x como el momento M_y provocan en el punto A esfuerzos normales de compresión en la dirección del eje z y la fuerza cortante origina esfuerzos cortantes, entonces, estos esfuerzos son;

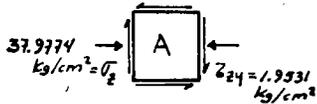
$$\text{debidos a } M_x \quad \sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y = \frac{(500\,000)(12)(12)}{(24)(48)^3} =$$

$$\sigma_z = 27.1267 \text{ kg/cm}^2 \text{ de compresión}$$

y debidos a M_y

$$\sigma_z = \frac{M_y}{I_y} x = \frac{(50\,000)(12)(12)}{(48)(24)^3} =$$

$$\sigma_z = 10.8507 \text{ kg/cm}^2 \text{ de compresión}$$



El esfuerzo normal total es $\sigma_z = 27.1267 + 10.8507 = 37.9774 \text{ kg/cm}^2$ de compresión, y el esfuerzo cortante es igual a

$$\tau_{zy} = \frac{V_y Q_x}{I_x b} = \frac{(2\,000)(24 \times 12)(18)(12)}{(24)(48)^3(24)} = 1.9531 \text{ kg/cm}^2$$

Estos esfuerzos actúan como se indica en el elemento mostrado. Al igual que en el ejemplo anterior, éste será resuelto empleando fórmulas y el círculo de Mohr.

1) Empleando fórmulas $\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{zy}^2}$; $\tau_{m\acute{a}x} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{zy}^2}$; $\sigma' = \frac{\sigma_z}{2}$

$$\theta'_1 = \frac{1}{2} \arcsin \left(\frac{2\tau_{zy}}{\sigma_z} \right); \theta'_2 = \frac{1}{2} \arcsin \left(-\frac{\sigma_z}{2\tau_{zy}} \right)$$

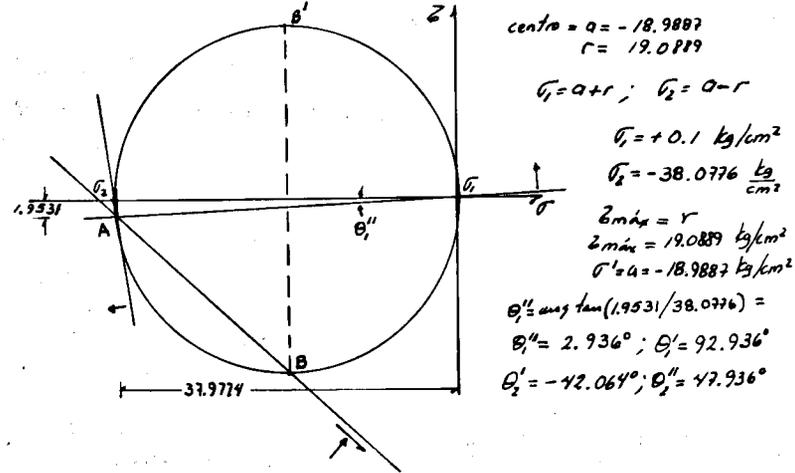
$$\Rightarrow \sigma_z/2 = -18.9887 \text{ kg/cm}^2; \sqrt{(-18.9887)^2 + 1.9531^2} = 19.0889 \text{ kg/cm}^2$$

Luego, $\sigma_1 = 0.1 \text{ kg/cm}^2$ $\sigma_2 = -38.0776 \text{ kg/cm}^2$

$$\tau_{m\acute{a}x} = 19.0889 \text{ kg/cm}^2 \quad \sigma' = -18.9887 \text{ kg/cm}^2$$

$$\theta'_1 = 2.936^\circ; \theta'_2 = 92.936^\circ; \theta''_1 = -42.064^\circ; \theta''_2 = 47.936^\circ$$

ii) Empleando el círculo de Mohr.



centro = $\sigma = -18.9887$
 $\tau = 19.0889$

$$\sigma_1 = \sigma + r; \sigma_2 = \sigma - r$$

$$\sigma_1 = +0.1 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_2 = -38.0776 \text{ kg/cm}^2$$

$$\tau_{m\acute{a}x} = r$$

$$\tau_{m\acute{a}x} = 19.0889 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma' = \sigma = -18.9887 \text{ kg/cm}^2$$

$$\theta'_1 = \arcsin \left(\frac{1.9531}{38.0776} \right) =$$

$$\theta'_1 = 2.936^\circ; \theta'_2 = 92.936^\circ$$

$$\theta''_1 = -42.064^\circ; \theta''_2 = 47.936^\circ$$

Ejemplo 22.- El esfuerzo cortante máximo en el punto A de la viga de sección rectangular que se muestra es de 18 kg/cm^2 . Determinar la magnitud de la carga P. Despreciar el peso de la viga.

Solución.- El esfuerzo cortante máximo se calcula con la expresión

$$\tau_{m\acute{a}x} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{zy}^2}$$

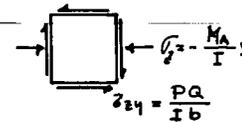
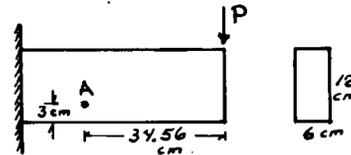
$$M_y = 34.56 P \text{ kg-cm}; y = 3 \text{ cm}$$

$$I = \frac{6(3)^3}{12} = 864 \text{ cm}^4$$

$$Q = (3 \times 6)(4.5) = 81 \text{ cm}^3$$

$$\Rightarrow \sigma_z = \frac{34.56 P}{864} (3) = 0.12 P \text{ kg/cm}^2$$

$$\tau_{zy} = \frac{P(81)}{864(6)} = 0.015625 P \text{ kg/cm}^2$$



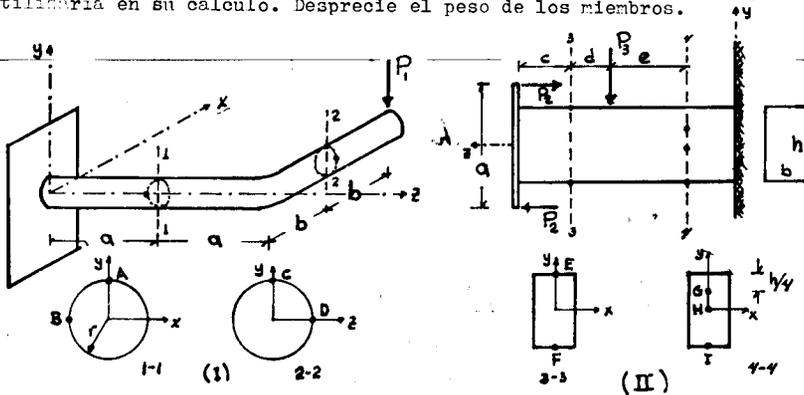
$$\Rightarrow 18 = \sqrt{(0.12)^2 + (0.015625)^2} P; \quad 18 = 0.1210128 P$$

$$\Rightarrow P = \frac{18}{0.1210128} = 148.744 \text{ kg}$$

$$P = 148.744 \text{ kg}$$

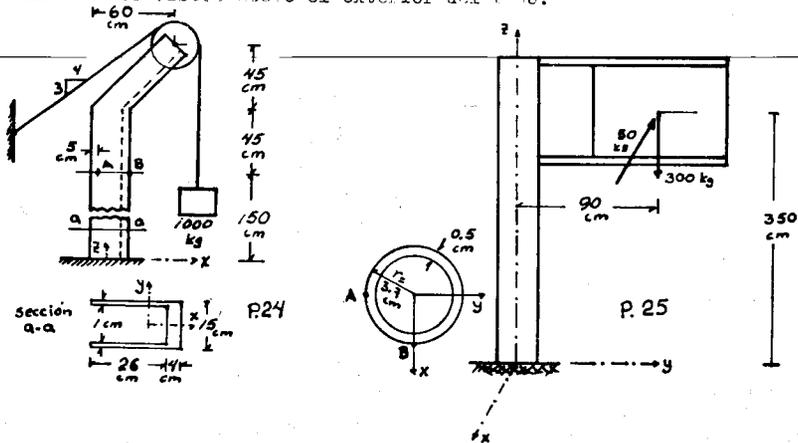
PROBLEMAS

23.- En las figuras para dos miembros diferentes se indican los elementos infinitesimales A, B, C, D, E, F, G, H e I. Trace cada uno de estos elementos por separado e indique en los elementos aislados el estado de esfuerzo que actúa en cada uno. Por medio de flechas muestre claramente la dirección y el sentido de cada esfuerzo y enuncie la fórmula que se utilizaría en su cálculo. Desprecie el peso de los miembros.



24.- A un montacargas especial se le aplica una carga de 1 000 kg suspendida de un cable, como se indica en la figura. Determine el estado de esfuerzo en los puntos A y B producido por tal carga. Muestre los resultados en un elemento con caras horizontales y verticales.

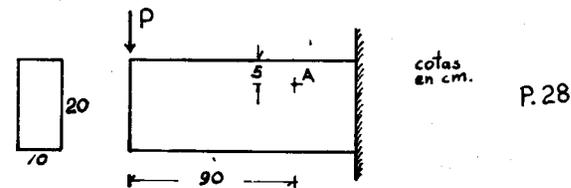
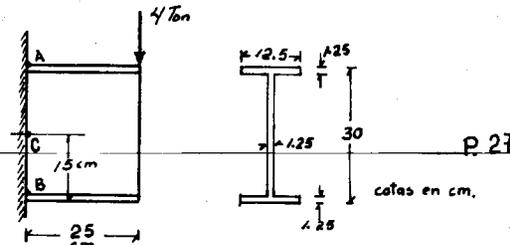
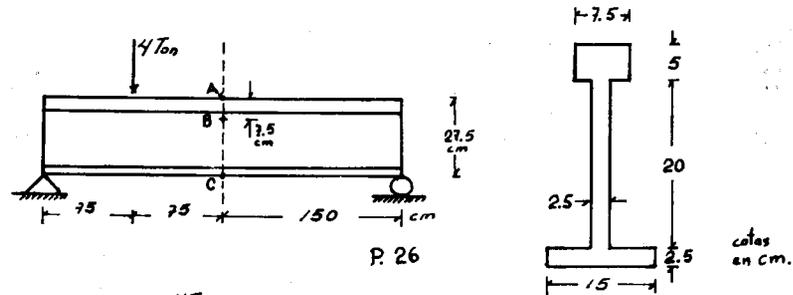
25.- Un rótulo que pesa 300 kg está sostenido por un tubo de acero. La fuerza de viento horizontal máxima que se ejercerá en el rótulo se estima en 50 kg. Determine el estado de esfuerzo causado por este sistema de cargas en los puntos A y B del extremo empujado. Indique los resultados en croquis de elementos determinados en dichos puntos. Estos elementos han de ser vistos desde el exterior del tubo.



26.- Una viga de hierro colado se carga como se indica en la figura, en los puntos A, B y C determine; a) los esfuerzos normal y cortante en un plano inclinado $+35^\circ$; b) los esfuerzos principales y la inclinación de los planos donde se presentan y c) el esfuerzo cortante máximo, la inclinación de los planos donde se presenta y el esfuerzo normal asociado a esos planos.

27.- Una viga I que se emplea como cantiléver muy corto está cargada como se muestra en la figura. Encuentre las magnitudes y direcciones de los esfuerzos principales en los puntos A, B y C. El punto B está en la junta del alma y el patín. Desprecie el peso de la viga y el efecto de las concentraciones de esfuerzos. Utilice la fórmula exacta para determinar los esfuerzos cortantes.

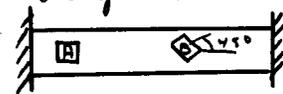
28.- Una viga en voladizo de sección transversal rectangular soporta una carga concentrada P en su extremo libre. Determine, a) la magnitud de la fuerza P que origina en el punto A indicado los esfuerzos principales $\sigma_1 = 67,965 \text{ kg/cm}^2$ y $\sigma_2 = -0.4646 \text{ kg/cm}^2$, b) la magnitud del esfuerzo cortante máximo en A y c) la inclinación de los ejes principales.



BIBLIOGRAFIA.

- 1.- "Objetivos Específicos de los cursos de Mecánica de Materiales I y II". V. J. Palencia G. Coordinación de Mecánica de Materiales, Facultad de Ingeniería, UNAM. septiembre 1977.
- 2.- "Apuntes de Mecánica de Materiales, cuaderno 2". F. Robles y O. M. González C. Facultad de Ingeniería, UNAM. 1974.
- 3.- "Introducción a la Mecánica de Sólidos". Egor P. Popov. Limusa, México. 1976.
- 4.- "Mecánica de Cuerpos Deformables". E. F. Byars y R. D. Snyder. Representaciones y Servicios de Ingeniería, S.A., México. 1978.
- 5.- "Mecánica de Materiales". F. R. Shanley. McGraw-Hill, México. 1976.
- 6.- "Resistencia de Materiales". F. L. Singer. HARLA, México. 1974.
- 7.- "Mecánica de Materiales". S. P. Timoshenko y J. M. Gere. UTEHA, México. 1974.
- 8.- "Introducción a la Mecánica de los Sólidos". S. H. Crandall y N. C. Dahl, editores. McGraw-Hill, España. 1966.
- 9.- "Ciencia de la Construcción". Tomo I. O. Belluzzi. Aguilar, España. 1973.
- 10.- "Theory of Elasticity". Third Edition. S. P. Timoshenko y J.N. Goodier. McGraw-Hill Kogakusha, Japón. 1970.
- 11.- "Resistencia de Materiales". P. A. Stipin. MIR, Moscú. 1976.
- 12.- "Resistencia de Materiales". W. A. Nash. McGraw-Hill, Serie Schaum, Colombia. 1969.

PROBLEMA.- Una barra de cobre de sección rectangular se sostiene entre soportes rígidos, y su temperatura aumenta $\Delta T = 50^\circ\text{C}$. Determinese los esfuerzos en todas las caras de los elementos A y B, e indiquense los resultados obtenidos en croquis de dicho elemento.

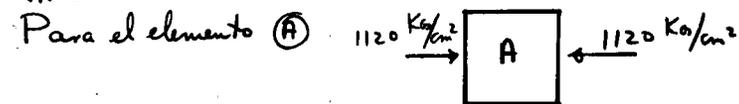


- a) Por equilibrio del elemento
 b) Por fórmulas
 c) Círculo de Mohr.

$$\alpha = 0.00002/^\circ\text{C} \quad E = 1.12 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\sigma_x = \alpha \cdot \Delta T \cdot E = 20 \times 10^{-6} \times 50 \times 1.12 \times 10^6$$

$$\sigma_x = -1120 \text{ Kg/cm}^2$$

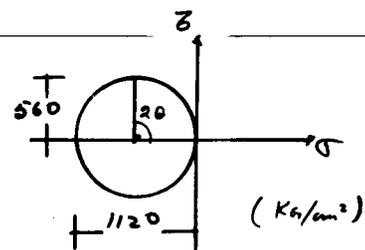
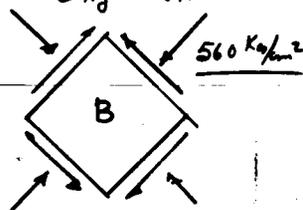


Para el elemento B

$$\sigma_x' = \sigma_x \cos^2 \theta = -1120 (\cos^2 45^\circ) = -560 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\sigma_y' = \sigma_x \sin^2 \theta = -1120 (\sin^2 45^\circ) = -560 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\tau_{xy}' = \sigma_x \sin \theta \cos \theta = -1120 \sin \theta \cos \theta = -560 \text{ Kg/cm}^2$$



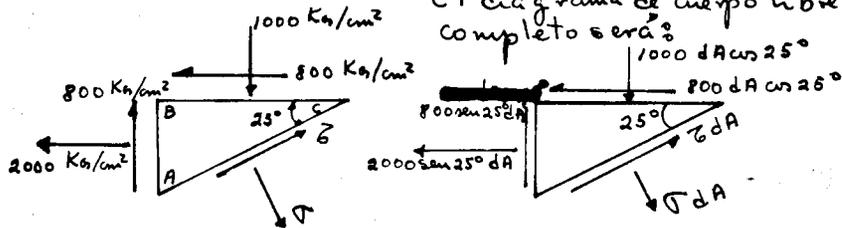
PROBLEMA 3.-

La figura muestra un diagrama de cuerpo libre in completo para la determinación de esfuerzos en un punto de un elemento estructural.

Trace el diagrama de cuerpo libre completo, y determine el esfuerzo normal sobre el plano AC.

Los esfuerzos indicados están en Kg/cm^2 .

El diagrama de cuerpo libre completo será:



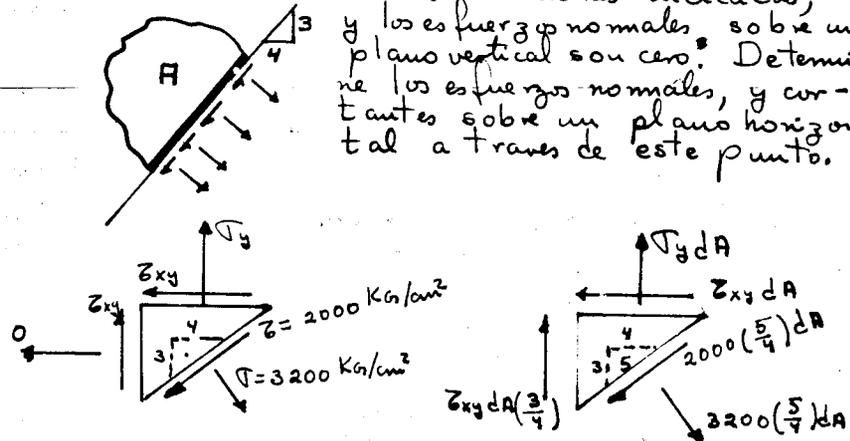
$$\sum F_n = 0$$

$$\sigma dA + 1000 dA \cos^2 25^\circ - 800 dA \sin 25^\circ \cos 25^\circ - 2000 dA \sin^2 25^\circ - 800 dA \sin^2 25^\circ \cos 25^\circ = 0$$

$$\sigma = -1000 \cos^2 25^\circ + 800 \sin 25^\circ \cos 25^\circ + 2000 \sin^2 25^\circ + 800 \sin 25^\circ \cos 25^\circ$$

$$\sigma = 148.6541 \text{ Kg/cm}^2$$

PROBLEMA.- Se tiene un punto A sobre un elemento estructural, los esfuerzos en el plano inclinado son: $\tau = 3200 \text{ Kg/cm}^2$, y $\sigma = 2000 \text{ Kg/cm}^2$ en las direcciones indicadas, y los esfuerzos normales sobre un plano vertical son cero. Determine los esfuerzos normales, y cortantes sobre un plano horizontal a través de este punto.



$$\sum F_x = 0$$

$$\tau_{xy} dA + 2000 dA \left(\frac{5}{4}\right) \left(\frac{4}{5}\right) - 3200 dA \left(\frac{5}{4}\right) \left(\frac{3}{5}\right) = 0$$

$$\tau_{xy} = 400 \text{ Kg/cm}^2 \uparrow$$

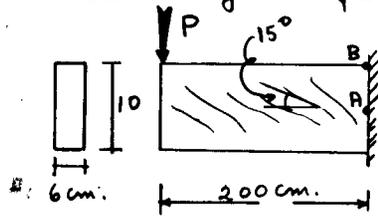
$$\sum F_y = 0$$

$$\sigma_y dA + 400 dA \left(\frac{3}{4}\right) - 2000 dA \left(\frac{5}{4}\right) \left(\frac{3}{5}\right) - 3200 dA \left(\frac{5}{4}\right) \left(\frac{4}{5}\right) = 0$$

$$\sigma_y = 4400 \text{ Kg/cm}^2 \text{ (Tension)}$$

PROBLEMA: La viga de madera que se muestra en la figura tiene sus fibras inclinadas 15° respecto a su eje.

Suponiendo que el diseño está regido por el esfuerzo cortante paralelo a la fibra, y que el valor permisible es de 10 Kg/cm^2 . ¿Cuál es el valor máximo de la carga P que se puede aplicar?

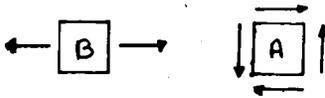


$$M_{\max} = PL$$

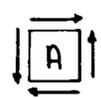
$$V_{\max} = P$$

$$\sigma_{x \max} = \frac{M}{s} = \frac{6PL}{bh^2}$$

$$\tau_{xy \max} = \frac{3}{2} \frac{V}{A} = \frac{3}{2} \frac{P}{bh}$$



PUNTO A:



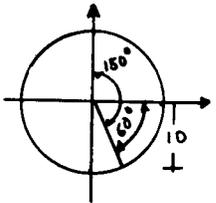
$$\sigma_x = 0; \tau_{xy} = \frac{3}{2} \frac{P}{bh}$$

$$\tau'_{xy} = \frac{\sigma_x}{2} \sin 2\theta - \tau_{xy} \cos 2\theta$$

$$10 = -\frac{3}{2} \frac{P}{(6)(10)} \cos 150^\circ$$

$$P = -400 / \cos 150^\circ$$

$$\therefore P = 461.88 \text{ Kg}$$



$$R = \frac{10}{\sin 60^\circ} = \tau_{xy} = \frac{3}{2} \frac{P}{bh}$$

$$\frac{10}{\sin 60} = \frac{3}{2} \frac{P}{bh}$$

$$P = \frac{2}{3} \frac{10(6)(10)}{\sin 60^\circ} = \frac{400}{\sin 60^\circ} = 461.88 \text{ Kg}$$

PUNTO B:

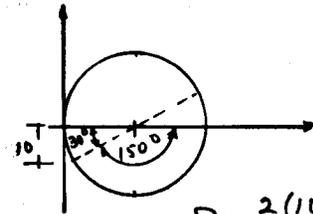
$$\tau'_{xy} = \frac{\sigma_x}{2} \sin 2\theta - \tau_{xy} \cos 2\theta$$

$$\tau'_{xy} = \frac{\sigma_x}{2} \sin 2\theta$$

$$10 = \frac{1}{2} \left(\frac{6PL}{bh^2} \right) \sin 2\theta$$

$$10 = \frac{1}{2} \left(\frac{6P(200)}{(6)(10)^2} \right) \sin 150^\circ$$

$$P = \frac{10}{\sin 150^\circ} = 20 \text{ Kg} \quad \text{RIGE}$$



$$R = \frac{10}{\sin 30^\circ} = \frac{\sigma_x}{2} = \frac{6}{2} \frac{PL}{bh^2}$$

$$\frac{10}{\sin 30^\circ} = \frac{6PL}{2bh^2}$$

$$P = \frac{2(10)}{\sin 30^\circ} \frac{bh^2}{6L}$$

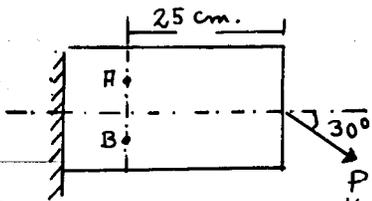
$$P = \frac{20}{\sin 30^\circ} \frac{60(200)^2}{6(200)} = \frac{10}{\sin 30^\circ} = 20 \text{ Kg}$$

RIGE

∴

$$P = 20 \text{ Kg}$$

PROBLEMA: Calcular los esfuerzos principales, y el esfuerzo cortante máximo en los puntos A y B en la viga de la figura, y en la sección $x = 25 \text{ cm}$, debido a la fuerza $P = 6000 \text{ Kg}$. la viga es rectangular de $4 \times 16 \text{ cm}$, y los puntos A y B están a 4 cm de la superficie neutra.



$$P_x = 6000 \times \cos 30^\circ = 5196.15 \text{ Kg}$$

$$P_y = 6000 \times \sin 30^\circ = 3000.00 \text{ Kg}$$

$$\sigma_x = \frac{P}{A} \pm \frac{M}{I} y$$

$$\sigma_x = \frac{5196.15}{64} \pm \frac{3000 \times 25}{1365.33} y$$

$$\sigma_A = 300.92 \text{ Kg/cm}^2 \quad \sigma_B = -138.5373 \text{ Kg/cm}^2$$

$$z = \frac{VQ}{Ib} = \frac{3000 \times 96}{1365.33 \times 4} = 52.73$$

$$(\sigma_{1,2})_A = \frac{\sigma_x}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + z_{xy}^2} = \frac{300.92}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{300.92}{2}\right)^2 + (52.73)^2}$$

$$\sigma_{1A} = 309.89 \text{ Kg/cm}^2 \quad \sigma_{2A} = -8.97 \text{ Kg/cm}^2$$

COMPROBACION: $\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_x + \sigma_y \Rightarrow 309.89 - 8.97 = 300.92 + (0)$ ✓

$$z_{\max A} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + z_{xy}^2} \Rightarrow z_{\max A} = \pm 59.43 \text{ Kg/cm}^2$$

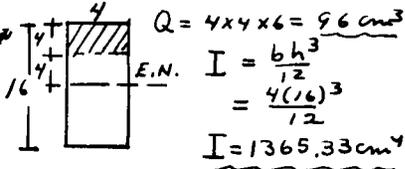
$$(\sigma_{1,2})_B = -\frac{138.54}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{138.54}{2}\right)^2 + (52.73)^2}$$

$$\sigma_{1B} = 17.79 \text{ Kg/cm}^2 \quad \sigma_{2B} = -156.33 \text{ Kg/cm}^2$$

$$z_{\max} = 87.06 \text{ Kg/cm}^2$$

COMPROBACION: $\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_x + \sigma_y \Rightarrow 17.79 - 156.33 = -138.54 + (0)$

Nota: Incluir la fuerza cortante debida a P

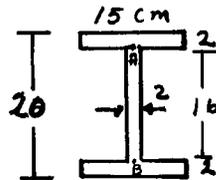


$$Q = 4 \times 4 \times 6 = 96 \text{ cm}^3$$

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{4(16)^3}{12}$$

$$I = 1365.33 \text{ cm}^4$$

PROBLEMA: Repetir el problema anterior si $P = 18000 \text{ Kg}$, $x = 1 \text{ mt}$. y la viga es la



cuya sección se muestra. los puntos A y B están en la unión del alma con las alas.

$$P_x = 18000 \cos 30^\circ = 15588.46 \text{ Kg}$$

$$P_y = 18000 \sin 30^\circ = 9000.00 \text{ Kg}$$

$$Q = 2 \times 15 \times 9 = 270 \text{ cm}^3$$

$$I = \frac{15 \times 20^3}{12} - \frac{13(16)^3}{12} \Rightarrow I = 5562.67 \text{ cm}^4$$

$$A = 15 \times 2 \times 2 + 16 \times 2 = 92 \text{ cm}^2$$

$$\sigma = \frac{P}{A} \pm \frac{M}{I} y = \frac{15588.46}{92} \pm \frac{9000 \times 100}{5562.67} y$$

$$\sigma_A = 1463.78 \text{ Kg/cm}^2 \quad \sigma_B = -1124.90 \text{ Kg/cm}^2$$

$$z = \frac{VQ}{Ib} = \frac{9000 \times 270}{5562.67 \times 2} = 218.44 \text{ Kg/cm}^2$$

$$(\sigma_{1,2})_A = \frac{\sigma_x}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + z_{xy}^2} = \frac{1463.78}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1463.78}{2}\right)^2 + (218.44)^2}$$

$$\sigma_1 = 1495.68 \quad \sigma_2 = -31.90 \text{ Kg/cm}^2$$

$$z_m = \pm 763.79 \text{ Kg/cm}^2$$

$$(\sigma_{1,2})_B = \frac{\sigma_x}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + z_{xy}^2} = -\frac{1124.90}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1124.90}{2}\right)^2 + (218.44)^2}$$

$$\sigma_1 = 40.93 \text{ Kg/cm}^2 \quad \sigma_2 = -1165.828 \text{ Kg/cm}^2$$

$$z_m = 603.38 \text{ Kg/cm}^2$$

Se comprueba que $\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_x + \sigma_y = \sigma_x + (0)$

III. DIMENSIONAMIENTO DE VIGAS Y LOSAS DE CONCRETO REFORZADO

Fco. ROBLES F.V.
 ADAPTADO POR
 MARCO A. ALVAREZ S.
 CARLOS J. MENDOZA E.

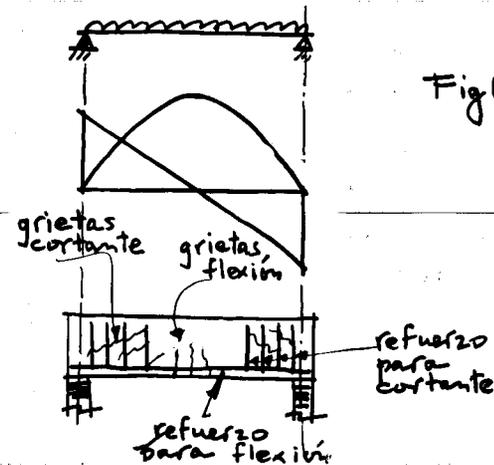


Fig ① Comportamiento de una viga de concreto reforzado

1 OBSERVACIONES PRELIMINARES

Las cargas transversales que actúan sobre una viga dan origen a momentos flexionantes y fuerzas cortantes, acciones internas que, a su vez, producen esfuerzos de tensión. El concreto simple se agrieta a partir de esfuerzos de tensión, relativamente bajos por su escasa resistencia a este tipo de esfuerzos (fig 1). Por lo tanto la capacidad para resistir cargas transversales de una viga hecha con este material es insignificante. Puede suplirse la falta de resistencia a tensión colocando barras de refuerzo de acero en las regiones de la viga donde las acciones externas produzcan tensión. El refuerzo no impide el agrietamiento, pero sí lo restringe (fig 1). Esta combinación de concreto simple y barras de acero constituye el material compuesto común-

mente denominado concreto reforzado. El dimensionamiento de vigas de concreto reforzado consiste esencialmente en la determinación de las dimensiones de la sección de concreto y de la cuantía y distribución del acero de refuerzo requeridas para contar con suficiente resistencia y un comportamiento adecuado bajo condiciones de servicio. Esto implica el desarrollo de procedimientos para predecir la resistencia de secciones sujetas a flexión o a fuerza cortante o a combinaciones de ambas acciones, calcular deflexiones y estimar la magnitud del agrietamiento. En las secciones siguientes se presentarán procedimientos elementales para el dimensionamiento de vigas de concreto. En general, se han seguido las recomendaciones del Reglamento de las Cons

trucciones del Departamento del Distrito Federal.¹

Otros reglamentos importantes son el del American Concrete Institute^{3,4} y el del Comité Europeo de Concreto⁵.

Un tratamiento más amplio del comportamiento y dimensionamiento de elementos de concreto reforzado sujetos a flexión puede encontrarse en los capítulos

4 y 16 de la ref 7. Los textos de Winter⁸ y

Ferguson⁹ también contienen tratamientos amplios.

2 RESISTENCIA A FLEXION DE SECCIONES DE CONCRETO REFORZADO

2.1 Consideraciones generales

Suponiendo conocidas las gráficas esfuerzo-deformación del concreto y del acero, y con base en la compatibilidad de deformaciones y los principios de estática, se puede determinar la capacidad del par interno que puede desarrollar una sección de concreto reforzado de características conocidas; es decir, su capacidad para resistir flexión. Para características de los diagramas de esfuerzo-deformación del concreto y del acero, puede consultarse la ref 10. El procedimiento general es laborioso, y es usual hacer algunas hipótesis simplificadoras. A continuación se presentan las hipótesis utilizadas en las recomendaciones de las refs 1 y 2.

- 1a. La distribución de deformaciones unitarias en la sección transversal de un elemento es plana.
- 2a. El concreto no resiste esfuerzos de tensión
- 3a. La deformación unitaria máxima admisible en el concreto en compresión es 0.003.
- 4a. La distribución de esfuerzos en la zona de compresión puede considerarse como uniforme en la zona equivalente de compresión, cuya profundidad se considerará como 0.8 de la del eje neutro. Tal esfuerzo en el concreto se tomará igual a
- $$f_c^u = 0.85 f_c^t, \text{ si } f_c^t \leq 250 \text{ kg/cm}^2$$
- y
- $$f_c^u = (1.05 - f_c^t / 1250) f_c^t, \text{ si } f_c^t > 250 \text{ kg/cm}^2$$
- 5a. Se conocen las características esfuerzo-deformación del acero. El módulo de elasticidad, E_s , se toma igual a $2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$, para acero de refuerzo ordinario. El diagrama de esfuerzo-deformación del acero de refuerzo ordinario puede idealizarse por medio de una recta que pase por el origen, con pendiente igual a E_s , y una recta horizontal que pase por la ordenada correspondiente al esfuerzo de fluencia real o convencional del acero.
- 6a. La deformación unitaria del acero es igual a la del concreto que se encuentra al mismo nivel.

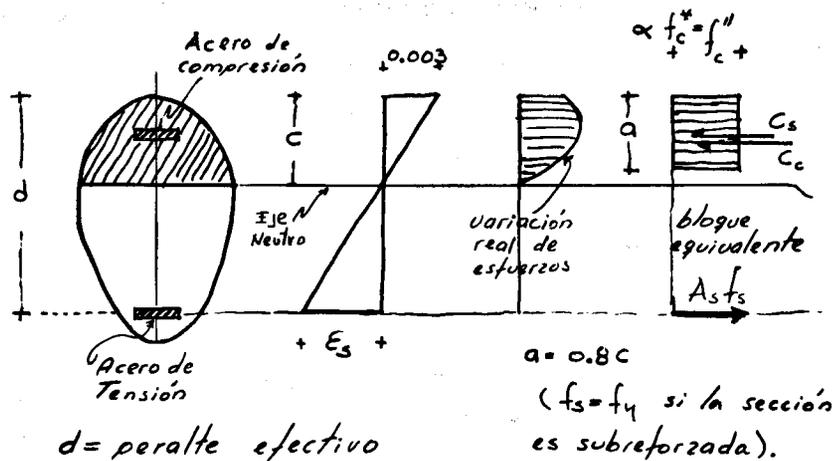
El significado de estas hipótesis puede apreciarse en la fig 2.

La distribución rectangular de los esfuerzos de compresión propuesta es tal que las resistencias que se obtienen utilizándola corresponden con bastante precisión a las obtenidas con distribuciones reales, así como a resultados experimentales, cuando se utilizan las resistencias no reducidas del concreto, f_c^t . Para efectos de diseño, el reglamento del Departamento del Distrito Federal

indica que deben utilizarse esfuerzos reducidos del concreto, f_c^u , en la forma indicada en la fig 2, que tienen en cuenta la variabilidad de la calidad del concreto. El empleo de diagramas rectangulares facilita notablemente los cálculos requeridos.

En la fig 3, se muestra la idealización del diagrama de esfuerzo-deformación del acero.

Para encontrar la resistencia de una sección simétrica cualquiera, de características conocidas, se determina primero la posición del eje neutro planteando una ecuación con base en el equilibrio interno o por un tanteo. Una vez localizada el eje neutro se determinan las fuerzas internas y se calculan los momentos con respecto al eje neutro. La suma de los momentos es la resistencia a momento de la sección. Puede también localizarse el centro de gravedad de las fuerzas de tensión y calcular entonces los momentos de las fuerzas de compresión con respecto a este centro a viceversa. En los ejemplos 1 a 3 se ilustra el cálculo de la resistencia a flexión de diversos tipos



$$f_s \leq f_y$$

$$\alpha = 1.05 - \frac{f_c^*}{1250} \leq 0.85$$

$$f_c^* = 0.8 f_c$$

Fig. (2) - Hipótesis del Reglamento del D.D.F.

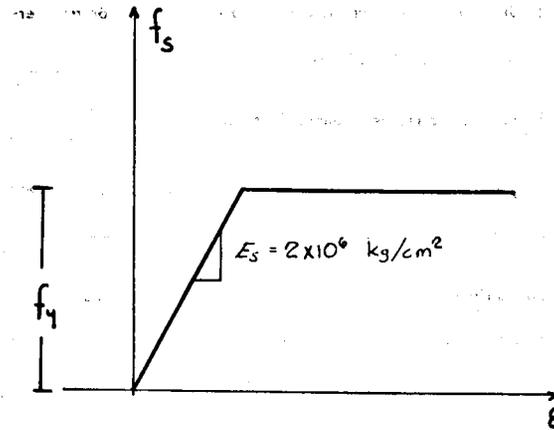


Fig. (3) - Diagrama esfuerzo-deformación idealizado del acero según el Reglamento del Departamento del Distrito Federal.

de sección. El caso particular de las secciones rectangulares simplemente armadas se trata en el inciso 2.3.

2.2 Secciones balanceadas, subreforzadas y sobrerreforzadas

Se dice que una sección está balanceada cuando la deformación unitaria en la fibra externa comprimida es la máxima admisible (0.003, según DDF) y la deformación unitaria en el acero es la correspondiente al esfuerzo de fluencia. Secciones con menos acero que el correspondiente a la sección balanceada reciben el nombre de subreforzadas, mientras que las que tienen un porcentaje de acero superior al de la condición balanceada se llaman sobrerreforzadas.

La determinación del acero correspondiente a la condición balanceada se efectúa imponiendo las condiciones de deformación mencionadas y aplicando los principios de equilibrio y compatibilidad de deformaciones en la forma ilustrada en los ejemplos 1 a 3. El caso particular de secciones rectangulares simplemente armadas se trata en el inciso 2.3.

La determinación de la cantidad de acero correspondiente a la condición balanceada es importante porque en los reglamentos y normas de diseño de estructuras de concreto es usual imponer una limitación al acero máximo que puede utilizarse en elementos sujetos a flexión, prohibiendo que se exceda un determinado porcentaje del acero balanceado, que varía del 50 al 100%. Esto se hace para asegurar que la falla del elemento sea dúctil, es decir, que exhiba deformaciones importantes antes del colapso, de manera que se cuente con un aviso de la inminencia del mismo. En efecto, en una viga subreforzada sujeta a carga creciente, el acero alcanza su es-

fuerzo de fluencia antes de que el concreto falle, registrándose fuertes agrietamientos y deflexiones antes del colapso. En una viga sobrerreforzada, por el contrario, el colapso sobreviene en forma repentina, sin aviso previo. En la fig 4 se compara cualitativamente el comportamiento de una viga subreforzada con el de una viga sobrerreforzada.

2.3 Vigas rectangulares simplemente armadas

Resistencia

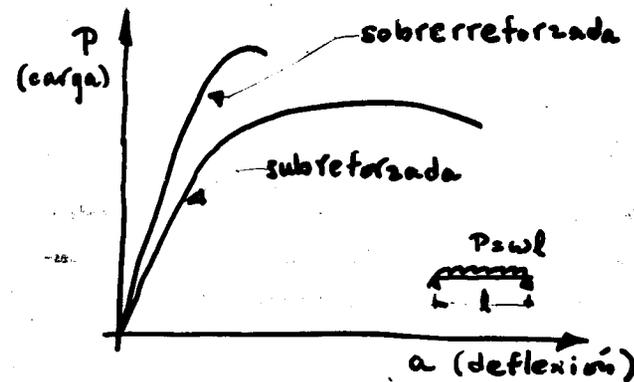


Fig ④ Diagramas carga-deflexión de una viga subreforzada y de una viga sobrerreforzada

Para el caso particular de vigas rectangulares simplemente armadas pueden deducirse fórmulas que permiten calcular directamente su momento resistente.

En la fig 5 se muestra una viga rectangular con refuerzo del lado de tensión únicamente. Se supone que la sección es subreforzada, de manera que el acero fluye, como sucede en los casos prácticos de diseño. Por lo tanto, $f_s = f_y$.

Por equilibrio de fuerzas, se puede obtener la profundidad del bloque de esfuerzos a , de la manera siguiente:

$$\begin{aligned}
 C &= T \\
 a b f'' c &= A_s f_y \\
 a &= \frac{A_s f_y}{b f'' c} \quad (1)
 \end{aligned}$$

Llamando p a la relación entre el área de acero A_s y el producto bd , donde b es el ancho de la sección y d , el peralte efectivo, definido como la distancia desde la fibra más comprimida hasta el centro de gravedad del acero de tensión.

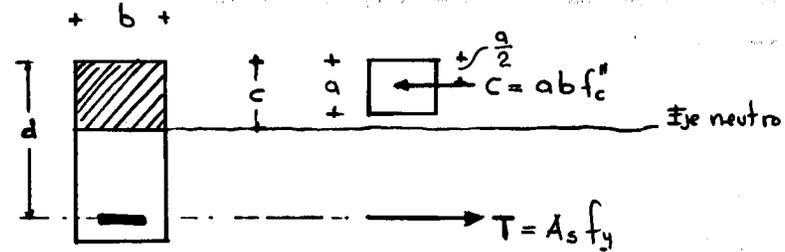


Fig. ⑤ Fuerzas que intervienen en el cálculo de resistencia de vigas rectangulares simplemente armadas.
D. D. F.

la ecuación (1) puede escribirse como:

$$a = \frac{p b d f_y}{b f_c''} \quad (2)$$

donde:

$$p = \frac{A_s}{bd}$$

Tomando momento con respecto a la resultante de compresión:

$$M_u = T \left(d - \frac{a}{2} \right)$$

$$M_u = A_s f_y \left(d - \frac{a}{2} \right) \quad (3)$$

Otra expresión puede obtenerse tomando momentos con respecto al acero

de tensión:

$$M_u = C \left(d - \frac{a}{2} \right)$$

$$= a b f_c'' \left(d - \frac{a}{2} \right)$$

$$= \frac{p b d f_y}{b f_c''} \cdot b f_c'' \left(d - \frac{p b d f_y}{2 b f_c''} \right)$$

Definiendo el índice de resistencia, q , como sigue:

$$q = \frac{p f_y}{f_c''} \quad (4)$$

resulta:

$$M_u = b d^2 f_c'' q (1 - 0.5q) \quad (5)$$

Esta ecuación proporciona la resistencia ideal a flexión de la sección considerada y deberá ser afectada por un factor de reducción (o de resistencia) para obtener las resistencias de diseño, se tiene entonces que

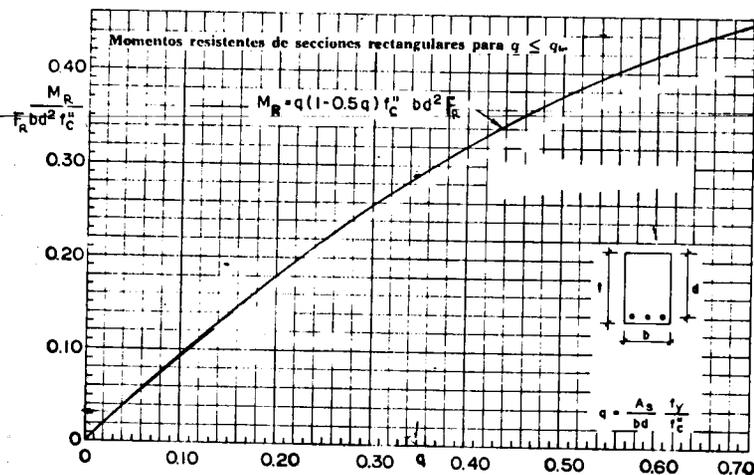
$$M_R = F_R b d^2 f_c'' q (1 - 0.5q) \quad (5a)$$

El factor de resistencia, F_R , toma en cuenta los aspectos siguientes: a) La dispersión de los resultados experimentales en que se basa la fórmula, b) El grado de seguridad involucrado en cada fórmula, c) El tipo de falla que puede presentarse y d) Las consecuencias de la falla.

Para flexión $F_R = 0.9$

65 A

La ecuación (5a) está resuelta gráficamente en la figura 6. En el ejemplo 1 se ilustra el cálculo del momento resistente de una sección rectangular simplemente armada.



Relación de acero correspondiente a la condición balanceada

La relación de acero o cuantía ρ_b correspondiente a la condición balanceada de una viga rectangular también puede calcularse directamente mediante una expresión obtenida a partir de consideraciones de equilibrio interno y de compatibilidad de deformaciones (fig 7).

Si se considera que la deformación unitaria del concreto es 0.003 y que la del acero es la que corresponde a la fluencia, del diagrama de deformaciones unitarias se puede establecer la siguiente proporción:

$$\frac{c_b}{d} = \frac{0.003}{\epsilon_y + 0.003}$$

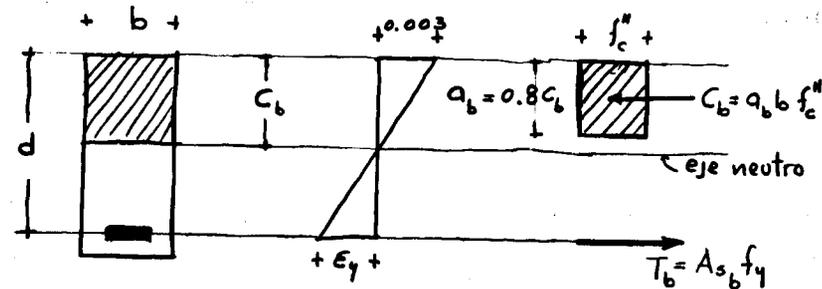
Por consideraciones de equilibrio, igualando T con C , se obtiene que

$$\rho_b = \frac{f'_c}{f_y} \frac{4800}{f_y + 6000} \quad (6)$$

En el ejemplo 1 se ilustra la aplicación de esta expresión.

2.4 Vigas rectangulares doblemente armadas

Pueden presentarse situaciones en que las dimensiones exteriores de una sección rectangular están fijadas por restricciones de tipo arquitectónico o constructivas. Si el momento actuante es superior al que puede resistir la sección como simplemente armada, puede aumentarse la capacidad colocando acero de compresión en la zona de compresión. En el ejemplo 2 se muestra el cálculo de la resistencia de una



c_b = profundidad eje neutro, condición balanceada.

a_b = profundidad del bloque equivalente de esfuerzos, condición balanceada.

d = peralte efectivo.

b = ancho de la sección

ϵ_y = deformación unitaria del acero al fluir.

Fig. (7) Condición balanceada en una sección rectangular (D. D. F.).

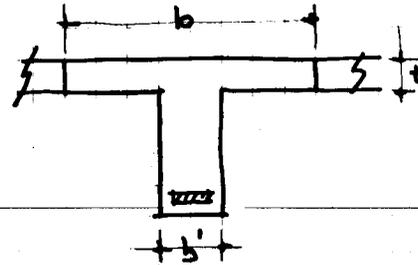
sección doblemente armada así como la determinación del acero correspondiente a la condición balanceada.

Debe advertirse que hay secciones doblemente armadas por motivos ajenos al de resistencia. Si el acero de tensión de estas secciones es inferior al que correspondería a la condición balanceada si la sección estuviera simplemente armada, el momento resistente puede estimarse con precisión razonable despreciando el acero de compresión.

2.5 Vigas T

Uno de los sistemas de construcción más comunes en estructuras de concreto consiste en losas soportadas sobre vigas. Las losas y las vigas se cuegan monolíticamente. En los cálculos de resistencia se supone que la viga actúa conjuntamente con una porción de losa para formar lo que suele llamarse una sección T (fig 8). El ancho efectivo de losa que puede considerarse contribuye a la resistencia suele estar fijado por especificación. En la fig 8 se muestra una recomendación típica.

En la mayoría de los casos, la profundidad del bloque de esfuerzos a es menor que el peralte del patín t . La zona comprimida es entonces rectangular y la resistencia puede calcularse como si se tratara de una sección rectangular común, con ancho igual al ancho efectivo b . Cuando a es mayor que t , la resistencia a momento puede determinarse aplicando los principios generales expuestos en 2.1. El acero correspondiente a la condición balanceada se puede determinar como se indica en 2.2. En el ejemplo 3 se presentan cálculos típicos de secciones T.



$b =$ ancho efectivo

Tomas como ancho efectivo el menor de los siguientes valores:

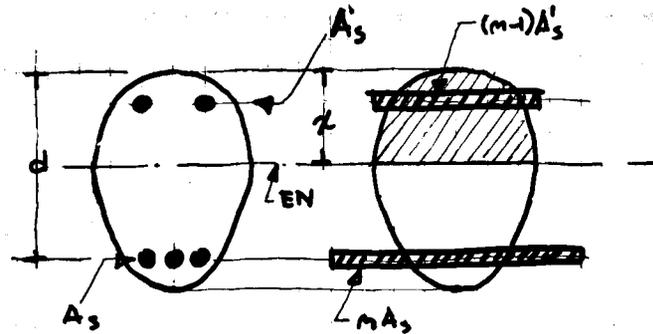
$$\left\{ \begin{array}{l} 16t + b' \\ l/a \\ \text{distancia centro a} \\ \text{centro entre} \\ \text{margaduras} \end{array} \right.$$

(l es el claro de la viga)

Fig 8 Ancho efectivo de secciones T

2.6 Vigas de sección simétrica de forma cualquiera

En el caso de formas complicadas puede descomponerse la zona de compresión en fajas paralelas de ancho pequeño y aplicar los procedimientos generales utilizadas en los casos anteriores.



Se desprecia el concreto en la zona en tensión

Fig ⑨ Ejemplo de sección transformada para revisión de esfuerzos debidos a flexión

3. REVISIÓN DE ESFUERZOS BAJO CONDICIONES DE SERVICIO

En relación con ciertos aspectos del diseño, a veces es necesario investigar esfuerzos bajo condiciones de servicio. Para ella se recurre a hipótesis elásticas y al artificio de la sección transformada expuesto en la sección 3.2 de la ref 11, en relación con la revisión de esfuerzos en elementos de concreto reforzado sujetos a compresión axial.

Al transformarse el acero en un área de concreto de efecto equivalente debe procurarse que las fajas sean de ancho unitario, de manera que su momento de inercia centroidal sea despreciable y que queden paralelas al eje neutro, como se muestra en la fig 9. Generalmente se considera únicamente la parte comprimida de la sección de

concreto, puesto que la parte sujeta a tensión se agrieta. Sin embargo hoy casos, en que los esfuerzos de tensión son bajos, en los que está indicado considerar la sección completa. Los pasos principales del cálculo son los siguientes:

- a).- Determinación de la profundidad del eje neutro, tomando momentos de las áreas con respecto a éste.
- b).- Cálculo del momento de inercia con respecto al eje neutro.

c).- Determinación de esfuerzos mediante expresiones de la forma

$$\left. \begin{aligned} f_c &= \frac{M}{I} y_1 \quad (\text{para esfuerzos en el concreto}) \\ f_s &= n \frac{M}{I} y_2 \quad (\text{para esfuerzos en el acero}) \end{aligned} \right\}$$

En las ecuaciones (7), y_1 y y_2 son las distancias desde el eje neutro a la fibra considerada, n es la relación entre los módulos de elasticidad del acero y del concreto e I es el momento de inercia calculado en el paso (b).

En los ejemplos 4 a 6 se presentan cálculos típicos de determinación de esfuerzos a nivel de cargas de servicio.

4 RESISTENCIA A FUERZA CORTANTE

4.1 Vigas

Supóngase una viga con refuerzo longitudinal suficiente para resistir la flexión, pero sin refuerzo transversal (fig 10). Bajo cargas relativamente bajas el comportamiento de la viga es aproximadamente elástico y los esfuerzos cortantes pueden predecirse por las fórmulas convencionales de resistencias de materiales. Los esfuerzos cortantes que obran sobre una partícula a la altura del eje neutro, donde los esfuerzos normales son nulos pueden representarse como en la fig 10. La resistencia del concreto a este tipo de esfuerzo es bastante alta. Sin embargo, la combinación de los esfuerzos cortantes horizontales y verticales produce tensiones en planos a 45° respecto al eje neutro, que provocan agrietamientos bajo cargas relativamente bajas. Una co-

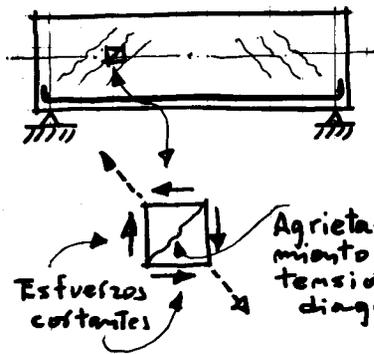


Fig 10 Tensiones diagonales en una viga de concreto, sin refuerzo transversal

sa semejante sucede cuando también intervienen esfuerzos normales debidos a flexión.

Como medida convencional de la magnitud de las tensiones diagonales inclinadas suele tomarse lo que se llama esfuerzo cortante nominal. Este esfuerzo se calcula por medio de la expresión.

$$v_u = \frac{V_u}{bd} \quad (8)$$

donde

V_u = Fuerza cortante última que actúa sobre la sección considerada

b = Ancho de la sección (ancho de la nervadura en el caso de vigas T)

d = Peralte efectivo

Este valor se compara con el valor que puede tomar la sección de concreto sin

refuerzo transversal. Un criterio simplista consiste en despreciar todas las variables que intervienen en el problema menos la resistencia del concreto. El reglamento del Departamento del Distrito Federal, por ejemplo, supone que

$$v_{CR} = 0.5 F_R \sqrt{f'_c} \quad (9)$$

$$\text{siendo } F_R = 0.8$$

La contribución total del concreto a la resistencia a fuerza cortante está dada por la expresión siguiente:

$$V_{CR} = v_{CR} b d \quad (10)$$

Si $v_u > v_{CR}$ el miembro debe reforzarse con refuerzo transversal. Aún en el caso de que se utilice refuerzo, v_u no debe exceder un valor aproximado de $2.5 F_R \sqrt{f'_c}$

El refuerzo transversal más comunmente usado es el estribo, sea vertical o inclinado (fig 11).

También se puede aprovechar el refuerzo longitudinal prolongándolo más allá de donde deja de ser necesario por flexión y doblándolo de manera que atraviese la zona de tensiones diagonales importantes. Tanto los estribos inclinados como las barras inclinadas pueden tener inclinaciones entre 30° y 60° respecto al eje neutro. Sin embargo, la inclinación mas frecuente es 45° .

La contribución del refuerzo transversal a la resistencia a cortante V'_u está dada por la expresión siguiente:

$$V'_u = \frac{A_v f_y d (\sin \alpha + \cos \alpha)}{s} \cdot F_R \quad (11)$$

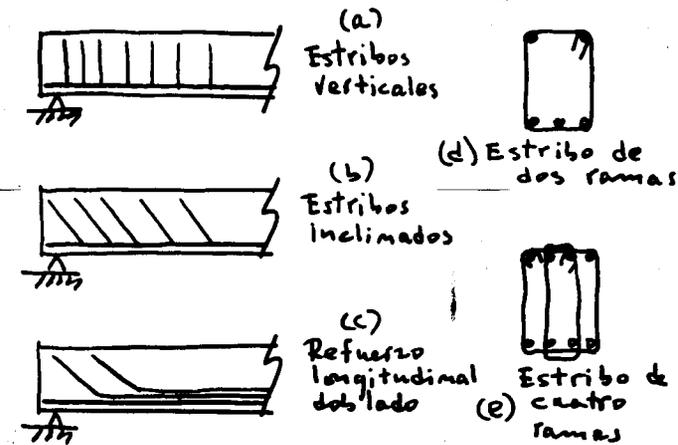


Fig 11 Refuerzo transversal de vigas

En esta expresión A_v es la sección total del refuerzo transversal. Si se trata de un estribo de dos ramas, por ejemplo, como el del detalle (d) de la fig 11, será la suma del área de las dos ramas. d es el peralte efectivo de la sección, α es la inclinación del refuerzo transversal respecto al eje neutro y s es la separación del refuerzo.

Si el refuerzo es vertical, la expresión se convierte en

$$V_u = \frac{A_v f_y d}{s} \cdot F_R \quad (12)$$

Si está a 45° , la fórmula correspondiente será

$$V_u = \frac{1.414 A_v f_y d}{s} \cdot F_R \quad (13)$$

De lo anterior se desprende que la resistencia total a cortante de una sección de concreto está dada por

$$V_u = V_{c_0} + V_u \quad (14)$$

Las normas y reglamentos suelen imponer ciertas restricciones al refuerzo transversal, las principales de las cuales pueden resumirse como sigue.

a) - Las separaciones del refuerzo transversal no deben exceder los siguientes valores:

$$\text{Separaciones máximas} \begin{cases} \text{Estribos verticales: } d/2 \\ \text{Estribos a } 45^\circ: d \\ \text{Barras dobladas a } 45^\circ: 3d/4 \end{cases}$$

b) - El área del refuerzo transversal no debe ser inferior a la dada por la expresión siguiente:

$$A_{vmin} = 3.5 b_s / f_y (F_R) \quad (15)$$

En el caso de vigas T, se usará, el ancho de la nervadura b' .

Estos límites deben cumplirse por lo menos donde el análisis indica que la resistencia del concreto solo es inferior a la fuerza cortante externa.

En el ejemplo 7 se muestra cómo calcular la resistencia a fuerza cortante de una

viga rectangular.

4.2 Losas y zapatas

La resistencia a fuerza cortante de losas y zapatas en la vecindad de cargas o reacciones concentradas está regida por la más desfavorable de las condiciones siguientes:

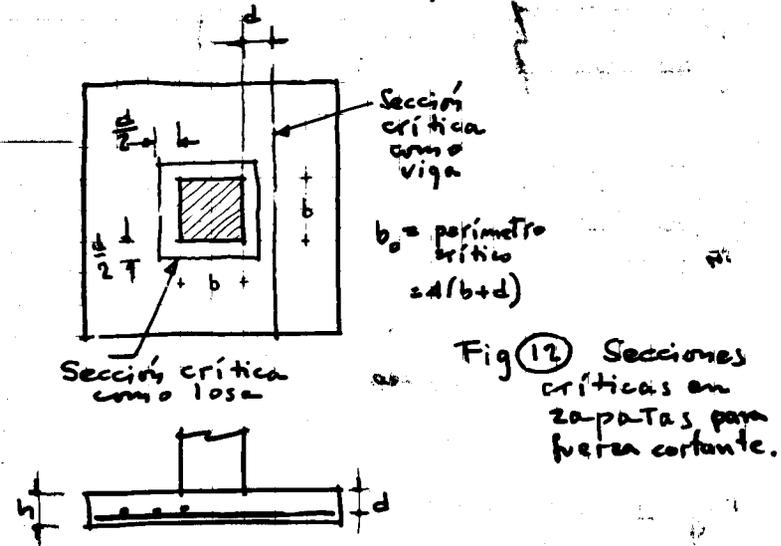
- La losa o zapata actúa como una viga ancha, en tal forma que las grietas potenciales se extenderían en un plano que abarca todo el ancho. En este caso son aplicables los métodos expuestos en la sección anterior para vigas.
- Existe una acción en dos direcciones de manera que el agrietamiento diagonal potencial se presentaría a lo largo de un cono o uno pirámide truncada en torno a la carga o reacción concentrada. En este caso la sección crítica se supone perpendicular al plano de la losa y localizada a una distancia del área de la carga concentrada o de la reacción igual a la mitad del peralte efectivo d , como se indica en la fig 12. La resistencia a cortante se calcula por medio de la ecuación

$$V_u = v_{CR} b_o d \quad (16)$$

donde b_o es el perímetro crítico definido en la fig 12.

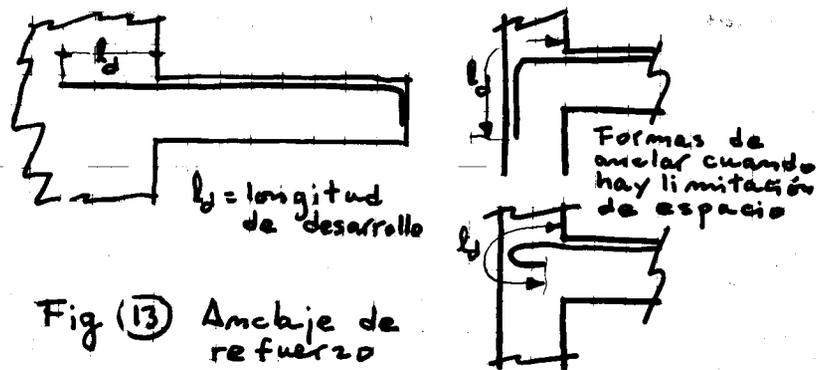
Para este caso el valor de v_{CR} se toma igual a $F_R \sqrt{f'_c}$. Esta condición suele ser la que rige.

La resistencia a cortante de losas puede incrementarse con refuerzo transver -



sal, cuya contribución puede estimarse por los procedimientos descritos en la sección anterior para vigas.

En el ejemplo 8 se presenta un cálculo de resistencia a cortante de una zapata para columna aislada.



5. CONCEPTO DE ANCLAJE

Para que los miembros de concreto funcionen correctamente es necesario que todo el refuerzo sea capaz de desarrollar la capacidad requerida en toda sección. Para ello el refuerzo debe estar adecuadamente anclado. El significado de este requisito se aprecia claramente en el ejemplo mostrado en la fig 13. Si el refuerzo del voladizo no estuviera anclado en el empotramiento la viga no sería capaz de desarrollar el momento resistente requerido.

La longitud de desarrollo o de anclaje necesario depende de la adherencia entre el concreto y el acero. La adherencia a su vez depende de $\sqrt{f'_c}$. En el Reglamento del Distrito Federal se propone la siguiente

expresión para calcular la longitud necesaria para desarrollar la capacidad de una varilla:

$$L_{db} = 0.06 \frac{a_s f_y}{\sqrt{f'_c}} \geq 0.006 d_b f_y \quad (16)$$

en donde

l_{db} = longitud de desarrollo, cm

a_s = área de la sección de la varilla, cm^2

f_y = esfuerzo de fluencia reducido del acero, kg/cm^2

f'_c = resistencia o la compresión del concreto, kg/cm^2

d_b = diámetro de la varilla, cm

Esta longitud es un valor básico que debe modificarse según distintas situacio -

nes de acuerdo con las recomendaciones del ^{Reglamento} citado. En ningún caso debe ser menor de 30 cm. Otras recomendaciones dan reglas semejantes. La longitud de desarrollo puede ser recta, o en forma de gancho o escuadra, cuando existen limitaciones de espacio, como se indica en los detalles de la fig 13.

En el ejemplo 9 se muestra cómo se calcula la longitud de desarrollo de una varilla.



6. CALCULO DE DEFLEXIONES

La estimación de deflexiones de vigas de concreto reforzado presenta algunas dificultades. Generalmente las deflexiones se calculan suponiendo un comportamiento elástico, hipótesis de validez relativa aun bajo cargas no muy altas y de corta duración. Una primera dificultad estriba en el valor del módulo de elasticidad que debe usarse. El Reglamento del Departamento del Distrito Federal, por ejemplo, propone -

$$E_c = 10\,000 \sqrt{f_c} \text{ en } \text{kg/cm}^2$$

Otras incertidumbres se presentan en el valor del momento de inercia que debe utilizarse. Afectan a éste la distribución del acero a lo largo del miembro así como la distribución del agrietamiento.

Una forma usual de tratar el problema de deflexiones consiste en calcular la flecha bajo efectos de corta duración, usando el valor del módulo de elasticidad recomendado por el Reglamento del Departamento del Distrito Federal.

$$E_c = 10\,000 \sqrt{f'_c} \quad (17)$$

La expresión general de la flecha sería

$$f = \frac{C W L^3}{E_c I} \quad (18)$$

donde W es la carga total, L el claro, I el momento de inercia y C un coeficiente que depende del tipo de carga y de las condiciones de apoyo. Para porcentajes bajos de acero se toma el valor del momento de inercia correspondiente a la sección total de concreto, no agrietada, y sin considerar el refuerzo. Para porcentajes altos se utiliza el momento de inercia de la sección transformada agrietada. En vigas continuas se toma un valor promedio de los momentos de inercia en las regiones de momentos positivos y negativos.

Para estimar la deflexión adicional debida a la permanencia de la carga se multiplica la flecha calculada por corta duración por el factor $[2 - 1.2(A'_s/A_s)]$, donde A'_s es el área de refuerzo en la zona de compresión y A_s el área de refuerzo en la zona de tensión.

Las deflexiones calculadas se comparan con valores que se consideren admisibles. El Reglamento del Departamento del Distrito Federal recomienda que no se excedan los siguientes límites:

Una flecha vertical, incluyendo los efectos a largo plazo, igual a 0.5 cm, mas el claro entre 240. Además, para miembros cuyas deformaciones afectan elementos no estructurales, como muros de mampostería, que no sean capaces de soportar deformaciones apreciables, se considerará como estado límite una deflexión medida después de la colocación de los elementos no estructurales, igual a 0.3 cm, mas el claro entre 480.

Se tiene entonces

$$f_{\max} = 0.5 + \frac{L}{240} \quad (\text{cm}) \quad (19)$$

$$f_{\max} = 0.3 + \frac{L}{480} \quad (\text{cm}) \quad (19')$$

En el ejemplo 10 se presenta un análisis de deflexiones típico.

marse, en forma más sencilla, con la expresión, propuesta en la ref 2:

$$f_s = \frac{M}{0.9 A_s d} \quad (21)$$

donde

M es el momento producido por las cargas de servicio,

A_s es el área del acero de tensión

d es el peralte efectivo.

Un criterio aun más sencillo, aunque bastante más tosco, consiste en suponer - que $f_s = 0.60 f_y$.

Los anchos de grietas calculados se comparan con los anchos permisibles que, según las condiciones de exposición, varían de 0.1 mm a 0.5 mm.

En el capítulo 8 de la ref 6 se describen otros procedimientos para predecir - agrietamiento.

En el ejemplo 11 se muestra un cálculo de agrietamiento típico.

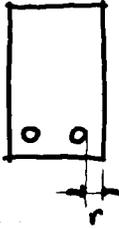
El Reglamento del D.D.F. 1976 presenta otro criterio para estimar el agrietamiento.

7. ESTIMACION DEL ANCHO DE GRIETAS

Uno de los procedimientos más sencillos para predecir el ancho de grietas es la ecuación propuesta por la CACA (ver sección 8.4.2 de la ref 6).

$$w_{\max} = K r \frac{f_s}{E_s} \quad (20)$$

Esta fórmula da el ancho máximo de agrietamiento a la altura del acero de tensión, en centímetros. K es una constante que vale 3.3, para el caso de varillas corrugadas. r es el recubrimiento lateral libre tal como se indica en la fig 14. El valor de f_s , el esfuerzo en el acero producido por las cargas de servicio, puede calcularse aplicando el método de la sección transformada expuesto en la sección 3. Dado lo aproximado de los cálculos de agrietamiento, el esfuerzo en el acero puede también esti -



$$w_{max} = Kr \frac{f_s}{E_s}$$

$K = 3.3$, para varillas corrugadas

r = recubrimiento lateral libre

f_s = esfuerzo en el acero

E_s = módulo de elasticidad del acero

Fig ⑭ Fórmula de CACA para determinar el ancho máximo de grieta a la altura del refuerzo de tensión.

8 DIMENSIONAMIENTO DE SECCIONES SUJETAS A FLEXION

El problema de dimensionamiento por flexión puede plantearse en distintas formas. Cuando no existe ninguna limitación particular, el proyectista tiene libertad completa para fijar las características de la sección, en lo que se refiere tanto a los **dimensiones del concreto** como a la cantidad de acero. También puede seleccionar libremente las características del concreto y del acero. Evidentemente existe en cada caso un número infinito de soluciones técnicamente correctas. La elección de una solución depende de consideraciones económicas y constructivas, que pueden ser muy variables según las circunstancias de cada caso.

8.1 Vigas rectangulares simplemente armadas

En el ejemplo 12 se considera el caso de la determinación del acero cuando están fijadas las dimensiones de la sección. El caso más general en el cual se conocen el momento flexionante y las resistencias de los materiales, y se pretende determinar las dimensiones de la sección y el área de acero necesaria, se trata en el ejemplo 13.

8.2 Secciones rectangulares doblemente armadas

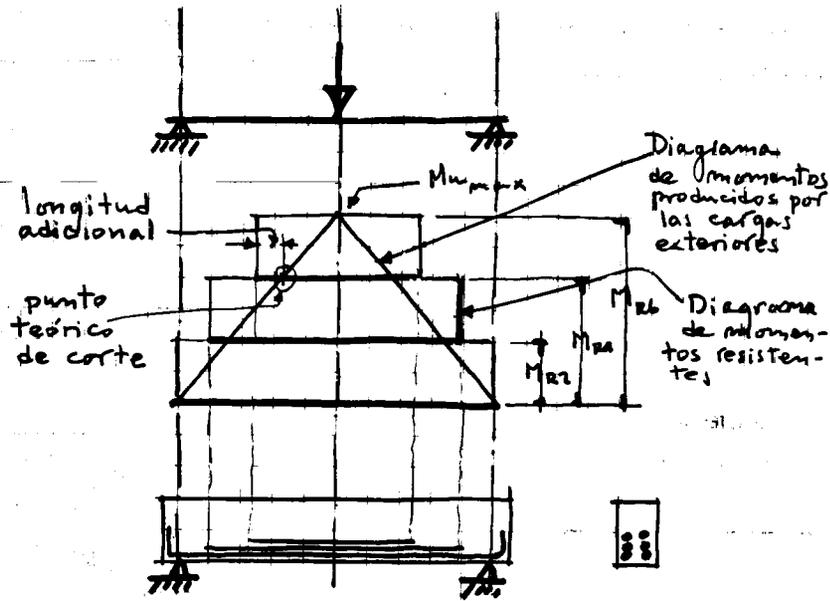
En el ejemplo 14 se determinan las áreas de acero de tensión y de compresión de una sección rectangular de dimensiones dadas, cuya capacidad como simplemente armada es insuficiente para resistir el momento externo.

8.3 Secciones T

En la mayoría de los casos las dimensiones de las vigas T están definidas por consideraciones ajenas a la resistencia a flexión. El dimensionamiento se reduce entonces a la determinación del acero necesario en una sección de características geométricas dadas. En el ejemplo 15 se ilustra un caso en que la profundidad del bloque de esfuerzos es superior al espesor del patín. Esta situación se presenta poco en casos prácticos ya que casi siempre la profundidad del bloque es inferior al espesor del patín, pudiéndose entonces aplicar los procedimientos propios de vigas rectangulares, considerando que el ancho de la viga es igual al ancho efectivo de vigas T (fig 8).

9 CORTE Y DOBLADO DE VARILLAS

Una de las ventajas del concreto es la posibilidad de variar la resistencia a lo largo de un miembro de acuerdo con la forma en que varía el momento a que está sujeta. Esta se logra interrumpiendo o doblando las varillas en forma conveniente como se indica de manera cualitativa en la fig 15. Las secciones donde es posible cortar o doblar el refuerzo pueden determinarse a partir del diagrama de momentos por métodos semigráficos teniendo en cuenta que el acero es prácticamente proporcional al momento. Así basta calcular el acero en las secciones críticas y hacerlo variar en las demás secciones de acuerdo con el diagrama de momentos. Los cortes y dobleces se hacen siempre un poco más allá de los puntos teóricos donde el acero puede interrumpirse con el fin de asegurar un anclaje adecuado y de prever variaciones respecto a los diagramas de-



momentos teóricos. Esta longitud adicional se especifica en los reglamentos en función del peralte efectivo, la longitud de desarrollo definida en la sección 5, y el diámetro de las varillas de refuerzo. De una manera aproximada puede decirse que las longitudes adicionales que suelen recomendarse son del orden de un peralte efectivo. En el ejemplo 17 se ilustra cómo puede variarse el acero de acuerdo con los requisitos de momento.

M_{R6} = Momento resistente con 6 varillas
 M_{R4} = " " " 4 "
 M_{R2} = " " " 2 "

Fig (15) Corte de varillas en vigas de concreto reforzado



GA 11 33 014

solo sentida y para vigas. Estos valores son aplicables únicamente para situaciones en que una deflexión excesiva no perjudicaría a elementos arquitectónicos adyacentes. En caso contrario, así como en el caso de elementos más esbeltos que los indicados en la tabla, es necesario calcular deflexiones para compararlas con las que se estimen aceptables. Las longitudes L , en miembros no integrales con los apoyos, se toman iguales al claro libre más el peralte del elemento, pero no superiores a la distancia entre centros de apoyos. En elementos continuos se toma la distancia centro a centro. En voladizos se toma la longitud al paño del apoyo.

TABLA 1 PERALTES MÍNIMOS ADMISIBLES EN LOSAS APOYADAS EN LADOS OPUESTOS Y VIGAS, SIN COMPROBACION DE DEFLEXIONES

10 DIMENSIONAMIENTO DE LOSAS APOYADAS EN LADOS OPUESTOS

El análisis de este tipo de losas bajo carga uniforme se hace como si se tratara de vigas. Suele considerarse una faja de ancho unitario (generalmente un metro), perpendicular a los apoyos. En el ejemplo 16 se presenta el diseño de una losa de esta clase.

10.1 Peralte mínimo

Algunos reglamentos hacen recomendaciones sobre los peraltes mínimos que pueden adoptarse sin que haya peligro de que las deflexiones sean excesivas. Estas recomendaciones facilitan la elección de peraltes tentativos para cálculos preliminares. La tabla 1 es una tabla de peraltes mínimos típica, para losas que cargan en un

Miembros	Simplemente apoyada	Un extremo continuo	Ancho extremo continuo	Voladizo
Losas	$L/20$	$L/24$	$L/28$	$L/10$
Vigas	$L/16$	$L/18.5$	$L/21$	$L/8$

10.2 Recomendaciones sobre refuerzo

El refuerzo debe cumplir ciertos requisitos.

Lo cuantía máxima, como se indicó anteriormente, no debe exceder del 50 al 100% de la correspondiente a la condición balanceado.

Un criterio sencillo para determinar la cuantía mínima de acero para flexión es rá dado por la siguiente ecuación:

$$P_{min} \geq 0.7 \frac{\sqrt{f_c}}{f_y} \quad (22)$$

Además debe proporcionarse acero suficiente para prever los efectos de los cambios volumétricos. Una regla sencilla es la de fijar un porcentaje mínimo de 0.2% en elementos no expuestos a la intemperie y, el doble, en el caso de que sí lo estén. El porcentaje se refiere al área total de la sección, no al producto bd como para el acero de flexión.

Según el Reglamento del D.D.F. la separación del acero principal, en el sentido de la flexión, no debe exceder de 30 cm ni 3.5 veces el peralte total.

Además del refuerzo principal en el sentido de la flexión, las losas deben contar con refuerzo transversal. Este refuerzo cumple dos funciones: contrarresta los efectos de los cambios volumétricos y resiste los momentos normales al sentido del momento principal, que pudiera producir una carga concentrada. Su cuantía es del orden del refuerzo para cambios volumétricos mencionado anteriormente. La separación de este refuerzo no debe exceder de 50 cm ni de 3.5 h según las recomendaciones del Reglamento del D.D.F. El refuerzo debe colocarse de manera que se cuente con suficiente recubrimiento para proporcionar protección adecuada contra corrosión y permitir que se desarrolle conve-

nientemente la adherencia entre el refuerzo y el concreto. El Reglamento del D.D.F. recomienda que el recubrimiento de cada barra sea de por lo menos un centímetro o el diámetro de la barra, rigiendo el valor mayor.

En la ayuda de diseño 45 a de la ref 2, así como en las refs 6 y 7 se hacen recomendaciones sobre la manera de disponer el refuerzo en losas apoyadas en lados opuestos.

11. DIMENSIONAMIENTO DE VIGAS

En la sección 8 se consideró el dimensionamiento de secciones de concreto reforzado sujetos a flexión. El dimensionamiento completo de vigas comprende aspectos adicionales que se comentan brevemente a continuación. En el ejemplo 17 se muestra el diseño completo de una viga rectangular. El diseño de vigas T es semejante.

11.1 Peralte mínimo

Lo mismo que para las losas tratadas en la sección anterior, es usual recomendar peraltes mínimos a partir de los cuales se puede prescindir de cálculos de deflexiones. En la tabla 1 se muestran valores típicos. Las consideraciones generales hechas para la

losas en la sección 10.1 son también aplicables a vigas.

11.2 Recomendaciones sobre refuerzo principal

Las recomendaciones sobre cuantías máximas y mínimas admisibles son semejantes a las expuestas para losas en la sección 10.2. En secciones con poco espacio disponible el refuerzo puede colocarse en más de un lecho o agruparse en haces hasta de cuatro varillas. En caso de agrupar varillas en esta forma deben respetarse las recomendaciones que al respecto suelen dar los reglamentos.

dos para tener en cuenta en forma semi-empírica el comportamiento real de losas observado experimentalmente. Los valores dados prevén variaciones de carga moderadas.

En la tabla 2 se presentan los coeficientes de momento del Reglamento del D.D.F.

12. DIMENSIONAMIENTO DE LOSAS PERIMETRALMENTE APOYADAS

12.1 Análisis

El análisis elástico de losas perimetralmente apoyadas no es fácil. Por otra parte los resultados obtenidos de un análisis de este tipo no son rigurosamente correctos ya que el comportamiento del concreto no es estrictamente elástico. Las dificultades de tener en cuenta los efectos del agrietamiento, de las deflexiones de las vigas sobre las que se apoyan las losas y de las variaciones posibles de la carga viva contribuyen a agrovar la complejidad del análisis.

Para simplificar el problema, los reglamentos suelen proporcionar coeficientes. Estos coeficientes están basados en los resultados de análisis elásticos rigurosos, modifica-

TABLA 2

COEFICIENTES DE MOMENTOS PARA TABLEROS RECTANGULARES, FRANJAS CENTRALES

Para las franjas extremas multiplíquense los coeficientes por 0.60

Tablero	Momento	Claro	Relación de lados corto a largo, $m = a_1/a_2$															
			0		0.5		0.6		0.7		0.8		0.9		1.0			
			I	II	I	II	I	II	I	II	I	II	I	II	I	II		
Interior Todas las bordes continuas	Neg. en bordes interiores	corto	998	1018	553	565	489	498	432	438	381	387	333	338	288	292		
		largo	516	544	409	431	391	412	371	388	347	361	320	330	288	292		
	positivo	corto	630	668	312	322	268	276	228	236	192	199	158	164	126	130		
		largo	175	181	139	144	134	139	130	135	128	133	127	131	126	130		
De borde Un lado corto discontinuas	Neg. en bordes interiores	corto	998	1018	568	594	506	533	451	478	403	431	357	388	315	346		
		largo	516	544	409	431	391	412	372	392	350	369	326	341	297	311		
	positivo	corto	326	0	258	0	248	0	236	0	222	0	206	0	190	0		
		largo	630	668	329	356	292	306	240	261	202	219	167	181	133	144		
		largo	179	187	142	149	137	143	133	140	131	137	129	136	129	135		
De borde Un lado largo discontinuas	Neg. en bordes interiores	corto	1060	1143	583	624	514	548	453	481	397	420	346	364	297	311		
		largo	587	687	465	545	442	513	411	470	379	426	347	384	315	346		
	positivo	corto	651	0	362	0	321	0	283	0	250	0	219	0	190	0		
		largo	751	912	334	366	285	312	241	263	202	218	164	175	129	135		
		largo	185	200	147	158	142	153	138	149	135	146	134	145	133	144		
De esquina Das lados adyacentes discontinuas	Neg. en bordes interiores	corto	1060	1143	598	653	530	582	471	520	419	464	371	412	324	364		
		largo	600	713	475	564	455	541	429	506	394	457	360	410	324	364		
	positivo	corto	651	0	362	0	321	0	277	0	250	0	219	0	190	0		
		largo	326	0	258	0	248	0	236	0	222	0	206	0	190	0		
		largo	751	912	358	416	306	354	259	298	216	247	176	199	137	153		
		largo	191	212	152	168	146	163	142	158	140	156	138	154	137	153		
Aislada cuatro lados dis- continuas	Neg. en bordes discontinuos	corto	570	0	550	0	530	0	470	0	430	0	380	0	330	0		
		largo	330	0	330	0	330	0	330	0	330	0	330	0	330	0		
	positivo	corto	1100	1670	830	1180	800	1130	720	1190	640	1070	570	950	500	830		
		largo	200	230	500	830	500	830	500	830	500	830	500	830	500	830		

Caso I. losa colada monolíticamente con sus apoyos
 Caso II. losa no colada monolíticamente con sus apoyos
 Los coeficientes multiplicados por $10^{-4} w a_1^2$ dan momentos por unidad de ancho

Para el caso I, a_1 y a_2 pueden tomarse como los claros libres entre paños de vigas; para el caso II se tomarán como los claros entre ejes, pero sin exceder el claro libre más dos veces el espesor de la losa.

Estos coeficientes dan momentos por unidad de ancho en las franjas centrales, cuando se multiplican por $10^{-4} w a_1^2$, siendo w la carga por unidad de ancho y a_1 , el claro corto. Las franjas centrales tienen un ancho igual a la mitad del claro perpendicular a ellas.

Para obtener los momentos en las franjas laterales se multiplican los coeficientes de la tabla por 0.60.

Los coeficientes varían de acuerdo con las condiciones de apoyo en los bordes del tablero considerado y con la relación, a_1/a_2 , es decir, la relación entre las longitudes de los claros corto y largo.

12.2 Peralte mínimo

Como en el caso de losas con flexión en un solo sentido los reglamentos suelen fijar los peraltes mínimos admisibles. El reglamento del D.D.F., por ejemplo, recomienda como valor del peralte efectivo el perímetro de la losa dividido entre 300. Al aplicar este criterio la longitud para lados discontinuos se debe incrementar en un 50%, si los apoyos de la losa no son monolíticos con ella, y en un 25% cuando lo sean.

12.3 Recomendaciones sobre refuerzo

Los cortes y doblados de varillas se pueden hacer de acuerdo con las indicaciones de la fig. 16. En bordes discontinuos se usa $a_1/5$ para el acero negativo y $a_2/7$ para el positivo. Los valores recomendados deben aplicarse en ambos sentidos de la losa. Las consideraciones sobre refuerzo mínimo y máximo hechas para losas con flexión en un sentido, son también aplicables a losas perimetralmente apoyadas.

12.4 Losas con relación de lado corto a lado largo menor que 0.5

Las losas con esa relación pueden considerarse como losas flexionadas en el sentido corto únicamente. Debe preverse un refuerzo nominal sobre los bordes cortos donde puede presentarse algo de momento negativo.

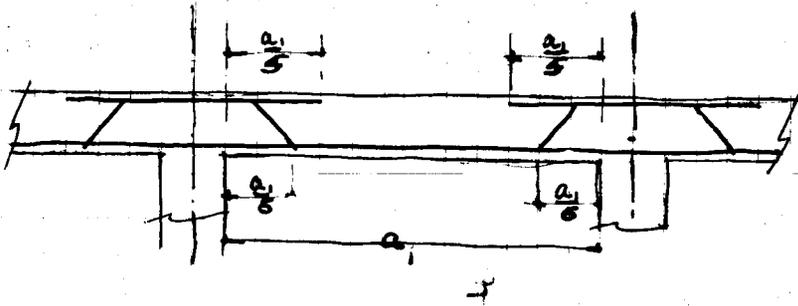


Fig (16) Corte y doblado de varillas en losas perimetralmente apoyadas. (En el claro largo se usan las mismas distancias que en el corto.)

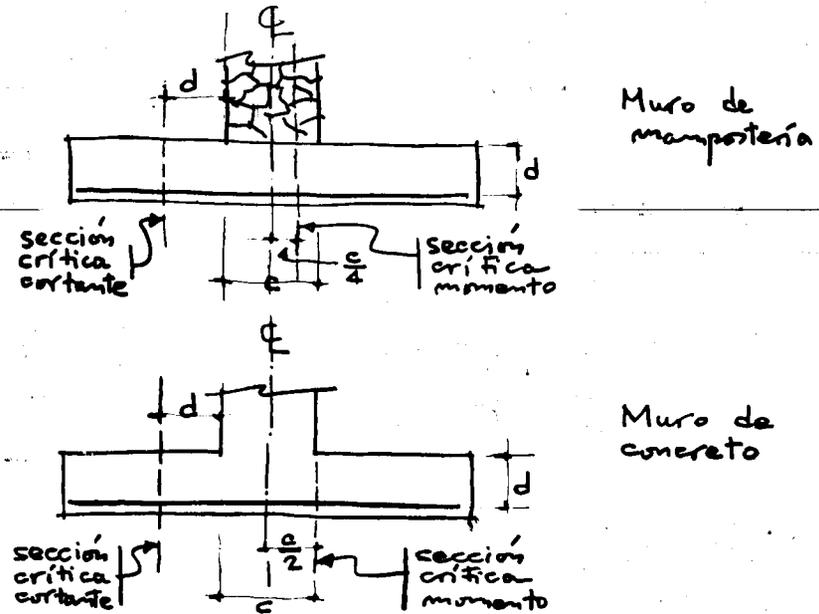


Fig (17) Secciones críticas en zapatas para muros

13. DIMENSIONAMIENTO DE ZAPATAS

13.1 Zapatas para muros

Las zapatas para muros se diseñan como valadizos considerando un ancho unitario, generalmente de un metro. La sección crítica para cortante se considera que se encuentra a una distancia de un peralte efectivo del paño del apoyo. La sección crítica para momento, de acuerdo con las recomendaciones del D.D.E se considera a la mitad de la distancia entre el centro y el paño del muro, si éste es de mampostería y al paño del muro, si este es de concreto, como se indica en la fig 17. Para revisión de longitudes de desarrollo se toma la misma sección. El D.D.E recomienda un peralte mínimo de 10 cms. Debe proporcionarse refuerzo transversal con un criterio análogo al mencionado para losas apoyadas en lados opuestos, indicado en la sección 10.

El ancho requerido para resistir la carga transmitida por el muro depende de la capacidad del terreno. Debe distinguirse entre presión total y presión neta. La presión neta es igual a la presión total menos la presión debida al peso propio de la zapata (fig 18). La presión total debe ser igual o menor que la capacidad de carga del terreno. Los momentos y fuerzas cortantes que actúan sobre la zapata son función de la presión neta exclusivamente.

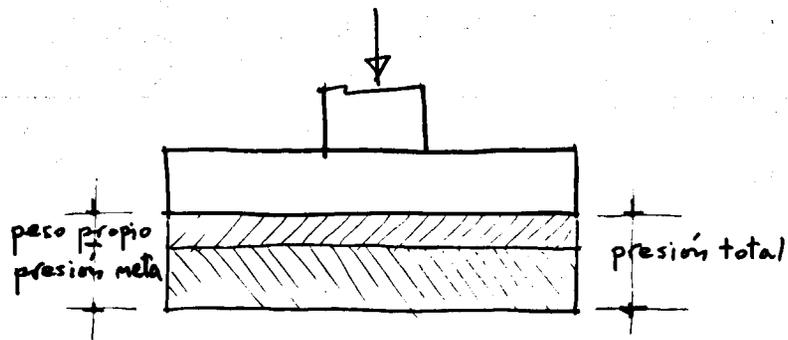


Fig (18) Presión neta y presión total en zapatas de cimentación

13.2 Zapatas para columnas aisladas

La diferencia principal con respecto al dimensionamiento de zapatas para muros reside en los requisitos de fuerza cortante que se reseñaron en la sección 4.2. En la fig 19 se muestran las secciones críticas que deben considerarse para distintos efectos. Si la zapata es cuadrada, el refuerzo se distribuye uniformemente en todo el ancho en ambos sentidos. Si es rectangular el refuerzo debe distribuirse con los criterios que al respecto proporcionen los reglamentos.

En el ejemplo 19 se dimensiona una zapata cuadrada para una columna de concreto.

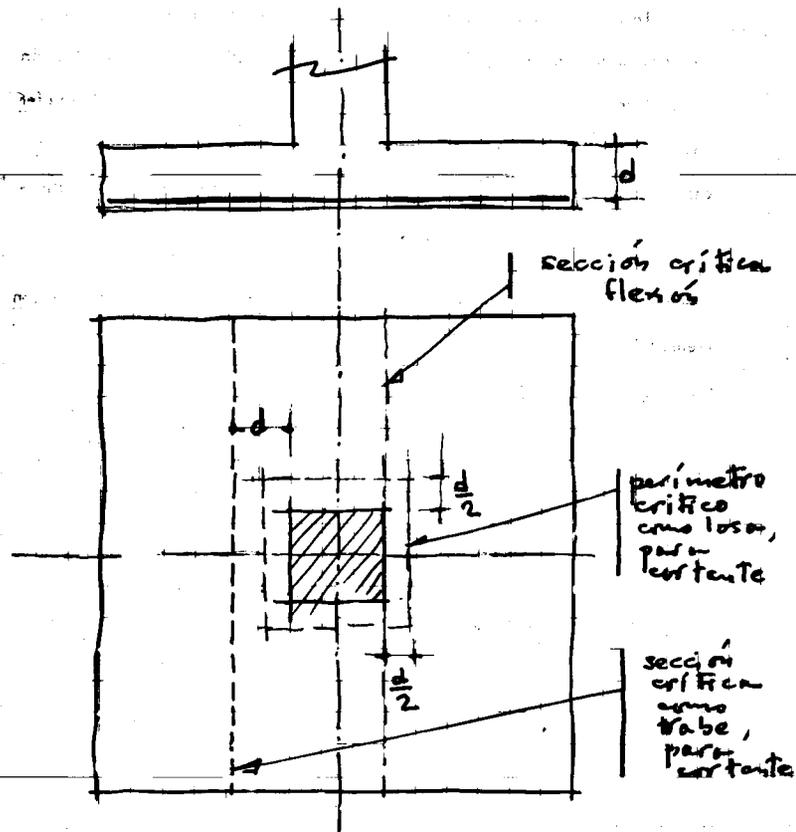


Fig 19 Secciones críticas en zapatas para columnas aisladas

14. EJEMPLOS

Se presenta a continuación una serie de ejemplos ilustrando la aplicación de los conceptos y principios expuestos en las secciones anteriores.

En general se han seguido las recomendaciones del D.D.F.

aunque no en forma estricta en algunos casos. Se ha procurado que los ejemplos sean sencillos, haciendo hincapié en los aspectos fundamentales, e insistiendo poco en las cuestiones de detalle, que dependen fundamentalmente de las recomendaciones específicas de los diversos códigos. El enfoque es educativo y de ninguna forma deben tomarse como modelo para diseño en gabinetes de cálculo. Cada ejemplo viene precedido de un pequeño comentario.

Ejemplo 1. - Resistencia a flexión de una sección rectangular simplemente armada

Se trata de encontrar la resistencia de una sección de características conocidas. Antes de calcular la resistencia se verificó si el acero dado queda comprendido dentro de los límites establecidos en la sección de "Especificaciones y constante" del ejemplo. El acero máximo admisible para la sección dada se calculó siguiendo dos caminos diferentes. En la alternativa a) se partió de condiciones de equilibrio y de compatibilidad de deformaciones. Este enfoque puede utilizarse para cualquier tipo de sección. En la alternativa b) el acero correspondiente a la condición balanceada se obtuvo a partir de la ec (6), válida únicamente para secciones con la zona de compresión rectangular.

La resistencia se calculó de tres maneras diferentes. En la alternativa a) se aplicaron las condiciones de equilibrio, suponiendo el esfuerzo en el acero conocido. Esto es posible ya que se comprobó previamente que el acero fluye. En b) se aplicó la ec (5). En c) se utilizó la gráfica de la fig 6.

EJEMPLO (1)

Y4

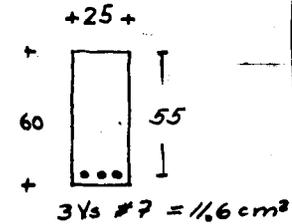
RESISTENCIA A FLEXIÓN DE UNA SECCIÓN RECTANGULAR SIMPLEMENTE ARMADA.

DATOS

Concreto : $f'_c = 200 \text{ kg/cm}^2$

Acero : $f_y = 4000 \text{ kg/cm}^2$

$E_s = 2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$



ESPECIFICACIONES Y CONSTANTES

Esfuerzos reducidos.

$$f_c^* = 0.8 f'_c = 0.8(200) = 160 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_c'' = 0.85 f_c^* = 0.85(160) = 136 \text{ kg/cm}^2$$

$$\Rightarrow \underline{f_c^* = 160 \text{ kg/cm}^2} \text{ y } \underline{f_c'' = 136 \text{ kg/cm}^2}$$

Acero mínimo

$$P_{min} = 0.7 \frac{\sqrt{f'_c}}{f_y} = 0.7 \frac{\sqrt{200}}{4000} = 0.0025$$

Acero máximo

$$P_{max} = \rho_b = \frac{f_c''}{f_y} \frac{4800}{f_y + 6000} = \frac{136}{4000} \frac{4800}{10000} = 0.01632$$

$$\Rightarrow \underline{P_{min} = 0.0025}$$

$$\underline{P_{max} = 0.01632}$$

EJEMPLO ①

3/4

RESISTENCIA A FLEXIÓN DE UNA SECCIÓN RECTANGULAR SIMPLEMENTE ARMADA.

REVISIÓN DE LIMITACIONES DE ACERO.

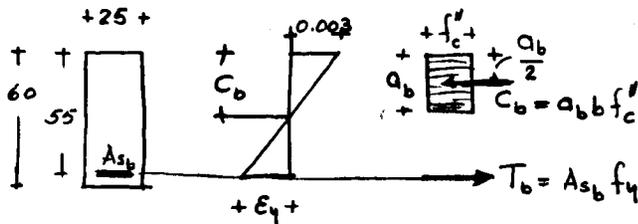
Acero mínimo

$$P_{smin} = P_{min} b d = 0.0025 \times 25 \times 55 = 3.44 \text{ cm}^2$$

$$P_{smin} = 3.44 \text{ cm}^2 < 11.6 \text{ cm}^2.$$

Acero máximo

a) Aplicando método general



$$\epsilon_y = \frac{4000}{2 \times 10^6} = 0.002$$

$$\frac{C_b}{0.003} = \frac{d}{0.003 + \epsilon_y} \Rightarrow C_b = \frac{0.003}{0.005} 55 = \underline{\underline{33 \text{ cm} = C_b}}$$

$$a_b = 0.8 C_b = 0.8(33) = \underline{\underline{26.4 \text{ cm} = a_b}}$$

$$C_b = a_b b f'_c = 26.4(25)(136) = 89760 \text{ kg}$$

$$\text{si } T_b = C_b$$

$$A_s f_y = 89760 \text{ kg}$$

$$A_{s_b} = \frac{89760}{4000} = \underline{\underline{22.44 \text{ cm}^2 = A_{s \text{ máx}} > 11.6 \text{ cm}^2}}$$

EJEMPLO ①

3/4

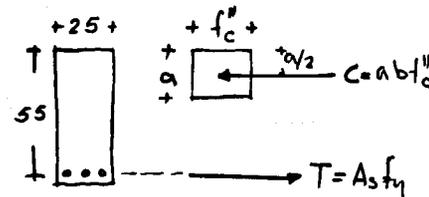
RESISTENCIA A FLEXIÓN DE UNA SECCIÓN RECTANGULAR SIMPLEMENTE ARMADA.

b) Aplicando el valor calculado bajo "Especificaciones".

$$P_{s \text{ máx}} = P_b b d = 0.01632 \times 25 \times 55 = \underline{\underline{22.44 \text{ cm}^2 > 11.6 \text{ cm}^2}}$$

CÁLCULO DE RESISTENCIA.

a) Método general



$$C = T$$

$$a b f'_c = A_s f_y$$

$$a = \frac{A_s f_y}{b f'_c}$$

$$a = \frac{11.6 \times 4000}{25 \times 136} = 13.65 \text{ cm}$$

$$M_R = F_R A_s f_y \left(d - \frac{a}{2}\right) = 0.9(11.6)(4000)\left(55 - \frac{13.65}{2}\right) =$$

$$M_R = 2011788 \text{ kg-cm}$$

$$M_R = \underline{\underline{20.117 \text{ Ton-m}}}$$

b) Aplicando la ecuación 5a

$$M_R = F_R b d^2 f'_c q (1 - 0.59q)$$

$$q = \frac{A_s f_y}{b d f'_c} = \frac{11.6(4000)}{25(55)(136)} = 0.248$$

EJEMPLO 1

4/4

RESISTENCIA A FLEXIÓN DE UNA SECCIÓN
RECTANGULAR SIMPLEMENTE ARMADA.

$$M_R = 0.9(25)(55)^2(136)(0.248)(1 - 0.5 \times 0.248) =$$

$$M_R = 20\,10956 \text{ Kg-cm.}$$

$$M_R = 20.109 \text{ Ton-m}$$

c) Utilizando la gráfica de la figura 6

$$q = 0.248 ; \quad \frac{M_R}{F_c b d^2 f_c} = 0.217$$

$$\Rightarrow M_R = 0.9(25)(55)^2(136)(0.217) = 2\,008\,660 \text{ kg-cm.}$$

$$M_R = 20.086 \text{ Ton-m}$$

Ejemplo 2.- Resistencia a flexión de una sección rectangular doblemente armada

El acero que la sección dada puede admitir como sección simplemente armada, si se considera que el máximo permisible es P_b , es

$$0.01632 b d = 0.01632(30)(52) = 25.46 \text{ cm}^2$$

El acero dado es superior a esta cantidad, por lo que se ha previsto acero de compresión.

Se revisó si se cumplían los requisitos de acero mínimo, a título ilustrativo. En una sección doblemente armada correctamente dimensionada es obvio que estos requisitos se cumplen siempre.

El acero máximo admisible como sección doblemente armada se determinó a partir de consideraciones de equilibrio y de compatibilidad de deformaciones. Resultó ser superior al dado. El momento se calculó por tanteos, variando la profundidad del eje neutro hasta lograr satisfacer las condiciones de equilibrio. Generalmente son suficientes dos o tres tanteos.

La precisión numérica mostrada es adecuada para casos prácticos. Cuando existe acero en la zona de compresión de una sección es conveniente proceder, en general, por tanteos porque la deformación unitaria del acero de compresión, y, por lo tanto, el esfuerzo correspondiente, varían con la profundidad del eje neutro. En el ejemplo, sin embargo, se podría haber resuelto el problema directamente, porque dada la geometría de la sección considerada el acero fluía en todos los casos, pudiéndose haber tomado un valor de $f'_s = f_y$.

EJEMPLO (2) 1/5

RESISTENCIA A FLEXIÓN DE UNA SECCIÓN RECTANGULAR DOBLEMENTE ARMADA.

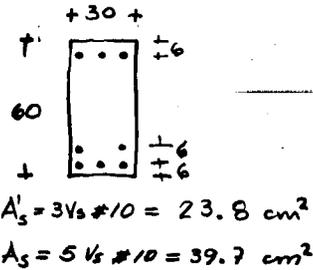
DATOS.Concreto

$f'_c = 200 \text{ kg/cm}^2$

Aceros

$f_y = 4000 \text{ kg/cm}^2$

$E_s = 2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$

ESPECIFICACIONES Y CONSTANTESEsfuerzos reducidos (Ver Ejemplo 1)

$f'_c = 160 \text{ kg/cm}^2$

$f'_c = 136 \text{ kg/cm}^2$

Aceros mínimo

$\rho_{min} = 0.0025$

Aceros máximo

el correspondiente a la condición balanceada.

REVISIÓN DE LIMITACIONES DE ACEROAceros mínimo

$A_{smin} = 0.0025 b d$

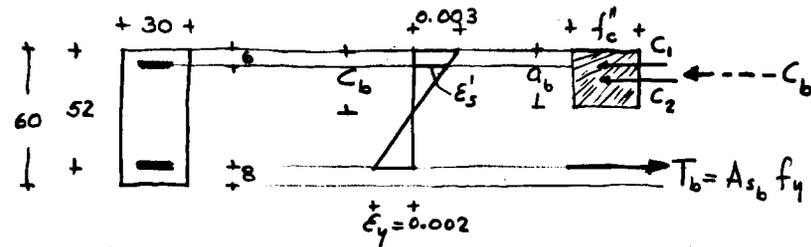
Recubrimiento de cálculo $\cong 8 \text{ cm}$

$\therefore d = h - 8 = 60 - 8 = 52 \text{ cm.}$

EJEMPLO (2) 2/5

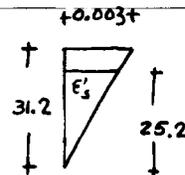
RESISTENCIA A FLEXIÓN DE UNA SECCIÓN RECTANGULAR DOBLEMENTE ARMADA.

$A_{smin} = 0.0025 (30)(52) = \underline{3.9 \text{ cm}^2} < 39.7 \text{ cm}^2 \checkmark$

Aceros máximoAceros de tensión para condición balanceada.

$c_b = \frac{0.003}{0.003 + 0.002} (52) = 31.2 \text{ cm}$

$a_b = 0.8 c_b = 0.8 (31.2) = 24.96 \text{ cm}$

Cálculo de C_1 (fuerza de compresión desarrollada por el acero de compresión).

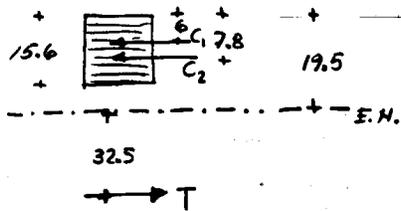
$\epsilon_s' = 0.003 \frac{25.2}{31.2} = 0.002423 > \epsilon_y$

 \therefore el acero de compresión fluye y se encuentra sujeto a un esfuerzo $f_y = 4000 \text{ kg/cm}^2$

$\Rightarrow C_1 = 23.8 \times 4000 = \underline{95200 \text{ kg}}$

EJEMPLO (2) 5/5

RESISTENCIA A FLEXIÓN DE UNA SECCIÓN RECTANGULAR DOBLEMENTE ARMADA.

Cálculo del Momento resistente

	Fuerza (Ton)	brazo (m)	Momento (tm-m).
C ₁	95.2	0.135	12.852
C ₂	63.648	0.117	7.447
T	158.8	0.325	51.61
			<u>71.909</u> tm-m.

$$M_R = F_R (71.909) =$$

$$M_R = 0.9 (71.909) = 64.718 \text{ Ton-m.}$$

$$M_R = 64.718 \text{ Ton-m}$$

Ejemplo 3.- Resistencia a flexión de una sección T

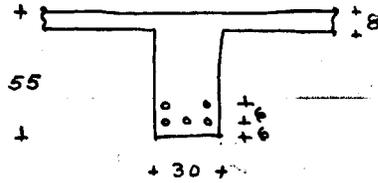
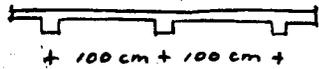
Este caso no pudo tratarse como una viga rectangular de anchó igual al ancho efectivo de la T, porque el área del patín no es suficiente para desarrollar la fuerza de compresión requerida para equilibrar la fuerza de tensión proporcionada por el acero. El problema pudo resolverse directamente por no haber acero en la zona de compresión.

Se ilustra en el ejemplo la manera de determinar el recubrimiento de cálculo, que depende de la colocación del acero de tensión.

EJEMPLO ③

RESISTENCIA A FLEXIÓN DE UNA SECCIÓN T

DATOS



$$A_s = 2\#9 + 3\#10 = 36.6 \text{ cm}^2$$

claro de la viga

$$l = 9 \text{ m}$$

Concreto $f'_c = 200 \text{ kg/cm}^2$

Acero $f_y = 4000 \text{ kg/cm}^2$; $E_s = 2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$

ESPECIFICACIONES Y CONSTANTES

Esfuerzos reducidos (Ver Ejemplo 1)

$$f'_c = 160 \text{ kg/cm}^2$$

$$f''_c = 136 \text{ kg/cm}^2$$

Acero mínimo

$$P_{min} = 0.0025$$

Acero máximo

el correspondiente a la condición balanceada.

ANCHO EFECTIVO

$$16t + b' = 16 \times 8 + 30 = 158 \text{ cm}$$

$$l/4 = 900/4 = 225 \text{ cm}$$

$$\text{c.a.c.} = 100 \text{ cm}$$

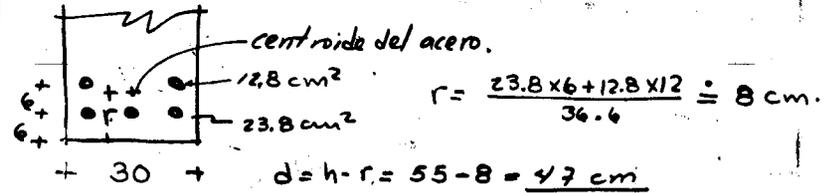
$$b = 100 \text{ cm.}$$

EJEMPLO ③

2/4

RESISTENCIA A FLEXIÓN DE UNA SECCIÓN T.

PERALTE EFECTIVO.



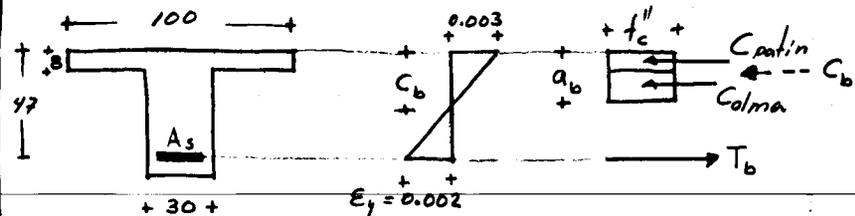
REVISIÓN DE LIMITACIONES DE ACERO

Acero mínimo

$$A_{smin} = 0.0025 b'd = 0.0025 (30)(47) = \frac{3.53 \text{ cm}^2}{< 36.6 \text{ cm}^2}$$

Acero máximo

Condición balanceada.



$$C_b = \frac{0.003}{0.003 + 0.002} (47) = 28.2 \text{ cm}$$

$$a_b = 0.8 C_b = 0.8 (28.2) = 22.56 \text{ cm.}$$

$$C_b = C_{calma} + C_{patin}$$

$$C_{calma} = (22.56 - 8)(30)(136) = 59\,404.8 \text{ kg}$$

$$C_{patin} = 8(100)(136) = 108\,800.0 \text{ kg}$$

$$C_b = 168\,204.8 \text{ kg}$$

EJEMPLO ③ 3/4
RESISTENCIA A FLEXIÓN DE UNA SECCIÓN T

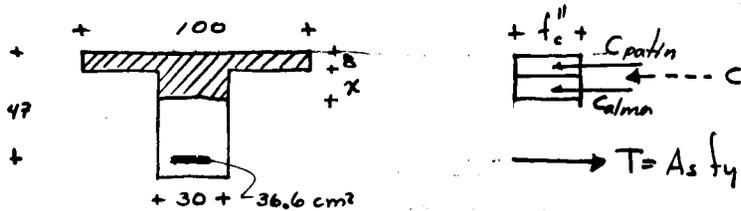
$$T_b = C_b$$

$$A_{s_b} f_y = 168 \cdot 204.8 \text{ kg}$$

$$A_{s_b} = \frac{168 \cdot 204.8}{4000} = 42.05 \text{ cm}^2$$

$$A_{s_{\max}} = A_{s_b} = 42.05 \text{ cm}^2 > 36.6 \text{ cm}^2$$

CÁLCULO DE RESISTENCIA.



$$T = A_s f_y = 36.6 \times 4000 = 146 \ 400 \text{ kg}$$

$$C_{patin} = 8(100)(136) = 108 \ 800 \text{ kg}$$

$$C = T = C_{calma} + C_{patin}$$

$$\Rightarrow C_{calma} = T - C_{patin} = 146 \ 400 - 108 \ 800 = 37 \ 600 \text{ kg}$$

$$C_{calma} = (b')(x)(f_c'')$$

$$x = \frac{C_{calma}}{b' f_c''} = \frac{37 \ 600}{30(136)} \doteq 9.2 \text{ cm.}$$

EJEMPLO ③ 4/4
RESISTENCIA A FLEXIÓN DE UNA SECCIÓN T

Tomando momentos con respecto a la fuerza de Tensión se tiene:

Fuerza (ton).	brazo (m).	Momento (Tm-m).
Calma	0.344	12.9344
C _{patin}	0.43	46.784
		<u>59.7189</u>

$$M_p = F_R (59.7189).$$

$$M_p = 0.9(59.7189) = 53.746 \text{ Tm-m.}$$

$$\Rightarrow M_p = 53.746 \text{ Tm-m.}$$

Ejemplos 4 a 6

Estos tres ejemplos ilustran la determinación de esfuerzos por medio del artificio de la sección transformada.

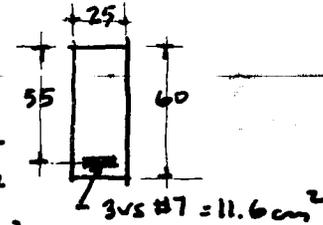
El módulo de elasticidad utilizado es el recomendado en el Reglamento del D.D.F. para efectos de corta duración. Para obtener el esfuerzo real en el acero es necesario multiplicar los esfuerzos f_r , a la altura del refuerzo, calculadas aplicando la fórmula de la escuadría a la sección transformada, por la relación modular, n . En la sección doblemente armada, se transformó el acero de compresión en concreto equivalente, multiplicando por $n-1$, para tener en cuenta el concreto desplazado por las varillas. En el mismo ejemplo, se consideró el acero concentrado a un nivel situado en el centro de gravedad de todas las varillas. Más correcto es transformar el área de cada lecho independientemente.

EJEMPLO ④

REVISIÓN DE ESFUERZOS EN UNA SECCIÓN RECTANGULAR SIMPLEMENTE ARMADA POR EL METODO DE LA SECCIÓN TRANSFORMADA

DATOS

Momento : 13 ton-m

Concreto : $f'_c = 200 \text{ kg/cm}^2$ Acero : $f_y = 4000 \text{ kg/cm}^2$ $E_s = 2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ 

CONSTANTES

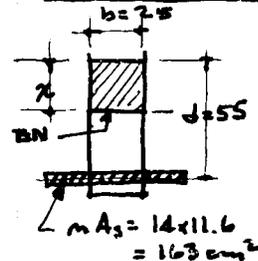
Módulo de elasticidad del concreto

$$E_c = 10000 \sqrt{f'_c} = 10000 \sqrt{200} = \underline{143000 \text{ kg/cm}^2}$$

Relación modular n

$$n = \frac{E_s}{E_c} = \frac{2000000}{143000} = \underline{14}$$

MOMENTO INERCIA SECCION TRANSFORMADA



Profundidad eje neutro

$$\begin{aligned} \frac{bx^2}{2} - m A_s (d-x) &= 0 \\ 12.5x^2 - 163(55-x) &= 0 \\ x^2 + 13.05x - 716 &= 0 \\ x &= \underline{20.9 \text{ cm}} \end{aligned}$$

EJEMPLO ④

REVISIÓN DE ESFUERZOS EN UNA SECCIÓN RECTANGULAR SIMPLEMENTE ARMADA POR EL MÉTODO DE LA SECCIÓN TRANSFORMADA

Momento de inercia

$$\frac{1}{3} \times 25 \times 20.9^3 = 76\,000$$

$$163 (55 - 20.9)^2 = 189\,500$$

$$I = 265\,500 \text{ cm}^4$$

CÁLCULO DE ESFUERZOS

$$f_c = \frac{M}{I} y_1 \quad \text{en} \quad z$$

$$f_c = \frac{1\,300\,000}{265\,500} \times 20.9 = 102 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_s = m f_c = m \frac{M}{I} y_2 = 14 \frac{1\,300\,000}{265\,500} \times 34.1$$

$$f_s = 2340 \text{ kg/cm}^2$$

EJEMPLO ⑤

REVISIÓN DE ESFUERZOS EN UNA SECCIÓN RECTANGULAR DOBLEMENTE ARMADA POR EL MÉTODO DE LA SECCIÓN TRANSFORMADA

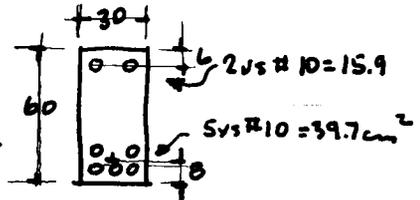
DATOS

Momento: 30 ton-m

Concreto: $f'_c = 200 \text{ kg/cm}^2$

Acero: $f_y = 4000 \text{ kg/cm}^2$

$E_s = 2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$

CONSTANTES

Módulo de elasticidad del concreto

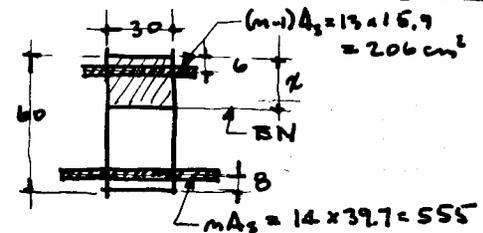
$$E_c = 10\,000 \sqrt{f'_c} = 10\,000 \sqrt{200} = 143\,000 \text{ kg/cm}^2$$

Relación modular

$$m = \frac{E_s}{E_c} = \frac{2\,000\,000}{143\,000} = 14$$

MOMENTO DE INERCIA SECCIÓN TRANSFORMADA

Profundidad de eje neutro



EJEMPLO (5)

2

REVISIÓN DE ESFUERZOS EN UNA SECCIÓN RECTANGULAR DOBLEMENTE ARMADA POR EL MÉTODO DE LA SECCIÓN TRANSFORMADA

$$\frac{30x^2}{2} + 206(x-6) - 555(52-x) = 0$$

$$x^2 + 50.7x - 2010 = 0$$

$$x = \underline{26.2}$$

Momento de inercia

Concreto:	$\frac{1}{3} \times 30 \times 26.2^3$	=	181 000
Acero compresión:	206×20.2^2	=	84 000
Acero tensión:	555×25.8^2	=	372 000
	I	=	<u>637 000</u>

CÁLCULO DE ESFUERZOS

$$f = \frac{My}{I}$$

Concreto:

$$f_c = \frac{30 \times 10^5}{637 000} \times 26.2 = \underline{123 \text{ Kg/cm}^2}$$

Acero de compresión:

$$f'_s = m f'_c = 14 \frac{30 \times 10^5}{637 000} \times 20.2 = \underline{1330 \text{ Kg/cm}^2}$$

Acero de tensión:

$$f_s = m f_t = 14 \frac{30 \times 10^5}{637 000} \times 25.8 = \underline{1700 \text{ Kg/cm}^2}$$

EJEMPLO (6)

1

REVISIÓN DE ESFUERZOS EN UNA SECCIÓN T POR EL MÉTODO DE LA SECCIÓN TRANSFORMADA

DATOS

Momento: $M = 40 \text{ ton-m}$

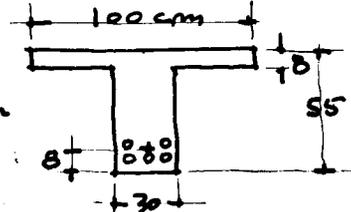
Concreto:

$$f'_c = 200 \text{ Kg/cm}^2$$

Acero:

$$f_y = 4000 \text{ Kg/cm}^2$$

$$E_s = 2 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$$



$$2\#9 + 3\#10 = 36.6 \text{ cm}^2$$

CONSTANTES

Módulo de elasticidad del concreto

$$E_c = 10 000 \sqrt{f'_c} = 10 000 \sqrt{200} = \underline{143 000 \text{ Kg/cm}^2}$$

Relación modular

$$m = \frac{E_s}{E_c} = \frac{2 000 000}{143 000} = \underline{14}$$

MOMENTO DE INERCIA SECCIÓN TRANSFORMADA

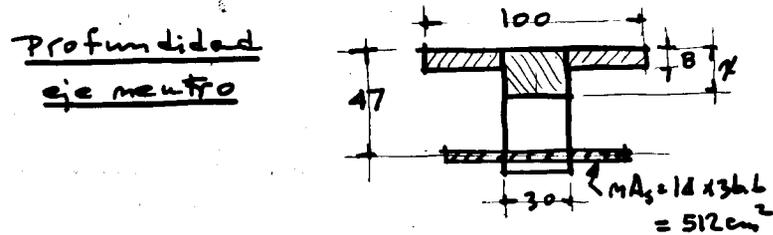
(En hoja 2)

EJEMPLO ⑥

2

REVISIÓN DE ESFUERZOS EN UNA SECCIÓN T
POR EL MÉTODO DE LA SECCIÓN TRANSFORMADA

MOMENTO DE INERCIA SECCIÓN TRANSFORMADA



$$\frac{30y^2}{2} + 70 \times 8 (47 - y) - 512 (47 - y) = 0$$

$$y^2 + 71.6y - 1756 = 0$$

$$y = 19.2 \text{ cm}$$

Momento de inercia

	Area (A)	Brazo (d)	d ²	Ad ²	I ₀
Patín	70 x 8 = 560	15.2	231	1 291 000	426
Alma	30 x 19.2 = 576	9.6	92	52 800	17 700
Acaro	512	27.8	772	395 000	—
				1 738 800	18 126

$$I = 1 738 800 + 18 126 = 1 756 926 \text{ cm}^4$$

CALCULO DE ESFUERZOS

(En hoja 3)

EJEMPLO ⑥

3

REVISIÓN DE ESFUERZOS EN UNA SECCIÓN T
POR EL MÉTODO DE LA SECCIÓN TRANSFORMADA

CALCULO DE ESFUERZOS

$$f = \frac{My}{I}$$

$$f_c = \frac{40 \times 10^5}{1 756 926} \times 19.2 = 43.6 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_s = n f_t = 12 \times \frac{40 \times 10^5}{1 756 926} \times 27.8 = 986 \text{ kg/cm}^2$$

000 18.

Ejemplo 7. - Resistencia a cortante de una viga rectangular

El refuerzo transversal de la viga considerada consiste en estribos cerrados de dos ramas.

Los requisitos de refuerzo mínimo se cumplen adecuadamente, ya que la sección del refuerzo transversal requerida para la separación máxima especificada de 30 cm es menor que la proporcionada por los estribos del No.3 utilizados. Se determinó la resistencia a partir de la sección crítica, que se encuentra a una distancia del paño del apoyo igual al peralte efectivo. Se supuso que en forma aproximada, la contribución del acero cambia a la mitad de la distancia entre estribos de distinta separación. Para calcular las zonas de influencia de las diferentes separaciones se procedió de la siguiente manera.

Considérese por ejemplo la zona donde los estribos se encuentran a 10 cm. El primer estribo se encuentra a 5 cm del paño del apoyo. Siguen 10 espacios de 10 cm, lo que da un metro. Suponiendo que la zona de influencia termina a la mitad de la distancia entre el último estribo con separación de 10 cm y el primero con separación de 15 cm faltaría agregar otros 7.5 cm que en el ejemplo se redondearon a 7 cm. Resulta entonces $5 + 10 + 7 = 112$ cm. De manera análoga pueden determinarse las zonas de influencia de las demás separaciones.

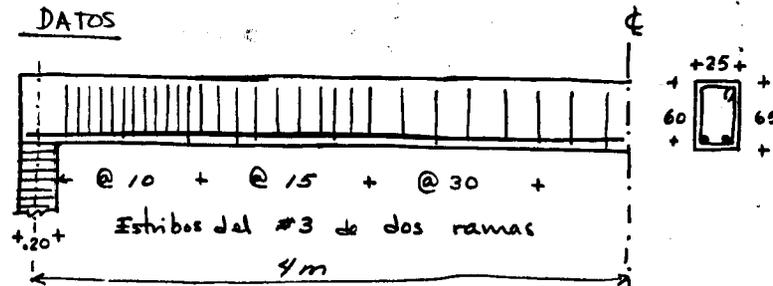
El procedimiento a seguir cuando se utiliza refuerzo inclinado es análogo. Las separaciones del refuerzo transversal en este caso se suelen considerar a lo largo de una línea paralela al eje y situada a la mitad del peralte efectivo. Cuando en una sección se combinan dos tipos de refuerzo transversal, por ejemplo estribos verticales y barras inclinadas, pueden sumarse las contribuciones de ambos refuerzos.

EJEMPLO 7

1/2

RESISTENCIA A CORTANTE DE UNA VIGA RECTANGULAR.

DATOS



(El primer estribo se encuentra a 5 cm del paño del apoyo).

Concreto : $f'_c = 200 \text{ kg/cm}^2$

Acero : $f_y = 2800 \text{ kg/cm}^2$

ESPECIFICACIONES Y CONSTANTES.

Esfuerzos reducidos (Ver Ejemplo 1).

$f_c^* = 160 \text{ kg/cm}^2$

Esfuerzo cortante que toma el concreto

$V_{cr} = 0.5 F_r \sqrt{f_c^*} = 0.5 (0.8) \sqrt{160} = 5.06 \text{ kg/cm}^2$

REVISIÓN DE LAS LIMITACIONES DEL REFUERZO TRANSVERSAL.

Separación máxima

$S_{\max} = \frac{d}{2} = \frac{60}{2} = 30 \text{ cm.}$

$A_{s\min} = \frac{3.5 b_s}{F_r f_y} = \frac{3.5 (25) (30)}{0.8 (2800)} = 1.17 \text{ cm}^2 < 1.42 \text{ cm}^2$
 = área del estribo de dos ramas del #3.

EJEMPLO (7) 2/2

RESISTENCIA A CORTANTE DE UNA VIGA RECTANGULAR.

CONTRIBUCIÓN DEL CONCRETO

$$V_{ce} = \sigma_{ce} b d = 5.06 (25)(60) = 7590 \text{ kg.}$$

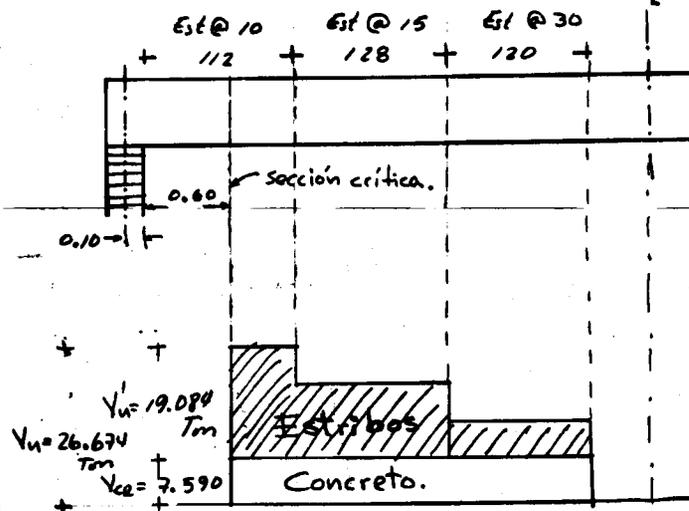
CONTRIBUCIÓN DE LOS ESTRIBOS

$$V'_u = \frac{F_e A_r f_y d}{s} \quad \therefore A_r = 210.71 = 1.42 \text{ cm}^2$$

$$V'_u = \frac{0.8(1.42)(2800)(60)}{s} = \frac{190848}{s}$$

S (cm)	10	15	30
V'_u (kg)	19084.8	12723.2	6361.6
V_u (kg)	26674.8	20313.2	13951.6

($V_u = V_{ce} + V'_u$)

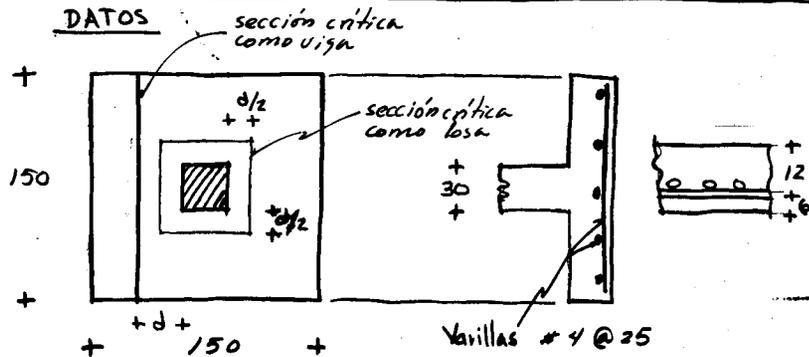
DIAGRAMA DE RESISTENCIA A CORTANTE

Ejemplo 8. - Resistencia a cortante de una zapata para columna aislada

Se consideró en el cálculo un valor promedio del peralte efectivo definido - por el plano de tangencia entre los dos lechos de varillas.

La resistencia como viga, en este caso, resultó ser menor que la resistencia - como losa. Sin embargo en muchas situaciones el valor crítico es el correspondiente a la condición de losa.

EJEMPLO ②

RESISTENCIA A CORTANTE DE UNA ZAPATA
PARA COLUMNA AISLADA.

Concreto : $f'_c = 200 \text{ kg/cm}^2$

Acero : $f_y = 2800 \text{ kg/cm}^2$

ESPECIFICACIONES Y CONSTANTES

Esfuerzos reducidos (Ver Ejemplo 1)

$$f_c^* = 160 \text{ kg/cm}^2$$

Esfuerzos nominales que resiste el concreto a cortante

como viga: $V_{cR} = 0.5 F_R \sqrt{f_c^*} = 5.06 \text{ kg/cm}^2$

como losa: $V_{cR} = F_R \sqrt{f_c^*} = 10.12 \text{ kg/cm}^2$

RESISTENCIA A CORTANTE.

A) Como viga.

$$V_{uA} = V_{cR} b d = 5.06 (150)(12) = 9108 \text{ kg.}$$

B) Como losa. $b_o = 4(30+12) = 168 \text{ cm.}$

$$V_{uB} = V_{cR} b_o d = 10.12 (168)(12) = 20402 \text{ kg.}$$

→ Rise la condición A

Ejemplo 9. - Cálculo de la longitud de desarrollo de una varilla

La fuerza T Produce un esfuerzo en la varilla igual al de fluencia:

$$\frac{20000}{5} = 4000 \text{ kg/cm}^2$$

Por lo tanto el anclaje debe ser capaz de desarrollar este esfuerzo.

El valor calculado con la ecuación 16 es superior a los valores mínimos especificados.

EJEMPLO 9

CÁLCULO DE LA LONGITUD DE DESARROLLO DE UNA VARILLA.

DATOS

Concreto

$$f'_c = 200 \text{ kg/cm}^2$$

Acero

$$f_y = 4000 \text{ kg/cm}^2$$



varilla del # 8

$$a_s = 5 \text{ cm}^2$$

$$d_b = 2.5 \text{ cm.}$$

$$T = 2000 \text{ kg.}$$

CONSTANTES

Esfuerzos reducidos (Ver Ejemplo 1).

$$f_c^* = 160 \text{ kg/cm}^2$$

CÁLCULO DE LA LONGITUD DE DESARROLLO.

$$L_{db \text{ min}} = 0.006 d_b f_y = 0.006 (2.5) (4000) = \underline{60 \text{ cm}} > 30 \text{ cm}$$

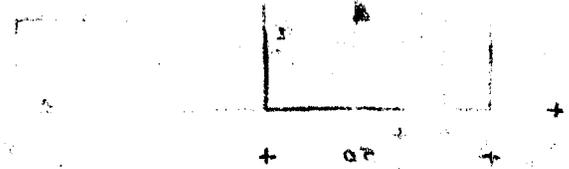
$$L_{db} = 0.06 \frac{a_s f_y}{\sqrt{f'_c}} = 0.06 \frac{5 (4000)}{\sqrt{200}} = 84.8 \text{ cm} > 60$$

$$\Rightarrow L_{db} = 85 \text{ cm}$$

Ejemplo 10.- Deflexión de una viga rectangular

Se consideró la sección agrietada transformada porque el porcentaje de acero de refuerzo es relativamente alto.

Cuando resulta una deformación excesiva y no es posible aumentar el tamaño de la sección puede agregarse acero de compresión, con lo cual se disminuye el factor F.



$$F_m = 1.25 = \frac{1}{1.25}$$

$$F_c = 1.25 = \frac{1}{1.25}$$

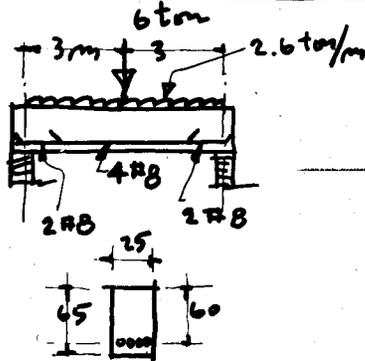
EJEMPLO 10DEFLEXION DE UNA VIGA RECTANGULARDATOSConcreto

$$f'_c = 2000 \text{ kg/cm}^2$$

Acero

$$f_y = 4000 \text{ kg/cm}^2$$

$$E_s = 2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$$

CONSTANTES Y ESPECIFICACIONESMódulo de elasticidad del concreto

$$E_c = 10\,000 \sqrt{f'_c} = 10\,000 \sqrt{2000} = \underline{\underline{143\,000 \text{ kg/cm}^2}}$$

Relación modular

$$n = \frac{E_s}{E_c} = \frac{2\,000\,000}{143\,000} = \underline{\underline{14}}$$

MOMENTO DE INERCIA DE LA SECCION TRANSFORMADA

(En la hoja 2)

EJEMPLO 10

2

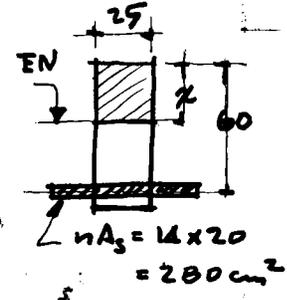
DEFLEXION DE UNA VIGA RECTANGULARMOMENTO DE INERCIA DE LA SECCION TRANSFORMADAProfundidad EN

$$\frac{b\eta^2}{2} - nA_s(d-\eta) = 0$$

$$12.5\eta^2 - 280(60-\eta) = 0$$

$$\eta^2 + 22.4\eta - 1350 = 0$$

$$\eta = \underline{\underline{27.3 \text{ cm}}}$$

Momento de inercia

$$\frac{1}{3} \times 25 \times 27.3^3 = 169\,500$$

$$280(60-27.3)^2 = 299\,000$$

$$I = \underline{\underline{467\,500 \text{ cm}^4}}$$

CALCULO FLECHA INMEDIATA

$$f_i = \frac{Pl^3}{48EI} + \frac{5wl^4}{384EI} = \frac{l^3}{EI} \left(\frac{P}{48} + \frac{5wl}{384} \right)$$

$$= \frac{600^3}{143\,000 \times 467\,500} \left(\frac{6000}{48} + \frac{5 \times 2.6 \times 600}{384} \right)$$

$$f_i = \underline{\underline{0.106 \text{ cm}}}$$

EJEMPLO 10

3

DEFLEXION DE UNA VIGA RECTANGULARCÁLCULO FLECHA ADICIONALA LARGO PLAZO

$$f_2 = F f_1$$

$$F = 2 - 1.2 \frac{\Delta'_s}{A_s}$$

$$\Delta'_s = 0 ; \therefore F = 2$$

$$f_2 = 2 f_1 = 2 \times 0.106 = \underline{0.21 \text{ cm}}$$

FLECHA TOTAL A LARGO PLAZO

$$f = f_1 + f_2 = 0.105 + 0.21$$

$$f = \underline{0.32 \text{ cm}}$$

FLECHA ADMISIBLE

$$f_{\max} = 0.5 + \frac{l}{240} = 0.5 + \frac{600}{240} =$$

$$f_{\max} = 0.5 + 2.5 = 3.0 \text{ cm} > 0.32 \text{ cm.}$$

⇒ La sección es adecuada.

Ejemplo 11. - Estimación ancho grieta

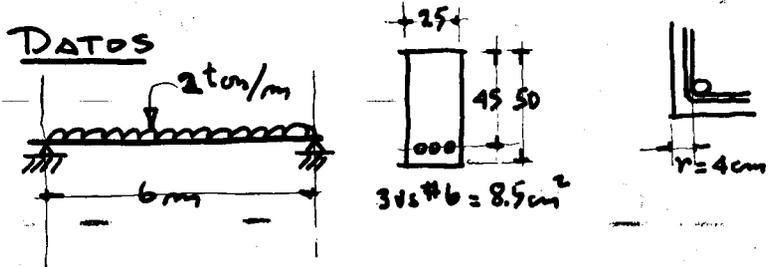
La carga dada es a nivel de servicio.

El esfuerzo del acero se estimó utilizando el método oproximado de la ecuación (21).

Más preciso habría sido determinar el esfuerzo del acero por medio del artificio de la sección transformada.

EJEMPLO ①

ESTIMACION ANCHO GRIETA

DATOS

Ancho admisible de grietas: 0.2 mm

Concreto: $f'_c = 300 \text{ kg/cm}^2$

Acero: $f_y = 4000 \text{ kg/cm}^2$
 $E_s = 2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$
 $K = 3.3$

MOMENTO MAXIMO

$$M = \frac{1}{8} w l^2 = \frac{1}{8} 12 \times 36 = 9 \text{ ton}\cdot\text{m}$$

ANCHO GRIETA AL NIVEL DEL ACERO DE TENSION

$$w_{\text{max}} = K r \frac{f_s}{E_s}$$

EJEMPLO ②

ESTIMACION ANCHO GRIETA

$$f_s = \frac{M}{0.9 A_s d} = \frac{9 \times 10^5}{0.9 \times 8.5 \times 45}$$

$$f_s = \underline{\underline{2600 \text{ kg/cm}^2}}$$

$$w_{\text{max}} = 3.3 \times 4 \times \frac{2600}{2 \times 10^6} = 0.0172 \text{ cm}$$

$$w_{\text{max}} = \underline{\underline{0.172 \text{ mm}}} < 0.2 \text{ mm}$$

Ejemplo 12.- Determinación del acero de una sección rectangular de características dadas

Se utilizaron tres métodos.

El primero consiste en la aplicación de la ecuación (5), que es aplicable únicamente a secciones rectangulares. Este método implica la solución de una ecuación de segundo grado y se aplica poco en la práctica.

El segundo método, es un método de tanteos, apoyado en principios fundamentales. Se supone en este caso que el acero fluye, pero teniendo en cuenta la compatibilidad de deformaciones es aplicable aún cuando se desea calcular las resistencias de secciones sobrerreforzadas, lo que es poco común en la práctica. Este método es de aplicación general. Conviene recordarlo porque puede aplicarse a cualquier tipo de sección y pone de manifiesto el fenómeno físico de flexión.

En el tercer método se recurre a la aplicación de la representación gráfica de la ecuación 5. El método es sencillo. Otros procedimientos se basan en el empleo de tablas de distinto tipo.

En los ejemplos se supuso que el acero fluye. Esto se comprobó al final del ejemplo, comparando el acero obtenido con el correspondiente al de la condición balanceada.

EJEMPLO (12) 1/3

DETERMINACIÓN DEL REFUERZO DE UNA SECCIÓN RECTANGULAR DE DIMENSIONES DADAS.

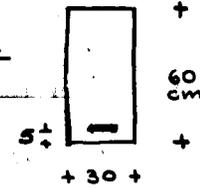
DATOS

Resistencia a momento requerida

$$M_u = 18 \text{ Ton} \cdot \text{m.}$$

$$\text{Concreto: } f'_c = 250 \text{ kg/cm}^2$$

$$\text{Acero: } f_y = 4000 \text{ kg/cm}^2$$



ESPECIFICACIONES Y CONSTANTES

Esfuerzos reducidos

$$f'_c = 0.8(250) = 200 \text{ kg/cm}^2$$

$$f'_c = 0.85(200) = 170 \text{ kg/cm}^2$$

CÁLCULO DEL ÁREA DE ACERO

1er Método Aplicando fórmula

$$M_R = M_u = F_R b d^2 f'_c \rho (1 - 0.59 \rho)$$

$$18 \times 10^5 = 0.9(30)(55)^2 (170) (\rho - 0.59 \rho^2)$$

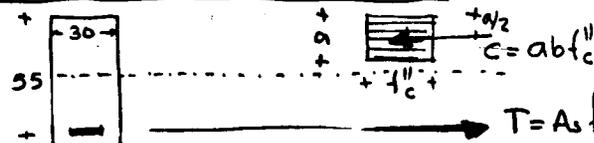
$$\rho^2 - 2\rho + 0.25927772 = 0$$

$$\Rightarrow \rho = 0.1393475$$

$$A_s = \rho b d \frac{f'_c}{f_y} = 0.1393475 (30)(55) \frac{170}{4000} = 9.78 \text{ cm}^2$$

$$A_s = 9.78 \text{ cm}^2$$

2º Método Por tanteos



EJEMPLO (12)

2/3

DETERMINACIÓN DEL REFUERZO DE UNA SECCIÓN RECTANGULAR DE DIMENSIONES DADAS.

De $C = T$

$$a = \frac{A_s f_y}{b f'_c}$$

$$\text{De } M_u = A_s f_y (d - a/2) F_r$$

$$A_s = \frac{M_u}{F_r f_y (d - a/2)}$$

1er tanteo

$$a = 10 \text{ cm.}$$

$$A_s = \frac{18 \times 10^5}{0.9(4000)(55 - 5)} = 10 \text{ cm}^2$$

$$a = \frac{10(4000)}{30(170)} = 7.84 \text{ cm}$$

2º tanteo

$$a = 7.8 \text{ cm.}$$

$$A_s = \frac{18 \times 10^5}{0.9(4000)(55 - 3.9)} = 9.78 \text{ cm}^2$$

$$a = \frac{9.78(4000)}{30(170)} = 7.67 \text{ cm} \approx 7.8 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow A_s = 9.78 \text{ cm}^2$$

3er Método = Aplicando la gráfica de la figura (6)

$$\frac{M_u}{F_r b d^2 f'_c} = \frac{1800000}{0.9(30 \times 55)^2 (170)} = 0.1296$$

De la gráfica, $\eta = 0.1394$

$$A_s = \eta b d \frac{f'_c}{f_y} = 0.1394(30 \times 55) \frac{170}{4000} = 9.78 \text{ cm}^2$$

$$\Rightarrow A_s = 9.78 \text{ cm}^2$$

EJEMPLO (12)

3/3

DETERMINACIÓN DEL REFUERZO DE UNA SECCIÓN RECTANGULAR DE DIMENSIONES DADAS.

REVISIÓN LIMITACIONES DE ACERO

$$P_{min} = 0.7 \frac{\sqrt{f'_c}}{f_y} = 0.7 \frac{\sqrt{250}}{4000} = 0.00277$$

$$A_{smin} = 0.00277 b d = 0.00277 (30)(55) = 4.57 \text{ cm}^2 < 9.78 \text{ cm}^2$$

$$P_{mix} = P_b = \frac{f'_c}{f_y} \frac{4800}{f_y + 6000} = \frac{170}{4000} \frac{4800}{10000} =$$

$$P_{max} = P_b = 0.0204$$

$$\Rightarrow A_{smix} = 0.0204 (30)(55) = 33.66 \text{ cm}^2 > 9.78 \text{ cm}^2$$

ARMADO

$$4 \text{ Vs } \# 6 = 11.48 \text{ cm}^2 > 9.78 \text{ cm}^2$$



Ejemplo 13. - Determinación de las dimensiones y del área de acero de una sección rectangular.

No se han impuesto restricciones ni en las dimensiones de la sección ni en la cantidad de acero, de manera que el proyectista está en libertad para escoger las características más convenientes de acuerdo con los requisitos constructivos, técnicos y económicos del caso.

Un camino usual consiste en fijar el porcentaje de acero y determinar las dimensiones correspondientes. Si se elige un porcentaje bajo se obtiene una sección grande, pero con un consumo bajo de acero, lo que suele resultar económico en las condiciones de costo de nuestro medio. Los porcentajes altos, por el contrario, implican una mayor cantidad de acero, pero permiten secciones más pequeñas, lo que puede ser importante cuando hay limitaciones de espacio o cuando el peso es una consideración significativa. Evidentemente el porcentaje escogido debe estar comprendido entre los valores máximo y mínimo especificados.

Para un porcentaje dado pueden obtenerse diversas combinaciones de ancho y peralte. Las relaciones usuales entre ancho y peralte varían de 1/4 a 1/2, aunque no es raro encontrar valores diferentes. Comúnmente se escogen dimensiones que sean múltiplos de 5 cm. En el ejemplo se expresó el peralte efectivo en función del ancho y se calcularon los peraltes efectivos correspondientes a varios anchos. Con base en estos resultados se escogió una sección de 35 x 70 cm que tiene una relación $b/h_e = 1/2$. A esta sección corresponde un valor del peralte efectivo diferente del calculado originalmente para el ancho de 35 cm por lo que fue necesario hacer un ajuste en la cantidad de acero.

EJEMPLO (13) 1/2

DETERMINACIÓN DE LAS DIMENSIONES Y DEL REFUERZO DE UNA SECCIÓN RECTANGULAR.

DATOS

Momento : $M_u = 25 \text{ Ton} \cdot \text{m}$
 Concreto : $f'_c = 300 \text{ kg/cm}^2$
 Acero : $f_y = 4000 \text{ kg/cm}^2$

ESPECIFICACIONES Y CONSTANTES

Esfuerzos reducidos

$$f'_c = 0.8 f'_c = 0.8(300) = \underline{240 \text{ kg/cm}^2}$$

$$f'_c = 0.85 f'_c = 0.85(240) = \underline{204 \text{ kg/cm}^2}$$

Acero mínimo

$$P_{min} = 0.7 \frac{\sqrt{f'_c}}{f_y} = 0.7 \frac{\sqrt{300}}{4000} = \underline{0.003031}$$

Acero máximo

$$P_{max} = P_b$$

$$P_b = \frac{f'_c}{f_y} \frac{4800}{f_y + 6000} = \frac{204}{4000} \frac{4800}{10000} = \underline{0.02448}$$

ELECCIÓN DE LAS DIMENSIONES DE LA SECCIÓN.

Suponiendo $p = 0.005$

($P_{min} < 0.005 < P_{max}$)

$$M_u = F_R b d^2 f'_c q (1 - 0.59q)$$

Usando la gráfica de la figura 6:

$$\therefore q = 0.005 \frac{4000}{204} = 0.098$$

$$\Rightarrow \frac{M_u}{F_R b d^2 f'_c} = 0.0932$$

EJEMPLO (13) 2/2

DETERMINACIÓN DE LAS DIMENSIONES Y DEL REFUERZO DE UNA SECCIÓN RECTANGULAR.

$$d = \sqrt{\frac{M_u}{F_y b f_c' (0.0932)}} = \sqrt{\frac{2500000}{0.9(204)(0.0932) b}}$$

$$d = \sqrt{\frac{146100.4}{b}}$$

b	d
25	76.7
30	70.0
35	65
40	60.5

Considerar.

$$b = 35 ; h = 70 \text{ cm}$$

Ajuste del acero.

$$d = h - \text{recubrimiento} = 70 - 5 = 65 \text{ cm.}$$

Supuesto

$$\frac{M_u}{F_y b d^2 \rho} = \frac{25 \times 10^5}{0.9(35)(65)^2(204)} = 0.0921$$

→ usando la gráfica de la figura (6)

$$\rho = 0.097$$

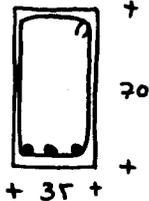
$$A_s = \rho \frac{f_c'}{f_y} b d = 0.097 \times \frac{204}{4000} (35)(65) = 11.26 \text{ cm}^2$$

$$A_s = 11.26 \text{ cm}^2$$

ARMADO.

$$3 \text{ Vs } \#7 = 11.61 \text{ cm}^2$$

$$> 11.26 \text{ cm}^2$$



Ejemplo 14. - Determinación del refuerzo de una sección rectangular doblemente armada de dimensiones dadas

Se comprobó inicialmente que el momento máximo que puede resistir la sección como simplemente armada es de solamente 30.18 ton-m , si se supone que el acero máximo que admite la sección es el correspondiente a la condición balanceada. Por lo tanto es necesario reforzar la zona comprimida agregando acero de compresión, puesto que el momento a resistir es igual a 50 ton-m .

El valor de d se tomó igual a $h-8 \text{ cm} = 52$, previendo que el refuerzo de tensión se colocará en dos lechos.

El área del acero de compresión se calculó a partir de la condición de que el acero de tensión no debe ser superior al correspondiente a la condición balanceada. El recubrimiento del acero de compresión se tomó igual a solo 5 cm , considerando que el refuerzo correspondiente podrá colocarse en un solo lecho. Se determinó el área de acero de compresión que requeriría una sección que tuviera un área de acero de tensión igual al área requerida para resistir el momento dado de 19.82 Ton-m .

Para calcular el área debe investigarse si el acero fluye. En el ejemplo ξ_y resulta mayor que ξ_y por lo que se consideró $f_s = f_y$. En caso contrario debe usarse el-

esfuerzo correspondiente a la deformación unitaria calculada a la altura del acero de compresión.

Las diferencias entre las áreas del refuerzo propuesto y las calculadas son pequeñas y pueden considerarse aceptables.

Puede apreciarse que el momento resistente calculado es superior al requerido.

EJEMPLO 14 1/3

DETERMINACIÓN DEL REFUERZO DE UNA SECCIÓN RECTANGULAR DOBLEMENTE ARMADA DE DIMENSIONES DADAS.

DATOS



Momento : $M_u = 50 \text{ ton-m}$

Concreto : $f'_c = 200 \text{ kg/cm}^2$

Acero : $f_y = 4000 \text{ kg/cm}^2$

CONSTANTES Y ESPECIFICACIONES.

Esfuerzos reducidos (Ver Ejemplo 1)

$f'_c = 160 \text{ kg/cm}^2$; $f'_a = 136 \text{ kg/cm}^2$

Acero mínimo

$\rho_{min} = 0.0025$

Acero máximo

el correspondiente a la condición balanceada.

$\rho_b = \frac{f'_c}{f_y} \frac{4800}{f_y + 6000} = \frac{136}{4000} \frac{4800}{10000} = 0.01632$

MOMENTO MÁXIMO QUE PUEDE RESISTIR LA

SECCIÓN SI $P_{max} = \rho_b$

$\Rightarrow \rho_b = 0.01632 \frac{f_y}{f'_c} = 0.01632 \frac{4000}{136} = 0.48$

Momento máximo que resiste la sección como simplemente armada (M_{u1})

Suponiendo $d = h - 8 \text{ cm} = 52 \text{ cm}$. y $d' = 5 \text{ cm}$.

$M_R = F_R b d^2 f'_c \rho (1 - 0.1 \rho) = 0.9 (25) (52)^2 (136) (0.48) (1 - 0.24) =$

$\Rightarrow M_R = M_{u1} = 3\,018\,442.7 \text{ kg-cm}$

$M_{u1} = 30.184 \text{ Ton-m} < 50 \text{ Ton-m}$

EJEMPLO (14) 2/3

DETERMINACIÓN DEL REFUERZO DE UNA SECCIÓN RECTANGULAR DOBLEMENTE ARMADA DE DIMENSIONES DADAS.

∴ se requiere acero de compresión.

CÁLCULO DEL ACERO

Acero de tensión

$$A_s = 0.01632 \times b d + A'_s = 0.01632(25)(52) + A'_s = 21.22 \text{ cm}^2 + A'_s$$

Acero de compresión

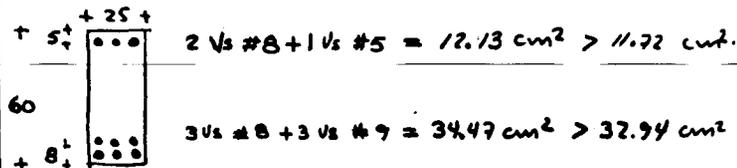
$$M_u = M_{u1} + M_{u2} \Rightarrow M_{u2} = M_u - M_{u1} = 50 - 30.18$$

$$M_{u2} = 19.82 \text{ Ton-m.} = A'_s f_y (d - d') F_R$$

$$\Rightarrow A'_s = \frac{M_{u2}}{F_R f_y (d - d')} = \frac{1982000}{0.9(4000)(52-5)} = 11.72 \text{ cm}^2$$

$$\Rightarrow A_s = (21.22 + 11.72) \text{ cm}^2 = \underline{32.94 \text{ cm}^2} = A_s$$

$$A'_s = 11.72 \text{ cm}^2$$

ARMADO PROPUESTOREVISIÓN DEL ACERO DE COMPRESIÓN

$$C_b = \frac{0.003}{0.003 + 0.002} \cdot 52 = 31.2 \text{ cm.} \quad \epsilon'_s = \frac{26.2}{31.2} (0.003) = 0.0025 > 0.002$$

→ el acero de compresión fluye

EJEMPLO (14) 3/3

DETERMINACIÓN DEL REFUERZO DE UNA SECCIÓN RECTANGULAR DOBLEMENTE ARMADA DE DIMENSIONES DADAS.

⇒ REVISIÓN DEL MOMENTO RESISTENTE

$$M_R = F_R [(A_s - A'_s) f_y (d - \frac{a}{2}) + A'_s f_y (d - d')]$$

$$\therefore a = \frac{(A_s - A'_s) f_y}{b f'_c} = \frac{(34.47 - 12.13) 4000}{25(136)} = 26.28 \text{ cm.}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow M_R &= 0.9 [22.34(4000)(38.86) + 12.13(4000)(47)] = \\ &= 0.9(3472529.6 + 2280440) = 5177672.6 \text{ kg-cm.} \end{aligned}$$

$$\underline{M_R = 51.776 \text{ Ton-m} > 50 \text{ Ton-m}}$$

Ejemplo 15. - Determinación del refuerzo de una sección T de dimensiones dadas

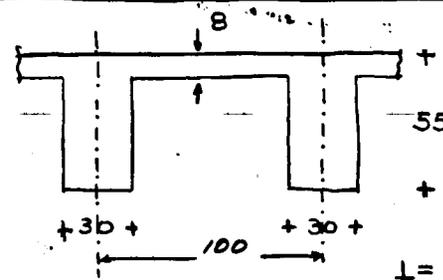
Por medio de un tanteo sencillo se comprobó que el patín por sí solo no es capaz de equilibrar la fuerza de tensión que puede desarrollar el acero. Esto significa que el límite inferior del bloque de esfuerzos quede debajo de la parte inferior del patín, por lo que es necesario considerar la contribución del alma.

El área inicial de acero se calculó suponiendo un valor aproximado del brazo del par interno. El valor inicial se ajustó calculando el brazo del par interno, partiendo de la posición de la resultante de compresión obtenida en el primer tanteo. Se aprecia que la nueva área de acero difiere poco de la calculada inicialmente.

El acero mínimo admisible se determinó aplicando el valor de la cuantía mínima, $p_{\min} = 0.0025$, a la sección de la nervadura, como suelen recomendar los códigos.

EJEMPLO 15 2/3

DETERMINACIÓN DEL REFUERZO DE UNA SECCIÓN T DE DIMENSIONES DADAS.



Momento

$$M_u = 50 \text{ Ton-m}$$

$$\text{Concreto: } f'_c = 200 \text{ kg/cm}^2$$

$$\text{Acero: } f_y = 4000 \text{ kg/cm}^2$$

$$L = 9 \text{ m}$$

CONSTANTES Y ESPECIFICACIONES.

Esfuerzos reducidos (Ver Ejemplo 1).

$$f'_c = 160 \text{ kg/cm}^2 ; f''_c = 136 \text{ kg/cm}^2$$

Acero mínimo

$$p_{\min} = 0.0025$$

Acero máximo

el correspondiente a la condición balanceada.

CALCULO DEL ÁREA DE ACERO.

ANCHO EFECTIVO $b = 100 \text{ cm}$ (Ver Ejemplo 3)

PERALTE EFECTIVO $d = h - 8 \text{ cm} = 55 - 8 = 47 \text{ cm}.$

Suponiendo que $a = t = 8 \text{ cm}.$

$$\Rightarrow (d - \frac{a}{2}) = 47 - 4 = 43 \text{ cm}.$$

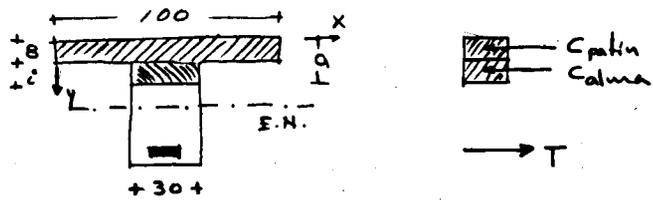
$$\Rightarrow A_s = \frac{M_u}{F_R f_y (d - \frac{a}{2})} = \frac{5000000}{0.9(4000)43} = 32.3 \text{ cm}^2$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} T = A_s f_y = 32.3(4000) = 129200 \text{ kg} \\ C = ab f'_c = 8(100)(136) = 108800 \text{ kg} \end{array} \right\} T > C$$

EJEMPLO (15) 2/3

DETERMINACIÓN DEL REFUERZO DE UNA SECCIÓN T DE DIMENSIONES DADAS.

i. la sección debe dimensionarse como T



$$C_{calma} = C - C_{patin}$$

$$C_{calma} = 129\,200 - 108\,800 = 20\,400 \text{ kg}$$

$$C_{calma} = f_c'' \times b \times x_i = 20\,400$$

$$\Rightarrow x_i = \frac{20\,400}{b f_c''} = \frac{20\,400}{30(136)} = 5 \text{ cm}$$

Punto de aplicación de la fuerza de compresión

$$\bar{y} = \frac{108.8(4) + 20.400(10.5)}{108.8 + 20.4} = 5.026 \text{ cm.}$$

$$\text{brazo ajustado: } z = 47 - 5.026 = 41.974 \text{ cm.}$$

Ajuste del área de acero.

$$A_s = \frac{M_u}{F_e f_y z} = \frac{5\,000\,000}{0.9(4000)(41.974)} = 33.09 \text{ cm}^2 = A_s$$

ARMADO PROPUESTO



$$5\#8 + 3\#6 = 33.96 \text{ cm}^2 > 33.09 \text{ cm}^2$$

EJEMPLO (15) 3/3

DETERMINACIÓN DEL REFUERZO DE UNA SECCIÓN T DE DIMENSIONES DADAS.

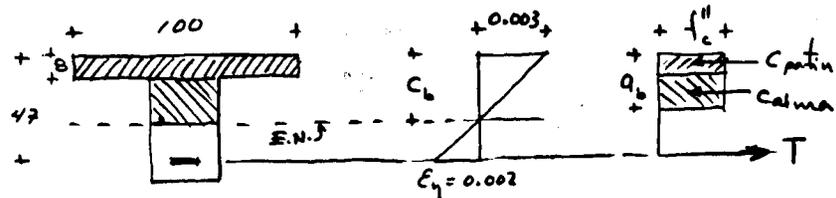
REVISIÓN LIMITACIONES DE ACERO

Acero mínimo

$$p_{min} = 0.0025$$

$$A_{smin} = 0.0025 b' d = 0.0025(30)(47) = 3.53 \text{ cm}^2 < 33.96 \text{ cm}^2$$

Acero máximo



$$C_b = \frac{0.003}{0.005} (47) = 28.2 \text{ cm}$$

$$a_b = 0.80 C_b = 0.8(28.2) = 22.56 \text{ cm.}$$

Fuerza de compresión correspondiente a la condición balanceada.

$$C_b = C_{calma} + C_{patin}$$

$$C_{calma} = (a_b - 8) b' f_c'' = (22.56 - 8)(30)(136) = 59\,404.8 \text{ kg.}$$

$$C_{patin} = 108\,800 \text{ kg.}$$

$$C_b = 59\,404.8 + 108\,800 = 168\,204.8 \text{ kg.}$$

$$T_b = C_b = A_{sb} f_y$$

$$\Rightarrow A_{sb} = \frac{168\,204.8}{4000} = 42.05 \text{ cm}^2 > 33.96 \text{ cm}^2$$

Ejemplo 16.- Dimensionamiento de una losa apoyada en lados opuestos

El problema consiste en diseñar una losa libremente apoyada sobre muros.

La carga de servicio de 900 kg/m^2 dada se multiplicó por un factor de carga igual a 1.4 para obtener los valores del momento y de la fuerza cortante que debe resistir la losa.

El claro de cálculo se tomó como la suma del claro libre más la mitad del peralte de cada lado. Puesto que al estimar el momento inicialmente, el peralte no se conoce, éste debe estimarse.

El análisis y dimensionamiento de losas de este tipo suele referirse a un ancho unitario. En el ejemplo, se consideró un metro, de manera que el momento calculado es el que actúa sobre una faja de un metro de ancho.

Los porcentajes de refuerzo en losas suelen ser relativamente bajos. Se supuso aquí un valor de $p=0.008$. El peralte efectivo correspondiente fue 12.1 cm, lo que implicó un peralte total de 14.6, si se supone un recubrimiento de 2.5 cm. Por consideraciones constructivas, este valor se redondeó a 15 cm, lo que obligó a hacer un ajuste en el acero.

En el croquis de armado se muestra el refuerzo principal junto con el refuerzo transversal, que en estas losas se colocó encima del primero para lograr la máxima efectividad del mismo.

La revisión por esfuerzo cortante indicó que el concreto por sí solo resiste am-

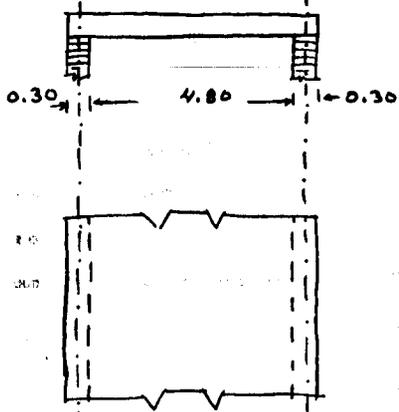
pliamente la fuerza cortante, como suele suceder en losas. Para el cálculo de la fuerza cortante se recalculó el claro teniendo en cuenta el peralte, definitivamente adoptada, refinamiento del que puede prescindirse en la mayoría de los casos prácticos.

La relación entre el claro y el peralte es $495/15=33$. Este valor es superior al especificado en la tabla 1 para losas libremente apoyadas para poder prescindir de cálculo de deflexiones. Sería por lo tanto conveniente hacer un análisis de flechas análogo al realizado en el ejemplo 10. El estudio de agrietamiento se haría como en el ejemplo 11.

EJEMPLO 16 1/3

DIMENSIONAMIENTO DE UNA LOSA APOYADA EN LADOS OPUESTOS.

DATOS

Carga

$$w = 900 \text{ kg/m}^2 \quad (\text{incluye peso propio}).$$

Materiales.

$$\text{Concreto: } f'_c = 200 \text{ kg/cm}^2$$

$$\text{Acero: } f_y = 4000 \text{ kg/cm}^2$$

ESPECIFICACIONES Y CONSTANTES

Esfuerzos reducidos (Ver Ejemplo 1)

$$f'_c = 160 \text{ kg/cm}^2 \quad f'_c = 136 \text{ kg/cm}^2$$

$$\text{Factor de carga: } 1.4 \quad \text{Factores de resistencia: } 0.9 \text{ y } 0.8$$

Refuerzo mínimo

$$a_s = \frac{900 \times 1}{f_y (100 + x)} \quad (\text{refuerzo principal y transversal}).$$

$$s < \begin{cases} 50 \text{ cm} \\ 3.5 \times 1 \end{cases}$$

Refuerzo máximo $P_{\text{máx}} = P_0$

$$P_0 = 0.01632 \quad (\text{Ver Ejemplo 1}).$$

Esfuerzo cortante que resiste el concreto

$$V_{CR} = 0.5 F_R \sqrt{f'_c} = 0.5(0.8)(\sqrt{160}) = 5.06 \text{ kg/cm}^2$$

EJEMPLO 16 2/3

DIMENSIONAMIENTO DE UNA LOSA APOYADA EN LADOS OPUESTOS.

ANÁLISIS (Cálculo de momentos y cortantes).

$$\text{Claro: } l = 4.80 + h \quad \therefore \text{suponiendo } h = 0.20 \text{ m.}$$

$$l = 4.80 + 0.20 = 5 \text{ m.}$$

$$w_u = 0.9 \times 1.4 = 1.26 \text{ Ton/m.}$$

$$M_u = \frac{1}{8} w_u l^2 = \frac{1.26 (5)^2}{8} = 3.9375 \text{ ton-m.}$$

$$V_u = \frac{1}{2} w_u l = \frac{1.26 \times 5}{2} = 3.15 \text{ ton}$$

DIMENSIONAMIENTOCálculo del peralte.

$$\text{Suponiendo } \rho = 0.008 \quad (\rho_{\text{mín}} < 0.008 < \rho_{\text{máx}}).$$

$$\rho = \frac{A_s}{b d} = p \frac{f_y}{f'_c} = 0.008 \frac{4000}{136} = 0.2353$$

y de la gráfica de la figura 6

$$\frac{M_u}{F_R b d^2 f'_c} = 0.2075$$

$$d = \sqrt{\frac{M_u}{F_R (100)(136)(0.2075)}} = \sqrt{\frac{393750}{0.9(100)(136)(0.2075)}} =$$

$$d = \sqrt{155} = 12.45 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow h = 12.5 + 2.5 = 15 \text{ cm.} \quad \Rightarrow \boxed{h = 15 \text{ cm}}$$

Ajuste del acero

$$d = 12.5 \text{ cm.}$$

$$\frac{M_u}{F_R b d^2 f'_c} = \frac{393750}{0.9(100)(12.5)^2(136)} = 0.2059$$

EJEMPLO (16) 3/3

DIMENSIONAMIENTO DE UNA LOSA A POYADA EN LADOS OPUESTOS.

$$\rightarrow q = 0.233$$

$$\therefore A_s = q \frac{f_c}{f_y} bd = 0.233 \frac{136}{4000} (100)(12.5) = 9.90 \text{ cm}^2/\text{m}.$$

Separación $s = \frac{100 A_s}{A_s}$ ($A_s = \text{área de una varilla}$).

Si se emplean varillas #4 con $A_s = 1.27 \text{ cm}^2$

$$s_{\#4} = \frac{100(1.27)}{9.9} = 12.8 \text{ cm} < \begin{cases} 50 \text{ cm} \\ 3.5h = 52.5 \text{ cm} \end{cases} \text{ usé } s = 12.5 \text{ cm}.$$

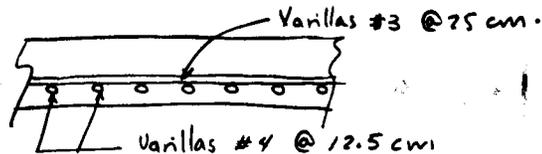
Reinzo transversal

$$a_s = \frac{900(15)}{4000(115)} = 0.0294 \frac{\text{cm}^2}{\text{cm}} = 2.94 \frac{\text{cm}^2}{\text{m}}.$$

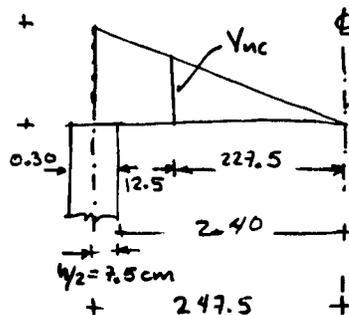
Si se emplean varillas #3 con $A_s = 0.71 \text{ cm}^2$

$$s_{\#3} = \frac{100(0.71)}{2.94} = 24 \text{ cm} \text{ empleése } s = 25 \text{ cm}.$$

ARMADO



REVISIÓN DEL ESFUERZO CORTANTE.



$$l = 4.80 + 0.15 = 4.95 \text{ m}.$$

$$V_u = w_u l / 2 = 1.26(4.95) / 2 = 3.1185 \text{ ton}$$

$$V_{uc} = \frac{2.275}{2.475} (3.1185) = 2.8665 \text{ ton}$$

$$V_u = \frac{V_{uc}}{bd} = \frac{2.866.5}{100(12.5)} = 2.293 \text{ kg/cm}^2$$

$$\therefore V_u = 2.293 \text{ kg/cm}^2 < V_{CR} = 5.06 \text{ kg/cm}^2$$

Ejemplo 17.- Dimensionamiento de una viga rectangular simplemente armada

La viga por diseñar está sujeta a una carga de servicio de 6 ton/m.

Para obtener el momento y la fuerza cortante resistentes para los que debe diseñarse la carga de servicio debe multiplicarse por el factor de carga dado, que es igual a 1.4.

Considerando que no existe ninguna restricción en la forma de la sección, se fijó un porcentaje de acero comprendido entre los límites dados, y a partir de él, se determinaron varias combinaciones posibles de ancho y peralte efectivo, como se hizo en el ejemplo 13. La sección finalmente adoptada fue una con un ancho igual a 35 cm y un peralte total de 70 cm.

El área de acero requerida para esta sección se proporcionó con dos varillas del No.7 y tres varillas del No.9, que caben en un solo lecho. Esta combinación de varillas da un área de acero prácticamente igual a la teóricamente necesaria. Los cortes de varilla se determinaron gráficamente, en la forma indicada sobre el diagrama de momentos. Las varillas cortadas se prolongaron un peralte más allá de la sección donde teóricamente dejan de ser necesarias.

El refuerzo transversal adoptado consistió en estribos cerrados verticales de varilla del No.3. La separación máxima a la que se pueden colocar los estribos verticales es $d/2$. Esta separación debe también ser igual o menor que la correspondiente al refuerzo transversal mínimo dado por la ec 15.

En el ejemplo la separación requerida en la sección crítica, que, por definición,

se encuentra a un peralte efectivo del paño del apoyo, resultó menor que $d/2$

y menor que la obtenida para el refuerzo mínimo dado por la ecuación 15.

La separación fue de 14.3 cm, que se redondeó a 14 cm.

El refuerzo transversal determinado para la sección crítica debe utilizarse también entre el paño del apoyo y dicha sección crítica. Una práctica común consiste en colocar el primer estribo a una distancia del paño del apoyo igual a la mitad de la separación requerida. En el croquis de armado se muestra el refuerzo transversal propuesto. La separación mínimo se ha conservado en toda la longitud de la viga, lo que es conservador. El Reglamento ACI-71 permite la omisión de refuerzo transversal en vigas cuando la fuerza cortante es inferior al 50 por ciento de la resistencia a cortante del concreto, V_c .

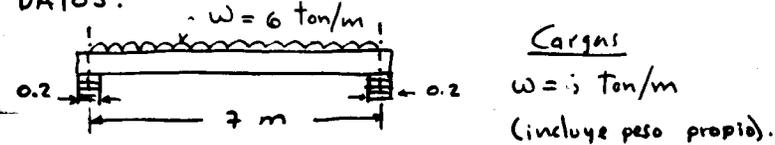
Cuando no rigen las limitaciones de refuerzo mínimo, como sucedió en este ejemplo, las separaciones de los estribos se van variando a lo largo de la viga de acuerdo con la magnitud de la fuerza cortante.

La relación entre el claro y el peralte fue $700/75 = 9$, por lo que, de acuerdo con la tabla 1, no se requeriría revisar la deflexión. En caso necesario, el análisis de deflexiones se efectuaría como en el ejemplo 10. El agrietamiento se revisaría como en el ejemplo 11.

EJEMPLO (17) 1/4

DIMENSIONAMIENTO DE UNA VIGA RECTANGULAR SIMPLEMENTE APOYADA.

DATOS.



Materiales

Concreto : $f'_c = 200 \text{ kg/cm}^2$

Acero principal : $f_y = 4000 \text{ kg/cm}^2$

Acero estribos : $f_y = 2300 \text{ kg/cm}^2$

ESPECIFICACIONES Y CONSTANTES

Esfuerzos reducidos (Ver Ejemplo 1).

$f'_c = 160 \text{ kg/cm}^2$; $f'_c = 136 \text{ kg/cm}^2$

Factor de carga : 1.4

Refuerzo mínimo ; $\rho_{min} = 0.0025$ (Ver Ejemplo 1).

Refuerzo máximo ; $\rho_{max} = \rho_b = 0.01632$ (Ver Ejemplo 1).

Esfuerzo cortante que toma el concreto $V_{cc} = 5.06 \text{ kg/cm}^2$

ANÁLISIS (cálculo de momentos y cortantes).

$l = 7 \text{ m}$ (centro a centro de apoyos).

$W_u = 6 \times 1.4 = 8.4 \text{ Ton/m}$

$M_u = \frac{1}{8} W_u l^2 = \frac{8.4(7)^2}{8} = 51.45 \text{ Ton}\cdot\text{m}$

$V_u = \frac{W_u l}{2} = \frac{8.4(7)}{2} = 29.4 \text{ Ton}$

EJEMPLO 17 2/4

DIMENSIONAMIENTO DE UNA VIGA RECTANGULAR SIMPLEMENTE APOYADA.

DIMENSIONAMIENTOElección de sección

Suponiendo $p = 0.012$ ($p_{min} < 0.012 < p_{max}$).

$$q = p \frac{f_y}{f_c} = 0.012 \frac{4000}{136} = 0.353$$

y de la gráfica de la figura 6

$$\frac{M_u}{F_y b d^2 q} = 0.2907 \Rightarrow d = \sqrt{\frac{M_u}{F_y b q (0.2907)}}$$

$$d = \sqrt{\frac{5145000}{0.9(136)(0.2907)b}} = \sqrt{\frac{144596.88}{b}}$$

b	d
25	76
30	69
35	64

Adoptar

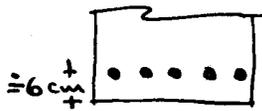
$$b = 35 \text{ cm}; h = 70 \text{ cm}$$

Ajuste del acero $d = 70 - r = 70 - 6 = 64 \text{ cm}$.

$$\frac{M_u}{F_y b d^2 q} = \frac{5145000}{0.9(35)(64)^2(136)} = 0.2932$$

De la gráfica de la figura 6 $q = 0.357$.

$$A_s = q \frac{f_c}{f_y} b d = 0.357 \frac{136}{4000} (35)(64) = 27.19 \text{ cm}^2$$

ARMADO

$$2 \text{ Vs } \#7 + 3 \text{ Vs } \#9$$

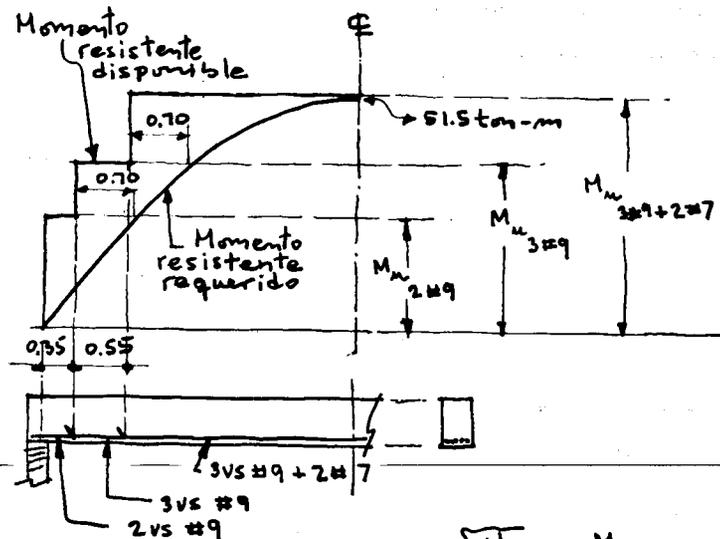
$$= 27 \text{ cm}^2 \doteq 27.19 \text{ cm}^2$$

EJEMPLO 17 3/4

DIMENSIONAMIENTO DE UNA VIGA RECTANGULAR SIMPLEMENTE APOYADA

CORTE DE VARILLAS

Las varillas se prolongarán 70 cm más allá de donde teóricamente dejan de ser necesarias, es decir, poco más de un peralte efectivo.



$$M_u = 51.5 \text{ ton-m}; A_s = 26.8 \text{ cm}^2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{M_u}{A_s} = \frac{M_{ui}}{A_{si}} \\ M_{ui} = M_u \frac{A_{si}}{A_s} \end{array} \right.$$

$$M_{u_{3\#9+2\#7}} = 51.5 \frac{27}{26.8} = 52 > 51.5$$

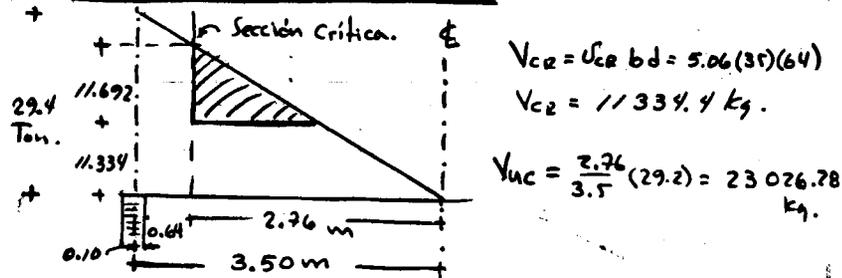
$$M_{u_{2\#9}} = 51.5 \frac{19.3}{26.8} = 36.9$$

$$M_{u_{2\#7}} = 51.5 \frac{12.8}{26.8} = 24.8$$

EJEMPLO (17) 9/4

DIMENSIONAMIENTO DE UNA VIGA RECTANGULAR
SIMPLEMENTE APOYADA.

REFUERZO TRANSVERSAL



Separación de estribos.

Separación máxima admisible.

a) $d/2 = 64/2 = 32 \text{ cm}$.

b) por refuerzo mínimo $S = \frac{A_r f_y F_r}{3.5 b}$
para estribos de 2 ramas #3

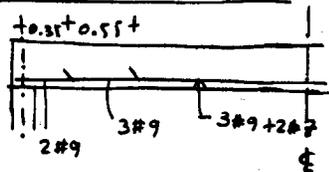
$$S = \frac{2(0.7)(2300)(0.8)}{3.5(35)} = 21.32 \text{ cm}$$

Separación calculada: para estribos #3 (2 ramas)

$$S = \frac{F_r A_r f_y d}{V_u - V_{cr}} = \frac{0.8(1.42)(2300)(64)}{11692} = 14.3 \text{ cm}$$

Rige la separación calculada. $\Rightarrow S = 14 \text{ cm}$

CROQUIS ARMADO



Usar estribos #3 @ 14 cm.

(primer estribo a 7 cm del
paño del apoyo).

Ejemplo 18.- Dimensionamiento de una losa perimetralmente apoyada

Se considera en este ejemplo un tablero externo de un sistema de piso formado por trabes y losas.

Como peralte total tentativo se escogió 10 cm, que es superior al valor mínimo de 8.0 cm que resulta de aplicar la regla dada en la sección 12.2. Este valor fue el utilizado al estimar la carga total que soporta la losa en condiciones de servicio o de trabajo. La carga última que debe resistir la losa se obtuvo multiplicando la carga de servicio por el factor de carga 1.4. Con este valor se determinó el momento flexionante para el cual debe dimensionarse la losa.

En el Reglamento del D.D.F. se establece que el peralte efectivo correspondiente al acero de flexión debe reducirse en dos centímetros para tener en cuenta errores en la colocación del refuerzo. Este ajuste es significativo en el caso de losas, en que el peralte total suele ser reducido. En el ejemplo, el peralte efectivo del acero positivo resultó de 8 cm considerando un recubrimiento de 2 cm. El del acero negativo, de acuerdo con la recomendación anterior, se redujo a 6 cm. Los momentos por resistir en las diversas regiones del tablero se calcularon con los coeficientes de la tabla 2. Los cálculos correspondientes, así como los de las áreas y separaciones de acero requeridas, se efectuaron en forma tabular. La determinación de las áreas de acero se basó en la gráfica de la fig 6.

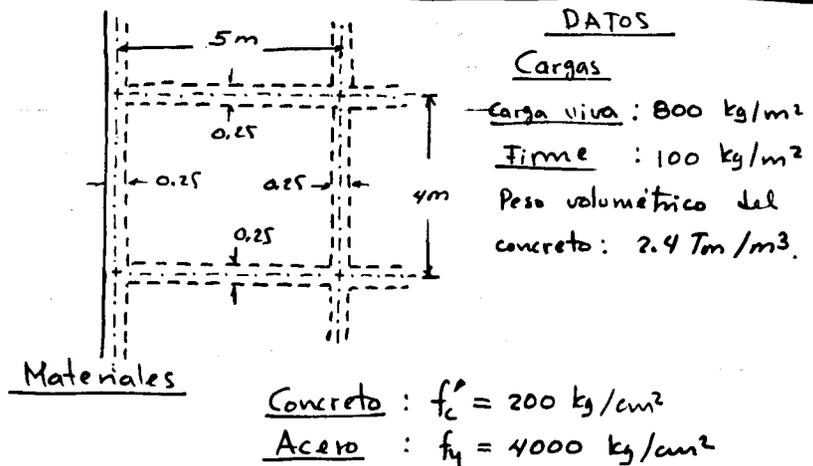
Se ensayaron tres tamaños de varillas: de los números 2.5, 3 y 4. En el armado propuesto se escogió la varilla del No. 2.5; con los otros diámetros, en ambos sentidos - resultan separaciones excesivas que obligan a colocar el refuerzo por especificación, -

con el consecuente desperdicio de acero.

En la hoja de cálculo γ se muestran en una planta esquemática las separaciones teóricas requeridas por momento o para cumplir con especificaciones en las distintas zonas del tablero de losa considerado. Los armados propuestos se ajustan a estas separaciones dentro de las restricciones que impone la conveniencia que desde un punto de vista constructivo tiene el usar separaciones moduladas.

EJEMPLO (18) $\frac{1}{4}$

DIMENSIONAMIENTO DE UNA LOSA PERIMETRALMENTE APOYADA.



CONSTANTES Y ESPECIFICACIONES.

Esfuerzos reducidos (Ver Ejemplo 1).

$$f_c^* = 160 \text{ kg/cm}^2 ; f_c'' = 136 \text{ kg/cm}^2$$

Factor de carga : 1.4.

Refuerzo máximo : $\rho_{max} = \rho_o = 0.01632$.

ELECCION DEL PERALTE.

$$d_{min} = \frac{375(2.25) + 2(475)}{300} = \frac{1793.75}{300} \approx 6 \text{ cm.}$$

considérese $h = 10 \text{ cm}$ peralte total

EJEMPLO (18) 2/4

DIMENSIONAMIENTO DE UNA LOSA PERIMETRALMENTE APOYADA.

ESTIMACIÓN DE LA CARGA

$$\begin{aligned} \text{Firme} &= 0.100 \text{ ton/m}^2 \\ \text{Losa } 0.10 \times 2.4 &= 0.240 \text{ tm/m}^2 \\ W_{cp} &= \frac{0.340}{\text{tm/m}^2} \\ W_{cv} &= \frac{0.800}{\text{tm/m}^2} \\ W &= \frac{1.140}{\text{tm/m}^2} \end{aligned}$$

$$W_u = 1.14 \times 1.4 = 1.596 \text{ Tm/m}^2$$

PERALTE EFECTIVO

$$\text{Acero positivo } d = h - \text{recubrimiento} = 10 - 2 = 8 \text{ cm.}$$

$$\text{Acero negativo } d = h - r - 2 = 10 - 2 - 2 = 6 \text{ cm.}$$

ACERO MINIMO DE FLEXIÓN

$$a_s = \frac{450 X_1}{f_y (100 + X_1)} = \frac{450 (10)}{4000 (110)} = 0.01022 \frac{\text{cm}^2}{\text{cm}}$$

$$a_s = 1.02 \text{ cm}^2/\text{m.}$$

SEPARACIÓN MÁXIMA

$$S_{\max} \begin{cases} 50 \text{ cm} \\ 3.5h = 35 \text{ cm. } \neq \text{ rife.} \\ \text{si se usan Vs } \# 2.5 \quad S = \frac{100(0.49)}{1.02} = 48 \text{ cm} \end{cases}$$

$$\Rightarrow S_{\max} = 35 \text{ cm}$$

VALORES PARA EL CÁLCULO TABULAR

a_1 y a_2 : claros libres corto y largo, respectivamente.

$$m = \frac{a_1}{a_2} = \frac{3.75}{4.75} = 0.79$$

EJEMPLO (18) 3/4

DIMENSIONAMIENTO DE UNA LOSA PERIMETRALMENTE APOYADA.

$$W_u a_1^2 = 1.596 (3.75)^2 = 22.44375 \text{ kg.}$$

Valores de $F_y b d^2 f_c$

$$\text{Para acero positivo: } 0.9(100)(8)^2(136) = 783\,360 \text{ kg-cm}$$

$$\text{Para acero negativo: } 0.9(100)(6)^2(136) = 440\,640 \text{ kg-cm.}$$

Valores de $A_s = \frac{q b d^2 f_c}{f_y}$

$$\text{para acero positivo: } q \frac{100(8)136}{4000} = 27.29 = A_s$$

$$\text{para acero negativo: } q \frac{100(6)136}{4000} = 20.49 = A_s$$

Separación

$$S = \frac{100 a_s}{A_s}$$

a_s = área de 1 varilla.

A_s = área total/metro.

Varilla #	A_s (cm ²)	S (cm)
2.5	0.49	49/ A_s
3	0.71	71/ A_s
4	1.27	127/ A_s

TABLA DE MOMENTOS Y SEPARACIONES DE VARILLAS.

Momento	Clase	C	M_u ton-m	$M_u / F_y b d^2 f_c$	q	A_s cm ² /m	$S_{\#2.5}$ cm	$S_{\#3}$ cm	$S_{\#4}$ cm
Neg. en bordes	C	0.0408	0.916	0.2079	0.236	4.82	10	14.5	26
	L	0.0352	0.790	0.1793	0.20	4.08	12	17	31
Neg. en bordes disp.	L	0.0223	0.500	0.1135	0.121	2.46	19	28	51
Positivo	C	0.0206	0.463	0.0591	0.061	1.66	29	42	76.5
	L	0.0131	0.294	0.0375	0.039	1.06	(46)	67	120

\Rightarrow Usar varillas # 2.5

? usar $S = 35 \text{ cm}$.

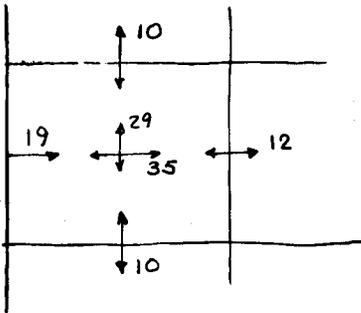
∴ Emplee $S = 35 \text{ cm}$ cuando la separación calculada por flexión es mayor.

EJEMPLO 18 4/4

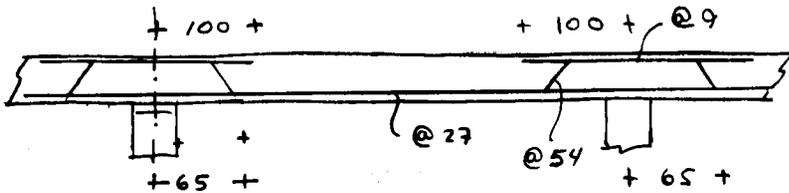
DIMENSIONAMIENTO PERIMETRALMENTE DE UNA LOSA APOYADA.

REFUERZO

Separaciones Teóricas (cm).



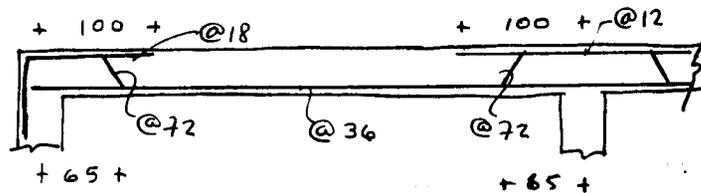
Corte sentido corto



$\frac{25}{2} + \frac{375}{5} + 8 = 95.5 \text{ cm}$ se empleará 100 cm

$\frac{25}{2} + \frac{375}{6} - 8 = 67 \text{ cm}$ se empleará 65 cm.

Corte sentido largo



Ejemplo 19.- Dimensionamiento de una zapata cuadrada para columna aislada

El dimensionamiento se llevó a cabo por medio de un proceso de tanteos, en que se van suponiendo peraltes distintos de la losa hasta encontrar uno que cumpla adecuadamente con los requisitos de resistencia que rijan.

El primer paso consiste en determinar el área que debe tener la zapata para que no se exceda la capacidad de carga del terreno. La capacidad dada en el ejemplo corresponde al nivel de cargas ^{último}. Es necesaria tener en cuenta que una parte de la capacidad se utiliza para soportar el peso propio de la zapata. Por lo tanto la capacidad útil disponible para resistir la carga transmitida por la columna es igual a la capacidad total dada menos el peso propio.

En el primer tanteo se ensayó un peralte total de 45 cm. El peralte efectivo correspondiente se estimó considerando que el refuerzo utilizado consistiría en varillas del No. 6 y que se debe proporcionar un recubrimiento de 5 cm. Como peralte efectiva se tomó un valor promedio medido al plano de contacto entre los dos lechadas de refuerzo. El área necesaria obtenida en este tanteo fue de ^{39.24 m²} que puede darse, aproximadamente, con un cuadrado de 6.30 m. de lado. Como generalmente el peralte está regido por la resistencia a cortante como losa, se empezó por revisar esta condición. Para ello se consideró la presión neta última, $P_u \text{ neta}$, es decir la profundidad por la carga transmitida por la columna multiplicada por el factor de carga especificada. Se comprobó en este tanteo que el esfuerzo cortante es superior al permitida, por lo que fue necesario hacer un segundo tanteo.

En el segundo tanteo se ensayó un peralte de 60 cm. El cambio en el peso pro-

pio hizo necesario ajustar el área por haber cambiado la capacidad útil de carga del terreno disponible. Con el nuevo peralte los esfuerzos cortantes como losa y como viga fueron menores que los permisibles. Se procedió entonces a calcular el refuerzo necesario con la gráfica de la fig 6.

El valor del índice de refuerzo obtenido de la gráfica, está comprendido entre los límites especificados, lo que indica que el peralte es también adecuado desde el punto de flexión. Puede disminuirse el refuerzo aumentando el peralte, pero esto implica un tamaño mayor de zapata ya que la capacidad útil del terreno va disminuyendo al aumentar el peralte.

Por último se revisó si el espacio disponible desde la sección crítica para momento es disponible para que la varilla pueda desarrollar su capacidad.

El armado adoptado se muestra en un croquis.

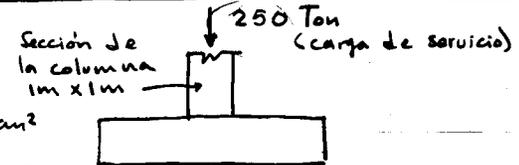
EJEMPLO (19) 1/4

DIMENSIONAMIENTO DE UNA ZAPATA CUADRADA PARA COLUMNA AISLADA.

DATOS:

Concreto: $f'_c = 250 \text{ kg/cm}^2$

Acero: $f_y = 4000 \text{ kg/cm}^2$



Peso volumétrica del concreto
2.4 ton/m³

Capacidad de carga de diseño para el terreno.

$$q_u = 10 \text{ Ton/m}^2$$

CONSTANTES Y ESPECIFICACIONES.

Esfuerzos reducidos (Ver Ejemplo 12)

$$f'_c = 200 \text{ kg/cm}^2 ; f'_c = 170 \text{ kg/cm}^2$$

Factor de carga: 1.4

Esfuerzos cortantes admisibles.

Como trabe: $0.5(0.8)\sqrt{170} = 5.21 \text{ kg/cm}^2$

Como losa: $0.8\sqrt{170} = 10.43 \text{ kg/cm}^2$

Longitud de desarrollo.

$$L_{db} = 0.06 \frac{a_s f_y}{\sqrt{f'_c}} \geq 0.006 d_b f_y$$

Recubrimiento libre: 5 cm

Refuerzo mínimo $P_{min} = 0.7 \frac{\sqrt{170}}{4000} = 0.00277$

Refuerzo máximo $P_{max} = P_0$

$$P_0 = \frac{f'_c}{f_y} \frac{4800}{f_y + 6000} = \frac{170}{4000} \frac{4800}{10000} = 0.0204 = P_{min}$$

EJEMPLO 19 2/4
DIMENSIONAMIENTO DE UNA ZAPATA CUADRADA PARA COLUMNA AISLADA.

TANTEOS PARA DETERMINAR EL PERALTE

1er tanteo

$$h = 45 \text{ cm.}$$

$$\text{peso propio de la zapata: } 0.45 \times 2.4 = 1.08 \text{ tm/m}^2$$

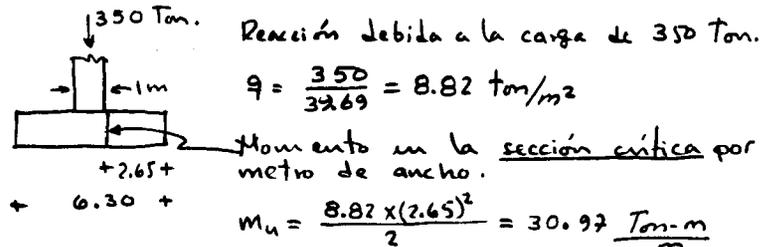
$$\text{presión de diseño - pp zapata} = 10 - 1.08 = 8.92 \text{ tm/m}^2$$

$$A = \frac{1.4 \times 250}{8.92} = \frac{350}{8.92} = 39.24 \text{ m}^2$$

Supongamos la zapata de 6.30 x 6.30 m.

$$\Rightarrow A = 39.69 \text{ m}^2$$

Revisión del peralte propuesto.



$$d = 45 - 5 - 1 = 39 \text{ cm. (suponiendo varillas #6)}$$

$$\Rightarrow \frac{M_u}{F_c b d^2 f_c} = \frac{3097000}{0.9(100)(39)^2(170)} = 0.1331 \Rightarrow q = 0.143 \quad P = 0.006$$

Tensión diagonal Revisión como viga ancha (la sección crítica está a un peralte, d , del patio de la columna).

$$V_{ce} = F_c b d 0.5 \sqrt{f_c} = 0.8(100)(39)(0.5\sqrt{1700}) = 22061 \text{ kg.}$$

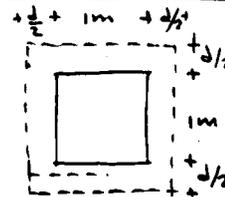
$$V_u = (2.65 - 0.39) \times 8.82 = 19.933 \text{ Ton} = 19933 \text{ kg.}$$

Revisión por penetración.

Perímetro de la sección crítica

$$2(100 + 100 + 2 \times 39) = 556 \text{ cm.}$$

EJEMPLO 19 3/4
DIMENSIONAMIENTO DE UNA ZAPATA CUADRADA PARA COLUMNA AISLADA.



Área de la sección crítica.

$$39 \times (556) = 21684 \text{ cm}^2$$

$$V_u = 350 \text{ Ton} - (1.39)^2(8.82) = 333 \text{ Ton.}$$

$$v_u = \frac{333000}{21684} = 15.35 \text{ kg/cm}^2$$

$$v_u > v_{ce} = 10.43 \text{ kg/cm}^2$$

Por lo tanto será necesario incrementar el peralte.

2º tanteo

$$h = 60 \text{ cm.}$$

$$\text{peso de la zapata } \downarrow 0.6 \times 2.4 = 1.44 \text{ tm/m}^2$$

$$A = \frac{350}{10 - 1.44} = 40.89 \text{ m}^2 \Rightarrow l = 6.40 \text{ m.}$$

$$\text{y } A = 40.96 \text{ m}^2.$$

$$q = \frac{350}{40.96} = 8.55 \text{ tm/m}^2$$

$$M_u = \frac{8.55(2.7)^2}{2} = 31.17 \frac{\text{ton-m}}{\text{m}}$$

$$d = 60 - 5 - 1 = 54 \text{ cm.}$$

$$\frac{M_u}{F_c b d^2 f_c} = \frac{3117000}{0.9(100)(54)^2(170)} = 0.0694 \Rightarrow q = 0.0725 \quad P = 0.0031$$

Tensión diagonal.

$$V_{ce} = F_c b d 0.5 \sqrt{f_c} = 0.8(100)(54)(0.5\sqrt{1700}) = 30547 \text{ kg.}$$

$$V_u = (2.7 - 0.54)(8.55) = 18.468 \text{ Ton} = 18468 \text{ kg.}$$

Revisión por penetración

$$\text{perímetro } b_o = 2(100 + 100 + 2(54)) = 616 \text{ cm.}$$

$$A = 54 \times 616 = 33264 \text{ cm}^2.$$

$$V_u = 350 - (1.54)^2(8.55) = 329.723 \text{ Ton.}$$

EJEMPLO 19 ^{4/4}

DIMENSIONAMIENTO DE UNA ZAPATA CUADRADA PARA COLUMNA AISLADA.

$$V_u = \frac{329723}{33264} = 9.91 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} < V_{ce} = 10.43 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

⇒ La zapata tendrá 6.40 m de lado y $h = 60 \text{ cm}$.

--- Cálculo del acero por flexión.

Si $p = 0.0031$ ⇒ $A_s = pbd = 0.0031 \times 100 \times 54 = 16.74 \frac{\text{cm}^2}{\text{m}}$

Si se emplean varillas #6 con $A_s = 2.87 \text{ cm}^2$

o sea $s = \frac{100(2.87)}{16.74} = 17 \text{ cm}$.

⇒ serán necesarias 38 varillas del #6 en cada dirección.

--- longitud de desarrollo.

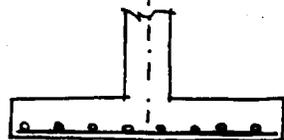
$$L_{db} = 0.06 \frac{2.87(4000)}{\sqrt{210}} = 43.56 \text{ cm}$$

$$\gamma L_{db} = 0.006(1.91)(4000) = 45.84 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow L_{db} = 46 \text{ cm}$$

$$L_{db} = 2.7 - \text{recubrimiento} = 2.7 - 0.03 = 2.67 \text{ m}$$

CROQUIS DE ARMADO



38 varillas del #6 en cada sentido.

REFERENCIAS

- 1.- "Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal", México, D. F. (1976).
- 2.- F. Robles, "Sección H, Concreto reforzado, Manual de Diseño de Obras Civiles", Comisión Federal de Electricidad, México (1970).
- 3.- "Building Code Requirements for Reinforced Concrete" (ACI 318-71), American Concrete Institute, Detroit (1971)
- 4.- "Commentary on Building Code Requirements for Reinforced Concrete (ACI 318-71), American Concrete Institute, Detroit (1971).
- 5.- Comité Européen du Béton-Fédération Internationale de la Précontrainte, - - "International recommendations for the design and construction of concrete structures", Cement and Concrete Association, London (1970).
- 6.- O.M. González Cuevas, F. Robles, J. Casillas y R. Díaz de Cossio, Texto - IMCYC de Concreto Reforzado" Instituto Mexicano del Cemento y del Concreto, México (1971).
- 7.- O.M. González Cuevas, F. Robles, J. Casillas, R. Díaz de Cossio, "Aspectos fundamentales del concreto reforzado", próximo a ser publicado por la Editorial Limusa Wiley.
- 8.- G. Winter y otros, "Design of Concrete Structures", 8a. ed, Mc Graw Hill - Book Co. Nueva York 1972 (basado en ACI 72)
- 9.- P.M. Ferguson, "Teoría elemental del concreto reforzado", CECSA, México (1969) (Hay una edición más reciente en inglés, basada en ACI 72)
- 10.- F. Robles y O.M. González Cuevas, editores, Apuntes de "Mecánica de Materiales" Facultad de Ingeniería, UNAM, México (1971).
- 11.- O.M. González Cuevas, R. Meli y F. Robles, "Complementos de mecánica de materiales: elementos estructurales sujetos a compresión axial", Facultad de Ingeniería, UNAM, México (1970).

Diseñe una viga rectangular con una relación $d = 2b$, para que resista un momento de 15 Ton-mt.

$f_c = 300 \text{ Kg/cm}^2$
 $f_y = 2300 \text{ Kg/cm}^2$
 $f_c' = 240 \text{ Kg/cm}^2$
 $f_c'' = 204 \text{ Kg/cm}^2$
 $\rho_b = \frac{f_c''}{f_y} \frac{4800}{f_y + 6000} = \frac{204}{2300} \frac{4800}{2300 + 6000} = 0.05129$

$\rho_{max} = 0.75 \rho_b$
 $\tau = 3 \text{ cm.}$

$\rho_{max} = 0.75 \rho_b = 0.03847$
 $g = \rho \frac{f_y}{f_c''} = 0.03847 \frac{2300}{204} = 0.43373$

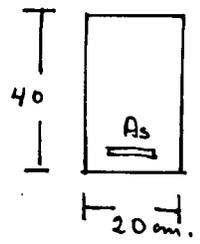
$b d^2 = \frac{M_e}{F_r f_c'' g (1 - 0.5g)} = \frac{15 \times 10^5}{0.9 \times 204 \times 0.4337 (1 - 0.5 \times 0.4337)}$
 $= 24052.42725 \text{ cm}^3$

$d^3 = 2 \times 24052.427 \Rightarrow d = 36.368 \text{ cm.}$
 $b = 18.18 \text{ cm.}$

$A_s = \rho_b d = 36.37 \times 18.18 \times 0.03847$
 $= 25.44 \text{ cm}^2$

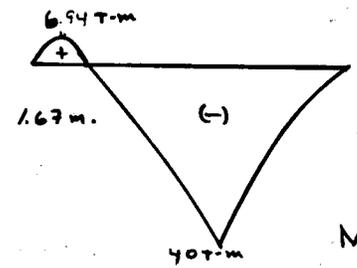
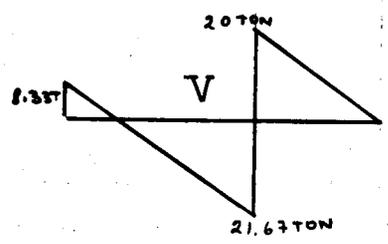
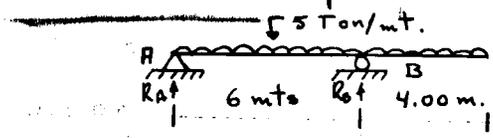
$h = 36.36 + 3 = 39.36$

Redondeando a múltiplos de 5 %



$A_s = 5 V_s 1^4 = 25.35 \text{ cm}^2$
 en dos lechos.
 Un cálculo más preciso implica recalcular el M_e con el peralte modificado por tener dos lechos de varillas.

PROBLEMA.- Diseñar la viga de la figura considerando una relación $d/b = 2$, para el momento positivo. R.D. 77.



$f_c' = 200 \text{ Kg/cm}^2$
 $f_y = 4000 \text{ Kg/cm}^2$
 $\Sigma M_A = 6 R_B - (10)(5)(5) = 0$
 $R_B = \frac{250}{6} = 41.67 \text{ TON}$
 $\Sigma M_B = 6 R_A - 5(6)(3) + 4(5)(2) = 0$
 $R_A = \frac{1}{6}(90 - 40) = 8.33 \text{ TON}$
 $R_A + R_B = 8.33 + 41.67 = 50 \text{ TON.}$

$\frac{8.33 + 21.67}{6.00} = \frac{8.33}{x} \Rightarrow x = 1.67 \text{ m}$

$M_x = 8.33x - \frac{5x^2}{2}$
 $\frac{dM}{dx} = 0 = V = 8.33 - 5x = 0$
 $\therefore x = 1.67 \text{ mts}$

$M(1.67) = 8.33(1.67) - \frac{5(1.67)^2}{2}$

$M_{(+)} = 6.94 \text{ TON-MT.}$

$M_{(-)max} = 5 \times 4 \times 2 = 40 \text{ TON-MT.}$

DISEÑO PARA MOMENTO POSITIVO.

$f_c^* = 0.8 f_c' = 160 \text{ Kg/cm}^2$
 $f_c'' = 0.85 f_c' = 136 \text{ Kg/cm}^2$
 $\rho_b = \frac{f_c''}{f_y} \frac{4800}{f_y + 6000} = \frac{136}{4000} \left(\frac{4800}{4000 + 6000} \right) = 0.01632$

$$f_{max} = 0.75 f_b = 0.01224$$

$$f_{max} = f_{max} \frac{f_y}{f_c} = 0.01224 \frac{4000}{136} = 0.36$$

SOLUCION:

$$M_R = F_R b d^2 f_c' \eta (1 - 0.5 \eta)$$

$$b d^2 = \frac{M_R}{F_R f_c' \eta (1 - 0.5 \eta)}$$

$$= \frac{6.94 \times 10^5}{0.9 \times 136 \times 0.36 (1 - 0.5 \times 0.36)}$$

$$= 19207.09567$$

$$S_c \quad b = \frac{d}{2}$$

$$d^3 = 2 \times 19207.09 = 38414.19134$$

$$d = 33.74 \text{ cm.}$$

$$b = 16.87 \text{ cm.}$$

$$A_s = \rho b d \Rightarrow A_s = 6.96 \text{ cm}^2$$

Opciones Armado:

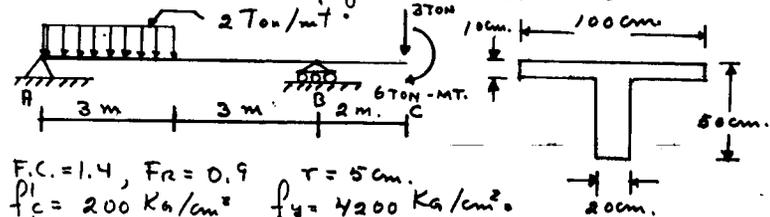
$$10 \text{ Vs } \frac{3}{8}'' = 7.10 \text{ cm}^2$$

$$6 \text{ Vs } \frac{1}{2}'' = 7.62 \text{ cm}^2$$

$$2 \text{ Vs } \frac{7}{8}'' = 7.74 \text{ cm}^2$$

Para las opciones de Vanilla No. 3 y No. 4 se tendría que hacer armado en capas, para vanilla del No. 7 el armado es en una sola capa.

PROBLEMA.- Calcular el área de acero de refuerzo necesario en el apoyo B de la viga mostrada en la figura (R.D.F. 76)



$$F_c = 1.4, F_R = 0.9, \tau = 5 \text{ cm.}$$

$$f_c' = 200 \text{ Kg/cm}^2, f_y = 4200 \text{ Kg/cm}^2$$

$$f_c^d = 160 \text{ Kg/cm}^2, f_c'' = 136 \text{ Kg/cm}^2$$

DESARROLLO.-

$$M_B = -3(2) - 6 = -12 \text{ Ton-mt.}$$

$$M_U = -12 \times 1.4 = -16.80 \text{ Ton-mt} = -16.8 \times 10^5 \text{ Kg-cm.}$$

$$b = 20 \quad d = 45 \text{ cm.}$$

$$A_{sb} = \frac{4800}{6000 + 4200} \frac{136}{4200} (20)(45) = 13.71 \text{ cm}^2$$

$$M_b = F_R A_s f_y d (1 - 0.5 \eta)$$

$$= 0.9 \times 13.714 \times 4200 \times 45 \left[1 - 0.5 \frac{13.71}{20 \times 45} \frac{4200}{136} \right]$$

$$M_b = 17.83 \text{ Ton-mt} > 16.8 \text{ Ton-mt.}$$

Se diseña simplemente armada.

$$M_R = F_R b d^2 f_c' \eta (1 - 0.5 \eta)$$

$$16.8 \times 10^5 = 0.9 \times 20 \times (45)^2 \times 136 (\eta - 0.5 \eta^2)$$

$$\eta^2 - 2\eta + 0.677802 = 0$$

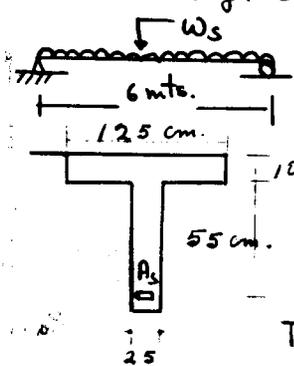
$$\eta = 0.404622$$

$$\rho = 0.01310$$

$$A_s = \rho b d = 0.0131 (20)(45) = 11.80 \text{ cm}^2$$

$$A_s = 11.80 \text{ cm}^2$$

PROBLEMA - Encontrar la carga uniformemente repartida de servicio, que puede soportar la viga de sección T mostrada:



$f_c = 210 \text{ Kg/cm}^2$ R.D. 77
 $f_y = 4200 \text{ Kg/cm}^2$ F.C. = 1.4
 $A_s = 55 \text{ cm}^2$

DESARROLLO:

Si $a = 10 \text{ cm}$.
 $C = abf_c'' = 10(125)(142.8) = 178500 \text{ Kg}$.

$T = A_s f_y = 55 \times 4200 = 231000 \text{ Kg}$.

∵ $T > C \Rightarrow$ Debe trabajar parte del alma a compresión.

$T - C = 231000 - 178500 = 52500 \text{ Kg}$,
 $52500 = x b' f_c''$

$x = \frac{52500}{25 \times 142.8} = 14.71 \text{ cm}$.

$a = 10 + 14.71 = 24.71 \text{ cm}$.

$M_R = F_R [abf_c'' (d - \frac{a}{2}) + f_c'' (b - b') t (d - \frac{t}{2})]$

$= 0.9 [24.71 \times 25 (142.8) (65 - 12.35) + 142.8 (125 - 25) 10 (65 - 5)] = 12148293.56 \text{ Kg-cm}$

$M_R = 121.48 \text{ Ton-mt}$

$M_s = \frac{M_R}{F.C.} = \frac{121.48}{1.4} = 86.77 \text{ Ton-mt}$

$M_{s \max} = \frac{W_s l^2}{8} = \frac{W_s 36}{8} \Rightarrow W_s = \frac{2 M_s}{9}$

$W_s = \frac{2 \times 86.77}{9} = 19.28$

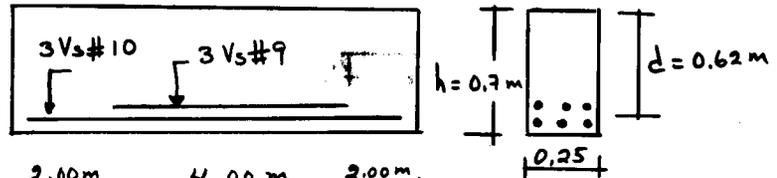
$W_s = 19.28 \text{ Ton/mt}$

Para la viga de la figura:

a) Obtenga el diagrama de contribución del concreto, y el correspondiente a estribos.

b) Cheque las especificaciones del Reglamento del D.D.F.

Estribos: #3 @ 20 | @ 30 | #3 @ 20 cm.



$f_c' = 250 \text{ Kg/cm}^2$ $A_s = 7.94 \text{ cm}^2 \text{ c/u } \#10$

$f_y = 4000 \text{ Kg/cm}^2$ $A_s = 6.42 \text{ cm}^2 \text{ c/u } \#9$

Estribos 2 Ramas #3, $A_s = 0.71 \text{ cm}^2 \text{ c/u } \#3$

$f_c'' = 170 \text{ Kg/cm}^2$ $f_c^* = 200 \text{ Kg/cm}^2$

a) Contribución del concreto.

Con 3 Vs #10, $A_s = 3 \times 7.94 = 23.82 \text{ cm}^2$

$\rho = \frac{A_s}{bd} = \frac{23.82}{(25)(62)} = 0.0154 > 1\%$

Se utiliza la ecuación 2.17 del Reglamento, igualmente para el tramo central con mayor porcentaje.

$V_{CR} = 0.5 F_R b d \sqrt{f_c''}$

$= 0.5 \times 0.8 (25) (62) \sqrt{200}$

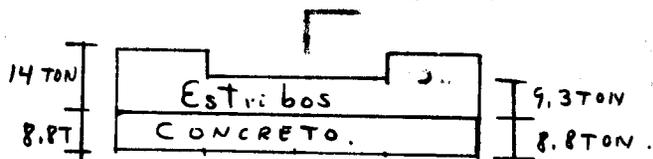
$V_{CR} = 8768.12 \text{ Kg} = 8.8 \text{ TON}$

Contribución de los estribos.

$$V_s = V_u - V_{cr} = \frac{F_r A_v f_y d}{s}$$

$$= \frac{0.8 (1.42) (4000) (62)}{s} = \frac{281728}{s}$$

Para $s = 20 \text{ cm}$. $V_s = 14086.40 \text{ Kg}$
 " $s = 30 \text{ cm}$. $V_s = 9390.93 \text{ Kg}$.



b) Chequeo de limitaciones:

$$\frac{F_r A_v f_y}{3.5b} = \frac{0.8 (1.42) (4000)}{3.5 (25)} = 51.93 > 30 \text{ cm.} \quad \checkmark$$

Checa

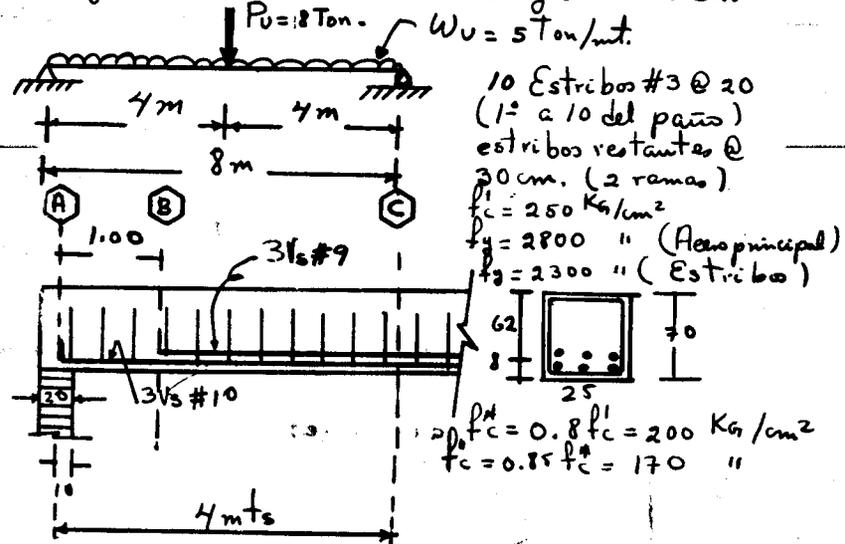
$$F_r b d \sqrt{f_c^*} = 0.8 (25) (62) \sqrt{200} = 17536 \text{ Kg} = 17.5 \text{ Kg}$$

$$1.5 (17.5) = 26.3 \text{ TON}$$

$$2.5 (17.5) = 43.8 \text{ TON}$$

No se tiene V_u para comparar

Obtener la resistencia a fuerza cortante por el Reglamento del D.F. 76 de la viga mostrada.



a) Fuerza cortante que toma el concreto.

$$\frac{L}{h} = \frac{800}{70} = 11.43 > 5$$

$$\rho < 0.01 : V_{cr} = F_r b d (0.20 + 30\rho) \sqrt{f_c^*}$$

$$\rho \geq 0.01 : V_{cr} = 0.5 F_r b d \sqrt{f_c^*}$$

Para $3V_s \#10 = 23.76 \text{ cm}^2$

$$\rho = \frac{A_s}{bd} = \frac{23.76}{25 \times 62} = 0.0153 > 0.01$$

$$V_{cr} = 0.5 \sqrt{f_c^*} F_r b d$$

$$= 7.07 \times 0.8 \times 25 \times 62 = 8766.80 \text{ Kg}$$

$$3V_s \#10 + 3V_s \#9 = 23.76 + 19.23$$

$$= 42.99 \text{ cm}^2$$

(3.9 MV)

$$\rho = \frac{A_s}{bd} = \frac{42.99}{25 \times 62} = 0.0277 > 0.01$$

$$V_{CR} = 0.5 \sqrt{f_c'} F_r b d = 7.07 \times 0.8 \times 25 \times 62 = 8766.8 \text{ Kg.}$$

b) Revisión de limitaciones del refuerzo.
Sección crítica a un paralelo del apoyo.

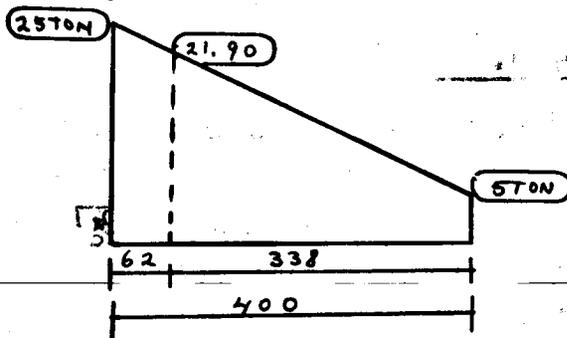
$$S_{\max} \begin{cases} 0.5d & \text{si } V_{CR} < V_u < 1.5 F_r b d \sqrt{f_c'} \\ 0.25d & \text{si } V_u > 1.5 F_r b d \sqrt{f_c'} \end{cases}$$

$$V_u < 2.5 F_r b d \sqrt{f_c'}$$

$$S \leq \frac{F_r A_v f_y}{3.5 b} = \frac{0.8 \times 1.42 \times 2300}{3.5 \times 25} = 29.86 \approx 30 \text{ cm.}$$

CUMPLE

Diagrama de fuerza cortante:



$$2.5 F_r b d \sqrt{f_c'} = 2.5 \times 0.8 \times 25 \times 62 \times 14.14 = 43834.0 \text{ Kg.} > 21125 \text{ Kg.}$$

(BIEN)

$$1.5 F_r b d \sqrt{f_c'} = 26300.4 \text{ Kg.}$$

∴ $V_{CR} < V_u < 1.5 F_r b d \sqrt{f_c'}$

$$∴ S_{\max} = 0.5d = 0.5 \times 62 = 31 \text{ cm}$$

(CUMPLE)

c) Revisión de la necesidad de disminuir V_{CR} :
por intemperación de más del 33% del refuerzo longitudinal (Véase 2.1.5f), en zona de tensión.

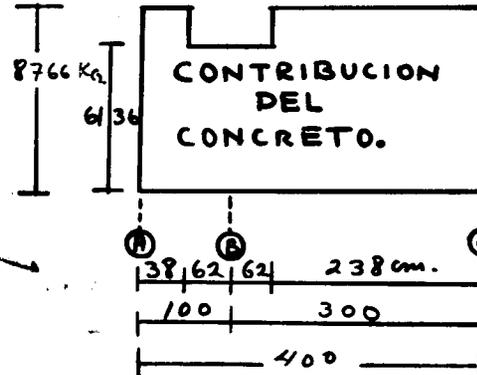
$$\frac{A_{sint.}}{A_s} = \frac{19.23}{42.99} \times 100 = 44.73\% > 33\%$$

es necesario reducir (70%) V_{CR} :

$$V_{CR} = 8766.80 \text{ Kg.}$$

$$70\% V_{CR} = 0.7 \times 8766.80 = 6136.76 \text{ Kg.}$$

$$d = 62 \text{ cm.}$$



d) Contribución de los estribos.-

Para estribos verticales:

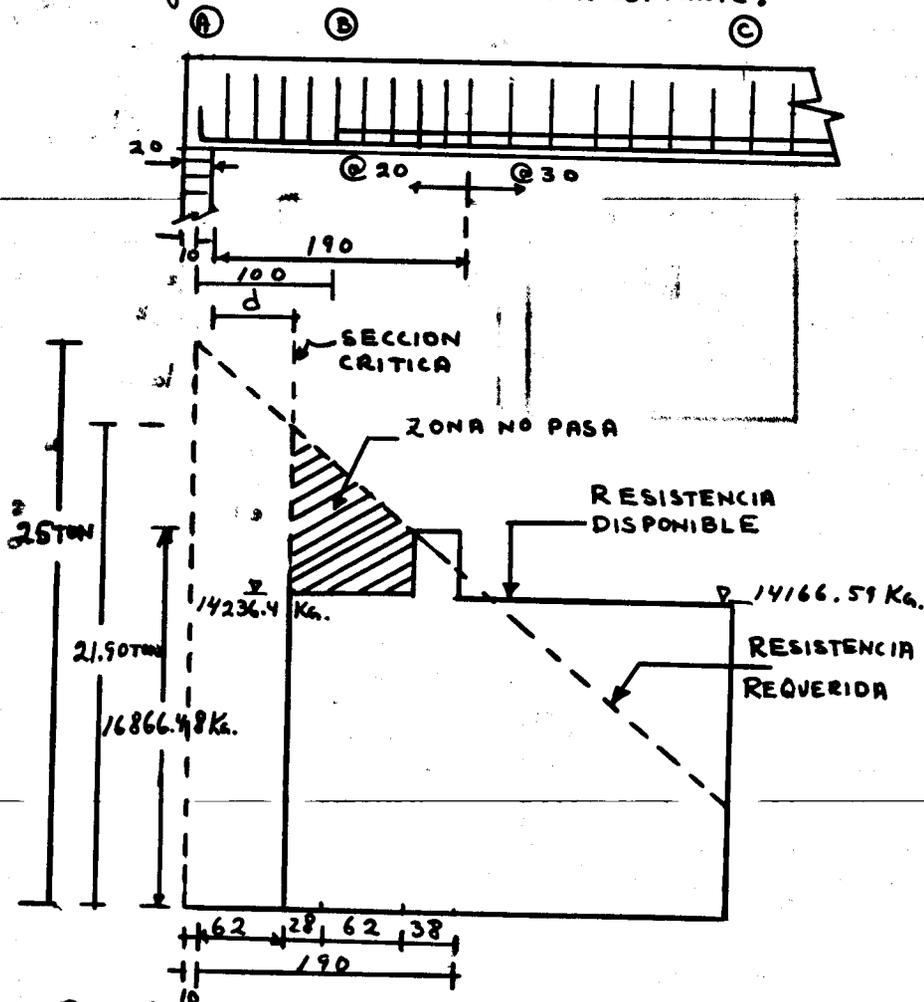
$$S = \frac{F_r A_v f_y d}{V_u - V_{CR}} = \frac{F_r A_v f_y d}{V_s}$$

$$V_s = \frac{F_r A_v f_y d}{S} = \frac{0.8 \times 1.4 \times 2300 \times 62}{S} = \frac{161993.60}{S}$$

$$S = 20 \text{ cm. } V_s = 8099.68 \text{ Kg. hasta } 1.90 \text{ m del apoyo.}$$

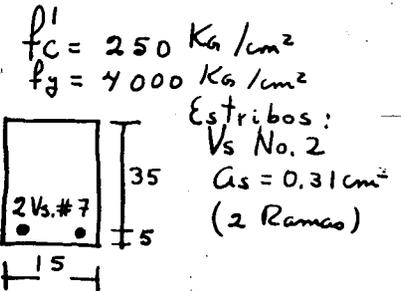
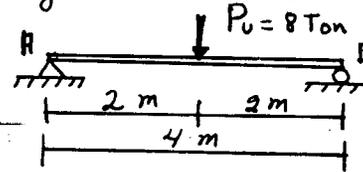
$$S = 30 \text{ cm. } V_s = 5399.79 \text{ (Estribos restantes)}$$

Diagrama de Resistencia a cortante.-



$$\begin{aligned} \text{Resistencia disponible} &= V_{cr} + V_s : \\ 8099.68 + 636.76 &= 14236.44 \text{ Kg.} \\ 8766.80 + 8099.68 &= 16866.48 \text{ " } \\ 5389.79 + 8766.80 &= 14166.59 \text{ " } \end{aligned}$$

PROBLEMA - Diseñar la viga mostrada por fuerza cortante de acuerdo con el reglamento del D.D.F. 76.



DESARROLLO.-

$$M_u = \frac{P_u L}{4} = \frac{8 \times 4}{4} = 8 \text{ Ton-mt.}$$

$$V_u = \frac{P_u}{2} = \frac{8}{2} = 4 \text{ Ton.}$$

$$\frac{L}{h} = \frac{400}{40} = 10 > 5$$

$$\rho = \frac{A_s}{bd} = \frac{7.74}{15 \times 35} = 0.0147 > 0.01$$

$$V_{cr} = 0.5 F_r b d \sqrt{f'_c}$$

$$= 0.5 \times 0.8 \times 15 \times 35 \sqrt{200}$$

$$V_{cr} = 2969.84 \text{ Kg} < V_u = 4000 \text{ Kg.}$$

Se necesita colocar estribos para resistir la tensión diagonal.

$$F_r b d \sqrt{f_c^*} = 0.8 \times 15 \times 35 \sqrt{200} = 5939.69 \text{ Kg.}$$

$$1.5 F_r b d \sqrt{f_c^*} = 8909.54 \text{ Kg.}$$

$$2.5 F_r b d \sqrt{f_c^*} = 14849.24 \text{ Kg.} > V_u \quad (\text{BIEN})$$

Se tiene que:

$$V_{CR} < V_u < 1.5 F_r b d \sqrt{f_c^*}$$

Por lo tanto, la separación será:

$$S = A_v \frac{F_r f_s d}{V_u - V_{CR}} = A_v \frac{0.8 \times 4000 \times 35}{4000 - 2969.84}$$

$$S = 108.72 \text{ Av.}$$

Para estribos del #2

$$\text{con } A_s = 0.31 \text{ cm}^2 \Rightarrow A_v = 0.62 \text{ cm}^2 \text{ (dos ramas)}$$

$$S = 67.41 \text{ cm}$$

Checando la separación máxima:

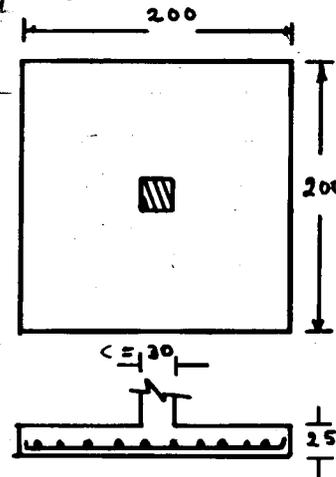
$$S_{\max} = 0.5 d = 0.5 \times 35 = 17.5 \text{ cm.}$$

Rige: $S = 17.5 \text{ cm}$

Se diseña con:

Estribos del No. 2 @ 15 cm.

PROBLEMA.- Determinar la resistencia P_r de la zapata aislada que se muestra en la figura, sobre consideraciones de solamente fuerzas cortantes.



Vs. No. 5 @ 25 en cada sentido

$$d = 19 \text{ cm.}$$

$$f_c = 200 \text{ Kg/cm}^2$$

$$f_c^d = 160 \text{ Kg/cm}^2$$

$$f_c^h = 136 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\sqrt{f_c^d} = 12.65 \text{ Kg/cm}^2$$

La resistencia de la zapata a fuerza cortante será la menor de las dos condiciones siguientes:

- Acción de losa en 2 sentidos
- Acción de losa en un sentido (viga ancha).

a) Acción de losa en dos sentidos. Se checa el cortante alrededor de la columna de una distancia $d/2$ hacia afuera, con la presión neta del suelo como carga aplicada.

$$V_c = V_c b d$$

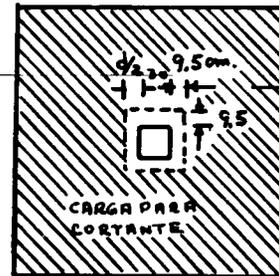
$$b = 4(c + d)$$

$$= 4(30 + 19) = 196 \text{ cm.}$$

$$\Rightarrow$$

$$V_c = F_r \sqrt{f_c^d} = 0.8 \times 12.65$$

$$= 10.12 \text{ Kg/cm}^2$$



Área adyacente para revisión por penetración

$$V_c = 10.12 \times 196 \times 19 = 37684.23 \text{ Kg.}$$

$$\text{Presión neta} \Rightarrow q_n = \frac{P_R}{A} = \frac{P_R}{200 \times 200}$$

$$\text{dado: } V_u = V_c,$$

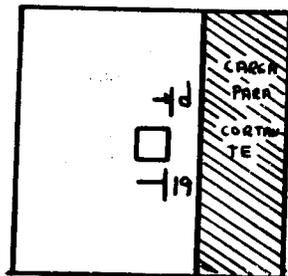
$$\frac{P_R}{200 \times 200} [(200 \times 200) - (49)^2] = 37684.23 \text{ Kg.}$$

$$P_R = 40,090.67 \text{ Kg.}$$

b) El reglamento estipula que se revise como losa en un sentido (viga ancha), aunque esta condición normalmente gobierna para zapatas largas angostas.

$$\rho = \frac{A_s}{bd} = \frac{17.82}{200 \times 19} = 0.0047 < 0.01$$

$$\begin{aligned} \therefore V_{CR} &= F_r b d (0.2 + 30\rho) \sqrt{f'_c} \\ &= 0.8 \times 200(19)(0.2 + 30 \times 0.0047) \sqrt{160} \\ &= 13100.43 \text{ Kg} \end{aligned}$$



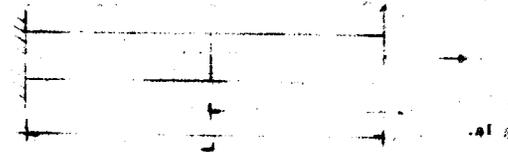
$$q_n = \frac{P_R}{A} = \frac{P_R}{(200)^2}$$

$$\begin{aligned} V_u &= V_c \\ (200 \times 66) \frac{P_R}{(200)^2} &= 13100.43 \end{aligned}$$

$$P_R = 39,698.27 \text{ Kg.}$$

$$P_R = 39,698 \text{ Kg.}$$

$$P_R \doteq 40 \text{ TON}$$



INTRODUCCION

En los capítulos anteriores se analizó la acción de las cargas axiales, fuerzas cortantes, momentos flexionantes y momentos torsionantes actuando en forma independiente. Se establecieron las expresiones que permiten calcular los esfuerzos producidos por estas acciones al actuar en elementos estructurales tales como columnas, vigas, muros, etc, para materiales con comportamiento elástico lineal. Las expresiones empleadas se indican a continuación:

$$\text{Esfuerzo axial} \quad \sigma = f = \frac{P}{A}$$

$$\text{Esfuerzo cortante} \quad v = \frac{VQ}{It}$$

$$\text{Esfuerzo normal debido a flexión} = \frac{M}{I} y = f$$

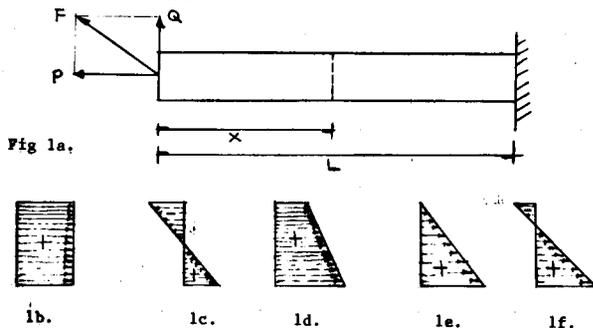
$$\text{Esfuerzo cortante debido a torsión} = \frac{T}{I} c = \tau$$

En este capítulo se le dará especial atención a la acción de la carga axial y el momento flexionante cuando estos se presentan simultáneamente en una

sección de un elemento estructural cualquiera. La carga axial podrá ser de tensión o compresión y el momento flexionante podrá actuar alrededor de uno o de ambos planos de simetría de la sección. Asimismo se presenta el concepto de núcleo central y como una aplicación de los conceptos antes expuestos se ilustra la forma de revisar y dimensionar muros de retención.

FLEXOTENSION Y FLEXOCOMPRESION EN EL INTERVALO ELASTICO. LIMITACIONES DEL PRINCIPIO DE SUPERPOSICION

Para ilustrar el efecto de la acción combinada de la carga axial y del momento flexionante considérese la viga en cantiléver mostrada en la fig 1-a en la que actúa una fuerza inclinada F.



Esta carga se puede descomponer en una fuerza flexionante transversal Q, y una fuerza axial de tensión P.

Para determinar los esfuerzos producidos en la viga por estas fuerzas es necesario distinguir entre dos posibilidades: 1).- La viga puede ser de longitud corta en relación con su altura, por lo que resulta relativamente rígida a la flexión. En este caso las deformaciones por flexión serán pequeñas y solo producirán un cambio insignificante en la línea de acción de la fuerza axial, P. Para estos casos los esfuerzos debidos a P y a Q se calculan independientemente y luego se superponen. 2). La viga puede ser relativamente delgada y flexible, en cuyo caso las deformaciones por flexión pueden ser suficientemente grandes para producir un cambio en la línea de acción de la car

ga axial P. Esta fuerza producirá entonces momentos flexionantes adicionales en la viga que hacen que la superposición de los efectos de la carga axial y del momento flexionante, calculados en forma independiente, no sea válida.

En este capítulo solo se estudiarán barras que sean relativamente rígidas y cumplan con las condiciones descritas en 1). Los elementos estructurales cuyo comportamiento cumple con las condiciones descritas en 2). Se estudiarán posteriormente.

Efectos de esbeltez.

Los efectos resultantes en una sección recta de la viga de la fig 1-a, situada a una distancia X del extremo libre se obtiene superponiendo los esfuerzos axiales debidos a P y los de flexión debidos a Q. Estas distribuciones de esfuerzos se muestran separadamente en la fig 1-b y 1-c respectivamente. Los esfuerzos finales, indicados en la fig 1-d se hallan con la siguiente ecuación:

$$f = \frac{P}{A} \pm \frac{M}{I} \quad (1)$$

donde P es la carga axial y M el momento flexionante en la sección considerada. Para la viga cantiléver mostrada se tiene que $M = Q(x)$.

Obsérvese que para la viga de la fig 1-a, la carga axial es de tensión, por lo tanto, y de acuerdo con la convención de signos escogida, los esfuerzos que originan serán positivos fig 1-b, por otra parte el momento flexionante producido por carga Q también será positivo por lo que originará esfuerzos de compresión, negativos, en la parte superior de la sección y de tensión, positivos, en la parte inferior de la misma, fig 1-c.

La distribución final de esfuerzos dependerá de la suma algebraica de los términos de la ecuación. La distribución puede ser tal que toda la sección esté en tensión como se muestra en la fig 1-d; o puede ser dicha distribución triangular, fig 1-e; o bien la sección puede estar una parte en tensión y otra en compresión, fig 1-f. En todos los casos de flexión y carga axial combinadas es claro que el eje neutro de la sección recta (es decir la línea

RELACIONES BASICAS ENTRE ESFUERZO Y DEFORMACION PARA MATERIALES CON COMPORTAMIENTO LINEALMENTE ELASTICO

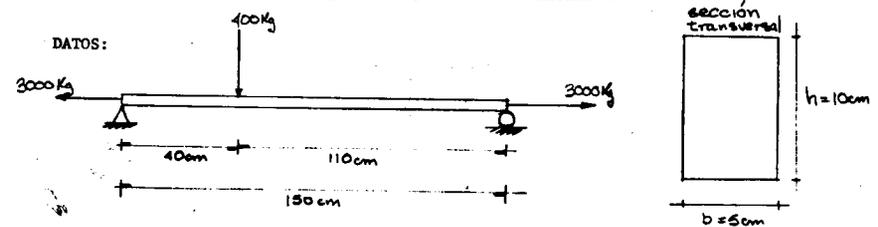
Estado de carga	Sección Transversal	Esfuerzo elástico	Deformación elástica
Axial	Cualquiera	$\sigma = \frac{P}{A}$	$\frac{du}{dx} = \frac{P}{AE}$
Torsional	Circular	$\tau = \frac{T}{J} \rho$	$\frac{d\phi}{dx} = \frac{T}{JG}$
	Rectangular	$\tau_{max} = \frac{T}{2bc^2}$	$\frac{d\phi}{dx} = \frac{T}{\beta bc^3G}$
	Tubular de pared delgada	$\tau = \frac{T}{2At}$	$\frac{d\phi}{dx} = \frac{T}{4A^2G} \int \frac{ds}{t}$
Flexional	Cualquiera	$\sigma = -\frac{M}{I} y$	$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI}$
	UTILIZAR LOS EJES PRINCIPALES		
	Simetría en ambas curvas	$\sigma = \frac{My}{Ae(R-y)}$	
Cortante en vigas	Cualquiera	$\tau = \frac{VQ}{It}$	Ver capítulo de cortante de los apuntes de N.H.I.

de esfuerzo cero) ya no pasa por el centroide, y aún puede quedar fuera de la sección.

EJEMPLO. COMBINACION DE ESFUERZOS

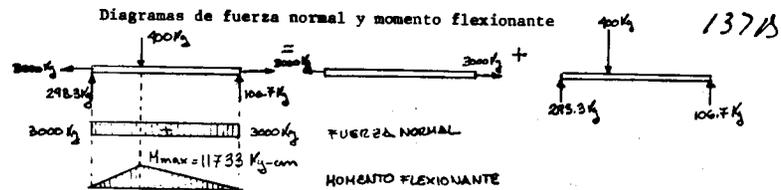
En este ejemplo se enfatiza el método de superposición de efectos el cual es válido cuando el material está en el rango elástico, la viga que se presenta está sujeta a la acción de un sistema de fuerzas formado por una carga axial, de tensión, en la dirección del eje longitudinal de la viga, y una carga transversal a dicho eje. Estas cargas origina esfuerzos normales. Siendo la distribución de esfuerzos debidos a carga axial uniforme a lo largo de la viga, los esfuerzos normales máximos se presentan en la sección donde ocurra el momento flexionante máximo. En el ejemplo se presenta la distribución de esfuerzos normales en la sección transversal debidos a cada una de las cargas, así como la acción y conjunta de las mismas.

EJEMPLO. Cálculo de esfuerzos combinados en una sección, de una viga simplemente apoyada, sometida a carga axial y momento flexionante.



- Encontrar los esfuerzos máximos de tensión y compresión, debidos a la acción simultánea de la flexión y carga axial.
- Diagrama de esfuerzos combinados.

SOLUCION:



Nota. -

Es importante observar que la superposición de esfuerzos es aplicable sólo en problemas elásticos en que las deformaciones son pequeñas.

EJEMPLO. (Continuación)

Momento de inercia de la sección transversal

$$I = \frac{b \times h^3}{12} = \frac{5 \times 10^3}{12} = 416.7 \text{ cm}^4$$

Módulo de sección

$$S = \frac{I}{Y} = \frac{416.7}{5} = 83.34 \text{ cm}^3$$

Cálculo de esfuerzos

Esfuerzo normal debido a la carga axial

$$f_a = \frac{P}{A} = \frac{3000}{5 \times 10} = 60.0 \text{ kg/cm}^2 \text{ (Tensión)}$$

Esfuerzo normal máximo debido a flexión

$$f_f = \pm \frac{M}{S} = \pm \frac{11732.0}{83.34} = \pm 104.8 \text{ kg/cm}^2$$

Combinación de esfuerzos

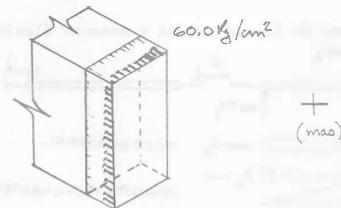
Esfuerzo máximo de tensión:

$$f_{\text{máx}_t} = \frac{P}{S} + \frac{M}{S} = 60.0 + 104.8 = 164.8 \text{ kg/cm}^2$$

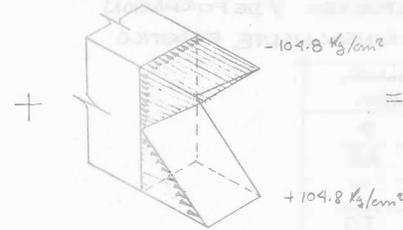
Esfuerzo máximo de compresión

$$f_{\text{máx}_c} = \frac{P}{A} - \frac{M}{S} = 60.0 - 104.8 = -44.8 \text{ kg/cm}^2$$

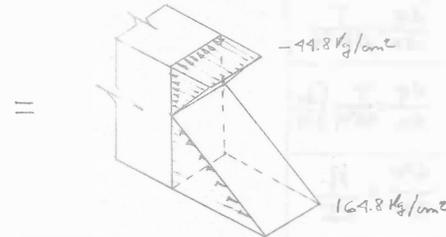
a) Esfuerzo normal debido a carga axial



b) Esfuerzo normal debido a la flexión



c) Combinación de esfuerzos



DETERMINACION DE DIAGRAMAS DE ESFUERZOS EN FLEXION BIAIXIAL Y FUERZA NORMAL COMBINADAS

Un caso especial de interés práctico que se presenta en las columnas y a veces en las traveses ocurre cuando en un elemento estructural actúa una fuerza paralela a su eje longitudinal pero fuera de los ejes principales de la sección, fig 2-a.

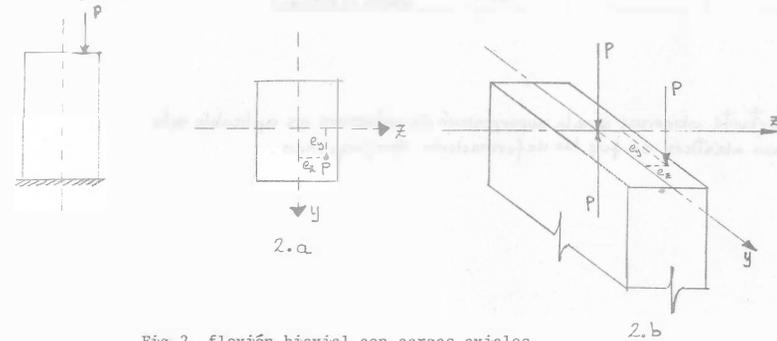


Fig 2 flexión biaxial con cargas axiales

La acción de la fuerza excéntrica es equivalente a la de una fuerza axial P que pasa por el centroide de la sección y a un momento flexionante Pe, fig 2-b.

Cuando la fuerza P no está aplicada sobre uno de los ejes principales de la sección transversal, habrá flexión simultánea con respecto a ambos ejes principales. Representando las coordenadas del punto de aplicación de P por e_y y e_z fig 2-b, se ve que los momentos flexionantes respecto a los ejes y y z son numéricamente iguales a $M_y = P e_z$ y $M_z = P e_y$.

Si el material del elemento tiene un comportamiento elástico y las deflexiones originadas por la flexión no son significativas los esfuerzos normales, f , originados por la carga axial y la flexión alrededor de los dos ejes de simetría podrán calcularse con la expresión

$$f = \frac{P}{A} \pm \frac{M_y}{I_y} z \pm \frac{M_z}{I_z} y \quad (2)$$

donde I_y e I_z son los momentos de inercia respecto a los ejes y y z respectivamente.

La carga axial P será positiva si es de tensión y negativa cuando es de compresión; los momentos M_y y M_z son positivos cuando originen tensiones en las zonas donde z y y , respectivamente, sean positivos, y negativos en caso contrario, fig 3.

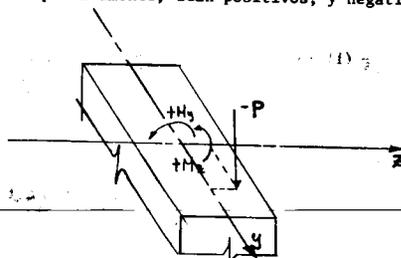


Fig 3 convención de signos para cargas y momentos

Dado a que el eje neutro representa el lugar geométrico donde los esfuerzos normales son nulos, la posición del mismo podrá encontrarse igualando a cero la ecuación 2.

$$0 = \frac{P}{A} \pm \frac{M_y}{I_y} z \pm \frac{M_z}{I_z} y = 0 \quad (3)$$

Como podrá observarse esta ecuación representa una recta que no pasa por el origen y que podrá cortar o no la sección transversal, lo que dependerá de la forma de ésta y de la posición y magnitud de la carga axial P. Las coordenadas en el origen del eje neutro, o sea, los puntos en que el eje neutro intercepta a los ejes coordenados y y z se hallan haciendo z y y , respectivamente iguales a cero en la ecuación (3) y despejando la coordenada no anulada. Nótese que el eje neutro pasa por el cuadrante opuesto al que se encuentra aplicada la carga y que si la excentricidad e se reduce, el eje neutro se alejará del centroide, y si e aumenta dicho eje se acercará al mismo, fig 4.

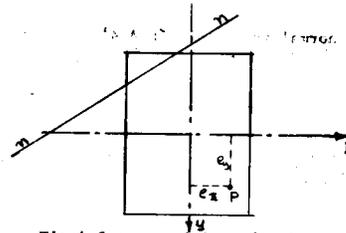


Fig 4 fuerza axial excéntrica que produce flexión con respecto a ambos ejes principales

EJEMPLO. CARGA APLICADA EXCENTRICAMENTE

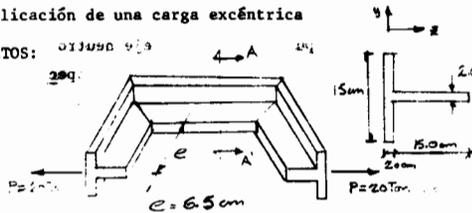
En este ejemplo se tiene el codo de una conexión, sujetada a la acción de una fuerza de tensión P, actuando en uno de sus extremos, la cual es excéntrica con respecto a uno de sus ejes produciendo la acción combinada de una carga axial y un momento flexionante. Los esfuerzos máximos de tensión y compresión que se presentan en la sección A A' de la pieza, se pueden calcular superponiendo la acción de la carga axial y del momento flexionante, ya que el material de que está formada la pieza tiene un comportamiento elástico, la carga axial que actúa en la sección produce esfuerzos de tensión, en tanto que el momento flexionante produce esfuerzos de tensión en la mayor parte del alma y de compresión en el patín de la sección. La fuerza no produce momento alrededor del eje z.

En el ejemplo se ilustra la forma de calcular el centroide de la sección,

así como el momento de inercia centroidal, el cálculo de la excentricidad de la fuerza actuante, así como la determinación de los esfuerzos que se presentan en las fibras más esforzadas a tensión y compresión.

Cálculo de esfuerzos combinados (axial y de flexión) producidos por la aplicación de una carga excéntrica

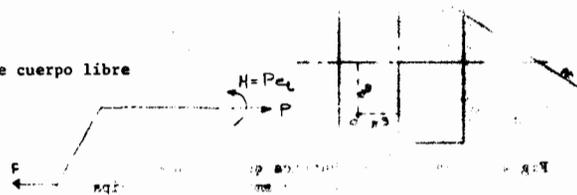
DATOS:



Se pide encontrar el máximo esfuerzo normal en la sección A-A'

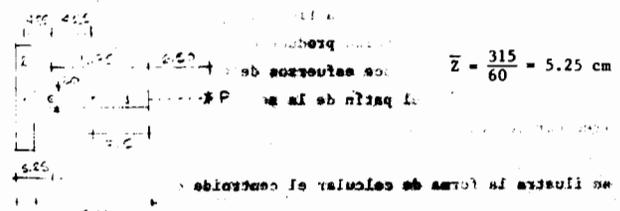
SOLUCION:

Diagrama de cuerpo libre



Determinación del centroide y del momento de inercia centroidal de la sección

Sec	Area	z	Az	d	d ²	Ad ²	I _y = $\frac{bh^3}{12}$
1	30	9.50	285.0	4.25	18.0625	541.875	562.5
2	30	1.00	30.0	4.25	18.0625	541.875	10.0
	60		315			1083.75	572.50



Momento de inercia centroidal

$$I_G = I_{CG} + Ad^2$$

$$= 572.50 + 1083.75 = 1656.25 \text{ cm}^2$$

excentricidad total

$$e_t = 6.5 + 11.75 = 18.25 \text{ cm}$$

Cálculo de esfuerzos

aplicando la ecuación $f = \frac{P}{A} + \frac{M}{I} c$

donde:

$$P = 20\,000 \text{ kg}$$

$$A = 60 \text{ cm}^2$$

$$e_t = 18.25 \text{ cm}$$

$$M = P \times e_t = 20\,000 \times 18.25 = 365\,000 \text{ kg/cm}$$

$$c_1 = 11.75 \text{ cm}$$

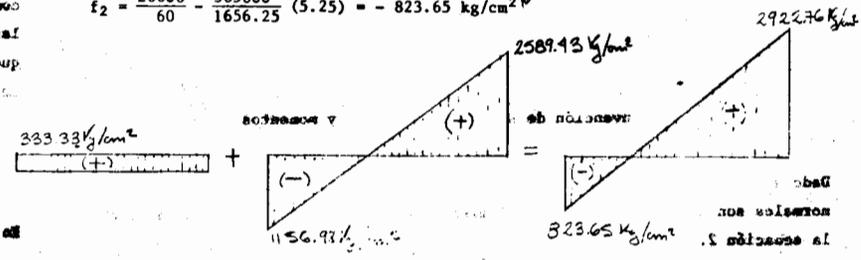
$$c_2 = 5.25 \text{ cm}$$

Esfuerzo máximo de tensión

$$f_1 = \frac{20000}{60} + \frac{365000}{1656.25} (11.75) = 2922.76 \text{ kg/cm}^2$$

Esfuerzo máximo de compresión

$$f_2 = \frac{20000}{60} - \frac{365000}{1656.25} (5.25) = -823.65 \text{ kg/cm}^2$$



EJEMPLO. FLEXION BIAXIAL PRODUCIDA POR UNA CARGA EXCENTRICA

Se trata de encontrar los esfuerzos producidos por una carga excéntrica, en los extremos de una sección rectangular, así como la localización del eje neutro.

Dado que el material del elemento tiene un comportamiento elástico, para encontrar los esfuerzos se aplicó la ecuación

$$f = \frac{P}{A} + \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z$$

en donde los momentos M_z y M_y son los producidos por la carga P , actuando con una excentricidad e_y y e_z respectivamente, los efectos que producen estos momentos aunado al que produce la carga axial se superponen obteniéndose la distribución mostrada en el inciso c del problema.

Si el momento $M_z = P e_y$ actuara solo, se produciría como flexión tal que para los valores positivos de y la sección estaría sujeta a un esfuerzo de compresión, y a un esfuerzo de tensión donde y sea negativo. P es positiva (tensión).

En forma similar si únicamente existiera el momento $M_y = P e_z$, la flexión produciría compresiones en la zona donde los valores de z sean positivos y tensiones donde z sea negativa.

Tomando en cuenta el razonamiento anterior se determinaron los signos de los términos que toman en cuenta la flexión.

Para encontrar la posición, del eje neutro se termina el lugar geométrico de los esfuerzos nulos, es decir

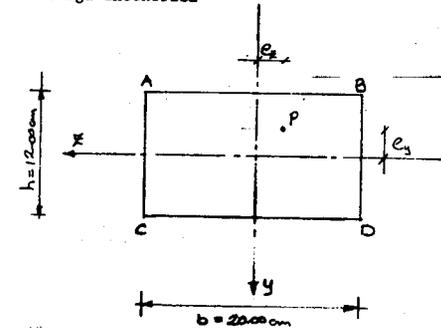
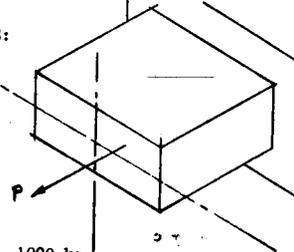
$$f = \frac{P}{A} + \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z = 0$$

Esta ecuación representa una recta con dos incógnitas y y z de la forma $ay + bz + e = 0$; haciendo $z = 0$ y $y = 0$ se determina las intersecciones con el eje y y con el eje z respectivamente, con los cuales se puede trazar la línea de esfuerzos nulos (eje neutro).

Dado que la carga está aplicada en el cuadrante negativo (z y y negativos) el eje neutro estará localizado en el cuadrante positivo, los signos de la ecuación se pueden obtener de una inspección del comportamiento físico de la sección, observando de qué lado se producen tensiones o compresiones.

EJEMPLO. Flexión biaxial producida por una carga excéntrica

DATOS:



$$P = 1000 \text{ kg}$$

$$e_z = 2.0 \text{ cm}$$

$$e_y = 3.0 \text{ cm}$$

- Calcular el esfuerzo normal en los puntos A, B, C y D
- Determinar la posición del eje neutro
- Dibujar el estado de esfuerzos

SOLUCION: Esfuerzo normal $f = \frac{P}{A} + \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z$

donde $M_z = P (e_y)$; $M_y = P (e_z)$

Momentos de inercia

$$I_z = \frac{b \times h^3}{12} = \frac{20 \times 12^3}{12} = 2880 \text{ cm}^4$$

$$I_y = \frac{h \times b^3}{12} = \frac{12 \times 20^3}{12} = 8000 \text{ cm}^4$$

a) Cálculo de esfuerzos

Punto A) $f_a = \frac{1000}{12 \times 20} + \frac{(1000 \times 3.0)}{2880} (6.0) - \frac{(1000 \times 2.0)}{8000} (10.0) = 7.91 \text{ kg/cm}^2$ (tensión)

Punto B) $f_b = \frac{1000}{12 \times 20} + \frac{(1000 \times 3.0)}{2880} (6.0) + \frac{(1000 \times 2.0)}{8000} (10.0) = 12.91 \text{ kg/cm}^2$ (tensión)

Punto C) $f_c = \frac{1000}{12 \times 20} - \frac{(1000 \times 3.0)}{2880} (6.0) - \frac{(1000 \times 2.0)}{8000} (10.0) = -4.59 \text{ kg/cm}^2$ (compresión)

Punto D) $f_d = \frac{1000}{12 \times 20} - \frac{(1000 \times 3.0)}{2880} (6.0) + \frac{(1000 \times 2.0)}{8000} (10.0) = 0.42 \text{ kg/cm}^2$ (compresión)

b) Posición del eje neutro

Usando la ecuación $f = \frac{P}{A} \pm \frac{M_z}{I_z} y \pm \frac{M_y}{I_y} z = 0$

$f = \frac{1000}{12 \times 20} - \frac{(1000 \times 3.0)}{2880} y - \frac{(1000 \times 2.0)}{8000} z = 0$

ecuación de una recta de forma $ay + bz + c = 0$

donde:

$a = \frac{-1000 \times 3.0}{2880} = -1.04$

$b = \frac{-1000 \times 2.0}{8000} = -0.25$

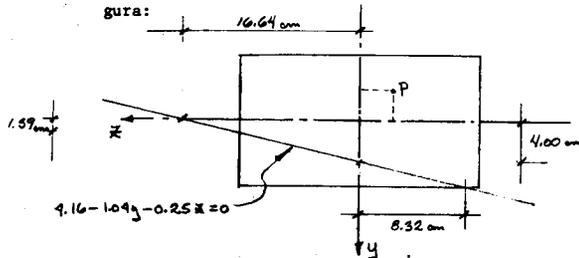
$c = \frac{1000}{12 \times 20} = 4.16$

Las intersecciones con los ejes coordenados se obtienen

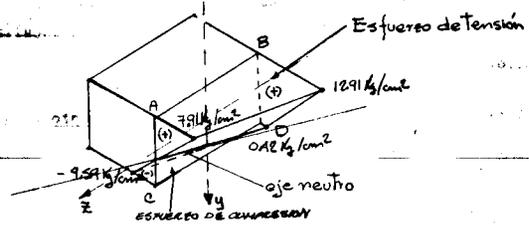
Si $y = 0$; $z = -\frac{c}{b} \therefore z = -\frac{4.16}{(-0.25)} = 16.64 \text{ cm}$

y si $z = 0$; $y = -\frac{c}{a} \therefore y = -\frac{4.16}{(-1.04)} = 4.0 \text{ cm}$

Por lo que el eje neutro queda localizado como lo muestra la siguiente figura:



c) Estado de esfuerzos



NUCLEO CENTRAL DE UNA SECCION TRANSVERSAL

Quando la excentricidad de la carga axial aplicada P sea pequeña, el eje neutro quedará fuera de la sección transversal. Esto significa que los esfuerzos normales tendrán el mismo signo en toda la sección. Una condición de esta naturaleza es a menudo importante cuando una carga de compresión actúa sobre un material que es muy débil a la tensión, tal como el concreto; en este caso puede ser necesario asegurarse de que la carga no produce tensión en ningún punto de la sección transversal. Habrá una pequeña región alrededor del centroide tal que una carga de compresión, P, que actúe dentro de ella producirá compresión sobre toda la sección transversal. Tal región se llama núcleo central de la sección.

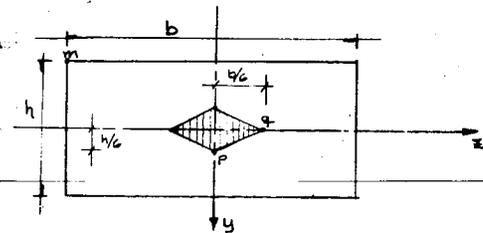


Fig. Núcleo central de una sección recta rectangular

El núcleo central de una sección rectangular se halla del siguiente modo:

Si la carga está a lo largo de la parte positiva del eje y, el eje neutro coincidirá con el borde superior de la sección cuando la carga esté en el punto p, a una distancia e del centroide. La distancia e_1 , se determina

con la ecuación (3) en la que

$$M_y = 0 \quad M_z = -P \cdot e_1 \quad y = -\frac{h}{2}, \quad I_x = \frac{bh^3}{12} \quad \text{y} \quad A = bh$$

$$\frac{-P}{bh} + \frac{-P \cdot e_1}{\frac{bh^3}{12}} \left(-\frac{h}{2}\right) = 0 \rightarrow e_1 = \frac{h}{6}$$

por lo que $e_1 = \frac{h}{6}$ como se indica en la figura. De igual manera, el eje neutro coincide con el borde izquierdo de la sección cuando la carga P actúa sobre la parte positiva del eje z en el punto q , a una distancia $b/6$ del centroide. A medida que la carga se mueve a lo largo de una recta entre los puntos p y q , el eje neutro girará alrededor del punto m en el vértice de la sección triangular. Por consiguiente, la recta pq es uno de los lados del núcleo. Los otros tres lados pueden localizarse por simetría y se ve que el núcleo central es un rombo con diagonales $b/3$ y $h/3$. En tanto el punto de aplicación de una carga de compresión, P , quede dentro de este rombo, el eje neutro no cortará a la sección transversal y toda ella estará en compresión.

EJEMPLO. NUCLEO CENTRAL

Con este ejemplo se desea ilustrar una forma de encontrar el núcleo central de una sección transversal en forma de "T". Para determinarlo se supondrá la acción de una carga exvéntrica de compresión actuando primero sobre uno de los ejes y luego sobre el otro, de forma que solo se presente flexión en una dirección en cada caso.

Si las cargas actúan sobre el eje de las y , las excentricidades e_y que hacen que los esfuerzos de tensión sean nulos en el extremo más alejado de la misma, se pueden encontrar haciendo igual a cero la ecuación que da el valor de los esfuerzos:

$$f = -\frac{P}{A} + \frac{M_z}{I} = y; \quad \text{en donde } M_z = P \cdot e_y$$

En forma similar si solo existe excentricidad en la dirección del eje z , se pueden encontrar los valores de e_z que hacen que los esfuerzos de tensión sean igual a cero en los extremos de la sección, igualando a cero la ecuación que da el valor de los esfuerzos cuando existe carga axial y flexión

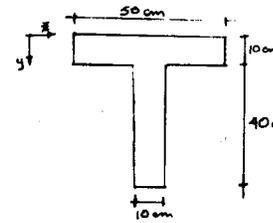
alrededor del eje y .

Conocidos los valores de e_{y1} , e_{y2} , e_{z1} y e_{z2} , el núcleo central se puede determinar uniendo estos cuatro puntos situados sobre los ejes coordenados.

Cualquier carga de compresión que caiga dentro del núcleo central producirá efectos de compresión en toda la sección y si la carga actúa en un punto fuera de él, la sección tendrá tanto esfuerzos de tensión como de compresión.

EJEMPLO. Cálculo del núcleo central de una sección T

DATOS:

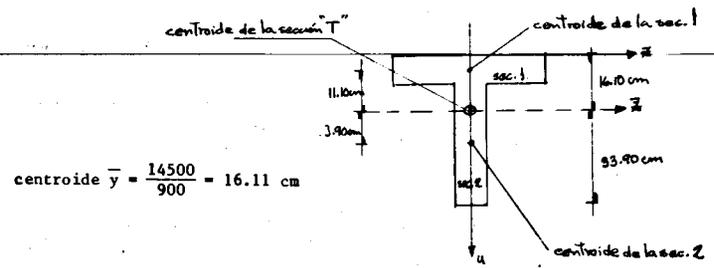


a) Encontrar el lugar geométrico que ocupa el núcleo central de la sección dada

SOLUCION:

Cálculo del centroide y de los momentos de inercia

Sec	Area	y	A_y	d	d^2	Ad^2	$I_g = \frac{b \times h^3}{12}$
1	500	5	2500	11.1	123.2	61605.0	4166.66
2	400	30	12000	13.9	193.2	77284	53333.33
Σ	900		14500			138889	57499.99



$$\text{centroide } \bar{y} = \frac{14500}{900} = 16.11 \text{ cm}$$

Momento de inercia centroidal I_z

$$I_z = 138888.84 + 57499.99 = 196389 \text{ cm}^4$$

Momento de inercia centroidal

$$I_y = \frac{40 \times 10^3}{12} + \frac{10 \times 50^3}{12} = 107500 \text{ cm}^4$$

Cálculo de las excentricidades e_y

Si $e_z = 0$ La excentricidad e_y producirá esfuerzos nulos en los extremos de la sección para los siguientes valores:

$$f_y = 0 = -\frac{P}{A} - \frac{M_z}{I_z} y \dots (1)$$

$$M_z = P e_y$$

Sustituyendo M en (1)

$$f = -\frac{P}{A} - \frac{P e_y}{I_z} y = 0$$

despejando e_y

$$e_y = -\frac{1}{A} \frac{I_z}{y} (2)$$

El extremo de la sección situada a una distancia $y = 33.90$ cm, tendrá un esfuerzo nulo cuando:

$$e_{y1} = -\frac{(196339)}{(900)(33.90)} = -6.45 \text{ cm}$$

El extremo de la sección situada a una distancia $y = 16.10$ cm, tendrá esfuerzos nulos cuando

$$e_{y2} = -\frac{196388.83}{900(16.10)} = 13.55 \text{ cm}$$

Cálculo de las excentricidades e_z

En forma similar los esfuerzos en las fibras más alejadas del eje y serán nulos cuando se cumpla la siguiente igualdad:

$$f = -\frac{P}{A} - \frac{P e_z}{I_y} z = 0$$

despejando e_z

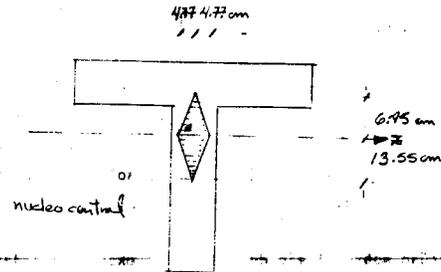
$$e_z = -\frac{I_y}{A z}$$

Para el extremo de la sección situado a una distancia $z = 25$ cm

$$e_{z1} = -\frac{I_y}{A z} = -\frac{1}{900} \frac{107500}{25.0} = -4.77 \text{ cm}$$

y para $z = -25.0$ cm

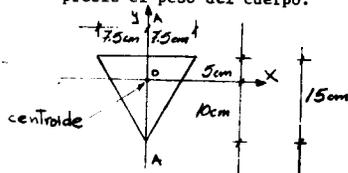
$$e_{z2} = -\frac{1}{900} \frac{107500}{(-25.0)} = 4.77 \text{ cm}$$



I_y

P R O B L E M A S

- 1) Un bloque corto tiene la sección transversal indicada en planta en la figura. Determine el intervalo a lo largo de la recta A-A en que se puede aplicar una fuerza vertical hacia abajo sin que produzca ninguna tensión en la base. Desprecie el peso del cuerpo.



$$I_o = \frac{bh^3}{36}$$

$$I_o = (15)(15)^3/36 = 1406.25 \text{ cm}^4$$

$$A = bh/2 = (15)^2/2 = 112.50 \text{ cm}^2$$

$$f = -\frac{P}{A} + \frac{M_x}{I_x} y = 0$$

donde

$$M_x = P e_y$$

$$f = -\frac{P}{A} + \frac{P e_y}{I_x} y = 0$$

$$\text{despejando } e_y \text{ tenemos: } \frac{P e_y}{I_x} y = \frac{P}{A}, \quad e_y = \frac{R I_x}{A R y} = \frac{I_x}{A y}$$

en el extremo a $y = 5 \text{ cm}$ tenemos:

$$e_{y1} = \frac{1406.25}{112.50(-5.0)} = -2.5 \text{ cm}$$

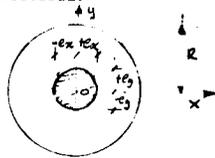
$$e_{y2} = \frac{1406.25}{112.50(+10.0)} = 1.25 \text{ cm}$$

RESPUESTA:

entre 7.5 cm y 11.25 cm

desde el vértice inferior del triángulo

- 2) Determine el núcleo central de la sección circular maciza de un miembro estructural.



$$I_o = \pi R^4/4$$

$$A = \pi R^2$$

$$f = -\frac{P}{A} - \frac{M}{I} y$$

$$M = P e_y$$

$$f = -\frac{P}{A} - \frac{P e_y}{I} y = 0$$

despejando a e_y

$$e_y = \frac{I}{A R y} = \frac{I}{A y}$$

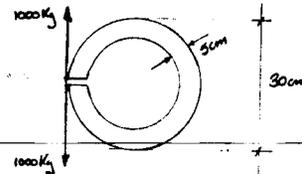
$$e_y = \frac{\frac{\pi R^4}{4}}{\pi R^2 R} = \frac{\pi R^4}{4 \pi R^3} = \frac{R}{4}$$

RESPUESTA:

El núcleo central es un círculo concéntrico de radio = $R/4$

- 3) Una barra de acero de 5 cm de diámetro se dobla hasta formar un anillo circular casi cerrado por completo con un diámetro exterior de 30 cm, como se muestra en la figura.

- 1) Calcule el esfuerzo máximo que se produce en el anillo al aplicarle una fuerza de 1000 kg en cada uno de sus extremos, como se indica.
- 2) Halle la relación del esfuerzo máximo determinado en 1) al esfuerzo máximo de compresión que actúa normalmente a la misma sección.

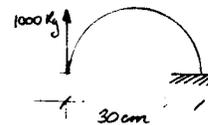


SECCION TRANSVERSAL

$$A = \pi R^2 = 19.635 \text{ cm}^2$$

$$I = \pi R^4/4 = 30.6796 \text{ cm}^4$$

Haciendo un diagrama de cuerpo libre



SECCION A ANALIZAR

$P = 1000 \text{ kg}$

$M = 1000 \times 30 = 30,000 \text{ kg-cm} \quad y = r = 2.5 \text{ cm}$

RESPUESTA:

1) $f = \frac{1000}{19.635} + \frac{30,000}{30.6796} \cdot 2.5 = 2495.55 \text{ kg/cm}^2$
tens. 19.635 30.6796

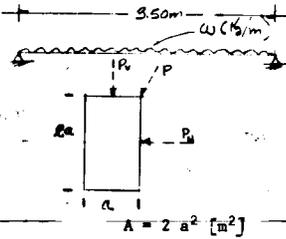
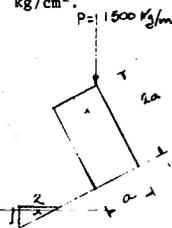
$f_{\text{comn.}} = \frac{1000}{19.635} - \frac{30,000}{30.6796} \cdot 2.5 = -2393.69 \text{ kg/cm}^2$

2) $\frac{f_c}{f_T} = 0.959$

ó sea

$f_c = 0.96 f_T$

4) Una viga simplemente apoyada, inclinada como se ve en la fig. y con una relación de altura a ancho de 2:1, debe cubrir un claro de 3.5 m y soportar una carga uniformemente distribuida de 1500 kg/m incluyendo su propio peso, que se aplica en la forma indicada. Determine las dimensiones que debe tener la viga para que el esfuerzo máximo debido a la flexión no exceda a 100 kg/cm².



$M = \frac{w \ell^2}{8}$

$x = a/2 ; y = a$

$I_x = \frac{a(2a)^3}{12} = \frac{2}{3} a^4 [\text{m}^4] \quad I_y = \frac{2a(a)^3}{12} = \frac{a^4}{6} [\text{m}^4]$

$\alpha = \text{ang tan } \frac{1}{2} = 26.565^\circ$

$\cos \alpha = \frac{P_y}{P} \rightarrow P_y = P \cos \alpha = 1341.64 [\text{kg/m}]$

$\text{Sen } \alpha = \frac{P_x}{P} \rightarrow P_x = P \text{ sen } \alpha = 670.82 [\text{kg/m}]$

$f_{\text{máx perm.}} = 100 [\text{kg/cm}^2] = 100 \text{ kg/cm}^2 \frac{1 \times 10^4 \text{ cm}^2}{1 \text{ m}^2} = 1000,000 [\text{kg/m}^2]$

$f = \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x \rightarrow M_x = \frac{P_y \ell^2}{8} ; M_y = \frac{P_x \ell^2}{8}$

(Kg/m²)

$M_x = 1341.64(3.5)^2/8 = 2054.4 \text{ kg-m}$

$1 \times 10^6 = \frac{2054}{a^4/6} (a) + \frac{1027}{2/3 a^4} (a/2)$

$M_y = 670.82(3.5)^2/8 = 1027.2 \text{ kg-m}$

RESPUESTA:

$1 \times 10^6 = \frac{12324}{a^3} + \frac{770.25}{a^3} \rightarrow a^3 = 0.013 [\text{m}^3] \rightarrow a = 0.236 \text{ m} = \underline{\underline{23.6 \text{ cm}}}$

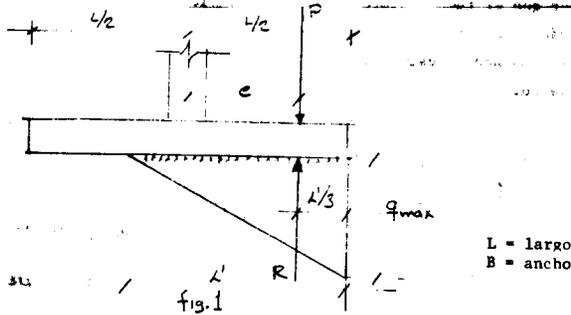
$1 \times 10^6 = 1/a^3(13094.25)$

$2a = \underline{\underline{47.20 \text{ cm}}}$

ZAPATAS RIGIDAS CARGADAS EXCENTRICAMENTE

Las zapatas están frecuentemente sujetas a momentos de volteo simultáneo con cargas axiales.

En estos casos se supone que la resultante de la presión del suelo coincide con la fuerza axial P debida a las cargas externas pero no con el centroide de la zapata, como puede verse en la fig 1.



Entonces la presión del suelo puede ser calculada con la siguiente expresión, que considera la superposición lineal:

$$q = \frac{P}{A} \pm \frac{M}{I} c \quad (1)$$

en donde:

$$M = P e \quad (2)$$

de (2) en (1) tenemos:

$$q = \frac{P}{A} \pm \frac{P e c}{I} \quad (3)$$

Haciendo, para una sección rectangular

$$\frac{I}{C} = \frac{BL^3}{12} / \frac{L}{2} = \frac{BL^3}{24} = \frac{BL^2}{6}$$

$$\text{y como } A = BL \rightarrow q = \frac{P}{BL} \pm \frac{6 P e}{BL^2}$$

La ecuación (3) puede ser reescrita como:

$$q = \frac{P}{BL} \left[1 \pm \frac{6 e}{L} \right] \quad (4)$$

donde:

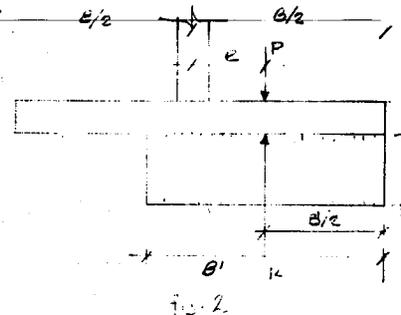
- P = carga vertical, o fuerza resultante
- e = excentricidad de la carga vertical
- B = ancho
- L = largo
- q = intensidad de la presión del suelo (+ = compresión)

q deberá ser menor o igual a la presión permisible del suelo. Nótese que si "e" es grande puede darse el caso de obtener esfuerzos negativos (- = tensión) los cuales no pueden ser tomados por el suelo. Entonces para encontrar la "e" máxima permisible, hacemos q = 0, es decir, que no existan tensiones:

$$\begin{aligned} q = 0 &= \frac{P}{BL} \left(1 \pm \frac{6 e}{L} \right) \\ 0 &= 1 \pm \frac{6 e}{L} \rightarrow e = \pm \frac{L}{6} \end{aligned}$$

Como podemos ver la resultante debe caer en el "tercio medio" para que no existan esfuerzos de tensión.

Ahora podemos deducir fácilmente el esfuerzo máximo que puede admitirse en el suelo.



$$\begin{aligned} \frac{B'}{2} &= \frac{B}{2} - e \\ B' &= 2 \left(\frac{B}{2} - e \right) \\ B' &= B - 2e \end{aligned}$$

De la fig 1, tenemos que:

$$\frac{L'}{3} = \frac{L}{2} - e \rightarrow L' = 3 \left(\frac{L}{2} - e \right) \dots (5)$$

y

$$P = \frac{q_{\text{máx}}}{2} (L'B)$$

Haciendo la substitución indicada para L y despejando a q obtenemos:

$$R = q_{\text{máx}} \frac{L'B}{2}$$

$$R = P = q_{\text{máx}} \frac{3 B(L/2 - e)}{2}$$

Finalmente:

$$q_{\text{máx}} = \frac{2P}{3 B(L/3 - e)} (6)$$

Nótese que las recomendaciones de las NORMAS TECNICAS del RDDF en su parte de cimentaciones para el caso de zapatas cargadas excéntricamente nos dicen que se reduzca el ancho efectivo a $B' = B - 2e$ ya que si $e = B/6 \rightarrow B' = B - 2 B/6 = 2/3 B$, lo cual es considerar en parte el análisis anterior. Como se ve en la fig 2, pero con una distribución rectangular.

MUROS DE RETENCION

Los muros de retención son estructuras comúnmente prismáticas construidos con mampostería, de piedras naturales o artificiales unidas con mortero o con concreto, cuya función principal es la de mantener una diferencia de elevación del terreno de un lado a otro del mismo. Pueden utilizarse para retener materiales sólidos, como granos en el caso de silos o tierra en el caso de muros de retención de taludes, en los que se desea una inclinación mayor que el talud natural del terreno. También son usadas en estructuras hidráulicas para formar bordos o parte de los vasos para almacenamiento de agua. Cuando su estabilidad depende de su propio peso se llama muro de gravedad.

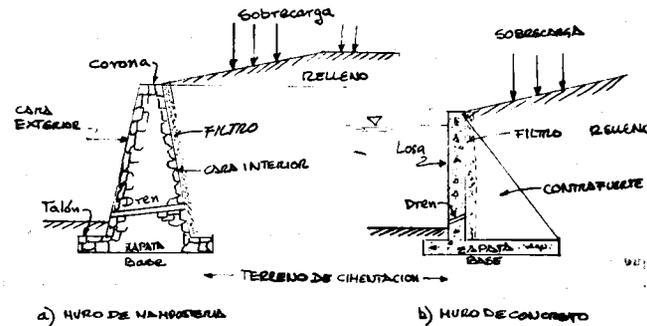


FIG. 1

ELEMENTOS QUE INTERVIENEN EN LA CONSTRUCCION DE LOS MUROS DE RETENCION

Los elementos que intervienen en la construcción de muros de retención son tres: el terreno de cimentación, el relleno o carga que actúa contra el muro y la mampostería o concreto que forma el muro propiamente dicho.

Terreno de cimentación. Las principales propiedades del terreno de cimentación son: su resistencia al esfuerzo cortante, su compresibilidad y su permeabilidad. La propiedad de la resistencia al esfuerzo cortante es la propiedad que determina la capacidad de carga del terreno. Con respecto a la compresibilidad se supone aquí que no existen posibilidades de asentamiento.

de la supresión en la base del muro.

Material de relleno. La función primordial de los muros de retención es contener el relleno que se halla tras ellos. El empuje que ejerce el relleno sobre una estructura depende de su peso volumétrico.

Mampostería. El material por usarse debe estar sano, ser poco alterable y preferentemente de alto peso volumétrico.

FUERZAS QUE INTERVIENEN EN EL CALCULO DE UN MURO DE RETENCION

Las fuerzas que actúan contra un muro de retención, de sección transversal, pueden calcularse para un segmento de muro de un metro de longitud, en la dirección normal al plano del papel.

Cuando se analiza un muro con contrafuertes por lo general los cálculos se refieren al segmento de muro comprendido entre dos planos paralelos trazados en el centro de los mencionados elementos.

Las fuerzas que deben tomarse en cuenta en el cálculo de un muro, que por simplicidad se supone trapezoidal (ver fig 2) son:

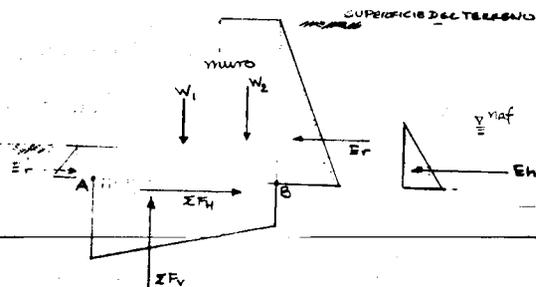


FIG. 2 FUERZAS QUE ACTUAN EN UN MURO

a) El peso propio del muro. Esta fuerza actúa en el centro de gravedad de la sección y puede calcularse fácilmente dividiendo dicha sección en áreas de forma simple y será:

$$W_t = A_t \times 1.0 \times \gamma_m$$

donde

A_t = área total de la sección transversal

1.0 = longitud unitaria (1.0 m)

γ_m = peso volumétrico de la mampostería o concreto

Para la fig 2 $W_t = W_1 + W_2$

b) La presión contra la cara interior del muro con su correspondiente intensidad y distribución (Er en la fig) es el empuje resultante de tal presión).

Para obtener el empuje que produce un suelo sobre el muro de soporte se utilizan más frecuentemente las teorías de Rankine, Coulomb y Terzaghi.

TEORIA DE RANKINE. Un suelo está en estado plástico cuando se encuentra en estado de falla incipiente generalizado. De acuerdo con lo anterior caben dos estados plásticos: El que se tiene cuando el esfuerzo horizontal alcanza el valor mínimo $K_a \gamma z$ y el que ocurre cuando dicha presión llega al valor máximo $K_p \gamma z$. Estos estados se denominan respectivamente activo y pasivo.

En el estado activo: $K_A = \frac{1}{N\phi} = \tan^2 (45 - \phi/2) = \frac{1 - \text{Sen } \phi}{1 + \text{Sen } \phi}$

En el estado pasivo: $K_P = N\phi = \tan^2 (45 + \phi/2) = \frac{1 + \text{Sen } \phi}{1 - \text{Sen } \phi}$

que son los coeficiente activo y pasivo de presión de tierras.

Para suelos puramente friccionantes se tienen las siguientes fórmulas para el cálculo del empuje:

Empuje activo: $E_A = \frac{1}{2N\phi} \gamma H^2 = \frac{1}{2} K_A \gamma H^2$

Empuje pasivo: $E_P = \frac{1}{2} N\phi \gamma H^2 = \frac{1}{2} K_P \gamma H^2$

En el caso de que la superficie del relleno sea un plano inclinado a un ángulo β con la horizontal, los empujes activo y pasivo se calculan por medio de las fórmulas:

$$E_A = \frac{1}{2} \gamma H^2 \left(\cos \beta \frac{\cos \beta - \sqrt{\cos^2 \beta - \cos^2 \phi}}{\cos \beta + \sqrt{\cos^2 \beta - \cos^2 \phi}} \right)$$

$$E_P = \frac{1}{2} \gamma H^2 \left(\cos \beta \frac{\cos \beta + \sqrt{\cos^2 \beta - \cos^2 \phi}}{\cos \beta - \sqrt{\cos^2 \beta - \cos^2 \phi}} \right)$$

Para suelos cohesivos, la teoría de Rankine da las siguientes expresiones:

$$E_A = \frac{1}{2} \gamma H^2 - 2 c H$$

$$E_P = \frac{1}{2} \gamma H^2 + 2 c H$$

La altura máxima a que puede llegarse en un corte vertical de material cohesivo sin soporte y sin derrumbarse se obtiene de:

$$H_c = \frac{4c}{\gamma}$$

Para suelos cohesivo-friccionantes, según la teoría de Rankine, se utilizan las siguientes fórmulas:

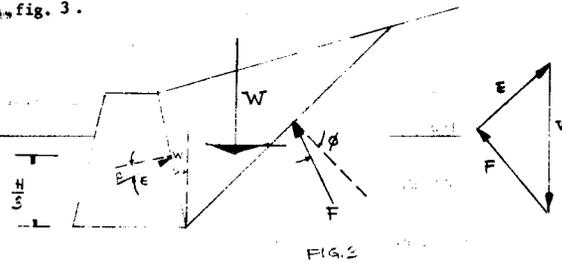
$$E_A = \frac{1}{2N\phi} \gamma H^2 - \frac{2c}{\sqrt{N\phi}} H$$

$$E_P = \frac{1}{2} N\phi \gamma H^2 + 2c \sqrt{N\phi} H$$

La altura crítica con la que puede mantenerse sin soporte el suelo cohesivo-friccionante en corte vertical, se calcula por medio de la fórmula:

$$H_c = \frac{4c}{\gamma} \sqrt{N\phi}$$

TEORIA DE COULOMB. Esta teoría considera que el empuje sobre el muro se debe a una cuña de suelo limitada por el paramento del muro, la superficie del relleno y una superficie de falla plana desarrollada dentro del relleno. Ver fig. 3.



Considerando el equilibrio de la cuña se ve que el polígono dinámico constituido por W, F y E debe cerrarse. Como W es conocida en dirección y magnitud y además se conocen previamente las direcciones de E y F, puede conocerse la magnitud del empuje sobre el muro.

Este método es un procedimiento por tanteos para encontrar la cuña crítica que de el máximo empuje.

Método de Culmann. Se aplica a rellenos de cualquier forma basado en la teoría de Coulomb. Es un método gráfico que permite llegar fácilmente al valor del máximo empuje ejercido contra un muro por un relleno.

METODO SEMIEMPIRICO DE TERZAGHI. El primer paso para la aplicación de este método es encasillar el material de relleno con el que ha de trabajarse, en uno de los siguientes 5 tipos:

- I. Suelo granular grueso sin finos
- II. Suelo granular grueso con finos limosos
- III. Suelo residual con cantos, bloques de piedra, gravas, arenas finas y finos arcillosos en cantidad apreciable.
- IV. Arcillas plásticas blandas, limos orgánicos o arcillas limosas.
- V. Fragmentos de arcilla dura o medianamente dura protegidos de modo que el agua proveniente de cualquier fuente no penetre en los fragmentos.

En lo que se refiere a la geometría del relleno y la condición de las cargas este método cubre cuatro casos muy frecuentes en la práctica:

1. La superficie del relleno es plana, inclinada o no, y sin sobrecarga.
2. La superficie del relleno es inclinada a partir de la corona del muro, hasta un cierto nivel en que se torna horizontal.
3. La superficie del relleno es horizontal y sobre ella actúa una sobrecarga uniformemente repartida.
4. La superficie del relleno es horizontal y sobre ella actúa una sobrecarga lineal paralela a la corona del muro y uniformemente distribuida.

En el primer caso el problema se resuelve aplicando las fórmulas:

$$E_H = \frac{1}{2} K_H H^2 \quad E_V = \frac{1}{2} K_V H^2$$

que son las componentes horizontal y vertical del empuje. K_h y K_v se obtienen de la gráfica No. 1.

El empuje se considera aplicado a la altura de $H/3$ contada a partir del paño inferior del muro.

Para el segundo caso los valores de K_h y K_v deberán obtenerse de la gráfica No. 2.

Para el tercer caso, cuando el relleno soporta sobrecarga uniformemente distribuida, la presión horizontal sobre el plano vertical en que se supone actuante el empuje, deberá incrementarse uniformemente en:

$$p = Cq$$

q es el valor de la sobrecarga repartida

C se escoge de la tabla No. 3 según sea el tipo de relleno.

En el caso cuatro se considerará que la carga ejerce sobre el plano vertical en que se aceptan aplicados los empujes una carga concentrada que vale:

$$p = Cq'$$

q' es el valor de la carga lineal uniforme

C se obtiene, como en el caso anterior, de la tabla No. 3.

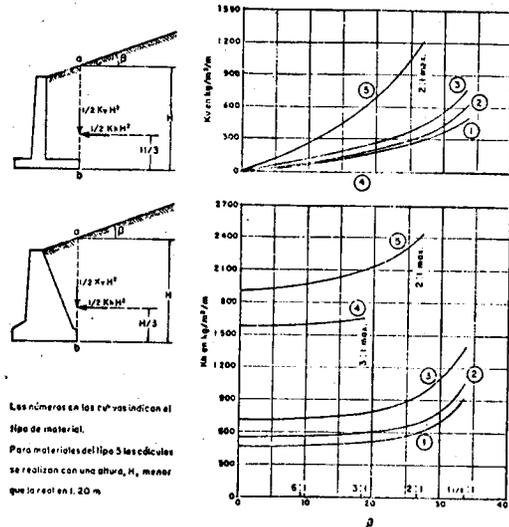


FIG. 1 Gráficas para determinar el empuje de rellenos con superficies plana, según Terzaghi

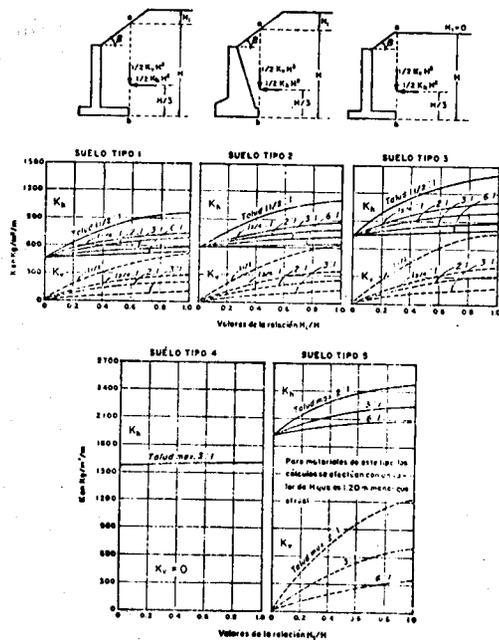
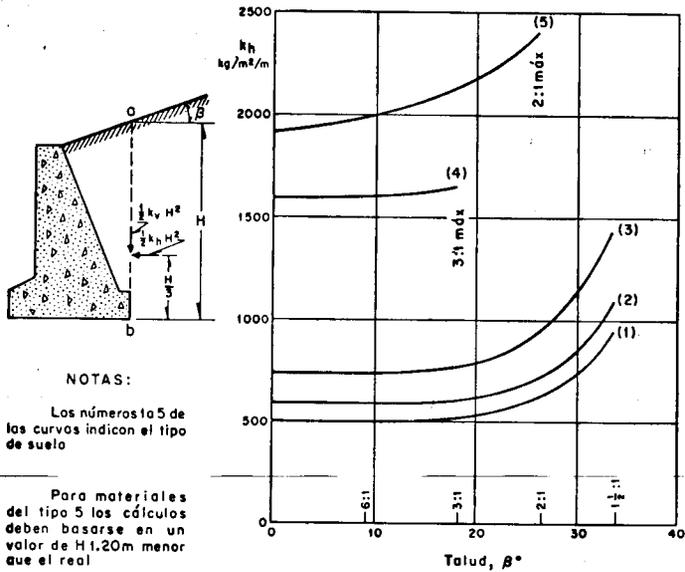
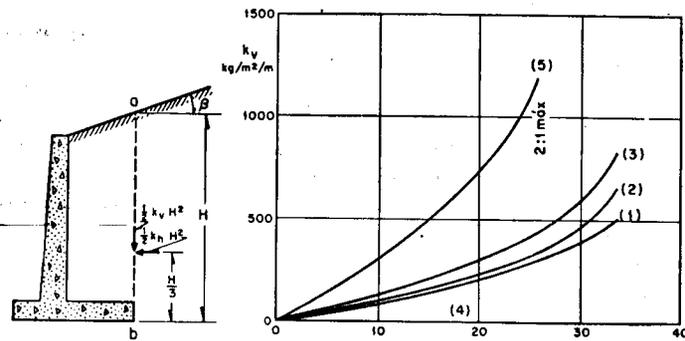


FIG. 2. Gráficas para determinar el empuje de rellenos en terraplén, con remate

VALORES DE C^*

TIPO DE TIENSO	C^*
I	0.27
II	0.50
III	0.29
IV	1.00
V	1.00

TABLA N.º 3



NOTAS:
Los números 1 a 5 de las curvas indican el tipo de suelo

Para materiales del tipo 5 los cálculos deben basarse en un valor de H_1 20m menor que el real

FIG. 1. Presiones de rellenos con superficie libre plana

Tomado de la ref 7.

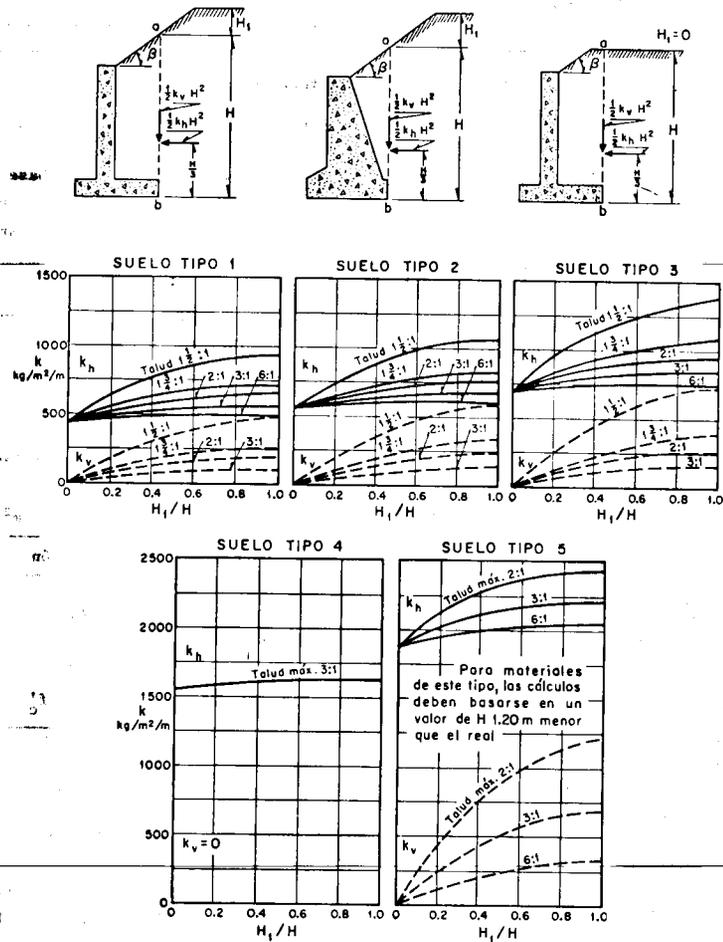


FIG. 2. Presiones de rellenos con superficie libre quebrada

Tomado de la ref 7.

c) La presión hidrostática. Si se permite la acumulación de agua en la cara interior del muro se formarán sobre él presiones hidrostáticas; esto debe evitarse instalando un sistema de drenaje adecuado que elimine el exceso de agua (E_h , en la fig 2 es su resultante).

d) La presión de la tierra contra el frente del muro. El desplante de un muro de retención debe colocarse en un nivel que garantice la adecuada capacidad de carga del terreno. Si la tierra colocada en el frente del muro ejerce una resistencia, la fuerza resultante se determinará para tomarla en cuenta en los cálculos (E'_t en la fig, es su resultante). Esta fuerza suele omitirse en los cálculos aumentando con esto el coeficiente de seguridad.

e) La componente normal de las presiones en la cimentación. La presión en la cimentación se considera linealmente distribuida a lo largo de la base, línea AB, dando lugar a su diagrama trapecial, (EF_v en la fig 2 es su resultante).

f) La componente horizontal de las presiones en la cimentación, (la resultante de éstos efectos horizontales se representa como EF_H en la fig 2.)

g) Las supresiones. Cuando el drenaje bajo el muro no es correcto, el agua puede fluir por debajo de él y originar supresiones contra los materiales constituyentes del muro.

Conviene hacer notar que existen algunos factores, cuya acción puede incrementar notablemente la magnitud de los empujes, tales como, las heladas, la expansión de los materiales de relleno, sismos, vibraciones y procesos de compactación.

CALCULO DE ESTABILIDAD EN MUROS DE RETENCION

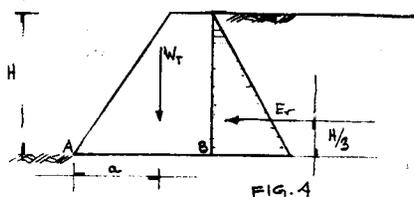
Desde el punto de vista del terreno de cimentación, el buen funcionamiento de una obra se logra cuando se tiene una capacidad de carga mayor que la presión impuesta al nivel de desplante y cuando las deformaciones en el terreno causadas por dicha presión producen asentamientos despreciables.

Considerando al muro como monolítico, las condiciones de estabilidad que de-

ben cumplirse son:

el

- 1) Que sea imposible la rotación o volteo alrededor del punto A (ver fig 4). Se entiende por factor de seguridad contra volteamiento, el número por el cual debe multiplicarse la fuerza resultante actuando en la cara interior del muro para producir volteamiento, este número debe estar comprendido entre 1.5 y 2.0.



De la fig 4 se tiene:

$$F.S. \text{ volteo} = \frac{M \text{ resistente}}{M \text{ actuante}} = \frac{W_t (a)}{E_r \left(\frac{1}{3} H \right)}$$

- 2) No debe producirse deslizamiento entre la base del muro y el terreno, el factor de seguridad contra deslizamiento es el número por el cual hay que multiplicar el empuje horizontal, para que no se presente deslizamiento a lo largo de la cara de contacto entre el terreno y la base del muro. El número calculado no debe ser menor que 1.5.

La resistencia o fuerza rasante entre la base del muro y un material no cohesivo puede calcularse como el producto de la presión normal por el coeficiente de fricción μ , que puede considerarse según los siguientes valores, para mampostería o concreto en contacto con estos materiales:

Roca sana	0.60
Material compacto	0.55
Concreto	0.65

Se tiene entonces que:

$$F.S. \text{ deslizamiento} = \frac{\mu \Sigma F_v}{\Sigma F_H}$$

siendo

ΣF_v = la suma de las fuerzas verticales

ΣF_H = la suma de las fuerzas horizontales

- 3) La resultante de las presiones sobre el terreno en la base del muro deben estar sobre el tercio central del muro para que solo se presenten esfuerzos de compresión. Estas presiones o esfuerzos se calculan con la teoría de la flexión.

- 4) En ningún punto del muro deben excederse los esfuerzos permisibles de los materiales utilizados. Esto debe verificarse en un plano cualquiera paralelo a la base del muro o en una hilada cualquiera, ya sea el muro de concreto o de mampostería.

En la tabla siguiente se muestran algunos esfuerzos permisibles típicos

Tabla de esfuerzos permisibles típicos, kg/cm²

Material	Cortante	Compresión	Tensión
Mampostería de 3a. con mortero de cal	1.0	4.5	0.35
Mampostería de 3a. con mortero de cemento	2.0	9.0	0.75
Concreto simple	$0.3 \sqrt{f'_c}$	$0.45 f'_c$	$0.4 \sqrt{f'_c}$

EJEMPLO. MUROS DE RETENCION

En este ejemplo se presenta la revisión de un muro de retención de agua.

La única fuerza que actúa contra él es la debida al empuje hidrostático dado por la expresión $E_h = \gamma_w H^2/2$, oponiéndose a dicha acción la fuerza que se origina por la fricción entre suelo-muro ($\mu \Sigma F_v$) y el peso propio del muro. Estas fuerzas provocan momentos actuantes que tienden a voltear al muro alrededor del punto A, y momentos resistentes que se oponen a ello, fuerzas actuantes también tratan de hacer que el muro deslice sobre la base del muro

(línea AB), acción que se contrarresta con la fuerza originada por la fricción suelo-muro. Es necesario para la estabilidad del muro que no ocurra ni volteo ni deslizamiento y tener la certeza de que se tiene un margen de protección el cual se le denomina factor de seguridad. Para el caso de volteo, el factor de seguridad resulta ser la relación momento resistente entre momento actuante y para el caso de deslizamiento, el cociente de la fuerza de fricción entre la fuerza horizontal actuante, este factor de seguridad debe ser mayor o al menos igual a un 1.5.

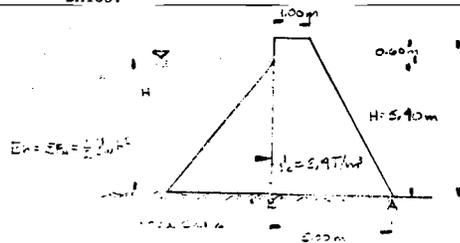
De la suma algebraica del momento resistente y el momento actuante, se tiene el momento neto, que actúa sobre la base del muro alrededor de su eje centroidal (AB/2), este momento es equivalente a una fuerza (componente vertical de la resultante) por una excentricidad (distancia del centroide de la base, al punto de aplicación de la resultante sobre la base); si esta excentricidad se localiza dentro del tercio medio, únicamente se presentarán esfuerzos de compresión en la base.

La magnitud de la resultante, se obtiene al aplicar el principio del paralelogramo para sumar sus fuerzas componentes (ΣF_H y ΣF_V), siendo el ángulo que forma la resultante con la horizontal, el ángulo cuya tangente es el valor $\frac{\Sigma F_V}{\Sigma F_H}$

Finalmente para encontrar los esfuerzos en la base del muro se hace uso de la teoría de la flexión aplicando la expresión $f = -\frac{P}{A} \pm \frac{M}{I}$ y, comprobándose que solamente se presentan esfuerzos de compresión y que la magnitud de estos esfuerzos son menores que la capacidad del terreno en que está desplantando el muro.

EJEMPLO. ANALISIS DE UN MURO DE CONTENCION

DATOS:



COEFICIENTE DE FRICCIÓN SUELO MURO $\mu = 0.60$

Nota: CONSIDERESE QUE NO HAY EFECTO DE SUPRESIÓN.

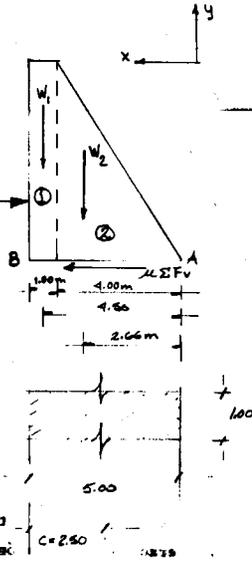
Se pide:

- Encontrar los factores de seguridad contra volteo y contra deslizamiento
- La posición y magnitud de la resultante, así como el ángulo que forma con la horizontal
- El diagrama de esfuerzos normales bajo la base del muro

SOLUCION:

Posición y magnitud de las fuerzas actuantes

$$E_h = \Sigma F_H = \frac{1}{2} \gamma_w H^2$$



Características geométricas de la base

$$A = 5.00 \times 1.00 = 5.00 \text{ m}^2$$

$$c = \frac{5.00}{2} = 2.50 \text{ m}$$

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{1.0 \times (5.0)^3}{12} = 10.41 \text{ m}^4$$

$$S = \frac{I}{c} = \frac{10.41}{2.50} = 4.16$$

- Factor de seguridad contra volteo

Cálculo de fuerzas verticales (ΣF_V) y momento resistente (M_R)

Sección	$W_i = F_v i$	brazo b:	$F_v i \times d_i$
1	$(1.00 \times 6.00 \times 1.0) (2.4) = 14.40$	4.50	64.80
2	$(4.00 \times 6.00 \times 1.0) (0.5) (2.4) = 28.80$	2.66	76.60
		$\Sigma F_V = 43.20 \text{ Ton}$	$M_R = 141.40 \text{ T-m}$

Suma de fuerzas horizontales (ΣF_H)

$$F_H = E_h = \frac{1}{2} \gamma_w H^2 = \frac{1}{2} (1.0)(5.40)^2 = 14.58 \text{ ton}$$

Momento actuante o de volteamiento

$$M_A = (E_h) \left(\frac{1}{3} H \right) = (14.58) \left(\frac{5.40}{3} \right) = 26.24 \text{ ton}$$

$$\text{F.S. volt.} = \frac{MR}{M_A} = \frac{141.40}{26.24} = 5.39 > 1.5$$

a) 2. Factor de seguridad contra deslizamiento

Fuerza oponente al movimiento

$$\mu \Sigma F_v = 0.60 \times 43.20 = 25.92 \text{ ton}$$

$$\text{F.S. dez.} = \frac{\mu \Sigma F_v}{F_H} = \frac{25.92}{14.58} = 1.78 > 1.5$$

b) 1. Posición de la resultante, de las fuerzas verticales y horizontales

$$\text{Momento neto} = M_R - M_A = 141.40 - 26.24 = 115.16 \text{ ton-m}$$

$$X_{AR} = \frac{M_n}{\Sigma F_v} = \frac{115.16}{43.20} = 2.66 \text{ m (a la izquierda de A)}$$

distancia al centroide de la base

$$e = \frac{AB}{2} - X_{AR} = 2.50 - 2.66 = -0.16 \text{ m (ver fig)}$$

Por lo que cae dentro del tercio medio de la sección transversal y solo habrá esfuerzos de compresión en la base.

b) 2. Magnitud de la resultante

$$Q = \sqrt{F_v^2 + F_H^2} = \sqrt{(43.20)^2 + (14.58)^2} = \sqrt{2078.82} =$$

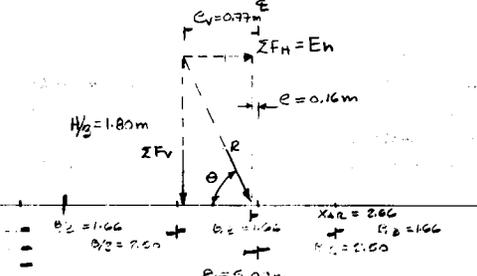
$$R = 45.59 \text{ ton}$$

b) 3. Angulo de la resultante con la horizontal

$$\theta = \text{ang tang} \frac{\Sigma F_v}{\Sigma F_H} = \text{ang tang} \frac{43.20}{14.58} = \text{ang tang} 2.963 =$$

$$\theta = 71^\circ 21'$$

Las fuerzas y sus puntos de aplicación se muestran en la siguiente figura:



c) Diagrama de los esfuerzos bajo la base

$$\text{Aplicando la fórmula de la flexión } f = -\frac{P}{A} \pm \frac{M}{S}$$

en donde:

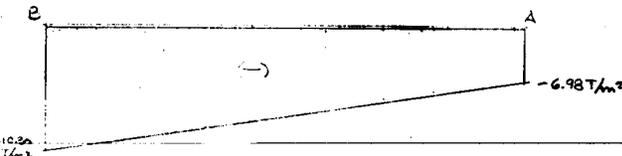
$$M = F_v \times e = 43.20 \times 0.16 = 6.91 \text{ ton-m}$$

sustituyendo valores

$$f = -\frac{43.20}{5.00} \pm \frac{6.91}{4.16} = -8.64 \pm 1.66$$

$$f_A = -6.98 \text{ ton/m}^2 \quad f_B = -10.30 \text{ ton/m}^2$$

el diagrama de esfuerzos queda finalmente como sigue:



EJEMPLO. MUROS DE RETENCIÓN

En este ejemplo se presenta un muro de retención de agua, pero a diferencia del anterior, existen otras fuerzas además del empuje hidrostático actuando sobre él, estas fuerzas son:

- a) La supresión bajo la base del muro y
- b) La producida por materiales azolvados

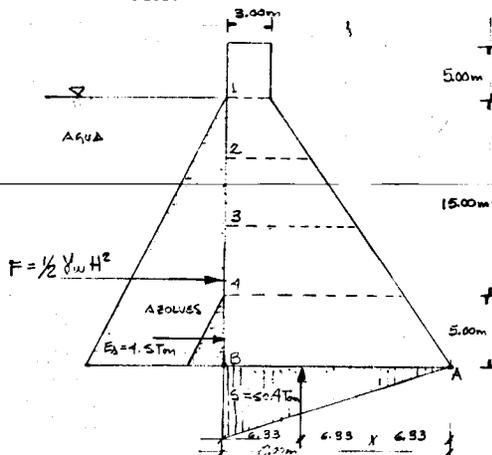
El análisis se hace en la misma forma que en el ejemplo anterior, pero considerando que estas fuerzas adicionales contribuyen al momento de volteo, la fuerza que produce el momento resistente, es el peso propio del muro, el cual se descompone en los pesos de dos volúmenes más sencillos, fáciles de calcular.

El conocer la posición y magnitud de las fuerzas actuantes y resistentes conduce a la obtención de los factores de seguridad que muestran la estabilidad del muro contra volteo y deslizamiento, se comprueba que la aplicación de la resultante está sobre el tercio medio de la base para provocar únicamente esfuerzos de compresión en la base, esfuerzos que resultan ser menores que la capacidad del terreno.

En el cálculo de los esfuerzos en diferentes secciones del muro, se comprueba que los valores alcanzados debidos al empuje hidrostático y el peso propio del muro, a partir del nivel que se analiza, son menores que el esfuerzo permisible para el material ($f_c = 90 \text{ kg/cm}^2$) siendo todos ellos esfuerzos de compresión.

EJEMPLO. CALCULO DE LA ESTABILIDAD DE UN MURO DE RETENCION

DATOS:



$f'_c = 200 \text{ kg/cm}^2$
 $f_c = 0.45 f'_c = 90 \text{ kg/cm}^2$
 $\gamma_c = 2.2 \text{ ton/m}^3$
 $\gamma_w = 1.0 \text{ ton/m}^3$

$\mu_{s.m.} = 0.60$
 suelo - muro
 $\mu_{c.c.} = 0.65$
 concreto - concreto

Nota: El muro está sujeto a una supresión de 50.4 ton y a un empuje del material azolvado además del empuje hidrostático. La capacidad del terreno es de 40 ton/m²

se pide:

- a) Encontrar la posición y magnitud de la resultante y ángulo que forma con la horizontal.
- b) Encontrar los factores de seguridad contra volteo y deslizamiento
- c) Encontrar el esfuerzo en la base
- d) Encontrar los esfuerzos en el muro a cada 5 metros a partir de la base hasta los 20.0 m de altura.

SOLUCION:

Cálculo de la magnitud y posición de las fuerzas actuantes

Peso propio $W_{p.p.} = W_1 + W_2 = (3.0 \times 25.0 \times 2.4) + (16.00 \times 20.0/2)(2.4)$
 $= 180.00 + 384.00 = 564.00 \text{ ton}$

Fuerzas verticales

Carga ton.	brazo m.	Momentos con respecto a A Momento (+) ton-m
$W_1 = 180.00$	17.50 m	- 3150.00
$W_2 = 384.00$	10.66 m	- 4093.44
$S = -50.40$	12.67 m	+ 638.56
$\Sigma F_v = 513.60 \text{ ton}$		- 6604.88 ton-m

$eF_v = \frac{6604.88}{513.60} = 12.86 \text{ m}$ (a la izquierda de A)

Fuerzas horizontales

Carga ton.	brazo m.	Momento con respecto a A Momento (+) ton-m
Empuje hidrostático =		
$F = \gamma_w H^2/2$		
$F = 1.00 \times 20.0^2/2 = 200.0$	6.67	+ 1334.00
Empuje de azolves		
$EA = 4.50$	1.67	+ 7.52
$\Sigma F_H = 204.50$		+ 1341.52 ton-m

$eF_H = \frac{1341.52}{204.50} = 6.56 \text{ m}$ (sobre A)

a) 1. Posición de la resultante de las fuerzas verticales y horizontales

Momento neto = $M_A = -6604.88 + 1341.52 = -5263.36 \text{ ton-m}$

$X_{AR} = \frac{M_n}{F_v} = \frac{5263.36}{513.60} = 10.24 \text{ m}$ (a la izquierda de A)

$\frac{AB}{3} = 6.33 < 10.24 < \frac{2}{3} AB = 12.66$ ∴ la resultante cae en el tercio medio

y la distancia al centroide de la base es

$e = \frac{B}{2} - X_{AR} = \frac{19.00}{2} - 10.24 = -0.74 \text{ m}$ (a la izquierda de $\frac{AB}{2}$)

a) 2. Magnitud de la resultante

$R = \sqrt{F_H^2 + F_V^2} = \sqrt{(204.50)^2 + (513.60)^2} = 552.82 \text{ ton}$

$R = 552.82 \text{ ton}$

a) 3. Angulo de la resultante con la horizontal

$\theta = \text{ang tang } \frac{F_v}{F_H} = \text{ang tang } \frac{513.60}{204.50} = \text{ang tang } 2.511$

$\theta = 68^\circ 17'$

b) 1. Factor de seguridad contra volteamiento

$F.S._{\text{volt}} = \frac{MR}{MA} = \frac{3150.00 + 4093.44}{638.56 + 1341.52} = 3.66 > 2.0$

b) 2. Factor de seguridad contra deslizamiento en la base

$F.S._{\text{des}} = \frac{\mu \Sigma F_v}{F_H} = \frac{0.60 \times 513.60}{204.5} = 1.507 > 1.5$

c) Esfuerzos en la base

Se aplica la fórmula de la flexión $f = -\frac{P}{A} \pm \frac{M}{I}$ y

donde:

$P = F_v = 513.60 \text{ ton}$

$A = 19.00 \times 1.0 = 19.00 \text{ m}^2$

$M = P \times e$; $e = \left(\frac{M_n}{F_v} - B/2 \right) = \left(X_{AR} - B/2 \right) = 0.74 \text{ m}$

$M = 513.60 \times 0.74 = 380.06 \text{ ton-m}$

$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{1.0 \times (19.00)^3}{12} = 571.58 \text{ m}^4$

$y = 9.50 \text{ m}$

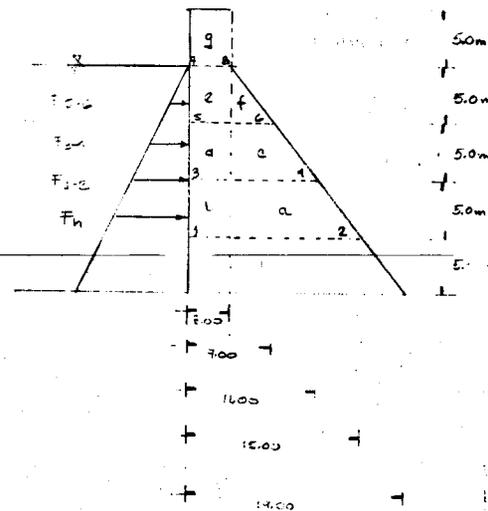
Sustituyendo valores

$f = -\frac{513.60}{19.00} \pm \frac{380.06}{571.58} (9.50) = -27.03 \pm 6.31$

$f_A = -20.72 \text{ ton/m}^2$ $f_B = -33.34 \text{ ton/m}^2$

La distribución de esfuerzos en la base es menor que la capacidad del terreno que es de 40 ton/m^2 , y se muestra en la siguiente figura:

d) Cálculo de la estabilidad en las secciones a 5, 10, 15 y 20 m sobre la base



Secciones que se analizan, con sus correspondientes empujes hidrostáticos, sobre el muro.

1) Diseñar un muro de retención del tipo de gravedad, el cual deberá sostener un relleno de 5.50 m de altura cuya superficie está inclinada un ángulo $\beta = 10^\circ$ sobre la superficie horizontal y sus propiedades son $\phi_R = 32^\circ$ y $\gamma_R = 1.76 \text{ T/m}^3$. El muro será de concreto con $f'_c = 140 \text{ kg/cm}^2$ y estará empotrado 1.20 m en terreno firme con $\phi = 36^\circ$, $\gamma = 1.92 \text{ T/m}^3$ y una capacidad de $q = 29.3 \text{ T/m}^2$.

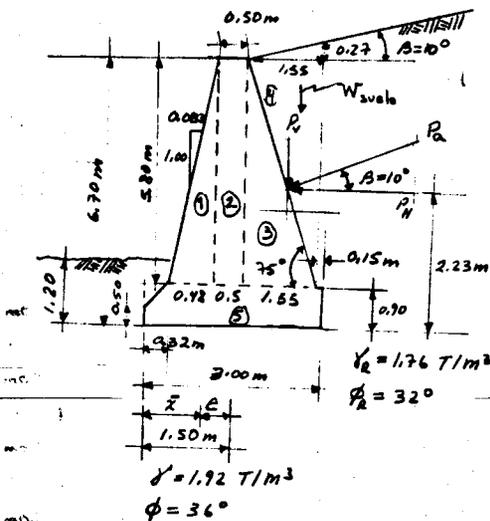
El esfuerzo permisible del concreto a tensión es $f_t = 0.424 \sqrt{f'_c}$

$\therefore f_t = 5 \text{ kg/cm}^2$

Usando la teoría de Rankine

Para $\beta = 10^\circ$ y $\phi_R = 32^\circ$ del Apéndice "B"

$K_a = 0.321$



$P_a = \frac{1}{2} \gamma H^2 K_a = \frac{1}{2} (1.76) (5.97)^2 (0.321)$

$P_a = 13.723 \text{ T/m}$

$P_h = 13.72 \cos 10^\circ = 13.51 \text{ T/m}$

$P_v = 13.72 \sin 10^\circ = 2.38 \text{ T/m}$

$W = (5.80 + 0.27) \left(\frac{1.55}{2}\right) (1.76) = 8.28 \text{ T/m}$

Como todo se multiplica por 1 m de longitud los pesos nos quedan en Toneladas.

Cálculo de la estabilidad del muro

Sección	Peso en (Ton)	Brazo en (m)	Momento en (Ton-m/m)
1	$1/2(5.80)(0.483)(2.4)=3.36$	0.639	2.147
2	$(5.80)(0.50)(2.4)= 6.96$	1.050	7.308
3	$1/2(1.55)(5.80)(2.4)=10.79$	1.817	19.605
4	= 8.28	2.333	19.317
5	$(\text{aprox})(3)(0.9)(2.4)= 6.48$	1.500	9.720
	$P_v = 2.38$	2.490	5.926
	$\Sigma F_v = 38.25$		$\Sigma M = 64.023 \text{ M Resistente}$

Momento de volteo = $13.51 \times 2.23 = 30.127 \text{ T-m}$

Factor de Seg = $\frac{64.023}{30.127} = 2.13 \geq 1.5 \therefore \text{O.K.}$

Con $\beta = 0^\circ$ y $\phi = 36^\circ$, tomando los inversos del Apéndice "B"

$K_p = 3.846$

$+ P_p = 1/2 \gamma H^2 K_p = 1/2 (1.92)(1.20)^2 (3.846) = 5.317 \text{ T/m}$

Fuerza de Fricción

$\mu = \tan \frac{2}{3} \phi = \tan 2/3(36) = 0.445$

$F_R = \Sigma F_v \mu = 38.25(0.445) = 17.02 \text{ Ton}$

$+ F.S. = \frac{17.02 + 5.317}{13.51} = \frac{22.338}{13.51} = 1.65 > 1.5 \text{ O.K.}$

Al deslizamiento

$F_x = \Sigma M + \bar{x} = \frac{64.023 - 30.127}{38.25} = 0.886 < 1.50 \text{ m}$

Obtención de Esfuerzos:

$q = \frac{P}{A} \pm \frac{M}{S}$

$A = BL = 3 \text{ m}^2$

$S = \frac{LB^2}{6} = \frac{(1)(9)}{6} = 1.5 \text{ m}^3$

Para 1 m de ancho tenemos: $e = 1.50 - 0.886 = 0.614$

$$q = \frac{P}{A} \pm \frac{6M}{B^2L} = \frac{P}{A} \pm \frac{6Pe}{BLB} = \frac{P}{A} \left(1 \pm \frac{6e}{B} \right)$$

$$\rightarrow q_{\max} = \frac{38.25}{3} \left(1 + \frac{6(0.614)}{3} \right) = 28.407 \text{ T/m}^2 < q_{\text{permisible}}$$

$$q_{\min} = \frac{38.25}{3} \left(1 - \frac{6(0.614)}{3} \right) = -2.907^* \text{ T/m}^2$$

* Existe tensión porque la carga no está aplicada en el tercio medio.

$$-2.907 \text{ T/m}^2 = -0.29 \text{ kg/cm}^2 < 5 \text{ kg/cm}^2 \text{ (Esfuerzo del concreto a tensión)}$$

Veremos los esfuerzos en el volado:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{1/2 \text{ kg}} = \frac{0 - 29.78}{2.658 - 0}$$

$$m = -10.82$$

$$y = mx + b = q = -10.82x + 10.82$$

$$EI_y^{IV} = q = 10.82 - 10.82x$$

$$EI_y^{III} = V = 10.82x - \frac{10.82x^2}{2}$$

$$EI_y^{II} = M = \frac{10.82x^2}{2} - \frac{10.82x^3}{6}$$

$$M = 5.41x^2 - 1.803x^3$$

para $x = 0.317 \text{ m}$

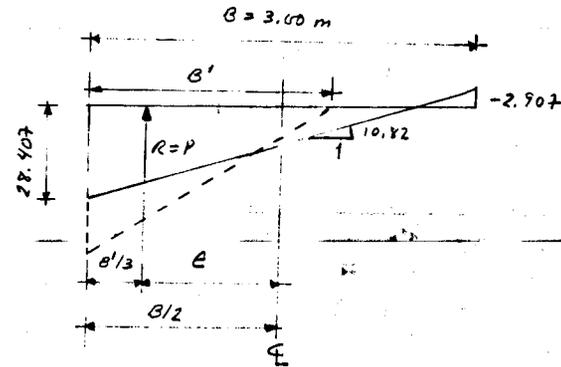
$$M = 5.41(0.317)^2 - 1.803(0.317)^3 = 0.4862 \text{ T-m}$$

y calculando el esfuerzo

$$f = \frac{6M}{B^2L} = \frac{6(0.4862)}{(2.658)^2(1)} = 0.4129 \text{ T/m}^2 = 0.04 \text{ Kg/cm}^2 < 5 \text{ kg/cm}^2$$

O.K.

q_{max} = 28.78



$$\frac{B'}{3} = B/2 - e$$

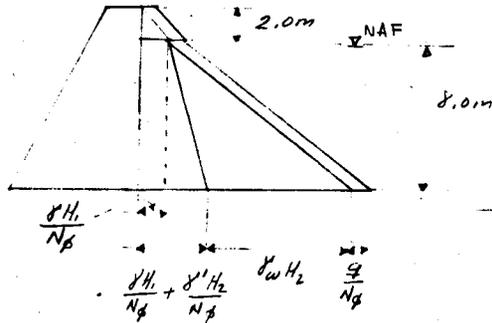
$$B' = 3(B/2 - e)$$

$$B' = 3(1.5 - 0.614) = 2.658 \text{ m}$$

$$R = P = \frac{q_{\max} L B'}{2}$$

$$q_{\max} = \frac{2P}{B'L} = \frac{2(38.25)}{(2.658)(1.0)} = 28.78 \text{ T/m}^2$$

$$\therefore q_{\max} = 28.78 < 29.3 \quad \text{O.K.}$$



$$\sigma_2 = \gamma H_1 K_A + \gamma H_2 K_A + \gamma_w H_2 + q K_A \quad \text{pero} \quad \sigma_1 = \gamma H_1 K_A + q K_A$$

$$\sigma_2 = \sigma_1 + \gamma H_2 K_A + \gamma_w H_2$$

$$\sigma_2 = 1.533 + (0.6)(8)(0.2948) + (1)(8)$$

$$\sigma_2 = 10.948 \text{ ton/m}^2$$

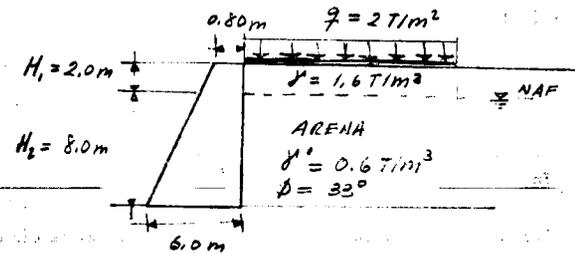
b.- Cálculo del empuje

$$E_A = \frac{1}{2} \frac{\gamma H_1^2}{N\phi} + \frac{\gamma H_1 H_2}{N\phi} + \frac{\gamma H_2^2}{2N\phi} + \frac{1}{2} \gamma_w H_2^2 + \frac{qH}{N\phi}$$

$$\text{como } \frac{1}{N\phi} = K_A = 0.2948 \quad \text{+ tenemos que } N\phi = 3.392$$

$$E_A = \frac{1}{2} \frac{(1.6)(2)^2}{3.392} + \frac{(1.6)(2)(8)}{3.392} + \frac{(0.6)(8)^2}{2(3.392)} + \frac{1}{2} (1)(8)^2 + \frac{2(10)}{3.392}$$

$$\therefore E_A = 52.047 \text{ ton/m}$$



II) Para el muro mostrado en la figura:

- Calcular la distribución de presiones, según Rankine, suponiendo un estado activo.
- Calcular el empuje.

a.- Cálculo de σ_1 y σ_2

A las profundidades de 2 y 10 m respectivamente

$$\sigma = \frac{\gamma H}{N\phi} = K_A \gamma H$$

$$\frac{1}{N\phi} = K_A = \tan^2 (45 - \phi/2)$$

$$K_A = \tan^2 (45 - 33/2) = 0.2948$$

$$\sigma_1 = (0.2948)(1.6)(2.0) = 0.9434$$

El esfuerzo debido a la sobrecarga es:

$$\sigma_p = q K_A = (2.0)(0.2948) = 0.5896$$

$$\therefore \sigma_1 = 0.9434 + 0.5896 = 1.533 \text{ ton/m}^2$$

REFERENCIAS

1. S.P. Timoshenko y James M. Gere, *Mecánica de Materiales*, Uteha 1974.
2. Egor P. Popov., *Introduction to Mechanics of Solids*, Prentice Hall, 1968
3. Ferdinand L.B. Singer, *Resistencia de Materiales*, Harper and Row Latino Americano, 1971
4. John N. Cernica, *Resistencia de Materiales*, C.E.C.S.A., 1974
5. Oscar M. González Cuevas, Francisco Robles F.V., Juan Casillas G. de L., Roger Díaz de Cossío, *Aspectos Fundamentales del Concreto Reforzado*, Limusa, 1974
6. Eulalio Juárez, Alfonso Rico Rodríguez, *Mecánica de Suelos*, Limusa, 1973
7. Jesús Alberro, Abraham Ellstein, *Normas para el Diseño de Pequeños Muros de Retención*, Revista Ingeniería, Julio 1969
8. Joseph E. Bowles, *Foundation Analysis and Design* Mc Graw-Hill, 1968

APENDICE "A"

METODO DE CULMANN

El método consiste en lo siguiente: por el punto A, de la base del muro trácense dos líneas, la " ϕ " y la " θ "; la primera a un ángulo ϕ con la horizontal y la segunda a un ángulo θ con la anterior. El ángulo θ y su método de obtención son los mostrados en la figura mencionada.

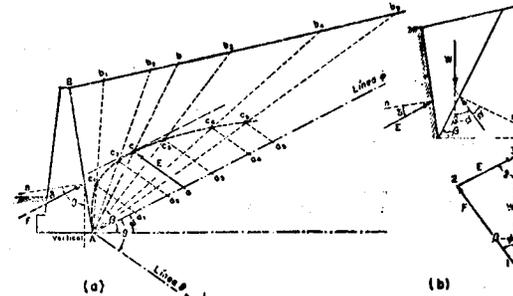


FIG. A-1. Método gráfico de Culmann

A continuación, escójense diferentes planos hipotéticos de deslizamiento, $Ab_1, Ab_2...$ etc. El peso de estas cuñas de deslizamiento podrá calcularse multiplicando su área por el peso específico, γ , de la arena que constituye el relleno (recuérdese que se considera una dimensión unitaria en la dirección normal al plano del papel). A una escala de fuerzas conveniente, estos pesos podrán llevarse, a partir de A sobre la "línea ϕ "; así se obtienen los puntos a_1, a_2, \dots etc.

Por estos últimos puntos trácense ahora paralelas a la "línea θ ", hasta cortar en los puntos c_1, c_2, \dots etc. a los respectivos planos de falla de las cuñas. Los segmentos a_1c_1, a_2c_2, \dots etc. representan, a la escala de fuerzas antes usada, los empujes que produce cada una de las cuñas arbitrariamente escogidas. En efecto, en la sección b) de la fig A-1 aparece un triángulo de fuerzas correspondiente a una cualquiera de las cuñas deslizantes escogidas. El empuje E y el peso W forman el ángulo θ , puesto que éste es, por definición, el ángulo formado por E y la vertical. Entre

en un punto en que puede considerarse aplicado el empuje E. (fig A-3a.

Si hay sobrecarga, a la fuerza anterior se añadirá, para fines de diseño, otra, E, calculada restando E' - E, obtenidos como se indica en la fig A-3, y aplicada en el tercio superior del segmento ff', en el que f es la intersección de una paralela a la "línea ϕ ", trazada por q, con el respaldo del muro y f' es la intersección con el mismo plano de una paralela a la superficie crítica de deslizamiento, trazada también por q. (fig A-3b.

El método de Culmann puede emplearse para el cálculo del empuje pasivo ejercido contra un relleno arenoso. El procedimiento y su demostración son idénticos, con la diferencia de que la "línea ϕ " debe ahora dibujarse formando ese ángulo con la horizontal, pero hacia abajo.

APENDICE "B"

TEORIA DE RANKINE.

Fórmula general para obtener K_A

Siendo β : el ángulo del relleno con la horizontal.

$$K_A = \cos \beta \frac{\cos \beta - \sqrt{\cos^2 \beta - \cos^2 \phi}}{\cos \beta + \sqrt{\cos^2 \beta - \cos^2 \phi}} \quad (1)$$

Ahora si $\beta = 0 \rightarrow \cos \beta = 1$

$$\rightarrow K_A = (1) \frac{(1) - \sqrt{1 - \cos^2 \phi}}{(1) + \sqrt{1 - \cos^2 \phi}} ; \quad K_A = \frac{1 - \sqrt{1 - \cos^2 \phi}}{1 + \sqrt{1 - \cos^2 \phi}}$$

Y como $\text{sen}^2 \phi + \cos^2 \phi = 1$

$$\rightarrow 1 - \cos^2 \phi = \text{sen}^2 \phi$$

$$\therefore K_A = \frac{1 - \text{sen} \phi}{1 + \text{sen} \phi} \quad (2)$$

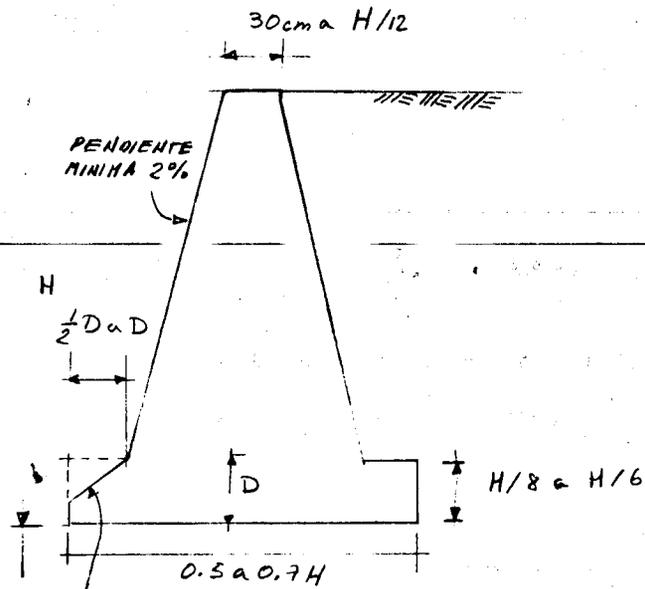
Concluimos que la fórmula No. 2 es un caso particular de la No. 1.

Cuando $\beta = 0^\circ$

TABLA PARA ENCONTRAR K_A CON LA FORMULA No. 1

$\beta^\circ =$	$\phi^\circ = 26$	28	30	32	34	36	38
0	0.390	0.361	0.333	0.307	0.283	0.260	0.238
5	0.396	0.366	0.337	0.311	0.286	0.262	0.240
10	0.413	0.380	0.350	0.321	0.294	0.270	0.246
15	0.448	0.409	0.373	0.341	0.311	0.283	0.258
20	0.515	0.460	0.414	0.374	0.338	0.306	0.277
25	0.700	0.573	0.494	0.434	0.385	0.343	0.307
30			0.866	0.574	0.478	0.411	0.358

NOTA: El $K_p = 1/K_A$. Los valores de K_p pueden obtenerse invirtiendo los valores de K_A .



El pie del muro puede tener pendiente.

Fig B-1 Medidas tentativas para un muro de gravedad.

Ver ref 8.

0-
1-
2-
3-

APUNTE
144

FACULTAD DE INGENIERIA UNAM.



610791

G.- 610791

FACULTAD DE INGENIERIA

en marzo de 1995

en el taller de imprenta del
Departamento de Publicaciones
de la Facultad de Ingeniería,
Ciudad Universitaria, México, D.F.,
C.P. 04510

Secretaría de Servicios Académicos

El tiraje consta de 1,000 ejemplares
más sobrantes de reposición.

